Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Final den 15 november 1981

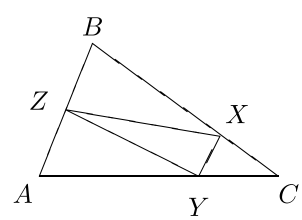
1. Visa att $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ st}}\underbrace{22\ldots2}_{n+1 \text{ st}}5}$ är ett heltal för alla positiva heltalsvärden på n.

2. Undersök om ekvationssystemet
$$\begin{cases} x^y = z \\ y^z = x \\ x^z = y \end{cases}$$
har någon annan lösning i positiva reella tal x, y, z än lösningen $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

3. Ett femtegradspolynom $p(x)$ är sådant att $p(x) + 1$ är delbart med $(x - 1)^3$ och $p(x) - 1$ är delbart med $(x + 1)^3$. Bestäm $p(x)$.

4. En kub består av $5 \times 5 \times 5 = 125$ lika småkuber varav N är svarta och resten vita. Bestäm det minsta värde på N för vilket det måste finnas 5 svarta småkuber i rad parallellt med någon av kubens kanter.

5. En given triangel ABC delas i fyra deltrianglar med hjälp av punkterna X, Y, Z som ligger på var sin sida av triangeln. Visa att den inre deltriangeln XYZ inte kan ha mindre area än var och en av de övriga deltrianglarna.



6. Visa att det finns oändligt många taltripplar (a, b, c) där a är primtal, b är en heltalspotens av 2 och c är kvadraten på ett udda heltal sådana att man kan bilda en triangel med sidorna a, b och c längdenheter.