Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 2 oktober 1996

1. Siffran 9 upprepas två gånger i talen 99, 199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998 och 999. Första gången en sekvens av två nior följs av en nia är efter talet 899. Det finns $9 - 1 + 1 = 9$ ensiffriga tal före 899, det finns $99 - 10 + 1 = 90$ tvåsiffriga tal före 899 och $898 - 100 + 1 = 799$ tresiffriga tal före 899. För dessa föregångare till 899 går det åt $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 799 \cdot 3 = 2586$ siffror. Före de tre första konsekutiva niorna finns alltså 2587 siffror.

   Svar: Man måste stryka 2587 siffror.

2. Talet kan skrivas på formen $n = 1100x + 11y = 11(100x + y)$, där $1 \le x \le 9$ och $0 \le y \le 9$. Eftersom n är ett kvadrattal måste primtalet 11 vara delare i $100x + y = 99x + (x + y)$ och därmed i $x + y$. Men för talet $x + y$ gäller att $1 \le x + y \le 18$. Alltså är $x + y = 11$ och $n = 11^2(9x + 1)$. För $x = 1, 2, 3, \ldots, 9$ är $9x + 1$ en jämn kvadrat endast då $x = 7$ vilket framgår av följande tabell:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9x + 1$	10	19	28	37	46	55	64	73	82

   Alltså duger endast $n = 11^2 \cdot 8^2$.

   Ett alternativ är att, sedan man observerat att heltalet $\sqrt{n}$ måste vara delbart med 11 och att

   $$31^2 = 961 < 1000 \le n \le 9999 < 10000 = 100^2$$

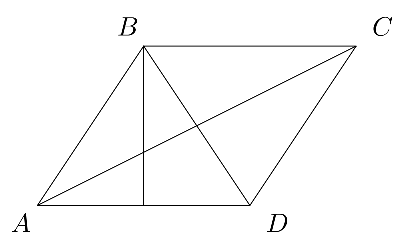
   medför att $32 \le \sqrt{n} \le 99$, beräkna n för de möjliga värdena på $\sqrt{n}$

$\sqrt{n}$	33	44	55	66	77	88	99
n	1089	1936	3025	4356	5929	7744	9801

   och konstatera att endast $n = 7744$ uppfyller de givna villkoren.

   Svar: Talet är $7744 = 88^2$

3. Låt basvinkeln DAB i den likbenta triangeln ABD vara α. Då är $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ och $|AD| = 2|AB| \cos\alpha$. Diagonalen $|AC|$ får man ur diagonalsatsen

   $$|AC|^2 + |BD|^2 = 2(|AB|^2 + |AD|^2)$$

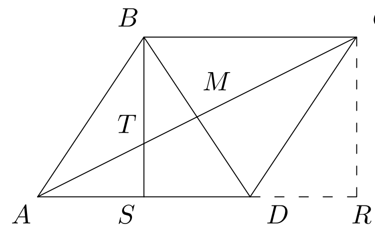
   eller ur cosinussatsen

   $$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD||CD|\cos(180^\circ - \alpha).$$

   Insättning av $|AD| = 2|AB|\cos\alpha$ och $|AB| = |CD| = |BD|$ ger $|AC| = |AB|\sqrt{1 + 8\cos^2\alpha}$ och

   $$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{1 + 8\cos^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + 8}} < \frac{2}{\sqrt{1 + 8}} = \frac{2}{3}.$$

Här är en alternativ lösning som inte utnyttjar trigonometri. I en parallellogram är diagonalernas skärningspunkt M mittpunkt på diagonalerna. Detta innebär att AM är en median i triangeln ABD. Eftersom triangeln ABD är likbent är höjden BS också en median. Skärningpunkten T mellan dessa två medianer delar AM i förhållandet $2:1$ vilket innebär att $|AC| = 2|AM| = 3|AT|$. Dessutom är $|AD| = 2|AS|$ varav $\dfrac{|AD|}{|AC|} = \dfrac{2}{3}\dfrac{|AS|}{|AT|}$. Men i en rätvinklig triangel är en katet alltid mindre än hypotenusan. Detta ger $\dfrac{|AS|}{|AT|} < 1$ och olikheten är bevisad.

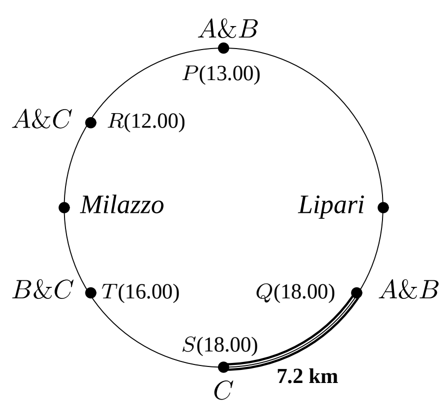


Man kan också dra normalen från punkten C mot linjen AD. Om fotpunkten på AD kallas R så följer av parallelliteten att $\triangle ABS$ och $\triangle DCR$ är likvinkliga och då $|AB| = |DC|$ är de två trianglarna kongruenta, vilket bl.a. ger $|DR| = |AS| = \dfrac{1}{2}|AD|$. Nu är kateten $|AR| = \dfrac{3}{2}|AD|$ i den rätvinkliga triangeln ARC mindre än hypotenusan $|AC|$, varav olikheten följer.

4. Först en lösning som uttnyttjar A:s avgångstid från Milazzo.
Antag att avståndet mellan Milazzo och Lipari är x km och att färjorna A, B och C håller konstant fart med a, b respektive c km/tim.
När A och B möts kl 13.00 återstår $x - 2a$ km för A till Lipari och då de åter möts kl 18.00 har A vänt och seglat $5a - x + 2a = 7a - x$ km från Lipari. Under tiden har B seglat $2a$ km till Milazzo, vänt och seglat $x - (7a - x) = 2x - 7a$ km av återfärden. Detta ger $5b = 2a + 2x - 7a$, eller $5(a + b) = 2x$.
Från kl 12.00 till dess A och B åter möts kl 18.00, har C seglat $a + x - (7a - x + 7.2) = 6c$ km. Detta ger $6(a + c) = 2x - 7.2$.
Klockan 13.00 då A och B möts är C:s försprång till B $a + c$ km. När B hinner upp C kl 16.00 har B seglat $3b$ km. Detta ger $3b - (a + c) = 3c$ eller $3(b - c) = a + c$.
Alltså är
$$a + b = \frac{2x}{5}, \quad a + c = \frac{x}{3} - 1.2 \quad \text{och} \quad b - c = \frac{1}{3}(a + c) = \frac{x}{9} - 0.4.$$
Av de två första ekvationerna får man $b - c = \dfrac{x}{15} + 1.2$, som insatt i den tredje ekvationen ger $\dfrac{x}{15} + 1.2 = \dfrac{x}{9} - 0.4$ varav $x = 36$.

Så en lösning som endast använder tidsdifferenserna mellan de olika mötena.

Låt framfarten för A från Milazzo till Lipari representeras av en halvcirkel och återfärden av den återstående cirkelhalvan och antag att A färdas medurs. Färjorna A och B möts kl 13.00 vid P och efter ytterligare 5 timmar vid Q. Under dessa 5 timmar har de tillsammans tillryggalagt dubbla avståndet $2x$ mellan Milazzo och Lipari. Detta ger relationen $5a + 5b = 2x$, med de i den tidigare lösningen införda beteckningar.
Färjorna A och C möts kl 12.00 vid R och 6 timmar senare är A vid Q. Då befinner sig C på avståndet 7.2 km från Q. De två färjorna har under dessa 6 timmar tillryggalagt dubbla avståndet mellan Milazzo och Lipari så när som på 7.2 km. Detta ger $6a + 6c = 2x - 7.2$. Färjorna B och C befinner sig båda vid T kl 16.00. Två timmar senare är B vid Q och C vid S. Under denna tid har B seglat 7.2 km längre än C, varav $2b = 2c + 7.2$.



Om man i systemet

$$\begin{cases} a + b & = \frac{2}{5}x \\ a + c & = \frac{1}{3}x - 1.2 \\ b - c & = 3.6 \end{cases}$$

från den första ekvationen subtraherar de två återstående ekvationerna får man

$$\begin{cases} 0 & = \frac{1}{15}x - 2.4 \\ a + c & = \frac{1}{3}x - 1.2 \\ b - c & = 3.6 \end{cases}$$

med lösningarna $x = 36$, $a = 10.8 - c$, $b = c + 3.6$, där $0 < c < 10.8$ och $c \neq 5.4$.

Svar: 36 km

5. Låt f vara andragradspolynomet och låt g vara tredjegradspolynomet och antag att dessa två polynom antar samma funktionsvärden för $x = a$, $x = 0$ och $x = b$, där $a < 0 < b$. (Det är ingen inskränkning att anta att den mellersta skärningspunkten har x-koordinat $= 0$.) Då gäller att tredjegradspolynomet $g - f$ har nollställena $a, 0, b$ och $g(x) - f(x) = A(x-a)x(x-b)$. De två begränsade områden som de två graferna innesluter har då lika stora areor om och endast om $\int_a^0 |g(x) - f(x)|\, dx = \int_0^b |g(x) - f(x)|\, dx$, dvs

$$\int_a^0 (x-a)x(x-b)\, dx = \int_0^b -(x-a)x(x-b)\, dx = \int_b^0 (x-a)x(x-b)\, dx.$$

Detta innebär att för den primitiva funktionen

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{(a+b)x^3}{3} + \frac{abx^2}{2}$$

till funktionen $x^3 - (a+b)x^2 + abx$, gäller $F(a) = F(b)$ och $a \neq b$. Nu är

$$\begin{aligned} F(a) - F(b) &= \frac{1}{4}(a^4 - b^4) - \frac{a+b}{3}(a^3 - b^3) + \frac{ab}{2}(a^2 - b^2) \\ &= \frac{1}{12}\left(b^4 - a^4 + 2ab(a^2 - b^2)\right) \\ &= \frac{(b-a)^3(a+b)}{12} \end{aligned}$$

som visar att $F(a) = F(b)$, med $a \neq b$, om och endast om $b = -a$.

Svar: Andragradspolynomet f och tredjegradspolynomet g, där $g(x) = Ax(x^2 - a^2) + f(x)$, $A \neq 0$ och $a \neq 0$, har tre olika skärningspunkter och innesluter två begränsade områden med lika stora areor.

6. Antag att $kn = m\left[\frac{kn}{m}\right] + r_k$ med $0 \leq r_k \leq m-1$, $k = 1, \ldots, m$. Antag att $1 \leq j < i \leq m$ och att $r_i = r_j$. Då är $(i-j)n = m\left(\left[\frac{in}{m}\right] - \left[\frac{jn}{m}\right]\right)$, vilket visar att m delar $(i-j)n$. Men då m och n saknar gemensam primfaktor ger detta att m delar $i - j$ varav $m \leq i - j \leq m - 1$. Alltså är samtliga m rester r_k olika. Summation ger då

$$n\sum_{k=1}^{m} k = m\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{kn}{m}\right] + \sum_{k=1}^{m} r_k = m\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{kn}{m}\right] + \sum_{k=0}^{m-1} k$$

eller, efter summation och förenkling

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{kn}{m}\right] = \frac{1}{2}\left(n(m+1) - m + 1\right).$$

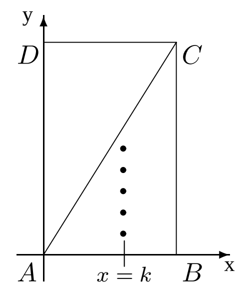
Analogt är

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{km}{n}\right] = \frac{1}{2}\left(m(n+1) - n + 1\right)$$

varav

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{kn}{m}\right] - \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{km}{n}\right] = n - m.$$

Här är en geometrisk metod att beräkna summan $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{kn}{m}\right]$:



Betrakta i ett rätvinkligt koordinatsystem den öppna rektangeln $ABCD$, där koordinaterna för hörnen är i ordning $(0,0)$, $(m,0)$, (m,n) och $(0,n)$. Diagonalen AC har ekvationen $y = \dfrac{n}{m}x$. Observera först att $\left[\dfrac{kn}{m}\right]$, för $1 \leq k \leq m$ är antalet heltalpunkter (k,y) med $1 \leq y \leq \dfrac{kn}{m}$ och att $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]$ är antalet heltalspunkter inuti rektangeln $ACBD$ som ligger under eller på diagonalen.

Nu finns i den öppna rektangeln inga diagonalpunkter med heltalkoordinater, ty om $lm = kn$, där $1 \leq k \leq m-1$, och n och m saknar gemensam primfaktor så måste m dela k. Detta ger motsägelsen $m \leq k \leq m-1$. På grund av symmetrin finns i den öppna rektangeln lika många heltalspunkter ovanför diagonalen som under. Alltså är

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right] = \frac{1}{2}(n-1)(m-1)$$

varav

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{kn}{m}\right] = \frac{1}{2}(n-1)(m-1) + n.$$

Svar: $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{kn}{m}\right]$ är det större talet.