Matlab 第 9 次作业

提交时间：2020 年 5 月 21 日 23:59 之前

第一题

用 Forward Difference Method 解方程 $u_t = 2u_{xx}, 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1$，其初边值条件为

$$\begin{cases} u(x,0) = 2\cosh x, & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 2e^{2t}, & 0 \le t \le 1 \\ u(1,t) = (e^2+1)e^{2t-1}, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

（1）取步长 $h = 0.1$， $k = 0.002$，用 mesh 画出近似解。要求给出代码和图像，注意图像基本要素。

（2）若步长 h 不变，取 $k = 0.004$，同样给出图像并观察发生了什么现象。

第二题

用 Backward Difference Method 解方程 $\pi u_t = u_{xx}, 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1$,初边值条件为

$$\begin{cases} u(x,0) = \cos \pi x, & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = e^{-\pi t}, & 0 \le t \le 1 \\ u(1,t) = -e^{-\pi t}, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

（1）取步长 $h = 0.1$， $k = 0.02$，用 mesh 画出近似解。要求给出代码和图像，注意图像基本要素。

（2）已知其解析解为 $u(x,t) = e^{-\pi t}\cos \pi x$，在 $(x,t) = (0.3,1)$ 处作一张准确值、近似值及误差的表，取步长 $h = 0.1$ 及 $k = 0.02, 0.01, 0.005$。

第三题

用 Crank-Nicolson Method 解方程 $u_t = 2u_{xx}, 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1$，其初边值条件为

$$\begin{cases} u(x,0) = e^x, & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = e^{2t}, & 0 \le t \le 1 \\ u(1,t) = e^{2t+1}, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

（1）取步长为 $h = k = 0.1$，画出近似解，给出图像和代码，注意基本要素。

（2）已知其解析解为 $u(x,t) = e^{2t+x}$，分别用 Forward Difference Method 和

Backward Difference Method 求解该方程，均取步长为$h=0.1$，$k=0.0025$，再分别用 Crank-Nicolson Method 和 MATLAB 内置函数 pdepe 进行求解，均取步长为$h=k=0.1$，要求作出四种求解方法与解析解的在$t=1$时的误差曲线，要求给出代码和图像，注意基本要素。

第四题

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} + Cu \\ u(x,0) = \sin^2 \dfrac{\pi}{L} x, & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = 0, & 0 \le t \le T \\ u(L,t) = 0, & 0 \le t \le T \end{cases}$$

（1）令$D=4$，$L=2$，$T=1$，分别取$C=8,\ 9,\ 10$，取步长$h=k=0.05$，用 Crank-Nicolson Method 进行求解，分别绘制三个求解的结果。若$u(x,t)$表示在位置x和时间t的人口密度，请分析其规律。要求给出代码、图像及分析。（可参考 *Ref.[1]* P390）

（2）令$D=1$，$L=10$，取步长$h=k=0.05$，若要人可以长时间地生存，这里的 C 最小为多少？要求给出代码和结果。（可用公式$C>\pi^2 D/L^2$对你的结果进行校验）

第五题

用 Finite Difference Method 求解以下方程

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1 \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ u_t(x,0) = 2\pi \sin \pi x, & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0, & 0 \le t \le 1 \\ u(1,t) = 0, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

（1）取$h=0.05$和满足 CFL condition 的 k，画出近似解，要求给出代码和图像。

（2）已知其解析解为$u(x,t)=\sin \pi x \sin 2\pi t$，在$(x,t)=(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$处作一张准确值、近似值及误差的表，取步长$h=ck=2^{-p}(p=4,\ldots,8)$。

第六题

用 Finite Difference Method 求解下列方程

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-xy}(x^2+y^2), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ u(x,0) = 1, & 0 \le x \le 1 \\ u(x,1) = e^{-x}, & 0 \le x \le 1 \\ u(0,y) = 1, & 0 \le y \le 1 \\ u(1,y) = e^{-y}, & 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

取步长为 $h = k = 0.1$，画出近似解。要求给出代码和图像。