

# HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 2016/17

## FINALTÄVLING 21 JANUARI 2017

**Skrivtid:**  $9^{00} - 12^{00}$

Motivera alla lösningar väl. Lämna in allt du kommer fram till, även dellösningar.

**OBS!** Lös varje uppgift på ett separat blad! Skriv läsligt!

Varje lösning ger 0 – 7 poäng.

*Lycka till!*

1. I det åttasiffriga talet  $2 \star 0 \star 1 \star 7 \star$  ska de fyra stjärnorna ersättas med siffror så att talet blir delbart med 2, 5 och 9. Hur många olika tal kan man konstruera som uppfyller dessa villkor?
2. Triangeln  $ABC$  är likbent:  $|AB| = |AC|$ . Punkten  $D$  ligger på  $AB$  och punkten  $E$  ligger på  $AC$  så att  $|BD| = |BE|$ . Förlängningen av  $BC$  skär förlängningen av  $DE$  i punkten  $P$ . Visa att vinkeln  $BEC$  är dubbelt så stor som vinkeln  $BPD$ .
3. Gamla fru Scarlet har blivit bestulen! Hennes kassaskåp har blivit öppnat och tömt, och man kan läsa av att det öppnades klockan två på eftermiddagen. Samtliga fru Scarlets fyra barn känner till koden och alla har besökt henne under dagen, men hon kan för sitt liv inte minnas vem som kom när. Det enda hon vet är att Stuart och Kevin alltid ser till att hålla sig ifrån varandra eftersom de alltid blir osams, så någon annan måste ha varit där mellan dem. Så här säger barnen om sina besök:  
**Kevin:** Jag träffade Bob i dörren när jag gick klockan ett.  
**Dave:** Jag var där först.  
**Stuart:** Skåpet var tomt redan när jag kom, där fanns inte ens en banan.  
**Bob:** Jag var där sist.  
Tjuven ljuger, de andra tre talar sanning. Vem öppnade kassaskåpet?
4. Titta på talföljden 3, 1, 2, 1, 3, 2. Mellan de båda ettorna finns ett tal, mellan tvåorna två tal och mellan treorna tre tal.
  - (a) Går det att göra ett motsvarande arrangemang med talen från 1 till 4?
  - (b) Går det att göra ett motsvarande arrangemang med talen från 1 till 5?

*Var god vänd!*

5. Stuart ska plocka ihop familjens fruktkorg, men eftersom man i familjen tycker om (och framförallt inte tycker om) olika saker, så gäller följande regler:

- Av clementiner och bananer får det tillsammans inte finnas fler än 47 stycken.
- Av bananer och ananaser får det tillsammans inte finnas fler än 37 stycken.
- Av clementiner och ananaser måste det tillsammans finnas åtminstone 39 stycken.

Nu råkar det vara bananer som är Stuarts favorit. Hur många bananer kan han som mest lägga i korgen, utan att bryta mot familjens regler?

6. Låt  $p$  och  $q$  vara primtal. Finn alla lösningar till ekvationerna

(a)  $p^2 - q^2 = 2016$

(b)  $p^2 - q^2 = 2017$