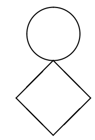
Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 11 oktober 1973

1. En silversmed har en silvertråd och vill av denna göra ett örhänge bestående av en cirkel och en under denna hängande kvadrat (jfr fig.). Vilket skall förhållandet mellan cirkelns diameter och kvadratens sida vara för att silvertråden skall omfatta så liten area som möjligt?



2. Fem föremål numrerade 1, 2, 3, 4, 5 skall sorteras in i tre fack kallade A, B, C så att minst ett föremål kommer i varje fack. På hur många sätt är detta möjlligt?

3. Lös ekvationen $\sqrt[3]{60-x} + \sqrt[3]{x-11} = \sqrt[3]{4}$.

4. Visa att för varje heltal n har heltalen $2n^2+n+1$ och $8n^2+2n+1$ ingen gemensam heltalsfaktor större än 1.

5. p och q är positiva heltal. Visa att $\dfrac{\sqrt{p}-\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$ är rot till minst en andragradsekvation med heltalskoefficienter. Undersök vilka värden som är möjliga för den andra roten.

6. Man betraktar en rektangulär punktmängd bestående av $m \times n$ punkter (m, n båda ≥ 3). Man skiljer därvid på randpunkter och inre punkter. En punkt P kallas därvid inre om den omges av fyra intilliggande punkter P_1, P_2, P_3, P_4 så som figuren visar. Man studerar reella funktioner på denna punktmängd sådana att det för varje inre punkt gäller

$$f(P) = \frac{1}{4}\left(f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4)\right).$$

Speciellt två sådana funktioner för vilka det gäller att i varje randpunkt den ena funktionens värde är likamed den andras. Visa att detta då också måste gälla för alla inre punkter.