概率论与数理统计 (Fall 2024)
习题课讲义

2024 年 9 月 23 日

聂嵘琢, 祝国隽

B01GB006Y-02/Note4

---

1. 令随机变量 $X \sim \text{Poisson}(\lambda), Y = \dfrac{1}{X+1}$. 求 Y 的概率分布.

Ans: $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \cdots$, 则

$$P\left(Y = \frac{1}{k+1}\right) = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \cdots$$

Y 的概率分布为

Y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
概率	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$	$\cdots$

2. 令随机变量 X 的概率函数为

$$P(X=i) = \frac{1}{2^i}, i = 1, 2, \cdots$$

求 $Y = \sin(\pi X/2)$ 的概率分布.

Ans: $Y = \sin\left(\dfrac{\pi X}{2}\right)$ 取 $-1, 0, 1$.

有些同学公式起手, 上来就 $X = \dfrac{2}{\pi}\arcsin Y \ldots$

(1) $Y=-1$ 时, $\dfrac{\pi X}{2}=\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi$, 得 $X=4k+3, k=0,1,\cdots$. 则

$$\begin{aligned}
P(Y=-1) &= P(X=3)+P(X=3+4)+P(X=3+4\times 2)+\cdots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(X=4i-1)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4i-1}} \\
&= 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{16^i}=2\times\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{16}\left[1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{16}}=\frac{2}{15}
\end{aligned}$$

(2) $Y=0$ 时, $\dfrac{\pi X}{2}=\pi+k\pi$, 得 $X=2(k+1), k=0,1,\cdots$. 则

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(X=2)+P(X=2+2)+P(X=2+2\times 2)+\cdots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(X=2i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(3) $Y=1$ 时, $\dfrac{\pi X}{2}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, 得 $X=4k+1, k=0,1,\cdots$. 则

$$\begin{aligned}
P(Y=1) &= P(X=1)+P(X=1+4)+P(X=1+4\times 2)+\cdots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(X=4i-3)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4i-3}} \\
&= 8\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{16^i}=\frac{8}{15}
\end{aligned}$$

故 $Y=\sin\left(\pi\dfrac{X}{2}\right)$ 的概率分布为

Y	-1	0	1
概率	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$.

3. 令随机变量 X 的密度函数为 $f(x), x\in\mathcal{R}$. 求 $1/X, |X|, X^2$ 的密度函数.

Ans: $y=\dfrac{1}{x}$ 关于 $(-\infty,0)$ 以及 $(0,+\infty)$ 都是严格单调的, 其反函数为

$$x=\frac{1}{y}:=h(y)$$

(1) 关于 y 求导, 记为 $h'(y)=-\dfrac{1}{y^2}$, 由密度变换公式可得, 当 $y<0$ 时, Y 的密度函数为 $f_Y(y)=f\left(\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{1}{y^2}$. 当 $y>0$ 时, Y 的密度函数为 $f_Y(y)=f\left(\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{1}{y^2}$. 故 $f_Y(y)=f\left(\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{1}{y^2}, y<0$ 或 $y>0$.

有相当一部分同学, 没用明白密度变换公式, 还带着一个负号, 记得绝对值!

(2) $Z=|X|$ 的分布函数为

当 $z\geqslant 0$ 时,

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(|X|\leqslant z)=P(-z\leqslant X\leqslant z)=\int_{-z}^{z}f(t)dt$$

当 $z<0$ 时, $F_Z(z)=0$. 关于 z 求导, 得到 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases} f(z)+f(-z) & ,z\geqslant 0\\ 0 & ,\text{其他}.. \end{cases}$$

(3) $W=X^2$ 的分布函数为

当 $w\geqslant 0$ 时,

$$F_W(w)=P(W\leqslant w)=P\left(X^2\leqslant w\right)=P(-\sqrt{w}\leqslant X\leqslant \sqrt{w})=\int_{-\sqrt{w}}^{\sqrt{w}}f(t)dt$$

当 $w<0$ 时, $F_W(w)=0$. 关于 w 求导, 得到 W 的密度函数为

$$f_W(w)=\begin{cases} (f(\sqrt{w})+f(-\sqrt{w}))\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{w}}, & w\geqslant 0\\ 0, & w<0 \end{cases}$$

4. 考察随机变量 X. 求证:

(1) 若 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \lambda > 0$, 则 $cX \sim \mathrm{Exp}(\lambda/c)$, 其中 c 为给定正常数;

(2) 若 $X \sim Exp(2)$, 则 $e^{-2X} \sim U(0,1)$;

Ans: (1). 令 $y = cx$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \\ 0, x \leqslant 0. \end{cases}$$

当 $y \leq 0$ 时,$x \leq 0 \quad f(y) = 0$,

当 $y > 0$ 时, $f(y) = f_x\left(\frac{y}{c}\right)\left|\frac{1}{c}\right| = \frac{\lambda}{c} e^{-\dfrac{\lambda}{c}y}$,

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{c} \cdot e^{-\dfrac{\lambda}{c}y}, y > 0, \\ 0, y \leq 0. \end{cases}$$

因此 $cX \sim \mathrm{Exp}(\lambda/c)$.

(2). 令 $y = e^{-2x}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, x \geqslant 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

$y \leqslant 0$ 或 $y > 1$ 时, $f(y) = 0$, $f_Y(y) = 0$.

$y > 0$ 时, $x = -\frac{1}{2}\ln y, f_Y(y) = f_X\left(-\frac{1}{2}\ln y\right)\left|-\frac{1}{2y}\right| = 2e^{\ln y}\left|\frac{1}{2y}\right| = 2y \cdot \frac{1}{2y} = 1.$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, y \leqslant 0 \text{ 或} y > 1, \\ 1, 0 < y \leqslant 1. \end{cases}$$

因此 $e^{-2x} \sim U(0,1)$.

第二问看到 $U(0,1)$, 再考虑到 $f(x) = e^{-2x}$ 严格单调存在反函数...

例2.6 令连续型随机变量$X \sim F(x)$, $F(x)$是x的严格单调增函数。则$F(X) \sim U(0,1)$.

5. 考察二元函数

$$G(x,y)=\begin{cases}\left(1-\mathrm{e}^{-2x}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-2y}\right), & x>0,y>0,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{其他}.\end{cases}$$

问它是某二元随机变量的分布函数吗?

Ans: $\lim\limits_{x\to-\infty,y\to-\infty}F(x,y)=0.5\neq 0$. 故 $F(x,y)$ 不是分布函数.

证明它的非单调性, 非右连续也都可以.

6. 独立重复地做一试验, 试验成功的概率为 $p, 0<p<1$. 记首次成功之前的失败次数为 X, 前两次成功之间的失败次数为 Y . 求二元随机变量 $(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 的联合概率函数.

Ans: X,Y 的所有可能取值均为 $0,1,2,\cdots$, 事件 $\{X=i,Y=j\}$ 表示前 i 次失败, 第 $i+1$ 次成功, 接着又是 j 次失败, 随后第 $i+j+2$ 次成功, 因此

$$P(X=i,Y=j)=(1-p)^ip(1-p)^jp=(1-p)^{i+j}p^2,\quad i,j=0,1,2$$

7. 令二元随机变量 $(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-x-y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $P(X<2,Y<4)$ 及 $P(X<Y)$.

Ans: 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=k$, 知 $k=1$.

有的同学没有求 k 要小心... 有些时候密度函数里的参数是固定值!

$$P(X<2,Y<2)=\int_0^2\int_0^4 e^{-x-y}dydx=\left(1-e^{-4}\right)\left(1-e^{-2}\right)$$
$$P(X<Y)=\int_0^{\infty}\int_0^{y}e^{-x-y}dxdy=0.5$$

以下是课外补充资料, 参考张伟平老师 (USTC) 的讲义

例2.6.7. 在直角坐标平面上随机选取一点, 分别以随机变量ξ与η表示其横坐标和纵坐标, 可以认为ξ与η相互独立. 如果ξ与η都服从正态分布$\mathrm{N}(0,1)$, 试求其极坐标(ρ,θ)的分布.

解: 易知

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

是$(0,\infty)\times[0,2\pi)$与$\mathcal{R}^2$(原点除外)之间的一一变换, 变换的Jaccobi行列式

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{vmatrix} = r\ .$$

由于(ξ,η)的联合密度为

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\},$$

所以由(2.6.4)式得知, (ρ,θ)的联合密度为

$$q(r,t) = \frac{1}{2\pi} r\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad r>0,\ \ t\in[0,2\pi). \tag{2.6.5}$$

这一结果表明: θ与ρ相互独立, 其中θ服从$[0,2\pi)$ 上的均匀分布; 而ρ的边缘密度函数为

$$q_1(r) = r\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad r>0. \quad \#$$

在计算两个随机变量之和时，我们还经常用到如下定理

定理 2.6.9. 设X,Y的联合概率密度为$f(x,y)$，则$X+Y$的概率密度$p(z)$为

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy$$

证: 先求$X+Y$的分布函数$F(z)$. 我们有

$$\begin{aligned} F(z) = P(X+Y\le z) &= \int\int_{x+y<z} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{z} f(x,t-x)dt = \int_{-\infty}^{z}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t-x)dx\right\}dt. \end{aligned}$$

这就说明,$X+Y$的分布函数$F(z)$是其中的花括弧中的函数在区间$(-\infty,z)$上的积分,所以$X+Y$是连续型随机变量,其密度函数如定理所述。#

特别，

> 当X与Y独立时，分别记X和Y的概率密度为$f_1(x)$和$f_2(y)$，则$X+Y$的概率密度为
>
> $$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy$$
>
> 称此公式为**卷积公式**。

例2.6.8. 设X服从期望为2的指数分布，$Y \sim U(0,1)$，且X和Y相互独立。求$X-Y$的概率密度和$P(X \le Y)$。

解：解法1:

由题设知$-Y \sim U(-1,0)$，并记X和$-Y$的密度分别为f_1和f_2，从而由卷积公式有

$$
\begin{aligned}
f_{X-Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dy \\
&= \begin{cases} \int_z^{z+1} f_1(x)dx & z \ge 0 \\ \int_0^{z+1} f_1(x)dx & -1 < z < 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-\frac{z}{2}}(1-e^{-\frac{1}{2}}) & z \ge 0 \\ 1-e^{-\frac{z+1}{2}} & -1 < z < 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以$P(X \le Y) = P(X-Y \le 0) = 1-e^{-\frac{1}{2}}$。

解法2: 由于

$$
\begin{aligned}
P(X-Y \le z) &= \int P(X \le z+y | Y=y) f(y) dy \\
&= \begin{cases} \int_0^1 P(X \le z+y)dy & z \ge 0 \\ \int_{-z}^1 P(X \le z+y)dy & -1 < z < 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1-2e^{-z/2}(1-e^{-1/2}) & z \ge 0 \\ z+2e^{-(z+1)/2}-1 & -1 < z < 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}
\end{aligned}
$$

再对分布函数求导数即得所求.

对一些连续型随机变量，也有再生性性质。

例2.6.9. 设$X \sim N(a, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(b, \sigma_2^2)$且X与Y相互独立，则$X+Y \sim N(a+b, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

我们把具有再生性性质的分布总结一下为

- 二项分布(关于试验次数具有再生性)
- $Poisson$分布(关于参数λ具有再生性)
- $Pascal$分布(关于成功次数r具有再生性)
- 正态分布(关于两个参数都具有再生性)
- 具有再生性的连续型分布还有χ^2分布和Γ分布

有时我们还会碰到计算随机变量之商的pdf. 我们有

定理 2.6.10. 如果(ξ,η)是二维连续型随机向量, 它们的联合密度为$p(x,y)$, 则它们的商$\frac{\xi}{\eta}$是连续型随机变量, 具有密度函数

$$p_{\frac{\xi}{\eta}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|t|p(xt,t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|u|p(u,xu)du,\quad \forall\, x\in\mathcal{R}. \tag{2.6.6}$$

证: 我们来求$\frac{\xi}{\eta}$的分布函数$F(x)$. 我们有

$$\begin{aligned}
F(x)=P\left(\frac{\xi}{\eta}\le x\right)&=\int\int_{\frac{u}{v}\le x}p(u,v)dudv\\
&=\int\int_{u\le xv,\ v>0}p(u,v)dudv+\int\int_{u\ge xv,\ v<0}p(u,v)dudv\\
&=\int_0^{\infty}dv\int_{-\infty}^{xv}p(u,v)du+\int_{-\infty}^{0}dv\int_{xv}^{\infty}p(u,v)du\\
&=\int_0^{\infty}dv\int_{-\infty}^{x}v\,p(tv,v)dt+\int_{-\infty}^{0}dv\int_{x}^{\infty}v\,p(tv,v)dt\\
&=\int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|v|p(tv,v)dv\right\}dt.
\end{aligned}$$

这就说明,$\frac{\xi}{\eta}$的分布函数$F(x)$是其中的花括弧中的函数在区间$(-\infty,x)$上的积分,所以$\frac{\xi}{\eta}$是连续型随机变量,其密度函数如(2.6.6)中的第一式所示; 改变积分顺序, 可得(2.6.6)中的第二式. #

例2.6.10. 设随机变量ξ与η相互独立,同服从参数$\lambda=1$的指数分布, 试求$\frac{\xi}{\eta}$的密度函数.

解: 我们利用(2.6.6)式求$p_{\frac{\xi}{\eta}}(x)$.由于(ξ,η) 的联合密度为

$$p(u,v)=e^{-u-v},\quad u>0,\ v>0,$$

所以欲(2.6.6)式中的被积函数$|t|p(xt,t)\neq 0$, 当且仅当, $t>0$和$xt>0$, 从而知有

$$p_{\frac{\xi}{\eta}}(x)=\begin{cases}\int_0^{\infty}t\,e^{-xt-t}dt=\frac{1}{(1+x)^2} & x>0;\\ 0 & x\le 0.\end{cases}\qquad \#$$

3. 极小值和极大值的分布

对于定义在同一个概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的n个随机变量$\xi_1,...,\xi_n$,我们可以考察它们的最大值和最小值:

$$\eta_1=\max\{\xi_1,...,\xi_n\},$$

$$\eta_2=\min\{\xi_1,...,\xi_n\}.$$

其含义是:

$$\eta_1(\omega)=\max\{\xi_1(\omega),...,\xi_n(\omega)\},\ \ \omega\in\Omega,$$

$$\eta_2(\omega)=\min\{\xi_1(\omega),...,\xi_n(\omega)\},\ \ \omega\in\Omega.$$

如此定义的η_1与η_2当然也是随机变量.事实上, 我们有

$$\begin{aligned}(\eta_1\le x)&=(\max\{\xi_1,\ \dots,\xi_n\}\le x)\\&=(\xi_1\le x,\ \dots,\xi_n\le x)=\bigcap_{k=1}^{n}(\xi_k\le x)\in\mathcal{F},\end{aligned}\tag{2.6.7}$$

$$(\eta_2\le x)=(\min\{\xi_1,\ \dots,\xi_n\}\le x)=\bigcup_{k=1}^{n}(\xi_k\le x)\in\mathcal{F}.\tag{2.6.8}$$

当$\xi_1,...,\xi_n$相互独立时, 我们不难利用它们的分布函数$F_1(x),...,F_n(x)$求出η_1与η_2 的分布函数$F_{\eta_1}(x)$和$F_{\eta_2}(x)$.

事实上, 此时由(2.6.7), 我们立即得到

$$\begin{aligned}F_{\eta_1}(x)&=P(\eta_1\le x)=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(\xi_k\le x)\right)\\&=\prod_{k=1}^{n}P(\xi_k\le x)=\prod_{k=1}^{n}F_k(x);\end{aligned}\tag{2.6.9}$$

而利用关系式

$$(\eta_2>x)=(\xi_1>x,\ \dots,\xi_n>x)=\bigcap_{k=1}^{n}(\xi_k>x)$$

可得

$$\begin{aligned}F_{\eta_2}(x)&=P(\eta_2\le x)=1-P(\eta_2>x)=1-P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(\xi_k>x)\right)\\&=1-\prod_{k=1}^{n}P(\xi_k>x)=1-\prod_{k=1}^{n}(1-F_k(x)).\end{aligned}\tag{2.6.10}$$

比较有趣的是考察(η_1,η_2)的联合分布. 对此我们仅给出独立同分布场合下的结果.

例2.6.11. 如果$\xi_1, \cdots, \xi_n$是独立同分布的随机变量, 它们的共同分布为$F(x)$. 试求它们的最大值η_1与最小值η_2的联合分布. 如果进一步, 假设$F(x)$为连续型分布,具有密度函数$p(x)$, 试求(η_1, η_2)的联合密度.

解: 我们以$G(x, y)$表示(η_1, η_2)的联合分布. 由(2.6.7)和(2.6.8)式, 容易看出: 当$x \le y$时, 有

$$G(x,y) = P(\eta_1 \le x,\ \eta_2 \le y) = P(\eta_1 \le x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (\xi_k \le x)\right) = F^n(x);$$

当$x > y$时, 有

$$\begin{aligned} G(x,y) &= P(\eta_1 \le x,\ \eta_2 \le y) = P(\eta_1 \le x) - P(\eta_1 \le x,\ \eta_2 > y) \\ &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (\xi_k \le x)\right) - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (y < \xi_k \le x)\right) \\ &= F^n(x) - (F(x) - F(y))^n. \end{aligned}$$

所以(η_1, η_2)的联合分布为

$$G(x,y) = \begin{cases} F^n(x) - \{F(x) - F(y)\}^n, & x > y, \\ F^n(x), & x \le y. \end{cases} \tag{2.6.11}$$

当$F(x)$为连续型分布,具有密度函数$p(x)$时, 我们以$q(x, y)$表示(η_1, η_2) 的联合密度, 由(2.6.11)式, 知有

$$q(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G(x,y) = n(n-1)\{F(x) - F(y)\}^{n-2} p(x)p(y), \quad x > y. \tag{2.6.12}$$

2.7 总结与讨论

目前我们接触到的分布的关系为

- n个独立同分布$B(1,p)$的0-1分布随机变量之和为二项分布$B(n,p)$;
- 有限个独立二项随机变量(成功的概率相同)之和仍为二项分布;
- 有限个独立的$Poisson$分布随机变量之和服从$Poisson$分布，参数相加；
- r个独立同分布几何分布$G(p)$的随机变量之和服从参数为r和p的$Pascal$分布；
- 任意有限个独立的正态分布随机变量的线性组合仍然服从正态分布;