Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 21 november 1971

1. Visa olikheten
$$(1 + a + a^2)^2 < 3(1 + a^2 + a^4)$$
för alla reella $a \neq 1$.

2. Visa att ett godtyckligt antal räta linjer i planet delar detta i områden som kan färgas röda eller blå på sådant sätt, att två grannområden (två områden som har ett linjestycke som gemensam gräns) alltid får olika färg. (Linjerna själva färgas inte.)

3. Ett bord täcks av 15 tidningar. Visa att man alltid kan ta bort 7 av tidningarna på ett sådant sätt att de återstående 8 (i oförändrat 1äge) täcker åtminsone $\frac{8}{15}$ av bordets area. (Tidningarna kan täcka varandra i olika utsträckning, men det anses inte utgöra något praktiskt problem att ta bort en som ligger långt ner. Tidningarna är inte nödvändigtvis lika stora.)

4. Visa att heltalet
$$65533^3 + 65534^3 + 65535^3 + 65536^3 + 65537^3 + 65538^3 + 65539^3$$
är jämnt delbart med
$$32765 + 32766 + 32767 + 32768 + 32768 + 32769 + 32770 + 32771$$
och bestäm kvoten.

5. Låt a vara ett godtyckligt positivt tal. Visa att för varje intervall $I = [-t, t]$, där $0 < t < \frac{\pi}{2}$, gäller att
$$\max_{x \in I} |1 - a \cos x| \geq \tan^2 \frac{t}{2},$$
($\max_{x \in I} |1 - a \cos x|$ betecknar största värdet av $|1 - a \cos x|$ för $-t \leq x \leq t$.)

6. Betrakta en ”kortleköm 99 kort. På varje kort skrivs ett positivt heltal. Dessa tas bland talen $1, 2, \ldots, 99$ (ej nödvändigtvis olika). Antag att hur man än väljer ut en delmängd bland korten, så så får man vid addition av talen på de utvalda korten en summa som inte är delbar med 100. Visa att det då måste stå samma tal på alla korten.