Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 8 oktober 1987

1. Antag att Kalle häller över x liter. Efter blandning med vatten i flaska B kommer varje del a av denna att innehålla ax liter av den givna saften. Nu häller han tillbaka lika mycket dvs $a = x$, så att flaska A innehåller $y = 1 - x + x^2$ liter juice. Vi kan skriva

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

varav följer att $y \geq 3/4$ (= 75%).

2. Talet är $t = 100a + 10b + c$. Vi kan skriva detta $t = 98a + 7b + (2a + 3b + c)$. Talet t är därför delbart med 7 om och endast om $2a + 3b + c$ är delbart med 7. Men

$$\begin{aligned} 3(2a + 3b + c) &= 6a + 9b + 3c \\ &= 7a + 7b + (-a + 2b + 3c) \end{aligned}$$

varför t är delbart med 7 om och endast om $-a + 2b + 3c$ är delbart med 7.

Anmärkning: Man kan skriva $3t - (-a + 2b + 3c) = 301a + 28b = 7(43a + 4b)$ varav resultatet följer direkt.

3. Man har

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + 2xy + y^2) &= 1176 \\ (x - y)(x^2 + y^2) &= 696 \end{aligned}$$

Härav genom subtraktion

$$(x - y) \cdot 2xy = 480.$$

Subtraktion av detta från den andra av de givna ekvationerna ger

$$(x - y)(x^2 - 2xy + y^2) = 216$$

$$(x - y)^3 = 216$$

$$x - y = 6$$

Första ekvationen ger då

$$(x + y)^2 = 1176/6 = 196$$

$$\begin{array}{rlll} \text{I.} & x + y = 14, & x = 10, & y = 4 \\ \text{II.} & x + y = -14, & x = -4, & y = -10 \end{array} .$$

4. Antag att D ligger på BA.

Metod 1. Drag MA. Trianglarna DMP och DMA har samma area (gemensam bas, samma höjd). Alltså är arean av triangeln BDP densamma som arean av triangeln BMA, vilken är halva arean av triangeln BCA (halva basen, gemensam höjd).

Metod 2. Sätt $BD = a$, $BM = b$ och antag $BA = xa$. Då är $BP = xb$ och $BC = 2b$. Låt vinkeln ABC vara v. Då är

$$\begin{aligned} \text{arean av } BAC &= \frac{1}{2} xa \cdot 2b \cdot \sin v \\ \text{arean av } BDP &= \frac{1}{2} a \cdot xb \cdot \sin v \end{aligned} .$$

5. Genom att successivt vrida på strömställarna för den horisotella raden 1, vertikala raden 2, horisontella raden 3 och vertikala raden 4 får man 14 lampor tända.
   Av de 4 lamporna i nedre vänstra hörnet är en tänd från början. Vid varje vridning på en strömställare ändras ingen eller två av dessa 4 lampor. Antalet av dessa som är tända är därför hela tiden 1 eller 3. Minst en av dem är därför alltid släckt. Samma resonemang gäller övre högra hörnet. Minst 2 lampor måste därför vara släckta, högst 14 tända.

6. Antag att den minsta smågruppen har a elever och den näst minsta b elever. Uppgifterna om alla smågrupperna ger oss smågrupperna i storleksordning

$$a \quad b \quad ? \quad ? \quad ? \quad ? \quad ? \quad a+4$$

   Motsvarande information om storgrupperna ger oss

$$a \quad b \quad ? \quad ? \quad ? \quad ? \quad b+1 \quad a+4$$

   vriga smågrupper har då b eller $b+1$ elever. Då totala antalet elever i skolan är ett jämnt tal måste vi ha ett jämnt antal smågrupper med $b+1$ elever. Detta ger två fall:
   I. $a \quad b \quad b \quad b \quad b \quad b+1 \quad b+1 \quad a+4$
   II. $a \quad b \quad b \quad b+1 \quad b+1 \quad b+1 \quad b+1 \quad a+4$
   Att summan av alla smågruppernas elevantal är 50 ger

   I. $2a+4+6b+2=50, \qquad a+3b=22$

   II. $2a+4+6b+4=50, \qquad a+3b=21$

   Eftersom $b \geq a$ har vi

$$4b \geq a+3b \geq 21, \qquad 4b = 24, 28, \ldots$$

   Härav $b=6$ eftersom $b=7$, $a=1$ strider mot $b+1 \leq a+4$. Vi får

   I. $a=4$, lösning: 4 6 6 6 6 7 7 8

   II. $a=3$, lösning: 3 6 6 7 7 7 7 7

   I båda fallen är det 6 elever fler i klass B än i klass A.
   (Denna information är alltså överflödig i problemet.)

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner