复变函数

复数项级数与复函数项级数

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

November 29, 2020

目录

目录

第一类积分形式

方法: 将所求的定积分转化为沿闭路的围线积分, 然后利用留数定理计算相应的积分.

积分形式

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 的积分计算 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 为 $\cos\theta, \sin\theta$ 的有理函数.

将定积分化为一个复变函数沿某条封闭路线的积分, 其中的两个重要工作是: 1) 积分区域的转化, 2) 被积函数的转化. 令 $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta, d\theta = \frac{dz}{iz}$, 函数

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z},$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

教案下载二维码

教案、幻灯片 Github 下载

复变函数与数理方程项目的教案和幻灯片

当 θ 历经 0 到 2π

z 沿单位圆周 $|z|=1$ 正方向绕行一周. 代入原式

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta &= \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz} \\ &= \oint_{|z|=1} f(z)dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].\end{aligned}$$

解释

其中 $f(z) = R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})\frac{1}{iz}$, $z_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 是复函数 $f(z)$ 在单位圆内的有限个孤立奇点, 即包围在单位圆周内的诸孤立奇点.

复函数 $f(z)$ 是 z 的有理函数, 且在单位圆周上分母不为零, 满足留数定理的条件.

例 .1

计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta\ (a>b>0)$.

解: 令 $z=e^{i\theta}$, 则

$$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2zi},\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz},$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta&=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{-4z^2}\cdot\frac{1}{a+b\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz}\\&=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{-2iz^2(bz^2+2az+b)}dz\\&=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{-2iz^2b(z^2+\frac{2a}{b}z+1)}dz\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta = \oint\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2 dz}{-2iz^2b\left(z-\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\left(z-\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)}$$

$$= 2\pi i\left\{\text{Res}\left[f(z),0\right]+\text{Res}\left[f(z),z_1\right]\right\}$$

$$= \frac{2a\pi}{b^2} - \frac{2\pi\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} = \frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}),$$

其中, $z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} = -\frac{a}{b}+\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}$, 令 $x=\frac{a}{b}$, $-\frac{a}{b}+\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1} = \sqrt{x^2-1}-x = f(x)$. 显然有 $f(1)=-1$; 当 $x>1$ 时, $f(x)<0$, 且 $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1>0$, 被积函数的模满足 $|f(x)|<1$, z_1 是 $f(z)$ 在单位圆周 $|z|=1$ 内的奇点.

由上式得 $z_1 z_2 = 1$, 留数

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), z_1] &= \frac{(z^2-1)^2}{-2iz^2 b(z-z_2)}\Big|_{z=z_1} \\
&= \frac{(z_1^2-1)^2}{-2iz_1^2 b(z-z_2)}\Big|_{z=z_1} \\
&= -\frac{1}{2bi}\frac{(\frac{z_1^2-1}{z_1})^2}{(z_1-z_2)} = -\frac{1}{2bi}\frac{\frac{(z_1^2-z_1z_2)^2}{z_1}}{z_1-z_2} \\
&= -\frac{1}{2bi}\frac{(z_1-z_2)^2}{z_1-z_2} \\
&= -\frac{1}{2bi}(z_1-z_2) = -\frac{1}{bi}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z),0] &= \left[\frac{(z^2-1)^2}{-2bi(z-z_1)(z-z_2)}\right]'\Big|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{2bi}\left[\frac{2(z^2-1)2z(z-z_1)(z-z_2)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]\Big|_{z=0} \\
&\quad + \frac{1}{2bi}\left[\frac{(z^2-1)^2(2z-z_1-z_2)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]\Big|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{2bi}\frac{z_1+z_2}{z_1^2z_2^2} = -\frac{1}{2bi}\times\frac{-2a}{b} = \frac{a}{b^2i} \\
&= -\frac{ai}{b^2}.
\end{aligned}
$$

例 .2

计算积分 $\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta}\ (a>0)$.

解: 需要将 $0<\theta<\pi$ 转化到 $[0,2\pi]$ 上, 显然

$$0<2\theta<2\pi,$$

令 $z=e^{i\theta}$, 由 $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{z^2+1}{2z}$, 带入原式得

$$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz},$$

换元得到标准形式:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta}=\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\theta=\frac{t}{2}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\frac{1-\cos t}{2}}dt$$

$$2\theta=t\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\frac{1-\cos t}{2}}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{1-(z^2+1)/(2z)}{2}} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{2z-z^2-1}{4z}} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1} \frac{4z}{4az+2z-z^2-1} \frac{dz}{iz}$$

$$= -2i \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{4az+2z-z^2-1} dz$$

$$= 2i \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-2(2a+1)z+1}.$$

极点的情况

单位圆内极点为: $z_1 = 2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1}$, 单位圆外极点为: $z_2 = 2a+1+\sqrt{(2a+1)^2-1}$,

所以

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta} = 2\pi i \cdot 2i \operatorname{Res}\left[f(z), z_1\right] = -4\pi \operatorname{Res}\left[f(z), z_1\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}.$$

$z_1 z_2 = 1$, $\mathrm{Res}[f(z), z_1] = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{-2\sqrt{(2a+1)^2-1}}$, 所以

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = -4\pi \times \frac{1}{-2\sqrt{(2a+1)^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}.$$

例 .3

计算积分 $\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-2\mathrm{p}\cos\theta+\mathrm{p}^2} \mathrm{d}\theta \, (0 < \mathrm{p} < 1)$ 的值.

解: 由于 $0 < \mathrm{p} < 1$, 被积函数的分母 $1 - 2\mathrm{p}\cos\theta + \mathrm{p}^2 = (1-\mathrm{p})^2 + 2\mathrm{p}(1-\cos\theta)$ 在 $0 \le \theta \le 2\pi$ 内不为零, 因而积分是有意义的. 由于

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{z}^2 + \mathrm{z}^{-2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{z}^4 + 1}{2\mathrm{z}^2},
\end{aligned}$$

换元得下面的围线积分

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=1} \frac{z^2+z^{-2}}{2} \cdot \frac{1}{1-2p\cdot\frac{z^2+1}{2z}+p^2}\frac{dz}{iz} \\
&= \int_{|z|=1} \frac{z^4+1}{2z^2} \cdot \frac{1}{1-p\cdot\frac{z^2+1}{z}+p^2}\frac{dz}{iz} \\
&= \int_{|z|=1} \frac{z^4+1}{2z^2} \cdot \frac{1}{i(z-p\cdot(z^2+1)+zp^2)}dz \\
&= \int_{|z|=1} \frac{z^4+1}{2z^2} \cdot \frac{1}{i(z-p-pz^2+zp^2)}dz \\
&= \int_{|z|=1} \frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}dz \\
&= \int_{|z|=1} f(z)dz.
\end{aligned}
$$

在被积函数的三个极点 $z=0, p, \frac{1}{p}$ 中, 只有前两个在圆周 $|z|=1$ 内, 其中 $z=0$ 为二级极点, $z=p$ 为一级极点, 所以在圆周 $|z|=1$ 上的被积函数无奇点. 而

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}[f(z),0] &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(z-p\cdot(z^2+1)+zp^2)}\right]\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{1+z^4}{2i(z-p\cdot(z^2+1)+zp^2)}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\lim_{z\to 0}\frac{(z-pz^2-p+p^2z)4z^3-(1+z^4)(1-2pz+p^2)}{(z-pz^2-p+p^2z)^2}\\
&= -\frac{1+p^2}{2ip^2}.
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{Res}[f(z), p] = \lim_{z\to p}\left[(z-p)\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right] = \frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}.$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta \\ &= 2\pi i\left[-\frac{1+p^2}{2ip^2}+\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}\right] \\ &= \frac{2\pi p^2}{1-p^2}. \end{aligned}$$

例 .4

计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{p^2-2p\cos\theta+2}d\theta\ (0<p<1)$ 的值.

解:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{p^2-2p\cos\theta+2}d\theta$$

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},\cos 2\theta=\frac{z^4+1}{2z^2}\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{p^2-2p\frac{z^2+1}{2z}+2}\frac{dz}{iz}$$

$$=-i\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^4+1}{z^2}}{2p^2z-2p(z^2+1)+4z}dz=i\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^4+1}{z^2}}{2p(z^2+1)-2p^2z-4z}dz$$

$$=i\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^4+1}{z^2}}{2pz^2-(4+2p^2)z+2p}dz$$

$$上式z_{1,2} = (2+\mathsf{p}^2) \pm 2\sqrt{4+\mathsf{p}^4}\mathsf{i}\oint_{|\mathsf{z}|=1} \frac{\mathsf{z}^4+1}{\mathsf{z}^2(2\mathsf{p}\mathsf{z}^2-(2\mathsf{p}^2+4)\mathsf{z}+2\mathsf{p})}\mathsf{d}\mathsf{z} \quad \mathrm{dott}$$

$$= \mathsf{i}2\pi\mathsf{i}\ \mathrm{Res}\left[\frac{\mathsf{z}^4+1}{\mathsf{z}^2(2\mathsf{p}\mathsf{z}^2-(2\mathsf{p}^2+4)\mathsf{z}+2\mathsf{p})}, 0\right]$$

$$= -2\pi\left(\frac{1}{\mathsf{p}^2}+\frac{1}{2}\right).$$

例 .5

计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(5-3\sin\theta)^2}$ 的值.

解: 令 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(5-3\sin\theta)^2}$, 因 $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$, $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$, 则原积分为

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{(5-3\frac{z^2-1}{2iz})^2}\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{-4z^2}{(-3z^2+10iz+3)^2}\frac{dz}{iz}$$

$$= -\frac{4}{i}\oint_{|z|=1} \frac{zdz}{(3z^2-10iz-3)^2}$$

$$= -\frac{4}{i}\oint_{|z|=1} \frac{zdz}{(3z-i)^2(z-3i)^2}$$

$$= -\frac{4}{i} \times 2\pi i \times \mathrm{Res}\left[\frac{z}{(3z-i)^2(z-3i)^2}, \frac{i}{3}\right]$$

$$= -8\pi \times \lim_{z\to\frac{i}{3}} \left[\left(z-\frac{i}{3}\right)^2 \frac{z}{(3z-i)^2(z-3i)^2}\right]',$$

其中, 由于在单位圆 $|z|=1$ 内, $z=\frac{i}{3}$ 是函数的一个二阶奇点,

$$
\begin{aligned}
I &= -8\pi \times \frac{1}{9} \lim_{z\to\frac{i}{3}} \left[\frac{z}{(z-3i)^2}\right]' \\
&= -8\pi \times \frac{1}{9} \left[\frac{(z-3i)^2 - 2(z-3i)z}{(z-3i)^4}\right]_{z=\frac{i}{3}} \\
&= -8\pi \times \frac{1}{9} \left[\frac{-z-3i}{(z-3i)^3}\right]_{z=\frac{i}{3}} \\
&= -8\pi \times \frac{1}{9} \left[\frac{-\frac{i}{3}-3i}{(\frac{i}{3}-3i)^3}\right] = 2\pi i \cdot \frac{1}{9} \left[\frac{\frac{-10i}{3}}{(\frac{-8i}{3})^3}\right] \\
&= -8\pi \times \frac{1}{9} \times \frac{-45}{64\times 4}, \\
&= -8\pi \times \left(-\frac{5}{256}\right) = \frac{5}{32}\pi,
\end{aligned}
$$

于是原积分值为 $I = \frac{5\pi}{32}$.

例 .6

计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(5-3\sin\theta)^3}$ 的值.

解: $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(5-3\sin\theta)^3} = \frac{59\pi}{1024} = 0.18101.$

目录

第二类积分形式

形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 型积分

本小节只介绍 $R(x)$ 是有理函数的情形.
1) 被积函数的转化: 取 $f(z) = R(z)$ (当 z 在实轴上的区间内变动时, $f(z) = R(x)$).
2) 积分区域的转化: 取一条连接区间两端的逐段光滑曲线, 使与区间一起构成一条封闭曲线, 并使 $f(z)$ 在其内部除有限孤立奇点外处处解析 (此法常称为 "围线积分法").
取 R 适当大, 使 $f(z)$ 所有的在上半平面内的极点 z_k 都包在这条积分路线内, 这里可补线 C_R. (以原点为中心, R 为半径的在上半平面的半圆周, 图 1).

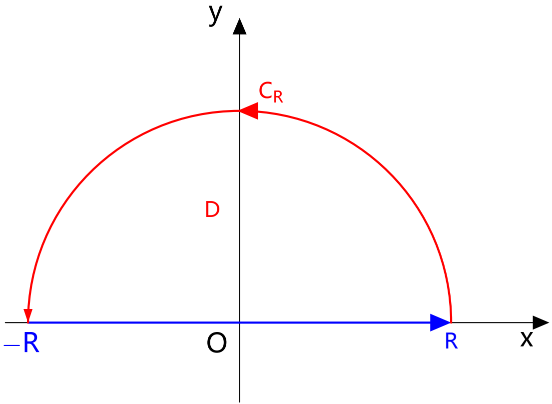


图: 围线积分

当 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 为 x 的有理函数, $P(x) \in P_n(x), Q(x) \in P_m(x)$, 且 $m - n \geq 2$, 即 Q(x) 的次数比 P(x) 的次数至少高二次, 若 f(z) 在实轴上没有奇点, 则积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz$ 存在, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left[R(z), z_k\right].$$

z_k 为 f(z) 在以原点为心, 以 R 为半径的上半圆周内的有限个孤立奇点. 下式成立

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx \equiv \oint_{C} f(z)dz.$$

补线 C_R (半径 R 圆的上半圆周), 不妨设 $R > 1$. 与区间段 $[-R, R]$ 一起构成封闭曲线 C, $f(z) \equiv R(z)$ 在 C 及其内部 (除去有限孤立奇点）处处解析.

证明

根据留数定理得:

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[f(z), z_k],$$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} = \frac{|z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|}{|z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m|} \\ &= \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|z|^{m-n}\,|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|} \\ &\le \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}, \end{aligned}$$

其中$m - n \ge 2$. 当 $|z|$ 充分大时, 总可使

$$|a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}| < \frac{1}{10}, \ |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}| < \frac{1}{10},$$

因为 $m-n\ge 2$, 所以

$$|f(z)| \le \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1+|a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}{1-|b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|} < \frac{2}{|z|^2}.$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \int_{C_R} |f(z)|ds \le \frac{2}{R^2}\pi R = \frac{2\pi}{R} = \frac{2}{R^2},$$

$$R\to+\infty: \int_{C_R} f(z)dz \to 0, \int_{-R}^{R} f(z)dz \to \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(z)dz = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z),z_k].$$

Lemma

(约当引理 **(Jordan’s Lemma)**) 设 C 为圆周 $|z| = R$ 的上半圆周连同区间 $[-R, R]$ 组成的曲线 (图2), 函数 $f(z)$ 在 C 上连续, 且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$, 则有 $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$,

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

证 令 $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, $dz = Re^{i\theta} i d\theta = izd\theta$, 则

$$\oint_C f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz \right]$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right],$$

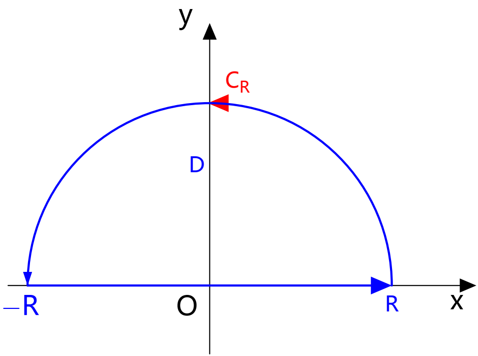


图: 上半圆周围线

对 $\forall\varepsilon > 0$, 当 $|z| = R$ 充分大时, 有 $|zf(z)| = \left|Re^{i\theta}f(Re^{i\theta})\right| < \varepsilon$. 因此

$$\left|\int_{C_R} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta\right| = \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \left|f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\right| d\theta < \varepsilon\pi \to 0,$$

$$\lim_{|z|=R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0,$$

所以 $\int_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname{Res} \sum_{k=1}^{n} [f(z), z_k]$. 也可以按下面这种方式计算围线积分:
$\int_{C_R} f(z)dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta = i \lim_{z\to\infty} \int_0^\pi zf(z)d\theta = 0.$

例 .1

计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$, $(a > 0, b > 0, a \neq b)$.

解: 由

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2 (z^2 + b^2)},$$

在上半平面有一级极点 $z = bi$, 二级极点 $z = ai$.

$$\mathrm{Res}[f(z), bi] = \left. \frac{1}{(z^2 + a^2)^2 (z + bi)} \right|_{z=bi} = \frac{1}{2bi(a^2 - b^2)^2},$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), ai] &= \left[\frac{1}{(z+ai)^2(z^2+b^2)}\right]'\Bigg|_{z=ai} \\
&= \frac{-[2(z+ai)(z^2+b^2)+2z(z+ai)^2]}{(z+ai)^4(z^2+b^2)^2}\Bigg|_{z=ai} \\
&= \frac{-[2(z^2+b^2)+2z(z+ai)]}{(z+ai)^3(z^2+b^2)^2}\Bigg|_{z=ai} \\
&= \frac{-[2((ai)^2+b^2)+2z(2ai)]}{(2ai)^3((ai)^2+b^2)^2} \\
&= \frac{b^2-3a^2}{4a^3 i(b^2-a^2)^2},
\end{aligned}
$$

所以积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}=2\pi i\{\mathrm{Res}\,[f(z),\,bi]+\mathrm{Res}\,[f(z),\,ai]\}$$
$$=2\pi i\left[\frac{b^2-3a^2}{4a^3i(b^2-a^2)^2}+\frac{1}{2bi(b^2-a^2)^2}\right]$$
$$=\frac{(2a+b)\pi}{2a^3b(a+b)^2}.$$

例 .2

计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx,\ a>0, b>0$ 的值.

解: 因为分母次数比分子次数高二次, 且函数在实轴上无奇点, 故积分存在. 在上半平面内, $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ 有两个极点 $z=ai, z=bi$. 因为

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[f(z), ai\right] &= \lim_{z\to ai}\left[(z-ai)\cdot\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right]\\
&= \lim_{z\to ai}\left[\frac{z^2}{(z+ai)(z^2+b^2)}\right]\\
&= \frac{-a^2}{2ai(b^2-a^2)}=\frac{a}{2i(a^2-b^2)}.
\end{aligned}
$$

又因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,[f(z), bi] &= \lim_{z\to bi}\left[(z-bi)\cdot\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right]\\ &= \lim_{z\to bi}\left[\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z+bi)}\right]\\ &= \frac{-b^2}{2bi(a^2-b^2)} = \frac{b}{2i(b^2-a^2)}.\end{aligned}$$

所以 $I = 2\pi i\left[\frac{a}{2i(a^2-b^2)} + \frac{b}{2i(b^2-a^2)}\right] = \pi\frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{\pi}{a+b}.$

目录

第三类积分形式

形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx, (a > 0)$

积分存在的要求

$R(x) \equiv f(x)$ 是 x 的有理函数且分母的次数至少比分子的次数高一次, 并且 $f(z)$ 在实轴上无孤立奇点.

同前一种类型的处理方式: 补线 C_R, C_R 与 $[-R, R]$ 一起构成封闭曲线 C, 使 $f(z)$ 所有的在上半平面内的极点 z_k 都包在这积分路线内 (图 3).

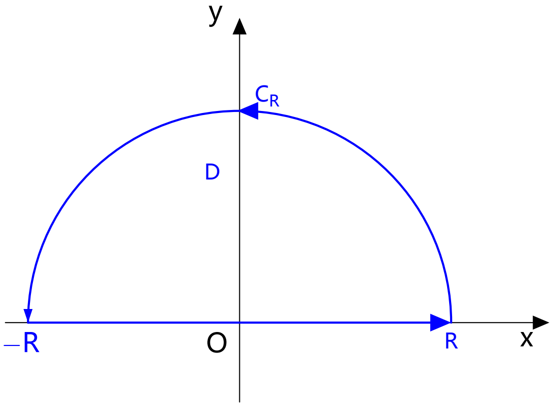


图: 围线积分

当 $R(x) = f(x)$ 是 x 的有理多项式函数, 而分母次数比分子次数至少高一次, 且 a 为正实数, f(z) 在实轴上无零点时, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z)e^{iaz}, z_k\right].$$

Lemma

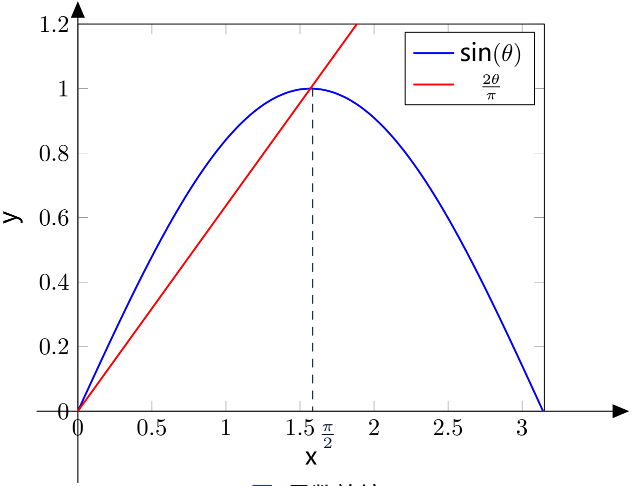
设 C_R 为 $|z| = R$ 的上半圆周, 函数 $f(z)$ 在 C_R 上连续, 且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, 则

$$\lim_{|z|=R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0, \ (a > 0).$$

证 当 z 在 C_R 上时, 有条件 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, 即, 对 $\forall\varepsilon>0$, 当 R 充分大有 $\left|f(z)\right|<\varepsilon$. 令 $z=Re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$, 被积函数替换为 $e^{-Ra\sin\theta}\le e^{-\frac{2\theta}{\pi}Ra}, 0\le\theta\le\pi.$

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| &\le \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{iaR(\cos\theta+i\sin\theta)}Rie^{i\theta}d\theta\right|\\ &\le R\varepsilon\int_0^{\pi} e^{-Ra\sin\theta}d\theta = 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Ra\sin\theta}d\theta\\ &\le 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}Ra\theta}d\theta = -\frac{\pi}{a}\varepsilon e^{-\frac{2}{\pi}Ra\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{a}(1-e^{-Ra})\varepsilon R \to +\infty, \varepsilon\to 0\frac{\pi}{a}\varepsilon\to 0.\end{aligned}$$

可以证明, 当 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin\theta\ge\frac{2\theta}{\pi}$, 见图 4,



1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
y
0
0.5
1
1.5
$\frac{\pi}{2}$
2
2.5
3
x
$\sin(\theta)$
$\frac{2\theta}{\pi}$

图: 函数放缩

约当引理与留数定理结合可以计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(x)dx$, 其中 $P(x), Q(x)$ 是多项式函数, 且分母多项式次数比分子多项式次数至少大 1.

因为 $\int_0^{\pi} [\cdots]d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cdots]d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\cdots]d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cdots]d\theta$. 所以有 $\lim\limits_{|z|=R\to+\infty} \int_C f(z)e^{i\lambda z}dz = 0$.

所以

$$\oint_C f(z)e^{iaz}dz = \lim_{|z|=R\to+\infty} \left[\int_{-R}^{R} f(\theta)e^{ia\theta}d\theta + \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right]$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left[f(z)e^{iaz}, z_k\right].$$

即 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i\,\text{Res}[f(z)e^{iaz}, z_k], z_k$ 是 $f(z)$ 在上半平面内的奇点.

一般情形下,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{iaz}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos azdz + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\sin azdz$$
$$= 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z)e^{iaz}, z_k].$$

例 .1

计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx$, $(m>0, a>0)$.

解:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{(z^2+a^2)^2} e^{imz}dz\right].$$

又

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+a^2)^2},\ \frac{z\sin mz}{(z^2+a^2)^2} = \mathrm{Im}[f(z)e^{imz}].$$

在上半平面只有二级极点 $z = ai$, 则有

$$\operatorname{Res}(f(z)e^{imz}, ai) = \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]_{z=ai} = \frac{m}{4a}e^{-ma},$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z)e^{imz}, ai] &= \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]_{z=ai} \\
&= \frac{e^{imz} + ze^{imz}im)(z+ai)^2 - 2(z+ai)ze^{imz}}{(z+ai)^4}\Bigg|_{z=ai} \\
&= \frac{e^{imz}(1+im\,z)(z+ai) - 2ze^{imz}}{(z+ai)^3}\Bigg|_{z=ai} \\
&= \frac{e^{-ma}(1-ma)2ai - 2aie^{-ma}}{(2ai)^3} \\
&= \frac{e^{-ma}(1-ma) - e^{-ma}}{(2ai)^2} \\
&= \frac{e^{-ma}[(1-ma)-1]}{(2ai)^2} \\
&= \frac{-mae^{-ma}}{-4a^2} = \frac{m}{4a}e^{-ma},
\end{aligned}
$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}e^{imx}dx=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz},ai\right],$$

所以

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z)e^{imz},ai]\right]$$
$$=\pi\mathrm{Re}[\mathrm{Res}[f(z)e^{imz},ai]]=\frac{m\pi}{4a}e^{-ma}.$$

积分类型的要求

注意: 以上两型积分中被积函数中的 $R(x)$ 在实轴上无孤立奇点.

例 .2

计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx,\ (a>0)$ 的值.

解: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$ 是 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx$ 的实部, 即 $\mathrm{Re}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}=\frac{\cos x}{x^2+a^2}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dz=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+a^2},ai\right]=2\pi i\lim_{z\to ai}\left[(z-ai)\cdot\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\right]$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^{iz}}{z+ai}\right]_{z=ai}=2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2ai}=\frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi e^{-a}}{a}$. 其虚部 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+a^2}dx=0$.

例 .3

计算 $I = \int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx,\ (a>0)$ 的值.

解:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}dx = \pi i \cdot \left[\frac{ze^{iz}}{z+ai}\right]_{z=ai} = \pi i \cdot \frac{aie^{-a}}{2ai} = \frac{\pi e^{-a}}{2}i,$$

而所求的积分为 I 的虚部, 所以 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}$.

例 .4

计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

解: $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

因 $\frac{\sin x}{x}$ 在实轴上有一级极点 $z = 0$, 应使封闭路线不经过奇点, 所以可取图示路线 (图 5):

封闭曲线 $C = C_R + [-R, -r] + C_r + [r, R]$, 由柯西-古萨定理得:

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx = 0,$$

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx \underline{\underline{x=-t}} \int_{R}^{r} \frac{e^{-it}}{t} dt = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx,$$

由

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

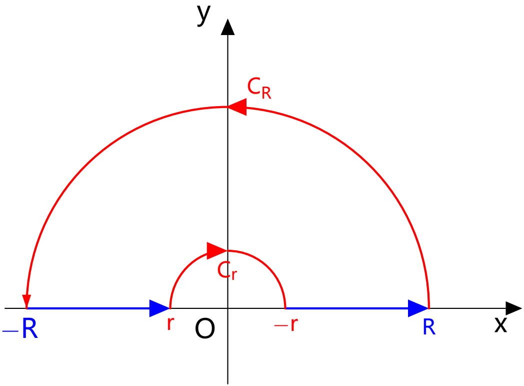


图: 围线积分

知

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx + \int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0,$$

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| \le \int_{C_R}\frac{\left|e^{iz}\right|}{|z|}ds = \frac{1}{R}\int_{C_R} e^{-y}ds = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)}d\theta$$

$$= \frac{\pi}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)}d\frac{2R\theta}{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}),$$

于是 $R \to +\infty \Rightarrow \oint_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz \to 0$, 当 r 充分小时,

因为

$$\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}z^{n-1}$$
$$=\frac{1}{z}+i+\frac{i^2z}{2!}+\cdots+\frac{i^nz^{n-1}}{n!}+\cdots=\frac{1}{z}+g(z),$$

其中

$$g(z)=i+\frac{i^2z}{2!}+\frac{i^3z^2}{3!}+\cdots+\frac{i^nz^{n-1}}{n!}+\cdots$$

当 $|z|$ 充分小时, 总有 $|g(z)|\leq 2$,

$$\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{C_r}\frac{1}{z}dz+\int_{C_r}g(z)dz,$$

$$\int_{C_r}\frac{dz}{z}=\int_{\pi}^{0}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=-i\pi,$$

因为

$$\left|\int_{C_r} g(z)dz\right| \leq \int_{C_r} |g(z)|\, ds \leq 2\int_{C_r} ds = 2\pi r,$$

$$r \to 0 \Rightarrow \int_{C_r} g(z)dz \to 0,$$

即

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}dz = -\pi i + 0 = -i\pi.$$

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0 \Rightarrow 2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi i,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

例 .5

(菲涅耳 **(fresnel)** 积分) 已知 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 证明: $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

解: 当 $z = x$ 时, 函数 $e^{ix^2} = \cos x^2 + i\sin x^2$. 给定路径 (图 6), 对于函数 e^{iz^2},

$$\oint_{OA} e^{ix^2}dz + \oint_{AB} e^{iz^2}dz + \oint_{BO} e^{iz^2}dz = 0,$$

$$\int_0^R e^{ix^2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{i2\theta}} Rie^{i\theta}d\theta + \int_R^0 e^{ir^2 e^{\frac{\pi}{2}i}} e^{\frac{\pi}{4}i}dr = 0,$$

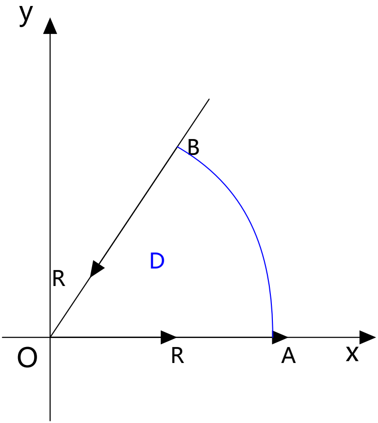


图: 积分区域

或者

$$\int_0^R (\cos x^2 + i\sin x^2)dx = e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^R e^{-r^2}dr - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos 2\theta - R^2\sin 2\theta} Rie^{i\theta}d\theta.$$

当 $R\to\infty$ 时,

$$e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^{\infty} e^{-r^2}dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos 2\theta - R^2\sin 2\theta} Rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\sin 2\theta}Rd\theta \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4}{\pi}R^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}) \to 0,\ (R\to\infty).$$

$$\int_0^{\infty}(\cos x^2+\mathrm{i}\sin x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

令两端实部与虚部分别相等，得

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

本课我们应用“围线积分法”计算了三类实积分, 熟练掌握应用留数计算定积分是本章的难点.

1、教材习题五 P183: 1 1)、4)、7)、8)、9); 3; 4; 8; 9 1)、2)、3)、6); 11 2); 12 2); 13 1)、3)、4)、5).