Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 4 oktober 1984

1. Multiplicerar man samtliga ekvationer med varandra får man

$$a^2b^2c^2d^2e^2 = 144$$

varav följer $abcde = 12$ eller $abcde = -12$. Andra och fjärde ekvationerna ger $bcde = 8$. Alltså är $a = 3/2$ eller $a = -3/2$. Man finner därefter lätt de båda lösningarna

$$a = 3/2, b = 2/3, c = 3, d = 1, e = 4 \text{ och}$$

$$a = -3/2, b = -2/3, c = -3, d = -1, e = -4.$$

2.

$$\begin{aligned} n^{12} - n^8 - n^4 + 1 &= (n^8 - 1)(n^4 - 1) \\ &= (n^4 - 1)(n^2 + 1)^2(n^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

Talet n är udda. Sätt $n = 2k + 1$, k heltal.

$$n^2 - 1 = 4k^2 + 4k.$$

Detta är delbart med 8 eftersom $k(k + 1)$ alltid måste vara ett jämnt tal. Vidare är $n^4 + 1$ och $n^2 + 1$ jämna. Alltså har vi: $n^4 + 1$ är delbart med 2, $(n^2 + 1)^2$ är delbart med 2^2 och $(n^2 - 1)^2$ är delbart med 2^6. Härav följer påståendet.

3. Logaritmera. Eftersom logaritmfunktionen är strängt växande är den givna olikheten ekvivalent med

$$(8 - 3x) \ln x > 7 \ln x$$

$$(1 - 3x) \ln x > 0.$$

För $x > 1$ är $\ln x > 0$ men $1 - 3x < 0$. För $0 < x < 1$ är $\ln x < 0$ och olikheten gäller då $1 - 3x < 0$, $1/3 < x < 1$.

4. Tag punkten F för vilken $BCEF$ är en parallellogram. Då är $\bigwedge ABC = \bigwedge ACB = \bigwedge AEF = \bigwedge CBF$. Eftersom $|BD| = |BF|$ är därför DF vinkelrät mot BC så att $\bigwedge DFE$ är rät. Härav: $|DE| > |FE| = |BC|$.

5. Om tre olika tal inte är ordnade efter storlek måste det mittersta vara större än de båda övriga eller mindre än de båda övriga. Betraktar man därför raden och kolumnen genom mittrutan och de båda diagonalerna får man att talet i mittrutan måste vara större än ett jämnt antal av de övriga. Men ett tal i följden $1, \ldots, 9$ som är större än ett jämnt antal av de övriga måste vara något av talen 1, 3, 5, 7, 9, dvs vara ett udda tal.

6. Kalla kvinnans ålder k och barnets ålder b vid den sista av de angivna födelsedagarna. Likheten

$$k - r = n(b - r)$$

skall då ha heltalslösning n för $r = 5, 4, 3, 2, 1, 0$. Vi kan skriva likheten

$$k - b = (n - 1)(b - r).$$

Alltså är $k-b$ delbart med de 6 konsekutiva talen $b-5,\ldots,b$. Av 6 sådana tal måste minst ett vara delbart med 3, minst ett vara delbart med 4 och minst ett vara delbart med 5. Alltså är $k-b$ delbart med 60 och då $k<100$ följer $k=60+b$. Vi har således

$$60=(n-1)(b-r).$$

Då 60 inte är delbart med 7 måste de 6 talen $b-r$ bestå av någon av mängderna $1,\ldots,6$; $8,\ldots,13$; $15,\ldots,20$ eller $22,...27$. Men då 60 inte heller är delbart med exempelvis 13, 17 eller 23 ser man att endast det första alternativet är möjligt. Alltså måste talen $b-r$ vara talen $1,\ldots,6$, så att $b=6$, $k=66$. Detta är också tillräckligt eftersom

$$61=61\cdot 1, 62=31\cdot 2, 63=21\cdot 3, 64=16\cdot 4, 65=13\cdot 5, 66=11\cdot 6.$$

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner