Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 8 oktober 1997

1. Ylva, Åsa och Östen har som sommarjobb att måla planket kring ortens fotbollsarena. Ylva klarar att måla 4 m per timme, medan Åsa är något snabbare och klarar av 5 m per timme. När arbetet börjar är Östen 5 timmar försenad, vilket leder till att planket är färdigmålat 2 timmar senare än planerat. Alla slutar måla samtidigt. Hur många meter per timme målade Östen? Hur mycket hade arbetet blivit försenat om i stället Ylva hade varit 5 timmar försenad och de båda andra hade kommit i tid?

2. Primtalet 1997 minskat med 1 ger ett tal som är delbart med 4. Enligt en sats av Fermat kan då 1997 skrivas som en summa av två heltalskvadrater. Bestäm alla positiva heltal x och y sådana att $1997 = x^2 + y^2$.

3. Låt r vara ett positivt reellt tal. Visa att

$$\left[\frac{1}{r}\right] \cdot r^2 + \left(1 - \left[\frac{1}{r}\right] \cdot r\right)^2 \leq r.$$

   Här betecknar $[x]$ det största *heltal* som är mindre än eller lika med det reella talet x.

4. Talen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är vardera lika med 1 eller -1. Vidare gäller

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 = 0.$$

   Visa att n måste vara delbart med 4.

5. Vilket är det kortaste avståndet mellan graferna till de reellvärda funktionerna f och g vilkas funktionsvärden ges av $f(x) = x^2$ och $g(x) = -x^2 - 8x - 15$?

6. I en samling av n stycken mynt, som alla ser likadana ut, finns ett oäkta mynt. Det falska myntet har inte samma vikt som de äkta sinsemellan lika tunga mynten. För vilka n är det möjligt att, med hjälp av en balansvåg utan vikter, alltid avgöra om det falska myntet är lättare eller tyngre än ett äkta mynt? Det är inte tillåtet att vid någon vägning använda mynt som genom tidigare gjorda vägningar befunnits vara äkta. Observera att man inte behöver avgöra *vilket* mynt som är falskt!