I. Grundlagen

§1 Mengen und Abbildungen

Def 1.1: (nach Cantor)

Eine Menge ist wohldefinierte Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung, die Elemente der Menge nennen zu einem Ganzen

(Konvention: Mengen bezeichnet man mit Großbuchstaben)

Notation: Seien M, N Mengen

$a \in M :\Leftrightarrow$ Objekt a ist Element der Menge M

$a \notin M :\Leftrightarrow$ a ist kein Element der Menge M

$M = N :\Leftrightarrow$ M und N enthalten die selben Elemente ($x \in M \Leftrightarrow x \in N$)

Möglichkeiten Mengen anzugeben

- Elemente auflisten: $M := \{a, b, c\}$
- Angabe von Eigenschaften der Elemente $M := \{A \mid B\}$

  ← mit Eigenschaft ∨ so dass

  z.B. $M := \{x \mid x$ ist ein Hund$\}$
- Leere Menge $\emptyset = \{\}$

Def 1.2 (Zahlbereiche)

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \vee x = 0\}$

  ist die Menge natürlicher Zahlen mit 0
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N}_0\}$

  ist die Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} : \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen (Konstruktion siehe Analysis I)
- $\mathbb{C} := \{z = a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der komplexen Zahlen

  i ist die imaginäre Einheit insbesondere ist $i^2 = -1$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -1\} = \emptyset$

Def. 1.3: Seien M, N Mengen

M heißt eine <u>Teilmenge</u> von N (schreibe $M \subset N$ [$\subseteq$]),

wenn gilt $\forall m \in N: m \in N$ (oder $m \in M \Rightarrow m \in N$)

M heißt <u>echte Teilmenge</u> von N (schreibe $M \subsetneq N$ [$\subsetneq$]),

wenn gilt: $M \subset N \wedge M \neq N$

Warnung!!
Achtung: Nach dieser Definition ist $\emptyset \subset M \; \forall$ Mengen M

Außerdem gilt: $M = N \Leftrightarrow (M \subset N \wedge N \subset M)$

Bsp. 1.4

I $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

II $\{4, 6\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Def 1.5

Seien M, N Mengen

$M \cup N := \{a \mid a \in M \vee a \in N\}$ heißt die Vereinigung von M und N

$M \cap N := \{a \mid a \in M \wedge a \in N\}$ heißt der Schnitt von M und N

$M \setminus N := \{a \mid a \in M \wedge a \notin N\}$ heißt die Differenz von M und N

Sei $N \subset M$, dann nennt man

$N^c := M \setminus N = \{a \in M \mid a \in N\}$ das Komplement von N in M

Ist $M \cap N = \emptyset$, so heißen M und N disjunkt.

Bsp. 1.6 Seien $M := \{2, 3, 5, 7\}$, $N: \{3, 4, 6, 7\}$

$\Rightarrow M \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$M \cap N = \{3, 7\}$

$M \setminus N = \{2, 5\}$

$N \setminus M = \{4, 6\}$

Bemerkung 1.7: Seien K, M, N Mengen. Es gelten folgende die folgenden Rechenregeln

I $M \cup \emptyset = M$, $M \cap \emptyset = \emptyset$

II $M \cup M = M$, $M \cap M = M$ (Idempotenz)

III $M \cup N = N \cup M$, $M \cap N = N \cap M$ (Kommutativgesetz

IV $(K \cup M) \cup N = K \cup (M \cup N)$

$(K \cap M) \cap N = K \cap (M \cap N)$ (Assoziativgesetz)

V $(K \cup M) \cap N = (K \cap N) \cup (M \cap N)$

$(K \cap M) \cup N = (K \cup N) \cap (M \cup N)$ (Distributivgesetz)

VI $M \setminus \emptyset = M$, $M \setminus M = \emptyset$

VII $K \setminus (M \cup N) = (K \setminus M) \cap (K \setminus N)$

$K \setminus (M \cap N) = (K \setminus M) \cup (K \setminus N)$ Morgansche Regeln

VIII $(K \cup M) \setminus N = (K \setminus M) \cup (M \setminus N)$

$(K \cap M) \setminus N = (K \setminus M) \cap (M \setminus N)$

IX $K \setminus (M \setminus N) = (K \setminus M) \cup (K \cap N)$

$(K \setminus M) \setminus N = K \setminus (M \cup N)$

X $M \cup (N \setminus M) = M \cup N$

$M \cap (N \setminus M) = \emptyset$

XI $M \cup (N \cap M) = M$

$M \cup (M \cap N) = M$

Beweis: Wir zeigen exemplarisch die jeweils erste Gleichung von ~~(V)~~ V und VII

V zz $(K \cup M) \cap N \subset (K \cap N) \cup (M \cap N)$

$(K \cup M) \cap N \supset (K \cap N) \cup (M \cap N)$

Wir beginnen mit $\subset$

$\subset$ Sei $x \in (K \cup M) \cap N$

$\Rightarrow x \in K \cup M \land x \in N$

$\rightarrow$ ~~Fallun~~ Fallunterscheidung nach $x \in K$ und $x \in M$

1. Fall: Sei $x \in K$

$\Rightarrow x \in K \land x \in N \Rightarrow x \in K \cap N$

$\Rightarrow x \in (K \cap N) \cup (M \cap N)$, da $K \cap N \subset (K \cap N) \cup (M \cap N)^{*}$ ✓

2. Fall: Sei $x \in M$

$\Rightarrow x \in M \land x \in N \Rightarrow M \cap N \subset (K \cap N) \cup (M \cap N)^{**}$ ✓

$* + ** \Rightarrow (K \cup M) \cap N \subset (K \cap N) \cup (M \cap N)$

Sei $x \in (K \cap N) \cup (M \cap N)$

$\Rightarrow x \in K \cap N$ oder $x \in M \cap N$

$\Rightarrow x \in N$ und ($x \in K$ oder $x \in M$)

$\Rightarrow x \in N \cap (K \cup M)$

$\overset{III}{\Leftrightarrow} x \in K \cup M) \cap N$

$\Rightarrow (K \cap N) \cup (M \cap N) \subset (K \cup M) \cap N$

Wir haben $\subset$ und $\supset$ $\Rightarrow$ Gleichheit der Beiden Menge $\Rightarrow$ $\boxed{V}$

$\boxed{VII}$ z: $K \setminus (M \cup N) = (K \setminus M) \cap (K \setminus N)$

$\rightarrow$ entweder analog zu V oder wie hier

Wir haben die folgende Äquivalenzkette.

$x \in K \setminus (M \cup N)$

$\Leftrightarrow x \in K \land x \notin M \cup N$

$\Leftrightarrow x \in K \land (x \notin M \land x \notin N)$

$\Leftrightarrow (x \in K \land x \notin M) \land (x \in K \land x \notin N)$

wegen $x \in K \Leftrightarrow x \in K \land x \in K$ (Idempotenz)

und Kommutativität + Assoziativität von $\land$

$\Leftrightarrow x \in (K \setminus M) \wedge x \in (K \setminus N)$

$\Leftrightarrow x \in (K \setminus M) \cap (K \setminus N)$

$\Rightarrow \boxed{VII}$

Die restlichen Identitäten können analog ~~gelöst werden~~ bewiesen werden

$\rightarrow$ Übungsaufgabe

Bemerkung 1.8: Seien M, N Mengen. Dann sind äquivalent.

$I \quad M \cup N = N$

$II \quad M \subset N$

Beweis zz $I \Leftrightarrow II$

$I \Rightarrow II$ Sei $M \cup N = N$ zz: $M \subset N$

Sei $x \in M \Rightarrow x \in M \cup N = N$

$\Rightarrow x \in N \Rightarrow M \subset N$

$II \Rightarrow I$ Sei $M \subset N$ zz $M \cup N = N$

$\subset$: Sei $x \in M \cup N \Rightarrow \underbrace{x \in M}_{\Rightarrow x \in N} \vee x \in N$

