第二章 矩阵代数

第二节 矩阵的代数运算

目的：掌握矩阵代数运算的定义、条件及运算性质.

§ 2.2.1 矩阵的加法与数乘

一、矩阵的加法

1、定义

两个同型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 的对应元相加所得的矩阵 $C=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 称为A和B的和，记作$C=A+B$.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法就是矩阵对应的元相加

说明 只有当两个矩阵是**同型矩阵**时，才能进行加法运算.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2、运算性质

设A,B,C,O为同型矩阵，则有

$$(1)\ A+B=B+A$$

$$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$(3)\ A+O=A$$

$$O+A=A$$

$$(4)\ A+(-A)=O$$

另外，矩阵的**减法**定义为：$A-B=A+(-B)$.

注意：

- 对于矩阵有

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

- 而对于行列式一般 $|A+B| \neq |A|+|B|$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

二、数与矩阵相乘

1、定义

设λ是一个数，矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则$(\lambda a_{ij})_{m\times n}$称为矩阵$A$和数$\lambda$的(数量)乘积，记为 λA 或 $A\lambda$.

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

特别的，λE 称为数量矩阵.

2、线性运算的运算性质

矩阵的加（减）法和数乘统称为矩阵的线性运算，这些运算都归结为数（元）的加法与乘法.

运算性质

设A, B为同型矩阵，λ, μ为数，则

- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- $(\lambda+\mu)\mathrm{A}=\lambda A+\mu A$
- $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu) A$

例 设 $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&1\\1&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\3&1\end{pmatrix}$

有矩阵X满足 $A+3X=2B$，求X.

解:

$$X=\frac{1}{3}(2B-A)=\frac{1}{3}\left(2\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2\\4&1\\1&5\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2&6\\4&8\\6&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2\\4&1\\1&5\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&4\\0&7\\5&-3\end{pmatrix}$$

又如设$A=(a_{ij})_n$，k为数，则

$$|kA| = \left| k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^n |A|.$$

故对于n阶方阵A有： $|kA|=k^n|A|.$

三、线性组合

给定若干个同型矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，经线性运算

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_j = B,$$

(其中λ_j为常数，j=1,2,…,m)

得到的矩阵B称为矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的线性组合.

或者称矩阵B可经(由)矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 线性表出（线性表示）.

线性组合是讨论同型矩阵之间是否有所谓线性关系的基本概念. 特别是当它们都是n维向量时，这种讨论很有用.

第三章将详细讨论.

例 设 $M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, M_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, M_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$

证明：任何一个二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

都是M_1，M_2，M_3，M_4的线性组合.

证明：显然

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}M_1+a_{12}M_2+a_{21}M_3+a_{22}M_4.$$

证毕.

§ 2.2.2 矩阵的乘法

1、定义

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times s}$ ，若矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times s}$ 满足

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,s)$$

则C称为矩阵A和B的**乘积**，记作AB，读做A右乘B或B左乘A. (注：不同资料读法可能相反，不要深究)

C特点：C的第i行、第j列处的元 ＝ A的第i行元与B的第j列对应元乘积之和.

$-2\times2+4\times(-3)$

例1

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times2}$$

?

例2　求AB.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

解: $\because A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 4},\quad B=\left(b_{ij}\right)_{4\times 3}$

$\therefore C=\left(c_{ij}\right)_{3\times 3}.$

故

$$C=AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

左矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 右矩阵

注意 只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不存在.

例3 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ，则

$$AB=\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)=\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)},$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}$$

注意 该1×1矩阵作为运算结果可与数$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$同等看待，但是在运算过程中不能视做数，这是因为数与矩阵的乘法和矩阵与矩阵的乘法是两种不同的运算.

如：上述矩阵A、B和另外矩阵 $C_{m\times n}$ $(m\neq 1)$，AB看作数ABC有意义，而实际无意义.

例4 对于线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

若记 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, **则上述线性方程组可表示为矩阵方程**

$$AX = b.$$

矩阵的乘法为其它许多研究提供了方便的手段.

２、矩阵乘法的运算性质

(1) $(AB)C = A(BC)$;

(2) $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$;

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）；

(4) $E_m A_{mn} = A_{mn} = A_{mn} E_n$;

(5) 若A是 n 阶矩阵，则 A^k 为A的 k 次幂，即

$A^k = \underbrace{A\ A \cdots A}_{k}$,并且 $A^m A^k = A^{m+k}$, $\left(A^m\right)^k = A^{mk}$.

$(m, k$为正整数$)$

并对方阵A规定: $A^0=E$.

几点注意：

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $BC=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

显然，$AB \neq BA$，$BA = BC$.

(1) 矩阵乘法**不满足交换律**，即一般：

$$AB \neq BA,\ (AB)^k \neq A^k B^k.$$

这是因为一般它们运算的结果不是同型矩阵.

即使是同型矩阵也不一定相等.

特殊的，若矩阵A, B满足$AB=BA$，则称A与B是可交换的. 显然，此时A, B均为同阶方阵.

例如:

单位矩阵 E 和任何同阶方阵可交换.

数量矩阵λE 和任何同阶方阵可交换.

(2) 由$AB=O$不能得出A、B至少有一个零矩阵.

如前面的A, B矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq O, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq O,$$

而 $$AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O.$$

(3) 由$BA=BC$（或$AB=CB$），且$B\neq O$，不能得出$A=C$的结论，即**乘法一般不满足消去律.**

如前面的

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\neq O,\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=BC$$，但$A\neq C$.

这一点一定要引起注意！

若$BA=O, AB=O$，不能得出$A=O$或$B=O$的结论，如

$$A=\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}\neq O,\quad B=\begin{pmatrix}0 & \\ & 1\end{pmatrix}\neq O$$

例5 若$A^2 = B^2 = E$，则$(AB)^2=E$的充分必要条件是A与B 可交换.

证明：

充分性 若A与B可交换，即 $AB = BA$，

则 $(AB)^2 = ABAB = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB)$

$= A^2B^2 = EE = E$

必要性 若$(AB)^2=E$， 两边同左乘A，再右乘B得

$A(AB)^2B = AEB = AB$

而$A(AB)^2B = AABABB = (AA)BA(BB) = EBAE = BA$

故 $BA = AB$，即A与B可交换.