Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 2 oktober 1991

1. Antag att pappskivans sidor är x respektive y dm. Om man skär ut kvadrater med sidan a dm får lådan volymen $V(a) = a(x-2a)(y-2a) = a(xy - 2a(x+y) + 4a^2)$ dm^3. Villkoret $V(1) = V(2)$ ger $xy - 6(x+y) = -28$, varav $V(3) = 3(xy - 6(x+y) + 36) = 3(-28+36) = 24$.

   Svar : 24 dm^3

2. Utveckling och kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned}\sqrt{1+n(n+1)(n+2)(n+3)} &= \sqrt{n^4+6n^3+11n^2+6n+1} \\ &= \sqrt{(n^2+3n+1)^2} \\ &= \left|n^2+3n+1\right|,\end{aligned}$$

   som är ett heltal.

   Svar: Heltalet är $|n^2+3n+1|$.

3. Varje byte reducerar antalet kulor i skålen med två. Att reducera 99 kulor till 3 går på 48 drag. Antag att man gör x, y, z drag av typ a), b) respektive c). Differensschemat

Typ	Antal plock	Δ-blå	Δ-röd	Δ-vit
a)	x	-3	-1	+2
b)	y	-1	-3	+2
c)	z	+1	+1	-4

   ger, om man betraktar de vita kulorna, ekvationerna

$$x+y+z = 48 \text{ och } 2x+2y-4z = -32.$$

   Elimination av $x+y$ ger $3z = 64$ som saknar heltalslösning.

   Svar: Nej.

4. Antag att tågen L, E och T har farterna x, $2x$ respektive y km/tim och att T möter E och L precis t_E respektive t_L timmar efter kl 08.00. Då är $|AB| = \dfrac{35y}{6}$ km och

$$t_E(2x+y) = t_L(x+y) = \frac{35y}{6},$$

   varav

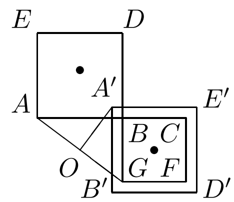
$$t_E = \frac{35y}{6(2x+y)} \text{ och } t_L - t_E = \frac{35xy}{6(2x^2+3xy+y^2)}.$$

   Villkoret $t_E \geq 5/2$ ger $x \leq 2y/3$ medan villkoret $t_L - t_E \geq 1$ ger $12x^2 + 18xy + 6y^2 \leq 35xy$ dvs $12x^2 - 17xy + 6y^2 \leq 0$ eller $(3x-2y)(4x-3y) \leq 0$ varav $2y/3 \leq x \leq 3y/4$.
   Alltså är $x = 2y/3$ och restiden för L

$$\frac{\frac{35y}{6}}{x} = \frac{\frac{35y}{6}}{\frac{2y}{3}} = \frac{35}{4}.$$

   Svar: Ankomst kl 16.45.

5. Låt O vara mittpunkt på sträckan AG. Observera att O har samma avstånd till de båda kvadraternas mittpunkter.



Vid rotation medurs 90° kring O kommer kvadraten $AEDB$ övergå i kvadraten $A'E'D'B'$ med sidorna parallella med sidorna i kvadraten $BCFG$ och med samma medelpunkt som denna. Punkterna E, A', B, F och D' ligger då alla på linjen EF. Men A' är ett av hörnen i den kvadrat vars ena diagonal är AG.

6. Påståendet är riktigt för alla regelbundna $2n$-hörningar där $n = 4k + 3$ eller $n = 4k + 2$.
Antalet par är n och antalet möjliga längder också n. Antag att alla linjer har olika längder. Om man målar varannat hörn vitt och varannat svart kommer det att finnas s linjer där ändpunkterna är svarta, v linjer där ändpunkterna är vita och o linjer med olikfärgade hörn. Antalet linjer med olikfärgade hörn (de som förenar hörn med ett jämnt antal hörn mellan sig) är $[(n-1)/2]+1$. Alltså gäller

$$2s + o = 2v + o = n \qquad \text{varav} \qquad 2s = 2v = n - \left[\frac{n-1}{2}\right] - 1.$$

För $n = 4k+3$ och $n = 4k+2$ är $n-[(n-1)/2]-1$ udda ($2k+1$), vilket ger motsägelse. (Observera att $1991 = 4 \cdot 497 + 3$)

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson