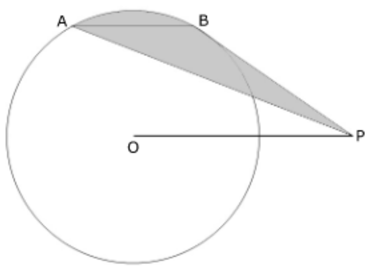
Högstadiets matematiktävling 2010/11
Finaltävling 22 januari 2011

Skrivtid: $9^{00} - 12^{00}$
Motivera alla lösningar väl. Lämna in allt du kommer fram till, även dellösningar.
OBS! Lös varje uppgift på ett separat blad! Skriv läsligt!
Varje lösning ger 0 – 7 poäng.
Lycka till!

1. Föregående års årtal 2010 har egenskapen att vara delbart med tre på varandra följande primtal. När hade vi innan dess senast ett årtal som var delbart med tre på varandra följande primtal?

2. I en cirkel med radie r dras en linje från mittpunkten O till en punkt P utanför cirkeln. Därefter markeras två punkter A och B på cirkelns periferi på så sätt att AB har längden r samt är parallell med OP. Bestäm den skuggade arean.



Figur 1: Problem 2

3. På ett papper står fem olika positiva heltal, med egenskapen att hur man än väljer två av talen så delar det ena talet det andra. Summan av de fem talen är ett primtal. Visa att ett av talen är 1.

4. En stor kub byggs ihop av åtta tärningar. På varje tärnings sex sidor finns siffrorna $3, 3, 4, 4, 5, 5$ så att varje par står mittemot varandra. Varje tärning får roteras hur som helst innan den stora kuben byggs. I den stora kuben får sedan varje sida värdet av summan av de fyra tärningssidor som utgör kubens sida. Visa att värdena av den stora kubens sidor aldrig kan bli sex på varandra följande heltal.

5. En parallellogram $ABCD$ har arean 12. Punkten P ligger på diagonalen AC. Arean av triangeln ABP utgör en tredjedel av hela parallellogrammens area. Bestäm arean av triangeln CDP.

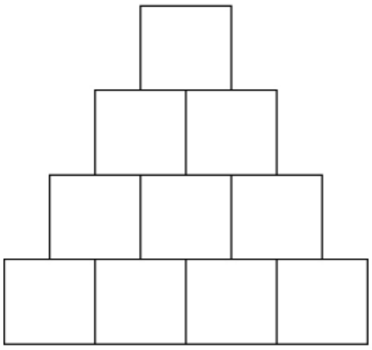
Var god vänd!

6. Tio tal placeras i rutorna i figuren nedan enligt följande två regler:

   (a) För två intilliggande rutor i nedre raden gäller att talet i rutan till höger är två gånger talet i rutan till vänster.

   (b) Ett tal i en ruta ovanför den understa raden är summan av talen i de två intilliggande rutorna närmast under den.

   Vilket är det minsta positiva heltal som kan placeras i den understa radens vänstra ruta så att summan av alla tio talen är ett kvadrattal?



Figur 2: Problem 6