Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 15 november 1981

1. Sätt $a = 11\ldots1$ (n siffror). Då är $9a + 1 = 10^n$ så att
$$a = \frac{1}{9}\left(10^n - 1\right).$$
Det givna talet under rotmärket kan skrivas
$$\begin{aligned} a10^{n+2} + 2a10^2 + 25 &= \frac{10^{n+2}(10^n-1)}{9} + \frac{2(10^n-1)10^2}{9} + 25 \\ &= \frac{1}{9}\left(10^{2n+2} + 10\cdot 10^{n+1} + 25\right) = \frac{1}{9}\left(10^{n+1}+5\right)^2. \end{aligned}$$
Detta är kvadraten på talet
$$\frac{1}{3}\left(10^{n+1}+5\right) = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ treor}}5.$$

2. Då x, y, z är positiva reella tal är ekvationssystemet ekvivalent med
$$\begin{aligned} y\log x &= \log z \\ z\log y &= \log x \\ x\log z &= \log y \end{aligned}$$
Låt exempelvis $x > 1$. Då är $\log x > 0$. Den första ekvationen ger $\log z > 0$, $z > 1$ och sista ekvationen ger därefter $\log y > 0$, $y > 1$. Speciellt är $\log x$, $\log y$, $\log z$ alla skilda från 0.
Multipliceras de tre ekvationerna ledvis får vi
$$xyz\log x\log y\log z = \log x\log y\log z$$
$$xyz = 1$$
i strid mot att alla x, y, z är större än 1.
På samma sätt behandlas fallet då någon av x, y, z är mindre än 1.

3. Eftersom $p(x) + 1 = (x-1)^3q(x)$ för något polynom $q(x)$ så är
$$p'(x) = 3(x-1)^2q(x) + (x-1)^3q'(x)$$
så att $p'(x)$ är delbart med $(x-1)^2$. På samma sätt visas att $p'(x)$ är delbart med $(x+1)^2$. Då p' är av fjärde graden måste
$$p'(x) = a(x-1)^2(x+1)^2 = a(x^2-1)^2$$
för något a. Detta ger
$$p(x) = a\left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right) + b$$
för något b. Då $p(x)+1$ skall vara delbart med $(x-1)^3$ måste $p(1) = -1$. Likaså gäller $p(-1) = 1$. Härav
$$a\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) + b = -1 \quad \text{och} \quad -a\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) + b = 1$$
med lösningen $a = -\dfrac{15}{8}$, $b = 0$. Svaret blir därför
$$p(x) = -\frac{1}{8}\left(3x^5 - 10x^3 + 15x\right).$$

Låt oss visa att man kan placera 100 svarta och 25 vita småkuber så att varje rad parallell med en av kubenssidor innehåller exakt en vit småkub.

4. Låt en av kubens sidor vara horisontell. I varje vertikal rad skall finnas en vit småkub. Låt siffrorna i diagrammet intill ange för varje vertikal rad i vilket horisontellt lager den vita småkuben ligger. Då varje rad i diagrammet parallell med någon av kubens sidor innehåller alla siffrorna 1 - 5, finns i kuben i varje horisontell rad en vit småkub.

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

$N = 100$ är alltså inte tillräckligt. Däremot är $N = 101$ svaret på problemet eftersom de återstående 24 vita småkuberna inte kan ligga i alla de 25 vertikala raderna i kuben.

5. Låt A', B', C' vara mittpunkterna på sträckorna BC, CA och AB. Vi behandlar två fall, vilka med permutationer täcker alla möjligheter.

I. Låt Y ligga på AB' och Z på AC'. Genom att jämföra trianglar med samma bas, YZ, och olika höjder får vi
$$\text{area}(\triangle XYZ) \geq \min(\text{area}(\triangle BYZ), \text{area}(\triangle CYZ))$$
och genom att jämföra trianglar med olika baser med samma höjd får vi
$$\text{area}(\triangle BYZ) \geq \text{area}(\triangle AYZ)$$
$$\text{area}(\triangle CYZ) \geq \text{area}(\triangle AYZ).$$
Härav följer
$$\text{area}(\triangle XYZ) \geq \text{area}(\triangle AYZ).$$

II. Låt X ligga på BA', Y på CB' och Z på AC'. Då får vi
$$\begin{aligned}\text{area}(\triangle XYZ) &\geq \text{area}(\triangle XYC') \geq \text{area}(\triangle XB'C') \\ &= \text{area}(\triangle A'B'C') = \frac{1}{4}\text{area}(\triangle ABC).\end{aligned}$$

Alltså kan inte triangeln XYZ vara mindre än var och en av de övriga deltrianglarna.

6. Låt a vara ett udda primtal. För något heltal n gäller $2^n < a < 2^{n+1}$. Då är
$$2^{(n+1)/2} - 2^{n/2} = \left(\sqrt{2} - 1\right) 2^{n/2}.$$
Detta är större än 2 för $n \geq 5$. För sådana n-värden finns därför ett udda heltal u med $2^{n/2} < u < 2^{(n+1)/2}$ sätt $c = u^2$, $b = 2^n$. Då ligger a, b, c alla i intervallet $[2^n, 2^{n+1}[$, varför summan av två av dem alltid är större än den tredje. Det går alltså att bilda en triangel med a, b, c längdenheter. Nu gäller $n \geq 5$ för $a > 32$. Eftersom det finns oändligt många primtal är påståendet bevisat.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Skolornas Matematiktävling
Problem 1969 - 1990
med lösningar utarbetade av
Olof Hanner