武汉理工大学 考试试题纸（ A卷）

课程名称 **线性代数** 专业班级 统考 闭卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

备注： 学生不得在试题纸上答题(含填空题、选择题等客观题)

一、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、有限个同阶正交矩阵的乘积一定为（ ）

A 正交矩阵 B 奇异矩阵 C 初等矩阵 D 单位矩阵

2、若方阵 A 与方阵 B 等价，则（ ）

A、r(A)=r(B) B、|λE-A|=|λE-B|

C、|A|=|B| D、存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

3、α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 中任取 4 个向量的部分组皆线性无关，则

A $\alpha_1=0$；B α_1，α_2 线性相关； C α_1，α_2，α_3 线性无关； D α_1，α_2，α_3，α_4 ，α_5 线性无关

4、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 是（ ）二次型

A 负定 B 不定 C 半负定 D 正定

5、设 A 是 m×n 矩阵，X 是任意一个 n 维非零向量，则 AX 必为非零向量的充要条件是 A 的（ ）

A．列向量组线性无关 B．列向量组线性相关

C．行向量组线性无关 D．行向量组线性相关

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1、若方程组$\begin{cases} kx+y-z=0 \\ x+ky-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$仅有零解，则 k 的取值范围是__________。

2、向量 $x=(1,0,-1)^T$， 则$\|x\|^2=(x,x)=$______ 。

3、设 A 为 3 阶方阵，|A|=-3，则|-3A|=__________ 。

4、若 λ=2 是可逆方阵 A 的一个特征值，则方阵（$\frac{1}{2}A^2$）$^{-1}$ 必有一个特征值为______。

5、矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$_______。

三、设 α_1=（-2，1，0，3），α_2=（1，-3，2，4），α_3=（3，0，2，-1），α_4=（2，-2，4，6）。

问向量组是否线性相关；若无关，说明理由。若相关，求出一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余向量。（10 分）

四、求线性方程组的通解 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ （10 分）

五、计算行列式：

1、$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；（7 分）　　2、$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}_n$ 。（8 分）

六、设 A 是 m×n 矩阵，证明：

1、方程组 $Ax=0$ 与方程组 $A^TAx=0$ 同解，即它们有相同的解集；（5 分）

2、当秩 $R(A)=n$， A^TA 为对称正定阵。（5 分）

七、已知三阶矩阵 A 的特征值为 1，2，-3， A^* 为 A 的伴随阵，求行列式 $\left|A^* + 3A + 2E\right|$ 。（10 分）

八、用正交相似方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 成标准形，

并求所用的变换矩阵。（15 分）

答　　案

一、 AACDA　　（每题 3 分）

二、1． $k\neq -2$ 且 $k\neq 1$ ； 2、 2　 3． 81　 4． $\frac{1}{2}$　 5、$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$。　（每题 3 分）

三、$\begin{pmatrix}-2&1&3&2\\1&-3&0&-2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ …………………………………… 7 分

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为极大无关组且 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ ………………… 10 分

四、（A|b）= $\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\1&-1&-2&3&-1/2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&1/2\\0&0&1&-2&1/2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ……………………… 4 分

同解方程组为 $\begin{cases}x_1-x_2-x_4=1/2\\x_3-2x_4=1/2\end{cases}$ 基础解系为 $\xi_1=(1,1,0,0)^T$，$\xi_2=(1,0,2,1)^T$ …… 8 分

特解为 $\xi=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)^T$　通解　X=k₁ $(1,1,0,0)^T$ +k₂ $(1,0,2,1)^T+(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)^T$ ……… 10 分

五、 1、$D=\begin{vmatrix}0&2&0&1\\0&-1&2&4\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&1\\-1&2&4\\1&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\-9&2&4\\-1&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-9&2\\-1&3\end{vmatrix}$=-25。 --------7 分

2、按第一列展开得：

$$D_n=x\begin{vmatrix}x&y&\cdots&0\\0&x&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&x\end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}y&0&\cdots&0\\x&y&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&y\end{vmatrix}_{n-1}=x^n+(-1)^{n+1}y^n$$ ------8 分

六、1、设 x 是一个 n 维向量，满足 $A^TAx=0$。于是，$\|Ax\|^2=(Ax)^T(Ax)=x^TA^TAx=0$ 。---3 分

因此，$Ax=0$。 ---5 分

2、，$(A^TA)^T=A^TA$， 为对称阵； ----2 分

设 x 是一个 n 维非零向量，则 $Ax\neq 0$。 ----3 分

于是，$0<\|Ax\|^2=(Ax)^T(Ax)=x^T(A^TA)x$ 。 ----5 分

七、$|A|=-6, A^*=|A|A^{-1}=-6A^{-1}$； ---3 分

$A^*+3A+2E=-6A^{-1}+3A+2E=A^{-1}(-6E+3A^2+2A)$， -----6 分

于是，$A^*+3A+2E$ 的特征值为-1，5，-5； -----9 分 $|A|=25$ ---10 分

八、二次型对应的实对称阵为 $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ -2 & 6 & -2\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix}$， ------------ 2 分

其特征值分别为 -2，7，7。 ------------ 5 分

分别求解齐次线性方程组（$A-\lambda E$）$x=0$ 得：属于特征值-2，7，7 的

单位正交特征向量分别为 $\begin{pmatrix}2/3\\ 1/3\\ 2/3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1/3\\ 2/3\\ -2/3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2/3\\ -2/3\\ 1/3\end{pmatrix}$。 ------------ 12 分

令矩阵 $P=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$，有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$。 ------------- 14 分

二次型 f 经过以正交阵 P 为变换矩阵的正交变换 $x=Py$ 化为标准形：

$f=-2y_1^2+7y_2^2+7y_3^2$ ------------- 15 分