Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 14 november 1976

1. **Metod 1.** Låt A vara ett lag med maximalt antal segrar, säg n segrar. A besegrades av något lag, säg av lag C. Då lag C besegrade A besegrade det högst $n-1$ andra lag. Då A besegrade n lag måste det därför finnas ett lag B som blev besegrat av A men inte av C.

   Metod 2. Antag lag a_1 blev besegrat av lag a_2 som blev besegrat av lag a_3 .... Vi fortsätter tills vi når ett lag a_n som redan förekommer i följden, säg som a_k. Då bildar

$$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}$$

   en ”cykel”; varje lag besegrades av nästa och det sista av det första. En cykel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ med fler än 3 lag kan reduceras. Om b_1 besegrade b_3 så är b_1, b_2, b_3 en cykel. Om b_3 besegrade b_1 är b_1, b_3, $b_4, \ldots, b_n$ en cykel. Genom upprepad reduktion får man en cykel med 3 element.

2. Antag att a är sådant att x, y finns uppfyllande villkoren. Då är

$$x - y = a - y^2 - (a - x^2) = x^2 - y^2$$

$$x - y = (x - y)(x + y).$$

   Eftersom $x \neq y$ får man

$$x + y = 1.$$

   Insättning i $y = a - x^2$ ger

$$1 - x = a - x^2$$

$$x^2 - x + 1 - a = 0.$$

   Av symmetriskäl måste även y satisfiera denna ekvation som därför skall ha två olika reella rötter. Löses ekvationen

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}$$

   får man kravet $a > 3/4$.
   Omvänt låt $a > 3/4$. Sätt

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

   Då är

$$a - x^2 = \frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

   Sätter man detta $= y$, får man också lätt $a - y^2 = x$. Eftersom $\frac{3}{4} < a$, är $x \neq y$.
   Variation. Elimineras y får man

$$x = a - \left(a - x^2\right)^2$$

$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0.$$

   Rötterna till ekvationen $x = a - x^2$ måste satisfiera denna ekvation. Man får därför faktorn $x^2 + x - a$ och kan skriva fjärdegradsekvationen på formen

$$(x^2 + x - a)(x^2 - x + 1 - a) = 0$$

   och därefter fortsätta som ovan.

3. **Metod 1.** Sätt

$$x = \frac{1}{b-c} \qquad y = \frac{1}{c-a} \qquad z = \frac{1}{a-b}.$$

Då är

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \qquad z = -\frac{xy}{x+y}.$$

Därför är det givna uttrycket

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + y^2 + \frac{x^2y^2}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4}{(x+y)^2} \\ &= \left(\frac{x^2 + xy + y^2}{x+y}\right)^2 \end{aligned}$$

Metod 2.

$$\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right)^2 = \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2} + 2A$$

där

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} + \frac{1}{(a-b)(b-c)} \\ &= \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}(a - b + b - c + c - a) = 0. \end{aligned}$$

4. Numrera (de horisontella) raderna $0, 1, 2, \ldots, n$ och likadant (de vertikala) kolonnerna. Kalla elementen i i-te raden $a_0, \ldots, a_n$. Då är $a_0 = 0$ och $a_n = 0$. Följden av tal är linjär från a_0 till a_i och från a_i till a_n. Detta ger

$$a_{i-1} = \frac{i-1}{i} a_i \qquad a_{i+1} = \frac{n-i-1}{n-i} a_i.$$

Villkoret

$$a_i = \frac{1}{2}\left(a_{i-1} + a_{i+1}\right) + 1$$

blir därför

$$a_i \left(1 - \frac{i-1}{2i} - \frac{n-i-1}{2(n-i)}\right) = 1.$$

Detta ger

$$a_i = \frac{2i(n-i)}{n}.$$

Alltså är k-te elementet i i-te raden

$$\frac{k}{i} a_i = \frac{2k(n-i)}{n} \quad \text{då} \quad k < i$$

$$\frac{n-k}{n-i} a_i = \frac{2i(n-k)}{n} \quad \text{då} \quad k > i.$$

Detta visar att två tal som står symmetriskt i förhållande till diagonalen är lika. Härav följer påståendet.

5. Första och tredje likheterna ger $f''(0) = 1/2$ och $f''(x) \neq 0$ för $x > 0$. Eftersom f'' förutsätts vara kontinuerlig följer härav att $f''(x) > 0$ för alla $x > 0$. Därför är f' växande och då $f'(0) = 0$ får vi $f'(x) > 0$ för $x > 0$. Alltså är f växande. Från $f(x) \geq f(0) = 1$ följer

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1+x}{1+f(x)} \leq \frac{1+x}{2} \\
f'(x) - f'(0) &= \int_0^x f''(t)\,dt \leq \int_0^x \frac{1+t}{2}\,dt \\
f'(x) &\leq \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} \\
f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t)\,dt \leq \int_0^x \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}\right) dt \\
f(1) - 1 &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \\
f(1) &\leq \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

6. En lösning är $m = 1$, $n = 1$. För $m > 1$ måste $n > 1$ för att likheten skall kunna vara uppfylld. Då måste $3^m - 1$ vara delbart med 4. Binomialutveckling ger

$$3^m - 1 = (1+2)^m - 1 = m \cdot 2 + \frac{m(m+1)}{2} \cdot 2^2 + \cdots$$

Detta är endast delbart med 4 om m är jämnt, säg $m = 2k$.

$$3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1).$$

Talen $3^k - 1$ och $3^k + 1$ är två på varandra följande jämna tal. Dessa kan inte båda vara potenser av 2 utom om de är talen 2 och 4, dvs $3^k = 3$, $k = 1$, $m = 2$, $n = 3$.
Svar: Enda lösningarna är (1,1) och (2,3).

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner