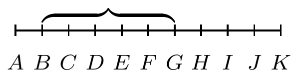
Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den den 20 november 1993

1. Heltalet x är sådant att $3x$ har samma siffersumma som x. Visa att x är delbart med 9.

2. Stationerna A, B, C, D, E, F, G, H, I, J och K delar en järnvägslinje i tio delsträckor, enligt figuren. Totala avståndet mellan A och K är 56 km. Om man åker två sträckor i följd blir resvägen alltid högst 12 km. Om man åker tre sträckor i följd blir resvägen minst 17 km. Hur långt är det mellan B och G ?



3. Antag att a och b är heltal. Visa att ekvationen $a^2 + b^2 + x^2 = y^2$ har en heltalslösning x, y om och endast om produkten ab är jämn.

4. Till varje par av reella tal a och b, med $a \neq 0$ och $b \neq 0$, är tillordnat ett reellt tal $a * b$. För denna räkneoperation gäller följande regler:

$$a * (b * c) = (a * b)c$$
$$a * a = 1$$

   Lös ekvationen $x * 36 = 216$.

5. Utgående från en triangel med sidorna a, b och c och halva omkretsen p bildas, om möjligt, en triangel med sidorna $p - a$, $p - b$ och $p - c$. Förfarandet upprepas sedan på den nya triangeln. För vilka ursprungliga trianglar kan processen upprepas hur många gånger som helst?

6. Låt a och b vara reella tal och betrakta funktionen $f(x) = (ax + b)^{-1}$. För vilka a och b finns det tre olika reella tal x_1, x_2, x_3 sådana att $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ och $f(x_3) = x_1$?