一 .客观题前 3 个为判断题，4−8 为单选题。

1. n 行列式共有 n^2 个元素，展开后有 $n!$ 项，可分解为 2^n 行列式；
2. 极大线性无关组唯一的向量组未必是线性无关的向量组。
3. $0 \le r(A_{m\times n}) \le \min(m,n)$ ；
4. 设矩阵 $B=(b_{ij})_{r\times r}$ ， $C=(c_{ij})_{r\times n}$ ，且 BC=0，以下正确的是

（A）若 r(C)<r,则有 B=0　　　(B) 若 C≠0，则必有 B=0

(C) 若 r(C)=r,则有 B=0　　　(D) B=0，且 C=0

5. 设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^2=A$，且 $A\neq E$，则有

（A）A 为可逆矩阵　　　（B）A 为零矩阵

（C）A 为对称矩阵　　　（D）A 为不可逆矩阵

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性空间 V 的一组基,则下面也是 V 的基的是

（A）$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1$　（B）$\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_4, \alpha_4-\alpha_1$

（C）$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4-\alpha_1$　（D）$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3-\alpha_4, \alpha_4-\alpha_1$

7. 设线性方程组 $Ax=b$，其中 A 是 $m\times n$ 矩阵，$b\neq 0$，则方程组 $Ax=b$

（A） 有唯一解　　(B) 有无穷多解　　(C) 无解　　(D) 可能无解

8. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 0 & -1 & a & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$的秩为 2，则有 a 等于 ( )

（A） 0　　(B) 0 或-1　　(C) -1　　(D) -1 或者 1

二 、行列式计算

1．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & a+5 & 0 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & a+9 & 0 & 0 \\ 0 & a+7 & 0 & a+8 & 0 \\ a+3 & 0 & 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix}$ 的值。

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值

三、

已知：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X 。

四、已知线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 + a x_2 + x_3 = b. \end{cases}$$

（1）当 a,b 取何值时，无解，有惟一解，有无穷多解？

（2）当方程组有无穷多解时求其通解。

五：设 R^3 中的两组基分别为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \text{及} \boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$；

(2) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标．

六、设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_s\alpha_s$$

其中 $\lambda_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, s)$,证明:$\beta$代替 α_i 后的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性无关 .

七、设 $X = \begin{pmatrix} O & A \\ C & O \end{pmatrix}$,已知 A^{-1}, C^{1} 存在,求 X^{-1}

答案：

判断题：对　对　对

选择题：C D C D A

计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & a+5 & 0 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & a+9 & 0 & 0 \\ 0 & a+7 & 0 & a+8 & 0 \\ a+3 & 0 & 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix}$ 的值。

解　将行列式 D 按第 3 行展开，得

$$D=(a+9)\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & a+5 & a+6 & 0 \\ 0 & a+7 & a+8 & 0 \\ a+3 & 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix},$$

再将上式中的 4 阶行列式按第 2 和第 3 行用拉普拉斯定理展开，得

$$\begin{aligned} D &= (a+9)\begin{vmatrix} a+5 & a+6 \\ a+7 & a+8 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 \end{vmatrix} \\ &= (a+9)[(a+5)(a+8)-(a+6)(a+7)]\cdot \\ &\quad [(a+1)(a+4)-(a+2)(a+3)] \\ &= 4(a+9). \end{aligned}$$

计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 的值

$$D \xrightarrow[\substack{c_1+c_3\\ c_1+c_4}]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

已知：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X 。

记 $AX = B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,故

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

已知线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b. \end{cases}$$

（1）当 a,b 取何值时，无解，有惟一解，有无穷多解？

（2）当方程组有无穷多解时求其通解。

解 (1) 记方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，对方程组的增广矩阵施以行初等变换，得

$$[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & a & 1 & b\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2-a & b-1\end{bmatrix}.$$

当 $a=2$ 且 $b=1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=2<3$，方程组有无穷多解；

当 $a\neq 2$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=3$，方程组有唯一解；

当 $a=2$ 且 $b\neq 1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})=3$，方程组无解．

(2) 当 $a=2$ 且 $b=1$ 时，由

$$[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}]\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

可得齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解为 $x_1=x_3$，$x_2=-x_3$，$x_3=x_3$，其中 x_3

为自由变量．令 $x_3=1$ 得 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

又可得非齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解为 $x_1=1+x_3$，$x_2=-x_3$，$x_3=x_3$，其中 x_3 为自由变量．令 $x_3=\mathbf{0}$，得 $\mathbf{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解

$$\boldsymbol{\alpha}_p=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}.$$

因此，当 $\mathbf{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，其通解

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_p+k\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数．

设 R^3 中的两组基分别为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\text{及}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$；

(2) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标．

由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_n$ 的基变换公式为

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{C}.$$

记向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}$，在基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}'$，则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}'\text{ 或 }\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

解 (1) 由 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{C}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)^{-1}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\\&=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1&2\\0&2&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}3&3&1\\0&2&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 由 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}3&3&1\\0&2&1\\-1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\2\\-8\end{bmatrix}.$$

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关

$$\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_s \alpha_s$$

其中 $\lambda_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, s)$，证明：$\beta$ 代替 α_i 后的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性无关 .

证 设存在 s 个常数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{i-1} \alpha_{i-1} + k_i \beta + k_{i+1} \alpha_{i+1} + \cdots + k_s \alpha_s = 0$$

则

$$\begin{aligned} & k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{i-1} \alpha_{i-1} + \\ & \quad k_i (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_s \alpha_s) + k_{i+1} \alpha_{i+1} + \\ & \quad \cdots + k_s \alpha_s = 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & (k_1 + k_i \lambda_1) \alpha_1 + \cdots + (k_{i-1} + k_i \lambda_{i-1}) \alpha_{i-1} + k_i \lambda_i \alpha_i + \\ & \quad (k_{i+1} + k_i \lambda_{i+1}) \alpha_{i+1} + \cdots + (k_s + k_i \lambda_s) \alpha_s = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则

$$\begin{cases} k_1 + k_i \lambda_1 = 0 \\ k_2 + k_i \lambda_2 = 0 \\ \quad \cdots \\ k_{i-1} + k_i \lambda_{i-1} = 0 \\ k_i \lambda_i = 0 \\ k_{i+1} + k_i \lambda_{i+1} = 0 \\ \quad \cdots \\ k_s + k_i \lambda_s = 0 \end{cases}$$

由题意可知，$\lambda_i \neq 0$，所以有 $k_i = 0$，进而有 $k_1 = \cdots = k_s = 0$. 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性无关 .

设 $X = \begin{bmatrix} O & A \\ C & O \end{bmatrix}$，已知 A^{-1}，C^{-1} 存在，求 X^{-1}

，

解　设 $X^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$，由$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ C & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$得

$$\begin{pmatrix} X_{12}C & X_{11}A \\ X_{22}C & X_{21}A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

即　$X_{12}C=E,\quad X_{11}A=O,\quad X_{22}C=O,\quad X_{21}A=E$

解得 $X_{11}=O,\ X_{12}=C^{1},\ X_{21}=A^{-1},\ X_{22}=O$. 故

$$\begin{pmatrix} O & A \\ C & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$