Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 13 oktober 1965

1. Längden av CA måste vara mindre än summan av längderna av AB och BC. Eftersom längden av CA är $s-a$ får vi $s-a<a+c$, d.v.s. $a>(s-c)/2$. Vidare ger cosinusteoremet

$$(s-a)^2 = a^2+c^2-2ac\cos B.$$

Men $\cos B<0$ och alltså gäller att

$$(s-a)^2 > a^2+c^2.$$

Detta kan skrivas om till $s^2-c^2>2as$, d.v.s.

$$a<(s^2-c^2)/2s.$$

2. Eftersom $a\geq 1$ och $b\geq 1$ gäller att $(a-1)/(b-1)\geq 0$, d.v.s. $a+b\leq ab+1$. $ab<c$ medför därför att $a+b<c+1$, och eftersom c är ett heltal är detta detsamma som att $a+b\leq c$.

3. M innehåller ett tal $x\neq 0$. Då måste $x-x=0$ tillhöra M. Detta innebär att $0-x=-x$ tillhör M, vilket innebär att $-x-x=-2x$ tillhör M.
På detta sätt kan visas att varje tal $-nx$, där n är ett positivt heltal, tillhör mängden. Men

$$0-(-nx)=nx.$$

Alltså tillhör nx mängden för alla heltal n. Om m och n är heltal och $n\neq 0$ måste därför även $mx/nx=m/n$ tillhöra mängden. Alltså tillhör alla rationella tal mängden.

4. Olikheten kan skrivas

$$(x+3y)^{\frac{1}{3}}-(x+y))^{\frac{1}{3}} < 2\left((x+y)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right).$$

Genom att använda identiteten

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

erhåller man vänsterledet

$$\frac{2y}{(x+3y)^{\frac{2}{3}}+(x+3y)^{\frac{1}{3}}(x+y)^{\frac{1}{3}}+(x+y)^{\frac{2}{3}}}$$

och högerledet

$$\frac{2y}{(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x+y)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}.$$

Eftersom termerna i nämnarna är större i vänsterledet, måste vänsterledet vara mindre än högerledet.

5. Antag att $a_{p-1}\leq 1,9^{p-1}$ och $a_p\leq 1,9^p$ för ett visst positivt heltal p. Vi skall visa att detta medför att $a_{p+1}\leq 1,9^{p+1}$. Detta är en direkt följd av att

$$a_{p+1}=a_p+a_{p-1}\leq 1,9^p+1,9^{p-1}=1,9^{p-1}\cdot 2,9<1,9^{p+1}.$$

Nu vet vi att $a_{p-1}\leq 1,9^{p-1}$ och $a_p\leq 1,9^p$ för $p=1$. Genom induktion kan man då dra slutsatsen att $a_p\leq 1,9^p$ för alla p. Genom användning av relationen

$$a_{m+2}=a_m+a_{m+1}$$

erhålles för stora n

$$
\begin{aligned}
s_n &= a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_1+a_0}{2^2}+\frac{a_2+a_1}{2^3}+\cdots+\frac{a_{n-2}+a_{n-3}}{2^{n-1}}+\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2^n}\\
&= \frac{5a_0}{2^2}+\frac{7a_1}{2^3}+\frac{3a_2}{2^4}+\frac{3a_3}{2^5}+\cdots+\frac{3a_{n-2}}{2^n}+\frac{a_{n-1}}{2^n}\\
&= \frac{3}{4}\left(a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right)+\frac{a_0+a_1}{2}-\frac{a_{n-1}}{2^{n+1}}-\frac{3a_n}{2^{n+2}}\\
&= \frac{3s_n}{4}+\frac{1}{2}-\frac{a_{n-1}}{2^{n+1}}-\frac{3a_n}{2^{n+2}}.
\end{aligned}
$$

Detta ger $\dfrac{s_n}{4}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a_{n-1}}{2^{n+1}}-\dfrac{3a_n}{2^{n+2}}$.
Vi får därför

$$|s_n-2|=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{3a_n}{2^n}\le\left(\frac{1,9}{2}\right)^{n-1}+3\left(\frac{1,9}{2}\right)^{n}\to 0,$$

då $n\to\infty$, vilket visar det senare påståendet.

6. Varje lag spelar 10 matcher och kan alltså få högst 20 poäng. Vidare är totala antalet matcher 15 och sammanlagda poängsumman blir därför 30. Detta ger de fyra villkoren

$$0\le p_1\le 20,\qquad 0\le p_2\le 20,\qquad 0\le p_3\le 20,\qquad p_1+p_2+p_3=30$$

som alltså är *nödvändiga* för att (p_1, p_2, p_3) skall vara slutpoäng.
Vi skall visa att villkoren också är *tillräckliga*. Låt oss alltså anta att (p_1, p_2, p_3) är givna heltal med ovanstående egenskaper. Vi skall visa att matchresultaten kan bli sådana att man får dessa tal som slutpoäng.
Vi kan för enkelhets skull anta att numreringen är sådan att $p_1\ge p_2\ge p_3$. Vi vill välja matchresultaten så att, om lagen kallas A, B och C, lag A får p_1, lag B p_2 och lag C p_3 poäng.
Eftersom $p_1+p_2+p_3=30$ måste vi ha

$$p_1\ge 10\quad\text{och}\quad p_3\le 10.$$

Sätt $p_1=10+a$, $p_3=10-b$, där a och b då är heltal ≥ 0 och ≤ 10. Då blir

$$p_2=30-p_1-p_3=10+(b-a).$$

Dessa poängtal kan t.ex. erhållas om lag A får full poäng (10) vid sina möten med C, lag A får a poäng vid sina möten med B (och B alltså $10-a$ poäng), och lag B får b poäng vid sina möten med C (och C alltså $10-b$ poäng).
Om antalet lag är fyra inses helt analogt att

$$0\le p_1\le 30,\qquad 0\le p_2\le 30,\qquad 0\le p_3\le 30,\qquad 0\le p_4\le 30,\qquad p_1+p_2+p_3+p_4=60.$$

Men vidare måste gälla att summan av poängen för två av lagen måste minst uppgå till 10, då detta är poängutdelningen i deras inbördes matcher. Om vi därför förutsätter att

$$p_1\ge p_2\ge p_3\ge p_4,$$

måste alltså gälla att $p_3+p_4\ge 20$.
Dessa villkor är således *nödvändiga*. Vi skall visa att de också är *tillräckliga*. Vi kallar lagen A, B, C och D och skall visa att om (p_1, p_2, p_3, p_4) är givna och uppfyller alla nämnda olikheter, matchresultaten kan väljas så att lagen får dessa tal som slutpoäng.
Låt oss först anta att $p_1\ge 20$. Sätt $p_1=20+a$, där $0\le a\le 10$. Villkoret $p_3+p_4\ge 10$ innebär att $p_1+p_2\le 50$, d.v.s. $p_2\le 50-p_1$. Sätt $p_2=50-p_1-c=30-a-c$, där $c\ge 0$. Eftersom $p_2+p_3+p_4=60-p_1\ge 30$ och $p_2\ge p_3\ge p_4$, är $p_2\ge 10$, d.v.s. $a+c\le 20$. Eftersom

$p_1 + p_2 + p_3 \leq 60$, är $p_3 \leq 20$ och därav följer även att $p_4 \leq 20$.
Vi kan nu anta att lag A vinner alla sina matcher mot C och D och får a poäng mot lag B. Om A:s matcher frånräknas skall således de inbördes matcherna mellan B, C och D väljas så att slutpoängen blir för B: $20 - c$, för C: p_3, för D: p_4. Dessa poäng ligger alla mellan 0 och 20, och summan av dem är 30. Enligt diskussionen av trelagsserien är detta därför ett möjligt poängresultat.
Låt oss därefter anta att $p_1 < 20$, vilket innebär att $p_4 \leq p_3 \leq p_2 < 20$. Uppenbarligen måste gälla att $p_1 \geq 15$. Eftersom $p_1 + p_3 \geq p_2 + p_4$ gäller $p_1 + p_3 \geq 30$, d.v.s. $p_3 > 10$. Detta innebär att även $p_2 > 10$. Vi kan nu välja A:s matchresultat så att A vinner alla matcherna mot D, förlorar alla matcherna mot B och erhåller $p_1 - 10$ poäng i matcherna mot C. De poäng som resterar för de inbördes uppgörelserna mellan B, C och D är då för B: $p_2 - 10$, för C: $p_2 - (20 - p_1)$ och för D: p_4. Dessa poängtal uppfyller villkoren för trelagsserie, varför även detta fall svarar mot möjligt poängresultat.

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet