Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 24 november 1968

1. Bestäm det största och det minsta värde som $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ kan antaga om x, y och z är tre reella tal som satisfierar relationen
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

2. Hur många olika tärningar finns det? (Med en tärning menas en kub vars sidor numrerats med 1, 2, $\ldots$, 6. Två tärningar betraktas som lika om de kan placeras så att kuberna är “parallella” och därvid visar samma nummer uppåt, nedåt, bakåt, framåt, åt höger och åt vänster.)

3. Visa, att summan av kvadraterna på sidorna i en plan fyrhörning är större än eller lika med summan av kvadraterna på diagonalerna. Undersök även för vilka fyrhörningar likhet gäller.

4. Låt M vara en mängd som består av $n \geq 2$ positiva heltal. För varje heltal $h \neq 0$ definieras $f(h)$ som exponenten i den största dignitet av 3 som går jämnt upp i h. Vi bildar $f(x - y)$ för alla möjliga par av tal x och y i M med $x \neq y$. Bevisa att antalet olika värden av $f(x - y)$ ej är större än $n - 1$.

5. Låt a_1 och a_2 vara hela tal som bägge är skilda från 0. Det minsta värdet av funktionen $f(x) = \cos a_1 x + \cos a_2 x$ betecknas med $m(a_1, a_2)$.

   a) Visa, att $m(a_1, a_2) < 0$

   b) Visa, att det finns ett reellt tal b sådant att $m(a_1, a_2) \leq b < 0$ för alla a_1 och a_2 som bägge är $\neq 0$.