Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 26 november 1967

1. Bland de p parallella linjerna i den första linjeskaran kan två olika linjer väljas på $p(p-1)/2$ olika sätt. Välj nämligen först en linje. Detta kan göras på p sätt. För varje sådant val kan den andra linjen väljas på $p-1$ sätt bland de $p-1$ linjer som ej valdes första gången. Man kan alltså välja två linjer i viss ordning på $p(p-1)$ sätt. Man får samma två linjer A och B på två av dessa sätt, dels genom att välja dem i ordningen först A sedan B, dels i omvänd ordning. Två linjer kan alltså väljas på $p(p-1)/2$ sätt om ordningen ej spelar någon roll. På samma sätt visas att två linjer i den andra linjeskaran kan väljas på $q(q-1)/2$ sätt. Antalet rektanglar blir därför $pq(p-1)(q-1)/4$.

2. Kalla linjalbredden b.

   a) Bisektrisen är sammanbindningslinjen mellan de i fig. 1 markerade punkterna A och B.

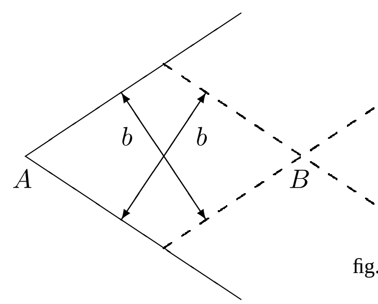

fig. 1

   b) **Fall I:** Sträckans längd är större än b. Konstruktionen framgår av fig. 2.

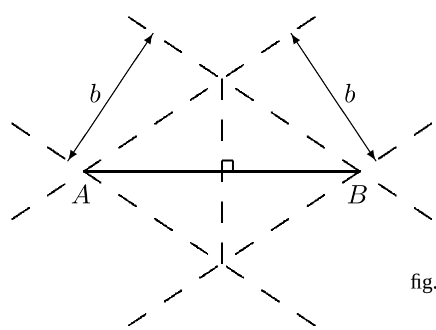

fig. 2

Fall II: Sträckans längd är mindre än eller lika med b.

Kalla sträckan AB och välj en hjälppunkt O på linjen AB och så att dess avstånd till A och B bägge är $> b$. Konstruera enligt fig. 3 punkter A' och B' så att $OA' = 2OA$ och $OB' = 2OB$. Då blir $A'B'$ dubbelt så lång som AB.

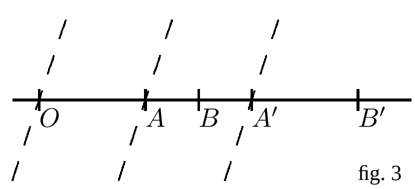

fig. 3

Om vi kan konstruera mittpunkten C' till $A'B'$ så är problemet löst ty vi kan finna mittpunktsnormalen till OC' enligt I och denna är i själva verket även mittpunktsnormalen till AB, vilket lätt ses av en figur.

Skulle $A'B'$ vara kortare än b upprepar vi konstruktionen utgående från $A'B$' istället för AB. Efter n successiva upprepningar erhålls en sträcka $A^{(n)}B^{(n)}$ vars längd är $2^n AB$ och om n är tillräckligt stort blir denna längd $> b$. Vi kan då som i I finna mittpunkten till $A^{(n)}B^{(n)}$ och därur som beskrivits ovan mittpunkten till $A^{(n-1)}B^{(n-1)}$ o.s.v. ned till $A'B'$ och problemet är löst.

3. Antag att (x,y,z) är en lösning med $x \leq y \leq z$. Det största av talen $1/x$, $1/y$, $1/z$ måste vara $\geq 1/3000$ ty annars kunde deras summa ej bli $1/1000$. Således gäller $x \leq 3000$ d.v.s. endast ändligt många x-värden kan komma i fråga. Vi visar nu att för varje x-värde som kan komma i fråga finns endast ändligt många y-värden som duger. Man har

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000} - \frac{1}{x} = a.$$

Eftersom $y \leq z$ får man som nyss $1/y \geq a/2$, d.v.s. $y \leq 2/a$. Till slut observeras att för varje par (x,y) finns högst ett enda z som duger eftersom z är entydigt bestämt av x och y.

4. Eftersom serien är divergent finns ett tal N_1, så stort att

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1} > 1.$$

Av samma skäl finns ett N_2 så stort att $a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_{N_2} > 2$. Genom att upprepa förfarandet får man en följd tal N_1, N_2,..., N_k, ... så att

$$a_{N_{k-1}+1} + a_{N_{k-1}+2} + \cdots + a_{N_k} > k.$$

Tydligen är serien

$$\begin{array}{l} a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1} \\ +\frac{1}{2}a_{N_1+1} + \frac{1}{2}a_{N_1+2} + \cdots + \frac{1}{2}a_{N_2} \\ +\frac{1}{3}a_{N_2+1} + \frac{1}{3}a_{N_2+2} + \cdots + \frac{1}{3}a_{N_3} \\ \cdots \end{array}$$

divergent eftersom summan av de termer som står i samma rad ovan är > 1. Man kan alltså välja talen b_n så att de första N_1 talen är 1, nästa $N_2 - N_1$, är $1/2$, nästa $N_3 - N_2$ är $1/3$ o.s.v.

5. Vi visar resultatet genom induktion. För att olikheten skall gälla för $n = 1$ fordras $C \leq a_1$. Antag att vi har funnit ett C så att olikheten gäller för $n = 1, 2, \ldots, p-1$. Vi får då

$$a_p^2 \geq ((p-1) + (p-2) + \cdots + 1) \cdot C = p(p-1)C/2.$$

Olikheten gäller alltså även för $n = p$ om bara

$$p(p-1)C/2 \geq p^2C^2,$$

d.v.s. om $C \leq (p-1)/2p = 1/2 - 1/2p$, något som är sant för $p \geq 2$ om $C \leq 1/4$. Om vi alltså väljer C så att $C \leq a_1$ och $C \leq 1/4$ så gäller olikheten för $n = 1$ och induktionssteget fungerar.
Svar: $C = \min(a_1, 1/4)$ duger.

6. a) Låt triangelns hörn tagna motsols vara $(0,0)$, (a,b) och (c,d). Omskriv kring triangeln en rektangel med sidor parallella med koordinataxlarna. Då kan triangelns area beräknas med hjälp av arean av rektangeln och rätvinkliga trianglar. Man får två fall beroende på om en triangelsida är diagonal i rektangeln eller inte, men i båda fallen finner man att triangelns area är

$$A = ad - ab/2 - cd/2 - (d-b)(a-c)/2 = (ad - bc)/2.$$

Å andra sidan får man på liknande sätt, eftersom inga gitterpunkter ligger på triangelsidorna, att antalet gitterpunkter inuti triangeln är

$$\begin{aligned} n &= (a+1)(d+1) - (a+1)(b+1)/2 - (c+1)(d+1)/2 - (d-b+1)(a-c+1)/2 \\ &= (ad - bc - 1)/2 = A - 1/2, \end{aligned}$$

d.v.s. $A = n + 1/2$.

b) Bilda en parallellogram som består av den ursprungliga triangeln och en med denna kongruent triangel erhållen genom spegling av den ursprungliga triangeln i en av dess sidor. Bilda ett rutnät med k^2 rutor kongruenta med denna parallellogram. I fig. 4 anges utseendet för $k = 3$.

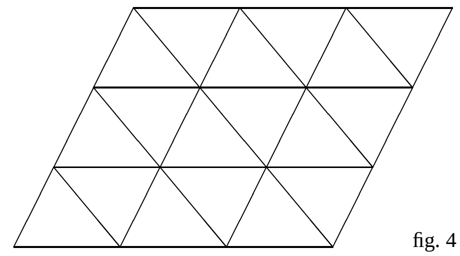

fig. 4

Låt antalet gitterpunkter inuti den parallellogram som begränsar rutnätet vara N_k.

Då är $N_k \leq$ summan av antalet inre gitterpunkter i deltrianglarna + 1/2 · summan av antalet gitterpunkter på det inre av triangelsidor + 1/6 · summan av antalet gitterpunkter i triangelhörn $= 2k^2(n + m/2 + 3/6)$.

Analogt visas att $N_k \geq 2(k-2)^2(n+m/2+3/6)$ genom att man betraktar endast de trianglar som ligger helt inuti rutnätet. Låt den givna triangelns area vara A. Då är rutnätets area $2k^2A$. Man inser lätt att det finns ett heltal p, som endast beror av utseendet på den ursprungliga triangeln, sådant att $(k-2p)^2$ rutor i rutnätet har avstånd > 1 till rutnätets rand. Det följer att dessa $(k-2p)^2$ rutor kan täckas med N_k axelparallella kvadrater med sida 1, d.v.s.

$$N_k \geq 2(k - 2p)^2 A.$$

På samma sätt inser man att dessa N_k kvadrater helt täcks av ett rutnät med $(k+2p)^2$ rutor, d.v.s.

$$N_k \leq 2(k + 2p)^2 A.$$

Av dessa olikheter följer att

$$\lim_{k\to\infty} N_k/2k^2 = A.$$

Men å andra sidan följer av olikheterna ovan att

$$\lim_{k\to\infty} N_k/2k^2 = n + m/2 + 3/6.$$

Alltså är $A = n + m/2 + 1/2$.

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet