# Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet  Svenska Matematikersamfundet

**Lösningar till finaltävlingen den 21 november 1987**

1. Låt $h$ vara summan av talen i hörnen, $m$ summan av de fyra talen i mitten och $s$ summan av de övriga talen. Summeras de fyra horisontella raderna får man

$$h + m + s = 4k.$$

Summeras de båda diagonalerna får man

$$h + m = 2k.$$

Summeras de fyra horisontella och vertikala yttre raderna får man

$$2h + s = 4k.$$

De båda första likheterna ger $s = 2k$, sista ekvationen ger sedan $h = k$.

2. Låt $M$ vara cirkelskivans medelpunkt. Drag linjen genom $M$ och cirkelbågens medelpunkt samt den mot denna linje vinkelräta diametern i cirkelskivan. På grund av att cirkelbågen delar cirkelskivan mitt itu måste denna diameter skära cirkelbågen i två punkter $A$ och $B$. Det är nu klart att sträckan $AB$ på diametern är kortare än cirkelbågen mellan $A$ och $B$ och att de kortaste avstånden från $A$ och $B$ till cirkelskivans rand går längs diametern.

3. Varje intervall måste innehålla minst en av de 3 punkterna 1, 2 och 3. Minst en av dessa punkter måste därför ligga i 4 av intervallen.

4. Sätt

$$t = 4\int_0^1 |f(x)|dx.$$

Om $t = 0$ är $f(x) = 0$ i hela intervallet och varje $y$ duger. Antag därför $t > 0$.
Det räcker att visa att det finns två punkter $x_1$, $x_2$ sådana att

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \geq t \tag{1}$$

Ty genom att röra punkterna $x_1$ och $x_2$ ut mot intervallets ändpunkter kan man då också finna två sådana punkter att likhet råder i (1). Medelvärdessatsen ger då en punkt y med $|f'(y)| = t$.
Men om (1) aldrig skulle gälla skulle $f$:s kurva för $0 \leq x \leq 1$ ligga mellan $y \pm tx$ och mellan $y = \pm t(1 - x)$. Man skulle alltså ha

$$\begin{array}{lll} |f(x)| \leq tx & \text{för} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ |f(x)| \leq t(1-x) & \text{för} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{array}$$

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^{1/2} tx dx + \int_{1/2}^1 t(1-x)dx = \frac{t}{4}.$$

Här kan emellertid inte likhet råda eftersom $f$ då inte skulle vara deriverbar för $x = 1/2$. Denna motsägelse visar att (1) måste gälla för några punkter.

5. Kalla summan för $s$. Vi har

$$s > \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{2+a+b}{1+a+b+ab} = 1 + \frac{1-ab}{1+a+b+ab}.$$

Detta ger $s > 1$ så snart $ab < 1$. Men om $ab > 1$ så är $cd < 1$ med motsvarande resonemang. Alltså är $s > 1$.
För att se att 1 är det största möjliga talet sätt $a = b = c$, $3d = 1/a$. Då är

$$s = \frac{3}{1+a} + \frac{1}{1+(1/a^3)}.$$

Genom att välja tillräckligt stort $a$ kan vi få det första bråket godtyckligt litet och det andra bråket godtyckligt nära 1.

6. Låt $n$ vara antalet kryddor. Eftersom bagaren tar mer än $n/2$ kryddor i varje limpa tar han totalt mer än $5n$ gånger från kryddburkarna till limporna. Någon krydda måste då användas mer än 5 gånger. Kalla den $a$. Det återstår säg $k$ limpor, $k < 4$, som inte innehåller $a$. Använd samma resonemang på dessa $k$ limpor och de övriga kryddorna. Man får då en krydda $b$ sådan att de limpor som återstår är färre än $k/2$. Det finns därför högst en limpa kvar. Välj $c$ som en av dessa kryddor (eller en godtycklig krydda om ingen limpa återstår).

**Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:**

**Skolornas Matematiktävling**
**Problem 1969 - 1990**
**med lösningar utarbetade av**
**Olof Hanner**