

人工智能学院本科生 2019—2020 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷 (A 卷)

草稿区

专业(大类): _____ 年级: 20 _____ 学号: _____ 姓名: _____ 成绩: _____

说明: A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, O 是零矩阵, $R(A)$ 或 $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩
 A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $\langle \alpha, \beta \rangle$ 表示向量 α, β 的内积。

得分

一.客观题: 1-3 小题为判断题, 在对的后面括号中填 “√”, 错的后面括号中填“×”,
 4-8 为单选题, 将正确选项前的字母填在括号中. (每小题 2 分, 共 16 分)。

- 对应于 $n(n>3)$ 阶实矩阵的相异特征值的实特征向量必是正交的。 ()
- 欧式空间 V 中的向量 α, β 满足 $|\alpha|=|\beta|$, 则 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 正交。 ()
- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 R^n 中一个正交向量组, 则它们作为列向量组构成的矩阵的秩必为 m 。 ()
- 设三阶矩阵 A , 满足 $|A| = -1$, 则 $|2A^*| =$ ()
 (A) -8 (B) 8 (C) -2 (D) 2
- 设 A 为 n 阶方阵, 满足 $AB=O$, 且 $B \neq O$ 则: ()
 (A) A 的列向量组线性无关 (B) $A=O$
 (C) A 的列向量组线性相关 (D) A 的行向量组线性无关
- 对于方阵 A 与 A^T , 下面说法错误的是: ()
 (A) 它们有相同的特征根 (B) 它们有相同的特征向量
 (C) 它们有相同的特征多项式 (D) 它们的行列式值相同
- n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是: ()
 (A) $R(A) > n$ (B) $R(A) < n$ (C) $R(A) = n$ (D) $R(A) \leq n$
- 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ 其中 $a > b > 0$ 且 $a^2 + b^2 = 1$, 则 A 为: ()
 (A) 正定矩阵 (B) 负定矩阵 (C) 初等矩阵 (D) 正交矩阵

得 分

二 、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

草 稿 区

1. 计算行列式 $|D_n| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$, 其中 $n > 2$ 。

2. 计算 n 阶行列式 $|D_n| = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_1 + x \end{vmatrix}$, 其中 $n > 2$ 。

得 分

三、已知 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $|A^4|$ 及 $|A^*|$ 。

(本题 10 分)

草 稿 区

得 分

四、当 a 与 b 取何值时,下面方程组有唯一解？无解？有无穷解？当有无穷解时，求出全部解。

（本题 14 分）

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + (a - 3)x_3 - 2x_4 = 2b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

草 稿 区

得 分

五、设在线性空间 $P_4[x]$ 中，有序基底(I)为 $\left[x^4,x^3,x^2,x,1\right]$ ，有序基底(II)为 $\left[1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3,1+x+x^2+x^3+x^4\right]$,

- (1) 求基底(I)到基底(II)的过渡矩阵。
- (2) 求多项式 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ 在基底(II)下的坐标。

(本题 9 分)

草 稿 区

得 分

六、已知二次型： $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ ，(本题 14 分)

用正交变换化 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形，并求出所用正交变换矩阵 Q 及该二次型的符号差。

草 稿 区

得 分

七、已知向量组(I) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 **3**，向量组(II) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 **3**，向量组(III) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 的秩为 **4**，
证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 **4**。

(本题 9 分)

草 稿 区

得 分

八、 设 A,B,C,D 都是 n 阶矩阵， 其中 $|A|=6$ 并且 $AC=CA$ ，

求证： $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$ 。

(本题 9 分)

草 稿 区

得 分

九、 A 是三阶实对称方阵，且满足条件 $A^2 - 2A = O$ ，已知 $R(A) = 2$ 。

- (1) 求 A 的全部特征值。
- (2) 当 k 为何值时，矩阵 $A + kE$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵。 (本题 5 分)

草 稿 区