复变函数

复数项级数与复函数项级数

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

November 25, 2020

目录

目录

孤立奇点

定义 .1

孤立奇点的定义 若函数 $f(z)$ 虽在 z_0 不解析, 但是在 z_0 的某个邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 那么称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

定义 .2

孤立奇点的分类方式 孤立奇点的分类主要是根据函数 $f(z)$ 在 z_0 处展开成的罗朗级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 中所含的正幂项和负幂项的项数来分类的.

可去奇点

定义 .3

可去奇点 如果在 $f(z)$ 展开成的罗朗级数中不含 $z - z_0$ 的负幂项，则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的可去奇点.

例 .1

$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots)=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots$, $z=0$ 是函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点, 即展开成罗朗级数后, 不含有负幂项, 所以 $z=0$ 是函数的可去奇点.

判别方法: 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的可去奇点, 则有 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$. 如上例中 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1=c_0$.

极点

定义 .4

极点　如果 $f(z)$ 展开成的罗朗级数中所含 $z-z_0$ 的负幂项是有限的, 即

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{m} c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \\ &= \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \end{aligned}$$

则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, $m \geq 1, c_{-m} \neq 0$.

例 .2

$f(z)=\frac{1}{z^2}, m=2, z=0$ 为其二阶极点. 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则必有 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$, 其中 $g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_0(z-z_0)^m+\cdots$, $g(z)$ 在 z_0 处解析, 且 $g(z_0)\neq 0$.

判别方法: 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则必有 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. 例 $f(z)=\frac{1}{z^2}$, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z^2}=\infty$.

目录

极点与零点的关系

若 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则必为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点. 这说明求函数 $f(z)$ 的极点问题可以转化为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点问题.

定理 .1

若 z_0 为函数 $Q(z) = \frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点, 必有 $Q(z_0) = Q^{'}(z_0) = Q^{''}(z_0) = \cdots = Q^{(m-1)}(z_0) = 0$, 而 $Q^{(m)}(z_0) \neq 0$.

比如对 $f(z) = \frac{1}{z^2}, \frac{1}{f(z)} = z^2$, 显然,

$$z^2\Big|_{z=0} = 0, (z^2)^{'} = 2z\Big|_{z=0} = 0, (z^2)^{''}\Big|_{z=0} = 2 \neq 0.$$

有时要注意, z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点, 应有 $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$ 的形式.

例 .1

$f(z)=\frac{1-e^z}{z^2}$, z^2 看似是 $f(z)$ 的二阶极点, 但

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{1-e^z}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\left(1-1-z-\frac{1}{2!}z^2-\cdots\right) \\ &= \frac{1}{z}\left(-1-\frac{1}{2!}z-\frac{1}{3!}z^2-\cdots-\frac{1}{n!}z^{n-1}-\cdots\right) \\ &= \frac{1}{z}g(z), \end{aligned}$$

因此, $z=0$ 是 $f(z)$ 的 1 阶极点.

例 .2

函数 $\frac{1}{\sin z}$ 有些什么奇点? 如果是极点, 指出它的级数.

解: 函数的奇点是使 $\sin z = 0$ 的点, 这些奇点是 $z = k\pi\ (k = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\cdots)$, 是孤立奇点. 这是因为

$$(\sin z)'|_{z=k\pi} = \cos z\,|_{z=k\pi} = (-1)^k \neq 0,$$

所以 $z = k\pi$ 是 $\sin z$ 的一级零点, 是 $\frac{1}{\sin z}$ 的一级极点.

例 .3

(思考题) 问 $z=0$ 是 $\frac{\sinh z}{z^3}$ 的几级极点?

解:

$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\ e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)^n}{n!},\ e^{-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!},$$

$$e^z-e^{-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)^n-(-z)^n}{2n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\frac{\sinh z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2(n-1)}.$$

$z=0$ 是 $\frac{\sinh z}{z^3}$ 的 2 级极点.

注意: 不能以函数的表面形式给出一点的奇点阶数是几阶奇点的结论.

例 .4

求 $\frac{1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点, 如果是极点, 指出它的级数.

解: 由于

$$\frac{1}{z^3-z^2-z+1}=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2},$$

所以 $z=-1$ 是函数的一级极点; $z=1$ 是函数的二级极点.

目录

本性奇点

定义 .5

(本性奇点) 如果 $f(z)$ 展开成的罗朗级数所含 $z-z_0$ 的负幂项有无限多项, 即 $f(z)=\cdots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots+\frac{c_1}{z-z_0}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

例 .1

$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots$, 所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

判别方法: 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的本性奇点, 则必有 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$不存在 (也不等于 ∞).

例 .2

$z=0$ 为 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点，$\lim\limits_{z\to 0^-} e^{\frac{1}{z}}=0$，$\lim\limits_{z\to 0^+} e^{\frac{1}{z}}=\infty$，所以 $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ 不存在.

定义 .6

设函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的 (去心) 邻域 $R<|z|<+\infty$ 内解析, 则称点 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

环域的变换

作变换 $\zeta=\frac{1}{z}, f(z)=f(\frac{1}{\zeta})=g(\zeta)$, 并规定变换 ζ 把 z 平面上的无穷远点 $z=\infty$ 映射成 ζ 平面上的原点 $\zeta=0$, 将 z 平面上的区域 $R<|z|<+\infty$ 映射成 ζ 平面上的区域 $0<|\zeta|<\frac{1}{R}$.

$\zeta \equiv 0$ 是 $g(\zeta)$ 的孤立奇点

显然, $g(\zeta)$ 在邻域 $0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$ 内解析, 所以 $\zeta = 0$ 是 $g(\zeta)$ 的孤立奇点.

规定

如果 $\zeta = 0$ 是 $g(\zeta)$ 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点, 那么点 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点、m 阶极点或本性奇点.

由于 $f(z)$ 在 $R < |z| < \infty$ 内解析, 故可以展开成罗朗级数

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \end{aligned} \tag{1}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{2}$$

其中 C 为在圆环域 $R < |z| < \infty$ 内绕原点的任一条正向简单闭曲线.

对应地, $g(\zeta)$ 在环域 $0<|\zeta|<\frac{1}{R}$ 内解析, 所以 $g(\zeta)$ 展开成罗朗级数

$$g(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n}+c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\zeta^{-n}. \tag{3}$$

由公式 (3) 中的级数, 对于下列情形

a) 不含负幂项, 则 $\zeta=0$ 就是 $g(\zeta)$ 的可去奇点,

b) 含有有限多的负幂项, 且 ζ^{-m} 为最高负幂, 则 $\zeta=0$ 就是 $g(\zeta)$ 的 m 阶极点,

c) 含有无限多的负幂项, 则 $\zeta=0$ 就是 $g(\zeta)$ 的本性奇点.

相应地在公式(1)中的级数,

a) 不含正幂项, 那么 $z = \infty$ 就是 $f(z)$ 的可去奇点,

b) 含有有限多的正幂项, 且 z^m 为最高正幂, 那么 $z = \infty$ 就是 $f(z)$ 的 m 阶极点,

c) 含有无限多的正幂项, 那么 $z = \infty$ 就是 $f(z)$ 的本性奇点.

例 .3

函数 $f(z)=\frac{z}{1+z}$ 在环域 $1<|z|<\infty$ 内可以展开成

$$f(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{z^n}+\cdots.$$

$$g(\zeta)=\frac{1}{1+\zeta}=1-\zeta+\zeta^2-\zeta^3+\cdots+(-1)^n\zeta^n+\cdots,\zeta=\frac{1}{z}.$$

$g(\zeta)$ 有无穷多项正幂项, 即 $\zeta=0$ 为 $g(\zeta)$ 的可去奇点, 也即 $f(z)$ 有无穷多项负幂项, 所以 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

例 .4

函数 $f(z) = z + \frac{1}{z}$, 含有正幂项, 且 z 为最高正幂项, 所以 ∞ 为它的一级极点.

例 .5

函数 $\sin z$ 的展开式:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

含有 z 的无穷多项的正幂项, 所以 ∞ 是它的本性奇点.

例 .6

说出函数 $f(z)=z+e^{\frac{1}{z}}$ 的所有奇点及其类型.

解: 函数 $f(z)=z+e^{\frac{1}{z}}$ 的奇点是 $z=0, z=\infty$, 且

$$f(z)=z+e^{\frac{1}{z}}=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}\underline{\underline{\zeta=\frac{1}{z}}}\frac{1}{\zeta}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\zeta^n,$$

$z=\infty$ 是一级极点, $z=0$ 是本性奇点.

例 .7

函数 $f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有些什么类型的奇点? 如果是极点, 指出它的级数.

解: 函数 $f(z)$ 除点 $z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 外, 在 $|z|<+\infty$ 内解析.

因为 $(\sin\pi z)'=\cos\pi z$ 在 $z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 处均不为 0, 所以这些点都是 $\sin\pi z$ 的一级零点, 故这些点中除 $1,-1,2$ 外, 都是 $f(z)$ 的三级极点.

因为 $z^2-1=(z-1)(z+1)$, 以 1 和 -1 为一级零点, 所以 1 和 -1 是 $f(z)$ 的二级极点.

当 $z=2$ 时, 因为 $\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin \pi z)^3} = \frac{3}{\pi^3}$, $z=2$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

当 $z=\infty$ 时, 因为

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{(1-\zeta^2)(1-2\zeta)^3}{\zeta^5 \sin^3 \frac{\pi}{\zeta}},$$

∞ 点对于 $f(z)$ 的奇点情况

$\zeta_n = \frac{1}{n}$ 使 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的分母为 0, $\zeta_n = \frac{1}{n}$ 为 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的极点. $\zeta = 1, 1/2 \Leftrightarrow z = 1, 2$, 前面已讨论过其极点情况. 当 $n>2, n\to\infty$ 时, $\zeta_n \to 0$, 故 $\zeta=0$ 不是 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的孤立奇点. 所以 $z=\infty$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点.

例 .8

确定 $f(z)=\dfrac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$ 的孤立奇点的类型.

解: $z=0$ 是分母 $z^3(e^{z^3}-1)=z^3\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{3n}}{n!}$ 的 6 级零点, 也即函数的 6 级极点.

目录

理解孤立奇点的概念及其分类; 掌握可去奇点、极点与本性奇点的特征; 熟悉零点与极点的关系.

1、教材习题—习题五 P183: 1 1)、4)、7)、8)、9); 3; 4; 8; 9 1)、2)、3)、6); 11 2); 12 2); 13 1)、3)、4)、5).