Kvadratiske Matrix

Kursus: 01005 Matematik 1, DTU
Forlæser: Karsten Schmidt
Dato: 06/10/2014 (Semesteruge: 6)

Tavle 1 ud af 11

Kvadratiske matricer $n \times n$

(1) Matrix-ligninger
(2) Enhedsmatrix $\underline{E}$ og invers $\underline{A}^{-1}$
Singulær og regulær matrix
(3) Indføring af determinanter
(4) Determinanters egenskaber

Matrixligninger

Givet lign system

$$x_1 - x_2 = -1$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$

Hvis $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $\underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

så er systemet ækvivalent med matrixligning

$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ hvor $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ er en ukendt vektor

Tavle 2 ud af 11

Givet matricerne

$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Løs matrixligningen

$\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ hvor $\underline{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

er en ukendt matrix

$$T = [A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 - 2R_1$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

$R_2 \cdot \frac{1}{3}$, $R_1 + R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Tavle 3 ud af 11

Inspiration fra $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$

(1) Tallet 1 er neutral mht multiplikation $\boxed{a \cdot 1 = 1 \cdot a = a}$

(2) Alle tal $a \neq 0$ har et inverst tal $a^{-1} = \frac{1}{a}$ der opfylder at

$$\boxed{a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1}$$

(3) For alle $a \neq 0$ har ligningen $ax = b$ løsningen $\boxed{x = a^{-1} \cdot b}$

Vi stiller disse spørgsmål til $n \times n$-matrice

(1) Kan vi finde en matrix E der opfylder

$\underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{A}$?

Metode: $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{A}$

Tavle 4 ud af 11

(2) Kan vi for alle $\underline{A}$ finde en invers matrix $\underline{A}^{-1}$ der opfylder $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$ Nej kun hvis regulær

Metode Løs $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{E}$

Særligt spørgsmål. Findes undtagelse svarerende til $a \neq 0$
ja, hvis A er singulær

(3) Kan ligningen $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ løs ved $\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$

Ja, men kun hvis $\underline{A}$ er regulær

Tavle 5 ud af 11

Determinater:

Til enhver n×n matrix knyttes et tal = determinanten.

Symbol:

$$\mathrm{Det}(\underline{A}) = |\underline{A}|$$

Udregningsmetode:

Opløsning efter første søjle

1×1 matrix

$$\mathrm{Det}(a) = a$$

Tavle 6 ud af 11

2×2 matrix

$$= \mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \underline{\underline{a \cdot d - b \cdot c}}$$

3×3 matrix

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = a \cdot \mathrm{Det}\begin{bmatrix} e & h \\ f & i \end{bmatrix} - b \cdot \mathrm{Det}\begin{bmatrix} d & g \\ f & i \end{bmatrix} + c \cdot \mathrm{Det}\begin{bmatrix} d & g \\ e & h \end{bmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Tavle 7 ud af 11

4 x 4 matrix : $\text{Det}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\text{Det}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - 1\cdot\text{Det}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$+ (-2)\,\text{Det}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - 1\cdot\text{Det}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \underline{\underline{-26}}$

Vigtigt: Kan også opløse efter en vilkårligen anden søjle - eller række!

Tavle 8 ud af 11

Egenskaber for Det

1) $\text{Det}(\underline{A}^T) = \text{Det}(\underline{A})$

2) Hvis $\underline{A}$ har en 0-række eller en 0-søjle $\text{Det}(\underline{A}) = \underline{0}$

(3) $\text{Det}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = \underline{\underline{24}}$

Det (Trekantmatrix) = produkt af diagonal-tallene

Tavle 9 ud af 11

(4) Det & 3 rækkeoperationer

- Hvis to rækker ombyttes, skifter Det fortegn.
- Hvis en række ganges med k, skal Determinanten ganges med k
- Læg et multiplum af en række til en anden række. Det uforandret

Tavle 10 ud af 11

(5) Følger af (4):
Hvis A er regulær, så er $\mathrm{Det}(\underline{A}) \neq 0$
singulær, så er $\mathrm{Det}(\underline{A}) = 0$.

(6) $\mathrm{Det}(\underline{E}) = 1$

(7) $\mathrm{Det}(\underline{A}^{-1}) =$

$$\mathrm{Det}(\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1}) = \begin{cases} \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(A^{-1}) \\ \mathrm{Det}(\underline{E}) = 1 \end{cases}$$

Tavle 11 ud af 11

(6a)
$\mathrm{Det}(A \cdot B)$
$= \mathrm{Det}(\underline{A}) \cdot \mathrm{Det}(B)$