线性代数复习题 2

一． 填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1．若 $\begin{vmatrix} k-2 & 4 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix}=0$，则 $k=$__________.

2．设含参数 λ 的方程组 $\begin{cases} \lambda x+y+z=0 \\ x+\lambda y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足的条件是________.

3．设 4×4 矩阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4), B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，且已知行列式 $|A|=1$，$|B|=4$. 则行列式 $|A+B|=$____________.

4．已知方阵 A 满足 $A^2+A-2I=0$，其中 I 是与 A 同阶的单位阵，则 $(A+I)^{-1}=$________.

5．设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 相似，则 $a=$____________.

6．设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，$A^*$是A伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$____________.

7. 设四阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的非零特征值为 ___________.

二． 选择题（每小题 4 分，共 32 分）

1．设 A 是 n 阶可逆矩阵，则下列叙述<u>不正确</u>的是（　　　　）

A．$|A|\neq0$　　　　B．$r(A)=r<n$

C．存在 n 阶矩阵 B 使得 $AB=I$.　　　　D．A 必能表为有限个初等矩阵的乘积.

2．设 A 是 n 阶方阵，其秩 $r<n$，则在 A 的 n 个行向量中（　　　）

A．必有 r 个行向量线性无关.
B．任意 r 个行向量线性无关.
C．任意 r 个行向量都构成极大线性无关组.
D．任意一个行向量都可由其他 r 个行向量线性表出.

3．设 A 为三阶方阵，且 $|A|=-3$，则 $|-2A|=$（　　　）

A. 24　　　B. 6　　　C. --24　　　D. --6

4. 若向量组 α,β,γ 线性无关，而向量组 α,β,δ 线性相关. 则（　　）

A. 向量 α 必可由向量组 β,γ,δ 线性表示.

B. 向量 β 必不能由向量组 α,γ,δ 线性表示.

C. 向量 δ 必可由向量组 α,β,γ 线性表示.

D. 向量 δ 必不能由向量组 α,β,γ 线性表示.

5. 设 A, B 为同阶方阵，则 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 成立的充要条件是（　　）

A. $A=I$　　B. $B=0$　　C. $A=B$　　D. $AB=BA$

6. 已知 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$, $PA=\begin{pmatrix}1&2&0&5\\1&-2&3&6\\2&0&1&5\end{pmatrix}$, 则 $r(A)=$（　　）

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

7. 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, 则 $A^{2010}=$（　　）

A. $\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}0&-2010&0\\2010&0&0\\0&0&-2010\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-2010&0&0\\0&-2010&0\\0&0&2010\end{pmatrix}$

8. 设 $A,B,AB-I$ 是同阶可逆矩阵，则 $\left(\left(A-B^{-1}\right)^{-1}-A^{-1}\right)^{-1}=$（　　）

A. $BAB-I$　　B. $ABA-I$

C. $ABA-A$　　D. $BAB-B$

三.(本题满分 10 分) 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&3&3\\3&2&5&4&2\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}$, D 的 (i,j) 元的代数余子式为 A_{ij}. 试求 (1) $A_{31}+A_{32}+A_{33}$; (2) $A_{34}+A_{35}$.

四. (本题满分 10 分) 求下列向量组的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\5\\5\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

五. (本题满分 10 分) 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1/2\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix},A=\alpha\beta^T,B=\beta^T\alpha,$ 其中 β^T 是 β 的转置， 求解方程组 $2B^2A^2x=8Ax+B^4x+\gamma.$

六. (本题满分 10 分) 已知向量 $X=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求参数 a,b 及 X 对应的特征值.

(2) 试判断矩阵 A 是否可对角化.

线性代数复习题 2 答案

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. ±4 2. $\lambda\neq1$ 3. 40 4. $\frac{1}{2}A$ 5. 3 6. $\begin{pmatrix}1/6&1/6&1/6\\0&1/3&1/3\\0&0&1/2\end{pmatrix}$ 7. 4

二. 选择题 (每小题 4 分, 共 32 分)

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	A	C	D	C	B	C

三. (本题满分 10 分)

解: 将 D 中第三行换成 1, 1, 1, 3, 3, 行列式的值等于 0, 则有

$(A_{31}+A_{32}+A_{33})+3(A_{34}+A_{35})=0,$ ……………………………………………4 分

同理将 D 中第三行的元素换成第四行的对应元素, 按第三行展开, 则有

$2(A_{31}+A_{32}+A_{33})+A_{34}+A_{35}=0,$ ………………………………………………8 分

联立上面两式, 解得

$A_{31}+A_{32}+A_{33}=0,\quad A_{34}+A_{35}=0.$ ………………………………………10 分

四. (本题满分 10 分)

解: 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为列向量作成矩阵, 并施以行初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&2&4&0&1\\-1&1&-1&5&1\\0&1&2&5&2\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&5&1\\0&0&0&10&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0&1/4\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1/4\\0&0&0&1&3/10\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩为 4, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的极大线性无关组……………………………………………………………………………..8 分

$$\alpha_5=\frac{1}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_3+\frac{3}{10}\alpha_4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{ 分}$$

五. (本题满分 10 分)

解: $A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\2&1&0\\1&1/2&0\end{pmatrix}$,…………………………………2 分

$B=\beta^T\alpha=\begin{pmatrix}1&1/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$,…………………………………………………4 分

而 $A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha\left(\beta^T\alpha\right)\beta^T=2A$.…………………………………………5 分

代入方程, 可得 $8\left(A-2I\right)x=\gamma$,…………………………………………………6 分

从而有线性方程组

$$\begin{cases}-x_1+\dfrac{1}{2}x_2=0,\\2x_1-x_2=0,\\x_1+\dfrac{1}{2}x_2-2x_3=1,\end{cases}$$

可求得其对应齐次线性方程组的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,…………………………………8 分

而 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ 为方程组 $8(A-2I)x=\gamma$ 的一个特解,…………………………9 分

故原方程组的通解为 $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数………… 10 分

六. (本题满分 10 分)

解: (1) 设 λ_0 为特征向量 X 对应的特征值, 则

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$ …………………………………………………2 分

即 $\begin{cases} \lambda_0=-1, \\ 2+a=\lambda_0, \\ b+1=-\lambda_0, \end{cases}$ 故 $\begin{cases} \lambda_0=-1, \\ a=-3, \\ b=0. \end{cases}$ ………………………………………….....5 分

(2) 由(1)得 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 所以

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3=0,$$

因此 -1 是 A 的三重特征值……………………………………………………………7 分

解齐次方程组 $(-I-A)x=0$, 因其系数矩阵 $(-I-A)$ 的秩为 2, …………9 分

故 $\dim N(-I-A)=1<3$. 所以 A 不能对角化………………………………10 分