第三章 线性方程组

第一节 向量组与矩阵的秩

§ 3.1.1 向量组的秩

§ 3.1.1.1 n维向量

一、 n维向量的概念

定义1 n 个有次序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的数组称为**n维向量**，这n个数称为该向量的n个**分量**，第i个数a_i称为第i个分量．

分量全为实数的向量称为实向量，

分量全为复数的向量称为复向量.

例如

$(1,2,3,\cdots,n) \longrightarrow$ n维实向量

$(\underbrace{1+2i}_{\text{第1个分量}}, \underbrace{2+3i}_{\text{第2个分量}}, \cdots, \underbrace{n+(n+1)i}_{\text{第}n\text{个分量}}) \longrightarrow$ n维复向量

二、n 维向量的表示方法

n维向量写成一行(列)，称为**行(列)向量**，也就是**行(列)矩阵**，通常用$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$等表示，如：

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n), \qquad \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

注意

行向量和列向量都按照矩阵的运算法则进行运算.

§ 3.1.1.2向量组的线性相关性

一、向量、向量组与矩阵

若干个同维数的列向量（或行向量）所组成的集合叫做**向量组**.

例如 矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$有n个m维列向量

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_j & & \alpha_n \end{array} \\
A=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n$称为矩阵$A$的**列向量组**.

类似地,矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$又有m个n维行向量

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \\ \bar{\alpha}_i \\ \\ \bar{\alpha}_m \end{array}$$

向量组 $\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\cdots,\bar{\alpha}_m$ 称为矩阵A的**行向量组**.

反之，由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵.

m个n维列向量所组成的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，构成一个$n\times m$矩阵

$$\boldsymbol{A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}$$

$\boldsymbol{m}$个$\boldsymbol{n}$维行向量所组成的向量组$\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_m}$，构成一个$\boldsymbol{m\times n}$矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta_1}\\ \boldsymbol{\beta_2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta_m}\end{pmatrix}$$

线性方程组的向量表示

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}\, x_1 + \boxed{a_{12}}\, x_2 + \cdots + \boxed{a_{1n}}\, x_n = \boxed{b_1}, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m. \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha_1} x_1 + \boxed{\alpha_2} x_2 + \cdots + \boxed{\alpha_n} x_n = \boxed{\beta}$$

方程组与增广矩阵的列向量组之间一一对应.

定义 1 给定向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，对于任何一组数$k_1$，$k_2,\cdots,k_m$，向量

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

称为向量组的一个**线性组合**，k_1，$k_2,\cdots,k_m$称为这个线性组合的系数.

给定一组向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, 和向量 β，以及一组数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, 使得

$$\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$$

则向量β是向量组A的线性组合，这时称向量β能**由向量组A线性表示**. 也即，线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$$

有解.

零向量是任何一个向量组的线性组合.

设$e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0),\dots$, $e_n=(0,0,\dots,0,1)$,则任何一个n维向量α都可由向量组$e_1, e_2,\dots, e_n$线性表示.

定义２　若向量A中每个向量都能由向量组B线性表示，则称向量组A能由向量组B线性表示.

易证明：若向量(组)A能由向量组B线性表示，向量组B能由向量组C线性表示，则向量(组)A能由向量组C线性表示. （传递性）

若两个向量组可以相互线性表出(线性表示)，则称这两个向量组等价.

等价具有：反身性、对称性、传递性.

例如

设矩阵A经初等行变换变成B，则B的每个行向量都是A的行向量组的线性组合，由初等变换可逆性可知，A的行向量组能由B的行向量组线性表示，于是A的行向量组与B的行向量组等价.

类似，若矩阵A经初等列变换变成B，则A的列向量组与B的列向量组等价.

二、线性相关性的概念和判定

定义３ 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$（$s$>1) 中至少有一个向量可经组中其余 s-1个向量线性表示（或者说是其余 s-1个向量的线性组合），则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$是线性相关的向量组（或这$s$个向量线性相关），否则称该向量组是线性无关的向量组（或这s个向量线性无关）.

对于只含有一个向量α的向量组定义：当α 是零向量时，称它是线性相关的；否则称它是线性无关的.

例1 任何含有零向量的向量组一定是线性相关组.

例2 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性相关，则任意添上若干个同维向量之后，得到的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r;\ \alpha_{r+1},\ldots,\alpha_s\ (s>r>1)$也必线性相关.

部分相关则全体相关

证:因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，不妨设α_1可经其余向量线性表出，即

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \cdots + k_r\alpha_r$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + 0\alpha_{r+1} + \cdots + 0\alpha_s}$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

可得：含有两个相同向量的向量组必线性相关.

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则从中任意取出若干个向量构成原向量组的一个子组

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}\ (r>1,\quad 1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le s)$$

则该子组必线性无关.

全体无关则部分无关

综合线性相关的定义以及单个向量线性相关的定义，有

定理1 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 1)$线性相关的充要条件是，至少存在一组不全为零的$m$个数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得等式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\sum_{j=1}^{m}k_j\alpha_j=0 \qquad (1)$$

成立.

证明: 必要性 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 1)$线性相关.

若$m=1$，则有$\alpha_1=0$,显然对任何$k\neq 0$, 有$k_1\alpha_1=0$.

若$m>1$，设$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中有一个向量（比如 a_m ）能由其余向量线性表示. 即有

$$a_m=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$$

故 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}+(-1)a_m=0$

且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1},(-1)$ 这 m 个数不全为0，

充分性 设有非全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

若$m=1$，则上式化为$k_1\alpha_1=0$,而$k_1\neq0$，因此有$\alpha_1=0$, 结论成立.

若$m>1$,不妨设$k_1\neq0$, 则有

$$\alpha_1=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\alpha_2+\left(-\frac{k_3}{k_1}\right)\alpha_3+\cdots+\left(-\frac{k_m}{k_1}\right)\alpha_m.$$

即 α_1 能由其余向量线性表示.

故原向量组线性相关.

推论 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 1)$ 线性无关, $\Leftrightarrow$ **仅当**所有的数 $k_j=0(j=1,2,\cdots,s)$ 时 (1)式才能成立.

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\sum_{j=1}^{s}k_j\alpha_j=0 \qquad (1)$$

或：若有等式(1)成立，则**必有** $k_1=k_2=\cdots=k_s=0.$

两点说明

(1) 对于任一向量组，不是线性相关就是线性无关。

(2) 对于含有两个向量的向量组，它线性相关 $\Leftrightarrow$ 两向量的分量对应成**比例**.

几何意义是两向量**共线**；

三个三维向量线性相关的几何意义是三向量**共面**.

例5 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s;\beta$ 线性相关，则向量 β 必可经向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出.

证：由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s;\beta$ 线性相关知，至少有一组非全零的数 $k_1,k_2,\ldots,k_s, k$ 使得等式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k\beta=0 \qquad (1)$$

成立. 则必有 $k\neq0$. 否则 $k=0$，(1)式变为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

且 $k_1,k_2,\ldots,k_s$ 不全为零，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关. 这与题设矛盾. 因此 $k\neq0$. 且有

$$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_s}{k}\alpha_s$$

即向量 β 必可经向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出.

例6 证明上题中向量 β 可经向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出，表示法唯一.

证：假设 β 经 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出，有两种表示法

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_s\alpha_s$$

$$\beta = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \cdots + h_s\alpha_s$$

二式相减得

$$(l_1 - h_1)\alpha_1 + (l_2 - h_2)\alpha_2 + \cdots + (l_s - h_s)\alpha_s = 0$$

而 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，故

$$l_i - h_i = 0, (i = 1, 2, \cdots, s)$$

即 $$l_i = h_i, (i = 1, 2, \cdots, s)$$

所以表示法唯一.

例5和例6的结论可作为定理使用

三、几个有关的结论

定理2 n阶行列式$|A|=\det(a_{ij})=0 \Leftrightarrow$ 它的n个行（列）向量线性相关.

证明：看书92页.

注意：利用向量线性相关性和方程组之间关系，易知

若 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in}), i=1,2,...,m$ 线性相关，即存在非全零的一组数$k_1,k_2,\ldots,k_m$使得下式成立

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

设 $\beta_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in},0), i=1,2,...,m$ 则必有

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=0$$

即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性相关.

推论 n阶行列式$|A|\neq 0 \Leftrightarrow$它的$n$个行(列)向量线性无关.

补充定理 设有两个向量组A:$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$和B:$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$，若满足

(1) 向量组A可由向量组B线性表出，

(2) $r>s$，

则向量组A必线性相关.

以少表多，多的相关

推论1 设向量组A:$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 可经向量组B:$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 线性表出，且向量组A线性无关，则必有$r\leq s$.

推论2 任意$n+1$个n 维向量必线性相关.

推论3 两个线性无关的等价的向量组，必含有相同个数的向量.

线性相关与线性方程组描述

一个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性相关（线性无关）可以看作线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

存在(不存在)非零解的问题.

方程组描述

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\alpha_1}$ $\boxed{\alpha_2}$ $\boxed{\alpha_m}$

其中 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \ (i = 1, 2, \cdots, m)$

设 $\beta_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \\ a_{n+1,i} \\ \vdots \\ a_{n+s,i} \end{pmatrix}, \ (i = 1, 2, \cdots, m)$

即β_i是在α_i基础上增加若干个分量得到的向量.

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 称为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的加长向量组.

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 称为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的截短向量组.

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0. \end{cases}$$

没有非零解. 那么线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0, \\ a_{n+1,1}x_1+a_{n+1,2}x_2+\cdots+a_{n+1,m}x_m=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n+s,1}x_1+a_{n+s,2}x_2+\cdots+a_{n+s,m}x_m=0, \end{cases}$$

必也没有非零解. 也就是说$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$线性无关.

(1)若一个向量组线性无关，则其加长向量组必线性无关.

(2)若一个向量组线性相关，则其截短向量组必线性相关.

四、极大线性无关组和向量组的秩

定义4 若向量组的一个子组线性无关，但将向量组中任何一个向量添到这个子组中去，得到的都是线性相关的子组，则称该线性无关子组为向量组的极大线性无关组. 有的书中简称极大无关组.

显然，向量组的任何向量都是它的极大线性无关组的线性组合. 证明中一般只要说明向量组的其它向量(若存在)都是该无关子组的线性组合即可.

说明:

(1)一个线性无关向量组的极大无关组就是该向量组本身.

(2) 仅有零向量的向量组没有极大线性无关组.

(3) 向量组的极大无关组可能不止一个.

例如：向量组

$$\alpha_1=(1,0,1,2),\alpha_2=(0,1,0,-1),\alpha_3=(1,1,1,1)$$

显然 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

但 α_1,α_2；α_2,α_3；α_1,α_3 都线性无关,

因而都是它的极大线性无关组.

(4) 一个向量组的任意两个极大无关组都是等价的.

(5) 定理3 对于一个给定的向量组，它的极大线性无关组所含向量的个数相同.

定义5 向量组的极大线性无关组所含向量的个数，称为向量组的**秩**.

特别的，仅含有零向量的向量组，规定它的秩为**零**.

几个结论 若向量组的秩为r，则

(1) 向量组中，任何$r+1$个向量**必线性相关**.

证：任何$r+1$个向量可经原向量组的极大线性无关组(r个向量)线性线性表出，由于$r+1>r$，故这$r+1$个向量线性相关.

(2) 向量组的线性无关子组所含向量个数**最多为**r.

证: 该线性无关子组能被某极大线性无关组（含有r个向量）线性表出，则其包含向量个数$\le r$.

(3) 向量组中任意r个线性无关向量**都是一个极大线性无关组**.

证：设 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'$ 是任意r个线性无关向量，

α 是向量组中任一个向量，则由前面的结论(1)知

$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r';\alpha$ 必线性相关. 而 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'$

线性无关，从而α可由 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'$ 线性表出.

根据定义，$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'$ 是一个极大线性无关组.

小结

① 向量、向量组与矩阵之间的联系，线性方程组的向量表示；线性组合与线性表示的概念；向量组的等价.

② 线性相关与线性无关的概念，以及用线性方程组描述.（重点）

③ 线性相关与线性无关的判定方法：定义， 主要方法、定理、相关结论.（难点）

④ 极大线性无关组、向量组的秩的概念及相关结论.（重点）