# 系统建模与仿真

---

# 绪论

## 系统

- “具有特定功能，按照某种规律结合起来，互相作用、互相依存的所有物体的总和或集合” ——钱学森

## 系统模型

- 某系统 物理的、数学的、或其他逻辑的表现形式

## 系统三要素

- 实体

    - 具有确定意义的物体
- 属性
    - 有效特征
- 活动

## 系统分类

- 自然属性
    - 人造、自然
- 物质～
    - 实物系统、概念系统
- 运动～
    - 静态
        - 代数方程描述，如系统稳态解（Riccatti, Lyapnouv）
    - 动态（人体、控制、经济、动力学）
        - 连续模型
            - 集中参数：微分方程、传递函数、状态方程
            - 分布参数：偏微分方程
        - 离散模型
            - 离散时间：差分方程、Z变换、离散状态方程
            - 离散事件：排队论、马尔可夫过程
        - 混合

## 研究方法

### 理论分析（解析）法

### 实验法

- 给定输入，测取输出
- 难以实现：
    1. 控制系统设计：实际系统尚未建立
    2. 不允许实验
    3. 费用、危险性、周期

### 仿真实验法

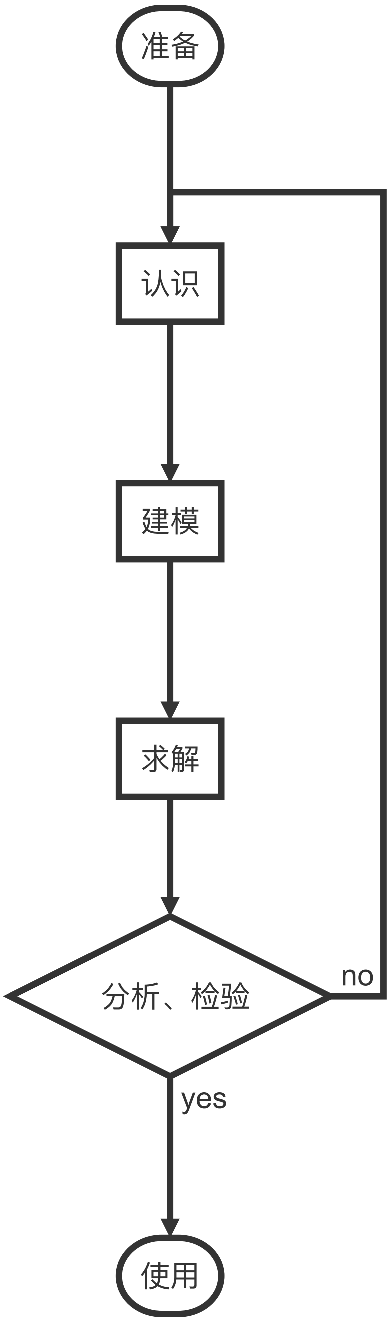
- 相似原理

## 建模原则

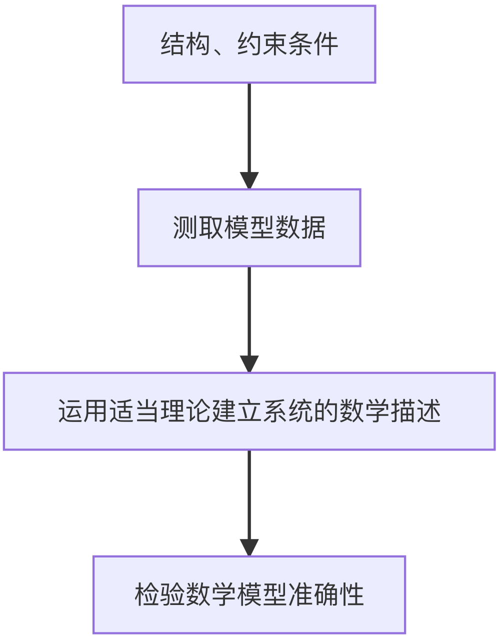
- 可分离原则

    - 忽略绝大部分联系
- 假设合理性原则
- 因果性原则
    - 输入输出满足函数映射关系

## 建模步骤




### 模型建立




## 仿真

- 模仿真实事物；用人造系统模仿真实或设想的系统行为，并对其进行研究

## 系统仿真理论依据

### 相似性原理

1. 几何相似
2. 环境相似
3. 性能相似
    - 数学相似
4. 思维相似
    - 专家系统、神经网络
5. 生理相似

## 仿真分类

1. 数字仿真
    - 三要素：实际系统、数学模型、计算机
    - 基本活动：模型建立、仿真实验、结果分析
2. 混合仿真
    - 与实物相连实时仿真
3. 分布式仿真

---

# MATLAB 简介

## 组成部分

- 开发环境
- MATLAB数学函数库
- M语言
- 句柄图形
- 程序接口

---

# 系统建模与分析

## 连续控制系统的数学模型

1. 微分方程
    - $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=b_0u^{(m)}+\cdots+b_mu$
    - 通常 $m\le n$
2. 状态方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) & =\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) & =\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}$$

    - 简记为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ 形式
3. 传递函数
    - $num=\vec{b}$
    - $den=\vec{a}$
    - 简记为$(num,den)$形式
4. 零极点增益

$$G(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

    - 简记为$(\vec{z},\vec{p},K)$ 形式
5. 部分分式
    - $G(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{s-p_i}+h(s)$
    - 留数 $\vec{r}$：n维；
    - 极点 $\vec{p}$：n维；
    - 余式 $\vec{h}$：$l=m-n\ge 0$ 维
    - 简记为$(\vec{r},\vec{p},\vec{h})$

- 各种形式转换（MATLAB）
  - 传函、零极点：

    ```
    [z,p,K] = tf2zp(num, den)
    ```

    ```
    [num, den] = zp2tf(z, p, k)
    ```

  - 状态方程、传函：ss2tf()、tf2ss()

    ```
    [num, den] = ss2tf(A,B,C,D)
    ```

    ```
    [A,B,C,D] = tf2ss(num, den)
    ```

  - 状态方程、零极点：ss2zp(), zp2ss:
    - 格式相仿
  - 传函、部分分式

    ```
    [r, p, h] = residue(num, den)
    ```

    ```
    [num, den] = residue(r, p, h)
    ```

- 微分方程⇒ 状态方程
  - 定义：

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{n-2}}{a_0} & \cdots & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{b_m}{a_0} & \dfrac{b_{m-1}}{a_0} & \dfrac{b_{m-2}}{a_0} & \cdots & \dfrac{b_0}{a_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \\ u^{(m)} \end{bmatrix}$$

记作

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

# 建模三要素

1. 目的
    - 目的明确
2. 方法
    - 得当
    - 逻辑方法
        - 抽象、归纳、推演、类比、移植
    - 建模方法
        - 机理
        - 实验
        - 综合
3. 验证

# 建模方法

1. 机理建模法
    - 通过理论分析推导建立模型
2. 实验建模法
    1. 频率特性法
        - 不同频率的正弦输入
    2. 系统辨识法
        - 详见下章
        - 三要素：数据、假设模型、准则
        - 数据的平滑处理
            - 三次样条插值：导数连续
        - 统计处理：最小二乘法：使用n次（选定值）逼近
    3. 响应曲线法
        - 详见下章
3. 综合建模法
    - 对内部结构特性有部分了解，但难以完全用机理模型的方法表述，需要结合一定的实验方法确定结构特性，或通过实际测定来求取模型参数。

# 模型验证

## 验证内容

1. 验证模型是否准确描述实际系统的性能和行为
2. 检验仿真实验结果与实际系统的近似程度

### 注意

1. 模型验证是一个过程
2. 模糊性
3. 全面验证往往不可能或难以实现

### 基本方法

1. 基于机理建模的必要条件法
2. 基于实验建模的数理统计法
3. 实物模型验证法

## 实例

1. 一阶直线倒立摆
    - 单一刚性铰链、两自由度
2. 龙门吊
    - 多刚体、多自由度、多约束质点系
    - Lagrange 力学
    - 广义力
3. 水箱液位控制
4. 烧煤热水锅炉

---

# 经典系统辨识

## 辨识的基本概念

### 定义

- 按照一个准则在一组模型类中选择一个与数据拟合得最好的模型

### 三要素

- 数据
    - 输入、输出，含有噪声
- 模型类
- 准则
    - 代价函数（误差准则）

### 误差准则

- **本课程**取输出误差

$$\varepsilon(k)=y(k)-\hat{y}(k)$$

- 代价函数取误差平方

$$J(\theta)=\sum_{k=1}^{N}f(\varepsilon(k))=\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^2(k)$$

### 经典辨识

- 正弦输入——频率响应——传递函数
- 阶跃输入——阶跃响应——传递函数
- 脉冲输入——脉冲响应——传递函数

## 随机过程

### 数字特征

- 期望

$$\mu_x(t)\triangleq E\left(x(t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}xp_x(t)\,\mathrm{d}x$$

- 方差

$$\sigma_x^2(t)\triangleq E\{[x(t)-\mu_x(t)]^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)-\mu_x(t)]^2p_x(t)\,\mathrm{d}x$$

- 自相关函数

$$R_x(t_1,t_2)\triangleq E\left(x(t_1)x(t_2)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p_{xx}(t_1,t_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

- 互相关函数

$$R_{xy}(\tau)\triangleq E[x(t)y(t+\tau)]$$

- 协方差

### 平稳随机过程

- Definition: 一个 **<u>统计性质不随时间改变</u>** 的随机过程
    - $\forall t,\ \mu_x(t)=\mu_x$
    - $R_x(t_1,t_2)=R_x(t_3,t_4)=R_x(\tau)$，其中 $t_2-t_1=t_3-t_4=\tau$，只与时间差有关
- 各态遍历性
    - 时间平均值(第 $i$ 次测 $2T$ 时间) = 集合平均值($t$ 时刻测 $n$ 次)
    - $\mu_x=\overline{x}=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}x_i(t)\mathrm{d}t$，其中 $i$ 任取
    - $R_x(\tau)=\overline{x(t)x(t+\tau)}$

### 白噪声

- 白噪声过程是由一系列不相关的随机变量组成的一种理想化随机过程
- 白噪声过程无记忆性
- 数学描述：
  - $\mu_w = E[w(t)] = 0$
  - $R_w(\tau) = E[w(t)w(t+\tau)] = \sigma^2\delta(\tau)$，即 $\forall t_i \neq t_j\ R_w = 0$ 不相关⇒ 任意两时刻取值互不相关
- 平均功率谱密度：
  - $S_w(\omega) = \mathscr{F}[R_w(\tau)] = \sigma^2$ ：功率在全频段内均匀分布

**离散白噪声（～序列）**

- 数学描述：
  - 随机序列$\{w(k)\}$ 两两不相关
  - $R_w(k) = \sigma^2\delta_k,\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$
  - $S_w(\omega) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} R_w(k)e^{-j\omega k} = \sigma^2$
- 随机数！

**均匀分布随机数产生方法**

- 乘同余法产生(0, 1)之间的均匀分布的**伪随机数序列** $\{\xi_i\}$
  - $x_i = Ax_{i-1}\ mod\ M$
  - $\xi_i = \dfrac{x_i}{M}$
  - 其中
    - $M = 2^k, k > 2$
    - $x_0$ 取正奇数
    - $\{\xi_i\}$ 的周期为$2^{k-2}$

**正态分布随机数产生**

- 基于统计近似抽样法
- 设$\{\xi_i\}$是(0,1)均匀分布的随机数序列
- 由中心极限定理：$x = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - n\mu_\xi}{\sqrt{n\sigma_\xi^2}} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - \dfrac{n}{2}}{\sqrt{n/12}} \sim N(0,1)$
- $\eta = \mu_\eta + \sigma_\eta \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - \dfrac{n}{2}}{\sqrt{n/12}} \sim N(\mu_\eta, \sigma_\eta^2)$
- ***Remark*** :
  - 注意到：每生成一个高斯随机数$\eta$ ，都需要一个**不同**的均匀随机序列$\{\xi_i\}$
  - 实际编程实现中大致有两种实现方案：设总共需要$N$个高斯随机数
    1. 一次性生成一个长度为$Nk$ 的均匀随机序列$\{\xi_i\}$，从中依次取$k$项生成$\eta$
    2. 设计一依赖于种子的均匀随机序列生成函数，每需要一个均匀随机序列时，提供一个**唯**

$$一的种子seed(i),\ \forall i=1,\cdots,N$$

**M序列**

- 一种PRBS（Pseudo Random Binary Sequences）
- 由移位寄存器产生
- $a_n=\sum_{i=1}^{r}\oplus c_i a_{n-i}$，其中$c_i=\begin{cases}0\\1\end{cases}$
- r级寄存器产生的序列最长周期：$2^r-1$
- 各寄存器初始状态**不能全零**！

## 相关法求取系统脉冲响应

- 线性系统卷积定理：（传递函数作Laplace逆变换）

$$y(t)=\int_0^{\infty}g(\sigma)x(t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

- 维纳-霍夫方程：

Misplaced \newline

### 用M序列辨识线性系统的脉冲响应

#### M序列自相关函数

- 连续：略
- 离散：

$$R_M(\tau)=\begin{cases}a^2 & ,\tau=0\\ -\dfrac{a^2}{N_p} & ,0<\tau<N_p-1\end{cases}$$

- 维纳霍夫方程：

$$R_{xy}(\tau)=\int_0^{\infty}g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

Misplaced \newline

写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{R}_{xy}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}\Delta$$

$$\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}g(0)\\ \vdots\\ g(N_p-1)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{xy}=\begin{bmatrix}R_{xy}(0)\\ \vdots\\ R_{xy}(N_p-1)\end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & \cdots & R_x(-N_p+1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \cdots & R_x(-N_p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(N_p-1) & R_x(N_p-2) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix}
$$

故

$$
g=\frac{1}{\Delta}R^{-1}R_{xy}
$$

通过推导可以证明

$$
\boldsymbol{g}=\frac{1}{a^2r(N_p+1)\Delta}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(rN_p-1) \\ x(-1) & x(0) & \cdots & x(rN_p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(-N_p+1) & x(-N_p+2) & \cdots & x(rN_p-N_p) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(rN_p-1) \end{bmatrix}
$$

# 脉冲响应求传递函数

- 属了解内容
- 实际效果较差

# 响应曲线法求解系统阶跃响应

## 输入阶跃信号

- $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$
- $K=\dfrac{y(\infty)-y(0)}{x_0}$
- $T=\dfrac{y(\infty)-y(0)}{\dot{y}(0)}$
- 注意事项：
  - 阶跃信号要适中：正常输入信号的5%～15%
  - 输入阶跃信号前，对象必须处于平衡工况

## 由矩形脉冲响应求阶跃响应

- 输入矩形脉冲：$x(t)=u(t)-u(t-a)$
- 对于线性系统：

$$
\begin{cases} y^*(t) = y(t) - y(t-a) \\ \text{即 } y(t) = y^*(t) + y(t-a) \end{cases}
$$

$y^*(t)$ ——矩形脉冲响应

$y(t)$ ——正阶跃响应

$y(t-a)$ ——负阶跃响应

- 构造：
  1. $y(a) = y^*(a) = y_1$
  2. $y(2a) = y^*(2a) + y(2a-a) = y_2^* + y_1 = y_2$
  3. $y(3a) = y^*(3a) + y(3a-a) = y_3^* + y_2 = y_3$

     $\cdots\cdots$
  4. $y(na) = y^*(na) + y\left[(n-1)a\right] = y_n^* + y_{n-1} = y_n$
  5. 拟合 $y_i$ 得阶跃响应

---

# 最小二乘辨识LSI

## 基础

- 辨识SISO系统差分方程系数

$$
x(k) + a_1 x(k-1) + \cdots + a_n x(k-n) = b_0 u(k) + \cdots + b_m u(k-m)
$$

### 推导

- 设共有$(n+N)$ 组观测数据：

$$
\begin{bmatrix} y(n+1) \\ \vdots \\ y(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & u(n+1) & \cdots & u(n+1-m) \\ -y(n+1) & \cdots & -y(2) & u(n+2) & \cdots & u(n+2-m) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -y(n+N-1) & \cdots & -y(N) & u(n+N) & \cdots & u(n+N-m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \boldsymbol{\xi}_{N\times 1}
$$

写成矩阵

$$
Y_{N\times 1} = \Phi_{N\times(n+m+1)} \theta_{(n+m+1)\times 1} + \xi
$$

- 指标函数：

$$
J = \sum_{k=n+1}^{n+N} e^2(k) = ee^T = (Y - \Phi\hat{\theta})^T (Y - \Phi\hat{\theta}) = Y^T Y - \hat{\theta}^T \Phi^T Y - Y^T \Phi\hat{\theta} + \hat{\theta}^T \Phi^T \Phi\hat{\theta}
$$

- $\hat{\theta} = \min_{\theta} J$
- $\dfrac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -2\Phi^T(Y - \Phi\hat{\theta}) = 0$
- 解得驻点：$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$
- 判断极小值：$\Phi^T\Phi > 0$ 即$\Phi^T\Phi$是正定阵

### 对输入信号的要求

1. M序列
   - 当长度$N_p$ 足够大时，可保证$\Phi^T\Phi$ 正定
   - 工程上常用
2. 随机序列
   - 白噪声序列满足满足要求

### 性质

1. 无偏性
   - 充要条件：$E[(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\xi] = 0$
   - 充分条件：噪声$\{\xi(k)\}$为零均值不相关随机序列，且与输入$\{u(k)\}$无关
2. 一致性
   - 充分条件：同上

## 递推算法推导RLSI

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$

- 记

$$P_N = (\Phi_N^T\Phi_N)^{-1}$$

  则 $\hat{\theta}_N = P_N\Phi_N^T Y_N$

$$\Psi_{N+1} = \begin{bmatrix} -y(n+N) \\ \vdots \\ -y(N+1) \\ u(n+N+1) \\ \vdots \\ u(n+N+1-m) \end{bmatrix}_{(n+m+1)\times 1}$$

$$y(n+N+1) = \Psi_{N+1}^T\theta + \xi(n+N+1)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{N+1} &= \left( \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Psi_{N+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Psi_{N+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Psi_{N+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_N \\ y_{N+1} \end{bmatrix} \\ &= \cdots \\ &= P_{N+1}(\Phi_N^T Y_N + \Psi_{N+1}^T y_{N+1}) \end{aligned}$$

  其中

$$P_{N+1} = (P_N^{-1} + \Psi_{N+1}\Psi_{N+1}^T)^{-1}$$

- 求$P_{N+1}$：由矩阵求逆引理：

$$(A+BC^T)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(1+C^TA^{-1}B)^{-1}C^TA^{-1}$$

可得

$$P_{N+1}=P_N-P_N\Psi_{N+1}(1+\Psi_{N+1}^TP_N\Psi_{N+1})^{-1}\Psi_{N+1}^TP_N$$

- 经过复杂的推导...
- 递推公式：$\Psi$、$P$ 定义见上文

$$\begin{cases}\hat{\theta}_{N+1}=\hat{\theta}_N+K_{N+1}[y(n+N+1)-\Psi_{N+1}^T\hat{\theta}_N]\\ K_{N+1}=P_N\Psi_{N+1}(1+\Psi_{N+1}^TP_N\Psi_{N+1})^{-1}\\ P_{N+1}=P_N-K_{N+1}\Psi_{N+1}^TP_N\end{cases}$$

- 初值获取方法：
  - $\hat{\theta}_0=0$
  - $P_0=c^2I_{(n+m+1)\times(n+m+1)}$ 其中 $c$ 为充分大常数

# 极大似然辨识 MLI

## 极大似然估计MLE

- 指标函数取对数似然函数

$$\ln L(\theta)=\ln\left[\prod_{i=1}^{n}Pr(x_i;\theta)\right]=\sum_{i=1}^{n}\ln Pr(x_i;\theta)$$

或

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta)$$

#### 步骤

1. 导出联合概率分布函数$Pr(x;\theta)$ 或概率密度函数$p(x;\theta)$
2. 求得似然函数，以及对数似然函数
3. 求最大值点
4. 代入样本值得到极大似然估计值$\hat{\theta}$

## 极大似然辨识

- 依旧定义

$$Y=\Phi\theta+\xi$$

其中

$$
Y_{N\times 1}=\begin{bmatrix} y(n+1) \\ \vdots \\ y(n+N) \end{bmatrix}
$$

**高斯白噪声情形**

- 此时MLI与LSI等价

$$
\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}=(\varPhi^T\varPhi)^{-1}\varPhi^TY
$$

- 且噪声方差估计值

$$
\hat{\sigma}_{\mathrm{ML}}=\frac{1}{N}(Y-\varPhi\hat{\theta}_{\mathrm{ML}})^T(Y-\varPhi\hat{\theta}_{\mathrm{ML}})
$$

**其他高斯噪声情形**

- 数学模型：

$$
\begin{aligned}
A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k)+C(z^{-1})\varepsilon(k) \\
A=1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n} \\
B=b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n} \\
C=1+c_1z^{-1}+\cdots+c_nz^{-n}
\end{aligned}
$$

  取似然函数：

$$
\ln L(\theta)=-\frac{N}{2}\ln 2\pi-\frac{N}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=n+1}^{n+N}v^2(k)
$$

  其中

$$
v(k)=y(k)+\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_iy(k-i)-\sum_{i=0}^{n}\hat{b}_iu(k-i)-\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon(k-i)
$$

  令$\dfrac{\partial\ln L}{\partial\hat{\sigma}^2}=0$, 得

$$
\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N}\sum_{k=n+1}^{n+N}v^2(k)
$$

- Newton-Raphson法

## 递推极大似然辨识 RMLI

# 连续系统离散化

## 基本要求

1. 稳定性
2. 准确性
    - 绝对误差准则
    - 相对误差准则
3. 快速性
    - 实时仿真 $t = \Delta T$
    - 超实时~$t < \Delta T$
    - 亚～——离线仿真

# 数值积分法

- 概述

$$\begin{cases} \dot{y} & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y)\, \mathrm{d}t$$

- 数值积分各种方法的不同就在于右端积分项的计算方法不同

## Euler 法

- 矩形近似，一阶方法
- 单步法、自启动模式

$$\begin{aligned} Q_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y)\, \mathrm{d}t \\ &= h \cdot f(t_k, y_k) \end{aligned}$$

- 数学解释：
    - 连续函数在$t = t_k$ 处Taylor展开，舍去二次及更高次项，即折线化
- 误差
    - 截断误差：$O(h^2)$
    - 累计截断误差：$O(h)$

## 梯形法

- 梯形近似

$$Q_k = \frac{1}{2} h [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$$

- 注意到$y_{k+1}$ 未知，故该法需要迭代计算
    - 考虑使用Euler法构成 预估-校正法

$$
\begin{cases}
y_{k+1}^0 & = y_k + hf(t_k, y_k) \\
y_{k+1} & = y_k + \frac{1}{2}h\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]
\end{cases}
$$

- 截断误差：$O(h^3)$

## Runge-Kutta

- 单步法
- 可变步长

### RK2

- 二阶

$$
\begin{cases}
y_{k+1} & = y_k + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \\
K_1 & = f(t_k, y_k) \\
K_2 & = f(t_k + h, y_k + K_1 h)
\end{cases}
$$

- 截断误差：$O(h^3)$

### RK4

- 四阶

$$
\begin{cases}
y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(t_k, y_k) \\
K_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1\right) \\
K_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2\right) \\
K_4 = f(t_k + h, y_k + hK_3)
\end{cases}
$$

- 截断误差：$O(h^5)$

### RK法的误差估计与步长控制

- 类似反馈控制

1. 误差估计
   - 找一个低阶的RK直接作差作为误差估计
2. 步长控制——加倍-减半法：
   - 定义局部误差：

     $$
     e_k = \frac{E_k}{|y_k| + 1}
     $$

     当$y_k$ 较大时为相对误差，较小时为绝度误差

   - 设定误差上限与下限，并根据以下规则更新步长

$$
h_{k+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}h_k & ,e_k\geq\varepsilon_{\max}\\ h_k & ,e_k\in(\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max})\\ 2h_k & ,e_k\leq\varepsilon_{\min}\end{cases}
$$

## 线性多步法

- 利用以前时刻数据预报函数值与导数值
- 推导得

$$
V=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^{2k-1}\\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^{2k-1}\\ \vdots & & & \vdots & & \vdots\\ 1 & k & k^2 & k^3 & \cdots & k^{2k-1}\\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2k-1\\ 0 & 1 & 2\times 2 & 3\times 2^2 & \cdots & (2k-1)\times 2^{2k-2}\\ 0 & 1 & 2\times 3 & 3\times 3^2 & \cdots & (2k-1)\times 3^{2k-2}\\ \vdots & & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & 2\times k & 3\times k^2 & \cdots & (2k-1)\times k^{2k-2}\end{bmatrix}
$$

设辅助变量（取$V^{-1}$ 的第一行）

$$
\Phi^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}V^{-1}
$$

得预报值：

$$
y_{n+k}=\Phi^T\begin{bmatrix}y_{n+k-1}\\ \vdots\\ y_n\\ -h\dot{y}_{n+k-1}\\ \vdots\\ -h\dot{y}_n\end{bmatrix}
$$