

姓名	学号	院系	专业	任课教师	南开大学 2017 级一元函数微分试卷 (A 卷) 2017 年 11 月 25 日										草稿区	
					(说明: 答案务必写在装订线右侧, 写在装订线左侧无效, 影响成绩后果自负。)											
					题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	核分签名		复核签名
					得分											

  

一题得分	
------	--

一、选择题: (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设函数  $g(x)$  可微,  $h(x) = e^{g(x)}$ ,  $h'(1) = 1$ ,  $g'(1) = 2$ , 则  $g(1)$  等于 (C)
2. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续且严格单调,  $f(a)f(b) < 0$ , 则下列说法正确的是 (B)
3. 设有函数  $x + \frac{1}{x}$ , 则下列说法正确的是 (B)
4. 设  $f(x)$  于  $x = 0$  点可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 则下列说法错误的是 (D)
5. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  点连续,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = a$ , 则下列说法正确的是 (B)
6. 当  $x \rightarrow 0$  时, 用  $o(x)$  表示  $x$  的高阶无穷小量, 则下列说法错误的是 (D)

二、填空题: (每小题 4 分, 共 16 分)

1. 设函数  $f(x) = -\arctan x$ , 则  $f(x)$  于  $x = 0$  点的微分  $df|_{x=0} = -dx$ .
2. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x+a, & x < 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a = 1$ .
3. 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$  确定, 则  $\frac{dy}{dx}|_{x=1} = -\frac{1}{8}$ .
4. 设曲线  $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$  有拐点  $(1, -1)$ , 则  $a = -3$ ,  $b = 0$ .

二题得分	
------	--

姓名	学号	院系	专业	任课教师	三、计算下列各题: (3 小题, 共 25 分)										草稿区
					1. 求函数 $f(x) = \arcsin \sqrt{x+1}$ 的导数。(9)										
					解: $(\arcsin \sqrt{x+1})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x+1})^2}} (\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{4\sqrt{x(x+1)}}$ (6分)										
					2. 确定函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$ 的单调区间和极值点。(8分)										

解:  $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$ ,  $f'(1) = 0$  (2分)

当  $1 > x > 0$  时,  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  单调减 (4分)

当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  单调增 (6分)

$x = 1$  是极小值点 (8分)

3. 确定曲线  $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$  的凹凸性与拐点。(8分)

解:  $f'(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$  (2分)

$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{4}{3}}$  (4分)

当  $x > 2$  时,  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  下凹 (或...) (6分)

当  $x < 2$  时,  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  上凸 (或...) (8分)

$x = 2$  是拐点 (8分)

姓名	
学号	
院系	
专业	
任课教师	

四、求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1+x}{1-x}) - 2x}{2x^3}$ , (10分)

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1+x}{1-x}) - 2x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x}{2x^3} \quad (2分)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2}{6x^2} \quad (8分)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{3} \quad (10分)$$

四题得分	
------	--

五、证明当  $x > 0$  时,  $\frac{x}{2} > \frac{\pi}{2} - \arctan x$ . (10分)

解: 设  $f(x) = 1 - x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$ ,  $f(0) = 1$ ,  $\downarrow$   $(1分)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \quad (3分)$$

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2} + \arctan x + \frac{x}{1+x^2}, f'(0) = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0, \quad (6分)$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0 \Rightarrow f'(x) \text{ 单调增} \Rightarrow f'(x) < 0 \quad (8分)$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ 单调减} \Rightarrow f(x) > 0. \quad (10分)$$

五题得分	
------	--

草稿区