概率论与数理统计 (Fall 2024)
习题课讲义

2024 年 9 月 14 日

聂嵘琢, 祝国隽

B01GB006Y-02/Note1

---

1. 令 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件. 把 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示 n 个两两互斥事件的并.

Ans: $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2\bar{A}_1 \cup A_3\bar{A}_1\bar{A}_2 \cup \cdots \cup A_n\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{n-1}$.

2. 令 A, B 是两个事件. 求证: $(A \cup B)\backslash(AB) = (A\bar{B}) \cup (\bar{A}B)$.

Hint: 有两个方法.

(a) 分别证明两边互相是彼此的子集

(b) 直接用定义导过去

Ans:

(a) 记 $\omega \in (A \cup B)\backslash(AB)$, 则 $\omega \in A \cup B$ 且 $\omega \notin AB$. 若 $\omega \in A$, 则 $\omega \notin B$, 即 $\omega \in A\overline{B}$. 若 $\omega \in B$. 则 $\omega \notin A$, 即 $\omega \in \overline{A}B$. 进而, $\omega \in (A\overline{B}) \cup (\overline{A}B)$. 因此, $(A \cup B)\backslash(AB) \subseteq (A\overline{B}) \cup (\overline{A}B)$.

记 $\omega \in (A\bar{B}) \cup (\overline{A}B)$. 则 $\omega \in A\bar{B}$ 或 $\omega \in \bar{A}B$. 若 $\omega \in A\overline{B}$. 则 $\omega \in A, \omega \notin B$. 若 $\omega \in \overline{A}B$; 则 $\omega \in B, \omega \notin A$. 进而, $w \in A \cup B$ 且 $w \notin AB$. 即 $w \in (A \cup B)\backslash(AB)$. 因此, $(A\bar{B}) \cup (\bar{A}B) \subseteq (A \cup B)\backslash(AB)$

有部分同学以上部分只证明了一半, 这样不够严谨.

(b) $(A \cup B)\backslash(AB) = (A \cup B)\overline{AB} = (A\overline{AB}) \cup (B\overline{AB}) = (A\bar{B}) \cup (\bar{A}B)$

3. 令 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件. 求证:

(1) $P(A_1A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1$;

(2) $P(A_1A_2\cdots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1)$.

Ans: 略, 注意用归纳法就不难.

这题比较简单, 大部分同学都做对了

4. 称两个事件 A, B 恰发生一个这一事件为 A 与 B 的对称差, 记作 $A\Delta B$. 显然

$$A\Delta B = (A\cup B)\backslash(AB) = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$$

令 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件. 求证:

$$\begin{aligned} P(A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_n) = &\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - 2\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_iA_j) \\ &+ 4\sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-2)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \end{aligned}$$

Ans: 由加法公式知 $P(A_1\cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$. 由于 $AB \subset A\cup B$, 故

$$\begin{aligned} P(A_1\Delta A_2) = P((A_1\cup A_2)\backslash(A_1A_2)) &= P(A_1\cup A_2) - P(A_1A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1A_2) \end{aligned}$$

即 $n=2$ 时成立. 假设 $n=m(m\geq 2)$ 时成立. 则当 $n=m+1$ 时,

$$\begin{aligned} &P(A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_{m+1}) = P((A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_m)\triangle A_{m+1}) \\ &\quad = P((A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_m)\cup A_{m+1}) - P((A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_m\cap A_{m+1})) \qquad (1) \\ &\quad = P(A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_m) + P(A_{m+1}) - 2P((A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_m)\cap A_{m+1}) \end{aligned}$$

由假设知

$$\begin{aligned} P(A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_m) = &\sum_{i=1}^{m} P(A_i) - 2\sum_{1\leq i<j\leq m} P(A_iA_j) + 4\sum_{1\leq i<j<k\leq m} P(A_iA_iA_k) \\ &+ \cdots + (-2)^{m-1}P(A_1A_2\cdots A_m) \end{aligned}$$

下证 $(A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_m)\cap A_{m+1}=(A_1A_{m+1})\,\Delta\,(A_2A_{m+1})\,\Delta\cdots\Delta\,(A_mA_{m+1})$

(简化为 $m=2$ 的情形, $m>2$ 时同理)

(1). 记 $\omega\in(A_1\Delta A_2)\cap A_3$, 则 $\omega\in A_1\Delta A_2$ 且 $w\in A_3$. 由于 $A_1\Delta A_2=(A_1\backslash A_2)\cup(A_2\backslash A_1)$, 故 $w\in A_1\backslash A_2$ 或 $w\in A_2\backslash A_1$.

若 $\omega\in A_1\backslash A_2$ 则 $\omega\in A_1,\omega\notin A_2$. 因为 $\omega\in A_3$, 故 $\omega\in A_1A_3,\omega\notin A_2A_3$. 即 $\omega\in(A_1A_3)\setminus(A_2A_3)$. 若 $\omega\in A_2\backslash A_1$, 则 $\omega\in A_2$ 且 $\omega\notin A_1$. 又因为 $\omega\in A_3$, 故 $w\in A_2A_3,w\notin A_1A_3$. 即 $\omega\in(A_2A_3)\setminus(A_1A_3)$.

于是 $\omega\in((A_1A_3)\setminus(A_3A_3))\cup((A_2A_3)\setminus(A_1A_3))$, 因此 $w\in(A_1A_3)\,\Delta\,(A_2A_3)$. 因此, $(A_{1\Delta A_2})\cap A_3\subseteq(A_1A_3)\,\Delta\,(A_2A_3)$.

(2). 记 $\omega\in(A_1A_3)\,\Delta\,(A_2A_3)$, 即

$$\omega\in((A_1A_3)\cup(A_2A_3))\cup((A_1A_3)\cap(A_2A_3))=((A_1\cup A_2)\cap A_3)\setminus(A_1A_2A_3)\,.$$

故 $\omega\in(A_1\cup A_2)\cap A_3,\omega\notin A_1A_2A_3$. 于是 $\omega\in A_1\cup A_2,w\notin A_1A_2$ 且 $w\in A_3$. 即 $\omega\in(A_1\Delta A_2)\cap A_3$. 因此, $(A_1A_3)\,\Delta\,(A_2A_3)\subseteq(A_1\Delta A_2)\cap A_3$.

所以

$$\begin{aligned}&P\left((A_1\Delta A_2\Delta m\Delta A_m)\cap A_{m+1}\right)=P\left(A_1A_{m+1}\Delta A_2A_{m+1},\Delta\ldots\Delta A_mA_{m+1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{m}P\left(A_iA_{m+1}\right)-2\sum_{1\le i<j\le m}P\left(A_iA_jA_{m+1}\right)+4\sum_{1\le i<j<k\le m}P\left(A_iA_iA_kA_{m+1}\right)\\&+\cdots+(-2)^{m-1}P\left(A_1A_2\cdots A_mA_{m+1}\right)\end{aligned}$$

代回到(1)式可得.

5. 一盒子里有 n 个球, 编号为 $1,2,\cdots,n$. 逐个有放回地从盒子里随机取出 m 个球, $m\leqslant n$. 求取出的球的编号按照严格上升次序排列的概率

Ans: 总取法:n^m
考虑到要求严格上升, 可以排出有放回的重复取出一样编号的情况 (此时相当于有相等的情况无法满足严格上升), 所求事件即转化为在有放回的情况下取出 m

个不同球, 且取出来的球编号按照严格上升次序排列.
此时所求样本点个数可通过先无放回的取出 m 个球再对其进行内部排列求出.
无放回的情况取出 m 个球的取法共有 C_n^m 个, 按严格上升次序的排列只有一种.
故所求概率为
$$\frac{C_n^m}{n^m}=\frac{n!}{m!(n-m)!n^m}$$

6. 有 n 组气球, 每组有 m 个. 从这 nm 个气球中随机取出 k 个气球, $k \geqslant n$. 求每组都有气球被取出的概率.

- 古典概型.
- 无放回取出.
- 每个气球彼此不同.
- 利用 Jordan 公式 (容斥原理).

Ans: 记 $A_i=\{\text{第}i\text{个组没有气球取出}\}, \bigcup_{i=1}^n A_i=\{\text{至少有一个组没有气球取出}\}$.
所求概率为
$$1-P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=1-\left[\sum_{i=1}^n P\left(A_i\right)-\sum_{1\leq i<j\leq n} P\left(A_i \cap A_j\right)+\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^{n-1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right)\right]$$
其中
$$P\left(A_i\right)=\frac{\binom{nm-m}{k}}{\binom{nm}{k}}$$
$$P\left(A_iA_j\right)=\frac{\binom{nm-2m}{k}}{\binom{nm}{k}}$$
$$\vdots$$
$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_t}\right)=\frac{\binom{nm-tm}{k}}{\binom{nm}{k}}, \quad 1 \leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t \leqslant n$$
故
$$1-P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=1-\sum_{t=1}^n(-1)^{t-1}\binom{n}{t} \frac{\binom{nm-tm}{k} k!}{\binom{nm}{k} k!}, k \leq nm-tm, t \leq\lfloor n-k/m\rfloor$$

7. 甲、乙两人相约 13:00 到 14:00 到某公共汽车站一起乘车外出,

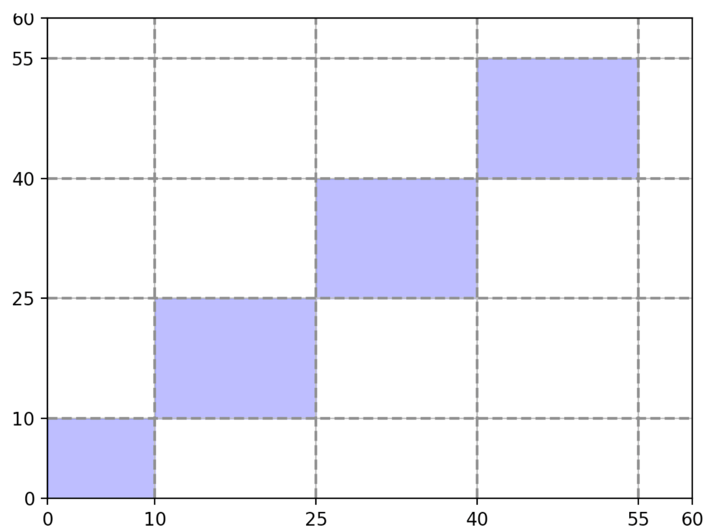
   设他们到达车站的时间是随机的, 且到达车站的时间只在 13:00 到 14:00. 若该站在 13:00-14:00 有四班公交车运营, 开车时间分别为 13:10, 13:25, 13:40, 13:55. 求他们在下述情况下同坐一班车的概率:

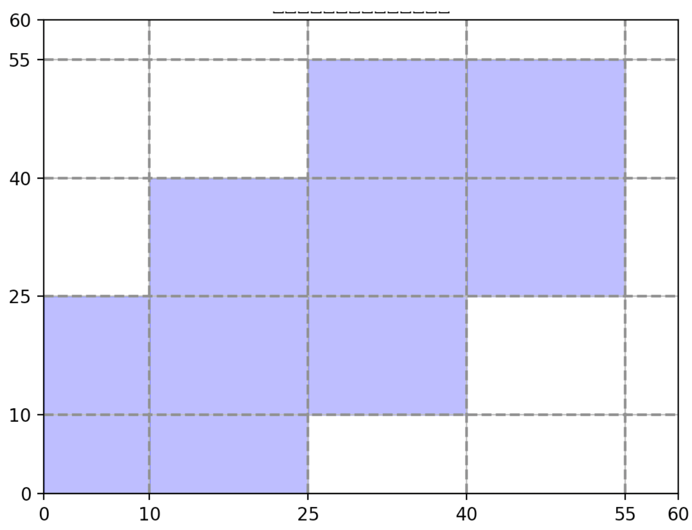
   (1) 约定见车就乘

   (2) 约定最多等一班车.

Ans: (1) 见图1. (2) 见图2.

有些同学没注意到 13:55 以后再到车站就没车可乘了, 因此概率算多了, 要审题





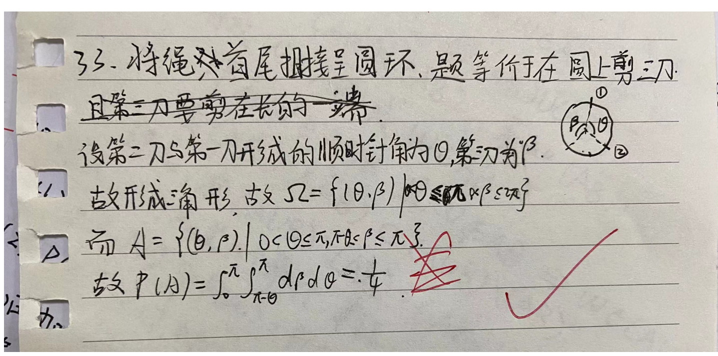
8. 把一个长度为 ℓ 米的绳子随机分成三段. 求这三段能构成三角形的概率.

hint: 利用几何概型之前要把事件总体确定清楚

(a) 直接把三段绳子长度视为 $(x, y, \ell - x - y)$, 然后对 (x, y) 刻画几何概型.

(b) 分享一个同学的做法, 见图3.

> **Ans:** 略, 事件总体确定以后就不难
>
> 很多同学最后算出 $\dfrac{1}{8}$ 就是没考虑这三段绳子长度加起来不能超过 ℓ.



以下是课外补充资料, 参考张伟平老师 (USTC) 的讲义

$$
\begin{aligned}
P(A \to B) &= 1-(1-P(A\to C\&C\to B))(1-P(A\to D\&D\to B)) \\
&= 1-(1-.851)(1-.712)=.957
\end{aligned}
$$

1.8 求概率的一些方法

全概率公式是概率论前期发展中的一个重要里程碑,其意义和价值远远超出了时间的局限. 它的要点是在Ω中引入一个适当的分划,把概率条件化,以达到化难为易的目的. 因此在概率的计算中占有非常重要的地位。

1. 选择合适的样本空间

例1.8.1. *口袋中有a个黑球和b个白球，他们除颜色不同外，其他方面没有任何区别。现把球随机的一个一个摸出来，求第k次摸得一个黑球的概率。*

解法1 把a个黑球及b个白球都看作是不同的(例如设想把它们进行编号). 若把摸出的球依次放在排列成一直线的$a+b$个位置上，则可能的排列法相当于把$a+b$个元素进行全排列，总数为$(a+b)!$. 有利场合数为$a\times(a+b-1)!$，这是因为第k次模得黑球有a种取法，而另外$a+b-1$次摸球相当于把$a+b-1$只球进行全排列. 故所求概率为

$$p=\frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

解法2 把a个黑球看作是没有区别的，把b个白球也看作是没有区别的. 仍把摸出的球依次放在排列成一直线的$a+b$ 个位置上，因若把a个黑球的位置固定下来则其他位置必然是放白球，而黑球的位置可以有$\binom{a+b}{a}$种放法. 这时有利场合数为$\binom{a+b-1}{a-1}$，这是由于第k次模得黑球，这个位置必须放黑球，剩下的黑球可以在$a+b-1$个位置上任取$a-1$个位置，因此共有$\binom{a+b-1}{a-1}$种故法. 所以所求概率为

$$p=\frac{\binom{a+b-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}}=\frac{a}{a+b}$$

这钟情况的出现并不奇怪，这说明对于同一随机现象，可以用不同的模型来描述，只要方法正确，结论总是一致的.

2. 递推法(条件化)

例1.8.2. *将n根短绳的$2n$个端头任意两两连接,求恰好连成n个圈的概率.*

解:现在再来利用全概率公式给出一个解答. 以A_n表示n根短绳恰好连成n个圈的事件,记$p_n=P(A_n)$.再以B表示第1根短绳连成1个圈的事件,用B和B^c作为对Ω的一个分划.于是由全概率公式得

$$p_n=P(A_n)=P(B)P(A_n|B)+P(B^c)P(A_n|B^c).$$

在前面例子中已经求得$P(B) = \frac{1}{2n-1}$;易见$P(A_n|B^c) = 0$;而$P(A_n|B)$ 则是在已知第1根短绳连成1个圈的条件下,其余$n-1$根短绳连成$n-1$个圈的概率,此时第1根短绳已经与其余$n-1$根短绳无关,所以$P(A_n|B) = P(A_{n-1}) = p_{n-1}$,代入上式即可得到

$$p_n = P(A_n) = \frac{1}{2n-1}p_{n-1}\ ,\ \ n = 2, 3, \cdots .$$

反复利用该式,并注意$p_1 = 1$,即得

$$p_n = \frac{1}{(2n-1)!!}\ ,\ \ n = 1, 2, \cdots .$$

例1.8.3. 一罐内有a个黑球和b个白球，从中任意取一球，如果是白球则将它放回去，如果是黑球，则从另一罐内取一白球替换它放回去。在重复n次这样的做法后，求第n+1次取出的是白球的概率。

解: 记A={第n次取出的是白球}，$p_n = P(A)$，B为所求事件。则

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) \\ &= p_n * p_n + (p_n + \frac{1}{a+b})(1-p_n) \\ &= \Big(1 - \frac{1}{a+b}\Big)p_n + \frac{1}{a+b} \end{aligned}$$

结合初值$p_1 = \frac{a}{a+b}$，得到

$$p_{n+1} = 1 - \Big(1 - \frac{1}{a+b}\Big)^n \frac{b}{a+b}.$$

3. 利用概率性质求解

例1.8.4. 参加集会的n个人将他们的帽子放在一起，会后每人任取一顶帽子戴上. 求恰有k个人戴对自己的帽子的概率。

解: 为叙述方便，我们把"一个人戴对自己的帽子"简称为“1个配对”，并记A_k ={恰有k个配对}。

先看$k = 0$的情形，即求A_0 ={n个人中无配对}的概率。令B_i ={第i个人配对}, $i = 1, \cdots, n$. 则$\bar{A}_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i$. 从而

$$P(\bar{A}_0) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(B_iB_j) + \cdots + (-1)^{n-1}P(B_1\cdots B_n).$$

不妨设n顶帽子已排放完毕，样本点就是n个人的全排，即$|\Omega| = n!$，易见

$$|B_i| = (n-1)!, \quad |B_iB_j| = (n-2)!, \quad |B_iB_jB_k| = (n-3)!, \cdots, |B_1\cdots B_n| = 0! = 1$$

代入可得

$$P(\bar{A}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

整理得到

$$P(A_0) = 1 - P(\bar{A}_0) = 1 - [\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}.$$

下面对一般的$k \ge 1$求$P(A_k)$. 为此记$C_k =$\{恰好某指定k个人配对\}。由乘法原理可得$|A_k| = C_n^k \cdot |C_k|$, 注意到恰好某$k$个人配对相当于其余$n-k$个人无配对，由上述$A_0$所得结果知

$$P(C_k) = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i}$$

注意到此时共有$n-k$个人，故上述概率等于$|C_k|/(n-k)!$，由此可得

$$|C_k| = (n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i}$$

我们最终得到

$$P(A_k) = \frac{C_n^k|C_k|}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i}$$

此结果对于$k = 0, 1, \cdots, n$全成立。令$n \to \infty$的极限概率为$e^{-1}/k!$。

例1.8.5. (配对问题续)要给n个单位发会议通知,由两个人分别在通知上写单位名称和写信封.如果写完之后,随机地把通知装入信封.试求下述各事件的概率:(1)恰有k份通知装对信封;(2)至少有m份通知装对信封.

解:用E_k表示恰有k份通知装对信封的事件,用A_m表示至少有m份通知装对信封的事件.在上题中我们已经求出E_k的概率.

所以

$$P(E_k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\frac{1}{j!}\ .$$

最后,由于$A_m = \bigcup\limits_{k=m}^{n} E_k$,且事件$E_m, E_{m+1}, \cdots, E_n$两两不交,所以立知

$$P(A_m) = \sum_{k=m}^{n} P(E_k) = \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\frac{1}{j!} = \sum_{k=m}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\frac{1}{k!j!}\ .$$