Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 15 oktober 1970

1. Varje positivt heltal n kan skrivas i någon av formerna $3z$, $3z+1$, $3z+2$, där z är ett heltal > 0. Sätt i de tre fallen:

   a) $n = 3z = 3z + 5 \cdot 0$

   b) $n = 3z + 1 = 3(z-3) + 5 \cdot 2$

   c) $n = 3z + 2 = 3(z-1) + 5 \cdot 1$.

   Talet n blir därvid skrivet i formen $3x + 5y$ med x och y heltal, $y \geq 0$. För $n > 7$ blir i de tre fallen:

   a) $n = 9, 12, \ldots$ så att $z \geq 3$, $x > 0$,

   b) $n = 10, 13 \ldots$, så att $z \geq 3$, $x \geq 0$,

   c) $n = 8, 11, \ldots$ så att $z \geq 2$, $x \geq 1$.

   Vi får alltså alltid $x \geq 0$.

2. Ett tal x som i 2-systemet (= binära systemet) kräver n siffror satisfierar

   $$2^{n-1} \leq x < 2^n$$

   (jämför med att i 10-systemet exempelvis ett tresiffrigt tal x satisfierar $10^2 \leq x < 10^3$). Vi söker därför ett n sådant att

   $$2^{n-1} \leq 10^{100} < 2^n.$$

   Ta 10-logaritmer:

   $$(n-1)\lg 2 \leq 100 < n \lg 2$$

   $$n - 1 \leq \frac{100}{\lg 2} < n.$$

   Eftersom $332 < 100/\lg 2 < 333$ får man $n = 333$.
   (Om man exempelvis från tabell vet att $0,3009 < \lg 2 < 0,3011$, har man att konstatera att

   $$332 < \frac{100}{0,3011}, \qquad \frac{100}{0,3009} < 333 \text{)}$$

3. Använd beteckningarna i figuren. Addera summorna för de båda diagonalerna, den mittersta raden och den mittersta kolumnen:

   $$\begin{array}{ccccccc} s & = & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ s & = & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ s & = & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ & \nearrow & \parallel & \parallel & \parallel & \nwarrow & \\ s & & s & s & s & & s \end{array}$$

   $$\begin{aligned} 4s &= (a_1 + b_2 + c_3) + (c_1 + b_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) + (a_2 + b_2 + c_2) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) + (c_1 + c_2 + c_3) + 3b_2 \\ &= 3s + 3b_2 \end{aligned}$$

   Alltså är $s = 3b_2$.

4. **Metod 1.** $P(0) = a$, $P'(x) = (x-1)(x-a)$. I varje intervall där P' har konstant tecken är P strängt monoton och kan ha högst ett (enkelt) nollställe.
   För $a \leq 0$ är $P(0) \leq 0$ och P avtagande i $[0, 1]$ (eftersom $P'(x) < 0$ där) varför nollställe saknas i detta intervall. I $[1, \infty[$ är P strängt växande och har högst ett nollställe.
   För $a > 0$, $P(0) > 0$ och P växande i intervallet från 0 till det minsta av a och 1. Mellan a och 1

är P strängt monoton liksom för värden större än både a och 1, varför P har högst ett nollställe i vardera av dessa områden och därför högst två positiva nollställen.

Anmärkning. Ett eventuellt multipelt nollställe är även nollställe till P' och måste vara 1 eller a. Räknar man multipla nollställen med multiplicitet har man att undersöka:

1) $P(1) = 0$, $P'(1) = 0$ ger $a = 1/9 < 1$. $P(0) = a > 0$. P är växande i $[O, a]$, avtagande i $[a, 1]$ och växande i $[1, \infty[$ varför inget tredje nollställe föreligger.

2) $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$ ger $a = (3 + \sqrt{33})/2 > 1$. $P(0) = a > 0$. P är växande i $[0, 1]$, avtagande i $[1, a]$ och växande i $[a, \infty[$, varför inte heller nu något tredje nollställe föreligger.

Metod 2. Ett tredjegradspolynom kan inte ha mera än tre reella nollställen.

För $a \geq 0$ är $P(0) \geq 0$ och eftersom $P(x)$ är negativt för stora negativa x-värden, har P ett nollställe som är < 0. P kan därför inte ha tre positiva nollställen.

För $a < 0$ har P' endast ett positivt nollställe. Mellan två nollställen till P måste emellertid ligga ett nollställe till P' varför P inte kan ha tre positiva nollställen.

5. Sätt $|AE| = a$, $|AP_0| = x_0$. Då är $|P_2B| = |P_0E| = a - x_0$. Sätt $|BP_3| = x_1$. Ur triangeln P_2BP_3 erhålls dels $x_1 < a$, dels $a < (a - x_0) + x_1$. Alltså är $x_0 < x_1 < a$. Punkterna P_4 och P_5 ligger därför på BC och P_6 på CD. Sätt $|CP_6| = x_2$. Med hjälp av triangeln P_5CP_6 får vi $x_1 < x_2 < a$. Resonemanget kan fortsättas. Kallar vi $|DP_9| = x_3$, $|AP_{12}| = x_4$ får vi $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < a$. Speciellt är $x_0 < x_4 < a$ dvs $|AP_0| < |AP_{12}| < |AE|$. Upprepar vi resonemanget inser vi att nästa punkt på sträckan AE är P_{24} med $|AP_{12}| < |AP_{24}|$. För de successiva punkterna som faller på sträckan AE blir alltså avståndet till A allt större. Någon punkt P_i, $i > 0$ kan aldrig sammanfalla med P_0.

6. Håll en av vinklarna fast exempelvis C och variera de båda övriga. Eftersom $A + B = 180° - C$, är då också $A + B$ fast. Summan $\cos A + \cos B$ blir större ju mindre skillnaden är mellan A och B. Detta kan fås ur formeln
$$\cos A + \cos B = 2\,\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
eftersom $\cos\dfrac{A+B}{2} > 0$ och $\cos\dfrac{A-B}{2}$ blir större ju mindre $|A - B|$ är.
Maximum av $\cos A + \cos B + \cos C$ bör därför uppnås då alla vinklarna A, B, C är lika, dvs är $= 60°$. För att få ett strängt bevis för detta kan man resonera så: I varje triangel där inte alla vinklarna är $60°$ finns (minst) en vinkel $< 60°$ och (minst) en vinkel $> 60°$. Håll den tredje vinkeln fast och ändra triangeln genom att närma de båda första vinklarna varandra tills en av dem är $60°$. Håll denna fast och närma de två övriga varandra tills båda är $60°$. Under denna procedur ökar $\cos A + \cos B + \cos C$ varför för en godtycklig triangel måste gälla
$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 3\cos 60° = \frac{3}{2}.$$
På motsvarande sätt erhåller man genom att variera de två vinklarna A och B från varandra (och hålla C fast) att
$$\cos A + \cos B > \cos 0 + \cos(A + B) = 1 + \cos(A + B).$$
Då $\cos(A + B) = -\cos C$ följer olikheten
$$\cos A + \cos B + \cos C > 1.$$

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner