Skolornas Matematiktävling

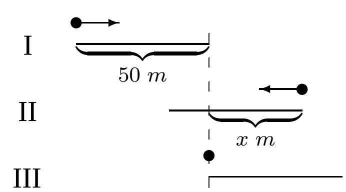
Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 16 oktober 1963

1. Ekvationen, som kan skrivas $|x| + |x - 1| = 1$, satisfieras av alla x i intervallet $0 \leq x \leq 1$ och endast dessa. Om $x < 0$, så är VL $= 1 - 2x$, och om $x > 1$ så är VL $= 2x - 1$.

2. $p - 1$, p och $p + 1$ är tre konsekutiva heltal. Av dem är $p - 1$ och $p + 1$ delbara med 2, eftersom p är ett primtal skilt från 2. Vidare är antingen $p - 1$ eller $p + 1$ delbart med 3, eftersom p är ett primtal skilt från 3. Slutligen är ett av de fyra konsekutiva heltalen $p - 1$, p, $p + 1$ och $p + 2$ delbart med 4, och eftersom p är udda måste då antingen $p - 1$ eller $p + 1$ vara delbart med 4. Det följer härav, antingen att ett av talen $p - 1$ och $p + 1$ är delbart med 2 och det andra med $3 \cdot 4 = 12$, eller att ett av de båda talen är delbart med $2 \cdot 3 = 6$, det andra med 4. 1 båda fallen är $(p - 1)(p + 1)$ delbart med $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. (Man kan alternativt visa, att $p = 12m + n$, där m är ett heltal och där $n = 1$, 5, 7 eller 11.)

3. Beteckna hundens hastighet med v, ledets hastighet med V, och låt x vara det antal meter ledet har tillryggalagt, då hunden nått fram till förste mannen i ledet (se figuren). Då har hunden sprungit $(50 + x)$ m. Alltså är $(50 + x)/x = v/V$. Medan hunden springer tillbaka x m hinner ledet gå ytterligare $(50 - x)$ m. Alltså är $x/(50 - x) = v/V$.



Av de båda ekvationerna följer det att $(50 + x)(50 - x) = x^2$, och härav får man att $x = 25 \cdot \sqrt{2}$. Hunden har då sammanlagt sprungit $(50 + 2x)$ m $= 50(1 + \sqrt{2})$ m. (Förhållandet mellan hastigheterna är sålunda $v/V = 1 + \sqrt{2}$.)

4. Sätt $u = 10^{-7} = 0,0000001$. Då är de givna talen $a = \dfrac{1 + 4u}{(1 + 6u)^2}$ och $b = \dfrac{(1 - 5u)^2}{1 - 2u}$. Alltså är

$$\frac{a}{b} = \frac{(1 + 4u)(1 - 2u)}{(1 + 6u)^2(1 - 5u)^2} = \frac{1 + 2u - 8u^2}{1 + 2u - 59u^2 + 900u^4}.$$

Men $900u^4$ är mycket mindre än $51u^2$, och därför finner vi att $a/b > 1$, d.v.s. det första av de givna talen är det största. (Om man försummar u^4-termer, så får man, att a/b är approximativt $= 1 + 51u^2$.)

5. a) Antag att föremålets vikt är a gram. Man kan då med hjälp av 1g-vikten avgöra om $a < 1$, om $a = 1$ eller om $a > 1$. Är då $a > 1$, så kan man med hjälp av 1g- och 2g-vikterna skilja mellan fallen $1 < a < 2$, $a = 2$, $2 < a < 3$, $a = 3$ och $a > 3$. Man fortsätter sedan om det behövs tills man använt alla vikterna. Eftersom vikterna sammanlagt väger $(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9)$ gram = 1023 gram, så kan man med den anvisade metoden skilja mellan fallen $0 < a < 1$, $a = 1$, $1 < a < 2$, ..., $999 < a < 1000$ och $a = 1000$. Om man då anger vikten av a i de olika fallen till resp. $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, ..., $999\frac{1}{2}$ och 1000 g, så blir felet i den angivna vikten säkert $< \frac{1}{2}$ g. (Alternativt kan man börja med de tyngsta vikterna och använda mindre och mindre vikter för att få allt noggrannare mätresultat.) Problemets lösning hänger samman med förhållandet att varje heltal mellan 0 och 1023 kan skrivas som $a_0 + a_1 2 + \cdots + a_9 2^9$, där talen a_0, a_1, ..., a_9 bara får ha värdena 0 eller 1.

   b) För att man skall kunna ange vikten på alla föremål med $0 < a \leq 1000$ med ett fel på mindre än $\frac{1}{2}$ g fordras att den minsta vikten i satsen är på ≤ 1 g. Man kan analogt visa, att de andra vikterna måste vara på mindre än 2, 4, 8, ... gram. Den på två-potenserna grundade måttsatsen är därför den som medger ett minimalt antal vikter. Men med de nio vikterna, 1, 2, ..., 2^8 kan man på det angivna sättet inte väga föremål på över $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^8 = 2^9 - 1 = 511$ gram. Det behövs alltså alltid minst tio vikter.

c) Om vikter får placeras i båda vågskålarna, så kan man successivt visa för $j = 1, 2, 3, \ldots$, att en viktsats med vikterna $1, 3, 3^2, \ldots, 3^j$ förslår för att ange vikten av alla föremål med $0 < a \leq 1 + 3 + \cdots + 3^j$ med ett fel på mindre än 1 g, och att alla andra viktsatser med samma egenskap innehåller minst lika många vikter. Men $1 + 3 + \cdots + 3^6 = 1093$, medan $1 + 3 + \cdots + 3^5 = 364$. Alltså behövs det nu minst sju vikter.
Här hänger lösningen samman med förhållandet att varje, heltal mellan 0 och $1 + 3 + \cdots + 3^j$ kan skrivas som $a_0 + a_1 3 + \cdots + a_j 3^j$, där talen $a_0, a_1, \ldots, a_j$ bara får ha värdena 0, 1 eller -1.

6. Om vi drar höjderna AG, BH och CF i en spetsvinklig triangel, så ger sidorna i triangeln FGH en möjlig strålväg, och FGH är den enda strålväg som har formen av en triangel. (Vi kallar en sådan strålväg cyklisk.) Om ABC är trubbvinklig, så finns det ingen cyklisk strålväg.

För att bevisa detta låter vi FGH beteckna en godtycklig cyklisk strålväg i triangeln ABC. Om de då uppkommande vinklarna betecknas som i fig. 1, så finner vi att vinkelsumman i triangeln FGH är

$$(180° - 2u) + (180° - 2v) + (180° - 2w)$$
$$= 180° - 2(u + v + w - 180°).$$

Alltså är $u + v + w = 180°$. Härav kan vi sluta, genom att betrakta trianglarna AFH, BGF och CHG, att $a = u$, $b = v$ och $c = w$. Eftersom $2u < 180°$ o.s.v. så måste då gälla att $a < 90°$, $b < 90°$, $c < 90°$ d.v.s. triangeln ABC måste vara spetsvinklig.

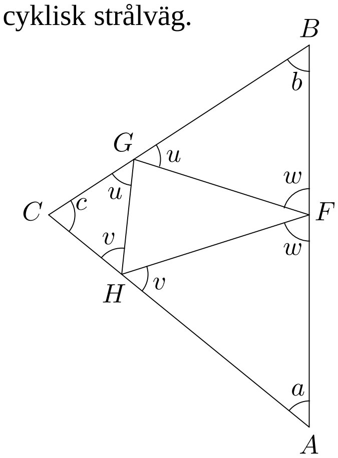


fig. 1

Vidare är alla trianglarna AHF, GHF och GHC likformiga med ABC, deras sidor är alltså px, qx och rx, py, qy och ry resp. pz, qz och rz, om sidan $BC = p$, sidan $CA = q$ och sidan $AB = r$ (fig. 2). Men då är tydligen $p = ry + qz$, $q = pz + rx$ och $r = qx + py$, varav följer att

$$q^2 + r^2 - p^2 = 2qrx,$$
$$r^2 + p^2 - q^2 = 2rpy,$$
$$p^2 + q^2 - r^2 = 2pqz.$$

En jämförelse med cosinusteoremet visar då att $x = \cos a$, $y = \cos b$, $z = \cos c$. Men då måste ju AG, BH och CF vara höjderna i triangeln ABC.

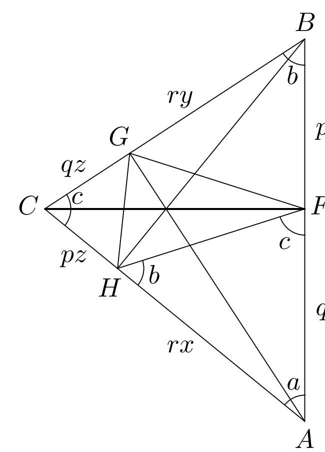
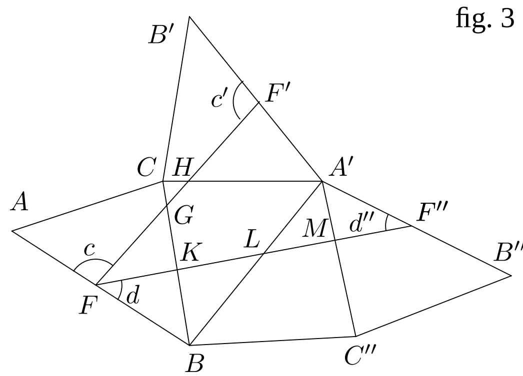


fig. 2

Vi måste slutligen visa omvändningen, att om AG, BH och CF är höjder i ABC, så är FGH en möjlig strålväg. Men om AG och BH är höjder, så är sidan $GC = q \cos c$ och sidan $CH = p \cos c$, och det följer av cosinusteoremet att kvadraten på sidan $HG = q^2 \cos^2 c + p^2 \cos^2 c - 2pq \cos^2 c \cdot \cos c = r^2 \cos^2 c$. Triangeln GHC är då likformig med ABC, och detsamma gäller för AHF och GBR. Alltså är triangeln FGH verkligen en möjlig strålväg.

fig. 3



Ett alternativt bevis kan man få genom att spegla triangeln ABC upprepade gånger i dess sidor. Om då, som i fig. 3, FF' är en rät linje från AB till "spegelbilden" $A'B'$, om $AF = A'F'$ och om $c = c'$, så är FGH en möjlig cyklisk strålväg. Det är lätt att visa att det finns högst en punkt F på AB för vilken de nämnda villkoren är uppfyllda.

Antag nu att vi vill använda fig. 3 för att konstruera en strålväg FF'' med fyra reflektionspunkter F, K, L och M. Då måste villkoren $AF = A'F''$ och $d = d''$ vara uppfyllda. Men $d = d''$ medför att linjerna AB och AB'' är parallella, och då är i sin tur vinklarna ABA' och $BA'B''$ lika, d.v.s. den ursprungliga triangel är likbent. Om nu triangeln ABC är likbent, och om FF'' är en möjlig strålväg, så ger också varje linje genom AB, parallell med FF' en möjlig strålväg. Alla dessa strålvägar är urartade fyrapunktsstrålvägar, de är i själva verket icke-cykliska trepunktsstrålvägar (fig. 4).

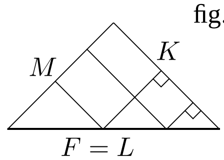


fig. 4

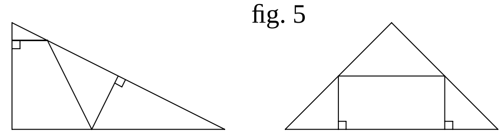


fig. 5

Egentliga fyrapunktsstrålvägar kan i speciella trianglar framställas t.ex. i form av urartade sexpunkts-strålvägar (fig. 5).

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet