

# Bernoulli 卷积的性质

## 毕业设计开题答辩

冯洲

华中科技大学

*U201510104@hust.edu.cn*

2021 年 5 月 18 日

## 1 选题背景

# Bernoulli 卷积简介

Bernoulli 卷积是一类简单而有趣的自相似测度。令  $\nu_\lambda$  为随机级数  $\sum_0^\infty \pm 1 \lambda^n$  分布, 其中的符号以概率  $\frac{1}{2}$  独立地取得。这正是测度  $\frac{1}{2}(\delta_{-\lambda^n} + \delta_{\lambda^n})$  的无穷卷积, 因此叫“Bernoulli 卷积”。关于这类测度的研究可以追溯到 1930 年, Bernoulli 卷积与调和分析, 代数数理论, 动力系统, 以及 Hausdorff 维数的估计等领域有紧密的联系。

根据不同的研究领域, Bernoulli 卷积有不同的表示形式。[SixtyYears]

# Bernoulli 卷积基本问题

根据 [DJFeng1], 对  $\beta \in (1, 2)$ , Bernoulli 卷积  $\nu_\beta$  可以定义为下面一族测度  $\nu_\beta^n$  的 weak-star 极限

$$\nu_\beta^n := \frac{1}{2} \sum_{a_1 \cdots a_n \in \{0,1\}} \delta_{\sum_{i=1}^n a_i \beta^{-i}} \quad .$$

关于 Bernoulli 卷积基本问题是: 对于哪些  $\beta$ , 这个测度是绝对连续的, 哪些是奇异的 (singular)。如果密度 (关于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym 导数) 存在, 那么它的光滑性如何 ( $L^p$ ?)? 然后就是 Bernoulli 卷积的 Hausdorff 维数如何, 是否等于 1, 怎样去估计 Hausdorff 维数。

其中有一个非常重要的结果就是, Erdős 证明如果  $\beta$  为 Pisot 数, 那么相应的 Bernoulli 卷积的维数一定小于 1。

## 一个 open 的问题

如果  $\nu_\beta$  奇异, 那么是否一定有  $\beta$  为 Pisot 数?



Peres Y., Schlag W., Solomyak B. (2000) Sixty Years of Bernoulli Convolutions. In: Bandt C., Graf S., Zähle M. (eds) Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability, vol 46. Birkhäuser, Basel



Shigeki Akiyama, De-Jun Feng, Tom Kempton, Tomas Persson; On the Hausdorff Dimension of Bernoulli Convolutions, International Mathematics Research Notices, , rny209, <https://doi.org/10.1093/imrn/rny209>



FENG, DE-JUN. “SMOOTHNESS OF THE  $L^q$ -SPECTRUM OF SELF-SIMILAR MEASURES WITH OVERLAPS.” Journal of the London Mathematical Society, vol. 68, no. 1, 2003, pp. 102–118., doi:10.1112/S002461070300437X.



De-Jun Feng, Yang Wang, 2004, 'Bernoulli convolutions associated with certain non-Pisot numbers', Advances in Mathematics, vol. 187, no. 1, pp. 173-194



Kevin G. Hare & Nikita Sidorov (2018) A Lower Bound for the Dimension of Bernoulli Convolutions, *Experimental Mathematics*, 27:4, 414-418, DOI: 10.1080/10586458.2017.1301841



Falconer, K. J. *Fractal Geometry*. Wiley, 1990.



Mattila, Pertti. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge University Press, 1995.

谢谢！