Högstadiets matematiktävling 2012/13
Kvalificeringstävling 13 november 2012
Lösningsförslag och bedömningsmall

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen. Vid osäkerhet finns det plats för anmärkningar i rättningsprotokollet.

Tack för er medverkan!

1. **Lösningsförslag:** För de två kopparna där Thoedor kan ha vilket som helst av de sju sorternas te finns det enligt multiplikationsprincipen $2 \cdot 7 = 14$ olika sätt att kombinera tesort och tekopp. Då finns det $16 - 14 = 2$ sätt för koppen som bara ska användas till grönt te. Alltså har Theodor två sorters grönt te.

   Svar: Theodor har två sorters grönt te.

   Poäng:
   Endast svar utan motivering ger inga poäng.
   Motiverar att det finns 14 olika sätt att kombinera två koppar och sju sorter. +1p
   Motiverar att det finns två sorters grönt te. +1p
   Välmotiverad lösning. +1p

2. **Lösningsförslag:** Låt oss anta att manuset har M sidor. Varje timme hinner Oscar skriva $\frac{M}{20}$ sidor, och Emmy hinner skriva $\frac{M}{12}$ sidor. På två timmar hinner de skriva

$$\frac{M}{20} + \frac{M}{12} = \frac{3M}{60} + \frac{5M}{60} = \frac{8M}{60}$$

   På sju gånger så lång tid (14 timmar) hinner de därmed skriva $7 \cdot \frac{8M}{60} = \frac{56M}{60}$ sidor. Nu är det Oscars tur att skriva. Efter den timmen har han skrivit ytterligare en tjugondel, tre sextiondelar, dvs $\frac{59M}{60}$ är färdigskrivet. Eftersom Emmy skriver en tolftedel, dvs fem sextiondelar, på en timme tar det henne $60/5 = 12$ minuter att skriva den sista sextiondelen av manuset.

   Tillsammans tar det därmed Oscar och Emmy $2 \cdot 7 + 1 + 0.2 = 15.2$ timmar att skriva manuset.

   Svar: 15.2 timmar, dvs 15 timmar och 12 minuter.

   Poäng:
   Endast svar utan motivering ger inga poäng.
   Motiverar att det tar två timmar att skriva åtta sextiondelar (2/15) av manuset. +1p
   Motiverar att efter 15 timmar återstår det att skriva en tolftedel av manuset. +1p
   Bestämmer totaltiden korrekt med tydliga motiveringar +1p

3. **Lösningsförslag:** Anta att det finns x kvinnor och y män, kursledaren ej medräknad i gruppen. Då gäller att $x = 6(x - y) \Leftrightarrow 6y = 5x$. Ekvationen säger att x måste vara ett jämnt tal eftersom vänstra ledet är jämt.

   Anta att Kim är en man. Då gäller $y + 1 = 7(x - (y + 1)) \Leftrightarrow 8y = 7x - 8$. De två ekvationerna ger att $x = 24$ och $y = 20$.

   Anta att Kim är en kvinna. Då gäller $y = 7((x + 1) - y) \Leftrightarrow 8y = 7x + 7$. Här är höger ledet ett udda tal medan vänstra ledet är ett jämnt tal. Alltså kan Kim inte vara en kvinna.

   Svar: Kim är en man.

Poäng:
Endast svar utan motivering ger inga poäng.
Tolkar de två påståenden korrekt. +1p
Resonerar om ett fall, Kim man eller kvinna. +1p
Resonerar om båda fallen och drar korrekt slutsats. +1p

4. **Lösningsförslag:** De möjliga summor som kan skrivas in i varje liten triangel är 15, 20, 25 eller 30. Summan 15 i en triangel får man om alla mynt är femkronor och summan 30 i en triangel om alla mynt är tiokronor.

   Men varje par av trianglar har åtminstone ett hörn gemensamt, så det är omöjligt att ha både 15 och 30 samtidigt. Alltså kan maximalt tre olika summor förekomma, dvs någon summa måste upprepas.

   Svar: Nej, alla fyra summmor kan ej vara olika.

   Poäng:
   Endast svar utan motivering ger inga poäng.
   Bestämmer de fyra möjliga summorna. +1p
   Motiverar t.ex. att 15 och 30 inte kan förekomma samtidigt. +1p
   Välmotiverad lösning med korrekt svar. +1p

5. **Lösningsförslag:** Den röda markeringen finns $2012/2 = 1006$ cm från ändarna. Delar vi upp 1006 cm i bitar med längden 7 cm får vi $1006 = 143 \cdot 7 + 5$. För bitar med längden 3 cm får vi $1006 = 335 \cdot 3 + 1$. Det betyder att Per har 5 cm kvar till den röda markeringen när han klippt den sista biten. Lina kommer att ha 1 cm kvar.

   Biten med den röda markeringen är därför 5 cm + 1 cm = 6 cm.

   Svar: Biten med den röda markering blir 6 cm.

   Poäng:
   Endast svar utan motivering ger inga poäng.
   Bestämmer hur många centimeter Per eller Lina har kvar
   till mittpunkten när den sista biten är klippt. +1p
   Bestämmer hur många centimeter även den andra har kvar
   till mittpunkten när den sista biten är klippt. +1p
   Bestämmer längden av den efterfrågade biten. +1p

6. **Lösningsförslag:** Anta att Agda har x förpackningar för 20 ägg och y förpackningar för 12 ägg. Då kan följande ekvationer ställas upp

$$\begin{cases} 20x + 12y &= 2012 \\ x + y &= 144 \end{cases}$$

   Division med 4 i den översta ekvationen ger

$$\begin{cases} 5x + 3y &= 503 \\ x + y &= 144 \end{cases}$$

   Den undre ekvationen ger att x och y har samma paritet, det vill säga båda är jämna eller båda är udda. Har x och y samma paritet så ger den övre ekvationen att summan i vänster led är jämn. Vi får en motsägelse. Alltså går det inte att ha exakt 2012 ägg i ett gross fulla förpackningar.

   Svar: Nej, det går inte att ha exakt 2012 ägg i ett gross fulla förpackningar.

   Poäng:
   Endast svar utan motivering ger inga poäng.
   Ställer upp ett samband för antal ägg och ett samband för antal förpackningar. +1p
   Löser ett ekvationssystem eller resonerar om paritet. +1p
   Välmotiverad lösning med korrekt svar. +1p