Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 18 november 1989

1. Låt n vara ett positivt heltal. Visa att talen $n^2(n^2+2)^2$ och $n^4(n^2+2)^2$ i basen n^2+1 skrivs med samma siffror fast i motsatt ordning.

2. Bestäm alla kontinuerliga funktioner f, sådana att $f(x)+f(x^2)=0$ för alla reella tal x.

3. För vilka positiva heltal n är $n^3-18n^2+115n-391$ kuben på ett positivt heltal?

4. Låt $ABCD$ vara en regelbunden tetraeder. Var på kanten BD ska punkten P väljas så att kanten CD tangerar sfären med diametern AP?

5. Antag att $x_1,\cdots,x_5$ är positiva reella tal sådana att $x_1<x_2$ och x_3, x_4, x_5 alla är större än x_2. Visa att om $\alpha>0$ så gäller

$$\frac{1}{(x_1+x_3)^\alpha}+\frac{1}{(x_2+x_4)^\alpha}+\frac{1}{(x_2+x_5)^\alpha}$$
$$<\frac{1}{(x_1+x_2)^\alpha}+\frac{1}{(x_2+x_3)^\alpha}+\frac{1}{(x_4+x_5)^\alpha}.$$

6. På en cirkel väljs $4n$ punkter, $n\geq 1$, och varannan färgas gul, varannan blå. De gula punkterna delas i n par och punkterna i varje par förbinds med en gulfärgad sträcka. På samma sätt delas de blå punkterna i n par och punkterna i varje par förbinds med en blåfärgad sträcka. Antag att genom varje punkt i det inre av cirkeln går högst två sträckor. Visa att det finns minst n skärningspunkter mellan blå och gula sträckor.