Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 14 november 1976

1. Ett antal idrottslag deltog i en serie i vilken varje lag mötte varje annat lag en gång. Oavgjorda matcher förekom inte. Varje lag blev besegrat minst en gång. Visa att det fanns tre lag A, B och C sådana att A besegrade B, B besegrade C och C besegrade A.

2. / För vilka reella tal a finns det reella tal x och y sådana att

$$\begin{cases} x = a - y^2 \\ y = a - x^2 \\ x \neq y \end{cases} .$$

3. Talen a, b och c är olika rationella tal. Visa att

$$\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2}$$

är kvadraten på ett rationellt tal.

4. I varje ruta i ett kvadratiskt rutnät (i fig. 6×6 rutor) är ett tal placerat enligt följande.

   a) Talen längs randen är alla = 0.

   b) Talen i ena diagonalen (i fig. är dessa rutor markerade $*$) är vart och ett 1 enhet större än medelvärdet (= aritmetiska mediet) av talet i rutan till vänster och talet i rutan till höger.

0	0	0	0	0	0
0	$*$				0
0		$*$			0
0			$*$		0
0				$*$	0
0	0	0	0	0	0

   c) De återstående talen är vart och ett medelvärdet av talet i rutan till vänster och talet i rutan till höger.

   Visa att b) och c) gäller om uttrycken "till vänster" och "till höger" byts ut mot "ovanför" resp. "nedanför".

5. Funktionen f är definierad på intervallet $[0, \infty[$ och har där kontinuerliga derivator. Funktionen satisfierar

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \\ (1 + f(x))f''(x) = 1 + x \text{ för } x \geq 0 \end{cases}$$

   Visa att f är växande i $[0, \infty[$ och att $f(1) \leq \dfrac{4}{3}$.

6. Visa att det endast finns ett ändligt antal positiva heltalslösningar (m, n) till

$$3^m - 1 = 2^n$$

   och bestäm dessa.