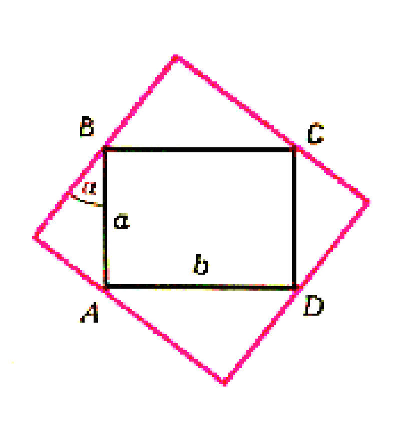

Рис 1.

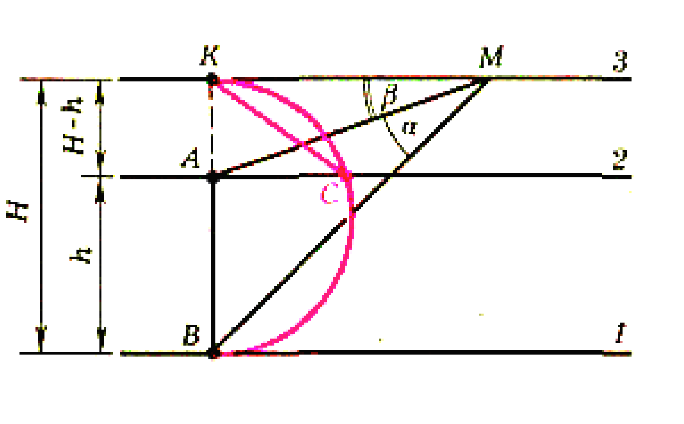

Рис 2.

З а д а ч а 5 (НГУ, 1968). *Расстояние между двумя параллельными прямыми равно* h. *Третья прямая, параллельная данным, находится вне полосы между ними на расстоянии* H *от дальней. Отрезок* AB *перпендикулярен к прямым, а концы его лежат на первых двух прямых.*

Найти на третьей прямой точку M *так, чтобы* $\sphericalangle AMB$ *был наибольшим.*

Положение точки M на третьей прямой определяется, например, расстоянием от нее до точки K пересечения прямой AB с третьей прямой (рис. 2). Обозначим KM через x. Для решения задачи достаточно найти то значение x, для которого со- ответствующий угол $\alpha = \sphericalangle AMB$ достигает наибольшей величины.

Введем вспомогательный угол $\beta = \sphericalangle KMA$ и выразим с помощью него $\operatorname{tg} a$ в виде функции от x. Используя формулу тангенса разности двух аргументов и определение тангенса острого угла, получим $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}[(\alpha+\beta)-\beta] =$

$$=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta}=$$

$$=\frac{\frac{H}{x}-\frac{H-h}{x}}{1+\frac{H(H-h)}{x^2}}=\frac{h}{x+\frac{H(H-h)}{x}}.$$

Отсюда видно, что $\operatorname{tg} a$(a, следовательно, и α) достигает наибольшего значения, когда сумма $x + \frac{H(H-h)}{x}$достигает наименьшего значения. Поскольку $x\frac{H(H-h)}{x}$ постоянно, воспользуемся неравенством (2): $x + \frac{H(H-h)}{x} \geqslant 2\sqrt{x\frac{H(H-h)}{x}} = 2\sqrt{H(H-h)}$.

Искомое значение x является положительным корнем уравнения $x = \frac{H(H-h)}{x}$, то есть

$$x = \sqrt{H(H-h)}$$

Искомую точку теперь можно найти с помощью несложного построения: опишем на отрезке KB как на диаметре полуокружность, которая пересечет вторую прямую (проходящую через A) в точке C (рис. 2), и отложим на третьей прямой отрезок $KM_1 = KC$; точка M_1 — искомая (докажите это самостоятельно).

Нетрудно заметить, что точка M_2, симметричная точке M_1 относительно точки к, обладает тем же свойством, что и точка M_1. Итак, искомых точек — две: M_1 и M_2.

З а д а ч а 6 (МГУ, 1971). *Автомобиль едет от пункта* A *до пункта* B *с постоянной скоростью 42 км/ч. В пункте* B *он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на* a *км/ч, и едет так до полной остановки. Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением* α *км/ч*^{2}.