

教 案 纸

理论课 11 §5.1-5.1 孤立奇点

● 2018/11/12

● 互动提问

I 组织教学

- 1、集中学生注意力;
- 2、清查学生人数;
- 3、维持课堂纪律.

II 复习导入及主要内容

- 1、上次作业讲评;
- 2、本次主要内容: 孤立奇点的分类和孤立奇点的等价刻画; 复函数的零点极点关系; 函数在无穷远处的形态.
- 3、重点: 孤立奇点的分类和孤立奇点的等价刻画; 复函数的零点极点关系.
- 4、难点: 复函数的零点与复函数的极点关系; 函数在无穷远处的形态.

III 教学内容及过程

一、 孤立奇点

1、 孤立奇点

定义 .56

孤立奇点的定义 若函数 $f(z)$ 虽在 z_0 不解析, 但是在 z_0 的某个邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 那么称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

定义 .57

孤立奇点的分类方式 孤立奇点的分类主要是根据函数 $f(z)$ 在 z_0 处展开成的罗朗级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 中所含的正幂项和负幂项的项数来分类的.

2、 可去奇点

定义 .58

可去奇点 如果在 $f(z)$ 展开成的罗朗级数中不含 $z - z_0$ 的负幂项, 则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的可去奇点.

教 案 纸

例 .1

$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots \right) = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \cdots$, $z=0$ 是函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点, 即展开成罗朗级数后, 不含有负幂项, 所以 $z=0$ 是函数的可去奇点.

判别方法: 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的可去奇点, 则有 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$.
如上例中 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 = c_0$.

3、极点

定义 .59

极点 如果 $f(z)$ 展开成的罗朗级数中所含 $z - z_0$ 的负幂项是有限的, 即

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^m c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \\ &= \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \end{aligned}$$

则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, $m \geq 1, c_{-m} \neq 0$.

例 .2

$f(z) = \frac{1}{z^2}, m=2, z=0$ 为其二阶极点. 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则必有 $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} g(z)$, 其中 $g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + c_0(z - z_0)^m + \cdots$, $g(z)$ 在 z_0 处解析, 且 $g(z_0) \neq 0$.

判别方法: 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则必有 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. 例 $f(z) = \frac{1}{z^2}, \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} = \infty$.

4、极点与零点的关系

注解 32 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则必为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点. 这说明求函数 $f(z)$ 的极点问题可以转化为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点问题.

教 案 纸

定理 .31

若 z_0 为函数 $Q(z) = \frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点, 必有 $Q(z_0) = Q'(z_0) = Q''(z_0) = \cdots = Q^{(m-1)}(z_0) = 0$, 而 $Q^{(m)}(z_0) \neq 0$.

比如对 $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $\frac{1}{f(z)} = z^2$, 显然,

$$z^2|_{z=0} = 0, (z^2)' = 2z|_{z=0} = 0, (z^2)''|_{z=0} = 2 \neq 0.$$

注解 33 有时要注意, z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, 应有 $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} g(z)$ 的形式.

例 .3

$f(z) = \frac{1-e^z}{z^2}$, z^2 看似是 $f(z)$ 的二阶极点, 但

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1-e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - 1 - z - \frac{1}{2!}z^2 - \cdots \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(-1 - \frac{1}{2!}z - \frac{1}{3!}z^2 - \cdots - \frac{1}{n!}z^{n-1} - \cdots \right) \\ &= \frac{1}{z} g(z), \end{aligned}$$

因此, $z=0$ 是 $f(z)$ 的 1 阶极点.

例 .4

函数 $\frac{1}{\sin z}$ 有什么奇点? 如果是极点, 指出它的级数.

解: 函数的奇点是使 $\sin z = 0$ 的点, 这些奇点是 $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$), 是孤立奇点. 这是因为

$$(\sin z)'|_{z=k\pi} = \cos z|_{z=k\pi} = (-1)^k \neq 0,$$

所以 $z = k\pi$ 是 $\sin z$ 的一级零点, 是 $\frac{1}{\sin z}$ 的一级极点.

教 案 纸

例 .5

(思考题) 问 $z=0$ 是 $\frac{\sinh z}{z^3}$ 的几级极点?



解:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)^n}{n!}, e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!},$$

$$e^z - e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)^n - (-z)^n}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\frac{\sinh z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2(n-1)}.$$

$z=0$ 是 $\frac{\sinh z}{z^3}$ 的 2 级极点.

注意: 不能以函数的表面形式给出一点的奇点阶数是几的结论.

例 .6

求 $\frac{1}{z^3 - z^2 - z + 1}$ 的奇点, 如果是极点, 指出它的级数.



解: 由于

$$\frac{1}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{1}{(z+1)(z-1)^2},$$

所以 $z=-1$ 是函数的一级极点; $z=1$ 是函数的二级极点.

5、本性奇点

定义 .60

(本性奇点) 如果 $f(z)$ 展开成的罗朗级数所含 $z-z_0$ 的负幂项有无限多项, 即 $f(z) = \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_1}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.



教 案 纸

例 .7

$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$, 所以 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

判别方法: 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的本性奇点, 则必有 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在 (也不等于 ∞).

例 .8

$z = 0$ 为 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点, $\lim_{z \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{z}} = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{z}} = \infty$, 所以 $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$ 不存在.

二、函数在无穷远点的性态

定义 .61

设函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z = \infty$ 的 (去心) 邻域 $R < |z| < +\infty$ 内解析, 则称点 $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

作变换 $\zeta = \frac{1}{z}$, $f(z) = f(\frac{1}{\zeta}) = g(\zeta)$, 并规定变换 ζ 把 z 平面上的无穷远点 $z = \infty$ 映射成 ζ 平面上的原点 $\zeta = 0$, 将 z 平面上的区域 $R < |z| < +\infty$ 映射成 ζ 平面上的区域 $0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$.

显然, $g(\zeta)$ 在邻域 $0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$ 内解析, 所以 $\zeta = 0$ 是 $g(\zeta)$ 的孤立奇点.

我们规定: 如果 $\zeta = 0$ 是 $g(\zeta)$ 的可去奇点、 m 阶极点或本性奇点, 那么点 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点、 m 阶极点或本性奇点.

由于 $f(z)$ 在 $R < |z| < \infty$ 内解析, 故可以展开成罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad (41)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \quad (42)$$

其中 C 为在圆环域 $R < |z| < \infty$ 内绕原点的任一条正向简单闭曲线. 对应地, $g(\zeta)$ 在环域 $0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$ 内解析, 所以 $g(\zeta)$ 展开成罗朗级数

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^{-n}. \quad (43)$$

教 案 纸

由公式(41)中的级数, 对于下列情形

- a) 不含负幂项, 则 $\zeta = 0$ 就是 $g(\zeta)$ 的可去奇点,
 - b) 含有有限多的负幂项, 且 ζ^{-m} 为最高负幂, 则 $\zeta = 0$ 就是 $g(\zeta)$ 的 m 阶极点,
 - c) 含有无限多的负幂项, 则 $\zeta = 0$ 就是 $g(\zeta)$ 的本性奇点.
- 相应地在公式(43)中的级数,
- a) 不含正幂项, 那么 $z = \infty$ 就是 $f(z)$ 的可去奇点,
 - b) 含有有限多的正幂项, 且 z^m 为最高正幂, 那么 $z = \infty$ 就是 $f(z)$ 的 m 阶极点,
 - c) 含有无限多的正幂项, 那么 $z = \infty$ 就是 $f(z)$ 的本性奇点.

例 .9

函数 $f(z) = \frac{z}{1+z}$ 在环域 $1 < |z| < \infty$ 内可以展开成

$$f(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{z^n} + \cdots.$$

$$g(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta} = 1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \cdots + (-1)^n \zeta^n + \cdots, \zeta = \frac{1}{z}.$$

$g(\zeta)$ 有无穷多项正幂项, 即 $\zeta = 0$ 为 $g(\zeta)$ 的可去奇点, 也即 $f(z)$ 有无穷多项负幂项, 所以 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

例 .10

函数 $f(z) = z + \frac{1}{z}$, 含有正幂项, 且 z 为最高正幂项, 所以 ∞ 为它的一级极点.

例 .11

函数 $\sin z$ 的展开式:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

含有 z 的无穷多项的正幂项, 所以 ∞ 是它的本性奇点.

教 案 纸

例 .12

说出函数 $f(z) = z + e^{\frac{1}{z}}$ 的所有奇点及其类型.

解: 函数 $f(z) = z + e^{\frac{1}{z}}$ 的奇点是 $z = 0, z = \infty$, 且

$$f(z) = z + e^{\frac{1}{z}} = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \quad \zeta = \frac{1}{z} \quad \frac{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \zeta^n,$$

$z = \infty$ 是一级极点, $z = 0$ 是本性奇点.

例 .13

函数 $f(z) = \frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin \pi z)^3}$ 在扩充复平面内有什么类型的奇点? 如果是极点, 指出它的级数.

解: 函数 $f(z)$ 除点 $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外, 在 $|z| < +\infty$ 内解析. 因为 $(\sin \pi z)' = \cos \pi z$ 在 $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 处均不为 0, 所以这些点都是 $\sin \pi z$ 的一级零点, 故这些点中除 $1, -1, 2$ 外, 都是 $f(z)$ 的三级极点.

因为 $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$, 以 1 和 -1 为一级零点, 所以 1 和 -1 是 $f(z)$ 的二级极点. 当 $z = 2$ 时, 因为 $\lim_{z \rightarrow 2} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin \pi z)^3} = \frac{3}{\pi^3}$, $z = 2$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

当 $z = \infty$ 时, 因为

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{(1 - \zeta^2)(1 - 2\zeta)^3}{\zeta^5 \sin^3 \frac{\pi}{\zeta}},$$

$\zeta_n = \frac{1}{n}$ 使 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的分母为 0, $\zeta_n = \frac{1}{n}$ 为 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的极点. $\zeta = 1, 1/2 \Leftrightarrow z = 1, 2$, 前面已讨论过其极点情况. 当 $n > 2, n \rightarrow \infty$ 时, $\zeta_n \rightarrow 0$, 故 $\zeta = 0$ 不是 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的孤立奇点. 所以 $z = \infty$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点.

例 .14

确定 $f(z) = \frac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$ 的孤立奇点的类型.

解: $z = 0$ 是分母 $z^3(e^{z^3} - 1) = z^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n!}$ 的 6 级零点, 也即函数的 6 级极点.

● $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z-2}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi}.$

教 案 纸

IV 课堂小结

理解孤立奇点的概念及其分类; 掌握可去奇点、极点与本性奇点的特征; 熟悉零点与极点的关系.

V 布置作业

- 1、教材习题—习题五 P183: 1 1)、4)、7)、8)、9); 3; 4; 8; 9 1)、2)、3)、6); 11 2); 12 2); 13 1)、3)、4)、5).