Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 12 oktober 1978

1. Antag att var och en fick x kolor, y råttor och z geléhallon. Talen x, y och z skall då vara positiva heltal. Enligt uppgifterna i problemet har vi

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 20 \\ 16x & + & y & + & 2z & = & 80 \end{array}$$

Härav: $15x + z = 60$, $z = 15(4 - x)$. Då $z < 20$ är enda möjliga heltalslösningen $x = 3$, $z = 15$. Dessa värden tillsammans med $y = 2$ satisfierar båda ekvationerna ovan.
Svar: 3 kolor, 2 råttor och 15 geléhallon.

2. Insätt exempelvis $x = 1$, $x = 2$ och $x = 3$.

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2, \qquad p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2, \qquad p(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2.$$

Då är

$$a_0 = p(3) - 3a_1 - 9a_2.$$

Eftersom $p(3)$ är delbart med 3 gäller detta även för a_0. Vidare är

$$a_1 = p(2) - p(1) - 3a_2.$$

Eftersom $p(1)$ och $p(2)$ är delbara med 3 gäller detta även för a_1. Slutligen är

$$a_2 = p(1) - a_0 - a_1.$$

Eftersom $p(1)$, a_0 och a_1 alla är delbara med 3 gäller detta även för a_2.
Anmärkning. Räkningarna blir något kortare om man i stället sätter in talen 0, 1, 2 eller talen -1, 0, 1.

3. Skriv olikheten på formen

$$\sqrt{5 - x} > 3 - x.$$

För att kvadratroten skall existera måste $x \leq 5$. Vi har alltid kvadratroten ≥ 0. Dela upp i två fall.

I. $3 - x < 0$ dvs $x > 3$. Då gäller olikheten. Vi har den alltså uppfylld för $3 < x \leq 5$.

II. $3 - x \geq 0$ dvs $x \leq 3$. Olikheten är då ekvivalent med

$$5 - x > (3 - x)^2$$

$$(x - 1)(x - 4) < 0.$$

Detta är uppfyllt då $1 < x < 4$. Eftersom vi betraktar $x \leq 3$ får vi begränsa oss till $1 < x \leq 3$.

Sammanfattar vi de två fallen får vi, svaret: $1 < x \leq 5$.
Alternativ metod. Man kan börja med att undersöka när likhet råder:

$$\sqrt{5 - x} = 3 - x. \tag{1}$$

För att (1) skall kunna vara uppfylld måste

$$5 - x = (3 - x)^2$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0.$$

Likhet i (1) gäller endast för $x = 1$ (inte för $x = 4$). Man har slutligen att undersöka vardera området $x < 1$ och $1 < x \leq 5$ vilket kan ske genom någon insättning exempelvis av $x = 0$ och $x = 4$.

4. Sätt $\bigwedge CAP = \bigwedge PAB = v$ och $\bigwedge CPA = u$. Då är $\bigwedge ABP = u - v$. Sinsatsen ger

$$\frac{AP}{AB} = \frac{\sin(u-v)}{\sin(180^\circ - u)} \qquad \frac{AP}{AC} = \frac{\sin(180^\circ - u - v)}{\sin u}$$

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AP}\frac{\sin(u-v) + \sin(u+v)}{\sin u} = \frac{1}{AP}\frac{2\sin u \cos v}{\sin u} = \frac{2\cos v}{AP}$$

vilket är oberoende av u.
Alternativ metod. Beräknar man areorna av trianglarna APC, APB och ABC får man

$$\frac{1}{2}AC \cdot AP \sin v + \frac{1}{2}AP \cdot AB \sin v = \frac{1}{2}AC \cdot AB \sin 2v$$

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AP}\frac{\sin 2v}{\sin v}.$$

5. De givna olikheterna bestämmer inte följden entydigt. Problemet gäller att för fixt k söka maximum för $a_k - a_{k-1}$ bland alla följder som uppfyller olikheterna. Olikheten b) kan skrivas

$$a_n - a_{n-1} \geq a_{n+1} - a_n.$$

Alltså är

$$a_k - a_{k-1} \leq a_{k-1} - a_{k-2} \leq \cdots \leq a_1 - a_0 \tag{1}$$

Eftersom $a_0 \geq 0$ och $a_k \leq 1$ gäller

$$(a_k - a_{k-1}) + (a_{k-1} - a_{k-2}) + \cdots + (a_1 - a_0) = a_k - a_0 \leq 1.$$

På grund av (1) följer härav

$$k(a_k - a_{k-1}) \leq 1 \qquad a_k - a_{k-1} \leq \frac{1}{k}.$$

För att likhet skall kunna råda här måste vi ha likhet i alla olikheterna ovan. Detta ger

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \frac{1}{k}, \qquad a_2 = \frac{2}{k}, \qquad \ldots\ldots \qquad a_{k-1} = \frac{k-1}{k}, \qquad a_k = 1.$$

Vi kan fortsätta denna följd med $a_n = 1$ för $n > k$ och får då en oändlig följd som uppfyller de givna villkoren.
Svar: $\dfrac{1}{k}$

6. Vi markerar positionen bakifrån räknat genom en markering ovanför respektive siffra. Summan av talet

$$a_k = \overset{n}{1} \ldots 1 \overset{k}{1}\, 0 \ldots \overset{1}{0}$$

och ett tal med ettor i samma positioner men för övrigt godtyckliga siffror bildas (x står för godtycklig siffra, 0 eller 1)

$$\begin{array}{rr} & \overset{n}{1} \ldots 1 \overset{k}{1}\; 0 \ldots \overset{1}{0} \\ + & x \ldots x\, 1 \ldots 1\, 1\, x \ldots x \\ \hline & x \ldots x\, 1 \ldots 1\, 0\, x \ldots x \end{array}$$

Detta visar att summan har ettor i positionerna n till $k+1$. Addera de givna talen på följande sätt. Börja med de två största talen (de med lägsta k-värdena), addera till summan det tredje största osv. Varje gång erhålls en summa med ettor i positionerna från n till $k+1$, där a_k är det minsta talet som adderats, eftersom enligt problemet $k \leq n-1$ är n-te siffran bakifrån i slutsumman en etta.
Alternativ metod. $a_k = 2^n - 2^{k-1}$, $\sum a_k = \sum 2^n - \sum 2^{k-1}$. Här skall summan utsträckas över ett antal olika k-värden alla mindre än $n-1$. Alltså är $0 < \sum 2^{k-1} < 2^{n-1}$. Härav följer

$$(m-1)2^n + 2^{n-1} < \sum a_k < m2^n$$

vilket löser problemet.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner