Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 21 november 1998

1. Sätt $a = 8x - 5y$, $b = 3y - 2z$ och $c = 3z - 7x$. Om a, b, c är heltal och $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ så är precis ett av talen $= 0$ medan de andra två har absolutvärde 1. Adderar man de två sista ekvationerna i systemet

$$\begin{cases} 8x \quad -5y \qquad\quad = a \\ \qquad\quad 3y \quad -2z = b \\ -7x \qquad\quad +3z = c \end{cases}$$

till den första ekvationen får man det ekvivalenta systemet

$$\begin{cases} x \quad -2y \quad +z = a+b+c \\ \qquad 3y \quad -2z = b \\ -7x \qquad +3z = c \end{cases}$$

Elimination av z i de två sista ekvationerna ger systemet

$$\begin{cases} x \quad -2y \quad +z = a+b+c \\ 2x \quad -y \qquad = 2a+3b+2c \\ -10x \quad +6y \qquad = -3a-3b-2c \end{cases}$$

Av den sista ekvationen framgår att $a+b$ måste vara ett jämnt tal för att det ska existera heltalslösningar. Detta medför att inget av de två talen a och b kan vara noll. Alltså är $c = 0$. Insättning av $c = 0$ och elimination av y i den första och den sista ekvationen ger systemet

$$\begin{cases} 3x \qquad\quad -z = 3a+5b \\ 2x \quad -y \qquad = 2a+3b \\ 2x \qquad\qquad = 9a+15b \end{cases}$$

som har lösningen

$$x = \frac{3}{2}(3a+5b), \quad y = 7a+12b, \quad z = \frac{7}{2}(3a+5b) \quad \text{med} \quad a = \pm 1,\ b = \pm 1.$$

Valet $b = -1$ ger $x < 0$, $y < 0$ och $z < 0$, och måste förkastas. Insättning av $b = 1$ och $a = -1 + 2k$, där $k = 0$ eller $k = 1$ ger $x = 3 + 9k$, $y = 5 + 14k$, $z = 7 + 21k$, $k = 0, 1$ och $c = 3z - 7x = 0$.

Här är en alternativ lösning där man först bestämmer värdena på de obekanta storheterna b och c.
Om y är jämnt blir både $a = 8x - 5y$ och $b = 3y - 2z$ jämna, dvs. $a = b = 0$ vilket är omöjligt. Alltså är y, a och b udda varav följer att $c = 3z - 7x = 0$. Nu är $5y = 8x - a \geq 8x - |a| = 8x - 1$ som ger

$$b = 3y - 2z \geq \frac{3}{5}(8x-1) - 2 \cdot \frac{7x}{3} = \frac{2x-9}{15} \geq \frac{-9}{15} > -1.$$

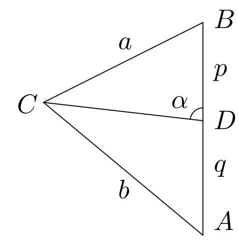
Eftersom b är ett udda heltal ≤ 1 är $b = 1$. Det gäller nu att lösa det diofantiska ekvationssystemet

$$\begin{cases} 8x \quad -5y \qquad\quad = -1+2k, \qquad k = 0, 1 \\ \qquad\quad 3y \quad -2z = 1 \\ -7x \qquad\quad +3z = 0 \end{cases}$$

Av den sista ekvationen följer att $x = 3m$ och $z = 7m$, där m är ett heltal. Insättning i den andra ekvationen ger $3y = 1 + 14m$ eller $3(y-5) = 14(m-1)$, varav $m - 1 = 3n$ och $y - 5 = 14n$ där n är ett heltal. Detta ger $x = 3m = 3 + 9n$ och $z = 7m = 7 + 21n$. Insättning i den första ekvationen ger slutligen $8(3 + 9n) - 5(5 + 14n) = -1 + 2k$, dvs. $n = k$, $k = 0, 1$.

Svar: $(x, y, z) = (3, 5, 7)$ eller $(x, y, z) = (12, 19, 28)$

2. Antag att bisektrisen till vinkeln C skär sidan AB i punkten D och att $\angle CDB = \alpha$. Antag vidare att $|BD| = p$ och att $|DA| = q$. Sinussatsen tillämpad på trianglarna BCD och DCA ger då



$$p = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\left(\frac{C}{2}\right), \quad q = \frac{b}{\sin(180^\circ - \alpha)}\sin\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{b}{\sin\alpha}\sin\left(\frac{C}{2}\right),$$

varav

$$c = p + q = \frac{a+b}{\sin\alpha}\sin\left(\frac{C}{2}\right) \geq (a+b)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

med likhet då och endast då $\sin\alpha = 1$, dvs. om och endast om $\alpha = 90^\circ$ vilket är likvärdigt med att $a = b$.

Ett alternativ är att utnyttja cosinussatsen på den ursprungliga triangeln samt formeln för dubbla vinkeln: $\cos C = 1 - 2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)$. Man får då

$$\begin{aligned}
c^2 - (a+b)^2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right) &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C - (a^2+b^2+2ab)\sin^2\left(\frac{C}{2}\right) \\
&= (a^2+b^2)\left(1 - \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\right) - 2ab\left(\cos C + \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\right) \\
&= (a^2+b^2-2ab)\left(1 - \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\right) \\
&= (a-b)^2\left(1 - \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\right) \geq 0
\end{aligned}$$

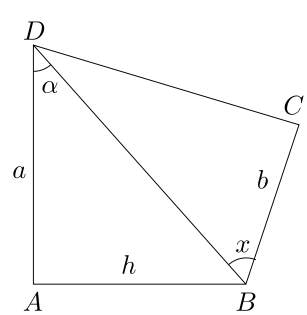
med likhet om och endast om $a = b$ (observera att $0 < \angle C < 180^\circ$ och $\left(1 - \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\right) > 0$).

Svar: Likhet gäller om och endast om $a = b$

3. Färga de små kuberna svarta och vita så att angränsande kuber har olika färg och så att den markerade kuben är svart. Då får man 63 vita och 62 svarta kuber. Antag att det är möjligt att besöka alla små kuber på angivet sätt. Detta innebär att man kan placera ut 62 bokstäver S och 63 bokstäver V i en följd som startar med ett S och där varannan bokstav är S och varannan är V. Men detta är omöjligt ty när 62 par SV placerats ut slutar följden med bokstaven V och endast en bokstav V finns kvar.

Svar: Nej

4. Drag diametern BD och låt $\alpha = \angle ADB$. Då är $\sin\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$. Sätt $x = \angle CBD$. Då är

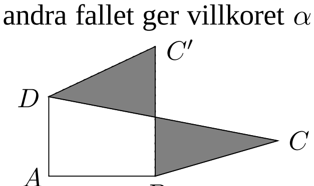


$$T = \text{area}(\triangle ABD) + \text{area}(\triangle BCD) = \frac{ah}{2} + \frac{b\sqrt{a^2+h^2}\sin x}{2}$$

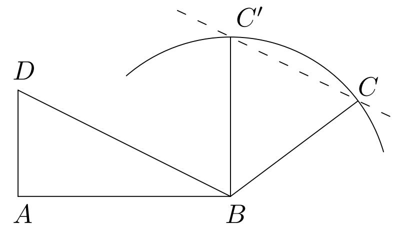
varav $\dfrac{bh}{2} = \dfrac{b\sqrt{a^2+h^2}\sin x}{2}$, dvs. $\sin x = \dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = \sin\alpha$. Detta ger $x = \alpha$ eller $x = 180^\circ - \alpha$.

Vinkeln vid B blir då antingen $90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$ eller $90^\circ - \alpha + 180^\circ - \alpha = 270^\circ - 2\alpha$. Då fyrhörningen är konvex är vinkeln vid B mindre än 180° som i det andra fallet ger villkoret $\alpha > 45^\circ$. Vinkeln vid B är alltså rät om $h \leq a$.

Om $h > a$ är vinkeln vid B antingen rät eller $270^\circ - 2\alpha = 90^\circ + 2\angle ABD$. De båda fallen illustreras i vidstående figur, där $|BC| = |BC'|$ och de två skuggade trianglarna har samma area.



Här är en alternativ konstruktiv lösning möjlig redan på Euklides tid.



Arean av triangeln ABD är $\dfrac{ah}{2}$. Det gäller då att, för givet b, konstruera C så att, A och C ligger på var sin sida om diagonalen BD, längden av sträckan BC är b och arean av triangeln BCD är $\dfrac{bh}{2}$. En möjlig lösning är då att välja C' på normalen BC' mot sidan AB så att $|BC'| = b$ och så att A och C' ligger på olika sidor om linjen BD.

