Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 17 november 1974

1. Sätt
$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, \ldots, a_p = 2^{p-1}.$$
Låt b_n vara summan av produkterna $a_p a_q$ för de p och q som satisfierar
$$p \geq 1, q \geq 1, p + q \leq n \quad (p, q, n \text{ heltal}).$$
Bestäm
$$b_n - b_{n-1}, b_n - 2b_{n-1} \text{ och } b_n.$$

2. Låt a vara ett positivt tal. Visa att
$$1 - \frac{1}{a} \leq n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) \leq a - 1$$
för alla positiva heltal n.

3. Bestäm de två sista siffrorna i
$$9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}.$$

4. Bestäm de polynom $p(x)$ för vilka likheten
$$p(x^2) = (p(x))^2$$
gäller för alla x. Använd resultatatet för att undersöka vilka polynom som uppfyller
$$p(x^2 - 2x) = (p(x-2))^2.$$

5. Sök det minsta positiva talet t sådant att
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2tx_2 \\ x_2 + x_4 = 2tx_3 \\ x_3 + x_5 = 2tx_4 \end{cases}$$
har någn lösning $x_1, \ldots x_5$, där alla $x_i \geq 0$ men inte alla x_i är = 0.

6. För vilka heltal n är det möjligt att indela en given kvadrat i n stycken kvadrater (ej nödvändigtvis lika stora)?