Högstadiets matematiktävling 2016/17
Finaltävling 21 januari 2017
Lösningsförslag

1. **Lösningsförslag:** Låt oss först titta på den sista siffran i $2 \star 0 \star 1 \star 7 \star$. Ett tal som är delbart med 2 och 5 är då också delbart med $2 \cdot 5 = 10$ (eftersom 2 och 5 är primtal). Att ett tal är delbart med 10 är samma sak som att det slutar på 0, så den sista siffran i vårt tal måste vara 0. Därmed är det bara delbarheten med 9 kvar att ta hänsyn till.

   Ett tal är delbart med 9 om och endast om dess siffersumma är delbar med 9. Låt oss döpa de tre kvarvarande siffrorna i vårt tal, så att talet är $2a0b1c70$. Siffersumman är då $2+a+0+b+1+c+7+0 = a+b+c+10$. Vid division med 9 lämnar detta samma rest som $a+b+c+1$. För att summan ska lämna rest 0 vid division med 9, måste $a+b+c$ lämna rest $9-1=8$ vid division med 9.

   Om vi väljer $a+b$ helt fritt, kan vi göra det på $10 \cdot 10 = 100$ olika sätt (alla siffror är giltiga val eftersom varken a eller b står först i talet). $a+b$ Kommer då lämna någon rest, från 0 till 9, vid division med 9. Då finns det alltid minst ett val av c som gör att hela summan $a+b+c$ lämnar rest 8 vid division med 9. Det ger alltså 100 möjliga val av a, b, c.

   När finns det fler än ett möjligt val av c? I så fall måste dessa två möjliga val, c_1 och c_2, lämna samma rest vid division med 9, eftersom $a+b+c_1$ och $a+b+c_2$ ska lämna samma rest vid division med 9. De enda två sådana siffrorna är 0 och 9. Alltså finns det två val av c om och endast om $a+b$ lämnar rest 8 vid division med 9 (och det finns aldrig fler än två möjliga val av c). Det kan hända om $a+b=8$, vilket kan ske på 9 sätt (a kan vara siffrorna 0 till 8 och $b = 8-a$), eller $a+b=17$ vilket kan ske på två sätt (antingen $a=8$ och $b=9$, eller tvärt om). För dessa 11 fall måste vi alltså lägga till ytterligare ett möjligt val av c, så totalt sett får vi $100+11=111$ möjliga val av a, b och c.

   Alltså kan man konstruera 111 tal som uppfyller kraven i uppgiften.

   Kommentar: För den som är bekväm med att räkna med kongruenser och modulo, kan lösningen ovan formuleras mycket smidigare: Vi kräver att

   $$a+b+c+10 \equiv_9 0 \Leftrightarrow a+b+c \equiv_9 8$$

   För varje fritt val av a och b, som vi kan välja på $10 \cdot 10 = 100$ sätt, krävs att

   $$c \equiv_9 8-(a+b)$$

   För varje värde på högerledet ovan, finns åtminstone en siffra c som uppfyller kongruensen. Alltså har vi direkt 100 möjliga val av a, b, c. Det finns två c som uppfyller kongruensen endast om $8-(a+b) \equiv_9 0 \Leftrightarrow a+b \equiv_9 8$, dvs $a+b=8$ eller $a+b=17$. På samma sätt som ovan kan vi se att det finns totalt 11 val av a och b som ger

$a+b \equiv_9 8$, och vi måste alltså lägga till ytterligare 11 möjliga kombinationer a, b, c. Totalt finns det alltså 111 tal som uppfyller uppgiftens krav.

Lösningsförslag 2: Vi konstaterar återigen att sista siffran måste vara 0, döper de övriga okända siffrorna som ovan, och inser återigen att $a+b+c+10$ måste lämna rest 8 vid division med 9. Eftersom $0 \leq a+b+c \leq 27$, måste $10 \leq a+b+c+10 \leq 37$, och de tal som ligger däremellan och är delbara med 9 är 18, 27 och 36. Alltså måste $a+b+c = 8$, $a+b+c = 17$ eller $a+b+c = 26$. Kom ihåg att för varje uppsättning värden på a, b och c vi hittar, är alla möjliga omordningar av dem också en lösning, eftersom ordningen av siffrorna inte påverkar om vårt tal är delbart med 9 eller inte. Varje uppsättning värden kan då ge flera varianter som är giltiga lösningar.

För $a+b+c = 8$ finns följande möjligheter:

$8+0+0$	3 varianter
$7+1+0$	6 varianter
$6+1+1$	3 varianter
$6+2+0$	6 varianter
$5+3+0$	6 varianter
$5+2+1$	6 varianter
$4+4+0$	3 varianter
$4+3+1$	6 varianter
$4+2+2$	3 varianter
$3+3+2$	3 varianter

För $a+b+c = 17$ finns följande möjligheter:

$9+8+0$	6 varianter
$9+7+1$	6 varianter
$9+6+2$	6 varianter
$9+5+3$	6 varianter
$9+4+4$	3 varianter
$8+8+1$	3 varianter
$8+7+2$	6 varianter
$8+6+3$	6 varianter
$8+5+4$	6 varianter
$7+7+3$	3 varianter
$7+6+4$	6 varianter
$7+5+5$	3 varianter
$6+6+5$	3 varianter

För $a+b+c = 26$ finns slutligen bara de tre blandningarna av $9+9+8$.

Totalt blir detta 111 möjligheter, och det finns alltså 111 tal som uppfyller kraven i uppgiften.

Kommentar: Denna variant av lösningen är krånglig att få helt rätt, eftersom det är lätt att glömma ett eller flera fall, utan att det märks att svaret blir fel. Ett systematiskt sätt att gå igenom alla möjligheter exakt en gång är viktigt att ha.

Svar: 111 möjliga tal.

2. **Lösningsförslag:** Låt $\angle ABC = \angle ACB = x$. Låt $\angle BDE = \angle BED = y$. Då är:

$$\angle BPD = 180 - x - y$$

$$\angle DBE = 180 - 2y$$

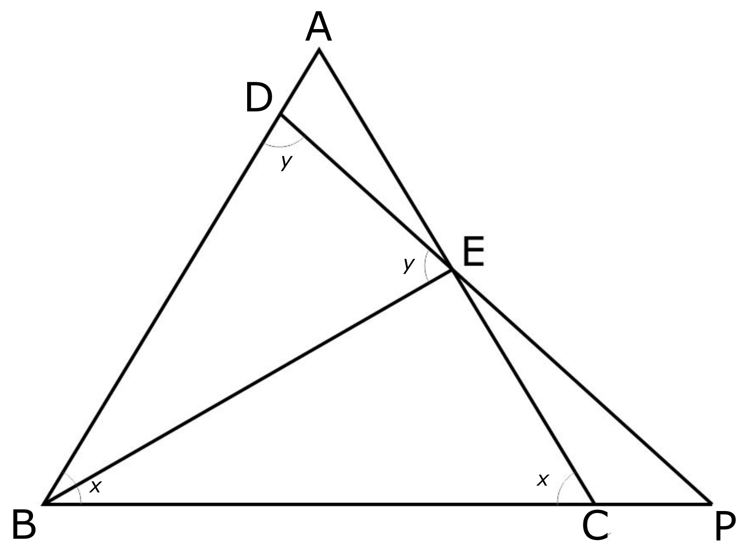
Baserat på detta kan vi skriva

$$\angle CBE = \angle ABC - \angle DBE = x - (180 - 2y) = x + 2y - 180$$

Slutligen kan vi nu uttrycka vinkeln BEC i BPD

$$\angle BEC = 180 - \angle ACB - \angle CBE = 180 - x - (x + 2y - 180) = 360 - 2x - 2y = 2\angle BPD$$

Därmed är vinkel BEC dubbelt så stor som vinkeln BPD.



Figur 1: Problem 2

3. **Lösningsförslag:** Låt oss först anta att varken Kevin eller Bob är tjuven. I så fall talar de båda sanning. Men i så fall var Bob den sisa att besöka fru Scarlet, och han kom redan klockan ett. Eftersom stölden skedde klockan två måste tjuven ha varit där efter honom, men det stämmer inte med att Bob kom sist. Alltså måste antingen Kevin eller Bob ljuga, och därmed vara tjuven.

Låt oss sedan anta att varken Dave eller Bob är tjuven. I så fall kom Dave först och Bob sist, vilket gör att Kevin och Stuart måste ha besökt fru Scarlet som tvåa och trea. Men det stämmer inte, eftersom de alltid ser till att någon annan är där mellan dem så de slipper bråka. Alltså måste antingen Dave eller Bob ljuga, och därmed vara tjuven.

Eftersom tjuven måste vara en av Kevin och Bob, och samtidigt måste vara en av Dave och Bob, är tjuven alltså Bob. Det är möjligt genom att Dave kom först, därefter Kevin, därefter Bob (som kom klockan ett och stannade minst en timme, fram till klockan 14) och sist Stuart.

Lösningsförslag 2:

Låt oss anta att varken Dave eller Bob är tjuven. I så fall kom Dave först och Bob sist, vilket gör att Kevin och Stuart måste ha besökt fru Scarlet som tvåa och trea. Men det stämmer inte, eftersom de alltid ser till att någon annan är där mellan dem så de slipper bråka. Alltså måste antingen Dave eller Bob ljuga, och därför talar både Stuart och Kevin sanning.

Det betyder att Bob kom klockan 13. Samtidigt vet vi att Kevin måste ha besökt fru Scarlet efter stölden, alltså efter klockan 14. Därmed kan Bob inte ha varit sist, så han ljuger och måste då vara tjuven.

Vi konstruerar ett möjligt scenario med Bob som tjuv precis som i vår första lösning.

Svar: Det var Bob som var tjuven.

4. **Lösningsförslag:** Vi kallar en sådan följd för en n-följd, alltså en följd med $2n$ tal, där talen 1 till n förekommer två gånger vardera, och för varje k mellan 1 och n gäller att k tal står mellan de två förekomsterna av k i följden. Exemplet i uppgiften är en 3-följd, och vi frågar oss om det finns någon 4-följd och någon 5-följd.

a) Ja, det finns en 4-följd, nämligen denna: $4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2$.

b) Låt oss visa att det inte finns någon 5-följd: Om vi numrerar platserna i en n-följd från 1 till $2n$, kan vi se att alla jämna tal måste förekomma på en udda och en jämn plats, eftersom det ska vara ett jämnt antal platser mellan dem. På samma sätt ser vi att alla udda tal måste ligga på antingen två jämna eller två udda platser.

I en 5-följd finns 5 jämna och 5 udda platser. Två av varje tas upp av de två 2-orna och de två 4-orna, så kvar blir tre jämna och tre udda platser som ska fördelas på 1-orna, 3-orna och 5-orna. Men antingen ligger båda 1-orna på jämna platser, eller inga, och detsamma för 3-orna och 5-orna. Alltså måste det finnas ett jämnt antal jämna platser över, vilket inte är fallet. Alltså går det inte att skapa en 5-följd.

b) Lösningsförslag 2: Om vi återigen numrerar alla platser i en n-följd, kan vi summera dessa nummer på två sätt. Ett sätt är att direkt beräkna summan $1 + 2 + \cdots + 2n$. Ett annat är att gå igenom alla tal från 1 till n i följden, och summera numren på de platser där dessa står. Om det första av talen k står på plats p_k, står det andra på plats $p_k + k + 1$. Vi får då:

$$1 + 2 + \cdots + 2n = (p_1 + p_1 + 2) + (p_2 + p_2 + 3) + \cdots + (p_n + p_n + (n+1)) =$$

$$= 2(p_1 + \cdots + p_n) + 2 + 3 + \cdots + (n+1)$$

För $n = 5$ ger detta:

$$55 = 1 + 2 + \ldots 2 \cdot 5 = 2(p_1 + \cdots + p_5) + 2 + \cdots + 6 = 2(p_1 + \cdots + p_5) + 20$$

Högerledet är garanterat ett jämnt tal, medan 55 är udda. Alltså är det omöjligt att skapa en 5-följd.

5. **Lösningsförslag:** Låt oss beteckna antalet ananaser, bananer och clementiner med a, b respektive c. Vi vet följande:

$$\begin{array}{rcl} c+b & \leq & 47 \\ b+a & \leq & 37 \\ c+a & \geq & 39 \end{array}$$

Vi kan inte addera dessa olikheter ledvis eftersom de har olika riktningar på olikheterna. Istället skriver vi det som

$$\begin{array}{lcr} c+b & \leq & 47 \\ b+a & \leq & 37 \\ 39 & \leq & c+a \end{array}$$

Nu kan vi addera ledvis och får då

$$c + b + b + a + 39 \leq 47 + 37 + c + a$$

det vill säga

$$2b \leq 45$$

så

$$b \leq 22$$

eftersom frukternas antal är heltal.

22 bananer är alltså det mesta Stuart kan lägga i korgen, förutsatt att det finns en sådan lösning. Sätter vi in $b = 22$ i olikheterna får vi att de tillsammans med 25 clementiner och 15 ananaser uppfyller alla krav.

Svar: Stuart kan som mest lägga 22 bananer i korgen.

6. **Lösningsförslag:**

a) Låt oss titta på talens slutsiffror. Med undantag för primtalen 2 och 5 så slutar primtal alltid på 1, 3, 7 eller 9. Det gör att deras kvadrater slutar på 1 eller 9. Detta ger fyra fall för slutsiffran i uttrycket $p^2 - q^2$:

$$\begin{array}{lll} 1-1 & \text{ger slutsiffra} & 0 \\ 1-9 & \text{ger slutsiffra} & 2 \\ 9-1 & \text{ger slutsiffra} & 8 \\ 9-9 & \text{ger slutsiffra} & 0 \end{array}$$

Alltså slutar differensen på 0, 2 eller 8, aldrig på 6.

Detta betyder att någon av p och q måste vara 2 eller 5, och det kan inte vara p eftersom differensen då inte kan vara så stor som 2016. Det lämnar två fall att undersöka: $q = 2$ och $q = 5$. Sätter vi in det i ekvationen $p^2 = 2016 + q^2$ får vi:

$$p^2 = 2016 + 4 = 2020$$

och

$$p^2 = 2016 + 25 = 2041$$

I det första fallet måste p vara jämnt, dvs inget primtal. I det andra fallet kan vi till exempel se att $45^2 = 2025$ och $46^2 = 2116$, vilket inte ger någon heltalslösning för p.

b) Bortsett från talet 2 är alla primtal udda, vilket även gör att deras kvadrater är udda. Två udda tal minus varandra är alltid jämnt, dvs kan aldrig vara 2017.

Detta lämnar fallet att $q = 2$. Vi får då

$$p^2 = 2017 + 4 = 2021$$

Eftersom $45^2 = 2025$ och $46^2 = 2116$ betyder det att p inte kan vara ett heltal.

Svar: Det finns inga primtalslösningar till någon av ekvationerna.