概率论与数理统计 (Fall 2024)
习题课讲义

2024 年 9 月 30 日

聂嵘琢, 祝国隽

B01GB006Y-02/Note5

---

1. 随机抛掷一枚质地均匀的骰子 3 次, 令 X 表示前 2 次出现偶数点的次数, Y 表示 3 次中出现奇数点的次数. 求 $(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 的联合概率分布及其边缘分布.

Ans: 令事件 A 表示投郑 1 次出现偶数点, 则 $\bar{A}$ 表示投郑 1 次出现奇数点, 那么投掷 3 次对应的样本空间及 X,Y 的取值情况列表如下:

样本点	AAA	$AA\bar{A}$	$A\bar{A}A$	$\bar{A}AA$	$A\bar{A}\bar{A}$	$\bar{A}A\bar{A}$	$\bar{A}\bar{A}A$	$\bar{A}\bar{A}\bar{A}$
X 的值	2	2	1	1	1	1	0	0
Y 的值	0	1	1	1	2	2	2	3

则 $(X,Y)^{\top}$ 的联合概率分布为

$X\backslash Y$	0	1	2	3	p_i
0	$*$	$*$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$*$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$*$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$*$	$*$	$\frac{1}{4}$
$p\cdot j$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

故 X 的边缘分布为

X	0	1	2
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y 的边缘分布为

Y	0	1	2	3
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. 令二元随机变量 $(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\left(1-\frac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}\right),x,y\in\mathcal{R}$$

$(U,V)^{\mathrm{T}}$ 的联合密度函数为

$$g(u,v)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\right)(1+\sin u\sin v), u,v\in\mathcal{R}$$

求证: $f(x,y)$ 和 $g(u,v)$ 都不是二元正态分布, 但其边缘分布都是 $N(0,1)$.

Ans: 证明: 由于 $f(x,y),g(u,v)$ 均不能写成二元正态密度的形式, 则它们均不是二元正态. 下面只需证明 $f_X(x),g_U(u)$ 都是标准正态分布.

$$\begin{aligned}
f_X(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}dy-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\frac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}dy\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{y^2}{2}}dy-\frac{1}{2\pi}e^{-\dfrac{x^2}{2}}\frac{x}{1+x^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\dfrac{y^2}{2}}\frac{y}{1+y^2}dy\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

上式第二部分被积函数为奇函数.

$$\begin{aligned}
g_U(u)&=\int_{-\infty}^{\infty}g(u,v)dv\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}dv+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}\sin u\sin v dv\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{v^2}{2}}dv+\frac{1}{2\pi}e^{-\dfrac{u^2}{2}}\sin u\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\dfrac{v^2}{2}}\sin v dv\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{u^2}{2}}
\end{aligned}$$

3. 一盒子里有 2 个白球, 3 个红球和 2 个黑球. 从盒子里随机抽取两个球, 记取到白球和红球的个数分别为 X 和 Y. 求 $P(X=1\mid Y=0)$ 和 $P(Y=1\mid X=0)$.

Ans:

$$P(X=i,Y=j)=\frac{\binom{2}{i}\binom{3}{j}\binom{2}{2-i-j}}{\binom{7}{2}}, i+j\le 2$$

$(X,Y)^\top$ 的联合概率分布为

$X\backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{10}{21}$
1	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{10}{21}$
2	$\frac{1}{21}$	0	0	$\frac{1}{21}$
	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

4. 令随机变量 $X \sim B(1, 0.6), Y$ 的条件概率分布为

$$P(Y=-1 \mid X=0)=0.4, P(Y=0 \mid X=0)=0.6$$
$$P(Y=-1 \mid X=1)=0.6, P(Y=0 \mid X=1)=0.4$$

求 $(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 的联合概率分布, 及给定 Y 时 X 的条件分布.

Ans: $P(X=0)=0.4, P(X=1)=0.6.$

$$P(X=0,Y=-1)=P(Y=-1 \mid X=0)P(X=0)=0.4\times 0.4=0.16$$
$$P(X=0,Y=0)=P(Y=0 \mid X=0)P(X=0)=0.6\times 0.4=0.24$$
$$P(X=1,Y=-1)=P(Y=-1 \mid X=1)P(X=1)=0.6\times 0.6=0.36$$
$$P(X=1,Y=0)=P(Y-0 \mid X=1)P(X=1)=0.4\times 0.6=0.24$$

$X \mid Y=0$ 的条件分布为

$$P(X=1 \mid Y=0)=\frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)}=0.5$$
$$P(X=1 \mid Y=0)=\frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)}=0.5$$

$X \mid Y=-1$ 的条件分布为

$$P(X=0 \mid Y=-1)=\frac{4}{13}, \quad P(X=1 \mid Y=-1)=\frac{9}{13}$$

5. 令二元随机变量 $(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=k\mathrm{e}^{-x^2+\sqrt{2}xy-y^2}, x,y\in\mathcal{R}.$$

求 X, Y 的边缘分布, $f_{Y|X}(y \mid x)$ 和 $f_{X|Y}(x \mid y)$.

Ans: 易知 $(X, Y)^\top \sim N\left(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho\right)$. 有

$$\begin{cases} 2\left(1-\rho^2\right)\sigma_1^2 = 1 \\ 2\left(1-\rho^2\right)\sigma_2^2 = 1 \\ \dfrac{\rho}{\left(1-\rho^2\right)\sigma_1\sigma_2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

知 $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$. 则 $f(x, y)$ 是 $N(0, 0, 1, 1, 1/\sqrt{2})$ 的联合密度函数. X 的边缘密度: $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Y 的边缘密度: $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$. 由例 3.7 的结论有

$$X|Y = y \sim N(y/\sqrt{2}, 1/2), \quad Y|X = x \sim N(x/\sqrt{2}, 1/2)$$

注意这道题的 k 也是可以算出来的，跟上次的作业题类似，以后碰到分布密度内的参数要确定是不是常数.

6. 令二元随机变量 $(X, Y)^{\mathrm{T}}$ 的联合分布函数为

$$F(x, y) = a\left(b + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(c + \arctan\frac{y}{3}\right).$$

求: (1) a, b, c; (2) 边缘密度函数; (3) 条件密度函数.

Ans: (1) 由 $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$ 且 $F(+\infty, +\infty) = 1$, 得

$$\begin{cases} F(x, -\infty) = a\left(b + \arctan\dfrac{x}{2}\right)\left(c - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0, \\ F(-\infty, y) = a\left(b - \dfrac{\pi}{2}\right)\left(c + \arctan\dfrac{y}{3}\right) = 0, \\ F(x, -\infty) = a\left(b + \dfrac{\pi}{2}\right)\left(c + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

这里 $a \neq 0$, 否则 $F(x, y)$ 不是分布函数. 利用 x, y 取值任意性, 即前两个式子中的 $\arctan\dfrac{x}{2}$ 和 $\arctan\dfrac{y}{3}$ 的值也是任意的, 式子成立需要满足 $\left(c - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ 和 $\left(b - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, 解得 $b = c = \dfrac{\pi}{2}$. 带入第三个式子, 得到 $A = \dfrac{1}{\pi^2}$. 从而

$$a = \frac{1}{\pi^2}, b = c = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x, y) = \frac{6}{\pi^2\left(4 + x^2\right)\left(9 + y^2\right)}$$

X 的分布函数为 $F_X(x) = F(x, \infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}.f_X(x) = \frac{2}{\pi\left(4+x^2\right)}.$

Y 的分布函数为 $F_Y(y) = F(\infty, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{3}.f_Y(y) = \frac{3}{\pi\left(9+y^2\right)}.$

$Y \mid X = x$ 的条件密度函数为 $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{3}{\pi\left(9+y^2\right)}.$

$X \mid Y = y$ 的条件密度函数为 $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{2}{\pi\left(4+x^2\right)}.$

7. 令随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

记事件 $A = \{X > t\}, B = \{Y > t\}$, 且 $P(A \cup B) = 0.8$. 求 t.

Ans: 解: 由 X, Y 独立同分布,

$$P(A) = P(X > t) = P(Y > t) = P(B) = \begin{cases} \int_0^1 f(x)dx = 1, & t \leq 0 \\ \int_t^1 f(x)dx = 1 - t^4, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$P(AB) = P(A)P(B) = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ \left(1-t^4\right)^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

则

$$0.8 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 2\left(1-t^4\right) - \left(1-t^4\right)^2, 0 < t < 1,$$

得 $t = 5^{-\frac{1}{8}}$.

8. 令三元随机变量 $(X,Y,Z)^{\mathrm{T}}$ 的联合密度函数为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z), & 0\leqslant x,y,z\leqslant 2\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求证: X,Y,Z 两两独立, 但不相互独立.

Ans: 证明: 由于 x,y,z 对于 $f(x,y,z)$ 来说, 地位相等. $(X,Y)^\top,(Y,Z)^\top,(X,Z)^\top$ 的联合密度函数均为

$$f(x,y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)dz=\frac{1}{4\pi^2},0\le x,y\le 2\pi$$

X,Y,Z 的边缘密度函数均为

$$f_X(x)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi^2}dy=\frac{1}{2\pi},0\le x\le 2\pi$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 但 $f(x,y,z)\neq f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$ 知 X,Y,Z 两两独立但不相互独立.

补充命题 1. 离散型随机变量 X 具有无记忆性 $\Longleftrightarrow$ X 服从几何分布.

Proof. $(\Rightarrow)$. 略.

$(\Leftarrow)$. 只证明 X 是只取正整数值的离散型随机变量的情况.

$\forall k\in N$, 记 $q_k:=Pr(X>k),p_k:=Pr(X=k)$, 则有 $q_k-q_{k+1}=p_{k+1}$.

$Pr(X=k+1|X>k)=\dfrac{p_{k+1}}{q_k}$ 与 k 无关 (无记忆性), 因此记 $\dfrac{p_{k+1}}{q_k}:=p$, 同时由于 $q_k-q_{k+1}=p_{k+1}$, 得 $\dfrac{q_{k+1}}{q_k}:=1-p$.

注意到 $q_0=1$, 因此 $q_k=(1-p)^k$, 因此 $p_k=(1-p)^{k-1}p$, 这正是几何分布.

补充命题 2. 连续型随机变量 X 具有无记忆性 $\Longleftrightarrow$ X 服从指数分布.

...

这次作业 Note 没有课外补充资料, 祝大家国庆假期快乐.