Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 23 november 1969

1. Sök alla talpar (x, y) där x och y är heltal och satisfierar
$$x^3 = y^3 + y.$$

2. Visa att $\tan \dfrac{\pi}{3n}$ är irrationellt för alla positiva heltal n.

3. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara givna tal sådana att $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ och låt $b_1, b_2, \ldots, b_n$ vara andra givna tal, ej nödvändigt ordnade på något sätt. Sortera om talen b_i i storleksordning, och döp om talen till $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $B_1 \geq B_2 \geq \cdots \geq B_n$. Visa att
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq a_1B_1 + a_2B_2 + \cdots + a_nB_n.$$
(Det är tillåtet att anta att alla talen är positiva men lösning av det allmänna fallet betraktas naturligtvis som mer förtjänstfullt.)

4. Definiera en funktion g, med definitionsområde de reella talen, så att $x \to g(x)$ där $g(x)$ är det största värdet som funktionen $y \to |y^2 - xy|$ antar i intervallet $0 \leq y \leq 1$. Sök det minsta värde som g antar.

5. Ett naturligt tal N skrives i tvåtalssystemet $a_1a_2 \ldots a_n$. Visa att om
$$a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n$$
är delbart med 3 så är N delbart med 3.

6. Betrakta $3n$ punkter i planet sådana att ingen rät linje går genom mer än två punkter. Undersök om man kan bilda n parvis punktfrämmande trianglar med hörn i dessa punkter. Att trianglarna är punktfrämmande betyder att ingen punkt i planet ligger i mer än en triangel.