

Skolornas Matematiktävling

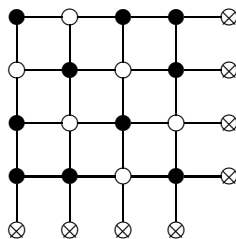
Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 8 oktober 1987

1. Kalle har en literflaska A full med apelsinjuice och en tom literflaska B . Han häller en del av juicen från den fulla flaskan A till den tomma flaskan B . Därefter fyller han på flaskan B med vatten så att den blir full och skakar om så att innehållet blandas väl. Slutligen fyller han på flaskan A med det blandade innehållet i flaskan B så att flaskan A blir full. Visa att flaskan A nu innehåller minst 75% av den ursprungliga juicen.
2. Visa att talet abc , som avser ett tresiffrigt heltal skrivet på vanligt sätt med siffrorna a , b och c , är delbart med 7 om och endast om talet $-a + 2b + 3c$ är delbart med 7.
3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2) = 1176 \\ (x-y)(x^2+y^2) = 696 \end{cases}.$$

4. I triangeln ABC väljs en punkt P godtyckligt på sidan BC . Genom mittpunkten M på samma sida dras sträckan DM parallellt med AP med punkten D på någon av de andra sidorna. Visa att sträckan DP delar triangeln i två områden med samma area.
5. Sexton glödlampor är kopplade i ett kvadratisk nätverk enligt figuren. För varje rad, vågrät eller lodrät, finns en strömställare som fungerar så att när man vrider på den ett halvt varv så släcks alla lampor i raden som var tända och tänds alla lampor i raden som var släckta.



I utgångsläget lyser sex av lamporna enligt figuren. Bevisa att man inte kan få alla sexton lamporna att lysa genom att vrida på strömställarna. Hur många lampor kan man maximalt tända?

6. I en liten skola med 50 elever har man gjort en indelning av eleverna i 8 smågrupper. Det skiljer 4 elever i antal mellan den största och den minsta smågruppen.
Under vissa lektioner slår man ihop smågrupperna två och två till storgrupper. De båda minsta smågrupperna bildar en storgrupp, nummer tre och fyra i storlek bildar nästa storgrupp, o.s.v. Det skiljer 5 elever i antal mellan den största och den minsta storgruppen.
De två minsta storgrupperna utgör klass A och de två största utgör klass B . Det är 6 elever fler i klass B än i klass A .
Ange antalet elever i de olika smågrupperna.