Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 16 oktober 1963

1. Bestäm alla reella tal som satisfierar ekvationen

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 1.$$

2. Visa att för varje primtal $p \geq 5$ är $p^2 - 1$ jämnt delbart med 24.

3. Ett led soldater, 50 m långt, går rakt fram i gåsmarsch med konstant fart. En hund springer, också den med en konstant hastighet, längs hela ledet från den siste soldaten till den förste och så tillbaka igen till den siste i ledet. Under tiden har soldaterna gått 50 m. Hur många meter har då hunden sprungit?

4. Ange och motivera vilket av följande två tal som är störst:

$$\frac{1,0000004}{1,0000006^2} \qquad \text{och} \qquad \frac{0,9999995^2}{0,9999998}.$$

5. a) Visa att man med hjälp av en balansvåg och 10 vikter på respektive $1, 2, 4, 8, \ldots, 512$ gram kan ange vikten på alla föremål på mindre än 1 kilo med ett fel mindre än $\frac{1}{2}$ gram, om föremålet placeras i ena vågskålen och vikterna i den andra.

   b) Visa att det ej finns någon uppsättning på nio vikter med denna egenskap.

   c) Bestäm minsta antalet vikter, om vikter får placeras i båda vågskålarna.

6. En triangels sidor tänks speglande så att en ljusstråle i triangeln som ej träffar ett hörn reflekteras ett obestämt antal gånger. För vilka trianglar finns en dylik stråle som träffar sidorna endast i tre punkter? Visa att denna stråle är entydigt bestämd (bortsett från riktningen), när den existerar. Sök diskutera - i första hand i specialfall - motsvarande problem med fyra reflexionspunkter.