Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 13 oktober 1977

1. Antag att det finns någon lösning. Första och andra ekvationerna ger

$$4x - 6 = x(4x - 6) - x^2 - 3$$
$$3x^2 - 10x + 3 = 0. \tag{1}$$

Andra och tredje ekvationerna ger

$$4x - 6 = x(5 - x).$$
$$x^2 - x - 6 = 0. \tag{2}$$

Ur (1) och (2):

$$3x^2 - 10x + 3 - 3(x^2 - x - 6) = 0.$$

Detta ger $x = 3$. Insättning i andra ekvationen ger $y = 6$. Den enda möjliga lösningen är således $x = 3$, $y = 6$. Att detta också är en lösning verifieras genom insättning i de tre ekvationerna.
Variation. Man kan lösa någon av andragradsekvationerna. Exempelvis ger ekvationen (2) att $x = 3$ eller $x = -2$. För $x = -2$ ger andra ekvationen $y = -14$. Detta satisfierar emellertid inte första ekvationen.

2. **Metod 1.** Tag de successiva potenserna av 3 och spar de två sista siffrorna. Man får:

$$01, 03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01, \ldots \;.$$

Detta visar att de två sista siffrorna blir desamma vid en ökning av exponenten med 20. Eftersom 1000 är delbart med 20 är därför de två sista siffrorna i 3^{1000} desamma som i 3^0 dvs de är 01.

Metod 2. Binomialsatsen ger:

$$\begin{aligned} 3^{1000} &= 9^{500} = (10-1)^{500} = \sum_{k=0}^{500} 10^k (-1)^{500-k} \\ &= 100a + \binom{500}{1} 10(-1) + \binom{500}{0} \\ &= 100a + 500(-10) + 1 = 100b + 1 \end{aligned}$$

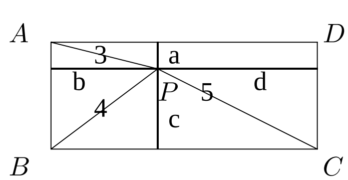
där a och b är heltal.

Ett primtal $p \geq 5$ är inte delbart med 3. Det måste därför ha formen $3n+1$ eller $3n-1$ för något heltal n. Då är

$$p^2 + 2 = (3n \pm 1)^2 + 2 = 9n^2 \pm 6n + 1 + 2 = 3(n^2 \pm 2n + 1).$$

Alltså är $p^2 + 2$ delbart med 3. Eftersom $p^2 + 2 > 3$ är $p^2 + 2$ därför inte ett primtal.

3.



Låt P:s avstånd till de fyra sidorna i rektangeln vara a, b, c, d så som figuren visar. Pytagoras sats ger

$$9 = a^2 + b^2 \qquad 16 = b^2 + c^2 \qquad 25 = c^2 + d^6$$

Härav:

$$a^2 + d^2 = 9 + 25 - 16 = 18.$$

Alltså är avståndet $PD = \sqrt{18}$.

4. För att logaritmerna skall vara definierade fordras $x > 0$ och $y > 0$. Sätt

$$t = y^{\lg \sqrt{x}}.$$

Då är

$$\lg t = \lg \sqrt{x} \cdot \lg y = \frac{1}{2} \lg x \cdot \lg y$$

Eftersom

$$\lg(x^{\lg y}) = \lg y \cdot \lg x = 2 \lg t = \lg t^2$$

kan första ekvationen i det givna systemet skrivas

$$t^2 + t = 110.$$

Denna har lösningarna $t = 10$ och $t = -11$. Den sista måste kasseras eftersom $t > 0$. Alltså är $t = 10$. Då är

$$\frac{1}{2} \lg x \cdot \lg y = \lg 10 = 1.$$

Vi har därför på grund av den andra av de givna ekvationerna

$$\begin{array}{rcl} \lg x \cdot \lg y & = & 2 \\ \lg x + \lg y & = & 3 \end{array}.$$

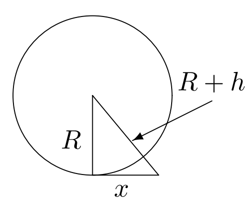
Lösningarna är $\lg x_1 = 1$, $\lg y_1 = 2$ och $\lg x_2 = 2$, $\lg y_2 = 1$. Detta ger $x_1 = 10$, $y_1 = 100$ och $x_2 = 100$, $y_2 = 10$.

5. Att fyrljuset syns just över horisonten betyder att sammanbindningslinjen mellan fyrljuset och ögat tangerar jordklotet. Låt oss visa att avståndet från fyrljuset och tangeringspunkten är approximativt $2\sqrt{h}$. Avståndet från ögat till tangeringspunkten blir då på motsvarande sätt $2\sqrt{h_1}$. Låt jordradien vara R meter. Pytagoras sats ger (se fig)

$$R^2 + x^2 = (R + h)^2$$

$$x^2 = 2Rh + h^2 \approx 2Rh$$

$$x \approx \sqrt{2Rh} = 2\sqrt{h}\sqrt{\frac{R}{2}}.$$



Detta är avståndet i meter. 1 nautisk mil är $\dfrac{1}{360 \cdot 60} 2\pi R$ meter. Använder vi $2\pi R = 4 \cdot 10^7$ kan vi uttrycka avståndet i nautiska mil och får

$$2\sqrt{h} \cdot 54/\sqrt{1000\pi} \approx 0,96 \cdot 2\sqrt{h}.$$

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner