5.1 یادآوری مهم: اثبات رابطه‌ی زیر

شنبه ۱۲ اسفند
۱۴ جمادی‌الثانیه ۱۴۳۹
3 March 2018

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{4l^2}{\tau} pqt$$

l : طول قدم τ : واحد زمان

$$x(t) = x(t-\tau) + a l$$

a یک متغیر تصادفی است که با احتمال p برابر با $+1$ و با احتمال q برابر با -1 است.

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(t-\tau) \rangle + \langle a \rangle l = \langle x(t-\tau) \rangle + \frac{p-q}{p+q} l$$

$$= \langle x(t-2\tau) \rangle + 2(p-q) l = \frac{t}{\tau}(p-q) l$$

$$\Rightarrow \langle x(t) \rangle = \frac{tl}{\tau}(p-q) \Rightarrow \langle x(t) \rangle^2 = \frac{t^2 l^2}{\tau^2}(p-q)^2$$

حال:

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle (x(t-\tau) + al)^2 \rangle = \langle x^2(t-\tau) \rangle + 2l \langle a\, x(t-\tau) \rangle + l^2 \cancel{\langle a^2 \rangle}^{1}$$

a و $x(t-\tau)$ ۲ متغیر کاملا مستقل هستند زیرا قدم بعدی ربطی به مکان قبلی ندارد بنابراین:

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x^2(t-\tau) \rangle + 2l \langle a \rangle \langle x(t-\tau) \rangle + l^2$$

$$= \langle x^2(t-\tau) \rangle + 2l(p-q)\left(\frac{(t-\tau)l}{\tau}(p-q)\right) + l^2$$

$$= \langle x^2(t-\tau) \rangle + \frac{2tl^2}{\tau}(p-q)^2 - 2l^2(p-q)^2 + l^2$$

$$= \cancel{\langle x^2(0) \rangle}^{0} + \left(\frac{2tl^2}{\tau}(p-q)^2\right)\frac{t}{\tau} + l^2 \frac{t}{\tau}$$

یادآوری مهم:

یکشنبه
۱۵ جمادی‌الثانیه ۱۴۳۹
4 March 2018

۱۳ اسفند

$$-2l^2(p-q)^2\underbrace{\left[1+2+3+\cdots+\frac{t}{\tau}\right]}_{\left[\frac{t}{\tau}\left(\frac{t}{\tau}+1\right)\right]/2}$$

$$\Rightarrow \langle x^2(t)\rangle = \frac{2t^2l^2}{\tau^2}(p-q)^2 - l^2(p-q)^2\left[\frac{t}{\tau}\left(\frac{t}{\tau}+1\right)\right] + \frac{l^2t}{\tau} = \frac{2t^2l^2}{\tau^2}(p-q)^2 - \frac{l^2t^2}{\tau^2}(p-q)^2 - \frac{l^2t}{\tau}(p-q)^2 + \frac{l^2t}{\tau} = \frac{t^2l^2}{\tau^2}(p-q)^2 - \frac{tl^2}{\tau}(p-q)^2 + \frac{l^2t}{\tau}$$

$$\Rightarrow \langle x^2(t)\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{l^2t}{\tau} - \frac{tl^2}{\tau}(p-q)^2$$

$$= \frac{tl^2}{\tau}\left[1-(p-q)^2\right] = \frac{tl^2}{\tau}\left[\underbrace{1-p^2-q^2}_{2pq}+2pq\right]$$

می‌دانیم: $p^2+q^2+2pq=1 \Rightarrow 1-p^2-q^2=2pq$

(زیرا: $p+q=1 \Rightarrow (p+q)^2 = p^2+q^2+2pq=1$)

$$\Rightarrow \boxed{\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{tl^2}{\tau}\times 4pq}$$