

PYTHAGORAS QUEST



Handelskammaren
I sydsvenska företags intresse

Riksfinal

Del 1: 6 uppgifter Tid: 60 min

Maxpoäng: 18 (3p/uppgift)

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel, ingen miniräknare!

OBS! Skriv varje uppgift på separat papper och lagets namn på samtliga papper.

Fullständiga lösningar krävs till denna del. Endast svar ger inga poäng.

Bordsplacering ... med villkor

Fyra par (en kvinna och en man i varje par) skall äta middag vid ett runt bord. De får inte sitta bredvid en person av samma kön och inte heller bredvid sin partner. Betecknar gästerna med A, a, B, b, C, c, D, d där versalen står för kvinnan.

På hur många *olika* sätt kan de placera sig?

Två placeringar är samma om alla personer har samma två bordsgrannar.

Avslöjad!



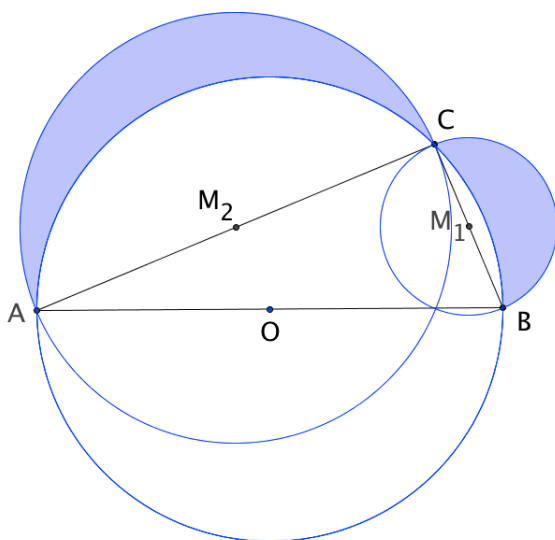
Du har åtta mynt. Sju av dessa mynt har samma värde (och väger samma) medan det finns ett falskt mynt som är lättare än de andra. Beskriv hur du hittar det falska myntet efter två vägningar med balansvåg.

(bildkälla: <http://pixabay.com/en/justice-law-measurement-silhouette-149209/>)

Äpplen?

Tre bröder ska dela på 87 äpplen. Adam tar först ett antal äpplen. Björn tar ett äpple mer än Adam och sedan lika många till. Christoffer får dubbelt så många som Björn och Adam har tillsammans. Hur många äpplen har var och en av bröderna?

Skuggspel med cirklar



Ritar en cirkel med mittpunkt O som går genom punkten B . Dra diametern AB . Sätt ut en punkt C längs med cirkeln. Punkterna M_1 och M_2 är mittpunkter till BC respektive AC . Rita sedan två cirklar, en med mittpunkt M_2 och som går genom C och den andra med mittpunkt M_1 och som går genom C (och B). Vad är den totala arean av den blåskuggade område i figuren ovan om arean av triangeln ABC är 5 areaenheter och vinkeln ACB är rät?

Lars Geometriland

I Geometrilandet har alla barn leksaker som uppfyller följande:

De har en av tre former (kub, klot eller tetraeder)

De består av ett av fyra material (plast, trä, gummi eller porslin)

De har en av fem storlekar (XL, L, M, S eller XS)

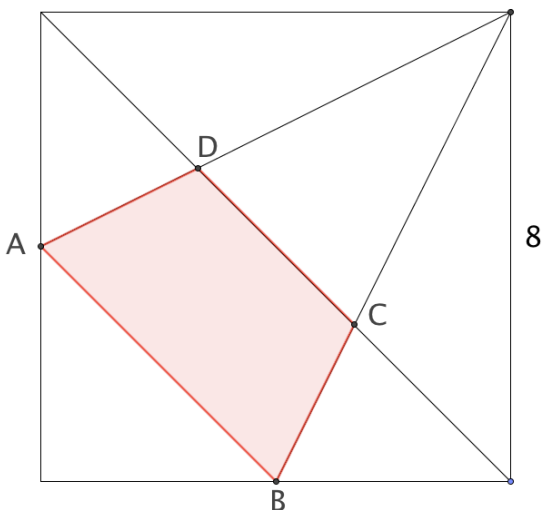
De har en av sex färger (vit, svart, gul, grön, röd eller blå)

Alla möjliga kombinationer finns representerade och alla barn har exakt en leksak av varje sort.

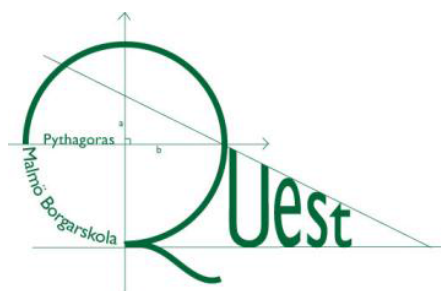
a) Hur många olika leksaker har varje barn?

b) Hur många leksaker är olik en svart XL plastkub på minst 2 sätt?

Triangel i kläm



Betrakta kvadraten till vänster med sida 8. Hur stor area har fyrhörningen $ABCD$ om A och B är sidornas mittpunkter?



PYTHAGORAS QUEST



Handelskammaren
I sydsvenska företags intresse

Riksfinal

Del 2 Tid 30 min, 6 uppgifter

Maxpoäng 12 (2 p/uppgift)

Hjälpmedel: Endast skrivmateriel, ingen miniräknare!

Endast svar krävs på del 2. Dessa lämnas på ett papper med lagnamn på.

Marknadsolycka

En kvinna är på väg till marknaden med sin kärra full av ägg. På vägen stötar hon i en pojke och alla ägg ramlar ut. ”Hur många ägg hade du i kärran?” frågar pojken. Kvinnan svarar ”Jag kommer inte ihåg, men jag kommer ihåg att när jag försökte dela antalet ägg med 2, 3, 4, 5 eller 6 hade jag alltid ett ägg över. Men när jag delade dem med sju så gick det jämnt ut.” Bestäm det minsta antal ägg kvinnan kan ha haft i sin kärra?

Megatalföljd

Betraktar följande talföljd

Rad

1	1, 1
2	8, 8, 8, 8
3	27, 27, 27, 27, 27, 27, 27, 27
4	64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64

Vad blir kvoten av summan av rad 8 och summan av rad 4?

Coola kulor

Det finns röda och blå kulor i en påse. Sannolikheten att dra en blå kula är $\frac{3}{7}$. Om du byter ut 5 röda kulor mot fem blå blir sannolikheten istället att du drar en blå $\frac{4}{7}$.

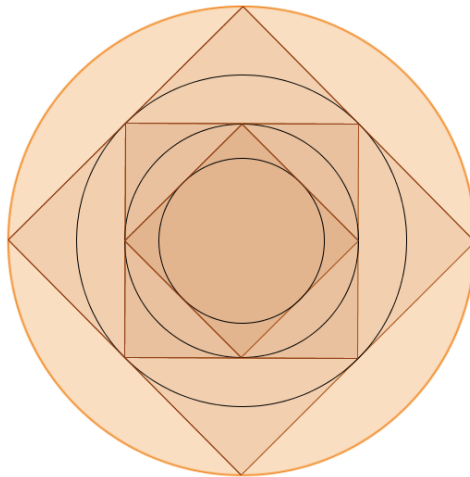
Hur många kulor finns i påsen?

Kapplöpning

Tre löpare, Ulf, Anna och Sam, springer runt en 500m bana. Alla börjar samtidigt, från samma ställe och springer med konstant fart. Hur många varv kommer alla tre att ha sprungit sammanlagt nästa gång alla tre möts på exakt samma ställe om Ulf, Anna och Sams varvtid är 55s, 66s respektive 77s?

Form i en form i en form

Vad är kvoten mellan arean av den innersta cirkel och arean av den yttersta cirkel, om den yttersta cirkeln har radie r ? (se bilden nedan)

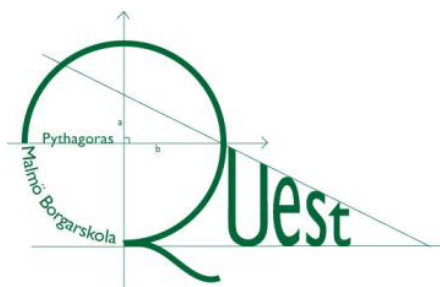


Sannolikhet

Jag kastar två tärningar och antecknar differensen. Vad är sannolikheten

- (a) för att få ett primtal
- (b) för att få ett positivt jämnt tal?

Vilken händelse är därför mer sannolik?



PYTHAGORAS **QUEST**



Del 3 Tid 20 min

Utslagsuppgift

**Denna uppgift skall lösas på kortast möjliga tid. Om två eller flera lag har uppnått samma poäng efter Del 1 och Del 2 avgör denna uppgift placeringen.
Endast svar krävs.**

Dags för konsert!

Hundra elever gick på minst en av tre konserter: Pep Band, Country Sizzle, och Blue Mood.

48 gick på Pep Band konserten

36 gick på Country Sizzle konserten

60 gick på Blue Mood konserten

12 gick både på Pep Band och Country Sizzle konserten

20 gick både på Country Sizzle och Blue Mood konserten

16 gick både på Pep Band och Blue Mood konserten.

Hur många gick på alla tre konserterna?

*Lösningsförslag PQ riksfinal 2014: Del 1***1. Bordsplacering**

Det finns 6 möjliga bordsplaceringar.

1. -AcBdCaDb-
2. -AdBaCbDc-
3. -AdBcDaCb-
4. -AcBaDbCd-
5. -AdCaBcDb-
6. -AbCdBcDa-

2. Avslöjad

Förslag

1:a vägning – Väger 6 mynt. 3 mynt på varje sida av vågen. Om de väger lika, så finns ingen falsk mynt bland de så kan du kastar de. Om de väger olika, tar ut de tre på den sida som är lättare.

2:a vägning – Om du bara har 2 mynt kvar, ställ de på vågen, om den som går upp är den lättare. Om du har tre mynt kvar, sätt en mynt på varsin sida om vågen. Om väger är i jämvikt, så vet du att den som du inte la på vågen är falsk, annars är myntet på den sida som går upp den falska.

3. Äpplen

A:s äpplen = a

B:s äpplen = $2(a+1)$

C:s = $2(2(a+1)+a)$

$A + B + C = 87$

$a + 2a + 2 + 2(3a+2) = 87$

$9a + 6 = 87$

$a = 9$

A:s äpplen = 9

B:s äpplen = 20

C:s äpplen = 58

4. Skuggspel med cirklar

Kallar AC för a , BC för b och AB för c . Pythagoras sats ger

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Area av skuggade området = $0.5 \cdot \text{Area av cirkel med mittpunkt } M_2 + 0.5 \cdot \text{area av cirkeln med mittpunkt } M_1 - 0.5 \cdot \text{area av den cirkel med mittpunkt } O + 5$ (area av triangel ABC)

$$= 0.5\pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4} \right) + 5$$

$$= \frac{\pi}{8} (a^2 + b^2 - c^2) + 5$$

$$= \frac{\pi}{8} (c^2 - c^2) + 5 = 5$$

5. Lars Geometriland

a) $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$

b) Antal (använd komplementet) = $360 - \text{de som är identiska} - \text{de som är olika på ett sätt}$

$$A = 360 - 1 - 14 = 345$$

6. Triangel i kläm

Från Pythagoras sats får vi att basen i den stora triangeln $AB = 4\sqrt{2}$

Och från pythagoras fås höjden i triangel med bas AB till $6\sqrt{2}$.

Topptriangeln med bas CD har höjd $4\sqrt{2}$ vilket gör att areaskalan mellan topptriangeln med bas

CD och triangeln med bas AB är $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Arean av det skuggade fyrkanten är nu

$$= \text{area av triangel med bas AB} - \text{area av triangel med bas CD}$$

$$= 0.5 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} - \frac{4}{9} \cdot 0.5 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}$$

$$= 24 \left(1 - \frac{4}{9} \right) = \frac{40}{3}$$

Svar: 40/3

*Lösningsförslag PQ riksfinal 2014: Del 2***1. Marknadsolycka**

Svar : Det minsta talet som är delbart med 7, men som ger rest 1 när man delar med 2,3,4,5 eller 6 är 301

2. Megatalföljd

$$S_8 = \text{summan av rad 8} = 2^8 8^3 = 2^8 (2^3)^3 = 2^8 2^9 = 2^{17}$$

$$S_4 = \text{summan av rad 4} = 2^4 4^3 = 2^4 (2^2)^3 = 2^4 2^6 = 2^{10}$$

$$S_8/S_4 = 2^{17}/2^{10} = 2^7 = 128$$

3. Kulor

Innan bytet är sannolikheten

$$\frac{3}{7} = \frac{b}{b+r} \quad \text{(I)}$$

där b = antalet blå kulor och r = antalet röda kulor

Efter bytet är den istället

$$\frac{4}{7} = \frac{b+5}{b+r} \quad \text{(II)}$$

Delar ekvation I och II led för led får vi

$$\frac{3}{4} = \frac{b}{b+5}$$

vilket ger

$$3b + 15 = 4b$$

$$b = 15$$

vilket medför att

$$r = 20$$

Svar: 20 röda och 15 blå. D.v.s 35 totalt.

4. Kapplöpning

Det minsta gemensamma multipel av Ulf, Sam och Annas varvtider är $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11$ sekunder. Då kommer de alla träffats på startlinjen igen. Då kommer Ulf ha sprungit $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11 / (5 \cdot 11)$ varv = 42, Anna kommer ha sprungit $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11 / (6 \cdot 11)$ och Sam kommer att ha sprungit $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11 / (7 \cdot 11)$ varv.

Svar: Ulf kommer ha sprungit 42 varv, Anna 35 och Sam 30 d.v.s. totalt 107 varv.

5. Form i en form i en form

Diagonalen av första kvadraten är lika med diametern av det yttersta cirkeln d.v.s. $2r$
Radien av nästa cirkel, r_2 , är hälften av diagonalen av den första kvadraten. Dvs

$$r^2 = r_2^2 + r_2^2 \rightarrow r_2 = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Radien av nästa cirkel, r_3 , är, på liknande vis

$$\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r_3^2 + r_3^2 \rightarrow r_3 = \frac{r}{2}$$

och radien av nästa cirkel, r_4 , är

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 = r_4^2 + r_4^2 \rightarrow r_4 = \frac{r}{\sqrt{8}}$$

Kvoten mellan av arean av det innersta cirkel och det yttersta cirkel är därmed

$$A = \frac{\pi \left(\frac{r}{\sqrt{8}}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{8}$$

Svar: $1/8$

6. Sannolikhet

Utfallsrummet ges av:

Utfall tärning 1	6	5	4	3	2	1	0
	5	4	3	2	1	0	1
	4	3	2	1	0	1	2
	3	2	1	0	1	2	3
	2	1	0	1	2	3	4
	1	0	1	2	3	4	5
		1	2	3	4	5	6
		Utfall tärning 2					

(a) $P(\text{primtal}) = P(2 \text{ eller } 3 \text{ eller } 5) = \frac{16}{36} \text{ eller } \frac{4}{9}$

(b) $P(\text{positiv jämt tal}) = P(2 \text{ eller } 4) = \text{Svar: } \frac{12}{36} \text{ eller } \frac{1}{3}$

Svar: Att få ett primtal är mer sannolikt

Del 3

Dags för konsert!

Lösning: Totalt gick 100 personer på konserterna.

Addera man de som gick på Pep Band, Country Sizzle, och Blue Mood konserterna får man 144. Men då har vi räknat för många. Vi måste ta bort de som gick både på Pep Band och Country Sizzle, de som gick både på Pep Band och Blue Mood och de som gick på både Blue Mood och Country Sizzle.

Kvar har vi 96 personer, men det fattas 4 personer och det är alltså dessa 4 personer som gick på alla tre konserter.

Svar: 4 personer gick på alla tre konserter.