武汉理工大学考试试题纸（ A 卷）

课程名称 线性代数　　专业班级 2004 级本科

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
题分	30	40	12	12	6						100

备注：　学生不得在试题纸上答题(含填空题、选择题等客观题

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设 α_1，α_2，α_3，β_1，β_2 均为 4 维列向量，且 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1+\beta_2\end{pmatrix}$，如果 $|A|=a$，$|B|=b$，则 $|C|=$________；

2. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=$________；

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$____________；

4. 设 A 为 3 阶方阵，若 $|A|=2$，则 $|-2A|=$_____；

5. 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$，$\beta=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\end{pmatrix}^T$，$A=\alpha\beta^T$，则 $R(A)=$____；

6. 已知 n 阶（$n\ge 2$）方阵 A 的各行元素之和均为 0，且 $R(A)=n-1$，则 $AX=0$ 的通解为_______；

7. 设向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 3 & t\end{pmatrix}^T$ 线性相关，则 $t=$____；

8. 已知 $\begin{pmatrix}x & -3\\ y & -5\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ 相似，则 $x+y=$_____；

9. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1，2，3，则 $|A^{-1}|=$____；

10. 二次型 $f=x^2-y^2+z^2+2xy$ 可记作 $f=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$，其中对称阵 $A=$____。

二、解答题（每小题 10 分，共 40 分）

设 $\alpha^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}$，$A=\alpha\alpha^T+E$，矩阵 X 满足 $\frac{1}{3}A^*X=A^{-1}+X$，求 X。

1. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ & \cdots & \cdots & \\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$

2．设向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\end{pmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\end{pmatrix}^T$，求一个极大无关组，并将其余向量由极大无关组线性表示。

3．设四元齐次线性方程组

（1）$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$，　（2）$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$

求（1）与（2）的公共解。

三．已知正交变换$X=PY$将二次型$f=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\-2 & a & -2\\-4 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$化为标准形：

$$f=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & & \\ & b & \\ & & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

（1）　求a，b；　（4分）

（2）　求正交矩阵P．（8分）

四．某公司为了技术更新，计划对职工实行分批脱产论训。已知该公司现有2000人正在脱产轮训，而不脱产职工有8000人。若每年从不脱产职工中抽调30%的人脱产轮训，同时又有60%脱产轮训职工结业回到生产岗位。设职工总数不变。令

$$A=\begin{pmatrix}0.7 & 0.6\\0.3 & 0.4\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}10000\\2000\end{pmatrix}$$

试用A与X通过矩阵运算表示第n年职工状况，并据此计算第n年不脱产职工与脱产职工各多少人。（12分）（提示：以x_n表示第n年不脱产职工人数，y_n表示第n年脱产职工人数，记

$X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$，找出$X_{n+1}$与$X_n$的关系，求出$X_n$）

五．设A是n阶方阵，α是n维列向量，$A^{m-1}\alpha\neq 0$，$A^m\alpha=0$，m为正整数，

证明：α，$A\alpha$，…，$A^{m-1}\alpha$线性无关。（6分）

武汉理工大学教务处

试题标准答案及评分标准用纸

课程名称 线性代数　　　　（ A 卷）

一．填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1．$a-b$；　2。-12；　3。$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　4。$-16$；　5。1；

6．$k\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$；　7。 5；　8。10；　9。$\frac{1}{6}$；　10。$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

二．解答题（每小题 10 分，共 40 分）

1．$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\qquad (2\text{分})$$

$$|A|=24,\quad A^*=|A|A^{-1}=24A^{-1}\qquad (4\text{分})$$

$$\frac{1}{3}A^*X=A^{-1}+X\Rightarrow 8A^{-1}X=A^{-1}+X\Rightarrow 8X=E+AX\Rightarrow X=(8E-A)^{-1}\qquad (8\text{分})$$

$$X=\frac{1}{28}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\qquad (10\text{分})$$

2．$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ & \cdots & \cdots & \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ & \cdots & \cdots & \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}\qquad (3\text{分})$$

$$=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ & \cdots & \cdots & \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}\qquad (6\text{分})$$

$$=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x-a & \cdots & 0\\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$ (9 分)

从而 $D_n=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$ (10 分)

3. $$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}\square\begin{pmatrix}1 & -11 & 0\\ 0 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ (6 分)

α_1，α_3为极大无关组，(8 分) 且$\alpha_2=-11\alpha_1+7\alpha_3$ (10 分)

4. $$\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2-x_4=0\\ x_1-x_2+x_3=0\\ x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$ (3 分)

$$\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_2=x_2\\ x_3=2x_2\\ x_4=x_2\end{cases}$$ (8 分)

$$X=k\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$ (10 分)

三. （1）$a=4$，$b=5$； (4 分)

（2）$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$ (12 分)

四. $X_{n+1}=AX_n$， $X_n=A^nX$ (2 分)

$$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-0.7 & -0.6\\ -0.3 & \lambda-0.4\end{vmatrix}=(\lambda-0.1)(\lambda-1)$$ (4 分)

对应$\lambda_1=1$的特征向量为$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$，对应$\lambda_2=0.1$的特征向量为$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$， (6 分)

$$\begin{pmatrix} 10000 \\ 2000 \end{pmatrix} = 4000\alpha_1 + 2000\alpha_2$$ (8 分)

$$X_n = A^n X = A^n(4000\alpha_1 + 2000\alpha_2) = 4000\alpha_1 + 2000(0.1)^n\alpha_2 = \begin{pmatrix} 8000 + 2000(0.1)^n \\ 4000 - 2000(0.1)^n \end{pmatrix}$$ (12 分)

五。 假设存在一组数 $k_1, k_2, \cdots k_m$ 使得

$$k_1\alpha + k_2 A\alpha + \cdots + k_m A^{m-1}\alpha = 0$$ (2 分)

上式两端同左乘 A^{m-1}，则有

$$k_1 A^{m-1}\alpha = 0$$

故 $k_1 = 0$，(4 分)

以此类推可得 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$

从而 α，$A\alpha$，…，$A^{m-1}\alpha$ 线性无关。(6 分)