$\Rightarrow x \in N \vee x \in N \Rightarrow x \in N$

$\supset$: klar, da $N \subset M \cup N$ gilt $\forall$ Mengen M

$\Rightarrow M \cup N = N \Rightarrow I \Leftrightarrow II$ $\square$ $\leftarrow$ bewiesen

Def 1.9 Seien M, N Mengen

Wir nennen $M \times N := \{(m,n) \mid m \in M, n \in N\}$

das kartesische Produkt von M und N

$(m,n) \in M \times N$ heißt Tupel oder geordnetes Paar

Es gilt $(m,n) = (m',n') \Leftrightarrow m = m' \wedge n = n'$

$[\Rightarrow (m,n) = (n,m) \Leftrightarrow m = n]$

Bsp. 1.10

I $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

II $\{1,2,3\} \times \{4,3\} = \{(1,4),(1,3),(2,4),(2,3),(3,4),(3,3)\}$

III $\{1,2\} \times \underbrace{\{3,3\}}_{=\{3\}} = \{(1,3),(1,3),(2,3),(2,3)\} = \{(1,3),(2,3)\} = \{1,2\} \times \{3\}$

Def 1.11 Sei M eine Menge

Eine Relation auf M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$

Ist $(a,b) \in R$, so schreiben wir auch $a \sim_R b$ (bzw. $a \sim b$, wenn klar ist welche Relation gemeint ist)

(sprich: a steht in Relation zu b)

Anmerkung: Für $a, b \in M$ steht

entweder $a \sim_R b$ oder $a \not\sim_R b$

da entweder $(a,b) \in R$ oder $(a,b) \notin R$)

Bsp. 1.12:

I Sei $M = \{1,2,3\}$

Dann ist durch $R := \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,3)\} \subset M \times M$

eine Relation auf M gegeben

Es gilt $1 \sim 1$, $1 \sim 2$, $2 \sim 1$, $3 \sim 3$

Aber $1 \not\sim 3$, $3 \not\sim 1$, ...

Seien $a, b \in \mathbb{N}$

Durch $a \sim b :\Leftrightarrow a \leq b$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}$ gegeben

Die zugehörige Teilmenge $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$

Also ist $(a,b) \in R \Leftrightarrow a \leq b$

Lineare Algebra

Vorlesung statt 1.11
am 29.10 9 - 12^{15}

Klausur 18.12 10^{00} - 11^{30} 067C

Literatur: - Mathematik für Informatiker (Band 1)
Autoren: Gerald + Susanne Teschl
Springer Verlag
- Mathematik für Ingenieure (Band 2)
Autor: Lothar Papula
Verlag: Vieweg

Def. 1.13: Seien M Menge, $\sim$ Relation auf M.

Die Relation $\sim$ heißt Äquivalenzrelation, wenn gilt:

(I) $\sim$ ist <u>reflexiv</u>, d.h. $\forall m \in M: m \sim m$

II $\sim$ ist symmetrisch, d.h. $\forall m \in M: (m \sim n \Rightarrow n \sim m)$

III $\sim$ ist transitiv, d.h. $\forall m, n, l \in M: (m \sim n, n \sim l \Rightarrow m \sim l)$

Wir sagen dann auch m ist äquivalent zu n, falls $m \sim n$ gilt.

Für $m \in M$ heißt $[m] := \{ n \in M \mid m \sim n \}$ die Äquivalenzklasse von m.

Die Elemente aus $[m]$ nennt man dann Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[m]$.

Bsp. 1.14: Sei M die Menge aller jetzt lebenden Menschen.

Wir ~~d~~ definieren auf ~~M~~ M die folgende Relation:

$a \sim b \Leftrightarrow$ a und b sind im selben Jahr geboren

$\Rightarrow \sim$ ist reflexiv, symmetrisch, transitiv $\Rightarrow \sim$ ist Ä-Relation

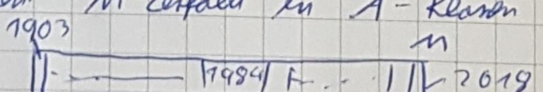
Mark Zuckerberg (MZ) ist geboren 1984 geboren

$\Rightarrow [MZ] = \{ a \in M \mid$ a wurde im selben Jahr ~~ge~~ geboren wie MZ$\}$

$= \{ a \in M \mid a$ ist 1984 geboren$\}$

$\leadsto$ Weitere Vertreter ~~von~~ von MZ sind Helene Fischer, ...

Wir sehen: M zerfällt in Ä-Klassen



– Jeder Mensch ist in genau einer Ä-Klasse

– Je 2 Ä-Klassen haben leeren Schnitt

$\leadsto$ Wir sehen ~~außerdem~~: der ~~Üb~~ Übergang zu Ä-Klassen soll für ein gegebenes Problem irrelevante Eigenschaften abstreifen

Beweis 1.15: Seien M Menge, $\sim$ Ä-Relation auf M, Dann gilt:

I Jedes Element von M liegt in genau einer Ä-Klasse.

II Je zwei Ä-Klassen sind entweder gleich oder disjunkt

Bew: Sei $a \in M$ z.z. a liegt in genau einer Ä Klasse

Offensichtlich liegt A in Ä-Klasse, da wegen $a \sim a$ (reflexiv) gilt, dass $a \in [a]$ noch z.z. Eindeutigkeit der Ä Klasse von A.

Seien $b, c \in M$ mit $a \in [b]$ und $a \in [c]$. Wir zeigen $[b] = [c]$

Es gilt $a \sim b$ und $a \sim c \Rightarrow b \sim a \wedge a \sim c \Rightarrow b \sim c$

Behauptung $[b] = [c]$

Bew "$\subset$" Sei $x \in [b]$, $\Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \sim c$, da $b \sim c$ (transitiv)
$\Rightarrow x \in [c]$

"$\supset$" Sei $x \in [c]$, $\Rightarrow x \sim c \Rightarrow x \sim [b] \Rightarrow x \in [b] \Rightarrow$ Beh

$\Rightarrow$ Die Ä-Klasse von a ist eindeutig $\Rightarrow$ (I)

II Seien $b, c \in M$ mit $[b] \cap [c] \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, a \in M : a \in [b] \cap [c] \Rightarrow a \in [b] \wedge a \in [c]$

$\Rightarrow$ analog wie in I $[b] = [c]$ $\Rightarrow$ II

Bsp + Def 1.18 Sei $n \in \mathbb{N}$ wir definieren auf $\mathbb{Z}$ die Relation und $a, b \in \mathbb{Z}$.

$a \equiv b \pmod n :\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : a = b + k \cdot n \Leftrightarrow a - b = k \cdot n$
$\Leftrightarrow n$ teilt $a - b$

Wir sagen a ist kongruent zu b modulo n

Beh. Kongruenz modulo n ist eine Ä-Relation

Bew: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ I reflexiv $a \equiv a \pmod n$, da $a = a + 0 \cdot n$

II symmetrisch Sei $a \equiv b \pmod n$

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : a = b + k \cdot n$

$\Rightarrow b = a + (-k) \cdot n \Rightarrow b \equiv a \pmod n$ da $(-k) \in \mathbb{Z}$

III transitiv Seien $a \equiv b \pmod n \wedge b \equiv c \pmod n$

$\Rightarrow \exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : a = b + k_1 \cdot n \wedge b = c + k_2 \cdot n$

$\Rightarrow a = c + k_1 n + k_2 \cdot n = c + (k_1 + k_2) \cdot n \Rightarrow a \equiv c \pmod n$

$\Rightarrow \equiv \pmod n$ ist Ä Relation

Die Ä-Klassen bzgl. $\equiv \pmod{n}$ sind jetzt gerade die "Reste" beim Teilen durch n, also $[0], [1], \ldots, [n-1]$

Def 1.17: Seien M, N Mengen. Eine Abbildung von M nach N $f: M \to N$, ist eine Vorschrift, die jedem Element $m \in M$ genau ein Element aus N zuordnet. Wir schreiben für dieses dann $f(m)$.

Notation: $f: M \to N, \; m \longmapsto f(m)$

Zwei Abbildungen $f, g: M \to N$ sind gleich, ~~kurz~~ $f = g$, gdw. $f(m) = g(m) \; \forall m \in M$ gilt.

Anmerkung: Formal korrekter wäre:

Eine Abbildung von M nach N ist eine Teilmenge $F \subset M \times N$ mit der Eigenschaft: $\forall m \in M \; \exists n \in N : (m, n) \in F$

Wir setzen dann $n = f(m)$.

Bsp. 1.18:

I $f: R \to R, \; x \mapsto x^2 = f(x)$

II $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \; x \mapsto (x, x+1)$

III Sei M Menge. $id_M : M \to M, \; m \mapsto m$ heißt die ~~id~~ identische Abbildung auf M (oder auch Identität)

Def 1.19: Seien M, N Mengen, $f: M \to N$ Abbildung, $A \subset M$, $B \subset N$.

Die Menge $f(A) := \{ f(a) \mid a \in A \}$ heißt das Bild von A.

Die Menge $f^{-1}(B) := \{ m \in M \mid f(m) \in B \}$ heißt das Urbild von B.

Für ~~$M \in N$~~ $n \in N$ setzen wir $f^{-1}(n) := f^{-1}(\{n\}) =$
$= \{ m \in M \mid f(m) = n \}$ und nennen $f^{-1}(n)$ die Faser von f über n.

Wir bezeichnen außerdem die Einschränkung von f auf A mit $f|_A : A \to N,\ a \mapsto f(a)$.

Achtung! Bild, Urbild, Faser sind Mengen. Die Einschränkung ist eine Abbildung.

Bsp. 1.20 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

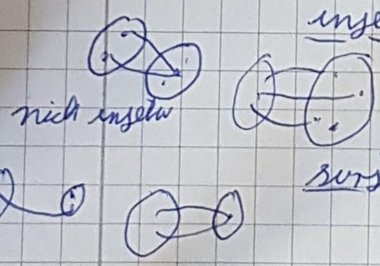
$\Rightarrow f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$

$f^{-1}(\{4,-5\}) = \{2,-2\}$, da $f^{-1}(4) = \{2,-2\},\ f^{-1}(-5) = \emptyset$

$f^{-1}(1) = \{1,-1\}$

$f(\mathbb{R}) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} =: \mathbb{R}_{\geq 0}$

Def. 1.21 Seien M, N Mengen, $f: M \to N$. Dann nennen wir f:



injektiv $:\Leftrightarrow \forall m_1, m_2 \in M : [f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2]$

$\Leftrightarrow \forall m_1, m_2 \in M : [m_1 \neq m_2 \Rightarrow f(m_1) \neq f(m_2)]$

surjektiv $:\Leftrightarrow \forall n \in N\ \exists m \in M : f(m) = n$

$\Leftrightarrow f(M) = N$

bijektiv $:\Leftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv

Bsp. 1.22 I $f:$ ~~R, R~~ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist

- nicht injektiv, da $f(-2) = f(2) = 4$, aber $2 \neq -2$
- nicht surjektiv, da $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 = -1$ ↯
- nicht bijektiv

II $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist

$f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$

- injektiv, denn: seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, also

  Dann muss $x_1 = x_2$ sein, $x_1, x_2 \geq 0$
- nicht surjektiv, siehe I
- nicht bijektiv

III) $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ ist

- ist injektiv, siehe II
- surjektiv, denn: Sei $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt für $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:
- bijektiv

$$f(x) = x^2 = y$$

Def 1.23 Seien L, M, N Mengen, $f: L \to M$, $g: M \to N$.
Wir bezeichnen die Abbildung

$g \circ f: L \to N, x \mapsto g(f(x))$

als die <u>Komposition</u> von f und g

Bsp. 1.24 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x+1$

$\Rightarrow g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \cancel{f(g(x))}\ g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1$

$\Rightarrow f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$ $\neq$

$\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$

Bem 1.25 Seien L, M, N, O Mengen, $f: L \to M$, $g: M \to N$, $h: N \to O$. Dann gilt

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ

Bew: Sei $x \in L$. Dann gilt

$(h \circ (g \circ f))(x) = (h \circ (g(f(x)))) = h(g(f(x)))$

$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ $= \Rightarrow$ Beh.

$\square$

Bem / Def 1.26 Seien M, N Mengen, $f: M \to N$. Dann ~~ist~~ sind äquivalent.

I f ist bijektiv

II $\forall n \in N\ \exists!\ m \in M: f(m) = n$ In der Identität

III $\exists!\ g: N \to M: g \circ f = \cancel{d}\ id_M \wedge f \circ g = id_N$

In diesem Fall schreiben wir $g = f^{-1}$ und nennen g die Umkehrabbildung von f

f^{-1} ist definiert durch $f^{-1}: N \to M$, $n \mapsto$ das eindeutig bestimmte Element $m \in M$ mit $f(m) = n$

Bew: Statt I $\Leftrightarrow$ II $\Leftrightarrow$ III zeigen wir I $\Rightarrow$ II $\Rightarrow$ III $\Rightarrow$ I

I $\Rightarrow$ II Sei f bijektiv. Existenz: Da f surjektiv $\forall n \in N \, \exists m \in M: f(m) = n$

~~II $\Rightarrow$ III~~

Eindeutigkeit: Seien $m_1, m_2 \in M$ mit $f(m_1) = n = f(m_2)$

$\Rightarrow m_1 = m_2$, da f injektiv $\Rightarrow$ II

II $\Rightarrow$ III Gelte II. Existenz: Wir definieren $g: N \to M$, $n \mapsto$ das eindeutige $m \in M$ mit $f(m) = n$.

($\leadsto$ wohldefiniert)

$\Rightarrow \forall m \in M: (g \circ f)(m) = g(f(m)) = g(n) = m$

$\Rightarrow g \circ f = id_M$

und $f \circ g = id_N$ analog $\Rightarrow$ Existenz

Eindeutigkeit: Seien $g_1, g_2: N \to M$ mit $f \circ g_1 = id_N = f \circ g_2$

und $g_1 \circ f = id_M = g_2 \circ f$

z.z. $g_1 = g_2$

~~Wegen~~

Wegen $f \circ g_2 = id_N$ gilt $g_1 = g_1 \circ id_N = g_1 \circ (f \circ g_2)$

$g_1 \circ f = id_M$

Assoziativ $\to = (g_1 \circ f) \circ g_2$

$= id_M \circ g_2 = g_2$

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit $\Rightarrow$ III

III $\Rightarrow$ I Gelte nun (III)

injektiv: Seien $m_1, m_2 \in M$ mit $f(m_1) = f(m_2)$

~~Da $(g \circ f) = id_M$ $g(f(m_1))$ $g(f(m_2))$~~

$\Rightarrow g(f(m_1)) = g(f(m_2))$

$\Leftrightarrow \underbrace{(g \circ f)}_{= id_M}(m_1) = \underbrace{(g \circ f)}_{= id_M}(m_2)$

$\Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow f$ injektiv surjektiv Sei $n \in N$

$\Rightarrow n = id_N(n) = (f \circ g)(n) = f(\overbrace{g(n)}^{\in M})$

Setze $m := g(n)$, so ist $f(m) = n$ $\Rightarrow$ f surjektiv

$\Rightarrow$ $\underline{\text{I}}$

Bsp. 1.27: nach Bsp 1.22 III ist $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ bijektiv

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $f^{-1}: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$

Lineare Algebra

David Obermayr
david.obermayr@gmx.de

Bücher: Gerd Fischer
Lineare Algebra
Verlag Vieweg + Teubner

~~Mengenlehre~~

0. Logik

Wir verwenden die folgenden Junktoren

I $\wedge$ ("und")
II $\vee$ ("oder")
III $\neg$ ("nicht")
IV $\Rightarrow$ ("wenn ... dann")
V $\Leftrightarrow$ ("genau dann, wenn")

Und die Quantoren:

I $\forall$ ("für alle")
II $\exists$ ("es existiert")
III $\exists!$ ("es existiert genau ein")
IV $\nexists$ ("es existiert kein ...")

Bem.: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
heißt Kontraposition