Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}(a-1)^2\right)=0,$$

то и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a^n}\right)=0 \quad \blacktriangle$$

П р и м е р 12. Пусть $a>1$. Доказать , что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$.

$\blacktriangle$ Для доказательства воспользуемся определением предела и результатом предыдущего примера.

Пусть $\varepsilon>0$. На множестве натуральных чисел n неравенство

$$\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon$$

равносильно неравенству $n<(a^{\varepsilon})^n$. Поскольку $a^{\varepsilon}>1$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(a^{\varepsilon})^n}=0,$$

поэтому существует натуральное N, такое, что для всех n
geqslantN

$$\frac{n}{(a^{\varepsilon})^n}<1,$$

т.е. $n<a$ Отсюда следует, что для всех $n\geqslant N$

$$0\leqslant\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon;$$

это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0 \quad \blacktriangle$$

Таким образом, из трех последовательостей $\{a^n\},\{n\},\{\log_a n\}, a>1$, превая возрастает существено быстрее других, а третья медленнее других.

П р и м е р 13. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

$\blacktriangle$ Если $k\geqslant 4$, то $2/k\leqslant 1/2$, поэтому при $n\geqslant 4$

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{8}{1\quad 2\quad 3}\cdot\frac{2}{4\qquad n}\leqslant\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=\frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{32}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}=0)$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0 \quad \blacktriangle$

П р и м е р 14. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

$\blacktriangle$ Пусть ε - произвольное положительне число, а N - такое натуральное число, что $N>\varepsilon^2$ *). Тогда для всех $n\geqslant N$ верно неравенство $\sqrt{n}\geqslant\sqrt{N}>\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$. $\blacktriangle$

П р и м е р 15. Доказать, что всякая неограниченная последовательность имеет частичный предел, равный либо $+\infty$, $-\infty$.

*)Например, $N=E(\varepsilon^2)+1$

▲ Неогранниченная последоватеьность непременно неограниченна либо сверху, либо снизу.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ неограниченная снизу. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется член послеловательности x_n такой, что $x_n < -\varepsilon$. Для $varepsilon = 1$ найдется член послеловательности. Среди конечного числа членов последовательности x_{n_1} такой, что $x_{n_1} < -1$, его и примем за первый член подпослеловательности. Среди конечного числа членов последовательности с номерами от 1 до n_1 имеется наименьший, его обозначим m_1. Возьмем теперь $\varepsilon = 2$. Из неогранниченности последовательности снизу следует, что найдетсячлен x_{n_2} такой, что $x_{n_2} < -2$ и $x_{n_2} < m_1$. Последнее в силу выбора m_1 означает, что $n_2 > n_1$. Примем x_{n_2} за второй член подпоследовательности. Аналогично будем находить члены подпоследовательности x_{n_3} и т.д.

Докажем, что этот процесс не оборвется. Допустим, что найден член подпоследовательности x_{n_k}, $k \geqslant 2$, удовлетворяющий неравенству $x_{n_k} < -k$. Обозначим через m_k наименьший среди членов последовательности от x_1 до x_{n_k}. Возьмем $\varepsilon = k+1$. В силу неограниченности снизу найдется член последовательности $x_{n_{k+1}}$ такой, что $x_{n_{k+1}} < -(k+1)$ и $x_{n_{k+1}} < m_k$. Из последнего следует, что $n_{k+1} > n_k$, и, значит, x_{nk+1} можно принять за $(k+1)$-й член подпоследовательности.

Таким образом, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k} < -k$ для любого k, и, значит,

$$\lim k \to \infty x_{n_k} = -\infty.$$

Аналогично доказывается, что последовательность, неограниченная сверху, имеет подпоследовательность, пределом которй служит $+\infty$.▲

П р и м е р 16. Для последовательности

$$x_n = \frac{(3\cos(\pi n/2) - 1) + 1}{n}, \quad n \in N,$$

найти множество частичных пределов $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{x_n}}$, а также $\sup\{x_n\}$ и $\inf\{x_n\}$.

▲ При $n = 4k$ имеем

$$x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$$

, и, значит, $\lim\limits_{k\to} x_{4k} = 2, 2 < x_{4k} \leqslant 2 + 1/4$, причем $x_4 = 9/4$. При $n = 4k+1$ или $n = 4k+3$ имеем

$$x_n = \frac{-n+1}{n} = -1 + \frac{1}{n},$$

и, значит, $-1 < x_n < 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{4k+1} = -1$. При $nn = 4k+2$ имеем

$$x_n = \frac{-n+1}{n} = -1 + \frac{1}{n},$$

и значит, $-1 < x_n < 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} = \lim\limits_{k\to\infty} x_4k + 3 = -1$. При $n = 4k+2$ имеем

$$x_n = \frac{-4n+1}{n} = -4 + \frac{1}{n},$$

значит, $-4 < x_n < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k+2} = -4$.