Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 18 november 1979

1. Antag att ekvationssystemet har en lösning. Addera samtliga ekvationer ledvis. Man får
$$\frac{n(n+1)}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1. \qquad (1)$$
Subtrahera första ekvationen i ekvationssystemet ledvis från den andra ekvationen:
$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}-(n-1)x_n=-1.$$
Med (1) ger detta $x_n=2/n$. Likaså ger andra och tredje ekvationerna tillsammans med (1) att $x_{n-1}=2/n$. Upprepa. Man får
$$x_n=x_{n-1}=\cdots=x_2=\frac{2}{n}$$
varefter (1) ger $x_1=-1+2/n$.
Detta ger den enda möjliga lösningen. För att visa att det är en lösning räcker det att verifiera första ekvationen i ekvationssystemet (från (1) och den första ekvationen erhåller man genom räkningar omvända dem ovan givna att andra ekvationen är uppfylld osv). Insättning i första ekvationens vänstra led ger
$$-1+\frac{2}{n}+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\frac{2}{n}=n.$$
(Denna prövning är onödig om man refererar till en sats som säger att om räkning med ett ekvationssystem med lika många ekvationer som obekanta ger ett entydigt resultat, så har ekvationen en lösning.)

2. Låt $\sqrt{x-3}=a/b$ med a, b positiva heltal. Villkoret $3<x<4$ kan då skrivas $a<b$.
Vi har då
$$x+1=\frac{a^2+4b^2}{b^2}.$$
För att även $\sqrt{x+1}$ skall vara rationellt måste a^2+4b^2 vara ett kvadrattal, säg $a^2+4b^2=c^2$. Detta kan skrivas
$$a^2=(c-2b)(c+2b).$$
För att få a litet jämfört med b pröva med $c-2b=1$. Då blir $c+2b=a^2$ och alltså $4b=a^2-1$. Talet a måste då vara udda. Insättning av $a=3,5,7,\dots$ ger $b=2,6,12\dots$, varvid alla utom den första har $a<b$.
Svar: Exempelvis $3\frac{25}{36}$ eller $3\frac{41}{144}$
Anmärkning. Känner man till $5^2+12^2=13^2$ kan man direkt sätta $a=5$, $b=6$. Däremot skulle $3^2+4^2=5^2$ ge $a=3, b=2$ och inte $a<b$.

3. Sätt $a_n=x^n+x^{-n}$. Då blir $a_na_m=a_{n+m}+a_{n-m}$ för $m\le n$ och $a_1=a$, $a_0=2$. För att få a_{13} kan vi exempelvis göra följande kalkyler:
$$\begin{array}{ll} a_{13}=a_8a_5-a_3 & a_8=a_5a_3-a_2 \\ a_5=a_3a_2-a & a_3=a_2a-a \end{array}$$
och man får successivt
$$\begin{aligned} a_2 &= a^2-2 \\ a_3 &= a^3-3a \\ a_5 &= a^5-5a^3+5a \\ a_8 &= a^8-8a^6+20a^4-16a^2+2 \\ a_{13} &= a^{13}-13a^{11}+65a^9-156a^7+182a^5-91a^3+13a \end{aligned}$$

4. Att $\int_0^\pi f(x)dx = 0$ visar att f inte kan ha konstant tecken i det öppna intervallet. Då f är kontinuerlig måste den därför ha ett nollställe i intervallet, säg i punkten a. Om f saknar ytterligare nollställe i intervallet är antingen $f(x) < 0$ för $0 < x < a$, $f(x) > 0$ för $a < x < \pi$ eller tvärtom. Då har $f(x)(\cos x - \cos a)$ konstant tecken i intervallet (utom för $x = a$), vilket strider mot

$$\int_0^\pi f(x)(\cos x - \cos a)dx = \int_0^\pi f(x)\cos x dx - \cos a \int_0^\pi f(x)dx = 0.$$

5. Låt $p(x) = ax^2 + bx + c$. $p_{\min} = -\dfrac{b^2}{4a} + c$ inträffar för $x = b/2a$ (observera att enligt förutsättningen är $a > 0$). Ekvationen $p(x) = 0$ har då två skilda lösningar mellan 0 och 1 om $0 < b/2a < 1$, $-b^2/4a + c < 0$, $p(0) = c > 0$, $p(1) = a - b + c > 0$. $0 < b/2a$ ger att även b är positiv. Alltså: a, b och c är alla positiva. Villkoren kan då skrivas

$$4ac < b^2, \qquad b < -2a, \qquad b < a + c.$$

Från $4ac < b^2 < 4a^2$ får vi $c < a$. Alla villkoren kan därför sammanfattas i

$$0 < c < a, \qquad 0 < b, \qquad 4ac < b^2 < (a+c)^2. \tag{1}$$

Talen a, b och c är heltal. $a + c > b$ betyder då $a + c \geq b + 1$. Därför är

$$(a+c)^2 - b^2 \geq (b+1)^2 - b^2 = 2b + 1.$$

Då är även

$$(a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 2b + 1.$$

Man får nu successivt utgående från $c \geq 1$, $a \geq 2$:

$$\begin{array}{lllll} 4ac \geq 8, & b \geq 3, & 2b+1 \geq 7, & a - c \geq 3, & a \geq 4 \\ 4ac \geq 16, & b \geq 5, & 2b+1 \geq 11, & a - c \geq 4, & a \geq 5 \\ 4ac \geq 20, & b \geq 5 & & & \end{array}$$

Man finner att $a = 5$, $b = 5$, $c = 1$ satisfierar (1).
Svar: $a = 5$.

6. Drag mittpunktsnormalen L till sträckan AB. Att $AT > BT$ betyder att T ligger på B-sidan om linjen L. Detta är likvärdigt med att C ligger på B-sidan om L, vilket kan anges med $AC > BC$. På samma sätt visas att $BT > CT$ är likvärdig med att $AB > AC$.
Låt $\triangle ABC_1$ vara den triangel som har samma bas AB och lika stor höjd som $\triangle ABC$ men med C_1 på L. Låt T_1 vara dess tyngdpunkt. Då ligger T_1 lika långt från linjen AB som T (avståndet är 1/3 av trianglarnas höjd). Härav: $AT > AT_1 > \dfrac{1}{2}AB$, $k_1 = 1/2$. (Välj trianglar där C ligger nära mittpunkten på AB.)
Eftersom $AB > AC > AC_1 = BC_1$ i så är höjden i $\triangle ABC_1$ mindre än $\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$.

$$BT < BT_1 < \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}AB = \frac{1}{\sqrt{3}}AB.$$

Detta ger $k_4 = 1/\sqrt{3}$. (Välj trianglar nära liksidiga trianglar.)
Vrider man $\triangle ABC$ ett halvt varv kring mittpunkten på sidan BC erhåller man en ny triangel som tillsammans med $\triangle ABC$ ger en parallellogram. Diagonalen från A har längden $3AT$. Härav: $3AT < AB + AC < 2AB$. Detta ger $k_2 = 2/3$. (Välj trianglar i vilka BC är liten.)
Genomför motsvarande konstruktion över sidan AC. Då endast den vinkel i en triangel som står mot den största sidan kan vara trubbig eller rät, måste vinkel ABC vara spetsig. Härav: $3BT > AB$. Detta ger $k_3 = 1/3$. (Välj trianglar i vilka sidan BC är liten.)
Att de erhållna konstanterna är de bästa möjliga inses från de ovan angivna valen av trianglar.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969-1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner