بسم الله الرحمن الرحیم

گزارش مسئله‌ی انتگرال‌گیری

زینب ایوبی ۹۷۱۰۰۶۴۳

در این مسئله می‌خواهیم انتگرال یک تابع را با استفاده از دو روش تصادفی بدست آوریم.

روش اول استفاده از نمونه‌برداری ساده است. این روش به این صورت عمل می‌کند که تعدادی نقطه را در بازه‌ی انتگرال‌گیری به تصادف و البته به صورت یکنواخت انتخاب می‌کند و سپس مقدار تابع را برای این نقاط حساب می‌کند و در نهایت میانگین این مقادیر تابع را محاسبه نموده در طول بازه‌ی انتگرال‌گیری ضرب کرده و پاسخ انتگرال را بدست می‌دهد. بدیهی است هرچه تعداد نقاط بیش‌تری در بازه‌ی انتگرال‌گیری انتخاب کنیم پاسخ انتگرال‌مان دقیق‌تر خواهد بود. روش نمونه‌برداری ساده برای توابعی که در بازه‌ی انتگرال‌گیری شکل تقریبا همواری دارند بسیار مناسب است و پاسخ را با دقت خوبی ارائه می‌دهد.

اما اگر تابعی که می‌خواهیم از آن انتگرال بگیریم در بازه‌ی انتگرال‌گیری افت و خیز زیادی داشته باشد یا فقط در تعداد کمی نقاط مقدار قابل توجهی داشته باشد و در اکثر نقاط کم‌مقدار باشد، استفاده از روش نمونه‌برداری ساده خیلی دقیق نیست و یا برای این‌که دقت را بالا ببریم باید تعداد نمونه‌ها را بسیار زیاد کنیم که این خود زمان اجرای برنامه را افزایش می‌دهد و مطلوب نیست.

بنابراین در این مواقع از روش نمونه‌برداری هوشمند استفاده می‌کنیم. این روش بدین صورت عمل می‌کند که برای انتگرال گرفتن از تابع ناهموار $f(x)$، از تابعی مانند $g(x)$ استفاده می‌کند که انتگرال آن را در بازه‌ی انتگرال‌گیری می‌دانیم و شکلی مشابه تابع f دارد و به همین دلیل تابع f/g تابع نسبتا هموارتری است. آن‌گاه برای محاسبه‌ی

انتگرال تابع f در بازه‌ی انتگرال‌گیری، میانگین‌گیری را این بار روی تابع f/g انجام می‌دهیم اما برای xهایی که به تصادف در بازه‌ی انتگرال‌گیری **با توزیع g(X) انتخاب شده‌اند.** در نهایت این مقدار میانگین را در مقدار انتگرال تابع g در بازه‌ی انتگرال‌گیری ضرب می‌کنیم و پاسخ انتگرال را داریم.

مزیت این روش این است که چون به صورت هوشمند داده‌ها را انتخاب می‌کنیم با تعداد نقاط کمتر به دقت مطلوب می‌رسیم. چون تابع g تقریبا مشابه تابع f است و داده‌ها با توزیع g تولید می‌شوند طبیعتا xهایی که مقدار تابع آن‌ها بیش‌تر است با احتمال بیش‌تری تولید می‌شوند و این راز افزایش هوشمندی است.

اکنون می‌خواهیم انتگرال تابع $f(x) = e^{-x^2}$ را در بازه‌ی ۰ تا ۲ به دو روش بالا محاسبه کنیم و راجع به پارامترهای هم‌چون دقت، زمان محاسبه و ... بین این دو روش مقایسه به عمل آوریم:

(مقدار دقیق این انتگرال را با نرم‌افزار متلب محاسبه کرده‌ام. هم‌چنین در روش نمونه‌برداری هوشمند از تابع $g(x) = e^{-x}$ استفاده کرده‌ایم.)

جدول ۱: مقایسه‌ی ویژگی‌های دو روش نمونه برداری ساده و هوشمند برای انتگرال تابع $f(x)=e^{-x^2}$ در بازه‌ی ۰ تا ۲

تعداد نمونه	مقدار واقعی انتگرال	مقدار انتگرال با روش نمونه‌برداری ساده	مقدار انتگرال با روش نمونه‌برداری هوشمند	خطای آماری روش نمونه‌برداری ساده	خطای آماری روش نمونه‌برداری هوشمند	خطای مطلق روش نمونه‌برداری ساده	خطای مطلق روش نمونه‌برداری هوشمند	زمان اجرای روش نمونه‌برداری ساده	زمان اجرای روش نمونه‌برداری هوشمند
100	0.88208	0.88882	0.83878	0.06726	0.02999	0.00674	0.04330	0.0010	0.0010
1000	0.88208	0.89391	0.89393	0.02150	0.00833	0.01183	0.01185	0.0010	0.0010
10000	0.88208	0.88197	0.88328	0.00693	0.00265	0.00011	0.00120	0.0010	0.0019
100000	0.88208	0.88461	0.88325	0.00218	0.00084	0.00253	0.00117	0.0080	0.0170
1000000	0.88208	0.88204	0.88204	0.00069	0.00027	0.00004	0.00004	0.0741	0.1609

به طور کلی روش نمونه‌برداری هوشمند خطای آماری و خطای مطلق (از مقدار واقعی انتگرال) کم‌تری نسبت به روش نمونه‌برداری ساده دارد. هم‌چنین در تعداد نقاط بالا زمان اجرای برنامه برای روش نمونه‌برداری هوشمند (همان‌طور که از جدول هوایداست) بیش‌تر است. تابع $f(x) = e^{-x^2}$ تابع نسبتا هموراری است و به همین دلیل تفاوت فاحشی میان نتایج حاصل از دو روش نمونه‌برداری مختلف مشاهده نمی‌شود اما به طور حتم برای توابع ناهموارتر نمونه‌برداری هوشمند کاراتر است. در مجموع بنا بر شکل تابع خود باید تصمیم بگیریم کدام روش مفیدتر و بهینه‌تر و دقیق‌تر است.

انتگرال‌گیری چندگانه

در این قسمت می‌خواهیم یک مسئله‌ی فیزیکی با انتگرال چندگانه را به وسیله‌ی روش نمونه‌برداری ساده حل کنیم. به لحاظ تکنیکی کار بیش‌تری از قسمت قبل نباید انجام دهیم. تمام کاری که باید بکنیم این است که تابعی را که می‌خواهیم روی آن انتگرال بگیریم چند متغیره (با چند ورودی) تعریف کنیم و هر از این متغیرها را در بازه‌ی مجاز خودشان به صورت تصادفی و یکنواخت تولید کنیم و به تابع مورد نظر پاس بدهیم.

در این‌جا می‌خواهیم مرکز جرم یک کره را بیابیم که چگالی جرمی آن در راستای محور z از بالا به پایین به صورت خطی کم می‌شود طوری که چگالی جرمی کم‌چگال‌ترین نقطه نصف چگالی جرمی چگال‌ترین نقطه است.

با توجه به این که مسئله تقارن زاویه‌ای و سمتی دارد بنابراین مرکز جرم این کره جایی روی محور z است و چون نیم‌کره‌ی بالایی چگال‌تر است، مرکز جرم کره روی قسمت مثبت محور z قرار می‌گیرد.

تابعیت چگالی از z بدین صورت است:

$\rho(z) = (\rho_0/4)[z/R + 3]$

که در آن R شعاع کره است که در ادامه برای محاسبات آن را ۲ در نظر می‌گیریم و ρ_0 چگالی جرمی چگال‌ترین نقطه است که آن را ۱ در نظر می‌گیریم زیرا از محاسبات حذف خواهد شد.

مسئله را در مختصات کروی حل می‌کنیم:

$\rho(r, \theta) = (1/4)[r\cos(\theta)/2 + 3]$

$$Zcm = \frac{\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho(r,\theta)\, r\cos\theta\,)\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr}{\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r,\theta)\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr}$$

بنابراین ارتباط، دو تابع زیر را در کد می‌سازم و میانگین این دو تابع را برای ۱۰۰۰۰۰۰۰(ده میلیون) مقدار تصادفی r و ۱۰۰۰۰۰۰۰(ده میلیون) مقدار تصادفی θ محاسبه می‌کنم و نهایتا هر دو را در طول بازه‌های انتگرال‌ها یعنی در $2\pi * \pi * 2 = 4\pi^2$ ضرب می‌کنم و حاصل را بر یکدیگر تقسیم می‌کنم. جواب این تقسیم مرکز جرم کره است.

$$f(r,\theta) = \rho(r,\theta)\, r^3 \cos(\theta) \sin(\theta)$$

$$M(r,\theta) = \rho(r,\theta)\, r^2 \sin(\theta)$$

پاسخ این انتگرال را از نرم‌افزار متلب 0.1333332 (جواب دقیق) بدست می‌آورم و پاسخی که کد تصادفی می‌دهد برابر 0.1331359 با حدود ۳ تا ۴ ثانیه اجراست که همان‌طور که مشاهده می‌شود دقت بسیار خوبی دارد. (خطای نسبی آن 0.1 درصد است)