先观察三阶行列式的结构

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \underbrace{- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},}_{\text{每一项特点}}$$

在展开式中，每一项都是取自不同行和列的三个元素的乘积，每一项的行标按自然顺序排列，除正负号外，可写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1 j_1 j_3$ 是1,2,3 的某个排列。这样的排列共有 $P_3^3 = 3! = 6$ 个，分别对应了展开式中的六项。

再来计算各项列指标构成排列的反序数：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

带 ＋ 项：$\tau(123) = 0,\quad \tau(231) = 2,\quad \tau(312) = 2 \quad \rightarrow$偶数

带 一 项：$\tau(132) = 1,\quad \tau(213) = 1,\quad \tau(321) = 3 \quad \rightarrow$奇数

于是，得到

每项行标按自然顺序排列时，当列标构成排列 $j_1 j_2 j_3$

是偶排列时，该项取正号。

是奇排列时，该项取负号。

又：$(-1)^{偶数}=1$，$(-1)^{奇数}=-1$，这样可以把三阶行列式写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3}$$

表示对1,2,3的一切排列求和

对于二阶行列式，也有类似的结论

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1 j_1} a_{2 j_2}$$

n阶行列式的定义

定义1　由n^2个数（实数或复数）排成一个n行n列的表，并在两边各画一条竖线的**记号**：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所表示的数称为n阶行列式。

有时简记为 $|a_{ij}|$，$|A|$，$\det(a_{ij})$，$\det(b_{ij})$

类似二、三阶行列式可得 （称为n阶行列式的展开式）

$$|a_{ij}| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

表示对1,2, …, n的一切排列求和

行列式 $|a_{ij}| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的文字描述：

n阶行列式等于所有这种项（共$n!$项）的代数和：

每项都是取自不同行不同列的n个元的乘积；

每项的符号这样确定：

当每项中n个元按行标的自然顺序排列成 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 时

若 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列，则带正号。

若 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列，则带负号。

掌握行列式的定义：

(1) 展开式共有n! 项。

(2) 每项是取自不同行不同列的n个元乘积，冠以正号或负号。

(3) 行标按自然顺序排列时，每项的正负号由列标构成排列的奇偶性(反序数)决定。n!项中一半取正号，一半取负号。

(4) 行列式表示一个数（值）。

(5) 一阶行列式 $|a|=a$ 不要与绝对值记号相混淆。

例1　计算反对角行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解：　（分析）

展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$

若 $p_1 \neq 4 \Rightarrow a_{1p_1} = 0$，所以 p_1 只需要取4，

同理可得 $p_2 = 3, p_3 = 2, p_4 = 1$

即行列式中不为零的项为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

例2　计算n阶（右）上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特点 $a_{ij}=0$　当$i>j$

解：(分析) 展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

考查第n行，若 $p_n \neq n$, 则 $a_{np_n}=0$.

考查第$n-1$行，若$p_{n-1}\neq n, n-1$, 则 $a_{n-1\,p_{n-1}}=0$, 而 $p_n=n$,

故仅考虑 $p_{n-1}=n-1$ 情况。

…… ……

所以不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例3 $$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&4&2&1\\0&0&5&6\\0&0&0&8\end{vmatrix}=?$$

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&4&2&1\\0&0&5&6\\0&0&0&8\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\cdot4\cdot5\cdot8=160.$$

同理可得(左)下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特殊的

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(对角形行列式)

例4 证明反对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

解：这个行列式除了项 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 外，其余项全为零，

而该项列标构成排列为 $n\ (n\text{-}1)\ \ldots\ 2\ 1$，其反序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

故，$$\text{原式} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

类似可计算出：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

（左上三角形行列式） （右下三角形行列式）

例5 设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 $D_1=D_2$.

证： 由行列式定义有

$$D_1=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$D_2=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

由于 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1+2+\cdots+n,$

故 $D_2=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}b^0=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

因此 $D_1=D_2$.

注意：行列式的元的行标与列标不一定用前n个自然数表示。

例如：

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

|B|的元由 $|A| = \det(a_{ij})$ 中取出位于第二、三、五行与第一、二、四列相交处的元构成。 $|B|$ 中每个元的足标分别表示它们在 $|A|$ 中的位置。由行列式的定义有

$$|B| = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{2 j_1} a_{3 j_2} a_{5 j_3}$$

这里，$j_1 j_2 j_3$ 表示1、2、4的排列，

$\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对1、2、4的一切排列求和。

例6 证明

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：按照行列式的定义

$$|A|=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$\overset{j_1\text{只能取}1}{=}\sum_{1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1 j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{11}\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

而

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

故 左端＝ $a_{11}|B|$ =右端.