Skolornas Matematiktävling

Svenska Matematikersamfundet

Final den 22 november 1997

1. Låt AC vara en diameter i en cirkel. Antag att sträckan AB tangerar cirkeln i punkten A och att sträckan BC skär cirkeln i punkten D. Visa att om $|AC| = 1$, $|AB| = a$ och $|CD| = b$ så är
$$\frac{1}{a^2 + \frac{1}{2}} < \frac{b}{a} < \frac{1}{a^2}.$$

2. I triangeln ABC dras bisektrisen till vinkeln B. Den skär sidan AC i punkten D. Låt E vara en punkt på sidan AB sådan att $3 \cdot \angle ACE = 2 \cdot \angle BCE$. Sträckorna BD och CE skär varandra i punkten P. Man vet att $|ED| = |DC| = |CP|$. Bestäm triangelns vinklar.

3. Låt A och B vara två heltal vilkas summa är udda. Visa att varje heltal kan framställas på formen $x^2 - y^2 + Ax + By$, där x och y är heltal.

4. A och B spelar ett spel bestående av två faser:

   - A och B gör var sitt kast med en tärning. Om utfallen är x respektive y skapar man en lista med alla tvåsiffriga tal $10a + b$, med $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sådana att $10a + b \leq 10x + y$. Exempelvis ger utfallen $x = 2$ och $y = 3$ listan
   $$11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23.$$
   - Spelarna reducerar nu i tur och ordning antalet tal i den skapade listan genom att välja ut två av talen i listan och ersätta dessa med den icke-negativa differensen mellan de borttagna talen. Om A exempelvis väljer 14 och 21 i ovanstående exempel stryks dessa tal och ersätts med 7. Den nya listan får utseendet
   $$7, 11, 12, 13, 15, 16, 22, 23.$$
   Sedan väljer kanske B talen 7 och 23 och reducerar därmed listan med ett tal till
   $$11, 12, 13, 15, 16, 16, 22.$$
   Denna reducering fortsätter sedan tills endast ett tal återstår.

   Om talet i den färdigreducerade listan har samma paritet som A:s kast vinner A, i annat fall vinner B. Vilken är sannolikheten att A vinner? (Två heltal sägs ha samma paritet om båda är jämna eller båda är udda.)

5. Låt $s(m)$ beteckna siffersumman i heltalet m. Visa att till varje heltal n, där $n > 1$ och $n \neq 10$, finns ett entydigt bestämt heltal $f(n) \geq 2$ sådant att för alla k, med $0 < k < f(n)$, gäller $s(k) + s(f(n) - k) = n$.

6. Låt M vara en mängd av reella tal. Antag att M är unionen av ändligt många disjunkta intervall, och att dessa intervall har en sammanlagd längd större än 1. Visa att M innehåller minst ett par av olika tal vilkas skillnad är ett heltal.