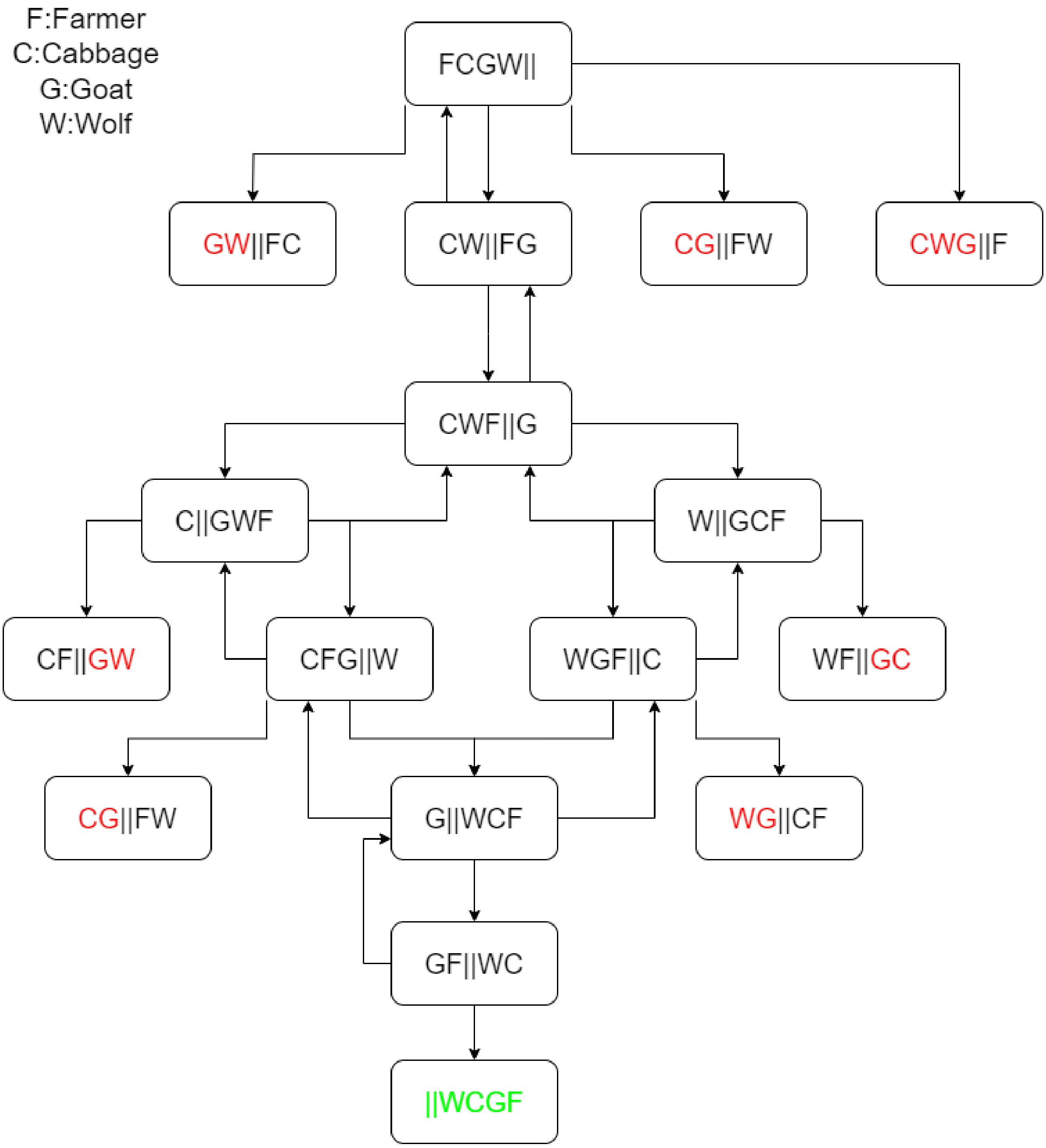
1.过河问题



F:Farmer
C:Cabbage
G:Goat
W:Wolf
FCGW||
GW||FC
CW||FG
CG||FW
CWG||F
CWF||G
C||GWF
W||GCF
CF||GW
CFG||W
WGF||C
WF||GC
CG||FW
G||WCF
WG||CF
GF||WC
||WCGF

2.机场问题

$\because f(x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{c\in C_i}(x_i-x_c)^2+(y_i-y_c)^2$

$\therefore H_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial \sum_{c\in C_i}(2x_i-2x_c)}{\partial x_j}$

$\therefore$ 当 $i\neq j$ 时 $H_{ij}=0$

当 $i=j$ 时 $H_{ij}=\frac{\partial \sum_{c\in C_i}(2x_i-2x_c)}{\partial x_j}=2|C_i|$

$\therefore H=\begin{pmatrix}2|C_1|,0,0\\0,2|C_2|,0\\0,0,2|C_3|\end{pmatrix}$ $|C_i|$ 表示 C_i 集合中元素个数

$\nabla f(x)=\left(\sum_{c\in C_1}(2x_1-2x_c),\sum_{c\in C_2}(2x_2-2x_c),\sum_{c\in C_3}(2x_3-2x_c)\right)^T$

$\therefore H^{-1}\times\nabla f(x)=\left(\frac{2|C_1|x_1-2\sum_{c\in C_1}x_c}{2|C_1|},\frac{2|C_2|x_2-2\sum_{c\in C_2}x_c}{2|C_2|},\frac{2|C_3|x_3-2\sum_{c\in C_3}x_c}{2|C_3|}\right)$

$=(x_1-\overline{x_{c_1}},x_2-\overline{x_{c_2}},x_3-\overline{x_{c_1}})^T$

其中 $\overline{x_{c_i}}$ 表示 C_i 中元素的 x 坐标的平均值

$\therefore x\leftarrow x-(x_1-\overline{x_{c_1}},x_2-\overline{x_{c_2}},x_3-\overline{x_{c_3}})^T$

$\therefore x_i=\overline{x_{c_i}}$

同理，$y_i=\overline{y_{c_i}}$

$\therefore$ 可得第 i 个机场的坐标的 x,y 值为集合 C_i 中所有城市的坐标的 x,y 值的均值。

1-1 bfs

点数N，边数M

时间复杂度：O(M)　（会遍历所有从起点能走到的边（两次），因此复杂度为M）

空间复杂度：O(N+M)

1-2 朴素dij

点数N，边数M

时间复杂度：O(N+M) (每次循环要遍历所有节点找距离最小且未找过的节点，因此复杂度要加上N，影响的情况主要是图中边数少而点数多的情况)

空间复杂度：O(N+M)

1-3 dij

使用c++ stl自带优先队列实现

点数N，边数M

时间复杂度：O(MlogM) (优先队列维护点集合时集合内最多M级别个点（会有重复），因此复杂度为MlogM)

空间复杂度：O(N+M)

2-1 八数码 dfs

由于八数码问题dfs的递归层数较深，所以使用传统的函数递归实现dfs会由于函数连续调用过多爆栈。因此使用deque（或者stack也可）来实现递归。

使用unordered_set记录经历过的状态。

2-2 八数码 bfs

使用unordered_map记录经历过的状态和所需到达的最小距离。

2-3 八数码 dij

和bfs差不多，将维护数据的数据结构从队列换成了优先队列。

2-4 八数码 A-star

估值函数使用每个点（除x以外）与自身原点的曼哈顿距离和。由于每次x移动时最多将一个点离其原点的距离移近一格，所以该估值函数的估值步数必定小于等于实际所需的步数。所以当优先队列pop出终止状态时就是最优解情况。

对每个节点记录到达该节点的父节点，找到最终状态后反向迭代节点成父节点直到找到初始状态，该过程中形成的路径反转后就是初始状态到最终状态的最短路径。

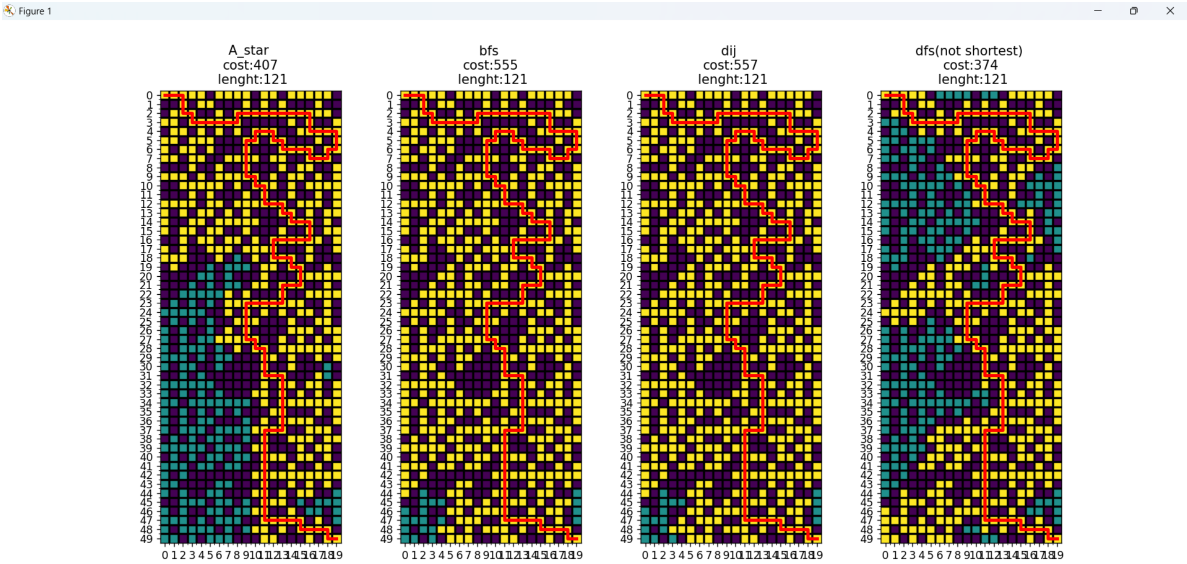
优化点：

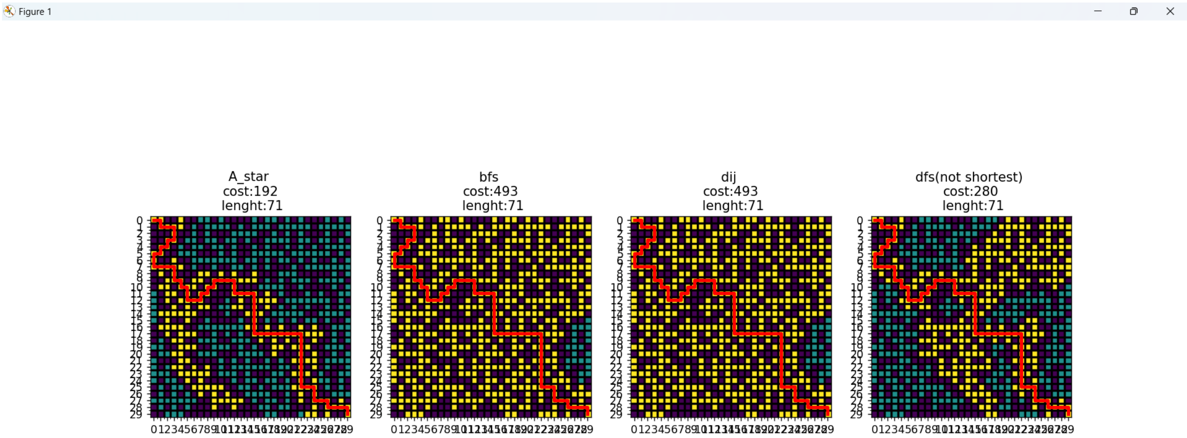
使用unordered_map记录状态对应的估值，用以避免单个状态多次入队时重复的估值计算。

3 迷宫问题

黄色点为遍历过的点，蓝色的为未遍历过的可达点。红色路径为搜索到的（最短）路径。深紫色点为墙壁。dfs不保证能够搜到最短路径，因为dfs如果要搜最短路径需要全部搜索一遍才行。

效果图：





功能：

可自定义地图长宽大小，随机生成地图

可以指定终点在地图右下角，也可以随机生成一个终点（保证可达）

随机终点如图：

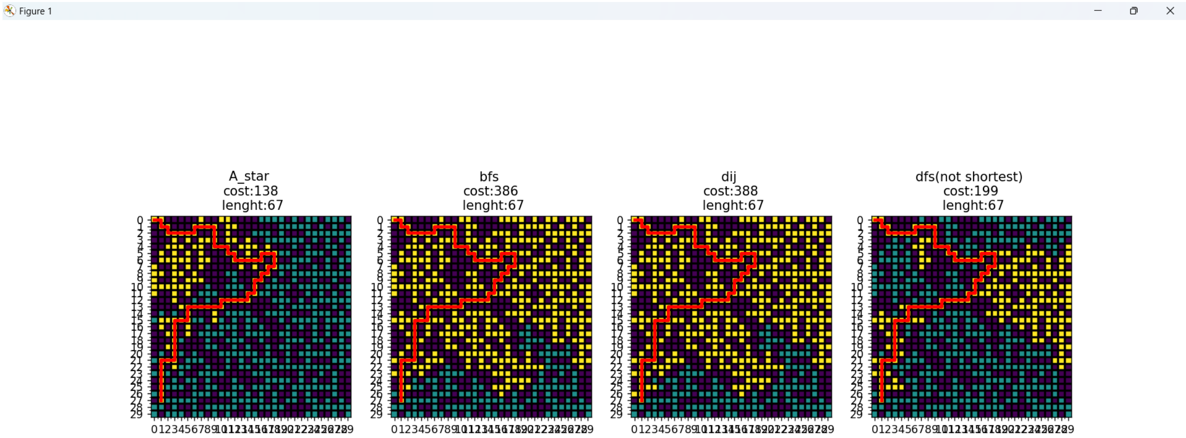


Figure 1
A_star
cost:138
lenght:67
bfs
cost:386
lenght:67
dij
cost:388
lenght:67
dfs(not shortest)
cost:199
lenght:67

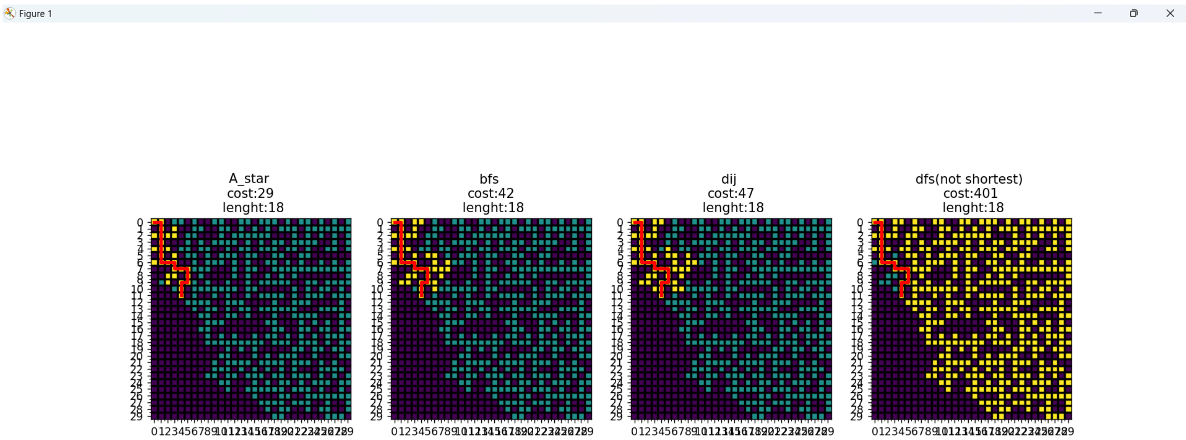


Figure 1
A_star
cost:29
lenght:18
bfs
cost:42
lenght:18
dij
cost:47
lenght:18
dfs(not shortest)
cost:401
lenght:18