

# 第二章 矩阵代数

## 第三节 逆矩阵与矩阵的 初等变换

## § 2.3.1 逆矩阵

### 一、（概念的）引入

在数的运算中，当数 $a \neq 0$ 时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中  $a^{-1} = \frac{1}{a}$  为  $a$  的倒数，（或称  $a$  的逆）；

在矩阵的运算中，单位阵 $E$ 相当于数的乘法运算中的1，那么，对于矩阵 $A$ ，如果存在一个矩阵 $A^{-1}$ ，

使得  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ ，

则矩阵 $A^{-1}$ 也可类似称为 $A$ 的可逆矩阵或逆阵。

## 二、逆矩阵的概念和性质

**定义1** 对于  $n$  阶矩阵  $A$ , 如果有一个  $n$  阶矩阵  $B$ , 使得

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵  $A$  是**可逆**的, 并把矩阵  $B$  称为  $A$  的**逆矩阵**.

$A$  的逆矩阵记作  $A^{-1}$ .

例 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$$\because AB = BA = E,$$

$\therefore B$  是  $A$  的逆矩阵.



$n$ 阶矩阵在逆矩阵存在时，其逆矩阵**唯一**吗？  
在具备**什么条件**时，它是可逆矩阵？  
可逆时**如何求**其逆矩阵？

先来看：

若 $n$ 阶矩阵 $A$ 可逆，设 $B$ 和 $C$ 都是 $A$ 的逆矩阵，  
则有  $AB = BA = E$ ,  $AC = CA = E$ ,

可得  $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C$ .

所以  $A$  的逆矩阵是唯一的. 即  $B=C=A^{-1}$ .

**定理1** 若 $A$ 是可逆矩阵，则 $A$ 的逆矩阵是**唯一**的.

由于  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ ，可知 $A^{-1}$ 可逆，且  
 $(A^{-1})^{-1} = A$ .

解决了第一个问题.

例1 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , 求A的逆阵.

解: 设  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  是A的逆矩阵,

则  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1, \\ 2b + d = 0, \\ -a = 0, \\ -b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = -1, \\ c = 1, \\ d = 2. \end{cases}$$

又因为

$AB$

$BA$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

**新问题：**对于高阶方阵待定系数法求取逆矩阵显然是不可行的。

对于一个方阵，我们引入伴随矩阵的概念

**定义2** 行列式  $|A|$  的各个元素的代数余子式  $A_{ij}$  所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵  $A$  的**伴随矩阵**。

**注意：** $A^*$ 中**元素排列顺序**。

例2 求方阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  的伴随矩阵.

解:  $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$

同理可得  $A_{13} = 2, A_{21} = 6, A_{22} = -6, A_{23} = 2,$   
 $A_{31} = -4, A_{32} = 5, A_{33} = -2,$

得  $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$



**定理2** 矩阵 $A$ 可逆的充要条件是  $|A| \neq 0$ , 且当 $A$ 可逆时

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$

其中 $A^*$ 为矩阵 $A$ 的伴随矩阵.

证明:

**必要性**

若  $A$  可逆, 即有  $A^{-1}$  使  $AA^{-1} = E$ .

故  $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$ , 所以  $|A| \neq 0$ .

# 充分性

当 $|A| \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = |A|$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix},$$

类似可得  $AA^*=|A|E$ .

因此,  $AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A \frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|} A = E,$

按逆矩阵的定义得  $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$  证毕.

解决了第二、三个问题.

## 补：奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当 $|A|=0$ 时,  $A$ 称为**奇异矩阵**, 当 $|A|\neq 0$ 时称为**非奇异矩阵**.

由此得:  $A$ 是可逆矩阵 $\Leftrightarrow A$ 为非奇异矩阵.

另外, 也称 $|A|=0$ 的方阵为**退化矩阵** (降秩矩阵),  $|A|\neq 0$ 的方阵为**非退化矩阵** (满秩矩阵).

例3 方阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  可逆吗？若可逆求其逆矩阵。

解：  $\because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \therefore A^{-1}$  存在。

前面已经得到：  $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 。

故

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

伴随矩阵法求逆矩阵

**推论** 设 $A$ 、 $B$ 为 $n$ 阶矩阵, 若 $AB=E$  (或 $BA=E$ ) 成立, 则 $B=A^{-1}$ .

**证明:**  $|A| \cdot |B| = |E| = 1$ , 故 $|A| \neq 0$ ,

因而 $A^{-1}$ 存在, 于是

$$\begin{aligned} B &= EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) \\ &= A^{-1}E = A^{-1} \end{aligned}$$

证毕

## 逆矩阵的运算性质

(1) 若 $A$ 可逆, 则 $A^{-1}$ 亦可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$ .

(2) 若 $A$ 可逆, 数 $\lambda \neq 0$ , 则 $\lambda A$ 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ .



(3) 若 $A, B$ 为同阶方阵且均可逆, 则 $AB$ 亦可逆, 且

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

定理3

证明: 
$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AEA^{-1} = AA^{-1} = E, \end{aligned}$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

推广 
$$(\mathbf{A_1 A_2 \cdots A_m})^{-1} = \mathbf{A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}}.$$

其中  $A_1, A_2, \cdots, A_m$  皆为 $n$ 阶可逆矩阵.

(4) 当 $|A| \neq 0$ 时, 定义  $A^{-k} = (A^{-1})^k$ . ( $k$ 为正整数)  
注意, 对于方阵 $A$ 有,  $A^0 = E$ .

当 $|A| \neq 0$ ,  $\lambda, \mu$ 为整数时,有

$$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}, \quad (A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}.$$

(5) 若 $A$ 可逆,则有 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ .

证明:  $\because AA^{-1} = E$

$$\therefore |A||A^{-1}| = 1$$

$$\text{因此 } |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

另外, 对于任意方阵 (无论是否可逆), 有

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$