Vordefinierte Mengen von Zahlen

$\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.

Die Natürliche Zahlen werden induktiv wie folgt definiert

1. $0 \in \mathbb{N}$

2. Falls $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $n+1 \in \mathbb{N}$

3. Die Menge $\mathbb{N}$ ist die kleinste Menge, für die 1+2 gilt

$\mathbb{N}^*$ ist die Menge der positiven Zahlen

$\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \{\tfrac{n}{q} \mid n \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}^*\}$$

$\mathbb{R}$ ist die Menge der reelen Zahlen

Formal werden die Reelen Zahlen als Dedikant-Schnitte

3. Auswahl-Axiom: Einschränkung des Komprehensionsaxiom.

Ist M eine vorgegebene Menge und ist $p(x)$ eine ~~Eig~~ Eigenschaft, die ein Element $x \in M$ haben kann, dann ist

$$\{x \in M \mid p(x)\}$$

eine Menge

Bsp. $G := \{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{\exists k \in \mathbb{N} : n = 2 \cdot k}_{p(n)}\}$

4

4) Potenzmengen

Eine Menge M ist Teilmenge einer Menge N g.d.w. jedes Element aus M auch ein Element der Menge N ist.

Formal: $M \subseteq N \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x : (x \in M \rightarrow x \in N)$

(lese: M Teilmenge von N)

Die Potenzmenge einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M

Formal: $2^M := \{ A \mid A \subseteq M \}$

Bsp. $2^{\{1,2,3\}} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$

Die Kardinalität einer endlichen Menge ist die Anzahl ihrer Elemente, geschrieben $\mathrm{kard}(M)$

Falls M eine endliche Menge ~~ist~~ ist, gilt:

$$2^{\mathrm{kard}(M)} = \mathrm{kard}(2^M)$$

5. Vereinigung von Mengen

Sind A und B Mengen, so ist die Vereinigungsmenge von A und B die Menge der Objekte, die Element A oder B sind

$$A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

Bsp $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

Ist ~~große X~~ X eine Menge von Mengen, dann ist die Vereinigung dieser Menge X die Menge aller Objekte x, die Element einer Menge $M \in X$ sind

$$\bigcup X := \{ x \mid \exists M : (M \in X \wedge x \in M) \}$$

Bsp. $\bigcup \{\{1,2,3\}, \{3,2,5\}, \{7\}\} = \{1,2,3,5,7\}$

Aufgabe 1: Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$. Berechnen die $\bigcup 2^M$

$$\bigcup 2^M = M$$

6) Der Schnitt zweier Mengen

Sind A und B Mengen, so ist der Schnitt von A und B als die Menge aller Objekte ~~deff~~ definiert, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B enthalten sind.

$$A \cap B := \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

(Lese: A geschnitten B)

Sei X Menge von Mengen. Dann ist der Schnitt von X (geschrieben $\bigcap X$) als die Menge aller Objekte definiert, die in allen Mengen aus X enthalten sind.

$$\bigcap X := \{x \mid \forall M \in X : x \in M\}$$

Bsp. $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$

$$\bigcap \{\{1,2,3\}, \{1,3,7\}, \{2,5,8\}\} = \emptyset$$

Aufgabe 2 Es sei $M \subseteq N$ Berechnen sie $\bigcap 2^M = \emptyset$

7. Differenzmenge

Sind A und B Mengen, so ist die Differenzmenge $A \setminus B$ (lese A ohne B) die Menge der Elemente aus A, die nicht Element der Menge sind.

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$$

Schreibweise $x \notin B$ ist def als $\neg(x \in B)$

Bsp. $\{1,3,2,8,7\} \setminus \{7,5,4,2,1\} = \{3,8\}$

8. Bildmenge

Ist M eine Menge und f ist eine Funktion, so $f(x)$ für alle $x \in M$ definiert ist, Dann ~~ist~~ ~~M~~ ist die Bild-Menge von M unter f die Menge aller Funktionswerte $f(x)$, für die ~~gilt~~ $x \in M$ ist

$$f(M) := \{f(x) \mid x \in M\}$$

Bsp. $f(x) = x^2$, $M := \{1,2,3\}$

$f(M) = \{1,4,9\}$

9) Kartesische Produkte

Ein Paar zweier Objekte x und y wird als

$$\langle x, y \rangle$$

geschrieben. Das kartesische Produkt der Mengen A und B ist die Menge der Paare $\langle x, y \rangle$, für die $x \in A$ und $y \in B$ gilt

$$A \times B := \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

~~A~~ kreuz B

Bsp. $\{1,2,3\} \times \{4,5\} = \{(1,4),(1,5),(2,4)(2,5),(3,4)(3,5)\}$

Verallgemeinerung n-Tupel

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$$

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{ \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mid x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2 \ldots x_n \in$$

Es seien A und B endliche Mengen

~~ca~~ ~~card~~ $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$

Das Extensionalitäts-Axiom: Zwei Mengen sind genau ~~dan~~ genau dann gleich, wenn ~~di~~ sie die selben Elemente enthalten

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Bsp. $\{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{2,3,2,1\}$

$\mathbb{N}^+$: Menge der positiven natürlichen Zahlen

$$F := \{ n \in \mathbb{N}^+ \mid \exists x, y, z \in \mathbb{N}^+ : x^n + y^n = z^n \}$$

$1 \in F$, denn $1^1 + 1^1 = 2^1$

$2 \in F$, denn $3^2 + 4^2 = 5^2$

Fermat 1637 $F = \{1, 2\}$

Wiles & Taylor 1994: Fermat'sche Vermutung bewiesen

Logik

Python

1. Python unterstützt Mengen in natürlicher Weise
2. Daher eignet es sich Python zur Implementierung von Algorithmen, die auf Mengenlehre basieren
2. Python ist sehr weit verbreitet

Auswerten einer Zelle mit Shift + Enter

```
conda create -n <name> python=3
source activate <name>
conda install ~~py~~ jupyter notebook
source deaktivate olta
```

leere Menge = set()

$A \cup B$

A.union(B)

$A \cap B$

A.intersection(B)

$A \setminus B$

A - B

$A \subseteq B$

A <= B

$1 \in A$

1 in A

$1 \notin A$

1 not in A

$M := \{1, 2, \ldots, 100\}$

$p(x) = x \% 7 = 0$

M = set(range(1, 100+1))

{x for x in M if x % 7 = 0}

{x for x in M if p(x)}

~~not need~~ can't be used

{f(x) for x in M}

$\{p \cdot q \mid p \in [2, \ldots, 12] \wedge q \in [2, \ldots, 10])$

{p · q for p in range(1, 11) for q in rang

Eine Zahl p ist eine Primzahl g. d. w.

1. $p > 1$
2. p ist nicht als Produkt der Form $p = a \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $a > 1$, $b > 1$ darstellbar

Bsp 5 ist Primzahl, 6 ist keine Primzahl, denn $6 = 2 \cdot 3$

s = set(range(2, 100))

s - {p * q for p in s for q in s}

devidors

{t for t in range(1, n+1) if n % t == 0}

Berechnung der Potenzmenge

Ziel: Definiere Fkt. power, so dass gilt:

$\text{power}(M) = 2^M$

1. Fall: $M = \emptyset$

$\text{power}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

2. Fall: $M \neq \emptyset$. Dann wählen wir ein beliebiges $x \in M$

$N := M \setminus \{x\}$

$\text{power}(M) = \text{power}(N) \cup \{ A ~~\in \text{power}(N)~~$

$\text{power}(N) \cup \{ A \cup \{x\} \mid A \in \text{power}(N) \}$

{ frozenset({1,2}) }

Pairs

(1,2)

{(x, y) for x in A for y in B}

tuple(range(1, 5)) = (1, 2, 3, 4)

Berechnung der Primzahlen nach Eratosthenes.

$\cancel{1}\ \underline{2}\ \underline{3}\ \cancel{4}\ \underline{5}_{2}\ \cancel{6}\ \underline{7}\ \cancel{8}\ \cancel{9}\ \cancel{10}\ \underline{11}\ \cancel{12}\ \underline{13}\ \cancel{14}\ \cancel{15}\ \cancel{16}\ \underline{17}\ \cancel{18}\ \underline{19}\ \cancel{20} \ldots {}^{25}$

$\sqrt{25}\ \sqrt{25} = 5$

loop until

import math

math.pi

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Logik

Karl Stroetmann

karl.stroetmann@dhbw-mannheim.de

Einführung und Motivation

Moderne Softwaresysteme sind sehr komplex

Zur Beherrschung der Komplexität ist Abstraktion ~~nötig~~ notwendig.

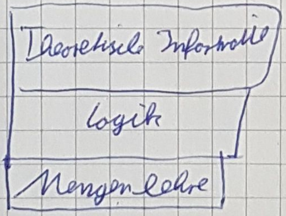
Informatik = ~~An~~ Information + ~~Automatik~~ Mathematik

Wozu brauchen wir Logik in der Informatik

1. Logik kann zur Spezifikation von Schnittstellen komplexer Systeme benutzt werden.
2. Die Korrektheit digitaler Schaltungen kann mit Hilfe aussagenlogischer Theorienbeweise überprüft werden.
3. Mengenlehre und die Theoretik der Relationen ist eine der Grundlage relationaler Datenbanken.
4. Logik und Mathematik schulen das abstrakte Denkvermögen

Überblick

1. Mengenlehre



2. ~~Program~~ Python unterstützt das Arbeiten mit Mengen
3. Grenzen der Berechenbarkeit
   Unlösbarkeit des Halteproblem
4. Aussagenlogik
   Junktoren: ∧ und, ∨ oder, ¬: nicht, → wenn, dann, ↔ ~~wenn dann~~ genau dann wenn

Davis - Putnam - Algorithmus : Grundlage der Schaltungs Verifikation

8 - Damen - Problem

5. Prädikatenlogik

zusätzlich Quantoren

$\forall$: für alle

$\exists$: es gibt

Aussagenlogik entscheidbar, PL nicht entscheidbar

6. Klausur

Kapitel 2: Mengenlehre

Georg Cantor (1845 - 1918)

Eine Menge ist eine wohldefinierte Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens oder unserer Wahrnehmung

Komprehensions-Axiom (1895) Ist $p(x)$ eine Eigenschaft die auf ein Objekt x entweder zutrifft oder nicht, dann ist

$\{x \mid p(x)\}$ (lese: Menge aller Elemente x, für die $p(x)$ gilt)

eine Menge und zwar die Menge aller Objekte x, für die die Eigenschaft $p(x)$ haben.

Schreibweise $x \in M$ falls x zu der Menge M gehört.

Bertrand Russell (1905)

$$R := \{x \mid \neg(x \in x)\}$$

Frage ~~gilt~~ $R \in R$?

$$R \in R \Leftrightarrow R \in \{x \mid \neg(x \in x)\}$$
$$\Leftrightarrow \neg(R \in R)$$

Insgesamt: $R \in R \Leftrightarrow \neg(R \in R)$ ↯

Wir folgern, dass R keine Menge ist. Das Komprehensions-Axiom ist zu allgemein.

Verfahren zur Bildung von Mengen, die nicht zu Widersprüchen führen

1. Explizites Auflisten der Elemente

Bsp. $M := \{1, 2, 3\}$ $\quad B := \{a, b, c, \ldots x, y, z\}$

$\emptyset = \{\}$ leere Menge

$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$