Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 16 november 1991

1. Ekvationen kan skrivas $5(m+n-1) = 2nm$ varav följer att $5|nm$. Pga symmetri kan man anta att $5|n$. Insättning av $n = 5k$ i ekvationen och division med 5 ger $m + 5k - 1 = 2km$ eller

$$m = 2 + \frac{k+1}{2k-1}.$$

För $k > 2$ är $0 < \dfrac{k+1}{2k-1} < 1$ ($k+1 < 2k-1 \Leftrightarrow 2 < k$) och m inget heltal.
$k = 1$ ger $n = 5$ och $m = 4$, $k = 2$ ger $n = 10$ och $m = 3$.

Svar :

n	5	10	4	3
m	4	3	5	10

2. Påståendet följer av följande implikationer

$$\begin{aligned}
x - \sqrt{x} \le y - \frac{1}{4} \le x + \sqrt{x} \quad &\Rightarrow \quad \left| y - x - \frac{1}{4} \right| \le \sqrt{x} \\
&\Rightarrow \quad y^2 + x^2 + \frac{1}{16} - 2xy - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x \le x \\
&\Rightarrow \quad y^2 + x^2 + \frac{1}{16} - 2xy - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \le y \\
&\Rightarrow \quad (x - y - \frac{1}{4})^2 \le y \\
&\Rightarrow \quad \left| x - y - \frac{1}{4} \right| \le \sqrt{y} \\
&\Rightarrow \quad y - \sqrt{y} \le x - \frac{1}{4} \le y + \sqrt{y}
\end{aligned}$$

3. Betrakta summorna $S_k = \sum_{i=0}^{k} x_i$. Då gäller, eftersom S_k är heltal, att

$$S_{k+1} = S_k + x_{k+1} = S_k + \left[\frac{n - S_k}{2}\right] = \left[\frac{n + S_k}{2}\right].$$

Härav följer att $S_k \le n-1$ för alla $k \ge 0$, ty $S_0 = 0 \le n-1$ och om $S_k \le n-1$ så är

$$S_{k+1} = \left[\frac{n + S_k}{2}\right] \le \left[n - \frac{1}{2}\right] = n - 1.$$

Dessutom är följden $(S_k)_{k=0}^{\infty}$ växande ty

$$S_{k+1} - S_k = x_{k+1} = \left[\frac{n - S_k}{2}\right] \ge \left[\frac{n - n + 1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0.$$

Men för en växande uppåt begränsad följd av heltal finns heltal C och N så att $S_k = C$ för $k \ge N$. Ur rekursionsformeln för följden $(S_k)_{k=0}^{\infty}$ följer då

$$\left[\frac{n + C}{2}\right] = C \le n - 1 \Rightarrow \left[\frac{n - C}{2}\right] = 0 \text{ och } C \le n-1, \text{ dvs } C = n - 1.$$

4. Bollarna kan ligga i godtycklig ordning.
Varje permutation kan reduceras till grundpermutationen genom ett ändligt antal byten av närliggande element. Eftersom cyklisk permutation av bollarna i röret kan åstadkommas, genom att den sista bollen placeras först, räcker det visa att första och andra bollen kan byta plats. Detta kan göras så här ($x\downarrow$ indikerar att operationen att plocka ut en boll upprepas x gånger):

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 & & & & & & & \downarrow \\
8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 & & \downarrow & & & & & \\
2 & 8 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 & & & & & & & \downarrow \\
7 & 2 & 8 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 & & \downarrow & & & & & \\
8 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 & & & & & & & {}_2\downarrow \\
5 & 6 & 8 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\
 & & \downarrow & & & & & \\
8 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\
 & & & & & & & {}_2\downarrow \\
3 & 4 & 8 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \\
 & & \downarrow & & & & & \\
8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \\
 & & & & & & & {}_2\downarrow \\
2 & 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 & & \downarrow & & & & & \\
8 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 & & & & & & & {}_7\downarrow \\
2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8
\end{array}
$$

Svar: Bollarna kan ligga i godtycklig ordning

5. Det är rimligt att tro att talet n ska innehålla så många ettor som möjligt. Ett försök med $n = 2^{k+1} - 1$, som innehåller enbart ettor går emellertid inte. Då får n^2 lika många ettor. Däremot kan man ta bort en etta och sätta

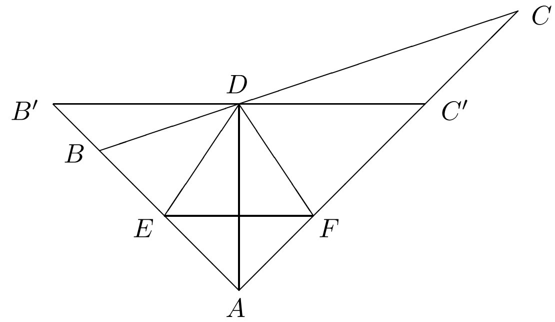
$$n = 2^{k+1} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^{k+1} + 2^k - 1 \text{ för } k \geq 3.$$

I bas 2 har n exakt $k+1$ ettor. Talet n^2 får framställningen

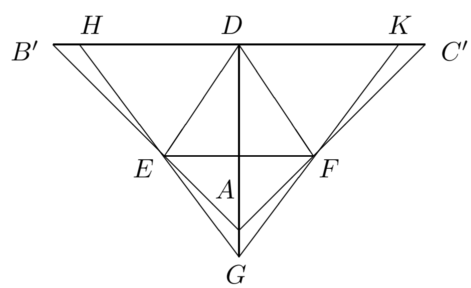
$$
\begin{aligned}
n^2 &= 2^{2k+2} + 2^{2k} + 1 + 2 \cdot 2^{k+1} \cdot 2^k - 2 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 2^k \\
&= 2 \cdot 2^{2k+2} + 2^{2k} - 2^{k+2} - 2^{k+1} + 1 \\
&= 2^{2k+3} + 2^{k+1}(2^{k-1} - 2 - 1) + 1 \\
&= 2^{2k+3} + 2^{k+1}(2^{k-2} + 2^{k-3} \cdots + 2^2 + 1) + 1.
\end{aligned}
$$

Talet inom parentesen har $k-2$ ettor och därför har n^2 exakt k ettor.
Ett annat exempel på tal som har denna egenskap är $n = (2^{2k-1} - 1) - 2^k$, $(k > 2)$ som innehåller $2k-1-1 = 2k-2$ ettor. I $n^2 = 2^{3k}(2^{k-2} - 1) + 2^{k+1} + 1$ är antalet ettor $k-2+1+1 = k < 2k-2$.

6. Antag att $\angle A \geq 60^\circ$. Låt bisektrisen till $\angle A$ skära sidan BC i punkten D. Avsätt vinklarna $\angle ADE = 30^\circ$ och $\angle ADF = 30^\circ$. Eftersom $\angle BDA > \angle DAC \geq 30^\circ$ och $\angle CDA > \angle DAB \geq 30^\circ$ så ligger E på AB och F på AC och $\triangle DEF$ är liksidig.



Drag genom D en linje parallell med EF och antag att denna linje skär sidorna (eller dess förlängningar) i punkterna B' respektive C'. (Av symmetriskäl kan man anta att punkten C' ligger på sidan AC). Triangeln $\triangle AB'C'$ blir då likbent. Trianglarna $\triangle DC'C$ och $\triangle DB'B$ har lika stora baser medan höjden i $\triangle DC'C$ är $\geq$ höjden i $\triangle DB'B$. Alltså är S=arean($\triangle ABC$) $\geq$arean($\triangle AB'C'$).



Konstruera den liksidiga triangeln $\triangle GHK$ så att G ligger på DA:s förlängning (över A) och med punkterna E och F på två av sidorna. En analog jämförelse av areorna av $\triangle AFG$ och $\triangle FKC'$ ($\triangle AEG$ och $\triangle EHB'$) ger slutligen att area($\triangle AB'C'$) $\geq$ area($\triangle GHK$) $=$ 4area($\triangle DEF$). Likhet får man då och endast då $\triangle AB'C'$ är liksidig.
Man kan också med ett kontinuitetsresonemang visa att det måste finnas en inskriven liksidig triangel med en sida parallell med den längsta sidan i den givna triangeln. Olikheten mellan areorna följer då ur likformiga trianglar och t ex olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium. I detta fall leder en analys till att likhet inträffar precis då längderna av den längsta sidan i den givna triangeln och höjden mot denna har förhållandet $2 : \sqrt{3}$.

Svar: Arean av den konstruerade triangeln DEF är $\leq$ en fjärdedel av arean av triangeln ABC.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktvlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson