2016 一元函数积分部分解答

一、单选

BDACD

二、填空

（1）25

（2）4X-1

（3）$X^2+Y^2+3Z^2=1$

（4）$\frac{1}{12}$

（5）$\frac{8}{15}\pi$

三、不定积分

南開大學 作 业 纸

系别＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 第 页

(1) $\int \frac{x^2}{(x+1)^8}dx = \int \frac{(x+1)^2-2(x+1)+1}{(x+1)^8}dx$

$= \int\left[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{2}{(x+1)^7}+\frac{1}{(x+1)^8}\right]dx = -\frac{1}{5}\frac{1}{(x+1)^5}+\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{7}\frac{1}{(x+1)^7}+C$

(2) $\int e^x\ln(1+e^x)\,dx = \int \ln(1+e^x)\,de^x$

$= e^x\ln(1+e^x) - \int e^x\cdot\frac{e^x}{1+e^x}dx$

$= e^x\ln(1+e^x) - \int\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)de^x = e^x\ln(1+e^x) - e^x + \ln(1+e^x) + C$

(3) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\arctan x\,dx$

$= \int \arctan x\,dx - \int\frac{1}{1+x^2}\arctan x\,dx$

$= x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx - \int \arctan x\,d(\arctan x)$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx^2 - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$

四、定积分

(1) $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal[t\in[0,\frac{\pi}{6}]]{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^2}{|\cos t|} d\sin t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\, dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(2) $\int_{-1}^1 (|x|+2016x)e^{-|x|}dx = \int_{-1}^0 (-x+2016x)e^{x}dx + \int_0^1 (x+2016x)e^{-x}dx$

$$\xlongequal[t\in[0,1]]{x=-t} \int_1^0 -2015te^{-t}d(-t) + \int_0^1 2017xe^{-x}dx$$

$$= \int_0^1 -2015te^{-t}dt + \int_0^1 2017xe^{-x}dx$$

☆ $= 2\int_0^1 xe^{-x}dx = -2\int_0^1 x\, d(e^{-x})$

$$= -2xe^{-x}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$= -2e^{-1} - 2e^{-x}\Big|_0^1 = 2-4e^{-1}$$

或：$\int_{-1}^1 (|x|+2016x)e^{-|x|}dx = \underbrace{\int_{-1}^1 |x|\cdot e^{-|x|}dx}_{\text{被积函数为偶函数，积分区域对称}} + \underbrace{\int_{-1}^1 2016x e^{-|x|}dx}_{\text{被积函数为奇函数，积分区域对称. 积分值为0}}$

$$= 2\int_0^1 xe^{-x}dx \quad (\text{同上☆处})$$

(3) $\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+3^x}dx \xlongequal{x=-t} \int_1^{-1} \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}t)}{1+3^{-t}}d(-t) = \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}t)}{1+3^{-t}}dt$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+3^x}dx + \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{1+3^{-x}}dx\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sin^2(\frac{\pi}{2}x)dx$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^1 (1-\cos \pi x)dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

五、

南開大學 作 业 纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{无穷小}}\underbrace{\cos(x^2+2y^2)^{-1}}_{\text{有界量}} = 0 = f(0,0)$ ∴ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续。

(2) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} x\cdot\cos\dfrac{1}{x^2} = 0$，同理得 $f'_y(0,0)=0$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos(x^2+2y^2)^{-1} = 0$

∴ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微

六、

$f(x) = x^2\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2}dt$

$f'(x) = 2x\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt + x^2e^{-x^2}\cdot 2x - x^2e^{-x^2}\cdot 2x = 2x\int_1^{x^2} \overset{>0}{\boxed{e^{-t^2}}}dt$

$f'(x)$的符号与x的取值范围相关

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	<0	>0	<0	>0

∴ $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,-1]$，$[0,1]$ 上递减

在 $x\in[-1,0]$，$[1,+\infty)$ 上递增.

∴ $f(1)$，$f(-1)$ 为极小值. $f(0)$ 为极大值.

$f(1)=f(-1)=0$，$f(0) = -\int_1^0 te^{-t^2}dt$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t^2}dt^2$

$= \frac{1}{2}(-e^{-t^2})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$

七、

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可导

$\Rightarrow$ 泰勒展开式（在 $x=\frac{a+b}{2}$ 上） 取 $\xi\in[a,b]$

$$f(x)=\underbrace{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{=0}+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx+\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx\right|$$

$$\le\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\underbrace{\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx}_{\text{积分为0}}\right|+\left|\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx\right|$$

PS: $|f''(\xi)|\le M$

$$\le\frac{M}{2}\cdot\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{M}{24}(b-a)^3$$

或：设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数

即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上~~二次连续可导~~满足泰勒公式三阶可导.

$$F(x)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{F''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{F'''(\xi)}{3!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3.\ \cancel{\xi\in[x}$$

ξ 在 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间，$F'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，$F\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 也为0

$\because F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$.

$$\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\frac{F''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]+\frac{F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)}{3!}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\right|$$

$$=\frac{|F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)|}{6}\cdot\frac{1}{8}(b-a)^3$$

$$\le\frac{2M}{6}\cdot\frac{1}{8}(b-a)^3=\frac{1}{24}M(b-a)^3$$