哈尔滨工业大学（深圳）

《系统建模与仿真》课程实验报告

（2019-2020 秋季学期）

课程名称：系统建模与仿真

题　　目：最小二乘法的实现

班级学号：SZ170410221 自动化二班

学生姓名：朱方程

2019 年 11 月 2 日

一、实验目的

理解并掌握系统辨识中的最小二乘法原理。

二、实验内容

对象的数学模型如下：

$$z(k)-1.5z(k-1)+0.7z(k-2)=u(k-1)+0.5u(k-2)+v(k)$$

其中，$v(k)$ 是服从正态分布的白噪声 $\mathbf{N}(0,1)$。输入信号采用 4 阶 M 序列，幅度为 1。选择如下形式的辨识模型：

$$z(k)+a_1z(k-1)+a_2z(k-2)=b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+v(k)$$

设输入信号的取值是从 k =1 到 k =16 的 M 序列，则待辨识参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ 为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$= $(\boldsymbol{H}_L^{\tau}\boldsymbol{H}_L)^{-1}\boldsymbol{H}_L^{\tau}\boldsymbol{z}_L$。其中，被辨识参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$、观测矩阵 $\boldsymbol{z}_{\mathbf{L}}$、$\boldsymbol{H}_{\mathbf{L}}$ 的表达式为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\b_1\\b_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{z}_L=\begin{bmatrix}z(3)\\z(4)\\\vdots\\z(16)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_L=\begin{bmatrix}-z(2)&-z(1)&u(2)&u(1)\\-z(3)&-z(2)&u(3)&u(2)\\&\vdots&&\vdots\\-z(15)&-z(14)&u(15)&u(14)\end{bmatrix}$$

要求编制仿真程序，获取系统输入输出数据，并运用最小二乘法对这一系统的参数进行辨识，并将辨识结果与实际参数进行对比。

三、实验原理

给定系统

$$y(k)=-a_1y(k-1)-a_2y(k-2)-\cdots-a_ny(k-n)+$$
$$b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_nu(k-n)+\xi(k) \qquad (1)$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，$b_0,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为待辨识的未知参数，$\xi(k)$ 是不相关随机序列。y 为系统的输出，u 为系统的输入。分别测出 $n+N$ 个输出、$n+N$ 输入值 $y(1),y(2),y(3),\cdots y(n+N),u(1),u(2),\cdots u(n+N)$，则可写出 N 个方程，具体写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & u(n+1) & \cdots & u(1) \\ -y(n+1) & \cdots & -y(2) & u(n+2) & \cdots & u(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(n+N-1) & \cdots & -y(N) & u(n+N) & \cdots & u(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi(n+1) \\ \xi(n+2) \\ \vdots \\ \xi(n+N) \end{bmatrix}$$

（2）

设

$$y = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(n+N) \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \xi = \begin{bmatrix} \xi(n+1) \\ \xi(n+2) \\ \vdots \\ \xi(n+N) \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & u(n+1) & \cdots & u(1) \\ -y(n+1) & \cdots & -y(2) & u(n+2) & \cdots & u(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(n+N-1) & \cdots & -y(N) & u(n+N) & \cdots & u(N) \end{bmatrix}$$

则式（2）可写为

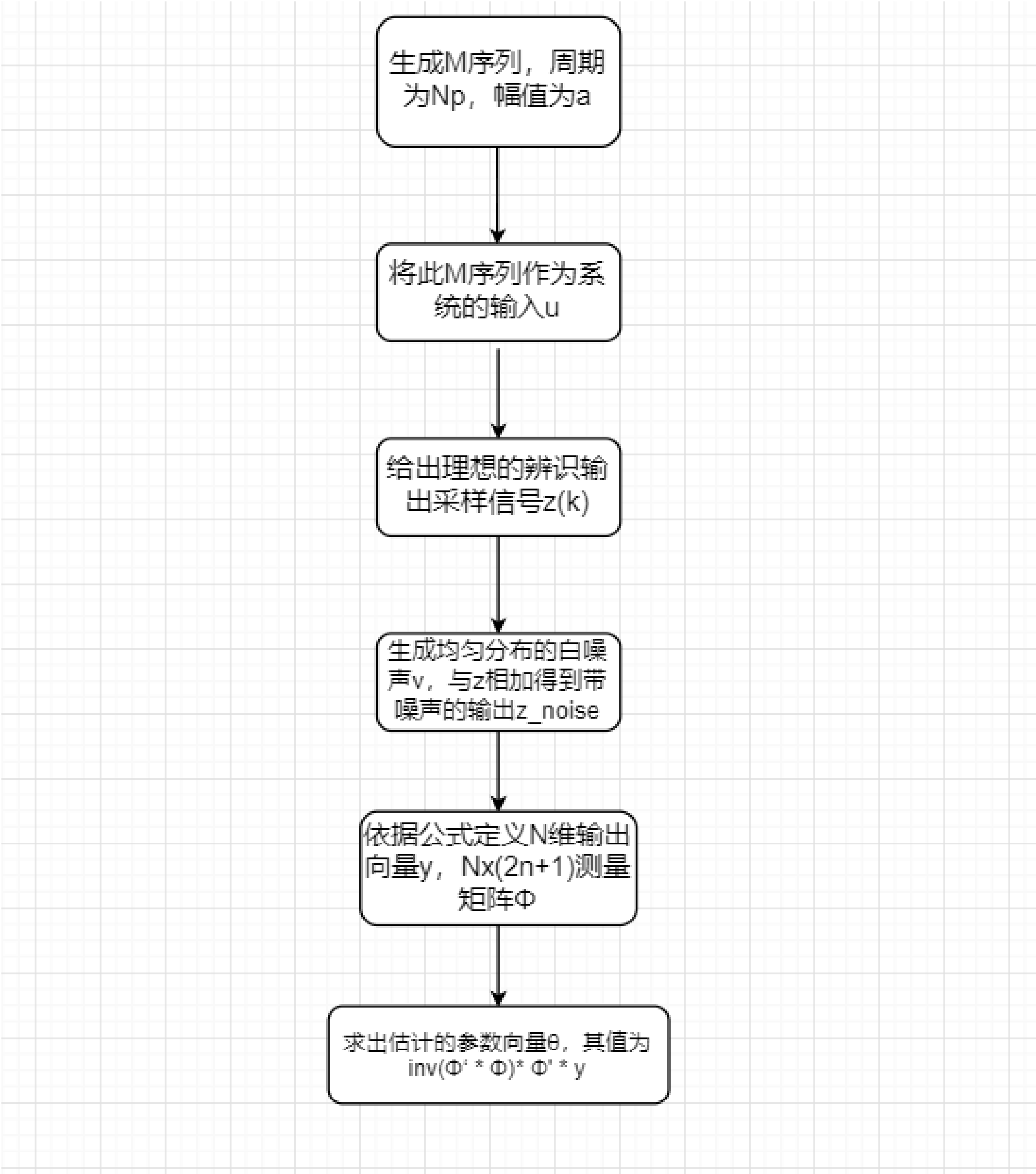
$$y = \Phi\theta + \xi \tag{3}$$

式中：y 为 N 维输出向量；ξ 为 N 维噪声向量；θ 为 $2n+1$ 维参数向量；Φ 为 $N\times(2n+1)$ 测量矩阵。为了尽量减小噪声 ξ 对 θ 估值的影响，应取 $N > 2n+1$，即方程数目大于未知数数目。

θ 的最小二乘估计为

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y \tag{4}$$

四、实验框图



生成M序列，周期为Np，幅值为a
将此M序列作为系统的输入u
给出理想的辨识输出采样信号z(k)
生成均匀分布的白噪声v，与z相加得到带噪声的输出z_noise
依据公式定义N维输出向量y，Nx(2n+1)测量矩阵Φ
求出估计的参数向量θ，其值为inv(Φ' * Φ)* Φ' * y

五、实验程序代码

```
clear all%清理工作间变量
close all
Np=63; %M 序列循环周期
a=10; %M 序列幅度
M(1)=1;M(2)=1;M(3)=0;M(4)=1;M(5)=1;M(6)=0;
M_Sequence(Np)=0;
for i=1:Np
    temp=xor(M(4),M(3));
    for k=6:-1:2
        M(k)=M(k-1);
    end
    M(1)=temp;
    M_Sequence(i)=-2*temp*a+a;
end
u=M_Sequence
z(2)=0;z(1)=0;%将两个初始值赋为 0
for k=3:Np;%循环变量从 3 到 Np
z(k)=1.5*z(k-1)-0.7*z(k-2)+u(k-1)+0.5*u(k-2);%给出理想的辨识输出采样信号
end
%相当于有 Np-2 个方程，原式 n=2，N=Np-2
v=0.1*randn(1,Np);%产生白噪声,方差为 1
z_noise=z+v;
figure(1);%画出第 1 个图形，包含输入 u，无噪声输出 z，有噪声输出 z_noise
hold on
stem(u),grid on
plot(z,'r');
plot(z_noise,'g');
legend('系统输入 u','系统输出 z','噪声输出 z_noise')
hold off
%最小二乘辨识
y=z_noise(3:Np)';
%定义 Φ 测量矩阵
for k=3:Np
Phi(k-2,:)=[-z_noise(k-1) -z_noise(k-2) u(k-1) u(k-2)];
end
%参数向量 θ 的最小二乘估计
theta=inv(Phi'*Phi)*Phi'*y
```

六、实验结果及分析

该程序对于 M 序列的周期数目 Np，幅值 a 以及白噪声的方差均对辨识的准确性有着影响。

- Np 对结果的影响：方程个数 N=Np-2，**故 Np 取得越大，代表方程数目越多，噪声对辨识的影响越小，辨识结果越准确。**我分别取 Np=15，亦即 M 序列为 4 阶，和 Np=63 亦即 M 序列为 6 阶，其余参数 a=1，白噪声服从（0，1）的均匀分布。分别实验得到结果如下：

```
theta =

   -1.5084
    0.7157
    0.9765
    0.4296
```

左图 Np=15

```
theta =

   -1.5036
    0.7019
    1.0334
    0.4576
```

右图 Np=63

- M 序列幅值 a 对辨识的影响：取 Np=63，白噪声服从（0，1）的均匀分布。分别取 a=1 和 a=10 实验如下：

```
theta =

   -1.5000
    0.7000
    0.9979
    0.5005
```

左图 a=10

```
theta =

   -1.5036
    0.7019
    1.0334
    0.4576
```

右图 a=1

实验结果告诉我，M 序列的幅值取得较大，辨识结果的准确度会提升。

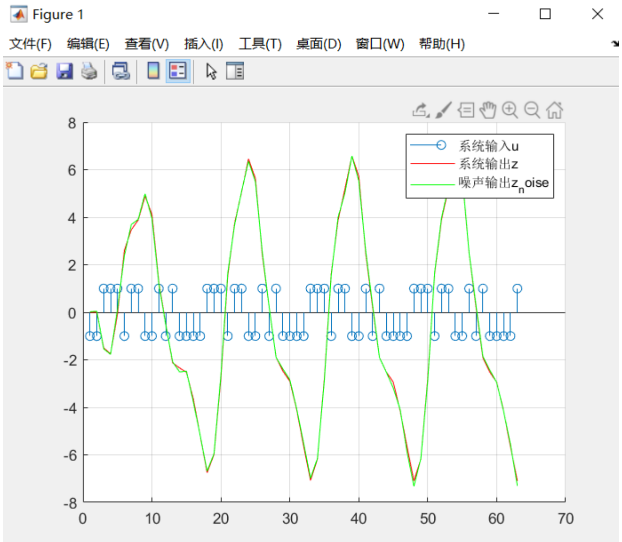
➢ 白噪声的方差越大，代表白噪声对输出的影响越大，相应的辨识结果应该越不准确。Np=63，a=1。分别取方差为 0.1 和 1，实验结果如下：

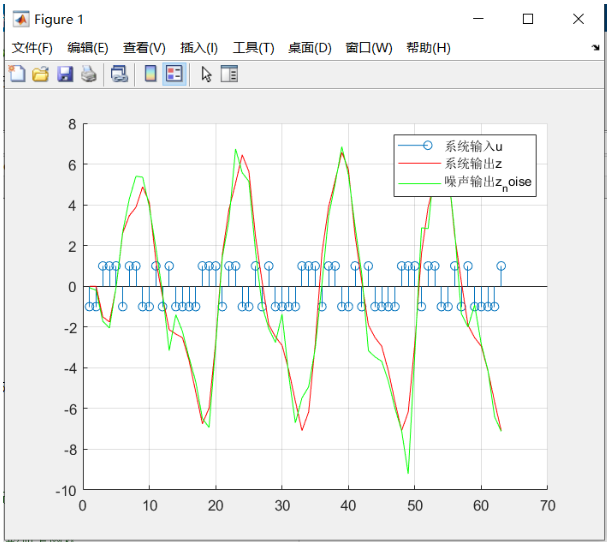
```
命令行窗口
theta =

   -1.5036
    0.7019
    1.0334
    0.4576
```

左图白噪声方差 0.1

```
theta =

   -1.0686
    0.2790
    1.2467
    0.7802
```

右图白噪声方差为 1





可以明显地看出，方差越大，白噪声对输出的影响越大，辨识准确度降低

七、实验结论

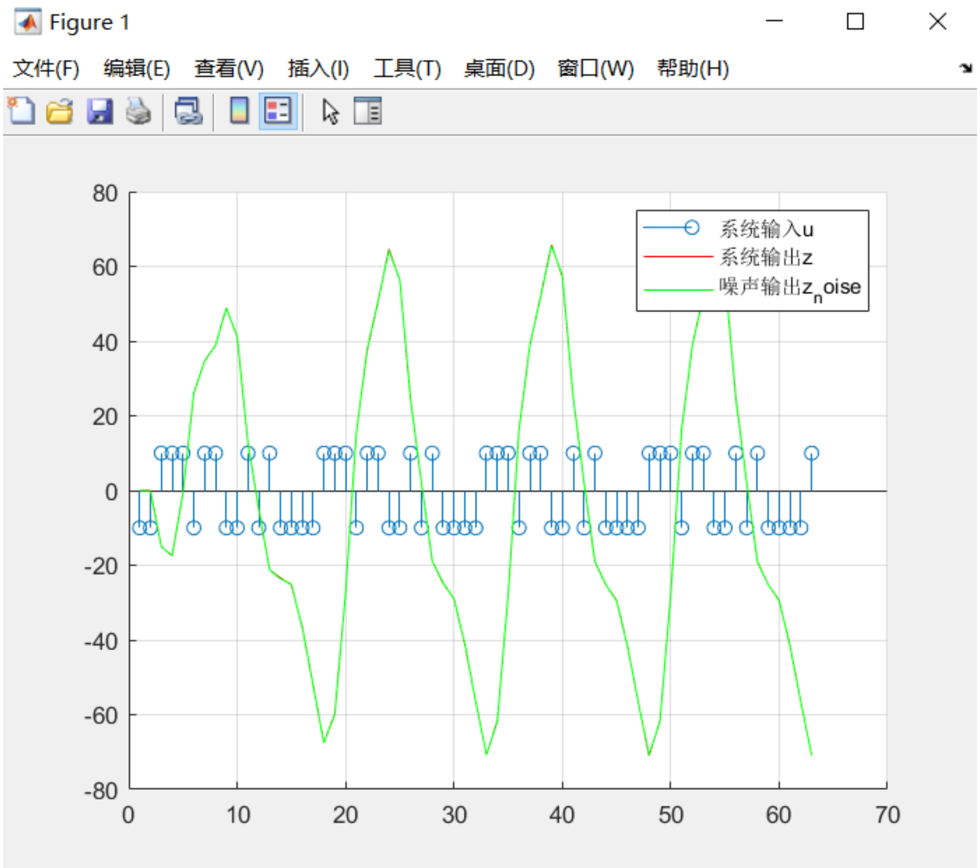
最小二乘法是一个简便且具有较高准确度的辨识方法，一些参数会对辨识结果产生影响。

M 序列的周期 Np 对结果的影响：方程个数 N=Np-2，**故 Np 取得越大，代表方程数目越多，噪声对辨识的影响越小，辨识结果越准确。**

M 序列的幅值 a 对结果的影响：**M 序列的幅值 a 取得较大，辨识结果的准确度会提升。**

白噪声方差对结果的影响：**可以明显地看出，白噪声方差越大，白噪声对输出的影响越大，辨识准确度越低。**

最后选取 Np=63，a=10，白噪声方差为 0.1，辨识结果如下



命令行窗口

```
theta =

   -1.4989
    0.6991
    0.9981
    0.5049
```