Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 10 oktober 1974

1. Bestäm alla $x > 0$ som satisfierar $(x\sqrt{x})^x = x^{x\sqrt{x}}$.

2. Bestäm alla primtal p sådana att $\sqrt{5p+49}$ är ett heltal.

3. En vinkel α har spetsen i punkten P. Man har $0 < \alpha < 90°$. Från en punkt A på ena vinkelbenet dras en linje vinkelrätt mot det andra vinkelbenet. Låt skärningspunkten vara B. På linjen genom A parallell med PB väljs en punkt C så att linjen genom P och C skär sträckan AB i en punkt D. Antag att C valts så att sträckan CD är dubbelt så lång som sträckan PA. Visa att då är vinkeln β mellan PB och PC lika med $\dfrac{\alpha}{3}$.

4. Betrakta i ett rätvinkligt koordinatsystem alla rektanglar $ABCD$ med följande egenskaper:

   a) A ligger i origo, B på positiva x-axeln och D på positiva y-axeln.

   b) Sidan AB är en längdenhet längre än sidan AD. Visa att normalen från C mot diagonalen BD för alla sådana rektanglar går genom en fix punkt.

5. Låt p vara ett reellt tal. Visa att om ekvationen $x^3 + px - 2 = 0$ har en reell rot utanför intervallet $[0, 2]$ så har ekvationen tre reella rötter.

6. En talföljd $a_0, a_1, a_2, \ldots$ är given genom att $a_0 = 0$ och

$$a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1} \qquad (n \geq 0).$$

   Visa att alla tal i följden är heltal.