Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 27 februari 1967 [1]

1. a) Sant, ty för alla tillräckligt stora n gäller $0 \leq \{x_n\} < \frac{1}{2}$ och $0 \leq \{y_n\} < \frac{1}{2}$ varför $\{x_n + y_n\} = \{x_n\} + \{y_n\}$ för dessa n. Men $\{x_n\} + \{y_n\} \to 0$ enligt en räkneregel för gränsvärden.

   b) Felaktigt. Motexempel: $x_n = 0$, $y_n = 1/n$. Då blir $\{x_n - y_n\} = 1 - 1/n \to 1$.

   c) Felaktigt. Motexempel: $x_n = n$, $y_n = 1/2n$. Då blir $\{x_n y_n\} = 1/2$ för alla n.

2. Man har

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n - k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$
$$= (k-1)(-a_1) + (k-2)(-a_2) + \cdots + (-a_{k-1}) + a_{k+1} + 2a_{k+2} + \cdots + (n-k)a_n.$$

   I denna summa är alla termerna ≥ 0. Minst en term måste vara $\neq 0$ ty annars vore alla talen a_1, a_2, $\ldots$, a_n noll utom möjligen a_k, vilket fall kan uteslutas eftersom summan av alla talen är noll.

3. Observera först att kvadraten på ett jämnt tal är delbar med 4 och alltså lämnar resten 0 eller 4 vid division med 8. Observera också att kvadraten på ett udda tal lämnar resten 1 vid division med 8 ty $(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1$ och ett av talen n och $n+1$ är jämnt. Således ger en jämn kvadrat vid division med 8 antingen 0, 1 eller 4 till rest.
   Om nu antages att det funnes x, y, z och k sådana som anges i texten d.v.s. om det antages att en summa av tre kvadrater skulle kunna lämna 7 som rest vid division med 8 så skulle enligt vad som nyss visats detsamma gälla för en summa av tre tal valda bland talen 0, 1 och 4. Man ser lätt att ingen sådan summa finns genom att gå igenom de olika fall som kan inträffa.

4. För $n = 1$ lyder ekvationen så:
$$x = 1 + \frac{2}{x}.$$
   Detta är en andragradsekvation med rötterna -1 och 2. Man bevisar lätt genom induktion att för allmänt n den givna ekvationen kan hyfsas till formen
$$x = \frac{ax + b}{cx + d}$$
   där a, b, c och d är heltal som beror på n. Den givna ekvationen är därför av högst andra graden för alla n.
   Sätt $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$. För $n = 1, 2, 3$, o.s.v. blir den givna ekvationen:
$$x = f(x), \qquad x = f(f(x), \qquad x = f(f(f(x))), \qquad \text{o.s.v.}$$
   Om x är en rot för $n = 1$ så satisfierar den därför också för $n = 2$ o.s.v. Detta innebär att för alla n är -1 och 2 rötter. Eftersom vi visat att ekvationen är av andra graden finns inga andra rötter.
   Svar: -1 och 2.

5. Omge varje gitterpunkt med en kvadrat med sidan ett och sidorna parallella med koordinataxlarna så att gitterpunkten är kvadratens tyngdpunkt. Avståndet från gitterpunkten till ett av kvadratens hörn är $1/\sqrt{2}$. De kvadrater som hör till gitterpunkter i en cirkel med radien R ligger därför helt i cirkeln med radien $R + 1/\sqrt{2}$ och summan $A(R)$ av dessa kvadraters ytor är därför $< \pi(R + 1/\sqrt{2})^2$.
   Samma kvadrater täcker helt cirkeln med radien $R - 1/\sqrt{2}$. Antag nämligen att i denna funnes en oövertäckt punkt P. Betrakta den kvadrat som har P som tyngdpunkt, sidorna parallella med koordinataxlarna och sidlängden ett. Eftersom P antages oövertäckt skulle denna kvadrat ej innehålla någon

[1] På grund av skolkonflikten hösten 1966 uppsköts tävlingen till vårterminen 1967

gitterpunkt på avståndet $< R$ från origo. Detta är orimligt ty varje kvadrat av den beskrivna typen måste innehålla en gitterpunkt och denna måste ligga på avståndet $< R$ från origo eftersom P ligger på avståndet $< R - 1/\sqrt{2}$ från origo. Sammanfattningsvis ser vi att

$$\pi(R - 1/\sqrt{2})^2 < A(R) < \pi(R + 1/\sqrt{2})^2 \qquad \text{om } R > 1/\sqrt{2}.$$

a) Dividera med R^2 och låt $R \to \infty$. Man ser att $A(R)/R^2 \to \pi$.

b) Utveckla kvadraterna i olikheterna och subtrahera πR^2. Man får

$$-\pi R\sqrt{2} + 1/2 < B(R) < \pi R\sqrt{2} + 1/2.$$

Detta visar att $B(R)/R^a \to 0$ för alla $a > 1$. Med mer förfinade metoder kan man få betydligt bättre resultat rörande $B(R)$.

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet