

Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet

Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 7 oktober 1982

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ xz + x + z = 14 \\ yz + y + z = 19 \end{cases}.$$

2. Om ett år skall vara skottår eller inte har bestämts på följande sätt. Varje år där året är delbart med 4 är skottår med följande undantag. De år vars årtal är delbara med 100 är skottår endast om året även är delbart med 400. Nyårsdagen (1 jan) 1982 inföll på en fredag. Kan nyårsdagen infalla på en söndag under något av åren 2000, 2100, 2200, ... (dvs då året är delbart med 100)?

3. Visa att om $x + y + z = 0$ så är

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \cdot \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7}.$$

4. Visa att

$$\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1 \quad (\text{exakt}).$$

5. Man betraktar trianglar med arean 1. Vilken area har den största kvadrat som kan inskrivas i någon av dessa (med alla fyra hörnen på triangelns sidor)?
6. Hur många rektanglar med måtten 3×5 cm kan man klippa ut ur ett papper med måtten 17×22 cm?