Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 21 november 1971

1.

$$\begin{aligned}3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2 &= 3+3a^2+3a^4-(1+a^2+a^4+2a+2a^2+2a^3)\\ &= 2-2a-2a^3+2a^4\\ &= 2(a-1)(a^3-1)\\ &= 2(a-1)^2(a^2+a+1).\end{aligned}$$

Detta är större än 0 för $a \neq 1$ eftersom

$$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$

2. Var och en av linjerna delar planet i två halvplan. Tilldela det ena tecknet $+$, det andra tecknet $-$. Måla därefter ett område rött om dess punkter tillhör ett jämnt antal minus-halvplan, blått om det tillhör ett udda antal minus-halvplan. Då en linje överskrides ändras antalet minus-halvplan med en enhet, dvs övergår från ett jämnt antal till ett udda antal eller tvärtom, så att färgbyte äger rum. Man har alltså fått en önskad färgsättning.

3. Anta att hela bordet eller en del av bordet täcks med n tidningar. Det täckta området har arean A. Vi vill ta bort en tidning så att inte alltför mycket därigenom blir synligt. Vissa delar kan vara täckta av en enda tidning, enkelt täckta, andra av flera. Det är omöjligt att var och en av de n tidningarna enkelt täcker ett delområde med area större än A/n. Någon täcker därför ett delområde med area $\leq A/n$. Ta bort en sådan. De återstående $n-1$ tidningarna täcker då ett område med area $\geq A-\dfrac{1}{n}A=\dfrac{n-1}{n}A$. Vi tillämpar detta resonemang för $n=15, 14, \ldots, 9$. Då vi tagit bort 7 tidningar på detta sätt täcker de övriga ett område ned area $\geq \dfrac{14}{15}\dfrac{13}{14}\cdots\dfrac{8}{9}A=\dfrac{8}{15}A$.

4. Sätt $n=32768$. De givna talen är då

$$\begin{aligned}&A=(2n-3)^3+(2n-2)^3+(2n-1)^3+(2n)^3+(2n+1)^3+(2n+2)^3+(2n+3)^3\\ &B=(n-3)(n-2)+(n-1)n+n(n+1)+(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

Beräknar man här alla kuber och produkter får man $A=56n(n^2+3)$ och $B=4(n^2+3)$. Alltså är kvoten A/B det hela talet $14n=458752$.

5. Av symmetriskäl räcker det att betrakta $0\leq x\leq t$. Eftersom $1-a\cos x$ är monoton i x i intervallet $[0,t]$ måste maximum för $|1-a\cos x|$ uppstå i endera ändpunkten dvs vara det största av $|1-a|$ och $|1-a\cos t|$.

1) $0<a\leq 1$. Då är $0<1-a\leq 1-a\cos t$. Maximet är därför $1-a\cos t$. För dessa a-värden är

$$1-a\cos t\geq 1-\cos t\geq\frac{1-\cos t}{1+\cos t}=\tan^2\frac{t}{2}.$$

2) $a>1$, $a-1\leq 1-a\cos t$. Detta inträffar då $a(1+\cos t)\leq 2$, $a\leq\dfrac{2}{1+\cos t}$. Maximet är $1-a\cos t$. För dessa a-värden är

$$1-a\cos t\geq 1-\frac{2}{1+\cos t}\cos t=\frac{1-\cos t}{1+\cos t}=\tan^2\frac{t}{2}.$$

3) $a > 1$, $a - 1 > 1 - a\cos t$. Detta inträffar för $a(1 + \cos t) > 2$, $a > \dfrac{2}{1 + \cos t}$. Eftersom $a - 1 > a\cos t - 1$ är maximet denna gång $a - 1$. För dessa a-värden är

$$a - 1 > \frac{2}{1 + \cos t} - 1 = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \tan^2 \frac{t}{2}.$$

6. Ta korten i någon ordningsföljd och kalla motsvarande tal a_1, $a_2, \ldots$, a_{99}. Ingen av

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_{99} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} \end{aligned}$$

är delbar med 100. Anta att s_m och s_k, $m > k$, ger samma rest vid division med 100. Då ger $s_m - s_k = a_{k+1} + \cdots + a_m$ resten 0, i strid mot förutsättningarna. Därför måste $s_1, \ldots, s_{99}$ ge 99 olika rester så att varje tal 1, 2, . . ., 99 förekommer som rest. Talet a_2 är då resten vid division med 100 för någon av s_1, $s_2, \ldots$, s_{99}. Om denna är s_k, $k > 1$, ger

$$s_k - a_2 = a_1 + a_3 + \cdots + a_k$$

resten 0 vid division med 100, i strid mot förutsättningarna. Alltså är $a_2 = s_1 = a_1$.
Då a_1 och a_2 är två godtyckliga bland talen på de 99 korten, visar detta att alla korten har samma tal.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner