信号分析与处理——知识点

许鋆 xujunqgy@hit.edu.cn

01

绪论

信号的描述与分类

- 根据信号的时间特性
  - 确定性信号
    - 连续时间信号
    - 离散时间信号
      - 抽样信号
      - 数字信号
  - 随机信号

- 能量信号
- 功率信号

- 周期信号
- 非周期信号

02

连续信号的分析

连续信号的时域描述

- 普通信号
  - 正弦信号
  - 指数信号
    - 实指数信号
    - 复指数信号
- 奇异信号
  - 单位斜坡
  - 单位阶跃
  - 单位冲激

注意复指数信号和正弦信号的关系

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$\delta(t)$的性质：筛选，偶函数特性，

$\delta(t)$和$u(t)$的关系

连续信号基本运算

- 尺度变换
- 翻转
- 平移
- 叠加和相乘
- 微分和积分

- 卷积

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$$

卷积运算的性质：
交换律、分配律、结合律、卷积的微分、积分
与冲激信号的卷积

连续信号的时域分解

- 分解成冲激函数之和：$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
- 正交分解：$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(t)$，$\{f_i(t)\}_{i=1}^{n}$是完备的正交函数集，

$$c_i=\frac{<x(t),\ f_i(t)>}{<f_i(t),\ f_i(t)>}$$

连续信号傅里叶级数

已知$\{1, \cos n\omega_0(t), \sin n\omega_0(t)\}$在$\left(t_0,\ t_0+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$内是完备正交函数集，有

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

已知$\{e^{jn\omega_0 t}\}$在$\left(t_0,\ t_0+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$内是完备正交函数集，有

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

$a_n,\ b_n,\ X(n\omega_0)$的表达式都可以根据正交函数分解确定

周期信号频谱：$X(n\omega_0)$（离散性、谐波性、收敛性）

非周期信号、周期信号傅里叶变换

非周期信号傅里叶变换

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

一般周期信号傅里叶变换

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

傅里叶变换的性质，典型信号的傅里叶变换对

线性、奇偶性、对偶性、尺度变换性质、时移特性、频移特性、微分性质
积分性质、Parseval定理、卷积定理

$$EG_\tau(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$sgn(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega}$$

$$\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1$$

$$1 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$$

$$u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

表1-1，1-2

03

离散信号的分析

理想化采样过程

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

时域采样定理（香农采样定理）：对于频谱受限的信号$x(t)$, 如果其最高频率分量为$\omega_m(f_m)$, 为了保留原信号的全部信息，或能无失真地恢复原信号，在通过采样得到离散信号时，其采样频率应满足$\omega_s \geq 2\omega_m(f_s \geq 2f_m)$.
$\omega_s = 2\omega_m$称为Nyquist频率。

频域采样定理

离散信号描述和运算

- 单位脉冲序列
- 单位阶跃序列
- 矩形序列
- 实指数序列
- 正弦型序列
- 复指数序列

- 平移
- 翻转
- 相加
- 相乘
- 累加
- 差分运算
- 时间尺度（比例）变换

- 卷积和

$$x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)x(n-m)$$

- 卷积和的性质

离散信号的频域分析

离散傅里叶级数DFS：

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n},\ X(k\Omega_0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n},\ \Omega_0=\omega_0 T$$

离散傅里叶变换DTFT：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\Omega)e^{jn\Omega}d\Omega,\ X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\Omega},\ \Omega=\omega T$$

DFS和DTFT的性质；一些常见离散序列的DTFT（表2-1，2-2）

四种傅里叶分析

- 周期信号对应级数，非周期信号对应变换
- 时域周期，频域离散；时域离散，频域周期
- 时域非周期，频域连续；时域连续，频域非周期
- 周期信号——频谱，非周期信号——频谱密度

DFT和FFT

N点信号$x(n),\ n = 0,\ 1, \ldots,\ N-1$

以N为周期进行周期延拓→DFS→取主值区间

对$x(n)$进行DTFT，在$(0,\ 2\pi)$内进行N点采样

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n},\ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

FFT是DFT的快速算法

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k),\ k = 0,\ 1, \ldots,\ \frac{N}{2}-1$$

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right) = G(k) - W_N^k H(k),\ k = 0,\ 1,\ \ldots, \frac{N}{2}-1$$

DFT的性质和FFT的应用

线性性质；圆周移位；

表2-5，2-6

圆周卷积

FFT应用：

- 求线性卷积
- 做连续时间信号频谱分析

CFS，CFT，DFS，DTFT，DFT

CFS（可以看成信号的正交分解） $\xrightarrow[\text{令周期}\to\infty]{\text{将非周期信号周期延拓}}$ CFT

$\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$

DFS (可以看成信号的正交分解) $\xrightarrow[\text{令周期}\to\infty]{\text{将非周期信号周期延拓}}$ DTFT

$\left\{e^{jk\Omega_0 n}\right\}_{k=0}^{N-1}$

DTFT

$\Big\downarrow$ 在$(0, 2\pi)$内N点采样

DFT

注意完备正交函数集发生了变化

离散信号的Z变换

离散信号$x(n)$的Z变换可以看成$x(n) \cdot r^{-n}$的DTFT

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

Z变换的收敛域：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| r^{-n} < \infty$

双边Z变换一定要和收敛域一起考虑

不同序列Z变换收敛域

- 有限长序列
- 右边序列
- 左边序列
- 双边序列

Z变换的性质（和DTFT类似）；Z变换和Laplace变换，DTFT以及DFT之间的关系

Z反变换和单边Z变换

求解Z反变换的方法：部分分式展开法（重点掌握）；留数法；幂级数展开法

单边Z变换：$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$

并不特别强调收敛域

- 时移定理
- 初值定理
- 终值定理

04

信号处理基础

系统的性质及分类

- 记忆性
- 因果性
- 可逆性
- 稳定性
- 时不变性
- 线性

信号的线性系统处理（时域分析）

单位冲激响应
单位样值响应 $\xleftarrow{\text{求导}}$ 单位阶跃响应

连续系统输出（卷积积分）：$y(t) = x(t) * h(t)$

离散系统输出（卷积和）：$y(n) = x(n) * x(n)$

信号的线性系统处理（频域分析）

频率特性：

- $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ 单位脉冲响应的傅里叶变换
- $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

无失真传输：

- $H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$，$|H(\omega)| = K$，$\varphi_h(\omega) =- \omega t_0$

理想低通滤波器（非因果的）

- $H(\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$

05

滤波器

滤波和滤波器

滤波的定义

滤波器的定义

滤波器的分类

滤波器的性能指标，$\omega_p(=\omega_c), \alpha_p, \omega_s, \alpha_s$

模拟滤波器

- $H(s)$物理可实现条件
- 设计$H(s)$的方法

- 巴特沃斯低通滤波器

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- 巴特沃斯低通滤波器的设计方法
- 归一化的巴特沃斯低通滤波器

许鋆 xujunqgy@hit.edu.cn

数字滤波器

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$

IIR滤波器和FIR滤波器的定义

IIR滤波器的设计方法（间接法）：

- 冲激响应不变法
  - $|H(\omega)|^2\rightarrow H(s)\rightarrow h(t)\rightarrow h(n)\rightarrow H(z)$
- 双线性变换法
  - $s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right),z=\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$

两种方法的优缺点和适用范围