Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 16 oktober 1975

1. Låt punkten $A = (1, 0)$ och linjen $y = kx$, $k > 0$ vara givna i ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem i planet (= ortonormerat). För vilka punkter $P = (t, 0)$ kan man finna en punkt på linjen $y = kx$ sådan att AQ och QP är vinkelräta.

2. Finns det något värde på det positiva heltalet n sådant att decimaldelen av $(3+\sqrt{5})^n$ är större än 0,99? (Med decimaldelen av exempelvis talet 3,14 menas talet 0,14.)

3. Bevisa olikheten
$$a^n + b^n + c^n \geq ab^{n-1} + bc^{n-1} + ca^{n-1}$$
där $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ och n är ett positivt heltal.

4. $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ är sex olika punkter i ett plan. Sträckorna P_1Q_1, P_2Q_2 och P_3Q_3 är lika långa. Vidare gäller att de riktade sträckorna

$\overrightarrow{P_1P_2}$	och	$\overrightarrow{Q_2Q_1}$	är	parallella	och	lika	riktade
$\overrightarrow{P_1P_3}$	och	$\overrightarrow{Q_3Q_1}$	”	”	”	”	”
$\overrightarrow{P_2P_3}$	och	$\overrightarrow{Q_3Q_2}$	”	”	”	”	”

   Visa att sträckorna P_1Q_1, P_2Q_2 och P_3Q_3 skär varandra i en punkt.

5. Visa att $2^n + 1$ har n som heltalsfaktor för oändligt mnga positiva heltal n.

6. f är en funktion som är definierad på intervallet $[0, 1]$ och där har en kontinuerlig derivata som uppfyller olikheten
$$|f'(x)| \leq C|f(x)|$$
för någon positiv konstant C. Visa att om $f(0) = 0$ så är $f(x) = 0$ på hela intervallet $[0, 1]$.