Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Final den 21 november 1998

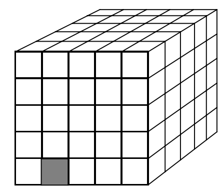
1. Bestäm alla naturliga tal x, y, z sådana att

$$(8x-5y)^2+(3y-2z)^2+(3z-7x)^2=2.$$

2. En triangel har sidorna a, b och c. Vinkeln C står mot sidan c. Visa att

$$c \geq (a+b)\sin\left(\frac{C}{2}\right).$$

3. En kub består av 125 små kuber. Finns det någon väg som startar i den markerade kuben och går igenom alla de övriga 124 kuberna utan att passera någon kub två gånger? Man går från en kub till en intilliggande kub genom den gemensamma sidoytan. Man får inte passera genom något hörn eller någon kantlinje mellan kuberna.



4. I den plana konvexa fyrhörningen $ABCD$ är vinkeln vid A rät. Låt $a=|AD|$, $h=|AB|$ och $b=|BC|$. Arean T av fyrhörningen ges av $T=\dfrac{(a+b)h}{2}$.
Vad kan sägas om vinkeln vid B?

5. Visa att man för varje heltal $n \geq 6$ kan finna positiva heltal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sådana att

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1997}{1998}.$$

Visa också att i varje sådan framställning finns $i \neq j$ sådana att x_i och x_j har en gemensam faktor > 1.

6. Visa att det finns ett av p och q oberoende positivt tal c sådant att

$$\left|\sqrt[3]{2}-\frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^3},$$

för alla heltal p och q, där $q \geq 1$.