Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 23 november 1985

1. Studera
$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{8} - \left(\frac{x+1}{2} - \sqrt{x}\right) \qquad \text{för } x > 0.$$
Man har
$$\begin{aligned} g(1) &= 0 \\ g'(x) &= \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2} + 1/(2x^{1/2}) \\ g''(x) &= \frac{1}{4} - 1/(4x^{3/2}) \end{aligned}$$
Andraderivatan g'' har ett enda nollställe: $x = 1$. Den byter där tecken från negativ till positiv. Därför har g' där ett isolerat minimum. Detta minimivärde för g' är 0. Alltså är $g'(x) > 0$ för $x \neq 1$, varför g är strängt växande för $x > 0$.
Härav följer för $x > 1$: $g(x) > g(1) = 0$. Sätter man här in $x = a/b$ får man den högra sökta olikheten.
Men man får också för $0 < x < 1$: $g(x) < g(1) = 0$ och insättning av $x = b/a$ ger den vänstra sökta olikheten.

2. Låt talet vara $a \cdot 10^n + b$, där a är första siffran och talet har $n+1$ siffror. Det krävs att
$$10 \cdot b + a = \frac{7}{2}\left(a \cdot 10^n + b\right)$$
$$13 \cdot b = a\left(7 \cdot 10^n - 2\right).$$
Talen a och b är heltal, $0 < a < 10$. Alltså måste $7 \cdot 10^n - 2$ vara delbart med 13. Man finner lätt att det minsta n-värde för vilket detta gäller är $n = 5$. Sätter man a så låg som möjligt, dvs $a = 1$, får man $b = (7 \cdot 10^5 - 2)/13 = 53846$. Det sökta talet är alltså talet 153846.

3. Låt M vara medelpunkten i den givna cirkeln. Rita cirkeln med B som medelpunkt genom punkterna A och C. Eftersom $BD = BC$ ligger D på denna cirkel. Vinkeln CBD är medelpunktvinkel i denna cirkel och vinkeln CAD är randvinkel på samma båge. Härav följer att vinkeln CAD är 30°.
I den givna cirkeln är vinkeln CAE randvinkel och CME medelpunktsvinkel på samma båge. Eftersom vinkeln CAE = vinkeln CAD, följer då att vinkeln CME är 60°, så att triangeln CME är liksidig. Cirkeln med E som medelpunkt och radien r måste gå genom D; detta följer av att vinkeln CDM måste vara 150° eller 30° beroende på om M ligger utanför resp innanför triangeln BCD. Alltså är $DE = r$.

4. Låt
$$f(x) = p(x) + p'(x) + p''(x) + \cdots + p^{(n)}(x).$$
Då är
$$f'(x) = p'(x) + p''(x) + \cdots + p^{(n)}(x)$$
så att
$$f(x) = p(x) + f'(x).$$
Eftersom $p(x) \geq 0$ för alla x måste p:s gradtal n vara ett jämnt tal. f har också gradtalet n och har samma x^n-koefficient som p. Därför är f säkert positiv för stora negativa och stora positiva x-värden. För att bevisa $f(x) \geq 0$ för alla x räcker det därför att visa att $f(x) \geq 0$ i de lokala minimipunkterna. Men i en sådan är $f'(x) = 0$ och $f(x) = p(x) \geq 0$.

5. Låt M vara mittpunkten på sträckan AB. Av triangelolikheten följer $CO \leq CM + MO$. Nu är emellertid $MO = MA = MB$. Vi får därför

$$2 \cdot CO \leq 2 \cdot CM + MA + MB = 2 \cdot CM + AB$$

Det räcker nu att visa att $2 \cdot CM \leq CA + CB$. Men detta följer också från triangelolikheten om man kompletterar triangeln ACB till en parallellogram med medelpunkten M.

6. Eftersom det är frågan om ett rikt föreningsliv måste det finnas mer än en förening.
För två föreningar F_1 och F_2 kan vi alltid finna en person P som inte tillhör någondera. Ty F_1 och F_2 har en gemensam medlem. Tag en annan medlem i F_1 och en annan medlem i F_2. Dessa tillhör en förening som måste ha minst en ytterligare medlem P. P kan då varken tillhöra F_1 eller F_2.
Betrakta de föreningar som P tillhör. Utom P har de helt skilda medlemmar. Var och en av dessa föreningar har en gemensam medlem med F_1, olika för olika föreningar, och var och en av medlemmarna i F_1 tillhör någon av dem, eftersom de alla skall ingå i någon förening tillsammans med P. Alltså är antalet medlemmar i F_1 lika stort som antalet föreningar som P tillhör. Men av samma skäl är även antalet medlemmar i F_2 lika med detta antal föreningar.
Härav följer att två godtyckliga föreningar har samma antal medlemmar. Då en av dem har 17 medlemmar har alla föreningarna 17 medlemmar. Dessutom följer det att P tillhör 17 föreningar. Då alla personer i X-köping tillhör någon förening gemensam med P, får vi slutligen att köpingen har $1 + 17 \cdot 16 = 273$ invånare.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner