Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 29 november 1964

1. Av en triangel är ytan T och en vinkel v givna. Bestäm triangelns sidor så att den sida som står mot v blir så kort som möjligt.

2. Summan av ett visst antal på varandra följande naturliga tal $n, n+1, \ldots, n+m$, är 1000. Bestäm alla möjliga sådana talföljder.

3. Bestäm ett polynom med heltalskoefficienter som har

   a) talet $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ bland sina nollställen;

   b) både talet $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ och $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ bland sina nollställen.

4. n personer har sina bostäder $B_1, B_2, \ldots, B_n$ så belägna att avståndet från B_i till B_j, för alla i och j är högst 1 km. De söker en mötesplats M så att det längsta avståndet från B_i till M blir så kort som möjligt. Oberoende av läget på bostäderna B_i kan man uppskatta detta kortaste längsta avstånd L.

   a) Ange den bästa uppskattningen av L om $n=3$.

   b) Ge uppskattningar av L (ej nödvändigtvis den bästa, men uppgiften bedöms med hänsyn till hur god uppskattningen är) för $n=4$.

5. En funktion
$$f(x) = 1 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx,$$
   där $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är konstanter, är ≥ 0 för alla x. Vi söker uppskattningar av koefficienten a_1.

   a) Om $n=2$ bestäm de största och minsta värden som a_1 kan ha för sådana funktioner $f(x)$.

   b) Behandla motsvarande uppgift för andra värden på n.
   Den tävlande lämnas här frihet att behandla uppgiften efter eget val, tex. att ge uppskattningar på a_1 för $n=3$ eller 4, att ge uppskattningar som gäller för alla n, att konstruera exempel, som visar värden som kan antas. – Uppgiften 5b bör behandlas sist.