Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 22 november 1986

1. Visa att polynomet $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \dfrac{3}{4}$ saknar reella nollställen.

2. Punkten O innanför fyrhörningen $ABCD$ är skärningspunkten mellan diagonalerna AC och BD. Trianglarna AOB och COD har areorna S_1 resp. S_2 och fyrhörningens area är S. Visa att

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}.$$

   Visa också att likhet råder då och endast då linjerna AB och CD är parallella.

3. Låt N vara ett positivt heltal som är minst likamed 3. Bilda alla par (a, b) av positiva heltal sådana att $1 \leq a < b \leq N$ och betrakta kvoten $k = \dfrac{b}{a}$ för varje sådant par. Stryk alla par med k = 2. Visa att av de återstående paren lika många har $k < 2$ som $k > 2$.

4. Visa att enda positiva lösningen till

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ y + z^2 + x^3 = 3 \\ z + x^2 + y^3 = 3 \end{cases}$$

   är $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

5. I nedanstående uppställning av $p \cdot n$ reella tal gäller att skillnaden mellan det största och det minsta talet i varje horisontell rad är högst d, där d är ett tal ¿ 0.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{matrix}$$

   Inom varje kolumn ordnar vi om värdena efter storlek så att det största kommer i första raden, det näst största i den andra raden, o.s.v. Visa att skillnaden mellan det största och det minsta värdet i varje horisontell rad fortfarande är högst d.

6. Ett ändligt antal intervall på den reella axeln täcker tillsammans intervallet $[0, 1]$. Visa att man kan välja ut ett antal av dessa intervall som parvis saknar gemensamma punkter och som har en sammanlagd längd som är minst $\frac{1}{2}$.