复变函数

复数项级数与复函数项级数

主讲: 赵国亮

内蒙古大学电子信息工程学院

November 25, 2020

目录

目录

定义 .1

留数的概念 设函数 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < R$ 环域内解析，点 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，C 是任意正向圆周 $|z - z_0| = \rho < R$，称积分值 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ 为函数 $f(z)$ 在点 $z = z_0$ 处的留数，记为 $\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right]$，或简记为 $\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z)$，或 $\mathrm{Res}f(z_0)$。留数又称为残数.

函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的留数即为罗朗级数 $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 展开式中 $(z - z_0)^{-1}$ 的系数 c_{-1}.

如果点 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 因为在环域 $0 < |z - z_0| < R$ 内, 环域内积分 $\int_C f(z)dz$ 一般不为零, 所以有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

且

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta.$$

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n dz \\
&= \oint_C \Big[\cdots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \cdots \\
&\qquad + c_n(z-z_0)^n + \cdots\Big] dz \\
&= \oint_C \frac{c_{-1}}{z-z_0} dz = 2\pi i c_{-1},
\end{aligned}
$$

由于 $c_{-n}, n \geq 2$ 和 $c_n, n \geq 0$ 是复数, 对应积分的高阶导数结果, 均在环域 $0 < |z-z_0| < R$ 内解析, 所以 $\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = c_{-1}$.

定理 .1

(留数定理) 设 C 是一条正向简单闭曲线，若函数 $f(z)$ 在 C 所围区域 D 中除去有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外均解析，则 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left[f(z), z_k\right]$. 其中 $z_k, (k = 1, 2, \cdots, n)$ 是函数 $f(z)$ 在 D 内的有限个孤立奇点.

1) $f(z)$ 在 C 上及 C 内部处处解析.

1) $f(z)$ 在 C 上及 C 内部处处解析.
2) 留数定理将沿封闭曲线 C 的积分转化为求被积函数在 C 内各孤立奇点处的留数.

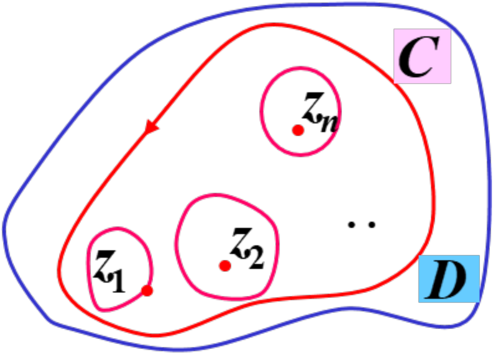

图: 正向简单闭曲线 C 围成区域.

证 由复连通区域上 (图1) 的柯西定理

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k],$$

定理得证.

1 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $c_{-1} = \text{Res}\left[f(z), z_0\right] = 0$.

1. 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $c_{-1} = \text{Res}\left[f(z), z_0\right] = 0$.
2. 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 c_{-1}.

1. 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $c_{-1} = \text{Res}\left[f(z), z_0\right] = 0$.
2. 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 c_{-1}.
3. 若 $z = z_0$ 为 $f(z)$ 的 1 阶极点, 则 $\text{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

1. 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $c_{-1} = \mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = 0$.
2. 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 c_{-1}.
3. 若 $z = z_0$ 为 $f(z)$ 的 1 阶极点, 则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.
4. 若 $z = z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] &= \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\\ &= \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}.\end{aligned}$$

证: 因为 $f(z) =$
$c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$,
两边同乘以 $(z-z_0)^m$, 得

$$\begin{aligned}(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots \\ + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \cdots\ ,\end{aligned}$$

再对两边求 $m-1$ 阶导数, 得

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!c_{-1} + \{z-z_0\text{的正幂项}\},$$

再令 $z \to z_0$, 取极限, 则可得

$$c_{-1} = \mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

例 .1

求函数 $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ 在 $z=1$ 和 $z=-1$ 处的留数.

解: $z=1$ 为 $f(z)$ 的一阶极点, $z=-1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点. 由留数计算法则

$$\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\cdot\frac{z}{(z-1)(z^2+1)^2}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[f(z),-1\right]&=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\cdot\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right]\\&=\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\lim_{z\to -1}\frac{-1}{(z-1)^2}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

例 .2

计算积分 $I = \oint_{|z|=n} \tan \pi z \, dz, \; n \in \mathbb{Z}$.

解: 因为 $f(z) = \tan \pi z = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}, z = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 为其一阶极点, 所以

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[f(z), k + \frac{1}{2}\right] &= \frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\Big|_{z=k+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sin(\pi z)}{-\pi \sin(\pi z)}\Big|_{z=k+\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{\pi}.
\end{aligned}
$$

由留数定理得

$$I = \oint_C \tan \pi z dz = 2\pi i \sum_{\left|k+\frac{1}{2}\right|<n} \mathrm{Res}\left[f(z), k + \frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\pi i \cdot \left(-\frac{2n}{\pi}\right) = -4ni.$$

例 .3

$I = \oint_C \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z} dz$, 其中 C 为正向圆周, $|z| = 2$.

解: 因为 $|z| = 2$, 由 $\sin z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z = \frac{\pi}{4}$ 为 $f(z)$ 的一阶极点, 由此

$$\mathrm{Res}\left[f(z), \frac{\pi}{4}\right] = \frac{z}{(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z)'} = \frac{z}{-\cos z}\bigg|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \Big/ -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

所以 $\oint_C \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z} dz = -2\pi i \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi^2}{\sqrt{2}} i.$

例 .4

求 $f(z) = \frac{e^z}{z^n}$ 在 $z = 0$ 的留数.

因为 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶极点, 所以

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^n}, 0\right] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^n \cdot \frac{e^z}{z^n}\right) = \frac{1}{(n-1)!}.$$

若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般用罗朗展开, 求出 c_{-1}.

例 .5

$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 的留数.

解: 如果利用洛朗展开式求 c_{-1} 较方便:

$$\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}\left[z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\right]=\frac{z^{-3}}{3!}-\frac{z^{-1}}{5!}+\cdots,$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=c_{-1}=-\frac{1}{5!}.$$

解:

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = 0,$$

$z = 0$ 是 $z - \sin z$ 的三级零点, 所以 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的三级极点. 由规则 III 得

$$\mathrm{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 \cdot \frac{z - \sin z}{z^6} \right].$$

显然, 上述方法的计算过程较复杂.

syms z; limit(diff((z - sin(z))/z^3, z, 2), z, 0)/factorial(2)

规则运用 1

在实际计算中应灵活运用计算规则. 如 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 级极点, 当 m 较大而导数又难以计算时, 可直接展开洛朗级数来求 c_{-1} 来计算留数.

规则运用 2

在应用规则II 时, 为了计算方便一般不要将 m 取得比实际的级数高. 但有时把 m 取得比实际的级数高反而使计算方便. 如上例取 $m=6$, 留数的计算方式如下

$$\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}\left[z^6\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right]=-\frac{1}{5!}.$$

```
syms z; limit(diff(z - sin(z),z,5), z, 0)/factorial(5)
```

例 .6

$f(z)=\frac{e^z-1}{z^5}$ 在 $z=0$ 的留数.

解: $z=0$ 是 $f(z)$ 的四级极点, 在 $0<|z|<+\infty$ 内将 $f(z)$ 展成洛朗级数:

$$\begin{aligned}\frac{e^z-1}{z^5}&=\frac{1}{z^5}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots-1\right)\\&=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!}+\frac{z}{6!}+\cdots,\end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}.$$

例 .7

计算积分 $\oint\limits_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$, C 为正向圆周: $|z|=2$.

解: $z=0$ 为一级极点, $z=1$ 为二级极点,

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),1]&=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]\\&=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right)\\&=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0.\end{aligned}$$

所以

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz = 2\pi i\left\{\text{Res}[f(z),0]+\text{Res}[f(z),1]\right\}$$

$$= 2\pi i(1+0) = 2\pi i.$$

例 .8

计算积分 $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz$, C 为正向圆周:$|z|=2$.

解: 由于 $f(z)=\frac{ze^z}{z^2-1}$ 有两个一级极点 ±1, 而这两个极点都在圆周 $|z|=2$ 内, 所以

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz = 2\pi i\{\text{Res}[f(z),1]+\text{Res}[f(z),-1]\},$$

由规则 II, 得

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{ze^z}{z^2-1}(z-1)=\lim_{z\to 1}\frac{ze^z}{z+1}=\frac{e}{2},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}\frac{ze^z}{z^2-1}(z+1)=\lim_{z\to -1}\frac{ze^z}{z-1}=\frac{e^{-1}}{2}.$$

因此

$$\oint_C\frac{ze^z}{z^2-1}dz=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]\}$$

$$=2\pi i\left(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right)=2\pi i\cosh 1.$$

另法

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{ze^z}{2z}\Big|_{z=1}=\frac{e}{2},$$
$$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\frac{ze^z}{2z}\Big|_{z=-1}=\frac{e^{-1}}{2}.$$

$$\oint_C\frac{ze^z}{z^2-1}dz=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]\}$$
$$=2\pi i\left(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right)=2\pi i\cosh 1.$$

例 .9

计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$, C 为正向圆周: $|z|=2$.

解: 被积函数 $f(z)=\frac{z}{z^4-1}$ 有四个一级极点 $\pm1, \pm i$ 都在圆周 $|z|=2$ 内,所以

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz &= \oint_C \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)}dz \\ &= 2\pi i\,\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1] \\ &\quad +\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}\end{aligned}$$

由计算规则 V, $\frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4z^2}$, 故

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz = 2\pi i\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right\}=0.$$

目录

定理 .2

设函数 $f(z)$ 在圆环 $R < |z| < \infty$ 内解析, C 为圆环内绕原点的任何一条正向简单闭曲线, 则函数 $f(z)$ 在无穷远点的留数 $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz = -c_{-1}$.

注意积分路线取顺时针方向.

规则VI: $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\mathrm{Res}\left[f(\frac{1}{z}) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$.

说明: 定理和规则 VI 提供了计算函数沿闭曲线积分的又一种方法:

$$\oint_{C^-} f(z)dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}\left[f(z), \infty\right] = -2\pi i\ \mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right].$$

在很多情况下此法更为简单.

Proof.

现取正向简单闭曲线 C 为半径足够大的正向圆周:

$$|z| = \rho, z = \frac{1}{\zeta},$$

并设 $z = \rho e^{i\theta}$, $\zeta = re^{i\phi}$. 由 $\rho e^{i\theta} = z = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{r}e^{-i\phi}$, 那么
$\rho = \frac{1}{r}$, $\theta = -\phi$. 于是有 □

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), \infty] &= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C^-} f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-2\pi}^{0} f(\rho e^{i\theta})\rho e^{i\theta} i d\theta \\
&\underline{\underline{\theta = -\phi}} \; \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right)\frac{i}{re^{i\phi}} d(-\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),\infty] &= -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right)\frac{1}{\left(re^{i\phi}\right)^2}d(re^{i\phi})\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=\frac{1}{\rho}} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}d\zeta\\ &= -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right].\end{aligned}$$

其中 $|\zeta|=\frac{1}{\rho}$ 为正向, 在 $|\zeta|=\frac{1}{\rho}$ 内除 $\zeta=0$ 外无其他奇点.

定理 .3

如果函数 f(z) 在扩充的复平面内只有有限个奇点, 那么 f(z) 在所有各奇点（包括 ∞ 点) 的留数总和必等于零. 即

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)dz=0.
\end{aligned}
$$

也即

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)dz &= -\oint_{C^-}f(z)dz=-2\pi i\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz\\
&=-2\pi i\mathrm{Res}[f(z),\infty]=2\pi i\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right].
\end{aligned}
$$

例 .1

计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz$, C 为正向圆周: $|z| = 2$.

解: 函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在正向圆周 $|z| = 2$ 的外部, 除无穷远点 ∞ 外没有其他奇点. 因此根据定理 2 与规则 IV, 有

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz = -2\pi i \text{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i \text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0 \right]$$

$$= 2\pi i \,\text{Res}\left[\frac{z}{1-z^4}, 0 \right] = 0.$$

例 .2

计算积分 $\oint_C \frac{1}{(z-1)(z-3)(z+i)^{10}}dz$, C 为正向圆周:$|z|=2$.

解: 除无穷远点 ∞ 外, 被积函数的其他奇点为 $-i, 1, 3$. $|z|=2$ 内部含有两个奇点 $-i, 1$. 因此根据上述定理, 令 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)(z+i)^{10}}dz$, 则有

$$\text{Res}[f(z),-i]+\text{Res}[f(z),1]+\text{Res}[f(z),3]+\text{Res}[f(z),\infty]=0,$$

由于 $\pm i$ 与 1 在 C 的内部, 所以从上式、留数定理与规则 IV 得到

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)dz &= 2\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(z),-i]+\mathrm{Res}[f(z),1]\right\}\\
&= -2\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\right\}\\
&= -2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]\right\}\\
&= -2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z}-3)(\frac{1}{z}+i)^{10}}\frac{1}{z^2},\right]\right\}\\
&= -2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}-\mathrm{Res}\left[\frac{-z^{10}}{(z-1)(3z-1)(1+zi)^{10}},0\right]\right\}\\
&= -\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}.
\end{aligned}
$$

目录

定义 .2

形式如 $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 的积分称为 $f(z)$ 关于曲线 C 的对数留数.

对数留数即函数 $f(z)$ 的对数的导数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$, 在 C 内孤立奇点处的留数的代数和; 函数 $f(z)$ 的零点和奇点都可能是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的奇点.

定理 .4

如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上解析且不为零, 在 C 的内部除去有限个极点以外也处处解析, 那么

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P,$$

其中, N 为 $f(z)$ 在 C 内零点的总个数, P 为 $f(z)$ 在 C 内极点的总个数, 且 C 取正向.

注意: m 级的零点或极点算作 m 个零点或极点.

对数留数的几何意义: 考察变换 $w = f(z)$,

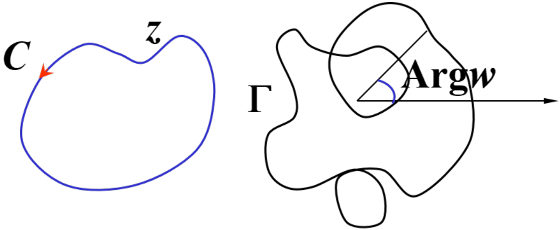

图: 对数留数的几何意义.

Γ 不一定为简单闭曲线, 其可按正向或负向绕原点若干圈. f(z) 在 C 上不为零, 则 Γ 不经过原点. 因为 $\mathrm{d\,Ln}f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}dz$, 所以

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d\,Ln}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[zC\mathrm{Ln}f(z)\right]\\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\text{当 z 绕着 C 的正向一周时}\mathrm{Ln}f(z)\text{的改变量}\right]\\
&= \frac{1}{2\pi i}\Big[\text{当 z 绕着 C 的正向一周时}\mathrm{Ln}|f(z)|\text{的改变量}\\
&\qquad + i\mathrm{Arg}\, f(z)\text{的改变量}\Big].
\end{aligned}
$$

$i\mathrm{Arg}\, f(z)$ 的该变量:
(1) 如果 Γ 不包含原点, 那么改变量为零.
(2) 如果 Γ 包含原点, 那么改变量为 $\pm 2\pi i$, 其中 k 为 w 沿 Γ 围绕远点的圈数, 逆时针为负, 顺时针为正.

结论: 对数留数的几何意义是 Γ 绕原点的回转次数 $k\,(k \in \mathbb{Z})$.
若将 z 沿 C 正向一周, f(z) 的幅角的改变量记为 $\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}f(z)$ 由定理一及对数留数的几何意义得

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\, f(z).$$

当 f(z) 在 C 内解析时, $P = 0$,

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\, f(z),$$

可计算 f(z) 在 C 内零点的个数, 此结果称为辐角原理.

定理 .5

如果 f(z) 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析, 且在 C 上不等于零, 那么 f(z) 在 C 内零点的个数等于 $\frac{1}{2\pi}$ 乘以当 z 沿 C 的正向绕行一周 f(z) 的辐角的改变量.

定理 .6

(路西定理) f(z) 和 g(z) 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析, 且在 C 上满足条件 $|f(z)| > |g(z)|$, 那么在 C 内 f(z) 与 $f(z) + g(z)$ 的零点的个数相同.

说明: 利用此定理可对两个函数的零点个数进行比较.

Proof.

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上与 C 内解析, 且在 C 上满足条件 $|f(z)| > |g(z)|$, 则在 C 上 $\left|f(z)\right| > 0$,

$$\left|f(z) + g(z)\right| \geq \left|f(z)\right| - |g(z)| > 0,$$

设 NN' : $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 在 C 内部 (在 C 内部解析) 的零点个数,

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C^+}\mathrm{Arg} f(z),$$
$$N' = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\left[f(z) + g(z)\right].$$

□

因为 C 上 $f(z) \neq 0$, 所以

$$f(z)+g(z)=f(z)\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right],$$

$$\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\,[f(z)+g(z)]=\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\,f(z)+\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\,\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]$$

令 $w=1+\frac{g(z)}{f(z)}$, 则 $|w-1|=\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1$, 即 w 在以 1 为中心的单位圆内. 因此, C 的象曲线 Γ 不围绕原点, 从而 $\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]=0$, 所以 $N=N'$. 即 C 内 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 的零点的个数相同.

例 .1

$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0\ (a_0 \neq 0)$ 有 n 个根.

Proof.

令 $f(z) = a_0z^n$, $g(z) = a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$, 则

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| = \left|\frac{a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n}{a_0z^n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{a_1}{a_0}\right| \cdot \frac{1}{|z|} + \left|\frac{a_2}{a_0}\right| \cdot \frac{1}{|z|^2} + \cdots + \left|\frac{a_n}{a_0}\right| \cdot \frac{1}{|z|^n},$$

$\square$

取 $|z| \geq R$, R 充分大使得 $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, 即在圆 $|z| = R$ 上和圆外 $f(z) > g(z)$ 成立. 由路西定理, $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 在 C 内的零点的个数相同 (在圆内的零点数为 n, 在圆内的零点数也为 n). 又因在圆上和圆外 $|f(z)| > |g(z)|, f(z) + g(z) = 0$, 在圆上和圆外无根, 所以 $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$ $(a_0 \neq 0)$ 有 n 个根.

例 .2

求函数 $f(z)=\frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ 关于圆周 $|z|=\pi$ 的对数留数.

解: 令 $1+z^2=0$ 得 $f(z)$ 有两个一级零点 $i,-i$; 令 $g(z)=1-\cos 2\pi z=0$, 得 $g(z)$ 有无穷多个零点 $z_n=n,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$, 且 $g'(n)=0$, $g''(n)=4\pi^2\neq 0$, 所以这些零点是二级零点, 从而是 $f(z)$ 的二级极点.

因为在圆周 $|z|=\pi$ 的内部有 $f(z)$ 的两个一级零点 $i,-i$ 和如下的七个二级零点 $z_0=0,1,-1,2,-2,3,-3$. 所以由对数留数公式得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2-7\times 2=-12.$$