

第二章 矩阵代数

第三节 逆矩阵与矩阵的初等变换

§ 2.3.2 矩阵的初等变换

目的：解决待定系数法和伴随矩阵法求取方阵的逆矩阵计算量大的问题.

一、矩阵的初等变换

定义1 下面对矩阵的三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

- (1) **换行变换**: 互换两行;
- (2) **数乘变换**: 用**非零**常数 k 乘某行;
- (3) **倍加变换**: 将某行的 k 倍加到另一行上去.

同理可定义矩阵的**初等列变换**.

矩阵的初等列变换与初等行变换统称为矩阵的**初等变换**.

用记号 $A \rightarrow B$ 表示 A 经初等变换得到矩阵 B .

初等变换是**可逆**的, 且每种初等变换和它的逆变换是**同一类型**.

如: $r_i \leftrightarrow r_j$ 逆变换 $r_i \leftrightarrow r_j$;

$r_i + kr_j$ 逆变换 $r_i + (-k)r_j$ 或 $r_i - kr_j$.

定义2 如果矩阵A经过**有限次**初等变换变成矩阵B, 就称矩阵A和B**等价**.

等价是矩阵间的一种关系

不难证明, 矩阵等价具有

- (1) **反身性**: A与A等价.
- (2) **对称性**: 若A与B等价, 则B与A等价.
- (3) **传递性**: 若A与B等价, B与C等价, 则A与C 等价.

例如

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3/2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

$$\begin{array}{l}
 r_2 - r_3 \\
 r_3 - 2r_1 \\
 r_4 - 3r_1
 \end{array}
 \xrightarrow{B_1 = 3r_1}
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
 2 & -3 & 0 & 1 & -5 \\
 3 & 6 & 0 & 9 & 3
 \end{pmatrix}
 \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - r_3 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{array}}
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & -5 & 1 & -9 \\
 0 & 0 & 3 & 7 & -9
 \end{pmatrix}
 \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - r_3 \\ r_4 - 3r_1 \end{array}}
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 6 & 0 & 9 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 = B_2$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 / 2 \\ r_3 + 5r_2 \\ r_4 - 3r_2 \end{array}}
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -3
 \end{pmatrix}
 = B_3$$

$$\xrightarrow[r_4 - 2r_3]{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[r_4]{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = B_5$$

矩阵 B_4 和 B_5 都称为(行)阶梯形矩阵.

特点：每行的非零首元必在上一行非零首元的右方

特点描述：

(1) 可划出一条
阶梯线，线的下方
全为零；

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

(2) 每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的
行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素为非零元，
即非零行的第一个非零元。

阶梯形矩阵 B_5 还称为行最简形矩阵，即非零行
的非零首元为1，且其所在列的其它元都为0。

可得结论：对任何矩阵 $A_{m \times n}$ 总可经有限次初
等行变换化为(行)阶梯形和行最简形。

进一步, $B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} c_3 \leftrightarrow c_4 \\ c_4 + c_1 + c_2 \\ c_5 - 4c_1 - 3c_2 + 3c_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

矩阵 F 称为矩阵 B 的**标准形**.

特点： F 的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为零.

$m \times n$ 矩阵 A 总可经过初等变换化为 标准形

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

此标准形由 m, n, r 三个数唯一确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

所有与矩阵 F 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个**等价类**，标准形 F 是这个等价类中最简单的矩阵.

小结

$$1. \text{ 初等行(列)变换 } \begin{cases} (1) r_i \leftrightarrow r_j \ (c_i \leftrightarrow c_j); \\ (2) r_i \times k \ (c_i \times k); \\ (3) r_i + kr_j \ (c_i + kc_j). \end{cases}$$

初等变换的逆变换仍为初等变换, 且变换类型相同.

$$2. A \xrightarrow{\text{初等变换}} B \Rightarrow A \text{ 与 } B \text{ 等价}.$$

二、初等矩阵

定义3 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

有三类初等矩阵

(1) 互换 E 的 i, j 两行(列)所得矩阵 (有的记为 $P(i, j)$)

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & & & & & 1 & \\ & & 1 & \cdots & & 0 & \\ & & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i\text{列} & j\text{列} \\ i\text{行} \\ j\text{行} \end{matrix} \quad (i \neq j)$$

(2)用 $k(k \neq 0)$ 乘 E 的第 i 行(列)所得矩阵(有的记为 $P(i(k))$)

$$E_{ii}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i\text{列} \\ \\ \\ \\ i\text{行} \end{matrix} \quad (k \neq 0)$$

(3)将 E 的第 j 行(i 列)的 k 倍加到 i 行(j 列)上去($i \neq j$) (有的记为 $P(i, j(k))$)

$$E_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i\text{列} & j\text{列} \\ \\ \\ \\ i\text{行} \\ j\text{行} \end{matrix}$$

初等矩阵与初等变换的关系

引理 对矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 施行一次初等行(列)变换, 其结果就等于对 A 左(右)乘一个相应的 $m(n)$ 阶初等矩阵.

例如:

$$E_{ij}(k)A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 AE_{ij}(k) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} + ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} + ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

该引理的意义：把矩阵的初等变换归结为用某些初等矩阵左乘或右乘该矩阵，这对于简化矩阵乘法运算、讨论矩阵的某些性质都很有用。

例1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

对A施以第3种初等列变换:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 + 2c_3} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

相当于

$$AE_{31}(2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

又如：利用该引理容易求出三类初等矩阵的逆矩阵.

$$\begin{matrix} & & i\text{列} & j\text{列} \\ i\text{行} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots \\ j\text{行} & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots \\ & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = E$$

因此： $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

类似可得： $(E_{ii}(k))^{-1} = E_{ii}(\frac{1}{k}), (k \neq 0)$

$$(E_{ij}(k))^{-1} = E_{ij}(-k)$$

初等矩阵是可逆矩阵，而且它们的逆矩阵也是初等矩阵.

几个定理性结论

1. 矩阵 A 与 B 等价 \iff 有初等矩阵

$P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_t$, 使

$$B = \underbrace{P_s P_{s-1} \cdots P_1}_P A \underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_t}_Q$$

2. 两个 $s \times n$ 矩阵 A, B 等价 \iff 存在可逆的 s 级矩阵 P 与可逆的 n 级矩阵 Q 使

$$B = PAQ.$$

3. 任意一个 $m \times n$ 矩阵 A 都与一形式为 $\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n}$ 的矩阵等价, 它称为矩阵 A 的标准形. 一个矩阵的标准形是唯一的.

4. n 阶矩阵 A 为可逆的 \Leftrightarrow 它能表成一些初等矩阵的乘积

$$A = Q_1 Q_2 \cdots Q_t.$$

5. 可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化成单位矩阵.

【可逆矩阵总可以经过一系列初等列变换化成单位矩阵.】

三、用初等变换求逆矩阵

设 A_n 可逆, 则存在一系列初等矩阵 P_1, \dots, P_m ,

使 $E = \underline{P_m \cdots P_1} A$

所以 $A^{-1} = P_m \cdots P_1 = P_m \cdots P_1 E$

于是 $P_m \cdots P_1 (A, E)_{n \times 2n} = (P_m \cdots P_1 A, P_m \cdots P_1 E)$
 $= (E, A^{-1})$



求逆矩阵
的方法:

$$(A, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E, A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

例2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解:

$$\begin{aligned}
 (A \quad I) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 + 2r_3]{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 / (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

也可用初等列变换

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{只能用列的初等变换}} \dots\dots\dots \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

例3 已知方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

求 A 中所有元素的代数余子式之和 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}$.
 (提示: 即求 A^* 的所有元之和)

解: $\because |A| = 2 \neq 0,$

$\therefore A$ 可逆.

且 $A^* = |A| A^{-1}.$

$$(A \ E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

第1行先乘以1/2，然后从第1行起，每行减去下一行。

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

因此 $A^* = |A| A^{-1} = 2A^{-1}$

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = 2\left[\frac{1}{2} + (n-1) - (n-1)\right] = 1$$

小结

1. 初等矩阵及其种类.
2. 初等矩阵和矩阵初等变换的关系.
3. 几个定理性结论.
4. 求逆矩阵的方法:
 - (1) 伴随矩阵法. (阶数较低)
 - (2) 由 $AB=I$ 或 $BA=I$. (待定系数法)
 - (3) 初等变换的方法.
 - (4) 分块矩阵的方法. (以后介绍)

思考题

1、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 将A表示成初等矩阵的乘积.

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \times (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. 已知三阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
求 A 的伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

证明: 以前例子我们已知 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$.

因为 A 可逆, 所以 $|A| \neq 0$, 由

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

得 $\left(\frac{1}{|A|} A \right) A^* = A^* \left(\frac{1}{|A|} A \right) = I$

所以 A^* 可逆, $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$.

先由 A^{-1} 求 A

$$(A^{-1}, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{即 } A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

易求得 $|A|=1/2$, 故

$$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} = 2 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$