某南方二本院校

期末考试试卷

【请注意：将各题题号及答案写在答题纸上，写在试卷上无效】

一、　**填空题**（要求在答题纸相应位置上，不写解答过程，本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）。

1. 设 4×4 矩阵 A=$\left(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\right)$，B=$\left(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\right)$，其中$\alpha,\ \beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,$均是 4 维列向量，且已知$|A|$=4，$|B|$=1，则行列式$|A+B|$=___________；

2.设 A 为 n 阶矩阵，$|A|\neq0$，A^*为 A 的伴随矩阵，若 A 有特征值λ，则A^*的一个特征值为__________；

3.设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且$R\left(A\right)$=n-1，则线性方程组AX=0 的通解为__________；

4.设$\alpha=\left(a_{1,}a_2,\cdots,a_n\right)^T$，$\beta=\left(b_1,b_2,\cdots b_n\right)^T$为非零向量，且满足条件$\left(\alpha,\beta\right)=0$，记 n 阶矩阵$A=\alpha\beta^T$，则$A^2$=___________；

5.设二阶矩阵 A=$\begin{bmatrix}7&12\\y&x\end{bmatrix}$与 B=$\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$相似，则$x=$_____,$y=$_____。

二、　**单项选择题**（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案。并将其代号写在答题纸相应位置处。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分）。

1.　设三阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则$\left|A^2-2I\right|$=【　】

A. 0　　　　B. 24　　　　C. -14　　　　D. 20

2.　设有向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&-1&2&4\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0&3&1&2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3&0&7&14\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1&-2&2&0\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}2&1&5&10\end{pmatrix}$ 则该向量组的极大无关组是【　】

$A.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　　　$B.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　$C.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$　　$D.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$

3.　n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的【　】

A.　充分必要条件　B. 充分而非必要条件

C. 必要而非充分条件　D.即非充分也非必要条件

4. 设 A 为 n 阶方阵，且$|A|$=0，则　【　D】

A. A 中至少有一行（列）的元素为全为零

B. A 中必有两行（列）的元素对应成比例

C. A 中任意一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

D. A 中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

5. 设 A、B 为同阶可逆矩阵，则【 D】

A. $AB=BA$

B.存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

C.存在可逆矩阵 C，使 $C^{T}AC=B$

D.存在可逆矩阵 P 和 Q，使 $PAQ=B$

三、 计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 12 分）

计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$

四、 计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 12 分）

设 A 满足 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$满足 $BA=2BA\text{-}8I$ ，求 B

五、 计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 12 分）

根据 K 的取值求解非齐次线性方程组$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=k-3 \\ x_1+kx_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+kx_3=-2 \end{cases}$

六、 计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 12 分）

设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的三维列向量，且满足$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$，

（1）求三围矩阵 B，使 $A\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}B$；（2）求矩阵 A 的特征值。

七、 计算题（要求在答题纸相应位置上写出详细计算步骤及结果，本题 12 分）

用正交矩阵将实对称矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$对角化。

八、 证明题（要求在答题纸相应位置上写出详细证明步骤，本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1. 设 A,B 是两个 n 阶反对称矩阵，证明：$AB-BA$ 是 n 阶反对称矩阵。

2. 设 X_1，X_2 为某个齐次线性方程组的基础解系，证明：X_1+X_2，$2X_1-X_2$ 也是该齐次线性方程组的基础解系。

某南方二本院校

期末考试试卷参考答案

试卷代码：03043A　　　　　　　　　授课课时：48

课程名称：线性代数　　　　　　　　　适用对象：本科

试卷审核人________　　　　　　　　试卷审核人__________

一、填空题（本大题共 5 个小题，每个小题 3 分，共 15 分）

1. 40　　2. $\frac{|A|}{\lambda}$　　3. $k\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} k\in R$　　4. 0　　5. -2，-1

二、单项选择题（每个小题 3 分，共 15 分）

1. C　　2. B　　3. B　　4. D　　5. D

三、计算题（本题 12 分）

$$D=abcdef\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}(6')=4abcdef\,(6')$$

四、计算题（本题 12 分）

$|A|=-2 \qquad (2')$

$(2I-A^{*})BA=8I \qquad (2')$

而 $A^{*}=|A|A^{-1}=-2A^{-1}$ 故 $(I+A^{-1})BA=4I \qquad (2')$

上式左乘 A，右乘 A^{-1} 得 $(A+I)B=4I \qquad (2')$

$B=4(A+I)^{-1} \qquad (2')$

$$=4\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{bmatrix} \qquad (2')$$

五、计算题（本题 12 分）

$$|A|=\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{vmatrix}=(k+2)(k-1)^2$$

当 $k\neq-2$ 且 $k\neq1$ 时非齐次线性方程组有唯一解。

23. 唯一解：$x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}k-3 & 1 & 1\\ -2 & k & 1\\ -2 & 1 & k\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{(k-1)^3}{(k+2)(k-1)^2}=\dfrac{k-1}{k+2}$

24. $x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}k & k-3 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & k\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{-3(k-1)^2}{(k+2)(k-1)^2}=-\dfrac{3}{k+2}$

25. $x_3=\dfrac{\begin{vmatrix}k & 1 & k-3\\ 1 & k & -2\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{-3(k-1)^2}{(k+2)(k-1)^2}=-\dfrac{3}{k+2}$ (4')

26. 当$k=-2$时，非齐次线性方程组的增广矩阵

27. $\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & -5\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right]$

28. $\because R(A)=2$ $R(\overline{A})=3$ $\therefore$非齐次线性方程组无解 (4')

29. 当$k=1$时，非齐次线性方程组的增广矩阵

30. $\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

31. 因为$R(A)=R(\overline{A})=1<3$ 所以非齐次线性方程组有无穷多解

32. 通解为：$X=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ k_1,k_2为任意实数 (4')

33. **六、计算题**（本题 12 分）

34. （1）$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ (3')

35. $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ (3')

36. （2）由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的三维列向量知，矩阵$C=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)$可

逆，即矩阵 A 与 B 相似，故矩阵 A 与 B 有相同的特征值。　　(3')

37.　由

38. $$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -2\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$$

39. 得矩阵 B 的特征值，即矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1\quad \lambda_3=4$。　　(3')

40. **七、计算题**（本题 12 分）

41. A 的特征多项式为

42. $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4)$$

43. 故 A 特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$　　(2')

44. 对于 $\lambda_1=-2,\Rightarrow\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}X=0\Rightarrow$ 基础解系 $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$　　(2')

45. 对于 $\lambda_2=1,\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}X=0\Rightarrow$ 基础解系 $\beta_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$　　(2')

46. 对于 $\lambda_3=4,\Rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}X=0\Rightarrow$ 基础解系 $\beta_3=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$　　(2')

47. 由于 A 是实对称阵，特征向量 β_1,β_2,β_3 分别属于不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，故 β_1,β_2,β_3 正交。将其单位化，得

48. $$\alpha_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$　　(2')

49. 令$T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 得$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{bmatrix}$ $(2')$

50. **八、证明题**（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

51. 1. $\because A^T=-A \quad B^T=-B$ $(1')$

52. $(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T$ $(1')$

53. $=B^TA^T-A^TB^T$ $(1')$

54. $=(-B)(-A)-(-A)(-B)=BA-AB$

55. $=-(AB-BA)$

56. $\therefore AB-BA$是n阶反对称矩阵 $(2')$

57. 2. 由于X_1,X_2是某个齐次线性方程组的基础解系，故该齐次线性方程组的基础解系中含有 2 个解向量，且$X_1+X_2,2X_1-X_2$也是该齐次线性方程组的解，现只需证明$X_1+X_2,2X_1-X_2$线性无关即可。 $(2')$

58. 设有一组数k_1,k_2，使$k_1(X_1+X_2)+k_2(2X_1-X_2)=0$

59. 即$(k_1+2k_2)X_1+(k_1-k_2)X_2=0$ 由于X_1,X_2线性无关

60. $\therefore\begin{cases}k_1+2k_2=0\\ k_1-k_2=0\end{cases}$ $k_1=k_2=0$

61. $\therefore X_1+X_2,2X_1-X_2$线性相关

62. 故$X_1+X_2,2X_1-X_2$也是齐次线性方程组的基础解系。 $(3')$