第一题：

解　根据所给条件，犯第一类错误的概率为

$$\alpha = P\left(x \geqslant \frac{2}{3} \middle| H_0\right) = \int_{\frac{2}{3}}^{2} \frac{1}{2} \mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

犯第二类错误的概率为

$$\beta = P\left(x < \frac{2}{3} \middle| H_1\right) = \int_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{9}.$$

第二题：

.B

检验犯第二类错误：接受实际不真的假设 H_0 所犯的错误 β，

$$X \sim N(\mu, 4)，即 \overline{X} \sim N\left(11.5, \frac{1}{4}\right),$$

$$\beta = P\{\overline{X} \leqslant 11\} = P\left\{\frac{\overline{X} - 11.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \leqslant \frac{11 - 11.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right\} = P\left\{\frac{\overline{X} - 11.5}{\frac{1}{2}} \leqslant -1\right\}$$

$$= \Phi(-1) = 1 - \Phi(1).$$

答案选(B).

第三题：

$$\frac{\overline{X}\sqrt{n(n-1)}}{Q}.$$

解　当 H_0 成立时，有 $\dfrac{\overline{X} - 0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$，而

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

即 $\dfrac{Q^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，且相互独立，故

$$T = \frac{\dfrac{\overline{X}}{\sigma / \sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{Q^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\overline{X}\sqrt{n(n-1)}}{Q} \sim t(n-1).$$

第四题：

本题需检查假设

$H_0: \mu \geq \mu_0 = 21, \qquad H_1: \mu < \mu_0$

令n=17,$\overline{x} = 20$, s=3.984,

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{X}_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{20-21}{3.9843/\sqrt{17}}=-1.035, t_\alpha(16)=1.7459.$$

由于 $t>-1.7495$,未落入拒绝域,接受原假设,即可以认为这批罐头符合要求。

第五题：

解 依题意,罐头重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $n=16$, $\bar{x}=252$, $s=4$, $\alpha=0.05$. 先检验 μ 是否等于 250 g,再检验 σ^2 是否超过了 3^2.

(1) 先检验 μ 是否等于 250 g. 按题意总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知,要求在水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设 $H_0: \mu=250$, $H_1: \mu \neq 250$.

由于因 σ^2 未知,故采用 t 检验,取检验统计量为 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$,又 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.1315$,拒绝域为

$$|t|=\left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right| \geqslant t_{0.025}(15)=2.1315.$$

由于观察值 $|t|=\left|\dfrac{252-250}{\dfrac{4}{\sqrt{16}}}\right|=2<2.1315$,没落在拒绝域内,所以接受 H_0.

(2) 检验 σ^2 是否超过了 3^2. 检验假设 $H'_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2=9$, $H'_1: \sigma^2 > \sigma_0^2=9$.

因为 μ 未知,所以选取统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$,且 $\chi_\alpha^2(15)=\chi_{0.05}^2(15)=24.996$,拒绝域为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>\chi_{0.05}^2(15)=24.996.$$

由于 $\chi^2=\dfrac{15}{9}\times 4^2=26.667>\chi_{0.05}^2(15)=24.996$,所以拒绝 H'_0.

综合(1) 和(2),在显著性水平 $\alpha=0.05$ 时,可以认为机器工作不正常.

第六题：

解　按题意总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，两总体的方差相等，均等于 σ^2，σ^2 未知，两样本相互独立，本题需在水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2.$$

采用 t 检验，取检验统计量为 $t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$，今 $n_1 = 8$，$n_2 = 10$，$\bar{x} = 0.2319$，$\bar{y} = 0.2097$，$s_1^2 = 0.0146^2$，$s_2^2 = 0.0097^2$，$s_w^2 = [(8-1)s_1^2 + (10-1)s_2^2]/(8+10-2) = 0.012^2$，$\delta = 0$，$t_{0.025}(16) = 2.1199$. 拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \right| \geqslant t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = 2.1199.$$

因观察值

$$|t| = \left| \frac{0.2319 - 0.2097}{0.012\sqrt{1/8 + 1/10}} \right| = 3.900 > 2.1199,$$

落在拒绝域之内，故拒绝 H_0，认为两个作家所写的小品文中包含由 3 个字母组成的单字的比例有显著的差异.

第七题：

解　设早、晚身高差 $Z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$，检验假设

$$H_0: \mu_z = 0, \; H_1: \mu_z > 0.$$

由题意知 $z_i = x_i - y_i = 0, 1, 3, 2, 1, 2, -1, 2$，$n = 8$，$\alpha = 0.05$，$\bar{z} = 1.25$，$s \approx 1.282$，拒绝域为

$$W = \left\{ \frac{\bar{z} - 0}{s/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1) \right\}.$$

查 t 分布表得 $t_{0.05}(7) = 1.8946$. 计算 t 值

$$t = \frac{1.25}{1.282/\sqrt{8}} \approx 2.758 > 1.8946,$$

故否定 H_0，即认为早晨的身高比晚上的身高要高.

第八题：

$$H_0: \mu \le \mu_0 = 162.5，H_1: \mu > \mu_0$$

统计量为$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{165.2-162.5}{6.9/\sqrt{50}} = 2.77$

临界值法：
拒绝域为$Z > Z_{0.02} = 2.055$,
2.77>2.055,因此落入拒绝域，故拒绝H_0，有理由相信平均身高变高了。

P值法：
P=P(Z>2.77)=1-Φ(2.77) $=$ $1 -$0.9972=0.0028<$\alpha = 0.02$，故拒绝H_0，有理由相信平均身高变高了。

第九题：

分析 这里方差反映了生产的精度，问题归结为检验新工艺下的零件直径的方差是否减小，即需要进行两正态总体方差 σ_1^2, σ_2^2 的比较检验

$$H_0: \sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2,$$

应该利用 F 检验法来进行.

解 设旧、新工艺下零件的直径分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

建立假设

$$H_0: \sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

这里 $n_1 = 9, n_2 = 8$. 给定 $\alpha = 0.05, F_{0.05}(8,7) =$ 3.73, 利用样本计算

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i = 20, \quad \bar{y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} y_i = 19.95,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2 = 0.195, \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^2 = 0.048\,6,$$

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 4.01.$$

由于 $F_0 = 4.01 > F_{0.05}(8,7) =$ 3.73，故拒绝 H_0，即认为抽样结果可以支持工厂采用新工艺.

第十题：

分析 若令 X 表示交通事故发生时的星期几数，设 $p_i=P\{X=i\}$，$i=1,2,\cdots,7$.交通事故与星期几无关，即需要检验假设

$$H_0:p_i=\frac{1}{7},i=1,2,\cdots,7.$$

显然这是一个利用 χ^2 检验法在大样本下拟合有限离散总体的分布问题.

解 记 X 为交通事故发生时的星期几数，并设 $p_i=P\{X=i\}$，$i=1,2,\cdots,7$.

建立假设

$$H_0:p_i=\frac{1}{7},i=1,2,\cdots,7,$$

这里 $r=7$，$n_1=36$，$n_2=23$，$n_3=29$，$n_4=31$，$n_5=34$，$n_6=60$，$n_7=25$，$p_{i0}=\frac{1}{7}$，$i=1,2,\cdots,7$，$n=238$.计算可得

$$\chi_0^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{(N_i-np_{i0})^2}{np_{i0}}=26.941.$$

给定 $\alpha=0.05$，$\chi_{0.05}^2(6)=12.592$，由于 $\chi_0^2=26.94>\chi_{0.05}^2(6)=12.592$，故拒绝 H_0，即认为交通事故的发生与星期几有关.