Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 28 november 1965

1. ABC är en spetsvinklig triangel. Fotpunkten till höjderna mot BC, CA och AB kallas A', B' resp. C'. Uttryck vinklarna i triangeln i $A'B'C'$ med hjälp av vinklarna i triangeln ABC. Visa därefter att den största vinkeln i $A'B'C'$ är $\geq$ den största vinkeln i ABC. Hur skall ABC vara beskaffad för att likhet skall gälla?

2. Bestäm alla par av naturliga tal x och y sådana att

$$x^3 - y^3 = 999.$$

   Bevis erfordras för att man funnit alla lösningar.

3. Visa att det för varje $x \geq 1/2$ finns ett heltal n så att $|x - n^2| \leq \sqrt{x - 1/4}$.

4. Visa att det finns konstanter A och B så att $A > B$ och så att

$$\frac{f(1/(1+2x))}{f(x)}$$

   är oberoende av x om f definieras genom relationen

$$f(t) = \frac{1 + At}{1 + Bt}$$

   för alla $t \neq -1/B$.
   Betrakta därefter talen a_n, som definieras genom att $a_0 = 1$ och

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + 2a_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   Försök genom att i stället studera talen $f(a_0)$, $f(a_1)$, $f(a_2)$, $\ldots$ bestämma värdet av a_n för godtyckligt n.

5. Betrakta alla reella polynom $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, sådana att $|f(x)| \leq 1$, då $-1 \leq x \leq 1$. Visa att det finns ett tal $M < \infty$ så att $|a_3| \leq M$ för alla sådana polynom. Försök att bestämma så lågt värde som möjligt på M.