# Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet    Svenska Matematikersamfundet

**Final den 16 november 1991**

1. Bestäm alla positiva heltal $m$ och $n$ sådana att

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn}=\frac{2}{5}.$$

2. Låt $x$ och $y$ vara positiva tal sådana att $x-\sqrt{x}\le y-\frac{1}{4}\le x+\sqrt{x}$. Visa att

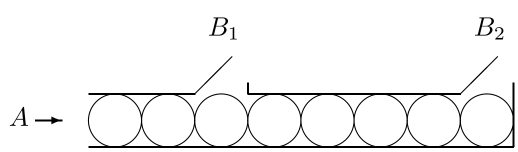
$$y-\sqrt{y}\le x-\frac{1}{4}\le y+\sqrt{y}.$$

3. Låt $n>0$ vara ett naturligt tal och definiera följden $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ genom

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_{k+1} &= \left[\frac{n-\sum_{i=0}^{k} x_i}{2}\right] \text{ för } k\ge 0, \end{aligned}$$

(där [ ] betecknar heltalsdelen). Visa att man kan finna ett naturligt tal $N$ sådant att $x_k=0$ för $k>N$ och att $\sum_{k=0}^{N} x_k = n-1$.

4. Åtta bollar numrerade från 1 till 8 finns i ett rör enligt figuren nedan.




Röret kan öppnas vid $B_1$ och $B_2$ där en boll kan plockas ut och sedan läggas tillbaka genom öppningen vid $A$. Visa att man efter en följd av omflyttningar alltid kan få bollarna i ordning 1,2,3,...,8 från $A$ räknat, oberoende av bollarnas ursprungliga ordning.

5. Visa att det finns oändligt många udda positiva tal $n$ sådana att om man skriver talen $n$ och $n^2$ i basen 2 så innehåller $n$ fler ettor än vad $n^2$ gör.

6. Antag att $T$ är en triangel med arean $S$. Visa att det finns tre punkter, en på varje sida av $T$, så att triangeln med dessa tre punkter som hörn blir liksidig och har arean högst $S/4$.