Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 6 oktober 1988

1. Funktionen $f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8}$ är konstant på det slutna intervallet $5 \leq x \leq 10$. Visa detta.

2. Ekvationen
$$(2x)^{\lg 2} = (3x)^{\lg 3},\ x > 0$$
har en rationell rot. Bestäm denna (på formen $\dfrac{p}{q}$ där p och q är heltal).

3. På ett schackbräde kallas två rutor närliggande om de har en kant eller ett hörn gemensamt. De 64 rutorna på ett schackbräde numreras i godtycklig ordning med talen från 1 till 64. Visa att det alltid finns två närliggande rutor vilkas nummer har en positiv differens som är högst 16.

4. På en bil antas däckslitaget vara proportionellt mot den körda sträckan. Vidare varar fram- däcken a km och bakdäcken b km, där $a < b$. Genom att efter lämpligt körd sträcka skifta plats på däcken och sätta bakdäcken på framhjulen och tvärtom kan man öka den sträcka som kan köras utan att något av däcken behöver ersättas. Vilken är den längsta sträcka man på detta sätt kan köra bilen utan att skaffa nya däck?

5. På periferin av en cirkel ligger punkterna P, Q och R så att triangeln PQR är liksidig. S är en godtycklig punkt på cirkelperiferin. Betrakta längderna av sträckorna PS, RS och QS. Visa att en av dem är summan av de två övriga.

6. Visa att man för varje heltal n kan finna positiva heltal x och y sådana att $\sqrt{x^2 + nxy + y^2}$ är ett heltal.