# 表示理论

Zero

## 前言

课程主页. Pierre 的书讲前面两部分，曹锡华的书用一用. 课程分为三部分，有限群表示、局部紧群、最简单的非紧非 Abel 群 $SL_2(\mathbb{R})$（它有良好的性质，可以推广到非单李群）.

一些结论：

有限群/紧群的复表示是酉表示，实表示是正交表示.

$(\rho, V)$ 是酉表示，即 $V$ 上存在内积 $\langle\ ,\ \rangle$ 使得 $\langle \rho_g v_1, \rho_g v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle, \forall g \in G, v_1, v_2 \in V$.

$(\rho, V)$ 是正交表示，即 $V$ 上存在内积 $\langle\ ,\ \rangle$ 使得 $\langle \rho_g v_1, \rho_g v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle, \forall g \in G, v_1, v_2 \in V$.

# 1 有限群表示

有两种语言：线性代数和模，这里用前者. 群 $G$，域 $F$ 上的线性空间 $V$，考虑域 $F$ 的特征，0 或素数 $p$. 特征 $p$ 时 $G$ 的阶整除 $p$，这时是模表示，不考虑. 这里只考虑特征 0 的域，由于复数域 $\mathbb{C}$ 性质好（方程总有解）这里就考虑复数域.

## 1.1 表示的定义

A linear representation of $G$ in $V$： $\rho\colon G \to GL(V)$,i.e.

$$\rho_{st} = \rho_s \cdot \rho_t, \forall s, t \in G$$

$\forall s \in G, v \in V.$

$\rho_s v, \rho(s)v, sv$ 记号等同.

## 1.2 $Hom_G(V, V')$ 的定义

two rep of G $(\rho, V), (\rho', V')$,def:

$$Hom_G(V, V') = \{f \in Hom(V, V') | \forall g \in G, v \in V, \rho'_g(fv) = f(\rho_g v), \text{i.e.} fg = gf\}$$

（上式中两个 $g$ 虽然都是群 $G$ 中的同一个元素，但代表的含义不一样）. 亦即有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_g} & & \downarrow{\scriptstyle \rho'_g} \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

$Hom_G(V, V')$ 也叫 $G$-map, or interwing operator.

## 1.3 两个表示等价

two rep of G $(\rho, V), (\rho', V')$ are equivalent or isomorphic or similar if exists a linear rep $f \in Hom_G(V, V')$(1.2), denote $\rho \simeq \rho'$ or $(\rho, v) \simeq (\rho', V')$ or $V \simeq V'$

## 1.4 例：平凡表示

## 1.5 例：正则表示

group $G$, vector space $V$ over $\mathbb{C}$. $|G| = dim_{\mathbb{C}} V = n$. Let $\mathcal{B} = \{e_g | g \in G\}$ be a base of $V$, define the mapping $\rho$ by $\rho_g e_s = e_{gs}, \forall g, s \in G$. Say the $(\rho, V)$ is a regular rep.

只需验证 $\rho$ 是群 $G$ 到 $GL(V)$ 的同态：任取 $g, h \in G, v = \sum\limits_{s \in G} \alpha_s e_s, e_s \in \mathcal{B}$,

$$\rho_{gh} v = \rho_{gh} \sum_{s \in G} \alpha_s e_s = \sum_{s \in G} \alpha_s \rho_{gh} e_s = \sum_{s \in G} \alpha_s e_{ghs} =$$
$$\sum_{s \in G} \alpha_s \rho_g e_{hs} = \sum_{s \in G} \alpha_s \rho_g \rho_h e_s = \rho_g \rho_h \sum_{s \in G} \alpha_s e_s = \rho_g \rho_h v$$

i.e. $\rho_{gh} = \rho_g \rho_h$

## 1.6 子表示

$(\rho, V)$ is a rep, if subspace $W$ is stable under the action of G, i.e. $\forall w \in W, \forall g \in G, \rho_g w \in W$, then $(\rho^W, W)$ is the subrep of $(\rho, V)$.

不变子空间才能叫子表示.

一个表示是一个群 $G$ 到线性映射群 $GL(V)$ 的同态，也就是说一个表示意味着 $|G|$ 个 $V$ 到 $V$ 的线性变换或者说这么多个矩阵（如果是单同态的话），如果子空间 $W$ 使得这 $|G|$ 个线性变换都让 $W$ 不变，那这 $|G|$ 个线性变换就都可以限制到 $W$ 上，成为 $|G|$ 个新的 $W$ 到 $W$ 的线性变换，这样人为地把 $G$ 和 $GL(W)$ 对应起来，成为子表示.

## 1.7 定理：不变子空间一定有不变补空间

子表示一定有补表示.

$(\rho, V)$ is a rep, $W$ is a subspace of $V$ stable under G, then there exists a complement $W^0$ of $W$ in $V$ stable under $G$.

思路：一对补空间意味着一个 projection 投影（其实有一个空间和它的子空间就可以了），一个 projection $p$ 也唯一对应一对补空间，分别是，$Img(p), Ker(p)$. projection 的定义见下面证明的第一句. 证明是从空间对应到投影，投影进行加和取平均的技巧后再对应回空间.

Pf: Let $V = W \oplus W', p \in End(V)$, s.t. $pV \subseteq W, p|_W = 1$ (p is a projection). （这里 1 是指 $End(W)$ 中的恒等变换.）

$$p^\circ = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\rho_t p \rho_t^{-1}$$

Check $p^0$ is a projection.

1.

$$p^0 \in End(V)$$

2.

$$\forall v \in V, p^0 v = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\rho_t p \rho_t^{-1} v$$

we have $v \in V, \rho_t^{-1}v \in V, pV \subseteq W, p\rho_t^{-1}v \in W, \rho_t W \subseteq W$(because $W$ is stable under $G$, $t \in G$). Then $p^0 V \subseteq W$.

3.

$$\forall x \in W, p^0 x = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\rho_t p \rho_t^{-1} x$$

We have $x \in W, \rho_t^{-1}x \in W$(because $W$ is stable under $G$), $p\rho_t^{-1}x = \rho_t^{-1}x$(because $p|_W = 1$), $\rho_t p \rho_t^{-1} x = \rho_t\rho_t^{-1}x = x, p^0 x = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{t\in G} x = x$, Then $p^0|_W = 1$.

Now $p^0$ is a projection.

Then $Ker(p^0)$ is the complement of $W$ in $V$, need to prove $W^0 = Ker(p^0)$ is stable under $G$.

$\forall g \in G$, we have:

$$\begin{aligned}\rho_g p^0 \rho_g^{-1} &= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\rho_g\rho_t p \rho_t^{-1}\rho_g^{-1}\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\rho_{gt} p \rho_{gt}^{-1}\\ &= p^0\end{aligned}$$

i.e. $\rho_g p^0 = p^0 \rho_g, \forall g \in G$. Thus $\forall v \in Ker(p^0), \forall g \in G, p^0(\rho_g v) = \rho_g(p^0 v) = \rho_g 0 = 0$, we claimed $\rho_g v \in Ker(p^0)$, i.e., $W^0 = Ker(p^0)$ is stable under G.

定理证毕. 用正交补空间可得另一证明.

### 直和的分类

**我的笔记:** 直积 (Direct Product)/笛卡尔积 (Cartesian Product): 两个集合的有序对, 集合不一定要有代数结构. 如果集合有代数结构, 比如有线性结构（如向量空间）, 则往往会默认笛卡尔积也有线性结构, 但如果无限个向量空间做笛卡尔积, 则笛卡尔积中有可能有一些元素, 这些元素中有无限个非零的坐标.
直和 (Direct Sum): 有线性结构的集合才能定义直和. 两个向量空间 $V$ 和 $W$, 都在同一个域 $\mathbb{F}$ 上.（向量空间就是一个集合, 加法数乘两个运算, 八条公理.）用 $V \oplus W$ 表示这两个向量空间的直和, 还是一个向量空间. 集合 $V \oplus W$ 是集合 $V$ 和集合 $W$ 的笛卡尔积, 加法和数乘定义为

$$\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w),$$

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w').$$

如果无限个向量空间做直和, 则每一个直和中的元素都只有有限个非零的坐标（为什么?）.
关于直和的维数, 就是简单的维数公式, $dim(W_1 \oplus W_2) = dimW_1 + dimW_2$, 直和分解才要求交空间只有零, 一个空间的两个子空间的直和是有任意可能的, 比如 3 维向量空间的两个 2 维子空间做直和是 4 维向量空间, 能和直和同构上的直和才能叫直和分解. 所谓直和分解, 只要都是子空间, 维数加得上就行了.
两个空间的和: 两个空间中元素的和形成的空间（前提是能加, 能加并不要求维数相同, 维数表征的是自由变量, 只要变量总数一样就能相加了）.
内直和: 也叫直和, 直和分解唯一的和（任意两个空间的交只有零元素）. 因为是和, 所以也要求能加, 一般都是一个空间的两个子空间有内直和.
外直和: 任意两个空间都能做外直和, 形式上的加法, 其实就是笛卡尔积啦. 如果两个空间还能做内直和, 那内直和与外直和同构（一回事）. 实际上这个名词并不怎么用.
直和问题还需要再学习高等代数.

## 1.8 酉表示

space $V$, inner product $(\quad,\quad)$, rep $(\rho, V)$ of $G$, $\rho$ unitary if $(\rho_g v, \rho_g w) = (v, w)$ for any $g \in G, v, w \in V$

如果在随便一个内积 $(\quad,\quad)$ 下并不满足酉表示的条件，我们也总能据此定义出一个满足酉表示的内积：已知群 $G$，表示 $(\pi, V)$，内积 $(\quad,\quad)$，我们定义 $\langle\quad,\quad\rangle$:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\pi_g u, \pi_g v),$$

显然

$$\begin{aligned}\langle \pi_s u, \pi_s v\rangle =& \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\pi_s(\pi_g u), \pi_s(\pi_g v))\\ =& \frac{1}{|G|}\sum_{sg\in G}(\pi_{sg} u), \pi_{sg} v)) = \langle u, v\rangle\end{aligned}$$

$\pi_h$ 是 unitary operator，诱导出 unitary matrix $\pi_h \rightsquigarrow U_n(\mathbb{C})$.

> **我的笔记:** $\overline{P^T}P := P^*P = I$, then $P$ 是酉矩阵.（$P^*$ 表示把它转置后每个元素取其共轭复数.）

## 1.9 表示的直和

就是线性空间的稳定子空间的直和，稳定是指在群 $G$ 的同态像 $GL(V)$ 中元素的作用下稳定.

同一个群的两个表示的直和还是这个群的表示：two rep of $G$: $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$, $\rho_1\oplus\rho_2\colon G \to GL(V_1\oplus V_2)$, by viewing $G$ as the diagonal subgroup of $G\times G$. 这句话是维基百科上的，我还不理解. 这里的直和（1.7）只是形式加法笛卡尔积而已，因为 $V_1, V_2$ 不一定能相加.

具体地说就是：

$$V_1 \oplus V_2 = \{(v_1, v_2)|v_i \in V_i\}$$

$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)_g(v_1, v_2) = ((\rho_1)_g v_1, (\rho_2)_g v_2)$$

验证它是一个表示 (1.1)，$\forall (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2, \forall g, h \in G$，有：

$$\begin{aligned}(\rho_1 \oplus \rho_2)_g (\rho_1 \oplus \rho_2)_h (v_1, v_2) &= (\rho_1 \oplus \rho_2)_g ((\rho_1)_h v_1, (\rho_2)_h v_2) \\ &= ((\rho_1)_g ((\rho_1)_h v_1), (\rho_2)_g (\rho_2)_h v_2)) \\ &= ((\rho_1)_{gh} v_1, (\rho_2)_{gh} v_2) \\ &= (\rho_1 \oplus \rho_2)_{gh} (v_1, v_2)\end{aligned}$$

**我的笔记:** 不同的群的表示的直和是这两个群的笛卡尔积的线性表示：$(\rho_1, V_1)$ is a rep of $G_1$, $(\rho_2, V_2)$ is a rep of $G_2$. 直和定义为：

$$\forall s_1 \in G_1, s_2 \in G_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 :$$

$$\begin{cases} \rho_1 \oplus \rho_2 \colon G_1 \times G_2 \to GL(V_1 \oplus V_2) \\ (\rho_1 \oplus \rho_2)_{(s_1, s_2)} (v_1, v_2) := {\rho_1}_{s_1} v_1 \oplus {\rho_2}_{s_2} v_2 \end{cases}$$

## 1.10 不可约表示

$(\rho, V)$ is irreducible: $V \neq 0$, $V$ have no subspace stable under $G$ except $0, V$.

不可约表示就是没有真子表示的表示.

对任意一个子空间 $W$，都存在一个群中元素 $g_0$ 和子空间中的一个向量 $w_0$，使得 $\rho_{g_0} w_0 \notin W$.

因为 1 维空间没有真子空间，所以所有的 1 级表示都是不可约的.

## 1.11 定理：每一个表示都是不可约表示的直和

We proceed by induction on $dim(V)$. 使用定理 (1.7).

## 1.12 两个表示的张量积

Recall: $V_1, V_2, V$, vector spaces, denote

$$\begin{aligned} f \colon V_1 \times V_2 &\to V \\ (v_1, v_2) &\to f(v_1, v_2) := v_1 \otimes v_2 \end{aligned}$$

called the tensor product, if satisfies:

① $x_1 \otimes x_2$ is linear in each of the variables $x_1$ and $x_2$. 也就是如下三条:

$\lambda(v_1 \otimes v_2) = \lambda v_1 \otimes v_2 = v_1 \otimes \lambda v_2$
$(v_1 + v_1') \otimes v_2 = v_1 \otimes v_2 + v_1' \otimes v_2$
$v_1 \otimes (v_2 + v_2') = v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes v_2'$

② if $\{e_i^1\}_{i=1}^n$ is a basis of $V_1$ and $\{e_j^2\}_{j=1}^m$ is a basis of $V_2$, then $\{e_i^1 \otimes e_j^2 | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ is a basis of $V$.

这样的空间是存在且同构意义下唯一的（作业）.

**我的笔记:**
多重线性代数，工具是张量积，在微分几何、群表示论、量子力学中有重要应用.
线性映射：空间到空间的线性映射. $\mathbf{A}\colon V \to V'$，满足:

$$\mathbf{A}(\alpha+\beta) = \mathbf{A}(\alpha) + \mathbf{A}(\beta) \qquad \forall \alpha, \beta \in V,$$
$$\mathbf{A}(k\alpha) = k(\mathbf{A}(\alpha)) \qquad \forall \alpha \in V, k \in F.$$

多重线性映射：多个空间的笛卡尔积到空间的线性映射. $\mathbf{A}\colon V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \to W$，满足：$\forall \alpha_i, \beta_i \in V, i = 1, 2, ..., r, \forall k \in F,$

$$\mathbf{A}(\alpha_1, ..., \alpha_i + \beta_i, ..., \alpha_r) = \mathbf{A}(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_r) + \mathbf{A}(\alpha_1, ..., \beta_i, ..., \alpha_r)$$
$$\mathbf{A}(\alpha_1, ..., k\alpha_i, ..., \alpha_r) = k(\mathbf{A}(\alpha_1, ...\alpha_i, ..., \alpha_r)).$$

有待高等代数中再学习再补充.

## 1.13 表示的特征标

$(\rho, V), G, \rho_g \in GL(V)$, a basis $(e_1, ..., e_n)$ of $V$. $\rho_g(e_1, ..., e_n) = (e_1, ..., e_n)A$, $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $tr\rho_g := trA$. Denote $\chi$:

$$\chi_\rho\colon G \to \mathbb{C}$$
$$g \mapsto tr\rho_g$$

给定 $G$ 的一个表示 $(\rho, V)$，就有一个函数 $\chi_\rho$，它的定义域是群 $G$，值域是复数域 $\mathbb{C}$，这个函数叫表示 $\rho$ 的特征标.

## 1.14 特征标的 5 条性质

$(\rho, V), (\pi, U)$ of $G, dim_{\mathbb{C}}V = n, dim_{\mathbb{C}}U = m$.

① $\chi_\rho(1) = tr\rho_1 = trI_n = dim_{\mathbb{C}}V = n$.

② $\chi_\rho(s^{-1}) = \overline{\chi_\rho(s)}$

Pf. $\forall s \in G, |G| = m, s^m = 1, (\rho_s)^m = \rho_{s^m} = 1$. Let $\lambda_i$ be a eigenvalue of $\rho_s$, then $\lambda_i^m = 1$. $|\lambda_i| = 1, \lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. $\chi_\rho(s^{-1}) = tr\rho_{s^{-1}} = tr\rho_s^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} = \overline{tr\rho_s} = \overline{\chi_\rho(s)}$.

> **我的笔记:** If $\mathbf{A}$ has eigenpair $(\lambda, v)$, then $\mathbf{A}^k$ has eigenpair $(\lambda^k, v)$.
> Pf.
> $$\mathbf{A}^k v = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A}v = \mathbf{A}^{k-1}\lambda v = ... = \lambda^k v.$$

③ $\chi_\rho(t^{-1}st) = \chi_\rho(s), \forall s, t \in G$.

Pf. $\chi_\rho(st) = tr\rho_{st} = tr\rho_s\rho_t = tr\rho_t\rho_s = tr\rho_{ts} = \chi_\rho(ts)$. $(tr\mathbf{AB} = \mathbf{BA})$

④ $\chi_{\rho\oplus\pi}(s) = \chi_\rho(s) + \chi_\pi(s)$.(1.9)

> **我的笔记:** （等号左边是 $n+m$ 维矩阵的 Trace，右边是 $n$ 维矩阵的 Trace 加上 $m$ 维矩阵的 Trace.）是这样么？还要再推敲.

⑤ $\chi_{\rho\otimes\pi}(s) = \chi_\rho(s)\chi_\pi(s)$.(1.12)

Pf.

## 1.15 ♠ Schur 引理

同一个群的两个不同构的不可约表示之间（两个向量空间之间）只有零变换满足 $G$-map；群的一个不可约表示的向量空间，自己到自己只有数乘变换满足 $G$-map.

$(\rho^1, V_1), (\rho^2, V_2)$ are two irr reps of $G$, let $f \in Hom_G(V_1, V_2)$(1.2), then

1. $f = 0$ if $\rho^1 \not\simeq \rho^2$.

2. $f = \lambda 1_{V_1}$ if $\rho^1 \simeq \rho^2$. $\lambda 1_{V_1}$ 是 $V_1$ 上的数乘变换，此时，$V_1 = V_2, \rho^1 = \rho^2$.

i.e.,

$$dim_{\mathbb{C}}Hom_G(V_1, V_2) = \begin{cases} 0, \rho^1 \not\simeq \rho^2 \\ 1, \rho^1 \simeq \rho^2 \end{cases}$$

Pf. 1.Suppose $f \neq 0$. Then $Ker(f), Img(f)$ are stable under $G$, i.e. invariant subspace.($\forall x \in Ker(f), f(\rho_s^1 x) = \rho_s^1 f(x) = \rho_s^1 0 = 0$, i.e., $\rho_s^1 x \in Ker(f), \forall s \in G$, $Ker(f)$ stable; $\forall x \in Img(f), \exists x_0, x = f(x_0), \rho_s^2 x = \rho_s^2 f(x_0) = f(\rho_s^2 x_0)$, i.e., $\rho_s^2 x \in Img(f), \forall s \in G$, $Img(f)$ stable.)

Since $(\rho^1, V_1)$ irr, $Ker(f) = V_1$ or 0. If $Ker(f) = V_1$, $f = 0$, so $Ker(f) = 0$. Similarly, $Img(f) = V_2$.

Hence $f$ is bijective, $\rho^1 \simeq \rho^2$, confliction.

2. 待补充

## 1.16 推论 1：定义的 $h^0$

irr $(\rho^1, V_1), (\rho^2, V_2), G$, $h \in Hom(V_1, V_2)$, put

$$h^0 = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}(\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1,$$

then ① if $\rho^1 \not\simeq \rho^2$, then $h^0 = 0$; ② if $\rho^1 = \rho^2, V_1 = V_2$, then $h^0 = \frac{1}{dim V_1} trh$

Pf. 待补充 3.7 10:54:19 手指照片左上角

## 1.17 定义一个以 $G \to \mathbb{C}$ 为元素的带内积的向量空间

$$L(G) = \{f : G \to \mathbb{C}, \text{all these functions}\}$$
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} f(t^{-1})g(t), f, g \in L(G),$$

then $(L(G), \langle\ \ ,\ \ \rangle)$ is a vector space with inner product.

> **我的笔记:** 这里当 $f$ 是特征标时，根据特征标的性质1.14的第②条，我们就常常写作
>
> $$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\overline{f(t)}g(t),$$
>
> 而且特征标性质1.14中的①和②对类函数也是成立的（这一点的证明应该是用到了特征标可以张成整个类函数空间，见1.25），因此对于类函数（不仅仅是特征标），这个式子都成立. 下面用的时候就几乎都直接用这个式子，不过原始的定义还是要知道，后面诱导表示那里 (1.37) 用的是原始定义，尽管那里其实也是类函数其实这两个式子等价，但原始的定义在那里就方便一些.

**我的笔记:** 关于内积. 域 $F(\mathbb{C}$ or $\mathbb{R})$ 上的向量空间 $V$，内积定义为一个映射 $\langle\ ,\ \rangle\colon V\times V\to F$，满足:
① 共轭对称 $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$
② 对第一个参数线性 $\langle ax,y\rangle=a\langle x,y\rangle,\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.
③ 正定性 $\langle x,x\rangle\geq 0$，等号成立当且仅当 $x=0$.

**我的笔记:** 不可约表示的特征标 $\subset$ 特征标 $\subset$ 类函数 $\subset$ 群到复数域上的函数

## 1.18 $L(G)$ 中元素的例子，从 $\rho_g$ 定义一些 $\rho_{ij}$

特征标 $\chi_\rho$ 就是 $G$ 到 $\mathbb{C}$ 的函数 (1.13)，因此是 $L(G)$ 中的元素.

$\rho_g$ 作为 $V$ 上的线性变换，可以看成是一个矩阵：$\rho_g=(\rho_{ij}(g))$，于是定义:

$$\begin{aligned}\rho_{ij}\colon G&\to\mathbb{C}\\ g&\mapsto\rho_{ij}(g)\end{aligned}$$

也都是 $L(G)$ 中的元素.

## 1.19 定理：关于（上述）$L(G)$ 中部分元素做内积

two irr reps $\varphi,\rho$, non-isomorphism, 按上面把线性变换看作是矩阵:

$$\begin{aligned}\varphi\colon G&\to U_n(\mathbb{C}) & \rho\colon G&\to U_m(\mathbb{C})\\ g&\mapsto(\varphi_{ij}(g)) & g&\mapsto(\rho_{ij}(g))\end{aligned}$$

$U_n(\mathbb{C})$ 是酉矩阵 (取好基后，按1.8定义好向量空间 $V$ 上的内积即可), 每个 $\varphi_{ij},\rho_{ij}$ 都是1.17中定义的函数 (1.18). Then

① $\langle\varphi_{ij},\rho_{kl}\rangle=0,\forall i,j,k,l$

② $\langle\varphi_{ij},\varphi_{kl}\rangle=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{if } i=k, j=l;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$

这里的 $\langle\ ,\ \rangle$ 是1.17中定义的函数空间 $L(G)$ 上的内积.

Pf. 定理的证明中需要用到下面两个很简单的引理.

### 关于矩阵乘法的一个相当初级的引理

$A \in M_{rm}(\mathbb{C}), B \in M_{ns}(\mathbb{C}), E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$, where $E_{ki}$ is the $m \times n$ matrix with 1 in position $(k,i)$ and 0 elsewhere. Then $(AE_{ki}B)_{lj} = (A)_{lk}(B)_{ij}$, 其中 $(AE_{ki}B)_{lj}$ 表示 $r \times s$ 阶矩阵 $AE_{ki}B$ 的第 $l$ 行第 $j$ 列的元素，$(A)_{lk}$ 表示 $r \times m$ 阶矩阵 $A$ 的第 $l$ 行第 $k$ 列的元素，$(B)_{ij}$ 表示 $n \times s$ 阶矩阵 $B$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素.

### 又一个引理

Let $\varphi \colon G \to U_n(\mathbb{C})$ and $\rho \colon G \to U_m(\mathbb{C})$ be unitary reps. Let $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$, and $A^{\#} = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g \in G} \rho_g^{-1} A \varphi_g$. Then $A^{\#}_{lj} = \langle \rho_{kl}, \varphi_{ij} \rangle$.

Pf. $\rho_g^{-1} A \varphi_g$ 都是 $m \times n$ 的矩阵，因此

$$
\begin{aligned}
A^{\#}_{lj} &= (\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho_g^{-1} A \varphi_g)_{lj} = (\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho_g^{-1} E_{ki} \varphi_g)_{lj} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} (\rho_g^{-1} E_{ki} \varphi_g)_{lj} \\
&\xlongequal{\text{上一个引理}1.19} \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho_{lk}(g^{-1}) \varphi_{ij}(g) \\
&\xlongequal{\text{有限群，单位根}} \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \overline{\rho_{lk}(g)} \varphi_{ij}(g) \\
&\xlongequal{1.17} \langle \rho_{lk}, \varphi_{ij} \rangle
\end{aligned}
$$

### ♠ 定理1.19的证明

Pf. ① If $\varphi \not\sim \rho$, then $A^{\#} = 0$($A^{\#}$ 的定义在1.19), then $A^{\#}_{ij} = \langle \rho_{lk}, \varphi_{ij} \rangle = 0$.

② $A^{\#} = (\frac{1}{n} trA)I = \frac{trE_{ki}}{n} I$, then

$$
\langle \varphi_{ij}, \varphi_{kl} \rangle = A^{\#}_{lj} = (\frac{trE_{ki}}{n} I)_{lj} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{if } i = k, j = l; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

暂时没搞懂，还要再看下

## 1.20 定理：特征标的正交关系

$(\pi, V)$ and $(\rho, W)$ are two irr reps of $G$, then

$$\langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1, & \text{if } \pi \simeq \rho \text{ ;} \\ 0, & \text{if } \pi \not\simeq \rho. \end{cases}$$

Pf. $\forall s \in G, \pi_s = (a_{ij}(s))$(1.18), $\chi_\pi(s) = \sum a_{ii}(s)$. Then

$$\begin{aligned} \langle \chi_\pi, \chi_\pi \rangle &= \left\langle \sum a_{ii}, \sum a_{jj} \right\rangle = \sum_i \sum_j \langle a_{ii}, a_{jj} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \pi_{ii}, \pi_{jj} \rangle = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

> **我的笔记:** 这里第二个等号是因为内积对第一个参数有线性性，且两个参数交换后内积是共轭的关系 (1.17)，因此内积有双线性性. 第二行第一个等号是上面的定理1.19②. $\pi \not\simeq \rho$ 的情况同理用 1.19① 即可证得.

## 1.21 定理：不可约表示的同构重数的定理以及一个推论

$(\pi, V)$ is a rep of $G$, and $V = n_1 V_1 \oplus ... \oplus n_h V_h$ where $\{V_1, ..., V_h\}$ are all nonisomorphism irr reps. Then $\chi_V = n_1 \chi_{V_1} + ... + n_h \chi_{V_h}$ (1.14).

$$\left\langle \chi_V, \chi_{V_j} \right\rangle = \left\langle n_1 \chi_{V_1} + ... + n_h \chi_{V_h}, \chi_{V_j} \right\rangle = \sum_{p=1}^h n_p \left\langle \chi_{V_p}, \chi_{V_j} \right\rangle \xlongequal{1.20} n_j$$

Thus $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = n_1^2 + ... + n_h^2$.

Corollary. $(\rho, V)$ is rep of $G$. $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ iff $(\rho, V)$ is irr.

$\Longleftarrow$ :

Have been proved in 1.20.

$\Longrightarrow$ :

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1 \implies \sum_{i=1}^h n_i^2 = 1 \implies \exists! p, s.t., n_i = \begin{cases} 1, & \text{if } i = p; \\ 0, & \text{if } i \neq p. \end{cases} \implies$$

$V = V_p \implies (\rho, V)$ irr.

## 1.22 ♠2.4

3.7 11：52 右下的右下，左上，左下的左

## 1.23 ♠ 正则表示 (1.5) 的分解定理

group $G$, $(R,V)$ is a regular rep. $(\rho_i, W_i)$ are all irr rep, and $R = n_1\rho_1 \oplus ... \oplus n_i\rho_i \oplus ... \oplus n_h\rho_h(V = n_1W_1 \oplus ... \oplus n_iW_i \oplus ... \oplus n_hW_h)$, then we have $n_i = \langle \chi_R, \chi_{\rho_i} \rangle = \mathrm{deg}\rho_i = \mathrm{dim}_{\mathbb{C}}W_i$.

每个不可约表示出现在正则表示内的重数等于这个不可约表示的级数.

Pf. 这是 P18 的推论，这一节还要再好好看一下.

## 1.24 类函数组成向量空间

$f\colon G \to \mathbb{C}$ 是一个类函数，如果群 $G$ 中共轭的元素有相同的函数值，即 $f(h^{-1}gh) = f(g)$.

Suppose that $C_1, C_2, ..., C_k$ are distinct conjugacy class, denote

$$f_i(s) = \begin{cases} 1, & s \in C_i \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

then $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ is a basis of the space of class functions of $G$.

## 1.25 不等价的表示分解的个数等于群的共轭类的个数定理

$(\rho, V)$ is a rep of $G$, and $V = \alpha_1W_1 \oplus \alpha_2W_2 \oplus ... \oplus \alpha_hW_h$, $\chi_i$ is the char of $(\rho_i, W_i)$. Then $\{\chi_1, \chi_2, ..., \chi_h\}$ is an orthogonality basis of class functions space(1.24) of $G$. i.e., $h = k$ (, where $k$ is the same meaning in 1.24)

> **我的笔记:** 这个定理中，$(\rho_1, W_1), ..., (\rho_h, W_h)$ 是 $G$ 的全部不可约表示，即没有要求每一个 $\alpha_i$ 都不是 0.

### 先证一个类函数的引理

$(\rho, V)$ a rep of $G$, $f$ a class function of $G$, denote $\rho_f = \sum\limits_{t\in G} f(t)\rho_t$ (是一个线性变换，因为它是 $|G|$ 个复数倍的线性变换的和).

If $(\rho, V)$ is a irr rep of degree $n$ and char $\chi_\rho$, then $\rho_f$ is a homothety of ration $\lambda$ given by $\lambda = \frac{|G|}{n}\langle \overline{f}, \chi_\rho \rangle$. (也就是说，$\rho_f v = \lambda v, v \in V$)

Pf. For any $s \in G$, $\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s = \rho_s^{-1}(\sum\limits_{t\in G} f(t)\rho_t)\rho_s = \sum\limits_{t\in G} f(t)\rho_{s^{-1}ts} = \rho_f$, i.e., $\rho_f \in Hom_G(V,V)$(1.2). By schur's lemma(1.15), we get $\rho_f$ is a homothety and

$$\begin{aligned} \lambda n = tr\rho_f &= \sum_{t\in G} f(t) tr\rho_t \\ &= \sum_{t\in G} f(t)\chi_\rho(t) \\ &\xlongequal{1.17} |G|\langle \overline{f}, \chi_\rho \rangle \end{aligned}$$

### 定理1.25的证明

Clearly, $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$(1.20), only need to show that $\forall f$ as a class function, if $\langle \overline{f}, \chi_i \rangle = 0$, then $f \equiv 0$.

> **我的笔记:** 向量空间 $V$，内积定义为 $\langle\ ,\ \rangle$，有一组向量 $\{e_1, e_2, ..., e_t\}$，满足 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. 若【$\forall v \in V, \langle v, e_i \rangle = 0$对$\forall e_i$成立 $\Rightarrow v = 0$】，则这组向量 $\{e_1, e_2, ..., e_t\}$ 一定是空间 $V$ 的基.
> Pf. 先证这组向量线性无关. 设 $k_1e_1 + k_2e_2 + ... + k_te_t = 0$, 对任意 $v \in V$, $0 = \langle 0, v \rangle = \langle k_1e_1 + k_2e_2 + ... + k_te_t, v \rangle = k_1\langle e_1, v \rangle + k_2\langle e_2, v \rangle + ... + k_t\langle e_t, v \rangle$ 成立. 分别令 $v = e_1, e_2, ..., e_t$, 得到 $k_1 = k_2 = ... = k_t = 0$, 即 $\{e_1, e_2, ..., e_t\}$ 线性无关.
> 再证这组向量张成的空间就是 $V$，即 $V$ 中任意元素都可以由这组向量表出. 反证法. 若有 $v \in V, v \notin L(\{e_1, e_2, ..., e_t\})$，令 $v' = v - \langle v, e_1 \rangle e_1 - \langle v, e_2 \rangle e_2 - ... - \langle v, e_t \rangle e_t$，则可以计算出，$\langle v', e_i \rangle = 0$，对任意 $e_i$. 矛盾，因此 $V$ 可以由向量 $\{e_1, e_2, ..., e_t\}$ 线性表出.

To show $f \equiv 0$, we construct $\rho_{i_f} = \sum\limits_{t\in G} f(t)\rho_{i_t} = \frac{|G|}{n_i}\langle \overline{f}, \chi_{\rho_i} \rangle I_V = 0, n_i = dim_{\mathbb{C}} W_i$, as $(\rho_i, W_i)$ is irreduciable( 1.25 ), then $\rho_f = \alpha_1\rho_{1_f} \oplus \alpha_2\rho_{2_f} \oplus ... \oplus \alpha_h\rho_{h_f} = 0$.

Consider the regular rep $(R, V')$(1.5) of $G$, $\{e_t | t \in G\}$ is a basis of $V'$. We have $0 = 0e_1 = R_f e_1 = \sum\limits_{t\in G} f(t)R_t e_1 = \sum\limits_{t\in G} f(t)e_t$, hence $f(t) = 0$ for any $t \in G$（这是因为 $\{e_t | t \in G\}$ 是基，故线性无关）. i.e., $f \equiv 0$.

