Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 13 oktober 1965

1. I en triangel ABC är vinkeln B trubbig, sidan AB har längden c, sidan BC har längden a och summan av längderna av BC och AC är s. Visa att

$$\frac{s-c}{2} < a < \frac{s^2-c^2}{2s}.$$

2. a, b och c är positiva heltal, sådana att $ab < c$. Visa att $a + b < c$.

3. M är en mängd av rationella tal. M har följande egenskaper:

   a) M innehåller åtminstone ett tal $\neq 0$.

   b) För varje par av tal r och s i M (r och s får vara lika eller olika), gäller att $r - s$ också tillhör M, och om $s \neq 0$ gäller dessutom att r/s tillhör M.

   Bevisa att M innehåller alla rationella tal.

4. Visa utan att använda någon metod som bygger på derivering att om $x \geq 0$ och $y > 0$ så gäller att

$$2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+3y} - 3\sqrt[3]{x+y} < 0.$$

5. Följden $a_0, a_1, a_2, \ldots$, definieras genom att $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, samt $a_{m+2} = a_{m+1} + a_m$ för alla heltal $m \geq 0$. Visa att det finns ett tal k, $0 < k < 2$, som inte beror av m, och som är sådant att $a_m \leq k^m$ för alla m. Försök även visa att

$$s_n = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2^n}$$

   har gränsvärdet 2, då $n \to \infty$.

6. Tre fotbollslag genomför en serie på så sätt, att varje lag spelar fem matcher mot vart och ett av de övriga lagen. Seger i en match ger 2 poäng, oavgjort resultat 1 poäng, förlust 0 poäng. Poängen adderas samman och efter spelårets slut får man tre heltal som anger slutpoängen för de tre lagen. Försök avgöra vilka uppsättningar heltal (p_1, p_2, p_3) som kan erhållas som slutpoäng. Motiveringen bör vara fullständig.
   Försök även genomföra motsvarande undersökning om det i stället är fråga om fyra lag, så att varje lag möter vart och ett av de andra i fem matcher. Vilka uppsättningar heltal (p_1, p_2, p_3, p_4) kan då erhållas som slutpoäng? Motivera fullständigt.