Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 16 november 1980

1. Antag att $\lg 2 = p/q$ med p och q positiva heltal. Då vore

$$q \lg 2 = p, \qquad \lg 2^q = p, \qquad 2^q = 10^p.$$

Detta är omöjligt eftersom högra ledet innehåller faktorn 5, vilket inte vänstra ledet gör.

2. Kalla följderna

$$j_1, j_2, \ldots, j_7 \quad \text{och} \quad k_1, k_2, \ldots, k_7.$$

Då är

$$(j_1 - k_1) + (j_2 - k_2) + \cdots + (j_7 - k_7) = j_1 + j_2 + \cdots + j_7 - (k_1 + k_2 + \cdots + k_7) = 0$$

Speciellt är således summan av talen $j_i - k_i$, ett jämnt tal. Detsamma gäller då även summan av talen $|j_i - k_i|$. Men om $|j_i - k_i|$ alla vore olika skulle de vara talen $0, 1, 2, \ldots, 6$ vilka har en udda summa.

3. Ordnar man sidorna i storleksordning inser man att $T(n+1) - T(n)$ är antalet tripplar av heltal $(n+1, k, m)$ för vilka

$$n + 1 \geq k \geq m \geq 1 \quad \text{och} \quad m + k > n + 1.$$

För $k = n + 1$ finns $n + 1$ möjliga värden för m, för $k = n$ finns värdena $2, \ldots, n$ dvs $n - 1$ möjliga värden, för $k = n - 1$ finns $3, \ldots, n - 1$ dvs $n - 3$ möjliga värden osv.
Man får därför

$$T(n+1) - T(n) = (n+1) + (n-1) + (n-3) + \cdots$$

Om n är jämn är sista termen 1, antalet termer $n/2 + 1$ och summan

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)(n + 1 + 1) = \frac{1}{4}(n+2)^2.$$

Om n är udda är sista termen 2, antalet termer $\dfrac{n+1}{2}$ och summan

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)(n + 1 + 2) = \frac{1}{4}(n+1)(n+3).$$

4.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)g(x)dx &= \int_0^{1/2} f(x)g(x)dx + \int_{1/2}^1 f(x)g(x)dx \\
&= \int_0^{1/2} f(x)g(x)dx + \int_0^{1/2} f(1-x)g(1-x)dx \\
\int_0^1 f(x)g(1-x)dx &= \int_0^{1/2} f(x)g(1-x)dx + \int_{1/2}^1 f(x)g(1-x)dx \\
&= \int_0^{1/2} f(x)g(1-x)dx + \int_0^{1/2} f(1-x)g(x)dx.
\end{aligned}$$

Därför är

$$\int_0^1 f(x)g(1-x)dx - \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^{1/2} \left(f(l-x) - f(x)\right)\left(g(x) - g(l-x)\right)\right) dx.$$

Då f är växande och g är avtagande gäller för $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ att $f(x) \leq f(1-x)$ och $g(x) \geq g(1-x)$.
Härav följer den sökta olikheten.

5. **Metod 1.** Kalla antalet tillåtna ord med n a:n och n b:n för $A(n)$. Man söker $A(6)$. Ett ord erhållet med regel (iii) kallar vi ett basord. Ett sådant ord karakteriseras av att varje b utom det sista föregås av minst 2 flera a:n än b:n. Ett basord kan därför inte erhållas med regel (ii). Kalla antalet basord med $2n$ bokstäver för $B(n)$. Man får direkt

$$B(n) = A(n-1).$$

För ett ord XY erhållet med regel (ii) behöver inte uppdelningen X, Y vara entydig, men den blir det om man kräver att X är ett basord. Därför måste antalet sådana ord med $2n$ bokstäver vara

$$B(n-1)A(1) + B(n-2)A(2) + ... + B(1)A(n-1)$$

Detta ger eftersom $B(i) = A(i-1)$, $A(0) = B(1) = 1$:

$$A(n) = A(n-1) + A(n-2)A(1) + \ldots + A(l)A(n-2) + A(n-1)$$

Härav erhålles:

$$\begin{aligned}
&A(2) = 1 + 1 = 2\\
&A(2) = 2 + 1 + 2 = 5\\
&A(4) = 5 + 2 + 2 + 5 = 14\\
&A(5) = 14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42\\
&A(6) = 42 + 14 + 10 + 10 + 14 + 42 = 132
\end{aligned}$$

Metod 2. Totala antalet möjligheter att ordna n a:n och n b:n i en följd är $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$. Av dessa är orden, vilket lätt visas, n karakteriserade av att varje b föregås av flera a:n än b:n. Kalla de övriga icke-ord.

I varje icke-ord finns ett första b som föregås av lika många a:n som b:n. Ändra icke-ordet genom att ändra alla bokstäver efter detta b: i stället för a skrivs b, i stället för b skrivs a. Man får då en följd med $n-1$ a:n och $n+1$ b:n. Man ser lätt att varje följd med detta antal a:n och b:n uppkommer en och endast en gång från ett icke-ord. Antalet icke-ord är alltså detsamma som antalet sådana följder, vilket är $\begin{pmatrix} 2n \\ n-1 \end{pmatrix}$. Antalet ord är därför

$$\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2n \\ n-1 \end{pmatrix} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

som för $n = 6$ ger värdet 132.

6. Om kvadraten indelas i tre områden måste två av punkterna ligga i samma område. Avståndet mellan dessa båda punkter är då högst likamed största diagonalen i något av områdena.

Om exempelvis kvadraten delas i tre kongruenta rektanglar med sidorna 1 och 1/3 finner man konstanten

$$c = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{9}}.$$

Att $c = 1$ är en undre gräns för möjliga c-värden inser man genom att lägga de fyra punkterna i kvadratens hörn. Att $c = 1$ uppfyller villkoren i problemet kan bevisas på följande sätt.

Dela kvadraten i 8 kongruenta trianglar med 4 linjer genom medelpunkten, de två diagonalerna och två linjer parallella med sidorna. Om fyra punkter inom kvadraten har alla parvisa avstånd större än 1, kan inte två av punkterna ligga inom samma eller närliggande trianglar. Projicera varje punkt på den triangelsida som är del av en kvadratsida. Betrakta särskilt en av de fyra punkterna vars projektion har maximalt avstånd till närmaste kvadrathörn. man har då en konfiguration sådan som i fig 1 med $a \geq b$. Att avståndet mellan de där angivna punkterna är < 1 kan inses genom att man studerar de båda extremfallen i fig 2 och fig 3 och konstaterar att avståndet i båda fallen är mindre än 1.

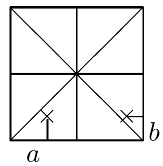

fig. 1

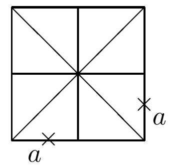

fig. 2

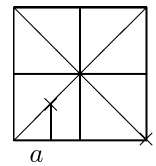

fig. 3

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner