一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 302 & 297 & 203 \end{vmatrix} =$ ____________.

2. 设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$ ____________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则 $(AB)^T =$ ____________.

4. 设 $A^2+A-5I=0$，则 $(A+2I)^{-1}=$ ____________.

5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$ ____________.

6. A、$\overline{A}$ 分别为线性方程组 $AX=b$ 的系数矩阵与增广矩阵，则线性方程组 $AX=b$ 有解的充分必要条件是 ________________.

7. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，且秩$(A)$=2，则 $a=$ ____________.

8. 设 A 为三阶方阵，且 $|A|=3$，则 $|2A^{-1}|=$ ____________.

9. 向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)^T$，$\alpha_2=(2,0,3,0)^T$，$\alpha_3=(-1,2,-4,1)^T$ 的秩等于____________.

10. 设 α_1,α_2 是 $n(n\geq 3)$ 元齐次线性方程组 $AX=O$ 的基础解系，则 $r(A)=$____________.

二、选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 已知 $|A|=\begin{vmatrix} a & x & y \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix}$，则 $|A|$ 中元素 a 的代数余子式 A_{11} 等于（　　）.

A. -1　　B. 1　　C. $-a$　　D. a

2. 已知 4 阶矩阵 A 的第三列的元素依次为 $1,3,-2,2$，它们的余子式的值分别为 $3,-2,1,1$，则 $|A|=$（　　）.

A. 3　　B. -3　　C. 5　　D. -5

3. A,B 均为 n 阶矩阵，且 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$，则必有（　　）.

A. $A=B$　　B. $A=I$　　C. $B=I$　　D. $AB=BA$

4. 设 A、B 均为 n 阶矩阵，满足 $AB=O$，则必有（　　）.

A. $|A|+|B|=0$　　B. $r(A)=r(B)$　　C. $A=O$ 或 $B=O$　　D. $|A|=0$ 或 $|B|=0$

5. 设 3×3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\beta,\gamma)$，$\boldsymbol{B}=(\alpha_2,\beta,\gamma)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta,\gamma$ 均为 3 维列向量，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-1$，则 $|A+B|=$（　　）.

A. 4　　B. -4　　C. 2　　D. 1

6. 设 $AX=B$ 为 n 个未知数 m 个方程的线性方程组，$r(A)=r$, 下列命题中正确的是（　　）.

A. 当 $m=n$ 时，$AX=B$ 有唯一解　　B. 当 $r=n$ 时，$AX=B$ 有唯一解

C. 当 $r=m$ 时，$AX=B$ 有解　　D. 当 $r<n$ 时，$AX=B$ 有无穷多解

7. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 有非零解, 则 $\lambda=$（　　）.

A. 1 或 2　　B. 1 或－2　　C. －1 或 2　　D. －1 或－2

8. n 阶矩阵 A 的秩 $r=n$ 的充分必要条件是 A 中（　　）.

A. 所有的 r 阶子式都不等于零　　B. 所有的 $r+1$ 阶子式都不等于零

C. 有一个 r 阶子式不等于零　　D. 有一个 r 阶子式不等于零, 且所有 $r+1$ 阶子式都等于零

9. 设向量组 $\alpha_1=(1,a,a^2)^T$, $\alpha_2=(1,b,b^2)^T$, $\alpha_3=(1,c,c^2)^T$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充分必要条件是（　　）.

A. a,b,c 全不为 0　　B. a,b,c 不全为 0　　C. a,b,c 互不相等　　D. a,b,c 不全相等

10. 已知 β_1,β_2 为 $AX=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 为其齐次方程组 $AX=0$ 基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $AX=b$ 的通解可表成（　　）.

A. $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　B. $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

线性代数期末试题答案

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 5　　2. 0　　3. $\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$　　4. $\frac{1}{3}(A-I)$

5. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

6. $r(A)=r(\overline{A})$　　7. $a=6$　　8. $\frac{8}{3}$　　9. 2　　10. $n-2$

二、选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1.B　　2.C　　3.D　　4.D　　5.A

6.C　　7.B　　8.D　　9.C　　10.B

三、（8 分）解：

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & -8 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 18 & 36 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 18 & 36 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-18$$

四、（10 分）解：（1）$AA^T=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 29 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 14 \end{pmatrix}$

（2）$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

(3) 由 $AX=A+2X$，得 $(A-2E)X=A$

$$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

五、（12 分）解：将方程组的增广矩阵 $\overline{\mathbf{A}}$ 用初等行变换化为阶梯矩阵：

$$\overline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\\1&-1&2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&-4\\0&2&k-2&8\\0&k-1&3&k^2-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&-4\\0&1&\dfrac{k-2}{2}&8\\0&0&\dfrac{(1+k)(4-k)}{2}&k(k-4)\end{bmatrix}$$

所以，(1) 当 $k\neq -1$ 且 $k\neq 4$ 时，$r(\overline{\mathbf{A}})=r(\mathbf{A})=3$，此时线性方程组有唯一解.

(2) 当 $k=-1$ 时，$r(\mathbf{A})=2$，$r(\overline{\mathbf{A}})=3$，此时线性方程组无解.

(3) 当 $k=4$ 时，$r(\overline{\mathbf{A}})=r(\mathbf{A})=2$，此时线性方程组有无穷多组解.

此时，原线性方程组化为 $\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_2=4-x_3\end{cases}$ 因此，原线性方程组的通解为 $\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_2=4-x_3\\x_3=x_3\end{cases}$

或者写为 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}+C\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}$ $(C\in R)$

六、（10 分）解：记向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 对应矩阵为 A 并化为行阶梯形矩阵为

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-2&2&3\\-2&4&-1&3\\-1&2&0&3\\0&6&2&3\\2&-6&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&3\\0&-2&-1&-2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3

且它的一个最大无关组为：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 或 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \alpha_4=-4\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2+3\alpha_3$$

七、（12 分）解：（1）. $\overline{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3&-1&1\\3&-2&-2&3&3\\1&-1&-5&4&2\\7&-5&-9&10&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-5&4&2\\0&1&13&-9&-3\\0&1&13&-9&-3\\0&2&26&-18&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&8&-5&-1\\0&1&13&-9&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_1=-1-8x_3+5x_4\\x_2=-3-13x_3+9x_4\end{cases}$，$x_3,x_4$ 为自由未知量。

（2）. 线性方程组的特解：$\gamma_0=(-1,-3,0,0)^T$；

导出组的基础解系：$\eta_1=(8,13,-1,0)^T,\eta_2=(5,9,0,1)^T$

全部解：$\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$ ，k_1,k_2 为任意常数。

八、（8 分）证明：只要证明 β_1,β_2,β_3 是线性无关即可，

令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$k_1(\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(2\alpha_2+3\alpha_3)+k_3(3\alpha_3+\alpha_1)=0$

$(k_1+k_3)\alpha_1+(2k_1+2k_2)\alpha_2+(3k_2+3k_3)\alpha_3=0$

$\because \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，

$\therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{k_1} \quad\quad\quad \boldsymbol{+k_3} \ \boldsymbol{=0} \\ \boldsymbol{2k_1+2k_2} \quad\quad \boldsymbol{=0} \\ \quad\quad \boldsymbol{3k_2+3k_3=0} \end{cases}$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&-2\\0&3&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&3&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&6\end{bmatrix}$$

$r(B)=3$ $\therefore$ $B\,K=0$ 只有零解，即 $k_1=k_2=k_3=0$ $\quad \therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关。

即 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$， $\beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3$， $\beta_3=3\alpha_3+\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系。