补充材料

1. 气网单管道聚合模型的差分格式（矩阵形式）推导

考虑(1)-(2)所建立的简化形式的动量方程与物质平衡方程：

$$\frac{\partial M}{A\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\lambda\overline{v}}{2DA}M=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v\right)}{\partial x}=0 \tag{2}$$

引入表征压强和质量流量的离散变量 $p_{i,j}$ 和 $M_{i,j}$，其中下标 i 与 j 分别差分网格中表示空间坐标和时间坐标；应用 Wendroff 差分格式，得到离散化的动量方程、物质平衡方程(3)-(4)：

$$\begin{aligned}&p_{i+1,j+1}-p_{i+1,j}+p_{i,j+1}-p_{i,j}\\&+\frac{c_g^2\Delta t}{A\Delta x}\left(M_{i+1,j+1}-M_{i,j+1}+M_{i+1,j}-M_{i,j}\right)=0\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A}\left(M_{i+1,j+1}-M_{i+1,j}+M_{i,j+1}-M_{i,j}\right)\\&+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(p_{i+1,j+1}-p_{i,j+1}+p_{i+1,j}-p_{i,j}\right)\\&+\frac{\lambda\overline{v}\Delta t}{4DA}\left(M_{i+1,j+1}+M_{i+1,j}+M_{i,j+1}+M_{i,j}\right)=0\end{aligned} \tag{4}$$

其中，Δt 为时间步长；Δx 为空间步长。

至此，已经得到了气网管道的差分模型，该模型描述了管道中相邻空间点和相邻时间点之间的状态量关系。基于此，可以联立式(3)-(4)这两个线性方程，得到相邻的网格节点之间状态量的递推关系如(5)：

$$
\begin{cases}
p_{i+1,j+1} = p_{i,j} + \dfrac{-ac+ad}{ab-c} M_{i,j} + \dfrac{-ab-c}{ab-c} p_{i+1,j} \\
+\dfrac{ac+ad}{ab-c} M_{i+1,j} + \dfrac{ab+c}{ab-c} p_{i,j+1} + \dfrac{-2ac}{ab-c} M_{i,j+1} \\
M_{i+1,j+1} = \dfrac{ab-d}{ab-c} M_{i,j} + \dfrac{2b}{ab-c} p_{i+1,j} \\
+\dfrac{-ab-d}{ab-c} M_{i+1,j} + \dfrac{-2b}{ab-c} p_{i,j+1} + \dfrac{ab+c}{ab-c} M_{i,j+1}
\end{cases} \tag{5}
$$

其中系数 a,b,c 满足以下关系

$$
a = \frac{c_g^2 \Delta t}{A \Delta x}, b = \frac{\Delta t}{\Delta x}, c = \frac{4D + \lambda \bar{v} \Delta t}{4DA}, d = \frac{4D - \lambda \bar{v} \Delta t}{4DA} \tag{6}
$$

定义 $\boldsymbol{u}_{i,j} = \left[p_{i,j} \; M_{i,j} \right]^{\mathrm{T}}$，可以进一步得到气网矩阵形式的差分模型：

$$
\boldsymbol{u}_{i+1,j+1} = \boldsymbol{N}_1 \boldsymbol{u}_{i,j} + \boldsymbol{N}_2 \boldsymbol{u}_{i+1,j} + \boldsymbol{N}_3 \boldsymbol{u}_{i,j+1} \tag{7}
$$

2. 最小二乘法计算复杂度推导：

正规方程 $\boldsymbol{A}^{\top} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{A}^{\top} \boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 且 $m > n$）的解为

$$
\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{A}^{\top} \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^{\top} \boldsymbol{b} \tag{8}
$$

该问题的计算复杂度由四部分相加得到：（1）$\mathbf{c}_1 = \mathbf{A}^{\top} \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的计算复杂度为 $O(mn^2)$；（2）$\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 计算复杂度为 $O(n^3)$；（3）$\mathbf{c}_3 = \mathbf{A}^{\top} \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 计算复杂度为 $O(mn)$；（4）$\mathbf{c} = \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 计算复杂度为 $O(n^2)$；因此，合并后的计算复杂度为 $O(mn^2) + O(n^3) + O(mn) + O(n^2) = O(mn^2 + n^3)$。

3. 遗忘因子递推最小二乘法计算复杂度推导

遗忘因子最小二乘法每次迭代过程为：

$$
\boldsymbol{K}_t = \boldsymbol{P}_{t-1} \boldsymbol{X}_t \left(\lambda + \boldsymbol{X}_t^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{t-1} \boldsymbol{X}_t \right)^{-1} \tag{9}
$$

$$
\boldsymbol{P}_t = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \boldsymbol{K}_t \boldsymbol{X}_t^{\mathrm{T}} \right) \boldsymbol{P}_{t-1} \tag{10}
$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \boldsymbol{K}_t\left(Y_t - \boldsymbol{X}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_{t-1}\right) \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{K}_t \in \mathbb{R}^{m\times n}$， $\boldsymbol{P}_t \in \mathbb{R}^{m\times m}$， $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$， $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$， $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$，下面分别对公式(9)-(11)的计算复杂度进行分析。

（1）式(9)计算复杂度： $\mathbf{d}_1 = \lambda + \mathbf{X}_t^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{t-1}\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的计算复杂度为 $O(mn^2 + m^2n)$， $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的计算复杂度为 $O(n^3)$， $\mathbf{d}_3 = \mathbf{P}_{t-1}\mathbf{X}_t\mathbf{d}_2$ 的计算复杂度为 $O(mn^2 + m^2n)$；综上，式(9)计算复杂度为 $O(mn^2 + m^2n + n^3)$。

（2）式(10)计算复杂度体现在 $\boldsymbol{K}_t\boldsymbol{X}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{t-1}$ 的计算上，为 $O(m^2n + m^3)$。

（3）式(11)计算复杂度体现在 $\boldsymbol{K}_t\boldsymbol{X}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_{t-1}$ 上，为 $O(m^2n + m^2)$。

综上所述，遗忘因子最小二乘法的单次迭代计算复杂度为 $O(mn^2 + m^2n + n^3 + m^3)$。