Skolornas Matematiktävling

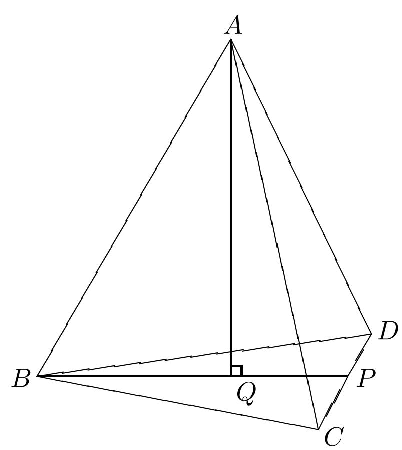
Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 12 oktober 1972

1. Eftersom $n \neq 0$ är
$$(n^2+1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1 > n^4 + n^2 + 1.$$
Alltså är
$$(n^2)^2 < n^4 + n^2 + 1 < (n^2+1)^2.$$
Men n^2 och n^2+1 är två på varandra följande heltal. Alltså kan inte n^4+n^2+1 vara kvadrat på ett heltal.

2. De fyra kulornas medelpunkter utgör hörnen i en regelbunden tetraeder med sidan 2 cm. Tetraederns botten befinner sig 1 cm från marken och dess topp är 1 cm under stenkulepyramidens högsta punkt. Pyramidens höjd är därför 2 cm+tetraederns höjd.
För beteckningar i tetraedern se figuren. Ur triangeln BPC erhålls $|BP| = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ cm. Q är medianernas skär- ningspunkt i triangeln BCD. Härav $|BQ| = \dfrac{2}{3}|BP| = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ cm. Triangeln ABQ ger höjden $\sqrt{4-4/3} = \sqrt{8/3}$ cm.

   Svar: Stenkulepyramidens höjd är $2 + \sqrt{8/3}$ cm.



3. Utnyttja $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Man får
$$\begin{aligned}
&\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x\\
&(1-\sin x)\sin^2 x + (1-\cos x)\cos^2 x = 0\\
&(1-\sin x)(1-\cos^2 x) + (1-\cos x)(1-\sin^2 x) = 0\\
&(1-\sin x)(1-\cos x)(2+\sin x+\cos x) = 0.
\end{aligned}$$
Då den sista parentesen alltid är $\neq 0$ får vi de båda möjligheterna $\sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2k\pi$ och $\cos x = 1$, $x = 2k\pi$.

4. Linjen kan ges i ekvationsform $y = kx+m$ eller $x = a$. Insättning av $y = kx+m$ i den givna likheten ger
$$kzx^2 + (1+k+mz)x + m + z = 0.$$
För att denna ska vara uppfylld för alla punkter på linjen dvs för alla reella x måste
$$\begin{aligned}
&kz = 0\\
&1+k+mz = 0\\
&m+z = 0
\end{aligned}$$
Vi får fallen

1) $k = 0$ $\quad 1 + mz = 0$

$m + z = 0$

med lösningarna $m = 1$, $z = -1$ och $m = -1$, $z = 1$. Detta ger linjerna $y = 1$ och $y - 1$.

2) $z = 0$ $\quad 1 + k = 0$

$m = 0$

med lösningen $k = -1$, $m = 0$. Detta ger linjen $y = -x$.

Genom insättning av $x = a$ får man på motsvarande sätt de båda linjerna $x = 1$ och $x = -1$. Dessa kan man emellertid erhålla från $y = 1$ och $y = -1$ genom att utnyttja symmetrin.

5. Ur $a + x > 0$, $a - x > 0$ erhålls $a + x + a - x > 0$, $2a > 0$. $a > 0$. För $a > 0$ är den sista av de givna olikheterna ekvivalent med

$$a + x + a - x + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2$$
$$2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a \tag{1}$$

Vi har $a > 0$. Om $a^2 - 2a < 0$ dvs om $0 < a < 2$ är olikheten (1) uppfylld exempelvis för $x = 0$ som också satisfierar de två första av de givna olikheterna. Lösningsmängden är alltså inte tom.
Om $a^2 - 2a \geq 0$ dvs om $a \geq 2$ är (1) ekvivalent med

$$4\left(a^2 - x^2\right) > \left(a^2 - 2a\right)^2$$

$$4x^2 < -a^4 + 4a^3.$$

Denna olikhet är uppfylld för något x (exempelvis för x=0) då och endast då $-a^4 + 4a^3 > 0$, dvs då $a < 4$. Lösningsmängden är alltså inte tom dels då $0 < a < 2$, dels då $2 \leq x < 4$, således då $0 < a < 4$.
Alternativ metod. Genom att studera derivatan av

$$f(x) = \sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}$$

då $-a < x < a$, ser man att $f(x)$ är störst då $x = 0$. Om lösningsmängden inte är tom måste därför 0 vara ett element i denna mängd. Det är därför nödvändigt och tillräckligt att de givna olikheterna är uppfyllda för $x = 0$. Detta ger $a > 0$, $2\sqrt{a} > a$, varav $0 < a < 4$.

6. Produkten $a_i a_{i+1}$ är $= 1$ då a_i och a_{i+1} har samma tecken och är 1 då de har olika tecken. För att summan

$$a_1 a_2 + \cdots + a_n a_1$$

ska vara 0 fordras att dessa båda fall förekommer lika ofta, dvs $n/2$ gånger. Följden $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a_1 börjar och slutar med samma term. Antalet gånger som två successiva tal i följden har olika tecken måste därför vara jämnt, säg $2k$ gånger. Alltså är $n/2 = 2k$, $n = 4k$.
Omvänt om n är delbart med 4 kan man låta följden vara

$$1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots 1, 1, -1, -1$$

så att varannan term i summan $a_1 a_2 + \cdots + a_n a_1$ blir 1 och varannan blir -1.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 – 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner