Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 7 oktober 1992

1. En person cyklar från A till B på en väg, som är omväxlande horisontell och lutande. Vid B vänder han omedelbart och cyklar tillbaka till A. Hans hastighet på horisontell väg är 16 km/h, i uppförslut 12 km/h och i nedförslut 24 km/h. Hela färden tar 3 h. Bestäm hur långt han totalt cyklar.

2. Summan av nio olika positiva heltal är 122. Det största talet är inte större än två gånger det minsta talet. Vilka är de nio talen?

3. Eleverna i en skolklass med n elever numreras så att den äldsta eleven får nummer 1, den näst äldsta nummer 2 osv. Talen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definieras av att

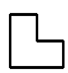
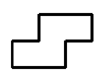
   $$a_k = \text{antalet elever som är äldre än och av samma kön som elev } k.$$

   Visa att $a_{2k} + a_{2k+1}$ är udda för $1 \leq k \leq (n-1)/2$.

4. Låt $P(x)$ vara ett polynom med heltalskoefficienter, sådant att $P(0)P(1)$ är ett udda tal. Visa att $P(x)$ saknar heltalsnollställen.

5. Låt $ABCD$ vara en fyrhörning och S en cirkel som går genom alla fyra hörnen.
   Visa att om fyrhörningens area är T_1 och cirkelns area är T_2 så gäller att $T_1/T_2 \leq 2/\pi$.

6. Ett pussel innehåller ett obegränsat förråd av två sorters pusselbitar:

    och .

   Bitarna är sammansatta av kvadrater med sidan 1. Vilka rektanglar med sidorna 3 och n kan pusslas ihop av dessa bitar?