Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 7 oktober 1982

1. Ekvationerna kan skrivas
$$(x+1)(y+1)=12$$
$$(x+1)(z+1)=15$$
$$(y+1)(z+1)=20$$
De båda första ekvationerna ger $y+1=4(z+1)/5$, varför sista ekvationen ger $(z+1)^2=25$ med lösningarna $z_1=4$, $z_2=6$.
Svar: $x=2$, $y=3$, $z=$4 eller $x=4$, $y=5$, $z=6$.

2. Vi beräknar först veckodag för 1 jan år 2000. Varje år som inte är skottår har $7\cdot 52+1$ dagar. Vi har att räkna framåt en veckodag för varje sådant år. För skottår tillkommer ytterligare en dag. Tiden 1 jan 1982 - 1 jan 2000 innebär 18 år varav 1984, 1988, 1992 och 1996 är skottår. Vi får alltså räkna framåt 18+4 veckodagar från fredag och får lördag.
För tiden 1 jan 2000 - 1 jan 2100 har vi att räkna fram $100+25=7\cdot 17+6$ veckodagar. 1 jan 2100 blir en fredag.
För tiden 1 jan 2100 - 1 jan 2200 har vi att räkna fram $100+24=7\cdot 17+5$ veckodagar. 1 jan 2200 blir en onsdag. Upprepning ger att 1 jan 2300 blir en måndag och 1 jan 2400 en lördag. Eftersom 1 jan 2000 och 1 jan 2400 kommer att inträffa på samma veckodag måste de erhållna resultaten upprepa sig för varje 400-årsperiod. Ingen av de ifrågavarande nyårsdagarna kommer att inträffa på en söndag.

3.
$$\begin{aligned} z &= -(x+y) \text{ ger enligt binomialsatsen:} \\ z^2 &= x^2+y^2+2xy \\ z^5 &= -x^5-y^5-5(x^4y+xy^4)-10(x^3y^2+x^2y^3) \\ z^7 &= -x^7-y^7-7(x^6y+xy^6)-21(x^5y^2+x^2y^5)-35(x^4y^3+x^3y^4) \end{aligned}$$
Den sökta likheten reduceras därför till
$$(x^2+xy+y^2)(x^4y+2x^3y^2+2x^2y^3+xy^4)=x^6y+3x^5y^2+5x^4y^3+5x^3y^4+3x^2y5+xy^6$$
vilket lätt verifieras genom hopmultiplikation av faktorerna i vänstra ledet.
Anmärkning. Båda leden ger homogena symmetriska polynom av 7:e graden i x, y, z. Enligt en allmän teori kan de därför uttryckas i de symmetriska grundfunktionerna
$$a_1=x+y+z, \qquad a_2=xy+xz+yz, \qquad a_3=xyz.$$
Formen måste bli
$$Aa_2^2a_3+a_1(\ldots)$$
A är en konstant. Eftersom $a_1=0$ i problemet räcker det därför att termen $Aa_2^2a_3$ blir densamma för båda leden, dvs att koefficienten A blir densamma. Att så är fallet kan lätt verifieras genom att den sökta likheten gäller för några xyz-värden med $a_1=0$, $a_2\neq 0$, $a_3\neq 0$, exempelvis $x=y=1$, $z=-2$.

4. **Metod 1.** Om $x=a+b$ så är $x^3=a^3+b^3+3abx$. Vänstra ledet i den sökta likheten kallar vi x och låter
$$a=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \qquad b=-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$$
Då får vi
$$x^3=\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)-3x\sqrt[3]{5-4}$$
$$x^3+3x-4=0$$

$$(x-1)(x^2+x+4)=0.$$

Vänstra ledet x av den sökta likheten satisfierar denna ekvation och är ett reellt tal. Alltså är $x=1$.

Metod 2. Man kan från början konstatera att de två uttryck som i lösningen enligt metod 1 kallades a och b har en produkt som är $=-1$. Man har därför att visa att

$$a-\frac{1}{a}=1, \qquad a^2-a-1=0 \tag{1}$$

Ekvationen $x^2-x-1=0$ har två rötter. Den ena är $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$. Man har

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3=\frac{8\sqrt{5}+16}{8}=\sqrt{5}+2$$

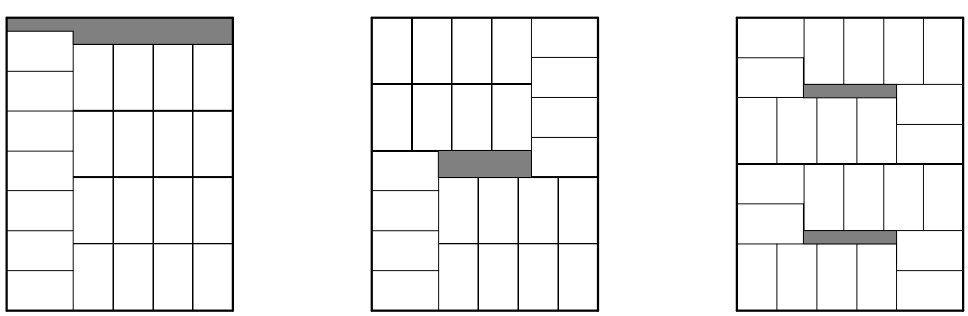
Detta visar att (1) är sann.

5. Kvadraten måste ha två av sina hörn på en av triangelsidorna. Kalla denna sida för triangelns bas, antag dess längd är b och höjden mot den h. Låt s vara längden av kvadratens sida. Då är $bh/2=1$, $bh=2$. Den med basen parallella kvadratsidan skär av en topptriangel. Likformighet ger

$$\begin{aligned}\frac{h}{h-s} &= \frac{b}{s}\\ hs &= bh-sb=2-\frac{2s}{h}\\ s &= 2\left(h+\frac{2}{h}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Maximum av s inträffar då $h+\dfrac{2}{h}$ är minimal. Derivering visar att detta sker då $1-2/h^2=0$, $h=\sqrt{2}=b$. Sidan s är då $1/\sqrt{2}$ och kvadratens area är hälften av triangelns.

6. Varje utklippt smårektangel har arean 15 cm^2 hela papperet har arean $17\cdot 22=374=15\cdot 24+14$ cm^2. Man kan alltså klippa ut högst 24 stycken smårektanglar. Kan man klippa ut så många? Försöker man lägga smårektanglarna åt samma håll får man ut högst $3\cdot 7=21$ stycken. För att fylla exempelvis kortsidan söker man heltalslösningar till $5m+3n=17$. Enda lösningen är $m=1$, $n=4$. Detta ger lätt ett mönster med 23 smårektanglar, se fig. Ett bättre resultat med maximiantalet 24 smårektanglar får man om man följer mönstret halvvägs och därefter fortsätter symmetriskt. En elegant lösning är att dela rektangeln i två lika delar och lägga 12 smårektanglar i vardera, se fig.



Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner