# Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

**Lösningar till kvalificeringstävlingen den 5 oktober 1994**

1. Antag att Amandas födelseår är $1000a+100b+10c+d$, där $a, b, c, d$ är heltal mellan 0 och 9 (inklusive). Det gäller att lösa den diofantiska ekvationen

$$1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + d = 1994$$

eller

$$1001a + 101b + 11c + 2d = 1994,$$

under bivillkoren $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Av villkoren $1994 \geq 1001a \geq 1994 - (101 + 11 + 2)9 = 968$ följer $a = 1$ och ekvationen reduceras till $101b + 11c + 2d = 993$. Villkoren $993 \geq 101b \geq 993 - (11 + 2)9 = 876$ ger $9 \geq b > 8$. Alltså är $b = 9$ och ekvationen reduceras till $11c + 2d = 84$. Här måste $c$ vara ett jämnt tal. Villkoren $84 \geq 11c \geq 84 - 2 \cdot 9 = 66$ ger då $c = 6$ och $d = 9$.

**Svar**: Amanda, född år 1969, blir 25 år.

2. Av olikheten $\cos x \leq 1$ följer att $\cos^2 x(1 - \cos^5 x) \geq 0$, dvs $\cos^7 x \leq \cos^2 x$, med likhet då och endast då $\cos x = 0$ eller $\cos x = 1$.
Analogt följer av $\sin x \geq -1$ att $\sin^2 x(1 + \sin^5 x) \geq 0$, dvs $-\sin^7 x \leq \sin^2 x$, med likhet då och endast då $\sin x = 0$ eller $\sin x = -1$.
Addition av olikheterna $\cos^7 x \leq \cos^2 x$ och $-\sin^7 x \leq \sin^2 x$ ger $\cos^7 x - \sin^7 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, med likhet då och endast då $\cos x = 0$ och $\sin x = -1$ eller $\cos x = 1$ och $\sin x = 0$.
Observera att övriga kombinationer, $\cos x = 0$ och $\sin x = 0$ respektive $\cos x = 1$ och $\sin x = -1$, av villkoren för likhet strider mot att $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Lösningarna till ekvationen satisfierar alltså antingen $\sin x = -1$, som ger $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, eller $\cos x = 1$, som ger $x = 2n\pi$.

**Alternativa lösningar**

Faktorisering och den trigonometriska ettan ger:

$$\begin{aligned}
0 &= \cos^7 x - 1 - \sin^7 x \\
&= (\cos x - 1)\sum_{k=0}^{6} \cos^k x - \sin^5 x(1 - \cos^2 x) \\
&= (\cos x - 1)(\sum_{k=0}^{6} \cos^k x + 1 + \sin^5 x(\cos x + 1)) \\
&= (\cos x - 1)(\cos^6 x + (\cos x + 1)(\cos^4 x + \cos^2 x + 1 + \sin^5 x))
\end{aligned}$$

Den andra faktorn består av summan av två icke-negativa termer och är $= 0$ endast då dessa båda termer är $= 0$, dvs om och endast om $\cos x = 0$ och $\sin^5 x = -1$. Detta ger $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Den första faktorn $\cos x - 1$ är $= 0$ för $x = 2n\pi$.

Alternativt kan man studera funktionen $f(x) = \cos^7 x - \sin^7 x$ på intervallet $[0, 2\pi]$. Derivation och faktorisering ger

$$f'(x) = 7\cos^6 x(-\sin x) - 7\sin^6 x\cos x = -7\sin x\cos x(\cos^5 x + \sin^5 x).$$

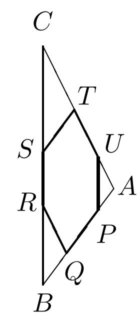
Derivatans nollställen i detta intervall är $0, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}$ och $2\pi$. Teckentabellen

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $\frac{7\pi}{4}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ | $\nearrow$ | $1$ |

visar att funktionen $f$ har ett absolut maximivärde $= 1$ och att detta antas i punkterna $0, \dfrac{3\pi}{2}$ och $2\pi$.

**Svar**: Rötterna är $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ och $x = 2n\pi$, där $n$ är ett godtyckligt heltal

3. Låt $PQRSTU$ vara den liksidiga sexhörning som återstår då man skurit bort hörnen i triangeln $ABC$ med snitt parallella med sidorna. Enligt topptriangelsatsen är trianglarna $ABC$ och $APU$ likformiga. Detta ger $\dfrac{|AU|}{b} = \dfrac{s}{a}$. Trianglarna $ABC$ och $TSC$ är också likformiga, enligt topptriangelsatsen, och $\dfrac{|TC|}{b} = \dfrac{s}{c}$. Alltså är $1 = \dfrac{b}{b} = \dfrac{|AU| + s + |TC|}{b} = \dfrac{s}{a} + \dfrac{s}{b} + \dfrac{s}{c}$. Men $\dfrac{3s}{a} < \dfrac{s}{a} + \dfrac{s}{b} + \dfrac{s}{c} < \dfrac{3s}{c}$, varav $\dfrac{c}{3} < s < \dfrac{a}{3}$.




4. Antag att $(a, b)$ och $(c, d)$ är två punkter på enhetscirkeln på avstånd 1 och med rationella koordinater. Då bildar dessa punkter tillsammans med cirkelns medelpunkt en liksidig triangel. Koordinaterna kan skrivas på formen $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = \cos(\alpha + 60^\circ)$ och $d = \sin(\alpha + 60^\circ)$. De trigonometriska additionsformlerna ger då

$$\begin{cases} 2c &= 2\cos\alpha\cos 60^\circ - 2\sin\alpha\sin 60^\circ &= a - b\sqrt{3} \\ 2d &= 2\sin\alpha\cos 60^\circ + 2\cos\alpha\sin 60^\circ &= b + a\sqrt{3}, \end{cases}$$

varav $2(ad - bc) = ab + a^2\sqrt{3} - ab + b^2\sqrt{3} = (a^2 + b^2)\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Men i denna likhet är talet i vänsterledet rationellt medan talet i högra ledet är irrationellt.

**Svar**: Nej.

5. Antag att $j$ av de tre produkterna $J_1$, $J_2$ och $J_3$ är lika med $\alpha$ och att $u$ av de tre produkterna $U_1$, $U_2$ och $U_3$ är lika med $\alpha$. Då är

$$\alpha^j\beta^{3-j} = J_1J_2J_3 = a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3 = U_1U_2U_3 = \alpha^u\beta^{3-u}$$

varav

$$\alpha^{j-u} = \beta^{j-u}.$$

Eftersom $\alpha$ och $\beta$ är olika positiva tal medför detta att $j - u = 0$. Alltså gäller

$$J_1 + J_2 + J_3 = j\alpha + (3 - j)\beta = u\alpha + (3 - u)\beta = U_1 + U_2 + U_3.$$

6. Sätt $m = \min\{a_n \; ; \; 1 \le n \le 1993\}$. Antag att $m = a_k$ för något $k$ där $1 < k < 1993$. Då är $a_k \le a_{k-1}$ och $a_k \le a_{k+1}$. Addition av dessa olikheter ger $2a_k \le a_{k-1} + a_{k+1}$, vilket strider mot villkor ii). Alltså är $k = 1$ eller $k = 1993$. Om $k = 1$ ger de två villkoren $a_1 \le a_2 = a_0 + a_2 < 2a_1$, varav $a_1 > 0$. Om $k = 1993$ ger analoga räkningar $a_{1993} \le a_{1992} = a_{1992} + a_{1994} < 2a_{1993}$ och $a_{1993} > 0$. För $1 \le n \le 1993$ är alltså $a_n \ge \min\limits_{1 \le j \le 1993} a_j > 0$.

**Svar**: Talen $a_n$ med $1 \le n \le 1993$ är positiva.

**Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:**

**Matematiktävlingar**
**Skolornas Matematiktävling**
**1988-1998**
**Nordiska Matematiktävlingen**
**1987-1998**
**av Åke H Samuelsson**