Author: zfs

- **非空有上界的数集，必有上确界**
- **非空有下界的数集，必有下确界**

概念补充：

> [x]: `x的整数部分`
>
> (x): `x的小数部分`
>
> Z: `整数集`
>
> R: `实数集`
>
> N: `自然数集`
>
> $\forall$: `对于任意的，对于每一个`
>
> $\exists$: `存在，可以找到`
>
> $\in$: `元素属于某个集合`
>
> $\notin$: `元素不属于某个集合`
>
> $\subset$: `集合的包含关系`
>
> 上界: 集合$S \subset R$,S非空,$\exists\ M \in R$,$\forall\ x \in S$,$x \le M$,称M是S的一个上界
>
> 上确界: 设U是S上界的集合，则U没有最大数，但U必定有最小数，记为β=$sup\ S$ ，称为S的上确界（supremum）。另一种定义形式,若β是S的上界,对于$\forall\varepsilon > 0, \exists x \in S, \beta - \varepsilon < x,$ 则 β为S的上确界。

证：对于集合S属于R，S有上界，则S必有上确界（确界存在定理，下确界类似）

我们知$x \in R$,x=[x]+(x)(x由整数部分和其小数部分组成) 记a_0=[x], $0.a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$=($x$)

说明：

- x如果是有限小数，则在其后面补上一列0,使其成为无限小数
- $0.a_1a_2a_3\ldots a_p0000\ldots$=$0.a_1a_2a_3\ldots(a_p-1)999999\ldots$ ($a_p \ne 0$,由1=$0.999999999\ldots$)

Start:

- 取集合$U_0 \subset S$,记S中整数部分最大值为α_0 U_0={$x|x \in S, x$的整数部分为α_0} 有$t \notin U_0$,则$t < \alpha_0$
- 取集合$U_1 \subset U_0$,记U_0中小数第一位最大值为α_1 U_1={$x|x \in U_0, x$的第一位小数为α_1} 有$t \notin U_1$,则$t < \alpha_0 + 0.\alpha_1$
- 取集合$U_2 \subset U_1$,记U_1中小数第二位最大值为α_2 U_2={$x|x \in U_1, x$的第二位小数为α_2} 有$t \notin U_2$

,则$t < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2$ ......

- 取集合$U_n \subset U_{n-1}$,记U_{n-1}中小数第n位最大值为α_n U_n={$x|x \in U_{n-1}, x$的第n位小数为α_n} 有$t \notin U_n$,则$t < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ 进行下去......

有$S \supset U_0 \supset U_1 \supset U_2 \ldots U_{n-1} \supset U_n \ldots \ldots$ 取β=$\alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \ldots$ ($\alpha_0 \in Z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$) 则所取$\beta$即为$S$ 上确界。

证：β为S上确界

1）：证β为S上界,即$\forall x \in S, x \leq \beta$　2）：证β为S上确界，即$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S, \beta - \varepsilon < x$

证 1）：　对于$x \in S$，则$\exists n \in N, x \notin U_n$或者$\forall n \in N, x \in U_n$

- [1]对于$\exists n \in N, x \notin U_n$ 则$x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \leq \beta$
- [2]对于$\forall n \in N, x \in U_n$ 有$x = \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \ldots$,则$x = \beta$

```
由[1]、[2] 证毕1)
```

证 2）：　当ε取定时，有$\exists n_0 \in N, \frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon$ 取$x = \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n_0} \in S$ 则 $\beta - x = 0.00 \ldots 0\alpha_{n_0+1}\alpha_{n_0+2} \ldots \ldots < \frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon$ 即$\beta - \varepsilon < x$

```
由上证毕2）
```

End;

```
综上，上确界存在定理得证。（下确界同法）
```

之所以确界存在定理又称之为实数系连续性定理:

若实数系不连续，则在数轴上会有一段间隙，有间隙即存在长度l,有长度即存在$\varepsilon < l$,使得$\nexists x \in S, x > \beta - \varepsilon$,间隙左侧数集没有上确界，间隙右侧数集没有下确界，与确界存在定理矛盾，即实数系是连续的。