第二章 矩阵代数

第二节 矩阵的代数运算

目的：掌握矩阵代数运算的定义、条件及运算性质.

§ 2.2.1 矩阵的加法与数乘

一、矩阵的加法

1、定义

两个同型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 的对应元相加所得的矩阵 $C=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 称为A和B的和，记作$C=A+B$.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法就是矩阵对应的元相加

说明 只有当两个矩阵是**同型矩阵**时，才能进行加法运算.

例如
$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2、运算性质

设A,B,C,O为同型矩阵，则有

$$(1)\ A+B=B+A$$

$$(2)\ (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$(3)\ A+O=A$$

$$O+A=A$$

$$(4)\ A+(-A)=O$$

另外，矩阵的**减法**定义为：$A-B=A+(-B)$.

注意：

- 对于矩阵有

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

- 而对于行列式一般 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

二、数与矩阵相乘

1、定义

设λ是一个数，矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则$(\lambda a_{ij})_{m\times n}$称为矩阵A和数$\lambda$的(**数量**)**乘积**，记为 λA 或 $A\lambda$.

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

特别的，λE 称为**数量矩阵**.

2、线性运算的运算性质

矩阵的加（减）法和数乘统称为矩阵的线性运算，这些运算都归结为数（元）的加法与乘法.

运算性质

设A, B为同型矩阵，λ, μ为数，则

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$

例 设 $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&1\\1&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\3&1\end{pmatrix}$

有矩阵X满足 $A+3X=2B$，求X.

解:

$$X=\frac{1}{3}(2B-A)=\frac{1}{3}\left(2\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2\\4&1\\1&5\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2&6\\4&8\\6&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2\\4&1\\1&5\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&4\\0&7\\5&-3\end{pmatrix}$$

又如设$A=(a_{ij})_n$，k为数，则

$$|kA| = \left| k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^n |A|.$$

故对于n阶方阵A有：$|kA|=k^n|A|$.

三、线性组合

给定若干个同型矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，经线性运算

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_j = B,$$

(其中λ_j为常数，j=1,2,…,m)

得到的矩阵B称为矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的线性组合.

或者称矩阵B可经(由)矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 线性表出（线性表示）.

> 线性组合是讨论同型矩阵之间是否有所谓线性关系的基本概念. 特别是当它们都是n维向量时，这种讨论很有用.

第三章将详细讨论.

例 设 $M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, M_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, M_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$

证明：任何一个二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

都是M_1，M_2，M_3，M_4的线性组合.

证明：显然

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}M_1+a_{12}M_2+a_{21}M_3+a_{22}M_4.$$

证毕.

§ 2.2.2 矩阵的乘法

1、定义

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times s}$ ，若矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times s}$ 满足

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,s)$$

则C称为矩阵A和B的**乘积**，记作AB，读做A右乘B或B左乘A. (注：不同资料读法可能相反，不要深究)

C特点：C的第i行、第j列处的元 ＝ A的第i行元与B的第j列对应元乘积之和.

$-2\times 2+4\times(-3)$

例1

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

?

例2 求AB.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

解: $\because A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 4}, \quad B=\left(b_{ij}\right)_{4\times 3}$

$\therefore C=\left(c_{ij}\right)_{3\times 3}.$

故

$$C=AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

左矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 右矩阵

注意 只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不存在.

例3 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ **，则**

$$AB=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)=\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)},$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}$$

注意 **该1×1矩阵作为运算结果可与数**$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$**同等看待，但是在运算过程中不能视做数，这是因为数与矩阵的乘法和矩阵与矩阵的乘法是两种不同的运算.**

如：上述矩阵*A*、*B*和另外矩阵$C_{m\times n}$ $(m\neq 1)$，***AB*看作数*ABC*有意义，而实际无意义.**

例4 对于线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

若记 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, 则上述线性方程组可表示为矩阵方程

$$AX = b.$$

矩阵的乘法为其它许多研究提供了方便的手段.

２、矩阵乘法的运算性质

$(1)\ (AB)C = A(BC)$;

$(2)\ A(B+C) = AB + AC,\ (B+C)A = BA + CA$;

$(3)\ \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）；

$(4)\ E_m A_{mn} = A_{mn} = A_{mn} E_n$;

(5) 若A是 n 阶矩阵，则 A^k 为A的 k 次幂，即

$A^k = \underbrace{A\ A \cdots A}_{k}$,并且 $A^m A^k = A^{m+k},\ \left(A^m\right)^k = A^{mk}$.

$(m,k$为正整数$)$

并对方阵A规定: $A^0=E$.

几点注意：

例　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, $BC=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

显然，$AB\neq BA$，$BA=BC$.

(1) 矩阵乘法**不满足交换律**，即一般：

$$AB\neq BA,\ (AB)^k\neq A^kB^k.$$

这是因为一般它们运算的结果不是同型矩阵. 即使是同型矩阵也不一定相等.

特殊的，若矩阵A, B满足$AB=BA$，则称A与B是可交换的. 显然，此时A, B均为同阶方阵.

例如:

单位矩阵 E 和任何同阶方阵可交换.

数量矩阵λE 和任何同阶方阵可交换.

(2) 由$AB=O$不能得出A、B至少有一个零矩阵.

如前面的A, B矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq O, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq O,$$

而 $$AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O.$$

(3) 由$BA=BC$（或$AB=CB$），且$B\neq O$，不能得出$A=C$的结论，即**乘法一般不满足消去律.**

如前面的

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}，B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\neq O，\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=BC$$，但$A\neq C$.

这一点一定要引起注意！

若$BA=O, AB=O$，不能得出$A=O$或$B=O$的结论，如

$$A=\begin{pmatrix}1 & \\ & 0\end{pmatrix}\neq O,\quad B=\begin{pmatrix}0 & \\ & 1\end{pmatrix}\neq O$$

例5 若$A^2=B^2=E$，则$(AB)^2=E$的充分必要条件是 A与B可交换.

证明:

充分性 若A与B可交换，即 $AB=BA$，

则 $(AB)^2=ABAB=A(BA)B=A(AB)B=(AA)(BB)$

$$=A^2B^2=EE=E$$

必要性 若$(AB)^2=E$，两边同左乘A，再右乘B得

$$A(AB)^2B=AEB=AB$$

而$A(AB)^2B=AABABB=(AA)BA(BB)=EBAE=BA$

故 $BA=AB$，即A与B可交换.

例6 如果方阵A，B满足$AB+BA=E$，且$A^2=O$（或$B^2=O$），则 $(AB)^2=AB$.

证明：仅以$A^2=O$为例.

在$AB+BA=E$两边同时左乘矩阵A，再右乘矩阵B得

$$A(AB+BA)B=AEB=AB$$

而 $A(AB+BA)B=(AAB+ABA)B=(O+ABA)B$

$$=(AB)^2$$

故 $(AB)^2=AB$.

3、方阵的多项式

当A为方阵时，称矩阵

$$f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mE$$

为**矩阵A的多项式**，也称 $f(A)$是普通多项式

$$f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$$

当 $\lambda=A$的值.

性质：

设 $f(\lambda),g(\lambda)$ 是两个多项式，令

$$h(\lambda)=f(\lambda)+g(\lambda),\quad s(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda).$$

(1) $h(A)=f(A)+g(A),\quad s(A)=f(A)g(A).$

(2) $f(A)g(A)=g(A)f(A).$

4、n阶矩阵乘积的行列式

方阵对应着行列式，于是有如下定理：

定理： 若 A，B是n阶方阵，则 $|AB| = |A|\,|B|$.

(此定理可以推广到有限个同阶矩阵的情况)

证明： 设 $A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij}),\quad C=AB=(c_{ij})$ ，

则由拉普拉斯定理知下式成立：

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cccc:cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| = |A||B|$$

利用行列式性质6，用 -E的那些 -1把 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix}$ 中的B所在部分都消成0.

b_{11}倍

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \boldsymbol{a_{11}b_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \boldsymbol{a_{21}b_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \boldsymbol{a_{n1}b_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{0} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

b_{21}倍

$$
\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} =
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}
$$

b_{n1}倍

$$
\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} =
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & C & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & & & \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A & C \\ -E & 0 \end{vmatrix}$$

再利用拉普拉斯定理按后***n***行展开

$$= \left|-E\right|(-1)^{[(n+1)+(n+2)+\cdots+2n]+(1+2+\cdots+n)}\left|C\right|$$

$$= (-1)^{n}(-1)^{n(2n+1)}\left|C\right| = \left|C\right| = \left|AB\right|$$

故： $|A||B|=|AB|.$

注：(1) 可推广到有限个同阶方阵相乘情况

$$|A_1 A_2 \cdots A_m| = |A_1||A_2|\cdots|A_m|$$

(2) 对于同阶方阵A, B有

$$|A||B|=|AB|=|B||A|$$

可推广：若$A_1, A_2, \ldots, A_m$是同阶方阵，则它们以任意次序相乘得到矩阵的行列式值相等。

小结

线性组合的概念

矩阵运算

- 加法(含减法)
- 数与矩阵相乘(数乘)

} 线性运算

- 矩阵与矩阵相乘
- 方阵的行列式

注意

（1）只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

（2）只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘, 且矩阵相乘不满足交换律.

（3）矩阵的数乘运算与行列式的数乘运算不同.

综合训练

例1　判断下述结论是否正确(A，B为同阶方阵)

(1) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2.$ ×

(2) $(AB)^2=A^2B^2.$ ×

(3) 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_1 \end{pmatrix}$ 则对于任二阶方阵 B 有 $AB=BA$. √

若 $A=\begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_2 \end{pmatrix}$ 时呢？ ×

(4) 若 $|A|=|B|$，则 $A=B$. ×

(5) 若 $A^2=O$，则 $A=O$. ×　如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

例2 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$**，求$A^k$ ($k\geq 1$).**

解:

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$=4E=2^2E$$

因此，当k为偶数时，$k/2$为整数，则

$$A^k=A^{2\times\frac{k}{2}}=(A^2)^{\frac{k}{2}}=(2^2E)^{\frac{k}{2}}=2^{2\times\frac{k}{2}}E=2^kE.$$

当k为大于1奇数时，k-1为偶数，此时由上面结论知

$$A^k=A^{(k-1)+1}=A^{k-1}A=2^{k-1}EA=2^{k-1}A.$$

此结论对于k=1情况也成立.

例3 设 $A=\frac{1}{2}(B+E)$. 证明：$A^2=A$当且仅当$B^2=E$.

充要条件

证：充分性　若$B^2=E$，则

$$A^2=\frac{1}{4}(B+E)^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{4}(E+2B+E)$$

$$=\frac{1}{4}(2B+2E)\quad=\frac{1}{2}(B+E)=A$$

必要性　若已知$A^2=A$, 由于

$$A^2=\frac{1}{4}(B+E)^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E),\quad A=\frac{1}{2}(B+E)$$

故 $\frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)$，化简得 $\frac{1}{4}B^2=\frac{1}{4}E$,

即 $B^2=E$.

例4 设$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$求$A^k \quad (k\geq 2)$.

解1 $$A^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^2 & 6\lambda \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}.$$

由此归纳出

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad (k \geq 2)$$

用数学归纳法证明

当 $k=2$ 时，显然成立.

假设 $k=n$ 时成立，则 $k=n+1$ 时，

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$
=\begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n} & \frac{(n+1)n}{2}\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n} \\ 0 & 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix},
$$

所以对于任意的 $k \geq 2$ 都有

$$
A^{k}=\begin{pmatrix} \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^{k} & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k} \end{pmatrix}.
$$

解2 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda E+B$，其中 $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

数量矩阵λE和同阶矩阵B可交换. 且

$$B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B^k=0,(k\geq 3)$$

由二项式定理得:

$$\begin{aligned}A^k&=(\lambda E+B)^k\\&=C_k^0\lambda^k E+C_k^1\lambda^{k-1}B+C_k^2\lambda^{k-2}B^2+\cdots+C_k^k B^k\\&=\lambda^k E+k\lambda^{k-1}B+\frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2}B^2\end{aligned}$$

$$= \lambda^k E + k\lambda^{k-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$