哈尔滨工业大学
2007年春季学期本科生《现代控制理论基础》
考试试卷（A卷）标准答案

一、填空题（本题含有 **10** 个小题，每小题 **2** 分，共 **20** 分）

1. 是。2. 保持不变。 3. $\mathbf{F}^{k-h}$。4. 完全能，状态完全能观测。 5. 独立。
6. 2×6。7. 能控，能观（测）。8. 4。9. 对偶。 10. $n-2$。

二、选择题（本题含有 **10** 个小题，每小题 **4** 分，共 **40** 分）

1.（D）2.（B）3.（D）4.（A）5.（B）6.（C）7.（A）8.（D）9.（C）10.（A）

三、解答题（本题含有 **5** 个小题，每小题 **8** 分，共 **40** 分）

1. 写出系统 $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ n & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}-1\\ m\end{bmatrix}u$， $\mathbf{x}\in R^2$， $u\in R$ 状态完全能控的充分必要条件。

[解] $b=\begin{bmatrix}-1\\ m\end{bmatrix}$， $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ n & 2\end{bmatrix}$， $Ab=\begin{bmatrix}1 & 2\\ n & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2m-1\\ 2m-n\end{bmatrix}$。

能控性矩阵为 $M=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2m-1\\ m & 2m-n\end{bmatrix}$， $\det M=n-m-2m^2$，当 $\det M\neq 0$ 时，$\operatorname{rank}M=2$。所以完全能控的充要条件为： $n-m-2m^2\neq 0$

2. 设一个系统可用传递函数表示为 $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{2}{s^3+2s^2+7s+3}$，写出该系统的一个状态空间表达形式。

[解法 1] 根据传递函数得 $s^3Y(s)+2s^2Y(s)+7sY(s)+3Y(s)=2U(s)$，在不考虑初始条件的情况下，取拉氏反变换得 $\dddot{y}+2\ddot{y}+7\dot{y}+3y=2u$。取状态变量 $x_1=y$，$x_2=\dot{y}$，$x_3=\ddot{y}$，则有

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-3x_1-7x_2-2x_3+2u\\ y=x_1\end{cases}\quad \text{或写成}\quad \begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -7 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 2\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\end{cases}$$

[解法 2] 根据传递函数得 $s^3Y(s)+2s^2Y(s)+7sY(s)+3Y(s)=2U(s)$，在不考虑初始条件的情况下，取拉氏反变换得 $\dddot{y}+2\ddot{y}+7\dot{y}+3y=2u$，写成 $\dddot{y}/2+2\ddot{y}/2+7\dot{y}/2+3y/2=u$。取状态变量 $x_1=y/2$，$x_2=\dot{y}/2$，$x_3=\ddot{y}/2$，则有

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-3x_1-7x_2-2x_3+u\\ y=2x_1\end{cases}\quad \text{或写成}\quad \begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -7 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\end{cases}$$

3. 给定线性定常系统 $\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}u$，求状态反馈增益阵 $\mathbf{K}$，使得在反馈律 $u=-\mathbf{K}\mathbf{x}$ 作用下，闭环系统的极点为 $\lambda_1=-5$，$\lambda_2=-3$。

[解] 设状态反馈增益阵为 $\mathbf{K}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$，则闭环系统的方程可写为

$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1-2k_1 & -1-2k_2\\ -k_1 & 2-k_2\end{bmatrix}\mathbf{x}$，它的特征多项式为

$D(s)=\det(sI-\begin{bmatrix}1-2k_1 & -1-2k_2\\ -k_1 & 2-k_2\end{bmatrix})=s^2+(2k_1+k_2-3)s+2-5k_1-k_2$。根据闭环极点的位置，可写出期望特征多项式为 $D^*(s)=s^2+8s+15$。比较两个多项式的对应项系数，可得关于 k_1，k_2 的代数方程组

$\begin{cases}2k_1+k_2-3=8\\ 2-5k_1-k_2=15\end{cases}$，解之得 $k_1=-8$，$k_2=27$。则状态反馈阵为 $\mathbf{K}=\begin{bmatrix}-8 & 27\end{bmatrix}$。

4. 设有一个 2 阶非线性系统，其状态方程为 $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2^3-3x_1\\ \dot{x}_2=-x_1x_2^2-x_2^5+\dfrac{7}{2}x_2^5\varphi(x_1,x_2)\end{cases}$，其中 $\varphi(x_1,x_2)$ 为一个不确定的实值函数，但是满足 $|\varphi(x_1,x_2)|\le\dfrac{1}{7}$。证明该系统在坐标原点处渐近稳定。

[证明] 取李氏函数 $V(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2$，其中 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^T$，则 $V(\mathbf{x})$ 是正定的，另外，沿着原系统的状态轨线，有

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x})&=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2\\ &=2x_1(x_2^3-3x_1)+2x_2[-x_1x_2^2-x_2^5+\frac{7}{2}x_2^5\varphi(x_1,x_2)]\\ &=-6x_1^2-2x_2^6[1-\frac{7}{2}\varphi(x_1,x_2)]\end{aligned}$$

由于 $|\varphi(x_1,x_2)|\le\dfrac{1}{7}$，所以 $-\dfrac{1}{2}\le-\dfrac{7}{2}\varphi(x_1,x_2)\le\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{1}{2}\le1-\dfrac{7}{2}\varphi(x_1,x_2)\le\dfrac{3}{2}$，此时必有 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 为负定。所以该系统在坐标原点处渐近稳定。

5. 给定单输入单输出线性系统的状态空间形式为

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

对该系统设计一个全维状态观测器，使观测器的极点为 $\lambda_1=-2+i$，$\lambda_2=-2-i$，其中 i 表示虚数单位。

[解] 原系统的状态空间表达式可写为

$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+bu\\ y=c\mathbf{x}\end{cases}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$，$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$。设状态观测器方程为

$\dot{\hat{\mathbf{x}}}=\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{b}u-\mathbf{F}_e(\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}-y)$。将状态方程与观测器方程相减，并令状态估计误差为 $\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}$，则观测器误差方程为 $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}=(\mathbf{A}-\mathbf{F}_e\mathbf{c})\tilde{\mathbf{x}}$，

令 $\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$，则 $\mathbf{A} - \mathbf{F}_e\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2-2f_1 & -f_1 \\ -2f_2 & -3-f_2 \end{bmatrix}$，其特征多项式为

$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{F}_e\mathbf{c}) = s^2 + (2f_1 + f_2 + 5)s + 6f_1 + 2f_2 + 6$

根据观测器的极点，可写出期望特征多项式为

$D^*(s) = [s-(-2+i)][s-(-2-i)] = s^2 + 4s + 5$

比较两个多项式的对应项系数，可得关于 f_1，f_2 的代数方程组

$\begin{cases} 2f_1 + f_2 + 5 = 4 \\ 6f_1 + 2f_2 + 6 = 5 \end{cases}$，解之得 $f_1 = 0.5$，$f_2 = -2$。

所以观测器增益阵为 $\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -2 \end{bmatrix}$。