复变函数

复数项级数与复函数项级数

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

August 20, 2020

目录

解析函数的泰勒展开法

定理.28

设函数 $f(z)$ 在圆域 $D: |z-z_0|<R$ 内解析, 则在 D 内 $f(z)$ 可以展开成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{1}$$

其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, (n=0,1,2,\cdots)$, C 为任意圆周 $|z-z_0|=\rho<R$, 并且这个展开式是唯一的.

证明：设 z 是 D 内任意一点, 在 D 内作一圆周 $C: |\zeta - z| = \rho < R$, 使得 $|z - z_0| < \rho$, 则由柯西积分公式, 得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{2}$$

因为 $|z - z_0| < \rho$, 即 $\left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| = q < 1$, 所以

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

将此式代入(2)式, 由幂级数的性质, 得

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \left[f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n \qquad (3) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (4)
\end{aligned}$$

其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},(n=0,1,2,\cdots)$.

设 $f(z)$ 在 D 内又可以展成 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, 对式(4)求各阶导数,

得 $f^{(n)}(z)=n!c_n+(n+1)!c_{n+1}(z-z_0)+\cdots$.

当 $z=z_0$ 时, 得 $f^{(n)}(z_0)=n!c_n$, 即 $c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$, 这就是将函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内展开成收敛的幂级数时的系数公式.

同时, 可以证明 $f(z)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_n(z-z_0)^n$ 的展开式是唯一的.

应当指出, 若函数 $f(z)$ 在 D 内有奇点, 则 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒级数的收敛半径等于收敛圆的中心点 z_0 到 $f(z)$ 的离 z_0 最近的一个奇点 α 之间的距离, 即 $R=|\alpha-z_0|$.

定理.29

函数在一点处的邻域内可以展成幂级数的充分必要条件是函数在该邻域内解析.

共有 4 个等价的解析函数的概念刻画. 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内满足下列条件之一, 则它就是 D 内的一个解析函数:

(1) $f(z)$ 在 D 内处处可微;

(2) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部 u 与虚部 v 在 D 内可微, 且它们的偏导函数满足柯西—黎曼条件
$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$;

(3) $f(z)$ 在 D 内连续, 且对 D 内任意一条逐段光滑的闭曲线 C, 都有 $\oint_C f(z)dz=0$;

(4) 对于 D 内任意一点, 都存在一个邻域, $f(z)$ 在这个邻域内能展开成幂级数.

初等函数的泰勒展开式

1) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < \infty$

2) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, |z| < \infty$

3) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, |z| < \infty$

4) $\frac{1}{1 \mp z} = 1 \pm z + z^2 \pm z^3 + z^4 \pm \cdots, |z| < 1.$

5) $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots, |z| < 1$

6) $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} z^{n+1} + \cdots, |z| < 1$ (α 为复数).

代换法

例.1

把函数 $f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}$ 展开成 $z-1$ 的幂级数, 并指出它的收敛半径.

解：因为 $f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}=\frac{1}{[3+(z-1)]^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{z-1}{3}\right]^2}$, 令 $q(z)=\frac{z-1}{3}$, 那么当 $|q(z)|<1$ 时, 即 $|z-1|<3$ 时, 我们即可利用公式 6) 将上式右端展开. 以 $q(z)=\frac{z-1}{3}$ 代入 6) 中的 z, 再由

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n,$$

逐项求导可得

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{\left[1+\frac{z-1}{3}\right]^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3}\left(\frac{z-1}{3}\right)^{n-1},$$

也即

$$\frac{1}{\left[1+\frac{z-1}{3}\right]^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{z-1}{3}\right)^{n-1},$$

则得 $f(z)$ 的表达式

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{9}\left[1 - 2\left(\frac{z-1}{3}\right) + \frac{2\cdot 3}{2!}\left(\frac{z-1}{3}\right)^2 - \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3!}\left(\frac{z-1}{3}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{9}\left[1 - \frac{2}{3}(z-1) + \frac{1}{3}(z-1)^2 - \frac{4}{27}(z-1)^3 + \cdots\right], |z-1| < 3. \end{aligned}$$

这就是所求的展开式, 它右端的幂级数的收敛半径为 3.

例.2

将函数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解： 由于函数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 在单位圆周 $|z|=1$ 上有一个奇点 $z=-1$, 而在 $|z|<1$ 内处处解析, 所以它在 $|z|<1$ 内可以展开成 z 的幂级数. 由

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots,|z|<1. \tag{5}$$

把上面两边逐项求导, 即

$$-\frac{1}{(1+z)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}n(-z)^{n-1},|z|<1. \tag{6}$$

得到 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 展开的幂级数

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^2}&=1-2z+3z^2-4z^3+\cdots+n(-1)^{n-1}z^{n-1}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n-1}z^{n-1},|z|<1.\end{aligned} \tag{7}$$

用微分方程求系数

例.3

把 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z=0$ 点展开成幂级数.

解: 因为函数 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 有一个奇点 $z=1$, 则 $f(0)=e$, 所以可以在 $|z|<1$ 内展开成 z 的幂级数. 令 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$, 求导得 $f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=f(z)\cdot\frac{1}{(1-z)^2}$, 即
$(1-z)^2f'(z)-f(z)=0.$
把上面的微分方程逐次对变量 z 求导, 得

$$(1-z)^2f''(z)+(2z-3)f'(z)=0,$$

$$(1-z)^2f'''(z)+(4z-5)f''(z)+2f'(z)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

由于 $f(0)=e$, 所以从上面各微分方程, 依次可求得

$$f'(0)=e, f''(0)=3e, f'''(0)=13e,\cdots$$

从而有 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 的展开式

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\right), |z|<1.$$

乘法

例.4

把 $e^z \sin z$ 展开成 z 的幂级数.

解： $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$, $\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots$

$$
\begin{aligned}
e^z \sin z &= \left(1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\right)\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots\right) \\
&= z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots, |z| < \infty.
\end{aligned}
$$

待定系数法

例.5

将 $\tan z$ 展开成 z 的幂级数.

解：因为 $\tan z$ 的展开中心在 $z=0$，最近的一个奇点是 $\frac{\pi}{2}$, 所以我们可以在区域 $|z|<\frac{\pi}{2}$ 内, 将 $\tan z$ 展开成 z 的幂级数.
设 $\tan z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \cdots$,
$\tan z - \tan(-z) = 2\tan z = \ldots$ 而
$\tan(-z) = a_0 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + a_4 z^4 - a_5 z^5 - \cdots$, 因为 $\tan z$ 为奇函数,
$\tan(-z) = -\tan z$, 再比较上述两式 z 的同次幂的系数, 可得
$a_0 = 0, a_2 = 0, a_4 = 0, \cdots$ (或者使用 $2\tan z = 2a_1 z + 2a_3 z^3 + 2a_5 z^5 + \cdots$),
所以

$$\tan z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7 + \cdots,$$

而

$$\begin{aligned}\sin z = \tan z \cdot \cos z &= z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots \\ &= (a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7 + \cdots) \cdot \left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots\right),\end{aligned}$$

将上式的右端相乘, 再比较两端同次幂系数, 有

$$\begin{aligned} 1 &= a_1, \\ -\frac{1}{3!} &= -\frac{1}{2!}a_1 + a_3, \\ \frac{1}{5!} &= \frac{1}{4!}a_1 - \frac{1}{2!}a_3 + a_5, \\ \frac{1}{7!} &= -\frac{1}{6!}a_1 + \frac{1}{4!}a_3 - \frac{1}{2!}a_5 + a_7, \\ &\cdots. \end{aligned}$$

解上述方程, 可得 $a_1 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, a_5 = \frac{2}{15}, a_7 = \frac{17}{315}, \cdots, |z| < \frac{\pi}{2}$. 所以

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots, |z| < \frac{\pi}{2}.$$

例.6

求对数函数 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

我们知道, $\ln(1+z)$ 在从 -1 向左沿着负实轴剪开的平面内是解析的, 而 -1 是它的一个奇点, 所以它在 $|z|<1$ 内可以展开成 z 的幂级数 (图 1).
因为 $\ln'(1+z)=\frac{1}{1+z}$, 而幂级数 $\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$, 其中 $(|z|<1)$. 在展开式的收敛圆 $|z|<1$ 内, 任取一条从 0 到 z 的积分路线 C, 把(5)式的两端沿积分路线 C 逐项积分, 得

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{1+z}dz &= \int_C \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n dz \\ &= \int_C dz - \int_C zdz + \cdots + \int_0^z (-1)^n z^n dz + \cdots ,\end{aligned}$$

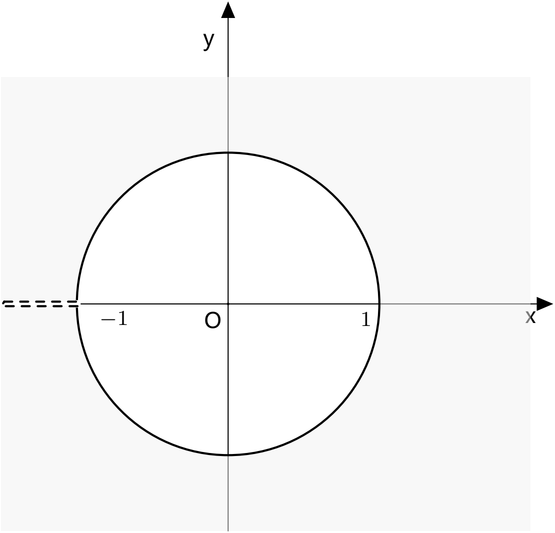


图 1: $\ln(1+z)$ 的泰勒展开式

例.7

求幂函数 $(1+z)^{\alpha}$(α 为复数) 的主值支:

$$f(z)=e^{\alpha\ln(1+z)},\ f(0)=-1,$$

在 $z=0$ 处的泰勒级数.

解: 设 $\phi(z)=\ln(1+z)$, $1+z=e^{\phi(z)}\Rightarrow\frac{1}{1+z}=e^{-\phi(z)}$, 所以 $f(z)=e^{\alpha\phi(z)}$. 求导得

$$f'(z)=e^{\alpha\phi(z)}\alpha\phi'(z)=e^{\alpha\phi(z)}\frac{\alpha}{1+z}=\alpha e^{(\alpha-1)\phi(z)},$$

依次求导，得

$$f''(z)=\alpha(\alpha-1)e^{(\alpha-2)\phi(z)},$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)e^{(\alpha-n)\phi(z)}.$$

令 $z = 0$, 则 $\phi(0) = 0$, 由此得

$$f(0) = 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), \cdots,$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).$$

于是

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots, \ |z| < 1.$$

例.8

把函数 arctanz 展开成 $z=0$ 的幂级数.

因为

$$\arctan z=\int_0^z \frac{dz}{1+z^2},$$

且

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n,\ |z|<1$$

所以

$$\arctan z=\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|<1.$$

例.9

把函数 $\cos^2 z$ 展开成幂级数.

解：因为 $\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z)$,

$$\begin{aligned}\cos 2z &= 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{2^2 z^2}{2!} + \frac{2^4 z^4}{4!} - \frac{2^6 z^6}{6!} + \cdots, \ |z| < \infty.\end{aligned}$$

所以

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = 1 - \frac{2z^2}{2!} + \frac{2^3 z^4}{4!} - \frac{2^5 z^6}{6!} + \cdots, \ |z| < \infty.$$

例.10

将 $\frac{e^z}{1+z}$ 展开成麦克劳林级数.

解: 因为 $\frac{e^z}{1+z}$ 的唯一奇点为 $z=-1$, 所以收敛半径 $R=1$, 函数可在 $|z|<1$ 内进行展开.
令 $f(z)=\frac{e^z}{1+z}$, 对 $f(z)$ 求导得 $f'(z)=\frac{ze^z}{(1+z)^2}=\frac{z}{1+z}f(z)$, 即得如下的微分方程

$$(1+z)f'(z)-zf(z)=0.$$

对微分方程逐次求导得:

$$(1+z)f''(z)+(1-z)f'(z)-f(z)=0$$
$$(1+z)f'''(z)+(2-z)f''(z)-2f'(z)=0$$
$$\vdots$$

由 $f(0)=1,\ \ f'(0)=0,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=-2,\ \cdots$, 所以 $f(z)$ 的麦克劳林级数为

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{1+z}&=1+\frac{1}{2!}z^2-\frac{2}{3!}z^3+\cdots\\&=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots,\ \ |z|<1.\end{aligned}$$

例.11

把函数 $f(z)=\frac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3z-2}&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3z}{2}}=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{3z}{2}+\left(\frac{3z}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3z}{2}\right)^n+\cdots\right]\\&=-\frac{1}{2}-\frac{3z}{2^2}-\frac{3^2z^2}{2^3}-\cdots-\frac{3^nz^n}{2^{n+1}}-\cdots\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nz^n}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

其中，幂级数收敛需要 $\left|\frac{3z}{2}\right|<1$, 即 $|z|<\frac{2}{3.}$.

例.12

将 $\frac{z}{(z+1)(+2)}$ 在 $z_0=2$ 处作泰勒展开，给出表达式并求收敛半径.

由 $\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}=\frac{z}{(z+1)(+2)}$, 可得 $A=-1, B=2$.

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-2)+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z-2}{3}+1}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n, \left|\frac{z-2}{3}\right|<1;$$

$$\frac{2}{z+2}=\frac{2}{(z-2)+4}=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z-2}{4}+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{4}\right)^n, \left|\frac{z-2}{4}\right|<1.$$

当 $\left|\frac{z-2}{3}\right|<1$ 且 $\left|\frac{z-2}{4}\right|<1$ 时, 收敛半径为 $R=3$ 时, 泰勒展开式为

$$\frac{z}{(z+1)(+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n.$$

课堂小结

课堂小结

通过本课的学习, 应理解泰勒展开定理, 熟记五个基本函数的泰勒展开式, 掌握将函数展开成泰勒级数的方法, 能比较熟练的把一些解析函数展开成泰勒级数.
泰勒级数的四种方法：代微分待数

布置作业

教材习题四 P141: 6 1)、3); 8; 11 1)、2); 12 1)、2)、3)、4); 16; 19 1)、2)、3)、4).

若函数 $f(z)$ 在环域内解析, 同样也可以展成幂级数, 这种环域内定义的幂级数称为罗朗级数.

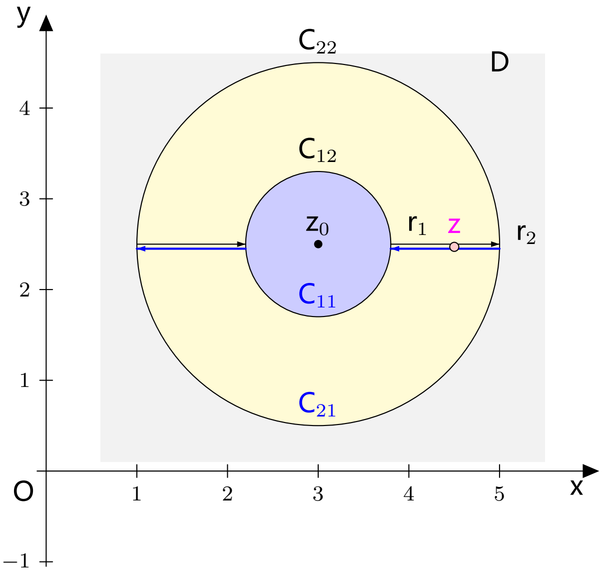
定理.30

设函数 $f(z)$ 在圆环域 $r < |z - z_0| < R\,(r \geq 0, R < +\infty)$ 内解析, 则 $f(z)$ 在此圆环域内可以唯一地展开为罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

其中, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, C 为在圆环域内绕 z_0 的任意一条简单闭曲线. 显然有 $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta$. 等价地, $\oint_C f(\zeta) d\zeta = 2\pi i c_{-1}$.

罗朗 (Laurent) 级数



证明：以点 z_0 为中心, 作两个同心圆 $C_1: |z-z_0| = r_1, C_2: |z-z_0| = r_2$, 使 $r < r_1 < r_2 < R$. 设点 z 是圆环域 $r_1 < |z-z_0| < r_2$ 内的任意一点, 对 $C = C_{22} + C_{12}^- + C_{21} + C_{11}^- = C_2 + C_1^-$, $f(z)$ 在环域内解析, z 是 $\frac{1}{\zeta - z}$ 的奇点, 由柯西积分公式 (图2),
有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

在外环 C_2 上, $|\zeta - z_0| = r_2$, $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \left|\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right| = q_1 < 1,$$

则积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta\right](z-z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

其中 $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$.

其中 $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta$.
在内环 C_1 上, $|\zeta - z_0| = r_1$, , $|z - z_0| > |\zeta - z_0|$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} (\zeta - z_0)^n \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n}} (\zeta - z_0)^{n-1} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} (z - z_0)^{-n}, \left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = q_2 < 1.
\end{aligned}$$

则积分

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta\right] (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

其中 $c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}d\zeta$. 综合上述两个积分, 则

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ (r<|z-z_0|<R),
\end{aligned}
$$

其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$, $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 若令 $f(z)=\phi(z)+\psi(z)$, $\phi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, 函数 $\phi(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析, 称 $\phi(z)$ 为 $f(z)$ 的罗朗级数的解析部分或称为正则部分. $\psi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 称为 $f(z)$ 的罗朗级数的主要部分, $\psi(z)$ 在 $|z-z_0|>r$ 内解析.

注

在 $f(z)$ 的罗朗级数中, 系数 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ 并不等于泰勒级数中的高阶导数公式 $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, 因为函数 $f(z)$ 在 C 所围的区域内不是处处解析. 在将函数展开成罗朗级数时, 一般不用系数公式计算, 而常用几何级数、替换法、求导和积分等来计算.

例.1

将函数 $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$ 在 $0<|z|<\infty$ 内展开成罗朗展式.

解：由定理知:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

其中 $z_0=0$ 是 $f(\zeta)=\frac{e^\zeta}{\zeta^2}$ 的奇点, 罗朗展式的系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}d\zeta$$

围线

$$C:|z|=\rho\ (0<\rho<\infty),\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当 $n\leq -3$ 时, $\frac{1}{\zeta^{n+3}}$ 不存在奇点, $\frac{e^z}{z^2}$ 在圆环内解析, 故由柯西-古萨基本定理知 $c_n=0$.
当 $n\geq -2$ 时, 由高阶导数公式知:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}d\zeta=\frac{1}{(n+2)!}\cdot\left[\frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}}(e^z)\right]_{z=0}=\frac{1}{(n+2)!},$$

故

$$f(z)=\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots,0<|z|<\infty.$$

解:

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots$$
$$0<|z|<\infty.$$

本例中圆环域的中心 $z=0$ 既是各负幂项的奇点, 也是函数 $\frac{e^z}{z^2}$ 的奇点.

例.2

试将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 1) $z=0$; 2) $z=1$; 3) $z=2$ 展开成罗朗级数.

解： $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{a}{1-z}-\frac{b}{2-z}\Rightarrow a=-1, b=1$, 则 $f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$ 有两个奇点, 分别为 $z=1, z=2$.

1) 在 $z=0$ 处有三个环: $0<|z|<1; 1<|z|<2; 2<|z|<+\infty$,

① 在 $0<|z|<1$, $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$, 所以

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n;$$

② 在 $1<|z|<2$, 有 $1/2<\left|\frac{1}{z}\right|<1, 1/2<\left|\frac{z}{2}\right|<1$, 因此有

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\ \frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\text{ 则}$$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}==-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{2^{n+1}};$$

③ 在 $2<|z|<+\infty$, 则有 $0<\left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2}, 0<\left|\frac{2}{z}\right|<1$, $\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$,

$\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$, 则 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^{n+1}}$.

函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 展开成罗朗级数为

$$f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n, & 0<|z|<1\\ -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, & 1<|z|<2\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^{n+1}}, & 2<|z|<+\infty\end{cases} \tag{9}$$

2) 在 $z=1$ 处有两个环: $0<|z-1|<1$ 与 $1<|z-1|<+\infty$.

① 在 $0<|z-1|<1$, $\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-(z-1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$, 所以

$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$;

② 在 $1<|z-1|<+\infty$, $\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-(z-1)}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$, 所以
$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$;
函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=1$ 展开成罗朗级数为

$$f(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n, & 0<|z-1|<1\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}, & 1<|z-1|<+\infty\end{cases} \tag{10}$$

3) 在 $z=2$ 处, 有两环, $0<|z-2|<1, |z-2|>1$.
① 在环域 $0<|z-2|<1$ 内,

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{(z-2)+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n,$$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n.$$

② 在环域 $|z-2|>2$, $0<\frac{1}{|z-2|}<\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{1+(z-2)}=-\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}},$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}.$$

函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=2$ 展开成罗朗级数为

$$f(z)=\begin{cases}\frac{1}{z-2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-2)^n, & 0<|z-2|<1\\ -\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}, & |z-2|>2\end{cases} \tag{11}$$

注

本例中圆环域的中心 $z=0$ 是各负幂项的奇点, 但却不是函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 的奇点.

例.3

将 $\frac{\sin z}{z}$ 在 $z_0 = 0$ 的去心邻域内 $(|z| > 0)$ 展开成罗朗级数.

解：由 $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 可得

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{\sin z}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}, \\
&= \frac{1}{z}\left[z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right] \\
& 0 < |z| < \infty.
\end{aligned}
$$

例.4

将 $[z(z-2)]^{-1}$ 在 $z_0=2$ 的去心邻域内展开成罗朗级数.

解：在 $0<|z-2|<2$ 内, 即 $r_1=0, r_2=2$, 罗朗级数为

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+(z-2)} \\ &= \frac{1}{z-2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2(z-2)} - \frac{1}{2^2} + \frac{z-2}{2^3} + \cdots. \end{aligned}$$

例.5

将函数 $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 内展开成罗朗展式.

解：函数 $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 内是处处解析的. 我们知道, e^z 在复平面内的展开式是:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

而 $\frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 解析, 所以把上式中的 z 代换成 $\frac{1}{z}$, 可得 $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$. 两边乘以 z^3, 即得所求的罗朗展开式：

$$\begin{aligned} z^3 e^{\frac{1}{z}} &= z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{4! z^4} + \cdots\right) \\ &= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3-n}}{n!}. \end{aligned}$$

例.6

函数 $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在以下圆环域 (1) $1<|z|<2$; (2) $0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内的罗朗展开式.

解：对于复函数

$$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},$$

可令

$$f(z)=\frac{a}{z-2}+\frac{bz+c}{z^2+1}.$$

整理后得

$$\begin{cases} a+b=1, \\ c-2b=-2, \\ a-2c=5 \end{cases}$$

求解得 $a=1, b=0, c=-2$, 则

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}.$$

(1) 当 $f(z)$ 在 $r_1 = 1 < |z| < 2 = r_2$ 内时, $\frac{1}{4} < \frac{1}{|z^2|} = \frac{1}{|z|^2} < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)} - \frac{2}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{2}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

(2) 当 $f(z)$ 在 $0 < |z-2| < \sqrt{5}$ 内时, 且有 $|z-2| < |2 \pm i|$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1} = \frac{1}{z-2} - i\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

$$= \frac{1}{z-2} - i\left[\frac{1}{(z-2)+(i+2)} - \frac{1}{(z-2)+(2-i)}\right]$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{(2-i)\left(1+\frac{z-2}{2-i}\right)} - \frac{1}{(2+i)\left(1+\frac{z-2}{2+i}\right)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n - \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left[\frac{1}{(2-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right]
\end{aligned}
$$

整理后得

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left[(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}\right] \cdot \frac{(z-2)^n}{5^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

例.7

求下列各积分

$$1)\ \oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)(z+4)}dz;\ \ 2)\ \oint_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz.$$

解：(1) 函数 $f(z)=\frac{1}{z(z+1)(z+4)}$ 的奇点有 $z_1=0, z_2=-1, z_3=-4$, 在圆环域 $1<|z|<4$ 内处处解析, 且 $|z|=3$, 在此圆环域内, 所以 $f(z)$ 在此圆环域内罗朗展开式的系数 c_{-1} 乘以 $2\pi i$ 即为所求积分值. 令

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{a}{z}+\frac{b}{z+1}+\frac{c}{z+4}\\
&= \frac{(z^2+bz+4)a+b(z^2+4z)+c(z^2+z)}{z(z+1)(z+4)}\\
&= \frac{(a+b+c)z^2+(5a+4b+c)z+4a}{z(z+1)(z+4)}
\end{aligned}$$

整理后得

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 5a+4b+c=0, \\ 4a=1 \end{cases}$$

求解得 $a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{3}, c=\frac{1}{12}$, 则

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4z}-\frac{1}{3(z+1)}+\frac{1}{12(z+4)} \\ &= \frac{1}{4z}-\frac{1}{3z(1+\frac{1}{z})}+\frac{1}{48(\frac{z}{4}+1)} \\ &= \frac{1}{4z}-\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z^2}-\cdots+\frac{1}{48}\left(1-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{16}-\cdots\right). \end{aligned}$$

由此可见, $c_{-1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$, 从而

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)(z+4)}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{12}\right)=-\frac{\pi i}{6}.$$

(2) 函数 $f(z)=\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 在 $1<|z|<\infty$ 内处处解析, $|z|=2$, 在此圆环域内, 把此函数在圆环域 $1<|z|<\infty$ 内展开得

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{\frac{1}{z}}}{-\left(1-\frac{1}{z}\right)} \\
&= -\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right) \\
&= -\left(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right).
\end{aligned}
$$

故 $c_{-1}=-2$, 从而

$$\oint_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz=2\pi i\, c_{-1}=-4\pi i.$$

课堂小结

课堂小结

在这节课中, 我们学习了罗朗展开定理和函数展开成罗朗级数的方法. 将函数展开成罗朗级数是本节的重点和难点.

布置作业

教材习题四 P141: 6 1)、3); 8; 11 1)、2); 12 1)、2)、3)、4); 16; 19 1)、2)、3)、4).