复变函数

复数及其代数运算和复数的几何表示

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

September 20, 2020



目录

- 1 解析函数
 - 可导与连续
- 2 解析函数的慨念
 - 一点可导的例子
 - 一点可导和一点解析
- 3 函数解析的充要条件
 - 解析判别示例
- 4 课堂练习
 - 课堂小结

- 1 解析函数
 - 可导与连续
- 2 解析函数的概念
 - 一点可导的例子
 - 一点可导和一点解析
- 3 函数解析的充要条件
 - 解析判别示例
- 4 课堂练习
 - 课堂小结

复变函数的导数

定义.1

(复变函数的导数) 设函数 w = f(z) 是定义在区域 D 上的复函数. z_0 与 $z_0+\Delta z$ 均为 D 内的点, 若极限 $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在, 则 称 f(z) 在 z_0 处可导, 这个极限值称为 f(z) 在 z_0 处的导数, 记为

$$f^{'}(z_{0}) = \frac{dw}{dz}\Big|_{z=z_{0}} = \lim_{z \to z_{0}} \frac{f(z_{0} + \Delta z) - f(z_{0})}{\Delta z}. \tag{1}$$



也就是说, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 相应地有一个 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $0 < |\Delta z| < \delta$ 时, 总有

$$\left|\frac{\textbf{f}(\textbf{z}_0+\Delta\textbf{z})-\textbf{f}(\textbf{z}_0)}{\Delta\textbf{z}}-\textbf{f}^{'}(\textbf{z}_0)\right|<\varepsilon.$$

应当注意, 定义中 $\Delta z \to 0$ 的方式是任意的. 如果 f(z) 在 D 内处处可导, 则称 f(z) 在 D 内可导.

求 $f(z) = z^2, z \in \mathbb{C}$ 的导数.



解: 因为

$$\begin{split} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{split}$$

所以 f'(z) = 2z, 即函数 $f(z) = z^2, z \in \mathbb{C}$ 在全平面均可导.



问 f(z) = x + i2y 是否可导?



这里

$$\begin{split} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - x - 2y}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}. \end{split}$$

设 Δz 沿着平行于 x 轴的方向趋于 0, 因而 $\Delta y = 0$, $\Delta z = \Delta x$.



这时极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

设 Δz 沿着平行于 y 轴的方向趋于 0, 因而 $\Delta x = 0$. 这时 $\Delta z = i \Delta y$, 极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\Delta y i}{\Delta y} = 2.$$

所以函数 f(z) = x + i2y 不可导.



讨论函数 f(z) = Im z 的可导性.



解:

$$\begin{split} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{Im(z + \Delta z) - Imz}{\Delta z} \\ &= \frac{Imz + Im\Delta z - Imz}{\Delta z} = \frac{Im\Delta z}{\Delta z} \\ &= \frac{Im(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}, \end{split}$$

当点沿平行于实轴的方向 $(\Delta y = 0)$ 而使 $\Delta z \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{split} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x + i \Delta y} = 0, \end{split}$$

当点沿平行于虚轴的方向 ($\Delta x = 0$) 而使 $\Delta z \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{split} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x + i \Delta y} \\ &= \frac{1}{i}, \end{split}$$

当点沿不同的方向使 $\Delta z \to 0$ 时, 极限值不同. 故函数 f(z) = Imz 在复平面上处处不可导.



从例 9 可以看出, 函数 f(z) = x + 2yi 处处连续却处处不可导.

可导必定连续

反过来我们容易证明可导必定连续. $(u(x,y)=x\in C[a,b],v(x,y)=y\in C[a,b])$

事实上, 由 f(z) 在 z_0 可导的定义, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 相应地有一个 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |\Delta z| < \delta$, 有

$$\left|\frac{\textbf{f}(\textbf{z}_0+\Delta\textbf{z})-\textbf{f}(\textbf{z}_0)}{\Delta\textbf{z}}-\textbf{f}^{'}(\textbf{z}_0)\right|<\varepsilon.$$

令

$$\rho(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0),$$



可导与连续

那么

$$\lim_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0.$$

由此得

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z.$$
 (2)

所以

$$\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0).$$

函数 f(z) 在 z_0 连续.

求导法则

类似于实变函数的求导法则, 主要复函数的导数法则有

- 1) (c)' = 0, c 为常数.
- $2)\ (z^n)'=nz^{n-1}\text{, }n\in\mathbb{Z}^+\text{.}$
- 3) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z).$
- 4) [f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).

5)
$$[\frac{f(z)}{g(z)}]' = \frac{1}{g^2(z)}[f'(z)g(z) - f(z)g'(z)], g(z) \neq 0.$$

6)
$$[f(g(z))]' = f'(w)g'(z), w = g(z).$$

7)
$$f'(z) = \frac{1}{\phi'(w)}$$
, 其中 $w = f(z), z = \phi(w)$ 互为反函数的单值函数, 且 $\phi'(w) \neq 0$.

微分的概念

复变函数的微分,在形式上类似于一元实变函数的微分概念.

定义 .2

设函数 w = f(z) 在 z_0 可导, 则由 (2)可得

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z}) - \mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{z}_0) \Delta \mathbf{z} + \rho(\Delta \mathbf{z}) \Delta \mathbf{z},$$

其中 $\lim_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0$. 因此, $|\rho(\Delta z)\Delta z|$ 是 $|\Delta z|$ 的高阶无穷小, 而

 $f'(z_0)\Delta z$ 是函数 w=f(z) 关于变量 Δw 的线性部分. 称 $f'(z_0)\Delta z$ 为函数 w=f(z) 在 z_0 的微分, 记作

$$dw = f'(z_0)\Delta z. (3)$$

如果函数在 z_0 的微分存在, 则称函数 f(z) 在 z_0 可微.

000

注解

当 f(z) = z 时, 由(3)得 $dz = \Delta z$. 于是(3)变为

$$dw = f'(z_0)dz$$
,

即

$$f^{'}(z_0) = \frac{dw}{dz} \Big|_{z=z_0}.$$

定义.3

如果函数 W = f(z) 在区域 D 内处处可微, 则称 f(z) 在 D 内可微.





- _
 - 可导与连续
- 2 解析函数的慨念
 - 一点可导的例子
 - 一点可导和一点解析
- 3 函数解析的充要条件
 - 解析判别示例
- 4 课堂练习
 - 课堂小结

如果函数 f(z) 在 z_0 的邻域内 $\mathcal{N}_{z_0}(\epsilon)$ 处处可导, 那么称 f(z) 在 z_0 点解析. 如果 f(z) 在区域 D 内每一点解析, 则称 f(z) 是 D 内的一 个解析函数 (全纯函数或者正则函数).

定义.5

若函数 f(z) 在 z_0 点不解析, 称 z_0 为函数 f(z) 的奇点.



讨论 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.



解:由于

$$\begin{split} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left|z_0 + \Delta z\right|^2 - \left|z_0\right|^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)(\bar{z}_0 + \overline{\Delta z}) - z_0\bar{z}_0}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\bar{z}_0 + \overline{\Delta z} + z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right), \end{split}$$

当 $z_0 = 0$ 时, 这个极限是零; 当 $z_0 \neq 0$ 时, 令 $z_0 + \Delta z$ 沿直线 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 趋于 z_0 , 由于 k 的任意性,



$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - \Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} = \frac{1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}i}{1 + \frac{\Delta y}{\Delta z}i} = \frac{1 - ki}{1 + ki}$$

不趋于一个确定的值, 所以极限 $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 不存在.

例题的结论

 $f(z) = |z|^2 = 0$ 处可导, 而在其他点都不可导, 根据解析性定义, 它在复平面上处处不解析.

$$u(x,y)=x\in C[a,b], v(x,y)=y\in C[a,b]$$



讨论函数 $f(z) = \frac{1}{z}$ 的解析性.



解: 因为 w 在复平面内除点 z=0 外处处可导, 且 $\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{z^2}$, 所以在除 z=0 外的复平面内, 函数 $f(z)=\frac{1}{7}$ 处处解析, z=0 是它的奇点.

$$\begin{split} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{z(z + \Delta z)} \\ &= -\frac{1}{z^2}. \end{split}$$

定理 .1

两个解析函数的和、差、积、商都是解析函数(除去分母为零的点);解析函数的复合函数仍为解析函数.





例.3

讨论函数 $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ 的可导性与解析性.



解: 当 z = 0 时,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mathsf{f}(0 + \Delta z) - \mathsf{f}(0)}{\Delta \mathsf{z}} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \mathsf{z} \mathsf{Re}(\Delta \mathsf{z})}{\Delta \mathsf{z}} = 0,$$

故函数 f(z) = z Re(z) 在 z = 0 处可导. 当 $z \neq 0$ 时,

$$\begin{split} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z+\Delta z)\,Re(z+\Delta z)-zRe(z)}{\Delta z} \\ &= \frac{z}{\Delta z}[Re(z+\Delta z)-Re(z)] + Re(z+\Delta z) \end{split}$$



$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=z\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}+x+\Delta x,$$

因为

$$\lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = x,$$

$$\lim_{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = z + x,$$

一点可导的例子

所以

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

不存在. 即当 $z \neq 0$ 时, 函数 f(z) 不可导.

结论

函数 f(z) 仅在 z=0 处可导, 而在其他点都不可导.

结论

根据定义, 它在复平面内处处不解析.



解: 另法:

$$\begin{split} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z+\Delta z)Re(z+\Delta z)-zRe(z)}{\Delta z} \\ &= \frac{z}{\Delta z}[Re(z+\Delta z)-Re(z)] + Re(z+\Delta z) \end{split}$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=z\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}+x+\Delta x,$$

因为

$$\lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = x, \lim_{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = z + x,$$



所以

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

由 $\mathbf{x} \neq \mathbf{z} + \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, 知导数不存在. 即当 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ 时, 函数 $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ 不可导. 若 $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{0}$, 可以看出在 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ 存在导数, 即函数 $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ 在 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ 可导.

因此, 函数 f(z) 仅在 z=0 处可导, 而在其他点都不可导. 根据定义, 它在复平面内处处不解析.

例.4

思考题: 复变函数 f(z) 在 z_0 可导与在 z_0 解析有无区别?



解: f(z) 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 解析必有 f(z) 在 z_0 可导, 反之不成立. 反例: $f(z) = |z|^2$ 在 z = 0 可导, 但是 $f(z) = |z|^2$ 在 z = 0 处不解析.

$$\lim_{\Delta \mathsf{z} \to 0} \frac{\mathsf{f}(\Delta \mathsf{z}) - \mathsf{f}(0)}{\Delta \mathsf{z}} = \frac{|\Delta \mathsf{z}|^2 - 0}{\Delta \mathsf{z}} = 0.$$

对于 $\forall \mathbf{z}_0 \in \mathbf{N}_{\delta}(0) - \{0\},$

$$\begin{split} \lim_{\Delta z \to 0} & \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)\overline{(z_0 + \Delta z)} - z_0\overline{z_0}}{\Delta z} \\ & = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} + \bar{z}_0. \end{split}$$



① 当 Δz 沿 x 轴趋近于 0 时, $\Delta z = \Delta x$,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0 \overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z}_0 + \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y = 0}} \frac{\Delta x z_0}{\Delta x} + x_0 + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x_0.$$

② 当 Δz 沿 y 轴趋近于 0 时, $\Delta z = i \Delta y$,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0 \Delta z}{\Delta z} + \bar{z}_0 + \overline{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \mathbf{x} = 0}} \frac{-i \Delta y z_0}{i \Delta y} + \bar{z}_0 + \lim_{\Delta y \to 0} i \Delta y = -2i y_0.$$

因此 f(z) 在 z_0 的去心邻域 $N_{\delta}(0) - \{0\}$ 内不可导, 因而不解析.



注解

由定义可知, 函数在区域内解析与在区域内可导是等价的. 但是, 函数在一点处解析和在一点处可导是两个不等价的概念. 就是说, 函数在一点处可导, 不一定有函数在该点解析. 函数在一点处解析要比函数在一点可导要求高得多.

函函数的极限、连续和微商在形式上虽然与实函数中相对应的概念相仿,但却有本质的差别,而这些差别正是复函数引进解析函数概念以及讨论解析函数特性的基础.

注意到复函数定义域是复平面上的点集, 因此在讨论有关概念时, 应注意到变量 z 的变化路径的任意性, 应注意讨论 z 的变化路径上的极限、连续等概念.

目录

- - 可导与连续
- - 一点可导的例子
 - 一点可导和一点解析
- 函数解析的充要条件
 - 解析判别示例
- - 课堂小结

在上一节中, 我们已经看到并不是每一个复合函数都是解析函数;

判别一个函数是否解析,如果只根据解析函数的定义,这往往是困难的,首先需要寻找判别函数可导与否的简便而实用的方法.



f(z) 可导的必要条件

引理 1

设函数 f(z) = u(x,y) + iv(x,y) 在区域 D 内有定义, z = x + iy 是 D 内任意一点. 若 f(z) 在 z 处可导, 则 u(x,y),v(x,y) 满足柯西-黎 曼(Cauchy-Riemann)条件:

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}},
\end{pmatrix}$$

*

且 f(z) 的导数为 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$. 简便起见,也记为 $f'(z) = u_x + i v_x = v_y - i u_y$.



Proof.

令 w=u+iv=u(x,y)+iv(x,y), 因为复函数 w=f(z) 在 z 处可导, 所以由导数定义, 有

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z},$$

其中 $\Delta w = \Delta u + i \Delta v$, $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$, 则原式

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left\{ \left[u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) \right] - \left[u(x, y) + iv(x, y) \right] \right\} \frac{1}{(\Delta x + i\Delta y)}$$

4 D > 4 D > 4 E > 4 E > E 990

Proof.

$$\begin{split} &= \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{subarray}} \frac{\left[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \right]}{\Delta x + i \Delta y} \\ &\quad + \frac{i \left[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) \right]}{\Delta x + i \Delta y}, \\ &= \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{subarray}} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y}, \end{split}$$

其中 Δz 以任意方式趋于零, 因此可以选取两条特殊路线使 $\Delta z \rightarrow 0$.



Proof.

① 当 Δz 沿平行于实轴的直线趋于零, 即 $\Delta z = \Delta x$, $\Delta y \equiv 0$ 时, 有

$$f'(z) = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \, \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

② 当 Δz 沿平行于虚轴的直线趋于零, 即 $\Delta z = i\Delta y$, $\Delta x \equiv 0$ 时, 有

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{i \Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - i \frac{\Delta u}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

40149147177 7 000

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y},$$

比较上式两端, 即得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

上述条件称为柯西-黎曼条件, 或称柯西-黎曼方程, 简记为 C—R 条件. 它是函数 f(z) = u(x,y) + iv(x,y) 在一点可导的必要条件, 而不是充分条件.



定理 .2

设函数 f(z) = u(x,y) + iv(x,y) 在其定义域 D 内解析的充分必要条件是: u(x,y)、v(x,y) 在 D 内任意一点 z = x + iy 可微, 且满足柯西-黎曼条件:

$$\begin{split} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{split}$$





证 必要性在前面已经证明, 现在来证明充分性 (对 $z \in D$, 在 z 可微 + 在 z 满足柯西-黎曼条件 \Rightarrow 在 z 解析).

已知条件

设 f(z) 在 D 内一点 z 可微, 则 $f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta w=\Delta u+i\Delta v$,

由于 u(x,y), v(x,y) 在 D 内任一点可微, 可知

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

$$\Delta \textbf{v} = \frac{\partial \textbf{v}}{\partial \textbf{x}} \Delta \textbf{x} + \frac{\partial \textbf{v}}{\partial \textbf{y}} \Delta \textbf{y} + \varepsilon_3 \Delta \textbf{x} + \varepsilon_4 \Delta \textbf{y},$$

这里
$$\lim_{\begin{subarray}{c} \Delta \mathbf{X} \to 0 \\ \Delta \mathbf{Y} \to 0 \end{subarray}} \varepsilon_{\mathbf{k}} = 0, (\mathbf{k} = 1, 2, 3, 4).$$
 所以

$$\begin{split} f(z+\Delta z) - f(z) &= \Delta u + i \Delta v \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \\ &+ i \Big(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y \Big) \\ &= \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big) \Delta x + \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \Big) \Delta y \\ &+ \Big(\varepsilon_1 + i \varepsilon_3 \Big) \Delta x + \Big(\varepsilon_2 + i \varepsilon_4 \Big) \Delta y \end{split}$$

