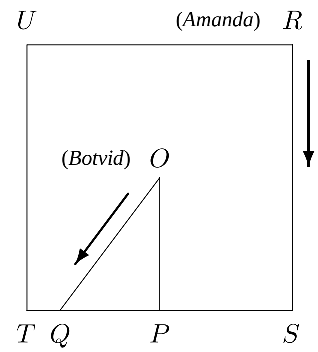
Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 6 oktober 1993

1. Låt hörnen i bassängen vara R, S, T och U och mittpunkten O. Kalla mittpunkten på bassängkanten ST för P och antag att bassängkanten är $2a$ meter, att Botvid simmar v meter/minut och att Amanda står vid hörnet R.



Om Botvid vill undkomma Amanda bör han simma rakt mot en punkt Q mellan P och T. Om man antar att $|PQ| = x$ meter så är $|OQ| = \sqrt{a^2+x^2}$ meter. Denna sträcka simmar Botvid på $\sqrt{a^2+x^2}/v$ minuter. Kortaste vägen för Amanda från R till Q blir då $3a+x$ meter, som hon springer på $(3a+x)/3v$ minuter. Botvid undkommer Amanda om det finns ett x med $0 < x \le a$ sådant att

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v} < \frac{3a+x}{3v}, \text{ eller (båda led är positiva) } a^2+x^2 < \left(a+\frac{x}{3}\right)^2.$$

Den andra av dessa olikheter är ekvivalent med

$$a^2+x^2 < a^2+\frac{2ax}{3}+\frac{x^2}{9}, \quad \text{eller} \quad 9x^2 < 6ax+x^2, \quad \text{eller}$$

$$8x^2 < 6ax, \quad \text{eller} \quad x(3a-4x) > 0,$$

som gäller för $0 < x < 3a/4$. Alltså kan Botvid undkomma.

Svar: Botvid kan undkomma Amanda

2. Antag att Åke plockade L liter. Då plockade Kurt $1,2L$ liter och Lisa $1,25 \cdot 1,2L = 1,5L$ liter. Om var och en behöll E liter för egen konsumtion och literpriset vid försäljning var P kr/liter, så var inkomsterna för Åke, Kurt och Lisa $(L-E)P$ kr, $(1,2L-E)P$ kr respektive $(1,5L-E)P$ kr. Dessa tre tal bildar en geometrisk följd om

$$\frac{(1,2L-E)P}{(L-E)P} = \frac{(1,5L-E)P}{(1,2L-E)P},$$

varav $E = 0,6L$. Detta ger inkomstfördelningen, uttryckt i enheten LP,

Åke	Kurt	Lisa	Göran
$0,4LP$	$0,6LP$	$0,9LP$	$1,35LP$

Här har Görans inkomst beräknats som Lisas inkomst gånger kvoten $3/2$ för den geometriska följden. Eftersom $0,4LP$ och $0,6LP$ båda är heltal, är också $LP = 0,4LP + 0,6LP$ ett heltal. Men då är också $x = 0,05LP = LP + 0,4LP - 1,35LP$ ett heltal. Uttryckt i heltalet x blir inkomstfördelningen

Åke	Kurt	Lisa	Göran
$8x$	$12x$	$18x$	$27x$

Villkoren $8x < 100 = 12 \cdot 8 + 4$ och $18x > 200 = 11 \cdot 18 + 2$ och x heltal ger $11 < x \le 12$, dvs $x = 12$, som ger inkomstfördelningen, uttryckt i kr,

Åke	Kurt	Lisa	Göran
96	144	216	324

Svar: Göran tjänade 324 kr

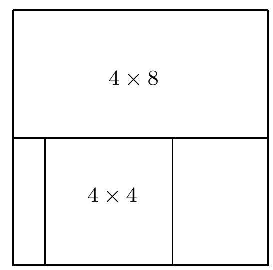
3. Antag att rektanglarna har dimensionerna $a \times a$, $b \times 2b$, $c \times 3c$ och $d \times 4d$. Ingen rektangelsida får överstiga åtta rutor och måste innehålla minst en ruta. Därför är $1 \leq a \leq 8$, $1 \leq b \leq 4$, $1 \leq c \leq 2$ och $1 \leq d \leq 2$. Summan av rektanglarnas area är $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 64$. Denna ekvation ger ytterligare inskränkningar på a: $a^2 \geq 64 - 2 \cdot 16 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 4$ och $a^2 \leq 64 - 2 - 3 - 4 = 53$. Av ekvationen följer också att a och c måste ha samma paritet, dvs de är samtidigt båda udda eller jämna. Återstår att undersöka $2 \leq a \leq 7$.

$a = 7$ De återstående tre rektanglarna måste ha sin minsta sida lika med 1. Men då är $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 49 + 9 < 64$.

$a = 6$ Då är c också jämn, dvs $c = 2$ och areaekvationen reduceras till $b^2 + 2d^2 = 8$, som för $d = 1$ ger $b^2 = 6$ och för $d = 2$ ger $b = 0$.

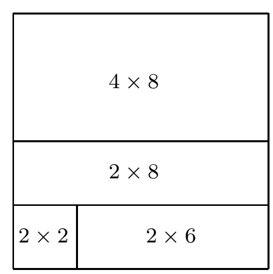
$a = 5$ Nu är c udda, dvs $c = 1$ och areaekvationen förenklas till $b^2 + 2d^2 = 18$. Om $d = 2$ får man $b^2 = 10$, medan $d = 1$ ger $b = 4$. Men $a + b$ kan högst vara 8 för att $a \times a$ - kvadraten och $b \times 2b$ - rektangel ska rymmas på schackbrädet.

$a = 4$ Här är $c = 2$ och $b^2 + 2d^2 = 18$. Som i förra fallet är $d = 1$ och $b = 4$ den enda möjliga lösningen. Nu ryms visserligen både $a \times a$-kvadraten och $b \times 2b$-rektangeln på schackbrädet, men en delrektangel av den återstående delen av schackbrädet har sidor av längd högst fyra rutor och där kan inte en rektangel, vars ena sida är $3c = 6$ rutor, rymmas.



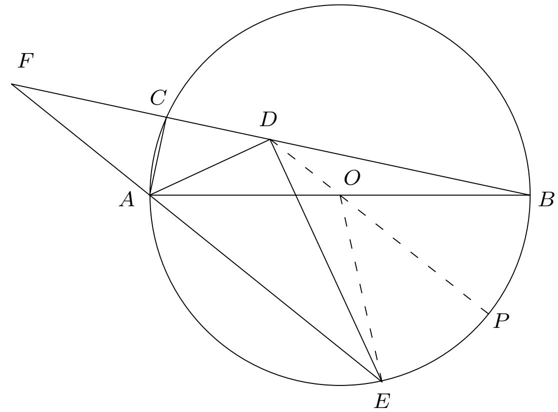
$a = 3$ I detta fall är $c = 1$ och areaekvationen förenklas till $b^2 + 2d^2 = 26$. Här ger $d = 1$ och $d = 2$ irrationella värden på b.

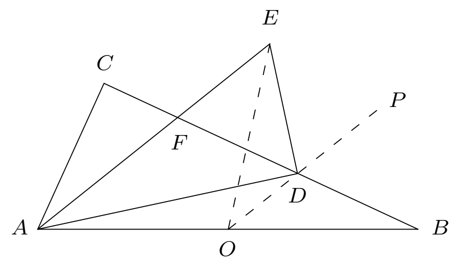
$a = 2$ I detta sista fall är $c = 2$, ekvationen reduceras till $b^2 + 2d^2 = 24$ som ger $b^2 = 22$, $d = 1$ och $b = 4$, $d = 2$. Den enda möjliga sönderdelningen får man alltså då $a = 2$, $b = 4$ och $c = d = 2$. Att denna sönderdelning verkligen kan realiseras framgår av vidstående figur.



Svar: Rektanglarna har 2×2, 4×8, 2×6 och 2×8 rutor

4. Antag att linjerna BC och AE har skärningspunkten F. Linjerna kan aldrig vara parallella ty vinkeln DBE i den likbenta triangeln BDE måste vara spetsig. Figurerna nedan illustrerar de två möjliga fall som kan förekomma (bortsett från det urartade fallet då $D = E = B$).





I trianglarna $\triangle ODB$ och $\triangle ODE$, där O är cirkelns medelpunkt, är motsvarande sidor lika stora och trianglarna kongruenta. Detta innebär bl.a. att radien OP är bisektris till medelpunktsvinkeln $\angle BOE$ och enligt satsen om medelpunktsvinkeln är då $\angle BOP = \angle BAE$. Alltså är $OP \parallel AE$ och enligt transversalsatsen är då $|DB|/|DF| = |OB|/|OA| = 1$. Triangeln $\triangle DEF$ är alltså likbent ($|DE| = |DB| = |DF|$). Enligt basvinkelsatsen är då $\angle AED = \angle FED = \angle EFD = \angle AFC$, som visar att de rätvinkliga trianglarna $\triangle AED$ och $\triangle AFC$ är likformiga. Pythagoras sats tillämpad på den rätvinkliga triangeln $\triangle ACD$ ger $|CD| = \sqrt{100-36} = 8$. Om då $x = |DB| = |DE| = |DF|$ är $|CF| = |8-x|$ och ur likformigheten följer att $x/10 = |8-x|/6$ som ger $x = 5$ eller $x = 20$. Alltså är $|BC| = 13$ och $|AB| = \sqrt{36+169} = \sqrt{205}$ eller $|BC| = 28$ och $|AB| = \sqrt{6^2+28^2} = 2\sqrt{9+196} = 2\sqrt{205}$.

Svar: Sidorna i triangeln $\triangle ABC$ är $a = 13$, $b = 6$ och $c = \sqrt{205}$ cm, eller $a = 28$, $b = 6$ och $c = 2\sqrt{205}$ cm

5. Eftersom $\sqrt{3}$ är irrationellt och $(a+3b)/(a+b)$ är rationellt, gäller antingen $(a+3b)/(a+b) > \sqrt{3}$ eller $(a+3b)/(a+b) < \sqrt{3}$. Antag att $(a+3b)/(a+b) > \sqrt{3}$. Eftersom $a+b$ är positivt är denna olikhet ekvivalent med olikheten $a+3b > a\sqrt{3}+b\sqrt{3}$ eller, efter överflyttning och faktorisering, $(3-\sqrt{3})b > (\sqrt{3}-1)a$. Division med det positiva talet $(\sqrt{3}-1)b$ ger då

$$\sqrt{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} > \frac{a}{b}.$$

Om $(a+3b)/(a+b) < \sqrt{3}$ ger analoga räkningar

$$\frac{a+3b}{a+b} < \sqrt{3}$$

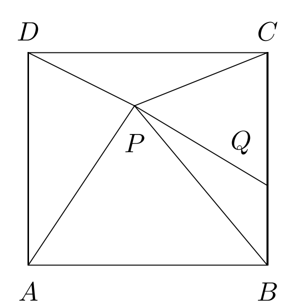
$$a+3b < a\sqrt{3}+b\sqrt{3}$$

$$(3-\sqrt{3})b < (\sqrt{3}-1)a$$

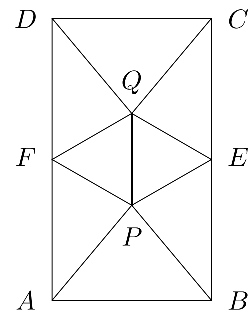
$$\sqrt{3} < \frac{a}{b}$$

I båda fallen ligger $\sqrt{3}$ mellan de två rationella och positiva talen a/b och $(a+3b)/(a+b)$.

6. Låt $ABCD$ vara en rektangel som har indelats i spetsvinkliga trianglar. Av trianglarnas hörnpunkter måste minst två ligga i det inre av rektangeln. Ty antag att P är det enda triangelhörnet som ligger i det inre av $ABCD$. Eftersom alla triangelvinklarna är $< 90°$, är P hörn i minst fem trianglar. För högst fyra av dessa trianglar kan de båda återstående triangelhörnen sammanfalla med två av rektangelns hörn. Minst en av trianglarna måste ha ett av sina hörn, Q, i en inre punkt på en av rektangelns kanter. Med då har minst en av de två trianglar som innehåller sidan PQ en vinkel $\geq 90°$. Alltså finns minst två olika triangelhörn i det inre av rektangeln. Varje sådan inre punkt är hörn i minst fem trianglar och sträckan mellan två hörnpunkter är sida i högst två trianglar. Indelningen innehåller alltså minst $2 \cdot 5 - 2 = 8$ trianglar.



Att det finns rektanglar som kan indelas i 8 spetsvinkliga trianglar framgår av vidstående figur, där



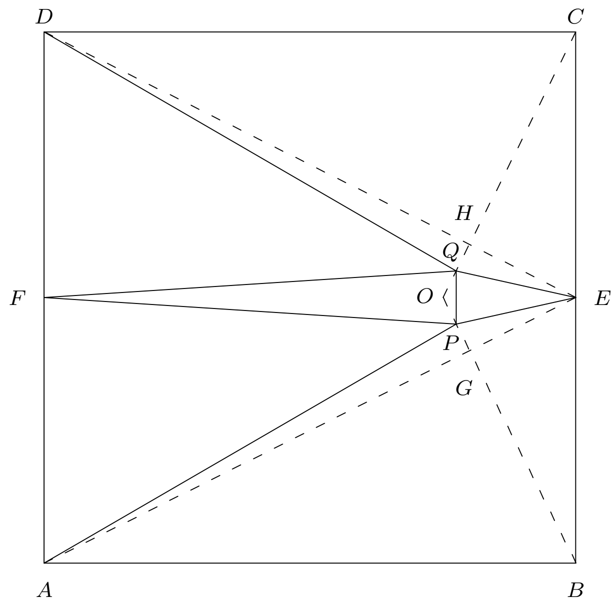
$$\begin{aligned}\angle APB &= \angle APF = \angle BPE = \angle CQD \\ &= \angle CQE = \angle DQF = 80^\circ\end{aligned}$$

$$\angle PAB = \angle PBA = \angle QCD = \angle QDC = 50^\circ$$

$$\angle PAF = \angle PBE = \angle QCE = \angle QDF = 40^\circ$$

och trianglarna PEQ och PFQ är liksidiga.

En modifikation av ovanstående konstruktion kan också användas för en kvadrat. Låt $ABCD$ vara en kvadrat och låt E och F vara mittpunkterna på sidorna BC och AD.



Drag sträckorna AE och DE och konstruera från hörnen B och C normalerna mot AE respektive DE. Låt fotpunkterna vara G respektive H och låt normalernas skärningspunkt vara O. Låt P och Q vara mittpunkterna på sträckorna GO respektive HO och konstruera de åtta trianglarna

$$\triangle APB \simeq \triangle DQC,$$

$$\triangle BPE \simeq \triangle CQE$$

$$\triangle APF \simeq \triangle DQF$$

$$\triangle QPE, \quad \text{och} \quad \triangle QPF.$$

I triangeln APB är, enligt yttervinkelsatsen, yttervinkeln

$$\angle OPA = \angle PAB + \angle GBA > \angle GAB + \angle GBA = 90^\circ.$$

Alltså är de två kongruenta trianglarna APB och DQC spetsvinkliga. Analogt är yttervinkeln OPE till triangeln BPE trubbig och de kongruenta trianglarna BPE och CQE är spetsvinkliga.

Eftersom punkten P ligger utanför cirkeln med diametern AF är vinkeln APF spetsig och de kongruenta trianglarna APF och DQF är spetsvinkliga.

I de likbenta trianglarna QPE och QPF är toppvinklarna PEQ och PFQ båda mindre än $\angle AED < 90^\circ$ och därför är även dessa trianglar spetsvinkliga.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson