Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 18 november 1979

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + (n-2)x_{n-2} + (n-1)x_{n-1} + nx_n = n \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \cdots + (n-1)x_{n-2} + nx_{n-1} + x_n = n-1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + \cdots + nx_{n-2} + x_{n-1} + 2x_n = n-2 \\ \vdots \\ (n-1)x_1 + nx_2 + x_3 + \cdots + (n-4)x_{n-2} + (n-3)x_{n-1} + (n-2)x_n = 2 \\ nx_1 + x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-3)x_{n-2} + (n-2)x_{n-1} + (n-1)x_n = 1 \end{cases}$$

   där n är ett heltal, $n > 1$.

2. Bestäm något rationellt tal x sådant att $3 < x < 4$ och att $\sqrt{x-3}$ och $\sqrt{x+1}$ båda är rationella.

3. Låt $x + x^{-1} = a$. Beräkna $x^{13} + x^{-13}$ som ett polynom i a.

4. Den på det slutna intervallet $[0, \pi]$ kontinuerliga funktionen f uppfyller

$$\int_0^\pi f(x)dx = 0 \qquad \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0.$$

   Visa att f har minst två nollställen i det öppna intervallet $]0, \pi[$.

5. Bestäm det minsta positiva heltal a för vilket det finns ett polynom $ax^2 - bx + c$ med heltalskoefficienter som har två olika nollställen i $0 < x < 1$.

6. Betrakta trianglar ABC med tyngdpunkt T för vilka $AT > BT > CT$. Det finns positiva konstanter k_1, k_2, k_3, k_4 sådana att för alla dessa trianglar gäller

$$\begin{aligned} k_1 AB < AT < k_2 AB \\ k_3 AB < BT < k_4 AB. \end{aligned}$$

   Visa detta och bestäm de bästa konstanterna (dvs de största möjlija k_1 och k_3 och de minsta möjliga k_2 och k_4).