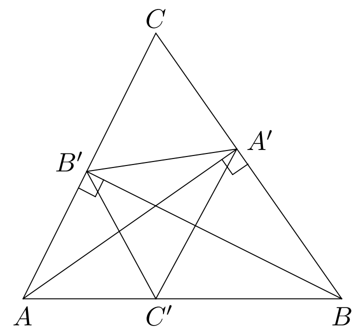
Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 28 november 1965

1. Med beteckningar som i figuren erhålles



$$A'C/AC = \cos C = B'C/BC.$$

Alltså är trianglarna ABC och $A'B'C$ likformiga, vilket innebär att vinklarna $B'A'C$ och A är lika stora. Analogt erhålles att vinklarna $C'A'B$ och A är lika stora. Om därför vinklarna i $A'B'C'$ kallas A', B' och C' erhålles

$$A' = 180° - 2A$$

och analogt

$$B' = 180° - 2B$$

$$C' = 180° - 2C.$$

Vi kan anta att $A \geq B \geq C$. Då är på grund av relationerna ovan $A' \leq B' \leq C'$. Vi får

$$C' - A = 180° - 2C - A \geq 180° - B - C - A = 0,$$

med likhet då $B = C$, d.v.s. då triangeln är likbent och basvinklarna $\leq$ toppvinkeln.

2. Sätt $x = y + a$. Tydligen är a ett heltal > 0. Ekvationen blir då

$$a(3y^2 + 3ay + a^2) = 999.$$

Eftersom vänsterledet är $\geq a^3$, är $1 \leq a \leq 10$. Vidare måste a vara en faktor i 999. Eftersom $999 = 3^3 \cdot 37$ ger detta möjligheterna $a = 1$, $a = 3$ och $a = 9$.

$$a = 1 \quad \text{ger} \quad 3y^2 + 3y + 1 = 999.$$

Denna ekvation har inga heltalslösningar eftersom alla termerna utom 1 är delbara med 3.

$$a = 3 \quad \text{ger} \quad 3(3y^2 + 9y + 9) = 999$$

d.v.s.

$$y^2 + 3y - 108 = 0,$$

som kan skrivas

$$(y + 12)(y - 9) = 0.$$

Detta ger lösningen $y = 9$.

$$a = 9 \quad \text{ger} \quad 9(3y^2 + 27y + 81) = 999$$

d.v.s.

$$y^2 + 9y - 10 = 0,$$

som kan skrivas

$$(y + 10)(y - 1) = 0.$$

Detta ger lösningen $y = 1$.

Svar: $x = 12$, $y = 9$ och $x = 10$, $y = 1$ är de enda lösningarna.

3. Antag att $x \geq 1/2$. Låt n vara det positiva heltal som gör $|x - n^2|$ minst. Om två sådana heltal finns, väljs t.ex. det största. x är då $\geq$ medelvärdet av n^2 och $(n-1)^2$ och $\leq$ medelvärdet av n^2 och $(n+1)^2$, d.v.s.

$$(n^2 + (n-1)^2)/2 \leq x \leq (n^2 + (n+1)^2)/2.$$

Detta kan skrivas

$$n^2 - n + 1/2 \leq x \leq n^2 + n + 1/2. \tag{1}$$

Vi skall visa att

$$(x - n^2)^2 < x - 1/4,$$

d.v.s. att

$$x^2 - (2n^2 + 1)x + n^4 + 1/4 \leq 0.$$

Detta kan skrivas

$$\Big(x - (n^2 - n + 1/2)\Big)\Big(x - (n^2 + n + 1/2)\Big) \leq 0,$$

vilket är ekvivalent med (1).

4. Insättning ger

$$\begin{aligned}
\frac{f(1/(1+2x))}{f(x)} &= \frac{1 + A/(1+2x)}{1 + B/(1+2x)} \cdot \frac{1 + Bx}{1 + Ax} \\
&= \frac{(A + 1 + 2x)(1 + Bx)}{(B + 1 + 2x)(1 + Ax)} \\
&= \frac{1 + 2x/(A+1)}{1 + 2x/(B+1)} \cdot \frac{1 + Bx}{1 + Ax} \cdot \frac{A+1}{B+1}
\end{aligned}$$

Härav inses att kvoten är oberoende av x bl.a. om

$$\begin{cases} 2/(A+1) = A \\ 2/(B+1) = B \end{cases}$$

vilket ger $A = 1$ eller -2, $B = 1$ eller -2. Villkoret $A > B$ är uppfyllt om $A = 1$, $B = -2$.
För att lösa den senare delen av uppgiften konstaterar vi att med ovanstående val av A och B är för $n \geq 0$

$$\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = \frac{f(1/(1+2a_n))}{f(a_n)} = \frac{A+1}{B+1} = -2$$

Detta visar att

$$f(a_n) = (-2)^n \cdot f(a_0) = (-2)^n \cdot f(1) = (-2)^{n+1}.$$

Alltså är $\dfrac{1 + a_n}{1 - 2a_n} = (-2)^{n+1}$, vilket ger

$$a_n = \frac{(-2)^{n+1} - 1}{1 - (-2)^{n+2}} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}.$$

5. Antag att f uppfyller villkoret att $|f| \leq 1$, då $|x| \leq 1$. Antag att b är sådant att $0 < b < 1$. Vi har

$$\begin{aligned}
&f(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \\
&f(-b) = -a_3 b^3 + a_2 b^2 - a_1 b + a_0 \\
&f(b) = a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 \\
&f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0.
\end{aligned}$$

Ur den första och fjärde ekvationen erhålles

$$-f(-1) + f(1) = 2a_3 + 2a_1,$$

ur den andra och tredje ekvationen erhålles

$$-f(-b) + f(b) = 2a_3b^3 + 2a_1b.$$

Elimination av a_1 ger

$$-f(-b) + f(b) + bf(-1) - bf(1) = a_3(2b^3 - 2b).$$

Alltså, eftersom $|f| \le 1$,

$$|a_3| \le \frac{|-f(b) + f(b) + bf(-1) - bf(1)|}{|2b^3 - 2b|} \le \frac{2 + 2b}{-2b^3 + 2b} = \frac{1}{b - b^2}.$$

Härur erhålles om lämpligt värde på b sätts in, en uppskattning på a_3. Bästa uppskattning erhålles då b väljs i $0 < b < 1$ så att $b - b^2$ får maximum. Detta värde visas lätt vara $1/2$. Alltså är $|a_3| \le 4$. Att detta är bästa möjliga värde inses genom att funktionen

$$y = 4x^3 - 3x$$

uppfyller de givna villkoren.

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet