

信号分析与处理

信号分析与处理

绪论

信号描述

信号分类

独立变量个数

时间特性

能量特点

系统分类

连续信号分析

时域描述

正弦

指数信号

单位斜坡信号

单位阶跃信号

单位冲激信号

时域运算

基本运算

叠加、相乘（逐点）

微、积分

卷积

信号分解

冲激函数之和

正交分解

预备知识

分解

频域分析

周期信号的频谱分析

级数展开 CFS

周期信号的频谱

周期信号的功率分配

Fourier级数近似

连续非周期信号的频谱分析

Fourier 变换

常用Fourier变换

周期函数的Fourier变换

Fourier 变换性质

离散信号分析

时域分析

理想采样与恢复

时域采样定理

频域采样定理

恢复连续时间信号内插公式

频域内插公式

离散信号描述

- 典型序列
- 离散信号时域运算
- 频域分析
 - DFS (周期信号)
 - DFS性质
 - DTFT (非周期信号)
 - 性质
 - 常见序列
 - DTFT对称性质
 - DFT
 - DFT性质
 - FFT
- Z域分析
 - Z变换与反变换
 - 定义
 - 收敛域ROC
 - 反变换求取
 - 部分分式展开
 - 幂级数
 - 围线积分
 - 单边Z变换
 - Z变换性质
 - 单边Z变换的性质 (与双边Z变换不同)
 - Z变换与其他变换的关系
 - Laplace
 - DTFT
 - DFT
- 信号处理基础
 - 系统及其性质
 - 系统定义
 - 系统与信号关系
 - 系统性质
 - 线性时不变系统的冲激/样值响应
 - 连续系统的卷积积分
 - 离散系统的卷积和
 - 冲激响应与阶跃响应的关系
 - 卷积的性质
 - 匹配滤波
 - 频域法分析
 - 频率特性函数
 - 无失真传输
 - 理想低通滤波器
- 滤波器
 - 滤波概念
 - 技术要求
 - 模拟滤波器
 - Butterworth LPF
 - 数字滤波器
 - 概述

绪论

信号描述

- 波形图
- 数学表达式

信号分类

独立变量个数

- 一维（语音信号）
- 二维（黑白图）
- 三维（彩图）

时间特性

- 确定性 vs 随机性
- 连续 vs 离散时间
- 连续（定义域连续）
 - 模拟（时间幅值均连续）
- 离散（定义域离散）
 - 抽样（时间离散）
 - 数字（时间幅值均离散）
- 周期 vs 非周期
 - 设 $f(t) = \sum f_i(t)$, $\forall i, j$ $\Leftrightarrow f(t)$ 是周期信号
 $\exists k = T_i/T_j \in \mathbb{Q}$

能量特点

- 能量(有限)信号：
 - $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$
 - $E < \infty$
- 功率(有限)信号：
 - $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$
 - $P < \infty, P \neq 0$
- 幅度有限的周期、随机信号均属于功率信号
- 一个信号可能既不是能量信号，也不是功率信号

- 一个信号不可能既是能量信号，又是功率信号

系统分类

- 对信号分析和处理方法的不同
 - 模拟处理系统
 - 数字处理系统
-

连续信号分析

时域描述

- 普通信号
 - 正弦信号
 - 指数信号
- 奇异信号
 - 脉冲
 - 阶跃
 - 冲激

正弦

- 性质：
 - 同频率相加
 - 频率差整数倍（周期比为有理数倍）的信号相加，仍为周期函数

指数信号

- $s = \sigma + j\omega$
- 讨论 $\sigma == 0?$, $\omega == 0?$
- 欧拉公式：

$$\begin{cases} \sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \end{cases}$$

单位斜坡信号

- $r(t)$

单位阶跃信号

- $u(t)$

单位冲激信号

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$
- 偶函数特性
- 筛选特性
- 与阶跃的微、积分关系

时域运算

基本运算

- 尺度变换
 - 幅度
 - 时间：改变信号基本特征（频率），频谱变化！
- 翻转：将信号以纵轴为中心进行对称映射, 令 $t = -t$
- 平移

叠加、相乘（逐点）

微、积分

- 单位冲激偶函数: $\delta'(t) = \frac{d}{dt} \delta(t)$
 - 单位冲激偶函数是奇函数
 - 筛选特性：分部积分证明
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t - t_0) dt = -x'(t_0)$$

卷积

- 本质的一种解释
- 在信号的持续作用下，系统的响应
- 步骤:
 1. 变量替换
 2. 翻转:
 3. 平移
 4. 相乘
 5. 积分
- 性质
 - 交换律
 - 分配律
 - 结合律
 - 积分

$$\int_{-\infty}^t [x_1(\tau) * x_2(\tau)] d\tau = x_1(t) * \left[\int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \right] = \left[\int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau \right] * x_2(t)$$

- 微分

$$\frac{d}{dt}[x_1(t) * x_2(t)] = x_1(t) * \frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) * x_2(t)$$

- 任意信号与冲激信号的卷积
 - $x(t) * \delta(t) = x(t)$
 - $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
 - $x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2)$

信号分解

- 信号
 - 直流分量+交流分量
 - 偶分量+奇分量
 - 冲激函数之和

冲激函数之和

$$\bullet \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(t)$$

正交分解

预备知识

- 函数正交：

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt = 0$$
- 正交函数集
 - $\forall f_i, f_j \in \{f_k\} (i \neq j)$ 均正交，则称集合 $\{f_k\}$ 是完备正交函数集
- 完备正交函数集
 - 定义：
 - 若

$$\nexists \varphi(t) \notin \{f_k\},$$

$$s.t. \quad \forall i, \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) f_i^*(t) dt = 0$$

则称 $\{f_k\}$ 为完备正交函数集

- 三角函数集： $\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots\}$
- 复指数函数集： $\{e^{jn\omega_0 t}\} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

分解

- 表示: $x(t) = \sum c_i f_i(t) + x_e(t)$
- 均方误差 $\overline{x_e^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \right]^2 dt$
 - 使均方误差最小, 计算得系数

$$c_j = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_j^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_j(t) f_j^*(t) dt}$$

- Parseval定理: 信号分解的能量关系

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 k_i$$

频域分析

周期信号的频谱分析

级数展开 CFS

- 周期信号需满足**Dirichlet**条件
- 提示: “内积”

$$c_i = \frac{\langle x(t), f_i(t) \rangle}{\langle f_i(t), f_i(t) \rangle}$$

- Fourier展开:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \end{aligned}$$

(?)

$$\begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

- 复指数展开：

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned} X(n\omega_0) &= \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

称 $X(n\omega_0)$ 为复Fourier系数

- 取样函数 $\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$
 - 周期矩形脉冲的Fourier级数： $\text{CFS}[g(t)] = X(n\omega_0) = \frac{\tau}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right)$

周期信号的频谱

- $|X(n\omega_0)|$
- 特性：
 - 离散性
 - 谐波性
 - 谱线以 ω_0 为间隔等间距分布
 - 收敛性
 - **Remark:** 满足Dirichlet条件的周期函数均有上述3个特性
- 负频率：
 - 出于数学表示的需要，无物理意义
 - 绝对值相等的正负频率幅度之和 表示一个实际存在的正弦谐波分量

周期信号的功率分配

$$P = \frac{1}{T_0} = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2$$

- 周期信号时域平均功率 = 直流、基波、各次谐波平均功率之和

Fourier级数近似

- *吉伯斯现象

连续非周期信号的频谱分析

- $T_0 \rightarrow \infty$ ，谱线连续，幅值无穷小

- 考虑频谱密度函数 $X(\omega) = T_0 X(n\omega_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} X(n\omega_0)$

Fourier 变换

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$
- 逆变换: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$
- CFT存在的充分条件: 非周期函数的Dirichlet条件

常用Fourier变换

$g(t)$	$\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$
单边指数	$\frac{1}{a + j\omega}$
双边指数	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\pi\delta(t) + \frac{1}{j\omega}$

周期函数的Fourier变换

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$

- 周期函数CFS与CFT的区别:
 - CFS: 表征幅度, 为有限值
 - CFT: 表征频谱密度, 为冲激串

Fourier 变换性质

- 线性
- 奇偶性

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega)$$

- 对偶性

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t)] &= X(\omega) \\ \Updownarrow \\ \mathcal{F}[X(t)] &= 2\pi x(\omega)\end{aligned}$$

- 尺度变换

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- 时域压缩——频带展宽
- 时移性质

$$\mathcal{F}[x(t \pm t_0)] = e^{\pm j\omega t_0} X(\omega)$$

- 频移特性

$$\mathcal{F}[e^{\pm j\omega_0 t} x(t)] = X(\omega \mp \omega_0)$$

- 微分性质

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n X(\omega)$$

- 积分性质

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

- Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- 卷积定理

- 证明思路：交换积分顺序
- 时域：略
- 频域：

$$\mathcal{F}^{-1}[X_1(\omega) * X_2(\omega)] = 2\pi \cdot x_1(t) X_2(t)$$

离散信号分析

时域分析

理想采样与恢复

时域采样定理

- $x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$
- $X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$
- Shannon采样定理; Nyquist 频率
- 非时限——频域带限（周期延拓）

频域采样定理

- $X_p(\omega) = X(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$
- $x_p(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_0)$
- $\omega_0 \leq \frac{\pi}{t_m}; T_0 \geq 2t_m$
- 非带限——时限（周期延拓）

恢复连续时间信号内插公式

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) * \text{Sa}\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{Sa}\left[\frac{\omega_s}{2}(t - nT_s)\right] \end{aligned}$$

频域内插公式

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) \text{Sa}\left[\frac{T_0}{2}(\omega - k\omega_0)\right]$$

离散信号描述

- 序列 $x(n)$ 或 $x(k)$
- 离散信号能量: $W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$
- **数字角频率** $\Omega_0 = \omega_0 T_s$ (rad), 范围: $[0, 2\pi)$

典型序列

1. 单位脉冲
2. 单位阶跃
3. 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

4. 实指数序列

- $x(n) = a^n u(n)$

5. 正弦型序列

- $x(n) = A \sin(n\omega_0 T_s + \varphi_0)$

- 不一定是周期信号:

- 周期信号须满足条件: $2\pi/\Omega_0$ 为有理数

6. 复指数序列

- $x(n) = e^{(\sigma + j\Omega_0)n}$

- 数字频率取值范围: $0 \leq \Omega \leq 2\pi$

7. 任意离散序列

离散信号时域运算

1. 平移
2. 翻转
3. 相加
4. 相乘
5. 累加

$$\circ \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

6. 差分

- 前向: $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$
- 后向: $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$
- 关系: $\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$

7. 时间尺度变换

- **Remark:** 不是压缩序列, 而是变化采样时间
- $x(2n)$ 是序列 $x(n)$ 每两项抽一项

8. 卷积和

- 性质:
 - 满足: 交换律、分配律、结合律
 - 差分、累加性质类似连续卷积的微分、积分
 - 与脉冲序列卷积:

$$\begin{aligned} x(n) * \delta(n) &= x(n) \\ x(n) * \delta(n - n_0) &= x(n - n_0) \\ x(n - n_1) * \delta(n - n_2) &= x(n - n_1 - n_2) \end{aligned}$$

9. 两序列相关运算

频域分析

DFS (周期信号)

- 由CFS推出: 令 $T_0 = NT, dt = T, \Omega_0 = \omega_0 T = 2\pi/N$.

$$X\left(k\frac{\Omega_0}{T}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\Omega_0 n}$$

或记作

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\Omega_0 n} \\ X(k\Omega_0) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n} \end{aligned}$$

- 注意到频谱 $X(k\Omega_0)$ 也是周期为 N 的离散序列
- 向量正交分解:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j0\Omega_0} & \dots & e^{j(N-1)\Omega_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j0\Omega_0(N-1)} & \dots & e^{j(N-1)\Omega_0(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X((N-1)\Omega_0) \end{bmatrix}$$

DFS性质

1. 线性
2. 周期卷积定理
 - 周期卷积: $x(n) \star$
 - 周期卷积仅在单个周期内求和
3. 复共轭
 - $x^*(-n) \leftarrow \text{DFS} \rightarrow X^*(k\Omega_0)$
4. 位移

DTFT (非周期信号)

- 周期延拓、取极限

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$\left(\Omega = k\frac{2\pi}{N}, k = 0, 1, \dots, N-1 \right)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

- 存在条件:
 - $x(n)$ 绝对可和
- 注意到DTFT仍是连续周期函数 (关于 Ω)

性质

- P137 表2-1

常见序列

$x(n)$	$X(\Omega)$
$\delta(n)$	1
$\delta(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}$
1	$2\pi\delta(\Omega)$

DTFT对称性质

$x(n)$	$X(\Omega)$
实、偶	实、偶
实、奇	虚、奇
虚、偶	虚、偶
虚、奇	实、奇

DFT

- 时域、频域均离散
- 推导思路：
 1. 非周期信号——DTFT： $[0, 2\pi]$ 作N点采样
 2. 周期信号——DFS：取主值
- 从DFS推导：
 - 周期延拓
 - 取主值
 - 乘周期（变成频谱密度函数）
- 从DFTF推导：

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \text{DTFT}[x(n)]|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}} \\
 &= X(\Omega)|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}
 \end{aligned}$$

- 离散傅立叶变换

$$\begin{aligned}
 X(k) &= NX(k\Omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\Omega_0 n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\
 x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}
 \end{aligned}$$

DFT性质

1. 线性：短的补0
2. 圆周移位（循环移位）

$$((n-m))_N \triangleq (n-m) \text{ MOD } N$$

- 性质：

$$\begin{aligned}
 x((n-m))_N R_N(n) &\Leftrightarrow e^{-j\Omega_0 m k} X(k) \\
 e^{j\Omega_0 k_0 n} x(n) &\Leftrightarrow X((k-k_0))_N R_N
 \end{aligned}$$

3. 圆周卷积

$$x(n) \star h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m))_N R_N(n)$$

- 圆周卷积运算的两个序列长度必须相等（短的可以补零）
- **Remark:**
 - 注意圆周卷积与线性卷积的不同，both原因and结果（P145~146）
 - 当2个序列补零到长度满足 $L \geq N + M - 1$ 时，两种卷积结果一致

4. 时移特性

$$\text{DFT}[x((n-m))_N R_N(n)] = e^{-j\Omega_0 m k} X(k)$$

5. 频移特性

$$\text{DFT}[e^{j\Omega_0 m k_0} x(n)] = X((k-k_0))_N R_N(n)$$

6. 卷积定理

$$\begin{aligned} x(n) \star h(n) &= X(k)H(k) \\ x(n)h(n) &= \frac{1}{N} X(k) \star H(k) \end{aligned}$$

FFT

- 定义指数（旋转/加权）因子： $W_N = e^{-j2\pi/N}$
 - 性质：正交、周期、对称、可约
- 频率分辨率：
 - 数字频率： $2\pi/N$
 - 实际频率： f_s/N
- 码位倒置
- 应用：
 - 求线性卷积
 - 求线性相关
 - 连续时间信号频谱分析
 - 时限连续信号
 - 带限信号：时宽无限，须加窗截断

Z域分析

- DTFT不收敛
- 乘衰减因子 $r^{-n} (r > 1)$

Z变换与反变换

定义

- 令 $z = re^{j\Omega}$

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{F}[x(n)r^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(re^{j\Omega})^{(-n)} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\
 x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(z)(re^{j\Omega})^n d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz
 \end{aligned}$$

收敛域ROC

- 满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|r^{-n} < \infty$$

条件的所有z

- Z变换要写收敛域, 不同收敛域对应的时域序列不同
- 不同序列的收敛域
 1. 有限长序列 $0 < |z| < \infty$
 2. 右边序列 $|z| > R_{x1}$
 3. 左边序列 $|z| < R_{x2}$
 4. 双边序列 $R_{x1} < |z| < R_{x2}$

反变换求取

部分分式展开

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{z - p_j}$$

幂级数

- 大除法, 商写成如下形式

$$X(z) = A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots$$

围线积分

- 留数法, 不要求掌握

单边Z变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Z变换性质

性质	时域	z域
时移	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} X(z)$

单边Z变换的性质（与双边Z变换不同）

1. 时移定理 P171

- 单边Z变换要考虑信号的初始状态
- 设单边Z变换为 $X(z)$ ，设 $x(n)$ 是双边序列
 - 左移: $\mathcal{Z}[x(n+m)u(n)] = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$
 - 右移: $\mathcal{Z}[x(n-m)u(n)] = z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]$
- 单边Z变换, $x(n)$ 是因果序列
 - 右移: $\mathcal{Z}[x(n-m)u(n)] = z^{-m} X(z)$
 - 左移: 同双边序列

2. 初值定理

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

3. 终值定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

Z变换与其他变换的关系

Laplace

- $X(z)|_{z=e^{sT}} = X(s)$

DTFT

- $X(z)|_{z=e^{j\Omega}} = X(\Omega)$

DFT

- 单位圆上采样

信号处理基础

系统及其性质

系统定义

系统与信号关系

系统性质

1. 记忆性

- 动态系统/记忆系统

2. 因果系统

$$y(t) = f[x(t - \tau)], \tau \geq 0$$

3. 可逆性与可逆系统

- 单射

4. 稳定性

5. 时变、时不变

6. 线性、非线性

线性时不变系统的冲激/样值响应

- 单位冲激响应（是零状态响应） $h(t)$
 - 直接Laplace解决
- 单位脉冲响应（零初值） $h(n)$
 - 直接Z变换解决
- 步骤
 - 略

连续系统的卷积积分

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

离散系统的卷积和

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

冲激响应与阶跃响应的关系

$$h(t) = c'(t)$$

$$h(n) = c(n) - c(n - 1)$$

卷积的性质

1. 交换律
2. 结合律
- 3.
4. 微分（差分）
5. 积分（累加）

匹配滤波

- 自相关：

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt$$

- 令滤波器单位冲激响应

$$h(t) = x(T - t)$$

则滤波器时域响应为

$$y(t) = x(t) * h(t) = R_{xx}(t - T)$$

- 信号的自相关函数在原点取最大值，且等于该信号的能量
- 该滤波器后接判决器（阈值处理），可判断是否接收到确知信号 $x(t)$ ，故名匹配滤波器

频域法分析

频率特性函数

- 令输入 $x(t) = e^{j\omega t}$ 则

$$y(t) = h(t) * x(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$$

无失真传输

- 信号通过系统后，波形不变，允许幅度按比例放大缩小，允许固定延迟
- 无失真传输系统的频率特性函数：

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = Ke^{j\omega t_0}$$

理想低通滤波器

- 频率特性：

$$H(\omega) \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} |H(\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \\ \varphi_h = -\omega t_0 \end{cases}$$

- 单位冲激响应：

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c(t - t_0))$$

- 注意到 $t < 0$ 时 $h(t) \neq 0$ ，故ILPF是非因果系统，物理上不可实现

滤波器

滤波概念

- 传统：消除或减弱干扰噪声，强化有用信号的过程
- 现代：从原始信号中获取目标信息的过程
- 滤波器：实现滤波功能的系统，一种具有一定传输特性的信号处理装置

技术要求

- 通带： $-3 \text{ dB} < |H(\omega)| \leq 0 \text{ dB}$, 有限衰减
- 通带截止频率 ω_p
- 阻带截止频率 ω_s
- 衰减函数 $\alpha(\omega) = -10 \lg |H(\omega)|^2$ (假定 $H(0) = 1$ 已归一化)
 - 阻带最小衰减： $\alpha(\omega_s)$
 - 通带最大衰减： $\alpha(\omega_p) = (3 \text{ dB})$

模拟滤波器

- 物理可实现的条件：传递函数满足
 - 实系数有理函数
 - 极点均在左半平面
 - 分子阶次不大于分母阶次（因果系统）
- 设计方法：
 - 希望滤波器冲激响应为实函数, 则由共轭对称性得

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H(\omega)H(-\omega)$$

若 $h(t)$ 存在Fourier变换, 则

$$|H(\omega)|^2 = H(s)H(-s)|_{s=j\omega}$$

零、极点分布关于虚轴对称

- 给定 $|H(\omega)|^2$, 用 $-s^2$ 代替 ω^2 , 确定 $H(s)$ 的零极点
- 一般取最小相位系统

Butterworth LPF

- 以最高阶Taylor级数逼近理想矩形特性, n 越大特性越理想
- 幅频特性

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- 通过 α_s 确定阶次

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg \frac{\omega_s}{\omega_c}}$$

- 零极点分布

- $s_k = \omega_c e^{j \left[\frac{2k+1}{2n} \pi + \frac{\pi}{2} \right]}, k = 0, 1, \dots, 2n-1$
- 极点以 $\frac{\pi}{n}$ 为间隔分布在半径为 ω_c 的圆上 (Butterworth圆)

- 归一化复频率：令

$$\bar{s} = \frac{s}{\omega_c}$$

则

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(\bar{s} - \frac{s_k}{\omega_c} \right)}$$

查表设计

数字滤波器

概述

- 处理离散时间信号
- 具有一定传输特性的数字信号处理装置
- 分类
 - 递归型——IIR
 - 非递归型——FIR
 - FFT实现的数字滤波器
- 系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}}$$

- 当存在 $a_j \neq 0$ 且分母不能整除，对应滤波器为IIR滤波器

IIR 数字滤波器

冲激响应不变法

- 用有理多项式逼近给定滤波器幅频特性

$$H(z) = b_0(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots)$$

- 思路：
 1. 设计模拟滤波器
 2. 直接Z变换
- 特点：
 1. 模数频率呈线性关系： $\Omega = \omega T$
 2. s平面与z平面间映射的多值性易造成频谱混叠现象，不适宜高通、带阻数字滤波器

双线性变换法

- s平面到 \hat{s} 平面变换：

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - e^{\hat{s}T}}{1 + e^{\hat{s}T}} \right)$$

- 把s平面压缩到 $[-j\frac{\pi}{T}, j\frac{\pi}{T}]$ 横带上
- 该变换是一一映射
- \hat{s} 平面到 z 平面变换：

- Z变换: $z = e^{sT}$
- 最终双线性变换表达式:

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$$

- 优点
 - 实现s平面到z平面的一一映射, 消除频谱混叠
- 缺陷:
 - 数字滤波器与模拟滤波器在频率响应和频率的对应关系上发生畸变
 - 模拟频率与数字频率之间为非线性关系:

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2}$$

- 步骤:
 1. 关键频率点进行预畸变处理
 2. 设计模拟滤波器 (确定阶数、归一化、反归一化)
 3. 双线性变换得数字滤波器

IIR滤波器的网络结构

1. 直接型
2. 级联型
3. 并联型