Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 13 november 1983

1. Låt a_n vara det sista talet i n:te gruppen. Då n:te gruppen innehåller n element får vi $a_n = a_{n-1} + n$ varför
$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Elementen i n:te gruppen kan skrivas $a_{n-1} + 1$, $a_{n-1} + 2, \ldots, a_{n-1} + n$. Deras summa är därför
$$na_{n-1} + 1 + 2 + \cdots + n = n\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(n^3 + n\right).$$

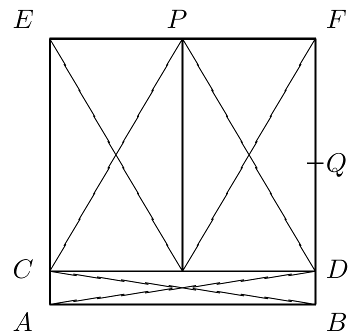
2. Det är klart att $\cos x^2 + \cos y^2 - \cos xy \leq 3$. Likhet kan endast inträffa om $\cos x^2 = \cos y^2 = 1$ och $\cos xy = -1$. Dessa villkor ger
$$x^2 = 2p\pi, \quad y^2 = 2q\pi, \quad xy = (2r+1)\pi$$
för några heltal p, q, r. Men då skulle $4pq = (2r+1)^2$ vilket är omöjligt eftersom vänstra ledet är jämnt och högra udda.

3. Multiplicera första ekvationen med 1, andra med 2, tredje med 3, osv. Addera därefter ekvationerna ledvis. Man får
$$(n+1)x_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
dvs $x_n = n/2$. Talet n måste alltså vara jämnt.

4. Det är omedelbart klart att eftersom rektangelns area skall var maximal måste cirklarnas medelpunkt ligga inom rektangeln. Låt M vara denna medelpunkt och låt A och B vara två närliggande hörn i rektangeln med $MA = r$, $MB = R$. Rektangelns area är 4 gånger så stor som arean av triangeln AMB. Denna är så stor som möjligt då vinkeln AMB är rät. Rektangelsidan AB fås då med Pytagoras sats: $\sqrt{r^2 + R^2}$ och den andra rektangelsidan, säg x, fås ur sambandet mellan areorna:
$$x\sqrt{r^2 + R^2} = 4\frac{rR}{2}, \qquad x = \frac{2rR}{\sqrt{r^2 + R^2}}.$$

5. a) Dela kvadraten i tre delar med två linjer parallella med en av kvadratens sidor så att de tre delrektanglarna blir kongruenta. Tre cirkelskivor som har dessa rektanglars diagonaler som sina diametrar uppfyller villkoren i a).

   b) Det måste finnas två närliggande hörn som täcks av samma cirkelskiva. Kalla dem A och B. Dela kvadraten så som figuren anger i tre rektanglar med lika långa diagonaler. De tre cirkelskivor med samma radier vilka omskriver dessa rektanglar täcker kvadraten. Låt oss visa att de ger de minsta möjliga radierna.
   Antag cirklarnas radier vore mindre. Den cirkelskiva som täcker A och B kan då inte täcka någon av punkterna C och D och givetvis inte någon av E och F. Eftersom C och F inte kan täckas av samma cirkelskiva, ej hellar D och E, måste antingen den ena av de två återstående cirkelskivorna täcka C och E, den andra D och F eller den ena täcka C och D, den andra E och F. I första fallet konstaterar vi att ingen av cirkelskivorna täcker P, mittpunkten på EF (eftersom $CP = DP = CB$ är längre än cirklarnas diametrar). I andra fallet vill vi konstatera att Q, mittpunkten på DF inte blir täckt. Men detta följer av att DQ är längre än DB (se kalkylerna nedan) och därför CQ och EQ båda längre än CB och alltså längre än cirklarnas diametrar.
   Låt x vara längden av sträckan AC. Att diagonalerna skall vara lika ger
$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} + (1-x)^2}$$
   vilket ger $x = 1/8$ och minsta radierna $\sqrt{65}/16$.



6. Av första ekvationen framgår att $x > 0$ och därefter ger den andra att $y > x$. Ekvationerna omformas nu till

$$y = f(x) = 3/\sqrt{x} - x, \qquad y = g(x) = \sqrt[3]{7/x + x^3}.$$

För $0 < x < 1$ är

$$\begin{aligned} f(x) &> 3/\sqrt{x} - 1/\sqrt{x} = 2/\sqrt{x} \\ g(x) &< \sqrt[3]{7/x + 1/x} = 2/\sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Eftersom $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$ för dessa x-värden blir $q(x) < f(x)$.
För $x > 1$ erhålls motsvarande olikheter med olikhetstecknena omkastade, dvs vi får här $g(x) > f(x)$.
Däremot är $f(1) = g(1) = 2$.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner