一、填空题(33 分，其中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵, $\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 指矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵).

1. 设 $\alpha=(1,2)$, $\beta=(1,-1)$, 则 $\alpha\beta^{\mathrm{T}}=$ ________; $(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^{999}=$ ________.

解: $\alpha\beta^{\mathrm{T}}=(1,2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=1\times1+2\times(-1)=1-2=-1$; $\beta\alpha^{\mathrm{T}}=(1,-1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1\times1+(-1)\times2=1-2=-1$;

$$\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(1,-1)=\begin{pmatrix}1\times1 & 1\times(-1)\\2\times1 & 2\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix};$$

$$(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^{999}=\underbrace{(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)\dots(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)}_{999\text{个}(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)}=\alpha^{\mathrm{T}}\underbrace{(\beta\alpha^{\mathrm{T}})(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\dots(\beta\alpha^{\mathrm{T}})}_{998\text{个}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})}\beta=\alpha^{\mathrm{T}}(-1)^{998}\beta=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}.$$

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&1\\1&3&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&0&7\end{pmatrix}$, 则行列式 $|\boldsymbol{AB}^{-1}|=$ ________.

解: $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&3&1\\1&3&0\end{vmatrix}=1\times3\times0+2\times1\times1+0\times0\times3-0\times3\times1-2\times0\times0-1\times1\times3=2-3=-1$;

$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&0&7\end{vmatrix}=2\times5\times7=70$; (注: 上三角行列式的值等于其主对角线元素之积)

$|\boldsymbol{AB}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1}=(-1)\times\dfrac{1}{70}=-\dfrac{1}{70}$.

3. 若向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\k\\-1\end{pmatrix}$, 则当数 k ____时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

解: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&k\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$,

而 $\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&k\\3&1&-1\end{vmatrix}=1\times2\times(-1)+3\times k\times3+1\times2\times1-1\times2\times3-2\times3\times(-1)-1\times k\times1=-2+9k+2-6+6-k=8k$.

故当 $k=0$ 时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

4. 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$ ____.

解: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的四个元素的代数余子式分别为:

$A_{11}=(-1)^{1+1}d=d$; $A_{21}=(-1)^{2+1}b=-b$; $A_{12}=(-1)^{1+2}c=c$; $A_{22}=(-1)^{2+2}a=a$;

故 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 均可逆, $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$, 则 $\boldsymbol{G}^{-1}=$ ________.

解: $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}](\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$;

$\boldsymbol{G}=[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}]^{-1}=[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}]^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$.

6. 分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为________.

解: (法一) 设$\begin{pmatrix} A & E \\ E & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix} A & E \\ E & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$,

即$\begin{pmatrix} AX+U & AY+V \\ X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$, 由此可得: $X = O$; $Y = E$; $U = E$; $V = -A$;

所以$\begin{pmatrix} A & E \\ E & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & E \\ E & -A \end{pmatrix}$.

(法二) $(-A)\times\begin{pmatrix} A & E & E & O \\ E & O & O & E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & E & E & -A \\ E & O & O & E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & O & O & E \\ O & E & E & -A \end{pmatrix}$,

由此可见$\begin{pmatrix} A & E \\ E & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & E \\ E & -A \end{pmatrix}$.

7. 设 A 是 6×5 矩阵, 若齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的解空间是 2 维的, 则齐次线性方程组 $A^{T}x = 0$ 的解空间是________维的.

解: 因为 A 是 6×5 矩阵, 故 A^{T} 是 5×6 矩阵, 因而齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 和 $A^{T}x = 0$ 中的未知数的个数分别为 A 的列数和 A^{T} 的列数, 即分别为 5 和 6.
又因为 $Ax = \mathbf{0}$ 的解空间的维数应该等于 5−秩(A),
$A^{T}x = 0$ 的解空间的维数应为 6−秩(A^{T}), 其中秩(A^{T}) = 秩(A).
根据题目条件可知 5−秩(A) = 2. 即秩(A) = 3.
从而 $A^{T}x = 0$ 的解空间的维数为 6−秩(A^{T}) = 6−秩(A) = 6−3 = 3.

8. 与向量$\alpha = (1, 0, 1)^{T}$, $\beta = (1, 1, 1)^{T}$ 均正交的一个单位向量为_________.

解: 设$\gamma = (a, b, c)^{T}$ 与α, β均正交, 则$\begin{cases} a + \quad c = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases}$, 这是一个齐次线性方程组, $(1, 0, -1)^{T}$ 构成它的一个基础解系. 把$(1, 0, -1)^{T}$ 单位化可得$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})^{T}$.

可见与α, β均正交的一个单位向量为$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})^{T}$ 或$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^{T}$.

9. 已知矩阵 $M = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 3 & k \end{pmatrix}$, $A = MM^{T}$, 则当数 k 满足条件_______时, A 是正定的.

解: $A = MM^{T}$ 正定$\Leftrightarrow$ M 可逆$\Leftrightarrow$ $|M| \neq 0$, 即 $12k-3\times4 \neq 0$. 故当数 $k \neq 1$ 时, A 是正定的.

10. 若 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^{2}-3A+2E = O$, 且有两个不同的特征值, 则当参数 k 满足条件_____时, 矩阵 $E+kA$ 是正定的.

解: $A^{2}-3A+2E = O \Rightarrow A$ 的特征值λ一定满足$\lambda^{2}-3\lambda+2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ 或 2.
又因为 A 有两个不同的特征值, 故 1 和 2 都是 A 的特征值,

由于 A 是实对称矩阵, 故存在可逆矩阵 P 使 $PAP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{记为}} \Lambda$.

于是 $P^{-1}(E+kA)P = P^{-1}EP+kP^{-1}AP = E+k\Lambda = \begin{pmatrix} 1+k & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1+k & & & \\ & & & 1+2k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1+2k \end{pmatrix}$

这表明 $E+kA$ 的特征值为 $1+k, \ldots, 1+k, 1+2k, \ldots 1+2k$,

而 $E+kA$ 正定$\Leftrightarrow$ $E+kA$ 的特征值全大于 0, 故 $1+k>0$, $1+2k>0$, 因而 $k > -\frac{1}{2}$,

二、(12 分)求矩阵方程 $XA = 2X + B$ 的解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

解: $XA = 2X+B \Rightarrow XA-X\cdot2E = B \Rightarrow X(A-2E) = B \Rightarrow X = B(A-2E)^{-1}$,

而 $A-2E=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$\left(\begin{array}{cccccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times 1\\ \times(-1)\end{array}\to\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&1&1&-1\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\times(-1)\to\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&1&1&-1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right),$$

可见$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，于是 $X=B(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\3&1&-4\end{pmatrix}$.

三、(12 分)设 3 阶方阵 A 有特征值 1(二重)和−1, $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$是其相应于特征值 1 的特征向量,

$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$是其相应于特征值−1 的特征向量.

1. 求 A 及 A^{9999}.
2. 若 3 阶实对称矩阵 B 特征值也是 1(二重)和−1, 证明: A 与 B 必定相似.

解 1: 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\Lambda$, $A=P\Lambda P^{-1}$,

由$\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\times(-1)\to\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)\times(-1)\to\left(\begin{array}{cccccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$可得

$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$, 于是 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$,

$$A^{9999}=\underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\ldots(P\Lambda P^{-1})}_{9999\text{ 个}(P\Lambda P^{-1})}=P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)\ldots\Lambda P^{-1}$$

$$=P\Lambda E\Lambda E\ldots\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{9999}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1^{9999}&0&0\\0&1^{9999}&0\\0&0&(-1)^{9999}\end{pmatrix}=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

证明 2: 若 3 阶实对称矩阵的特征值 B 也是 1(二重)和−1,
则 B 也与Λ相似, 同时由上一小题可知 A 与Λ相似, 所以 A 与 B 相似.

四、(12 分)设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+3x_2+5x_3+5x_4=2\\\quad -x_2+px_3-2x_4=q\\3x_1+2x_2+x_3+(p+3)x_4=-1\end{cases}$

1. 问参数 p, q 满足什么条件时, 该方程组无解; 有唯一解, 有无穷多解?
2. 当方程组有无穷多解时, 求出其通解(写成向量形式).

解: 记该方程组的系数矩阵为 A, 增广矩阵为(A, b).

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccccc}1&1&1&1&0\\1&3&5&5&2\\0&-1&p&-2&q\\3&2&1&p+3&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-1)\ \times(-3)\\ \\ \\ \\ \end{array}\to\left(\begin{array}{ccccc}1&1&1&1&0\\0&2&4&4&2\\0&-1&p&-2&q\\0&-1&-2&p&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times\frac{1}{2}\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&p&-2&q\\0&-1&-2&p&-1\end{pmatrix}\times 1 \to \begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&p+2&0&q+1\\0&0&0&p+2&0\end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=\!=}\boldsymbol{B}.$$

1. 由上可见: 当 $p+2=0$ 且 $q+1\neq 0$ 即 $p=-2$ 且 $q\neq -1$ 时, 秩($\boldsymbol{A}$)<秩($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$), 此时, 原方程组无解;
当 $p+2\neq 0$ 即 $p\neq -2$ 时, 秩($\boldsymbol{A}$) = 秩($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$) = 4, 此时, 原方程组有唯一解;
当 $p+2=0$ 且 $q+1=0$ 即 $p=-2$ 且 $q=-1$ 时, 秩($\boldsymbol{A}$) = 秩($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$) = 2 < 4,
此时, 原方程组有无穷多解.

2. 当 $p=-2, q=-$时, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}-1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=\!=}\boldsymbol{C}.$

$\boldsymbol{C}$ 对应的方程组为 $\begin{cases}x_1 \quad\; -x_3-x_4=-1\\ x_2+2x_3-2x_4=1\end{cases}$, 由此可得 $\begin{cases}x_1=x_3+x_4-1\\ x_2=-2x_3-2x_4+1\end{cases}$,

所以此时原方程组的通解为: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, 其 c_1, c_2 中为任意实数.

五、(12 分)矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&-1&2&0\\1&-3&0&-2\end{pmatrix}$.

1. 求一 4×2 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 且秩($\boldsymbol{B}$) = 2;
2. 问:是否存在秩大于 2 的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$? 为什么?

解: 1. $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&-1&2&0\\1&-3&0&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-3)\;\times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-4&-1&-3\\0&-4&-1&-3\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-4&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times(-\tfrac{1}{4})$

$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times(-1)\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. 由此可得齐次线性方程组的一个基础解系:

$\xi_1=(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\quad \xi_2=(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{B}=(\xi_1, \xi_2)=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 为一个 4×2 矩阵, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 且秩($\boldsymbol{B}$) = 2.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,
因而 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组能由ξ_1, ξ_2 线性表示, 可见 $\boldsymbol{C}$ 的秩≤2.
这就是说, 不存在秩大于 2 的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$.

六、(12 分)设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&&\\&2&\\&&4\end{pmatrix}$ 相似,

1. 求参数 k 的值; 2.求一正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

解: 1. 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$, 而$|\boldsymbol{A}|=(3k-1)4$, $|\boldsymbol{B}|=32$, 故 $k=3$.
(另解: 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 所以它们的迹相等, 即 $k+3+4=4+2+4$, 故 $k=3$)

2. 先求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$.

$|\lambda E - A_1| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2)$, 故 A_1 的特征值为 4 和 2.

由 $4E-A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times 1 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可得$(4E-A_1)x = 0$ 的基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

单位化得 $p_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$,

由 $2E-A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times(-1) \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times(-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可得$(2E-A_1)x = 0$ 的基础解系

$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得 $p_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

于是令 $P = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 $P^TP = E$, 且 $P^TA_1P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

再令 $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $Q^TQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 即 Q 为正交矩阵,

且 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = B$.

七、(7 分)证明题.

1. 设λ_1, λ_2是矩阵 A 的两个互异的特征值, η_1, η_2 是 A 的属于λ_1的线性无关的特征向量, η_3 是 A 的属于λ_2的特征向量. 证明: η_1, η_2, η_3 线性无关.

证明: 假若η_1, η_2, η_3 线性相关, 则由η_1, η_2 线性无关可知η_3 能由η_1, η_2 线性表示,

设$\eta_3 = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 则有:

$\lambda_2\eta_3 = A\eta_3 = A(k_1\eta_1 + k_2\eta_2) = k_1A\eta_1 + k_2A\eta_2 = k_1\lambda_1\eta_1 + k_2\lambda_1\eta_2 = \lambda_1(k_1\eta_1 + k_2\eta_2) = \lambda_1\eta_3$.

故$(\lambda_2 - \lambda_1)\eta_3 = \lambda_2\eta_3 - \lambda_1\eta_3 = 0$, 而$\lambda_1 \neq \lambda_2$, 即$\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$,

可见$\eta_3 = 0$, 但η_3 作为 A 的属于λ_2的特征向量一定是非零的这一矛盾表明: η_1, η_2, η_3 线性无关.

2. 已知 n 阶方阵 A 相似于对角阵, 并且矩阵 A 的特征向量均是矩阵 B 的特征向量(注: A, B 的特征值未必相同). 证明: $AB = BA$.

证明: 因为 n 阶方阵 A 相似于对角阵, 所以 A 有 n 个线性无关的特征向量, 记为 $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

又因为 A 的特征向量都是 B 的特征向量, 可见 B 也有 n 线性无关的特征向量 $p_1, p_2, \ldots, p_n$. 故有

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \overset{\text{记为}}{=\!=} \Lambda$, 其中 $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

同时 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix} \overset{\text{记为}}{=\!=} \Lambda'$ 其中$\lambda_1', \ldots, \lambda_n'$为 B 的对应于 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的特征值,

由此可得: $A = P\Lambda P^{-1}$, $B = P\Lambda'P^{-1}$,

$$\text{且}\Lambda\Lambda' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1'\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n'\lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda'\Lambda.$$

因而 $AB = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda'P^{-1}) = P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda'P^{-1} = P\Lambda\Lambda'P^{-1} = P\Lambda'\Lambda P^{-1} = P\Lambda'P^{-1}P\Lambda P^{-1} = BA$.