

HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 2019/20

FINALTÄVLING 18 JANUARI 2020

Skrivtid: $9^{00} - 12^{00}$

Motivera alla lösningar väl. Lämna in allt du kommer fram till, även dellösningar.

OBS! Lös varje uppgift på ett separat blad! Skriv läsligt!

Varje lösning ger 0 – 7 poäng.

Lycka till!

1. Går det att skriva talen 1 till 10 på en rad så att i varje par av tal som står bredvid varandra så är ett av talen jämnt delbart med det andra?
2. Tre positiva heltal h , m och t kallas en *Pythagoreisk trippel* om följande gäller:

$$h^2 + m^2 = t^2$$

Finns det någon Pythagoreisk trippel som innehåller både 1729 och 2020?

3. Boris och Arne skickar meddelanden i form av heltal till varandra. De försöker undvika att någon som tjuvlyssnar ska kunna avslöja deras meddelanden, så de har i förväg kommit överens om två *positiva* heltal, a och b , där $a > b$. När Boris vill skicka talet n räknar han först ut $m = a \cdot n + b$ och skickar istället m till Arne. Arne kan då räkna ut n , eftersom även han känner till a och b .

Alan, som varken känner till a eller b , tjuvlyssnar på kommunikationen och ser talen 1357, 1427, 1399 och 1462. Vilka var de fyra tal Boris ursprungligen ville skicka?

4. En rektangel $ABCD$ har sidorna $|AB| = 5$ cm och $|BC| = 9$ cm. Punkterna P , Q , R , S ska placeras inuti rektangeln på så sätt att:
 - Triangeln APB får area 7.5 cm².
 - Triangeln BQC får area 4.5 cm².
 - Triangeln CRD får area 10 cm².
 - Fyrhörningen $PQRS$ blir en kvadrat.

a) Vilken area får triangeln DSA ?

b) Vilken är den minsta möjliga arean som kvadraten $PQRS$ kan få?

Var god vänd!

5. Trollkarlen Oblivatus har bjudit in fem vänner på middag. Som fördrink bjuder han på sin specialitet: En saft som får alla som dricker den att glömma sitt namn. Själv dricker han inte av den, men alla hans gäster glömmar bort vad de heter.

Förvirrade tittar hans gäster på placeringslistan och väljer ett namn på måfå därifrån (även Oblivatus namn är ett giltigt val). När de sedan ska sätta sig uppstår ett gräl om två personer försöker sätta sig på samma stol.

Hur stor är sannolikheten att placeringen går smärtfritt, alltså att inga gräl uppstår?

6. Låt $\lfloor x \rfloor$ beteckna heltalsdelen av det reella talet x , det vill säga det största heltalet som är mindre än eller lika med x . Till exempel är $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor 2020 \rfloor = 2020$ och $\lfloor -2.72 \rfloor = -3$.

Finn alla lösningar till ekvationen

$$2\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 5x \rfloor + \lfloor 101x \rfloor = 2020$$

Sponsorer

