بسم الله الرحمن الرحیم

گزارش مسئله‌ی ول‌گشت یک بعدی

زینب ایوبی ۹۷۱۰۰۶۴۳

در این مسئله ما با ولگردی مواجه‌ایم که به صورت تصادفی روی یک خط حرکت می‌کند بدین ترتیب که در هر قدم با احتمال مشخصی به سمت راست و با مکمل آن احتمال به سمت چپ حرکت می‌کند. در این گزارش قصد داریم مسائلی را راجع به این حرکت تصادفی مورد بررسی قرار دهیم. لازم به ذکر است اثبات سوال اول این بخش (سوال ۵,۱) در فایل پی‌دی‌افی با نام "۵,۱" ضمیمه شده‌است.

بررسی رابطه‌ی $Sigma^2 = 4L^2pq/tau$ با شبیه‌سازی ول‌گشت یک‌بعدی

(کد 1D RANDOM WALK) : در این شبیه‌سازی مقادیر L و tau را که به ترتیب طول قدم‌های ولگرد و فاصله‌ی زمانی هستند را ۱ گرفته‌ام. این کد از دو تابع اصلی تشکیل شده‌است. تابع One_dimensional_random_walk (N , p) با گرفتن تعداد گام‌هایی که ول‌گرد برمی‌دارد (N) و نیز احتمال حرکت او در هر قدم به سمت راست (p)، آرایه‌ای ۱۰۰۰ در N می‌سازد و در هر سطر آن حرکت یک ول‌گرد بررسی می‌شود یعنی در هر خانه‌ی این سطر، مکان ول‌گرد در لحظه‌ی مربوطه نگهداری می‌شود. نقطه‌ی شروع تمامی ول‌گردها 0 است و هربار با تولید یک عدد تصلدفی بین ۰ و ۱ اگر این عدد کمتر از p بود گامی به سمت راست و در غیر این صورت به چپ برمی‌دارد. خروجی این تابع همین آرایه است (the_array_of_position).

تابع Analizing_data (the_array_of_position , N) با گرفتن آرایه‌ی مکانی ۱۰۰۰ ول‌گرد میانگین‌گیری آنسامبلی را روی این ۱۰۰۰ ول‌گرد انجام می‌دهد و مقادیر متوسط $x(t)$ و $x^2(t)$ را بدست می‌آورد و در نهایت از روی این دو کمیت $Sigma^2$ را محاسبه کرده خروجی می‌دهد.

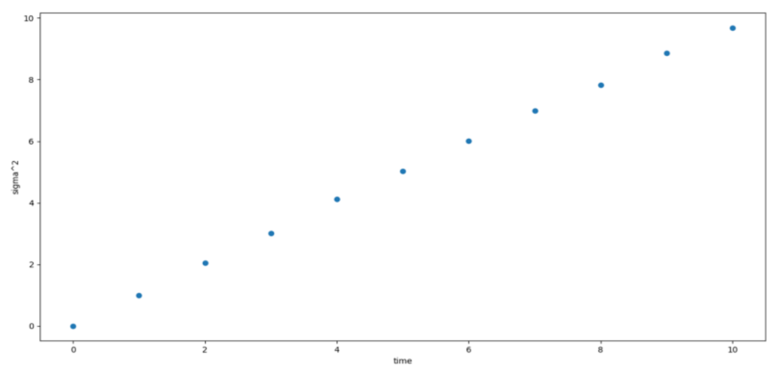
در پایان نمودار $Sigma^2$ را بر حسب t رسم می‌کنم و شیب آن را بدست آورده با مقدار عددی 4pq (یادآوری می‌کنم L=1 و tau=1) مقایسه می‌کنم که با تقریب خوبی برابرند.

در زیر نمودارها و نتایج عددی را برای چند مقدار مختلف p و N مشاهده می‌کنید:

N=10 , p=0.50:

شیب نمودار $Sigma^2$ بر حسب t = ۰/۹۷۳

مقدار عددی 4pq = ۱

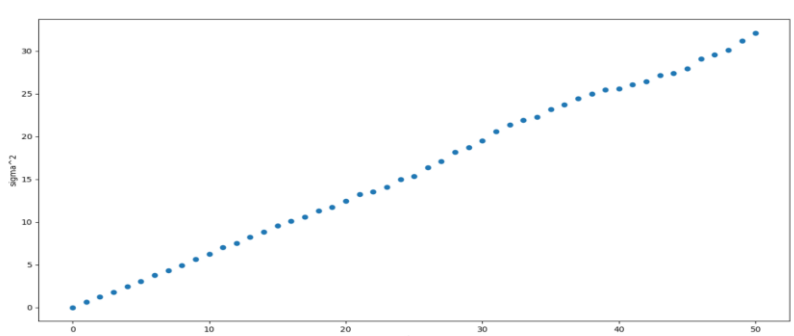


نمودار $Sigma^2$ بر حسب t. N=10 , p=0.50

N=50 , p=0.80:

شیب نمودار $Sigma^2$ بر حسب t = ۰/۶۴۲

مقدار عددی 4pq = ۰/۶۴۰

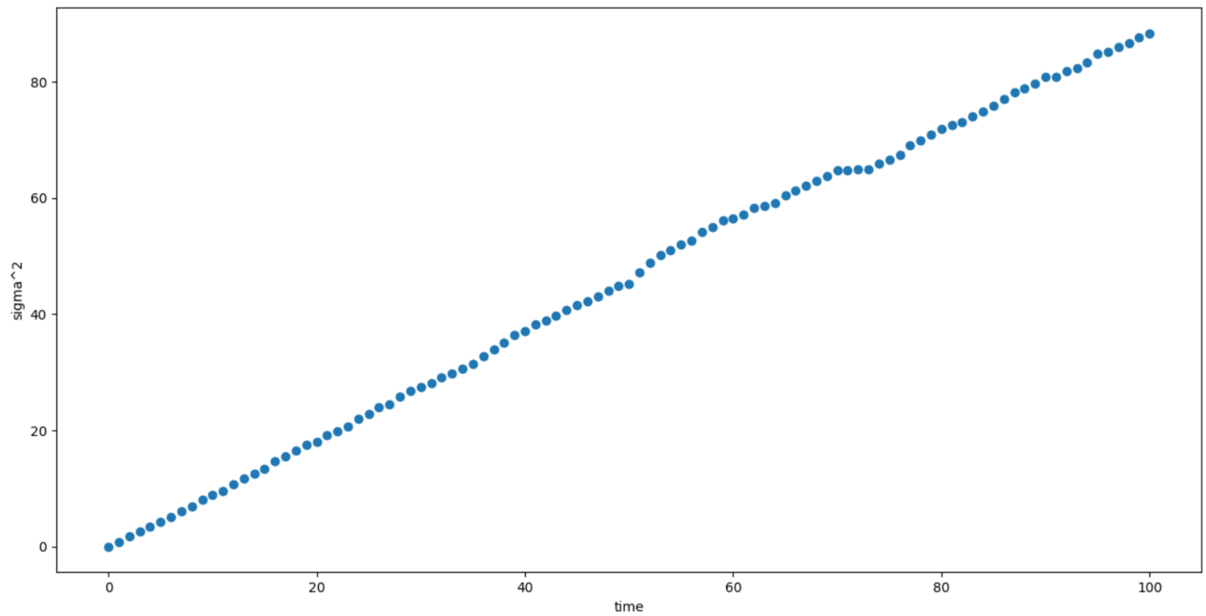


نمودار $Sigma^2$ بر حسب t. N=50 , p=0.80

N=100 , p=0.30:

شیب نمودار $Sigma^2$ بر حسب t = ۰/۸۹۴

مقدار عددی 4pq = ۰/۸۴۰



نمودار $Sigma^2$ بر حسب t. N=100 , p=0.30

ول‌گشت با تله:

در این مسئله طول مسیر ول‌گشت را ۲۰ خانه در نظر می‌گیریم یعنی اگر ول‌گرد از خانه‌ی x=10 به سمت راست و از خانه‌ی x=-10 به سمت چپ ادامه‌ی مسیر بدهد در تله افتاده و عمر او پایان می‌یابد. می‌خواهیم میانگین زمان مرگ او را به ازای احتمال‌های متفاوت حرکت به سمت راست و نیز مکان اولیه‌ی متفاوت بدست آوریم.

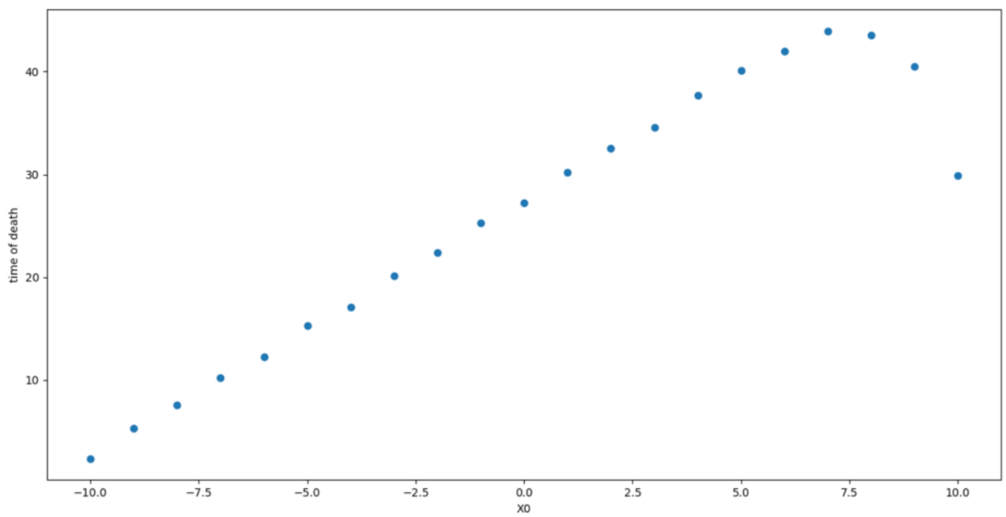
میان‌گیری آنسامبلی

روش اول با میانگین‌گیری آنسامبلی این مسئله را شبیه‌سازی می‌کند. (کد ۵,۳)

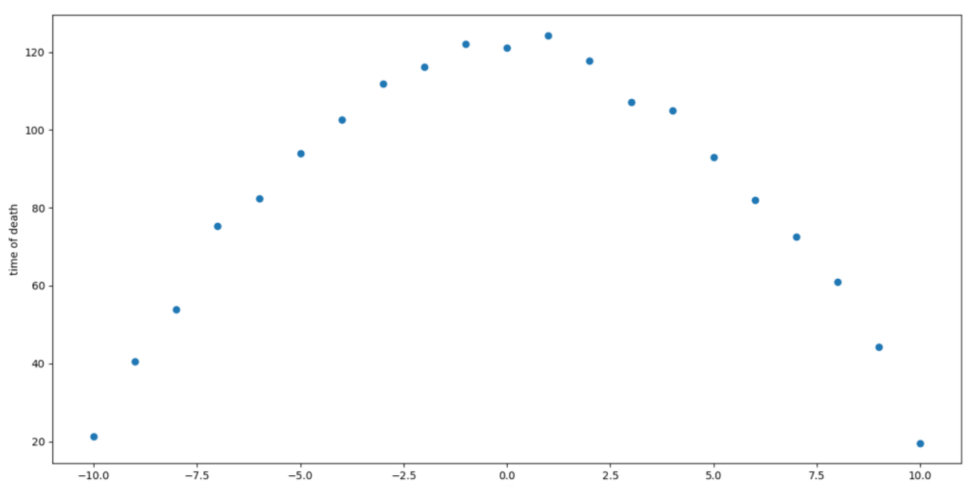
بدین صورت که ابتدا در تابع calcuting_time_of_daeth (x0 , p) زمان مرگ برای ول‌گردی که از نقطه‌ی x0 شروع به حرکت کرده و با احتمال p به سمت راست گام بر می‌دارد

محاسبه می‌شود (زمان مرگ همان گام Nامی است که ول‌گرد برمی‌دارد و به x=11 یا x=-11 می‌رسد) و سپس در تابع running این کار ۱۰۰۰ بار تکرار می‌شود تا یک میانگین‌گیری روی زمان مرگ به ازای x0 و p ثابت انجام دهد.

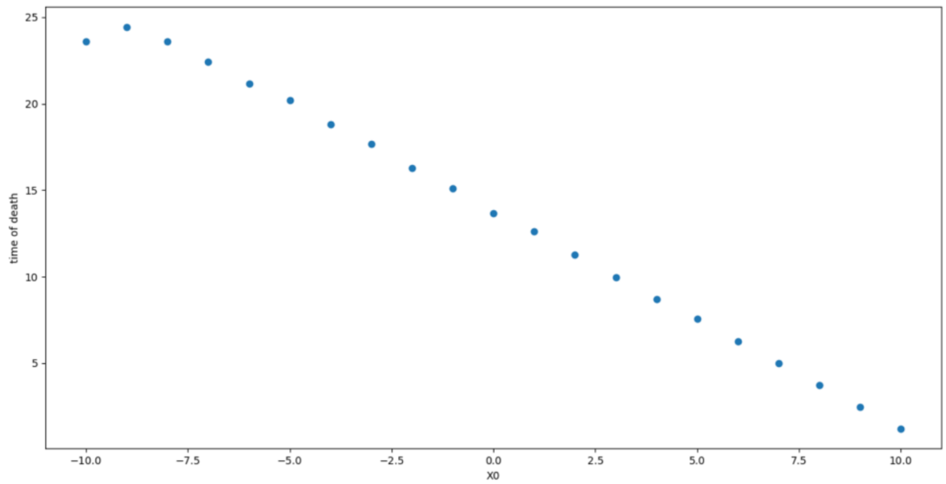
در پایان نمودار زمان مرگ متوسط را به ازای مقادیر مختلف x0 رسم می‌کنم. (هر نمودار به ازای یک مقدار مشخص احتمال p رسم شده‌است.)



نمودار متوسط زمان مرگ بر حسب x0 و p=0.30



نمودار متوسط زمان مرگ بر حسب x0 و p=0.50



نمودار متوسط زمان مرگ بر حسب x0 و p=0.90

نتایج دقیقا با انتظار ما مطابق است. برای p=0.50 انتظار یک نمودار متقارن را داریم. برای p<0.50 انتظار داریم هر چه x0 به سمت چپ برود در زمان‌های خیلی کوتاه ول‌گرد در تله بیفتد و به عکس برای p>0.50 انتظار داریم هرچهx0 به سمت راست برود در زمان‌های خیلی کوتاه ول‌گرد بمیرد.

سرشماری

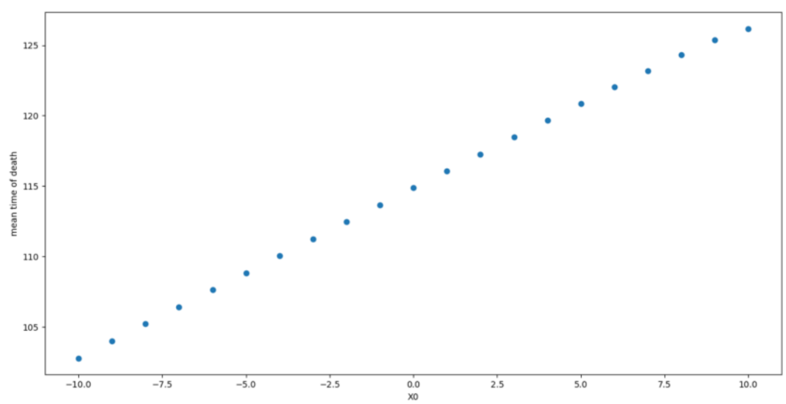
در این روش آرایه‌ای ایجاد می‌کنیم تا به صورت تعیینی احتمال حضور ول‌گرد را در هر مکان در هر لحظه از زمان معلوم کند. هر سطر از این آرایه مختص یک زمان است. این وظیفه را تابع census (t_max , x0 , p , q) بر عهده دارد که این آرایه را خروجی می‌دهد. t_max تعداد سطرهای این آرایه، x0 مکان اولیه‌ی ول‌گرد، p احتمال گام برداشتن به سمت راست و q احتمال گام برداشتن به سمت چپ است. مقدار هر خانه از این آرایه برابر مقدار خانه‌ی ستون سمت چپی در سطر قبلی ضرب در p به علاوه‌ی مقدار خانه‌ی ستون سمت راستی در سطر قبلی ضرب در q است.

تابع death (main_array , x_trap , t_max) احتمال بودن در تله (احتمال مرگ) را در هر زمان محاسبه می‌کند و در آرایه‌ی probability_of_death_in_time_t ذخیره می‌کند. منطقه‌ی مجاز عبور و مرور ول‌گرد (x_center – x_trap , x_center + x_trap) است و

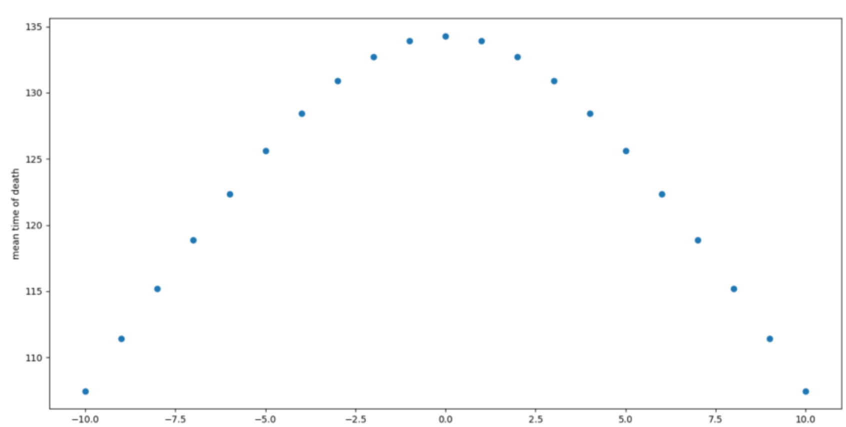
خارج از این محدوده تله محسوب می‌شود. x_center شماره‌ی ستون وسطی آرایه‌ی موقعیت است.

در نهایت تابع mean_time_of_death متوسط زمان مرگ را برای یک x0 و p مشخص محاسبه می‌کند بدین صورت که هر زمان را در احتمال بودن ول‌گرد در تله در همان زمان ضرب می‌کند و سپس مجموع این مقدار را بر مجموع احتمالات تقسیم می‌کند.

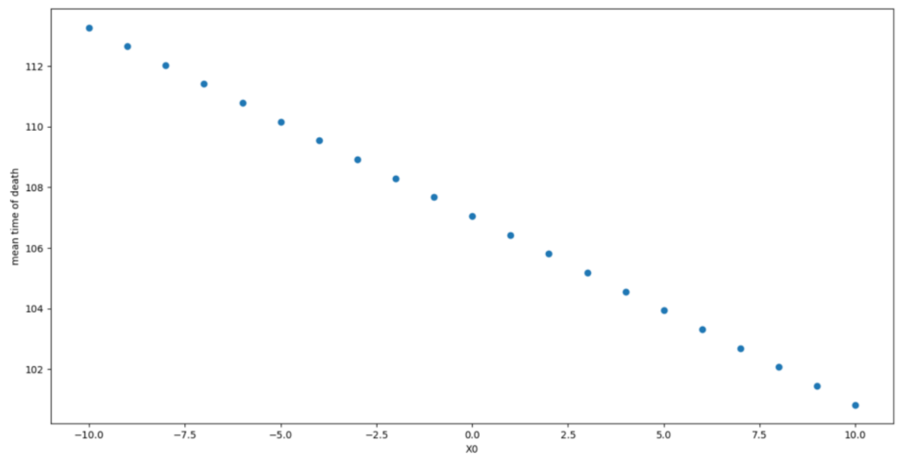
در پایان نمودار زمان متوسط مرگ را بر حسب x0 ها رسم کرده به نتایجی بسیار مشابه به روش میانگین‌گیری آنسامبلی می‌رسیم با این تفاوت که در این مسئله چون احتمالات دقیق محاسبه شده‌است نمودارها هیچ‌گونه اعوجاجی از شکل مورد انتظار ندارند بر خلاف مسئله‌ی قبلی که به صورت تصادفی محاسبه می‌شد و نمودارها کمی اعوجاج داشتند.



نمودار متوسط زمان مرگ بر حسب x0 و p=0.30



نمودار متوسط زمان مرگ بر حسب x0 و p=0.50



نمودار متوسط زمان مرگ بر حسب x0 و p=0.90

نتایج دقیقا با انتظار ما مطابق است. برای p=0.50 انتظار یک نمودار متقارن را داریم. برای p<0.50 انتظار داریم هر چه x0 به سمت چپ برود در زمان‌های خیلی کوتاه ول‌گرد در تله بیفتد و به عکس برای p>0.50 انتظار داریم هرچهx0 به سمت راست برود در زمان‌های خیلی کوتاه ول‌گرد بمیرد.