哈爾濱工業大學(深圳)
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

数学规划

作业常见问题说明

孙莹，孔令晨

作业1

1-1 某工厂生产 A、B 两种产品，已知生产产品 A 每千克要用煤 9 吨、电 4 千瓦 • 时，劳动力 3 个，生产产品 B 每千克要用煤 4 吨，电 5 千瓦 • 时，劳动力 10 个，又知每千克产品 A 的产值是 7 万元，每千克 B 的产值是 12 万元。现在该工厂只有煤 360 吨，电 200 千瓦 • 时，劳动力 300 个，问在这种条件下，应该生产产品 A、B 各多少千克才能使产值最高，试建立其数学模型并将其化为标准型。

TIPS：注意在对实际问题建模的时候要根据决策变量的意义增加约束条件，例如本题中需要决策变量$x_i \geq 0$

A：

解：设生产产品 A、B 分别为 x_1，x_2 千克：

$$\max S = 7x_1 + 12x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

化为标准型：

$$\min Z = -7x_1 - 12x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

作业2

单纯形法求解

TIPS：一步步来，不要省略步骤，计算过程要细心

错误示范：

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-13	0	0	-6	0	0	-7
x_4	9	1	0	0	1	0	6
x_2	2	3	1	-4	0	0	2
$\Leftarrow x_5$	6	1	0	3	0	1	2

$$\xrightarrow[\frac{6}{3}r_3+r_2]{\frac{4}{3}r_3+r_2}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	1	2	0	0	0	2	-3
x_4	9	1	0	0	1	0	6
x_2	10	$\frac{13}{3}$	1	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_3	2	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

有最优解

$x=(0,10,2,9,0,0)$

$S=-1$

不然容易出错

作业2

单纯形法求解

A:

表 3: 迭代表（3）

			x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
1		6	0	0	0	12.5	3.5	-20
	x_4	-3	1	0	0	-8	-3	$\boxed{12}$
	x_5	-4	0	1	0	-2	-1	7
	x_6	-1	0	0	1	1.5	0.5	-2
2		1	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{5}{6}$	-1.5	0
	x_3	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	1
	x_5	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{12}$	1	0	$\frac{8}{3}$	$\boxed{\frac{3}{4}}$	0
	x_6	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	1	$\frac{1}{6}$	0	0
3		-3.5	0.5	2	0	4.5	0	0
	x_3	-1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{9}$	0	1
	x_2	-3	$-\frac{7}{9}$	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{32}{9}$	1	0
	x_6	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	1	$\frac{1}{6}$	0	0

- 由表 3 知，最优解 $X^* = [0, 3, 1, 0, 0, 1.5]^{\mathrm{T}}$, 对应目标函数值 $S = -3.5$.

作业3

线性规划的对偶问题

TIPS：注意x若为“自由”时的情况

题目：(3) $\min S = 2x_1 + x_2 + 4x_3$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \text{ 自由} \end{cases}$$

A：

	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	x_3 自由	
$\lambda_1 \geq 0$	1	2	2	≥ 3
$\lambda_2 \geq 0$	2	1	3	≥ 5
	$\leq$	$\leq$	$=$	
	2	1	4	

$$\max Z = 3\lambda_1 + 5\lambda_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

错误示范：

$$\max Z = 3y_1 + 5y_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ 2y_1 + y_2 \leq 1 \\ \boxed{2y_1 + 3y_2 \leq 4} \\ y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \end{cases}$$

<table>
<tr><th colspan="2">原问题（或对偶问题）</th><th colspan="2">对偶问题（或原问题）</th></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数 max</td><td colspan="2">目标函数 min</td></tr>
<tr><td rowspan="4">约束条件</td><td>m个</td><td>m个</td><td rowspan="4">变量</td></tr>
<tr><td>⩽</td><td>⩾0</td></tr>
<tr><td>⩾</td><td>⩽0</td></tr>
<tr><td>=</td><td>无约束</td></tr>
<tr><td rowspan="4">变量</td><td>n个</td><td>n个</td><td rowspan="4">约束条件</td></tr>
<tr><td>⩾0</td><td>⩾</td></tr>
<tr><td>⩽0</td><td>⩽</td></tr>
<tr><td>无约束</td><td>=</td></tr>
<tr><td></td><td>约束条件右端项</td><td>目标函数变量的系数</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>目标函数变量的系数</td><td>约束条件右端项</td><td></td></tr>
</table>

作业4

用对偶单纯形法求解线性规划问题

TIPS：得到最优解X*即可

∴ 原问题最优解为 $X^* = (6, 2, 0)^T$， $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

对偶规划：

(P1) $\max z = -4\lambda_1 + 8\lambda_2 - 2\lambda_3$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 \le 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \le 2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \le 3 \\ \lambda_1 \le 0 \\ \lambda_2 \le 0 \\ \lambda_3 \le 0, \end{cases}$$

⇒ 有最优解 $\lambda^* = C_B B^{-1} = (1,2,0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = (1,2,3)$.

P_2 有最优解 $Y^* = (-1, -2, -3)$.

作业4

对线性规划问题：

$$\min S = 5x_1 - 5x_2 - 13x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 20 \\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leqslant 90 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

先用单纯形法求出最优解，然后分析在下列各种条件下，最优解分别有什么变化？

（1）约束条件①的右端常数由 20 变为 30；

（2）约束条件②的右端常数由 90 变为 70；

TIPS： $B^{-1}\bar{b} \geq 0$ 并不可直接说明最优解不变

错误示范：

(1)

- $B^{-1}\bar{b} \geq 0$, 故最优基不变，但最优解与最优值发生变化。
- 新最优解：$X^* = [B^{-1}\bar{b} \quad 0]^T = [0 \quad 30 \quad 0]^T$, 最优值 $S* = C_B B^{-1}\bar{b} = -150$.

(2)

- $B^{-1}\bar{b} \geq 0$, 故最优基不变，且经过进一步验算，最优解与最优值均不变。

作业4

A：(2) $\bar{b}=\begin{bmatrix}20\\70\end{bmatrix}$ ， $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}$

$\therefore B^{-1}\bar{b}=\begin{bmatrix}20\\-10\end{bmatrix}$

$S=C_BB^{-1}\bar{b}=[-5\ \ 0]\begin{bmatrix}20\\-10\end{bmatrix}=-100$ ，B为正则基

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	100	0	0	2	5	0
x_2	20	-1	1	3	1	0
x_5	-10	16	0	[-2]	-4	1
	ε	—	—	1	$\frac{5}{4}$	—

$\Downarrow$ 迭代1

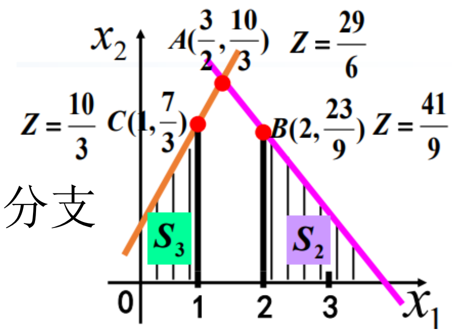
	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_{0j}	90	16	0	0	1	1
x_2	5	23	1	0	-5	$\frac{3}{2}$
x_3	5	-8	0	1	2	$-\frac{1}{2}$

$\because B\bar{b}^{-1}\geq 0$

$\therefore$ 最优解：$X^*=(0,5,5)$ ， $S^*=-90$

作业5&6

整数规划中的分支定界法/割平面法



TIPS： 1.分支法出现两个分支时都要讨论，避免漏掉其中一个分支

分支定界法可能出现的情况

序号	问题1	问题2	说明
1	无可行解	无可行解	整数规划无可行解
2	无可行解	整数解	此整数解即最优解
3	无可行解	非整数解	对问题2继续分支
4	整数解	整数解	较优的一个为最优解
5	整数解 且目标值优于问题2	非整数解	问题1的解即最优解
6	整数解	非整数解 且目标值优于问题1	问题1停止分支剪枝，以其整数解为界，对问题2继续分支

2.整数规划中将可行域分割成多个子集讨论时，可行域内每部分都要求解，避免遗漏

运输问题求解：

TIPS： 最优解需回答运输方案+最优运费

作业7

求梯度和Hesse矩阵

TIPS：最终结果算到最简

错误示范：

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+(2x_1+x_2)^2}{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)^2} & \dfrac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2-(x_1+2x_2)(2x_1+x_2)}{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)^2} \\ \dfrac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2+(2x_1+x_2)(x_1+2x_2)}{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)^2} & \dfrac{2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-(x_1+2x_2)^2}{(x_1^2+x_1x_2+x_3^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \dfrac{2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-(2x_1+x_2)^2}{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)^2}, & \dfrac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2-(2x_2+x_1)(2x_1+x_2)}{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)^2}. \\ \dfrac{x_1^2+x_1x_2+x_2-(2x_1+x_2)(2x_2+x_1)}{(x_1^2+x_1x_2+x_2)^2}, & \dfrac{2(x_1^2+x_1x_2+x_2)-(2x_2+x_1)^2}{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)^2} \end{bmatrix}$$

作业9

用外点法求解：

(1) $\min(x_1^2+x_2^2)$

s. t. $(x_1-1)^3-x_2^2=0$

TIPS：高次偏导函数求极值点首先观察表达式的特点再展开，会比较容易求解

错误示范：

求解 $\min\varphi(X,M_k)$（用解析法）$\rightarrow \nabla\varphi(X,M_k)=0$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=2x_1+6M_k(x_1-1)^5-6M_k x_2^2(x_1-1)^2=0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}=2x_2-4M_k(x_1-1)^3x_2+4M_kx_2^3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2^2=\dfrac{-1+2M_k(x_1-1)^3}{2M_k}=\dfrac{-1}{2M_k}+(x_1-1)^3\\ 3x_1^2-4x_1+3=0\end{cases}$$

解得：$\cancel{x^{(k)}(M_k)=}\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$ $M_k\rightarrow\infty$

取 $x_1=0$, $x_2=0$ $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=0$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0$

~~令 $x_2=0$~~

$\therefore x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\min[x_1^2+x_2^2]=0$

解：(1) $\varphi(x,M_k)=x_1^2+x_2^2+M_k\left((x_1-1)^3-x_2^2\right)^2$

$=x_1^2+x_2^2+M_k\left((x_1-3)^6-2x_2(x_1-1)^3-x_2^4\right)$.

$$\begin{cases}\partial\varphi/\partial x_1=2x_1+M_k\left(6(x_1-3)^5-6x_2(x_1-1)^2\right)\\ \partial\varphi/\partial x_2=2x_2+M_k\left(-2(x_1-1)^3-4x_2^3\right)\end{cases}$$

。。。。。。。？

A：

(1) $\min(x_1^2+x_2^2)$

s.t. $(x_1-1)^3-x_2^2=0$

$$\varphi(x,M)=f(x)+M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(x))]^2+M\sum_{j=1}^{p}h_j^2(x)$$

$$\varphi(x,M_k)=x_1^2+x_2^2+M_k\left[(x_1-1)^3-x_2^2\right]^2$$

$\nabla\varphi(x,M_k)=$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=2x_1+2M_k\left[(x_1-1)^3-x_2^2\right]\cdot3(x_1-1)^2=0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}=2x_2+2M_k\left[(x_1-1)^3-x_2^2\right]\cdot(-2x_2)=0\end{cases}$$

① $x_2\neq0$

$1=2M_k\left[(x_1-1)^3-x_2^2\right]\Rightarrow x_1=\dfrac{4\pm\sqrt{16-36}}{6}$

x_1 无实解

② $x_2=0\Rightarrow x_1=1$

$\therefore x^*=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$\min(x_1^2+x_2^2)=1$

作业10

目标规划模型

6-8　考虑一个有两个产地、三个销地的不平衡运输问题．有关的供、求数量及单位运费如下表：

单位运费　销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	供应量（单位）
A_1	10	4	12	3000
A_2	8	10	3	4000
需求量（单位）	2000	1500	5000	7000 / 8500

现有以下各级目标：

P_1：销地 B_3 的需求必须全部满足；

P_2：至少要满足每个销地需求量的 75%；

P_3：总的运输费用最小；

P_4：由于合同规定，至少要产地 A_2 供应销地 B_1 1000 个单位；

P_5：出于运输安全考虑，尽量减少产地 A_1 向销地 B_3 的调运和产地 A_2 向销地 B_2 的调运；

P_6：销地 B_1 和 B_2 实际调入数与其需求数的比值应相等，即 B_1、B_2 满足需求量的百分比应该一致．试建立这个问题的目标规划模型．

TIPS：

1.引入偏差变量，建立目标约束后，无需保留相对应的原系统约束。

$$f(X)+d^- - d^+ = f_0$$

错误示范：

约束：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=3000$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=4000$$
$$x_{11}+x_{21}\le 2000$$
$$x_{21}+x_{22}\le 1000$$
$$x_{31}+x_{32}\le 5000$$
$$x_{13}+x_{23}+d_1^-=5000$$
$$x_{11}+x_{21}+d_2^- - d_2^+=1500$$
$$x_{12}+x_{22}+d_3^- - d_3^+=1125$$
$$x_{13}+x_{23}+d_4^- - d_4^+=3750$$
$$10x_{11}+4x_{12}+12x_{13}+8x_{21}+10x_{22}+3x_{23}-d_5^+=33000$$
$$x_{21}+d_6^- - d_6^+=1000$$
$$x_{13}-d_7^+=0$$
$$x_{22}-d_8^+=0$$
$$\frac{x_{11}+x_{21}}{2000}-\frac{x_{12}+x_{22}}{1500}+d_9^- - d_9^+=0$$
$$x_{ij}\ge 0,\ d_j^-,\ d_j^+\ge 0$$

需求量约束

$$x_{11}+x_{21}\le 2000$$
$$x_{12}+x_{22}\le 1500$$

供应量约束

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=3000$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=4000$$