Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 19 oktober 1967

1. Genom att t.ex. välja $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ och alla övriga $x_i = 0$ ser man att det är nödvändigt att $a_1 - a_2 = 0$ d.v.s. att a_1 och a_2 är lika. Analogt visas att alla talen a_i måste vara lika. Å andra sidan, om alla a_i är lika är villkoret uppenbarligen uppfyllt.

2. Vi visar först att om k är ett naturligt tal så gäller

$$S_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1. \tag{1}$$

Påståendet (1) gäller för $k = 1$. Om (1) gäller för k har man

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+2)(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1.$$

(1) gäller därför för alla k.
Låt oss kalla talen $a_1, a_2, \ldots$ för siffror. Antalet k-siffriga framställningar

$$a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \cdots + a_k \cdot k!$$

blir

$$2 \cdot 3 \cdots (k+1) = (k+1)!.$$

Ty a_1, kan väljas på två sätt, för varje val av a_1 kan a_2 väljas på tre sätt, för varje val av a_1, och a_2 kan a_3 väljas på fyra sätt o.s.v. Vidare gäller att en k-siffrig framställning ger ett tal mellan 0 och $(k+1)! - 1$ ty

$$0 \leq a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \cdots + a_k \cdot k! \leq 1 \cdot 1! + \cdots + k \cdot k! = S_k.$$

Antalet k-siffriga framställningar är alltså lika med antalet tal mellan 0 och $(k+1)! - 1$ (inklusive gränserna) och påståendet i texten är alltså bevisat om vi bara kan visa att två olika framställningar alltid ger olika tal.
Antag att vi hade två olika framställningar som gav samma tal:

$$a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \cdots + a_k \cdot k! = b_1 \cdot 1! + b_2 \cdot 2! + \cdots + b_k \cdot k!.$$

Låt r vara det största index för vilket a_r och b_r är olika. Då skulle gälla

$$a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \cdots + a_r \cdot r! = b_1 \cdot 1! + b_2 \cdot 2! + \cdots + b_r \cdot r!.$$

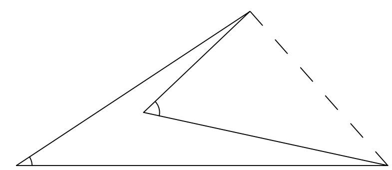
Om vi antar tex. $a_r < b_r$ så får vi å andra sidan

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \cdots + a_r \cdot r! &\leq S_{r-1} + a_r \cdot r! \\ &= r! - 1 + a_r \cdot r! = (a_r + 1)r! - 1 \leq b_r \cdot r! - 1 \\ &< b_1 \cdot 1! + b_2 \cdot 2! + \cdots + b_r \cdot r! \end{aligned}$$

vilket är en motsägelse. Därmed är påståendet bevisat.

3. a) Man ser lätt att ytterkanten består av tre sträckor parallella med och lika långa som var sin triangelsida samt av tre cirkelbågar med radien 8 m som tillsammans har längden av en cirkel med radien 8 m. På samma sätt består mittlinjen av tre sträckor och tre cirkelbågar med radien 4 m. Svaret blir därför att de angivna längderna är lika.

b) För en konvex fyrhörning visar man analogt samma resultat som i a). Däremot kan för icke-konvexa fyrhörningar inträffa att längderna blir olika. Exempel på en sådan fyrhörning ges heldragen i figuren.



Om de angivna vinklarna är mycket små kommer mittlinje och ytterkant att vara approximativt lika med motsvarande kurvor för triangeln som har de två yttre heldragna sträckorna samt den streckade sträckan till sidor. Eftersom enligt a) likhet gäller för en triangel går det tydligen att välja dimensionerna så att olikhet erhålls i detta fall.

4. Låt punkterna vara numrerade 1, . . .,6.

a) Låt x vara en av punkterna. Från x går minst tre sidor med samma färg, exempelvis röd, till punkterna y, z, u. Till punkterna x, y, z, u hör fyra trianglar. Om någon av de tre sidor med okänd färg som hör till x, y, z, u är röd så finns en triangel som är röd. Annars är de alla gröna och då är triangeln yzu grön.

b) Antag att det finns endast en enfärgad triangel. Vi kan antaga att triangeln 123 är grön. Antag att x, y, z, u valts så att xy, xz, xu alla har samma färg. Av beviset för a) följer att det finns en enfärgad triangel med hörn utvalda ur x, y, z, u. Om alltså $x = 4$, 5 eller 6, och y, z, u inte är punkterna 1, 2, 3, så kan man välja en enfärgad triangel, som inte är 123, vilket strider mot antagandet. Alltså måste man alltid, för $x = 4$, 5, 6, välja y, z, u som punkterna 1, 2, 3. Av antagandet följer vidare att $x1$, $x2$, $x3$ är röda. Om a, b är valda bland 4, 5, 6 så måste alltså ab vara grön ty annars skulle exempelvis $a1$ kunna utbytas mot ab i valet av de tre likfärgade linjerna. Härav följer att triangeln 456 är grön vilket är en motsägelse.

5. Konstruera i enlighet med förutsättningen en följd tal $v_2, v_3, \ldots, v_n$ i M och heltal $k_2, k_3, \ldots, k_n$ så att

$$\begin{aligned} &u + u - v_2 = k_2 \cdot n\\ &u + v_2 - v_3 = k_3 \cdot n\\ &\ldots\\ &u + v_{n-1} - v_n = k_n \cdot n \end{aligned}$$

Addera dessa ekvationer:

$$nu - v_n = (k_2 + k_3 + \cdots + k_n) \cdot n.$$

Härav inses att v_n är delbart med n. Den sista ekvationen i systemet visar då att $u + v_{n-1}$ är delbart med n.

6. a) n kan vara högst $= 4$. Ty å ena sidan finns fyra orter på ömsesidigt avstånd $>$ 1000 mil, t.ex. hörnen i en i jordsfären inskriven regelbunden tetraeder. Å andra sidan kan man inse att n inte kan vara ≥ 5 på följande sätt. Antag att 5 punkter på jordytan ligger på avstånd $>$ 1000 mil från varandra. Det är ingen inskränkning att antaga att en av orterna är sydpolen. Då måste de övriga 4 ligga på norra halvklotet och vi kan antaga att en ligger på $180°$-meridianen. De övriga tre ligger då på en longitud $\leq 90°$ d.v.s. i kvartsklotet som delas i två kongruenta delar av $0°$-meridianen. I en av dessa två delar måste då ligga minst två punkter och dessa två har avståndet högst 1000 mil, vilket strider mot förutsättningen att alla avstånden är större än 1000 mil.

b) Tag varje ort till medelpunkt för en (sfärisk) cirkel med radien $d/2$. Dessa cirklar begränsar sfäriska kalotter som alla har samma area A_d och om orterna ligger på avståndet $> d$ från varandra skär kalotterna ej varandra. Summan av deras areor måste därför vara mindre än hela jordytan: $n \cdot A_d <$ jordytan. Detta ger en övre begränsning för n. På detta sätt kan man t.ex. visa att det finns en konstant B så att $n < B/d^2$.
(Problemet att för varje d exakt bestämma det största n som kan komma ifråga är ej fullständigt löst.)

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet