Skolornas Matematiktävling

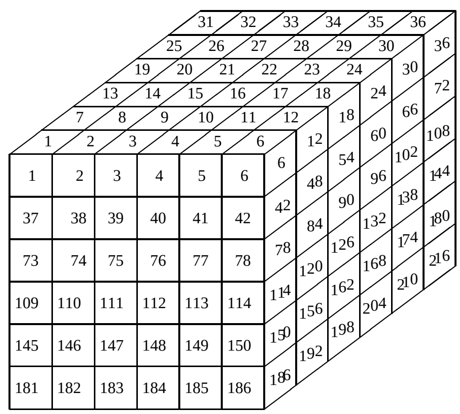
Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 3 oktober 1990

1. En yngling har gått två tredjedelar av en järnvägsbro, då han framför sig får syn på ett tåg som närmar sig bron. Han kan nätt och jämnt hinna av bron och därmed undkomma tåget genom att springa det fortaste han kan antingen mot tåget eller med tåget. Tåget närmar sig med en hastighet av 60 km/h. Hur fort springer ynglingen?

2. Vilka sexsiffriga tal av formen $abccba$ är jämnt delbara med 33 ?

3. En stor $6 \times 6 \times 6$ kub bildas av 216 småkuber. Dessa numreras från 1 till 216 på ett sätt som framgår av figuren nedan. Det översta lagret numreras från 1 till 36, första raden från 1 till 6, andra från 7 till 12 osv, alltid från vänster till höger. Nästa lager numreras på liknande sätt från 37 till 72 osv. Man väljer 36 småkuber så att det inte finns två bland de utvalda i någon rad parallell med någon av kubens kanter. Låt S beteckna summan av talen tilldelade de 36 kuberna. Vilka värden kan S anta?



4. I en triangel är en vinkel A. Motstående sida har längden a och de två övriga sidorna längderna b och c. Visa att
$$\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

5. Bestäm alla reella lösningar till ekvationssystemet
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1|x_1| & = & x_2|x_2| + (x_1 - a)|x_1 - a| \\ x_2|x_2| & = & x_3|x_3| + (x_2 - a)|x_2 - a| \\ \vdots & & \vdots \\ x_n|x_n| & = & x_1|x_1| + (x_n - a)|x_n - a| \end{array} \right. ,$$
där a är ett givet positivt tal.

6. Fyra hus ligger vid hörnen i en rektangel $ABCD$ med sidorna 300 och 500 meter. Husägarna ämnar bygga en gemensam brunn och dra vattenledningar från brunnen till husen. De har tillgång till 1020 meter rör och anordningar att skarva ihop två eller flera rör med. Går det att placera brunnen så att rören räcker?