Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 21 november 1987

1. Sexton reella tal har arrangerats i en "magisk kvadrat" med sidan 4 så att summan av de fyra talen i en rad, vågrät eller lodrät, alltid blir ett visst tal k. Samma summa erhålles i vardera diagonalen när man summerar de fyra talen där. Bevisa att summan av de fyra talen i kvadratens hörn också blir k.

2. En cirkelskiva med radien R delas av en cirkelbåge i två lika stora delar. Visa att cirkelbågen (den del som ligger inom cirkeln) är längre än $2R$.

3. Antag att 10 slutna intervall alla med längden 1 placerats ut i intervallet $[0, 4]$. Visa att det finns någon punkt i det större intervallet som tillhör minst 4 av de mindre intervallen.

4. För en deriverbar funktion f, definierad på intervallet $0 \leq x \leq 1$, gäller att $f(0) = f(1) = 0$. Visa att det då existerar minst en punkt y i intervallet, där
$$|f'(y)| = 4 \int_0^1 |f(x)| dx.$$

5. Talen a, b, c och d är positiva med produkten $abcd = 1$. Visa att det finns positiva tal t, sådana att för alla sådana a, b, c, d gäller
$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} > t.$$
Ange också det största t med denna egenskap.

6. En bagare med tillgång till en uppsättning olika kryddor bakar 10 limpor. Han använder därvid mer än hälften av sina kryddsorter i varje limpa. Ingen kryddkombination är den andra exakt lik. Visa att det finns tre kryddor a, b, c sådana att varje limpa innehåller åtminstone någon av dessa.