Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

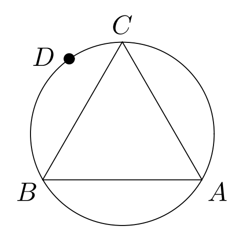
Kvalificeringstävling den 11 oktober 1979

1. Finns det reella tal x och y sådana att samtidigt
$$x + y = 1, \quad x^2 + y^2 = 2 \quad \text{och} \quad x^3 + y^3 = 3\ ?$$

2. Visa att om A är en vinkel med $0 < A < \frac{\pi}{2}$ så är
$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) > 5.$$

3. För vilka reella värden på a med $a \geq 1$ är
$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} = 2\ ?$$

4. På den omskrivna cirkeln till en liksidig triangel ABC ligger en punkt D mellan B och C. Låt E vara skärningen mellan linjerna AB och CD och låt F vara skärningen mellan linjerna AC och BD. Visa att produkten av avstånden BE och CF är oberoende av D:s läge.



5. Talen a, b, c, d är alla positiva och mindre än 1. Visa att inte alla fyra produkterna
$$4a(1-b), \quad 4b(1-c), \quad 4c(1-d), \quad 4d(1-a)$$
är större än 1.

6. Visa att varje rationellt tal $\frac{p}{q}$ för vilket $0 < \frac{p}{q} < 1$ kan skrivas
$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$
där $2 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ och alla a_i är heltal.