Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 14 oktober 1971

1. Om ekvationen ska vara uppfylld mste $z > x$, $z > y$. Anta $y \geq x$. Division med n^x ger

$$1 + n^{y-x} = n^{z-x}.$$

Hr r n delare i hgra ledet och sledes ven i vnstra ledet. Nr $y - x > 0$ ger emellertid vnstra ledet resten 1 vid division med n. Allts mste $y - x = 0$. D r vnstra ledet $= 2$. Att ven hgra ledet r $= 2$ ger $n = 2$, $z - x = 1$.
Ekvationen har sledes positiva heltalslsningar endast fr $n = 2$. Lsningarna r $y = x$, $z = x + 1$, x godtyckligt positivt heltal.

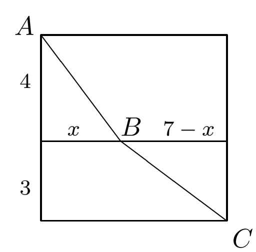
2. Anta att vi tar m bitar av den vnstra sorten och n bitar av den hgra. Detta ger $2m + n$ svarta rutor och $m + 3n$ vita rutor. Dessa antal ska vara lika.

$$2m + n = m + 3n, \qquad m = 2n.$$

Totala antalet rutor blir d $3m + 4n = 6n + 4n = 10n$. Om brdet har k rutor i sida mste 10 vara delare i k^2 och sledes ven i k (k^2 mste innehlla faktorerna 2 och 5, dvs k mste innehlla faktorerna 2 och 5). Ett vanligt schackbrde, $k = 8$, kan allts inte konstrueras.
Å andra sidan kan man av 2 bitar av den vnstra sorten och 1 bit av den hgra ltt bilda en 5×2-rektangel. Med sdana rektanglar kan man pussla ihop ett 10×10-brde.

3. Kalla mittpunkterna p bgarna AB, BC, CD, DA fr E, F, G, H respektive. Lt α vara vinkeln FEG och β vinkeln EFH. Vi har att visa att $\alpha + \beta = 90°$. Randvinkeln α str p bgen FG och randvinkeln β str p bgen EH. En randvinkel r hlften av motsvarande medelpunktsvinkel. Lngden av bgen FG +lngden av bgen EH r enligt konstruktionen halva cirkelns omkrets. Summan av motsvarande medelpunktsvinklar r d $180°$ och $\alpha + \beta$ som r hlften drav, r $90°$.

4. Beteckningar enligt figuren. Som enhet fr lngd tas $100m$, som enhet fr tid tas sekund. Den vg som ska vljas mste best av tv linjestycken AB och BC. Tiden fr AB blir $\frac{100}{3}\sqrt{x^2+16}$ och den fr BC blir $\frac{100}{4}\sqrt{9+(7-x)^2}$. Den totala tiden T blir summan av dessa uttryck. Derivering med avseende p x ger



$$\frac{T'}{100} = \frac{x}{3\sqrt{x^2+16}} - \frac{7-x}{4\sqrt{9+(7-x)^2}}.$$

Minimum intrffar fr $T' = 0$. Man finner ltt genom prvning att $x = 3$ r en lsning till $T' = 0$. Att det inte finns andra lsningar kan man inse genom att konstatera att bda termerna i $T'/100$ ovan r vxande i intervallet $0 < x < 7$. Man kan exempelvis skriva den frsta p formen

$$\frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{16}{x^2+16}}$$

och resonera: Om x blir strre, blir x^2+16 strre, $16/(x^2+16)$ mindre, ... och motsvarande omskrivning och resonemang fr den andra termen. Allts r $T' < 0$ fr $x < 3$ och $T' > 0$ fr $x > 3$ s att $x = 3$ ger T:s minsta vrde. Man fr $T = 3500/12$.
Svar: 2911 sekunder.
Anmrkning. Om man inte finner lsningen $x = 3$ kan man lsa $T' = 0$ genom kvadrering. Detta leder till ekvationen

$$x^4 - 14x^3 + 49x^2 + 288x - 1008 = 0.$$

Finner man hr lsningen $x = 3$ kan ekvationen skrivas

$$(x-3)(x^3 - 11x^2 + 16x + 336) = 0$$

och man kan konstatera att den andra faktorn inte kan vara $= 0$ fr $0 < x < 7$.

5. Var och en av differenserna $n_3 - n_1$, $n_4 - n_1$, $n_4 - n_2$ r summan av tv primtal och allts inte det minsta primtalet utan ett udda primtal. P grund av

$$n_2 - n_1 = n_4 - n_1 - (n_4 - n_2)$$
$$n_4 - n_3 = n_4 - n_1 - (n_3 - n_1)$$

r $n_2 - n_1$ och $n_4 - n_3$ dels primtal, dels differensen mellan tv udda tal dvs ett jmnt primtal, dvs talet 2. Stt $n_3 - n_2 = p$. D r $n_3 - n_1 = p + 2$. Men vi vet att $n_3 - n_1$ r udda, allts ven p udda. De tre udda talen $n_3 - n_2$, $n_3 - n_1$ och $n_4 - n_1$ r d

$$p, p+2, p+4$$

dvs tre p varandra fljande udda tal. Men ett av tre sdana tal r alltid delbart med 3. Den enda mjligheten r drfr p=3. Talen n_1, n_2, n_3, n_4 blir d n_1, $n_1 + 2$, $n_1 + 5$, $n_1 + 7$ och alla differenserna r d primtal.

6. Om ngon av a, b, c r ≤ 0 r $a + b + c \leq$ summan av de tv strsta och drfr ≤ 2 gnger den strsta. Vi har ocks givetvis att $a + b + c \leq 3$ gnger den strsta. Hrav fljer den skta olikheten vare sig $\max(a, b, c)$ r positivt eller ej.
Anta drfr $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Lsbarhetsvillkoret fr ekvationen kan skrivas $4ac \leq b^2$.
Om $\max(a, b, c) = a$ r $b \leq a$ och $c \leq b^2/4a \leq a^2/4a = a/4$. Allts r $a + b + c \leq 9a/4$ och olikheten r bevisad i detta
Om $\max(a, b, c) = c$ frfares p motsvarande stt.
Anta slutligen att $\max(a, b, c) = b$. Om $a \leq b/2$, $c \leq b/2$ s r $a + b + c \leq 2b$. Anta drfr exempelvis att $a > b/2$ s att $b/2 < a \leq b$. D r
$$a + b + c \leq a + b + \frac{b^2}{4a}.$$
Kalla hgra ledet fr $f(a)$. Vi sker strsta vrdet fr $f(a)$ i intervallet $[b/2, b]$. $f'(a) = 1 - b^2/4a^2$ ger $f'(a) \geq 0$ i intervallet och drmed f vxande. Strsta vrdet r drfr $f(b)$ som r $9b/4$ s att vi har $a + b + c \leq 9b/4$. Om $c > b/2$ frfares p motsvarande stt.
Anmrkning. Tar vi $a = b$ och $c = b^2/4a$ fr vi exempelvis ekvationen $4x^2 + 4x + 1 = 0$ med reella lsningar. Denna ekvation visar att konstanten 9/4 inte kan frbttras.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner