Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 24 november 1968

1. Man har, om den givna relationen används,

$$1 \leq 1 + y^2 + 2z^2 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3 - y^2 - 2x^2 \leq 3.$$

   Å andra sidan antas värdet 1 för $x = 1$, $y = z = 0$ och värdet 3 för $x = y = 0$, $z = 1$.
   Svar: 3 och 1.

2. Placera en tärning så att sida 6 kommer nedåt. Beroende på vilket av de fem övriga numren som därvid kommer uppåt uppstår fem olika fall. Det räcker att behandla ett av dessa, tex. det att sida 5 kommer uppåt. Sidorna 1, 2, 3 och 4 är då vertikala. Vrid tärningen, så att sida 4 kommer framåt. Man får då sidorna 1, 2 och 3 att vara riktade åt vänster, bakåt eller åt höger. De kan placeras in på sex olika sätt som svarar mot sex olika tärningar. Det finns alltså sex olika tärningar där sida 5 är motsatt sida 6. På samma sätt får man sex olika tärningar för vart och ett av de övriga fallen. Totalt finns det alltså $5 \cdot 6 = 30$ olika tärningar.

3. Placera in ett rätvinkligt koordinatsystem med x-axeln längs den ena diagonalen och origo i dennas mittpunkt. De fyra hörnen kan då antagas ha koordinaterna $(-a, 0)$ och $(a, 0)$ (dessa två är diagonala hörn) samt (b, c) och (d, e). Enligt avståndsformeln i analytiska geometrien vill vi visa att

$$\Big((b+a)^2+c^2\Big)+\Big((b-a)^2+c^2\Big)+\Big((d+a)^2+e^2\Big)+\Big((d-a)^2+e^2\Big) \geq 4a^2+\Big((b-d)^2+(c-e)^2\Big).$$

   Utveckling och reduktion av termer visar att denna olikhet är ekvivalent med olikheten

$$(b+d)^2 + (c+e)^2 \geq 0,$$

   vilken uppenbarligen gäller eftersom kvadrater är icke-negativa tal. Likhetstecknet gäller således precis då

$$b + d = c + e = 0,$$

   d.v.s. då origo är mittpunkt inte bara till den ena utan även till den andra diagonalen, något som inträffar precis då fyrhörningen är en *parallellogram*.

4. Påståendet är trivialt för $n = 2$. Om $n = 3$, kallar vi de tre talen a, b och c. Eftersom

$$(a - b) + (b - c) = a - c$$

   inses att två av de tre talen $f(a - b)$, $f(b - c)$ och $f(a - c)$ måste vara lika.
   Antag nu att påståendet är bevisat för ett visst n, och utöka mängden av tal med ytterligare ett tal a. Beteckna mängden av de högst $n - 1$ st. värdena av $f(x - y)$ då x och y varierar i den ursprungliga mängden M med A. Om $f(a - x) \in A$ för alla $x \in M$ så har inget nytt värde av f tillkommit på grund av att M utökades med a. Om det finns $b \in M$ sådant att $f(a - b) \notin A$ så måste för alla $x \in M$ gälla antingen $f(a - x) = f(a - b)$ eller $f(a - x) = f(x - b) \in A$, enligt vad som redan visats för $n = 3$. I detta fall tillkommer alltså högst ett nytt värde av f. Därmed är visat att antalet nytillkomna värden av f är högst 1, och induktionen är genomförd.

5. a) Man har $\cos a_1 x + \cos a_2 x = 2 \cos \dfrac{a_1 + a_2}{2} x \cos \dfrac{a_1 - a_2}{2} x$.
   Om detta vore ≥ 0 för alla x så måste de två faktorerna i högra ledet ha samma tecken för alla x och alltså samma period, något som skulle medföra

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \pm \frac{a_1 - a_2}{2},$$

   d.v.s. att a_1 eller a_2 vore 0, mot förutsättningen.

b) Vi visar att $m(a_1, a_2) \leq -1$. Man kan anta att $0 < a_2 < a_1$. Välj x så att $\cos a_1 x = -1$, d.v.s. $x = k\pi/a_1$, k udda. Då är $f(x) \leq -1$ om k väljs så att

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_2}{a_1} k \leq \frac{3}{2}.$$

Om $a_2/a_1 \geq 1/2$ kan man välja $k = 1$. Om $a_2/a_1 < 1/2$ så innehåller varje intervall av längd 1 något tal av formen ka_2/a_1, k udda. Speciellt finns alltså udda k så att ovanstående olikhet är uppfylld.

Anmärkning: En mer detaljerad undersökning visar att $m(a_1, a_2) \leq -9/8$ för alla a_1 och a_2. Detta är det bästa möjliga resultatet, ty det uppnås för $f(x) = \cos x + \cos 2x$.

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet