

金融学院 2019——2020 学年第二学期
概率论课程期末习题

一、张三今年研究生毕业。找工作需要导师的推荐信。如果导师的推荐信强力推荐他，他有 80% 的概率会获得这份工作。如果导师只是正常推荐，那么他有 40% 的概率获得工作。如果推荐信一般，那么他只有 10% 的概率拿到工作。他估计他获得强力、正常和一般推荐的概率分别是 0.7, 0.2 和 0.1。（本题共 12 分，每小题 4 分）

- (1) 张三能拿到工作的概率是多少？
- (2) 张三最后成功获得了这份工作，请问他觉得自己被导师强推的概率有多大？
- (3) 如果张三最后没有获得工作，请问他觉得自己推荐的推荐信一般的概率有多大？

二、张三和李四打赌。张三掷一个均匀的骰子 600 次，李四掷一枚均匀的硬币 200 次。令 X 表示张三掷出 1 点的次数， Y 表示李四掷出国徽的次数。如果 $X > Y$ ，那么张三获胜。（本题共 16 分）

- (1) 计算 X 和 Y 的期望。（4 分）
- (2) 准确计算 X 在 80 到 120 之间的概率（写出表达式即可）。（4 分）
- (3) 说明 X 是否满足中心极限定理的假设，如果满足，请用中心极限定理近似计算第(2)小题。（4 分）
- (4) 近似计算张三获胜的概率。并说明你计算的依据。（4 分）

三、设随机变量 $X \sim U(0,1)$ ，当给定 $X=x$ 时，随机变量 Y 的条件概率密度为（18 分）

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} x, & 0 < y < \frac{1}{x}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$ 。（4 分）
- (2) 计算 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$ ，并画出图形。（6 分）
- (3) 计算 Y 的方差并说明其不存在。（4 分）
- (4) 计算 $P(X > Y)$ 。（4 分）

四、设随机变量(X,Y)的概率密度为 (14 分)

$$f(x,y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度。(4 分)
- (2) 求 $E[X]$, $E[Y]$, 以及 X 和 Y 的协方差。(6 分)
- (3) 求 $3X/2Y$ 的期望。(4 分)

五、某投资者有 10 万元初始资金, 打算全部投资于两支股票。已知这两支股票的下个月的收益率服从

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right)$$

的二维正态分布。若本月股票价格为 S , 下个月收益率为 X , 则下月价格为 $S(1+X/100)$ 。
(16 分)

- (1) 若该投资者的目的是最大化目标函数 $E[W]-2/3D(W)$, 其中 W 是下个月的投资组合的总价值(即投资者的财富)。求该投资者应该如何分配投资金额在这两支股票上? (8 分)
- (2) 若投资者想要最小化自己的投资组合波动率 $D(W)$, 应如何投资? (8 分)

六、某考试培训机构对自己的培训水平非常自信, 为吸引学生提供考试险, 有 100 人参加, 每人交 50 元。若投保人分数在 60 到 70 分之间, 公司一次性给付 100 元, 若考试没通过则一次性给付 200 元。假设考生考 70 分以上的概率是 0.8, 60 到 70 分之间的概率是 0.1。(本题共 12 分)

- (1) 求考 70 分以下不超过 10 人的概率。(4 分)
- (2) 求无人不及格的概率。(4 分)
- (3) 求保险公司亏本的概率。(4 分)

七、随机变量 X_1 和 X_2 相互独立并都服从期望为 1 的指数分布。(本题共 12 分)

- (4) 写出 X_1 和 X_2 的联合概率密度函数。(4 分)
- (5) 计算概率 $P(X_1 + X_2 < 1)$ 。(4 分)
- (6) 求函数 $U=\max(X_1, X_2)$ 的分布函数。(4 分)

