

第三章 习题1

1. 已知向量 $\alpha_1^T = (1, 1, 1), \alpha_2^T = (1, 2, 3), \alpha_3^T = (1, 3, t)$
 - (1) t 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 ?
 - (2) t 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 ?
 - (3) 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时, 用 α_1, α_2 线性表示 α_3 .
2. 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 问:
 - (1) α_1 能否用 α_2, α_3 线性表示 ? 证明你的结论
 - (2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 证明你的结论
3. 设向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但是不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示. 证明 α_m 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$ 线性表示.

4. 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (其中 $\alpha_1 \neq 0, s > 1$) 线性相关的充要条件是至少有一个 $\alpha_i (1 < i \leq s)$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示.

5. 设 t_1, t_2, \dots, t_s 是互不相同的实数, 向量 $\alpha_i = (1, t_i, t_i^2, \dots, t_i^{n-1})^T$ ($i = 1, 2, \dots, s$), 试讨论向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性相关性.

【课本习题11, 有所不同需要讨论】

6. 已知向量组A: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ 的秩为 r , 向量组B: $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}\}$ 是向量组A的一个部分组, 且A可以由B线性表示, 证明: B是A的一个极大线性无关组.

答案

1. 已知向量 $\alpha_1^T = (1, 1, 1), \alpha_2^T = (1, 2, 3), \alpha_3^T = (1, 3, t)$

(1) t 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 ?

(2) t 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 ?

(3) 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时, 用 α_1, α_2 线性表示 α_3 .

解: 令矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 对 A 进行一系列的初等行变换, 将它化成行阶梯型矩阵

$$\begin{aligned} A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t - 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t - 5 \end{pmatrix} = B. \quad R(A) = R(B) \end{aligned}$$

(1)当 $R(A)=3$ 时, 向量组线性无关, 此时 $t \neq 5$.

(2)当 $R(A)<3$ 时, 向量组线性相关, 此时 $t = 5$.

(3)当 $t=5$ 时,

$$A \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A 的列向量组与 B 的列向量组有相同的线性关系

所以 $\alpha_3 = 2\alpha_2 - \alpha_1$

2. 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 问:

(1) α_1 能否用 α_2, α_3 线性表示? 证明你的结论

(2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 证明你的结论

解: (1) 因为向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 所以 α_2, α_3 线性无关, 又向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 所以 α_1 能用 α_2, α_3 线性表示.

(2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 否则, 设

$$\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$$

由(1)知 α_1 能用 α_2, α_3 线性表示. 设 $\alpha_1 = l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$

则有 $\alpha_4 = k_1(l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3) + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

即: $\alpha_4 = (k_1l_2 + k_2)\alpha_2 + (k_1l_3 + k_3)\alpha_3$

则 α_4 可由 α_2, α_3 线性表出, 于是 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 这与题设矛盾. 所以, α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

3. 设向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但是不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示. 证明 α_m 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$ 线性表示.

证明: 向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 设

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1} + k_m\alpha_m \quad (1)$$

若 $k_m=0$, 则(1)式化为

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{m-1}\alpha_{m-1}$$

这表示向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示

这与给定条件矛盾. 则(1)式必有 $k_m \neq 0$, 故

$$\alpha_m = \frac{k_1}{k_m}\alpha_1 + \frac{k_2}{k_m}\alpha_2 + \dots + \frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1} - \frac{1}{k_m}\beta$$

即 α_m 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$ 线性表示.

4. 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (其中 $\alpha_1 \neq 0, s > 1$) 线性相关的充要条件是至少有一个 $\alpha_i (1 < i \leq s)$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示.

证明: **必要性**. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则有不全为0的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0 \quad (1)$$

在 k_1, k_2, \dots, k_s 中找最后一个不为0的数 k_i . 即

$$k_i \neq 0, \text{ 而 } k_{i+1} = \dots = k_s = 0,$$

显然 $i > 1$. 否则此时(1)化为 $k_1\alpha_1 = 0$, 且 $k_1 \neq 0$, 故只能 $\alpha_1 = 0$. 这与 $\alpha_1 \neq 0$ 矛盾.

$$\text{因此(1)化为 } \alpha_i = \frac{k_1}{k_i}\alpha_1 + \frac{k_2}{k_i}\alpha_2 + \dots + \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}$$

即至少有一个 $\alpha_i (1 < i \leq s)$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示.

充分性，如果有一个 $\alpha_i (1 < i \leq s)$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示，则 α_i 可由其余 $s-1$ 个向量线性表出，由定义，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

5. 设 t_1, t_2, \dots, t_s 是互不相同的实数, 向量 $\alpha_i = (1, t_i, t_i^2, \dots, t_i^{n-1})^T$ ($i = 1, 2, \dots, s$), 试讨论向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性相关性.

解: 向量 α_i 的维数是 n , 故当 $s > n$ 时, 向量组线性相关.

当 $s \leq n$ 时, 令

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_s \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_s^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_s^{n-1} \end{pmatrix}$$

A 的前 s 行构成的 s 阶子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{s-1} & t_2^{s-1} & \dots & t_s^{s-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq s} (t_j - t_i) \neq 0. \text{ (因 } t_1, t_2, \dots, t_s \text{ 互不相同)}$$

故其列向量组线性无关, 从而其加长向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

6. 已知向量组A: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ 的秩为 r , 向量组B: $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}\}$ 是向量组A的一个部分组, 且A可以由B线性表示, 证明: B是A的一个极大线性无关组.

证明: 要证明B是A的极大无关组, 有两个条件,
第一, A可以由B线性表示。(已经满足)
第二, B是线性无关的向量组。

由于B是A的部分组, 所以B可以由A线性表示, 同时A可由B线性表示, 故向量组A与B是等价的, 因此其秩相同.

向量组B的秩为 r , 且有 r 个向量, 所以B线性无关.
所以, B是A的一个极大线性无关组.

本次作业

第三章习题

- 8. (3) (4)
- 9. (2)
- 15. (1)
- 16. (2)
- 21. (2) (3)