Högstadiets matematiktävling 2019/20
Kvalificeringstävling 12 november 2019
Lösningsförslag och bedömningsmall

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

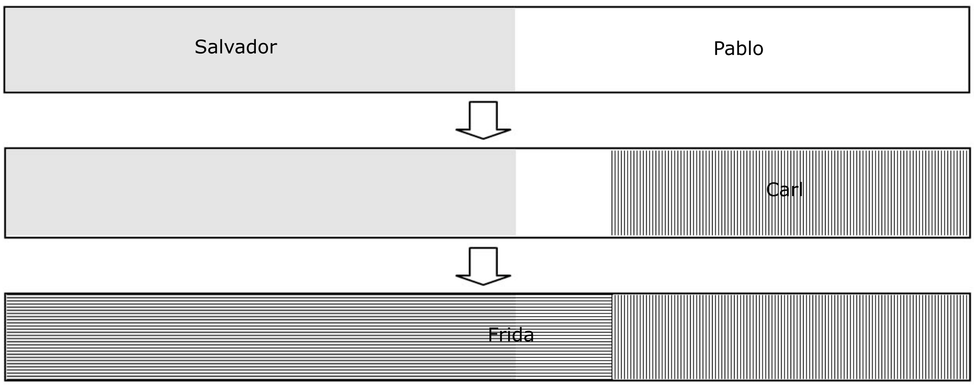
Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen. Vid osäkerhet finns det plats för anmärkningar i rättningsprotokollet.

Tack för er medverkan!

1. **Lösningsförslag 1:** Betrakta en valfri färg som Salvador köper. Eftersom Salvador köper den, vet vi att Pablo inte köper den. Eftersom Pablo inte köper den, kan inte heller Carl köpa den, eftersom han bara köper sådant som Pablo köper. Och eftersom Carl inte köper färgen, vet vi att Frida *måste* köpa den.

   Alltså köper Frida alla färger som Salvador köper.

   Lösningsförslag 2: Låt oss visa de tre påståendena grafiskt.



Figur 1: Problem 1

Vi markerar alla färger som Salvador köper med grått. Pablo köper då allt annat, markerat med vitt. Carl köper en del av vad Pablo köper (men inget annat), vilket vi markerar med vertikalt steckade linjer. Detta gör att Frida köper alla färger som Carl in köper, vilket vi markerar med horisontellt steckade linjer.

Om Salvador köper något som inte Frida köper bör vi ha ett område som är grått men inte horisontellt steckat. Det finns inte, vilket betyder att det inte finns några färger som Salvdor köper med som Frida inte köper.

Svar: Det finns inga färger som Salvador köper som inte Frida köper.

Poäng:

1Korrekt svar	+1p
Försök till motivering av slutsatsen	+1p
Bra och komplett motivering	+1p

2. **Lösningsförslag:** Vi skriver upp de tre ekvationerna:

$$(-a) \cdot (-b) = a \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b = a \tag{1}$$

$$a + 5 = b \tag{2}$$

$$(-a) + ? = b \quad \Leftrightarrow \quad ? = a + b \tag{3}$$

Ekvation (1) ger oss två fall: Antingen är $a = 0$, eller så kan vi förkorta a från vardera sida av ekvationen och får då $b = 1$.

Fallet $a = 0$ ger oss genom ekvation (2) att $b = 5$. Då är $? = 0 + 5 = 5$.

Fallet $b = 1$ ger oss genom ekvation (2) att $a = -4$. Då är $? = -4 + 1 = -3$.

Svar: Frågetecknet kan stå för 5 eller -3.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng

Finner en lösning	+1p
Inser att det finns två lösningar	+1p
Finner den andra lösningen	+1p

3. **Lösningsförslag:** Varje gång Immanuel sätter ihop två bitar uppgår två av den ena bitens hörn i två av den andra bitens hörn (eftersom man inte får sätta ihop bitar av samma typ kommer man aldrig att skapa vinklar med 180 eller 360 grader, så detta gäller jämt). Har den första biten A hörn och den andra B hörn, kommer sålunda ihopsättningen av de två att ha $A + B - 2$ hörn.

Den stora månghörningen har således lika många hörn som alla bitar tillsammans, minus två hörn för alla utom en av bitarna. Detta ger

$$335 \cdot 5 + 336 \cdot 4 + 337 \cdot 3 - 2 \cdot (335 + 336 + 337 - 1) =$$

$$= 1675 + 1344 + 1011 - 2 \cdot 1007 = 2016$$

När man har satt ihop alla bitar har månghörningen alltså 2016 hörn. För att den skall få 2019 hörn behövs tre extra hörn, vilket man får om man lägger till en femhörning (5 hörn, minus de två som försvinner när man sätter ihop den med månghörningen).

Svar:

Poäng:
Endast svar ger inga poäng

Inser att två hörn ”försvinner” vid sammansättning av två bitar	+1p
Korrekt beräknar månghörningens 2016 hörn	+1p
Drar korrekt slutsats att Immanuel behöver en till femhörning	+1p

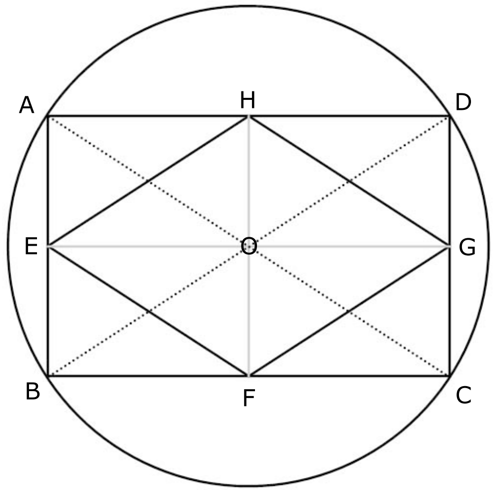
4. **Lösningsförslag:** Låt oss börja med att rita upp den beskrivna figuren. Vi vill finna omkretsen av fyrhörningen $EFGH$.

Låt oss nu dra linjerna EG och FH. Dessa skär varandra exakt i cirkelns mittpunkt O (symmetri som följer av att rektangeln är inskriven i cirkeln och punkterna är mittpunkter på respektive sida).

Vi betraktar nu sidan EH. Detta är en diagonal i rektangeln $AEOH$. Den andra diagonalen i samma rektangel är AO. Eftersom de två diagonalerna i en rektangel alltid är lika långa har vi $|EH| = |AO|$. Men AO är ju även radie i cirkeln eftersom den går från mittpunkten till periferin. Den är således 3 cm, och därmed har vi $|EH| = 3$ cm.

På samma sätt får vi $|EF| = 3$, $|FG| = 3$ och $|GH| = 3$. Eftersom alla fyra sidor är lika långa är fyrhörningen $EFGH$ alltså en romb, och den har omkretsen är $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ cm.

Svar: Omkretsen är 12 cm.



Figur 2: Problem 3

Poäng:
Endast svar ger inga poäng

Inser att alla fyra sidor är lika långa (att fyrhörningen är en romb)	+1p
Bestämmer längden av en av sidorna	+1p
Bestämmer rombens omkrets	+1p

5. **Lösningsförslag:** Från att 15 delar $cbabc$ får vi att talet $cbabc$ är delbart med 5. Det gör att det måste sluta på 0 eller 5. 0 är dock inte en av de valbara siffrorna (och om c skulle vara 0 blir dessutom inte talet femsiffrigt). Därmed måste vi ha $c = 5$.

   Sätter vi in detta i abc får vi $ab5$. Eftersom 3 delar $ab5$ får vi att siffersumman $a + b + 5$ är delbar med 3. Detta är samma som att $a + b$ ger rest 1 när man delar med 3. Men, eftersom 15 delar $5bab5$ måste även dess siffersumma vara delbar med 3, dvs 3 delar $5 + b + a + b + 5 = 10 + 2b + a$. Detta är samma som att $a + 2b$ ger rest 2 när man delar med 3.

   Dessa två sista insikter ger tillsammans att b ger rest 1 vid delbarhet med 3, och a är delbar med 3.

   Men, eftersom $abcba$ är delbart med 8 måste a vara jämnt. Den enda jämna siffra som är delbar med 3 är 6, dvs $a = 6$.

   Slutligen har vi nu två val för b: $b = 1$ och $b = 7$. I fallet $b = 1$ får vi att 61516 skall vara delbart med 8, vilket inte är sant. Fallet $b = 7$ uppfyller alla villkor.

   Svar: $abc = 675$.

   Poäng:
   Endast svar ger inga poäng

Korrekt bestämmer en av siffrorna a, b eller c	+1p
Korrekt bestämmer ytterligare en av siffrorna a, b eller c	+1p
Korrekt bestämmer talet $abc = 675$	+1p

6. **Lösningsförslag:** Vi lägger först märke till att vid ett drag fördelas volymen färg i en burk jämnt mellan samma burk, samt alla kringliggande burkar. I den ursprungliga burken kommer det alltså alltid att finnas kvar färg. Det är därmed omöjligt att någon burk någonsin blir tom.

Låt oss nu se på uppställningen när spelet är slut. Då finns det 45 ml färg i varje burk. Vad hände i draget innan? Jo, färg fördelades från en burk till antingen två eller fyra andra. Eftersom den ursprungliga burken nu har 45 ml, måste det fördelats precis 45 ml till de intilliggande burkarna. Men eftersom dessa burkar har exakt 45 ml vardera nu, måste de innan det sista draget varit tomma. Detta är omöjligt.

Man kan sålunda aldrig få lika mycket färg i alla burkar.

Svar: Det går inte att få lika mycket målarfärg i alla burkar.

Poäng:

Endast svar ger inga poäng

Inser att det inte går att få lika mycket färg i alla burkar	+1p
Förstår att man måste se vad som händer i sista draget	+1p
Drar rätt slutsats med bra motivering	+1p