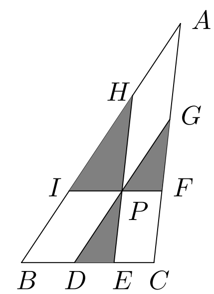
Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 23 november 1996

1. Låt triangelns hörn vara A, B och C. Låt P vara den inre punkten och antag att linjerna genom P parallella med triangelns sidor skär sidorna i punkterna D, E, F, G, H och I (se vidstående figur).

   Av topptriangelsatsen följer att triangeln ABC är likformig med topptriangeln AIF som i sin tur är likformig med dels topptriangeln HIP dels topptriangeln GPF. På samma sätt är triangeln ABC likformig med topptrianglen GDC som i sin tur är likformig med topptriangeln PDE. Alltså är de tre trianglarna PDE, GPF och HIP alla likformiga med triangeln ABC.
   Men då gäller

   $$T_1 = \text{area}(\triangle PDE) = \frac{|DE|^2}{|BC|^2}T,\ T_2 = \text{area}(\triangle GPF) = \frac{|PF|^2}{|BC|^2}T,\ T_3 = \text{area}(\triangle HIP) = \frac{|IP|^2}{|BC|^2}T$$

   I parallellogrammen $BDPI$ är de motstående sidorna BD och IP lika långa. Analogt gäller $|EC| = |PF|$. Detta ger

   $$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = \frac{\sqrt{T}}{|BC|}(|DE| + |PF| + |IP|) = \frac{\sqrt{T}}{|BC|} \cdot |BC| = \sqrt{T}.$$

2. Antag att de två frimärkena har valörerna $a > 1$ och $b = a + 2$ där a är ett heltal. Betrakta portosatsen $a + b + 1$ och antag att en försändelse med denna portosats kan korrekt frankeras med x frimärken av valör a och y frimärken av valör b. Eftersom $a + b + 1 = 2b - 1$ är $y = 0$ eller $y = 1$.

   - Om $y = 1$ är $ax + b = a + b + 1$ eller $a(x - 1) = 1$, dvs a delar 1. Eftersom a är positiv medför detta att $a = 1$, vilket strider mot villkoret $a > 1$.
   - För $y = 0$ gäller $ax = a + b + 1$ eller $a(x - 2) = 3$, dvs a delar 3. Eftersom a är positiv ger detta att $a = 1$ eller $a = 3$.

   Enda möjligheten är att valörerna är 3 och 5.

   Det återstår att visa att det går att klara alla portosatser ≥ 8.

   - En portosats av typ $8 + 3k = 5 + (k + 1)3$, där $k = 0, 1, \ldots$, klarar man med ett frimärke av valör 5 och $k + 1$ frimärken av valör 3.
   - En portosats av typ $8 + 3k + 1 = (k + 3)3$, där $k = 0, 1, \ldots$, klarar man med $k + 3$ frimärken av valör 3.
   - En portosats av typ $8 + 3k + 2 = 2 \cdot 5 + k \cdot 3$, där $k = 0, 1, \ldots$, klarar man med två frimärken av valör 5 och k frimärken av valör 3.

   Att man klarar varje portosats $p \geq 8$ med frimärksvalörerna 3 och 5 kan också visas med induktion:
   Start:
   För $p = 8$ duger ett frimärke av vardera valören.
   Induktionssteg:
   Antag att $p \geq 8$ och att portosatsen p kan klaras med frimärken av valör 3 och 5. Om man använder valören 5 vid portosats p kan man ersätta ett av märkena av valör 5 med två av valör 3 för att klara portosats $p + 1$. Om inget frimärke av valör 5 används vid portosats p, är $p \geq 9$ och p delbart med 3. Ersätter man då tre av frimärkena av valör 3 med två av valör 5 klarar man portosats $p + 1$. Om man kan klara portosats p kan man alltså även klara portosats $p + 1$. Därmed är induktionssteget bevisat.
   Slutsats:

Av induktionsprincipen följer nu att alla portosatser ≥ 8 kan klaras med frimärken av valörerna 3 och 5.

Svar: De enda möjliga valörerna är 3 och 5

3. Sätt $a(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Då är $a(x) \geq x \geq 1$, $x - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{a(x)} \leq 1$ och

$$p_n(x) = \frac{1}{2}\left(a^n(x) + \frac{1}{a^n(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a^n(x)} - \frac{1}{\sqrt{a^n(x)}}\right)^2 + 2\right) \geq 1.$$

Dessutom är

$$p_n^2(x) - 1 = \frac{1}{4}\left(a^{2n}(x) + \frac{1}{a^{2n}(x)} + 2\right) - 1 = \frac{1}{4}\left(a^{2n}(x) + \frac{1}{a^{2n}(x)} - 2\right) = \frac{1}{4}\left(a^n(x) - \frac{1}{a^n(x)}\right)^2.$$

Eftersom $a^n(x) - a^{-n}(x) \geq 0$, ger detta

$$a(p_n(x)) = p_n(x) + \sqrt{p_n^2(x) - 1} = \frac{1}{2}\left(a^n(x) + \frac{1}{a^n(x)}\right) + \frac{1}{2}\left(a^n(x) - \frac{1}{a^n(x)}\right) = a^n(x),$$

och

$$p_m(p_n(x)) = \frac{1}{2}\left(a^m(p_n(x)) + \frac{1}{a^m(p_n(x))}\right) = \frac{1}{2}\left(a^{mn}(x) + \frac{1}{a^{mn}(x)}\right) = p_{mn}(x).$$

Man kan också använda rekursion. Av identitetet

$$\left(a^{n+m}(x) + \frac{1}{a^{n+m}(x)}\right) - \left(a^m(x) + \frac{1}{a^m(x)}\right)\left(a^n(x) + \frac{1}{a^n(x)}\right) + \left(a^{n-m}(x) + \frac{1}{a^{n-m}(x)}\right) = 0$$

giltig för alla n och m, följer med valet $m = 1$, att polynomföljden kan definieras rekursivt av

$$p_{n+1}(x) = 2xp_n(x) - p_{n-1}(x), \text{ för } n \geq 1$$

och med $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x$.
Av omskrivningen $p_{n+1}(x) - p_n(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x) + 2(x-1)p_n(x)$ och $p_1(x) - p_0(x) = x - 1 \geq 0$ följer induktivt att $p_{n+1}(x) \geq p_n(x) \geq p_0(x) = 1$.
Valet $m = kn$ ger rekursionsformeln

$$p_{(k+1)n}(x) = 2p_n(x)p_{kn}(x) - p_{(k-1)n}(x), \text{ för } k \geq 1.$$

Polynomföljden $q_k(x) = p_{kn}(x)$ har alltså rekursionsformeln

$$q_{k+1}(x) = 2p_n(x)q_k(x) - q_{k-1}(x), \text{ för } k \geq 1$$

och med $q_0(x) = 1,\ q_1(x) = p_n(x)$, vilket är samma rekursionsformel som för följden $p_k(x)$ men där koefficent och begynnelsedata x ersatts med $p_n(x)$. Detta medför att

$$p_{kn}(x) = q_k(x) = p_k(p_n(x)), \text{ för } k \geq 1.$$

4. Punkterna A och C ligger på var sin sida om kordan BD och femhörningen innehåller kordan AD. Detta ger att

$$\pi - \angle C = \angle DAB < \angle A \leq \angle C,$$

varav $\angle C > \pi/2$.

Den illustrerande figuren, *fig 1*, har konstruerats på följande sätt: AF och BE är två vinkelräta diametrar i cirkeln. Detta ger $\angle A = \dfrac{\pi}{2}$. Sedan har punkterna C och D valts på den motsatta bågen till

EAB så att $\angle FAC = \angle EBD = \alpha$, där $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{8}$. Enligt periferivinkelsatsen är då $\angle ECD = \alpha$ varav $\angle C = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$.

fig 1

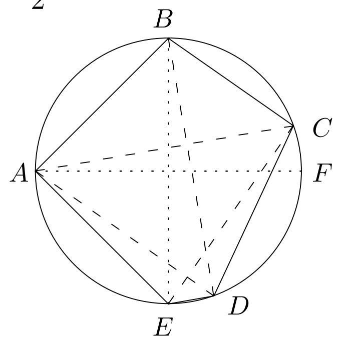
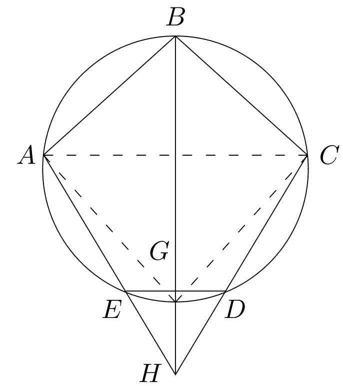


fig 2



Av periferivinkelsatsen följer vidare att $\angle EAD = \alpha = \angle FAC$ som ger

$$\angle DBC = \angle DAC = \angle EAF - \angle EAD + \angle FAC = \angle EAF = \frac{\pi}{4}$$

varav $\angle B = \angle DBC + \alpha + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \alpha = \angle C$. Den i cirkelfyrhörningen $EBCD$ till vinkeln C motsatta vinkeln är då $\pi - \angle C = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Detta ger $\angle E = \dfrac{3\pi}{4} - \alpha$. För vinkeln D gäller $\angle D = \angle EDB + \angle BDC = \dfrac{\pi}{2} + \angle BAC = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} - \alpha = \angle E$. I den konstruerade femhörningen är alltså $\angle A = \dfrac{\pi}{2} < \angle B = \angle C = \dfrac{\pi}{2} + \alpha < \dfrac{3\pi}{4} - \alpha = \angle D = \angle E$, där villkoret $\alpha < \dfrac{\pi}{8}$ utnyttjats. Nu kan α väljas hur liten som helst, vilket visar att $\angle C = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ kan komma hur nära $\dfrac{\pi}{2}$ som helst. Således finns ingen bättre undre gräns.

Man kan också för varje α med $\dfrac{\pi}{2} < \alpha \le \dfrac{3\pi}{5}$ konstruera en cirkelfemhörning med $\angle A = \angle B = \angle C = \alpha$ och $\angle D = \angle E = \dfrac{3(\pi - \alpha)}{2} \ge \alpha$. Här är beviset för detta (*fig 2*).

Konstruera en likbent triangel ABC där toppvinkeln B är α och låt cirkeln vara den kring triangeln omskrivna cirkeln. Låt G vara den andra ändpunkten på diametern utgående från B. Konstruera strålar från A respektive C, som bildar vinkeln α med BA respektive BC och som ligger på samma sida om linjen AC som punkten G. Eftersom $\angle GBA + \angle A = \dfrac{3\alpha}{2} \le \dfrac{9\pi}{10} < \pi$, kommer strålen från A skära strålen BG i en punkt H. Analogt skär strålen från C strålen BG i samma punkt H. Nu är $\angle AHC = 2\pi - 3\alpha = \pi - 2\alpha + \pi - \alpha < \pi - \alpha = \angle AGC$, som visar att H ligger utanför cirkeln. Detta innebär att strålarna från A och C skär cirkeln i två punkter E respektive D så att A och E ligger på ena sida om linjen BG och C och D på den andra och $ABCDE$ bildar en cirkelfemhörning med de angivna egenskaperna.

Man kan också bygga ett mera analytiskt bevis på satsen om medelpunktsvinkeln. Låt bågarna EA, AB, BC, CD och DE ha medelpunktvinklarna α, β, γ, δ respektive ε. Med hjälp av satsen om medelpunktsvinkeln och periferivinkelsatsen visar man att

$$2\angle A = \varepsilon + \delta + \gamma, \;\; 2\angle B = \alpha + \varepsilon + \delta, \;\; 2\angle C = \beta + \alpha + \varepsilon, \;\; 2\angle D = \alpha + \beta + \gamma, \;\; 2\angle E = \delta + \gamma + \beta.$$

Så visar man att $\angle A \le \angle B \le \angle C \le \angle D \le \angle E$ är ekvivalent med villkoren $\varepsilon \le \gamma \le \alpha \le \delta \le \beta$. Dessutom är $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 2\pi$. Av olikheterna $\delta + \gamma < 2\angle A \le 2\angle C = \beta + \alpha + \varepsilon$ följer då att $4\angle C = \beta + \alpha + \varepsilon + \beta + \alpha + \varepsilon > \beta + \alpha + \varepsilon + \delta + \gamma = 2\pi$.

Väljer vi nu speciellt $\alpha = \beta = \delta = \gamma = \dfrac{\pi}{2} - x$ och $\varepsilon = 4x$, där $0 < x \le \dfrac{\pi}{10}$ gäller olikheterna

$\varepsilon \le \gamma \le \alpha \le \delta \le \beta$ och likheten $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = 2\pi$. Dessutom är $2\angle C = \pi + 2x$. Då $x > 0$ kan väljas hur nära noll som helst följer att den undre gränsen inte kan förbättras.

5. För $n = 1$ kan man markera det första av de två talen 1 och 2. Då gäller $1^0 = 1 = 2^0$ och påståendet är sant för $n = 1$.
För $n = 2$ kan man markera 1 och 4. Då är

$$1^0 + 4^0 = 2^0 + 3^0 \quad \text{och} \quad 1^1 + 4^1 = 2^1 + 3^1$$

och påståendet gäller för $n = 2$.
För $n = 3$ är den aktuella mängden $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ med kvadraterna $1,4,9,16,25,36,49$ och 64. Summan av kvadraterna är 204 och då antalet markerade tal måste vara hälften av antalet givna tal gäller det att komplettera 64 med tre av de aktuella kvadraterna så att summan blir 102. Nu är $2^2+3^2+5^2+8^2 = 4+9+25+64 = 102$. Man kan då låta $m_1 = 1$, $m_2 = 4$, $m_3 = 6$ och $m_4 = 7$ vara de markerade talen och $o_1 = 2$, $o_2 = 3$, $o_3 = 5$ och $o_4 = 8$ vara de omarkerade talen. Då gäller

$$\sum_{i=1}^{4} m_i^0 = 4 = \sum_{i=1}^{4} o_i^0, \quad \sum_{i=1}^{4} m_i^1 = 18 = \sum_{i=1}^{4} o_i^1 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{4} m_i^2 = 102 = \sum_{i=1}^{4} o_i^2.$$

Observera att valet av markering gjorts så att av de första fyra talen har samma tal markerats som i fallet $n = 2$, medan markerade element i gruppen $2^2+1, 2^2+2, 2^2+3, 2^2+4$ styrts av de icke markerade talen 2 och 3 i fallet $n = 2$.
Efter denna analys genomför vi nu induktion över n.
Låt $P(n)$ vara påståendet

$P(n)$: Man kan markera 2^{n-1} av talen $1,2,3,\ldots,2^n$ så att för varje tal $p = 0,1,\ldots,n-1$ gäller att summan av k^p över alla markerade tal $k \in \{1,2,3,\ldots,2^n\}$ är lika med summan av k^p över alla icke markerade tal $k \in \{1,2,3,\ldots,2^n\}$.

Start: Enligt analysen ovan är påståendena $P(1), P(2)$ och $P(3)$ sanna.

Induktionssteg: Antag att $n \ge 1$ och att $P(n)$ är sann. Antag att för detta n de markerade talen är $m_1, m_2, \ldots, m_{2^{n-1}}$ och att $o_1, o_2, \ldots, o_{2^{n-1}}$ är de omarkerade talen.
Låt för $n+1$ de markerade talen vara

$$m_1, m_2, \ldots, m_{2^{n-1}}, 2^n + o_1, 2^n + o_2, \ldots, 2^n + o_{2^{n-1}}.$$

Då är de omarkerade talen

$$o_1, o_2, \ldots, o_{2^{n-1}}, 2^n + m_1, 2^n + m_2, \ldots, 2^n + m_{2^{n-1}}$$

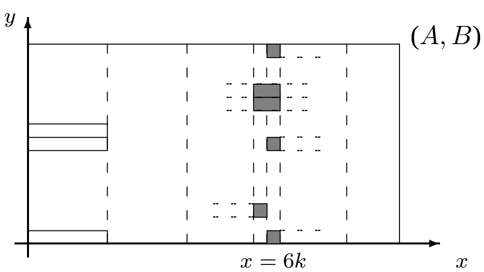
och för $0 \le p \le n-1$ är $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^{n-1}} m_i^p = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} o_i^p$.
Låt nu $0 \le p \le n$. Då gäller

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^{n-1}} m_i^p + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} (2^n + o_i)^p &= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m_i^p + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} o_i^j 2^{n(p-j)} \\
&= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m_i^p + \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} 2^{n(p-j)} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} o_i^j \\
&= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m_i^p + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} o_i^p + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} 2^{n(p-j)} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} o_i^j \\
&= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m_i^p + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} o_i^p + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} 2^{n(p-j)} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m_i^j \\
&= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} o_i^p + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} (2^n + m_i)^p
\end{aligned}$$

som visar att om $P(n)$ är sann så är också $P(n+1)$ sann.

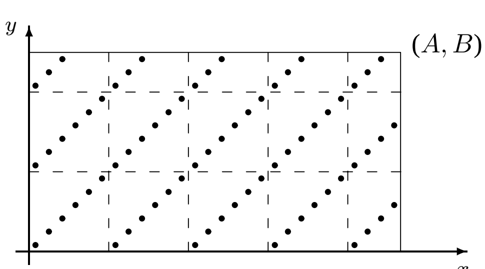
Slutsats: Enligt induktionsprincipen är då $P(n)$ sann för alla $n \geq 1$.

6. Antag att rektangelns sidor har kantlängder A och B och att antalet 6×1 brickor som används vid konstruktionen är k. Arean av triangeln är då $AB = 6k$, som visar att 3 delar A eller B. Antag att 3 delar B. Om då dessutom 2 delar B är B en multipel av 6. Antag därför att B inte är delbart med 2. Då är B ett udda tal. Lägg in rektangeln i ett rätvinkligt koordinatsystem med hörnen i punkterna $(0,0)$, $(A,0)$, (A,B) och $(0,B)$. Låt nu v_k vara antalet horisontella brickor av typ 6×1 som har sin *vänstra* kant på linjen $x = 6k$, t_k antalet horisontella brickor som *täcker* en del av linjen $x = 6k$ och slutligen h_k antalet horisontella brickor som har sin *högra* kant på linjen $x = 6k$. För $k = 0$ är $t_0 = h_0 = 0$ och, eftersom B är udda och höjden av vertikala brickor är jämn, v_0 udda. Detta innebär att $A \geq 6$. Dessutom är $h_1 = v_0$ udda.



Betrakta nu en linje $x = 6k$ med $6 \leq 6k \leq A$ och antag att $v_{k-1} = h_k$ är udda. Om $t_k = 0$ finns inga horisontella brickor som täcker linjen $x = 6k$ och den del av rektangeln som ligger mellan linjerna $x = 0$ och $x = 6k$ är en konstruerbar rektangel där ena sidan har längden $6k$. Vi kan då bortse från denna del av rektangeln om $A > 6k$ ($v_k > 0$). Antag därför att $t_k > 0$. Den del av rektangeln som ligger mellan linjerna $x = 6k - 1$ och $x = 6k$ täcks då av $v_{k-1} + t_k = h_k + t_k$ horisontella brickor. Eftersom B är udda måste $h_k + t_k$ vara udda och då h_k udda så är t_k jämnt. Den del av rektangeln som ligger mellan linjerna $x = 6k$ och $x = 6k + 1$ täcks av $v_k + t_k$ horisontella brickor och då även denna summa måste vara udda och då t_k är jämnt är v_k udda och $A \geq 6(k+1)$. Enda möjligheten att nå den högra kanten i rektangeln är då att $A = 6m$ är en multipel av 6 och att $t_m = v_m = 0$.

En alternativ metod är att anta det går att bygga en rektangel där B är delbar med 3 men inte med 2 och A är delbar med 2 men inte med 3. Detta ger $B = 6m + 3$ och $A = 6n + a$, där $a = 2$ eller $a = 4$. Rektangeln kan då delas upp i mn kvadrater av typ 6×6, n rektanglar av typ 6×3 och m rektanglar av typ $6 \times a$ samt en rektangel av typ $a \times 3$.



Markera de enhetsrutor i rektangeln som täcker linjerna $y = x + 6k$, $-n \leq k \leq m$. Antalet markerade rutor är då $6mn + 3n + ma + d$, där $d = 2$ om $a = 2$ och $d = 3$ om $a = 4$. Av konstruktionen följer att varje bricka har precis en av sina 6 rutor markerade. Detta ger att

$$\frac{(6n+a)(6m+3)}{6} = \frac{AB}{6} = 6mn + 3n + ma + d$$

som förenklas till $a = 2d$. Men detta är oförenligt med villkoren $d = 2$ om $a = 2$ och $d = 3$ om $a = 4$. Konstruktionen är alltså inte möjlig.