**我的笔记:** 这里要求 $dim_{\mathbb{C}}V' = |G|$，而对 $(\rho, V)$ 里的 V 就没有这个要求．之所以可以考察一个新的表示，是因为类函数空间只与 $G$ 有关，与表示无关．而这里之所以考察正则表示，是因为在1.23中我们知道正则表示中包含了这个群 $G$ 的所有不可约表示，是哪一个表示（$(rho, V)$ 或是 $(R, V')$）并不重要，重要的是所有的不可约表示（$(\rho_1, W_1), ..., (\rho_h, W_h)$），每一个表示都可以被分解成这些表示的直和，只是系数 $\alpha_i$ 不同而已（正则表示保证了每一个 $\alpha_i \neq 0$），而我们想考察的也仅仅是这些不可约表示的总个数，所以我们最开始使用了一般的记号 $(\rho, V)$，后面为了处理方便又用了正则表示．其实如果从一开始就直接使用正则表示是更容易接受的处理方式，但感觉上就少了一点一般性.
而关于不可约表示的个数是有限的这一点，本质上是因为有限群，共轭类个数是有限的，而特征标确确实实是类函数1.24，而这有限个特征标张成了整个类函数空间．不同的表示有不同的特征标【首先，不同的不可约表示有不同的类函数，否则无法满足行正交，这是因为如果特征表的两行相同，行正交的表达式等于 1 从而不正交．其次，行向量线性无关．因此，对于任意表示，它由不可约表示做直和的分解方式唯一.】，一共有这有限个特征标，于是一共就有这有限个不可约表示.
这里有循环论证的嫌疑的点在于，首先我们不知道不可约表示的个数等于群的共轭类的个数，因此我们也就不知道不可约表示的个数是不是有限的．而证明的过程中我们用到了正则表示含有所有的不可约表示，所以正则表示有可能是无限维向量空间上的．好吧，问题的关键还是看一下正则表示中包含所有不可约表示是怎么证的吧！

## 1.26 关于代数整数的一点知识

代数数：$\alpha \in \mathbb{C}$ is called algebraic if $\exists f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, s.t., $f(\alpha) = 0$. 所有代数数记为 $\overline{\mathbb{Q}}$.

代数整数：$\alpha \in \mathbb{C}$ is said to be an algebraic integer if there exists a monic（首 1 的）$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, s.t., $f(\alpha) = 0$.

有理数不一定是代数整数（0.6），代数整数不一定是有理数（$\sqrt{2}$）.

## 是代数整数的有理数是整数定理

If $\alpha \in \mathbb{Q}$ is an alg int, then $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Pf. Let $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p.q) = 1$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

$\exists f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x^1 + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, s.t.,

$f(\alpha) = \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$.

$p^n + a^{n-1}qp^{n-1} + ... + a_1q^{n-1}p + a_0 = 0$.

which implies $q|p^n$（把第一项留下，其余的挪到等号右边），then $q|p$, then $q = 1$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

## $\alpha$ 代数整数等价与 $\mathbb{Z}[\alpha]$ 是有限生成模（有限生成 abel 群）

$\alpha$ is an alg int iff $\mathbb{Z}[\alpha]$ is finitely generated. Where $\mathbb{Z}[\alpha] = \{f(\alpha)|f \in \mathbb{Z}[x]\}$（概念问题还要再看一下）

Pf. $\Rightarrow$: suppose $\alpha$ is a root of $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Hence $\alpha^n = -a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_0$, we get $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha \oplus ... \oplus \mathbb{Z}\alpha^{n-1}$.

$\Leftarrow$: suppose that $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}x_1 \oplus \mathbb{Z}x_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}x_n$, s.t., $\alpha x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, i.e.,

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ ... & & \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\Big(\alpha I - (a_{ij})\Big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

$|\alpha I - (a_{ij})| = 0, f(x) = |xI - (a_{ij})| \in \mathbb{Z}[x]$ and monic.

## ♠ 代数整数构成一个环

$\overline{\mathbb{Z}} = \{\text{all alg ints}\}$ is a ring. That is if $\alpha, \beta$ are alg ints, then $\alpha \pm \beta, \alpha\beta$ are all alg ints.

Pf. $\mathbb{Z}[\alpha], \mathbb{Z}[\beta]$ are finite generated abelian group (or say $\mathbb{Z}$-mod). Let $\{1, \alpha, ..., \alpha^m\}$ and $\{1, \beta, ..., \beta^n\}$ be basises of $\mathbb{Z}[\alpha]$ and $\mathbb{Z}[\beta]$. $\mathbb{Z}[\alpha, \beta] = \{f(\alpha, \beta)|f(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]\}$. Then $\{\alpha^i\beta^j\}_{i=0}^{m}{}_{j=0}^{n}$ are a $\mathbb{Z}$-basis of $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$.

Clearly, $\alpha \pm \beta, \alpha\beta \in \mathbb{Z}[\alpha,\beta]$, then $\mathbb{Z}[\alpha \pm \beta]$ and $\mathbb{Z}[\alpha\beta]$ are two abelian subgroup of $\mathbb{Z}[\alpha,\beta]$, then finitely generated（有限生成 abel 群的子群也是有限生成的）. Hence, $\alpha \pm \beta, \alpha\beta$ are all alg ints.

> **我的笔记:** 这里还需要再看看有限生成，不过不是主干内容，暂时也不影响

## 1.27 ♠ 群表示的特征标的值域属于代数整数

group $G$, rep $(\rho, V)$, char $\chi$, then $\chi(g)$ is an alg int for any $g \in G$.

Pf. $\chi(g) = tr\rho_g = \sum \lambda_i$, every $\lambda_i$ is a unitary root of 1. $\lambda_i^m = 1$, where $m = |G|$. $x^m - 1 = 0$ monic. Use 1.26, $\chi(g)$ alg int.

> **我的笔记:** 为什么 $\lambda_i$ 是单位根?

## 1.28 群代数

> **我的笔记:** 代数是指一个向量空间，再带一个双线性乘积. 也就是一个集合，有自身加法，自身乘法，数乘（数是某一个域中的元素）三种运算，加法和数乘满足向量空间公理，加法和乘法满足双线性公理.

群 $G$ ($|G| = n$), 表示 $(\rho, V)$. 我们定义如下向量空间 $\mathbb{C}[G]$：群中元素看作是基（$n$ 个线性无关的向量），$\mathbb{C}[G] := \{\sum\limits_{s\in G} a_s s | a_s \in \mathbb{C}\text{是系数}\}$，这样的 $\mathbb{C}[G]$ 首先是 $n$ 维向量空间，因此有了加法和数乘. 我们再定义一个它自身上面的乘法：$(\sum\limits_{s\in G} a_s s) \cdot (\sum\limits_{t\in G} b_t t) = \sum\limits_{s\in G}\sum\limits_{t\in G} a_s b_t st = \sum\limits_{u\in G}(\sum\limits_{st=u} a_s b_t)u$.

容易验证，这就是一个群代数了.

## 1.29 群代数做表示空间作成正则表示

因为 $\mathbb{C}[G]$ 本身是一个向量空间，所以一般可以直接让它成为表示空间 ($V = \mathbb{C}[G]$). 现在来看一看表示 $\rho$：

$$\rho\colon G \to GL(V)$$
$$g \mapsto \rho_g$$

其中

$$\begin{aligned}
&\rho_g \colon V \to V \\
&v = \sum_{s\in G} a_s s \mapsto \rho_g v = \sum_{s\in G} a_s(gs)
\end{aligned}$$

这个表示其实是一个正则表示（1.5），我们只不过是用群中元素来作为一组基而已. 这样的取基的好处是在这组基张成的向量空间上定义乘法后是一个群代数，它有更棒的结构.

## 1.30 不可约表示的一个式子是代数整数的引理

Let $(\rho, V)$ be an irr (complex) rep of $G$ with its char $\chi$, then $\frac{|C(g)|}{\deg\rho}\chi(g)$ is an alg int where $C(g)$ is one conjugacy class.

Pf. two rep of $G$: the given irr rep $(\rho, V)$ and a regular rep $(R, \mathbb{C}[G])$ ($\mathbb{C}[G]$ is defined here: 1.28). $R = n_1\rho_1 \oplus ... \oplus n_h\rho_h = (\deg\rho_1)\rho_1 \oplus ... \oplus (\deg\rho_h)\rho_h$, $\mathbb{C}[G] = n_1W_1 \oplus ... \oplus n_hW_h$. Since $(\rho, V)$ is irr, there must $\exists i, W_i \cong V$, i.e., $V \subset \mathbb{C}[G]$.

Denote $\varphi = \sum\limits_{s\in C(g)} \rho_s \in \mathrm{Hom}(V, V)$(or say $GL(V)$). For any $g' \in G$, we have $\rho_{g'}^{-1}\varphi\rho_{g'} = \sum\limits_{s\in C(g)} \rho_{g'^{-1}sg'} = \varphi$($s$ in a conjugacy class $C(g)$, then $g'^{-1}sg'$ must in the same conjugacy class $C(g)$), i.e., $\varphi\rho_{g'} = \rho_{g'}\varphi$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$(1.2). By Schur's lemma(1.15), we get $\varphi = \lambda 1_V$. And then

$$\begin{aligned}
\lambda\deg\rho &= \lambda\dim_{\mathbb{C}} V \\
&= \mathrm{tr}\varphi \\
&= \sum_{s\in C(g)} \mathrm{tr}\rho_s \qquad (\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}\mathbf{A} + \mathrm{tr}\mathbf{B}) \\
&= |C(g)|\chi_\rho(g) \qquad (\chi_\rho(s) = \chi_\rho(g)),
\end{aligned}$$

then, $\lambda = \frac{|C(g)|}{\deg\rho}\chi_\rho(g)$.

Consider the linear transformation $\psi$ on $\mathbb{C}[G]$: $\psi = \sum\limits_{t\in C(g)} R_t \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$, and $\psi|_V = \sum\limits_{t\in C(g)} R_t|_V = \sum\limits_{t\in C(g)} \rho_t = \varphi$. For any $0 \neq v \in V$, we have $\psi(v) = \varphi(v) = \lambda v$, i.e., $\lambda$ is an eigenvalue of $\psi$.

Let $M$ be the matrix of $\psi$ under the $G$-basis（群代数 $\mathbb{C}[G]$ 作为向量空间的那组基）, then $f(\lambda) := \det(\lambda I - M) = 0$, $f(x)$ is a monic poly with $f(\lambda) = 0$. Hence $\lambda$ is an alg int(1.26).

**我的笔记:** 书上这个定理是用模的语言证明的，应该好好看一看.

## 1.31 关于不可约表示的级数整除群阶数的定理

group $G$, irr rep $(\rho, V)$, then $\deg\rho \mid |G|$.

Pf. Suppose $C_1, C_2, ..., C_h$ are all conjugacy class of $G$, and $g_1, g_2, ..., g_h$ are representatic element(代表元，英语可能写错了).

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle (irr) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\rho(g)} \chi_\rho(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{h} |C_i| \overline{\chi_\rho(g_i)} \chi_\rho(g_i) \end{aligned}$$

hence

$$|G| = \sum_{i=1}^{h} |C_i| \overline{\chi_\rho(g_i)} \chi_\rho(g_i),$$

$$\frac{|G|}{\deg\rho} = \sum_{i=1}^{h} \frac{|C_i|}{\deg\rho} \overline{\chi_\rho(g_i)} \chi_\rho(g_i) = \sum_{i=1}^{h} \frac{|C_i|}{\deg\rho} \chi_\rho(g_i) \overline{\chi_\rho(g_i)},$$

by the above lemma(1.30), $\frac{|C_i|}{\deg\rho}\chi_\rho(g_i)$ is an alg int, $\overline{\chi_\rho(g_i)}$ is an alg int(1.27), it follows that $\frac{|G|}{\deg\rho}$ is an alg int(1.26), and then it is an int(1.26).

## 1.32 加强版的定理

奇怪，上课的时候居然没证.

## 1.33 诱导表示

$(\rho, V)$ of $G$, $H \leq G$. Then we have $\rho|_H$. $W$ is a stable subspace of $V$, s.t., $(\rho_H, W)$ is a subrep, $\rho|_H \colon H \to GL(W)$, denote $\rho|_H =: \theta =: \mathrm{Res}_H^G \rho$.

Let $s \in G$, there must exists $r \in R, h \in H$, where $R$ is the $H$ 在 $G$ 中的左陪集代表元群, s.t. $s = rh$, then $\rho_s W = \rho_{rh} W = \rho_r \rho_h W = \rho_r W$.

Then for $\forall g \in G, \rho_g(\rho_s W) = \rho_{gs} W$, and there must exists a $r_g \in R$ and $h_g \in H$, s.t., $gs = r_g h_g$, then it equals to $\rho_{r_g} \rho_{h_g} W = \rho_{r_g} W$. Thus

$V' = \bigoplus_{r\in R} \rho_r W$ is stable under $G$(because $\forall g \in G, v \in V', \rho_g v \in V'$), i.e., $(\rho, V') = \left(\rho, \bigoplus_{r\in R} \rho_r W\right)$ is a subrep of $(\rho, V)$.

Now we define: $(\rho, V)$ of $G$ is induced by $(\theta, W)$ of $H$ if $V = \bigoplus_{r\in R} \rho_r W$. Set $\rho = \mathrm{Ind}_H^G \theta$, or $V = \mathrm{Ind}_H^G W$.

And for sure we get $\dim_{\mathbb{C}} V = [G : H] \dim_{\mathbb{C}} W$.

### 诱导表示的例子

Regular rep $(\rho, V)$ of $G$, $\dim_{\mathbb{C}} V = |G|$. a basis of $V$: $\{e_t | t \in G\}, \rho_s e_t = e_{st}$.

$H \leq G, W = \mathrm{span}\{e_h | h \in H\}, \theta = \rho|_H$, while $\theta_{h_1} e_{h_2} = e_{h_1 h_2} \in W, \forall h_1, h_2 \in H$. Then $(\rho, V)$ is induced by $(\theta, W)$.

## 1.34 诱导表示的存在唯一性

### 一个引理

Suppose that $(\rho, V)$ is a rep of $G$ induced by $(\theta, W)$ of $H \leq G$. Let $(\rho', V')$ be another rep of $G$, i.e., $\rho' \colon G \to GL(V')$, and let $f \colon W \to V'$ linear map, s.t., $f(\theta_h w) = \rho'_h f(w)$ holds for all $h \in H, w \in W$. Then $\exists!$ linear map $F \colon V \to V'$, s.t., ① $F|_W = f$, ② $\forall g \in G, F \circ \rho_g = \rho'_g \circ F$, i.e., $\forall g \in G, v \in V, F(\rho_g v) = \rho'_g F(v)$.

i.e., we have the commute graph

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_h"] & V' \arrow[d, "\rho'_h, \rho'_g"] & V \arrow[l, dashed, "\exists! F"] \arrow[d, "\rho_g"] \\ W \arrow[r, "f"] & V' & V \arrow[l, dashed, "\exists! F"] \end{tikzcd}.$$

holds for $\forall h \in H, g \in G$.

Pf. 证明见下面的两个小节.

### 引理证明：唯一性（如果存在，则必唯一）

这里的符号，括号和复合的圈没太仔细分，一个意思。

If $x \in \rho_s W$, then $\rho_s^{-1} x \in W$, hence $F(x) = F\left(\rho_s\left(\rho_s^{-1} x\right)\right) \xlongequal{\text{如果这样的 } F \text{ 存在}} \rho'_s \circ F\left(\rho_s^{-1} x\right) \xlongequal{\rho_s^{-1} x \in W, F|_W = f} \rho'_s f(\rho_s^{-1} x)$.

This formular determines $F$ on $\rho_s W$, and so on $V$. This proves the uniqueness of $F$. （就是说如果存在这样的 $F$ ，那 $F$ 在 $\rho_s W$ 这个空间上怎么映射就由上面的式子唯一确定出来了。而因为 $V$ 是由 $W$ 诱导出来的，也就是有 $V = \bigoplus\limits_{s\in R} \rho_s W$ ，于是 $F$ 在空间 $V$ 上怎么映射也是唯一确定的了. ）

**引理证明：存在性**

$V = \bigoplus\limits_{s\in R} \rho_s W, x \in \rho_s W$, we define $F(x)$ by the formular $F_s(x) = \rho'_s f \rho_s^{-1}(x) \in V'$.

This defination does not depend on the choice of $s$ in $sH$. In fact, for any $t \in H$, we have $F_{st}(x) = \rho'_{st} f \rho_{st}^{-1}(x) = \rho'_s \rho'_t f \rho_t^{-1} \rho_s^{-1}(x) \xlongequal{\rho_s^{-1}x\in W, \rho|_W=\theta} \rho'_s \rho'_t f \theta_t^{-1} \rho_s^{-1}(x) \xlongequal{f\theta_t=\rho'_t f} \rho'_s f \theta_t \theta_t^{-1} \rho_s^{-1}(x) = \rho'_s f \rho_s^{-1}(x) = F_s(x)$.

Now we have $F_s\colon \rho_s W \to V'$, and $V = \bigoplus\limits_{s\in R} \rho_s W$, there exists a linear map $F\colon V = \bigoplus\limits_{s\in R} \rho_s W \to V'$ which extends the partial mappings thus defined on $V$.

(Need to check for ① and ②, left to homework.)

曹锡华书上的验证：

① 好像就是上面那段的最后一句话. $F$ 扩充了每个 $F_s : \rho_s W \to V'$，即对于典范内射 $f_s\colon \rho_s W \to V = \bigoplus\limits_{s\in R} \rho_s W$，有 $F \circ f_s = F_s$. 取 $s \in H$ 就验证了 ①.

② 对任意 $v \in V$，存在 $s' \in G$，使得 $v \in \rho_{s'} W$，i.e., $\exists w \in W$ 使得 $v = \rho_{s'} w$. 对 $\forall g \in G$，一定 $\exists r \in R, h \in H$，使得 $gs' = rh$. 于是我们有

$$\begin{aligned}
F(\rho_g v) &= F(\rho_g \rho_{s'} w) = F(\rho_{gs'} w) = F(\rho_{rh} w) \\
&= F(\rho_r \theta_h w) \xlongequal{\rho_r\theta_h w\in\rho_r W,\text{嵌入}} F_r(\rho_r \theta_h w) \\
&\xlongequal{F_r\text{的定义}} \rho'_r f \rho_r^{-1}(\rho_r \theta_h w) = \rho'_r f(\theta_h w) \\
&\xlongequal{f\theta_h=\rho'_h f} \rho'_r \rho'_h f(w) = \rho'_{rh} f(w) = \rho'_{gs'} f(w) \\
&= \rho'_g \rho'_{s'} f(w) = \rho'_g \rho'_{s'} f(\rho_{s'}^{-1} \rho_{s'} w) \xlongequal{F_{s'}\text{的定义}} \rho'_g F_{s'}(\rho_{s'} w) \\
&\xlongequal{\rho_{s'}w\in\rho_{s'}W,\text{扩张}} \rho'_g F(\rho_{s'} w) = \rho'_g F(v)
\end{aligned}$$

这就验证了 ②

**诱导表示存在唯一性定理与其证明**

$H \leq G$, rep $(\theta, W)$ of $H$, then $\exists\, (\rho, V)$ of $G$, which is induced by $(\theta, W)$, and it is unique up to isomorphism.

书上的证明（Page30）待补充. 这里是不同于书上的证明，是一个构造性的. (是曹锡华书上的证明.)

Pf. 先证存在性.

对任意一个 $s \in R$（$R$ 是左陪集 $G/H$ 的代表元集），我们构造一个向量空间 $W_s$，它同构于 $W$. 当我们说同构时，说的是存在这样一个映射（记成 $f_s$ 好了，只是一个记号，没有任何意义）:

$$
\begin{aligned}
f_s \colon W &\to W_s \\
w &\mapsto f_s w,
\end{aligned}
$$

再记 $V := \bigoplus_{s\in R} W_s$, 则 $V$ 中每一个元素 $v$ 可以唯一地写成 $v = \sum_{s\in R} f_s w_s, w_s \in W$ 的形式. 对任意 $x \in G$，一定存在 $h \in H, r \in R$，使得 $xs = rh$. 我们定义 $W_s$ 上的和 $G$ 中元素 $x$ 相关的线性变换 $\rho_x$

$$
\rho_x f_s w_s := f_r \theta_h w_s,
$$

**我的笔记:** 这里的所有映射关系:

$$
\begin{aligned}
\theta \colon H &\to GL(W) & \theta_h \colon W &\to W & \rho \colon G &\to GL(V) & \rho_x \colon W_s &\to W_r \\
h &\mapsto \theta_h & w &\mapsto \theta_h w & x &\mapsto \rho_x & f_s w_s &\to f_r \theta_h w_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f \colon R &\to \mathrm{Hom}(W, W_*) \\
r &\mapsto f_r & f_r \colon W &\to W_r & f_s \colon W &\to W_s \\
s &\mapsto f_s & w_r &\mapsto f_r w_r & w_s &\mapsto f_s w_s
\end{aligned}
$$

下面证明，$\rho_{x'x} f_s w_s = \rho_{x'} \rho_x f_s w_s$.

对任意 $x' \in G$，一定存在 $h' \in H, r' \in R$，使得 $x'r = r'h'$，从而 $(x'x)s = x'(xs) = x'(rh) = (x'r)h = (r'h')h = r'(h'h)$. 于是，

$\rho_{x'x} f_s w_s \xlongequal{(x'x)s=r'(h'h)} f_{r'} \theta_{h'h} w_s = f_{r'} \theta_{h'} \theta_h w_s$,

$\rho_{x'} \rho_x f_s w_s \xlongequal{xs=rh} \rho_{x'} f_r \theta_h w_s \xlongequal{x'r=r'h'} f_{r'} \theta_{h'} \theta_h w_s$

于是这样的 $\rho$ 就定义了群 $G$ 在向量空间 $V$ 上的线性表示，存在性得到.

唯一性. 设 $\rho' : G \to GL(V')$ 是 $G$ 的另一个由 $\theta$ 诱导的线性表示. 因为 $\dim_{\mathbb{C}} V = [G:H] \dim_{\mathbb{C}} W = \dim_{\mathbb{C}} V'$, 我们只要证明存在满映射 $F \colon V \to V'$ 使得 $F|_W = 1_W$ 且 $F \circ \rho_x = \rho'_x \circ F$ 对所有 $x \in G$ 成立. 而上面的引理1.34表明映射 $F$ 的像包含所有的 $\rho'_s(W)(s \in S)$，从而 $F$ 是满映射.

证毕.

**我的笔记:** 这里有点像分裂域那个感觉. 证明是先用 $f$ 把各个和 $W$ 同构的空间做出来，把他们当作 $V$ 的子空间，再通过子空间定义 $V$ 上的线性变换.

## 1.35 诱导表示的特征标理论定理

$(\rho, V)$ is induced by $(\theta, W)$, their char are denoted by $\chi_V, \chi_W$. Then for each $u \in G$,

$$\chi_V(u) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \chi_W(r^{-1}ur) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}us \in H}} \chi_W(s^{-1}us).$$

Pf. 后一个等号是显然的，只需注意到 $|R| = [G:H] = \frac{|G|}{|H|}$. 下面证第一个等号.

For any $u \in G, \exists r_u \in R, h \in H$, s.t., $ur = r_u h$, we get $\rho_u(\rho_r W) = \rho_{ur} W = \rho_{r_u h} W = \rho_{r_u} \rho_h W = \rho_{r_u} W$ and

$$\begin{aligned}
\chi_V(u) &= \mathrm{tr}_V(\rho_u) \\
&=^* \sum_{r \in R} \mathrm{tr}_{\rho_r W}\left(\rho_u|_{\rho_r W}\right) \\
&\left(= \sum_{r \in R} \chi_{\rho_r W}(u)\right) \\
&=^{**} \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \mathrm{tr}_{\rho_r W}\left(\rho_u|_{\rho_r W}\right) \\
&=^{***} \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \mathrm{tr}_W(\theta_h) \\
&= \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \chi_W(r^{-1}ur).
\end{aligned}$$

> **我的笔记:** tr 其实完全不用写脚标的，这里是为了方便确认这个线性变换是作用在哪个空间上的. 而且这份笔记前面的记号一直都是 tr 不加括号的，这里也是为了方便与脚标取分开加了括号.

* 第二个等号是因为 $V = \bigoplus_{r\in R} \rho_r W$，而且 $\rho_u(\rho_r W) = \rho_{r_u} W$. 也就是说，$\rho_u$ 是一个从子空间 $\rho_r W$ 到子空间 $\rho_{r_u} W$ 的线性映射，$r$ 遍历 $R$ 则 $r_u$ 也遍历 $R$, 于是 $\rho_r W, \rho_{r_u} W$ 分别遍历了 $V$ 的直和分解中的所有子空间，于是 $\rho_u$ 在所有不同空间上的限制 $\rho_u|_{\rho_r W}$ 也相当于遍历出了整个 $V$ 上的线性变换 $\rho$，这样迹相加就肯定没错了.

** 第四个等号更是很自然的. 如果 $r_u \neq r$，那 $\rho_r W$ 和 $\rho_{r_u} W$ 就是两个不同的子空间，而分解又是直和分解，那这两个子空间的交只有 0，于是 $\rho_u$ 在子空间 $\rho_r W$ 上的限制 $\rho_u|_{\rho_r W}$ 一定是一个零矩阵，它的迹也一定是零. 所以真正对这个加和有贡献的是那些 $r_u = r$ 的部分，即我们要求 $\rho_u \rho_r W = \rho_r W \implies \rho_r^{-1} \rho_u \rho_r W = W \implies \rho_{r^{-1}ur} = \rho_h$，所以多加一个限制条件 $r^{-1}ur \in H$ 等于号还是成立的.

*** 第五个等号是因为 $r^{-1}ur \in H$ 时有 $\rho_u|_{\rho_r W} = \rho_r \rho_h \rho_r^{-1}|_{\rho_r W} = (\rho_r|_{\rho_r W})\theta_h(\rho_r^{-1}|_{\rho_r W})$，矩阵相似所以迹相等. 这里的加和号只是计数而没有在每一项中真正遍历.

## 1.36 表示与模论的关系

$R$ is a ring, $M$ is a abelian group. $M$ is said to be a left $R$-mod, if satisfies:

① $r_1(r_2 m) = (r_1 r_2)m$;

② $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$;

③ $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ ;

④ $1m = m$.

where $r_1, r2, r \in R, m_1, m2, m \in M$.

Now rep $(\rho, V)$ of $G$, $\rho : G \to GL(V)$. $\forall f = \sum_{g\in G} a_g g \in \mathbb{C}[G]$ (1.28), we define how $f$ act on $V$: for any $v \in V$, $fv = \left(\sum_{g\in G} a_g g\right) v = \sum_{g\in G} a_g \rho_g v$. We get $V$ is a left $\mathbb{C}[G]$-module.

**我的笔记:** $\mathbb{C}[G]$ 是代数所以当然是环，$V$ 是向量空间所以当然是 Abel 群，这里只需验证模定义中的公理：
① $f_1(f_2)v = (f_1 f_2)v$　　($f_1 f_2$ 是在群代数 1.28 中定义了的乘法.);
② $(f_1 + f_2)v = f_1 v + f_2 v$;
③ $f(v_1 + v_2) = f v_1 + f v_2$;
④ $1v = v$　　(1 是 $G$ 中的单位元，也就是在 $\mathbb{C}[G]$ 中只有 $G$ 的单位元作为基的那个向量.)

因为 $V$ 是左 $\mathbb{C}[G]$-模，可以看到，$\mathbb{C}[G]$ 在这里的作用像极了 $G$ 的表示，也就是表示空间上的线性变换. 因为本质上我们说 $(\rho, V)$ 是群 $G$ 的表示，也无非是在说 $V$ 是左 $GL(V)$-模，因为向量空间是该向量空间上线性变换的模，$\rho : G \to GL(V)$. 于是我们就可以把表示和模等同起来，群的表示（表示空间）是左 (群代数)-模，子表示是子模，不可约表示是单模，（单模的定义是无非平凡子模的模），一个表示的不可约表示分解是模的单模分解.

**我的笔记:** 这里还要注意与 1.29 做区分，1.29 中是把 $\mathbb{C}[G]$ 看作是向量空间，直接拿来作为表示空间，成为正则表示的特例；这里是把 $\mathbb{C}[G]$ 看作环，等同于表示空间上的线性变换，更进一步是看作模，用了更多 $\mathbb{C}[G]$ 中的代数结构. 而且这里对表示没有做要求（不要求是正则表示）.

## 1.37　Frobenius 互反性定理

rep $(\theta, W)$ of $H$, $H \leq G$, rep $\left(\mathrm{Ind}_H^G \theta, \mathrm{Ind}_H^G W\right)$ of $G$, $\psi$ is a class function (1.24) of $H$, $\varphi$ is a class function of $G$. Then, we must have (inner product see, 1.17)

$$\left\langle \psi, \mathrm{Res}_H^G \varphi \right\rangle_H = \left\langle \mathrm{Ind}_H^G \psi, \varphi \right\rangle_G$$

Pf.

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\operatorname{Ind}_H^G\psi(s^{-1})\varphi(s)\\
&=^{*} \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\left(\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{t\in G\\ t^{-1}s^{-1}t\in H}}\psi(t^{-1}s^{-1}t)\varphi(s)\right)\\
&=^{**} \frac{1}{|G||H|}\sum_{s\in G}\sum_{t\in G}\psi(t^{-1}s^{-1}t)\varphi(s)\\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{s\in G}\psi(s^{-1})\varphi(s)\\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{s\in H}\psi(s^{-1})\varphi(s)\\
&= \left\langle\psi, \operatorname{Res}_H^G\varphi\right\rangle_H
\end{aligned}$$

* 第二个等号，因为 $\psi$ 是类函数，$\psi(t^{-1}s^{-1}t)=\psi(s^{-1})$，这个式子对任意 $t\in G$ 都成立的，但满足条件 $t^{-1}s^{-1}t\in H$ 的一共好像并不是有 $|H|$ 个吧？

** 第三个等号后面的 $\psi$ 是加了点被重新定义过的，以后再看吧

## 1.38 Mackey 子群定理

> **我的笔记:** 双陪集 (double coset)：$K,H\leq G$, 对任意 $x\in G$，$x$ 的 $(K,H)$-双陪集 $KxH$ 定义为集合
>
> $$KxH=\{kxh:k\in K,h\in H\}.$$
>
> $HxH$ 可直接简单地称为 $x$ 的 $H$-双陪集. 所有的 $(K,H)$-双陪集记作 $K\backslash G/H$(这里用类似左陪集的定义理解就好了，如果 $x$ 遍历整个 $G$，则集合 $\{KxH\}_{x\in G}$ ) 中有很多是重复的，重复的只记一次就是集合 $K\backslash G/H$ 了，用这个记号表示所有双陪集的代表元也是不会有歧义的啦，换句话说双陪集构成 $G$ 的一个分划，也就是他们要么相等，要么不交，并起来是整个群 $G$.

$H,K\leq G$. We must have $G=\bigcup_{s\in S}KsH$, where $S=K\backslash G/H$.

① $(\rho,W)$ of $H$ $(\leq G)$.

② $\left(\operatorname{Ind}_H^G\rho,\operatorname{Ind}_H^G W\right)$ of $G$.

For $s \in S$, let $H_s = sHs^{-1} \cap K$, clearly $H_s \leq K$. Define $\rho^s$ by $\rho^s_x := \rho_{s^{-1}xs}$ for $\forall x \in H_s$ thus $s^{-1}xs \in H$, clearly for $\forall x, y \in H_s$, we have $\rho^s_{xy} = \rho_{s^{-1}xys} = \rho_{s^{-1}xss^{-1}ys} = \rho_{s^{-1}xs}\rho_{s^{-1}ys} = \rho^s_x\rho^s_y$, thus we have another reps

③ $(\rho^s, W_s)$ of $H_s$ $(\leq K \leq G)$.

④ $\left(\mathrm{Ind}_{H_s}^K \rho^s, \mathrm{Ind}_{H_s}^K W_s\right)$ of $K$.

Mackey subgroups Thm:

$$\mathrm{Res}_K^G \mathrm{Ind}_H^G W \cong \bigoplus_{s \in K\backslash G/H} \mathrm{Ind}_{H_s}^K W_s$$

这个定理是说已知一个子群的表示，则另一个子群的表示（先诱导到整个群上再限制到这另一个子群上）是唯一确定的，而且可以由上面这个式子给出.

Pf. Let $V := \mathrm{Ind}_H^G W = \bigoplus\limits_{x \in G/H} (\mathrm{Ind}_H^G \rho)_x W$, where $G/H$ is a set of representations of $H$ on $G$. Denote for any $s \in S = K\backslash G/H, V(s) := \mathrm{span}\left\{(\mathrm{Ind}_H^G \rho)_x W | x \in KsH\right\} = \bigoplus\limits_{x \in KsH} (\mathrm{Ind}_H^G \rho)_x W$, claim that

① $V(s)$ is stable under $K$ ;

② $V = \bigoplus\limits_{s \in S} V(s)$.

① is easy to check because if $x \in KsH$, then $\forall k \in K, kx \in KsH$ too for $K$ is a subgroup.

待补充. 4.11 10：57

## 1.39 诱导表示不可约性判别准则

$H \leq G$, rep $(\rho, W)$ of $H$, induced rep $\left(\mathrm{Ind}_H^G \rho, \mathrm{Ind}_H^G W\right)$ of $G$. Let $H_s = sHs^{-1} \cap H$ for $s \in G$ then we get $H_s \leq H \leq G$ and we then have rep $\left(\mathrm{Res}_{H_s}^H \rho, \mathrm{Res}_{H_s}^H W\right)$ of $H_s$.

The induced rep $\left(\mathrm{Ind}_H^G \rho, \mathrm{Ind}_H^G W\right)$ of $G$ is irr iff:

① $(\rho, W)$ is irr; and

② for each $s \in G - H$, the two reps $(\rho^s, W_s)$ and $\left(\mathrm{Res}_{H_s}^H \rho, \mathrm{Res}_{H_s}^H W\right)$ of $H_s$ are disjoint, the first rep $(\rho^s, W_s)$ see, 1.38③.

Pf. 待补充.

## 1.40 Artin 定理

### 记号综述

$G$ is a finite group. $H \le G$, rep $(\rho, W)$ of $H$ with its character $\chi_\rho$. $\rho = m_1\rho_1 \oplus ... \oplus m_h\rho_h$, where $\rho_i$ are all irr reps and their char are $\chi_1, ..., \chi_h$.

rep $\left(\mathrm{Ind}_H^G \rho, \mathrm{Ind}_H^G W\right)$ of $G$ with its character $\mathrm{Ind}\chi_\rho$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\chi_\rho(s) &= \frac{1}{|H|}\sum_{\substack{t\in G\\ t^{-1}st\in H}} \chi_\rho(t^{-1}st)\\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{t\in G}\dot{\chi_\rho}(t^{-1}st)\end{aligned}$$

where $\dot{\chi_\rho}(s) = \begin{cases}\chi_\rho(s), & s\in H;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$

A class func on $G$ is a char iff it is a linear combination of the $\chi_i$s with non-negative interger coeff(1.14④).

Denote $R(G) = \mathbb{Z}\chi_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}\chi_h$ and $R^+(G) = \mathbb{N}\chi_1 \oplus ... \oplus \mathbb{N}\chi_h$.

### Artin 定理

Let $X$ be a family of subgrps of gp $G$. Let

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\colon \bigoplus_{H\in X} R(H) &\to R(G)\\ \{\chi_H\}_{H\in X} &\mapsto \sum_{H\in X}\mathrm{Ind}_H^G\chi_H\end{aligned}$$

be a homo defined by the family of $Ind_H^G$. Then the following propertion are equivalent:

① $G$ is the union of the conjugates of the subgrps in $X$. i.e., $G = \bigcup\limits_{H\in X}\bigcup\limits_{g\in G} gHg^{-1}$.

② The cokernal of Ind is finite, i.e., $\left[R(G) : \mathrm{Ind}\bigoplus\limits_{H\in X} R(H)\right] < \infty$.

③ For each character $\chi$ of $G$, $\exists$ virtual char $\chi_H \in R(H)$, $H\in X$ and an interger $d\ge 1$, s.t., $d\chi = \sum\limits_{H\in X}\mathrm{Ind}_H^G\chi_H$.

# 2 局部紧群的表示

## 2.1 拓扑群

Def. $G$ is a group and topological space, then $G$ is said to be a topological group if

$$\mu\colon G\times G\to G$$
$$(g,h)\mapsto gh$$

and

$$\iota\colon G\to G$$
$$g\mapsto g^{-1}$$

are continues.

有些书要求拓扑空间是 Hausdorff 的.

## 2.2 拓扑群的例子

### 2.2.1 $p$-adic

待补充

### 2.2.2 任意群对离散拓扑是拓扑群，任意有限群对离散拓扑是紧群.

### 2.2.3 拓扑群的直积是拓扑群，它是紧的当且仅当每个因子群是紧的.

### 2.2.4 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 上的有限维向量空间 $\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n$ 是拓扑 Abel 群.

### 2.2.5 $S^1$ 是紧群：群运算是复数乘法；拓扑是 $\mathbb{R}^2$ 上子空间拓扑.

### 2.2.6 $GL_n(\mathbb{R})$ 和 $GL_n(\mathbb{C})$ 都是非紧的拓扑群：群运算是矩阵乘法；拓扑是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 或 $\mathbb{C}^{n^2}$ 上子空间拓扑.

证其是拓扑群：把拓扑看成是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$ 也就是乘积拓扑的子空间拓扑，乘积映射与逆映射的连续性划归到 $n^2$ 个合成映射分别的连续性，而这是因为他们的表达式都是多项式形式.

证其是非紧的：其恰是所有非零实/复数的行列式映射的原像，实/复数除去一个点是开集，行列式映射是连续的，所以这两个拓扑群是开的. 而他们作为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 和 $\mathbb{C}^{n^2}$ 的子集，我们知道 $\mathbb{R}^{n^2}$ 和 $\mathbb{C}^{n^2}$ 的紧致子集都是有界闭

集 (更一般地，欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 和酉空间 $\mathbb{C}^n$ 的子集是紧致子集当且仅当它是有界闭的)，所以他们是非紧的.

**2.2.7** $O_n = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) | AA^T = I\right\}$ **正交群是紧群.**

证：定义映射 $f_{ij}\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A = (a_{ij}) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$，于是 $O_n = \bigcap\limits_{i \neq j} f_{ij}^{-1}(0) \bigcap f_{ij}^{-1}(1)$. 在 $\mathbb{R}$ 中单点集是闭集，$f_{ij}$ 是连续映射，因此原像都是闭集，闭集的任意交是闭集，于是 $O_n$ 是 $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ 的闭集. 而 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$ 从而 $|a_{ij}| \leq 1, \forall i, j$，于是 $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}, \|A\| = \max a_{ij}$ or $(\sum a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \ldots$ 有限维空间范数等价，比如取前者即可说明 $O_n$ 有界，有界闭，于是紧.

**2.2.8** $SO_n = \{A \in O_n | \det(A) = 1\}$ **特殊正交群是紧群.**

正交矩阵的行列式要么为 1，要么为 $-1$，为 1 的那部分构成正交群的正规子群，叫做特殊正交群.

证：考虑行列式映射是 $O_n$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射，而 $SO_n$ 恰是 $\{1\}$ 的原像，单点集是闭集，$SO_n$ 是 $O_n$ 的闭子集，从而 $SO_n$ 也是紧群.(紧致空间的闭集是紧致子集；Hausdorff 空间的紧致子集是闭集；Hausdorff 空间中，紧致子集 $\iff$ 闭子集.)

**2.2.9** $U_n = \left\{A \in GL_n(\mathbb{C}) | A\overline{A^T} = I\right\}$ **酉群是紧群.**

**2.2.10** $SU_n = \{A \in U_n | \det(A) = 1\}$ **特殊酉群是紧群.**

## 2.3 和拓扑有关的一些性质

(曹锡华.P143/2) Let $G$ be a topo gp.

**2.3.1 If $A \subset G$ is open(closed), then $Aa, aA, A^{-1}$ are open(closed) for any $a \in G$.**

Pf.

**2.3.2 If $A$ closed, $B$ finite, then $AB, BA$ are closed.**

Pf.

### 2.3.3 If $A$ is open then $AB, BA$ are open.

Pf.

### 2.3.4 If $A, B$ are compact, then $AB$ is compact.

Pf.

## 2.4 拓扑群同态

### 2.4.1 定义

$f\colon G_1 \to G_2$ 是拓扑群同态，if 它既是群同态，也是拓扑空间的连续映射.

### 2.4.2 例子

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto f(x) = e^x$ 是拓扑群同构，其中 $\mathbb{R}$ 是实数加法拓扑群，$\mathbb{R}_+$ 是正实数乘法拓扑群.

2. $f\colon O_2 \to S^1, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ 是拓扑群同构.

### 2.4.3 拓扑群的同态基本定理

抽象群中的子群，在拓扑群中的类似物是，拓扑群的闭子群；正规子群对应闭正规子群；群同态对应开同态.

## 2.5 紧群上的不变积分

动机：有限群中的求平均 $\frac{1}{|G|}\sum\limits_g f(g)$ 的推广. 因此建立不变积分 $\int_G f(x)dx$ 或 Haar 测度 $dx$.

### 2.5.1 定义

如果对每一个定义在 $G$ 上的实值连续函数 $f(x)$ (即，$f\colon G \to \mathbb{R}$ 连续)，均 $\exists \int_G f(x)dx \in \mathbb{R}$ (存在一个实数，记为那个积分)，满足：

(1) 线性：$\int_G (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_G f(x)dx + \beta \int_G g(x)dx$；

(2) 正定性：若 $f(x) \geq 0$ for $\forall x \in G$，则 $\int_G f(x)dx \geq 0$. 等号成立当且仅当 $f \equiv 0$；

(3) 不变性：对 $\forall g \in G$，有 $\int_G f(gx)dx = \int_G f(xg) = \int_G f(x)dx$(其实这不是什么特别严格的条件，$x$ 遍历整个 $G$ 因而 $gx$ 也遍历整个 $G$，否则若 $gx_1 = gx_2$ 则 $g^{-1}gx_1 = g^{-1}gx_2 \implies x_1 = x_2$)；

(4) 规范性：$\int_G 1dx = 1$(这也不是过分的条件，规范一下相当于有限群中取平均中的 $\frac{1}{|G|}$)；

(5) 可逆性：$\int_G f(x^{-1})dx = \int_G f(x)dx$.

则称在 $G$ 上建立了一个不变积分.

### 2.5.2 例子

1. 对于有限群 $G$，$\int_G f(x)dx := \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} f(g)$ 就是一个不变积分.

2. 对于平面上的旋转群 $G = S^1$，令 $\int_G f(x)dx := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta$ 是一个不变积分，这里 $f$ 是实值函数.

### 2.5.3 定理：任意紧群上不变积分的建立方法是唯一存在的.

证明可见 L.S.Pontryagin 著，曹锡华译，连续群（上册），北京：科学出版社，1978，P209

## 2.6 紧群的线性表示

和有限群表示基本上一样，简单过一下.

### 2.6.1 定义

$G$ 是紧群，$V$ 是有限维 $F$-空间 ($F$ 是指 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$). 如果存在拓扑群的同态 $\rho\colon G \to GL(V)$，则称 $(V, \rho)$ 是 $G$ 的一个 $F$-线性表示，简称为 $G$ 的表示.

这个定义相比抽象有限群的表示，需要 $\rho$ 是连续映射. 给定一个表示，相当于给定 $G$ 在 $V$ 上的一个连续的线性作用，即 $G \times V \to V$ 是连续的. 因此也称紧群 $G$ 的表示 $V$ 为连续 $G$-模.

### 2.6.2 两个表示等价

对应于1.2 以及1.3.

### 2.6.3 Schur 引理

对应于1.15.

设 $(V_1,\rho_1)$ 和 $(V_2,\rho_2)$ 是紧群 $G$ 的两个不可约 $F$-表示. 则

(1) 若 $f$ 是 $V_1$ 到 $V_2$ 的任一非零 $G$-模映射，则 $f$ 必为 $G$-模同构；从而若 $V_1$ 和 $V_2$ 不等价 (不同构)，则 $Hom_G(V_1,V_2)=0$.

(2)$Hom_G(V_1,V_1)$ 是包含 $F$ 的除环.(除环，是一个集合带两个运算，带加法作成 Abel 群，带乘法作成一个群. 如果乘法群交换就是域，即交换除环是域.)

(3) 若 $F=\mathbb{C}$，则 $Hom_G(V_1,V_1)=F1_{V_1}\cong F$.

### 2.6.4 基本的一些定理

紧群的任意有限维复表示是酉表示，紧群的任意有限维实表示是正交表示.

紧群的任意复表示可分解成不可约表示的直和，紧群的任意实表示可分解成不可约表示的直和.

$F$ 代表 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$，$C(G,F)$ 表示 $G$ 上连续 $F$-值函数作成的空间 (类似1.17，需注意和1.28做区分，这里记号像是后者，但本质上是前者，换记号是因为现在在用冯克勤的书，而且其实是可以考虑很多域的，之前抽象群那里在老师的带领下只考虑了复数域). 对于 $f,g\in C(G,F)$，定义 $(f,g):=\int_G f(x)\overline{g(x)}dx$，由不变积分的性质知这样定义的 $(\ ,\ )$ 是空间 $C(G,F)$ 上的一个内积，若 $(f,g)=0$ 则称 $f$ 与 $g$ 正交；若 $(f,f)=1$ 则称 $f$ 是规范的.

这里内积的定义和1.17中的定义是一致的，当时用 $g(x^{-1})$ 而不是 $\overline{g(x)}$ 是因为当时 $F$ 是任意域，对于复特征标这两者是一致的.

同样也定义特征标函数...

需再根据冯克勤书 P276 进行补充.

### 2.6.5 Peter-Weyl 定理

是有限群中“不可约复表示的特征标作成类空间的一组基”的自然推广.

需补充.

## 2.7 $SU_2$ 和 $SO_3$ 的复表示

这里结论就特别简单，不过定义以及证明的细节还需要补充.

## 2.8 LCA 的表示

主要参考了 Folland 第四章.

G: Locally Compact Abelian group, Hausdorff

### 2.8.1 对偶群 Dual group 的定义和它是交换拓扑群的简单验证

$\chi$ is said to be a character if $\chi\colon G \to S^1$($S^1$ 是一个紧的拓扑群) is a continuous group homomorphism.

We define the dual group of $G$, $\hat{G} = \{\chi | \chi \text{ is character of } G\}$. 下面证 $\hat{G}$ 也 (因为 $G$ 是 LCA) 是一个局部紧拓扑阿贝尔群 (LCA).

先证它是一个交换群, 当然是先定义群运算. For $\forall \chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$, we define $(\chi_1\chi_2)(g) := \chi_1(g)\chi_2(g)$ and $\chi_1^{-1}(g) = \overline{\chi_1}(g) = \frac{1}{\chi_1(g)}$, clearly, $\chi_1\chi_2 = \chi_2\chi_1$. $\hat{G}$ is a (abelian) group(封闭，结合，有 1(即把任何群 $G$ 中元素映到单位圆上的单位点 1)，有逆).

在证它是一个拓扑群之前我们先在 $\hat{G}$ 上定义一个拓扑，叫紧开拓扑. Compact-open topology. 定义拓扑就是定义哪些是开集，而只需定义单位的邻域系就够了 (原因见下下段). We have group $\hat{G}$ and we denote $\chi_0(g) \equiv 1$, i.e., $\chi_0 \in \hat{G}$ is the unity of group $\hat{G}$. Define $U(K,\varepsilon) = \left\{\chi \in \hat{G} \,\middle|\, |\chi(g) - \chi_0(g)| < \varepsilon \text{ for any } g \in K\right\}$. For any a compact subset $K$ of $G$(不是 $\hat{G}$ 且应注意到 $G$ 是局部紧的所以总可以取任意的紧子集) and $\varepsilon > 0$, we define $U(K,\varepsilon)$, that is a nbd of $\chi_0 \in G$.

Claim. $U(K,\varepsilon)$ is a nbd base of $\chi_0$(可根据定义自己验证) and then define a topo on $\hat{G}$.

因为 $\hat{G}$ 是一个拓扑群，在拓扑群上定义拓扑只需要在单位上定义邻域系即可. 因为若 $U$ 是单位 $e$ 的一个邻域，则对群中任意一个元素 $g$，$gU$ 是该元素 $g$ 的一个邻域 ($f(x) = gx$ 是群上的连续的双射).

> **我的笔记:** 问题
> 1. 为什么局部紧一定可以取到紧子集?
> 2. 之所以在单位上定义邻域系不还是依赖于它是拓扑群么? 所以其实

是，下面用序列收敛的办法证连续从而是拓扑是不需要知道拓扑具体是什么样子的？于是其实是先证了它是拓扑群才定义了什么是拓扑？这也可以？待思考.
3. 老师后面改口了，邻域基，不说邻域系了. 这里是翻译问题么？还是是两个东西？需要验证.

现在证它是一个拓扑群，根据2.1只需证群运算和逆运算是连续的，而我们只需证下面定义的 $\varphi$ 连续即可. 方法很多，证明乘积拓扑空间 $\hat{G}\times\hat{G}$ 到拓扑空间 $\hat{G}$ 上映射的连续可以用序列收敛. $\varphi\colon \hat{G}\times\hat{G}\to\hat{G}, (\chi_1,\chi_2)\mapsto\chi_1\chi_2^{-1}$. Need to show that $\varphi$ is continuous. Suppose that $\chi_{1,k}\to\chi_1$ and $\chi_{2,k}\to\chi_2$ as $k\to\infty$(极限，趋近于), then

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(\chi_1,\chi_2)(g)-\varphi(\chi_{1,k},\chi_{2,k})(g)|\\
=&\left|\chi_1\chi_2^{-1}(g)-\chi_{1,k}\chi_{2,k}^{-1}(g)\right|\\
=&\left|\chi_1(g)\chi_2(g)-\chi_{1,k}(g)\chi_{2,k}^{-1}(g)\right|\\
=&\left|\chi_1(g)\chi_2^{-1}(g)-\chi_1(g)\chi_{2,k}^{-1}(g)+\chi_1(g)\chi_{2,k}^{-1}(g)-\chi_{1,k}(g)\chi_{2,k}^{-1}(g)\right|\\
\leq&|\chi_2(g)-\chi_{2,k}(g)|+|\chi_1(g)-\chi_{1,k}(g)|\to 0,\ \text{as } k\to\infty
\end{aligned}
$$

这里是逐点收敛而非一致收敛.

**我的笔记:** 关于各种收敛的总结.
待补充.

Hence, $\hat{G}$ is a topological abelian group.

### 2.8.2 局部紧阿贝尔群的对偶群是局部紧阿贝尔的

Thm1. $\hat{G}$ is a LCA group.

证明方法可以用 Banach 代数或 $\mathbb{C}^*$ 代数 (音). 可见曹锡华 P180. 命题 4.2(不过他这里是把群运算定义为了加法)，或黎景辉的书，或丘维声的群表示论.

Sketch of the proof:

在单位上找一个紧邻域就行了.

suppose $K_0$ compact nbd of $e$

suppose $W_1$ closed, $1\in W_1\subset S^1$. $W_1$ bounded so $W_1$ is also compact.

$U(K_0, W_1) = \left\{\chi \in \hat{G} | \chi(K_0) \subset W_1\right\} \subset \hat{G}$.

Need to show $U(K_0, W_1)$ is a compact nbd of $\chi_0$.(需证它紧)

### 2.8.3 群和对偶群的一个关于紧和离散的性质

离散的意思是，任何集合都是开集.

$G$ is a LGA group.

①If $G$ is compact, then $\hat{G}$ is discrete.

②If $G$ is discrete, then $\hat{G}$ is compact.

Pf. of ①:

Denote $U = \left\{\chi \in \hat{G} | \chi(G) \subset \{\mathrm{Re} z > 0\}\right\}$($U$ 是 $\hat{G}$ 到 $S^1$ 的子集族的映射在右半圆上的原像，那个映射也就是把特征 $\chi \colon G \to S^1$ 映到单位圆的子集 $\chi(G)$，这里实部大于 $\frac{1}{2}$ 也可以). Then $U$ is an open nbd of $\chi_0 \in \hat{G}$. And then, for any $\chi \in U$, $\chi(G)$ is a subgroup of $S^1$ that contained in $\{\mathrm{Re} z > 0\}$. While the only subgroup of $S^1$ in $\{\mathrm{Re} z > 0\}$ is $\{1\}$. Therefore $\chi(G) = 1$, i.e., $\chi \equiv \chi_0$ and $U = \{\chi_0\}$. $G$ is discrete.

最后一句话的逻辑在于，如果单位的开邻域只有一个点，那这个拓扑一定是离散的.

Pf. of ②.

Homework

### 2.8.4 对偶群的例子

例 1. $\hat{\mathbb{R}} = \{\chi_y(x) = e^{2\pi i x y} | \text{ for some } y \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$

Pf. $\chi_y \colon \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto e^{2\pi i x y}$, satisfies, ①$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \chi_y(x_1 + x_2) = \chi_y(x_1)\chi_y(x_2)$; ②$\chi_y$ is continous, which means $\chi_y$ is a character(根据2.8.1连续群同态是特征，从而所有特征构成对偶群) and then $\hat{\mathbb{R}}$ is the dual group of $\mathbb{R}$. $0 \in \mathbb{R}, \chi_y(0) = 1 \in S^1$ holds for $\forall y \in \mathbb{R}$.

下面证实数群与其对偶群同构，易验证 $\mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ 是一个单射，只需证它是满射，即任意特征 $\chi$ 能唯一确定出一个实数 $r$, 使得 $\chi(x) = e^{2\pi i x r}$.

Because $\chi$ is continous, there exists $a > 0$, s.t., $\int_0^a \chi(t) dt = A \neq 0$.(这是拓扑群 $S^1$ 上建立的不变积分.)

$$\begin{aligned} A\chi(x) &= \int_0^a \chi(t)\chi(x)dt \\ &= \int_0^a \chi(t+x)dt \\ &= \int_x^{a+x} \chi(t)dt. \end{aligned}$$

Hence $\chi(x)$ is differentiable:

$$A\chi'(x) = \chi(x+a) - \chi(x) = (\chi(a)-1)(\chi(x)).$$

We have $\chi'(x) = c\chi(x)$ where $c = \frac{\chi(a)-1}{A}$ and $|\chi(x) = 1|$. It follows that $\chi(x) = e^{2\pi ixy}$ for some $y \in \mathbb{R}$.(这里是解常微分方程的技术.)

Now denote $\delta\colon \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}, y \mapsto \chi_y$ where $\chi_y(x) = e^{2\pi ixy}$. We know that $\delta$ is an isomorphic of topo gps. [because: $\delta(x+y)(t) = \chi_{x+y}(t) = \delta(x)(t)\delta(y)(t)$ holds for $\forall t \in \mathbb{R}$ so $\delta(x+y) = \delta(x)\delta(y)$ and $\delta$ is continous and $\delta$ is a bijecture.]

例 2. $\hat{\mathbb{Z}} = \left\{\chi\colon \mathbb{Z} \to S^1 | \chi(k) = e^{2\pi ikx} \text{ for some } 0 \le x \le 1\right\} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

例 3. $\varphi\colon \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto e^{2\pi ix}$. $\varphi$ is a gp homo. $\mathrm{Ker}\varphi = \{x \in \mathbb{R} | e^{2\pi ix} = 1\} = \mathbb{Z}$.

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

$\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} = \left\{\chi(x) = e^{2\pi ikx} \text{ for some } k \in \mathbb{Z}\right\} \cong \mathbb{Z}$

例 3 还有待进一步思考.

### 2.8.5 Pontryagin Duality 的定义

$G$ is a LCA group, denote the map, for any $x \in G$,

$$\begin{aligned} \delta\colon G &\to \hat{\hat{G}} \\ x &\mapsto \delta_x \end{aligned}$$

where $\delta_x\colon \hat{G} \to S^1$, $\delta_x(\chi) := \chi(x)$ for any $\chi \in \hat{G}$.

### 2.8.6 Pontryagin Duality 的重要定理

$\delta$ is an isomorphism, i.e., $\hat{\hat{G}} \cong G$.

Pf. 先根据对偶群定义 (2.8.1) 确认每一个 $\delta_x$ 都是连续的群同态，从而都是特征，从而所有特征构成的 $\hat{\hat{G}}$ 确确实实是 $\hat{G}$ 的对偶群.

首先验证是群同态. For $\forall \chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$, we have $\delta_x(\chi 1\chi_2) = (\chi_1\chi_2)(x) \xlongequal{\text{见2.8.1处对偶群}\hat{G}\text{中群运算的约定}} \chi_1(x)\chi_2(x) = \delta_x(\chi_1)\delta_x(\chi_2)$, i.e., $\delta_x$ is a gp homo from $\hat{G}$ to $S^1$.

其次验证是连续的. If $\chi_k \to \chi$ as $k \to \infty$, then $\chi_k(x) \to \chi(x)$ for any $x \in G$ as $k \to \infty$ (pointwise convergent). It follows that $\delta_x(\chi_k) \to \delta_x(\chi)$ for any $x \in G$ as $k \to \infty$. Hence, $\chi_x$ is continuous. And so $\delta_x \in \hat{\hat{G}}$.

接下来证明是同构 (双射). 只需证明如下四条.

①$\delta$ is a gp homomorphism, i.e., $\delta_{xy} = \delta_x\delta_y$. For any $\chi \in \hat{G}$, we have $\delta_{xy}(x) = \chi(xy) \xlongequal{\chi\text{是群同态}} \chi(x)\chi(y) = \delta_x(\chi)\delta_y(\chi) \xlongequal{\text{群}\hat{\hat{G}}\text{中群运算的约定}} (\delta_x\delta_y)(\chi)$. Hence $\delta_{xy} = \delta_x\delta_y$.

②$\delta$ is continuous. HW. See, 黎景辉, P79, prop3.15.

③$\delta$ is injective.

④$\delta(G)$ is dense and closed in $\hat{\hat{G}}$.

> **我的笔记:** 稠密闭集意味着就是全集了么? 拓扑都忘记了，还要再看.

### 2.8.7 Pontryagin Duality 的例子

结合上面的例子2.8.4

$\hat{\hat{\mathbb{R}}} \cong \hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$.

$\hat{\hat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}} \cong \hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

### 2.8.8 傅里叶变换 Fourier transform

见 5.23，11：47，12

### 2.8.9 Plancherel formula

好像是数学中特别特别重要的一个东西. 见 5.23，11：47-11：59，1314.

# 3 $SL_2(\mathbb{R})$ 的表示