1999级线性代数试题

一、判断题：(共24分)

1　若A，B均为n阶方阵，则必有：

(1)　AB＝BA　　　　　　(　)

(2)　$|AB|=|BA|$　　　　　　(　)

(3)　$|A+B|=|A|+|B|$　　　　　　(　)

(4)　$(AB)^T=A^TB^T$　　　　　　(　)

(5)　$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　(　)

(6)　R(AB)＝R(BA)　　　　　(　)

(7)　若　$A^2=0$，则A＝0　　　　(　)

(8)　若$A^TA=0$，则A＝0　　　　(　)

2(8分)若A是m×n矩阵，且m≠n，则

(1)　当A的列向量组线性无关时，A的行向量组也线性无关　(　)

(2)　当R(A)=n时，齐次线性方程组AX＝0只有零解(　)

(3)　当R(A)=n时，非齐次线性方程组AX=b，有唯一解(　)

(4)　当R(A)=m时，非齐次线性方程组AX=b，有无穷多解　(　)

3(8分)若A是实对称矩阵，则

(1)　A的特征值全为实数　　　(　)

(2)　A为正定矩阵的充要条件是A的特征值全为正(　)

(3)　若$|A|>0$，则A为正定的　　(　)

(4)　在二次型$f=X^TAX$中，若经实满秩线性变换X=CY，可将f化为标准形$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$ 则$k_1,k_2,\cdots,k_n$全为A的特征值(　)

二、填空题(19分)

1　(4分)设$A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 7 & y \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} u & v \\ y & 2 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ x & v \end{pmatrix}$且A＋2B=C，则x=____，y=_____，u=____，v=______

2　(6分)若A为四阶方阵，且$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵，则

$|-2A|=$___，$|A^{-1}|=$___，　$|A^*|=$___

3　(3分)方阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$的特征值为___，___，__

4　(4分)已知四元非线性方程组的系数矩阵A的秩为3，η_1,η_2,η_3是它的三个解向量，且

$\eta_1=(1,2,3,4)^T$，$\eta_2+\eta_3=(2,3,4,5)^T$，则对应齐次方程组AX=0的基础解系是_______，AX=b的通解是_____

5　二次型$f=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$所对应的矩阵是___

三、（10分）1、计算$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

2、已知$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$求$A^{-1}$及$|A|^8$

四、（10分）设$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，且$AB=A+B$，求B

五、（15分）验证二次型

$f=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的特征值为

4，9，0，求一个正交变换，将此二次型化为标准形（要求写出正交变换矩阵及f的标准形）

六、（12分）设$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

试问当a，b满足什么条件时，

（1）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示式唯一；

（2）β不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

（3）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示式不唯一写出一般表达式

七、（10分）证明题

1 若A，B均为n阶正交矩阵，试证明AB也是正交矩阵。

2 若ξ_1和ξ_2是齐次线性方程组AX=0的基础解系，

$\eta_1=\xi_1+\xi_2$，$\eta_2=\xi_1-\xi_2$，试证明η_1，η_2也是AX=0的基础解系。

1999级线性代数参考答案

一、1、×√×××××√

2、×√×√

3、√√××

二、1、-5，-6，4，-2

2、48，$\frac{1}{3}$，27

3、3，0，5

4、$\eta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$k\eta+\eta_1$

5、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

三、解：1、

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -96$$

2、记 $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$、$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 则：$B^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$、

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$|B| = 25$、$|C| = -1$

故：$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & \\ & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{4}{25} & 0 & 0 \\ \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，

$$|A|^8 = (|B||C|)^8 = 25^8$$

四、解：由 $AB = A + B$ 可得：$B = (A-E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

五、解：该二次型的矩阵为：$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

由特征方程

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\lambda(\lambda-9) = 0$$

得特征值 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$

当$\lambda_1=4$，解齐次方程$(A-4E)x=0$

$$A-4E=\begin{bmatrix}1&-1&3\\-1&1&-3\\3&-3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&0&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$$

基础解系$\xi_1=(1\ \ 1\ \ 0)^T$

单位化：$p_1=\frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=9$，解齐次方程$(A-9E)x=0$

$$A-9E=\begin{bmatrix}-4&-1&3\\-1&-4&-3\\3&-3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-4&-3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

基础解系$\xi_2=(1\ \ -1\ \ 1)^T$

单位化：$p_2=\frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

当$\lambda_3=0$，解齐次方程$Ax=0$

$$A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&5&-3\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

基础解系$\xi_3=(-1\ \ 1\ \ 2)^T$

显然，该向量组两两正交，单位化得：

$$p_3=\frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

记$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\\0&1/\sqrt{3}&2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$，

于是正交变换为：$X=PY$，且有$f=4y_1^2+9y_2^2$.

六、解：$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta)=\left[\begin{array}{ccc|c}-1&-2&a&1\\1&1&2&0\\4&5&10&b\end{array}\right]$

$$\xrightarrow{r2\leftrightarrow r3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&0\\-1&-2&a&1\\4&5&10&b\end{array}\right]\xrightarrow[r3-4r1]{r2+r1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&0\\0&-1&a+2&1\\0&1&2&b\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r3+r2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&0\\0&-1&a+2&1\\0&0&a+4&b+1\end{array}\right]$$

所以：当$a\neq -4$时，β可由$\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3$线性表示，且表达式唯一；

当$a=-4,b\neq -1$时，β不可由$\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3$线性表示；

当$a=-4,b=-1$时，β可由$\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3$线性表示，且表达式不唯一。

当$a=-4,b=-1$时，由$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$得通解为：

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2k-1\\k\end{pmatrix},\ k\in R$$

故：一般表达式为：$\beta=\alpha_1+(2k-1)\alpha_2+k\alpha_3$

七、证明：

1、由于$AA^T=E$、$BB^T=E$，所以

$$(AB)(AB)^T=ABB^TA^T=AA^T=E$$

$\therefore$ AB也是正交矩阵。

2、由于η_1,η_2可由ξ_1,ξ_2线性表示，并且

$$\xi_1=\frac{\eta_1+\eta_2}{2},\ \xi_2=\frac{\eta_1-\eta_2}{2}$$

$\therefore$ ξ_1,ξ_2也可由η_1,η_2线性表示

$\therefore$ 向量组ξ_1,ξ_2与向量组η_1,η_2等价

$\therefore$ η_1,η_2也是$AX=0$的基础解系

2000级线性代数试卷

一、判断题（每小题2分，共14分）

1. 设方阵A满足AA=A，则必有A=0或A=E

2. 设A，B是不可逆的同阶方阵，则$|A|=|B|$

3. 向量组$\alpha_1^T=(2,6),\alpha_2^T=(1,5),\alpha_3^T=(3,1)$是线性相关的向量组

4. 齐次线性方程组$AX=0$若有两个不同的解，它就有无穷多个解

5. 方阵A可逆的充分必要条件是A的特征值不全为零

6. 对称矩阵A正定的充分必要条件是$|A|>0$

7. 若方阵A与B相似，则A^m与B^m也相似，其中m为正整数.

二、填空题（每小题2分，共24分）

1. 设$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$，则$|A|=$____；$A^{-1}=$____

2. $|A|\neq0$，且AB=C，则$B=$___；又若C=0，则$B=$___

3. 齐次线性方程组$A_{m\times n}X_{n\times1}=0$有非零解的充分必要条件是______

4. 若方阵A满足$A^TA=E$，则称A为______；此时$|A|=$_____

5. 若$B_{n\times n}=P^{-1}A_{n\times n}P$，B的特征值是1，2，3，则A的特征值是______

6. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{pmatrix}$与设$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似，则其中$a=$_____；对称阵A的二次型$f(x_1,x_2,x_3)=$_______；它经过正交变换X=PY化为标准型是______；二次型______（是，不是）正定的

三、设向量组$\alpha_1^T=(1,1,1,-1),\alpha_2^T=(1,3,-1,1),\alpha_3^T=(1,-1,k,1),\alpha_4^T=(1,1,1,3)$，对参数k的所有值求出向量组的秩及一个最大无关组（12分）

四、已知$A\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$，求矩阵A（10分）

五、a，b取何值时，方程组$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=1\\x_1+4x_2+3x_3=2\\2x_1+ax_2+3x_3=b\end{cases}$有唯一解，无解,有无穷多个解;并在有无穷多个解时求其通解(14分)

六、设$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，

1.求正交阵P,使得$P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵;

2.设$f(x)=x^3+2x^2+3$,利用A与Λ相似,求出矩阵

$f(A)=A^3+2A^2+3E$;

3. 求矩阵$f(A)=A^3+2A^2+3E$的特征值 （共16分）

七、证明题（10分）

1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，且

$\beta_1=4\alpha_1-4\alpha_2,\beta_2=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_2-\alpha_3$，

证明：β_1,β_2,β_3线性相关

2. 若A，B均为n阶方矩，且A可逆，证明：BA与AB相似

2000级线性代数参考答案

一、 判断题

1. 错。例如二阶方阵$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，$A\neq O$且$A\neq E$，但$AA=A$

2. 正确。因为方阵可逆的充分必要条件是它的行列式不等于零,那么不可逆的充分必要条件是其行列式等于零，而A，B都是不可逆方阵，故它们的行列式相等且都等于零

3. 正确。根据关于向量组相关性的其中一条结论，即任意n+1 个n维向量组都线性相关

4. 正确。齐次线性方程组一定有零解，故如果有两个不

同解的话，此齐次线性方程组就一定有非零解，又知非零解乘上任意实数都还是该齐次线性方程组的解，从而得出其解无穷的结论

5. 错。例如若 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，其特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=0$ 不全为零，但它不可逆

6. 错。参照线代课本关于对称阵正定的定理结论

7. 对。这是因为存在可逆阵 P 使得 $A=P^{-1}BP$，则

$$A^k=AA\cdots A=\left((P^{-1}BP)(P^{-1}BP)\cdots(P^{-1}BP)\right)=P^{-1}B^kP,$$

（k 为正整数）命题正确。

二、填空题

1. $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$|A|=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=-1\times2\times3=\underline{-6}$；

$$\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} & & 1/3\\ & 1/2 & \\ 1 & & \end{pmatrix}}$$

2. 因 $|A|\neq0$，故 A 可逆，则由 AB=C 知 $A^{-1}(AB)=A^{-1}C$，即 $(A^{-1}A)B=A^{-1}C$，故 $B=\underline{A^{-1}C}$；

若 C=0，则 $B=\underline{0}$

3. 齐次线性方程组 $A_{m\times n}X_{n\times1}=0$ 有非零解的充分必要条件是 $\underline{R(A)<n}$（即系数矩阵 A 的秩小于未知量 X 的分量个数）

4. 若方阵 A 满足 $A^TA=E$，则称 A 为<u>正交矩阵</u>，此时 $|A|=\pm1$

（由 $A^TA=E$ 推出 $|A|^2=|A^TA|=|E|=1$，从而 $|A|=\pm1$）

5. A 的特征值是<u>1，2，3</u>。（因为相似矩阵具有相同的特征多项式，从而有相同的特征值，由条件知 A 和 B 相似，且 B 的特征值是 1，2，3）

6. 三阶矩阵 A 与 Λ 相似，它们有相同的特征多项式，设特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则由根与系数关系知，

$|A|=|\Lambda|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，$1+0+a=1+1+(-1)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$，

所以 a=<u>0</u>

故 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 的二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\underline{x_1^2+2x_2x_3}$，它经过正交变换 X=PY 化为标准型是 $\underline{f=y_1^2+y_2^2-y_3^2}$；二次型<u>不是</u>正定的

二、 解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\overset{\Delta}{=}A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&3&-1&1\\1&-1&k&1\\-1&1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r4+r1]{r2-r1,\ r3-r1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&-2&0\\0&-2&k-1&0\\0&2&2&4\end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&-2&0\\0&0&k-3&0\\0&0&4&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r3\leftrightarrow r4]{r2/2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&4&4\\0&0&k-3&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r4-(k-3)(r3/4)]{r3/4}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0&-\end{bmatrix}$$

1）当 $-(k-3)\neq0$ 即 $k\neq3$ 时 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(B)=4$，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 就是最大无关组；

2）当 $-(k-3)=0$ 即 $k=3$ 时 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(B)=3$，

这时

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个最大无关组

四、解：设 $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ 则 AB=C。若 B 可逆，则 $A=A(BB^{-1})=(AB)B^{-1}=CB^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&1\\3&2&1\end{bmatrix}$

法一：先计算 B 的行列式 $|B|$，判断是否不等于零，若 $|B|\neq0$，求出 B^{-1}（用公式或用初等变换法，写出必要步骤），再代入 $A=A(BB^{-1})=(AB)B^{-1}=CB^{-1}$ 计算出结果。

法二：若 B 可逆，则 $\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}B^{-1}=\begin{pmatrix}BB^{-1}\\CB^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\\CB^{-1}\end{pmatrix}$，即对分块

矩阵$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$只进行初等列变换，可以求得A的结果；

五、解：该方程的增广矩阵为：

$$B=\left(A\vdots\beta\right)\overset{\Delta}{=}\begin{bmatrix}1&3&2&1\\1&4&3&2\\2&a&3&b\end{bmatrix}\xrightarrow[r3-2r1]{r2-r1}\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&1&1\\0&a-6&-1&b-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r3-(a-}$$

$$\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&1&1\\0&0&5-a&4-a+b\end{bmatrix}$$

1）当$5-a\neq 0$，即$a\neq 5$，b任意取值时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解；

2）当$\begin{cases}5-a=0\\4-a+b\neq 0\end{cases}$时$R(A)=2\neq 3=R(B)$，即$a=5,b\neq 1$时，

方程组无解；

3）当$\begin{cases}5-a=0\\4-a+b=0\end{cases}$时$R(A)=R(B)=2<3$，即$a=5,b=1$时，

方程组有无穷多解

当$a=5,b=1$时，代入得

$$B=\left(A\vdots\beta\right)\overset{\Delta}{=}\begin{bmatrix}1&3&2&1\\1&4&3&2\\2&5&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r1-3r2}\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

同解方程组为$\begin{cases}x_1-x_3=-2\\x_2+x_3=1\end{cases}$，通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$ （其中c为任意常数）

六、解：1）由特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(2-\lambda)=0$$ 得特征值

$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$

当$\lambda_1=\lambda_2=-1$，解齐次方程$(A+E)x=0$

$$A+E=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

通解：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_2-c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}^T,\xi_2=\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}^T$

正交化：$\alpha_1=\xi_1$，

$$\alpha_2=\xi_2-\frac{[\xi_2,\alpha_1]}{[\alpha_1,\alpha_1]}\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

规范化：$p_1=\frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},p_2=\frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

当$\lambda_3=2$，解齐次方程$(A-2E)x=0$

$$A-2E=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

通解$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\c\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，基础解系$\xi_3=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}^T$

只需单位化，$p_3=\frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

记$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$，P 即为所求

的正交阵，使$P^{-1}AP=\Lambda$，其中$\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}$

2）由$P^{-1}AP=\Lambda$知$A=P\Lambda P^{-1}$，且当 k 为正整数时

$A^k=\overbrace{AA\cdots A}^{k个}=\overbrace{(P\Lambda P^{-1})\ (P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})}^{k项}=P\Lambda^k P^{-1}$ 所以由已知条件知道：

$$f(A)=A^3+2A^2+3E=P\Lambda^3P^{-1}+2P\Lambda^2P^{-1}+3PP^{-1}$$
$$=P(\Lambda^3+2\Lambda^2+3E)P^{-1}$$

其中 $\Lambda^3 = \begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}^3 = \begin{bmatrix}(-1)^3 & & \\ & (-1)^3 & \\ & & 2^3\end{bmatrix}$，

$$2\Lambda^2 = 2\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}^2 = \begin{bmatrix}2(-1)^2 & & \\ & 2(-1)^2 & \\ & & 2\times 2^2\end{bmatrix}$$

从而

$$\Lambda^3 + 2\Lambda^2 + 3E = \begin{bmatrix}f(-1) & & \\ & f(-1) & \\ & & f(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & & \\ & 4 & \\ & & 19\end{bmatrix}$$

故 $f(A) = P(\Lambda^3+2\Lambda^2+3E)P^{-1} = P\begin{bmatrix}4 & & \\ & 4 & \\ & & 19\end{bmatrix}P^T$，其中

$$P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

由上小题结论可以知道，$f(A)$ 与 $f(\Lambda)$ 相似，故 $f(\Lambda)$ 的对角元 4，4，19 就是 $f(A)$ 的全部特征值（根据“相似矩阵具有相同的特征多项式”的结论）

七、证明

1. 证明：

法一：因

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (4\alpha_1-4\alpha_2, \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2-\alpha_3) \xrightarrow[C2+C3]{C1/4} (\alpha_1-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha$$

$$\xrightarrow{C1-C2} (0, \alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3) \stackrel{\Delta}{=} (0, \delta_1, \delta_2),$$

故 $R(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = R(0,\delta_1,\delta_2) \le 2 < 3$，

所以 β_1,β_2,β_3 线性相关

法二：因

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (4\alpha_1-4\alpha_2, \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2-\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$

而 $|A| = \begin{vmatrix}4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0$，所以 $R(A) < 3$，从而

$R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\le R(A)<3$

所以β_1,β_2,β_3线性相关

法三:（基本方法）设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$

（1）

只要证明有不全为零的数x_1,x_2,x_3使（1）式成立即可。

式（1）整理得到:

$(4x_1+x_2)\alpha_1+(-4x_1-2x_2+x_3)\alpha_2+(x_2-x_3)\alpha_3=0$ （2）

由已知条件，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，推出

$$\begin{cases} 4x_1+x_2=0 \\ -4x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$$

（3）

齐次线性方程组（3）的系数矩阵为$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

易知$R(A)<3$，所以（3）有非零解。

即有不全为零的数x_1,x_2,x_3使（1）式成立。

所以β_1,β_2,β_3线性相关

2. 证明：因为A可逆，即A^{-1}存在，又

$A(BA)A^{-1}=(AB)(AA^{-1})=AB$，由相似矩阵定义可得：$AB$与$BA$相似。

2001级线性代数试题

一、判断题(判断下列各命题是否正确，每小题3分，共12分)

1、设A^*为n阶方阵$(n\ge 2)$ A的伴随矩阵，若A为满秩方阵，

则A^*也是满秩方阵.

2、n阶矩阵A可逆的充要条件是：当$X\ne 0$时，$AX\ne 0$，其中

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

3、已知向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的秩为$r(r<m)$，则该向量组中任意r个向量线性无关.

4、设A、B为n阶方阵，若A、B等价，则A、B相似.

二、填空(将正确答案填在题中横线上，每空4分，共24分)

1、设A、B为n阶方阵，若$|A|\neq 0$且$AB=0$，则$B=$___.

2、设$AB=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，且$B=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$_____.

3、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，而向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的最大线性无关组是_____.

4、设A为5阶方阵，且$|A|=-3$，则$|A^{-1}|=$___；$|A^*|=$___；$|2A|=$__

5、设A、B为n阶可逆方阵，且满足$AB=A+2B$，则B可用A表示为$B=$____

6、若方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=4\\(\lambda-3)x_2+2x_3=2\\(\lambda-1)(\lambda-2)x_3=(\lambda-3)(\lambda-4)\end{cases}$有唯一解，则$\lambda$___.

7、设四元非齐次线性方程组$AX=b$的系数矩阵秩为2，已知$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$为它的四个解向量，且$\eta_1=(1,1,0,1)^T,\eta_1+\eta_2=(1,2,3,4)^T,\eta_4=(1,0,1,1)^T$，则其通解为___.

三、求向量组$\alpha_1=(1,0,0,2,5),\alpha_2=(0,1,0,3,4),\alpha_3=(0,0,1,4,7),\alpha_4=(2,-3,4,11,12)$的最大线性无关组（10分）.

四、当k取何值时，方程$\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3=3\\x_1+x_2+x_3=k\\5x_1+4x_2+6x_3=15\end{cases}$有无穷多解，并求出此时的一般解（15分）.

五、设$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求正交矩阵P，使$P^TAP$为对角阵，

并写出对角阵(15 分).

六、写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 在正交变换下所化成的标准形,并指出 f 是否为正定的(8 分).

七、若 A,B 都是 n 阶可逆矩阵,证明: AB 也是 n 阶可逆矩阵,且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (7 分).

八、设 A 是 n 阶方阵, $AA^T=E$,且 $|A|=-1$,求 $|A+E|$ (6 分).

2001 级线性代数试题参考答案

一、 判断题

1、√(A 满秩 $\Rightarrow |A|\neq 0$, 又 $AA^*=|A|E\Rightarrow |A||A^*|\neq 0\Rightarrow |A^*|\neq 0$ 即 A^* 满秩)

2、×(不是充分条件)

3、×(是存在不是任意)

4、×(由定义可证)

二、 填空题

1、$\underline{0}$ 2、$\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&-1&-1\\1&-3&1\end{pmatrix}$ 3、$\underline{\alpha_2,\alpha_3}$ 4、$\underline{-\frac{1}{3},81,-96}$

5、$\underline{(A-2E)^{-1}A}$ 6、$\underline{\lambda\neq 1,2,3}$

7、$\underline{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},c_1,c_2\in R}$

三、 解:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T&\alpha_2^T&\alpha_3^T&\alpha_4^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&4\\2&3&4&11\\5&4&7&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $R(A)=4$, 所以向量组的最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

四、 解: 方程组增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 5 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3-2k \\ 0 & 1 & -1 & 3k-3 \\ 0 & 0 & 0 & k-6 \end{pmatrix}$$

方程组有无穷多解,则$R(A) = R(A,b) = 2$,所以$k = 6$

代入方程组得该方程组的通解为: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}, c$

五、 解: $\left|A-\lambda E\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$

A的特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$

当$\lambda_1 = 1$时, $A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,对应的特征向量为$p_1 = \begin{pmatrix} - \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

当$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$时, $A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

对应的特征向量为$p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

向量组刚好两两正交，单位化可得正交阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

且$P^T AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

六、解:

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix},|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)$$

$$A\text{的特征值为}\lambda=-2,1,4,\text{则}A\text{的标准形为}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},\text{非正定.}$$

二次型f在该正交变换下的标准形为f=$-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$

七、证明：

$$A,B\text{可逆}\Rightarrow|A|\neq0,|B|\neq0\Rightarrow|AB|=|A||B|\neq0\Rightarrow AB\text{可逆}$$

$$\text{又}(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=E\text{则}(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

八、证明：

$$|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A||A^T+E|=-|A^T+E|$$

$$=-|(A+E)^T|=-|A+E|\Rightarrow2|A+E|=0\Rightarrow|A+E|=0$$

2002级线性代数试题

一、 填空题（每小题3分，共36分）

1. 行列式$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&2&2&0\\0&3&1&0\\4&0&0&2\end{vmatrix}$的值是______

2. 设A是5阶方阵，且$|A|=1$，则$|-2A|=$_____

3. 设A是p×5阶矩阵，B是m×4阶矩阵，AB是7×q阶矩阵，则p，q，m的值分别是____，____，____

4. 设$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则A的伴随矩阵是______

5. 若向量组$\alpha_1^T=(1,t+1,0),\alpha_2^T=(1,2,0),\alpha_3^T=(0,0,t^2+1)$线性相关，则实数t=______

6. 设A是3阶实对称矩阵，β_1,β_2是属于A的不同特征值的特征向量，则3阶方阵$B=(\beta_1,\beta_2,3\beta_2)$的秩$R(B)=$____，$\beta_1^T\beta_2=$____

7. 实对称矩阵$A=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&2&t\end{vmatrix}$正定，则 t 的取值范围是

______

8. 若 n 阶方阵 A 满足$A^2-A=E$则$(A-E)^{-1}=$____

9. 设 A，B，C 都是 3 阶可逆矩阵，$|A|=-1,|B|=2$，则

$|2C^{-1}(A^TB^{-1})^2C|=$_____

10. 设$AX=0$为 n 元齐次线性方程组，$R(A)=r<n$，

则方程组有______个解向量线性无关

11. 向量组

$\alpha_1^T=(1,2,3,4),\alpha_2^T=(2,3,4,5),\alpha_3^T=(3,4,5,6),\alpha_4^T=(4,5,6,7$

的秩是______

12. 设$\begin{cases}x_2+x_3+x_4=0\\-x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_4=0\end{cases}$，则它的一个基础解系是

______

二、 计算行列式$D=\begin{vmatrix}1+a_1&a_2&a_3&a_4\\a_1&1+a_2&a_3&a_4\\a_1&a_2&1+a_3&a_4\\a_1&a_2&a_3&1+a_4\end{vmatrix}$（6 分）

三、 设$AX-A=3X$，且$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&-1\\-1&0&4\end{pmatrix}$，求矩阵 X（10 分）

四、 设向量组

$\alpha_1^T=(1,-1,2,4),\alpha_2^T=(0,3,1,2),\alpha_3^T=(3,0,7,14),\alpha_4^T=(2,1,5,6)$

求向量组的秩及一个最大无关组，并将其余向量由该最大无关组线性表示（10 分）

五、 λ取何值时，方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$有唯一解，无解，有无穷多个解；并在有无穷多个解时求其通解（14 分）

六、 用正交变换法化二次型为标准形，并写出正交变换（14 分）

$$f=4x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$$

七、 证明题（10分）

1. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明

$\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+3\alpha_3$ 也线性无关

2. 设A为n阶方阵，若有正整数k，使 $A^k=0$，则A称为幂零矩阵，证明幂零矩阵的特征值只能是零

2002级线性代数参考答案

一、 填空

1）8　2）-32　3）7 5 4　4）

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

5）1　6）2 0　7）$t>2$　8）A

9）2　10）$n-r$　11）2　12）

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

二、 解：

$$D \overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=} (1+a_1+a_2+a_3+a_4)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_j-a_j*c_1}{=} (1+a_1+a_2+a_3+a_4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+a_1+a_2+a_3+a_4$$

三、解：由于 $AX-A=3X \Rightarrow (A-3E)X=A \Rightarrow X=(A-3E)^{-1}A$

又 $A-3E=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以

$$(A-3E)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&-1\\-1&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\-3&-2&0\\0&3&7\end{pmatrix}$$

四、解：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&3&0&1\\2&1&7&5\\4&2&14&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，$R(\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\alpha_3{}^T,\alpha_4{}^T)=3$，$\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\alpha_4{}^T$为一个最大无关组，且$\alpha_3{}^T=3\alpha_1{}^T+\alpha_2{}^T$

五、解：该方程组的增广矩阵为：

$$B=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\1&\lambda&1&\lambda\\\lambda&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda\\0&1-\lambda&1-\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\0&0&(1-\lambda)(\lambda+2)&(1-\lambda)(1+\lambda)^2\end{pmatrix}$$

1）当$\lambda\neq1,-2$时，方程组有唯一解

2）当$\lambda=-2$时，方程组无解

3）当$\lambda=1$时，方程组有无穷多解

当$\lambda=1$时，$B\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

所以，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (k_1、$k_2\in R$)

六、　解：该二次型的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2(2-\lambda)$

得特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=2$

1） 当$\lambda_1=\lambda_2=4$时，由$(A-4E)X=O$，

$A-4E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解系：

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$。单位化，得：$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $p_2=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

2） 当$\lambda_3=2$时，由$(A-2E)X=O$，

$A-2E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解系：

$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

单位化，得：$p_3=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

故有正交变换：

$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}Y$，使$f=4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$

七、证明：

1、设存在数k_1,k_2,k_3使

$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+2\alpha_2)+k_3(\alpha_2+3\alpha_3)=0$

整理，得：$(k_1+k_2)\alpha_1+(2k_2+k_3)\alpha_2+3k_3\alpha_3=0$

又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

所以$\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ 2k_2+k_3=0 \\ 3k_3=0 \end{cases}$，所以，$k_1=k_2=k_3=0$

所以，$\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+3\alpha_3$线性无关。

2、设λ为A的特征值，α为A的对应于特征值λ的特征向量。则：$A\alpha=\lambda\alpha$

$\Rightarrow A^k\alpha=\lambda^k\alpha \Rightarrow \lambda^k\alpha=0 \Rightarrow \lambda^k=0 \Rightarrow \lambda=0$

2003级线性代数试题

一. 填空题（每空2分,共16分）

1）设A为3×3矩阵，B为4×4矩阵，且$|A|=1,|B|=-2$，则$\left||B|A\right|=$____.

2）设A为3阶方阵且$|A|=2$，则$|2A^{-1}|=$___. $|A^*|=$___.

3）已知$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$____.

4）设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是方程$AX=b$的解，若$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$也是$AX=b$的解，则$k_1+k_2+\cdots+k_s=$____.

5）三阶矩阵A的三个特征值为1, 2, 3，则$|A|=$___，A^{-1}的特征值为___.

6）二次型$f(x,y,z)=5x^2+6y^2+4z^2$是正定还是负定:__.

二.单项选择题（每小题2分,共16分）.

1）设A,B是$n\,(n\ge2)$阶方阵，则必有（ ）.

(a) $|A+B|=|A|+|B|$; (b) $\left||A|B\right|=\left||B|A\right|$;

(c) $|AB|=|BA|$; (d) $|A-B|=|B-A|$.

2）设A是n阶方阵，则$|A|=0$的必要条件是（ ）.

(a) 两行(列)元素对应成比例;
(b) 必有一行为其余行的线性组合;
(c) A中有一行元素全为零;
(d) 任一行为其余行的线性组合.

3) 设A,B是n阶方阵, $A\neq 0$且$AB=0$, 则( ).

(a) $|B|=0$或$|A|=0$;　(b) $B=0$;

(c) $BA=0$;　(d) $(A+B)^2=A^2+B^2$.

4) 设A为n阶可逆矩阵, 则( ).
(a) 若$AB=CB$, 则$A=C$;
(b) 对矩阵$(A \,\vdots\, E)$施行若干次初等变换, 当A变为E时, 相应地E变为A^{-1};
(c) A总可以经过初等变换化为单位矩阵E;
(d) 以上都不对.

5) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是一组$n$维向量, 则下列正确的是( ).

(a) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$不线性相关, 就一定线性无关;

(b) 如果存在s个不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关;

(c) 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关, 则$\alpha_1$可由$\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示;

(d) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充要条件是$\alpha_1$不能由其余$s-1$个向量线性表示.

6) 矩阵A( )时可能改变其秩.
(a) 转置;　(b) 初等变换;
(c) 乘以奇异矩阵;　(d) 乘以非奇异矩阵.

7) 设A为可逆矩阵, $k\neq 0$, 则下述结论不正确的是( ).

(a) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$;　(b) $(A^{-1})^{-1}=A$;

(c) $(kA)^{-1}=kA^{-1}$;　(d) $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.

8) 若方阵A与B相似, 则有( ).

(a) $A-\lambda E=B-\lambda E$;　(b) $|A|=|B|$;

(c)对于相同的特征值λ, 矩阵A与B有相同的特征向量;

(d) A与B均与同一个对角矩阵相似.

三.(8分) 计算$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

四.(12分) 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

求矩阵X使满足$AXB=C$.

五.(12分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$，求矩阵$A$的列向量组的一个最大无关组，并把不属最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

六.(15分). λ取何值时，非齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda. \end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多个解，并求解.

七.(15分) 求一个正交变换$X=PY$，将二次型$f=2x_1^2+4x_1x_3+6x_2^2+2x_3^2$化为标准形(要求：写出正交变换和标准形).

八.(6分) 设A为n阶可逆矩阵，λ是A的一个特征值，证明A的伴随矩阵A^*的特征值之一是$\lambda^{-1}|A|$.

2003级线性代数参考答案

一、 填空题

1、$\underline{-8}$ 2、$\underline{4}$，$\underline{4}$ 3、$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}}$

4、$\underline{1}$ 5、$\underline{6}$，$\underline{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}}$ 6、$\underline{\text{正 定}}$

二、 单项选择题 CBACACCB

三、 解 :

$$D=\begin{vmatrix}5&5&5&5\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=5$$

四、解：$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\10\\-10\end{pmatrix}$$

五、解：设 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$，则

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

最大无关组为 a_1,a_2,a_4

$a_3=-a_1-a_2$，$a_5=4a_1+3a_2-3a_4$

六、解：$\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&-1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\lambda\\0&\lambda-1&-1-\lambda&0\\0&0&-\lambda(1+\lambda)&1-\lambda^2\end{pmatrix}$

（1）当 $\lambda\neq1,\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-1$ 时有唯一解

（2）当 $\lambda=0$ 时无解

（3）当 $\lambda=-1$ 和 $\lambda=1$ 时有无穷多解

$\lambda=-1$ 时，通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；

$\lambda=1$ 时，通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，

$c_1,c_2\in R$

（通解表达形式不唯一）

七、解：二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&6&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&2\\0&6-\lambda&0\\2&0&2-\lambda\end{vmatrix}=0$ 可得

特征值分别为 $\lambda=0,4,6$

当 $\lambda_1=0$ 时，$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，特征向量为 $P_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=4$ 时，$A-4E\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，特征向量为 $P_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=6$ 时，$A-6E\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 特征向量为 $P_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

P_1,P_2,P_3 两两正交，单位化可得所求正交变换为：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$，（P 形式不唯一）

且标准形为：$f=4y_2^2+6y_3^2$

七、 证明：设 α 为 A 的对应于 λ 的特征向量，则

$A\alpha=\lambda\alpha$。

由于 A 可逆，所以 $\lambda\neq 0$

$$A^*A\alpha=\lambda A^*\alpha=|A|\alpha\Rightarrow A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$$

即 $\lambda^{-1}|A|$ 为 A^* 的一个特征值。