复变函数

复函数和复函数的连续性

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

September 15, 2020

目录

目录

复函数的概念

定义 .1

设 G 是一个复数 $z = x + iy$ 的集合, $G = \{z | z \in \mathbb{C}\}, G \subset \mathbb{C}$. 如果有一个确定的法则 f 存在, 按照法则 f, 对于集合 G 中的每一个复数 z, 就有一个或几个复数 $w = u + iv$ 与之对应, 那么称复变数 w 是复变数 z 的函数 (复变函数), 记作 $f: G \to G^* \Rightarrow w = f(z)$. 称集合 G 是 $f(z)$ 的定义集合. 对应于 G 中 z 的所有 w 值组成的集合, $G^* \in \mathbb{C}$, G^* 称为是函数值集合.

定义 .2

(单值函数) 如果复数 z 的一个值对应着 w_d 的一个值, 那么称复函数 $f(z)$ 是单值的. 如果复数 z 一个值对应着 w_d 的多个值, 那么称复函数 $f(z)$ 是多值的.

注解

实函数是指定义域和值域都是实数的函数。可以看出，实函数的研究对象是实数，其本质是实数与实数之间的对应关系，是实数随着实数的变化关系。从集合的定义角度来看，实函数的本质是实数集到实数集的对应。实函数的一个重要特征就是，函数关系可以反映在坐标系中。

定义 .3

(单值函数) 如果复数 z 的一个值对应着 w_d 的一个值, 那么称复函数 $f(z)$ 是单值的. 如果复数 z 一个值对应着 w_d 的多个值, 那么称复函数 $f(z)$ 是多值的.

注解

实函数是指定义域和值域都是实数的函数。可以看出，实函数的研究对象是实数，其本质是实数与实数之间的对应关系，是实数随着实数的变化关系。从集合的定义角度来看，实函数的本质是实数集到实数集的对应。实函数的一个重要特征就是，函数关系可以反映在坐标系中。

注解

定义集合 G 通常是一个平面区域, 称为定义域. 通常情况下讨论的函数是单值函数.

定义 .4

(单值函数) 如果复数 z 的一个值对应着 w_d 的一个值, 那么称复函数 $f(z)$ 是单值的. 如果复数 z 一个值对应着 w_d 的多个值, 那么称复函数 $f(z)$ 是多值的.

注解

实函数是指定义域和值域都是实数的函数。可以看出，实函数的研究对象是实数，其本质是实数与实数之间的对应关系，是实数随着实数的变化关系。从集合的定义角度来看，实函数的本质是实数集到实数集的对应。实函数的一个重要特征就是，函数关系可以反映在坐标系中。

注解

定义集合 G 通常是一个平面区域, 称为定义域. 通常情况下讨论的函数是单值函数.

例 .1

对于函数 $w = z^2$, 令 $z = x + iy, w = u + iv$, 那么

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

因而函数 $w = z^2$ 对应于如下两个二元实变函数

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy.$$

对于复函数, 由于它反映了两对变量 u, v 和 x, y 之间的对应关系, 无法用一个平面内的几何图形表示, 必须把它看成两个复平面上的点集之间的对应关系.
z 平面上的点表示 z 值, w 平面上的点表示 w 值. 则函数 $w = f(z)$ 在几何上可以看做是把 z 平面上的点集 G 映射到 w 平面上的点集 G^* 的映射 (或变换). 通常称为由函数 $w = f(z)$ 所构成的映射. 如果 G 中的点 z 被映射到 G^* 的点 w, 那么 w 称为 z 的像, z 称为 w 的原像.

例 .2

对于函数 $w = \bar{z}$ 所构成的映射, 是把 z 平面上的点 $z = a + ib$ 映射成 w 平面上的点 $w = a - ib$.

例 .3

函数 $w = z^2$ 所构成的映射, 是把 z 平面上的点 $z = a + ib$ 映射成 w 平面上的点 $w = a^2 - b^2 + 2abi$. 将 z 平面上的点 $i \to -1; 1 + 2i \to -3 + 4i; -1 \to 1$ (图1).

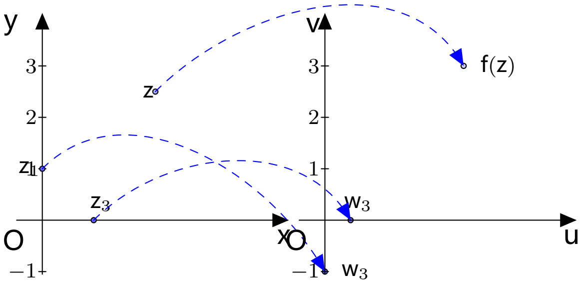

图: 函数 $w = z^2$

定义 .5

(复函数的反函数) 假定函数 $w=f(z)$ 的定义集合为 z 平面上的集合 G, 函数值集合为 w 平面上的集合 G^*, 那么 G^* 中的每一个点 w 必然对应着 G 中的点. 按照函数的定义, 在 G^* 上就确定了一个单值（多值）函数 $z=\phi(w)$, 它称为函数 $w=f(z)$ 的反函数, 也称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射.

注解

今后不再区分函数与映射, 如果函数 $w=f(z)$ 与它的反函数 $z=\phi(w)$ 都是单值的, 那么称函数 (映射)$w=f(z)$ 是一一的. 同时, 称集合 G 与 G^* 是一一对应的.

复变函数在几何上又称为映射（或变换）. 这种函数关系要用两个平面来表示. 即函数 $w = f(z)$ 在几何上可以看成是把 z 平面上的一个点集 G 映射到 w 平面上的一个点集 G^*.

例 .4

$w = \bar{z}$, 显然, 它将 z 平面上的点 $z_1 = 2 + 3i$ 映射成 w 平面上的点 $w_1 = 2 - 3i$, 将点 $z_2 = 1 - 2i$ 映射成 w 平面上的点 $w_2 = 1 + 2i$, $w = \bar{z}$ 能将三角形 ΔABC 映射成 w 平面上的三角形 $A'B'C'$.

例 .5

函数 $w=z^2$ 将 z 平面上的曲线 $x=C$ 映射成 w 平面上的何种曲线?

解:

$$w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy\Rightarrow\begin{cases}u=x^2-y^2\\v=2xy\end{cases}$$

由 $v=2xy$ 可得 $y=\frac{v}{2x}$, 再由 $x=C\Rightarrow u=C^2-\frac{v^2}{4C^2}$ 是 w 平面上关于以 u 轴为对称的抛物线. 例如取
$x=1\Rightarrow u=1-\frac{v^2}{4}$; $x=2\Rightarrow u=4-\frac{v^2}{16}$.

例 .6

变换 $w=\frac{1}{z}$ 将 z 平面上的直线 $x=1$ 映射成 w 平面上的何种曲线?

解: 令 $z=x+iy, w=u+iv$, 由
$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$, 则有

$$\begin{cases} u=\frac{x}{x^2+y^2} \\ v=-\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases},$$

将 $x = 1$ 代入方程, 可得 $u^2 + v^2 = u$,

$$\frac{u}{u^2+v^2} = 1 \Rightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

显然为 w 平面上圆. 变换 $w = \frac{1}{z}$ 将 z 平面上的直线 $x = 1$ 映射成 w 平面上的圆. 由以上例子, 可以总结出一般的将 z 平面上的曲线映射成 w 平面上的给定曲线时, 其方法是:

注解

(z 平面上的曲线映射成 w 平面上的给定曲线的方法) 先求出函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 中的

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

再反解出

$$\begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

由给出的条件代入(1), 可得在 w 平面上的相应的含有 u 的曲线方程.

目录

复变函数的连续性

定义 .6

如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 我们说 $f(z)$ 在 z_0 点连续. 如果 $f(z)$ 在 D 内处处连续, 那么我们说 $f(z)$ 在 D 内连续.

定理 .1

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 其中 $z=x+iy$.

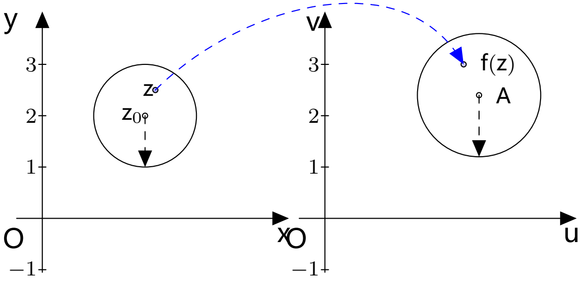

图: 函数 f(z) 的极限

定理 .2

1）在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母在 z_0 不为零) 在 z_0 仍然连续. 2）如果函数 $h=g(z)$ 在 z_0 连续, 函数 $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续, 那么复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 连续.

注解

(函数连续性的几何意义) 当变点 z 一旦进入 z_0 的充分小的 δ 去心邻域时, 它的像点 $f(z)$ 就落入 $f(z_0)$ 的预先给定的 ϵ 邻域中, 其中 z 趋近 z_0 的方式是任意的, 也就是说, 无论 z 从什么方向, 以何种方式趋向于 z_0, $f(z)$ 都要趋近于同一个常数 $f(z_0)$.

复变函数的极限

定义 .7

(函数极限) 设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内有定义, A 为复常数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon)$, 使得当 $0 < |z - z_0| < \rho$ 时, 有 $\left|f(z) - A\right| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

必须注意, 定义中的 z 趋向于 z_0 的方式必须是任意的.

定理 .3

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=u_0+iv_0$, $z_0=x_0+iy_0$, 那么 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

这个定理说明求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限问题可以转化为求两个二元实函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的极限问题.

极限的运算法则

定理 .4

(类似于实函数的极限运算法则) 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 那么

1) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B$. 2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z) = AB$. 3) $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0)$.

例 .1

(复变函数) 设 D 为复平面上的一个点集, 对 $\forall$ 点 $z \in D$, 按某种法则, 有另一复数 W 与之对应, 则称 W 是 Z 的复变函数, 记为 $w = f(z)$. 其中, 称 W 为像, Z 为原像.

1）若 Z 是一一对应, 则称 $w = f(z)$ 为单值函数.
2）单叶函数是复变函数中一类重要的解析函数。对复平面区域 D 上单值的解析函数 $f(z)$, 若对 D 中任意的不同的两点 z_1、z_2 有 $f(z_1) \neq f(z_2)$, 则说 $f(z)$ 为 D 上的单叶函数，记作 $f(z)$ 属于 φ. 单叶函数及其相关的单叶映射等课题是复变函数论最重要的研究内容之一.
3）若 Z 对应多个 W, 则称 $w = f(z)$ 为多值函数.

设 $z = x + iy$, $W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$, 即

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases},$$

一个复变函数可以用两个二元实变函数 $u(x,y), v(x,y)$ 来表示.

例 .2

$$W = Z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}.$$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

黎曼映射定理

设 $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 为开圆盘, $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为单连通开子集. 若 $\Omega \neq \mathbb{C}$, 则存在一对一的全纯映射 $f : \Omega \to D$, 使 $f^{-1} : D \to \Omega$ 亦全纯. 若 f 在 U 中每点 z_0 复可微, 我们称 f 在 U 上全纯. 我们称 f 在点 z_0 全纯, 如果它在 z_0 的某个邻域全纯. 一个复函数全纯当且仅当它满足柯西-黎曼方程.

注解

换言之, Ω 与 D 双全纯同构. 注意到二维的全纯映射不外乎保持定向的共形映射, 它保持角度与定向不变. 黎曼在他 1851 年的博士论文中陈述了这个结果, 但其证明不完整. 康斯坦丁・卡拉西奥多里在 1912 年发表了第一个完整证明.

任意两个至少有两个边界点的单连通区域 D_1 及 D_2, 一定可以相互共形映射, 即存在解析的单叶函数 f, 将 D_1 一一地映射为 D_2, 所以对单叶函数的研究在复变函数论中显得很重要。

注解

由于单叶映射也是最简单的映射, 所以对它的讨论也是复变函数论中最基本的内容之一。

若解析函数 $f(z)$ 在 D 中单叶, 则 $f'(z) \neq 0$ 在 D 中成立; 反之, $f'(z) \neq 0$ 在 D 中成立, 不一定能保证 $f(z)$ 在 D 中单叶, 只能说在一点的一个邻域内单叶。

最早对单叶函数有重要贡献的是 P. 克贝 (1909)、L. 比伯巴赫 (1916)、G. 费伯 (1916) 等。

例 .3

比伯巴赫证明了重要的偏差定理: 若 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 中正则单叶, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 则有:

$$|z|(1+|z|)^{-2} \le |f(z)| \le |z|(1-|z|)^{-2}, \tag{2}$$

$$(1-|z|)(1+|z|)^{-3} \le |f'(z)| \le (1+|z|)(1-|z|)^{-3} \tag{3}$$

上述等号限于克贝函数 $K(z) = z(1-\epsilon z)^{-2}, (|\epsilon| = 1)$ 时成立。

目录

主要讲解了复数乘积、乘幂和复数方根.
应理解区域的有关概念: 邻域、去心邻域、内点、开集、边界点、边界、区域、有界区域、无界区域; 理解单连通域与多连通域.
复变函数以及映射的概念是本章的一个重点.
注意：复变函数与一元实变函数的定义完全一样, 只要将后者定义中的“实数”换为“复数”就行了.
通过本课的学习, 熟悉复变函数的极限、复函数连续性的运算法则与性质.

目录

1. (1) (3); 2. 8. 9. 11. 13. 15. 18. 20. 26.

例 .1

将下列复数化为三角表示式和指数表示式

$$1)\ \mathrm{i};\qquad 2)\ -1$$

$$3)\ 1+\mathrm{i}\sqrt{3};\qquad 4)\ 1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$$

$$5)\ \frac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}};\qquad 6)\ \frac{(\cos 5\varphi+\mathrm{i}\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-\mathrm{i}\sin 3\varphi)^3}$$

解: 4) $z = 1 - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, $|z| = 2\sin\frac{\varphi}{2}$, 当 $0 < \varphi < \pi$,
$\arg(z) = \arg\ \mathrm{tg}\,\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \mathrm{arctg}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi-\varphi}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则
$z = 2\sin\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\pi-\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi-\varphi}{2})$, $0 < \varphi < \pi$.
5) 令 $z = \frac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$, $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,
$\mathrm{Arg}\,z = \mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2 + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
6) $\frac{(\cos 5\varphi+\mathrm{i}\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-\mathrm{i}\sin 3\varphi)^3} = \frac{e^{10\varphi\mathrm{i}}}{e^{-0\varphi\mathrm{i}}} = e^{19\varphi\mathrm{i}}$.

例 .2

求复数 $z = 1 + \sin\alpha + i\cos\alpha, -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ 的三角形式与指数形式.

解:

$$
\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{(1+\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha} = \sqrt{2(1+\sin\alpha)} \\
&= \sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)} \\
&= \sqrt{2\cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right| \\
&= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right), \qquad (4)
\end{aligned}
$$

再由 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < -\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < -\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, 可得 $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$.
又由 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 则

$$\begin{cases} r\cos\theta = 1 + \sin\alpha \\ r\sin\theta = \cos\alpha \end{cases} \tag{5}$$

则

$$-2\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})\cos\theta = 1 + \sin\alpha = 2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) \tag{6}$$

$$\cos\theta = -\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \cos\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \tag{7}$$

验证

$$r\sin\theta = \cos\alpha \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\\ &= -\cos\pi\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}r\sin\theta &= 2\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\\ &= \sin(\frac{5\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha = \operatorname{Im} z\end{aligned} \tag{10}$$

则 z 的三角形式

$$\begin{aligned} z &= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\ &= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)e^{\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)i}. \end{aligned} \tag{11}$$

$$\arg z = -\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}. \tag{12}$$

例 .3

讨论函数 $f(z) = \frac{1}{z}$ 的连续性.

解: (i) $z \neq 0$, $f(z)$ 在复平面上连续. 取任意两点 z_1, z_2, 令 $0 < M = \min(|z_1|, |z_2|) < \infty$, 则当 $|z_1 - z_2| < M^2\epsilon \triangleq \delta(\epsilon)$, 恒有 $\left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}\right| \leq \epsilon$.

(ii) $z = 0$ 点处, $f(0)$ 在该点不连续. 令 $z_n = \frac{1}{n}$, 当 $n > N$ 时, $|z_n - 0| \leq \frac{1}{n}$, 但有 $|f(z_n) - f(0)| = |n - \infty| \geq |n| - |\infty| = \infty$.

例 .4

指出下列各题中点的轨迹或所在范围, 并作图

$$
\begin{array}{ll}
1)|z-5|=6; & 2)|z+2i|\geqslant 1\\
3)\mathrm{Re}(z+2)=-1; & 4)\mathrm{Re}(i\bar{z})=3\\
5)|z+i|=|z-i|; & 6)|z+3|+|z+1|=4\\
7)\mathrm{Im}(z)\leqslant 2 & 8)\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1\\
9)0<\arg z<\pi; & 10)\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}
\end{array}
$$

解:

(3) $z+2 = x+2+iy$ 得 $\mathrm{Re}(z+2) = -1 \Rightarrow x = -3.$

(4) $i\bar{z} = i(x-iy) = y+ix$, 得 $(i\bar{z}) = y$, 即 $\mathrm{Re}(i\bar{z}) = 3$。

(5) 实轴

(6) $|z+3|+|z+1| = 4$ 表示 z 距点 -3 与 -1 的距离之和为 4. z 的轨迹为以 $(-3,0)$ 和 $(-1,0)$ 为焦点, 以 4 为长轴的椭圆

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(7) $y \le 2$.
(8) $(x-3)^2 + y^2 \geqslant (x-2)^2 + y^2 \Rightarrow x \le \frac{5}{2}$.
(9) $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $\arg z = 0 \Rightarrow z$ 为 x 轴正向上的点 (正实轴); $\arg z = \pi \Rightarrow z$ 为 x 轴负向上的点 (负实轴); z 的轨迹为不包含实轴的上半平面.
(10) 由 $\arg(z-i) = \arg[x+(y-1)i] = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 得

$$\operatorname{tg}[\arg(z-i)] = 1 \quad (x > 0, y > 1)$$

即 $\frac{y-1}{x} = 1$. 故 $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$ 相当于 $y-x-1 = 0 (x > 0, y > 1)$ 的轨迹为以 i 为起点的射线 $y - x - 1 = 0\,(x > 0)$, 见图 x.