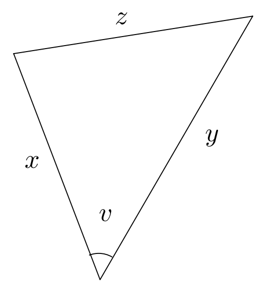
# Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet  Svenska Matematikersamfundet

**Lösningar till finaltävlingen den 29 november 1964**

1. För beteckningar, se figuren. Ytsatsen och cosinusteoremet ger




$$xy \cdot \sin v = 2T$$
$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos v.$$

Eliminering ger

$$f(x) = z^2 = x^2 + (2T/\sin v)^2/x^2 - 4T\cot v, \quad x > 0.$$

Man söker minimum av $f$.

$f'(x) = 2x - 2(2T/\sin v)^2/x^3$; $f'(x) = 0$ ger $x^4 = (2T/\sin v)^2$, $x = \pm(2T/\sin v)^{1/2}$, som svarar mot minimum ($f''(x) > 0$). Ur ovanstående ekvationer erhålles $y = x$, $z = x \cdot \sin v/2$.

**Svar**: Den mot $v$ stående sidans längd är $(2T/\sin v)^{1/2}\sin v/2$, de båda övriga $(2T/\sin v)^{1/2}$.

2. Summering ger $\frac{1}{2}(m+1)(n+n+m) = 1000$, vilket också kan skrivas $(m+1)(m+2n) = 2^4 \cdot 5^3$.

a) $m+1$ jämnt $\Rightarrow$ $m+2n$ udda. Detta ger alltså följande tänkbara fall

$$\left.\begin{aligned} m+1 &= 2^4 \cdot 5^p \\ m+2n &= 5^{3-p} \end{aligned}\right\} p = 0, 1, 2, 3.$$

$p = 0$ ger $m = 15$, $n = 55$; $p = 1$, 2, 3 ger $n < 0$ och förkastas.

b) $m+1$ udda $\Rightarrow$ $m+2n$ jämnt. Detta ger alltså följande tänkbara fall

$$\left.\begin{aligned} m+1 &= 5^{3-p} \\ m+2n &= 2^4 \cdot 5^p \end{aligned}\right\} p = 0, 1, 2, 3.$$

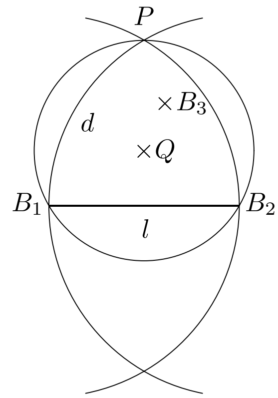
$p = 1$ ger $m = 24$, $n = 28$; $p = 2$ ger $m = 4$, $n = 198$; $p = 0$ ger $n < 0$; $p = 3$ ger $m = 0$ och förkastas.

**Svar**: Alla tänkbara följder är 55, 56,. . ., 70; 28,29,. . ., 52 och 198,199,. . ., 202.

3. a) Ansätt $x = \sqrt{2}+\sqrt{3} \Rightarrow (x-\sqrt{2})^2 = 3 \Leftrightarrow x^2-1 = 2\sqrt{2}x \Rightarrow (x^2-1)^2 = 8x^2 \Leftrightarrow x^4-10x^2+1 = 0$. $P(x) = x^4-10x^2+1$. Implikationskedjan säger att $x = \sqrt{2}+\sqrt{3} \Rightarrow P(x) = 0$, vilket betyder att $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ är ett nollställe till $P(x)$; $P(x)$ är vidare ett polynom med heltalskoefficienter.
**Svar**: Exempelvis $P(x) = x^4-10x^2+1$.

b) Bestäm först ett polynom med $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ som ett nollställe.
Förfarande analogt med a) ger $x = \sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \Rightarrow (x-\sqrt{2})^3 = 3 \Leftrightarrow x^3+6x-3 = \sqrt{2}\,(3x^2+2) \Rightarrow (x^3+6x-3)^2 = 2(3x^2+2)^2 \Leftrightarrow (Q(x) =)x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1 = 0$. Av implikationskedjan följer, att detta polynom med heltalskoefficienter har ett nollställe $= \sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$. Det följer att polynomet $P(x)\cdot Q(x)$, som har heltalskoefficienter, har talen $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ och $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ bland sina nollställen.
**Svar**: Exempelvis $P(x)\cdot Q(x)$ där $Q(x) = x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$ och $P(x) = x^4-10x^2+1$.

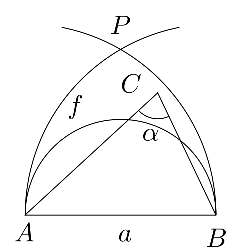
4. a) Man kan anta, att avståndet $l$ mellan bostäderna $B_1$ och $B_2$ är det största av de inbördes avstånden mellan $B_1$, $B_2$ och $B_3$. ($l \leq 1$ km). Med $B_1$ och $B_2$ som medelpunkter konstrueras två cirklar med radie $l$. $B_3$ måste vara belägen någonstans i det område, som täcks av båda cirklarna (inklusive randen). Området är symmetriskt med avseende på linjen $B_1B_2$, och man kan anta, att $B_3$ befinner sig i den "övre" halvan $d$ (se figuren). Konstruera nu den omskrivna cirkeln $e$ till triangeln $PB_1B_2$, som är liksidig. $e$ har medelpunkt $Q$. Man inser lätt att $e$ täcker $d$ och följaktligen att avståndet från en godtycklig punkt i $d$ till $Q$ är $\leq$ cirkelns radie $= l/\sqrt{3} \leq 1/\sqrt{3}$ km. Alltså är $L \leq 1/\sqrt{3}$ km.




Å andra sidan kan ingen bättre uppskattning göras, ty likhet inträffar om $l = 1$ och $B_3$ sammanfaller med $P$. Den "bästa" mötesplatsen $M$ måste då sammanfalla med $Q$, ty antag motsatsen! $M$ måste då exempelvis vara belägen i vinkelområdet $B_1QB_2$ och avståndet $B_3M = L$ blir då $> B_3Q$; detta strider mot förutsättningen att $L$ är minimerat.

b) Här anges ett bevis, som gäller generellt för alla $n$ och som följaktligen även utgör ett alternativ till förfarandet i specialfallet a). Av alla cirklar som täcker punkterna $B_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ existerar en entydigt bestämd med minimal radie $R$ kallad den omskrivna cirkeln till punktmängden. Om det existerade två skilda sådana med minimal radie $R$ skulle deras gemensamma del täcka mängden och denna del kunde i sin tur täckas av en annan cirkel med mindre radie, vilket vore en motsägelse. På den omskrivna cirkelns rand måste två eller flera punkter $B_i$ ligga, annars kan radien inte vara minimal. Vidare kan dessa punkter inte ligga på en och samma öppna halvcirkelbåge, ty i så fall skulle cirkeln med bibehållen radie kunna förskjutas något och ändå täcka mängden. Den ursprungliga och den förskjutna cirkelns gemensamma del täcker mängden och man får en motsägelse som ovan. Om på den omskrivna cirkelns rand endast ligger två punkter $B_i$ måste dessa alltså vara diametralt motsatta, varav följer $L \leq 1/2$ i detta fall. Om på den omskrivna cirkelns rand ligger minst tre punkter $B_i$ kan man säkert välja tre sådana, vilka inte ligger på samma halvcirkelbåge och alltså bildar en spetsvinklig triangel med sidor $\leq 1$. Den omskrivna cirkeln till mängden är samtidigt den omskrivna cirkeln till triangeln.

Problemet är nu att bestämma den största radie den omskrivna cirkeln kan ha till spetsvinkliga trianglar, vilkas sidor är $\leq 1$. Låt $a$ ($\leq 1$) vara den största sidan i en sådan triangel och låt $\alpha$ ($\leq \pi/2$) vara motstående vinkel. Hörnet $C$ (se figuren) måste befinna sig i området $f$ (inklusive rand) begränsat av tre cirkelbågar. Motsvarande cirklar är den med $AB$ som diameter, den genom $A$ med $B$ som medelpunkt och den genom $B$ med $A$ som medelpunkt. Härav inses nu att $\pi/3 \leq \alpha \leq \pi/2$. Enligt sinusteoremet är $2R = a/\sin\alpha \leq a/\sin\pi/3 = 2a/\sqrt{3} \leq 2/\sqrt{3}$. Alltså är $R \leq 1/\sqrt{3}$.




Av resonemanget framgår även att likhet kan inträffa, nämligen om $a = 1$ och $C$ faller i $P$. Följaktligen är $L \leq 1/\sqrt{3}$ och detta är den bästa uppskattning, som är oberoende av punkternas läge.

5. a) Med hjälp av formeln $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ finner man

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x = 1 - a_2 + a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x \\ &= 1 - a_2 + a_1 t + 2a_2 t^2 = g(t), \end{aligned}$$

om $\cos x$ betecknas med $t$. Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att $f(x) \geq 0$ för alla $x$ är således att det minsta värde $g(t)$ antar för $-1 \leq t \leq 1$ är $\geq 0$.

Vi söker minimum av $g(t)$. $g'(t) = a_1 + 4a_2 t = 0$ för $t = -a_1/4a_2$, vilket ger minimum om $a_2 > 0$. Insättning ger villkoret

$$1 - a_2 - a_1^2/8a_2 \geq 0. \tag{1}$$

Villkoret på $t$ ger

$$|a_1| \leq 4|a_2|. \tag{2}$$

Om $a_2 \leq 0$ eller om (2) inte gäller, får man undersöka punkterna $t = \pm 1$. Detta ger $1 + a_2 \pm a_1 \geq 0$, d.v.s.

$$|a_1| \leq 1 + a_2. \tag{3}$$

Vi vill nu bestämma det största och det minsta $a_1$ som kan uppfylla något av dessa villkor. Vi betraktar först (1) och (2), varvid vi antar $a_2 > 0$. (1) ger då $a_1^2 \leq 8a_2(1 - a_2)$. Högerledet betraktat som funktion av $a_2$ antar sitt största värde för $a_2 = 1/2$, vilket ger $|a_1| \leq \sqrt{2}$. Dessa värden satisfierar även (2).

Om $a_2 > 0$ men (2) inte gäller, d.v.s. om $|a_1| > 4a_2$, ger (3) att $4a_2 < 1 + a_2$, d.v.s. $a_2 < 1/3$. (3) ger då $|a_1| < 4/3$.

Om slutligen $a_2 \leq 0$, ger (3) $|a_1| \leq 1$.

Slutsatsen blir, att för $|a_1| > \sqrt{2}$ kan omöjligt gälla $f(x) \geq 0$ för alla $x$. För $a_1 = \pm\sqrt{2}$ är däremot $f(x) = 1 \pm \sqrt{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \geq 0$ för alla $x$. Detta polynom är för övrigt en jämn kvadrat, $f(x) = (1/\sqrt{2} \pm \cos x)^2$.

b) Problemet att ange de exakta extremvärdena för $a_1$ för godtyckliga $n$ är såvitt bekant ej löst. För vissa specialvärden på $n$ kan problemet naturligtvis angripas analogt med ovan, men ger avsevärda räknesvårigheter. För $n = 3$ får man sålunda $\pm(1 + \sqrt{5})/2$ som extremvärden. Här anges nu tre iakttagelser vilka relativt enkelt kan göras:

1) Om $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ är en uppsättning konstanter för vilka $f(x) \geq 0$ gäller även detsamma för uppsättningen $(-a_1, a_2, -a_3, \ldots, (-1)^n a_n)$. Bevis:
$f(x) = 1 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + a_n \cos nx \geq 0$ för alla $x$; alltså gäller speciellt $f(x + \pi) = 1 - a_1 \cos x + a_2 \cos 2x - a_3 \cos 3x + \cdots + (-1)^n a_n \cos nx \geq 0$ för alla $x$, varav påståendet följer. Detta innebär särskilt att om $a$ är ett extremvärde för $a_1$ så är $-a$ det andra.

2) Uppskattningar av begränsningarna för $a_1$ kan anges exempelvis genom att explicit framställa funktioner, vilka tillhör funktionsklassen. Betrakta funktionen

$$g(x) = \left( \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \cos \nu x \right)^2, \text{ som är } \geq 0 \text{ för alla } x.$$

Utvecklas högerledet och utnyttjas därefter elementära trigonometriska transformationer kan det skrivas på formen $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_{2m} \cos 2mx$ där det gäller $a_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu^2$; $a_1 = \sum_{\nu=1}^{m-1} c_\nu c_{\nu+1}$. Om man exempelvis väljer alla $c_\nu = \sqrt{2/m}$ så blir $a_0 = 1$ och $g(x)$ tillhör vår funktionsklass med $n = 2m$. För dessa val av $c_\nu$, blir $a_1 = 2(m-1)/m$. Det positiva extremvärdet för $a_1$ är alltså $\geq 2(m-1)/m$.

3) Allmänt kan visas, att det nödvändigtvis gäller, att ja, $|a_1| < 2$. För alla $n$ gäller nämligen $\int_0^\pi f(x)\,dx = \pi$; $a_1 = (2/\pi)\int_0^\pi f(x) \cos x\,dx$, vilket lätt konstateras med termvis integration. Då $\cos x \leq 1$ gäller $a_1 \leq (2/\pi)\int_0^\pi f(x) \cdot 1\,dx = 2$. Att likhet ej kan råda kan även visas men förbigås här. Enligt ovanstående jämte 1) är alltså $|a_1| < 2$. Låter man $A_n$ beteckna det positiva extremvärdet av $a_1$ för alla funktioner av grad $\leq n$ framgår av 2) och 3) att $\lim_{n\to\infty} A_n = 2$.

**Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:**

**Tävlingsproblem i matematik**
**Skolornas matematiktävling 1961 – 1968**
**Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg**
**på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet**