# 教　　案　　纸

- 2019/9/7
- 互动提问

## 理论课 3　§2.1-2.2 解析函数与函数解析的充要条件

**I　组织教学**

1、集中学生注意力;

2、清查学生人数;

3、维持课堂纪律;

**II　复习导入及主要内容**

1、上次作业讲评

2、上次内容总结

3、本次内容简介

4、重点: 复函数的导数定义、求导法则及可微性; 解析函数的概念.

5、难点: 多值函数产生多值性的原因.

如何找出支点以及在什么样的区域内多值函数可以划分为单值的解析分支; 从几何意义上描述解析函数的特征.

**III　教学内容及过程**

### 一、　解析函数

1、　复变函数的导数

**定义 .30**

(复变函数的导数) 设函数 $w=f(z)$ 是定义在区域 $D$ 上的复函数. $z_0$ 与 $z_0+\Delta z$ 均为 $D$ 内的点, 若极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在, 则称 $f(z)$ 在 $z_0$ 处可导, 这个极限值称为 $f(z)$ 在 $z_0$ 处的导数, 记为

$$f'(z_0)=\frac{dw}{dz}\Big|_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \tag{20}$$

也就是说, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 相应地有一个 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $0<|\Delta z|<\delta$ 时, 总有

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\right|<\varepsilon.$$

应当注意, 定义中 $\Delta z\to 0$ 的方式是任意的. 如果 $f(z)$ 在 $D$ 内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 $D$ 内可导.

**例 .1**

求 $f(z)=z^2, z\in\mathbb{C}$ 的导数.

**解:** 因为

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z.\end{aligned}$$

所以 $f'(z)=2z$, 即函数 $f(z)=z^2, z\in\mathbb{C}$ 在全平面均可导.

**例 .2**

问 $f(z)=x+i2y$ 是否可导?

**解:** 这里

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-x-2yi}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}.\end{aligned}$$

设 $\Delta z$ 沿着平行于 $x$ 轴的方向趋于 0, 因而 $\Delta y=0, \Delta z=\Delta x$. 这时极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

设 $\Delta z$ 沿着平行于 $y$ 轴的方向趋于 0, 因而 $\Delta x=0$. 这时 $\Delta z=i\Delta y$, 极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\Delta yi}{\Delta y}=2.$$

所以函数 $f(z)=x+i2y$ 不可导.

**例 .3**

讨论函数 $f(z)=\mathrm{Im}z$ 的可导性.

**解:**

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta z}&=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\mathrm{Im}(z+\Delta z)-\mathrm{Im}z}{\Delta z}\\&=\frac{\mathrm{Im}z+\mathrm{Im}\Delta z-\mathrm{Im}z}{\Delta z}=\frac{\mathrm{Im}\Delta z}{\Delta z}\\&=\frac{\mathrm{Im}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}\\&=\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},\end{aligned}$$

当点沿平行于实轴的方向 $(\Delta y=0)$ 而使 $\Delta z\to 0$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=0,\end{aligned}$$

当点沿平行于虚轴的方向 $(\Delta x=0)$ 而使 $\Delta z\to 0$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\&=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\\&=\frac{1}{i},\end{aligned}$$

当点沿不同的方向使 $\Delta z\to 0$ 时, 极限值不同. 故函数 $f(z)=\mathrm{Im}z$ 在复平面上处处不可导.

2、 可导与连续

● $u(x,y)=x\in C[a,b], v(x,y)=y\in C[a,b]$

从例 2 可以看出, 函数 $f(z)=x+2yi$ 处处连续却处处不可导. 然而, 反过来我们容易证明可导必定连续.

事实上, 由 $f(z)$ 在 $z_0$ 可导的定义, 对于任意给定的 $\epsilon>0$, 相应地有一个 $\delta>0$, 使得当 $0<|\Delta z|<\delta$, 有

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\right|<\varepsilon.$$

令

$$\rho(\Delta z)=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0),$$

那么

$$\lim_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0.$$

由此得

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f^{'}(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z. \tag{21}$$

所以

$$\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0).$$

函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 连续.

3、 求导法则

类似于实变函数的求导法则, 主要复函数的导数法则有

1) $(c)' = 0$, $c$ 为常数.

2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

3) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$.

4) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

5) $[\frac{f(z)}{g(z)}]' = \frac{1}{g^2(z)}[f'(z)g(z) - f(z)g'(z)], g(z) \neq 0$.

6) $[f(g(z))]' = f'(w)g'(z), w = g(z)$.

7) $f'(z) = \frac{1}{\phi'(w)}$, 其中 $w = f(z), z = \phi(w)$ 互为反函数的单值函数, 且 $\phi'(w) \neq 0$.

4、 微分的概念

复变函数的微分形式上类似于一元实变函数的微分概念.

**定义 .31**

设函数 $w = f(z)$ 在 $z_0$ 可导, 则由 (21)可得

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f^{'}(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z,$$

其中 $\lim_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0$. 因此, $|\rho(\Delta z)\Delta z|$ 是 $|\Delta z|$ 的高阶无穷小, 而 $f^{'}(z_0)\Delta z$ 是函数 $w = f(z)$ 关于变量 $\Delta w$ 的线性部分. 称 $f^{'}(z_0)\Delta z$ 为函数 $w = f(z)$ 在 $z_0$ 的微分, 记作

$$dw = f^{'}(z_0)\Delta z. \tag{22}$$

如果函数在 $z_0$ 的微分存在, 则称函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 可微.

♡

**注解 20** 当 $f(z)=z$ 时，由(22)得 $dz=\Delta z$. 于是(22)变为

$$dw=f'(z_0)dz,$$

即

$$f'(z_0)=\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}.$$

**定义 .32**

如果函数 $w=f(z)$ 在区域 $D$ 内处处可微，则称 $f(z)$ 在 $D$ 内可微.

## 二、 解析函数的概念

**定义 .33**

如果函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 的邻域内 $\mathcal{N}_{z_0}(\epsilon)$ 处处可导，那么称 $f(z)$ 在 $z_0$ 点**解析**. 如果 $f(z)$ 在区域 $D$ 内每一点解析，则称 $f(z)$ 是 $D$ 内的一个**解析函数** *(全纯函数或者正则函数)*.

**定义 .34**

若函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 点不解析，称 $z_0$ 为函数 $f(z)$ 的**奇点**.

**例 .4**

讨论 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

**解:** 由于

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}\\&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)(\bar z_0+\overline{\Delta z})-z_0\bar z_0}{\Delta z}\\&=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\bar z_0+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right),\end{aligned}$$

当 $z_0=0$ 时，这个极限是零；当 $z_0\neq 0$ 时，令 $z_0+\Delta z$ 沿直线

$y-y_0=k(x-x_0)$ 趋于 $z_0$, 由于 $k$ 的任意性,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-\Delta y i}{\Delta x+\Delta y i}=\frac{1-\frac{\Delta y}{\Delta x}i}{1+\frac{\Delta y}{\Delta z}i}=\frac{1-ki}{1+ki}$$

不趋于一个确定的值, 所以极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 不存在.

因此, $f(z)=|z|^2=0$ 处可导, 而在其他点都不可导, 根据解析性定义, 它在复平面上处处不解析.

**例 .5**

讨论函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 的解析性.

**解:** 因为 $w$ 在复平面内除点 $z=0$ 外处处可导, 且 $\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{z^2}$, 所以在除 $z=0$ 外的复平面内, 函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 处处解析, $z=0$ 是它的奇点.

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{1}{z+\Delta z}-\frac{1}{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{z(z+\Delta z)}$$
$$=-\frac{1}{z^2}.$$

**定理 .7**

两个解析函数的和、差、积、商都是解析函数(除去分母为零的点); 解析函数的复合函数仍为解析函数.

**例 .6**

讨论函数 $f(z)=z\mathrm{Re}(z)$ 的可导性与解析性.

- $\Delta z$ 称作关于 $z$ 的增量

**解:** 当 $z=0$ 时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\mathrm{Re}(\Delta z)}{\Delta z}=0,$$

故函数 $f(z)=z\mathrm{Re}(z)$ 在 $z=0$ 处可导.

当 $z \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}(z+\Delta z)-z\mathrm{Re}(z)}{\Delta z}\\ &= \frac{z}{\Delta z}[\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}(z)]+\mathrm{Re}(z+\Delta z)\end{aligned}$$

令 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = z\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + x + \Delta x,$$

因为

$$\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = x,$$
$$\lim_{\substack{\Delta y=0\\ \Delta x\to 0}} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = z + x,$$

所以

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

不存在. 即当 $z \neq 0$ 时, 函数 $f(z)$ 不可导.

因此, 函数 $f(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导, 而在其他点都不可导. 根据定义, 它在复平面内处处不解析.

**解:** 另法:

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}(z+\Delta z)-z\mathrm{Re}(z)}{\Delta z}\\ &= \frac{z}{\Delta z}[\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}(z)]+\mathrm{Re}(z+\Delta z)\end{aligned}$$

令 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = z\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + x + \Delta x,$$

因为

$$\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = x,\ \lim_{\substack{\Delta y=0\\ \Delta x\to 0}} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = z + x,$$

所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

由 $x\neq z+x\Rightarrow z\neq 0$, 知导数不存在. 即当 $z\neq 0$ 时, 函数 $f(z)$ 不可导.

若 $x=z+x\Rightarrow z=0$, 可以看出在 $z=0$ 存在导数, 即函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 可导.

因此, 函数 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 而在其他点都不可导. 根据定义, 它在复平面内处处不解析.

**例 .7**

**思考题**: 复变函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 可导与在 $z_0$ 解析有无区别?

**解**: $f(z)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 解析必有 $f(z)$ 在 $z_0$ 可导, 反之不成立.

**反例**: $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 可导, 但是 $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 处不解析.

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{|\Delta z|^2-0}{\Delta z}=0.$$

对于 $\forall z_0\in N_\delta(0)-\{0\}$,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)\overline{(z_0+\Delta z)}-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}\\&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z_0\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}+\bar{z}_0.\end{aligned}$$

当 $\Delta z$ 沿 $x$ 轴趋近于 0 时, $\Delta z=\Delta x$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z_0\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\bar{z}_0+\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x z_0}{\Delta x}+x_0+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=2x_0.$$

当 $\Delta z$ 沿 $y$ 轴趋近于 0 时, $\Delta z=i\Delta y$,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z_0\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\bar{z}_0+\overline{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-i\Delta y z_0}{i\Delta y}+\bar{z}_0+\lim_{\Delta y\to 0}i\Delta y=-2iy_0.$$

因此 $f(z)$ 在 $z_0$ 的去心邻域 $N_\delta(0)-\{0\}$ 内不可导, 因而不解析.

**注解 21** 由定义可知，**函数在区域内解析与在区域内可导是等价的**. 但是，**函数在一点处解析和在一点处可导是两个不等价的概念**. 就是说，函数在一点处可导，不一定有函数在该点解析. 函数在一点处解析要比函数在一点可导要求高得多.

函数的极限、连续和微商在形式上虽然与实函数中相对应的概念相仿, 但却有本质的差别, 而这些差别正是复函数引进解析函数概念以及讨论解析函数特性的基础. 又注意到复函数定义域是复平面上的点集, 因此在讨论有关概念时, 应注意到变量 $z$ 的变化路径的任意性, 应注意讨论 $z$ 的变化路径上的极限、连续等概念.

## 三、 函数解析的充要条件

在上一节中, 我们已经看到并不是每一个复合函数都是解析函数; 判别一个函数是否解析, 如果只根据解析函数的定义, 这往往是困难的, 首先需要寻找判别函数可导与否的简便而实用的方法.

下面先讨论 $f(z)$ 可导的**必要条件**.

**引理 1**

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 $D$ 内有定义, $z=x+iy$ 是 $D$ 内任意一点. 若 $f(z)$ 在 $z$ 处可导, 则 $u(x,y)$,$v(x,y)$ 满足柯西-黎曼（Cauchy-Riemann) 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

且 $f(z)$ 的导数为 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$.

**证 2** 因为复函数 $w=f(z)$ 在 $z$ 处可导，所以由导数定义，有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z},$$

其中 $\Delta w=\Delta u+i\Delta v$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, 则原式

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Big\{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)]$$
$$-[u(x,y)+iv(x,y)]\Big\}\Big/(\Delta x+i\Delta y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y},\\
&= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}\\
&\quad + \frac{i\,[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y},
\end{aligned}
$$

其中 $\Delta z$ 以任意方式趋于零, 因此可以选取两条特殊路线使 $\Delta z \to 0$.

当 $\Delta z$ 沿平行于实轴的直线趋于零, 即 $\Delta z = \Delta x, \Delta y \equiv 0$ 时, 有

$$
f'(z) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.
$$

当 $\Delta z$ 沿平行于虚轴的直线趋于零, 即 $\Delta z = i\Delta y, \Delta x \equiv 0$ 时, 有

$$
f'(z) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - i\frac{\Delta u}{\Delta y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},
$$

于是

$$
\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},
$$

比较上式两端, 即得

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.
$$

上述条件称为**柯西-黎曼条件**, 或称**柯西-黎曼方程**, 简记为 C—R 条件. 它是函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在一点可导的**必要条件**, 而不是充分条件.

**定理 .8**

设函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在其定义域 $D$ 内解析的**充分必要条件**是: $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在 $D$ 内任意一点 $z = x + iy$ 可微, 且满足柯西-黎曼条件:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y},\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

**证**　必要性在前面已经证明, 现在来证明充分性.

设 $f(z)$ 在 $D$ 内一点 $z$ 解析, 则 $f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta w=\Delta u+i\Delta v$, 由于 $u(x,y),v(x,y)$ 在 $D$ 内任一点可微, 可知

$$\begin{aligned}\Delta u&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,\\ \Delta v&=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y,\end{aligned}$$

这里 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_k=0,(k=1,2,3,4)$. 所以

$$\begin{aligned}f(z+\Delta z)-f(z)&=\Delta u+i\Delta v\\ &=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\\ &\quad+i\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y\Big)\\ &=\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Delta x+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Delta y\\ &\quad+\Big(\varepsilon_1+i\varepsilon_3\Big)\Delta x+\Big(\varepsilon_2+i\varepsilon_4\Big)\Delta y\end{aligned}$$

由 C—R 条件, 有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=i^2\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\Big)=i\Big(i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\Big),$$

所以

$$\begin{aligned}f(z+\Delta z)-f(z)=&\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)(\Delta x+i\Delta y)\\ &+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\Delta x+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\Delta y,\end{aligned}$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

因为 $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|\leq 1,\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\leq 1$, 当 $\Delta z\to 0$ 时, 上述等式取极限, 利用 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_k=0,(k=1,2,3,4)$, 因此,

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

**注解 22 柯西-黎曼条件的极坐标形式** *($r,\theta$ 形式)*

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

- $\forall z, \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\bar{z}+\Delta\bar{z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$

**例 .8**

*判别下列函数是否解析，是否可导？*
*1)* $w = \bar{z}$;
*2)* $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$;
*3)* $w = z\mathrm{Re}(z)$.

**解:** 1) 由 $z = x + iy, u = x, v = -y$, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y},$$

可知不满足柯西-黎曼方程，所以 $w = \bar{z}$ 在全平面处处不解析.

2) 因为 $u = e^x\cos y, v = e^x\sin y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y, \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y, \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y,$$

因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 由 $x, y$ 的任意性，所以函数 $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$ 在全平面处处解析.

3) 由 $w = (x+iy)x = x^2 + ixy \Rightarrow u = x^2, v = xy$, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = y, \frac{\partial v}{\partial y} = x,$$

显然，这四个偏导数处处连续，但是，只有当 $x = y = 0$ 时，它们才满足 C—R 条件. 由 $z = 0$, $w = (x+iy)x = 0$, 因而，**函数仅在 $z = 0$ 可导**，但在复平面上处处不解析.

**例 .9**

*证明函数* $f(z) = \sqrt{|xy|}$ *在点* $z = 0$ *满足柯西-黎曼方程的条件，但在* $z = 0$ *不可导.*

**解:** 因为 $f(z) = \sqrt{|xy|}$, 所以 $u = \sqrt{|xy|}, v = 0$.

$$u_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = 0 = v_y(0,0),$$
$$u_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = 0 = -v_x(0,0),$$

柯西-黎曼方程条件在 $z=0$ 成立.

但当 $z$ 沿着第一象限内的射线 $y=kx\,(k>0)$ 趋于 0 时,

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}\to\frac{\sqrt{k}}{1+ik},$$

不妨设 $x>0$, 随 $k$ 变换, 故

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$$

不存在, 因此, 函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $z=0$ 不可导.

**例 .10**

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 $D$ 内解析, 并且 $v=u^2$, 求 $f(z)$.

**解:** 由 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析, 可知 $u,v$ 满足 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2u\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{24}$$

将(24)带入(23), 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(4u^2+1)=0,$$

由 $(4u^2+1)\neq 0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=0$,

由(24)得 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, 所以 $u=c$(常数), 于是 $f(z)=c+ic^2$(常数).

**例 .11**

**证明** 函数 $f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}z^2|}$ 的虚部和实部在点 $z=0$ 满足柯西-黎曼方程条件, 但在 $z=0$ 不可微.

**解:** 因为 $f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}z^2|}=2|xy|\in\mathbb{R}$, 所以有 $u=\sqrt{|\mathrm{Im}z^2|}=$

$2xy, v=0$.

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=0=v_y(0,0),$$
$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=0=-v_x(0,0),$$

柯西-黎曼方程方程在点 $z=0$ 成立.

容易得 $f(\Delta z)=\sqrt{\operatorname{Im}(\Delta x+i\Delta y)^2}=2|\Delta x\Delta y|$, 但在点 $z=0$, $f$ 关于 $\Delta z$ 的差商

$$\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|2\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+i\Delta y}$$

因为

$$\lim_{\Delta x=\Delta y\to 0+0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{2}}{1+i},$$
$$\lim_{\Delta x=0,\Delta y\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=0,$$

故函数 $f(z)$ 在点 $z=0$ 不可微.

**例 .12**

设 $f(z)=u+iv$ 为一解析函数, 且 $f'(z)\neq 0$, 那么曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 互相正交, 其中 $c_1, c_2$ 是常数.

**解:** 因为

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}\neq 0,$$

所以 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 不全为 0, 如果在曲线的交点处 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 都不为 0, 根据隐函数求导法则, 曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 中任一条曲线的斜率为

$$k_1=-\frac{u_x}{u_y},\quad k_2=-\frac{v_x}{v_y},$$

根据柯西—黎曼方程得

$$k_1\cdot k_2=\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\cdot\left(-\frac{v_x}{v_y}\right)=\left(-\frac{v_y}{u_y}\right)\cdot\left(\frac{u_y}{v_y}\right)=-1,$$

故曲线族 $u(x,y)=c_1$ 与 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

如果 $u_y$ 和 $v_y$ 中有一个为 0, 则另一个必不为 0. 两族中的曲

线在交点处的切线一体是水平的, 另一条是铅直的, 它们仍然是正交的.

**例 .13**

(课堂练习) $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 为解析函数, 则 $l, m, n$ 的值为多少?

**解:** $l = n = -3, m = 1.$

**例 .14**

设函数 $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$. 问常数 $a, b, c, d$ 取何值时, $f(z)$ 在复平面内处处解析?

**解:**

**推论 1** *(课堂习题)* 若 $f'(z)$ 在区域 $D$ 内处处为零, 那末 $f(z)$ 在 $D$ 内为一常数.

**证:** 因为

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \end{cases}$$

所以有 $u =$ 常数, $v =$ 常数, 因而 $f(z)$ 为常数.

**推论 2** 若函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 的某个邻域内可导, 则函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 解析.

## IV 课堂练习

**例 .15**

求 $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x-a}$.

**例 .16**

处处不可导, 处处不解析的函数 $w = \frac{1}{z}$.

**解:** 当 $z=0$ 时, 函数 $w=\frac{1}{\bar{z}}$ 显然不可导; 当 $z\neq 0$ 时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{1}{\overline{z+\Delta z}}-\frac{1}{\bar{z}}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{-\overline{\Delta z}}{\bar{z}(\overline{z+\Delta z})}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-\overline{\Delta z}}{\Delta z\bar{z}(\overline{z+\Delta z})} \tag{25}$$

(1) 当 $\Delta z$ 沿 $x$ 轴趋向 0, (25)$=\frac{-\Delta x}{\Delta x\bar{z}(\overline{z+\Delta z})}=-\frac{1}{\bar{z}^2}$

(2) 当 $\Delta z$ 沿 $y$ 轴趋向 0, (25)$=\frac{-\Delta y}{\Delta y\bar{z}(\overline{z+\Delta z})}=-\frac{i}{\bar{z}^2}$
函数 $w=\frac{1}{\bar{z}}$ 处处不可导. 由函数解析蕴含函数在一点可导这一命题成立, 由其逆否命题可得, 函数 $w=\frac{1}{\bar{z}}$ 处处不解析的.

**例 .17**

用柯西-黎曼条件判断 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析时应注意什么?

**解:**

1、判断 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是否在 $D$ 内可微;

2、看是否满足 C—R 条件;

3、最后判定 $f(z)$ 的解析性.

## V 课堂小结

主要讲解了复变函数导数的定义、求导法则及可微性概念; 解析函数的概念.

理解复变函数导数与微分以及解析函数的概念; 掌握连续、可导、解析之间的关系以及求导方法.

注意: 复变函数的导数定义与一元实变函数的导数定义在形式上完全一样, 它们的一些求导公式与求导法则也一样, 然而复变函数极限存在要求与 $z$ 趋于零的方式无关, 这表明它在一点可导的条件比实变函数严格得多.

复数运算和各种表示法; 复数方程表示曲线以及不等式表示区域.

## VI 第二章习题

P66: 2. 3. 4. 5. 8. 9. 12. 15. 18.