§3.1.2 矩阵的秩

一、矩阵秩的概念

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为m×n矩阵. 可看成向量构成

m个n维行向量构成的向量组的秩称为A的行秩.

n个m维列向量构成的向量组的秩称为A的列秩.

定义1 在矩阵A中，取出k个不同行与不同列相交处的元(按在A中的排列顺序)构成的k阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_1} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le m \\ 1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n \end{pmatrix}$$

称为A的一个k阶子式.

定理1 矩阵A的行秩等于A中**一切非零子式的最高阶数**.

证明：设A中有一个r阶子式不为零，不失一般性，可设位于A左上角处r阶子式

$$|D|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

而一切高于r阶的子式（若存在）皆为零.

由于|D|≠0， 立即得A的前r个行向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

|D|的r个行向量线性无关，则其加长向量组线性无关.

考虑r+1阶行式

$$|D_{r+1}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix} \quad (r < k \le m, 1 \le j \le n)$$

若$1 \le j \le r$，则$|D_{r+1}|$中有两列相同，故$|D_{r+1}|=0$.

若$r<j \le n$，则$|D_{r+1}|$是A的r+1阶子式，故$|D_{r+1}|=0$.

于是恒有$|D_{r+1}|=0$.

对于固定的k，$|D_{r+1}|$中最后一列的代数余子式取值与该列无关. 按最后一列展开得：

$$a_{1j}\lambda_1 + a_{2j}\lambda_2 + \cdots + a_{rj}\lambda_r + a_{kj}|D| = 0$$

对于j=1,2,…,n都成立.

即
$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \cdots + a_{r1}\lambda_r + a_{k1}|D| = 0 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{r2}\lambda_r + a_{k2}|D| = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \cdots + a_{rn}\lambda_r + a_{kn}|D| = 0 \end{cases}$$

所以 $\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots + \alpha_r\lambda_r + \alpha_k|D| = 0$

由|D|≠0知 α_k 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出.

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是矩阵A的行向量的极大线性无关组. 所以A的行向量组的秩等于r.

类似有：矩阵A的列秩也等于A中一切非零子式的最高阶数.

定理2 矩阵的行秩等于列秩，它们都等于矩阵中一切非零子式的最高阶数.

定义2 矩阵A的行秩，称为矩阵A的秩，记为

$$r_A \ (\text{或} R_A,\ R(A),\ r(A)).$$

若矩阵A的秩为r，则

(1) r＝A的行秩＝A的列秩.

(2) $r_{A^T} = r_A$

(3) A中至少有一个r阶子式不为零，所有r+1,r+2,… 阶子式为零.

另外结论：

若A中存在一个r阶子式不为零，则 $r_A \geq r$;

若A中所有r阶子式都为零，则 $r_A < r$.

可逆矩阵的秩等于阶数，故称可逆矩阵为**满秩矩阵**，奇异矩阵也称为**降秩矩阵**.

例1 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

解: 在 A 中，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

又 $\because$ A的3阶子式只有一个$|A|$，且 $|A| = 0$,

$\therefore \quad R(A) = 2$.

例2 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，求该矩阵的秩.

解 $\because \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$ 计算A的3阶子式，

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore R(A) = 2.$$

二、矩阵的秩的相关结论和求法

先来研究矩阵间的**乘法**：

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，则AB是$m\times p$矩阵，把AB和B都看作行向量构成，即：

$$AB=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_m\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_m\end{pmatrix}=AB=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\cdots+a_{1n}\beta_n\\ a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{2n}\beta_n\\ \vdots\\ a_{m1}\beta_1+a_{m2}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_n\end{pmatrix}$$

故$\gamma_j\ (j=1,2,\cdots,m)$ 是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的线性组合.

已证 $\gamma_j\ (j=1,2,\cdots,m)$ 是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的线性组合.

从而也是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的某极大线性无关组 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_{r_B}'$ 的线性组合. 这样 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_{r_B}'$ 也是向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$；$\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_{r_B}'$ 的极大线性无关组.

于是有 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 中任何线性无关子组所含向量个数必不超过r_B，即$r_{AB}\le r_B$.

利用AB的列向量都是A的列向量的线性组合，类似可证明$r_{AB}\le r_A$.

定理3 $r_{AB}\le \min(r_A, r_B)$, 即矩阵乘积的秩不超过每个因子矩阵的秩.

推论1 设A为n阶可逆矩阵，$P=P_{m\times n}$， $Q=Q_{n\times s}$

则 $r_{AQ}=r_Q$， $r_{PA}=r_P$.

即任何矩阵乘上可逆矩阵后，其秩不变.

证：以$r_{AQ}=r_Q$为例

显然由上面定理得$r_{AQ}\le r_Q$.

又A可逆知 $Q=A^{-1}(AQ)$,

再由上面定理得$r_Q\le r_{AQ}$，

故 $r_{AQ}=r_Q$.

推论2 初等变换不改变矩阵的秩.

初等变换求矩阵秩的方法：

把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

例3 求A的秩

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解：

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3+r_1}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ r_A=3.$$

注 (1) 变换的结果并不唯一，但最后得到的秩是相同的.

(2) 可以同时进行行和列的变换.

由前的推论，我们还能得到如下定理：

定理4 非零矩阵$A_{m\times n}$的秩为r ⇔存在可逆矩阵$P=P_m$和可逆矩阵$Q=Q_n$使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$$

m×n矩阵

（补充）

定义 设有向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，若存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\alpha_i=0$ 时，有 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\beta_i=0$ 成立，且反之亦成立时，我们就说这两个向量组有相同的线性关系.

有如下结论

定理 m×n矩阵A经过初等行变换得到m×n矩阵B，那么A与B的列向量组有着相同的线性关系.

得到求一个向量组的极大无关组的具体办法

① 用已知向量组为列向量构成矩阵A；

② 对A施行初等行变换化为行简化矩阵；

【此时，其列向量之间的线性关系及列向量的极大无关组可以直观看出来】

③ 【由上面定理可得A和B有相同的线性关系】可得原向量组的线性关系并求出一个极大线性无关组.

例4：已知 $\alpha_1=(1,0,2,1),\alpha_2=(1,2,0,1)$，

$\alpha_3=(2,1,3,0),\alpha_4=(2,5,-1,4)$，$\alpha_5=(1,-1,3,-1)$

求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个线性关系和一个极大无关组.

解：以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为列做矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{做初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$$

分析：由矩阵B可知： β_1,β_2,β_3 是一个极大无关组，且

$$\beta_4=\beta_1+3\beta_2-\beta_3,\quad \beta_5=-\beta_2+\beta_3$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$

有相同的线性关系，所以

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大无关组，且

$$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$$
$$\alpha_5=-\alpha_2+\alpha_3$$

小结

1. 矩阵秩的概念

2． 矩阵的秩与向量组的秩的关系：

矩阵的秩＝矩阵列向量组的秩

＝矩阵行向量组的秩

3. 求矩阵秩的方法

(1) 利用定义

(2) 初等变换法

4. 矩阵秩相关结论.

5. 求向量组的秩以及最大无关组的方法：

将向量组中的向量作为列向量构成一个矩阵，然后进行初等行变换.

第三章 线性方程组

第二节 线性方程组的解法

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$

则上述方程组可写成向量方程

$$Ax = b.$$

当b=0时，称为齐次线性方程组，否则称为非齐次线性方程组.

几个预备概念：

若$x_1=\xi_1, x_2=\xi_2, \cdots, x_n=\xi_n$为方程组$Ax=b$的解, 则

$$x=\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$ 也称为方程组$Ax=b$的**解向量**.

若方程组 $Ax=b$ 和 $Cx=d$ 的解完全相同，则称它们是**同解的**.

定理 设A是n阶可逆矩阵，那么对任意$B=B_{n\times m}$ (或$B=B_{m\times n}$)，矩阵方程

$$AX=B\ （或XA=B）$$

有**唯一解** $X=A^{-1}B$ (或$X=BA^{-1}$).

证：由于A可逆，用其逆矩阵A^{-1}左乘方程$AX=B$得

$A^{-1}AX=A^{-1}B$. 得到$X=A^{-1}B$为方程的解.

再证解的唯一性：若方程还有另一解$C=C_{n\times m}$，即$AC=B$，则

$$C=EC=(A^{-1}A)C=A^{-1}(AC)=A^{-1}B=X$$

故$X=A^{-1}B$为唯一解。

本定理的特殊情况，当B为**列向量**时，得到 *Cramer*规则（克拉默、克莱姆）.

定理5（克莱姆规则）n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式 $D=|A|=|a_{ij}|\neq 0$ 时，存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的**常数列代替**后所得到的n阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

显然： $$D_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$$

其中A_{ij} (i=1,2, …,n)是a_{ij}在D中的代数余子式.

§ 3.2.1 非齐次线性方程组的解法

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\qquad (1)
$$

1. 有解的条件

定理1 非齐次线性方程组(1)有解的充要条件是，系数矩阵与增广矩阵的秩相同，即

$$r_A = r_B$$

证：必要性

若方程组(1)有解，即存在数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使方程组(1)的每一个方程成为恒等式，即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$$

成立，则列向量b是A的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合． 从而A的列向量组的极大线性无关组也是 $B=(A,b)$ 的列向量的极大线性无关组． 从而

$$r_A = r_B$$

充分性

设 $r_A = r_B = r$, 由于 $b \neq 0$，因而 $r > 0$, 故A中至少有一个r 阶子式不为零. 不妨设A的左上角的r 阶子式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

因此，增广矩阵B的前 r 个行向量是其行向量组的一个极大线性无关组.

从而知，方程组(1)中后$m-r$个方程可用前 r 个方程表出. 因此可消去（即是多余的），改写前 r 个方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (2)$$

方程组(1)与(2)是同解的．对于任一组数

$$x_{r+1} = \tilde{x}_{r+1}, \cdots, x_n = \tilde{x}_n$$

因 $\Delta \neq 0$，由Cramer法则得方程组(2)的唯一解：

$$x_1 = \tilde{x}_1, x_2 = \tilde{x}_2, \cdots, x_r = \tilde{x}_r$$

故$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_r, \tilde{x}_{r+1}, \cdots, \tilde{x}_n)$就是方程组(1)的一个解.

这就证明了，当 $r_A = r_B$ 时方程组(1)有解.

定理2 充分性的证明过程也是解线性方程组的一般规则. 当$r<n$时，解向量依赖于$n-r$个参数. 因而方程组(1)有无穷多解. 当$r=n$时方程组(1)只有唯一解.

定理3 非齐次线性方程组 (1)：

当 $r_A \neq r_B$ 时，无解；

当 $r_A = r_B = n$ 时，有唯一解；

当 $r_A = r_B < n$ 时有无穷多解.

2. 矩阵消元法

可以通过方程组的初等变换来化简方程组，使之成为同解的方程组，从而简化求解过程.

线性方程组的初等变换：

- 用一非零数乘某一方程；
- 把一个方程的倍数加到另一个方程；
- 互换两个方程的位置.

线性方程组可以用增广矩阵来代表，对线性方程组的初等变换就相当于对其增广矩阵进行初等行变换.

得到:

若用初等行变换把方程组(1)的增广矩阵B化成矩阵B_1，则以B_1为增广矩阵的线性方程组是方程组(1)的**同解方程组**。

写出(1)的增广矩阵B

$$B \xrightarrow{\text{初等行变换}} B_1$$

$$r_A = r_B\ ?$$

N 无解

Y $r_A = r_B = n?$

N 无穷解(解依赖$n-r$个参量)

Y 唯一解

当方程组(1)有解时，为便于求解，可以继续用初等行变换把B_1化成“行简化矩阵”：

$$
B_1 \to
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_n &
\end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

当$r=n$时，得唯一 解： $x_1=d_1, x_2=d_2, \cdots, x_n=d_n$

当$r<n$时，得方程组的解

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1r+1}\tilde{x}_{r+1} - \cdots c_{1n}\tilde{x}_n \\ x_2 = d_2 - c_{2r+1}\tilde{x}_{r+1} - \cdots c_{2n}\tilde{x}_n \\ \quad\vdots \\ x_r = d_r - c_{rr+1}\tilde{x}_{r+1} - \cdots c_{rn}\tilde{x}_n \\ x_{r+1} = \tilde{x}_{r+1} \\ \quad\vdots \\ x_n = \tilde{x}_n \end{cases} \qquad (3)$$

其中 $\tilde{x}_{r+1},\cdots,\tilde{x}_n$ 为**任意常数**。

(3)就是方程组(1)的全部解，即(1)的**通解**。

通解(3)也可以写成下列向量的形式

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\tilde{x}_{r+1}\begin{pmatrix} -c_{1r+1} \\ -c_{2r+1} \\ \vdots \\ -c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\tilde{x}_{r+2}\begin{pmatrix} -c_{1r+2} \\ -c_{2r+2} \\ \vdots \\ -c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+\tilde{x}_n\begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

对于(3) 特别当 $\tilde{x}_{r+1}=\tilde{x}_{r+2}=\cdots=\tilde{x}_n=0$ 时，得到方程组(1)的一个**特解**：

$$(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,0,\cdots,0)$$

注意：

当$r < n$，一般对B_1进行进一步简化不一定得到上面形状的行简化矩阵，但后面的处理是类似的，在(3)式中取参量的就**不一定**是 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 了。

例1　解线性方程组（求通解或全部解）

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}.$$

解　对增广矩阵B进行初等变换

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{\substack{r_2*\frac{1}{2}\\ r_3-r_2}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = B_1$$

由于 $r_A = r_B = 2 < 4$，故方程组有无穷多解.

B_1对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 + x_2 + x_4 \\ x_3 = 1/2 + 2x_4 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 1/2 \\ x_3 - 2x_4 = 1/2 \end{cases}$$

令 $x_2 = \tilde{x}_2$，$x_4 = \tilde{x}_4$

得通解
$$\begin{cases} x_1 = \tilde{x}_2 + \tilde{x}_4 + 1/2 \\ x_2 = \tilde{x}_2 \\ x_3 = 2\tilde{x}_4 + 1/2 \\ x_4 = \tilde{x}_4 \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \tilde{x}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

其中 $\tilde{x}_2$，$\tilde{x}_4$ 为参数.（取任意数）

例2 设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

问λ取何值时,有解?有无穷多个解?

解: 对增广矩阵$B=(A,b)$作初等行变换,

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2\end{array}\right)$$

(1) 当λ=1时,

$$B\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

则$R(A)=R(B)=1$，故方程组有无穷多解, 且其通解为:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = c_3 \end{cases}$$

其中c_2, c_3为任意实数.

(2) 当$\lambda \neq 1$时,

$$B \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2 \end{array}\right).$$

这时又分两种情形:

1) 当$\lambda \neq -2$时，则$R(A)=R(B)=3$, 故方程组有唯一解:

$$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, \quad x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

2) 当$\lambda = -2$时,

$$B \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

则$R(A)<R(B)$, 故方程组无解.

练习

证明右边方程组有解的充要条件是 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$. 在有解的情况下，求出它的通解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$

答案,通解:
$$\begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + x_5 \\ x_3 = a_3 + a_4 + x_5 \\ x_4 = a_4 + x_5 \end{cases},$$

其中 x_5 为任意实数.

证明过程

证　对增广矩阵B进行初等变换，方程组的增广矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A)=R(B)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} a_i = 0$$