

# Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet

Svenska Matematikersamfundet

## Kvalificeringstävling den 6 oktober 1983

1. Lös ekvationen  $3^{2x+2} - 3^{x+3} - 3^x + 3 = 0$ .
2. I en fotbollsturnering med 12 lag där alla spelar mot alla exakt en gång får vinnande lag 2 poäng, förlorande lag 0 poäng medan lagen får var sin poäng vid oavgjord match. Vid turneringens slut flyttas de 3 sämsta lagen ned till en lägre division (målskillnad avgör vid lika poäng).
  - a) Hur många poäng måste ett lag ha för att säkert undvika nedflyttning?
  - b) Vilken är den lägsta poängssumma som det är möjligt att klara sig kvar på?
3. En kvadrat är given. En liksidig triangel  $ABC$  har hörnen  $A$  och  $B$  på två motstående sidor i kvadraten och kvadratens medelpunkt ligger på sträckan  $AB$ . Bestäm alla möjliga lägen för hörnet  $C$ .
4. Låt  $a, b, c$  och  $d$  vara sådana positiva tal att

$$a + b = c + d \quad \text{och} \quad a^2 + b^2 > c^2 + d^2.$$

Visa att

$$a^5 + b^5 > c^5 + d^5.$$

5. Kan man finna positiva heltal  $p$  och  $q$  sådana att de båda talen

$$p + 7n \quad \text{och} \quad q + 9n$$

för varje positivt heltal  $n$  saknar gemensam heltalsfaktor större än 1?

6. Beräkna maximum av

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$

då

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{för} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$