Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 23 november 1969

1. Talparet (0,0) är uppenbarligen en lösning. Om (x, y) är en annan lösning så har x och y samma tecken och $(-x, -y)$ är också en lösning. Vi kan därför anta att x och y är positiva. Då är $x^3 - y^3 + y > y^3$, $x > y$ så att $x \geq y + 1$. Härav: $x^3 \geq (y + 1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 > y^3 + y$. Men detta strider mot den givna likheten.
   Svar: (0, 0) är enda lösningen.

2. Anta att $\tan \dfrac{\pi}{3n}$ är rationellt för något n. Med additions formeln för tangens visar man då att $\tan \dfrac{k\pi}{3n}$ blir rationellt för $k = 1, 2, \ldots$ (induktion) vilket speciellt ger att $\tan \dfrac{\pi}{3}$ är rationellt. Men $\tan \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, irrationellt. Denna motsägelse visar att $\tan \dfrac{\pi}{3n}$ är irrationellt för varje n.

3. Man kan erhålla b-talen i fallande storleksordning genom ett antal byten av två b-tal som inte står i rätt inbördes ordning, dvs för vilka $i < j$, $b_i < b_j$. Vid varje sådant byte ändras endast två termer i summan i det att $a_ib_i + a_jb_j$ byts mot $a_ib_j + a_jb_i$. Men
   $$a_ib_j + a_jb_i - (a_ib_i + a_jb_j) = (a_i - a_j)(b_j - b_i) \geq 0$$
   så att summan vid varje byte ökar eller är oförändrad.

4. Sätt $h(y) = y^2 - xy$. Då är $h'(y) = 2y - x$ och $h'(y) = 0$ ger $y = x/2$, $h_{\min} = -x^2/4$. $|h(y|$ är deriverbar utom då $h(y) = 0$. Dess maximum i $[0, 1]$ måste därför antingen vara $x^2/4$ då $x/2$ ligger i intervallet eller funktionsvärdet i någon av intervallets ändpunkter. Eftersom $h(0) = 0$ erhålls
   $$g(x) = \begin{cases} \max(x^2/4, |1 - x|) & \text{för} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ |1 - x| & \text{annars} \end{cases}$$
   Nu är $|1 - x| > 1$ utanför intervallet $[0, 2]$ och både $|1 - x| \leq 1$ och $x^2/4 \leq 1$ i $[0, 2]$. Därför antas $\min g(x)$ i intervallet $[0, 2]$. I $[1, 2]$ är båda funktionerna givna av $|1 - x| = x - 1$ och $x^2/4$ växande, så att g måste anta sitt minimum i $[0, 1]$. Där är $x^2/4$ växande från 0 och $|1 - x| = 1 - x$ avtagande till 0. Min $g(x)$ erhålls därför för det x för vilket $x^2/4 = 1 - x$. Detta ger $x = \sqrt{8} - 2$ och $\min g(x) = 3 - \sqrt{8}$.

5. Man har
   $$N = a_12^{n-1} + a_22^{n-2} + \cdots + a_{n-1}2 + a_n.$$
   Eftersom 2^j inte är delbart med 3 kan man för varje j bestämma ett heltal m så att $2^j - 3m$ är 1 eller -1. Man finner lätt att
   $$2^j = 3m_j + (-1)^j$$
   (genom induktion eller genom att använda att $a^j - b^j$ är delbar med $a - b$). Alltså är
   $$N = \sum_{i=1}^{n} a_i2^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(3m_{n-i} + (-1)^{n-i}\right).$$
   Talet N är därför delbart med 3 om och endast om detsamma gäller $\sum_{i=1}^{n} a_i(-1)^{n-i}$ eller utskrivet $(-1)^{n-i}(a_i - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n)$.

6. Att man alltid kan välja n parvis punktfrämmande trianglar kan bevisas på följande sätt. Välj en linje som inte är parallell med någon av de ändligt många linjer som går genom två av de givna punkterna. En linje parallell med den valda flyttas med bibehållen riktning från ett läge, där alla punkter ligger på samma sida om linjen, mot punkterna, som därefter passeras en och en. Då tre punkter passerats bildar man en triangel av dessa. De övriga punkterna ligger då på andra sidan om linjen. Därefter passeras ytterligare tre punkter och man bildar en triangel av dessa osv.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner