教　　案　　纸

● 2019/11/19

● 互动提问

理论课 12　§ 5.2-5.2 留数

I　**组织教学**

1、集中学生注意力;

2、清查学生人数;

3、维持课堂纪律;

II　**复习导入及主要内容**

1、上次作业讲评;

2、本次主要内容

3、重点: 利用留数定理将积分计算问题转化为留数计算问题.

4、难点: 选好复变量积分的被积函数和积分围线; 确定积分区域和奇点.

III　**教学内容及过程**

一、　留数

定义 .62

留数的概念　设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 环域内解析, 点 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点, C 是任意正向圆周 $|z-z_0|=\rho<R$, 称积分值 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ 为函数 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 处的留数, 记为 $\mathrm{Res}\,[f(z),z_0]$, 或简记为 $\mathrm{Res}_{z=z_0}f(z)$, 或 $\mathrm{Res}f(z_0)$. **留数**又称为**残数**.

函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的留数即为罗朗级数 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 展开式中 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数 c_{-1}.

如果点 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 因为在环域 $0<|z-z_0|<R$ 内, 环域内积分 $\int_C f(z)dz$ 一般不为零, 所以有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

且

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta.$$

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n dz \\
&= \oint_C \left[\cdots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \cdots \right.\\
&\qquad \left. + c_n(z-z_0)^n + \cdots \right] dz \\
&= \oint_C \frac{c_{-1}}{z-z_0} dz = 2\pi i c_{-1},
\end{aligned}
$$

由于 $c_{-n}, n \geq 2$ 和 $c_n, n \geq 0$ 是复数, 对应积分的高阶导数结果, 均在环域 $0 < |z-z_0| < R$ 内解析, 所以 $\mathrm{Res}\,[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = c_{-1}$.

定理 .32

(留数定理) 设 C 是一条正向简单闭曲线, 若函数 $f(z)$ 在 C 所围区域 D 中除去有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外均解析, 则 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,[f(z), z_k]$. 其中 $z_k, (k = 1, 2, \cdots, n)$ 是函数 $f(z)$ 在 D 内的有限个孤立奇点.

注解 34 *1) $f(z)$ 在 C 上及 C 内部处处解析.*

2) 留数定理将沿封闭曲线 C 的积分转化为求被积函数在 C 内各孤立奇点处的留数.

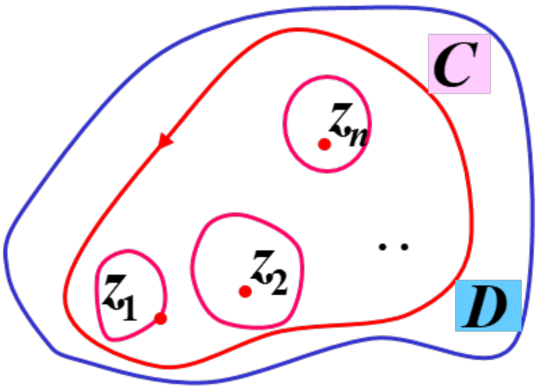

图 41: 正向简单闭曲线 C 围成区域.

证 由复连通区域上 (图41) 的柯西定理

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_k} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k],$$

定理得证.

二、 留数的计算

规则 I 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $c_{-1}=\mathrm{Res}\,[f(z),z_0]=0$.

规则 II 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 c_{-1}.

规则 III 若 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 1 阶极点, 则 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

规则 IV 若 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,[f(z),z_0]&=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]\\&=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.\end{aligned}$$

证: 因为 $f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$, 两边同乘以 $(z-z_0)^m$, 得

$$\begin{aligned}(z-z_0)^m f(z)&=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots\\&\quad+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\cdots,\end{aligned}$$

再对两边求 $m-1$ 阶导数, 得

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]=(m-1)!c_{-1}+\{z-z_0\text{的正幂项}\},$$

再令 $z\to z_0$, 取极限, 则可得

$$c_{-1}=\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

当 $m=1$ 时, 则有 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$.

规则 V 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理真分式, 其中 $P(z),Q(z)$ 在 z_0 处解析, 且 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0$, $Q'(z_0)\neq 0$, 则 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, 且有 $\mathrm{Res}\,[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

证: 因为 $Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$, 所以 z_0 是 $Q(z)$ 的一级零点, z_0 是 $\frac{1}{Q(z)}$ 的一级极点. 因此

$$\frac{1}{Q(z)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\phi(z),$$

其中 $\phi(z)$ 在 z_0 解析, 且 $\phi(z_0)\neq 0$. 此外还有

$$(z-z_0)f(z)=P(z)\cdot\phi(z),$$

在 z_0 解析, 且 $P(z_0)\phi(z_0)\neq 0$, 所以 z_0 是 $f(z)$ 一级极点, 利用 $Q(z_0)=0$, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),z_0]&=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]=\lim_{z\to z_0}P(z)\cdot\phi(z)\\&=\lim_{z\to z_0}P(z)\cdot\phi(z)=\frac{1}{Q(z)}(z-z_0)P(z)\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.\end{aligned}$$

例 .1

求函数 $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ 在 $z=1$ 和 $z=-1$ 处的留数.

解: $z=1$ 为 $f(z)$ 的一阶极点, $z=-1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点. 由留数计算法则

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\cdot\frac{z}{(z-1)(z^2+1)^2}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),-1]&=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\cdot\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right]\\&=\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\lim_{z\to -1}\frac{-1}{(z-1)^2}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

例 .2

计算积分 $I=\oint_{|z|=n}\tan\pi z\,dz,\ n\in\mathbb{Z}.$

解: 因为 $f(z)=\tan\pi z=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}, z=k+\frac{1}{2}, k\in\mathbb{Z}$ 为其一阶极点, 所以

● $\left|k+\frac{1}{2}\right|<n\Rightarrow -n<k+\frac{1}{2}<n.$

$$\mathrm{Res}\left[f(z), k+\frac{1}{2}\right] = \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\pi z)}{-\pi \sin \pi z}\Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi}.$$

由留数定理得

$$I = \oint_c \tan \pi z dz = 2\pi i \sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n} \mathrm{Res}\left[f(z), k+\frac{1}{2}\right]$$
$$= 2\pi i \cdot \left(-\frac{2n}{\pi}\right) = -4ni.$$

例 .3

$I = \oint_c \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin z}dz$, 其中 C 为正向圆周, $|z| = 2$.

解: 因为 $|z| = 2$, 由 $\sin z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z = \frac{\pi}{4}$ 为 $f(z)$ 的一阶极点, 由此

$$\mathrm{Res}\left[f(z), \frac{\pi}{4}\right] = \frac{z}{(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z)'} = \frac{z}{-\cos z}\Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \Big/ -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

所以 $\oint_C \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z}dz = -2\pi i \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}i$.

注解 35 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般用罗朗展开, 求出 c_{-1}.

例 .4

求 $f(z) = \frac{e^z}{z^n}$ 在 $z = 0$ 的留数.

因为 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶极点, 所以

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^n}, 0\right] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(z^n \cdot \frac{e^z}{z^n}\right) = \frac{1}{(n-1)!}.$$

例 .5

$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z = 0$ 的留数.

解: 如果利用洛朗展开式求 c_{-1} 较方便:

$$\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}\left[z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\right]=\frac{z^{-3}}{3!}-\frac{z^{-1}}{5!}+\cdots,$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=c_{-1}=-\frac{1}{5!}.$$

解:

$$P(0)=P'(0)=P''(0)=0,$$

$z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三级零点, 所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点. 由规则 III 得

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right].$$

显然, 上述方法的计算过程较复杂.

说明:

1. 在实际计算中应灵活运用计算规则. 如 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 级极点, 当 m 较大而导数又难以计算时, 可直接展开洛朗级数来求 c_{-1} 来计算留数.

2. 在应用规则II 时, 为了计算方便一般不要将 m 取得比实际的级数高. 但有时把 m 取得比实际的级数高反而使计算方便. 如上例取 $m=6$, 留数的计算方式如下

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}\left[z^6\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right]=-\frac{1}{5!}.$$

例 .6

$f(z)=\frac{e^z-1}{z^5}$ 在 $z=0$ 的留数.

解: $z=0$ 是 $f(z)$ 的四级极点, 在 $0<|z|<+\infty$ 内将 $f(z)$ 展成洛朗级数:

$$\begin{aligned}\frac{e^z-1}{z^5}&=\frac{1}{z^5}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots-1\right)\\&=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!}+\frac{z}{6!}+\cdots,\end{aligned}$$

所以

$$\text{Res}[f(z),0]=c_{-1}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}.$$

例 .7

计算积分 $\oint\limits_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$, C 为正向圆周: $|z|=2$.

解: $z=0$ 为一级极点, $z=1$ 为二级极点,

$$\text{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1,$$

$$\begin{aligned}\text{Res}[f(z),1]&=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]\\&=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right)\\&=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\oint\limits_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz&=2\pi i\left\{\text{Res}[f(z),0]+\text{Res}[f(z),1]\right\}\\&=2\pi i(1+0)=2\pi i.\end{aligned}$$

例 .8

计算积分 $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz$, C 为正向圆周:$|z|=2$.

解: 由于 $f(z)=\frac{ze^z}{z^2-1}$ 有两个一级极点 ± 1, 而这两个极点都在圆周 $|z|=2$ 内, 所以

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz=2\pi i\{\text{Res}[f(z),1]+\text{Res}[f(z),-1]\},$$

由规则 II, 得

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}\frac{ze^z}{z^2-1}(z-1)=\lim_{z\to1}\frac{ze^z}{z+1}=\frac{e}{2},$$
$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to-1}\frac{ze^z}{z^2-1}(z+1)=\lim_{z\to-1}\frac{ze^z}{z-1}=\frac{e^{-1}}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{ze^z}{z^2-1}dz&=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),-1]\}\\&=2\pi i\left(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right)=2\pi i\cosh 1.\end{aligned}$$

另法

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\left.\frac{ze^z}{2z}\right|_{z=1}=\frac{e}{2},$$
$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\left.\frac{ze^z}{2z}\right|_{z=-1}=\frac{e^{-1}}{2}.$$

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{ze^z}{z^2-1}dz&=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),-1]\}\\&=2\pi i\left(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right)=2\pi i\cosh 1.\end{aligned}$$

例 .9

计算积分 $\oint_C\frac{z}{z^4-1}dz$, C 为正向圆周: $|z|=2$.

解: 被积函数 $f(z)=\frac{z}{z^4-1}$ 有四个一级极点 $\pm1,\pm i$ 都在圆周 $|z|=2$ 内,所以

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{z}{z^4-1}dz=&\oint_C\frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)}dz\\=&2\pi i\,\{\operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),-1]\\&+\operatorname{Res}[f(z),i]+\operatorname{Res}[f(z),-i]\}\end{aligned}$$

由计算规则 V, $\frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4z^2}$, 故

$$\oint_C\frac{z}{z^4-1}dz=2\pi i\left\{\frac14+\frac14-\frac14-\frac14\right\}=0.$$

	三、 在无穷远点的留数

定理 .33

设函数 $f(z)$ 在圆环 $R<|z|<\infty$ 内解析, C 为圆环内绕原点的任何一条正向简单闭曲线, 则函数 $f(z)$ 在无穷远点的留数 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz=-c_{-1}$.

注意积分路线取顺时针方向.

规则**VI**: $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$.

说明: 定理和规则 VI 提供了计算函数沿闭曲线积分的又一种方法:

$$\oint_{C^-}f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\,[f(z),\infty]=-2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right].$$

在很多情况下此法更为简单.

证 6 现取正向简单闭曲线 C 为半径足够大的正向圆周:

$$|z|=\rho, z=\frac{1}{\zeta},$$

● 将 z 平面转化为 ζ 平面

并设 $z=\rho e^{i\theta}$, $\zeta=re^{i\phi}$. 由 $\rho e^{i\theta}=z=\frac{1}{\zeta}=\frac{1}{r}e^{-i\phi}$, 那么 $\rho=\frac{1}{r}$, $\theta=-\phi$. 于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),\infty]&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-2\pi}^{0}f(\rho e^{i\theta})\rho e^{i\theta}id\theta\\&\xlongequal{\theta=-\phi}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right)\frac{i}{re^{i\phi}}d(-\phi)\\&=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right)\frac{1}{(re^{i\phi})^2}d(re^{i\phi})\\&=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\frac{1}{\rho}}f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}d\zeta=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right].\end{aligned}$$

其中 $|\zeta|=\frac{1}{\rho}$ 为正向, 在 $|\zeta|=\frac{1}{\rho}$ 内除 $\zeta=0$ 外无其他奇点.

定理 .34

如果函数 $f(z)$ 在扩充的复平面内只有有限个奇点，那么 $f(z)$ 在所有各奇点（包括 ∞ 点）的留数总和必等于零. 即

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]\\ =\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)dz=0.\end{aligned}$$

注解 36

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz&=-\oint_{C^-}f(z)dz=-2\pi i\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz\\&=-2\pi i\operatorname{Res}[f(z),\infty]=2\pi i\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right].\end{aligned}$$

例 .10

计算积分 $\oint_C\frac{z}{z^4-1}dz$, C 为正向圆周: $|z|=2$.

解: 函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在正向圆周 $|z|=2$ 的外部, 除无穷远点 ∞ 外没有其他奇点. 因此根据定理 2 与规则 IV, 有

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{z}{z^4-1}dz&=-2\pi i\operatorname{Res}[f(z),\infty]=2\pi i\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]\\&=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-z^4},0\right]=0.\end{aligned}$$

例 .11

计算积分 $\oint_C\frac{1}{(z-1)(z-3)(z+i)^{10}}dz$, C 为正向圆周:$|z|=2$.

解: 除无穷远点 ∞ 外, 被积函数的其他奇点为 $-i,1,3$. 因此根据上述定理, 有

$$\operatorname{Res}[f(z),-i]+\operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),3]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0,$$

其中,

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)(z+i)^{10}}.$$

由于 $\pm i$ 与 1 在 C 的内部, 所以从上式、留数定理与规则 IV 得到

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= 2\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(z),-i]+\mathrm{Res}[f(z),1]\right\}\\&=-2\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\right\}\\&=-2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]\right\}\\&=-2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z}-3)(\frac{1}{z}+i)^{10}}\frac{1}{z^2},\right]\right\}\\&=-2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}-\mathrm{Res}\left[\frac{-z^{10}}{(z-1)(3z-1)(1+zi)^{10}},0\right]\right\}\\&=-\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}.\end{aligned}$$

四、 对数留数 *

定义 .63

形式如 $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 的积分称为 $f(z)$ 关于曲线 C 的对数留数.

对数留数即函数 $f(z)$ 的对数的导数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$, 在 C 内孤立奇点处的留数的代数和; 函数 $f(z)$ 的零点和奇点都可能是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的奇点.

定理 .35

如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上解析且不为零, 在 C 的内部除去有限个极点以外也处处解析, 那么

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P,$$

其中, N 为 $f(z)$ 在 C 内零点的总个数, P 为 $f(z)$ 在 C 内极点的总个数, 且 C 取正向.

注意: m 级的零点或极点算作 m 个零点或极点.

五、 辐角原理 *

对数留数的几何意义: 考察变换 $w=f(z)$,

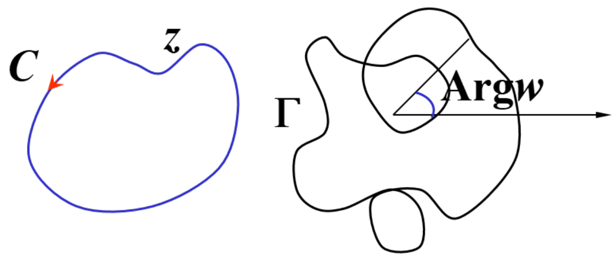

图 42: 对数留数的几何意义.

Γ 不一定为简单闭曲线, 其可按正向或负向绕原点若干圈. $f(z)$ 在 C 上不为零, 则 Γ 不经过原点. 因为 $\mathrm{d\,Ln}f(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\mathrm{d\,Ln}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[zC\mathrm{Ln}f(z)\right]\\&=\frac{1}{2\pi i}\left[\text{当 } z \text{ 绕着 } C \text{ 的正向一周时}\mathrm{Ln}f(z)\text{的改变量}\right]\\&=\frac{1}{2\pi i}\Big[\text{当 } z \text{ 绕着 } C \text{ 的正向一周时}\mathrm{Ln}|f(z)|\text{的改变量}\\&\qquad+i\mathrm{Arg}\text{ f(z)的改变量}\Big].\end{aligned}$$

$\mathrm{iArg}\,f(z)$ 的该变量:

(1) 如果 Γ 不包含原点, 那么改变量为零.

(2) 如果 Γ 包含原点, 那么改变量为 $\pm 2\pi i$, 其中 k 为 w 沿 Γ 围绕远点的圈数, 逆时针为负, 顺时针为正.

结论: 对数留数的几何意义是 Γ 绕原点的回转次数 $k\,(k\in\mathbb{Z})$.

若将 z 沿 C 正向一周, $f(z)$ 的幅角的改变量记为 $\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}f(z)$ 由定理一及对数留数的几何意义得

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\ f(z).$$

当 $f(z)$ 在 C 内解析时, $P=0$,

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\,f(z),$$

可计算 $f(z)$ 在 C 内零点的个数, 此结果称为**辐角原理**.

定理 .36

如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析，且在 C 上不等于零，那么 $f(z)$ 在 C 内零点的个数等于 $\frac{1}{2\pi}$ 乘以当 z 沿 C 的正向绕行一周 $f(z)$ 的辐角的改变量.

定理 .37

(路西定理) $f(z)$ 和 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析，且在 C 上满足条件 $|f(z)| > |g(z)|$，那么在 C 内 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 的零点的个数相同.

说明: 利用此定理可对两个函数的零点个数进行比较.

证 7 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析，且在 C 上满足条件 $|f(z)| > |g(z)|$，则在 C 上 $|f(z)| > 0$,

$$|f(z)+g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0,$$

设 NN' : $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 C 内部 (在 C 内部解析) 的零点个数,

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C^+}\mathrm{Arg} f(z),$$
$$N' = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\left[f(z)+g(z)\right].$$

因为 C 上 $f(z) \neq 0$，所以

$$f(z)+g(z) = f(z)\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right],$$

$$\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\left[f(z)+g(z)\right] = \Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\, f(z) + \Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]$$

令 $w = 1+\frac{g(z)}{f(z)}$，则 $|w-1| = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$，即 w 在以 *1* 为中心的单位圆内. 因此，C 的象曲线 Γ 不围绕原点，从而 $\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right] = 0$，所以 $N = N'$. 即 C 内 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 的零点的个数相同.

例 .12

$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0\ (a_0 \neq 0)$ 有 n 个根.

证 8 令 $f(z) = a_0z^n$, $g(z) = a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$, 则

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| = \left|\frac{a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n}{a_0z^n}\right|$$
$$\leq \left|\frac{a_1}{a_0}\right| \cdot \frac{1}{|z|} + \left|\frac{a_2}{a_0}\right| \cdot \frac{1}{|z|^2} + \cdots + \left|\frac{a_n}{a_0}\right| \cdot \frac{1}{|z|^n},$$

取 $|z| \geq R$, R 充分大使得 $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, 即在圆 $|z| = R$ 上和圆外 $f(z) > g(z)$ 成立. 由路西定理, $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 在 C 内的零点的个数相同 (在圆内的零点数为 n, 在圆内的零点数也为 n). 又因在圆上和圆外 $|f(z)| > |g(z)|, f(z) + g(z) = 0$, 在圆上和圆外无根, 所以 $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0\ (a_0 \neq 0)$ 有 n 个根.

例 .13

求函数 $f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ 关于圆周 $|z| = \pi$ 的对数留数.

解: 令 $1 + z^2 = 0$ 得 $f(z)$ 有两个一级零点 $i, -i$; 令 $g(z) = 1 - \cos 2\pi z = 0$, 得 $g(z)$ 有无穷多个零点 $z_n = n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$, 且 $g'(n) = 0$, $g''(n) = 4\pi^2 \neq 0$, 所以这些零点是二级零点, 从而是 $f(z)$ 的二级极点.

因为在圆周 $|z| = \pi$ 的内部有 $f(z)$ 的两个一级零点 $i, -i$ 和如下的七个二级零点 $z_0 = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$. 所以由对数留数公式得

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 - 7 \times 2 = -12.$$

例 .14

求函数 $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ 关于圆周 $|z| = 3$ 的围线积分.

解: 最简单的办法是用留数定理, 找出圆周 $|z|=3$ 内的所有奇点, 然后计算留数.

另外一种方式: 下面用罗朗展式计算上述积分, 由如下定理 (P160)

定理 .38

设函数 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z-z_0|<R\,(r\geq 0, R<+\infty)$ 内解析, 则 $f(z)$ 在此圆环域内可以唯一地展开为罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

其中, $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta, (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, C 为在圆环域内绕 z_0 的任意一条简单闭曲线. 显然有 $c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)d\zeta$.

可得 $c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)d\zeta$, 即 $\oint_C f(\zeta)d\zeta=2\pi i c_{-1}$.

$f(z)$ 有极点 0 和 2, 因此存在两个环域, 再由积分的曲线圆周 $|z|=3$, 罗朗级数应该在 $2<|z|<+\infty$ 的环域展开. 环域 $2<|z|<+\infty\Rightarrow 0<\frac{1}{|z|}<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<\frac{2}{|z|}<1$, 因此应该用 $\frac{1}{z}$ 或者 $\frac{2}{z}$ 的形式展开级数, 具体做法为

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{2}\frac{2}{z}\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4}\frac{2}{z}\frac{2}{z+2}\\&=\frac{1}{4}\frac{2}{z}\frac{\frac{2}{z}}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{4}\frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

对照定理中的公式, 可以看出 c_{-1} 应该是级数 $\frac{1}{z}$ 前的系数. 而上述环域 $2<|z|<+\infty\Rightarrow$ 内的罗朗级数展开式不存在 c_{-1} 项 (注意 n 点取值就可以看出), 即 $c_{-1}=0$, 因此有 $\oint_C f(\zeta)d\zeta=2\pi i c_{-1}=0$.

IV 课堂小结

本节我们学习了留数的概念、计算以及留数定理. 应重点掌握计算留数的一般方法, 尤其是极点处留数的求法, 并会应用留数定理计算闭路复积分.

通过本课的学习, 应熟悉对数留数及其与函数的零点及极点的关系; 掌握辐角原理与路西定理.

V　布置作业

教材课后习题五 P183: 1 1)、4)、7)、8)、9); 3; 4; 8; 9 1)、2)、3)、6); 11 2); 12 2); 13 1)、3)、4)、5).

补充

例 .15

计算留数 $\mathrm{Res}\left[\frac{1+z^4}{(z+i)^3(z-i)^3}, i\right]$.

解:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{1+z^4}{(z+i)^3(z-i)^3}, i\right] &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left((z-i)^3\frac{1+z^4}{(z+i)^3(z-i)^3}\right)'' \\
&= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left(\frac{1+z^4}{(z+i)^3}\right)'' \\
&= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left(\frac{4z^3(z+i)^3-3(z+i)^2(z^4+1)}{(z+i)^6}\right)' \\
&= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left(\frac{4z^3(z+i)-3(z^4+1)}{(z+i)^4}\right)' \\
&= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left(\frac{z^4-3+4z^3i}{(z+i)^4}\right)' \\
&= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left(\frac{(4z^3+12z^2i)(z+i)^4}{(z+i)^8}\right. \\
&\qquad\left.-\frac{4(z+i)^3(z^4-3+4z^3i)}{(z+i)^8}\right) \\
&= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left(\frac{(4z^3+12z^2i)(z+i)-4(z^4-3+4z^3i)}{(z+i)^5}\right) \\
&= \frac{1}{2!}\left(\frac{(4i^3+12i^2i)(i+i)-4(i^4-3+4i^3i)}{(i+i)^5}\right) \\
&= \frac{1}{2!}\left(\frac{(-4i-12i)(2i)-4(1-3+4)}{(2i)^5}\right) \\
&= \frac{1}{2!}\left(\frac{(-16i)(2i)-8}{(2i)^5}\right) \\
&= \frac{1}{2!}\frac{24}{32i} \\
&= -\frac{3}{8}i.
\end{aligned}
$$

例 .16

函数 $f(z)=\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$ 在无穷远点的留数.

解:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)},\infty\right] &= -\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(\frac{1}{z}+i)^{10}(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z}-3)}\frac{1}{z^2},0\right]\\
&= -\operatorname{Res}\left[\frac{z^{10}}{(z+i)^{10}(1-z)(1-3z)},0\right]\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

例 .17

计算 $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$.

解:

$$
\begin{aligned}
\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz &= 2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}},-1\right]+2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}},0\right]\\
&= -2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}},\infty\right]
\end{aligned}
$$

$\underline{\underline{\text{在 } |z|>2 \text{ 内展开的}}}$ c_{-1} 项系数 $\times 2\pi i$

$$
\begin{aligned}
\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}} &= e^{\frac{1}{z}}z^2\frac{z}{1+z}=e^{\frac{1}{z}}z^2\frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{z}}z^2\frac{\frac{1}{z}}{1-(-\frac{1}{z})}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}z^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2-n}}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\\
&= \left(z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots\right)\\
&= -1+1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

$$
\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz=-\frac{2}{3}\pi i.
$$

例 .18

计算 $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$.

解:

$$
\begin{aligned}
\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, -1\right] + 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, 0\right] \\
&= -2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, \infty\right] \\
&= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{1+\frac{1}{z}} e^{z} \frac{1}{z^2}, 0\right] = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^4(1+z)}, 0\right] \\
&= \underline{\underline{\text{在 } 0<|z|<1/2 \text{ 内展开}}} \frac{1}{z^4}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right) \\
&\quad \left(1-z+z^2-z^3+z^4+\cdots\right) \text{ 的 } c_{-1} \text{ 项系数} \times 2\pi i \\
&= \underline{\underline{\text{在 } 0<|z|<1/2 \text{ 内展开}}} \\
&\quad \left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right) \\
&\quad \cdot \left(1-z+z^2-z^3+\cdots\right) \text{ 的 } z^3 \text{ 项系数} \times 2\pi i \\
&= -\frac{1}{3} \times 2\pi i.
\end{aligned}
$$

例 .19

计算 $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$.

解:

$$
\begin{aligned}
\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz &= 2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}},-1\right]+2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}},0\right]\\
&= -2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}},\infty\right]\\
&= 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{1+\frac{1}{z}}e^{z}\frac{1}{z^2},0\right]\\
&= 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^4(1+z)},0\right]\\
&= \frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{e^z}{(1+z)}\right]^{(3)}\Big|_{z=0}\\
&= \frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{ze^z}{(1+z)^2}\right]^{(2)}\Big|_{z=0}\\
&= \quad\cdots\\
&= \frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{[e^z(z+1)^2+e^z2(z+1)-2e^z-2ze^z](z+1)^3}{(1+z)^6}\right]\Big|_{z=0}\\
&\qquad+\frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{-3(z+1)^2[e^z(z+1)^2-2ze^z]}{(1+z)^6}\right]\Big|_{z=0}\\
&= \frac{2\pi i}{3!}\times(-2)=-\frac{2}{3}\pi i.
\end{aligned}
$$

例 .20

计算积分 $\oint_{|z|=r}\frac{1}{1+z^2}e^{\frac{1}{z}}dz$，其中正向圆周的半径 $r\neq 1$.

♡

解:

(1) 当 $0<r<1$,

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{1}{z}}\frac{1}{1+z^2} &= e^{\frac{1}{z}}\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{1}{n_1!z^{n_1}}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}(-z^2)^{n_2}\\
&= \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots\right)\\
&\quad\cdot\left(1-z^2+z^4-z^6+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

对级数的每一项 $\frac{1}{(2k+1)!z^{2k+1}}$，取右面级数的 $(-1)^k z^{2k}$，遍历 $k=1,2,\cdots$，可以生成 $\frac{1}{z}$ 的系数，罗朗系数等于 $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots$. 注意到 $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,|z|<\infty$. 可得积分 $\oint_{|z|=r}\frac{1}{1+z^2}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\sin 1$.

(2) 当 $r>1$ 时, 圆周内有极点 $\pm i, 0$, 记 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}e^{\frac{1}{z}}$. 由广义复平面上包括无穷极点下结果恒为零, 有

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=r}\frac{1}{1+z^2}e^{\frac{1}{z}}dz &= 2\pi i\,[\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i],\mathrm{Res}[f(z),0]]\\
&= -2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]\\
&= 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]\\
&= 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^2}e^{z},0\right]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

例 .21

计算留数 $\mathrm{Res}\left[z^2e^{\frac{1}{z-i}},i\right]$.

解: $\mathrm{Res}\left[z^2e^{\frac{1}{z-i}},i\right]=-\frac{5}{6}+i$.

解:

$$\begin{aligned}
z^2e^{\frac{1}{z-i}} &= [(z-i)^2+2zi+1]e^{\frac{1}{z-i}}\\
&= [(z-i)^2+2(z-i)i+2i^2+1]e^{\frac{1}{z-i}}\\
&= [(z-i)^2+2(z-i)i-1]e^{\frac{1}{z-i}}\\
&= [(z-i)^2+2(z-i)i-1]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^n}
\end{aligned}$$

罗朗展式的系数为 $\frac{1}{3!}+2i\frac{1}{2!}-1=i-\frac{5}{6}$.

例 .22

计算积分 $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{z^9}{z^{10}-1}dz$.

解:

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{z^9}{z^{10}-1}dz=2\pi i.$$

解:

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^9}{z^{10}-1}dz &= -2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{z^9}{z^{10}-1}, \infty\right] \\
&= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1/z^9}{1/z^{10}-1}\frac{1}{z^2}, 0\right] \\
&= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-z^{10}}\frac{1}{z^2}, 0\right] \\
&= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(1-z^{10})}, 0\right] \\
&= 2\pi i \frac{1}{1-z^{10}}\bigg|_{z=0} = 2\pi i.
\end{aligned}$$