2015级信息类一元函数微分学

（1）设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=1$，则当$x\to 0$时，函数$f(x)$与(C)是等价无穷小:

(A) $\ln(1-x)$; (B) $\sin|x|$; (C) $\sqrt{1+2x}-1$; (D) $1-\cos|x|$.

（2）设$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}, x\in(-\infty,+\infty)$，则函数$f(x)$是(D):

(A) 有界函数; (B) 单调函数; (C) 周期函数; (D) 偶函数.

（3）设$f(x)$对任意x满足$f(x+1)=af(x)$，且$f'(0)=b$，其中a,b为非零常数，则$f(x)$在$x=1$处（ C ）：

（A）不可导;（B）可导,且$f'(1)=a$；（C）可导,且$f'(1)=ab$；

（D）可导, 且$f'(1)=b$.

解法一 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x}=af'(0)=ab.$

解法二 设$f(x)=c\cdot a^x$，则$f'(1)=ac\ln a=af'(0)=ab$，可排除选项A,B,D.

(4) 设函数$f(x)=(\sin x)\sin\dfrac{1}{x}$，则$x=0$是$f(x)$的(A):

(A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 无穷间断点; (D) 振荡间断点.

(5) 设$f(x)$在$x=1$处有连续的导函数，又$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=1$，则$x=1$是函数$f(x)$的(B),

(A) 驻点, 但不是极值点; (B) 驻点, 且是极小值点; (C) 驻点, 且是极大值点; (D) 以上答案都不正确.

解法一 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0.$

$f''(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=1>0.$（此处不可用洛必达，因为没说f二阶可导）

所以选B.

解法二 设$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$，则$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=1$，可排除选项A,C,D.

二、填空题（每小题4分）：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=0$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x-1}\sin\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{3}$

（3）函数$y=\ln[\cos(\arctan x)]$，则$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{1+x^2}$

（4）设曲线$y=ax^2+bx$在点(1,0)处的切线与直线$y=x$平行，则$a=1, b=-1$

（5）设$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=e^{-0.5}$

三、求下列极限：（每小题 5 分）

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2$

（2） $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$

解 $1\le\sqrt[n^2]{n!}\le\sqrt[n^2]{n^n}=\sqrt[n]{n}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=1$

四、求下列函数的导数（每小题 5 分）：

（1） 设 $y=(1+x+x^2)^x$, 求 $\frac{dy}{dx}$；

$\frac{dy}{dx}=(e^{x\ln(1+x+x^2)})'=e^{x\ln(1+x+x^2)}(x\ln(1+x+x^2))'$

$=(1+x+x^2)^x(\frac{x+2x^2}{1+x+x^2}+\ln(1+x+x^2))$

(2) 设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases}x=at\cos t\\ y=at\sin t\end{cases}$ 所确定的函数，($a\ne0$),求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$；

$\frac{dy}{dx}=\frac{(at\sin t\cos t)'}{(at\cos t)'}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}$

$=\frac{(\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t})'}{(at\cos t)'}=\frac{(\sin t+t\cos t)'(\cos t-t\sin t)-(\sin t+t\cos t)(\cos t-t\sin t)'}{a(\cos t-t\sin t)^3}$

$=\frac{t^2+2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$

（3）设 $y=y(x)$ 由方程 $y\sin x-\cos(x-y)=3y$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$

解

$y'\sin x+y\cos x+(1-y')\sin(x-y)=3y'$

$y'=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{3-\sin x+\sin(x-y)}$

（4）设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$, 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 2014 阶导数值.

$$f^{(2014)}(x)=C_{2014}^{0}x^{2}(\ln(1+x))^{(2014)}+C_{2014}^{1}(x^{2})'(\ln(1+x))^{(2013)}+C_{2014}^{2}(x^{2})''(\ln(1+x))^{(2012)}$$

$$f^{(2014)}(0)=-\frac{(2014)!}{2012}$$

五、证明下列不等式：（每小题 6 分）

（1）当 $x>0,\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$;

证 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则

$$f'(x)=1+\ln(1+x)-\frac{1}{1+x^{2}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{(1+x^{2})^{2}}>0,x\ge 0$$

所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 严格单增，

$x>0$ 时， $f'(x)>f'(0)=0$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 严格单增，

$f(x)>f(0)=0$，

即当 $x>0,\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$.

（2）当 $\dfrac{\pi}{2}>x>0,\sin x+\tan x>2x$

证 令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，则当 $\dfrac{\pi}{2}>x>0$ 时，

$$f'(x)=\cos x+\sec^{2}x-2=\frac{\cos^{3}x+1-2\cos^{2}x}{\cos^{2}x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x-\cos^{2}x)}{\cos^{2}x}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 严格单增，

$f(x)>f(0)=0$，

即当 $\dfrac{\pi}{2}>x>0,\sin x+\tan x>2x$.

六、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续,在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内可导,且 $f(0)=0$，

证: 存在 $\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,使 $f'(\xi)\cos\xi-f(\xi)\sin\xi=0$.（本题 7 分）

证 令 $F(x)=f(x)\cos x$，对 $F(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上使用罗尔定理即可。

七、(6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内有二阶导数,且 $f'(\dfrac{a+b}{2})=0$，

证明： 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{4}{(b-a)^{2}}|f(b)-f(a)|\le|f''(\xi)|$

证明参见习题课讲义 79 页最后一行。80 页 9 行等号后面两项应该相减。

证明 利用 Taylor 公式，

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'(\frac{a+b}{2})}{1!}\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

其中 $\xi_1\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$；

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'(\frac{a+b}{2})}{1!}\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

其中 $\xi_2\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$；

因此

$$|f(b)-f(a)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|,$$

其中 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)$

(3)利用 Taylor 公式将函数的 分转换为等价无穷小代入再进行

笔指的地方改成减号