Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 16 november 1975

1. Man söker de t för vilka det finns ett x sådant att vektorerna $(x-1, kx)$ och $(x-t, kx)$ är vinkelräta, dvs sådana att
$$(x-1)(x-t)+k^2x^2=0$$
$$\left(k^2+1\right)x^2-(t+1)x+t=0.$$
Denna ekvation har reella rötter om och endast om
$$(t+1)^2-4t(k^2+1)\geq 0$$
$$t^2-2t-4k^2t+1\geq 0.$$
Denna olikhet är uppfylld för alla t utom dem mellan rötterna till motsvarande likhet. Dessa rötter är båda reella och positiva.
Svar: För $t\leq 1+2k^2-2k\sqrt{k^2+1}$ och
för $t\geq 1+2k^2+2k\sqrt{k^2+1}$

2. Låt n vara ett positivt heltal. Om man utvecklar $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ enligt binomialsatsen finner man att det alltid är ett heltal. Eftersom $0<3-\sqrt{5}<1$ kan vi välja n så att $0<(3-\sqrt{5})^n<0,01$. Detta n besvarar frågan i problemet jakande.
Anmärkning. För att finna ovanstående lösning kan man exempelvis resonera på följande sätt. Vi tar heltalsdelen $\left[(3+\sqrt{5})^n\right]$, för några n-värden:
$$\begin{array}{lll} (3+\sqrt{5}) = 3+\sqrt{5}, & \left[(3+\sqrt{5})\right] = 3+2=5 \\ (3+\sqrt{5})^2=14+6\sqrt{5}, & \left[(3+\sqrt{5})^2\right]=14+13=27 \\ (3+\sqrt{5})^3=72+32\sqrt{5}, & \left[(3+\sqrt{5})^3\right]=72+71=143 \end{array}$$
Detta leder oss att jämföra $(3+\sqrt{5})^n=a_n+b_n\sqrt{5}$, där a_n och b_n är heltal, med heltalet $2a_n$. Man får
$$2a_n-(3+\sqrt{5})^n=a_n-b_n\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^n$$
och finner lösningsmetoden ovan.

3. **Metod 1.** Anta exempelvis a störst så att $a\geq b$, $a\geq c$. Vi har då
$$\begin{aligned} &a^n+b^n+c^n-ab^{n-1}-bc^{n-1}-ca^{n-1}\\ &=(a-c)(a^{n-1}-b^{n-1})-cb^{n-1}+b^n+c^n-bc^{n-1}\\ &=(a-c)(a^{n-1}-b^{n-1})+(b-c)(b^{n-1}-c^{n-1})\geq 0\end{aligned}$$
oavsett om $b\geq$ c eller $c\geq b$.
Metod 2. Den begärda olikheten följer ur
$$ab^{n-1}\leq\frac{1}{n}a^n+\frac{n-1}{n}b^n$$
och motsvarande olikheter för bc^{n-1} och ca^{n-1}. Sätt $a/b=x$. Man har då att bevisa
$$\frac{1}{n}x^n-x+1-\frac{1}{n}\geq 0\quad\text{för}\quad x>0$$
vilket lätt göres med derivatans hjälp.

4. Eftersom $\overrightarrow{P_1P_2}$ och $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ är parallella och motsatt riktade måste sträckorna P_1Q_1 och P_2Q_2 skära varandra. Eftersom dessa sträckor är lika långa följer det att sträckorna P_1P_2 och Q_1Q_2 har gemensam mittpunktsnormal. (Detta gäller även då P_1, P_2, Q_1, Q_2 alla ligger på samma linje.) Mittpunktsnormalerna till sidorna i triangeln $P_1P_2P_3$ och till sidorna i triangeln $Q_1Q_2Q_3$ går därför alla genom en och samma punkt, den omskrivna cirkelns medelpunkt för båda trianglarna. Kalla denna punkt R. De båda trianglarna har parvis parallella sidor och därför parvis lika vinklar. De är därför likformiga. Då motsvarande sidor i de båda trianglarna är motsatt riktade följer det att den ena kan erhållas ur den andra genom en förstoring (eller förminskning), en vridning ett halvt varv och en parallellförflyttning. Vid dessa förändringar övergår den omskrivna cirkelns medelpunkt i den omskrivna cirkelns medelpunkt, varav följer att $\overrightarrow{RP_1}$ och $\overrightarrow{RQ_1}$ måste ha motsatt riktning. R ligger alltså på sträckan P_1Q_1. Likaså ligger R på sträckorna P_2Q_2 och P_3Q_3.

5. Genom att pröva låga n-värden finner man att $(2^n+1)/n$ är ett heltal endast för $n = 1$, $n = 3$, $n = 9, \ldots$. Det är därför naturligt att söka bevisa att $(2^n+1)/n$ är ett heltal för $n = 3^k$, $k = 0$, 1, $2, \ldots$. Detta sker med induktion. Anta påståendet är sant för ett heltal $n = 3^k$. Då är $3^{k+1} = 3n$ och

$$2^{3n} + 1 = (2^n)^3 + 1 = (2^n + 1)\left(2^{2n} - 2^n + 1\right).$$

Enligt antagandet är $2^n + 1$ delbart med 3^k. Det räcker således att visa att $2^{2n} - 2^n + 1$ är delbart med 3. Sätt $2^n + 1 = 3a$, där a är ett heltal. Vi får

$$2^{2n} - 2^n + 1 = (3a-1)^2 - (3a-1) + 1 = 9a^2 - 9a + 3$$

vilket är delbart med 3.

6. **Metod 1.** Anta att $f(a) = 0$ för något a med $0 \le a \le 1$. Sätt $h = 1/2C$. Anta att $|f(x)| \le b$ på intervallet $[a, a+h]$ för något $b > 0$. Då är $|f'(x)| \le Cb$ på detta intervall. Medelvärdessatsen ger för ett x i intervallet

$$f(x) = f(x) - f(a) = (x-a)f'(x_1)$$

där även x i ligger i intervallet. Vi får alltså

$$|f(x)| \le |x-a||f'(x)| \le h \cdot Cb \le \frac{b}{2}.$$

Vi har således bevisat:
Om $|f(x)| \le b$ i intervallet $[a, a+h]$ gäller även $|f(x)| \le b/2$ i detta intervall. Då detta gäller för varje $b > 0$ måste $f(x) = 0$ i intervallet. Tillämpar man detta för $a = 0$,h, $2h, \ldots$ så får man $f(x) = 0$ på hela intervallet $[0, 1]$.

Metod 2. f bör inte kunna växa fortare än en lösning till $f'(x) = Cf(x)$ dvs en funktion ke^{Cx}. För att göra detta strängt studerar vi kvoten

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)e^{-Cx} \\ g'(x) &= e^{-Cx}(f'(x) - Cf(x)). \end{aligned}$$

Om nu $g(x) > 0$ för något x så är för detta x

$$f(x) > 0, \qquad |f'(x)| \le Cf(x), \qquad g'(x) \le 0.$$

Likaså om $g(x) < 0$ för något x så är $g'(x) \ge 0$ för detta x. Implikationerna $g(x) > 0 \Rightarrow g'(x) \le 0$ och $g(x) < 0 \Rightarrow g'(x) \ge 0$ leder omedelbart till att $g(x) = 0$, eftersom $g(0) = 0$.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner