

## 先观察三阶行列式的结构

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

每一项特点

在展开式中，每一项都是取自不同行和列的三个元素的乘积，每一项的行标按自然顺序排列，除正负号外，可写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

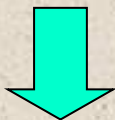
$j_1j_2j_3$  是1,2,3 的某个排列。这样的排列共有  $P_3^3 = 3! = 6$  个，分别对应了展开式中的六项。

再来计算各项列指标构成排列的反序数：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

带 + 项：  $\tau(123) = 0$ ,  $\tau(231) = 2$ ,  $\tau(312) = 2$   $\rightarrow$  偶数

带 - 项：  $\tau(132) = 1$ ,  $\tau(213) = 1$ ,  $\tau(321) = 3$   $\rightarrow$  奇数

 于是，得到

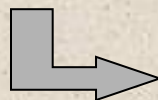
每项行标按自然顺序排列时，当列标构成排列  $j_1j_2j_3$

是偶排列时，该项取正号。

是奇排列时，该项取负号。

又： $(-1)^{\text{偶数}} = 1$ ， $(-1)^{\text{奇数}} = -1$ ，这样可以把三阶行列式写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$



表示对1,2,3的一切排列求和

对于二阶行列式，也有类似的结论

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

# $n$ 阶行列式的定义

**定义1** 由 $n^2$ 个数（实数或复数）排成一个 $n$ 行 $n$ 列的表，并在两边各画一条竖线的记号：

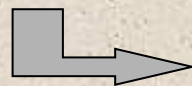
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所表示的数称为 $n$ 阶行列式。

有时简记为  $|a_{ij}|$ ,  $|A|$ ,  $\det(a_{ij})$ ,  $\det(b_{ij})$

类似二、三阶行列式可得（称为 $n$ 阶行列式的展开式）

$$|a_{ij}| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$



表示对 $1, 2, \dots, n$ 的一切排列求和



行列式  $|a_{ij}| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  的文字描述:

$n$ 阶行列式等于所有这种项 (共 $n!$ 项) 的代数和:

每项都是取自不同行不同列的 $n$ 个元的乘积;

每项的符号这样确定:

当每项中 $n$ 个元按行标的自然顺序排列成  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  时

若  $j_1 j_2 \cdots j_n$  为偶排列, 则带正号。

若  $j_1 j_2 \cdots j_n$  为奇排列, 则带负号。

掌握行列式的定义:

- (1) 展开式共有 $n!$ 项。
- (2) 每项是取自不同行不同列的 $n$ 个元乘积, 冠以正号或负号。
- (3) 行标按自然顺序排列时, 每项的正负号由列标构成排列的奇偶性(反序数)决定。 $n!$ 项中一半取正号, 一半取负号。
- (4) 行列式表示一个数(值)。
- (5) 一阶行列式  $|a|=a$  不要与绝对值记号相混淆。

例1 计算反对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解： (分析)

展开式中项的一般形式是  $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$

若  $p_1 \neq 4 \Rightarrow a_{1p_1} = 0$ , 所以  $p_1$  只需要取4,

同理可得  $p_2 = 3, p_3 = 2, p_4 = 1$

即行列式中不为零的项为  $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$  .

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

## 例2 计算 $n$ 阶(右)上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



特点  $a_{ij} = 0$  当  $i > j$

解: (分析) 展开式中项的一般形式是  $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ .

考查第 $n$ 行, 若  $p_n \neq n$ , 则  $a_{np_n} = 0$ .

考查第 $n-1$ 行, 若  $p_{n-1} \neq n, n-1$ , 则  $a_{n-1p_{n-1}} = 0$ , 而  $p_n = n$ , 故仅考虑  $p_{n-1} = n-1$  情况。

所以不为零的项只有  $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ .

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例3

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = ?$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 = 160.$$



同理可得(左)下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

特殊的

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(对角形行列式)

#### 例4 证明反对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

解：这个行列式除了项  $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$  外，其余项全为零，  
而该项列标构成为排列为  $n (n-1) \dots 2 1$ ，其反序数为

$$\tau(n(n-1) \cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

故，原式  $= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

类似可计算出：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

（左上三角形行列式）

（右下三角形行列式）

例5 设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明  $D_1 = D_2$ .

证：由行列式定义有

$$D_1 = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$D_2 = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

由于  $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 + 2 + \cdots + n$ ,

$$\text{故 } D_2 = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} b^0 = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

因此  $D_1 = D_2$ .

**注意：行列式的元的行标与列标不一定用前 $n$ 个自然数表示。**

例如：

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

$|B|$ 的元由  $|A| = \det(a_{ij})$  中取出位于第二、三、五行与第一、二、四列相交处的元构成。  $|B|$  中每个元的足标分别表示它们在  $|A|$  中的位置。由行列式的定义有

$$|B| = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{2j_1} a_{3j_2} a_{5j_3}$$

这里， $j_1 j_2 j_3$  表示1、2、4的排列，  
 $\sum_{j_1 j_2 j_3}$  表示对1、2、4的一切排列求和。



## 例6 证明

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：按照行列式的定义

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &\stackrel{j_1 \text{ 只能取 } 1}{=} \sum_{1j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(1j_2 \cdots j_n)} a_{11} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = a_{11} \sum_{j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 \cdots j_n)} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

而

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 \cdots j_n)} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

故 左端 =  $a_{11}|B|$  = 右端.