Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 14 oktober 1964

1. Ett villkor för att två kurvor tangerar varandra i en punkt som svarar mot ett givet x-värde (i detta fall $x = 0$) är att funktionsvärdena i punkten är lika och att derivatorna i punkten är lika. Antag att den gemensamma tangenten är $y = a + bx$. Villkoret ger

$$f(0) = g(0) = a \quad \text{och} \quad f'(0) = g'(0) = b,$$

samt $f(0)g(0)/2 = a$ och (enligt produktregeln)

$$\left(f'(0)g(0) + f(0)g'(0)\right)/2 = b, \text{ d.v.s.}$$
$$a^2/2 = a \text{ och } ab = b.$$

Två fall: $a = 0$, $a \neq 0$.
Om $a = 0$ stämmer första ekvationen och den andra ger $b = 0$.
Om $a \neq 0$ kan man dividera första ekvationen med a, vilket ger $a = 2$, något som insatt i andra ekvationen ger $b = 0$. Som gemensam tangent kan således bara linjerna $y = 0$ och $y = 2$ komma i fråga. Att bägge fallen verkligen inträffar visar exemplen

$$f(x) = g(x) = 0$$

för första fallet och

$$f(x) = g(x) = 2$$

för det andra.
Svar: Antingen $y = 0$ eller $y = 2$.

2. Det räcker att visa att minst en av faktorerna i produkten är jämn. Om detta ej vore fallet så vore alla $a_i - i$ udda tal för $i = 1, 2, \ldots, n$. Men summan av dessa n stycken tal är noll eftersom den kan skrivas

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (1 + 2 + \cdots + n)$$

där de bägge parenteserna är lika enligt förutsättningen. Å andra sidan är summan av ett udda antal udda tal alltid udda, varför man får en motsägelse om n är udda.

3. Observera att $x = 0$ är en rot och att om x är en rot så är $-x$ en rot. Vidare gäller för en rot x att

$$|x| = 6\sin^2 x \leq 6 < 2\pi.$$

Det är därför tillräckligt att undersöka antalet rötter i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Detta är lika med antalet rötter i samma intervall till ekvationen $f(x) = 0$ där

$$f(x) = 6\sin^2 x - x.$$

Genom att beräkna tecknet av $f(x)$ för x strax till höger om 0 samt för

$$x = \pi/2, \qquad \pi, \qquad 3\pi/2 \quad \text{och} \quad 2\pi$$

finner man att tecknen i denna ordning är omväxlande. Eftersom f är kontinuerlig har $f(x) = 0$ minst en rot i varje intervall mellan dessa punkter. Utom $x = 0$ har $f(x) = 0$ således minst 4 rötter som är positiva, d.v.s. *minst 5 rötter* med $0 \leq x \leq 2\pi$.
För att visa att $f(x) = 0$ har *högst* 5 rötter i intervallet observeras att mellan två rötter till $f(x) = 0$ ligger alltid minst en rot till $f'(x) = 0$. Om $f(x) = 0$ hade mer än 5 rötter i intervallet så hade $f'(x) = 0$ därför mer än 4. Emellertid är

$$f'(x) = 6\sin 2x - 1$$

och ekvationen $\sin 2x = 1/6$ har precis 4 rötter mellan 0 och 2π. Den givna ekvationen har därför 9 rötter, 4 positiva, 4 negativa och noll.

4. Det bästa A kan göra, då det gäller att själv få så hög poäng som möjligt, är naturligtvis att ur varje rad välja rutan med den högsta poängen, radmaximum. Oavsett hur B väljer får A därigenom minst det minsta av dessa radmaxima. Låt detta vara v. Om A, då B skall tilldelas sin poäng, ur varje spalt (kolumn) väljer just den ruta, som ligger i samma rad som v (eller om talet v förekommer i flera olika rader, den ruta som ligger i en bestämd av dessa rader), så kan B aldrig få en poäng högre än v, ty v är ju maximum i sin rad. Genom denna metod kan A alltså garantera sig själv minst v och hindra att B får mer än v.
Svaret på frågan är därför "ja".
Om A inte bara är intresserad av att själv få så hög poäng som möjligt utan även av att trycka ned B:s poäng kan han emellertid i allmänhet hålla B längre nere än med den ovan angivna metoden (metod I) genom att, då B skall tilldelas poäng, välja det minsta talet i varje spalt (metod II). Detta är då högst lika med det tal i samma spalt som han valde vid metod I; varför B vid metod II ej kan få mer än vid metod I. Vid metod II väljer A alltså ut spaltminimum och B kan sedan inte få mera än det största spaltminimum. Vi har visat att detta är högst lika med v, d.v.s. *största spaltminimum* $\leq$ *minsta radmaximum*. Att strikt olikhet kan råda visas av exemplet:

0	1
1	0

där metod I ger både A och B poängen 1 medan metod II ger A poängen 1 och B poängen 0. Metod II är tydligen den bästa i den meningen att följande gäller: Den garanterar A poängen = minsta radmaximum, och B kan hur A än spelar alltid hindra A från att få mera. Vidare ger den B poängen=största spaltminimum, och A kan hur B än spelar alltid hindra B från att få mera.

5. Det givna villkoret är ekvivalent med villkoret att ekvationen

$$P^3(a) + Q(a)P^2(a) + (a^4+1)P(a) + a^3 + a = 0$$

gäller identiskt. Således måste gälla, dels att $P \not\equiv 0$, dels att

$$a^3 + a \equiv -P(P^2 + QP + a^4 + 1),$$

vilket visar att P måste vara en reell faktor i

$$a^3 + a = a(a^2+1).$$

Sätt $R = (a^3+a)/P$.
Identiteten kan skrivas

$$Q + P = -\Big((a^4+1)P + RP\Big)/P^2 = -(a^4+1+R)/P$$

vilket visar att a^4+1+R måste vara delbart med P. Fyra fall, ett för varje typ av faktor i a^3+a (k är en konstant $\neq 0$):

I. $P = k, \quad R = (a^3+a)/k$
$Q = -k - \left(a^4+1+(a^3+a)/k\right)/k$
ger lösning för alla $k \neq 0$.

II. $P = ka, \quad R = (a^2+1)/k$
$Q = -ka - \left(a^4+1+(a^2+1)/k\right)/ka$
Således måste $1+1/k$ vara noll d.v.s. $k=-1$ vilket ger en lösning
$Q = a + (a^4+1-a^2-1)/a = a + a^3 - a = a^3.$

III. $P = k(a^2+1), R = a/k,$
$Q = -k(a^2+1) - \left(a^4+1+a/k\right)/k(a^2+1).$
Orimligt ty a^4+1+a/k är ej delbart med a^2+1 hur än k väljes.

IV. $P = k(a^3 + a), \quad R = 1/k,$
$Q = -k(a^3 + a) - \left(a^4 + 1 + 1/k\right)/ka(a^2 + 1).$
Orimligt av samma skäl som III.

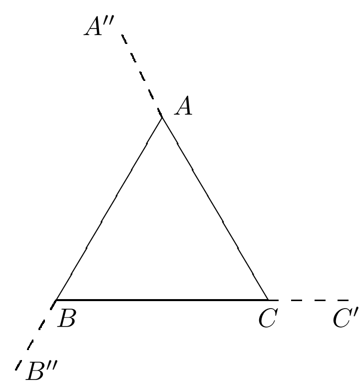
Svar:

I. $P = k,$
$Q = \left(-k^3 - k(a^4 + 1) - (a^3 + a)\right)/k^2,$ där $k \neq 0.$

II. $P = -a, \quad Q = a^3.$

6. a) Vi visar först att två godtyckliga deltrianglar har parvis parallella sidor. Detta är klart för två deltrianglar som har var sin sida som delvis sammanfaller. Låt T_1 och T' vara två godtyckliga deltrianglar. Eftersom det bara finns ändligt många deltrianglar kan man finna en sträcka som sammanbinder en inre punkt i T_1 med en inre punkt i T' och som ej går genom något hörn i någon deltriangel. Varje gång sträckan skär en deltriangels periferi måste det därför vara i en punkt där två angränsande deltrianglar har delvis sammanfallande sidor. Låt T_1, T_2,…, $T_n = T'$ vara de trianglar som sträckan skär i ordning från T_1 till T'. Då har T_1 och T_2 delvis sammanfallande sidor och därför parvis parallella sidor. Detsamma gäller T_2 och T_3 o.s.v. Således har T_1 och $T_n = T'$ parvis parallella sidor.
Detta visar att bland triangelsidornas riktningar finns bara tre olika. Å andra sidan måste till varje given sida i den ursprungliga triangeln finnas en deltriangel som har en sida längs den givna. Detta visar att de tre riktningarna är precis den ursprungliga triangelns sidriktningar.

b) Låt ABC vara den minsta deltriangeln i en uppdelning i olika stora trianglar. Då kan inte alla tre sidorna falla längs sidor i den givna (ty då vore ABC den givna) utan det finns en sida, säg BC, som har punkter i det inre av den givna triangeln.
Då måste det finnas en angränsande deltriangel som har en sida längs linjen BC. Denna sida $B'C'$ är längre än sträckan BC och måste därför ha en ändpunkt, säg C', utanför BC. Således är C en inre punkt i den givna triangeln. Följaktligen finns en deltriangel som har en sida $A''C''$ längs linjen AC. Då $A''C''$ är längre än sträckan AC måste en av punkterna A'' och C'' ligga utanför AC. Men då C' ligger utanför BC, måste C'' ligga på AC. Detta visar att A är en inre punkt i den givna triangeln. Resonemanget kan nu upprepas en sista gång med sidan AB och visar att även B är en inre punkt. Se figuren.



Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet