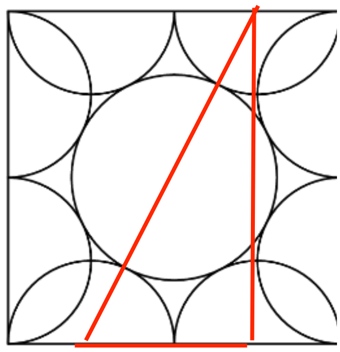
Lösningsförslag Pythagoras Quest Riksfinal 2016

Författad av Lars Åström och Malte Larsson

Del 1

1. Vi kallar barnen för 1, 2, 3, 4, 5 och 6, där Kalle är nummer 1. Antag att de från början sitter i ordningen 1, 2, 3, 4, 5 och 6. Bredvid Kalle kan det sitta tre olika barn – 3, 4 och 5. Antag först att 3 sitter till vänster och 4 till höger om Kalle. 5 och 6 får inte sitta bredvid varandra så de två måste sitta bredvid 3 och 4 i den nya placeringen och 2 mitt emot Kalle. 5 måste då sitta bredvid 3 och 6 bredvid 4. En lösning gavs. En motsvarande lösning ges med samma argument om 3 sitter till höger och 4 till vänster om Kalle. Av symmetriskäl ges även två lösningar om 4 och 5 är de som sitter bredvid Kalle. Slutligen har vi fallet då 3 och 5 sitter bredvid Kalle. 2 och 3 får inte sitta bredvid varandra så de måste sitta bredvid 4 och 5. Därför måste 3 sitta bredvid 5 och 2 bredvid 4; 6 sitter mitt emot Kalle. Här ges också två lösningar. Totalt finns 6 sätt de kan ha satt sig på.



2. $2016 = 2^5 * 3^2 * 7$. Alla 2orna, 3orna respektive 7orna måste vara i antingen p eller q eftersom inget tal får dela både p och q. För 2orna, 3orna och 7orna finns det alltså två val var de ska vara faktorer – p eller q. Alltså finns 8 sådana bråk.
3. Låt den inre cirkelns radie vara r. Då ger Pythagoras sats i den röda triangeln att $2^2 + 4^2 = (2 + 2r)^2 \Leftrightarrow$
   $\sqrt{20} - 2 = 2r <=> r = \sqrt{5} - 1.$
4. Vi ser att de 10 första talen är $2050, 2051, 2052, 2049, 2054, 2047,$ $2056, 2045, 2058$ och 2043. De på udda plats verkar vara jämna och öka med två, de på jämn plats verkar vara udda och minska med två. Vi kollar om det alltid är så. Antag först att vi ska få fram ett tal på udda plats. Då får vi $b + a - (b - 2) = a + 2$, där a och b är några heltal. Alltså fortsätter mönstret. Nu ska vi kontrollera att det gäller på jämn plats också. $a + b - (a + 2) = b - 2$, vilket alltså stämde. Det sökta talet är på jämn plats och är alltså 2051 minskat med 2 ett antal gånger. Detta antal är $\frac{2016}{2} - 1 = 1007$. Alltså är det sökta talet
   $2051 - 2 * 1007 = 37.$
5. Antag att det finns 3st treor i följd någon gång. Då talet innan dess ha haft tre treor eftersom 2 av våra 3 nuvarande treor har kommit av att vi

sagt ”tre treor”. Men om vi ska ha tre treor någon gång måste vi alltså haft det från början, vilket vi inte hade. Svar: Nej

6. Vi vill ha n så litet som möjligt, alltså ska vi välja så små tal som möjligt. Men vi måste samtidigt se till att triangelolikheten inte uppfylls för några av talen vi väljer. Vi väljer då alltså talen $4, 5, 9, 14, 23, 37$. Alltså måste n minst vara 37.
7. Eftersom $a^5 = b^4$ så måste $a = k^4$ för något k. På samma sätt är $c = m^2$ för något m. $c - a = m^2 - k^4 = (m + k^2)(m - k^2) = 19$. Eftersom 19 är ett primtal måste $\begin{cases} m + k^2 = 19 \\ m - k^2 = 1 \end{cases}$, vilket ger $m = 10, k = 3$ och alltså får vi
$a = 81, b = 243, c = 100, d = 1000.$

Del 2

1. Vi drar linjerna BD och AE och får då enligt v-s-v-fallet att $\Delta EDA \cong \Delta EBD \cong \Delta EBA$. Alltså är arean av ΔABD tre gånger större än ΔBDE, av symmetri är även ΔBCD tre gånger större än ΔBDF. Alltså har romben arean 9.
2. Då Sam har slagit två koder finns 9998 kvar att testa. Sannolikheten att då få rätt är $1/9998$.
3. Vi vet att $6, 7$ och 12 delar Lisas ålder. Om 12 delar ett tal måste även 6 dela det. Alltså är Lisas ålder delbar med $7 * 12 = 84$. Eftersom $84 * 2 > 100$ blev hon 84 år gammal.
4. Antag att Partiet Lars fick andelen x av rösterna. Då vet vi att $x + 0{,}2 * (1 - x) = 0{,}52 \Leftrightarrow 0{,}8 * x = 0{,}32 \Leftrightarrow x = 0{,}4$. Partiet Lars fick 40% av rösterna.
5. Om en tärning kastas är chansen $\frac{1}{2}$ att antalet prickar blir udda. Om två tärningar kastas är chansen också $\frac{1}{2}$ att de tillsammans visar ett udda antal prickar eftersom givet den första tärningens utfall är det 50% chans att den andra tärningen gör att de tillsammans visar ett udda antal prickar. Det är $\frac{3}{4}$ chans att minst ett mynt blir klave och alltså är sannolikheten $\frac{3}{8}$.
6. Låt $BD = BE = x$. Då ger Pythagoras sats i ΔOAD att $2^2 = 1^2 + (1 + x)^2 \Leftrightarrow$
$x = \sqrt{3} - 1$. Arean av cirkelsektorn DOE är $\frac{30}{360} * \pi * 2^2 = \frac{\pi}{3}$. Arean av ΔDBO =Arean av $\Delta EBO = \frac{x*1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Den sökta arean blir alltså
$\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} * 2 = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$.
7. Vi vet att $b + c + d = 3c = m^2, a + b + c + d + e = 5c = n^3$, för några m, n. Alltså måste c vara delbart med 5^2 och 3. Men för att $5c = n^3$ så måste c vara delbart med 3^3. Vi ser att $c = 5^2 * 3^3 = 675$ ger lösning. Alltså är det minsta möjliga $a = 673$.

Del 3

1. $a_{n+1} = a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-1} = -a_{n-2}$. Alltså är talen från och med $n = 4$ samma tal som det tre platser tidigare, fast med omvänt tecken. Det betyder att summan av sex på varandra följande tal i följden blir 0. Eftersom $6|2016$ blir summan 0.

Pythagoras Quick

1. $Volymskala = Längdskala^3 => 1000000 = LS^3 => LS = 100$. Alltså ska modellen vara $2m$ hög.
2. Vi vill ha ett så långt tal som möjligt. De tvåsiffriga kvadrattalen är $16,25,36,49,64,81$. Det längsta fås efter prövning som 81649.
3. Vi behöver dra de två gröna kulorna något av de tre dragen. Det finns alltså tre alternativ: dra en röd i första, andra eller tredje. De ger i tur och ordning följande sannolikheter: $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{4}, \frac{1}{2} * \frac{3}{4} * \frac{1}{4}$ $respektive$ $\frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{4}{4}$. Totalt ger detta sannolikheten $\frac{9}{32}$.

Svar Del 2

1. 9
2. $1/9998$
3. 84
4. 40%
5. $3/8$
6. $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$
7. 673

Svar Pythagoras Quick

1. $2m$
2. 81649
3. $9/32$