Skolornas Matematiktävling

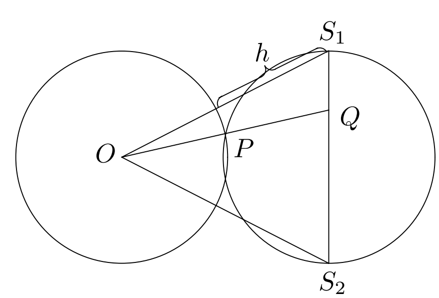
Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 19 november 1978

1. Olikheten är ekvivalent med
$$x^a - x^b - x^c + x^d \geq 0$$
Eftersom $a = b + c - d$ kan vi bryta ut $x^c - x^d$
$$x^a - x^b - x^c + x^d = \left(x^c - x^d\right)\left(x^{b-d} - 1\right) = x^d\left(x^{c-d} - 1\right)\left(x^{b-d} - 1\right).$$
Här är $c - d > 0$, $b - d > 0$. För $x > 1$ är därför de båda sista parenteserna positiva medan de för $0 < x < 1$ båda är negativa. För $x = 1$ är båda parentesuttrycken likamed 0. Eftersom $x^d > 0$ för $x > 0$ följer den sökta olikheten.

2. Kalla summan S. Man har
$$\begin{aligned}\frac{3}{2}S &= 9 + 99 + \cdots + 99\ldots9\\ &= (10-1) + (100-1) + \cdots + (10^n - 1)\\ &= \underbrace{11...1}_{n \text{ ettor}}0 - n = \frac{1}{9}\cdot 99\ldots90 - n\\ &= \frac{1}{9}\left(10^{n+1} - 10\right) - n\end{aligned}$$
Alltså är
$$S = \frac{2}{27}10^{n+1} - \frac{2}{3}n - \frac{20}{27}.$$

3. De punkter i ekvatorplanet från vilka satelliterna syns under rät vinkel ligger på en cirkel med sträckan mellan satelliterna som diameter, en cirkel med samma radie som ekvatorn. En punkt P på ekvatorn från vilken satelliterna kan synas under rät vinkel måste ligga på skärningen mellan denna cirkel och ekvatorn. Dessutom krävs att båda satelliterna ligger över horisonten, vilket sker då satelliterna syns på olika sidor om zenit. Detta kan formuleras så (se fig): P skall inte ligga utanför den triangel som bildas av de båda satelliterna S_1 och S_2 och jordens medelpunkt 0.



Cirklarna råkas då h inte är större än vad den är då cirklarna tangerar varandra:
$$h \leq \sqrt{(2r)^2 + r^2} - r = r(\sqrt{5} - 1).$$
Låt Q vara skärningspunkten mellan linjerna OP och S_1S_2. Eftersom sträckan mellan cirklarnas skärningspunkter är parallell med S_1S_2 är OP och PQ lika långa. Båda har längden r. P ligger inte utanför triangeln OS_1S_2 om $OQ \leq OS_1$, vilket ger kravet $2r \leq r + h$, $h \geq r$.
Svar: $r \leq h \leq r(\sqrt{5} - 1)$.

4. För varje $c > 0$ gäller
$$2c^n b_n \leq c^{n+1}b^{n-1} + c^{n+2}b^{n+1}$$
$$b_{n+1}c^2 - 2b_n c + b^{n-1} \geq 0.$$

Då detta gäller alla $c > 0$ gäller det speciellt i minimipunkten $c = b_n/b_{n+1}$. Alltså är

$$-b_n^2/b_{n+1} + b_{n-1} \geq 0$$

$$b_n^2 \leq b_{n+1}b_{n-1}.$$

Då $\ln$ är monoton får man härav

$$2\ln b_n \leq \ln b_{n-1} + \ln b_{n+1}$$

varför $\ln b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ är konvex.

5. Betrakta för varje ordnat par av heltal (i, j), $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$ mängden N_{ij} av de tal a i den i-te delmängden M_i för vilka $a + 1$ ligger i den j-te delmängden M_j. Det finns k^2 sådana N_{ij}. De innebär en uppdelning av mängden $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Om därför $n - 1 > k^2$ dvs $n \geq k^2 + 2$, måste något N_{ij} innehålla mer än ett element och har då två olika tal a och b med $a \in M_i$, $b \in M_i$, $a + 1 \in M_j$, $b + 1 \in M_j$. Talet $n = k^2 + 2$ är därför tillräckligt stort för att satisfiera villkoren i problemet.
För att visa att $k^2 + 2$ är det minsta talet med denna egenskap har vi att för $n = k^2 + 1$ konstruera $M_1, \ldots, M_k$ så att inget N_{ij} har mer än ett element.
Då man genomlöper talen $1, 2, \ldots, n$ successivt skall man högst en gång gå från ett visst M_i till ett visst M_j (även $i = j$ är tillåtet). Detta kan illustreras med sidorna och diagonalerna i en regelbunden k-hörning där hörnen numreras $1, 2, \ldots, n$ successivt. Vi skall genomlöpa denna figur så att varje sida och varje diagonal genomlöpes två gånger, en i vardera riktningen och så att man ligger stilla vid varje hörn en gång. Exempelvis kan vi gå runt månghörningen en gång och vid varje hörn passa på att gå fram och tillbaka på de diagonaler som går från hörnet och ännu inte är genomgångna. Därefter går vi ett varv tillbaka och kvarligger då en gång vid varje hörn. För $k = 5$, $n = 26$ skulle vi successivt besöka hörnen 1 3 1 4 1 2 4 2 5 2 3 5 3 4 5 1 5 5 4 4 3 3 2 2 1 1 och exempelvis M_1 skulle bestå av talen 1, 3, 5, 16, 25 och 26.

6. Villkoret

$$P^2 = (x^2 - 1)Q^2 + 1 \tag{1}$$

innebär först och främst att båda sidor har samma gradtal: $2n = 2 + 2m$, $m = n - 1$. Derivera (1):

$$2PP' = 2xQ^2 + 2(x^2 - 1)QQ' \tag{2}$$

Högra ledet har faktorn Q.

Metod 1. Man kan studera gemensamma faktorer. (1) medför att P och Q saknar gemensam faktor (annat än konstant). Att PP' har faktorn Q måste därför innebära att P' har faktorn Q. Men då P' och Q har samma gradtal följer $P' = aQ$, där a är en konstant. Nu är

$$P' = ncx^{n-1} + \cdots \qquad Q = cx^{n-1} + \cdots \tag{3}$$

Vi får därför $P' = nQ$.

Metod 2. Utan teorin om faktorer kan vi resonera på följande sätt. Skriv (2) på formen

$$P' = QQ_1$$

där alltså $Q_1 = xQ + (x^2 - 1)Q'$. Kvadrera och utnyttja (l):

$$P'^2[(x^2 - 1)Q^2 + 1] = Q^2Q_1^2$$

$$P'^2 = Q^2[Q_1^2 - (x^2 - 1)P'^2]$$

Eftersom P' och Q har samma gradtal måste parentesen i högra ledet vara konstant, säg $= b$. Vi har då $P'^2 = bQ^2$. (3) ger

$$n^2c^2x^{2n-2} + \cdots = bc^2x^{2n-2} + \cdots.$$

Alltså är $b = n^2$, $P'^2 = n^2 Q^2$. Detta kan skrivas

$$\big(P'(x) - nQ(x)\big)\,\big(P'(x) + nQ(x)\big) = 0$$

för alla x. Då måste endera faktorn vara 0 för alla x. På grund av (3) måste detta vara första faktorn.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner