Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 25 november 1962

1. Beteckna gradtalet av $f(x)$ med n. Om $n < 2$ är $f''(x) \equiv 0$. I detta fall är $f(x) \equiv 0$ den enda lösningen till problemet. Om $n \geq 2$ är gradtalen av $f'(x)$ och $f''(x)$ lika med $n-1$ resp. $n-2$, medan $f(2x)$ är ett polynom i x av graden n. Vi får därför $n = 2n - 3$ d.v.s. $n = 3$.
   Man ansätter nu $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$, och får ur

   $$8a_3x^3 + 4a_2x^2 + 2a_1x + a_0 = (3a_3x^2 + 2a_2x + a_1)(6a_3x + 2a_2)$$

   genom utförande av multiplikationen och identifiering av koefficienterna ett ekvationssystem. Ur $a_3 \neq 0$ följer att detta ekvationssystem har den enda lösningen $a_3 = 4/9$, $a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Polynomet $f(x)$ är alltså antingen nollpolynomet eller också $4x^3/9$.

2. Beteckningar enligt fig. 1. På kvadratsidan P_1P_4 är A det hörn, som ligger närmast P_1. Den omskrivna cirkelns radie är R, och ytan av triangeln ABC är $T = c/2$. Formeln $R = abc/(4T)$ ger $R = ab/2$. Nu är $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ och $1 \leq b \leq \sqrt{2}$, varför $\frac{1}{2} \leq R \leq 1$. Värdena $R = \frac{1}{2}$ och $R = 1$ kan inte antas, men R kan komma godtyckligt nära dem. Om man lägger cirkeln genom punkterna $B = P_4$, $C = P_2$ och väljer A nära P_4 (jfr fig. 4), blir R nära 1 och man kan på detta sätt få R hur nära 1 som helst. Flyttar man C till P_3 blir radien nära $\frac{1}{2}$. Den omskrivna cirkelns radie R varierar i intervallet $\frac{1}{2} < R < 1$.

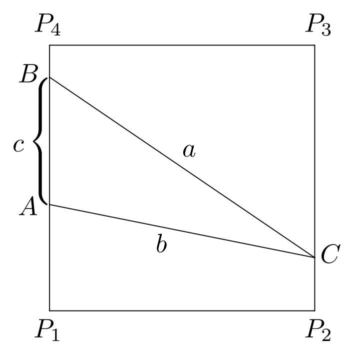
   

   fig. 1

   I fig. 2–4 antydes ett mera geometriskt resonemang, genom vilket man fastställer hur stor R kan vara.

   fig. 2

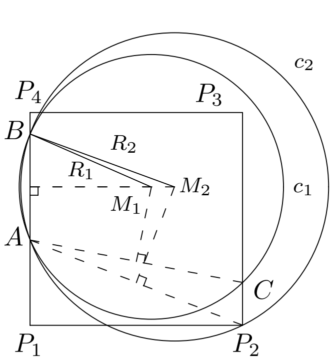
   

   fig. 3

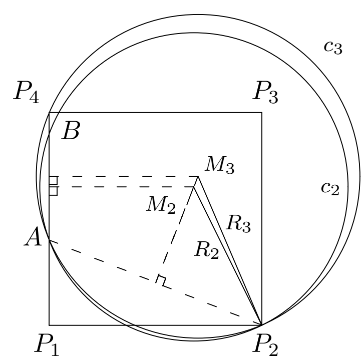
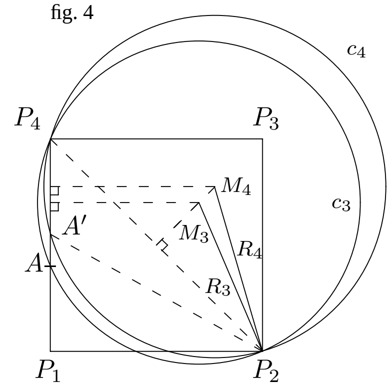
   

   fig. 4

   Cirkeln c_1 går genom punkterna A, B och C, som är valda enligt föreskrifterna men för övrigt godtyckligt. Cirkeln c_2 går genom A, P_2 och B, cirkeln c_3 genom A, P_2 och P_4 och c_4 slutligen genom $A', T\ P_2$ och P_4, där A' ligger över A. Medelpunkten av cirkeln c_k är M_k och den omskrivna cirkelns radie är R_k, $k = 1$, 2, 3, 4. Det följer ur de angivna konstruktionerna med mittpunktsnormaler att

   $$R_1 \leq R_2 \leq R_3 \leq R_4 < 1.$$

   R_4 kan komma hur nära 1 som helst.

3. Många metoder för lösning finns. Vi ger följande: om $y = 0$ är $x = 0$ den enda lösningen och vi får alltså paret (0,0). Förutsätt nu att $y \neq 0$. Vi kan skriva

   $$x = y(1 + 3x - y),$$

vilket visar att $x = ay$, där a är ett heltal. Insättning i den ursprungliga ekvationen ger

$$y^2(1-3a) + y(a-1) = 0,$$

d.v.s. eftersom $y \neq 0$ att

$$y(1-3a) = 1-a. \tag{1}$$

Talet $1-3a$ måste alltså dela talet $1-a$. Härav följer att $1-3a$ också måste dela $3(1-a)$ och således också

$$3(1-a) - (1-3a) = 2.$$

Följande möjligheter för talet $1-3a$ finns därför: 1, $-1, 2$, -2.
Endast den första och den sista ger heltaligt a, nämligen $a = 0$ resp. $a = 1$. Insättning av $a = 0$ i (1) ger $y = 1$ och insättning av $a = 1$ ger $-2y = 0$, vilket är omöjligt, eftersom $y \neq 0$. Eftersom $x = ay$ får vi paret (0,1), som satisfierar den ursprungliga ekvationen. Lösningarna är alltså (0,0) och (0,1).

4. Alla tre påståendena är falska.

a) Inget av de två påståendena i a) är en följd av det andra. Tre linjer, som ligger i ett plan, behöver inte skära varandra parvis. De kan nämligen vara parallella och olika. Tre linjer, som skär varandra parvis, behöver inte ligga i ett plan. Man kan t.ex. välja de tre linjerna som tre kantlinjer i en kub, vilka utgår från samma hörn.

b) Vi bevisar att b) är falskt på två sätt.

Bevis I : Låt n vara ett naturligt tal och undersök hur många av talen $\leq n$, som kan skrivas som en summa av fjärdepotenser av icke-negativa heltal. Vi observerar först att det finns högst $n^{1/4} + 1$ fjärdepotenser, som är $\leq n$.
Men om $a^4 + b^4 \leq n$ måste gälla såväl $a^4 \leq n$ som $b^4 \leq n$. Härav följer att antalet möjligheter att välja a och b så att $a^4 + b^4 \leq n$ högst blir $(n^{1/4} + 1)^2$.
Antag nu att alla tal $\geq N$ skulle kunna representeras i den angivna formen. Vi väljer $n \geq N$ och finner att bland talen 1, 2, $\ldots$, n skulle minst $n - N + 1$ kunna representeras, d.v.s. att

$$n - N + 1 \leq (n^{1/4} + 1)^2 = n^{1/2} + 2n^{1/4} + 1 \leq 4n^{1/2}$$

för alla $n \geq N$.
Om vi dividerar med n och låter $n \to \infty$ får vi en motsägelse.

Bevis II : Det går inte ens att framställa varje tal $\geq$ ett lämpligt valt tal N som summan av två *kvadrater*. Ty kvadraten $(2m)^2$ av ett jämnt tal ger vid division med 4 resten 0 och kvadraten $(2m-1)^2 = 4(m^2 - m) + 1$ av ett udda tal ger resten 1.
Ett tal av formen $a^2 + b^2$ ger därför vid division med 4 en av resterna $0 = 0 + 0$, $1 = 1 + 0 = 0 + 1$ eller $2 = 1 + 1$. Inget tal av formen $4s + 3$ kan därför framställas i formen $a^2 + b^2$ och alltså ej heller i formen $a^4 + b^4$.

c) Vi ger två bevis för att det inte finns sådana tal a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Bevis I : Sätt

$$f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx > 0$$

och bilda

$$I = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Uträkning ger att $I = 0$. Om f är positiv, är emellertid $I > 0$. Ur denna motsägelse följer påståendet.

Bevis II: Betrakta naturliga tal n, sådana att det finns en funktion

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx,$$

som är > 0 för alla x.
Antag att n_1 är ett sådant tal och kalla motsvarande funktion $f(x)$. Då är

$$0 < f(\pi/2 + x) + f(\pi/2 - x) = 2\sum_{k=1}^{n_1} a_k \cos(k\pi/2)\cos kx.$$

Här faller alla termer med udda index k bort och vi får

$$0 < \sum_{m=1}^{n_2} (-1)^m a_{2m} \cos 2mx,$$

där $n_2 \le n_1/2 < n_1$. Men om vi ersätter x med $x/2$ får vi

$$0 < \sum_{m=1}^{n_2} (-1)^m a_{2m} \cos mx$$

för alla x, $n_2 < n_1$. Man kan alltså konstruera en avtagande svit av naturliga tal med den angivna egenskapen. Till slut skulle vi få en funktion

$$a_1 \cos x > 0 \text{ för alla } x,$$

vilket är omöjligt.

5. För beteckningar se fig. 5. M är medelpunkten i kuben och T mittpunkten på QR. Tetraederns höjd är $\sqrt{2/3}$. Den i tetraedern inskrivna sfärens radie bestäms lätt till $1/(2\sqrt{6})$. Om M placeras i tetraederns tyngdpunkt och man väljer a så att

$$MA = a\sqrt{3}/2 \le 1/(2\sqrt{6})$$

kan alla vridningar utföras. Detta ger

$$a \le 1/\sqrt{18} \approx 0,236.$$

fig. 5

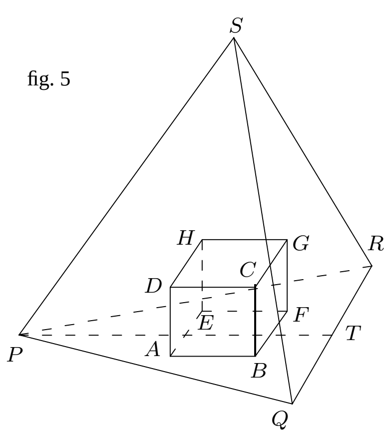


fig. 6

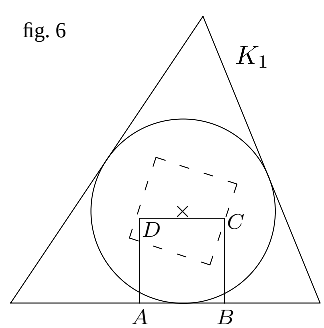
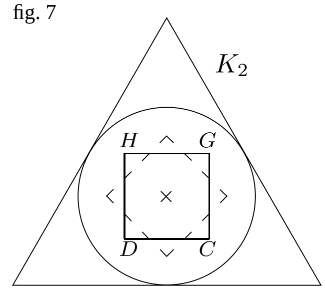


fig. 7



För att skaffa oss ett bättre (=större) värde på a placerar vi kuben som i fig. 5 med sidoytan $ABFE$ på tetraederns basyta PQR, låter BF vara parallell med QR och lägger M i planet PTS. Planet genom $ABCD$ skär tetraedern i en likbent triangel K_1 (se fig. 6), som är likformig med triangeln PTS i skalan

$$(1/2 - a/2)/(1/2) = 1 - a.$$

Den i triangeln PTS inskrivna cirkelns radie beräknas till $1/(\sqrt{2} + \sqrt{6})$, och det följer att den i K_1 inskrivna cirkeln har radie $(1-a)/(\sqrt{2}+\sqrt{6})$. Vi väljer a så att

$$AC/2 = a/\sqrt{2} \le (1-a)/(\sqrt{2}+\sqrt{6}).$$

Detta ger $a \leq 2-\sqrt{3} \approx 0,268$. Om $a = 2-\sqrt{3}$ kan man genom parallellförflyttningar och rotationer flytta kuben, så att vilken som helst av dess sidoytor utom $ABCD$ och $EFGH$ kommer att vila på basplanet. Vi placerar nu kuben på basplanet med M rakt under S och undersöker om det går att rotera den kring en lodrät axel genom M. Lyckas detta kan alla kubens sidoytor bringas att vila på basplanet. Vi betraktar därför den liksidiga triangel K_2 (se fig. 8), som uppkommer genom skärning av tetraedern med planet genom $DCGH$ (se fig. 5). Triangeln K_2 är likformig med PQR i skalan $(\sqrt{2/3}-a)/\sqrt{2/3}$ och den inskrivna cirkelns radie är

$$(\sqrt{2/3}-a)/2\sqrt{2}.$$

Vi undersöker nu för vilka värden på a det gäller att

$$DG/2 = a/\sqrt{2} \leq (\sqrt{2/3}-a)/2\sqrt{2}$$

och finner $a \leq \sqrt{6}/9 \approx 0,273$.
Eftersom $2-\sqrt{3} < 0,273$ finner vi av ovanstående att om vi väljer $a = 2-\sqrt{3}$ så är fordringarna i problemet uppfyllda.
Då kvadratema $ABCD$ och $DCGH$ roterar i trianglarna K_1 resp. K_2 kommer aldrig tre hörn i någon kvadrat att samtidigt ligga på tre triangelsidor. Detta skulle nämligen innebära att två motstående hörn i en kvadrat låg på två triangelsidor, vilka i så fall vore parallella. Härav följer att det angivna värdet på a kan ökas ytterligare.
Som jämförelse kan nämnas att vi måste ha $a < 0,297$ för att kuben över huvud taget skall få rum innanför tetraedern.

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet