Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 11 oktober 1973

1. Sätt silvertrådens längd $= a$, cirkelns radie $= x$ och kvadratens sida $= y$. Då måste $2\pi x + 4y = a$. Arean är
$$A = \pi x^2 + y^2 = \pi x^2 + \frac{1}{16}(a - 2\pi x)^2 .$$
Villkoren $x > 0$, $y > 0$ innebär $0 < x < a/2\pi$.
$$\frac{dA}{dx} = 2\pi x + \frac{1}{8}(a - 2\pi x)(-2\pi) = \frac{\pi}{4}(8x + 2\pi x - a).$$
Alltså är $\frac{dA}{dx} = 0$ för värdet $\frac{a}{8+2\pi}$, $\frac{dA}{dx} < 0$ för x mindre än detta värde och $\frac{dA}{dx} > 0$ för x större än detta värde. Talet $x = \frac{a}{8+2\pi}$ ligger i det intervall vi har att betrakta. Alltså är arean minimal då $x = \frac{a}{8+2\pi}$. Då är $y = \frac{2a}{8+2\pi}$ och därför det sökta förhållandet $\frac{2x}{y} = 1$.

2. Det finns två alternativ: a) ett av facken får tre föremål, de båda övriga var sitt, b) två fack får två föremål var, det tredje ett föremål. Om tre föremål ska läggas i A kan föremålet i B vara vilket som helst av de 5 föremålen och föremålet i C vilket som helst av de 4 återstående. Det finns alltså 20 sådana möjligheter. Det finns också 20 möjligheter med tre föremål i B och 20 med tre föremål i C. Totala antalet möjligheter enligt alternativ a) är därför 60. Om A och B får vardera två föremål kan föremålet i C vara vilket som helst av de 5 föremålen och de i B vilka två som helst av de övriga fyra; dessa två kan väljas på 6 sätt. Vi får alltså 30 möjligheter med två föremål i vardera A och B. Likaså har vi 30 möjligheter med två föremål i vardera A och C resp. med två föremål i vardera B och C. Totala antalet enligt b) blir alltså 90. Svaret blir därmed 60+90 möjligheter.
Alternativ metod. Om man tillåter tomma fack har man $3^5 = 243$ möjligheter. Det finns 3 möjligheter med två tomma fack och $3(2^5 - 2)$ möjligheter met ett fack tomt. Svaret blir därför 243-(3+90)=150.

3. **Metod 1.** Anta att x är en lösning. Ta kuben av båda leden och använd formeln $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Man får
$$(60 - x) + (x - 11) + 3\sqrt[3]{(60-x)(x-11)}\,\sqrt[3]{4} = 4 \qquad (1)$$
vilket kan förenklas till
$$\sqrt[3]{4(60-x)(x-11)} = -15.$$
Tar man kuben på båda leden får man efter förenklingar
$$x^2 - 71x - \frac{735}{4} = 0$$
med lösningarna
$$x_1 = \frac{147}{2} \qquad x_2 = -\frac{5}{2}.$$
Då steget från den givna ekvationen till ekvationen (1) inte är omvändbart måste en prövning göras av de erhållna värdena för att se att de satisfierar den givna ekvationen. Man får för båda x-värdena att vänstra ledet i den givna ekvationen blir
$$\sqrt[3]{-\frac{27}{2}} + \sqrt[3]{\frac{125}{2}}$$
vilket är $= \sqrt[3]{4}$.
Anmärkning. Att prövning verkligen behövs kan inses genom följande exempel: Löser man ekvationen $\sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{x-1} = -\sqrt[3]{2}$ enligt samma metod får man den falska roten $x = 3$.

Metod 2. Sätt $a = \sqrt[3]{60-x}$, $b = \sqrt[3]{x-11}$. Man har att lösa

$$\begin{aligned} a^3 &= 60 - x \\ b^3 &= x - 11 \\ a + b &= \sqrt[3]{4} \end{aligned} .$$

Eliminera x ur de två första ekvationerna och utnyttja $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Man får att lösa

$$\begin{aligned} a + b &= \sqrt[3]{4} \\ a^2 - ab + b^2 &= 49/\sqrt[3]{4} \end{aligned} .$$

Kvadrerar man den första ekvationen får man med hjälp av den andra att $ab = -15/\sqrt[3]{4}$. Storheterna a och b ska alltså satisfiera

$$t^2 - \sqrt[3]{4}t - 15/\sqrt[3]{4} = 0$$

med lösningarna

$$t_1 = \frac{5}{2}\sqrt[3]{4} \qquad t_2 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}.$$

Sätter man $a = t_1$, $b = t_2$ får man $x = -5/2$, sätter man $a = t_2$, $b = t_1$ får man $x = 147/2$. I denna lösningsmetod är kalkylerna omvändbara varför prövning inte är obligatorisk (men kan likväl vara motiverad för kontroll av kalkylerna).

4. Låt d vara en positiv heltalsfaktor till både $2n^2 + n + 1$ och $8n^2 + 2n + 1$. Då får man successivt:

$$\begin{array}{ll} d & \text{är heltalsfaktor till } 4(2n^2 + n + 1) - (8n^2 + 2n + 1) = 2n + 3 \\ d & \text{är heltalsfaktor till } n(2n + 3) - (2n^2 + n + 1) = 2n - 1 \\ d & \text{är heltalsfaktor till } 2n + 3 - (2n - 1) = 4 \end{array}$$

Eftersom $8n^2 + 2n + 1$ är udda måste därför $d = 1$.

5. Talet $x = (\sqrt{p} - \sqrt{q})/(\sqrt{p} + \sqrt{q})$ ska satisfiera en ekvation $Ax^2 + Bx + C = 0$ med heltals koefficienter A, B, C. Insättning ger

$$A(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 + B(\sqrt{p} - \sqrt{q})(\sqrt{p} + \sqrt{q}) + C(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 = 0$$

$$A(p + q) + B(p - q) + C(p + q) + 2(C - A)\sqrt{pq} = 0. \tag{1}$$

Alltså ska $2(C - A)\sqrt{pq}$ vara ett heltal. Vi får två fall.

I. $\sqrt{pq}$ är inte rationell, speciellt är $p \neq q$. Då måste $A = C$. Ekvationen (1) blir

$$2A(p + q) + B(p - q) = 0$$

. Härav $B = -\dfrac{p+q}{p-q}\,2A$ och andragradsekvationen blir

$$A\left(x^2 - 2\,\frac{p+q}{p-q}x + 1\right) = 0.$$

Ekvationen får heltalskoefficienter om A väljs som em multipel av $p - q$. Eftersom produkten av ekvationens rötter är = 1, måste den andra roten vara

$$\frac{p-q}{p+q}.$$

II. $\sqrt{pq}$ är rationell (i själva verket måste $\sqrt{pq}$ då vara ett heltal). Genom att skriva $x = (\sqrt{pq} - q)/(\sqrt{pq} + q)$ ser vi att x är rationell, säg $x = a/b$ (a, b heltal, $b \neq 0$). Eftersom summan av rötterna är $-B/A$ måste då även den andra roten vara rationell. Å andra sidan kan den vara ett godtyckligt rationellt tal c/d (c, d heltal, $d \neq 0$) ty $x = a/b$ satisfierar andragradsekvationen $(bx - a)(dx - c) = 0$.

6. Låt f_1 och f_2 vara två funktioner som uppfyller villkoren och är lika med varandra i alla randpunkter. Bilda $g(P) = f_1(P) - f_2(P)$. Vi har då $g(P) = 0$ i alla randpunkter och har att visa att detta gäller även i det inre. Av den givna likheten tillämpad på f_1 och f_2 följer

$$g(P) = \frac{1}{4}\left(g(P_1) + g(P_2) + g(P_3) + g(P_4)\right).$$

Låt P_0 vara en punkt i vilken $g(P)$ är maximal. Om P_0 är en randpunkt får vi omedelbart $g_{\max} = 0$. om P_0 är en inre punkt har vi

$$4g(P_0) = g(P_1) + \cdots + g(P_4)$$

$$g(P_0) \geq g(P_1), \ldots, g(P_0) \geq g(P_4).$$

Härav följer att $g(P_0) = g(P_1), \ldots, g(P_0) = g(P_4)$. Speciellt är alltså $g(P)$ maximal även i punkten närmast ovanför P_0. Upprepas resonemanget får vi att $g(P)$ är maximal i alla punkter ovanför P_0, speciellt i randpunkten ovanför P_0. Alltså är $g_{\max} = 0$ även i detta fall. På motsvarande sätt visas att $g_{\min} = 0$. Alltså är $g(P) = 0$ i alla punkter.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner