Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Final den 23 november 1996

1. Genom en godtycklig punkt inuti en triangel dras linjer parallella med triangelns sidor. Därvid uppdelas den givna triangeln i sex områden av vilka tre är trianglar. Dessa senare trianglars areor betecknas T_1, T_2 och T_3. Den givna triangelns area är T. Bevisa att
$$T = (\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3})^2.$$

2. Postverket i landet Postonien vill inskränka antalet frimärksvalörer till två. Dessa två valörer ska ha heltalsvärden större än ett och differensen mellan de två heltalen ska vara två. Varje försändelse, med en portosats som är ett heltal större än eller lika med summan av de två valörerna, ska kunna korrekt frankeras med hjälp av dessa två typer av frimärken. Vilka valörer kan man välja?

3. För heltal $n \geq 1$ definierar vi funktionerna p_n för $x \geq 1$ genom
$$p_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right).$$
Visa att $p_n(x) \geq 1$ och att $p_{mn}(x) = p_m(p_n(x))$.

4. En femhörning $ABCDE$ är inskriven i en cirkel. Vinklarna vid A, B, C, D, E bildar en växande följd. Visa att vinkeln vid C är $> \pi/2$. Visa också att denna undre gräns inte kan förbättras.

5. Låt $n \geq 1$. Visa att man kan markera vissa av talen $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ så att följande gäller för varje tal $p = 0, 1, \ldots, n-1$:
Om man summerar k^p över alla markerade tal $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ får man samma summa som då man summerar k^p över alla icke markerade tal $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$.

6. Man använder ett antal brickor av dimension 6×1 för att konstruera en rektangel. Visa att längden av en av rektangelns sidor är delbar med 6.