Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 5 oktober 1989

1. Bestäm heltalet t och hundratalssiffran a så att

$$(3(230+t))^2 = 492a04.$$

2. Man bildar alla möjliga sexsiffriga tal som innehåller siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6, var och en precis en gång. Vad bli summan av alla dessa tal?

3. Låt $\triangle ABC$ vara en spetsvinklig triangel och P en punkt på sidan BC. Låt P' vara spegelbilden av punkten P i sidan AB och låt P'' vara spegelbilden av P i sidan AC. Visa att sträckan $P'P''$ är kortast då P är fotpunkten till höjden från A till sidan BC.

4. Visa att om x, y och z är positiva reella tal och $x^y = y^z = z^x$ så är $x = y = z$.

5. Ekvationerna $x^2 + px + q = 0$ och $qx^2 + mqx + 1 = 0$, där m, p och q är reella och $q > 0$, har rötterna

$$x_1,\ x_2 \text{ respektive } x_1,\ \frac{1}{x_2}.$$

   Visa att $mp \geq 4$.

6. Antag att $a_1 < a_2 < \cdots < a_{995}$ är 995 reella tal. Bilda alla summor $a_i + a_j$, $\quad 1 \leq i \leq j \leq 995$. Visa att man får minst 1989 olika tal. Visa också att man får exakt 1989 olika tal om och endast om $a_1, a_2, \cdots, a_{995}$ är en aritmetisk talföljd, dvs om och endast om a_i är medelvärdet av a_{i-1} och a_{i+1} för $2 \leq i \leq 994$.