Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 20 november 1977

1. p är ett primtal och $p^4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p^4$. Vilket är det största heltalet d för vilket $p^4!$ har heltalsfaktorn p^d?

2. P är en punkt inuti den liksidiga triangeln ABC sådan att PA, PB och PC är 3, 4 resp. 5 längdenheter. Hur lång är triangelns sida?

3. Låt n vara ett he1tal. Visa att de enda heltalslösningarna till

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 3n^2 - 1 \\ x + y + z = 3n \\ x \geq y \geq z \end{cases}$$

   är $x = n + 1$, $y = n$, $z = n - 1$.

4. Visa att om

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = -1$$

   så gäller

$$\frac{\cos^3\beta}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\beta}{\sin\alpha} = 1.$$

5. Talen $1, 2, 3, \ldots, 64$ fördelas på de 64 rutorna i ett schackbräde. Detrakta alla delkvadrater med två rutors sida. Bevisa att det alltid finns minst 4 sådana kvadater för vilka summan av de i kvadraten stående 4 talen är större än 100.

6. Visa att det finns positiva tal a, b, c sådana att

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 > 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 < 2 \\ a^4 + b^4 + c^4 > 2 \end{cases}.$$