第二章 矩阵代数

第三节 逆矩阵与矩阵的初等变换

§ 2.3.2 矩阵的初等变换

目的：解决待定系数法和伴随矩阵法求取方阵的逆矩阵计算量大的问题.

一、矩阵的初等变换

定义1 下面对矩阵的三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

(1) **换行**变换：互换两行；

(2) **数乘**变换：用**非零**常数k乘某行；

(3) **倍加**变换：将某行的k倍加到另一行上去.

同理可定义矩阵的**初等列变换**.

矩阵的初等列变换与初等行变换统称为矩阵的**初等变换**.

用记号$A \to B$表示A经初等变换得到矩阵B.

初等变换是**可逆**的，且每种初等变换和它的逆变换是**同一类型**.

如：$r_i \leftrightarrow r_j$ 逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$；

$r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i + (-k)r_j$ 或 $r_i - kr_j$.

定义2 如果矩阵A经过**有限次**初等变换变成矩阵B，就称矩阵A和B**等价**.

等价是矩阵间的一种关系

不难证明，矩阵等价具有

(1) **反身性**：A与A等价.

(2) **对称性**：若A与B等价，则B与A等价.

(3) **传递性**：若A与B等价，B与C等价，则A与C等价.

例如

$$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & -4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3/2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}=B_1$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-3r_1}]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}=B_2$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+5r_2\\ r_4-3r_2}]{r_2/2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}=B_3$$

$$B_3=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_4$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_5$$

矩阵B_4和B_5都称为(行)阶梯形矩阵.

特点：每行的非零首元必在上一行非零首元的右方

特点描述：

（1）可划出一条阶梯线，线的下方全为零；

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

（2）每个台阶只有一行， 台阶数即是非零行的行数， 阶梯线的竖线后面的第一个元素为非零元，即非零行的第一个非零元.

阶梯形矩阵B_5还称为**行最简形矩阵**，即非零行的非零首元为1，且其所在列的其它元都为0.

可得结论：对任何矩阵$A_{m\times n}$**总可经有限次初等行变换**化为(行)阶梯形和行最简形.

进一步，

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 \leftrightarrow c_4 \\ c_4 + c_1 + c_2 \\ c_5 - 4c_1 - 3c_2 + 3c_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

矩阵 F 称为矩阵B的**标准形.**

特点： F的左上角是一个单位矩 阵，其余元素全为零.

$m \times n$ 矩阵 A 总可经过初等变换化为 标准形

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

此标准形由 m,n,r 三个数唯一确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行 的行数.

所有与矩阵F等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类，标准形F是这个等价类中最简单的矩阵.

小结

1. 初等行(列)变换 $\begin{cases} (1)\ r_i \leftrightarrow r_j\ \ (c_i \leftrightarrow c_j); \\ (2)\ r_i \times k\ \ \left(c_i \times k\right); \\ (3)\ r_i + kr_j\ \ (c_i + kc_j). \end{cases}$

初等变换的逆变换仍为初等变换, 且变换类型相同.

2. $A \xrightarrow{\text{初等变换}} B \Rightarrow A$与$B$等价.

二、初等矩阵

定义3 由单位矩阵E 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

有三类初等矩阵

(1)互换E的i, j两行(列)所得矩阵 (有的记为$P(i,j)$)

$$E_{ij}=\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & i\text{列} & & & & j\text{列} & & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array} \qquad (i \neq j)$$

(2)用$k(k\neq 0)$乘E的第i行(列)所得矩阵(有的记为$P(i(k))$)

$$E_{ii}(k)=\begin{array}{c} \quad\quad\quad i\text{列} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad (k\neq 0)$$

(3)将E的第j行(i列)的k倍加到i行(j列)上去($i\neq j$) (有的记为$P(i,j(k))$)

$$E_{ij}(k)=\begin{array}{c} \quad\quad i\text{列}\quad\quad j\text{列} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

初等矩阵与初等变换的关系

引理 对矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$施行一次初等行(列)变换，其结果就等于对A左(右)乘一个相应的m(n)阶初等矩阵.

例如：

$$E_{ij}(k)A=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}+ka_{j1}&a_{i2}+ka_{j2}&\cdots&a_{in}+ka_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$AE_{ij}(k)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j}+ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj}+ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

该引理的意义：把矩阵的初等变换归结为用某些初等矩阵左乘或右乘该矩阵，这对于简化矩阵乘法运算、讨论矩阵的某些性质都很有用.

例1
$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

对A施以第3种初等列变换:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_1+2c_3]{}\begin{pmatrix}5&0&1\\5&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$$

相当于

$$AE_{31}(2)=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&1\\5&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$$

又如：利用该引理容易求出三类初等矩阵的逆矩阵.

$$\begin{array}{c} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i\text{列} & & j\text{列} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i\text{列} & & j\text{列} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = E$$

因此： $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

类似可得： $(E_{ii}(k))^{-1} = E_{ii}(\frac{1}{k}),(k \neq 0)$

$(E_{ij}(k))^{-1} = E_{ij}(-k)$

初等矩阵是可逆矩阵，而且它们的逆矩阵也是初等矩阵.

