教　案　纸

理论课 8　§4.1-4.2 复数项级数与复函数项级数

● 2019/10/22

I　**组织教学**

1、集中学生注意力;

2、清查学生人数;

3、维持课堂纪律;

● 互动提问

II　**复习导入及主要内容**

1、上次作业讲评;

2、本次主要内容

3、重点:复级数的基本概念及其性质。

4、难点:理解函数解析性与一个函数能否展开为幂级数是等价问题.

III　**教学内容及过程**

一、　复数项级数与复函数项级数

1、　复数列的极限

因为无穷级数是从数列的特殊规律产生的, 所以研究数列与函数列是极其重要的. 现在引入复数列极限的概念.

定义 .49

设 $\{z_n\}\,(n=1,2,\cdots)$ 为一复数列, z_0 为一复数, 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 使当 $n>N$, 有 $|z_n-z_0|<\varepsilon$ 成立, 则称复数列 $\{z_n\}$ 收敛. 复数列 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$ 或 $z_n\to z_0, n\to\infty$.

定理 .22

设 $z_n=x_n+iy_n\,(n=1,2,\cdots), z_0=x_0+iy_0$, 则复数列 $\{z_n\}$ 收敛与 z_0 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$.

定义 .50

(级数的概念) 设 $\{\alpha_n\} = \{a_n + ib_n\} \quad (n = 1, 2, \cdots,)$ 为一复数列，表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots,$$

称为无穷级数，其最前面 n 项的和 $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n$ 称为级数的部分和.

定义 .51

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 是收敛的，并称极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 为级数的和. 如果部分和数列 $\{S_n\}$ 不收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 是发散的.

定理 .23

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛的充要条件是级数的实部 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和虚部 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时收敛.

定理 .24

将复数项级数的敛散问题转化为实数项级数的敛散问题，而由实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，可得复数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

定理 .25

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 是绝对收敛.

例 .1

下列数列 $\{\alpha_n\}$ 是否收敛，如果收敛，求出其极限.

$$(1)\ \alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{e^{i\frac{\pi}{n}}};\ (2)\ \alpha_n = n\cos ni\ .$$

解: (1) 因为

$$\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{e^{i\frac{\pi}{n}}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right),$$

所以

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n},\ b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}\ .$$

而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\ ,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

所以数列 $\alpha_n = (1+\frac{1}{n})^{e^{i\frac{\pi}{n}}}$ 收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 1\ .$$

(2) 由于 $\alpha_n = n\cos in = n\cosh n$，当 $n\to\infty$ 时，$\alpha_n\to\infty$，数列发散.

● $\cos iz = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \cosh z$

例 .2

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 是否收敛.

解: 满足级数收敛的必要条件，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=0$，但

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n i}{n}\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)-i\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，虽 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛. 原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 仍发散.

例 .3

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 是否绝对收敛？

解: 因为

$$\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right|=\frac{8^n}{n!},$$

由正项级数的比值判别法知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛. 故原级数收敛, 且为绝对收敛.

例 .4

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$ 是否绝对收敛？

解: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 也收敛, 故原级数收敛. 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, 所以原级数非绝对收敛.

另法: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^{2n}}}\geq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

二、 幂级数

1、 幂级数与幂级数的敛散性判别

定义 .52

(幂级数的概念) 设 $\{f_n(z)\},(n=1,2,\cdots)$ 为一复数函数序列, 复函数序列的各项在区域 D 内有定义. 称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

为复函数项级数. 称 $S_n=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$ 为级数的部分和.

定义 .53

如果对于 D 内的某一点 z_0, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z_0)=S(z_0)$ 存在, 则说复变函数项级数 $\{f_n(z)\}$ 在 z_0 点收敛, 而 $S(z_0)$ 就是它的和. 如果级数在 D 内处处收敛, 那么它的和一定是 z 的一个函数, 记为 $S(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$.

定义 .54

当 $f_n(z)=C_n(z-z_0)^n$ 或 $f_n(z)=c_nz^n$ 时, 称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$ 为幂级数.

若设 $z-z_0=\zeta$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n\zeta^n$. 因此, 为了方便, 我们主要讨论幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$.

定理 .26

幂级数收敛定理—(阿贝耳 Abel 定理)
如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$ 在 $z=z_0(\neq 0)$ 收敛, 那么对满足 $|z|<|z_0|$ 的一切 z, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$ 必绝对收敛. 如果在 $z=z_0$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$ 发散, 那么对满足 $|z|>|z_0|$ 一切的 z, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$ 必发散.

证: 因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz_0$ 收敛, 根据收敛的必要条件, $\lim\limits_{n\to\infty} c_nz_0^n=0$, 则必存在正数 M, 使得所有 $|c_nz_0^n|<M$. 如果 $|z|<|z_0|$, 那么 $\frac{|z|}{|z_0|}=q<1$, 而 $|c_nz^n|=\left|c_nz_0^n\frac{z^n}{z_0^n}\right|=|c_nz_0^n|\cdot\left|\frac{z}{z_0}\right|^n<Mq^n$.

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_nz^n|$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$ 是绝对收敛.

(几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\aleph} q^n$, 当 $q<1$ 时, 收敛; 当 $q\geq 1$ 时, 发散). 利用反证法可以证明, 当 $|z|>|z_0|$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$ 是发散的.

2、 收敛圆与收敛半径

定义 .55

若存在一个正数 R, 使幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $|z|<R$ 内绝对收敛, 而在 $|z|>R$ 内处处发散, 则称 $|z|=R$ 为收敛圆, 其中 R 为收敛半径.

2) 收敛半径的求法——常用的方法为**比值法和根值法**

设幂级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 方法如下:

比值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda$, 则 $R=\frac{1}{\lambda}$;

根值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda$, 则 $R=\frac{1}{\lambda}$.

例 .5

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$ 的收敛范围与和函数.

解: 级数的部分和为

$$s_n=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z},\ (z\neq 1)$$

$|z|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{1-z} \Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 收敛.

$|z|\geq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z^n\neq 0 \Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 发散.

由阿贝尔定理知: 收敛范围为一单位圆域 $|z|<1$, 在此圆域内, 级数绝对收敛, 收敛半径为 1, 且有

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

例 .6

求下列幂级数的收敛半径: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$(并讨论在收敛圆周上的情形); (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 并讨论 $z=0,2$ 时的情形

解: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^3 = 1$ 或者

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = 1.$$

所以收敛半径 $R = 1$. 即原级数在圆 $|z| = 1$ 内收敛, 在圆外发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 是收敛的 p 级数 $(p = 3 > 1)$. 所以原级数在收敛圆上是处处收敛的.

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

收敛半径 $R = 1$.

当 $z = 0$ 时, 原级数成为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, 级数收敛.

当 $z = 2$ 时, 原级数成为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 调和级数, 级数发散.

说明: 在收敛圆周上既有级数的收敛点, 也有级数的发散点.

例 .7

试求下列幂级数的收敛半径

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$;
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$;
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[8+(-1)^n]^n$.

♡

解: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^3 = 1$.

或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = 1$,

所以 $R = 1$, 当 $|z| = 1$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 是收敛的.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, 所以 $R = +\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}[8+(-1)^n] = \begin{cases} 7, & n\text{奇数} \\ 9, & n\text{偶数} \end{cases}$, 所以 $R = \frac{1}{9}$.

一般, 幂级数的收敛半径分为 3 种:

(1) 仅在原点收敛, 除原点外, 处处发散, $R = 0$;

(2) 在全平面上处处绝对收敛, $R = +\infty$;

(3) 存在某一点 $z_0 \neq 0$, 圆周 $C{:}|z| = |z_0|$. 在 $|z| < |z_0|$ 的

圆内, 幂级数 $\sum\limits_{n\to 0}^{\infty} c_n z^n$ 是绝对收敛; 在 $|z|>|z_0|$ 的圆外, 幂级数 $\sum\limits_{n\to 0}^{\infty} c_n z^n$ 是发散; 在圆周 $C:|z|=|z_0|$ 上, 幂级数 $\sum\limits_{n\to 0}^{\infty} c_n z^n$ 可能是收敛的, 也可能是发散的.

例 .8

求下列幂级数的收敛半径. *1)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$; *2)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\cos ni) z^n$.

解: 1) R=1

2) $c_n = \cos ni = \cosh n = \frac{1}{2}(e^n + e^{-n})$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}} = e$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{e}$.

或者 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\cos ni|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n+e^{-n}}{2}} = e$, 故收敛半径 $R = 1/e$.

例 .9

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ 的收敛半径.

解: 因为

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i},$$

$$c_n = (1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{\frac{n\pi}{4}i};$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^n} = \sqrt{2}.$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

或者 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(1+i)^n|} = |1+i| = \sqrt{2}$, 故收敛半径 $R = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 .10

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数 S.

解: 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$$

故收敛半径 $R=1$. 利用逐项积分, 得:

$$\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(n+1)z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}=\frac{z}{1-z}.$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2},|z|<1.$$

例 .11

求 $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数 S.

解: 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}=2,$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{2}$.

当 $|z|<\frac{1}{2}$ 时, $|2z|<1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}z^{n-1}=\frac{2}{1-2z},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}=\frac{2}{1-2z}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-2z)(1-z)}.$$

例 .12

计算 $\oint_c \left(\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n\right) dz$, 其中 $C: |z| = \frac{1}{2}$.

解: 在 $|z| < \frac{1}{2}$ 内, $\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛. 和函数

$$S(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z},$$

$$I = \oint_c \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) dz = \oint_c \frac{1}{z} dz + \oint_c \frac{1}{1-z} dz = 2\pi i + 0 = 2\pi i.$$

3、 幂级数的运算和性质

复变函数幂级数的运算和性质类似于实变幂级数.

设 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, R = r_1$, $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n, R = r_2$, 那么在以原点为圆心, r_1, r_2 中较小的一个半径的圆内, 这两个幂级数可以像多项式那样进行相加、相减、相乘, 所得到的幂级数的和函数分别就是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差与积. 即幂级数的收敛半径 $R = \min(r_1, r_2)$.

复函数的幂级数也可以进行复合运算.

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z), |z| < R$, 而在 $|z| < r$ 内函数 $g(z)$ 解析且满足 $|g(z)| < R$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[g(z)\right]^n = f\left[g(z)\right], |z| < r.$$

这一运算方法, 广泛应用在将函数展开成幂级数的运算.

例 .13

试把 $f(z) = \frac{1}{3z-2}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$ 的幂级数.

解: 把 $f(z)$ 变形, 使之成为 $(z-2)$ 的函数.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3z-2} = \frac{1}{3(z-2)+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-3}{4}(z-2)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n (z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{4^{n+1}} (z-2)^n, \end{aligned}$$

其收敛区域由几何级数知, 应为 $\frac{3}{4}|z-2|<1$, 即 $|z-2|<\frac{4}{3}$.

幂级数在其收敛圆内还有下列性质:

(1) 幂级数的和函数在其收敛圆内是解析的;

(2) 幂级数在其收敛圆内, 可以逐项求导, 也可以逐项积分.

例 .14

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n\,(0<a<1)$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$ 的收敛半径.

解: 容易验证, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n$ 的收敛半径都是 1. 但级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$ 的收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{1+a^n}\Big/\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+a^{n+1}}{a(1+a^n)}\right|=\frac{1}{a}>1.$$

这就是说, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$ 的收敛圆域大于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n$ 的公共收敛圆域 $|z|<1$,

注意, 使得等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$$

成立的收敛圆域仍为 $|z|<1$, 不能扩大.

例 .15

试把函数 $f(z)=\frac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 a 与 b 是不相等的复常数.

解: 把函数 $\frac{1}{z-b}$ 写成如下形式

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}.$$

当 $\left|\frac{z-a}{b-a}\right| < 1$ 时, 即 $|z-a| < |b-a|$, 有

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}} = 1 + \frac{z-a}{b-a} + \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n + \cdots,$$

从而得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-b} = & -\frac{1}{b-a} - \frac{1}{(b-a)^2}(z-a) - \frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2 \\ & - \cdots - \frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n - \cdots\end{aligned}$$

设 $|b-a| = R$, 那么当 $|z-a| < R$ 时, 上式右端的级数收敛, 且其和为 $\frac{1}{z-b}$. 因为当 $z=b$ 时, 上式右端的级数发散, 故由阿贝尔定理知, 当 $|z-a| > |b-a| = R$ 时, 级数发散, 即上式右端级数的收敛半径为 $R = |b-a|$.

定理 .27

在收敛圆内, 幂级数的和函数是解析函数. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R, 那么

1. 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是收敛圆: $|z-a| < R$ 内的解析函数.
2. $f(z)$ 在收敛圆内的导数可将其幂级数逐项求导得到, 即

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

3. $f(z)$ 在收敛圆内可以逐项积分, 即

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C (z-a)^n dz,\ C \in |z-a| < R.$$

或者

$$\int_a^z f(\zeta)d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

IV 课堂练习

下列数列是否收敛? 如果收敛, 求出其极限.

(1) $z_n = \frac{1+ni}{1-ni}$;

(2) $z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1}$;

(3) $z_n = \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}}$.

解:

(1) $z_n \to -1$;

(2) 略;

(3) $z_n \to 0$.

若是级数的通项, 判别是否收敛? 如果收敛, 求出其极限.

(1) $z_n \to -1 \neq 0$, 级数发散.

(2) 略;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2}\right]$.

V 课堂小结

主要讲解了复数列的相关概念. 应了解复数列的极限概念; 熟悉复数列收敛及复数项级数收敛与绝对收敛的充要条件; 理解复数项级数收敛、发散、绝对收敛与条件收敛的概念与性质.

学习了幂级数的概念和阿贝尔定理等内容，应掌握幂级数收敛半径的求法和幂级数的运算性质.

VI 布置作业

1、教材习题四 P141: 6 1)、3); 8; 11 1)、2); 12 1)、2)、3)、4); 16; 19 1)、2)、3)、4).