Högstadiets matematiktävling 2012/13
Finaltävling 19 januari 2013
Lösningsförslag

1. **Lösningsförslag:**

   Låt Addes fyra tal vara a, b, c och d. Givet är då

$$\begin{cases} \phantom{a+{}} b+c+d &= 115 \\ a \phantom{{}+b} +c+d &= 153 \\ a+b \phantom{{}+c} +d &= 169 \\ a+b+c \phantom{{}+d} &= 181 \end{cases}$$

   Om vi lägger ihop alla fyra ekvationerna får vi

$$3(a+b+c+d) = 115+153+169+181 = 618$$

   Delar vi med 3 får vi

$$a+b+c+d = 206$$

   Tillsammans med de ursprungliga likheterna ger detta

$$\begin{cases} a = (a+b+c+d)-(b+c+d) = 206-115 = 91 \\ b = (a+b+c+d)-(a+c+d) = 206-153 = 53 \\ c = (a+b+c+d)-(a+b+d) = 206-169 = 37 \\ d = (a+b+c+d)-(a+b+c) = 206-181 = 25 \end{cases}$$

   Svar: Talen är 25, 37, 53 och 91.

2. **Lösningsförslag 1:**

   Låt oss kalla den stora kvadraten för $ABCD$. Då ser vi direkt att de två trianglarna har exakt lika lång bas eftersom $|AB| = |BC|$.

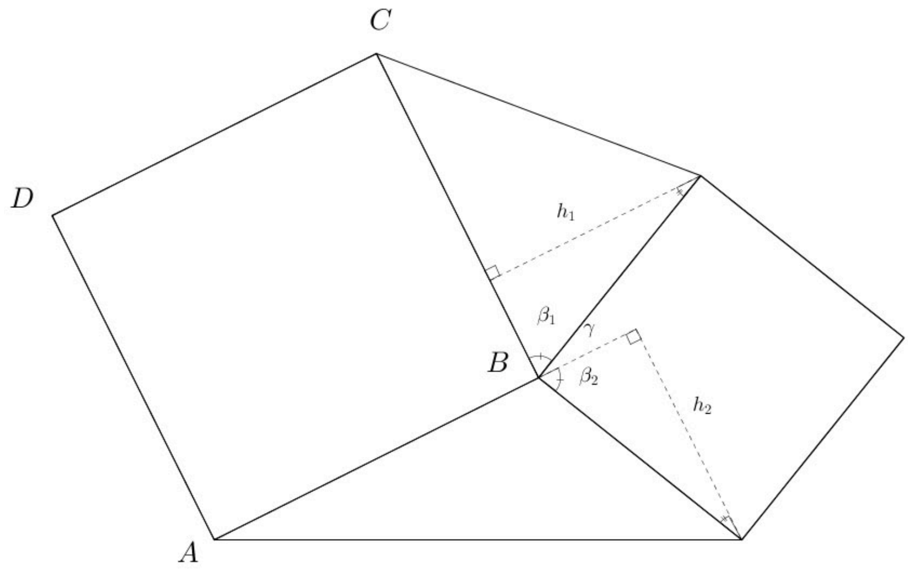
   Dra de två trianglarnas höjder h_1 och h_2 (se figur 1). Eftersom kvadraterna har räta vinklar är $\beta_1 + \gamma = 90°$ och likaså $\beta_2 + \gamma = 90°$. Därmed är $\beta_1 = \beta_2$. Eftersom hypotenusorna i de två rätvinkliga trianglarna som bildas av vardera höjd dessutom är lika, betyder detta att $h_1 = h_2$.

   Trianglarna har lika bas och lika höjd och har därför samma area.

   Lösningsförslag 2:

   Rotera den ena triangeln 90° runt den gemensamma punkten. Då sammanfaller sidorna som tidigare hörde till den ena kvadraten, samtidigt som de sidor som hörde till den andra kvadraten bildar en rät linje.

   Nu ser man genast att de två trianglarna har lika långa baser och gemensam höjd. Trianglarna måste därmed ha samma area.



Figur 1:

3. **Lösningsförslag:**

   Polly äter alltid ett jämnt antal mörka chokkladbitar, eftersom hon äter dem två och två. Från början hade hon ett jämnt antal (32) mörka chokladbitar, vilket betyder att även antalet mörka chokladbitar som finns kvar måste vara jämnt.

   I skålen ligger alltid lika många mörka chokladbitar som mjölkchokladbitar eftersom Polly alltid lägger dit en av varje.

   Om det i slutet funnits 22 chokladbitar i skålen skulle elva av dem varit mörka. Men elva är ett udda tal, så detta är omöjligt.

4. **Lösningsförslag:**

   Talen p, q och r är tre på varandra följande udda tal (udda eftersom det bara finns ett enda jämnt primtal). Bland dessa måste därför (precis) ett vara delbart med tre. Det enda primtal som är delbart med tre är tre självt. Därmed är $p = 3$, $q = 5$ och $r = 7$.

   Sätts dessa tal in i ekvationen får vi

   $$p^3 - r = 3^3 - 7 = 27 - 7 = 20 = 4 \cdot 5 = 4q$$

   vilket skulle visas.

5. **Lösningsförslag:**

   Låt r vara radien hos de små svarta cirklarna. En svart cirkel har då arean πr^2. Den totala svarta arean är därmed $6\pi r^2$.

Radien i en vit cirkel är då $3r$ eftersom det får plats exakt tre svarta cirklar på den vita cirkelns diameter. Detta gör att arean av en vit cirkel är $9\pi r^2$. Den totala vita arean är därmed

$$9\pi r^2 + 9\pi r^2 - 6\pi r^2 = 12\pi r^2$$

Den stora grå cirkelns radie är $6r$ och därmed är dess area $36\pi r^2$.

Den vita arean utgör då

$$\frac{12\pi r^2}{36\pi r^2} = \frac{1}{3}$$

av den stora cirkelns area.

Svar: En tredjedel av den stora cirkeln är vit.

6. **Lösningsförslag:**

Ekvationen kan skrivas som:

$$10 \cdot H + H + 10 \cdot M + M + 10 \cdot T + T = 100 \cdot H + 10 \cdot M + T$$

Omskrivning ger

$$\begin{aligned} 11 \cdot H + 11 \cdot M + 11 \cdot T &= 100 \cdot H + 10 \cdot M + T \\ 11 \cdot H + M + 10 \cdot T &= 100 \cdot H \\ M + 10 \cdot T &= 89 \cdot H \end{aligned}$$

Eftersom $M+10\cdot T$ som mest kan vara 99, måste H vara 1. Därmed är $M+10\cdot T = 89$, vilket ger $T = 8$ och $M = 9$. Då är $H \cdot M \cdot T = 1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$.

Svar: Produkten är 72.