随机丢番图逼近

6. 计算一般的期望值 (I)

对于在小节 2.2 中介绍的丢番图和如下，

$$S_\alpha(n)=\sum_{k=1}^{n}\left(\{k\alpha\}-\frac{1}{2}\right) \tag{6–1}$$

当 $n\to\infty$ 时，它会变得非常没有规律可循，而对于二次无理数，它的平均值

$$M_\alpha(N)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}S_\alpha(n) \tag{6–2}$$

会展现特别简单而优美的渐近行为。

下面记连分数 α 为

$$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots}}=[a_0;a_1,a_2,a_3,\dots]\text{；} \tag{6–3}$$

利用 a_i 记部分商，并且 $[a_0;a_1,\dots,a_{j-1}]=p_j/q_j$ 为第 j 个收敛值。利用公式 6–3，我们有如下命题

命题 6.1 对于由公式 *6–3* 表达的无理数 $\alpha>0$ 以及整数 $N\geq 1$,

$$M_\alpha(N)=\frac{-a_1+a_2-a_3\pm\dots+(-1)^k a_k}{12}+O(\max_{1\leq j\leq k}a_j), \tag{6–4}$$

其中，$k=k(\alpha,N)$ 是使得第 j 个收敛值分母 $q_j\leq N$ 成立的最后一个指标 j, 即，$q_k\leq N\leq q_{k+1}$, 并且在公式 *6–4* 的右端的常数 k 是绝对的 *(*小于 *10)*。

命题 6.1对于二次无理数特别有用。的确，对于一个周期列 a_i，计算公式 6–4 中的交错和就非常容易了。例如，首先考虑

$$\alpha=\sqrt{3}=[1;1,2,1,2,1,2,\dots]=\left[1;\overline{1,2}\right]\text{。} \tag{6–5}$$

Pell 方程 $x^2-3y^2=1$ 的最小解为 $x=2$，$y=1$，所以

$$p_{2j}\pm q_{2j}\sqrt{3}=\left(2\pm\sqrt{3}\right)^j, j=1,2,3,\dots \tag{6–6}$$

其中，p_{2j}/q_{2j} 是 $\sqrt{3}$ 的第 $2j$ 个收敛值 (因为 $\sqrt{3}$ 的周期长度为 2 (请看公式 6–5)，所以我们

得到公式 6–6 中的偶数指标的收敛值。) 由公式 6–6

$$q_{2j} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^j - \left(2-\sqrt{3}\right)^j\right),$$

所以我们有

$$N = q_{2j} \Rightarrow j = \frac{\log N}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} + O\left(1\right)。\tag{6–7}$$

结合公式 6–4 到公式 6–7，对于 $\alpha = \sqrt{3}$，我们有

$$M_{\sqrt{3}}\left(N\right) = \frac{-a_1 + a_2 - a_3 \pm \ldots + \left(-1\right)^k a_k}{12} + O\left(1\right) =$$

$$= \frac{-1+2-1+2 \mp \ldots -1+2}{12} + O\left(1\right) = \frac{-1+2}{12}\cdot\frac{\log N}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} + O\left(1\right) =$$

$$= \frac{\log N}{12\log\left(2+\sqrt{3}\right)} + O\left(1\right),\tag{6–8}$$

这就证明了我们在 (2.12) 中的断言。

这里我们有另外两个类似公式 6–8 的例子：对于 $\sqrt{7} = \left[2;\overline{1,1,1,4}\right]$, Pell 方程 $x^2 - 7y^2 = 1$ 的最小解 $x = 8$，$y = 3$ 来自于 $\sqrt{7}$ 的第四个收敛值 $[2;1,1,1] = 8/3$，所以

$$M_{\sqrt{7}}\left(N\right) = \frac{-1+1-1+4}{12}\cdot\frac{\log N}{\log\left(8+3\sqrt{7}\right)} + O\left(1\right) =$$

$$= \frac{\log N}{4\log\left(8+3\sqrt{7}\right)} + O\left(1\right),$$

还有对于 $\sqrt{67} = \left[8;\overline{5,2,1,1,7,1,1,2,5,16}\right]$，Pell 方程 $x^2 - 67y^2 = 1$ 的最小解 $x = 48842$，$y = 5967$ 来自于 $\sqrt{67}$ 的第四个收敛值 $[8;5,2,1,1,7,1,1,2,5] = 48842/5967$，所以

$$M_{\sqrt{67}}\left(N\right) = \frac{-5+2-1+1-7+1-1+2-5+16}{12}\cdot\frac{\log N}{\log\left(48842+5967\sqrt{67}\right)} + O\left(1\right) =$$

$$= \frac{\log N}{4\log\left(48842+5967\sqrt{67}\right)} + O\left(1\right),$$

而与之形成鲜明的对比的是，对于 $\alpha = \sqrt{2} = \left[1;\overline{2}\right]$，公式 6–4 中的交错和就**抵消了**，而且 $M_{\sqrt{2}(N)=O(1)}$；这就证明了 (2.11)。

类似地，对于任何一个二次无理数 α，若其连分数的周期为奇数，则有平均值为零的性质：$M_{\sqrt{\alpha}(N)=O(1)=O_\alpha(1)}$ (因为公式 6–4 中的交错和抵消了)。注意到，在第 5 节中，我们通过冗长而直接的计算证明了，在黄金分割比 $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2 = [1,1,1,1,\ldots] = \left[\overline{1}\right]$ 的情

况下，$M_{\sqrt{\alpha}}(N)=O(1)$ 的事实；参看 (5.13) 。在一般的二次无理数的情况下，这种直接的计算会变成一团糟，非常绝望，更别说一般的任意无理数的情况。

不幸的是，我们并不能指出哪些二次无理数的周期是奇数或者偶数。然而，如果 $\alpha=\sqrt{p}$，其中 p 是奇素数，我们有一个完美的判别：如果 $p\equiv 1\ (\bmod 4)$，则周期为奇数；如果 $p\equiv 3\ (\bmod 4)$，则周期为偶数。

这个漂亮的判别准则的证明依赖于著名的数论的事实："负" 的 Pell 方程 $x^2-dy^2=-1$ (其中 $d>0$ 是一个整数，但并不是完全平方数) 有整数解，当且仅当 $\sqrt{d}$ 的周期为奇数。如果素数 $p\equiv 1\ (\bmod 4)$，那么我们**可以**找到方程 $x^2-py^2=-1$ 的整数解，而这将表明 $\sqrt{p}$ 的周期为奇数。为了找到 $x^2-py^2=-1$ 的解，我们从 Pell 方程 $x^2-py^2=1$ 的基本解 (x_1,y_1) 开始，而后一个 Pell 方程一定有解。方程 $x^2-1=py^2$ 有分解

$$(x_1-1)(x_1+1)=py_1^2。\tag{6–9}$$

如果 $p\equiv 1\ (\bmod 4)$，那么公式 6–9 表明 x_1 是奇数，并且由 p 为素数，对于满足 $y_1=2uv$ 的正整数 u,v，我们有 (1) $x_1-1=2pu^2$及$x_1+1=2v^2$，或者 (2) $x_1+1=2pu^2$及$x_1-1=2v^2$ 成立。因此 $v^2-pu^2=\pm 1$ 成立。因为 (v,u) 是一个比 (x_1,y_2) 更小的解，产生矛盾，所以情况 $v^2-pu^2=1$ 不可能成立。由此可得，$v^2-pu^2=-1$，即，负 Pell 方程**的确**有解，并且我们有下面的推论。

推论 6.2 如果素数 $p\equiv 1\ (\bmod 4)$，则

$$M_{\sqrt{p}}(N)=O(1)。$$

上面推论的证明是针对素数的：如果 $d\equiv 1\ (\bmod 4)$ 不是素数，那么 $\sqrt{d}$ 的周期长度可奇可偶。例如，$\sqrt{21}=\left[4;\overline{1,1,2,1,1,8}\right]$ 的周期长度为 6 (偶)，而 $\sqrt{65}=\left[8;\overline{16}\right]$ 的周期长度为 1 (奇)。

另一方面，如果 $d\equiv 3\ (\bmod 4)$，那么通过简单的 $(\bmod 4)$ 分析我们有 $x^2-dy^2\not\equiv -1\ (\bmod 4)$ (这和 d 是否为素数无关)，这表明 $\sqrt{d}$ 的周期长度必须为偶数。

实际上，我们有一个更强的结果：如果 d 有一个素因子 $q\equiv 3\ (\bmod 4)$，则 $\sqrt{d}$ 的周期长度为偶数。的确，那时由 $x^2-dy^2\equiv -1\ (\bmod 4)$ 导出 $x^2\equiv -1\ (\bmod q)$，这和费马小定理矛盾：

$$1\equiv x^{q-1}=\left(x^2\right)^{(q-1)/2}\equiv(-1)^{(q-1)/2}=-1\ (\bmod q)。$$

如果我们不仅仅考虑二次无理数，考虑其他的无理数，命题 6.1 会怎样呢? 不如考虑自然对数 e：

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \ldots, 1, 2i, 1, \ldots]$$

这样，如果 i 为奇数，那么 $(-1+2-1)+(1-4+1)+(-1+6-1)+\cdots+(-1)^i(1-2i+1000)$ 等于 $i-1$；如果 i 为偶数数，等于 $-i$。因此由命题 6.1 我们有

$$M_e(N) = O(\log N / \log\log N), \tag{6–10}$$

这的确是正确的数量级的阶数。

注意，命题 6.1 也给出了定理 1.1 在特殊情况 $x = 1/2$ 下的常因子 $C_1(\alpha, x)$。这是等式

$$\chi_{1/2}(y) - \frac{1}{2} = \left(\{2y\} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\{y\} - \frac{1}{2}\right),$$

的结果。其中，$\{y\}$ 记 y 的小数部分，而且如果 $\{y\} < 1$，则 $\chi_{1/2}(y)$ 为 1，否则为 0。我们将在第 7 节再次讨论这个问题；请参看公式 7–26 -公式 7–27。

一个重要的遐想：怎样去猜想命题 6.1 ？ 命题 6.1 的证明并不简单，但是它和去寻找正确的猜想同样困难。我们猜想公式 6–4 的动机是什么？好，这是一个有趣又漫长的故事，其中包含代数数论的理论。为了解释这个故事，我们先大概描述出找到平均数 $M_\alpha(N)$ 的方法。我们从著名的取小数部分函数的傅里叶展开出发 (注意：它不是绝对收敛的)

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}。 \tag{6–11}$$

把它代回到公式 6–1 -公式 6–2中，经过一些冗长但标准的操作，我们最终得到

$$M_\alpha(N) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n \tan(\pi n \alpha)} + O(1), \tag{6–12}$$

如果 $a_i = O(1)$，即，α 的部分商有界 (这对二次无理数当然成立)。(注意到公式 6–12 正是后面的命题 8.1。)

令 $\alpha = \sqrt{d}$，其中$d \equiv 3 \pmod 4$ 是一个正的非完全平方整数。我们显然有 (以 m 记离 $n\sqrt{d}$ 最近的整数):

$$\frac{1}{\pi}\tan\left(\pi n\sqrt{d}\right) \approx \pm\left\|n\sqrt{d}\right\| = n\sqrt{d} - m \approx \frac{-\left(m^2 - dn^2\right)}{2n\sqrt{d}}. \tag{6–13}$$

观察公式 6–12 和公式 6–13，不难发现下面的等式：

$$M_{\sqrt{d}}(N)=\frac{\sqrt{d}}{\pi^2}\left(\sum_{\substack{(x,y)\neq(0,0):\\ \text{主要表示}}}\frac{1}{x^2-dy^2}\right)\frac{\log N}{\log\eta_d}+O\left((\log\log N)^3\right), \tag{6–14}$$

其中，η_d 为 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ 的基本元。注意到公式 6–14 正是命题 11.1；主要表示的含义将在第 11 节开头解释 —实际上读者现在可以提前跳过内容，然后直接去阅读。

如果 $d\equiv 3\ (\bmod\ 4)$，则 x^2-dy^2 正是代数整数 $x+y\sqrt{d}$ 在实二次域 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ 中的模。

实二次域简介 令 D 为非完全平方的非零整数，考虑二次域 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{D}\right)$。如果 $D\equiv 2\text{或}3\ (\bmod\ 4)$，则 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ 的判别式为 $4D$；若 $D\equiv 1\ (\bmod\ 4)$，则为 D。二次无理数 $\left(a+b\sqrt{D}\right)/2$ 为 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ 中的**代数整数**，当且仅当 $a,b\in\mathbb{Z}$，且如果$D\equiv 2\text{或}3\ (\bmod\ 4)$，则要求$a\equiv b\equiv 0\ (\bmod\ 2)$；如果$D\equiv 1\ (\bmod\ 4)$，则要求$a\equiv b\ (\bmod\ 2)$。所以 $\left(a+b\sqrt{D}\right)/2$ 的模

$$\frac{\left(a+b\sqrt{D}\right)}{2}\cdot\frac{\left(a-b\sqrt{D}\right)}{2}=\frac{\left(a^2-b^2D\right)}{4}$$

总是为整数。模为 ±1 的代数整数为单位元。如果 $D>0$，则 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ 中存在单位元 $\eta=\eta_D$ 使得任何单位元都可以表示为 $\pm\eta^n$，$n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ 这个数 $\eta=\eta_D$ 叫做 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ 中的基本单位元。

令 $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ 是判别式为 $\Delta=b^2-4ac\,(a,b,c\in\mathbb{Z})$ 的整系数二元二次型。如果二次型 $F(x,y)$ 被行列式为 1 的正交变换 $x=Ux_1+Vy_1$，$y=Wx_1+Zy_1$ 转化为 $F(x_1,y_1)$，则这两个二次型等价。类值 $h(D)$，$(\Delta=4D\text{或}D)$ 就是不等价的以 Δ 为判别式的整系数二元二次型的种类数。更确切地说，通过计算类值，尽管某个二次型可能与它的相反形式不等价，但是我们并不把某个二次型与它的相反形式分开 (比如如果 $D>0$，则 $x^2-Dy^2=-1$ 没有整数解)。例如，令 $D=79$，则判别式为 $4\cdot79=316$，此时有 6 种以 316 为行列式的不等价的二次型：$F_1=x^2-79y^2$，$-F_1=-x^2+79y^2$，$F_2=3x^2+4xy-25y^2$，$-F_2=-3x^2-4xy+25y^2$，$F_3=3x^2+2xy-26y^2$，$-F_3=-3x^2-2xy+26y^2$。所以域 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{79}\right)$ 的类值 $h(79)=3$ (并不是 6)。如果 $h(D)=1$，那么 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ 中的代数整数可以被唯一分解为代数素数。第一个类值 >1 的二次域为 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{-5}\right)$。判别式为 $4\cdot5=-20$，并且有两个不等价的整系数二次型：x^2+5y^2 和 $2x^2+2xy+3y^2$。所以类值 $h(-5)=2$。没

有唯一质分解的一个反例就是

$$\left(1+\sqrt{-5}\right)\cdot\left(1-\sqrt{-5}\right)=6=2\cdot 3,$$

其中四个因子 $\left(1+\sqrt{-5}\right)$，$\left(1-\sqrt{-5}\right)$，2，3 全部都是 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{-5}\right)$ 的整环中的素数。

现在我们回到公式 6–14。如果我们额外假设 $d=p\equiv 3\ (\bmod 4)$ 为素数，且实二次域 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{p}\right)$ 的类值 $h\left(p\right)$ 为一，那么公式 6–14 右端的中间的和变为在 $s=1$ 处的特别的 L-函数：

$$\sum_{\substack{(x,y)\neq(0,0):\\ \text{主要表示}}}\frac{1}{x^2-py^2}=L\left(1,\chi^*\right)。\tag{6–15}$$

这里 χ^* 叫做 “模符号” 变量：一个取值 ±1 的针对 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ 的代数整数环中所有理想唯一定义的变量 (实际上，χ^* 只依赖一小类理想)，而且满对于所有主理想 (a)，都有 $\chi^*\left((a)\right)=signNorm\left(a\right)$。

L-函数

$$L\left(s,\chi^*\right)=\sum_{A:\text{理想}}\frac{\chi^*}{Norm\left(A\right)^s}$$

(这里，我们不需要写 $|Norm\left(A\right)|$，因为理想的模，由定义，为大于等一的整数；相反，一个实域的代数整数的模可正可负) 有乘积分解

$$L\left(s,\chi^*\right)=L\left(s,\chi_{-4}\right)L\left(s,\chi_{-p}\right)\tag{6–16}$$

其中

$$L\left(s,\chi_{-4}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{-4}\left(n\right)}{n^s},\ L\left(s,\chi_{-p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{-p}\left(n\right)}{n^s}$$

是复二次域 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{-4}\right)=\mathbf{Q}\left(\sqrt{-1}\right)$ (“高斯整数”) 和 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{-p}\right)$；变量 χ_{-4} 和 χ_{-p} 这样定义：如果 $n\equiv\pm1\ (\bmod 4)$，则 $\chi_{-4}\left(n\right)=\pm1$；如果 n 为偶数，则 $\chi_{-4}\left(n\right)=0$，并且

$$\chi_{-p}\left(n\right)=\left(\frac{n}{p}\right)$$

为 Legendre 符号 (译者回忆是关于在某个环中是否为完全平方的)。注意到公式 6–16 是一个 Euler 乘积，并且它可以解释为 x^{2-py^2} 的判别式 $4p=\left(-4\right)\left(-p\right)$ 的基本分解；请参看 Zagier 的书 [Za1]。

在特殊条件 $s = 1$ 下，公式 6–16 得到

$$L\left(1, \chi^{*}\right) = L\left(1, \chi_{-4}\right) L\left(1, \chi_{-p}\right) \tag{6–17$'$}$$

并且由 Dirichlet 类值公式，如果 $p > 3$，

$$L\left(s, \chi_{-4}\right) = \frac{\pi}{4}，\ L\left(s, \chi_{-p}\right) = \frac{\pi h\left(-p\right)}{\sqrt{p}} \tag{6–17$''$}$$

现在引入著名的 Hirzebruch-Meyer-Zagier 公式 (HMZ-公式)：$h\left(-p\right)$ 可以表示成周期为 $\sqrt{p}$ 的部分商的交错；请参看 Zagier [Za1]

但是在写出 HMZ-公式之前，我们要知道所有的二次无理数都具有周期的连分数，并且 Pell 方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 的最小解可以由 $\sqrt{d}$ 的周期导出；最小解就是基本单位元 (前面已定义)。更有，周期长度的奇偶性描述了基本单位元的模的符号：奇数长度就是 $+1$，偶数就是 -1。结合 Dirichlet 类值公式和低效的 Siegel 定理，我们有进一步的渐进公式

$$h\left(d\right) \log \eta_d = d^{1/2 \pm \epsilon}, \tag{6–18$'$}$$

$$h\left(-d\right) = d^{1/2 \pm \epsilon}, \tag{6–18$''$}$$

其中，$h\left(d\right)$ 和 $h(-d)$ 分别为实和复二次域 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ 和 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{-d}\right)$ 的类值，η_d 为 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ 的基本单位元，另外，$\epsilon > 0$ 为任意小的固定的数。请注意，$\log \eta_d$ 的数量级的阶数大概为 $\sqrt{d}$ 的连分数的周期长度。

优美的 Hirzebruch-Meyer-Zagier 公式 (HMZ-公式) 在 1970s 发现。公式表明

$$h(-p) = \frac{-a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots + a_{2s}}{3}, \tag{6–19}$$

其中，$p \equiv 3 \pmod 4$ 为素数且大于 3，$h(p) = 1$，$a_1, a_2, \ldots, a_{2s}$ 构成 $\sqrt{p}$ 的周期。(注意，公式 6–17$'$ 和公式 6–19 都对 $p = 3$ 不成立，因为 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{-3}\right)$ 有太多自同态了：有 6 个自同态而不是一般的 2 个 —这是在代数数论里面不喜欢见到的。)

结合 HMZ-公式，公式 6–14 –公式 6–17″，我们得到

$$\begin{aligned} M_{\sqrt{p}}(N) = \frac{h(-p)}{4} \cdot \frac{\log N}{\log \eta} + O((\log\log N)^3) = \\ = \frac{-a_1 + a_2 \mp \cdots + a_{2s}}{12} \cdot \frac{\log N}{\log \eta} + O((\log\log N)^3) = \\ = \frac{-a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots + (-1)^l a_l}{12} + O((\log\log N)^3), \end{aligned} \tag{6–20}$$

其中，l 为使得 $q_l < N$ 成立的最后一个指标，η 为 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{p}\right)$ 的基本单位元。

小结，利用 HMZ-公式，我们至少在某些强的条件下，成功证明了公式 6–20。然而，从公式 6–20，我们很容易猜出命题 6.1 一定对任意的 α 成立 (不止是二次无理数)。这就是我们怎样找到正确的猜想 6–4的。

因为我们已经知道了命题 6.1 的完整的基本证明，反向观察，我们可以得到一个 HMZ-公式的基本证明。之后，我们将给出公式 6–12 和公式 6–14 的准确证明；公式 6–12正是命题 8.1，而6–14 为命题 11.1。

(感兴趣的读者可以从不错的 Zagier[Za4](德语) 或者经典的 *Borevich-Safarevich*：*Number theory* 中，找到所有的细节以及更多关于二次域的内容。)

另外一个遐想：得到一个 “正猜想” 公式 6–20 的第一行引出了一个非常有趣的问题。如果素数 p 满足 HMZ-公式的条件，那么期望等于

$$M_{\sqrt{p}}(N) = \frac{h(-p)}{4} \cdot \frac{\log N}{\log \eta} + \text{可忽略的误差。}$$

这里，类值平凡地 ≥ 1 和 $\eta \geq \sqrt{p} > 1$, 导出 $\log \eta > 0$；因此，

$$M_{\sqrt{p}}(N) = c \cdot \log N + \text{可忽略的误差，}$$

其中，$c = c(p) > 0$ 是正常数。由命题 6.1，这里的误差项实际是 $O(1)$，一般地，对于任何一个二次无理数 α，

$$M_{\alpha}(N) = c \cdot \log N + O(1),$$

其中，$c = c(\alpha) > 0$ (可以由 α 的周期项表出) 是正常数。如果 $\alpha = \sqrt{d}$，相应的常数是否一定非负？我们猜测是正确的，并且我把这称作 “正猜想”。

如果 $\sqrt{d}$ 的周期长度为奇数，那么 “正猜想” 是平凡的。的确，通过公式 6–4，相应的交错和都 “抵消了”，表明常数为零。因此，非平凡的情况是 $\sqrt{d}$ 的周期长度为偶数的时侯。

我们知道在那种情况下，周期有一个对称的形式，并且具有中心项

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_t, a_{t+1}, a_t, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}]$$

其中 $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$，并以 a_{t+1} 记中心项。应用公式 6–4 的交错和，我们有

$$M_{\sqrt{d}} = \frac{-a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots}{12} + O(1) =$$

$$= \left(2 \left(\sum_{j=1}^{t} (-1)^j a_j \right) + (-1)^{t+1} a_{t+1} + 2a_0 \right) \cdot \frac{\log N}{\log \eta} + O(1) \text{。}$$

常数 $c = c(d)$ 的正性等价于交错和的正性，这由周期

$$2 \sum_{j=0}^{t} (-1)^j a_j + (-1)^{t+1} a_{t+1} > 0$$

可以得到。我们查 $d < 100$ 的表得到，当周期为偶数时，这个交错和的确是正值。因为 “正猜想” 对于任意的二次无理数一定不成立，它在情况 $\alpha = \sqrt{d}$ 情况下的正确性可能与实二次域 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ 的算术紧密相关 (或者复域 $\mathbf{Q}\left(\sqrt{-d}\right)$)。

让我们回到命题 6.1。我们介绍一种基本的但是不简单的证明。

命题 6.1的证明 我们利用 Dedekind 和。为了解释 Dedekind 和从哪里来，我们重写公式 6–1 和公式 6–2 成下面的形式：

$$M_\alpha(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (N + 1 - k) \left(\{k\alpha\} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \left(\frac{N+1}{N} - \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^{N} \left(\{k\alpha\} - \frac{1}{2} \right) - \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N} - \frac{1}{2} \right) \left(\{k\alpha\} - \frac{1}{2} \right), \tag{6–21}$$

其中，最后一个和式

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N} - \frac{1}{2} \right) \left(\{k\alpha\} - \frac{1}{2} \right)$$

与 Dedekind 和

$$D(H, K) = \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{j}{K} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{jH}{K} - \frac{1}{2} \right), \tag{6–22}$$

非常像。其中，我们一直假设 $H, K \leq 1$ 是互质的整数。

Dedekind 和 (即公式 6–22) 最先出现在 Dedekind 关于椭圆函数和 θ-函数的研究中。幸运的是，我们不需要知道关于这些的任何知识；我们只处理定义 公式 6–22 即可。关于

Dedekind 和的关键部分就是下面的自反公式；一个令人震惊的非平凡的结果。

引理 6.1 戴德金自反公式 我们有

$$D\left(H,K\right)+D\left(K,H\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{H}{K}+\frac{K}{H}+\frac{1}{HK}\right)-\frac{1}{4}。 \tag{6–23}$$

注，$D\left(H,K\right)$ 和 $D\left(K,H\right)$ 的定义里面自动包含了 “$H,K\leq 1$ 是互质的整数”。

关于这个经典结果的证明，请看书 [Ra-Gr]

从引理 6.1，我们将导出

引理 6.2 如果 $1\leq H<K$ 互质，那么

$$D\left(H,K\right)=\frac{a_1-a_2+a_3\mp\cdots+\left(-1\right)^{l-1}a_l}{12}+O\left(1\right), \tag{6–24}$$

其中

$$\frac{H}{K}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}=\left[a_1,a_2,a_3,\ldots,a_l\right], \tag{6–25}$$

注意到公式 *6–24* 中的误差项 $O\left(1\right)$ 的绝对值 $\leq 1/4$。

证明 连分数 $\frac{H}{K}=\left[a_1,a_2,a_3,\ldots,a_l\right]$ 等价于欧几里得算法

$$K=a_1H+H_1,H=a_2H_1+H_2,H_1=a_3H_2+H_4,\ldots,H_{l-2}=a_lH_{l-1}$$

其中，$H_{l-1}=\gcd\left(H,K\right)=1$。我们利用引理 6.1 和简短的记号

$$g\left(x,y\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}\right)-\frac{1}{4}$$

如此：记 $K=H_{-1}$，$H=H_0$，那么

$$D\left(H,K\right)=D\left(H_0,H_{-1}\right)=g\left(H_{-1},H_0\right)-D\left(H_{-1},H_0\right)=$$

$$=g\left(H_{-1},H_0\right)-D\left(H_1,H_0\right);$$

这里我们利用了欧几里得算法的第一个方程。重复同样的讨论，我们有

$$D(H,K)=g(H_{-1},H_0)-D(H_1,H_0)=$$

$$=g(H_{-1},H_0)-(g(H_0,H_1)-D(H_0,H_1))=$$

$$=g(H_{-1},H_0)-g(H_0,H_1)+D(H_2,H_1);$$

这里我们利用了欧几里得算法的第二个方程。

重复同样的讨论几次，我们有

$$D(H,K)=g(H_{-1},H_0)-g(H_0,H_1)+g(H_1,H_2)-g(H_2,H_3)\pm\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{l-1}g(H_{l-2},H_{l-1})+(-1)^{l}D(H_{l-2},H_{l-1})\text{。}$$

注：这里的最后一项实际上为零；的确，$H_{l-1}=\gcd(H,K)=1$ 表明 $D(H_{l-2},H_{l-1})=0$。

进一步，我们利用记号

$$f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},$$

我们有

$$\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i f(H_{i-1},H_i)=\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i\left(\frac{H_{i-1}}{H_i}+\frac{H_i}{H_{i-1}}\right)=$$

$$=\frac{H_0}{H_1}+\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i\frac{H_{i-1}-H_{i+1}}{H_i}=$$

$$=\frac{H}{K}+\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i\frac{a_{i-1}H_i}{H_i}=\frac{H}{K}+\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i a_{i-1}\text{。}$$

因为

$$g(x,y)=\frac{1}{12}f(x,y)+\left(\frac{1}{12xy}-\frac{1}{4}\right),$$

结合上面所有的结果，我们得到

$$D(H,K)=g(H_{-1},H_0)-g(H_0,H_1)+g(H_1,H_2)-g(H_2,H_3)\pm\cdots+(-1)^{l-1}g(H_{l-2},H_{l-1})=$$

$$=\frac{a_1-a_2+a_3\mp\cdots+(-1)^{l-1}a_l}{12}+$$

$$+\frac{H}{12K}-\frac{1+(-1)^{l-1}}{8}+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{KH}-\frac{1}{HH_1}+\frac{H_1}{H_2}\mp\cdots+\frac{(-1)^{l-1}}{H_{l-2}H_{l-1}}\right)\text{。}$$

最后一个交错和有绝对值 <2，而且因为 $1\leq H<K$，总的误差最多 $\max\{1/4,1/12+1/12\}=1/4$，这就完成了从引理 6.1 到引理 6.2 的推导。 □

下面，我们在特殊条件 $N = q_r$，即，当 N 刚好是 α 的收敛分母的时候，由引理 6.2 推导出命题 6.1；请参看下面的引理 6.3。但是我们首先介绍简化处理 Dedekind 和的记号。令

$$((x)) = \begin{cases} \{x\} - \dfrac{1}{2}, & \text{如果 } x \text{ 不是一个整数}, \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$$

注，$y = ((x))$ 经常称为 “看牙函数” (译者认为是因为函数图像很像牙齿)。利用这个新的记号，我们可以改写公式 6–22 成一个更简洁的形式：

$$D(H,K) = \sum_{j=1}^{K-1} \left(\left(\frac{j}{K}\right)\right)\left(\left(\frac{jH}{K}\right)\right), \tag{6–26}$$

这里，一样地，我们假设 $H, K \leq 1$ 是互质的整数。注意到，将公式 6–26 中的求和从 $K-1$ 变到 K 并没有变化 (只是加个零到和式)。

现在我们准备好去陈述并证明命题 6.1 的一个重要的特殊情形了。

引理 6.3 我们有

$$M_\alpha(q_r) = \frac{-a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots + (-1)^{r-1} a_{r-1}}{12} + O(1), \tag{6–27}$$

其中，$\alpha = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$ 并且 $p_r/q_r = [a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}]$ 是 α 的第 r 个收敛值。对于所有的 α 和 r，隐式的误差项 $O(1)$ 都小于 5。

证明 我们回忆当 $N = q_r$ 时，公式 6–21：

$$M_\alpha(q_r) = \left(\frac{q_r+1}{q_r} - \frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{q_r}\left(\{k\alpha\} - \frac{1}{2}\right) - \sum_{k=1}^{q_r}\left(\frac{k}{q_r} - \frac{1}{2}\right)\left(\{k\alpha\} - \frac{1}{2}\right)。 \tag{6–28}$$

首先，我们将注意力放到公式 6–28 的下面子和式上面来：

$$S^* = \sum_{k=1}^{q_r}\left(\frac{k}{q_r} - \frac{1}{2}\right)\left(\{k\alpha\} - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{q_r}\left(\left(\frac{k}{q_r}\right)\right)((k\alpha)), \tag{6–29}$$

我们将 S^* 与 Dedekind 和比较

$$D(p_r, q_r) = \sum_{k=1}^{q_r}\left(\left(\frac{k}{q_r}\right)\right)\left(\left(\frac{kp_r}{q_r}\right)\right), \tag{6–30}$$

其中，p_r/q_r 时 α 的第 r 个收敛值。

我们回忆丢番图逼近中著名的不等式

$$\left|\alpha-\frac{p_r}{q_r}\right|<\frac{1}{q_r^2},$$

由此导出不等式

$$\left|k\alpha-\frac{kp_r}{q_r}\right|<\frac{k}{q_r^2}\leq\frac{1}{q_r} \tag{6–31}$$

对所有 $1\leq k\leq q_r$ 成立。由公式 6–31，我们有

$$\left|S^*-D\left(p_r,q_r\right)\right|<1 \tag{6–32}$$

另一方面，由引理 6.2，

$$\left|D\left(p_r,q_r\right)-\frac{a_1-a_2+a_3\mp\cdots+(-1)^r a_{r-1}}{12}\right|\leq\frac{1}{4}。 \tag{6–33}$$

结合公式 6–32 和公式 6–33，我们有

$$\left|S^*-\frac{a_1-a_2+a_3\mp\cdots+(-1)^r a_{r-1}}{12}\right|\leq\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}。 \tag{6–34}$$

再次利用公式 6–31 得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{q_r-1}\left(\{k\alpha\}-1/2\right)\right|&\leq\left|\sum_{j=1}^{q_r-1}\left(\frac{j}{q_r}\pm\frac{1}{q_r}-\frac{1}{2}\right)\right|\leq\\ &\leq\left|\sum_{j=1}^{q_r-1}\left(\frac{j}{q_r}-1/2\right)\right|+q_r\frac{1}{q_r}=0+1=1。\end{aligned} \tag{6–35}$$

应用公式 6–34 和公式 6–35，到6–28 中，我们可以得到

$$\left|M_\alpha\left(q_r\right)-\frac{a_1-a_2+a_3\mp\cdots+(-1)^r a_{r-1}}{12}\right|\leq$$

$$\leq\frac{5}{4}+\left|\frac{q_r+1}{q_r}-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{q_r+1}{q_r}-\frac{1}{2}\right|\left|\{q_r\alpha\}-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{5}{4}+2\left|\frac{q_r+1}{q_r}-\frac{1}{2}\right|<5,$$

最后引理 6.3得证。 □

最后一步就是由特殊情况的引理 6.3 导出一般情况的命题 6.1。这里有很多途径从一般情况导出引理 6.3；请参看 Beck[Be4]。这里，我们遵循 Schoissengeier[Scho] 的一个好的想法，包括伸缩和，而这似乎是处理一般情形的最好的办法。

令 $N \geq 1$ 是任意整数。考虑 N 的 Ostrowski 展示 (参看 (2.13))：

$$N = \sum_{i=1}^{r} b_i q_i，其中 \quad 0 \leq b_i \leq a_i \tag{6–36}$$

$b_i = a_i$ 导出 $b_{i-1} = 0$ (“超准则”)。这里 a_i 是连分数 $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$ 的第 i 个部分商，$p_i/q_i = [a_1, \ldots, a_{i-1}]$ 是 α 的第 i 个收敛值。

我们受下面伸缩和的启发:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{N+1-i}{N} \left(\left(\frac{ip_r}{q_r}\right)\right) = \tag{6–37}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{N_k} (N_k + 1 - i) \left(\left(\frac{ip_k}{q_k}\right)\right) - \sum_{j=1}^{N_{k-1}} (N_{k-1} + 1 - j) \left(\left(\frac{jp_{k-1}}{q_{k-1}}\right)\right) \right)$$

其中，N_k 是公式 6–36 中的第 k 个部分和 $N_k = \sum_{i=1}^{k} b_i q_i$。

我们将分析计算伸缩和公式 6–37 的每一项。下面一个由方程6–37 启发得到的引理可以看作是一种推广，或者是引理 6.3 的一个新的版本。就像我们证明引理 6.3 一样，其想法包括 Dedekind 和 $D(p_k, q_k)$。

引理 6.4 如果 $N_j = \sum_{i=1}^{j} b_i q_i$，那么

$$\sum_{i=1}^{N_k} (N_k + 1 - i) \left(\left(\frac{ip_k}{q_k}\right)\right) - \sum_{j=1}^{N_{k-1}} (N_{k-1} + 1 - j) \left(\left(\frac{jp_{k-1}}{q_{k-1}}\right)\right) =$$

$$= -b_k q_k D(p_k, q_k) + \frac{b_{k-1}}{4} \left(1 + (-1)^k\right) (2N_{k-1} + 1 - (b_{k-1} + 1) q_{k-1}) +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{N_{k-1}(N_{k-1} + 1)(N_{k-1} + 2)}{6 q_k q_{k-1}}。 \tag{6–38}$$

引理 6.4的证明 我们基本重复引理 6.3 的证明。记

$$\sum_{i=1}^{N_k} (N_k + 1 - i) \left(\left(\frac{ip_k}{q_k}\right)\right) = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{6–39}$$

其中，

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{b_k q_k} (N_k + 1 - i) \left(\left(\frac{ip_k}{q_k}\right)\right)$$

以及

$$\Sigma_2 = \sum_{i=b_k q_k + 1}^{N_k} (N_k + 1 - i) \left(\left(\frac{ip_k}{q_k}\right)\right)。$$

我们首先分析计算 Σ_1。因为如果 x 为整数，则 $((x)) = 0$，我们提取出能够被 q_k 整除

的 i：

$$\Sigma_1 = \sum_{t=0}^{b_k-1} \sum_{i=tq_k+1}^{(t+1)q_k-1} (N_k + 1 - i) \left(\left(\frac{ip_k}{q_k}\right)\right) =$$

$$= \sum_{t=0}^{b_k-1} \sum_{j=1}^{q_k-1} (N_k + 1 - tq_k - j) \left(\left(\frac{jp_k}{q_k}\right)\right) =$$

$$= -b_k \sum_{j=1}^{q_k-1} j \left(\left(\frac{jp_k}{q_k}\right)\right), \tag{6–40}$$

因为

$$\sum_{j=1}^{K-1} \left(\left(\frac{jH}{K}\right)\right) = 0。$$

因此，由公式 6–40，

$$\Sigma_1 = -b_k q_k \sum_{j=1}^{q_k-1} \left(\frac{j}{q_k} - \frac{1}{2}\right) \left(\left(\frac{jp_k}{q_k}\right)\right) = -b_k q_k D\left(p_k, q_k\right), \tag{6–41}$$

导出公式 6–38 的右边第一项。

下面我们分析计算 $\Sigma_2 - \Sigma_3$，其中 Σ_2 为公式 6–39 的第二项，Σ_3 为公式 6–38 的左端负项：

$$\Sigma_3 = \sum_{j=1}^{N_{k-1}} (N_{k-1} + 1 - j) \left(\left(\frac{ip_{k-1}}{q_{k-1}}\right)\right)。 \tag{6–42}$$

我们回忆连分数理论的著名结果：

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1}q_k}, \tag{6–43}$$

所以，如果 $j \le N_{k-1}$，那么当 j 不能被 q_{k-1} 整除时，有

$$\left(\left(\frac{jp_k}{q_k}\right)\right) = \left(\left(\frac{jp_{k-1}}{q_{k-1}} + \frac{(-1)^{k-1} j}{q_{k-1}q_k}\right)\right) = \left(\left(\frac{ip_{k-1}}{q_{k-1}}\right)\right) + \frac{(-1)^{k-1} j}{q_{k-1}q_k}, \tag{6–44}$$

而当 j 能被 q_{k-1} 整除时，有

$$\left(\left(\frac{jp_k}{q_k}\right)\right) = \left(\left(\frac{ip_{k-1}}{q_{k-1}}\right)\right) + \frac{(-1)^{k-1} j}{q_{k-1}q_k} + \frac{1 + (-1)^{k-1}}{2}。 \tag{6–45}$$

因此，我们可以改写 Σ_2 (参看公式 6–39) 成

$$\sum_{i=b_kq_k+1}^{N_k} (N_k + 1 - i) \left(\left(\frac{ip_k}{q_k}\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_{k-1}} (N_k - b_k q_k + 1 - j) \left(\left(\frac{j p_{k-1}}{q_{k-1}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_{k-1}} (N_k + 1 - j) \left(\left(\frac{j p_{k-1}}{q_{k-1}} \right) \right),$$

然后应用公式 6–44 和公式 6–45，我们有

$$\Sigma_2 = \Sigma_3 + \frac{(-1)^{k-1} j}{q_{k-1} q_k} \sum_{j=1}^{N_{k-1}} (N_k + 1 - j) j +$$

$$+ b_{k-1} \frac{1 + (-1)^{k-1}}{2} \left(N_{k-1} + 1 - \frac{(b_{k-1} + 1) q_{k-1}}{2} \right)。 \tag{6–46}$$

结合公式 6–41，公式 6–42 和 公式 6–46，引理 6.4 得证。 □

利用引理 6.4，我们准备好完成命题 6.1 的证明。让我们回到 公式 6–36。首先，我们以一个平凡的方式将 $N_k = \sum_{i=1}^{k} b_k q_k$ 的定义延申到所有的 $k > r$：对 $i > r$，$b_i = 0$。我们令 $k = 1, 2, 3, \ldots$，相加引理 6.4 的两端；公式 6–38 的左端得到

$$\sum_{k=1}^{r} (N + 1k) ((k\alpha)), \tag{6–47}$$

然后 公式 6–38 的右端得到

$$\Sigma_1^* + \Sigma_2^* + \Sigma_3^*，\text{其中} \tag{6–48}$$

$$\Sigma_1^* = - \sum_{i=1}^{r} b_i q_i D(p_i, q_i),$$

$$\Sigma_2^* = \sum_{j=1}^{r} \frac{b_i}{4} \left(1 + (-1)^{j+1} \right) (2N_j + 1 - (b_j + 1) q_j),$$

$$\Sigma_3^* = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{N_j (N_j + 1)(N_j + 2)}{6 q_j q_{j+1}}$$

$$= \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \frac{N_j (N_j + 1)(N_j + 2)}{6 q_j q_{j+1}} + \frac{N(N+1)(N+2)}{6} \left(\alpha - \frac{p_{r+1}}{q_{r+1}} \right),$$

其中，最后一步我们用到了公式 6–43 以及 $p_i/q_i \to \alpha$，$i \to \infty$。

首先，我们计算 Σ_1^*。由引理 6.2，

$$\sum_{i=1}^{r} b_i q_i D(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^{r} b_i q_i \left(\frac{a_1 - a_2 \pm \cdots + (-1)^i a_{i-1}}{12} + \frac{\theta}{4} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^j a_{j-1}}{12} (N - N_{j-1}) + \frac{\theta N}{4} =$$

$$= N\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j}\,a_{j-1}}{12}+\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}\,a_{j-1}}{12}\cdot\frac{N_{j-1}}{N}+\frac{\theta}{4}\right), \tag{6–49}$$

其中，$|\theta_i| < 1$ 和 $|\theta| < 1$ 为适当的常数。因为 $N_j = \sum_{i=1}^{j} b_i q_i$ 至少指数型增长，下面这个上界是平凡的

$$\sum_{i=1}^{k} \leq 4N_{k+1}。 \tag{6–50}$$

结合公式 6–49 和公式 6–50，

$$\sum_{i=1}^{r} b_i q_i D\left(p_i, q_i\right) = N\left(\frac{a_1 - a_2 \pm \cdots + (-1)^{r}\,a_{r-1}}{12} + \theta'\left(\max_{1\leq j\leq r} a_j\right) + \theta''\right), \tag{6–51}$$

其中，$|\theta' \leq 4|$ 和 $|\theta''| \leq 1/4$。

其次，我们从上面估计 Σ_2^*：

$$\Sigma_2^* \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} b_i N_i \leq \left(\max_{1\leq j\leq r} a_j\right)\sum_{i=1}^{r} N_i \leq 3N\left(\max_{1\leq j\leq r} a_j\right), \tag{6–52}$$

其中，最后一个步利用了公式 6–50。

最后，我们从上面估计 Σ_3^*。因为

$$N_j = \sum_{i=1}^{j} b_i q_i,\ \ q_{j+1} \geq a_j q_j \geq b_j q_j,$$

我们有

$$\left|\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\,\frac{N_j\left(N_j+1\right)\left(N_j+2\right)}{6q_j q_{j+1}}\right| \leq \sum_{j=1}^{r}\left(b_j+1\right)^2 q_j \leq 2N\left(\max_{1\leq j\leq r} a_j\right)。 \tag{6–53}$$

我们也有

$$\frac{N\left(N+1\right)\left(N+2\right)}{6}\cdot\left|\alpha - \frac{p_{r+1}}{q_{r+1}}\right| \leq \frac{N^3}{3q_{r+1}^2} \leq \frac{N}{3}。 \tag{6–54}$$

结合公式 6–47，公式 6–48，公式 6–51 –公式 6–54，我们得到

$$M_\alpha\left(N\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{r}\left(N+1-k\right)\left(\left(k\alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{a_1 - a_2 \pm \cdots + (-1)^{r}\,a_{r-1}}{12} + \theta\left(\max_{1\leq j\leq r} a_j\right), \tag{6–55}$$

其中，$|\theta| < 10$。公式 6–55 完成了对命题 6.1 的证明。 □

需要指出的是，我们原始的对命题 6.1 的证明是由 Ostrowski 公式 (2.14) 导出来的，

相对特别长，而且是暴力地推导得出的。后来，Schoissengeier[Scho] 指出了 Dedekind 和与 Knuth[Kn1] 的相关结果的联系。这使得证明获得了本质性的缩短。上述证明遵循 Schoissengeier-Knuth 的方法。

命题 6.1 和 Hardy 以及 Littlewood 的一些工作 有趣的是，在我们完成命题 6.1 的证明 (95 年十一月) 的几周前，我们偶然地注意到下面在 Hardy-Littlewood[Ha-Li2] 中的技术性的引理。

“引理 14:” 如果 $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$，那么

$$M_\alpha(N) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{l}(-1)^k\left(\alpha_i + \frac{1}{\alpha_i}\right) + O\left(\big(\max_{1\le j\le l} a_j\big)^2\right), \tag{6–56}$$

其中，l 是使得 $q_l \ge N$ 的最后一个指标，还有

$$\alpha_i = a_i + \cfrac{1}{a_{i+1} + \cfrac{1}{a_{i+2} + \ldots}} = [a_i; a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots]。$$

利用平凡的性质 $\alpha_i = a_i + \dfrac{1}{\alpha_{i+1}}$，“引理 14” 中的交错和变为

$$\begin{aligned} & -\left(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1}\right) + \left(\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2}\right) - \left(\alpha_3 + \frac{1}{\alpha_3}\right) \pm \cdots \\ & = -a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots + (-1)^i a_i \pm \cdots, \end{aligned} \tag{6–57}$$

令人震惊的是从 “引理 14”，我们可以仅用一行推导到就可以得到从某种程度上相对命题 6.1 较弱的版本。注公式 6–56 相对较弱，因为误差项 $O\left(\big(\max_{1\le j\le l} a_j\big)^2\right)$ 是命题 6.1 中的线性误差项 $O\left(\big(\max_{1\le j\le l} a_j\big)\right)$ 的平方。

注，Hardy 和 Littlewood 证明他们的 “引理 14” 是利用的一个不同的自反公式 (即，$\theta-$ 函数的自反公式)。

在 1930 年，大概十年之后，有一个相关的进展就是，Hardy 和 Littlewood[Ha-Li3] 研究了下面的 (丢番图) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sin(\pi n\alpha)}, \tag{6–58}$$

并且找到了一个有趣的发现。尽管级数6–58 的项对于任何 α 都不趋于零，但是 Hardy 和 Littlewood 成功证明了第二棒的事情；即，对于特殊的 $\alpha = \sqrt{2}$，级数6–58 的部分和一致有

界，也即，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n \sin(\pi n \alpha)} = O(1) \text{。} \tag{6–59}$$

一般地，如果 $\alpha = \sqrt{a^2+1}$，a 为奇数，那么部分和同样有 $O(1)$。

另一方面，Hardy 和 Littlewood 注意到对于 $\alpha = \sqrt{6}/2 - 1$，N^{th} 部分和为 $c \log N + O(1)$，$c \neq 0$。

现在是发生了什么? 对于 $\alpha = \sqrt{a^2+1}$，a 为奇数，“$O(1)$ – 定理” 的证明是那么复杂而神秘，而且特别地，在 *Introduction to the Collected Papers of G.H. Hardy, Vol.1* 中，Davenport 列出了对于这篇论文的 “真正的理解”，并且当作丢番图逼近中的主要研究问题。

现在这是我们的 “真正的理解”：Hardy 和 Littlewood 的 “$O(1)$ – 定理” 是命题 6.1 的一个简单推论。的确，我们所需的仅仅是下面这个简单的性质

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n \sin(\pi n \alpha)} = 4\pi M_{\alpha/2}(N) - 2\pi M_{\alpha}(N) + O\left(\max_{1 \le j \le l} a_j\right), \tag{6–60}$$

其中，l 是使得 $q_l \le N$ 的最后一个指标。

方程 6–60 是以下两个事实的一个简单的结果：第一个就是公式 6–12：

$$M_{\alpha}(N) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n \tan(\pi n \alpha)} + O\left(\max_{1 \le i \le k} a_i\right)$$

其中，k 是使得 $q_k \le N$ 的最后一个指标，然后第二个事实就是三角函数的性质：

$$\frac{1}{\tan(\beta)} - \frac{1}{\tan(2\beta)} = \frac{2\cos^2(\beta) - \cos(2\beta)}{2\sin(\beta)\cos(\beta)} = \frac{1}{\sin(2\beta)} \text{。}$$

似乎很有可能，Hardy 和 Littlewood 忽略了通过公式 6–60 对命题 6.1 的简单应用 (公式 6–56 的更弱的误差项在这里也够用)。这就是为什么他们必须在 [Ha-Li3] 中去创建一种复杂的特别的方法。

我们之后将在第 8 节回到 Hardy-Littlewood 级数 $\sum_n 1/n \sin(\pi n \alpha)$。

7. 计算一般的期望值 (II)

定理 1.1 中的期望 下面，我们从看牙函数 $((x))$ 转到示性函数

$$\chi_\rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } 0 \le x < \rho; \\ 0, & \text{如果 } \rho \le x < 1; \end{cases} \tag{7–1}$$

其定义在区间 $[0,\rho)$，$0<\rho<1$ 上，然后以周期为 1 延拓。接着，我们得到简单的方程

$$\chi_\rho(x) - \rho = ((x-\rho)) - ((x)) \text{。} \tag{7–2}$$

和式

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_\rho(k\alpha)$$

是无理旋转的计数函数：它记录在模 1 意义下，整数 k，$1 \le k \le n$ 使得 $k\alpha \in [0,\rho)$ 成立的个数。定理 1.1 就是关于这个计数函数的。因此，为了证明定理 1.1，我们确定相应的期望：由公式 7–2，我们需要计算广义的 Dedekind 和

$$D(H,K;c) = \sum_{j=1}^{K-1} \left(\left(\frac{j}{K}\right)\right)\left(\left(\frac{jH+c}{K}\right)\right), \tag{7–3}$$

其中，c 是 “滑动常数”，是任意一个实数 (由公式 7–2，我们用 $c=-\rho$ 或者 $c=1-\rho$；不管用哪个都可以)。

下面的引理，属于 U.Dieter[Di] 的自反律，描述了常义的 Dedekind 和与其推广形式 7–3 之间的关系。为了下面的应用，我们必须要引入一个证明。

引理 7.1 令 $1 \le H < k$ 为互质的整数，$0 < c < K$ 为一个实数。那么

$$\begin{aligned} D(H,K;c) + D(K,H;c) = D(H,K) + D(K,H) + \\ \frac{\lfloor c \rfloor \lceil c \rceil}{2HK} - \frac{1}{2}\lfloor c/H \rfloor + \frac{1}{4}E(H,c), \end{aligned} \tag{7–4}$$

其中，

$$E(H,c) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } c \text{ 不是 } H \text{ 的整数倍；} \\ 1, & \text{如果 } c \text{ 是 } H \text{ 的整数倍。} \end{cases} \tag{7–4$'$}$$

注： 我们可以把 7–4$'$ 写成更简洁的形式

$$E(H,c)=\begin{cases}0, & \text{如果 } c\not\equiv 0\pmod H\text{；}\\ 1, & \text{如果 } c\equiv 0\pmod H\text{。}\end{cases}$$

证明　首先我们假设 c 为自然数；我们通过对 c 的归纳来证明公式 7–4。明显有

$$\left(\left(\frac{jH+c+1}{K}\right)\right)=\left(\left(\frac{jH+c}{K}\right)\right)+\frac{1}{K}-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{jH+c}{K}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(\frac{jH+c+1}{K}\right), \tag{7–5}$$

在本节，我们使用 $\delta(x)$ (“Kronecker δ 记号”) 来判断是否为整数。由公式 7–3 和公式 7–5，

$$D(H,K;c+1)=\sum_{j=1}^{K_1}\left(\left(\frac{j}{K}\right)\right)\left(\left(\frac{jH+c}{K}\right)\right)+\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K-1}\left(\left(\frac{j}{K}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\left(\left(\frac{j}{K}\right)\right)\left(\delta\left(\frac{jH+c}{K}\right)+\delta\left(\frac{jH+c+1}{K}\right)\right) \tag{7–6}$$

因为 $1\leq H<K$ 互质，所以存在连个整数 h'，k' 使得

$$Hh'+Kk'=1 \tag{7–7}$$

如果

$$j\equiv -h'c\pmod K\text{，那么 } jH+c\equiv 0\pmod K$$

而且因为看牙函数 $((x))$ 为奇函数，我们可以改写公式 7–6 为：

$$D(H,K;c+1)=D(H,K;c)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{h'c}{K}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{h'(c+1)}{K}\right)\right)\text{。}$$

通过对 c 的归纳，

$$D(H,K;c)=D(H,K;0)+\sum_{j=1}^{c-1}\left(\left(\frac{h'j}{K}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{h'c}{K}\right)\right)\text{。} \tag{7–8}$$

对于任何 j，$1\leq j\leq K-1$ (参看公式 7–7)，

$$\left(\left(\frac{h'j}{K}\right)\right)=\left(\left(\frac{j-k'Kj}{HK}\right)\right)=-\left(\left(\frac{k'Kj-j}{HK}\right)\right)=$$

$$=-\left(\left(\frac{k'j}{H}\right)\right)+\frac{j}{HK}-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{k'j}{H}\right)\text{。} \tag{7–9}$$

将 H 和 K 调换，然后与公式 7–8 相加，再利用公式 7–9，我们有

$$D\left(H,K;c\right)+D\left(K,H;c\right)=D\left(H,K\right)+D\left(K,H\right)+S,$$

其中

$$S=\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{j}{HK}-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{k'j}{H}\right)\right)+\frac{c}{2HK}-\frac{1}{4}\delta\left(\frac{c}{H}\right)。\tag{7–10}$$

公式 7–10 最后一行的计算简单：我们有

$$S=\frac{c^2}{2HK}-\frac{1}{2}\left\lfloor\frac{c}{H}\right\rfloor+\frac{1}{4}\delta\left(\frac{c}{H}\right)。\tag{7–11}$$

公式 7–10 和公式 7–11 完成了当 c 为任何整数时的证明。

对于任意实数 c，我们利用性质

$$D\left(H,K;c+\theta\right)=D\left(H,K;c\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{h'c}{K}\right)\right),\tag{7–12}$$

其中，$c\geq 0$ 为整数，$0<\theta<1$ (h' 由公式 7–7 定义)。公式 7–12 的证明简单：

$$\sum_{j=1}^{K-1}\left(\left(\frac{j}{K}\right)\right)\left(\left(\frac{jH+c+\theta}{K}\right)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{K-1}\left(\left(\frac{j}{K}\right)\right)\left(\left(\left(\frac{jH+c}{K}\right)\right)+\frac{\theta}{K}-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{jK+c}{K}\right)\right)=$$

$$=D\left(H,K;c\right)+0-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{-h'c}{K}\right)\right),$$

因为 $-h'Hc+c+c\equiv 0\,(\bmod K)$，公式 7–12 得证。

当 $0<\theta<1$ 时，公式 7–12 和公式 7–9 导出

$$D\left(H,K;c+\theta\right)+D\left(K,H;c+\theta\right)=D\left(H,K;c\right)+D\left(K,H;c\right)+$$
$$+\frac{c}{2HK}-\frac{1}{4}\delta\left(\frac{c}{H}\right)。$$

这就完成了对引理 7.1 的证明。 □

引理 7.1 引出下面的一个对引理 6.2 的类比；请参看 D.E.Knuth[Kn1]。再一次，我们需要证明。

引理 7.2 令 $1 \leq H < K$ 为互质的整数，$0 < c < K$ 为实数。令

$$\frac{H}{K} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_l]\,,$$

那么

$$\begin{aligned} D(H, K; c) - D(H, K) = \frac{-b_1 + b_2 - b_3 \pm \dots + (-1)^l b_l}{2} + \\ + \frac{c_0^2}{2KH} - \frac{c_1^2}{2HH_1} + \frac{c_2^2}{2H_1H_2} \mp \dots + (-1)^{l-1} \frac{c_{l-1}^2}{2H_{l-2}H_{l-1}} + O(1), \end{aligned} \tag{7–13}$$

其中，b_i，c_i，H_i 由下面的欧几里得算法决定。令 $H_{-1} = K$，$H_0 = H$，然后由第一个欧几里得算法决定 H_i

$$K = a_1 H + H_1,\ H = a_2 H_1 + H_2,\ H_1 = a_2 H_2 + H_4,\ \dots,\ H_{l-2} = a_l H_{l-1}, \tag{7–14}$$

其中，$H_{l-1} = \gcd(H, K) = 1$；然后利用公式 *7–14*，我们通过第二个欧几里得算法定义整数 b_i 和实数 c_i

$$c = c_0 = b_1 H_0 + c_1,\ c_1 = b_2 H_1 + c_2,\ c_2 = b_3 H_2 + c_3,\ \dots,\ c_{l-1} = b_l H_{l-1} + c_l, \tag{7–15}$$

其中，$0 \leq c_1 < H_0$，$0 \leq c_2 < H_1$，$\dots$，$0 \leq c_l < 1$，*(*注 $H_l = 0$*)*。公式 *7–13*的误差项 $O(1)$ 有绝对值 ≤ 1。

证明 首先假设 c 是一个整数；那么 $c_l = 0$。记

$$\Delta(h, k; c) = D(h, k; c) - D(h, k)$$

以及

$$F(h, k; c) = \frac{c^2}{2hk} - \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{c}{h} \right\rfloor + \frac{1}{4}\left(\frac{c}{h}\right),$$

然后由引理 7.1，

$$\begin{aligned} \Delta(h, k; c) = F(h, k; c) - \Delta(k, h; c) = \\ = F(h, k; c) - \Delta(k \pmod h, h; c \pmod h)\,。 \end{aligned} \tag{7–16}$$

结合欧几里得算法公式 7–14 和公式 7–15 到公式 7–16，对于 $j = 0, 1, 2, \ldots, l-1$，我们有

$$\Delta\left(H_j, H_{j-1}; c_j\right) = F\left(H_j, H_{j-1}; c_j\right) - \Delta\left(H_{j+1}, H_j; c_{j+1}\right)。 \tag{7–17}$$

记

$$F_j = F\left(H_j, H_{j-1}; c_j\right),$$

那么，通过重复应用公式 7–17，我们有

$$\begin{aligned}\Delta\left(H, K; c\right) &= F_0 - F_1 + F_2 - F_3 \pm \ldots + (-1)^{l-1} F_{l-1} = \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \left(\frac{c_j^2}{2hk} - \frac{1}{2} b_{j+1} + \frac{1}{4}\delta\left(\frac{c_j}{H_j}\right)\right) = \\ &= \frac{-b_1 + b_2 - b_3 \pm \cdots + (-1)^l b_l}{2} + \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \frac{c_j^2}{2H_{j-1}H_j} + \frac{(-1)^{l-1}}{4}。\end{aligned} \tag{7–18}$$

方程 7–18 在 c 为整数的情况下证明了引理 7.2。

如果 c 不为整数，那么我们只用应用公式 7–12即可。 □

命题 6.1 的一个类比 令 $0 < \alpha < 1$ 为任何无理数，让 $0 < \rho < 1$ 为任何有理数。为了证明关于无理旋转的定理 1.1，首先，我们需要知道平均 (“期望”)

$$M_\alpha\left(\rho; N\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S_\alpha\left(\rho; n\right), \tag{7–19}$$

其中

$$S_\alpha\left(\rho; n\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\chi_\rho\left(k\alpha\right) - \rho\right) \tag{7–20}$$

其中，示性函数 $\chi_\rho\left(x\right)$ 在公式 7–1 中定义。

通过利用公式 7–2，我们有

$$S_\alpha\left(\rho; n\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\left(k\alpha - \rho\right)\right) - \left(\left(k\alpha\right)\right)\right),$$

并且

$$M_\alpha\left(\rho; N\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(N + 1 + k\right)\left(\left(\left(k\alpha - \rho\right)\right) - \left(\left(k\alpha\right)\right)\right)。$$

重复对命题 6.1 证明再加上一些自然的修改，我们下面类比的结果。

命题 7.1 对于任何无理数 $\alpha > 0$，任何实数 $0 < \rho < 1$，以及任何整数 $N \geq 1$，

$$\begin{gathered}M_\alpha(\rho; N) = \frac{-b_1 + b_2 - b_3 \pm \cdots + (-1)^l b_l}{2} \\ -\frac{c_0^2}{2KH} - \frac{c_1^2}{2HH_1} + \frac{c_2^2}{2H_1H_2} \mp \cdots + (-1)^{l-1} \frac{c_{l-1}^2}{2H_{l-2}H_{l-1}} + \theta \cdot \max_{1 \leq j \leq l} b_j,\end{gathered} \tag{7–21}$$

其中，$|\theta| < 10$，$\alpha = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$，指标 $l = l(\alpha, N)$ 定义为使得 $q_j \leq N$ 成立的最后一个指标 j，p_j/q_j 是 α 的第 j 个收敛值，最后，b_i，c_i，H_i 由公式 *7–14* 和公式 *7–15* 在 $c = c_0 = (1-\rho) K$，$K = q_l$，$H = p_l$ (即，$H/K = p_l/q_l$) 的条件下决定。 □

下面我们给出一些解释。

例子 1 首先令 $\rho = 1/2$。我们以 $\alpha = \sqrt{2}$ 开始，并计算 $M_{\sqrt{2}}(1/2; N)$，即定理 1.1 中的相应期望。连分数 $\sqrt{2} - 1 = [2, 2, 2, \ldots] = [\overline{2}]$ 给出公式 7–14 中的数 $2 = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$ 然后，我们计算公式 7–15 中的 b_i，c_i，H_i：

$$c = c_0 = (1-\rho) K = \frac{1}{2}(2H + H_1) = H + \frac{1}{2}H_1,$$

表明 $b_1 = 1$，并且

$$c_1 = \frac{1}{2}H_1 = 0 \cdot H + \frac{1}{2}H_1，\text{表明} b_2 = 0，\text{以及}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}H_1 = \frac{1}{2}(2H_2H + H_3) = H_2 + \frac{1}{2}H_3，\text{表明} b_3 = 1,$$

然后依次类推。因此我们得到周期列

$$b_0 = 1，b_2 = 0，b_3 = 4，b_4 = 0，\ \ldots，b_i = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{i-1}\right);$$

$$c_0 = \frac{1}{2}K，c_1 = c_2 = \frac{1}{2}H_1，c_3 = c_4 = \frac{1}{2}H_3，c_5 = c_6 = \frac{1}{2}H_5，\ \ldots$$

因此，我们有

$$\frac{b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \pm \cdots}{2} = \frac{1 - 0 + 1 - 0 + 1 - 0 + \cdots}{2} \tag{7–22}$$

和

$$\begin{gathered}-\frac{c_0^2}{2KH} + \frac{c_1^2}{2HH_1} + \frac{c_2^2}{2H_1H_2} \pm \cdots = \\ = -\frac{K}{8H} - \frac{H_1}{8}\left(\frac{1}{H_2} - \frac{1}{H}\right) - \frac{H_3}{8}\left(\frac{1}{H_4} - \frac{1}{H_2}\right) - \frac{H_5}{8}\left(\frac{1}{H_6} - \frac{1}{H_4}\right) - \cdots\end{gathered} \tag{7–23}$$

因为

$$\frac{H_{2i+1}}{8}\left(\frac{1}{H_{2i+2}}-\frac{1}{H_{2i}}\right)=\frac{H_{2i+1}}{8}\cdot\frac{H_{2i}-H_{2i+2}}{H_{2i+2}H_{2i}}=\frac{H_{2i+1}}{8}\cdot\frac{2H_{2i+1}}{H_{2i+2}H_{2i}}=$$
$$=\frac{{H_{2i+1}}^2}{4H_{2i+2}H_{2i}}=\frac{1}{4}+\text{指数型小量，}\tag{7–24}$$

应用命题 7.1 中的公式 7–22 –公式 7–24，由公式 7–21，我们有

$$M_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2};N\right)=\left(\frac{1-0}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\log N}{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}+O(1),$$

其中，在最后一步我们利用了下面事实 (请参看公式 7–18)

$$q_l=\frac{(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}=N\quad\text{表明}\quad l=\frac{\log N}{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}+O(1)。$$

因此，我们得到

$$M_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2};N\right)=\frac{1}{8}\frac{\log N}{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}+O(1),\tag{7–25}$$

这就证明了 (1.32)。

特别地，当 $\rho=1/2$ 时，我们有下面特殊性质

$$\chi_{1/2}(x)-\frac{1}{2}=((2x))-2\left((x)\right),\tag{7–26}$$

由此得到方程

$$M_\alpha\left(\frac{1}{2};N\right)=M_{2\alpha}\left(N\right)-2M_\alpha\left(N\right)。\tag{7–27}$$

利用公式 7–27，我们可以简单地双重检查公式 7–25。意思就是我们两种情况下应用命题 6.1：$\alpha=\sqrt{2}=\left[\overline{2}\right]$ 和

$$2\alpha=2\sqrt{2}=\sqrt{8}=[2;1,4,1,4,1,4,\ldots]=\left[2;\overline{1,4}\right]。$$

$\alpha=\sqrt{2}$ 的周期长度为奇数，所以相应的命题 6.1 中的交错和抵消了。因此，我们有

$$M_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2};N\right)=M_{2\sqrt{2}}\left(N\right)=\frac{-1+4-1+4-1+4\mp\cdots}{12}+O(1)=$$
$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{-1+4}{2}\cdot\frac{\log N}{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}+O(1)=\frac{1}{8}\frac{\log N}{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}+O(1),\tag{7–28}$$

这又给出了公式 7–25。在公式 7–28 中，我们利用了事实：$\sqrt{8}$ 的 $(2i)-th$ 个收敛值 p_{2i}/q_{2i}

满足方程

$$p_{2i} \pm q_{2i}\sqrt{8} = \left(3 \pm \sqrt{8}\right)^i,$$

这表明

$$q_{2i} = \frac{1}{2\sqrt{8}}\left(\left(3+\sqrt{8}\right)^i - \left(3-\sqrt{8}\right)^i\right) \approx \left(3+\sqrt{8}\right)^i = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2i}。$$

特殊方程 7–27 给出了对于任何二次无理数 α，$\rho = 1/2$ 的一种捷近。比如，如果 $\alpha = \sqrt{3} = \left[1; \overline{1,2}\right]$，那么

$$2\alpha = 2\sqrt{3} = \sqrt{12} = \left[3; \overline{2,6}\right]。$$

因此由公式 7–27 和命题 6.1，

$$M_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}; N\right) = M_{2\sqrt{3}}(N) - 2M_{\sqrt{3}}(N) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{-2+6}{2}\cdot\frac{\log N}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)} - 2\cdot\frac{-1+2}{2}\cdot\frac{2\log N}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}\right) + O(1) = O(1), \tag{7–29}$$

因为 $\sqrt{3}$ 的 $(2i)-th$ 个收敛值 p_{2i}/q_{2i} 满足方程

$$p_{2i} \pm q_{2i}\sqrt{3} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^i,$$

$$q_{2i} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^i - \left(2-\sqrt{3}\right)^i\right) \approx \left(2+\sqrt{3}\right)^i;$$

类似地，$2\sqrt{3}$ 的 $i-th$ 个收敛值的分母大约为 $\left(2+\sqrt{3}\right)^i$ (因为 $x^2-12y^2=\pm1$ 的最小正解是 $x=7$，$y=2$，并且 $7+2\sqrt{12}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$)。

然后考虑黄金分割比 $\alpha = (\sqrt{5}+1)/2$。那么 $\alpha = \left[1; \overline{1}\right]$ 和 $2\alpha = \left[3; \overline{4}\right]$。因为这两个连分数的周期长度都为奇数，由公式 7–27 和命题 6.1，

$$M_{(\sqrt{5}+1)/2}\left(\frac{1}{2}; N\right) = O(1)。 \tag{7–30}$$

本节最后一个例子是 $\alpha = \sqrt{7}$，$(\rho = 1/2)$。我们需要以下事实：$\sqrt{7} = \left[2; \overline{1,1,1,4}\right]$，$\sqrt{28} = \left[5; \overline{3,2,3,10}\right]$，方程 $x^2-7y^2=\pm1$ 和 $x^2-28y^2=\pm1$ 的最小正解分别为 $x=8$，$y=3$ 和 $x=127$，$y=24$，其联系为 $127+24\sqrt{28}=(8+3\sqrt{7})^2$。结合这些事实，由公式 7–27 和命题 6.1，我们有

$$M_{\sqrt{7}}\left(\frac{1}{2}; N\right) = M_{2\sqrt{7}}(N) - 2M_{\sqrt{7}}(N) =$$

$$= \frac{\log N}{12}\left(\frac{-3+2-3+10}{\log(127+24\sqrt{28})} - 2t\frac{-1+1-1+4}{log(8+3\sqrt{7})}\right) + O(1) = -\frac{\log N}{4log(8+3\sqrt{7})}O(1)。 \tag{7–31}$$

下面我们讨论 $\rho \neq 1/2$ 的例子。

例子 2 下面令 $\rho = 1/3$，$\alpha = \sqrt{2}$。那么 $\sqrt{2} = [1;\overline{2}]$ 导出公式 7–14 中的 $2 = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$。我们计算公式 7–15 中的 b_i，c_i，H_i：

$$c = c_0 = (1-\rho)\,K = \frac{2}{3}K = \frac{2}{3}\,(2H + H_1) = H + \frac{1}{3}H + \frac{2}{3}H_1,$$

得到 $b_1 = 1$，然后类似地，

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{3}H + \frac{2}{3}H_1 = \frac{1}{3}\,(2H_1 + H_2) + \frac{2}{3}H_1 = H_1 + \frac{1}{3}H_1 + \frac{1}{3}H_2 \Rightarrow b_2 = 1,\\
c_2 &= \frac{1}{3}H_1 + \frac{2}{3}H_2 = \frac{1}{3}\,(2H_2 + H_3) + \frac{1}{3}H_3 = H_2 + \frac{1}{3}H_3 \Rightarrow b_3 = 1,\\
c_3 &= \frac{1}{3}H_3 = 0\cdot H_3 + \frac{1}{3}H_3 \Rightarrow b_4 = 0,\\
c_4 &= \frac{1}{3}H_3 = \frac{1}{3}\,(2H_4 + H_5) = 0\cdot H_4 + \frac{2}{3}H_4 + \frac{1}{3}H_5 \Rightarrow b_5 = 0,\\
c_5 &= \frac{2}{3}H_4 + \frac{1}{3}H_5 = \frac{2}{3}\,(2H_5 + H_6) + \frac{1}{3}H_5 = H_5 + \frac{2}{3}H_5 + \frac{2}{3}H_6 \Rightarrow b_6 = 1,\\
c_6 &= \frac{2}{3}H_5 + \frac{2}{3}H_5 = \frac{2}{3}\,(2H_6 + H_7) + \frac{2}{3}H_6 = 2H_6 + \frac{2}{3}H_7 \Rightarrow b_7 = 2,\\
c_7 &= \frac{3}{3}H_7 = 0\cdot H_7 + \frac{2}{3}H_7 \Rightarrow b_8 = 0,\\
c_8 &= \frac{2}{3}H_7 = \frac{2}{3}\,(2H_6 + H_9) = H_8 + \frac{1}{3}H_8 + \frac{2}{3}H_9 \Rightarrow b_9 = 1，\text{以此类推}
\end{aligned}$$

回到最开始。因此我们得到了 b_1，b_2，b_3，$\ldots$ 的周期列：

$$1,1,1,0,0,1,2,0,\quad 1,1,1,0,0,1,2,0,\quad 1,1,1,0,0,1,2,0,\quad \ldots$$

因此，我们得到了

$$\begin{aligned}
&\frac{b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \pm \cdots}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-1+1-0+0-1+2-0}{8}\cdot\frac{\log N}{\log(1+\sqrt{2})} + O(1),
\end{aligned} \tag{7–32}$$

以及

$$\begin{aligned}
&-\frac{c_0^2}{2KH} + \frac{c_1^2}{2HH_1} + \frac{c_2^2}{2H_1H_2} \pm \cdots = \\
&= \frac{1}{18}\left(-\frac{(2K)^2}{KH} + \frac{(H+2H_1)^2}{HH_1} - \frac{(H_1+H_2)^2}{H_1H_2} + \frac{H_3^2}{H_2H_3}\right)\frac{\log N}{8\log(1+\sqrt{2})} +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{18}\left(-\frac{H_3^2}{H_3H_4}+\frac{(2H_4+H_5)^2}{H_4H_5}-\frac{(2H_5+2H_6)^2}{H_5H_6}+\frac{H_7^2}{H_6H_7}\right)\frac{\log N}{8\log(1+\sqrt{2})}+O(1)。\quad (7\text{–}33)$$

因为由公式 7–14

$$\frac{H_i-H_{i-2}}{H_{2i+1}}=a_{i+2}=2,$$

我们可以改写公式 7–33 成下面这样：

$$sum(7-33)=\frac{1}{18}\left(-\frac{4(K-H_1)}{H}+4+\frac{H-H_1}{H_1}-2-\frac{H_1-H_3}{H_2}-\frac{H_3-H_5}{H_4}+\right.$$

$$\left.+\frac{4(H_4-H_6)}{H_5}-8-\frac{4(H_4-H_7)}{H_6}\right)=$$

$$=\frac{1}{18}(-8+4+2-2-2-2+4+8-8-8)=-\frac{2}{3},$$

表明

$$sum(7-33)=-\frac{\log N}{12\log(1+\sqrt{2})}+O(1)。\quad (7\text{–}34)$$

应用公式 7–32 –公式 7–34 到公式 7–21 中，我们有

$$M_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3};N\right)=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)\frac{\log N}{\log(1+\sqrt{2})}+O(1)=$$

$$=\frac{\log N}{24\log(1+\sqrt{2})}+O(1)。\quad (7\text{–}35)$$

然后令 $\rho=2/3$，$\alpha=\sqrt{2}$；通过相似的计算得到同样的答案：

$$M_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3};N\right)=\frac{\log N}{24\log(1+\sqrt{2})}+O(1)。\quad (7\text{–}36)$$

我们可以很容易利用下面特殊性质检查公式 7–35 和公式 7–36：

$$\left(\chi_{1/3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\chi_{2/3}-\frac{2}{3}\right)=((3x))-3\left((x)\right),\quad (7\text{–}37)$$

由此导出 (参看公式 7–2 和公式 7–19)

$$M_\alpha\left(\frac{1}{3};N\right)+M_\alpha\left(\frac{2}{3};N\right)=M_{3\alpha}\left(N\right)-3M_\alpha\left(N\right)。\quad (7\text{–}38)$$

注意到公式 7–37 –公式 7–38 是公式 7–26 –公式 7–27 的一个类比。

我们有 $3\sqrt{2}=\sqrt{18}=\left[4;\overline{4,8}\right]$，然后由命题 6.1，

$$M_{3\sqrt{2}}(N)=\frac{1}{12}\cdot\frac{-4+8}{2}\cdot\frac{\log N}{2\log(1+\sqrt{2})}+O(1), \tag{7–39}$$

因为 $x^2-18y^2=\pm1$ 的最小正解为 $x=17$，$y=4$，所以 $\sqrt{18}$ 的 $(2i)-th$ 个收敛值 p_{2i}/q_{2i} 满足方程

$$p_{2i}\pm q_{2i}\sqrt{18}=\left(17\pm4\sqrt{18}\right)^i,$$

$$q_{2i}\approx\left(17+4\sqrt{18}\right)^i=(1+\sqrt{2})^{4i}。$$

因为 $\sqrt{2}$ 的周期长度为奇数，由公式 7–38 和公式 7–39，

$$M_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3};N\right)+M_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3};N\right)=M_{3\sqrt{2}}(N)-3M_{\sqrt{2}}(N)=$$

$$=\frac{\log N}{12\log(1+\sqrt{2})}+O(1),$$

这和公式 7–35 –公式 7–36 相符合。

例子 3　令 $\rho=1/4$，$\alpha=(\sqrt{5}+1)/2=\left[1;\overline{1}\right]$。那么公式 7–14中的 $1=a_1=a_2=a_3=\cdots$，

$$c=c_0=(1-\rho)K=\frac{3}{4}K=\frac{3}{4}(H+H_1)=H+\frac{1}{4}(3H_1-H), \tag{7–40}$$

得到 $b_1=1$。注意因为 H/H_1 离黄金分割比 $\alpha=(\sqrt{5}+1)/2<3$ 特别近，所以 $3H_1>H$。我们有

$$3H_1-H=3H_1-(H_1+H_2)=2H_1-H_2=2(H_2+H_3)-H_2=H_2+2H_3, \tag{7–41}$$

所以

$$\begin{aligned}
c_1&=\frac{1}{4}H_1+\frac{1}{2}H_3=0\cdot H_1+c_2=0\cdot H_2+c_3\Rightarrow b_2=b_3=0,\\
c_3&=\frac{1}{4}H_1+\frac{1}{2}H_3=\frac{1}{4}(H_3+H_4)+\frac{1}{2}H_3=\frac{3}{4}H_3+\frac{1}{4}H_4<H_3\Rightarrow b_4=0,\\
c_4&=\frac{3}{4}H_3+\frac{1}{4}H_4=\frac{3}{4}(H_4+H_5)+\frac{1}{4}H_4=H_4+\frac{3}{4}H_5\Rightarrow b_5=1,\\
c_5&=\frac{3}{4}H_5=0\cdot H_5+\frac{3}{4}H_5\Rightarrow b_6=0,\\
c_6&=\frac{3}{4}H_5=\frac{3}{4}(H_6+H_7)=H_6+\frac{1}{4}(3H_7-H_6),
\end{aligned}$$

这和一开始是一样的。因此我们得到了 b_1，b_2，b_3，...的周期列：

$$1,0,0,0,1,0, \quad 1,0,0,0,1,0, \quad 1,0,0,0,1,0, \quad \ldots,$$

因此，我们得到了

$$\begin{aligned}&\frac{b_1-b_2+b_3-b_4\pm\cdots}{2}=\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-0+0-0+1-0}{6}\cdot\frac{\log N}{\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+O(1),\end{aligned} \tag{7–42}$$

并且

$$-\frac{c_0^2}{2KH}+\frac{c_1^2}{2HH_1}+\frac{c_2^2}{2H_1H_2}\pm\cdots=\frac{1}{32}\cdot S_0\cdot\frac{\log N}{6\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+O(1)。 \tag{7–43}$$

其中

$$S_0=-\frac{9K^2}{KH}+(H_2+2H_3)^2\left(\frac{1}{HH_1}-\frac{1}{H_1H_2}+\frac{1}{H_2H_3}\right)-\frac{(3H_3+H_4)^2}{H_3H_4}+\frac{9H_5^2}{H_4H_5}。$$

公式 7–43 中间关键的和 S_0 等于 $(\alpha=(\sqrt{5}+1)/2)$

$$S_0=-9\alpha+(\alpha+2)^2\left(\alpha^{-5}-\alpha^{-3}+\alpha^{-1}\right)-\frac{(3\alpha+1)^2}{\alpha}+9\alpha^{-1} \tag{7–44}$$

然后利用简单的事实 $\alpha^2=1+\alpha$ 和 $\alpha^{-2}=1-\alpha^{-1}$，很容易可以算出公式 7–44：$S_0=-24$。回到公式 7–43，我们有

$$sum(7-43)=\frac{1}{32}\cdot(-24)\cdot\frac{\log N}{6\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+O(1)。 \tag{7–45}$$

应用公式 7–42 –公式 7–45，我们有

$$\begin{aligned}M_{(\sqrt{5}+1)/2}\left(\frac{1}{4};N\right)&=\left(1-\frac{24}{32}\right)\frac{\log N}{6\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+O(1)=\\ &=\frac{\log N}{24\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+O(1)。\end{aligned} \tag{7–46}$$

命题 7.1 中的周期性 让我们回到命题 7.1 和方程 7–21。例子中，b_1，b_2，b_3，...的周期性绝非偶然：我们证明如果数列 a_1，a_2，a_3，...是周期的且 c/K 为有理数，那么

b_1，b_2，b_3，... 也是周期的 (但是周期长度不一定相同)。

的确，记 $c/K = s/t$，其中 $1 \leq s < t$ 为互质的整数。那么，由公式 7–14 –公式 7–15，

$$c = c_0 = \frac{s}{t}K = \frac{s}{t}(a_1 H + H_1) = b_1 H + c_1,$$

其中 ($\lfloor x \rfloor$ 和 $\{x\}$ 记为 x 的整数部分和小数部分)

$$b_1 = \left\lfloor \frac{sa_1}{t} \right\rfloor \quad \text{和} \quad c_1 = \left\{ \frac{sa_1}{t} \right\} H + \frac{s}{t}H_1 = \frac{s_1}{t}H + \frac{s}{t}H_1,$$

这里，我们**假设**$c_1 < H$。

类似地，

$$c_1 = \frac{s_1}{t}H + \frac{s}{t}H_1 = \frac{s_1}{t}(a_2 H_1 + H_2) + \frac{s}{t}H_1 = b_2 H_1 + c_2,$$

其中

$$b_2 = \left\lfloor \frac{s_1 a_2 + s}{t} \right\rfloor \quad \text{和} \quad c_2 = \left\{ \frac{s_1 a_2 + s}{t} \right\} H + \frac{s_1}{t}H_2 = \frac{s_2 H_1 + s_1 + H_2}{t},$$

又一次，我们**假设**$c_2 < H_1$。

重复这个讨论，对于任意 $i \geq 0$，我们有

$$c_i = \frac{s_i H_{i-1} + s_{i-1} H_i}{t}, \tag{7–47}$$

其中，$0 \leq s_i, s_{i-1} < t$ 为整数，而且我们一直假设 $c_i < H_{i-1}$。

a_i 的周期性意思是

$$a_i = a_{i+L}\text{，对于 } M_1 \leq i \leq M_2 \text{ 成立，} \tag{7–48}$$

这里，我们假设 $(M_1 - M_2)/L$ 是一个非常大的整数。考虑下面间隔为 L 的数列：

$$c_{M_1}, c_{M_1+L}, c_{M_1+2L}, c_{M_1+3L}, \cdots c_{M_2};$$

由公式 7–47，我们有

$$c_{M_1+jL} = \frac{s'_j H_{M_1+jL-1} + s''_j H_{M_1+jL}}{t} < H_{M_1+jL-1}, \tag{7–49}$$

其中 $0 \le s'_j, s''_j < t$ 为整数。如果 $(M_2 - M_1)/L$ 比 t^2 大，那么由鸽子洞原理，一定存在重复的数对 $\left(s'_j, s''_j\right)$，$j = 0, 1, 2, \ldots$，而且第一个重复的出现表明了在区间 $M_1 \le i \le M_2$ (参看公式 7–48) 剩下的部分，数列 b_1，b_2，b_3，$\ldots$ 具有周期性。当然，我们不能预测周期的长度，但是它一定小于 $L\left(t^2 + 1\right)$。

警告! 我们在公式 7–47 中的假设条件

$$c_i = \frac{s_i H_{i-1} + s_i H_i}{t} < H_{i-1}，0 \le s_i, s_{i-1} < t$$

有可能无法满足；比如，参看上面例子 3 中的公式 7–40 ($\alpha = (\sqrt{5}+1)/2$，$\rho = 1/4$)：

$$c_0 = \frac{3}{4}(H + H_1) > H，$$

因为 H/H_1 离黄金分割比 $\alpha = (\sqrt{5}+1)/2 < 3$ 特别近。这就是为社么我们不能写

$$c_0 = 0 \cdot H + c_1，其中 \quad c_1 = \frac{3}{4}(H + H_1)$$

而我们必须写

$$c_0 = H + \frac{3H_1 - H}{4} = H + c_1，$$

其中在 c_1，我们面对了一个负 (!) 的系数：

$$0 < c_1 = \left(-\frac{1}{4}\right) H + \frac{3}{4} H_1 < H。\tag{7–50}$$

对于 $\alpha = (\sqrt{5}+1)/2 < 3$，我们可以用特殊的性质 (参看公式 7–41)

$$3H_1 - H = H_2 + 2H_3，\tag{7–51}$$

这轻松地解决了公式 7–50 中的 “负性问题”。

下面我们说明这个技巧总是可以用的；我们总是可以解决 “负性问题”。为了证明这个，假设对于某个 i，我们有 —就像公式 7–49 一样 —公式 7–47的反面：

$$c_i = \frac{s_i H_{i-1} + s_i H_i}{t} > H_{i-1}，0 \le s_i, s_{i-1} < t。\tag{7–52}$$

然后我们改写公式 7–52 成形式

$$c_i = H_{i-1} + c'_i，其中 \quad c'_i = \frac{s_{i-1} H_i - (t - s_i) H_{i-1}}{t}$$

和 $0 \le c_i' < H_{i-1}$。在公式 7–14中，我们有递推公式 $H_{i-1} = a_{i+1}H_i + H_{i+1}$，所以，$r_i = t - s$，

$$s_{i-1}H_i - r_iH_{i-1} = s_{i-1}H_i - r_i\left(a_{i+1}H_i + H_{i+1}\right) = s_{i-1}^*H_i - r_iH_{i+1},$$

其中，$s_{i-1}^* = s_{i-1} - r_ia_{i+1} \ge 1$。

情况 1： $s_{i-1}^* \ge r_i$

利用 $H_i = a_{i+2}H_{i+1} + H_{i+2}$，我们有下面对公式 7–51 的类比：

$$s_{i-1}^*H_i - r_iH_{i+1} = s_{i-1}^*\left(a_{i+2}H_{i+1} + H_{i+2}\right) - r_iH_{i+1} =$$

$$= \left(s_{i-1}^*a_{i+2} - r_i\right)H_{i+1} + s_{i-1}^*H_{i+2}, \tag{7–53}$$

这就解决了“负性问题”。

情况 2： $s_{i-1}^* < r_i$ 下面我们再次利用公式 7–53：

$$s_{i-1}^*H_i - r_iH_{i+1} = \left(s_{i-1}^*a_{i+2} - r_i\right)H_{i+1} + s_{i-1}^*H_{i+2}。 \tag{7–54}$$

如果 $\left(s_{i-1}^*a_{i+2} - r_i\right)$ 为正，那我们就完成了证明；如果它是负的，那么显然 $r_{i+2} = \left|s_{i-1}^*a_{i+2} - r_i\right| < s_{i-1}^*$，然后我们可以改写公式 7–54 成

$$s_{i-1}^*H_i - r_iH_{i+1} = s_{i-1}^*H_{i+2} - r_{i+2}H_{i+1} \quad \text{其中} \quad r_i > r_{i+2} \ge 0。 \tag{7–55}$$

公式 7–55 中下降的性质保证了，重复此过程小于 t 次，那个负的系数最终会消失 (即，变成像公式 7–51 那样的正的系数)。换句话说，在上面两种情况下，我们都能解决“负性问题”。

通过去除“负性问题”，我们可以安心地说，上面鸽子洞原理的讨论总是成立的。最终，我们获得了 b_1，b_2，b_3，$\ldots$ 的**周期性**。结合这个周期性与引理 7.1 和命题 7.1，我们有

命题 7.2 如果 α 为一个二次无理数，$0 < \rho < 1$ 是一个有理数，那么存在一个常数 $c = c(\alpha, \rho)$ 使得

$$M_\alpha(\rho, N) = c \cdot N + O(1) \tag{7–56}$$

对所有的 $N \ge 2$ 成立。 □

参考文献

[Bec1] Beck, József.: Probabilistic Diophantine Approximation, Randomness in lattice point counting. Springer 2015.

[Be4] Beck, J.: Randomness in lattice point problems, Discrete Mahtematics **229** (2001), pp. 29-45

[Di] Dieter, U.: Das Verhaltender Kleischen Functionen gegenüber Modultransformationen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen, Journ. Reine Angew. Math. **201** (1959), 37-70.

[Ha-Li2] Hardy, G.H. and Littlewood, J.: The lattice-points of a right-angled triangle. II, Abh. Math. Sem. Hamburg **1** (1922), 212-249.

[Ha-Li3] Hardy, G.H. and Littlewood, J.: Some problems of Diophantine approximation: A series of cosecants, Bull. Calcutta Math. Soc. **20** (1930), 251-266

[Kn1] Knuth, D.E.: Notes on generalized Dedekind sums, Acta Arithmetica **33** (1977), 297-325.

[Ra-Gr] Rademacher, H. and Grosswald, E.: *Dedekind Sums*, Math. Assoc. Amer., Carus Monograph No.16(1972).

[Scho] Schoissengeier, J.: Another proof of a theorem of J. Beck, Monatshefte für Mathematik **129** (2000), 147-151.

[Za1] Zagier, D.B.: Nombres de classes at fractions continues, Journ. Arithmetiques de Bordeaux, Asterisque **24-25** (1975), 81-97.

[Za4] Zagier, D.B.: *Zeta-funktionen und quadradische Körper*, Hochschultext, Springer 1981.