Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 10 oktober 1974

1. Eftersom $x\sqrt{x} = x^{3/2}$ kan ekvationen skrivas $x^{3/2 \cdot x} = x^{x\sqrt{x}}$. Den är satisfierad för $x = 1$ och för $\dfrac{3}{2}x = x\sqrt{x}$, $x = \dfrac{9}{4}$.

2. Sätt $\sqrt{p+49} = n$. Då är $5p = (n+7)(n-7)$. Eftersom $n > 0$ har vi $n + 7 > 5$. Då p är ett primtal får vi de enda möjligheterna

   a) $n - 7 = 1$, $n = 8$, $n + 7 = 15$, $5p = 15$, $p = 3$, ett primtal,

   b) $n - 7 = 5$, $n = 12$, $n + 7 = 19$, $5p = 5 \cdot 19$, $p = 19$, ett primtal.

   Anmärkning. Möjligheterna $n - 7 = -1$ och $n - 7 = -5$ ger $5p = -13$ och $5p = -45$ så man får inga ytterligare lösningar även om man vill tillåta negativa primtal.

3. Sätt $|PA| = a$. Då är $|AB| = a \sin\alpha$, $|PB| = a\cos\alpha$, $|BD| = a\cos\alpha\tan\beta$. Eftersom vinkeln PCA är β har vi också $|AD| = CD1\sin\beta = 2a\sin\beta$. $|AB| = |AD| + |BD|$ ger

$$\begin{aligned}
&a\sin\alpha = a\cos\alpha\tan\beta + 2a\sin\beta\\
&\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = 2\sin\beta\cos\beta\\
&\sin(\alpha-\beta) = \sin 2\beta.
\end{aligned}$$

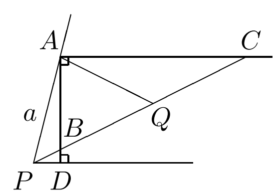
   Då både $\alpha - \beta$ och 2β ligger mellan $0°$ och $180°$ får vi möjligheterna

   a) $\alpha - \beta = 2\beta$, $\alpha = 3\beta$,

   b) $\alpha - \beta = 180° - 2\beta$, $\alpha + \beta = 180°$. Men då $0° < \beta < \alpha < 90°$ så är $\alpha + \beta < 180°$.

   Alltså är $\alpha = 3\beta$.

   Alternativ metod. Låt Q vara mittpunkten på DC. Dra AQ. Att triangeln QAC är likbent ger $\bigwedge AQP = 2\bigwedge ACP = 2\beta$. Att triangeln AQP är likbent ger $\bigwedge APQ = \bigwedge AQP = 2\beta$. Alltså är $\alpha = \bigwedge APB = \bigwedge APQ + \bigwedge QPB = 2\beta + \beta = 3\beta$.



4. Låt $C = (a+1, a)$. Då har normalen från C mot BD ekvationen

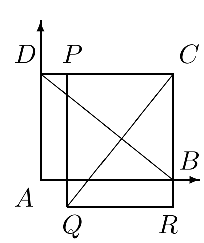
$$y - a = \frac{a+1}{a}(x - (a+1))$$

   vilken kan skrivas

$$a(y - x + 2) = x - 1.$$

   Ska (x, y) satisfiera denna ekvation för olika a-värden måste $y - x + 2 = 0$, $x - 1 = 0$, vilket ger punkten $(1, -1)$.

   Alternativ metod. Rita en kongruent rektangel $CPQR$ så som i figuren med $|CP| = |CB|$, $|CR| = |CD|$. Då måste diagonalerna CQ och DB vara vinkelräta. Men Q är $(1, -1)$, en fast punkt oberoende av rektangelns storlek.



5. **Metod 1.** Låt a vara en reell rot. Då är

$$a^3 + pa - 2 = 0 \tag{1}$$

   Division av $x^3 + px - 2$ med $x - a$ ger

$$x^3 + px - 2 = (x-a)(x^2 + ax + a^2 + p).$$

De båda andra rötterna till den givna ekvationen är nollställena till andragradspolynomet. Dessa är reella då polynomets diskrimihant är ≥ 0, dvs då

$$a^2 - 4(a^2 + p) \geq 0.$$

Men (1) ger $a^2 + p = \dfrac{2}{a}$ varför villkoret kan skrivas

$$\frac{a^3 - 8}{a} \geq 0.$$

Eftersom detta villkor är uppfyllt både för $a > 2$ och för $a < 0$ är de båda återstående rötterna reella i båda dessa fall.

Metod 2. Lös med avseende på p: $p = \dfrac{2}{x} - x^2$. Studera p som funktion av x. p har lokalt maximum i $(-1, -3)$, har p-axeln som asymptot och är strängt avtagande för $x > 0$ och går genom $(2, -3)$. Härav framgår att $p \leq 3$ om x ligger utanför $[0, 2]$. Varje p-värde mindre än -3 antas för två negativa och ett positivt x-värde. För $p = -3$ får vi $x = 2$ och $x = -1$, varvid den senare är dubbelrot.

6. Man får successivt $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ Man har

$$(a_{n+1} - 5a_n)^2 = 24a_n^2 + 1$$

$$a_{n+1}^2 - 10a_n a_{n+1} + a_n^2 = 1.$$

Detta samband mellan a_n och a_{n+1} är symmetriskt. Samma samband ska gälla mellan a_n och a_{n-1} (för $n \geq 1$). Eftersom $a_{n-1} \neq a_{n+1}$ måste a_{n-1} och a_{n+1} därför vara de två lösningarna till andragradsekvationen

$$x^2 - 10a_n x + a_n^2 - 1 = 0.$$

Summan av rötterna till denna ekvation är $10a_n$. Alltså är

$$a_{n+1} = 10a_n - a_{n-1}.$$

Härav får man, om man startar med $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, att a_2 är heltal, att a_3 är heltal, ... (induktion).
Variation. Man kan skriva upp

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 10a_{n+1}a_n + a_n^2 &= 1 \\ a_n^2 - 10a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Subtraktion ger

$$(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} - 10a_n + a_{n-1}) = 0.$$

Eftersom den första faktorn är $\neq 0$, måste den andra faktorn vara=0.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner