SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävling den 20 november 1999

1. Eftersom vänsterledet är ≥ 0 måste ev lösningar x till ekvationen uppfylla olikheten

$$x^2 + x - 30 \geq 0$$

eller, efter faktoruppdelning,

$$(x-5)(x+6) \geq 0.$$

Uppenbarligen gäller detta för $x \leq -6$ och $x \geq 5$. Men för $x \leq -6$ är

$$x^2 - x - 1 = x(x-1) - 1 \geq (-6)(-5) - 1 = 29,$$

medan för $x \geq 5$ är samma uttryck

$$\geq 5 \cdot 4 - 1 = 19.$$

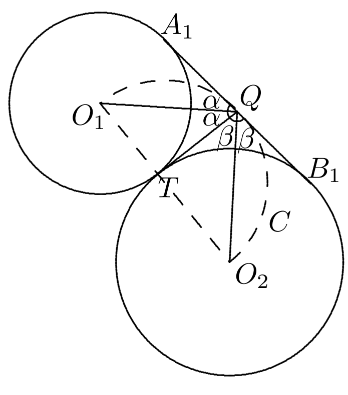
I bägge fallen betyder det att $|x^2 - x - 1| = x^2 - x - 1$, att $||x^2 - x - 1| - 2| = |x^2 - x - 1 - 2| = x^2 - x - 1 - 2$ osv. Vi finner att vi på detta sätt kan plocka bort samtliga beloppstecken, varför vänsterledet blir $x^2 - x - (1+2+3+4+5)$ och vi får ekvationen

$$x^2 - x - 15 = x^2 + x - 30,$$

eller $2x = 15$ med lösningen $x = 7,5$.

Svar: $x = 7,5$.

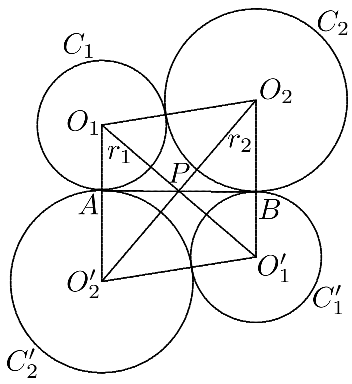
2. Lösning 1. Med sträckan O_1O_2 som diameter drar vi halvcirkeln C som figuren visar. Den gemensamma tangenten till de båda cirklarna är normal till nämnda diameter i tangeringspunkten, T, och skär halvcirkeln i punkten Q.



Drag sträckorna QO_1 och QO_2 samt de andra tangenterna till de båda cirklarna genom Q så att C_1 tangeras i punkten A_1 och C_2 i punkten B_1. Nu är $\angle O_1QO_2 = 90°$ (bågvinkel på en halvcirkelbåge) och $\angle A_1QO_1 = \angle O_1QT = \alpha$ säg, och $\angle TQO_2 = \angle O_2QB_1 = \beta$ säg. Vi vet också att $|A_1Q| = |QT| = |B_1Q|$.
Detta innebär att $\angle A_1QB_1 = 2(\alpha + \beta) = 180°$, dvs A_1QB_1 bildar en rät linje med Q som alltså är tangent till de båda cirklarna. Eftersom denna är entydig har vi att $A = A_1$ och $B = B_1$. Mittpunkten på $|AB|$ är Q; alltså är $P = Q$ och följaktligen är $\angle O_1PO_2 = 90°$ om P ligger mitt på $|AB|$.

Lösning 2. Låt r_1 vara radien i cirkeln C_1 och r_2 radien i cirkeln C_2. Vi bildar ytterligare två cirklar: C_1' med medelpunkt O_1' och radie r_1, samt C_2' med medelpunkt O_2' och radie r_2. Vi placerar C_1' så att den tangerar C_2 utvändigt i punkten B och C_2' så att den tangerar C_1 utvändigt i punkten A.

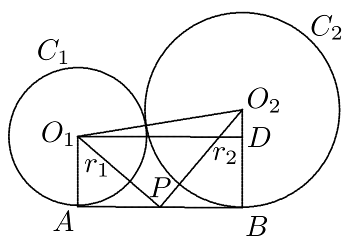
Av symmetriskäl tangerar också C_1' och C_2' varandra utvändigt. Om vi förenar medelpunkterna med räta linjer, O_1 med O_2, O_2 med O_1', O_1' med O_2', O_2' med O_1, får vi en romb med sidan $r_1 + r_2$.



Vi vet då att diagonalerna skär varandra under räta vinklar samt att tangenten AB är normal till sidorna O_1O_2' och O_2O_1'. Trianglarna O_1AP och $O_1'BP$ är kongruenta (att trianglarna är rätvinkliga och har vinklarna O_1PA och $O_1'PB$ lika medför att de är likformiga, medan $|O_1A| = |BO_1'|$ gör att de också är kongruenta). Således måste diagonalen O_1O_1' skära höjden AB mitt itu. Med samma slag av argument delar diagonalen O_2O_2' AB mitt itu. Det betyder att skärningspunkten mellan rombens båda diagonaler måste sammanfalla med mittpunkten P på sträckan AB. Alltså bildar O_1P och O_2P rät vinkel med varandra.

Lösning 3. Vi ska här använda oss av att vinkeln O_1PO_2 är rät om och endast om $|O_1P|^2 + |PO_2|^2 = |O_1O_2|^2$. (Med standardbeteckningar för trianglar gäller enligt cosinussatsen att $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, dvs $a^2 = b^2 + c^2$ om och endast om vinkeln A är rät.)

Låt r_1 vara radien i cirkeln C_1 och r_2 radien i cirkeln C_2 samt antag att sträckan AB har längden $2t$.



Vi kan utan inskränkning anta att $r_1 \leq r_2$. Drag parallellt med AB sträckan O_1D, där D ligger på radien O_2B till cirkeln C_2. Triangeln O_1DO_2 är rätvinklig med hypotenusan O_1O_2. Pythagoras sats ger

$$(2t)^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_1 + r_2)^2,$$

varav $t^2 = r_1r_2$.

Pythagoras sats tillämpad på trianglarna O_1AP och O_2BP ger

$$|O_1P|^2 = t^2 + r_1^2 \text{ resp. } |O_2P|^2 = t^2 + r_2^2.$$

Härav följer att

$$|O_1P|^2 + |O_2P|^2 = 2t^2 + r_1^2 + r_2^2 = 2r_1r_2 + r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 = |O_1O_2|^2,$$

och påståendet är visat.

3. Vi betraktar slutsiffrorna i varje term i vänsterledet:
   5^x slutar på 1 eller 5 (x kan ju vara lika med 0),
   6^y slutar på 1 eller 6,
   7^z slutar på 1, 3, 7 eller 9, och slutligen
   11^u slutar alltid på 1.

Kontroll av de $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 16$ slutsifferkombinationerna visar att endast 2 ger en summa som slutar på 9. Eftersom ett udda antal av termerna måste vara udda och därmed också ett udda antal av termerna måste vara jämna för att ge en udda summa, krävs att den enda möjliga jämna slutsiffran finns med: 6^y måste sluta på 6.

Men då måste antingen alla de övriga termerna sluta på 1, vilket betyder att $x = 0$, z är delbart med 4 (inkluderar fallet $z = 0$) och $u \geq 0$, eller så måste 5^x sluta på 5, 6^y sluta på 6, 7^z på 7 och 11^u på 1.

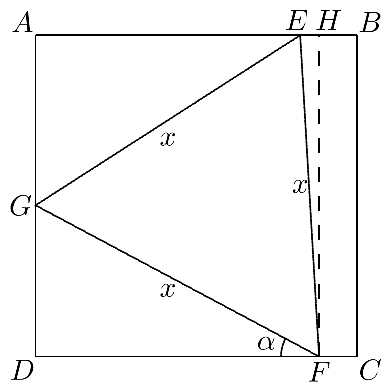
I det första fallet krävs att $z = 0$ eftersom $7^z > 1999$ för $z \geq 4$. För att detta ska kunna vara en lösning måste $6^y + 11^u = 1997$. Men $1997 - 11^4 < 6^y < 1997 - 11^3$ för $1 \leq y \leq 4$ och $6^y > 1999$ för $y \geq 5$, varför vi inte har någon lösning i det första fallet.

I det andra fallet kan 10-talssiffrorna i vänsterledets termer sluta enligt följande. I 5^x : 0 eller 2, i 6^y : 0, 3, 1 eller 9, i 7^z : 0, i 11^u : 1, 2 eller 3. Eftersom summan av entalssiffrorna ger en minnessiffra måste summan av tiotalssiffrorna sluta på 8. Enda möjlighet är att tiotalssiffrorna i tur och ordning är 2, 3, 3, vilket betyder att vi måste ha $x \geq 2$, $y = 2$, $z = 1$ och $u = 3$. Men $1999 - 6^2 - 7^1 - 11^3 = 625 = 5^4$.

Enda lösning är alltså $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$ och $u = 3$.

SVAR: $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$, $u = 3$.

4. Vi kan utan inskränkning anta att hörnen befinner sig på sidorna AB, CD och DA i punkterna E, F, G resp som figuren visar. Drag sträckan HF, med H på AB, parallell med BC. Låt α beteckna vinkeln DFG. Av symmetriskäl räcker det att studera fallet $\angle DFE \leq 90°$, dvs vi har $0 \leq \alpha \leq 30°$.



Låt x vara triangelns sida. Uppenbarligen antar x sitt minsta värde när triangelsidan EF sammanfaller med HF, då $\alpha = 30°$, och vi har alltså $x \geq 1$. Följande samband mellan x och α ska därvid vara uppfyllda:

$$1)\ |FD| = x \cos \alpha \leq 1$$
$$2)\ |FH| = x \cos \angle EFH = x \cos (30° - \alpha) = 1$$

Därav följer att $\cos \alpha \leq \cos (30° - \alpha)$. Omvänt, för varje α som uppfyller denna olikhet bestäms x entydigt av villkoret 2) som $1/\cos (30° - \alpha)$, vilket värde också uppfyller villkoret 1). Eftersom $\cos \alpha$ är en monotont avtagande funktion av α i intervallet $0 \leq \alpha \leq 30°$, är olikheten ekvivalent med $\alpha \geq 30° - \alpha$, dvs $\alpha \geq 15°$. Sidlängden x kan därför anta varje värde mellan $1/\cos 15°$ och 1. Men

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2},$$

som ger

$$\frac{1}{\cos 15°} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{6 + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1,035.$$

SVAR: Sidlängden kan anta varje värde mellan 1 och $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (gränserna inbegripna).

5. Låt t_n beteckna summan i vänsterledet av olikheten, dvs $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$, och låt T_n beteckna alla övriga produkter av typ x_ix_j med olika index i, j och med $i < j$. Således är $t_n + T_n =$ summan av *alla* $n(n-1)/2$ möjliga produkter x_ix_j för vilka $i < j$. Därefter konstaterar vi att

$$\begin{aligned} s^2 &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) \\ &+ 2((x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_1x_n) + (x_2x_4 + x_2x_5 + \ldots + x_2x_n) + \ldots + x_{n-2}x_n) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2t_n + 2T_n. \end{aligned}$$

Vi ska visa olikheten

$$s^2 \geq 4t_n,$$

dvs

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - 2t_n + 2T_n \geq 0. \tag{1}$$

Låt oss se om vi kan omforma vänsterledet i (1), eller delar därav, till en kvadrat, u_n^2, där u_n är ett lämpligt linjärt uttryck i $x_1, x_2, \ldots, x_n$. För att få minustecken framför produkterna $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n$ ansätter vi

$$u_n = x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + (-1)^n x_n,$$

där vi alltså har alternerande tecken på x-termerna. Kvadrering ger nu

$$u_n^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - 2t_n + 2T_n',$$

där T_n' liksom T_n innehåller alla produkter x_ix_j $(i < j)$ som inte ingår i t_n, dock med den skillnaden att vissa produkter x_ix_j i T_n' är försedda med minustecken. Detta betyder att $T_n \geq T_n'$. Följaktligen är

$$\begin{aligned} s^2 - 4t_n &= (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - 2t_n + 2T_n \geq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - 2t_n + 2T_n' \\ &= u_n^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Därmed är olikheten visad.

6. Vi använder förkortningarna $\mathrm{sgd}(a, b)$ och $\mathrm{mgm}(a, b)$ för att beteckna den största gemensamma delaren till resp den minsta gemensamma multipeln av talen a och b. Faktorer som är gemensamma för a och b finns med i såväl $\mathrm{sgd}(a, b)$ som $\mathrm{mgm}(a, b)$, medan faktorer som är specifika för a eller b finns med i $\mathrm{mgm}(a, b)$ men inte i $\mathrm{sgd}(a, b)$. Om primtalet p förekommer med potensen x i talet a och med potensen y i talet b, förekommer sålunda p med potensen $\min(x, y)$ i talet $\mathrm{sgd}(a, b)$ och med potensen $\max(x, y)$ i talet $\mathrm{mgm}(a, b)$. Men eftersom $\min(x, y)+\max(x, y) = x + y$, ingår p med potensen $x + y$ i såväl $a \cdot b$ som $\mathrm{sgd}(a, b)\cdot\mathrm{mgm}(a, b)$. Följaktligen är

$$\mathrm{sgd}(a, b) \cdot \mathrm{mgm}(a, b) = a \cdot b \text{ och vi har } \mathrm{sgd}(a, b) \leq \mathrm{mgm}(a, b).$$

När talen a och b ersätts med talen $\mathrm{sgd}(a, b)$ och $\mathrm{mgm}(a, b)$ gäller för de båda senare talen att p^x ingår i det ena och p^y i det andra. Primfaktorerna kommer alltså att flyttas mellan talen med oförändrade potenser och antalet fördelningsvarianter är ändligt.
(För att ta ett exempel är $\mathrm{sgd}(36, 120)$=$\mathrm{sgd}(2^2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 = 12$, medan $\mathrm{mgm}(36, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Talet 12 är det största heltal som delar såväl 36

som 120, medan 360 är det minsta heltal som är delbart med såväl 36 som 120. Vi ser att $12 \cdot 360 = 36 \cdot 120 = 4320$.)

Slutresultatet blir att primtalspotenserna för varje förekommande primtal fördelas över talen så att det största talet innehåller den högsta potensen för varje primtal, det näst största den högsta potensen av de primtal som återstår, osv. Så länge som det finns valmöjligheter, dvs så länge som det finns två tal a och b, $a < b$, sådana att a inte är en delare till b, kan vi inte ha nått nämnda slutmål rörande fördelningen av primfaktorerna. Det måste då nämligen finnas ett primtal p som förekommer med högre potens i a än i b. Det enda som nu skulle kunna förhindra oss att nå slutmålet är att vi under processens gång hamnar i en cykel som vi inte kan ta oss ur. Vi ska visa att detta inte kan inträffa.

Om talen a och b byts mot $c = \mathrm{sgd}(a, b)$ och $d = \mathrm{mgm}(a, b)$ gäller nämligen alltid att $c + d > a + b$. För att inse detta skriver vi $a = cx$ och $b = cy$, varav $d = cxy$. Enligt förutsättningarna är såväl x som y större än 1. Härav följer att

$$(c + d) - (a + b) = c(1 + xy - x - y) = c(x - 1)(y - 1) > 0.$$

Eftersom summan av n tal innehållande givna primtalspotenser är begränsad uppåt måste processen vara ändlig och kan följaktligen inte innehålla någon cykel.

Sammanfattningsvis konstaterar vi att vi efter ett ändligt antal steg hamna i ett läge där vi inte längre har några valmöjligheter och där slutresultatet blir detsamma oavsett hur vi har valt ut paren under processens gång.

(I det i problemtexten givna exemplet med talen 4, 6 och 9 ingår primtalet 2 med potensen 2 i talet 4 och med potensen 1 i talet 6. Följaktligen ska 2^2 ingå i det största talet i sluttrippeln medan 2^1 ska ingå i det näst största.

Vidare ingår primtalet 3 med potensen 2 i talet 9 och med potensen 1 i talet 6. Således ska också 3^2 ingå i det största talet i sluttrippeln, medan 3^1 ska ingå i det näst största. I sluttrippeln får vi alltså talen 1, $2 \cdot 3 = 6$ och $2^2 \cdot 3^2 = 36$.)