Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 19 november 1968

1. En triangels sidor har längderna $a > b > c$ och motsvarande höjder har längderna h_a, h_b och h_c. Visa att
$$a + h_a > b + h_b \geq c + h_c.$$

2. På ytan av en damm, som har formen av en cirkel med radien 5 meter, simmar 6 ankungar. Visa att i varje ögonblick två av ankungarna simmar på ett avstånd av högst 5 meter.

3. För godtyckliga reella tal x_1, x_2 och x_3 gäller att
$$\text{om } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{så är} \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq 0.$$
Visa detta.
För vilka heltal $n \geq 4$ gäller att
$$\text{om } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \quad \text{så är} \quad x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leq 0?$$
(Båda summorna innehåller n termer).

4. Låt $P(x)$ vara ett tredjegradspolynom med exakt tre olika reella nollställen. Hur många reella rötter har ekvationen
$$(P'(x))^2 - 2P(x)P''(x) = 0?$$

5. Låt m och n vara positiva heltal. Visa att det finns en konstant $\alpha > 1$ sådan att
$$\frac{m}{n} < \sqrt{7} \qquad \text{medför att} \qquad 7 - \frac{m^2}{n^2} \geq \frac{\alpha}{n^2}.$$
Vilket är det största möjliga värdet på α ?

6. Följden $a_1, a_2, \cdots$ är definierad genom rekursionsformeln
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n}}\ , \ n \geq 1$$
och $a_1 = 1$. Visa att man kan välja α så att
$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{n^\alpha} \leq 2 \qquad \text{för alla} \qquad n \geq 1.$$