线性代数复习总结

第一章 行列式

1. 基本知识：如排列、反序(逆序)、反序(逆序)数、对换、奇/偶排列、余子式，代数余子式等概念. 排列经一次互换改变奇偶性等基本结论.会排列逆序数的计算方法.

2. 掌握n阶行列式的定义.

$$|a_{ij}| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

(1) 展开式共有n! 项.

(2) 每项是取自不同行不同列的n个元乘积，冠以正号或负号.

(3) 行标按自然顺序排列时，每项的正负号由列标构成排列的奇偶性(反序数)决定. $n!$项中一半取正号，一半取负号.

(4) 行列式表示一个数(值).

(5) 一阶行列式 $|a|=a$ 不要与绝对值记号相混淆.

另外，任意一项前面的符号是 $(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)+\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$

3. 掌握行列式按照某一行（列）展开，知道 *Laplace* 定理的结论.

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=\begin{cases}|A|, & \text{当}k=i\\ 0, & \text{当}k\neq i\end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{st}=\begin{cases}|A|, & \text{当}j=t\\ 0, & \text{当}j\neq t\end{cases}$$

$$|A|=\sum_{i=1}^{C_n^k} M_i A_i$$

4. 掌握行列式的性质(6个).

- 行列互换（转置）值不变（性质1）
- 两行互换，反号（性质2）
- 一行的公因子可以提出（性质3）
- 某行元为两项之和，则等于两个行列式之和（性质4）
- 某行为零、两行相同或成比例，值为零（性质5）
- 某行倍数加到另一行，值不变（性质6）

5. 知道一些特殊的行列式及其性质，例如：对角形行列式、上(下)三角形行列式、范德蒙行列式等，会计算这些行列式的值，知道范德蒙行列式值为零的充要条件.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j)$$

6. 熟练应用行列式的定义、性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.【或证明】

例：

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

(定义)　　　　(性质)　　　　(展开)

注意: (1)要首先观察和分析行列式的特点，然后试一试化简，行不通再试别的方法.

(2)某些特殊的行列式求值需要讨论阶数n.

(3)会一些常见行列式处理方法：

已学过的方法有

- **对角线法**：二阶采用.
- **三角型法**：用性质处理化简成容易计算的上(下)三角形行列式.
- **展开降阶法**：先使得某一行（列）具有较多的零，再展开为低阶行列式.
- **拆项法**：把某一行（列）的元拆成两（多）项，再分解成多个行列式的和.
- **归纳法**：例如*Vandermonde*行列式的证明过程.
- 转化为*Vandermonde*行列式.
- **加边法**
- **递推法**

第二章 矩阵

1. **理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵：零矩阵、行/列矩阵等，知道单位 / 对角 / 三角 / 对称 / 反对称 / 正交 矩阵及其性质. 理解矩阵的可交换. 了解行阶梯形 / 行最简矩阵.**

如对于正交矩阵A, B，有$A^T=A^{-1}$， A^{-1}, AB仍为正交阵.

对称矩阵：$A=A^T$，　　反对称矩阵：$A=-A^T$.

对角形矩阵的和、乘积、幂.

用对角形矩阵左(右)乘一个矩阵的结果.

2.　**掌握**矩阵的线性运算、乘法、转置，及运算规律，了解方阵的幂、方阵乘积的行列式.

只有当**左矩阵的列数等于右矩阵的行数**时，两个矩阵才能相乘.

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\quad B=(b_{ij})_{n\times s}\ \Rightarrow AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times s}$$

一般：$AB\neq BA,\ (AB)^k\neq A^kB^k.$

由$AB=O$**不能**得出A，B至少有一个零矩阵.

但是，若A为可逆矩阵，则可以得到$B=O$.

$$|\lambda A_n|=\lambda^n|A|$$

注意：矩阵与行列式线性运算的不同点，以及

$$(AB)^T=B^TA^T$$

$$|A_nB_n|=|A_n|\,|B_n|=|B_n|\,|A_n|$$

3. 掌握逆矩阵及其性质、矩阵可逆的充要条件，会用伴随矩阵求二阶矩阵逆矩阵.

如：

$|A|\neq 0$时A可逆，或对于方阵A，若存在方阵B，使 $AB=E$ $(AB=BA=E)$则A可逆。

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

$A^{-1}=A^* / |A|$，注意A^*中元素的排列顺序

对任意方阵A，有 $AA^*=A^*A=|A|E$

4. 掌握矩阵的初等变换、初等矩阵及性质，了解矩阵等价、矩阵的秩，会有关的判定定理，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

如：有三类初等变换，分别对应三类初等矩阵.

对矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$施行一次初等行（列）变换，其结果就等于对A左（右）乘一个相应的m（n）阶初等矩阵.

对任何矩阵$A_{m\times n}$总可经有限次初等行变换化为(行)阶梯形和行最简形.

n 级矩阵A可逆$\Leftrightarrow$它能表成一些初等矩阵的乘积.

可逆矩阵总可以经过一系列初等行(列)变换化成E.

矩阵的行秩等于列秩，等于A中一切非零子式最高阶数.

初等变换不改变矩阵的秩.

求逆矩阵的方法：

(1)伴随矩阵法.（阶数较低）

(2)由 $AB=I$ 或 $BA=I$.(待定系数法)

(3)初等变换的方法.

$$(A, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E, A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

(4)分块矩阵的方法.

$$diag(A_1, A_2, \ldots, A_s)^{-1}.$$

$$=diag(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_s^{-1}).$$

矩阵秩为$r \Leftrightarrow$ 有一个r级子式不为零，同时所有$r+1$ 级子式全为零.

$$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$$

P_m, Q_n可逆，$A_{m\times n}$则 $r(PA) = r(A) = r(AQ)$

若A中存在一个r阶子式不为零，则 $r_A \ge r$;

若A中所有r阶子式都为零，则 $r_A < r$.

5. 掌握分块矩阵及其运算，注意分块矩阵运算需要满足的分块条件. 建议会使用分块矩阵的初等变换.

注意：$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix}$ 的应用.

但 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq |AB| - |CD|$

$$(A_{ij})_{st}(B_{ij})_{tr} = (C_{ij})_{sr} = \left(\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}\right)_{sr}$$

分块对角形矩阵的运算性质.

分块矩阵的初等变换和分块初等矩阵.

对一个分块矩阵作一次分块矩阵的初等行（列）变换，相当于在矩阵的左（右）边乘上一个相应的分块初等矩阵，反之亦然.

6. 理解矩阵之间的三种关系(等价、相似、合同)及性质.

若矩阵A经过有限次初等变换化为B，则称矩阵A和B等价.

(1) 矩阵A与B等价⇔有初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$，$Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 使 $B = P_s P_{s-1} \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t$.

(2) 两个 $s\times n$ 矩阵A, B 等价⇔存在可逆的 s级矩阵P与可逆的n 级矩阵Q使 $B = PAQ$.

(3)任意一个 $m\times n$ 矩阵A 都与一形式为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ 的矩阵等价，它称为矩阵A 的标准形.

即:存在可逆阵$P=P_m$和可逆阵$Q=Q_n$使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$$

设A，B为两个n阶矩阵. 若存在满秩矩阵M，使$B=M^{-1}AM$，则称矩阵A与B相似. 若此时还有M为正交矩阵，则A与B正交相似。

设A, B是数域F上的n阶矩阵，若存在F上的可逆矩阵C，使得$B=C^TAC$成立，则称A与B是合同矩阵.

秩为r的n阶对称矩阵A必合同对角形矩阵，即存在满秩矩阵C，使得

$$C^T AC = diag(d_1, d_2, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0)$$

其中 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 不为零.

7. **知道**实对称矩阵的性质：

(1) 特征值为实数；

(2) 属于不同特征值的特征向量正交；

（而对一般矩阵，属于不同特征值的特征向量仅仅线性无关）

(3) 特征值的代数重数与几何重数相等；

（即与特征子空间维数相等）

(4) 必存在正交矩阵，将其化为对角矩阵，且对角矩阵对角元素即为特征值.

第三章 线性方程组

一、线性方程组

1. 理解线性方程组的初等变换，知道可用消元法（行初等变换）和*Cramer*法则解方程组.

2. 掌握:齐次线性方程组有非零解⇔系数矩阵A的秩 < 未知数个数n.

   非齐次线性方程组有解 ⇔ $r(A) = r(B)$.

3. 理解并掌握齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念

   齐次线性方程组若干个解的任意线性组合仍是$Ax=0$的解. 当$r(A)<n$时才有基础解系.

   $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_{n-r}\eta_{n-r}$，$r = r(A)$ (参数任意取值)

4. 理解并掌握非齐次线性方程组解的结构及通解.

- 非齐次线性方程组的两个解的差是对应导出组的解；
- 非齐次线性方程组的解与导出组的解的和(差)仍是它的解.

通解：$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}$,

$r = r(A)$, γ_0是一个特解(随便找到一个即可),

参数任意取值

5. 会讨论(含参)线性方程组解的情况.

$r(A)\neq r(B)$无解， $r(A)=r(B)=n$唯一解,

$r(A)=r(B)<n$无穷解.

6. 会把线性方程组的解和向量线性相关性联系起来讨论. 可以使用一些常见结论，如

$AB=O \Leftrightarrow B$的每个列向量都是齐次线性方程组$AX=O$的解.

设矩阵$A_{m\times n}$、$B_{n\times p}$，若$AB=O$，则

$$r_A+r_B\le n$$

A, B为同型矩阵，则 $r_{A+B}\le r_A+r_B$

二、向量

1．理解n维向量的概念、向量的线性组合与线性表示、向量组的等价.

如：向量组等价具有传递性.

若向量(组)A能由向量组B线性表示，向量组B能由向量组C线性表示，则向量(组)A能由向量组C线性表示.

若矩阵A经初等列(行)变换变成B，则A的列(行)向量组与B的列(行)向量组等价.

2. 掌握向量组线性相关、线性无关的定义，会用向量组线性相关 / 无关的有关性质及判别法进行相关证明.

最常用： $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$

注：证明有时会用反证法.

知道一些常见结论，如：

部分相关则全体相关.

任何含有零向量的向量组一定是线性相关组.

含有两个相同向量的向量组必线性相关.

全体无关则部分无关.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关，$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，则β可经$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出，且表示法唯一.

n阶行列式$|A|=0 \Leftrightarrow$ 它的n个行(列)向量线性相关

以少表多，多的相关及其3个推论.

向量组线性无关，则加长向量组线性无关.

向量组线性相关，则截短向量组线性相关.

把向量组的线性相关性和线性方程组联系起来.

3. 会求向量组的极大线性无关组及秩. 会进行相关证明.

把矩阵和向量联系起来；极大线性无关组和向量组的秩有时会用于证明.

例如：若向量组的秩为r，则

(1) 向量组中，任何$r+1$个向量必线性相关.

(2) 向量组的线性无关子组所含向量个数最多为r.

(3) 向量组中任意r个线性无关向量都是一个极大线性无关组.

$m\times n$矩阵A经过初等行变换得到$m\times n$矩阵B，那么A与B的列向量组有着相同的线性关系.

据此得求一个向量组的极大无关组的具体办法

① 用已知向量组为列向量构成矩阵A；

② 对A施行初等行变换化为行简化矩阵；

③ 可得原向量组的线性关系并求出一个极大线性无关组.

第四章 线性空间

1. 知道线性空间的定义、性质，掌握线性子空间的定义及判定.

线性空间V具有的性质:

零元素唯一. 负元素唯一.

等式 $0\alpha=0$; $(-1)\alpha=-\alpha$; $\lambda 0=0$ 成立.

若$\lambda\alpha=0$, 则 $\lambda=0$ 或 $\alpha=0$.

子空间判定：$\forall\alpha,\beta\in L, k\in F$, 有$\alpha+\beta\in L, k\alpha\in L$.

2. 理解基底、维数、坐标等概念.

如果线性空间V中存在由n个向量构成的极大线性无关组，则V称为n维线性空间. 记 $\dim(V)=n$.

V的极大线性无关子组称为V的基底.

零空间（没有基底）的维数规定为零.

有了坐标的概念，抽象的n维线性空间的向量及向量的线性运算，通过坐标及坐标的相应运算表示出来，转换为研究我们熟悉的n元有序数组(向量)及其运算.

3. 知道常见线性空间及解空间、向量组生成的子空间等.

R^n, $R^{m\times n}$, $P_n[x]$, $C[a, b]$, 解空间，零空间，

向量组生成的线性空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

线性空间V中的两组向量生成线性空间相同

$\Leftrightarrow$ 这两个向量组等价.

4．会用坐标变换公式，会求过渡矩阵、向量在不同基底下的坐标.

求过渡矩阵: 直接看出法、待定系数法、中介法.

$$[\eta_1, \eta_2,\ldots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n]M$$

称M为由$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n]$ 到$[\eta_1, \eta_2,\ldots, \eta_n]$ 的过渡矩阵，某向量在上述基下的矩阵分别为X，Y， 则

$$X=MY, \qquad Y=M^{-1}X$$

第五章 线性变换

1. 会判定线性变换.

线性变换判定：保持向量的加法和数乘. 对 $\forall \alpha, \beta \in V$ 及 $a, b \in F$ 有 $T(a\alpha + b\beta) = aT\alpha + bT\beta$

线性变换保持零向量和负向量、保持线性组合与线性线性相关性不变. (不保持线性无关)

2. 会求线性变换在某组基下的矩阵，向量的像坐标

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A$$

像坐标：$Y=AX$

注意：线性空间的元可为矩阵、多项式、函数等，都应会求线性变换在基底下的矩阵，

如:在R^3中，定义下面的线性变换，对任意

$$(x_1, x_2, x_3)^T \in R^3$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$ 求T在基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

下的矩阵.

在空间$P_n[x]$中，求微商变换 $Tf(x) = f'(x)$

在基底 $[1, x, x^2, \cdots, x^n]$ 下的矩阵A.

线性变换在不同基底下所对应的矩阵是**相似**的. 反过来，若两个矩阵相似，则可以看作是**同一个线性变换**在两组基下的矩阵.

3. 掌握特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量.

设A是n阶方阵，若数λ和n维非零(列)向量X满足

$$AX=\lambda X$$

则称λ为A的特征根(特征值)，X称为A的对应于(属于)特征根λ的特征向量.

λ是A的特征根 $\Leftrightarrow$ $|\lambda E-A|=0$.

特征向量非零，只能属于一个特征值且：

$$\sum\lambda_i=tr(A),\qquad \Pi\lambda_i=|A|$$

相似矩阵有相同的特征根和特征多项式.

属于不同特征根的特征向量是线性无关的.

设λ_0是n阶矩阵A的k重特征根，则A对应于λ_0的特征子空间的维数不超过k.

对于对称阵呢？

求矩阵A的特征根与特征向量的步骤

1. 计算A的特征多项式 $|\lambda E - A|$；

2. 求特征方程 $|\lambda E - A| = 0$的全部根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 也就是$A$的全部特征值;

3. 对于特征值λ_i, 求齐次方程组$(\lambda_i E - A)x = 0$ 的非零解, 也就是对应于λ_i 的特征向量.

[求出一组基础解系，它们就是对应于该特征根的线性无关特征向量，它们的所有非零线性组合即为属于该特征根的全部特征向量.]

注意：一般说求特征向量是求全部的特征向量，而且要保证特征向量不为零. 如

$k_1X_1+k_2X_2$ (k_1, k_2不同时为0)

4. 掌握相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充要条件及方法.

n阶复矩阵A与对角形矩阵相似$\Leftrightarrow$ A有n个线 性无关的特征向量.

n阶复矩阵A的特征根都是单根，则A必相似于对角形矩阵.

n阶复矩阵A相似于对角形矩阵$\Leftrightarrow$对每个k_i $(1\le k_i\le n)$重特征根λ_i，矩阵$\lambda_i E-A$的秩为$n-k_i$

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是A的n个线性无关的特征向量，且$AX_j=\lambda_j X_j$，令$M=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，则有$M^{-1}AM=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (可相同)是A的全部特征根, 应和M中的$X_1, X_2, \cdots, X_n$顺序对应.

例：在线性空间$P_{n-1}[x]$中，微商变换 $Df(x)=f'(x)$ 取一组基底为$\left[1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$ ，求微商变换D的矩阵A和矩阵A的特征根、特征向量，问A可否对角化.

第六章欧几里德空间

1. 知道内积、欧氏空间、向量的长度（模）、交角、正交、标准正交基、正交变换等概念.

如：R^n中两个列向量X,Y正交 $\Leftrightarrow$ $X^TY=0$

柯西——布涅柯夫斯基不等式

对于欧氏空间中任意二向量α, β，恒有

$$\langle\alpha,\beta\rangle^2 \le \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle \quad \left(\text{或}\left|\langle\alpha,\beta\rangle\right| \le |\alpha||\beta|\right)$$

其中等号成立的充要条件是α与β线性相关.

欧氏空间V中一组两两正交的非零向量，称为V的一个正交(向量)组.

欧氏空间中的正交组是线性无关组.

标准正交基满足关系式：

$$\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

设 $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$是$n$维欧氏空间$V$的一个标准正交基底. 向量$\alpha, \beta$在该基底下的坐标分别为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ ,\ (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

则有 $\left\langle \alpha, \beta \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

$$|\alpha| = \sqrt{\left\langle \alpha, \alpha \right\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

2. 掌握施米特正交化方法，并会进一步标准化.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是欧氏空间V的一组线性无关向量，则存在V的一个正交组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ ，其中 β_k 是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 的线性组合.

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1 \\ \beta_k=\alpha_k-\sum\limits_{j=1}^{k-1}\dfrac{\langle\alpha_k,\beta_j\rangle}{\langle\beta_j,\beta_j\rangle}\beta_j \quad (k=2,\cdots,m)\end{cases}$$

3. 知道正交变换的判定方法

正交变换保持向量的模、内积、夹角不变.

保持内积不变; 把标准正交基变为标准正交基; 在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

第七章二次型

1. 掌握二次型及矩阵表示，二次型秩、等价的概念，二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理.

$f(X)=X^TAX$，A是一个对称矩阵，$r(A)$即为矩阵的秩，标准形不唯一，规范形唯一.

n元实二次型 X^TAX 可经坐标变换 $X=CY$ (C为可逆实矩阵)化为二次型 Y^TBY，其中 $B=C^TAC$.

两个实二次型等价 $\Leftrightarrow$ 它们的矩阵是合同矩阵.

等价的实二次型必有相同的秩.

惯性定理：二次型的规范形是唯一确定的.

正惯性指数−负惯性指数 = 符号差.

两个实二次型等价⇔它们有相同的秩和正惯性指数.

2. 掌握用配方法或合同变换法，正交变换法化二次型为标准形的方法.

(过程见笔记、有详细过程)

3. 理解矩阵的合同关系.

4. 知道正定二次型，负定二次型，半正定二次型、半负定二次型和不定二次型的概念.

若对任意 $X\neq 0$，恒有$X^TAX>0$，则实二次型X^TAX称为正定二次型.

坐标变换(非退化线性替换)保持二次型的正定性不变.

5. 掌握二次型和对应矩阵的正定性（负定性）及其判别法.

如：会用定义判定正定矩阵/正定二次型,

(目前认为)正定矩阵必为实对称矩阵,

正定矩阵的行列式大于零.

矩阵A正定的充要条件：

存在可逆矩阵C使得 $A=C^TC$,

A合同与单位矩阵E,

顺序主子式全大于零,

特征根全大于零,

对应二次型正惯性指数为n.

矩阵A负定，则$-A$正定.