Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 10 oktober 1985

1. De reella talen a, b och c uppfyller
$$\begin{cases} ab + b = -1 \\ bc + c = -1 \\ ca + a = -1 \end{cases} .$$
Beräkna produkten abc.

2. Till en maratontävling hade 1985 löpare anmält sig. Dessa tilldelades tävlingsnumren 1, 2, ..., 1985. Ett antal löpare uteblev dock. Det visade sig att bland de startande löparna fanns det inte två för vilka den enas nummer var 10 gånger den andras. Hur många löpare kan högst ha deltagit?

3. I ekvationssystemet
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3u = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4u = 0 \end{cases}$$
är koefficienterna a_1,b_2, c_3, d_4 jämna heltal och övriga koefficienter är udda heltal. Bevisa att enda heltalslösningen är $x = y = z = u = 0$.

4. De naturliga talen p, q, r och s uppfyller likheten
$$(p + q)^2 + p = (r + s)^2 + r.$$
Visa att $p = r$ och $q = s$.

5. Bestäm det minsta värde som funktionen f given av
$$f(x) = \frac{4x^2 \sin^2 x + 9}{x \sin x}$$
antar i intervallet $0 < x < \pi$.

6. Punkten P är antingen en hörnpunkt, en punkt på någon av sidorna eller en inre punkt i en given triangel T. Punkten P' i triangelns plan ligger på avståndet d från P. Låt r och r' vara radierna i de minsta cirkelskivor med medelpunkt i P resp. P' som innehåller T. Visa att
$$r + d \leq 3r'.$$
Ge också ett exempel där likhet råder.