湖南商学院2006年度（线性代数）期末考试试卷

一、填空题（每小题2分，共20分）

1. 如果行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{12} & -2a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix}=$____________。

2. 设$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$，则$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=$________________。

3. 设$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,且有$ABC=E$,则$A^{-1}=$___________。

4. 设齐次线性方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$的基础解系含有 2 个解向量，则

$a=$______。

5. A、B均为5阶矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2},|B|=2$，则$\left|-B^TA^{-1}\right|=$____________。

6. 设$\alpha=(1,-2,1)^T$，设$A=\alpha\alpha^T$，则$A^6=$________________。

7. 设A为n阶可逆矩阵，A^*为A的伴随矩阵，若λ是矩阵A的一个特征值，则A^*的一个特征值可表示为__________。

8. 若$f=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3$为正定二次型，则$t$的范围是__________。

9. 设向量$\alpha=(2,1,3,2)^T,\beta=(1,2,-2,1)^T$，则$\alpha$与$\beta$的夹角$\theta=$______。

10. 若3阶矩阵A的特征值分别为1，2，3，则$|A+E|=$______________。

二、单项选择（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda=$（　　）

A. 1 或 2　　B. －1 或－2　　C. 1 或－2　　D. －1 或 2.

2. 已知 4 阶矩阵 A 的第三列的元素依次为 $1,3,-2,2$，它们的余子式的值分别为 $3,-2,1,1$，则 $|A|=$（　　）

A. 5　　B. -5　　C. -3　　D. 3

3. 设 A、B 均为 n 阶矩阵，满足 $AB=O$，则必有（　　）

A. $|A|+|B|=0$　　B. $r(A)=r(B)$

C. $A=O$ 或 $B=O$　　D. $|A|=0$ 或 $|B|=0$

4. 设 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个解向量，则下列向量中仍为该方程组解的是　　（　　）

A. $\beta_1+\beta_2$　　B. $\frac{1}{5}(3\beta_1+2\beta_2)$　C. $\frac{1}{2}(\beta_1+2\beta_2)$　D. $\beta_1-\beta_2$

5. 若二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+kx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，则 $k=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

三、计算题（每题 9 分，共 63 分）

1. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b\\ b & a & \cdots & b\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$

2. 设A,B均为3阶矩阵，且满足$AB+E=A^2+B$，若矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵$B$。

3. 已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$和$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$；已知$\beta_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$具有相同的秩，求$a$，$b$的值。

4. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\5\\4\\8\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩以及它的一个极大线性无关组；

（2）将其余的向量用所求的极大线性无关组线性表示。

5. 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+9x_4=a \end{cases}$

（1）a 为何值时方程组有解？（2）当方程组有解时求出它的全部解（用解的结构表示）.

6. 设矩阵 $P=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $,D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 A 由关系式 $P^{-1}AP=D$ 确定，试求 A^5

7. 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形，并写出相应的可逆线性变换。

四、证明题（7 分）

已知 3 阶矩阵 $B\neq O$，且矩阵 B 的列向量都是下列齐次线性方程组的解

$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$，（1）求 λ 的值；（2）证明：$|B|=0$。

参考答案与评分标准

一. 填空题

1. -16； 2. 0； 3. $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$； 4. 1； 5. -4； 6. $6^5 A = 6^5 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$； 7. $|A|\dfrac{1}{\lambda}$；

8. $-\sqrt{\dfrac{5}{3}} < t < \sqrt{\dfrac{5}{3}}$； 9. $\dfrac{\pi}{2}$； 10. 24。

二. 单项选择： 1. C； 2. A ； 3. D； 4. B； 5. C.

三.计算题：

1. $D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$ 4 分

$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$ 9 分

2. $AB + E = A^2 + B \Rightarrow AB - B = A^2 - E$

$\Rightarrow (A-E)B = (A-E)(A+E)$ 3 分

因为 $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 显然可逆 6 分

则 $B = A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 9 分

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 0 & 0 & 5/3 - b/3 \end{pmatrix}$, 3 分

即 $b = 5$，且 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 5 分

那么 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$，则 6 分

$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & a & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & a-15 & 0 \end{pmatrix}$，即 $a = 15$ 9 分

4. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -5 & 5 & -2\\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 6 & 8 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -3 & 6 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 4 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 4 分

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$ 5 分

其极大线性无关组可以取为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 7 分

且：$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_5$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_5$ 9 分

5. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3\\ 1 & -5 & -10 & 9 & a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2\\ 0 & -6 & -12 & 6 & a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+5\end{pmatrix}$

当 $a=-5$ 时，线性方程组有解 4 分

即 $\begin{cases}x_1= & -4x_4\\ x_2=1-2x_3+x_4\end{cases}$，特解为 $\gamma_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$， 6 分

其导出组的一般解为 $\begin{cases}x_1= & -4x_4\\ x_2=-2x_3+x_4\end{cases}$，基础解系为 $\eta_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ 8 分

原线性方程组的通解为 $\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$ （k_1,k_2 为任意常数） 9 分

6. 由 $P^{-1}AP=D$，得 $A=PDP^{-1}$ 2 分

$A^5=PD^5P^{-1}$ 4 分

$=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^5\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 32\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ 7 分

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -128\\ -1 & 32\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43 & 44\\ -11 & -12\end{pmatrix}$ 9 分

7. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$

$=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3$ 2 分

$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-x_3^2$ 4 分

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=\quad x_2+x_3\\ y_3=\qquad x_3\end{cases}$ 6 分

即作线性变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$ 8 分

可将二次型化成标准形 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ 9 分

四.证明题:

因为 $B \neq O$，所以齐次线性方程组有非零解，故其方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\lambda = 0$$，所以 $\lambda = 0$ 3 分

（2）$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$r(A) = 2$，因此齐次线性方程组的基础解系所含解的个数为 3-2=1，故 $r(B) \leq 1$，因而 $|B| = 0$。 7 分