

自动控制理论 B

倒立摆实验

实 验 名 称 ： 倒立摆的状态反馈控制

姓 名 ： 朱方程

学 号 ： SZ170410221

班 级 ： SZ1703202

撰 写 日 期 ： 2020. 7. 8

哈尔滨工业大学（深圳）

一、 状态反馈增益计算

二状态反馈

角度和角速度

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} [\ddot{x}]$$

$$y = [\phi] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + [0][\ddot{x}]$$

对于

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 29.4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = [0]$$

首先判断系统能控性，利用能控性矩阵判据

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

计算出 $\text{rank } Q_c = 2$ ，系统能控，可以通过状态反馈进行极点配置。

设状态反馈为 $u = Fx + v$,

已知系统的特征多项式

$$\det(sI - A) = s^2 - 29.4$$

期望的闭环系统极点为 $-4 \pm 3j$ ，其特征多项式为

$$(s + 4 + 3j)(s + 4 - 3j) = s^2 + 8s + 25$$

从而得到

$$\bar{F} = [-29.4 - 25 \quad 0 - 8] = [-54.4 \quad -8]$$

变换阵为

$$P = [B \quad AB] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

状态反馈增益矩阵 F

$$\begin{aligned} F &= \bar{F}P^{-1} \\ &= [-18.1333 \quad -2.6667] \end{aligned}$$

三状态反馈

角度和角速度、速度

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 29.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} [\ddot{x}]$$
$$y = [\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} [\ddot{x}]$$

对于

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 29.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

首先判断系统能控性，利用能控性矩阵判据

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 88.2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

计算出 $\text{rank } Q_c = 3$ ，系统能控，可以通过状态反馈进行极点配置。

设状态反馈为 $u = Fx + v$,

已知系统的特征多项式

$$\det(sI - A) = s^3 - 29.4s$$

期望的闭环系统极点为 $-6 \pm j, -4$ ，其特征多项式为

$$(s + 4)(s + 6 + j)(s + 6 - j) = s^3 + 16s^2 + 85s + 148$$

从而得到

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} -140 & -114.4 & -16 \end{bmatrix}$$

变换阵为

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -29.4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -29.4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

状态反馈增益矩阵 F

$$\begin{aligned} F &= \bar{F}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -38.1333 & -6.9206 & 4.7619 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

四状态反馈

角度和角速度、位移、速度

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} [\ddot{x}]$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\ddot{x}]$$

对于

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

首先判断系统能控性，利用能控性矩阵判据

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 88.2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

计算出 $\text{rank } Q_c = 3$ ，系统能控，可以通过状态反馈进行极点配置。

设状态反馈为 $u = Fx + v$,

已知系统的特征多项式

$$\det(sI - A) = s^4 - 29.4s^2$$

期望的闭环系统极点为 $-6 \pm j, -4, -6$ ，其特征多项式为

$$(s + 4)(s + 6 + j)(s + 6 - j) = s^4 + 22s^3 + 181s^2 + 658s + 888$$

从而得到

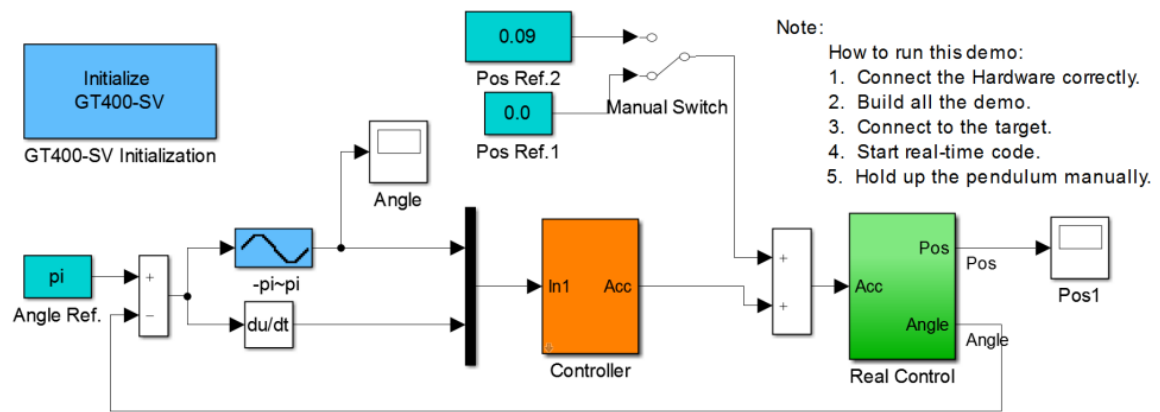
$$\bar{F} = [-888 \quad -658 \quad -210 \quad -22]$$

状态反馈增益矩阵 F

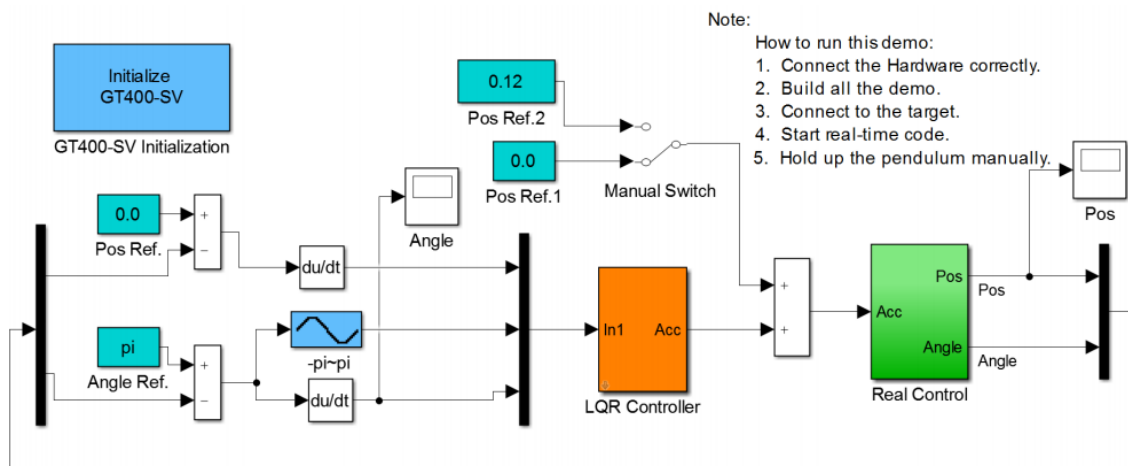
$$\begin{aligned} F &= \bar{F}P^{-1} \\ &= [-54.4218 \quad -34.0136 \quad 109.2739 \quad 20.0045] \end{aligned}$$

二、实时控制界面图

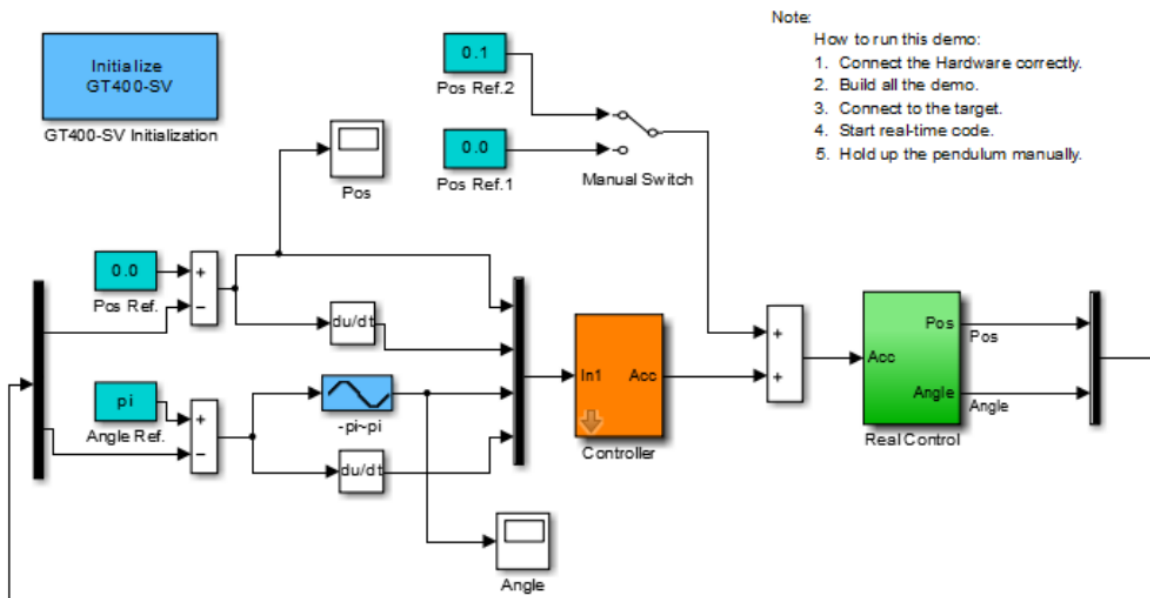
二状态



三状态

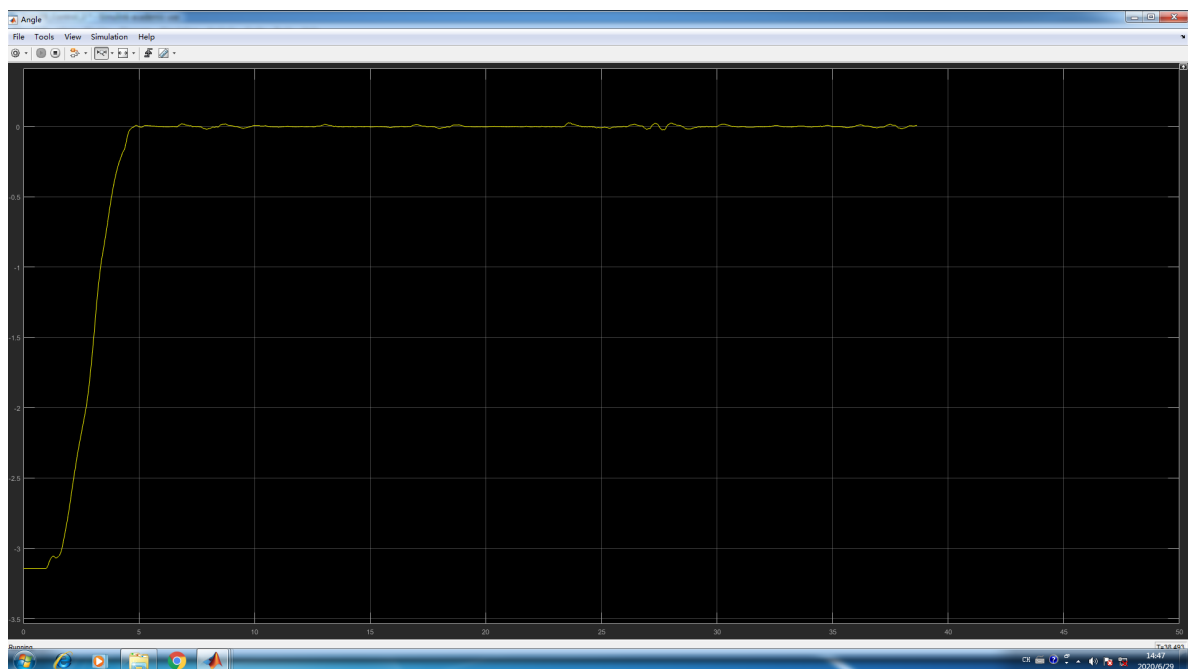


四状态

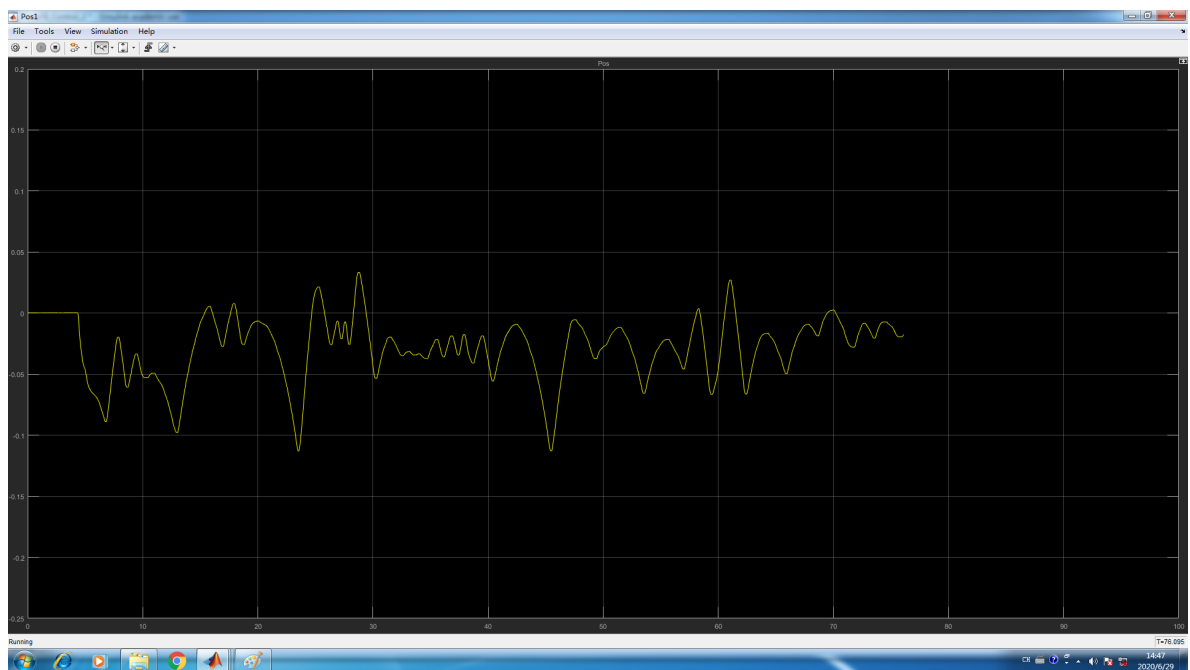


三、各变量随时间的演化曲线

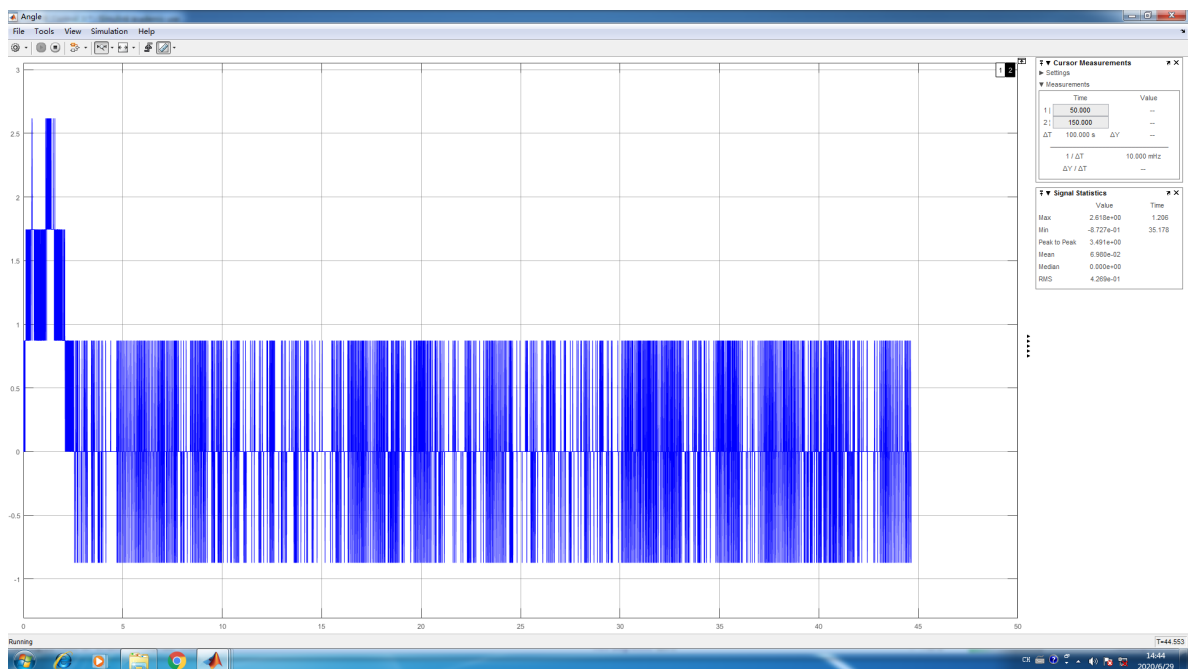
二状态-角度



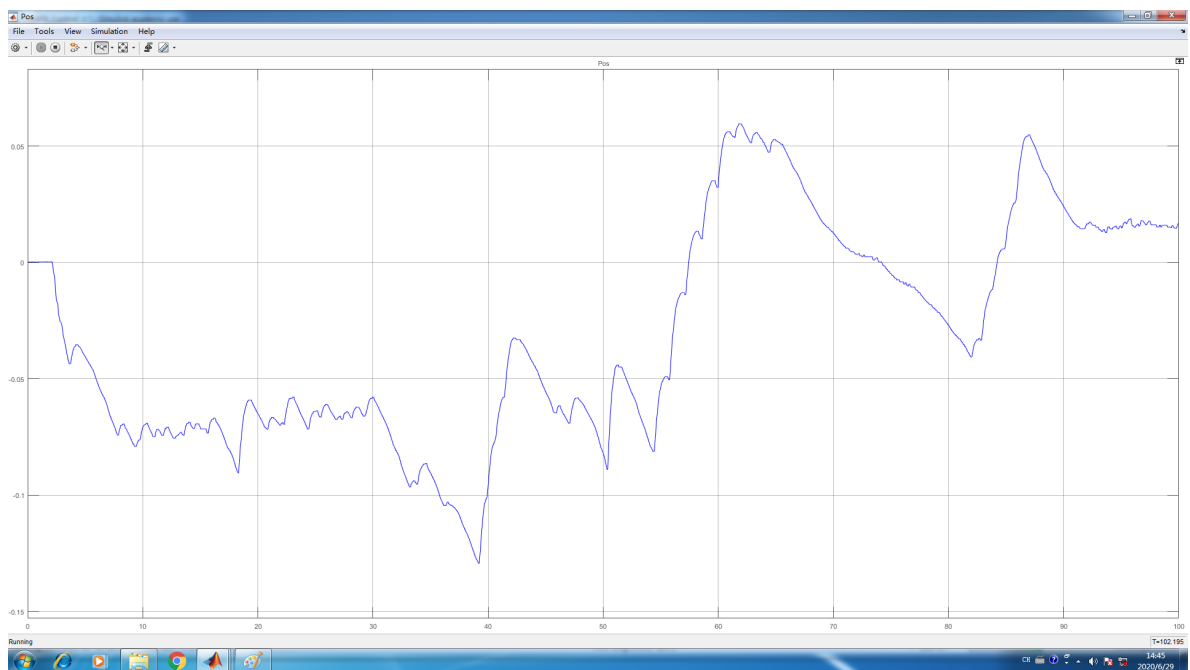
二状态-位置



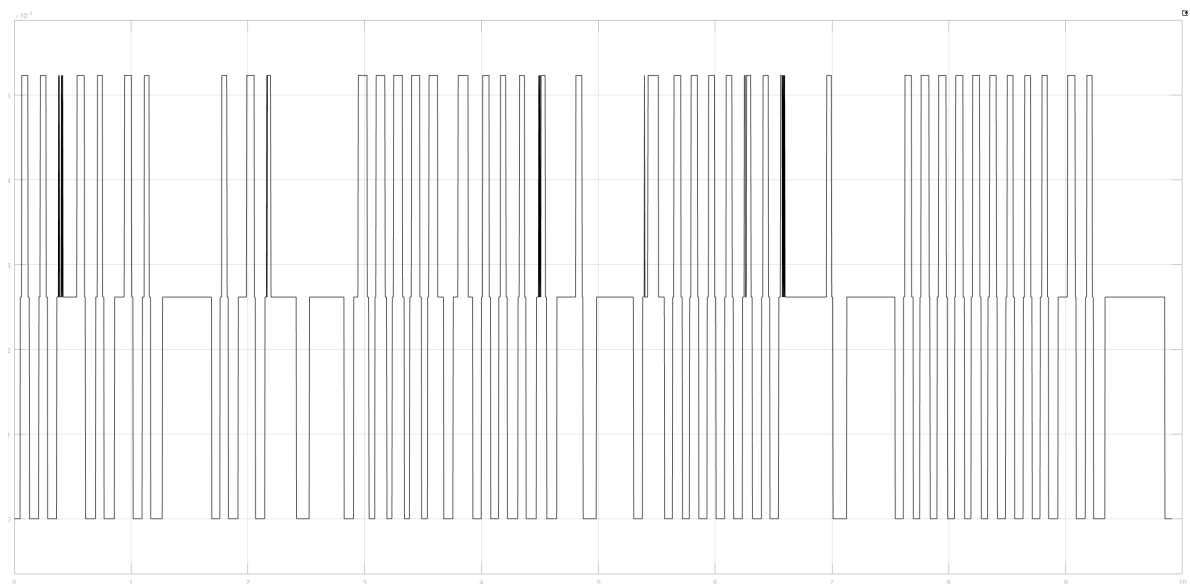
三状态-角度



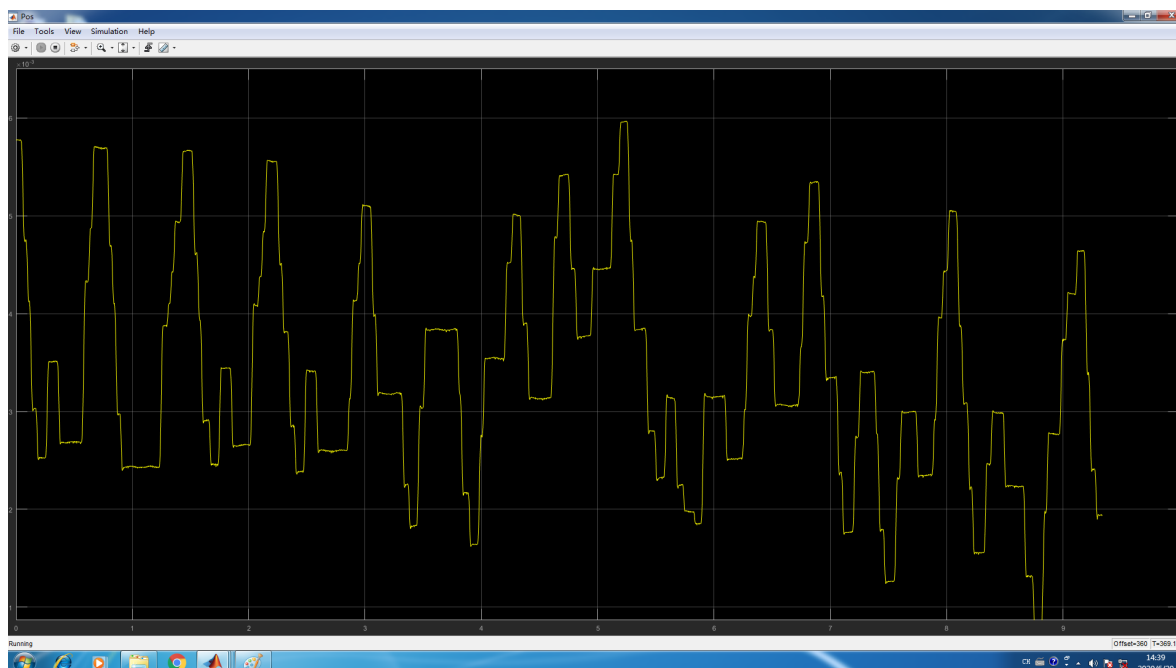
三状态-位置



四状态-角度



四状态-位置



四、 实验过程中碰到的问题及解决办法

又控制界面得知，状态反馈是以负反馈形式实现的，而我在计算过程中均是以正反馈形式计算，故在填入控制器数据时，应将所计算的反馈矩阵中的所有元素均加一个负号。