Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 8 oktober 1997

1. Antag att det tar p timmar att måla planket utan förseningar och att Östen målar x m per timme. Då har planket längden $l = 4p + 5p + xp$ m. På grund av att Östen kommer försent arbetar Ylva och Åsa $p + 2$ timmar och Östen $p - 3$ timmar. Alltså är $4(p + 2) + 5(p + 2) + x(p - 3) = l = 9p + xp$, dvs. $x = 6$ och $l = 15p$. Antag att det tar $p + y$ timmar att måla planket om Ylva kommer 5 timmar försent. Då är $4(p + y - 5) + 5(p + y) + 6(p + y) = l = 15p$, dvs. $15y - 20 = 0$.

   Svar: Östen målar 6 m per timme. Arbetet fördrjs 1 timme och 20 minuter

2. Eftersom 1997 är udda kan vi exempelvis anta att $x = 2a + 1$ är udda och $y = 2b$ är jämn. Insättning i ekvationen ger $4a^2 + 4a + 4b^2 = 1996 = 4 \cdot 499$ eller $a(a+1) + b^2 = 499$. Första termen $a(a+1)$ är delbar med 2 och därför måste $b = 2c + 1$ vara udda. Insättning ger nu $a(a+1) + 4c(c+1) = 498 = 2 \cdot 249$ eller $\dfrac{a(a+1)}{2} + 2c(c+1) = 249 = 4 \cdot 62 + 1$. Om a eller $a + 1$ är delbart med 4 så är vänstra ledet delbart med 2 medan högerledet ger resten 1 vid division med 2. Alltså måste a vara av formen $a = 1 + 4d$ eller $a = 2 + 4d$.

   $a = 1 + 4d$

   Insättning ger $8d^2 + 6d + 2c(c+1) = 248$ eller $4d^2 + 3d + c(c+1) = 124$. Eftersom termerna $4d^2$, $c(c+1)$ och 124 är jämna måste d vara jämn. Dessutom gäller $4d^2 \leq 124$ som ger möjligheterna $d = 0, 2$ och 4.
   Om $d = 0$ är $c(c + 1) = 124$, som saknar positiv heltalslösning. För att inse detta kan man konstatera att $c(c + 1)$ växer för positiva c och att $10 \cdot 11 = 110$ och $11 \cdot 12 = 132$.
   Analogt ger $d = 2$, $c(c+1) = 102$, som saknar positiv heltalslösning ($9 \cdot 10 = 90$, $10 \cdot 11 = 110$).
   Inte heller fallet $d = 4$ leder till någon lösning, ty $c(c + 1) = 48$ saknar också positiv heltalslösning ($6 \cdot 7 = 42$, $7 \cdot 8 = 56$).

   $a = 2 + 4d$

   Insättning och division med 2 ger $4d^2 + 5d + c(c + 1) = 123$. Här måste d vara udda och $4d^2 + 5d \leq 123$. Detta ger möjligheterna $d = 1, 3$
   För $d = 1$ reduceras ekvationen till $c(c + 1) = 114$ som saknar positiv heltalslösning ($10 \cdot 11 = 110$, $11 \cdot 12 = 132$).
   För $d = 3$ får man $c(c + 1) = 72$ med lösningen $c = 8$, som ger $y = 2b = 4c + 2 = 34$ och $x = 8d + 5 = 29$. Kontroll visar att $29^2 + 34^2 = 841 + 1156 = 1997$.

   Svar: De enda lösningarna är $x = 29$, $y = 34$ och $x = 34$, $y = 29$

3. Enligt definitionen av heltalsdelen gäller

$$\left[\frac{1}{r}\right] \leq \frac{1}{r} < \left[\frac{1}{r}\right] + 1$$

varav

$$\left(\left[\frac{1}{r}\right] - \frac{1}{r}\right)\left(\left[\frac{1}{r}\right] + 1 - \frac{1}{r}\right) \leq 0$$

med likhet då och endast då $\left[\dfrac{1}{r}\right] = \dfrac{1}{r}$. Multiplikation med $r^2 > 0$ ger den ekvivalenta olikheten

$$\left(\left[\frac{1}{r}\right] \cdot r - 1\right)\left(\left[\frac{1}{r}\right] \cdot r + r - 1\right) \leq 0$$

eller

$$\left(\left[\frac{1}{r}\right] \cdot r - 1\right)^2 + \left(\left[\frac{1}{r}\right] \cdot r - 1\right) r \leq 0.$$

Denna olikhet är ekvivalent med den givna.

Här är en alternativ lösning.
För varje positivt, reellt tal x med decimaldel d gäller $x = [x] + d$ med $0 \leq d < 1$. Härav följer att $1 > d \geq d^2$, med likhet om och endast om $d = 0$, och $x = [x] + d \geq [x] + d^2 = [x] + (x - [x])^2$, med likhet om och endast om x är ett heltal. Med $x = \dfrac{1}{r}$ får man

$$\frac{1}{r} \geq \left[\frac{1}{r}\right] + \left(\frac{1}{r} - \left[\frac{1}{r}\right]\right)^2.$$

Multiplikation med $r^2 > 0$ ger den sökta olikheten.

Svar: Likhet gäller om och endast om $r = \dfrac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$

4. Då termerna i summan $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1$ antingen är 1 eller -1 och summan är lika med 0 är antalet positiva och negativa termer lika. Detta ger att n är jämnt. Nu är produkten av de n termerna

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 1^{\frac{n}{2}} = (a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = a_1^2a_2^2\cdots a_{n-1}^2a_n^2 = 1,$$

som visar att heltalet $\dfrac{n}{2}$ måste vara jämnt. Alltså är n delbart med 4.

