

5.13 根轨迹校正

适用条件：性能指标以时域指标给出，如

- 阻尼比 ξ
- 自然振荡频率 ω_n
- 超调量 $\sigma_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{-\pi \cot \theta}$
- 调节时间 $t_s = \begin{cases} \frac{4}{\xi\omega_n}, \Delta = 0.02 \\ \frac{3}{\xi\omega_n}, \Delta = 0.05 \end{cases}$

闭环主导极点

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (1)$$

根据性能指标要求确定闭环主导极点

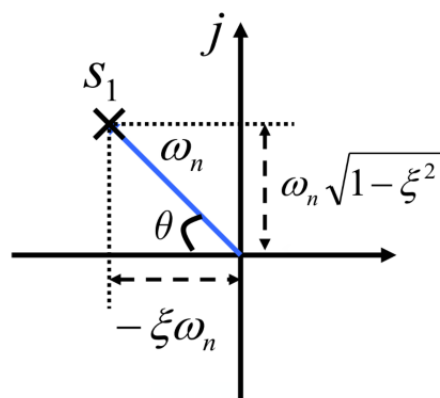
- 如果给定的期望指标是阻尼比和自然振荡频率，则闭环主导极点为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

对于闭环主导极点 s_1 ，有

$$\theta = \arccos \xi$$

$$|s_1| = \omega_n$$



$$\begin{cases} \xi \geq \cos(\arctan \frac{-\pi}{\ln \sigma_p}), \sigma_p \in (0, 1) \\ \omega_n > \frac{3.5}{t_s \xi} \end{cases} \quad (2)$$

增加开环偶极子的影响

- 增加零点，根轨迹左移，动态性能变好
- 增加极点，根轨迹右移，动态性能变差
- $p_c < z_c < 0$ ，超前环节，动态性能变好
- $z_c < p_c < 0$ ，迟后环节，稳态精度变好

1. 超前校正

校正环节 $G_c(s) = k_c \frac{s - z_c}{s - p_c}$ ， k_c 为根轨迹增益。原系统为 $G_0(s)$ 。

1. 根据性能要求求出

$$\begin{cases} \xi \geq \cos(\arctan \frac{-\pi}{\ln \sigma_p}), \sigma_p \in (0, 1) \\ \omega_n > \frac{3.5}{t_s \xi} \\ \theta = \arccos \xi \end{cases} \quad (3)$$

从而确定闭环主导极点 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

2. 画出未校正系统的根轨迹，如果根轨迹通过闭环主导极点，则简单调整开环增益即可产生期望的闭环极点；**若期望的极点在根轨迹左侧，则采用超前校正。**

3. 对于期望的闭环主导极点，超前环节产生的幅角应为

$$\phi = (2l + 1) \times 180^\circ - \angle G_0(s_1) \quad (4)$$

4. 确定超前环节的零极点（最小极零比-角平分线法）

定理 4.1

给定具有阻尼角为 θ 的主导极点 s_1 ，若超前环节 (4.3.1) 在 s_1 处提供的超前角为 ϕ ，则超前环节 (4.3.1) 的一组零极点由下式确定

由角平分线法确定
按此法求出的极零比
 $\frac{p_c}{z_c} = \frac{\cos[\frac{1}{2}(\theta-\phi)]}{\cos[\frac{1}{2}(\theta+\phi)]}$ 最小

$$\begin{cases} p_c = -|s_1| \frac{\cos \frac{1}{2}(\phi - \theta)}{\cos \frac{1}{2}(\theta + \phi)} \\ z_c = -|s_1| \frac{\cos \frac{1}{2}(\phi + \theta)}{\cos \frac{1}{2}(\phi - \theta)} \end{cases} \quad (4.4.1)$$

（都在左半平面）

定理 4.2

给定复平面第二象限的点 s_1 和角度 φ ，而 $p_c < z_c$ 是负实轴上使 $\angle z_c s_1 p_c = \varphi$ 为两个动点。令 $\angle z_c 0 s_1 = \theta$ ，则当 $\angle 0 s_1 z_c = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta - \varphi)$ 时，比值 $\alpha = \frac{|p_c|}{|z_c|}$ 最小，且最小值 α_{\min} 为

$$\alpha_{\min} = 1 + \frac{2 \sin \theta \sin \varphi}{\cos(\theta + \varphi) + 1}$$

5. 解超前环节的根轨迹增益 k_c ，根据根轨迹的幅值条件，有

$$|G_0(s_1)G_c(s_1)| = |G_0(s_1)k_c \frac{s_1 - z_c}{s_1 - p_c}| = 1 \quad (5)$$

$$k_c = \frac{|s_1 - p_c|}{|s_1 - z_c| \cdot |G_0(s_1)|}$$

若要写成频率法形式，则 $G_c(s) = k_c \frac{s - z_c}{s - p_c} = K_c \frac{\frac{s}{z_c} - 1}{\frac{s}{p_c} - 1}$, $K_c = \frac{z_c}{p_c} k_c$

6. 对于校正好的系统，检验动态性能是否满足要求（Matlab）；若不满足，调整主导极点，重复上述过程。

2. 迟后校正

由于在超前校正中没有考虑开环增益的要求，故可以采用迟后校正。

迟后校正是为了在不影响系统动态性能的前提下，增大闭环主导极点处的开环增益，减小稳态误差。

设计方法 4.2: 基于根轨迹的迟后校正

第1步. 用原系统的开环传递函数 $G_0(s)$ 做出原系统的根轨迹, 确认调整开环增益可以使原系统的动态性能满足设计指标。

第2步. 在原系统的根轨迹上确定闭环主导极点 s_1 , 并求出点 s_1 对应的开环增益 K_0 。

第3步. 根据控制系统的设计要求, 求出满足稳态误差设计指标的开环增益 K , 即校正以后应有的开环增益。

第4步. 为了使点 s_1 的开环增益 K_0 增大到 K , 则有

$$\beta = \frac{K}{K_0} \quad (4.5.2)$$

按照串联迟后校正的条件, 极点 p_c 和零点 z_c 应充分接近并靠近原点, 按照

$$\beta = \frac{z_c}{p_c} > 1$$

可以确定校正环节的零极点值。至此, 串联迟后校正环节的参数全部计算完成。

第5步. 绘制出校正后的根轨迹图, 检验系统的动态性能指标和静态稳态性能指标。

求出 β , 即可求出 z_c, p_c , 然后迟后校正环节 $K_c \frac{1/z_c - 1}{1/p_c - 1}$, K_c 由题目要求确定。