Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 7 oktober 1976

1. Om radien i en flaska är r, är längden av backens insida $2nr$. Första raden av flaskor har sina medelpunkter på avståndet r från väggen. För varje ny rad ökar avståndet med höjden i en liksidig triangel med sidan $2r$ dvs med $r\sqrt{3}$. Om $n+1$ rader får rum har sista radens medelpunkter därför avståndet $r+nr\sqrt{3}$ till samma vägg. För att denna rad av flaskor ska få rum fordras

$$r+nr\sqrt{3}+r\leq 2nr$$

$$n\geq \frac{2}{2-\sqrt{3}}=4+2\sqrt{3}.$$

Då $7<4+2\sqrt{3}<8$ måste n vara >8. Med $n=8$ får man alltså plats med 9 rader varav 5 rader med 8 flaskor och 4 rader med 7 flaskor, totalt 68 flaskor. Detta är mer än $n^2=64$ flaskor.

2. Anta att x satisfierar

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c.$$

Då är

$$x+a\sqrt{x}+b=\left(c-\sqrt{x}\right)^2$$
$$(a+2c)\sqrt{x}=c^2-b.$$

För att denna likhet ska vara uppfylld för flera olika x-värden krävs $a+2c=0$, $c^2-b=0$. Med $a=-2c$, $b=c^2$ kan den givna ekvationen skrivas

$$\sqrt{\left(\sqrt{x}-c\right)^2}=c-\sqrt{x}.$$

Denna satisficras av alla x för vilka $c-\sqrt{x}\geq 0$. Det finns oändligt många sådana x om och endast om $c>0$.
Svar: $a=-2c$, $b=c^2$, $c>0$

3.

$$1!=1,2!=2,3!=6,4!=24,5!=120,\ldots$$

Härav

$$1!+2!+3!+4!=33$$
$$1!+2!+3!+4!+5!=153.$$

För $n\geq 5$ är $n!$ delbart med 2 och 5 och måste därför ha entalssiffran 0. För $n\geq 4$ har därför talet $1!+\cdots+n!$ entalssiffran 3. Ett tal med entalssiffran 3 kan inte vara kvadraten på ett heltal.

4. Undersök vilka polynom

$$P(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

som kan skrivas

$$(x^2+ax+b)^2+c=x^4+2ax^3+(a^2+2b)x^2+2abx+b^2+c.$$

Vi får villkoret att

$$A=2a$$
$$B=a^2+2b$$
$$C=2ab$$
$$D=b^2+c$$

skall kunna lösas i a, b och c. Första andra och fjärde ekvationerna ger

$$a = \frac{A}{2} \qquad b = \frac{B}{2} - \frac{A^2}{8} \qquad c = D - b^2.$$

Villkoret blir att tredje ekvationen skall vara uppfylld för dessa värden:

$$C = 2\frac{A}{2}\frac{4B - A^2}{2}$$
$$8C = 4AB - A^3. \tag{1}$$

Å andra sidan är

$$P'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx + C$$
$$P'''(x) = 24x + 6A.$$

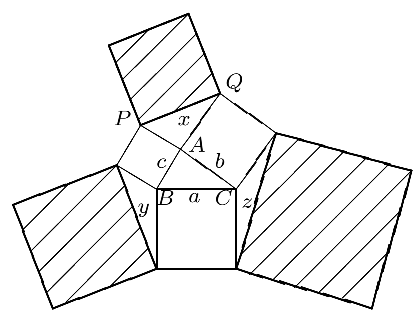
$P'''(x)$ har enda nollstället $x = -A/4$. Detta är nollställe även till $P'(x)$ om

$$4\left(-\frac{A}{4}\right)^3 + 3A\left(-\frac{A}{4}\right)^2 + 2B\left(-\frac{A}{4}\right) + C = 0$$

vilket lätt förenklas till villkoret (1).

5. Låt den innersta triangeln vara ABC med sidorna a, b, c och vinklar A, B, C. De yttre kvadraterna har sidor x, y, z resp. (se fig.). Då vinkeln PAQ är $180° - A$ ger cos-satsen på trianglarna APQ och ABC

$$x^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$



Alltså är

$$x^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2.$$

Likaså

$$y^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$$
$$z^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Härav

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2.$$

Det sökta förhållandet är alltså 3.

6. Efter logaritmering kan ekvationen skrivas

$$a\ln x = x\ln a$$
$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}.$$

Eftersom $a > 1$ är högra ledet > 0. Vänstra ledet är ≤ 0 för $0 < x < 1$, varför vi endast behöver betrakta $x > 1$.

$$y = \frac{\ln x}{x} \qquad y' = \frac{1}{x^2}\left(1 - \ln x\right).$$

$y' > 0$ då $\ln x < 1$, $x < e$ och $y' < 0$ då $\ln x > 1$, $x > e$. Alltså har kurvan $y = \dfrac{\ln x}{x}$ en max.-punkt för $x = e$. För $x \to 1$ och $x \to \infty$ går y mot 0. För varje $a > 1$ med $a \neq$ e finns därför förutom $x = a$ ett ytterligare a-värde med samma funktionsvärde.

Svar: $a = e$

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner