Matlab 第 6 次作业

提交时间：2020 年 4 月 16 日 23:59 之前

第一题 $f(x)=x\cos(x)$

（1）编写 M 文件，使用 three-point centered-difference formula 计算函数 $f(x)$ 在 $x=\pi/3$ 处的二阶导数 $f''(\pi/3)$，其中 $\mathrm{h}=10^{-1},10^{-2},\ldots,10^{-10}$，要求把 h 值、二阶导数值和误差值以三列的形式输出保存到名为 table.txt 的文本文档中，并绘制误差值相对于 h 值的曲线，注意坐标轴、标题，给出输出文档的截图、图像及代码。

（2）为提高计算精度，请用两步 Richardson 外推法计算 $f''(\pi/3)$，取 $\mathrm{h}=10^{-3}$，要求给出代码及运行后输出的结果。

（3）使用 five-point centered-difference formula 计算其在 $x=\pi/3$ 处的三阶导数 $f'''(\pi/3)$。要求给出代码及运行后输出的结果。

第二题 $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$，$x\in[0,1]$

编写函数文件实现使用 Lagrange Interpolation 方法求定积分。其输入分别为函数、求解区间和等距取点的数量，输出为定积分的值，给出代码。并利用函数求解题干定积分，等距取 10 个点，给出代码与输出的结果。

第三题 $f(x)=\dfrac{x}{\ln(1+x)}$，$x\in[1,2]$

（1）分别使用 Composite Trapezoid Rule 和 Composite Simpson’s Rule，计算 m=5 与 m=10 下的 $f(x)$ 定积分，将计算结果与 MATLAB 的内置函数 int 和 quad 作对比。要求给出代码和计算结果。

（2）若 $f(x)$ 的定义域变为 $x\in[0,2]$，取 m 为 10，选用一种 Newton-Cotes Method 计算 $f(x)$ 在新区间上的积分，给出代码和计算结果。提示：请注意其中的特殊点，可以进行特殊处理或者自学 Composite Midpoint Rule。

第四题 $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$，$x\in[0,3]$

（1）编写名为 romberg.m 的 M-function 实现 Romberg integration，要求对任意函数，任意积分区间，均能输出 Romberg tableau，停止条件为得到的 R_{jj} 值与前一个差距不大于 10^{-5}。使用该函数计算 $f(x)$ 的定积分。给出代码和计算结果。

（2）说说 Romberg integration 和 Richardson extrapolation 有什么联系？

第五题

计算二重积分 $\iint_D e^{-xy}dxdy$，其中 $D=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，要求使用 Composite Simpson's Rule 计算，h_1, h_2 自取，要求给出代码和计算结果。

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dxdy$$

$$\approx \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{h_1/h_2}{36}\Big\{ f\left(x_i,y_j\right)+f\left(x_{i+1},y_j\right)+f\left(x_i,y_{j+1}\right)+f\left(x_{i+1},y_{j+1}\right)+$$

$$4\left[\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},y_j\right)+f\left(x_i,\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)+f\left(x_{i+1},\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)+\right.$$

$$\left.f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},y_{j+1}\right)\right]+16f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},\frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)\Big\}$$

第六题 $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$

（1）积分步长对定积分计算精度有影响，但步长过小会导致计算量过大。一种平衡两者的思想是自适应积分 Adaptive Quadrature。请自学 *Ref.*[2]，编写 M-function，使用 Adaptive Quadrature with Trapezoid Rule，实现对任意输入 x 计算 $\mathrm{erf}(x)$，TOL 取 10^{-8}。给出 x=3 时的计算结果及所需 subintervals 的个数，给出代码。

（2）为提高计算效率，可以使用 Adaptive Quadrature with Simpson's Rule 实现第一问的计算。取终止条件为 $\left|S_{[a,b]}-\left(S_{[a,c]}+S_{[c,b]}\right)\right|<10\times\mathrm{TOL}$，编写 M-function 实现 $\mathrm{erf}(x)$ 的计算，TOL 取 10^{-8}，同样给出 x=3 时的计算结果、所需 subintervals 的个数和代码。