教　　案　　纸

● September 24, 2020 ● 互动提问	**理论课 4　§2.3-2.4 初等函数和平面场**

I　组织教学

1、集中学生注意力;

2、清查学生人数;

3、维持课堂纪律;

II　复习导入及主要内容

1、上次作业讲评;

2、本次主要内容

3、重点:常用的初等解析函数;解析函数与调和函数的关系

4、难点:初等解析函数的性质.

III　教学内容及过程

一、　初等函数

复变函数的初等函数是实变函数中相应初等函数的推广, 所以, 它们之间有相同之处, 又有不同的地方.

1、　指数函数

定义 4.35

设复数 $z = x + iy \in \mathbb{C}$, 称指数函数 $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ 为复指数函数. 显然,

1) 当 $x = 0, z = iy, e^z = e^{iy} = \cos y + i\sin y$;

2) 当 $y = 0$, 复指数函数 $e^z = e^x$ 退化为实指数函数.

♡

2. 性质:

1) e^z 在全平面都有定义, 且 $e^z \neq 0$;

2) $(e^z)' = e^z, (e^{iz})' = ie^{iz}$, 所以 e^z 在全平面都解析;

3) 其运算法则类似于实函数, 即对任意的 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$.

4) e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数, 即 $e^{z+2\pi i} = e^z$; 因为

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z.$$

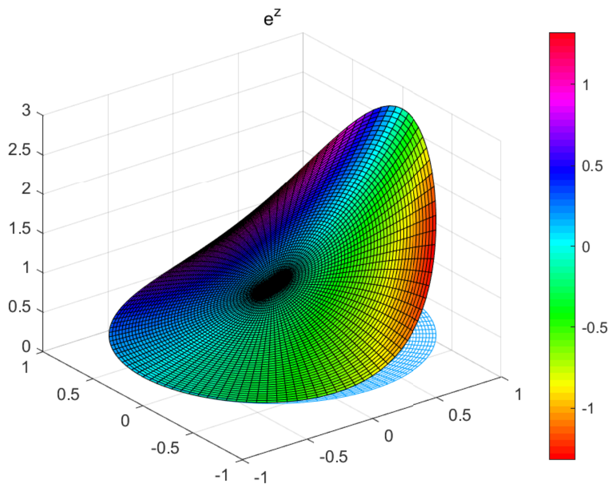

图 29: $\exp(z)$

例 4.1

设 $z=x+iy$, 求 (1) $|e^{i-2z}|$; (2) $\left|e^{z^2}\right|$; (3) $\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})$;

解: 因为 $e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$, 因此有 $|e^z|=e^x, \mathrm{Re}(e^z)=e^x\cos y$.

1) $e^{i-2z}=e^{i-2(x+iy)}=e^{-2x+i(1-2y)}$, $|e^{i-2z}|=e^{-2x}$;

2) $e^{z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2-y^2+2xyi}$, $\left|e^{z^2}\right|=e^{x^2-y^2}$;

3) $e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{x+yi}}=e^{\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}}$, $\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}$.

例 4.2

求函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期.

解: e^z 的周期是 $2k\pi i$,

$$f(z)=e^{\frac{z}{5}}=e^{\frac{z}{5}}\cdot 1=e^{\frac{z}{5}+2k\pi i}=e^{\frac{z+10k\pi i}{5}}=f(z+10k\pi i),$$

函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期是 $10k\pi i$.

例 4.3

求出下列复数的辐角主值: $(1)e^{2+i}$; $(2)e^{2-3i}$; $(3)e^{3+4i}$; (4) e^{-3-4i}; (5) $e^{i\alpha}-e^{i\beta}, (0\le\beta<\alpha\le 2\pi)$.

解: 因为 $e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ 的辐角 $\operatorname{Arg} e^z=y+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$, 辐角主值 $\arg e^z$ 是区间 $(-\pi,\pi]$ 内的一个辐角.

1) $\operatorname{Arg}e^{2+i}=1+2k\pi, \arg e^{2+i}=1$;

2) $\operatorname{Arg}e^{2-3i}=-3+2k\pi, \arg e^{2-3i}=-3$;

3) $\operatorname{Arg}e^{3+4i}=4+2k\pi,\ \arg e^{3+4i}=4-2\pi$;

4) $\operatorname{Arg}e^{-3-4i}=-4+2k\pi, \arg e^{-3-4i}=-4+2\pi$;

5)

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha}-e^{i\beta}&=\cos\alpha+i\sin\alpha-(\cos\beta+i\sin\beta)\\
&=(\cos\alpha-\cos\beta)+i(\sin\alpha-\sin\beta)\\
&=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+2i\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
&=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+i\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

● $\theta_1+\theta_2=\alpha$, $\theta_1-\theta_2=\beta$

因为 $0\le\beta<\alpha\le 2\pi, \sin\frac{\alpha-\beta}{2}>0$, 上面就是复数 $e^{i\alpha}-e^{i\beta}$ 的三角表示, 所以 $\operatorname{Arg}(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}+2k\pi$,

(a) 当 $0\le\alpha+\beta\le\pi$ 时, $\arg(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}$,

(b) 当 $\alpha+\beta>\pi$ 时, $\arg(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}-2\pi$.

2、 对数函数

定义 4.36

复指数函数 $z=e^w(z\neq 0)$ 的反函数 $w=\operatorname{Ln} z$ 称为**对数函数**.

● 原函数写成 $z=e^w(z\neq 0)$, 恰好使得它的反函数是正常的 $w=f(z)$ 的形式

设 $w=u+iv, z=re^{i\theta}$, 则 $re^{i\theta}=e^{u+iv}=e^u e^{iv}$, 于是

$$e^u=r\Rightarrow u=\ln r=\ln|z|;$$

又 $e^{iv}=e^{i\theta}\Rightarrow v=\theta_0+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 即

$$w=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z,$$

或

$$w=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

我们称 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 为对数 $\ln z$ 的主值, 即 $\mathrm{Ln}z = \ln z + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

例 4.4

求 $\mathrm{Ln}(-1), \mathrm{Ln}(3+4i)$ 及其主值.

解:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + \pi i + 2k\pi i = (2k+1)\pi i, \ln(-1) = \pi i;\\
&\mathrm{Ln}(3+4i) = \ln 5 + i\arg\tan\frac{4}{3} + 2k\pi i, (k = 1, 2, \cdots);\\
&\ln(3+4i) = \ln|3+4i| + i\arg\tan\frac{4}{3} = \ln 5 + i\arg\tan\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

例 4.5

求 $\mathrm{Ln}2, \mathrm{Ln}(-1)$ 以及与它们相应的主值.

因为 $\mathrm{Ln}2 = \ln 2 + i\arg 2 + 2k\pi i$, $\mathrm{Ln}2$ 的主值就是 $\ln 2 + i\arg 2$.

因为 $\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i\mathrm{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$, $\mathrm{Ln}(-1)$ 的主值就是 $i\pi$.

例 4.6

解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解: 因为 $e^z = 1 + \sqrt{3}i$, 所以 $z = \mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i) = \ln\left|1+\sqrt{3}i\right| + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\ (k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \cdots)$.

2．性质:

1) 针对对数函数主值问题, 即对数函数主值的解析性, $\ln|z|$ 除原点外处处连续, 由于 $-\pi < \arg z \leq \pi$, 若设 $z = x + iy$, 则当 $x < 0$ 时, 有 $\lim\limits_{z\to 0^-} \arg z = -\pi$, $\lim\limits_{z\to 0^+} \arg z = \pi$, 所以, 对数函数在除去原点及负实半轴外, 在复平面上解析. $\ln z$ 为单值函数, 而 $\mathrm{Ln}z$ 为多值函数;

2) 其运算法则类似于实函数. 设 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$, 则 $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2; \mathrm{Ln}(\frac{z_1}{z_2}) = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2$.

例 4.7

求 i^i 和 $1^{\sqrt{2}}$ 的值.

解:

1) $i^i=e^{i\mathrm{Ln}\, i}=e^{i(2k+\frac{1}{2})\pi i}=e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}$, $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$, 其主值为 $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

2) $1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}1}=e^{2k\pi i\cdot\sqrt{2}}=\cos(2\sqrt{2}k\pi)+i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$, 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

注意: 在实变函数中, 负数无对数, 而复变函数对数函数对负数有定义, 该定义是实变数对数函数的拓广.

例 4.8

计算 $(-3)^{\sqrt{5}}$.

解:

$$
\begin{aligned}
(-3)^{\sqrt{5}} &= e^{\sqrt{5}\,\mathrm{Ln}(-3)}=e^{\sqrt{5}\,[\ln(3)+(\pi+2k\pi)i]}\\
&= e^{\sqrt{5}\ln(3)}e^{i\sqrt{5}(2k+1)\pi}\\
&= 3^{\sqrt{5}}\left[\cos(\sqrt{5}(2\,k+1)\pi)+i\sin(\sqrt{5}(2\,k+1)\pi)\right],
\end{aligned}
$$

其中 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

例 4.9

计算 $(1+i)^i$ 的辐角和辐角的主值.

解:

$$
\begin{aligned}
(1+i)^i &= e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{i(\ln(2)+i\mathrm{Arg}(1+i))}=e^{i[\ln(2)+i(\arg(1+i)+2k\pi)]}\\
&= e^{i\ln(2)}e^{-[\frac{\pi}{4}+2k\pi]}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1+i)^i &= e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{i[\ln|1+i|+i\mathrm{Arg}(1+i)]}=e^{i\left[\frac{1}{2}\ln 2+(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i\right]}\\
&= e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\frac{1}{2}\ln 2}\\
&= e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\cdot\left[\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\right].
\end{aligned}
$$

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. $(1+i)^i$ 的辐角的主值是 $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

例 4.10

计算 $\mathrm{Im}\{\ln(3-4i)\}$ 的值.

解: $\mathrm{Ln}(3-4i)=\ln 5+i\mathrm{Arg}(3-4i)=\ln 5+i(\arg(3-4i)+2k\pi)=\ln 5+i\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+2k\pi i$. $\mathrm{Im}\{\ln(3-4i)\}=\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)$ 或者 $-\arctan\left(\frac{4}{3}\right)=-53^\circ$.

例 4.11

计算 i^{i+1} 和 i^{i+2} 的值.

3、 幂函数

定义 4.37

称函数 $w=z^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Ln}z}$ $(z\neq 0)$ 为幂函数, 其中, α 为复常数.

2. 性质: 幂函数是指数函数与对数函数的复合函数, 具有它们的性质.

需要掌握幂函数的以下几种情况:

1) 当 $\alpha=n\,(n\in\mathbb{Z})$ 时, $w=z^\alpha=z^n$ 为单值函数;

2) 当 $\alpha=-n\,(n\in\mathbb{Z})$ 时, $w=z^\alpha=z^{-n}=\frac{1}{z^n}$;

3) 当 $\alpha=\frac{1}{n}(n\in\mathbb{Z}^+)$ 时, $w=z^\alpha=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$, 它只有在 $k=0,1,2,\cdots n-1$ 时才取不同的值.

4、 三角函数

由欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x, e^{-ix}=e^{i\cdot(-x)}=\cos x-i\sin x$, 有 $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, 由此可将三角函数的定义推广到复数三角函数.

定义 4.38

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

2. 性质

1) 对任意的复数 $z\in\mathbb{C}, \cos z+i\sin z=e^{iz}$ 成立;

2) $\sin z, \cos z$ 都是以 2π 为周期;

3) $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数;

4) 类似于实变函数的各种三角恒等式仍然成立;

5) $|\sin z|, |\cos z|$ 都是**无界函数**;

因为

$$|\cos z| = \left|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right| = \left|\frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix}\right| \geq \frac{1}{2}\left|e^{y}-e^{-y}\right| \xrightarrow{|y|\to\infty} \infty,$$

所以 $|\cos z|$ 是无界的; 同样, $|\sin z|$ 也是无界的.

6) 解析性: $(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$, 所以复三角函数 $\sin z, \cos z$ 在全平面解析.

例 4.12

$f(z) = \sin 5z$ 的周期.

解: 因为 $\sin(z+2\pi) = \sin z$, 所以 $\sin(5z+2\pi) = \sin 5z$, 又因为 $\sin(5z+2\pi) = \sin 5\left(z+\frac{2\pi}{5}\right)$, 所以 $\sin 5\left(z+\frac{2\pi}{5}\right) = \sin 5z$, 故 $f(z) = \sin 5z$ 的周期是 $\frac{2\pi}{5}$.

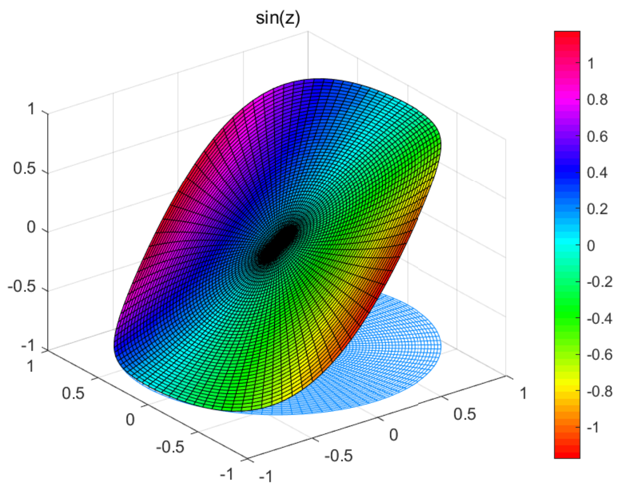

图 30: $\sin(z)$

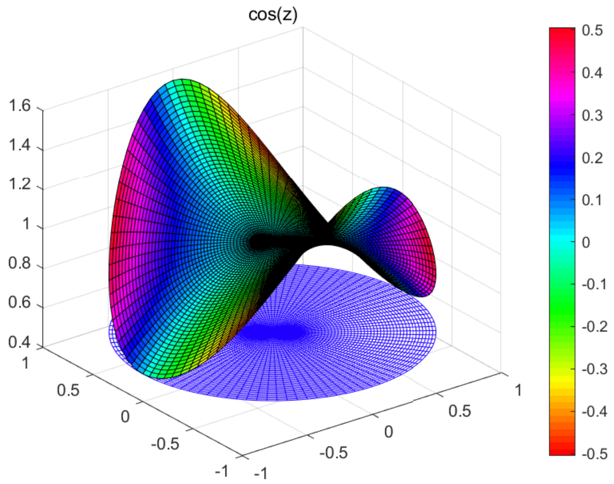

图 31: $\cos(z)$

5、 其他复三角函数

$$
\begin{aligned}
&\text{正切函数}\ \tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\\
&\text{余切函数}\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},\\
&\text{正割函数}\ \sec z = \frac{1}{\cos z},\\
&\text{余割函数}\ \csc z = \frac{1}{\sin z}.
\end{aligned}
$$

与 $\cos z$ 和 $\sin z$ 类似, 也可以讨论他们的周期性、奇偶性和解析性.

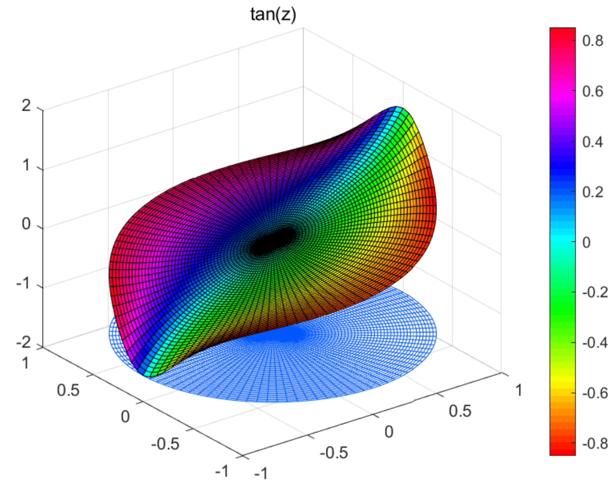

图 32: $\tan(z)$

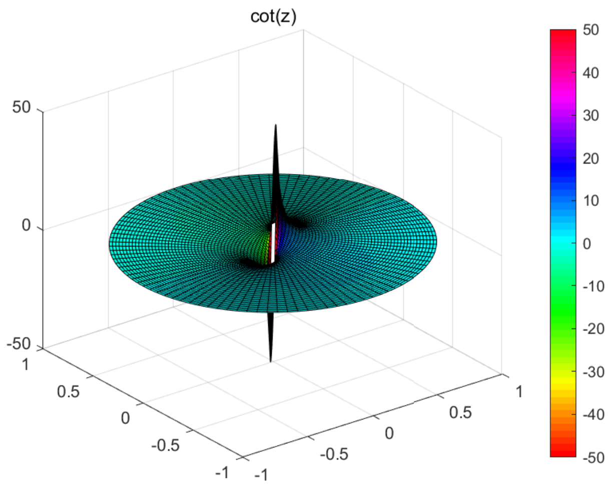

图 33: $\cot(z)$

6、 双曲函数

定义 4.39

称 $\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}, \cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ 为双曲正弦函数与双曲余弦函数. 它们在全平面解析.

1. 双曲函数与三角函数之间的关系:

$$\begin{aligned}
&\sin iz = i\sinh z, \cos iz = \cosh z;\\
&\sinh iz = i\sin z, \cosh iz = \cos z;\\
&\sinh z\cosh z = \frac{1}{2}\sinh 2z.
\end{aligned}$$

证 3

$$\begin{aligned}
&\sin iz = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = -i\frac{e^{-z}-e^{z}}{2} = i\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = i\sinh z.\\
&\cos iz = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \cosh z.\\
&\sinh iz = \frac{1}{i}\sin(i\cdot iz) = -i\sin(i\cdot iz) = i\sin z.\\
&\cosh iz = \cos(i\cdot iz) = \cos z.\\
&\sinh z\cosh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{2} = \frac{1}{2}\sinh 2z.
\end{aligned}$$

例 4.13

计算 $\sin(1+2i)$ 的值.

解: 由于

$$\begin{aligned}
\sin(1+2i) &= \sin 1\cdot\cos 2i + \cos 1\cdot\sin 2i\\
&= \sin 1\cdot\cosh 2 + i\cos 1\cdot\sinh 2\\
&= \frac{1}{2}\left[(e^2+e^{-2})\sin 1 + i(e^2-e^{-2})\cos 1\right].
\end{aligned}$$

注解 27 类似实函数的和差化积公式, 复函数的和差化积公式为:

$$\sin(1+2i) = \sin 1\cdot\cosh 2 + i\cos 1\cdot\sinh 2.$$

例 4.14

确定 $\tan z$ 的实部和虚部.

解: 令 $z=x+iy$,

$$\begin{aligned}\tan z&=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{\sin(x+yi)}{\cos(x+yi)}=\frac{\sin x\cos iy+\cos x\sin iy}{\cos x\cos iy-\sin x\sin iy}\\&=\frac{\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y}{\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y}\\&=\frac{\sin x\cos x+i\cosh y\sinh y}{\cos^2 x\cosh^2 y+(1-\cos^2 x)\sinh^2 y}\\&=\frac{\sin 2x}{2\cos^2 x+2\sinh^2 y}+i\frac{\sinh 2y}{2\cos^2 x+2\sinh^2 y}.\end{aligned}$$

例 4.15

试求方程 $\sin z+\cos z=0$ 的全部解.

解: 由 $\sin z+\cos z=0$, 得

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z=0\Rightarrow\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

因此有 $z+\frac{\pi}{4}=k\pi,\Rightarrow z_k=k\pi-\frac{\pi}{4}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

例 4.16

解方程 $\sin z=i\sinh 1$.

解: 令 $z=x+iy$, $\sin z=\sin(x+yi)$,

$$\sin(x+yi)=\sin(x)\cos(yi)+\cos(x)\sin(yi),$$

$$\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=i\sinh 1,$$

故有 $\sin x\cosh y=0,\cos x\sinh y=\sin 1$, 因为 $\cosh y\neq 0$, 所以 $\sin x=0, x=k\pi$, 将 $x=k\pi$ 带入 $\cos x\sinh y=\sin 1$ $\sinh y=(-1)^k\sinh 1$,

$$y=\begin{cases}1, & k=0,\pm2,\pm4,\cdots\\-1, & k=\pm1,\pm3,\cdots\end{cases}$$

即

$$z=\begin{cases}2n\pi+i,\\(2n+1)\pi-i,\end{cases}\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

例 4.17

求 $\cos(1+i)$ 和 $\tan(3-i)$ 值.

$$\begin{aligned}\cos(1+i) &= \frac{e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}}{2} = \frac{e^{-1+i}+e^{1-i}}{2} \\ &= \frac{1}{2}[e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)+e(\cos 1-i\sin 1)] \\ &= \frac{1}{2}(e^{-1}+e)\cos 1+\frac{1}{2}(e^{-1}-e)i\sin 1 \\ &= \cos 1\cosh 1-i\sin 1\sinh 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tan(3-i) = \frac{\sin(3-i)}{\cos(3-i)} \\ &= \frac{\sin 3\cos i-\cos 3\sin i}{\cos 3\cos i+\sin 3\sin i} \\ &= \frac{\sin 3\cosh 1-i\cos 3\sinh 1}{\cos 3\cosh 1+i\sin 3\sinh 1} \\ &= \frac{(\sin 3\cosh 1-i\cos 3\sinh 1)(\cos 3\cosh 1-i\sin 3\cosh 1)}{(\cos 3\cosh 1)^2+(\sin 3\sinh 1)^2} \\ &= \frac{\sin 3\cos 3-i\cosh 1\sinh 1}{\cos^2 3\cosh^2 1+\sin^2 3\cosh^2 1-\sin^2 3\cosh^2 1+\sin^2 3\sinh^2 1} \\ &= \frac{\sin 6-i\sinh 2}{2(\cosh 1)^2-2(\sin 3)^2}.\end{aligned}$$

例 4.18

求解方程 $|\tanh z|=1$.

解: $\tanh z=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$, $|e^{2z}-1|=|e^{2z}+1|$, 两边平方, 并令 $e^{2z}=u+iv$, 则有 $(u-1)^2+v^2=(u+1)^2+v^2$ 或 $u=0$, 因为 $u=\mathrm{Re}(e^{2z})=e^{2\mathrm{Re}(z)}\cos[2\mathrm{Im}(z)]$,

$$u=0 \Leftrightarrow \cos[2\mathrm{Im}(z)]=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},$$

方程 $|\tanh z|=1$ 的解是 $\mathrm{Im}(z)=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ 的所有复数 z, 其中 $k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

7、 反三角函数与反双曲函数

定义 4.40

反三角函数 反三角函数定义为三角函数的反函数.

定义 4.41

设 $z = \cos w$, 则称 w 为 z 的反余弦函数, 记为 $w = \arccos z$.

由 $z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$, 得 e^{iw} 的二次方程: $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$, 它的根为 $e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$, 其中 $\sqrt{z^2 - 1}$ 应理解为双值函数. 因此两端取对数, 得

$$\arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然 $\arccos z$ 是一个多值函数, 同样可以定义:

$$\arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$
$$\arctan z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

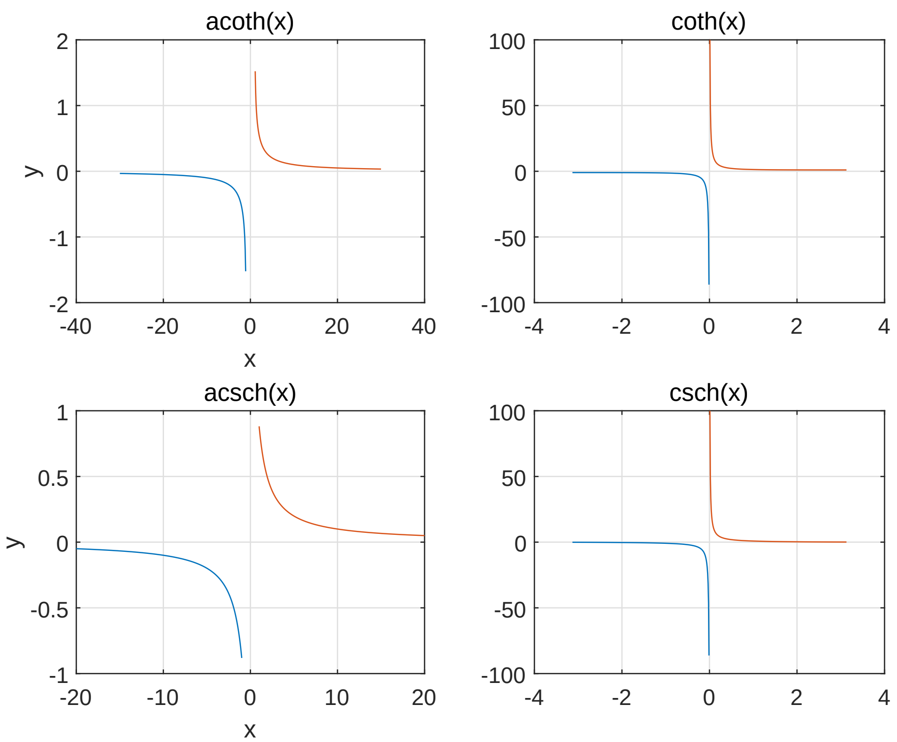

图 34: 反双曲函数 $z \in \mathbb{R}$.

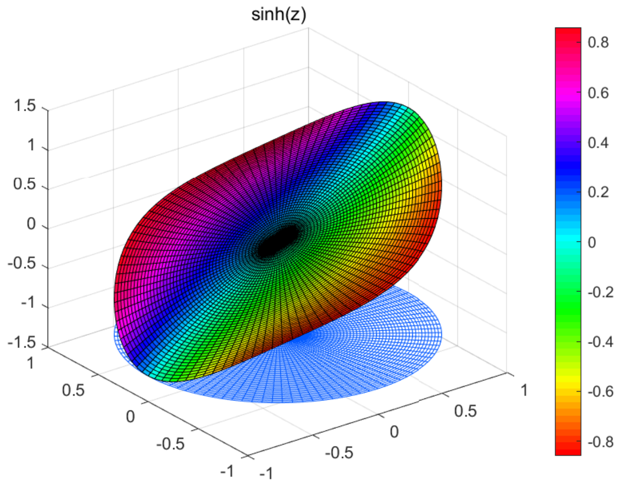

图 35: sinh(z))

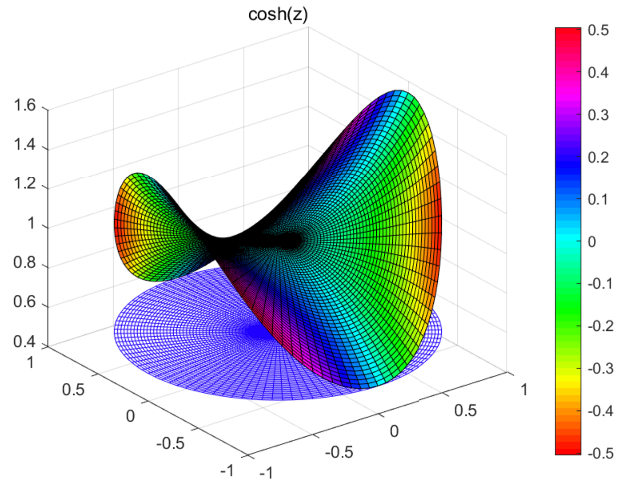

图 36: cosh(z))

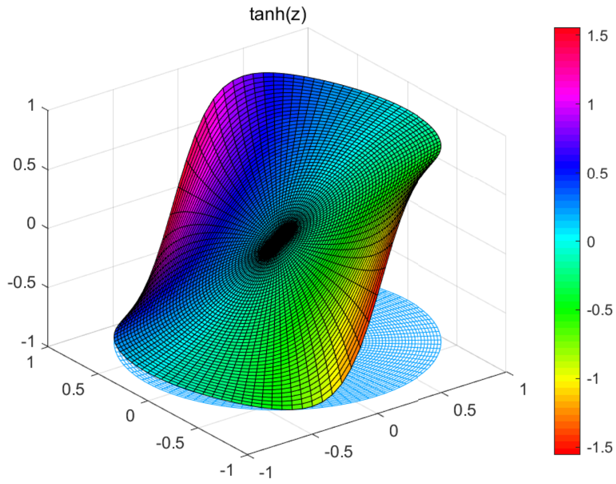

图 37: $\tanh(z))$

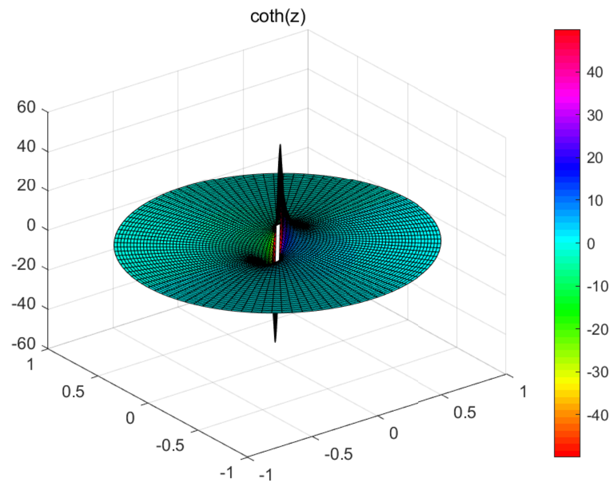

图 38: $\coth(z))$

定义 4.42

反双曲函数 反双曲函数定义为双曲函数的反函数. 它们都是多值函数. ♡

定义 4.43

反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2+1})$,
反双曲余弦函数 $\operatorname{arccosh} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2-1})$, 它们都是多值函数.
反双曲正切函数 $\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}, z \notin [-1,1], z \in \mathbb{C}$.
反双曲余切函数 $\operatorname{arccoth} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right), z \in \mathbb{C}$.

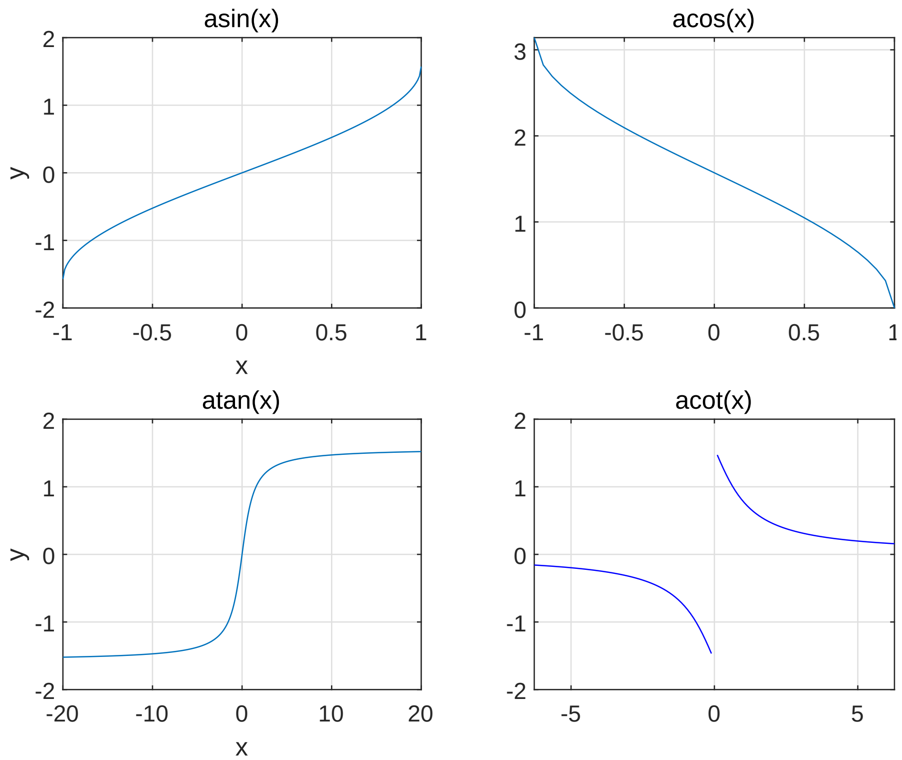

图 39: 反双曲函数 $z \in \mathbb{R}$.

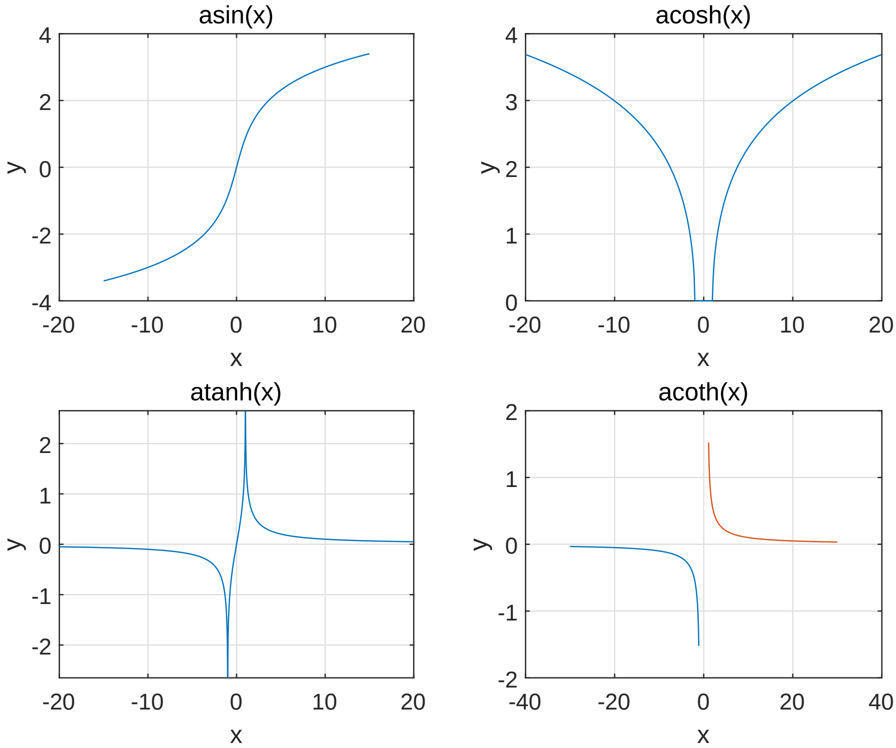

图 40: 反双曲函数 $z \in \mathbb{R}$.

定义 4.44

反双曲正割函数

$$\operatorname{arc\,sech} z = \cosh^{-1}(z) = \log\left(\frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2-1}}\right).$$

反双曲余割函数

$$\operatorname{arc\,csch} z = \operatorname{csch}^{-1}(z) = \log\left(\frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right).$$

计算实变量 x 的反双曲正割.

对于变量 x, $\operatorname{sech}^{-1}(x) = \cosh^{-1}(1/x)$. x 可以为向量、矩阵或多维数组, x 中的元素可以为复数, 所有表示角度的变量都采用弧度来表示.

$$Y = \operatorname{asech}(x).$$

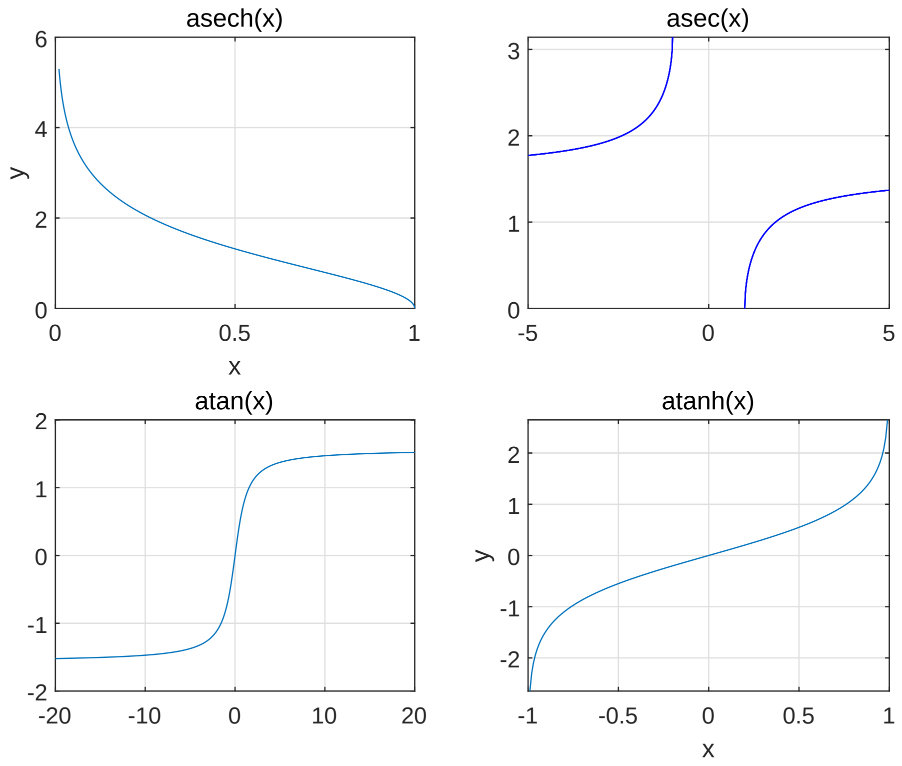

图 41: 反双曲函数 $z \in \mathbb{R}$.

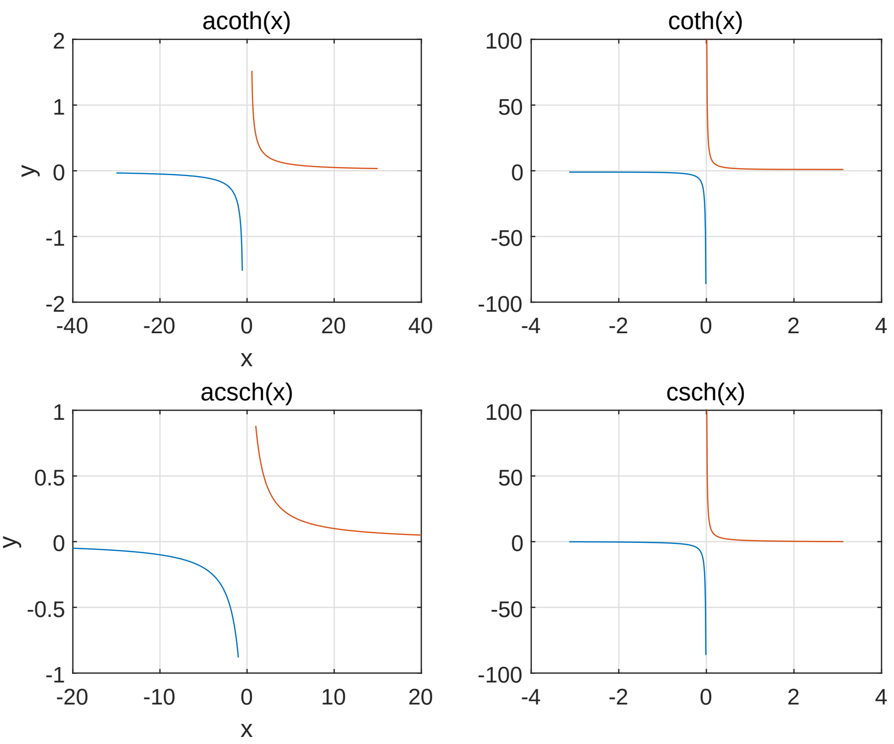

图 42: 反双曲函数 $z \in \mathbb{R}$.

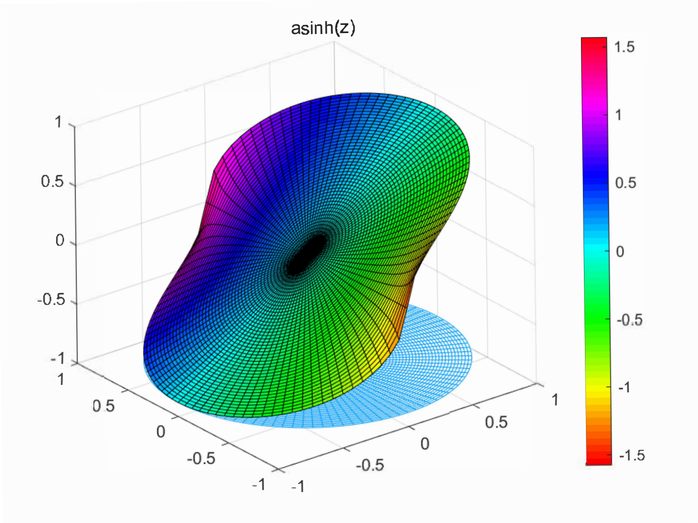

图 43: asinh(z))

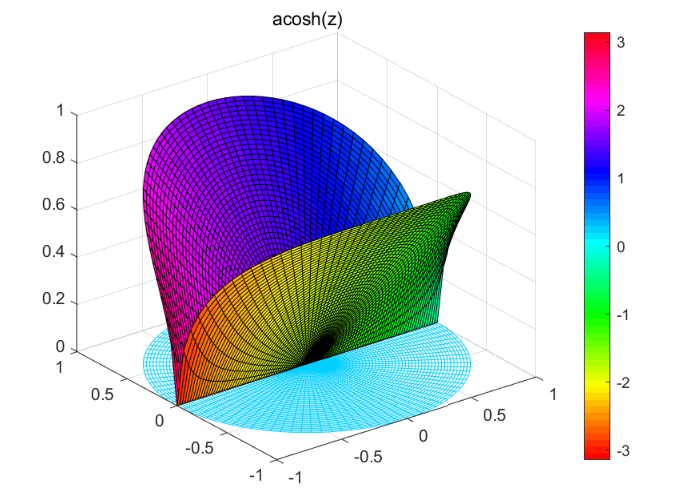

图 44: acosh(z))

例 4.19

求函数值 $\arctan(2+3\mathrm{i})$.

解:

$$
\begin{aligned}
\arctan(2+3\mathrm{i}) &= -\frac{i}{2}\ln\frac{1+i(2+3i)}{1-i(2+3i)} \\
&= -\frac{i}{2}\ln\frac{-3+i}{5} \\
&= -\frac{i}{2}\left[\ln\sqrt{\frac{2}{5}}+i\left(\pi-\arctan\frac{1}{3}+2k\pi\right)\right] \\
&= -\frac{i}{4}\ln\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3},
\end{aligned}
$$

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

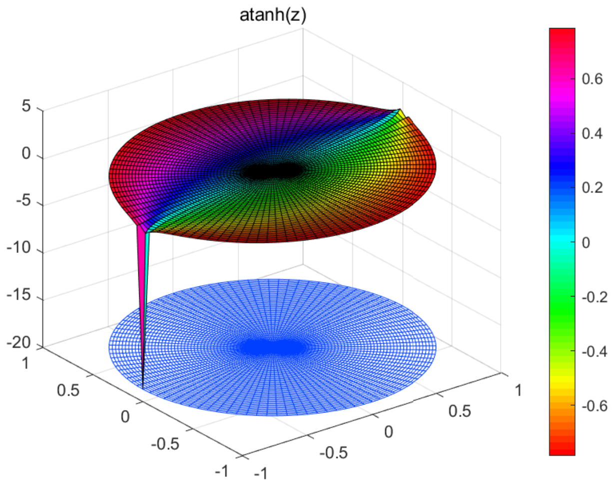

图 45: atanh(z)

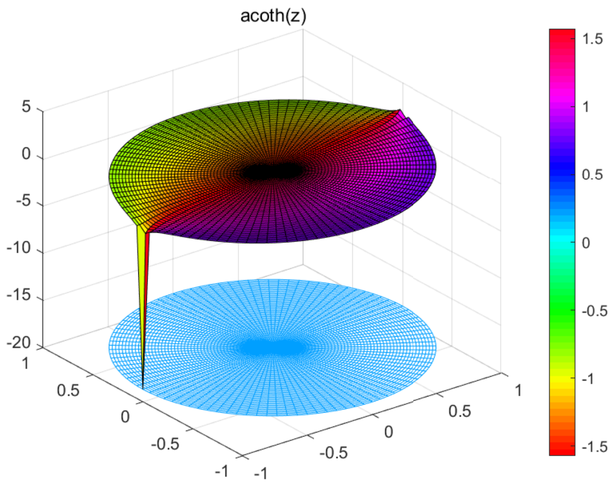

图 46: acoth(z)

二、 平面场 *

复变函数论的方法在力学、物理学、以及工程技术中都有应用，就是把流体力学、弹性力学、电磁学、热学、电工学以及通讯中的一些问题转化为复变函数中的问题，用解析函数的方法来解决平面向量场的相关问题.

1、 用复变函数表示平面定常向量场

平面定常向量场中的向量都是平行于某一个平面 S，而且在垂直于 S 的任何一条直线上的所有点处的向量都是相等的；场中的向量也都是与时间无关的. 显然，这种向量场在所有平行于 S 的平面内的分布情况是完全相同的，因此它完全可以用一个位于平行于 S 的平面 S_0 内的场来表示 (图47). 在平面 S_0 内确定一直角坐标系 xoy，对于向量 $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$，由于场中的点可以用复数 $z = x + iy$ 表示，所以平面向量场 $\vec{A} = A_x(x, y)\vec{i} + A_y(x, y)\vec{j}$ 可表示为复变函数 $A = A(z) = A_x(x, y) + iA_y(x, y)$. 反之，已知一个复变函数 $w = u(x, y) + iv(x, y)$，可作出对应的平面向量场 $\vec{A} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}$.

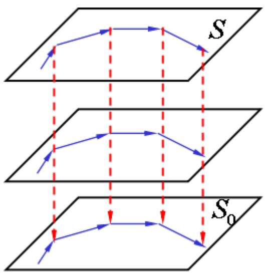

图 47: 平面定常向量场

例 4.20

一个平面定常流速场 (如河水的表面)

$$\vec{v} = v_x(x, y)\vec{i} + v_y(x, y)\vec{j}$$

可以用复变函数 $v = v(z) = v_x(x, y) + iv_y(x, y)$.

平面电场强度向量为

$$\vec{E} = E_x(x, y)\vec{i} + E_y(x, y)\vec{j}$$

可以用复变函数 $E = E(z) = E_x(x, y) + iE_y(x, y)$.

2、 平面流速场的复势

流函数: 设向量场 $\vec{v}$ 是不可压缩的定常的理想流体的流速场

$$\vec{v} = v_x(x, y)\vec{i} + v_y(x, y)\vec{j},$$

其中速度分量 $v_x(x,y), v_y(x,y)$ 都有连续偏导数. 如果它在单连通区域 B 内是无源场 (散度为 0, 记为 $\nabla\cdot\vec{v}$. 表示某点处单位体积内散发出来的矢量 $\vec{v}$ 的通量, $\operatorname{div}\vec{v}$ 描述了通量源的密度, 是向量场的一种强度性质), 那么

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,$$

即

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{\partial v_y}{\partial y},$$

于是 $-v_ydx+v_xdy$ 为某一个二元函数 $\psi(x,y)$ 的全微分, $d\psi(x,y)=-v_ydx+v_xdy$, 且

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}=-v_y, \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}=v_x.$$

等值线 $\psi(x,y)=c_1$ 称为**流线**. $d\psi(x,y)=-v_ydx+v_xdy=0$, 所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_y}{v_x}.$$

场 $\vec{v}$ 在等值线 $\psi(x,y)=c_1$ 每一点处的向量 $\vec{v}$ 都与等值线相切, 函数 $\psi(x,y)$ 称为场 $\vec{v}$ 的**流函数**.

势函数: 如果 $\vec{v}$ 又是 B 内是无旋场 (即势量场), 那么 $\operatorname{rot}\vec{v}=0$, 即 $\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0$. 于是 v_xdx+v_ydy 为某一个二元函数 $\varphi(x,y)$ 的全微分, 满足 $d\varphi(x,y)=v_xdx+v_ydy$,

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=v_x, \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=v_y. \operatorname{grad}\varphi=\vec{v}.$$

函数 $\varphi(x,y)$ 称为场 $\vec{v}$ 的势函数 (位函数). 等值线 $\varphi(x,y)=c_2$ 称为等势线.

如果在单连通区域 B 内, 向量场既是无源也是无旋.

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}.$$

比较后得到能够得到柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}=-v_y, \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}=v_x;$$
$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=v_x, \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=v_y. \operatorname{grad}\varphi=\vec{v}.$$

在单连通区域内可以做一个解析函数, 这就是平面流速场的复势函数 (复势)

$$w = f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

因为 $v = v_x + iv_y = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}$, 所以流速场 $\vec{v}$ 可以用复变函数 $v = \overline{f'(z)}$ 表示.

给定一个单连通区域内的无源无旋平面流速场, 就可以构造一个解析函数——它的复势与之对应; 反之, 如果在某一区域 (不管是否单连) 内给定一个解析函数, 就有以它为复势的平面流速场对应, 并可以写出该场的流函数和势函数, 得到流线与等势线方程, 画出流线和等势线的图形, 即得描绘该场的流动图象.

例 4.21

设一平面流速场的复势为 $f(z) = az, a > 0, a \in \mathbb{R}$, 试求该场的速度、流函数和势函数. ♡

解: 因为 $f'(z) = a$, 所以场中任一点的速度 $v = \overline{f'(z)} = a > 0$, 方向指向 x 轴正向, 流函数 $\psi(x,y) = ay$, 流线是直线族 $y = c_1$; 势函数 $\varphi(x,y) = ax$, 等势线族 $x = c_2$ (图 48).

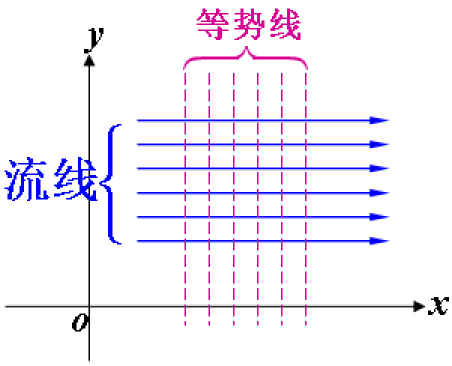

图 48: 等势线

例 4.22

在场论中将散度 $\operatorname{div}\vec{v} \neq 0$ 统称为源点 ($\operatorname{div}\vec{v} > 0$ 统称为源点, $\operatorname{div}\vec{v} < 0$ 统称为洞), 试求由单个源点形成的定常流速场的复势, 并画出流动图像. ♡

解: 不妨假设流速场只有一个在坐标原点的源点, 而其他各点无源无旋, 在无穷远处保持静止状态. 由对称性, $z \neq 0$ 出的流速 $\vec{v} = g(r)\overline{r^0}$, 其中 $r = |z|$ 是 z 到原点的距离, $\overline{r^0}$ 是指向点 z 的向径上的单位向量, $\overline{r^0} = \frac{z}{|z|}$, $g(r)$ 是一待定函数. 因为流体不可压

缩, 流体在任一以原点为中心的圆环域 $r_1 < |z| < r_2$ 内不可能积蓄, 所以流过圆周 $|z| = r_1$ 与 $|z| = r_2$ 的流量相等.

流过圆周的流量为

$$N = \int_{|z|=r} \vec{v} \cdot \overline{r^0} ds = \int_{|z|=r} g(r)\overline{r^0} \cdot \overline{r^0} ds = 2\pi|z|g(|z|).$$

N 称为源点强度, 与 r 无关. 故 $g(|z|) = \frac{N}{2\pi|z|}$, 流速 $v = \frac{N}{2\pi|z|}\frac{z}{|z|} = \frac{N}{2\pi}\frac{1}{\bar{z}}$.

复势函数 $f(z)$ 的导数为

$$f'(z) = \overline{v(z)} = \frac{N}{2\pi}\frac{1}{z}.$$

复势函数 $f(z)$ 为

$$f(z) = \frac{N}{2\pi}\ln z + c, c = c_1 + ic_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(流动图象如图 49)

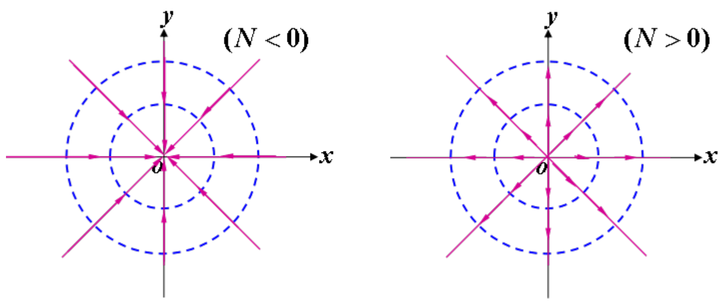

图 49: 源点的流动图象

蓝色为等势线, 红色为流线.

例 4.23

平面流速场中 $\mathrm{rot}\vec{v}$ 的点称为涡点, 设平面上仅在原点有单个涡点, 无穷远处保持静止状态, 试求该流速场的复势, 并画出流动图像.

解: 与上例类似, 设场内某点 z 的流速 $\vec{v} = h(r)\overline{\tau^0}$, 其中, $\overline{\tau^0}$ 是指向点 z 的向径上的单位向量, $\overline{\tau^0} = \frac{z}{|z|}$, $h(r)$ 是仅与 $r = |z|$ 有关的一待定函数. 沿圆周的环流量

$$\Gamma = \int_{|z|=r} \vec{v} \cdot \overline{\tau^0} ds = \int_{|z|=r} h(|z|)\tau \cdot \tau ds$$
$$= 2\pi|z|h(|z|).$$

Γ 是与 r 无关的常量, $-i\Gamma$ 称为**涡点的强度**.

$$h(|z|)=\frac{\Gamma}{2\pi|z|},\text{流速}v=\frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\bar{z}},$$

复势函数为 $f(z)$ 为

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z+c,c=c_1+ic_2,c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

势函数 $\varphi(x,y)$ 为

$$\varphi(x,y)=\frac{\Gamma}{2\pi}\arg z+c_1.$$

流函数 $\psi(x,y)$ 为

$$\psi(x,y)=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln|z|+c_2.$$

例 1 和例 2 的对比结果: 除了常数 N 换成 Γ 外, 两者仅差一个因子 $\frac{1}{i}$, 只需将例 1 和例 2 中的流线与等势线位置互换, 即可得涡点形成的场的流动图像. (流动图象如图 50)

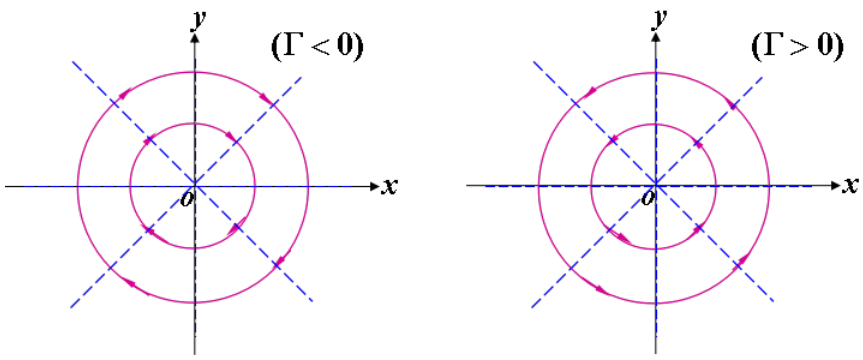

图 50: 涡点的流动图象

蓝色为流线, 红色为等势线.

3、 静电场的复势

我们知道场内没有其他物体带电的平面静电场既是无源场也是无旋场. 我们可以利用复变函数中的解析函数来构造场 E 的复势.

因为 E 为无源场, 所以

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0,$$

从而我们知道在 B 内 $-dx+dy$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即 $du(x,y)=-dx+dy$, 由于等值线 $u(x,y)=c_1$ 上任意一点的电场强度 E 的方向与等值线在该点处的切线方向相同, 等值线就是向量线, 也是场 E 的电力线. 因此称 $u(x,y)$ 为该场的力函数. 又因为场 E 为无旋场, 所以

$$\mathrm{rot_n}\,\vec{v}=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0.$$

所以可以知道在 B 内 $-dx+dy$ 也是某二元函数 $v(x,y)$ 的全微分, 即 $dv(x,y)=-dx+dy$. 所以 $v(x,y)$ 是场 E 的势函数, 等势值 $v(x,y)=c_2$ 就是等势线.

综上所述, 如果 E 是单连通区域 B 内的无源无旋场, 那么 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 满足 $C-R$ 方程, 并且它们具有连续偏导数. 所以函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是 B 内的一个解析函数, 称为静电场 E 的复势. 利用静电场的复势可以统一研究静电场的里函数和势函数, 讨论电力线和等势线的分布, 描绘出静电场的图像.

例 4.24

求一条具有电荷线密度为 e 的均匀带电无限长导线 L 所产生的静电场的复势.

解: 设导线 L 在原点 $z=0$ 垂直于 z 平面, 在 L 距原点 h 处取微元 dh, 其带电量为 edh. 因为导线为无限长, 因此垂直于 xoy 平面的任何直线上各点处的电场强度是相等的. 如图 51,

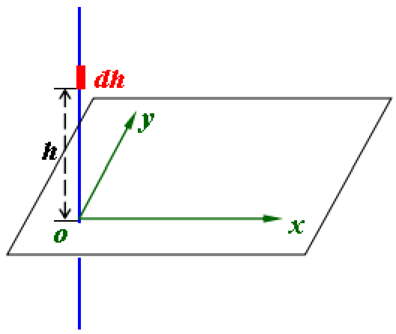

图 51: 静电场的复势

又因为导线上关于 z 平面对称的两带电微元段所产生的电场强度的垂直分量相互抵消, 只剩下与 xoy 平面平行的分量. 故所产生的静电场为平面场. 先求平面上任一点 z 的电场强度 $\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}$. 由库仑定律, 微元 dh 在 z 产生的场强大小为

$$d\vec{E}=\frac{edh}{r^2+h^2},$$

其中 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 如图52,

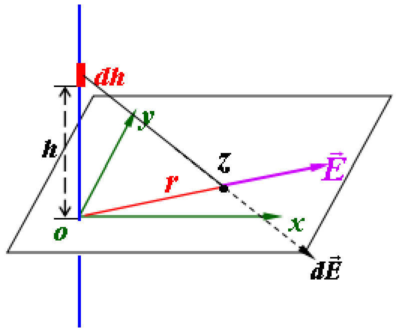

图 52: 静电场的复势

因为所求的电场强度 $\vec{E}$ 在 z 平面内, 所以其大小为所有场强微元 $d\vec{E}$ 在 z 平面上的投影之和, 如图 53,

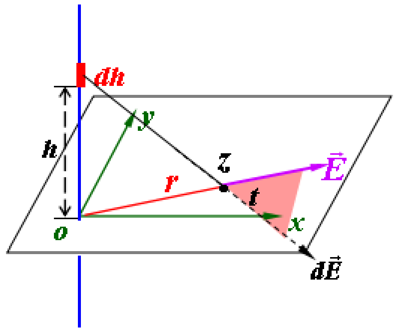

图 53: 静电场的复势

$$|\vec{E}|=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e\cos t}{r^2+h^2}dh,$$

其中 t 为 $d\vec{E}$ 与 xoy 平面的交角. 因为 $h=r\tan t$, 所以

$$dh=\frac{rdt}{\cos^2 t},\frac{1}{r^2+h^2}=\frac{\cos^2 t}{r^2},$$
$$|\vec{E}|=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e\cos t}{r}dt=\frac{2e}{r}.$$

IV　课堂练习

例 4.25

求函数值 $\operatorname{Arc}\tan(2+3i)$.

解:

$$\begin{aligned}\mathrm{Arc}\tan(2+3i) &= -\frac{i}{2}\ln\frac{1+i(2+3i)}{1-i(2+3i)}\\ &= -\frac{i}{2}\ln\frac{-3+i}{5}\\ &= -\frac{i}{2}\left[\ln\sqrt{\frac{2}{5}}+i\left(\pi-\arctan\frac{1}{3}+2k\pi\right)\right]\\ &= -\frac{i}{4}\ln\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3},\end{aligned}$$

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

1、 关于场的总结 (复函数的应用)

对于单连通区域内给定的平面无源无旋场, 可以作出一个解析函数 $wf(z)$ 来统一研究该场的分布和变化情况, 这个解析函数称为该场的**复势**. 在平面流速场中, 复势的实部就是**势函数**, 虚部是**流函数**, 并且流速 $v=\overline{f'(z)}$; 在平面静电场中, 复势的实部就是**力函数**, 虚部是**势函数**, 并且电场强度 $E=-i\overline{f'(z)}$. 由此可以画出等势线 (电力线) 与流线 (电位线) 的图形, 得到场的流动图像.

V　课堂小结

复变初等函数是一元实变初等函数在复数范围内的自然推广, 它既保持了后者的某些基本性质, 又有一些与后者不同的特性. 如:

1) 指数函数具有周期性 (周期为 $2\pi i$).

2) 负数无对数的结论不再成立.

3) 三角正弦与余弦不再具有有界性.

4) 双曲正弦与余弦都是周期函数.

了解复变函数可表示平面向量场, 对于某单连通域内给定的平面无源无旋场, 可以作出一解析函数 (称为该场的复势), 统一研究该场的分布和变化情况.

VI　第二章习题

P66: 2. 3. 4. 5. 8. 9. 12. 15. 18.

VII　第二章习题

✍ **练习 4.1** 利用导数定义推出:

1) $(z^n)' = nz^{n-1}(n \in \mathbb{Z}^+)$;

2) $\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$.

✍ **练习 4.2** 下列函数何处可导? 何处解析?

1) $f(z) = x^2 - iy$;

2) $f(z) = 2x^3 + 3y^3 i$;

3) $f(z) = xy^2 + ix^2 y$;

4) $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

✍ **练习 4.3** 指出下列函数 $f(z)$ 的解析性区域, 并求出其导数:

1) $(z-1)^5$;

2) $z^3 + 2iz$;

3) $\frac{1}{z^2-1}$;

4) $\frac{az+b}{cz+d}$ (c, d 中至少有一个不为 0).

✍ **练习 4.4** 求下列函数的奇点:

1) $\frac{z+1}{z(z^2+1)}$;

2) $\frac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$.

✍ **练习 4.5** 复变函数的可导性与解析性有什么不同? 判断函数的解析性有哪些方法?

✍ **练习 4.6** 判断下列命题的真假若真请给以证明; 若为假, 请举例说明

1) 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 那末 $f'(z_0)$ 存在;

2) 如果 $f'(z_0)$ 存在, 那末 $f(z)$ 在 z_0 解析;

3) 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点, 那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导;

4) 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点, 那末 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点;

5) 如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导 (指偏导数存在), 那末 $f(z) = u + iv$ 亦可导,

6) 设 $f(z) = u +$ 在区域 D 内是解析的如果 u 是实常数, 那末 $f(z)$ 在整个 D 内是常数; 如果 v 是实常数, 那末 $f(z)$ 在 D 内也是常数,

✍ **练习 4.7** 如果 $f(z)=u+iv$ 是 z 的解析函数, 证明:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2 \tag{31}$$

✍ **练习 4.8** 设 $my^3+nx^2y+i\left(x^3+lxy^2\right)$ 为解析函数, 试确定 l,m,n 的值.

✍ **练习 4.9** 证明柯西-黎曼方程的极坐标形式是:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{32}$$

✍ **练习 4.10** 如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析, 并满足下列条件之, 使得 $f(z)$ 是常数.

1) $f(z)$ 恒取实值;

2) $f(\bar{z})$ 在 D 内解析;

3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数;

4) $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数;

5) $au+b=c$, 其中 ab 与 c 为不全为零的实常数.

✍ **练习 4.11** 下列关系是否正确?

1) $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$;

2) $\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$;

3) $\overline{\sin z}=\sin\bar{z}$.

✍ **练习 4.12** 找出下列方程的全部解:

1) $\sin z=0$;

2) $\cos z=0$;

3) $1+e^z=0$;

4) $\sin z+\cos z=0$.

✍ **练习 4.13** 证明:

1) $\cos\left(z_1+z_2\right)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$,

$\sin\left(z_1+z_2\right)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$.

2) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

3) $\sin 2z=2\sin z\cos z$.

4) $\operatorname{tg}2z=\frac{2\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$.

5) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z,\quad \cos'(z+\pi)=-\cos z$.

6) $|\cos z|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y,\quad |\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y$.

✍ 练习 4.14 说明:

1) 当 $y \to \infty$, $|\sin(x+iy)|$ 和 $|\cos(x+iy)|$ 趋于无穷大;

2) 当 $z \in \mathbb{C}$ 时, $|\sin z| \leqslant 1$ 和 $|\cos z| \leqslant 1$ 不成立.

✍ 练习 4.15 求 $\mathrm{Ln}(-i), \mathrm{Ln}(-3+4i)$ 和它们的主值.

✍ 练习 4.16 证明对数的下列性质:

1) $\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$.

2) $\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{x_1}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$.

✍ 练习 4.17 说明下列等式是否正确:

1) $\mathrm{Ln}\, z^2 = 2\,\mathrm{Ln}\, z$.

2) $\mathrm{Ln}\sqrt{z} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\, z, z \in \mathbb{Z}$.

✍ 练习 4.18 求 $e^{1-i\frac{\pi}{2}}, \exp[(1+i\pi)/4], 3^i$ 和$(1+i)^i$ 的值.

✍ 练习 4.19 证明 $(z^a)' = az^{a-1}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

✍ 练习 4.20 证明:

1) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$;

2) $\sinh^2 z + \cosh^2 z = \cosh 2z$;

3) $\sinh\,(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$;

4) $\cosh\,(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$.

✍ 练习 4.21 解下列方程:

1) $\sinh z = 0$;

2) $\cosh z = 0$;

3) $\sinh z = i$.

✍ 练习 4.22 证明 $\cosh iy = \cos y, \mathrm{sh}\, iy = i \sin y$ 与 $\cosh(x+iy) = \cosh(x)\cos y + i\,\mathrm{sh}(x)\sin y, \mathrm{sh}(x+iy) = \mathrm{sh}(x)\cos y + i\cosh(x)\sin y$.

✍ 练习 4.23 证明 $\mathrm{sinh}z$ 的反函数 $\mathrm{arcsinh}z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$.

✍ 练习 4.24 * 已知平面流速场的复势 $f(z)$ 为: 1) $(z+i)^2$; 2) z^3; 3) $\frac{1}{z^2+1}$, 求流动的速度以及流线和等势线的方程.