Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 18 januari 1967 [1]

1. a) Observera först att om man tippar t.ex. en rad med bara ettor, en med bara kryss och en med bara tvåor så måste en av dessa rader innehålla minst 4 rätt tippade matcher ty annars vore antalet rätt i varje rad högst lika med 3, d.v.s. totalt högst 9 st. rätt vilket är orimligt då totalsumman måste vara lika med antalet matcher, d.v.s. 12. Observera sedan att med färre än tre rader kan man aldrig garantera bättre än 0 rätt. På ingen av matcherna har man då tippat mer än två olika möjligheter och om den tredje skulle inträffa i varje match har man alltså tippat alla matcherna fel.

Svar: 3 rader.

b) Troligen finns inget system med färre än sex rader som garanterar fem rätt, men något bevis för detta är inte bekant för utgivaren. Vi visar i figuren ett system med sex rader som garanterar fem rätt (skrivet som 3 st. 2-raderssystern).

1	x	2
1	x	
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		
1		

1	x	2
	x	2
	x	
	x	
	x	
	x	
	x	
	x	
	x	
	x	
	x	
	x	
	x	

1	x	2
1		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2
		2

Bevis: Två fall.

I. Antag att rätt rad innehåller 5 eller fler lika resultat. Då ger de tre raderna med enbart lika resultat minst 5 rätt.

II. Antag att rätt rad ej innehåller 5 lika resultat. Den består då av 4 ettor, 4 kryss och 4 tvåor. Då har två av de 3 systemen 4 rätt bland de 11 ogarderade matcherna. Eftersom dessa två system tillsammans ger en helgardering av den tolfte matchen måste resultatet bli 5 rätt.

2. Uppenbarligen gäller $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} > \sqrt{n-1}$. Addera $\sqrt{n}$ och invertera:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

Förläng de yttersta leden med respektive nämnares konjugatkvantitet. Då erhålls den givna olikheten. Kalla den givna summan s. Av olikheten följer att

$$2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+2(\sqrt{10001}-\sqrt{10000}) < s < 1+2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+\cdots+2(\sqrt{10000}-\sqrt{9999}).$$

Reduktion ger $2(\sqrt{10001}-1) < s < 1+2(\sqrt{10000}-1)$ varav följer $198 < s < 199$.
Svar: 198.

[1]På grund av skolkonflikten hösten 1966 uppsköts tävlingen till vårterminen 1967

3. De 1000 prenumeranterna kan tydligen indelas i åtta olika klasser med hänsyn till egenskaperna kön, civilstånd och yrke eftersom för var och en av egenskaperna finns två möjligheter': man eller kvinna, gift eller ogift samt studerande eller icke studerande. Inför beteckningar för de obekanta antalen prenumeranter i klasserna. De i texten givna data ger åtta ekvationer för dessa åtta obekanta. Systemet är lätt att lösa. Man erhåller emellertid att antalet ogifta kvinnor som ej studerar skulle vara negativt (-57), vilket är orimligt.

4. På grund av villkoret II i texten finns det två linjer i L sådana att den ena går genom A och den andra genom B samt bägge skär CD.

   Fall a: Linjerna skär varandra i rektangeln $CDEF$, säg på avståndet h från EF ($0 \leq h \leq 1$). På grund av I och III i texten måste M innehålla de två trianglar som begränsas av de två linjerna och en av linjerna CD eller EF. Dessa trianglars dimensioner beräknas lätt genom likformighet. Man finner att deras ytor är $\dfrac{h^2}{1+h}$ och $\dfrac{(1-h)^2}{1+h}$. Således är ytan av M minst lika med summan av triangelytorna d.v.s. $\geq \dfrac{1-2h+2h^2}{1+h}$. Denna funktion av h antar sitt minimum för $h = \frac{1}{2}\sqrt{10}-1$ då den är $= 2\sqrt{10}-6 \approx 0,32$.

   Fall b: Linjerna skär ej varandra i $CDEF$. De begränsar då tillsammans med CD och EF en parallelltrapets vars yta är $\geq 1/2$ och som måste vara innehållen i M.

   Svar: $2\sqrt{10}-6 \approx 0,32$ ytenheter.

5. Villkoret a ger för alla x och h:

$$-f(-h) \leq f(x+h) - f(x) \leq f(h).$$

   Om $h > 0$ följer:

$$\frac{f(-h)}{-h} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(h)}{h}$$

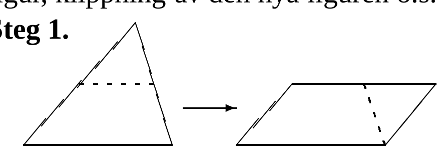
   och om $h < 0$ följer detsamma men med omkastade olikheter. Låt nu $h \to +0$. Av b följer att de två yttre leden bägge går mot 1 varför

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

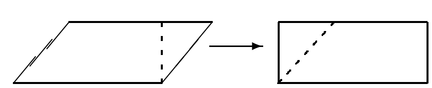
   existerar och är $= 1$. På samma sätt visas att $\lim\limits_{h \to -0} = 1$. Således existerar $f'(x)$ för alla x och är $= 1$. Härav följer att $f(x) = x + c$ där c är en konstant som måste vara $= 0$ på grund av b.
   Svar: $f(x) = x$.

6. Problemet är löst om man kan ange en metod som arbetar i flera steg: klippning, hopsättning till ny figur, klippning av den nya figuren o.s.v. En sådan metod är följande:

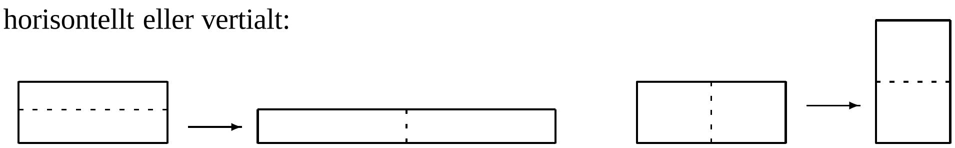
   Steg 1.



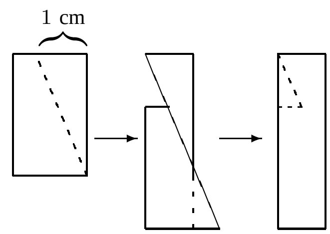
   Steg 2.



   Steg 3. Ordna så att rektangelns bas kommer att ligga mellan 1 och 2 genom successiva halveringar antingen horisontellt eller vertialt:



Steg 4.



Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet