Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 9 oktober 1975

1. **Metod 1.** Sätt $x = \lg 2$. Tabellvärdena ger

$$\begin{aligned} 0,30095 &\leq \ x < 0,30105 \\ 0,60205 &\leq 2x < 0,60215 \\ 0,90395 &\leq 3x < 0,90315 \\ 1,20495 &\leq 4x < 1,20415 \\ 1,50595 &\leq 5x < 1,50515 \\ 1,80615 &\leq 6x < 1,80625 \\ 2,10715 &\leq 7x < 2,10725 \\ 2,40815 &\leq 8x < 2,40825 \\ 2,70925 &\leq 9x < 2,70935 \end{aligned}$$

Speciellt får vi

$$2,70925 \leq 9x \text{ vilket ger } \ 0,3010277 < x$$

$$5x < 1,50515 \text{ vilket ger } \ x \leq 0,30103.$$

Alltså är

$$0,3010277 < \ x \leq 0,30103$$

$$0,6020554 < 2x \leq 0,60206$$

och vi kan skriva med 5 gällande siffror

$$\lg 2 = 0,30103 \qquad \lg 4 = 0,60206.$$

Metod 2. Genom att studera de sista siffrorna i de givna logaritmerna kan man sluta att 8062 bör vara ett höjt närmevärde och 4082 ett sänkt närmevärde. En god approximation till $\lg 2$ bör därför vara 2,1072/7 som är nära 0,30103. För att visa att detta är ett korrekt avrundat värde och att 0,60206 är ett korrekt avrundat värde för $\lg 4$ har vi att visa

$$0,3010275 \leq \lg 2 \leq 0,3010325.$$

Men detta följer av att $9 \cdot 0,3010275 = 2,7092475$ är ett för lågt närmevärde och $5 \cdot 0,3010325 = 1,5051625$ är ett för högt närmevärde.

2. Beteckna talet $BCDE$ med X. Då är

$$\begin{aligned} ABCDE &= 10^4 A + X \\ BCDEA &= 10X + A \end{aligned}$$

Eliminera X:

$$10(10^4 A + X) - (10X + A) = 99999A = 271 \cdot 369A.$$

Om $10^4 A + X$ är delbart med 271 måste därför även $10X + A$ vara delbart med 271.

3. Sätt $\left(\sqrt{2}+1\right)^x = y$. Eftersom

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^x \left(\sqrt{2}-1\right)^x = \left(\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^x = 1^x = 1$$

har vi $\left(\sqrt{2}-1\right)^x = 1/y$. Den givna ekvationen kan då skrivas $y + 1/y = 6$, $y^2 - 6y + 1 = 0$ med lösningarna $y_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $y_2 = 3 - \sqrt{2}$. Ekvationen $\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 3 + 2\sqrt{2}$ ger $x_1 = 2$ och ekvationen $\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 3 - 2\sqrt{2} = 1/\left(3+\sqrt{2}\right)$ ger $x_2 = -2$.

4. Olikheten kan skrivas i ekvivalent form:

$$5(x-n) > -2n^2 - n + 6.$$

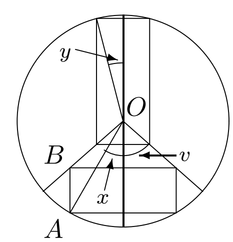
Eftersom $0 \leq x - n < 1$ blir denna olikhet i varje fall uppfylld så snart $-2n^2 - n + 6 < 0$, vilket inträffar då $n \geq 2$, så att olikheten är uppfylld för alla $x \geq 2$. Vi har att undersöka $n = 1$ och $n = 0$.

$n = 1$, $1 \leq x < 2$ ger kravet $5(x-1) > 3$, $x - 1 > 3/5$, $x > 8/5$.
$n = 0$, $0 < x < 1$ ger kravet $5x > 6$ vilket är omöjligt då $x < 1$.

Svaret blir därför att olikheten gäller för alla $x > 8/5$.
Alternativ metod. Vänstra ledet i den givna olikheten är för fast n-värde en växande linjär funktion i x. Då x går från n till $n+1$ varierar den från $n/(n+1)$ till $(n+1)/(n+2)$. Funktionskurvan består därför av linjestycken som förbinder punkterna $(0,0)$, $(1,1/2)$, $(2,2/3),\ldots$ Funktionen är växande och passerar 3/5 för $x = 8/5$.

5. Låt B_1 vara polygonens ena ändpunkt. Kalla polygonens hörn successivt B_2, $B_3,\ldots$, B_{n-1} och dess andra ändpunkt B_n så att polygonen består av sträckorna B_1B_2, $B_2B_3,\ldots$, $B_{n-1}B_n$. Som B_1 kan väljas alla n olika punkterna A_i. Då B_1 valts måste B_2 väljas som en av de två längs cirkeln närliggande punkterna A_i (annars skulle B_1B_2 dela de återstående hörnen i två olika mängder och man kunde inte fortsätta polygonen genom alla dessa punkter utan att skära B_1B_2). För B_3 står också två möjligheter öppna nämligen de båda punkter som ligger närmast mängden $\{B_1, B_2\}$ osv. Detta gäller tills vi kommer till den sista B_n, för vilken endast finns en möjlighet. Vi får därför $n \cdot 2^{n-2}$ möjligheter att välja punkterna B_1 så att de bildar en polygon med önskade egenskaper. Då varje polygon har två ändpunkter blir antalet olika polygoner $n \cdot 2^{n-2}/2 = n \cdot 2^{n-3}$.

6. Beteckningar, se figuren. Vi har $0 < v < \pi/2$ och måste ha $0 < x < v$, $0 < y < v$. Sinussatsen på triangeln OAB ger $|AB| = \sin(v-x)/\sin v$. Vi får därför arean av rektangeln med två hörn på den mindre bågen:



$$\begin{aligned} A_1 &= 2\sin x \frac{\sin(v-x)}{\sin v} \\ &= \frac{\cos(v-2x) - \cos v}{\sin v}. \end{aligned}$$

För den andra rektangeln blir arean, beräknad på motsvarande sätt:

$$A_2 = 2\sin y \frac{\sin(v+y)}{\sin v} = \frac{\cos v - \cos(v+2y)}{\sin v}.$$

A_1 blir maximal då $\cos(v-2x) = 1$, $x = v/2$. Vi får

$$\max A_1 = \frac{1-\cos v}{\sin v}.$$

För att $\max A_1 \cdot \max A_2 = 1$ fordras då att

$$\max A_2 = \frac{\sin v}{1-\cos v} = \frac{\sin v(1+\cos v)}{1-\cos^2 v} = \frac{1+\cos v}{\sin v}.$$

A_2 kan endast uppnå detta värde om $\cos(v+2y) = -1$, $v + 2y = \pi$. På grund av kravet $y \leq v$ kan y väljas på detta sätt då och endast då $v + 2v \geq \pi$, $v \geq \pi/3$.
Svar: $\pi/3 \leq v < \pi/2$

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner