Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 4 oktober 1995

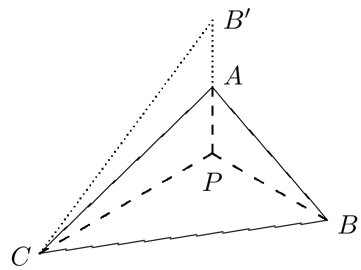
1. Eftersom 3 är ett primtal följer av likheten $x^2 = y^2 + 3 \cdot 665$ att om ett av heltalen x och y är delbart med 3 så gäller det även det andra. Men om $x = 3s$ och $y = 3t$ sätts in i den givna likheten får man efter division med 3
$$3(s^2 - t^2) = 665$$
vilket är omöjligt eftersom 665 inte är delbart med 3.

   Svar: Nej det är inte möjligt

2. Det finns många sätt att summera elementen i detta schema.
Summan av två element som är symmetriskt belägna i förhållande till den diagonal som innehåller elementen 100, är 200. Man får således samma summa om samtliga element i schemat ersätts med 100. Men då är summan $100^3 = 10^6$.
Alternativt kan man summera de aritmetiska följderna i var och en av de hundra raderna i schemat och få summan
$$\begin{aligned}\frac{(1+100)100}{2} &+ \frac{(2+101)100}{2} + \cdots + \frac{(100+199)100}{2} \\ &= 101 \cdot 50 + 103 \cdot 50 + 105 \cdot 50 + \cdots + 299 \cdot 50 \\ &= 50 \cdot \frac{(101+299)100}{2} = 50^2 \cdot 400 = 10^6.\end{aligned}$$

   Svar: Summan $= 10^6$

3. För att visa att $|PA| < |PB|$ kan man spegla triangeln i linjen PC. Eftersom vinklarna vid P alla är 120° kommer $B' =$ bilden av B att hamna på strålen PA och eftersom $|BC| > |AC|$ och vinkeln $\angle CPA$ är trubbig kommer A att hamna mellan P och B', vilket innebär att $|PA| < |PB'| = |PB|$.
Olikheten $|PB| < |PC|$ följer på samma sätt genom spegling i PA.



   Man kan också använda trigonometri. Om $x = |PA|$, $y = |PB|$ och $z = |PC|$ följer ur cosinussatsen (med sedvanliga beteckningar för sidorna)
$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos 120^\circ = y^2 + z^2 + yz$$
och analogt
$$b^2 = z^2 + x^2 + zx \quad \text{och} \quad c^2 = x^2 + y^2 + xy,$$
varav
$$0 < a^2 - b^2 = (y - x)(y + x + z) \text{ och } 0 < b^2 - c^2 = (z - y)(z + y + x).$$
Eftersom $x + y + z > 0$ följer att $x < y < z$.

4. Division med 2^x ger, efter förenkling, ekvationen

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^x+\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^x=1.$$

Ekvationen är av formen $a^x+b^x=1$, där $0<b=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}<\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}=a<1$. Funktionen $f(x)=a^x+b^x$ är då strängt avtagande och det finns högst en lösning.
Men $x=2$ är en lösning, ty

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=1.$$

Svar: $x=2$ är den enda lösningen.

5. För $k=0,1,\ldots,25$ är $P(k)=0$. Detta följer ur identiteten genom att först sätta in $x=0$ som ger $0=-26P(0)$ och sedan observera att om $k<26$ och $P(k-1)=0$ så är också $P(k)=0$. Enligt faktorsatsen är då $P(x)=x(x-1)\cdots(x-24)(x-25)Q(x)$, där Q är ett polynom. Insättning i identiteten ger

$$\begin{aligned}x(x-1)(x-2)\ &\cdots\ (x-25)(x-26)Q(x-1)\\ &=\ (x-26)x(x-1)\cdots(x-24)(x-25)Q(x).\end{aligned}$$

För $x>26$ gäller då $Q(x-1)=Q(x)$ varav $Q(k)-Q(26)=0$ för $k=26,27,\ldots$. Men ett polynom har bara ett ändligt antal nollställen såvida polynomet inte är nollpolynomet. Alltså är $Q(x)=Q(26)=q$, och $P(x)=q\,x(x-1)\cdots(x-24)(x-25)$, där q är en konstant.

Svar: $P(x)=q\,x(x-1)\cdots(x-24)(x-25)$, där q är en konstant.

6. Det är ingen inskränkning att anta att $a>0$. Antag nu att a har x siffror. Då är $10^{x-1}\le a<10^x$ och $10^{n(x-1)}\le a^n<10^{nx}$. Antalet siffror i a^n ligger alltså mellan $n(x-1)+1$ och $nx=n(x-1)+n$ och summan av siffrorna i a och a^n är lika med $x+n(x-1)+y$, där $1\le y\le n$. Alltså gäller $x+n(x-1)+y=361$, eller $360=(n+1)(x-1)+y$ under bivillkoret $1\le y\le n<n+1$. Talet 360 ger vid division med $n+1$ den principala resten y med $1\le y<n+1$. Alltså kan faktorn $n+1$ inte finnas med i faktoriseringen $360=2^3\cdot3^2\cdot5$. För ensiffriga tal n ger detta enda möjligheten $n+1=7$ och $(n,x,y)=(6,52,3)$. Alltså är $n=6$ enda möjliga värde.
Återstår att visa att det finns tal a så att a och a^6 tillsammans har 361 siffror. Om $a=3\cdot10^{51}$ är $a^6=729\cdot10^{306}$ och summan av antalet siffror i a och i a^6 är $52+309=361$. Talet a är inte entydigt bestämt.

Svar: $n=6$

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson