Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 26 november 1967

1. I ett plan drages p stycken parallella linjer och vinkelrätt mot dessa q stycken linjer. Hur många rektanglar med sidor längs de dragna linjerna finns det?

2. Vid de konstruktioner i geometrien som kallas euklidiska får passare och linjal användas. Därvid antages rörande linjalen att den har en rätlinjig kant som kan användas till att draga en rät linje genom två givna eller redan konstruerade punkter.

   Vid de konstruktioner som avses i detta problem får passare ej användas utan endast en linjal. Denna antages emellertid ha två parallella, rätlinjiga kanter och den får användas dels som vid euklidiska konstruktioner, dels till att draga en parallell till en given linje på ett avstånd från denna lika med linjalens bredd, dels också till att genom två givna punkter på ett avstånd minst lika med linjalens bredd draga två parallella linjer på linjalbreddens avstånd från varandra, en linje genom den ena punkten och en genom den andra. Vidare är det tillåtet att välja godtyckliga hjälppunkter i planet eller på givna linjer. Det är däremot ej tillåtet att avsätta sträckor med hjälp av linjalen genom att markera punkter på dennas kant. Genomför med dessa grundkonstruktioner följande konstruktioner. Konstruera

   a) bisektrisen till en given vinkel

   b) mittpunktsnormalen till en given sträcka (Obs! Två fall, beroende på om sträckan är längre än linjalbredden eller ej).

3. Visa, att det endast finns ändligt många uppsättningar (x, y, z) av positiva heltal som satisfierar

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1000}.$$

4. Talföljden $a_1, a_2, \ldots$ består av positiva tal. Vidare är den sådan att serien $a_1 + a_2 + \cdots$ är divergent, dvs. talföljden $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots$ går mot oändligheten. Visa, att det finns en talföljd $b_1, b_2, \ldots$ med $b_n > 0$ och $\lim_{n \leftarrow \infty} b_n = 0$ sådan att serien $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots$ är divergent.

5. Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara givna positiva tal sådana att för alla $n \geq 2$ gäller

$$a_n^2 \geq a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1.$$

   Visa, att det finns en positiv konstant C så att $a_n \geq C \cdot n$ för alla n.

6. a) Punkter i xy-planet (rätvinkligt koordinatsystem) vilkas bägge koordinater är hela tal kallas gitterpunkter. En triangel har sina hörn i gitterpunkter, men utom hörnen inga gitterpunkter på sidorna. Antalet gitterpunkter inuti triangeln är n. Visa, att triangelns area är $n + 1/2$.

   b) Betrakta det allmänna fallet då triangeln tillåts ha punkter på sidorna. Försök uttrycka triangelns area med hjälp av n och m = antalet gitterpunkter på det inre av sidorna.