一、填空题(33 分，其中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵, $\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵).

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2)$, $\boldsymbol{\beta}=(1,-1)$, 则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=$ __________; $(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^{999}=$ __________.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&1\\1&3&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&0&7\end{pmatrix}$, 则行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=$ __________.

3. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\k\\-1\end{pmatrix}$, 则当数 k _____时, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

4. 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$ _____.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 均可逆, $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$, 则 $\boldsymbol{G}^{-1}=$ ________ .

6. 分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为________ .

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 6×5 矩阵, 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间是 2 维的, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 的解空间是________维的.

8. 与向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 均正交的一个单位向量为_________.

9. 已知矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}12&4\\3&k\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$, 则当数 k 满足条件_______时, $\boldsymbol{A}$ 是正定的.

10. 若 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 且有两个不同的特征值, 则当参数 k 满足条件_____时, 矩阵 $\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{A}$ 是正定的.

二、(12 分)求矩阵方程 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$ 的解, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{pmatrix}$.

三、(12 分)设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1(二重)和-1, $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 是其相应于特征值 1 的特征向量,

$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是其相应于特征值-1 的特征向量.

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{9999}$.
2. 若 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 特征值也是 1(二重)和-1, 证明: $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必定相似.

四、(12 分)设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+3x_2+5x_3+5x_4=2\\\quad -x_2+px_3-2x_4=q\\3x_1+2x_2+x_3+(p+3)x_4=-1\end{cases}$

1. 问参数 p,q 满足什么条件时, 该方程组无解; 有唯一解, 有无穷多解?
2. 当方程组有无穷多解时, 求出其通解(写成向量形式).

解: 记该方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 增广矩阵为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

五、(12 分)矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & -3 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

1. 求一 4×2 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 且秩$(\boldsymbol{B})=2$;
2. 问:是否存在秩大于 2 的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$? 为什么?

六、(12 分)设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & & \\ & 2 & \\ & & 4\end{pmatrix}$ 相似,

1. 求参数 k 的值; 2.求一正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

此题第二问超出已学范围，作为选做题。

七、(7 分)证明题.

1. 设λ_1, λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个互异的特征值, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于λ_1 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_2 的特征向量. 证明: $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 线性无关.

2. 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵, 并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量均是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量(注: $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的特征值未必相同). 证明: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.