Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 9 oktober 1980

1. Kalla det ena ljusets längd a, det andras längd b. Efter 2 timmar har av det ena ljuset brunnit en del med längd $\frac{2}{7/2}a = \frac{4}{7}a$ och av det andra ljuset en del med längd $\frac{2}{5}b$. De återstående längderna är alltsa $\frac{3}{7}a$ respektive $\frac{5}{5}b$. Då dessa skall vara lika, får vi $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$.

2. Vi räknar först antalet primfaktorer 5 i 1980!. Låt $1 \le n \le 1980$. Talet n är delbart med 5 då n är något av talen
$$5, 10, 15, \ldots, 1980 \quad \text{dvs i} \quad \frac{1980}{5} = 396 \text{ fall.}$$
Talet n är delbart med 25 då n är något av talen
$$25, 50, 75, \ldots, 1975 \quad \text{dvs i} \quad \frac{1975}{25} = 79 \text{ fall.}$$
Talet n är delbart med 125 då n är något av talen
$$125, 250, 375, \ldots 1875 \quad \text{dvs i} \quad \frac{1875}{125} = 15 \text{ fall.}$$
Talet n är delbart med 625 då n är något av talen
$$625, 1250, 1875 \quad \text{dvs i} \quad 3 \text{ fall.}$$
1 396 fall fås alltså en faktor 5, i 79 av dessa tillkommer en andra faktor 5, i 15 av dessa tillkommer ytterligare en faktor 5 och i 3 fall finns ännu en faktor. Antalet faktorer 5 i 1980! är därför 396+79+15+3=493. Då varje jämnt tal bidrar med minst en faktor 2 innehåller 1980! minst 990 faktorer 2. Alltså slutar 1980! med 493 nollor.

3. Använd potenslagarna och utnyttja första ekvationen:
$$(2x)^{y^2} = 2^{y^2}x^{y^2} = 2^{y^2}\,(x^y)^y = 2^{y^2}2^y = 2^{y^2+y}.$$
Andra ekvationen ger därför
$$2^{y^2+y} = 2^6, \qquad y^2 + y = 6, \qquad y = 2 \quad \text{eller} \quad y = -3.$$
För $y = 2$ får vi
$$x^2 = 2, \qquad x = 2^{1/2} \qquad \left(= \sqrt{2}\right)$$
och för $y = -3$ får vi
$$x^{-3} = 2, \qquad x = 2{-}1/3 \qquad \left(= 1/\sqrt[3]{2}\right).$$

4. Låt $x = p/q$ vara en rot där p och q är heltal. Vi kan anta att minst en av p och q är udda (då vi annars kan förkorta med 2). Insättning i ekvationen ger
$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0.$$
Antag nu att a, b, c alla vore udda. Då kan inte både p och q vara udda, eftersom ekvationen ovan skulle innebära att summan av tre udda tal vore $= 0$. Om exempelvis p är jämn visar ekvationen ovan att även cq^2 ar jamn i strid mot antagandena (c udda, p och q inte båda jämna). Motsvarande gäller om q är jämn. Alltså måste minst en av a, b, c vara jämn.

5. Antag att man köper n hönor och betalar y kr för kycklingen. Då skall $x^2 = 12n + y$. På grund av vad som sägs i problemet måste vi ha $1 \leq y \leq 11$ och n udda.
Eftersom $(x+12)^2 = x^2 + 12(2x+12)$ är det klart att två x-värden som har skillnaden 12 ger samma y-värde och samma paritet på n. Vi behöver därför endast undersöka $x = 1, \ldots, 12$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
n	0	0	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12
y				4		0		4				

Detta ger enda möjliga lösningen $y = 4$.

6. Lägg in kvadraten i första kvadranten i ett koordinatsystem så att ett av kvadratens hörn kommer i origo. Låt de två delningslinjernas skärningspunkt vara (x, y).
C har arean xy.
A har arean $(1-x)(1-y)$.
B och D har tillsammans arean $T = x(1-y) + y(1-x) = x + y - 2xy$.
Av symmetriskäl räcker det att betrakta $\frac{1}{2} \leq x < 1$. För $x = \frac{1}{2}$ är $T = \frac{1}{2}$. Det återstår $\frac{1}{2} < x < 1$.
Låt $a > 0$.

Om både $xy < a$ och $x + y - 2xy < a$ har vi

$$y < \frac{a}{x} \quad \text{och} \quad y > \frac{x-a}{2x-1}.$$

Detta är endast möjligt om

$$\frac{a}{x} > \frac{x-a}{2x-1}, \qquad x^2 - 3ax + a < 0$$

$$\left(x - \frac{3a}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}a^2 - a.$$

Detta kan aldrig inträffa om

$$a\left(\frac{9}{4}a - 1\right) \leq 0$$

vilket gäller för $a \leq \frac{4}{9}$.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner