# Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

**Lösningar till kvalificeringstävlingen den 6 oktober 1988**

1. Sätt $t = \sqrt{x-1}$. Då är $x = t^2 + 1$. För $5 \leq x \leq 10$ är $2 \leq t \leq 3$ och

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8} \\ &= \sqrt{t^2 - 4t + 4} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} \\ &= \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} \\ &= |t-2| + |t-3| \\ &= t - 2 + 3 - t \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Logaritmering av ekvationen

$$(2x)^{\lg 2} = (3x)^{\lg 3},\ x > 0$$

och tillämpning av logaritmlagarna

$$\lg a^p = p \cdot \lg(a), \quad \lg(ab) = \lg a + \lg b \quad \text{och} \quad \lg\frac{1}{b} = -\lg b,$$

ger tillsammans med konjugatregeln $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\begin{aligned} \lg(2x)^{\lg 2} &= \lg(3x)^{\lg 3} \\ \lg 2 \cdot \lg(2x) &= \lg 3 \cdot \lg(3x) \\ \lg 2(\lg 2 + \lg x) &= \lg 3(\lg 3 + \lg x) \\ (\lg 2)^2 - (\lg 3)^2 &= \lg x(\lg 3 - \lg 2) \\ -(\lg 3 + \lg 2)(\lg 3 - \lg 2) &= \lg x(\lg 3 - \lg 2) \\ -(\lg 3 + \lg 2)) &= \lg x \qquad\qquad (\text{ty } \lg 3 - \lg 2 \neq 0) \\ -\lg 6 &= \lg x \\ \lg\frac{1}{6} &= \lg x \\ \frac{1}{6} &= x. \end{aligned}$$

Ekvationen har den rationella roten $\frac{1}{6}$.

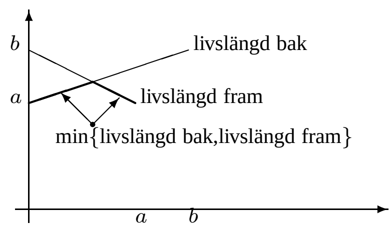
3. Dela schackbrädets rutor i 16 kvadratiska delar, som var och en består av 4 närliggande rutor. Av talen 1 till 17 måste två eller fler hamna inom en av dessa delar. Den positiva differensen mellan två sådana tal är högst 16.

**Alternativt** kan man betrakta rutan med nummer 16. Den rutan har minst 3 närliggande rutor, med vilka den bildar en kvadrat.

| | |
|---|---|
| 16 | |
| | |

Om någon av dessa tre rutor har ett nummer mindre än 16, så finns en positiv differens mindre än 16. Antag därför att de tre närliggande rutorna har nummer $a$, $b$ och $c$ med $16 < a < b < c$ och $a - 16 > 16$, $b - a > 16$ och $c - b > 16$. Adderar man de tre sista olikheterna får man $c - 16 > 48$, dvs $c > 64$. Men detta är omöjligt. Minst en av de positiva differenserna $a - 16$, $b - a$ eller $c - b$ är mindre eller lika med 16.

4. Antag att vi skiftar däcken efter $x$ km. Vid bytet har då framdäcken slitits med $\frac{x}{a}$ av tillgängligt slitage. Tillgängligt slitage har alltså reducerats med faktorn $1-\frac{x}{a}$. Som bakdäck räcker detta i $\left(1-\frac{x}{a}\right)b$ km.
Livslängd i km för framdäcken": $x+\left(1-\frac{x}{a}\right)b = x\left(1-\frac{b}{a}\right)+b$, $x \leq a$.
Analogt är
livslängden i km för bakdäcken": $x+\left(1-\frac{x}{b}\right)a = x\left(1-\frac{a}{b}\right)+a$, $x \leq b$.




Skaffa nya däck måste man efter $\min\left\{x\left(1-\frac{b}{a}\right)+b, x\left(1-\frac{a}{b}\right)+a\right\}$ km. Detta minimun har sitt största värde då

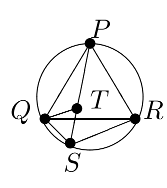
$$x\left(1-\frac{b}{a}\right)+b = x\left(1-\frac{a}{b}\right)+a,$$

dvs då $x=\frac{ab}{a+b}$. Den gemensamma livslängden för fram- och bakdäck är då $\frac{2ab}{a+b}$.
**Alternativt** kan man lösa problemet med linjär programmering. Det gäller då att minimera $s+t$ under bivillkoren

$$\begin{cases} s \geq 0, t \geq 0 \\ \frac{s}{a}+\frac{t}{b} \leq 1 \\ \frac{s}{b}+\frac{t}{a} \leq 1 \end{cases} .$$

Detta löses enklast grafiskt.

5. Om punkten $S$ sammanfaller med någon av punkterna $P, Q$ eller $R$ så är en av sträckorna $PS$, $RS$ och $QS$ nollsträckan och påståendet sant. Låt oss därför anta att $S$ ligger på den mindre cirkelbågen mellan $Q$ och $R$.




I triangeln $\triangle PQS$ är vinkeln $\angle QPS < 60^\circ < \angle SQP$ och därför är $|QS| < |PS|$. På sträckan $PS$ kan alltså punkten $T$ konstrueras så att $|QS| = |ST|$. Den likbenta triangeln $\triangle QST$ är i själva verket liksidig ty enligt periferivinkelsatsen är $\angle QSP$= $\angle QRP$=60°. Vi visar nu att trianglarna $\triangle QTP$ och $\triangle QSR$ är kongruenta. Liksidiga trianglar ger $|PQ|$ = $|RQ|$ och $|QT|$=$|QS|$. Dessutom är $\angle PQT$=60°-$\angle TQR$=$\angle RQS$. Två trianglar med två sidor och mellanliggande vinklar lika är kongruenta. Speciellt är $|PT|$=$|RS|$. Nu följer att

$$|PS| = |PT| + |TS| = |RS| + |QS|.$$

**Alternativt** kan man använda periferivinkelsatsen till att visa att vinklarna $\angle PSQ$ och $\angle PSR$ båda är $60°$ och använda cosinussatsen på trianglarna $\triangle PSR$ och $\triangle PSQ$.

$$\begin{cases} |PR|^2 = |RS|^2 + |PS|^2 - 2|RS||PS|\cos 60° \\ |PQ|^2 = |QS|^2 + |PS|^2 - 2|QS||PS|\cos 60° \end{cases} .$$

Subtraktion av de två ekvationerna och faktorisering ger

$$(|QS| + |RS|)(|QS| - |RS|) = |PS|(|QS| - |RS|).$$

Om $|QS| \neq |RS|$ följer $|QS| + |RS| = |PS|$, om $|QS| = |RS|$ är trianglarna $\triangle PSR$ och $\triangle PSQ$ halva liksidiga trianglar och $|QS| = |RS| = \frac{1}{2}|PS|$.

6. Givet heltalet $n$ välj heltalet $k$ så att $2k < n$ och $|k| > 1$. Sätt $x = n - 2k$ och $y = k^2 - 1$. Då är $x > 0$, $y > 0$ och

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + nxy + y^2} &= \sqrt{(n-2k)^2 + n(n-2k)(k^2-1) + (k^2-1)^2} \\ &= \sqrt{(nk - k^2 - 1)^2} \\ &= |nk - k^2 - 1|. \end{aligned}$$

En analys som leder till denna lösning är exempelvis:

$$\begin{array}{lrcl} & x^2 + nxy + y^2 & = & z^2 \\ & x(x + ny) & = & (z - y)(z + y) \\ \text{Sätt} & z - y & = & kx \\ \text{Då är} & x + ny & = & k(2y + kx) \\ & (n - 2k)y & = & x(k^2 - 1) \\ \text{Pröva} & x = n - 2k & , & y = k^2 - 1 \end{array}$$

**Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:**

**Matematiktävlingar**
**Skolornas Matematiktävling**
**1988-1998**
**Nordiska Matematiktvlingen**
**1987-1998**
**av Åke H Samuelsson**