概率论与数理统计 (Fall 2024)
习题课讲义

2024 年 12 月 4 日

聂嵘琢, 祝国隽

B01GB006Y-02/Note12

---

1. 令总体 X 的概率函数为

$$P(X=-1)=\frac{1-\theta}{2}, P(X=0)=\frac{1}{2}, P(X=1)=\frac{\theta}{2}, 0<\theta<1.$$

记 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ iid $\sim X$.

(1) 求 θ 的无偏估计;

(2) 求 θ 的无偏估计的方差的 C-R 不等式下界.

Ans: (1) 注意到 $E(X)=-\frac{1-\theta}{2}+\frac{\theta}{2}=\theta-\frac{1}{2}$, 则可构造

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i+\frac{1}{2}$$

且

$$E\left(\hat{\theta}_1\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)+\frac{1}{2}=\theta$$

很多同学这里用最大似然估计, 也可以, 但相对来说复杂很多

(2) 下面先求 θ 的信息量.

$$\begin{aligned}
\ln f(x,\theta) &= \frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right)-\left(1-x^2\right)\ln 2+\frac{1}{2}\left(x^2+x\right)\ln\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\frac{1}{1-\theta}+\frac{1}{2}\left(x^2+x\right)\frac{1}{\theta} \\
I(\theta) &= E\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2=\left(-\frac{1}{1-\theta}\right)^2\frac{1-\theta}{2}+0\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\theta}\right)^2\frac{\theta}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\theta}+\frac{1}{\theta}\right)^2=\frac{1}{2\theta(1-\theta)}
\end{aligned}$$

θ 的无偏估计的方差的 C-R 下界为 $\dfrac{1}{nI(\theta)}=\dfrac{2\theta(1-\theta)}{n}$.

2. 令总体 X 的密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>0, g(\theta)=1/\theta$. 记 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ iid $\sim X$.

(1) 求 $g(\theta)$ 的矩估计 $\hat{g}_1(\theta)$ 和最大似然估计 $\hat{g}_2(\theta)$;

(2) $\hat{g}_2(\theta)$ 是否为无偏估计?

(3) 判断 $\hat{g}_2(\theta)$ 的方差是否达到 C-R 不等式下界.

Ans: (1). 由于 $E\left(X_1\right)=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\dfrac{\theta}{\theta+1}x^{\theta+1}\Big|_0^1=\dfrac{\theta}{\theta+1}=\dfrac{1}{1+g(\theta)}$, 令 $\bar{X}=\sum_{i=1}^n X_i$ 为样本均值, 令

$$\frac{1}{1+g(\theta)}=\bar{X},$$

则 $\hat{g}_1(\theta)=\dfrac{1}{X}-1$ 为 $g(\theta)$ 的矩估计.

考虑到, 似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^n\left(\theta X_i^{\theta-1}\right)=\theta^n\prod_{i=1}^n X_i^{\theta-1}$, 对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^n\ln X_i=-n\ln g(\theta)+\left(\frac{1}{g(\theta)}-1\right)\sum_{i=1}^n\ln X_i,$$

关于 $g(\theta)$ 求导并令其为 0 , 得

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial g(\theta)}=-\frac{n}{g(\theta)}-\frac{1}{g^2(\theta)}\sum_{i=1}^n\ln X_i=0$$

解得 $\hat{g}_2(\theta)=-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln X_i$, 是 $g(\theta)$ 的极大似然估计.

(2). 令 $Y=-\ln X$, 则

$$P(Y<y)=P(-\ln X<y)=P\left(X>e^{-y}\right)=\int_{e^{-y}}^1\theta x^{\theta-1}dx=1-e^{-\theta y},$$

从而 Y 服从指数分布 $\mathrm{Exp}(\theta)$, 也即 $Y \sim \mathrm{Exp}(\theta) = \mathrm{Gamma}(1, \theta)$, 根据 Gamma 分布的可加性, 有 $n\hat{g}_2(\theta) \sim \mathrm{Gamma}(n, \theta)$, 从而

$$E\left(n\hat{g}_2(\theta)\right) = \frac{n}{\theta}, E\left(\hat{g}_2(\theta)\right) = \frac{1}{\theta} = g(\theta),$$

则 $\hat{g}_2(\theta)$ 是无偏的.

(3). 下面求 θ 的 Fisher 信息量, 注意到 $\ln f(x;\theta) = \ln\theta + (\theta-1)\ln X$, $\dfrac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta} = \dfrac{1}{\theta} + \ln X$, $\dfrac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta} = -\dfrac{1}{\theta^2}$, 于是

$$I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}.$$

而 $g'(\theta) = -\dfrac{1}{\theta^2}$, 于是 $g(\theta)$ 的任一无偏估计的方差的 C-R 下界为

$$\frac{\left[g'(\theta)\right]^2}{nI(\theta)} = \frac{1}{n\theta^2}$$

针对 $g(\theta)$ 的极大似然估计 $\hat{g}_2(\theta)$, 由于 $n\hat{g}_2(\theta) \sim \mathrm{Gamma}(n, \theta)$, 那么

$$\mathrm{Var}\left(\hat{g}_2(\theta)\right) = \frac{n}{(n\theta)^2} = \frac{1}{n\theta^2}$$

由于其达到了 C-R 下界, 所以 $\hat{g}_2(\theta)$ 是 $g(\theta)$ 的 UMVUE.

3. 令总体 $X \sim B(1, p), 0 < p < 1$. 记 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ iid $\sim X, n \geqslant 2$. 求:

(1) 充分完备统计量;

(2) $p(1-p)$ 的 UMVUE.

Ans: (1).$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^\top$ 的联合密度函数为

$$\begin{aligned} f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) &= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)} \\ &= \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p)\right\}. \end{aligned}$$

则 $T=\sum_{i=1}^n x_i$ 是充分统计量, 同时它又是完备统计量. 从而 $T=\sum_{i=1}^n x_i$ 是充分完备统计量.

(2). 令 $\hat{g}=\hat{g}\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)=\frac{1}{2} I_{\left\{X_1+X_2=1\right\}}, E \hat{g}=p(1-p)$,

求 $E\left(\hat{g} \mid \sum_{i=1}^n X_i=t\right)=\dfrac{n \bar{X}(1-\bar{X})}{n-1}$.

$$
\begin{aligned}
E(\hat{g} \mid T=t) & =\frac{1}{2} P\left(X_1+X_2=1 \mid \sum_{i=1}^n X_i=t\right) \\
& =\frac{1}{2} \frac{P\left(X_1+X_2=1, \sum_{i=1}^n X_i=t-1\right)}{\sum_{i=1}^n X_i=t} \\
& =\frac{1}{2} \frac{P\left(X_1+X_2=1\right) P\left(\sum_{i=1}^n X_i=t-1\right)}{\sum_{i=1}^n X_i=t} \\
& =\frac{t(n-t)}{n(n-1)} .
\end{aligned}
$$

4. 令总体 X 的分布函数

$$
F(x, \theta)= \begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x^2 / \theta}, & x \geqslant 0, \\ 0, & \text {其他, }\end{cases}
$$

其中 $\theta>0$. 记 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ iid $\sim X$.

(1) 求 X 的均值和方差;

(2) 求 θ 的矩估计和最大似然估计;

(3) 最大似然估计是 θ 的相合估计吗?

Ans: (1) 密度函数为

$$
f(x, \theta)=\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{2 x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0 \\
0, & \text {其他}
\end{array} .\right.
$$

$$
\begin{aligned}
E\left(X_i\right) &= \int_0^{\infty} x \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \int_0^{\infty} x d\left(-e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right) = -\left. x e^{-\frac{x^2}{\theta}} \right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \\
&= \sqrt{\theta\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\theta/2}} e^{-\frac{x^2}{2\times\theta/2}} dx = \frac{\sqrt{\theta\pi}}{2}. \\
E\left(X_i^2\right) &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \int_0^{\infty} x^2 d\left(-e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right) = \int_0^{\infty} 2x e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \\
&= \theta \int_0^{\infty} d\left(-e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right) = \theta.
\end{aligned}
$$

则 $\operatorname{Var}\left(X_i\right) = EX_i^2 - \left(EX_i\right)^2 = \theta - \frac{\pi}{4}\theta$, 其中 $\theta \geqslant \frac{\pi}{4}$.

(2) 记 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ 为样本均值. 令 $\bar{x} = \frac{\sqrt{\theta\pi}}{2}$, 则 $\hat{\theta}_1 = \frac{4\bar{x}^2}{\pi}$ 为 θ 的矩估计. 似然函数为

$$
L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta} e^{-\frac{x_i^2}{\theta}} I_{\{x_i>0\}} = \left[\prod_{i=1}^n (2x_i)\right] \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2}.
$$

对数似然为

$$
l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln(2x_i) - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2.
$$

似然方程为

$$
\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\theta^2} = 0.
$$

解得 $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$ 为 θ 的极大似然估计.

(3) 由于 $E\left(\hat{\theta}_2\right) = E\left(X_1^2\right) = \theta. E\left(X_1^4\right) = \int_0^{\infty} x^4 \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = 2\theta^2. \operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_2\right) = \frac{1}{n}\operatorname{Var}\left(X_1^2\right) = \frac{1}{n}\left[EX_1^4 - \theta^2\right] = \frac{\theta^2}{n} \to 0 (n\to\infty)$. 从而极大似然估计 $\hat{\theta}_2$ 是 θ 的相合估计.

5. 记 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ iid $\sim U(0,\theta), \theta > 0$, 次序统计量的最大值为 $X_{(n)}$. 求证: $X_{(n)}$ 是 θ 的相合估计.

Ans: 由于 $X_{(n)}$ 的密度函数为 $f(u)=n\left(\frac{u}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}, 0<u<\theta$. 且

$$
\begin{aligned}
E\left(X_{(n)}\right)&=\int_0^\theta uf(u)du=\int_0^\theta \frac{n}{\theta^n}u^n du=\frac{n}{n+1}\theta\to\theta(n\to\infty)\\
E\left(X_{(n)}^2\right)&=\int_0^\theta u^2f(u)du=\int_0^\theta \frac{n}{\theta^n}u^{n+1}du=\frac{n}{n+2}\theta^2.
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(X_{(n)}\right)&=E\left(X_{(n)}^2\right)-\left(E\left(X_{(n)}\right)\right)^2=\theta^2\left[\frac{n}{n+2}-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right]\\
&=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2\to 0(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

由定理 6.7. 有 $X_{(n)}$ 是 θ 的相合估计.

补充材料参考张伟平老师（USTC）的讲义，关于 UMVUE，主要是两种套路.

Lec6: 点估计(三)

张伟平

2011 年 3 月 24 日

1 一致最小方差无偏估计

一、引言及定义

设有一参数分布族$\mathscr{F}=\{F_\theta,\theta\in\Theta\}$,其中$\Theta$为参数空间. 设$g(\theta)$是定义在$\Theta$上的函数, $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为自总体$F_\theta$ 中抽取的简单样本, $\hat{g}(\mathbf{X})=\hat{g}(X_1,\cdots,X_n)$为$g(\theta)$ 的一个估计量, 如何评价$\hat{g}(X)$的优劣? 一般用$\hat{g}(\mathbf{X})-g(\theta)$ 作为其偏差, 为消除$\hat{g}(\mathbf{X})-g(\theta)$取值出现"$+,-$"可能抵消的影响, 一般用$(\hat{g}(\mathbf{X})-g(\theta))^2$来代替. 由于这个量是随机的, 将其平均, 即计算其均值, 以得到一个整体性的指标$E_\theta(\hat{g}(\mathbf{X})-g(\theta))^2$, 这就是估计量$\hat{g}(\mathbf{X})$的*均方误差*.

定义 1. *设$\hat{g}(\mathbf{X})$为$g(\theta)$的估计, 则称$E_\theta(\hat{g}(\mathbf{X})-g(\theta))^2$ 为$\hat{g}(\mathbf{X})$的均方误差 (Mean Square Error,简记MSE)*

设$\hat{g}_1(\mathbf{X})$和$\hat{g}_2(\mathbf{X})$为$g(\theta)$的两个不同的估计, 若

$$E_\theta\big(\hat{g}_1(\mathbf{X})-g(\theta)\big)^2\le E_\theta\big(\hat{g}_2(\mathbf{X})-g(\theta)\big)^2,\quad \text{对一切}\ \theta\in\Theta,$$

则称在MSE准则下$\hat{g}_1(\mathbf{X})$优于$\hat{g}_2(\mathbf{X})$.

若存在$\hat{g}^*(\mathbf{X})$,使得对$g(\theta)$的任一估计量$\hat{g}(\mathbf{X})$,都有

$$E_\theta\big(\hat{g}^*(\mathbf{X})-g(\theta)\big)^2\le E_\theta\big(\hat{g}(\mathbf{X})-g(\theta)\big)^2,\quad \text{对一切}\ \theta\in\Theta,$$

则称$\hat{g}^*(X)$为$g(\theta)$的一致最小均方误差估计.

可惜的是一致最小均方误差估计常不存在. 解决这个问题的办法之一, 是把最优性准则放宽一些, 使适合这种最优性准则的估计一般能存在. 从直观上想, 在一个大的估计量的类中找一致最优的估计不存在, 把估计量的类缩小, 就有可能存在一致最优的估计量. 因此我们把估计类缩小为无偏估计类来考虑. 在无偏估计类中, 估计量的*均方误差*就变为其方差. 即当$\hat{g}(\mathbf{X})$为$g(\theta)$的无偏估计时, $MSE(\hat{g}(\mathbf{X}))=D_\theta(\hat{g}(\mathbf{X}))$, 此处$D_\theta(\hat{g}(\mathbf{X}))$表示$\hat{g}(\mathbf{X})$的方差.

存在这样的情形, 对参数$g(\theta)$它的无偏估计不存在. 请看下例:

例1. *设样本$X\sim$二项分布 $b(n,p)$, n已知而p未知. 令$g(p)=1/p$,则参数$g(p)$的无偏估计不存在.*

证 采用反证法: 若不然, $g(p)$有无偏估计$\hat{g}(X)$.由于X只取$0,1,\cdots,n$这些值, 令$\hat{g}(X)$的取值用$\hat{g}(i)=a_i$表示, $i=0,1,\cdots,n$.由$\hat{g}(X)$的无偏性,应有

$$E_p(\hat{g}(X))=\sum_{i=0}^n a_i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}=1/p,\quad 0<p<1.$$

于是有

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \binom{n}{i} p^{i+1}(1-p)^{n-i} - 1 = 0, \quad 0 < p < 1.$$

但上式左端是p的$n+1$次多项式, 它最多在$(0,1)$区间有$n+1$个实根, 可无偏性要求对$(0,1)$中的任一实数p上式都成立. 这个矛盾说明$g(p)=1/p$无的偏估计不存在.

今后我们把不存在无偏估计的参数除外. 参数的无偏估计若存在, 则此参数为可估参数; 若参数函数的无偏估计存在, 则称此函数为可估函数 (Estimable function). 因此可估函数的无偏估计类是非空的.

假如可估函数的无偏估计类中的无偏估计不止一个, 怎样比较它们的优劣? 故引入下列的定义.

定义 2. *设$\mathscr{F}=\{F_\theta, \theta\in\Theta\}$是一个参数分布族, 其中$\Theta$为参数空间,$g(\theta)$为定义在$\Theta$上的可估函数. 设$\hat{g}^*(\mathbf{X})=\hat{g}^*(X_1,\cdots,X_n)$为$g(\theta)$的一个无偏估计, 若对$g(\theta)$的任一无偏估计$\hat{g}(\mathbf{X})=\hat{g}(X_1,\cdots,X_n)$,都有*

$$D_\theta(\hat{g}^*(\mathbf{X})) \le D_\theta(\hat{g}(\mathbf{X})), \quad \text{对一切}\ \theta\in\Theta,$$

则称$\hat{g}^*(\mathbf{X})$是$g(\theta)$的一致最小方差无偏估计 (Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimation, 简记为UMVUE).

对给定参数分布族, 如何寻找可估参数的UMVUE呢? 本节以下将介绍两种方法: 零无偏估计法和充分完全统计量法, 下一节的Cramer-Rao不等式法也是寻找UMVUE的一种方法.

在前面我们曾介绍过Rao-Blackwell定理, 这一定理提供了一个改进无偏估计的方法, 它在本节以下寻找UMVUE中,起到简化问题的作用. 重新表述此定理如下

定理 1 (Rao-Blackwell)**.** *设$T=T(\mathbf{X})$是一个充分统计量, 而$\hat{g}(\mathbf{X})$是$g(\theta)$ 的一个无偏估计, 则*

$$h(T)=E(\hat{g}(\mathbf{X})|T)$$

是$g(\theta)$的无偏估计, 并且

$$D_\theta(h(T)) \le D_\theta(\hat{g}(\mathbf{X})), \quad \text{一切}\ \theta\in\Theta, \tag{1.1}$$

其中等号当且仅当$P_\theta\big(\hat{g}(\mathbf{X})=h(T)\big)=1$,即$\hat{g}(\mathbf{X})=h(T)$, a.e. P_θ成立.

这个引理提供了一个改进无偏估计的方法, 即一个无偏估计$\hat{g}(\mathbf{X})$ 对充分统计量$T(\mathbf{X})$的条件期望$E\{\hat{g}(\mathbf{X})|T\}$ 将能导出一个新的无偏估计, 且它的方差不会超过原估计量$\hat{g}(\mathbf{X})$的方差. 若原估计$\hat{g}(\mathbf{X})$不是$T(\mathbf{X})$的函数, 则新的无偏估计$E(\hat{g}(\mathbf{X})|T)$一定比原估计$\hat{g}(\mathbf{X})$具有更小的方差. 这个定理还表明一致最小方差无偏估计一定是充分统计量的函数, 否则可以通过充分统计量构造出一个具有更小方差的无偏估计来.

例2. *设$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$是从两点分布族$\{b(1,p):\ 0<p<1\}$中抽取的简单样本. 显然,$X_1$是$p$的一个无偏估计, $T(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^n X_i$是$p$ 的充分统计量, 试利用$T=T(\mathbf{X})$构造一个具有比X_1方差更小的无偏估计.*

解 由引理3.4.1可知,容易构造p的一个无偏估计如下：

$$h(T)=E(X_1|T=t)=1\cdot P(X_1=1|T=t)+0\cdot P(X_1=0|T=t)$$

$$= \frac{P(X_1=1,T=t)}{P(T=t)} = \frac{P(X_1=1,X_2+\cdots+X_n=t-1)}{P(T=t)}$$
$$= \frac{p\cdot\binom{n-1}{t-1}p^{t-1}(1-p)^{n-t}}{\binom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t}} = \frac{t}{n} = \bar{x}.$$

显然样本均值$h(T)=\bar{X}$的方差为$p(1-p)/n$, 而X_1的方差为$p(1-p)$,当$n\geq 2$时$\bar{X}$的方差更小.

二、零无偏估计法

本段介绍一个一般性的定理, 用以判断某一估计量是否为UMVUE.

定理 2. 设$\hat{g}(\mathbf{X})$是$g(\theta)$的一个无偏估计, $D_\theta(\hat{g}(\mathbf{X}))<\infty$,对任何$\theta\in\Theta$. 且对任何满足条件"$E_\theta l(\mathbf{X})=0$, 对一切 $\theta\in\Theta$" 的统计量$l(\mathbf{X})$,必有

$$Cov_\theta\big(\hat{g}(\mathbf{X}),l(\mathbf{X})\big)=E_\theta\big[\hat{g}(\mathbf{X})\cdot l(\mathbf{X})\big]=0,\quad 一切\ \theta\in\Theta, \tag{1.2}$$

则$\hat{g}(\mathbf{X})$是$g(\theta)$的*UMVUE*.

从形式上看, 条件"$E_\theta l(\mathbf{X})=0$, 对一切 $\theta\in\Theta$"可解释为"$l(\mathbf{X})$ 是零的无偏估计", 由此得到求UMVUE的方法之一的名称"零无偏估计法".

此定理还可进一步加强为: 设$\hat{g}(\mathbf{X})$为$g(\theta)$的一个无偏估计, $D_\theta(\hat{g}(\mathbf{X}))<\infty$, 一切 $\theta\in\Theta$, 则$\hat{g}(\mathbf{X})$是$g(\theta)$的UMVUE的充分必要条件是: 对任何满足条件"$E_\theta l(\mathbf{X})=0$, 对一切 $\theta\in\Theta$"的统计量$l(\mathbf{X})$, 必有(1.2)成立.

证 设$\hat{g}_1(\mathbf{X})$为$g(\theta)$的任一无偏估计. 记$l(\mathbf{X})=\hat{g}_1(\mathbf{X})-\hat{g}(\mathbf{X})$ 为零的无偏估计, 由于(1.2)式成立, 因而

$$\begin{aligned}
&D_\theta\big(\hat{g}_1(\mathbf{X})\big)=D_\theta\big[\hat{g}(\mathbf{X})+l(\mathbf{X})\big]\\
&=D_\theta\big(\hat{g}(\mathbf{X})\big)+D_\theta\big(l(\mathbf{X})\big)+2Cov_\theta\big(\hat{g}(\mathbf{X}),l(\mathbf{X})\big)\\
&=D_\theta\big(\hat{g}(\mathbf{X})\big)+D_\theta\big(l(\mathbf{X})\big)\geq D_\theta\big(\hat{g}(\mathbf{X})\big).
\end{aligned}$$

另一方面, 如果$\delta=\hat{g}(X)$为$g(\theta)$的UMVUE, 则对任意的零无偏估计量$l(x)$, 令

$$\delta'=\delta+\lambda l(X)$$

则δ'仍为$g(\theta)$的无偏估计, 且

$$Var(\delta')=Var(\delta+\lambda l(X))=\lambda^2Var(l(X))+2\lambda Cov(\delta,l(X))+Var(\delta)\geq Var(\delta).$$

对所有的λ成立. 等价于

$$\lambda^2Var(l(X))+2\lambda Cov(\delta,l(X))\geq 0,\ \forall\ \lambda.$$

左边有两个根$\lambda=0$和$\lambda=-Cov(\delta,l(X))/Var(l(X))$, 推出$Cov(\delta,l(X))=0$.

这就证明了所要的结果.

从定理的内容看, 它是一个验证某个特定的估计量$\hat{g}(\mathbf{X})$为UMVUE的方法. 至于这个特定的估计$\hat{g}(\mathbf{X})$从何而来, 定理3.4.1不能提供任何帮助, 它不是UMVUE的构造性定理. $\hat{g}(\mathbf{X})$可以从直观的想法提出, 如由矩估计或极大似然估计等方法获得, 然后利用此定理验证它是否

为$g(\theta)$的UMVUE. 条件(1.2)的验证也不容易, 因为零无偏估计很多. 下面的几个例子说明, 本章前面一些例子中提到的几个常用估计, 都可以用此法验证其为UMVUE.

例 求上例中$g(p)=p$的UMVUE.

解 由上例已知$T=\sum_{i=1}^n X_i$为充分统计量, $\hat{g}(\mathbf{X})=T/n$,故只要验证它满足定理的条件. 显然$\hat{g}(\mathbf{X})$是p的无偏估计. 且$D_\theta(\hat{g}(\mathbf{X}))=p(1-p)/n<\infty$,对一切$0<p<1$.现设$l=l(T)$为任一零无偏估计, 并记$a_i=l(i)$, $i=0,1,2,\cdots,n$, 则因$T\sim b(n,p)$,故有

$$E_p l(T)=\sum_{i=0}^n a_i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}=0,\quad 0<p<1.$$

约去因子$(1-p)^n$,并记$\varphi=p/(1-p)$ (φ 取值$(0,\infty)$), 将上式改写为

$$\sum_{i=0}^n a_i\binom{n}{i}\varphi^i=0,\quad \text{一切 } 0<\varphi<\infty.$$

上式左边是φ的多项式, 要使其为0, 必有$a_i\binom{n}{i}=0$,即$a_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$.故$l(T)$在其定义域中处处为0, 因而有$l(T)\equiv 0$.从而有

$$Cov_p\big(\hat{g},l(T)\big)=E\big(\hat{g}\cdot l(T)\big)=0.$$

即定理条件成立, 故$\hat{g}(\mathbf{X})=\bar{X}=T/n$为$p$的UMVUE.

例 设$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为从指数分布$EP(\lambda)$ 中抽取的简单样本, 求总体均值$g(\lambda)=1/\lambda$的UMVUE.

解 由于在指数分布族中$T=\sum_{i=1}^n X_i$为λ的充分统计量, 则$T\sim\Gamma(n,\lambda)$,其密度函数为

$$\phi(t,\lambda)=\begin{cases}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t} & \text{当 } t>0\\ 0 & \text{当 } t\le 0,\end{cases}$$

其中$\lambda>0$.取$\hat{g}(\mathbf{X})=T/n$, 显然$E(\hat{g}(\mathbf{X}))=1/\lambda$,即$\hat{g}(\mathbf{X})$ 为$g(\lambda)=1/\lambda$的无偏估计, 且$D_\lambda(\hat{g}(\mathbf{X}))=1/(n\lambda^2)<\infty$.现设$l=l(T)$为任一零无偏估计, 故有

$$El(T)=\int_0^\infty l(t)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}dt=0,$$

即$\int_0^\infty l(t)t^{n-1}e^{-\lambda t}dt=0$.两边对$\lambda$求导得

$$\int_0^\infty l(t)t^ne^{-\lambda t}dt=0,$$

此式等价于$E_\lambda\big[T/n\cdot l(T)\big]=E_\lambda(\hat{g}\cdot l(T))=Cov_\lambda(\hat{g}\cdot l)=0$,即定理条件成立. 因此$\hat{g}(\mathbf{X})=T/n$为$g(\lambda)=1/\lambda$的UMVUE.

例 设$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为从均匀分布$U(0,\theta)$中抽取的简单样本, 求$\theta$的UMVUE.

解 由$T=T(\mathbf{X})=X_{(n)}$是参数θ的充分统计量, 又知$\hat{g}(\mathbf{X})=\frac{n+1}{n}T$是$\theta$的无偏估计, 且$D_\theta(\hat{g}(T))=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2<\infty$. 现设$l(T)$为任一零无偏估计, T的密度函数如(**??**)所示, 因此有

$$E_\theta l(T)=\int_0^\theta l(t)\cdot\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=0,\quad \text{一切 } \theta>0,$$

于是有

$$\int_0^\theta l(t)t^{n-1}dt = 0, \quad 一切\ \theta > 0.$$

将上式两边对θ 求导得$l(\theta)\theta^{n-1} = 0$, 一切 $\theta > 0$.故有$l(\theta) \equiv 0$ 对一切$\theta > 0$.可见$Cov(\hat{g}, l(T)) = E(\hat{g} \cdot l(T)) = 0$,即定理条件成立. 因此$\hat{g}(\mathbf{X}) = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$为$g(\theta) = \theta$的UMVUE.

例 设$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$为从正态分布$N(a, \sigma^2)$中抽取的简单随机样本, 求$a$和$\sigma^2$的UMVUE.

解 由$T = (T_1, T_2)$为$\theta = (a, \sigma^2)$ 的充分统计量.其中$T_1 = \bar{X}$, $T_2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 又$T_1$和$T_2$独立, 且$T_1 \sim N\left(a, \sigma^2/n\right)$, $T_2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$. 因此$(T_1, T_2)$的联合密度为

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) = &\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n(t_1-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\Big(\frac{n-1}{2}\Big)\sigma^{n-1}\right)^{-1} t_2^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{t_2}{2\sigma^2}}, \\ &当\ -\infty < t_1 < +\infty,\ t_2 > 0; \quad 其它处为\ 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

先考虑a的UMVUE, 令$\hat{g}_1(\mathbf{X}) = T_1$,显然$\hat{g}_1(\mathbf{X})$ 为$g_1(\theta) = a$的无偏估计, 且$D_\theta(\hat{g}_1(\mathbf{X})) = \sigma^2/n < \infty$.现设$l(T) = l(T_1, T_2)$为任一零无偏估计, 则有

$$E_\theta(l(T)) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty l(t_1, t_2) f_\theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0,$$

此处$-\infty < a < \infty$, $\sigma > 0$.将上式两边对a求导数, 得

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty l(t_1, t_2)(t_1 - a) \cdot t_2^{\frac{n-3}{2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\left[n(t_1-a)^2 + t_2\right] \Big\} dt_1 dt_2 = 0,$$

按(1.3),此即

$$Cov_\theta\big(\hat{g}_1, l(T)\big) = E_\theta\big(\hat{g}_1 \cdot l(T_1, T_2)\big) = 0,\ -\infty < a < +\infty,\ \sigma > 0,$$

故定理3.4.1的条件满足. 所以$\hat{g}_1(\mathbf{X}) = T_1$为$g_1(\theta) = a$的UMVUE.

同理可验证$T_2 = S^2$为$g_2(\theta) = \sigma^2$的UMVUE, 这一验证留为练习.

三、充分完全统计量法

下列定理给出的求UMVUE的方法, 即充分完全统计量法是由E.L. Lehmann和H. Scheffe给出的, 完全统计量的概念也是由他们在1950年提出的.

定理 (Lehmann-Scheffe定理) 设$T(\mathbf{X})$为一个充分完全统计量, 若$\hat{g}(T(\mathbf{X}))$为$g(\theta)$ 的一个无偏估计, 则$\hat{g}(T(\mathbf{X}))$是$g(\theta)$ 的唯一的UMVUE (唯一性是在这样的意义下: 若$\hat{g}$和$\hat{g}_1$都是$g(\theta)$的UMVUE, 则$P_\theta(\hat{g} \neq \hat{g}_1) = 0$,对一切$\theta \in \Theta$).

证 先证唯一性. 设$\hat{g}_1(T(\mathbf{X}))$为$g(\theta)$的任一无偏估计, 令$\delta(T(\mathbf{X})) = \hat{g}(T(\mathbf{X})) - \hat{g}_1(T(\mathbf{X}))$, 则$E_\theta\delta(T(\mathbf{X})) = E_\theta\hat{g}(T(\mathbf{X})) - E_\theta\hat{g}_1(T(\mathbf{X})) = 0$,对一切$\theta \in \Theta$. 由$T(\mathbf{X})$为完全统计量, 可知$\delta(T(\mathbf{X})) = 0$, $a.e.\ P_\theta$.即$\hat{g}(T(\mathbf{X})) = \hat{g}_1(T(\mathbf{X}))$, $a.e.\ P_\theta$, 故唯一性成立.

设$\varphi(\mathbf{X})$为$g(\theta)$的任一无偏估计. 令$h(T(\mathbf{X})) = E(\varphi(\mathbf{X})|T)$,由$T(\mathbf{X})$为充分统计量, 故知$h(T(\mathbf{X}))$与$\theta$无关, 因此是统计量, 可知

$$\begin{aligned} E_\theta(h(T(\mathbf{X}))) &= g(\theta), &\quad 一切\ \theta \in \Theta, \\ D_\theta(h(T(\mathbf{X}))) &\leq D_\theta(\varphi(\mathbf{X})), &\quad 一切\ \theta \in \Theta. \end{aligned}$$

由唯一性得$\hat{g}(T(\mathbf{X}))=h(T(\mathbf{X}))$, $a.e.\ P_\theta$故有

$$D_\theta(\hat{g}(T(\mathbf{X}))\le D_\theta(\varphi(\mathbf{X})),\quad \text{一切}\ \theta\in\Theta,$$

所以$\hat{g}(T(\mathbf{X}))$ 为$g(\theta)$的UMVUE, 且唯一.

推论 设样本$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$的分布为指数族

$$f(\mathbf{x},\theta)=C(\theta)\exp\Big\{\sum_{j=1}^k\theta_jT_j(\mathbf{x})\Big\}h(\mathbf{x}),\quad \theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)\in\Theta.$$

令$T(\mathbf{X})=(T_1(\mathbf{X}),\cdots,T_k(\mathbf{X}))$, 若自然参数空间$\Theta$作为$R_k$的子集有内点, 且$h(T(\mathbf{X}))$为$g(\theta)$的无偏估计, 则$h(T(\mathbf{X}))$为$g(\theta)$的唯一的UMVUE.

证 在推论的条件下, 由指数族的性质可知$T(\mathbf{X})$为充分完全统计量. 故由*Lehmann-Scheffe*定理 (简记为L-S定理), 得知$h(T(\mathbf{X}))$为$g(\theta)$的唯一的UMVUE.

例 证明两点分布的p的无偏估计$\hat{g}(\mathbf{X})=T/n=\bar{X}$ 为p的UMVUE.

证 由因子分解定理可知$T(\mathbf{X})=\sum\limits_{i=1}^n X_i$为两点分布$b(1,p)$中参数$p$ 的充分统计量, 由例2.8.1知$T(\mathbf{X})$也是完全统计量, 故$\hat{g}(\mathbf{X})=T/n=\bar{X}$是充分完全统计量$T(\mathbf{X})$的函数, 且$E_p\,\hat{g}(\mathbf{X})=p$,对$0<p<1$. 因此由L-S定理可知$\hat{g}(\mathbf{X})$为$p$的唯一的UMVUE.

例 在上例中, 已知$T=\sum\limits_{i=1}^n X_i$服从二项分布$b(n,p)$, 且$T(\mathbf{X})$为充分完全统计量, 求$g(p)=p(1-p)$的UMVUE.

解 设$\delta(T)$为$g(p)=p(1-p)$的一个无偏估计, 要导出$\delta(T)$的表达式. 按无偏估计的定义及$T\sim b(n,p)$,可得

$$\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}\delta(t)p^t(1-p)^{n-t}=p(1-p),\quad \text{一切}\ 0<p<1.$$

令$\rho=p/(1-p)$, 故有$p=\rho/(1+\rho)$, $1-p=1/(1+\rho)$,将它们代入上式得

$$\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}\delta(t)\rho^t=\rho(1+\rho)^{n-2},\quad 0<\rho<\infty.$$

将$\rho(1+\rho)^{n-2}$ 展开得$\rho(1+\rho)=\sum\limits_{l=0}^{n-2}\binom{n-2}{l}\rho^{l+1}=\sum\limits_{t=1}^{n-1}\binom{n-2}{t-1}\rho^t$,将其代入上式右边得

$$\sum_{t=0}^n\binom{n}{t}\delta(t)\rho^t=\sum_{t=1}^{n-1}\binom{n-2}{t-1}\rho^t,\quad 0<\rho<\infty.$$

上式两边为ρ的多项式, 比较其系数得

$$\begin{aligned}&\delta(t)=0,\quad \text{当}\ t=0,n;\\ &\delta(t)=\binom{n-2}{t-1}\Big/\binom{n}{t}=\frac{t(n-t)}{n(n-1)},\quad \text{当}\ t=1,2,\cdots,n-1.\end{aligned}$$

综合上述两式得

$$\delta(T)=\frac{T(n-T)}{n(n-1)},\quad t=0,1,\cdots,n$$

为$g(p) = p(1-p)$的无偏估计，它又是充分完全统计量$T = \sum_{i=1}^n X_i$的函数，由L-S定理可知$\delta(T)$为$g(p)$的UMVUE.

例 设$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$为从Poisson分布$P(\lambda)$ 中抽取的简单随机样本, 求 (1) $g_1(\lambda) = \lambda$; (2) $g_2(\lambda) = \lambda^r$, $r > 0$ 为自然数; (3) $g_3(\lambda) = P_\lambda(X_1 = x)$的UMVUE.

解 由§2.7和§2.8可知$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ 为关于Poisson分布的充分完全统计量.

(1) 令$\hat{g}_1(T) = T(\mathbf{X})/n$, $E(\hat{g}_1(T)) = E(\bar{X}) = \lambda$, 故$\hat{g}_1(T)$是分完全统计量$T$的函数，且是$\lambda$的无偏估计,故由L-S定理可知$\hat{g}_1(T)$是$\lambda$的UMVUE.

(2) 由于$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim P(n\lambda)$,令$\delta(T)$为$g_2(\lambda) = \lambda^r$的无偏估计, 故有$E_\lambda\delta(T) = g_2(\lambda)$,即

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta(t) \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^t}{t!} = \lambda^r.$$

此式等价于

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta(t) \frac{n^t \lambda^t}{t!} = \lambda^r e^{n\lambda}.$$

将上式右边作展开得

$$\lambda^r e^{n\lambda} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n^l \lambda^{l+r}}{l!} = \sum_{t=r}^{\infty} \frac{n^{t-r}\lambda^t}{(t-r)!}.$$

将其代入上式右边得

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta(t) \frac{n^t \lambda^t}{t!} = \sum_{t=r}^{\infty} \frac{n^{t-r}\lambda^t}{(t-r)!}.$$

上述等式两边是λ的幂级数, 比较其系数得

$$\begin{aligned} &\delta(t) = 0, \quad \text{当}\ t = 0, 1, \cdots, r-1, \\ &\delta(t) = \frac{t!\, n^{t-r}}{(t-r)! n^t} = \frac{t(t-1)\cdots(t-r+1)}{n^r}, \quad \text{当}\ t = r, r+1, \cdots \end{aligned}$$

综合上述两式得

$$\delta(T) = \frac{T(T-1)\cdots(T-r+1)}{n^r}, \quad T = 0, 1, 2, \cdots$$

为$g_2(\lambda) = \lambda^r$的无偏估计, $\delta(T)$是充分完全统计量T的函数, 故由L-S定理可知$\delta(T)$为$g_2(\lambda)$的UMVUE.

(3) 由$P_\lambda(X_1 = x) = e^{-\lambda}\lambda^x/x!$,可见它是参数λ的函数,故可用$g_3(\lambda)$表示. 令$\varphi(X_1) = I_{[X_1=x]}$, 则$E_\lambda[\varphi(X_1)] = P_\lambda(X_1 = x)$.因此$\varphi(X_1)$ 为$g_3(\lambda)$的无偏估计, 注意到$T = \sum_{i=1}^n X_i \sim P(n\lambda)$和$\sum_{i=2}^n X_i \sim P((n-1)\lambda)$,故有

$$\begin{aligned} \delta_1(T) = \delta_1(T(\mathbf{X})) = E(\varphi(X_1)|T = t) &= \frac{P_\lambda(X_1 = x, T = t)}{P_\lambda(T = t)} \\ &= \frac{P_\lambda(X_1 = x) P_\lambda(X_2 + \cdots + X_n = t - x)}{P_\lambda(X_1 + \cdots + X_n = t)} = \frac{(n-1)^{t-x} t!}{n^t (t-x)! x!} \\ &= \binom{t}{x} \frac{(n-1)^{t-x}}{n^t} = \binom{t}{x} \left(\frac{1}{n}\right)^x \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{t-x}, \quad t \geq x \end{aligned}$$

$\delta_1(T)$为$g_3(\lambda)$的无偏估计, 它又是充分完全统计量$T(\mathbf{X})$的函数, 所以

$$\delta_1(T(\mathbf{X})) = \binom{T}{x} \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{T-x}$$

为$g_3(\lambda)$的UMVUE.

例 设$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为从指数分布$EP(\lambda)$中抽取的简单随机样本, 求$g(\lambda)=\lambda$的UMVUE.

解 由$T(\mathbf{X})=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$的充分完全统计量, 以及$T(\mathbf{X})\sim\Gamma(n,\lambda)$,即参数为$n$和$\lambda$的Gamma分布, 故有

$$E\Big(\frac{1}{T}\Big)=\int_0^\infty\frac{1}{t}\cdot\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}dt=\frac{\lambda}{n-1}.$$

因此$\hat{g}(T(\mathbf{X}))=(n-1)/T(\mathbf{X})$ 为λ的无偏估计, 由L-S定理可知它是λ的UMVUE.

例 设$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为从正态分布$N(a,\sigma^2)$中抽取的简单随机样本, 记$\theta=(a,\sigma^2)$. (1)求$a$和$\sigma^2$的UMVUE, (2)求$g(\theta)=\sigma^r$的UMVUE.

解 由$T(\mathbf{X})=(T_1(\mathbf{X}),T_2(\mathbf{X}))$, 其中$T_1(\mathbf{X})=\bar{X}$, $T_2(\mathbf{X})=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,为充分完全统计量.

(1)由于$\hat{g}_1(\mathbf{X})=\bar{X}=T_1$和$\hat{g}_2(\mathbf{X})=T_2/(n-1)$分别为$a$和$\sigma^2$的无偏估计, 它们又是充分完全统计量, 故由L-S定理可知它们分别是a和σ^2的UMVUE.

(2)由于$T_2/\sigma^2\sim\chi^2_{n-1}$,故$\sigma^r$的无偏估计与$T_2$的幂函数有关. 先计算下式:

$$\begin{aligned}E\left(\frac{T_2}{\sigma^2}\right)^{r/2}&=\frac{1}{\sigma^r}E\left(T_2^{\frac{r}{2}}\right)=\int_0^\infty t^{\frac{r}{2}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}t^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}}dt\\&=\frac{2^{r/2}\Gamma\left(\frac{n+r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\triangleq\frac{1}{K_{n-1,r}}.\end{aligned}$$

由上式可知

$$E(K_{n-1,r}\cdot T_2^{\frac{r}{2}})=\sigma^r.$$

因此估计量

$$\hat{g}_3(T(\mathbf{X}))=K_{n-1,r}T_2^{r/2}=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2^{r/2}\Gamma\left(\frac{n+r-1}{2}\right)}T^{r/2}$$

是σ^r的无偏估计, 又是充分完全统计量$T=(T_1,T_2)$的函数, 故由L-S定理可知它是$g(\theta)=\theta^r$的UMVUE.

例 用Lehmann-Scheffe定理再考虑均匀分布$U(0,\theta)$, $\theta>0$, 中的参数θ的UMVUE.

解 由$T(\mathbf{X})=\max(X_1,\cdots,X_n)=X_{(n)}$ 为充分完全统计量, 和$\hat{g}(T(\mathbf{X}))=\frac{n+1}{n}T(\mathbf{X})$为$\theta$的无偏估计, 故由L-S定理立得$\hat{g}(T(\mathbf{X}))$ 为θ的UMVUE.可见此处证明要简单的多.

例 考虑均匀分布$U(0,\theta)$, $\theta>1$, 中的参数θ的UMVUE.

解 由因子分解定理知道$T(\mathbf{X})=\max(X_1,\cdots,X_n)=X_{(n)}$为充分统计量，但它并不为完全统计量。实际上对任意满足$El(T)=0$,即

$$\int_0^1 l(t)t^{n-1}dt+\int_1^\theta l(t)t^{n-1}dt=0\qquad(*)$$

因此可取

$$l_0(t)=\begin{cases}(n+1)t-n, & 0<t<1\\ 0,1<t<\theta\end{cases}$$

因而存在非恒为零的函数$l(T) = l_0(T)$满足$El(T) = 0$.所以T不是完全统计量, 从而不能利用Lehmann-Scheffe定理验证基于T的无偏估计为UMVUE, 但是我们可以使用零无偏方法. 注意到欲使$Eg(T)l(T) = 0$, 即

$$\int_0^1 g(t)l(t)t^{n-1}dt + \int_1^\theta g(t)l(t)t^{n-1}dt = 0$$

结合$(*)$式从而可取

$$g(t) = \begin{cases} c, & 0 < t < 1 \\ bt, 1 < t < \theta \end{cases}$$

由无偏性有

$$Eg(T) = \int_0^1 cf_T(t)dt + \int_1^\theta btf_T(t)dt = \frac{c}{\theta^n} + \frac{b}{\theta^n}\frac{n}{n+1}(\theta^{n+1} - 1) = \theta$$

从而可取

$$c = 1, \qquad b = \frac{n+1}{n}$$

因此

$$g(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T < 1 \\ \frac{n+1}{n}T, 1 < T < \theta \end{cases}$$

为参数θ的UMVUE.

注 可以证明统计量

$$\tilde{T} = \begin{cases} 1, & 0 < T < 1 \\ T, 1 < T < \theta \end{cases}$$

为完全统计量.

2 Cramer-Rao不等式

一、引言

Cramer-Rao不等式(简称C-R不等式)是判别一个无偏估计量是否为UMVUE的方法之一. 这一方法的思想如下: 设$\mathscr{U}_g$是$g(\theta)$的一切无偏估计构成的类. $\mathscr{U}_g$中的估计量的方差有一个下界, 这个下界称为C-R下界. 因此, 如果$g(\theta)$的一个无偏估计$\hat{g}$的方差达到这个下界, 则$\hat{g}$ 就是$g(\theta)$的一个UMVUE, 当然样本分布族和$\hat{g}$要满足一定的正则条件. 这个不等式是由C.R. Rao和H. Cramer在1945和1946年分别证明的. 以后一些统计学者将条件作了一些改进和精确化, 但结果的基本形式并无重大变化.

这一方法的缺陷是: 由于C-R不等式确定的下界常比真下界为小. 在一些场合, 虽然$g(\theta)$的UMVUE $\hat{g}$存在, 但其方差大于C-R下界. 在这一情况下, 用C-R不等式就无法判定$g(\theta)$的UMVUE存在. 因此这一方法的适用范围不广. C-R不等式除了用于判别$g(\theta)$的UMVUE之外, 它在数理统计理论上还有其它的用处, 如估计的效率和有效估计的概念以及Fisher信息量都与之有关.

C-R不等式成立需要样本分布族满足一些正则条件, 适合这些条件的分布族称为C-R正则分布族, 下面给出其定义.