2014 级“一元函数微分（信）”结课统考试卷

一、选择题 **(**每小题 **4** 分**)**

1. 以下条件中, ( ) 不是函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分条件:
(A) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$; (B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; (C) $f'(x_0)$ 存在; (D) $f(x)$ 在 x_0 处可微.

2. 设 $f(x) = x^2\sin x$, 下列等式正确的是 ( ):
(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3} = 0$; (B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3} = 1$; (C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2} = 0$; (D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3} = 1$.

3. 以下条件中,( ) 是 $f(x)$ 函数在 x_0 点可导的充要条件:
(A) $f(x)$ 在 x_0 点连续; (B) $f(x)$ 在 x_0 点可微; (C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 存在; (D) $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$, 那么, 必有在 $[a,b]$ 上 ( ):
(A) $f(x) > 0$; (B) $f(x)$ 单调减少; (C) $f(x)$ 单调增加; (D) $f(x)$ 是上凸的.

5. 设 $f(x) = (x^2-3x+2)\sin x$, 则方程 $f'(x) = 0$ 在 $(0,\pi)$ 内实根的个数为 ( ),
(A) 0 个; (B) 至多 1 个; (C) 2 个; (D) 至少 3 个.

二、填空题 **(**每小题 **4** 分**)**

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1-\sin x)^{1/x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ ______

2. 曲线 $y = x + \sin^2 x$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, 1+\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程是 ______

3. 设 $f'(x_0) = 1$, 则 $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{f(x_0-3\delta)-f(x_0)}{2\delta} =$ ______.

4. 设 $a > 0$, 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c} - dx) = 3$, 则 a 与 d 的关系是 ______.

5. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+15)$, 则 $f'(0) =$ ______.

三、求极限 **(**每小题 **5** 分**)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5\sin x}{4x-3\cos x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{5/x}-1)x$, $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{1/x^2}$

四、求下列函数的导数 **(**每小题 **5** 分**)**

1. 设 $y = \arctan\dfrac{x+1}{x-1}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$;

2. 设 $y = y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases} x = \ln\sqrt{(1+t^2)} \\ y = \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(x+e) & x > 0 \\ a^x & x \le 0 \end{cases}$ $(a > 0)$ 问 a 取何值时,$f'(0)$ 存在?

4. 设方程 $e^{x+y} = xy + 1$ 确定了隐函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$, 并求该曲线在 $x = 0$ 处的切线方程.

五、证明下列不等式 **(**每小题 **6** 分**)** $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x), \forall x > 0$; $x^x \ge (\dfrac{1}{e})^{1/e}, \forall x > 0$

六、**(**本题 **7** 分**)** 求函数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ 在区间 $[-3,3]$ 上的极值, 最大值, 最小值.

七、**(**本题 **6** 分**)** 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1) = f(0) = 0$,
证明: (1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) + \xi f(\xi) = 0$; (2) 存在 $\eta_1 \in (0,\frac{1}{2}), \eta_2 \in (\frac{1}{2},1)$, 使 $f(\eta_1) + \eta_1 f'(\eta_1) + \frac{1}{2}f'(\eta_2) = 0$

2015(7)“一元函数微分”

一、选择题 (每小题 4 分)

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=1$, 则当 $x\to 0$ 时, 函数 $f(x)$ 与 ( ) 是等价无穷小:
(A) $\ln(1-x)$; (B) $\sin|x|$; (C) $\sqrt{1+2x}-1$; (D) $1-\cos|x|$.

2. 设 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}, x\in(-\infty,\infty)$, 则函数 $f(x)$ 是 ( ):
(A) 有界函数; (B) 单调函数; (C) 周期函数; (D) 偶函数.

3. 设 $f(x)$ 对任意 x 满足 $f(x+1)=af(x)$, 且 $f'(0)=b$, 其中 a,b 为非零常数, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ( ):
(A) 不可导; (B) 可导, 且 $f'(1)=a$; (C) 可导, 且 $f'(1)=ab$; (D) 可导, 且 $f'(1)=b$.

4. 设函数 $f(x)=(\sin x)\sin\frac{1}{x}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ( ):
(A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 无穷间断点; (D) 振荡间断点.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有连续的导函数, 又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=1$, 则 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的 ( ),
(A) 驻点, 但不是极值点; (B) 驻点, 且是极小值点; (C) 驻点, 且是极大值点; (D) 以上答案都不正确.

二、填空题 (每小题 4 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=$ ______

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x-1}\sin\dfrac{1}{x+1}=$ ______

3. 函数 $y=\ln[\cos(\arctan x)]$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ______

4. 设曲线 $y=ax^2+bx$ 在点 $(1,0)$ 处的切线与直线 $y=x$ 平行, 则 $a=$ ______, $b=$ ______.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{1/x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ ______

三、求极限 (每小题 5 分) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$; $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$

四、求下列函数的导数 (每小题 5 分)

1. 设 $y=(1+x+x^2)^x$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$;

2. 设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases}x=at\cos t\\ y=at\sin t\end{cases}$ 所确定的函数,$(a\neq 0)$, 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y\sin x-\cos(x-y)=3y$ 所确定, 求 $\dfrac{dy}{dx}$;

4. 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$, 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 2014 阶导数值.

五、证明下列不等式 (每小题 6 分) $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x},\forall x>0$; $\sin x+\tan x>2x,\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$

六、(本题 7 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导, 且 $f(0)=0$,
证明: 存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使 $f'(\xi)\cos\xi-f(\xi)\sin\xi=0$.

七、(本题 6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 且 $f'(\frac{a+b}{2})=0$,
证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\leq|f'(\xi)|$.

2016(7) 一元函数微分

一、选择题 **(每小题 4 分)**

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限是函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 ( ):
(A) 充分条件; (B) 必要条件; (C) 充分必要条件; (D) 不充分, 也不必要条件.

2. 当 $x \to 0$ 时, 下列无穷小量中最高阶的是 ( ):
(A) $2x^2$; (B) $1-\cos x$; (C) $\sqrt{1+x^2}-1$; (D) $3x^3$.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{(x-1)^2}$ 的值为 ( ):
(A)∞; (B)1; (C)0; (D)-1;

4. 设 $f(x) = x^2\ln(1+x)$, 则 (3 阶导数)$f'''(0)$ 是 ( ):
(A) 6; (B) 5; (C) 4; (D) 3.

5. 曲线 $y^3 = 6y - x^2$ 在 $(-2, 2)$ 处的切线斜率为 ( ),
(A) $1/3$; (B) $2/3$; (C) $1/2$; (D) 1.

二、填空题 **(每小题 4 分)**

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x\arctan(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 则 $f'_-(0) = $ ______.

2. 设 $f(x)$ 为可导函数, 且 $f'(1) = 1$, 令 $F(x) = f(1/x) - f(x^2)$, 则 $F'(1) = $ ______.

3. $\lim\limits_{x\to} \dfrac{3\sin x + (e^x - 1)}{\ln(1+4x)} = $ ______.

4. 设函数 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+16)$, 则 $f'(0) = $ ______.

5. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{x^2+1}{x+1} - (ax+b)] = 1$, 则 $a = $ ______, $b = $ ______.

三、求下列极限 **(每小题 5 分)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\dfrac{1}{x} + 3\sin\dfrac{1}{x})^x$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+e^x)^{1/x}$

四、求下列函数的导数 **(每小题 5 分)**

1. 设 $y = (x^2+x+2)^{x+1}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$;

2. 设 $y = y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2\sin t \end{cases}$ 所确定的函数, 求 $\dfrac{dy}{dx}$;

3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 所确定, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

五、证明下列不等式 **(每小题 6 分)** $(1+\sin x)\ln(1+\sin x) > x\cos x, \forall x \in (0, \dfrac{\pi}{2}]$; $2\ln(1+x) < x + \dfrac{x}{1+x}, \forall x > 0$

六、**(本题 6 分)** 求函数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$ 的极值.

七、**(本题 6 分)** 设函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^\alpha \cos\frac{1}{x^\beta}, & x > 0 \end{cases}$, 其中 $\alpha, \beta > 0$,
试分别讨论 α, β 满足什么条件时 (1)$f'(0)$ 存在; (2)$f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

八、**(本题 6 分)** 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$,
证明:(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f(\xi) = 1 - \xi$; (2) 存在不同的 $\alpha, \beta \in (0, 1)$, 使 $f'(\alpha)f'(\beta) = 1$.