

1.2 逻辑函数的化简方法

- ❖ 一个逻辑函数可有多种不同的表达形式，这些表达形式可互相转换。

$$F = AB + \overline{A}\overline{B}$$

与—或

$$= \overline{\overline{AB} \overline{\overline{A}\overline{B}}}$$

与非—与非

$$= \overline{(\overline{A} + \overline{B})(A + B)}$$

或—与非

$$= \overline{\overline{A}B + A\overline{B}}$$

与—或非

$$= \overline{(\overline{A} + \overline{B}) + A + B}$$

或非—或

$$= \overline{\overline{A}B} \cdot \overline{A\overline{B}}$$

与非—与

$$= (A + \overline{B})(\overline{A} + B)$$

或—与

$$= \overline{\overline{A + \overline{B}}} \cdot \overline{\overline{\overline{A} + B}}$$

或非—或非

1.2.1 逻辑函数的标准与或式和最简式

一、标准与或表达式

[例 1.2.1] $Y = F(A, B, C) = AB + \bar{A}C$

最简式

$$= AB(C + \bar{C}) + \bar{A}C(B + \bar{B})$$

$$= \underline{ABC} + \underline{A\bar{B}C} + \underline{\bar{A}BC} + \underline{\bar{A}\bar{B}C}$$

标准
与或式

最小项

标准与或式就是最小项之和的形式

1. 最小项的概念:

包括所有变量的乘积项，每个变量均以原变量或反变量的形式出现一次。

$Y = F(A, B)$ (2 变量共有 4 个最小项)

$\overline{A}\overline{B} \quad \overline{A}B \quad A\overline{B} \quad AB$

$Y = F(A, B, C)$ (3 变量共有 8 个最小项)

$\overline{A}\overline{B}\overline{C} \quad \overline{A}\overline{B}C \quad \overline{A}B\overline{C} \quad \overline{A}BC \quad A\overline{B}\overline{C} \quad A\overline{B}C \quad AB\overline{C} \quad ABC$

$Y = F(A, B, C, D)$ (4 变量共有 16 个最小项)

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} \quad \overline{A}\overline{B}\overline{C}D \quad \overline{A}\overline{B}C\overline{D} \quad \dots \quad \dots \quad ABC\overline{D} \quad ABCD$

(n 变量共有 2^n 个最小项)

2. 最小项的性质：变量A、B、C全部最小项的真值表

A	B	C	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

- (1) 任一最小项，只有一组对应变量的取值使其值为 1；
- (2) 任意两个最小项的乘积为 0；
- (3) 全体最小项之和为 1。

3. 最小项是组成逻辑函数的基本单元

任何逻辑函数都是由其变量的若干个最小项构成，都可以表示成为最小项之和的形式。

[例 1.2.2] 写出下列函数的标准与或式（最小项表达式）：

$$Y = F(A, B, C) = AB + BC + CA$$

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad Y &= AB(\bar{C} + C) + BC(\bar{A} + A) + CA(\bar{B} + B) \\ &= AB\bar{C} + \underline{ABC} + \bar{A}BC + \underline{ABC} + \bar{A}\bar{B}C + \underline{ABC} \\ &= AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + ABC \end{aligned}$$

相同最小项合并

标准与或表达式是唯一的，一个函数只有一个最小项之和的表达式。

函数的最小项表达式也可以由其真值表直接写出：

例如，已知 $Y = A + BC$ 的真值表

A	B	C	$A + BC$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

函数的标准与或式

$$\begin{aligned} Y &= (A + B)(A + C) \\ &= \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC \\ &\quad + A\overline{B}\overline{C} + ABC \end{aligned}$$

4. 最小项的编号:

把与最小项对应的变量取值当成二进制数，与之相应的十进制数，就是该最小项的编号，用 m_i 表示。

对应规律：原变量 $\Leftrightarrow 1$ 反变量 $\Leftrightarrow 0$

$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$	$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}C$	$\overline{\overline{A}}\overline{B}\overline{\overline{C}}$	$\overline{\overline{A}}\overline{B}C$	$\overline{A}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$	$\overline{A}\overline{\overline{B}}C$	$\overline{A}B\overline{\overline{C}}$	$\overline{A}BC$
0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1
0	1	2	3	4	5	6	7
m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7

[例] 写出下列函数的最小项表达式:

$$\begin{aligned} Y &= \overline{AB + AD + BC} = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{D})(B + \overline{C}) \\ &= (\overline{A} + \overline{B}\overline{D})(B + \overline{C}) = \overline{A}B + \overline{A}\overline{C} + \overline{B}\overline{C}\overline{D} \\ &= \overline{A}B(C + \overline{C}) + \overline{A}\overline{C}(B + \overline{B}) + \overline{B}\overline{C}\overline{D}(A + \overline{A}) \\ &= \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} \\ &= \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} \\ &\quad \begin{matrix} m_7 & m_6 & m_5 & m_4 \\ + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} \end{matrix} \\ &\quad \begin{matrix} m_1 & m_0 & m_8 \end{matrix} \\ &= m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_1 + m_0 + m_8 \\ &= \sum m(0, 1, 4, 5, 6, 7, 8) \end{aligned}$$

与前面 m_0
相重

二、逻辑函数的最简表达式

1. 最简与或式：乘积项的个数最少，每个乘积项中相乘的变量个数也最少的与或表达式。

例如：
$$Y = AB + \overline{A}C + BC + BCD$$
$$= AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

2. 最简与非 - 与非式：非号最少，每个非号下面相乘的变量个数也最少的与非 - 与非式。

[例 1.2.3] 写出下列函数的最简与非 - 与非式：

$$Y = AB + \overline{A}C$$

[解]
$$Y = \overline{\overline{AB + \overline{A}C}} = \overline{\overline{AB}} \cdot \overline{\overline{\overline{A}C}}$$

3. 最简或与式： 括号个数最少，每个括号中相加的变量的个数也最少的或与式。

[例 1.2.4] 写出下列函数的最简或与式：

$$Y = AB + \overline{AC}$$

[解] $\overline{Y} = A\overline{B} + \overline{A}C$

$$Y = \overline{A\overline{B} + \overline{A}C} = \overline{A\overline{B}} \cdot \overline{\overline{A}C} = (\overline{A} + B)(A + C)$$

4. 最简或非 – 或非式： 非号个数最少，非号下面相加的变量个数也最少的或非 – 或非式。

[例 1.2.5] 写出下列函数的最简或非 – 或非式：

$$Y = AB + \overline{AC}$$

[解] $Y = \overline{\overline{A + B}} \cdot \overline{\overline{A + C}} = \overline{\overline{A + B} + \overline{A + C}}$

5. 最简与或非式: 非号下面相加的乘积项的个数最少, 每个乘积项中相乘的变量个数也最少的与或非式。

[例 1.2.6] 写出下列函数的最简与或非式:

$$Y = AB + \overline{AC}$$

[解] 已知 $Y = \overline{\overline{A+B} + \overline{A+C}} = \overline{\overline{A}B} + \overline{\overline{A}C}$

结论: 只要得到函数的最简与或式, 再用摩根定理进行适当变换, 就可以获得其它几种类型的最简式。而最简与或式一般需要经过化简才能求得。

1.2.2 逻辑函数的公式化简法

(与或式 $\xrightarrow[\text{定理}]{\text{公式}}$ 最简与或式)

一、并项法: $AB + \overline{A}\overline{B} = A$

$$\begin{aligned} \text{[例 1.2.7]} \quad Y &= \underline{ABC} + \underline{A\overline{B}\overline{C}} + \overline{A}B \\ &= AB + \overline{A}B = B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[例]} \quad Y &= \underline{ABC} + \underline{A\overline{B}\overline{C}} + \underline{A\overline{B}C} + \underline{A\overline{B}C} \\ &= A(BC + \overline{B}\overline{C}) + A(\overline{B}C + B\overline{C}) \\ &= A \cdot \overline{B \oplus C} + A(B \oplus C) \\ &= A \end{aligned}$$

二、吸收法: $A + AB = A$

$$\begin{aligned} \text{[例 1.2.8]} \quad Y &= \overline{A}B + \overline{A}D + \overline{B}E \\ &= \overline{A} + \overline{B} + \overline{A}D + \overline{B}E = \overline{A} + \overline{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[例]} \quad Y &= \overline{A}B + \overline{A}CD + \overline{B}CD \\ &= \overline{A}B + (\overline{A} + \overline{B})CD \\ &= \overline{A}B + \overline{A}BCD = \overline{A}B = \overline{A} + \overline{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[例]} \quad Y &= A + \overline{A} \cdot \overline{BC} (\overline{A} + \overline{B} \overline{C} + D) + \overline{BC} \\ &= (A + BC) + (A + BC) (\overline{A} + \overline{B} \overline{C} + D) \\ &= A + BC \end{aligned}$$

三、消去法: $A + \overline{A}B = A + B$

$$\begin{aligned} \text{[例 1.2.9]} \quad Y &= \overline{A}B + AC + BD \\ &= \overline{A} + \overline{B} + \overline{A}C + \overline{B}D = \overline{A} + \overline{B} + C + D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[例]} \quad Y &= AB + \overline{A}C + \overline{B}C \\ &= AB + (\overline{A} + \overline{B})C = AB + \overline{A}\overline{B}C = AB + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[例]} \quad Y &= \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}BC + A\overline{B}C \\ &= \overline{A}(B + \overline{B}C) + A(\overline{B} + BC) \\ &= \overline{A}(B + C) + A(\overline{B} + C) \\ &= \overline{A}B + \overline{A}C + A\overline{B} + AC = \overline{A}B + A\overline{B} + C \end{aligned}$$

四、配项消项法: $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$

[例 1.2.10] $Y = \underline{B\overline{C}} + \underline{\overline{A}C} + \underline{A\overline{C}} + \underline{\overline{B}C} + \underline{A\overline{B}}$

$$= B\overline{C} + \overline{A}C + A\overline{B}$$

冗余项

或 $= \underline{B\overline{C}} + \underline{\overline{A}C} + \underline{A\overline{C}} + \underline{\overline{B}C} + \underline{A\overline{B}}$

$$= \overline{A}B + A\overline{C} + \overline{B}C$$

[例 1.2.11] $Y = \underline{\overline{A}B} + \underline{AC} + \underline{\overline{B}\overline{C}} + \underline{A\overline{B}} + \underline{\overline{A}\overline{C}} + \underline{BC}$

$$= \overline{A}B + AC + \overline{B}\overline{C}$$

或 $= \underline{\overline{A}B} + \underline{AC} + \underline{\overline{B}\overline{C}} + \underline{A\overline{B}} + \underline{\overline{A}\overline{C}} + \underline{BC}$

$$= \overline{A}B + \overline{A}\overline{C} + BC$$

综合练习:

$$Y = \underline{ACE} + \underline{\overline{A}BE} + \underline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}} + \underline{BE\overline{C}} + \underline{DE\overline{C}} + \underline{\overline{A}E}$$

$$= E (\underline{AC} + \underline{\overline{A}B} + \underline{B\overline{C}} + \underline{D\overline{C}} + \underline{\overline{A}}) + \underline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$$

$$= E (C + B + D + \overline{A}) + \underline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$$

$$= \underline{CE} + \underline{BE} + \underline{DE} + \underline{\overline{A}E} + \underline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$$

$$= E (\underline{B + C + D}) + \underline{\overline{A}E} + \underline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$$

$$= E \underline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}} + \underline{\overline{A}E} + \underline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$$

$$= \underline{E} + \underline{\overline{A}E} + \underline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$$

$$= E + \underline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}$$

问题引入：

$$Y = \underline{B\overline{C}} + \underline{\overline{A}C} + \underline{A\overline{C}} + \underline{\overline{B}C} + \underline{\overline{A}B}$$

$$= B\overline{C} + \overline{A}C + A\overline{B}$$

或 $= \underline{B\overline{C}} + \underline{\overline{A}C} + \underline{A\overline{C}} + \underline{\overline{B}C} + \underline{\overline{A}B}$

$$= \overline{A}B + A\overline{C} + \overline{B}C$$

$$Y = B\overline{C} + \overline{A}C + A\overline{C} + \overline{B}C$$

$$= \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C$$

$$= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

冗余项

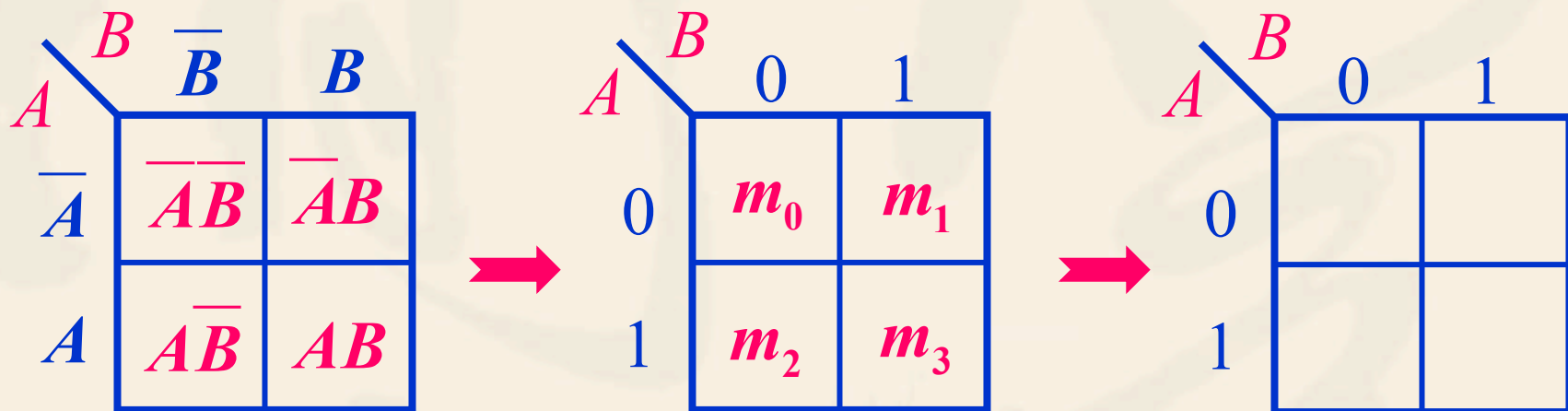
1.2.3 逻辑函数的图形化简法

一、逻辑函数的卡诺图(Karnaugh maps)

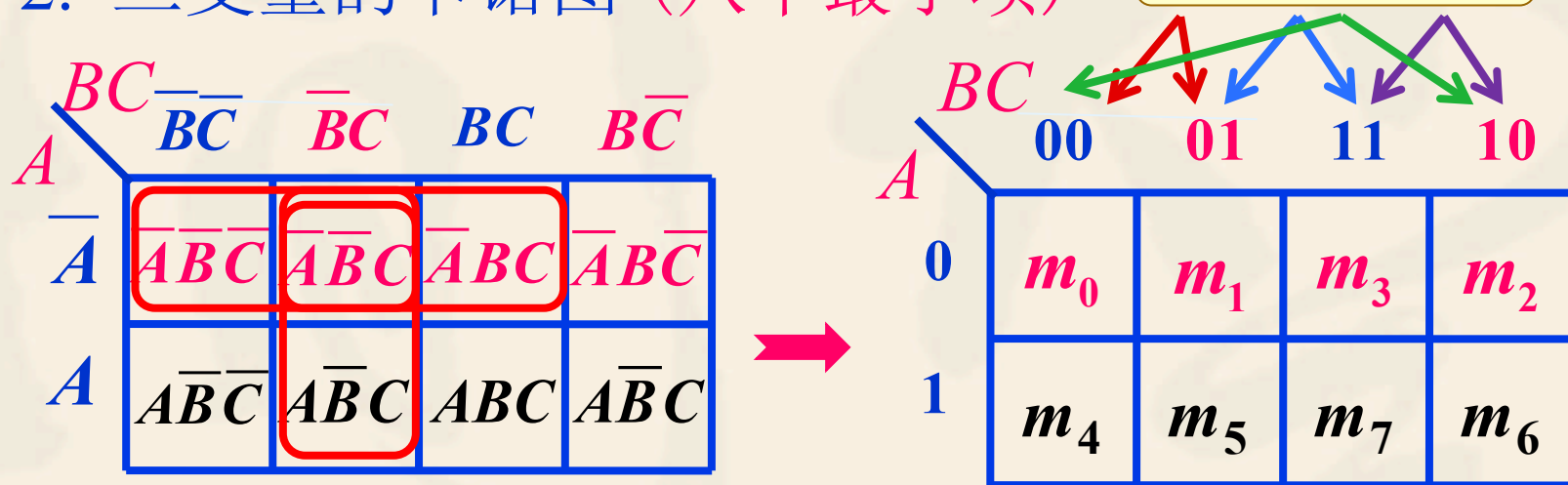
卡诺图：一个逻辑函数的卡诺图就是将此函数最小项表达式中各个最小项相应地填入一个特定的方格图内，此方格图称为卡诺图。



1. 二变量的卡诺图 (四个最小项)



2. 三变量的卡诺图 (八个最小项)



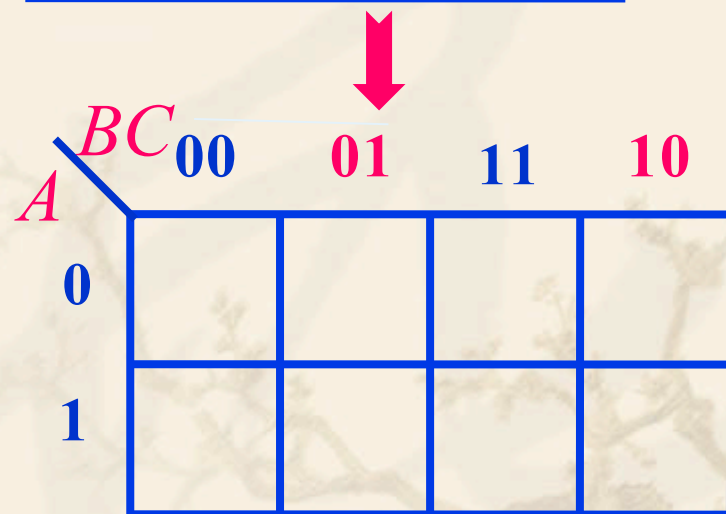
逻辑相邻：两个最小项只有一个变量不同。

逻辑相邻的**两个**最小项可以合并成一项，
并消去一个因子。

如： $\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C = \overline{A}\overline{B}$

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} = \overline{A}\overline{C}$$

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} = \overline{B}\overline{C}$$



卡诺图的实质：逻辑相邻 \rightarrow 几何相邻

问题解决:

$$Y = \overline{B}\overline{C} + \overline{A}C + A\overline{C} + \overline{B}C$$

$$= m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$= \overline{A}C + \overline{B}\overline{C} + A\overline{B}$$

$$= \overline{A}B + A\overline{C} + \overline{B}C$$

$$Y = \overline{A}C + \overline{B}\overline{C} + A\overline{B}$$

$$Y = \overline{A}B + A\overline{C} + \overline{B}C$$

	<i>BC</i>	00	01	11	10
<i>A</i>	0		1	1	1
	1	1	1		1

3. 四变量的卡诺图 (十六个最小项)

$AB \backslash CD$	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}CD$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$
$\overline{A}B$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
AB	$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
$A\overline{B}$	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	AB	$A\overline{B}$
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

4. 五变量的卡诺图（三十二个最小项）

		<i>CDE</i>							
		000	001	011	010	110	111	101	100
<i>AB</i>	00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
	01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
	11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
	10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

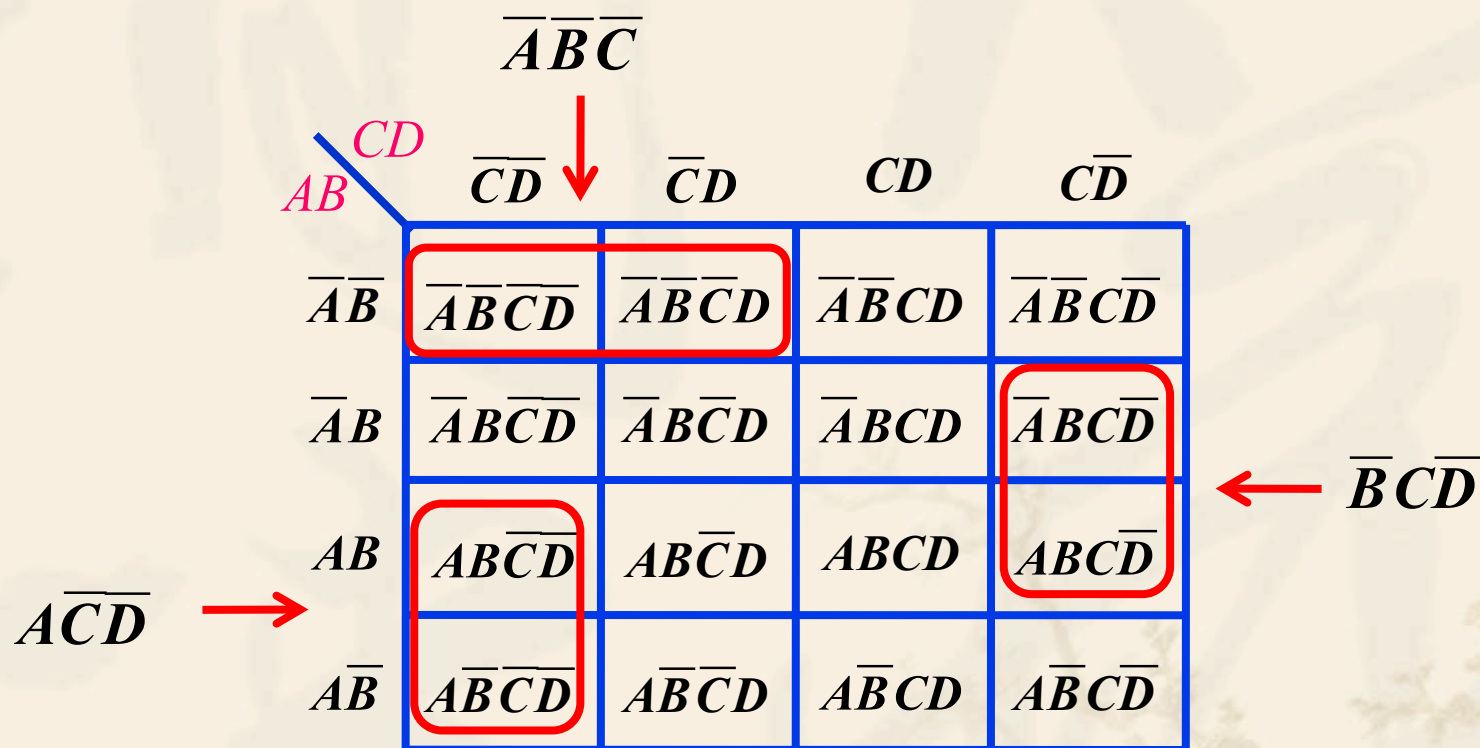
几何相邻

以此轴为对称轴（对折后位置重合）

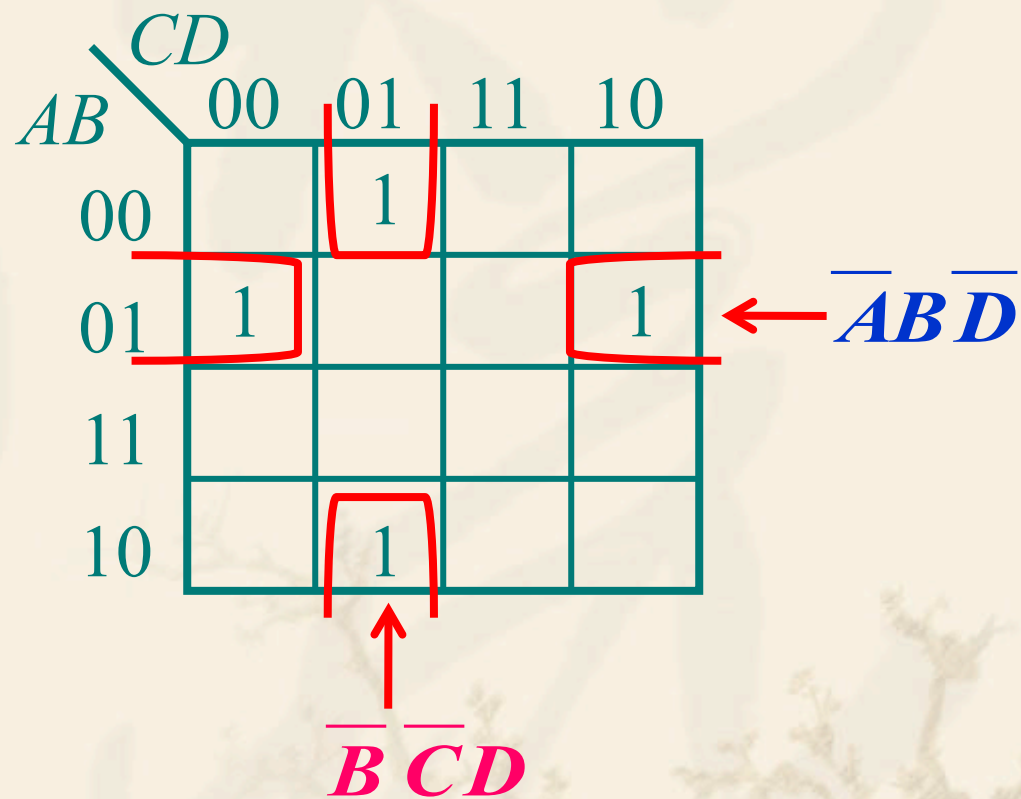
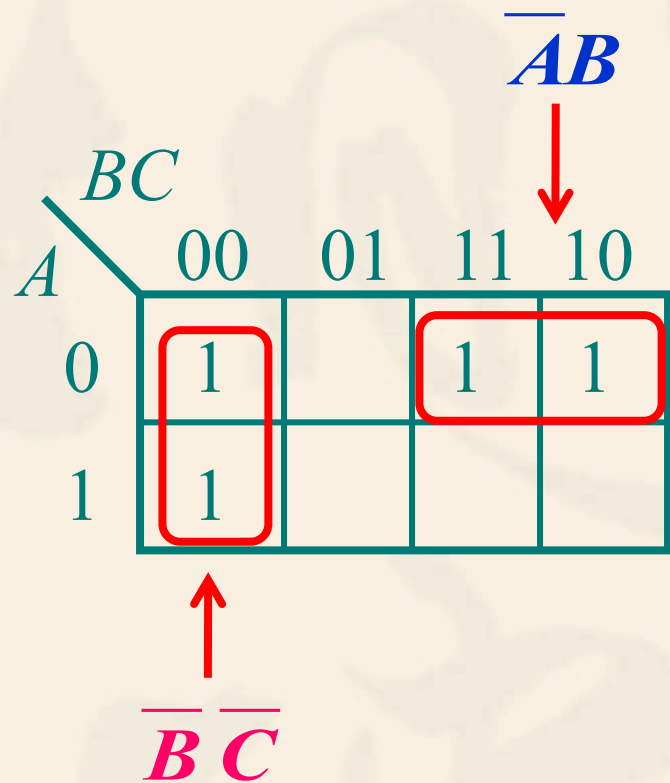
当变量个数超过六个以上时，无法使用图形法进行化简。

5. 变量卡诺图中最小项合并的规律

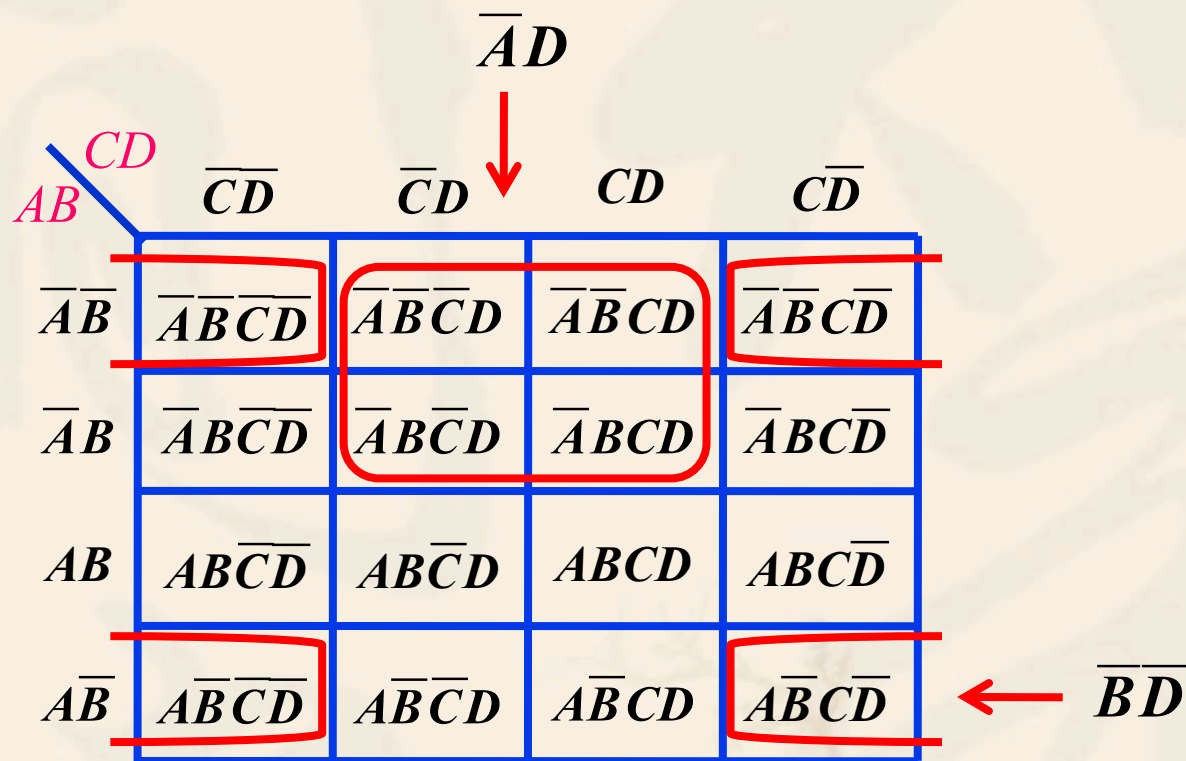
(1) 两个相邻的最小项可以合并成一项，并消去一个因子。



例:



(2) 四个相邻的最小项可以合并成一项，并消去两个因子。

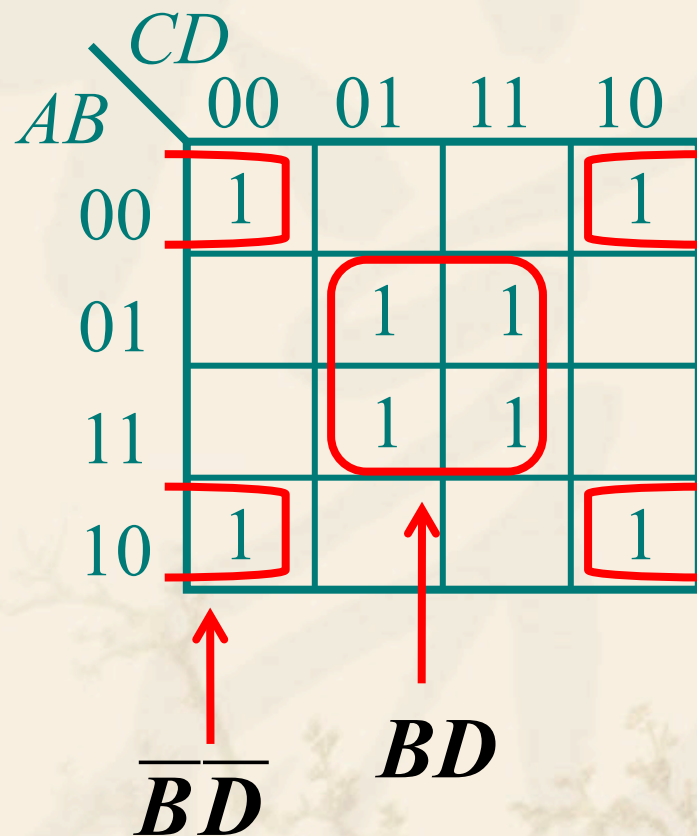
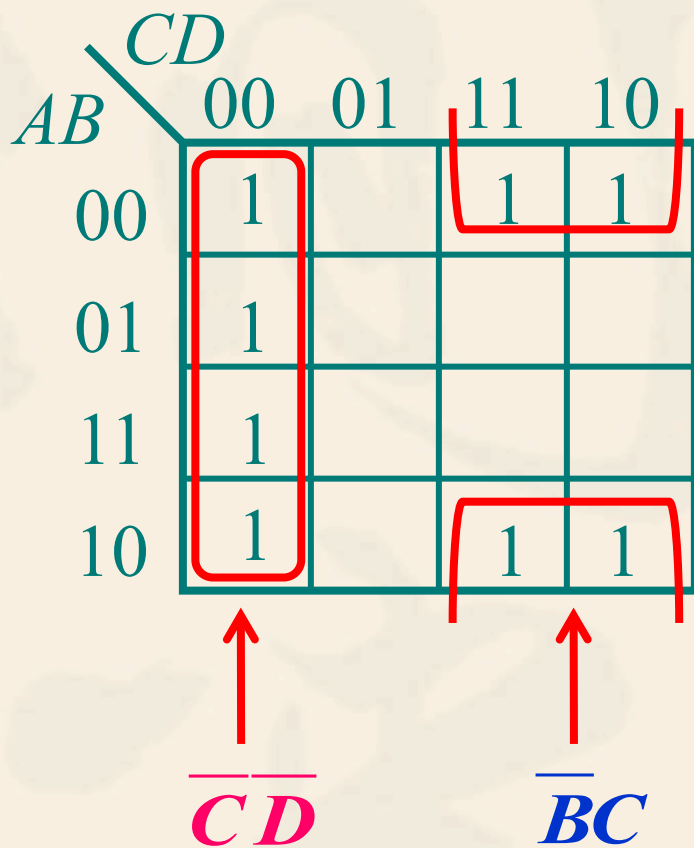


如:

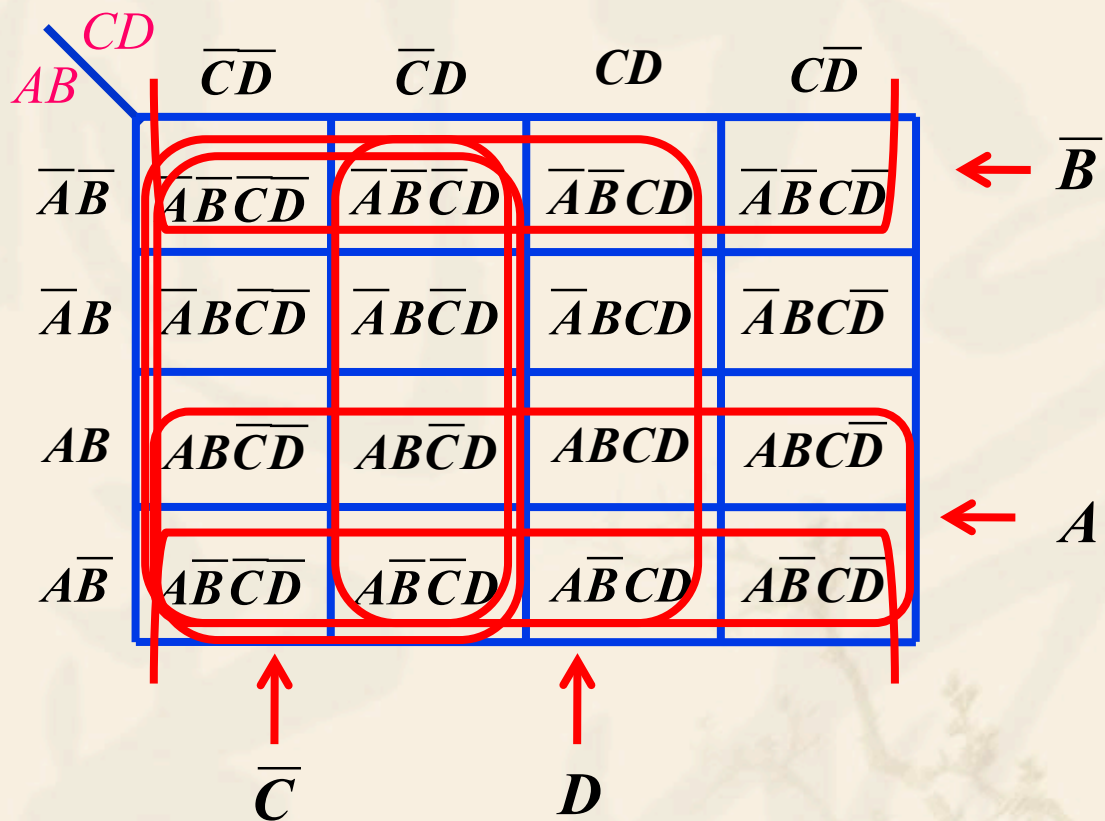
$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} = \overline{A}\overline{B}D + \overline{A}BD = \overline{A}D$$

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} = \overline{A}\overline{B}\overline{D} + A\overline{B}\overline{D} = \overline{B}\overline{D}$$

例:



(3) 八个相邻的最小项可以合并成一项，并消去三个因子。



例：

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	1	1	1	1	1
01	1	1			
11	1	1			
10	1	1	1	1	

\overline{C}

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	1				1
01	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1
10	1				1

\overline{B}

\overline{D}

B

总结： 2^n 个相邻最小项合并可以消去 n 个因子。

二、逻辑函数的卡诺图

1. 逻辑函数卡诺图的画法

① 根据函数的变量个数画出相应的卡诺图。

② 在函数的每一个乘积项所包含的最小项处都填 1，其余位置填 0 或不填。

2. 逻辑函数卡诺图的特点

优点：用几何位置的相邻，形象地表达了构成函数的各个最小项在逻辑上的相邻性。

缺点：当函数变量多于六个时，画图十分麻烦，其优点不复存在，无实用价值。

3. 逻辑函数卡诺图画法举例

[例 1. 2. 12] 画出函数的卡诺图 $Y_1 = \overline{A}\overline{B} + AB + \overline{C}\overline{D}$

[解] ① 根据变量个数画出函数的卡诺图

② 根据函数的每个乘积项确定函数的最小项，并在相应的位置上填 1。

$$\overline{A}\overline{B} \Rightarrow m_0, m_1, m_2, m_3$$

$$AB \Rightarrow m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15}$$

$$\overline{C}\overline{D} \Rightarrow m_0, m_4, m_8, m_{12}$$

$CD \backslash AB$		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1
	01	1			
	11	1	1	1	1
	10	1			

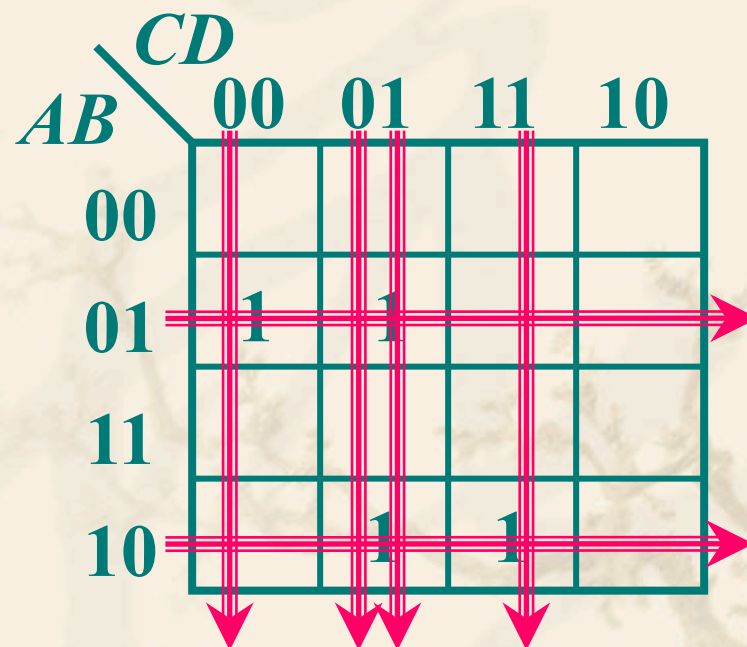
[例 1.2.13] 画出函数的卡诺图 $Y_2 = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BD$

[解] ① 根据变量个数画出函数的卡诺图

② 根据函数的每个乘积项确定函数的最小项，并在相应的位置上填 1。

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} \Rightarrow m_4、m_5$$

$$\overline{A}BD \Rightarrow m_9、m_{11}$$

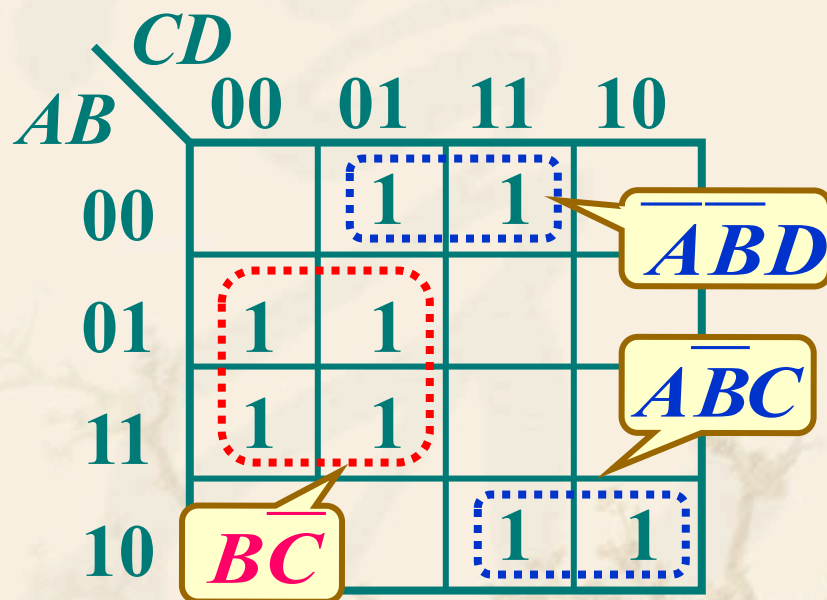


三、用卡诺图化简逻辑函数

[例 1.2.14]
$$Y = \underline{\overline{B}CD} + \underline{B\overline{C}} + \underline{\overline{A}CD} + \underline{A\overline{B}C}$$

[解] 化简步骤:

- ① 画出函数的卡诺图
- ② 合并最小项:
画包围圈
- ③ 写出最简与或表达式



$$Y = B\overline{C} + \overline{A} \overline{B} D + A\overline{B} C$$

$$Y = \overline{B}CD + B\overline{C} + \overline{A}CD + A\overline{B}C$$

不正确的
画圈

画包围圈的原则：

① 先圈孤立项，再圈仅有一种合并方式的最小项。

② 圈越大越好，但圈的个数越少越好。

③ 最小项可重复被圈，但每个圈中至少有一个新的最小项。

④ 必需把组成函数的全部最小项圈完，并做认真比较、检查才能写出最简与或式。

		CD			
		00	01	11	10
AB	00		1	1	
	01	1	1		
	11	1	1		
	10			1	1

[例] 利用图形法化简函数

$$F(A, B, C, D) = \sum_m (1, 4, 5, 6, 8, 12, 13, 15)$$

[解] 注意：先圈孤立项

- ① 画函数的卡诺图
- ② 合并最小项：
画包围圈
- ③ 写出最简与或表达式

$$Y = \overline{A}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}C\overline{D} + ABD + \overline{A}B\overline{D}$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00		1		
	01	1	1		1
	11	1	1	1	
	10	1			

多余的圈

[例] 利用图形法化简函数

$$F = \sum_m (0, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 11, 14, 15)$$

[解] ① 画函数的卡诺图

② 合并最小项：
画包围圈

③ 写出最简与或
表达式

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	1	1	1	1
	01	1			
	11			1	1
	10	1		1	1

$$Y = \overline{A} \overline{B} + AC + \overline{A} \overline{C} \overline{D} + \overline{B} \overline{D}$$

[例] 用图形法求反函数的最简与或表达式

$$Y = AB + BC + AC$$

[解] ① 画函数的卡诺图

② 合并函数值为 0 的最小项

③ 写出 Y 的反函数的最简与或表达式

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$\overline{Y} = \overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{C}$$

1.2.4 具有约束的逻辑函数的化简

一、 约束的概念和约束条件

1. 约束、约束项、约束条件

(1) 约束： 输入变量取值所受的限制

例如，逻辑变量 A 、 B 、 C ，分别表示电梯的升、降、停 命令。

$A = 1$ 表示升， $B = 1$ 表示降， $C = 1$ 表示停。

ABC 的可能取值 001 010 100

不可能取值 000 011 101 110 111

(2) 约束项： 不会出现的变量取值所对应的最小项。

(3) 约束条件：由约束项相加所构成的值为 0 的逻辑表达式。

2. 约束条件的表示方法

① 在真值表和卡诺图上用叉号 (×) 表示。

② 在逻辑表达式中，用等于 0 的条件等式表示。

例如，上例中 ABC 的不可能取值为

$$\begin{array}{ccccc} 000 & 011 & 101 & 110 & 111 \\ \text{约束项: } & \overline{A}\overline{B}\overline{C} & \overline{A}BC & A\overline{B}\overline{C} & ABC \end{array}$$

$$\text{约束条件: } \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC = 0$$

$$\text{或 } \sum_d (0, 3, 5, 6, 7) = 0$$

二、具有约束的逻辑函数的化简

化简具有约束的逻辑函数时，如果充分利用约束条件，可以使表达式大大化简。

1. 约束条件在化简中的应用

(1) 在公式法中的应用：

可以根据化简的需要加上或去掉约束项。

[例]化简函数 $Y = ABC$ ，约束条件 $\overline{AC} + \overline{BC} + AB\overline{C} = 0$

[解]
$$Y = ABC + \overline{AC} + \overline{BC} = C(AB + \overline{A} + \overline{B})$$
$$= C(AB + \overline{AB}) = C$$

问题：当函数较复杂时，公式法不易判断出哪些约束项应该加上，哪些应该去掉。

(2) 在图形法中的应用:

根据卡诺图的特点（逻辑相邻，几何也相邻），在画包围圈时包含或去掉约束项，使函数最简。

[例] 化简函数 $Y = ABC$ ，约束条件 $\overline{A}C + \overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} = 0$

[解] ① 画出三变量函数的卡诺图

② 先填最小项，再填约束项，其余填 0 或不填。

③ 利用约束项合并最小项，使包围圈越大越好，但圈的个数越少越好。

④ 写出最简与或式 $Y = C$

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	×	×	0
	1	0	×	1	×

三、化简举例

[例] 化简逻辑函数 $F(A, B, C, D) =$

$$\sum_m(1, 7, 8) + \sum_d(3, 5, 9, 10, 12, 14, 15)$$

[解] 化简步骤:

① 画函数的卡诺图，顺序
为：先填 1 \rightarrow \times \rightarrow 0

② 合并最小项，画圈时 \times
既可以当 1，又可以当 0

③ 写出最简与或表达式

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	00	0	1	\times	0
	01	0	\times	1	0
11	11	\times	0	\times	\times
	10	1	\times	0	\times

$$Y = \overline{A}D + A\overline{D} \quad \sum_d(3, 5, 9, 10, 12, 14, 15) = 0$$

[例] 化简逻辑函数 $Y = \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$

约束条件 $AB + AC = 0$

[解] ① 画函数的卡诺图

② 合并最小项

③ 写出最简与或表达式

$$\begin{cases} Y = C\overline{D} + B\overline{D} + A\overline{D} \\ AB + AC = 0 \end{cases}$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00				1
	01	1			1
	11	×	×	×	×
	10	1		×	×

注意：合并时，究竟把 \times 作为 1 还是作为 0 应以得到的包围圈最大且个数最少为原则。包围圈内都是约束项无意义(如图所示)。

1.3 逻辑函数的表示方法及其相互之间的转换

1.3.1 几种表示逻辑函数的方法

一、真值表 将变量的各种取值与相应的函数值，以表格的形式一一列举出来。

1. 列写方法

例如函数 $Y = AB + BC + CA$

2. 主要特点

优点：直观明了，便于将实际逻辑问题抽象成数学表达式。

缺点：难以用公式和定理进行运算和变换；变量较多时，列函数真值表较繁琐。

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Y</i>
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

二、卡诺图 真值表的一种方块图表达形式，要求变量取值必须按照循环码的顺序排列。例如

优点：便于求出逻辑函数的最简与或表达式。

缺点：只适于表示和化简变量个数比较少的逻辑函数，也不便于进行运算和变换。

$$Y = AB + BC + CA$$

BC		00	01	11	10
A					
0		0	0	1	0
1		0	1	1	1

三、逻辑表达式 用与、或、非等运算表示函数中各个变量之间逻辑关系的代数式子。

优点：书写简洁方便，易用公式和定理进行运算、变换。

缺点：逻辑函数较复杂时，难以直接从变量取值看出函数的值。

四、逻辑图 用基本和常用的逻辑符号表示函数表达式中各个变量之间的运算关系。

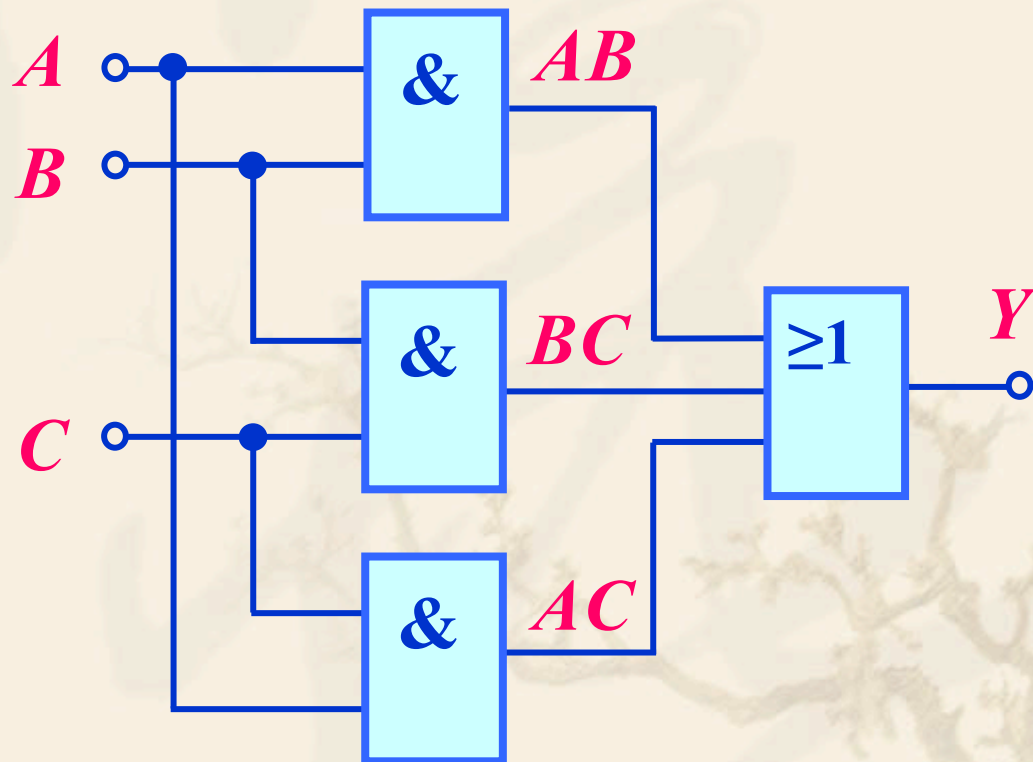
[例 1.3.1] 画出函数的逻辑图 $Y = AB + BC + CA$

优点：

最接近实际电路。

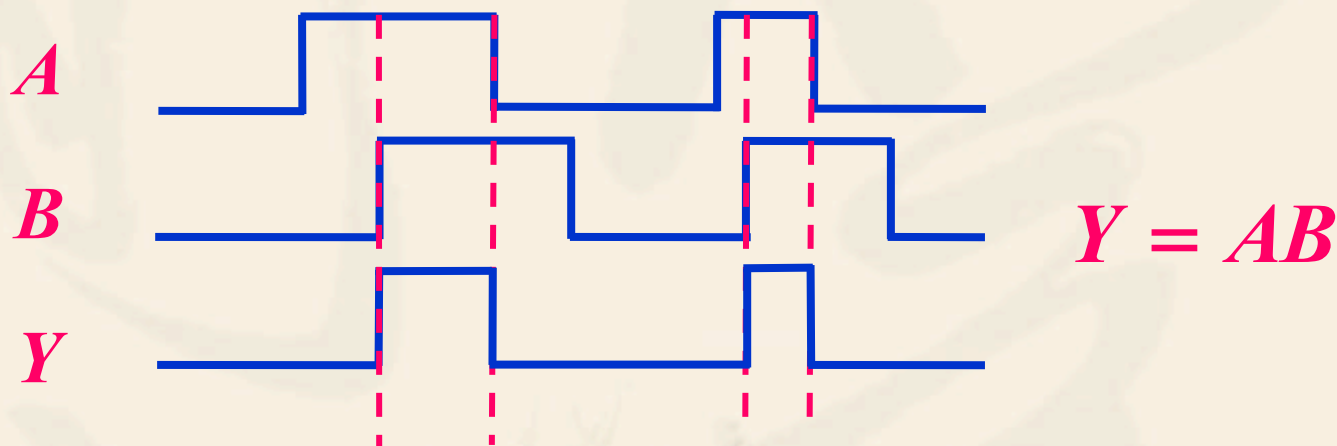
缺点：

不能进行运算和变换，所表示的逻辑关系不直观。



五、波形图

输入变量和对应的输出变量随时间变化的波形。



优点： 形象直观地表示了变量取值与函数值在时间上的对应关系。

缺点： 难以用公式和定理进行运算和变换，当变量个数增多时，画图较麻烦。

1.3.2 几种表示方法之间的转换

一、真值表 \rightarrow 函数式 \rightarrow 逻辑图

[例] 设计一个举重裁判电路。在一名主裁判(A)和两名副裁判 (B 、 C) 中，必须有两人以上(必有主裁判)认定运动员的动作合格，试举才算成功。

① 真值表 \rightarrow 函数式

将真值表中使逻辑函数 $Y=1$ 的输入变量取值组合所对应的最小项相加，即得 Y 的逻辑函数式。

$$Y = \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

函数式

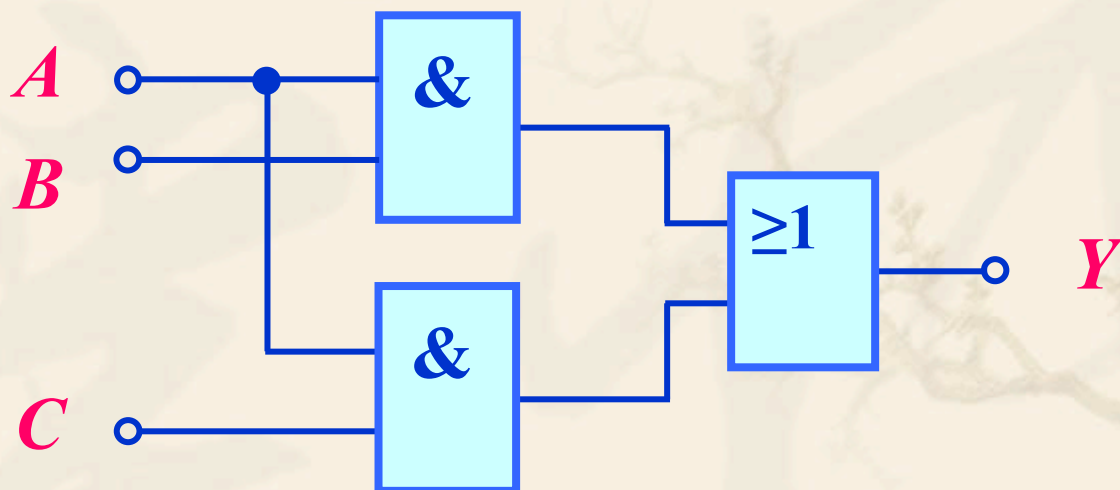
$$Y = \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC$$

卡诺图化简

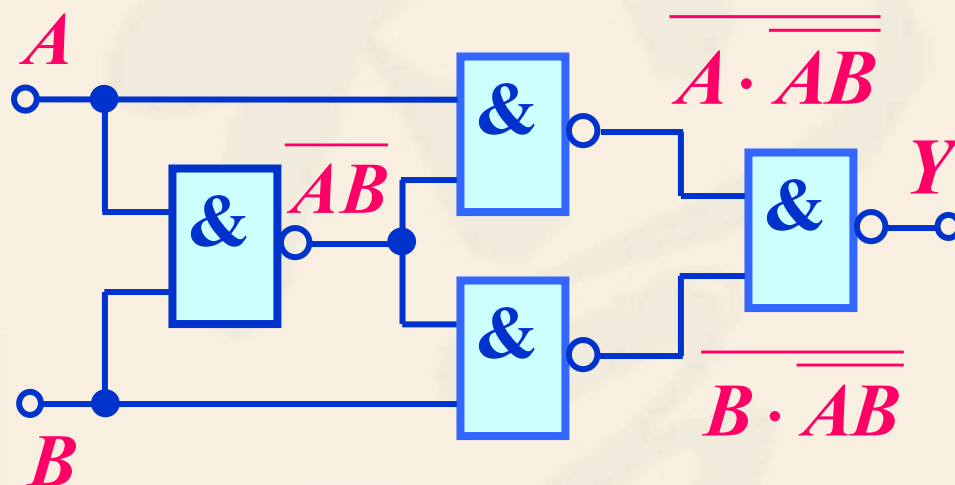
$$Y = AB + AC$$

② 函数式 \rightarrow 逻辑图

		<i>BC</i>			
		00	01	11	10
<i>A</i>	0	0	0	0	0
	1	0	1	1	1



二、逻辑图 \rightarrow 函数式 \rightarrow 真值表



$$\begin{aligned} Y &= \overline{\overline{A \cdot \overline{AB} \cdot B \cdot \overline{AB}}} \\ &= A \cdot \overline{AB} + B \cdot \overline{AB} \\ &= A(\overline{A} + \overline{B}) + B(\overline{A} + \overline{B}) \\ &= \overline{AB} + \overline{AB} \\ &= A \oplus B \end{aligned}$$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0