教　案　纸

● October 15, 2020 ● 互动提问	见下文

理论课 6　§3.4-3.5 原函数与不定积分、柯西积分公式

I　组织教学

1、集中学生注意力;

2、清查学生人数;

3、维持课堂纪律.

II　复习导入及主要内容

1、上次作业讲评;

2、本次主要内容

3、重点: 由柯西积分定理推导出一个基本公式——柯西积分公式.

4、难点: 理解分别以有界单连通区域、有界复连通区域、无界区域下的柯西积分公式的证明及各种区域上积分的计算.

III　教学内容及过程

一、　原函数与复积分

由柯西定理, 解析函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内的围线 C 上的积分为 0. 对于简单曲线 C, 积分 $\int_C f(z)dz$ 与连接起点及终点的路径 C 无关. 解析函数在单连通区域 D 内的积分只与起点 z_0 及终点 z_1 有关, 如图 58 所示的积分曲线,

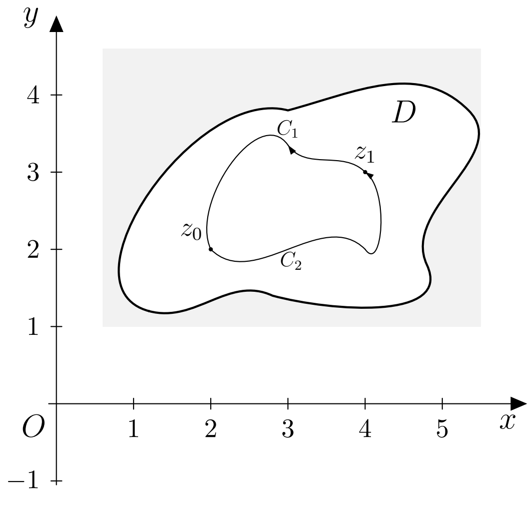

图 58: 积分路径

有

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz.$$

固定 z_0, 让 z_1 在 B 内变动, 并令 $z_1 = z$, 积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 D 内确定了一个单值函数 $F(z)$.

利用单值函数 $F(z)$, 可以定义函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, 对这个积分有下述定理:

定理 6.15

设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

证: 从导数的定义出发证明 $F'(z) = f(z)$. 对 $\forall z_0 \in D$, 作 B 内圆 $K : k = z + re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi], r > 0$. 取 $|\Delta z|$ 充分小, 使得 $z_0 + \Delta z$ 在 K 内 (图61), 于是有

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

由于积分与路径无关, 因此积分 $\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$ 的积分路线可取由 $z_0 \to z \to z + \Delta z$ 的积分路线取得, $F(z + \Delta z)$ 在 $z_0 \to z$ 上的积分路线跟积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 的积分路线相同. 于是有

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta.$$

又因

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = f(z)\Delta z,$$

从而有

$$\begin{aligned}\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) &= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - f(z)d\zeta \\ &= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta.\end{aligned}$$

因为 $f(z)$ 在 D 内解析, 所以 $f(z)$ 在 D 内连续. 对于 $\forall \epsilon > 0$, 可找到 $\delta > 0$, 对 $\zeta : |\zeta - z| < \delta$, 当 $|\Delta z| < \delta$ 时, 总有

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon.$$

根据积分的估值性质

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| &= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right| \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|d\zeta \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z| = \epsilon.\end{aligned}$$

这就是说

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| = 0,$$

即

$$F^{'}(z) = f(z).$$

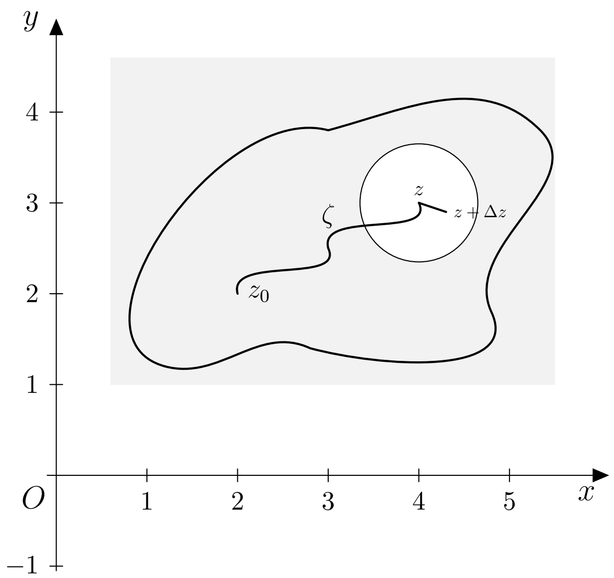

图 59: 证明解析函数 $F'(z) = f(z)$ 的所用路径

令 $F(z) = P(x,y) + iQ(x,y), F^{'}(z) = f(z) = u + iv$, 因此有

$$F^{'}(z) = \left[\int_{z_0}^{z} f(z)dz\right]^{'} = \left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udx - vdy + i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} vdx + udy\right]^{'},$$

所以对应有

$$P(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udx-vdy,$$
$$Q(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} vdx+udy,$$

而积分与路径无关, 因而有

$$\frac{\partial P}{\partial x}=u,\ \frac{\partial P}{\partial y}=-v,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=v,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=u$$
$$\Rightarrow\ \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在区域 D 内解析.

基于上述定理, 为了解决积分求解问题, 先引入需要的原函数概念.

定义 6.47

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续. 若 D 内的一个函数 $\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, 满足 $\Phi'(z)=f(z)$, 则称 $\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的一个**原函数**. 称原函数的全体组成了 $f(z)$ 的全体不定积分.

性质 4 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数. $f(z)$ 的任意两个原函数的差是一个常数. 即对于 $f(z)$ 的原函数 $G(z)$ 和 $H(z)$, 有 $G(z)-H(z)=c$, $c\in\mathbb{C}$ 为任意常数.

注解 30 上述定理和微积分学中的变上限函数的求导定理类似. 在此基础上, 可以得出类似于微积分的基本定理和类似于微积分理论中的牛顿—莱布尼茨公式.

定理 6.16

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=F(z_2)-F(z_1).$$

例 6.1

求积分 $\int_{z_0}^{z_1} zdz$.

解: 函数 z 在全平面解析, 它的原函数是 $\frac{z^2}{2}$. 由牛顿—莱布尼兹公式知,

$$\int_{z_0}^{z_1} z dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

例 6.2

求积分 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2 dz$.

解:

$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2 dz = \frac{1}{2}\int_0^{\pi i}\cos z^2 dz^2 = \frac{1}{2}\sin z^2\Big|_0^{\pi i}$$
$$= \frac{1}{2}\sin(-\pi^2) = -\frac{1}{2}\sin\pi^2.$$

注: 本例题使用了微积分学中的"凑微分"法.

例 6.3

求积分 $\int_1^{1+i} ze^z dz$.

● $(ze^z)' = e^z + ze^z \Rightarrow (ze^z - e^z)' = ze^z$

解: ze^z 的一个原函数为 $(z-1)e^z$, 利用分部积分法可得

$$\int_1^{1+i} ze^z dz = (z-1)e^z\Big|_1^{1+i} = ie^{1+i} = ie(\cos 1 + i\sin 1).$$

例 6.4

(课堂练习) 求积分 $\int_0^1 z\sin z dz$

解:

$$\int_0^1 z\sin z dz = -\int_0^1 z d\cos z = -z\cos z\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos z dz$$
$$= \sin 1 - \cos 1.$$

例 6.5

求积分 $\int_C (2z^2+8z+1)dz$, 其中 C 是连接 0 到 $2\pi a$ 的摆线, 方程为 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$.

解: 函数 $f(z)=2z^2+8z+1$ 在复平面内解析, 所以积分与路线无关, 根据牛—莱公式:

$$\begin{aligned}\int_C (2z^2+8z+1)dz &= \int_0^{2\pi a}(2z^2+8z+1)dz\\ &= \frac{2}{3}z^3+4z^2+z\Big|_0^{2\pi a}\\ &= \frac{16}{3}\pi^3a^3+16\pi^2a^2+2\pi a.\end{aligned}$$

代 码 1: 复变量 z 参数方程的线积分计算.

```
clc
clear
syms z x y; pz=2*z^2+8*z+1
pzxy= expand(subs(pz,z,x+i*y))
syms a theta
pzxy1=subs(pzxy,x,a*theta-a*sin(theta));
pzxy2=subs(pzxy1,y,a-a*cos(theta))
pzxy3=pzxy2*(a*(1-cos(theta))+i*a*sin(theta))
collect(pzxy3,i)
imfun1=- a*sin(theta)*(8*a - 8*a*cos(theta) +
    4*(a*theta - a*sin(theta))*(a - a*cos(theta))
    ) + (a*sin(theta)*(8*a*theta + 2*(a*theta - a
    *sin(theta))^2 - 8*a*sin(theta) - 2*(a - a*
    cos(theta))^2 + 1) - a*(cos(theta) - 1)*(8*a
    - 8*a*cos(theta) + 4*(a*theta - a*sin(theta))
    *(a - a*cos(theta))))
realfun1= - a*(cos(theta) - 1)*(8*a*theta + 2*(a
    *theta - a*sin(theta))^2 - 8*a*sin(theta) -
    2*(a - a*cos(theta))^2 + 1)
intim=int(imfun1,theta,0,2*pi)
intreal=int(realfun1,theta,0,2*pi)
resl=simplify(intim+intreal)
pretty(collect(resl,a))
```

运行结果见图

● $(z\sin z)' = z\cos z + \sin z \Rightarrow z\cos z = (z\sin z + \cos z)'$

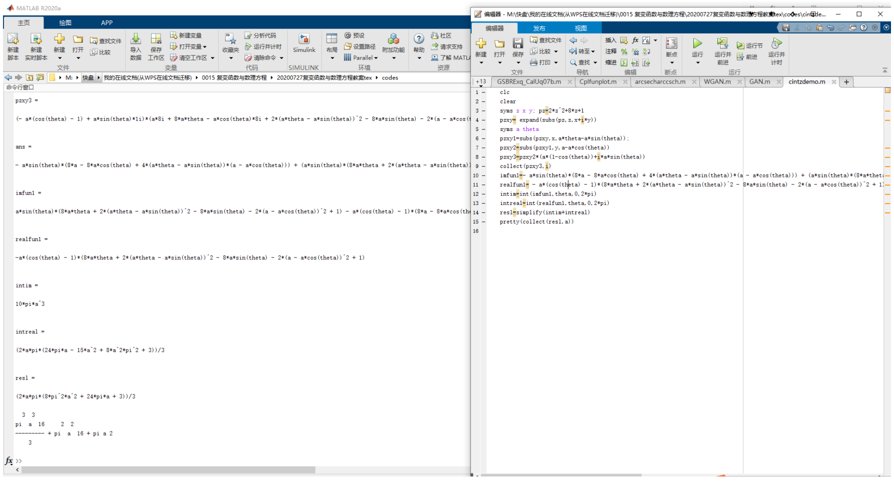

图 60: matlab 符号计算复积分 $\int_C (2z^2+8z+1)dz$.

例 6.6

求积分 $\int_0^i z\cos z dz$ 的值.

解: 函数 $z\cos z$ 在全平面解析, 一个原函数为 $z\sin z + \cos z$, 所以

$$\int_0^i z\cos z dz = (z\sin z + \cos z)\Big|_0^i = i\sin i + \cos i - 1$$
$$= i\frac{e^{-1}-e}{2i} + \frac{e^{-1}+e}{2i} - 1 = e^{-1} - 1.$$

例 6.7

试沿着区域 $\mathrm{Im}(z) \geq 0, \mathrm{Re}(z) \geq 0$ 内的圆弧 $|z|=1$, 计算积分 $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$ 的值.

解: 函数 $\frac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在考虑的区域内解析, 一个原函数为 $\frac{1}{2}\ln^2(z+1)$, 所以

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz = \frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^i = \frac{1}{2}\left[\ln^2(1+i) - \ln^2(2)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i\right)^2 - \ln^2(2)\right]$$
$$= -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8}\ln^2 2 + \frac{\pi\ln^2 2}{8}i.$$

二、 柯西积分公式

柯西积分公式的作用是将函数在 C 内部的积分用它在边界上的值来表示.

设 D 为单连通区域, z_0 为 D 中的一点, 如果 $f(z)$ 在 D 内解析, 那么函数 $\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ 一般不为零. 又根据闭路变形定理, 积分沿任何一条围绕 z_0 的简单闭曲线都是相同的.

取以 z_0 为中心, 由 $f(z)$ 的连续性, 在 C 上的函数 $f(z)$ 的值将随着 δ 的缩小而逐渐接近于它所在的圆心 z_0 处的值, 积分 $\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ 的值

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)\oint_c \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

也将随着 δ 的缩小而逐渐接近于 $2\pi i f(z_0)$. 其实两者是相等的, 即

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

定理 6.17

(柯西积分公式) 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全属于 D, z_0 为包含在 C 内的任一点, 则 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ 或 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$.

证　由于 $f(z)$ 在 z_0 点处连续, 对任意给定 $\varepsilon > 0$, 必有一个 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $|z-z_0| < \delta$ 时, $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$. 设以 z_0 为中心, R 为半径的圆周 K: $|z-z_0| = R$ 全部处于 C 的内部, 且 $R < \delta$ (图61), 那么

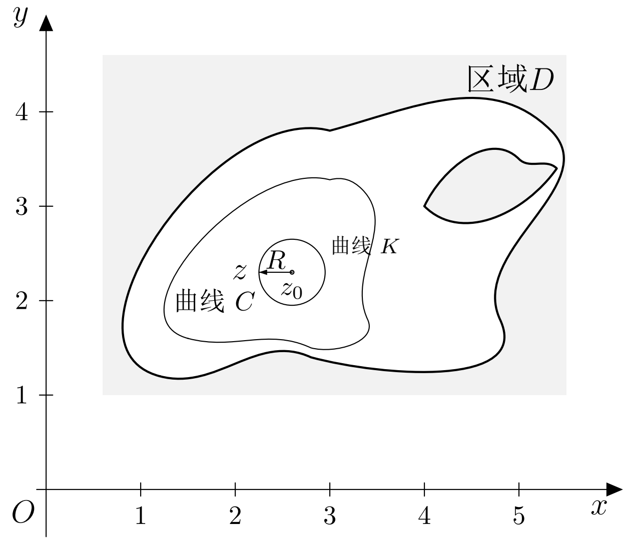

图 61: 区域 D 上积分路径的收缩示意图

$$
\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}dz \\
&= \oint_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz \\
&= 2\pi i f(z_0) + \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.
\end{aligned}
$$

又有

$$
\begin{aligned}
\left|\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| &\le \oint_K \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}ds < \frac{\varepsilon}{R}\oint_K ds \\
&= 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.
\end{aligned}
$$

通过柯西积分公式, 就可以把一个函数在 C 内部的值用它在边界上的值来表示.

定义 6.48

如果 C 是圆周 $z = z_0 + Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$, 那么柯西积分公式可以写成 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})d\theta$. 这个公式又称为**平均值公式**.

这就是说, 一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

例 6.8

求下列积分（沿圆周正向）的值：
1) $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz$;
2) $\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)dz$.

解: 由柯西积分公式得

1)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}dz=\sin z\,|_{z=0}\,=0;$$

2)

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)dz&=\oint_{|z|=4}\frac{dz}{z+1}+\oint_{|z|=4}\frac{2dz}{z-3}\\&=2\pi i\cdot 1+2\pi i\cdot 2=6\pi i.\end{aligned}$$

例 6.9

计算积分 $\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z-1}dz$.

解: 因为 $f(z)=e^z$ 在复平面内解析, $z=1$ 位于 $|z|<2$ 内, 由柯西积分公式

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z-1}dz=2\pi i\cdot e^z\big|_{z=1}=2e\pi i.$$

例 6.10

C 表示正向圆周 $x^2+y^2=3$, $f(z)=\int_C\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$, 求 $f'(1+i)$.

解: 根据柯西积分公式知, 当 z 在圆周 C 内时,

$$f(z)=2\pi i\cdot(3\xi^2+7\xi+1)\big|_{\xi=z}=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

故

$$f'(z)=2\pi i(6z+7),$$

而 $1+i$ 在圆周 $C: x^2+y^2=3$ 内, 所以

$$f'(1+i)=2\pi(-6+13i).$$

例 6.11

计算积分 $\oint\limits_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz$, 其中 $C: |z+1|=\frac{1}{2}$.

解:

$$\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}dz = \oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}}{z+1}dz = 2\pi i\cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\bigg|_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

例 6.12

计算积分 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}dz$.

解: 函数 $\frac{e^z}{z(z^2-1)}$ 有三个奇点 $z=0, z=1, z=-1$, 可以分解为

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z^2-1)} &= \frac{1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2z}\Big(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\Big)-\frac{1}{2z(z+1)}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-\frac{2}{z}\Big).\end{aligned}$$

利用柯西积分公式, 可得

$$\begin{aligned}\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}dz &= \frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=3}\Big(\frac{e^z}{z-1}+\frac{e^z}{z+1}-\frac{2e^z}{z}\Big)dz\\ &= \pi i(e+e^{-1}-2).\end{aligned}$$

例 6.13

求 $\oint_{|z|=1} e^{z+1}\sin z dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)(z-4)}$.

解:

$$\begin{aligned}
&\oint_{|z|=1} e^{z+1}\sin z dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)(z-4)}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{3}\oint_{|z|=3}\frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-1}dz\\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

例 6.14

求 $\oint_{|z|=1}|z-1|dz$.

解:

$$z = e^{i\theta}, dz = ie^{i\theta}d\theta$$

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1}|z-1|dz &= \int_0^{2\pi}|1-e^{i\theta}|ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\theta}di\theta\\
&= 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cdot(i\cos\theta - \sin\theta)d\theta\\
&= 2i\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta d\theta - 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta d\theta\\
&= 2i\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta - 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta d\theta\\
&= 2i\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta - 4\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta\\
&= 2i\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta + 8i\int_0^{2\pi}d\cos\frac{\theta}{2} - 8i\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}d\cos\frac{\theta}{2}\\
&= -4i\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{8i}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}\\
&= 8i - 16i - \frac{8i}{3}(-1-1) = -8i + \frac{16i}{3} = -\frac{8i}{3}.
\end{aligned}$$

IV　课堂小结

柯西积分公式是复积分计算中的重要公式，是研究解析函数的重要工具．它的证明基于柯西–古萨基本定理，它的重要性在于:

柯西积分公式

解析函数在区域内部的值可以用它在边界的积分值表示.

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz,\ \oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).}$$

本课介绍了原函数、不定积分的定义以及牛顿—莱布尼兹公式.

在学习中应注意与《高等数学》中相关内容相结合, 更好的理解本次课内容.

$$\boxed{F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta,}$$

$$\boxed{\int f(z)dz=F(z)+c,}$$

$$\boxed{\int_{z_0}^{z_1}f(z)dz=G(z_1)-G(z_0).}$$

V　布置作业

1、教材习题三 P99: 8. 1), 3), 5), 7); 9; 10 2), 3), 6); 12; 15.