# Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

**Kvalificeringstävling den 16 oktober 1969**

1. I en vanlig svensk skolklass var 21,7% (korrekt avrundat) av eleverna rödhåriga. Kan man med säkerhet säga hur många elever det var i klassen?

2. Hur många $n$-tupler $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i = 0$ eller 1, finns, det, så att $x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \cdots + b_nx_n$ är ett udda heltal? Talen $b_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$ är givna hela tal.

3. Visa att om $a, b$ och $c$ är reella tal sådana att $a^2+b^2+c^2 = 1$ så gäller att $-\dfrac{1}{2} \le ab+bc+ca \le 1$. Visa också att $-\dfrac{1}{2}$ och 1 är bästa möjliga, dvs. dels finns det sådana tal $a, b$ och $c$ så att $ab + bc + ca = -\dfrac{1}{2}$, dels finns det sådana att $ab + bc + ca = 1$.

4. Betrakta heltalspunkterna i planet, dvs punkterna $(p, q)$ där $p$ och $q$ är heltal. En partikel kan röra sig mellan dessa punkter, dock så att den från punkten $(p, q)$ endast kan gå till $(p + 1, q + 1)$ eller $(p + 1, q - 1)$.

   a) Ange villkor på punkterna $A = (p, q)$ och $B = (r, s)$ för att partikeln skall kunna förflytta sig från $A$ till $B$.

   b) Visa att om $qs > 0$ så är antalet vägar som partikeln kan välja för att komma från $A' = (0, -q)$ till $B = (r, s)$ lika med antalet av de vägar från $A = (0, q)$ till B som passerar någon punkt på $x$-axeln.

5. Låt $f$ vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion på $]-\infty, \infty[$ sådan att $f(x) \le 1$ på $[0, 1]$ och $f(0) = f(1) = 1$. Visa att om $f$ satisfierar

$$a(x)f''(x) + f(x) = 0,$$

   där $a(x) > 0$, så finns ett tal $y$, $0 < y < 1$, sådant att $f(y) < 0$. Visa också att villkoret $f(x) \le 1$ kan ersättas med att $f(z) \le 1$ för något tal $z$, $0 < z < 1$.

6. Påstående: Om $A$ är en punkt på stranden av en sjö, så finns det två andra punkter $B$ och $C$ på stranden, så att triangeln $ABC$ är liksidig.

   a) Visa att påståendet ej alltid är sant.

   b) Visa att påståendet alltid är sant, om man antar att sjön är strikt konvex (dvs. att varje rät linje skär stranden i högst två punkter), samt att stranden har en entydigt bestämd tangent i varje punkt.

   c) Sök visa att påståendet är sant med andra, svagare förutsättningar än de i b) givna. Förutsättningarna skall alltså, vara egenskaper hos sjön, stranden eller punkten $A$:s läge.