第二章 矩阵代数

本章主要内容

* 矩阵概念及运算：加法、数乘、乘法
* 逆矩阵及求取
* 矩阵的初等变换
* 分块矩阵

第一节 矩阵的概念

一、（矩阵概念的）引入

1. 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的解取决于

系数 $a_{ij}\left(i, j = 1,2,\cdots,n\right)$,

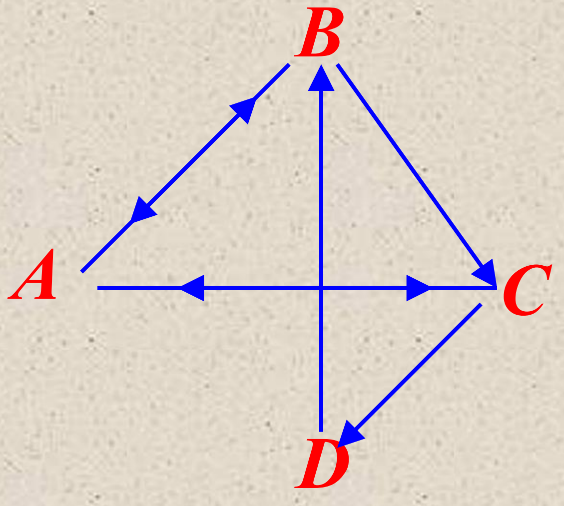
常数项 $b_i\left(i = 1,2,\cdots,n\right)$

线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

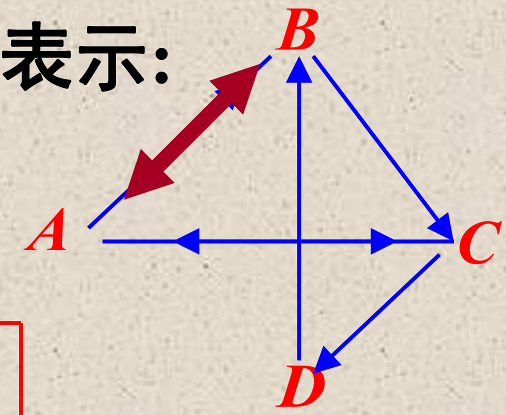
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究.

2. 某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线，如图所示，它表示了四城市间的航班图：如果从A到B有航班，则用带箭头的线连接 A 与B.



四城市间的航班图情况常用表格来表示:



到站

发站	A	B	C	D
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

其中 ✓ 表示有航班.

为便于计算，把表中的 ✓ 改成1，空白地方填上0，就得到一个数表:

	A	*B*	*C*	*D*
A		✓	✓	
B	✓		✓	
C	✓			✓
D		✓		

0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**

该数表反映了四城市间交通联接情况.

二、矩阵的定义

定义1 由mn个（实或复）数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成m行n列的**阵式**（**矩形表**），称为$m\times n$矩阵，简称**矩阵**，记为：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

数a_{ij}称为矩阵的**元**(**元素**).

表示：大写字母A, B, …,

或 $A=(a_{ij})$, $(a_{ij})_{mn}$, $(a_{ij})_{m\times n}$等.

分类： 元是实数的矩阵称为**实矩阵**.

元是复数的矩阵称为**复矩阵**.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2×4 实矩阵,

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 复矩阵,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是一个 3×1 矩阵, (4) 是一个 1×1 矩阵,

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 是一个 1×4 矩阵.

几种特殊矩阵

(1) 行数与列数都等于n的矩阵A，称为n阶**方阵**. 也记作A_n.

例如 $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3 阶方阵.

(2) $1\times n$矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 称为**行矩阵**（或**[n维]行向量**）.

$n\times 1$矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 称为**列矩阵**（或**[$n$维]列向量**）.

说明：

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\qquad B=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},$$

n维行向量和n维列向量统称为n**维向量**，它们的元称为**分量**。

注：在具体场合下，n维向量是指行向量还是列向量将**由上下文来确定**。如果二者皆可，为书写方便，本书常写成**行**向量的形式。

> 但是，在多数文献资料中的向量一般指列向量.

不全为0

（3）形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵，称为**对角矩阵**（或**对角阵**）.

记作 $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

（4）元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，$m \times n$ 零矩阵记作 $o_{m\times n}$ 或 O .

注意 不同阶数的零矩阵是不相等的.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$

(5)方阵

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \boldsymbol{O} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & 1 \end{pmatrix}$$

全为1

称为**单位矩阵**（或**单位阵**）.

有的书上也记为I, I_n.

几个概念

(1) 两个矩阵的行数列数分别相等时，称为同型矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

(2) 两个矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 为同型矩阵,并且对应元相等，即

$$a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

例　设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&x&3\\y&1&z\end{pmatrix},$$

已知 $A=B$,求 x, y, z.

解: $\because\ A=B,$

$\therefore x=2,\ y=3,\ z=2.$

(3) 设阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$, 则矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$称为A的**负矩阵**, 记为 $-A$.

另外，对于前面的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

定义

系数矩阵　　　常数列矩阵　　　增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$= (A, b)$$

注:有的书上用 $\overline{A}$ 表示增广矩阵.

小结

(1) 矩阵的概念　m行n列的一个数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 特殊矩阵

- 方阵 $(m=n)$;
- 行矩阵与列矩阵; $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- 单位矩阵; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- 对角矩阵; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.
- 零矩阵.

(3) 一些概念: 同型矩阵、矩阵相等、负矩阵等.

思考题

矩阵与行列式的有何区别?

思考题解答

矩阵与行列式有本质的区别

① 行列式是一个算式，一个数字行列式经过计算可求得其值，而矩阵仅仅是一个数表.

② 矩阵的行数和列数可以不同，而行列式的行数和列数是相同的.

③ 矩阵相等有着严格的条件，而行列式相等只需行列式的计算结果相同即可，与行列式的阶数无关.