Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 10 oktober 1985

1. Lös första ekvationen med avseende på a och andra ekvationen med avseende på c:

$$a = -1 - \frac{1}{b} \qquad c = -\frac{1}{b+1}.$$

Då är

$$abc = \left(-1 - \frac{1}{b}\right) \cdot b \cdot \left(\frac{-1}{b+1}\right) = 1.$$

(Tredje ekvationen är en konsekvens av de två första.)

Variation

Multiplicerar man första ekvationen med c får man med hjälp av andra ekvationen:

$$abc = -c - bc = 1.$$

2. Varje löpare har ett startnummer som efter multiplikation med 10 ingen, en eller flera gånger ger ett tal k för vilket gäller $199 \leq k \leq 1985$. För varje sådant k-värde kan åtminstone en löpare ha startat. För att två löpare med samma k-värde skall ha kunnat starta måste den enas nummer vara 100 eller 1000 gånger den andras. Talet k måste då vara delbart med 100. För sådana k-värden kan två löpare ha startat, men aldrig mer än två; även för $k = 1000$ kan bland löparna 1, 10, 100, 1000 högst två ha deltagit. Antalet startande kan därför högst ha varit

$$(1985 - 198) + (19 - 1) = 1805.$$

3. Låt x, y, z, u vara en heltalslösning. Vi vill först visa att alla dessa tal måste vara jämna.
Adderar man de två första ekvationerna får man en ekvation av typen

$$(\text{udda}) \cdot x + (\text{udda}) \cdot y + (\text{jämn}) \cdot z + (\text{jämn}) \cdot u = 0.$$

Denna visar att x och y måste vara båda udda eller båda jämna. Genom att vidare addera första och tredje ekvationerna och första och fjärde ekvationerna finner man att talen x, y, z, u måste alla vara udda eller alla jämna. Men exempelvis första ekvationen visar att inte alla kan vara udda. Alltså är de alla jämna.
Sätter man nu $x_1 = x/2$, $y_1 = y/2$, $z_1 = z/2$ och $u_1 = u/2$ får man en ny heltalslösning x_1, y_1, z_1, u_1 till ekvationssystemet. Eftersom resonemanget kan upprepas får man alltså att talen x, y, z, u måste kunna divideras med 2 godtyckligt många gånger. Alltså är de alla=0.

4. Om $r + s > p + q$ så är

$$\begin{aligned}
&r + s \geq p + q + 1\\
&(r+s)^2 \geq (p+q)^2 + 2p + 2q + 1\\
&(r+s)^2 + r > (p+q)^2 + p
\end{aligned}$$

i strid mot förutsättningen. På motsvarande sätt visas att man inte kan ha $p + q > r + s$. Alltså är $p + q = r + s$. Den givna likheten medför nu att $p = r$ och man får därför också $q = s$.

5. Betrakta först

$$g(t) = 4t + \frac{9}{t}$$

för $t > 0$. Vi har $g'(t) = 4 - 9/t^2$ och får

$$\begin{array}{llll}
g'(t) & < 0 & \text{för} & 0 < t < 3/2\\
 & = 0 & \text{för} & t = 3/2\\
 & > 0 & \text{för} & t > 3/2
\end{array}.$$

Alltså är $g(3/2) = 12$ det minsta värdet för funktionen g.
Vi undersöker nu om $t = x \sin x$ antar värdet 3/2 för något x-värde med $0 < x < \pi$. Men för $x = 0$ är $t = 0$ och för $x = \pi/2$ är $t = \pi/2 > 3/2$. Alltså är $t = 3/2$ för något x-värde däremellan och för detta x-värde är $f(x) = g(3/2) = 12$. Detta måste då vara det minsta $f(x)$ i det givna intervallet.

6. Låt C och C' beteckna de minsta cirklarna med de i problemet angivna villkoren och med medelpunkter i P resp P'. P ligger inom eller på cirkeln C'. Härav $d \leq r'$. Varje punkt i triangelområdet har avstånd högst r' till P' och därför högst $r' + d$ till P. Alltså är $r \leq r' + d$. Detta ger

$$r + d \leq r' + 2d \leq r' + 2r' = 3r'.$$

För att vi skall kunna ha $r + d = 3r'$ måste vi ha likheter ovan dvs $d = r'$ och $r = r' + d$. Detta ger $r = 2r'$. En av radierna i C måste då vara en diameter i C'. Den gemensamma tangeringspunkten A måste vara ett hörn i triangeln; triangeln ligger inom eller på C' och om A inte tillhörde triangelområdet skulle C kunnat väljas mindre. PA är därför en sida i triangeln. Eftersom triangeln ryms inom halva cirkeln C' måste den mot PA stående vinkeln vara rät eller trubbig.
Omvänt ser man lätt att följande villkor ger likheten $r + d = 3r'$: P' är mittpunkten på en sida till en triangel, P ena ändpunkten av sidan och vinkeln stående mot sidan är rät eller trubbig.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner