Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 6 oktober 1983

1. Sätt $y = 3$. Den givna ekvationen kan då skrivas

$$9y^2 - 28y + 3 = 0.$$

Denna har lösningarna $y_1 = 3$ och $y_2 = 1/9$ vilket ger $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

2. a) För att ett lag skall bli uteslutet på a poäng måste minst 10 lag ha a poäng eller mer. Då antalet matcher är 66 utdelas i allt 132 poäng. Detta ger $10a < 132$, $a < 13$. Ett lag kan bli uteslutet på målskillnad med 13 poäng nämligen om 10 lag har 13 poäng vardera och de båda återstående exempelvis ett poäng var.
Svar: 14 poäng.

   b) De 4 bottenlagen delar på 12 poäng i inbördes matcher. Något av dessa lag måste alltså få minst 3 poäng. Ett lag kan emellertid klara sig kvar på bättre målskillnad med 3 poäng om exempelvis ett av bottenlagen spelar oavgjort mot de andra tre lagen och dessa vinner över varandra cykliskt och dessutom dessa 4 lag förlorar alla sina matcher mot de övriga lagen.
Svar: 3 poäng.

3. Antag att kvadraten har en sida horisontell. Låt kvadratens medelpunkt vara M och dess sida ha längden $2a$. Sträckan MC är $\sqrt{3}$ gånger så lång som AM och vinkelrät mot denna. Sträckan MC:s horisontella och vertikala projektioner är därför $\sqrt{3}$ gånger så långa som AM:s vertikala respektive horisontella projektioner. Då A rör sig på en av kvadratens horisontella sidor är därför MC:s horisontella projektion konstant $= \sqrt{3}a$. Härav följer lätt att de möjliga lägena för C bildar en ny kvadrat med medelpunkt i M, med sidlängd $= 2\sqrt{3}a$ och med sina sidor parallella med den givna.

4. **Metod 1.**

$$a + b = c + d \tag{1}$$

$$a^2 + b^2 > c^2 + d^2 \tag{2}$$

Kvadrera båda leden i (1):

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + d^2 + 2cd$$

På grund av (2) ger detta

$$ab < cd \tag{3}$$

Tag kuben av båda sidor i (1):

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = c^3 + d^3 + 3cd(c + d)$$

På grund av (1) och (3) ger detta

$$a^3 + b^3 > c^3 + d^3 \tag{4}$$

Från (2) och (4) får vi nu

$$(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) > (c^2 + d^2)(c^3 + d^3)$$

$$a^5 + b^5 + a^2b^2(a + b) > c^5 + d^5 + c^2d^2(c + d) \tag{5}$$

Men (1) och (3) ger

$$a^2b^2(a + b) < c^2d^2(c + d)$$

varför (5) medför

$$a^5 + b^5 > c^5 + d^5.$$

Metod 2. Sätt $a + b = s$, $c + d = s$ och studera för $0 < x < s$ och för godtyckligt $n > 1$ funktionen

$$f(x) = x^n + (s - x)^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1} - n(s - x)^{n-1}$$

$f'(x) = 0$ för $x = s/2$. f är symmetrisk kring $x = s/2$ och växer för $x > s/2$ eftersom derivatan där är positiv. Den givna olikheten $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$ kan skrivas $f(a) > f(c)$ för $n = 2$. Detta innebär att a ligger längre från $s/2$ än vad c gör. Detta i sin tur medför $f(a) > f(c)$ för alla $n > 1$ och därmed $a^n + b^n > c^n + d^n$.

5. Låt d vara en eventuell gemensam heltalsfaktor till $p + 7n$ och $q + 9n$. Då är

$$p + 7n = jd \qquad q + 9n = kd$$

för några heltal j, k. Elimineras n erhålles

$$9p - 7q = d(9j - 7k).$$

Genom att välja p och q så att $9p - 7q = 1$ eller $9p - 7q = -1$ får man att d måste vara $= 1$. Man kan exempelvis ta $p = 3$, $q = 4$ eller $p = 4$, $q = 5$.

6. Kalla den givna produkten P. Eftersom P endast eventuellt byter tecken då x_1, x_2, x_3, x_4 permuteras kan vi anta

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4$$

Det är då omedelbart klart att P växer då x_1 ökar till 1 och x_4 minskar till -1. Vi har alltså endast att betrakta x_i-värden som i fallande storleksordning är

$$x_1 = 1, x_2, x_3, x_= - 1.$$

För att undersöka hur P varierar då x_2 och x_3 varierar antag först att $x_2 - x_3 = a$ är konstant. Sätt $x_3 = x$, $x_2 = x + a$.

$$P = 2a\left(1 - x^2\right)\left(1 - (x + a)^2\right).$$

Derivering visar att detta har maximum för $x = -a/2$, dvs då $x_2 = -x_3$. Med beteckningarna $x_2 = -x_3 = x$ får vi

$$P = 4x\left(1 - x^2\right)^2$$

$$\frac{dP}{dx} = 4\left(1 - x^2\right)\left(1 - 5x^2\right).$$

P blir därför störst då $1 - 5x^2 = 0$, x= $1/\sqrt{5}$. $P_{\max} = 64/25\sqrt{5}$.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner