Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final 14 november 1982

1. Lät N vara ett positivt heltal. Hur många lösningar har ekvationen

$$x^2 - \left[x^2\right] = (x - [x])^2$$

i intervallet $1 \leq x \leq< N$? ($[x]$ är heltalsdelen av x, dvs det största heltal som är $\leq x$.)

2. Låt a, b och c vara positiva tal. Visa att

$$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

3. Anta att man i det inre av en fyrhörning $ABCD$ kan finna en punkt P sådan att de fyra trianglarna PAB, PBC, PCD, PDA får samma area. Visa att P då måste ligga på en av diagonalerna AC och BD.

4. I triangeln ABC är $AB = 33$ cm, $AC = 21$ cm och $BC = m$ cm, där m är ett heltal. Man kan finna punkter D på sidan AB och E på sidan AC sådana att $AD = DE = EC = n$ cm, där n är ett heltal. Bestäm m.

5. I ett rätvinkligt koordinatsystem betraktas punkterna (x, y) för vilka x och y är heltal och $1 \leq x \leq 12$, $1 \leq y \leq 12$. Var och en av dessa 144 punkter färgas i någon av färgerna röd, vit eller blå. Visa att man alltid kan välja ut 4 punkter med samma färg så att de bildar hörnen i en rektangel vare sidor är parallella med axlarna.

6. Visa att

$$(2a - 1)\sin x + (1 - a)\sin(1 - a)x \geq 0$$

om $0 \leq a \leq 1$ och $0 \leq x \leq \pi$.