

Zusammenfassung Physik I&II

GianAndrea Müller, nach der Vorlesung von Prof. Dr. W. Wegscheider

15. Januar 2018

INHALTSVERZEICHNIS

1 KONSTANTEN

Konstante	Symbol	Wert
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$8.854\,188 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$
	$4\pi\epsilon_0$	$1.112\,650 \times 10^{-10} \text{ C}^2 \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$
Elementarladung	e	$1.602\,19 \times 10^{-19} \text{ C}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$2.997\,925 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Avogadro'sche Zahl	N_0	$6.022\,05 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Planck'sche Konstante	h	$6.626\,18 \times 10^{-34} \text{ J s}$
	\hbar	$1.054\,50 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Atomare Masseneinheit	amu	$1.660\,56 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenmasse	m_e	$9.109\,53 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Protonenmasse	m_p	$1.672\,65 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Boltzmannkonstante	k_B	$1.380\,66 \times 10^{-23} \text{ kg}$
Molare Gaskonstante	R	$8.314\,41 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Rydbergkonstante		
(infinite nuclear mass)	R_∞	$2.179\,914 \times 10^{-23} \text{ J}$
Erster Bohrradius	a_0	$5.291\,77 \times 10^{-11} \text{ m}$
Bohr magneton	μ_B	$9.274\,09 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$
Stefan-Boltzmann Konstante	σ	$5.670\,32 \times 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$

2 NICE TO KNOW

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

3 IDENTITÄTEN
LE LOGARITHMUS
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
DERIVATIVES
$(ln(x))' = \frac{1}{x}$
INTEGRALS
$\int \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - x + C$
$\int e^x dx = e^x$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C$
$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(\sin(x) \cos(x) - x) + C$
$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(\sin(x) \cos(x) + x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \arctan(x) + C_1 \\ -\operatorname{arccot}(x) + C_2 \end{cases}$
$\int \frac{1}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{artanh}(x) + C_1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C_1 & x < 1 \\ \operatorname{arcoth}(x) + C_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C_2 & x > 1 \end{cases}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin(x) + C_1 \\ -\arccos(x) + C_2 \end{cases}$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh}(x) + C = \ln x + \sqrt{x^2-1} + C \quad x > 1$
$\int \frac{1}{\sinh^2(x)} dx = -\coth(x) + C$
$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = \tanh(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsinh}(x) + C = \ln x + \sqrt{x^2+1} + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{(z^2+2)^{3/2}} dz = \frac{z}{a^2 \sqrt{z^2+a^2}} + C$
EULERIDENTITÄT
$\Im(e^{ix}) = \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)$
$\Re(e^{ix}) = \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

TRIGONOMETRIE
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
$\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$
$\sin(4x) = \sin(x)(8 \cos^3(x) + 4 \cos(x))$
$\sin(5x) = 5 \sin(x) - 20 \sin^3(x) + 16 \sin^5(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \sin^2(x)$
$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$
$\cos(4x) = 8 \cos^4(x) - 8 \cos^2(x) + 1$
$\cos(5x) = 16 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5 \cos(x)$
$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
$\tan(3x) = \frac{3 \tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3 \tan^2(x)}$
$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
$\sin^3(x) = \frac{1}{4}(3 \sin(x) - \sin(3x))$
$\sin^4(x) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4 \cos(2x) + 3)$
$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-2k)(x - \frac{\pi}{2}))$
$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
$\cos^3(x) = \frac{1}{4}(3 \cos(x) + \cos(3x))$
$\cos^4(x) = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos(2x) + \cos(4x))$
$\cos^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-2k)x)$
$\sin(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2}(\cos(x(a-b)) - \cos(x(a+b)))$
$\cos(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2}(\cos(x(a-b)) + \cos(x(a+b)))$
$\sin(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2}(\sin(x(a-b)) + \sin(x(a+b)))$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \cosh(x) + \sinh(x) = e^x$
$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$
$\sinh(3x) = 4 \sinh^3(x) + 3 \sinh(x)$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2 \cosh^2(x) - 1$$

$$\cosh(3x) = 4 \cosh^3(x) - 3 \cosh(x)$$

3.1 DIFFERENTIALOPERATOREN

$$f(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad \vec{A}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0 \qquad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot f) = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot f = \vec{\nabla}^2 \cdot f = \vec{\Delta} \cdot f$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f \cdot \vec{A}) = f \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot f)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Potentialfeld: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot f$

quellenfrei: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ rotationsfrei: $\vec{\nabla} \times \vec{A}$

4 ELEKTRIZITÄT

4.1 COULOMBKRAFT

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_0 Q_1 \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_0 Q_1 \frac{\vec{e}_r}{r^2} \quad [F] = N$$
$$\vec{F} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3} dV'$$

4.2 ELEKTRISCHES FELD

Das Elektrische Feld ist gleich der Kraft, die auf eine positive Einheitsladung wirkt.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q_0} \quad [\vec{E}] = \text{V m}^{-1} = \text{N C}^{-1}$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|^3} dV'$$

Beispiele von elektrischen Feldern:

nichtleitende Kugel aussen	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_{Kugel}}{4\pi\epsilon_0 r^2} *$
nichtleitende Kugel innen	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_{Kugel} \cdot r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$
ebene Platte	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
langer Draht	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$

*wie Punktladung

4.3 FELDLINIEN

Von \oplus nach \ominus , Anzahl Feldlinien \propto Ladung. Dichte der Feldlinien $\propto |\vec{E}|$.

4.4 ELEKTRISCHES DIPOLMOMENT

$$\vec{p} = Q2\vec{d} \quad [\vec{p}] = 1 \text{ Debye} = 3.335 \times 10^{-30} \text{ C m}$$

wobei $2\vec{d}$ den Abstand der Ladungen bezeichnet.

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0 \quad E_{el} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

4.5 DIPOLFELD

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(+Q) \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} + (-Q) \frac{\vec{r} + \vec{d}}{|\vec{r} + \vec{d}|^3} \right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}|^3} \right)$$

Annäherung als Gradient eines Dipols gilt falls $|\vec{d}| \ll |\vec{r}|$.

4.6 ELEKTRISCHER FLUSS

$$\Phi_E = \int_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}' \quad [\Phi_E] = 1 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}}$$

$\Phi_E \propto$ Anzahl Feldlinien, die durch A gehen.

Im homogenen Feld $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$

4.7 GESETZ VON GAUSS

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}' = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') dV'$$

In V eingeschlossene Gesamtladung \propto Anzahl herauslaufende - Anzahl hineinlaufende Feldlinien.

4.8 ANWENDUNG: SATZ VON GAUSS

$$\oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Differentialform des Gesetz von Gauss

4.9 ELEKTROSTATISCHE ENERGIE

$$E_{el} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} Q \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Im homogenen Feld: $E_{el} = -Q\vec{E} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

E-Feld konservativ, Arbeit hängt nur A.- u. E.punkt nicht vom Weg ab.

4.10 ELEKTRISCHE SPANNUNG

$$U = \frac{E_{el}}{Q} = \vec{E} \cdot \vec{d} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad [U] = 1 \text{V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

für geladene Kugel: $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

4.11 ELEKTRISCHES POTENTIAL

$$\Phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Spannung relativ zur unendlichen Entfernung.

Punktladung: $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ Punktdipol: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

4.12 FELDGLEICHUNGEN

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \Phi(\vec{r}) = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

Poissongleichung:

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \Phi(\vec{r})) = -\Delta \cdot \Phi(\vec{r})$$

4.13 LEITENDE KÖRPER

- Oberflächenladungen passen sich äusserem Feld an, so dass \vec{E} im Körper 0 ist.
- \vec{E} steht senkrecht auf die Oberfläche.
- Die Oberfläche ist eine Äquipotentialfläche.
- Keine Ladung im inneren des Körpers, da sich gleiche Ladungen abstossen \rightarrow auch kein Feld.

Daraus für die Oberfläche:

$$\vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \vec{r} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \Phi(\vec{r}) = \Phi_0 = \text{c}$$

KRÜMMUNGSRADIUS

- $\vec{E}(\vec{r})$ auf der Oberfläche des leitenden Körpers nimmt mit $\frac{1}{r}$ zu.
- Durschläge geschehen an Orten mit starker Krümmung. (Blitzableiter)

4.14 INFLUENZ

Elektrische Felder verschieben ihre Ladung so, dass das Feld im Innern Null wird. Das heisst es können Ladungen im Körper separiert werden, auch wenn der Körper Gesamtladung Null hat.

4.15 FARRADAY'SCHER KÄFIG

In einem Hohlkörper im Elektrische Feld, darf sich nach Prinzip der Influenz kein Feld befinden. Das heisst es darf sich nach Gauss keine Ladung im inneren des Körpers befinden. Daher ist der Innenraum Elektrostatisch abgeschirmt, er ist Feldfrei.

4.16 PRINZIP DER SPIEGELLADUNG

Eine Probeladung induziert auf einem elektrischen Leiter eine Flächenladung, die dasselbe Feld generiert wie eine spiegelbildliche Probeladung mit entgegengesetztem Vorzeichen.

4.17 KONDENSATOR

$$U = |\vec{E}|d = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d = \frac{Qd}{A\epsilon_0} \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{A\epsilon_0}{d} \quad \vec{E} = \frac{Q}{A\epsilon_0}\vec{n} = \frac{U}{L}\vec{n}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2}U^2C = \frac{Q^2d}{2A\epsilon_0} = \frac{U^2A\epsilon_0}{2d} \quad w = \frac{E_{el}}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2$$

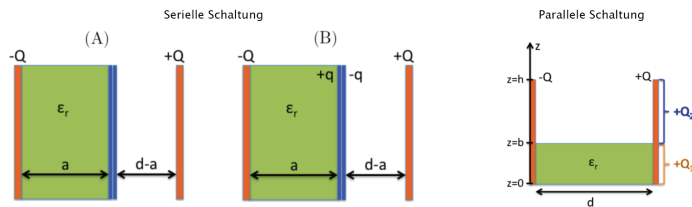
KONDENSATOR MIT DIELEKTRIKUM

$$U = \frac{U_0}{\epsilon_r} \quad C = C_0\epsilon_r \quad \epsilon = \epsilon_r\epsilon_0 \quad \epsilon_r = \frac{|\vec{E}_0|}{|\vec{E}|} \quad CU = Q$$

Bei Einführen eines Dielektrikums:

$$C = const. \Rightarrow U \downarrow \quad U = const. \Rightarrow C \uparrow$$

TEILWEISE GEFÜLLTER KONDENSATOR



$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} \text{ Seriell}$$

Parallel:

- Potential über Kondensatorplatte konstant \rightarrow Spannung über ganz h konstant.
- $U(0 < z < b) = U(b < z < h) \rightarrow$ daraus Beziehung für Q_1 und Q_2 herleiten: $Q_1 = Q_2 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{b}{h-b}$. Ausserdem gilt $Q_1 + Q_2 = Q$

4.18 POLARISATION

$$\text{Mittlere Polarisation } \langle \vec{p} \rangle = \alpha \vec{E} \quad \vec{P} = \frac{N}{V} \langle \vec{p} \rangle$$

	Verschiebungspol.	Orientierungspol.
bei allen Molekülen / Atomen	Ja	Nur bei solchen mit permanentem Dipol
Relative Stärke	schwach	meist Stark
Temperaturabhängig	Nein	Ja
Polarisierbarkeit α	Nimmt mit Molekülgrösse zu	Bestimmt durch T und \vec{p}

4.19 ELEKTRISCHE SUSZEPTIBILITÄT

$$\chi_E = \frac{|\vec{E}_P|}{|\vec{E}|} \quad \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad \epsilon_r = 1 + \chi_E \quad \vec{E}_P = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

E_P ist dem erzeugenden Feld entgegengerichtet.

Erzeugendes Feld $\vec{E} = \vec{E}_P + \vec{E}_0$ wobei \vec{E}_0 angelegtes Feld.

	ϵ_r
Vakuum	$\epsilon_r = 1$
Dielektrikum Verschiebungspolarisation	$\epsilon_r > 1$
Dielektrikum Orientierungspolarisation	$\epsilon_r \gg 1$
Idealer Leiter	$\epsilon_r = \infty$

ELEKTRISCHER STROM

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = 1A = 1 \frac{C}{s} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{Q}{m} \vec{E}$$

$$\text{Stromdichte } \vec{j} = \frac{\vec{I}}{A}$$

$$\text{Driftgeschwindigkeit: } \vec{v}_D = \frac{\vec{I}L}{e \cdot N} = -\frac{\vec{I}}{e \cdot n \cdot A} = -\frac{\vec{j}}{e \cdot n}$$

N : Anzahl Ladungsträger und $n = N/V$ Ladungsträgerdichte

ELEKTRISCHER WIDERSTAND

$$\sigma = \frac{|v_D| \cdot e \cdot n}{|\vec{E}|} = \frac{|\vec{j}|}{|\vec{E}|} \quad [\sigma] = 1 \Omega^{-1} m^{-1} \quad \rho = \frac{1}{\sigma} \quad [\rho] = \Omega m$$

$$R = \rho \frac{L}{A} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{j}|} \frac{L}{A} = \frac{U}{I} \quad \frac{U}{L} = |\vec{E}| \quad [R] = \Omega$$

4.20 OHM'SCHES GESETZ

- Der Strom ist proportional zur angelegten Spannung.

- Die Driftgeschwindigkeit ist proportional zum angelegten elektrischen Feld.
- Der elektrische Widerstand ändert sich nicht mit der angelegten Spannung.

ELEKTRISCHE LEISTUNG

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

5 MAGNETISMUS

5.1 BIOT-SAVART

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \cdot d\vec{L}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad [B] = 1T = 10^4 G$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (\text{analog zum E-Feld})$$

$$\text{Magnetische Feldkonstante} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$$

$$B = \mu_0 H \quad B_{\text{Materie}} = \mu_0 \mu_r H$$

Ein Elementarmagnet ist ein Dipol (es gibt keine magnetischen Monopole).

gerader Leiter	$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\vec{I} \times \vec{e}_r)}{ \vec{r} }$
magnetischer Dipol	$B_z(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$
Zylinderspule im Zentrum	$B_z(0) \stackrel{L \gg R}{\approx} \frac{N}{L} \mu_0 I = \mu_0 \vec{j}_A$
Fernfeld Dipol	$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{e}_r(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) - \vec{m}}{ \vec{r} ^3}$

5.2 MAGNETISCHES DIPOLMOMENT

$$\vec{m} = I \vec{A} = I \pi R^2 \vec{n} \quad E_{\text{pot}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

Dipolmoment einer homogen magnetisierten Kugel:

$$\vec{m} = 4\pi R^3 \vec{M} / 3 \quad \vec{M} = M_0 \vec{n}$$

Drehmoment auf magnetischen Dipol: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0$

KRAFT ABHÄNGIG VOM GRADIENTEN

$$F = \nabla(\vec{B} \cdot \vec{m}) \quad \text{T m}^{-1} = \text{Pa A}^{-1}$$

5.3 MAGNETISCHER FLUSS

$$\Phi_M = \int_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \quad [\Phi_M] = 1 \text{Wb} = 1 \text{Tm}^2$$

5.4 GESETZ VON GAUSS

$$\oint_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

5.5 DURCHFLUTUNGSGESETZ

$$\text{im Vakuum } \oint_L \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{L} = \mu_0 I \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

$$\text{in Materie } \oint_L \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{L} = I$$

Die Anzahl Feldlinien, welche parallel zum Rand einer Fläche entlangläuft, ist proportional zum Strom, der durch die Fläche fließt.

5.6 LORENTZKRAFT

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad \vec{F} = \int_L Id\vec{L} \times \vec{B}(\vec{r})$$

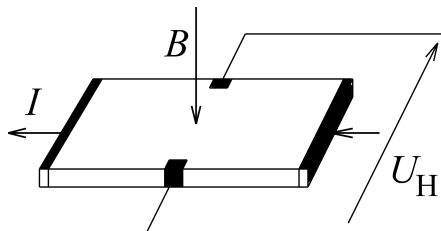
$$\text{Allgemeine Lorentzkraft: } \vec{F}(\vec{r}) = Q(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}))$$

5.7 AMPER'SCHES GESETZ

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_1 \vec{v}_1 \times (Q_2 \vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{I_1 d\vec{L}_1 \times (I_2 d\vec{L}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

5.8 HALLEFFEKT



Magnetfeld bewirkt Änderung der Stromrichtung durch Lorentzkraft → Spannung quer über den Leiter → Elektrisches Feld entsteht → Coulombkraft wirkt auf Ladungsträger → Kräftegleichgewicht:

$$\vec{F}_c + \vec{F}_L = \vec{0} \quad \text{daraus} \quad U_H = \frac{IB}{e n d}$$

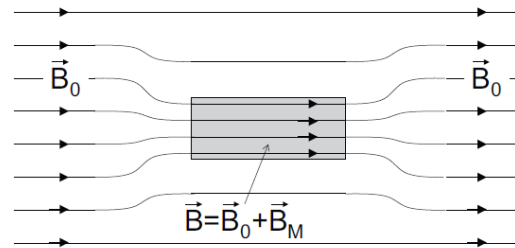
5.9 MAGNETISIERUNG

äusseres Magnetfeld: $\vec{B}_0 = \vec{H} \cdot \mu_0$

Durch das Material generiertes Feld: $\vec{B}_M = \vec{M} \cdot \mu_0$

Magnetfeld im Material: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M = \vec{H} \cdot \mu_0 + \vec{M} \cdot \mu_0 = \mu_r \cdot \vec{B}_0$

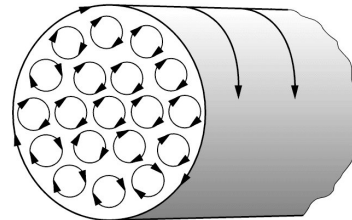
Magnetische Suszeptibilität: $\chi_M = \frac{|\vec{B}_M|}{|\vec{B}_0|} = \mu_r - 1$



Magnetische Erregung $\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad [H] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

Magnetisierung $\vec{M} = \frac{\vec{B}_M}{\mu_0} \quad |\vec{M}| = M_0 \quad [\mu] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

5.10 OBERFLÄCHENSTRÖME



Atomare Kreisströme im Körperinneren heben sich auf → resultierender gebundener Oberflächenstrom:

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} = \frac{I\vec{A}}{Ad} = \vec{n} \times \vec{j}_A$$

Eine homogen magnetisierte Kugel generiert exakt ein Dipolfeld. Das Dipolmoment ist gegeben durch die Magnetisierung multipliziert mit dem Kugelvolumen. $\vec{m} = 4\pi R^3 \vec{M} / 3$

5.11 ATOMARER URSPRUNG DES MAGNETISMUS

Atomare Kreisströme: Elektronen umkreisen Kern / Elektronenspin → magnetische Dipole.

Diamagnetismus	Paramagnetismus	Ferromagnetismus
Magnetfeld verstärkt / schwächt atomare Kreisströme (verschieden gerichtete Lorentzkraft)	Unkompensierte atomare Kreisströme generieren Dipol	Kollektive Ausrichtung von atomaren Dipolen
Magnetfeld wird abgeschwächt	Magnetfeld wird verstärkt	Magnetfeld wird enorm verstärkt
Sehr schwach	schwach	Sehr stark
$\mu_r < 1$	$\mu_r > 1$	$\mu_r \gg 1$
Unabhängig von der Temperatur	Nimmt mit steigender Temperatur zu	Verswindet wenn $T > T_C$

Für Paramagnetismus ungepaarte Elektronen nötig → atomare Dipole. Paramagnetismus analog zu Orientierungspolarisation.

Diamagnetismus analog zu Verschiebungspolarisation.

FERROMAGNETISMUS

- Sättigungsmagnetisierung: Grösste Magnetisierung des Materials.
- Remanenzmagnetisierung: Verbleibende Magnetisierung nachdem das äussere Feld $B_0 = 0$.
- Koerzitivfeld: Gegengerichtetes Feld das nötig ist um die Remanenzmagnetisierung aufzuheben.
- Curietemperatur: Temperatur bei der ein Material seine ferromagnetischen Eigenschaften verliert.

5.12 MAGNETISCHE INDUKTION

- Spannung \propto Fläche der Schleife.
- Spannung \propto Magnetfeldstärke.

- Vorzeichen der Spannung wechselt mit Vorzeichen des Magnetfeldes.
- Spannung \propto Geschwindigkeit der Änderung des Magnetfeldes oder der Fläche.

5.13 FARADAY’SCHES INDUKTIONSGESETZ

$$U = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = -d\vec{\Phi}_M dt \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

5.14 LENZ’SCHES REGEL

Die induzierte Spannung und der induzierte Strom sind so gerichtet, dass sie eine der Ursache entgegengerichtete Wirkung erzielen.

5.15 WIRBELSTRÖME

Wird ein elektrischer Leiter in einem inhomogenen Magnetfeld bewegt, so ändert sich der magnetische Fluss und es werden lokal Ströme induziert.

Wirbelstromverluste nehmen zu mit der:

- Geschwindigkeit, mit der der Leiter bewegt wird.
- Stärke des Magnetfeldes.
- Dicke des Leiters.
- Leitfähigkeit des Leiters.

5.16 INDUKTIVITÄT

$$L = \frac{\phi_M}{I} = \frac{1}{l} \int_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \quad [L] = 1 Henry = 1 H = 1 T m^2 / A$$

$$I(t) = I_0 \frac{t}{T} \qquad U(t) = L \frac{dI}{dt} = \frac{LI_0}{T}$$

$$E_{magn} = \int_0^T P(t) dt = \int_0^T U(t) I(t) dt = \int_0^T \frac{LI_0^2 t}{T^2} dt = \frac{1}{2} LI_0^2$$

für Zylinderspule $E_{magn} = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2}{2l} I_0^2$

Energiedichte $\omega = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$

5.17 MAXWELL’SCHES GLEICHUNGEN

1	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$	$\oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$
2	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$	$\oint_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 0$
3	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}(\vec{r})}{dt}$	$\oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{L} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$
4	$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}(\vec{r})}{dt}$	$\oint_L \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{L} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$

1. **Gesetz von Gauss:** Quellen des elektrischen Feldes sind Ladungen.
2. **Gesetz von Gauss für Magnetfelder:** Magnetfeld ist quellenfrei, es gibt keine magnetischen Monopole.
3. **Faraday’sches Induktionsgesetz:** Zeitliche Änderung des Magnetfeldes führt zu elektrischem Wirbelfeld.
4. **Erweitertes Durchflutungsgesetz:** Elektrische Ströme führen zu einem magnetischen Wirbelfeld.

5.17.1 IDENTITÄT

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

5.18 MAXWELL’SCHER VERSCHIEBUNGSSSTROM

$$I_V = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

5.19 ELEKTROMAGNETISCHES NAHFELD

Gilt für nahezu statische Felder und kurze Distanzen. Beiträge der Ladung und des Stromes dominieren.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \approx \mu_0 \vec{j}$$

5.20 ELEKTROMAGNETISCHES FERNFELD

Gilt für hochfrequente Felder und grosse Distanzen. Beiträge der Ableitungen von Elektrischem Feld und Magnetfeld dominieren.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d\vec{B}(\vec{r})}{dt} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \approx \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}(\vec{r})}{dt}$$

5.21 ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \qquad c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Elektromagnetische Wellen (Licht) sind die Fernwirkung beschleunigter Ladungen.

Das elektrische Feld und das Magnetfeld einer elektromagnetischen Welle stehen senkrecht aufeinander, und sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

5.22 POYNTING VEKTOR

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}$$

Der Betrag des Poynting Vektors entspricht der Leistungsdichte, die durch die elektromagnetische Welle transportiert wird.

6 LICHT UND WELLEN

6.1 DIE EINDIMENSIONALE WELLE

$$\frac{d^2 \psi(x,t)}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 \psi(x,t)}{dx^2} \qquad \psi(x,t) = \psi(x-ct,0)$$

Wellengleichung der Seilwelle $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{T}{\mu} \frac{d^2 z}{dx^2} = c^2 \frac{d^2 z}{dx^2}$

mit $c = \sqrt{T/\mu}$ wobei $\mu = m/\Delta x$ und $T = \frac{F}{A}$

6.2 HARMONISCHE WELLEN

$$\Psi(x,t) = Re(\Psi_0 e^{i(\omega t - kx + \phi)}) = \Psi_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$$

Zeitgrößen	Ortsgrößen
Kreisfrequenz ω	Wellenvektor k
Frequenz $\nu = \omega/(2\pi)$	Wellenzahl $\tilde{\nu} = k/(2\pi)$
Periodendauer $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$	Wellenlänge $\lambda = 1/\tilde{\nu} = 2\pi/k$

$$k = \frac{\omega}{c} \qquad c = \lambda \nu \qquad \omega = 2\pi \nu \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$k \cdot \omega > 0 \rightarrow$ linkslaufend $k \cdot \omega < 0 \rightarrow$ rechtslaufend

6.3 SUPERPOSITIONSPRINZIP

Eine Summe von Wellenfunktionen sind ebenfalls Lösungen der Wellengleichung.

inverse Fourier-Transformation:

$$\Psi(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\omega) e^{i\phi(\omega)} e^{i\omega[t-x/c]} d\omega$$

6.4 SCHWEBUNG

$$\psi(\omega) = \psi_0 e^{i\omega_1 t} + \psi_0 e^{i\omega_2 t} = \psi_0 e^{i\bar{\omega}t} (e^{i\Delta\omega t} + e^{-i\Delta\omega t}) = \psi_0 e^{i\bar{\omega}t} 2\cos(\Delta\omega t)$$

$$\omega = 2\pi f \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Delta\omega = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}$$

Wichtig: Frequenz der Einhüllenden ist $\Delta\omega$ aber der Betrag der Schwingung moduliert mit $2 \cdot \Delta\omega$!

$$2 \cdot \Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \quad \text{Schwebungskreisfrequenz}$$

6.5 ENERGIE, LEISTUNG, INTENSITÄT (SEILWELLE)

$$w = \frac{E}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \psi_0^2 \omega^2$$

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{E}{\delta x} c = \frac{1}{2} \mu c \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu c \psi_0^2 \omega^2$$

Intensität

$$\text{1-dimensional:} \quad I = P \quad \text{3-dimensional:} \quad I = \frac{P}{A}$$

$$I \equiv |\psi|^2 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |\psi(x, t')|^2 dt' = \frac{1}{2} \psi_0^2$$

$$\text{mittlere Amplitude } \psi_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_0|$$

6.6 IMPEDANZ

Die Wellenimpedanz ist das Verhältnis von auslenkender Kraft zur Geschwindigkeit der Auslenkung. Sie ist eine Eigenschaft des Mediums und nicht der Welle.

$$Z = \frac{F_Z}{\left(\frac{dz}{dt}\right)} \stackrel{\text{Seilwelle}}{\approx} \frac{T}{c} = \sqrt{\mu T}$$

Ein Medium ist durch die Wellenimpedanz und die Wellengeschwindigkeit charakterisiert.

6.7 DISPERSION

$$c = c(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)}$$

Eine Welle im dispersiven Medium verändert ihre Form während der Ausbreitung.

$$\text{Phasengeschw.: } v_p = \frac{\omega}{k} \quad (\text{Geschwindigkeit des Wellenmaximums})$$

Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{d\omega}{dk} \approx v_p + k \frac{dv_p}{dk}$ Geschwindigkeit der Einhüllenden des Wellenpakets

6.8 ABSORPTION

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-x/\delta_e} e^{i(\omega t - kx + \phi)}$$

$$\delta_e = c\tau = \frac{2}{\alpha}$$

δ_e charakteristische Abfalldistanz

τ Abklingzeit

α Absorptionskoeffizient

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$$

Eine Welle mit Absorption zeigt gleichzeitig auch Dispersion, und umgekehrt.

7 DREIDIMENSIONALE WELLEN

$$\text{Ebene Welle } \psi(\vec{x}, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \phi)}$$

DREIDIMENSIONALE WELLENGLEICHUNG

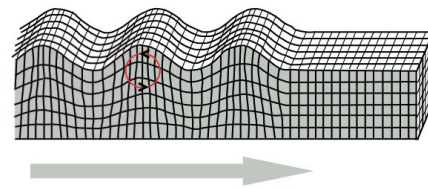
$$\frac{d^2 \psi(\vec{x}, t)}{dt^2} = c^2 \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t) = c^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \psi(\vec{x}, t)$$

$$\text{Kugelwelle: } \psi(\vec{x}, t) = \psi(r, t) = \frac{\psi_0}{\sqrt{4\pi r}} e^{i(\omega t - kr + \phi)}$$

TRANSVERSAL, LONGITUDINAL, RAYLEIGH

Ist die Amplitude einer Welle eine vektorielle Größe, so kann die Schwingungsrichtung parallel (Longitudinal) oder senkrecht (Transversal) zur Ausbreitungsrichtung sein.

Rayleigh Wave



7.1 WELLENAUSBREITUNG DURCH EINE GRENZFLÄCHE

$$\text{Reflexionskoeffizient } r = \frac{\psi_{0,B}}{\psi_{0,A}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \Delta\phi = \pi$$

$$\text{Transmissionskoeffizient } t = \frac{\psi_{0,C}}{\psi_{0,A}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = 1 + r$$

7.2 REFLEXION UND TRANSMISSION

B = Reflexion, C = Transmission

$$P_B = r^2 P_A$$

$$P_C = P_A - P_B$$

$$\text{Reflexionsgrad } R = \frac{P_B}{P_A} = r^2$$

$$\text{Transmissionsgrad } T = \frac{P_C}{P_A} = 1 - R$$

	Z_2	$\psi_{0,B}$	$\psi_{0,C}$	P
"Wand"	$Z_2 \rightarrow \infty$	$-\psi_{0,A}$	0	0%
"loses Ende"	$Z_2 \rightarrow 0$	$\psi_{0,A}$	$2\psi_{0,A}$	0%
Impedanzanpassung	$Z_2 = Z_1$	0	$\psi_{0,A}$	100%

7.3 STEHENDE WELLEN

$$\psi_A(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kx + \phi)} \quad \text{einfallende Welle}$$

einfallende Welle

$$\psi_B(x, t) = -\psi_0 e^{i(\omega t + kx + \phi)} \quad \text{reflektierte Welle}$$

reflektierte Welle

Realteil der Superposition: $2\psi_0 \sin(kx) \sin(\omega t + \phi)$

Bei einer stehenden Welle sind die zeitliche und die örtliche Schwingung voneinander separiert.

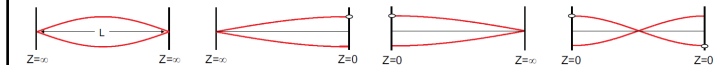
Eine stehende Welle ist eine Überlagerung einer stehenden und einer reflektierten Welle zwischen zwei Mediengrenzen (festes/loses Ende).

$$\text{Wellenlänge: } \lambda_{\text{gerade}} = \frac{2L}{n}$$

$$\lambda_{\text{ungerade}} = \frac{4L}{2n-1}$$

Frequenz aus: $f_n = \frac{c}{\lambda_n}$ für $n=1 \rightarrow$ Grundfrequenz.

Gerader Fall für zwei feste ($Z=\infty$) oder zwei lose ($Z=0$) Enden. Sonst ungerade.



7.4 AKUSTISCHE WELLEN

Auslenkung aus der Gleichgewichtslage: $s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$

$$\text{Schallschnelle: } v(x, t) = \frac{ds(x, t)}{dt} = v_0 \sin(\omega t - kx + \phi)$$

$$\text{Schalldruck: } p(x, t) = p_0 + \delta p_0 \sin(\omega t - kx + \phi)$$

$v_0 = -\omega s_0$ = Amplitude der Schallschnelle, δp_0 = Amplitude des Schalldrucks, p_0 = Gleichgewichtsdruck.

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -K \frac{d}{dt} \frac{dv}{dx} = -K \frac{d}{dx} \frac{dv}{dt} = \frac{K}{\rho} \frac{d^2 p}{dx^2}$$

$$\text{Kompressionsmodul: } K = -V \frac{dp}{dV} \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

In Gasen: $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$
Akustische Impedanz: $Z = \rho c = \sqrt{K\rho} = \frac{\delta p_0}{\nu_0}$
Schallintensität: $I = \frac{1}{2}\rho c \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho c \nu_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(\delta p_0)^2}{Z} \quad P = IA$
Schallpegel: $L = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ wobei $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \frac{W}{m^2}$

7.5 AKUSTISCHE IMPEDANZ IN ROHREN

$Z_a = \frac{Z}{A} = \frac{\sqrt{K\rho}}{\pi R^2}$
Resonanzfrequenz 2 gleiche Enden: $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}$
sonst: $f_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L}$

Ende	Z	δ_p	v
Geschlossen	$Z_a = \infty$	$ \delta_p = \delta_{p0}$	$v = 0$
Offen	$Z_a \approx Z/\lambda^2$	$\delta_p = 0$	$ v = v_0$

Intensität halbiert bei Rohrteilung: $\frac{\psi_0}{\sqrt{2}} = \psi_{halbe}$

7.6 DOPPLEREFFEKT

$f_E = f\left(\frac{c-\nu_E}{c-\nu_S}\right)$ Vom Empfänger wahrgenommene Frequenz.
 $\sin(\vartheta) = \frac{ct}{vst} = \frac{c}{\nu_S}$ halber Öffnungswinkel des machschen Kegels.

7.7 WELLENGLEICHUNG FÜR ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} \qquad \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{d^2 \vec{B}}{dx^2}$$
$$|\vec{B}| = |\vec{E}|/c_0 \qquad \vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{S} \qquad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Im Vakuum:
 $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x} + \phi)}$ $\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x} + \phi)}$
Impedanz: $Z = \frac{E_0}{H_0} = \frac{E_0}{B_0/\mu_0}$
Im Vakuum: $Z_0 = \mu_0 c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.37 \Omega$
Energiedichte: $\omega = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{B_0^2}{2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2$
Intensität: $I = \frac{1}{A} \frac{dE}{dt} = \frac{Ac}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$
Sichtbarer Lichtwellenbereich: 400 nm – 700 nm

Zeitgrößen	Ortsgrößen
Kreisfrequenz ω	Wellenvektor k
Frequenz $\nu = \omega/(2\pi)$	Wellenzahl $\tilde{\nu} = k/(2\pi)$
Periodendauer $T = 1/f = 2\pi/\omega$	Wellenlänge $\lambda = 1/\tilde{\nu} = 2\pi/k$

$$k = \frac{\omega}{c} \qquad c = \lambda \nu \qquad \omega = 2\pi \nu \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$k \cdot \omega > 0 \rightarrow \text{linksläufig} \qquad k \cdot \omega < 0 \rightarrow \text{rechtsläufig}$$

7.8 ELEKTROMAGNETISCHE KUGELWELLE

$$\vec{E}(r,t) = \frac{A_0}{r} \cdot \sin(kr - \omega t + \phi) = \frac{E_0}{\sqrt{4\pi r}} \sin(kr - \omega t)$$

Amplitude an der Stelle r: $E_0 = \frac{A_0}{r}$

$$I(r) = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c \left(\frac{A_0}{r}\right)^2$$
$$P_{tot} = A(r) \cdot I(r) = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{2} c \epsilon_0 \left(\frac{A_0}{r}\right)^2 = 2\pi \epsilon_0 c A_0^2$$

7.9 ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN IN MATERIE

In Materialien: Verzögerung und Absorption. Das elektrische Feld führt zu einer Polarisierung des Materials und es baut sich ein Gegenfeld auf.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c_0}{n} \qquad n = \frac{c_0}{c}$$

μ_r und ϵ_r nicht konstant bei hohen Frequenzen.

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = k_0 \cdot n$$

Optische Distanz: $\sum d \cdot n$

Impedanz: $Z = \mu c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0$
Für nichtmagnetische Materialien: $n \approx \sqrt{\epsilon_r} \qquad Z \approx \frac{Z_0}{n}$
für eine senkrecht einfallende elektromagnetische Welle:
 $R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2 \overset{\mu_1 \approx \mu_2}{\approx} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad T = 1 - R = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$

7.10 LAMBERT-BEER-GESETZ

Betrachten der Eindringtiefe d von Licht in eine Lösung mit einer zu bestimmenden Konzentration c.
 $I(d) = e^{-\alpha d} I_0$
 $E = -\log_{10}(e^{-\alpha d}) = \log_{10}(e) \alpha d \approx 0.434 \alpha d = \epsilon c d$ Lambert-Beer-Gesetz

Hier ist E der Extinktionskoeffizient und ϵ der molare Extinktionskoeffizient welcher charakteristisch für den gelösten Stoff ist.

7.11 KOMPLEXER BRECHUNGSINDEX

Reflexion an einer Metalloberfläche
 $\tilde{k} = k - i\alpha/2$ gedämpfte Welle: $E(x,t) = E_0 e^{i(\omega t - \tilde{k}x + \phi)}$
komplexer Brechungsindex: $\tilde{n} = \frac{\tilde{k}}{k_0} = n - i\frac{\alpha}{2k_0} = n - i\kappa$
Wobei n und κ der reelle und komplexe Anteil des komplexen Brechungsindexes und $k_0 = \omega/c_0$ der Wellenvektor im Vakuum sind.
komplexe Dielektrizitätskonstante: $\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_{r,1} + i\epsilon_{r,2}$
 $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r}$
 $n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\epsilon_{r,1}^2 + \epsilon_{r,2}^2} - \frac{1}{2}\epsilon_{r,1}\right)^{1/2}$
 $\kappa = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\epsilon_{r,1}^2 + \epsilon_{r,2}^2} + \frac{1}{2}\epsilon_{r,1}\right)^{1/2}$

7.12 REFLEXIONSGRAD BEI ABSORPTION

Medium 1 ohne Absorption ($\kappa_1 = 0$) und Medium 2 mit Absorption ($\kappa_2 > 0$).
 $R = \left|\frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2}\right|^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2 + \kappa_2^2}{(n_1 + n_2)^2 + \kappa_2^2}$

7.12.1 DIELEKTRIZITÄTSKONSTANTE

Für sehr tiefe Frequenz verschieben sich die Elektronen im Metall instantan, sodass das elektrische Feld vollständig kompensiert wird.
 $\epsilon_r(\omega) \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow 0$
Für sehr hohe Frequenz ändert das elektrische Feld so schnell, dass die Elektronen nicht folgen können.
 $\epsilon_r(\omega) \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow \infty$

7.13 EINDRINGTIEFE

$$\delta_e \approx \left(\frac{c_0^2}{\omega^2} \frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma}\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}\right)^{1/2}$$

7.14 REFLEXIONS- UND BRECHUNGSGESETZ

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2) \qquad \alpha_2 = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(\alpha_1)\right)$$

Beim Übergang von einem optisch dünneren zu einem optisch dichteren Medium wird der Strahl zum Lot hin gebrochen.

Prinzip von Huygens: Jeder Punkt einer bestehenden Lichtwelle produziert eine neue Kugelwelle. Alle Kugelwellen summieren sich zu einer neuen Lichtwelle zum späteren Zeitpunkt.

Prinzip von Fermat: Das Licht nimmt immer den schnellsten Weg, um von Punkt A zu Punkt B zu gelangen.

7.15 TOTALREFLEXION

$$\alpha_{1,c} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Beim Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium, kann Totalreflexion auftreten.

7.16 EVANESZENZ

Bei der Totalreflexion wird ein Teil der Welle transmittiert, der dann im Medium exponentiell abfällt. Trotzdem ist der Reflexionsgrad 100% und es tritt keine Absorption auf. Bei einer Tiefe von δ ist die Amplitude der Welle auf $1/e$ abgefallen.

$$\text{Eindringtiefe } \delta = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

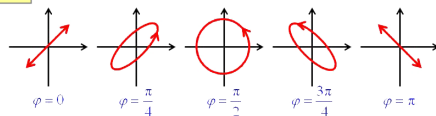
$$\text{Wellenlänge der einfallenden Welle } \lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}$$

7.17 POLARISATION

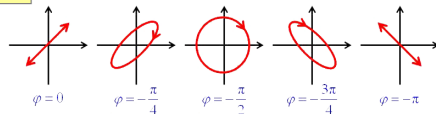
$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_{0,y} e^{i(\omega t - kx + \phi_y)} + \vec{E}_{0,z} e^{i(\omega t - kx + \phi_z)}$$

Polarisiertes Licht kann als Superposition von zwei Basiswellen dargestellt werden. Es wird charakterisiert durch die Phasendifferenz $\delta\phi = \phi_y - \phi_z$ und die beiden Amplituden.

$\varphi \geq 0$:



$\varphi \leq 0$:



Lineare Polarisation: $\delta\phi = n\pi \rightarrow \vec{E}$ immer in derselben Ebene.

Zirkularpolarisation: $\delta\phi = (n + \frac{1}{2})\pi \rightarrow \vec{E}$ rotiert in der yz-Ebene und beschreibt einen Kreis.

Rechtsdrehend: $\delta\phi = \pi/2$ Linksdrehend: $\delta\phi = -\pi/2$

Sonst: Elliptische Polarisation als Superposition von linear und zirkular polarisierten Wellen.

7.18 ERZEUGUNG LINEAR POLARISIERTEN LICHTS

Absorption: Polarisationsfolie mit parallel verlaufenden Molekülketten. Parallel verlaufendes Feld induziert Ströme. Energie wird absorbiert. Senkrecht dazu Transmissionsachse. Transmittierte Intensität: $I_1 = I_0 \cos^2(45) = \frac{1}{2} I_0$

Malus'sches Gesetz zur Transmission polarisierten Lichts durch um Θ gedrehten Polarisator: $I_2 = I_1 \cos^2(\Theta)$

Reflexion: Mediengrenze mit n_1 und n_2 . Beim Brewster Winkel $\tan(\theta_p) = \frac{n_2}{n_1}$ ist die Reflexion rein p-polarisiert.

Streuung: Absorption und anschließende Reflexion an einem einzelnen Teilchen.

Doppelbrechung: (siehe Kapitel Doppelbrechung)

7.19 REFLEXION UND TRANSMISSION MIT WINKEL

horizontal - parallel zur Mediengrenze - s-polarisiert

vertikal - senkrecht zur Mediengrenze - p-polarisiert

$$R_s = \left(\frac{\cos \alpha_1 - \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1 + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \alpha_1}} \right)^2 \quad Z_{1s,2s} = \frac{Z_0}{n_{1,2} \cos(\alpha_{1,2})}$$

$$R_p = \left(\frac{\sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \alpha_1} - (n_2/n_1)^2 \cos \alpha_1}{\sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \alpha_1} + (n_2/n_1)^2 \cos \alpha_1} \right)^2 \quad Z_{1p,2p} = \frac{Z_0 \cos(\alpha_{1,2})}{n_{1,2}}$$

Wobei 1 für einfallende Welle und 2 für transmittierte Welle.

$$R_s + nT_s = 1$$

$$R_p + nT_p = 1$$

Brewsterwinkel: Die reflektierte Welle ist komplett s-polarisiert $\rightarrow R_p = 0$.

$$\alpha_{1,B} = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

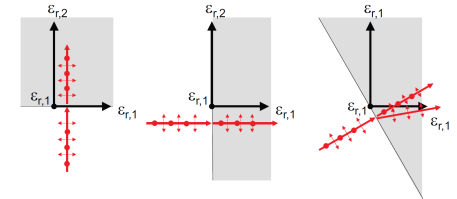
7.20 DOPPELBRECHUNG

Optisch anisotropes Material $\rightarrow n, c, \epsilon_r$ hängen von Richtung und Polarisation des eintretenden Lichts ab \rightarrow Aufspaltung in o-Strahl und ao-Strahl. (p- und s-Anteile erfahren verschiedene ϵ_r !) Richtung in der o und ao gleiche Geschwindigkeit haben \rightarrow optische Achse.

o - ordentlich, ao - ausserordentlich

Dann gibt es 3 Fälle:

- Parallel zur optischen Achse keine Anomalitäten.
- Senkrecht zur optischen Achse: o und ao sind parallel aber verschieden schnell \rightarrow Änderung der Polarisation. Bsp.: $\lambda_{\frac{1}{4}}$ -Plättchen bewirkt Änderung von Linear zu Zirkular.
- Doppelbrechung bei allen anderen Winkeln. o-Strahl wird transmittiert und ao-Strahl gebrochen.



7.21 OPTISCHE AKTIVITÄT

Hintereinanderreihung von n Polarisatoren mit infinitesimal kleiner Verdrehung von β/n bewirkt eine verlustfreie Drehung eines Lichtstrahls um β .

7.22 KOHÄRENZ

Zwei Wellen, deren Phasendifferenz an jedem Ort und zu jeder Zeit gleich ist, sind kohärent.

Kohärenzlänge: Distanz nach der die Differenz zwischen Interferenzmaximum- und minimum auf ca. 37% abgefallen ist.

7.23 INTERFERENZ

$$\Psi_A(x, t) = \Psi_{0,A} e^{i(\omega t - kx + \Psi_A)} \quad \Psi_B(x, t) = \Psi_{0,B} e^{i(\omega t - kx + \Psi_B)}$$

$\Psi(x, t)$ ist die Superposition von Ψ_A und Ψ_B

$$\text{mit } \bar{\Psi} = \frac{1}{2}(\Psi_{0,A} + \Psi_{0,B}) \text{ und } \Delta\Psi = \frac{1}{2}(\Psi_{0,A} - \Psi_{0,B})$$

$$\text{wie auch } \bar{\phi} = \frac{1}{2}(\phi_A + \phi_B) \text{ und } \Delta\phi = \frac{1}{2}(\phi_A - \phi_B)$$

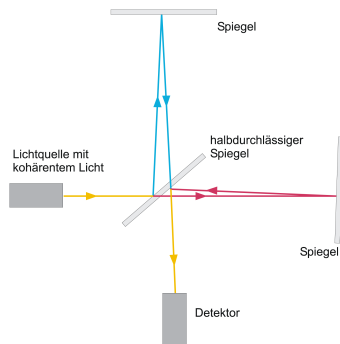
$$\Re(\Psi(x, t)) = 2 \cos(\Delta\phi) \bar{\Psi} \cos(\omega t - kx + \bar{\phi}) - 2 \sin(\Delta\phi) \Delta\phi \sin(\omega t - kx + \bar{\phi})$$

$$\text{für } (\Psi_{0,A} = \Psi_{0,B} = \Psi_0): \quad \Psi(x, t) = 2 \cos(\Delta\phi) \Psi_0 e^{i(\omega t - kx + \bar{\phi})}$$

$$\text{Intensität: } I = \frac{1}{2} \Psi_0^2 4 \cos^2(\Delta\phi)$$

- $\Delta\phi = n\pi$ konstruktive Interferenz
- $\Delta\phi = (n + \frac{1}{2})\pi$ destruktive Interferenz

7.24 MICHELSON-INTERFEROMETER



Licht wird mit halbdurchlässigem Spiegel aufgeteilt, legt einen unterschiedlichen Weg zurück und wird dann wieder zusammengeführt → Interferenz.

$$\Psi_A(x) = \frac{1}{2} \Psi_0 e^{-ik(2d+x)} \quad \text{Welle via 1. Spiegel}$$

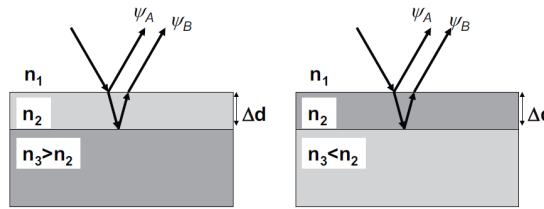
$$\Psi_B(x) = \frac{1}{2} \Psi_0 e^{-ik(2d+2\Delta d+x)} \quad \text{Welle via 2. Spiegel}$$

$$\text{Überlagerung:} \quad \frac{1}{2} \Psi_0 e^{-ik(2d+x)} (1 + e^{-ik2\Delta d})$$

$$I = I_0 \cos^2(k\Delta d)$$

Der Abstand zwischen 2 Intensitätsmaxima ist $\lambda/2$.

7.25 INTERFERENZ AN DÜNNEN FILMEN



- Eintreffende Welle erfährt Phasensprung bei Reflexion.
- k_i abhängig vom Medium! $\lambda_{\text{Materie}} = \frac{\lambda_0}{n}$ $k_{\text{Materie}} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$

$$\Psi_A(x) = -\Psi_0 e^{-ik_1 x}$$

$$\Psi_B(x) = -\Psi_0 e^{-i(k_1 x + k_2 2\Delta d)}$$

für $n_3 > n_2$

$$\Psi_{B'}(x) = -\Psi_0 e^{-i(k_1 x + k_2 2\Delta d)}$$

für $n_3 < n_2$

Überlagerung:

$$\Psi(x) = -\Psi_0 e^{-ik_1 x} (1 + e^{-ik_2 2\Delta d})$$

für $n_3 > n_2$

$$\Psi(x) = -\Psi_0 e^{-ik_1 x} (1 - e^{-ik_2 2\Delta d})$$

für $n_3 < n_2$

Intensität:

$$I = \frac{1}{2} \Psi_0 [2 + 2 \cos(k_2 2\Delta d)] \propto \cos^2(k_2 \Delta d)$$

für $n_3 > n_2$

$$I = \frac{1}{2} \Psi_0 [2 - 2 \cos(k_2 2\Delta d)] \propto \sin^2(k_2 \Delta d)$$

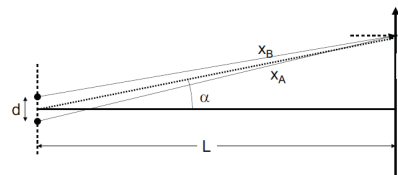
für $n_3 < n_2$

Konstruktive Interferenz bei:

$$\Delta d = n \frac{\lambda_2}{2}$$

$$\Delta d' = (n - \frac{1}{2}) \frac{\lambda_2}{2}$$

7.26 INTERFERENZ AM DOPPELSPALT



$L \gg d \rightarrow$ Strahlen nahezu parallel. $I(\alpha) =$

$$4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)\right)$$

$$\sin(\alpha_{\max}) = \pm n \frac{\lambda}{b} \quad \sin(\alpha_{\min}) = \pm \frac{2n+1}{2} \frac{\lambda}{b} \quad n \in \mathbb{N}$$

7.27 INTERFERENZ AN N SPALTEN

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2([N\pi d/\lambda] \sin(\alpha))}{\sin^2([\pi d/\lambda] \sin(\alpha))}$$

mit I_0 = Intensität pro Spalt.

Für das zentrale Maximum: $I(\alpha) \approx I_0 N^2$

7.28 BEUGUNG AM SPALT

Streuung einer ebenen Welle am Spalt mit Breite b .

$$I(\alpha) = I_{\text{tot}} \frac{\sin^2([b\pi/\lambda] \sin(\alpha))}{([b\pi/\lambda] \sin(\alpha))^2}$$

$$\sin(\alpha_{\max}) = \pm \frac{2n+1}{2} \frac{\lambda}{b} \quad \sin(\alpha_{\min}) = \pm n \frac{\lambda}{b} \quad n \in \mathbb{N}$$

7.29 BEUGUNG AM MEHRFACHSPALT

$$I(\alpha) = I_{\text{tot}} \underbrace{\frac{\sin^2([b\pi/\lambda] \sin(\alpha))}{([b\pi/\lambda] \sin(\alpha))^2}}_{\text{Beugung}} \underbrace{\frac{\sin^2([N\pi d/\lambda] \sin(\alpha))}{\sin^2([\pi d/\lambda] \sin(\alpha))}}_{\text{Interferenz}}$$

7.30 BEUGUNG AN EINER ALLGEMEINEN BLENDE

Allgemeine Blende bei $x = 0$ mit Elementarwellen auf der Blendenfläche an den Stellen $\vec{r}' = (0, y', z')$ mit Schirm in grossem Abstand $x=L$.

$$\Psi(\vec{r}) = \int_A \frac{\Psi_0}{\sqrt{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}} e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} dx' dy' \quad \text{Integral über die Fläche der Blende } A.$$

$$\text{Vereinfacht: } \Psi(y, z) = \frac{\Psi_0}{\sqrt{4\pi R}} e^{ikR} \int_A e^{i(k_y y' + k_z z')} dy' dz'$$

$$R = \sqrt{L^2 + y^2 + z^2} \text{ und } k_y = ky/R$$

$$I(y, z) = \frac{I_{\text{tot}}}{4\pi R^2} \left| \int_A dy' dz' e^{i(k_y y' + k_z z')} \right|^2$$

→ Das Beugungsbild ist durch die räumliche Fouriertransformation der Blende gegeben. Daher kann man aus dem Beugungsbild Rückschlüsse auf die Form der Blende ziehen.

7.31 BEUGUNG AN DER LOCHBLENDE

$$I(\alpha) = I_{\text{tot}} \left(\frac{2J_1([2\pi R/\lambda] \sin(\alpha))}{[2\pi R/\lambda] \sin(\alpha)} \right)^2$$

mit $R = D/2$ Radius des Lochs

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin\phi) d\phi$$

$$\sin(\alpha_{\min}) = n \frac{\lambda}{2R} \quad \text{mit } n = 1.22, 2.23, 3.24, \dots$$

7.32 AUFLÖSUNGSVERMÖGEN

$$\sin(\alpha_{\min}) = 1.22 \frac{\lambda}{D} \stackrel{\lambda \ll D}{\approx} \alpha_{\min} \approx \frac{\lambda}{L} \quad \text{Rayleigh-Kriterium}$$

8 WELLE-TEILCHEN DUALISMUS

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4.136 \text{ eV/Hz}$$

8.1 DAS PHOTON

Die Amplitude der elektromagnetischen Welle kann nur diskrete Werte annehmen.

Das Photon: Lichtquant, hat Energie und Impuls, verhält sich also wie ein Teilchen.

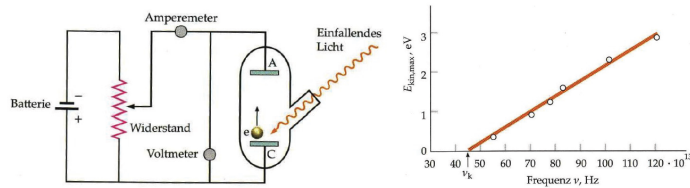
Die kinetische Energie des Photons hängt nur vom der Frequenz und nicht von der Intensität ab.

Lichtenergie eines Photons mit Frequenz ν : $E = h\nu$

8.1.1 PHOTOELEKTRISCHER EFFEKT

Elektronen treten unter Lichteinfall aus der Metallplatte aus. Durch erhöhung des Feldes kann die kinetische Energie der Elektronen gemessen werden.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m_e v_e^2 = h\nu - W_{aus} = h\nu - e\phi_{aus}$$



8.1.2 STRAHLUNGSDRUCK / IMPULS

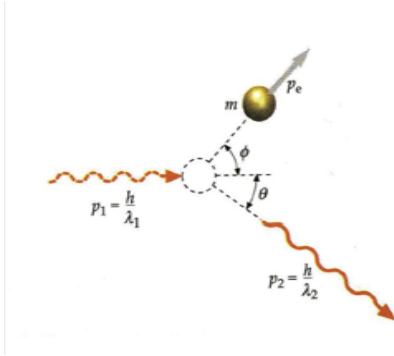
$$P = \frac{I}{c} \quad I = \frac{P}{A} = \frac{E\dot{N}}{A} \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \dot{N}p$$

- E = Energie pro Photon
- A = Fläche
- \dot{N} = Anzahl Photonen pro Sekunde
- F bei Reflexion doppelt so gross wie bei Absorption

Relativistische Energie eines Teilchens:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2} \quad (m \rightarrow 0) \Rightarrow E = pc$$

8.2 COMPTON-EFFEKT



$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = pc = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E_{kin,2} = c(p_1 - p_2)$$

$$\cos^{-1}\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{Compton}}\right)$$

Es gilt Impulserhaltung: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e$

$$\rightarrow p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(\theta)$$

und Energieerhaltung: $E_1 + E_{e,1} = E_2 + E_{e,2}$

$$\rightarrow p_1 c + m_e c^2 = p_2 c + \sqrt{(p_e^2 c^2 + (m_e c^2)^2)}$$

$$\rightarrow p_1 c + m_e c^2 = p_2 c + \sqrt{(p_e^2 c^2 + (m_e c^2)^2)}$$

$$\rightarrow p_e^2 = p_1^2 - 2p_1 p_2 + p_2^2 + 2(p_1 - p_2)m_e c$$

aus Impuls und Energie:

$$\frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2} = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{1 + E_1 / (m_e c^2) \cdot (1 - \cos(\theta))}$$

8.2.1 SPEZIALFALL $\Theta = 180^\circ$

$$p_1 = \frac{E_{kin,e} \pm \sqrt{E_{kin,e}^2 + 2c^2 m_e E_{kin,e}}}{2c}$$

8.2.2 COMPTON-WELLENLÄNGE

$$\lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e c}$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_{Compton} (1 - \cos(\theta))$$

für den Fall das $\theta = 90^\circ$:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{1 + E_1 / (m_e c^2)}$$

9 MATERIALWELLEN (QM)

$$\text{De Broglie Frequenz: } \nu = \frac{E_{kin}}{h}$$

$$\text{De Broglie Wellenlänge: } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} = \frac{h}{mv}$$

WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE

$$P(x) = |\psi(x)|^2 \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\langle a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) a(x) \psi(x) dx \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x) dx$$

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\Psi(x, t) = \psi \cdot e^{i\Theta} \rightarrow |\Psi|^2 = e^{-i\Theta} \psi^* \cdot e^{i\Theta} \psi = \psi^* \psi = |\psi|^2$$

ENERGIE UND IMPULS

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

HEISENBERG'SCHE UNSCHÄRFERELATION

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\sigma_E \sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\sigma_x = c \sigma_t$$

$$\sigma_p = \sigma_E / c$$

9.0.1 IMPULSUNSCHÄRFE \leftrightarrow WELLENLÄNGENUNSCHÄRFE

$$\lambda = \lambda + \Delta\lambda$$

$$p = p + \Delta p$$

$$p + \Delta p = \frac{h}{\lambda + \Delta\lambda} \rightarrow \Delta p = \frac{h}{\lambda + \Delta\lambda} - \frac{h}{\lambda} = h \frac{\lambda - \lambda + \Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} = p \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

SCHRÖDINGERGLEICHUNG

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + E_{pot}(x, t) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + E_{pot}(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

$$3D: -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + E_{pot} \psi = E \psi$$

DAS TEILCHEN IM KASTEN

$$E_{pot} = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 < x < L \\ \infty & \end{cases}$$

$$\text{Schrödingergleichung im Kasten: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E \psi(x)$$

$$\text{Ansatz: } \psi(x) = \psi_{0,A} \sin(kx) + \psi_{0,B} \cos(kx)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\text{Randbedingungen: } \psi(0) = 0 \quad \psi(L) = 0$$

$$\Rightarrow \psi_{0,B} = 0 \Rightarrow k_n = \frac{\pi}{L} n$$

$$\text{Normierung führt zu: } \psi_{0,A} = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Energie im Grundzustand $E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$

Ein gebundenes Teilchen kann sich nur in bestimmten Zuständen mit einer bestimmten Energie befinden.

HARMONISCHER OSZILLATOR

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

$$\Psi = A_0 e^{-ax^2} \quad a = \frac{m\omega_0}{2\hbar}$$

$$\langle E_{pot} \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2 \rangle \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

Mittlere kinetische Energie entspricht mittlerer potentieller Energie: $\langle E_{pot} \rangle = \langle E_{kin} \rangle$

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \quad \langle p^2 \rangle = \frac{1}{2}\hbar m\omega_0$$

$$\text{Federkonstante } k_f = \mu\omega_0^2 \quad \mu = \frac{m_H^2}{2m_H} \quad \Delta E = \hbar\omega_0$$

10 ATOMPHYSIK

10.1 BOHR'SCHES ATOMMODEL

Schwerer Atomkern, der von leichten Elektronen umkreist wird.

$$\text{Energie eines Elektrons auf seiner Kreisbahn: } E = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$\text{Radius abhängig von Zustand des Elektrons: } r_n = a_0 n^2$$

BOHR'SCHE POSTULATE

1. Die Elektronen können sich nur in bestimmten Umlaufbahnen aufhalten. Die Länge einer Umlaufbahn muss genau einem Vielfachen der de Broglie Wellenlänge entsprechen.
2. Die Umlaufbewegung erfolgt ohne Energieverlust (strahlungsfrei).

3. Wechselt das Elektron zwischen zwei Bahnen, so wird die Energie von aussen aufgenommen oder nach aussen abgegeben. Dabei gilt Energierhaltung.

$$\text{De Broglie: } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}$$

$$\text{Elektronenradien: } r_n = \frac{n}{2\pi} \lambda$$

$$\text{Elektronendrehimpuls: } L_n = n\hbar$$

10.2 ENERGIELEVELS VON EINELEKTRONATOMEN

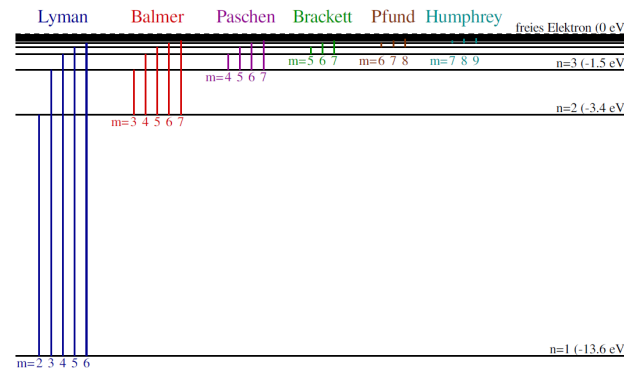
$$\text{Bohrradius: } a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = 0.0529 \text{ nm} \quad r_n = \frac{n^2}{Z} a_0$$

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -hcR_\infty = -13.6 \text{ eV} \quad E_n = \frac{Z^2}{n^2} E_1$$

(Kernladungszahl $Z = 1$)

$$E_m - E_n = -hcR_\infty Z^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{für IE: } m = \infty$$

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} = 10.973 \, 731 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$



10.3 WELLENGLEICHUNG DES EINELEKTRONENATOMS

Schrödingergleichung in 3D, polarkoordinaten liefert für das Coulombpotential $E_{pot} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ des positiv geladenen Atomkerns die Lösungen:

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \psi) = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}}_{\text{Normierung}} \cdot \underbrace{e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)}_{\text{radial}} \cdot \underbrace{Y_l^{m_l}(\theta, \psi)}_{\text{winkelabh.}}$$

$$\text{mit: } \rho = \frac{2Zr}{na_0} \text{ und } [n, l, m_l \text{ (Quantenzahlen)}]$$

$$E_{n,l,m_l} = E_n = \frac{Z^2}{n^2} E_1$$

	Radiale Quantenzahl	Drehimpuls- quantenzahl	Magnetische Quantenzahl
Symbol	n	l	m_l
Koord.	r	θ	ϕ
Grösse	$E_n = \frac{Z^2}{n^2}$	$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$	$L_z = m_l \hbar$
	Kn+1	Kn-Eb	Lage der Kn-Eb

10.3.1 RADIALE QUANTENZAHL

Bestimmt die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem bestimmten Abstand vom Kern vorzufinden. Anzahl der Knoten in der Wellenfunktion $= n - 1$.

10.3.2 MAGNETISCHE QUANTENZAHL

Gibt die Komponente des Drehimpulses entlang einer Richtung (z.b. z) an. Kreisbewegung des Elektrons \rightarrow magnetischer Dipol mit $\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$ und $\vec{m}_z = -\mu_B m_l$.

$$\mu_B = 9.274 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$$

10.4 SPIN

$$S = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar \quad S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2}\hbar$$

magnetischer Dipol des Elektrons in z: $m_z = -g_e \mu_B m_s$

$$g_e \approx 2.002$$

10.5 PAULIPRINZIP

Zwei identische Teilchen mit halbzahligem Spin s können nie in allen Quantenzahlen übereinstimmen.

\rightarrow Es fallen nicht alle Elektronen in den Grundzustand wie man aus dem Energieminimumprinzip annehmen würde.

11 ABSORPTION UND EMISSION

11.1 ATOMSPEKTREN

$$E_2 - E_1 = E_p = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Rydbergformel für Einelektronatome: $\frac{1}{\lambda} = R_H Z^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$

für Wasserstoffähnliche Atome

$$R_H = \frac{E_1}{hc} = 1.10 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

11.2 EINSTEIN'SCHE KOEFFIZIENTEN

- Absorption: Übergang eines Elektrons zu höherer Energie.
- Spontane Emission: Elektron emittiert spontan ein Photon geht über zu tieferer Energie.
- Stimulierte Emission: Einfallendes Photon induziert Übergang des Elektrons zu tieferer Energie und löst ein weiteres Photon.

Anzahl Atome N: $\begin{cases} N_1: \text{Anzahl Atome auf } E_1 \\ N_2: \text{Anzahl Atome auf } E_2 \end{cases}$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -\rho(\nu)B_{12}N_1 + \rho(\nu)B_{21}N_2 + A_{21}N_2$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = +\underbrace{\rho(\nu)B_{12}N_1}_{\text{Absorption}} - \underbrace{\rho(\nu)B_{21}N_2}_{\text{stim.Emission}} - \underbrace{A_{21}N_2}_{\text{spont.Emission}}$$

$$N_2 = N_1 \frac{B_{21}\rho(E)}{B_{21}\rho(E) + A_{21}} \Rightarrow N_2 < N_1 \rightarrow \text{No LASER!}$$

$$B_{21} = B_{12} \quad [B_{12}] = \text{J}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad [A_{21}] = \text{s}^{-1}$$

$$\rho(\nu) = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}(\nu)|^2 \quad \rho(\nu) \propto N_p$$

wobei $\vec{E}(\nu)$ Amplitude des Elektrischen Felds mit Frequenz ν und N_p Anzahl Photonen.

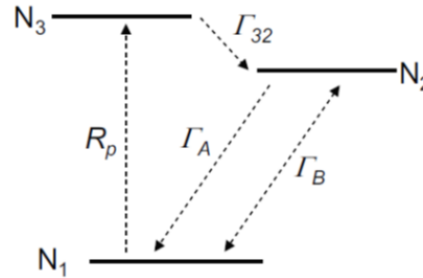
11.3 GRUNDPRINZIP DES LASERS

Auffüllen des oberen Energieniveaus mit Elektronen und anschließende stimulierte Emission führt zu Kettenreaktion. (Laserblitz)

Besetzungsinversion: Das obere Energieniveau muss mehr Elektronen enthalten als das Untere. **Nur für 3 oder mehr Niveaus realisierbar**, für 2-Niveau-System $N_2 \leq \frac{1}{2} \rightarrow$ keine Kettenreaktion.

Für den **Dreinevelaser**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} &= +\Gamma_B N_p (N_2 - N_1) + \Gamma_A N_2 - R_p N_1 \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} &= -\Gamma_B N_p (N_2 - N_1) - \Gamma_A N_2 + \Gamma_{32} N_3 \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} &= R_p N_1 - \Gamma_{32} N_3 \end{aligned}$$



$$\text{Gleichgewicht: } \frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{\partial N_3}{\partial t} = 0$$

$$\Gamma_{32} \gg R_p \Rightarrow N_3 \approx 0 \quad \Delta N = N_2 - N_1$$

$$\rightarrow \frac{\partial \Delta N}{\partial t} = -2\Gamma_B N_p \Delta N - \Gamma_A (N + \Delta N) + R_p (N - \Delta N) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\Delta N}{N} = \frac{R_p - \Gamma_A}{2\Gamma_B N_p + R_p + \Gamma_A} > 0 \rightarrow \text{Inversion!}$$

11.3.1 PHOTONENVERLUSTRATE

$$\frac{\partial N_p}{\partial t} = \Gamma_B (N_2 - N_1) N_p + \Gamma_A N_2 - R_{leak} N_p$$

$$R_{leak} = \frac{c}{2nL} (1 - R_2)$$

$$\Gamma_B = \frac{1}{M \Delta \nu \tau} \quad M = V 8\pi \frac{\nu^2}{n^3}$$

$$t_0 = \frac{1}{R_{leak}}$$

$$N_2 - N_1 > \frac{1}{\Gamma_B \cdot t_0} \quad \text{Besetzungsinversion}$$

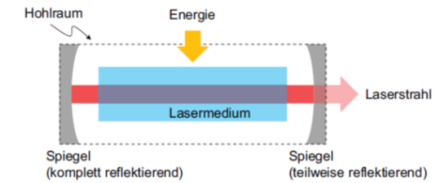
- L = Länge zwischen Spiegeln
- n = Brechungsindex des Lasermediums
- R₂ = Reflexionsgrad des Austrittsspiegels
- t₀ = Photonenlebensdauer
- τ = Lebensdauer des Elektrons im Niveau 2

11.3.2 EIGENSCHAFTEN

- **Kohärenz:** Alle Photonen haben dieselbe Wellenlänge, Frequenz und Phase.

- **Polarisation:** Alle Photonen haben dieselbe Polarisation

11.3.3 AUFBAU



- **Pumpmechanismus** Liefert die Energie → hebt Elektronen im Lasermedium auf ein höheres Energieniveau. (Blitzlichtlampe, chemische Reaktion, elektrische Energie, andere Laser)
- **Lasermedium** Im Lasermedium findet die stimulierte Emission statt. Kriterien sind: effiziente stimulierte Emission, schwache spontane Emission und die gewünschte Wellenlänge des Lasers.
- **Laserhohlraum** Ein resonanter Hohlraum reflektiert das Licht kontinuierlich, so dass die stimulierte Emission verstärkt wird. (N_p steigt an) Optimalerweise ist die Länge des Hohlraums ein vielfaches der halben Wellenlänge des Laserlichts → stehende Wellen.

Gaslaser	Zwei Gase: Eines dient als Pumpmedium, das andere als Lasermedium.
Feststofflaser	Ähnlich wie Gaslaser, aber das Pump- und Lasermedium sind Feststoffe.
Dye-Laser	Organische Moleküle als Pump- und Lasermedium.
Faserlaser	Feststofflaser in einer Glasfaser, Faser als Lasercavity.
Chemische Laser	Populationsinversion wird durch kontinuierliche chemische Reaktionen aufrechterhalten.

Halbleiterlaser Halbleiterdiode, in einer Lasercavity eingebettet. Diode wird elektrisch angeregt.

Free Elec- Freie Elektronen,auf relativistische Energien
tron Laser beschleunigt, als Pump- und Lasermedium.
(FEL)

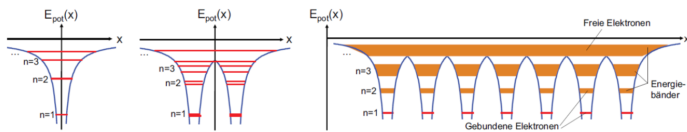
MASER Analog zur Laseremission im Mikrowellenbereich.

12 FESTKÖRPERPHYSIK

12.1 BÄNDERMODELL

Was passiert wenn man Atome einander annähert?

- Reihenfolge der Energieniveaus bleibt erhalten, da sie für einzelne Atome weit aus einander liegen.
- Bei Annäherung von 2 Atomen geringfügige Verschiebung der ursprünglich identischen zu zwei Neuen. Leicht höher/tiefer als Orgninalniveaus.
- Bei Annäherung von N Atomen spaltet sich ein gegebenes Niveau zu N leicht unterschiedlichen auf → Energieband.
- Je höher Orginalniveau desto breiter entstehendes Energieband.



12.1.1 GEBUNDENE UND FREIE ELEKTRONEN

- Tiefere Energiebänder haben eine geringe Aufspaltung, sind fast vollständig am Atom lokalisiert.
- Höhere Energiebänder sind stark aufgespalten und die Elektronen können sich fast frei über den Festkörper bewegen. Die Kernladung wird durch die gebundenen Elektronen abgeschirmt.

12.2 FERMIENERGIE

Die Fermienergie E_F ist die Energie des höchsten besetzten Energieniveaus, relativ zum tiefsten besetzten Niveau E_1

Hat ein Festkörper M Elektronen sind $M/2$ Niveaus besetzt, da jedes Niveau nach Pauli 2 Elektronen aufnehmen kann.

12.2.1 FERMIENERGIE 1D/2D/3D POTENTIALBRUNNEN

1D	2D	3D
$E_{n_x} = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$	$E_{n_{x,y}} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m}$	$E_{n_{x,y,z}} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m}$
$k_F = k_x$	$k_F = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$	$k_F = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$
$V_1 = \frac{\pi}{L_x}$	$V_2 = \frac{\pi^2}{L_x L_y}$	$V_3 = \frac{\pi^3}{L_x L_y L_z}$
$V_{tot,1} = k_F$	$V_{tot,2} = \frac{1}{4} k_F^2 \pi$	$V_{tot,3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} k_F^3 \pi$
$k = \frac{N\pi}{L}$	$n = \frac{M}{L(D)}$	$N = \frac{M}{2}$
$V_{tot,D} = V_D N = V_D \frac{M}{2}$	$L_i = L$	$\rightarrow E_F(k_F) = ?$
	$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$	
$E_{F,1} = \frac{\hbar^2 n^2}{32m_e}$	$E_{F,2} = \frac{\hbar^2 n}{4\pi m_e}$	$E_{F,3} = \frac{\hbar^2}{8m_e} \cdot \frac{3n}{\pi}^{2/3}$

12.2.2 ZUSTANDSDICHTE

$g(E) = \frac{\partial n(E)}{\partial E}$ $n_E \propto g(E_F) = \left. \frac{\partial n(E)}{\partial E} \right|_{E_F}$

Die Zustandsdichte ausgewertet bei E_F gibt die Anzahl Zustände wieder, die sich im Intervall $[E_F, E_F + dE]$ befinden.

FERMI-DIRAC VERTEILUNG

Gemäss dem Pauliprinzip sind alle Energieniveaus mit $E \leq E_F$ besetzt. Entsprechende Besetzungswahrscheinlichkeit:

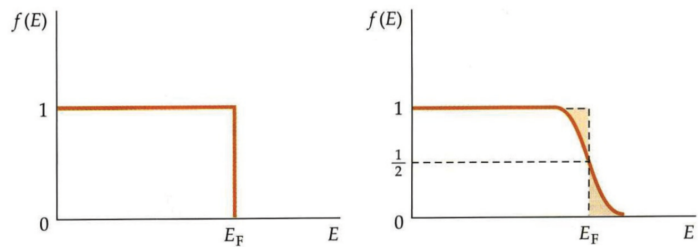
$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{falls } E \leq E_F \\ 0 & \text{falls } E > E_F \end{cases} \quad \text{nur bei } T = 0 \text{ wahr!}$$

Thermische Energie: $E_{th} \approx k_B T$

Besetzungswahrscheinlichkeit für $T > 0$:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{k_B T}}} \quad \text{Fermifaktor}$$

$$E - E_F = \ln \left(\frac{1 - f(E)}{f(E)} \right) \cdot k_b \cdot T$$



Abschätzung der Übergangsbreite mit der Tangenten im Punkt $(E_F, \frac{1}{2})$:

$$\Delta E = 4k_B T$$

FERMINIVEAU

→ Elektronen haben zusätzlich thermische Energie:

Das Fermi-niveau ist diejenige Energie, bei welcher $f(E) = 0.5$ ist.

FERMITEMPERATUR / FERMIGESCHWINDIGKEIT

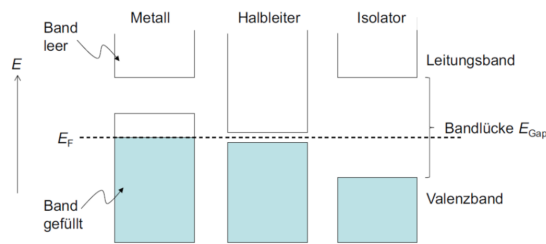
$$T_F = \frac{E_F}{k_B}$$

T_F gibt an bei welcher Temperatur die Elektronen thermisch so stark angeregt werden, dass das Pauliprinzip keine grosse Rolle mehr spielt.

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}}$$

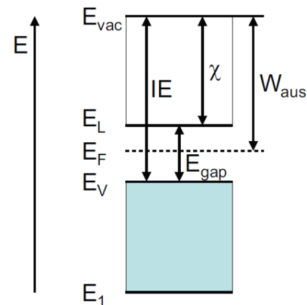
LEITER, HALBLEITER UND ISOLATOREN

- Anlegen eines E-Feldes bewirkt eine Verschiebung der Besetzungswahrscheinlichkeit.
- Schon besetzte Zustände können nicht besetzt werden. (Pauli)
- Nur die Elektronen mit $E = E_F$ tragen zum Stromfluss bei. Elektronen mit tieferer Energie finden keine freien Niveaus vor.



BANDLÜCKE

- **Metall:** E_F liegt in einem Band, die Elektronen können so Energie abgeben und aufnehmen.
- **Halbleiter:** Bandlücke bei E_F . Energiedifferenz klein genug, dass Elektronen thermisch vom Valenz- ins Leitungsband angeregt werden können.
- **Isolator:** E_F liegt zwischen zwei Bändern. Energiedifferenz so gross, dass keine Elektronen ins Leitungsband angeregt werden können.



Ionisierungsenergie IE ist gleich der Energie, die benötigt wird um das oberste Elektron ins Vakuum zu überführen.

Elektronenaffinität χ ist die Energie die benötigt wird um das oberste Elektron eines einfach negativ geladenen Atoms zu entfernen.

für ein Metall (ohne Bandlücke): $IE = \chi = E_{vac}$.

für Festkörper mit Bandlücke: $IE = \chi + E_{Gap}$.

12.3 DRUDE-MODELL

spezifische Leitfähigkeit nach Drude:

$$\sigma = \frac{e^2 \tau n_e}{m_e} = \frac{e^2 \lambda n_e}{m_e v_F} \propto \frac{e^2 \lambda(E_F)}{m_e v_F}$$

$$\lambda \approx \langle |\vec{v}_0| \rangle \tau$$

λ mittlere freie Weglänge

τ mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen mit Gitterionen

\vec{v}_0 Geschwindigkeit direkt nach dem Zusammenstoss

v_F Fermigeschwindigkeit

12.3.1 MITTLERE FREIE WEGLÄNGE

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e v_F} \left(\frac{1}{\lambda_{osc}} + \frac{1}{\lambda_{SS}} \right)^{-1} = \frac{e^2 n_e}{m_e v_F} \left(\frac{n_{ion} \pi k_B T}{m_{ion} \omega_0^2} + n_{SS} \pi r_{SS}^2 \right)^{-1}$$

- Im idealen Metallgitter keine Streuung, kein Energieverlust.
- Gitterschwingungen: Ionen verlassen Gitterplätze \rightarrow Zeitabhängiges Potential \rightarrow Energieverluste (e^- geben Energie an Gitterschwingung ab oder umgekehrt.)
- Fremdatome oder Bruchstellen im Gitter bewirken Streuung.

$$\text{Mittlere freie Weglänge } \lambda = \left(\frac{1}{\lambda_{osc}} + \frac{1}{\lambda_{SS}} \right)^{-1}$$

12.3.2 STREUUNG DURCH GITTERSCHWINGUNG

$$\lambda_{osc} = \frac{m_{ion} \omega_0^2}{n_{ion} \pi k_B T}$$

ω_0 Gitterschwingungsfrequenz

n_{ion} Anzahl Ionen pro m^3

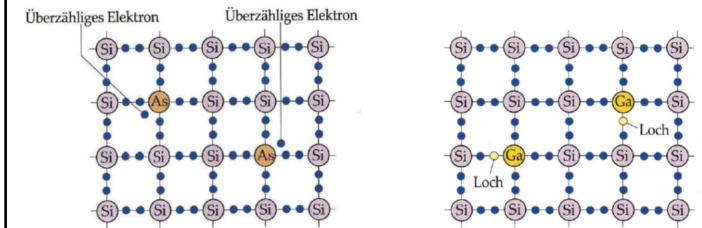
12.3.3 STREUUNG DURCH FEHLSTELLEN

$$\lambda_{SS} = \frac{1}{n_{SS} \pi r_{SS}^2}$$

$n_{SS} \ll n_{ion}$ Dichte der Störstellen

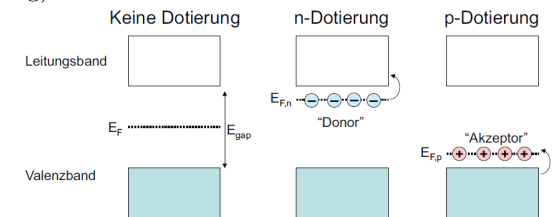
r_{SS} Radius des Fremdatoms

12.4 HALBLEITER



Donor: Ein Fremdatom mit einem Elektron mehr. (n-doping)

Akzeptor: Ein Fremdatom mit einem Elektron weniger. (p-doping)



Donoren sind Wasserstoffartig (a_0, E_1) aber es ist eine Korrektur aufgrund von Screening und veränderter effektiver Masse m^* nötig:

$$a_0^* = \epsilon_r \frac{m_e}{m^*} a_0$$

$$E_1^* = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{m_e^*}{m_e} E_1$$

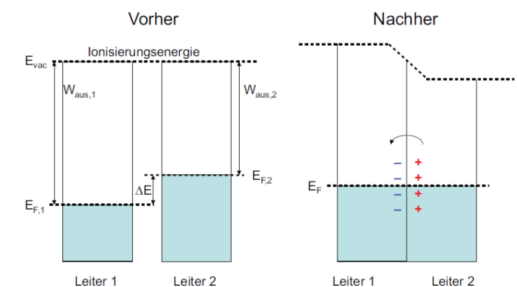
Wechselwirkung von Elektronen ab Grenzkonzentration von Donoren $n_D \approx \frac{1}{a_0^*}$

12.4.1 KONTAKTPOTENTIAL

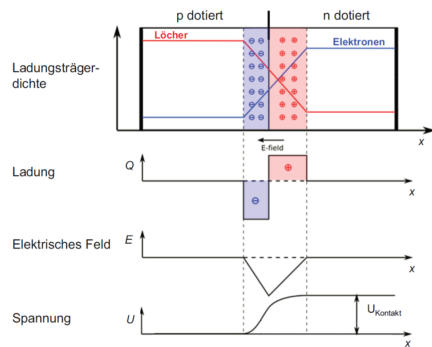
$$W = E_{vac} - E_F \text{ Austrittsarbeit}$$

$$E_{Kontakt} = W_2 - W_1 \text{ Kontaktpotential}$$

$$U_{Kontakt} = \frac{E_{Kontakt}}{e} \text{ Kontaktspannung}$$

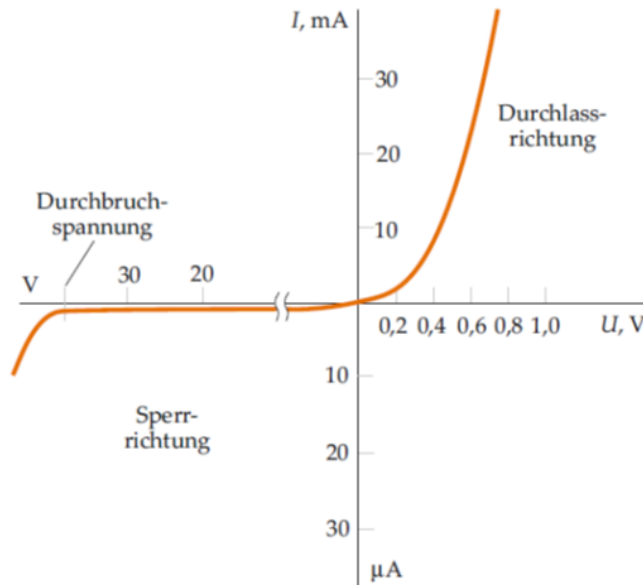


12.4.2 PN-HALBLEITERÜBERGÄNGE



$$E_{Kontakt} = E_{F,p} - E_{f,n} \approx E_{Gap}$$

Kontaktpotential wird durch Ladungsträgerfluss ausgeglichen. Elektronen wandern von n nach p. Infolge der Dotierung ist die Anzahl Ladungsträger begrenzt und die n-dotierte Seite kann sich komplett leeren → isolierende Zone.



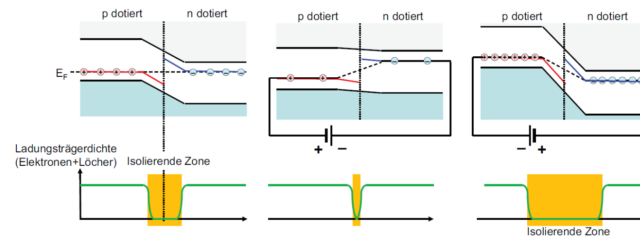
$$-\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\partial E(x)}{\partial x} \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

Breite der Raumladungszone W :

$$W = x_n + x_p = x_n + \frac{n_D}{n_A} \cdot x_n$$

$$\Rightarrow W = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon_r(n_A+n_D)}{e(n_A n_D)} U_K} \quad n_A \gg n_D \quad \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon_r U_K}{e n_D}}$$

12.4.3 DIODE

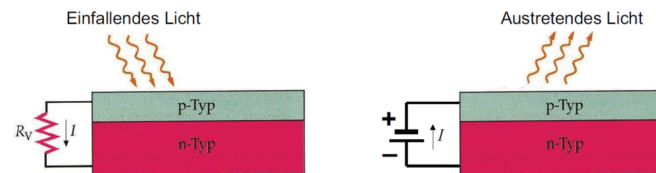


- **Vorwärtsspannung:** positive Spannung an der p-Seite → Ladungsarme Zone wird schmaler.
- **Rückwärtsspannung:** negative Spannung an der p-Seite → Ladungsarme Zone wird breiter. Bei zu hoher Spannung → Durchschlag, reversibel so lange Diode nicht überhitzt.

12.4.4 SOLARZELLE

Einfallendes Licht erzeugt Elektron-Loch-Paare, die im elektrischen Feld der Raumladungszone getrennt werden. Dadurch baut sich eine Spannung auf. Um ein E-L-Paar herauslösen zu können muss das Licht die richtige Wellenlänge haben.

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} > E_{Gap}$$



12.4.5 PHOTODIODE

Bei der Photodiode wird eine zusätzliche Rückwärtsspannung angelegt, was aufgrund der höheren Potentialdifferenz eine

schnellere Reaktion auf Photonen hervorruft. Der Strom ist proportional zur Anzahl eintreffenden Photonen.

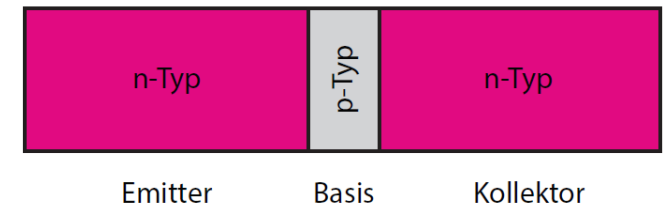
12.4.6 LEUCHTDIODE (LED)

Bei der LED wird eine Vorwärtsspannung angelegt, sodass viele Elektronen auf der p-Seite und Löcher auf der n-Seite entstehen. Bei der folgenden Rekombination werden Photonen ausgesendet. $\lambda = hc/E_{Gap}$

12.5 TRANSISTOR

Eine Anordnung von zwei Halbleiterübergängen (pnp oder npn) kann dazu benutzt werden elektrische Ströme zu verstärken oder zu schalten.

BIPOLARTRANSISTOR



Wird eine Spannung angelegt, so wird diese zunächst, je nach Vorzeichen von einem pn- oder einem np-Übergang blockiert. Wird zusätzlich eine Spannung an der Basis angelegt, so wandern Ladungsträger in den p-Bereich und die Blockade wird aufgelöst. Es fließt nun ein Strom zwischen Emitter und Kollektor. Zusätzlich fließt ein kleiner Strom durch die Basis, der aufgrund der kleinen Kontaktfläche viel kleiner als der Hauptstrom ist.

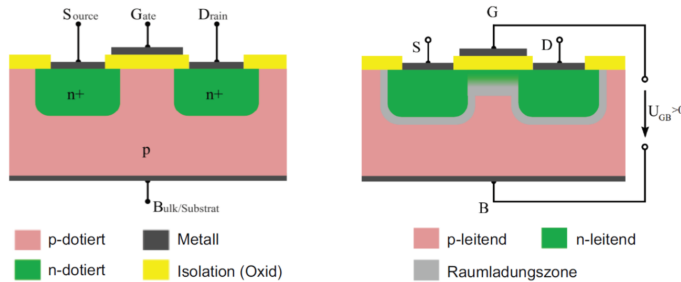
FELDEFFEKTTRANSISTOR

FET dienen dazu, Spannungen ein- und auszuschalten.

Implementationen:

1. Gate-gesteuerter npn- oder pnp-Übergang.

- Gate-gesteuerter Übergang zwischen *nin* oder *pip*, (*i* = insulating, intrinsic → undotierter Halbleiter).
- Undotierter Halbleiter, in welchem Ladungsträger durch ein externes Feld akkumuliert werden.



Links: N-Kanal FET im ungestörten Zustand. Kein leitender Kanal zwischen Source und Drain.

Rechts: Anlegen einer Spannung zwischen Gate und Bulk bewirkt Akkumulation von Ladungsträgern beim Gate, wodurch ein Strom zwischen S und D fließt.

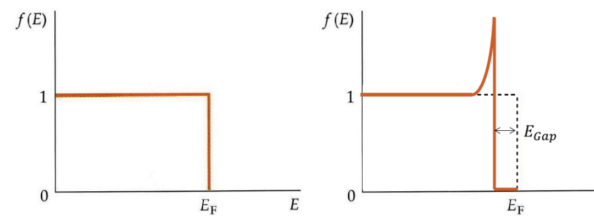
Vorteil des FET: Es fließt kein Strom durch das Gate. So werden Verluste reduziert.

13 SUPRALEITUNG

- Übergang zur Supraleitung ist *Phasenübergang* bei Sprungtemperatur.
- Supraleitung = Widerstand ist exakt 0.
- Magnetfeld im Leiter entweder Null oder auf *Fluss-schläuche* beschränkt.

13.1 MIKROSKOPISCHE ERKLÄRUNG

Modell freier Elektronen → Elektronen gegenseitig unabhängig und Gitteratome bilden immobiles Potential. Das ist für Supraleiter nicht erfüllt → Elektronen können sich anziehen und paarweise auftreten → *Cooper-Paar* aus zwei Elektronen mit gegenwertigem Spin → Gesamtspin = 0 → Pauliprinzip entfällt und alle Cooper-Paare können gleiches Niveau besetzen.



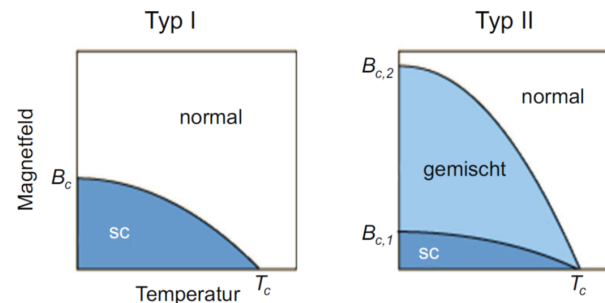
$$E_{Gap} = \frac{7}{2} k_B T_c \quad \text{Bindungsenergie Cooper-Paar}$$

→ Supraleitung kann durch Temperaturerhöhung unterdrückt werden.

Weitere Möglichkeit dazu: Magnetfelder $> B_c$ → Cooper-Paare werden aufgebrochen → Strom induziert Magnetfeld → auch beschränkt!

SUPRALEITER (TYP I)

Magnetfeld wird aus Material verdrängt. Oberhalb kritischer Feldstärke B_c → Normalleitung. Die meisten chem. Elemente, die supraleitfähig sind, sind von Typ I.



SUPRALEITER (TYP II)

- Magnetfeld wird bis zu $B_{c,1}$ aus Material verdrängt. Oberhalb $B_{c,1}$ bilden sich Flussschläuche aus → Zylinderförmige Regionen, in denen Feldlinien durch Leiter laufen können. Magnetischer Fluss im Schlauch immer $\Phi_0 = h/(2e)$ → Fluxquantum.
- Im Flussschlauch - Normalleitung, Ausserhalb - Supraleitung. Daher R immernoch exakt 0.

- Mit steigendem Magnetfeld nimmt Anzahl Schläuche zu. Ab $B_{c,2}$ Normalleitung.
- Meiste chem. Verbindungen, die supraleiten, von Typ II.

13.2 HOCHTEMPERATURSUPRALEITER

- Bis 1986 → BCS Theorie: Supraleitung über 30 K unmöglich.
- Danach Entdeckung von HTC Supraleitern bis zu 130 K.
- Technisches Potential: Effiziente Kühlung bis auf 77 K möglich.