教　　案　　纸

● 2019/11/19

● 互动提问

理论课 13　§ 5.3-5.3 留数在定积分中的应用

I　**组织教学**

1、集中学生注意力;

2、清查学生人数;

3、维持课堂纪律;

II　**复习导入及主要内容**

1、上次作业讲评;

2、上次内容总结

3、本次主要内容

4、重点: 理解函数在孤立奇点的留数概念; 掌握并能应用留数定理; 掌握留数的计算法, 特别是极点处留数的计算法.

5、难点: 掌握留数的计算法, 特别是极点处留数的计算法.

III　**教学内容及过程**

一、　留数在定积分中的应用

方法: 将所求的定积分转化为沿闭路的围线积分, 然后利用留数定理计算相应的积分.

1、　形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 的积分计算

$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 为 $\cos\theta, \sin\theta$ 的有理函数.

将定积分化为一个复变函数沿某条封闭路线的积分, 其中的两个重要工作是: 1) 积分区域的转化, 2) 被积函数的转化. 令 $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta, d\theta = \frac{dz}{iz}$, 函数

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

当 θ 历经范围 $[0, 2\pi]$ 时, z 沿单位圆周 $|z| = 1$ 正方向绕行一周. 代入原式

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z)dz$$
$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

其中 $f(z) = R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})\frac{1}{iz}, z_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 是复函数 $f(z)$ 在单位圆内的有限个孤立奇点, 即包围在单位圆周内的诸孤立奇

点. $f(z)$ 是 z 的有理函数, 且在单位圆周上分母不为零, 满足留数定理的条件.

例 .1

计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta\ (a>b>0)$.

解: 令 $z=e^{i\theta}$, 则

$$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2zi},\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz},$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta&=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{-4z^2}\cdot\frac{1}{a+b\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz}\\&=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{-2iz^2(bz^2+2az+b)}dz\\&=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{-2iz^2b(z^2+\frac{2a}{b}z+1)}dz\\&=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2dz}{-2iz^2b\left(z-\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\left(z-\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)}\\&=2\pi i\Big\{\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right]\Big\}\\&=\frac{2a\pi}{b^2}-\frac{2\pi\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}=\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}),\end{aligned}$$

其中, $z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}=-\frac{a}{b}+\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}$, 令 $x=\frac{a}{b}$, $-\frac{a}{b}+\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}=\sqrt{x^2-1}-x=f(x)$. 显然有 $f(1)=-1$; 当 $x>1$ 时, $f(x)<0$, 且 $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1>0$, 被积函数的模满足 $|f(x)|<1$, z_1 是 $f(z)$ 在单位圆周 $|z|=1$ 内的奇点.

注解 37 由上式得 $z_1z_2=1$, 留数

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),z_1]&=\left.\frac{(z^2-1)^2}{-2iz^2b(z-z_2)}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{(z_1^2-1)^2}{-2iz_1^2b(z-z_2)}\right|_{z=z_1}\\&=-\frac{1}{2bi}\frac{(\frac{z_1^2-1}{z_1})^2}{(z_1-z_2)}=-\frac{1}{2bi}\frac{\frac{(z_1^2-z_1z_2)^2}{z_1}}{z_1-z_2}=-\frac{1}{2bi}\frac{(z_1-z_2)^2}{z_1-z_2}\\&=-\frac{1}{2bi}(z_1-z_2)=-\frac{1}{bi}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),0] &= \left[\frac{(z^2-1)^2}{-2bi(z-z_1)(z-z_2)}\right]'\Big|_{z=0}\\ &= -\frac{1}{2bi}\left[\frac{2(z^2-1)2z(z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]\Big|_{z=0}\\ &\quad+\frac{1}{2bi}\left[\frac{(z^2-1)^2(2z-z_1-z_2)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]\Big|_{z=0}\\ &= -\frac{1}{2bi}\frac{z_1+z_2}{z_1^2z_2^2} = -\frac{1}{2bi}\times\frac{-2a}{b} = \frac{a}{b^2i} = -\frac{ai}{b^2}.\end{aligned}$$

例 .2

计算积分 $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\sin^2\theta}\,(a>0)$.

● 无法用 Matlab 和 Mathema 给出解析解

解: 需要将 $0<\theta<\pi$ 转化到 $[0,2\pi]$ 上, 显然

$$0<2\theta<2\pi,$$

令 $z=e^{i\theta}$, 由 $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{z^2+1}{2z}$, 带入原式得

$$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz},$$

换元得到标准形式:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\sin^2\theta} &= \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \xlongequal{\theta=\frac{t}{2}} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\frac{1-\cos t}{2}}dt\\ &\xlongequal{2\theta=t}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\frac{1-\cos t}{2}}\\ &=\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{1-(z^2+1)/(2z)}{2}}\cdot\frac{dz}{iz}\\ &=\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{2z-z^2-1}{4z}}\frac{dz}{iz}\\ &=\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1}\frac{4z}{4az+2z-z^2-1}\frac{dz}{iz}\\ &=-2i\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{4az+2z-z^2-1}dz\\ &=2i\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-2(2a+1)z+1}.\end{aligned}$$

单位圆内极点为: $z_1=2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1}$, 单位圆外极点为:

$z_2 = 2a+1+\sqrt{(2a+1)^2-1}$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta} &= 2\pi i\cdot 2i\ \mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right] = -4\pi\ \mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right]\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}.\end{aligned}$$

注解 38 $z_1z_2=1$, $\mathrm{Res}[f(z),z_1] = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{-2\sqrt{(2a+1)^2-1}}$, 所以

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a+\sin^2 x} = -4\pi\times\frac{1}{-2\sqrt{(2a+1)^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}.$$

● 换元 + 变限

例 .3

计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta\ (0<p<1)$ 的值.

解: 由于 $0<p<1$, 被积函数的分母 $1-2p\cos\theta+p^2=(1-p)^2+2p(1-\cos\theta)$ 在 $0\le\theta\le 2\pi$ 内不为零, 因而积分是有意义的. 由于

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z^2+z^{-2}\right) = \frac{z^4+1}{2z^2},$$

换元得下面的围线积分

$$\begin{aligned}I &= \int_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\frac{z^2+1}{2z}+p^2}\frac{dz}{iz}\\ &= \int_{|z|=1}\frac{z^4+1}{2z^2}\cdot\frac{1}{1-p\cdot\frac{z^2+1}{z}+p^2}\frac{dz}{iz}\\ &= \int_{|z|=1}\frac{z^4+1}{2z^2}\cdot\frac{1}{i(z-p\cdot(z^2+1)+zp^2)}dz\\ &= \int_{|z|=1}\frac{z^4+1}{2z^2}\cdot\frac{1}{i(z-p-pz^2+zp^2)}dz\\ &= \int_{|z|=1}\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}dz = \int_{|z|=1}f(z)dz.\end{aligned}$$

● $(1-p\cdot(z+z^{-1})+p^2)z = z-pz^2-p+p^2z = (z-p)-pz(z-p)$.

在被积函数的三个极点 $z=0,p,\frac{1}{p}$ 中, 只有前两个在圆周 $|z|=1$ 内, 其中 $z=0$ 为二级极点, $z=p$ 为一级极点, 所以在圆周

$|z|=1$ 上的被积函数无奇点. 而

$$\begin{aligned}\text{Res}[f(z),0] &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(z-p\cdot(z^2+1)+zp^2)}\right]\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{1+z^4}{2i(z-p\cdot(z^2+1)+zp^2)}\right]\\ &= \frac{1}{2i}\lim_{z\to 0}\frac{(z-pz^2-p+p^2z)4z^3-(1+z^4)(1-2pz+p^2)}{(z-pz^2-p+p^2z)^2}\\ &= -\frac{1+p^2}{2ip^2}.\end{aligned}$$

$$\text{Res}[f(z),p] = \lim_{z\to p}\left[(z-p)\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right] = \frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}.$$

因此

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta = 2\pi i\left[-\frac{1+p^2}{2ip^2}+\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}\right]\\ &= \frac{2\pi p^2}{1-p^2}.\end{aligned}$$

例 .4

计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{p^2-2p\cos\theta+2}d\theta\ (0<p<1)$ 的值. ♡

解:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{p^2-2p\cos\theta+2}d\theta\\ &\overset{\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},\cos 2\theta=\frac{z^4+1}{2z^2}}{=\!=\!=\!=\!=} \oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{p^2-2p\frac{z^2+1}{2z}+2}\frac{dz}{iz}\\ &= -i\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^4+1}{z^2}}{2p^2z-2p(z^2+1)+4z}dz = i\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^4+1}{z^2}}{2p(z^2+1)-2p^2z-4z}dz\\ &= i\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^4+1}{z^2}}{2pz^2-(4+2p^2)z+2p}dz\\ &\overset{z_{1,2}=(2+p^2)\pm2\sqrt{4+p^4}}{=\!=\!=\!=\!=} i\oint_{|z|=1}\frac{z^4+1}{z^2(2pz^2-(2p^2+4)z+2p)}dz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{上式} &= i2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^4+1}{z^2(2pz^2-(2p^2+4)z+2p)}, 0\right] \\
&= -2\pi\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

例 .5

计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2}$ 的值.

- syms x;
- int(1/ (5-3*sin(x))2,0,pi)
- $$
\begin{aligned}
&\left[\frac{z}{(z-3i)^2}\right]' \\
&= \left[\frac{z-3i+3i}{(z-3i)^2}\right]' \\
&= \left[\frac{-1}{(z-3i)^2} + \frac{-6i}{(z-3i)^3}\right]' \\
&= \left[\frac{-3i-z}{(z-3i)^3}\right]'
\end{aligned}
$$

解: 令 I= $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2}$, 因 $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}, d\theta=\frac{dz}{iz}$, 则原积分为

$$
\begin{aligned}
\oint_{|z|=1}\frac{1}{(5-3\frac{z^2-1}{2iz})^2}\frac{dz}{iz} &= \oint_{|z|=1}\frac{-4z^2}{(-3z^2+10iz+3)^2}\frac{dz}{iz} \\
&= -\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{(3z^2-10iz-3)^2} \\
&= -\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{(3z-i)^2(z-3i)^2} \\
&= -\frac{4}{i}\times 2\pi i\times \operatorname{Res}\left[\frac{z}{(3z-i)^2(z-3i)^2}, \frac{i}{3}\right] \\
&= -8\pi\times\lim_{z\to\frac{i}{3}}\left[\left(z-\frac{i}{3}\right)^2\frac{z}{(3z-i)^2(z-3i)^2}\right]',
\end{aligned}
$$

其中, 由于在单位圆 $|z|=1$ 内, $z=\frac{i}{3}$ 是函数的一个二阶奇点, 所以

$$
\begin{aligned}
I &= -8\pi\times\frac{1}{9}\lim_{z\to\frac{i}{3}}\left[\frac{z}{(z-3i)^2}\right]' \\
&= -8\pi\times\frac{1}{9}\left[\frac{(z-3i)^2-2(z-3i)z}{(z-3i)^4}\right]_{z=\frac{i}{3}} \\
&= -8\pi\times\frac{1}{9}\left[\frac{-z-3i}{(z-3i)^3}\right]_{z=\frac{i}{3}} \\
&= -8\pi\times\frac{1}{9}\left[\frac{-\frac{i}{3}-3i}{(\frac{i}{3}-3i)^3}\right] = 2\pi i\cdot\frac{1}{9}\left[\frac{\frac{-10i}{3}}{(\frac{-8i}{3})^3}\right] \\
&= -8\pi\times\frac{1}{9}\times\frac{-45}{64\times 4}, \\
&= -8\pi\times\left(-\frac{5}{256}\right) = \frac{5}{32}\pi,
\end{aligned}
$$

于是原积分值为 $I=\frac{5\pi}{32}$.

● 后两种积分形式中，无穷是被积函数的可去奇点.

例 .6

计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^3}$ 的值.

解: $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^3}=\frac{59\pi}{1024}=0.18101.$

2、 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$ 型积分

本小节只介绍 $R(x)$ 是有理函数的情形.

1) 被积函数的转化: 取 $f(z)=R(z)$ (当 z 在实轴上的区间内变动时, $f(z)=R(x)$).

2) 积分区域的转化: 取一条连接区间两端的逐段光滑曲线, 使与区间一起构成一条封闭曲线, 并使 $f(z)$ 在其内部除有限孤立奇点外处处解析 (此法常称为"围线积分法").

取 R 适当大, 使 $f(z)$ 所有的在上半平面内的极点 z_k 都包在这条积分路线内, 这里可补线 C_R. (以原点为中心, R 为半径的在上半平面的半圆周, 图 43).

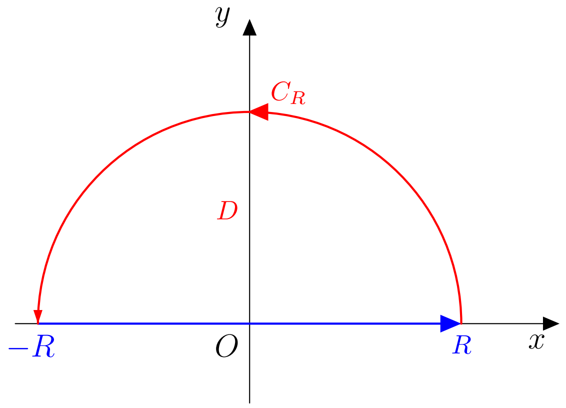

图 43: 围线积分

当 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为 x 的有理函数, $P(x)\in P_n(x),Q(x)\in P_m(x)$, 且 $m-n\geq 2$, 即 $Q(x)$ 的次数比 $P(x)$ 的次数**至少高二次**, 若 $f(z)$ 在实轴上没有奇点, 则积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)dz$ 存在, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\,[R(z),z_k].$$

z_k 为 $f(z)$ 在以原点为心, 以 R 为半径的上半圆周内的有限个孤

立奇点. 下式成立

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx \equiv \oint_{C} f(z)dz.$$

证 9 补线 C_R (半径 R 圆的上半圆周), 不妨设 $R>1$. 与区间段 $[-R,R]$ 一起构成封闭曲线 C, $f(z)\equiv R(z)$ 在 C 及其内部 (除去有限孤立奇点)处处解析. 根据留数定理得:

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[f(z), z_k],$$

$$\begin{aligned}|f(z)| = \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} &= \frac{|z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|}{|z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m|}\\ &= \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|z|^{m-n}\,|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}\\ &\le \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|},\end{aligned}$$

其中$m-n\geq 2$. 当 $|z|$ 充分大时, 总可使

$$\left|a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}\right| < \frac{1}{10}, \left|b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}\right| < \frac{1}{10},$$

因为 $m-n\geq 2$, 所以

$$|f(z)| \le \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|} < \frac{2}{|z|^2}.$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \int_{C_R} |f(z)|ds \le \frac{2}{R^2}\pi R = \frac{2\pi}{R} = \frac{2}{R^2},$$

$$R \to +\infty: \int_{C_R} f(z)dz \to 0, \int_{-R}^{R} f(z)dz \to \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(z)dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k].$$

引理 1 *(约当引理 (Jordan's Lemma))* 设 C 为圆周 $|z|=R$ 的上半圆周连同区间 $[-R,R]$ 组成的曲线 (图44), 函数 $f(z)$ 在 C 上连续, 且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$, 则有 $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$, $\oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$.

证 令 $z=Re^{i\theta}, 0\le\theta\le\pi$, $dz=Re^{i\theta}id\theta=izd\theta$, 则

$$\oint_C f(z)dz=\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz\right]=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k],$$

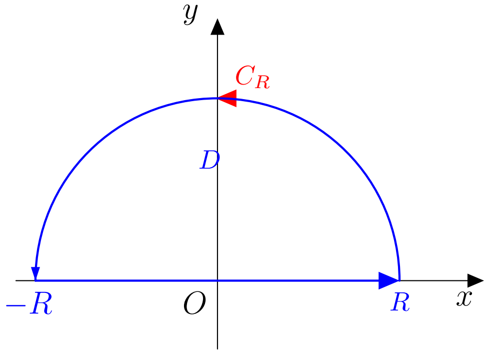

图 44: 上半圆周围线

对 $\forall\varepsilon>0$, 当 $|z|=R$ 充分大时, 有 $|zf(z)|=\left|Re^{i\theta}f(Re^{i\theta})\right|<\varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta\right|&=\left|\int_{C_R}f(z)dz\right|\\&\le\int_0^{\pi}\left|f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\right|d\theta<\varepsilon\pi\to0,\end{aligned}$$

$$\lim_{|z|=R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0,$$

所以 $\int_C f(z)dz=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\operatorname{Res}\sum\limits_{k=1}^{n}[f(z),z_k]$.

注解 39 也可以按下面这种方式计算围线积分: $\int_{C_R}f(z)dz=\int_0^{\pi}f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta=i\lim\limits_{z\to\infty}\int_0^{\pi}zf(z)d\theta=0$.

例 .7

计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$, $(a>0,b>0,a\ne b)$. ♡

解: 由

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)},$$

在上半平面有一级极点 $z=bi$, 二级极点 $z=ai$.

$$\mathrm{Res}[f(z),bi]=\left.\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z+bi)}\right|_{z=bi}=\frac{1}{2bi(a^2-b^2)^2},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),ai]&=\left.\left[\frac{1}{(z+ai)^2(z^2+b^2)}\right]'\right|_{z=ai}\\&=\left.\frac{-[2(z+ai)(z^2+b^2)+2z(z+ai)^2]}{(z+ai)^4(z^2+b^2)^2}\right|_{z=ai}\\&=\left.\frac{-[2(z^2+b^2)+2z(z+ai)]}{(z+ai)^3(z^2+b^2)^2}\right|_{z=ai}\\&=\frac{-[2((ai)^2+b^2)+2z(2ai)]}{(2ai)^3((ai)^2+b^2)^2}\\&=\frac{b^2-3a^2}{4a^3i(b^2-a^2)^2},\end{aligned}$$

所以积分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}&=2\pi i\{\mathrm{Res}\,[f(z),\,bi]+\mathrm{Res}\,[f(z),\,ai]\}\\&=2\pi i\left[\frac{b^2-3a^2}{4a^3i(b^2-a^2)^2}+\frac{1}{2bi(b^2-a^2)^2}\right]\\&=\frac{(2a+b)\pi}{2a^3b(a+b)^2}.\end{aligned}$$

例 .8

计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx,\ a>0,b>0$ 的值.

解: 因为分母次数比分子次数高二次, 且函数在实轴上无奇点, 故积分存在. 在上半平面内, $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ 有两个极点 $z=ai,z=bi$. 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,[f(z),ai]&=\lim_{z\to ai}\left[(z-ai)\cdot\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right]\\&=\lim_{z\to ai}\left[\frac{z^2}{(z+ai)(z^2+b^2)}\right]\\&=\frac{-a^2}{2ai(b^2-a^2)}=\frac{a}{2i(a^2-b^2)}.\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),bi] &= \lim_{z\to bi}\left[(z-bi)\cdot\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right]\\ &= \lim_{z\to bi}\left[\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z+bi)}\right]\\ &= \frac{-b^2}{2bi(a^2-b^2)} = \frac{b}{2i(b^2-a^2)}.\end{aligned}$$

所以 $I = 2\pi i\left[\frac{a}{2i(a^2-b^2)}+\frac{b}{2i(b^2-a^2)}\right] = \pi\frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{\pi}{a+b}$.

3、 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx, (a>0)$

积分存在的要求: $R(x)\equiv f(x)$ 是 x 的有理函数且分母的次数至少比分子的次数高一次, 并且 $f(z)$ 在实轴上无孤立奇点. 同前一种类型的处理方式: 补线 C_R, C_R 与 $[-R,R]$ 一起构成封闭曲线 C, 使 $f(z)$ 所有的在上半平面内的极点 z_k 都包在这积分路线内 (图 45).

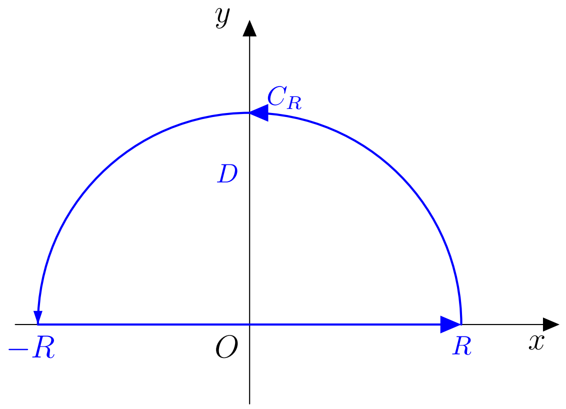

图 45: 围线积分

当 $R(x)=f(x)$ 是 x 的有理多项式函数, 而分母次数比分子次数至少高一次, 且 a 为正实数, $f(z)$ 在实轴上无零点时, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[f(z)e^{iaz}, z_k\right].$$

引理 2 设 C_R 为 $|z|=R$ 的上半圆周, 函数 $f(z)$ 在 C_R 上连续, 且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, 则

$$\lim_{|z|=R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0,\ (a>0).$$

证 当 z 在 C_R 上时, 有条件 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, 即, 对 $\forall\varepsilon>0$, 当 R 充分大有 $|f(z)|<\varepsilon$. 令 $z=Re^{i\theta}\,(0\le\theta\le\pi)$, 被积函数替换为 $e^{-Ra\sin\theta}\le e^{-\frac{2\theta}{\pi}Ra}, 0\le\theta\le\pi$.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| &\le \left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{iaR(\cos\theta+i\sin\theta)}Rie^{i\theta}d\theta\right| \\
&\le R\varepsilon\int_0^\pi e^{-Ra\sin\theta}d\theta = 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Ra\sin\theta}d\theta \\
&\le 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}Ra\theta}d\theta = -\frac{\pi}{a}\varepsilon e^{-\frac{2}{\pi}Ra\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{a}(1-e^{-Ra})\varepsilon \xrightarrow{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} \frac{\pi}{a}\varepsilon \to 0.
\end{aligned}
$$

可以证明, 当 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin\theta\ge\frac{2\theta}{\pi}$, 见图 46,

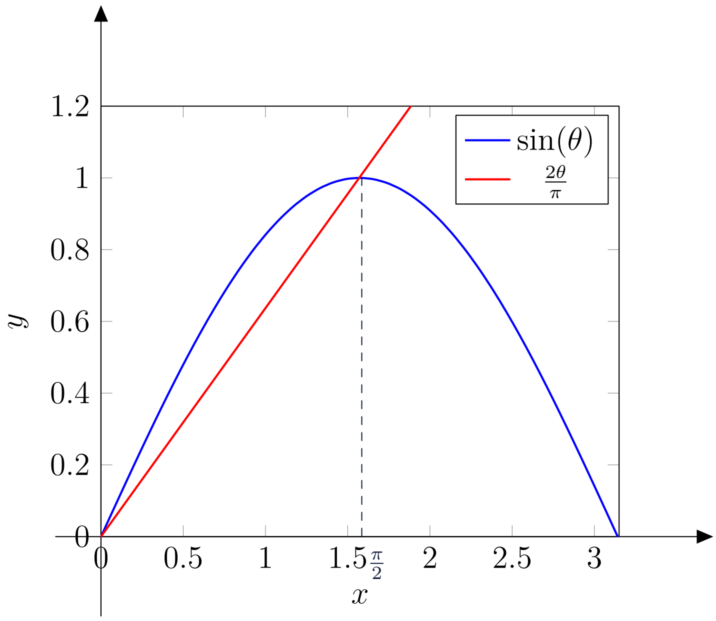

图 46: 函数放缩

注解 40 约当引理与留数定理结合可以计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(x)dx$ 形式的积分, 其中 $P(x),Q(x)$ 是多项式函数, 且分母多项式次数比分子多项式次数至少大 *1*.

注解 41 因为 $\int_0^\pi[\cdots]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cdots]d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\cdots]d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cdots]d\theta$. 所以有 $\lim\limits_{|z|=R\to+\infty}\int_C f(z)e^{i\lambda z}dz=0$.

所以

$$\oint_C f(z)e^{iaz}dz = \lim_{|z|=R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(\theta)e^{ia\theta}d\theta + \int_{c_R} f(z)e^{iaz}dz\right]$$
$$= 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z)e^{iaz}, z_k\right].$$

即 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z)e^{iaz}, z_k], z_k$ 是 $f(z)$ 在上半平面内的奇点. 一般情形下,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{iaz}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos az dz + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\sin az dz$$
$$= 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z)e^{iaz}, z_k].$$

例 .9

计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx$, $(m>0, a>0)$.

解:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}dz\right].$$

又

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+a^2)^2}, \frac{z\sin mz}{(z^2+a^2)^2} = \mathrm{Im}[f(z)e^{imz}].$$

在上半平面只有二级极点 $z=ai$, 则有

$$\mathrm{Res}(f(z)e^{imz}, ai) = \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]_{z=ai} = \frac{m}{4a}e^{-ma},$$

注解 42

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z)e^{imz}, ai] &= \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]_{z=ai} \\
&= \frac{e^{imz}+ze^{imz}im)(z+ai)^2 - 2(z+ai)ze^{imz}}{(z+ai)^4}\Big|_{z=ai} \\
&= \frac{e^{imz}(1+im\,z)(z+ai) - 2ze^{imz}}{(z+ai)^3}\Big|_{z=ai} \\
&= \frac{e^{-ma}(1-ma)2ai - 2aie^{-ma}}{(2ai)^3} \\
&= \frac{e^{-ma}(1-ma) - e^{-ma}}{(2ai)^2} \\
&= \frac{e^{-ma}[(1-ma)-1]}{(2ai)^2} \\
&= \frac{-mae^{-ma}}{-4a^2} \\
&= \frac{m}{4a}e^{-ma},
\end{aligned}
$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}e^{imx}dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}, ai\right],$$

所以

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z)e^{imz}, ai]\right] \\
&= \pi\mathrm{Re}[\mathrm{Res}[f(z)e^{imz}, ai]] = \frac{m\pi}{4a}e^{-ma}.
\end{aligned}
$$

积分类型的要求

注意: 以上两型积分中被积函数中的 $R(x)$ 在实轴上无孤立奇点.

例 .10

计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$, $(a>0)$ 的值.

解: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$ 是 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx$ 的实部, 即 $\mathrm{Re}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}=\frac{\cos x}{x^2+a^2}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dz&=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+a^2},ai\right]=2\pi i\lim_{z\to ai}\left[(z-ai)\cdot\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\right]\\&=2\pi i\left[\frac{e^{iz}}{z+ai}\right]_{z=ai}=2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2ai}=\frac{\pi e^{-a}}{a}.\end{aligned}$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi e^{-a}}{a}$. 其虚部 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+a^2}dx=0$.

例 .11

计算 $I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$, $(a>0)$ 的值.

解:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}dx=\pi i\cdot\left[\frac{ze^{iz}}{z+ai}\right]_{z=ai}=\pi i\cdot\frac{aie^{-a}}{2ai}=\frac{\pi e^{-a}}{2}i,$$

而所求的积分为 I 的虚部, 所以 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi e^{-a}}{2}$.

例 .12

计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

解: $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

因 $\frac{\sin x}{x}$ 在实轴上有一级极点 $z=0$, 应使封闭路线不经过奇点, 所以可取图示路线 (图 47):

封闭曲线 $C=C_R+[-R,-r]+C_r+[r,R]$, 由柯西-古萨定理得:

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx=0,$$

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx\,\underline{\underline{x=-t}}\int_R^r\frac{e^{-it}}{t}dt=-\int_r^R\frac{e^{-ix}}{x}dx,$$

由

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

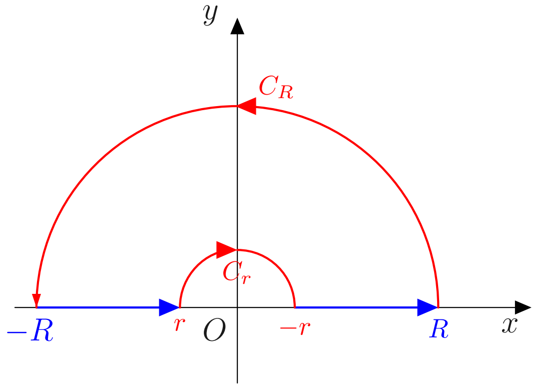

图 47: 围线积分

知

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx + \int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0,$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| &\le \int_{C_R}\frac{|e^{iz}|}{|z|}ds = \frac{1}{R}\int_{C_R}e^{-y}ds = \int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta}d\theta\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}d\theta \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)}d\theta\\ &= \frac{\pi}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)}d\frac{2R\theta}{\pi}\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}),$$

于是 $R \to +\infty \Rightarrow \oint_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz \to 0$, 当 r 充分小时, 因为

$$\begin{aligned}\frac{e^{iz}}{z} &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}z^{n-1}\\ &= \frac{1}{z} + i + \frac{i^2 z}{2!} + \cdots + \frac{i^n z^{n-1}}{n!} + \cdots = \frac{1}{z} + g(z),\end{aligned}$$

其中

$$g(z) = i + \frac{i^2 z}{2!} + \frac{i^3 z^2}{3!} + \cdots + \frac{i^n z^{n-1}}{n!} + \cdots$$

当 $|z|$ 充分小时, 总有 $|g(z)| \leq 2$,

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_r} \frac{1}{z} dz + \int_{C_r} g(z) dz,$$

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^{0} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = -i\pi,$$

因为

$$\left|\int_{C_r} g(z)dz\right| \leq \int_{C_r} |g(z)|\, ds \leq 2\int_{C_r} ds = 2\pi r,$$

$$r \to 0 \Rightarrow \int_{C_r} g(z)dz \to 0,$$

即

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i + 0 = -i\pi.$$

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \Rightarrow 2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

例 .13

(菲涅耳 (fresnel) 积分) 已知 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 证明: $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

解: 当 $z = x$ 时, 函数 $e^{ix^2} = \cos x^2 + i\sin x^2$. 给定路径 (图 48), 对于函数 e^{iz^2},

$$\oint_{OA} e^{ix^2} dz + \oint_{AB} e^{iz^2} dz + \oint_{BO} e^{iz^2} dz = 0,$$

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{i2\theta}} Rie^{i\theta} d\theta + \int_R^0 e^{ir^2 e^{\frac{\pi}{2}i}} e^{\frac{\pi}{4}i} dr = 0,$$

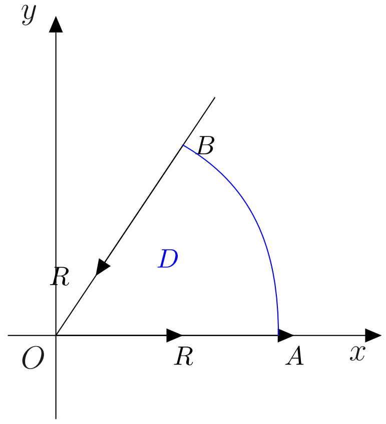

图 48: 积分区域

或者

$$\int_0^R (\cos x^2 + i\sin x^2)dx = e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^R e^{-r^2}dr - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos 2\theta - R^2\sin 2\theta}Rie^{i\theta}d\theta.$$

当 $R\to\infty$ 时,

$$e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty e^{-r^2}dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos 2\theta - R^2\sin 2\theta}Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\sin 2\theta}Rd\theta \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}d\theta = \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}) \to 0,\ (R\to\infty).$$

$$\int_0^\infty (\cos x^2 + i\sin x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

令两端实部与虚部分别相等,得

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

IV　课堂小结

本课我们应用“围线积分法”计算了三类实积分, 熟练掌握应用留数计算定积分是本章的难点.

V　**布置作业**

1、教材习题五 P183: 1 1)、4)、7)、8)、9); 3; 4; 8; 9 1)、2)、3)、6); 11 2); 12 2); 13 1)、3)、4)、5).