复变函数

分离变量法

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

November 29, 2020

目录

目录

泛定方程反映的是同一类物理现象的共性, 和具体条件无关. 先介绍两个相关概念:

(1) 数学物理方程: 从物理问题中导出的函数方程, 特别是偏微分方程和积分方程.
(2) 物理现象: 使用数学语言描述, 物理量 u 在空间和时间中的变化规律, 即物理量 u 在各个地点和各个时刻所取的值之间的联系, 即 $u = u(x, y; t)$.

例 .1

牛顿第二定律反映的是力学现象的普遍规律, 跟具体条件无关.

本节重点讨论的是二阶线性偏微分方程的形式及其求解问题.

数学物理方程具有如下三类典型形式

1. 双曲型方程: 波动方程为代表, $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$,

数学物理方程具有如下三类典型形式

1. 双曲型方程: 波动方程为代表, $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$,
2. 抛物型方程: 扩散方程为代表, $u_t - a^2 \nabla^2 u = F(x, u, t)$,
3. 椭圆型方程: 泊松方程为代表, $-a^2 \nabla^2 u = F(x, u, t)$. 当 $F = 0$ 时, 椭圆型方程退化为拉普拉斯方程.

定解条件

4. ∇^2 算子: $\nabla^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, 定义为梯度的散度, 是一个二阶微分算子.

边界和状态问题

定解条件

边界问题——边界条件, 是关于状态变量的约束: 体现边界状态的数学方程称为边界条件.
状态问题——初始条件, 是关于时间的约束: 体现历史状态的数学方程称为初始条件.

例 .2

一个物体做竖直上抛, 一个物体斜抛. 虽然初始条件和运动状态不同, 但都服从牛顿第二定律.

1) (定解问题): 在给定的边界条件和初始条件下, 根据已知的物理规律, 在给定的区域里解出某个物理量 u, 即求 $u(x,t)$.
2) (定解条件): 边界条件和初始条件的总体. 它反映了问题的特殊性, 即个性.
3) (泛定方程): 不带有边界和初始条件的方程称为泛定方程. 它反映了问题的共性.

上述三类问题求解的一般过程包含 3 步:

1) 根据系统的内在规律列出泛定方程——客观规律.

1) (定解问题): 在给定的边界条件和初始条件下, 根据已知的物理规律, 在给定的区域里解出某个物理量 u, 即求 $u(x,t)$.
2) (定解条件): 边界条件和初始条件的总体. 它反映了问题的特殊性, 即个性.
3) (泛定方程): 不带有边界和初始条件的方程称为泛定方程. 它反映了问题的共性.

上述三类问题求解的一般过程包含 3 步:

1) 根据系统的内在规律列出泛定方程——客观规律.
2) 根据已知系统的边界状况和初始状况列出边界条件和初始条件, 它们是求解方程所需的已知条件.

1) (定解问题): 在给定的边界条件和初始条件下, 根据已知的物理规律, 在给定的区域里解出某个物理量 u, 即求 $u(x,t)$.
2) (定解条件): 边界条件和初始条件的总体. 它反映了问题的特殊性, 即个性.
3) (泛定方程): 不带有边界和初始条件的方程称为泛定方程. 它反映了问题的共性.

上述三类问题求解的一般过程包含 3 步:

1) 根据系统的内在规律列出泛定方程——客观规律.
2) 根据已知系统的边界状况和初始状况列出边界条件和初始条件, 它们是求解方程所需的已知条件.
3) 求解方法——行波法、分离变量法、积分变换法、格林函数法和变分法

数学模型 (泛定方程) 的建模步骤:

1) 明确要研究的物理量是什么? 即从所研究的系统中划出任一微元, 分析邻近部分与它的相互作用.
2) 研究物理量遵循哪些物理规律?
3) 按物理定律写出数理方程 (泛定方程).

1) 分离变量法是求解线性定解问题的一个常用方法, 分离变量的意思就是通过把解中的自变量分离开来,
写成几个只包含一个自变量的函数乘积的形式,
把原来的偏微分方程及边界条件转化成几个常微分方程的边值问题.

2) 变量分离需要原来的偏微分方程及边界条件是齐次的.

3) 通过解这几个常微分方程的边值问题 (主要是特征值问题), 可以得到原来方程的无穷多个满足边值条件且变量已分离的特解, 再把所有的特解叠加起来得到一个无穷级数, 然后利用初值条件 (也可以是没用过的边界条件) 解出其中的系数, 这时就能得到原定解问题的形式解.

4) 需要解决如下的两个问题:
1) 解写成无穷级数形式是否可能并且合理?——二阶线性常微分方程的特征理论 (Strum-Liouville): 足够多个特解构成通解, 再利用叠加原理做这些特解的线性组合. 使其满足初始条件.
2) 如何将边值条件齐次化, 特别是将边界条件化成齐次形式?

具体做法由如下示例给出.

例 .3

考虑定解问题 (两端固定的弦振动方程, 齐次方程 + 齐次边界条件 + 非齐次初始条件)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0, & t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases}, \quad (1)$$

其中 $u = u(x,t)$, x 和 t 是两个独立变量, $\frac{\partial \cdot}{\partial x}$ 为对于变量 x 的偏导数, 记为 $(\cdot)_x$. 这个方程的特点是方程和边界条件 (与变量 x 有关的条件) 都是非齐次的.

利用边界条件 $u|_{x=0}=0, u_x|_{x=l}=0$, 可得 $X(0)T(t)=0, X(l)T(t)=0$. 再由 $T(t)\neq 0$, 求得 $X(0)=X(l)=0$. 因此, 求含边界条件的定解问题的变量分离形式的解等价于求如下的方程组

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=X(l)=0, \end{cases} \tag{2}$$

中的解 $X(x)$.

特征值问题

求满足 $X(0)=X(l)=0$ 条件的 $X(x)$ 称为 $X''(x)+\lambda X(x)=0$ 在条件 $X(0)=X(l)=0$ 下的特征值问题.

特征方程可以写成 $k^2 = -\lambda$:

1. $\lambda < 0, -\lambda > 0, k_1 = \sqrt{-\lambda}, k_2 = -\sqrt{-\lambda}$: 此时的通解为

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

再由条件 $A + B = 0, Ae^{\sqrt{-\lambda}l} + Be^{-\sqrt{-\lambda}l}$ 得 $A = B = 0$.

通解为 $X(x) \equiv 0$.

特征方程可以写成 $k^2 = -\lambda$:

1. $\lambda < 0, -\lambda > 0, k_1 = \sqrt{-\lambda}, k_2 = -\sqrt{-\lambda}$: 此时的通解为

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

   再由条件 $A + B = 0, Ae^{\sqrt{-\lambda}l} + Be^{-\sqrt{-\lambda}l}$ 得 $A = B = 0$.
   通解为 $X(x) \equiv 0$.

2. $\lambda = 0$: 此时的通解为 $X(x) = Ax + B$. 由条件 $A = B = 0$, 得到方程的一个平凡解, 一般很难满足初始条件, 这说明不用考虑 $\lambda = 0$ 的情形.

1 $\lambda > 0$, 并令 $\lambda = \beta^2$, 则有 $k = \pm\beta i$, 再由 $\beta \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$. 可知解为 $X(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$. 由边界条件得 $A = 0, B\sin\beta l = 0$. 由于 B 不能为 0 (否则 $X(x) \equiv 0$), 所以 $\sin\beta l = 0$, 即

$$\beta \triangleq \beta_n = \frac{n\pi}{l}\,(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

从而 $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, β 和 λ 与 n 有关. 到此, 与特征值问题一系列特征值对应的特征函数可以记为

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{X_n(x) = B_n\sin\frac{n\pi}{l}}x\,(n = 1, 2, 3, \cdots).$$

下一步来求 $T(t)$, 将 $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ 代入 $T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$, 得

$$T_n''(t) + a^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} T_n(t) = 0,$$

由于 $a^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} > 0$, 上述二阶微分方程存在一对共轭复根. 显然其通解为

$$T_n(t) = C_n' \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n' \sin \frac{an\pi}{l} t \,(n = 1, 2, 3, \cdots),$$

其中 C_n', D_n' 是任意常数. 于是, 满足边界条件的一组变量被分离的特解为

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (3)$$

其中 $n = 1, 2, 3, \cdots, C_n = B_n C_n', D_n = B_n D_n'$ 是任意常数.

目录

接下来求原定解问题的解. 首先, 用叠加原理将变量被分离的特解 $u_n(c,t)$ 叠加起来:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad (4)$$

其中 $n = 1, 2, 3, \cdots$. 如果上式右端的无穷级数是收敛的, 而且关于 x, t 都能逐项微分两次, 则它的和 $u(x,t)$ 也满足求原定解问题的边界条件 (叠加原理) . 现在需要适当地选择 C_n, D_n, 使得函数 $u(x,t)$ 同时满足初始条件. 为此必须有

$$u|_{t=0} = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x), \qquad (5)$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = \psi(x). \qquad (6)$$

系数 C_n 和 D_n 的计算方法

1. C_n 的求取: 将式(5)乘以 $\sin\frac{m\pi}{l}x$ 并对两边进行积分, 得

$$\int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx$$

$$\Rightarrow C_n \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \left(\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx$$

系数 C_n 和 D_n 的计算方法

1 C_n 的求取: 将式(5)乘以 $\sin\frac{m\pi}{l}x$ 并对两边进行积分, 得

$$\int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}xdx = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{m\pi}{l}xdx$$

$$\Rightarrow C_n\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \left(\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}xdx = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{m\pi}{l}xdx$$

1 当 $n = m$ 时,

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}xdx = \int_0^l \left(\sin^2\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$= \int_0^l \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2n\pi}{l}x\right)dx = \frac{l}{2}.$$

1 当 $n \neq m$ 时,

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}xdx = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\cos\frac{(n-m)\pi}{l}x - \cos\frac{(n+m)\pi}{l}x\right)dx =$$

合并后, 有 $\frac{l}{2}C_n = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$

1 当 $n \neq m$ 时,

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}xdx = \frac{1}{2}\int_0^l\left(\cos\frac{(n-m)\pi}{l}x - \cos\frac{(n+m)\pi}{l}x\right)dx =$$

合并后, 有 $\frac{l}{2}C_n = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$

2 D_n 的求取: 初始条件(5)对 t 求导得

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-C_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{an\pi}{l}t + D_n\frac{an\pi}{l}\cos\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

带入 $t=0$ 得到

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(D_n\frac{an\pi}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

将式(6)乘以 $\sin\frac{m\pi}{l}x$ 并对两边进行积分, 得

$$\int_0^l\left(\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}xdx=\int_0^l\psi(x)\sin\frac{m\pi}{l}xdx$$

$$\Rightarrow D_n\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l\left(\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}xdx=\int_0^l\psi(x)\sin\frac{m\pi}{l}xdx.$$

1. 当 $n=m$ 时,

$$\int_0^l\left(\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}xdx=\frac{n\pi a}{l}\frac{l}{2}=\frac{n\pi a}{2}.$$

将式(6)乘以 $\sin\frac{m\pi}{l}x$ 并对两边进行积分, 得

$$\int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}x dx = \int_0^l \psi(x)\sin\frac{m\pi}{l}x dx$$

$$\Rightarrow D_n \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \left(\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}x dx = \int_0^l \psi(x)\sin\frac{m\pi}{l}x dx.$$

1. 当 $n = m$ 时,

$$\int_0^l \left(\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}x dx = \frac{n\pi a}{l}\frac{l}{2} = \frac{n\pi a}{2}.$$

2. 当 $n \neq m$ 时,

$$\int_0^l \left(\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\frac{m\pi}{l}x dx = 0.$$

合并后, 有 $\frac{n\pi a}{2} D_n = \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$. 整理后得系数 C_n, D_n,

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

对于如下形式的定解问题 (非齐次方程 + 非齐次边界条件 + 非齐次初始条件):

定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = \sin \omega t, & t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases},$$

其中

1. $u = u(x,t)$, x 和 t 是两个独立变量
2. $\frac{\partial \cdot}{\partial x}$ 为对于变量 x 的偏导数, 记为 $(\cdot)_x$.

边界条件齐次化

方程和边界条件 (与变量 x 有关的条件) 都是非齐次的. 不论方程是否是齐次的, 只要边界条件是非齐次的, 都应该先做未知函数的代换, 使得对新的未知函数而言, 其边界条件是齐次的, 为使新的方程不至于过于复杂, 通常选取的代换应使得新旧函数之间的差是 x 的一次函数, 如

$$v = u + Ax + B,$$

然后确定 A, B, 使得 v 的边界条件是齐次的, 由

$$v|_{x=0} = u|_{x=0} + (Ax + B)|_{x=0} = 0,$$

得 $B = 0$.

由

$$v_x|_{x=l} = u_x|_{x=l} + (Ax+B)_x|_{x=l} = A + \sin\omega t,$$

令

$$A + \sin\omega t = 0,$$

解得

$$A = -\sin\omega t.$$

这样就得到

$$v = u - x\sin\omega t \Longleftrightarrow u = v + x\sin\omega t,$$