复变函数

柯西（Cauchy)—古萨（Goursat）基本定理
复合闭路定理

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

October 7, 2020

目录

目录

复函数的积分定义

定义 .1

(有向线段) 设 C 为平面上给定的一条光滑曲线. 选定 C 的两个可能方向中的一个作为正方向, 那么我们就把 C 理解为带有方向的曲线, 称为有向曲线. 设曲线 C 的两个端点为 A 和 B, 定义从 A 到 B 的方向为正方向, 那么从 B 到 A 的方向为负方向, 记为 C^-.

设函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 上, C 为在区域 D 内起点为 α, 终为 β 的一条光滑有向曲线. 把曲线 C 任意分成 n 个弧段, 设分点为

$$\alpha = z_0, z_1, z_2 \ldots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n = \beta.$$

在每个弧段 $z_{k-1}z_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 上任意取一点 ζ_k, $\zeta_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$, 并作出和式

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

定义 .2

记 $\Delta s_k = z_{k-1}z_k$ 的长度, $\delta = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$. 当 n 无限增加, 且 δ 趋于零时, 若不论对 C 的何种分法及 ζ_k 的何种取法, S_n 有唯一极限, 那么称这极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分. 记作

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

如果 C 为闭曲线, 那么沿此闭曲线的积分记作 $\oint_C f(z)dz$.
积分存在条件及其计算法

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \alpha \le t \le \beta.$$

如果 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 D 上处处连续, 那么 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 均为 D 上的连续函数.

设 $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, 由于

$$\begin{aligned}\Delta z_k = z_k - z_{k-1} &= x_k + iy_k - (x_{k-1} + iy_{k-1}) \\ &= (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) \\ &= \Delta x_k + i\Delta y_k.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k &= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)]\,(\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] \\ &\quad + i\sum_{k=1}^{n} [v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]\,,\end{aligned}$$

复变函数积分存在定理

上式两边取极限可得

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k &= \int_C f(z)dz \\ &= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy.\end{aligned}$$

定理 .1

(复变函数积分存在定理): 若函数 $f(z)$ 连续且 C 是光滑曲线, 则积分 $\int_C f(z)dz$ 必定存在.

定理 .2

复变函数积分的计算公式: $\int_C f(z)dz$ 可以通过两个实二元函数的线积分来计算.

由条件 $dz = dx + idy = (x'(t) + iy'(t))dt$, 由线积分的计算方法, 我们可以选取参数

$$x = x(t), y = y(t), \ (\alpha \le t \le \beta),$$

代入上述积分, 可得

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)[x'(t) + iy'(t)]dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))[x'(t) + iy'(t)]dt$$
$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt.$$

所以有

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt.$$

证明 $\left|\int_C (x^2 + iy^2)dz\right| \leq \pi$, C 为连接点 $-i$ 到 i 的右半圆周.

证明: 因为 $x^2+y^2=1$ 也在 C 上, 而

$$\left|x^2+iy^2\right|=\sqrt{x^4+y^4}\leq\sqrt{(x^2+y^2)^2}\leq x^2+y^2,$$

故在 C 上, $\left|x^2+iy^2\right|\leq 1$, 而 C 的长度为 π。

由积分估计值式的性质, 有

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\, ds \leq ML$$

(在 C 上有 $|f(z)| \leq M$, L 为 C 的长度), 所以有

$$\left|\int_C (x^2+iy^2)dz\right| \leq \int |x^2+iy^2|\, ds \leq \int_C 1\cdot ds = \pi,$$

所以原结论成立.

复变函数中得到的积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2+2Bx-C}dx = \sqrt{\pi/A}\, e^{-\frac{(AC-B^2)}{A}}. \qquad (1)$$

复积分的计算

例 .1

计算 $\int_C z dz$, 其中 C 为从原点 0 到点 $3+4i$ 的直线段.

解: 将直线段方程写为

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases}, 0 \le t \le 1, z = (3+4i)t, dz = (3+4i)dt,$$ 于是

$$\int_C z dz = \int_0^1 (3+4i)^2 t dt = (3+4i)^2 \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}(3+4i)^2.$$

如果考虑积分路径是由原点到点 $(3,0)$ 再到点 $(3,4)$, 即 $\int_C z dz = \int_{C_1} z dz + \int_{C_2} z dz$, 则计算出的积分值也等于 $\frac{1}{2}(3+4i)^2$.

例 .2

计算 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中 C 是以 z_0 为心，r 为半径的正向圆周 (图4)，$n \in \mathbb{Z}$.

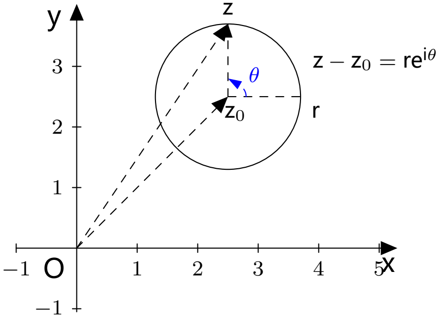

图: 积分曲线 $|z - z_0| = r$

解: 取 $z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$\oint_c \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^n e^{in\theta}} d\theta$$
$$= \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta.$$

当 $n = 0$ 时,

$$\frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i;$$

当 $n \neq 0$ 时,

$$\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)d\theta = 0.$$

所以 $\displaystyle\oint_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}.$

例 .3

计算 $\int_C \bar{z}dz$ 的值, 其中 C 是如下两种曲线: 1) 沿从 $(0,0)$, $(1,1)$ 的线段; 2) 沿从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 再到 $(1,1)$ 的折线.

解:

- 选取线段的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$, $0 \le t \le 1$, 则 $\bar{z}=t-it$, $dz=(1+i)dt$, $\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (t-it)(1+i)dt = \int_0^1 2tdt = 1$;

例 .4

计算 $\int_C \bar{z}dz$ 的值, 其中 C 是如下两种曲线: 1) 沿从 $(0,0)$, $(1,1)$ 的线段; 2) 沿从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 再到 $(1,1)$ 的折线.

解:

- 选取线段的参数方程为 $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, 0 \le t \le 1$, 则 $\bar{z} = t - it$, $dz = (1+i)dt$, $\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (t-it)(1+i)dt = \int_0^1 2tdt = 1$;
- 积分曲线 C 是由 C_1 和 C_2 组成, 选取线段 C_1 的参数方程为

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, 0 \le t \le 1,$$

$z = x + iy = t$, $dz = dt$. 选取线段 C_2 的参数方程为

$C_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, 0 \le t \le 1$, $z = x + iy = 1 + it$, $dz = idt$, 则

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{C_1} \bar{z}dz + \int_{C_2} \bar{z}dz = \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1 - it)idt$$
$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + i\right) = 1 + i.$$

积分的性质

- $\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz.$
- $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$, (k 为常数).
- 若 C 是由分段光滑曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 组成, 则有

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} f(z)dz.$$

- $\int_C [f(z) \pm g(z)]dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz.$
- 设曲线 C 的长度为 L, 函数 f(z) 在 C 上满足 $|f(z)| \leq M$, 那么 $\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|ds \leq ML.$ （积分估计值式)

证明

证明: 因为 $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\varsigma_k)\Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\varsigma_k)|\Delta s_k$, 两边同时取极限, 可得

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\, ds \leq M\int_C ds = ML.$$

例 .5

设积分曲线 C 为从原点到点 $3+4i$ 的直线段, 试求积分 $\oint_C \frac{1}{z-i}dz$ 绝对值的一个上界.

解: 积分曲线 C 的方程为 $z=(3+4i)t,\ 0\le t\le 1$. 由估值不等式

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}dz\right| \le \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right| ds.$$

在 C 上, $\left|\frac{1}{z-i}\right| = \left|\frac{1}{3t+(4t-1)i}\right| = \frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}} \le \frac{5}{3}$, 从而有

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}dz\right| \le \frac{5}{3}\int_C ds,$$

而 $\int_C ds = 5$, 所以 $\oint_C \frac{1}{z-i}dz \le \frac{25}{3}$.

例 .6

计算 $\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$, 其中 C 为如下几种积分曲线: (1) 从原点到点 $1+\mathrm{i}$ 的直线段; (2) 抛物线 $y=x^2$ 从原点到点 $1+\mathrm{i}$ 的弧段; (3) 从原点沿 x 轴到点 1 再到点 $1+\mathrm{i}$ 的折线.

解: (1) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+\mathrm{i}t\,(0\le t\le 1),$$

于是

$$\mathrm{Re}\,z=t,\quad \mathrm{d}z=(1+\mathrm{i})\mathrm{d}t,$$

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z=\int_0^1 t(1+\mathrm{i})\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i});$$

(2) 积分路径的参数方程为

$$z(t) = t + it^2 \quad (0 \le t \le 1),$$

于是

$$\mathrm{Re}z = t,\ dz = (1 + 2ti)dt,$$

$$\int_C \mathrm{Re}z dz = \int_0^1 t(1 + 2it)dt = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{2i}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i;$$

(3) 积分路径由两段直线段构成. x 轴上直线段的参数方程为

$$z(t) = t\,(0 \leq t \leq 1),$$

于是由 $z = t \Rightarrow dz = dt$, 由此得 1 到 $1 + i$ 直线段的参数方程为

$$z(t) = 1 + it,\ (0 \leq t \leq 1),$$

于是

$$\operatorname{Re} z = 1, dz = idt,$$

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 tdt + \int_0^1 1 \cdot idt = \frac{1}{2} + i.$$

例 .7

计算 $\int_C |z|\,dz$ 其中 C 为圆周 $|z|=2$.

解: 积分路径 C 的参数方程为

$$z=2e^{i\theta}\ (0\le\theta\le 2\pi),\ dz=2ie^{i\theta}d\theta,$$

$$\int_C |z|\,dz=\int_0^{2\pi}2\cdot 2ie^{i\theta}d\theta=4i\int_0^{2\pi}(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta$$
$$=0.$$

目录

柯西—古萨定理

柯西（Cauchy)—古萨基本定理是关于复平面上全纯函数的路径积分的一个基本定理. 柯西积分定理说明，如果从一点到另一点有两个不同的路径, 而函数在两个路径之间处处是全纯的, 则函数的两个路径积分是相等的.

柯西—古萨定理的等价描述

单连通闭合区域上的全纯函数沿着任何可求长闭合曲线的积分是 0.

例子中的路径

有的积分与路径无关, 有的积分却与路径有关, 我们自然会想到, 在什么条件下, 积分与路径无关呢?

大家知道, 实变函数的曲线积分 $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在单连通区域 D 内与路径 C 无关（只与起点终点有关), 它等价于沿 D 内任意一条闭曲线的积分值为零. 只要函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导, 且满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 则积分与路径无关. 这个结论对复变函数也完全成立.

格林公式: $\oint_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$

定理 .3

柯西定理 如果函数 f(z) 在单连通区域 D 内处处解析, 则沿 D 内任意一条闭曲线的积分值为零: $\oint_C f(z)dz = 0$, 其中 C 为 D 内的任意一条简单闭曲线.

柯西定理证明 1

证: 不是一般性, 不妨设 $\forall z \in D, f'(z) \neq 0$, 且在 D 内连续,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

所以 u, v 偏导连续, 且满足 C—R 条件; 又

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy,$$

柯西定理证明 1

由实函数的积分与路径无关, 下述积分

$$\oint_C u dx - v dy = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= 0,$$

同样地, 另一个积分

$$\oint_C v dx + u dy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

所以有 $\oint_C f(z)dz = 0$.

柯西定理推论

推论 1 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则积分 $\int_C f(z)dz$ 仅与曲线 C 的起点和终点有关, 而与积分的路径无关.

推论 2 设 C 是单连通区域 D 的边界, 函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 在 C 上连续, 则 $\oint_C f(z)dz = 0$.

Example

计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3}dz$.

例 2-围线积分

Example

计算积分 $\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}dz.$

解:

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right),$$

因为函数 $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z+i}$ 都在 $|z-i| \le \frac{1}{2}$ 上解析, 根据柯西—古萨定理得

$$\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}dz = \oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right)dz$$

例 2-围线积分

解:

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}dz = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z} - \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{2(z+i)} - \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{2(z-i)}$$

$$= -\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}dz$$

$$\underline{\underline{z = i + \frac{1}{2}e^{i\theta}}} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{1}{2}ie^{i\theta}}{\frac{1}{2}e^{i\theta}}d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i = -\pi i.$$

例 3

Example

证明: 任意闭曲线的积分 $\oint_C (z-\alpha)^n dz = 0, (n \neq -1)$.

例 3

Example

证明: 任意闭曲线的积分 $\oint_C (z-\alpha)^n dz = 0, (n \neq -1)$.

Proof.

当 $n \in \mathbb{Z}^+$ 时, 函数 $(z-\alpha)^n$ 在 z 平面上解析. 由柯西—古萨定理, $\oint_C (z-\alpha)^n dz = 0$

当 $n \in \mathbb{Z}^-, n \neq -1$ 时, 函数 $(z-\alpha)^n$ 在除点 α 外的 z 平面上解析. 由柯西—古萨定理, 对围线 C,

(1) 若围线 C 不包括 α 点, 函数 $(z-\alpha)^n$ 在 C 围成的区域解析. 由柯西—古萨定理, 积分 $\oint_C (z-\alpha)^n dz = 0$.

(2) 若围线 C 包括 α 点, 则令 $z = \alpha + re^{i\theta}, \theta \in (-\pi, \pi]$, 积分 $\oint_C (z-\alpha)^n dz = \int_{-\pi}^{\pi} r^n e^{in\theta} rie^{i\theta} d\theta = r^{n+1} i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = 0, (n+1 \neq 0)$. □

目录

柯西—古萨基本定理——推广到多连通区域.

设函数 $f(z)$ 在多连通区域 D 内解析, C 为 D 内的任意一条简单闭曲线. 如果 C 的内部完全含于 D, 从而 $f(z)$ 在 C 及其内部解析, 可知

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

但当 C 的内部不完全含于 D 时, 上面等式不一定成立.

多连通区域 D

假设 C 和 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线, C_1 在 C 的内部, 而且以 C 及 C_1 为边界的区域 D_1 完全含于 D. 作两条不相交的弧段 $\widehat{AA'}$ 和 $\widehat{BB'}$, 它们依次连接 C 上某一点 A 到 C_1 上的一点 A', 以及 C_1 上某一点 B' (异于 A') 到 C 上的一点 B, 而且此两弧段除去它们的端点外全部含于 D_1. 这样就使得 $AEBB'E'A'A$ 及 $AA'F'B'BFA$ 形成两条全在 D 内的简单闭曲线, 它们的内部完全含于 D (图 2).

多连通区域 D 示意

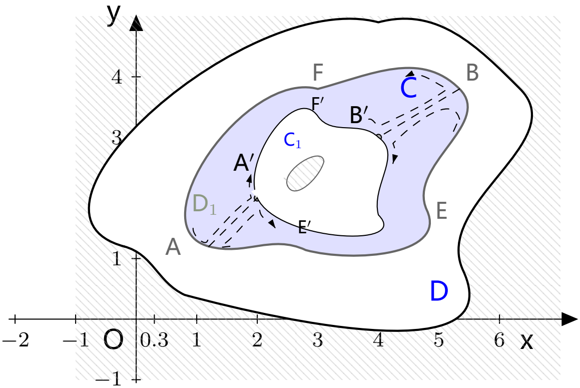

图: 多连通区域 D 上的复合闭路

多连通区域 D 的证明-1

根据上面的操作, 有

$$\oint_{AEBB'E'A'A} f(z)dz = 0, \oint_{AA'F'B'BFA} f(z)dz = 0. \tag{2}$$

上面两式相加得

$$\oint_{C} f(z)dz + \oint_{C_1^-} f(z)dz + \oint_{\widehat{AA'}} f(z)dz + \oint_{\widehat{A'A}} f(z)dz + \oint_{\widehat{B'B}} f(z)dz + \oint_{\widehat{BB'}} f(z)dz = 0,$$

即

$$\oint_{C} f(z)dz + \oint_{C_1^-} f(z)dz = 0, \tag{3}$$

多连通区域 D 的证明-2

或者

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz. \tag{4}$$

式(3)说明, 如果我们把如上两条简单闭曲线 C 及 C_1^- 看成是一条复合闭路 Γ, 而且 Γ 的正方向规定为: 外面的封闭曲线 C 按逆时针进行, 内部的闭曲线 C_1^- 按顺时针进行 (就是沿 Γ 的正方向进行时, Γ 的内部总在 Γ 的左手边), 那么

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

复合闭路定理

定理 .4

(复合闭路定理): 设 $f(z)$ 在多连通区域 D 内解析, C 为 D 内任意一条简单闭曲线, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是 C 内的简单闭曲线, 它们围成的区域互不包含且互不相交, 并且以 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为边界的区域全含于 D 内 (图 3), 则

① $\oint\limits_{C} f(z)\,dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz$, 其中 C 与 C_k 均取正向;

② $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$, 其中 Γ 由 C 及 C^- 所组成的复合闭路, 即 $\Gamma = C + C^-$.

多连通区域 D

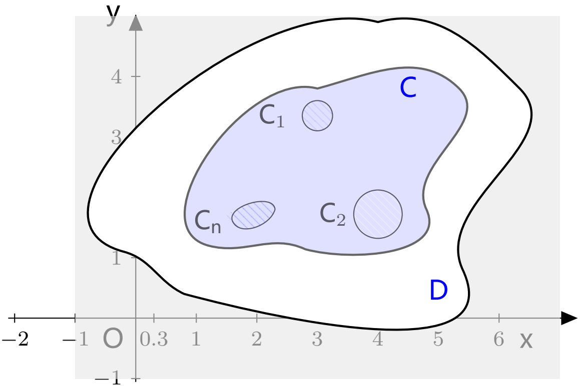

图: 多连通区域 D 上的复合闭路

由式(4)可以看出, 在区域内的一个解析函数沿着闭曲线的积分, 不会因为闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值, 只要在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$ 的不解析点 (奇点). 基于这一事实, 得到如下的闭路变形原理.

目录

闭路变形原理

定理 .5

(闭路变形原理): 一个在区域 D 内的解析函数 $f(z)$ 沿闭曲线 C 的积分, 不因 C 在 D 内作连续变形而改变它的积分值, 只要在变形过程中 C 不经过使 $f(z)$ 不解析的奇点.

例 4

例 .1

计算 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 C 是以 z_0 为心, r 为半径的正向圆周 (图4), $n \in \mathbb{Z}$.

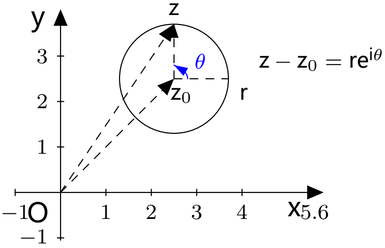

图: 积分曲线 $|z-z_0| = r$

例 5

解: 由本章的例 10 知, 当 C 为以 z_0 为中心的正向圆周时, $\oint_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, 所以, 根据闭路变形原理, 对于包含 z_0 的任何一条正向简单闭曲线 Γ 都有: $\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$.

例 .2

计算 $\oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$ 的值, Γ 为包含圆周 $|z| = 1$ 在内的任何正向简单闭曲线.

解: 我们知道, 函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内除 $z = 0$ 和 $z = 1$ 两个奇点外是处处解析的.

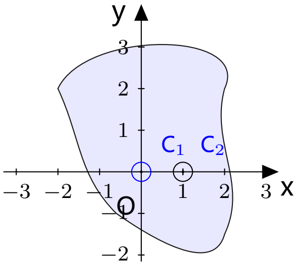

图: 奇点 $z = 0$ 和 $z = 1$

图形

由于 Γ 是包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线, 因此它也包含这两个奇点. 在 Γ 内作两个互不包含也互不相交的正向圆周 C_1 与 C_2, C_1 只包含奇点 $z=0$, C_2 只包含奇点 $z=1$ (图5), 那么根据复合闭路定理, 有

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}dz &= \oint_{C_1}\frac{2z-1}{z^2-z}dz+\oint_{C_2}\frac{2z-1}{z^2-z}dz \\
&= \oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz \\
&= 0+2\pi i+2\pi i+0 \\
&= 4\pi i.
\end{aligned}$$

主要内容-小结

本课我们主要讲解了积分的原始定义、存在条件以及简单积分的计算方法. 应注意复变函数的积分有跟微积分学中的线积分完全相似的性质. 本次课中应该掌握复积分的计算和柯西—古萨基本定理:

定理 .6

如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 B 内处处解析, 那么函数 $f(z)$ 沿 B 内任何一条封闭曲线 C 的积分为 0:

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

并注意定理成立的条件.

复合闭路定理与闭路变形原理是复积分中的重要定理, 掌握并能灵活应用它是本章的难点.
常用结论:

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

复函数 $f(z)$ 的积分定义 $\int_C f(z)dz$ 与一元函数定积分定义不一致. 若 C 是实轴上的区间 $[\alpha, \beta]$, 则 $\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(x)dx$. 如果 $f(x)$ 是实值的, 即为一元实函数的定积分. 一般不能把起点 α, 终点 β 的函数 $f(z)$ 的积分记作 $\int_\alpha^\beta f(z)dz$. 这是因为 $\int_\alpha^\beta f(z)dz$ 是一个线积分, 要受积分路线的限制, 必须记作 $\int_C f(z)dz$.

1. 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z-3} dz$.

解:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{z-3} dz =$$

第三章习题

P99: 1. (3); 5. 6. (1)、(3)、(5); 7. (2)、(3)、(5)、(6)、(7)、(8); 8. (1)、(5); 9. (2)、(4); 29. 30.