Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 17 oktober 1968

1. Svaret är ja. För att visa detta räcker det att ange ett exempel på en situation där ett parti skulle ha vunnit på att dela upp sig. Om det är tre mandat att fördela och om tre partier A, B och C erhåller röstetalen 30 000, 14 600 och 14 500 skulle A ha vunnit på att dela upp sig i två partier A_1 och A_2 med ungefär lika röstetal, d.v.s. 15 000 var. Om A ej är uppdelat får A, B och C var sitt mandat, men vid uppdelning får A_1, A_2 och B var sitt mandat medan C blir utan.

2. a) Sant, ty $x^{12}/x^7 = x^5$ måste vara rationellt. Således måste $x^7/x^5 = x^2$ vara rationellt och härav följer att $x^5/(x^2)^2 = x$ måste vara rationellt.

   b) Falskt, ty om x är $\sqrt[3]{2}$ (vilket är ett irrationellt tal) så är x^9 och x^{12} rationella.

3. Svaret på b) är nej, varför både a) och b) besvaras om vi ger exempel på en karta som ej kan färgas med n färger (där $n \geq 2$ eftersom det är fråga om en verklig uppdelning av planet i minst två länder). Dela t.ex. upp planet med parallella räta linjer i $n(n+1)$ områden (två halvplan och ett antal band) och numrera vart och ett av dessa med något av de $n+1$ talen 0, 1, 2, $\ldots$, n så att om man skär alla delningslinjerna med en rät linje, denna i tur och ordning passerar genom områden numrerade med 0, 1, 0, 2, 0, 3, $\ldots$, 0, n, 1, 2, 1, 3, $\ldots$, 1, n, 2, 3, $\ldots$, 2, n, $\ldots$, $n-1$, n.
   Utnämn de områden som härvid får samma nummer i till delar av land nummer i. Vi har då erhållit en karta med $n+1$ länder där varje land gränsar till varje annat. En sådan karta kan uppenbarligen inte färgas med n färger utan att två länder får samma färg.

4. Den stora kuben består av 3 horisontella lager av småkuber, 9 i varje lager. De översta och understa lagren innehåller tillsammans ej fler blå kuber än lagret i mitten. Vi skall visa att lagret i mitten inte kan innehålla mer än 8 blå kuber. Härav följer då att byggsatsen innehåller *högst 16 blå kuber*. Låt a, b, $\ldots$, i vara antalet blå kuber i de 9 vertikala pelare som kuben består av enligt följande figur

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Enligt förutsättningen får man nu följande villkor

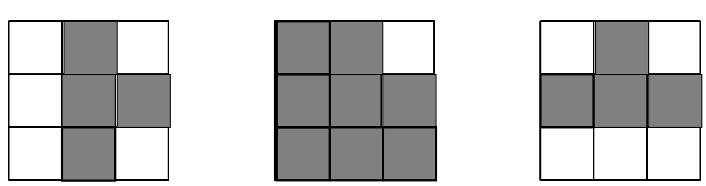
$$a + b + c + g + h + i \leq d + e + f$$

$$a + d + g + c + f + i \leq b + e + h.$$

Addera olikheterna och stryk termer som förekommer både till vänster och till höger i olikheten. Man får då efter division med 2

$$a + c + g + i \leq e \leq 3.$$

Härav följer att det horisontella lagret i mitten inte kan innehålla mer än 8 blå kuber och hela byggsatsen innehåller då högst 16 blå kuber.
Att det verkligen går att bygga den stora kuben om byggsatsen innehåller 16 blå kuber visas med ett exempel. I nedanstående figur ser man de tre horisontella lagren i tur och ordning uppifrån och ned. De blå kuberna motsvaras av skuggade kvadrater.



5. Bestäm det positiva heltalet v så att

$$2v^2 + 1 \leq n < 2(v+1)^2 + 1. \tag{1}$$

Indela kvadraten i v^2 kongruenta kvadrater med sidan $1/v$. För varje delkvadrat kan man bestämma vilka randpunkter som skall höra till kvadraten, så att olika delkvadrater saknar gemensamma punkter. Då $n \geq 2v^2 + 1$ måste minst en av delkvadraterna innehålla minst tre av punkterna. Dessa är hörn i en triangel belägen i delkvadraten. Triangelns omkrets är ej större än kvadratens, som är $4/v$. Den minsta omkretsen är alltså högst

$$\frac{4}{v} \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{n} - \sqrt{2}},$$

då vi använder den högra olikheten (1).

Eftersom vi önskar en uppskattning av formen $a/\sqrt{n}$, giltig för alla $n \geq 3$, undersöker vi hur a kan väljas för att man skall få $a/\sqrt{n} \geq 4\sqrt{2}/(\sqrt{n} - \sqrt{2})$ för alla $n \geq 3$, d.v.s. $a \geq 4\sqrt{2n}/(\sqrt{n} - \sqrt{2})$. Högra ledet antar sitt största värde för $n = 3$. Således duger $a = 4\sqrt{6}/(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < 31$.

6. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, vara de punkter i intervallet $a < x < b$ där feberkurvan har hörn. Om $n = 1$ saknas sådana punkter och kurvan är en rät linje i intervallet. Låt linjens ekvation vara $y = k(x-a)+l$. Eftersom $x - a = |x - a|$ för $x \geq a$ och l kan skrivas på formen

$$l = l\left(|x-a| + |x-b|\right)/(b-a)$$

(eftersom parentesen är $= b - a$) är påståendet bevisat för $n = 1$.

Antag nu att påståendet är visat för $n = p$. Vi bevisar det för $n = p + 1$ på följande sätt.

Punkten $(a_p, f(a_p))$ är en punkt i planet där två av de sträckor som feberkurvan är sammansatt av har en gemensam ändpunkt. Låt k' och k'' vara vinkelkoefficienterna för den vänstra och den högra sträckan. Vi försöker välja c_p så att kurvan

$$y = f(x) - c_p|x - a_p| \tag{1}$$

ej får något hörn för $x = a_p$. Eftersom för denna kurva (som också är en feberkurva) de två vinkelkoefficienterna blir $k' + c_p$ och $k'' - c_p$ blir villkoret att $k' + c_p = k'' - c_p$ vilket är satisflerat om $c_p = (k'' - k')/2$. Med detta val av c_p har kurvan (1) alltså ett hörn mindre än kurvan $y = f(x)$ d.v.s. $p - 1$ stycken. Men enligt induktionsantagandet gäller då

$$f(x) - c_p|x - a_p| = \sum_{i=0}^{p-1} c_i|x - a_i| + c_{p+1}|x - b|,$$

vilket bevisar vårt påstående för $n = p + 1$, och därmed för alla n.

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet