教　　案　　纸

	理论课 1　§ 1.1-1.2 复数及其代数运算和复数的几何表示

I　组织教学

1、集中学生注意力；

2、清查学生人数；

3、维持课堂纪律；

II　复习导入及主要内容

1、了解学生情况；$\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta), \tan(\frac{\alpha}{2})$.

数学答疑 QQ 群: 326068897

2、重点: 复数的基本知识.

3、难点: 涉及到计算机编程实践, 以培养读者的计算机仿真能力. 读者可以利用Matlab、Mathematica、Mathematica在线编程和Maple等数学工具软件直接进行复数及复变函数的基本运算

III　教学内容及过程

● 复数的扩维

前言： 复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用, 是解决诸如流体力学、电磁学、热学、弹性理论平面问题的有力工具. 比如

(1) 复变函数在电路原理、自动控制原理以及“信号与系统”方面有着重要的应用 (傅里叶变换、拉普拉斯变换和 Z 变换). 自动控制原理主要讲解反馈控制系统的基本理论和基本方法, 讲解控制系统的分析和设计方法, 包括线性系统和连续系统的时域方法、频域方法和根轨迹方法.

(2) 应用于普通方法难以计算的积分, 比如 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$.

(3) 求解偏微分方程. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

PDE 的解法：分离变量法

Partial Differential Equation Toolbox™ 提供利用有限元分析求解结构力学、热传递和一般偏微分方程 (PDE) 的函数。

可以执行线性静力分析以计算形变、应力和应变。对于结构动力学和振动的建模，该工具箱提供了直接时间积分求解器。

可以通过执行模态分析确定自然频率和振型，从而分析组件的结构特性。

可以对以传导为主的热传递问题进行建模，以计算温度分布、热通量和通过表面的热流率。此外，您还可以解决标准问题，例如扩散、静电和静磁以及自定义 PDE。

Partial Differential Equation Toolbox 允许您从 STL 或网格数据导入二维和三维几何结构。

可以自动生成包含三角形和四面体单元的网格。您可以使用有限元方法求解 PDE，并对结果进行后处理以进行探索和分析。

(4) 使用复解析函数, 建立再生核一般理论—1964 建立，建立者 Schwartz-1950 Fields 奖.

H. Du, G. L. Zhao and C. Y. Zhao, Reproducing kernel method for solving Fredholm integro-differential equations with weakly singularity. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014. 255: p. 122–132.

(5) 应用于计算渗流问题; 如大坝、钻井的浸润曲线.

(6) 应用于计算绕流问题 (圆球绕流、双列圆柱绕流、椭圆绕流、三椭圆柱体绕流) 中的压力、力矩.

比如俄国的茹柯夫斯基在设计飞机的时候，就用复变函数理论解决了飞机机翼的结构问题，他在运用复变函数论解决流体力学和航空力学方面的问题上也做出了贡献.

(7) 应用于平面热传导问题、电 (磁) 场强度, 如: 热炉中温度的计算.

(8) 复变函数理论中的 Laurent 级数应用于数字信号处理, 常被用于直接写出离散数字信号 Z 变换的场合.

复变函数的许多概念、理论和方法是实变函数在复数域内的推广和发展, 因而它们之间有许多相似之处. 但也有不同之点. 在学习时, 既要注意联系其共同点, 更要注意区别, 弄清其不同之处.

一、 复数及其表示法

1、 复数的概念

定义 1.1

复数: 对任意的两个实数 x, y, 我们称数 $z = x + iy$ 为复数, 其中, x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部, 记为 $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$.

复数是实数的推广. 当 $y = 0$ 时, $z = x$ 为实数; 当 $x = 0$ 时, $z = iy$ 为纯虚数. 因此, 复数是实数的推广, 而实数是复数的一种特例.

注解 1 两个复数之间不能比较大小, 但可以定义它们的相等关系.

性质 1 两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 相等当且仅当 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

例 1.1

实数 m 取何值时, $(m^2 - 3m - 4) + (m^2 - 5m - 6)i$ 是 (1) 实数; (2) 纯虚数.

解: (1) 如果 $(m^2 - 3m - 4) + (m^2 - 5m - 6)i$ 是实数, 则虚部为 0, 即 $m^2 - 5m - 6 = 0 \Rightarrow m = 2, m = 3$.

(2) 如果 $(m^2 - 3m - 4) + (m^2 - 5m - 6)i$ 是纯虚数, 则实部为 0, 即 $m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 4$.

注解 2 两个数如果都是实数, 由于实数集是全序集, 可以比较它们的大小, 如果不全是实数, 就不能比较大小, 也就是说, 复数不能比较大小.

二、 复数的四则运算

1、 复数的加法和减法

定义 1.2

(复数加减) 设复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则 $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

解释: $z_1 + z_2$ 可以看成是两个向量相加. $z_1 - z_2$ 可以看成是两个向量相减.

2、 复数的乘法和除法

定义 1.3

(复数乘法) 设两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则 $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$.

注解 3 复数乘法使用了实数的运算的分配律. 对于虚数单位 i, 有法则 $i \cdot i = i^2 = -1\,(x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_2 = 1)$.

定义 1.4

(复数除法) 设两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 称满足 $z_2 z = z_1$ 的复数 $z = x + iy$ 为 z_1 除以 z_2 的商, 记作

$$z = \frac{z_1}{z_2}.$$

3、 共轭复数

定义 1.5

复数 $z = x + iy$, 我们称复数 $\overline{z} = x - iy$ 为 z 的共轭复数.

性质 2

$$\begin{aligned} z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

例 1.2

设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$.

解:

$$\begin{aligned} z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} &= \frac{i}{i(-i)} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= i - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

由此可得 $\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}, \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2}$.

例 1.3

计算共轭复数 $x + yi$ 和 $x - yi$ 的乘积.

解: $(x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$.

结论: 两个共轭复数 $z, \bar{z}$ 的积是一个实数.

共轭复数的性质:

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,

解: 令 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则 $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$. $\overline{z_1 \pm z_2} = (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2) = (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.

2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

解: 令 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} \\
&= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)} \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_2y_1 + x_1y_2) \\
&= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.
\end{aligned}$$

3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

解: 令 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$, 则

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}\right)} \\
&= \frac{\overline{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{\overline{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.
\end{aligned}$$

4) $\overline{\overline{z}} = z$;

解: 令 $z_1 = x_1 + iy_1$, 则 $\overline{x_1 - iy_1} = x_1 + iy_1 = z$.

5) $z\overline{z} = x^2 + y^2$;

解: 令 $z = x_1 + iy_1$, 则 $z\overline{z} = (x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1) = x_1^2 + y_1^2$.

6) $\mathrm{Re}(z) = x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.

例 1.4

设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，求 $z\bar{z}$.

解:

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=\frac{i}{i(-i)}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i-\frac{-3+3i}{2} \\ &= i-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right)=\frac{3}{2}-\frac{i}{2}. \end{aligned}$$

由此可得 $z\bar{z}=\left(\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

例 1.5

将下列复数化成 $x+iy$ 的形式:

(1) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$; (2) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.

解: (1)

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i,$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=(-i)^7=(-1)\,i^6\cdot i=(-1)(-1)^3 i=i.$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i} &= \frac{i^2+(1-i)^2}{(1-i)i}=\frac{-1-2i}{1+i} \\ &= \frac{(-1-2i)(1-i)}{2} \\ &= -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

解: 法 2

$$\begin{aligned}\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i} &= \frac{i-1+1}{1-i}+\frac{1}{i}-1\\ &= -1+\frac{1}{1-i}-i-1\\ &= -2+\frac{1}{1-i}-i=-2-i+\frac{1+i}{2}\\ &= -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

例 1.6

(练习) 将复数 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7$ 化成 $x+iy$ 的形式.

解: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7=\left(\frac{2i}{2}\right)^7=i^7=i\cdots i^6=(-1)^3i=-i.$

例 1.7

化简 $\frac{i-2}{1+i+\frac{i}{i-1}}$.

$$\begin{aligned}\frac{i-2}{1+i+\frac{i}{i-1}} &= \frac{(i-2)(i-1)}{(1+i)(i-1)+i}=\frac{i^2-i-2i+2}{i-1+i^2-i+i}\\ &= \frac{i^2-i-2i+2}{i^2-1+i}=\frac{1-3i}{-2+i}\\ &= \frac{(1-3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}\\ &= \frac{-2-i+6i+3i^2}{(-2)^2-i^2}=\frac{-5+5i}{5}\\ &= -1+i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{i-2}{1+i+\frac{i}{i-1}} &= \frac{i-2}{1+i-\frac{i}{1-i}}=\frac{i-2}{1+i-\frac{i(1+i)}{2}}\\ &= \frac{i-2}{1+i-\frac{i-1}{2}}=\frac{-2+i}{\frac{3}{2}+\frac{i}{2}}\\ &= \frac{2}{5}[(-2+i)(\frac{3}{2}+\frac{i}{2})]==\frac{2}{5}[-\frac{5}{2}+\frac{5i}{2}]\\ &= -1+i.\end{aligned}$$

例 1.8

$z_1 = 5-5i$, $z_2 = -3+4i$, 求 $\frac{z_1}{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} \\ &= \frac{(-15-20)+(15-20)i}{25} = -\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i.\end{aligned}$$

所以

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i.$$

例 1.9

设 $z_1 = x_1+iy_1, z_2 = x_2+iy_2$ 为两个任意复数, 证明: $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

证 1

$$\begin{aligned}z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2) \\ &= (x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2) \\ &\quad +(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1) \\ &= 2(x_1x_2+y_1y_2) = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

或者 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2 = z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

注解 4 复数可以认为是对于实数和虚数单位 i 的一个线性组合. 类比来说, 可以定义 j,k 等符号, 由此得到了一类数的扩展, 这类数用到了机器人等三维空间运动姿态的空间变换.

三、 复数的向量表示法 (r,θ)

定义 1.6

复平面 由于复数 $z = x+iy$ 与一对有序实数 (x,y) 对应, 所以, 可以用平面上的点 $P(x,y)$ 来表示复数 $z = x+iy$. 相应平面上的 x 轴称为实轴, y 轴称为虚轴, 两轴形成的平面称为复平面或 z 平面. 在刚才的约定下, 复数与复平面上的点成一一对应关系.

注解 5 复数 $x+iy$ 与有序实数 (x,y) 一一对应，对于平面上给定的直角坐标系，复数的全体 $Z=\{z|z=x+iy,x,y\in\mathbb{R}\}=\{z|z\in\mathbb{C}\}$ 与平面上的全体 $(X,Y)=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ 一一对应 (同构). 在同构的意义下，点 z 与数 z 同义. 也使得使用几何的语言研究复变函数问题成为可能，也为复变函数应用于实际奠定了基础.

定义 1.7

复数的向量表示 复数 $z=x+iy$ 可以用起点为原点，终点为 $P(x,y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，如图1，x 与 y 分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴与 y 轴的投影. 这样，复平面上的向量 $\overrightarrow{OP}$ 就与复数 z 建立了一一对应的关系.

- $\mathrm{Proj}(z,x)=x,\mathrm{Proj}(z,y)=y$

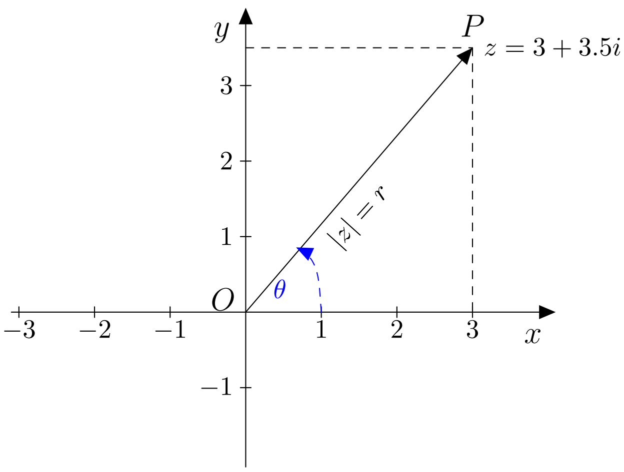

图 1: 复数的向量表示

定义 1.8

复数的模: 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数的模或绝对值，记作 $\left|\overrightarrow{OP}\right|=|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$，显然，下列各式成立: $|x|\le|z|,|y|\le|z|,|z|\le|x|+|y|$.

性质 3 复数的模与共轭的关系: $z\bar{z}=|z|^2$.

解: 令 $z=x_1+iy_1$，则 $z\bar{z}=(x_1+iy_1)(x_1-iy_1)=x_1^2+y_1^2=|z|^2$.

定义 1.9

复数的辐角: 在 $z \neq 0$ 的条件下, 称 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴的交角称为复数 z 的辐角, 记为 $\mathrm{Arg}(z) = \theta$. 显然, 辐角为多值函数, 即 $\theta = \mathrm{Arg}(z) = \theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$。当限定其中的辐角 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$, 称 θ_0 为辐角的主值, 记为 $\theta_0 = \arg z$. 当 $z = 0$ 时, $|z| = 0$, 辐角不确定.

1、 复数的加减法

图 2 和图 3 显示了复数的加法和减法运算, 其运算规则与相应向量的加法和减法一致.

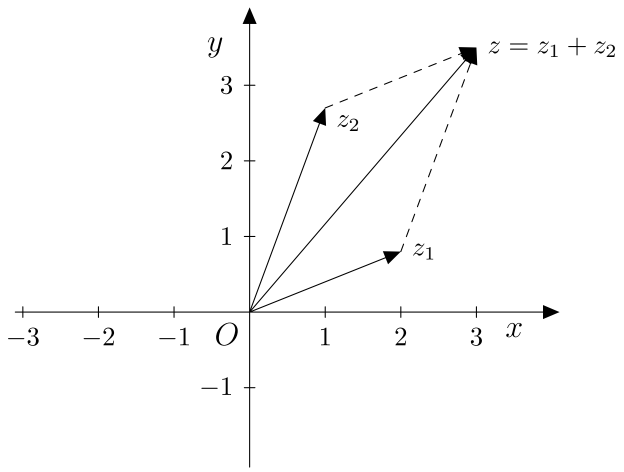

图 2: 复数的加法

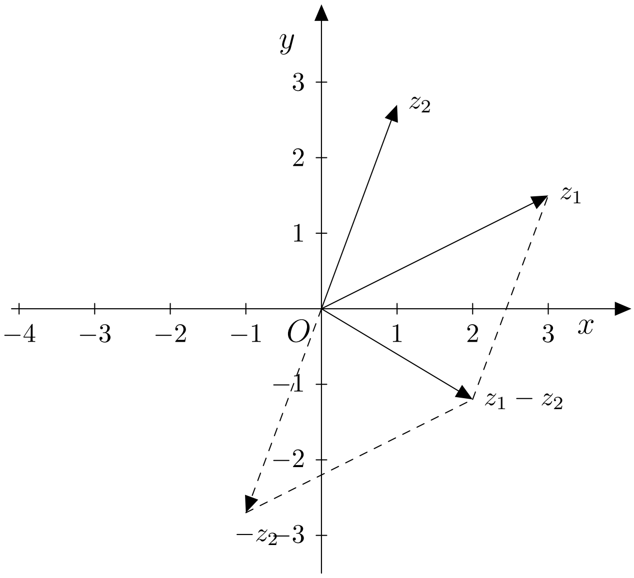

图 3: 复数的减法

两个复数 z_1, z_2 差的模表示点 z_1 和 z_2 之间的距离 (图4).

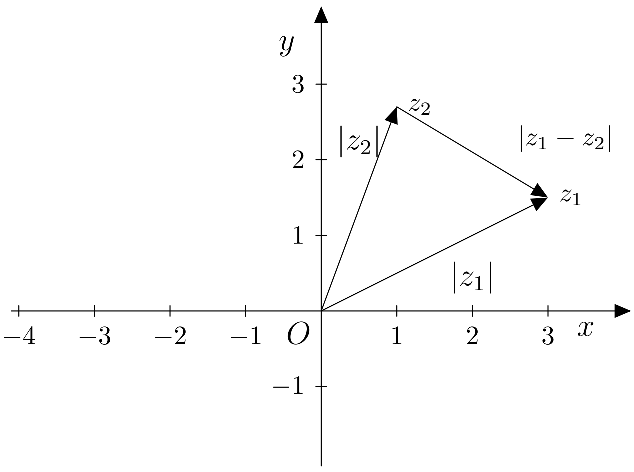

图 4: 复数 z_1 和 z_2 之间的距离

由图 3 和图 4 可以得到如下的不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \tag{1}$$

共轭复数 z_1 和 $\bar{z}_1$ (图 5), 可以看出 z_1 和 $\bar{z}_1$ 是关于实轴对称的.

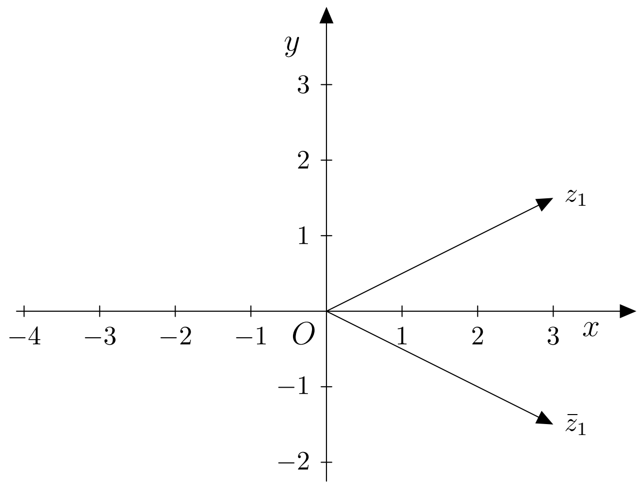

图 5: 共轭复数 z_1 和 $\bar{z}_1$

注解 6 如果复数 z 不在负实轴和原点上, 有 $\arg z = -\arg \bar{z}$.

2、 复数的乘法 (向量意义下)

设两个复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, 在复数向量的表示下, $x = |z|\cos\theta = r\cos\theta, y = |z|\sin\theta = r\sin\theta$, 则 $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$,

注解 7

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 \times r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 \times r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\
&\qquad\qquad + i[\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2]] \\
&= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)].
\end{aligned}$$

于是, 我们即有 $|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1|\,|z_2|\,, \arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$, 即两个复数乘积的模等于它们模的相乘, 两个复数乘积的辐角等于它们辐角之和.

定义 1.10

辐角的主值与反正切函数的主值的关系 (图 7):

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + \arctan\dfrac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctan\dfrac{y}{x}, & x < 0, y \leq 0 \end{cases}$$

其中 $z = x + iy, \tan\theta = \frac{y}{x}$.

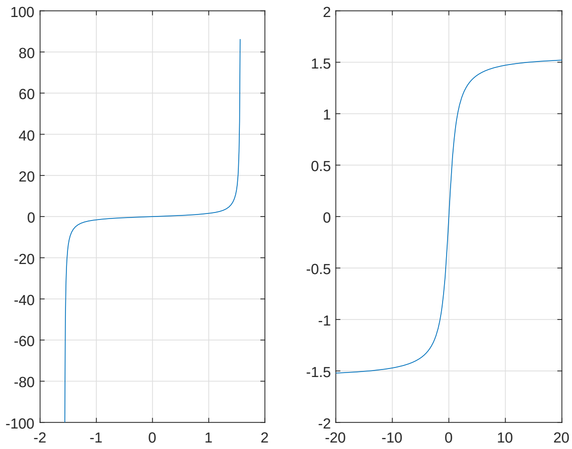

图 6: $\tan(x)$ 和 $\arctan(x)$ 函数

注解 8 注:如图 6, 函数 $\tan(x) \in \mathbb{R}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 和 $\arctan(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x > 0 & \text{第一、四象限} & \arg z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x < 0, y \geq 0 & \text{第二象限} & \arg z \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ x < 0, y \leq 0 & \text{第三象限} & \arg z \in [\pi, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

下面利用实部 x 和虚部 y 来表示复数 z 的主幅角。

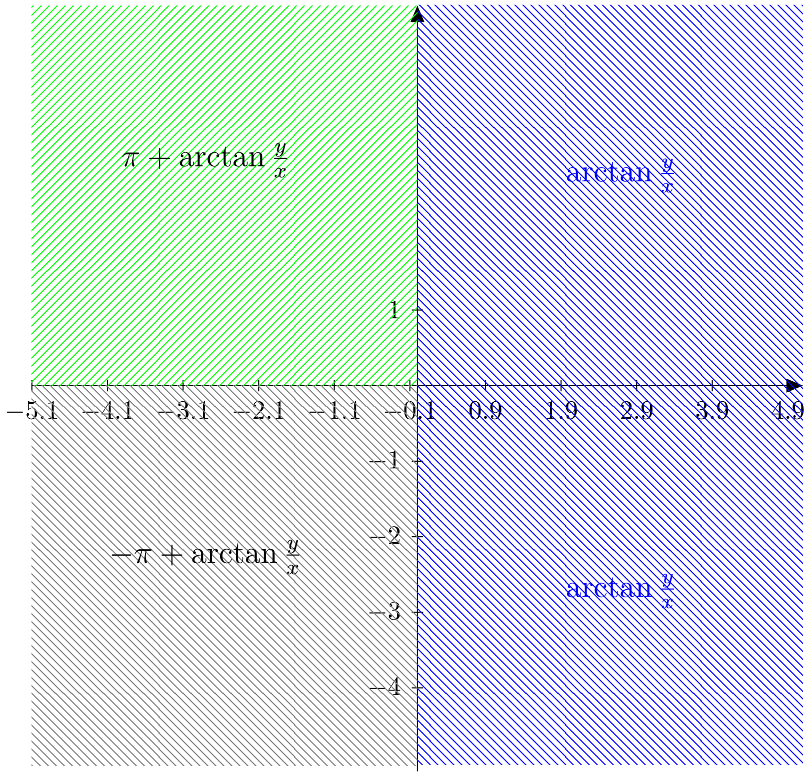

图 7: 辐角的主值与反正切函数的主值的关系

例 1.10

复数 $z = 1 + i$, 实部 $\operatorname{Re} z = 1$, 虚部 $\operatorname{Im} z = 1$, 其模长 $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, 辐角 $\theta = \operatorname{Arg} z = \theta_0 + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, 其中, $\theta_0 = \arg z = \frac{\pi}{4}$, 所以辐角 $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

注解 9 复数 $z = 1 + i$, $zi = (1 + i)i = i - 1 = -1 + i$, $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$, $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$. 可以简单的推出结论: i 的作用就是逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$.

● 坐标变换 $(x,y)\to(r,\theta)$

3、 复数的除法 (向量意义下)

先证明复分析中用的**欧拉公式** $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$, 由 $i^2=-1$, i 的作用就是逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \\ \sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \\ \cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \end{aligned}$$

将 $x=iz$ 代入 e^x, 可得

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\frac{(iz)^6}{6!}+\frac{(iz)^7}{7!}+\frac{(iz)^8}{8!}+\cdots \\ &= 1+iz-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+i\frac{z^5}{5!}-\frac{z^6}{6!}-i\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+\cdots \\ &= \left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}+\cdots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right) \\ &= \cos(z)+i\sin(z). \end{aligned}$$

到此, 知 $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=re^{i\theta}$, 有 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}, r_2\neq 0$, 可得复数的商满足如下条件

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{r_1}{r_2}, \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

由上述讨论可以得到复数的如下表示方式.

四、 复数的三角表示与指数表示

利用直角坐标与极坐标之间的变换关系, 将上面的讨论整理得

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}, |z|=r, \theta=\mathrm{Arg}z,$$

则

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

这就是复数的三角表示式.

利用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 由三角表示式可以得到 $z=re^{i\theta}$, 这就是复数的指数表示式.

例 1.11

求复数 $z=-\sqrt{12}-2i$ 的模和辐角, 并将其化为三角表示式和指数表示式 (复数示意图如图 8所示).

解: $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12+4}=4, \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-2}{-\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, z 点在第 III 像限, 所以

$$\arg z=\arg(-\sqrt{12}-2i)\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right).$$

$$\theta_0=\arg(-\sqrt{12}-2i)=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5}{6}\pi.$$

$$\mathrm{Arg}z=-\frac{5}{6}\pi+2k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

z 的**三角表示**式是

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]=4\left(\cos\frac{5}{6}\pi-i\sin\frac{5}{6}\pi\right),$$

z 的**指数表示**式是 $z=4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$.

例 1.12

将下列复数化为三角表示式和指数表示式. 1) $z=-\sqrt{12}+2i$ (如图 8); 2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$.

解:

1) 显然, $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第二象限, $\arg z\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, 知

$$\theta_0=\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{-\sqrt{12}}\right)+\pi=\pi-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5}{6}\pi.$$

因此, z 的三角表示式为

$$z=4\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right].$$

z 的指数表示式为

$$z=4e^{\frac{5}{6}\pi i}.$$

教　　案　　纸

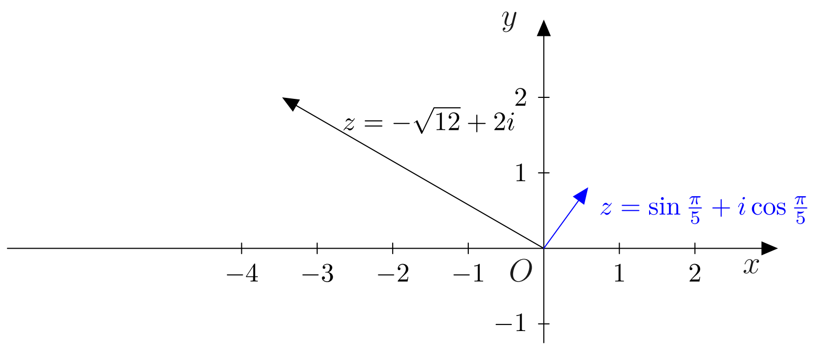

图 8: 复数 $z=-\sqrt{12}+2i$ 和复数 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$

2) 显然有 $r=|z|=1$, 又

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3}{10}\pi,$$
$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3}{10}\pi.$$

故 z 的三角表示式为

$$z=\cos\frac{3}{10}\pi+i\sin\frac{3}{10}\pi.$$

z 的指数表示式为

$$z=e^{\frac{3}{10}\pi i}.$$

例 1.13

设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ 为任意两个复数, 证明 *1)* $|z_1\bar{z}_2|=|z_1||z_2|$; *2)* 不等式 $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ 成立; *3)* $z=\frac{(\cos 5\phi+i\sin 5\phi)^2}{(\cos 3\phi-i\sin 3\phi)^3}$.

♡

● $\cos\alpha=\cos 2\frac{\alpha}{2}=?$

解:

1) $|z_1\bar{z}_2|=\sqrt{(z_1\bar{z}_2)(\overline{z_1\bar{z}_2})}$

$$|z_1\bar{z}_2|=\sqrt{(z_1\bar{z}_2)(\bar{z}_1z_2)}=\sqrt{(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)}=|z_1||z_2|.$$

2) 使用复数的运算来证明三角不等式:

$$\begin{aligned}0 \leq |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\ &= z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\\ &\leq |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}|\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\\ &= (|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

两边开方, 可得 $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.

3) 因为 $\cos 5\phi + i\sin 5\phi = e^{5\phi i}$, $\cos 3\phi - i\sin 3\phi = \cos(-3\phi)+i\sin(-3\phi) = e^{-3\phi i}$, 所以

$$\frac{(\cos 5\phi + i\sin 5\phi)^2}{(\cos 3\phi - i\sin 3\phi)^3} = \frac{(e^{5\phi i})^2}{(e^{-3\phi i})^3} = e^{19\phi \mathrm{i}},$$

故三角表示式为 $z = \cos 19\phi + i\sin 19\phi$, 指数表示式为 $z = e^{19\phi i}$.

例 1.14

把复数 $z = 1-\cos\alpha + i\sin\alpha, (0 \leq \alpha \leq \pi)$ 化为三角表示式和指数表示式, 并求 z 的辐角的主值.

解:

$$\begin{aligned} z &= 1-\cos\alpha+i\sin\alpha = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}.\end{aligned}$$

$$\arg z = \frac{\pi-\alpha}{2}, 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

注解 10

$$0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow -\pi \leq \alpha - \pi \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi-\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

教　　案　　纸

例 1.15

求复数 $z=\frac{\eta\cos\theta-1}{\eta\cos\theta+1}$ 的实部和虚部，其中，$\eta=e^{i\phi}$.

由 $\eta=e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$,

$$z=\frac{\eta\cos\theta-1}{\eta\cos\theta+1}=\frac{\cos\phi\cos\theta-1+i\sin\phi\cos\theta}{\cos\phi\cos\theta+1+i\sin\phi\cos\theta}$$

$$=\frac{(\cos\phi\cos\theta)^2-1+(\sin\phi\cos\theta)^2+2i\sin\phi\cos\theta}{(\cos\phi\cos\theta+1)^2+(\sin\phi\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{-(\sin\theta)^2}{2\cos\phi\cos\theta+1+(\cos\theta)^2}+\frac{2\sin\phi\cos\theta}{2\cos\phi\cos\theta+1+(\cos\theta)^2}i.$$

例 1.16

证明：三个复数 z_1, z_2,z_3 是等边三角形的三个顶点的充要条件 ${z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

解: $\Delta z_1z_2z_3$ 是等边三角形的三个顶点的充要条件是向量 z_2-z_1 绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$ 或者 $-\frac{\pi}{3}$ 即得向量 z_3-z_1, 即 $z_3-z_1=(z_2-z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$, 或者 $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

- $\cos\alpha=\cos 2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2z_3-2z_1-z_2+z_1}{2(z_2-z_1)}\right)^2=-\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow\frac{(2z_3-z_1-z_2)^2}{4(z_2-z_1)^2}=-\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow(2z_3-z_1-z_2)^2=-34(z_2-z_1)^2$$
$$\Leftrightarrow 4z_3^2+z_1^2+z_2^2-4z_1z_3-4z_2z_3+2z_1z_2=-3z_2^2-3z_1^2+6z_1z_2$$
$$\Leftrightarrow 4z_3^2+4z_2^2+4z_1^2=4z_1z_3+4z_2z_3+4z_1z_2$$
$$\Leftrightarrow {z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1.$$

- $-\pi\leq-\alpha\leq 0, 0\leq\pi-\alpha\leq\pi$.

两边平方，并化简得

$${z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1.$$

五、 曲线的复数方程

例 1.17

(复数方程的举例) 将通过两点 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ 的直线用复数形式的方程来表示.

解: 过点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的直线可以用参数方程表示为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1). \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty)$$

因此, 它的复数形式的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), (-\infty < t < \infty).$$

由此得知, 由 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程可以写成

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), (0 \le t \le 1)$$

再比如, 取 $t = \frac{1}{2}$, z_1 与 z_2 组成的线段的中点为

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

上述例子表明, 很多平面图形能用复数形式的方程 (或不等式) 来表示; 也可以由给定的复数形式的方程 (或不等式) 来确定它所表示的平面图形.

例 1.18

求下列方程所表示的曲线: 1) $|z+i| = 2$; *2)* $|z-2i| = |z+2|$; *3)* $\mathrm{Im}(i + \bar{z}) = 4$.

解:

1) $|z + i| = 2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为 2 的点的轨迹, 即中心为 $-i$、半径为 2 的圆. 下面用代数方法求出该圆的直角坐标方程. 设 $z = x + iy$, 方程变为

$$|x + (y+1)i| = 2 \iff \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 2;$$

或者

$$|x + (y+1)i| = 2 \iff x^2 + (y+1)^2 = 4.$$

2) 到点 -2 和到 $2i$ 距离相等的点 z, 就是直线 $y = -x$. 具体来

● 使用了一般拓扑学和代数拓扑学的知识

说, 令 $z = x + iy$,

$$|x + iy - 2i| = |(x + 2) + iy| \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = (x + 2)^2 + y^2 \Rightarrow y = -x.$$

3) 设 $z = x + iy$, 则 $i + \bar{z} = x + (1 - y)i$, 得虚部 $\mathrm{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y$. 再由 $\mathrm{Im}(i + \bar{z}) = 4 \Rightarrow y = -3$.

复数形式的方程表示一条平面曲线 $F(x, y) = 0$, 复数形式的方程与平面曲线之间的转换可以利用公式 $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

例 1.19

将直线方程 $x + 3y = 2$ 化为复数形式.

解: $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, 代入方程有 $\frac{z+\bar{z}}{2} + 3\frac{z-\bar{z}}{2i} = 2$, 可得

$$(3 + i)z + (-3 + i)\bar{z} = 4i.$$

复数方程与平面曲线之间可以相互转换. 复平面上的曲线也可以看成是满足某种条件的点 Z 的轨迹.

六、 复球面 (复数的几何表示)

1、 复数的几何表示

复数还有一种几何表示法, 它是借用地图制图学 (拓扑学的一个分支) 中将地球投影到平面上的测地投影法, 建立复平面与球面上点的对应关系, 着重说明引入无穷远点的合理性.

取一个在原点 O 与 z 平面相切的球面, 通过 O 点作一垂直于 z 平面的直线与球面交于点 N, N 称为北极, O 称为南极 (图 20). 现在用直线段将 N 与 z 平面上一点 z 相连, 此线段交球面于一点 $P(z)$, 这样就建立起球面上的点 (不包括北极点 N) 与复平面上的点间的一一对应. (N 为点光源, 假设球面透明, 对于平行于赤道的圆周, 投影在复平面上也是一个圆周)

● 球面:$N\to$ 复平面: 无穷远点 $\to$ 复数: ∞

● 从 N 点撕裂球面, 球面具有无限的弹性情况下, 球面可以延展成复平面

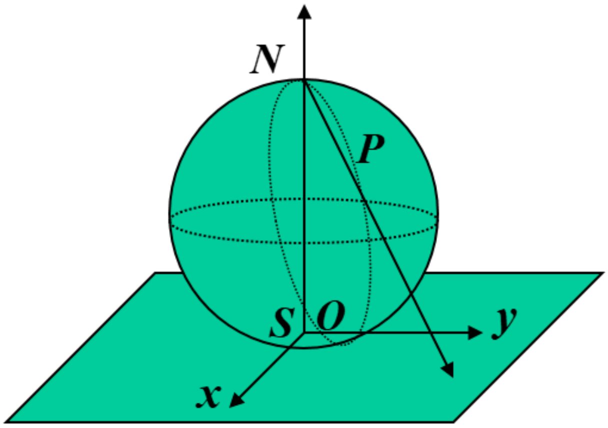

图 9: 复球面.

考虑 z 平面上一个以原点 O 为中心的圆周 C, 在球面上对应的也是一个圆周 Γ(即是纬线). 当圆周 C 的半径越来越大时, 圆周 Γ 就越来越趋近于北极 N. 因此, 北极 N 可以看成是与 z 平面上一个模无穷大的假想点相对应的点, 这个假想点称为**无穷远点**, 并记为 ∞. 复平面加上点 ∞ 后称为**扩充复平面**, 与扩充复平面对应的就是整个球面, 称为**复球面**. 简单说来, 扩充复平面的一个几何模型就是复球面.

关于新"数"∞(读无穷) 还需作如下几点规定

1) 运算无意义 $\infty\pm\infty, 0\times\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$;

2) $a\neq\infty$ 时, $\frac{\infty}{a}=\infty, \frac{a}{\infty}=0, \infty\pm a=a\pm\infty=\infty$;

3) $b\neq 0$, $\infty\cdot b=b\cdot\infty=\infty, \frac{b}{\infty}=0$;

4) ∞ 的实部、虚部及辐角都无意义, $|\infty|=+\infty$.

5) 复平面上每一条直线都通过点 ∞, 同时, 没有一个半平面包含点 ∞.

2、扩充复平面上的几个概念

扩充复平面上, 无穷远点的邻域应理解为以原点为心的某圆周的外部, 即 ∞ 的 $\epsilon-$ 邻域 $N_\epsilon(\infty)$ 是指符合条件 $|z|>\frac{1}{\epsilon}$ 的点集 $(N_\epsilon(\infty)=\{z||z|>\frac{1}{\epsilon}\})$. 在扩充复平面上, 聚点、内点和边界点等概念均可以推广到点 ∞. 于是, 复平面以 ∞ 为其唯一的边界点; 扩充复平面以 ∞ 为内点, 且它是唯一的无边界的区域.

例 1.20

在 $z_0=\infty$, $f(\infty)\neq\infty$ 时, $f(z)$ 在 $z=z_0$ 连续的 $\epsilon-\delta$ 说法应该修改为: 任给 $\epsilon>0$, 存在 $\delta(\epsilon)>0$, 只要 $|z|>\frac{1}{\delta(\epsilon)}$ 时, 就有 $|f(z)-f(\infty)|<\epsilon$. ♡

● 复球面：还可以看成是将复平面四个角拼接起来的图形

例 1.21

说明函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在扩充 z 平面上广义连续，其中 ($f(0)=\infty, f(\infty)=0$).

证 因为 $\frac{1}{z}$ 在 $z\neq 0$ 及 $z\neq\infty$ 时，作为两个连续函数的商是连续的. 在 $z=0$ 及 $z=\infty$ 的连续性可以根据下式得出

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0=f(\infty), \lim_{z\to 0} f(z)=\infty=f(0). \tag{2}$$

注解 11 以后涉及扩充复平面时，一定强调"扩充"二字，凡是没有强调的地方，均指通常的复平面；以后提到区域及其连通性时，如不加说明，都将限于通常复平面上来考虑；以后提到极限、连续时，如不加说明，均按通常意义理解.

3、 复数球面与无穷远点总结

扩充的复平面：包括无穷远点的复平面，称为扩充复平面.

复数球面：若在球面上，我们规定球面上的北极点 $N\Leftrightarrow\infty$,

南极点 $s\Leftrightarrow 0$，则球面上的点与扩充的复平面上的点是一一对应的，称该球面为**复数球面**. 这样，所有的复数都可以用球面上的点来一一表示.

IV 课堂小结

本次课程主要学习了

(1) 复数的基本概念、性质、运算以及复数的表示方法 (向量、三角和指数表示). 重点需要掌握涉及三种附属表示方法对应的复数的代数运算.

(2) 复数的模、辐角；复数的各种表示方法. 并且介绍了复平面、复球面和扩充复平面.

注意：为了用球面上的点来表示复数，引入了无穷远点. 无穷远点与无穷大这个复数相对应，所谓无穷大是指模为正无穷大（辐角无意义）的唯一的一个复数，不要与实数中的无穷大或正、负无穷大混为一谈.

复数的概念：

(1) 复数的表示、定义：$x+iy$.

(2) 平面点表示:$P(x,y)$. 平面向量表示：$\overrightarrow{OP}=(x,y)$. 三角表示式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 指数表示式：$z=re^{i\theta}$.

(3) 欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

V 第一章习题

P31：1. (1) (3)；2. 8. 9. 11. 13. 15. 18. 20. 26.