Algoritma *Greedy*

Pendahuluan

- Algoritma *greedy* merupakan metode yang paling populer untuk memecahkan persoalan optimasi.

- Persoalan optimasi (*optimization problems*):
  ➔ persoalan mencari solusi optimum.

- Hanya ada dua macam persoalan optimasi:
  1. Maksimasi (*maximization*)
  2. Minimasi (*minimization*)

Contoh persoalan optimasi:

(Masalah Penukaran Uang): Diberikan uang senilai *A*. Tukar *A* dengan koin-koin uang yang ada. Berapa jumlah minimum koin yang diperlukan untuk penukaran tersebut?

➔ Persoalan minimisasi

Contoh 1: tersedia banyak koin 1, 5, 10, 25

- Uang senilai A = 32 dapat ditukar dengan banyak cara berikut:

  32 = 1 + 1 + … + 1 (32 koin)

  32 = 5 + 5 + 5 + 5 + 10 + 1 + 1 (7 koin)

  32 = 10 + 10 + 10 + 1 + 1 (5 koin)

  … dst
- Minimum: 32 = 25 + 5 + 1 + 1 (4 koin)

- *Greedy* = rakus, tamak, loba, …
- Prinsip *greedy*: “*take what you can get now!*”.
- Algoritma *greedy* membentuk solusi langkah per langkah (*step by step*).
- Pada setiap langkah, terdapat banyak pilihan yang perlu dieksplorasi.
- Oleh karena itu, pada setiap langkah harus dibuat keputusan yang terbaik dalam menentukan pilihan.

- Pada setiap langkah, kita membuat pilihan **optimum lokal** (*local optimum*)

- dengan harapan bahwa langkah sisanya mengarah ke solusi **optimum global** (*global optimum*).

- Algoritma *greedy* adalah algoritma yang memecahkan masalah langkah per langkah;

Pada setiap langkah:

1. mengambil pilihan yang terbaik yang dapat diperoleh pada saat itu tanpa memperhatikan konsekuensi ke depan (prinsip "*take what you can get now!*")

2. berharap bahwa dengan memilih optimum lokal pada setiap langkah akan berakhir dengan optimum global.

- **Masalah penukaran uang**:

  Strategi *greedy*:

  Pada setiap langkah, pilihlah koin dengan nilai terbesar dari himpunan koin yang tersisa.

- Misal: A = 32, koin yang tersedia: 1, 5, 10, dan 25

  Langkah 1: pilih 1 buah koin 25 (Total = 25)

  Langkah 2: pilih 1 buah koin 5 (Total = 25 + 5 = 30)

  Langkah 3: pilih 2 buah koin 1 (Total = 25+5+1+1= 32)

- Solusi: Jumlah koin minimum = 4 (solusi optimal!)

Elemen-elemen algoritma greedy:

1. Himpunan kandidat, *C*.
2. Himpunan solusi, *S*
3. Fungsi seleksi (*selection function*)
4. Fungsi kelayakan (*feasible*)
5. Fungsi obyektif

Dengan kata lain:

algoritma *greedy* melibatkan pencarian sebuah himpunan bagian, *S*, dari himpunan kandidat, *C*;

dalam hal ini, *S* harus memenuhi beberapa kriteria yang ditentukan, yaitu menyatakan suatu solusi dan *S* dioptimisasi oleh fungsi obyektif.

Pada masalah penukaran uang:

- *Himpunan kandidat*: himpunan koin yang merepresentasikan nilai 1, 5, 10, 25, paling sedikit mengandung satu koin untuk setiap nilai.

- *Himpunan solusi*: total nilai koin yang dipilih tepat sama jumlahnya dengan nilai uang yang ditukarkan.

- *Fungsi seleksi*: pilihlah koin yang bernilai tertinggi dari himpunan kandidat yang tersisa.

- *Fungsi layak*: memeriksa apakah nilai total dari himpunan koin yang dipilih tidak melebihi jumlah uang yang harus dibayar.

- *Fungsi obyektif*: jumlah koin yang digunakan minimum.

Skema umum algoritma *greedy*:

```
function greedy(input C: himpunan_kandidat)→ himpunan_kandidat
{ Mengembalikan solusi dari persoalan optimasi dengan algoritma greedy
  Masukan: himpunan kandidat C
  Keluaran: himpunan solusi yang bertipe himpunan_kandidat
}
Deklarasi
    x : kandidat
    S : himpunan_kandidat

Algoritma:
     S ← {}     { inisialisasi S dengan kosong }
     while (not SOLUSI(S)) and (C ≠ {} ) do
        x ← SELEKSI(C)         { pilih sebuah kandidat dari C}
        C ← C - {x}            { elemen himpunan kandidat berkurang satu }
        if LAYAK(S ∪ {x}) then
            S ← S ∪ {x}
        endif
      endwhile
     {SOLUSI(S) or C = {} }

     if SOLUSI(S) then
        return S
     else
        write('tidak ada solusi')
     endif
```

- Pada akhir setiap loop, solusi yang terbentuk adalah optimum lokal.
- Pada akhir while-do diperoleh optimum global.

- *Perhatian*:

  Optimum global belum tentu merupakan solusi optimum (terbaik), tetapi *sub-optimum* atau *pseudo-optimum*.

- Alasan:

  1. Algoritma *greedy* tidak beroperasi secara menyeluruh terhadap semua alternatif solusi yang ada (sebagaimana pada metode *exhaustive search)*.

  2. Terdapat beberapa fungsi SELEKSI yang berbeda, sehingga kita harus memilih fungsi yang tepat jika kita ingin algoritma menghasilkan solusi optimal.

- Sebagian masalah algoritma *greedy* tidak selalu berhasil memberikan solusi yang optimal.

- **Contoh 2**: masalah penukaran uang.

(a) Koin: 5, 4, 3, dan 1
Uang yang ditukar = 7.
Solusi *greedy*: 7 = 5 + 1 + 1 (3 koin) → tidak optimal
Solusi optimal: 7 = 4 + 3 (2 koin)

(b) Koin: 10, 7, 1
Uang yang ditukar: 15
Solusi *greedy*: 15 = 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 (6 koin)
Solusi optimal: 15 = 7 + 7 + 1 (hanya 3 koin)

(c) Koin: 15, 10, dan 1
Uang yang ditukar: 20
Solusi *greedy*: 20 = 15 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 (6 koin)
Solusi optimal: 20 = 10 + 10 (2 koin)

- Untuk sistem mata uang dollar AS, euro Eropa, dan *crown* Swedia, algoritma *greedy* selalu memberikan solusi optimum.

- Contoh:

  Uang \$6,39 ditukar dengan uang kertas (*bill*) dan koin sen (*cent*), maka dapat dipilih:

  - Satu buah uang kertas senilai \$5
  - Satu buah uang kertas senilai \$1
  - Satu koin 25 sen
  - Satu koin 10 sen
  - Empat koin 1 sen

\$5 + \$1 + 25c + 10c + 1c + 1c + 1c + 1c = \$6,39

- Jika jawaban terbaik mutlak tidak diperlukan, maka algoritma *greedy* sering berguna untuk menghasilkan solusi hampiran (*approximation*), daripada menggunakan algoritma yang lebih rumit untuk menghasilkan solusi yang pasti.

- Bila algoritma *greedy* optimum, maka keoptimalannya itu dapat dibuktikan secara matematis.

Contoh-contoh Algoritma Greedy

1. **Masalah penukaran uang**

   Nilai uang yang ditukar: *A*

   Himpunan koin (*multiset*): $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$.

   Himpunan solusi: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,

$$x_i = \begin{cases} 1 & jika\ d_i\ dipilih \\ 0 & jika\ d_i\ tidak\ dipilih \end{cases}$$

Obyektif persoalan adalah

Minimisasi $F = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (fungsi obyektif)

dengan kendala $\sum_{i=1}^{n} d_i x_i = A$

Penyelesaian dengan *exhaustive search*

- Terdapat 2^n kemungkinan solusi (nilai-nilai $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$)

- Untuk mengevaluasi fungsi obyektif = $O(n)$

- Kompleksitas algoritma *exhaustive search* seluruhnya = $O(n \cdot 2^n)$.

Penyelesaian dengan algoritma *greedy*

- Strategi *greedy*: Pada setiap langkah, pilih koin dengan nilai terbesar dari himpunan koin yang tersisa.

```
function CoinExchange(input C : himpunan_koin, A : integer) → himpunan_koin
{ mengembalikan koin-koin yang total nilainya = A, tetapi jumlah koinnya minimum }

Deklarasi
   S : himpunan_koin
   x : koin

Algoritma
  S ← {}
  while (∑(nilai semua koin di dalam S) ≠ A) and (C ≠ {} ) do
     x ← koin yang mempunyai nilai terbesar
     C ← C - {x}
     if  (∑(nilai semua koin di dalam S) + nilai koin x ≤ A then
       S ← S ∪ {x}
     endif
  endwhile

  if (∑(nilai semua koin di dalam S) = A then
     return S
  else
     write('tidak ada solusi')
  endif
```

- Agar pemilihan koin berikutnya optimal, maka perlu mengurutkan himpunan koin dalam urutan yang menurun (*nonincreasing order*).

- Jika himpunan koin sudah terurut menurun, maka kompleksitas algoritma *greedy* = $O(n)$.

- Tetapi, algoritma *greedy* untuk masalah penukaran uang ini tidak selalu menghasilkan solusi optimal (lihat contoh sebelumnya).

$\sum_{i=1}^{n}$

2. Minimisasi Waktu di dalam Sistem (Penjadwalan)

- Masalah: Sebuah *server* (dapat berupa *processor*, pompa, kasir di bank, dll) mempunai n pelanggan (*customer*, *client*) yang harus dilayani. Waktu pelayanan untuk setiap pelanggan i adalah t_i.

  Minimumkan total waktu di dalam sistem:

  $$T = \boxed{\sum_{i=1}^{n}} \text{ (waktu di dalam sistem)}$$

- Ekivalen dengan meminimumkan waktu rata-rata pelanggan di dalam sistem.

Contoh 3: Tiga pelanggan dengan

$t_1 = 5$, $t_2 = 10$, $t_3 = 3$,

Enam kemungkinan urutan pelayanan:

==================================

Urutan: T

==================================

1, 2, 3: $5 + (5 + 10) + (5 + 10 + 3) = 38$

1, 3, 2: $5 + (5 + 3) + (5 + 3 + 10) = 31$

2, 1, 3: $10 + (10 + 5) + (10 + 5 + 3) = 43$

2, 3, 1: $10 + (10 + 3) + (10 + 3 + 5) = 41$

3, 1, 2: $\mathbf{3 + (3 + 5) + (3 + 5 + 10) = 29} \leftarrow$ **(optimal)**

3, 2, 1: $3 + (3 + 10) + (3 + 10 + 5) = 34$

==================================

Penyelesaian dengan *Exhaustive Search*

- Urutan pelangan yang dilayani oleh *server* merupakan suatu permutasi
- Jika ada n orang pelanggan, maka tedapat $n!$ urutan pelanggan
- Untuk mengevaluasi fungsi obyektif : $O(n)$
- Kompleksitas algoritma *exhaustive search* = $O(nn!)$

Penyelesaian dengan algoritma *greedy*

- Strategi *greedy*: Pada setiap langkah, pilih pelanggan yang membutuhkan waktu pelayanan terkecil di antara pelanggan lain yang belum dilayani.

```
function PenjadwalanPelanggan(input C : himpunan_pelanggan) → himpunan_pelanggan
{ mengembalikan urutan jadwal pelayanan pelanggan yang meminimumkan waktu di dalam
sistem }

Deklarasi
   S : himpunan_pelanggan
   i : pelanggann

Algoritma
  S ← {}
  while (C ≠ {}) do
     i ← pelanggan yang mempunyai t[i] terkecil
     C ← C - {i}
     S ← S ∪ {i}
  endwhile

  return S
```

- Agar proses pemilihan pelanggan berikutnya optimal, urutkan pelanggan berdasarkan waktu pelayanan dalam urutan yang menaik.

- Jika pelanggan sudah terurut, kompleksitas algoritma *greedy* = $O(n)$.

```
procedure PenjadwalanPelanggan(input n:integer)

{ Mencetak informasi deretan pelanggan yang akan diproses oleh
server tunggal
  Masukan: n pelangan, setiap pelanggan dinomori 1, 2, …, n
  Keluaran: urutan pelanggan yang dilayani
}
Deklarasi
    i : integer

Algoritma:
  {pelanggan 1, 2, ..., n sudah diurut menaik berdasarkan ti}
  for i←1 to n do
     write('Pelanggan ', i, ' dilayani!')
  endfor
```

- Algoritma *greedy* untuk penjadwalan pelanggan akan selalu menghasilkan solusi optimum.

- **Teorema.**

  Jika $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$ maka pengurutan $i_j = j$, $1 \le j \le n$ meminimumkan

$$T = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} t_{i_j}$$

untuk semua kemungkinan permutasi i_j.

3. *Integer Knapsack*

Maksimasi $F = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

dengan kendala (*constraint*)

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le K$$

yang dalam hal ini, $x_i = 0$ atau 1, $i = 1, 2, \ldots, n$

Penyelesaian dengan *exhaustive search*

- Sudah dijelaskan pada pembahasan exhaustive search.
- Kompleksitas algoritma *exhaustive search* untuk persoalan ini = $O(n \cdot 2^n)$.

Penyelesaian dengan algoritma *greedy*

- Masukkan objek satu per satu ke dalam *knapsack*. Sekali objek dimasukkan ke dalam *knapsack*, objek tersebut tidak bisa dikeluarkan lagi.

- Terdapat beberapa strategi *greedy* yang heuristik yang dapat digunakan untuk memilih objek yang akan dimasukkan ke dalam *knapsack*:

1. *Greedy by profit*.
    - Pada setiap langkah, pilih objek yang mempunyai keuntungan terbesar.
    - Mencoba memaksimumkan keuntungan dengan memilih objek yang paling menguntungkan terlebih dahulu.

2. *Greedy by weight.*
    - Pada setiap langkah, pilih objek yang mempunyai berat teringan.
    - Mencoba memaksimumkan keuntungan dengan dengan memasukkan sebanyak mungkin objek ke dalam *knapsack*.

3. *Greedy by density*.
   - Pada setiap langkah, *knapsack* diisi dengan objek yang mempunyai p_i / w_i terbesar.
   - Mencoba memaksimumkan keuntungan dengan memilih objek yang mempunyai keuntungan per unit berat terbesar.

- Pemilihan objek berdasarkan salah satu dari ketiga strategi di atas tidak menjamin akan memberikan solusi optimal.

Contoh 4.

$w1 = 6$; $p1 = 12$; $w2 = 5$; $p2 = 15$;

$w3 = 10$; $p3 = 50$; $w4 = 5$; $p4 = 10$

Kapasitas *knapsack* $K = 16$

Properti objek				*Greedy by*			Solusi Optimal
i	w_i	p_i	p_i / w_i	*profit*	*weight*	*density*	
1	6	12	2	0	1	0	0
2	5	15	3	1	1	1	1
3	10	50	5	1	0	1	1
4	5	10	2	0	1	0	0
Total bobot				15	16	15	15
Total keuntungan				65	37	65	65

- Solusi optimal: $X = (0, 1, 1, 0)$
- *Greedy by profit* dan *greedy by density* memberikan solusi optimal!

Contoh 5.

$w1 = 100$; $p1 = 40$; $w2 = 50$; $p2 = 35$; $w3 = 45$; $p3 = 18$;

$w4 = 20$; $p4 = 4$; $w5 = 10$; $p5 = 10$; $w6 = 5$; $p6 = 2$

Kapasitas *knapsack* $K = 100$

Properti objek				*Greedy by*			Solusi Optimal
i	w_i	p_i	p_i/w_i	*profit*	*weight*	*density*	
1	100	40	0,4	1	0	0	0
2	50	35	0,7	0	0	1	1
3	45	18	0,4	0	1	0	1
4	20	4	0,2	0	1	1	0
5	10	10	1,0	0	1	1	0
6	5	2	0,4	0	1	1	0
Total bobot				100	80	85	100
Total keuntungan				40	34	51	55

Ketiga strategi gagal memberikan solusi optimal!

Kesimpulan: Algoritma *greedy* tidak selalu berhasil menemukan solusi optimal untuk masalah 0/1 *Knapsack*.

4. Fractional Knapsack

Maksimasi $F = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

dengan kendala (*constraint*)

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le K$$

yang dalam hal ini, $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Penyelesaian dengan *exhaustive search*

- Oleh karena $0 \leq x_i \leq 1$, maka terdapat tidak berhinga nilai-nilai x_i.

- Persoalan *Fractional Knapsack* menjadi malar (*continuous*) sehingga tidak mungkin dipecahkan dengan algoritma *exhaustive search.*

Penyelesaian dengan algoritma *greedy*

- Ketiga strategi *greedy* yang telah disebutkan di atas dapat digunakan untuk memilih objek yang akan dimasukkan ke dalam *knapsack*.

Contoh 6.

$w1 = 18$; $p1 = 25$; $w2 = 15$; $p2 = 24$

$w3 = 10$; $p3 = 15$ Kapasitas *knapsack* $K = 20$

Properti objek				*Greedy by*		
i	w_i	p_i	p_i/w_i	*profit*	*weight*	*density*
1	18	25	1,4	1	0	0
2	15	24	1,6	2/15	2/3	1
3	10	15	1,5	0	1	1/2
Total bobot				20	20	20
Total keuntungan				28,2	31,0	31,5

- Solusi optimal: $X = (0, 1, 1/2)$
- yang memberikan keuntungan maksimum = 31,5.

- Strategi pemilihan objek berdasarkan densitas p_i / w_i terbesar akan selalu memberikan solusi optimal.

- Agar proses pemilihan objek berikutnya optimal, maka kita urutkan objek berdasarkan p_i / w_i yang menurun, sehingga objek berikutnya yang dipilih adalah objek sesuai dalam urutan itu.

Teorema 3.2.

Jika $p_1/w_1 \geq p_2/w_2 \geq ... \geq p_n/w_n$ maka algoritma *greedy* dengan strategi pemilihan objek berdasarkan p_i / w_i terbesar menghasilkan solusi yang optimum.

- Algoritma persoalan *fractional knapsack*:

  1. Hitung harga p_i/w_i , i = 1, 2, ..., n
  2. Urutkan seluruh objek berdasarkan nilai p_i/w_i dari besar ke kecil
  3. Panggil `FractinonalKnapsack`

```
function FractionalKnapsack(input C : himpunan_objek, K : real) → himpunan_solusi

{ Menghasilkan solusi persoalan fractional knapsack dengan algoritma greedy yang
menggunakan strategi pemilihan objek berdasarkan density (pi/wi). Solusi dinyatakan
sebagai vektor X = x[1], x[2], …, x[n].

Asumsi: Seluruh objek sudah terurut berdasarkan nilai pi/wi yang menurun
}

Deklarasi
    i, TotalBobot : integer
    MasihMuatUtuh : boolean
    x : himpunan_solusi

Algoritma:
   for i ← 1 to n do
      x[i] ← 0   { inisialisasi setiap fraksi objek i dengan 0 }
   endfor

   i ← 0
   TotalBobot ← 0
   MasihMuatUtuh ← true
   while (i ≤ n) and (MasihMuatUtuh) do
     { tinjau objek ke-i }
     i ← i + 1
     if TotalBobot + C.w[i] ≤ K then
        { masukkan objek i ke dalam knapsack }
        x[i] ← 1
        TotalBobot ← TotalBobot + C.w[i]
     else
        MasihMuatUtuh ← false
        x[i] ← (K – TotalBobot)/C.w[i]
     endif
   endwhile
   { i > n or not MasihMuatUtuh }

   return x
```

Kompleksitas waktu algoritma = $O(n)$.