Author: zfs

- [1]三角不等式 $||a|-|b||\leq|a+b|\leq|a|+|b|$
- [2]平均值不等式 $a_1,a_2,a_3\ldots\ldots a_n$(n个正数)
  $\frac{a_1+a_2+a_3\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$

```
算术平均          几何平均              调和平均
```

证[1]: $-2|a||b|\leq2ab\leq2|a||b|$,同时加上$a^2+b^2$ $(|a|-|b|)^2\leq(a+b)^2\leq(|a|+|b|)^2$ 开方得证.

证[2]:

- 左侧:
  - 当n为2^t时 知$\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}$
    $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geq\frac{2\sqrt{a_1a_2}+2\sqrt{a_3a_4}}{4}\geq\frac{2\sqrt{4\sqrt{a_1a_2a_3a_4}}}{4}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$ ...... 第t个等式即为
    $\frac{a_1+a_2+a_3\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$
  - 当n不为 2^t时 则必存在一个l使得$2^l\leq n<2^{l+1}$ 记$a^*=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ 则在原列后补充 $2^{l+1}-n$个a^*,即为 $a_1,a_2,a_3\ldots a_n,a^*,a^*\ldots$(共$2^{l+1}$个) 由上知
    $\frac{a_1+a_2+a_3\ldots+a_n+a^*+a^*+\ldots}{2^{l+1}}\geq\sqrt[2^{l+1}]{a_1a_2a_3\ldots a_n{a^*}^{2^{l+1}-n}}$ 而$a_1a_2a_3\ldots a_n={a^*}^n$ 故
    $\sqrt[2^{l+1}]{a_1a_2a_3\ldots a_n{a^*}^{2^{l+1}-n}}=\sqrt[2^{l+1}]{{a^*}^n{a^*}^{2^{l+1}-n}}=a^*$ $\frac{a_1+a_2+a_3\ldots+a_n+a^*+a^*+\ldots}{2^{l+1}}\geq a^*$ 则
    $a_1+a_2+a_3+\ldots a_n+(2^{l+1}-n)a^*\geq2^{l+1}a^*$ 即
    $\frac{a_1+a_2+a_3\ldots+a_n}{n}\geq a^*=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$

```
左侧得证
```

- 右侧: 由左侧不等式$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$ 由于两侧都大于0,故
  $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\ldots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$

```
右侧得证
```