5. Låt oss först bestämma punkterna $(a, f(a))$ och $(b, g(b))$ så att normalen till grafen av f i punkten $(a, f(a))$ sammanfaller med normalen till grafen av g i punkten $(b, g(b))$. I punkten $(0, 0)$, där derivatan f' är lika med noll, har normalen till grafen av f ekvationen $x = 0$. I punkten $(-4, 1)$, där derivatan g' är lika med noll, har normalen till grafen av g ekvationen $x = -4$. Dessa sammanfaller inte. Om $f'(a) \neq 0$ har normalen till grafen av f i punkten $(a, f(a))$ ekvationen

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \quad \text{eller} \quad y = -\frac{x}{f'(a)} + \frac{a}{f'(a)} + f(a).$$

Analogt har normalen till grafen av g i punkten $(b, g(b))$, med $g'(b) \neq 0$, ekvationen

$$y = -\frac{x}{g'(b)} + \frac{b}{g'(b)} + g(b).$$

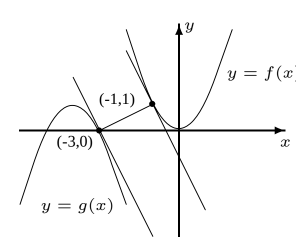
Dessa normaler sammanfaller om och endast om $f'(a) = g'(b)$ och $\dfrac{a}{f'(a)} + f(a) = \dfrac{b}{g'(b)} + g(b)$.
Beräkning och insättning av funktionsvärdena i dessa likheter ger systemet

$$\begin{cases} 2a = -8 - 2b \\ \dfrac{a}{2a} + a^2 = \dfrac{b}{-8-2b} - 15 - 8b - b^2 \end{cases}.$$

Insättning av $a = -b - 4$ i systemets andra ekvation ger efter förenkling systemet

$$\begin{cases} a = -b - 4 \\ (b+4)^3 = 1 \end{cases}$$

som har den reella lösningen $a = -1$, $b = -3$.
Eftersom funktionen f är konvex ligger grafen av f över sin tangent, $y = -2x - 1$, i punkten $(-1, 1)$. Istället för konvexitet kan man kvadratkomplettera $f(x) - (-2x - 1) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$ för att visa att grafen av f ligger över sin tangent. Konkaviteten hos funktionen g ger analogt att grafen av g ligger under sin tangent, $y = -2x - 6$, i punkten $(-3, 0)$. Alternativ kvadratkomplettering ger i detta fall $(-2x - 6) - g(x) = -2x - 6 + 15 + 8x + x^2 = (x + 3)^2 \geq 0$. Avståndet mellan en punkt på den ena grafen och en punkt på den andra grafen är därför minst lika med avståndet mellan dessa parallella tangenter. Detta avstånd är avståndet mellan tangeringspunkterna, dvs. $\sqrt{(-1+3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$.



Svar: $\sqrt{5}$

6. Om n är ett jämnt tal större än 4 kan frågan avgöras.
Antag att $n = 2p$, där $p \geq 3$. Dela in mynten i två grupper $A_1, A_2, \ldots, A_p$ och $a_1, a_2, \ldots, , a_p$ med vardera p mynt och jämför gruppernas vikter. Låt $|A_i|$ och $|a_i|$ beteckna vikterna av mynten A_i respektive a_i, för $i = 1, 2, \ldots, p$ och antag att $\sum_{i=1}^{p} |A_i| > \sum_{i=1}^{p} |a_i|$. Balansera nu mynten $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ mot mynten $A_p, a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$.
Om $\sum_{i=1}^{p-1} |A_i| = |A_p| + \sum_{i=1}^{p-2} |a_i|$ är samtliga mynt i gruppen $A_1, A_2, \ldots, A_p$ av samma vikt, det oäkta myntet finns då i gruppen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ och är lättare än ett äkta mynt.
Antag nu att $\sum_{i=1}^{p-1} |A_i| < |A_p| + \sum_{i=1}^{p-2} |a_i|$. Antag att något av mynten $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ är oäkta. Då är detta oäkta mynt lättare än de äkta i strid mot att $A_1, A_2, \ldots, A_p$ är den tyngre gruppen. Inte heller kan något av mynten $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ vara oäkta ty då vore detta tyngre än de äkta i strid mot att $a_1, a_2, \ldots, a_p$ är den lättare gruppen. Alltså är A_p det oäkta tyngre myntet.
Om $\sum_{i=1}^{p-1} |A_i| > |A_p| + \sum_{i=1}^{p-2} |a_i|$ så kan inte A_p vara det oäkta tyngre myntet. Alltså är antingen något av mynten $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ det tyngre oäkta myntet eller också är något av mynten $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ det lättare oäkta myntet. Om p är udda balanseras hälften av mynten $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ mot återstoden. Vid jämvikt är det oäkta myntet lättare, vid obalans tyngre. Om p är jämnt balanseras hälften av mynten $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ mot återstoden. Vid jämvikt är det oäkta myntet tyngre, vid obalans lättare.
Om $n = 4$ behövs inte mer än två vägningar. När man delat upp i de två grupperna A_1, A_2 och a_1, a_2 räcker det att jämföra A_1 och A_2.
För $n = 2$ kan frågan inte avgöras.
Antag att det finns udda $n \geq 3$ för vilket frågan alltid kan avgöras. Låt m vara det minsta av dessa. En första jämförelse av mynt måste involvera ett jämnt antal. Om denna jämförelse innebär att man får en jämvikt finns det ett tal mindre än m där frågan alltid kan avgöras. Antingen återstår då endast ett mynt eller också strider det mot minimaliteten av m. Alltså finns inget udda tal för vilket frågan alltid kan avgöras.

Svar: n jämnt och ≥ 4