Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 8 oktober 1981

1. Visa att
$$\frac{x^3+1}{2} \geq \left(\frac{x+1}{2}\right)^3$$
för alla $x \geq 0$.

2. Bestäm alla vinklar x i intervallet $0^\circ \leq x < 360^\circ$ för vilka
$$\sin x + \cos x < \sqrt{1+\sin x \cos x}.$$

3. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} ab+ac = 2(a+b+c) \\ ac+bc = 4(a+b+c) \\ bc+ab = 8(a+b+c) \end{cases}.$$

4. I triangeln ABC är sidan BC dubbelt så lång som sidan AC. Punkten D ligger utanför triangeln på linjen genom A och B så att sträckan AD är en tredjedel av sidan AB. Visa att sträckan CD är dubbelt så lång som sträckan AD.

5. Skriv talen $1, 2, 3, \ldots, 1981$ på olika lappar. Dra två lappar slumpmässigt och ersätt dessa med en lapp på vilken differensen mellan de två talen skrivs. Upprepa proceduren tills det bara finns en lapp kvar. Är detta tal udda eller jämnt?

6. Bestäm det minsta värde som
$$\max(a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g)$$
kan anta om
$$a, b, c, d, e, f, g \geq 0 \quad \text{och} \quad a+b+c+d+e+f+g = 1.$$
(Med $\max(u, v, w, \ldots)$ menas det största av talen u, v, w, $\ldots$.)