Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 15 oktober 1970

1. Visa att varje heltal större än 7 kan skrivas som $3x + 5y$ där x och y är heltal ≥ 0.

2. Hur många siffror (nollor och ettor) behövs för att skriva talet 10^{100} i 2-systemet?

3.

3	17	7
13	9	5
11	1	15

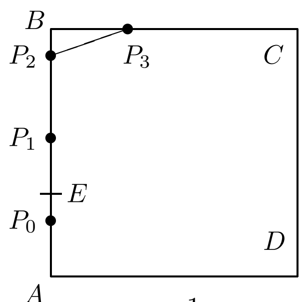
Detta är ett exempel på en magisk kvadrat. Talen i var och en av raderna, kolumnerna och de två diagonalerna har samma summa. Det finns oändligt många olika magiska kvadrater med nio rutor. Bevisa att i varje sådan kvadrat gäller följande: Den ovannämnda summan är tre gånger kvadratens mittersta tal.

4. Visa att polynomet

$$P(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax + a$$

inte för något reellt a kan ha 3 positiva nollställen.

5.



Hörnpunkterna i en kvadrat kallas medurs A, B, C, D. På sidan AB finns punkten E sådan att $|AE| = \frac{1}{3}|AB|$ ($|PQ|$ betecknar längden av sträckan PC). Vi startar i en godtycklig punkt P_0 på sträckan AE och går medurs runt periferin på kvadraten med en serie punkter

$$P_0, P_1, P_2, \ldots$$

så att $|P_iP_{i+1}| = \frac{1}{3}|AB|$, för alla i. Det är klart att om P_0 väljs i A eller E så kommer någon punkt P_i att sammanfalla med P_0.
Händer detta för något annat val av P_0?

6. Låt A, B, C vara vinklarna i en triangel. Visa att

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$