Matlab 第 7 次作业

提交时间：2020 年 4 月 23 日 23:59 之前

第一题 $y' = \dfrac{1+t}{1+y}$，$1 \le t \le 2,\ y(1) = 2$

（1）分别取步长 h=0.1 与 0.001，使用 Euler’s Method 进行求解，在同一幅图中作出 t-y 图像，注意线型与图例的区分、坐标轴与标题。要求给出图像与代码。

（2）用分离变量法求出解析解，要求给出求解过程。取步长为 0.25，使用 Euler’s Method 进行求解，在同一幅图中作出解析解与 Euler 解。在另一幅图中作出 Euler 解的 Local Truncation Error 和 Global Truncation Error。要求给出代码与两幅图像，注意线型、图例、坐标轴和标题。

第二题 $y' = \dfrac{2}{t}y + t^2 e^t$，$1 \le t \le 2,\ y(1) = 0$

（1）分别取步长 h=0.2 与 0.02，使用 Trapezoid Method 进行求解，在同一幅图中作出 t-y 图像，注意线型、图例、坐标轴与标题。要求给出图像与代码。

（2）用内置的 dsolve 函数求解该问题，在另一幅图绘制上题求解结果与解析解的误差曲线。要求给出代码和图像，注意图像的基本要素。

第三题 $y' = 1 + t\sin(ty)$，$0 \le t \le 2,\ y(0) = 0$

Taylor Method 是求解 ODE 的另一种方法，n 阶 Taylor Method 的迭代公式如下：

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i)$$

（1）Euler’s Method 是 Taylor Method 的几阶形式？

（2）自学内置函数 ode23 的用法，求解上述问题。再取步长为 0.02，使用二阶 Taylor Method 求解，在同一幅图中绘制结果，注意基本要素，给出代码和图像。

第四题 $y' = -y + t\sqrt{y}$，$2 \le t \le 3,\ y(2) = 2$

分别取 h=0.5、0.1、0.05，使用四阶 Runge-Kutta Method 求解该问题，再用内置函数 ode45 进行求解，并将结果绘制在同一幅图上，要求给出代码和图像，注意图像的基本要素。

第五题

$$\begin{cases}\dot{x}_1\sin x_1+\dot{x}_2\cos x_2+x_1=1, & 0\le t\le 50,\ x_1(0)=0\\ -\dot{x}_1\cos x_2+\dot{x}_2\sin x_1+x_2=0, & 0\le t\le 50,\ x_2(0)=0\end{cases}$$

自取合适的步长，使用四阶 Runge-Kutta Method 求解该问题，绘制结果，给出代码和图像，注意图像基本要素。

第六题

使用四阶 Runge-Kutta Method，求解二体问题，即假设宇宙中只存在两颗行星，只受万有引力作用，计算行星运行轨迹。取$G=8,m_1=0.5,m_2=1$，初始位置分别为$(x_1,y_1)=(1,1),(x_2,y_2)=(0,0)$，初始速度分别为$(v_{1x},v_{1y})=(0,-1),(v_{2x},v_{2y})=(0,1)$，时间区间为[0,5]，步长为 0.01。

（1）要求给出代码和两颗行星的轨迹图，注意图像的基本要素。

（2）要求作出两颗行星运行的动画。只要求给出代码，运行后输出行星运动的动画。提示：可以参考 matlab 动画的一些函数，也可以通过不断作图不断清空图形的方式形成动画（比如 h=plot(…);pause(0.1);delete(h)）。

第七题

为提高计算速度，许多方法都允许变步长的求解。如果误差较小，可自动增大步长，而误差较大时再自动减小步长，从而精确、有效地求解给出的常微分方程初值问题。

一般变步长算法的原理为：已知t_k时刻的状态变量为x_k，则在步长 h 下计算出t_k+h时刻的状态变量$\tilde{x}_{k+1}$。另外，将步长变成原来步长的一半，分两步从x_k计算出t_k+h时刻的状态变量$\hat{x}_{k+1}$。若两种运算步长下的误差小于给定的误差限，则可以将步长加倍，如果误差较大，则进一步将步长减半，最终选定的步长要保证误差满足要求。

采用变步长的四阶 Runge-Kutta Method 求解第五题的初值问题，初始步长与第五题一致，误差限为 1e-5，绘制结果并对两种方法进行比较。给出代码和图像，注意基本要素。

第八题 $y' = y^2 - y^3$，$0 \le t \le 2/\delta$，$y(0) = \delta$

（1）取 δ =1e-6，h=0.1，使用 Implicit Trapezoidal Method 进行求解，绘制结果，给出图像与代码，注意基本要素。

（2）分别使用内置函数 ode45 和 ode15s 对该问题进行求解，误差设为 1e-5，分别绘制结果，比较这三种方法。（感兴趣的同学可以了解一下 Stiff Problem）