Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 18 november 1973

1. **Metod 1.** $\log_8 4 = \log_8 8 - \log_8 2 = 1 - \log_8 2$. Subtraktion i 8-systemet ger

$$\begin{array}{rr} & 1,0000 \\ - & 0,2525 \\ \hline & 0,5253 \end{array}$$

Eftersom $\log_8 8 = 1$ är exakt blir felet i $\log_8 4$ därvid detsamma som i $\log_8 2$ (men med motsatt tecken) dvs mindre än en halv enhet i sista siffran.

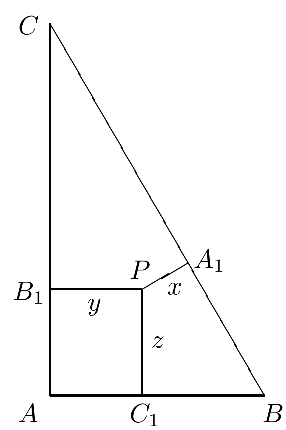
Metod 2. $4 = 8^{2/3}$ ger $\log_8 4 = 2/3$. Division i 8-systemet ger

$$\begin{array}{ccccc|c} 0, & 5 & 2 & & & \\ \hline 2, & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \cline{6-6} 1, & 7 & & & & \\ \cline{1-3} & 1 & 0 & & & \\ & & 6 & & & \\ \cline{3-4} & & 2 & 0 & & \end{array}$$

med periodisk fortsättning: $0,525252\ldots$ Detta ger rätt avrundat $\log_8 4 = 0,5253$.

2. Prövning visar $a_1 = 1$, $a_n < n^2$ för $2 \le n \le 11$, $a_{12} = 144$, $a_{13} > 13^2$, $a_{14} > 14^2$. För att visa att $a_n > n^2$ för alla $n > 12$ konstaterar man att om $a_{n-1} > (n-1)^2$ och $a_n > n^2$ så är $a_{n+1} > (n-1)^2 + n^2 = 2n^2 - 2n + 1$ vilket är $> (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ blott $n^2 > 4n$, vilket är sant då $n > 12$. Härav får man successivt att $a_{15} > 15^2$, $a_{16} > 16^2, \ldots$ (induktion).
Svar: $n = 1$, $n = 12$

3. Kalla längderna av PA_1, PB_1, PC_1 för x, y, z och längden av sidan i triangeln $A_1B_1C_1$ för d. PB_1 och PC_1 är vinkelräta: $d^2 = y^2 + z^2$. PA_1 och PC_1 bildar vinkeln $120°$. Cos-satsen på PA_1C_1 ger $d^2 = x^2 + z^2 + xz$. PA_1 och PB_1 bildar vinkeln $150°$. Cos-satsen på PA_1B_1 ger $d^2 = x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy$. Vi har alltså fått



$$\begin{aligned} d^2 &= y^2 + z^2 \\ d^2 &= x^2 + z^2 + xz \\ d^2 &= x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy \end{aligned}$$

Eliminerar man d^2 och z får man

$$(y^2 - x^2)^2 = x^2(x^2 + \sqrt{3}xy)$$

vilket kan förenklas till

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 2\frac{y}{x} - \sqrt{3} = 0.$$

Man hittar lätt roten $y/x = \sqrt{3}$. Faktorsatsen ger då

$$\left(\frac{y}{x} - \sqrt{3}\right)\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \sqrt{3}\frac{y}{x} + 1\right) = 0.$$

Här har andragradsekvationen inga positiva lösningar. $y = x\sqrt{3}$ ger $z = (y^2 - x^2)/x = 2x$. Förhållandet blir alltså $x : y : z = 1 : \sqrt{3} : 2$.

4. Förenkling av det givna villkoret ger

$$ap^3 - bp^3 + bp + b^2 = 0 \tag{1}$$

De tre första termerna i denna likhet är delbara med p. Alltså måste även b^2 vara delbar med p och därmed även b. Skriv $b = pc$. Insättning i (1) ger efter förenkling

$$ap = cp^2 - c^2 - c.$$

Talen a och b saknar gemensam heltalsfaktor större än 1; detsamma måste då också gälla a och c. Eftersom högra ledet i sista likheten är delbart med c måste därför c vara 1 eller p. Vi undersöker dessa båda möjligheter.

1) $c = 1$, $ap = p^2 - 2$. Då måste 2 ha p som heltalsfaktor vilket endast är möjligt då $p = 2$. Då är $a = 1$, $b = 2$.

2) $c = p$, $a = p^2 - p - 1$, $b = p^2$. Eftersom a här inte är delbar med p, finns denna lösning för varje primtal p som gör a positiv dvs varje primtal.

5. Låt P_1, Q_1 vara en annan lösning. Då är polynomen $(fQ - P)Q_1$ och $(fQ_1 - P_1)Q$ delbara med x^{2n+1}. Detta gäller då även deras skillnad

$$(fQ - P)Q_1 - (fQ_1 - P_1)Q = P_1Q - PQ_1.$$

Men $P_1Q - PQ_1$ är ett polynom av högst graden $2n$. Då det är delbart med x^{2n+1} måste det vara nollpolynomet. Alltså är för alla x

$$P_1(x)Q(x) - P(x)Q_1(x) = 0$$

vilket visar att $P_1(x)/Q_1(x) = P(x)/Q(x)$.

6. Genom 1) och 2) bestäms $f(n)$ entydigt för n positivt heltal. Sätter vi in $x = n$ och $x = n + \frac{1}{2}$ i 3) får vi uppskattningar uppåt och nedåt för $f\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Eftersom

$$f\left(n + \frac{1}{2}\right) = f\left(n - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{n - \frac{1}{2}}$$

ger $x = n$ i 3)

$$f(n) < f\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{n - \frac{1}{2}}.$$

Sätter vi $x = n + \frac{1}{2}$ i 3) får vi

$$f\left(n + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(f(n) + f(n+1)\right) = f(n) + \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Vi har alltså fått fram

$$f(n) + \frac{1}{2}\sqrt{n - \frac{1}{2}} < f\left(n + \frac{1}{2}\right) < f(n) + \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Härigenom blir $f(n + \frac{1}{2})$ bestämd till ett intervall av längden $\frac{1}{2}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n - 1/2}\right)$. På grund av 2) är då även $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bestämd till ett intervall av denna längd. Nu är

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n - 1/2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1/2}{\sqrt{n} - \sqrt{n - 1/2}}.$$

Som framgår av högra ledet går detta mot 0 då $n \to \infty$. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ måste således på grund av villkoren ligga i en följd av intervall vars längder går mot 0. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ är därför entydigt bestämd av de givna villkoren.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner