Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 17 november 1990

1. Faktorn d är en positiv delare i n om och endast om n/d är en positiv delare i n. Men då är $\sum_{j=1}^{k} d_j = \sum_{j=1}^{k} n/d_j$. Division med $\sqrt{n}$ ger den önskade identiteten.

2. Låt punkten A_k ha koordinaten $x_k = \dfrac{(k-1)k}{2}$ för $k = 1, 2, \cdots, 2n$ och punkten P koordinaten x på tallinjen. Betrakta funktionen $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} |x - x_k|$. Då är

$$f(x) = \begin{cases} -2nx + \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} x_k & \text{om} \quad x < x_1 \\ -2(n-j)x + \displaystyle\sum_{k=j+1}^{2n} x_k - \sum_{k=1}^{j} x_k & \text{om} \quad \left\{ \; x_j \le x < x_{j+1},\ 1 \le j \le 2n-1 \right. \\ 2nx - \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} x_k & \text{om} \quad x_{2n} \le x \end{cases}$$

   Funktionen f är alltså styckvis linjär (och kontinuerlig), avtar på intervallet $(-\infty, x_n]$ är konstant på intervallet $[x_n, x_{n+1}]$ och växande på intervallet $[x_{n+1}, \infty)$. Minimivärdet antas då P ligger på sträckan $A_n A_{n+1}$ där funktionen är konstant med värdet

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} (x_{n+k} - x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n+k-1)(n+k)}{2} - \frac{(k-1)k}{2} \right) \\ &= \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n} (n + 2k - 1) \\ &= \frac{n}{2} \cdot \frac{n(3n-1+n+1)}{2} \quad = \quad n^3. \end{aligned}$$

   Svar: Minimivärdet är n^3 och antas då P ligger på sträckan $A_n A_{n+1}$.

3. Omforma olikheten till

$$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \sin x - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \cos x \ge -\frac{\sin a}{\sqrt{1+b^2}} \qquad \text{för alla } x.$$

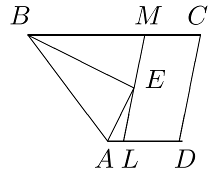
   Välj en vinkel φ så att $\sqrt{1+b^2} \cos\varphi = 1$ och $\sqrt{1+b^2} \sin\varphi = b$. Olikheten kan då skrivas

$$\sin(x - \varphi) \ge -\frac{\sin a}{\sqrt{1+b^2}} \qquad \text{för alla } x.$$

   Speciellt ger $x = \varphi - \pi/2$ att $1 \ge \sin a \ge \sqrt{1+b^2}$, som ger $b = 0$ och $\sin a = 1$.
   Med dessa värden på $\sin a$ och b får olikheten utseendet $\sin x + 1 \ge 0$, som gäller för alla x.

   Svar: $a = \pi/2 + 2n\pi$, $n \in Z$, $b = 0$.

4. Sätt $\angle DAB = 2\alpha$ och $\angle ABC = 2\beta$. Då $ABCD$ är en cirkelfyrhörning blir vinklarna $\angle BCD = 180^\circ - 2\alpha$ och $\angle CDA = 180^\circ - 2\beta$. Triangeln ALE får då vinklarna α, $180^\circ - 2\beta$ och $2\beta - \alpha$.



Sinusteoremet tilllämpad på denna triangel ger nu

$$|LE|/\sin\alpha = |AE|/\sin 2\beta = |AL|/\sin(2\beta-\alpha).$$

I triangeln ABE är vinklarna α, β och $180°-\alpha-\beta$ och sinusteoremet ger $|AE|/\sin\beta = |AB|/\sin(\alpha+\beta)$. Elimination av $|AE|$ ger nu

$$|LE| = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{|AB|}{2\sin(\alpha+\beta)}, \quad |AL| = \frac{\sin(2\beta-\alpha)}{\cos\beta}\cdot\frac{|AB|}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

och

$$|AL| - |LE| = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}|AB|.$$

Analoga räkningar utgående från triangeln $\triangle BME$ ger

$$|BM| - |ME| = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}|AB|.$$

Addition ger nu $|AL|-|LE|+|BM|-|ME| = 0$, vilket skulle visas.

5. Betrakta mängden $M = \{x \in R^+\ ;\ f(x) = 1\}$. Mängden M är inte tom ty $x = \sqrt{f(1)}$ och $y = 1$ ger $xy = x$, $f(y)/x = x$ och $f^2(x) = 1$. Men om $\alpha \in M$ så följer att $1 \in M$, ty välj i funktionalekvationen $x = 1$ och $y = \alpha$. Då får man $1 = f(\alpha)f(f(\alpha)) = 1\cdot f(1) = f(1)$. Om $\alpha \in M$ så är α^n och $\alpha^{-n} \in M$ för alla $n = 0, 1, \cdots$. Detta följer av följande två implikationer

$$x \in R^+ \Rightarrow 1 = f(x)f\left(\frac{f(1)}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$$

och

$$\alpha \in M \Rightarrow 1 = f(\alpha^{n+1})f\left(\frac{f(\alpha)}{\alpha^n}\right) = f(\alpha^{n+1})f\left(\frac{1}{\alpha^n}\right) = \frac{f(\alpha^{n+1})}{f(\alpha^n)}.$$

Härav följer nu att $M = \{1\}$ eller $M = R^+$ ty om $1 \neq \alpha \in M$ så är f, på grund av monotoniteten, konstant lika med 1 mellan α^{-n} och α^n. När $n \to \infty$ ger detta $M = R^+$ och funktionen f är konstant 1 på R^+.
I det andra fallet observerar vi att $tf(t) \in M$ för alla $t \in R^+$. Sätt i funktionalekvationen $x = f(t)$ och $y = t$ som ger $1 = f(tf(t))f(1) = f(tf(t))$. Om $M = \{1\}$ måste alltså $tf(t) = 1$ för alla $t \in R^+$. Denna funktion satisfierar också funktionalekvationen.

Svar: Antingen är $f(t) = 1, \forall\, t \in R^+$ eller också är $f(t) = 1/t, \forall\, t \in R^+$

6. De positiva heltalen x och y uppfyller olikheterna om och endast om det finns positiva heltal k och l sådana att

$$\begin{cases} 131x - 97y = k \\ -158x + 117y = l \end{cases}.$$

Systemet har lösningen $x = 117k + 97l$, $y = 158k + 131l$.
(För positiva heltal k och l gäller mycket riktigt

$$\frac{117k+97l}{158k+131l} - \frac{97}{131} = \frac{k}{131(158k+131l)} > 0$$

och

$$\frac{117}{158} - \frac{117k + 97l}{158k + 131l} = \frac{l}{158(158k + 131l)} > 0.)$$

Det är bara paren $(k, l) = (1, 1)$, $(k, l) = (1, 2)$ och $(k, l) = (2, 1)$ som ger y-värden med $y \leq 500$. Detta ger lösningarna $(x, y) = (214, 289)$, $(x, y) = (311, 420)$ och $(x, y) = (331, 447)$.

Svar: Paren $(x, y) = (214, 289)$, $(x, y) = (311, 420)$ och $(x, y) = (331, 447)$.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktävlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson