复变函数

原函数与不定积分、柯西积分公式

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

October 8, 2020

目录

1 原函数与不定积分、柯西积分公式
- 原函数介绍
- 证明 1

2 原函数的引入
- 例 5
- 例 6

3 柯西积分公式
- 柯西积分公式
- 平均值公式定义
  - 例 1 答案

4 其他例题
- 例 5
- 小结

目录

1 原函数与不定积分、柯西积分公式
- 原函数介绍
- 证明 1

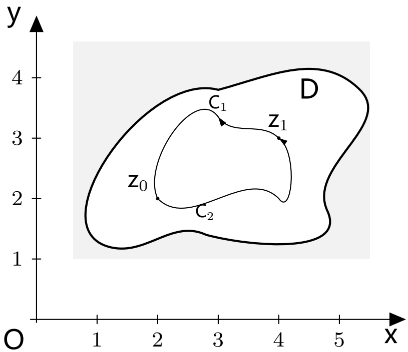
2 原函数的引入
- 例 5
- 例 6

3 柯西积分公式
- 柯西积分公式
- 平均值公式定义
  - 例 1 答案

4 其他例题
- 例 5
- 小结

原函数介绍

由柯西定理, 解析函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内的围线 C 上的积分为 0. 对于简单曲线 C, 积分 $\int_C f(z)dz$ 与连接起点及终点的路径 C 无关. 解析函数在单连通区域 D 内的积分只与起点 z_0 及终点 z_1 有关, 如图 1 所示的积分曲线,



有

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz.$$

固定 z_0, 让 z_1 在 B 内变动, 并令 $z_1 = z$, 积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 D 内确定了一个单值函数 $F(z)$.

利用单值函数 $F(z)$, 可以定义函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, 对这个积分有下述定理:

定理 .1

设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

证：从导数的定义出发证明 $F'(z) = f(z)$. 对 $\forall z_0 \in D$, 作 B 内圆 $K : k = z + re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi], r > 0$. 取 $|\Delta z|$ 充分小, 使得 $z_0 + \Delta z$ 在 K 内 (图3),

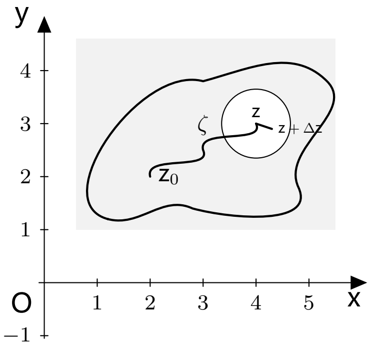


图: 证明解析函数 $F'(z) = f(z)$ 的所用路径

证明 2

于是有

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

由于积分与路径无关, 因此积分 $\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$ 的积分路线可取由 $z_0\to z\to z+\Delta z$ 的积分路线取得, $F(z+\Delta z)$ 在 $z_0\to z$ 上的积分路线跟积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 的积分路线相同. 于是有

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta.$$

又因

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta=f(z)\Delta z,$$

证明 3

从而有

$$
\begin{aligned}
\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z) &= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - f(z)d\zeta \\
&= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta)-f(z)]d\zeta.
\end{aligned}
$$

因为 $f(z)$ 在 D 内解析, 所以 $f(z)$ 在 D 内连续. 对于 $\forall \epsilon > 0$, 可找到 $\delta > 0$, 对 $\zeta : |\zeta - z| < \delta$, 当 $|\Delta z| < \delta$ 时, 总有

$$|f(\zeta)-f(z)| < \epsilon.$$

证明 4

根据积分的估值性质

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| &= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|d\zeta \\ &\le \frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z| = \epsilon.\end{aligned}$$

由实函数的积分与路径无关, 下述积分

$$\begin{aligned}\oint_C udx - vdy &= \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy \\ &= 0,\end{aligned}$$

证明 5

同样地，另一个积分

$$\oint_C v dx + u dy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

所以有 $\oint_C f(z)dz = 0$. 这就是说

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = 0,$$

即

$$F'(z) = f(z).$$

证明 1

令 $F(z)=P(x,y)+iQ(x,y), F'(z)=f(z)=u+iv$, 因此有 $\frac{\partial P}{\partial x}=u$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=v$; 另一方面,

$$F'(z)=\left[\int_{z_0}^{z} f(z)dz\right]'=\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udx-vdy+i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} vdx+udy\right]',$$

所以对应有

$$P(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udx-vdy,$$

$$Q(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} vdx+udy,$$

证明 7

而积分与路径无关, 因而有

$$\frac{\partial P}{\partial x}=u,\frac{\partial P}{\partial y}=-v,\frac{\partial Q}{\partial x}=v,\frac{\partial Q}{\partial y}=u$$
$$\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$ 在区域 D 内解析.

目录

1 原函数与不定积分、柯西积分公式
- 原函数介绍
- 证明 1

2 原函数的引入
- 例 5
- 例 6

3 柯西积分公式
- 柯西积分公式
- 平均值公式定义
  - 例 1 答案

4 其他例题
- 例 5
- 小结

原函数的引入

基于上述定理, 为了解决积分求解问题, 先引入需要的原函数概念.

定义 .1

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续. 若 D 内的一个函数 $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, 满足 $\Phi'(z) = f(z)$, 则称 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数. 称原函数的全体组成了 $f(z)$ 的全体不定积分.

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数. $f(z)$ 的任意两个原函数的差是一个常数. 即对于 $f(z)$ 的原函数 $G(z)$ 和 $H(z)$, 有 $G(z) - H(z) = c$, c 为任意常数.

总结

上述定理和微积分学中的变上限函数的求导定理类似.
在此基础上, 可以得出类似于微积分的基本定理和类似于微积分理论中的牛顿—莱布尼茨公式.

解析函数的原函数——解析函数的定理

定理 .2

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

例 .1

求积分 $\int_{z_0}^{z_1} z dz$.

解: 函数 z 在全平面解析, 它的原函数是 $\frac{z^2}{2}$. 由牛顿—莱布尼兹公式知,

$$\int_{z_0}^{z_1} z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

例 2

例 .2

求积分 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2 dz$.

解:

$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2 dz = \frac{1}{2}\int_0^{\pi i} \cos z^2 dz^2 = \frac{1}{2}\sin z^2\Big|_0^{\pi i}$$
$$= \frac{1}{2}\sin(-\pi^2) = -\frac{1}{2}\sin\pi^2.$$

注: 本例题使用了微积分学中的“凑微分”法.

例 3

例 .3

求积分 $\int_1^{1+i} ze^z dz$.

解: ze^z 的一个原函数为 $(z-1)e^z$, 利用分部积分法可得

$$\int_1^{1+i} ze^z dz = (z-1)e^z\Big|_1^{1+i} = ie^{1+i} = ie(\cos 1 + i\sin 1).$$

课堂练习

例 .4

(课堂练习) 求积分 $\int_0^1 z\sin z dz$

解:

$$\int_0^1 z\sin z dz = -\int_0^1 z d\cos z = -z\cos z\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos z dz$$
$$= \sin 1 - \cos 1.$$

例 5

例 .5

求积分 $\int_C (2z^2+8z+1)dz$, 其中 C 是连接 0 到 $2\pi a$ 的摆线, 方程为 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$.

解: 函数 $f(z)=2z^2+8z+1$ 在复平面内解析, 所以积分与路线无关, 根据牛—莱公式:

$$\begin{aligned}\int_C (2z^2+8z+1)dz &= \int_0^{2\pi a}(2z^2+8z+1)dz\\ &= \frac{2}{3}z^3+4z^2+z\Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3a^3+16\pi^2a^2+2\pi a.\end{aligned}$$

例 6

例 .6

求积分 $\int_0^i z\cos z dz$ 的值.

解: 函数 $z\cos z$ 在全平面解析, 一个原函数为 $z\sin z+\cos z$, 所以

$$\int_0^i z\cos z dz=(z\sin z+\cos z)\Big|_0^i=i\sin i+\cos i-1$$
$$=i\frac{e^{-1}-e}{2i}+\frac{e^{-1}+e}{2i}-1=e^{-1}-1.$$

例 7

例 .7

试沿着区域 $\mathrm{Im}(z) \geq 0, \mathrm{Re}(z) \geq 0$ 内的圆弧 $|z| = 1$, 计算积分 $\oint_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ 的值.

解: 函数 $\frac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在考虑的区域内解析, 一个原函数为 $\frac{1}{2}\ln^2(z+1)$, 所以

$$\oint_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^i = \frac{1}{2}\left[\ln^2(1+i) - \ln^2(2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i\right)^2 - \ln^2(2)\right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8}\ln^2 2 + \frac{\pi \ln^2 2}{8} i.$$

目录

1 原函数与不定积分、柯西积分公式
- 原函数介绍
- 证明 1

2 原函数的引入
- 例 5
- 例 6

3 柯西积分公式
- 柯西积分公式
- 平均值公式定义
  - 例 1 答案

4 其他例题
- 例 5
- 小结

积分公式条件

柯西积分公式的作用是将函数在 C 内部的积分用它在边界上的值来表示.

设 D 为单连通区域, z_0 为 D 中的一点, 如果 $f(z)$ 在 D 内解析, 那么函数 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ 一般不为零. 又根据闭路变形定理, 积分沿任何一条围绕 z_0 的简单闭曲线都是相同的.

取以 z_0 为中心, 由 $f(z)$ 的连续性, 在 C 上的函数 $f(z)$ 的值将随着 δ 的缩小而逐渐接近于它所在的圆心 z_0 处的值, 积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ 的值

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

也将随着 δ 的缩小而逐渐接近于 $2\pi i f(z_0)$. 其实两者是相等的, 即

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

柯西积分公式

定理 .3

(柯西积分公式) 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全属于 D, z_0 为包含在 C 内的任一点, 则 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ 或 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$.

证　由于 $f(z)$ 在 z_0 点处连续, 对任意给定 $\varepsilon > 0$, 必有一个 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $|z - z_0| < \delta$ 时, $\left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon$. 设以 z_0 为中心, R 为半径的圆周 K: $|z - z_0| = R$ 全部处于 C 的内部, 且 $R < \delta$ (图3), 那么

积分路径的收缩示意图

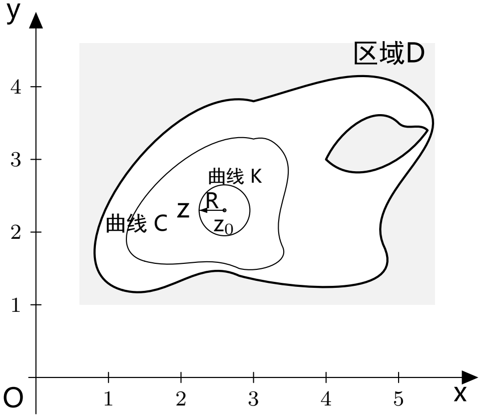


图: 区域 D 上积分路径的收缩示意图

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}dz$$
$$= \oint_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$
$$= 2\pi i f(z_0) + \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.$$

又有

$$\left|\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \oint_K \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}ds < \frac{\varepsilon}{R}\oint_K ds$$
$$= 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

平均值公式定义

通过柯西积分公式, 就可以把一个函数在 C 内部的值用它在边界上的值来表示.

定义 .2

如果 C 是圆周 $z = z_0 + Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$, 那么柯西积分公式可以写成 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$. 这个公式又称为平均值公式.

这就是说, 一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

例 1

例 .1

求下列积分 (沿圆周正向) 的值:

1) $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz$;

2) $\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)dz$.

解: 由柯西积分公式得

1)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz=\sin z\,|_{z=0}\ =0;$$

2)

$$\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)dz=\oint_{|z|=4}\frac{dz}{z+1}+\oint_{|z|=4}\frac{2dz}{z-3}$$
$$=2\pi i\cdot 1+2\pi i\cdot 2=6\pi i.$$

例 2

例 .2

计算积分 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz.$

解: 因为 $f(z) = e^z$ 在复平面内解析, $z = 1$ 位于 $|z| < 2$ 内, 由柯西积分公式

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i \cdot e^z|_{z=1} = 2e\pi i.$$

例 3

例 .3

C 表示正向圆周 $x^2+y^2=3$, $f(z)=\int_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$, 求 $f'(1+i)$.

解: 根据柯西积分公式知, 当 z 在圆周 C 内时,

$$f(z)=2\pi i\cdot(3\xi^2+7\xi+1)\big|_{\xi=z}=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

故

$$f'(z)=2\pi i(6z+7),$$

而 $1+i$ 在圆周 $C: x^2+y^2=3$ 内, 所以 $f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$.

目录

1 原函数与不定积分、柯西积分公式
- 原函数介绍
- 证明 1

2 原函数的引入
- 例 5
- 例 6

3 柯西积分公式
- 柯西积分公式
- 平均值公式定义
  - 例 1 答案

4 其他例题
- 例 5
- 小结

例 4

例 .1

计算积分 $\oint\limits_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$, 其中 $C: |z+1| = \frac{1}{2}$.

解:

$$\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz = \oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}}{z+1}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\right|_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

例 5-1

例 .2

计算积分 $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz.$

解: 函数 $\frac{e^z}{z(z^2-1)}$ 有三个奇点 $z=0, z=1, z=-1$, 可以分解为

$$\frac{1}{z(z^2-1)} = \frac{1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{2z(z+1)}.$$

例 5

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-\frac{2}{z}\right).$$

利用柯西积分公式, 可得

$$\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{z(z^2-1)}dz=\frac{1}{2}\oint_{|z|=3}\left[\left(\frac{e^z}{z-1}+\frac{e^z}{z+1}-\frac{2e^z}{z}\right)\right]dz$$

$$=\pi i(e+e^{-1}-2).$$

例 6

例 .3

求 $\oint_{|z|=1} e^{z+1}\sin z dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)(z-4)}$.

解:

$$
\begin{aligned}
&\oint_{|z|=1} e^{z+1}\sin z dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)(z-4)}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{3}\oint_{|z|=3} \frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-1} dz\\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

例 7-1

例 .4

求 $\oint_{|z|=1}|z-1|dz.$

解:

$$z=e^{i\theta},dz=ie^{i\theta}d\theta,\theta\in(0,2\pi)$$

例 7-2

$$
\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} |z-1|\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} |1-e^{i\theta}| ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2} e^{i\theta}\mathrm{d}i\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\cdot(i\cos\theta - \sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= 2i\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta\mathrm{d}\theta - 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 2i\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta + 8i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\cos\frac{\theta}{2} - 8i\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\cos^2\frac{\theta}{2} \\
&= -\frac{8i}{3}.
\end{aligned}
$$

主要内容

柯西积分公式是复积分计算中的重要公式, 是研究解析函数的重要工具. 它的证明基于柯西-古萨基本定理, 它的重要性在于:

柯西积分公式

解析函数在区域内部的值可以用它在边界的积分值表示.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz,\quad \oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).$$

主要内容

本课介绍了原函数、不定积分的定义以及牛顿—莱布尼兹公式.
在学习中应注意与《高等数学》中相关内容相结合, 更好的理解本次课内容.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,$$

$$\int f(z)dz = F(z) + c,$$

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_0).$$

第三章习题

教材习题三 P99: 8. 1), 3), 5), 7); 9; 10 2), 3), 6); 12; 15.