卒業研究ノート ver1.5

Kazuma Nakagoshi

2022 年 12 月 12 日

概要

abstract

目次

はじめに

このノートは，ゼミ発表の補助として用いるために書いている．煩雑な計算をゼミ内ですべて触れることは難しいので適宜このノートを参照していただきたい．なお，各回でノートを作っていく形式ではなく更新していく形を取るので，下記途中や中途半端に書き残しているところなどお見苦しいところはあるがお許しください．

ここで，発表内容や方針などについて触れておきたい．私の卒業研究のテーマは第1回でも触れた通り，「4次元空間内での重力場方程式の Einstein 方程式の唯一性」や「Gauss-Bonnet term のような高次曲率項についての考察」などとなる．そこで，これらのことを学ぶ上で以下の論文を読んでいこうと予定している．[*1]

1. (main) The Einstein Tensor and its Generalizations
2. The Uniqueness of the Einstein Field Equations in a Four-Dimensional Space

順序としては，第2回では 2. の論文を扱い，第3回で 1. の論文について扱い，今後の状況に応じて第4回で 1. の論文か4次元に話を絞り Gauss-Bonnet 項についての話題のみとするかを予定している．

第I部
The Uniqueness of The Einstein Field Equation in a Four-Dimensional Space

1 Introduction

この論文は，Einstein 方程式が4次元では唯一の方程式になる事実を示したものである．

[*1] main 論文などについては今後の進捗状況に応じて変更・追加する可能性がある．

1.1　場の解析力学

前期にも扱いましたが Lagrangian の変数を場の変数にしたときの Euler-Lagrange 方程式[*2]について少し解説する．今ここでは一般に場の変数を $\Psi^A = \Psi^A(x^i)$ として，Lagrangian は

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\Psi^A, \Psi^A_{,i_1}, \Psi^A_{,i_1 i_2}, \dots, \Psi^A_{,i_1 i_2 \dots i_r})$$

であり，

$$\Psi^A_{,i_1 i_2 \dots i_r} \equiv \frac{\partial^p \Psi^A}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p}}$$

と定義する．このとき，EL 方程式については以下のようになる．

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^A} + \sum_{p=1}^{r} (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_p}} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^A_{,i_1 i_2 \dots i_r}} \right) = 0 \tag{1.2}$$

基本的な発想としては通常の EL 方程式の導出と大差はない．つまり，高階微分項の変分を順に取っていき微分と変分を交換し，作用積分の部分積分的操作を行って各項の一つ次元の落ちた表面項での変分がゼロと仮定して，それ以外の部分は $\delta\Psi^A$ でくくることができ，恒等的に作用変分がゼロであるための必要十分条件から導くことができる．

(1.2) においては任意の高階微分まで考えているが，通常 3 階以上の高階微分項が現れてしまうと問題が発生するのでせっかく取った高階微分項は今回は考えずこれ以後は $r = 2$ で考える．また，一般の場の変数を考えているがここでは Riemann 計量 g_{ij} を取る．

1.2　この論文の構成

なので，この論文においては Lagrangian は

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,kh}) \tag{1.3}$$

を取る．この論文の最終目標は，このような Lagrangian のもとで，次元を 4 次元に限定したときの EL 方程式を具体的に求めたとき，Einstein 方程式が唯一の方程式となることを示すことである．しかしこのような Lagrangian を用いたとき (1.2) を見てもわかるように，4 次の微分項を含んでしまう．Einstein 方程式にはこれらの項は含まれないはずである．

[*2] 以後 EL 方程式と省略

そこで，Section2 では (1.2) の高階微分項 $g_{ij,rst}, g_{ij,rstu}$ が消えるための必要十分条件をそれぞれ求める．Section3 では具体的に次元を固定し得られた必要十分条件から Lagrangian の形具体的に書き下す．$n=2,3$ の場合には,

$$\mathscr{L} = a\sqrt{g}R + b\sqrt{g} \tag{3.1}$$

となる．$n=4$ では，結論として得られた Lagrangian から，EL 方程式が Einstein 方程式に一致することが導ける．

2 Degenerate Lagrange Densities in n-Dimensions

2.1 前提条件について

これ以後では，以下のことを仮定して話を進めていく．座標変換 $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ は，C^3 級函数まで仮定し，そこから得られる計量は

$$\det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right\| > 0$$

のように正定値として定義する．また，議論を円滑にすすめるために以下の記号を定義する．

$$g_{ij,k} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \mathrm{etc}\ldots$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{ij,kh} &\equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{ij,kh}} \\ \Lambda^{ij,k} &\equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{ij,k}} \\ \Lambda^{ij} &\equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{ij}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

最後に，EL 方程式の左辺を

$$E^{hk} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\Lambda^{hk,i} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Lambda^{hk,ij}\right] - \Lambda^{hk} \tag{2.4}$$

として，EL 方程式は

$$E^{hk} = 0 \tag{2.3}$$

と表せる．このとき，当然 E^{hk} はそれぞれ愚直に連鎖律に基づき展開すると引数は

$$E^{hk} = E^{hk}(g_{ij}, g_{ij,r}, g_{ij,rs}, g_{ij,rst}, g_{ij,rstu}) \tag{2.5}$$

となり，4 次の微分項まで含んでしまう．[*3]この Section の主目的はこの 3 次・4 次の微分項の消えるための必要十分条件を探すことである．つまり，最終的に E^{hk} は,

$$E^{hk} = E^{hk}(g_{ij}, g_{ij,r}, g_{ij,rs}) \tag{2.6}$$

になることを目的としている．このようになるような条件を見つけられれば，Lagrangian と E^{hk} は同じ引数を持つ函数となる．この論文では，この E^{hk} を *L-degenerate* と呼ぶことにする．

2.2 対称性について

この項では，定義した記号の対称性について触れていく．Lagrangian 密度であるためには，スカラー函数である必要がある．そのためには，以下のような恒等式を満たしている必要がある．

$$\Lambda^{ij,kh} + \Lambda^{ih,jk} + \Lambda^{ik,hj} = 0 \tag{2.7}$$

$$-\Lambda^{hk,i} = \Gamma^i_{jm}\Lambda^{hk,jm} + 2\Gamma^k_{jm}\Lambda^{hj,im} + 2\Gamma^h_{jm}\Lambda^{kj,im} \tag{2.8}$$

ここで，Γ^i_{jm} については通常の Christoffel 記号

$$\Gamma^i_{jm} = \frac{1}{2}g^{ih}(g_{hj,m} + g_{mh,j} - g_{jm,h})$$

を用いる．(2.7) から次のような対称性が導ける．

$$\Lambda^{ij,kh} = \Lambda^{kh,ij} \tag{2.9}$$

この対称性は，Bianchi 恒等式から Einstein テンソルを導いたときのように導くことができる．

Proof. (2.7) の添字を cyclic にまわしてできる 4 つの式を符号を交互に入れ替え辺々足し合わせていく．

$$\begin{aligned}
\Lambda^{ij,kh} + \Lambda^{ih,jk} + \Lambda^{ik,hj} &= 0 \\
-\Lambda^{hi,jk} - \Lambda^{hk,ij} - \Lambda^{hj,ki} &= 0 \\
\Lambda^{kh,ij} + \Lambda^{kj,hi} + \Lambda^{jh,ik} &= 0 \\
-\Lambda^{jk,hi} - \Lambda^{ji,kh} - \Lambda^{jh,ik} &= 0
\end{aligned}$$

[*3] 具体的に展開したものに関しては Section2.3 以降で触れる．

このとき，偏微分の交換可能性と計量テンソルの添字の対称性を用いて，

$$2\Lambda^{ij,kh} - 2\Lambda^{kh,ij} = 0$$

より，(2.9) を得られる．■

2.3　EL 方程式の展開

この項では，具体的に 4 次の微分項などが消えていくための必要十分条件を求めるために (2.4) を具体的に展開していく．そのための準備として，新たに以下の記法を定義していく．

$$\Lambda^{ij,kh;rs,tu} \equiv \frac{\partial \Lambda^{ij,kh}}{\partial g_{rs,tu}} \tag{2.10}$$

$$\chi^{ij,kh;rs,tu} \equiv \Lambda^{ij,kh;rs,tu} + \Lambda^{ij,ku;rs,ht} + \Lambda^{ij,kt;rs,uh} \tag{2.11}$$

また，(2.10) に関して偏微分交換可能性と (2.9) により順序の入れ替えに対して以下のような対称性を持つ．

$$\Lambda^{ij,kh;rs,tu} = \Lambda^{rs,tu;ij,kh} = \Lambda^{ij,kh;tu,rs} \tag{2.12}$$

以上で，準備は整ったので具体的に展開をしていく．Lagrangian は仮定より 2 次の微分項までしか持たないので，$\mathscr{L} = \mathscr{L}(g_{mn}, g_{mn,p}, g_{mn,pq})$ となる．このことから，E^{hk} のそれぞれの項を連鎖律に従い展開していく．

はじめに，$\partial\Lambda^{hk,i}/\partial x^i$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{hk,i}}\right) &= \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{mn}\partial g_{hk,i}} + \frac{\partial g_{mn,p}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{mn,p}\partial g_{hk,i}} + \frac{\partial g_{mn,pq}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{mn,pq}\partial g_{hk,i}} \\
&= \Lambda^{hk,i;mn} g_{mn,i} + \Lambda^{hk,i;mn,p} g_{mn,pi} + \Lambda^{hk,i;mn,pq} g_{mn,pqi}
\end{aligned}$$

のようになる．同様にして，$\partial^2\Lambda^{hk,ij}/\partial x^i\partial x^j$ の項は，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{hk,i}}\right) \\
&= \Lambda^{hk,ij;mn} g_{mn,ij} && + \Lambda^{hk,ij;mn,p} g_{mn,pij} && + \Lambda^{hk,ij;mn,pq} g_{mn,pqij} \\
&+ \Lambda^{hk,ij;mn;rs} g_{mn,i} g_{rs,j} && + \Lambda^{hk,ij;mn;rs,t} g_{mn,i} g_{rs,tj} && + \Lambda^{hk,ij;mn;rs,tu} g_{mn,i} g_{rs,tuj} \\
&+ \Lambda^{hk,ij;mn,p;rs} g_{mn,pi} g_{rs,j} && + \Lambda^{hk,ij;mn,p;rs,t} g_{mn,pi} g_{rs,tj} && + \Lambda^{hk,ij;mn,p;rs,tu} g_{mn,pi} g_{rs,tuj} \\
&+ \Lambda^{hk,ij;mn,pq;rs} g_{mn,pqi} g_{rs,j} && + \Lambda^{hk,ij;mn,pq;rs,t} g_{mn,pqi} g_{rs,tj} && + \Lambda^{hk,ij;mn,pq;rs,tu} g_{mn,pqi} g_{rs,tuj}
\end{aligned}$$

のようになる．これらの計算から 4 次の微分項は青下線部のところのみとなり，3 次以下の微分の項を今は $O^{hk} = O^{hk}(g_{ij},\ g_{ij,r},\ g_{ij,rs},\ g_{ij,rst})$ として

$$E^{hk} = -\Lambda^{hk,ij;rs,tu} g_{rs,tuij} + O^{hk} \tag{2.13}$$

と書き換えることができる．

2.4 Lemma 1. について

先の書き換えの結果から，E^{hk} の $g_{rs,tuij}$ のみを取り出すことができた．また，E^{hk} の中に 4 次の項を含まないということは，

$$\frac{\partial E^{hk}}{\partial g_{rs,tuij}} = 0$$

が成り立つと言い換えられる．このことから，安直にその係数がゼロになる，つまり

$$\Lambda^{hk,ij;rs,tu} = 0$$

としてしまうとここまでの計算が台無しになってしまう．

注意すべきは，計量の 4 次の微分項に関しては $(tuij)$ の添字はどれを交換しても偏微分は交換可能であると仮定しているため対称であり，さらに今 (2.13) の通りそれぞれの添字は縮約を取っているということだ．このようなことを留意すれば，どのような順序の添字で微分してもしっかりと消去可能であるための条件は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial E^{hk}}{\partial g_{rs,tuij}} \simeq& \frac{\partial}{\partial g_{rs,tuij}}((\Lambda^{hk,ij;rs,tu} + \Lambda^{hk,iu;rs,jt} + \Lambda^{hk,it;rs,uj} \\ &+ \Lambda^{rs,tu;hk,ij} + \Lambda^{rs,tj;hk,ui} + \Lambda^{rs,ti;hk,ju}) g_{rs,tuij}) \\ =& \chi^{hk,ij;rs,tu} + \chi^{rs,ij;hk,tu} = 0\end{aligned}$$

Lemma 1. E^{hk} が

$$\frac{\partial E^{hk}}{\partial g_{rs,tuij}} = 0$$

のようになるための必要十分条件は

$$\chi^{hk,ij;rs,tu} = -\chi^{rs,ij;hk,tu} \tag{2.14}$$

である．

2.5 Lemma 2. について

Section2.3 での計算をもとに，O^{hk} の 3 次の微分項を抽出していく．それ以下の項を $P^{hk} = P^{hk}(g_{ij}, g_{ij,r}, g_{ij,rs})$ とする．具体的に抽出したものが

$$
\begin{aligned}
&O^{hk} - P^{hk} \\
&= \Lambda^{hk,i;mn,pq} g_{mn,pqi} \\
&- (\Lambda^{hk,ij;mn,p} g_{mn,pij} + \Lambda^{hk,ij;mn;rs,tu} g_{mn,i} g_{rs,tuj} + \Lambda^{hk,ij;mn,p;rs,tu} g_{mn,pi} g_{rs,tuj} \\
&+ \underline{\Lambda^{hk,ij;mn,pq;rs} g_{mn,pqi} g_{rs,j} + \Lambda^{hk,ij;mn,pq;rs,t} g_{mn,pqi} g_{rs,tj} + \Lambda^{hk,ij;mn,pq;rs,tu} g_{mn,pqi} g_{rs,tuj}})
\end{aligned}
$$

これを，計量の 3 次の微分項できれいに括りまとめ上げその項が消えるために条件を探っていく．青下線部を微分する前の状態に書き換える．その際に少々縮約を取っている文字の書き換えを行っている．

$$
\begin{aligned}
&O^{hk} - P^{hk} \\
&= \Lambda^{hk,r;ab,cd} g_{ab,cdr} \\
&- \Lambda^{hk,rm;ab,c} g_{ab,cmr} - \Lambda^{hk,mc;ab;rs,tu} g_{ab,m} g_{rs,tuc} - \Lambda^{hk,em;ab,c;rs,tu} g_{ab,cm} g_{rs,tue} \\
&\underline{- \frac{\partial}{\partial x^r} \Lambda^{hk,rm;ab,cd} g_{ab,cdm}}
\end{aligned}
$$

ここで，青下線部について着目すると

$$
-\frac{\partial}{\partial x^r} \Lambda^{hk,rm;ab,cd} g_{ab,cdm} = -[3,1] - [3,2] - [3,3]
$$

となる．ただし，$[3,i]$ について微分を展開した計量の微分階数に着目し省略したものである．このことに注意すると，先の式同様の式とまとめて次のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
O^{hk} - P^{hk} = -2\frac{\partial}{\partial x^r} \left(\Lambda^{hk,rm;ab,cd}\right) g_{ab,cdm} + \underline{\Lambda^{hk,r;ab,cd} g_{ab,cdr}} \\
- \underline{\Lambda^{hk,rm;ab,c} g_{ab,cmr}} + \Lambda^{hk,em;ab,cd;rs,tu} g_{ab,dcm} g_{rs,tue}
\end{aligned}
\tag{*1}
$$

右辺をそれぞれの項に着目して変形していき最終的に，

$$
\begin{aligned}
&O^{hk} - P^{hk} \\
&= -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\chi^{hk,rm;ab,cd}\right) g_{ab,cdm} + \Lambda^{hk,im;ab,cd;rs,tu} g_{ab,cdm} g_{rs,tui} \\
&\underline{-\Gamma^m_{ji} \Lambda^{hk,ji;ab,cd} g_{ab,cdm} - \frac{2}{3} \Gamma^k_{ji} \chi^{hj,im;ab,cd} g_{ab,cdm} - \frac{2}{3} \Gamma^h_{ji} \chi^{kj,im;ab,cd} g_{ab,cdm}} \\
&\underline{+\Gamma^c_{ji} \Lambda^{ab,ji;hk,md} g_{ab,cdm} + \frac{2}{3} \Gamma^a_{ji} \chi^{bj,ic;hk,md} g_{ab,cdm} + \frac{2}{3} \Gamma^b_{ji} \chi^{aj,ic;hk,md} g_{ab,cdm}}
\end{aligned}
\tag{*2}
$$

のような形にしていく．

(*1) の右辺の第 1 項は，ab については完全に対称であるので縮約を取っていてもここの入れ替えの可能性は無視できる．問題になるのは，cdm の縮約部分である．Λ の cd は対称であるが，m とは対称ではない．なのですべての可能性は，mcd に関して cyclic な入れ替えをしたものとなる．よって重複分と相殺するように，$3!/2$ で割れば，(*2) の右辺第 1 項のように書き換えられる．

次に，赤線部については (2.8) を用いて展開する．その際セミコロン前後の入れ替えに関しては対称であること，Christoffel 記号に $g_{ab,cd}$ が含まれないことを思い出すと，

$$
\begin{aligned}
&\underline{\Lambda^{hk,r;ab,cd} g_{ab,cdr}}\\
&= -\frac{\partial}{\partial g_{ab,cd}} \left(\Gamma^m_{ji}\Lambda^{hk,ji} + 2\Gamma^k_{ji}\Lambda^{hj,im} + 2\Gamma^h_{ji}\Lambda^{kj,im}\right) g_{ab,cdm}\\
&= -\Gamma^m_{ji}\Lambda^{hk,ji;ab,cd} g_{ab,cdm} - 2\Gamma^k_{ji}\Lambda^{hj,im;ab,cd} g_{ab,cdm} - 2\Gamma^h_{ji}\Lambda^{kj,im;ab,cd} g_{ab,cdm}\\
&= -\Gamma^m_{ji}\Lambda^{hk,ji;ab,cd} g_{ab,cdm} - \frac{2}{3}\Gamma^k_{ji}\chi^{hj,im;ab,cd} g_{ab,cdm} - \frac{2}{3}\Gamma^h_{ji}\chi^{kj,im;ab,cd} g_{ab,cdm}
\end{aligned}
$$

のように変形できる．ただし，最後の変形では先の議論同様に右辺第 2，3 項を χ を用いて書き換えた．同様に，青線部も書き換えることができる．注意すべき点として，原論文に準拠してダミーインデックスを赤線部では $r \to m \to i$ のように適宜変更している．

次に，最後の変形を行う．最後の変形では， (*2) は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
O^{hk} - P^{hk} = \Bigg[&-\frac{2}{3}\left(\chi^{hk,mi;rs,tu}\right)_{|m} + \Lambda^{hk,mi;rs,tu;ab,cd} g_{ab,cdm}\\
&+ \frac{1}{3}\Gamma^p_{jm}\alpha_p^{i,hk,mj;rs,tu}\Bigg] g_{rs,tui}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\alpha_p^{i,hk,mj;rs,tu} \equiv &\delta^i_p(\chi^{hk,mj;rs,tu} + \chi^{rs,mj;hk,tu})\\
&+ \delta^t_p(\chi^{hk,mj;rs,ui} + \chi^{rs,mj;hk,ui})\\
&+ \delta^u_p(\chi^{hk,mj;rs,ti} + \chi^{rs,mj;hk,ti})\\
&+ \delta^r_p(\chi^{hk,mi;js,tu} + \chi^{js,mi;hk,tu} + \chi^{hk,ji;ms,tu} + \chi^{sm,ji;hk,tu})\\
&+ \delta^s_p(\chi^{hk,mi;jr,tu} + \chi^{jr,mi;hk,tu} + \chi^{hk,ji;mr,tu} + \chi^{rm,ji;hk,tu})
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

と定義する．

この変形に関してはまだ検証できていません．

(2.15) を用いると，

$$
\frac{\partial E^{hk}}{\partial g_{ij,rst}} = \frac{\partial O^{hk}}{\partial g_{ij,rst}} = 0
$$

となる．このときの必要十分条件は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial E^{hk}}{\partial g_{ij,rst}} = \frac{\partial O^{hk}}{\partial g_{ij,rst}} \\
&= \frac{\partial}{\partial g_{q_1q_2,q_3q_4q_5}}\left(\left[-\frac{2}{3}\big(\chi^{hk,mi;rs,tu}\big)_{|m} + \Lambda^{hk,mi;rs,tu;ab,cd} g_{ab,cdm} + \frac{1}{3}\Gamma^{p}_{jm}\alpha_p^{i,hk,mj;rs,tu}\right] g_{rs,tui}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial g_{q_1q_2,q_3q_4q_5}}\Big[\ \Big] g_{ab,cdm} + \Big[\ \Big] \frac{\partial}{\partial g_{q_1q_2,q_3q_4q_5}} g_{ab,cdm} \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

となる．この変形に関してもまだ検証できていません．

Lemma 2.

$$
\frac{\partial E^{hk}}{\partial g_{ij,rst}} = 0
$$

となるための必要十分条件は

$$
2\chi^{hk,mi;rs,tu}{}_{|m} - \Gamma^{p}_{jm}\alpha_p^{i,hk,mj;rs,tu} = 0 \tag{2.17}
$$

となる．

2.6 Theorem 1.

以上の Lemma1. と Lemma2. の 2 つが同時に満たされるとき計量の 3 次 4 次の項が消えるための必要十分条件となるということになる．しかし，注意したいこととして Lemma1. の (2.14) が満たされるとき，(2.16) は常にゼロとなる．つまり，条件はよりコンパクトに

$$
\chi^{hk,mi;rs,tu}{}_{|m} = 0
$$

ということになる．よって，結論として下記の定理を導くことができる．

Theorem 1.

$$
\mathscr{L} = \mathscr{L}(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,kh})
$$

となるための必要十分条件は

$$
\begin{aligned}
&\chi^{hk,ij;rs,tu} = -\chi^{rs,ij;hk,tu} \\
&\chi^{hk,mi;rs,tu}{}_{|m} = 0
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

の 2 つである．

2.7 Remark 1. と Lemma 3.

この項は少々脱線である．今議論の順序として 4 次の微分項から 3 次の微分項を順に落としていったが，3 次の項だけ消え 4 次の項だけ生き残るような可能性については議論してこなかった．つまり，Lemma1. が成り立っていない場合での Lemma2. の (2.17) のより強い条件について考える必要がある．しかし，実はこの式は任意の座標変換に対称でないつまりテンソルになっていない．見ての通り Christoffel 記号が顕に入っており，いかなる Christoffel に対して 3 次の項が欠落するには以下のような条件となる．

Lemma 3. g_{ij} の 3 次の微分項が消えるためには，

$$\chi^{hk,mi;rs,tu}{}_{|m} = 0$$
$$\alpha_p^{i,hk,mj;rs,tu} = 0$$

が成り立つときに限り，任意の座標変換で E^{hk} から落とすことができる．

つまり注意しなければならないのは，(2.16) が 0 の条件から (2.14) が常に満たされるわけではないことに注意しなければならない．

3 Dimensionality Restrictions

この章では，最終的に導きたい結論であった 4 次元においては Riemann 計量による場の方程式 4 次元では Einstein 方程式が唯一の方程式になることを示していく．実は，これまでの議論は触れてこなかったが次元 n に関する指定を何もしていなかった．つまり，これより前の結果は一般の次元 n で成り立つ結論となっている．

これ以後の議論では，具体的に次元を 2 次元，3 次元，4 次元と指定して進めて場の方程式が得ていく．

3.1 Lemma 4. について

まずは，簡単な 2 次元と 3 次元について検証していく．

Lemma 4. $n = 2, 3$ のいづれの場合で，なおかつ (2.14) が満たされるとき，

$$\Lambda^{ij,kh;rs,tu} = 0$$

となる．これは，$\Lambda^{ij,kh;rs,tu}$ のもつ対称性 (2.7)，(2.9) と (2.14) を適応すると $n = 2, 3$ の場合にはその多くは重複し結果的に 0 となることを示せるはずである．鋭意検証中で

す．このことから言える結論は,

$$\chi^{hk,mi;rs,tu} = 0$$

ということになる．当然その発散はなくなり，反対称にしようがゼロはゼロななので Lemma 1. と 2. は自動的に満たすことなる．つまり，$n = 2, 3$ の場合においては花から 3 次の EL 方程式はないという結論となる．しかしこれで満足してはいけない，これよりも強い結論を引き出すことができる．

3.2 Theorem 2. とその証明

Theorem 2.$n = 2, 3$ のときに限り，2 次の EL 方程式が得られる Lagrangian は以下のみである．

$$\mathscr{L} = a\sqrt{g}R + b\sqrt{g} \tag{3.1}$$

ただし，$a, b = const.$ であり R はスカラー曲率である．

proof. Lemma 4. と (2.10) から,

$$\Lambda^{ij,kh;rs,tu} = \frac{\partial \Lambda^{ij,kh}}{\partial g_{rs,tu}} = 0$$

より,

$$\Lambda^{ij,hk} = \Lambda^{ij,hk}(g_{rs}, g_{rs,t}) \tag{3.2}$$

となる．ここで，DU PLESSIS の（[3],p.53）[*4]の論文によれば，$g_{rs,tu}$ に依存しないそれ以下の微分項による任意のテンソルは 1 次の微分項からも独立しているため,

$$\Lambda^{ij,hk} = \Lambda^{ij,hk}(g_{rs})$$

とかける．証明は捜索検討中.

3.3 Theorem 3. とその証明

3.4 Theorem 4. とその証明

3.5 Theorem 5. とその証明

[*4] この論文が見つからない．

第 II 部

The Einstein Tensor and Its Generalizations