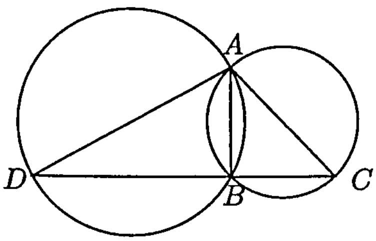
Del I

Problem

Tio år med

Högstadiets matematiktävling



Problem och lösningar
sammanställda av

Marcus Better

Natur och Kultur

BOKFÖRLAGET NATUR OCH KULTUR
Kundtjänst/order: Förlagsdistribution, Box 706, 176 27 Järfälla
Tfn 08-453 85 00, fax 08-453 85 20.
Redaktion: Box 27 323, 102 54 Stockholm
Tfn 08-453 86 00, fax 08-453 87 90.
E-post: info@nok.se
WWW:http://www.nok.se

Omslag: Ann Entell

Tryck: Elanders Gotab 1998

Första upplagans första tryckning

ISBN 91-27-57567-5

Förord

Högstadiets matematiktävling, en tävling för elever i grundskolan, har genomförts årligen sedan starten år 1988. Initiativet kom från verksamheten med matematikklasserna vid Danderyds gymnasium. Syftet med tävlingen är att stimulera intresset för matematik och matematikstudier bland grundskoleeleverna. Tävlingen prövar elevernas problemlösningsförmåga, kreativitet och fantasi. Den fordrar inga andra formella matematikkunskaper än sådana som elever i årskurs nio kan förväntas ha.

Tävlingen genomförs i två omgångar, bestående av skrivningar med sex problem. Kvalificeringstävlingen genomförs på skolorna på ett förutbestämt datum i november. De omkring 70 bästa eleverna i landet inbjuds sedan till finaltävlingen, som vanligen hålls på Danderyds gymnasium i januari. Sedan tävlingen startades har den rönt ett kraftigt växande intresse, och läsåret 1997/98 deltog drygt 4 000 elever från 380 skolor i hela landet.

Denna bok innehåller alla problem från kval- och finalomgångarna under tävlingens första 10 år, med lösningar. Vi hoppas att boken ska vara till nytta och glädje för elever som vill förbereda sig inför kommande tävlingar, för matematiklärare i deras undervisning, och för var och en som vill pröva sina krafter på de många vackra och eleganta problemen som finns samlade här.

Marcus Better
för tävlingskommittén

Högstadiets matematiktävling
Danderyds gymnasium
Rinkebyvägen 4
182 36 Danderyd

Internet: `http://www.matematik.su.se/hmt`
E-post: `hmt@matematik.su.se`

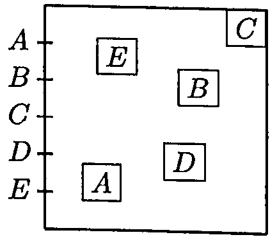
Del I

Problem

Högstadiets matematiktävling 1988/89
Kvalificeringstävling november 1988

1. För att numrera sidorna i en bok använde man 201 siffror. Hur många sidor har boken?

2. I kvadraten till höger är fem punkter A, B, C, D och E markerade på en sida. Inuti kvadraten är fem rutor markerade med samma bokstäver. Bind med kurvlinjer samman punkter och rutor med samma bokstavsbeteckning, utan att kurvlinjerna korsar varandra eller går utanför kvadraten. (Punkt A ska alltså förbindas med ruta A, punkt B med ruta B, och så vidare.)



3. Hur många siffror har produkten av de två heltalen

   3 456 712 345 876 989 och 16 567 456 510 302 456 745?

4. Om man åker bil till Stockholm från Malmö via Göteborg, så är körsträckan 15 mil längre än om man åker direkt. Om man åker till Göteborg från Malmö via Stockholm, så är körsträckan 83 mil längre än om man åker direkt. Hur lång är vägen mellan Göteborg och Stockholm?

5. Rita en rät linje. Den delar planet i två delområden. Rita ytterligare en rät linje som ej är parallell med den första. Dessa två linjer delar planet i fyra delområden.

   (a) Om en tredje rät linje ritas, som ej är parallell med någon av de redan ritade linjerna och inte går genom deras skärningspunkt, hur många delområden blir planet indelat i?

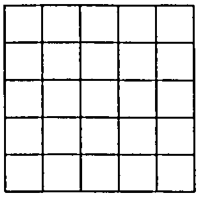
   (b) Dra nya räta linjer som inte är parallella med redan ritade och som inte går genom tidigare skärningspunkter. Hur många delområden delas planet i med 4 respektive 5 linjer?

   (c) Kan du se något system för tillväxten av antalet delområden? Vilket?

6. Går det att placera talen 1 till 64 i rutorna på ett schackbräde, så att differensen mellan två tal i grannrutor (det vill säga rutor med hel kant gemensam) är högst 4? Motivera ditt svar.

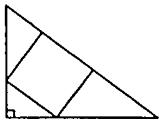
Högstadiets matematiktävling 1988/89
Finaltävling januari 1989

1. Figuren till höger visar en kvadrat som är uppdelad i 25 lika stora kvadrater. Hur många kvadrater av olika storlekar finns det i denna figur? Utgångskvadraten och de 25 ursprungliga delkvadraterna ska räknas med. Hur blir det allmänna fallet med n^2 delkvadrater (n naturligt tal)?



2. Ett heltal x har följande egenskap: Skriver man x i tiosystemet och lägger till en 2:a till höger, får man ett nytt tal, som multiplicerat med 2 ger det tal som börjar med 2 och sedan har samma siffror som x och i samma ordning. Vilket är talet?

3. I en rätvinklig triangel, vars kateter är 6 cm och 8 cm, är en kvadrat inskriven med en sida utefter hypotenusan, som i figuren till höger. Hur lång är kvadratens sida?



4. Två bilar, A och B, kör samma sträcka. A kör med farten 90 km/h halva *sträckan* och med farten 100 km/h andra halvan. B kör halva *tiden* med farten 90 km/h och andra halvan av tiden med farten 100 km/h. Vem kommer fortast fram? Ange tidsskillnaden i procent av den kortaste tiden.

5. Rita sju linjer på ett papper så att inga av dem är parallella. Visa att det bland dessa linjer finns två, som i skärningspunkten bildar en vinkel som är mindre än 26 grader.

6. Samtliga elever vid en skola tillfrågades om sina sportaktiviteter. Det visade sig att 90% av eleverna spelade boll i någon form, 80% sysslade med friidrott, 70% åkte skidor och 60% åkte skridskor. Ingen elev ägnade sig åt alla dessa fyra aktiviteter. Hur många elever åkte skidor eller skridskor eller bäggedera?

HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 1989/90
KVALIFICERINGSTÄVLING NOVEMBER 1989

1. I en skola finns 735 elever. Visa att det finns minst två pojkar eller två flickor som har födelsedag samma dag.

2. Ett fartyg pejlar en fyr, det vill säga bestämmer vinkeln mellan fartygets kurs och syftlinjen till fyren. Pejlingen ger en vinkel av 20 grader. Efter 45 minuters färd med oförändrad kurs och en hastighet av 10 knop pejlar man från fartyget samma fyr i en dubbelt så stor vinkel, alltså 40 grader. Hur många sjömil var avståndet till fyren vid andra pejlingen? En knop = en sjömil per timme.

3. Hur många av heltalen från 1 till 3000 är varken delbara med 3 eller 5?

4. I en fyrhörning $ABCD$ är de två intilliggande vinklarna A och B lika stora. Vinkel D är större än vinkel C. Visa att sidan AD är kortare än sidan BC.

5. I multiplikationsuppställningen intill har vissa siffror fallit bort. Utred vilka siffror som ska stå i de tomma rutorna.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & \square & \boxed{7} & \square & \square & \square \\
 & & & & & \boxed{7} & \boxed{4} & \boxed{3} \\
\hline
 & & \square & \square & \square & \square & \square & \boxed{5} \\
 & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \\
\boxed{3} & \square & \square & \square & \square & \square & & \\
\hline
\square & \boxed{2} & \square & \square & \square & \boxed{8} & \boxed{7} & \square
\end{array}
$$

6. En rektangel är uppdelad i lika stora kvadratiska rutor, m stycken på längden och n stycken på tvären. Hur många rutor passerar en diagonal i rektangeln igenom?

   (a) Besvara frågan om $m = 13$ och $n = 7$.

   (b) Lös problemet allmänt där m och n är tal som inte har någon gemensam faktor.

Högstadiets matematiktävling 1989/90
Finaltävling januari 1990

1. Ett hemmagjort biljardbord har dimensionen 6 dm × 13 dm. En biljardboll stöts från mittpunkten på en kortsida med 45 graders vinkel mot en av långsidorna. Efter hur många studsar mot kanterna hamnar bollen i ett hörn?

2. Vilken är entalssiffran i differensen $43^{43} - 17^{17}$?

3. Mattias kastade ett mynt tre gånger.

   (a) Om du vet att minst ett av kasten gav en krona, vad blir då sannolikheten för att alla tre kasten gav krona?

   (b) Om du istället vet att det första kastet gav en krona, vad blir då sannolikheten för att alla tre kasten gav krona?

4. Bestäm alla primtal mellan 10 och 10000 sådana att när sista siffran flyttas fram före den första så blir det samma tal.

5. Finns det tal x, y och z, med $x > 0$, så att följande två olikheter är uppfyllda?

$$(x^2 + y^2)z \leq 4xy \quad (1)$$
$$(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq z \quad (2)$$

6. Sex cirklar i planet innehåller alla en viss punkt. Visa att en av cirklarna måste innehålla medelpunkten i en annan av cirklarna. (Att en cirkel innehåller en punkt innebär att punkten ligger innanför eller på cirkelns periferi.)

Högstadiets matematiktävling 1990/91
Kvalificeringstävling november 1990

1. Betrakta meningen:

   TÄVLA FRISKT I MATEMATIK 1990

   Vi skriver rad efter rad med dessa symboler, men varje gång flyttar vi sista symbolen i varje ord längst fram i ordet. Vi får då följande rader:

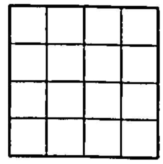
   1. ATÄVL TFRISK I KMATEMATI 0199
   2. LATÄV KTFRIS I IKMATEMAT 9019

   och så vidare. Efter hur många rader kommer den ursprungliga meningen upp igen för första gången?

2. En triangel har omkretsen 8 cm. Längden på varje sida uttryckt i cm är ett heltal. Beräkna arean för varje sådan triangel.

3. Fem heltal ger, när de summeras fyra åt gången, följande summor: 190, 194, 196, 212 respektive 220. Vilket är det största av de fem talen?

4. Figuren till höger visar en kvadrat som är uppdelad i 16 lika stora rutor. Visa att man kan placera sju stjärnor i rutorna, med högst en stjärna i varje ruta, så, att om man tar bort två rader och två kolumner (vilka som helst), kommer minst en stjärna att vara kvar. Bevisa att en sådan utplacering inte går att göra om antalet stjärnor i stället är sex.

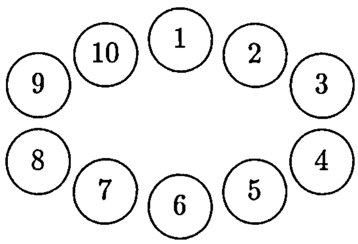


5. Bestäm alla naturliga tal x och y sådana att $2^x + 1 = y^2$. De naturliga talen är 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

6. Tio personer sitter runt ett bord. De väljer var sitt heltal. Varje person meddelar sitt val till sina två bordsgrannar. Därefter beräknar varje person medelvärdet av de tal som dennes bordsgrannar valt. Detta medelvärde skrivs upp på en lapp som respektive person lägger framför sig på bordet. Vad som står på lapparna visas i figuren nedan.

   (a) Vilket tal valde den person som hade en sexa på sin lapp?

   (b) Vad blir summan av de valda talen?



Högstadiets matematiktävling 1990/91

Finaltävling 19 januari 1991

1. Beräkna summan:

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\cdots+\frac{99}{100}\right)$$

2. Kring en regelbunden sexhörning i planet med sidlängden 1 cm ritas en kurva. Kurvan ligger överallt på avståndet 1 cm från sexhörningen. Beräkna arean mellan sexhörningen och kurvan.

3. Ett naturligt tal N slutar med siffrorna 1990. Om man stryker dessa fyra siffror får man ett nytt naturligt tal M sådant att divisionen N/M går jämnt upp. Finn alla sådana tal N.

4. A och B är punkter i planet. Undersök hur många linjer i planet som ligger på avståndet 2 cm från A och 3 cm från B. **OBS!** Antalet linjer kommer att variera beroende på avståndet mellan A och B.

5. En matematikklubb har 100 medlemmar. För fyra medlemmar, vilka som helst, gäller att minst en känner de tre övriga. Visa att det finns minst en medlem som känner alla övriga medlemmar. (Vi förutsätter att om A känner B, så känner B A.)

6. Anna och Björn spelar följande spel: Spelet startas genom att Anna kastar en tärning och skriver upp resultatet på ett papper. Detta är Annas första tal a. Sedan fortsätter spelet på följande vis: För varje tal a som Anna skriver upp väljer Björn ett primtal p sådant att $a \leq p \leq a^2$, och därefter skriver han upp talet $b = a + p$. För varje tal b som Björn skriver upp svarar Anna med ett godtyckligt heltal a sådant att $5a \geq b$.

   Anna vinner om hon kan skriva upp talet $a = 1$; Björn vinner om han kan skriva upp ett tal $b \geq 100$.

   (a) För vilka kastresultat finns det en vinnande strategi för Anna?

   (b) För vilka kastresultat finns det en vinnande strategi för Björn?

   (c) För vilka kastresultat finns det inte någon vinnande strategi för någon av spelarna?

   (d) Är spelet rättvist?

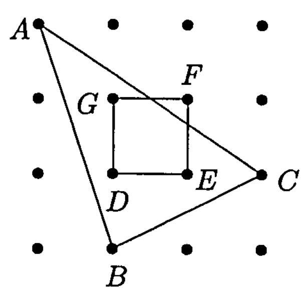
   En spelare sägs ha en vinnande strategi om denna kan vinna spelet oberoende av hur den andre spelar.

1. Summera alla produkter i multiplikationstabellen nedan:

$2\cdot 2$	$3\cdot 2$	$4\cdot 2$	$5\cdot 2$	$6\cdot 2$	$7\cdot 2$	$8\cdot 2$	$9\cdot 2$
$2\cdot 3$	$3\cdot 3$	$4\cdot 3$	$5\cdot 3$	$6\cdot 3$	$7\cdot 3$	$8\cdot 3$	$9\cdot 3$
$2\cdot 4$	$3\cdot 4$	$4\cdot 4$	$5\cdot 4$	$6\cdot 4$	$7\cdot 4$	$8\cdot 4$	$9\cdot 4$
$2\cdot 5$	$3\cdot 5$	$4\cdot 5$	$5\cdot 5$	$6\cdot 5$	$7\cdot 5$	$8\cdot 5$	$9\cdot 5$
$2\cdot 6$	$3\cdot 6$	$4\cdot 6$	$5\cdot 6$	$6\cdot 6$	$7\cdot 6$	$8\cdot 6$	$9\cdot 6$
$2\cdot 7$	$3\cdot 7$	$4\cdot 7$	$5\cdot 7$	$6\cdot 7$	$7\cdot 7$	$8\cdot 7$	$9\cdot 7$
$2\cdot 8$	$3\cdot 8$	$4\cdot 8$	$5\cdot 8$	$6\cdot 8$	$7\cdot 8$	$8\cdot 8$	$9\cdot 8$
$2\cdot 9$	$3\cdot 9$	$4\cdot 9$	$5\cdot 9$	$6\cdot 9$	$7\cdot 9$	$8\cdot 9$	$9\cdot 9$

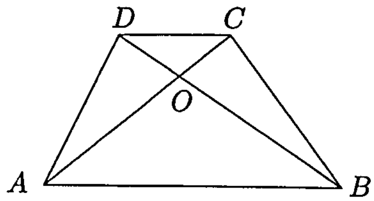
2. En färsk gurka väger 450 g av vilket 90% är vatten. Om den får ligga framme och torka består den efter en viss tid till 80% av vatten. Hur mycket väger gurkan då?

3. De vertikala och horisontella avstånden mellan två närliggande punkter i figuren till höger är 1 cm. Beräkna arean av:
   (a) Triangeln ABC.
   (b) Den del av kvadraten $DEFG$ som ligger inom triangeln ABC.



4. Fyra tal är skrivna efter varandra. Medelvärdet av de två första är 7, medelvärdet av det andra och tredje är 2, medelvärdet av de två sista är -5. Beräkna medelvärdet av det första och det sista talet.

5. Figuren till höger visar en *parallelltrapets* där sidan AB är parallell med sidan CD. Låt O vara diagonalernas skärningspunkt. Arean av triangeln AOD är $4\,\text{cm}^2$. Vad är arean av triangeln BCO?



6. En person åker dagligen vid samma tid tåg hem från sitt arbete. Hans fru hämtar honom alltid vid stationen med bil. En dag hinner han med ett tåg som går en timme tidigare. När han kommer till stationen börjar han gå hemåt. Efter en stund möter han sin fru med bilen. De åker då hem och kommer fram 20 minuter tidigare än normalt. Hur lång tid gick mannen?
   Förutsättning: Frun kör alltid med samma hastighet och kommer i vanliga fall till stationen samtidigt som tåget.

Högstadiets matematiktävling 1991/92
Finaltävling 18 januari 1992

1. Två cirklar skär varandra i punkterna A och B. AC och AD är diametrar i respektive cirkel. Visa att B, C och D ligger på en rät linje.

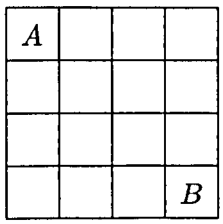
2. I ett land finns elva städer. Varje stad har direkt flygförbindelse med minst fem andra städer. Visa att man kan flyga mellan varje par av städer med högst en mellanlandning.

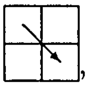
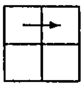
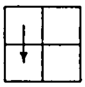
3. En fotboll är sydd av svarta och vita läderbitar. De svarta bitarna är regelbundna femhörningar och de vita regelbundna sexhörningar. Varje femhörning gränsar till fem sexhörningar och varje sexhörning gränsar till tre femhörningar och tre sexhörningar. Bollen har tolv svarta femhörningar. Hur många vita sexhörningar har den?

4. Fyra ettor och nollor i följd kan skrivas på 16 olika sätt. Tre av dessa är 1010, 0100 och 1001. De återfinns i följden 101001. Alla 16 kombinationer kan på samma sätt återfinnas i en följd av 19 ettor och nollor.
   Påstående: Om en sådan följd inleds med 1111 slutar den med en viss kombination av fyra symboler.

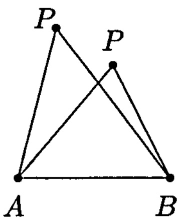
   (a) Vilken är denna avslutande kombination?

   (b) Bevisa påståendet ovan.



5. På hur många sätt kan man komma från ruta A till ruta B i figuren till höger om bara följande förflyttningar är tillåtna:
   ,  och ?

6. A och B är två punkter på avståndet 4 cm. Det finns punkter P ovanför sträckan AB (se figuren till höger) så att vinklarna i triangeln ABP alla är $\geq 45°$. Alla möjliga sådana punkter P bildar ett begränsat område. Beräkna områdets area.



1. HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING (HMT) fyller fem år i år. Det firar vi med nedanstående additionsuppställning, där bokstäverna betecknar siffror.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \underline{1} & \underline{2} & \\
 & & \mathrm{F} & \mathrm{E} & \mathrm{M} \\
 & & & \text{Å} & \mathrm{R} \\
 & & \mathrm{M} & \mathrm{E} & \mathrm{D} \\
+ & & \mathrm{H} & \mathrm{M} & \mathrm{T} \\
\hline
 & 1 & 9 & 9 & 2
\end{array}
$$

Beräkna summan F+E+M + Å+R + M+E+D + H+M+T.

2. Jens sågar för hand till ett 500-bitarspussel. Pusslet har formen av en rektangel med måtten 40×60 cm. Totalt sågar Jens en sträcka av 20 m. Beräkna medelvärdet av pusselbitarnas omkrets.

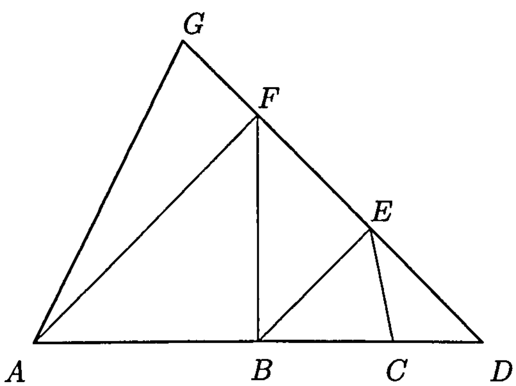
3. En vinterdag kör Lena bil till och från jobbet. Till jobbet har hon medelfarten 90 km/h. När hon åker hem är vädret sämre och hon kör med medelfarten 30 km/h. Vilken är hennes medelfart på hela resan till och från jobbet?

4. En bok innehåller förutom titelsidan 213 sidor och är indelad i 12 kapitel. Vissa av kapitlen har 25 sidor, några har 20 sidor och övriga har 16 sidor. Hur många kapitel har 25 sidor?

5. Beräkna summan exakt:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{100}}$$

6. I triangeln ADG dras en polygonlinje $AFBEC$ enligt figuren. Var ska punkterna F, E och B, C placeras på sträckorna GD respektive AD, för att triangeln ADG ska delas in i fem deltrianglar med lika stora areor?
Sträckorna $AD = 40$ cm och $GD = 45$ cm.



Högstadiets matematiktävling 1992/93
Finaltävling 23 januari 1993

1. Högstadiets matematiktävling (HMT) fyller fem år i år. Vi fortsätter att fira med nedanstående additionuppställning, där bokstäverna betecknar var sin siffra, dock ej 0 eller 8.

$$\begin{array}{cccc} & \underline{1} & \underline{1} & \\ & \mathrm{F} & \mathrm{E} & \mathrm{M} \\ & & \text{Å} & \mathrm{R} \\ & \mathrm{M} & \mathrm{E} & \mathrm{D} \\ + & \mathrm{H} & \mathrm{M} & \mathrm{T} \\ \hline 1 & 9 & 9 & 3 \end{array}$$

   (a) Finn en lösning som gör att additionen blir korrekt.

   (b) Hur många lösningar finns det?

2. Låt p vara ett primtal. Bestäm alla p så att $\sqrt{5p+49}$ är ett heltal.

3. I en triangel ABC är sidorna tre på varandra följande naturliga tal alla > 3. Dra höjden mot den näst längsta sidan. Höjden delar den sidan i två delar. Beräkna skillnaden i längd mellan dessa två delar.

4. Observera att summan av två på varandra följande naturliga tal alltid är udda, nämligen $k + (k + 1) = 2k + 1$. Finns det ett annat naturligt tal n sådant att summan av n på varandra följande naturliga alltid är udda? Bestäm i så fall det minsta värdet på $n > 2$.

5. Vi var sju personer som träffades för att konstruera årets tävlingsproblem. Några av oss skakade hand med varandra när vi träffades. När vi skildes åt skakade återigen några hand, och det visade sig att det var lika många handskakningar båda gångerna. Visa att det finns två personer bland oss som antingen inte alls skakade hand med varandra, eller skakade hand både när vi träffades och när vi skildes.

6. Från en punkt P i rymden observerades fyra stjärnor, A, B, C och D. Följande vinklar bestämdes: $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$. Dessutom bestämdes $\angle APD$ och $\angle BPD$ till $120°$. Bestäm vinkeln $\angle CPD$.

HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 1993/94
KVALIFICERINGSTÄVLING 16 NOVEMBER 1993

1. Fyll i rutorna nedanför med tal så att summan av talen i tre på varandra följande rutor alltid är 12. Bestäm samtliga lösningar.

		4								7		

2. Medelåldern för en grupp personer är 31 år. Medelåldern för kvinnorna i gruppen är 25 år, männens medelålder är 35 år. Hur många procent av gruppen utgör männen?

3. Finns det en triangel som har större area än en annan, men samtidigt har alla sidor kortare än varje sida i den andra?

4. En bågskyttetavla är konstruerad av nio koncentriska cirklar (cirklarna har gemensam medelpunkt). Den största cirkelns radie är lika med 1 meter. De åtta ringar som bildas har var och en samma area som den innersta cirkeln. Hur bred är den yttersta ringen?

5. Ett tal N har i basen 9 tre siffror. I basen 6 har N samma tre siffror, fast i omvänd ordning. Bestäm talet N i basen 10. (Till exempel skrivs talet 14 i basen 3 som $(112)_3$ eftersom $14 = 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$.)

6. I ett land finns 27 städer. Regeringen har beslutat att bygga ut flygnätet mellan städerna. Statsministern, som en gång i tiden hade försökt klara av en matematiktävling, beslutade att varje stad skulle förbindas med exakt 9 andra städer (flygrutterna går alltid i båda riktningarna). Är statsministerns beslut möjligt att genomföra?

Högstadiets matematiktävling 1993/94

Finaltävling 22 januari 1994

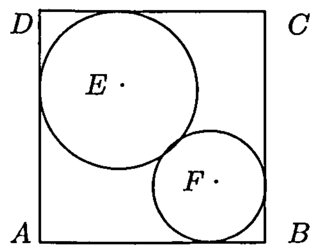
1. I finalen i Högstadiets matematiktävling deltog 65 ungdomar. 40 av dem var pojkar, 28 hade mörkt hår och 31 hade glasögon. 14 pojkar hade mörkt hår och 13 pojkar hade glasögon. 10 mörkhåriga ungdomar hade glasögon och en ljushårig flicka bar inte glasögon. Hur många tävlande var mörkhåriga pojkar med glasögon?

2. Man börjar med talet 1. Talet ersätts med sin kvadrat eller multipliceras med 19. Det nya talet kan ersättas på samma sätt. Visa hur man i elva steg kan erhålla talet 19^{94} och att man inte kan åstadkomma det i färre antal steg.

3. Antag att en rätvinklig triangels sidlängder är heltal. Visa att åtminstone ett av dessa tre tal är delbart med fem.

4. A och B är naturliga tal. Skriver man dessa tal intill varandra, först A och sedan B, får man ett fyrsiffrigt tal C som är en perfekt kvadrat (kvadrat av ett naturligt tal). Skriver man talen $A_1 = A + 17$ och $B_1 = B + 17$ intill varandra, först A_1 och sedan B_1, erhålles ett fyrsiffrigt tal C_1 som också är en perfekt kvadrat. Bestäm talen A och B.

5. I en rektangel $ABCD$ är sidan AB 8 cm och sidan AD 9 cm. Två cirklar med medelpunkter i E respektive F tangerar varandra och rektangelns sidor enligt figur. Den mindre cirkeln har radien 2 cm. Bestäm den större cirkelns radie.

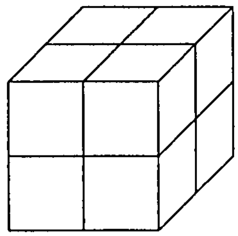


6. Fyra flickor och fem pojkar sitter efter kanten i en rund bubbelpool. Nio nya personer kommer och sätter sig i poolen på följande sätt: Mellan två personer av samma kön sätter sig en pojke och mellan två av olika kön sätter sig en flicka. De nio först badande avlägsnar sig. Kan det efter ett antal sådana byten sitta endast pojkar eller endast flickor i poolen?

Högstadiets matematiktävling 1994/95
Kvalificeringstävling 15 november 1994

1. Medelåldern för ledamöterna i en förening bestående av 10 personer är 50 år. Två ledamöter avgår. Deras medelålder är 74 år. Vilken är medelåldern för de ledamöter som är kvar i föreningen?

2. Varje sidoyta i en kub är indelad i fyra kvadrater. Varje kvadrat färgas röd, blå eller svart. Kvadrater med gemensam sida får inte ha samma färg.



   (a) Visa att det finns 8 kvadrater av varje färg.

   (b) Ge exempel på en sådan färgläggning, förslagsvis genom att markera färgerna på en utvecklad kub.

3. I parallellogrammen $ABCD$ delar punkten E sidan AB så att $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{10}$. I vilket förhållande delas diagonalen AC av sträckan ED?

4. I en triangel med sidorna a, b och c är h_a och h_b höjderna mot sidorna a resp b. Bestäm triangelns vinklar om det är känt att $h_a \geq a$ och $h_b \geq b$.

5. På en obegränsad schackbrädemönstrad yta innesluts precis 100 svarta rutor med en sammanhängande kurva. Kurvan följer rutornas kanter utan att någonstans korsa sig själv. Vilket är det största respektive minsta antal vita rutor som kan inneslutas med en sådan kurva?

HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 1994/95
FINALTÄVLING 21 JANUARI 1995

1. Hitta alla tvåsiffriga tal a, sådana att a och $2a$ har samma siffersumma.

2. Antag att a, b och c är positiva tal och att $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Visa att
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

3. Sidan BC i triangeln $\triangle ABC$ delas i två lika långa delar av punkten D. En cirkel är inskriven i $\triangle ACD$, så att den tangerar sidan AC i punkten E som delar sidan AC i två lika delar. Bestäm vinkeln CAB.

4. Dan får av sin pappa under tre dagar 3, 5 resp. 4 kronor. Varje påföljande dag får han sedan av pappan så många kronor som slutsiffran i summan av antalen kronor han fått de tre föregående dagarna. (Den fjärde dagen blir det 2 kr, ty $3+5+4=12$. Dagen därpå blir det 1 kr, ty $5+4+2=11$ osv.) Kommer Dan någonsin att få 3, 4 och 5 kronor under tre på varandra följande dagar?

5. Bestäm alla fyrsiffriga tal som vid division med 172 ger resten 103 och vid division med 173 ger resten 92.

6. Runt en cirkel finns 99 tal. Talet ett (1) förekommer 50 gånger, och talet minus ett (-1) förekommer 49 gånger. Med dessa tal utförs följande operation: Mellan varje par av intilliggande tal skrivs deras summa. Därefter tas de ursprungliga talen bort. Då återstår 99 tal. Operationen upprepas därefter gång på gång. Visa att efter 20 sådana operationer är minst ett av de erhållna talen större än 10 000.

Högstadiets matematiktävling 1995/96
Kvalificeringstävling 16 november 1995

1. Detta är en talorm:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Talormen kryper runt i kvadraten till höger. I ett visst ögonblick befinner sig rutorna 7, 10 och 11 på de angivna platserna. Ange hela ormens placering i detta ögonblick genom att fylla i de tomma rutorna. (Två rutor med påföljande nummer måste alltså ha en gemensam sida.)

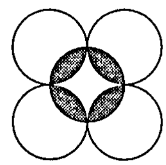
	11	10	
	7		

2. Vilket är det minsta icke-negativa tal man kan få då man ersätter stjärnorna ($*$) i följande uttryck:

$$1 * 2 * 3 * 4 * \ldots * 775 * 776 * 777$$

med plus- eller minustecken?

3. Fyra cirklar tangerar varandra enligt figuren till höger. En femte cirkel har placerats så att den går genom de fyra tangeringspunkterna. Beräkna arean av det skuggade området i figuren. Alla cirklarna har radien 3 cm.



4. På en vanlig tärning är summan av ögontalen på två motstående sidor alltid 7. Cecilia bygger en kropp av sex lika stora vanliga tärningar genom att klistra ihop dem sidoyta mot sidoyta. Vilket är det största antal ögon hon kan få på utsidan av denna kropp?

5. Amanda och Botvid spelar följande spel: Framför sig har de två högar med 20 stenar i varje hög. I varje drag tar en spelare antingen en sten ur någon av högarna eller en sten ur vardera högen. Spelarna turas om och Amanda gör det första draget. Den spelare som tar bort den sista stenen vinner. Finns det en vinnande strategi för någon av spelarna? En spelare sägs ha en vinnande strategi om denne kan vinna spelet oberoende av hur den andre spelar.

6. En simmare på väg uppströms i en flod märkte först efter tio minuter att han tappat sina badbyxor. Han vände då och simmade (lika snabbt som tidigare) tillbaka och kom ikapp badbyxorna 1,2 km från den plats där han tappade dem. Hur snabbt flöt floden?

Högstadiets matematiktävling 1995/96
Finaltävling 20 januari 1996

1. I det binära talsystemet använder man sig endast av siffrorna 1 och 0. Räkneoperationerna addition och multiplikation definieras som:

$$0+0=0$$
$$1+0=0+1=1$$
$$1+1=10$$
$$0\times 0=0\times 1=1\times 0=0$$
$$1\times 1=1$$

Komplettera vidstående binära multiplikationsuppställning. (Fyll i de tomma rutorna med siffrorna 0 och 1 så att uträkningen blir korrekt.)

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & \square & \square & \square & \square \\
 & & & & \times & \square & \square & \square \\
\hline
 & & & & \square & \square & \square & \square \\
 & & & \square & \square & \square & \square & \\
\hline
\square & \square & \square & \boxed{1} & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

2. Vilket är det minsta icke-negativa tal man kan få då man ersätter stjärnorna ($*$) i följande uttryck:

$$1^2 * 2^2 * 3^2 * 4^2 * \ldots * 775^2 * 776^2 * 777^2$$

med plus- eller minustecken?

3. Under en matematiklektion sysselsatte sig Amanda, Botvid och Claudia med att spela luffarschack. Förloraren i ett parti står över nästa omgång. På rasten efter lektionen anmärkte Botvid att Amanda spelade 15 partier och Claudia 31 partier. Vilka två spelade det elfte partiet och vem vann det?

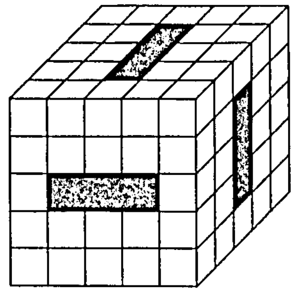
4. Kan produkten av två heltal A och B vara lika med $\overbrace{3333\ldots33}^{\text{1996 treor}}$ om man i talet B använder samma siffror som i A fast i annan ordning?

5. Till Högstadiets matematiktävling vid en skola anmälde sig 35 elever. Tyvärr var det några bland de anmälda som inte kom till tävlingen. Tävlingen bestod av fem uppgifter värda en poäng var. Om alla flickor som deltog hade klarat fem uppgifter var och alla pojkar fyra var, så hade poängsumman blivit 4% högre än om alla pojkarna klarade alla fem uppgifterna och flickorna fyra uppgifter var. Hur många flickor och hur många pojkar deltog i Högstadiets matematiktävling på denna skola?

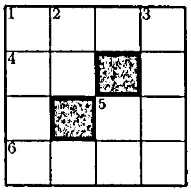
6. Dan påstår att när han valde en punkt P inne i kvadraten $ABCD$ så blev omkretsarna av $\triangle ABP$, $\triangle ADP$ och $\triangle CDP$ 16, 24 respektive 20 cm. Dan påstår vidare att han nu kan beräkna omkretsen av $\triangle BCP$. Har Dan rätt?

HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 1996/97

KVALIFICERINGSTÄVLING 14 NOVEMBER 1996



1. Kanterna på kuben i figuren är 5 cm långa. Tvärs genom kuben har man skurit ut tunnlar enligt figuren. Bestäm volymen av den återstående delen av kuben.
2. Lös nedanstående talkorsord.



Vågrätt:

1. Siffersumman är 25.
2. $2 \times$ (lodrätt 5).
3. (lodrätt 5) $+ 2$.
4. (vågrätt 1) $- 20$.

Lodrätt:

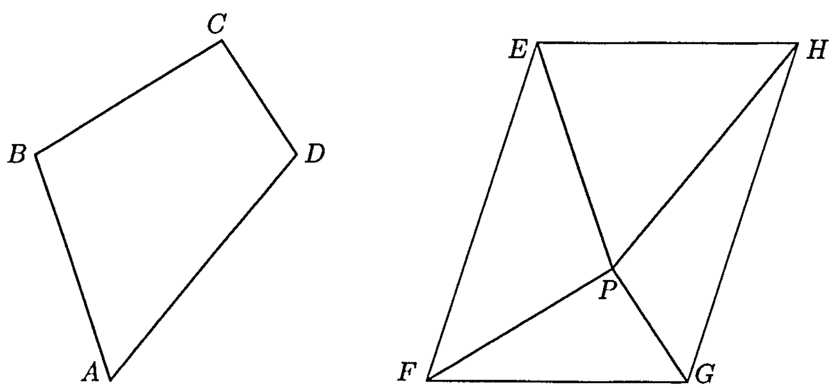
1. Andra siffran är 1 större än summan av övriga siffror, och ingen siffra är 0.
2. (vågrätt 4) $+ 40$.
3. En palindrom.
4. En tredjepotens (dvs ett heltal upphöjt till 3).

En palindrom är ett ord som läses likadant fram- som baklänges.

3. När biljettpriserna på Sollentunabio sänktes den 1 januari, ökade antalet besökare under januari månad med 50% jämfört med december. Samtidigt ökade biografens intäkter med 20%. Med hur många procent sänktes biljettpriserna?

4. Vilket är det minsta positiva heltal som enbart skrivs med siffrorna 0 och 1, samt är delbart med 225?

5. $ABCD$ och $EFGH$ är fyrhörningar. I $EFGH$ finns en punkt P sådan att PE, PF, PG och PH är parallella med och lika långa som AB, BC, CD och DA, respektive (se figur).



Bevisa att arean av $EFGH$ är dubbelt så stor som arean av $ABCD$.

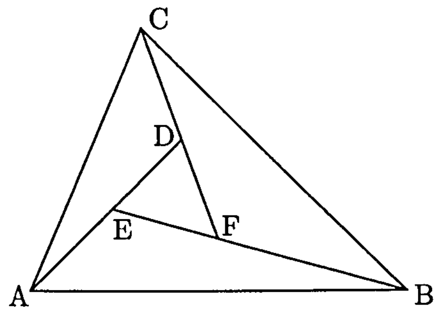
6. Thérèse, Johanna och Susanne spelade kort. I varje omgång utdelades a poäng för vinst, b poäng för andra plats, och c poäng för tredje plats, där a, b och c är heltal sådana att $a > b > c \geq 1$. Susanne hade tur och vann den första omgången, men slutade tillsammans med Johanna på 9 poäng. Thérèse vann hela spelet på 22 poäng. Bestäm hur många poäng var och en av flickorna fick i varje omgång.

Högstadiets matematiktävling 1996/97
Finaltävling 18 januari 1997

1. Bestäm summan av alla siffror i talen 1, 2, 3, ... , 573.

2. På en viss tärning har de olika sidorna en, två, tre, fyra, fem respektive sex prickar. Om man summerar antalet prickar för varje par av motstående sidor, får man tre på varandra följande heltal. Ett av tärningens hörn har dessutom egenskapen, att summan av antalet prickar på de tre sidor som möts i hörnet är 14. Hur många prickar finns det på den sida som ligger mitt emot sidan med fem prickar?

3. I en triangel ABC dras tre linjer, en från varje hörn. Linjen från A möter linjen från B i punkten E och linjen från C i punkten D. Linjen från B möter linjen från C i punkten F. Punkterna D, E och F är mittpunkter på sträckorna CF, AD respektive BE. Bestäm arean av triangeln DEF, om arean av triangeln ABC är $42\,\text{cm}^2$.

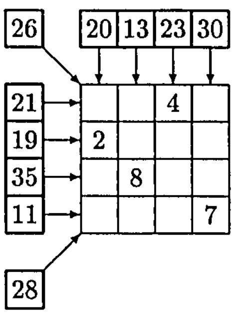


4. Dan sålde nio av sina tio spelkulor till sina tre kompisar. Han hade prissatt kulorna till 39, 35, 29, 23, 22, 19, 17, 16, 15 och 12 kronor. Viktor köpte fyra kulor, Christopher tre och Johan två. Viktor betalade dubbelt så mycket som Christopher och tre gånger så mycket som Johan. Vilka kulor köptes av respektive pojke?

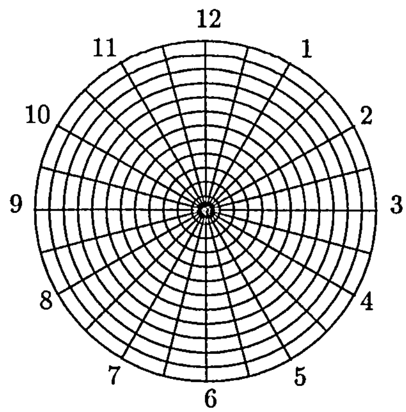
5. Bestäm det minsta och största värdet som uttrycket $S = 5x - 4y + 3z - 2u + t$ kan anta, om vi vet att $0 \leq x \leq y \leq z \leq u \leq t \leq 10$.

6. Sex elever deltog i en matematiktävling. Var och en av de sex uppgifterna som ingick i tävlingen löstes av exakt fyra elever. Visa att det fanns två deltagare som tillsammans klarade alla sex uppgifterna.

1. Skriv ett heltal från 1 till 9 i varje tom ruta i figur 1 på ett sådant sätt att summorna av de inskrivna talen i varje rad, varje kolumn och utmed båda diagonalerna blir lika med talen i de tjockare markerade rutorna. Samma tal får användas flera gånger.



Figur 1



Figur 2

2. Minutvisaren och timvisaren på en klocka är 12 respektive 9 dm långa. Klockan 12 satt en liten snigel på spetsen av minutvisaren. Den började gå längs visaren med farten 2 cm per minut mot klockans centrum. När snigeln kom fram till klockans centrum förflyttade den sig till timvisaren, fortsatte sin vandring till visarens spets, vände och vandrade tillbaka. Rita noggrant i figur 2 snigelns väg i förhållande till urtavlan fram till klockan 14:30.

3. Tre personer med medelåldern 27 år badade i en bubbelpool, medan Annika och fem andra personer satt på poolkanten. Medelåldern bland dem som satt på kanten var 30 år. När Annika hoppade i poolen, minskade medelåldern bland de badande med lika mycket som den ökade bland dem som satt kvar på kanten. Hur gammal var Annika?

4. En drake har tre huvuden och tre klor. En riddare som vill döda draken har fyra olika handlingsalternativ, som han får upprepa så många gånger han vill:

   (1) Om han hugger av en klo växer två nya klor ut.
   (2) Om han hugger av två klor växer ett nytt huvud ut.
   (3) Om han hugger av ett huvud, växer ett nytt huvud ut.
   (4) Om han hugger av två huvuden, växer inget nytt ut.

   Draken dör om den varken har något huvud eller någon klo kvar, och inget nytt växer ut. Kan riddaren döda draken?

5. Kan heltalen från 1 till 20 placeras vid hörnen och kanterna på en kub, med ett tal vid varje hörn och ett tal på varje kant, så att talet på varje kant är medelvärdet av talen vid kantens ändpunkter (hörnen)? Varje tal får endast användas en gång.

6. Låt a och b vara två positiva heltal. Bestäm dessa tal då man vet att precis ett av följande fyra påståenden är falskt (och de övriga tre alltså är sanna):

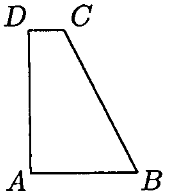
   (1) $a + 7b$ är ett primtal.
   (2) $a = 2b + 5$.
   (3) $a + 1$ är delbart med b.
   (4) $a + b$ är delbart med 3.

Högstadiets matematiktävling 1997/98

Finaltävling 24 januari 1998

1. Ett vin importerades till Sverige i ett antal 0,75-litersflaskor. Importören har bestämt sig för att ändra på flaskstorleken och hällde över vinet till 0,55-litersflaskor. Det blev då 7 flaskor fler än tidigare och bland dessa flaskor var den sista inte helt full. Importören ändrade sig igen när det gällde flaskstorleken och hällde över vinet till 0,9-litersflaskor. Det blev nu tre flaskor färre än det ursprungliga antalet och bland dessa var den sista inte helt full. Hur många flaskor har man importerat?

2. I en parallelltrapets $ABCD$ är sidan AD vinkelrät mot basen AB. Sidan AD är lika lång som AB och CD tillsammans. Visa att bisektrisen vid vinkeln D delar sidan BC mitt itu.



3. Löven på ett äppelträd uppfyller nedanstående *algebraf.* Varje bokstav i uppställningen svarar mot en siffra. Olika bokstäver betecknar olika siffror, och L är inte noll. Vilket är det största antalet LÖV som kan finnas på ett TRÄD?

$$\begin{array}{cccc} & \text{L} & \text{Ö} & \text{V} \\ & \text{L} & \text{Ö} & \text{V} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \text{L} & \text{Ö} & \text{V} \\ \hline \text{T} & \text{R} & \text{Ä} & \text{D} \end{array}$$

4. Kan man välja tre tal bland talen

$$\frac{1}{100}, \frac{2}{99}, \frac{3}{98}, \ldots, \frac{99}{2}, \frac{100}{1}$$

så att de valda talens produkt blir 1?

5. Ett pappersark har formen av en rektangel. Du får klippa detta ark i två delar längs en godtycklig rät linje. Sedan får du välja en av bitarna och klippa den i två delar. Du fortsätter på samma sätt genom att välja en godtycklig bit i taget och klippa den i två delar (alltid längs en rät linje). Går det då att utföra klippningarna på ett sådant sätt att du aldrig får 100 bitar med samma antal hörn?

6. 1997 punkter delar en cirkel i 1997 lika långa bågar. Mellan dessa punkter dras 1997 kordor på ett sådant sätt att det från varje punkt utgår två kordor.

   (a) Visa att det finns minst tre kordor som har samma längd.

   (b) Kan samma slutsats dras om man i texten ovan ersätter 1997 med 1998?

Del II

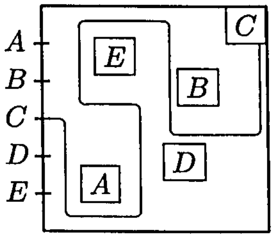
Lösningar

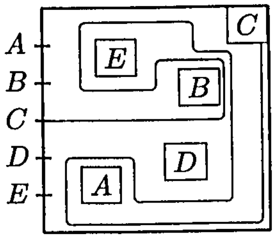
Högstadiets Matematiktävling 1988/89

Kvalificeringstävling

1. Sidorna 1 till 9 ger 9 siffror. Sidorna 10 till 99 ger $90 \cdot 2 = 180$ siffror. Tillsammans blir det 189 siffror. Kvar är då $201 - 189 = 12$ siffror vilket räcker för 4 tresiffriga sidnummer. Antalet boksidor är därför $99 + 4 = 103$.

2. Kurvan från punkten C till rutan C delar kvadraten i två delar eftersom rutan C ligger på kanten. Det är därför väsentligt att punkten A och rutan A hamnar i samma del. Motsvarande måste också gälla för punkterna B, D och E. När väl C har förbundits med rutan C kan de övriga förbindas en efter en på ett godtyckligt sätt. Två av många olika "C-kurvor" visas i figurerna nedan.





3. Problemet löses lämpligast genom att talen skrivs på tiopotensform:

$$(3{,}4\ldots \cdot 10^{15}) \cdot (1{,}6\ldots \cdot 10^{19}) = a\ldots \cdot 10^{34}$$

där a är ett heltal mellan 3 och 7. Bortser man från tiopotenser så är den första faktorn mindre än 4 och den andra mindre än 2. Därför är a mindre än 8. Produkten har alltså 35 siffror.

4. Kalla avståndet Malmö–Göteborg y, Malmö–Stockholm z och Göteborg–Stockholm x. Vi har då två ekvationer: $x + y = z + 15$ och $z + x = y = 83$. Ekvationerna summeras ledvis, vilket ger $2x + y + z = y + z + 15 + 83$. Detta ger $2x = 98$, eller $x = 49$. Vägen mellan Göteborg och Stockholm är alltså 49 mil.

5. (a) Antalet områden blir 7.

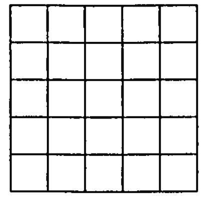
   (b) Antalet områden blir 11 respektive 16.

   (c) När en ny linje dras delas gamla områden så att antalet områden ökas med antalet befintliga linjer plus ett.

6. Antag att tal är utplacerade i rutorna enligt önskemålet i uppgiften. Tänk dig den kortaste vandringen från rutan med talet 1 till rutan med talet 64. Man behöver gå högst 7 steg "vertikalt" och därefter högst 7 steg "horisontellt". Antalet steg är därför högst 14 och i varje steg ökar talet i rutan med högst 4. Därför kan det högst stå $1 + 4 \cdot 14 = 57$, och inte 64, i rutan när man avslutat vandringen.

Finaltävling

1. Det finns 55 olika kvadrater i figuren till höger: 25 små kvadrater, 16 kvadrater med 4 rutor, 9 kvadrater med 9 rutor, 4 kvadrater med 16 rutor och 1 kvadrat med 25 rutor. Allmänt, om figuren består av n^2 delkvadrater så finns det totalt



$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2$$

olika kvadrater i figuren. För att inse detta, betrakta en kvadrat R av storlek $k \times k$, där $1 \leq k \leq n$. Kvadratens vänstra kant kan ligga längs en av de $n+1-k$ horisontella linjer som bildar den stora kvadraten. Likaså kan den övre kanten i R ligga på en av de första $n+1-k$ horisontella linjer som bildar den stora kvadraten. Det finns därför $(n+1-k)\cdot(n+1-k) = (n+1-k)^2$ olika kvadrater av samma storlek som R. Detta gäller för varje $k = 1, 2, \ldots, n$, och således finns det $n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+2^2+1^2$ olika kvadrater.

