Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 22 november 1970

1. Visa att det finns oändligt många positiva heltal som inte kan skrivas som

$$x^4 + y^4 + z^4.$$

med x, y, z heltal.

2. Betrakta 6 cirklar i planet. Ingen av cirklarnas medelpunkter ligger inom någon av de andra cirklarna. Visa att det inte finns någon punkt som ligger inom alla sex cirklarna ("inom- innanför, ej på periferin).

3. Givet är ett polynom $P(x)$ med heltalskoefficienter. För detta polynom finns fem olika heltal som ger polynomet värdet 5.
Visa att det inte finns något heltal, sådant att värdet 9 antas.

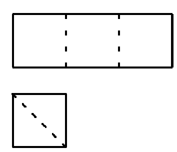
4. Visa att om

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

där x_1, x_2, x_3 är reella tal, så gäller för alla x att

$$p(x)p''(x) \leq (p'(x))^2.$$

5. Ett rektangulärt papper med sidorna 1 dm och 3 dm viks två gånger så att en kvadrat med sidan 1 dm uppstår. Denna viks längs en diagonal så att en rätvinklig triangel uppstår.



En knappnål sticks genom någon punkt i (det inre av) denna triangel så att den genomtränger samtliga 6 lager. Därefter utvecklas papperet på nytt. Hur skall punkten vara vald för att minsta avståndet mellan två av dessa 6 hål skall bli, så stort som möjligt?

6. Låt n och p vare två positiva heltal, sådana att $2p \leq n$. Visa att

$$\frac{(n-p)!}{p!} \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n-2p} \qquad (p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \cdot p).$$