Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 19 november 1972

1. Bestäm det minsta reella a för vilket ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 4y = 1 \\ ax + 3y = 1 \end{cases}$$

   har lösning (x, y) där x och y båda är heltal.

2. Ett rektangulärt gatunät består av m gator i nord-sydlig riktning och n gator i öst-västlig riktning. Ingen av gatorna är enkelriktad. För vilka $m \geq 2$ och $n \geq 2$ är det möjligt att köra i en sluten väg, som börjar i en av de mn gatukorsningarna och passerar en och endast en gång var och en av de övriga gatukorsningarna samt återvänder till utgångspunkten?

3. I en varm ugn sätter en kock en stek, med en köttermometer som visar $5°$. En kvart senare visar termometern $45°$. Efter ytterligare en kvart visar den $77°$. Kocken antar för enkelhets skull att hastigheten med vilken temperaturen i mätpunkten ändras är proportionell mot skillnaden mellan denna temperatur och ungstemperaturen, vilken han antar är konstant. Hur varm är ugnen?

4. Med följande metod kan man få viss information om $\lg 3$. Sätt

$$x = \lg 2 (={}^{10}\log 2) \text{ och } y = \lg 3 (={}^{10}\log 3).$$

   Logaritmering av olikheten $15 < 16$ leder till $1 - x + y < 4x$, vilket ger den linjära olikheten $1 + y < 5x$. På motsvarande sätt ger $80 < 81$ och 243¡250 två linjära olikheter. Ange dessa två olikheter. Visa att det av de tre så erhållna olikheterna följer att

$$0,470 < \lg 3 < 0,482.$$

5. Visa att

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^n} > 1 - \frac{1}{n}$$

   för alla heltal n.

6. Låt a_n och b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ vara två oändliga följder av positiva heltal. Bevisa att det finns två tal p och q, $p < q$ sådana att både

$$a_p \leq a_q \text{ och } b_p \leq b_q.$$