Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 17 november 1990

1. De positiva delarna till talet n=1990! är $d_1, d_2, \cdots, d_k$. Visa att

$$\frac{d_1}{\sqrt{n}} + \frac{d_2}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{d_k}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{d_1} + \frac{\sqrt{n}}{d_2} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{d_k}.$$

2. Punkterna $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$ ligger, i denna ordning, på en rät linje och $|A_k A_{k+1}| = k$ för $k = 1, 2, \cdots, 2n-1$. Punkten P på linjen är så belägen att summan $\sum_{k=1}^{2n} |PA_k|$ är så liten som möjligt. Bestäm denna summa.

3. Talen a och b är sådana att

$$\sin x + \sin a \geq b \cos x \qquad \text{för alla } x.$$

   Bestäm a och b.

4. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Bisektriserna till fyrhörningens vinklar vid A och B skär varandra i punkten E. Parallellt med sidan CD dras genom E en linje som skär AD i L och BC i M. Visa att $|LA| + |MB| = |LM|$.

5. Finn alla (ej nödvändigtvis strängt) monotona, positiva funktioner f som är definierade för alla positiva reella tal och som uppfyller

$$f(x \cdot y) \cdot f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1 \quad \text{för alla} \quad x > 0,\ y > 0.$$

6. Bestäm alla positiva heltal x och y sådana att $y \leq 500$ och

$$\frac{117}{158} > \frac{x}{y} > \frac{97}{131}\ .$$