Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 14 november 1982

1. Sätt $x = [x] + a$, $0 \leq a < 1$. Den givna ekvationen kan då skrivas

$$[x]^2 + 2a[x] - [x^2] = 0 \tag{1}$$

För att (1) skall kunna vara uppfylld måste $2a[x]$ vara ett heltal. Låt oss visa att detta också är tillräckligt. Vi har $0 \leq a^2 < 1$ så att vi från

$$x^2 = [x]^2 + 2a[x] + a^2$$

kan sluta

$$[x^2] = [x]^2 + 2a[x]$$

dvs (1) är uppfylld.
För ett fast $[x]$ är $2a[x]$ heltal då a är något av talen

$$0, \frac{1}{2[x]}, \frac{2}{2[x]}, \ldots, \frac{2[x]-1}{2[x]}$$

dvs i $2[x]$ fall. För $1 \leq x \leq N$ är därför antalet lösningar till den givna ekvationen

$$2 + 4 + \cdots + 2(N-1) + 1 = 2\frac{N(N-1)}{2} + 1 = N^2 - N + 1.$$

2. Av symmetriskäl kan vi anta $a \leq b \leq c$. Sätt $b = a + t$, $c = a + t + u$, där $t \geq 0$, $u \geq 0$. Då är

$$abc = a(a+t)(a+t+u) = a^3 + 2a^2t + a^2u + at^2 + atu$$

$$\begin{aligned}(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) &= (a-u)(a+u)(a+2t+u) \\ &= a^3 + 2a^2t + a^2u - au^2 - 2tu^2 - u^3\end{aligned}$$

Då $a, t, u \geq 0$, följer den sökta olikheten.

3. **Metod 1.** Låt Q vara skärningspunkten mellan strålen AP och diagonalen BD. Trianglarna PAB och PAD har gemensam bas AP. För att deras areor skall vara lika måste B och D ligga lika långt från AP. Alltså är Q mittpunkten på sträckan BD. P ligger alltså på linjen AQ där Q är mittpunkten på diagonalen BD.
Med motsvarande argumentering visas att P måste ligga på linjen CQ. Om AQ och CQ inte är parallella ligger P i den enda skärningspunkten mellan dessa linjer, punkten Q, och ligger därför på diagonalen BD. Om AQ och CQ är parallella ligger P på linjen AQC dvs på diagonalen AC.

Metod 2. Sätt $\bigwedge APB = v$, $\bigwedge BPC = x$, $\bigwedge CPD = y$, $\bigwedge DPA = z$. Vi har

$$PA \cdot PB \cdot \sin v = PB \cdot PC \cdot \sin x = PC \cdot PD \cdot \sin y PD \cdot PA \cdot \sin z$$

$$PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD \sin v \sin y = PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD \sin x \sin z$$

$$\sin v \sin y = \sin x \sin z$$

$$\cos(v+y) - \cos(v-y) = \cos(x+z) - \cos(x-y)$$

Nu är $v + x + y + z = 360°$ och därför $\cos(v+y) = \cos(x+z)$. Vi får därför

$$\cos(v-y) = \cos(x-z).$$

Detta ger antingen $v - y = x - z$, $v + z = x + y = 180°$ så att P ligger på diagonalen BD eller $v - y = z - x$ i vilket fall $v + x = 180°$ och P ligger på diagonalen AC.

4. Triangeln DAE är likbent. Härav följer

$$\cos A = \frac{21-n}{2n}.$$

Av $0 < \cos A < 1$ följer $7 < n < 21$. Cos-satsen ger

$$m^2 = 21^2 + 33^2 - 2 \cdot 21 \cdot 33 \cos A = 1530 - 21 \cdot 33 \frac{21-n}{2n}.$$

För att högra ledet skall vara ett heltal kan n endast ha primfaktorerna 3, 7 och 11. Med ovanstående begränsningar duger endast 9 och 11. Den första gör inte m till heltal.
Lösning: $n = 11$, $m = 30$.

5. Antag att 4 sådana punkter inte kan väljas. Betrakta par av punkter med samma y-koordinat och samma färg. Låt A vara totala antalet sådana par.
För givna x_1 och x_2 med $x_1 < x_2$ finns högst 3 sådana par, högst en av varje färg. Eftersom antalet möjligheter att välja x_1 och x_2 är $11 + 10 + \cdots + 1 = 66$, får vi $A \leq 198$.
Å andra sidan om vi för fixt y låter antalet punkter med de tre färgerna vara respektive n_1, n_2 och n_3, där $n_1 + n_2 + n_3 = 12$, blir antalet par med samma färg för detta y-värde:

$$\frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} + \frac{n_3(n_3-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) - 6$$

Att detta antar sitt minsta värde 18 för $n_1 = n_2 = n_3 = 4$ kan inses av kalkylerna

$$(4+h)^2 + (4+k)^2 + (4-h-k)^2 = 48 + h^2 + k^2 + (h+k)^2 \geq 48.$$

Vi får därför att $A \geq 12 \cdot 18 = 216$ vilket strider mot den föregående olikheten för A. Alltså är det alltid möjligt att finna 4 punkter med samma färg bildande en axelparallell rektangel.

6. Sätt för enkelhets skull $b = 1 - a$, $0 \leq b \leq 1$. Olikheten kan då skrivas

$$(1-2b)\sin x + b \sin bx \geq 0 \tag{1}$$

Studera för $0 \leq x \leq \pi$ funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin bx - b \sin x \\ f'(x) &= b(\cos bx - \cos x) \end{aligned}$$

Eftersom cos-funktionen är avtagande för de aktuella x-värdena är $f'(x) \geq 0$, och då $f(0) = 0$ följer att $f(x) \geq 0$ för dessa x-värden. Detta kan skrivas $\sin bx \geq b \sin x$. Alltså är

$$(1-b)\sin x + b + \sin bx \geq (1-2b)\sin x + b^2 \sin x = (1-b)^2 \sin x \geq 0$$

vilket visar (1).

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner