Skolornas Matematiktävling

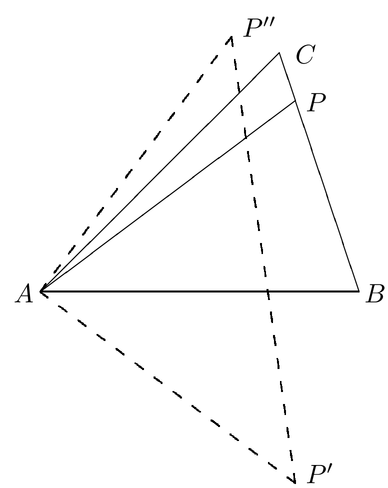
Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 5 oktober 1989

1. Vänsterledet är delbart med 9 och därför måste siffersumman $a + 19$ av talet i högerledet också vara delbart med 9. Detta ger siffran $a = 8$ och $492a04 = 9 \cdot 54756 = 3^2 \cdot 234^2$ varav $230 + t = \pm 234$ dvs $t = 4$ eller $t = -464$.
   Alternativt kan man utnyttja olikheterna
   $$701^2 < 492004 \leq 492a04 \leq 492904 < 703^2,$$
   som ger $492a04 = 702^2$ varav $a = 8$.
   Svar: $t = 4$ eller $t = -464$.

2. Till varje permutation $a\ b\ c\ d\ e\ f$ av talen 1 2 3 4 5 6 finns precis en permutation $A\ B\ C\ D\ E\ F$ sådan att $a + A$=$b + B$=$c + C$=$d + D$=$e + E$=$f + F$=7. Det finns 6! olika permutationer. Alltså blir summan
   $$777777 \cdot \frac{6!}{2} = 279999720.$$
   Svar: Summan är 279999720.

3. Enligt konstruktionen är $|AP| = |AP'| = |AP''|$ och $\angle PAB = \angle P'AB$, $\angle PAC = \angle P''AC$. Alltså är $\triangle P'AP''$ likbent, $\angle P'AP'' = 2\angle BAC$ och $|P'P''| = 2|AP| \sin \angle BAC$, som är minimalt då A:s avstånd till sidan BC är minimalt, dvs då P är fotpunkten till höjden från A till sidan BC.



4. Sätt $x^y = y^z = z^x = e^t$ och logaritmera. Man får då
   $$\ln x = \frac{t}{y},\ \ \ln y = \frac{t}{z},\ \ \ln z = \frac{t}{x}.$$
   (a) Om $t = 0$ så är $x = y = z = 1$.
   (b) Antag att $t > 0$ och att $x < y$. Vi får då följande motsägelse:
   $$\begin{aligned} x < y \quad &\Rightarrow \quad \ln x < \ln y \Rightarrow \frac{t}{y} < \frac{t}{z} \Rightarrow z < y \\ &\Rightarrow \quad \ln z < \ln y \Rightarrow \frac{t}{x} < \frac{t}{z} \Rightarrow z < x \\ &\Rightarrow \quad \ln z < \ln x \Rightarrow \frac{t}{x} < \frac{t}{y} \Rightarrow y < x. \end{aligned}$$

Analogt ger antagandet $x > y$ följande motsägelse:

$$\begin{aligned} x > y \quad &\Rightarrow \quad \ln x > \ln y \Rightarrow \frac{t}{y} > \frac{t}{z} \Rightarrow z > y \\ &\Rightarrow \quad \ln z > \ln y \Rightarrow \frac{t}{x} > \frac{t}{z} \Rightarrow z > x \\ &\Rightarrow \quad \ln z > \ln x \Rightarrow \frac{t}{x} > \frac{t}{y} \Rightarrow y > x. \end{aligned}$$

Alltså måste $x = y$ och $\frac{t}{y} = \ln x = \ln y = \frac{t}{z}$ som ger $y = z$.

(c) Antag att $t < 0$ och att $x < y$. Vi får då följande motsägelse:

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Rightarrow \quad \ln x < \ln y \Rightarrow \frac{t}{y} < \frac{t}{z} \Rightarrow y < z \\ &\Rightarrow \quad \ln y < \ln z \Rightarrow \frac{t}{z} < \frac{t}{x} \Rightarrow z < x \\ &\Rightarrow \quad x < y < z < x. \end{aligned}$$

Analogt ger antagandet $x > y$ följande motsägelse:

$$\begin{aligned} x > y \quad &\Rightarrow \quad \ln x > \ln y \Rightarrow \frac{t}{y} > \frac{t}{z} \Rightarrow y > z \\ &\Rightarrow \quad \ln y > \ln z \Rightarrow \frac{t}{z} > \frac{t}{x} \Rightarrow z > x \\ &\Rightarrow \quad x > y > z > x. \end{aligned}$$

Alltså måste $x = y$ och $\frac{t}{y} = \ln x = \ln y = \frac{t}{z}$ som ger $y = z$.

5. Enligt sambandet mellan rötter och koefficienter gäller

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q, \quad x_1 + \frac{1}{x_2} = -m \quad \text{och } \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{q},$$

som ger $x_1^2 = 1$ och

$$\begin{aligned} mp &= (x_1 + x_2)\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \\ &= x_1^2 + \frac{x_1}{x_2} + x_1 x_2 + 1 \\ &= 2 + q + \frac{1}{q} \\ &= 4 + \frac{(q-1)^2}{q} \geq 4, \end{aligned}$$

med likhet då och endast då $q = 1$.
Svar: $mp \geq 4$ och likhet gäller då och endast då $q = 1$.

6. Sätt

$$b_{2n-1} = a_n + a_n, \text{ för } n = 1, 2, \ldots, 995$$

och

$$b_{2n} = a_n + a_{n+1}, \text{ för } n = 1, 2, \ldots, 994.$$

Då är

$$b_{2n-1} = a_n + a_n < a_n + a_{n+1} = b_{2n} < a_{n+1} + a_{n+1} = b_{2n+1}.$$

Alltså är alla b_k, $k = 1, 2, \ldots, 1989$ olika.
Nu gäller också

$$b_{2n} = a_n + a_{n+1} < a_n + a_{n+2} < a_{n+1} + a_{n+2} = b_{2n+2}.$$

Om det finns precis 1989 element så är $b_{2n+1} = a_n + a_{n+2}$, dvs $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$, $n = 1, 2, \ldots, 993$ som visar att $\{a_k\}_{k=1}^{995}$ är aritmetisk.
Antag omvänt att $\{a_j\}_{j=1}^{995}$ är aritmetisk. Eftersom följden är växande kan den skrivas

$$a_j = a + jd, \;\; a \text{ och } d > 0 \text{ fixa}, \;\; j = 1, 2, \ldots, 995.$$

Då är

$$a_i + a_j = 2a + (i + j)d, \;\; i, j = 1, 2, \ldots 995.$$

Här antar $i + j$ de olika värdena $2, 3, \ldots, 1990$, dvs det finns precis 1989 olika summor $a_i + a_j$.

Lösningarna hämtade, med författarens tillstånd, ur:

Matematiktävlingar
Skolornas Matematiktävling
1988-1998
Nordiska Matematiktvlingen
1987-1998
av Åke H Samuelsson