Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finalen den 19 november 1988

1. Med beteckningarna i figuren är

$$h_a = b \sin \angle ACB \text{ och } h_b = a \sin \angle ACB$$

varav

$$(a + h_a) - (b + h_b) = (a - b)(1 - \sin \angle ACB).$$

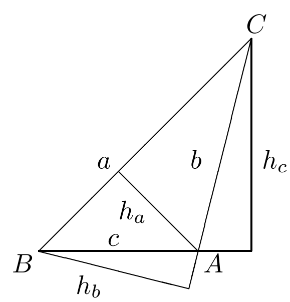
Men den minsta vinkeln i en triangel står mot den kortaste sidan och är mindre än $90°$. Därför är $1 - \sin \angle ACB > 0$ varav följer att $(a + h_a) - (b + h_b) > 0$.
Analogt är

$$h_b = c \sin(\pi - \angle BAC) = c \sin \angle BAC,$$
$$h_c = b \sin(\pi - \angle BAC) = b \sin \angle BAC$$

och

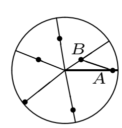
$$(b + h_b) - (c + h_c) = (b - c)(1 - \sin \angle BAC).$$

Av olikheten $1 - \sin \angle BAC \geq 0$ följer nu $(b + h_b) - (c + h_c) \geq 0$ med likhet då och endast då $\angle BAC$ är rät.



Svar: Olikheterna gäller med likhet i sista olikheten då och endast då triangeln är rätvinklig.

2. Det gäller att visa att om 6 olika punkter ligger i en cirkel med radie 5 så finns alltid 2 punkter vars avstånd är högst 5. Om någon av punkterna sammanfaller med cirkelns medelpunkt eller om två punkter ligger på samma radie så finns alltid två punkter med avstånd högst 5.



Låt oss därför anta att alla punkter ligger på olika radier. Dessa radier delar då cirkeln i 6 cirkelsektorer och i minst en av dessa är medelpunktsvinkeln $\theta \leq 60°$. Om punkterna A och B på cirkelsektorns ben har medelpunktsavstånden a respektive b med $0 < b \leq a \leq 5$ så följer av cosinussatsen att $|AB|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$. Men om $0 \leq \theta \leq 60°$ så är $1 \geq \cos \theta \geq \frac{1}{2}$ och

$$\begin{aligned} |AB|^2 &\leq a^2 + b^2 - ab = a(a - b) + b^2 \\ &\leq 5(5 - b) + b^2 = \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{4} \\ &\leq \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{4} = 25. \end{aligned}$$

Alltså är $|AB| \leq 5$.

Svar: Det finns alltid minst två ankungar med högst 5 meters inbördes avstånd.

3. För $n = 3$ följer implikationen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \le 0$$

direkt av identiteten

$$2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

För $n = 4$ följer implikationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 \le 0,$$

ur faktoriseringen

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = -(x_1 + x_3)^2 \le 0.$$

För $n \ge 5$ är implikationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \le 0$$

inte alltid sann som motexemplet

$$x_1 = x_n = 1;\ x_2 = 0;\ x_3 = -2 \ \text{ och } \ x_k = 0 \ \text{ för } \ 4 \le k \le n-1,$$

med

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0$$

och

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 1$$

visar.
(För $n = 2$ är implikationen trivialt giltig eftersom produkten av två reella tal med motsatt tecken alltid är negativ).

Svar: Implikationen är allmängiltig för $2 \le n \le 4$.

4. Enligt faktorsatsen kan polynomet P skrivas på formen $P(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$ där $k \ne 0$ och $a < b < c$ är polynomets olika nollställen. Sätt nu $Q(x) = (P'(x))^2 - 2P(x)P''(x)$. Då är $Q'(x) = 2P'(x)P''(x) - 2P'(x)P''(x) - 2P(x)P'''(x) = -2P(x)P'''(x)$. Men då $P'''(x) = 6k$ får man $Q'(x) = -12k^2(x-a)(x-b)(x-c)$, varav framgår att polynomet Q har grad 4 och att högstagradstermen är $-3k^2x^4$. Polynomet Q har alltså följande egenskaper:

   - $Q(x) \to -\infty$ då $x \to \pm\infty$
   - På intervallet $]-\infty, a[$ är faktorerna $x-a$, $x-b$ och $x-c$ negativa och $Q'(x) > 0$. Alltså växer Q strängt från $-\infty$ till $Q(a) = (P'(a))^2$. Men då P har enkla nollställen är $P'(a) \ne 0$ och $Q(a) > 0$ (av $P'(x) = k(x-b)(x-c) + k(x-a)\dfrac{d}{dx}\{(x-b)(x-c)\}$ följer $P'(a) = k(a-b)(a-c) \ne 0$). På grund av kontinuiteten finns då precis ett nollställe till Q i intervallet $]-\infty, a[$.
   - På intervallet $[a, c]$ har Q ett minimum för $x = b$ ($Q'(x) \le 0$ på $[a, b]$, $Q'(x) \ge 0$ på $[b, c]$) och $Q(x) \ge Q(b) = (P'(b))^2 > 0$.
   - På intervallet $]c, +\infty[$ avtar Q strängt ($Q'(x) < 0$) från $Q(c) = (P'(c))^2 > 0$ till $-\infty$. På grund av kontinuiteten finns då precis ett nollställe till Q i intervallet $]c, +\infty[$.

Svar: Ekvationen har två reella rötter.

5. Av villkoret $\frac{m}{n} < \sqrt{7}$ följer (då m och n är positiva heltal) att $7n^2 - m^2 \geq 1$. Om det finns en största konstant $\alpha \geq 1$ sådan att $7n^2 - m^2 \geq \alpha$ om $\frac{m}{n} < \sqrt{7}$ så måste α vara ett heltal. Men då $2 < \sqrt{7}$ ($m = 2$ och $n = 1$) så måste $\alpha \leq 7 - 4 = 3$. Det återstår att undersöka om ekvationerna $7n^2 - m^2 = \alpha$, med $\alpha = 1$ eller $\alpha = 2$ har några heltalslösningar där villkoret $\frac{m}{n} < \sqrt{7}$ är uppfyllt. Men $m^2 + 1$ och $m^2 + 2$ är aldrig delbara med 7, vilket framgår av följande tabell som ger resterna vid division med 7.

m	m^2	m^2+1	m^2+2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	4	5	6
3	2	3	4
4	2	3	4
5	4	5	6
6	1	2	3

Ekvationerna $7n^2 - m^2 = 1$ och $7n^2 - m^2 = 2$ saknar alltså heltalslösningar vilket innebär att vi kan välja $\alpha = 3$ men inte större.

Svar: $\alpha = 3$ är det maximala valet.

6. För begynnelsevärdet $a_1 = 1$ är olikheterna

$$\frac{1}{2} \cdot 1^\alpha \leq a_1 \leq 2 \cdot 1^\alpha$$

giltiga för varje val av α. Antag att för fixt n

$$\frac{1}{2} n^\alpha \leq a_n \leq 2n^\alpha .$$

Då gäller

$$\frac{1}{4}\left(n^{2\alpha} + \frac{2}{n^\alpha}\right) \leq a_n^2 + \frac{1}{a_n} \leq 4\left(n^{2\alpha} + \frac{1}{2n^\alpha}\right).$$

Om det nu finns ett α sådant att, för alla $n \geq 1$,

$$n^{2\alpha} + \frac{1}{2n^\alpha} \leq (n \quad + \quad 1)^{2\alpha} \leq n^{2\alpha} + \frac{2}{n^\alpha} \tag{1}$$

så följer av rekursionsformeln att

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(n+1)^{2\alpha} \quad &\leq \quad \frac{1}{4}\left(n^{2\alpha} + \frac{2}{n^\alpha}\right) \leq a_n^2 + \frac{1}{a_n} \\ &= \quad a_{n+1}^2 \leq 4\left(n^{2\alpha} + \frac{1}{2n^\alpha}\right) \leq 4(n+1)^{2\alpha}, \end{aligned}$$

och då är implikationen

$$\frac{1}{2} n^\alpha \leq a_n \leq 2n^\alpha \Rightarrow \frac{1}{2}(n+1)^\alpha \leq a_{n+1} \leq 2(n+1)^\alpha$$

giltig för alla $n \geq 1$. Enligt induktionsprincipen gäller då olikheterna

$$\frac{1}{2} n^\alpha \leq a_n \leq 2n^\alpha$$

för alla $n \geq 1$.
Det återstår att bestämma α så att (1) gäller för alla $n \geq 1$. Olikheterna i (1) kan omformas på följande sätt:

$$\frac{1}{2n^\alpha} \leq (n+1)^{2\alpha} - n^{2\alpha} \leq \frac{2}{n^\alpha}$$

$$\frac{1}{2} \leq n^\alpha \left((n+1)^{2\alpha} - n^{2\alpha}\right) \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq n^{3\alpha-1} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} \right) \leq 2. \tag{2}$$

Enligt definition på derivata tillämpad på funktionen $f(x) = x^{2\alpha}$ i punkten $x = 1$ gäller

$$2\alpha = f'(1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\alpha} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

För att olikheterna i (2) ska gälla för alla n måste därför faktorn $n^{3\alpha-1}$ vara konstant, dvs $3\alpha - 1 = 0$.
Sätt nu

$$g(x) = x^{\frac{1}{3}} \left((x+1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) \qquad \text{för} \qquad x \geq 1.$$

Då är

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left((x+1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) + x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}\right) - 1 \\
&\geq \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

(Den sista olikheten är olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium

$$a > 0 \quad b > 0 \quad c > 0 \quad \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

med likhet då och endast då $a = b = c$.)
Funktionen g är alltså växande och för $x \geq 1$ gäller

$$\frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} - 1 < \sqrt[3]{4} - 1 = g(1) \leq g(x) \leq \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{2}{3}.$$

Alltså gäller olikheterna (1) med $\alpha = \frac{1}{3}$ för alla $n \geq 1$.

Dessa olikheter kan också visas algebraiskt sedan man väl kommit fram till att $\alpha = \frac{1}{3}$. De är ekvivalenta med olikheterna

$$n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{8} \leq n^3 + 2n^2 + n \leq n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

som uppenbarligen är sanna för alla $n \geq 1$.

Svar: Med $\alpha = \frac{1}{3}$ gäller $\frac{1}{2}n^\alpha \leq a_n \leq 2n^\alpha$ för alla $n \geq 1$.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson