Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 7 oktober 1998

1. Låt antalet besökare vara $A = 100a + 10b + c$, där a, b och c är heltal med $a \geq 0$, $0 \leq b, c \leq 9$. Biljettintäkterna skulle normalt varit $40A = 4000a + 400b + 40c$ kr. Omkostnaderna var denna gång $40(10a + b) + 1000a$ kr. Detta ger ekvationen $4000a + 400b + 40c - 1400a - 40b = 8400$, eller $65a + 9b + c = 210$. Av olikheterna $65a \leq 65a + 9b + c \leq 65a + 90$ följer $a \leq \frac{210}{65} < 4$ och $a \geq \frac{120}{65} > 1$. Valet $a = 2$ ger ekvationen $9b + c = 80$ med lösning $b = 8$ och $c = 8$. Valet $a = 3$ ger ekvationen $9b + c = 15$, med lösning $b = 1$, $c = 6$. Det finns alltså två möjligheter, 288 eller 316.

   Svar: 288 eller 316

2. Eftersom 3^n är udda och aldrig delbart med 5 kan man, för $n \geq 3$, skriva $3^n = 10b_n + a_n$, där $a_n = 1, 3, 7$ eller 9 och där b_n är ett positivt heltal. Då gäller att $10b_{n+1} + a_{n+1} = 3 \cdot 3^n = 10 \cdot 3b_n + 3a_n$. Om $a_n = 1$ eller 3 är då $a_{n+1} = 3a_n$ och $b_{n+1} = 3b_n$. Om $a_n = 7$ eller 9 så är $a_{n+1} = 3a_n - 20$ och $b_{n+1} = 3b_n + 2$. Om då b_n är ett jämnt tal är också b_{n+1}, i båda fallen, ett jämnt tal. Eftersom $b_3 = 2$ är jämnt följer induktivt att alla b_n är jämna, vilket innebär att den näst sista siffran alltid är jämn.

   Alternativt kan man utnyttja att

   $$\frac{3^{n+4}}{10} - \frac{3^n}{10} = 3^n \frac{3^4 - 1}{10} = 8 \cdot 3^n$$

   som visar dels att var fjärde potens har samma slutsiffra, dels att de näst sista sifforna i 3^{n+4} respektive 3^n båda är udda eller båda jämna. Eftersom näst sista siffran i de fyra första potenserna $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$ och $3^6 = 729$ alla är jämna följer induktivt att näst sista siffran alltid är jämn.

   Man kan också visa att funktionen $f(n) = 3^n - 100 \cdot \left[\frac{3^n}{100}\right]$, där $n \geq 0$, har perioden 20, och bestämma funktionsvärdet (= de sista två siffrorna i 3^n) för $n = 0, 1, 2, \ldots, 20$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	01	03	09	27	81	43	29	87	61	83	49

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	47	41	23	69	07	21	63	89	67	01

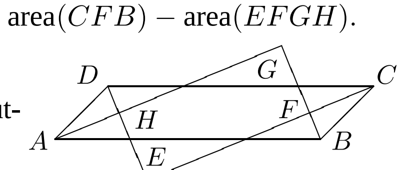
3. Vägen genom rännan kommer för varje val av väg ha längden 10 cm. Om plåten trycks ihop så att rännans övre kanter sammanfaller gäller det att bestämma den kortaste vägen mellan två motstående hörn i en rektangel med sidorna 40 och 30 cm. Den kortaste vägen sammanfaller då med diagonalen som i detta fall är $\sqrt{40^2 + 30^2} = 50$ cm. Den totala längden blir alltså 60 cm.

   Svar: 60 cm

4. Vinklarna vid hörnen A och B är supplementvinklar, vilket innebär att triangeln ABG är en rätvinklig triangel och vinkeln vid hörnet G i fyrhörningen $EFGH$ är rät. Dessutom är trianglarna ABG, CED, AHD och CFB likvinkliga och därmed likformiga. Detta innebär att $EFGH$ är en rektangel. Antag att $|AB| = |DC| = x$ cm, att $|AH| = |CF| = 5a$ cm och $|DH| = |BF| = 5b$ cm. Då är $|AG| = |CE| = xa$ cm och $|DE| = |BG| = xb$ cm. Nu är

   $$\text{area}(ABCD) = \text{area}(ABG) + \text{area}(CDE) + \text{area}(AHD) + \text{area}(CFB) - \text{area}(EFGH).$$

   Observera att detta gäller även då två av hörnen i $EFGH$ ligger utanför parallellogrammen $ABCD$.

Beräkning av de olika areorna ger nu $60(x-5)^2ab = x^2ab+5^2ab-(x-5)^2ab$ eller $6x^2-61x+150 = 0$ med lösningarna $x = 6$, $x = 4\frac{1}{6} < 5$.

Svar: 6 cm

5. Omskrivning och kvadrering ger $x+3-2\sqrt{3x} = (\sqrt{x}-\sqrt{3})^2 = 4y$, eller $x+3-4y = 2\sqrt{3x}$, som visar att $\sqrt{3x}$ är rationellt. Heltalet x måste då innehålla faktorn 3 och kan alltså skrivas $x = 3t^2$ där t är ett heltal. Insättning ger ekvationen $3t^2+3-4y = 2\sqrt{9t^2} = 6|t|$ eller $3(|t|-1)^2 = 4y$, som visar att 2 måste vara en faktor i $|t|-1$. Ansatsen $|t| = 1+2k$, där heltalet k inte kan vara negativt, ger då $x = 3(1+2k)^2$, $y = 3k^2$, $k \geq 0$. Slutligen ger villkoret $y > 0$ att $k \geq 1$.

   Kontroll: $\sqrt{x}-2\sqrt{y} = \sqrt{3(1+2k)^2}-2\sqrt{3k^2} = (|1+2k|-2|k|)\sqrt{3} = \sqrt{3}$ för $k \geq 1$.

   Svar: $x = 3(1+2k)^2$, $y = 3k^2$, $k = 1, 2, \ldots$

6. Låt $a_n(k)$ vara elementet i rad n och kolumn k. Konstruktionsdefinitionen ger då rekursionsformeln $a_n(k) = 3a_{n-1}(k+1) - a_{n-1}(k)$ för $n, k \geq 1$ och startvärdena $a_0(k) = k$. Av tabellen att döma tycks elementen i rad n bilda en aritmetisk följd. Det gäller definitionsmässigt för första raden där differensen är $d_0 = 1$. Antag nu att $n \geq 1$ och att talen i rad $n-1$ bildar en aritmetisk följd med differens d_{n-1}. Då gäller

$$\begin{aligned} a_n(k+1) - a_n(k) &= 3\left(a_{n-1}(k+2) - a_{n-1}(k+1)\right) - \left(a_{n-1}(k+1) - a_{n-1}(k)\right) \\ &= 3d_{n-1} - d_{n-1} = 2d_{n-1}. \end{aligned}$$

   Alltså bildar talen i rad n också en aritmetisk följd med differensen $d_n = 2d_{n-1}$. Induktivt följer då att talen i rad n bildar en aritmetisk följd med differens $d_n = 2^n$. Detta innebär att

$$a_n(k) = a_n(1) + (k-1)2^n = a_n + (k-1)2^n$$

   för $n = 0, 1, \ldots$ och $k = 1, 2, \ldots$. Insatt i rekursionsformeln ger detta

$$a_n + (k-1)2^n = 3(a_{n-1} + k2^{n-1}) - (a_{n-1} + (k-1)2^{n-1}),$$

   för $n, k = 1, 2, \ldots$, eller förenklat $a_n - 2^n = 2(a_{n-1} - 2^{n-1}) + 3 \cdot 2^{n-1}$ för $n = 1, \ldots$. Sätt nu $a_n - 2^n = 2^{n-1}b_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Då gäller $2^{n-1}b_n = 2^{n-1}b_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}$, eller $b_n - b_{n-1} = 3$, för $n = 1, 2, \ldots$, som visar att följden $b_0, b_1, \ldots$ är aritmetisk med differensen 3. Detta ger, då $b_0 = 0$, $b_n = b_0 + 3n = 3n$ och $a_n = 2^n + 3n2^{n-1} = 2^{n-1}(3n+2)$, för $n = 0, 1, \ldots$. Nu är $2^{-n}a_n = \frac{3n+2}{2}$ ett heltal om och endast om n är jämnt.

   Svar: a_n är delbart med 2^n om och endast om n är jämnt