- 设W1,W2都是线性空间V的子空间，则其交(intersection)定义为

$$W_1 \cap W_2 = \{\mathrm{x} \mid \boldsymbol{x} \in W_1, \boldsymbol{x} \in W_2\}$$

- 两个线性空间的交一定为线性子空间。

两个线性子空间的交是线性子空间，但两个线性子空间的并集一般不是线性子空间。

设$\epsilon_1=(1,0,0)^T,\epsilon_2=(0,1,0)^T$

$W=L(\epsilon_1)\cup L(\epsilon_2)$不是$\mathbb{R}^3$的线性子空间。

$(\epsilon_1,\epsilon_2\in W$但$\epsilon_1+\epsilon_2\notin W.)$

从几何上看，$L(\epsilon_1)$与$L(\epsilon_2)$分别是$\mathbb{R}^3$的两条坐标轴，

由它们可以确定xOy平面，即2维的线性子空间，该平面就称为$L(\epsilon_1)$与$L(\epsilon_2)$的和。

命题2.1. 设W_1,W_2是线性空间V的两个线性子空间，则集合

$$W=\{\alpha_1+\alpha_2|\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2\}$$

proof

也是一个线性子空间，称为W_1与W_2的和，记为W_1+W_2.

例子：在$\mathbb{R}^3$中，设W_1是通过原点的直线，
W_2是过原点且与W_1垂直的平面，
则$W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)^T\} = 0$ (零子空间)，
$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

从线性子空间的和的定义很容易看出：

(1) 交换律：$W_1 + W_2 = W_2 + W_1$;

(2) 结合律：$W_1 + (W_2 + W_3) = (W_1 + W_2) + W_3$.

(3) 多个子空间的和：

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \middle| \alpha_i \in W_i \right\}.$$

线性子空间的和的维数

先看$\mathbb{K}^4$中的两对子空间的和：

1) $W_1 = L((1,0,0,0)^T,(0,1,0,0)^T),$
$W_2 = L((0,0,1,0)^T,(0,0,0,1)^T),$

2) $V_1 = L((1,0,0,0)^T,(0,1,0,0)^T),$
$V_2 = L((0,0,1,0)^T,(1,1,0,0)^T),$

以上 4 个线性子空间都是 2 维的

$W_1 + W_2 = \mathbb{K}^4$的维数是4

$V_1 + V_2 = L((1,0,0,0)^T,(0,1,0,0)^T,(0,0,1,0)^T)$的维数是3.

分析发现，W_1与W_2的交集是零子空间

V_1与V_2的交是1维子空间，比较大，导致了其和比较小。

线性子空间的和的维数(理论结果)

命题2.2 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$与$\beta_1,\ldots,\beta_t$是V的两个向量组，则$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$.

引理 2.3: 线性子空间中的线性无关的向量组可以被扩充成该子空间的一组基。

proof

proof

定理2.4 (维数公式) 设W_1与W_2是V的两个子空间，则有$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$.

proof

推论2.5 设$W_1,W_2,\ldots,W_m$是V的线性子空间，则有

$$\dim(W_1+\cdots+W_m)\le\sum_{i=1}^m\dim W_i.$$

线性子空间的和的求法：例子

设$V=\mathbb{K}^4$, $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $W_2=L(\beta_1,\beta_2)$, 其中

$\alpha_1=(1,2,-1,-3)^T, \alpha_2=(-1,-2,2,1)^T, \alpha_3=(-1,-3,0,5)^T;$

$\beta_1=(-1,0,4,-2)^T, \beta_2=(0,5,9,-14)^T.$

求W_1+W_2与$W_1\cap W_2$的基和维数。

分析： $W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的极大线性无关组就是$W_1+W_2$的一组基

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\text{简化行阶梯形矩阵}$$

主元所在的列对应的向量组就是一个极大线性无关组

对于$\alpha\in W_1\cap W_2$, 存在x_i, $i=1,\ldots,5$, 使得

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=-x_4\beta_1-x_5\beta_2,$$

即 $$\boxed{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\beta_1+x_5\beta_2=0}$$

线性子空间的和的求法：例子

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&0\\2&-1&-3&0&5\\-1&2&0&4&9\\-3&1&5&-2&-14\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-2&0&-1\\0&1&-1&0&-3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$是$W_1+W_2$的一组基，且$\dim(W_1+W_2)=3.$

$\Longrightarrow$ α_1,α_2是W_1的一组基，且$\dim W_1=2.$

$\Longrightarrow$ β_1,β_2是W_2的一组基，且$\dim W_2=2.$

对于$\alpha\in W_1\cap W_2$，存在x_i, $i=1,\ldots,4$，使得

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=-x_3\beta_1-x_4\beta_2,$$

即 $\boxed{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\beta_1+x_4\beta_2=0}$

基础解系: $\xi_1=(1,3,-4,1)$

$-4\beta_1+\beta_2$
$=(4,5,-7,-6)$
是$W_1\cap W_2$的一组基

线性子空间的直和：定义

下面介绍子空间的和的一种重要的特殊情形----直和.

定义: 设W_1与W_2是V的两个线性子空间. 如果对$\alpha \in W_1 + W_2$, 表示式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_i \in W_i, \ i = 1, 2,$$

是唯一的, 则称$W_1 + W_2$为W_1与W_2的直和, 记为$W_1 \oplus W_2$.

说明: $W_1 + W_2$是直和的充分必要条件是$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_i \in W_i, i = 1, 2$ 只有在α_i全为零时才成立.

必要性是显然的, 下证充分性. 假设$\alpha \in W_1 + W_2$有两个分解式:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_i, \beta_i \in W_i, \ i = 1, 2,$$

则有$(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = 0$, 其中$\alpha_i - \beta_i \in W_i$, $i = 1, 2$.

由条件有$\alpha_i - \beta_i = 0$, $i = 1, 2$, 即$\alpha_i = \beta_i$.

定理2.6. 设W_1与W_2是V的两个线性子空间，则下列结论等价：

(1) W_1+W_2是直和；

(2) $W_1\cap W_2=\{0\}$；

(3) $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$.

proof

定理2.7. 设W是线性空间V的一个线性子空间，那么存在V的线性子空间U使得

$$V=W\oplus U.$$

线性子空间U称为W的补子空间。

proof

多个线性子空间的直和

定义2.2. 设$W_1, \ldots, W_m$是V的线性子空间.

如果$W_1 + \ldots + W_m$中的每个向量α的分解式

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \quad \alpha_i \in W_i, \ i = 1, 2, \cdots, m,$$

是唯一的，就称这个和为直和，记为$W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$或$\oplus_{i=1}^{m} W_i$.

命题2.8. 设$W_1, \cdots, W_m$是V的线性子空间, 则下列结论等价:

(1) $W_1 + \cdots + W_m$是直和;

(2) $\dim(W_1 + \cdots + W_m) = \dim W_1 + \cdots + \dim W_m$;

(3) 对$i = 1, \ldots, m$, 有$W_i \cap \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} W_j = 0$.

proof

命题2.1的证明

$W=\{\alpha_1+\alpha_2|\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2\}$ 是线性子空间.

证明：

1) 由$0+0=0\in W$得W非空。

2）设$\alpha,\beta\in W$, 由定义有,

存在$\alpha_1,\beta_1\in W_1$, $\alpha_2,\beta_2\in W_2$, 使得

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \ \beta=\beta_1+\beta_2.$$

$$\Longrightarrow \alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)\in W$$

3) 对于$k\in K$, 有$k\alpha_i\in W_i$ $(i=1,2)$,

$$\Longrightarrow k\alpha=k\alpha_1+k\alpha_2\in W$$

所以 W 是线性子空间。

说明：线性子空间$W=W_1+W_2$是包含W_1与W_2的最小的线性子空间。

back

命题 2.2 的证明

命题2.2 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$与$\beta_1,\ldots,\beta_t$是V的两个向量组，则 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$.

证明: 由定义, 有

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$$

$$=\{(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)+(l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t)|k_i,l_j\in\mathbb{K}\}$$

$$=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$$

back

引理 2．3 的证明

引理 2.3: 线性子空间中的线性无关的向量组可以被扩充成该子空间的一组基。

证明: 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$是线性子空间W中的一组线性无关的向量.

若$\forall\alpha\in W$都可以由$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$线性表示,

则$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$是W的一组基;

否则, 存在$\alpha_{s+1}\in W$不能被$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$线性表示,

因此$\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$线性无关.

如果这个向量组不是W的基, 则用同样的方法扩充线性无关的向量组, 直到不能扩充为止.

最后得到W的一组基.

back

定理2.4的证明

$$\boxed{\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)}$$

证明: 设$\dim(W_1\cap W_2)=m,\ \dim W_1=n_1,\ \dim W_2=n_2.$

取$W_1\cap W_2$的一组基$\eta_1,\ldots,\eta_m$，分别扩充成W_1和W_2的基:

$\eta_1,\ldots,\eta_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1-m}$; $\eta_1,\ldots,\eta_m,\beta_1,\ldots,\beta_{n_2-m}.$

下面证明n_1+n_2-m个向量$\eta_1,\ldots,\eta_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1-m},$ $\beta_1,\ldots,\beta_{n_2-m}$ 是W_1+W_2的一组基. 注意到

$$W_1+W_2$$
$$=L(\eta_1,\ldots,\eta_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1-m})+L(\eta_1,\ldots,\eta_m,\beta_1,\ldots,\beta_{n_2-m})$$
$$=L(\eta_1,\ldots,\eta_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1-m},\beta_1,\ldots,\beta_{n_2-m})$$

只要证明 $\eta_1,\ldots,\eta_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1-m},\beta_1,\ldots,\beta_{n_2-m}$

线性无关

定理 2.4 的证明(2)

设 $\boxed{k_1\eta_1+\cdots+k_m\eta_m+p_1\alpha_1+\cdots+p_{n_1-m}\alpha_{n_1-m}}$

$$+q_1\beta_1+\cdots+q_{n_2-m}\beta_{n_2-m}=0$$

α

$\alpha=-q_1\beta_1-\cdots-q_{n_2-m}\beta_{n_2-m}\in W_1\cap W_2$

因此α可以用$\eta_1,\ldots,\eta_m$线性表出.

设$\alpha=l_1\eta_1+\ldots+l_m\eta_m$， 有

$$l_1\eta_1+\ldots+l_m\eta_m+q_1\beta_1+\cdots+q_{n_2-m}\beta_{n_2-m}=0.$$

由于$\eta_1,\ldots,\eta_m,\beta_1,\ldots,\beta_{n_2-m}$是$W_2$的一组基， 所以

$l_1=\ldots=l_m=0,\ q_1=\ldots=q_{n_2-m}=0,\ \Longrightarrow\alpha=0$

即 $k_1\eta_1+\cdots+k_m\eta_m+p_1\alpha_1+\cdots+p_{n_1-m}\alpha_{n_1-m}=0$

注意到$\eta_1,\ldots,\eta_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1-m}$是$W_1$的一组基， 有

$k_1=\ldots=k_m=0,\ p_1=\ldots=p_{n_1-m}=0.$

back

所以$\eta_1,\ldots,\eta_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1-m},\beta_1,\ldots,\beta_{n_2-m}$线性无关

定理 2.6 的证明

定理2.6. 下列结论等价:

(1) W_1+W_2是直和;

(2) $W_1\cap W_2=\{0\}$;

(3) $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$.

证明：由维数公式可以得到(2)与(3)的等价性。
下面证明(1)与(2)的等价性。

$(1)\Longrightarrow(2)$: 设$\alpha\in W_1\cap W_2$, 有 $0=\alpha+(-\alpha)$,

因为是直和，所以$\alpha=-\alpha=0$.

$(2)\Longrightarrow(1)$: 设$\alpha\in W_1+W_2$有分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2 \qquad \alpha_i,\beta_i\in W_i,\ i=1,2$$

$$\Longrightarrow \alpha_1-\beta_1=-(\alpha_2-\beta_2)\in W_1\cap W_2$$

由条件有$\alpha_1-\beta_1=-(\alpha_2-\beta_2)=0$, 即分解式是唯一的。back

定理 2.7 的证明

若W是V的一个线性子空间，则存在V的线性子空间U使得

$$V = W \oplus U.$$

线性子空间U称为W的补子空间。

证明：设$\dim W = m$, $\dim V = n$. 取W的一组基$\eta_1, \ldots, \eta_m$,

再扩充成V的一组基$\eta_1, \ldots, \eta_m, \eta_{m+1}, \ldots, \eta_n$.

令$U = L(\eta_{m+1}, \ldots, \eta_n)$, 则有$W + U = L$.

于是$\dim(W + U) = \dim W + \dim U = \dim V$,

即$V = W \oplus U$.

back

由于基的扩充是不唯一的，所以当W是不平凡子空间时，
它的补子空间是不唯一的。

命题 2.8 的证明

(1) $W_1+\cdots+W_m$是直和;
(2) $\dim(W_1+\cdots+W_m)=\dim W_1+\cdots+\dim W_m$;
(3) $W_i\cap\sum_{1\le j\le m,j\ne i}W_j=0$.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2): 设$W_1+\cdots+W_m$是直和,

记$W=W_1+\cdots+W_{m-1}$, 则$W+W_m$为直和,

$$\Longrightarrow \begin{aligned}\dim(W_1+\cdots+W_m)&=\dim(W\oplus W_m)\\&=\dim W+\dim W_m\\&=\dim(W_1+\cdots+W_{m-1})+\dim W_m\end{aligned}$$

命题 2.8 的证明(2)

(1) $W_1+\cdots+W_m$是直和;
(2) $\dim(W_1+\cdots+W_m)=\dim W_1+\cdots+\dim W_m$;
(3) $W_i\cap\sum_{1\le j\le m, j\ne i}W_j=0$.

(2) ⇒ (3): $\dim\sum_{1\le j\le m, j\ne i}W_j\le\sum_{1\le j\le m, j\ne i}\dim W_j$. $\Longrightarrow$

$$\dim\left(W_i\bigcap\sum_{1\le j\le m, j\ne i}W_j\right)$$

$$=\dim W_i+\dim\left(\sum_{1\le j\le m, j\ne i}W_j\right)-\dim\left(W_i+\sum_{1\le j\le m, j\ne i}W_j\right)$$

$$\le\dim W_i+\left(\sum_{1\le j\le m, j\ne i}\dim W_j\right)-\sum_{j=1}^{m}\dim W_j \quad =0$$

所以 $W_i\cap\sum_{1\le j\le m, j\ne i}W_j=0$

命题 2.8 的证明(3)

(1) $W_1+\cdots+W_m$是直和;
(2) $\dim(W_1+\cdots+W_m)=\dim W_1+\cdots+\dim W_m$;
(3) $W_i\cap\sum_{1\le j\le m, j\ne i}W_j=0$.

(3) ⇒ (1): 设$\alpha\in W_1+\cdots+W_m$有两个分解式

$$\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_m=\alpha_1'+\cdots+\alpha_m',$$

其中 $\alpha_i,\alpha_i'\in W_i,\ i=1,\cdots,m$ 则有

$$\beta=\alpha_1-\alpha_1'=(\alpha_2'-\alpha_2)+\cdots+(\alpha_m'-\alpha_m)$$

于是 $\beta\in W_1\bigcap(W_2+\cdots+W_m)$ ={0} 所以 $\alpha_1'=\alpha_1$

同理可证$\alpha_i=\alpha_i',\ i=2,\cdots,m$.

这样就得到了分解的唯一性, 所以$W_1+\cdots+W_m$是直和.

back

子空间的正交

- 若U,W都是欧氏空间V的子空间，对于任意的

$$x \in U, y \in W$$

- 都有(x,y)=0, 则U与W正交，记作U⊥W
- 如果一个向量x与空间W中的任意向量都正交，则称x与W正交。
- 正交空间的交集为0
- 正交空间的和为直和
- n维欧氏空间V的每一个子空间都存在唯一的正交补
- **齐次方程组的解空间为系数空间的正交补**