Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

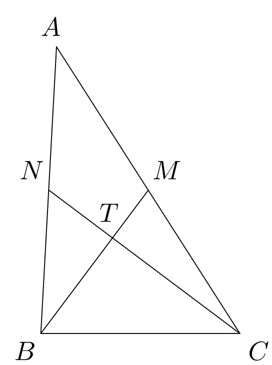
Lösningar till finaltävlingen den 19 november 1994

1. Ekvationen kan skrivas $x^2 - x + \dfrac{1}{8} = 0$. Rötterna är $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, vilka är positiva, irrationella och har summan 1.

   Rötterna betecknas med x_1 och x_2, där x_1 är den rot vars 1994:e decimalsiffra är 6. Detta betyder att $A + 0.6 \le 10^{1993} x_1 \le A + 0.7$, för något naturligt tal A. Eftersom x_1 är irrationellt kan likhet ej gälla i någondera olikheten, dvs
$$0.6 < 10^{1993} x_1 - A < 0.7.$$
   Nu är $x_1 = 1 - x_2$, varför
$$0.6 < 10^{1993} - A - 10^{1993} x_2 < 0.7.$$
   Om varje led subtraheras från 1 får man
$$0.3 < 10^{1993} x_2 - B < 0.4,$$
   där $B = 10^{1993} - A - 1$ är ett heltal. Nu är $A < 10^{1993} x_1 - 0.6 < 10^{1993}$ varav $B > -1$, dvs B är ett naturligt tal. Av olikheterna $0.3 < 10^{1993} x_2 - B < 0.4$ följer då att den 1994:e decimalsiffran för x_2 är 3.

   Svar: Decimalsiffran på plats 1994 är 3.

2. Låt medianernas skärningspunkt vara T och låt mittpunkterna på sidorna AC och AB vara M respektive N. Sätt $|NT| = x$ och $|MT| = y$. Definition av cotangenten (i de rätvinkliga trianglarna BTC och BTN) ger då $\cot(\angle CBT) = \dfrac{2y}{2x}$ respektive $\cot(\angle NBT) = \dfrac{2y}{x}$, varav

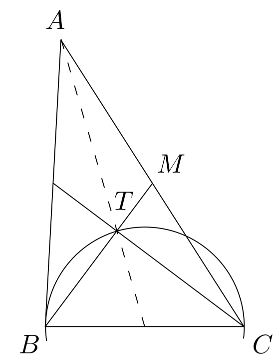


$$\begin{aligned} \cot B &= \cot(\angle CBT + \angle NBT) \\ &= \frac{\cot(\angle CBT)\cdot\cot(\angle NBT) - 1}{\cot(\angle CBT) + \cot(\angle NBT)} \\ &= \frac{\frac{2y^2}{x^2} - 1}{\frac{y}{x} + \frac{2y}{x}} = \frac{2y^2 - x^2}{3xy} \end{aligned}$$

   Analoga räkningar ger $\cot C = \dfrac{2x^2 - y^2}{3xy}$. Av olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium följer då
$$\cot B + \cot C = \frac{x^2 + y^2}{3xy} \ge \frac{2xy}{3xy} = \frac{2}{3}$$
   med likhet om och endast om $x = y$, dvs om och endast om $\triangle ABC$ är likbent.

   Alternativ lösning

Låt medianernas skärningspunkt vara T och låt mittpunkten på sidan AC vara M. Låt h vara höjden i $\triangle ABC$ mot sidan BC och låt som vanligt längderna av sidorna BC, CA och AB vara a, b respektive c. Då punkten T delar medianen till sidan BC i förhållandet $2:1$ (räknat från punkten A) är höjden mot sidan BC i triangeln BTC lika med $\frac{1}{3}h$. Men då hörnet T ligger på halvcirkelbågen BTC med diametern a är $\frac{1}{3}h \leq \frac{1}{2}a$. Multiplikation med h ger olikheten $ah \geq \frac{2}{3}h^2$. Nu är enligt areasatsen $ah = bc\sin A$ och enligt definition av sinusfunktionen $h = b\sin C = c\sin B$. Insatt i olikheten ger detta efter division med bc



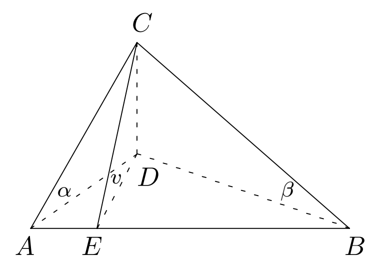
$$\sin A \geq \frac{2}{3}\sin B \sin C.$$

Division med $\sin B \sin C > 0$ och additionsformeln för sinus ger slutligen

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \leq \frac{\sin A}{\sin B \sin C} &= \frac{\sin(C+B)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin B \sin C} \\ &= \cot C + \cot B.\end{aligned}$$

Svar: Likhet gäller om och endast om triangeln ABC är likbent ($|AB| = |AC|$).

3. Betrakta pyramiden $ABCD$ där kanten CD är vinkelrät mot planet ABD och vinkeln $\angle ACB$ är rät. Låt CE vara höjden från C mot kanten AB i sidoytan ABC och antag att $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$ och $\angle CED = v$. Då är



$$\sin\alpha = \frac{|CD|}{|AC|}, \quad \sin\beta = \frac{|CD|}{|BC|},$$

och

$$\sin v = \frac{|CD|}{|CE|},$$

varav, enligt Pythagoras sats tillämpad på $\triangle ABC$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = |CD|^2\,\frac{|AC|^2 + |BC|^2}{|AC|^2|BC|^2} = |CD|^2\,\frac{|AB|^2}{|AC|^2|BC|^2}.$$

Nu är arean av $\triangle ABC$ lika med $\frac{1}{2}|AB||CE| = \frac{1}{2}|AC||BC|$, varav $\frac{|AB|^2}{|AC|^2|BC|^2} = \frac{1}{|CE|^2}$. Alltså är

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = |CD|^2\,\frac{|AB|^2}{|AC|^2|BC|^2} = \frac{|CD|^2}{|CE|^2} = \sin^2 v.$$

4. Eftersom 2 inte är delare i 11 kan $x = 0$ aldrig ingå i en lösning till den diofantiska ekvationen $2y^3 - x^3 - xy^2 = 11$. Faktorisering av den homogena delen (vänsterledet) ger

$$\begin{aligned}2y^3 - x^3 - xy^2 &= y^3 - x^3 + y^3 - xy^2 \\ &= (y-x)(y^2 + xy + x^2) + y^2(y-x) \\ &= (y-x)(2y^2 + xy + x^2)\end{aligned}$$

Kvadratkomplettering av den andra faktorn

$$2y^2 + xy + x^2 = 2\left(y + \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{7x^2}{8} \geq \frac{7x^2}{8}$$

visar att denna faktor är positiv för varje heltalslösning.
Eftersom produkten $(y-x)(2y^2+xy+x^2)=11$ är positiv, är även heltalsfaktorn $y-x$ positiv. Detta ger de två möjliga systemen

$$\begin{cases} y-x=1 \\ 2y^2+xy+x^2=11 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-x=11 \\ 2y^2+xy+x^2=1 \end{cases}$$

eller (efter substitution av y i den andra ekvationen)

$$\begin{cases} y-x=1 \\ 4x^2+5x-9=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-x=11 \\ 4x^2+55x+241=0. \end{cases}$$

Andragradsekvationen i det första systemet har faktoriseringen $(x-1)(4x+9)=0$, som ger heltalslösningen $(x,y)=(1,2)$. Kvadratkompletteringen av andragradsuttrycket i det andra systemet

$$4x^2+55x+241=\left(2x+\frac{55}{4}\right)^2+241-\frac{55^2}{16}=\left(2x+\frac{55}{4}\right)^2+\frac{831}{16}$$

visar att andragradsekvationen saknar reella lösningar.

Svar: Den enda heltalslösningen är $(x,y)=(1,2)$.

5. Sätt $f(x)=x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_k$. Om nollställena till f är $x_1<x_2<\cdots<x_k$ så följer av medelvärdessatsen att f' har ett nollställe mellan x_i och x_{i+1} för $i=1,2,\ldots,k-1$, dvs $k-1$ olika reella nollställen. På samma sätt följer att f'' har $k-2$ olika reella nollställen, att f''' har $k-3$ olika reella nollställen osv. Speciellt har $f^{(k-2)}$ två olika reella nollställen. Nu är

$$\begin{aligned} f^{(k-2)}(x) &= k(k-1)\cdots 3x^2+a_1(k-1)\cdots 2x+a_2(k-2)! \\ &= \frac{k!}{2}\left(x^2+\frac{2a_1x}{k}+\frac{2a_2}{k(k-1)}\right) \\ &= \frac{k!}{2}\left(\left(x+\frac{a_1}{k}\right)^2+\frac{2a_2}{k(k-1)}-\frac{a_1^2}{k^2}\right), \end{aligned}$$

som har två olika reella nollställen precis då $\dfrac{2a_2}{k(k-1)}<\dfrac{a_1^2}{k^2}$, dvs precis då $a_1^2>\dfrac{2k}{k-1}a_2$.

Alternativ lösning

Antag att rötterna är $x_1,x_2,\ldots,x_k$. Enligt sambandet mellan rötter och koefficienter gäller då

$$-a_1=\sum_{i=1}^{k}x_i \quad \text{och} \quad a_2=\sum_{1\le i<j\le k}x_ix_j.$$

Enligt Cauchy-Schwarz olikhet är

$$|a_1|=|x_1+x_2+\cdots+x_k|\le\sqrt{1^2+1^2+\cdots+1^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2}$$

med likhet då och endast då följderna $(1,1,\ldots,1)$ och $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ är proportionella. Detta ger

$$a_1^2=(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2+2\sum_{1\le i<j\le k}x_ix_j\ge\frac{a_1^2}{k}+2a_2,$$

varav $a_1^2\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\ge 2a_2$, eller $a_1^2\ge\dfrac{2k}{k-1}a_2$.

Svar: Olikheten $a_1^2\ge\dfrac{2k}{k-1}a_2$ gäller så snart samtliga rötter är reella. Likhet inträffar om och endast om samtliga rötter är lika.

6. Antag att funktionen f uppfyller de tre villkoren.
Valet $a = b = 0$ i den andra relationen ger $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, varav $f(0) = 0$.
Om $a \geq 1$ ger den första och den tredje relationen

$$f(a+9) = f(10+a-1) = f(f(10)+a-1) = f(1+a-1) = f(a).$$

För $a \geq 1$ är f alltså periodisk med period 9. Valet $a = 1$ ger $f(1) = f(1+9) = f(10) = 1$.
Den andra relationen ger nu induktivt

$$\begin{aligned} f(2) = f(1+1) &= f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2 \\ f(3) = f(2+1) &= f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3 \\ &\vdots \\ f(9) = f(8+1) &= f(8) + f(1) = 8 + 1 = 9 \end{aligned}$$

Om det finns en funktion $f : N \to N$ som uppfyller villkoren är den entydigt bestämd av initialvärdena $f(k) = k$, $0 \leq k \leq 9$ och rekursionsformeln $f(k+9) = f(k)$, $k \geq 1$. Omvänt satisfierar en funktion bestämd av dessa initialvärden och denna rekursionsformel, de tre givna relationerna:
Villkor 2: Om $0 \leq a + b < 10$ är $f(a+b) = a + b = f(a) + f(b)$
Villkor 3: Rekursionsformeln ger $f(10) = f(9+1) = f(1) = 1$
Villkor 1: Om $0 \leq a \leq 9$ är $f(a) = a$ och $f(a+b) = f(f(a)+b)$. Om $a \geq 10$ framställer vi a på formen $a = 9k + r$, med $1 \leq r \leq 9$. Av rekursionsformeln följer induktivt att $f(a) = f(9k+r) = f(r)$ varav $f(a+b) = f(9k+r+b) = f(r+b) = f(f(a)+b)$. Därmed har vi visat att alla relationerna är uppfyllda. Funktionen f är alltså entydigt bestämd och ges av de tio initialvärdena $f(k) = k$, $0 \leq k \leq 9$ och rekursionsformeln $f(k+9) = f(k)$, $k \geq 1$. För $n = 100, 101, \ldots, 999$ är alltså $f(n) = 1, 2, \ldots$ eller 9 och varje värde antas lika många gånger, dvs $\dfrac{900}{9} = 100$ gånger. Eftersom $f\left(2^{3^{4^5}}\right)$ är något av talen $1, 2, \ldots, 9$, finns alltså 100 tresiffriga tal n med $f(n) = f\left(2^{3^{4^5}}\right)$.

Svar: 100 stycken.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson