

建模方法论

内容

- 整体把握问题的方法
- 提问题法 — 案例1: 穿越公路
- 关键词联想法 — 案例2: 飞行管理问题
- 类比思维 — 案例3: 人口问题及其推广
- 整体设计 — 案例4: 渔业管理问题

2018-3-13 13

电子科技大学教学科学研究院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

2

整体把握问题的方法

- 问题分解法是一种简单而有效的把握问题整体的方法，将问题分解为“三要素”：初态、目标态、过程

问题分解三要素	初态	觉察到的现在状态（目前“已知什么”，如条件、数据等）
	目标态	觉察到的希望目标（想要做什么、希望达到什么目的等）
	过程	能在“初态”和“目标态”之间发生作用的行动（能做什么、怎样做）



2018-3-13 13

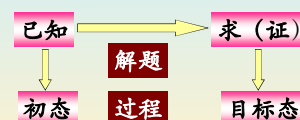
电子科技大学教学科学研究院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

3

整体把握问题的方法

- 建模与求解数学问题的联系与区别

常见数学题目模式



* 解决实际问题时，分析出问题的初态和**目标态**很困难。

* 未清晰地描述出问题的“初态”和“目标态”之前，过早地进入解决问题的阶段，会条件不清、目标不明。

2018-3-13 13

电子科技大学教学科学研究院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

4

提问题法——案例1：穿越公路

- **提问题法**：将需要达成的目标、不够清晰之处，借助于一系列问题来展开思路，导出一些想法或一个好的方案。

- 常用的问题如下：

- 这个问题的目标是什么？
- 和什么问题类似？
- 变动问题的某些条件会怎样？
- 将问题分解成若干部分，再考虑会怎样？
- 如何重新组合？

- 为进一步打开思路还可提以下问题：

- 有无需要进一步完善的内容？
- 可否换一种数学工具来解决此问题？



2018-3-13 13

电子科技大学教学科学研究院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

5

提问题法——案例1：穿越公路

- **穿越公路问题**：一条公路交通不太拥挤，以致人们养成“冲”过马路的习惯，不愿行走到**邻近较远处**的斑马线。当地交通管理部门不允许任意横穿公路，为方便行人，准备在一些**特殊地点**增设斑马线，让行人可穿越公路，并且还要保证行人的**平均等待时间**不超过15秒。

- **提问题**：

1. 这个问题的目标是什么？
2. 增设“斑马线”需考虑哪些方面的问题？
3. 有哪些词语是需要进一步咨询清楚的？



2018-3-13 13

电子科技大学教学科学研究院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

6

提问题法——案例1：穿越公路

- 穿越公路的人群密度？车流的密度大小？行人穿越公路的速度？
- 公路的情况，如是否有弯道？周边环境？
- 设置斑马线，司机或行人的哪方面的利益更为重要？...

此问题的机理复杂，受较多随机因素的影响，可采用统计模拟方法解决。

2018年3月13日

电子科技大学教学科学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

7

关键词联想法——案例2：飞行管理问题

关键词联想法主要步骤：

- 抓住问题的关键词，不受任何约束地进行联想；
- 把联想到的内容用关键词的方式记在卡片上，进一步激发新的想法，想出新的主意；
- 再把积攒的卡片相互搭配，形成解决问题的初步思路与步骤。

飞行管理问题：在约10,000米高空的某边长160公里的正方形区域内，经常有若干架飞机作水平飞行。区域内每架飞机的位置和速



2018年3月13日

电子科技大学教学科学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

8

关键词联想法——案例2：飞行管理问题

当一架欲进入该区域的飞机到达区域边缘，记录其数据后，要立即计算并判断是否会与区域内的飞机发生碰撞。如果会碰撞，则应计算如何调整各架（包括新进入的）飞机飞行方向角，以避免碰撞。

现假定条件如下：

- 不碰撞的标准为任意两架飞机的距离大于8公里；
- 对飞机飞行方向角调整的幅度不应超过30度；
- 所有飞机飞行速度均为每小时800公里；
- 进入该区域的飞机在到达区域边缘时，与区域内飞机的距离应在60公里以上；

关键词

2018年3月13日

电子科技大学教学科学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

9

关键词联想法——案例2：飞行管理问题

- 最多需考虑6架飞机；
- 不必考虑飞机离开此区域后的状况。

请你对这个避免碰撞的飞行管理问题建立数学模型，列出计算步骤，对以下数据进行计算（方向角误差不超过0.01度）。要求飞机飞行方向角调整的幅度尽量小。设该区域4个顶点的座标为(0, 0), (160, 0), (160, 160), (0, 160)。记录数据为：

关键词



2018年3月13日

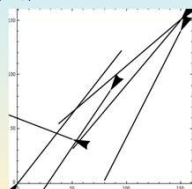
电子科技大学教学科学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

10

关键词联想法——案例2：飞行管理问题

飞机编号 横坐标x 纵坐标y 方向角(度)

1	150	140	243
2	85	85	236
3	155	155	220.5
4	50	50	159
5	150	150	230
新进入	0	0	52



注：方向角指飞行方向与x轴正向的夹角。

试根据实际应用背景对你的模型进行评价与推广。【问题完毕】

2018年3月13日

电子科技大学教学科学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

11

关键词联想法——案例2：飞行管理问题

提问题法：

- 这个问题的目标是什么？
——飞行管理——避免碰撞
- 如何实现这个目标？
——调整飞机飞行方向角——幅度尽量小
- 有哪些关键词？

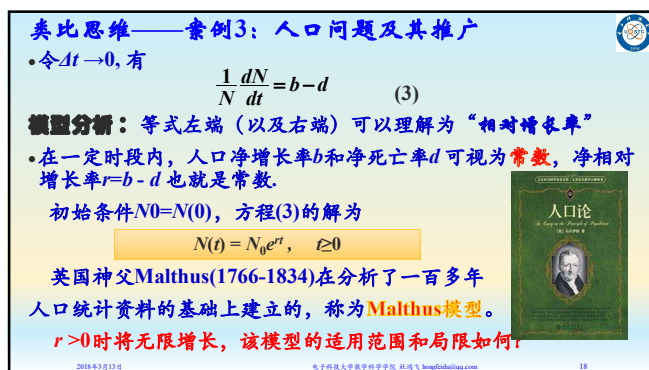
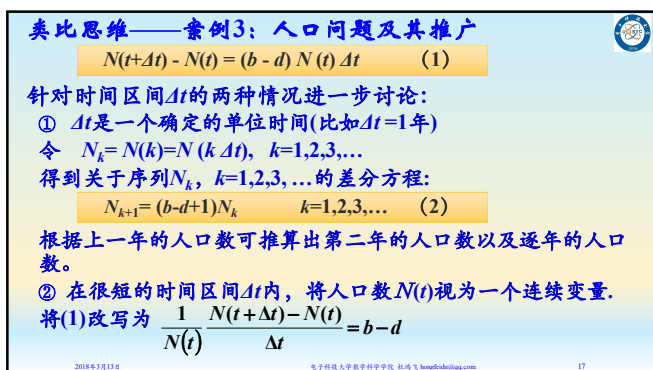
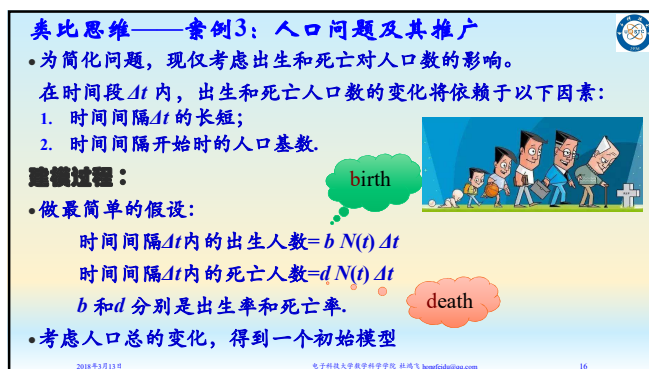
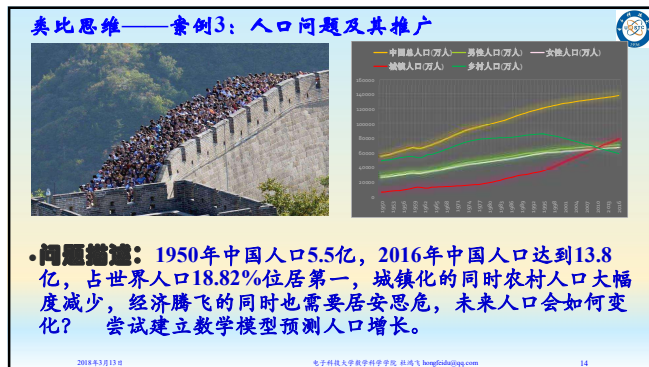
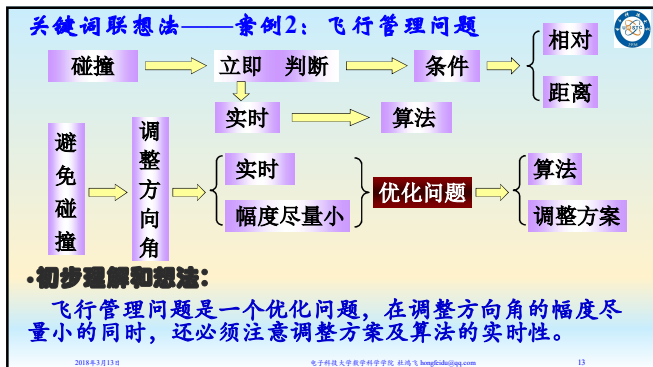
关键词联想法：

- 对问题仔细阅读，首先抓住题目中的关键词“管理”进行联想。
- 抓住诸如“碰撞”、“调整”、“避免碰撞”、“立即”、“判断”等等词语。
- 联系到解决问题的方案，不加约束继续联想，再将关键词搭配起来

2018年3月13日

电子科技大学教学科学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

12



类比思维——案例3：人口问题及其推广

分析：Malthus模型与中国总人口趋势

$$N(t) = N_0 e^{rt}, \quad t \geq 0$$

二者有何异同？

1. 中国总人口可近似为一条直线？

直线与指数函数：**泰勒展开式**→较短时间内，指数函数近似为直线

2. 进一步**警惕**：Malthus模型是否也只是一种近似？

观察：中国总人口上升趋势似乎趋缓（政策因素？）

3. **思考**：中国历朝历代人口变化规律是怎样的？如何建立模型？

开国初激励人口增长，末期人口多而土地集中，爆发起义，战争中心人口剧减，新朝代建立然后进入下一个循环。其他国家类似

2018年3月13日

电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

19

类比思维——案例3：人口问题及其推广

• 马尔萨斯的观点：

• 马尔萨斯认为，动植物的生长繁衍因为空间和营养物的缺乏会受到抑制，其**竞争思想**给达尔文带来灵感写出《物种起源》

• 马尔萨斯还认为，人类的生长繁衍则会因为食物的缺乏而受到抑制，分为预防抑制和积极抑制。**预防抑制**（道德抑制），即考虑到无力负担家庭而不结婚或者推迟结婚；**积极抑制**，即战争、瘟疫、繁重劳动等等，灾难会缩短生命，恢复被破坏的平衡。

• 马尔萨斯认为，**贫民是贫困的原因**，济贫法的作用适得其反。1834年，英国政府根据马尔萨斯的思想撤销了1601年以来的旧济贫法，并制定了一项新济贫法：取消一切对穷人的金钱和实物救济，让贫民到习艺所进行沉重的劳动。

2018年3月13日

电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

20

类比思维——案例3：人口问题及其推广

• 实际上随着人口不断增长，环境资源所能承受的人口容量的限制，以及人口中年龄和性别结构等都会对出生和死亡产生影响，只能在极小的时间段内才可以把人口净增长率 r 近似地看作常数。

• **模型改进**：将“人口净增长率”视为函数 $r(N)$ ，方程(3)改为

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r[N(t)]N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (4)$$

解得 $N(t) = N_0 e^{\int_0^t r[N(t)]dt}$, $t \geq 0$

由于 $r[N(t)]$ 是未知函数，无法确定 $N(t)$ 。

2018年3月13日

电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

21

类比思维——案例3：人口问题及其推广

• **简化处理**：将净增长率 r 看成人口数 N 的线性函数，设 $r(N) = a + cN$ ，并设 $r(0) = r$ ，且存在一个数值 K ，使 $r(K) = 0$ 。即有

$$\begin{cases} r(N) = a + cN \\ r(0) = r \\ r(K) = 0 \end{cases}$$

解得： $r(N) = r(1 - N/K)$ ，

代入式(4)中，有 $\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$

2018年3月13日

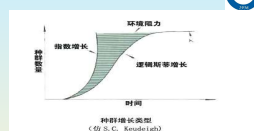
电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

22

类比思维——案例3：人口问题及其推广

• 得到Logistic模型：

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)} = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt}}$$



• 模型特征分析：

- ① 若 $r=0$ 时， $N(t)=N_0$ ；
- ② 若 $r<0$ ，则 $t \rightarrow \infty$ ，则有 $N(t) \rightarrow 0$ ；
- ③ 若 $r>0$ ，对 N_0 的任意值，当 $t \rightarrow \infty$ ，均有 $N(t) \rightarrow K$ ；

• 以美国人口为例，分析Malthus模型和Logistic模型**各自优缺点**：

➢ 时间较短或资源充分时Malthus模型较好；时间较长或资源有限时适宜用Logistic模型

2018年3月13日

电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

23

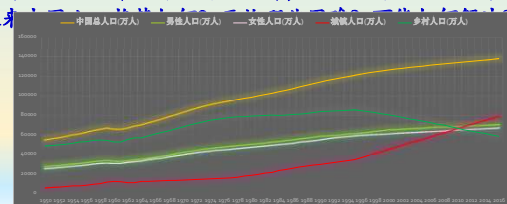
类比思维——案例3：人口问题及其推广

• 后续思考：

➢ 为什么我国现在能自己养活14亿人口，以前历朝历代无法做到？

➢ 为什么我国70年代开始计划生育，而现在开放二孩政策？

➢ 未来人口趋势预测



2018年3月13日

电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

24

类比思维——案例3：人口问题及其推广

- **类比思维**：这种增长模式还可用于哪些情形？
- **新产品销售模型**

怎样建立一个数学模型描述新产品生命周期，并由此分析出一些有用的结果以指导生产？

- 电饭煲刚出现时，消费者或者对它一无所知，或者用疑惑的眼光打量它。后来，有一部分人使用过后感到使用很方便，向亲朋好友宣传，这样吸引着尚未购买的人们。
- 设时刻 t 已售出的电饭煲总数为 $x(t)$ ，并假设每一售出的电饭煲在单位时间内平均吸引 k 个顾客，即 $x(t)$ 满足微分方程

2018-3-13 13

电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

25

类比思维——案例3：人口问题及其推广

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

- 若已知 $t=0$ 时， $x(0)=x_0$ ，则微分方程的解为

$$x(t) = x_0 e^{kt}, t \geq 0$$

- 令 $t \rightarrow \infty$ ，得出 $x(t) \rightarrow \infty$ ，这显然与事实不符。实际上，一般每户只需用1~2只电饭煲就足够了。
- 假设需求量有个上界，记为 M ，则尚未使用的人数大致为 $M-x(t)$ ，销售速度与销售量 $x(t)$ 和 $M-x(t)$ 的乘积成正比，记比例系数为 k ，则有

$$\frac{dx}{dt} = kx(M-x)$$

2018-3-13 13

电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

26

类比思维——案例3：人口问题及其推广

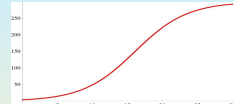
- 积分得解得

$$x(t) = \frac{M}{1 + e^{-kMt}}$$

即Logistic模型，又称为增长曲线或S型曲线

- **思考**：

1. 对Logistic曲线进行分析，分析出一些有用的结果用于指导生产。
2. Logistic模型是应用广泛的模型，能否用来对其他实际问题建立模型？



2018-3-13 13

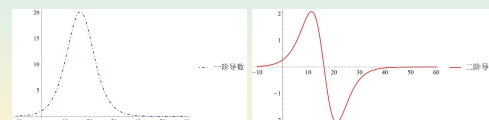
电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

27

类比思维——案例3：人口问题及其推广

- **更进一步思考**：

- 数据足够多时S型曲线的识别方法
- 观察其一阶导数和二阶导数



- 类似情形在哪些函数中见过？
- 二次多项式？再求导数如何？积分后如何？
- 正态分布及其分布函数，其他卡方分布、T分布、F分布等

2018-3-13 13

电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

28

类比思维——案例3：人口问题及其推广

- **更多S型函数**

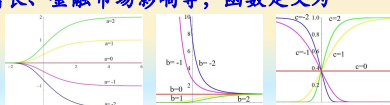
1. **Sigmoid函数**：特殊的Logistic函数，在信息科学中常被用作神经网络的阈值函数，将变量映射到0,1之间，函数定义为

$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$



2. **Gompertz函数**：可用于描述手机销售量、有限空间内人口数量、肿瘤细胞增长、金融市场影响等，函数定义为

$$f(x) = ae^{-be^{-cx}}$$



2018-3-13 13

电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

29

课后作业：小论文

- 美国于上世纪70年代从中国引进了4种亚洲鲤鱼，用于抑制池塘和湖泊中水草、藻类、污物和寄生虫的泛滥。80年代由于洪水原因，亚洲鲤鱼沿密西西比河一路北上快速生长和繁殖，在一些河流中的数量已占鱼类总数的90%，它们总是能战胜其他鱼类，破坏了所有途经水域的生态系统。捕杀与下毒等也无济于事，试就**亚洲鲤鱼在美洲的数目增长**建立数学模型，并预测未来30年其数目变化情况。



2018-3-13 13

电子科技大学数学科学学院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

30

整体设计——案例4：渔业管理问题

• 96年A题：最优捕鱼策略

为了保护人类赖以生存的自然环境，

可再生资源（如渔业、林业资源）的开发必须适度，一种合理、简化的策略是，在实现可持续收获的前提下，追求**最大产量**或**最佳效益**。考虑对某种鱼的最优捕捞策略：

• 假设这种鱼分4个年龄组，称1龄鱼，…，4龄鱼，各年龄组每条鱼的平均重量（单位：100g）分别为5.07、11.55、17.86、22.99，各个年龄组的鱼的自然死亡率均为0.8（1/年），这种鱼为季节性集中产卵繁殖，平均每条4龄鱼的产卵量为 1.109×10^5 个，3龄鱼的产卵量为这个数的一半，2龄鱼和1龄鱼不产卵，产卵和孵化期为每年的最后4个月，卵孵化并成长为**龄鱼**，成活率（1龄鱼条数与产卵总量 n 之比）为 $1.22 \times 10^{11}/(1.22 \times 10^{11} + n)$ 。



2018年3月13日

电子科技大学教学科学研究院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

21

整体设计——案例4：渔业管理问题

• 渔业管理部门规定，每年只允许在产卵孵化期前的**8个月内**进行捕捞作业。如果每年投入的捕捞能力（如渔船数、下网次数等）固定不变，这时单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群条数成正比，比例系数不妨称**捕捞强度系数**。通常使用13mm网眼的拉网，这种网只能捕3龄鱼和4龄鱼，其两个强度系数之比为0.42:1。渔业上称这种方式为固定努力捕捞。

1. 建立数学模型分析如何实现可持续捕获（假设每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼群条数不变），并且在此前提下得到最高的年收获量（捕捞总重量）。



2018年3月13日

电子科技大学教学科学研究院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

22

整体设计——案例4：渔业管理问题

2. 某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务5年，合同要求5年后鱼群的生产能力不能受到太大破坏。已知承包时各年龄组鱼群的数量分别为：122, 29.7, 10.1, 3.29 ($\times 10^9$) 条，如果仍用固定努力量的捕捞方式，该公司应采取怎样的策略才能使总收获量最高。

• 思考：（提问题）

1. 可以提出哪些问题？
2. 有哪些关键词？目标是什么？
3. 有哪些内容需要进一步查询才能确认含义？



2018年3月13日

电子科技大学教学科学研究院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

33

整体设计——案例4：渔业管理问题

4. 最大产量或最佳效益是不是一回事？

➢ 最大产量未必有最佳效益——供应量太多的时候价格会下跌导致效益降低

5. 这种鱼分4个年龄组，第5年怎么处理？

➢ 查询相关资料？该品种鱼年龄一般只有4年？

➢ 假设5龄鱼与4龄鱼重量相差无几

6. 题中与“产卵繁殖”有关的描述有哪些？

➢ “季节性集中产卵繁殖”、“只有3、4龄鱼产卵”“每年的最后4个月”、“成活率”

7. 该问题与什么问题类似？——模仿建模



2018年3月13日

电子科技大学教学科学研究院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

34

整体设计——案例4：渔业管理问题

• 尝试建模：类似人口模型

• 鱼群数目变化体现在哪几个方面？

✓ 捕捞（人为因素）、自然死亡、产卵繁殖

➢ 设 t 时刻 i 龄鱼的数量为 $N_i(t)$

1. 单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群条数成正比，比例系数不妨称**捕捞强度系数**——将捕捞强度系数 q_i 用数学表达式写出

➢ i 龄鱼($i=3,4$)在 $[t, t+\Delta t]$ 时间段内由捕捞产生的变化量(捕捞量)为

$$\frac{N_i(t) - N_i(t + \Delta t)}{\Delta t} = q_i N_i(t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dN_i(t)}{dt} = -q_i N_i(t), \quad q_i > 0, \quad i = 3, 4$$

$$q_4 = k, \quad q_3 = 0.42k$$



2018年3月13日

电子科技大学教学科学研究院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

35

整体设计——案例4：渔业管理问题

2. 各个年龄组的鱼的自然死亡率均为0.8（1/年）

是否理解为鱼死亡的概率为0.8？

不对！

• 类似于人口增长模型中的“自然（相对）增长率”，理解为鱼群未受其他外界影响下的“自然增长率”。

• 即单位时间内死亡鱼的数量与鱼的总量之比，可得描述鱼群自然死亡的微分方程：

$$\frac{1}{N_i} \frac{dN_i}{dt} = r, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

• 在捕捞的情况下，鱼群数量如何变化？



2018年3月13日

电子科技大学教学科学研究院 孙鸿飞 hongfei@qq.com

36

整体设计——案例4：渔业管理问题

3. 成活率c的影响

- 成活率(1龄鱼条数与产卵总量n之比)为

$$c = 1.22 \times 10^{11} / (1.22 \times 10^{11} + n)$$

- 设t年的产卵量为n, 则t+1年的1龄鱼数目为

$$N_1(t+1) = n \times c = \frac{1.22 \times 10^{11}}{1.22 \times 10^{11} + n} \times n = \frac{1.22 \times 10^{11}}{1 + 1.22 \times 10^{11}/n}$$

- 因3、4龄鱼的数量级及产卵量的数量级分别是 10^9 和 10^{14}

$$n \gg 1.22 \times 10^{11}$$

- 当n变动时, $N_1(t+1)$ 的反应不敏感, 说明下一年1龄鱼的成活率使得鱼群对于捕捞量有一定的**适应能力**。

2018年3月13日

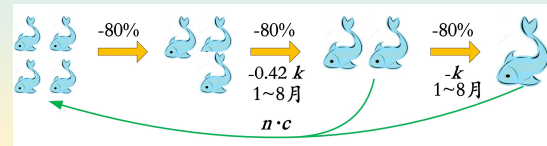
电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

37

整体设计——案例4：渔业管理问题

- 大致流程: 目标~变量~关系~表达式~模型

- 根据各年龄组鱼群传递关系, 捕捞与孵化, 示意图如下



- 据此建立表达式组合为模型

- 优化目标为所捕获的鱼重量

2018年3月13日

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

38

整体设计——案例4：渔业管理问题

- 完整模型, $N_i(t)$ 为i龄鱼t时刻数量, S_i 为捕获i龄鱼数量

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = -0.8N_1(t), & t \in [0, 1] \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = -0.8N_2(t), & t \in [0, 1] \\ \frac{dN_3(t)}{dt} = -(0.8 + 0.42k)N_3(t), & t \in [0.8/12, 1] \\ \frac{dN_4(t)}{dt} = -(0.8 + k)N_4(t), & t \in [0.8/12, 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dN_3(t)}{dt} = -0.8N_3(t), & t \in [8/12, 1] \\ \frac{dN_4(t)}{dt} = -0.8N_4(t), & t \in [8/12, 1] \end{cases}$$

$$S_3 = \int_0^{8/12} 0.42k N_3(t) dt$$

$$S_4 = \int_0^{8/12} k N_4(t) dt$$

2018年3月13日

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

39

整体设计——案例4：渔业管理问题

- 完整模型

$$\begin{aligned} N_1(1) &= e^{-0.8} N_1(0) \\ N_2(1) &= e^{-0.8} N_2(0) \\ N_3(8/12) &= e^{-(0.8+0.42k) \times (8/12)} N_3(0) \\ N_3(1) &= e^{-(0.8+0.28k)} N_3(0) \\ N_4(8/12) &= e^{-(0.8+k) \times (8/12)} N_4(0) \\ N_4(1) &= e^{-(0.8+2k/3)} N_4(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & M = S_3 \times m_3 + S_4 \times m_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} N_1(0) = n \times c \\ N_2(0) = N_1(1) \\ N_3(0) = N_2(1) \\ N_4(0) = N_3(1) + N_4(1) \end{cases} \end{aligned}$$

2018年3月13日

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

40

课后作业：小论文

- 美国于上世纪70年代从中国引进了4种亚洲鲤鱼, 用于抑制池塘和湖泊中水草、藻类、污物和寄生虫的泛滥。80年代由于洪水原因, 亚洲鲤鱼沿密西西比河一路北上快速生长和繁殖, 在一些河流中的数量已占鱼类总数的90%, 它们总是能战胜其他鱼类, 破坏了所有途经水域的生态系统。捕杀与下毒等也无济于事, 试就**亚洲鲤鱼在美国的数目增长**建立数学模型, 并预测未来30年其数目变化情况。



2018年3月13日

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

41