Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 23 november 1985

1. Låt $a > b > 0$. Visa olikheterna

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

2. Bestäm det minsta naturliga tal som är sådant att om den första siffran placeras sist så blir det nya talet 7/2 gånger så stort som det ursprungliga talet. (Talen förutsätts skrivna i tiosystemet.)

3. A, B och C är tre punkter på en cirkel med radie r, och $AB = BC$. D är en punkt innanför cirkeln sådan att triangeln BCD är liksidig. Linjen genom A och D skär cirkeln i punkten E. Visa att $DE = r$.

4. Polynomet $p(x)$ har reella koefficienter och graden n. Vidare är $p(x) \geq 0$ för alla x. Visa att

$$p(x) + p'(x) + p''(x) + \cdots + p^{(n)}(x) \geq 0$$

   för alla x.

5. En triangel har i ett rätvinkligt koordinatsystem hörnen $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$ och $C = (c, d)$, där talen a, b, c och d alla är positiva. Visa att om vi betecknar origo med 0, så gäller för sträckornas längder att

$$AB + BC + CA \geq 2 \cdot CO.$$

6. X-köping har ett rikt föreningsliv. För varje par av invånare finns exakt en förening som båda tillhör. För varje par av föreningar finns exakt en person som är medlem i båda. Ingen förening har mindre än 3 medlemmar. Minst en förening har 17 medlemmar. Hur många invånare har X-köping?