5. Случайная величина имеет распределение Парето:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta-1}{x^{\theta}}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}, \quad \theta > 1.$$

a) По выборке объема n найти оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

b) Построить доверительный интервал для медианы.

c) Найти байесовскую оценку параметра θ и построить байесовский доверительный интервал для этой оценки, если априорная плотность распределения параметра имеет вид $p(y) = \begin{cases} e^{1-y}, & y \geq 1 \\ 0, & y < 1 \end{cases}$.

d) Построить асимптотический доверительный интервал для параметра θ.

e) Сгенерируйте выборку объема $n = 100$ для некоторого значения параметра θ. Вычислите указанные выше доверительные интервалы для доверительной вероятности 0.95.

f) Численно постройте бутстраповский доверительный интервал двумя способами, используя параметрический бутстрап и непараметрический бутстрап.

g) Сравнить все интервалы.

a ОМП:

$$\xi \sim p(x,\theta)$$

$$L(\vec{x}_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \dfrac{(\theta-1)}{x_i^{\theta}}; & x_i \geq 1 \\ 0; & x_i < 1 \end{cases}$$

$$\ln L = n\ln(\theta-1) - \theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \to \max$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta-1} - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i} + 1}$$

Проверим: $\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2} = -\dfrac{n}{(\theta-1)^2} < 0$ – нашли max

b $\exists\, \beta = 0{,}95$

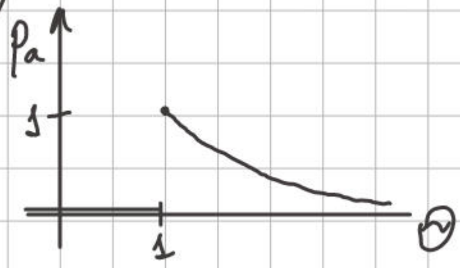
$$\int_1^{med} \frac{\theta-1}{x^{\theta}}dx = \int_1^{med}(\theta-1)x^{-\theta}dx = \frac{\theta-1}{-(\theta-1)}x^{-\theta+1}\Big|_1^{med} = \frac{1}{2}$$

$$1 - med^{-\theta+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow med = 2^{\frac{1}{\theta-1}} \quad (\text{при } \theta=10 \ med \approx 1{,}0801)$$

Посчитаем дов. интервал bootstrap'ом

(c) Байес

$$p(\Theta) = \begin{cases} e^{1-\Theta}, & \Theta \geq 1 \\ 0, & \Theta < 1 \end{cases}$$ - априорная пл-сть



$$p(\Theta \mid \vec{x}_n) = \frac{p(\Theta) L(\Theta)}{P(\vec{x}_n)} = C L P(\Theta) \to \max$$

$$L(\Theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \Theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \frac{(\Theta-1)}{x_i^{\Theta}}; & x_i \geq 1 \\ 0; & x_i < 1 \end{cases}$$

$$\ln L = n \ln(\Theta - 1) - \Theta \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\ln p(\Theta \mid \vec{x}_n) = \ln C + \ln L + \ln p(\Theta) = \{\text{тк } \Theta > 1\}$$

$$= \ln C + n \ln(\Theta - 1) - \Theta \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + 1 - \Theta$$

$$\frac{\partial \ln p(\Theta \mid \vec{x}_n)}{\partial \Theta} = \frac{n}{\Theta - 1} - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - 1 = 0$$

$$\frac{n}{\Theta - 1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\boxed{\tilde{\Theta} = \frac{n}{1 + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i} + 1}$$

$$p(\Theta \mid \vec{x}_n) = C \cdot (\Theta - 1)^n \cdot e^{1-\Theta} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{\Theta}} = C(\Theta - 1)^n e^{1-\Theta} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \right)^{\Theta} =$$

$$= e\tilde{C}(1-\Theta)^{100} \cdot (e \prod x_i)^{-\Theta}$$

d) Асимпт. довер. интервал для θ

$$\sqrt{nJ(\tilde{\theta})}(\tilde{\theta}-\theta) \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$J(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \theta}\right)^2\right] = M\left[\left(\frac{\partial \ln \frac{\theta-1}{x^{\theta}}}{\partial \theta}\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\frac{1}{(\theta-1)^2}\right] - \frac{2}{\theta-1} M[\ln x] + M[\ln^2 x]$$

$$M[\ln x] = \int_1^{+\infty} \ln x \, \frac{\theta-1}{\theta} dx = (\theta-1)\int_1^{+\infty} \ln x \cdot x^{-\theta} dx =$$

$$= (\theta-1)\left(\frac{\ln \cdot x^{-\theta+1}}{-\theta+1}\Bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{x^{-\theta}}{\theta-1} dx\right) = 0 + \frac{x^{-\theta+1}}{\theta+1}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{\theta-1}$$

$$M[\ln^2 x] = \int_1^{+\infty} \ln^2 x \, \frac{\theta-1}{x^{\theta}} dx = (\theta-1)\int_1^{+\infty} \ln^2 x \cdot x^{-\theta} dx =$$

$$= (\theta-1)\left(\frac{\ln^2 x \cdot x^{-\theta+1}}{-\theta+1}\Bigg|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{2\ln x \cdot x^{-\theta}}{-\theta+1} dx\right) = 0 + 2(\theta-1)\int_1^{+\infty} \ln x \cdot x^{-\theta} dx = \frac{2}{(\theta-1)^2}$$

$$J(\theta) = \frac{1}{(\theta-1)^2} - \frac{2}{(\theta-1)^2} + \frac{2}{(\theta-1)^2} = \frac{1}{(\theta-1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta)}{\tilde{\theta}-1} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$\tilde{\theta} - \frac{\tilde{\theta}-1}{\sqrt{n}} t_1 < \theta < \tilde{\theta} - \frac{\tilde{\theta}-1}{\sqrt{n}} t_2$$

$$\boxed{\tilde{\theta} - \frac{\tilde{\theta}-1}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\beta}{2}} < \theta < \tilde{\theta} - \frac{\tilde{\theta}-1}{\sqrt{n}} u_{\frac{1+\beta}{2}}}$$