Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 17 november 1974

1. $b_n - b_{n-1}$ är summan av de $a_p a_q$ för vilka $p \geq 1$, $q \geq 1$, $p + q = n$. Alla dessa produkter är $2^{p-1} 2^{q-1} = 2^{n-2}$ och deras antal är $n - 1$. Alltså är $b_n - b_{n-1} = (n-1)2^{n-2}$.
   Eftersom $2a_p = a_{p+1}$ är $2b_{n-1}$ summan av $a_p a_q$ för $p \geq 2$, $q \geq 1$, $p + q \leq n$. Alltså är $b_n - 2b_{n-1}$ summan av $a_p a_q$ för $p = 1$, $q \geq 1$, $p + q \leq n$. Detta ger

$$b_n - 2b_{n-1} = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} - 1.$$

   Man får slutligen

$$b_n = 2(b_n - b_{n-1}) - (b_n - 2b_{n-1}) = (n-2)2^{n-1} + 1.$$

2. Sätt $\sqrt[n]{a} = b$. Olikheterna blir då

$$1 - \frac{1}{b^n} \leq n(b-1) \leq b^n - 1.$$

   a) $b = 1$. Likhet råder.

   b) $b > 1$.

$$\frac{b^n - 1}{b - 1} = b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + 1 > n$$

$$\frac{b^n - 1}{b^n(b-1)} = \frac{1}{b^n}\left(b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + 1\right) < n$$

   c) $b < 1$. På samma sätt som under b) bevisas nu

$$\frac{b^n - 1}{b - 1} < n \qquad \frac{b^n - 1}{b^n(b-1)} > n.$$

   Härav fås de begärda olikheterna.

3. För att beräkna de två sista siffrorna i 9^k för heltal k gör vi följande tabell

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
De två sista siffrorna i 9^k	01	09	81	29	61	49	41	69	21	89	01

   Tabellen fortsätter periodiskt. Det är alltså tillräckligt att känna resten vid division av k med 10. I vårt problem är $k = 8^m$ för ett heltal m.

m	0	1	2	3	4	5
Sista siffran i 8^m	1	8	4	2	6	8

   Tabellen fortsätter periodiskt. Det är alltså tillräckligt att känna resten vid division av m med 4. Vi har $m = 7^n$ för ett heltal n.

n	0	1	2
Resten vid division av 7^n med 4	1	3	1

   osv periodiskt. Vi har $n = 6^q$ så att n är jämnt. Restenav $m = 7^n$ vid division med 4 blir därför 1. Resten av $k = 8^m$ vid division med 10 blir därför 8. Sista två siffrorna i 9^k blir därför 21.

4. Anta att

$$p(x^2) = (p(x))^2 \,. \tag{1}$$

Om $p(x)$ har termer av olika gradtal låt de två termer som har lägsta gradtal vara ax^n och bx^{n+k}, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Då blir

$$\begin{aligned} p(x^2) &= ax^{2n} + bx^{2n+2k} + \cdots \\ (p(x))^2 &= \left(ax^n + bx^{n+k} + \cdots\right)^2 = a^2x^{2n} + 2abx^{2n+k} + \cdots \end{aligned}$$

där punkterna anger termer av högre gradtal. Likheten (1) ger då $2ab = 0$, vilket motsäger $a \neq 0$, $b \neq 0$. Alltså har $p(x)$ endast en term, $p(x) = ax^n$. Då är $p(x^2) = ax^{2n}$, $(p(x))^2 = a^2x^{2n}$, varför (1) blir satisfierad då $a^2 = a$ dvs $a = 1$ (eftersom $a \neq 0$). Alltså är $p(x) = x^n$.
Anta $p(x)$ i stället satisfierar

$$p(x^2 - 2x) = (p(x-2))^2 \,. \tag{2}$$

Sätt $x - 1 = t$. Likheten (2) blir då

$$p(t^2 - 1) = (p(t-1))^2 \,.$$

Polynomet $q(t) = p(t-1)$ har alltså att satisfiera $q(t^2) = (q(t))^2$. Alltså är $q(t) = t^n$, $p(t-1) = t^n$, $p(x) = (x+1)^n$.

5. Om $x_1, \ldots, x_5$ är en lösning av i problemet angiven typ ger första och tredje ekvationerna

$$x_1 + 2x_3 + x_5 = 2t(x_2 + x_4).$$

Utnyttjas andra ekvationen får man

$$x_1 + x_5 = (4t^2 - 2)x_3. \tag{1}$$

Om $x_3 = 0$ skulle andra ekvationen ge $x_2 + x_4 = 0$, och då $x_2 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ skulle härav följa $x_2 = 0$, $x_4 = 0$. På samma sätt skulle (1) ge $x_1 = 0$, $x_5 = 0$. Då detta inte är tillåtet är $x_3 > 0$. (1) medför därför

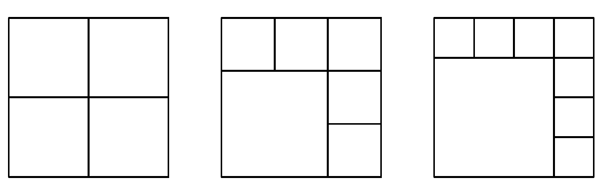
$$4t^2 - 2 \geq 0, \qquad t^2 \geq 1/2, \qquad t \geq 1/\sqrt{2}.$$

Omvänt om $t = 1/\sqrt{2}$ ger (1) $x_1 = 0$, $x_5 = 0$ varför det givna ekvationssystemet reduceras till

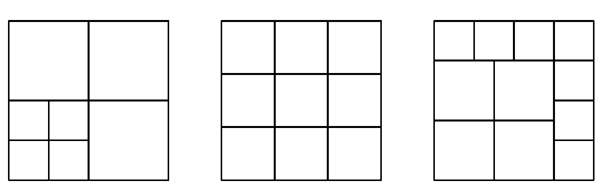
$$x_3 = x_2\sqrt{2}, \qquad x_2 + x_4 = x_3\sqrt{2}, \qquad x_3 = x_4\sqrt{2}$$

med lösning t.ex. $x_2 = x_4 = x_3 = \sqrt{2}$.

6. För $n = 4$, 6, $8, \ldots$ (n jämnt) finns lösningarna



För $n = 7$, 9, $11, \ldots$ (n udda) erhålls härav lösningar genom att en delkvadrat delas i fyra mindre



Det återstår n-värdena 2, 3 och 5. Vi ska visa att det för dessa inte finns någon indelning i n delkvadrater. Då de kvadrater som ligger i hörnen av den givna kvadraten måste vara olika utesluts värdena 2 och 3. Att indelning i 5 delkvadrater är omöjlig inses exempelvis på följande sätt. Vid indelning av den givna kvadraten i delkvadrater delas varje sida i mindre delar. Om $n = 5$ måste minst tre av sidorna delas i exakt två delar. Ta tre sådana och betrakta den sida som ligger mellan de båda andra. De två kvadrater som når denna sida måste vardera ha sidan = halva den givna kvadratens sida, då annars en av de intillliggande sidorna skulle behöva delas i fler än två delar. Då de intilliggande sidorna också delas i två delar får vi fyra delkvadrater med sidan = halva den givna kvadratens sida. Dessa täcker emellertid hela den givna kvadraten och någon femte delkvadrat kan inte placeras in.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner