

#### 哈尔滨工业大学(深圳)

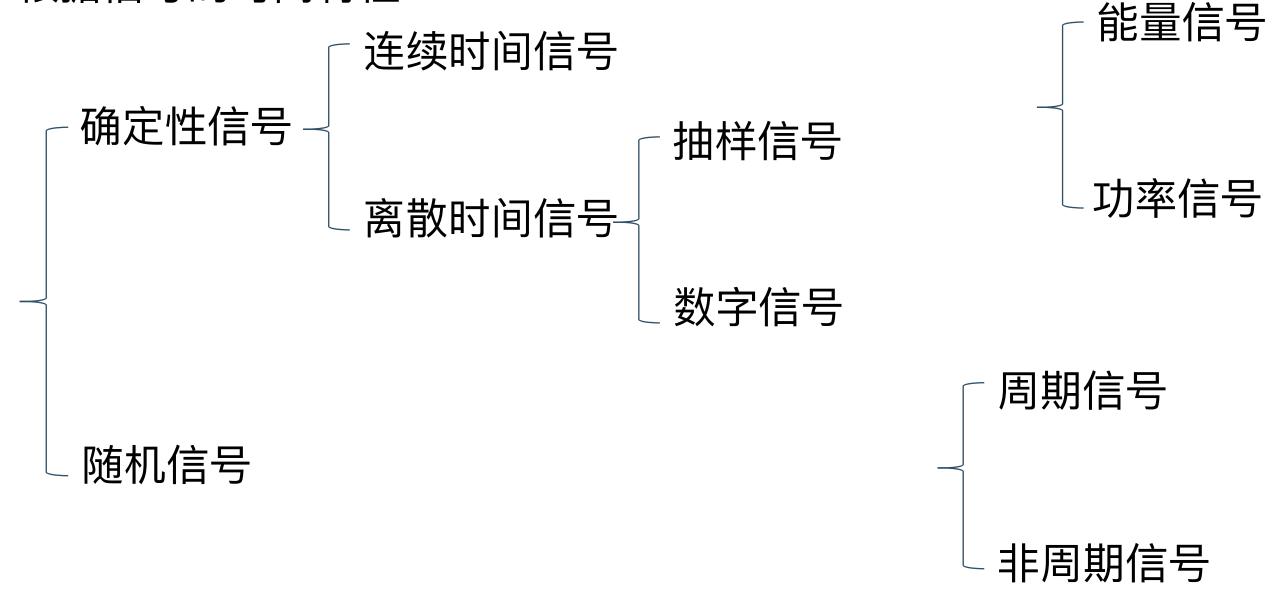
# 信号分析与处理——知识点



绪论

#### 信号的描述与分类

• 根据信号的时间特性

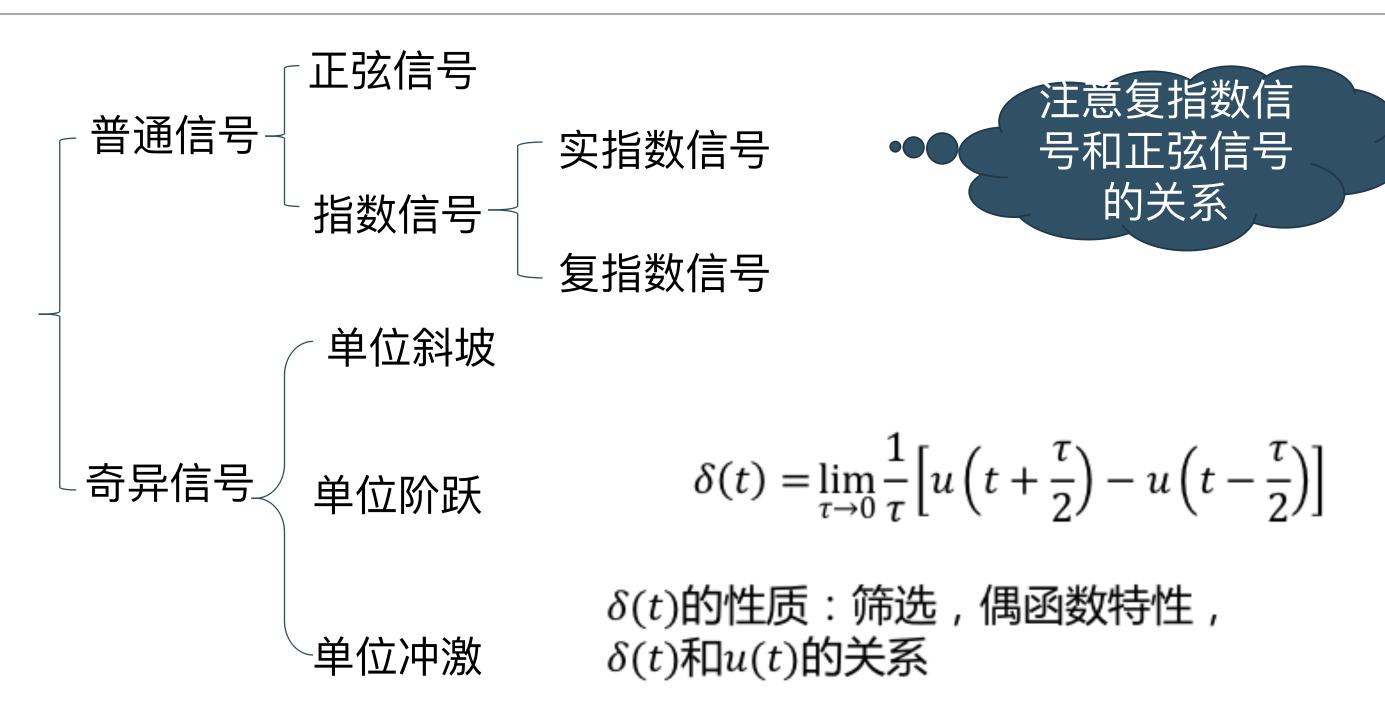




# 02

## 连续信号的分析

## 连续信号的时域描述



#### 连续信号基本运算

- 尺度变换
- 翻转
- 平移
- 叠加和相乘
- 微分和积分

· 卷积

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau$$

卷积运算的性质:

交换律、分配律、结合律、卷积的微分、 积分

与冲激信号的卷积

### 连续信号的时域分解

• 分解成冲激函数之和:  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 

• 正交分解:  $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$ ,  $\{f_i(t)\}_{i=1}^{n}$  是完备的正交函数集,  $c_i = \frac{\langle x(t), f_i(t) \rangle}{\langle f_i(t), f_i(t) \rangle}$ 

## 连续信号傅里叶级数

已知 $\{1,\cos n\omega_0(t),\sin n\omega_0(t)\}$ 在 $\left(t_0,t_0+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$ 内是完备正交函数集,有

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$
 的表达式都

已知 $\{e^{jn\omega_0t}\}$ 在 $(t_0, t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0})$ 内是完备正交函数集,有

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

周期信号频谱:  $X(n\omega_0)$ (离散性、谐波性、收敛性)

*a<sub>n</sub>, b<sub>n</sub>, X(nω<sub>0</sub>) 的表达式都 可以根据正 交函数分解 确定* 

#### 非周期信号、周期信号傅里叶变换

非周期信号傅里叶变换

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

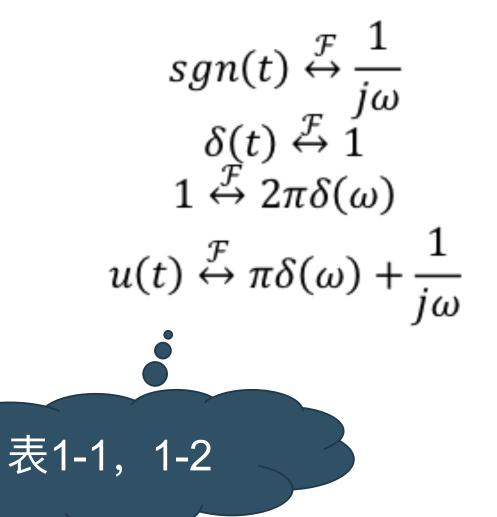
一般周期信号傅里叶变换

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

### 傅里叶变换的性质,典型信号的傅里叶变换对

线性、奇偶性、对偶性、尺度变换性质、时移特性、频移特性、微分性质积分性质、Parseval定理、卷积定理

$$EG_{\tau}(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$
$$e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{\alpha + j\omega}$$
$$e^{-\alpha|t|} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$





# 03

# 离散信号的分析

#### 理想化采样过程

$$x_{S}(t) = x(t)\delta_{T}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{S}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{S})\delta(t - nT_{S})$$
$$X_{S}(\omega) = \frac{1}{T_{S}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_{S})$$

时域采样定理(香农采样定理):对于频谱受限的信号x(t),如果其最高频率分量为 $\omega_m(f_m)$ ,为了保留原信号的全部信息,或能无失真地恢复原信号,在通过采样得到离散信号时,其采样频率应满足 $\omega_s \geq 2\omega_m(f_s \geq 2f_m)$ .  $\omega_s = 2\omega_m$ 称为Nyquist频率。

#### 频域采样定理

#### 离散信号描述和运算

- 单位脉冲序列
- 单位阶跃序列
- 矩形序列
- 实指数序列
- 正弦型序列
- 复指数序列

- 平移
- 翻转
- 相加
- 相乘
- 累加
- 差分运算
- 时间尺度(比例)变换

#### 卷积和

$$x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)x(n-m)$$

卷积和的性质

#### 离散信号的频域分析

#### 离散傅里叶级数DFS:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}, \ X(k\Omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_0 n}, \ \Omega_0 = \omega_0 T$$

#### 离散傅里叶变换DTFT:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{jn\Omega} d\Omega, \ X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\Omega}, \ \Omega = \omega T$$

DFS和DTFT的性质;一些常见离散序列的DTFT(表2-1, 2-2)

#### 四种傅里叶分析

- 周期信号对应级数,非周期信号对应变换
- 时域周期,频域离散;时域离散,频域周期
- 时域非周期,频域连续;时域连续,频域非周期
- 周期信号——频谱,非周期信号——频谱密度

#### DFT和FFT

N点信号x(n), n = 0, 1, ..., N - 1

以N为周期进行周期延拓—DFS—取主值区间 
$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_0 n}, k = 0, 1, ..., N-1$$
 对 $x(n)$ 进行DTFT,在 $(0, 2\pi)$ 内进行N点采样  $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}, n = 0, 1, ..., N-1$ 

FFT是DFT的快速算法 
$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k), k = 0, 1, ..., \frac{N}{2} - 1$$
 
$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = G(k) - W_N^k H(k), k = 0, 1, ..., \frac{N}{2} - 1$$

### DFT的性质和FFT的应用

线性性质;圆周移位;

表2-5, 2-6

#### 圆周卷积

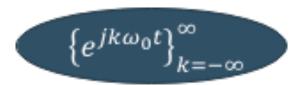
FFT应用:

- 求线性卷积
- 做连续时间信号频谱分析

#### CFS, CFT, DFS, DTFT, DFT

将非周期信号周期延拓

CFS(可以看成信号的正交分解)



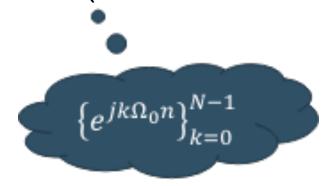
令周期→ ∞

**CFT** 

**DFT** 

将非周期信号周期延拓

DFS (可以看成信号的正交分解)



令周期→∞

DTFT 在(0, 2π)内N点采样

注意完备正交函数集发生了变化

#### 离散信号的Z变换

离散信号x(n)的Z变换可以看成 $x(n) \cdot r^{-n}$ 的DTFT

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \ x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c} X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

双边Z变换一定 起考虑

不同序列Z变换收敛域 · 右边序列

- 有限长序列
- 左边序列
- 双边序列

Z变换的性质(和DTFT类似);Z变换和Laplace变换,DTFT以及DFT之间的关系

#### Z反变换和单边Z变换

求解Z反变换的方法:部分分式展开法(重点掌握);留数法;幂级数展开法

单边Z变换: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 



- 时移定理
- 初值定理
- 终值定理



# 04

# 信号处理基础

## 系统的性质及分类

- 记忆性
- 因果性
- 可逆性
- 稳定性
- 时不变性
- 线性

### 信号的线性系统处理(时域分析)

求导 单位冲激响应 **\*\*\*\*** 单位阶跃响应 单位样值响应

连续系统输出(卷积积分): y(t) = x(t) \* h(t)

离散系统输出(卷积和):y(n) = x(n) \* x(n)

#### 信号的线性系统处理(频域分析)

#### 频率特性:

- $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  单位脉冲响应的傅里叶变换
- $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

#### 无失真传输:

•  $H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$ ,  $|H(\omega)| = K$ ,  $\varphi_h(\omega) = -\omega t_0$ 

#### 理想低通滤波器(非因果的)

•  $H(\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$ 



# 05

# 滤波器

## 滤波和滤波器

滤波的定义

滤波器的定义

滤波器的分类

滤波器的性能指标 ,  $\omega_p (= \omega_c)$  ,  $\alpha_p$  ,  $\omega_s$  ,  $\alpha_s$ 

#### 模拟滤波器

- H(s)物理可实现条件
- 设计H(s)的方法

• 巴特沃斯低通滤波器

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- 巴特沃斯低通滤波器的设计方法
- 归一化的巴特沃斯低通滤波器

### 数字滤波器

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

IIR滤波器和FIR滤波器的定义

IIR滤波器的设计方法(间接法):

• 冲激响应不变法

• 
$$|H(\omega)|^2 \to H(s) \to h(t) \to h(n) \to H(z)$$

• 双线性变换法

• 
$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right), z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$$

两种方法的 优缺点和适 用范围