# 复变函数

## 复数项级数与复函数项级数

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

October 28, 2020

# 目录

# 目录

# 复数列的极限

因为无穷级数是从数列的特殊规律产生的, 所以研究数列与函数列是极其重要的. 现在引入复数列极限的概念.

**定义 .1**

设 $\{z_n\}\,(n=1,2,\cdots)$ 为一复数列, $z_0$ 为一复数, 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 使当 $n>N$, 有 $|z_n-z_0|<\varepsilon$ 成立, 则称复数列 $\{z_n\}$ 收敛. 复数列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z_0$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$ 或 $z_n\to z_0, n\to\infty$.

**定理 .1**

设 $z_n=x_n+iy_n\,(n=1,2,\cdots), z_0=x_0+iy_0$, 则复数列 $\{z_n\}$ 收敛与 $z_0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$.

# 级数概念

**定义 .2**

(级数的概念) 设 $\{\alpha_n\} = \{a_n + ib_n\} \quad (n = 1, 2, \cdots,)$ 为一复数列, 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots,$$

称为无穷级数, 其最前面 n 项的和 $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n$ 称为级数的部分和.

**例 .1**

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 是否收敛.

**解:** 满足级数收敛的必要条件, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=0$, 但

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n}i}{n}\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)-i\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 虽 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛. 原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 仍发散.

**例 .2**

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 是否绝对收敛?

**解**: 因为

$$\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right| = \frac{8^n}{n!},$$

由正项级数的比值判别法知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛. 故原级数收敛, 且为绝对收敛.

**例 .3**

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$ 是否绝对收敛?

**解:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 也收敛, 故原级数收敛. 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, 所以原级数非绝对收敛.

另法: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^{2n}}}\geq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

**例 .4**

下列数列是否收敛, 如果收敛, 求出其极限.

$$(1)\ \alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}};\ (2)\ \alpha_n = n\cos ni\ .$$

**解:** (1) 因为

$$\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right),$$

所以

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n},\ b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}\ .$$

而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

所以 $\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) e^{i\frac{\pi}{n}}$ 收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1\,.$$

(2) 由于 $\alpha_n = n\cos in = n\cosh n$, 当 $n\to\infty$ 时, $\alpha_n\to\infty$, 数列发散.

# 目录

**定义 .3**

(复函数项级数) 设 $\{f_n(z)\},(n=1,2,\cdots)$ 为一复数函数序列, 复函数序列的各项在区域 D 内有定义. 称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

为复函数项级数. 称 $S_n = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$ 为级数的部分和.

**定义 .4**

如果对于 D 内的某一点 $z_0$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z_0) = S(z_0)$ 存在, 则说复变函数项级数 $\{f_n(z)\}$ 在 $z_0$ 点收敛, 而 $S(z_0)$ 就是它的和. 如果级数在 D 内处处收敛, 那么它的和一定是 z 的一个函数, 记为 $S(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$.

**定义 .5**

当 $f_n(z) = C_n(z - z_0)^n$ 或 $f_n(z) = c_n z^n$ 时, 称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 为幂级数.

若设 $z-z_0=\zeta$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n\zeta^n$.

因此, 为了方便, 我们主要讨论幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

## 定理 .2

幂级数收敛定理—(阿贝耳 Abel 定理)

如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 收敛, 那么对满足 $|z| < |z_0|$ 的一切 $z$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 必绝对收敛. 如果在 $z = z_0$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 发散, 那么对满足 $|z| > |z_0|$ 一切的 $z$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 必发散.

证: 因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0$ 收敛, 根据收敛的必要条件, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$, 则必存在正数 $M$, 使得所有 $|c_n z_0^n| < M$.

如果 $|z| < |z_0|$, 那么 $\frac{|z|}{|z_0|} = q < 1$, 而

$$|c_n z^n| = \left|c_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n}\right| = |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n.$$

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 是绝对收敛.

(几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\aleph} q^n$, 当 $q < 1$ 时, 收敛; 当 $q \geq 1$ 时, 发散). 利用反证法可以证明, 当 $|z| > |z_0|$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 是发散的.

# 目录

**定义 .6**

若存在一个正数 R, 使幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $|z| < R$ 内绝对收敛, 而在 $|z| > R$ 内处处发散, 则称 $|z| = R$ 为收敛圆, 其中 R 为收敛半径.

**2) 收敛半径的求法——常用的方法为比值法和根值法**

设幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 方法如下:

比值法 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$, 则 $R = \frac{1}{\lambda}$;

根值法 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda$, 则 $R = \frac{1}{\lambda}$.

**例 .1**

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$ 的收敛范围与和函数.

**解:** 级数的部分和为

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}, \ (z \neq 1)$$

$|z| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-z} \Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 收敛.

$|z| \geq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z^n \neq 0 \Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 发散.

由阿贝尔定理知: 收敛范围为一单位圆域 $|z| < 1$, 在此圆域内, 级数绝对收敛, 收敛半径为 $1$, 且有 $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$

**例 .2**

求下列幂级数的收敛半径: (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$(并讨论在收敛圆周上的情形); (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 并讨论 $z = 0, 2$ 时的情形

**解**: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 1$ 或者

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = 1.$$

所以收敛半径 $R = 1$. 即原级数在圆 $|z| = 1$ 内收敛, 在圆外发散, 是收敛的 p 级数 $(p = 3 > 1)$. 所以原级数在收敛圆上是处处收敛的.

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

收敛半径 $R = 1$.

当 $z = 0$ 时, 原级数成为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, 级数收敛.

当 $z = 2$ 时, 原级数成为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 级数发散.

说明：在收敛圆周上既有级数的收敛点, 也有级数的发散点.

**例 .3**

试求下列幂级数的收敛半径

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$;
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$;
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[8+(-1)^n]^n$.

**解**: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^3 = 1$ .

或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = 1$,

所以 $R = 1$, 当 $|z| = 1$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 是收敛的.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, 所以 $R = +\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}[8+(-1)^n] = \begin{cases} 7, & n\text{奇数} \\ 9, & n\text{偶数} \end{cases}$, 所以 $R = \frac{1}{9}$.

# 收敛半径总结

一般来说, 幂级数的收敛半径分为如下几种情况:

(1) 仅在原点收敛, 除原点外, 处处发散, $R = 0$;

(2) 在全平面上处处绝对收敛, $R = +\infty$;

(3) 存在某一点 $z_0 \neq 0$, 圆周 $C:|z| = |z_0|$. 在 $|z| < |z_0|$ 的圆内, 幂级数 $\sum_{n\to 0}^{\infty} c_n z^n$ 是绝对收敛;

# 收敛半径总结

(4) 在 $|z| > |z_0|$ 的圆外, 幂级数 $\sum_{n\to 0}^{\infty} c_n z^n$ 是发散;

(5) 在圆周 $C{:}|z| = |z_0|$ 上, 幂级数 $\sum_{n\to 0}^{\infty} c_n z^n$ 可能是收敛的, 也可能是发散的.

(6) 在圆周 $C{:}|z| = |z_0|$ 上, 幂级数 $\sum_{n\to 0}^{\infty} c_n z^n$ 也可能是发散的.

**例 .4**

求下列幂级数的收敛半径. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\cos ni)z^n$.

**解:** $c_n=\cos ni=\cosh n=\frac{1}{2}(e^n+e^{-n})$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}}=e$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{e}$.

**例 .5**

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径.

**解**: 因为

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i},$$

$$c_n=(1+i)^n=(\sqrt{2})^n e^{\frac{n\pi}{4}i};$$

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}.$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**例 .6**

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径.

**解:** 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$$

故收敛半径 $R=1$. 利用逐项积分, 得:

$$\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(n+1)z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}=\frac{z}{1-z}.$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}, |z|<1.$

**例 .7**

求 $S = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数 $S$.

**解:** 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2,$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{2}$.

当 $|z| < \frac{1}{2}$ 时, $|2z| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$,

**例 .8**

计算 $\oint_C \left(\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n\right) dz$, 其中 $C: |z| = \frac{1}{2}$.

**解:** 在 $|z| < \frac{1}{2}$ 内, $\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛. 和函数

$$S(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z},$$

$$I = \oint_C \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) dz = \oint_C \frac{1}{z} dz + \oint_C \frac{1}{1-z} dz = 2\pi i + 0 = 2\pi i.$$

# 目录

复变函数幂级数的运算和性质类似于实变幂级数.

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, R=r_1$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n, R=r_2$, 那么在以原点为圆心, $r_1, r_2$ 中较小的一个半径的圆内, 这两个幂级数可以像多项式那样进行相加、相减、相乘, 所得到的幂级数的和函数分别就是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差与积. 即幂级数的收敛半径 $R=\min(r_1, r_2)$.

复函数的幂级数也可以进行复合运算.

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=f(z), |z|<R$, 而在 $|z|<r$ 内函数 $g(z)$ 解析且满足 $|g(z)|<R$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[g(z)\right]^n=f\left[g(z)\right], |z|<r.$$

这一运算方法, 广泛应用在将函数展开成幂级数的运算.

**例 .1**

试把 $f(z)=\frac{1}{3z-2}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-2)^n$ 的幂级数.

**解:** 把 $f(z)$ 变形, 使之成为 $(z-2)$ 的函数.

$$f(z)=\frac{1}{3z-2}=\frac{1}{3(z-2)+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{-3}{4}(z-2)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{4^{n+1}}(z-2)^n,$$

其收敛区域由几何级数知, 应为 $\frac{3}{4}|z-2|<1$, 即 $|z-2|<\frac{4}{3}$.

幂级数在其收敛圆内还有下列性质:

(1) 幂级数的和函数在其收敛圆内是解析的;

(2) 幂级数在其收敛圆内, 可以逐项求导, 也可以逐项积分.

**例 .2**

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n \, (0 < a < 1)$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$ 的收敛半径.

**解**: 容易验证, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n$ 的收敛半径都是 1. 但级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$ 的收敛半径

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a^n}{1+a^n} \Big/ \frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+a^{n+1}}{a(1+a^n)} \right| = \frac{1}{a} > 1.$$

这就是说, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$ 的收敛圆域大于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n$ 的公共收敛圆域 $|z| < 1$,
注意, 使得等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} z^n$$

成立的收敛圆域仍为 $|z| < 1$, 不能扩大.

**例 .3**

试把函数 $f(z)=\frac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 a 与 b 是不相等的复常数.

**解:** 把函数 $\frac{1}{z-b}$ 写成如下形式

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}.$$

当 $\left|\frac{z-a}{b-a}\right|<1$ 时, 有

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}=1+\frac{z-a}{b-a}+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n+\cdots,$$

从而得到

$$\frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b-a} - \frac{1}{(b-a)^2}(z-a) - \frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2 - \cdots - \frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n - \cdots$$

设 $|b-a| = R$, 那么当 $|z-a| < R$ 时, 上式右端的级数收敛, 且其和为 $\frac{1}{z-b}$. 因为当 $z = b$ 时, 上式右端的级数发散, 故由阿贝尔定理知, 当 $|z-a| > |b-a| = R$ 时, 级数发散, 即上式右端级数的收敛半径为 $R = |b-a|$.

**定理 .3**

在收敛圆内, 幂级数的和函数是解析函数. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R, 那么

1. 它的和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是收敛圆: $|z-a|<R$ 内的解析函数.

## 定理 .4

在收敛圆内, 幂级数的和函数是解析函数. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R, 那么

1. 它的和函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是收敛圆: $|z-a|<R$ 内的解析函数.
2. $f(z)$ 在收敛圆内的导数可将其幂级数逐项求导得到, 即

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}.$$

## 定理 .5

在收敛圆内, 幂级数的和函数是解析函数. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R, 那么

4 $f(z)$ 在收敛圆内可以逐项积分, 即

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C (z-a)^n dz,\ C \in |z-a| < R.$$

或者

$$\int_a^z f(\zeta)d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

# 课堂练习

下列数列是否收敛？如果收敛，求出其极限.

- $z_n = \frac{1+ni}{1-ni}$;
- $z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1}$;
- $z_n = \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}}$.

**解:**

若是级数，判别是否收敛？如果收敛，求出其极限.

# 课堂练习

下列数列是否收敛? 如果收敛, 求出其极限.

- $z_n = \frac{1+ni}{1-ni}$;
- $z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1}$;
- $z_n = \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}}$.

**解:**

- $z_n \to -1$;
- 略;
- $z_n \to 0$.

若是级数, 判别是否收敛? 如果收敛, 求出其极限.

# 课堂练习

下列数列是否收敛？如果收敛，求出其极限.

- $z_n = \frac{1+ni}{1-ni}$;
- $z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1}$;
- $z_n = \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}}$.

**解:**

- $z_n \to -1$;
- 略;
- $z_n \to 0$.

若是级数，判别是否收敛？如果收敛，求出其极限.

- $z_n \to -1 \neq 0$, 级数发散.
- 略;
- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2}\right]$.

# 主要内容

主要讲解了复数列的相关概念. 应了解复数列的极限概念; 熟悉复数列收敛及复数项级数收敛与绝对收敛的充要条件; 理解复数项级数收敛、发散、绝对收敛与条件收敛的概念与性质.

学习了幂级数的概念和阿贝尔定理等内容，应掌握幂级数收敛半径的求法和幂级数的运算性质.

# 目录

# 习题

教材习题四 P141: 6 1)、3); 8; 11 1)、2); 12 1)、2)、3)、4); 16; 19 1)、2)、3)、4).