Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 2 oktober 1991

1. Från en rektangulär pappskiva skär man bort lika stora kvadrater vid hörnen. Om man viker upp bitarna som sticker ut får man en låda utan lock. Pappskivan är sådan att denna låda får samma volym om kvadratens sida är 1 dm eller 2 dm. Beräkna lådans volym om kvadrater med sidan 3 dm skärs ut.

2. Visa att $\sqrt{1+n(n+1)(n+2)(n+3)}$ är ett heltal för varje heltal n.

3. I en skål har Rurik 99 kulor: 33 röda, 33 blå och 33 vita. På bordet finns dessutom extrakulor av alla färger. Han byter kulor i skålen mot kulor på bordet enligt följande regler:

   a) Tre blå kulor och en röd kula i skålen får bytas mot två vita kulor från bordet.

   b) Tre röda och en blå i skålen får bytas mot två vita från bordet.

   c) Fyra vita i skålen får bytas mot en röd och en blå från bordet.

   Är det möjligt att byta kulor enligt dessa regler så att tre kulor, en av varje färg, återstår i skålen?

4. Ett tåg T startar från A mot B kl 08.00. Vid samma tidpunkt startar ett tåg L och ett tåg E från B mot A och E kör dubbelt så fort som L. T möter E tidigast kl 10.30 och möter L tidigast en timme efter mötet med E. T anländer till B kl 13.50. När anländer L till A?

5. Tre punkter A, B och C ligger (i denna ordning) på en rät linje ℓ i planet. De två kvadraterna $ABDE$ och $BCFG$ ligger på var sin sida om ℓ. Visa att den kvadrat vars ena diagonal är AG har ett hörn på EF.

6. I en regelbunden 3982-hörning indelas hörnen i par och de båda punkterna i varje par förbinds med en rät linje. Visa att de 1991 sträckor som erhålls inte alla kan ha olika längd.