第四章 线性空间

第二节 n维线性空间

§4.2.1 n维线性空间的定义

我们知道：

对于几何空间中的向量，线性无关的向量最多是3个，而任意4个向量是线性相关的.

n维数组构成的向量空间，至多有n个线性无关的向量，任意$n+1$个向量线性相关.

? 在一个线性空间中，究竟最多能找到多少个线性无关的向量呢？

定义 如果线性空间V中存在由n个向量构成的极大线性无关组，则V称为n维线性空间． 记为 $\dim(V)=n$.

V的极大线性无关子组称为V的**基底**.

特殊情况

零空间（没有基底）的维数规定为零.

若V中可以找到任意个线性无关的向量，则V称为是无穷维 (无限维)的.

例如：

(1)n元齐次线性方程组的解空间是$n-r$ (r是系数矩阵的秩)维的.

当$r<n$时，每个基础解系都是解空间的一个基底.

原因：$Ax=0$的基础解系中的向量线性无关，且每个解都能被基础解系线性表出.

(2) $M_{m\times n}(R)$是mn维线性空间.

$E_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ (表示第i行、第j列处的元为1，其余元全为零的矩阵)，构成其一个基底.

因为：它们线性无关且 $M_{m\times n}(R)$中任一元

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\cdots+a_{1n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} +\cdots+a_{m1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} +\cdots+a_{mn}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}E_{11}+\cdots+a_{1n}E_{1n}+\cdots+a_{m1}E_{m1}+\cdots+a_{mn}E_{mn}$$

(3) 所有n阶实对称矩阵关于矩阵的线性运算构成的线性空间维数为 $n(n+1)/2$.

$E_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$定义同上，该线性空间中任意一个元

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}+\cdots+a_{nn}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$+a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}+\cdots+a_{1n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}+\cdots+a_{n-1,n}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}E_{11}+\cdots+a_{nn}E_{nn}$$

$$+a_{12}(E_{12}+E_{12}^T)+\cdots+a_{1n}(E_{1n}+E_{1n}^T)+\cdots+a_{n-1,n}(E_{n-1,n}+E_{n-1,n}^T)$$

而且 $E_{ii}\ (i=1,2,\ldots,n),(E_{ij}+E_{ij}^T)\ (i,j=1,2,\cdots,n,i<j)$线性无关.

(4)一元多项式环：由一切实系数多项式关于通常的线性运算所构成的线性空间 $P[x]$.

对于任意大的n，$n+1$个向量 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 线性无关，故$P[x]$中可以找到有任意个线性无关向量的子组，从而$P[x]$是无穷维的.

有序基底的定义：设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是$n$维线性空间$V$的基底，若将它们排成一个有序组，则称该有序组为一个有序基底. 记为$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$. 以后称为基底或基.

基底与向量的关系：

定理1 设 $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$是$n$维线性空间$V$的一个基底，则$V$中的任何向量均可由基底的向量线性表出，且表出的形式是唯一的.

对于$\forall\alpha\in V$，必有唯一一组数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$$

因此，$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与α一一对应，我们称n元有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为向量α在基$[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$下的坐标.

坐标的计算

定理2 设在基底$[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$下，$n$维线性空间$V$中的向量$\alpha,\beta$的坐标分别为

$$X=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad Y=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

则向量$\alpha+\beta$与$\lambda\alpha$(λ是数)的坐标分别为

$$X+Y=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

$$\lambda X=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$$

证　依坐标定义有

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$
$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$$

于是

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\alpha_1 + (a_2 + b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_n + b_n)\alpha_n$$
$$\lambda\alpha = (\lambda a_1)\alpha_1 + (\lambda a_2)\alpha_2 + \cdots + (\lambda a_n)\alpha_n$$

由此知定理成立.

定理1，2的意义

根据定理1和2，有了坐标的概念之后，抽象的n维线性空间的向量及向量的线性运算，通过坐标及坐标的相应运算表示出来, 转换为研究我们熟悉的n元有序数组(向量)及其运算.

例1 设向量 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 的坐标为 $Z_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ $i=1,2,\ldots,m$，则易知等式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0 \quad （x_i\text{是数}）$$

成立的充要条件是向量等式

$$x_1Z_1+x_2Z_2+\cdots+x_mZ_m=0$$

成立，又可转化为线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \end{cases}$$

解的问题.

例2 求R^3中向量$\alpha=(1,2,1)$在基底$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$下的坐标. 其中，$\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,1,-1)$，$\alpha_3=(1,-1,-1)$.

解：（待定系数法）设α的坐标为(x_1, x_2, x_3)，则有

$$(1,2,1)=\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$$
$$=x_1(1,1,1)+x_2(1,1-1)+x_3(1,-1,-1)$$

因此
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1-x_2-x_3=1 \end{cases}$$

解之得 $x_1=1, x_2=\dfrac{1}{2}, x_3=-\dfrac{1}{2}$，于是$\alpha$在基底

$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 下的坐标为 $\left(1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

例3 在n维线性空间V中，n个向量$\beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_n$构成基底 ⇔ 用它们在同一个基底下的坐标作为行(列)向量的n阶行列式不等于零.

证 在V中取定一个基底，设向量 $\beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_n$在该基底下的坐标为

$$X_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n})$$
$$X_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n})$$
$$\cdots$$
$$X_n = (b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nn})$$

则$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$构成基底

⇔ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$线性无关，

即n维向量$X_1, X_2, \ldots, X_n$线性无关.

⇔以$X_1, X_2, \ldots, X_n$为行(列)的行列式不等于零.

例4 在$P_3[x]$中，取向量组

$f_1=1+2x+x^3$，$f_2=1+x+x^2$，$f_3=1+x^2$，$f_4=1+3x+x^3$.

问向量组 f_1, f_2, f_3, f_4 是否线性相关？

解： 在$P_3[x]$中, 先取定一个基为$[1, x, x^2, x^3]$，于是得到 f_1, f_2, f_3, f_4 在该基底下的坐标依次为

$$(1,2, 0, 1),\quad (1, 2, 1, 0),\quad (1, 0, 1, 0),\quad (1, 3, 0, 1)$$

以它们为列构成的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&0&3\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}，\text{而 } |A| \overset{r_1-r_3-r_4}{=} \begin{vmatrix}0&0&0&0\\2&2&0&3\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}=0$$

故：$r_A<4$，因此向量组f_1, f_2, f_3, f_4 线性相关.

例5. 设$\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_m$ $(m\le n)$是n维线性空间V的中的m个线性无关的向量，则必可在V中找到$n-m$个向量$\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2},\ldots,\alpha_n$使得向量组 $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$成为$V$的一个基底.

证 对差数$n-m$用数学归纳法.

当$n-m=0$时，它们已是V的一个基底，定理显然成立.

假设当$n-m=k$时定理成立，现证明当$n-m=k+1$时，定理也成立.

由于A:$\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_m$还不是V的基底， 故V必有向量不能被它们线性表出 (否则A构成一个基底，矛盾），任取其中一个并记为α_{m+1} ,于是向量组$\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_m ,\alpha_{m+1}$仍是线性无关组（否则$\alpha_{m+1}$可经线性无关向量组A线性

表出，矛盾). 此时差数$n-m=k+1-1=k$. 由归纳法假设知在V中必可选出$n-m$个向量$\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2},\ldots,\alpha_n$使得向量组$\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$成为$V$的一个基底.

类似方法可以证明下面命题：

n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\,(s>0)$

的任意一个线性无关子组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}\ (1\le m\le s)$

均可扩充成其一个极大线性无关子组.

§ 4.2.2 基底变换与坐标变换

例1　在n维线性空间$P_{n-1}[x]$中，求多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

在基底 $[1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}]$ 和基底 $[1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}]$ 下的坐标（a为常数）.

解：$f(x)$在基底 $[1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}]$ 下坐标为$(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$

由泰勒公式，把 $f(x)$在$x=a$处展开得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}$$

$$f^{(n)}=0,\ f^{(n+1)}=0,\cdots$$

因此，在基底 $[1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}]$ 下的坐标为

$$\left(f(a),\ f'(a),\frac{1}{2!}f''(a),\cdots,\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right)$$

同一个向量在不同基下的坐标一般是不同的.

? 随着基底的改变，向量的坐标是怎样变化?

为表达方便，先看一种形式的记法：

借助于矩阵乘法规则，把表示向量、基底和坐标的关系式表记为：

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] X$$

其中 $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 是向量α在基底$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$下的坐标列向量.

注意：这里$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$不是矩阵，上式也并非真正的矩阵乘法，这仅仅是一种约定记法，在形式上利用了矩阵乘法规则，在运算规律上符合矩阵的运算规则.

过渡矩阵的定义

设n维线性空间V中两组不同的基底$\left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\right]$和$\left[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\right]$.

设每个η_i在基底$\left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\right]$下的坐标为$X_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$

利用前面的记法，有

$$\begin{cases} \eta_1 = \left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\right] X_1 \\ \eta_2 = \left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\right] X_2 \\ \vdots \\ \eta_n = \left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\right] X_n \end{cases}$$

再利用前面的记法写成矩阵形式

$$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n](X_1,X_2,\cdots,X_n)$$
$$=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M$$

其中，$M=(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

称为由基底$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$到基底$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$的过渡矩阵

(或演化矩阵). 显然，由于M的第j列是η_i在基底

$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$下的坐标，由于$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$线性无关知

线性无关知M为满秩矩阵.

过渡矩阵的应用

设V中向量α在基底$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$和$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$下的坐标分别为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

即 $\alpha=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]X$

$\alpha=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]Y$

设由基底$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$到基底$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$的过渡矩阵为$M$, 利用矩阵形式写法得

$$\alpha=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]X=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]Y$$
$$=\big([\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M\big)Y=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n](MY)$$

由于α在基底$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$下的坐标是唯一的，因此有

$$X=MY$$

也即
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

因为M可逆，又有 $Y=M^{-1}X$

于是，我们在已知过渡矩阵M以及X或Y之一时，可求出另外一个.

定理 设 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$和 $[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$是$n$维线性空间$V$的两个基底，向量在上式二基底下的坐标分别为$X$和$Y$，则当基底变换为

$$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]M$$

时，坐标变换公式为

$$X = MY \text{ 或 } Y = M^{-1}X$$

例2 在R^n中， $\varepsilon_1=(1,0,0,\cdots,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)$,…, $\varepsilon_n=(0,0,0,\cdots,1)$ 是一个基底，$\varepsilon_1'=(1,1,1,\cdots,1)$, $\varepsilon_2'=(0,1,1,\cdots,1)$,…, $\varepsilon_n'=(0,0,0,\cdots,1)$ 是另外一个基底.

已知向量α在基底 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]$ 下的坐标为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 求α在基底 $[\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n']$ 下的坐标.

解：设α在基底$\left[\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'\right]$下的坐标为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，

由于

$$\begin{aligned}\varepsilon_1' &= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n\\ \varepsilon_2' &= \qquad\ \varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n\\ &\ \ \vdots\\ \varepsilon_n' &= \qquad\qquad\qquad \varepsilon_n\end{aligned}$$

因而，从基底$\left[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\right]$到$\left[\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'\right]$的过渡矩阵为

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\-1&1&0&\cdots&0&0\\0&-1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1\\a_2-a_1\\a_3-a_2\\\vdots\\a_{n-}-a_{n-1}\end{pmatrix}$$

此即α在基底$\left[\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'\right]$下的坐标。

例3　在R^3中取两组基

$$\varepsilon_1=(1,2,1)^T,\varepsilon_2=(2,3,3)^T,\quad \varepsilon_3=(3,7,1)^T$$
$$\eta_1=(3,1,4)^T,\ \eta_2=(5,2,1)^T,\quad \eta_3=(1,1,-6)^T$$

(1)求由基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$到基$\eta_1, \eta_2, \eta_3$的过渡矩阵$M$;

(2)设向量α在基η_1, η_2, η_3的坐标为$(1,-1,0)^T$, 求α在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的坐标$(x_1, x_2, x_3)^T$;

(3)已知向量β在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的坐标为$(1,-1,0)^T$, 求β在基η_1, η_2, η_3下的坐标$(y_1, y_2, y_3)^T$;

解：(1) 法1 直接看出法， 当$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$为单位向量时，可以类似上面例子之间看出来.

法2 待定系数法

设 $\eta_1 = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3$ ，可得 $\begin{cases} 3 = k_1 + 2k_2 + 3k_3 \\ 1 = 2k_1 + 3k_2 + 7k_3 \\ 4 = k_1 + 3k_2 + k_3 \end{cases}$

解之得 $k_1 = -27, k_2 = 9, k_3 = 4$

故 $\eta_1 = -27\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3$

类似可得 $\eta_2 = -71\varepsilon_1 + 20\varepsilon_2 + 12\varepsilon_3$

$$\eta_3 = -41\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 8\varepsilon_3$$

所以 $[\eta_1,\eta_2,\eta_3] = [\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$

故基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$到基$\eta_1, \eta_2, \eta_3$的过渡矩阵 $M = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$

法3 中介法 在R^3中，取一组基底为

$$e_1=(1,0,0)^T,\ e_2=(0,1,0)^T,\ e_3=(0,0,1)^T$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\varepsilon_1=(1,2,1)^T,\varepsilon_2=(2,3,3)^T,\ \varepsilon_3=(3,7,1)^T\\ \eta_1=(3,1,4)^T,\ \eta_2=(5,2,1)^T,\ \eta_3=(1,1,-6)^T\end{array}}$$

则

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=[e_1,e_2,e_3]\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}=[e_1,e_2,e_3]A$$

$$[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=[e_1,e_2,e_3]\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}=[e_1,e_2,e_3]B$$

所以 $[e_1,e_2,e_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]A^{-1}$

$$[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=[e_1,e_2,e_3]B=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]A^{-1}B$$

$$=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3](A^{-1}B)$$

于是过渡矩阵为

$$M = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ -11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

小　结

- 线性空间的定义，维数确定
- 知道一些特殊的线性空间，如零空间，$R^{m\times n}$, 等
- 知道一些概念：基、坐标、过渡矩阵
- 会计算坐标、过渡矩阵（重点），用坐标研究n维线性空间的一些问题
- 基底变换与坐标变换公式（重点）

本次作业

第四章习题

- 2.
- 4. (1) (2)
- 6.
- 7.
- 9. (1)
- 11.(1)

28