

第二章 矩阵代数

第四节 转置矩阵和一些重要的方阵

§ 2.4.1 转置矩阵

定义 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，若将 A 的行顺次改成一列，所得 $n \times m$ 矩阵称为 A 的**转置矩阵**. 记作 A^T .

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \text{ 则 } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

A^T 的 (i, j) 元 = A 的 (j, i) 元.

例如:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad B^T = (18 \quad 6).$$

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A;$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T;$

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T;$

(4) $(AB)^T = B^T A^T;$

(5) 若 A 为可逆矩阵, 则 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

关于(4) $(AB)^T = B^T A^T$ 的证明

设 $A=(a_{ij})_{m \times n}$, $B=(b_{ij})_{n \times s}$, 则 AB 为 $m \times s$ 矩阵, $(AB)^T$ 为 $s \times m$ 矩阵, 显然 $B^T A^T$ 也为 $s \times m$ 矩阵.

下面证明 $(AB)^T$ 与 $B^T A^T$ 对应的元相等即可.

设 $C=AB=(c_{ij})_{m \times s}$, $A^T=(a'_{ij})_{n \times m}$, $B^T=(b'_{ij})_{s \times n}$,

$$C^T=(AB)^T=(c'_{ij})_{s \times m}, D=B^T A^T=(d_{ij})_{s \times m}.$$

则 $a'_{ij}=a_{ji}$, $b'_{ij}=b_{ji}$, $d_{ij}=\sum_{k=1}^n b'_{ik} a'_{kj}=\sum_{k=1}^n a'_{kj} b'_{ik}=\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$,

故 $c'_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}=d_{ij}$.

所以有 $(AB)^T=B^T A^T$.

例1: 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$.

解法1: 因为

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix},$$

所以 $(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$

解法2:

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

例2 设 A 为 n 阶实矩阵，若 $AA^T=O$ ，试证明： $A=O$ 。

证明：设 $A=(a_{ij})_n$ ，则

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

利用矩阵乘法可得 AA^T 的 (i, i) 元为

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}^2, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

而 $AA^T=O$ ，且 A 的元都为实数，故

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0, (i=1, 2, \cdots, n)$$

从而 $A=O$ 。

例3 设 n 阶矩阵 A 满足 $AA^T=E$, $|A|=-1$, 证明矩阵 $E+A$ 是退化的.

证明: (目标 $|E+A|=0$)

(不容易估计, 但若出现 $|E+A|=-|E+A|$ 就有希望了.)

$$\begin{aligned}|E+A| &= |AA^T + AE| = |A(A^T + E)| = |A| |(A^T + E)| \\ &= -|(A^T + E)| = -|(A^T + E)^T| = -|A+E|\end{aligned}$$

所以 $2|E+A|=0$

故 $|E+A|=0$, 即矩阵 $E+A$ 是退化的.

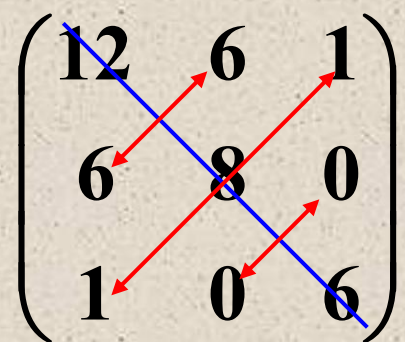
§ 2.4.2 几个重要的方阵

1. 对称矩阵

定义1 若实矩阵 A 满足 $A^T=A$, 则 A 称为**对称矩阵**.

由定义可知, 对称矩阵为**方阵**.

例如 $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 为对称阵.



说明 对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 为对称矩阵 $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$

另例，若 B 是一个 $m \times n$ 矩阵，则由于

$$(BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T$$

故 BB^T 为 m 阶对称矩阵。

2. 反对称矩阵

定义2 若实矩阵 A 满足 $A^T = -A$ ，则 A 称为**反对称矩阵**。

由定义可知，反对称矩阵为**方阵**。

n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 为反对称矩阵 $\Leftrightarrow a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$

既为对称矩阵又为反对称矩阵的矩阵为**零矩阵**。

例1 证明奇数阶反对称矩阵的行列式必为0.

证： 由 $A^T = -A$ 得

$$|A| = |A^T| = |-A| = (-1)^n |A|$$

当 n 为奇数时 $|A| = -|A|$ ，故 $|A| = 0$.

例2 若 A 为实对称矩阵，且 $A^2 = O$ ，证明 $A = O$.

证： 由于 A 为对称矩阵，故有 $A^T = A$ ，所以 $A^2 = AA^T$.

转化为前面的题目.

例3 设列矩阵 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 满足 $X^T X = 1$, E 为 n 阶单位矩阵, $H = E - 2XX^T$, 证明 H 是对称矩阵, 且 $HH^T = E$.

$$\begin{aligned}\text{证明: } \because H^T &= (E - 2XX^T)^T = E^T - 2(XX^T)^T \\ &= E - 2XX^T = H,\end{aligned}$$

$\therefore H$ 是对称矩阵.

$$\begin{aligned}HH^T &= H^2 = (E - 2XX^T)^2 \\ &= E - 4XX^T + 4(XX^T)(XX^T) = E - 4XX^T + 4X(X^T X)X^T \\ &= E - 4XX^T + 4XX^T = E.\end{aligned}$$

例4 证明任一 n 阶矩阵 A 都可表示成对称阵与反对称阵之和.

证明 设 $C = A + A^T$

$$\text{则 } C^T = (A + A^T)^T = A^T + A = C,$$

所以C为对称矩阵.

$$\text{设 } B = A - A^T, \quad \text{则 } B^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -B,$$

所以B为反对称矩阵.

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} = \frac{C}{2} + \frac{B}{2},$$

命题得证.

3. 对角形矩阵

定义3 形如 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$

的 n 阶矩阵称为对角形矩阵.

常记为 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 且 D 为对称矩阵.

对角形矩阵性质

设 A 、 B 为 n 阶对角形矩阵， k 为实数，则 $A+B$ ， kA ， AB 皆为对角形矩阵，且

$$\begin{aligned} AB &= \text{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \times \text{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n) \\ &= \text{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n) = BA \end{aligned}$$

$$A^m = \text{diag}(a_1^m, a_2^m, \cdots, a_n^m) \quad (m \text{ 为自然数})$$

对角形矩阵可逆 \Leftrightarrow 它主对角线上元全不为零.
而且当 A 可逆时,

$$A^{-1} = \text{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1})$$

另外,

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \cdots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \cdots & d_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_m a_{m1} & d_m a_{m2} & \cdots & d_m a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & \cdots & d_n a_{1n} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & \cdots & d_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1 a_{m1} & d_2 a_{m2} & \cdots & d_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

4. 正交矩阵

定义4 若 n 阶实矩阵 A 满足 $A^T A = E$, 则 A 称为正交矩阵.

显然, 正交矩阵为可逆矩阵.

正交矩阵性质 (课本71页)

(1) n 阶矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 $A^T = A^{-1}$.

(2) n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 是正交矩阵的充要条件是等式

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

中至少有一个成立.

(3) A 为正交矩阵, 则 $A^T = A^{-1}$ 也是正交矩阵.

(4) A 为正交矩阵, 则 A 的行列式必为 $+1$ 或 -1 ,
即 $|A| = \pm 1$.

(5) 若 A 、 B 为 n 阶正交矩阵, 则 AB (或 BA)
也是正交矩阵.

例5 若 A 为 n 阶正交矩阵, 试证 A^* 也是正交矩阵.

证: 由 A 为正交矩阵知 A 可逆, 且 $|A|^2 = 1$, 又由

$$AA^* = |A|E \quad \text{有} \quad A^* = |A|A^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } A^*(A^*)^T &= (|A|A^{-1})(|A|A^{-1})^T = |A|^2 A^{-1}(A^{-1})^T \\ &= A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = E \end{aligned}$$

因此 A^* 为正交矩阵.

例6 设 A 是 n 阶对称矩阵, T 是 n 阶正交矩阵, 试证 $T^{-1}AT$ 为对称矩阵.

证: 由 A 为对称矩阵知 $A^T = A$,

由 T 是 n 阶正交矩阵知 $T^{-1} = T^T$,

故

$$\begin{aligned}(T^{-1}AT)^T &= T^T A^T (T^{-1})^T \\&= T^{-1}A(T^T)^T \\&= T^{-1}AT\end{aligned}$$

所以 $T^{-1}AT$ 为对称矩阵.

5. 埃尔米特矩阵和西矩阵(选学)

定义5 当 $A=(a_{ij})$ 为复方矩时, 用 \bar{a}_{ij} 表示 a_{ij} 的共轭复数, 记 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$, \bar{A} 称为 A 的**共轭矩阵**.

运算性质

(设 A, B 为复矩阵, λ 为复数, 且运算都是可行的)

$$(1) \overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}; \quad (2) \overline{\lambda A} = \bar{\lambda} \bar{A};$$

$$(3) \overline{AB} = \bar{A} \bar{B}; \quad (4) |\bar{A}| = \overline{|A|}$$

$$(5) \overline{A^T} = (\bar{A})^T$$

(6) 若 A 为**可逆矩阵**, 则 \bar{A} 也为可逆矩阵, 且

$$(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$$

显然, 当 a_{ij} 全为实数时, $\bar{A} = A$.

定义6 若矩阵 A 满足 $A^T = \bar{A}$, 称 A 为**埃尔米特矩阵**.

当 A 的元全为实数时, 埃尔米特矩阵就是对称矩阵, 但一般的复对称矩阵并不是埃尔米特矩阵.

埃尔米特矩阵主对角线上的元必为**实数**, 且

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

性质

- 两个同阶埃尔米特矩阵的**和（差）及实数乘**埃尔米特矩阵的结果仍为埃尔米特矩阵;
- 可逆的埃尔米特矩阵的逆矩阵**也是**埃尔米特矩阵;
- 埃尔米特矩阵的行列式必为**实数**.

定义7 若 n 阶矩阵 A 满足条件 $A^T = \overline{A^{-1}}$
则 A 称为酉矩阵.

(或 $A^{-1} = \overline{A^T} = (\overline{A})^T$, 称为 A 的**共轭转置矩阵**)

显然, 条件 $A^T = \overline{A^{-1}}$ 等价于条件 $A\overline{A^T} = \overline{A^T}A = E$.

设 $A = (a_{ij})_n$, 利用上式可得酉矩阵满足条件

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \overline{a_{jk}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

和

$$\sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} a_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

当酉矩阵的元都是实数时, 酉矩阵就是**正交矩阵**.

关于酉矩阵结论

对应 n 阶酉矩阵 A, B

- 转置矩阵 A^T 和逆矩阵 A^{-1} 都是酉矩阵；
- AB （或 BA ）是酉矩阵；（有限个同阶酉矩阵的乘积仍为酉矩阵）
- 酉矩阵的行列式（一般为复数）的模为1。

小结

- 转置矩阵及其性质
- 对称矩阵 和反对称矩阵 及其性质
- 对角形矩阵 及其性质
- 正交矩阵 及其性质
- 两个重要的复矩阵——埃尔米特矩阵和西矩阵 (选学)