由 C-R 条件, 有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = i^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = i\Big(i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\Big),$$

所以

$$\begin{split} f(z+\Delta z) - f(z) = & \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)(\Delta x + i\Delta y) \\ & + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y, \end{split}$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}.$$



因为
$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le 1, \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le 1$$
,

当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时, 上述等式取极限,

利用
$$\lim_{\substack{\Delta \mathbf{X} \to \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{y} \to \mathbf{0}}} \varepsilon_{\mathbf{k}} = 0, (\mathbf{k} = 1, 2, 3, 4)$$
,

因此,

$$f^{'}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$



柯西-黎曼条件的极坐标形式 (r, θ) 形式)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

例.1

判别下列函数是否解析, 是否可导?

- 1) $w = \bar{z}$;
- 2) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y);$
- 3) w = zRe(z).



解: 1) 由 z = x + iy, u = x, v = -y, 可得

$$\frac{\partial \textbf{u}}{\partial \textbf{x}} = 1, \frac{\partial \textbf{u}}{\partial \textbf{y}} = 0, \frac{\partial \textbf{v}}{\partial \textbf{x}} = 0, \frac{\partial \textbf{v}}{\partial \textbf{y}} = -1 \Rightarrow \frac{\partial \textbf{u}}{\partial \textbf{x}} \neq \frac{\partial \textbf{v}}{\partial \textbf{y}},$$

可知不满足柯西-黎曼方程, 所以 $w = \bar{z}$ 在全平面处处不解析.



解: 2) 因为 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$.

$$\begin{split} &\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \end{split}$$

因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 由 x,y 的任意性, u = $e^x \cos y$, v = $e^x \sin y$ 也可微,所以函数 $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$ 在全平面处处解析. 3) 由 w = $z Re(z) = (x + i y)x = x^2 + i x y \Rightarrow u = x^2$, v = xy, 所以

$$\frac{\partial \textbf{u}}{\partial \textbf{x}} = 2\textbf{x}, \frac{\partial \textbf{u}}{\partial \textbf{y}} = 0; \frac{\partial \textbf{v}}{\partial \textbf{x}} = \textbf{y}, \frac{\partial \textbf{v}}{\partial \textbf{y}} = \textbf{x},$$

显然, 这四个偏导数处处连续, 但是, 只有当 x = y = 0 时, 它们才满足 C—R 条件. 由 z = 0, w = (x + iy)x = 0, 因而, 函数仅在 z = 0 可导. \cdot , w = zRe(z) 在复平面上处处不解析.



例.2

证明函数 $f(z) = \sqrt{|xy|}$ 在点 z = 0 满足柯西-黎曼方程的条件, 但在 z = 0 不可导 (可导的不要条件是柯西-黎曼方程).

解: 因为
$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$
, 所以 $u = \sqrt{|xy|}$, $v = 0$.

$$\textbf{u}_{\textbf{x}}(0,0) = \lim_{\textbf{x} \to 0} \frac{\textbf{u}(\textbf{x},0) - \textbf{u}(0,0)}{\textbf{x} - 0} = 0 = \textbf{v}_{\textbf{y}}(0,0),$$

$$u_{\textbf{y}}(0,0) = \lim_{\textbf{y} \to 0} \frac{\textbf{u}(0,\textbf{y}) - \textbf{u}(0,0)}{\textbf{y} - 0} = 0 = -\textbf{v}_{\textbf{x}}(0,0),$$

柯西-黎曼方程条件在 z=0 成立.



但当 z 沿着第一象限内的射线 y = kx (k > 0) 趋于 0 时,

$$\frac{\textbf{f}(\textbf{z})-\textbf{f}(0)}{\textbf{z}-0}=\frac{\sqrt{|\textbf{x}\textbf{y}|}}{\textbf{x}+\textbf{i}\textbf{y}}\rightarrow\frac{\sqrt{\textbf{k}}}{1+\textbf{i}\textbf{k}},$$

不妨设 x > 0, 随 k 变换, 故

$$\lim_{\textbf{z} \to 0} \frac{\textbf{f}(\textbf{z}) - \textbf{f}(0)}{\textbf{z} - 0}$$

不存在, 因此, 函数 $f(z) = \sqrt{|xy|}$ 在点 z = 0 不可导.

例.3

设 f(z) = u(x,y) + iv(x,y) 在区域 D 内解析, 并且 $v = u^2$, 求 f(z).



解: 由 f(z) 在区域 D 内解析, 可知 u, v 满足 C-R 条件:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} = 2\mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}},\tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = -2\mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}},\tag{5}$$



将(5)带入(4), 得

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}(4\mathbf{u}^2 + 1) = 0,$$

由
$$(4\mathbf{u}^2 + 1) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$
,
由(5), 得 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} = 0$, 所以 $\mathbf{u} = \mathbf{c}$ (常数), 于是 $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{c} + i\mathbf{c}^2$ (常数).

例.4

证明 函数 $f(z) = |Im z^2|$ 的虚部和实部在点 z = 0 满足 何西-黎曼方程条件, 但在 z = 0 不可微.



解: 因为
$$f(z) = \sqrt{|\operatorname{Im} z^2|} = 2|xy| \in \mathbb{R}$$
, 所以有 $u = \sqrt{|\operatorname{Im} z^2|} = 2xy, v = 0$.

$$\begin{split} & u_{x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = 0 = v_{y}(0,0), \\ & u_{y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = 0 = -v_{x}(0,0), \end{split}$$

柯西-黎曼方程方程在点 z=0 成立.



容易得 $f(\Delta z) = \sqrt{\text{Im}(\Delta x + i\Delta y)^2} = 2|\Delta x \Delta y|$, 但在点 z = 0, f 关于 Δz 的差商

$$\frac{\mathsf{f}(\Delta \mathsf{z}) - \mathsf{f}(0)}{\Delta \mathsf{z}} = \frac{\sqrt{|2\Delta \mathsf{x} \Delta \mathsf{y}|}}{\Delta \mathsf{x} + \mathsf{i} \Delta \mathsf{y}} \tag{6}$$

因为

$$\lim_{\substack{\Delta x = \Delta y \\ \Delta y \rightarrow 0 + 0}} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{2}}{1 + i}, \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = 0, \tag{7}$$

故函数 f(z) 在点 z=0 不可微.

例 .5

证明 函数 $f(z) = \sqrt{|\text{Im}\,z^2|}$ 的虚部和实部在点 z=0 满足柯西-黎曼方程条件, 但在 z=0 不可微.



例.6

设 f(z) = u + iv 为一解析函数, 且 $f'(z) \neq 0$, 那么曲线族 $u(x,y) = c_1$ 与 $v(x,y) = c_2$ 互相正交, 其中 c_1 , c_2 是常数.

解: 因为

$$\label{eq:fprob} \mathbf{f}'(\mathbf{z}) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{1}{\mathsf{i}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \neq 0,$$

所以 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 不全为 0, 如果在曲线的交点处 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 都不为 0, 根据 隐函数求导法则, 曲线族 $\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{c}_1$ 与 $\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{c}_2$ 中任一条曲线的 斜率为

$$k_1 = -\frac{u_x}{u_y}, \quad k_2 = -\frac{v_x}{v_y},$$



根据柯西—黎曼方程得

$$\textbf{k}_1 \cdot \textbf{k}_2 = \left(-\frac{\textbf{u}_{\textbf{x}}}{\textbf{u}_{\textbf{y}}}\right) \cdot \left(-\frac{\textbf{v}_{\textbf{x}}}{\textbf{v}_{\textbf{y}}}\right) = \left(-\frac{\textbf{v}_{\textbf{y}}}{\textbf{u}_{\textbf{y}}}\right) \cdot \left(\frac{\textbf{u}_{\textbf{y}}}{\textbf{v}_{\textbf{y}}}\right) = -1,$$

故曲线族 $u(x,y) = c_1$ 与 $v(x,y) = c_2$ 互相正交.

如果 u_y 和 v_y 中有一个为 0, 则另一个必不为 0. 两族中的曲线 在交点处的切线一体是水平的, 另一条是铅直的, 它们仍然是正 交的.

例 .7

(课堂练习) $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 为解析函数,则 l, m, n 的值为多少?

解:
$$l = n = -3, m = 1$$
.



例 .8

设函数 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$. 问常数 a,b,c,d 取何值时, f(z) 在复平面内处处解析?

解: ...



Corollary

(课堂习题) 若 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 那末 f(z) 在 D 内为一常数.

证: 因为

$$\begin{split} f^{'}(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0 \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \end{array} \right. \end{split}$$

所以有 u = 常数, v = 常数, 因而 f(z) 为常数.

Corollary

(课堂习题) 若 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 那末 f(z) 在 D 内为一常数.

证: 因为

$$\begin{split} f^{'}(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0 \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \end{array} \right. \end{split}$$

所以有 u = 常数, v = 常数, 因而 f(z) 为常数.

Corollary

若函数 f(z) 在 z_0 的某个邻域内可导, 则函数 f(z) 在 z_0 解析.



- 1 解析承数
 - ■可导与连续
- 2 解析函数的概念
 - 一点可导的例子
 - 一点可导和一点解析
- 3 函数解析的充要条件
 - 解析判别示例
- 4 课堂练习
 - 课堂小结

例 **.1**

 $\label{eq:limits} \ddot{\mathcal{R}} \lim_{\mathsf{X} \to \mathsf{a}} \tfrac{\sqrt[m]{\bar{\mathsf{X}}} - \sqrt[m]{\mathsf{a}}}{\mathsf{x} - \mathsf{a}}, \mathsf{a} \neq 0.$



例.2

函数 $\mathbf{w} = 2\mathbf{z}^3 + 3\mathbf{i}\mathbf{z}$ 是否可导?是否满足柯西-黎曼条件? 解析性如何?



例.3

处处不可导, 处处不解析的函数 $\mathbf{w} = \frac{1}{2}$.





解: 当 z = 0 时, 函数 $w = \frac{1}{2}$ 显然不可导; 当 $z \neq 0$ 时,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{\bar{z}}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{-\overline{\Delta z}}{\bar{z}(\overline{z} + \Delta \overline{z})}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-\overline{\Delta z}}{\Delta z \bar{z}(\overline{z} + \Delta z)}$$
(8)

- (1) 当 Δ z 沿 x 轴趋向 0, (8)= $\frac{-\Delta x}{\Delta x \bar{z}(\overline{z}+\Delta z)}=-\frac{1}{\overline{z}^2}$
- (2) 当 Δ z 沿 y 轴趋向 0, (8)= $\frac{-\Delta y}{\Delta y \bar{z}(\bar{z}+\Delta z)} = -\frac{i}{\bar{z}^2}$

函数 $W = \frac{1}{2}$ 处处不可导. 由函数解析蕴含函数在一点可导这一命题成立, 由其逆否命题可得, 函数 $W = \frac{1}{9}$ 处处不解析的.

例 .4

函数 $W = \frac{1}{z^2}$ 的解析性如何?





例 .5

用柯西-黎曼条件判断 f(z) = u(x,y) + iv(x,y) 解析时应注意什么?



- 解: (1) 判断 u(x,y) 和 v(x,y) 是否在 D 内可微;
- (2) 看是否满足 C-R 条件;
- (3) 最后判定 f(z) 的解析性.



- ① 主要讲解了复变函数导数的定义、求导法则及可微性概念; 解析函数的概念.
- ② 理解复变函数导数与微分以及解析函数的概念; 掌握连续、可导、解析之间的关系以及求导方法.
- ③ 注意: 复变函数的导数定义与一元实变函数的导数定义在形式上完全一样, 它们的一些求导公式与求导法则也一样, 然而复变函数极限存在要求与 z 趋于零的方式无关, 这表明它在一点可导的条件比实变函数严格得多.
- ④ 复数运算和各种表示法; 复数方程表示曲线以及不等式表示区域.

课堂小结

第二章习题

第二章习题

P66: 2. 3. 4. 5. 8. 9. 12. 15. 18.

