第二章 矩阵代数

第五节 分块矩阵

§2.5.1 分块矩阵及其运算

一、矩阵的分块

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算。

具体做法：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

例 $$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

即 $$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

即

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ E & B \end{pmatrix},$$ 其中 $A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$ 其中 $A_1=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ……

二、分块矩阵的运算规则

(1) 设A，B为同型矩阵,采用相同的分块法,有

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}与B_{ij}为同型矩阵,那末

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

即：$(A_{ij})_{sr}+(B_{ij})_{sr}=(A_{ij}+B_{ij})_{sr}$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, λ为数,那末

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

即: $\lambda(A_{ij})_{sr}=(\lambda A_{ij})_{sr}$

(3) 设A为$m\times l$矩阵, B为$l\times n$矩阵, 分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于$B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$的行数, 那末

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r).$

即$(A_{ij})_{st}(B_{ij})_{tr}=(C_{ij})_{sr}=\left(\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\right)_{sr}$

(4) 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

(5) 设A为n阶矩阵,若A的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块,其余子块都为零矩阵,且非零子块都是方阵.即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots s)$ 都是方阵, 那末称 A 为分块对角矩阵. 记做 $diag(A_1, A_2, \ldots, A_s)$. (准对角阵)

分块对角矩阵的行列式具有下述性质:

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

(6)设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$,

若 $|A_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$,则 $|A|\neq 0$,并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

即 $A^{-1}=diag(A_1^{-1},A_2^{-1},\cdots,A_s^{-1})$

(7) 假设运算可行，则

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{aligned} AB &= diag(A_1, A_2, \cdots, A_s)diag(B_1, B_2, \cdots, B_s) \\ &= diag(A_1B_1, A_2B_2, \cdots, A_sB_s) \end{aligned}$$

例1　设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

求 AB.

解 把A,B分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

则 $AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 + B_{22} \end{pmatrix}.$$

又 $$A_1 B_{11} + B_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 + B_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $$AB=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

例2 设 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

求 $A+B$, ABA.

解 将 A, B 分块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$ 其中

$$A_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix},$$ 其中

$$B_1=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix};$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & \\ & A_2+B_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1+B_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix},$$

$$A_2+B_2=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 2 & 2b \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad A+B=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}.$$

$$ABA=\begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & \\ & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B_1A_1 & \\ & A_2B_2A_2\end{pmatrix},$$

$$A_1B_1A_1=\begin{pmatrix}a^3+a & 2a^2+1 \\ a^2 & a^3+a\end{pmatrix},\qquad A_2B_2A_2=\begin{pmatrix}b^3+2b & 2b^2+1 \\ 3b^2 & b^3+2b\end{pmatrix},$$

$$\therefore\ ABA=\begin{pmatrix}a^3+a & 2a^2+1 & 0 & 0 \\ a^2 & a^3+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^3+2b & 2b^2+1 \\ 0 & 0 & 3b^2 & b^3+2b\end{pmatrix}.$$

例3　设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解　$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,

$A_1=(5)$, $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$, $A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$;

$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}.$

例4　设分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$，其中

$B=B_{r\times r}, D=D_{s\times s}$ 均为可逆矩阵，求 A^{-1} .

解：由拉普拉斯定理知 $|A|=\begin{vmatrix} B & O \\ C & D \end{vmatrix}=|B||D|\neq 0$

故 A可逆．设 A^{-1} 的分块形式为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

其中，$X=X_{r\times r}, T=T_{s\times s}$

利用分块乘法有

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} BX & BY \\ CX + DZ & CY + DT \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix}$$

于是 $\begin{cases} BX = E_r \\ BY = O \\ CX + DZ = O \\ CY + DT = E_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = B^{-1} \\ Y = O \\ Z = -D^{-1}CB^{-1} \\ T = D^{-1} \end{cases}$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

特别的，当 $C=O$ 时， $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}$$

这与对角形矩阵的结论是一致的.

§ 2.5.2 方阵的迹

定义 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则A的**迹**为

$$tr\,(A) = a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$$

性质

- $tr\,(A+B) = tr\,(A) + tr\,(B)$
- $tr\,(kA) = k\cdot tr(A)$
- $tr\,(AB) = tr\,(BA)$
- $tr\,(P^{-1}AP) = tr\,(A)$
- $A=diag(A_1,A_2,\cdots,A_s)$，则

$$tr(A)=tr(A_1)+tr(A_2)+\cdots+tr(A_s)$$

矩阵知识点复习

1. 理解矩阵的概念，了解一些特殊矩阵：零矩阵、行/列矩阵等，知道单位 / 对角 / 三角 / 对称 / 反对称 / 正交 矩阵及其性质. 理解矩阵的可交换. 了解行阶梯形 / 行最简矩阵.

如对于正交矩阵A, B，有$A^T=A^{-1}$，A^{-1}, AB仍为正交阵.

对称矩阵：$A=A^T$，反对称矩阵：$A=-A^T$.

对角形矩阵的和、乘积、幂.

用对角形矩阵左(右)乘一个矩阵的结果.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置，及运算规律，了解方阵的幂、方阵乘积的行列式.

只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\quad B=(b_{ij})_{n\times s}\ \Rightarrow AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times s}$$

一般： $AB\neq BA,\ (AB)^k\neq A^kB^k.$

由$AB=O$不能得出A，B至少有一个零矩阵.
但是，若A为可逆矩阵，则可以得到$B=O$.

$$|\lambda A_n|=\lambda^n|A|$$

注意：矩阵与行列式线性运算的不同点，以及

$$(AB)^T=B^TA^T$$

$$|A_nB_n|=|A_n|\,|B_n|=|B_n|\,|A_n|$$

3. <u>掌握</u>逆矩阵及其性质、矩阵可逆的充要条件，<u>会</u>用伴随矩阵求二阶矩阵逆矩阵.

如：

$|A|\neq 0$时A可逆，或对于方阵A，若存在方阵B，使 $AB=E$ $(AB=BA=E)$则A可逆。

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

$A^{-1}=A^* / |A|$，注意A^*中元素的排列顺序

对任意方阵A，有 $AA^*=A^*A=|A|E$

4. 掌握矩阵的初等变换、初等矩阵及性质，了解矩阵等价、矩阵的秩，会有关的判定定理，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

如：有三类初等变换，分别对应三类初等矩阵.

对矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$施行一次初等行（列）变换，其结果就等于对A左（右）乘一个相应的m（n）阶初等矩阵.

对任何矩阵$A_{m\times n}$总可经有限次初等行变换化为(行)阶梯形和行最简形.

n 级矩阵A可逆$\Leftrightarrow$它能表成一些初等矩阵的乘积.

可逆矩阵总可以经过一系列初等行(列)变换化成E.

求逆矩阵的方法：

(1)伴随矩阵法.（阶数较低）

(2)由 $AB=I$ 或 $BA=I$.(待定系数法)

(3)初等变换的方法.

$$(A,E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E,A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

(4)分块矩阵的方法.

$$diag(A_1, A_2, \ldots, A_s)^{-1}.$$

$$=diag(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_s^{-1}).$$

5. 掌握分块矩阵及其运算，注意分块矩阵运算需要满足的分块条件. 建议会使用分块矩阵的初等变换.

注意: $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix}$ 的应用.

但 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} \neq |AB| - |CD|$

$$(A_{ij})_{st}(B_{ij})_{tr} = (C_{ij})_{sr} = \left(\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}\right)_{sr}$$

分块对角形矩阵的运算性质.

分块矩阵的初等变换和分块初等矩阵.

对一个分块矩阵作一次分块矩阵的初等行（列）变换，相当于在矩阵的左（右）边乘上一个相应的分块初等矩阵，反之亦然.