

教 案 纸

理论课 12 § 5.2-5.2 留数

● 2020/11/19

● 互动提问

I 组织教学

- 1、集中学生注意力;
- 2、清查学生人数;
- 3、维持课堂纪律;

II 复习导入及主要内容

- 1、上次作业讲评;
- 2、本次主要内容
- 3、重点: 利用留数定理将积分计算问题转化为留数计算问题.
- 4、难点: 选好复变量积分的被积函数和积分围线; 确定积分区域和奇点.

III 教学内容及过程

一、 留数

定义 12.62

留数的概念 设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < R$ 环域内解析, 点 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点, C 是任意正向圆周 $|z - z_0| = \rho < R$, 称积分值 $\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$ 为函数 $f(z)$ 在点 $z = z_0$ 处的留数, 记为 $\text{Res}[f(z), z_0]$, 或简记为 $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$, 或 $\text{Res} f(z_0)$. 留数又称为残数.

函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的留数即为罗朗级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 展开式中 $(z - z_0)^{-1}$ 的系数 c_{-1} .

如果点 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 因为在环域 $0 < |z - z_0| < R$ 内, 环域内积分 $\oint_C f(z) dz$ 一般不为零, 所以有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

且

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

教 案 纸

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n dz \\ &= \oint_C \left[\cdots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + c_n(z-z_0)^n + \cdots \right] dz \\ &= \oint_C \frac{c_{-1}}{z-z_0} dz = 2\pi i c_{-1},\end{aligned}$$

由于 $c_{-n}, n \geq 2$ 和 $c_n, n \geq 0$ 是复数, 对应积分的高阶导数结果, 均在环域 $0 < |z-z_0| < R$ 内解析, 所以 $\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz = c_{-1}$.

定理 12.32

(留数定理) 设 C 是一条正向简单闭曲线, 若函数 $f(z)$ 在 C 所围区域 D 中除去有限个孤立奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 外均解析, 则 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]$. 其中 $z_k, (k = 1, 2, \dots, n)$ 是函数 $f(z)$ 在 D 内的有限个孤立奇点.

注解 38 1) $f(z)$ 在 C 上及 C 内部处处解析.

2) 留数定理将沿封闭曲线 C 的积分转化为求被积函数在 C 内各孤立奇点处的留数.

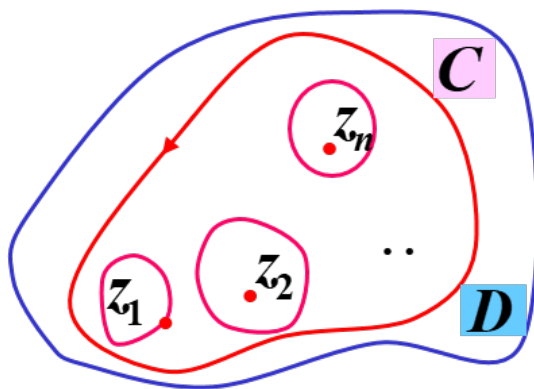


图 65: 正向简单闭曲线 C 围成区域.

证 由复连通区域上 (图65) 的柯西定理

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz,$$

教 案 纸

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] \\ &\Rightarrow \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k],\end{aligned}$$

定理得证.

二、留数的计算

规则 I 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $c_{-1} = \operatorname{Res}[f(z), z_0] = 0$.

规则 II 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 c_{-1} .

规则 III 若 $z = z_0$ 为 $f(z)$ 的 1 阶极点, 则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$.

规则 IV 若 $z = z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), z_0] &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.\end{aligned}$$

证: 因为 $f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_{-2}(z - z_0)^{-2} + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$, 两边同乘以 $(z - z_0)^m$, 得

$$\begin{aligned}(z - z_0)^m f(z) &= c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \cdots \\ &\quad + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \cdots,\end{aligned}$$

再对两边求 $m-1$ 阶导数, 得

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = (m-1)! c_{-1} + \{z - z_0 \text{ 的正幂项}\},$$

再令 $z \rightarrow z_0$, 取极限, 则可得

$$c_{-1} = \operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

当 $m=1$ 时, 则有 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)]$.

规则 V 设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理真分式, 其中 $P(z), Q(z)$ 在 z_0 处解析, 且 $P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$, 则 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, 且有 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

教 案 纸

证: 因为 $Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$, 所以 z_0 是 $Q(z)$ 的一级零点, z_0 是 $\frac{1}{Q(z)}$ 的一级极点. 因此

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \phi(z),$$

其中 $\phi(z)$ 在 z_0 解析, 且 $\phi(z_0) \neq 0$. 此外还有

$$(z - z_0)f(z) = P(z) \cdot \phi(z),$$

在 z_0 解析, 且 $P(z_0)\phi(z_0) \neq 0$, 所以 z_0 是 $f(z)$ 一级极点, 利用 $Q(z_0) = 0$, 有

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), z_0] &= \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} P(z) \cdot \phi(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} P(z) \cdot \phi(z) = \frac{1}{Q'(z_0)} P(z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{\frac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \end{aligned}$$

例 12.1

求函数 $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ 在 $z = 1$ 和 $z = -1$ 处的留数.

解: $z = 1$ 为 $f(z)$ 的一阶极点, $z = -1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点. 由留数计算法则

$$\operatorname{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z - 1) \cdot \frac{z}{(z - 1)(z + 1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z + 1)^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), -1] &= \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[(z + 1)^2 \cdot \frac{z}{(z - 1)(z + 1)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z - 1} \right) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-1}{(z - 1)^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 12.2

计算积分 $I = \oint_{|z|=n} \tan \pi z \, dz, n \in \mathbb{Z}$.

解: 因为 $f(z) = \tan \pi z = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}, z = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 为其一阶极点,

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \left| k + \frac{1}{2} \right| < n \\ & \Rightarrow -n < k + \frac{1}{2} < n. \end{aligned}$$

教 案 纸

所以

$$\operatorname{Res}\left[f(z), k + \frac{1}{2}\right] = \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'} \Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\pi z)}{-\pi \sin \pi z} \Big|_{z=k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi}.$$

由留数定理得

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \tan \pi z dz = 2\pi i \sum_{|k+\frac{1}{2}| < n} \operatorname{Res}\left[f(z), k + \frac{1}{2}\right] \\ &= 2\pi i \cdot \left(-\frac{2n}{\pi}\right) = -4ni. \end{aligned}$$

例 12.3

$I = \oint_C \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z} dz$, 其中 C 为正向圆周, $|z| = 2$.



解: 因为 $|z| = 2$, 由 $\sin z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z = \frac{\pi}{4}$ 为 $f(z)$ 的一阶极点, 由此

$$\operatorname{Res}\left[f(z), \frac{\pi}{4}\right] = \frac{z}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z\right)'} = \frac{z}{-\cos z} \Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} / -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{所以 } \oint_C \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z} dz = -2\pi i \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi^2}{\sqrt{2}} i.$$

注解 39 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般用罗朗展开, 求出 c_{-1} .

例 12.4

求 $f(z) = \frac{e^z}{z^n}$ 在 $z = 0$ 的留数.



因为 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶极点, 所以

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^n}, 0\right] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(z^n \cdot \frac{e^z}{z^n}\right) = \frac{1}{(n-1)!}.$$

例 12.5

$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z - \sin z}{z^6}$ 在 $z = 0$ 的留数.



教 案 纸

解: 如果利用洛朗展开式求 c_{-1} 较方便:

$$\frac{z - \sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6} \left[z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \right) \right] = \frac{z^{-3}}{3!} - \frac{z^{-1}}{5!} + \cdots,$$

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z - \sin z}{z^6}, 0 \right] = c_{-1} = -\frac{1}{5!}.$$

解:

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = 0,$$

$z = 0$ 是 $z - \sin z$ 的三级零点, 所以 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的三级极点. 由规则 III 得

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 \cdot \frac{z - \sin z}{z^6} \right].$$

显然, 上述方法的计算过程较复杂.

说明:

1. 在实际计算中应灵活运用计算规则. 如 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 级极点, 当 m 较大而导数又难以计算时, 可直接展开洛朗级数来求 c_{-1} 来计算留数.
2. 在应用规则II 时, 为了计算方便一般不要将 m 取得比实际的级数高. 但有时把 m 取得比实际的级数高反而使计算方便. 如上例取 $m = 6$, 留数的计算方式如下

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{(6-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^5}{dz^5} \left[z^6 \cdot \frac{z - \sin z}{z^6} \right] = -\frac{1}{5!}.$$

例 12.6

$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$ 在 $z = 0$ 的留数.

解: $z = 0$ 是 $f(z)$ 的四级极点, 在 $0 < |z| < +\infty$ 内将 $f(z)$ 展成洛朗级数:

$$\begin{aligned} \frac{e^z - 1}{z^5} &= \frac{1}{z^5} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots - 1 \right) \\ &= \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} + \cdots, \end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

教 案 纸

例 12.7

计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$, C 为正向圆周: $|z| = 2$.



解: $z = 0$ 为一级极点, $z = 1$ 为二级极点,

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^z}{z(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z-1)^2} = 1,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), 1] &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{e^z}{z(z-1)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z(z-1)}{z^2} = 0. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz &= 2\pi i \{ \operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), 1] \} \\ &= 2\pi i(1+0) = 2\pi i. \end{aligned}$$

例 12.8

计算积分 $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1} dz$, C 为正向圆周: $|z| = 2$.



解: 由于 $f(z) = \frac{ze^z}{z^2-1}$ 有两个一级极点 ± 1 , 而这两个极点都在圆周 $|z| = 2$ 内, 所以

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1} dz = 2\pi i \{ \operatorname{Res}[f(z), 1] + \operatorname{Res}[f(z), -1] \},$$

由规则 II, 得

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), 1] &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{ze^z}{z^2-1} (z-1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{ze^z}{z+1} = \frac{e}{2}, \\ \operatorname{Res}[f(z), -1] &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{ze^z}{z^2-1} (z+1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{ze^z}{z-1} = \frac{e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

教 案 纸

因此

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1} dz &= 2\pi i \{ \operatorname{Res}[f(z), 1] + \operatorname{Res}[f(z), -1] \} \\ &= 2\pi i \left(\frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = 2\pi i \cosh 1.\end{aligned}$$

另法

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), 1] &= \left. \frac{ze^z}{2z} \right|_{z=1} = \frac{e}{2}, \\ \operatorname{Res}[f(z), -1] &= \left. \frac{ze^z}{2z} \right|_{z=-1} = \frac{e^{-1}}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1} dz &= 2\pi i \{ \operatorname{Res}[f(z), 1] + \operatorname{Res}[f(z), -1] \} \\ &= 2\pi i \left(\frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = 2\pi i \cosh 1.\end{aligned}$$

例 12.9

计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz$, C 为正向圆周: $|z| = 2$.



解: 被积函数 $f(z) = \frac{z}{z^4-1}$ 有四个一级极点 $\pm 1, \pm i$ 都在圆周 $|z| = 2$ 内, 所以

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz &= \oint_C \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)} dz \\ &= 2\pi i \{ \operatorname{Res}[f(z), 1] + \operatorname{Res}[f(z), -1] \\ &\quad + \operatorname{Res}[f(z), i] + \operatorname{Res}[f(z), -i] \}\end{aligned}$$

由计算规则 V, $\frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{z}{4z^3} = \frac{1}{4z^2}$, 故

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz = 2\pi i \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right\} = 0.$$

教 案 纸

三、 在无穷远点的留数

定理 12.33

设函数 $f(z)$ 在圆环 $R < |z| < \infty$ 内解析, C 为圆环内绕原点的任何一条正向简单闭曲线, 则函数 $f(z)$ 在无穷远点的留数 $\text{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z) dz = -c_{-1}$.



注意积分路线取顺时针方向.

规则VI: $\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$.

说明: 定理和规则 VI 提供了计算函数沿闭曲线积分的另一种方法:

$$\oint_{C^-} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), \infty] = -2\pi i \text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right].$$

在很多情况下此法更为简单.

证 6 现取正向简单闭曲线 C 为半径足够大的正向圆周:

$$|z| = \rho, z = \frac{1}{\zeta},$$

并设 $z = \rho e^{i\theta}$, $\zeta = r e^{i\phi}$. 由 $\rho e^{i\theta} = z = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{r} e^{-i\phi}$, 那么 $\rho = \frac{1}{r}$, $\theta = -\phi$. 于是有

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), \infty] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-2\pi}^0 f(\rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} i d\theta \\ &\stackrel{\theta = -\phi}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{r e^{i\phi}}\right) \frac{i}{r e^{i\phi}} d(-\phi) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{r e^{i\phi}}\right) \frac{1}{(r e^{i\phi})^2} d(r e^{i\phi}) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\frac{1}{\rho}} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{1}{\zeta^2} d\zeta = -\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]. \end{aligned}$$

其中 $|\zeta| = \frac{1}{\rho}$ 为正向, 在 $|\zeta| = \frac{1}{\rho}$ 内除 $\zeta = 0$ 外无其他奇点.

● 将 z 平面转化为 ζ 平面

教 案 纸

定理 12.34

如果函数 $f(z)$ 在扩充的复平面内只有有限个奇点, 那么 $f(z)$ 在所有各奇点(包括 ∞ 点)的留数总和必等于零. 即

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), \infty] + \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = 0.\end{aligned}$$



注解 40

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= - \oint_{C^-} f(z) dz = -2\pi i \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z) dz \\ &= -2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right].\end{aligned}$$

例 12.10

计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz$, C 为正向圆周: $|z|=2$.



解: 函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在正向圆周 $|z|=2$ 的外部, 除无穷远点 ∞ 外没有其他奇点. 因此根据定理 2 与规则 IV, 有

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz &= -2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right] \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-z^4}, 0\right] = 0.\end{aligned}$$

例 12.11

计算积分 $\oint_C \frac{1}{(z-1)(z-3)(z+i)^{10}} dz$, C 为正向圆周: $|z|=2$.



解: 除无穷远点 ∞ 外, 被积函数的其他奇点为 $-i, 1, 3$. 因此根据上述定理, 有

$$\operatorname{Res}[f(z), -i] + \operatorname{Res}[f(z), 1] + \operatorname{Res}[f(z), 3] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0,$$

教 案 纸

其中,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)(z+i)^{10}}.$$

由于 $\pm i$ 与 1 在 C 的内部, 所以从上式、留数定理与规则 IV 得到

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi i \{ \text{Res}[f(z), -i] + \text{Res}[f(z), 1] \} \\ &= -2\pi i \{ \text{Res}[f(z), 3] + \text{Res}[f(z), \infty] \} \\ &= -2\pi i \left\{ \frac{1}{2(3+i)^{10}} - \text{Res} \left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0 \right] \right\} \\ &= -2\pi i \left\{ \frac{1}{2(3+i)^{10}} - \text{Res} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{z}-1\right)\left(\frac{1}{z}-3\right)\left(\frac{1}{z}+i\right)^{10}} \frac{1}{z^2}, 0 \right] \right\} \\ &= -2\pi i \left\{ \frac{1}{2(3+i)^{10}} - \text{Res} \left[\frac{-z^{10}}{(z-1)(3z-1)(1+zi)^{10}}, 0 \right] \right\} \\ &= -\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}. \end{aligned}$$

四、对数留数 *

定义 12.63

形式如 $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 的积分称为 $f(z)$ 关于曲线 C 的对数留数.

对数留数即函数 $f(z)$ 的对数的导数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$, 在 C 内孤立奇点处的留数的代数和; 函数 $f(z)$ 的零点和奇点都可能是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的奇点.

定理 12.35

如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上解析且不为零, 在 C 的内部除去有限个极点以外也处处解析, 那么

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

其中, N 为 $f(z)$ 在 C 内零点的总个数, P 为 $f(z)$ 在 C 内极点的总个数, 且 C 取正向.

注意: m 级的零点或极点算作 m 个零点或极点.

教 案 纸

五、辐角原理 *

对数留数的几何意义: 考察变换 $w = f(z)$,

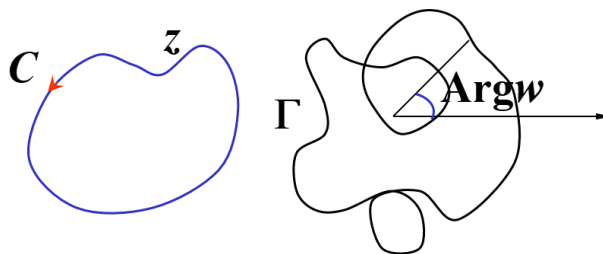


图 66: 对数留数的几何意义.

Γ 不一定为简单闭曲线, 其可按正向或负向绕原点若干圈. $f(z)$ 在 C 上不为零, 则 Γ 不经过原点. 因为 $d \operatorname{Ln} f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C d \operatorname{Ln} f(z) = \frac{1}{2\pi i} [z C \operatorname{Ln} f(z)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\text{当 } z \text{ 绕着 } C \text{ 的正向一周时 } \operatorname{Ln} f(z) \text{ 的改变量}] \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\text{当 } z \text{ 绕着 } C \text{ 的正向一周时 } \operatorname{Ln} |f(z)| \text{ 的改变量} \\ &\quad + i \operatorname{Arg} f(z) \text{ 的改变量}]. \end{aligned}$$

$i \operatorname{Arg} f(z)$ 的改变量:

(1) 如果 Γ 不包含原点, 那么改变量为零.

(2) 如果 Γ 包含原点, 那么改变量为 $\pm 2\pi i$, 其中 k 为 w 沿 Γ 围绕远点的圈数, 逆时针为负, 顺时针为正.

结论: 对数留数的几何意义是 Γ 绕原点的回转次数 k ($k \in \mathbb{Z}$).

若将 z 沿 C 正向一周, $f(z)$ 的幅角的改变量记为 $\Delta_{C^+} \operatorname{Arg} f(z)$ 由定理一及对数留数的几何意义得

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C^+} \operatorname{Arg} f(z).$$

当 $f(z)$ 在 C 内解析时, $P = 0$,

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C^+} \operatorname{Arg} f(z),$$

可计算 $f(z)$ 在 C 内零点的个数, 此结果称为**辐角原理**.

教 案 纸

定理 12.36

如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析, 且在 C 上不等于零, 那么 $f(z)$ 在 C 内零点的个数等于 $\frac{1}{2\pi}$ 乘以当 z 沿 C 的正向绕行一周 $f(z)$ 的辐角的改变量.

定理 12.37

(路西定理) $f(z)$ 和 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析, 且在 C 上满足条件 $|f(z)| > |g(z)|$, 那么在 C 内 $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 的零点的个数相同.

说明: 利用此定理可对两个函数的零点个数进行比较.

证 7 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析, 且在 C 上满足条件 $|f(z)| > |g(z)|$, 则在 C 上 $|f(z)| > 0$,

$$|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0,$$

设 NN' : $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 在 C 内部 (在 C 内部解析) 的零点个数,

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C+} \text{Arg} f(z),$$
$$N' = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C+} \text{Arg} [f(z) + g(z)].$$

因为 C 上 $f(z) \neq 0$, 所以

$$f(z) + g(z) = f(z) \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right],$$

$$\Delta_{C+} \text{Arg} [f(z) + g(z)] = \Delta_{C+} \text{Arg} f(z) + \Delta_{C+} \text{Arg} \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right]$$

令 $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$, 则 $|w - 1| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$, 即 w 在以 1 为中心的圆内. 因此, C 的象曲线 Γ 不围绕原点, 从而 $\Delta_{C+} \text{Arg} \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] = 0$, 所以 $N = N'$. 即 C 内 $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 的零点的个数相同.

例 12.12

$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ ($a_0 \neq 0$) 有 n 个根.


教 案 纸

证 8 令 $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$, 则

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| &= \left| \frac{a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}{a_0 z^n} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \cdot \frac{1}{|z|} + \left| \frac{a_2}{a_0} \right| \cdot \frac{1}{|z|^2} + \cdots + \left| \frac{a_n}{a_0} \right| \cdot \frac{1}{|z|^n}, \end{aligned}$$

取 $|z| \geq R$, R 充分大使得 $\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$, 即在圆 $|z| = R$ 上和圆外 $f(z) > g(z)$ 成立. 由路西定理, $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 在 C 内的零点的个数相同 (在圆内的零点数为 n , 在圆外的零点数为 n). 又因在圆上和圆外 $|f(z)| > |g(z)|$, $f(z) + g(z) = 0$, 在圆上和圆外无根, 所以 $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ ($a_0 \neq 0$) 有 n 个根.

例 12.13


求函数 $f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ 关于圆周 $|z| = \pi$ 的对数留数. 

解: 令 $1+z^2=0$ 得 $f(z)$ 有两个一级零点 $i, -i$; 令 $g(z) = 1 - \cos 2\pi z = 0$, 得 $g(z)$ 有无穷多个零点 $z_n = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 且 $g'(n) = 0$, $g''(n) = 4\pi^2 \neq 0$, 所以这些零点是二级零点, 从而是 $f(z)$ 的二级极点.

因为在圆周 $|z| = \pi$ 的内部有 $f(z)$ 的两个一级零点 $i, -i$ 和如下的七个二级零点 $z_0 = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$. 所以由对数留数公式得

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 - 7 \times 2 = -12.$$

例 12.14

求函数 $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ 关于圆周 $|z| = 3$ 的围线积分. 

解: 最简单的办法是用留数定理, 找出圆周 $|z| = 3$ 内的所有奇点, 然后计算留数.

另外一种方式: 下面用罗朗展式计算上述积分, 由如下定理 (P160)

教 案 纸

定理 12.38

设函数 $f(z)$ 在圆环域 $r < |z - z_0| < R$ ($r \geq 0, R < +\infty$) 内解析, 则 $f(z)$ 在此圆环域内可以唯一地展开为罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

其中, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), C 为在圆环域内绕 z_0 的任意一条简单闭曲线. 显然有 $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta$.

可得 $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta$, 即 $\oint_C f(\zeta) d\zeta = 2\pi i c_{-1}$.

$f(z)$ 有极点 0 和 2, 因此存在两个环域, 再由积分的曲线圆周 $|z| = 3$, 罗朗级数应该在 $2 < |z| < +\infty$ 的环域展开. 环域 $2 < |z| < +\infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{|z|} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \frac{2}{|z|} < 1$, 因此应该用 $\frac{1}{z}$ 或者 $\frac{2}{z}$ 的形式展开级数, 具体做法为

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2} \frac{2}{z} \frac{1}{z+2} = \frac{1}{4} \frac{2}{z} \frac{2}{z+2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{2}{z} \frac{2}{1 + \frac{2}{z}} = \frac{1}{4} \frac{2}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

对照定理中的公式, 可以看出 c_{-1} 应该是级数 $\frac{1}{z}$ 前的系数. 而上述环域 $2 < |z| < +\infty \Rightarrow$ 内的罗朗级数展开式不存在 c_{-1} 项 (注意 n 点取值就可以看出), 即 $c_{-1} = 0$, 因此有 $\oint_C f(\zeta) d\zeta = 2\pi i c_{-1} = 0$.

IV 课堂小结

本节我们学习了留数的概念、计算以及留数定理. 应重点掌握计算留数的一般方法, 尤其是极点处留数的求法, 并会应用留数定理计算闭路复积分.

通过本课的学习, 应熟悉对数留数及其与函数的零点及极点的关系; 掌握辐角原理与路西定理.

V 布置作业

教材课后习题五 P183: 1 1)、4)、7)、8)、9); 3; 4; 8; 9 1)、2)、3)、6); 11 2); 12 2); 13 1)、3)、4)、5).

补充

教 案 纸

例 12.15

计算留数 $\text{Res} \left[\frac{1+z^4}{(z+i)^3(z-i)^3}, i \right]$.



解:

$$\begin{aligned}
 \text{Res} \left[\frac{1+z^4}{(z+i)^3(z-i)^3}, i \right] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left((z-i)^3 \frac{1+z^4}{(z+i)^3(z-i)^3} \right)'' \\
 &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1+z^4}{(z+i)^3} \right)'' \\
 &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{4z^3(z+i)^3 - 3(z+i)^2(z^4+1)}{(z+i)^6} \right)' \\
 &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{4z^3(z+i) - 3(z^4+1)}{(z+i)^4} \right)' \\
 &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^4 - 3 + 4z^3i}{(z+i)^4} \right)' \\
 &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{(4z^3 + 12z^2i)(z+i)^4}{(z+i)^8} - \frac{4(z+i)^3(z^4 - 3 + 4z^3i)}{(z+i)^8} \right) \\
 &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{(4z^3 + 12z^2i)(z+i) - 4(z^4 - 3 + 4z^3i)}{(z+i)^5} \right) \\
 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{(4i^3 + 12i^2i)(i+i) - 4(i^4 - 3 + 4i^3i)}{(i+i)^5} \right) \\
 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{(-4i - 12i)(2i) - 4(1 - 3 + 4)}{(2i)^5} \right) \\
 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{(-16i)(2i) - 8}{(2i)^5} \right) \\
 &= \frac{1}{2!} \frac{24}{32i} \\
 &= -\frac{3}{8}i.
 \end{aligned}$$

例 12.16

函数 $f(z) = \frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$ 在无穷远点的留数.



教 案 纸

解:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}, \infty\right] &= -\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{z}+i\right)^{10}\left(\frac{1}{z}-1\right)\left(\frac{1}{z}-3\right)} \frac{1}{z^2}, 0\right] \\ &= -\operatorname{Res}\left[\frac{z^{10}}{(z+i)^{10}(1-z)(1-3z)}, 0\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

例 12.17

计算 $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$.

解:

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, -1\right] + 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, 0\right] \\ &= -2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, \infty\right]\end{aligned}$$

在 $|z| > 2$ 内展开的 c_{-1} 项系数 $\times 2\pi i$

$$\begin{aligned}\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} &= e^{\frac{1}{z}} z^2 \frac{z}{1+z} = e^{\frac{1}{z}} z^2 \frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{z}} z^2 \frac{\frac{1}{z}}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2-n}}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \left(z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots\right) \\ &= -1 + 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \\ &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz = -\frac{2}{3}\pi i.$$

例 12.18

计算 $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$.

教 案 纸

解:

$$\begin{aligned}
 \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, -1 \right] + 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, 0 \right] \\
 &= -2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, \infty \right] \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{1+\frac{1}{z}} e^z \frac{1}{z^2}, 0 \right] = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^z}{z^4(1+z)}, 0 \right] \\
 &= \underbrace{\text{在 } 0 < |z| < 1/2 \text{ 内展开}}_{\frac{1}{z^4} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \right)} \\
 &\quad (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots) \text{ 的 } c_{-1} \text{ 项系数} \times 2\pi i \\
 &= \underbrace{\text{在 } 0 < |z| < 1/2 \text{ 内展开}}_{\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right)} \\
 &\quad \cdot (1 - z + z^2 - z^3 + \cdots) \text{ 的 } z^3 \text{ 项系数} \times 2\pi i \\
 &= -\frac{1}{3} \times 2\pi i.
 \end{aligned}$$

例 12.19

计算 $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$.



教 案 纸

解:

$$\begin{aligned}
 \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, -1 \right] + 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, 0 \right] \\
 &= -2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, \infty \right] \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{1+\frac{1}{z}} e^z \frac{1}{z^2}, 0 \right] \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^z}{z^4(1+z)}, 0 \right] \\
 &= \frac{2\pi i}{3!} \left[\frac{e^z}{(1+z)} \right]^{(3)} \Big|_{z=0} \\
 &= \frac{2\pi i}{3!} \left[\frac{ze^z}{(1+z)^2} \right]^{(2)} \Big|_{z=0} \\
 &= \dots \\
 &= \frac{2\pi i}{3!} \left[\frac{[e^z(z+1)^2 + e^z 2(z+1) - 2e^z - 2ze^z](z+1)^3}{(1+z)^6} \right] \Big|_{z=0} \\
 &\quad + \frac{2\pi i}{3!} \left[\frac{-3(z+1)^2[e^z(z+1)^2 - 2ze^z]}{(1+z)^6} \right] \Big|_{z=0} \\
 &= \frac{2\pi i}{3!} \times (-2) = -\frac{2}{3}\pi i.
 \end{aligned}$$

例 12.20

计算积分 $\oint_{|z|=r} \frac{1}{1+z^2} e^{\frac{1}{z}} dz$, 其中正向圆周的半径 $r \neq 1$.

解:

(1) 当 $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{1}{z}} \frac{1}{1+z^2} &= e^{\frac{1}{z}} \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{n_1! z^{n_1}} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} (-z^2)^{n_2} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{5!z^5} + \dots \right) \\
 &\quad \cdot (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots)
 \end{aligned}$$

对级数的每一项 $\frac{1}{(2k+1)!z^{2k+1}}$, 取右面级数的 $(-1)^k z^{2k}$, 遍历 $k=1, 2, \dots$, 可以生成 $\frac{1}{z}$ 的系数, 罗朗系数等于 $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$. 注意到 $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, |z| < \infty$. 可得积分 $\oint_{|z|=r} \frac{1}{1+z^2} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \sin 1$.

教 案 纸

(2) 当 $r > 1$ 时, 圆周内有极点 $\pm i, 0$, 记 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}e^{\frac{1}{z}}$. 由广义复平面上包括无穷极点下结果恒为零, 有

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=r} \frac{1}{1+z^2} e^{\frac{1}{z}} dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), i] + \operatorname{Res}[f(z), -i], \operatorname{Res}[f(z), 0]] \\ &= -2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0 \right] \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{1+z^2} e^z, 0 \right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

例 12.21

计算留数 $\operatorname{Res} \left[z^2 e^{\frac{1}{z-i}}, i \right]$.

解: $\operatorname{Res} \left[z^2 e^{\frac{1}{z-i}}, i \right] = -\frac{5}{6} + i$.

解:

$$\begin{aligned}z^2 e^{\frac{1}{z-i}} &= [(z-i)^2 + 2zi + 1] e^{\frac{1}{z-i}} \\ &= [(z-i)^2 + 2(z-i)i + 2i^2 + 1] e^{\frac{1}{z-i}} \\ &= [(z-i)^2 + 2(z-i)i - 1] e^{\frac{1}{z-i}} \\ &= [(z-i)^2 + 2(z-i)i - 1] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-i)^n}\end{aligned}$$

罗朗展式的系数为 $\frac{1}{3!} + 2i\frac{1}{2!} - 1 = i - \frac{5}{6}$.

例 12.22

计算积分 $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz$.

解:

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz = 2\pi i.$$

教 案 纸

解:

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz &= -2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z^9}{z^{10}-1}, \infty \right] \\&= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1/z^9}{1/z^{10}-1} \frac{1}{z^2}, 0 \right] \\&= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{z}{1-z^{10}} \frac{1}{z^2}, 0 \right] \\&= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z(1-z^{10})}, 0 \right] \\&= 2\pi i \frac{1}{1-z^{10}} \Big|_{z=0} = 2\pi i.\end{aligned}$$