、

复变函数

原函数与不定积分、柯西积分公式

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

October 15, 2020

目录

目录

第二次教案下载二维码

Github 下载

教案下载

原函数介绍

由柯西定理, 解析函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内的围线 C 上的积分为 0. 对于简单曲线 C, 积分 $\int_C f(z)dz$ 与连接起点及终点的路径 C 无关. 解析函数在单连通区域 D 内的积分只与起点 z_0 及终点 z_1 有关, 如图 1 所示的积分曲线,

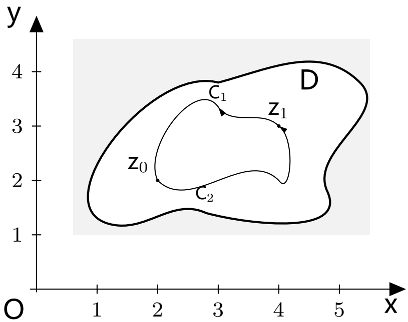


图: 积分路径

有

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz.$$

固定 z_0, 让 z_1 在 B 内变动, 并令 $z_1 = z$, 积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 D 内确定了一个单值函数 $F(z)$.

利用单值函数 $F(z)$, 可以定义函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, 对这个积分有下述定理:

定理 .1

设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

证：从导数的定义出发证明 $F'(z)=f(z)$. 对 $\forall z_0\in D$, 作 B 内圆 $K: k=z+re^{i\theta}, \theta\in[0,2\pi], r>0$. 取 $|\Delta z|$ 充分小, 使得 $z_0+\Delta z$ 在 K 内 (图4),

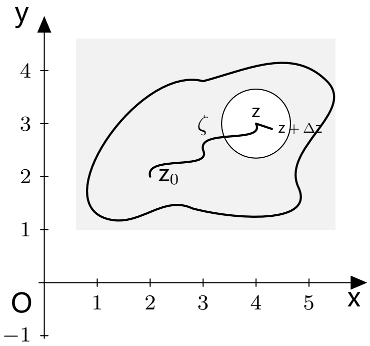


图: 证明解析函数 $F'(z)=f(z)$ 的所用路径

证明 2

于是有

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

由于积分与路径无关, 因此积分 $\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$ 的积分路线可取由 $z_0\to z\to z+\Delta z$ 的积分路线取得, $F(z+\Delta z)$ 在 $z_0\to z$ 上的积分路线跟积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 的积分路线相同. 于是有

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta.$$

又因

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta=f(z)\Delta z,$$

证明 3

从而有

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}f(\zeta)d\zeta-f(z)d\zeta$$
$$=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta.$$

因为 $f(z)$ 在 D 内解析, 所以 $f(z)$ 在 D 内连续. 对于 $\forall\epsilon>0$, 可找到 $\delta>0$, 对 $\zeta:|\zeta-z|<\delta$, 当 $|\Delta z|<\delta$ 时, 总有

$$|f(\zeta)-f(z)|<\epsilon.$$

证明 4

根据积分的估值性质

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| &= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|d\zeta \\ &\le \frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z| = \epsilon.\end{aligned}$$

由实函数的积分与路径无关, 下述积分

$$\begin{aligned}\oint_C udx - vdy &= \iint_G\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy = \iint_G\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

证明 5

同样地, 另一个积分

$$\oint_C vdx + udy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

所以有 $\oint_C f(z)dz = 0$. 这就是说

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = 0,$$

即

$$F'(z) = f(z).$$

证明 1

令 $F(z)=P(x,y)+iQ(x,y), F'(z)=f(z)=u+iv$, 因此有 $\frac{\partial P}{\partial x}=u, \frac{\partial Q}{\partial y}=v$; 另一方面,

$$F'(z)=\left[\int_{z_0}^{z} f(z)dz\right]'=\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udx-vdy+i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} vdx+udy\right]',$$

所以对应有

$$P(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udx-vdy,$$

$$Q(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} vdx+udy,$$

证明 7

而积分与路径无关, 因而有

$$\frac{\partial P}{\partial x} = u, \frac{\partial P}{\partial y} = -v, \frac{\partial Q}{\partial x} = v, \frac{\partial Q}{\partial y} = u$$
$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta$ 在区域 D 内解析.

目录

原函数的引入

基于上述定理, 为了解决积分求解问题, 先引入需要的原函数概念.

定义 .1

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续. 若 D 内的一个函数 $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, 满足 $\Phi'(z) = f(z)$, 则称 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数. 称原函数的全体组成了 $f(z)$ 的全体不定积分.

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数. $f(z)$ 的任意两个原函数的差是一个常数. 即对于 $f(z)$ 的原函数 $G(z)$ 和 $H(z)$, 有 $G(z) - H(z) = c$, c 为任意常数.

总结

上述定理和微积分学中的变上限函数的求导定理类似.

解析函数的原函数——解析函数的定理

可以得出类似于微积分的基本定理和类似于微积分理论中的牛顿—莱布尼茨公式.

定理 .2

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

例 .1

求积分 $\int_{z_0}^{z_1} z dz$.

解: 函数 z 在全平面解析, 它的原函数是 $\frac{z^2}{2}$. 由牛顿—莱布尼兹公式知,

$$\int_{z_0}^{z_1} z dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

例 2

例 .2

求积分 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2 dz$.

解:

$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2 dz = \frac{1}{2}\int_0^{\pi i} \cos z^2 dz^2 = \frac{1}{2}\sin z^2\Big|_0^{\pi i}$$
$$= \frac{1}{2}\sin(-\pi^2) = -\frac{1}{2}\sin\pi^2.$$

注: 本例题使用了微积分学中的“凑微分”法.

例 3

例 .3

求积分 $\int_1^{1+i} ze^z dz$.

解: ze^z 的一个原函数为 $(z-1)e^z$, 利用分部积分法可得

$$\int_1^{1+i} ze^z dz = (z-1)e^z\Big|_1^{1+i} = ie^{1+i} = ie(\cos 1 + i\sin 1).$$

课堂练习

例 .4

(课堂练习) 求积分 $\int_0^1 z\sin z dz$

解:

$$\int_0^1 z\sin z dz = -\int_0^1 z d\cos z = -z\cos z\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos z dz$$
$$= \sin 1 - \cos 1.$$

例 5

例 .5

求积分 $\int_C (2z^2+8z+1)dz$, 其中 C 是连接 0 到 $2\pi a$ 的摆线, 方程为 $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$.

解: 函数 $f(z)=2z^2+8z+1$ 在复平面内解析, 所以积分与路线无关, 根据牛—莱公式:

$$\begin{aligned}\int_C (2z^2+8z+1)dz &= \int_0^{2\pi a}(2z^2+8z+1)dz \\ &= \frac{2}{3}z^3+4z^2+z\Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3a^3+16\pi^2a^2+2\pi a.\end{aligned}$$

例 5

```
clc
clear
syms z x y; pz=2*z^2+8*z+1
pzxy= expand(subs(pz,z,x+i*y))
syms a theta
pzxy1=subs(pzxy,x,a*theta-a*sin(theta));
pzxy2=subs(pzxy1,y,a-a*cos(theta))
pzxy3=pzxy2*(a*(1-cos(theta))+i*a*sin(theta))
collect(pzxy3,i)
imfun1=- a*sin(theta)*(8*a - 8*a*cos(theta) + 4*(a*theta - a*sin(theta))*(a - a*cos(theta))) + (a*sin(theta)*(8*a*theta + 2*(a*theta - a*sin(theta))^2 - 8*a*sin(theta) - 2*(a - a*cos(theta))^2 + 1) - a*(cos(theta) - 1)*(8*a - 8*a*cos(theta) + 4*(a*theta - a*sin(theta))*(a - a*cos(theta))))
realfun1= - a*(cos(theta) - 1)*(8*a*theta + 2*(a*theta - a*sin(theta))^2 - 8*a*sin(theta) - 2*(a - a*cos(theta))^2 + 1)
intim=int(imfun1,theta,0,2*pi)
intreal=int(realfun1,theta,0,2*pi)
resl=simplify(intim+intreal)
pretty(collect(resl,a))
```

代 码 1: 复变量 z 参数方程的线积分计算.

例 5

运行结果见图

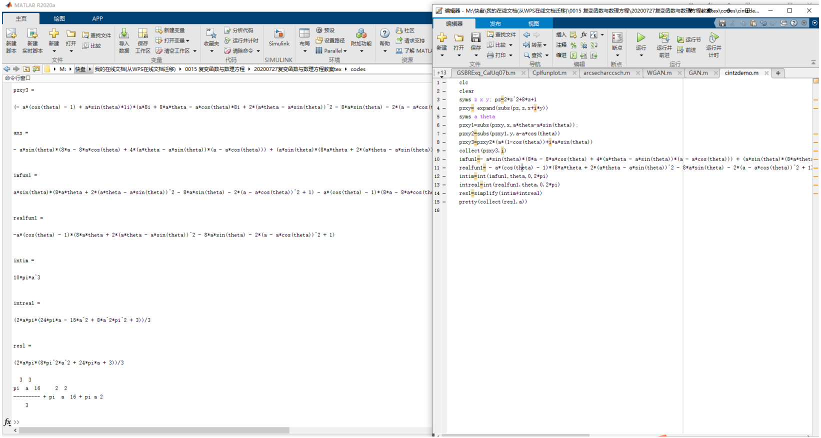


图: matlab 符号计算复积分 $\int_C (2z^2+8z+1)dz$.

例 6

例 .6

求积分 $\int_0^{\mathrm{i}} z\cos z\mathrm{d}z$ 的值.

解: 函数 $z\cos z$ 在全平面解析, 一个原函数为 $z\sin z+\cos z$, 所以

$$\int_0^{\mathrm{i}} z\cos z\mathrm{d}z=(z\sin z+\cos z)\Big|_0^{\mathrm{i}}=\mathrm{i}\sin\mathrm{i}+\cos\mathrm{i}-1$$

$$=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{2\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}}{2\mathrm{i}}-1=\mathrm{e}^{-1}-1.$$

例 7

例 .7

试沿着区域 $\text{Im}(z) \geq 0, \text{Re}(z) \geq 0$ 内的圆弧 $|z| = 1$, 计算积分 $\oint_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ 的值.

解: 函数 $\frac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在考虑的区域内解析, 一个原函数为 $\frac{1}{2}\ln^2(z+1)$, 所以

$$\oint_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^i = \frac{1}{2}\left[\ln^2(1+i) - \ln^2(2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i\right)^2 - \ln^2(2)\right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8}\ln^2 2 + \frac{\pi \ln^2 2}{8} i.$$

目录

积分公式条件

柯西积分公式的作用是将函数在 C 内部的积分用它在边界上的值来表示.

设 D 为单连通区域, z_0 为 D 中的一点, 如果 $f(z)$ 在 D 内解析, 那么函数 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ 一般不为零. 又根据闭路变形定理, 积分沿任何一条围绕 z_0 的简单闭曲线都是相同的.

取以 z_0 为中心, 由 $f(z)$ 的连续性, 在 C 上的函数 $f(z)$ 的值将随着 δ 的缩小而逐渐接近于它所在的圆心 z_0 处的值, 积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ 的值

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

也将随着 δ 的缩小而逐渐接近于 $2\pi i f(z_0)$. 其实两者是相等的, 即

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

柯西积分公式

定理 .3

(柯西积分公式) 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全属于 D, z_0 为包含在 C 内的任一点, 则 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ 或 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$.

证　由于 $f(z)$ 在 z_0 点处连续, 对任意给定 $\varepsilon > 0$, 必有一个 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $|z - z_0| < \delta$ 时, $\left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon$. 设以 z_0 为中心, R 为半径的圆周 K: $|z - z_0| = R$ 全部处于 C 的内部, 且 $R < \delta$ (图4), 那么

积分路径的收缩示意图

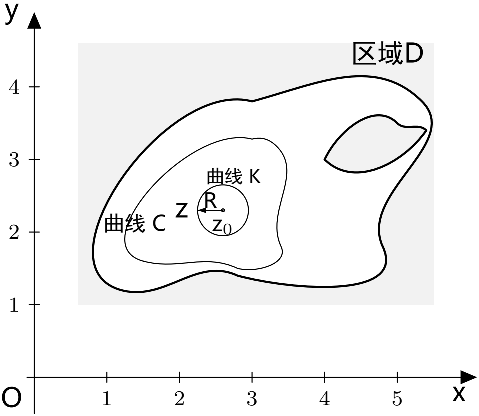


图: 区域 D 上积分路径的收缩示意图

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}dz$$
$$= \oint_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$
$$= 2\pi i f(z_0) + \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.$$

又有

$$\left|\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \oint_K \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}ds < \frac{\varepsilon}{R}\oint_K ds$$
$$= 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

平均值公式定义

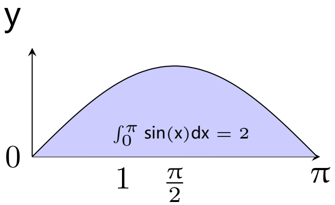
通过柯西积分公式, 就可以把一个函数在 C 内部的值用它在边界上的值来表示.

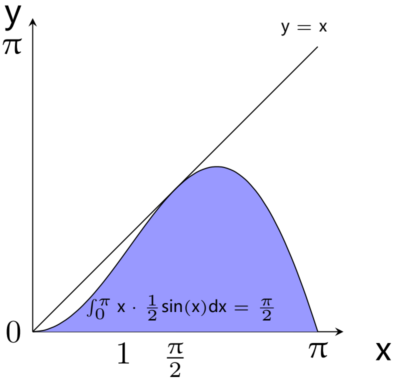
定义 .2

如果 C 是圆周 $z = z_0 + Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$, 那么柯西积分公式可以写成 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})d\theta$. 这个公式又称为平均值公式.

这就是说, 一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

概率统计意义上的平均


y
0
$\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$
1
$\frac{\pi}{2}$
π


y
π
y = x
0
$\int_0^\pi x \cdot \frac{1}{2}\sin(x)dx = \frac{\pi}{2}$
1
$\frac{\pi}{2}$
π
x

例 1

例 .1

求下列积分 (沿圆周正向) 的值:

1) $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz$;

2) $\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)dz$.

解: 由柯西积分公式得

1)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz=\sin z\,|_{z=0}\ =0;$$

2)

$$\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)dz=\oint_{|z|=4}\frac{dz}{z+1}+\oint_{|z|=4}\frac{2dz}{z-3}$$
$$=2\pi i\cdot 1+2\pi i\cdot 2=6\pi i.$$

例 2

例 .2

计算积分 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz$.

解: 因为 $f(z) = e^z$ 在复平面内解析, $z = 1$ 位于 $|z| < 2$ 内, 由柯西积分公式

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i \cdot e^z|_{z=1} = 2e\pi i.$$

例 3

例 .3

C 表示正向圆周 $x^2+y^2=3$, $f(z)=\int_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$, 求 $f'(1+i)$.

解: 根据柯西积分公式知, 当 z 在圆周 C 内时,

$$f(z)=2\pi i\cdot(3\xi^2+7\xi+1)\big|_{\xi=z}=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

故

$$f'(z)=2\pi i(6z+7),$$

而 $1+i$ 在圆周 $C: x^2+y^2=3$ 内, 所以 $f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$.

目录

例 4

例 .1

计算积分 $\oint\limits_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$, 其中 $C: |z+1| = \frac{1}{2}$.

解:

$$\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz = \oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}}{z+1}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\right|_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

例 5-1

例 .2

计算积分 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz.$

解: 函数 $\frac{e^z}{z(z^2-1)}$ 有三个奇点 $z=0, z=1, z=-1$, 可以分解为

$$\frac{1}{z(z^2-1)} = \frac{1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{2z(z+1)}.$$

例 5

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-\frac{2}{z}\right).$$

利用柯西积分公式, 可得

$$\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{z(z^2-1)}dz=\frac{1}{2}\oint_{|z|=3}\left[\left(\frac{e^z}{z-1}+\frac{e^z}{z+1}-\frac{2e^z}{z}\right)\right]dz$$

$$=\pi i(e+e^{-1}-2).$$

例 6

例 .3

求 $\oint_{|z|=1} e^{z+1}\sin z dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)(z-4)}$.

解:

$$\oint_{|z|=1} e^{z+1}\sin z dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)(z-4)}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{3}\oint_{|z|=3}\frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-1}dz$$
$$= -\frac{1}{3}.$$

例 7-1

例 .4

求 $\oint_{|z|=1} |z-1|dz.$

解:

$$z = e^{i\theta}, dz = ie^{i\theta}d\theta, \theta \in (0, 2\pi)$$

例 7-2

$$\oint_{|z|=1} |z-1|dz = \int_0^{2\pi} |1-e^{i\theta}|ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\theta}di\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\cdot(i\cos\theta - \sin\theta)d\theta$$

$$= 2i\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta d\theta - 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta d\theta$$

$$= 2i\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}d\theta + 8i\int_0^{2\pi} d\cos\frac{\theta}{2}$$

$$- 8i\int_0^{2\pi} \cos^2\frac{\theta}{2}d\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= -\frac{8i}{3}.$$

例 5

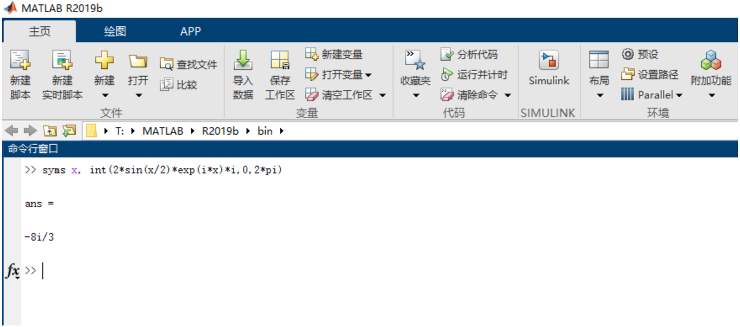

MATLAB R2019b
主页
绘图
APP
新建脚本
新建实时脚本
新建
打开
查找文件
比较
文件
导入数据
保存工作区
新建变量
打开变量
清空工作区
变量
收藏夹
分析代码
运行并计时
清除命令
代码
Simulink
SIMULINK
布局
预设
设置路径
Parallel
附加功能
环境
T: ▸ MATLAB ▸ R2019b ▸ bin ▸
命令行窗口
>> syms x, int(2*sin(x/2)*exp(i*x)*i,0,2*pi)
ans =
-8i/3
>>

图: 复积分的计算

主要内容

柯西积分公式是复积分计算中的重要公式, 是研究解析函数的重要工具. 它的证明基于柯西-古萨基本定理, 它的重要性在于:

柯西积分公式

解析函数在区域内部的值可以用它在边界的积分值表示.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz,\quad \oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi if(z_0).$$

主要内容

本课介绍了原函数、不定积分的定义以及牛顿—莱布尼兹公式.
在学习中应注意与《高等数学》中相关内容相结合, 更好的理解本次课内容.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,$$

$$\int f(z)dz = F(z) + c,$$

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_0).$$

第三章习题

教材习题三 P99: 8. 1), 3), 5), 7); 9; 10 2), 3), 6); 12; 15.