Högstadiets matematiktävling 2019/20
Finaltävling 18 januari 2020
Lösningsförslag

1. **Lösningsförslag:** Om det vore möjligt, hur skulle då raden se ut? Talet 7 har bara en möjlig granne (nämligen 1), så 7 måste stå i ena änden av raden. Talen 5 och 9 har båda precis två möjliga grannar:

   - Talet 5 kan vara granne med 1 och med 10.
   - Talet 9 kan vara granne med 1 och med 3.

   Eftersom 1 redan måste vara granne med 7 så kan inte både 5 och 9 vara granne med 1 utan den av dem som inte står bredvid 1 måste vara i andra änden av raden.

   Det innebär att precis alla återstående tal [2, 3, 4, 6, 8, 10] måste stå mellan 5 och 9 på raden.

   - 5 - *[2, 3, 4, 6, 8, 10]* - 9 -

   Så intill 5 måste vi ha 10,

   - 5 - 10 - *[2, 3, 4, 6, 8]* - 9 -

   och därefter 2 (för 10 kan bara ha 1, 2 och 5 som grannar, och 1 är redan upptagen).

   - 5 - 10 - 2 - *[3, 4, 6, 8]* - 9 -

   Intill 9 måste vi ha 3,

   - 5 - 10 - 2 - *[4, 6, 8]* - 3 - 9 -

   därefter 6 (eftersom 3 bara kan ha 1, 6 och 9 som grannar),

   - 5 - 10 - 2 - *[4, 8]* - 6 - 3 - 9 -

   och därefter 2 (för 6 kan bara ha 1, 2 och 3 som grannar).

   - 5 - 10 - 2 - 6 - 3 - 9 -
   [4, 8]

   Men då har vi kommit till talet 2 från båda riktningar, utan att kunna använda varken 4 eller 8.

   Svar: Det är omöjligt att ordna talen 1–10 på det önskade sättet.

2. **Lösningsförslag 1:** Låt oss först lägga märke till att t måste vara det största talet. Om vår eftersökta trippel finns, måste 1729 således vara i vänsterledet. Vi kan därför ansätta att $h = 1729$. Vi får därmed två fall, ett om 2020 är i vänsterledet och ett om 2020 är i högerledet.

   Vi börjar med fallet där $m = 2020$, och tittar på delbarhet med 3.

   - Ett tal som är delbart med 3 har en kvadrat som också är delbar med 3.
   - Ett tal som ger rest vid division med tre har en kvadrat som har rest 1 vid division med 3, oavsett om talets rest är 1 eller 2.

   Både 1729 och 2020 ger rest vid division med 3. Därmed ger de båda talens kvadrater rest 1 vid division med 3. Detta betyder att deras summa, dvs t^2, måste ge rest 2 vid division med 3. Det finns dock som sagt var inga heltalskvadrater som ger rest 2 vid division med 3. Det är alltså inte möjligt att $m = 2020$.

   Detta lämnar fallet $t = 2020$, och denna gång tittar vi på delbarhet med 4.

   - Ett jämnt tal som kvadreras blir alltid delbart med 4.
   - Ett udda tal som kvadreras ger alltid rest 1 vid division med 4, oavsett om talets rest är 1 eller 3 vid division med 4.

   1729 är udda vilket gör att dess kvadrat ger rest 1 vid division med 4. 2020 är jämnt vilket gör att dess kvadrat också är delbar med 4. Detta betyder att m^2 måste ge rest 3 vid division med 4, vilket är en omöjlighet.

   Notera: *Om man istället betraktar rester vid division med 9 kan man hantera båda fallen på en gång.*

   Lösningsförslag 2: För kvadrater gäller

$$\begin{array}{lcl} x = 3n & \Rightarrow & x^2 = 3(3n^2) \\ x = 3n+1 & \Rightarrow & x^2 = 3(3n^2+2n)+1 \\ x = 3n+2 & \Rightarrow & x^2 = 3(3n^2+4n+1)+1 \end{array}$$

   Vi kan skriva $1729 = 3x + 1$ och $2020 = 3y + 1$. Om 2020 inte är det största talet i trippeln får vi då

$$t^2 = h^2 + m^2 = 1729^2 + 2020^2 = (3x+1)^2 + (3y+1)^2 =$$

$$= 9x^2 + 6x + 1 + 9y^2 + 6y + 1 = 3(3x^2 + 2x + 3y^2 + 2y) + 2$$

   t^2 ger därmed rest 2 vid division med 3. Men som vi redan sett kan ett kvadrattal aldrig ge rest 2 vid division med 3.

   Därmed måste 2020 vara det största talet, om en sådan trippel existerar. Vi får då

$$1729^2 + m^2 = 2020^2$$

   dvs om vi använder konjugatregeln

$$m^2 = 2020^2 - 1729^2 = (2020 + 1729)(2020 - 1729) = 3749 \cdot 291$$

291 är delbart med 3, men inte med 9. 3749 är inte delbart med 3. Därmed finns bara en faktor 3 i produkten $3749 \cdot 291$, och således kan det inte vara ett kvadrattal.

Lösningsförslag 3: Eftersom 1729 och 2020 inte har några gemensamma delare måste den sökta Pythagoreiska trippeln, om den existerar, vara på formen

$$\begin{aligned} h &= a^2 - b^2 \\ m &= 2ab \\ t &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

där a och b är valfria heltal. Detta är en matematisk kunskap som

Vad detta betyder är att antingen är alla tre talen jämna, eller så är precis ett tal, m, jämnt. För att det skall vara uppfyllt i vår uppgift måste $m = 2020$ vara det enda jämna talet.

Om vi primfaktoriserar 2020 får vi $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$. Detta betyder att a som minst kan vara 101, vilket ger att h minst är $101^2 - 10^2 > 1729$.

Svar: Det finns inga Pythagoreiska tripplar som har både 1729 och 2020 i sig.

3. **Lösningsförslag:** Vi börjar med att konstatera att eftersom a och b är *positiva* heltal, och $a > b$, gäller $a \geq 2$.

Vi vet att Boris har försökt skicka talen n_1, n_2, n_3, n_4 och att följande gäller:

$$an_1 + b = 1357$$

$$an_2 + b = 1427$$

$$an_3 + b = 1399$$

$$an_4 + b = 1462$$

Från första och andra ekvationen får vi då:

$$(an_2 + b) - (an_1 + b) = 1427 - 1357$$

$$a(n_2 - n_1) = 70$$

Efter som a delar vänsterledet måste också 70 vara delbart med a. Om vi primtalsfaktoriserar 70 får vi

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

På samma sätt vet vi att

$$a(n_2 - n_3) = 1427 - 1399 = 28$$

$$a(n_4 - n_3) = 1462 - 1399 = 63$$

Från detta kan vi utläsa att a också delar både 28 och 63. Om vi primtalsfaktoriserar dessa får vi

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$$

De enda positiva tal som delar både 28 och 63 är alltså 1 och 7. Men vi vet att $a \geq 2$; alltså måste $a = 7$.

Det återstår att hitta b. Betrakta ekvationen $7n_1 + b = 1357$. Om vi delar 1357 med 7 får vi rest 6. Eftersom $0 < b < 7$ så ger det att b är just resten då 1357 delas med 7. Alltså är $b = 6$.

Vi kan nu avkoda alla Boris meddelanden genom att lösa ekvationerna:

$$7n_1 + 6 = 1357$$

$$7n_2 + 6 = 1427$$

$$7n_3 + 6 = 1399$$

$$7n_4 + 6 = 1462$$

vilket ger

$$n_1 = 193$$

$$n_2 = 203$$

$$n_3 = 199$$

$$n_4 = 208$$

Svar: De fyra tal Boris önskade skicka var 193, 203, 199 och 208.

4. **Lösningsförslag:**

a) Betrakta triangeln APB. Vi vet att basen AB är 5 cm, och att triangelns area är 7.5 cm^2. Detta ger oss möjligheten att räkna ut höjden mot sidan AB, det vill säga, avståndet från punkten P till sidan AB, som $\frac{2 \times 7.5 \text{ cm}^2}{5 \text{ cm}} = 3$ cm.

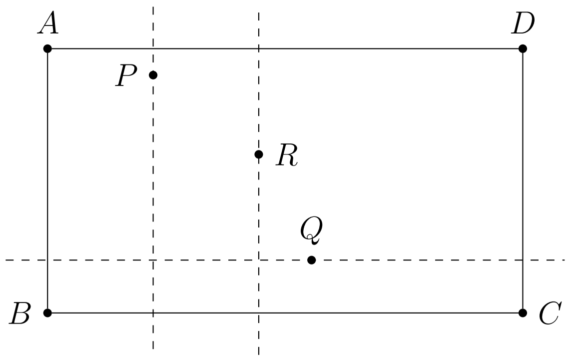
På samma sätt kan vi räkna ut avståndet från Q till sidan BC samt från R till sidan CD, och får då:

- P ligger på avståndet 3 cm från sidan AB.
- Q ligger på avståndet 1 cm från sidan BC.
- R ligger på avståndet 4 cm från sidan CD.

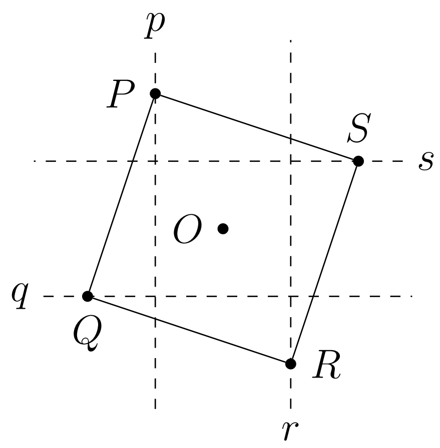
Vi har alltså en uppställning som ser ut som i figur 1.

Låt p, q, r, s vara linjerna genom P, Q, R respektive S som är parallella med AB, BC, CD respektive DA (se figur 2). För att bestämma arean av DSA är vi nu intresserade av att ta reda på avståndet mellan linjerna s och q.

Vi vet att avståndet mellan p och r är $9 - 3 - 4 = 2$ cm. Vi föreställer oss nu att vi roterar kvadraten samt stödlinjerna 90° runt kvadratens mittpunkt O. Då kommer



Figur 1: Problem 4



Figur 2: Problem 4

P och R att ligga exakt där S respektive Q tidigare låg (eftersom $PQRS$ är en kvadrat). Därmed kommer stödlinjerna p och r hamna där s och q tidigare låg, eftersom linjerna dragits vinkelräta mot varandra. Detta ger att även avståndet mellan stödlinjerna q och s måste vara 2 cm, eftersom rotationen inte förändrar avstånd.

Eftersom avståndet mellan q och BC är 1 cm, gör det att S måste ligga på samma sida om q som DA, då detta annars skulle innebära att S hamnade utanför $ABCD$. Det ger att avståndet mellan S och DA är $5 - 2 - 1 = 2$ cm, vilket ger arean 9 cm^2 för triangeln DSA.

Svar: Triangeln DSA har arean 9 cm^2.

b) Arean av en kvadrat kan uttryckas i dess diagonal d som $d^2/2$. Eftersom avståndet mellan linjerna p och r är 2 cm, kan avståndet mellan P och R som minst vara 2 cm. Alltså är kvadratens area som minst $2 \cdot 2/2 = 2$ cm^2.

Svar: Den minsta möjliga arean för $PQRS$ är 2 cm^2.

5. **Lösningsförslag:** För att beräkna sannolikheten måste vi veta hur många giltiga placeringar som finns, samt hur många totala placeringar som finns.

   Trollkarlens vänner kan välja sina sittplatser på 6^5 sätt (oberoende av varandra har de 6 val). Den första gästen kan problemfritt sätta sig på 5 av de sex stolarna. Därefter kan nästa gäst bara sätta sig på 4 av stolarna utan att gräl uppstår. På samma sätt får vi totalt att $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ av placeringarna är utan krockar.

   Sannolikheten för att undvika krockar är alltså

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^5 \cdot 3^5} = \frac{5}{2^2 \cdot 3^4} = \frac{5}{324}.$$

   Svar: Sannolikheten för att undvika gräl är $\frac{5}{324}$.

6. **Lösningsförslag 1:** Skriv $x = a + \varepsilon$ där a är ett heltal och $0 \leq \varepsilon < 1$. Vi får då:

$$\begin{aligned} 2020 = 2\lfloor 2(a+\varepsilon)\rfloor + \lfloor 5(a+\varepsilon)\rfloor + \lfloor 101(a+\varepsilon)\rfloor = \\ = 2 \cdot 2a + 2\lfloor 2\varepsilon\rfloor + 5a + \lfloor 5\varepsilon\rfloor + 101a + \lfloor 101\varepsilon\rfloor = \\ = 110a + 2\lfloor 2\varepsilon\rfloor + \lfloor 5\varepsilon\rfloor + \lfloor 101\varepsilon\rfloor \end{aligned}$$

   Vi vet att $\varepsilon < 1$ vilket ger att $\lfloor k\varepsilon\rfloor < k$, för alla heltal k, vilket ger oss att

$$110a + 2\lfloor 2\varepsilon\rfloor + \lfloor 5\varepsilon\rfloor + \lfloor 101\varepsilon\rfloor < 110a + 2 \cdot 2 + 5 + 101 = 110a + 110$$

   Alltså vet vi att

$$110a \leq 2020 < 110a + 110$$

   Den enda möjliga heltalslösningen här är $a = 18$.

   Nu återstår att ta reda på vad ε kan vara. Vi vet att

$$2\lfloor 2\varepsilon\rfloor + \lfloor 5\varepsilon\rfloor + \lfloor 101\varepsilon\rfloor = 2020 - 18 \cdot 110 = 40$$

   Låt oss titta på termen $\lfloor 101\varepsilon\rfloor$. Vi vet att $\lfloor 101\varepsilon\rfloor \leq 40$ vilket betyder att $\varepsilon < \frac{41}{101}$. Av detta följer att $\lfloor 2\varepsilon\rfloor = 0$. Så den första termen bidrar aldrig till summan.

   Låt oss nu titta på om den andra termen, $\lfloor 5\varepsilon\rfloor$, bidrar till summan. Om $\lfloor 5\varepsilon\rfloor = 0$ så måste $\varepsilon < \frac{1}{5}$. Men, det betyder att $\lfloor 101\varepsilon\rfloor \leq \lfloor \frac{101}{5}\rfloor = 20$ vilket är alldeles för lite för att summan skall kunna bli 40.

   Detta gör att vi nu kan gå tillbaka och titta på $\lfloor 101\varepsilon\rfloor$. Vi vet nu att $\lfloor 101\varepsilon\rfloor < 40$, eftersom $\lfloor 5\varepsilon\rfloor > 0$, vilket betyder att $\varepsilon < \frac{40}{101}$. Detta betyder att $\lfloor 5\varepsilon\rfloor \leq \lfloor 5 \cdot \frac{40}{101}\rfloor < 2$, dvs $\lfloor 5\varepsilon\rfloor = 1$, vilket ger $\lfloor 101\varepsilon\rfloor = 39$. Därmed måste $\varepsilon \geq \frac{39}{101}$

   Slutligen undersöker vi om hela intervallet $\frac{39}{101} \leq \varepsilon < \frac{40}{101}$ uppfyller ekvationen:

$$39 \leq 101\varepsilon < 40 \Leftrightarrow \lfloor 101\varepsilon\rfloor = 39$$

$$\frac{195}{101} \leq 5\varepsilon < \frac{200}{101} \Rightarrow \lfloor 5\varepsilon \rfloor = 1$$
$$2\varepsilon < \frac{80}{101} \Rightarrow \lfloor 2\varepsilon \rfloor = 0$$

Då $39 + 1 + 0 = 40$, vet vi att lösningarna till ekvationen är alla x sådana att

$$18 + \frac{39}{101} \leq x < 18 + \frac{40}{101}$$

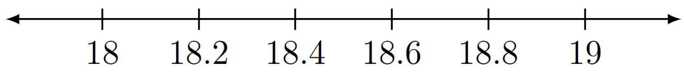
Lösningsförslag 2: Antag att $x = N$ för något heltal N och betrakta vad som händer när x ökar till $N + 1$. Uttryckets värde kommer då öka med:

$$2 \cdot 2 + 5 + 101 = 110$$

Om $x = 0$ så blir formelns värde $2 \cdot 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 101 \cdot 0 = 0$. Detta betyder att när x är ett heltal så är formelns värde $110 \cdot x$. Om vi börjar beräkna $\frac{2020}{110}$ så får vi ett tal mellan 18 och 19; alltså vet vi att heltalsdelen av x måste vara 18.

Vi önskar ta reda på hur denna ökningen ser ut i detalj när x går från 18 till 19. Vi studerar en term i taget; låt oss börja med $\lfloor 5x \rfloor$.

Vi inser att denna term delar upp tallinjen mellan 18 och 19 i fem delar:



Om vi tänker oss att x glider fram längs linjen så betyder det att $\lfloor 5x \rfloor$-termen ökar med 1 varje gång vi glider över en av dessa brytpunkter.

För termen $\lfloor 101x \rfloor$ funkar det precis lika, förutom att vi delar tallinjen i 101 delar. Notera att eftersom 5 och 101 inte har några gemensamma delare så kommer dessa brytpunkter inte att sammanfalla.

För termen $2\lfloor 2x \rfloor$ delar vi tallinjen i bara två delar, men istället för att termens värde ökar med 1 när x glider över en brytpunkt så ökar värdet med 2. Notera att 2 varken delar 5 eller 101, så att inga brytpunkter sammanfaller.

Vi vill nu veta mellan vilka (om några) brytpunkter som uttrycket antar värdet 2020. Vi börjar med att konstatera att om $x = 18$ så har uttycket värdet 1980. Vi måste alltså glida över 40 brytpunkter – notera att 40 är mindre än hälften av 110, vilket innebär att vi inte kommer passera $2\lfloor 2x \rfloor$-punkten.

I den sammanslagna tallinjen ligger först 20 stycken 101-punkter, sedan den första 5-punkten (eftersom $\frac{20}{101} < \frac{1}{5} < \frac{21}{101}$), följt av 20 till 101-punkter innan den andra 5-punkten (eftersom $\frac{40}{101} < \frac{2}{5} < \frac{41}{101}$).

Det betyder att den 40:e brytpunkten på den sammanslagna tallinjen är den 39:e brytpunkten på 101-linjen. Ekvationen uppfylls därmed när man når den 39:e brytpunkten på 101-linjen ($\geq$), men upphör direkt man går till den 40:e ($<$). Alltså är svaret att $18 + \frac{39}{101} \leq x < 18 + \frac{40}{101}$.

Svar: Ekvationen stämmer för alla x med $18 + \frac{39}{101} \leq x < 18 + \frac{40}{101}$