几个定理性结论

1. 矩阵A与B等价 $\Longleftrightarrow$ 有初等矩阵

$P_1, P_2, \cdots, P_s$, $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ ，使

$$B = \underbrace{P_s P_{s-1} \cdots P_1}_{P} A \underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}_{Q}.$$

2. 两个 $s \times n$ 矩阵A, B 等价 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆的 s级矩阵P与可逆的n 级矩阵Q使

$$B = PAQ.$$

3. 任意一个 $m \times n$ 矩阵A 都与一形式为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ 的矩阵等价，它称为矩阵A 的标准形. 一个矩阵的标准形是唯一的.

4. n 阶矩阵A为可逆的 $\Longleftrightarrow$ 它能表成一些初等矩阵的乘积

$$A = Q_1 Q_2 \cdots Q_t.$$

5. 可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化成单位矩阵.

【可逆矩阵总可以经过一系列初等列变换化成单位矩阵.】

三、用初等变换求逆矩阵

设A_n可逆，则存在一系列初等矩阵 $P_1,\cdots P_m$，

使 $$E=\underline{P_m\cdots P_1}A$$

所以 $$A^{-1}=P_m\cdots P_1=P_m\cdots P_1E$$

于是 $$P_m\cdots P_1(A,\quad E)_{n\times 2n}=(P_m\cdots P_1A,\quad P_m\cdots P_1E)$$
$$=(E,\quad A^{-1})$$

求逆矩阵的方法：

$$(A,E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E,A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\A^{-1}\end{pmatrix}$$

例2 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&4\\2&-1&0\end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

解:

$$(A \quad I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&1&4&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&-3&-8&0&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+3r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&-2&3&-2&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3/(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

也可用初等列变换

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{的初等变换}]{\text{只能用列}} \cdots\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

例3 已知方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

求A中所有元素的代数余子式之和 $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

（提示：即求A*的所有元之和）

解： $\because \quad |A| = 2 \neq 0,$

$\therefore \quad A$ 可逆.

且 $A^* = |A| A^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

第1行先乘以1/2，然后从第1行起，每行减去下一行.

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

因此

$$A^{*}=|A|A^{-1}=2A^{-1}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=2[\frac{1}{2}+(n-1)-(n-1)]=1$$

小结

1. 初等矩阵及其种类.

2. 初等矩阵和矩阵初等变换的关系.

3. 几个定理性结论.

4. 求逆矩阵的方法:

(1)伴随矩阵法.（阶数较低）

(2)由 $AB=I$ 或 $BA=I$.(待定系数法)

(3)初等变换的方法.

(4)分块矩阵的方法.（以后介绍）

思考题

1、设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，将$A$表示成初等矩阵的乘积.

解:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)]{}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

2. 已知三阶矩阵A的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$

求A的伴随矩阵A^*的逆矩阵.

证明: 以前例子我们已知 $\left(A^*\right)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A.$

因为A可逆，所以 $|A|\neq 0,$ 由

$$AA^*=A^*A=|A|I$$

得 $$\left(\frac{1}{|A|}A\right)A^*=A^*\left(\frac{1}{|A|}A\right)=I$$

所以 A^*可逆， $\left(A^*\right)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A.$

先由 A^{-1} 求 A

$$
\left(A^{-1},\ I\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3\times 1/2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&2&-1&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)
$$

即 $$A=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

易求得 $|A|=1/2$，故

$$\left(A^*\right)^{-1}=\frac{A}{|A|}=2\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 2.4.1转置矩阵

定义 设A是一个$m\times n$矩阵，若将A的行顺次改成列，所得$n\times m$矩阵称为A的**转置矩阵**. 记作A^{T}.

$$A=(a_{ij})_{m\times n}, \text{则 } A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

A^{T}的(i, j)元$=A$的(j, i)元.

例如:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix}.$$

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$;

(5) 若A为可逆矩阵，则$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$

关于(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$的证明

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times s}$， 则AB为$m\times s$矩阵， $(AB)^{\mathrm{T}}$为$s\times m$矩阵， 显然B^TA^T也为$s\times m$矩阵.

下面证明$(AB)^{\mathrm{T}}$与B^TA^T对应的元相等即可.

设 $C=AB=(c_{ij})_{m\times s}$, $A^T=(a'_{ij})_{n\times m}$, $B^T=(b'_{ij})_{s\times n}$,

$$C^T=(AB)^T=(c'_{ij})_{s\times m},\ D=B^TA^T=(d_{ij})_{s\times m}.$$

则 $a'_{ij}=a_{ji}$, $b'_{ij}=b_{ji}$, $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b'_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a'_{kj}b'_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$,

故 $c'_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=d_{ij}$.

所以有$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

例1: 已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 求$(AB)^T$.

解法1: 因为

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},$$

所以 $(AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}$.

解法2:

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 7 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

例3 设n阶矩阵A满足$AA^{\mathrm{T}}=E$，$|A|=-1$，证明矩阵$E+A$是退化的.

证明：(目标 $|E+A|=0$)

(不容易估计, 但若出现$|E+A|=-|E+A|$ 就有希望了.)

$$|E+A| = |AA^T + AE| = |A\,(A^T + E)| = |A|\,|\,(A^T + E)|$$

$$= -|\,(A^T + E)\,| = -|(A^T + E)^T\,| = -|\,A+E|$$

所以 $2|E+A|=0$

故$|E+A|=0$， 即矩阵$E+A$是退化的.