

Lec6 非线性与自适应控制器设计

对于一个非线性系统

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (6.1)$$

- State feedback stabilization:

The state feedback stabilization problem for the system

开环系统 $\dot{x} = f(t, x, u)$

is the problem of designing a feedback control law

静态控制律 $u = \gamma(t, x)$

such that the origin $x = 0$ is a uniformly asymptotically stable equilibrium point of the closed-loop system

闭环系统 $\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x))$

The feedback control law $u = \gamma(t, x)$ is usually called “static feedback,” because it is a memoryless function of x . Sometimes, we use a dynamic state feedback control

动态控制律 $u = \gamma(t, x, z)$

where z is the solution of a dynamical system driven by x ; that is,

$$\dot{z} = g(t, x, z)$$

Common examples of dynamic state feedback control arise when we use integral control (Section 12.3) or adaptive control (Section 1.2.6).

- Output feedback stabilization

The output feedback stabilization problem for the system

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

输出 $y = h(t, x, u)$

is the problem of designing a static output feedback control law

静态控制律 $u = \gamma(t, y)$

or a dynamic output feedback control law

$$\text{动态控制律} \quad \begin{aligned} u &= \gamma(t, y, z) \\ \dot{z} &= g(t, y, z) \end{aligned}$$

such that the origin is a uniformly asymptotically stable equilibrium point of the closed-loop system. In the case of dynamic feedback control, the origin to be stabilized is $(x = 0, z = 0)$. Dynamic feedback control is more common in output feedback schemes, since the lack of measurement of some of the state variables is usually compensated for by including “observers” or “observer-like” components in the feedback controller.

- 线性系统

For linear system $\dot{x} = Ax + Bu$. $y = Cx + Du$. $\hat{y} = C\hat{x} + Du$.

state feedback. $u = -Kx$, $A - BK$ being Hurwitz.

Output feedback. $u = -K\hat{x}$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - C\hat{x} - Du)$$

Define $e = x - \hat{x}$. $\dot{e} = Ae - HCe = (A - Hc)e$ $A - Hc$ being Hurwitz.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - BK\hat{x} = A\hat{x} - BK(x - e) = \underbrace{(A - BK)}_{\text{Hurwitz}} \hat{x} + \underbrace{BK}_{\rightarrow 0} e$$

ISS

6.1 Feedback Linearization

反馈线性化的核心思想是把一个非线性系统代数地转化为一个（全部的或者部分的）线性系统；可以看成是把原系统模型等价地变换为比较简单的模型的一些手段。

反馈线性化与普通的“线性近似”最大的区别是：**反馈线性化并不是通过系统的线性逼近而是通过状态变换和反馈得到的。**

能控规范型的反馈线性化

反馈线性化可以用于下面的第二能控规范型系统中：

$$\dot{x}_n = f(x) + b(x)u \quad (6.1.1)$$

其中 u 是标量的控制输入, $[x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}] = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 为状态向量。

由 (6.1.1) 可知 $\dot{x}_n = f(x) + b(x)u$ 包含非线性部分, 假设 $b(x) \neq 0$, 可通过如下方式消去非线性部分, 从而实现**反馈线性化**

$$u = \frac{1}{b(x)}[v - f(x)] \quad (6.1.2)$$

其中 v 是等价输入。将 (6.1.2) 代入 (6.1.1) 即可得到简单的多重积分器（均为线性）

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ v \end{bmatrix} \quad (6.1.3)$$

- 控制目标：设计 v 使系统镇定，即 $x = 0$ 为全局渐近稳定的平衡点。

$x = 0$ 全局渐近稳定 \implies 特征方程 $x^{(n)} + k_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + k_0x = 0$ 的根全部在左半平面

即

$$v = x^{(n)} = -k_{n-1}x^{(n-1)} - k_{n-2}x^{(n-2)} - \dots - k_0x \quad (6.1.4)$$

只需要选择合适的系数 k_i ，构造出如 (6.1.4) 所示的 v 即可实现控制目标。

- 若要实现跟踪，即控制目标为：设计 v 使系统即 $x = x_d$ 为全局渐近稳定的平衡点

那么 $x^{(n)} - x_d^{(n)} + k_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + k_0e = 0$ 的特征根都在左半平面，其中 $e = x - x_d$

设计控制律为 v

$$v = x_d^{(n)} - k_{n-1}e^{(n-1)} - k_{n-2}e^{(n-2)} - \dots - k_0e \quad (6.1.5)$$

两轴机械臂例子

这种控制设计思想的一个有趣的应用是对机器人的控制。下面的例子是研究一个双连杆机械手的控制设计。更一般的机器人的设计是类似的，将在第9章进一步讨论它。

例 6.2 双连杆机械手的反馈线性化

图 6.2 提供了一个双连杆机械手的物理模型，每一个关节上安装了一个马达来提供转动力矩、一个编码器来测量关节位置，以及一个转速表来测量关节速度。控制设计的目标是让关节所在位置 q_1 和 q_2 按照机械手运动规划方案计划好的路径 $q_{d1}(t)$ 和 $q_{d2}(t)$ 运动。当指定机械手按照运动规划的路径(如画圆)运动时，跟踪控制问题就出现了。

使用经典动力学中大家熟悉的拉格朗日 (Lagrangian) 方程，很容易得出机械手的动态方程为

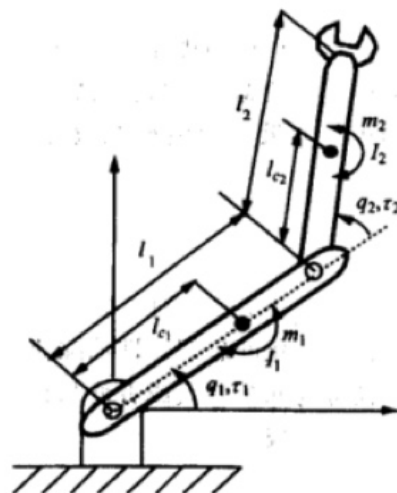


图 6.2 一个双连杆机械手

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h\dot{q}_1 - h\dot{q}_2 \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

其中， $q = [q_1 \ q_2]^T$ 为两关节角， $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]^T$ 为关节输入。

$$H_{11} = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2] + I_2$$

$$H_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$H_{12} = H_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \cos q_2 + m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$h = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2$$

$$g_1 = m_1 l_{c1} g \cos q_1 + m_2 g [l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos q_1]$$

$$g_2 = m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

方程(6.9)可以简洁地表示为

$$H(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau$$

其中， H 、 C 和 g 的定义是明显的。因此尽管系统包含了多个输入和输出，通过将等号两边同乘以 H^{-1} (H 的可逆性是系统的物理特性，见第9章)，上面的向量方程很容易变为式(6.6)的形式，其中 $n=2$ 。

为了达到跟踪控制任务，可以用下面的控制规律

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h\dot{q}_1 - h\dot{q}_2 \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

这里

$$v = \ddot{q}_d - 2\lambda \dot{\tilde{q}} - \lambda^2 \tilde{q}$$

其中， $v = [v_1 \ v_2]^T$ 为等价输入， $\tilde{q} = q - q_d$ 为位置跟踪误差， λ 为一个正数。跟踪误差 \tilde{q} 满足方程

$$\ddot{\tilde{q}} + 2\lambda \dot{\tilde{q}} + \lambda^2 \tilde{q} = 0$$

解特征根

$$\frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda^2}}{2} = -\lambda < 0$$

因此 \tilde{q} 指数收敛到 0。控制规律(6.10)通常称为机器人学中的“计算力矩”控制。在第9章可以看到，这可以应用到有任意多个关节的机械手控制中。

6.2 Input-state linearization

6.1.2 输入—状态线性化

下面考查形如

$$\dot{x} = f(x, u)$$

的单输入非线性系统的控制输入 u 的设计问题。用输入—状态线性化解决这个问题需要两个步骤：第一步，找到一个状态变换 $z = z(x)$ 和一个输入变换 $u = u(x, v)$ ，以使得非线性系统转换为一个等价的线性定常系统，即熟知的形式 $\dot{z} = Az + bv$ ；第二步，利用标准线性化技巧（如极点配置）去设计 v 。

下面通过一个简单的二阶系统的例子来阐述这个方法。考查非线性系统

两个方程都是非线性性 $\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \sin x_1$ (6.11a)

$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + u \cos(2x_1) \quad (6.11b)$$

即使线性控制设计能使该系统在平衡点 $(0, 0)$ 附近的一个小邻域内稳定，要找到一个控制器使系统在一个大的区域内稳定也不是一件简单的事情。一个具体的困难就是控制输入 u 不能直接消去第一个方程中的非线性部分。

然而，假如考虑一组新的状态变量

$$z_1 = x_1 \quad (6.12a)$$

$$z_2 = ax_2 + \sin x_1 \quad (6.12b)$$

则新的状态方程变为

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2 \quad \text{线性} \quad (6.13a)$$

$$\dot{z}_2 = -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + au \cos(2z_1) \quad \text{非线性} \quad (6.13b)$$

注意， $(0, 0)$ 仍然是新状态方程的平衡点。现在，非线性部分就可以被如下的控制规律消掉 用能控规范型的反馈线性化方法

$$u = \frac{1}{a \cos(2z_1)} (v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1) \quad (6.14)$$

其中， v 是需要设计的等价输入（等价的意义上是确定了 v 相当于确定了 u ，反之亦然），可以得到线性输入状态关系

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2 \quad (6.15a)$$

$$\dot{z}_2 = v \quad (6.15b)$$

这样，通过状态变换(6.12)和输入变换(6.14)，利用原控制输入 u 来镇定原非线性系统(6.11)的问题已经转化为使用新控制输入 v 来镇定新系统(6.15)的问题。

由于(6.15)是能控的线性系统，适当选取反馈增益及线性状态反馈控制规律

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$$

可以任意配置其极点。例如，选取

$$v = -2z_2$$

(6.16)

得到稳定闭环系统

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = -2z_2$$

其极点都为 -2 ，回到原状态 x_1 和 x_2 ，与该控制规律相对应的原控制输入为

$$u = \frac{1}{\cos(2x_1)}(-2ax_2 - 2\sin x_1 - \cos x_1 \sin x_1 + 2x_1 \cos x_1) \quad (6.17)$$

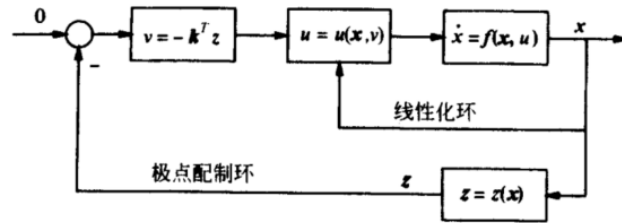
原状态 x 由下式给出

$$x_1 = z_1 \quad (6.18a)$$

$$x_2 = (z_2 - \sin z_1)/a \quad (6.18b)$$

由于 z_1 和 z_2 都收敛于0，原状态 x 也收敛于0。

上述控制规律下的闭环系统可以用方块图表示，如图6.3所示。我们看到这个控制系统中有两条路：得到输入—状态线性化的内环和达到闭环系统镇定的外环。这和(6.14)是一致的，其中的控制输入 u 可以看成是由非线性消去部分和线性补偿部分组成。



6.3 Input-Output Linearization

6.1.3 输入—输出线性化

现在我们考虑跟踪控制问题。考查系统

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (6.19a)$$

$$y = h(x) \quad (6.19b)$$

假定我们的目标是要使得输出 $y(t)$ 跟踪一个期望轨线 $y_d(t)$ ，并且保持整个状态有界，这里的 $y_d(t)$ 及其对时间的足够高阶导数都已知且有界。此模型的一个明显困难是输出 y 只是通过状态变量和非线性方程(6.19)间接地依赖于输入 u ，因此，要想找出合适的输入 u 来控制输出 y 的跟踪性能并不容易。但是，由 6.1.1 节的结论我们可以猜测：如果能找到系统输出 y 与控制输入 u 之间的一个简单而直接的关系，则跟踪控制设计的难度就降低了。事实上，这些思想构成了非线性控制设计中的所谓输入—输出线性化方法的直观基础。下面还是通过一个例子来说明这种方法。

考查三阶系统

$$\dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \quad (6.20a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^5 + x_3 \quad (6.20b)$$

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + u \quad (6.20c)$$

$$y = x_1 \quad (6.20d)$$

为了得到 y 与 u 之间的直接关系，对 y 求导，可得

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3$$

由于 \dot{y} 与 u 没有直接关系，需要再次对 y 微分，可得

$$\ddot{y} = (x_2 + 1)u + f_1(x) \quad (6.21)$$

其中， $f_1(x)$ 是状态的函数，它由

$$f_1(x) = (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2) + (x_2 + 1)x_1^2 \quad (6.22)$$

确定。很明显，(6.21)表达了 y 与 u 之间的明确的关系。假如我们选择如下形式的控制输入

$$u = \frac{1}{x_2 + 1}(v - f_1) \quad (6.23)$$

其中， v 是一个待定的新输入，则(6.21)的非线性部分被消去了，得到输出和新输入 v 之间的一个简单的线性双积分器关系

$$\ddot{y} = v$$

设计这个双积分器的跟踪控制是简单的，因为可以使用线性控制技巧。比如，令 $e = y(t) - y_d(t)$ 是跟踪误差，选择新输入 v 为

$$v = \ddot{y}_d - k_1 \dot{e} - k_2 \dot{e} \quad (6.24)$$

其中， k_1 和 k_2 是正常数，闭环系统的跟踪误差由

$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0 \quad (6.25)$$

给出。这是一个指数稳定的误差系统。因此，如果初始状态 $e(0) = \dot{e}(0) = 0$ ，则 $e(t) \equiv 0$ ， $\forall t \geq 0$ ，即得到了完全跟踪；否则， $e(t)$ 指数收敛于 0。

6.4 Sliding Mode Control 滑模控制

总结

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(x) + g(x)u \end{bmatrix} \quad (6.4.1)$$

- 设计滑模面

$$s = x_n + \lambda_{n-1}x_{n-1} + \lambda_{n-2}x_{n-2} + \cdots + \lambda_1 x_1 \quad (6.4.2)$$

- 设计Lyapunov函数

$$V = \frac{1}{2}s^2 \quad (6.4.3)$$

- 对 V 求导

$$\dot{V} = s \cdot \dot{s} = s[f(x) + g(x)u + \lambda_{n-2}x_{n-1} + \lambda_{n-3}x_{n-2} + \cdots + \lambda_1 x_2] \quad (6.4.4)$$

- 设计控制输入

$$u = \frac{1}{g(x)}[-f(x) - \lambda_{n-2}x_{n-1} - \lambda_{n-3}x_{n-2} + \cdots + \lambda_1 x_2 - k \cdot \text{sgn}(s)], k > 0 \quad (6.4.5)$$

- 将 (6.4.5) 代入 (6.4.4)

$$\dot{V} = -k|s| = -k\sqrt{2V} \quad (6.4.6)$$

解微分方程得到

$$\sqrt{V(t)} = \sqrt{V(0)} - \frac{\sqrt{2}}{2}kt \quad (6.4.7)$$

又由于 $V(t)$ 有下界, 且递减, 所以有极限, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} V = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$

- 说明会移动到滑模面上, 又由于滑模面上会移动到原点, 所以会稳定于原点。

6.5 Back-stepping(反步法)

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/135446149>

考虑如下系统

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (1)$$

其中 $[\eta^T, \xi]^T \in R^{n+1}$ 是状态量, $u \in R$ 是控制输入, 函数 $f: D \rightarrow R^n, g: D \rightarrow R^n$ 在包含原点 $\eta = 0, f(0) = 0$ 的定义域 $D \in R^n$ 上是光滑的, 或者 n 阶导数存在。第一个状态方程中 ξ 看成输入, 第二个状态方程是积分器方程。

控制目标: 设计一个状态反馈控制律, 以镇定原点($\eta = 0, \xi = 0$)。

假设第一个状态方程可通过一个光滑的状态反馈控制律

$$\xi = \phi(\eta), \phi(0) = 0 \quad (2)$$

稳定, 即

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta) \quad (3)$$

在原点是渐近稳定的。进一步假设已知的 Lyapunov 函数 $V(\eta)$ (光滑、正定) 满足不等式

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \eta} \dot{\eta} = \frac{\partial V}{\partial \eta} (f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)) \leq -W(\eta), \forall \eta \in D, W(\eta) > 0 \quad (4)$$

将公式 [E1](#) 转换为如下形式

$$\begin{cases} \dot{\eta} = (f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)) + g(\eta)(\xi - \phi(\eta)) \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (5)$$

应用变量代换

$$z = \xi - \phi(\eta)$$

知乎 @Chenglin(陈)

从而得到

$$\begin{cases} \dot{\eta} = (f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)) + g(\eta) \cdot z \\ \dot{z} = u - \dot{\phi} \end{cases} \quad (7)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \cdot \dot{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} (f(\eta) + g(\eta)\xi) \quad (8)$$

取 $v = u - \dot{\phi}$ ，系统进一步简化为级联形式

$$\begin{cases} \dot{\eta} = (f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)) + g(\eta) \cdot z \\ \dot{z} = v \end{cases} \quad (9)$$

此时当系统的输入 $v = 0$ 时， η 具有渐近稳定的原点。设计 Lyapunov 函数

$$V_c(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2 > 0 \quad (10)$$

可得

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot g(\eta) \cdot z + z \cdot v \leq -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot g(\eta) \cdot z + z \cdot v \quad (11)$$

选择

$$v = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k \cdot z, k > 0 \quad (12)$$

那么

$$\dot{V}_c \leq -W(\eta) - k \cdot z^2 < 0 \quad (13)$$

该式表明系统 E9 的原点 $(\eta = 0, z = 0)$ 是渐近稳定的。由 $\phi(0) = \xi = 0$ 可知，原点 $(\eta = 0, \xi = 0)$ 是渐近稳定的，将 $v, z, \dot{\phi}$ 代入，可得状态反馈控制律为

$$u = \dot{\phi} + v = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k(\xi - \phi(\eta)) \quad (14)$$

实例分析

3 实例分析 A

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (15)$$

反馈控制器设计过程:

(1) 把 x_2 看成输入, 设计反馈控制 $x_2 = \phi(x_1)$ 以稳定原点 $x_1 = 0$ 。取

$$x_2 = \phi(x_1) = -x_1^2 - x_1 \quad (16)$$

以消除非线性项 x_1^2 , $-x_1^3$ 提供非线性阻尼, 故不宜消去。

可得

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 \quad (17)$$

取 Lyapunov 函数

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 > 0 \quad (18)$$

$$\dot{V}(x_1) = -x_1^2 - x_1^4 \leq -x_1^2 \leq 0 \quad (19)$$

因此 [E17](#) 是全局指数稳定的。

(2) 应用变量代换

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + x_1 + x_1^2 \quad (20)$$

系统 [E15](#) 的形式转换为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 = u - \dot{\phi}(x_1) = u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) \end{cases} \quad (21)$$

取

$$V_c(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= x_1(-x_1 - x_1^3 + z_2) + z_2[u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2)] \\ &= -x_1^2 - x_1^4 + z_2[x_1 + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) + u] \end{aligned} \quad (23)$$

选取控制量

$$u = -x_1 - (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) - z_2 \quad (24)$$

得

$$\dot{V}_c = -x_1^2 - x_1^4 - z_2^2 \quad (25)$$

Adaptive Back-stepping

看不完了