Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 17 november 1984

1. Låt M vara C:s medelpunkt. Antag exempelvis $MA \geq MB$. Mittpunktsnormalen till sträckan AB skär då sträckan MA i en punkt P (som eventuellt kan vara punkten M). Tag cirkeln med medelpunkt P genom A och B. Då denna cirkel har medelpunkten på MA och går genom A måste den tangera den cirkel genom A som har medelpunkten i M och för övrigt ligga inom denna cirkel (eventuellt sammanfalla med den). Den ligger därför helt inom cirkeln C.

2. Antag att det inte finns någon delmängd av angiven typ med samma färg i alla hörnen. Rutnätet innehåller 3 långa 7-rutiga rader. Första raden måste innehålla minst 4 gula rutor eller minst 4 blå rutor, säg att den innehåller 4 gula rutor. Om de 4 korta 3-rutiga raderna genom dessa 4 gula rutor innehåller 3 eller fler ytterligare rutor med gul färg måste minst två av dessa ligga i samma långa rad i strid mot antagandet. Det finns därför 2 av dessa korta rader som har blå färg i båda de övriga raderna. Men detta strider också mot antagandet.

3. Den sökta olikheten är ekvivalent med

$$(b+1)(\ln(a+1) - \ln(b+1)) - b(\ln a - \ln b) \geq 0.$$

Låt b vara fixt och sätt vänstra ledet $= f(a)$, där a betraktas som variabel.

$$f'(a) = \frac{a-b}{a(a+1)}.$$

Vi ser att $f'(a) > 0$ för $a > b$ och $f'(a) < 0$ för $a < b$. Funktionen f har alltså minimum för $a = b$. Detta visar att $f(a) \geq f(b) = 0$.

4. Låt x_1, x_2 och y_1, y_2 vara nollställena till de båda andragradspolynomen. Då är

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= p & \qquad y_1 + y_2 &= q \\ x_1 x_2 &= p & y_1 y_2 &= q \end{aligned}$$

Antag $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$.
Om $x_1 = 1$ så är $p = 1 + q$ och därmed $p > q$.
Om $x_1 = 2$ så är $q = 2x_2 \geq p$, med likhet endast om $x_2 = 2$.
Om $x_1 \geq 3$ så är $q \geq 3x_2 \geq 2x_2 + 3 \geq p + 3$.
Då motsvarande gäller för y_1, y_2 får vi följande möjligheter:

   1) $p > q$. Då är $x_1 = 1$ och $p = 1 + q$. Härav följer att vi inte kan ha $y_1 = 1$ eller $y_2 \geq 3$. Alltså är $y_1 = 2$. Systemet

   $$\begin{aligned} 2 + y_2 &= q \\ 2y_2 &= q + 1 \end{aligned}$$

   ger $y_2 = 3$, $q = 5$. Alltså $p = 6$, $x_2 = 5$.

   2) $p < q$. Detta behandlas analogt med ovanstående: $p = 5$, $q = 6$.

   3) $p = q$. Av ovanstående diskussion följer att $x_1 = x_2 = 2$ och likaså $y_1 = y_2 = 2$. Vi får $p = q = 4$.

5. **Metod 1**

   Första ekvationen visar att $b^3 \leq a^3$, $c^3 \leq a^3$ och därmed $b \leq a$, $c \leq a$. Den andra ekvationen ger därför

   $$a^2 \leq 2(a + a + a) = 6a, \quad a \leq 6.$$

Andra ekvationen visar att a måste vara ett jämnt tal. Vi skall alltså ha $a = 0, 2, 4, 6$ och $0 \leq b \leq a$, $0 \leq c \leq a$. En genomgang av dessa möjligheter ger oss lösningarna:

$$\begin{aligned}(a, b, c) \quad = \quad & (0,0,0), \quad (4,4,0), \quad (4,3,1), \\ & (4,2,2), \quad (4,1,3), \quad (4,0,4)\end{aligned}$$

Metod 2

Skriv första ekvationen på formen

$$a^3 - (b+c)^3 = 3bc(a-b-c).$$

Man finner då faktorn $a - b - c$ i båda leden. Detta ger två fall.

I. $a = b + c$. Andra ekvationen ger $a = 4$ med de heltalslösningar som angivits ovan.

II. $a^2 + a(b+c) + (b+c)^2 = 3bc$.
$a^2 + a(b+c) + (b-c)^2 + bc = 0$.
Vänstra ledet är summan av termer som var och en är ≥ 0. Alltså måste de alla vara likamed 0, och man finner den enda lösningen $a = b = c = 0$.

6. Eftersom $3^8 = 6561$ måste $1 \leq a_i \leq 7$ för alla i. Uttryck talen i summan i basen 3. Talen 3_i skrivs då med en etta följd av a_i nollor. Den givna summan 6558 är talet 22222220 i basen 3. Den givna summan innebär alltså en addition av 14 ettor i olika positioner. Då siffersumman i summan är $2+2+\cdots+2 = 14$ kan inga “minnessiffror” förekomma. Man måste alltså ha exakt två ettor i vardera positionerna $3^1, 3^2, \ldots, 3^7$.

Variation

Då vi har 14 tal som vartdera har något värde $1, \ldots, 7$ räcker det att visa att vi inte kan ha 3 eller flera lika tal bland talen a_i. Antag det motsatta, att tre av talen a_i är lika. Vi ersätter då dessa med ett enda tal som är en enhet större. Detta minskar antalet tal men ändrar inte summan av talen 3^{a_i}. Efter eventuell upprepad reduktion uppnår vi att vi har högst två av vardera talen $1, \ldots, 7$. (Detta gäller även talet 7 eftersom vi vid reduktionen aldrig kan få 3 sjuor då totala summan är mindre än 3^8.) Vi har nu färre än 14 tal, högst två av vardera talen $1, \ldots, 7$, varför summan av 3^{a_i} för dessa tal skulle bli mindre än

$$2\left(3^1 + 3^2 + \cdots + 3^7\right) = 6558.$$

Detta visar att antagandet att 3 av talen var lika var felaktigt.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner