Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 19 oktober 1967

1. Bestäm alla uppsättningar av n reella tal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ så att

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0$$

för alla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ med egenskapen att $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

2. Visa, att varje heltal $n \geq 0$ på precis ett sätt kan framställas på formen

$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots$$

där $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är heltal som uppfyller $0 \leq a_1 \leq 1$, $0 \leq a_2 \leq 2$, $0 \leq a_3 \leq 3$, o.s.v.

3. På en väg (rundbana) har innerkanten formen av en triangel. Varje punkt på ytterkanten har avståndet 8 m till närmaste punkt på innerkanten. Vägens mittlinje definieras så att var och en av dess punkter har avståndet 4 m till närmaste punkt på innerkanten.

   a) Vilken längd är större, summan av yttre och inre vägkanternas längder eller dubbla mittlinjens längd?

   b) Undersök om ett analogt resultat alltid gäller om innerkanten är en fyrhörning.

4. Sex punkter i planet, av vilka inte tre ligger i rät linje, sammanbinds två och två med räta sträckor (15 st.). Varje sträcka färgas sedan grön eller röd. Därvid bildas trianglar (20 st.) med hörn bland de sex givna punkterna.

   a) Visa, att hur färgningen än utföres så finns alltid minst en triangel vars tre sidor har samma färg.

   b) Visa, att det i själva verket alltid finns minst två trianglar av detta slag.

5. Låt n vara ett givet helt tal > 0 och M en mängd hela tal med följande egenskap: Om x och y är tal vilka som helst i M (x och y får även vara lika) så finns ett tal z i M sådant att $x + y - z$ är delbart med n. Bevisa, att till varje tal u i M kan man finna ett tal v i M sådant att $u + v$ är delbart med n.

6. a) För vilka n finns n orter på jordytan som parvis ligger mer än 1000 mil från varandra? (Jordytan antages sfärisk och ekvatorns längd antages vara 4000 mil. Avståndet räknas längs jordytan.)

   b) Visa, att om i a) avståndet 1000 mil ersätts med ett godtyckligt avstånd d så kan fortfarande endast ändligt många värden på n komma i fråga. Försök också ge en övre begränsning för n. (Begränsningen måste bero av d.)