

Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 5 oktober 1994

1. Amanda har födelsedag den 5 oktober. I år fyller hon lika många år som summan av siffrorna i det årtal hon föddes. Hur gammal blir Amanda idag, den 5 oktober 1994?
2. Lös ekvationen $\cos^7 x - \sin^7 x = 1$.
3. I en triangel med sidolängderna $a > b > c$ skärs hörnen av med snitt, som är parallella med motstående sidor. Man får då en liksidig sexhörning vars sidolängd är s . Visa att

$$\frac{a}{3} > s > \frac{c}{3}.$$

4. Cirkeln C har medelpunkt i origo och radien 1. Kan det finnas två punkter på C , på avstånd 1 från varandra, vilkas koordinater är rationella?
5. Av de nio reella talen $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ bildar man de sex produkterna

$$J_1 = a_1 b_2 c_3, \quad J_2 = a_2 b_3 c_1, \quad J_3 = a_3 b_1 c_2,$$

$$U_1 = a_3 b_2 c_1, \quad U_2 = a_2 b_1 c_3, \quad U_3 = a_1 b_3 c_2.$$

Var och en av dessa produkter är antingen lika med α eller lika med β , där α och β är två olika positiva reella tal. Visa att $J_1 + J_2 + J_3 = U_1 + U_2 + U_3$.

6. Låt $a_0, a_1, \dots, a_{1994}$ vara reella tal som uppfyller:

i) $a_0 = a_{1994} = 0$

ii) $a_n + a_{n+2} < 2a_{n+1}$, för $n = 0, 1, \dots, 1992$.

Visa att $a_n \neq 0$ för $n = 1, 2, \dots, 1993$.