Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 8 oktober 1981

1.

$$\begin{aligned}\frac{x^3+1}{2} - \left(\frac{x+1}{2}\right)^3 &= \frac{1}{8}\left(3x^3 - 3x^2 - 3x + 3\right) \\ &= \frac{3}{8}(x-1)\left(x^2-1\right) = \frac{3}{8}(x-1)^2(x+1) \geq 0.\end{aligned}$$

Alternativ metod. Studera

$$y = \frac{x^3+1}{2} - \left(\frac{x+1}{2}\right)^3$$

och visa att $y_{\min} = 0$ inträffar för $x = 1$.

2. Uppdela i två fall.

   I. $\sin x + \cos x < 0$. Då är den givna olikheten alltid uppfylld. Detta inträffar då $135^\circ < x < 315^\circ$.

   II. $\sin x + \cos x \geq 0$. Då är den givna olikheten ekvivalent med

$$(\sin x + \cos x)^2 < 1 + \sin x \cos x$$

$$1 + 2\sin x \cos x < 1 + \sin x \cos x$$

$$\sin x \cos x < 0.$$

   Detta inträffar för $90^\circ < x \leq 135^\circ$ och $315^\circ \leq x < 360^\circ$.

   Svar: $90^\circ < x < 360^\circ$

3. Sätt $a + b + c = t$. Ekvationssystemet

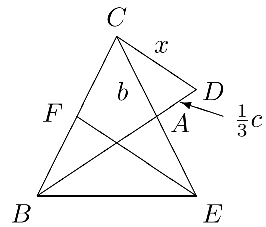
$$\begin{aligned} ab + ac &= 2t \\ ac + bc &= 4t \\ bc + ab &= 8t \end{aligned}$$

är linjärt i storheterna ab, ac och bc. Löses detta får man $ab = 3t$, $ac = -t$, $bc = 5t$.
Om $t = 0$ måste två av a, b, c vara 0 och eftersom deras summa t är 0, måste då även den tredje vara 0. Detta ger lösningen $a = b = c = 0$.
Låt $t \neq 0$. Då måste a, b, c alla vara $\neq 0$.

$$\frac{ab}{ac} = \frac{3t}{-t} = -3, \qquad c = -\frac{1}{3}b, \qquad \frac{bc}{ac} = \frac{5t}{-t} = -5, \qquad a = -\frac{1}{5}b.$$

Vi får $t = -\frac{1}{5}b + b - \frac{1}{3}b = \frac{7}{15}b$. Insättning i $ac = -t$ ger $\frac{1}{15}b^2 = -\frac{7}{15}b$ och eftersom $b \neq 0$ följer $b = -7$.
Svar: Lösningarna är $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ och $a = \frac{7}{5}$, $b = -7$, $c = \frac{7}{3}$.

4.



Metod 1. Förläng CA över A till en punkt E för vilken $EA = CA$. Då är triangeln CBE likbent med basen BE. BA är en median i denna triangel och skärs i tyngdpunkten T av medianen EF. Eftersom medianerna skär varandra i förhållandet 2:1, är $AD = AT$. Då också $AC = AE$ följer det att trianglarna ADC och ATE är kongruenta. Vi har att visa att ET är dubbelt så lång som AT, men detta följer direkt av att $AT = FT$ (eftersom triangeln CBE är likbent) och av att T delar EF i förhållandet 2: 1.

Metod 2. Sätt $AC = b$ och $AB = c$. Då är $BC = 2b$, $AD = \dfrac{1}{3}c$, $BD = \dfrac{4}{3}c$. Kalla $CD = x$ och låt A stå för vinkeln CAB. Tillämpa cos-satsen på trianglarna CAB och CAD:

$$4b^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$x^2 = b^2 + \frac{1}{9}c^2 + 2b\frac{c}{3}\cos A.$$

Härav följer

$$4b^2 + 3x^2 = 4b^2 + \frac{4}{3}c^2, \qquad x = \frac{2}{3}c$$

dvs $CD = 2AD$.

5. Vid varje tillfälle under proceduren betraktas summan av samtliga talen på de lappar som återstår. Då två lappar med talen a och b ersätts med en lapp med talet $a - b$ eller $b - a$ ersätts summan, säg s, med

$$s - a - b + (a - b) = s - 2b$$

eller

$$s - a - b + (b - a) = s - 2a.$$

Varje gång ändras alltså summan med ett jämnt tal. Härav följer att den sista lappens tal är udda eller jämnt allteftersom den ursprungliga summan är udda eller jämn. Bland talen $1, 2, \ldots, 1981$ är $1982/2 = 991$ tal udda, varför summan av talen är udda.

Variation. Man kan koncentrera sig på de udda lapparna. Deras antal ändras endast då man drar två udda lappar; i detta fall minskar antalet med 2. Då man startar med 991 udda lappar måste sista lappen vara udda.

6. Man söker det minsta talet t för vilket systemet

$$\begin{aligned}
&a+b+c+d+e+f+g = 1 && (1)\\
&a+b+c \le t && (2)\\
&b+c+d \le t && (3)\\
&e+d+e \le t && (4)\\
&d+e+f \le t && (5)\\
&e+f+g \le t && (6)
\end{aligned}$$

är lösbart med talen $a, b, \ldots, g$ alla ≥ 0.

(1), (2) och (5) ger: $1 - g \leq 2t, \quad g \geq 1 - 2t$
(1), (2) och (6) ger: $1 - d \leq 2t, \quad d \geq 1 - 2t$.
(1), (3) och (6) ger: $1 - a \leq 2t, \quad a \geq 1 - 2t$

Villkoret $a, b, \ldots, g \geq 0$ ger nu:

$$1 = a + b + c + d + e + f + g \geq a + d + g \geq 3 - 6t, \qquad 6t \geq 2, \qquad t \geq \frac{1}{3}.$$

För att relationerna skall vara uppfyllda måste således $t \geq 1/3$.
Att $t = 1/3$ kan uppnås inser man genom att sätta

$$b = c = e = f = 0, \qquad a = d = g = \frac{1}{3}.$$

Svar: Det minsta värdet är 1/3.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner