复变函数

复数的乘积与乘幂、方根和平面点集和区域

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

September 15, 2020

目录

目录

设有两个复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. 则复数乘积 $z = z_1 z_2$

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\quad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned} \tag{1}$$

于是

$$|z_1 z_2| = |z|, \tag{2}$$
$$|z| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|, \tag{3}$$
$$\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2), \tag{4}$$

从而得到如下定理

定理 .1

两个复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ 乘积的模等于它们模的乘积 $|z_1||z_2|$; 两个复数 z_1 与 z_2 乘积的辐角 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 等于各自辐角之和.

注解

利用向量表示复数时, 乘积 z_1z_2 对应的向量是将表示 z_1 的向量旋转一个角度 $\mathrm{Arg}(z_2)$, 并伸长或者缩短 $|z_2|$ 倍得到, 复数相乘的向量解释如图1 所示.

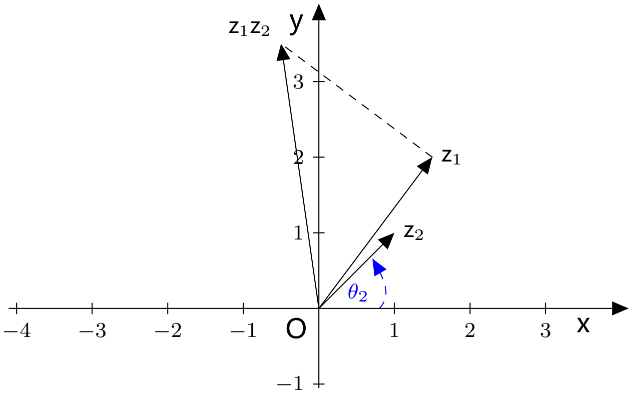

图 1: 复数乘积的向量解释

例 .1

① 旋转: iz 相当于将 z 逆时针旋转 $90°$; $-z$ 相当于将 z 顺时针旋转 $180°$.
② 伸长: $\mathrm{Arg}(z_2) = 0$ 时, 复数乘法只做伸长, 不做旋转.

复数辐角的多值性

公式 (4) 两端都是由无穷多个数构成的数集. 对于左端的任一值, 右端必有一值与其相等.

例 .2

取 $z_1=-1, z_2=i$, 则 $z_1z_2=-i$. 辐角计算如下

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arg}(z_1) &= \pi+2n\pi, (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),\\
\mathrm{Arg}(z_2) &= \frac{\pi}{2}+2m\pi, (m=0,\pm1,\pm2,\cdots),\\
\mathrm{Arg}(z_1z_2) &= -\frac{\pi}{2}+2k\pi, (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).
\end{aligned}$$

利用公式(4), 得

$$\frac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \Longleftrightarrow k=m+n+1.$$

不定方程可用的解有

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{k}=1,\mathsf{m}=0,\mathsf{n}=0;\\
&\mathsf{k}=1,\mathsf{m}=-2,\mathsf{n}=2;\\
&\mathsf{k}=-1,\mathsf{m}=0,\mathsf{n}=-2;\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}.$$

由定理 1, 可以表示如下

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

几何解释: 若利用复指数表示式 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则有 $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

若将第 k 个复数记为 $z_k = r_k e^{i\theta_k} = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, 则 n 个复数的乘积

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \cdots z_n &= r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) \\ &\quad + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)] \\ &= r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}, \end{aligned} \tag{5}$$

若其中 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 则有 z 的乘幂表示, $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, $n \in \mathbb{Z}$.

棣莫佛公式

定义 .1

棣莫佛（**De-Moivre**）公式: 当 $|z| = r = 1$ 时, 若记 $z = \cos\theta + i\sin\theta$, 则有 $z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, 称该公式为棣莫佛公式.

例 .3

计算 $z^{10} + z^9$ 的值, 其中 $z = \frac{1+i}{1-i}$.

解: $z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2}2i = i$. $i^{10} + i^9 = (-1)^5 + i(-1)^4 = i - 1$.

例 .4

计算 $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^8$ 的值.

解: 因为 $1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{1}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\pi\right)$, 所以

$$
\begin{aligned}
(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^8 &= 2^8\left(\cos\frac{1}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\pi\right)^8 \\
&= 2^8\left(\cos\frac{8}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{8}{3}\pi\right) \\
&= 2^8\left(\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right).
\end{aligned}
$$

对于复数商, 按照复数商的定义, 当 $z_1 \neq 0$ 时, 有

$$z_2 = \frac{z_2}{z_1} z_1.$$

由复数的运算法则, 显然有

$$|z_2| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| |z_1|, \mathrm{Arg}(z_2) = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \mathrm{Arg}(z_1).$$

于是, 可以得到

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \mathrm{Arg}(z_2) - \mathrm{Arg}(z_1).$$

归纳起来，得到关于复数商的定理。

定理 .2

两个复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ 商的模等于它们模的商 $|z_1|/|z_2|$; 两个复数 z_1 与 z_2 商的辐角 $\mathrm{Arg}(z_1 z_2)$ 等于各自辐角之差.

注解

若使用指数形式表示复数为 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则定理 2 可以表示为

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \ (r_1 \neq 0).$$

例 .5

已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$, 求它的另外一个顶点.

解: 如图 2, 将向量 $z_2 - z_1$ 绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$(或者 $-\frac{\pi}{3}$) 就得到另一个向量, 他的终点即为所求的顶点 z_3(或者 z_3').

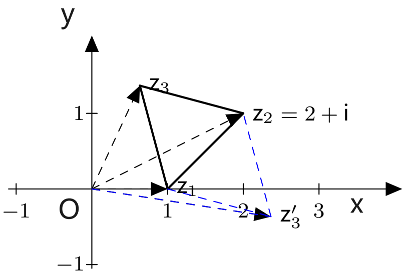

图 2: 确定正三角形的顶点

由于复数 $|e^{\frac{\pi}{3}i}| = 1$, 辐角主值为 $\frac{\pi}{3}$, 根据复数的乘法, 有

$$z_3 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

所以

$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

类似可得另一方向的点 z_3', 且

$$z_3' = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

目录

设复数 w 与 z 的等式满足条件 $w^n = z$, 其中 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) \Rightarrow z = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$, 则

$$w^n = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

$$\Rightarrow \rho = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r},$$

$$\cos n\phi + i\sin n\phi = \cos\theta + i\sin\theta,$$

所以

$$n\phi = \theta_0 + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

复数的各个复数根为

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

从而得到复数 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个不同的复数根 $w_0, w_2, \cdots, w_{n-1}$.

例 .1

求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解: $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\rho=r^{\frac{1}{4}}=\sqrt[8]{2}$, 所以

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\ (k=0,1,2,3).$$

复数的四个根为

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right), k = 0$$
$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right), k = 1$$
$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right), k = 2$$
$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right), k = 3.$$

几何解释是: 这四个根是中心在原点, 半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆的内接正方形的四个顶点, 并且 $w_1 = iw_0, w_2 = -w_0, w_3 = -iw_0$.

目录

点集概念

定义 .2

1、邻域：以 z_0 为心，ρ 为半径的圆内部所有点的集合，可用圆域 $|z-z_0|<\rho$ 来表示，也可用 $U(z_0)$ 或者 $N(z_0)$ 表示 z_0 的邻域，也可以记为 $U_\rho(z_0)=\{z||z-z_0|<\rho\}$ 或者 $N(z_0)=\{z||z-z_0|<\rho\}$.

定义 .3

2、内点、外点：设 E 为平面点集，对任意 $z_0\in E$，若存在 $U(z_0)\in E$，z_0 及其邻域全属于 E，则称 z_0 为 E 的内点. 若 z_0 及其邻域不属于 E，称 z_0 为 E 的外点.

定义 .4

界点和边界 **3**、界点和边界: 对于 $z_0, z_1 \in U(z_0, \rho) \subset E$, 若存在 $z_1 \in U(z_0, \rho) \cap E$, 且存在 $z_2 \notin \{U(z_0, \rho)\} \cap \{z_2 \in E\}$, 称点 z_0 为 E 的边界点, 全体边界点组成边界曲线 C. C 的方向按规定逆时针为正, 顺时针为负.

定义 .5

4、有界点集, 无界点集: 若平面点集 E 能用半径为 R 的圆包含, 则称 E 为有界点集, 若平面点集 E 不能用半径为 R 的圆包含, 则称 E 为无界点集.

定义 .6

连通集和开集 5、连通集: 在区域 D 中的任意两点 z_1, z_2 可用属于 D 的折线连接, 则称 D 为连通集.

定义 .7

6、开集: D 中的点集全是 D 的内点, 则称 D 为开集.

区域

定义 .8

1、区域: 连通的开集称为区域. 连通区域的示意见图 3.

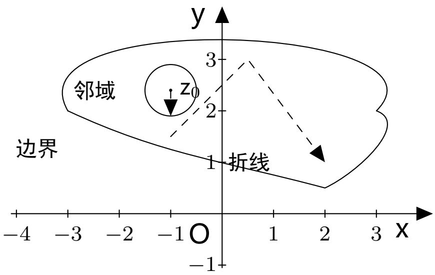

图 3: 连通区域

定义 .9

2、有界区域、无界区域：若能以一个圆心在圆点，半径为 R 的圆包含的区域，称为有界区域，否则，称为无界区域. 边界的示意见图 3. 区域的边界可能是由多条曲线和一些孤立点组成 (见图 4). 对于 D, $\forall z \in D$, $|z| \le M \in \mathbb{Z}^+$.

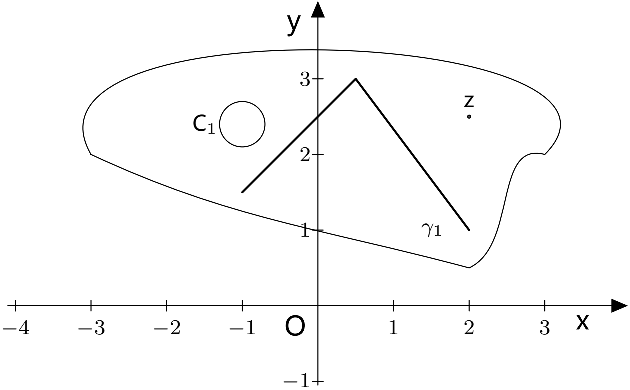

图 4: 连通区域

定义 .10

闭区域: 区域 D 和 D 的边界 (∂D) 一起构成闭区域, 记作 $\bar{D} = D \cup \partial D$.

可以得到: $|z - z_0| \leq R$ 为有界区域. 而 $\operatorname{Im} z \geq 0$ 为无界区域.

简单曲线

凡没有重复点的连续曲线（或称为约当曲线).

定义 .11

简单闭曲线: 对于曲线 $Z(t), \alpha \leq t \leq \beta$, 若曲线 $Z(t)$ 满足 $Z(\alpha) = Z(\beta)$ 的简单曲线称为简单闭曲线. 简单闭曲线 (图 5). 简单开曲线 (图 6). 不简单、闭曲线 (7). 不简单、开曲线 (9).

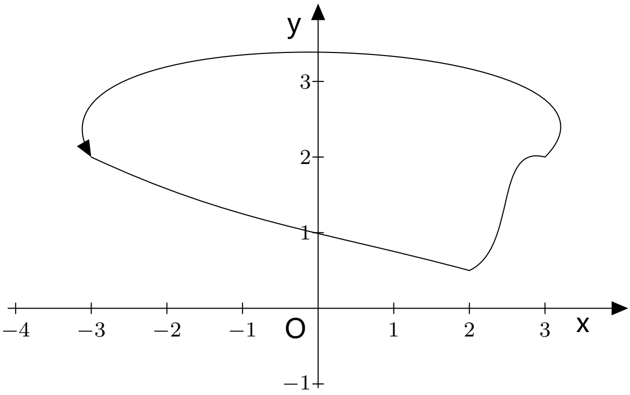

图 5: 简单闭曲线

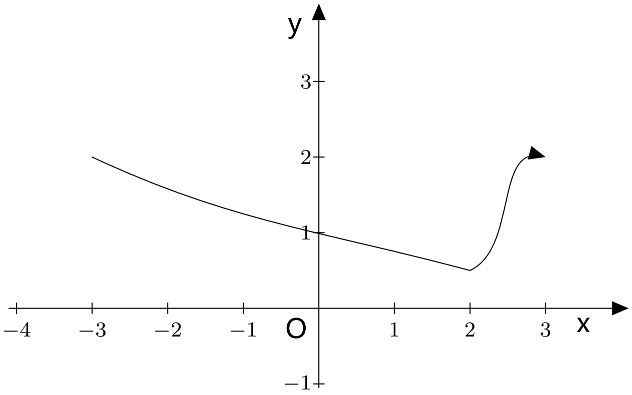

图 6: 简单开曲线

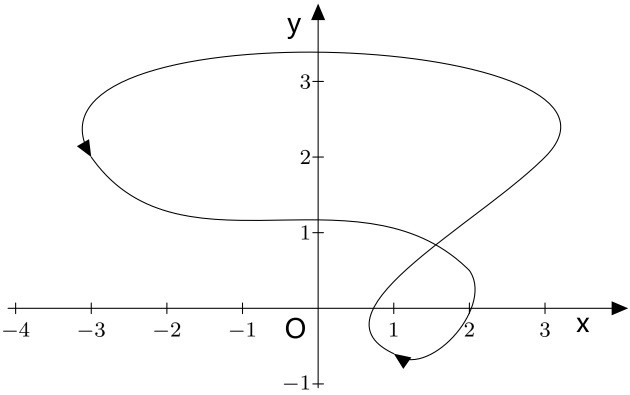

图 7: 不简单、闭曲线

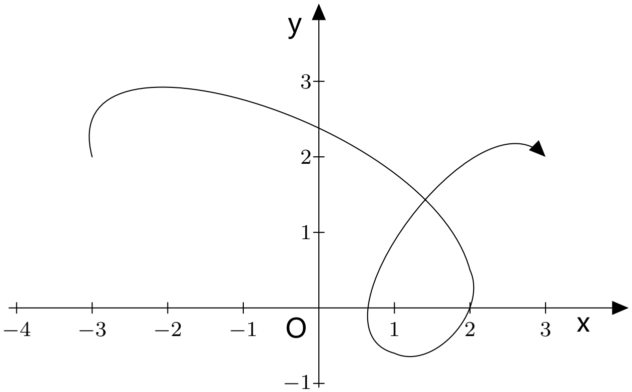

图 8: 不简单、开曲线

光滑曲线

定义 .12

若简单曲线 C: $Z = Z(t) = x(t) + iy(t)$, 在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 内具有连续导数, 即 $Z'(t) = x'(t) + iy'(t), z'(t) \neq 0$, 称曲线 C 为光滑曲线.

单连通域, 多连通域（复连通域)

定义 .13

(单连通域): 若 D 内的任意简单闭曲线所围成的区域都是属于 D 的, 则称 D 为单连通域.

定义 .14

非单连通域称为多连通域.

单连通: 一块铁板, 没有洞; 面包片: 被蚂蚁咬了好多洞. 就像分形图形中的谢尔宾斯基地毯.

注解

一条简单曲线的内部是单连通区域 (图 9).

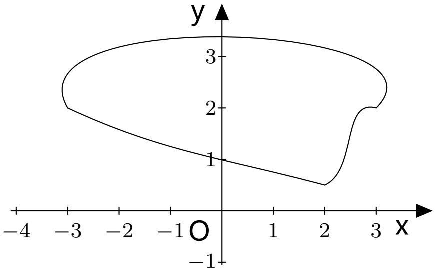

图 9: 单连通区域

例 .1

$|z - z_0| \le r^2$ 为单连通域, 而 $r \le |z - z_0| \le R$ 为多连通域 (图 10).

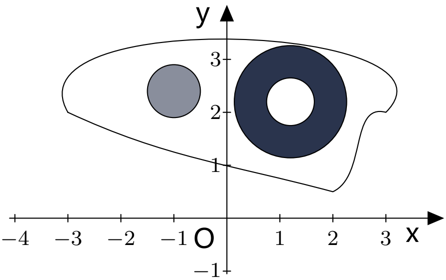

图 10: 多连通区域

扩充复平面的无穷远点

扩充复平面以 ∞ 为内点, 且它是唯一的无边界的区域 (图 12)。

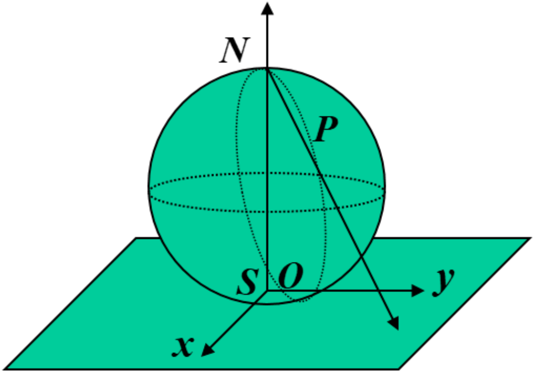

图 11: 复球面和扩充复平面.

曲线应用——作为拟合曲线

用于复函数上的各种积分区域 (二维数据为例，图 12)。

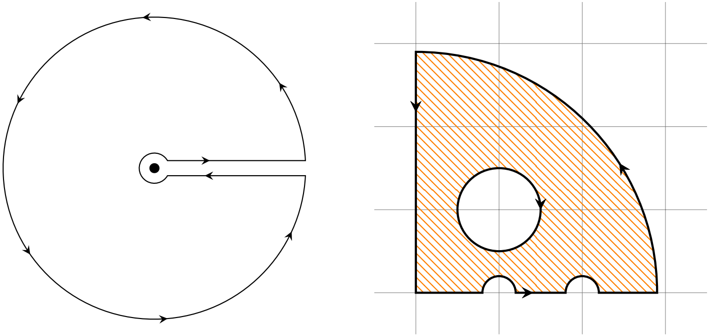

图 12: 复函数的积分区域

曲线应用——作为拟合曲线

支持向量机，原理就是找出支持向量拟合出的最优分类曲线 (二维数据示例，图 13)。

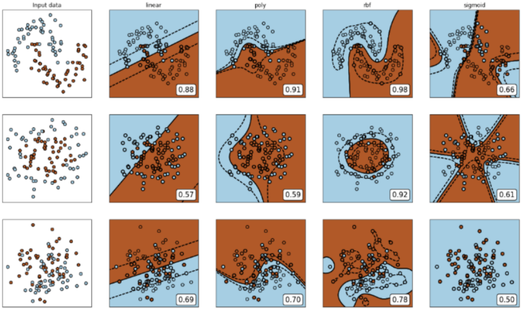

图 13: SVM 算法中的曲线

曲线应用——作为拟合曲线

给定高斯分布的约束，如分布的个数，则可自动迭代拟合出最优的两个高斯分布 (可以直接用 matlab 自带的函数 gmdistribution.fit 和 fitgmdist 做高斯混合分布拟合，图 14)。

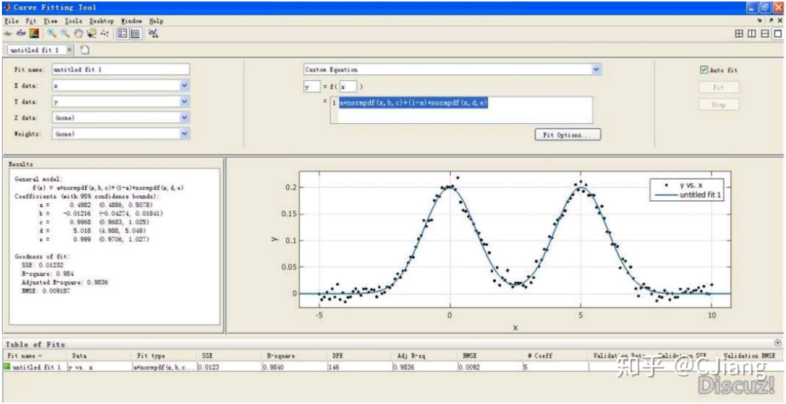

图 14: 估计密度曲线——最大似然

曲线应用——模糊主动轮廓模型

用于图像分割和轮廓提取，模糊主动轮廓模型是主流，包括自适应能量偏移场、伪层集、能量型局部主动模糊轮廓、能量型全局主动模糊轮廓以及混合型模糊轮廓等算法模型，图 15, 图16, 图17)。

图 15: 各种噪声下的分割结果

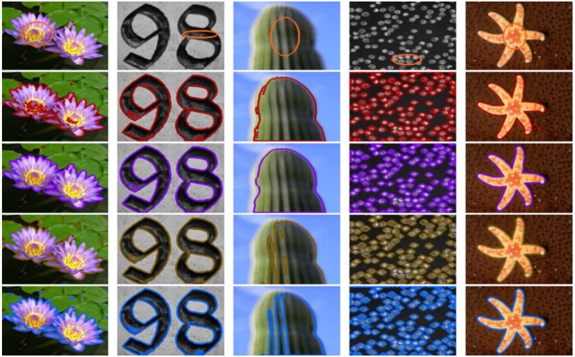

图 16: 各种噪声下的分割结果

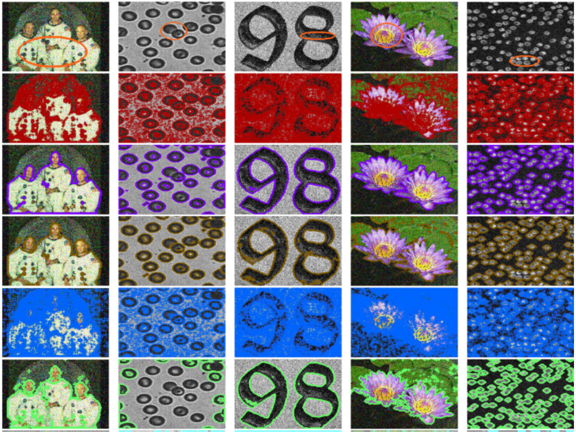

图 17: 各种噪声下的分割结果