Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

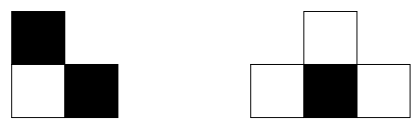
Kvalificeringstävling den 14 oktober 1971

1. Undersök för vilka positiva heltal n ekvationen

$$n^x + n^y = n^z$$

har positiva heltalslösningar x, y och z.

2. a) Bevisa att det är omöjligt att pussla ihop ett schackbräde (med 8 rutor längs sidan) av bitar enligt figuren. (Båda sorterna skall användas.)



b) Bevisa att om en kvadrat med jämnt antal rutor kan pusslas ihop av bitar enligt figuren, så måste antalet rutor längs kvadratens sida vara delbart med 10.

Observera att den som löser b) först, därmed också har löst a).

3. Låt A, B, C och D vara punkter på en cirkel, vilka delar cirkeln i fyra bågar AB, BC, CD och DA. Mittpunkten på (bågen) AB sammanbinds med mittpunkten på CD och mittpunkten på BC sammanbinds med mittpunkten på DA. Visa att de så erhållna sträckorna är vinkelräta mot varandra.

4. Ett fält har formen av en kvadrat med sidan 700m. Ett dike delar upp fältet i två rektanglära bitar. Den ena delen har bredden 300m och är äng. Den andra delen är plöjd. En person spinger 3m/sek på plöjd mark och 4m/sek, på ängsmark. Vilken är den kortaste tid han behöver för att ta sig från ett hörn av fältet till det diagonalt motsatta hörnet?

5. Bestäm alla positiva heltal $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$ för vilka differenserma $n_4 - n_3$, $n_3 - n_2$, $n_2 - n_1$, $n_4 - n_2$, $n_3 - n_1$ och $n_4 - n_1$ alla är primtal.

6. Låt $ax^2 + bx + c$ vara ett andragradspolynom med reella koefficienter och reella rötter. Visa att

$$a + b + c < \frac{9}{4} \max(a, b, c).$$

($\max(a, b, c)$ betecknar det största av talen a, b, c.)