教　　案　　纸

理论课 14　§ 1.1-1.3 数学物理方程基础

I　数学物理方程基础

一、　二阶线性常微分方程

1、　二阶线性非齐次常系数微分方程

二阶线性常微分方程的一般形式为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

其中 $p(x), q(x), r(x)$ 是区间 I 上的已知函数. $r(x) \equiv 0$ 时的方程称为是齐次的, $r(x) \neq 0$ 时的方程称为是非齐次的.

性质 5 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 均是齐线性常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解, 则 $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是齐线性常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解.

如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在 I 上是线性无关的, 即在 I 上等式 $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \equiv 0 \iff \alpha = \beta = 0$, 则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 就是齐线性常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的通解.

例 14.1

对于方程

$$y'' + y = 0,$$

的两个解 $y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x$. 由于这两个解是线性无关的, 所以通解为 $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

♡

性质 6 如果 $y^*(x)$ 是非齐线性常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 的一个特解, 则

1. 非齐线性常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 的解都可以表示成 $y(x) = y_1(x) + y^*(x)$, 其中 $y_1(x)$ 是齐线性常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解.
2. 非齐线性常微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 的通解具有形式 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y^*(x)$.

例 14.2

对于方程

$$y'' + y = e^x,$$

的两个解 $y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x$. $\frac{1}{2}e^x$ 是非线性方程的一个特解, 由于这两个解是线性无关的, 所以通解为 $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x$.

2、 二阶线性齐次常系数微分方程

二阶线性齐次常系数微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{63}$$

其中 p, q 是区间 I 上的常数. 令 $y = e^{kx}$, 则方程可以化为 $(k^2 + px + q)e^{kx} = 0$, 其具有两个特征根 $k_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}, k_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$. 对应的两个函数 $y = e^{k_1x}$ 和 $y = e^{k_2x}$ 就是(63)的解.

1. 当 $p^2-4q > 0$, k_1 和 k_2 是两个不相等的实根, 即 $y_1(x), y_2(x)$ 是线性无关的, 所以通解为 $y(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.

2. 当 $p^2-4q < 0$, k_1 和 k_2 是一对共轭复根, 设 $k_1 = \alpha+i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$, $y_1(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), y_2(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$. 由微分方程的性质, $\hat{y}_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \hat{y}_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ 也是(63)的解. 所以通解为 $y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$.

3. 当 $p^2 - 4q = 0$, 这时 $k = k_1 = k_2$, 将这个重根记为 $y_1(x) = e^{kx}$. 接下来再找一个与 $y_1(x)$ 线性无关的解, 假定另一个解具有形式 $y_2(x) = u(x)e^{kx}$, 带入(63)可得

$$e^{kx}[u'' + (2k+p)u' + (k^2 + pk + q)u] = 0.$$

显然特征方程 $k^2 + pk + q \equiv 0$, 再由根与系数的关系得 $2k + p \equiv 0, (p = -2k)$, 则有 $u'' = 0$, 可取 $u = x$ 作为方程的一个特殊解. 通解为 $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{kx}$.

注解 47 解具有形式 $y_2(x) = u(x)e^{kx}$,

$$\begin{aligned}
&y'(x) = (u' + uk)e^{kx},\\
&y''(x) = (u'' + u'k)e^{kx} + (u'k + uk^2)e^{kx} = (u'' + 2ku' + uk^2)e^{kx},\\
&y'' + py' + qy = (u'' + 2ku' + uk^2)e^{kx} + (u' + uk)pe^{kx} + que^{kx} = 0\\
&\qquad \Rightarrow e^{kx}[u'' + (2k+p)u' + (k^2 + pk + q)u] = 0.
\end{aligned}$$

例 14.3

求 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解.

解: 对应的特征方程为 $k^2 - 3k + 2 = 0$, 有根 $k_1 = 1, k_2 = 2$, 是相异实根, 通解为 $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

例 14.4

求 $y'' + 2y' + 4y = 0, y(0) = y'(0) = 0$ 的通解.

解: 特征方程为 $k^2 + 2k + 4 = 0$, 有两个复根 $k_1 = -1 + \sqrt{3}i, k_2 = -1 - \sqrt{3}i$, 通解为 $y(x) = (C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x)e^{-x}$. 再由初值条件, $y(0) = C_1 = 1, y'(0) = \sqrt{3}C_2 - C_1$, 解得 $C_1 = 1, C_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 通解为 $y(x) = (\cos\sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}x)e^{-x}$.

例 14.5

求 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解.

解: 对应的特征方程为 $k^2 - 4k + 4 = 0$, 有二重根 k_2. 通解为 $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}$.

3、 二阶线性非齐次常系数微分方程

二阶线性非齐次常系数微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = r(x), \tag{64}$$

其中 p, q 是区间 I 上的常数, $r(x)$ 是区间 I 上的函数, $r(x) \neq 0$. 设齐次方程的通解为

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), C_1, C_2 \in \mathbb{C},$$

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程的两个线性无关的解.

参数变异法

使用参数变异法求解非齐次方程的通解.

设齐次方程的通解为

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

带入方程得

$$y'(x)=C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x),$$

简单起见，令

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \tag{65}$$

这时有

$$y'(x)=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x),$$

对其求二阶导数得

$$y''(x)=C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x),$$

带入原式方程(64)得

$$\begin{aligned}y''(x)=&C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)\\&+p(C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x))+q(C_1(x)y_1(x)\\&+C_2(x)y_2(x))=r(x),\end{aligned}$$

利用 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程的两个线性无关的解这一性质，有

$$\begin{aligned}C_1(x)[y_1''(x)+py_1'(x)+qy_1(x)]=0,\\C_2(x)[y_2''(x)+py_2'(x)+qy_2(x)]=0,\end{aligned}$$

整理后得到

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=r(x). \tag{66}$$

联立(65)和(66)，且 $y_1'(x),y_2'(x)$ 已知，可以解出 $C_1'(x),C_2'(x)$，再积分一次就可以求出 $C_1(x),C_2(x)$.

例 14.6

求 $y''+y=\tan x$ 的通解.

解: 特征方程是 $k^2+1=0\Rightarrow k=\pm i$，对应的 $\beta=1$，因此，有上述方程对应的齐次方程的通解是 $y(x)=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)$，$C_1,C_2\in\mathbb{C}$，利用常数变异法，就是求解

$$\begin{cases}C_1'(x)\cos(x)+C_2'(x)\sin(x)=0,\\-C_1'(x)\sin(x)+C_2'(x)\cos(x)=\tan x.\end{cases}$$

即

$$\begin{aligned}C_1'(x)\cos(x)\sin(x) &= -C_2'(x)\sin^2(x)\\ &\Rightarrow -C_1'(x)\cos(x)\sin(x) = C_2'(x)\sin^2(x),\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}&C_2'(x) = \sin x,\\ &C_1'(x) = -\frac{1}{\cos(x)} + \cos(x),\end{aligned}$$

注解 48

$$\begin{aligned}C_1(x) &= -\int_0^x \frac{1}{\cos(x)}dx + \sin(x) + C\\ &= -\int_0^x \frac{1}{\cos^2(x)}d\sin(x) + \sin(x) + C\\ &= -\int_0^x \frac{1}{1-\sin^2(x)}d\sin(x) + \sin(x) + C\\ &= -\int_0^x \frac{1}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}d\sin(x) + \sin(x) + C\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{(1-\sin(x))}d\sin(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{(1+\sin(x))}d\sin(x)\\ &\quad + \sin(x) + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(1-\sin(x)) - \frac{1}{2}\ln(1+\sin(x)) + \sin(x) + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)} + \sin(x) + C\\ &= \ln\left|\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right| + \sin(x) + C\\ &= -\ln\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right| + \sin(x) + C\\ &= -\ln\left|\frac{(\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2}))^2}{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})}\right| + \sin(x) + C\\ &= -\ln\left|\frac{\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})-\sin(\frac{x}{2})}\right| + \sin(x) + C\\ &= -\ln\left|\frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\right| + \sin(x) + C\end{aligned}$$

积分后得

$$C_2(x) = -\cos x,$$
$$C_1(x) = \sin x - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

方程的通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\sin x - \ln(\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cos x \\ &\qquad - \cos x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x \\ &= -\cos x\ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) + C_1\cos x + C_2\sin x. \end{aligned}$$

4、 欧拉方程

二阶欧拉方程是一类特殊的二阶线性常微分方程

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = f(x), \tag{67}$$

其中 a_1, a_2 是常数, 此时 $y''(x), y'(x)$ 和 $y(x)$ 都是关于 x 的函数. 令$x = e^t$, 则 $dx = e^t dt = x dt$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$. 经过换元, $y''(x), y'(x)$ 和 $y(x)$ 都可以用 $y''(t), y'(t)$ 和 $y(t)$ 表示.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x}, \\ y''(x) &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)'\Big|_x \\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} \\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned}$$

带入(67), 有

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1-1)\frac{dy}{dt} + a_2y = f(e^t). \tag{68}$$

或者

$$y''(t) + (a_1-1)y'(t) + a_2y(t) = f(e^t). \tag{69}$$

方程(68)转化为一个二阶线性常系数微分方程. 假设特征根是 k_1, k_2, 则方程(68)对应的齐次方程的两个解为 $y_1(t) = e^{k_1t}, y_2(t) = e^{k_2t}$. 再通过变量代换 $x = e^t$ 还原为 x, 得到(67)的齐次方程的两

个解为

$$y_1(x) = x^{k_1}, y_2(x) = x^{k_2}. \tag{70}$$

如果 $k_1 \neq k_2$, 且都是实数, 则二阶齐次欧拉方程 $x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0$ 的通解为

$$y(x) = C_1x^{k_1} + C_2x^{k_2}, \tag{71}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

非齐次欧拉方程的通解

对于非齐次欧拉方程, 只需要再找到方程的一个特解, 就可以写出非齐次欧拉方程的通解.

注解 49

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = [x^2, a_1x, a_2]\begin{bmatrix} y'' \\ y'' \\ y \end{bmatrix} = f(x) \tag{72}$$

例 14.7

求 $x^2y'' - 2y = \frac{1}{x}$ 的通解.

解: 对于欧拉方程, $a_1 = 0, a_2 = -2$. 令 $x = e^t$, 则方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = e^{-t}. \tag{73}$$

齐次方程的特征方程为 $k^2 - k - 2 = 0$, 有两个实根 $k_1 = -1, k_2 = 2$, 因此齐次方程的通解为

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}. \tag{74}$$

利用参数变异法求与齐次欧拉方程对应的一个特解为 $y^*(t) = -\frac{1}{3}te^{-t}$, 所以 $x^2y'' - 2y = \frac{1}{x}$ 的通解为

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - \frac{1}{3}te^{-t}. \tag{75}$$

还原变量为 x 后得

$$y(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2\,x^2 - \frac{1}{3x}\ln x, \tag{76}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

注解 50 利用常数变异法, 就是求解

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-t}+C_2'(x)e^{2t}=0, \\ -C_1'(x)e^{-t}+2C_2'(x)e^{2t}=e^{-t}. \end{cases}$$

即

$$C_2'(x)e^{2t}=-C_1'(x)e^{-t}\Rightarrow C_1'(x)=-\frac{1}{3}.$$

解得

$$C_1(x)=-\frac{t}{3}+C_1,$$

特解为 $y^*(t)=-\frac{1}{3}te^{-t}$.

二、 傅里叶级数

重点介绍傅里叶级数和傅里叶积分.

1、 三角函数系的正交性与傅里叶展开

本段介绍将一个 2π 的周期函数展开成三角级数的和的方法. 展开需要的函数基具有如下形式

$$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cdots,\cos nx,\sin nx\} \tag{77}$$

函数基在长度为 2π 的一个周期之内 ($[0,2\pi]$ 或者 $[-\pi,\pi]$) 内正交, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nxdx=0, n=1,2,\cdots, \tag{78}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mxdx&=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx=0, n\neq m.\end{aligned} \tag{79}$$

这就是说三角函数系中任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 积分为零. 如果函数系含有无穷多个函数, 上述积分都为零, 这意味着任意两个不同矢量的内积为零, 即两个函数正交. 上面给出的函数系是正交函数系.

此外, 对于多项式函数基,

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2dx=2\pi,\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\pi, \tag{80}$$

其中 $n=1,2,\cdots$, 因此, 对于函数系

标准正交函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\cdots\right\} \tag{81}$$

有如下的结论: 函数系(81)是一个**标准正交函数系**, 函数系(81)是对(77)单位化的结果, 标准的意思是指每一个函数自身平方的积分为 1, 即在这个度量之下, 有 $\int_{-\pi}^{\pi}\langle\cdot,\cdot\rangle dx=1$.

对于在 $[-\pi,\pi]$ 上定义的一般周期函数 $f(x)$, 存在两个问题:

一般周期函数 $f(x)$ 的展开形式

1) 是否存在分解形式

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)? \tag{82}$$

2) 如果有前述形式的展开式, 系数 a_n,b_n 如何确定?

将 $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 写成如下形式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{83}$$

假设上述级数的右端可以逐项积分, 两边对 x 在 $[-\pi,\pi]$ 上积分, 并利用三角函数系的正交性可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=a_0\pi, \tag{84}$$

即

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, \tag{85}$$

将(83)两端分别乘以 $\cos mx$ 和 $\sin mx$

$$f(x)\cos mx=\frac{a_0\cos mx}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos mx+b_n\sin nx\cos mx), \tag{86}$$

$$f(x)\sin mx=\frac{a_0\sin mx}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx\cos mx+b_n\sin nx\sin mx). \tag{87}$$

对 x 积分, 去掉为 0 的项, 并利用正交性得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi a_m, \tag{88}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi b_m, \tag{89}$$

即

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \tag{90}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, \tag{91}$$

其中 $m = 1, 2, \cdots$, 合并上面的系数, 得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{92}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1, 2, \cdots \tag{93}$$

将系数(92)和(93)带入(83), 得到的三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

称为**傅里叶级数**. 记作

傅里叶级数

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{94}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1, 2, \cdots$$

例 14.8

设 $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$, 且 $f(x)$ 以 2π 为周期, 求 $f(x)$ 的傅里叶级数.

解: 函数是偶函数, 而 $\sin nx$ 是基函数, 所以 $f(x)\sin nx$ =

$|x|\sin nx$ 是奇函数, 故

$$\begin{aligned} &b_n = 0, n = 1, 2, \cdots, \\ &a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi, \\ &a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx. \end{aligned}$$

化简得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) \\ &= \begin{cases} 0, & x = 2k, \\ -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1, \end{cases}. \ k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

傅里叶展开式为

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$$

2、 傅里叶级数的收敛性

给定在 $(-\pi,\pi)$ 内的函数 $f(x)$ 满足下面的条件:

1. 在区间内连续或者具有有限个第一类间断点.
2. 在区间上有有限多个极大值与极小值, 则称 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内满足Dirichlet 条件.

定理 14.39

若给定区间 $(-\pi,\pi)$ 内的函数 $f(x)$ 在这个区间内满足 Dirichlet 条件, 则其傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一定收敛, 且其和函数

1. 在 $f(x)$ 的所有连续点 x 等于 $f(x)$.
2. 在 $f(x)$ 的所有间断点 x 等于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$;
3. 在 $f(x)$ 的左右端点上等于 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

3、 傅里叶积分公式

对于无穷 $(-\infty,\infty)$ 限积分, 可以看做是 $(-l,l)$ 当 $l\to\infty$ 的极限状态. 前面已经介绍 $(-\pi,\pi)$ 上的傅里叶级数展开方法, 若 $x\in(-l,l)$, 则 $\frac{\pi}{l}x\in(-\pi,\pi)$. 函数系仍然是 $(-\pi,\pi)$ 上的正交函数系

标准正交函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin\frac{\pi}{l}x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\frac{n\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\frac{n\pi}{l}x,\cdots\right\} \tag{95}$$

$(-l,l)$ 上的情形

$(-l,l)$ 上的情形

设函数 f 在 $(-l,l)$ 内满足 Dirichlet 条件, 并且是连续的, 则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{96}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt, n=0,1,2,\cdots$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt, n=1,2,\cdots.$$

注解 51 *对于 $t\in(-l,l)$, 再利用在 $(-\pi,\pi)$ 上的正交函数基, 令 $y=\frac{\pi}{l}t$, (96) 乘以 $\cos my$ 并在 $(-\pi,\pi)$ 上积分, 由正交性得*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos my\,dy \xlongequal{y=\frac{\pi}{l}t} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt,$$

把 a_n,b_n 带入 $f(x)$ 得

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\Big(\cos\frac{n\pi}{l}t\cos\frac{n\pi}{l}x\\&\qquad+\sin\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x\Big)dt,\\&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)dt.\end{aligned}$$

注解 52 *如果 f 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的函数, 且是绝对可积的, 即 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$ 收敛, 由 $f(x)$ 绝对可积, 当 $l\to\infty$ 时, 级数的第一项趋于 0.*

$(-\infty,+\infty)$ 上的情形

$(-\infty,+\infty)$ 上的情形

$\omega_n=\frac{n\pi}{l}$, $\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{\pi}{l}$, 故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\omega_n(x-t)dt=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-l}^{l}f(t)\cos\omega_n(x-t)\right\}\Delta\omega_n.$$

由于当 $l\to\infty$ 时 $\Delta\omega_n\to 0$, 所以上式右端可看成是函数

$$\varphi(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(x-t)dt,$$

在区间 $[0,\infty)$ 上的积分和, 即

$$\lim_{l\to\infty}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-l}^{l}f(t)\cos\omega_n(x-t)\right\}\Delta\omega_n=\int_{0}^{\infty}\varphi(\omega)d\omega.$$

这样一来, 当 $l\to\infty$ 时, 得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega(x-t)dt, x\in(-\infty,\infty).$$

这个表达式就是函数 $f(x)$ 的**傅里叶积分公式**. 还可以写成下面的形式

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x]d\omega,$$

其中傅里叶系数

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt,$$
$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt.$$

定理 14.40

(傅里叶积分的收敛性定理) 若给定区间 $(-\infty,\infty)$ 内的函数 $f(x)$ 满足 Dirichlet 条件, 在 $(-\infty,\infty)$ 上函数绝对可积, 则对所有的 x, 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

证 10 从 $a(\omega), b(\omega)$ 的表示可以看出, 若 $f(x)$ 是偶函数, 则

$$\begin{aligned} &a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \\ &b(\omega)=0, \\ &\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega x d\omega\int_0^{\infty}\cos\omega t dt. \end{aligned}$$

若 $f(x)$ 是奇函数, 则

$$\begin{aligned} &a(\omega)=0, \\ &b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt, \\ &\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\omega x d\omega\int_0^{\infty}\sin\omega t dt. \end{aligned}$$

若 $f(x)$ 只定义在 $[0,\infty)$ 上, 则 f 既可以奇延拓也可以偶延拓到 $(-\infty,\infty)$ 上.

例 14.9

设函数 $f(x)$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

将该函数展开成傅里叶级数.

解: 由于

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}\cos\omega x d\omega\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt &= \int_0^{\infty}\cos\omega x d\omega\int_0^{1}\cos\omega t dt \\ &= \int_0^{\infty}\cos\omega x\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega. \end{aligned}$$

故

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}d\omega=\begin{cases} 1, & 0\le x<1, \\ \frac{1}{2}, & x=1, \\ 0, & x>1. \end{cases}.$$

数值计算的快速傅里叶变换

一般使用有限离散傅里叶变换 (DFT), 具体内容见徐萃薇第四版《计算方法》第四章的 66-75, 内附具体算法.

4、 傅里叶级数习题

例 14.10

$f(x)$ 的周期为 2π，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上为 $f(x)=3x^2+1$, $(-\pi\le x<\pi)$，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解: 因为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx = 2(\pi^2+1), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin nx dx \\ &= 0,\ (n=1,2,\cdots). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx dx \\ &= \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx dx = \frac{6}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx dx \\ &= \frac{6}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 d(\sin nx) = \frac{6}{n\pi}\left[x^2\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\sin nx dx\right] \\ &= \frac{12}{n^2\pi}\int_0^{\pi} x d(\cos nx) = \frac{12}{n^2\pi}\left[x\cos nx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx dx\right] \\ &= \frac{12}{n^2\pi}\pi\cos n\pi = (-1)^n\frac{12}{n^2},\ (n=1,2,\cdots). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ (-\infty<x<+\infty)$$

例 14.11

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：$f(x)=e^{2x}$, $(-\pi\le x<\pi)$.

解: 因为

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}dx = \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2\pi},\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\sin nxdx\\
&= -\frac{n(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi},\ (n=1,2,\cdots),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\cos nxdx\\
&= \frac{2(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi},\ (n=1,2,\cdots),
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\Big[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx - n\sin nx)\Big],\\
x\neq (2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots.
\end{aligned}
$$

例 14.12

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为: $f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi\le x<0 \\ ax, & 0\le x<\pi \end{cases}$,$(a, b$ 为常数, 且 $a>b>0)$.

解: 因为

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} bxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} axdx = \frac{\pi}{2}(a-b),\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} bx\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} ax\cos nxdx\\
&= \frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n]\ (n=1,2,\cdots),\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} bx\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} ax\sin nxdx\\
&= (-1)^{n+1}\frac{a+b}{n},\ (n=1,2,\cdots),
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{\pi}{4}(a-b)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx\right.\\&\left.+\frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\right\},\end{aligned}$$

其中 $x\neq(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

例 14.13

将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

(1) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}, (-\pi\leq x\leq\pi)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\leq x<0\\ 10, & 0\leq x\leq\pi\end{cases}$.

解: (1) 将 $f(x)$ 拓广为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 中连续, 在 $x=\pm\pi$ 间断, 且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-)+F(-\pi^+)]\neq f(-\pi),\quad \frac{1}{2}[F(\pi^-)+F(\pi^+)]\neq f(\pi),$$

故 $F(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\pi,\pi)$ 中收敛于 $f(x)$, 而在 $x=\pm\pi$ 处 $F(x)$ 的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$. 计算傅氏系数如下: 因为 $2\sin\frac{x}{3}\,(-\pi<x<\pi)$ 是奇函数, 对于 $n=1,2,\cdot$, 有系数

$$\begin{aligned}a_n&=0,\ (n=0,1,2,\cdots)\\ b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nx dx\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{3}-n\right)x-\cos\left(\frac{1}{3}+n\right)x\right]dx\\ &=(-1)^{n+1}\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1},\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{9n^2-1}, (-\pi<x<\pi)$.

解: (2) 将 $f(x)$ 拓广为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 中连续, 在 $x=\pm\pi$ 间断, 且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-)+F(-\pi^+)]\neq f(-\pi), \frac{1}{2}[F(\pi^-)+F(\pi^+)]\neq f(\pi),$$

故 $F(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\pi,\pi)$ 中收敛于 $f(x)$, 而在 $x=\pm\pi$

处 $F(x)$ 的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$. 计算傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}e^x dx+\int_0^{\pi}dx\Big]=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nxdx+\int_0^{\pi}\cos nxdx\Big]=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)},\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nxdx+\int_0^{\pi}\sin nxdx\Big]\\ &=\frac{1}{\pi}\Big\{\frac{-n[1-(-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\Big\},\end{aligned}$$

其中 $n=1,2,\cdot,$ 所以

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx\\ &+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{-n+(-1)^n ne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\Big]\cdot\sin nx,\end{aligned}$$

其中 $\pi<x<\pi$.

例 14.14

设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π, 证明 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx\end{aligned}$$

其中 $n=1,2,\cdots$.

证 11 我们知道, 若 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数, 则 $\int_a^{a+l}f(x)dx$ 的值与 a 无关, 且 $\int_a^{a+l}f(x)dx=\int_0^l f(x)dx$, 因为 $f(x),\cos nx$, $\sin nx$ 均为以 2π 为周期的函数, 所以 $f(x)\cos nx, f(x)\sin nx$ 均为以 2π 为周期的函数, 从而

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi}f(x)\cos nxdx\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx,\end{aligned}$$

其中 $n=1,2,\cdots$. 同理 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx$.

例 14.15

将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}\,(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅里叶级数.

解: 因为 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 为偶函数, 故 $b_n=0\,(n=1,2,\cdots)$, 而

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nxdx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{2}-n\right)x-\cos\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right]dx\\&=(-1)^{n+1}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1},\ (n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

由于 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 所以

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx,$$

其中 $-\pi\le x\le\pi$.

例 14.16

设 $f(x)$ 的周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式这

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{2}, & \le x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases},$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解: 因为 $f(x)$ 为奇函数, 故 $a_n=0\,(n=0,1,2,\cdots)$, 而

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx\\&=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nxdx\right]\\&=-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\,(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

又 $f(x)$ 的间断点为 $x=(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 所以

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx,$$

其中 $x \neq (2n+1)\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdot$

例 14.17

将函数 $f(x) = \frac{\pi - x}{2}\,(0 \leq x \leq \pi)$ 展开成正弦级数.

解: 作奇延拓得 $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq \pi \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases},$$

再周期延拓 $F(x)$ 到 $(-\infty, +\infty)$, 则当 $x \in (0, \pi]$ 时 $F(x) = f(x), F(0) = 0 \neq \frac{\pi}{2} = f(0)$ 因为 $a_n = 0\,(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 而 $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x-\pi}{2} \sin nx dx = \frac{1}{n}\,(n = 1, 2, \cdots)$, 故 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx\,(0 < x \leq \pi)$, 级数在 x=0 处收敛于 0.

解析函数的极点与留数

5、 解析函数的极点

略

6、 极点的留数

略