

# Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

## Kvalificeringstävling den 2 oktober 1996

1. Talen 1 till 1000 skrivs i ordning efter varandra så att man får talet

123...9989991000.

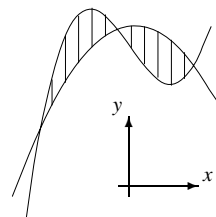
Man stryker siffror, en i taget med början från vänster. Hur många siffror har man strukit när man för första gången har kvar ett tal som börjar med tre nior?

2. I ett fyrsiffrigt positivt heltal är entalssiffran och tiotalssiffran inbördes lika medan hundratalssiffran är densamma som tusentalssiffran. Talet är dessutom en jämn kvadrat. Bestäm talet.
3. Låt  $ABCD$  vara en parallelogram där diagonalen  $BD$  är lika lång som sidan  $AB$ . Visa att

$$\frac{|AD|}{|AC|} < \frac{2}{3}.$$

4. Mellan Milazzo och Lipari tänker man sätta in tre färjor i trafik,  $A$ ,  $B$  och  $C$ . Under en provtur utan passagerare avgår  $A$  från Milazzo kl 11.00 samtidigt som  $B$  och  $C$  är på väg från Lipari. Kl 12.00 möts  $A$  och  $C$ , kl 13.00 möts  $A$  och  $B$ . När färjorna anlöper respektive hamnar vänder de omedelbart och fortsätter tillbaka i samma farled. Vi antar att färjorna går med konstant fart med skilda hastigheter samt att vändningstiderna vid ändpunkterna är försumbara. På tillbakavägen blir  $C$  upphunnen av  $B$  kl 16.00 och kl 18.00 möts  $A$  och  $B$  på nytt. Vid denna senare tidpunkt är avståndet till  $C$  7.2 km. Hur långt är det mellan Milazzo och Lipari?

5. Finn två polynomfunktioner av andra respektive tredje graden vars grafer innesluter två begränsade områden vilkas areor är lika stora. I vidstående figur, som visar hur det kan se ut, är de två streckade områdena lika stora.



6. Antag att  $m$  och  $n$  är positiva heltal utan gemensam primfaktor och låt  $m < n$ . Vilken av de två summorna

$$\sum_{k=1}^m \left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor$$

är störst? Storheten  $[a]$  anger heltalsdelen av talet  $a$  dvs. det största heltal mindre än eller lika med  $a$ .