Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 21 november 1992

1. Är $(19^{92} - 91^{29})/90$ ett naturligt tal?

2. I ett rutnät med 9×9 rutor är rutorna numrerade från 11 till 99 så att första siffran anger i vilken rad och andra siffran anger i vilken kolumn rutan är belägen. Rutorna är omväxlande målade svarta och vita enligt ett visst mönster som styrs av följande villkor.
   Varje svart ruta gränsar till högst en svart ruta och varje vit ruta gränsar till högst en vit ruta. Att två rutor gränsar till varandra innebär att de har en gemensam kantlinje (det räcker alltså inte att de har ett hörn gemensamt). Rutorna 44 och 49 är svarta. Vilken färg har ruta 99?

3. Lös följande system av olikheter:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \geq 0 \\ 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 \geq 0 \\ \quad\cdots \\ \quad\cdots \\ 2x_{24} - 5x_{25} + 3x_1 \geq 0 \\ 2x_{25} - 5x_1 + 3x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Bestäm alla uppsättningar av tre positiva heltal a, b och c som satisfierar olikheterna

$$a < b, \qquad a < 4c \qquad \text{och} \qquad bc^3 \leq ac^3 + b.$$

5. I en triangel är sidorna a, b och c, där $c \geq a$ och $c \geq b$. Omskrivna cirkelns radie är R. Visa att om $a^2 + b^2 = 2Rc$ så är triangeln rätvinklig.

6. Låt C vara kurvan $y^2 = x^3$ och (x_1, y_1), (x_2, y_2) och (x_3, y_3) tre olika punkter på C som ligger i rät linje. Visa att

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = 0.$$