行列式复习与习题

n阶行列式的定义

方阵行列式的性质

展开定理与行列式的计算

1. n阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{\substack{j_1 j_2 \cdots j_n \\ i_1 i_2 \cdots i_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

(1)n阶行列式是n！项的代数和.

(2)n阶行列式的每一项都是取自n阶行列式的不同行和不同列的n个元素的乘积，称为项.如果行标按标准顺序排列，列标记为 $j_1 j_2 \cdots j_n$,一般项记为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

(3)n阶行列式的每一项的符号由列标排列的奇偶性决定:若列标排列为奇排列,则此项的符号为负,若列标排列为偶排列,则此项的符号为正.即符号可表示为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

且正项和负项各占一半.

(4)由于n级排列共有n!个,所以n阶行列式共有n！项.

(5)一般的，n阶行列式是一个数.

1、利用对角线法则计算下列三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=1\mathrm{bc}^2+1ca^2+1ab^2$

$-1ba^2-1ac^2-1cb^2$

2、写出四阶行列式中含有$a_{11}a_{23}$的项

解： $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}, a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

3. 设排列 $a_1a_2\cdots a_n$的逆序数为m，且$a_2a_3\cdots a_n$

中小于a_1 的有s个，求排列 $a_1a_na_{n-1}\cdots a_2$ 的逆序数.

解 在n级排列$a_1a_2\cdots a_n$中，比a_i小的数共有

b_i 个.

设排列$a_1a_2\cdots a_n$中a_i右边比a_i小的数有k_i 个，

则该排列中a_i左边比a_i小的数有 a_i-k_i 个.

(1) 先求排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数.

该排列中在a_i右边比 a_i小的数有 a_i-k_i 个

(i=1, 2, ---, n). 于是

$$\tau(a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1)=(b_1-k_1)+(b_2-k_2)+\cdots+(b_n-k_n)$$

$$=(b_1+b_2+\cdots+b_n)-(k_1+k_2+\cdots+k_n)$$

$$==\frac{n(n-1)}{2}-m$$

(2) 求排列 $a_1 a_n\cdots a_3 a_2$ 的逆序数.

在排列 $a_n a_{n-1}\cdots a_1$ 中将 a_1 排到第一位，由于 $a_2 a_3\cdots a_n$ 中小于 a_1 的有s个，故当把 a_1 排到第一位时，增加了s个逆序，减少了n-1-s个逆序，故

$$\tau(a_1 a_n\cdots a_3 a_2)=\tau(a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1)+s-(n-1-s)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-m+2s$$

4、用行列式的定义证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

证明：$D=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4j_5}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$

其中每个分布项都等于0，故D=0

5、计算由行列式定义的多项式：

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$ 中 x^4 与 x^3 的系数，并求 f(x) 的常数项

解：f(x) 是个4次多项式，含 x^4 的只有一项：

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^0 2x\cdot x\cdot x\cdot x=2x^4$$

含x^3的也只有一项：

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-1)^1 x\cdot 1\cdot x\cdot x=-x^3$$

$$f(0)=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\1&0&1&1\\3&2&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=6$$

2. 行列式的性质

- 行列式与它的转置行列式相等.
- 互换行列式的两行(列)，行列式变号.
- 某行(列)有公因子可以提到行列式的外面.
- 某行(列)的k倍加到另一行(列)，行列式不变.
- 若行列式中某一行(列)的所有元素均为两元素之和.
  则该行列式可拆成两个行列式的和.
- 某两行(列)的对应元素成比例，则行列式等于0.
- 某行(列)的元素全为0，则行列式等于0.

3. 设A是m阶方阵，B是n阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

4. 设A, B为n阶方阵,

$$(1)\left|\lambda A\right| = \lambda^n \left|A\right|$$

$$(2)\left|AB\right| = \left|BA\right| = \left|A\right|\left|B\right|$$

$$(3)\left|A^m\right| = \left|A\right|^m$$

$$(4)\left|A\right| = \left|A^T\right|$$

注意 $\left|A+B\right| \neq \left|A\right| + \left|B\right|$

两行列式相加与两矩阵相加的不同

两行列式相等与两矩阵相等的不同

数乘行列式与数乘矩阵的不同

6、证明：$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

证明：$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & b^2+2b+1 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & c^2+2c+1 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & d^2+2d+1 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & b^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & c^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & d^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & 2b+1 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & 2c+1 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & 2d+1 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a^2+4a+4 & a^2+6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & b^2+4b+4 & b^2+6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & c^2+4c+4 & c^2+6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & d^2+4d+4 & d^2+6d+9 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a^2 & a^2+6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & b^2 & b^2+6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & c^2 & c^2+6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & d^2 & d^2+6d+9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & a^2+6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & b^2+6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & c^2+6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & d^2+6d+9 \end{vmatrix}
$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & a^2 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & b^2 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & c^2 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & d^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0$$

(第2列的-2倍加到第3列上，第2列-3倍加到第4列上）

5. 行列式按行(列)展开定理及其推论

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}D, & （当k=i）\\ 0, & （当k\neq i）\end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases}D, & （当l=j）\\ 0, & （当l\neq j）\end{cases}$$

6. Laplace定理

定义　设D是一个n阶行列式，在D中取某K行(或列), 则含于此k阶行(或列)中的所有k阶子式与其代数余子式的乘积之和恰好等于D.即

$$D = N_1 A_1 + N_2 A_2 + \cdots + N_t A_t$$

其中$N_1, N_2, \cdots N_t$是D的被选定的k行(或列)所含的K阶子式，$A_1, A_2, \cdots A_t$ 分别是它们的代数余子式. $t = C_n^k$

7. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

解 作辅助函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

将上式按最后一列展开，则 $f(x)$ 为 x 的一个4次多项式，且x的3次幂的系数为 $-D$, 于是可以通过考察多项式 $f(x)$ 来求 D.

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

$$(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)$$

从上式易知，多项式 $f(x)$ 的三次幂项系数为

$$(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)(-a-b-c-d)$$

故

$$-D=$$

$$(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)(-a-b-c-d)$$

$$D=$$

$$(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)(a+b+c+d)$$

8. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal{xc_2+c_1} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{x^2c_3+c_1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=\!=\!=\!=\cdots$$

$$\xlongequal{x^{n-1}c_n+c_1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+x^{n-1}(x+a_1) & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

按第一列展开

$$\overline{\overline{\qquad}}(-1)^{n+1}(a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + x^n)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n$$

9. 计算 $$D=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

解

箭形行列式

$$D \xlongequal{\text{各行减第一行}} \begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\frac{a_1}{a_i}c_i + c_1} \begin{vmatrix} 1 + a_1 + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (1 + a_1 + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}) a_2 a_3 \cdots a_n$$

$$= (1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}) a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

10. 用Laplace定理计算

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a & b & c & d\\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}$$

解 取D的第1，2行，D含有第1，2行的不为0的2阶子式有3个

$$N_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1 \qquad N_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2 \qquad N_3=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1$$

相应的代数余子式为

$$A_1 = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = (d-b)(d-c)(c-b)$$

$$A_2 = (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & d \\ a^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = -(d-a)(d-c)(c-a)$$

$$A_3 = (-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & c & d \\ 0 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = N_1 A_1 + N_2 A_2 + N_3 A_3$$

$$= (d-b)(d-c)(c-b) - 2(d-a)(d-c)(d-a)$$

11. 设a>b>c>0，试证 $D=\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}<0$

证　第一列乘(a+b+c)加到第三列

$$D=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^2+ab+ac+bc \\ b & b^2 & b^2+ab+bc+ac \\ c & c^2 & c^2+ac+bc+ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a^2 & ab+ac+bc \\ b & b^2 & ab+bc+ac \\ c & c^2 & ac+bc+ab \end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (ab + bc + ca)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (ab + bc + ca)(b - a)(c - a)(c - b) < 0$$

12. 计算 $D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

三对角行列式

解 一般采用按行(列)展开, 得到递推公式, 然后由递推公式推出结果.

$$D_1 = \alpha+\beta$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

按第一行展开

$$= (\alpha+\beta) D_{n-1} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & & & \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1}$$

按第一列展开

$$= (\alpha+\beta) D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$
$$=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})\quad=\cdots$$
$$=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$$

又 $D_2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta,\quad D_1=\alpha+\beta$

得 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^n$

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n \qquad (1)$$
$$D_{n-1}-\alpha D_{n-2}=\beta^{n-1} \qquad (2)\quad \times\alpha$$
$$D_{n-2}-\alpha D_{n-3}=\beta^{n-2} \qquad (3)\quad \times\alpha^2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$D_2-\alpha D_1=\beta^2 \qquad (n-1)\quad \times\alpha^{n-2}$$

相加得

$$\boldsymbol{D_n - \alpha^{n-1} D_1 = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2}$$

$$D_n = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2 + \alpha^{n-1}(\alpha+\beta)$$

$$= \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2 + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^n$$

$$= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$