Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 22 november 1986

1. För $x < 0$ är alla termer i polynomet positiva, varför polynomet då är positivt. Polynomet kan skrivas
$$(x-1)(x^5+x^3+x)+\frac{3}{4}$$
varav framgår att det är positivt för $x > 1$. För att visa detta även för $0 \le x < 1$ har vi att visa en olikhet som kan skrivas
$$x(1-x)(x^4+x^2+1) < \frac{3}{4}.$$
Men denna följer från att $x(1-x)$ har sitt största värde (för $x = \frac{1}{2}$) och att $x^4 + x^2 + 1 < 3$ för dessa x-värden.

2. Vi inför beteckningar för längderna:
$$a = OA, b = OB, c = OC, d = OD$$
och låter v vara vinkeln AOB. Då är
$$S_1 = \frac{1}{2}ab\sin v \qquad S_2 = \frac{1}{2}cd\sin v$$
$$S = \frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\sin v$$
Vi har därför att visa att
$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \le \sqrt{ab+bc+cd+da}.$$
Detta är ekvivalent med
$$\begin{aligned} ab+cd+2\sqrt{abcd} &\le ab+bc+cd+da \\ 2\sqrt{abcd} &\le bc+da \end{aligned}$$
Men denna olikhet följer från
$$(\sqrt{bc}-\sqrt{da})^2 \ge 0$$
Likhet råder då och endast då $bc = ad$, dvs $a/b = c/d$. Då är trianglarna AOB och COD likformiga och linjerna AB och CD parallella.

3. Betrakta paren (a, b) med $b/a < 2$. Samordna varje sådant par med paret (a_1, b) där $a_1 = b - a$. Eftersom $b/a < 2$ följer $a/b > 1/2$, $a_1/b = 1 - a/b < 1/2$, $b/a > 2$. Då varje par (a_1, b) med $b/a > 2$ kan erhållas på detta sätt från ett par (a, b) med $b/a < 2$ är påståendet i uppgiften visat.

4. Låt x, y, z vara en positiv lösning. Antag först att $x \ge 1$, $y \ge 1$. Då är $x^2 + y^3 \ge x + y^2$ så att första och tredje ekvationerna ger $z \le z^3$ och därmed även $z \ge 1$. Men exempelvis första ekvationen visar att $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$ endast kan inträffa för $x = y = z = 1$. Antag därefter att $x \le 1$, $y \le 1$. Resonemanget ovan upprepas med alla olikhetstecken omkastade. Man får $z \le 1$ så att åter $x = y = z = 1$ är enda möjligheten.

5. Betrakta de två första kolumnerna och låt b resp c vara de tal som efter omordningen står i dessa kolumner i den k-te raden. Det finns då i första kolumnen minst k tal som är $\ge b$. I ursprungliga läget svarar dessa k tal mot k element i den andra kolumnen som alla måste vara $\ge b - d$. Andra kolumnen har alltså minst k tal som är $\ge b-d$, varav följer $c \ge b-d$. Genom att låta första och andra kolumnerna byta roll i ovanstående resonemang visar vi $b \ge c-d$. Vi har alltså $|b-c| \le d$. Då samma resonemang kan göras för två godtyckliga kolumner följer påståendet.

6. För enkelhets skull uppfattar vi de täckande intervallen som slutna; att lägga till ändpunkterna ändrar inte deras längder. Reducera mängden av täckande intervall om möjligt genom att ta bort ett intervall sådant att de övriga täcker [0, 1]. Fortsätt med detta tills sådan reduktion inte längre är möjlig. De täckande intervallen måste nu ha olika vänsterändpunkter. Kalla intervallen $[a_i, b_i]$ med $a_1 < a_2 < \cdots$ Då måste även $b_1 < b_2 < \cdots$ eftersom $b_i \geq b_{i+1}$ skulle medföra att $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ vore ett delintervall av $[a_i, b_i]$ i strid mot reduktionen. Vidare måste alltid $b_i < a_{i+2}$ då annars unionen av $[a_i, b_i]$ och $[a_{i+2}, b_{i+2}]$ skulle innehålla $[a_{i+1}, b_{i+1}]$. Alltså består intervallen $[a_i, b_i]$ med udda i av idel disjunkta intervall och likaså intervallen $[a_i, b_i]$ med jämna i. Men en av dessa samlingar måste ha en sammanlagd längd som är $\geq 1/2$.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner