作业四　2-3

答案：

$S=-100$，$\boldsymbol{X}=(0,20,0)^T$

（1）改变为：$S=-117$，$\boldsymbol{X}=(0,0,9)^T$

（2）改变为：$S=-90$，$\boldsymbol{X}=(0,5,5)^T$

（3）不变

（4）不变

（5）改变为：$S=-95$，$\boldsymbol{X}=(0,25/2,5/2)^T$

（6）不变

标准形

$$\min S = 5x_1 - 5x_2 - 13x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 20 \\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_5 = 90 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

			x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5	θ
C_B	X_B	0	5	-5	-13	0	0	
0	x_4	20	-1	1	3	1	0	$\frac{20}{3}$ ←
0	x_5	90	12	4	10	0	1	9

			x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	θ
C_B	X_B	$\frac{260}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{13}{3}$	0	
-13	x_3	$\frac{20}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	20 ←
0	x_5	$\frac{70}{3}$	$\frac{46}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$	1	35

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
C_B	X_B	100	0	0	2	5	0	≥ 0
-5	x_2	20	-1	1	3	1	0	
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1	

$\therefore$ 最优解 $X^* = (0,20,0)^T$，$S^* = -100$

$\because y_{01} = 0$，x_1 为非基，$\therefore$ 有无穷个最优解

① $b=\begin{bmatrix}20\\90\end{bmatrix} \rightarrow \bar{b}=\begin{bmatrix}30\\90\end{bmatrix}$

$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{bmatrix}$

$B^{-1}\bar{b}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\-30\end{bmatrix} < 0$

$S=C_B B^{-1}\bar{b}=[-5,0]\begin{bmatrix}30\\-30\end{bmatrix}=-150$

对偶单纯形法求解：

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
C_B	X_B	150	0	0	2	5	0	
-5	x_2	30	-1	1	3	1	0	
→ 0	x_5	-30	16	0	-2	-4	1	
	ε		$-$		1 ↑	$\frac{5}{4}$		

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
C_B	X_B	120	16	0	0	1	1	
→ -5	x_2	-15	23	1	0	-5	$\frac{3}{2}$	
-13	x_3	15	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	
	ε		$-$			$\frac{1}{5}$ ↑	$-$	

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
C_B	X_B	117	$\frac{103}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{13}{10}$	
→ 0	x_4	3	$-\frac{23}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{3}{10}$	
-13	x_3	9	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	

$B^{-1}\bar{b} \geq 0$

此时最优解 $X^*=(0,0,9)^T$

$S^*=-117$

(2) $\bar{b}=\begin{pmatrix}20\\70\end{pmatrix}$ $\quad B^{-1}\bar{b}=\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix}$

$$S=C_BB^{-1}\bar{b}=(-5,0)\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix}=-100$$

此时所有检验数 ≥ 0，B为正则基

对偶单纯形法：

		x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5
	100	0	0	2	5	0
x_2	20	-1	1	3	1	0
← x_5	-10	16	0	[-2]	-4	1
				1	$\frac{5}{4}$	
	90	16	0	0	1	1
x_2	5	23	1	0	-5	$\frac{3}{2}$
x_3	5	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$

$B^{-1}\bar{b}\geq 0$.

最优解变为 $X^*=(0,5,5)^T$, $S^*=-90$

(3)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	5	-5	-13→-8	0	0	θ
x_4	20	-1	1	3	1	0	20
x_5	90	12	4	10	0	1	$\frac{45}{2}$
	100	0	0	2→7	5	0	
x_2	20	-1	1	3	1	0	
x_5	10	16	0	-2	-4	1	

$\bar{c}_3=-8 \qquad \Delta c_3=\bar{c}_3-c_3=5$

$y'_{03}=y_{03}+\Delta c_3=7>0$

故最优解不变.

(4) $\bar{P}_1=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$, $C_B=(-5,0)$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}$

$$y'_{01}=c_1-C_BB^{-1}\bar{P}_1=5-(-5,0)\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=5>0$$

故最优解不变

(5) $2x_1+3x_2+5x_3\leq 50 \Rightarrow 2x_1+3x_2+5x_3+x_6=50$

原最优解为 $X^* = (0, 20, 0)^T$，不满足此约束

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	100	0	0	2	5	0	0
x_2	20	-1	1	3	1	0	0
x_5	10	16	0	-2	-4	1	0
x_6	50	2	3	5	0	0	1
	100	0	0	2 ↓	5	0	0
x_2	20	-1	1	3	1	0	0
x_5	10	16	0	-2	-4	1	0
← x_6	-10	5	0	[-4]	-3	0	1
ε				$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$		
	95	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{25}{2}$	$\frac{11}{4}$	1	0	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$
x_5	15	$\frac{27}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
x_3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$

最优解变为 $X^* = (0, \frac{25}{2}, \frac{5}{2})$，$S^* = -95$

(6)

$$P_4 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 - C_B B^{-1} P_4 = -3 - (-5, 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 7 \geq 0$$

故最优解不变