2. Säg att talet x skrivs i decimalsystemet som $S_nS_{n-1}\ldots S_3S_2S_1$. Ställer vi upp multiplikationen får vi

$$\begin{array}{r} S_nS_{n-1}\ldots S_3S_2S_1 2 \\ \times \qquad\qquad\qquad 2 \\ \hline 2S_nS_{n-1}\ldots S_3S_2S_1 \end{array}$$

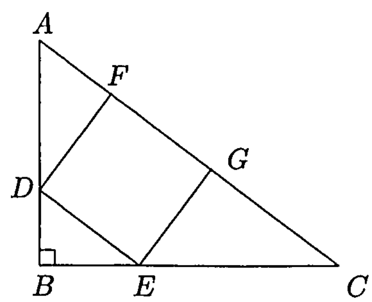
vilket medför att $S_1 = 4$. Vidare får vi

$$\begin{array}{r} S_nS_{n-1}\ldots S_3S_2 42 \\ \times \qquad\qquad\qquad 2 \\ \hline 2S_nS_{n-1}\ldots S_3S_2 4 \end{array}$$

vilket ger oss $S_2 = 2 \cdot 4 = 8$. Fortsätter vi på samma sätt får vi till slut

$$x = 105\,263\,157\,894\,736\,842.$$

3. Med beteckningarna i vidstående figur är följande rätvinkliga trianglar likformiga: DBE, AFD, EGC och ABC (eftersom motsvarande vinklar är lika hos samtliga trianglar). $|AB| = 6\,\text{cm}$, $|BC| = 8\,\text{cm}$ och hypotenusan fås med Pythagoras sats: $|AC| = 10\,\text{cm}$. Antag att kvadratens sida är d. Då är $8|AF| = 6d$, $6|GC| = 8d$ och $|AF| + |FG| + |GC| = |AC| = 10\,\text{cm}$. Ur detta får vi $37d = 120$, det vill säga $d = 3\frac{9}{37}$ cm.



4. Antag att sträckan är s km. Då har vi A:s åktid i timmar: $t_A = (s/2)/90 + (s/2)/100 = 19s/1800$. Om B:s åktid är t_B så är $s = (t_B/2)\cdot 90 + (t_B/2)\cdot 100 = 95t_B$. Således $t_B = s/95$, vilket är mindre än t_A. B kommer först fram och $(t_A - t_B)/t_B = 5/1800 = 1/360$, det vill säga cirka 0,3%.

5. Parallellförskjut alla linjer så att de går genom en punkt. Det uppstår 14 vinklar vars summa är 360 grader. Någon vinkel måste vara mindre än 26 grader, eftersom $14 \cdot 26 = 364 > 360$.

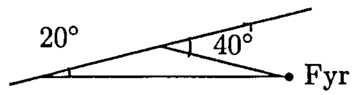
6. 10% av eleverna spelar inte boll, 20% sysslar inte med friidrott, 30% åker inte skidor och 40% åker inte skridskor. Varje elev faller i minst en av dessa grupper, men 10% + 20% + 30% + 40% = 100% vilket betyder att varje elev faller i precis en av dessa grupper. Speciellt gäller att om en elev inte åker skidor, så åker hon skridskor och tvärt om. Svaret är därför: alla elever.

Högstadiets Matematiktävling 1989/90

Kvalificeringstävling

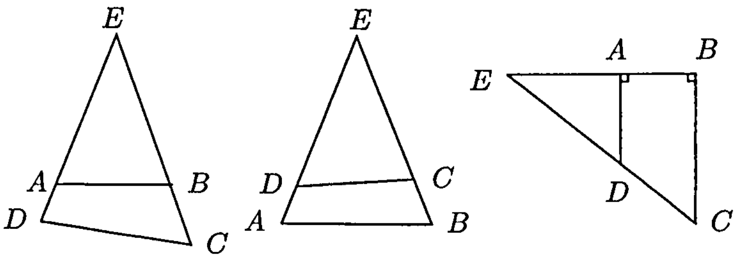
1. Antalet elever på skolan är större än det dubbla antalet dagar per år, även om det är skottår. Någon dag fyller allstå minst tre elever år, åtminstone två av dessa är av samma kön.

2. I figuren till höger ser man genast att 40-gradersvinkeln är yttervinkel till en triangel där sidorna är avstånden till fyren vid de två pejlingarna och tillryggalagd sträcka. Vinkelvärdena visar att triangeln är likbent (yttervinkelsatsen och två lika vinklar). Avståndet till fyren vid andra pejlingen är alltså lika med den tillryggalagda sträckan: 0,75 h · 10 knop = 7,5 sjömil.



3. Av de 3000 heltalen är vart tredje delbart med 3, det vill säga 1000 stycken. Vart femte är delbart med 5, det är 600 heltal. Ett tal som är delbart med 3 och 5 är delbart med 15 och antalet sådana är $3000/15 = 200$. Antalet tal som är delbara med 3 men inte 5 är alltså $1000 - 200 = 800$, och antalet tal som är delbara med 5 men inte 3 är $600 - 200 = 400$. Det totala antalet tal som är delbara med 3 *eller* 5 är därför $800 + 400 + 200 = 1400$. Resten av talen är varken delbara med 3 eller med 5, och de är $3000 - 1400 = 1600$ till antalet.

4. Det blir tre fall (figuren nedan) beroende på om de lika vinklarna är större än, mindre än eller lika med 90 grader.



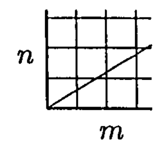
- *Fallet med vinklarna större än 90 grader:* Förläng sidorna AD och BC och kalla skärningspunkten för E. Triangeln ABE är likbent eftersom vinklarna vid A och B är lika. Sidan EC är större än sidan ED i triangeln DCE eftersom vinkeln D är större än vinkeln C. Eftersom $AE = BE$ får vi att AD måste vara kortare än BC.
- *Fallet med vinklarna mindre än 90 grader:* Förläng sidorna AD och BC och kalla skärningspunkten för E. I triangeln DCE är vinkeln vid D mindre än vinkeln vid C, alltså är EC kortare än ED. Triangeln ABE är likbent så av detta följer att AD är kortare än BC.

- *Fallet med vinklarna lika med 90 grader:* I detta fall blir AD en transversal i triangeln CBE som är parallell med BC. Härav följer påståendet direkt.

5. Lösningen visas i uppställningen till höger.

			5	7	1	2	5
					7	4	3
		1	7	1	3	7	5
	2	2	8	5	0	0	
3	9	9	8	7	5		
4	2	4	4	3	8	7	5

6. När diagonalen går in i en ny ruta passeras en indelningslinje i lodled eller horisontalled (se figuren). Diagonalen kan inte samtidigt passera båda typerna av indelningslinjer, eftersom det i så fall skulle ske i ett hörn av en ruta, men det är omöjligt förutom i startrutan eftersom m och n inte har någon gemensam faktor. Samtidigt vet vi att det finns m lodlinjer och n horisontallinjer att passera. Antalet passerade rutor blir alltså $m + n - 1$ eftersom diagonalen skär två linjer när den går in i startrutan.



   (a) Linjen passerar genom 19 rutor.

   (b) Linjen passerar genom $m + n - 1$ rutor.

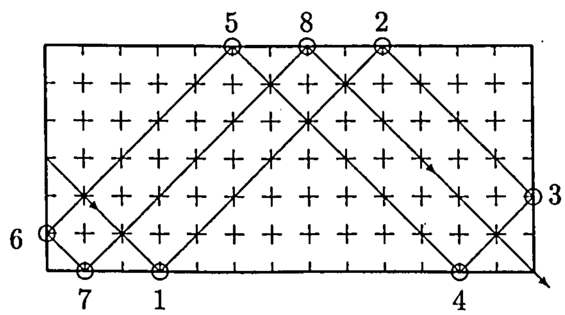
Finaltävling

1. Problemet kan lösas grafiskt enligt figuren nedan. Totalt behövs 8 studsar. Alternativt kan följande resonemang användas.

   För varje studs i långsida måste bollen passera bordets bredd en gång till innan den kan hamna i ett hörn. På motsvarande sätt måste den efter studs i kortsida passera bordets hela längd en gång till innan den *kan* hamna i ett hörn. Det hela kan ses som att man i varje studs speglar bordet i den sida där bollen studsar, och bollens väg beskriver då en hypotenusa i en rätvinklig, likbent triangel. Rätvinkligheten och likbentheten kommer sig av att man stöter bollen i 45 graders vinkel mot kortsidan. Vi betecknar antalet studsar i kortsida med x och i långsida med y. Den likbenta triangelns sidor kan beskrivas med följande ekvation:

$$13(x + 1) = 6y + 3$$

   Vänsterledet anger bollens färd i längdriktningen, x studsar och den färd som kommer sig av utstöten. Högerledet anger bollens färd i bordets breddriktning, y studsar och den väg som kommer av att man börjar halvvägs upp på kortsidan. Lösning av ekvationen $13x - 6y = -10$ ger $x = 2 + 6n$ och $y = 6 + 13n$, där $n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$. Vi är intresserade av den första gången bollen hamnar i ett hörn, vilket ger $n = 0$. Då är $x = 2$ och $y = 6$, totalt $6 + 2 = 8$ studsar.



2. Dela upp termerna 43^{43} och 17^{17} i faktorer med kända entalssiffror: $43^2 = 1849$ och $43^3 = 79507$. Härav följer att $43^5 = 43^3 \cdot 43^2$ har entalssiffran 3. Vidare har $43^{10} = 43^5 \cdot 43^5$ entalssiffran 9 och 43^{20} entalssiffran 1. Således har $43^{43} = 43^{20} \times 43^{20} \cdot 43^3$ entalssiffran 7. På samma sätt visas att 17^{17} har entalssiffran 7, och därför är entalssiffran i differensen $43^{43} - 17^{17}$ noll.

3. I varje enskilt kast är sannolikheten för krona (kr) $\frac{1}{2}$ och för klave (kl) $\frac{1}{2}$. Vid tre på varandra följande kast är följande åtta utfall möjliga: (kr,kr,kr), (kr,kr,kl), (kr,kl,kr), (kl,kr,kr), (kr,kl,kl), (kl,kr,kl), (kl,kl,kr) och (kl,kl,kl). Dessa utgör tillsammans alla utfall i försöket och är alla lika sannolika. Vi söker sannolikheten för utfallet (kr,kr,kr).

   (a) Vi vet att *minst* ett av kasten gav (kr). Då kan vi utesluta utfallet (kl,kl,kl). Det önskade utfallet utgör nu 1 av 7 möjliga, den sökta sannolikheten är alltså $\frac{1}{7}$.

   (b) Vi vet nu att det *första* kastet gav (kr). Således kan vi denna gång utesluta utfallen (kl,kr,kr), (kl,kr,kl), (kl,kl,kr) och (kl,kl,kl). Det önskade utfallet är nu $\frac{1}{4}$ av de kvarvarande utfallen och den sökta sannolikheten är därför $\frac{1}{4}$.

4. Först finner vi alla fyrsiffriga tal $abcd$ sådana att $abcd = dabc$. Detta ger $a = d$, $d = c$, $c = b$ och $b = a$, alltså $a = b = c = d$. Motsvarande gäller för tre- och tvåsiffriga tal. Följaktligen gäller för tal mellan 10 och 10000 uppgiftens krav för 11, 22, ... , 99, 111, 222, ... , 999, 1111, 2222, ... , 9999. Inget av dessa tal med siffror > 1 kan vara primtal, till exempel så är $55 = 5 \cdot 11$, $777 = 7 \cdot 111$, och så vidare. Återstår 11, 111 och 1111. Talet 11 är ett primtal, $111 = 3 \cdot 37$ och $1111 = 11 \cdot 101$. Således är det enda primtalet som uppfyller uppgiftens krav 11.

5. Vänstra ledet i olikhet (2) är alltid positivt, alltså är $z > 0$. Det följer sedan att vänstra ledet i (1) är positivt, och då är $y > 0$ (observera att enligt uppgiften är $x > 0$). Att både x och y är positiva medför att vänstra ledet i (2) är > 2. Därför är $z > 2$. Vänstra ledet i (1) är då större än $2(x^2 + y^2)$ och vi får $2(x^2 + y^2) < (x^2 + y^2)z \leq 4xy$. Division med 2 ger $x^2 + y^2 < 2xy$, det vill säga $(x - y)^2 < 0$, vilket är omöjligt. Det finns således *inte* tre tal x, y och z som uppfyller villkoren i uppgiften.

6. Låt $P_1, P_2, \ldots, P_6$ vara cirklarnas mittpunkter, och låt O vara en punkt som ligger i alla sex cirklarna. Strålarna OP_i delar in varvet i sex vinklar, och minst en av dessa är $\leq 60°$, säg $\angle P_mOP_n$ för några m och n. Denna vinkel kan då inte vara större än de båda andra vinklarna i triangeln P_mOP_n. I en triangel står den längsta sidan mot den största vinkeln, och därför måste antingen $|P_mP_n| \leq |OP_m|$ eller $|P_mP_n| \leq OP_n$. Men OP_m och OP_n är radier i cirklarna med mittpunkter i P_m respektive P_n, så en av dessa cirklar innehåller den andra punkten.

Högstadiets Matematiktävling 1990/91

Kvalificeringstävling

1. På var femte rad återkommer ordet "TÄVLA". På var sjätte rad återkommer ordet "FRISKT". På samma sätt återkommer de andra orden med mellanrum som är lika med antalet bokstäver i ordet. Hela meningen återkommer på de rader som har radnummer delbara med 5, 6, 1, 9 och 4. Det inträffar för första gången på raden vars nummer är minsta gemensamma multipeln till dessa tal, det vill säga 180.

2. Alla sidor måste vara mindre än halva omkretsen, det vill säga 4 cm (annars kollapsar triangeln till en linje). Enda kombinationen av tre positiva heltal, alla mindre än fyra, vars summa är åtta är $\{3, 3, 2\}$. Triangels sidor måste då vara 3 cm, 3 cm respektive 2 cm, vilket (med Pythagoras sats) ger arean $\sqrt{8}\,\text{cm}^2$.

3. Varje tal finns som term i exakt fyra av de fem givna summorna. Addera de givna summorna; denna summa är fyra gånger summan av de fem ursprungliga talen. Eftersom $190 + 194 + 196 + 212 + 220 = 1012$, så blir summan av de fem talen $1012/4 = 253$. Det största talet ingår inte i den minsta av de givna summorna. Det största talet är alltså $253 - 190 = 63$.

4. Figuren till höger visar ett exempel på en lösning som bevarar en stjärna. Om endast sex stjärnor utplaceras i ett 4×4-rutnät finns det alltid totalt minst fyra stjärnor i två av dess rader. Om dessa stryks, återstår högst två stjärnor, vilka stryks med sina respektive kolumner.

*			*
		*	
*	*		
	*		*

5. Vi kan omforma uttrycket:

$$2^x + 1 = y^2 \iff 2^x = y^2 - 1 \iff 2^x = (y-1)(y+1)$$

Man ser nu att högerledets båda parenteser måste vara potenser av 2. Vidare måste differensen mellan dem vara 2. Endast talen 2 och 4 uppfyller dessa villkor. Alltså är $y = 3$ och $x = 3$.

6. (a) Vi numrerar personerna efter vad de visar. Antag att person 6 har valt talet x. Då har person 4 valt talet $10 - x$, eftersom $(10 - x + x)/2 = 5$ som visas av person 5 mellan personerna 6 och 4. På samma sätt bestäms person 2:s valda tal till $x - 4$, person 8:s till $14 - x$, person 10:s till $x + 4$. Person 1 visar medelvärdet av de tal som valdes av personerna 10 och 2, vilka är $x + 4$ respektive $x - 4$. Detta ger ekvationen $1 = \big((x+4) + (x-4)\big)/2$, vars enda lösning är $x = 1$. Person 6 valde med andra ord talet 1.

   (b) Varje valt tal har sagts två gånger och ingår då med halva sitt värde i två visade tal. Summan av de valda talen måste således vara summan av de visade talen, som är $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$.

Finaltävling

1. Vi observerar först att $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{2}$, $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, och generellt

$$\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \cdots + \frac{k-1}{k} = \frac{k-1}{2}.$$

Vi har således summan $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{99}{2}$. Adderar vi första och sista termen, andra och näst sista, och så vidare fram till $49/2 + 51/2$ får vi alla dessa summor lika med 50. Därför är $S = 49 \cdot 50 + \frac{50}{2} = 2475$.

2. Området mellan sexhörningen och kurvan består av sex kvadrater med sidan 1 cm och sex cirkelsektorer med radien 1 cm. Sektorernas medelpunktsvinklar kan beräknas på olika sätt. De blir 60° vardera. Totalt bildar de sex sektorerna en cirkel med radien 1 cm. Områdets area blir $(6 \cdot 1^2 + \pi \cdot 1^2)\,\text{cm}^2 = (6 + \pi)\,\text{cm}^2$.

   Problemet kan lätt generaliseras till en godtycklig regelbunden n-hörning. Områdets area blir i det allmänna fallet $(n + \pi)\,\text{cm}^2$.

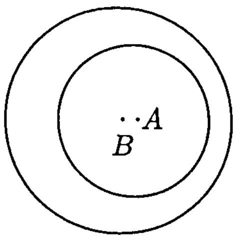
3. Skriv N som $10000 \cdot A + 1990$. Talet M blir då A. Divisionen N/M kan skrivas som

$$\frac{N}{M} = \frac{10000 \cdot A + 1990}{A} = 10000 + \frac{1990}{A}.$$

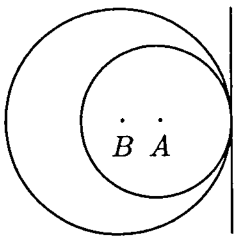
Problemet reduceras till att finna heltalslösningar till divisionen $1990/A$. Faktorisera 1990: $1990 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 199$. Nu kan A vara något av talen 1, 2, 5, 10, 199, 398, 995 eller 1990. Talet N kan då vara 11990, 21990, 51990, 101990, 1991990, 3981990, 9951990 eller 19901990.

4. Notera först att en linje ligger på avståndet d centimeter från en given punkt om och endast om linjen tangerar cirkeln med den givna punkten som medelpunkt och med radien d cm. Problemet är nu att finna antalet gemensamma tangenter till två cirklar med radierna 2 cm respektive 3 cm. Efter undersökning får vi fem olika fall, beroende endast på avståndet s mellan punkterna A och B, vilka framgår av tabellen och figurerna nedan:

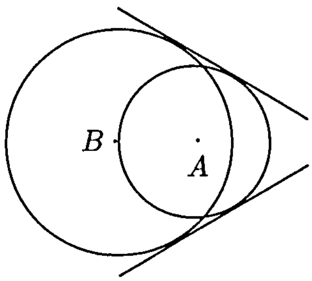
Fall	Avstånd A — B (cm)	Antal gemensamma tangenter
1	$0 \leq s < 1$	0
2	$s = 1$	1
3	$1 < s < 5$	2
4	$s = 5$	3
5	$5 < s$	4



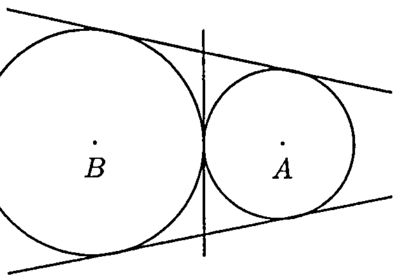
Fall 1



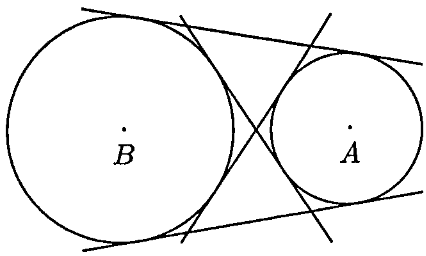
Fall 2



Fall 3



Fall 4



Fall 5

5. Om alla känner alla är saken klar. Om inte, välj då ut två personer, A och B, som inte känner varandra. Tag nu en grupp om fyra personer där A och B ingår, säg $\{A, B, C, D\}$. Någon av dessa fyra känner de övriga i gruppen; det kan dock inte vara någon av A och B. Säg då att C känner de övriga tre i gruppen. För varje ytterligare klubbmedlem E finns det en grupp $\{A, B, C, E\}$, där någon känner de övriga. Det kan inte vara A eller B. Alltså är det C eller E, och alltså känner C och E varandra. Slutsatsen är att C känner alla andra klubbmedlemmar.

Man kan på ett liknande sätt visa att minst 97 personer i klubben känner alla andra.

6. Vi betraktar de olika utfallen i tärningskastet. Vi förutsätter även att både Anna och Björn hela tiden spelar så bra som möjligt.

   Visar tärningen 1 vinner Anna direkt.

   Visar tärningen 2 kan Björn skriva $2+2=4$ eller $2+3=5$. Vilket Björn än väljer kan Anna svara med 1, och hon vinner.

   Visar tärningen 3 kan Björn skriva $3+3=6$, $3+5=8$ eller $3+7=10$. Vad han än väljer kan Anna nästa gång skriva 2 och hon vinner två drag senare enligt tidigare resonemang.

   Visar tärningen 5 kan Björn som mest skriva $5+23=28$. Då kan Anna välja 6 eller ett större tal. Problemet sammanfaller då med tärningsutfallet 6.

   Visar tärningen 6 kan Björn välja 31 och skriva $6+31=37$. Det minsta tal Anna då får välja är 8, varefter Björn skriver talet $8+61=69$. Nu måste Anna välja 14 eller ett större tal, varefter Björn får välja ett tal p så att han kan skriva $b \geq 100$, och han vinner.

   Visar tärningen 4 bör Björn välja 13 och skriva $13+4=17$, annars väljer Anna 3 och vinner. När Björn skrivit 17 får Anna välja 4 eller ett större tal. Väljer hon ett större tal än 4 vinner Björn, men väljer hon 4 kommer spelet att sluta oavgjort, eftersom Björn på nytt skriver 17.

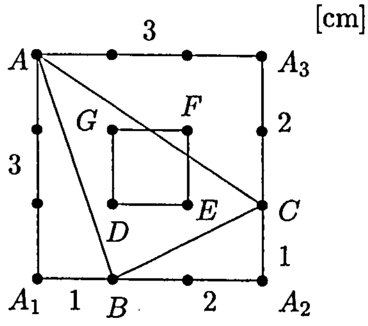
   Anna har alltså en vinnande strategi för kastresultaten 1, 2 och 3; Björn för 5 och 6. För kastresultatet 4 har ingen spelare någon vinnande strategi. Spelet är inte rättvist eftersom Anna vinner i 3/6 av fallen och Björn bara i 2/6 av fallen.

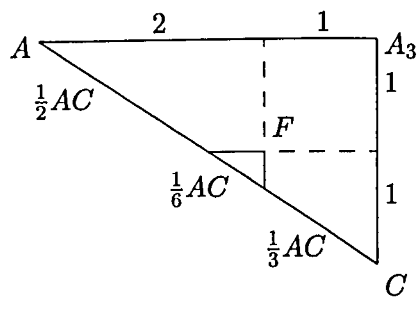
Högstadiets Matematiktävling 1991/92

Kvalificeringstävling

1. Det gäller att $2+3+4+5+6+7+8+9=44$. Summan av produkterna i första kolumnen är $(2+3+\cdots+9)\cdot 2 = 44\cdot 2$. På samma sätt är summan av den andra kolumnen $44\cdot 3$, och så vidare. Totalt får man därför summan $44\cdot(2+3+\cdots+9) = 44\cdot 44 = 1936$.

2. Beteckna torrsubstansens massa med m. Före torkning kan denna tecknas som $m = 0{,}10\cdot 450\,\mathrm{g}$, och efter torkningen tecknas samma massa som $m = 0{,}20\cdot x\,\mathrm{g}$, där x är den sökta gurkvikten. Eftersom m inte ändras måste gälla att $0{,}10\cdot 450 = 0{,}20\cdot x$, vilket ger $x = 225\,\mathrm{g}$.





3. Arean av kvadraten $AA_1A_2A_3$ är $9\,\mathrm{cm}^2$. Arean av $\triangle ABC$ är $(9 - \frac{1\cdot 3}{2} - \frac{1\cdot 2}{2} - \frac{2\cdot 3}{2})\,\mathrm{cm}^2 = 3{,}5\,\mathrm{cm}^2$. Den del av kvadraten $DEFG$ som ligger utanför $\triangle ABC$ är likformig med

$\triangle ACA_3$. Längdskalan är $\frac{1}{6}$, vilket fås med transversalsatsen (streckade linjer i figuren nedan). Lilla triangelns area är alltså $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot (\text{arean av } \triangle ACA_3) = \frac{1}{36}\frac{2\cdot 3}{2}\,\text{cm}^2 = \frac{1}{12}\,\text{cm}^2$. Den sökta arean är $(1-\frac{1}{12})\,\text{cm}^2 = \frac{11}{12}\,\text{cm}^2$.

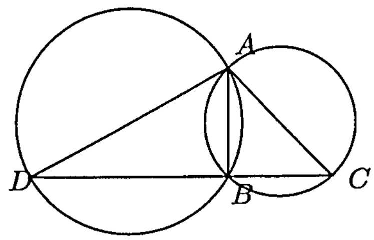
4. Om talen är a, b, c, d, så gäller att $a+b=14$, $b+c=4$ och $c+d=-10$. Härav följer att $b=14-a$, $c=4-(14-a)=a-10$ och $d=-10-(a-10)=-a$. Alltså är medelvärdet av a och d lika med 0, oberoende av vad a är.

5. Låt S_{PQR} beteckna arean av en triangel PQR. Trianglarna ABD och ABC har samma area, eftersom de har samma höjd och samma bas. Vidare är $S_{ABD} = S_{ABO} + S_{AOD}$ och $S_{ABC} = S_{ABO} + S_{BCO}$. Alltså är $S_{ABO} + S_{AOD} = S_{ABO} + S_{BCO}$, och $S_{AOD} = S_{BCO} = 4\,\text{cm}^2$.

6. Den sparade tiden, 20 minuter, motsvarar den tid det normalt tar för frun att åka från den plats hon möter mannen, till stationen och tillbaka till samma plats. Eftersom stationen ligger mitt i denna resa skulle hon normalt kommit fram tio minuter efter det att hon mötte sin man, vilket också är den tid då mannens normala tåg kommer. Det innebär att mannen gått hela tiden mellan det att han kom till stationen och tio minuter innan det att hans normala tåg kommer, vilket är en timme senare. Mannen har alltså gått i 50 minuter.

Finaltävling

1. Vinklarna ABC och ABD är båda räta, ty de är båda bågvinklar på halvcirklar i varsin cirkel. Härav fås att $\angle CBD = 180°$, det vill säga punkterna B, C och D ligger på en rät linje.



2. Betrakta två städer A och B. Om A och B har direkt flygförbindelse med varandra är saken klar. I annat fall har A och B flygförbindelser med 5 andra städer vardera. Det finns bara 9 städer förutom A och B, och därför måste någon stad ha flygförbindelse med både A och B. Då kan man flyga mellan A och B med högst en mellanlandning, nämligen i denna stad. Eftersom A och B var godtyckliga gäller detta varje par av städer.

3. Vi beräknar antalet vita sexhörningar genom att utgå ifrån de 12 svarta femhörningarna. Varje svart femhörning gränsar till 5 vita sexhörningar. Vi räknar sexhörningen varje gång den gränsar till en femhörning. Vi får då $12 \cdot 5 = 60$ räknade sexhörningar. Eftersom varje sexhörning gränsar till 3 femhörningar, har vi räknat varje sexhörning 3 gånger. Antalet sexhörningar är alltså $60/3 = 20$.

4. (a) Sifferföljden avslutas med 0111.

   (b) Kombinationen 0111 finns precis en gång i följden. Om 0111 förekom inne i följden av ettor och nollor, skulle den följas av en etta eller en nolla. Följden $\ldots 0\underline{1111}\ldots$ är otänkbar, ty $\underline{1111}$ finns i början och varje kombination finns precis en gång. Följden $\ldots 0\underline{1110}\ldots$ är inte heller möjlig ty i början finns 1111 som måste följas av 0, och då finns $\underline{1110}$ redan där. Således måste kombinationen 0111 avsluta hela följden.

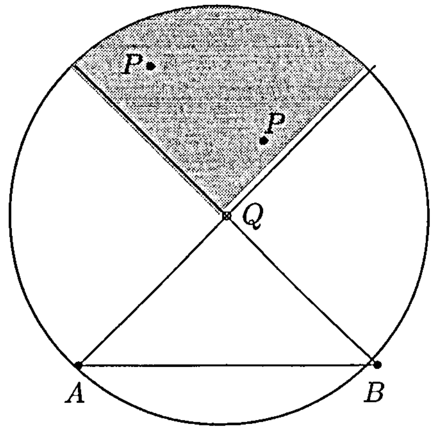
5. I varje ruta med början vid A skriver vi antalet sätt man kan förflytta sig från A till rutan. Om vi har kommit till följande läge (en del av den stora kvadraten)

a	b
c	?

så kan vi skriva $a+b+c$ i rutan med frågetecknet. På detta sätt får vi antalet sätt att komma till varje ruta i den stora kvadraten enligt figuren till höger. Man kan komma från A till B på 63 olika sätt.

1	1	1	1
1	3	5	7
1	5	13	25
1	7	25	63

6. Låt Q vara den punkt på mittpunktsnormal till AB sådan att vinkeln AQB är rät. Drag cirkeln med medelpunkt Q och med AQ som radie. Om P ligger på denna cirkels periferi ovanför AB, så är vinkeln APB enligt bågvinkelsatsen lika med 45°. Om P ligger innanför cirkeln (ovanför AB), så är vinkeln APB större än 45°, och om P ligger utanför cirkeln (ovanför AB), så är vinkeln mindre än 45°. Eftersom vinklarna PAB och PBA skall vara minst 45°, så utgörs det sökta området av det skuggade området i figuren till höger. Områdets area är $\frac{1}{4}\pi\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2\pi\,\text{cm}^2$.



Högstadiets Matematiktävling 1992/93

Kvalificeringstävling

1. Det är lättast att summera vertikalt. Om vi börjar från höger får vi $\mathrm{M}+\mathrm{R}+\mathrm{D}+\mathrm{T}=22$ (minnessiffra 2). Sedan får vi $\mathrm{E}+\mathrm{Å}+\mathrm{E}+\mathrm{M}=17$ (19 minus föregående minnessiffra). Slutligen blir på samma sätt $\mathrm{F}+\mathrm{M}+\mathrm{H}=18$. Addition ger

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}+\mathrm{E}+\mathrm{M} + \mathrm{Å}+\mathrm{R} + \mathrm{M}+\mathrm{E}+\mathrm{D} + \mathrm{H}+\mathrm{M}+\mathrm{T} = \\ &\qquad (\mathrm{M}+\mathrm{R}+\mathrm{D}+\mathrm{T}) + (\mathrm{E}+\mathrm{Å}+\mathrm{E}+\mathrm{M}) + (\mathrm{F}+\mathrm{M}+\mathrm{H}) = 22+17+18 = 57.\end{aligned}$$

2. Varje del av sågspåret ingår i konturen på två pusselbitar. Dessutom räknas rektangelns omkrets med. Totala längden av pusselbitarnas omkrets är

$$2\cdot 20\,\text{m} + 2\cdot 40\,\text{cm} + 2\cdot 60\,\text{cm} = 42\,000\,\text{mm}.$$

Medelvärdet av omkretsarna är således $\frac{42\,000\,\text{mm}}{500} = 84\,\text{mm}$.

3. Om körsträckan är s km, blir körtiden på resan till jobbet $\frac{s}{90}$ h, och resan från jobbet $\frac{s}{30}$ h. Medelfarten på resan fram och åter blir då

$$v_{\text{medel}} = \frac{2s}{\frac{s}{90}+\frac{s}{30}} = \frac{90}{2}\,\text{km/h} = 45\,\text{km/h}.$$

4. Låt x, y och z beteckna antalet kapitel med 25, 20 respektive 16 sidor. Då får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z=12 & (1)\\ 25x+20y+16z=213 & (2)\\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0 \end{cases}$$

Ur (1) får vi $z = 12 - x - y$. Insättning i (2) ger $25x + 20y + 16(12 - x - y) = 213$, eller $9x + 4y = 21$. Eftersom $x \geq 0$ och $y \geq 0$ så måste $x \leq 3$. Endast $x = 1$ ger en heltalslösning för y, $y = 3$. Precis ett kapitel har därför 25 sidor.

5. Börja med att förlänga alla bråk med respektive nämnares konjugat:

$$\frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{1-0} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \cdots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99} + \frac{\sqrt{101}-\sqrt{100}}{101-100} =$$

$$\sqrt{1}-\sqrt{0}+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}+\sqrt{101}-\sqrt{100} = \sqrt{101}.$$

6. För två trianglar med samma höjd gäller att förhållandet mellan areorna är lika med förhållandet mellan baserna. Tillämpas detta på trianglarna ADG och AFG får vi att $|FG| = \frac{|GD|}{5} = \frac{45\,\text{cm}}{5} = 9\,\text{cm}$. Om vi tillämpar det på trianglarna ABF och ADF får vi $|AB| = \frac{|AD|}{4} = \frac{40\,\text{cm}}{4} = 10\,\text{cm}$. På samma sätt får vi att $|EF| = |DF|/3 = (45\,\text{cm} - 9\,\text{cm})/3 = 12\,\text{cm}$, vilket ger $|DE| = 24\,\text{cm}$. Vidare får vi $|BC| = |BD|/2 = (40\,\text{cm} - 10\,\text{cm})/2 = 15\,\text{cm}$ och $|CD| = 15\,\text{cm}$.

Punkterna B, C, F och E ska alltså placeras så att $|AB| = 10\,\text{cm}$, $|BC| = 15\,\text{cm}$, $|CD| = 15\,\text{cm}$, $|DE| = 24\,\text{cm}$, $|EF| = 12\,\text{cm}$ och $|FG| = 9\,\text{cm}$.

Finaltävling

1. Algebrafen innehåller 8 olika bokstäver, och vi skulle använda 8 olika siffror. Vi får då att

$$\mathrm{F}+\mathrm{E}+\mathrm{M}+\mathrm{Å}+\mathrm{R}+\mathrm{D}+\mathrm{H}+\mathrm{T} = 37 \tag{1}$$

På samma sätt som i kvalificeringstävlingen fås genom vertikal addition att $\mathrm{M}+\mathrm{R}+\mathrm{D}+\mathrm{T} = 13$, $\mathrm{E}+\mathrm{Å}+\mathrm{E}+\mathrm{M} = 18$ samt $\mathrm{F}+\mathrm{M}+\mathrm{H} = 18$. Således blir

$$\mathrm{F}+\mathrm{E}+\mathrm{M} \;+\; \mathrm{Å}+\mathrm{R} \;+\; \mathrm{M}+\mathrm{E}+\mathrm{D} \;+\; \mathrm{H}+\mathrm{M}+\mathrm{T} = 49 \tag{2}$$

Vi subtraherar (2) – (1) och får då $2\mathrm{M}+\mathrm{E} = 12$, varav $\mathrm{E} = 12 - 2\mathrm{M}$. Då siffrorna 0 och 8 ej används ger den sista relationen begränsningen $3 \leq \mathrm{M} \leq 5$. I mellersta kolumnen i uppställningen får vi

$$2\mathrm{E}+\mathrm{M}+\mathrm{Å} = 18 \tag{3}$$

I ekvation (3) sätter vi in $\mathrm{E} = 12-2\mathrm{M}$ och får $2(12-2\mathrm{M})+\mathrm{M}+\mathrm{Å} = 18$, eller $\mathrm{Å} = 3\mathrm{M}-6$. Vi kan nu göra en tabell:

M	3	4	5
E	6	4	2
Å	3	6	9

Endast M = 5 är en lösning då varje siffra bara får användas en gång. M = 5 ger också $\mathrm{F}+\mathrm{H} = 13$ och $\mathrm{R}+\mathrm{D}+\mathrm{T} = 8$. Då vi har siffrorna 1, 3, 4, 6 och 7 kvar inser man lätt att $\mathrm{F}+\mathrm{H} = 6+7$ och $\mathrm{R}+\mathrm{D}+\mathrm{T} = 1+3+4$. Då F och H kan varieras på två sätt, $(6, 7)$ och $(7, 6)$, medan R, D och T kan varieras på sex sätt, så ger multiplikationsprincipen att det sammalagt finns 12 olika lösningar.

2. Sätt $5p + 49 = n^2$, vilket ger

$$p = \frac{n^2 - 49}{5} = \frac{(n-7)(n+7)}{5}.$$

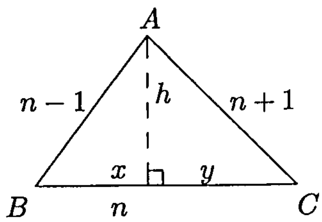
Om p skall vara ett primtal måste någon av faktorerna i täljaren vara 1 eller 5. Detta går inte för $(n+7)$, varför $(n-7)$ måste uppfylla villkoret. Vi får då två fall:

(i) $n - 7 = 1 \Longrightarrow n = 8 \Longrightarrow p = 3.$

(ii) $n - 7 = 5 \Longrightarrow n = 12 \Longrightarrow p = 19.$

Således är $p = 3$ eller $p = 19$.

3. Kalla sidornas längder $n-1$, n, $n+1$, höjden h och delarna av BC för x och y (se figuren till höger). Pythagoras sats på deltrianglarna ger



$$\begin{aligned} x^2 + h^2 &= (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1, \\ y^2 + h^2 &= (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1. \end{aligned}$$

Härav följer

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 = (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) = 4n \\ \Longleftrightarrow \quad (y - x)(y + x) = 4n. \end{aligned}$$

Eftersom $x + y = n$, får vi $(y - x)n = 4n$, varav $y - x = 4$. Differensen mellan delarna x och y är 4 cm, oberoende av n.

4. Summan av 3, 4 eller 5 successiva naturliga tal behöver inte vara udda. Till exempel är $1+2+3 = 6$, $1+2+3+4 = 10$, $2+3+4+5+6 = 20$. Summan av 6 successiva naturliga tal n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ och $n+5$ är alltid udda, ty

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) = 6n + 15 = 2(3n+7) + 1.$$

Allmänt gäller att summan av N successiva naturliga tal alltid är udda om och endast om $N = 2 + 4k$, där $k \geq 0$ är ett heltal. Man kan också visa att summan alltid blir jämn om och endast om N är av typ $N = 4k$, för något heltal $k \geq 0$.

5. Bland sju personer finns det 21 möjliga handskakningar. Om slutsatsen i uppgiften inte vore sann så innebär det att

- personer som skakade hand med varandra vid ankomsten inte skakade hand med varandra vid mötets slut;
- de som inte skakade hand med varandra vid ankomsten gjorde det vid mötets slut.

Enligt antagandet var det lika många handskakningar båda gångerna, det vill säga $k = 21 - k \Rightarrow 2k = 21$, vilket saknar heltalslösning. Följaktligen är slutsatsen i uppgiften sann.

6. En vinkel i rymden mellan två linjer är den vinkel de bildar med varandra i det plan som bestäms av de två linjerna. Det enda sättet som villkoren för vinklarna $\angle APB$, $\angle APC$ och $\angle BPC$ kan uppfyllas är om alla punkter A, B, C och P ligger i samma plan. Eftersom även $\angle APD = \angle BPD = 120°$ måste punkterna C och D ligga på samma linje, vilket betyder att $\angle CPD = 0°$.

Högstadiets Matematiktävling 1993/94

Kvalificeringstävling

1. Betrakta fyra rutor

A	x	y	B

. Då gäller

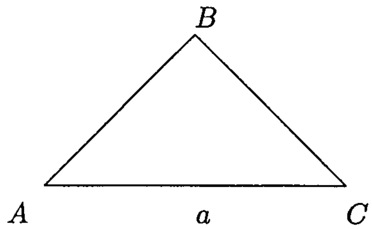
$$A + x + y = x + y + B.$$

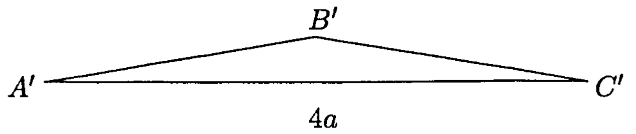
Alltså är $A = B$, vilket visar att var tredje ruta innehåller samma tal. Dessutom gäller att summan av tre successiva tal är 12. Talen i rutorna är därför följande:

1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7	4	1

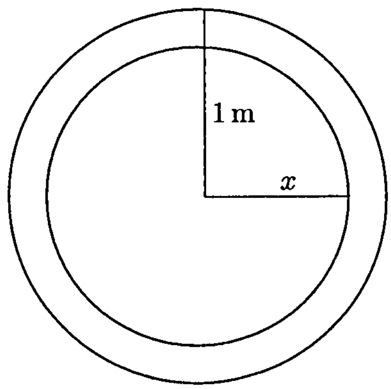
2. Låt m och k beteckna antalet män respektive kvinnor i gruppen. Summan av männens ålder är $35m$ och kvinnornas $25k$. Vi får en ekvation $35m + 25k = 31(m + k)$, vilket ger $2m = 3k$ och slutligen $m/k = 3/2$. Härifrån följer att $m/(m + k) = 3/5$, vilket innebär männen utgör 60% av gruppen.

3. Tag en godtycklig triangel ABC med arean T och längsta sidan a enligt figuren nedan. Betrakta nu en likbent triangel med basen $4a$. Benen är då alltid längre än $2a$. Arean kan göras hur liten som helst genom att höjden väljs liten, som i triangeln $A'B'C'$. Svaret är därför *ja*!





4. Låt x vara radien i den näst yttersta cirkeln (se figuren till höger). Arean av den näst yttersta cirkeln är lika med 8/9 av arean av den största cirkeln, vilket ger oss ekvationen $\pi x^2 = \frac{8}{9}\pi 1^2$, vilket ger $x = (2\sqrt{2})/3$. Yttersta cirkelringens bredd blir då $1 - x = 1 - 2\sqrt{2}/3$.



5. Låt N i bas nio ha siffrorna a, b och c, det vill säga $N = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c$. I bas sex har vi då $N = c \cdot 6^2 + b \cdot 6 + a$, och dessutom är a, b och c inte större än 5. Vi erhåller då ekvationerna

$$N = 81a + 9b + c,$$
$$N = 36c + 6b + a,$$

det vill säga $80a + 3b - 35c = 0$ eller $35c - 80a = 3b$. Eftersom vänstra ledet i ekvationen är delbart med 5 så måste $3b$ vara delbart med 5. Detta leder till två fall:

(i) $b = 0$. Vi får $80a = 35c$. Detta medför $a = c = 0$, vilket inte ger någon lösning.

(ii) $b = 5$. Vi får $80a + 15 = 35c$, alltså $16a = 7c - 3$. Av detta följer att c måste vara ett udda tal, alltså 1, 3 eller 5. Nu är det lätt att konstatera att endast $c = 5$ ger en heltalslösning för a, nämligen $a = 2$.

Talet N skrivs således i bas nio som 255 eller i bas tio som 212.

6. Antag att det är möjligt att genomföra statsministerns projekt. Räknar vi ihop antalet flyglinjer från varje stad får vi talet $k = 9 \cdot 27$. Å andra sidan har då varje flyglinje räknats in i summan k två gånger, vilket betyder att k måste vara ett jämnt tal. Detta ger oss en motsägelse. Projektet är därför omöjligt att genomföra.

Finaltävling

1. Låt x vara antalet mörkhåriga pojkar med glasögon. De åtta kombinationerna (flicka/pojke, mörkt/ljust hår, med/utan glasögon) kan då skrivas upp:

Ljushåriga flickor utan glasögon	1
Mörkhåriga flickor med glasögon	$10 - x$
Mörkhåriga pojkar utan glasögon	$14 - x$
Ljushåriga pojkar med glasögon	$13 - x$
Ljushåriga pojkar utan glasögon	$40 - (14 - x) - (13 - x) - x = 13 + x$
Mörkhåriga flickor utan glasögon	$28 - 10 - (14 - x) = 4 + x$
Ljushåriga flickor med glasögon	$8 + x$

Nu kan vi summera:

$$x + 1 + (10 - x) + (14 - x) + (13 - x) + (13 + x) + (4 + x) + (8 + x) = 65,$$

vilket ger $x = 2$.

2. Problemet består i att bilda talet n^m ur talet 1 genom multiplikation med n och kvadreringar. Det minsta antal steg som behövs kan fås genom att studera m i binär form. När m skrivits i binär form ges det erforderliga antalet steg av summan av antalet ettor och antalet siffror som följer på den första ettan. Med början i 1 (ett) betyder en etta i m:s binära representation multiplikation med n direkt följt av en kvadrering, en nolla betyder endast kvadrering. Om m slutar med en etta (i binär representation) ska den sista operationen vara multiplikation med n, slutar det med en nolla ska den sista operationen vara en kvadrering. I detta fall är $n = 19$ och $m = 94$. 94 skrivs binärt som 1011110, vilket innehåller 5 ettor och 6 siffror efter den första ettan. Det minsta antalet steg som behövs är då $5 + 6 = 11$. De elva stegen består i att först multiplicera med 19, kvadrera, kvadrera, multiplicera med 19, kvadrera, multiplicera med 19, kvadrera, multiplicera med 19, kvadrera, multiplicera med 19 och slutligen kvadrera, alltså 11 operationer.

Alternativ metod att finna de elva stegen: Man kan lösa första delen av problemet baklänges genom att endast studera exponenten. Det snabbaste sättet att öka exponenten är att kvadrera, ty då dubbleras den. För att nå exponent 94 har man således kvadrerat i sista steget, från exponent 47. 47 har man nått genom att multiplicera 19^{46} med 19 (exponenten ökar då med 1). Exponenten 46 kommer från kvadrering av 19^{23}, som kommer av $19 \cdot 19^{22}$, och 19^{22} är $(19^{11})^2$. 19^{11} kommer av $19 \cdot 19^{10}$, 19^{10} är $(19^5)^2$. 19^5 kommer av

$19 \cdot 19^4$, $19^4 = (19^2)^2$. 19^2 erhålls genom kvadrering av 19, som är $1 \cdot 19$. Detta var elva steg:

$$19^{94} = ((((((1 \cdot 19)^2)^2 \cdot 19)^2 \cdot 19)^2 \cdot 19)^2 \cdot 19)^2.$$

3. Låt triangelns sidor vara a, b och c, där c är hypotenusans längd. Vi kan sätta $a = 5k_1 + r_1$ och $b = 5k_2 + r_2$, där $0 \leq r_1, r_2 < 5$. Då är r_1 resten när a delas med 5, och r_2 är resten när b delas med 5. Om $r_1 = 0$ eller $r_2 = 0$ så är a eller b delbara med 5, och vi är framme. Vi antar nu att så inte är fallet.

   Pythagoras sats ger $c^2 = a^2 + b^2$. Detta ger

$$a^2 + b^2 = 25(k_1^2 + k_2^2) + 10(k_1 r_1 + k_2 r_2) + r_1^2 + r_2^2 = c^2.$$

   Härav ser vi att c^2 ger samma rest som $r_1^2 + r_2^2$ vid division med 5 (de andra termerna i uttrycket ovan är ju delbara med 5). Vi undersöker vilka rester c^2 ger vid division med 5 för olika c, och vilka rester $r_1^2 + r_2^2$ kan ge för olika värden på r_1 och r_2.

c ger rest	0	1	2	3	4
c^2 ger rest	0	1	4	4	1

r_1	r_2	$r_1^2 + r_2^2$ ger resten
1	1	2
1	2	0
1	3	0
1	4	2
2	2	3
2	3	3
2	4	0
3	3	3
3	4	0
4	4	2

   I tabellen till höger förekommer resterna 0, 2 och 3. Men c^2 kan inte ge resterna 2 och 3. Därför återstår endast 0, dvs c^2 är alltid delbart med 5. Då är även c delbart med 5.

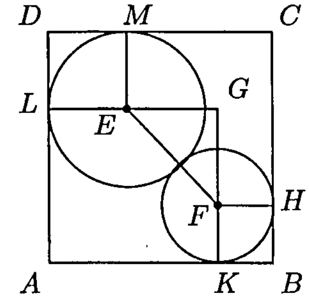
4. Observera först att A och B måste båda vara tvåsiffriga. I annat fall, om exempelvis A är ensiffrigt och B tresiffrigt så skulle C_1 vara minst femsiffrigt.

   Vi skriver nu $C = 100A + B$ och $C_1 = 100A_1 + B_1 = 100(A + 17) + (B + 17)$. Eftersom det finns två naturliga tal a och b sådana att $a^2 = C$ och $b^2 = C_1$ får vi två ekvationer:

$$a^2 = 100A + B \qquad (1)$$
$$b^2 = 100A + B + 1717 \qquad (2)$$

   Subtraherar vi (1) från (2) får vi $b^2 - a^2 = 1717$, eller omformat $(b-a)(b+a) = 17 \cdot 101$. Nu är $b + a > b - a$ så $b + a = 101$ och $b - a = 17$. Löser vi dessa ekvationer får vi $b = 52$ och $a = 42$. Slutligen har vi $a^2 = 1764 = C$, det vill säga $A = 17$ och $B = 64$.

5. Se beteckningar i figuren. Linjen GL passerar E och är vinkelrät mot sidan AD. Linjen GK passerar F och är vinkelrät mot sidan AB. Beteckna den större cirkelns radie R. Vi får då $|EG| = |AB| - |EL| - |FH| = 8 - R - 2 = 6 - R$ och $|GF| = |BC| - |FK| - |EM| = 9 - 2 - R = 7 - R$, samt $|EF| = R + 2$. Pythagoras sats tillämpad på triangeln EFG ger



$$(R+2)^2 = (7-R)^2 + (6+R)^2.$$

Vi får ekvationen $R^2 - 30R + 81 = 0$, som har två lösningar: $R = 27$ och $R = 3$. Bara $R = 3$ uppfyller uppgiftens villkor.

6. Om alla personerna i slutställningen är av samma kön så är det nio flickor eller nio pojkar. Nio pojkar är möjliga endast om alla personer runt bubbelpoolen är av samma kön i steget innan, vilket i sig redan vore en slutställning. Om det ska sluta med nio flickor i poolen måste alla par av personer som sitter intill varandra bestå av en flicka och en pojke. Detta är dock omöjligt, ty om det intill varje flicka sitter en pojke och vice versa varvet runt, måste det sitta ett jämnt antal personer i poolen. Situationen med bara flickor eller bara pojkar i poolen kan alltså inte uppstå.

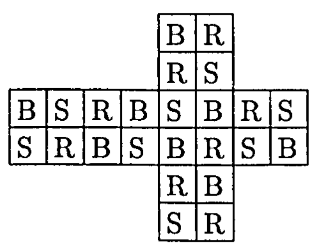
Högstadiets Matematiktävling 1994/95

Kvalificeringstävling

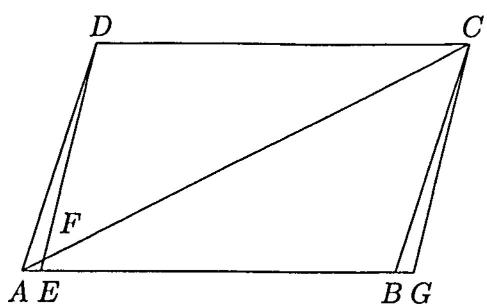
1. Summan av ledamöternas åldrar är 500 år. Summan av de avgående ledamöternas åldrar är 148 år. De återståendes medelålder är $\frac{500-148}{8}$ år $= 44$ år.

2. (a) I varje hörn på kuben möts tre kvadrater. Dessa tre kvadrater måste ha var sin färg eftersom de parvis har en gemensam sida. Det finns åtta hörn på kuben, alltså måste varje färg användas precis 8 gånger.

   (b) En lösning ges av vidstående figur, där R, B och S står för röd, blå respektive svart.



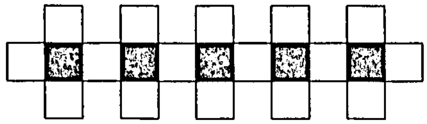
3. Låt F vara skärningspunkten mellan AC och DE. Drag en linje genom punkten C parallell med DE. Låt denna linje skära förlängningen av sidan AB i punkten G (se figuren nedan). Då är $|BG| = |AE|$. Triangeln AEF är likformig med triangeln AGC, varav $\frac{|AF|}{|CF|} = \frac{|AE|}{|EG|} = \frac{1}{11}$.
Alternativ lösning: $\triangle AEF$ och $\triangle CDF$ är likformiga. Därför är $\frac{|AF|}{|CF|} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}$.



4. Eftersom hypotenusan är den längsta sidan i en rätvinklig triangel är $a \geq h_b$ och $b \geq h_a$. Då följer $h_a \geq a \geq h_b \geq b \geq h_a$. Här måste likhet gälla, det vill säga $h_a = a = h_b = b$.

Sidorna a och b är således lika långa och vinkeln mellan dem är rät. Triangelns vinklar är då 90°, 45° och 45°.

5. Om vi endast ska innesluta *en* svart ruta kan vi som mest innesluta fyra vita grannrutor, ty annars måste vi ta med ännu en svart ruta. Varje ny svart ruta kan således som mest bidra med tre nya vita rutor, se figuren. Vi kan alltså som mest få $1 + 100 \cdot 3 = 301$ vita rutor. Vänder vi på resonemanget ser vi att det minsta möjliga antalet vita rutor som måste inneslutas ges av $3x + 1 = 100$, varav $x = 33$.



Finaltävling

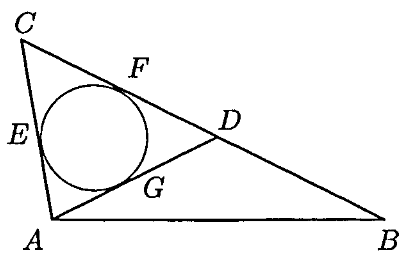
1. Låt t vara tiotalssiffran och e vara entalssiffran för talet a, så att $a = t \cdot 10 + e \cdot 1$. Då blir $2a = 2t \cdot 10 + 2e \cdot 1$. Siffrorna i detta tal är $2t$ respektive $2e$ om dessa tal bägge är mindre än 9. I så fall skulle $2t + 2e = t + e$, med detta är omöjligt eftersom bägge siffrorna är minst 0 och åtminstone t är större än 0. Vi måste då pröva om det finns lösningar om någon eller bägge av $2t$ respektive $2e$ är större än 9. I de olika fallen fås att

$$\begin{aligned} 1 + (2t - 10) + 2e &= t + e \quad \text{om } 2t > 9 \text{ och } 2e < 9, \\ 2t + 1 + (2e - 10) &= t + e \quad \text{om } 2t < 9 \text{ och } 2e > 9, \\ 1 + (2t - 10) + 1 + (2e - 10) &= t + e \quad \text{om } 2t > 9 \text{ och } 2e > 9. \end{aligned}$$

Resultatet blir att $t + e = 9$ eller $t + e = 18$. Möjliga tal a är alltså 90, 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27, 18 och 99.

2. Eftersom $ad < bc$ så är $ad + ab < bc + ab$, det vill säga $a(d + b) < b(a + c)$. Detta ger den första olikheten. Vidare får man av $ad < bc$ att $ad + cd < bc + cd$, det vill säga $d(a + c) < c(b + d)$, vilket ger den andra olikheten.

3. Med beteckningar från figuren har vi $|AG| = |AE| = |EC| = |CF|$, och eftersom $|GD| = |FD|$ så är $\triangle ADC$ likbent: $|AD| = |CD|$. Vidare vet vi att $|CD| = |DB|$. Följaktligen är också $\triangle ADB$ likbent. Härav följer att $\angle CAB = \angle CAD + \angle DAB = \angle ACD + \angle ABD = 180° - \angle CAB$. Ur detta får vi att $\angle CAB = 90°$.



4. Observera att vi börjar med två udda tal och ett jämt tal. Summan av två tal med samma paritet (udda eller jämnt tal) är alltid jämn och om två tal inte har samma paritet är summan udda. Eftersom Dan fick UUJ, udda, udda och jämnt antal kronor de tre första dagarna, så blir antalet kronor nästa dag J igen och därefter UUJJUUJJUUJJ .... Vi ser att sekvensen UUJJ upprepas, vilket betyder att sekvensen UJU aldrig kommer att förekomma. Därför får Dan aldrig 3, 4 och 5 kronor under tre på varandra följande dagar.

5. Låt x vara ett tal som uppfyller uppgiftens villkor. Då har vi $x = 172n + 103$ och $x = 173m + 92$. Här är både n och m mindre än 100 (vi har faktiskt $6 < n < 60$ och $6 <$

$m < 60$, eftersom x är fyrsiffrigt). Från de två likheterna får vi $172(n-m) = m-11$. Om $m \neq 11$ får vi i högra ledet ett tal mindre än 10, medan vänstra ledet är större än 100. Följaktligen är $m = 11$ och då är också $n = 11$. Slutligen får vi en enda lösning, nämligen $x = 172 \cdot 11 + 103 = 1995$.

6. Summan av alla tal runt cirkeln är i början lika med 1. Eftersom vi i varje drag får nya tal $y_n = x_n + x_{n-1}$ för varje $n = 2, 3, 4, \dots, 99$ och $y_1 = x_1 + x_{99}$ så är $y_1 + y_2 + \dots + y_{99} = (x_1 + x_{99}) + (x_2 + x_1) + (x_3 + x_2) + \dots + (x_{99} + x_{98}) = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{99})$. Detta betyder att summan av alla tal runt cirkeln fördubblas efter varje drag. Efter första draget är summan 2, efter nästa 4, och så vidare. Efter det tjugonde draget blir summan 2^{20} och $2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} = 1024^2 > 1000^2 = 1\,000\,000$. Minst ett av de 99 talen måste då vara större än $\frac{1\,000\,000}{99} > 10\,000$.

Högstadiets Matematiktävling 1995/96

Kvalificeringstävling

1. Det finns bara en lösning, och den visas i figuren till höger.

12	11	10	1
13	8	9	2
14	7	6	3
15	16	5	4

2. Eftersom det förekommer ett udda antal udda tal i uttrycket, så måste summan vara udda. Således kan vi inte erhålla talet 0. Gruppera termerna i uttrycket fyra och fyra enligt

$$1 + (2-3-4+5) + (6-7-8+9) + \dots + (774 - 775 - 776 + 777).$$

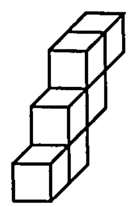
Denna gruppering är möjlig eftersom 776 är delbart med 4. Vi noterar att summan i varje parentes är noll, så att uttrycket blir lika med 1. Den minsta möjliga summan är således 1.

3. Beteckna en cirkels radie med r. Det är lättast att först beräkna den area A' som ligger innanför de skuggade delområdena, och sedan subtrahera denna area från en cirkels area. En fjärdedel av A' är en kvadrat med sidan r minus en kvartscirkel med radien r:

$$\tfrac{1}{4}A' = r^2 - \frac{\pi}{4}r^2 \iff A' = (4-\pi)r^2.$$

Den sökta arean är $A = \pi r^2 - A' = r^2\big(\pi - (4-\pi)\big) = 2r^2(\pi - 2)$. Med insatt radie $r = 3\,\text{cm}$ får vi $A = 2 \cdot 3^2(\pi - 2)\,\text{cm}^2 \approx 21\,\text{cm}^2$.

4. Antalet kontaktytor är antalet tärningar minus 1, det vill säga 5. Detta innebär att 10 tärningssidor vänds inåt. I varje kontaktyta förloras ögontal. För att minimera förlusterna används alla ettor och därefter tvåor. Vi behöver då utnyttja fyra tvåor. Att detta är möjligt visas i vidstående figur. ögonsumman på utsidan blir då maximalt $6 \cdot 21 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 112$. Notera att sidorna med ett respektive två ögon inte ligger på motsatta sidor på tärningen.



5. Det finns en vinnande strategi endast för Botvid. Han ska se till att lämna ett jämnt antal stenar i varje hög efter sitt drag. Om Amanda tar en sten ur ena högen, tar Botvid en sten ur samma hög. Tar däremot Amanda en sten ur varje hög så ska även Botvid ta en sten ur varje hög. Botvids strategi är möjlig eftersom Amanda alltid lämnar ett udda antal stenar i minst en av högarna.

6. Relativt floden står badbyxorna stilla, och simmaren rör sig med samma fart i båda riktningarna. Eftersom simmaren avlägsnar sig från badbyxorna i 10 minuter, tar det 10 minuter att komma ikapp dem igen. Under dessa 20 minuter har badbyxorna flyttat sig 1200 m (relativt jorden), och därför flyter floden med en hastighet av 1200/20 m/min = 1 m/s.

Finaltävling

1. Lösningen visas här:

$$\begin{array}{r} 1\;1\;1\;1 \\ \times \quad 1\;0\;1 \\ \hline 1\;1\;1\;1 \\ 1\;1\;1\;1\quad\;\; \\ \hline 1\;0\;0\;1\;0\;1\;1 \end{array}$$

2. Summan 0 kan ej erhållas då vi har ett udda antal udda termer. Däremot kan summan 1 erhållas exempelvis på detta sätt:

$$1 + (2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2) - (6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2) + \cdots \\ + (770^2 - 771^2 - 772^2 + 773^2) - (774^2 - 775^2 - 776^2 + 777^2).$$

Uppdelningen är möjlig då 776 är delbart med 8. Eftersom $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2 = 4$ är uttrycken i parenteserna omväxlande lika med +4 och −4, varför den totala summan blir 1. Detta är således den minsta möjliga summan.

3. Observera att Amanda, Botvid och Claudia alla måste ha spelat i någon av två godtyckliga på varandra följande omgångar. Eftersom Amanda spelade 15 gånger blir det totala antalet spel som mest $2 \cdot 15 + 1 = 31$. Å andra sidan spelade Claudia just 31 gånger vilket medför att det totala antalet partier var just 31. Vidare medför det att Amanda spelade varannan gång, det vill säga omgång nummer 2, 4, 6, och så vidare. De udda omgångarna spelade Claudia mot Botvid och hon vann alla utom möjligen den sista omgången. I den elfte omgången vann således Claudia över Botvid.

4. Observera att talet $C = \overbrace{3333\ldots33}^{1996 \text{ treor}}$ är delbart med 3. Följaktligen, om det finns sådana tal A och B för vilka $AB = C$ så måste A eller B vara delbart med 3. Eftersom A och B skrivs med samma siffror har de samma siffersumma. Om då det ena är delbart med 3 är även det andra det. Följaktligen måste då produkten AB vara delbar med 9. Det är dock inte C, ty $\overbrace{1111\ldots11}^{1996 \text{ ettor}}$ är inte delbart med 3 (siffersumman är 1996).

5. Beteckna antalet flickor med f och antalet pojkar med p. Poängsumman blir då i det första alternativet $5f + 4p$ och i det andra $4f + 5p$. Enligt uppgiften är nu

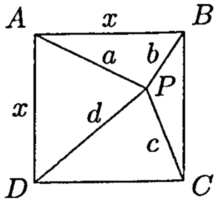
$$\frac{5f + 4p}{4f + 5p} = \frac{104}{100},$$

vilket ger oss ekvationen $84f = 120p$ som förenklas till $7f = 10p$ där f och p är heltal. Från denna ekvation följer att p måste vara delbart med 7, vilket ger följande möjliga lösningar:

f	10	20	30	...
p	7	14	21	...

Dessutom gäller att $f + p \leq 33$, ty *några* elever som var anmälda kom inte till tävlingen. Det betyder att den enda möjliga lösningen är $f = 10$ och $p = 7$.

6. Se beteckningar i figuren. Vi får då ekvationssystemet



$$\begin{cases} x + a + b = 16 \\ x + a + d = 24 \\ x + c + d = 20 \end{cases}$$

Adderas ekvationerna ledvis får vi $x + a + b + x + a + d + x + c + d = 60 \Rightarrow x + b + c + 2(x + a + d) = 60 \Rightarrow x + b + c = 12 \Rightarrow \triangle CBP$:s omkrets är 12 cm. Detta ger att $x < 6$ cm. Eftersom $x + a + d = 24$ cm så måste då $a + d > 18$ cm, det vill säga ett av talen a och d måste vara större än 9 cm. I en kvadrat med sidan 6 cm är diagonalen $6 \cdot \sqrt{2}$ cm < 9 cm, vilket leder till att punkten P inte kan ligga i kvadraten. Dan har alltså fel (i sitt första påstående).

Högstadiets Matematiktävling 1996/97

Kvalificeringstävling

1. Det finns många sätt att beräkna volymen. Man kan till exempel dela in kuben i fem delar med storlek 5 cm × 5 cm × 1 cm. Delarnas volym är då, i tur och ordning, 22 cm^3, 18 cm^3, 8 cm^3, 18 cm^3 och 22 cm^3. Den sökta volymen blir således 88 cm^3.

2. Den enda möjliga lösningen återges nedan.

^{1}1	^{2}9	9	^{3}6
^{4}5	4		9
2		^{5}2	9
^{6}1	9	7	6

3. Låt biljettpriset i december vara x kr, och låt prissänkningen vara p procent. Biljettpriset i januari är då $x(1 - \frac{p}{100})$. Låt n beteckna antalet besökare i december. Antalet besökare i januari är $1{,}5n$. Då var intäkterna i januari $1{,}5nx(1 - \frac{p}{100})$. Intäkterna i december var nx. Intäkterna i januari var 20% högre, dvs $1{,}2nx$. Vi får alltså $1{,}5nx\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1{,}2nx$ varav $p = 20$.

4. Kalla det sökta talet för N. Eftersom $225 = 9 \cdot 25$ måste N vara delbart med både 9 och 25. Om ett tal är delbart med 9, är också dess siffersumma delbar med 9. Det minsta möjliga talet vars siffersumma är delbar med 9 är 111111111. N ska också vara delbart med 25, och måste därför sluta på antingen 00, 25, 50 eller 75. Av dessa är endast 00 tillåtet. Det minsta talet blir alltså 11111111100.

5. Drag AC. Om man lägger EF efter AC får man en parallellogram som delas i två kongruenta delar av AC. Alltså har $\triangle ABC$ och $\triangle FPE$ samma area. På samma sätt har $\triangle ADC$ och $\triangle GPH$ samma area. Således är arean av $ABCD$ lika med summan av areorna av

$\triangle FPE$ och $\triangle GPH$. På samma sätt får man att arean av $ABCD$ är summan av areorna av $\triangle FPG$ och $\triangle EPH$. Slutligen har vi alltså att arean av $EFGH$ är dubbelt så stor som arean av $ABCD$.

6. Låt $d = a + b + c$ vara totalpoängen i varje omgång. Olikheten $a > b > c \geq 1$ ger att $d \geq 6$. Totalt utdelades $9 + 9 + 22 = 40$ poäng, vilket medför att d är en delare till 40, dvs d kan vara 8, 10, 20 eller 40.

   Om $d = 40$ skulle endast en omgång ha spelats, och Susanne skulle ha vunnit totalt, vilket är en motsägelse.

   Om $d = 20$ spelades två omgångar. Vinst kan då maximalt ge 8 poäng (Susanne fick ju 9 poäng), men Thérèse vann på 22 poäng, vilket är mer än $2 \cdot 8$ poäng. Detta är en motsägelse.

   Om $d = 10$ spelades fyra omgångar. Högsta vinsten a kan inte överstiga 6, då Susanne endast fick 9 poäng. Å andra sidan kan inte $a \leq 5$, ty då skulle inte Thérèse kunna nå upp till 22 poäng. Då är $a = 6$, och Susanne kom sist i alla omgångar utom den första, varav $c = 1$ och $b = 3$. Men Thérèse kan då inte få mer än 21 poäng, vilket är en motsägelse.

   Om $d = 8$ spelades fem omgångar, och Susannes poäng ger att $a \leq 5$. Men då måste $a = 5$, ty annars får Thérèse inte ihop sina 22 poäng. Nu är $c = 1$ och $b = 2$. I alla omgångar utom den första vann Thérèse, och Johanna kom tvåa. I första omgången kom Thérèse tvåa, och vi får tabellen nedan.

	Omg 1	Omg 2	Omg 3	Omg 4	Omg 5
T	2	5	5	5	5
J	1	2	2	2	2
S	5	1	1	1	1

Finaltävling

1. Summan av alla hundratalssiffror är $100 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 74 \cdot 5 = 1370$. Summan av tiotalssiffrorna i talen mellan 0 och 99 är $10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + \cdots + 10 \cdot 9 = 450$. Dessa förekommer 5 gånger fram till talet 499, vilket ger summan $5 \cdot 450 = 2250$. För talen mellan 500 och 573 tillkommer $10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + \cdots + 10 \cdot 6 + 4 \cdot 7 = 238$. Totalt blir summan av tiotalssiffrorna $2250 + 238 = 2488$. Entalssiffrorna från 0 till 9 har summan $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$. Fram till 569 förekommer dessa 57 gånger, vilket ger summan $57 \cdot 45 = 2565$. Entalssiffrorna i de fyra sista talen ger $0 + 1 + 2 + 3 = 6$, så summan av alla entalssiffror är $2565 + 6 = 2571$.

   Den sökta summan är $1370 + 2488 + 2571 = 6429$.

2. Antalet prickar på tärningen är 21, vilket kan skrivas som summan av tre på varandra följande tal som $21 = 6 + 7 + 8$. Dessa tre tal kan skrivas som summor av två tal mellan 1 och 6 på två olika sätt:

   (i) $6 = 2 + 4$, $7 = 1 + 6$, $8 = 3 + 5$, eller
   (ii) $6 = 1 + 5$, $7 = 3 + 4$, $8 = 2 + 6$.

   Om tre sidor på en tärning har ett gemensamt hörn, så kan inte två av dessa sidor ligga mitt emot varandra. Vi måste därför välja ett tal från varje summa, så att summan av de tre talen blir 14. Detta är endast möjligt genom att välja talen 5, 3 och 6 ur alternativ (ii) ovan. Mitt emot sidan med fem prickar finns så ledes bara en prick.

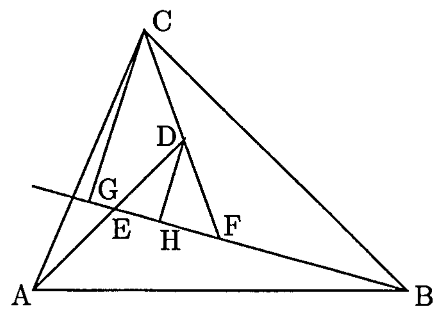
3. Låt CG och DH vara höjder i trianglarna BFC och FED (se figur). Eftersom trianglarna HFD och GFC är likformiga, är $|DH|/|CG| = |DF|/|CF|$. Nu är $|CD| = |DF|$, så $|DF|/|CF| = 1/2$ och $|CG| = 2 \cdot |DH|$. Eftersom $|BF| = |FE|$, så är

$$\text{area}(\triangle BFC) = |BF| \cdot |CG|/2 = |FE| \cdot 2 \cdot |DH|/2 = 2 \cdot \text{area}(\triangle FED).$$

På motsvarande sätt visas att $\text{area}(\triangle ADC) = 2 \cdot \text{area}(\triangle FED)$ och $\text{area}(\triangle ABE) = 2 \cdot \text{area}(\triangle FED)$. Således är

$$\begin{aligned} 42 &= \text{area}(\triangle ABC) \\ &= \text{area}(\triangle ABE) + \text{area}(\triangle BFC) + \text{area}(\triangle ADC) + \text{area}(\triangle FED) \\ &= 7 \cdot \text{area}(\triangle FED). \end{aligned}$$

Detta medför att $\text{area}(\triangle FED) = \text{area}(\triangle ABC)/7 = 42/7 = 6$.



4. Antalet kronor som Viktor spenderade är ett jämnt tal (dubbelt så stort som antalet kronor Christopher spenderade). Det är också delbart med 3, då det är tre gånger så stort som det antal kronor Johan spenderade. Antalet kronor som Viktor spenderade är därför delbart med 6, och vi kan beteckna detta antal med $6k$. Då spenderade Christopher $3k$ och Johan $2k$ kronor. Tillsammans spenderade de $6k + 3k + 2k = 11k$ kronor. Summan av alla priser är 227. Endast en av kulorna blev inte såld, och vi kan anta att den kostade x kronor. Talet $227 - x$ måste då vara delbart med 11. Men endast $x = 29$ uppfyller detta, och $227 - 29 = 198 = 11 \cdot 18$. Alltså är $k = 18$. Viktor köpte fyra kulor för 108 kronor, Christopher köpte tre kulor för 54 kronor, och Johan två kulor för 36 kronor. Nu finner vi genom prövning att Viktor köpte kulorna för 12, 22, 35 och 39 kronor, Christopher för 15, 16 och 23 kronor, och Johan för 17 och 19 kronor.

5. $S = 5x - 4y + 3z - 2u + t = x + 4(x-y) + z + 2(z-u) + t$. Uttrycket inom parenteserna är båda mindre än eller lika med 0. Därför blir S störst då båda parenteserna är lika med 0 samtidigt som $x = z = t = 10$. Så ledes är S maximalt 30 (då $x = y = z = u = t = 10$).

   Å andra sidan är $S = (t-u) + 3(z-y) - u - y + 5x$. Båda parenteserna samt x är större än eller lika med 0, och således är $S \geq -20$ med likhet precis då $x = 0$ och $y = z = u = t = 10$.

6. Antag att motsatsen till påståendet gällde, dvs att det för varje par av tävlande finns en uppgift som ingen av de två klarade. Vi kan tänka oss att vi markerar denna uppgift. Då det finns 15 par av tävlande, måste vi ha markerat 15 uppgifter. Nu måste det finnas en uppgift P som markerats minst tre gånger (det fanns ju bara sex olika uppgifter). Det fanns således tre par av tävlande som inte klarade uppgiften P, vilket innebär att minst tre tävlande inte klarade P. Detta strider mot att P löstes av exakt fyra tävlande.

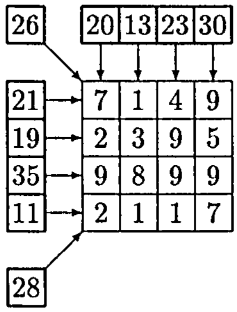
   Då vårt antagande ledde till en motsägelse, måste påståendet i uppgiften vara sant.

Högstadiets Matematiktävling 1997/98

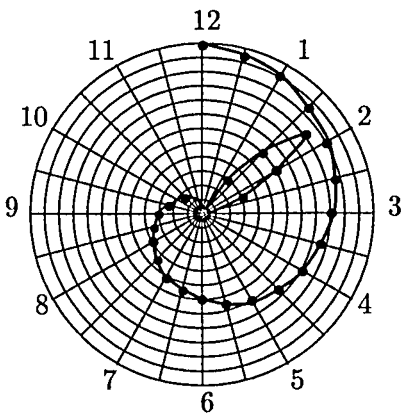
Kvalificeringstävling

1. Lättast är att börja med den rad, kolumn eller diagonal som har den största respektive minsta summan. I rad 3 får man att de tre återstående talen måste vara 9. I rad 4 måste talen vara 1, 1 och 2. Tvåan måste komma först, för annars måste summan av de två återstående talen på diagonalen vara $28 - 1 - 8 = 19$, vilket är omöjligt.

   Lösningen visas i figuren nedan.



2. Eftersom urtavlan är indelad i 24 sektorer, där varje sektor motsvarar 2,5 minuter, och 12 cirklar med centrum i urtavlans mitt, där avståndet mellan två cirklar är 1 dm, kan snigelns position var 2,5 minut av vandringen på minutvisaren inprickas. Klockan 13:00 (efter en timme) har snigeln nått urtavlans centrum och byter visare. Det tar 45 minuter för snigeln att nå timvisarens spets och följaktligen 45 minuter att komma tillbaka till urtavlans centrum. Klockan är då 14:30. Snigelns position var 15:e minut kan lätt inprickas.



3. Låt A vara Annikas ålder, och låt B vara sammanlagda åldern för de andra som satt på kanten. Då är $(A + B)/6 = 30$, dvs

$$A + B = 180. \tag{1}$$

   De tre personerna i poolen har sammanlagd ålder $3 \cdot 27 = 81$. Medelålderns förändring ger att

$$\frac{B}{5} - 30 = 27 - \frac{81 + A}{4} \quad \Rightarrow \quad 5A + 4B = 735.$$

Genom att från detta uttryck subtrahera ekvationen (1) får vi $A = 735 - 4 \cdot 180 = 15$.

4. Här ges ett möjligt sätt för riddaren att döda draken. Riddaren hugger av en klo i taget så att draken får 6 klor och 3 huvuden. Sedan hugger han av två klor i taget så att det bildas tre nya huvuden. Slutligen hugger han av två huvuden i taget tills inget huvud återstår.

5. Talen 1 och 20 kan inte vara medelvärden av två tal mellan 2 och 20 respektive 1 och 19. Alltså måste 1 och 20 sitta i två av hörnen. Summan av de två talen vid en kants ändpunkter ska vara jämn, eftersom medelvärdet måste vara ett heltal. Detta betyder att talen måste ha samma paritet (antingen båda jämna eller båda udda). Då varje hörn kan nås från varje annat hörn via kanterna, måste talen i hörnen alla ha samma paritet. Detta strider mot kravet att talen 1 och 20 sitter i var sitt hörn. Alltså går det inte att placera talen på detta sätt.

6. Om 2 är falskt och 4 sant, så gäller att $a + 7b$ är delbart med 3, ty $a + 7b = (a + b) + 6b$. Då är 1 också falskt. Eftersom bara ett påstående är falskt, så gäller att 4 är falsk och de andra påståendena är sanna.

   Ur 2 och 3 följer att $a + 1 = 2b + 6$ är delbart med b, vilket medför att b är en delare till 6. Alltså är b lika med 1, 2, 3 eller 6. Dessa alternativ ger i tur och ordning att $a = 7$, $a = 9$, $a = 11$ och $a = 17$. Nu ger 1 att endast alternativen $a = 9$ och $b = 2$ samt $a = 17$ och $b = 6$ ger $a + 7b$ som primtal (23 respektive 59).

   De två möjliga kombinationerna är således $(a, b) = (9, 2)$ och $(a, b) = (17, 6)$.

Högstadiets Matematiktävling 1997/98

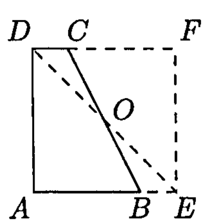
Kvalificeringstävling

1. Låt n vara antalet 0,75-litersflaskor som importerades. Villkoren i uppgiften ger de dubbla olikheterna

$$0{,}55(n + 6) < 0{,}75n < 0{,}55(n + 7), \tag{1}$$
$$0{,}9(n - 4) < 0{,}75n < 0{,}9(n - 3), \tag{2}$$

   (1) ger $16{,}5 < n < 19{,}25$, medan (2) ger $18 < n < 24$. Men n är ett heltal, vilket ger $n = 19$.

2. Välj punkten E på strålen AB och punkten F på strålen DC så att BE är lika lång som CD, och CF är lika lång som AB. Då är $AEFD$ en kvadrat och bisektrisen i D är kvadratens diagonal. Denna bisektris skär sträckan BC i punkten O och det är lätt att visa att trianglarna BEO och CDO är kongruenta ($\angle CDO = \angle BEO = 45°$, $\angle DCO = \angle EBO$ och $|BE| = |CD|$). Följaktligen är BO lika lång som CO.



3. Låt n vara det största antalet LÖV. Eftersom TRÄD ≤ 9876 och LÖV ≥ 102, är $n \leq 9876/102$, dvs $n \leq 96$. Nu är $102 \cdot 96 = 9792$, vilket innehåller två nior, och $96 \cdot 103 = 9888 > 9876$. Följaktligen är $n \leq 95$. Nu är $102 \cdot 95 = 9690$, vilket inte är tillåtet, men $103 \cdot 95 = 9785$, vilket uppfyller villkoren.

4. Låt de tre valda talen vara $\frac{a}{101-a}$, $\frac{b}{101-b}$ och $\frac{c}{101-c}$, och antag att

$$\frac{a}{101-a} \cdot \frac{b}{101-b} \cdot \frac{c}{101-c} = 1.$$

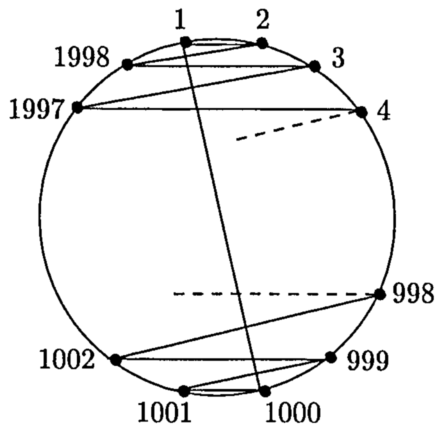
Denna likhet kan skrivas som $abc = (101-a)(101-b)(101-c)$. Om högerledet utvecklas kommer alla termer att innehålla faktorn 101 utom termen $-abc$. Således är $abc = 101k - abc$, dvs $2abc = 101k$ för något heltal k. Då 101 är ett primtal och a, b och c alla är mindre än 101, kan inte 101 vara delare till $2abc$. Denna motsägelse visar att det inte kan finnas tre tal med de önskade egenskaperna.

5. Observera först att av en k-hörning kan man få en månghörning med större antal hörn endast om den ena biten blir en triangel (och då kommer den andra månghörningen att ha $k+1$ hörn, förutsatt att du inte klipper så att du passerar genom k-hörningens hörn).

Antag nu att antalet trianglar aldrig når 100. Då har antalet hörn i den månghörning som har flest hörn ökat högst 99 gånger. Alltså kan ingen månghörning ha fler än $4+99 = 103$ hörn. Skulle nu största antalet månghörningar med samma antal hörn vara mindre än 100, så skulle vi ha som mest $101 \cdot 99 = 9999$ månghörningar (från trianglar till 103-hörningar). Men då kan du bara ha gjort 9998 klipp! Om du klipper itu en av de 9999 bitarna kommer du säkert att få 100 månghörningar med lika många hörn.

6. (a) Det finns $(1997-1)/2 = 998$ olika långa kordor. Eftersom $1997 = 2 \cdot 998 + 1$ måste det finnas minst tre kordor med samma längd.

(b) Det finns $1998/2 = 999$ olika kordor. Om det går att dra kordorna på ett sådant sätt att det finns högst två kordor med samma längd, så måste varje kordlängd förekomma precis två gånger. Det gäller att visa att kordorna kan dras på ett sådant sätt att det utgår två kordor från varje punkt. Detta är möjligt att göra på följande sätt: Numrera punkterna i ordning med 1, 2, ..., 1998. Drag nu kordor mellan punkterna i följande ordning: 1, 2, 1998, 3, 1997, 4, 1996, ..., 998, 1002, 999, 1001, 1000, 1. Eftersom detta är en 1998-hörning utgår två kordor från varje hörn, och det är lätt att övertyga sig om att varje kordlängd förekommer precis två gånger.



Högstadiets

MATE-MATIK-TÄV-LING

Prov och provsvar från de senaste tio åren

Natur och Kultur