Alla punkter C på linjen genom C' parallell med diagonalen BD ger en triangel BCD med arean $\dfrac{bh}{2}$, men endast skärningspunkterna mellan denna linje och cirkeln centrerad i B och med radien b ger en triangel där dessutom sidan BC har längden b. Låt dessa skärningspunkter vara C och C'. Eftersom linjerna AD och BC' är parallella följer att $\angle ADB = \angle DBC' = \angle BC'C$. Supplementvinkeln till toppvinkeln $C'BC$ i den likbenta triangeln $C'BC$ är då dubbelt så stor som $\angle ADB$ vilket ger $\angle C'BC = 2\angle ABD$. Vinkeln vid B kan alltså vara antingen rät eller en rät vinkel plus $2\angle ABD$. Nu blir fyrhörningen konvex endast om $2\angle ABD = \angle C'BC$ är mindre en rät, dvs. endast om $\angle ABD$ är $< 45°$.

5. Med hjälp av partialbråksuppdelningen

$$\frac{1997}{1998} = \frac{1}{2} + \frac{4}{27} + \frac{13}{37} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{13}{37}$$

ser man att man kan välja $n = 16$ och $x_1 = 2$, $x_2 = 9$, $x_3 = 27$ och $x_4 = x_5 = \cdots = x_{16} = 37$. Om man nu utnyttjar att $13 = \dfrac{37}{3} + \dfrac{2}{3}$ kan man reducera n till 6 och få

$$\frac{1997}{1998} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{3 \cdot 37} + \frac{1}{3 \cdot 37}.$$

Eftersom man i varje framställning kan ersätta termen $\dfrac{1}{x_1}$ med de två termerna $\dfrac{1}{2x_1} + \dfrac{1}{2x_1}$ ser man att det för varje $n \geq 6$ finns en dylik framställning.

I varje framställning

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1997}{1998} < 1$$

måste $x_i \geq 2$, för $i = 1, 2, \ldots, n$. Sätt $P = \prod_{k=1}^{n} x_k$ och $P_i = \dfrac{P}{x_i}$ för $i = 1, 2, \ldots, n$. Låt p_i vara ett primtal som delar x_i. Av relationen $1998(P_1 + P_2 + \cdots + P_n) = 1997P$ följer då att p_i delar $1998P_i$. Om för något i, mellan 1 och n, p_i delar P_i måste p_i dela något x_j, med $j \neq i$. Annars, om inget p_i delar P_i, så är alla p_i delare i $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$, dvs. p_i är ett av de tre primtalen, 2, 3 eller 37, som ingår i 1998. Men då $n \geq 6$ finns $i \neq j$ så att $p_i = p_j$, vilket strider mot att p_i inte delar P_i.

6. Om $p \leq 0$ är

$$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| = \sqrt[3]{2} - \frac{p}{q} \geq \sqrt[3]{2} > 1 \geq \frac{1}{q^3}$$

och valet $c = 1$ duger.

Antag därför att heltalet p är positivt. Eftersom $\sqrt[3]{2}$ är irrationellt är $\left|\sqrt[3]{2} - \dfrac{p}{q}\right|$ aldrig $= 1$.

Om $\left|\sqrt[3]{2} - \dfrac{p}{q}\right| > 1 \geq \dfrac{1}{q^3}$ duger åter valet $c = 1$.

Antag därför att $\left|\sqrt[3]{2} - \dfrac{p}{q}\right| < 1$. Då gäller $\sqrt[3]{2} - 1 < \dfrac{p}{q} < \sqrt[3]{2} + 1$. Av kubregeln följer att

$$\left|2 - \frac{p^3}{q^3}\right| \quad = \quad \left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| \left(\sqrt[3]{4} + \frac{p}{q}\sqrt[3]{2} + \frac{p^2}{q^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&< \left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| \left(\sqrt[3]{4} + (1+\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{2} + (1+\sqrt[3]{2})^2\right) \\
&= \left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| \left(3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 1\right)
\end{aligned}
$$

varav

$$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{|2q^3 - p^3|}{q^3} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 1} \geq \frac{1}{q^3} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 1}.$$

Den senare olikheten följer av att $\sqrt[3]{2}$ är irrationellt och att heltalet $2q^3 - p^3$ därför aldrig är lika med noll.

Svar: Man kan välja $c = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 1}$