# 信号分析与处理

- 离散信号分析
    - 时域分析
        - 理想采样与恢复
            - 时域采样定理
            - 频域采样定理
            - 恢复连续时间信号内插公式
            - 频域内插公式
        - 离散信号描述
            - 典型序列
        - 离散信号时域运算
    - 频域分析
        - DFS（周期信号）
            - DFS性质
        - DTFT（非周期信号）
            - 性质
            - 常见序列
            - DTFT对称性质
        - DFT
            - DFT性质
        - FFT
    - Z域分析
        - Z变换与反变换
            - 定义
            - 收敛域ROC
            - 反变换求取
                - 部分分式展开
                - 幂级数
                - 围线积分
        - 单边Z变换
        - Z变换性质
            - 单边Z变换的性质（与双边Z变换不同）
        - Z变换与其他变换的关系
            - Laplace
            - DTFT
            - DFT
- 信号处理基础
    - 系统及其性质
        - 系统定义
        - 系统与信号关系
        - 系统性质
        - 线性时不变系统的冲激/样值响应
        - 连续系统的卷积积分
        - 离散系统的卷积和

# 绪论

## 信号描述

- 波形图
- 数学表达式

## 信号分类

### 独立变量个数

- 一维（语音信号）
- 二维（黑白图）
- 三维（彩图）

### 时间特性

- 确定性 vs 随机性
- 连续 vs 离散时间
- 连续（定义域连续）
    - 模拟（时间幅值均连续）
- 离散（定义域离散）

    - 抽样（时间离散）
    - 数字（时间幅值均离散）
- 周期 vs 非周期
    - 设$f(t)=\sum f_i(t)$，$\begin{matrix}\forall i,j \\ \exists k=T_i/T_j\in\mathbb{Q}\end{matrix}\Leftrightarrow f(t)$ 是周期信号

### 能量特点

- 能量(有限)信号：
    - $E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t$
    - $E<\infty$
- 功率(有限)信号：
    - $P=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\mathrm{d}t$
    - $P<\infty,\ P\neq 0$
- 幅度有限的周期、随机信号均属于功率信号
- 一个信号**可能**既不是能量信号，也不是功率信号
- 一个信号<u>**不可能**</u>既是能量信号，又是功率信号

### 系统分类

- 对信号分析和处理方法的不同
- 模拟处理系统
- 数字处理系统

---

# 连续信号分析

### 时域描述

- 普通信号
    - 正弦信号
    - 指数信号
- 奇异信号
    - 脉冲
    - 阶跃
    - 冲激

### 正弦

- 性质：
  - 同频率相加
  - 频率差整数倍（周期比为有理数倍）的信号相加，仍为周期函数

### 指数信号

- $s=\sigma+j\omega$
- 讨论 $\sigma==0?$，$\omega==0?$
- 欧拉公式：

$$\begin{cases}\sin\omega t=\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})\\ \cos\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})\end{cases}$$

### 单位斜坡信号

- $r(t)$

### 单位阶跃信号

- $u(t)$

### 单位冲激信号

- $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$
- 偶函数特性
- 筛选特性
- 与阶跃的微、积分关系

## 时域运算

### 基本运算

- 尺度变换
  - 幅度
  - 时间：改变信号基本特征（频率），频谱变化！
- 翻转：将信号以纵轴为中心进行对称映射，令 $t=-t$

- 平移

## 叠加、相乘（逐点）

## 微、积分

- **单位冲激偶函数**：$\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)$
    - 单位冲激偶函数是奇函数
    - 筛选特性：分部积分证明

      $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta'(t-t_0)\mathrm{d}t=-x'(t_0)$

## 卷积

- 本质的一种解释
- 在信号的持续作用下，系统的响应
- 步骤:
    1. 变量替换
    2. 翻转：
    3. 平移
    4. 相乘
    5. 积分
- 性质
    - 交换律
    - 分配律
    - 结合律
    - 积分

      $$\int_{-\infty}^{t}[x_1(\tau)*x_2(\tau)]\,\mathrm{d}\tau=x_1(t)*\left[\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\left[\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]*x_2(t)$$

    - 微分

      $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_1(t)*x_2(t)]=x_1(t)*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t)*x_2(t)$$

- 任意信号与冲激信号的卷积
    - $x(t)*\delta(t)=x(t)$
    - $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$
    - $x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=x(t-t_1-t_2)$

# 信号分解

- 信号
  - 直流分量+交流分量
  - 偶分量+奇分量
  - 冲激函数之和

### 冲激函数之和

- $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=x(t)*\delta(t)$

### 正交分解

#### 预备知识

- 函数正交：

  $$\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2^*(t)\,\mathrm{d}t=0$$

- 正交函数集
  - $\forall f_i,f_j\in\{f_k\}\ (i\neq j)$ 均正交，则称集合$\{f_k\}$ 是完备正交函数集
- 完备正交函数集
  - 定义：
    - 若

      $$\begin{aligned}&\nexists\,\varphi(t)\notin\{f_k\},\\ &s.t.\qquad\qquad \forall i,\ \int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)f_i^*(t)\,\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

      则称 $\{f_k\}$ 为完备正交函数集
  - 三角函数集：$\{1,\cos\omega_0t,\cos2\omega_0t,\cdots,\sin\omega_0t,\sin2\omega_0t,\cdots\}$
  - 复指数函数集：$\left\{e^{jn\omega_0t}\right\}(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

#### 分解

- 表示：$x(t)=\sum c_if_i(t)+x_e(t)$
- 均方误差 $\overline{x_e^2(t)}=\dfrac{1}{t_2-t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t)-\sum_{i=1}^{n}c_if_i(t)\right]^2\mathrm{d}t$

- 使均方误差最小，计算得系数

$$c_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_j^*(t)\ \mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} f_j(t) f_j^*(t)\ \mathrm{d}t}$$

- Parseval定理：信号分解的能量关系

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 k_i$$

# 频域分析

## 周期信号的频谱分析

### 级数展开 CFS

- 周期信号需满足**Dirichlet**条件
- 提示："内积"

$$c_i = \frac{< x(t), f_i(t) >}{< f_i(t), f_i(t) >}$$

- Fourier展开：

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\ \mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t\ \mathrm{d}t\ ,\ n = 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t\ \mathrm{d}t\ ,\ n = 1, 2, \cdots$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \end{aligned} \tag{?}$$

$$\begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -\arctan \dfrac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots$$

- 复指数展开：

$$x(t)=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}A_n e^{\mathrm{j}\varphi_n}e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}=\sum_{-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned}X(n\omega_0)&=\frac{1}{2}A_n e^{\mathrm{j}\varphi_n}=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n)\\&=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

  称 $X(n\omega_0)$ 为复Fourier系数

- 取样函数 $\mathrm{Sa}(x)=\dfrac{\sin x}{x}$
    - 周期矩形脉冲的Fourier级数：$\mathrm{CFS}[g(t)]=X(n\omega_0)=\dfrac{\tau}{T_0}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{n\omega 0\tau}{2}\right)$

### 周期信号的频谱

- $|X(n\omega_0)|$
- 特性：
    - 离散性
    - 谐波性
        - 谱线以$\omega_0$ 为间隔等间距分布
    - 收敛性
    - ***Remark***: 满足Dirichlet条件的周期函数均有上述3个特性
- 负频率：
    - 出于数学表示的需要，无物理意义
    - 绝对值相等的正负频率幅度之和 表示一个实际存在的正弦谐波分量

### 周期信号的功率分配

$$P=\frac{1}{T_0}=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n^2$$

- 周期信号时域平均功率 = 直流、基波、各次谐波平均功率之和

### Fourier级数近似

- *吉伯斯现象

## 连续非周期信号的频谱分析

- $T_0 \to \infty$，谱线连续，幅值无穷小
- 考虑频谱密度函数$X(\omega) = T_0 X(n\omega_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} X(n\omega_0)$

### Fourier 变换

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\mathrm{j}\omega t} \, \mathrm{d}t$
- 逆变换：$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{\mathrm{j}\omega t} \, \mathrm{d}\omega$
- CFT存在的**充分**条件：非周期函数的Dirichlet条件

### 常用Fourier变换

| $g(t)$ | $\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ |
| --- | --- |
| 单边指数 | $\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$ |
| 双边指数 | $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$ |
| 1 | $2\pi\delta(\omega)$ |
| $\mathrm{sgn}(t)$ | $\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$ |
| $\delta(t)$ | 1 |
| $u(t)$ | $\pi\delta(t) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}$ |
| | |

### 周期函数的Fourier变换

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

- 周期函数CFS与CFT的区别:
  - CFS：表征幅度，为有限值
  - CFT：表征频谱密度，为冲激串

## Fourier 变换性质

- 线性
- 奇偶性

$$\mathscr{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega)$$

- 对偶性

$$\mathscr{F}[x(t)] = X(\omega)$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathscr{F}[X(t)] = 2\pi x(\omega)$$

- 尺度变换

$$\mathscr{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a})$$

  - 时域压缩——频带展宽
- 时移性质

$$\mathscr{F}[x(t \pm t_0)] = e^{\pm \mathrm{j}\omega t_0}X(\omega)$$

- 频移特性

$$\mathscr{F}[e^{\pm \mathrm{j}\omega_0 t}x(t)] = X(\omega \mp \omega_0)$$

- 微分性质

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = (\mathrm{j}\omega)^n X(\omega)$$

- 积分性质

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ \mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

- Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega$$

- 卷积定理
  - 证明思路：交换积分顺序
  - 时域：略
  - 频域：

$$\mathscr{F}^{-1}[X_1(\omega) * X_2(\omega)] = 2\pi \cdot x_1(t)X_2(t)$$

# 离散信号分析

## 时域分析

### 理想采样与恢复

#### 时域采样定理

- $x_s(t)=x(t)\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$
- $X_s(\omega)=\dfrac{1}{T_s}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$
- Shannon采样定理; Nyquist 频率
- 非时限——频域带限（周期延拓）

#### 频域采样定理

- $X_p(\omega)=X(\omega)\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$
- $x_p(t)=\dfrac{1}{\omega_0}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x(t-kT_0)$
- $\omega_0\le\dfrac{\pi}{t_m}$ ; $T_0\ge 2t_m$
- 非带限——时限（周期延拓）

#### 恢复连续时间信号内插公式

$$
\begin{aligned}
x(t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)*\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\mathrm{Sa}\left[\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s)\right]
\end{aligned}
$$

#### 频域内插公式

$$X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)\mathrm{Sa}\left[\frac{T_0}{2}(\omega-k\omega_0)\right]$$

### 离散信号描述

- 序列$x(n)$或$x(k)$
- 离散信号能量：$W=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$
- **数字角频率** $\varOmega_0=\omega_0T_s\ (\mathrm{rad})$ , 范围：$[0,2\pi)$

## 典型序列

1. 单位脉冲
2. 单位阶跃
3. 矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{others}\end{cases}$$

4. 实指数序列
    - $x(n)=a^n u(n)$
5. 正弦型序列
    - $x(n)=A\sin\left(n\omega_0 T_s+\varphi_0\right)$
    - 不一定是周期信号：
        - 周期信号须满足条件：$2\pi/\Omega_0$ 为有理数
6. 复指数序列
    - $x(n)=e^{(\sigma+\mathrm{j}\Omega_0)n}$
    - 数字频率取值范围：$0\le\Omega\le 2\pi$
7. 任意离散序列

## 离散信号时域运算

1. 平移
2. 翻转
3. 相加
4. 相乘
5. 累加
    - $\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$
6. 差分
    - 前向：$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$
    - 后向：$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$
    - 关系：$\nabla x(n)=\Delta x(n-1)$
7. 时间尺度变换
    - ***Remark***: 不是压缩序列，而是变化采样时间
    - $x(2n)$ 是序列$x(n)$ 每两项抽一项
8. 卷积和
    - 性质：
        - 满足：交换律、分配律、结合律

- 差分、累加性质类似连续卷积的微分、积分
- 与脉冲序列卷积：

$$
\begin{aligned}
x(n) * \delta(n) &= x(n) \\
x(n) * \delta(n-n_0) &= x(n-n_0) \\
x(n-n_1) * \delta(n-n_2) &= x(n-n_1-n_2)
\end{aligned}
$$

9. 两序列相关运算

# 频域分析

## DFS（周期信号）

- 由CFS推出：令 $T_0 = NT, \mathrm{d}t = T, \Omega_0 = \omega_0 T = 2\pi/N.$

$$X\left(k\frac{\Omega_0}{T}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-\mathrm{j}k\Omega_0 n}$$

或记作

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{\mathrm{j}k\Omega_0 n} \\
X(k\Omega_0) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\mathrm{j}k\Omega_0 n}
\end{aligned}
$$

- 注意到频谱$X(k\Omega_0)$ 也是周期为$N$ 的离散序列
- 向量正交分解：

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j0\Omega_0 0} & \cdots & e^{j(N-1)\Omega_0 0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j0\Omega_0(N-1)} & \cdots & e^{j(N-1)\Omega_0(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X((N-1)\Omega_0) \end{bmatrix}$$

### DFS性质

1. 线性
2. 周期卷积定理
   - 周期卷积：$x(n)\star$
   - 周期卷积仅在单个周期内求和
3. 复共轭
   - $x^*(-n) \leftarrow \mathrm{DFS} \rightarrow X^*(k\Omega_0)$

4. 位移

## DTFT（非周期信号）

- 周期延拓、取极限

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-\mathrm{j}\Omega n}$$

$$\left(\Omega=k\frac{2\pi}{N},\ k=0,1,\cdots,N-1\right)$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega$$

- 存在条件：
  - $x(n)$ 绝对可和
- 注意到DTFT仍是连续周期函数（关于$\Omega$ ）

### 性质

- P137 表2-1

### 常见序列

| $x(n)$ | $X(\Omega)$ |
| --- | --- |
| $\delta(n)$ | $1$ |
| $\delta(n-n_0)$ | $e^{-\mathrm{j}\Omega n_0}$ |
| $1$ | $2\pi\delta(\Omega)$ |

### DTFT对称性质

| $x(n)$ | $X(\Omega)$ |
| --- | --- |
| 实、偶 | 实、偶 |
| 实、奇 | 虚、奇 |
| 虚、偶 | 虚、偶 |
| 虚、奇 | 实、奇 |

## DFT

- 时域、频域均离散
- 推导思路：
  1. 非周期信号——DTFT：$[0,2\pi]$ 作N点采样

2. 周期信号——DFS：取主值

- 从DFS推导：
  - 周期延拓
  - 取主值
  - 乘周期（变成频谱密度函数）
- 从DFTF推导：

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \mathrm{DTFT}[x(n)]|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}} \\
&= X(\Omega)|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}
\end{aligned}
$$

- 离散傅立叶变换

$$
X(k) = NX(k\Omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\mathrm{j}k\Omega_0 n}
$$

$$
= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}
$$

$$
x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}
$$

## DFT性质

1. 线性：短的补0
2. 圆周移位（循环移位）

$$
((n-m))_N \triangleq (n-m) \ \ \mathrm{MOD} \ \ N
$$

   - 性质：

$$
\begin{aligned}
x((n-m))_N R_N(n) &\Leftrightarrow e^{-\mathrm{j}\Omega_0 mk} X(k) \\
e^{\mathrm{j}\Omega_0 k_0 n} x(n) &\Leftrightarrow X((k-k_0))_N R_N
\end{aligned}
$$

3. 圆周卷积

$$
x(n) \star h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m))_N R_N(n)
$$

   - 圆周卷积运算的两个序列长度必须相等（短的可以补零）
   - ***Remark***:
     - 注意**圆周**卷积与**线性**卷积的不同，both原因and结果（P145~146）

      - 当2个序列补零到长度满足 $L \geq N+M-1$ 时，两种卷积结果一致

4. 时移特性

$$\mathrm{DFT}[x((n-m))_N R_N(n)] = e^{-\mathrm{j}\Omega_0 mk} X(k)$$

5. 频移特性

$$\mathrm{DFT}[e^{\mathrm{j}\Omega_0 mk_0} x(n)] = X((k-k_0))_N R_N(n)$$

6. 卷积定理

$$\begin{aligned} x(n) \star h(n) &= X(k)H(k) \\ x(n)h(n) &= \frac{1}{N} X(k) \star H(k) \end{aligned}$$

### FFT

- 定义指数（旋转/加权）因子：$W_N = e^{-\mathrm{j}2\pi/N}$
  - 性质：正交、周期、对称、可约
- 频率分辨率：
  - 数字频率：$2\pi/N$
  - 实际频率：$f_s/N$
- 码位倒置
- 应用：
  - 求线性卷积
  - 求线性相关
  - 连续时间信号频谱分析
    - 时限连续信号
    - 带限信号：时宽无限，须加窗截断

## Z域分析

- DTFT不收敛
- 乘衰减因子$r^{-n}(r>1)$

### Z变换与反变换

### 定义

- 令$z = re^{\mathrm{j}\Omega}$

$$
\begin{aligned}
X(z) = \mathscr{Z}[x(n)] = \mathscr{F}[x(n)r^{-n}] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(re^{\mathrm{j}\Omega})^{(-n)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(z)(re^{\mathrm{j}\Omega})^n \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

### 收敛域ROC

- 满足

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty$$

  条件的所有z
- Z变换要写收敛域，不同收敛域对应的时域序列不同
- 不同序列的收敛域
  1. 有限长序列 $0 < |z| < \infty$
  2. 右边序列 $|z| > R_{x1}$
  3. 左边序列 $|z| < R_{x2}$
  4. 双边序列 $R_{x1} < |z| < R_{x2}$

### 反变换求取

#### 部分分式展开

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{z - p_j}$$

#### 幂级数

- 大除法，商写成如下形式

$$X(z) = A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \cdots$$

**围线积分**

- 留数法，不要求掌握

## 单边Z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

## Z变换性质

| 性质 | 时域 | z域 |
| --- | --- | --- |
| 时移 | $x(n-n_0)$ | $z^{-n_0}X(z)$ |

### 单边Z变换的性质（与双边Z变换不同）

1. 时移定理 P171
    - 单边Z变换要考虑信号的初始状态
    - 设单边Z变换为 $X(z)$ ，设$x(n)$ 是双边序列
        - 左移：$\mathscr{Z}[x(n+m)u(n)]=z^m\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$
        - 右移：$\mathscr{Z}[x(n-m)u(n)]=z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$
    - 单边Z变换，$x(n)$ 是因果序列
        - 右移：$\mathscr{Z}[x(n-m)u(n)]=z^{-m}X(z)$
        - 左移: 同双边序列
2. 初值定理

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$$

3. 终值定理

$$\lim_{n\to\infty}x(n)=\lim_{z\to1}[(z-1)X(z)]$$

## Z变换与其他变换的关系

### Laplace

- $X(z)|_{z=e^{sT}}=X(s)$

**DTFT**

- $X(z)|_{z=e^{\mathrm{j}\Omega}} = X(\Omega)$

**DFT**

- 单位圆上采样

---

# 信号处理基础

## 系统及其性质

### 系统定义

### 系统与信号关系

### 系统性质

1. 记忆性

- 动态系统/记忆系统

2. 因果系统

$$y(t) = f[x(t-\tau)]\,, \tau \geq 0$$

3. 可逆性与可逆系统

- 单射

4. 稳定性
5. 时变、时不变
6. 线性、非线性

### 线性时不变系统的冲激/样值响应

- 单位冲激响应（是**零状态**响应） $h(t)$
  - 直接Laplace解决
- 单位脉冲响应（零初值）$h(n)$
  - 直接Z变换解决
- 步骤
  - 略

## 连续系统的卷积积分

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

## 离散系统的卷积和

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

## 冲激响应与阶跃响应的关系

$$h(t) = c'(t)$$
$$h(n) = c(n) - c(n-1)$$

## 卷积的性质

1. 交换律
2. 结合律
3. 
4. 微分（差分）
5. 积分（累加）

## 匹配滤波

- 自相关：

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)\,\mathrm{d}t$$

- 令滤波器单位冲激响应

$$h(t) = x(T-t)$$

则滤波器时域响应为

$$y(t) = x(t) * h(t) = R_{xx}(t-T)$$

- 信号的自相关函数在原点取最大值，且等于该信号的能量
- 该滤波器后接判决器（阈值处理），可判断是否接收到确知信号$x(t)$，故名匹配滤波器

## 频域法分析

### 频率特性函数

- 令输入 $x(t) = e^{\mathrm{j}\omega t}$
  则
  $$y(t) = h(t) * x(t) = H(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}$$

### 无失真传输

- 信号通过系统后，波形不变，允许幅度按比例放大缩小，允许固定延迟
- 无失真传输系统的频率特性函数：
  $$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = Ke^{\mathrm{j}\omega t_0}$$

### 理想低通滤波器

- 频率特性：
  $$H(\omega)\begin{cases} 1 \cdot e^{-\mathrm{j}\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$
  即
  $$\begin{cases} |H(\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \\ \varphi_h = -\omega t_0 \end{cases}$$
- 单位冲激响应：
  $$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c(t - t_0))$$
- 注意到 $t < 0$ 时 $h(t) \neq 0$，故ILPF是非因果系统，物理上不可实现

---

# 滤波器

## 滤波概念

- 传统：消除或减弱干扰噪声，强化有用信号的过程
- 现代：从原始信号中获取目标信息的过程

- 滤波器：实现滤波功能的系统，一种具有一定传输特性的信号处理装置

## 技术要求

- 通带：$-3\ \mathrm{dB} < |H(\omega)| \leq 0\ \mathrm{dB}$, 有限衰减
- 通带截止频率 $\omega_p$
- 阻带截止频率 $\omega_s$
- 衰减函数$\alpha(\omega) = -10\lg|H(\omega)|^2$（假定$H(0)=1$ 已归一化)
    - 阻带最小衰减：$\alpha(\omega_s)$
    - 通带最大衰减：$\alpha(\omega_p) = (3\ \mathrm{dB})$

## 模拟滤波器

- 物理可实现的条件：传递函数满足
    - 实系数有理函数
    - 极点均在左半平面
    - 分子阶次不大于分母阶次（因果系统）
- 设计方法：
    - 希望滤波器冲激响应为实函数, 则由共轭对称性得

      $$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H(\omega)H(-\omega)$$

      若 $h(t)$ 存在Fourier变换，则

      $$|H(\omega)|^2 = H(s)H(-s)|_{s=\mathrm{j}\omega}$$

      零、极点分布关于虚轴对称
    - 给定 $|H(\omega)|^2$ , 用 $-s^2$ 代替 $\omega^2$ , 确定$H(s)$ 的零极点
    - 一般取最小相位系统

### Butterworth LPF

- 以最高阶Taylor级数逼近理想矩形特性，n越大特性越理想
- 幅频特性

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- 通过 $\alpha_s$ 确定阶次

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg \dfrac{\omega_s}{\omega_c}}$$

- 零极点分布
  - $s_k = \omega_c e^{\mathrm{j}\left[\frac{2k+1}{2n}\pi + \frac{\pi}{2}\right]}$，$k = 0, 1, \cdots, 2n-1$
  - 极点以 $\dfrac{\pi}{n}$ 为间隔分布在半径为$\omega_c$ 的圆上（Butterworth圆）
- 归一化复频率：令

  $$\bar{s} = \frac{s}{\omega_c}$$

  则

  $$|H(\omega)| = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\bar{s} - \dfrac{s_k}{\omega_c}\right)}$$

  查表设计

# 数字滤波器

## 概述

- 处理离散时间信号
- 具有一定传输特性的数字信号处理装置
- 分类
  - 递归型——IIR
  - 非递归型——FIR
  - FFT实现的数字滤波器
- 系统函数

  $$H(z) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{N} a_j z^{-j}}$$

- 当存在 $a_j \neq 0$ 且分母不能整除，对应滤波器为IIR滤波器

## IIR 数字滤波器

### 冲激响应不变法

- 用有理多项式逼近给定滤波器幅频特性

$$H(z)=b_0(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots)$$

- 思路：
  1. 设计模拟滤波器
  2. 直接Z变换
- 特点：
  1. 模数频率呈线性关系：$\Omega=\omega T$
  2. s平面与z平面间映射的多值性易造成频谱混叠现象，不适宜高通、带阻数字滤波器

### 双线性变换法

- s平面到 $\hat{s}$ 平面变换：

$$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-e^{\hat{s}T}}{1+e^{\hat{s}T}}\right)$$

  - 把s平面压缩到 $[-\mathrm{j}\frac{\pi}{T},\mathrm{j}\frac{\pi}{T}]$ 横带上
  - 该变换是一一映射
- $\hat{s}$ 平面到 z 平面变换：
- Z变换：$z=e^{\hat{s}T}$
- 最终双线性变换表达式：

$$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

- 优点
  - 实现s平面到z平面的一一映射，消除频谱混叠
- 缺陷：
  - 数字滤波器与模拟滤波器在频率响应和频率的对应关系上发生畸变
    - 模拟频率与数字频率之间为非线性关系：

$$\omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2}$$

- 步骤：
  1. 关键频率点进行预畸变处理
  2. 设计模拟滤波器（确定阶数、归一化、反归一化）
  3. 双线性变换得数字滤波器

### IIR滤波器的网络结构

1. 直接型
2. 级联型
3. 并联型