Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 16 november 1980

1. Visa att $\lg 2$ är ett irrationellt tal.

2. Talen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 uppskrivs i två godtyckliga ordningsföljder varefter man beräknar skillnaden (utan tecken) mellan varje element i den ena följden och motsvarande element i den andra följden. Visa att dessa skillnader inte alla kan vara olika.

3. Låt n vara ett positivt heltal och låt $T(n)$ vara antalet inkongruenta, icke urartade trianglar, vars sidolängder är positiva heltal $\leq n$. Beräkna $T(n+1) - T(n)$.

4. Funktionerna f och g är kontinuerliga och positiva. Vidare är f växande och g avtagande. Visa att

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)g(1-x)dx.$$

5. Betrakta de "ord" som kan bildas av bokstäverna a och b med hjälp av följande regler:

   (i) ab är ett ord,

   (ii) om X och Y är ord, så är sammansättningen XY ett ord (t.ex. $abab$),

   (iii) om X är ett ord, så är aXb ett ord (t.ex. $aababb$).

   Vi betraktar endast de ord som kan bildas med dessa rergler. Hur många olika sådana ord finna det med 12 bokstäver?

6. Visa att det finns en konstant $c < \sqrt{2}$ sådan att för varje val av fyra punkter i en kvadrat med sida 1 måste alltid två av dessa punkter ha inbördes avstånd $\leq c$.
   (Strängt bevis krävs för den konstant Du väljer. Vid poängbedömningen kan dock hänsyn tas till hur lågt värde Du valt.)