第1题答案：

解 记(X_1,X_2)的联合分布列为

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
-1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}
1	p_{31}	p_{32}	p_{33}

由$P(X_1X_2=0)=1$知：$p_{12}+p_{21}+p_{22}+p_{23}+p_{32}=1$，所以$p_{11}=p_{13}=p_{31}=p_{33}=0$。即

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
-1	0	p_{12}	0
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}
1	0	p_{32}	0

又因为

$$
\begin{aligned}
0.25 &= P(X_1=-1)\\
&= P(X_1=-1,X_2=-1)+P(X_1=-1,X_2=0)+P(X_1=-1,X_2=1)\\
&= p_{11}+p_{12}+p_{13}=p_{12},
\end{aligned}
$$

同理由$P(X_1=1)=P(X_2=-1)=P(X_2=1)=0.25$可知$p_{32}=p_{21}=p_{23}=0.25$，即

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
-1	0	0.25	0
0	0.25	p_{22}	0.25
1	0	0.25	0

又由分布列的正则性得$p_{22}=0$，因此

$$P(X_1=X_2)=p_{11}+p_{22}+p_{33}=0.$$

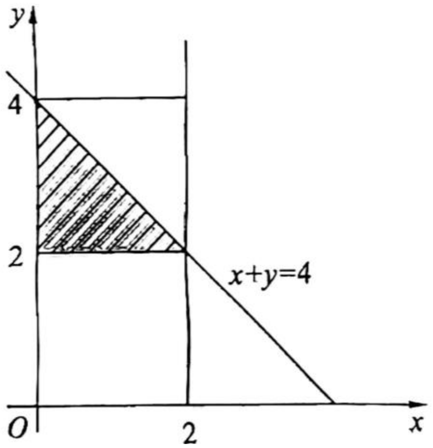
第2题答案：

解 (1) 由 $\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = k\int_0^2(6-2x)\mathrm{d}x = 8k = 1$，解得 $k = 1/8$.

(2) $P(X<1, Y<3) = \frac{1}{8}\int_0^1\int_2^3(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^1(3.5-x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}$.

(3) $P(X<1.5) = \frac{1}{8}\int_0^{1.5}\int_2^4(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)\mathrm{d}x = \frac{27}{32}$.

(4) $p(x,y)$ 的非零区域与 $\{x+y\leqslant 4\}$ 的交集如图 3.1 的阴影部分，



由图 3.1 得

$$P(X+Y\leqslant 4) = \frac{1}{8}\int_0^2\int_2^{4-x}(6-x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2(0.5x^2-4x+6)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

第3题答案：

解

(1) $p(x,y)$ 的非零区域与 $\{x > 0.5, y > 0.5\}$ 的交集为图 3.3(a) 阴影部分，所以

$$P(X > 0.5, Y > 0.5) = 6\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{y}(1-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 6\int_{0.5}^{1}(-y^2 + 1.5y - 0.5)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{8}.$$

(2) $p(x,y)$ 的非零区域与 $\{x < 0.5\}$ 的交集为图 3.3(b) 阴影部分，所以

$$P(X < 0.5) = 6\int_{0}^{0.5}\int_{x}^{1}(1-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 6\int_{0}^{0.5}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{8}.$$

又因为 $p(x,y)$ 的非零区域与 $\{y < 0.5\}$ 的交集为图 3.3(c) 阴影部分，所以

$$P(Y < 0.5) = 6\int_{0}^{0.5}\int_{x}^{0.5}(1-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 6\int_{0}^{0.5}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{8}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

(3) $p(x,y)$ 的非零区域与 $\{x + y < 1\}$ 的交集为图 3.3(d) 阴影部分，所以

$$P(X + Y < 1) = 6\int_{0}^{0.5}\int_{x}^{1-x}(1-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 6\int_{0}^{0.5}\left(\frac{1}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$

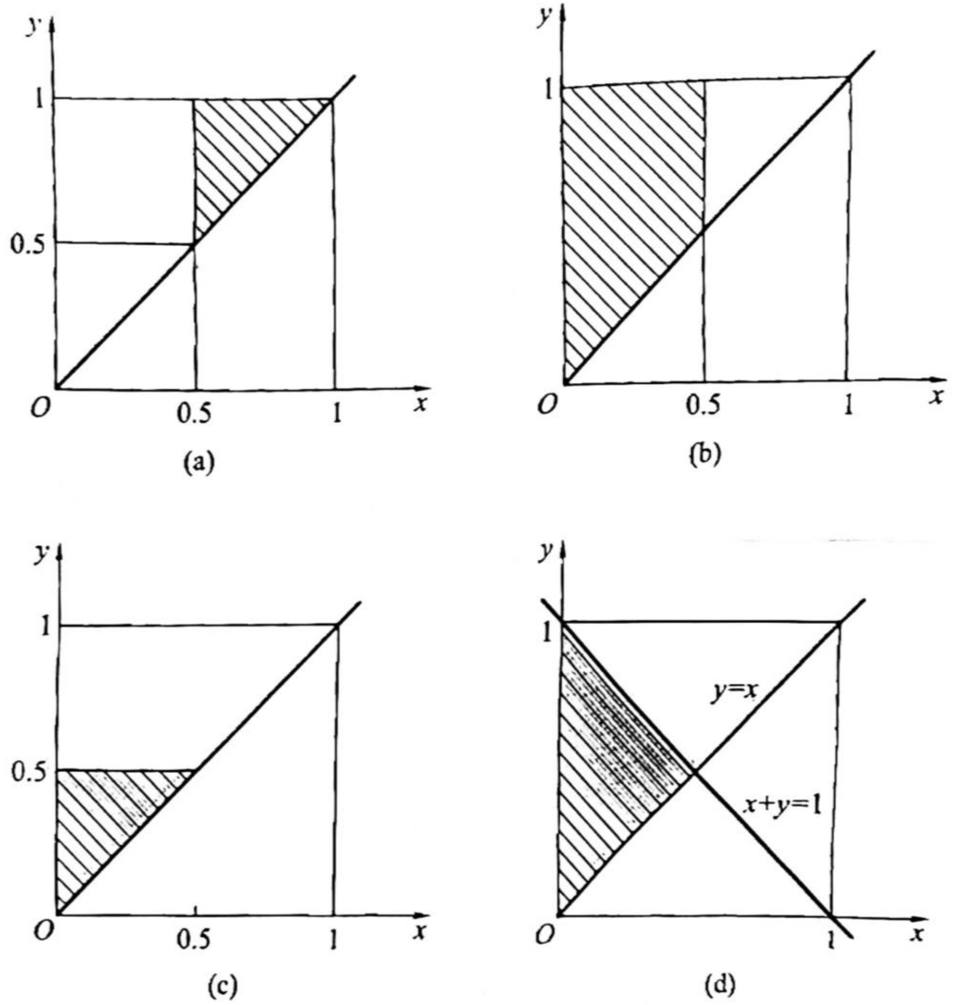


图 3.3

第4题答案：

解　因为区域 D 的面积为(如图 3.7)

$$S_D = \int_1^{e^2}\int_0^{1/x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^{e^2} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = (\ln x)\big|_1^{e^2} = 2.$$

又因为 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布，所以 (X,Y) 的联合密度函数为

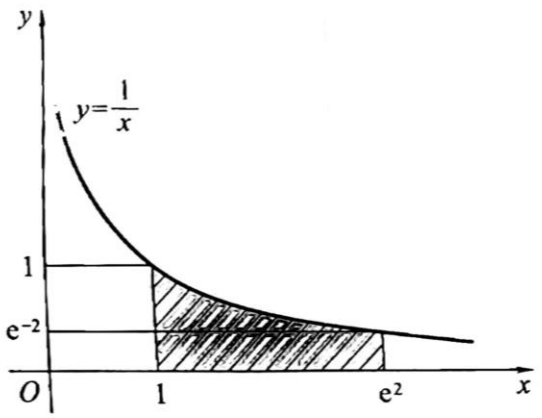


图 3.7

$$p(x,y) = \begin{cases} 1/2, & 1 < x < e^2, 0 < y < 1/x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

由此得，当 $1 < x < e^2$ 时，

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{1/x} \frac{1}{2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2x}.$$

所以 X 的边际密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & 1 < x < e^2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

若此题要求出 Y 的边际密度，则从图 3.7 中可以看出：

当 $0 < y < e^{-2}$ 时，有

$$p(y) = \int_1^{e^2} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

当 $e^{-2} < y < 1$ 时，有

$$p(y) = \int_1^{1/y} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - 1\right).$$

所以 Y 的边际密度为

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^2 - 1), & 0 < y < e^{-2}, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - 1\right), & e^{-2} < y < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

第5题答案：

解 (1) 因为 X 与 Y 的密度函数分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & \text{其他},\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以由 X 与 Y 的独立性知，X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1,y>0,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $P(Y\leqslant X)=\int_0^1\int_0^x e^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-e^{-x}\right)\mathrm{d}x=1-[-e^{-x}]_0^1=e^{-1}.$

(3) $P(X+Y\leqslant 1)=\int_0^1\int_0^{1-x}e^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-e^{-(1-x)}\right)\mathrm{d}x$

$$=1-\left[e^{x-1}\right]_0^1=e^{-1}.$$

第6题答案：

解 先对联合分布列按行、按列求和，求出边际分布列如下：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)$
x_1	a	$1/9$	c	$a+c+1/9$
x_2	$1/9$	b	$1/3$	$b+4/9$
$P(Y=y_j)$	$a+1/9$	$b+1/9$	$c+1/3$	1

由 X 与 Y 的独立性，从上表的第2行、第2列知 $b=(b+4/9)(b+1/9)$，从中解得 $b=2/9$. 再从上表的第2行、第1列知 $1/9=(b+4/9)(a+1/9)$，从中解得 $a=1/18$. 最后由联合分布列的正则性知：$a+b+c=4/9$，由此得 $c=1/6$.

第7题答案：

解　可以看出 $U=\max\{X,Y\}$ 的可能取值为 1,2,3，并且

$$P(U=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=0.05+0.07=0.12,$$

$$P(U=2)=\sum_{i=0}^{2}P(X=i,Y=2)+P(X=2,Y=1)$$

$$=0.15+0.11+0.07+0.04=0.37,$$

$$P(U=3)=\sum_{i=0}^{2}P(X=i,Y=3)=0.20+0.22+0.09=0.51,$$

即 U 的分布列为

U	1	2	3
P	0.12	0.37	0.51

又可以看出 $V=\min\{X,Y\}$ 的可能取值为 0,1,2，并且

$$P(V=0)=\sum_{j=1}^{3}P(X=0,Y=j)=0.05+0.15+0.20=0.40,$$

$$P(V=1)=\sum_{j=1}^{3}P(X=1,Y=j)+P(X=2,Y=1)$$

$$=0.07+0.11+0.22+0.04=0.44,$$

$$P(V=2)=P(X=2,Y=2)+P(X=2,Y=3)=0.07+0.09=0.16,$$

即 V 的分布列为

V	0	1	2
P	0.40	0.44	0.16

第8题答案：

解　因为

$$4/7=P(X\geqslant 0)=P(X\geqslant 0,Y\geqslant 0)+P(X\geqslant 0,Y<0)$$

$$=3/7+P(X\geqslant 0,Y<0),$$

由此得 $P(X\geqslant 0,Y<0)=1/7$，同理由 $P(Y\geqslant 0)=4/7$，可得 $P(X<0,Y\geqslant 0)=1/7$，再由

$$P(X\geqslant 0,Y\geqslant 0)+P(X\geqslant 0,Y<0)+P(X<0,Y\geqslant 0)+P(X<0,Y<0)=1,$$

得 $P(X<0,Y<0)=2/7$，所以

$$P(\max\{X,Y\}\geqslant 0)=1-P(\max\{X,Y\}<0)$$

$$=1-P(X<0,Y<0)=1-2/7=5/7.$$

证 当$|x|<1$时，$f_X(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$；当$|x|\geqslant 1$时，$f_X(x)=0$. 故

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

同理 $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |y|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

显然，当$0<|x|<1$，$0<|y|<1$时，

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y),$$

所以X与Y不相互独立.

设X^2的分布函数为$F_1(x)$，在$0\leqslant x\leqslant 1$内，

$$F_1(x)=P\{X^2\leqslant x\}=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{x},$$

即 $$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sqrt{x}, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases},\quad F_2(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \sqrt{y}, & 0\leqslant y<1\\ 1, & y\geqslant 1\end{cases}.$$

设(X^2, Y^2)的分布函数为$F_3(x,y)$.

当$x<0$或$y<0$时，$F_3(x,y)=0$.

当$0\leqslant x<1$，$y\geqslant 1$时，

$$F_3(x,y)=P\{X^2\leqslant x, Y^2\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant x\}=\sqrt{x}.$$

当$0\leqslant y<1$，$x\geqslant 1$时，$F_3(x,y)=\sqrt{y}$.

当$0\leqslant x<1$，$0\leqslant y<1$时，$F_3(x,y)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}s\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1+st}{4}\mathrm{d}t=\sqrt{xy}$.

当$x\geqslant 1$，$y\geqslant 1$时，$F_3(x,y)=1$.

所以 $$F_3(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0\\ \sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,\ y\geqslant 1\\ \sqrt{y}, & 0\leqslant y<1,\ x\geqslant 1\\ \sqrt{xy}, & 0\leqslant x<1,\ 0\leqslant y<1\\ 1, & x\geqslant 1,\ y\geqslant 1\end{cases}.$$

经验证$F_3(x,y)=F_1(x)F_2(y)$对所有x，y成立，所以X^2与Y^2独立.

第十题:

解:

设$F_Y(y)$是Y的分布函数，由全概率公式可知，对于$U=X+Y$的分布函数有，

$$\begin{aligned}G(u)=P(X+Y\le u)&=P(X=1)P(X+Y\le u|X=1)+P(X=2)P(X+Y\le u|X=2)\\&=0.3P(X+Y\le u|X=1)+0.7P(X+Y\le u|X=2)\\&=0.3P(Y\le u-1|X=1)+0.7P(Y\le u-2|X=2)\end{aligned}$$

由于X,Y独立，所以有

$$G(u)=0.3P(Y\le u-1)+0.7P(Y\le u-2)=0.3F_Y(u-1)+0.7F_Y(u-2)$$

所以U的概率密度函数为

$$g(u)=0.3f_Y(u-1)+0.7f_Y(u-2)$$