Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 18 november 1995

1. Om tidskriften ursprungligen hade n sidor och sidnumren $2k-1$ och $2k$ saknas gäller
$$\frac{n(n+1)}{2} - 2k + 1 - 2k = 963$$
med $2 \le 2k \le n$. Detta ger $\dfrac{n(n+1)}{2} - 3 \ge 963 \ge \dfrac{n(n+1)}{2} - 2n + 1$, dvs.
$$\frac{n(n+1)}{2} \ge 960 \quad \text{och} \quad \frac{n(n-3)}{2} \le 962.$$
Eftersom vänsterleden i dessa två olikheter växer med $n \ge 1$ och
$$\frac{43 \cdot 44}{2} = 946, \quad \frac{44 \cdot 45}{2} = 990, \quad \frac{45 \cdot 42}{2} = 945 \quad \text{och} \quad \frac{46 \cdot 43}{2} = 989,$$
är $44 \le n \le 45$. Insättning av $n = 45$ i relationen $\dfrac{n(n+1)}{2} - 2k + 1 - 2k = 963$ ger efter förenkling $45 \cdot 23 - 4k = 962$, men då $45 \cdot 23$ är udda och $962 + 4k$ jämnt, saknas lösning. För $n = 44$ ger relationen $\dfrac{n(n+1)}{2} - 2k + 1 - 2k = 963$ ekvationen $990 - 963 + 1 = 4k$ varav $2k = 14$.
Svar: Tidskriften hade 44 sidor och sidorna 13 och 14 saknas.

2. Antag att timvisaren vred sig x varv under den korta tid Botvid var borta. Då vred sig minutvisaren $12x$ varv. Då besöket varade c:a en timme medför bytet av visarplats att $x + 12x = 1$. Timvisaren rörde sig alltså $1/13$ varv och besöket varade i $\dfrac{12 \cdot 60}{13} = 55\dfrac{5}{13}$ minuter.
Antag nu att Botvid gick hemifrån t minuter efter klockan 4. Då hade timvisaren rört sig $\dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{12 \cdot 60}$ varv från positionen kl 12, och minutvisaren hade position $\dfrac{t}{60}$ relativt samma utgångsposition. Alltså är
$$\frac{1}{3} + \frac{t}{12 \cdot 60} + \frac{1}{13} = \frac{t}{60},$$
som ger $t = \dfrac{3840}{143} = 26\dfrac{122}{143}$.
Svar: Botvid gick hemifrån ungefär 27 minuter över 4.

3. Ekvationssystemet kan omformas
$$\begin{cases} a - x = (y-b)(y+b) \\ (a-x)(a+x) = y - b \end{cases}$$
Antag nu att $a \neq x$. Av den första likheten följer då att $b \neq y$. Multiplikation av den första ekvationen med $(a+x)$ följd av elimination av $(a-x)(a+x)$ ger då $(y-b)(a+x)(y+b) = y - b$, eller, då $y - b \neq 0$, $\quad (a+x)(y+b) = 1$. Olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium ger nu $2 = 2\sqrt{(a+x)(b+y)} \le (a+x) + (b+y) < 2$. Antagandet att $a \neq x$ är alltså falskt. Men av $a = x$ följer ur den andra ursprungliga ekvationen att $b = y$.

4. Antag att de tre talen är x_1, x_2 och x_3 och betrakta polynomet
$$\begin{aligned} p(t) &= (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) \\ &= t^3 - (x_1 + x_2 + x_3)t^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)t - x_1x_2x_3 \\ &= t^3 - at^2 + bt - 1. \end{aligned}$$

Enligt förutsättningarna är

$$a = x_1 + x_2 + x_3 > \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = b.$$

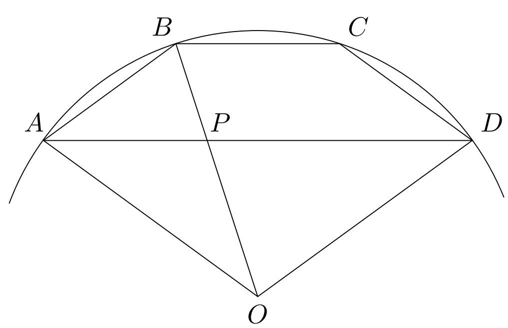
Minst ett av de positiva nollställena x_1, x_2 och x_3 till polynomet p måste vara < 1 ty om alla nollställen är ≥ 1 och produkten är lika med 1, måste de alla vara lika med 1 vilket strider mot att $a > b$. Alltså finns det nollställen mellan 0 och 1.
Av $p(0) = -1$ och $p(1) = -a + b < 0$ följer att det finns ett jämnt antal nollställen mellan 0 och 1, dvs två. Eftersom $p(1) \neq 0$ är det tredje nollstället > 1.

Här är en alternativ lösning som inte utnyttjar kontinuiteten hos polynom.
Utveckling och omskrivning av produkten

$$\begin{aligned}
&(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = \\
&1-(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1x_2x_3 = \\
&(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-(x_1+x_2+x_3) = \\
&x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)-(x_1+x_2+x_3) = \\
&\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}-(x_1+x_2+x_3)
\end{aligned}$$

visar att den, under de givna förutsättningarna, är negativ. Alltså är ett udda antal av faktorerna $1-x_1$, $1-x_2$ och $1-x_3$ negativa. Men om alla tre faktorerna är negativa följer att $x_1x_2x_3 > 1$, som strider mot förutsättningen. Alltså är precis en faktor negativ. Härav följer att ett av de givna talen är större än 1 och de två andra mindre än 1.

5. Villkoret $s < r$ ger att medelpunktsvinkeln på exempelvis kordan AB är $< 60^\circ$, vilket medför att fyrhörningen $ABCD$ helt och hållet ligger i en halvcirkel och att radien OB skär kordan AD i en punkt P i det inre av sträckan OB.
Antag att medelpunktsvinkeln AOB är $= \alpha$. Eftersom medelpunktsvinklar på lika stora bågar är lika följer att $\angle BOD = 2\alpha$. Enligt periferivinkelsatsen är då periferivinkeln $BAD = \alpha$. Trianglarna OAB och APB är likvinkliga och därför likformiga. Eftersom $\triangle OAB$ är likbent måste också $\triangle APB$ vara det och $|AP| = |AB| = s$.



Detta ger $|PD| = r$ och $\triangle DOP$ är likbent. Basvinklarna DOP och DPO är alltså lika och $= 2\alpha$. Men då vertikalvinklarna APB och DPO är lika är basvinklarna i den likbenta triangeln APB också $= 2\alpha$. Triangelsumman i denna triangel är då $5\alpha = 180^\circ$ som ger $\alpha = 36^\circ$.

Svar: Vinklarna är $36^\circ, 144^\circ, 144^\circ, 36^\circ$

6. Antag att mängden M består av n stycken binära sekvenser, där varje par är olika i minst 6 positioner. Då innehåller M precis $\dfrac{n(n-1)}{2}$ par.
Låt nu n_k vara antalet sekvenser i M med en etta i position k ($k = 1, 2, \ldots, 10$). Antalet par i M som skiljer sig åt i position k är då $n_k(n-n_k)$. I summan $\sum_{k=1}^{10} n_k(n-n_k)$ har varje par i M räknats minst 6 gånger. Alltså gäller

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10} n_k(n-n_k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{n^2}{4} - \left(n_k - \frac{n}{2}\right)^2\right) \leq \frac{5n^2}{12}$$

som ger $n \leq 6$ med likhet då och endast då varje par är olika i precis 6 positioner och det för varje position finns precis 3 sekvenser med en etta i denna position.
En sådan mängd är exempelvis M innehållande sekvenserna

$$0000000000, \quad 1111110000, \quad 0001111110,$$

$$1101001101, \quad 1010101011, \quad 0110010111.$$

Svar: Maximala antalet är 6

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson