第一题答案

解 (1) 根据题意，有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x 2\mathrm{d}y=\frac{2}{3};$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_y^1 2\mathrm{d}x=\frac{1}{3};$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 2xy\mathrm{d}y=\frac{1}{4};$$

(2) 根据题意，有

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^x 2\mathrm{d}y=\frac{1}{2};$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 y^2\mathrm{d}y\int_y^1 2\mathrm{d}x=\frac{1}{6};$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{18};$$

$$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{1}{18};$$

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{1}{36};$

(4) 根据(2)和(3)，有 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{1}{2};$

(5) 根据(2)和(3)，(X,Y)的协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{18} & \frac{1}{36}\\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18}\end{pmatrix}.$$

第二题答案

解 根据题意，有 $f_X(x)=\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}y=\dfrac{3-x}{4}$，$0<x<2$；

$f_Y(y)=\int_0^2\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}x=\dfrac{5-y}{4}$，$2<y<4$. 则

(1) $E(X)=\int_0^2 xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{x}{4}(3-x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{6};$

(2) $E(Y)=\int_2^4 yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_2^4\frac{y}{4}(5-y)\mathrm{d}y=\dfrac{17}{6};$

(3) 由于 $f(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{1}{4}(3-x)}=\dfrac{6-x-y}{6-2x}$，$0<x<2$，$2<y<4$，所以

$$E(Y\mid X=x)=\int_2^4 yf(y\mid x)\mathrm{d}y=\int_2^4 y\frac{6-x-y}{6-2x}=\frac{26-9x}{9-3x}.$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^2 dx\int_2^4 x\cdot\frac{1}{8}\cdot(6-x-y)\,dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2 6x-2x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 6x^2-\frac{2}{3}x^3\right]\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{8}\left[3\cdot 4-\frac{2}{3}\cdot 8\right]$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 12-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{8}\int_2^4 6x-x^2-xy\,dy$$

$$=\frac{1}{8}\left[6xy-x^2y-\frac{1}{2}xy^2\right]\Big|_2^4$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left[24x-4x^2-8x\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[12x-2x^2-2x\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left(12x-2x^2-6x\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(6x-2x^2\right)$$

第三题答案

1.设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p	0.4	0.3	0.3

求：(1) $D(X)$；(2) $D(-3X^2-5)$

解 (1)

$E(X)=-2\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$，

$E(X^2)=(-2)^2\times0.4+0^2\times0.3+2^2\times0.3=2.8$，所以 $D(X)=E(X^2)-(EX)^2=2.76$；

(2) $E(X^4)=(-2)^4\times0.4+0^4\times0.3+2^4\times0.3=11.2$，

$D(X^2)=E(X^4)-(E(X^2))^2=11.2-2.8^2=3.36$，所以 $D(-3X^2-5)=9D(X^2)=9\times3.36=30.24$．

第四题答案

解 (1) $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$.

(2) 根据以上 X,Y 的概率分布，得 X 的概率分布如下表：

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

则有 $E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

同理，根据以上 X,Y 的概率分布，得 Y 的概率分布如下表：

Y	0	1	2
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则有 $E(Y)=1$，$E(Y^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$，$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$.

XY 的概率分布如下表：

XY	0	1	2	4
(X,Y)	(0, 0)(0, 1)(0, 2)(1, 0)(2, 0)	(1, 1)(2, 1)	(1, 2)	(2, 2)
p_i	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

于是 $E(XY)=0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{1}{3}+2\times0+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$. 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X-Y,Y)&=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=E(XY)-E(X)E(Y)-D(Y)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times1-\frac{2}{3}\\&=-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

第五题答案

15. 将 n 只球（$1\sim n$ 号）随机地放进 n 个盒子（$1\sim n$ 号）中去，一个盒子装一只球．若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对．记 X 为总的配对数，求 $E(X)$．

解 引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若第 } i \text{ 号球装入第 } i \text{ 号盒子中},\\ 0, & \text{若第 } i \text{ 号球未装入第 } i \text{ 号盒子中},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则总的配对数 X 可表示成

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

显然 $$P\{X_i=1\}=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

X_i 的分布律为

X_i	0	1
p_k	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

即有 $E(X_i)=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，于是

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$
$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=1.$$

第六题答案

解 根据题意，有

$$E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3},$$

$$D(Z)=\frac{1}{3^2}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D\left(\frac{X}{3}\right)D\left(\frac{Y}{2}\right)}=3,$$

$$\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)=0,$$

因此 $\rho_{XZ}=0$．

第七题答案

解　由于 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，所以 $F'(x)=0.3\Phi'(x)+\frac{0.7}{2}\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)$，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xF'(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[0.3\Phi'(x)+\frac{0.7}{2}\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$
$$=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)\mathrm{d}x+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x=2$，所以 $E(X)=0+0.35\times 2=$ **0.7**

第八题答案

解　根据题意，有 $E(X)=1$，$D(X)=2$，$E(Y)=1$，$D(Y)=4$，$E(XY)=E(X)E(Y)=1$，$E[(XY)^2]=E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=\{D(X)+[E(X)]^2\}\{D(Y)+[E(Y)]^2\}=(2+1)(4+1)=15$，则 $D(XY)=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=15-1=14.$

第九题答案

证 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{x}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\mathrm{d}x=0,$$

同样 $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{y}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$

而 $E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{xy}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}y\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\mathrm{d}x=0,$$

从而

$$E(XY)=E(X)E(Y),$$

这表明 X,Y 是不相关的. 又

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同样

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，故 X,Y 不是相互独立的.

第十题答案

(2) 因 $X_i\sim U(0,1)$，$i=1,2,\cdots,n$，X_i 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，故 $U=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ u^n, & 0\leqslant u<1,\\ 1, & u\geqslant 1.\end{cases}$$

U 的概率密度为

$$f_U(u)=\begin{cases}nu^{n-1}, & 0<u<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(U)=\int_{-\infty}^{\infty}uf_U(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 u\cdot nu^{n-1}\mathrm{d}u=n\int_0^1 u^n\mathrm{d}u=\frac{n}{n+1}.$$

$V=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_V(v)=\begin{cases}0, & v<0,\\ 1-(1-v)^n, & 0\leqslant v<1,\\ 1, & v\geqslant 1.\end{cases}$$

V 的概率密度为

$$f_V(v)=\begin{cases}n(1-v)^{n-1}, & 0<v<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(V)=\int_{-\infty}^{\infty}vf_V(v)\mathrm{d}v=\int_0^1 vn(1-v)^{n-1}\mathrm{d}v$$

$$=-v(1-v)^n\Big|_0^1+\int_0^1(1-v)^n\mathrm{d}v$$

$$=-\frac{(1-v)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}.$$