Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

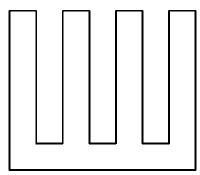
Lösningar till finaltävlingen den 19 november 1972

1. Det räcker att ange en lösning med y heltal; den första ekvationen garanterar ju då att även x blir heltal. Eliminera därför x ur de givna ekvationerna och lös med avseende på y. Man får

$$y = \frac{1-a}{3+4a} \qquad \frac{dy}{da} = -\frac{7}{(3+4a)^2}.$$

För $a < -3/4$ är y negativ och avtagande (då a växer). Då $a \to -\infty$ går y mot $-1/4$. Det minsta a som ger y heltalsvärde måste därför vara det som ger $y = -1$, vilket sker för $a = -4/3$. Då är $x = -3$.

2. En sluten väg måste innehålla lika många kvartersträckor i nordlig riktning som i sydlig riktning och lika många i östlig som i västlig riktning. Totala antalet kvartersträckor utefter en sluten väg är därför ett jämnt tal. Detta antal är emellertid detsamma som antalet passerade gatukorsningar. Alltså är mn jämnt om det finns en sluten väg av i problemet angiven typ.
Omvänt om mn är jämnt så är m eller n jämnt. Om exempelvis m är jämnt kan man ange en väg så som figuren visar.



3. Vi låter stekens temperatur vara T° vid tidpunkten t och mäter därvid tiden lämpligen i kvartstimmar. Ugnens temperatur betecknar vi U°. Eftersom T växer (och därvid $U - T$ avtar) proportionellt mot skillnaden $U - T$ följer det att $U - T$ avtar exponentiellt dvs att $U - T = Ca^{-t}$ för några konstanter C och a. För $t = 0$, 1, 2 får vi

$$\begin{aligned} U - 5 &= C \\ U - 45 &= Ca^{-1} \\ U - 77 &= Ca^{-2}. \end{aligned}$$

Löser vi detta får vi $U = 205$, $C = 200$, $a = 5/4$.
Alternativ metod. Från $U - T = Ca^{-t}$ följer det att temperatur ökningarna per kvart bildar en geometrisk serie. Under den första kvarten ökar stekens temperatur med 40°, under den andra med 32°. Seriens kvot är därför 32/40=4/5. Detta ger att ugnens temperatur är

$$5 + 40\left(1 + \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots\right) = 5 + 40\,\frac{1}{1-4/5} = 205.$$

4. $80 < 81$ kan skrivas $2^3 \cdot 10 < 3^4$. Logaritmering ger $3x + 1 < 4y$. $243 < 250$ kan skrivas $3^5 < 10^3 \cdot 2^{-2}$. Logaritmering ger $5y < 3 - 2x$. Vi har alltså

$$\begin{array}{rcrcr} y & + & 1 & < & 5x \\ 3x & + & 1 & < & 4y \\ 2x & + & 5y & < & 3 \end{array}.$$

De första två olikheterna ger

$$x > \frac{y+1}{5}, \qquad 4y > 3x + 1 > 3\,\frac{y+1}{5} + 1, \qquad 20y > 3y + 8, \qquad 17y > 8, \qquad y > 8/17 > 0,470.$$

Första och tredje olikheterna ger

$$x > \frac{y+1}{5}, \qquad 3 > 2x+5y > 2\,\frac{y+1}{5}+5y, \qquad 15 > 27y+2, \qquad 27y < 13, \qquad y < 13/27 < 0,482.$$

Anmärkning. De tre olikheterna innebär tre halvplan. Dessa har ett litet triangelområde gemensamt. De två framräknade y-värdena är y-värdena för denna triangels lägsta och högsta hörn.

5. För $0 \le x < 1$ går $1/(1+x^n)$ mot 1 då $n \to \infty$. Det är därför naturligt att jämföra den givna integralen med integralen över funktionen 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) dx = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx.$$

Nu är $x^n/(1+x^n) \le x^n$ för $0 \le x \le 1$ så att

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} < n.$$

Alltså gäller den givna olikheten.

6. Välj ur följden a_1, a_2, $a_3 \ldots$, en delföljd $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ med $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ och $a_{n_1} \le a_{n_2} \le \cdots$ genom att för växande i välja a_{n_i} minimal bland talen a_n för $n > n_{i-1}$. Ur den motsvarande delföljden $b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots$ väljs på samma sätt en delföljd $b_{m_1}, b_{m_2}, \ldots$ sådan att $m_1 < m_2 < \cdots$ och $b_{m_1} \le b_{m_2} \le \cdots$. Då gäller även $a_{m_1} \le a_{m_2} \le \cdots$ och det räcker att vi tar $p = m_1$, $q = m_2$ för att olikheterna i problemet ska vara uppfyllda.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner