教　案　纸

● 2019/10/15 ● 互动提问	**理论课 7　§ 3.6-3.7 解析函数的高阶导数、解析函数与调和函数的关系**

I　组织教学

1、集中学生注意力;

2、清查学生人数;

3、维持课堂纪律.

II　复习导入及主要内容

1、上次作业讲评;

2、本次主要内容

3、重点: 解析函数的高阶导数计算、解析函数与调和函数的关系.

4、难点: 解析函数的高阶导数、解析函数与调和函数的关系.

III　教学内容及过程

一、 解析函数的高阶导数

一个解析函数不仅有一阶导数、二阶导数, 并且还有 n 阶导数.

定理 .18

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数, 它的 n 阶导数为:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,(n=1,2,\cdots)$$

其中 C 为函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线, 而且它的内部全属于 D.

注解 27

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0),(n=1,2,\cdots).$$

证　由柯西积分公式得 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$, $f(z_0+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}dz$.

从而有

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz\right. \\ &\quad \left.-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i\Delta z}\oint_C f(z)\left[\frac{1}{z-(z_0+\Delta z)}-\frac{1}{z-z_0}\right]dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)}dz,\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}&\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \\ &\quad = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left[\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}-\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right]dz \\ &\quad = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}dz = I. \qquad (29)\end{aligned}$$

对于式(29)中的积分 I, 有

$$|I| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{\Delta z f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|\Delta z|\,|f(z)|\,ds}{|z-z_0|^2\,|z-z_0-\Delta z|}.$$

因为 $f(z)$ 在 C 上是解析的, 所以在 C 上是有界的. 因此可知必存在一个正数 M, 使得在 C 上有 $|f(z)| \leq M$. 设 d 为从 z_0 到曲线 C 上各点的最短距离 ($d = \min\limits_{z\in C}|z_0-z|$), 并取 Δz 适当地小, 使其满足 $|\Delta z| \leq \frac{1}{2}d$, 那么我们就有 $|z-z_0|^2 \geq d^2$, $|z-z_0-\Delta z| \geq |z-z_0|-|\Delta z| > \frac{1}{2}d$, 综合起来

$$\begin{gathered}|\Delta z| \leq \frac{d}{2} \\ \frac{1}{|z-z_0|^2} \leq \frac{1}{d^2} \\ \frac{1}{|z-z_0|} < \frac{2}{d}\end{gathered}$$

所以 $|I| < |\Delta z|\frac{ML}{\pi d^3} \leq \frac{ML}{2\pi d^2}$, 这里 L 为 C 的长度. 如果 $\Delta z \to 0$,

那么 $I \to 0$, 从而得

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

同理由 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z} = f''(z_0)$, 便可得到

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz.$$

类似地, 用数学归纳法可以证明: $f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$.

例 .1

求下列积分的值, 其中 C 为正向圆周: $|z| = r > 1$.
1) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz$;
2) $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

解: 1) 函数 $\frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内的 $z = 1$ 处不解析, 但 $\cos \pi z$ 在 C 内却是处处解析的. 根据本节定理, 有

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz &= \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)}\Big|_{z=1} = \frac{2\pi i}{4!} (-\pi \sin \pi z)^{(3)}\Big|_{z=1} \\
&= \frac{2\pi i}{4!} (-\pi^2 \cos \pi z)^{(2)}\Big|_{z=1} = \frac{2\pi i (\pi^3 \sin \pi z)'}{4!}\Big|_{z=1} \\
&= \frac{2\pi i}{4!} (\pi^4 \cos \pi z)\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5}{12} i.
\end{aligned}$$

2) 函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z = \pm i$ 处不解析. 我们在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1, 以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2, 那么函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1 和 C_2 所围成的区域中是解析的. 根据闭路定理,

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz,$$

由本节定理, 有

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz = \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'_{z=i}$$
$$= 2\pi i\left[\frac{e^z(z+i)^2 - 2e^z(z+i)}{(z+i)^4}\right]_{z=i}$$
$$= 2\pi i\left[\frac{e^z(z+i) - 2e^z}{(z+i)^3}\right]_{z=i}$$
$$= 2\pi i\frac{e^i(2i) - 2e^i}{(2i)^3} = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi.$$

同样可得

$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz$$
$$= 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-i)^2}\right]'_{z=-i} = 2\pi i\left[\frac{e^z(z-i) - 2e^z}{(z-i)^3}\right]_{z=-i}$$
$$= -\frac{(1+i)e^{-i}}{2}\pi.$$

所以

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}(1-i)(e^i - ie^{-i}) = \frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1 - \sin 1)$$
$$= i\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

例 .2

求积分 (1) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3+1}{(z+1)^4}dz$;　(2) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z^2}dz$.

解: 函数 z^3+1 在复平面内解析, $z_0 = -1$ 在 $|z| < 2$ 内, 且 $n = 3$. 根据公式

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0),$$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3+1}{(z+1)^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}\left[z^3+1\right]'''\Big|_{z=-1} = 2\pi i.$$

(2) 函数 $e^{-z}\cos z$ 在复平面内解析, $z_0 = 0$ 在 $|z| \le 1$ 内, 且

$n=1$.

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{-z}\cos z}{z^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}(e^{-z}\cos z)'\Big|_{z=0}$$
$$=2\pi i[-e^{-z}\cos z-e^{-z}\sin z]\Big|_{z=0}$$
$$=-2\pi i.$$

例 .3

求积分 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}dz, n\in\mathbb{Z}$.

解: (1) 当 $n\leq 0$ 时, 函数 $\frac{e^z}{z^n}$ 在 $|z|\leq 1$ 内解析, 由柯西一古萨基本定理得 $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}dz=0$.

(2) 当 $n=1$ 时, 由柯西积分公式得

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi i\cdot(e^z)|_{z=0}=2\pi i.$$

(2) 当 $n>1$ 时, 由公式 $\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$,

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}(e^z)^{(n-1)}\Big|_{z=0}=\frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

定理 .19

(Moreta 定理) 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对于 D 内任何一条简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)dz=0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证 5 在 D 内取定一点 z_0, z 为 D 内任意一点. 根据已知条件, 知积分 $\oint_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$ 的值与连接 z_0 到 z 的路径无关, 它定义了一个单值函数:

$$F(z)=\oint_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta,$$

用上一节的方法，可以证明

$$F'(z) = f(z),$$

所以 $F(z)$ 是 D 内的一个解析函数，再根据上面的定理知解析函数的倒数仍然是解析函数，故 $f(z)$ 为解析函数.

二、 解析函数与调和函数的关系

解析函数有一些重要性质，特别是它与调和函数之间有着密切的关系，在理论和实际问题中都有着广泛的应用. 例如在流体力学，电磁学中常常遇到的调和函数，就构成了解析函数的实部和虚部. 为此，我们先介绍调和函数与共轭调和函数.

1、 调和函数与共轭调和函数

设 $u(x, y)$ 为二元实函数，并具有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯 (Laplace) 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

则称 $u(x, y)$ 为**调和函数**; 若函数 $u(x, y), v(x, y)$ 都为调和函数，且满足 C—R 条件，则称 $u(x, y), v(x, y)$ 之间互为**共轭调和函数**.

定理 .20

如果 $f(z) = u + iv$ 为一解析函数，且 $f'(z) \neq 0$，则曲线族 $u(x, y) = c_1 v(x, y)$ 必相互正交.

证 因为曲线族 $u(x, y) = c_1, v(x, y)$ 中任一条曲线的斜率分别为 $-\frac{u_x}{u_y}, \frac{v_x}{v_y}$，利用 C—R 条件，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x,$$

可得

$$\Big(-\frac{u_x}{u_y}\Big)\Big(-\frac{v_x}{v_y}\Big) = -\frac{v_y}{u_y} \cdot \frac{u_y}{v_x} = -1,$$

因此，曲线族 $u(x, y) = c_1, v(x, y)$ 是相互正交.

注解 28 调和函数不一定是解析函数.

● 举一个例子, 该函数既是解析函数也是调和函数.

例 .4

对于 $f(z)=x-iy$, 有 $u(x,y)=x, v(x,y)=-y$, 且 $u_x=1, v_x=0, u_y=0, v_y=-1$. 显然 $f(z)$ 不满足 C—R 条件, 不是解析函数. 然而 u,v 都是调和函数, 因为 $u_{xx}+u_{yy}=0, v_{xx}+v_{yy}=0$.

定理 .21

解析函数的实部和虚部为调和函数, 且互为共轭调和函数.

证 设 $f(z)=u+iv$ 为一解析函数, 则必有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

对上面的等式两边同时对 x,y 求导, 可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},$$

再代入拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0, u(x,y)\text{可微},$$

所以 $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$, 因此有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 所以 $u(x,y)$ 为调和函数.

同理, 也可证 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. 因而 $v(x,y)$ 也为调和函数. 而 u,v 满足 C—R 条件, 所以 u,v 互为共轭调和函数.

我们已知解析函数的实部和虚部为调和函数, 且互为共轭调和函数, 如何在已知其中的一个调和函数时, 求另一个共轭调和函数, 以及对应的解析函数? 下面给出具体的计算方法.

例 .5

已知 $u(x,y)=y^3-3x^2y$, 证明 u 为调和函数, 求共轭调和函数 $v(x,y)$ 及对应的解析函数 $f(z)=u+iv$.

解法一: 因为 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析, 由 C—R 条件, 有

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6y+6y=0,$$

因此, u 为调和函数. 下面求共轭调和函数 $v(x,y)$ 的表达式. 由全微分的定义, 有

$$dv=(3x^2-3y^2)dx-6xydy,$$

因为

$$dv=v_xdx+v_ydy\Rightarrow v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}v_xdx+v_ydy+C.$$

于是

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}[(3x^2-3y^2)dx-6xydy]+C\\&=\int_{(0,0)}^{(x,0)}[(3x^2-3y^2)dx-6xydy]\\&\quad+\int_{(x,0)}^{(x,y)}[(3x^2-3y^2)dx-6xydy]+C\\&=\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y[-6xydy]+C\\&=x^3-3xy^2+C,\end{aligned}$$

从而所求的解析函数为

$$\begin{aligned}f(z)=u+iv&=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2+C)\\&=i[x^3+3x^2(iy)+3x(iy)^2+(iy)^3+C]\\&=i(z^3+C).\end{aligned}$$

解二: 因为 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析, 所以

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= -6xy+i(3x^2-3y^2)=3i(x+iy)^2 \\ &= 3i(2ixyy+x^2-y^2) \\ &= 3i\ z^2, \end{aligned}$$

于是 $f(z)=iz^3+C_1$. 因为 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=y^3-3x^2y$, 所以 C_1 必为纯虚数, 从而 $f(z)=iz^3+iC=i(z^3+C)$, 其中 $iC=C_1$.

必须指出, 我们也可以类似地由解析函数的虚部来确定它的实部.

例 .6

已知 $v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y$ 为调和函数, 求一解析函数 $f(z)=u+iv$, 使得 $f(0)=0$.

解:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)+1, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1, \end{aligned}$$

由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1,$$

得

$$\begin{aligned} u &= \int[e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1]dx \\ u &= e^x(x\cos y-y\sin y)+x+g(y), \end{aligned}$$

由 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, 得

$$\begin{aligned} e^x(y\cos y+&x\sin y+\sin y)+1 \\ &= e^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)-g'(y), \end{aligned}$$

故

$$g(y)=-y+c,$$

于是

$$\begin{aligned} u &= e^x(x\cos y - y\sin y) + x - y + c, \\ f(z) = u + iv &= xe^x e^{iy} + iye^x e^{iy} + x(1+i) + iy(1+i) + c \\ &= ze^z + (1+i)z + c, \end{aligned}$$

由 $f(0)=0$, 得 $c=0$, 所求的解析函数 $f(z)=ze^z+(1+i)z$.

2、　不定积分法

已知调和函数 $u(x,y), v(x,y)$, 用不定积分求解析函数.

不定积分法的求解过程: 解析函数 $f(z)=u+iv$ 的导函数 $f'(z)$ 是解析函数, 且 $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x$ 把 u_x-iu_y, v_y+iv_x 用 z 表示

$$f'(z)=u_x-iu_y=U(z), f'(z)=v_y+iv_x=V(z),$$

将上两式积分, 若已知实部 u, 求 $f(z)$, 可以使用下式

$$f(z)=\int U(z)dz+c,$$

若已知虚部 v, 求 $f(z)$, 则使用下式

$$f(z)=\int V(z)dz+c.$$

例 .7

求 k 值, 使 $u=x^2+ky^2$ 为调和函数; 再求 $f(z)=u+iv$, 当 $f(i)=-1$ 时的解析函数 $f(z)$.

解: 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2, \frac{\partial u}{\partial y}=2ky, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2k,$$

根据调和函数的定义可得 $k=-1$, 因为

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x+iv_x=u_x-iu_y=2x-2kyi=2x+2yi=2z \\ &= u_x+i\,v_x=v_x-i\,u_y. \end{aligned}$$

由不定积分法, 有

$$f(z) = \int 2z dz = z^2 + c,$$

由 $f(i) = -1$ 得 $c = 0$. 所求解析函数为

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = z^2.$$

例 .8

已知 $f(z) = z^2$, 求 $f'(z)$ 并确定解析函数 $f(z) = u + iv$.

解:

$$\begin{aligned}
&f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \\
&\qquad \Rightarrow f'(z) = 2z = 2(x+iy) = u_x + iv_x = u_x - iu_y \triangleq u(z) \\
&\qquad = v_y + iv_x \triangleq v(z).
\end{aligned}$$

$$f(z) = \int u(z)dz + C = \int v(z)dz + C$$

注解 29

$$u_x = 2x, v_x = 2y; u_x = 2y, u_y = -2y$$

$$\begin{aligned}
\int_0^z f'(z)dz &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} u_x + iv_x dz \\
&= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x+2yi)dx + \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x+2yi)idy \\
&= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (2x+2yi)dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (2x+2yi)dx \\
&\quad + \int_{(0,0)}^{(x,0)} (2x+2yi)idy + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (2x+2yi)idy \\
&= \int_0^x 2xdx + \int_0^y (2x+2yi)idy \\
&= x^2 + 2xyi - y^2 = z^2.
\end{aligned}$$

例 .9

已知 $u+v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)-2(x+y)$, 试确定解析函数 $f(z)=u+iv$.

解: 两边同时求导数, 得

$$u_x+v_x=(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)-2,$$
$$u_y+v_y=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)-2,$$

且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

所以上面两式分别相加减可得

$$v_y=3x^2-3y^2-2, v_x=6xy,$$
$$u_x=3x^2-3y^2-2, u_y=-6xy.$$

解析函数

$$\begin{aligned} f'(z)&=u_x-iu_y=v_y+iv_x=3x^2-3y^2-2+6xyi\\ &=3(x+iy)^2-2=3z^2-2,\\ f(z)&=\int(3z^2-2)dz=z^3-2z+c, c\in\mathbb{C}. \end{aligned}$$

IV　课堂练习

例 .10

(**课堂练习**) 设 C 是不通过 z_0 的简单闭曲线, 求积分 $g(z_0)=\oint\limits_C\frac{z^4+z^2}{(z-z_0)^3}dz$.

解: 若 z_0 在 C 外, $g(z_0)=0$. 若 z_0 在 C 内, $g(z_0)=2(6{z_0}^2+1)\pi i$.

例 .11

设 C 为正向圆周: $|z|=2$, 计算积分 $\oint_C\frac{ze^z}{z^2-1}dz$.

解:

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz &= \oint_C \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)e^z dz\\ &= \frac{1}{2}\oint_C \frac{e^z}{z+1}dz + \frac{1}{2}\oint_C \frac{e^z}{z-1}dz\\ &= \frac{1}{2}2\pi i e^{-1} + \frac{1}{2}2\pi i e^{1} = \pi i(e^{-1}+e^{1}).\end{aligned}$$

例 .12

如果 $f(z)=u+iv$ 是 z 的解析函数，证明：$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=\left|f'(z)\right|^2$;

例 .13

计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z}dz$，其中 C 为正向圆周 $|z|=1$，并证明 $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$.

解: 函数 $\frac{e^z}{z}$ 在圆周 $|z|\le 1$ 内除 $z=0$ 外是处处解析的. 记 Γ 为正向圆周 $C_1:|z|\le\epsilon<1$ 与圆周 $C_2:|z|=1$ 组成的复合闭路，圆周 C_1 只包含奇点 $z=0$，则

$$0=\oint_\Gamma \frac{e^z}{z}dz=\oint_{C_1^-}\frac{e^z}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{z}dz$$

所以，由柯西积分公式

$$\oint_{C_2}\frac{e^z}{z}dz=-\oint_{C_1^-}\frac{e^z}{z}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi i\, e^z\Big|_{z=0}=2\pi i.$$

下面利用上面的结论证明 $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$:

$$\begin{aligned}2\pi i &= \oint_{C_2}\frac{e^z}{z}dz = i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}e^{i\sin\theta}d\theta\\ &= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta - \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta\\ &\Rightarrow \begin{cases}\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta=0\\ \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=2\pi\end{cases}\\ 2\pi &= \int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta+\int_\pi^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta\\ &\Rightarrow \int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi.\end{aligned}$$

例 .14

设 $u = 2(x-1)y$，验证 u 是调和函数；并求解析函数 $f(z) = u + iv$，使得 $f(2) = -i$.

解:

$$u_x = 2y, u_{xx} = 0; u_y = 2(x-1), u_{yy} = 0.$$

拉普拉斯 (Laplace) 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0,$$

可知 $u = 2(x-1)y$ 是调和函数.

解析函数 $f(z) = u + iv = 2(x-1)y + iv$，再由解析函数的实部和虚部互为共轭调和函数，$u, v$ 满足

$$\begin{aligned} & v_y = u_x = 2y, v_x = -u_y = 2(1-x) \\ & \Rightarrow dv = v_x dx + v_y dy = 2(1-x)dx + 2ydy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} 2(1-x)dx + 2ydy + C \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} 2(1-x)dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} 2ydy + C \\ &= (2x - x^2)\Big|_{(0,0)}^{(x,0)} + y^2\Big|_{(x,0)}^{(x,y)} + C \\ &= 2x - x^2 + y^2 + C. \end{aligned}$$

再由 $f(2) = -i$，带入 $f(z) = 2(x-1)y + i(2x - x^2 + y^2 + C)$ 得 $C = -1$. 解析函数

$$\begin{aligned} f(z) &= 2(x-1)y + i(2x - x^2 + y^2 - 1) \\ &= 2xy - 2y + 2xi - \mathbf{ix^2} + \mathbf{iy^2} - \mathbf{i} \\ &= -i(x^2 - y^2 - 2xy\,i) + 2xi - 2y\,i^2 - i \\ &= -i(x+iy)^2 + 2i(x+iy) - i \\ &= -iz^2 + 2zi - i = -i(z^2 - 2z + 1) = -(z-1)^2 i. \end{aligned}$$

V　课堂小结

柯西积分公式是复积分计算中的重要公式，是研究解析函数的重要工具. 它的证明基于柯西–古萨基本定理，它的重要性在

于:

柯西积分公式

解析函数在区域内部的值可以用它在边界的积分值表示.

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz,\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).}$$

高阶导数公式是复积分的重要公式. 它表明了解析函数的导数仍然是解析函数这一异常重要的结论, 同时表明了解析函数与实变函数的本质区别.

高阶导数公式

$$\boxed{f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz}$$

本节我们学习了调和函数的概念、解析函数与调和函数的关系以及共轭调和函数的概念.

应注意下面 2 点:

注意 1　任意两个调和函数 u 与 v 所构成的函数 $u+iv$ 不一定是解析函数.

注意 2　满足柯西—黎曼方程 $u_x=v_y, v_x=-u_y$ 的 v 称为 u 的共轭调和函数, u 与 v 注意的是地位不能颠倒.

VI　布置作业

1、教材习题三 P99: 8. 1), 3), 5), 7); 9; 10 2), 3), 6); 12; 15.