Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 18 november 1989

1. Sätt $b = n^2 + 1$. Då är $b \geq 2$ och

$$\begin{aligned} n^2(n^2+2)^2 &= (b-1)(b+1)^2 \\ &= b^3 + b^2 - b - 1 \\ &= b^3 + (b-2)b + b - 1 \\ &= (1\ \ 0\ \ b-2\ \ b-1)_b \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} (b-1\ \ b-2\ \ 0\ \ 1)_b &= (b-1)b^3 + (b-2)b^2 + 1 \\ &= b^4 - 2b^2 + 1 \\ &= (b^2-1)^2 \\ &= (b-1)^2(b+1)^2 \\ &= n^4(n^2+2)^2. \end{aligned}$$

Alltså har de två talen samma siffror men med motsatt ordning.
Svar: I basen $n^2 + 1$ har talet $n^2(n^2+2)^2$ siffrorna 1 0 $n^2 - 1$ och n^2, talet $n^4(n^2+2)^2$ siffrorna n^2 $n^2 - 1$ 0 och 1.

2. Funktionen är jämn, ty $f(-x) = -f((-x)^2) = -f(x^2) = f(x)$, och det räcker att bestämma f för $x \geq 0$. Nu ger $x = 0$ och $x = 1$ att $2f(0) = 0 = 2f(1)$. Med induktion visar man att

$$f(a^{4^n}) = f(a),\ \text{för } n = 0, 1, \cdots.$$

För $n = 0$ är båda leden lika. För $n = 1$ följer likheten av funktionalekvationen:
$f(a^4) = -f(a^2) = f(a)$. Antag att likheten gäller för givet $n > 1$. Då gäller även

$$f(a^{4^{n+1}}) = f((a^{4^n})^4) = f(a^{4^n}) = f(a),$$

varmed induktionssteget är gjort. Enligt induktionsprincipen gäller identiteten för alla $n \geq 0$.
Ersätts a med $x^{\frac{1}{4^n}}$, där $x > 0$ är fix, får man identiteten

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{4^n}}),\ \text{för } n = 0, 1, \cdots.$$

Nu gäller för $x > 0$ att $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{4^n}} = x^0 = 1$ och då funktionen f är kontinuerlig följer att

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{4^n}}) = f(1) = 0,$$

som visar att f är nollfunktionen.
Svar: Nollfunktionen.

3. Binomialkomplettering ger

$$p(n) = n^3 - 18n^2 + 115n - 391 = (n-6)^3 + 7(n-25),$$

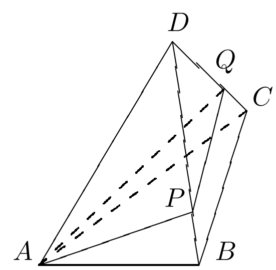
som visar att p är växande. Då $p(10) = -41$ kan $p(n)$ inte vara kuben på ett positivt heltal om $n \leq 10$. Nu är $p(11) = 27 = 3^3$ och $p(12) = 125 = 5^3$. För $12 < n < 25$ är $(n-7)^3 < p(n) < (n-6)^3$ (vänstra olikheten är ekvivalent med $(3n+4)(n-12) > 0$, högra uppenbar). Då kan inte $p(n)$ vara kuben på ett positivt heltal om $12 < n < 25$. För $n = 25$ är $p(25) = 19^3$. Slutligen, om $n > 25$ så är $(n-6)^3 < p(n) < (n-5)^3$. Här är den vänstra olikheten uppenbar. Den högra kan man visa så här:

$$\begin{aligned} n \geq 8 \quad &\Rightarrow \quad 4(n-6) < 3(n-6)^2 \\ &\Rightarrow \quad p(n) = (n-6)^3 + 7(n-25) \\ &< \quad (n-6)^3 + 4(n-6) + 3(n-6) \\ &< \quad (n-6)^3 + 3(n-6)^2 + 3(n-6) + 1 = (n-5)^3. \end{aligned}$$

Det finns inget $n > 25$ sådant att $p(n)$ är kuben på ett positivt heltal.

Svar: $n = 11$, 12 och 25.

4. Antag att kantlängden är 1, och att sfären tangerar CD i punkten Q. Sätt $|BP| = x$ och $|DQ| = y$.



Cosinussatsen i $\triangle ABP$, $\triangle ADQ$ och $\triangle DPQ$ ger

$$\begin{aligned} |AP|^2 &= 1 + x^2 - x \\ |AQ|^2 &= 1 + y^2 - y \\ |PQ|^2 &= (1-x)^2 + y^2 - (1-x)y. \end{aligned}$$

Nu är AP diameter i en storcirkel som går genom Q, varför $\angle PQA$ är rät och $|AP|^2 = |AQ|^2 + |PQ|^2$. Insättning av uttrycken för $|AP|^2$, $|AQ|^2$ och $|PQ|^2$ ger efter förenkling $2y^2 + (x-2)y + 1 - x = 0$. Om det finns två olika rötter till denna andragradsekvation kommer sfären att skära kanten CD två gånger. Tangering får man alltså då och endast då ekvationen har dubbelrot, dvs då och endast då $(x+2)^2 - 8 = 0$. Enda positiva lösning till denna ekvation är $x = 2(\sqrt{2} - 1)$, som är mindre än 1 och som ger $y = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2} < 1$.

Svar: Punkten P ska väljas så att $\dfrac{|BP|}{|BD|} = 2(\sqrt{2} - 1)$.

5. För $x_4, x_5 > x_2$ gäller

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x_2+x_5)^\alpha} - \frac{1}{(x_4+x_5)^\alpha} &= \frac{1}{(x_4+x_5)^\alpha}\left(\left(\frac{x_4+x_5}{x_2+x_5}\right)^\alpha - 1\right) \\ &= \frac{1}{(x_4+x_5)^\alpha}\left(\left(1 + \frac{x_4-x_2}{x_2+x_5}\right)^\alpha - 1\right) \\ &< \frac{1}{(x_4+x_2)^\alpha}\left(\left(1 + \frac{x_4-x_2}{x_2+x_2}\right)^\alpha - 1\right) \\ &= \frac{1}{(x_4+x_2)^\alpha}\left(\left(\frac{x_4+x_2}{x_2+x_2}\right)^\alpha - 1\right) \\ &= \frac{1}{(2x_2)^\alpha} - \frac{1}{(x_2+x_4)^\alpha}. \end{aligned}$$

Dessutom gäller för $x_3 > x_2 > x_1$ att

$$\frac{1}{(x_1+x_3)^\alpha} - \frac{1}{(x_2+x_3)^\alpha} = \frac{1}{(x_2+x_3)^\alpha}\left(\left(\frac{x_2+x_3}{x_1+x_3}\right)^\alpha - 1\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x_2+x_3)^\alpha}\left(\left(1+\frac{x_2-x_1}{x_1+x_3}\right)^\alpha - 1\right) \\
&< \frac{1}{(2x_2)^\alpha}\left(\left(1+\frac{x_2-x_1}{x_1+x_2}\right)^\alpha - 1\right) \\
&= \frac{1}{(2x_2)^\alpha}\left(\left(\frac{2x_2}{x_1+x_2}\right)^\alpha - 1\right) \\
&= \frac{1}{(x_1+x_2)^\alpha} - \frac{1}{(2x_2)^\alpha}.
\end{aligned}
$$

Addition av dessa två olikheter ger den efterfrågade olikheten.

6. Antag att två gula sträckor AB och CD skär varandra. Ersätt då dessa sträckor med sträckorna AC och BD. En sträcka (skild från AB och CD) som endast skär den ena diagonalen i fyrhörningen $ACBD$ skär precis en av sidorna AC eller BD. En sträcka som skär båda diagonalerna skär antingen båda sidorna AC och BD eller båda sidorna AD och BC. Operationen att ersätta två skärande gula sträckor med två icke skärande gula sträckor leder alltså till att antalet skärningspunkter mellan gula sträckor minskar med ett udda antal medan antalet skärningspunkter mellan blå och gula sträckor minskar med ett jämnt antal. Efter ett ändligt antal sådana operationer finns inga skärningspunkter mellan gula sträckor och antalet skärningspunkter mellan gula och blå sträckor har inte ökats.
   Om nu AB är en gul sträcka som inte skär någon annan gul sträcka finns på var och en av de båda cirkelbågarna vars ändpunkter är A och B ett jämnt antal gula och ett udda antal blå punkter, varav följer att minst en blå sträcka måste skära AB. Det finns alltså minst lika många skärningspunkter som det finns gula linjer, dvs minst n st.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson