# Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet        Svenska Matematikersamfundet

**Final den 19 november 1978**

1. Låt $a > b > c > d \geq 0$ vara reella tal sådana att $a + d = b + c$. Visa att

$$x^a + x^d \geq x^b + x^c \qquad \text{för } x > 0.$$

2. Beräkna summan

$$6 + 66 + 666 + \cdots + \underbrace{666\ldots6}_{n \text{ stycken sexor}}.$$

3. Två satelliter cirklar runt jorden i ekvatorplanet på höjden $h$ över jordytan. Deras inbördes avstånd är hela tiden $2r$, där $r$ är jordradien. För vilka värden på $h$ finns det i varje ögonblick minst en punkt på ekvatorn från vilken de båda satelliterna kan ses samtidigt och med en synvinkel på $90°$?

4. En följd $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ av reella tal kallas konvex om

$$2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1} \qquad \text{för alla } n \geq 1.$$

   Låt $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ vara en följd av positiva tal och antag att följden $b_0, cb_1, c^2b_2, \ldots c^nb_n, \ldots$ är konvex för varje $c > 0$. Visa att följden

$$\ln b_0, \ln b_1, \ln b_2, \ln b_3, \ldots$$

   är konvex.

5. Låt $k$ vara ett fixt heltal, $k \geq 2$. Man studerar för olika $n$-värden uppdelningar av mängden $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ i $k$ parvis disjunkta delmängder (disjunkt = utan gemensamt element). Om $n$ är tillräckligt stort kan man garantera att det för varje sådan uppdelning i $k$ delmängder går att finna två tal $a$ och $b$ ($a \neq b$) sådana att $a$ ligger i sanma delmängd som $b$ och $a + 1$ ligger i samma delmängd som $b + 1$. Visa detta och bestäm det minsta $n$ med denna egenskap.

6. Polynomen

$$P(x) = cx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

$$Q(x) = cx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$$

   med $c \neq 0$ satisfierar identiteten

$$P(x)^2 = (x^2 - 1)Q(x)^2 + 1.$$

   Visa att

$$P'(x) = nQ(x).$$