

Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 19 november 1994

1. Ekvationen $2\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}x} = 2\sqrt{2}$ har två reella lösningar x_1 och x_2 . Den decimala utvecklingen av x_1 har siffran 6 på 1994:e plats. Vilken siffra på samma plats har den decimala utvecklingen av x_2 ?
2. I triangeln ABC är medianerna till sidorna AB och AC vinkelräta. Visa att $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$.
3. Kateterna i en rätvinklig triangel bildar vinklarna α och β med ett visst plan. Om vinkeln mellan detta plan och triangelns plan är v , visa att $\sin^2 v = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$.
4. Bestäm alla par (x, y) av heltal som satisfierar ekvationen

$$2y^3 - x^3 = xy^2 + 11.$$

5. Visa att om ekvationen

$$x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_k = 0,$$

där $k \geq 2$, har k olika reella rötter så är $a_1^2 > \frac{2k}{k-1}a_2$.

6. En funktion f från de naturliga talen till de naturliga talen uppfyller följande relationer:

$$\begin{cases} f(a+b) = f(f(a)+b) \\ f(a+b) = f(a)+f(b) \\ f(10) = 1. \end{cases} \quad \text{om} \quad 0 \leq a+b < 10$$

Hur många tresiffriga tal n finns det med egenskapen $f(n) = f(2^{3^{4^5}})$?