

第二章 矩阵代数

第三节 逆矩阵与矩阵的 初等变换

§ 2.3.1 逆矩阵

一、（概念的）引入

在数的运算中，当数 $a \neq 0$ 时，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为 a 的倒数，（或称 a 的逆）；

在矩阵的运算中，单位阵 E 相当于数的乘法运算中的1，那么，对于矩阵 A ，如果存在一个矩阵 A^{-1} ，

使得 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ ，

则矩阵 A^{-1} 也可类似称为 A 的可逆矩阵或逆阵。

二、逆矩阵的概念和性质

定义1 对于 n 阶矩阵 A , 如果有一个 n 阶矩阵 B , 使得

$$AB = BA = E,$$

则说矩阵 A 是**可逆**的, 并把矩阵 B 称为 A 的**逆矩阵**.

A 的逆矩阵记作 A^{-1} .

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$

$$\therefore AB = BA = E,$$

$\therefore B$ 是 A 的逆矩阵.



n 阶矩阵在逆矩阵存在时，其逆矩阵**唯一**吗？
在具备**什么条件**时，它是可逆矩阵？
可逆时**如何求**其逆矩阵？

先来看：

若 n 阶矩阵 A 可逆，设 B 和 C 都是 A 的逆矩阵，
则有 $AB = BA = E$, $AC = CA = E$,

可得 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C$.

所以 A 的逆矩阵是唯一的. 即 $B=C=A^{-1}$.

定理1 若 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是**唯一**的.

由于 $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ ，可知 A^{-1} 可逆，且
 $(A^{-1})^{-1} = A$.

解决了第一个问题.

例1 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A 的逆阵.

解: 设 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是 A 的逆矩阵,
利用待定系数法

则 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1, \\ 2b + d = 0, \\ -a = 0, \\ -b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = -1, \\ c = 1, \\ d = 2. \end{cases}$$

又因为

AB

BA

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

新问题：对于高阶方阵待定系数法求取逆矩阵显然是不可行的.

对一个方阵，我们引入伴随矩阵的概念

定义2 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**。

注意： A^* 中**元素排列顺序**。

例2 求方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解: $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$

同理可得 $A_{13} = 2, A_{21} = 6, A_{22} = -6, A_{23} = 2,$
 $A_{31} = -4, A_{32} = 5, A_{33} = -2,$

得 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$

定理2 矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$ ，且当 A 可逆时

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*,$$

其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵.

证明:

必要性

若 A 可逆，即有 A^{-1} 使 $AA^{-1} = E$.

故 $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$ ， 所以 $|A| \neq 0$.

充分性

当 $|A| \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = |A|$$

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} = |A|$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix},$$

类似可得 $AA^* = |A|E$.

因此, $AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A \frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|} A = E,$

按逆矩阵的定义得 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$ 证毕.

解决了第二、三个问题.

补: 奇异矩阵与非奇异矩阵的定义

当 $|A|=0$ 时, A 称为奇异矩阵, 当 $|A|\neq 0$ 时称为非奇异矩阵.

由此得: A 是可逆矩阵 $\Leftrightarrow A$ 为非奇异矩阵.

另外, 也称 $|A|=0$ 的方阵为退化矩阵 (降秩矩阵), $|A|\neq 0$ 的方阵为非退化矩阵 (满秩矩阵).

例3 方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 可逆吗？若可逆求其逆矩阵。

解： $\because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \therefore A^{-1}$ 存在。

前面已经得到： $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 。

故

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

伴随矩阵法求逆矩阵

推论 设 A 、 B 为 n 阶矩阵, 若 $AB=E$ (或 $BA=E$) 成立, 则 $B=A^{-1}$.

证明: $|A| \cdot |B| = |E| = 1$, 故 $|A| \neq 0$,

因而 A^{-1} 存在, 于是

$$\begin{aligned} B &= EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) \\ &= A^{-1}E = A^{-1} \end{aligned}$$

证毕

逆矩阵的运算性质

(1) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 亦可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 若 A 可逆, 数 $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

(3) 若 A, B 为同阶方阵且均可逆, 则 AB 亦可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

定理3

证明: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$
 $= AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

推广 $(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$

其中 A_1, A_2, \cdots, A_m 皆为 n 阶可逆矩阵.

(4) 当 $|A| \neq 0$ 时, 定义 $A^{-k} = (A^{-1})^k$. (k 为正整数)
注意, 对于方阵 A 有, $A^0 = E$.

当 $|A| \neq 0$, λ, μ 为整数时,有

$$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}, \quad (A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}.$$

(5) 若 A 可逆,则有 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

证明: $\because AA^{-1} = E$

$$\therefore |A||A^{-1}| = 1$$

$$\text{因此 } |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

另外, 对于任意方阵 (无论是否可逆), 有

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

定理4 设 A 是 n 阶可逆矩阵，那么对任意 $B=B_{n \times m}$
(或 $B=B_{m \times n}$)，矩阵方程
 $AX=B$ (或 $XA=B$)
有**唯一解** $X=A^{-1}B$ (或 $X=BA^{-1}$).

证：由于 A 可逆，用其逆矩阵 A^{-1} 左乘方程 $AX=B$ 得
 $A^{-1}AX=A^{-1}B$. 得到 $X=A^{-1}B$ 为方程的解.

再证解的唯一性：若方程还有另一解 $C=C_{n \times m}$ ，
即 $AC=B$ ，则

$$C = EC = (A^{-1}A)C = A^{-1}(AC) = A^{-1}B = X$$

故 $X=A^{-1}B$ 为唯一解。

本定理的特殊情况，当 B 为列向量时，得到 *Cramer*规则（克拉默、克莱姆）。

定理5 (克莱姆规则) n 元线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

的系数行列式 $D=|A|=|a_{ij}|\neq 0$ 时, 存在唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的**常数列代替**后所得到的 n 阶行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

显然: $D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}$

其中 A_{ij} ($i=1, 2, \dots, n$) 是 a_{ij} 在 D 中的代数余子式.

证：方程组表为矩阵形式 $AX=b$ ，由于 $|A|\neq 0$ ，
知 A 为可逆矩阵，由上面定理知 (1) 有唯一解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} A^* b = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2} \\ \vdots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn} \end{pmatrix}$$

比较等式两边得

$$x_j = \frac{1}{|A|} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}) = \frac{1}{|A|} D_j = \frac{D_j}{D}. \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

注意：

- (1) 用克莱姆法则解方程组的两个条件
 - (a) 方程个数等于未知量个数；
 - (b) 系数行列式不等于零.
- (2) 克莱姆规则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系.

综合例题

例1 设方阵 A 满足方程 $A^2 - A - 2E = 0$, 证明:
 $A, A + 2E$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

证明: (注意: A 是已知矩阵, 所求矩阵要用 A 表示)

$$\text{由 } A^2 - A - 2E = 0,$$

$$\text{得 } A(A - E) = 2E \Rightarrow A \frac{A - E}{2} = E$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E).$$

$$\text{又由 } A^2 - A - 2E = 0$$

$$\Rightarrow (A + 2E)(A - 3E) + 4E = 0$$

$$\Rightarrow (A + 2E) \left[-\frac{1}{4}(A - 3E) \right] = E$$

$(A + 2E)^{-1}$

故 $A + 2E$ 可逆.

$$\text{且 } (A + 2E)^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 3E) = \frac{3E - A}{4}.$$

说明: (1) 不能由 $(A - 2E)(A + E) = 0$ 得到 $A + 2E = 0$ 或 $A + E = 0$.

(2) 另外 $A^2 = A + 2E$ 也可以得到 $A + 2E$ 的逆阵.

例2 解矩阵方程 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$

(2) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix};$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

解: (1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$,

得 $\begin{matrix} \textcolor{teal}{\uparrow} E \\ \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}} X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -28 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$(2) X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

得
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

给方程两端左乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

再给方程两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

$$\text{得 } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -75 & 30 \\ 9 & 52 & -21 \\ 21 & 120 & -47 \end{pmatrix}.$$

例3 若可逆矩阵 A 与矩阵 B 可交换, 试证 A^{-1} 与 B 也可交换.

证明: 已知条件 $AB = BA$, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

$$\begin{aligned}\text{故 } A^{-1}B &= A^{-1}B E = A^{-1}B A A^{-1} = A^{-1}(B A) A^{-1} \\ &= A^{-1}(A B) A^{-1} = (A^{-1}A) B A^{-1} \\ &= E B A^{-1} = B A^{-1}\end{aligned}$$

即 $A^{-1}B = B A^{-1}$,

由此知 A^{-1} 与 B 也可交换.

例4 设 A 是可逆矩阵, 试证

$$(1) A^* \text{ 可逆, 且 } (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A;$$

$$(2) (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

证: (1) 由 A 可逆知 $|A| \neq 0$, 又有 $AA^* = |A| E$

得到 $\frac{1}{|A|} AA^* = E$. 即 $(\frac{1}{|A|} A)A^* = E$,

所以 A^* 可逆, 且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$.

(2) 由伴随矩阵的定义, 可知

$$A^* A = |A| E, \quad (A^{-1})(A^{-1})^* = |A^{-1}| E$$

故 $A^* A (A^{-1})(A^{-1})^* = |A| E |A^{-1}| E$

于是 $A^* (A^{-1})^* = E$, 因此 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

例5 设三阶矩阵 A, B 满足关系：

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{ 且 } A = \begin{pmatrix} 1/2 & \mathbf{0} & \\ & 1/4 & \\ \mathbf{0} & & 1/7 \end{pmatrix} \text{ 求 } B.$$

解： $A^{-1}BA - BA = 6A$

$$\Rightarrow (A^{-1} - E)BA = 6A \Rightarrow (A^{-1} - E)B = 6E$$

$$\Rightarrow B = 6(A^{-1} - E)^{-1}.$$

$$B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$$

$$= 6 \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

小结

1. 逆矩阵的概念及运算性质.

2. 逆矩阵 A^{-1} 存在 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

3. 逆矩阵的计算方法

(1) 待定系数法;

(2) 伴随矩阵法 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$;

(3) 初等变换法(下一节介绍).

4. *Cramer*法则的结论.

练习题

1. 设 $A^k = O$, k 是某一个自然数 (这时称 A 为**幂零矩阵**, 使 $A^k = O$ 成立的最小正整数 k 称为 A 的**幂零指数**) , 试证: $E-A$ 可逆, 且

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

2. 证明: 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则

$$(AB)^* = B^* A^* .$$

练习题解答

1. 设 $A^k = O$ ， k 是某一个自然数（这时称 A 为**幂零矩阵**，使 $A^k = O$ 成立的最小正整数 k 称为 A 的**幂零指数**），试证： $E-A$ 可逆，且

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

证明：

$$\begin{aligned} & (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \\ &= (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) - (A + A^2 + \cdots + A^{k-1} + A^k) \\ &= E - A^k \\ &= E \end{aligned}$$

故 $E-A$ 可逆，且 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$

2. 证明：若 A, B 为同阶可逆矩阵，则

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

证： 因为 A, B 为同阶可逆矩阵，故

$$|AB| = |A| |B| \neq 0$$

即 AB 可逆. 从而

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} (AB)^*$$

$$\begin{aligned} \text{故： } (AB)^* &= |AB| (AB)^{-1} \\ &= |A| |B| B^{-1} A^{-1} \\ &= (|B| B^{-1}) (|A| A^{-1}) \\ &= B^* A^* \end{aligned}$$

作业

第二章习题

2.

4. (1) (4)

5.

6. (3)

7.

8.