Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 17 november 1984

1. Låt A och B vara två godtyckliga punkter inom en cirkel C. Visa att det alltid finns en cirkel genom A och B som ligger helt inom C.

2. Rutorna i ett rutnät med 3×7 rutor är målade antingen gula eller blå. Man betraktar alla delmängder bestående av $m \times n$ rutor där $2 \leq m \leq 3$, $2 \leq n \leq 7$. Visa att i minst en av dessa har alla hörnen samma färg.

3. Visa att
$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{b}$$
om a och b är positiva tal.

4. Bestäm de positiva heltalen p och q så att samtliga nollställen till polynomet
$$(x^2 - px + q)(x^2 - qx + p)$$
är positiva heltal.

5. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 2(a+b+c) \end{cases}$$
där a, b, c är naturliga tal.

6. Talen $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ är positiva heltal. Man vet att
$$\sum_{i=1}^{14} 3^{a_i} = 6558.$$
Visa att talen $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ består av talen $1, \ldots, 7$ vartdera taget två gånger.