Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 7 oktober 1992

1. Antag att det finns p km plan väg, u km uppförslut och n km nedförslut från A till B. Då gäller

$$2\frac{p}{16} + u\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) + n\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12}\right) = 3,$$

eller

$$\frac{p+u+n}{8} = 3, \qquad \text{dvs} \qquad 2(p+u+n) = 48.$$

Svar: Han cyklar totalt 48 km.

2. Låt a vara det minsta talet och b det största. Då gäller att

$$8 \le b - a \le a \text{ och } 122 \ge a + (a+1) + \ldots + (a+8) = 9\,\frac{a+a+8}{2},$$

som ger $9a \le 86$ dvs $a \le 9$. Alltså är $8 \le b - a \le a \le 9$. Nu kan inte $b - a = 8$, ty då bildar talen en aritmetisk följd med 9 element och då är 9 delare i summan. Men 9 delar inte 122. Alltså är $b - a = a = 9$ och precis en differens mellan två konsekutiva tal måste vara 2, medan de andra differenserna måste vara 1. Antag att de första x talen och de $9-x$ följande talen bildar två aritmetiska följder med differens 1. Då är

$$x\,\frac{9+8+x}{2} + (9-x)\,\frac{10+x+18}{2} = 122,$$

som reduceras till $x = 4$.

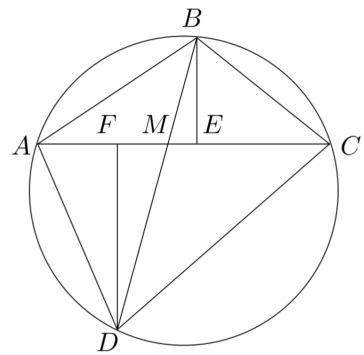
Svar: Talen är 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17 och 18.

3. Om eleverna med nummer $2k$ och $2k+1$ har samma kön är $a_{2k+1} = a_{2k}+1$ och summan $a_{2k}+a_{2k+1} = 2a_{2k} + 1$ ett udda tal.
Antag nu att eleverna med nummer $2k$ och $2k+1$ har motsatt kön. Om det finns x elever äldre än och av samma kön som elev nummer $2k$ och y elever äldre än och av motsatt kön till elev $2k$ så är $a_{2k} = x$ och $a_{2k+1} = y$ och summan $a_{2k} + a_{2k+1} = x + y$. Men $x + y$ är antalet elever äldre än elev nummer $2k$ oberoende av kön. Detta antal är $2k - 1$ som är udda.

4. Antag att $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, där a_k är heltal, $k = 0, 1, \ldots, n$.
Om x är ett jämnt heltal är $P(x) - P(0) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ också jämnt. Om $P(x) = 0$, där x är jämnt, så är också $P(0)$ jämnt. Då är också $P(0)P(1)$ ett jämnt tal.
Om x är ett udda heltal är $P(x) - P(1) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x^k - 1)$ ett jämnt tal. Om $P(x) = 0$, där x är udda, så är $P(1)$, och därmed $P(0)P(1)$, jämnt.
Om x är ett heltalsnollställe till $P(x)$ är $P(0)P(1)$ jämnt.

5. Då fyrhörningen $ABCD$ är konvex är dess area $T_1 = \frac{1}{2}|AC||BD|\sin\alpha$, där α är vinkeln mellan fyrhörningens diagonaler. Ty (se figuren)

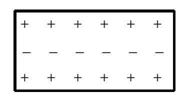
$$\begin{aligned} 2T_1 &= |AC||BE| + |AC||DF| \\ &= |AC|(|MB|\sin\alpha + |MD|\sin\alpha) = |AC||BD|\sin\alpha. \end{aligned}$$



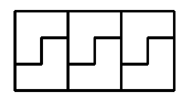
Nu är $|AC| \le 2R$, $|BD| \le 2R$ och $\sin\alpha \le 1$. Alltså är $2T_1 \le 4R^2$ med likhet då och endast då AC och BD är två vinkelräta diametrar. Av $T_2 = \pi R^2$ följer så olikheten $T_1/T_2 \le 2/\pi$.

Svar: Likhet gäller då och endast då $ABCD$ är en kvadrat.

6. Antag att $3 \times n$-rektangeln kan pusslas ihop. Tilldela rutorna talen +1 och -1 enligt figur 1. Definiera värdet v(bit) av en pusselbit som summan av de tal den omfattar. Summan av alla v(bit) blir då v(rektangeln) = n. Värdet av pusselbitarna är för 3-bitarna ± 1 och för 4-bitarna 0. Det följer att man måste använda minst n 3-bitar med värdet 1. Deras area är 3n = rektangelns area. Alltså måste man använda exakt n 3-bitar med värdet 1. Varje sådan upptar 0 eller 2 längdenheter av den ena långsidan, vars längd alltså måste vara jämn ($n = 2m$). Med hjälp av $2m$ 3-bitar kan man pussla ihop en $3 \times (2m)$-rektangel (se fig 2).



$fig\,1$



$fig\,2$

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson