概率论与数理统计 (Fall 2024)
习题课讲义

2024 年 9 月 14 日

聂嵘琢, 祝国隽

B01GB006Y-02/Note3

---

1. 令 $F_i(x), i=1,2,\cdots,n$ 是 n 个分布函数, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个给定的正实数, 且 $\sum_{i=1}^n a_i=1$. 求证: $F(x)=\sum_{i=1}^n a_iF_i(x)$ 是分布函数.

Ans: 由于 $F_i(x), i=1,2,\cdots,n$ 是分布函数, 则对 $\forall i=1,2,\cdots,n$, 有

(a) $0\leq F_i(x)\leq 1, \lim\limits_{x\rightarrow-\infty}F_i(x)=0, \lim\limits_{x\rightarrow+\infty}F_i(x)=1$;

(b) $\lim\limits_{x\rightarrow x_0^+}F_i(x)=F_i\left(x_0\right)$

(c) $\forall x_1<x_2, F_i\left(x_1\right)\leq F_i\left(x_2\right)$.

那么,

(1) $F(x)=\sum_{i=1}^n a_iF_i(x)\leq\sum_{i=1}^n a_i\cdot\max_{1\leq i\leq n}\left\{F_i(x)\right\}=\max_{1\leq i\leq n}\left\{F_i(x)\right\}\leq 1$,

$$F(x)=\sum_{i=1}^n a_iF_i(x)\geq\sum_{i=1}^n a_i\cdot\min_{1\leq i\leq n}\left\{F_i(x)\right\}=\min_{1\leq i\leq n}\left\{F_i(x)\right\}\geq 0$$

且 $\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}F(x)=0, \lim\limits_{x\rightarrow+\infty}F(x)=1$. 从而 $F(x)$ 满足有界性.

(2) $\forall x_1<x_2$, 由于 a_i 是正实数, 故 $a_iF_i\left(x_1\right)\leq a_iF_i\left(x_2\right)$.

从而 $F\left(x_1\right)=\sum_{i=1}^n a_iF_i\left(x_1\right)\leq\sum_{i=1}^n a_iF_i\left(x_2\right)=F\left(x_2\right)$.

因此 $F(x)$ 满足单调非降性.

(3) $\lim\limits_{x\rightarrow x_0^+}F(x)=\lim\limits_{x\rightarrow x_0^+}\sum\limits_{i=1}^n a_iF_i(x)=\sum\limits_{i=1}^n a_i\lim\limits_{x\rightarrow x_0^+}F_i(x)=\sum\limits_{i=1}^n a_iF_i\left(x_0\right)=F\left(x_0\right)$

则 $F(x)$ 满足右连续性.

2. 一篮球运动员练习投三分球, 设他命中三分的概率为 0.25 . 记他首次命中 3 分时已

经投篮的次数为 X. 求:(1) X 的概率函数; (2) X 取偶数的概率; (3) $P(X>3)$.

Ans: (1) 在首次命中三分球时已经投篮次数 X 的取值为 $1,2,\cdots$. 则

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p=\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\times\frac{1}{4},\quad k=1,2,\cdots.$$

(2)

$$\begin{aligned}P(X\text{为偶数})&=P(X=2)+P(X=4)+\dots\\&=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots\right]\\&=\frac{1}{3}\times\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}}{1-\frac{9}{16}}-1\right]\\&=\frac{3}{7}.\end{aligned}$$

有的同学认为 $P(X\text{为偶数})=P(X\text{为奇数})$, 为什么？

(3)

$$\begin{aligned}P(X>3)&=1-P(X\le 3)\\&=1-[P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]\\&=1-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]\\&=\frac{27}{64}\end{aligned}$$

3. 考察二项分布, 概率函数为 $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. 求证:

(1). 当 $np\geqslant 1$ 时, 概率函数关于 k 先增后降且当 $k=\lfloor np\rfloor$ 或 $k=\lfloor np\rfloor+1$ 时, 概率函数达最大值, 其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示向下取整;

(2). 当 $p\leqslant 1/(n+1)$ 时, 概率函数关于 k 非增;

(3). 当 $p\geqslant 1-1/(n+1)$ 时, 概率函数关于 k 非降.

Ans:

$$
\begin{aligned}
&P(X=k)-P(X=k-1)\\
&\qquad=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}-\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}\\
&\qquad=\frac{n!}{k!(n-k+1)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}[(n-k+1)p-k(1-p)]\\
&\qquad=\frac{n!}{k!(n-k+1)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}(np+p-k).\quad k=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

只需看 $np+p-k$ 是大于 0 是小于 0 .

(1) 当 $np\ge 1$ 时, 若 $k<np+p$, 则 $P(X=k)>P(X=k-1)$, 概率函数单调递增; 若 $k>np+p$, 则 $P(X=k)<P(X=k-1)$, 概率函数单调递减. 故二项分布的概率函数值随 k 先增后减. 由于 $\lfloor np\rfloor\le np+p\le\lfloor np\rfloor+1$, 其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 为向下取. 从而, 当 $k=\lfloor np\rfloor$ 或 $\lfloor np\rfloor+1$ 时, 概率函数有最大值.

(2) 当 $p\le\dfrac{1}{n+1}$ 时, $np+p\le 1$, 则对任意 $k=1,2,\cdots,n$, 均有 $P(X=k)\le P(X=k-1)$, 即概率函数关于 k 非增.

(3) 当 $p\ge 1-\dfrac{1}{n+1}$ 时, $np+p\ge n$, 则对任意 $k=1,2,\cdots,n$, 均有 $P(X=k)\ge P(X=k-1)$, 即概率函数关于 k 非降.

4. 考察 Poisson 分布, 概率函数为 $\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. 求证:

(1). 当 $\lambda>1$ 时, 概率函数关于 k 先增后降且当 $k=\lfloor\lambda\rfloor$ 达到最大值;

(2). 当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时, 概率函数关于 k 非增.

Ans:

$$
\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big/\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\frac{\lambda}{k},k=1,2,\cdots.
$$

比较 $\dfrac{\lambda}{k}$ 是大于 1 还是小于 1 .

(1). 当 $\lambda>1$ 时, 若 $k<\lambda$, 则 $\dfrac{\lambda}{k}>1$, 即 $P(X=k)>P(X=k-1)$, 概率函数单调递增; 若 $k>\lambda$, 则 $\dfrac{\lambda}{k}<1$, 即 $P(X=k)<P(X=k-1)$, 概率函数单调递减, 从而概率函数关于 k 先增后降.

当 $k=\lfloor\lambda\rfloor$ 时, $\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\dfrac{\lambda}{\lfloor\lambda\rfloor}\geq 1$;

当 $k=\lfloor\lambda\rfloor+1$ 时, $\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\dfrac{\lambda}{\lfloor\lambda\rfloor+1}<1$.

故 $k=\lfloor\lambda\rfloor$ 时, 概率函数有最大值.

(2) 当 $0<\lambda\leq 1$ 时, 对 $\forall k=1,2,\cdots,0<\dfrac{\lambda}{k}\leq 1$, 即 $P(X=k)\leq P(X=k-1)$, 概率函数关于 k 非增.

5. 令 $F_1(x),F_2(x)$ 分别是两个连续型随机变量的分布函数, 其密度函数分别为 $f_1(x),f_2(x)$. 求证: $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 是某个随机变量的密度函数.

Ans: 由于 $f_1(x),f_2(x)\geq 0, 0\leq F_1(x),F_2(x)\leq 1$, 故 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\geq 0$, 满足非负性. 另外,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]\,dx&=\int_{-\infty}^{\infty}d\left(F_1(x)F_2(x)\right)\\&=\lim_{x\to\infty}F_1(x)F_2(x)-\lim_{x\to-\infty}F_1(x)F_2(x)\\&=1-0=1\end{aligned}$$

从而, $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 是某个随机变量的密度函数.

6. 令连续型随机变量 X 的分布函数和密度函数分别为 $F(x)$ 和 $f(x)$. 求证:

(1) 若 $f(x)$ 关于原点对称, 则 $P(X\leqslant -a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, a\in\mathcal{R}$;

(2) 若 $f(x)$ 关于某点 μ 对称, 则 $F(\mu-x)+F(\mu+x)=1, x\in\mathcal{R}$.

Ans: 证明: (1) 若 $f(x)$ 关于原点对称, 则 $f(-x)=f(x)$. 从而, $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\int_0^{\infty}f(x)dx=1$, 可得 $\int_0^{\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$. 于是,

$$\begin{aligned}F(-a)=P(X\leq -a)&=\int_{-\infty}^{-a}f(t)dt=\int_a^{\infty}f(x)dx\quad(\text{令 } x=-t)\\&=\int_0^{\infty}f(x)dx-\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx\end{aligned}$$

(2) 若 $f(x)$ 关于 μ 对称, 则 $f(\mu-x)=f(\mu+x)$. 有

$$\begin{aligned}
F(\mu-x)=P(X\le\mu-x)&=\int_{-\infty}^{\mu-x}f(t)dt\\
&=-\int_{\infty}^{\mu-(\mu-x)}f(\mu-y)dy\quad(\text{令}y=\mu-t,\text{则}t=\mu-y)\\
&=\int_{x}^{\infty}f(\mu-y)dy\quad(\text{由}f(x)\text{关于}\mu\text{对称})\\
&=\int_{x}^{\infty}f(\mu+y)dy\quad(\text{令}z=\mu+y,\text{则}y=z-\mu)\\
&=\int_{\mu+x}^{\infty}f(z)dz\\
&=1-F(\mu+x),
\end{aligned}$$

即, $F(\mu-x)+F(\mu+x)=1$.

以下是课外补充资料, 参考宗语轩同学 (USTC) 的习题课讲义

2 专题选讲

2.1 随机变量与分布函数

定义 2.1. $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}), X:\Omega\to\mathbb{R}$, 若 $\forall x\in\mathbb{R}$ 有 $\{\omega\in\Omega: X(\omega)\le x\}\in\mathcal{F}$, 则称 X 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的一个随机变量.

注. 一般用 $\{X\le x\}$ 表示 $\{\omega\in\Omega: X(\omega)\le x\}$, 但是我们不能 "忘记" 样本空间.

定义 2.2. 设 X 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上随机变量, 则称函数 $F_X(x)=\mathbb{P}(\{X\le x\})$ 为 X 的(概率) 分布函数.

区分随机变量 & 分布函数: 若已知随机变量, 我们必然能得到其分布函数. 反之存在性也满足 (见后), 但不能唯一确定! **分布函数会 "忘记" 样本空间!** 下面一个简单的例子即可说明:

例 2.1. 掷一枚均匀硬币.$\Omega=\{H,T\}$, 随机变量 X,Y 满足 $X(H)=1, X(T)=-1$, $Y(H)=-1, Y(T)=1$. 我们有

$$F_X(x)=F_Y(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

但是 $X\neq Y$.

回顾一下分布函数的性质:

引理 2.1. 设 X 是随机变量, $F(x)$ 为其分布函数, 则有

(1) 单调递增: 若 $x<y$, 则 $F(x)\le F(y)$,

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$,

(3) 右连续: $F(x+0)=F(x)$.

事实上, 满足上述三条引理的一元函数称为分布函数 $F(x)$, 可以找到一个概率空间及随机变量 X, 使得 X 的分布函数是 $F(x)$.

$X\sim U(0,1)$((0,1) 上均匀分布), 当分布函数 F 严格递增时, $Y=F^{-1}(X)$ 有分布函数 F.

$$\mathbb{P}(Y\le y)=\mathbb{P}(F^{-1}(X)\le y)=\mathbb{P}(X\le F(y))\xlongequal{F(\mathbb{R})\subseteq(0,1)}F(y)$$

更一般地, 对分布函数 $F(x)$, 定义

$$F^{-1}(y)=\sup\{x\mid F(x)<y\},\ y\in(0,1)$$

显然 $F^{-1}(y)$ 单调递增, 且我们有如下事实: 设 F 为分布函数, $X\sim U(0,1)$, 则 $Y=F^{-1}(X)$ 的分布函数为 F.

问题: $\mathbb{P}(F^{-1}(X)\le y)\overset{?}{=}\mathbb{P}(X\le F(y))$

提示. 只需验证 $F^{-1}(y) > x \iff y > F(x)$.

$\Longrightarrow$: $\exists x_0$, 使得 $x < x_0 < F^{-1}(y)$. 利用 $F^{-1}(y)$ 上确界的定义知,

$$x_0 \in \{x \mid F(x) < y\}.$$

再利用 F 的单调性知, $F(x) \leqslant F(x_0) < y$.

$\Longleftarrow$: 利用 F 的右连续性知, $\exists \delta > 0$, 使得

$$y > F(x+\delta).$$

再利用 F^{-1} 的定义知, $F^{-1}(y) \geqslant x + \delta > x$.

注. 此结论表明均匀分布可用来产生其他分布, 在随机模拟中相当重要.

蒙特卡洛模拟: $g : [0,1] \to [0,1]$ 连续函数, 要计算 $I = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$, 其中 (X, Y) 为 $[0,1]\times[0,1]$ 上均匀分布, $A = \{(x,y) : 0 \le y \le g(x), x \in [0,1]\}$. 向 $[0,1]^2$ 上随机投点 N 次, 落入 A 的次数记为 N_A, 即 $Y \leqslant g(x)$ 时 (X,Y) “成功” . 频率稳定性建议:

$$\frac{N_A}{N} \to I = \mathbb{P}(A).$$

例 2.2 (**Buffon 问题**)**.** 平面上有间距为 2 平行线, 投长为 1 的针, 试求针与线相交的概率?

解. x 表示针的中点与最近一条平行线的距离, θ 表示针与线夹角, 明显

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad G = \{(\theta, x) : \theta \in [0,\pi], x \in [0,1]\}$$

A 表示针与线相交: $A := \left\{(\theta, x) \in G : x \le \frac{1}{2}\sin\theta\right\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|G|} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{2}\sin\theta} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}$$

□

定义 2.3. 以连续型为例. 设随机向量 (X,Y) 联合密度 $f(x,y)$, 则 X 的边缘密度:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

边缘分布:

$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\mathrm{d}v.$$

给定 $X = x(f_X(x) > 0)$ 下 Y 的条件密度:

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}(\text{关于}y\text{构成密度函数})$$

条件分布:

$$F_{Y|X}(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)}\mathrm{d}v$$

离散型下定义类似. 由此可知, 对随机变量 X, Y, 若已知 $F_{X,Y}(x,y)$, 我们可以求得 $F_X(x), F_Y(y)$, $F_{X|Y}(x|y), F_{Y|X}(y|x)$. 反之,

$$F_X(x), F_Y(y) \nRightarrow F_{X,Y}(x,y), \quad F_X(x), F_{Y|X}(y|x) \Rightarrow F_{X,Y}(x,y).$$

注. $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \nRightarrow \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)$.

例 2.3. 二元函数

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-y}, & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ 1 - \mathrm{e}^{-y} - y\mathrm{e}^{-y}, & 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

是否为某随机向量 (X, Y) 的联合分布函数? 若是, 分别求出 X 和 Y 的分布函数; 若不是, 请说明理由.

解. $F(x,y)$ 连续且 $\lim\limits_{x,y\to-\infty} F(x,y) = 0$, $\lim\limits_{x,y\to+\infty} F(x,y) = 1$. 而

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ 0 & 0 \leqslant y \leqslant x. \end{cases}$$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \geqslant 0$. 因此 $F(x,y)$ 是一个联合分布, 并有

$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad F_Y(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-y} - y\mathrm{e}^{-y}, & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

□

2.2 离散型及期望方差

1 Bernoulli 分布 $\mathbb{P}(X=1) = p, \mathbb{P}(X=0) = 1-p$, 则

$$\mathbb{E}[X] = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p,$$

$$\mathbb{E}[X^2] = p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot 0^2 = p, \quad \Longrightarrow Var(X) = p(1-p)$$

2 二项分布 $X \sim B(n,p), \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \cdots, n$ 这里 $p \in (0,1), p+q=1$. X 服从参数为 (n,p) 的二项分布. 其中 $B(1,p)$ 即为 Bernoulli 分布.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-1-k)!} p^{k+1} q^{n-1-k}$$

$$
\begin{aligned}
&= np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k q^{n-1-k} = np \\
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2 \\
\mathbb{E}[X^2] &= np(np+q), Var(X) = npq = np(1-p)
\end{aligned}
$$

注 1. 二项分布具有**可加性**: 设 $X \sim B(M,p), Y \sim B(N,p)$ 且 X, Y 相互独立，则有 $X+Y \sim B(M+N,p)$. (对任意有限个均成立).

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k, Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{M}{k}p^k q^{M-k}\binom{N}{n-k}p^{n-k}q^{N-n+k} \\
&= p^n q^{M+N-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{M}{k}\binom{N}{n-k} \\
&= \binom{M+N}{n}p^n q^{M+N-n}.
\end{aligned}
$$

注 2. 二项分布**可分解**: $X \sim B(n,p)$ 可以分解成 n 个相互独立且参数为 p 的 Bernoulli 分布之和, 即

$$
X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \qquad X_r \text{ i.i.d } \sim B(1,p),\ r = 1, \cdots, n.
$$

因此, 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k] = n\mathbb{E}[X_1] = np, \\
Var(X) &= Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \xlongequal{\text{独立}} \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = nVar(X_1) = np(1-p).
\end{aligned}
$$

上例可知, 期望的线性性非常重要. 对于随机变量 X, Y, 有时 $X+Y$ 的分布较为复杂, 而 X 和 Y 的分布相对好入手. 转化成如下形式即可:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}F_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}F_X(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}F_Y(t)
$$

同时注意到, 期望只与分布有关. 若 X, Y 同分布, 则两者期望相同.

3 几何分布 $\quad \mathbb{P}(X=k) = pq^{k-1}, k = 1, 2, \cdots, p \in (0,1),\ p+q=1$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} \xlongequal{\text{绝对收敛}} p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}, \\
\mathbb{E}[X(X+1)] &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)pq^{k-1} \xlongequal{\text{绝对收敛}} p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{k+1}\right)'' = p\left(\frac{q^2}{1-q}\right)'' = \frac{2p}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^2}, \\
Var(X) &= \frac{1-p}{p^2}.
\end{aligned}
$$

注. 离散情况下, 几何分布 $\Longleftrightarrow$ 无记忆性.

$\Rightarrow$: 无记忆性:

$$\mathbb{P}(X=m+k \mid X>m)=\frac{\mathbb{P}(X=m+k)}{\mathbb{P}(X>m)}=\frac{pq^{m+k-1}}{q^m}=pq^{k-1}=\mathbb{P}(X=k).$$

$\Leftarrow$: 记 $p=\mathbb{P}(X=k+1 \mid X>k)$ 与 k 无关, 令 $r_k=\mathbb{P}(X>k)(r_0=1)$, 则

$$p=\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X>k)}=\frac{r_k-r_{k+1}}{r_k}.$$

解得 $r_k=(1-p)^k$. 因此 $\mathbb{P}(X=k)=r_{k-1}-r_k=p(1-p)^{k-1}=pq^{k-1}$.

4 泊松分布 $\quad X\sim P(\lambda),\mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(X=k)=\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda,$$
$$\mathbb{E}[X(X-1)]=\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)\mathbb{P}(X=k)=\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}=\lambda^2 \quad \Longrightarrow Var(X)=\lambda.$$

注 1. 泊松分布具有可加性: 设 $X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2)$ 且 X,Y 相互独立，则有 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$. (对任意有限个均成立).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n)&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k,Y=n-k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda_1)^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{(\lambda_2)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}\\&=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda_1)^k(\lambda_2)^{n-k}\\&=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n.\end{aligned}$$

注 2. 泊松分布亦可分解, 泊松分布在随机选择下具有不变性. 如下例:

泊松翻转: 掷硬币 N 次, $N\sim P(\lambda)$,$\mathbb{P}(H)=p$, 记 X,Y 为 H,T 出现次数. 则 X 与 Y 独立, 因为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=x,Y=y)&=\mathbb{P}(X=x,Y=y,N=x+y)\\&=\mathbb{P}(X=x,Y=y\mid N=x+y)\mathbb{P}(N=x+y)=\binom{x+y}{x}p^xq^y\frac{\lambda^{x+y}}{(x+y)!}e^{-\lambda}\\&=\frac{(\lambda p)^x}{x!}e^{-\lambda p}\cdot\frac{(\lambda q)^y}{y!}e^{-\lambda q}.\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{P}(X=x)=\sum_{y=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\frac{(\lambda p)^x}{x!}e^{-\lambda p},\quad \mathbb{P}(Y=y)=\frac{(\lambda q)^y}{y!}e^{-\lambda q}.$$

X 与 Y 独立, $N=X+Y$ 且有 $X\sim P(\lambda p),Y\sim P(\lambda q)$.