Högstadiets matematiktävling 2011/12
Finaltävling 21 januari 2012
Lösningsförslag

1. **Lösningsförslag:**

Ett snitt kan gå genom noll, ett eller två hörn.

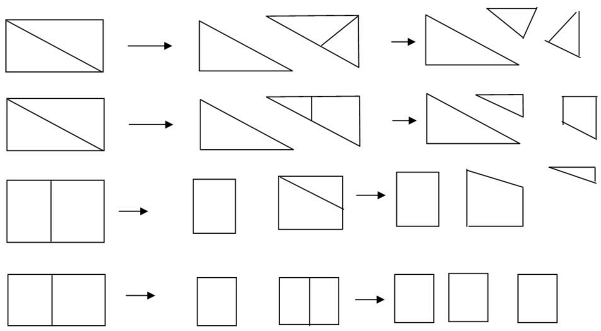
Ett snitt som inte går genom några hörn, skapar fyra nya sidor (två längs med snittet, till höger och till vänster, och ytterligare två genom att dela upp existerande sidor i början och slutet av snittet).

Ett snitt som går genom precis ett hörn, skapar tre nya sidor (två längs med snittet, och en genom att dela en existerande sida).

Ett snitt som går genom två hörn, skapar två nya sidor (längs med snittet).

Som mest ger ett snitt alltså fyra nya sidor. Pappret har från början fyra sidor, så efter två snitt har vi inte fler än 12 sidor. Eftersom det efter två snitt finns tre pappersbitar, var och en givetvis med minst tre sidor, så har vi inte färre än nio sidor.

De återstående möjligheterna är alltså 9, 10, 11 och 12 sidor, och de går alla att uppnå, till exempel med konstruktionerna nedan:



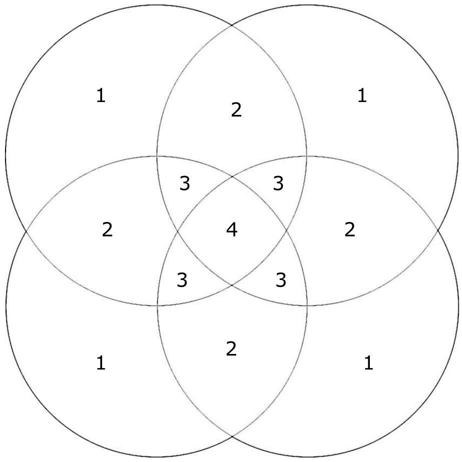
Figur 1: Problem 1

Svar: 9, 10, 11 och 12.

2. **Lösningsförslag:**

Vi börjar med att inse att kostnaden för att måla figuren blir densamma om vi istället för den röda färgen målar två lager med svart färg, istället för den gröna färgen målar tre lager med svart färg, och istället för den blå färgen målar fyra lager med svart färg.

Detta genererar följande figur, med notering av hur många lager vi målar med svart färg.



Figur 2:

Föreställ dig nu att du istället målar en cirkel helt svart. Därefter målar du hela nästa cirkel med svart färg (även där den överlappar föregående cirkel). När du gör likadant med de sista två cirklarna kommer du få precis så många lager svart färg som figuren ovan visar. Totalt skulle du ha målat fyra hela cirklar till en total kostnad av $4 \cdot 31.40$ kr $= 125.60$ kr.

Vi har redan konstaterat att målningen med svarta lager har samma kostnad som målningen av den ursprungliga figuren. Därmed kostar även den ursprungliga figuren 125.60 kr.

Svar: Det kostar 125.60 kr att måla figuren.

3. **Lösningsförslag:**

Skrivs bråket ut på ett bråkstreck får man

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2011}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2012}$$

Detta är detsamma som

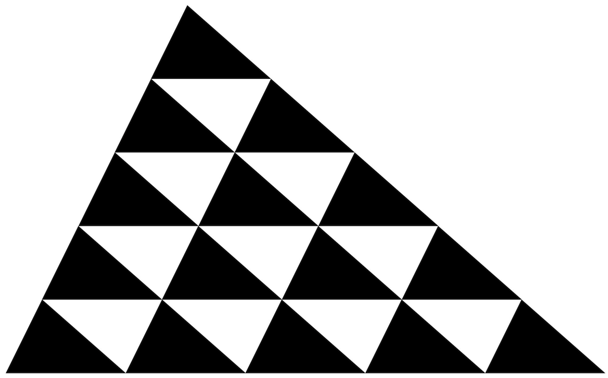
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2011}{2012}$$

Eftersom alla faktorer är mindre än 1 måste produkten också vara mindre än 1. Därmed är det urspungliga bråket mindre än 1.

Svar: Bråket är mindre än 1.

4. **Lösningsförslag:**

Måla hela manegen, inklusive lopporna, i svart och vitt, så att varje vit deltriangel angränsas av svarta, och tvärtom. Det resulterar i 15 svarta trianglar och loppor, samt 10 vita trianglar och loppor.



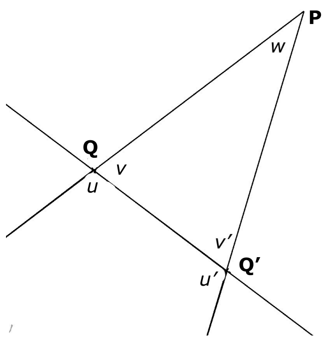
Figur 3:

När klockan ringer kommer en loppa i en vit triangel alltid att hoppa till en svart triangel, och tvärtom. Därför kommer en loppa efter fem rigningar ha bytt triangelfärg fem gånger, och kommer alltså befinna sig i motsatt färg mot vad den startade i.

I Lucifers cirkus kommer det därför bara att finnas vita loppor på de svarta trianglarna efter fem ringningar. Efter som det finns 15 svarta trianglar, men bara 10 vita loppor, så kommer minst fem av trianglarna att vara tomma.

5. **Lösningsförslag:**

Eftersom femhörningen är regelbunden är vinklarna u och u' lika stora (se figur), och $u = u' = \frac{540°}{5} = 108°$ eftersom vinkelsumman i en femhörning är 540°.



Figur 4:

Vinklarna u och v är sidovinklar, dvs $u+v = 180°$. Alltså är $v = 180° - 108° = 72°$. På samma sätt får vi att $v' = 72°$. Då w, v och v' är vinklarna i en triangel är $w + v + v' = 180°$, så $w = 180° - 72° - 72° = 36°$.

Eftersom 36° är en tiondel av en cirkel, är cirkelbågen som centreras i P och går genom Q och Q' en tiondel så lång som motsvarande cirkels omkrets. Eftersom radien i cirkeln är 1 meter så är cirkelbågen $\frac{\pi}{5}$ meter.

Samma argument kan upprepas för de andra fyra uddarna. Sålunda är alltså alla fem cirkelbågar som avgränsar det skuggade området $\frac{\pi}{5}$ meter långa, så områdets omkrets är π meter.

Svar: Områdets omkrets är π meter.

6. **Lösningsförslag:**

Låt oss börja med att skriva upp kuberna av de första positiva heltalen:

$$1^3 = 1, \quad 2^3 = 8, \quad 3^3 = 27, \quad 4^3 = 64, \quad 5^3 = 125, \quad 6^3 = 216, \quad 7^3 = 343 > 251$$

Vi ser direkt att inget tal större än 6 kan förekomma. Därtill ser vi att det största talet i trippeln måste vara större än 4, eftersom $3 \cdot 4^3 = 192 < 251$.

Fall 1: Antag att 5 är det största talet i trippeln. Då är summan av de två andra talens kuber $251 - 5^3 = 126$, och summan av talen är 6. Det finns tre möjligheter: $(5, 5, 1)$, $(5, 4, 2)$ och $(5, 3, 3)$, och endast den första fungerar eftersom $5^3 + 5^3 + 1^3 = 251$ ($5^3 + 4^3 + 2^3 = 197$ och $5^3 + 3^3 + 3^3 = 179$).

Fall 2: Antag att 6 är det största talet i trippeln. Då är summan av de två andra talens kuber $251 - 6^3 = 35$, och summan av talen är 5. Det finns två möjligheter: $(6, 4, 1)$ och $(6, 3, 2)$, och endast den andra fungerar eftersom $6^3 + 3^3 + 2^3 = 251$ ($6^3 + 4^3 + 1^3 = 281$).

Svar: Endast tripplarna $(1, 5, 5)$ och $(2, 3, 6)$ uppfyller villkoren.