教　案　纸

● 2019/9/25

● 互动提问

理论课 5　§3.1-3.3 复变函数的积分、柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

I　组织教学

1、集中学生注意力;

2、清查学生人数;

3、维持课堂纪律;

II　复习导入及主要内容

1、上次作业讲评;

2、上次内容总结

3、重点: 复变函数积分的概念、性质及计算方法; 解析函数积分的柯西-古萨积分基本定理; 然后推广得到的复合闭路定理,闭路变形定理.

4、难点:理解分别以有界单连通域、有界复连通域、无界区域内柯西-古萨基本定理和复合闭路定理的证明.

III　教学内容及过程

一、　复变函数的积分

1、　复函数的积分定义

定义 .45

*(有向线段) 设 C 为平面上给定的一条光滑曲线. 选定 C 的两个可能方向中的一个作为正方向, 那么我们就把 C 理解为带有方向的曲线, 称为**有向曲线**. 设曲线 C 的两个端点为 A 和 B, 定义从 A 到 B 的方向为正方向, 那么从 B 到 A 的方向为负方向, 记为 C^-.*

设函数 $w=f(z)$ 定义在区域 D 上, C 为在区域 D 内起点为 α, 终为 β 的一条光滑有向曲线. 把曲线 C 任意分成 n 个弧段, 设分点为

$$\alpha=z_0,z_1,z_2\dots,z_{k-1},z_k,\cdots,z_n=\beta.$$

在每个弧段 $z_{k-1}z_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ 上任意取一点 ζ_k, $\zeta_k\in\widehat{z_{k-1}z_k}$, 并作出和式

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

定义 .46

记 $\Delta s_k = z_{k-1}z_k$ 的长度, $\delta = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$. 当 n 无限增加, 且 δ 趋于零时, 若不论对 C 的何种分法及 ζ_k 的何种取法, S_n 有唯一极限, 那么称这极限值为函数 $f(z)$ **沿曲线** C **的积分**. 记作

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

如果 C 为闭曲线, 那么沿此闭曲线的积分记作 $\oint_C f(z)dz$.

● 积分的显式求法

2、 积分存在条件及其计算法

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \alpha \le t \le \beta.$$

如果 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 D 上处处连续, 那么 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 均为 D 上的连续函数.

设 $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, 由于

$$\begin{aligned}\Delta z_k &= z_k - z_{k-1} = x_k + iy_k - (x_{k-1} + iy_{k-1})\\ &= (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})\\ &= \Delta x_k + i\Delta y_k.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k &= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\right](\Delta x_k + i\Delta y_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]\\ &\quad + i\sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k,\right]\end{aligned}$$

上式两边取极限可得

$$\lim_{\Delta z\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy.$$

定理 .9

(复变函数积分存在定理): 若函数 $f(z)$ 连续且 C 是光滑曲线, 则积分 $\int_C f(z)dz$ 必定存在.

定理 .10

复变函数积分的计算公式: $\int_C f(z)dz$ 可以通过两个实二元函数的线积分来计算.

由条件 $dz = dx + idy = (x'(t) + iy'(t))dt$, 由线积分的计算方法, 我们可以选取参数

$$x = x(t), y = y(t), \ (\alpha \le t \le \beta),$$

代入上述积分, 可得

$$\begin{aligned}\int\limits_C f(z)dz &= \int\limits_\alpha^\beta f(z)[x'(t) + iy'(t)]dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))[x'(t) + iy'(t)]dt \\ &= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt\end{aligned}$$

● 积分的隐式求法

所以有

$$\int\limits_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt.$$

例 .1

证明 $|\int_C (x^2 + iy^2)dz| \le \pi, C$ 为连接点 $-i$ 到 i 的右半圆周.

● 右半圆周曲线 $C := \{z \,|\, |z| = 1, \mathrm{Re}\, z \geq= 0\}$

证明: 因为 $x^2 + y^2 = 1$ 也在 C 上, 而

$$\left|x^2 + iy^2\right| = \sqrt{x^4 + y^4} \le \sqrt{(x^2 + y^2)^2} \le x^2 + y^2,$$

故在 C 上, $|x^2 + iy^2| \le 1$, 而 C 的长度为 π, 由积分估计值式的性质, 有

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|\, ds \le ML$$

(在 C 上有 $|f(z)| \leq M$, L 为 C 的长度), 所以有

$$\left|\int_C (x^2+iy^2)dz\right| \leq \int \left|x^2+iy^2\right| ds \leq \int_C 1\cdot ds = \pi,$$

所以原结论成立.

例 .2

计算 $\int_C zdz$, 其中 C 为从原点 0 到点 $3+4i$ 的直线段.

解: 将直线段方程写为 $\begin{cases} x=3t \\ y=4t \end{cases}$ $,0\leq t\leq 1, z=(3+4i)t, dz=(3+4i)dt$, 于是

$$\int_C zdz = \int_0^1 (3+4i)^2 tdt = (3+4i)^2\int_0^1 tdt = \frac{1}{2}(3+4i)^2.$$

注解 24 如果考虑积分路径是由原点到点 $(3,0)$ 再到点 $(3,4)$, 即 $\int_C zdz = \int_{C_1} zdz + \int_{C_2} zdz$, 则计算出的积分值也等于 $\frac{1}{2}(3+4i)^2$.

例 .3

计算 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 C 是以 z_0 为心, r 为半径的正向圆周 (图 32), $n\in\mathbb{Z}$.

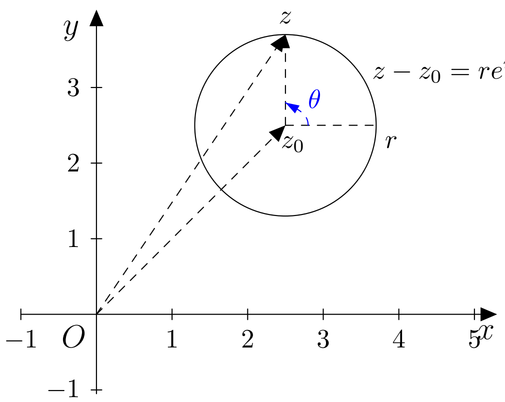

图 32: 积分曲线 $|z-z_0|=r$

解: 取 $z=z_0+re^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi$,

$$\oint_c \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{i}{r^n e^{in\theta}}d\theta$$
$$=\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}d\theta.$$

当 $n=0$ 时,

$$\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i;$$

当 $n\neq 0$ 时,

$$\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}d\theta=\frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta-i\sin n\theta)d\theta=0.$$

所以 $\oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}.$

例 .4

计算 $\int_C \bar{z}dz$ 的值, 其中 C 是如下两种曲线: *1)* 沿从 $(0,0)$, $(1,1)$ 的线段; *2)* 沿从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 再到 $(1,1)$ 的折线.

解:

1) 选取线段的参数方程为 $\begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases},0\le t\le 1$, 则 $\bar{z}=t-it$, $dz=(1+i)dt$, $\int_C\bar{z}dz=\int_0^1(t-it)(1+i)dt=\int_0^1 2tdt=1$;

2) 积分曲线 C 是由 C_1 和 C_2 组成, 选取线段 C_1 的参数方程为

$$C_1:\begin{cases}x=t\\ y=0\end{cases},0\le t\le 1,$$

$z=x+iy=t$, $dz=dt$. 选取线段 C_2 的参数方程为 $C_2:\begin{cases}x=1\\ y=t\end{cases},0\le t\le 1$, $z=x+iy=1+it$, $dz=idt$, 则

$$\int_C\bar{z}dz=\int_{c_1}\bar{z}dz+\int_{c_2}\bar{z}dz=\int_0^1 tdt+\int_0^1(1-it)idt$$
$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+i\right)=1+i.$$

3、 积分的性质

1) $\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$.

2) $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$, ($k$ 为常数).

3) 若 C 是由分段光滑曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 组成, 则有

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)dz.\end{aligned}$$

4) $\int_C [f(z) \pm g(z)]dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$.

5) 设曲线 C 的长度为 L, 函数 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leq M$, 那么 $|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)|ds \leq ML$.（**积分估计值式**）

证明: 因为 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |f(\varsigma_k)\Delta z_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |f(\varsigma_k)|\Delta s_k$, 两边同时取极限, 可得

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\, ds \leq M\int_C ds = ML.$$

例 .5

设积分曲线 C 为从原点到点 $3+4i$ 的直线段, 试求积分 $\oint_C \frac{1}{z-i}dz$ 绝对值的一个上界.

解: 积分曲线 C 的方程为 $z = (3+4i)t$, $0 \leq t \leq 1$. 由估值不等式

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}dz\right| \leq \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right| ds.$$

在 C 上, $\left|\frac{1}{z-i}\right| = \left|\frac{1}{3t+(4t-1)i}\right| = \frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}} \leq \frac{5}{3}$, 从而有

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}dz\right| \leq \frac{5}{3}\int_C ds,$$

而 $\int_C ds = 5$, 所以

$$\oint_C \frac{1}{z-i}dz \leq \frac{25}{3}.$$

例 .6

计算 $\int_C \mathrm{Re} z dz$, 其中 C 为如下几种积分曲线: (1) 从原点到点 $1+i$ 的直线段; (2) 抛物线 $y=x^2$ 从原点到点 $1+i$ 的弧段; (3) 从原点沿 x 轴到点 1 再到点 $1+i$ 的折线.

解: (1) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it\,(0\le t\le 1),$$

于是

$$\mathrm{Re}\, z=t,\quad dz=(1+i)dt,$$

$$\int_C \mathrm{Re}\, z dz=\int_0^1 t(1+i)dt=\frac{1}{2}(1+i);$$

(2) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it^2\quad (0\le t\le 1),$$

于是

$$\mathrm{Re} z=t,\, dz=(1+2ti)dt,$$

$$\int_C \mathrm{Re} z dz=\int_0^1 t(1+2it)dt=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{2i}{3}t^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i;$$

(3) 积分路径由两段直线段构成. x 轴上直线段的参数方程为

$$z(t)=t\,(0\le t\le 1),$$

● 积分路径曲线 $C := (0,0)\to(1,0)\to(1,1)$

于是由 $z=t\Rightarrow dz=dt$, 由此得 1 到 $1+i$ 直线段的参数方程为

$$z(t)=1+it,\ (0\le t\le 1),$$

于是

$$\mathrm{Re}\, z=1, dz=idt,$$

$$\int_C \mathrm{Re}\, z dz=\int_0^1 tdt+\int_0^1 1\cdot idt=\frac{1}{2}+i.$$

例 .7

计算 $\int_C |z|\, dz$ 其中 C 为圆周 $|z|=2$.

解: 积分路径 C 的参数方程为

$$z = 2e^{i\theta}\,(0 \le \theta \le 2\pi), dz = 2ie^{i\theta}d\theta,$$

$$\int_C |z|\,dz = \int_0^{2\pi} 2 \cdot 2ie^{i\theta}d\theta = 4i\int_0^{2\pi}(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta \\ = 0.$$

二、 柯西(Cauchy)—古萨(Goursat)基本定理

柯西(Cauchy)—古萨基本定理是关于复平面上全纯函数的路径积分的一个基本定理. 柯西积分定理说明，如果从一点到另一点有两个不同的路径, 而函数在两个路径之间处处是全纯的, 则函数的两个路径积分是相等的. 另一个等价的说法是, 单连通闭合区域上的全纯函数沿着任何可求长闭合曲线的积分是 0. 从上一节的的例子可见, 有的积分与路径无关, 有的积分却与路径有关, 我们自然会想到, 在什么条件下, 积分与路径无关呢?

大家知道, 实变函数的曲线积分 $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在单连通区域 D 内与路径 C 无关(只与起点终点有关), 它等价于沿 D 内任意一条闭曲线的积分值为零. 只要函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内具有连续的一阶偏导, 且满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 则积分与路径无关. 这个结论对复变函数也完全成立.

格林公式: $\oint_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$

定理 .11

柯西定理 如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内处处解析, 则沿 D 内任意一条闭曲线的积分值为零: $\oint_C f(z)dz = 0$, 其中 C 为 D 内的任意一条简单闭曲线.

证: 不是一般性, 不妨设 $\forall z \in D, f'(z) \ne 0$, 且在 D 内连续,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

所以 u, v 偏导连续, 且满足 C—R 条件; 又

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy,$$

- $P=u, Q=-v$.

由实函数的积分与路径无关, 下述积分

$$\oint_C udx - vdy = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

同样地, 另一个积分

$$\oint_C vdx + udy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

所以有 $\oint_C f(z)dz = 0$.

推论 1 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则积分 $\int_C f(z)dz$ 仅与曲线 C 的起点和终点有关, 而与积分的路径无关.

推论 2 设 C 是单连通区域 D 的边界, 函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 在 C 上连续, 则 $\oint_C f(z)dz = 0$.

例 .8

计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz$.

♡

解: 函数 $\frac{1}{2z-3}$ 在 $|z| \le 1$ 内解析. 根据柯西—古萨定理, 有

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0.$$

例 .9

计算积分 $\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz$.

♡

解:

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right),$$

因为函数 $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z+i}$ 都在 $|z-i|\le\frac{1}{2}$ 上解析, 根据柯西—古萨定理得

$$\begin{aligned}\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z(z^2+1)}dz&=\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+i}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right)dz\\&=\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z}-\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{2(z+i)}-\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{2(z-i)}\\&=-\frac{1}{2}\oint\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z-i}dz\\&\underline{\underline{z=e^{i\theta}}}-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\frac{1}{2}ie^{i\theta}}{\frac{1}{2}e^{i\theta}}d\theta\\&=-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i=-\pi i.\end{aligned}$$

例 .10

证明: 任意闭曲线的积分 $\oint_C(z-\alpha)^n dz=0,(n\neq -1)$.

证 4 当 $n\in\mathbb{Z}^+$ 时, 函数 $(z-\alpha)^n$ 在 z 平面上解析. 由柯西—古萨定理, $\oint_C(z-\alpha)^n dz=0$

当 $n\in\mathbb{Z}^-,n\neq -1$ 时, 函数 $(z-\alpha)^n$ 在除点 α 外的 z 平面上解析. 由柯西—古萨定理, 对围线 C,

(1) 若围线 C 不包括 α 点, 函数 $(z-\alpha)^n$ 在 C 围成的区域解析. 由柯西—古萨定理, 积分 $\oint_C(z-\alpha)^n dz=0$.

(2) 若围线 C 包括 α 点, 则令 $z=\alpha+re^{i\theta},\theta\in(-\pi,\pi]$, 积分 $\oint_C(z-\alpha)^n dz=\int_{-\pi}^{\pi}r^n e^{in\theta}rie^{i\theta}d\theta=r^{n+1}i\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n+1)\theta}d\theta=0,(n+1\neq 0)$.

三、 基本定理的推广——复合闭路定理

柯西—古萨基本定理可以推广到多连通区域. 设函数 $f(z)$ 在多连通区域 D 内解析, C 为 D 内的任意一条简单闭曲线. 如果 C 的内部完全含于 D, 从而 $f(z)$ 在 C 及其内部解析, 可知

$$\oint_C f(z)dz=0.$$

但当 C 的内部不完全含于 D 时, 上面等式不一定成立.

下面把复合闭路定理推广到多连通区域的情形

假设 C 和 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线, C_1 在 C 的内部, 而且以 C 及 C_1 为边界的区域 D_1 完全含于 D. 作两条不相交的弧段 $\widehat{AA'}$ 和 $\widehat{BB'}$, 它们依次连接 C 上某一点 A 到 C_1 上的一点 A', 以及 C_1 上某一点 B' (异于 A') 到 C 上的一点 B, 而且此两弧段除去它们的端点外全部含于 D_1. 这样就使得 $AEBB'E'A'A$ 及 $AA'F'B'BFA$ 形成两条全在 D 内的简单闭曲线, 它们的内部完全含于 D (图 33).

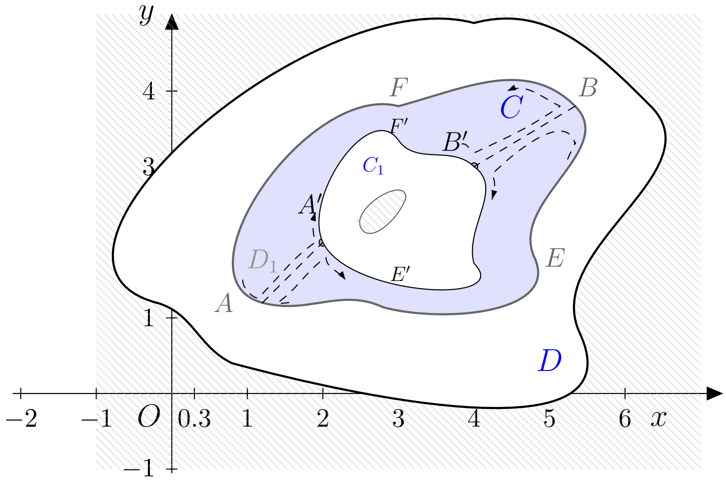

图 33: 多连通区域 D 上的复合闭路

根据上面的操作, 有

$$\oint_{AEBB'E'A'A} f(z)dz = 0, \oint_{AA'F'B'BFA} f(z)dz = 0. \tag{26}$$

上面两式相加得

$$\begin{aligned}&\oint_C f(z)dz + \oint_{C_1^-} f(z)dz + \oint_{\widehat{AA'}} f(z)dz \\ &+ \oint_{\widehat{A'A}} f(z)dz + \oint_{\widehat{B'B}} f(z)dz + \oint_{\widehat{BB'}} f(z)dz = 0,\end{aligned}$$

即

$$\oint_C f(z)dz + \oint_{C_1^-} f(z)dz = 0, \tag{27}$$

或者

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz. \tag{28}$$

式(27)说明, 如果我们把如上两条简单闭曲线 C 及 C_1^- 看成是一条复合闭路 Γ, 而且 Γ 的正方向规定为: 外面的封闭曲线 C 按逆

时针进行, 内部的闭曲线 C_1^- 按顺时针进行 (就是沿 Γ 的正方向进行时, Γ 的内部总在 Γ 的左手边), 那么

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

定理 .12

(复合闭路定理): 设 $f(z)$ 在多连通区域 D 内解析, C 为 D 内任意一条简单闭曲线, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是 C 内的简单闭曲线, 它们围成的区域互不包含且互不相交, 并且以 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为边界的区域全含于 D 内 (图 34), 则

① $\oint\limits_{C} f(z)\,dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz$, 其中 C 与 C_k 均取正向;

② $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$, 其中 Γ 由 C 及 C^{-1} 所组成的复合闭路, 即 $\Gamma = C + C^{-1}$.

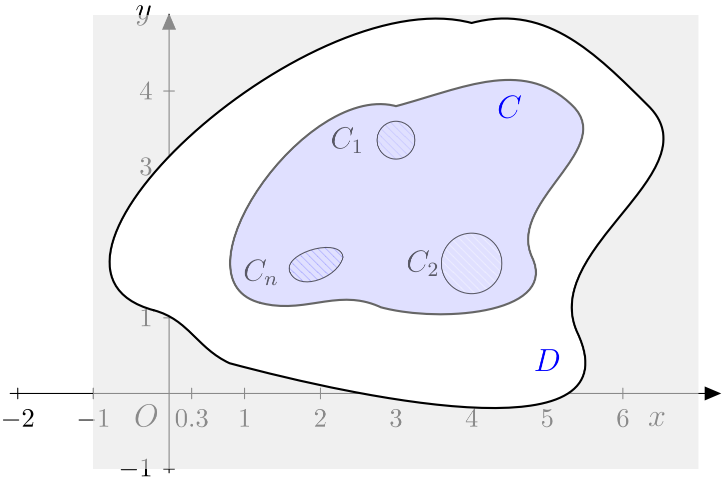

图 34: 多连通区域 D 上的复合闭路

由式(28)可以看出, 在区域内的一个解析函数沿着闭曲线的积分, 不会因为闭曲线在区域内作连续变形而改变他的值, 只要在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$ 的不解析点 (奇点). 基于这一事实, 得到如下的**闭路变形原理**.

定理 .13

(闭路变形原理): 一个在区域 D 内的解析函数 $f(z)$ 沿闭曲线 C 的积分，不因 C 在 D 内作连续变形而改变它的积分值，只要在变形过程中 C 不经过使 $f(z)$ 不解析的奇点.

例 .11

计算 $\oint_c \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中 C 是以 z_0 为心，r 为半径的正向圆周 (图32)，$n \in \mathbb{Z}$.

解: 由本章的例 10 知，当 C 为以 z_0 为中心的正向圆周时，$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)} = 2\pi i$，所以，根据闭路变形原理，对于包含 z_0 的任何一条正向简单闭曲线 Γ 都有：$\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$.

例 .12

计算 $\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}dz$ 的值，Γ 为包含圆周 $|z| = 1$ 在内的任何正向简单闭曲线.

解: 我们知道，函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内除 $z = 0$ 和 $z = 1$ 两个奇点外是处处解析的. 由于 Γ 是包含圆周 $|z| = 1$ 在内的任何正向简单闭曲线，因此它也包含这两个奇点. 在 Γ 内作两个互不包含也互不相交的正向圆周 C_1 与 C_2，C_1 只包含奇点 $z = 0$，C_2 只包含奇点 $z = 1$ (图35)，那么根据复合闭路定理，有

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}dz &= \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}dz \\
&= \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z}dz \\
&= 0 + 2\pi i + 2\pi i + 0 \\
&= 4\pi i.
\end{aligned}$$

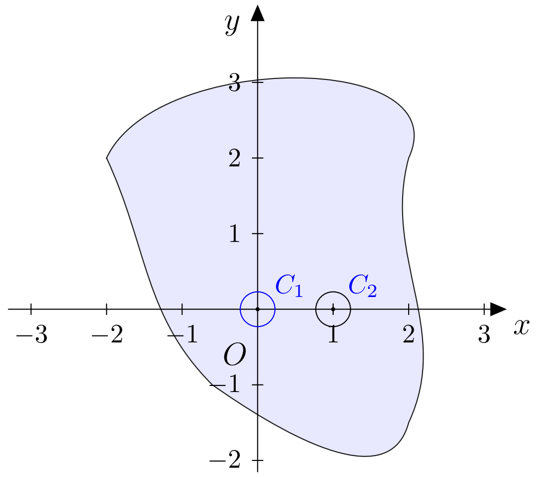

图 35: 奇点 $z=0$ 和 $z=1$

IV 课堂小结

本课我们主要讲解了积分的原始定义、存在条件以及简单积分的计算方法. 应注意复变函数的积分有跟微积分学中的线积分完全相似的性质. 本次课中应该掌握复积分的计算和柯西—古萨基本定理:

定理 .14

如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 B 内处处解析, 那么函数 $f(z)$ 沿 B 内任何一条封闭曲线 C 的积分为 0:

$$\oint_c f(z)dz = 0.$$

并注意定理成立的条件.

复合闭路定理与闭路变形原理是复积分中的重要定理, 掌握并能灵活应用它是本章的难点.

常用结论:

$$\oint_\Gamma \frac{1}{(z-a)^{n+1}}dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}$$

注解 25 复函数 $f(z)$ 的积分定义 $\int_C f(z)dz$ 与一元函数定积分定义不一致. 若 C 是实轴上的区间 $[\alpha,\beta]$, 则 $\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(x)dx$. 如果 $f(x)$ 是实值的, 即为一元实函数的定积分. 一般不能把起点 α, 终点 β 的函数 $f(z)$ 的积分记作 $\int_\alpha^\beta f(z)dz$. 这

是因为 $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz$ 是一个线积分，要受积分路线的限制，必须记作 $\int_C f(z)dz$.

V　课堂练习

1. 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z-3}dz$.

解:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{z-3}dz = \oint_{|z|=2} dz + \oint_{|z|=2} \frac{3}{z-3}dz = \oint_{|z|=2} \frac{3}{z-3}dz = 0.$$

VI　第三章习题

P99: 1. (3); 5. 6. (1)、(3)、(5); 7. (2)、(3)、(5)、(6)、(7)、(8); 8. (1)、(5); 9. (2)、(4); 29. 30.