一、填空题（每小题 **5** 分，共 **30** 分）

1、三阶方阵 **A=**$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（其中 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ ）的逆矩阵 A^{-1} **=______**。

2、已知 **A=**$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，**A***是矩阵 **A** 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}$ **=______**。

3、**n** 阶方阵 **A**，**B** 满足 **A+B=AB**，则 **B-E** 可逆且（**B-E**）$^{-1}$ **=__________**。

4、A 为三阶方阵，$|A| = 1$，则 $\left|(2A)^{-1} - A^*\right|$ **=________** 。

5、A 为 n 阶可逆方阵，将 A 的第 i 行和第 j 行对调得到矩阵 B，则 AB^{-1} **=_________** 。

6、$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{11} + a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{21} + a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{31} + a_{33} \end{pmatrix}$，$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 B **=_____________**。（用 A, P_1, P_2 表示 B）

答案：1、$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\lambda_3 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 1/\lambda_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　2、$-2\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　3、A-E　4、-1/8　5、$E_n(i,j)$　6、$A\,P_2P_1$

二、（**30** 分）

1、计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$　　（**10** 分）

解：$D=\begin{vmatrix}7&0&1&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\7&0&-2&-5\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7&1&4\\1&1&2\\7&-2&-5\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}6&0&2\\1&1&2\\9&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}6&2\\9&-1\end{vmatrix}=-24$$

2、计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&a&\cdots&a&-b\\a&a&\cdots&-b&a\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&-b&\cdots&a&a\\-b&a&\cdots&a&a\end{vmatrix}$ $(a\neq -b)$ (10 分)

解：将第 2、3、…、n 列同时加到第一列，并提取公因子，得

$$D_n=[(n-1)a-b]\begin{vmatrix}1&a&\cdots&a&-b\\1&a&\cdots&-b&a\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&-b&\cdots&a&a\\1&a&\cdots&a&a\end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a-b]\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b-a \\ 0 & 0 & \cdots & -b-a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -b-a & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{n-1}(b+a)^{n-1}[(n-1)a-b]$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}(a+b)^{n-1}[(n-1)a-b]$$

3、求下列矩阵的逆矩阵（**10** 分）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

答案：$\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

三、（**40** 分）

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\1&3\end{pmatrix}$，且满足 ***AX+B=X***，用初等变换法求 ***X***　　　　　（**10** 分）

解：由 ***AX+B=X*** 知 ***B=X-AX=(E-A)X***

$$\because\left(E-A\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$ 且

$$\left|E-A\right|=1\neq 0$$

所以 ***E-A*** 可逆，由此得 $X=(E-A)^{-1}B$

$$\left(E-A\vdots B\right)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&-1\\1&0&-1&2&1\\0&1&1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0&-1&0&-1&-2\\1&0&-1&2&1\\0&1&1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}0&-1&0&-1&-2\\1&0&0&2&2\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2&2\\0&1&0&1&2\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

2、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$A^*$是矩阵 A 的伴随矩阵，若矩阵 B 满足（$B-E$）$^{-1}=A^*-E$， 求矩阵B 。（**15** 分）

答案:

$$\because (B-E)^{-1}=A^*-E \therefore B-E=(A^*-E)^{-1}$$

$$\therefore B=(A^*-E)^{-1}+E=\frac{1}{|A^*-E|}(A^*-E)^*+E$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow A^*=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^*-E=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},|A^*-E|=-4,(A^*-E)^*=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3、设 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$，对应的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{C}^*$，分块矩阵

$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{D}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{D}^*$。（15 分）

答案：$$\boldsymbol{D}^*=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ -|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{bmatrix}。$$