Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 20 november 1993

1. I denna lösning utnyttjar vi att ett tal är delbart med 3 (9) om och endast om dess siffersumma är delbar med 3 (9).
   Låt s vara den gemensamma siffersumman till de båda talen x och $3x$. Eftersom talet $3x$ är delbart med 3 är också s delbart med 3. Men då är också x delbart med 3. Detta innebär att $3x$ är delbart med 9 och då är talets siffersumma s delbart med 9. Men s är också siffersumma till x och därför är x delbart med 9.
   Det kan vara värt att notera att det finns tal x delbara med 9 sådana att $3x$ och x *inte* har samma siffersumma. Ett exempel är $x = 387$ och $3x = 1161$. Omvändningen till påståendet är alltså inte sant.

   Svar: Talet x är delbart med 9

2. Avståndsvillkoren ger

   $$|AB| + |BD| \geq 17 \text{ och } |BD| \leq 12, \text{ varav } |AB| \geq 5.$$

   Dessutom gäller

   $$|BK| \geq 3 \cdot 17 = 51 \text{ och } |AK| = 56, \text{ som ger } |AB| \leq 5.$$

   Alltså är $|AB| = 5$. Analogt är $|JK| = 5$.
   Av $|AD| \geq 17$ och $|AB| = 5$ följer att $|BD| \geq 12$. Villkoren $|DG| \geq 17$ och $|GJ| \geq 17$ ger då

   $$46 = |BJ| = |BD| + |DG| + |GJ| \geq 12 + 17 + 17 = 46$$

   dvs likhet råder i olikheterna $|BD| \geq 12$, $|DG| \geq 17$ och $|GJ| \geq 17$. Alltså är $|BG| = 12 + 17 = 29$.

   Svar: Det är 29 km mellan B och G

3. **Produkten ab jämn**

   - Om a och b båda är jämna så är $a^2 + b^2$ delbart med 4. Sätt $a^2 + b^2 = 4m$. Då är $x = m - 1$, $y = m + 1$ en heltalslösning, ty

     $$y^2 - x^2 = (m+1)^2 - (m-1)^2 = 4m = a^2 + b^2.$$

   - Om a eller b (men inte båda) är udda, är också $a^2 + b^2$ udda. Sätt $a^2 + b^2 = 2m + 1$ och $x = m, \quad y = m + 1$. Då gäller

     $$y^2 - x^2 = (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1 = a^2 + b^2.$$

   Om ab är jämn finns alltså heltalslösning.

   Heltalslösning finns

   Antag att a och b båda är udda. Då är $a^2 + b^2$ ett jämnt tal av formen $a^2 + b^2 = 2(2m+1)$. Alltså gäller $(y - x)(y + x) = y^2 - x^2 = a^2 + b^2 = 2(2m + 1)$, varav följer att 2 delar $y + x$ eller 2 delar $y - x$. Men 2 delar $y + x$ om och endast om 2 delar $y - x = y + x - 2x$, dvs 2 delar $y + x$ **och** $y - x$. I ekvationen $(y - x)(y + x) = 2(2m + 1)$ är då vänstra ledet delbart med 4 medan högra ledet endast går att dela med 2. Detta motsäger antagandet att både a och b är udda. Alltså är ab jämn.

4. Vi visar först att om $a \neq 0$ och $b \neq 0$ så är $a * b = \dfrac{a}{b}$. Om man i likheten $a = 1 \cdot a$ ersätter 1 med $a * a$ och sedan använder den första regeln får man

   $$a = 1 \cdot a = (a * a)a = a * (a * a) = a * 1.$$

Ersätter man i denna likhet 1 med $b * b$ och använder den första räkneregeln får man

$$a = a * 1 = a * (b * b) = (a * b)b \quad \text{varav} \quad \frac{a}{b} = a * b.$$

Omvänt, om man definierar räkneoperationen $*$ genom $a * b = \dfrac{a}{b}$, så visar en kontroll att de givna reglerna gäller för alla $a \neq 0$, $b \neq 0$ och $c \neq 0$.

Lösningen till $x * 36 = 216$, $x \neq 0$, ges alltså av $\dfrac{x}{36} = 216$, dvs $x = 6^5 = 7776$.

Svar: Lösningen är $x = 6^5 = 7776$

5. Antag att processen kan fortsättas i all oändlighet. Sätt $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$, låt sidorna i triangeln som uppstår efter n operationer vara a_n, b_n, c_n och sätt $2p_n = a_n + b_n + c_n$. Då gäller rekursionsformlerna

$$\begin{cases} a_{n+1} = p_n - a_n \\ b_{n+1} = p_n - b_n \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ c_{n+1} = p_n - c_n \end{cases}$$

Addition av de tre rekursionsformlerna ger $2p_{n+1} = 3p_n - (a_n + b_n + c_n) = 3p_n - 2p_n = p_n$, eller $p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n$. Detta ger (induktivt)

$$p_n = \frac{1}{2^n}p_0 = \frac{a+b+c}{2^{n+1}},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dessutom är

$$a_{n+1} + a_n = p_n = \frac{3p_n}{3} = \frac{2p_n + p_n}{3} = \frac{2p_n + 2p_{n+1}}{3}$$

eller

$$a_{n+1} - \frac{2p_{n+1}}{3} = -\left(a_n - \frac{2p_n}{3}\right),\ n = 0, 1, 2 \ldots$$

varav (induktivt)

$$a_n - \frac{2p_n}{3} = (-1)^n \left(a_0 - \frac{2p_0}{3}\right) = (-1)^n \frac{2a - b - c}{3}$$

eller

$$a_n = \frac{a+b+c}{3 \cdot 2^n} + (-1)^n \frac{2a - b - c}{3},\ n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Analogt gäller

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a+b+c}{3 \cdot 2^n} + (-1)^n \frac{2b - a - c}{3} \\ c_n &= \frac{a+b+c}{3 \cdot 2^n} + (-1)^n \frac{2c - a - b}{3}, \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Om $2a - b - c \neq 0$ kommer för stora värden på n den första positiva termen i uttrycket för a_n vara mindre än absoluta värdet av andra termen och varannan gång blir a_n negativ. Alltså gäller $2a = b + c$. Analogt följer $2b = a + c$ och $2c = a + b$. Detta ger $a = b = c$, dvs den ursprungliga triangeln är liksidig.

Omvänt om $a = b = c$ är $p - a = p - b = p - c = \dfrac{1}{2}a$, dvs i varje steg kan den nya triangeln skapas exempelvis genom att förbinda sidornas mittpunkter. Detta visar att processen kan fortsättas hur många gånger som helst.

Svar: Processen kan upprepas i all oändlighet då och endast då den ursprungliga triangeln är liksidig.

6. Antag att det finns tre olika tal x_1, x_2 och x_3 sådana att $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ och $f(x_3) = x_1$. För sammansättning av en funktion f med sig själv upprepade gånger använder man ofta beteckningarna

$$f^2(x) = f(f(x)), \quad f^3(x) = f(f(f(x))), \quad \ldots \text{ osv.}$$

Med dessa beteckningar är då

$$f^3(x_1) = f^2(f(x_1)) = f^2(x_2) = f(f(x_2)) = f(x_3) = x_1.$$

Analogt är $f^3(x_2) = x_2$ och $f^3(x_3) = x_3$. Alltså är x_1, x_2 och x_3 tre olika lösningar till ekvationen $f^3(x) = x$ dvs till

$$\frac{1}{\dfrac{a}{\dfrac{a}{ax+b} + b} + b} = x$$

som efter förenkling ger

$$(a + b^2)(ax^2 + bx - 1) = 0.$$

Om $a + b^2 \neq 0$ har denna andragradsekvation högst två olika lösningar vilket strider mot antagandet. Alltså är $a + b^2 = 0$. Fallet $a = b = 0$ kan vi utesluta ty då finns ingen funktion av typen $f(x) = (ax + b)^{-1}$.

Om det finns tre olika tal x_1, x_2 och x_3 sådana att $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ och $f(x_3) = x_1$ så är alltså $a = -b^2$, $b \neq 0$.

Antag omvänt att $a = -b^2$, $b \neq 0$ och $f(x) = \dfrac{1}{b - b^2x}$. Då är funktionen f definierad för alla $x \neq \dfrac{1}{b}$. Sätt $x_1 = -\dfrac{1}{b}$. Då är

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{2b}, \quad x_3 = f(x_2) = \frac{2}{b} \text{ och } f(x_3) = \frac{1}{-b} = x_1,$$

som visar att det finns tre olika reella tal x_1, x_2 och x_3 sådana att $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ och $f(x_3) = x_1$.

Svar: Ett nödvändigt och tillräckligt villkor är att $a + b^2 = 0$ och $b \neq 0$

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson