武汉理工大学考试试题 5

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
题分	12	12	36	15	15	10					100

备注：　学生不得在试题纸上答题(含填空题、选择题等客观题)

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

1、已知 A_{ij} 是行列式 $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 的元素 $a_{ij}(i, j = 1,2,3)$ 的代数余子式，则 $8A_{11} + 2A_{12} =$ ____________；

2、设矩阵 $A = diag(1,-2,1)$，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $A^*BA = -2E$，则 $|B| =$ ____________；

3、设向量组 α_1，α_2，α_3 是 R^3 空间的一组基，要使 $\alpha_1 + t\alpha_2$，$t\alpha_1 + \alpha_2$，α_3 可以构成 R^3 空间的一组基，则 t 必须满足_________；

4、要使实二次型 $\boldsymbol{f(x,y,z) = k(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2xz}$ 为正定的，则必有 k 的值满足________。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1、设 A 为 3 阶矩阵，若 $|A| = k$，则 $|-kA| =$ _________；

(A) $-k^4$；　(B) k^3；　(C) $-3k$；　(D) $-k$；

2、设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$，其中 A，B 均为 $m \times n$ 矩阵，则下列命题正确的是_________；

(A) 若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解，则 $R(A) \le R(B)$；

(B) 若 $R(A) \ge R(B)$，则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解；

(C) 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，则 $R(A) = R(B)$；

(D) 若 $R(A) = R(B)$，则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

3、设 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶正交矩阵，$\boldsymbol{x}$ 是一个 n 维列向量，且 $\|\boldsymbol{x}\|=3$，则 $\|\boldsymbol{Px}\|=$ _____________；

(A) 1；　(B) 3；　(C) 6；　(D) 9；

4、设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 维列向量，且 $\boldsymbol{x^T x = 1}$；E 为 $\boldsymbol{n}$ 阶单位矩阵；令 $H = E - 2xx^T$，则下列说法错误的是 _________。

(A) H 是对称矩阵；　(B) H 是可逆矩阵；　(C) H 是正交矩阵；　(D) H 是正定矩阵.

三、计算题(每小题 9 分，共 36 分)

1、计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}；

3、设 A 是 3 阶方阵，互换 A 的第一、第二列，得矩阵 B；再将 B 的第二列加到第三列上得矩阵 C；求满足 $AX = C$ 的可逆矩阵 X；

4、设向量组 $\alpha_1^T = (0,1,2,3), \alpha_2^T = (3,0,1,2), \alpha_3^T = (4,-1,0,1), \alpha_4^T = (8,1,4,7)$ 求它的一个最大无关组，并用此最大无关组表示其余向量。

四、(15 分)已知线性方程组

$$\begin{cases} -tx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - tx_2 + x_3 = -t \\ x_1 + x_2 - tx_3 = t^2 \end{cases}$$

（1）t 为何值时，无解，有唯一解，有无穷多个解？（10 分）

（2）在有无穷多解时求出其通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）。（5 分）

五、（15 分）已知实二次型 $\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3}$；

（1）写出 f 对应的矩阵 A；（3 分）

（2）求正交变换 $X = PY$（必须写出相应的正交变换矩阵 P）将 f 化为标准形（或法式）。（12 分）

六、证明题(每小题 5 分，共 10 分）

1、设 λ_1 和 λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 p_1 和 p_2，证明 $p_1 - p_2$ 不再是 A 的特征向量。

2、设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，试证明 $\eta^*, \xi_1 + \eta^*, \xi_2 + \eta^*, \cdots, \xi_{n-r} + \eta^*$ 线性无关。

武汉理工大学教务处

试题标准答案及评分标准用纸

课程名称:线性代数　　　　（ A 卷）

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

1、 2；　　2、 1；　　3、 $t^2 \neq 1$；　　4、 $k > \sqrt{2}$

二、选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1、 A；　　2、 C；　　3、 B；　　4、 D

三、解答题（每小题 9 分，共 36 分）

1、$$D_n \xlongequal[r_i - r_1]{(i=2,\cdots,n)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1 + \frac{1}{n} r_i]{(i=2,\cdots,n)} \frac{1}{n} \begin{vmatrix} 1+\cdots+n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ ……（4 分）

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-n)^{n-1} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = \frac{(n+1)}{2} \cdot n^{n-1} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$ ……（9 分）

2、记 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$，则 $|A_1| = -1, |A_2| = 1$；……（4 分）

又 $A_1^{-1} = -\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$。……（9 分）

3、由题意有 $A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$，$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$，……（4 分）

于是 $A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$，所以 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。……（9 分）

4、$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}0&3&4&8\\1&0&-1&1\\2&1&0&4\\3&2&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&3&4&8\\0&1&2&2\\0&2&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&2&2\\0&0&-2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&4\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ………...（4 分）

则 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 即为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，（7 分）

且 $\alpha_4=0\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$；……………………………………………………………………..………...（9 分）

或者取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$， $\alpha_3=0\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_4$；还可以取 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$， $\alpha_2=\frac{1}{4}\alpha_3+\frac{1}{4}\alpha_4$

四、解 $(A,b)=\begin{pmatrix}-t&1&1&1\\1&-t&1&-t\\1&1&-t&t^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-t&t^2\\0&-t-1&t+1&-t^2-t\\0&t+1&-t^2+1&t^3+1\end{pmatrix}\sim$

$$\begin{pmatrix}1&1&-t&t^2\\0&-t-1&t+1&-t^2-t\\0&0&-(t+1)(t-2)&t^3-t^2-t+1\end{pmatrix}$$ …………………………….………..………...（4 分）

所以当 $t\neq-1$ 且 $t\neq2$ 时，方程组有唯一解；……………………………..…………………………..……...（6 分）

当 $t=2$ 时，$(A,b)\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $R(A,b)=3\neq R(A)=2$，所以方程组无解。…………………...（8 分）

当 $t=-1$ 时，$(A,b)\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；此时原方程组有无穷多解；………………...…………………….……...（10 分）

有 $x_1=-x_2-x_3+1$，取 $x_2=x_3=0$ 得原方程组一个特解 $\eta_0=(1,\ 0,\ 0)^T$；………………..………………...（12 分）

$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$；得导出组的基础解系 $\xi_1=(-1,\ 1,\ 0)^T$， $\xi_2=(-1,\ 0,\ 1)^T$；所以原方程组的通解为：

$\eta=\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2$，其中 c_1,c_2 为任意常数。……………………………………………………..………...（15 分）

五、 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$……………………………………..………...（3 分）

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_1-r_2}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda&\lambda-1&0\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_2-c_1}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\-1&-1-\lambda&1\\1&2&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$ …………………………...…………………………….……...（6 分）

对应$\lambda_1 = -2$，解方程$\lambda_1 = -2$，解方程$(A+2E)x = 0$，由

$$A+2E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，得基础解系$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$。将其单位化得$p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$。…..……...（9 分）

对应$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，解方程$(A-E)x = 0$，由

$$A-E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，得基础解系$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；……………………..………...（12 分）

将ξ_2, ξ_3正交化，取$\eta_2 = \xi_2$，

$$\eta_3 = \xi_3 - \frac{[\eta_2, \xi_3]}{[\eta_2, \eta_2]}\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$；再将η_2, η_3单位化，得$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$……..（14 分）

得正交矩阵$P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，有$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$…………..（15 分）

六、1、按题意，有$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2$，故$A(p_1 - p_2) = \lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2$……………………….………..（1 分）

假设$p_1 - p_2$是A的对应于特征值λ的特征向量，则$A(p_1 - p_2) = \lambda(p_1 - p_2) = \lambda p_1 - \lambda p_2$；…………..（2 分）

于是 $\lambda p_1 - \lambda p_2 = \lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2$；即$(\lambda - \lambda_1)p_1 + (\lambda - \lambda_2)p_2 = 0$ ……………………………………….…..（3 分）

又因为λ_1和λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，所以p_1与p_2线性无关，故$\begin{cases} \lambda - \lambda_1 = 0 \\ \lambda - \lambda_2 = 0 \end{cases}$，即得$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

这与题设矛盾，所以假设不成立，即$p_1 - p_2$不是A的特征向量。………………………………………...（5 分）

2、设$k_0\eta^* + k_1(\xi_1 + \eta^*) + k_2(\xi_2 + \eta^*) + \cdots + k_{n-r}(\xi_{n-r} + \eta^*) = 0$，即

$(k_0 + k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r})\eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$。 ……………………………………...（1 分）

以A左乘该式两边；因为η^*是非齐次线性方程组$Ax = b$的一个解，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组$Ax = 0$的一个基础解系，有 $(k_0 + k_1 + k_2 + \cdots k_{n-r})b = 0$，又$b \neq 0$，所以$k_0 + k_1 + k_2 + \cdots k_{n-r} = 0$（3 分）

于是有$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$，又$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关，所以$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_{n-r} = 0$，得$k_0 = 0$。

所以$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关。……………………………………………………..………...（5 分）