

# HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 2017/18

## KVALIFICERINGSTÄVLING 14 NOVEMBER 2017

### LÖSNINGSFÖRSLAG OCH BEDÖMNINGSMALL

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna.** Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen. Vid osäkerhet finns det plats för anmärkningar i rättningsprotokollet.

*Tack för er medverkan!*

1. **Lösningsförslag 1:** Först skriver vi om det tresiffriga talet  $HMT$  som  $100H + 10M + T$ . Det ger ekvationen:

$$\frac{100H + 10M + T}{H + M + T} = 30$$

Låt oss därefter multiplicera upp nämnaren. Vi får då

$$100H + 10M + T = 30(H + M + T) = 30H + 30M + 30T$$

dvs

$$70H - 20M = 29T$$

Eftersom vänsterledet är delbart med 10 måste även högerledet vara det. Eftersom 29 inte är delbart med 2 eller 5 (faktorerna i 10) ger detta att  $T = 0$ . Sätter vi in  $T = 0$  i uttrycket får vi

$$70H - 20M = 0$$

vilket förkortat blir

$$H = \frac{2M}{7}$$

$H$  är ett heltal, och därmed måste  $M$  vara delbart med 7. Den enda siffran som är delbar med 7 är 7 (förutom 0, men det ger  $HMT = 000$  vilket ju inte är ett tresiffrigt tal). Sätter vi  $M = 7$  får vi  $H = 2$ . Detta är därmed den enda möjliga lösningen.

**Lösningsförslag 2:** Eftersom 30 är delbart med 10, måste även  $HMT$  vara delbart med 10. Därmed är  $T = 0$ .

På samma sätt: Eftersom 30 är delbart med 3 måste  $HMT$  vara delbart med 3. Men om  $HMT$  är delbart med 3 så är dess siffersumma,  $H + M + T$ , också delbart med 3. Det betyder att  $HMT$  måste vara delbart med 9 för att en 3:a skall behållas i divisionen. Men, då är ju även siffersumman  $H + M + T$  delbar med 9, vilket betyder att  $HMT$  måste vara delbart med 27.

Detta ger att  $HMT$  är en multipel av 270, och om vi till exempel testar alla sådana multiplar, 270, 540 och 810, så ser vi att endast 270 uppfyller ekvationen.

**Svar:** Det enda möjliga tresiffriga talet  $HMT$  som uppfyller ekvationen är 270.

#### Poäng:

*Endast svar ger inga poäng*

Motiverar att  $T = 0$

+1p

Bestämmer ytterligare en siffra

+1p

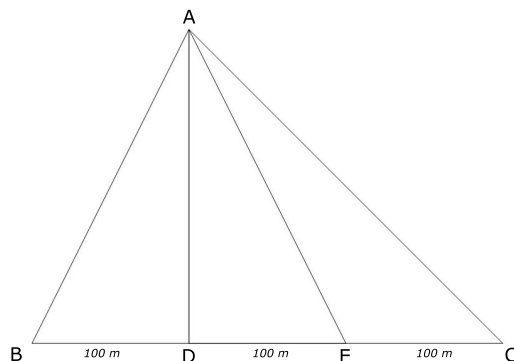
Kommer fram till rätt svar och motiverar att detta är den enda lösningen

+1p

2. **Lösningsförslag:** Vi börjar med att rita upp en figur enligt beskrivningen av Hektors fält (se figur 1). Eftersom triangeln  $ABD$  är rätvinklig, betyder det att vi kan beräkna arean  $10000 \text{ m}^2$  enligt

$$\frac{100 \cdot |AD|}{2} = 10000$$

Därmed är  $|AD| = 200$  meter.



Figur 1: Problem 2

Tittar vi nu på triangeln  $ACD$  ser vi att även det måste vara en rätvinklig triangel, och den har kateterna  $|AD| = 200$  samt  $CD = 200$ . Det är därmed en likbent rätvinklig triangel, en 45-90-45-triangel. Vinkeln vid hörn  $C$  är därför  $45^\circ$ .

**Svar:** Vinkeln vid hörn  $C$  är  $45^\circ$ .

**Poäng:**

*Endast svar ger inga poäng*

Ritar upp en korrekt figur med givna punkter och mått	+1p
Bestämmer höjden $ AD  = 200$ meter	+1p
Drar rätt slutsatser och motiverar vinkeln vid hörn $C$	+1p

3. **Lösningsförslag:** I en stor kub med sidan  $n$  finns tre sorters enhetskuber:

- Hörnkuber. Dessa har tre grannar. Total finns det lika många som antalet hörn i den stora kuben, dvs 8.
- Kantkuber. Dessa har fyra grannar. Det finns  $n - 2$  sådana kuber längs varje kant i den stora kuben. Eftersom en kub alltid har tolv kanter finns det totalt  $12(n - 2)$  sådana enhetskuber.
- Sidokuber. Dessa har fem grannar. Det finns  $(n - 2)^2$  sådana kuber utmed varje sidoyta av den stora kuben. Eftersom en kub alltid har sex sidoytor finns det totalt  $6(n - 2)^2$  sådana enhetskuber.
- Insideskuber. Dessa har sex grannar. Det finns  $(n - 2)^3$  sådana kuber.

Från uppgiften vet vi att det finns 96 enhetskuber som är sammanfogade med fyra andra enhetskuber, dvs det finns 96 kantkuber. Detta kan vi beskriva som

$$12(n - 2) = 96$$

dvs

$$n = \frac{96}{12} + 2 = 8 + 2 = 10$$

Den stora kuben har alltså sidan 10. Det eftersökta antalet kuber är de med fem grannar, dvs sidokuber. Vi vet att en kub med sidan  $n$  har  $6(n-2)^2$  sådana enhetskuber. I detta fall är  $n = 10$ , så det finns

$$6(10-2)^2 = 6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64 = 384$$

sådana enhetskuber.

**Svar:** Det finns 384 enhetskuber som är sammanfogade med exakt fem andra enhetskuber i Ernös stora kub.

**Poäng:**

*Endast svar ger inga poäng*

Bestämmer ett uttryck i $n$ för antalet kantkuber	+1p
Bestämmer ett uttryck i $n$ för antalet sidokuber	+1p
Bestämmer och motiverar det rätta antalet sökta enhetskuber	+1p

4. **Lösningsförslag:** Låt oss först beräkna summan av alla tolv tal:

$$2 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 9 + 9 = 74$$

Om siffrorna i de tre raderna skall bli tre på varandra följande tal kan vi anta att radsummorna är de tre heltalen  $k-1$ ,  $k$  och  $k+1$ . Summan av alla tal kan därför också skriva som

$$74 = (k-1) + k + (k+1) = 3k$$

Högerledet,  $3k$ , är naturligtvis delbart med 3. Vänterledet, 74 är dock inte delbart med 3. Det betyder att  $k$  inte kan vara något heltal, och därmed faller vårt antagande. Det finns således ingen lösning som uppfyller villkoren.

**Svar:** Det finns inget sätt att placera in talen i rutnätet så att villkoren är uppfyllda.

**Poäng:**

*Endast svar ger inga poäng*

Beräknar summan av alla tal, 74	+1p
Bestämmer ett uttryck för summan av de tre radsummorna	+1p
Drar rätt slutsats och motiverar väl	+1p

5. **Lösningsförslag:** Låt oss betrakta den andra och tredje siffran. Det finns sex tvåsiffriga kvadrattal, och därmed sex fall.

**$9^2 = 81$ :** Detta ger den fyrsiffriga koden  $a81d$ , där  $a8$  skall vara ett primtal. Det finns inga primtal som slutar på 8, och därmed inga lösningar i detta fall.

**$8^2 = 64$ :** Detta ger den fyrsiffriga koden  $a64d$ , där  $a6$  skall vara ett primtal. Det finns inga primtal som slutar på 6, och därmed inga lösningar i detta fall.

**$7^2 = 49$ :** Detta ger den fyrsiffriga koden  $a49d$ , där  $a4$  skall vara ett primtal. Det finns inga primtal som slutar på 4, och därmed inga lösningar i detta fall.

**$6^2 = 36$ :** Detta ger den fyrsiffriga koden  $a36d$ , där  $a3$  och  $6d$  skall vara primtal. Följande tvåsiffriga primtal (med möjlig inledande nolla) slutar på 3: 03, 13, 23, 43, 53, 73 och 83. Följande tvåsiffriga primtal börjar med 6: 61 och 67. Det finns alltså sju val för  $a$  och två val för  $d$ : total  $7 \cdot 2 = 14$  möjligheter i detta fall.

**$5^2 = 25$ :** Detta ger den fyrsiffriga koden  $a25d$ , där  $a2$  och  $5d$  skall vara primtal. 02 är det enda tvåsiffriga primtal (med möjlig inledande nolla) som slutar på 2. Följande tvåsiffriga primtal börjar med 5: 53 och 59. Det finns alltså ett val för  $a$  och två val för  $d$ : total  $1 \cdot 2 = 2$  möjligheter i detta fall.

$4^2 = 16$ : Detta ger den fyrsiffriga koden  $a16d$ , där  $a1$  och  $5d$  skall vara primtal. Följande tvåsiffriga primtal (med möjlig inledande nolla) slutar på 1: 11, 31, 41, 61 och 71. Följande tvåsiffriga primtal börjar med 6: 61 och 67. Det finns alltså fem val för  $a$  och två val för  $d$ : total  $5 \cdot 2 = 10$  möjligheter i detta fall.

Totalt finns det därför  $0 + 0 + 0 + 14 + 2 + 10 = 26$  koder som skulle kunna vara möjliga.

**Svar:** 26 koder uppfyller de tre kraven.

#### Poäng:

*Endast svar ger inga poäng*

Reducerar antalet fall till något som är hanterbart ( $< 10$  fall) +1p

Bestämmer minst 15 koder +1p

Bestämmer alla 26 koder och för ett resonemang som utesluter fler möjligheter +1p

6. **Lösningförslag 1:** Låt oss dela upp detta i ett antal fall, beroende på hur många ben som taranteln har kvar på marken. Som uppgiften påpekar så kan den inte ha endast ett eller två ben i marken eftersom den då skulle ramla omkull.

En spindel har åtta ben, men för oss är det viktigt att även betrakta benen på var sida av kroppen, dvs för oss har spindeln 4+4 ben.

**3 ben i marken:** Detta betyder 1+2 ben. Låt oss först välja det ben som är ensamt på sin sida kroppen. Detta kan vi göra på 8 sätt. Nu vet vi att de två andra benen befinner sig bland de fyra benen på andra sidan kroppen. Det första av de två eben kan vi välja på 4 sätt och det andra på 3 sätt. Dock spelar inte ordningen någon roll, så total finns det  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  sätt att välja de två benen. Totalt finns alltså  $8 \cdot 6 = 48$  sätt för taranteln att ha kvar tre ben i marken.

**4 ben i marken:** Här får vi två delfall: där det är 1+3 ben, och där det är 2+2 ben.

Om det är 1+3 ben, kan vi precis som i fallet ovan välja det ensamma benet på 8 sätt. Nu vet vi vilken sida som måste ha tre ben i marken. Det betyder att precis ett ben är i luften, och det benet kan vi välja på 4 sätt. Total  $8 \cdot 4 = 32$  sätt.

Om det är 2+2 ben vet vi att vi kan välja två ben bland fyra på 6 sätt. På den andra sidan kan vi självklart också välja de två benen på 6 sätt. Totalt  $6 \cdot 6 = 36$  sätt.

Det finns därmed  $32 + 36 = 68$  sätt för taranteln att ha kvar fyra ben i marken.

**5 ben i marken:** Väljer vi fem ben helt slumpmässigt kommer alltid varje sida att ha minst ett ben i marken, dvs spindeln kommer inte ramla. För att göra beräkningarna enklare kan vi istället titta på de tre benen som är i luften. Det första av dessa kan vi välja på 8 sätt, det andra på 7 sätt och det tredje på 6 sätt. Dock spelar inte ordningen någon roll så vi måste dela med 6 (antalet sätt att permutera tre ben). Totalt finns alltså  $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$  sätt för taranteln att ha kvar fem ben i marken.

**6 ben i marken:** Även här ramlar aldrig spindeln. Precis som i fallet ovan tittar vi på de två ben som är i luften, och beräknar antalet sätt som vi slumpmässigt kan välja två ben på. Totalt finns alltså  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$  sätt för taranteln att ha kvar sex ben i marken.

**7 ben i marken:** Även här ramlar aldrig spindeln. Det betyder att spindeln har ett ben i luften. Det benet kan den välja på åtta olika sätt. Totalt finns alltså 8 sätt för taranteln att ha kvar sju ben i marken.

**8 ben i marken:** Det finns ett enda sätt för spindeln att ha kvar alla åtta ben i marken. Om eleven medvetet har uteslutit detta fall på grund av att det utgör ett dåligt danssteg görs inget poängavdrag.

Totalt finns det alltså  $48 + 68 + 56 + 28 + 8 + 1 = 209$  sätt för taranteln att sprattla med benen.

**Lösningförslag 2:** Ett ben har två lägen: i marken, respektive i luften. Eftersom vi har åtta ben ger det totalt  $2^8$  möjligheter. Dock måste vi undersöka i vilka av dessa som spindeln ramlar.

**0 ben i marken:** Här faller alltid spindeln. Det finns ett enda sätt att göra det på, genom att lyfta alla ben.

**1 ben i marken:** Här faller alltid spindeln. Benet i marken kan vi välja på 8 sätt.

**2 ben i marken:** Här faller alltid spindeln. Två valfria ben kan vi välja på  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$  sätt.

**3 ben i marken:** Om benen är på olika sidor faller inte spindeln. Vi behöver därmed bara betrakta då benen är på samma sida. Vi kan välja den sidan på två sätt. Därefter kan vi välja benet som inte är i marken på fyra sätt. Totalt finns det alltså  $2 \cdot 4 = 8$  sätt som taranteln faller med tre ben i marken.

**4 ben i marken:** Om benen är på olika sidor faller inte spindeln. Alltså måste alla fyra ben vara på samma sida för att spindeln skall falla. Den sidan kan vi välja på två sätt.

Totalt finns det alltså  $256 - 1 - 8 - 28 - 8 - 2 = 209$  sätt för taranteln att sprattla med benen.

**Lösningförslag 3:** Det finns  $2^4 = 16$  sätt att lyfta på benen på en sida av spindelns kropp. Ett sätt har inga ben i marken och fyra sätt har bara ett ben i marken. Totalt finns det alltså  $16 - 1 - 4 = 11$  sätt att lyfta på 2-4 ben på en sida. Tar vi båda sidorna så finns det  $11 \cdot 11 = 121$  sätt där det är minst två ben i marken på varje sida.

Nu måste vi lägga till de fall då en sida har endast ett ben. Detta ensamma ben kan vi välja på  $2 \cdot 4 = 8$  sätt. Benen på andra sidan kan vi fortfarande välja på 11 sätt. Sammanlagt  $8 \cdot 11 = 88$  sätt.

Totalt finns det alltså  $121 + 88 = 209$  sätt för taranteln att sprattla med benen.

**Lösningförslag 4:** Det finns  $2^4 = 16$  sätt att lyfta på benen på en sida av spindelns kropp. Ett sätt har inga ben i marken, så det finns 15 sätt att ha minst ett ben i marken. Totalt på båda sidor  $15 \cdot 15 = 225$  sätt.

Men, då har vi även räknat med då spindeln har exakt ett ben i marken på varje sida. Detta händer i exakt  $4 \cdot 4 = 16$  av fallen.

Totalt finns det alltså  $225 - 16 = 209$  sätt för taranteln att sprattla med benen.

**Svar:** Taranteln har 209 (eller 208) olika bensprattlar när den dansar cancan.

**Poäng:**

*Endast svar ger inga poäng*

Korrekt bestämmer och motiverar två av fallen för 3-7 (eller 0-4) ben i marken	+1p
Korrekt bestämmer och motiverar ytterligare två av fallen för 3-7 (eller 0-4) ben i marken	+1p
Motiverar alla fall och korrekt bestämmer alla 209 (eller 208) bensprattlar	+1p