Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 9 oktober 1986

1. Sätt
$$a = 1 \cdot 2 \cdots 1986.$$
Olikheten kan då skrivas
$$a^{1/1986} < (a \cdot 1987)^{1/1987}$$
som är ekvivalent med
$$a^{1987} < (a \cdot 1987)^{1986}.$$
Detta kan förenklas till
$$a < 1987^{1986}.$$
Men a har 1986 faktorer, var och en mindre än 1987, varför olikheten följer.

2. Sätt
$$f(t) = t^4 - 3t^3 + 4t^2 - 3t + 1.$$
Man har då att visa att $f(t) \geq 0$ för $t > 0$.

Metod 1

Studera f med en eller två deriveringar.

$$\begin{aligned} f't) &= 4t^3 - 9t^2 + 8t - 3 = (t-1)(4t^2 - 5t + 3) \\ f''(t) &= 12t^2 - 18t + 8 \end{aligned}$$

Såväl $4t^2-5t+3$ som $12t^2-18t+8$ är alltid positivt (vilket kan inses exempelvis med diskriminanten). Vilken som helst av dem kan användas för att ge att $f'(t)$ är negativ för $t < 1$ och positiv för $t > 1$ så att $f_{\min} = f(1) = 0$, varav olikheten följer.

Metod 2

Ser man från början att $f(1) = 0$ kan man dividera $f(t)$ två gånger med $t - 1$ och får
$$f(t) = (t-1)^2(t^2 - t + 1)$$
där den andra faktorn alltid är positiv.

Metod 3

Sätt $x = t + \dfrac{1}{t}$. Olikheten kan då skrivas
$$x^2 - 3x + 2 > 0$$
$$(x-1)(x-2) > 0.$$
Studerar man funktionen $t + \dfrac{1}{t}$ för $t > 0$ finner man dess minimum för $t = 1$ så att
$$x \geq x_{\min} = x(1) = 2.$$
Alltså är $x - 1 > 0$, $x - 2 \geq 0$ och den sökta olikheten följer.

3. Kalla cirklarnas medelpunkter för M_1, M_2 och M_3 respektive. Lägg ett koordinatsystem med L som x-axel, M_2 som origo och M_1 som punkten $(-1, 0)$. Kalla C_3:s radie för r. M_3 är då en punkt (x, r). Avståndsformeln för M_1M_3 ger
$$(x+1)^2 + r^2 = (r+1)^2.$$
Avståndsformeln för M_2M_3 ger
$$x^2 + r^2 = (2-r)^2.$$
Löser man dessa ekvationer får man $r = 8/9$ (och $x = 6/9$).

4. Man behöver endast tänka på uppdelningen av päronen.

Metod 1

Man kan ge ett barn 4 päron, ett barn 3 päron och de båda övriga barnen var sitt päron. Denna möjlighet ger $4 \times 3 = 12$ sätt eftersom det barn som skall få 4 päron kan vara vilket som helst av barnen och det som skall få 3 kan vara vilket som helst av de övriga. Går man igenom alla möjligheter får man en tabell

uppdelning				antal sätt
5	4	0	0	12
5	3	1	0	24
5	2	2	0	12
5	2	1	1	12
4	4	1	0	12
4	3	2	0	24
4	3	1	1	12
4	2	2	1	12
3	3	3	0	4
3	3	2	1	12
3	2	2	2	4
				Summa: 140

Metod 2

Kalla barnen A, B, C, D. A skall ha 0, 1, 2, 3, 4 eller 5 päron, varför barnen B, C, D skall dela på 9, 8, 7, 6, 5 eller 4 päron. Ger man därefter B högst 5 päron skall C och D dela på återstoden. Man kan därför göra upp en tabell som successivt beräknas från vänster.

antal päron	delas mellan		
att dela	2 barn	3 barn	4 barn
0	1		
1	2		
2	3		
3	4		
4	5	15	
5	6	21	
6	5	25	
7	4	27	
8	3	27	
9	2	25	140

5. Låt det sökta nollstället vara a. Eftersom a är ett heltal sker divisionen $P(x)/(x-a)$ helt med heltalskoefficienter så att vi får

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

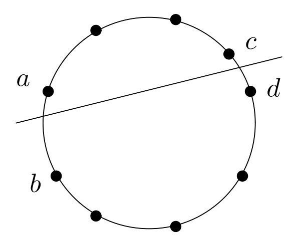
där även $Q(x)$ har heltalkoefficienter. Insättning av 2 och 10 ger

$$\begin{aligned} 13 &= (2-a)Q(2) \\ 5 &= (10-a)Q(10) \end{aligned}$$

Här är $Q(2)$ och $Q(10)$ heltal. Härav följer att $2-a$ måste vara något av talen 1, -1, 13, -13 så att a måste var något av talen 1, 3, 11, 15. Likaså måste $10-a$ vara något av talen 1, -1, 5, -5 så att a måste vara något av talen 9, 11, 5, 15. Enda möjligheten är därför $a = 15$.
I så fall måste både $Q(2)$ och $Q(10)$ vara -1 och $P(x)$ kan exempelvis vara

$$(x-15)((x-2)(x-10)-1).$$

6. Tag en utplacering av talen och dela upp dessa i två grupper på var sin sida om en linje så som figuren visar. Om man omkastar ordningsföljden i ena gruppen ökar summan med (beteckningar se figuren):



$$ad + bc - (ab + cd) = (a-c)(d-b)$$

Detta visar att man får en större summa om man låter den större av a och c vara granne till den större av b och d.
Härav följer först att n och $n-1$ måste vara grannar i den maximala lösningen. Man skulle annars kunna lägga linjen så att $a = n$ och $d = n-1$. På motsvarande sätt visas successivt att $n-2$ måste vara granne till n, att $n-3$ måste vara granne till $n-1$, att $n-4$ måste vara granne till $n-2$ osv.
Det största värdet inträffar alltså när man från talet n placerar de udda talen successivt fallande på ena sidan och de jämna talen successivt fallande på andra sidan om n.
(Summan kan beräknas och är $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 11n + 18)$.)

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner