Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

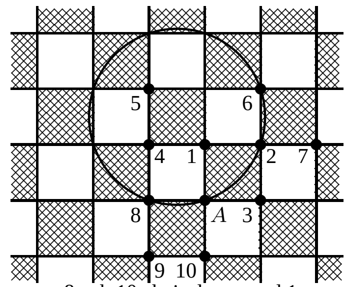
Lösningar till finaltävlingen den 24 november 1963

1. $\sqrt{10^7} = 10^3\sqrt{10}$. Ur tabell fås $3,162 < \sqrt{10} < 3,163$ varav

$$998244 = 3162^2 < \left(10^3\sqrt{10}\right)^2 < 3163^2 = 10004569.$$

Svar: 3162 stycken.

2. Cirkeln kan ligga helt inom en svart ruta. Då kan diametern maximalt väljas $= 4$ cm. Om cirkeln inte ligger helt inom en svart ruta måste den passera genom hörn till svarta rutor, ty i annat fall kommer man in i någon vit ruta. Utgå från hörnet A (se figuren). Cirkeln kan gå genom 1, 2 eller 3. 1 och 3 är ekvivalenta. Alltså finns två olika möjligheter.



8 och 10 ekvivalenta med 1
9 ekvivalent med 2

I. Cirkeln genom A och 1 kan gå genom 4 eller 5.

$A14$ har diametern $4\sqrt{2}$, d.v.s. periferins längd $4\pi\sqrt{2}$.
$A15$ har diametern $4\sqrt{10}$, d.v.s. periferins längd $4\pi\sqrt{10}$.

II. Cirkeln genom A och 2 kan gå genom 6 eller 7, men dessa båda möjligheter ger med cirkeln $A15$ ekvivalenta cirklar. Ytterligare möjligheter finns inte.

Svar: $4\pi\sqrt{10}$ cm.

3.

$$1234 = 102 \cdot 12 + 10$$
$$1234^{567} = (102 \cdot 12 + 10)^{567}.$$

Utvecklas högra ledet enligt binomialteoremet kommer de 567 första termerna att innehålla faktorn 12, medan den 568:e blir 10^{567}, d.v.s.

$$1234^{567} = N_1 \cdot 12 + 10^{567},\ N_1 \text{ heltal,} \qquad (1)$$

d.v.s. 1234^{567} ger vid division med 12 samma rest som 10^{567}.
Vi bestämmer nu ett tal r, $0 \leq r < 12$ så att

$$10^{567} = N_2 \cdot 12 + r,\ N_2 \text{ heltal.} \qquad (2)$$

Om det resonemang som ledde till (1) tillämpas successivt på $10^{567} = (10^3)^{189}$ får vi följande schema:

$10^3 = 1000$	div. m. 12 ger	rest 4
$(10^3)^{189}$	div. m. 12 ger	samma rest som $4^{189} = (4^3)^{63}$
$4^3 = 64$	div. m. 12 ger	samma rest som 4
$(4^3)^{63}$	div. m. 12 ger	samma rest som $4^{63} = (4^3)^{21}$
$(4^3)^{21}$	div. m. 12 ger	samma rest som $4^{21} = (4^3)^7$
$(4^3)^7$	div. m. 12 ger	samma rest som $4^7 = 4(4^3)^2$
$4(4^3)2$	div. m. 12 ger	samma rest som $4 \cdot 4^2$
4^3	div. m. 12 ger	rest 4

d.v.s. $r = 4$.
(1) och (2) ger nu

$$1234^{567} = N_3 \cdot 12 + 4, \quad N_3 = N_1 + N_2 \text{ heltal.}$$

På samma sätt får vi

$$\begin{aligned} 89 &= 7 \cdot 12 + 5 \\ 89^{1011} &= N_4 \cdot 12 + 5^{1011}, \quad N_4 \text{ heltal,} \end{aligned} \tag{3}$$

och schemat

$$\begin{array}{lll} 5^{1011} = 5 \cdot (5^2)^{505} & & \\ 5^2 = 25 & \text{div. m. 12 ger} & \text{rest } 1 \\ 5(5^2)^{505} & \text{div. m. 12 ger} & \text{rest } 5 \cdot 1^{505} = 5, \end{array}$$

d.v.s. (3) blir

$$89^{1011} = N_5 \cdot 12 + 5, \quad N_5 \text{ heltal.}$$

Slutligen undersöker vi vilken rest vi får om $1234^{567} + 89^{1011}$ divideras med 12.

$$1234^{567} + 89^{1011} = N_3 \cdot 12 + 4 + N_5 \cdot 12 + 5 = (N_3 + N_5) \cdot 12 + 9.$$

Svar: Den sökta resten är 9.

4. f deriverbar på $(-\infty, \infty)$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(axy), \quad \text{alla } \; x, y. \tag{1}$$

Vi undersöker först vilken form en funktion som satisfierar (1) måste ha. Välj y godtyckligt och håll y fixt. Derivera (1) med avseende på x.

$$f'(x+y) = f'(x) + ayf'(axy) \tag{2}$$

(2) gäller för alla x, speciellt för $x = 0$, som ger

$$f'(y) = f'(0) + ayf'(0) \tag{3}$$

Sätt $f'(0) = k$

$$\because f'(y) = k + kay$$

Då y valdes godtyckligt gäller (3) för alla y. Integration ger

$$f(y) = ky + kay^2/2 + C, \quad C = \text{konstant} \tag{4}$$

$y = 0$ ger $C = f(0)$, och $x = y = 0$ i (1) ger $f(0) = 3f(0)$

$$\because f(0) = 0,$$

d.v.s. f måste ha formen

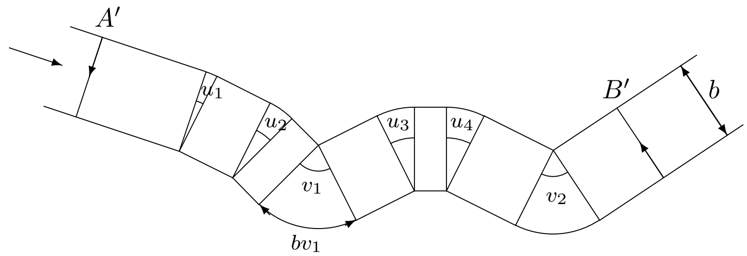
$$f(x) = kx + kax^2/2. \tag{5}$$

Satisfleras (1) av $f(x)$ enl. (5) för varje a?
$x = y$ i (1) ger

$$f(2x) = 2f(x) + f(ax)^2. \tag{6}$$

Om $k \neq 0$ och $a \neq 0$ blir vänsterledet i (6) av andra graden, medan högerledet blir av fjärde graden, d.v.s. antingen måste a eller k (eller båda) vara $= 0$.
Om $a \neq 0$ blir alltså lösningen endast $f(x) = 0$, alla x. Om $a = 0$ blir lösningen $f(x) = kx$, k godtyckligt.

5. Låt gatans bredd vara b. Antag att man går över gatan vid en godtycklig punkt A' och går tillbaka mittför B' så att A' ligger efter eller sammanfaller med A och B' ligger före eller sammanfaller med B. (Se figuren).



Beteckna längden av vägsträckan från A' till B' på vänstra sidan av gatan med V och på högra sidan av gatan med H. Vi kallar gatans avböjningsvinkel "positiv" om gatan svänger åt höger och "negativ" om den svänger åt vänster. Antag att mellan A' och B' finns: *positiva vinklar*, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, *negativa vinklar*, $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

De linjära styckena av V och H i gatans längdriktning är lika långa $= s$.

$$\begin{cases} V = s + bu_1 + bu_2 + \cdots + bu_n, \\ H = s + bu_1 + bu_2 + \cdots + bv_m + 2b \end{cases}.$$

För att avgöra vilken av V och H som är längst bildas skillnaden

$$V - H = b(u_1 + u_2 + \cdots + u_n - v_1 - v_2 - \cdots - v_m) - 2b \leq b \cdot 5\pi/8 - 2b$$

ty riktningen är hela tiden mellan NO och SSO. Man får

$$V - H \leq b(5\pi - 16)/8 < b(5 \cdot 3,15 - 16)/8 < 0,$$

d.v.s. $V < H$. Vägsträckan AB blir alltså kortast om man hela tiden går på vänstra sidan.

6. Vi uppskattar derivatan i en godtycklig punkt. Utan inskränkning kan vi välja punkten $x = 0$. Vidare kan vi anta $f(0) \geq 0$, annars studeras $-f(x)$. Det räcker också att låta $x \geq 0$, ty för $x \leq 0$ kan man i stället studera funktionen $f(-x)$. Sätt $f'(0) = k$, $f(0) = n$. Vi har $-B \leq f''(x)$, varur för $x \geq 0$

$$\int_0^x (-B)\,dt \leq \int_0^x f''(t)\,dt; \qquad -Bx \leq f'(x) - k;$$
$$\int_0^x (-Bt + k)\,dt \leq \int_0^x f'(t)dt; \quad -Bx^2/2 + kx \leq f(x) - n.$$

Detta och $f(x) \leq A$ ger

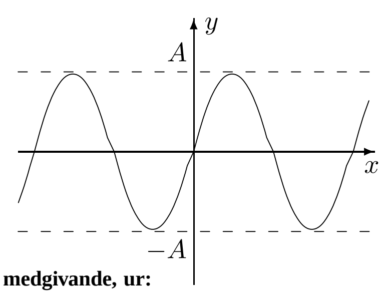
$$-Bx^2/2 + kx \leq A - n \leq A$$

som skall gälla för alla x. Om $k \leq 0$ är vänstra ledet ≤ 0 för alla $x > 0$. Om $k \geq 0$ har vänsterledet maximum $= k^2/(2B)$ för $x = k/B$.

Alltså är $k^2/(2B) \leq A$, d.v.s. $k \leq \sqrt{2AB}$. På samma sätt ger studium av $f(-x)$ att $k \geq \sqrt{2AB}$.

Vi kan således välja $C = \sqrt{2AB}$.

Att detta är den bästa konstanten inses av exemplet i figuren. Denna funktion, som består av parabelgrenar, har visserligen diskontinuerlig 2:a derivata i de punkter där $|f'(x)|$ är maximal. Man kan emellertid ändra funktionen så att f'' blir kontinuerlig, och denna ändring kan göras så att ändringen i f' blir godtyckligt liten.



Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet