教　案　纸

● 2020/11/12 ● 互动提问	**理论课 11　§5.1-5.1 孤立奇点**

I　**组织教学**

1、集中学生注意力;

2、清查学生人数;

3、维持课堂纪律.

II　**复习导入及主要内容**

1、上次作业讲评;

2、本次主要内容: 孤立奇点的分类和孤立奇点的等价刻画; 复函数的零点极点关系; 函数在无穷远处的形态.

3、重点: 孤立奇点的分类和孤立奇点的等价刻画; 复函数的零点极点关系.

4、难点: 复函数的零点与复函数的极点关系; 函数在无穷远处的形态.

III　**教学内容及过程**

一、　孤立奇点

1、　孤立奇点

定义 11.56

孤立奇点的定义 若函数 $f(z)$ 虽在 z_0 不解析, 但是在 z_0 的某个邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析, 那么称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

定义 11.57

孤立奇点的分类方式 孤立奇点的分类主要是根据函数 $f(z)$ 在 z_0 处展开成的罗朗级数 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 中所含的正幂项和负幂项的项数来分类的.

2、　可去奇点

定义 11.58

可去奇点 如果在 $f(z)$ 展开成的罗朗级数中不含 $z-z_0$ 的负幂项, 则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**可去奇点**.

例 11.1

$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots)=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots$, $z=0$ 是函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点，即展开成罗朗级数后，不含有负幂项，所以 $z=0$ 是函数的可去奇点.

判别方法: 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的可去奇点, 则有 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$. 如上例中 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1=c_0$.

3、 极点

定义 11.59

极点 如果 $f(z)$ 展开成的罗朗级数中所含 $z-z_0$ 的负幂项是有限的，即

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{m} c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \\ &= \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \end{aligned}$$

则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m **阶极点**, $m\geq 1, c_{-m}\neq 0$.

例 11.2

$f(z)=\frac{1}{z^2}, m=2, z=0$ 为其二阶极点. 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点，则必有 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$，其中 $g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_0(z-z_0)^m+\cdots$, $g(z)$ 在 z_0 处解析，且 $g(z_0)\neq 0$.

判别方法: 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则必有 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. 例 $f(z)=\frac{1}{z^2}$, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z^2}=\infty$.

4、 极点与零点的关系

注解 36 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点，则必为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点. 这说明求函数 $f(z)$ 的极点问题可以转化为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点问题.

定理 11.31

若 z_0 为函数 $Q(z)=\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点，必有 $Q(z_0)=Q'(z_0)=Q''(z_0)=\cdots=Q^{(m-1)}(z_0)=0$，而 $Q^{(m)}(z_0)\neq 0$.

比如对 $f(z)=\frac{1}{z^2}$, $\frac{1}{f(z)}=z^2$, 显然,

$$z^2\big|_{z=0}=0,(z^2)'=2z|_{z=0}=0,(z^2)''\Big|_{z=0}=2\neq 0.$$

注解 37 有时要注意, z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, 应有 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$ 的形式.

例 11.3

$f(z)=\frac{1-e^z}{z^2}$, z^2 看似是 $f(z)$ 的二阶极点, 但

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1-e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1-1-z-\frac{1}{2!}z^2-\cdots\right)\\&=\frac{1}{z}\left(-1-\frac{1}{2!}z-\frac{1}{3!}z^2-\cdots-\frac{1}{n!}z^{n-1}-\cdots\right)\\&=\frac{1}{z}g(z),\end{aligned}$$

因此, $z=0$ 是 $f(z)$ 的 1 阶极点.

例 11.4

函数 $\frac{1}{\sin z}$ 有些什么奇点? 如果是极点, 指出它的级数.

解: 函数的奇点是使 $\sin z=0$ 的点, 这些奇点是 $z=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$, 是孤立奇点. 这是因为

$$(\sin z)'|_{z=k\pi}=\cos z\,|_{z=k\pi}=(-1)^k\neq 0,$$

所以 $z=k\pi$ 是 $\sin z$ 的一级零点, 是 $\frac{1}{\sin z}$ 的一级极点.

例 11.5

(思考题) 问 $z=0$ 是 $\frac{\sinh z}{z^3}$ 的几级极点?

解:

$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)^n}{n!},e^{-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!},$$

$$e^z-e^{-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)^n-(-z)^n}{2n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\frac{\sinh z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2(n-1)}.$$

$z=0$ 是 $\frac{\sinh z}{z^3}$ 的 2 级极点.

注意: 不能以函数的表面形式给出一点的奇点阶数是几的结论.

例 11.6

求 $\frac{1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点, 如果是极点, 指出它的级数.

解: 由于

$$\frac{1}{z^3-z^2-z+1} = \frac{1}{(z+1)(z-1)^2},$$

所以 $z=-1$ 是函数的一级极点; $z=1$ 是函数的二级极点.

5、 本性奇点

定义 11.60

(本性奇点) 如果 $f(z)$ 展开成的罗朗级数所含 $z-z_0$ 的负幂项有无限多项, 即 $f(z)=\cdots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots+\frac{c_1}{z-z_0}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

例 11.7

$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots$, 所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

判别方法: 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的本性奇点, 则必有 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$不存在 (也不等于 ∞).

例 11.8

$z=0$ 为 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点, $\lim\limits_{z\to 0^-}e^{\frac{1}{z}}=0$, $\lim\limits_{z\to 0^+}e^{\frac{1}{z}}=\infty$, 所以 $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}$ 不存在.

二、 函数在无穷远点的性态

定义 11.61

设函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的 (去心) 邻域 $R<|z|<+\infty$ 内解析, 则称点 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

作变换 $\zeta=\frac{1}{z}, f(z)=f(\frac{1}{\zeta})=g(\zeta)$, 并规定变换 ζ 把 z 平面上的无穷远点 $z=\infty$ 映射成 ζ 平面上的原点 $\zeta=0$, 将 z 平面上的区域 $R<|z|<+\infty$ 映射成 ζ 平面上的区域 $0<|\zeta|<\frac{1}{R}$.

显然, $g(\zeta)$ 在邻域 $0<|\zeta|<\frac{1}{R}$ 内解析, 所以 $\zeta=0$ 是 $g(\zeta)$ 的**孤立奇点**.

我们规定: 如果 $\zeta=0$ **是** $g(\zeta)$ **的可去奇点、**m **阶极点或本性奇点, 那么点** $z=\infty$ **是** $f(z)$ **的可去奇点、**m **阶极点或本性奇点**.

由于 $f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 内解析, 故可以展开成罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n, \tag{56}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta,\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots), \tag{57}$$

其中 C 为在圆环域 $R<|z|<\infty$ 内绕原点的任一条正向简单闭曲线. 对应地, $g(\zeta)$ 在环域 $0<|\zeta|<\frac{1}{R}$ 内解析, 所以 $g(\zeta)$ 展开成罗朗级数

$$g(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\zeta^n+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\zeta^{-n}. \tag{58}$$

由公式(56)中的级数, 对于下列情形

a) 不含负幂项, 则 $\zeta=0$ 就是 $g(\zeta)$ 的可去奇点,

b) 含有有限多的负幂项, 且 ζ^{-m} 为最高负幂, 则 $\zeta=0$ 就是 $g(\zeta)$ 的 m 阶极点,

c) 含有无限多的负幂项, 则 $\zeta=0$ 就是 $g(\zeta)$ 的本性奇点.

相应地在公式(58)中的级数,

a) 不含正幂项, 那么 $z=\infty$ 就是 $f(z)$ 的可去奇点,

b) 含有有限多的正幂项, 且 z^m 为最高正幂, 那么 $z=\infty$ 就是 $f(z)$ 的 m 阶极点,

c) 含有无限多的正幂项, 那么 $z=\infty$ 就是 $f(z)$ 的本性奇点.

例 11.9

函数 $f(z)=\frac{z}{1+z}$ 在环域 $1<|z|<\infty$ 内可以展开成

$$f(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{z^n}+\cdots.$$

$$g(\zeta)=\frac{1}{1+\zeta}=1-\zeta+\zeta^2-\zeta^3+\cdots+(-1)^n\zeta^n+\cdots,\zeta=\frac{1}{z}.$$

$g(\zeta)$ 有无穷多项正幂项，即 $\zeta=0$ 为 $g(\zeta)$ 的可去奇点，也即 $f(z)$ 有无穷多项负幂项，所以 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

例 11.10

函数 $f(z)=z+\frac{1}{z}$，含有正幂项，且 z 为最高正幂项，所以 ∞ 为它的一级极点.

例 11.11

函数 $\sin z$ 的展开式:

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

含有 z 的无穷多项的正幂项，所以 ∞ 是它的本性奇点.

例 11.12

说出函数 $f(z)=z+e^{\frac{1}{z}}$ 的所有奇点及其类型.

解: 函数 $f(z)=z+e^{\frac{1}{z}}$ 的奇点是 $z=0,z=\infty$，且

$$f(z)=z+e^{\frac{1}{z}}=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}\;\underline{\underline{\zeta=\frac{1}{z}}}\;\frac{1}{\zeta}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\zeta^n,$$

$z=\infty$ 是一级极点，$z=0$ 是本性奇点.

- $\lim\limits_{z\to 2}\frac{z-2}{\sin\pi z}=\frac{1}{\pi}$.

例 11.13

函数 $f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有些什么类型的奇点？如果是极点，指出它的级数.

解: 函数 $f(z)$ 除点 $z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 外，在 $|z|<+\infty$ 内解析. 因为 $(\sin\pi z)'=\cos\pi z$ 在 $z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 处均不为 0，所以这些点都是 $\sin\pi z$ 的一级零点，故这些点中除 $1,-1,2$ 外，都是 $f(z)$ 的三级极点.

因为 $z^2-1=(z-1)(z+1)$，以 1 和 -1 为一级零点，所以 1 和 -1 是 $f(z)$ 的二级极点. 当 $z=2$ 时，因为 $\lim\limits_{z\to2}f(z)=\lim\limits_{z\to2}\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}=\frac{3}{\pi^3}$，$z=2$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

当 $z=\infty$ 时，因为

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{(1-\zeta^2)(1-2\zeta)^3}{\zeta^5\sin^3\frac{\pi}{\zeta}},$$

$\zeta_n=\frac{1}{n}$ 使 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的分母为 0，$\zeta_n=\frac{1}{n}$ 为 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的极点. $\zeta=1,1/2\Leftrightarrow z=1,2$，前面已讨论过其极点情况. 当 $n>2,n\to\infty$ 时，$\zeta_n\to0$，**故 $\zeta=0$ 不是 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的孤立奇点**. 所以 $z=\infty$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点.

例 11.14

确定 $f(z)=\frac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$ 的孤立奇点的类型.

解: $z=0$ 是分母 $z^3(e^{z^3}-1)=z^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{n!}$ 的 6 级零点，也即函数的 6 级极点.

IV　课堂小结

理解孤立奇点的概念及其分类; 掌握可去奇点、极点与本性奇点的特征; 熟悉零点与极点的关系.

V　布置作业

1、教材习题—习题五 P183: 1 1)、4)、7)、8)、9); 3; 4; 8; 9 1)、2)、3)、6); 11 2); 12 2); 13 1)、3)、4)、5).