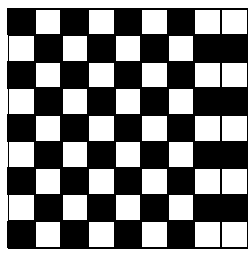
Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 21 november 1992

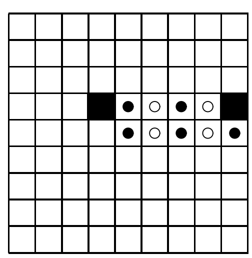
1. Talet $19^{92} - 91^{29} = 361^{46} - 91^{29} > 91^{46} - 91^{29} > 0$ är positivt. Sista siffran i både $19^{92} = 361^{46}$ och 91^{29} är 1. Differensen måste sluta med 0 och är alltså delbar med 10. Eftersom $19 = 2 \cdot 9 + 1$ får 19^m resten 1 vid division med 9. På samma sätt är $91 = 10 \cdot 9 + 1$ och 91^n ger resten 1 vid division med 9. Differensen är därför delbar med 9, och med 10, alltså delbar med 90.
   Svar: Ja det är ett naturligt tal.

2. Måla ett 8×8 - rutnät, med numrering 11 – 88, så att rutan målas svart om rutans nummer har jämn siffersumma medan rutor, vars nummer har udda siffersumma målas vita (ett vanligt schackbräde). Addera ytterligare en rad med samma färgläggning som den första raden. Addera dessutom ytterligare en kolumn med samma färgläggning som den sista kolumnen och måla slutligen ruta 99 vit.



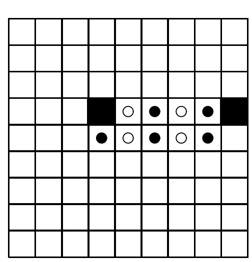
Denna färgläggning ger ett tillåtet mönster där rutorna 44 och 49 är svarta. Om färgen på ruta 99 är entydigt bestämd då rutorna 44 och 49 är svarta så måste ruta 99 vara vit.

Antag nu att ruta 44, ruta 49 och ruta 59 alla är svarta. (I figurerna nedan anger symbolerna $\bullet$ respektive $\circ$ en preliminär svart respektive vit färgläggning). Då ger mönsterregeln att rutorna 48 och 58 måste vara vita. Detta ger i sin tur att rutorna 47 och 57 måste vara svarta, rutorna 46 och 56 vita och rutorna 45 och 55 svarta.



Men då har ruta 45 två svarta angränsade rutor. Alltså måste ruta 59 vara vit.

Antag i stället att ruta 44, ruta 54 och ruta 49 alla är svarta. Då ger mönsterregeln att rutorna 45 och 55 måste vara vita. Detta ger i sin tur att rutorna 46 och 56 måste vara svarta, rutorna 47 och 57 vita och rutorna 48 och 58 svarta.



Men då har ruta 48 två svarta angränsade rutor. Alltså måste även ruta 54 vara vit.
Analogt följer nu att rutorna 64 och 69 båda är svarta, rutorna 74 och 79 båda vita, rutorna 84 och 89 båda svarta och slutligen att rutorna 94 och 99 båda är vita.
Svar: Ruta 99 är vit.

3. Antag att sträng olikhet gäller i någon av olikheterna. Addition av de 25 olikheterna ger då

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{24} + x_{25}) &- 5(x_2 + x_3 + \ldots + x_{25} + x_1) \\ &+ 3(x_3 + x_4 + \ldots + x_1 + x_2) > 0, \end{aligned}$$

som ger $0 > 0$. Alltså gäller likhet i alla olikheterna. Ekvationssystemet kan skrivas

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2(x_1 - x_2) & = & 3(x_2 - x_3) \\ 2(x_2 - x_3) & = & 3(x_3 - x_4) \\ & \vdots & \\ 2(x_{23} - x_{24}) & = & 3(x_{24} - x_{25}) \\ 2(x_{24} - x_{25}) & = & 3(x_{25} - x_1) \\ 2(x_{25} - x_1) & = & 3(x_1 - x_2) \end{array} \right.$$

Av de 23 första ekvationerna följer (induktivt) att

$$x_k - x_{k+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} (x_1 - x_2), \text{ för } k = 1, 2, \ldots, 24.$$

De två sista ekvationerna ger

$$x_{24} - x_{25} = \frac{9}{4}(x_1 - x_2).$$

Tillsammans ger detta (med $k = 24$)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{23} (x_1 - x_2) = x_{24} - x_{25} = \frac{9}{4}(x_1 - x_2),$$

varav $x_1 = x_2$. Men då är

$$x_k - x_{k+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} (x_1 - x_2) = 0, \text{ för } k = 1, 2, \ldots, 24,$$

dvs alla x_k, $k = 1, 2, \ldots, 25$ är lika. Kontroll visar att detta ger en lösning.
Svar: Det finns oändligt många lösningar, nämligen $x_k = t$, för $k = 1, 2, \ldots, 25$, där t är ett godtyckligt reellt tal.

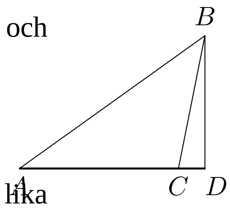
4. Antag att det finns en uppsättning positiva heltal som satisfierar olikheterna och där $c \geq 3$. Då gäller $b(c^3 - 1) \leq ac^3 < 4c^4$, dvs $b < 4c^4/(c^3 - 1) = 4c + 4c/(c^3 - 1)$. Men om $c \geq 3$ är $c^3 - 1 \geq 9c - 1 = 4c + 5c - 1 > 4c$ och alltså är $b < 4c + 1$, dvs $b \leq 4c$. Nu ger $a < b$ att $b - a \geq 1$ och $c^3 \leq (b - a)c^3 \leq b \leq 4c$ dvs $c \leq 2$ vilket strider mot antagandet $c \geq 3$. Alltså saknas lösning med $c \geq 3$.
Antag nu att $c = 2$. Då är $a < 8$ och $8b \leq 8a + b$ varav $b \leq a + a/7$. Om $a < 7$ ger detta $b \leq a$ som strider mot $a < b$. Alltså är $a = 7$, $b = 8$ och $c = 2$ enda möjligheten. Dessa tre tal satisfierar också olikheterna.
Om $c = 1$ övergår olikheterna i $a < b$, $a < 4$ och $0 \leq a$, som har de positiva heltalslösningarna $(a, b, c) = (k, b, 1)$, $b \geq k + 1$, med $k = 1, 2, 3$.
Svar: $(a, b, c) = (7, 8, 2)$ och $(a, b, c) = (k, b, 1)$, $b \geq k + 1$, med $k = 1, 2, 3$.

5. Antag att $c \geq a$, $c \geq b$ och att $a^2 + b^2 = 2Rc$. Eftersom sidan AB är störst måste vinkeln vid C vara den största och triangeln kan bara vara rätvinklig vid C. Antag först att vinkeln vid C är trubbig.

Drag höjden BD från punkten B mot linjen AC. Eftersom vinkeln vid C är trubbig ligger C mellan punkterna A och D.

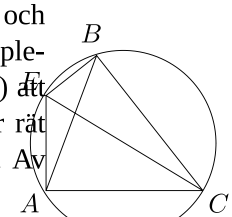
Låt $h = |BD|$ och $d = |CD|$. Pythagoras sats på trianglarna $\triangle ABD$ och $\triangle DBC$ ger då

$$c^2 = (b+d)^2 + h^2 > b^2 + d^2 + h^2 = b^2 + a^2 = 2Rc.$$



Detta ger $c > 2R$. Men en sida i en triangel är alltid mindre än eller lika med diametern i den omskrivna cirkeln. Alltså kan inte vinkeln vid C vara trubbig.

Antag nu att att vinkeln vid C är spetsig. Låt E vara den diametrala punkten till C på den omskrivna cirkeln och drag sträckorna AE och BE. Sätt $\alpha = |EB|$ och $\beta = |EA|$. Vinkeln vid E, som är supplementvinkel till vinkeln vid C är då trubbig och alltså gäller (jfr ovan) att $\alpha^2 + \beta^2 < c^2 \leq 2Rc$. Eftersom periferivinkeln på en diameter är rät är trianglarna $\triangle CAE$ och $\triangle CBE$ rätvinkliga vid A respektive B. Av Pythagoras sats på dessa trianglar följer då



$$2Rc = a^2 + b^2 = 4R^2 - \alpha^2 + 4R^2 - \beta^2 > 8R^2 - 2Rc = 2R(4R - c) \geq 2Rc$$

varav $2Rc > 2Rc$. Vinkeln vid C kan alltså inte heller vara spetsig.

Om vinkeln vid C är rät är AB en diameter i den omskrivna cirkeln och $c = 2R$. Pythagoras sats ger då $a^2 + b^2 = c^2 = 2Rc$.

Här är en alternativ trigonometrisk lösning:

Sinussatsen ger, med sedvanliga beteckningar, $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$ och $c = 2R\sin C$. Insatt i den givna relationen ger detta (efter division med $4R^2$)

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin C = \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B,$$

eller

$$\begin{aligned}
0 &= \sin A\,(\sin A - \cos B) + \sin B\,(\sin B - \cos A) \\
&= \sin A\,(\sin A - \sin(90^\circ - B)) + \sin B\,(\sin B - \sin(90^\circ - A)) \\
&= 2\sin A\cos\left(\frac{A + 90^\circ - B}{2}\right)\sin\left(\frac{A + B - 90^\circ}{2}\right) \\
&+ 2\sin B\cos\left(\frac{B + 90^\circ - A}{2}\right)\sin\left(\frac{A + B - 90^\circ}{2}\right) \\
&= 2\sin A\cos\left(\frac{A + 90^\circ - B}{2}\right)\sin\left(\frac{A + B - 90^\circ}{2}\right) \\
&+ 2\sin B\cos\left(\frac{B + 90^\circ - A}{2}\right)\sin\left(\frac{A + B - 90^\circ}{2}\right).
\end{aligned}$$

Eftersom c är den största sidan är vinkeln C den största vinkeln, vilket innebär att vinklarna A och B är spetsiga. Argumenten

$$\frac{A + 90^\circ - B}{2} \text{ och } \frac{B + 90^\circ - A}{2}$$

ligger alltså i intervallet $(0^\circ, 90^\circ)$ där cosinus är positiv. De två första trigonometriska faktorerna i de två termerna är alltså positiva och därför är

$$\sin\left(\frac{A + B - 90^\circ}{2}\right) = 0, \text{ som ger } A + B = 90^\circ + k360^\circ.$$

Alltså är $A + B = 90^\circ$ och $C = 90^\circ$.

6. Kurvan C är sammansatt av de två funktionskurvorna $y = x\sqrt{x}$ och $y = -x\sqrt{x}$, $x \geq 0$. En rät linje $x = a \geq 0$, parallell med y-axeln, skär vardera av funktionskurvorna i precis en punkt och kurvan C i högst två punkter. Därför kan linjen som innehåller de tre olika punkterna på kurvan inte vara parallell med y-axeln och de tre punkterna har olika x-koordinater. För kurvan $y = x\sqrt{x}$ gäller att $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Eftersom derivatan är strängt växande är kurvan strängt konvex. Detta innebär bl a att en rät linje skär kurvan i högst två punkter. Alltså kan den räta linjen inte gå genom origo och den måste skära den ena funktionskurvan i två punkter och den andra i en punkt. Låt oss anta att de två punkterna $(x_1, x_1\sqrt{x_1})$ och $(x_2, x_2\sqrt{x_2})$ ligger på $y = x\sqrt{x}$ och punkten $(x_3, -x_3\sqrt{x_3})$ på $y = -x\sqrt{x}$. Linjens riktningskoefficient kan då skrivas

$$\frac{x_1\sqrt{x_1} + x_3\sqrt{x_3}}{x_1 - x_3} = \frac{x_2\sqrt{x_2} + x_3\sqrt{x_3}}{x_2 - x_3}.$$

Kubregeln $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ och konjugatregeln $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, med $a = \sqrt{x_1}$ eller $a = \sqrt{x_2}$ och $b = \sqrt{x_3}$ ger efter förkortning

$$\frac{x_1 + x_3 - \sqrt{x_1x_3}}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3}} = \frac{x_2 + x_3 - \sqrt{x_2x_3}}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_3}},$$

som förenklas till $(x_1 - x_2)\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = 0$. Faktorisering av $x_1 - x_2$ och division med $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \neq 0$ ger nu $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1x_2} = 0$. Division med $\sqrt{x_1x_2x_3}$ ger slutligen

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_3}} = 0.$$

Fallet då två punkter ligger på kurvan $y = -x\sqrt{x}$ behandlas analogt.
I stället för att teckna lutningen för skärningslinjen på två sätt kan man, sedan man konstaterat att linjen inte kan vara parallell med y-axeln eller gå genom origo, utnyttja sambanden mellan rötter och koefficienter till en tredjegradsekvation. Om skärningspunkterna betecknas med (t_i^3, t_i^2), $i = 1, 2, 3$ och skärningslinjen har ekvationen $y - kx - l = 0$ så gäller $t_i^3 - kt_i^2 - l = 0$, dvs t_i, $i = 1, 2, 3$ är rötter till tredjegradsekvationen $t^3 - kt^2 - l = 0$. Men då är

$$t_1 + t_2 + t_3 = k, \qquad t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0, \qquad t_1t_2t_3 = l.$$

Den andra av dessa relationer ger efter division med $t_1t_2t_3 \neq 0$ ger den sökta relationen.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson