教　　案　　纸

● 说明介绍	**理论课 2　§ 1.3-1.6 复数的乘幂、方根与复函数的极限和连续性**

理论课 2　§ 1.3-1.6 复数的乘幂、方根与复函数的极限和连续性

I　组织教学

1、集中学生注意力;

2、清查学生人数;

3、维持课堂纪律;

II　复习导入及主要内容

1、习题讲评;

2、了解学生掌握情况;

3、重点: 复变函数连续和极限的概念；区域概念及区域判断.

4、难点: 复变函数的极限和连续. 涉及到计算机编程实践, 以培养读者的计算机仿真能力. 读者可以利用等数学工具软件直接进行复数及复变函数的基本运算。

● 说明介绍

III　教学内容及过程

一、　复数的乘积与乘幂

设有两个复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. 则复数乘积 $z = z_1z_2$

$$\begin{aligned} z = z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\quad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned} \tag{3}$$

于是

$$|z_1z_2| = |z|, \tag{4}$$
$$|z| = r_1r_2 = |z_1||z_2|, \tag{5}$$
$$\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2), \tag{6}$$

从而得到如下定理

定理 2.1

两个复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ 乘积的模等于它们模的乘积 $|z_1||z_2|$; 两个复数 z_1 与 z_2 乘积的辐角 Arg(z_1z_2) 等于各自辐角之和. ♣

注解 12 利用向量表示复数时，乘积 z_1z_2 对应的向量是将表示 z_1 的向量旋转一个角度 $\mathrm{Arg}(z_2)$，并伸长或者缩短 $|z_2|$ 倍得到，复数相乘的向量解释如图*10* 所示.

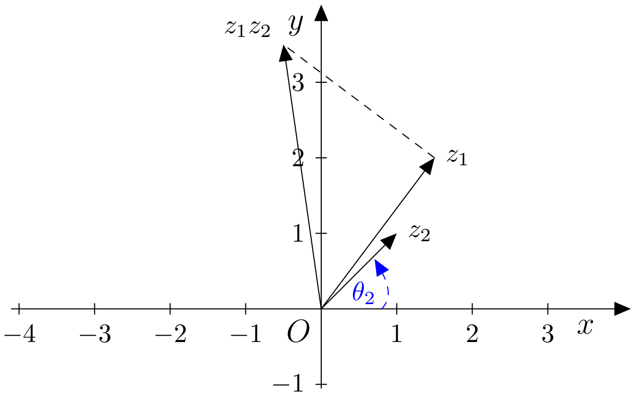

图 10: 复数乘积的向量解释

例 2.1

1. 旋转：iz 相当于将 z 逆时针旋转 $90°$；$-z$ 相当于将 z 顺时针旋转 $180°$.
2. 伸长：$\mathrm{Arg}(z_2)=0$ 时，复数乘法只做伸长，不做旋转.

1、 复数辐角的多值性

公式(6)两端都是由无穷多个数构成的数集. 对于左端的任一值, 右端必有一值与其相等.

例 2.2

取 $z_1=-1, z_2=i$，则 $z_1z_2=-i$. 辐角计算如下

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arg}(z_1) &= \pi+2n\pi, (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),\\
\mathrm{Arg}(z_2) &= \frac{\pi}{2}+2m\pi, (m=0,\pm1,\pm2,\cdots),\\
\mathrm{Arg}(z_1z_2) &= -\frac{\pi}{2}+2k\pi, (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).
\end{aligned}$$

利用公式(6)，得

$$\frac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \Longleftrightarrow k=m+n+1.$$

不定方程可用的解有

$$\begin{aligned}&k=1, m=0, n=0;\\&k=1, m=-2, n=2;\\&k=-1, m=0, n=-2;\\&\quad\vdots\end{aligned}$$

2、 复数的乘幂

$$\begin{aligned}z_1&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1},\\z_2&=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}.\end{aligned}$$

由定理 1, 可以表示如下

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

几何解释: 若利用复指数表示式 $z_1=r_1e^{i\theta_1}, z_2=r_2e^{i\theta_2}$, 则有 $z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

若将第 k 个复数记为 $z_k=r_ke^{i\theta_k}=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$, 则 n 个复数的乘积

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\\&\quad+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\\&=r_1r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)},\end{aligned}\tag{7}$$

若其中 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则有 z 的乘幂表示, $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$, $n\in\mathbb{Z}$.

例 2.3

计算 $z^{10}+z^9$ 的值, 其中 $z=\frac{1+i}{1-i}$.

解: $z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}2i=i$. $i^{10}+i^9=(-1)^5+i(-1)^4=i-1$.

例 2.4

计算 $(1+i\sqrt{3})^8$ 的值.

● MATLAB 指令:=?
Maple 指令:=?

解: 因为 $1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)$, 所以

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^8&=2^8\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)^8\\&=2^8\left(\cos\frac{8}{3}\pi+i\sin\frac{8}{3}\pi\right)\\&=2^8\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right).\end{aligned}$$

3、 复数商

对于复数商, 按照复数商的定义, 当 $z_1\neq 0$ 时, 有

$$z_2=\frac{z_2}{z_1}z_1.$$

由复数的运算法则, 显然有

$$|z_2|=\left|\frac{z_2}{z_1}\right||z_1|,\mathrm{Arg}(z_2)=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\mathrm{Arg}(z_1).$$

于是, 可以得到

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|},\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\mathrm{Arg}(z_2)-\mathrm{Arg}(z_1).$$

归纳起来,得到关于复数商的定理。

定理 2.2

两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ 商的模等于它们模的商 $|z_1|/|z_2|$; 两个复数 z_1 与 z_2 商的辐角 Arg(z_1z_2) 等于各自辐角之差.

注解 13 *若使用指数形式表示复数为 $z_1=r_1e^{i\theta_1}, z_2=r_2e^{i\theta_2}$, 则定理 2 可以表示为*

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_1-\theta_2)},\ (r_1\neq 0).$$

例 2.5

已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$, $z_2=2+i$, 求它的另外一个顶点.

解: 如图 11, 将向量 $z_2 - z_1$ 绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$(或者 $-\frac{\pi}{3}$) 就得到另一个向量, 他的终点即为所求的顶点 z_3(或者 z_3').

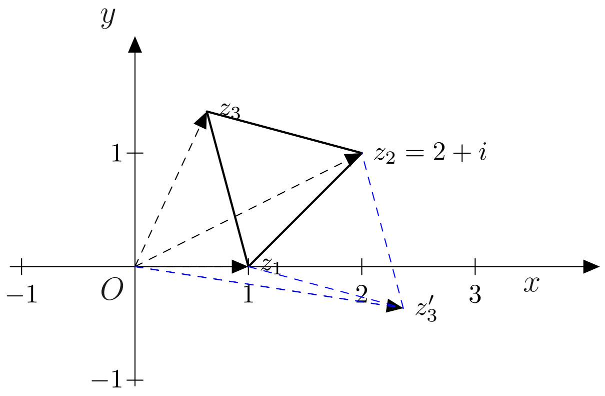

图 11: 确定正三角形的顶点

由于复数 $|e^{\frac{\pi}{3}i}| = 1$, 辐角主值为 $\frac{\pi}{3}$, 根据复数的乘法, 有

$$
\begin{aligned}
z_3 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_1) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.
\end{aligned}
$$

所以

$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

类似可得另一方向的点 z_3', 且

$$z_3' = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

定义 2.11

棣莫佛 (*De-Moivre*) 公式: 当 $|z| = r = 1$ 时, 若记 $z = \cos\theta + i\sin\theta$, 则有 $z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, 称该公式为**棣莫佛公式**. ♡

● 实数 $(a+b)^n$ 的项数和复数表示结果的项数的比较

二、 复数的方根

设复数 w 与 z 的等式满足条件 $w^n = z$, 其中 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) \Rightarrow z = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$, 则

$$\begin{aligned} w^n &= r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) \\ &\Rightarrow \rho = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}, \\ &\cos n\phi + i\sin n\phi = \cos\theta + i\sin\theta, \end{aligned}$$

所以

$$n\phi = \theta_0 + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

复数的各个复数根为

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

从而得到复数 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个不同的复数根 $w_0, w_2, \cdots, w_{n-1}$.

例 2.6

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解: $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\rho = r^{\frac{1}{4}} = \sqrt[8]{2}$, 所以

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right), (k = 0, 1, 2, 3).$$

从而, 复数的四个根为

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right), k = 0 \\ w_1 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right), k = 1 \\ w_2 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right), k = 2 \\ w_3 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right), k = 3. \end{aligned}$$

几何解释是: 这四个根是中心在原点, 半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆的内接正方形的四个顶点, 并且 $w_1 = iw_0, w_2 = -w_0, w_3 = -iw_0$.

教　　案　　纸

● 拓扑概念

三、 平面点集和区域

1、 点集概念

定义 2.12

***1*、邻域**: 以 z_0 为心, ρ 为半径的圆内部所有点的集合, 可用圆域 $|z-z_0|<\rho$ 来表示, 也可用 $U(z_0)$ 或者 $N(z_0)$ 表示 z_0 的邻域, 也可以记为 $U_\rho(z_0)=\{z||z-z_0|<\rho\}$ 或者 $N(z_0)=\{z||z-z_0|<\rho\}$.

定义 2.13

***2*、内点、外点**: 设 E 为平面点集, 对任意 $z_0\in E$, 若存在 $U(z_0)\in E$, z_0 及其邻域全属于 E, 则称 z_0 为 E 的**内点**. 若 z_0 及其邻域不属于 E, 称 z_0 为 E 的**外点**.

定义 2.14

***3*、界点和边界**: 对于 $z_0,z_1\in U(z_0,\rho)\subset E$, 若存在 $z_1\in U(z_0,\rho)\cap E$, 且存在 $z_2\notin\{U(z_0,\rho)\}\cap\{z_2\in E\}$, 称点 z_0 为 E 的边界点, 全体边界点组成边界曲线 C. C 的方向按规定逆时针为正, 顺时针为负.

定义 2.15

***4*、有界点集, 无界点集**: 若平面点集 E 能用半径为 R 的圆包含, 则称 E 为有界点集, 若平面点集 E 不能用半径为 R 的圆包含, 则称 E 为无界点集.

定义 2.16

***5*、连通集**: 在区域 D 中的任意两点 z_1,z_2 可用属于 D 的折线连接, 则称 D 为连通集.

定义 2.17

***6*、开集**: D 中的点集全是 D 的内点, 则称 D 为开集.

2、 区域

定义 2.18

***1*、区域**：连通的开集称为区域．连通区域的示意见图 *12*．

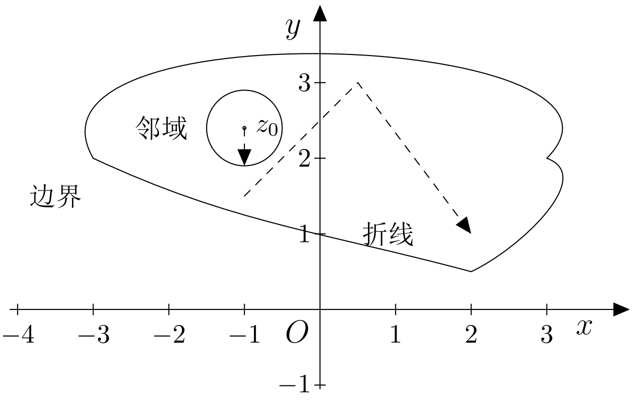

图 12: 连通区域

定义 2.19

***2*、有界区域、无界区域**：若能以一个圆心在圆点，半径为 R 的圆包含的区域，称为有界区域，否则，称为无界区域．边界的示意见图 *12*．区域的边界可能是由多条曲线和一些孤立点组成（见图 *13*）．对于 $D, \forall z \in D, |z| \leq M \in \mathbb{Z}^+$．

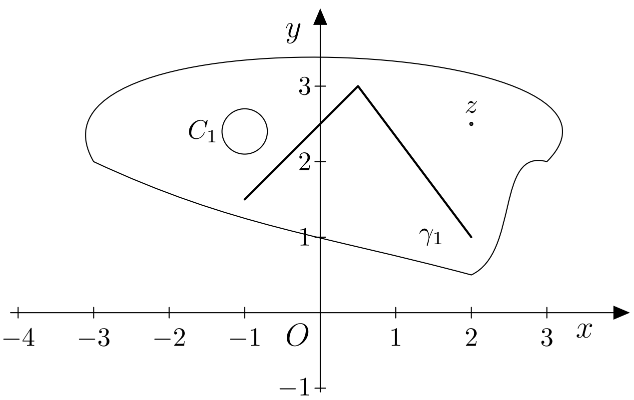

图 13: 连通区域

定义 2.20

闭区域: 区域 D 和 D 的边界 (∂D) 一起构成闭区域, 记作 $\bar{D}=D\cup\partial D$. 可以得到: $|z-z_0|\leq R$ 为有界区域. 而 $\operatorname{Im} z\geq 0$ 为无界区域.

3、 简单曲线, 简单闭曲线

1. 简单曲线: 凡没有重复点的连续曲线(或称为**约当曲线**).

定义 2.21

简单闭曲线: 对于曲线 $Z(t),\alpha\leq t\leq\beta$, 若曲线 $Z(t)$ 满足 $Z(\alpha)=Z(\beta)$ 的简单曲线称为**简单闭曲线**. 简单闭曲线 (图 14). 简单开曲线 (图 15). 不简单、闭曲线 (16). 不简单、开曲线 (18).

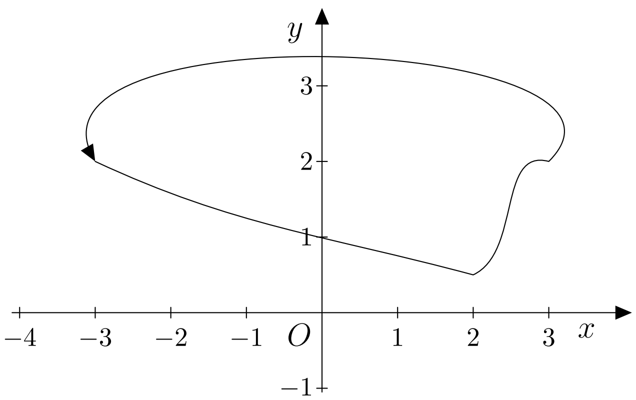

图 14: 简单闭曲线

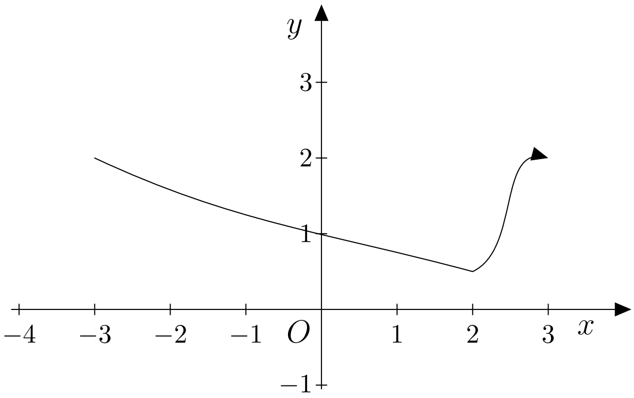

图 15: 简单开曲线

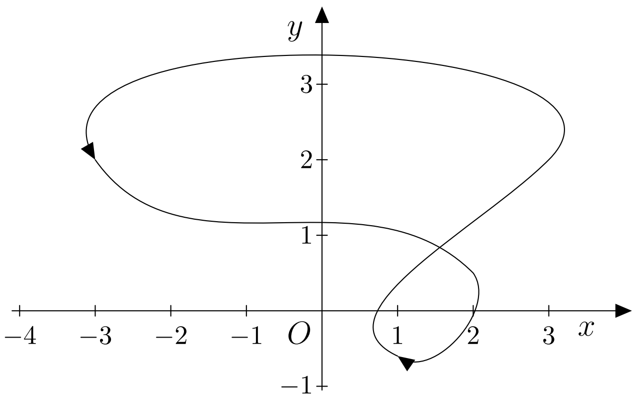

图 16: 不简单、闭曲线

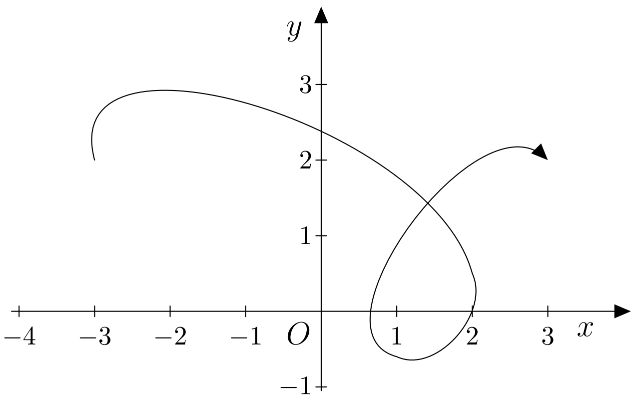

图 17: 不简单、开曲线

定义 2.22

若简单曲线 C: $Z = Z(t) = x(t) + iy(t)$, 在 $\alpha \le t \le \beta$ 内具有连续导数, 即 $Z'(t) = x'(t) + iy'(t), z'(t) \neq 0$, 称曲线 C 为**光滑曲线**. ♡

4. 单连通域, 多连通域(复连通域)

定义 2.23

(单连通域): 若 D 内的任意简单闭曲线所围成的区域都是属于 D 的, 则称 D 为单连通域. ♡

定义 2.24

非单连通域称为多连通域. ♡

● 单连通: 一块铁板, 没有洞; 面包片: 被蚂蚁咬了好多洞. 就像分形图形中的谢尔宾斯基地毯.

注解 14 一条简单曲线的内部是单连通区域 (图 18).

1) 任一简单曲线 C, 将扩充 z 平面分为两个不相连接的区域, 一个是有界区域 $I(C)$ 另一个是无界区域 $E(C)$, 它们都以 C 为边界(约当定理).

2) 单连通区域的概念也可以推广到扩充复平面上的区域. 具体定义为: 设 D 为扩充复平面上的区域, 若在 D 内无论怎样画简单闭曲线, 其内部或外部(包含无穷远点)仍全含于 D, 则称 D 为单连通区域.

   注意: 在扩充复平面上, 一个圆周的外部(这里把 ∞ 算作这个区域的内点)就是一个单连通区域. 所以, 一个无界区域, 考虑它是否单连通, 首先要考虑是在通常的复平面上还是在扩充复平面上讨论(在扩充复平面上时, 还要看 ∞ 是否算在这个区域内).

3) 在扩充复平面上, 由于点 ∞ 可以包含在函数的定义域中, 因此, 函数值也可以取到 ∞. 由此可将函数的极限与连续性的概念推广. 在关系式中 $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 如果 z_0 及 $f(z_0)$ 之一或者它们同时取 ∞, 就称 $f(z)$ 在 z_0 点为广义连续的, 极限称为**广义极限**. 广义意义下的函数的极限和连续性的 $\epsilon - \delta$ 说法要作相应修改.

注解 15 如 ∞ 在无界区域的边界上, 也就是区域的边界曲线延伸到 ∞, 则不论在通常复平面上还是在扩充复平面上, 区域是否为单连通必定是一致的.

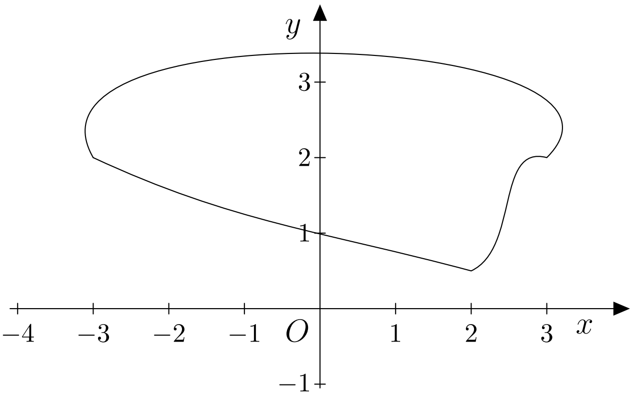

图 18: 单连通区域

例 2.7

$|z-z_0| \leq r^2$ 为单连通域，而 $r \leq |z-z_0| \leq R$ 为多连通域 (图 19).

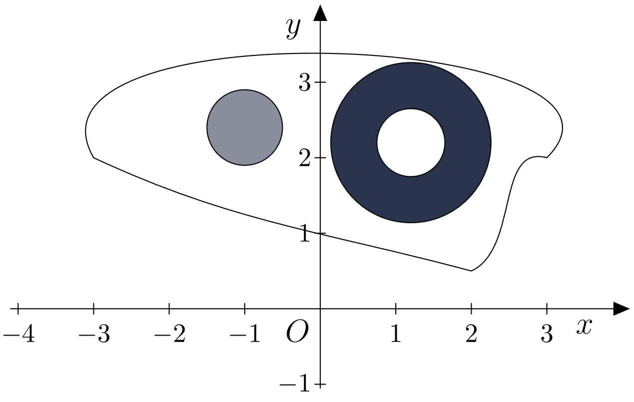

图 19: 多连通区域

四、 复变函数

1、 复函数的概念

定义 2.25

设 G 是一个复数 $z=x+iy$ 的集合, $G=\{z|z\in\mathbb{C}\}, G\subset\mathbb{C}$. 如果有一个确定的法则 f 存在, 按照法则 f, 对于集合 G 中的每一个复数 z, 就有一个或几个复数 $w=u+iv$ 与之对应, 那么称复变数 w 是复变数 z 的函数 (复变函数), 记作 $f: G\to G^*\Rightarrow w=f(z)$. 称集合 G 是 $f(z)$ 的定义集合. 对应于 G 中 z 的所有 w 值组成的集合, $G^*\in\mathbb{C}$, G^* 称为是函数值集合.

定义 2.26

(单值函数) 如果复数 z 的一个值对应着 w_d 的一个值, 那么称复函数 $f(z)$ 是单值的. 如果复数 z 一个值对应着 w_d 的多个值, 那么称复函数 $f(z)$ 是多值的.

注解 16 实函数是指定义域和值域都是实数的函数。可以看出，实函数的研究对象是实数，其本质是实数与实数之间的对应关系，是实数随着实数的变化关系。从集合的定义角度来看，实函数的本质是实数集到实数集的对应。实函数的一个重要特征就是，函数关系可以反映在坐标系中。

注解 17 定义集合 G 通常是一个平面区域, 称为定义域. 通常情况下讨论的函数是**单值函数**.

注解 18 对于复数 $z=x+iy, w=u+iv$, 复变函数 $w=f(z)$ 等价于两个关系式: $u=u(x,y), v=v(x,y)$, 其中的 u,v 确定了自变量为 x,y 的两个二元实变函数.

例 2.8

对于函数 $w=z^2$, 令 $z=x+iy, w=u+iv$, 那么

$$w=u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi,$$

因而函数 $w=z^2$ 对应于如下两个二元实变函数

$$u=x^2-y^2, v=2xy.$$

2、 复映射

对于复函数，由于它反映了两对变量 u, v 和 x, y 之间的对应关系，无法用一个平面内的几何图形表示，必须把它看成两个复平面上的点集之间的对应关系.

z 平面上的点表示 z 值，w 平面上的点表示 w 值. 则函数 $w = f(z)$ 在几何上可以看做是把 z 平面上的点集 G 映射到 w 平面上的点集 G^* 的映射（或变换）. 通常称为由函数 $w = f(z)$ 所构成的映射. 如果 G 中的点 z 被映射到 G^* 的点 w，那么 w 称为 z 的像，z 称为 w 的原像.

例 2.9

对于函数 $w = \bar{z}$ 所构成的映射，是把 z 平面上的点 $z = a + ib$ 映射成 w 平面上的点 $w = a - ib$.

例 2.10

函数 $w = z^2$ 所构成的映射，是把 z 平面上的点 $z = a + ib$ 映射成 w 平面上的点 $w = a^2 - b^2 + 2abi$. 将 z 平面上的点 $i \to -1; 1 + 2i \to -3 + 4i; -1 \to 1$（图 20）.

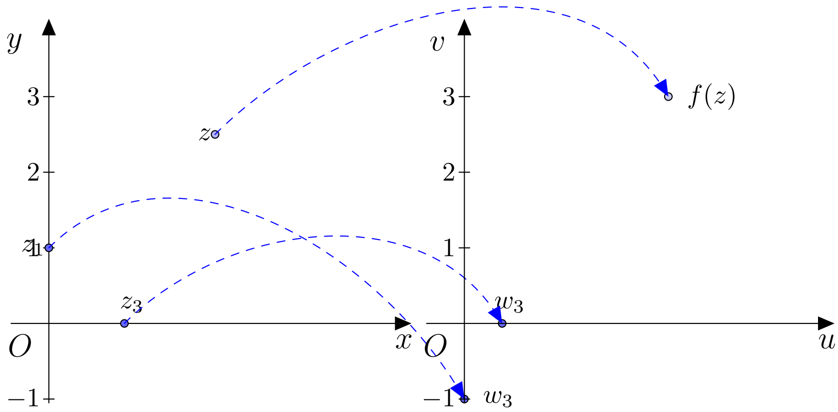

图 20: 函数 $w = z^2$

定义 2.27

(复函数的反函数) 假定函数 $w=f(z)$ 的定义集合为 z 平面上的集合 G，函数值集合为 w 平面上的集合 G^*，那么 G^* 中的每一个点 w 必然对应着 G 中的点．按照函数的定义，在 G^* 上就确定了一个单值(多值)函数 $z=\phi(w)$，它称为函数 $w=f(z)$ 的反函数，也称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射．

注解 19 今后不再区分函数与映射，如果函数 $w=f(z)$ 与它的反函数 $z=\phi(w)$ 都是单值的，那么称函数 *(映射)* $w=f(z)$ 是**一一的**．同时，称集合 G 与 G^* 是**一一对应的**．

复变函数在几何上又称为映射(或变换)．这种函数关系要用两个平面来表示．即函数 $w=f(z)$ 在几何上可以看成是把 z 平面上的一个点集 G 映射到 w 平面上的一个点集 G^*．

例 2.11

$w=\bar{z}$，显然，它将 z 平面上的点 $z_1=2+3i$ 映射成 w 平面上的点 $w_1=2-3i$，将点 $z_2=1-2i$ 映射成 w 平面上的点 $w_2=1+2i$，$w=\bar{z}$ 能将三角形 ΔABC 映射成 w 平面上的三角形 $A'B'C'$．

例 2.12

函数 $w=z^2$ 将 z 平面上的曲线 $x=C$ 映射成 w 平面上的何种曲线？

解:

$$w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy \Rightarrow \begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$$

由 $v=2xy$ 可得 $y=\frac{v}{2x}$，再由 $x=C\Rightarrow u=C^2-\frac{v^2}{4C^2}$ 是 w 平面上关于以 u 轴为对称的抛物线．例如取 $x=1\Rightarrow u=1-\frac{v^2}{4}$; $x=2\Rightarrow u=4-\frac{v^2}{16}$．

例 2.13

变换 $w=\frac{1}{z}$ 将 z 平面上的直线 $x=1$ 映射成 w 平面上的何种曲线？

解: 令 $z=x+iy, w=u+iv$, 由 $w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$, 则有

$$\begin{cases} u=\frac{x}{x^2+y^2} \\ v=-\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases},$$

将 $x=1$ 代入方程, 可得 $u^2+v^2=u$,

$$\frac{u}{u^2+v^2}=1 \Rightarrow \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

显然为 w 平面上圆. 变换 $w=\frac{1}{z}$ 将 z 平面上的直线 $x=1$ 映射成 w 平面上的圆.

由以上例子, 可以总结出一般的将 z 平面上的曲线映射成 w 平面上的给定曲线时, 其方法是:

注解 20 *(z 平面上的曲线映射成 w 平面上的给定曲线的方法)* 先求出函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 中的

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases} \tag{8}$$

再反解出

$$\begin{cases} x=\phi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \end{cases}$$

由给出的条件代入(8), 可得在 w 平面上的相应的含有 u 的曲线方程.

五、 复变函数的连续性

1、 复变函数的连续性

定义 2.28

如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 我们说 $f(z)$ 在 z_0 点连续. 如果 $f(z)$ 在 D 内处处连续, 那么我们说 $f(z)$ 在 D 内连续.

定理 2.3

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 其中 $z=x+iy$.

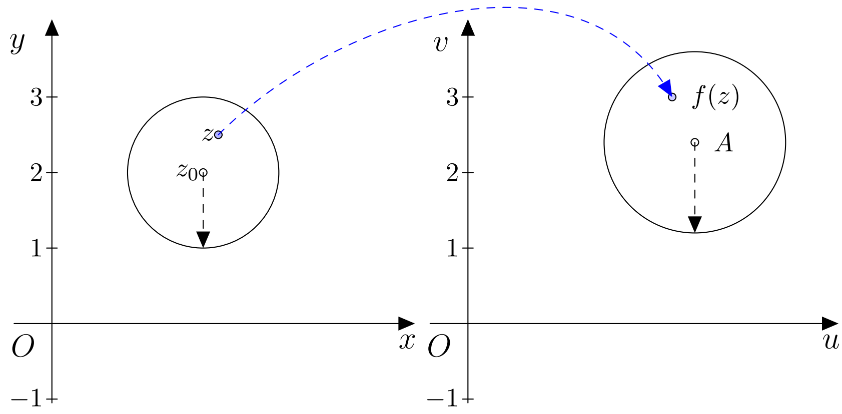

图 21: 函数 $f(z)$ 的极限

定理 2.4

1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母在 z_0 不为零) 在 z_0 仍然连续.

2) 如果函数 $h = g(z)$ 在 z_0 连续, 函数 $w = f(h)$ 在 $h_0 = g(z_0)$ 连续, 那么复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 z_0 连续.

注解 21 *(函数连续性的几何意义)* 当变点 z 一旦进入 z_0 的充分小的 δ 去心邻域时, 它的像点 $f(z)$ 就落入 $f(z_0)$ 的预先给定的 ϵ 邻域中, 其中 z 趋近 z_0 的方式是任意的, 也就是说, 无论 z 从什么方向, 以何种方式趋向于 z_0, $f(z)$ 都要趋近于同一个常数 $f(z_0)$.

2、 复变函数的极限

定义 2.29

*(**函数极限**)* 设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内有定义, A 为复常数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon)$, 使得当 $0 < |z - z_0| < \rho$ 时, 有 $|f(z) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$.

必须注意, 定义中的 z 趋向于 z_0 的方式必须是任意的.

定理 2.5

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=u_0+iv_0$, $z_0=x_0+iy_0$, 那么 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

♣

这个定理说明求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限问题可以转化为求两个二元实函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的极限问题.

3、 极限的运算法则

定理 2.6

(类似于实函数的极限运算法则) 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 那么

1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$.

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=AB$.

3) $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\,(B\neq 0)$.

♣

4、 复变函数分类

例 2.14

*(**复变函数**) 设 D 为复平面上的一个点集, 对 $\forall$ 点 $z\in D$, 按某种法则, 有另一复数 W 与之对应, 则称 W 是 Z 的复变函数, 记为 $w=f(z)$. 其中, 称 W 为**像**, Z 为**原像**.*

♡

1. 若 Z 是一一对应, 则称 $w=f(z)$ 为**单值函数**.
2. **单叶函数**是复变函数中一类重要的解析函数。对复平面区域 D 上单值的解析函数 $f(z)$, 若对 D 中任意的不同的两点 z_1、z_2 有 $f(z_1)\neq f(z_2)$, 则说 $f(z)$ 为 D 上的单叶函数, 记作 $f(z)$ 属于 φ. 单叶函数及其相关的单叶映射等课题是复变函数论最重要的研究内容之一.
3. 若 Z 对应多个 W, 则称 $w=f(z)$ 为**多值函数**.

设 $z=x+iy, W=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u+iv$, 即

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases},$$

一个复变函数可以用两个二元实变函数 $u(x,y),v(x,y)$ 来表示.

例 2.15

$$W=Z^2=(x^2-y^2)+i2xy \Rightarrow \begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}.$$

$$w=\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u=\frac{x}{x^2+y^2} \\ v=\frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

注解 22 由著名的黎曼映射定理 *(设 $D:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 为开圆盘, $\Omega\subset\mathbb{C}$ 为单连通开子集. 若 $\Omega\neq\mathbb{C}$, 则存在一对一的全纯映射 $f:\Omega\to D$, 使 $f^{-1}:D\to\Omega$ 亦全纯 (若 f 在 U 中每点 z_0 复可微, 我们称 f 在 U 上全纯. 我们称 f 在点 z_0 全纯, 如果它在 z_0 的某个邻域全纯. 一个复函数全纯当且仅当它满足柯西-黎曼方程). 换言之, Ω 与 D 双全纯同构. 注意到二维的全纯映射不外乎保持定向的共形映射, 它保持角度与定向不变. 黎曼在他 1851 年的博士论文中陈述了这个结果, 但其证明不完整. 康斯坦丁•卡拉西奥多里在 1912 年发表了第一个完整证明)* 知道, 任意两个至少有两个边界点的单连通区域 D_1 及 D_2, 一定可以相互共形映射, 即存在解析的单叶函数 f, 将 D_1 一一地映射为 D_2, 所以对单叶函数的研究在复变函数论中显得很重要。由于单叶映射也是最简单的映射, 所以对它的讨论也是复变函数论中最基本的内容之一。若解析函数 $f(z)$ 在 D 中单叶, 则 $f(z)\neq 0$ 在 D 中成立; 反之, $f'(z)\neq 0$ 在 D 中成立, 不一定能保证 $f(z)$ 在 D 中单叶, 只能说在一点的一个邻域内单叶。最早对单叶函数有重要贡献的是 *P. 克贝 (1909)*、*L. 比伯巴赫 (1916)*、*G. 费伯 (1916)* 等。例如, 比伯巴赫证明了重要的偏差定理: 若 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中正则单叶, 且 $f(0)=0, f'(0)=1$, 则有:

$$|z|(1+|z|)^{-2}\leq|f(z)|\leq|z|(1-|z|)^{-2}, \tag{9}$$
$$(1-|z|)(1+|z|)^{-3}\leq|f'(z)|\leq(1+|z|)(1-|z|)^{-3} \tag{10}$$

上述等号限于克贝函数 $K(z)=z(1-\epsilon z)^{-2}, (|\epsilon|=1)$ 时成立。

IV 课堂小结

主要讲解了复数乘积、乘幂和复数方根.

应理解区域的有关概念: 邻域、去心邻域、内点、开集、边界点、边界、区域、有界区域、无界区域; 理解单连通域与多连通域.

复变函数以及**映射的概**念是本章的一个重点.

注意: 复变函数与一元实变函数的定义完全一样, 只要将后者定义中的"实数"换为"复数"就行了.

通过本课的学习, 熟悉复变函数的极限、复函数连续性的运算法则与性质.

V　第一章习题

1. (1) (3); 2. 8. 9. 11. 13. 15. 18. 20. 26.

例 1 将下列复数化为三角表示式和指数表示式

$$\begin{array}{ll} 1)\, i; & 2) -1 \\ 3) 1+i\sqrt{3}; & 4) 1-\cos\varphi+i\sin\varphi \\ 5) \frac{2i}{-1+i}; & 6) \frac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3} \end{array}$$

解: 4) $z = 1-\cos\varphi+i\sin\varphi$, $|z| = 2\sin\frac{\varphi}{2}$, 当 $0<\varphi<\pi$, $\arg(z) = \arg\ \operatorname{tg}\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi-\varphi}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $z = 2\sin\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+i\sin\frac{\pi-\varphi}{2})$, $0<\varphi<\pi$.

5) 令 $z = \frac{2i}{-1+i}$, $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

6) $\frac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3} = \frac{e^{10\varphi i}}{e^{-0\varphi i}} = e^{19\varphi i}$.

例 2 求复数 $z = 1+\sin\alpha+i\cos\alpha, -\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$ 的三角形式与指数形式.

解:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(1+\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha} = \sqrt{2(1+\sin\alpha)} \\ &= \sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)} \\ &= \sqrt{2\cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right| \\ &= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

再由 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}<-\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, 可得 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$.

又由 $z = r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则

$$\begin{cases} r\cos\theta = 1+\sin\alpha \\ r\sin\theta = \cos\alpha \end{cases} \tag{12}$$

则

$$-2\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})\cos\theta = 1+\sin\alpha = 2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}) \tag{13}$$

$$\cos\theta = -\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}) = \cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \tag{14}$$

验证

$$r\sin\theta = \cos\alpha \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\\ &= -\cos\pi\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}r\sin\theta &= 2\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\\ &= \sin(\frac{5\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha = \operatorname{Im} z\end{aligned} \tag{17}$$

则 z 的三角形式

$$\begin{aligned}z &= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\\ &= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)e^{(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})i}.\end{aligned} \tag{18}$$

$$\arg z = -\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}. \tag{19}$$

例 3 讨论函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 的连续性.

解:

(i) $z\neq 0$, $f(z)$ 在复平面上连续. 取任意两点 z_1, z_2, 令 $0 < M = \min(|z_1|,|z_2|) < \infty$, 则当 $|z_1-z_2| < M^2\epsilon \triangleq \delta(\epsilon)$, 恒有 $\left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}\right| \le \epsilon$.

(ii) $z=0$ 点处, $f(0)$ 在该点不连续. 令 $z_n=\frac{1}{n}$, 当 $n>N$ 时, $|z_n-0|\le\frac{1}{n}$, 但有 $|f(z_n)-f(0)| = |n-\infty| \ge |n|-|\infty| = \infty$.

例 4 指出下列各题中点的轨迹或所在范围, 并作图

$$\begin{array}{ll}
1)|z-5|=6; & 2)|z+2i|\geqslant 1 \\
3)\mathrm{Re}(z+2)=-1; & 4)\mathrm{Re}(i\overline{z})=3 \\
5)|z+i|=|z-i|; & 6)|z+3|+|z+1|=4 \\
7)\mathrm{Im}(z)\leqslant 2 & 8)\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1 \\
9)0<\arg z<\pi; & 10)\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}
\end{array}$$

解:

(3) $z+2=x+2+iy$ 得 $\mathrm{Re}(z+2)=-1 \Rightarrow x=-3$.

(4) $i\overline{z}=i(x-iy)=y+ix$, 得 $(i\overline{z})=y$, 即 $\mathrm{Re}(i\overline{z})=3$。

(5) 实轴

(6) $|z+3|+|z+1|=4$ 表示 z 距点 -3 与 -1 的距离之和为 4. z 的轨迹为以 $(-3,0)$ 和 $(-1,0)$ 为焦点, 以 4 为长轴的椭圆

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

(7) $y\leq 2$.

(8) $(x-3)^2+y^2\geqslant(x-2)^2+y^2 \Rightarrow x\leq\frac{5}{2}$.

(9) $\arg z=\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$, $\arg z=0\Rightarrow z$ 为 x 轴正向上的点 (正实轴); $\arg z=\pi\Rightarrow z$ 为 x 轴负向上的点 (负实轴); z 的轨迹为不包含实轴的上半平面.

(10) 由 $\arg(z-i)=\arg[x+(y-1)i]=\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, 得

$$\mathrm{tg}[\arg(z-i)]=1 \quad (x>0, y>1)$$

即 $\frac{y-1}{x}=1$. 故 $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$ 相当于 $y-x-1=0(x>0,y>1)$ 的轨迹为以 i 为起点的射线 $y-x-1=0\,(x>0)$, 见图 x.

VI　第一章习题

练习 2.1 求下列复数 z 的实部与虚部, 共轭复数模与辐角

(1) $\frac{1}{3+2i}$　　(2) $\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$

(3) $\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$　　(4) $i^8-4i^{21}+i$

练习 2.2 当 x,y 等于什么实数时, 等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立?

练习 2.3 证明虚单位 i 有这样的性质: $-i=i^{-1}=\bar{i}$.

练习 2.4 证明

1) $|z|^2=z\bar{z}$

2) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2\neq 0$

5) $\bar{\bar{z}}=z_i$

6) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(\bar{z}+z), \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

练习 2.5 对任何 $z, z^2=|z|^2$ 是否成立? 如果是, 就给出证明如果不是, 对哪些 z 值才成立?

练习 2.6 当 $|z|\leqslant 1$, $\vec{x}\,|z^n+a|$ 的最大值, 其中 n 为正整数, a 为复数。

练习 2.7 判定下列命题的真假:

1) 若 c 为实常数, 则 $c=\bar{c}$;

2) c 若 z 为纯虚数, 则 $z\neq\bar{z}$;

3) $i<2i$;

4) 零的辐角是零;

5) 仅存在一个数 z, 使得 $\frac{1}{z}=-z$;

6) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$

7) $\frac{1}{i}\bar{z}=\overline{iz}$

练习 2.8 将下列复数化为三角表示式和指数表示式:

1) i

2) -1

3) $1+i\sqrt{3}$

4) $1-\cos\varphi+$ isin φ　$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$

5) $\frac{2i}{-1+i}$

6) $\frac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}$

练习 2.9 下列坐标变换公式写成复数的形式

1) 平移公式: $\begin{cases} x = x_1 + a_1 \\ y = y_1 + b_1 \end{cases}$

2) 旋转公式: $\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases}$

练习 2.10 一个复数乘以 $-i$, 它的模与辐角有何改变?

练习 2.11 证明:$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$, 并说明其几何意又

练习 2.12 证明下列各题:

1) 任何有理分式函数 $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 可以化为 $X+iY$ 的形式, 其中 X 与 Y 为具有实系数的 x 与 y 的有理分式函数;

2) 如果 $R(x)$ 为 1) 中的有理分式函数, 但具有实系数, 那么 $R(\bar{z}) = X - iY$

3) 如果复数 $a+ib=$ 是实系数方程的根，那么

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{20}$$

也是它的根

练习 2.13 如果 $z = e^{it}$，证明:

1) $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos nt$，

2) $z'' - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nt$

练习 2.14 求下列各式的值

1) $(\sqrt{3} - i)^5$

2) $(1+i)^6$

3) $\sqrt[6]{-1}$

4) $(1-i)^{1/3}$

练习 2.15 $(1+i)^n = (1-i)^n$，试求 n 的值。

练习 2.16 1) 求方程 $z^3 + 8 = 0$ 的所有根;

2) 求微分方程 $y''' + 8y = 0$ 的一般解

练习 2.17 在平面上任意选一点 z, 然后在复平面上画出下列各点的位置:

$$-z, \bar{z}, -\bar{z}, \frac{1}{z}, \frac{1}{\bar{z}}, -\frac{1}{\bar{z}} \tag{21}$$

练习 2.18 已知两点 z_1 与 z_2(或已知点 z_1, z_2, z_3), 问下列各点 z 位于何处?

1) $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)_1$.

2) $z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$, 其中 λ 为实数 z.

3) $z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$.

练习 2.19 设 z_1, z_2, z_3 三点适合条件 $z=z_1+z_2+z_3=0, |z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. 证明: z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点。

练习 2.20 如果复数 z_1, z_2, z_3 满足等式

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \tag{22}$$

证明

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_z-z_3| \tag{23}$$

并说明这些等式的几何意义。

练习 2.21 指出下列各题中点 z 的轨迹或所在范围, 并作图:

1) $|z-5|=6$
2) $|z+2i|\geqslant 1$
3) $\mathrm{Re}(z+2)=-1$
4) $\mathrm{Re}(i\bar{z})=3$
5) $|z+i|=|z-i|$
6) $|z+3|+|z+1|=4$
7) $\mathrm{lm}(z)\leqslant 2$;
8) $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1_4$
9) $0<\arg z<\pi$;
10) $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$

练习 2.22 描出下列不等式所确定的区域或闭区域, 并指明它是有界的还是无界的, 单连通的还是多连通的:

1) $\mathrm{Im}(z)>0$
2) $|z-1|>4$,
3) $0<\mathrm{Re}(z)<1_4$
4) $2\leqslant|z|\leqslant 3$,
5) $|x-1|<|z+3|$,
6) $-1<\arg z<-1+\pi$
7) $|z-1|<4|z+1|$,
8) $|z-2|+|z+2|\leqslant 6$
9) $|z-2|-|z+2|>1$
10) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\leqslant 4$

练习 2.23 证明复平面上的直线方程可写成: $a\bar{z}+\bar{a}z=c$, $(a\neq 0$

为复常数, c 为实常数)

练习 2.24 证明复平面上的圆周方程可写成: $z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+c=0$, (其中 a 为复常数, c 为实常数)

练习 2.25 将下列方程 (为实参数) 给出的曲线用一个实直角坐标方程表出:

1) $z = t(1+i)$;
2) $z = a\cos t + ib\sin t$, (a, b 为实常数);
3) $z = t + \frac{i}{t}$
4) $x = t^2 + \frac{i}{t^2}$
5) $z = a\mathrm{ch}\, t + ib\mathrm{sh}\, t$, ($a, b$ 为实常数)
6) $z = ae^{it} + be^{-it}$
7) $z = e^{a}$ ($\alpha = a + bi$ 为复数)

练习 2.26 函数 $w = \frac{1}{z}$ 把下列 z 平面上的曲线映射成平面上怎样的曲线?

1) $x^2 + y^2 = 4$
2) $y = x$
3) $x = 1$
4) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

练习 2.27 已知映射 $w = z^3$, 求:

1) 点 $z_1 = i, z_2 = 1 + i, z_3 = \sqrt{3} + i$ 在 w 平面上的象;
2) 区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的象。

练习 2.28 证明 §6 定理二与定理三。

练习 2.29 设函数 $f(z)$ 在 z 连续且 $f(z_0) \neq 0$, 那末可找到 0 的小邻域, 在这邻域内 $f(z) \neq 0$.

练习 2.30 设 $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$, 证明 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内是有界的, 即存在一个实常数 $M > 0$, 使在的某一去心邻域内有 $|f(z)|M$.

练习 2.31 设

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right), (z \neq 0) \tag{24}$$

试证当 $z \to 0$ 时, $f(z)$ 的极限不存在。

练习 2.32 试证 $\arg z$ 在原点与负实轴上不连续。