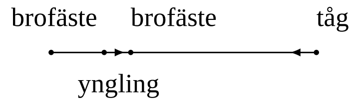
Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 3 oktober 1990

1. Låt bron ha längden $3a$, avståndet mellan främre brofäste och tåget (då ynglingen upptäcker tåget) vara b och ynglingens språnghastighet x km/h.

   Man får då ekvationssystemet

   $$\begin{cases} \dfrac{2a}{x} = \dfrac{b+3a}{60} \\ \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{60} \end{cases}.$$

   Elimination av b/a ger $x = 20$.

   Svar: Ynglingen springer 20 km/h.

2. Talet kan skrivas $n = a(10^5+1) + 10b(10^3+1) + 10^2c(10+1)$. Eftersom varje parentes ger resten 0 vid division med 11 och resten 2 vid division med 3 är talet n alltid delbart med 11 och delbart med 3 om och endast om $2(a+b+c)$ är delbart med 3.

   Svar: Delbart med 33 om och endast om $a+b+c$ är delbart med 3 (det tresiffriga talet abc är delbart med 3), dvs $abc = 102 + 3k$, $0 \le k \le 299$.

3. I varje lager kan man välja högst 6 småkuber (i varje horisontell respektive vertikal rad får högst en kub väljas). Då man ska välja 36 småkuber måste man välja precis 6 i varje lager. När en kub valts i ett lager får de kuber som ligger i samma kolumn i övriga lager inte väljas. Detta betyder att om alla valda kuber projiceras på topplagret kommer varje kub i detta lager vara bild till precis en kub och 6 kuber kommer från varje lager. Därav följer att $S = 1 + 2 + \cdots + 36 + 6 \cdot 36(1+2+3+4+5) = 36 \cdot 37/2 + 6 \cdot 36 \cdot 15 = 3906$.

   Svar: $S = 3906$ för varje val.

4. Cosinusteoremet och olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium ger

   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ge 2bc(1-\cos A) = 4bc\sin^2\frac{A}{2}.$$

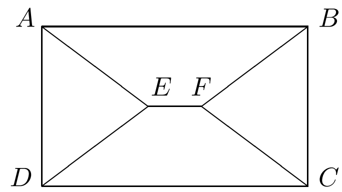
   Eftersom $0 < A < \pi$ är $\sin\dfrac{A}{2} > 0$ och alltså är $2\sqrt{bc}\sin\dfrac{A}{2} \le a$, med likhet då och endast då $b = c$.

   Svar: Likhet gäller då och endast då A är toppvinkeln i en likbent triangel.

5. Summeras ekvationerna får man $\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)|x_k - a| = 0$. Då måste $x_k \ge a$ för något index k. Med om $x_k \ge a > 0$ så är $x_k^2 = x_{k+1}|x_{k+1}| + (x_k - a)^2$, $(x_{n+1} = x_1)$, eller $x_{k+1}|x_{k+1}| = a(2x_k - a) \ge a^2 = a|a|$. Men funktionen $x \to x|x|$ är strängt växande och alltså är även $x_{k+1} \ge a$. Induktivt följer då att $x_{k+2} \ge a, \cdots, x_n \ge a, x_1 \ge a, \cdots, x_{k-1} \ge a$, dvs $x_k \ge a$ för alla $k = 1, \cdots, n$. Men då är $\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k - a)|x_k - a| = 0$ och $x_k = a$ för alla $k = 1, \cdots, n$.

   Svar: Den enda lösningen är den uppenbara $x_k = a$ för $k = 1, \cdots, n$.

6. Av symmetriskäl bör brunnen kunna placeras i rektangelns tyngdpunkt. Sätt $2a = |AB| = 500$ och $2b = |BC| = 300$. Konstruera två kongruenta likbenta trianglar $\triangle AED$ och $\triangle BFC$ med höjden $x \le a$ från E och F.



Lägg nu rör längs sträckorna AE, DE, BF, CF och EF. Då behövs så här mycket rör

$$f(x) = 2(a-x) + 4\sqrt{x^2+b^2}, \quad 0 \le x \le a.$$

Derivation ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 + 4\,\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} \\ &= 2\,\frac{2x-\sqrt{x^2+b^2}}{\sqrt{x^2+b^2}} \\ &= 2\,\frac{3x^2-b^2}{(2x+\sqrt{x^2+b^2})\sqrt{x^2+b^2}}\ . \end{aligned}$$

Eftersom $0 < b/\sqrt{3} < b < a$ är $x = b/\sqrt{3}$ en stationär punkt i intervallet $[0, a]$. Nu är $f(b/\sqrt{3}) = 2a + 6b/\sqrt{3} = 500 + 300\sqrt{3}$. Vidare är $500 + 300\sqrt{3} \le 1020$ om och endast om $30\sqrt{3} \le 52$ dvs om och endast om $2700 \le 2704$.

Svar: Det går att placera brunnen så att rören räcker.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson