第1题答案：

解：（1）X 的可能取值为 1,2,3,…,X 服从几何分布 $P\{X=k\}=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}$，$k=1,2,\cdots$，故 X 的分布律为

X	1	2	3	…
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$	…

（2）Y 的可能取值为 1,2,3，则由题意有 Y 的分布律为

X	1	2	3
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（3）（ⅰ）$\{X<Y\}$ 可分解为下列 3 个两两不相容的事件之和，即

$$\{X<Y\}=\{(X=1)\cap(Y=2)\}\cup\{(X=1)\cap(Y=3)\}\cup\{(X=2)\cap(Y=3)\},$$

故 $P\{X<Y\}=P\{(X=1)\cap(Y=2)\}+P\{(X=1)\cap(Y=3)\}+P\{(X=2)\cap(Y=3)\}$.

因为两只鸟儿的行动是相互独立的，从而

$$P\{X<Y\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}+P\{X=1\}P\{Y=3\}+P\{X=2\}P\{Y=3\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}.$$

（ⅱ）$P\{Y<X\}=1-P\{X<Y\}-P\{X=Y\}=1-\frac{8}{27}-\sum_{k=1}^{3}P\{(X=k)\cap(Y=k)\}$

$$=1-\frac{8}{27}-\sum_{k=1}^{3}P\{X=k\}P\{Y=k\}=1-\frac{8}{27}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}-\frac{4}{27}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{38}{81}.$$

第2题答案：

解 （1）$P\{$至多 3 分钟$\}=P\{X\leqslant3\}=F_X(3)=1-e^{-1.2}$.

（2）$P\{$至少 4 分钟$\}=P\{X\geqslant4\}=1-P\{X<4\}$

$=1-P\{X\leqslant4\}=1-F_X(4)=e^{-1.6}$.

（因为 $F_X(x)$ 是指数分布随机变量 X 的分布函数，X 是连续型随机变量，故 $P\{X=4\}=0$，$P\{X<4\}=P\{X\leqslant4\}$.）

（3）$P\{$3 分钟至 4 分钟之间$\}=P\{3\leqslant X\leqslant4\}=P\{3<X\leqslant4\}$

$=F_X(4)-F_X(3)=e^{-1.2}-e^{-1.6}$

（4）$P\{$至多 3 分钟或至少 4 分钟$\}=P\{(X\leqslant3)\cup(X\geqslant4)\}$

$=P\{X\leqslant3\}+P\{X\geqslant4\}$

$=1-e^{-1.2}+e^{-1.6}$.

（5）$P\{$恰好 2.5 分钟$\}=P\{X=2.5\}=0$.

注：(2)答案改为$1-e^{-1.6}$

第3题答案：

【解析】因为$f(x)$，$g(x)$都是概率密度函数

所以有

$f(x)\geq0,g(x)\geq0$

因为$0\leq a\leq1$

所以：$h(x)\geq0$

又有

$\int(-\infty,+\infty)f(x)dx=\int(-\infty,+\infty)g(x)dx=1$

所以

$\int(-\infty,+\infty)h(x)dx$

$=\int(-\infty,+\infty)[af(x)+(1-a)g(x)]dx$

$=a\int(-\infty,+\infty)f(x)dx+(1-a)\int(-\infty,+\infty)g(x)dx$

$=a+(1-a)$

$=1$

所以$h(x)=af(x)+(1-a)g(x)$也是一个概率密度函数.

第4题答案：

【解析】

解 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

分别记 X,Y 的分布函数为 $F_X(x),F_Y(y)$.

(1) 先来求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，因 $Y=e^X>0$，故当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$，从而 $f_Y(y)=0$. 当 $y>0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{e^X\leqslant y\}$$
$$=P\{X\leqslant \ln y\}=F_X(\ln y).$$

将上式关于 y 求导，得

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot\frac{1}{y}=\begin{cases}1\cdot\frac{1}{y}, & 0<\ln y<1,\\ 0, & \ln y<0\text{ 或 }\ln y>1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1<y<e,\\ 0, & 0<y<1\text{ 或 }y>e,\end{cases}$$

故有 $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1<y<e,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 先来求 $F_Y(y)$. 当 X 在 $(0,1)$ 取值时 $Y>0$，故当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$，从而 $f_Y(y)=0$. 当 $y>0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{-2\ln X\leqslant y\}=P\{X\geqslant e^{-y/2}\}$$
$$=1-P\{X<e^{-y/2}\}=1-F_X(e^{-y/2}),$$

于是

$$f_Y(y)=-f_X(e^{-y/2})(-1/2e^{-y/2})=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

第5题答案：

21、(1) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\ln^2 y/2}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$；(2) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{y-1}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y-1)/4}, y>1\\ 0, \quad y\le 1\end{cases}$；

(3) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$.

第6题答案：

$0, \quad y\leq 0$

6、$\because y=e^x$ 单增且处处可微

$\therefore x=h(y)=\ln y$.

当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=|h'(y)|f_X[h(y)]$

$=\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{1}{\pi[1+(\ln y)^2]}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi y[1+(\ln y)^2]}, & y>0\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}$

第7题答案：

解　由题知 $P\{X>90\}=\frac{12}{526}\approx 0.0228$，$P\{X<60\}=\frac{83}{526}\approx 0.1588$，则

$$P\{X\leqslant 90\}=\Phi\left(\frac{90-\mu}{\sigma}\right)=0.9772,\ \Phi\left(-\frac{60-\mu}{\sigma}\right)=0.8412$$

查表得

$$\frac{90-\mu}{\sigma}\approx 2.0,\ -\frac{60-\mu}{\sigma}\approx 1.0$$

所以，$\mu=70$，$\sigma=10$，即 $X\sim N(70,10^2)$.

设被录用者的最低分为 a，则

$$P\{X\geqslant a\}=\frac{155}{526}\approx 0.2947$$

$$P\{X<a\}=\Phi\left(\frac{a-70}{10}\right)=1-0.2947=0.7053$$

查表得 $\frac{a-70}{10}\approx 0.54$，所以 $a=75.4$（分）.

某人成绩 78 分，在 75.4 分以上，所以此人能被录取.

第8题答案：

解　因为 $X\sim N(0,\sigma^2)$，所以 $F(x)=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$，于是

$$F(1<x<3)=\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

令上式等于 $g(\sigma)$，利用微积分中求极值的方法，有

$$g'(\sigma)=\Phi'\left(\frac{3}{\sigma}\right)\left(\frac{-3}{\sigma^2}\right)+\Phi'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}e^{-1/(2\sigma^2)}[1-3e^{-8/(2\sigma^2)}].$$

令上式等于零，解得 $\sigma_0^2=4/\ln 3$. 又 $g''(\sigma_0)<0$，故 $\sigma=2/\sqrt{\ln 3}$ 为极大值点，且唯一. 所以，当 $\sigma=2/\sqrt{\ln 3}$ 时，X 落入区间 $(1,3)$ 的概率最大.

第9题答案：

解　(1) 由性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 cx\,\mathrm{d}x=\frac{c}{2}=1$，可得 $c=2$.

(2) $P\{0.3<X<0.7\}=\int_{0.3}^{0.7}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0.3}^{0.7}2x\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_{0.3}^{0.7}=0.4$.

(3) 因为 $P\{X>a\}+P\{X<a\}=1\quad(P\{X=a\}=0)$，

而　$P\{X>a\}=P\{X<a\}$，

故　$P\{X>a\}=P\{X<a\}=\frac{1}{2}$，

即　$\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a 2x\,\mathrm{d}x=a^2=\frac{1}{2}$，得 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(4)　$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

第10题答案：

由分布函数的定义有

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \int_1^x \frac{1}{3y^{2/3}}\mathrm{d}y, & 1\leqslant x<8,\\ 1, & x\geqslant 8\end{cases}=\begin{cases}0, & x<1,\\ x^{1/3}-1 & 1\leqslant x<8,\\ 1, & x\geqslant 8,\end{cases}$$

再由 $Y=F(X)$，可知 Y 的可能取值范围是 $(0,1)$，设随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}=P\{X^{1/3}-1\leqslant y\}$$

$$=P\{X\leqslant (y+1)^3\}=F[(y+1)^3]=y;$$

当 $y\geqslant 1$ 时，$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$.

故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$$