

Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 13 november 1983

1. De positiva heltalen summeras i grupper enligt följande: 1, 2+3, 4+5+6, 7+8+9+10, osv. Beräkna summan i den n :te gruppen.

2. Visa att

$$\cos x^2 + \cos y^2 - \cos xy < 3$$

för alla reella tal x och y .

3. Visa att om det finns n positiva heltal x_1, x_2, \dots, x_n som satisfierar de n ekvationerna

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} &= 1, \quad k = 2, 3, \dots, n-1 \\ -x_{n-1} + 2x_n &= 1 \end{cases}$$

så måste n vara jämnt.

4. Två cirklar med olika radier r och R har samma medelpunkt. En rektangel har två närliggande hörn på den ena cirkeln och de andra två hörnen på den andra cirkeln. Bestäm sidolängderna i det fall då rektangelns area är så stor om möjligt.
5. Man vill täcka en enhetskvadrat med tre lika stora cirkelskivor.
- a) Visa att detta är möjligt med cirkelskivor vars radier är mindre än kvadratens halva diagonal.
- b) Vilken är den minsta radien för vilket det är möjligt?
6. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(x+y)^2 &= 9 \\ x(y^3 - x^3) &= 7 \end{cases}$$

endast har lösningen $x = 1, y = 2$.