Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 11 oktober 1979

1. Om alla likheterna skulle gälla skulle man ha

$$1 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 2 + 2xy$$
$$1 = (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 3 + 3xy.$$

Man skulle således både ha $xy = -1/2$ och $xy = -2/3$. En motsägelse.

2.

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos A}\right) = 1 + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\cos A} + \frac{2}{\sin 2A}.$$

För $0 < A < \pi/2$ är $0 < \sin A < 1$, $0 < \cos A < 1$ och $0 < \sin 2A \leq 1$. Detta ger den sökta olikheten.

3. Vi undersöker först när

$$a + 2\sqrt{a-1} \geq 0 \quad \text{och} \quad a - 2\sqrt{a-1} \geq 0.$$

Den första gäller alltid för $a \geq 1$. Den andra är ekvivalent med

$$a^2 \geq 4(a-1) \qquad (a-2)^2 \geq 0$$

vilket också gäller för $a \geq 1$.
Eftersom båda leden i den givna ekvationen är ≥ 0, utsäger den detsamma som då båda leden kvadreras. Detta ger

$$a + 2\sqrt{a-1} + a - 2\sqrt{a-1} + 2\sqrt{a^2 - 4(a-1)} = 4$$

$$\sqrt{(a-2)^2} = 2 - a.$$

Detta inträffar då och endast då $2 - a \geq 0$, $a \leq 2$.
Svar: $1 \leq a \leq 2$.

4. Eftersom fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel är summan av motstående vinklar $180°$. Alltså är vinkeln $BDC = 120°$. Härav följer att trianglarna EBC och BDC har var sin vinkel om $120°$ och en vinkel gemensam; de är därför likformiga. På motsvarande sätt konstateras att trianglarna BDC och BCF är likformiga. Då är de båda trianglarna EBC och BCF likformiga vilket ger

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BC}{CF}.$$

Detta visar att $EB \cdot CF$ är konstant då D varierar.

5. Funktionen given av $y = x(1-x)$ har maximum $1/4$ för $x = 1/2$. Alltså är alltid $4x(1-x) \leq 1$. Någon av olikheterna $a \leq b$, $b \leq c$, $c \leq d$, $d \leq a$ måste gälla, säg den första. Då är

$$4a(1-b) \leq 4b(1-b) \leq 1.$$

Variation. Man kan multiplicera de fyra givna uttrycken med varandra. Produkten blir

$$4a(1-a)4b(1-b)4c(1-c)4d(1-d)$$

som enligt ovanstående resonemang måste vara ≤ 1. Alla faktorerna kan därför inte vara större än 1.

6. Låt a vara det minsta positiva heltal för vilket $\frac{1}{a} \leq \frac{p}{q}$. Då är $0 \leq \frac{p}{q} - \frac{1}{a} = \frac{ap-q}{aq}$. Inför vi $p_1 = ap - q$, $q_1 = aq$ kan vi skriva $\frac{p}{q} = \frac{1}{a} + \frac{p_1}{q_1}$. Vi vill sätta $a_1 = a$ och sedan på samma sätt bestämma a_2 sådant att $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_2} + \frac{p_2}{q_2}$ osv så länge $p_i > 0$. $\frac{p}{q} < 1$ ger $\frac{1}{a} < 1$, $a \geq 2$. På grund av valet av a är $\frac{1}{a-1} > \frac{p}{q}$, $q > ap - p$. Alltså är $p_1 < p$ och vi kommer att få $p > p_1 > p_2 > \cdots$ varför proceduren är avslutad efter ett ändligt antal steg. Från $a \geq 2$ får vi $\frac{2}{a} \geq \frac{1}{a-1}$ så att $\frac{2}{p} > \frac{p}{q}$ och $\frac{p_1}{q_1} < \frac{1}{a}$. Vid upprepning måste därför $a_1 < a_2 < \cdots$.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner