Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

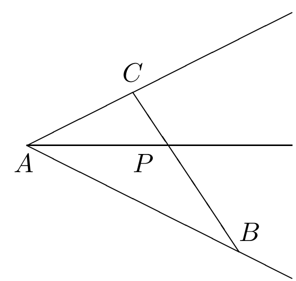
Kvalificeringstävling den 12 oktober 1978

1. På den gamla goda tiden, då det ännu fanns 1-öringar och 2-öringar och godis var billigt, gick Tora, Pelle, Kalle och Kickan för att köpa godis. En kola kostade 4 öre, de fick fyra sega råttor för 1 öre och två små geléhallon för 1 öre. De köpte av alla tre sorterna för sammanlagt 80 öre. När de fått godiset delade de varje sort lika mellan sig. De fick då totalt 20 bitar var. Vad fick var och en?

2. Polynomet $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ har heltalskoefficienter. Visa att om $p(n)$ är delbart med 3 för varje heltal n så måste polynomets koefficienter också vara delbara med 3.

3. För vilka reella x sådana att $x \leq 5$ gäller att $x + \sqrt{5-x} > 3$?

4. Välj en punkt P på bisektrisen till en vinkel med spetsen A. En linje genom P skär vinkelbenen i punkterna B och C. Visa att



$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

inte ändras då linjen vrider sig kring P.

5. $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ är en följd av tal sådana att

   a) $0 \leq a_n \leq 1$ för alla $n \geq 0$

   b) $a_n \geq \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ för alla $n \geq 1$.

   Låt k vara ett positivt heltal. Hur stor kan $a_k - a_{k-1}$, vara?

6. Givet ett antal olika naturliga tal som i det binära systemet är n-siffriga och har formen

$$\underbrace{1\ldots1}_{\text{ettor}}\underbrace{0\ldots0}_{\text{nollor}}$$

med minst två ettor. Visa att summan av dessa tal i det binära systemet har en etta i n-te positionen bakifrån räknat.