第1题答案：

解 由泊松分布的数学期望及方差知

$$E(X_i)=\mu=\lambda=0.04,$$

$$D(X_i)=\sigma^2=\lambda=0.04,$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=100\times 0.04=4,$$

$D\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=100\sigma^2=100\times 0.04=4$（这里利用了 $X_1,X_2,\cdots$ 的相互独立性），

所以，由中心极限定理知，对于任意 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

从而

$$P\{Z>3\}=P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i>3\right\}=1-P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 3\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-4}{\sqrt{4}}\leqslant\frac{3-4}{2}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-4}{2}\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\approx 1-\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=1-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)=\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0.6915,$$

即 $P\{Z>3\}\approx 0.6915$.

第2题答案：

解 因两个戏院情况一样，故只需考虑甲戏院，即可设甲戏院需设 M 个座位，定义随机变量 ξ_i 如下：

$$\xi_i=\begin{cases}1, & \text{若第 } i \text{ 个观众选择甲戏院},\\ 0, & \text{否则}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,1000),$$

则 $P\{\xi_i=1\}=P\{\xi_i=0\}=\frac{1}{2}$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{1000}$ 是独立同分布的随机变量.

以 ξ 表示“选择甲戏院的观众总数”，则

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{1000}.$$

据题意，要决定 M 使 $P\{\xi\leqslant M\}\geqslant 99\%$.

注意到 $E(\xi_i)=\frac{1}{2}$，$D(\xi_i)=\frac{1}{4}$，由独立同分布的中心极限定理，得

$$P\{\xi\leqslant M\}=P\left\{\sum_{i=1}^{1000}\xi_i\leqslant M\right\}$$

$$=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{1000}(\xi_i-0.5)}{\frac{1}{2}\sqrt{1000}}\leqslant\frac{M-500}{\frac{1}{2}\sqrt{1000}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{M-500}{5\sqrt{10}}\right)\geqslant 99\%.$$

查标准正态分布表，得

$$\frac{M-500}{5\sqrt{10}}\geqslant 2.33,$$

所以 $$M\geqslant 2.33\times 5\sqrt{10}+500\approx 537,$$

即每个戏院应设 537 个以上的座位.

第3题答案：

解 设 X 表示"投掷一枚均匀硬币 n 次，其中正面向上的次数"，则

$X\sim b(n,0.5),E(X)=np=0.5n,D(X)=np(1-p)=0.25n.$

(1) $P\left\{0.4<\dfrac{X}{n}<0.6\right\}=P\{0.4n<X<0.6n\}=P\{-0.1n<X-0.5n<0.1n\}$

$$=P\{|X-0.5n|<0.1n\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{(0.1n)^2}$$

$$=1-\frac{0.25n}{0.01n^2}=1-\frac{25}{n}\geqslant 0.9,$$

则 $\dfrac{25}{n}\leqslant 0.1$，解得 $n\geqslant 250$.

(2) $P\left\{0.4<\dfrac{X}{n}<0.6\right\}=P\{0.4n<X<0.6n\}$

$$=\Phi\left(\frac{0.6n-0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right)-\Phi\left(\frac{0.4n-0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right)$$

$$=\Phi(0.2\sqrt{n})-\Phi(-0.2\sqrt{n})$$

$$=2\Phi(0.2\sqrt{n})-1\geqslant 0.9,$$

则 $\Phi(0.2\sqrt{n})-1\geqslant 0.95$，查表得 $0.2\sqrt{n}\geqslant 1.645$，解得 $n\geqslant 67.65$，故取 $n=68$.

注 一般情况下，估计概率时，用中心极限定理要比用契比雪夫不等式精确得多.

第4题答案：

证 令 $X=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则

$$E(X)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i),$$

$$D(X)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right).$$

由契比雪夫不等式知，对任意给定的 $\varepsilon>0$，有

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (*)$$

根据假设条件有

$$\lim_{n\to\infty}D(X)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=0.$$

在$(*)$式两边取极限，得

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1.$$

由于概率不可能大于 1，故有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}=1,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

第5题答案：

解 (1) 因为

$$X_i \sim N(0,1), i=1,2,\cdots,n,$$

所以

$$X_1 \sim N(0,1), \sum_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1),$$

从而

$$\frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2}} = \frac{X_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{X_i^2}{n-1}}} \sim t(n-1).$$

(2) 因为 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,1)$，所以

$$X_1 - X_2 \sim N(0,2), \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1), X_3^2 + X_4^2 \sim \chi^2(2),$$

从而

$$\frac{X_1 - X_2}{(X_3^2+X_4^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2}{2}}} \sim t(2).$$

(3) 由题意知

$$X_1 - X_2 \sim N(0,2), \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1), \left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

$$X_3 + X_4 \sim N(0,2), \frac{X_3 + X_4}{\sqrt{2}} \sim N(0,1), \left(\frac{X_3 + X_4}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

所以

$$\left(\frac{X_1 - X_2}{X_3 + X_4}\right)^2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_3 + X_4)^2} = \frac{\frac{(X_1 - X_2)^2}{\sqrt{2}}}{\frac{(X_3 + X_4)^2}{\sqrt{2}}} \sim F(1,1).$$

(4) 由题意知

$$\sum_{i=1}^{3} X_i^2 \sim \chi^2(3), \sum_{i=4}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-3),$$

所以

$$\frac{\left(\frac{n}{3}-1\right)\sum\limits_{i=1}^{3} X_i^2}{\sum\limits_{i=4}^{n} X_i^2} = \frac{\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3} X_i^2}{\frac{1}{n-3}\sum\limits_{i=4}^{n} X_i^2} \sim F(3,n-3).$$

第6题答案：

证 不妨设总体的方差为 σ^2，则

$$\mathrm{Corr}(x_i - \bar{x}, x_j - \bar{x}) = \frac{\mathrm{Cov}(x_i - \bar{x}, x_j - \bar{x})}{\sqrt{\mathrm{Var}(x_i - \bar{x})}\sqrt{\mathrm{Var}(x_j - \bar{x})}}.$$

由 $\mathrm{Cov}(x_i - \bar{x}, x_j - \bar{x}) = \mathrm{Cov}(x_i, x_j) - \mathrm{Cov}(x_i, \bar{x}) - \mathrm{Cov}(x_j, \bar{x}) + \mathrm{Cov}(\bar{x}, \bar{x})$，由于

$$\mathrm{Cov}(x_i, x_j) = 0, \mathrm{Cov}(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$\mathrm{Cov}(x_i, \bar{x}) = \mathrm{Cov}(x_j, \bar{x}) = \mathrm{Cov}\left(x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{\sigma^2}{n},$$

因而 $\mathrm{Cov}(x_i - \bar{x}, x_j - \bar{x}) = -\frac{\sigma^2}{n}$,

$$\mathrm{Var}(x_i - \bar{x}) = \mathrm{Var}(x_j - \bar{x}) = \mathrm{Var}(x_1 - \bar{x}) = \mathrm{Var}\left(\frac{(n-1)x_1 - x_2 - \cdots - x_n}{n}\right)$$

$$= \frac{(n-1)^2\sigma^2 + (n-1)\sigma^2}{n^2}$$

$$= \frac{(n-1)\sigma^2}{n},$$

所以 $\mathrm{Corr}(x_i - \bar{x}, x_j - \bar{x}) = -(n-1)^{-1}$.

第7题答案：

分析 $(X_1,\cdots,X_n)$是取自 $X\sim b(1,p)$的样本，故 $X_i\sim b(1,p)$且相互独立，由两点分布的可加性，$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim b(n,p)$.

由于 $EX=p,DX=p(1-p)$. 由一般总体抽样分布的极限分布结论，$U=\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n}}$渐近服从 $N(0,1)$，从而 $\overline{X}$ 渐近服从 $N\left(p,\frac{p(1-p)}{n}\right)$

答 $b(n,p)$，$N\left(p,\frac{p(1-p)}{n}\right)$

第8题答案：

分析 $X_i\sim N(0,\sigma^2)$且相互独立，故 $X_1+X_2+X_3\sim N(0,3\sigma^2)$，$X_4+X_5+X_6\sim N(0,3\sigma^2)$且相互独立，从而

$$\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1),\quad\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$$

且相互独立，故有

$$\frac{1}{3\sigma^2}Y=\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(2).$$

即应有 $C=\frac{1}{3\sigma^2}$.

答 $\frac{1}{3\sigma^2}$，2.

第9题答案：

分析 由于 $D(2X_2-X_1)=4DX_2+DX_1=5\sigma^2$，故(A)不正确.

由$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，故(C)也不正确.

由$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$，故(D)也不正确.

(B)是正确的，因为 $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，故 $T^2=\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$.

ABCD即对应(1)(2)(3)(4)

第十题:
因为$X \sim \chi^2(m), E(X)=m, D(X)=2m$
则

$$E(\overline{X})=E(X)=m$$

由于样本的独立性

$$D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{m}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\times n\times D(X_i)=\frac{1}{n}\cdot 2m=\frac{2m}{n}$$