复变函数

复数项级数与复函数项级数

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

November 17, 2020

目录

解析函数的泰勒展开法

定理.28

设函数 $f(z)$ 在圆域 $D: |z-z_0| < R$ 内解析, 则在 D 内 $f(z)$ 可以展开成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad (1)$$

其中 $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, C 为任意圆周 $|z-z_0| = \rho < R$, 并且这个展开式是唯一的.

证明：设 z 是 D 内任意一点, 在 D 内作一圆周 $C: |\zeta - z| = \rho < R$, 使得 $|z - z_0| < \rho$, 则由柯西积分公式, 得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{2}$$

因为 $|z - z_0| < \rho$, 即 $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = q < 1$, 所以

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

将此式代入(2)式, 由幂级数的性质, 得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \left[f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right] d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\right] (z - z_0)^n \tag{3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{4}$$

其中 $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, (n = 0, 1, 2, \cdots).$

设 $f(z)$ 在 D 内又可以展成 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, 对式(4)求各阶导数,

得 $f^{(n)}(z) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(z - z_0) + \cdots.$

当 $z = z_0$ 时, 得 $f^{(n)}(z_0) = n!c_n$, 即 $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 这就是将函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内展开成收敛的幂级数时的系数公式.

同时, 可以证明 $f(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_n (z - z_0)^n$ 的展开式是唯一的.

应当指出, 若函数 $f(z)$ 在 D 内有奇点, 则 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒级数的收敛半径等于收敛圆的中心点 z_0 到 $f(z)$ 的离 z_0 最近的一个奇点 α 之间的距离, 即 $R = |\alpha - z_0|$.

定理.29

函数在一点处的邻域内可以展成幂级数的充分必要条件是函数在该邻域内解析.

共有 4 个等价的解析函数的概念刻画. 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内满足下列条件之一, 则它就是 D 内的一个解析函数:

(1) $f(z)$ 在 D 内处处可微;

(2) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部 u 与虚部 v 在 D 内可微, 且它们的偏导函数满足柯西—黎曼条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$;

(3) $f(z)$ 在 D 内连续, 且对 D 内任意一条逐段光滑的闭曲线 C, 都有 $\oint_C f(z)dz=0$;

(4) 对于 D 内任意一点, 都存在一个邻域, $f(z)$ 在这个邻域内能展开成幂级数.

初等函数的泰勒展开式

1) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < \infty$
2) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, |z| < \infty$
3) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, |z| < \infty$
4) $\frac{1}{1 \mp z} = 1 \pm z + z^2 \pm z^3 + z^4 \pm \cdots, |z| < 1.$
5) $\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots, |z| < 1$
6) $(1 + z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} z^{n+1} + \cdots, |z| < 1$ (α 为复数).

代换法

例.1

把函数 $f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}$ 展开成 $z-1$ 的幂级数, 并指出它的收敛半径.

解：因为 $f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}=\frac{1}{[3+(z-1)]^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{z-1}{3}\right]^2}$, 令 $q(z)=\frac{z-1}{3}$, 那么当 $|q(z)|<1$ 时, 即 $|z-1|<3$ 时, 我们即可利用公式 6) 将上式右端展开. 以 $q(z)=\frac{z-1}{3}$ 代入 6) 中的 z, 再由

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n,$$

逐项求导可得

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{\left[1+\frac{z-1}{3}\right]^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3}\left(\frac{z-1}{3}\right)^{n-1},$$

也即

$$\frac{1}{\left[1+\frac{z-1}{3}\right]^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{z-1}{3}\right)^{n-1},$$

则得 $f(z)$ 的表达式

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{9}\left[1-2\left(\frac{z-1}{3}\right)+\frac{2\cdot 3}{2!}\left(\frac{z-1}{3}\right)^2-\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3!}\left(\frac{z-1}{3}\right)^3+\cdots\right] \\ &= \frac{1}{9}\left[1-\frac{2}{3}(z-1)+\frac{1}{3}(z-1)^2-\frac{4}{27}(z-1)^3+\cdots\right], |z-1|<3. \end{aligned}$$

这就是所求的展开式, 它右端的幂级数的收敛半径为 3.

例.2

将函数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解： 由于函数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 在单位圆周 $|z|=1$ 上有一个奇点 $z=-1$, 而在 $|z|<1$ 内处处解析, 所以它在 $|z|<1$ 内可以展开成 z 的幂级数. 由

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots, |z|<1. \tag{5}$$

把上面两边逐项求导, 即

$$-\frac{1}{(1+z)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}n(-z)^{n-1}, |z|<1. \tag{6}$$

得到 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 展开的幂级数

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^2}&=1-2z+3z^2-4z^3+\cdots+n(-1)^{n-1}z^{n-1}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n-1}z^{n-1}, |z|<1.\end{aligned} \tag{7}$$

用微分方程求系数

例.3

把 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z=0$ 点展开成幂级数.

解： 因为函数 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 有一个奇点 $z=1$, 则 $f(0)=e$, 所以可以在 $|z|<1$ 内展开成 z 的幂级数. 令 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$, 求导得 $f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=f(z)\cdot\frac{1}{(1-z)^2}$, 即 $(1-z)^2f'(z)-f(z)=0$.
把上面的微分方程逐次对变量 z 求导, 得

$$(1-z)^2f''(z)+(2z-3)f'(z)=0,$$

$$(1-z)^2f'''(z)+(4z-5)f''(z)+2f'(z)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdot$$

由于 $f(0)=e$, 所以从上面各微分方程, 依次可求得

$$f'(0)=e, f''(0)=3e, f'''(0)=13e, \cdots$$

从而有 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 的展开式

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\right), |z|<1.$$

乘法

例.4

把 $e^z \sin z$ 展开成 z 的幂级数.

解： $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$, $\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots$

$$e^z \sin z = \left(1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\right)\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots\right)$$
$$= z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots, \ |z| < \infty.$$

待定系数法

例.5

将 $\tan z$ 展开成 z 的幂级数.

解：因为 $\tan z$ 的展开中心在 $z=0$，最近的一个奇点是 $\frac{\pi}{2}$, 所以我们可以在区域 $|z|<\frac{\pi}{2}$ 内, 将 $\tan z$ 展开成 z 的幂级数.
设 $\tan z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \cdots$,
$\tan z - \tan(-z) = 2\tan z = \ldots$ 而
$\tan(-z) = a_0 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + a_4 z^4 - a_5 z^5 - \cdots$, 因为 $\tan z$ 为奇函数,
$\tan(-z) = -\tan z$, 再比较上述两式 z 的同次幂的系数, 可得
$a_0 = 0, a_2 = 0, a_4 = 0, \cdots$ (或者使用 $2\tan z = 2a_1 z + 2a_3 z^3 + 2a_5 z^5 + \cdots$),
所以

$$\tan z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7 + \cdots ,$$

而

$$\sin z = \tan z \cdot \cos z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots$$
$$= (a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7 + \cdots) \cdot \left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots\right),$$

将上式的右端相乘, 再比较两端同次幂系数, 有

$$\begin{aligned}
1 &= a_1,\\
-\frac{1}{3!} &= -\frac{1}{2!}a_1 + a_3,\\
\frac{1}{5!} &= \frac{1}{4!}a_1 - \frac{1}{2!}a_3 + a_5,\\
\frac{1}{7!} &= -\frac{1}{6!}a_1 + \frac{1}{4!}a_3 - \frac{1}{2!}a_5 + a_7,\\
\cdots .
\end{aligned}$$

解上述方程, 可得 $a_1 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, a_5 = \frac{2}{15}, a_7 = \frac{17}{315}, \cdots, |z| < \frac{\pi}{2}$. 所以

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots, |z| < \frac{\pi}{2}.$$

例.6

求对数函数 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

我们知道, $\ln(1+z)$ 在从 -1 向左沿着负实轴剪开的平面内是解析的, 而 -1 是它的一个奇点, 所以它在 $|z|<1$ 内可以展开成 z 的幂级数 (图 1).
因为 $\ln'(1+z)=\frac{1}{1+z}$, 而幂级数 $\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$, 其中 $(|z|<1)$. 在展开式的收敛圆 $|z|<1$ 内, 任取一条从 0 到 z 的积分路线 C, 把(5)式的两端沿积分路线 C 逐项积分, 得

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{1+z}dz &= \int_C \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n dz \\ &= \int_C dz - \int_C z dz + \cdots + \int_0^z (-1)^n z^n dz + \cdots ,\end{aligned}$$

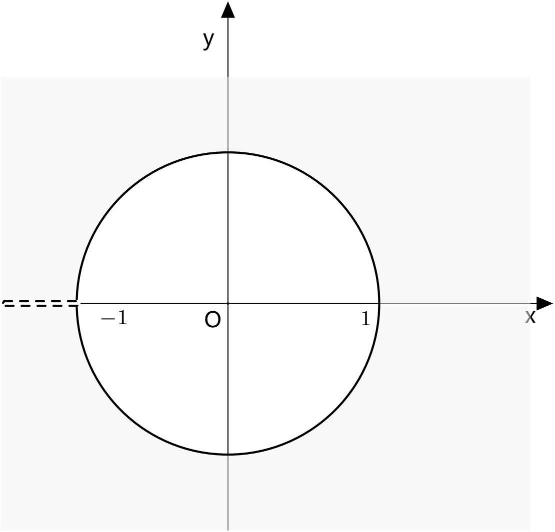

图 1: $\ln(1+z)$ 的泰勒展开式

例.7

求幂函数 $(1+z)^{\alpha}(\alpha$ 为复数) 的主值支:

$$f(z)=e^{\alpha\ln(1+z)},\ f(0)=-1,$$

在 $z=0$ 处的泰勒级数.

解: 设 $\phi(z)=\ln(1+z)$, $1+z=e^{\phi(z)}\Rightarrow\frac{1}{1+z}=e^{-\phi(z)}$, 所以 $f(z)=e^{\alpha\phi(z)}$. 求导得

$$f'(z)=e^{\alpha\phi(z)}\alpha\phi'(z)=e^{\alpha\phi(z)}\frac{\alpha}{1+z}=\alpha e^{(\alpha-1)\phi(z)},$$

依次求导，得

$$f''(z)=\alpha(\alpha-1)e^{(\alpha-2)\phi(z)},$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)e^{(\alpha-n)\phi(z)}.$$

令 $z = 0$, 则 $\phi(0) = 0$, 由此得

$$\begin{aligned} f(0) = 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha - 1), \cdots, \\ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} (1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \cdots \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \ |z| < 1. \end{aligned}$$

例.8

把函数 arctanz 展开成 $z=0$ 的幂级数.

因为

$$\arctan z=\int_0^z \frac{dz}{1+z^2},$$

且

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n,\ |z|<1$$

所以

$$\arctan z=\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}=\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|<1.$$

例.9

把函数 $\cos^2 z$ 展开成幂级数.

解：因为 $\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z)$,

$$\cos 2z = 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{2^2z^2}{2!} + \frac{2^4z^4}{4!} - \frac{2^6z^6}{6!} + \cdots, \ |z| < \infty.$$

所以

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = 1 - \frac{2z^2}{2!} + \frac{2^3z^4}{4!} - \frac{2^5z^6}{6!} + \cdots, \ |z| < \infty.$$

例.10

将 $\frac{e^z}{1+z}$ 展开成麦克劳林级数.

解: 因为 $\frac{e^z}{1+z}$ 的唯一奇点为 $z=-1$, 所以收敛半径 $R=1$, 函数可在 $|z|<1$ 内进行展开.

令 $f(z)=\frac{e^z}{1+z}$, 对 $f(z)$ 求导得 $f'(z)=\frac{ze^z}{(1+z)^2}=\frac{z}{1+z}f(z)$, 即得如下的微分方程

$$(1+z)f'(z)-zf(z)=0.$$

对微分方程逐次求导得:

$$\begin{aligned}
(1+z)f''(z)+(1-z)f'(z)-f(z)&=0\\
(1+z)f'''(z)+(2-z)f''(z)-2f'(z)&=0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

由 $f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=-2,\cdots$, 所以 $f(z)$ 的麦克劳林级数为

$$\begin{aligned}
\frac{e^z}{1+z}&=1+\frac{1}{2!}z^2-\frac{2}{3!}z^3+\cdots\\
&=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<1.
\end{aligned}$$

例.11

把函数 $f(z) = \frac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解:

$$\frac{1}{3z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3z}{2}} = -\frac{1}{2}\left[1+\frac{3z}{2}+\left(\frac{3z}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3z}{2}\right)^n+\cdots\right]$$
$$= -\frac{1}{2}-\frac{3z}{2^2}-\frac{3^2z^2}{2^3}-\cdots-\frac{3^nz^n}{2^{n+1}}-\cdots$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nz^n}{2^{n+1}},$$

其中，幂级数收敛需要 $\left|\frac{3z}{2}\right| < 1$, 即 $|z| < \frac{2}{3}$.

例.12

将 $\frac{z}{(z+1)(+2)}$ 在 $z_0 = 2$ 处作泰勒展开，给出表达式并求收敛半径.

由 $\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} = \frac{z}{(z+1)(+2)}$, 可得 $A = -1, B = 2$.

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-2)+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z-2}{3}+1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n, \left|\frac{z-2}{3}\right| < 1;$$

$$\frac{2}{z+2} = \frac{2}{(z-2)+4} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z-2}{4}+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{4}\right)^n, \left|\frac{z-2}{4}\right| < 1.$$

当 $\left|\frac{z-2}{3}\right| < 1$ 且 $\left|\frac{z-2}{4}\right| < 1$ 时, 收敛半径为 $R = 3$ 时, 泰勒展开式为

$$\frac{z}{(z+1)(+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{4}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n.$$

课堂小结

课堂小结

通过本课的学习, 应理解泰勒展开定理, 熟记五个基本函数的泰勒展开式, 掌握将函数展开成泰勒级数的方法, 能比较熟练的把一些解析函数展开成泰勒级数.
泰勒级数的四种方法：代微分待数

布置作业

教材习题四 P141: 6 1)、3); 8; 11 1)、2); 12 1)、2)、3)、4); 16; 19 1)、2)、3)、4).

实随机过程的功率谱密度

在研究随机过程的频域特性之前, 我们首先对傅里叶变换作一简单回顾。设给定信号 s(t) 是时间 t 的非周期实函数,

傅里叶变换存在的条件

1° s(t) 在 $(-\infty,\infty)$ 范围内满足狄利克雷条件。(信号存在傅里叶变换的充分不必要条件; 条件括三方面: (1) 信号在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点; (2) 信号在一个周期内的极大值和极小值的数目应有限; (3) 信号在一周期内绝对可积。)

2° $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|dt<\infty$ (绝对可积) 的等价条件为 $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2dt<\infty$ (信号 s(t) 的总能量有限)。

2) 带通型限带白噪声的功率谱密度

类似低通型限带白噪声，带通型限带白噪声的功率谱密度为

$$G_Y(\omega) = \begin{cases} G_0, & \omega_0 - \Omega/2 < |\omega| < \omega_0 + \Omega/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{9}$$

带通型限带白噪声的自相关函数

应用维纳-辛钦定理，带通型限带白噪声的的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \frac{\Omega G_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{(\Omega\tau/2)} \cos\omega_0\tau \\ &= 2R_X(\tau)\cos\omega_0\tau. \end{aligned}$$

带通型限带白噪声的自相关函数计算

下载——带通型限带白噪声的自相关函数计算

如 $x(t), h(t)$ 绝对可积，线性系统系统稳定，且傅里叶变换分别为 $X(\omega), H(\omega)$, 则 $y(t)$ 的傅里叶变换 $Y(\omega)$ 满足如下等式：

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \tag{10}$$

其中，$H(\omega)$ 又称为线性时不变线性系统的传递函数，传递函数与系统的冲激响应 $h(t)$ 构成傅里叶变换对，关系如下：

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \tag{11}$$

$$H(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega t}dt \Rightarrow H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt. \tag{12}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{13}$$

这样，对于 $\{x(t)\}$ 的一系列样本函数 $X(t)$, 系统输出端就会得到一系列新的样本函数 $y(t)$, 这些样本函数就构成随机信号集 $\{Y(t)\}$.

傅里叶变换对

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-\Omega n}. \tag{14}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega. \tag{15}$$

对于 $\{X(t)\}$ 的一系列样本序列 $x(n)$, 系统输出端就会得到一系列新的样本序列 $Y(n)$, 这些样本序列就构成随机序列 $\{Y(t)\}$.

希尔伯特变换的几个重要性质

1. 希尔伯特变换相当于一个正交滤波器

希尔伯特变换是 $s(t)$ 和 $1/\pi t$ 的卷积，根据线性系统的输出特征，可以将 $\hat{s}(t)$ 看成是 $s(t)$ 通过一个具有冲激响应为的线性滤波器，如图 2 所示

输入 $s(t)$

$$h_{\wedge}(t) = \frac{1}{\pi t}$$

$$H_{\wedge}(\omega) = -j\mathrm{sgn}(\omega)$$

输出 $\hat{s}(t)$

图 2: 希尔伯特变换

如果 $x(t), h(t)$ 绝对可积，即系统是稳定的，且傅里叶变换分别为 $X(\omega), H(\omega)$, 则 $y(t)$ 的傅里叶变换 $Y(\omega)$ 满足如下等式：

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \tag{16}$$

其中，$H(\omega)$ 又称为线性时不变线性系统的传递函数，传递函数与系统的冲激响应 $h(t)$ 构成傅里叶变换对，关系如下：

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \tag{17}$$

$$H(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega t}dt \Rightarrow H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt. \tag{18}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{19}$$

这样，对于 $\{x(t)\}$ 的一系列样本函数 $X(t)$, 系统输出端就会得到一系列新的样本函数 $y(t)$, 这些样本函数就构成随机信号集 $\{Y(t)\}$.

若函数 $f(z)$ 在环域内解析, 同样也可以展成幂级数, 这种环域内定义的幂级数称为罗朗级数.

定理.30

设函数 $f(z)$ 在圆环域 $r < |z - z_0| < R\,(r \geq 0, R < +\infty)$ 内解析, 则 $f(z)$ 在此圆环域内可以唯一地展开为罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

其中, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, C 为在圆环域内绕 z_0 的任意一条简单闭曲线. 显然有 $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta$. 等价地, $\oint_C f(\zeta) d\zeta = 2\pi i c_{-1}$.

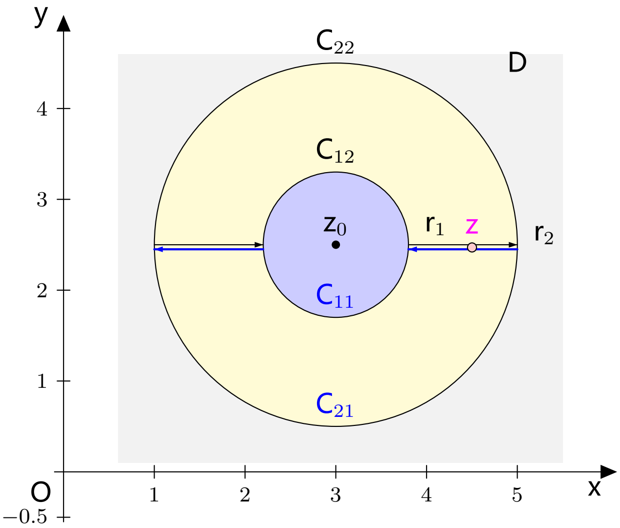

图 3: 罗朗级数的收敛域

证明：以点 z_0 为中心, 作两个同心圆 $C_1 : |z - z_0| = r_1, C_2 : |z - z_0| = r_2$, 使 $r < r_1 < r_2 < R$. 设点 z 是圆环域 $r_1 < |z - z_0| < r_2$ 内的任意一点, 对 $C = C_{22} + C_{12}^- + C_{21} + C_{11}^- = C_2 + C_1^-$, $f(z)$ 在环域内解析, z 是 $\frac{1}{\zeta - z}$ 的奇点, 由柯西积分公式 (图3), 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

在外环 C_2 上, $|\zeta - z_0| = r_2$, $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = q_1 < 1,$$

则积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

其中 $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$.

其中 $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta$.
在内环 C_1 上, $|\zeta - z_0| = r_1$, , $|z - z_0| > |\zeta - z_0|$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} (\zeta - z_0)^n \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n}} (\zeta - z_0)^{n-1} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} (z - z_0)^{-n}, \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = q_2 < 1.
\end{aligned}
$$

则积分

$$
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}.
$$

其中 $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta$. 综合上述两个积分, 则

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \ (r < |z - z_0| < R),$$

其中 $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 若令 $f(z) = \phi(z) + \psi(z)$, $\phi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, 函数 $\phi(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 内解析, 称 $\phi(z)$ 为 $f(z)$ 的罗朗级数的解析部分或称为正则部分. $\psi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ 称为 $f(z)$ 的罗朗级数的主要部分, $\psi(z)$ 在 $|z - z_0| > r$ 内解析.

注

在 $f(z)$ 的罗朗级数中, 系数 $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$ 并不等于泰勒级数中的高阶导数公式 $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, 因为函数 $f(z)$ 在 C 所围的区域内不是处处解析. 在将函数展开成罗朗级数时, 一般不用系数公式计算, 而常用几何级数、替换法、求导和积分等来计算.

例.1

将函数 $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$ 在 $0<|z|<\infty$ 内展开成罗朗展式.

解：由定理知:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

其中 $z_0=0$ 是 $f(\zeta)=\frac{e^\zeta}{\zeta^2}$ 的奇点, 罗朗展式的系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}d\zeta$$

围线

$$C:|z|=\rho\ (0<\rho<\infty),\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当 $n\le -3$ 时, $\frac{1}{\zeta^{n+3}}$ 不存在奇点, $\frac{e^z}{z^2}$ 在圆环内解析, 故由柯西-古萨基本定理知 $c_n=0$.
当 $n\ge -2$ 时, 由高阶导数公式知:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}d\zeta=\frac{1}{(n+2)!}\cdot\left[\frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}}(e^z)\right]_{z=0}=\frac{1}{(n+2)!},$$

故

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots, 0 < |z| < \infty.$$

解:

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots \\ & 0 < |z| < \infty. \end{aligned}$$

本例中圆环域的中心 $z = 0$ 既是各负幂项的奇点, 也是函数 $\frac{e^z}{z^2}$ 的奇点.

例.2

试将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 1) $z=0$; 2) $z=1$; 3) $z=2$ 展开成罗朗级数.

解： $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{a}{1-z}-\frac{b}{2-z}\Rightarrow a=-1,b=1$, 则 $f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$ 有两个奇点, 分别为 $z=1,z=2$.

1) 在 $z=0$ 处有三个环: $0<|z|<1;1<|z|<2;2<|z|<+\infty$,

① 在 $0<|z|<1$, $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$, $\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$, 所以

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n;$$

② 在 $1<|z|<2$, 有 $1/2<\left|\frac{1}{z}\right|<1, 1/2<\left|\frac{z}{2}\right|<1$, 因此有

$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$, $\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$, 则

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}==-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{2^{n+1}};$$

③ 在 $2<|z|<+\infty$, 则有 $0<\left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2}, 0<\left|\frac{2}{z}\right|<1$, $\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$,

$\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$, 则 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^{n+1}}$.

函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 展开成罗朗级数为

$$f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n, & 0<|z|<1\\ -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, & 1<|z|<2\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)\frac{1}{z^{n+1}}, & 2<|z|<+\infty\end{cases} \tag{20}$$

2) 在 $z=1$ 处有两个环: $0<|z-1|<1$ 与 $1<|z-1|<+\infty$.

① 在 $0<|z-1|<1$, $\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-(z-1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$, 所以

$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$;

② 在 $1<|z-1|<+\infty$, $\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-(z-1)}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$, 所以
$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$;
函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=1$ 展开成罗朗级数为

$$f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n, & 0<|z-1|<1\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}, & 1<|z-1|<+\infty\end{cases}\tag{21}$$

3) 在 $z=2$ 处, 有两环, $0<|z-2|<1, |z-2|>1$.
① 在环域 $0<|z-2|<1$ 内,

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{(z-2)+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n,$$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n.$$

② 在环域 $|z-2|>2$, $0<\frac{1}{|z-2|}<\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{1+(z-2)}=-\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}},$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}.$$

函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=2$ 展开成罗朗级数为

$$f(z)=\begin{cases}\frac{1}{z-2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-2)^n, & 0<|z-2|<1\\ -\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}, & |z-2|>2\end{cases}\tag{22}$$

注

本例中圆环域的中心 $z=0$ 是各负幂项的奇点, 但却不是函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 的奇点.

例.3

将 $\frac{\sin z}{z}$ 在 $z_0 = 0$ 的去心邻域内 ($|z| > 0$) 展开成罗朗级数.

解：由 $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$，可得

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!},$$

$$= \frac{1}{z}\left[z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right]$$

$$0 < |z| < \infty.$$

例.3-1

将 $\frac{\sin z}{z}$ 在 $z_0 = 2$ 展开成罗朗级数（异于 $z_0 = 0$ 点展开）.

解： $\frac{\sin z}{z}$ 在此圆环域内 $\infty > |z| > 0$ 可以唯一地展开为罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-2)^n,$$

其中, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sin(\zeta)}{\zeta(\zeta-2)^{n+1}} d\zeta, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, $C : |z-2| = 1$.

① $n+1 \leq 0 \Rightarrow -n-1 \geq 0$ 时, 则 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin(\zeta)}{\zeta(\zeta-2)^{n+1}} = \frac{\sin(\zeta)}{\zeta}(\zeta-2)^{-n-1}$ 在 $|z-2| \leq 1$ 内解析，$c_n = 0$.

② $n = 0$ 时, $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin(\zeta)}{\zeta(\zeta-2)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-2|=1} \frac{\frac{\sin(\zeta)}{\zeta}}{\zeta-2} d\zeta = \frac{\sin 2}{2}$.

③ $n > 0$ 时, $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-2|=1} \frac{\sin(\zeta)}{\zeta(\zeta-2)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{n!}\left(\frac{\sin(\zeta)}{\zeta}\right)^{(n)}\Big|_{\zeta=2}$.

示例

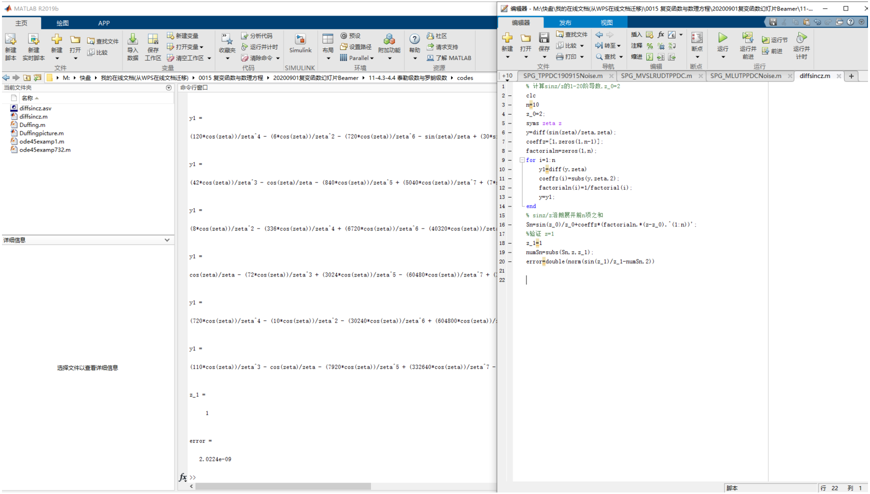

图 4: 计算 $[z(z-2)]^{-1}$ 在 $z_0 = 2$ 展开成罗朗级数的程序截图.

```
% 计算sinz/z的1-20阶导数,z__0=2
clc,n=10z__0=2;
syms zeta z
y=diff(sin(zeta)/zeta,zeta);
coeffz=[1,zeros(1,n-1)];
factorialn=zeros(1,n);
for i=1:n
    y1=diff(y,zeta)
    coeffz(i)=subs(y,zeta,2);
    factorialn(i)=1/factorial(i);
    y=y1;
end
% sinz/z洛朗展开前n项之和
Sn=sin(z__0)/z__0+coeffz*(factorialn.*(z-z__0).^(1:n))';
%验证 z=1
z__1=1
numSn=subs(Sn,z,z__1);
error=double(norm(sin(z__1)/z__1-numSn,2))
```

代码 1: $[z(z-2)]^{-1}$ 在 $z_0=2$ 展开成罗朗级数.

例.4

将 $[z(z-2)]^{-1}$ 在 $z_0=2$ 的去心邻域内展开成罗朗级数.

解：在 $0<|z-2|<2$ 内, 即 $r_1=0, r_2=2$, 罗朗级数为

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{2+(z-2)} \\
&= \frac{1}{z-2}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2(z-2)} - \frac{1}{2^2} + \frac{z-2}{2^3} + \cdots .
\end{aligned}
$$

例.5

将函数 $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 内展开成罗朗展式.

解：函数 $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 内是处处解析的. 我们知道, e^z 在复平面内的展开式是:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

而 $\frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < \infty$ 解析, 所以把上式中的 z 代换成 $\frac{1}{z}$, 可得 $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$. 两边乘以 z^3, 即得所求的罗朗展开式：

$$\begin{aligned} z^3 e^{\frac{1}{z}} &= z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{4! z^4} + \cdots\right) \\ &= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3-n}}{n!}. \end{aligned}$$

例.6

函数 $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在以下圆环域 (1) $1 < |z| < 2$; (2) $0 < |z-2| < \sqrt{5}$ 内的罗朗展开式.

解：对于复函数

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)},$$

可令

$$f(z) = \frac{a}{z-2} + \frac{bz + c}{z^2 + 1}.$$

整理后得

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ c - 2b = -2, \\ a - 2c = 5 \end{cases}$$

求解得 $a = 1, b = 0, c = -2$, 则

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1}.$$

示例

(1) 当 $f(z)$ 在 $r_1 = 1 < |z| < 2 = r_2$ 内时, $\frac{1}{4} < \frac{1}{|z^2|} = \frac{1}{|z|^2} < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)} - \frac{2}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{2}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

(2) 当 $f(z)$ 在 $0 < |z-2| < \sqrt{5}$ 内时, 且有 $|z-2| < |2 \pm i|$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1} = \frac{1}{z-2} - i\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

$$= \frac{1}{z-2} - i\left[\frac{1}{(z-2)+(i+2)} - \frac{1}{(z-2)+(2-i)}\right]$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{(2-i)\left(1+\frac{z-2}{2-i}\right)} - \frac{1}{(2+i)\left(1+\frac{z-2}{2+i}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n - \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left[\frac{1}{(2-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right]$$

整理后得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1} \\ &= \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left[(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}\right] \cdot \frac{(z-2)^n}{5^{n+1}}. \end{aligned}$$

例.7

求下列各积分

$$1)\ \oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)(z+4)}dz;\ \ 2)\ \oint_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz.$$

解： (1) 函数 $f(z)=\frac{1}{z(z+1)(z+4)}$ 的奇点有 $z_1=0, z_2=-1, z_3=-4$, 在圆环域 $1<|z|<4$ 内处处解析, 且 $|z|=3$, 在此圆环域内, 所以 $f(z)$ 在此圆环域内罗朗展开式的系数 c_{-1} 乘以 $2\pi i$ 即为所求积分值. 令

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a}{z}+\frac{b}{z+1}+\frac{c}{z+4} \\ &= \frac{(z^2+bz+4)a+b(z^2+4z)+c(z^2+z)}{z(z+1)(z+4)} \\ &= \frac{(a+b+c)z^2+(5a+4b+c)z+4a}{z(z+1)(z+4)} \end{aligned}$$

整理后得

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 5a+4b+c=0, \\ 4a=1 \end{cases}$$

求解得 $a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{3}, c=\frac{1}{12}$, 则

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4z} - \frac{1}{3(z+1)} + \frac{1}{12(z+4)} \\ &= \frac{1}{4z} - \frac{1}{3z(1+\frac{1}{z})} + \frac{1}{48(\frac{z}{4}+1)} \\ &= \frac{1}{4z} - \frac{1}{3z} + \frac{1}{3z^2} - \cdots + \frac{1}{48}\left(1 - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{16} - \cdots\right). \end{aligned}$$

由此可见, $c_{-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$, 从而

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)(z+4)} dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{\pi i}{6}.$$

(2) 函数 $f(z) = \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 在 $1 < |z| < \infty$ 内处处解析, $|z| = 2$, 在此圆环域内, 把此函数在圆环域 $1 < |z| < \infty$ 内展开得

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{\frac{1}{z}}}{-\left(1 - \frac{1}{z}\right)} \\
&= -\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots\right) \\
&= -\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{5}{2z^2} + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

故 $c_{-1} = -2$, 从而

$$\oint_{|z|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z} dz = 2\pi i\, c_{-1} = -4\pi i.$$

课堂小结

课堂小结

在这节课中, 我们学习了罗朗展开定理和函数展开成罗朗级数的方法. 将函数展开成罗朗级数是本节的重点和难点.

布置作业

教材习题四 P141: 6 1)、3); 8; 11 1)、2); 12 1)、2)、3)、4); 16; 19 1)、2)、3)、4).