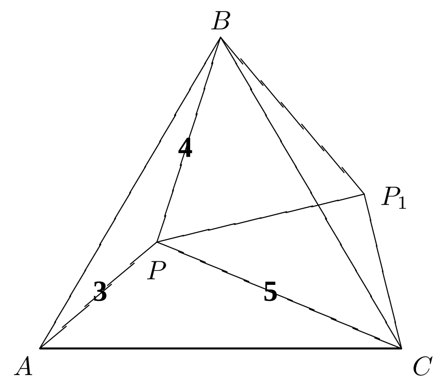
Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 20 november 1977

1. p-faktorerna i $p^4!$ finns i produkten av talen p, $2p$, $3p, \ldots, p^3p$. De är alltså till antalet p^3 +antalet p-faktorer i $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p^3$ dvs i $p^3!$. I $p^3!$ finns p-faktorerna i produkten av $p, 2p, \ldots, p^2p$. De är till antalet p^2 + antalet p-faktorer i produkten $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p^2$. Upprepa resonemanget. Man får svaret: p^3+p^2+p+1.

2. Ge hörnen koordinaterna $A : (0,0)$, $B : \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $C :$ $(a,0)$ och $P : (x,y)$. Då vet man att



$$x^2+y^2=9$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=16$$

$$(x-a)^2+y^2=25$$

Subtraheras första ekvationen från de båda övriga får man

$$2ax=a^2-16$$

$$2\sqrt{3}ay=a^2+2$$

Insättning i $x^2+y^2=9$ ger

$$3(a^2-16)^2+(a^2+2)^2=9(2\sqrt{3}a)^2$$

vilket förenklas till

$$a^4-50a^2+193=0$$

$$a^2=25\pm\sqrt{432}=25\pm 12\sqrt{3}.$$

Eftersom $a^2>16$ måste $a^2=25+12\sqrt{3}$, $a=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

Alternativ metod. Vrid triangeln BPA $60°$ kring B så att BA faller utefter BC. Säg att P kommer till punkten P_1 (se fig). Eftersom$\bigwedge PBP_1$ är $60°$ så är triangeln PBP_1 liksidig och därför $PP_1=4$. Triangeln PP_1C är därför på grund av Pytagoras sats omvändning rätvinklig vid P_1, $\bigwedge BP_1C$ är då $150°$ så cos-satsen på triangeln BP_1C ger

$$a^2=16+9-2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos 150°=25+12\sqrt{3}$$

3. Sätt

$$x=n+a, \qquad y=n+b, \qquad z=n+c.$$

De givna villkoren blir då efter förenkling

$$ab+ac+bc=-1$$
$$a+b+c=0$$
$$a\geq b\geq c$$

Härav

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$a^2+b^2+c^2=2.$$

Eftersom a, b, c är heltal måste en av dem vara 0 de övriga 1 eller -1. Nu är $a+b+c=0$ och $a \geq b \geq c$. Alltså är $a=1$, $b=0$, $c=-1$.
Alternativ metod. Man får av de givna likheterna

$$\begin{aligned}(x-y)^2+(y-z)^2+z-x)^2 &= 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx \\ &= 2(x+y+z)^2-6(xy+yz+zx) = 18n^2-6(3n^2-1)=6.\end{aligned}$$

På grund av $x \geq y \geq z$ följer lätt $x-y=1$, $x-z=2$, $y-z=1$.

4. Vi vet att

$$-\sin\beta\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{1}$$

och vill bevisa

$$\sin\alpha\cos^3\beta + \cos a\sin^3\beta = \sin\alpha\cos\alpha \tag{2}$$

Vänstra ledet i (1) är av andra graden i $\sin\beta$ och $\cos\beta$, högra ledet är av endast första graden i dessa storheter. Utnyttja detta för att successivt minska gradtalet i vänstra ledet i (2).

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos^3\beta + \cos\alpha\sin^3\beta &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta\sin^2\beta + \cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\beta\cos^2\beta \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &+ \cos\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta \\ &+ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\beta \\ &= \sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

5. Summan av alla talen är

$$1+2+\cdots+64 = \frac{64\cdot 65}{2} = 2080.$$

Genom att dela varje sida av schackbrädet i fyra lika delar får man brädet indelat i 16 kvadrater med 2 rutor i sida. Om högst 3 av dessa hade summan av talen i kvadraten större än 100, vore summan av alla talen

$$< (64+63+...+53)+1300 = \frac{12\cdot 117}{2}+1300 = 2002.$$

vilket innebär en motsägelse mot den ovan beräknade summan 2080.

6. Kalla olikheterna i ordning (1), (2) och (3). Minst en av a, b, c måste vara större än 1, ty annars skulle $a^4 \leq a^3$, $b^4 \leq b^3$, $c^4 \leq c^3$ vilket motsäger (2) och (3). andra sidan visar (2) att högst en av a, b, c kan vara > 1. Säg $a > 1$, $b < 1$, $c < 1$. För att finna en lösning kan man givetvis pröva sig fram med en miniräknare. Här följer några metodiska sätt att finna lösningar.

Metod 1. Pröva med $b=c$. Sätt $b^2=c^2=x$ och välj först $a^2=2-2x$. Då blir (1) uppfylld som likhet. (3) blir $(2-2x)^2+2x^2>2$, $3x^2-4x+1>0$, $(1-x)(1-3x)>0$, $x<1/3$. (2) blir för $x=1/3$ likamed $(2-2/3)^{3/2}+2(1/3)^{3/2}<2$, vilket är uppfyllt eftersom vänstra ledet är likamed $10/3\sqrt{3}$ som är mindre än 2. För $b=c=1/\sqrt{3}$, $a=2/\sqrt{3}$ är alltså (2) uppfylld och (1) och (3) gäller som likheter. Man behöver därför endast göra a, b, c något större. Då $1/\sqrt{3} \approx 0,577$ kan man pröva med $b=c=0,58$ och $a=1,16$. Kontrollräkning ger $a^3+b^3+c^3<1,96$.

Metod 2. Eftersom $a=1$, $b=1$, $c=0$ ger likhet i (1), (2) och (3), kan man pröva med att göra a och b nära 1 och c nära 0. Sätt $a=1+x$, $b=1-y$. För små x och y är

$$\begin{array}{lll} a^2=1+2x+x^2 & a^3\approx 1+3x+3x^2 & a^4\approx 1+4x+6x^2 \\ b^2=1-2y+y^2 & b^3\approx 1-3y+3y^2 & b^4\approx 1-4y+6y^2 \end{array}$$

Om talet c är litet ger det väsentligt bidrag endast till (1). För att få (2) och (3) uppfyllda vill man ha

$$3x - 3y + 3x^2 + 3y^2 < 0 \qquad 4x - 4y + 6x^2 + 6y^2 > 0$$

$$x^2 + y^2 < y - x < \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right). \tag{4}$$

Då måste $y > x$. Vänstra olikheten i (4) blir då uppfylld om $2y^2 = y - x$, $x = y - 2y^2$. För små y-värden blir då även högra olikheten i (4) uppfylld. Då blir

$$a^2 + b^2 \approx 2 - 2y^2 \qquad a^3 + b^3 \approx 2 - 12y^3 \qquad a^4 + b^4 \approx 2 + 4y^2$$

Om därför y väljs liten och exempelvis $c = 2y$ blir alla olikheterna uppfyllda. Vi kan exempelvis ta $y = 0,1$ och får då $a = 1,08$, $b = 0,9$, $c = 0,2$ vilket ger vänsterleden i (1), (2) och (3) att bli: 2,0164, $<$ 1,9968 och $>$ 2,0181.

Svar: Några möjliga lösningar är

a	b	c	a	b	c	a	b	c
1,04	0,956	0,067	1,14	0,637	0,637	1,18	0,552	0,552
	0,955	0,160		0,628	0,628	1,185	0,620	0,460
1,08	0,903	0,135	1,16	0,738	0,332		0,551	0,551
	0,891	0,320		0,603	0,603		0,546	0,546
1,12	0,836	0,217		0,573	0,573	1,189	0,568	0,514
	0,776	0,503	1,18	0,655	0,423		0,542	0,542
1,14	0,793	0,268		0,563	0,563	1,190	ingen lösning.	

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner