2014 级信息类一元函数微分学

一、选择题(每小题 4 分)

（1）以下条件中，（ A ）不是函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分条件:

(A) $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$； (B) $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$； (C) $f'(x_0)$ 存在;

(D) $f(x)$ 在 x_0 处可微。

（2）设 $f(x)=x^2\sin x$，下列等式正确的是（ B ）：

（A）$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=0$; （B）$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=1$; （C）$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$; （D）$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$;

(3) 以下条件中,（ B ）是函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的充要条件：

（A） $f(x)$ 在 x_0 点连续； （B） $f(x)$ 在 x_0 点可微；

（C）$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 存在； （D）$\lim_{x\to x_0} f'(x)$ 存在。

（4）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$，那么，必有（ C ）：

（A）在 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$； （B）在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 单调减少；

（C）在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 单调增加； （D） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上凸的.

(5) 设 $f(x)=(x^2-3x+2)\sin x$,则方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,\pi)$ 内实根的个数为(D),

(A) 0 个; (B) 至多 1 个; (C) 2 个; (D) 至少 3 个.

二、填空题（每小题 4 分）：

（1）设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-\sin x)^{1/x}.x\neq 0\\ a,x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=\frac{1}{e}$

（2）曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程是 $x-y+1=0$

（3）设 $f'(x_0)=1$，则 $\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0-3\delta)-f(x_0)}{2\delta}=-\frac{3}{2}$

（4）设 $a>0$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-dx)=3$，则 a 与 d 的关系是 $\sqrt{a}=d$

（5）设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\ldots(x+15)$，则 $f'(0)=15!$

三、求下列极限：（每小题 5 分）

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5\sin x}{4x-3\cos x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{5\sin x}{x}}{4-\dfrac{3\cos x}{x}}=\dfrac{3}{4}$

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{5/x}-1)x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}\cdot x=5$

（3） $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x})^{1/x^2}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}(\frac{\sin x}{x}-1)}$ (等价无穷小代换)

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}}$

$=e^{-\frac{1}{6}}$（洛必达或泰勒公式）

四、求下列函数的导数（每小题 5 分）：

（1） 设 $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$；

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\frac{x+1}{x-1})'}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2}=-\frac{1}{1+x^2}$$

（2）设 $y=y(x)$ 是参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{1+t^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+t^2}{t^3}$$

（3）设 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+e),x>0\\ a^x,x\le0\end{cases}$, $(a>0)$, 问 a 取何值时， $f'(0)$ 存在？

四(3) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a^x-a^0}{x}=\ln a$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+e)-a^0}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x+e}}{1}=\dfrac{1}{e}$

∴当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时, $f'(0)$ 存在.

（4）设方程 $e^{x+y}=xy+1$ 确定了隐函数 $y=y(x)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$，并求该曲线在 $x=0$ 处的切线

方程。

四(4) $e^{x+y}(1+y') = y + xy'$

代入 $x=0, y=0$，得

$1+y'|_{x=0} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = -1$

切线方程为 $x+y=0$.

五、证明下列不等式：（每小题 6 分）

（1）当 $x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x);$

五(1) 令 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$，$x \geq 0$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$，$x>0$.

$\therefore f$ 在 $[0,+\infty)\uparrow$，$f(x) > f(0) = 0$，$x>0$.

$\therefore x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$，$x>0$.

（2）对任意的 $x > 0, x^x \geq (\frac{1}{e})^{1/e}$

五(2) 令 $f(x) = x\ln x$，$x>0$

$f'(x) = 1 + \ln x$　驻点为 $x = \frac{1}{e}$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$　易知 $x = \frac{1}{e}$ 为最小值点.

$\forall x>0$，$x\ln x \geq \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}$，即 $x^x \geq (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$.

六、求函数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ 在区间 $[-3,3]$ 上的极值、最大值、最小值。（本题 7 分）

六、$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$

f 在 $[-3,-2]\downarrow$，在 $[-2,0]\uparrow$，在 $[0,2]\downarrow$，在 $[2,3]\uparrow$

$\therefore f(0)=2$ 为极大值，$f(-2)=f(2)=-14$ 为极小值，也是最小值.

$f(-3)=f(3)=11$ 为最大值.

七、(6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0,$

证明：（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f^{'}(\xi)+\xi f(\xi)=0$；

（2）存在 $\eta_1\in(0,\frac{1}{2}),\eta_2\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(\eta_1)+\eta_1 f^{'}(\eta_1)+\frac{1}{2}f^{'}(\eta_2)=0$

七. (1) 对 $F(x)=f(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ 在 $[0,1]$ 用Rolle定理即可.

证 (2) 对 $F(x)=xf(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 用拉～，得

$\exists\eta_1\in(0,\frac{1}{2})$，$f(\eta_1)+\eta_1 f'(\eta_1)=f(\frac{1}{2})$

对 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 用拉～，得

$\exists\eta_2\in(\frac{1}{2},1)$，$f'(\eta_2)=-2f(\frac{1}{2})$

于是命题成立.