复变函数

解析函数的高阶导数、解析函数与调和函数的关系

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

October 28, 2020

目录

目录

高阶导数

一个解析函数不仅有一阶导数、二阶导数, 并且还有 n 阶导数.

定理 .1

解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数, 它的 n 阶导数为:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, (n = 1, 2, \cdots)$$

其中 C 为函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线, 而且它的内部全属于 D.

证明 1-1

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0), (n=1,2,\cdots).$$

证　由柯西积分公式得 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$,
$f(z_0+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}dz$.
从而有

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right]$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i\Delta z}\oint_C f(z)\left[\frac{1}{z-(z_0+\Delta z)} - \frac{1}{z-z_0}\right]dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)}dz,
\end{aligned}
$$

因而

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[\frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}-\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right]dz \\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}dz=I. \qquad (1)
\end{aligned}$$

对于式(1)中的积分 I, 有

$$|I|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_C\frac{\Delta z f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}\right|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{|\Delta z|\,|f(z)|\,ds}{|z-z_0|^2\,|z-z_0-\Delta z|}.$$

因为 $f(z)$ 在 C 上是解析的, 所以在 C 上是有界的. 因此可知必存在一个正数 M, 使得在 C 上有 $\left|f(z)\right| \leq M$. 设 d 为从 z_0 到曲线 C 上各点的最短距离 ($d = \min\limits_{z\in C} z_0 - z$), 并取 Δz 适当地小, 使其满足 $|\Delta z| \leq \frac{1}{2}d$, 那么我们就有 $|z - z_0|^2 \geq d^2$,

$$|z - z_0 - \Delta z| \geq |z - z_0| - |\Delta z| > \frac{1}{2}d,$$

所以 $|I| < |\Delta z| \frac{ML}{\pi d^3}$, 这里 L 为 C 的长度. 如果 $\Delta z \to 0$, 那么 $I \to 0$, 从而得

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

证明 1-4

同理由 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z}=f''(z_0)$, 便可得到

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz.$$

类似地, 用数学归纳法可以证明: $f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$

例 .1

求下列积分的值, 其中 C 为正向圆周: $|z| = r > 1$.

1) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz$;

2) $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

1) 答案

解: 1) 函数 $\frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内的 $z=1$ 处不解析, 但 $\cos \pi z$ 在 C 内却是处处解析的. 根据本节定理, 有

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz &= \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1} = \frac{2\pi i}{(5-1)!} (-\pi \sin \pi z)^{(3)} \Big|_{z=1} \\
&= \frac{2\pi i}{(5-1)!} (-\pi^2 \cos \pi z)^{(2)} \Big|_{z=1} = \frac{2\pi i(\pi^3 \sin \pi z)'}{(5-1)!} \Big|_{z=1} \\
&= \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\pi^4 \cos \pi z) \Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5}{12} i.
\end{aligned}$$

2) 答案

2) 函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z=\pm i$ 处不解析. 我们在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1, 以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2, 那么函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1 和 C_2 所围成的区域中是解析的. 根据闭路定理,

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz,$$

由本节定理, 有

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz &= \oint_{C_1}\frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz = \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'_{z=i}\\
&= 2\pi i\left[\frac{e^z(z+i)^2-2e^z(z+i)}{(z+i)^4}\right]_{z=i}\\
&= 2\pi i\left[\frac{e^z(z+i)-2e^z}{(z+i)^3}\right]_{z=i}\\
&= 2\pi i\frac{e^i(2i)-2e^i}{(2i)^3}\\
&= \frac{(1-i)e^i}{2}\pi.
\end{aligned}$$

2) 答案

同样可得

$$\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz=\oint_{C_2}\frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-i)^2}\right]'_{z=-i}=2\pi i\left[\frac{e^z(z-i)-2e^z}{(z-i)^3}\right]_{z=-i}$$

$$=-\frac{(1+i)e^{-i}}{2}\pi.$$

所以

$$\oint_C\frac{e^z dz}{(z^2+1)^2}=\frac{\pi}{2}(1-i)(e^i-ie^{-i})=\frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1-\sin 1)$$

$$=i\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

例 .2

求积分 (1) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3+1}{(z+1)^4}dz$; (2) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z^2}dz$.

解: 函数 z^3+1 在复平面内解析, $z_0=-1$ 在 $|z|<2$ 内, 且 $n=3$. 根据公式

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0),$$

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3+1}{(z+1)^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}\left[z^3+1\right]'''\Big|_{z=-1} = 2\pi i.$$

例 2

(2) 函数 $e^{-z}\cos z$ 在复平面内解析, $z_0 = 0$ 在 $|z| \le 1$ 内, 且 $n = 1$.

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!}(e^{-z}\cos z)'\Big|_{z=0}$$

$$= 2\pi i\left[-e^{-z}\cos z - e^{-z}\sin z\right]\Big|_{z=0}$$

$$= -2\pi i.$$

例 3

例 .3

求积分 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz, n \in \mathbb{Z}$.

解: (1) 当 $n \leq 0$ 时, 函数 $\frac{e^z}{z^n}$ 在 $|z| \leq 1$ 内解析, 由柯西一古萨基本定理得

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz = 0.$$

(2) 当 $n = 1$ 时, 由柯西积分公式得

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i \cdot (e^z)|_{z=0} = 2\pi i.$$

例 2

(3) 当 $n > 1$ 时, 由公式 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} (e^z)^{(n-1)} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}. \quad (2)$$

目录

Moreta 定理

定理 .2

(Moreta 定理) 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对于 D 内任何一条简单闭曲线 C 都有 $\oint_C f(z)dz = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

Proof.

在 D 内取定一点 z_0, z 为 D 内任意一点. 根据已知条件, 知积分 $\oint_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 的值与连接 z_0 到 z 的路径无关, 它定义了一个单值函数:

$$F(z) = \oint_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,$$

□

用上一节的方法, 可以证明

$$F'(z) = f(z),$$

所以 $F(z)$ 是 D 内的一个解析函数, 再根据上面的定理知解析函数的倒数仍然是解析函数, 故 $f(z)$ 为解析函数.

目录

调和函数与共轭调和函数-解析函数的定理

解析函数有一些重要性质, 特别是它与调和函数之间有着密切的关系, 在理论和实际问题中都有着广泛的应用. 例如在流体力学, 电磁学中常常遇到的调和函数, 就构成了解析函数的实部和虚部. 为此, 我们先介绍调和函数与共轭调和函数.

设 $u(x,y)$ 为二元实函数, 并具有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯 (Laplace) 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则称 $u(x,y)$ 为调和函数; 若函数 $u(x,y),v(x,y)$ 都为调和函数, 且满足 C—R 条件, 则称 $u(x,y),v(x,y)$ 之间互为共轭调和函数.

例 3-曲线族正交

定理 .3

如果 $f(z) = u + iv$ 为一解析函数, 且 $f'(z) \neq 0$, 则曲线族 $u(x, y) = c_1 v(x, y)$ 必相互正交.

证 因为曲线族 $u(x, y) = c_1, v(x, y)$ 中任一条曲线的斜率分别为 $-\frac{u_x}{u_y}, \frac{v_x}{v_y}$, 利用 C—R 条件, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, u_x = v_y, u_y = -v_x,$$

可得

$$\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(-\frac{v_x}{v_y}\right)=-\frac{v_y}{u_y}\cdot\frac{u_y}{v_x}=-1,$$

因此, 曲线族 $u(x,y)=c_1, v(x,y)$ 是相互正交.

调和函数举例

调和函数不一定是解析函数.

例 .1

对于 $f(z) = x - iy$, 有 $u(x, y) = x, v(x, y) = -y$, 且 $u_x = 1, v_x = 0, u_y = 0, v_y = -1$. 显然 $f(z)$ 不满足 C—R 条件, 不是解析函数. 然而 u, v 都是调和函数, 因为 $u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0$.

调和函数例子证明过程

定理 .4

解析函数的实部和虚部为调和函数, 且互为共轭调和函数.

证 设 $f(z) = u + iv$ 为一解析函数, 则必有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

对上面的等式两边同时对 x, y 求导, 可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

再代入拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0, u(x,y), v(x,y)\text{可微},$$

所以 $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$, 因此有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 所以 $u(x,y)$ 为调和函数.

同理, 也可证 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. 因而 $v(x,y)$ 也为调和函数. 而 u,v 满足 C—R 条件, 所以 u,v 互为共轭调和函数.

我们已知解析函数的实部和虚部为调和函数, 且互为共轭调和函数, 如何在已知其中的一个调和函数时, 求另一个共轭调和函数, 以及对应的解析函数?
下面给出具体的计算方法.

例 2

例 .2

已知 $u(x,y)=y^3-3x^2y$, 证明 u 为调和函数, 求共轭调和函数 $v(x,y)$ 及对应的解析函数 $f(z)=u+iv$.

解法一：因为 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析, 由 C—R 条件, 有

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,$$

例 2

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6y+6y=0$, 因此, u 为调和函数. 要求共轭调和函数 $v(x,y)$ 的表达式.

由全微分的定义, 有

$$dv=(3x^2-3y^2)dx-6xydy,$$

因为

$$dv = v_x dx + v_y dy \to v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} v_x dx + v_y dy + C.$$

于是

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2 - 3y^2)dx - 6xydy + C \\ &= x^3 - 3xy^2 + C, \end{aligned}$$

从而所求的解析函数为

$$\begin{aligned} f(z) &= y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2 + C) \\ &= i[x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 + C] \\ &= i(z^3 + C). \end{aligned}$$

例 2

解二: 因为 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析, 所以

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$=-6xy+i(3x^2-3y^2)=i3(x+iy)^2=i3z^2,$$

于是 $f(z)=iz^3+C_1$. 因为 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=y^3-3x^2y$, 所以 C_1 必为纯虚数, 从而 $f(z)=iz^3+iC=i(z^3+C)$, 其中 $iC=C_1$.

例 .3

已知 $v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y$ 为调和函数，求一解析函数 $f(z) = u + iv$，使得 $f(0) = 0$.

解:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1,$$

由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1,$$

得

$$u=\int[e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1]dx$$

$$u=e^x(x\cos y-y\sin y)+x+g(y),$$

由 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, 得

$$\begin{aligned}&e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)+1\\&\qquad=e^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)-g'(y),\end{aligned}$$

故

$$g(y)=-y+c,$$

于是

$$
\begin{aligned}
u &= e^x(x\cos y - y\sin y) + x - y + c, \\
f(z) &= u + iv = xe^xe^{iy} + iye^xe^{iy} + x(1+i) + iy(1+i) + c \\
&= ze^z + (1+i)z + c,
\end{aligned}
$$

由 $f(0) = 0$, 得 $c = 0$, 所求的解析函数 $f(z) = ze^z + (1+i)z$.

目录

已知调和函数 $u(x,y), v(x,y)$, 用不定积分求解析函数.

不定积分法的求解过程: 解析函数 $f(z) = u + iv$ 的导函数 $f'(z)$ 是解析函数, 且 $f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 把 $u_x - iu_y, v_y + iv_x$ 用 z 表示

$$f'(z) = u_x - iu_y = U(z), f'(z) = v_y + iv_x = V(z),$$

将上两式积分, 若已知实部 u, 求 $f(z)$, 可以使用下式

$$f(z) = \int U(z)dz + c,$$

若已知虚部 v, 求 f(z), 则使用下式

$$f(z) = \int V(z)dz + c.$$

例 .1

求 k 值, 使 $u = x^2 + ky^2$ 为调和函数; 再求 $f(z) = u + iv$, 且 $f(i) = -1$ 时的解析函数 $f(z)$.

解: 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} = 2ky, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2k,$$

根据调和函数的定义可得 $k = -1$, 因为

$$f'(z) = U(z) = u_x - iu_y = 2x - 2kyi = 2x + 2yi = 2z.$$

由不定积分法, 有

$$f(z) = \int 2zdz = z^2 + c,$$

由 $f(i) = -1$ 得 $c = 0$. 所求解析函数为

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = z^2.$$

例 .2

已知 $u+v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)-2(x+y)$, 试确定解析函数 $f(z)=u+iv$.

解: 两边同时求导数

$$u_x+v_x=(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)-2,$$
$$u_y+v_y=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)-2,$$

且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

所以上面两式分别相加减可得

$$v_y = 3x^2 - 3y^2 - 2, v_x = 6xy,$$

解析函数

$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y + iv_x = 3x^2 - 3y^2 - 2 + 6xyi = 3(x+iy)^2 - 2 \\ &= 3z^2 - 2, \end{aligned}$$

$$f(z) = \int (3z^2 - 2)dz = z^3 - 2z + c, c \in \mathbb{C}.$$

例 3-课堂练习 1

例 .3

(课堂练习) 设 C 是不通过 z_0 的简单闭曲线, 求积分 $g(z_0) = \oint\limits_C \frac{z^4+z^2}{(z-z_0)^3} dz$.

解: 若 z_0 在 C 外, $g(z_0) = 0$. 若 z_0 在 C 内, $g(z_0) = 2(6{z_0}^2 + 1)\pi i$.

例 .4

(课堂练习) 设 C 是不通过 z_0 的简单闭曲线, 积分 $g(z_0) = \oint_C \frac{z^4+z^2}{(z-z_0)^3}dz$, 计算 $g'(z_0)$.

解: 将 z_0 看成是动点,

$$g'(z_0) = \oint_C \left[\frac{z^4+z^2}{(z-z_0)^3}\right]' dz$$

$$= \oint_C \left[-\frac{z^4+z^2}{(z-z_0)^6}\right][-3(z-z_0)^2]dz$$

$$= \oint_C \left[\frac{3(z^4+z^2)}{(z-z_0)^4}\right]dz = \frac{\pi i}{3}[3(z^4+z^2)]'''\Big|_{z=z_0} = 24z_0.$$

例 .5

设 C 为正向圆周: $|z|=2$, 计算积分 $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz$.

解:

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz = \oint_C \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)e^z dz$$
$$= \frac{1}{2}\oint_C \frac{e^z}{z+1}dz + \frac{1}{2}\oint_C \frac{e^z}{z-1}dz$$
$$= \frac{1}{2}2\pi i e^{-1} + \frac{1}{2}2\pi i e^{1} = \pi i(e^{-1}+e^{1}).$$

例 .6

计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z}dz$, 其中 C 为正向圆周 $|z|=1$, 并证明 $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$.

解: 函数 $\frac{e^z}{z}$ 在圆周 $|z|\le 1$ 内除 $z=0$ 外是处处解析的. 记 Γ 为正向圆周 $C_1:|z|\le\epsilon<1$ 与圆周 $C_2:|z|=1$ 组成的复合闭路, 圆周 C_1 只包含奇点 $z=0$, 则

$$0=\oint_{\Gamma}\frac{e^z}{z}dz=\oint_{C_1^-}\frac{e^z}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{z}dz$$

所以, 由柯西积分公式

$$\oint_{C_2}\frac{e^z}{z}dz=-\oint_{C_1^-}\frac{e^z}{z}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi i\, e^z\big|_{z=0}=2\pi i.$$

下面利用上面的结论证明 $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$:

$$2\pi i=\oint_{C_2}\frac{e^z}{z}dz=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}e^{i\sin\theta}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta-\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta=0\\ \int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=2\pi\end{cases}$$

例 3-课堂练习 2

$$2\pi = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \pi.$$

例 6

例 .7

设 $u = 2(x-1)y$, 验证 u 是调和函数; 并求解析函数 $f(z) = u + iv$, 使得 $f(2) = -i$.

解:

$$u_x = 2y, u_{xx} = 0; u_y = 2(x-1), u_{yy} = 0.$$

拉普拉斯 (Laplace) 方程, 可知 $u = 2(x-1)y$ 是调和函数.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0,$$

解析函数 $f(z)=u+iv=2(x-1)y+iv$, 再由解析函数的实部和虚部互为共轭调和函数, u,v 满足

$$v_y=u_x=2y, v_x=-u_y=2(1-x)$$
$$\Rightarrow dv=v_x dx+v_y dy=2(1-x)dx+2ydy$$

$$\begin{aligned}
v(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)} 2(1-x)dx+2ydy+C\\
&=\int_{(0,0)}^{(x,0)} 2(1-x)dx+\int_{(x,0)}^{(x,y)} 2ydy+C\\
&=(2x-x^2)\Big|_{(0,0)}^{(x,0)}+y^2\Big|_{(x,0)}^{(x,y)}+C\\
&=2x-x^2+y^2+C.
\end{aligned}$$

再由 $f(2)=-i$, 带入 $f(z)=2(x-1)y+i(2x-x^2+y^2+C)$ 得 $C=-1$.
解析函数 $f(z)=2(x-1)y+i(2x-x^2+y^2-1)$.

小结——主要内容

柯西积分公式是复积分计算中的重要公式, 是研究解析函数的重要工具. 它的证明基于柯西-古萨基本定理, 它的重要性在于:

柯西积分公式

解析函数在区域内部的值可以用它在边界的积分值表示.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz, \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

主要内容

高阶导数公式是复积分的重要公式. 它表明了解析函数的导数仍然是解析函数这一异常重要的结论, 同时表明了解析函数与实变函数的本质区别.

高阶导数公式

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

本节我们学习了调和函数的概念、解析函数与调和函数的关系以及共轭调和函数的概念.

目录

小结和习题

应注意下面 2 点:

注意 1

任意两个调和函数 u 与 v 所构成的函数 $u+iv$ 不一定是解析函数.

注意 2

满足柯西—黎曼方程 $u_x=v_y, v_x=-u_y$ 的 v 称为 u 的共轭调和函数, u 与 v 注意的是地位不能颠倒.

教材习题三 P99: 8. 1), 3), 5), 7); 9; 10 2), 3), 6); 12; 15.

习题总结

例 .1

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2} = 2\pi i e^2.$$
$$\int_C \frac{dz}{\cos z} = 0.$$
$$\int_C \frac{dz}{\cos iz} = ?.$$

例 .2

计算积分 $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz$ 的值, 其中 C 为正向圆周
1) $|z| = 2$; 2) $|z| = 4$.

$$\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{|z|} dz = \oint_0^{2\pi} \frac{2e^{-i\theta}}{2} 2e^{i\theta} \cdot i d\theta = 2i \oint_0^{2\pi} \theta = 4\pi i.$$

$$\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{|z|} dz = ?.$$

例 .3

$$\oint_{|z-a|=a}\frac{dz}{z^2-a^2}=\oint_{|z-a|=a}\frac{dz}{(z-a)(z+a)}$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\oint_{|z-a|=a}\frac{dz}{z-a}-\oint_{|z-a|=a}\frac{dz}{z+a}\right]$$
$$=\frac{\pi i}{a}.$$

例 .4

1) $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}dz = 0.$

例 .5

1) $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}dz = \frac{1}{2}e^{2z}\Big|_{-\pi i}^{3\pi i} = \frac{1}{2}[e^{6\pi i} - e^{-2\pi i}] = 0.$

2)

$$\int_{-xi}^{3\pi i} e^{2z}dz = \frac{1}{2}e^{2z}\Big|_{-xi}^{3\pi i} = \frac{1}{2}[e^{6\pi i} - e^{-2xi}] = \frac{1}{2}[1 - \cos 2x + i\sin 2x].$$

例 .6

$$\int_{-\pi \mathrm{i}}^{3\pi \mathrm{i}} \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2z}\Big|_{-\pi \mathrm{i}}^{3\pi \mathrm{i}}$$ 对吗？

例 .7

$$\begin{aligned}\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2x} dz &= \int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2x}(dx + i dy) \\ &= \int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2x} dx + \int_{-\pi i}^{3\pi i} i e^{2x} dy \\ &= 0 + i e^{2x}(4\pi i) \\ &= -4\pi e^{2x}.\end{aligned}$$

例 .8

5) $\int_0^i (z-i)e^{-z}dz.$

$$\int (z-i)e^{-z}dz = (i-1)e^{-z} - ze^{-z} + C.$$

$$\int_0^i (z-i)e^{-z}dz = [(i-1)e^{-z} - ze^{-z}]\Big|_0^i$$
$$= 1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1).$$

$$\int_0^1 (z-i)e^{-z}dz = [(i-1)e^{-z} - ze^{-z}]\Big|_0^1$$
$$= \dots = 1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1) \quad \text{对吗？}.$$

例 .9

$\oint_{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}}$, 其中 C 为以 $\pm 2, \pm 5\mathrm{i}$ 为顶点的正向菱形;

$$\oint_{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}.$$

例 .10

$\oint_{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}}$, 其中 C 为以 $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{6\mathrm{i}}{5}$ 为顶点的正向菱形;

例 .11

求解析函数 $f(z) = u + iv$，其中 $v = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}, x > 0$ 是调和函数.

解析函数 $f(z)=u+iv$, $f'(z)=u_x+iv_x=v_y+iv_x$.

$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y+iv_x=v(z) \\ &= \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{x}+i\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot -\frac{y}{x^2} \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ &= \ldots \\ &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

所以，解析函数 $f(z)=\ln z+C$