Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 17 oktober 1968

1. Kan ett parti vinna mandat på att vid riksdagsval dela upp sig på två mindre partier? Mandaten fördelas enligt följande princip. Varje partis röstetal delas med 1,4 för att ge de s.k. jämförelsetalen. Partiet med högsta jämförelsetalet erhåller första mandatet samtidigt som det får ett nytt jämförelsetal = röstetalet delat med 3. Detta fortsättes så, att varje nytt mandat går till det parti som har högsta jämförelsetalet, samtidigt som det erhåller ett nytt jämförelsetal= röstetalet delat med 3 eller 5 eller 7 eller ..., allt eftersom detta var partiets första eller andra eller tredje eller ... mandat.

2. Talet x är reellt. Är följande påståenden sanna eller falska?
   (Ge bevis eller motexempel.)

   a) Om x^7 och x^{12} är rationella, så är x rationellt.

   b) Om x^9 och x^{12} är rationella, så är x rationellt.

3. Det hittills olösta fyrfärgsproblemet går ut på att avgöra huruvida följande utsaga, fyrfärgsutsagan, är sann: varje plan karta (dvs. uppdelning av planet i delområden, “länder”,) kan, med användning av högst fyra färger, färgas så att färgen är densamma överallt inom samma land medan länder som har en gemensam gränslinje alltid har olika färg. Härvid förutsätts att länderna är sammanhängande, dvs. att två godtyckliga orter inom samma land kan förbindas med en kurva som ej skär landets gräns. Om förutsättningen om sammanhängande länder stryks i ovanstående formulering erhålls det koloniala fyrfärgsproblemet där ett land inte behöver vara sammanhängande, t.ex. ett moderland med kolonier på en annan kontinent.

   a) Visa ett exempel på en karta där fyra färger inte räcker för det koloniala problemet.

   b) Finns det något n sådant att den koloniala n-färgsutsagan är sann?

4. En byggsats för barn består av 27 kuber av plast. En del kuber är blå och resten är röda. Med dessa 27 kuber kan man bygga en stor kub sådan att varje par av parallella sidor i den stora kuben ej innehåller mer än hälften av antalet blå kuber i byggsatsen. Vilket är det största möjliga antalet blå kuber i en sådan byggsats?

5. I en kvadrat med sidlängden 1 inprickas n ($n \geq 3$) stycken punkter, så att inga punkter sammanfaller och så att inga tre punkter ligger i rät linje. Bland de trianglar som har sina hörn bland de n punkterna finns en (eventuellt flera) som har kortaste omkrets.

   Visa att det finns en reell konstant a sådan att följande gäller. För varje n, $n = 3, 4, 5, \ldots$, och för varje inprickning av n punkter är den kortaste triangelomkretsen högst $a/\sqrt{n}$. Ange också ett numeriskt värde på konstanten a, som duger i ovanstående utsaga.
   (Vid talets bedömning fästes avseende vid hur pass litet numeriskt värde på a som uppnås.)

6. Med en feberkurva på intervallet $a \leq x \leq b$ menar vi en kurva som är grafen (funktionskurvan) till en kontinuerlig funktion definierad på intervallet och som består av ändligt många rätlinjiga sträckor. Visa att om $y = f(x)$ är ekvationen för en feberkurva på intervallet $a \leq x \leq b$ så kan $f(x)$ skrivas på formen

   $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i |x - a_i|$$

   där a_i och c_i är reella tal med $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.