Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 16 oktober 1969

1. Om klassen har q elever varav p är rödhåriga ska

$$0,2165 \leq \frac{p}{q} \leq 0,2175.$$

Man kan förutsätta att $q \leq 40$ och därför $p \leq 40 \cdot 0,2175 = 8,7$ och alltså $p \leq 8$.

Metod 1. Invertera olikheterna:

$$4,61\ldots \geq \frac{q}{p} \geq 4,59\ldots$$
$$p \cdot 4,61\ldots \geq q \geq p \cdot 4,59\ldots.$$

Det enda p-värde med $p \leq 8$ för vilket q kan väljas som heltal i dessa olikheter är $p = 5$, vilket ger $q = 23$. Man finner $5/23 = 0,2173\ldots$ varför 0,217 är rätt avrundat.

Metod 2. En systematisk metod (utan räknehjälpmedel) är följande:

$$\frac{433}{2000} \leq \frac{p}{q} \leq \frac{87}{400}; \qquad 4\,\frac{268}{433} \geq \frac{q}{p} \geq 4\,\frac{52}{87}.$$

Sätt därför $q = 4p + r$, $r \leq 8 \cdot \dfrac{268}{433} < 5$, $r \leq 4$. Då är

$$\frac{268}{433} \geq \frac{r}{p} \geq \frac{52}{87}; \qquad 1\,\frac{165}{268} \leq \frac{p}{r} \leq 1\,\frac{35}{52}.$$

Sätt därför $p = r + s$, $s \leq 4 \cdot \dfrac{35}{52} < 3$, $s \leq 2$. Då är

$$\frac{165}{268} \leq \frac{s}{r} \leq \frac{35}{52}; \qquad 1\,\frac{103}{165} \geq \frac{r}{s} \geq 1\,\frac{17}{35}.$$

Eftersom $s = 1$ inte gör r till ett heltal, måste $s = 2$. Då är $r = 3$, vilket ger $p = 5$ och $q = 23$.
Svar: Ja, 23 elever.

2. För varje val av tal $x_2, x_3, \ldots, x_n$ blir $x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$ udda för ett av de två möjliga värdena pa x_1 och jämnt för det andra. Det finns alltså lika många n-tupler $(x_1, \ldots, x_n)$ med den angivna egenskapen som det finns $(n-1)$-tupler $(x_2, \ldots, x_n)$, dvs 2^{n-1} stycken.

3. De sökta olikheterna kan omformas till

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 0$$
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 0.$$

Dessa kan bevisas med "kvadratkomplettering":

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 = (a + b + c)^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac &= a^2 - 2a\left(\frac{b+c}{2}\right) + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 - \frac{3}{2}bc + \frac{3}{4}c^2 \\ &= \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b-c)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

I första olikheten fås likhet exempelvis för $a = 1/\sqrt{2}$, $b = -1/\sqrt{2}$, $c = 0$. I andra olikheten fås likhet exempelvis för $a = b = c = 1/\sqrt{3}$.
Variation. Man kan för den andra olikheten utnyttja

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2.$$

4. a) Om partikelns koordinater är (x, y) får man följande:

   1) x ökar varje gång med en enhet. Härav

$$r \geq p \tag{1}$$

   2) $x + y$ är varje gång oförändrat eller ökar med 2 enheter. Härav

$$r + s - p - q \text{ är ett jämnt tal} \tag{2}$$

$$0 \leq r + s - p - q \leq 2(r - p) \tag{3}$$

   Omvänt om (1)-(3) är uppfyllda kan man finna en väg för partikeln från (p, q) till (r, s) genom att låta partikelns andra koordinat öka exakt $(r + s - p - q)/2$ gånger.
   Villkoret (3) kan alternativt skrivas $|s - q| \leq r - p$.

   b) Eftersom $qs > 0$ ligger $A' = (0, -q)$ och $B = (r, s)$ på olika sidor om x-axeln. Vi låter varje väg från A' till B svara mot den väg från A till B som erhålls genom att vägen från A' till första kontakten med x-axeln speglas i x-axeln under det att resten av vägen fram till B bibehålls. Varje väg från A till B som råkar x-axeln erhålls därvid från en bestämd väg från A' till B. Vägarna från A' till B är därför lika många som vägarna från A till B som råkar x-axeln.

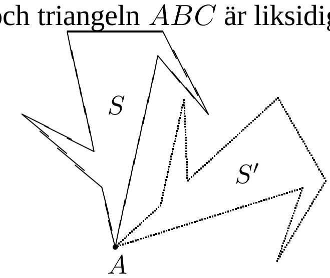
5. Anta att $f(x) \geq 0$ i hela intervallet $[0, 1]$. Då ger $a(x)f''(x) + f(x) = 0$ att $f''(x) \leq 0$ i detta intervall och att därför f' är avtagande (inte nödvändigtvis strängt avtagande). Låt nu $f(z) \leq 1$ för något z i $]0, 1[$. Vi tillämpar medelvärdessatsen över intervallet $[0, z]$ och får $f(z) - f(0) = zf'(x_0)$ med $0 < x_0 < z$. Från $f(z) \leq f(0)$ följer $f'(x_0) \leq 0$ och då f' är avtagande kan vi sluta $f'(x) \leq 0$ för $x \geq x_0$. Speciellt gäller detta på $[z, 1]$. Alltså är f avtagande i detta intervall. Men $f(z) \leq f(1)$. Enda möjligheten skulle därför vara att f är konstant, $f(x) = 1$, i intervallet $[z, 1]$ men detta satisfierar inte $a(x)f$”$(x) + f(x) = 0$.

6. a) Om sjön ligger i en cirkelsektor med vinkel mindre än $60°$ och med centrum i A kan man inte finna några sådana punkter B och C.

   b) Betrakta två varierande kordor AB och AC vilka har vinklar v och v+$60°$ med ena halvtangenten i A. För v nära $0°$ är AB kortare än AC, för v nära $120°$ är den längre. Av kontinuitetsskäl måste AB och AC vara lika för något v.

   c) Det räcker att man kan finna två punkter B' och C' i sjön eller på stranden sådana att triangeln $AB'C'$ är liksidig. Vrid nämligen sjön S $60°$ till läget S' genom en vridning kring A. Villkoret medför då att S och S' förutom A har ytterligare en punkt, säg B', gemensam. B' ligger i något sammanhängande delområde av $S \cap S'$, vars rand måste innehålla dels punkter på randen av S dels punkter på randen av S'. Det måste då finnas en punkt $B \neq A$ som är gemensam randpunkt till S och S'. Om S' vrids tillbaka går B över i en punkt C och triangeln ABC är liksidig.

   Det angivna villkoret är bl.a. uppfyllt om det i A finns två halvtangenter med större vinkel än $60°$.
   Observera att det som figuren visar inte räcker att man kan finna en *likbent* triangel med toppen i A och vinkeln vid A större än $60°$.



Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner