哈尔滨工业大学（深圳）

《系统建模与仿真》课程实验报告

（2019-2020 秋季学期）

课程名称 ：系统建模与仿真

题　　目 ：递推最小二乘法

班级学号 ：SZ170410221 自动化二班

学生姓名 ：朱方程

2019 年 11 月 2 日

一、实验目的

熟悉并掌握递推最小二乘法的算法原理。

二、实验内容

给定系统

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \xi(k) \qquad (15)$$

即 $n=2$。假设实际系统的参数为 $a_1 = 2$，$a_2 = 1.3$，$b_0 = 0.4$，$b_1 = 0.88$，$b_2 = 2.2$，但是不已知，即不可测。取 $\xi(k) \in [-0.1, 0.1]$ 的零均值白噪声。输入信号取为

$$u(k) = 1.5\sin 0.2k \qquad (16)$$

要求编制 MATLAB 程序，运用递推最小二乘法对这一系统的参数进行在线辨识，并将辨识结果与实际参数进行对比。

三、实验原理

给定系统

$$\begin{aligned} y(k) = &-a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \cdots - a_n y(k-n) + \\ &b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) + \xi(k) \end{aligned} \qquad (1)$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$， $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为待辨识的未知参数，$\xi(k)$ 是不相关随机序列。y 为系统的输出，u 为系统的输入。分别测出 $n+N$ 个输出、$n+N$ 输入值 $y(1), y(2), y(3), \cdots y(n+N), u(1), u(2), \cdots u(n+N)$，则可写出 N 个方程，具体写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & u(n+1) & \cdots & u(1) \\ -y(n+1) & \cdots & -y(2) & u(n+2) & \cdots & u(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(n+N-1) & \cdots & -y(N) & u(n+N) & \cdots & u(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi(n+1) \\ \xi(n+2) \\ \vdots \\ \xi(n+N) \end{bmatrix}$$

（2）

设

$$y = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(n+N) \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \xi = \begin{bmatrix} \xi(n+1) \\ \xi(n+2) \\ \vdots \\ \xi(n+N) \end{bmatrix},$$

$$\Phi=\begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & u(n+1) & \cdots & u(1) \\ -y(n+1) & \cdots & -y(2) & u(n+2) & \cdots & u(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(n+N-1) & \cdots & -y(N) & u(n+N) & \cdots & u(N) \end{bmatrix}$$

则式（2）可写为

$$y=\Phi\theta+\xi \tag{3}$$

式中：y 为 N 维输出向量；ξ 为 N 维噪声向量；θ 为$2n+1$维参数向量；Φ 为 $N\times(2n+1)$ 测量矩阵。为了尽量减小噪声ξ对θ估值的影响，应取$N>2n+1$，即方程数目大于未知数数目。

θ的最小二乘估计为

$$\hat{\theta}=(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y \tag{4}$$

为了实现实时控制，必须采用递推算法，这种辨识方法主要用于在线辨识。设已获得的观测数据长度为N，将式（3）中的y 、Φ 和ξ分别用$Y_N,\Phi_N,\bar{\xi}_N$来代替，即

$$Y_N=\Phi_N\theta+\bar{\xi}_N \tag{5}$$

用$\hat{\theta}_N$表示θ的最小二乘估计，则

$$\hat{\theta}_N=\left(\Phi_N^T\Phi_N\right)^{-1}\Phi_N^T Y_N \tag{6}$$

令$P_N=\left(\Phi_N^T\Phi_N\right)^{-1}$，则

$$\hat{\theta}_N=P_N\Phi_N^T Y_N \tag{7}$$

如果再获得一组新的观测值$u(n+N+1)$和$y(n+N+1)$，则又增加一个方程

$$y_{N+1}=\psi_{N+1}^T\theta+\xi_{N+1} \tag{8}$$

式中

$$y_{N+1}=y(n+N+1),\xi_{N+1}=\xi(n+N+1)$$

$$\psi_{N+1}^T=\left[-y(n+N) \quad \cdots \quad -y(N+1) \quad u(n+N+1) \quad \cdots \quad u(N+1)\right]$$

将式（5）和式（8）合并，并写成分块矩阵形式，可得

$$\begin{bmatrix} Y_N \\ \cdots\cdots \\ y_{N+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Phi_N \\ \cdots\cdots \\ \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\theta+\begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \cdots\cdots \\ \xi_{N+1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

于是，类似地可得到新的参数估值

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_{N+1} &= \left\{ \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \cdots\cdots \\ \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \cdots\cdots \\ \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \cdots\cdots \\ \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Y_N \\ \cdots\cdots \\ y_{N+1} \end{bmatrix} \\
&= P_{N+1} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \cdots\cdots \\ \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Y_N \\ \cdots\cdots \\ y_{N+1} \end{bmatrix} \\
&= P_{N+1} \left(\Phi_N^T Y_N + \psi_{N+1} y_{N+1} \right)
\end{aligned} \tag{10}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
P_{N+1} &= \left\{ \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \cdots\cdots \\ \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \cdots\cdots \\ \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \left(\Phi_N^T \Phi_N + \psi_{N+1} \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \\
&= \left(P_N^{-1} + \psi_{N+1} \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{11}
$$

应用矩阵求逆引理，从求得 P_{N+1} 与 P_N 的递推关系式出发，经过一系列的推导，最终可求得**递推最小二乘法辨识公式：**

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K_{N+1}\left(y_{N+1} - \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} \hat{\theta}_N \right) \tag{12}$$

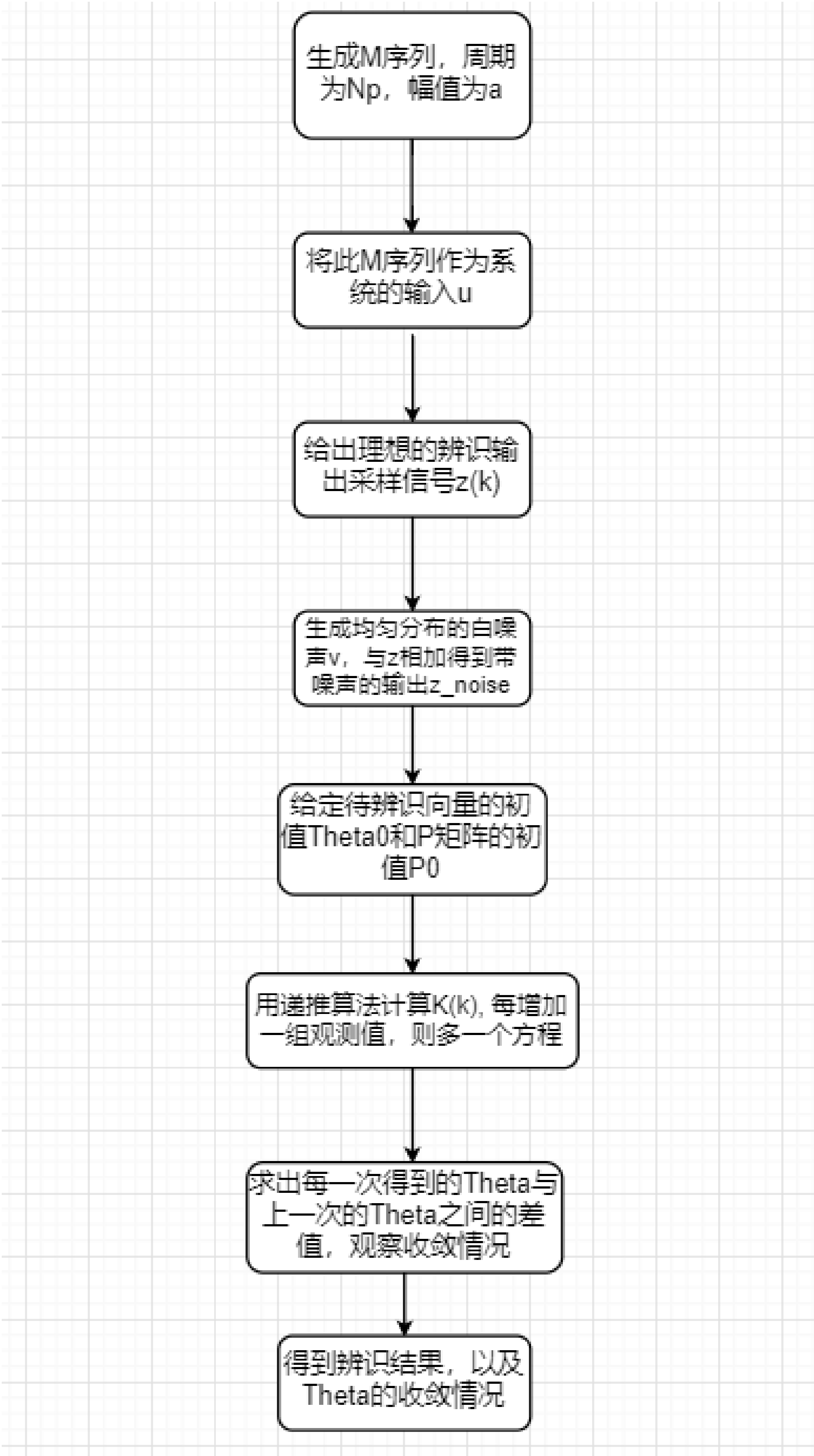
$$K_{N+1} = P_N \psi_{N+1} \left(1 + \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} P_N \psi_{N+1} \right)^{-1} \tag{13}$$

$$P_{N+1} = P_N - P_N \psi_{N+1} \left(1 + \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} P_N \psi_{N+1} \right)^{-1} \psi_{N+1}^{\mathrm{T}} P_N \tag{14}$$

为了进行递推计算，需要给出 P_N 和 $\hat{\theta}_N$ 的初值 P_0 和 $\hat{\theta}_0$。

推荐取值方法为：假定 $\hat{\theta}_0 = 0, P_0 = c^2 I$，$c$ 是充分大的常数，I 为 $(2n+1)\times(2n+1)$ 单位矩阵，则经过若干次递推之后能得到较好的参数估计。

四、实验框图


生成M序列，周期为Np，幅值为a
将此M序列作为系统的输入u
给出理想的辨识输出采样信号z(k)
生成均匀分布的白噪声v，与z相加得到带噪声的输出z_noise
给定待辨识向量的初值Theta0和P矩阵的初值P0
用递推算法计算K(k), 每增加一组观测值，则多一个方程
求出每一次得到的Theta与上一次的Theta之间的差值，观察收敛情况
得到辨识结果，以及Theta的收敛情况

五、实验程序代码

```
clear all%清理工作间变量
close all
Np=63;
for k=1:Np
    u(k)=1.5*sin(0.2*k);
end
z(2)=0;z(1)=0;%将两个初始值赋为 0
for k=3:Np;%循环变量从 3 到 Np
z(k)=2*z(k-1)-1.3*z(k-2)+0.4*u(k)+0.88*u(k-1)+2.2*u(k-2);%给出理想的辨识输出采样信号
end
%相当于有 Np-2 个方程，原式 n=2，N=Np-2
v=0.1*(randn(1,Np)-0.5);%产生白噪声
z_noise=z+v;
figure(1);
hold on
stem(u),grid on
legend('系统输入 u')
hold off
%最小二乘辨识
y=z_noise(3:Np)';
%定义 Φ 测量矩阵
for k=3:Np
Phi(k-2,:)=[-z_noise(k-1) -z_noise(k-2) u(k) u(k-1) u(k-2)];
end
%参数向量 θ 的最小二乘估计
theta=inv(Phi'*Phi)*Phi'*y
%递推法最小二乘辨识
%给定 P 矩阵的初值，P=c^2*I,c 充分大
p0=10^6*eye(5,5);
%给定被辨识参数的初始值，一个极小的向量
Theta0=[0.0001 0.0001 0.0001 0.0001 0.0001]';
Theta=[Theta0,zeros(5,Np-1)];%被辨识参数矩阵
e=zeros(5,Np);%相对误差的初始值及大小
for k=3:Np; %开始求 K
phi=[-z_noise(k-1),-z_noise(k-2),u(k),u(k-1),u(k-2)]';
X=phi'*p0*phi+1;
X1=inv(X);
%开始求 K(k)
```

```
k1=p0*phi*X1;%求出 K 的值
d1=z_noise(k)-phi'*Theta0;
Theta1=Theta0+k1*d1;%求被辨识参数 Theta
e1=Theta1-Theta0;%求参数当前值与上一次的值的差值
e2=e1./Theta0;%求参数的相对变化
e(:,k)=e2;
Theta0=Theta1;%新获得的参数作为下一次递推的旧参数
Theta(:,k)=Theta1;
p1=p0-X1*p0*phi*phi'*p0;%求出 p(k)的值
p0=p1;%给下次用
end%大循环结束
%分离参数
a1=Theta(1,:); a2=Theta(2,:); b0=Theta(3,:); b1=Theta(4,:);b2=Theta(5,:);
ea1=e(1,:); ea2=e(2,:); eb0=e(3,:); eb1=e(4,:);eb2=e(5,:);
Result=[a1(63),a2(63),b0(63),b1(63),b2(63)]'
figure(2);%第 2 个图形
i=1:Np;%横坐标从 1 到 63
plot(i,a1,'r',i,a2,':',i,b0,'b',i,b1,'g',i,b2,':') %画出 a1，a2，b0,b1，b2 的各次辨识结果
title('Parameter Identification with Recursive Least Squares Method')%图形标题
legend('参数 a1','参数 a2','参数 b0','参数 b1','参数 b2');
figure(3); %第 3 个图形
i=1:Np; %横坐标从 1 到 63
plot(i,ea1,'r',i,ea2,'g',i,eb0,'b:',i,eb1,'b',i,eb2,'r:') %画出 a1，a2，b1，b2 的各次辨识结果的收敛情况
title('Identification Precision') %图形标题
legend('a1 误差','a2 误差','b0 误差','b1 误差','b2 误差');
```

六、实验结果及分析

输入采用正弦信号，精确度不高。结果如下：

```
命令行窗口
Result =

   -2.0000
    1.3000
    0.2679
    1.1723
    2.0300

fx >>
```

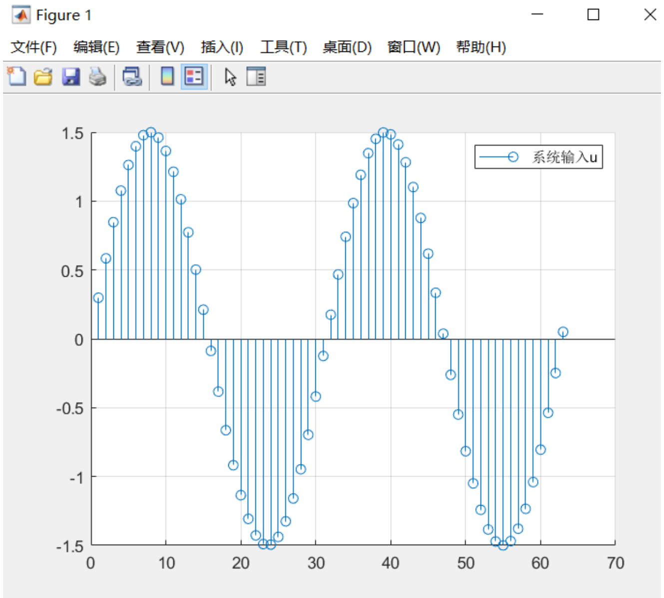


Figure 1
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
系统输入u
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0 10 20 30 40 50 60 70

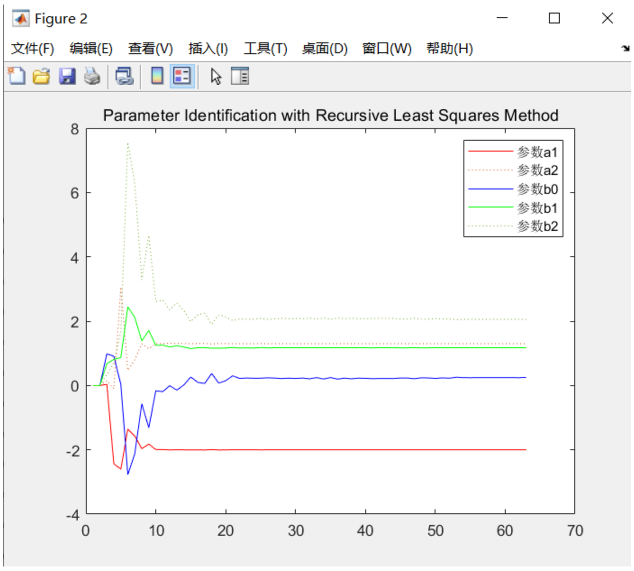


Figure 2
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
Parameter Identification with Recursive Least Squares Method
参数a1
参数a2
参数b0
参数b1
参数b2
8
6
4
2
0
-2
-4
0 10 20 30 40 50 60 70

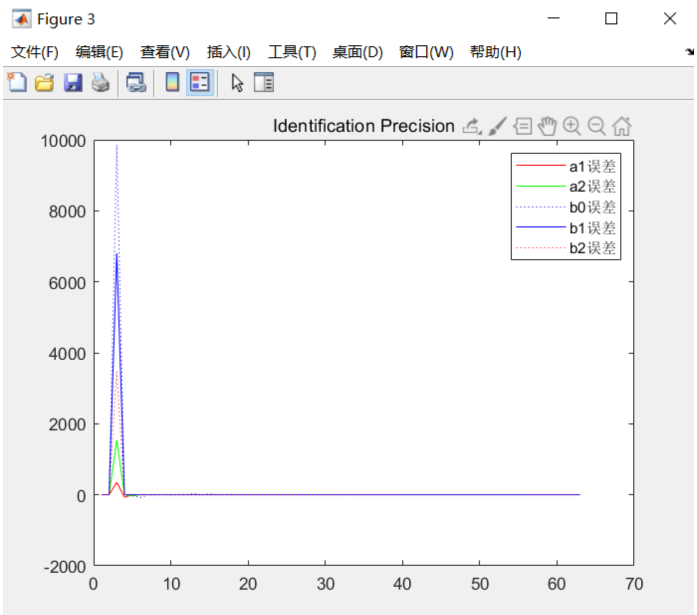
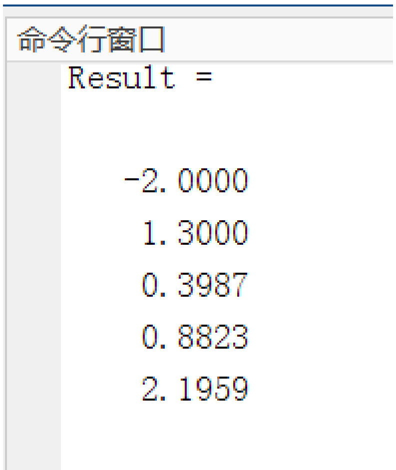
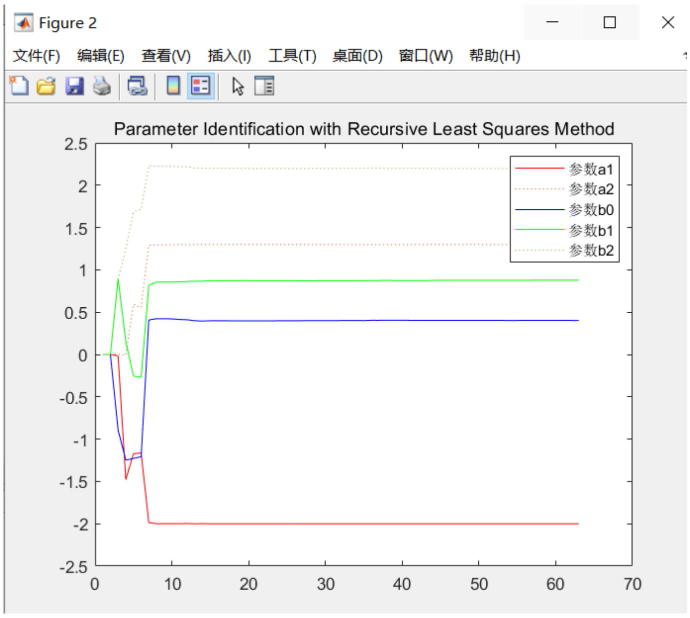
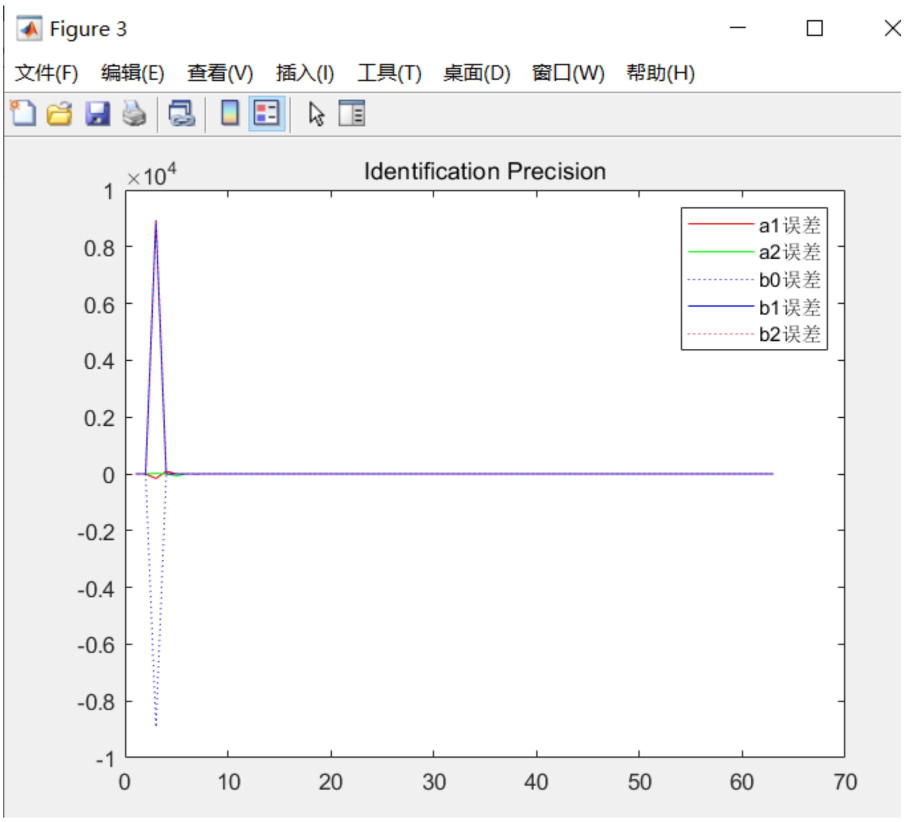


Figure 3
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
Identification Precision
a1误差
a2误差
b0误差
b1误差
b2误差
10000
8000
6000
4000
2000
0
-2000
0 10 20 30 40 50 60 70

输入采用 M 序列，精确度更高，结果如下：







七、实验结论

递推最小二乘法，采用 M 序列做输入，辨识准确度高于用正弦信号做输入。