附录 A 矢量的乘积和对称性
立体角 曲线坐标系

1. 矢量的标积

设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个任意矢量,它们的标积(常用$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$表示,故又称点乘)的解析定义为如下标量:

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z.} \tag{A.1}$$

由此定义不难看出,点乘是服从交换律和分配律的:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}, \quad (\text{交换律}) \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}, \quad (\text{分配律}) \tag{A.3}$$

下面看点乘的几何意义。把$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$两矢量的起点O叠在一起,二者决定一个平面,取此平面为直角坐标系的xy面,从而$A_z=B_z=0$. 令$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$与Ox轴的夹角分别为α、β(见图 A-1),则$A_x=A\cos\alpha$, $A_y=A\sin\alpha$, $B_x=B\cos\beta$, $B_y=B\sin\beta$, 标积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=A_x B_x+A_y B_y\\&=AB(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=AB\cos(\beta-\alpha),\end{aligned}$$

即

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta,} \tag{A.4}$$

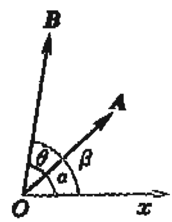


图 A-1 矢量的标积

式中$\theta=\beta-\alpha$为两矢量之间的夹角。(A.4)式可看作是标积的几何定义。从这个定义可立即看出:$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$平行时,$\theta=0$,标积$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB$; $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$反平行时,$\theta=\pi$,标积$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-AB$; $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$垂直时,$\theta=\pi/2$,标积$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$. 一般说来,$\theta$为锐角时,标积取正值;$\theta$为钝角时,标积取负值。一个矢量$\boldsymbol{A}$与自身的标积$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2$.

2. 矢量的矢积

设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个任意矢量,它们的矢积(常用$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$表示,故又称叉乘)的解析定义为如下矢量:

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_y B_z-A_z B_y)\boldsymbol{i}+(A_z B_x-A_x B_z)\boldsymbol{j}+(A_x B_y-A_y B_x)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}.\end{aligned}} \tag{A.5}$$

由此定义不难看出,点乘是服从反交换律和分配律的:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}, \quad (\text{反交换律}) \tag{A.6}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}, \quad (\text{分配律}) \tag{A.7}$$

下面看叉乘的几何意义。同前，把 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 两矢量的起点 O 叠在一起，二者决定一个平面，取此平面为直角坐标系的 xy 面，从而 $A_z=B_z=0$。令 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 与 Ox 轴的夹角分别为 α、β，则 $A_x=A\cos\alpha$，$A_y=A\sin\alpha$，$B_x=B\cos\beta$，$B_y=B\sin\beta$，矢积

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k} = AB(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)\boldsymbol{k}$$
$$= AB\sin(\beta-\alpha)\boldsymbol{k},$$

即矢积

$$\boxed{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin\theta\boldsymbol{k}}, \tag{A.8}$$

式中 $\theta=\beta-\alpha$ 为两矢量之间的夹角。当 $\beta>\alpha$ 时，$\theta>0$，$\boldsymbol{C}$ 沿 $\boldsymbol{k}$ 的正方向；当 $\beta<\alpha$ 时，$\theta<0$，$\boldsymbol{C}$ 沿 $\boldsymbol{k}$ 的负方向。由于我们采用的是右手坐标系，$\boldsymbol{C}$ 的指向可用如图 A－2a 所示的右手定则来判断：设想矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿小于 180° 的角度转向矢量 $\boldsymbol{B}$。将右手的四指弯曲，代表上述旋转方向，则伸直的姆指指向它们的矢积 $\boldsymbol{C}$。

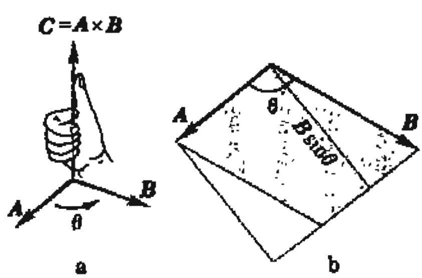


图 A－2 矢量的矢积

(A.8) 式可看作是矢积的几何意义：矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的矢积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的数值 $C=AB\sin\theta$，正好是由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为边组成的平行四边形的面积（见图 A－2b）；$\boldsymbol{C}$ 的方向与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 组成的平面垂直，其指向由上述右手定则来规定。从这个定义可立即看出：$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 平行或反平行时，$\theta=0$ 或 π，矢积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 垂直时，$\theta=\pi/2$，矢积的数值 $C=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB$ 最大。一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与自身的矢积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$.

3. 矢量的三重积

物理学中经常遇到矢量的三重积。最常见的三重积有以下两个。

(1) 三重标积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

这三重积是个标量。不难验证，此三重积的解析表达式为

$$\boxed{\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}}. \tag{A.9}$$

从几何上看，因 $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|$ 是以 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为边组成平行四边形的面积，矢积 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的方向沿其法线，故而再与 $\boldsymbol{A}$ 点乘，相当于再乘上 $\boldsymbol{A}$ 在法线上的投影。亦即，这三重积的绝对值等于以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三矢量为棱组成的平行六面体的体积（见图 A－3），其正负号与三矢量的循环次序有关。由于计算平行六面体的体积与取哪一面为底无关，点乘又是可交换的，所以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三矢量的轮换，以及·和×的位置对调，都不影响此三重积的计算结果。唯一要注意的是三矢量的循环次序不能变，否则差一个负号。概括起来写成公式，我们有

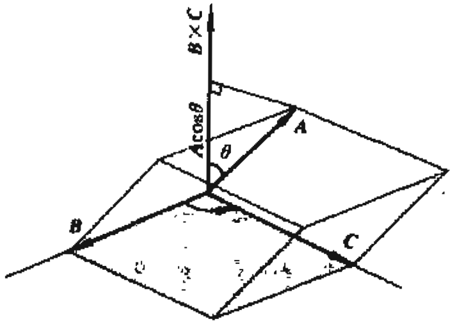


图 A－3 矢量的三重标积

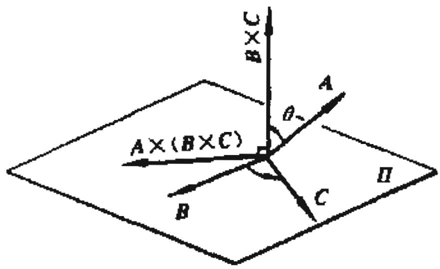


图 A－4 矢量的三重矢积

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\\
&= (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}\\
&= -\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\\
&= -(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{C}.
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

从解析表达式(A.9)来看(A.10)式的成立就更显然了。

最后提请注意：在 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三个矢量中有任意两个平行或反平行时，三重标积为 0.

（2）三重矢积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

这三重积是个矢量。矢积 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 组成的平面 Π 垂直，而 $\boldsymbol{A}$ 与它的矢积又回到 Π 平面内。故矢量 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 共面（见图 A－4）。从而前者是后面二者的线性组合：$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=a_1\boldsymbol{B}+a_2\boldsymbol{C}$. 用矢量的解析表达式可以直接验证，$a_1=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$，$a_2=-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，亦即存在列恒等式：

$$
\boxed{\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}.}
\tag{A.11}
$$

这是有关这三重积最重要的恒等式。

4. 矢量的镜像反射对称性　极矢量和轴矢量

对称性原理是普遍的原理，它统帅着自然界各个领域，在当代物理学中有着广泛应用。有关对称性和对称性原理，请参阅《新概念物理教程·力学》第三章 §5。简言之，一个系统在任何操作或变换下的不变性，都是"对称性"，例如绕固定轴旋转的不变性是轴对称性，绕固定点旋转的不变性是球对称性，沿特定方向平移的不变性是平移对称性，等等。在对称的条件下必然有对称的结果，例如点电荷具有球对称性，故电场的分布必然是球对称的，这便是"对称性原理"。在普通物理的各门课中电磁学里对称性原理的应用特别突出 。

除旋转、平移等操作外，还有一种几何变换具有特殊的重要作用，即"空间反射"操作，在空间反射变换下的不变性叫做镜像对称性。

如图 A-5 所示，在镜面 Π 前取一右手坐标系 $Oxyz$，它在镜面后成的像为左手坐标系 $O'x'y'z'$. 如果 x 轴和 y 轴与 Π 平行，z 轴与之垂直，则 x' 轴、y' 轴分别与 x 轴、y 轴平行，z' 轴与 z 轴反平行。这便是镜像反射操作或镜像反射变换。

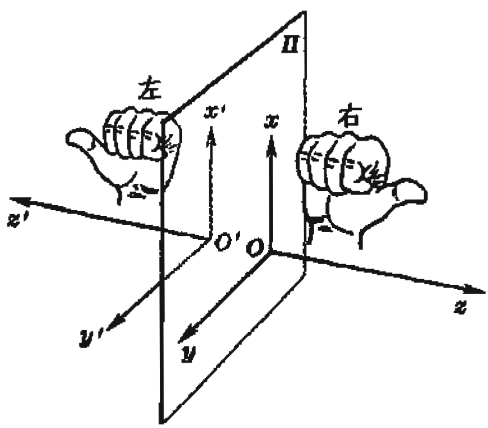


图 A－5 坐标系与极矢量的镜像变换

物理学中有各种矢量，它们在镜像反射操作下怎样变换？对于位矢 $\boldsymbol{r}$ 来说，这是清楚的：与镜面 Π 垂直的分量反向，平行分量不变。在电磁学中与 $\boldsymbol{r}$ 具有相同变换规律的有电场强度 $\boldsymbol{E}$、电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 等。但磁感应强度 $\boldsymbol{B}$、磁矩 $\boldsymbol{m}$ 等矢量在空间反射操作下服从不同的变换规律。在空间反射操作下，小线圈里的电流的变换如图 A－6 所示，从而按照右手定则磁感应强度 $\boldsymbol{B}$、磁矩 $\boldsymbol{m}$ 等矢量与镜面垂直的分量不变，平行的分量却反向。通常把在空间反射变换下服从前

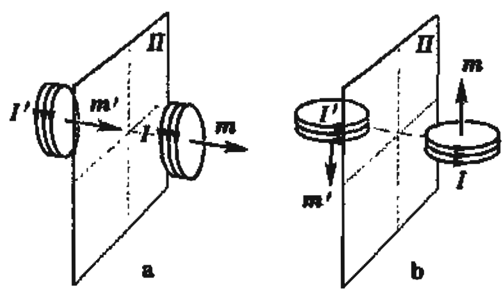


图 A－6 轴矢量的镜像变换

一类变换规律的矢量叫做极矢量，后一类的叫做轴矢量。

应指出，两个极矢量叉乘，得到的是轴矢量。譬如矢量 $\boldsymbol{a}(a_x,a_y,a_z)$ 和 $\boldsymbol{b}(b_x,b_y,b_z)$ 都是极矢量，$\boldsymbol{c}(c_x,c_y,c_z)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是它们的叉乘：

$$\begin{cases} c_x=a_y\,b_z-a_z\,b_y, \\ c_y=a_z\,b_x-a_x\,b_z, \\ c_z=a_x\,b_y-a_y\,b_x. \end{cases}$$

取 z 轴沿镜面的法向。在镜像变换下

$$\begin{cases} \overline{a}_x=a_x, \quad \overline{a}_y=a_y, \quad \overline{a}_z=-a_z; \\ \overline{b}_x=b_x, \quad \overline{b}_y=b_y, \quad \overline{b}_z=-b_z. \end{cases}$$

而

$$\begin{cases} \overline{c}_x=\overline{a}_y\,\overline{b}_z-\overline{a}_z\,\overline{b}_y=-a_y\,b_z+a_z\,b_y=-c_x, \\ \overline{c}_y=\overline{a}_z\,\overline{b}_x-\overline{a}_x\,\overline{b}_z=-a_z\,b_x+a_x\,b_z=-c_y, \\ \overline{c}_z=\overline{a}_x\,\overline{b}_y-\overline{a}_y\,\overline{b}_x=a_x\,b_y-a_y\,b_x=c_z. \end{cases}$$

即 $\boldsymbol{c}(c_x,c_y,c_z)$ 是个轴矢量。

实际上许多轴矢量都能写成两个极矢量叉乘的形式。例如毕奥－萨伐尔公式(2.2)中

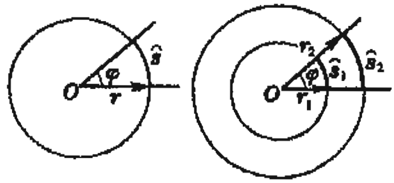
$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{(L_1)}\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\hat{\boldsymbol{r}}_{12}}{r_{12}^2}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{r}}_{12}$ 是极矢量，而由它们叉乘构成的 $\boldsymbol{B}$ 是轴矢量。

5. 立体角

我们知道，平面角 φ 的大小可以用“弧度”来量度。其办法如图A－7a所示，以 φ 角的顶点 O 为中心，任意长度 r 为半径作圆，则 φ 角所对的弧长 $\widehat{s}$ 与半径 r 之比即为 φ 角的弧度(rad)：

$$\varphi=\frac{\widehat{s}}{r}\mathrm{rad}.$$



a 弧度　　b $\widehat{s}$ 正比于 r

图A－7 平面角

因为整个圆周的长度为 $2\pi r$，故圆周角是 2π rad。半径 r 可以任意选取的根据如下：因为以不同的半径 r_1、r_2 作圆时，φ 角所对的弧长 $\widehat{s}_1$、$\widehat{s}_2$ 与半径成正比(见图A－7b)，它们的比值与 r 的选择无关。

现在来考虑三维空间的情形。如图A－8a，在球面上取一面元 $\mathrm{d}S$，由它的边缘上各点引直线到球心 O，这样构成一个锥体。这锥体的“顶角”是立体的，称为*立体角*。仿照用弧度量度平面角的办法，用 $\mathrm{d}S$ 的面积和半径 r 的平方之比来量度它在球心所张立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 的大小，这种量度方法所用的单位叫*球面度*(sr)：

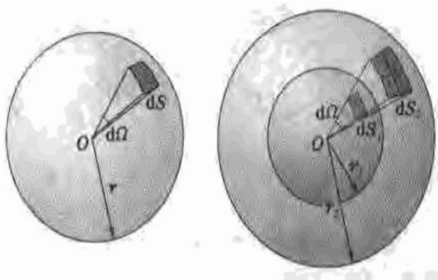
$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{r^2}\text{sr}.} \tag{A. 12}$$

因为整个球面的面积是 $4\pi r^2$，所以它所张的立体角是 4π rad.

这样量度立体角的方法也和半径 r 的选择无关。从图 A－8b 可以看出，以不同的半径 r_1、r_2 作同心球面 S_1、S_2。为了直观，不妨把立体角 $d\Omega$ 所对的面元 dS_1 和 dS_2 取成小方块。由于 dS_1 和 dS_2 的边长与半径成正比，所以它们的面积与半径的平方成正比，即

$$\boxed{\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}},$$

这个比值与半径的选择无关。



a 球面度　　b dS 正比于 r^2

图 A－8 立体角

在一般的情形里，人们需要讨论面元 dS 对任意顶点 O 所张的立体角 $d\Omega$，如图 A－9 所示。这时 O 并不是球心，dS 到 O 的联线并不与它垂直。如果它是斜的，应计算它在垂直径矢方向的投影面积 $dS^* = dS\cos\theta$，这里 θ 是 dS 的法线与径矢之间的夹角。为了把上述关系表达得更简洁，我们可以引进面元矢量 $d\boldsymbol{S}$ 的概念：在面元 dS 的法线方向取一单位矢量 $\boldsymbol{n}$，面元矢量定义为 $d\boldsymbol{S} \equiv dS\boldsymbol{n}$，即 $d\boldsymbol{S}$ 的大小等于 dS，方向沿法向 $\boldsymbol{n}$. 这样一来，立体角的公式（A. 12）推广为：

$$\boxed{d\Omega = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot d\boldsymbol{S}}{r^2}}, \tag{A. 13}$$

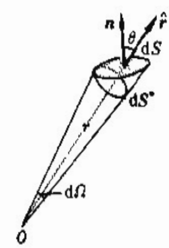


图 A－9 立体角的矢量表示

式中 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 为单位径矢。

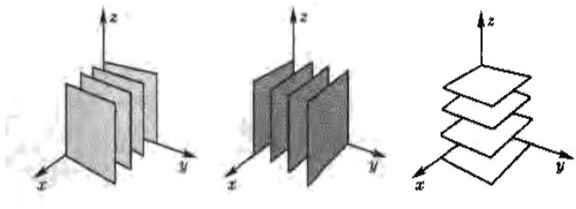
6. 一般正交曲线坐标系的概念

除直角坐标系外，在物理学中还常常根据被研究物体的几何形状，采用其它的坐标系，其中用到最多的是柱坐标系和球坐标系。

任何描述三维空间的坐标系都要有三个独立的坐标变量 u_1、u_2、u_3，例如在直角坐标系中 $u_1 = x$，$u_2 = y$，$u_3 = z$. 方程式

$$\begin{cases} u_1 = 常量, \\ u_2 = 常量, \\ u_3 = 常量, \end{cases} \tag{A. 14}$$

代表三组曲面(或平面),称为坐标面。例如在直角坐标系中的坐标面就是分别与 x、y、z 轴垂直的三组平行平面(见图 A－10),一般坐标面是曲面。



a　x = 常量　　　b　y = 常量　　　c　z = 常量

图 A－10 直角坐标系的坐标面

若三组坐标面在空间每一点正交,则坐标面的交线(一般是曲线)也在空间每点正交(图 A－11),这种坐标系叫做正交曲线坐标系。在空间每点 P 可沿坐标面的三条交线方向各取一个单位矢量(矢量指向 u_1、u_2、u_3 增加的方向,顺序 $1\to2\to3$ 满足右旋法则),这三个矢量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 叫做坐标系的单位基矢。在直角坐标系中的单位基矢通常写作 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$,它们的方向是不变的。但在一般正交曲线坐标系中 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 的方向可能逐点变化,它们只构成局部的正交右旋系。

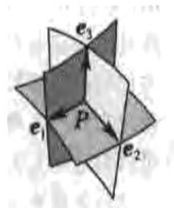


图 A－11 单位基矢

沿三个基矢的线段元 $\mathrm{d}l_1$、$\mathrm{d}l_2$、$\mathrm{d}l_3$ 分别与三坐标变量的微分 $\mathrm{d}u_1$、$\mathrm{d}u_2$、$\mathrm{d}u_3$ 成正比:

$$\begin{cases} \mathrm{d}l_1 = h_1\,\mathrm{d}u_1, \\ \mathrm{d}l_2 = h_2\,\mathrm{d}u_2, \\ \mathrm{d}l_3 = h_3\,\mathrm{d}u_3. \end{cases} \tag{A.15}$$

例如在直角坐标系中 $h_1=h_2=h_3=1$, $\mathrm{d}l_1=\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}l_2=\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}l_3=\mathrm{d}z$,但在一般坐标系中 h_1、h_2、h_3 不仅不一定等于 1,而且还可能是坐标变量 u_1、u_2、u_3 的函数(参见下文)。

7. 柱坐标系

柱坐标系相当于把直角坐标系中的 x、y 换为二维极坐标 ρ、φ,同时保留 z 轴(见图 A－12)。柱坐标变量 $u_1=\rho$、$u_2=\varphi$、$u_3=z$ 与直角坐标变量 x、y、z 的变换关系如下:

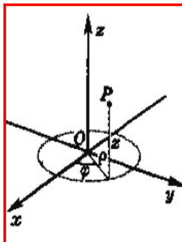


图 A－12 柱坐标系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases} \tag{A.16}$$

柱坐标系三个变量的取值范围是

$$\boxed{0 \leqslant \rho < +\infty,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\quad -\infty < z < +\infty.} \tag{A.17}$$

柱坐标系的坐标面为

(i) ρ = 常量，这是以 z 轴为轴线的圆柱面（图 A－13a），

(ii) φ = 常量，这是通过 z 轴的半平面（图 A－13b），

(iii) z = 常量，这是与 z 轴垂直的平面（图 A－13c）。

三组坐标面彼此正交，从而三个基矢 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_\varphi$，$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_z$ 彼此正交。一个矢量在柱坐标系中的表示式是

$$\boldsymbol{A} = A_\rho \boldsymbol{e}_\rho + A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + A_z \boldsymbol{e}_z, \tag{A.18}$$

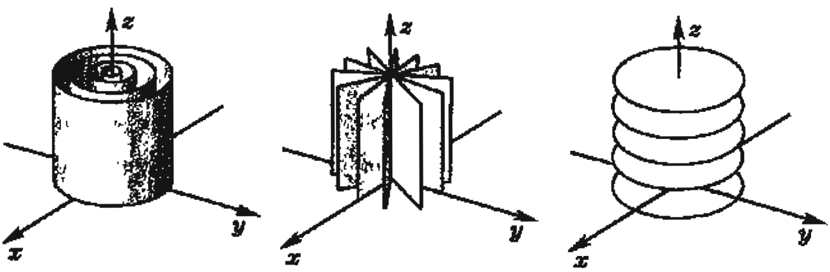
式中 A_ρ、A_φ、A_z 分别称为 $\boldsymbol{A}$ 的 ρ 分量、φ 分量和 z 分量。

在柱坐标系中沿基矢方向的三个线段元为

$$\underline{\mathrm{d}l_\rho = \mathrm{d}\rho,\quad \mathrm{d}l_\varphi = \rho\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}l_z = \mathrm{d}z;} \tag{A.19}$$

即

$$h_\rho = 1,\quad h_\varphi = \rho,\quad h_z = z. \tag{A.20}$$



a　ρ = 常量　　b　φ = 常量　　c　z = 常量

图 A－13 柱坐标系的坐标面

由 ρ、φ、$\varphi+\mathrm{d}\varphi$、$z$、$z+\mathrm{d}z$ 六个坐标面围成的曲边六面体上柱面元的面积是（见图 A－14 中有阴影的面元）

$$\boxed{\mathrm{d}S = \mathrm{d}l_\varphi \mathrm{d}l_z = \rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z,} \tag{A.21}$$

这体积元的体积为

$$\boxed{\mathrm{d}V = \mathrm{d}l_\rho \mathrm{d}l_\varphi \mathrm{d}l_z = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z.} \tag{A.22}$$

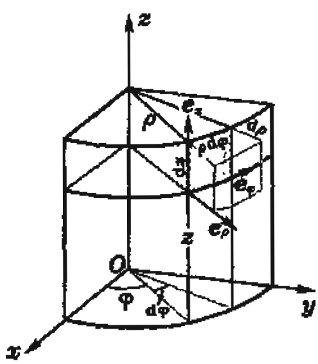


图 A－14 柱坐标系的面元与体积元

8. 球坐标系

球坐标系的三个坐标变量是径矢的长度 r、径矢与 z 轴的夹角 θ 和径矢在 xy 面上的投影与 x 轴的夹角 φ（见图 A－15）。球坐标变量 $u_1=r$、$u_2=\theta$、$u_3=\varphi$ 与直角坐标变量 x、y、z 的变换关系如下：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{A.23}$$

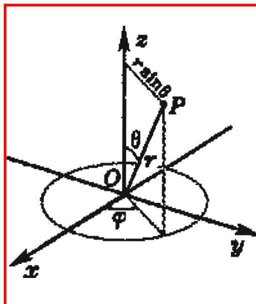


图 A－15 球坐标系

球坐标系三个变量的取值范围是

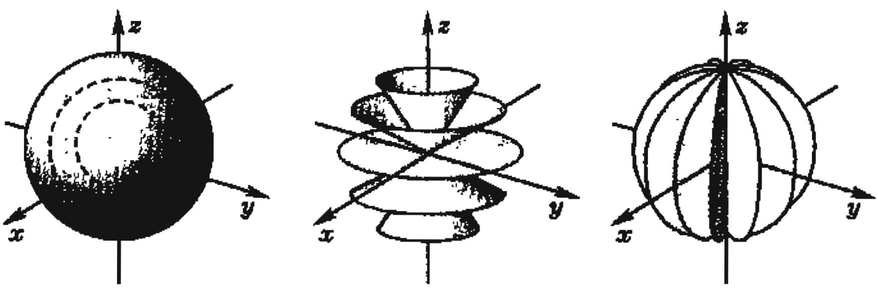
$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{A.24}$$

球坐标系的坐标面为

(i) r = 常量，这是以原点为中心的球面（图 A－16a），

(ii) θ = 常量，这是以原点为中心的圆锥面（图 A－16b），

(iii) φ = 常量，这是通过 z 轴的半平面（图 A－16c）。



a r = 常量　　b θ = 常量　　c φ = 常量

图 A－16 球坐标系的坐标面

三组坐标面彼此正交，从而三个基矢 $e_1 = e_r$、$e_2 = e_\theta$、$e_3 = e_\varphi$ 彼此正交。一个矢量在球坐标系中的表示式是

$$A = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\varphi e_\varphi, \tag{A.25}$$

A_r、A_θ、A_φ 分别称为 A 的 r 分量、θ 分量和 φ 分量。

在球坐标系中沿基矢方向的三个线段元为

$$dl_r = dr, \quad dl_\theta = r d\theta, \quad dl_\varphi = r\sin\theta d\varphi; \tag{A.27}$$

即

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\sin\theta. \tag{A.28}$$

r、$r+dr$、θ、$\theta+d\theta$、φ、$\varphi+d\varphi$ 六个坐标面围成的曲边六面体上柱面元的面积是（见图 A－17 中有阴影的面元）

$$\boxed{dS = dl_\theta dl_\varphi = r^2\sin\theta d\theta d\varphi} \quad (A.29)$$

这体积元的体积为

$$\boxed{\begin{aligned} dV &= dl_r dl_\theta dl_\varphi \\ &= r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi. \end{aligned}} \quad (A.30)$$

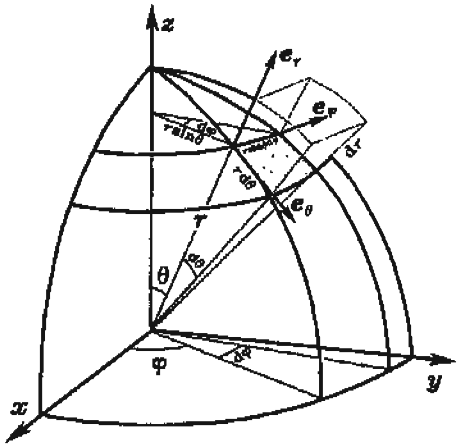


图 A－17 球坐标系的面元与体积元

例题 1 求整个球面对中心所张的立体角。

解： 立体角 $\Omega = \oiint\limits_{(球面)} \frac{dS}{r^2}$

$= \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi.$ ▌

例题 2 求半径为 R 的球体的体积。

解： 体积 $V = \iiint\limits_{(球体)} dV$

$= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}.$ ▌

附录 B　矢量分析提要

1. 标量场和矢量场

(1) 标量场

所谓标量场，就是在空间各点存在着的一个标量 Φ，它的数值是空间位置的函数。在一般的情况下，标量场是分布在三维空间里的。若采用三维的直角坐标 (x,y,z) 来描写空间各点的位置，则 Φ 是 x、y、z 的三元函数，即

$$\Phi = \Phi(x,y,z), \tag{B.1}$$

如果标量 Φ 指的是气压 P，这个标量场就叫做气压场；如果标量 Φ 指的是温度 T，这个标量场就叫做温度场，等等。在电学中最重要的标量场例子是电势。

研究任何标量场时，人们常常引入"等值面"的概念。所谓等值面，就是下列方程式的轨迹：

$$\Phi(x,y,z) = \text{常量}。 \tag{B.2}$$

（在二维空间里轨迹是曲线，所以叫"等值线"。在三维空间里轨迹形成曲面，所以叫"等值面"。）如气压场中的等压面，电场中的等势面，都是等值面。

(2) 矢量场

所谓矢量场，就是在空间各点存在着的一个矢量，它的大小和方向是空间位置的函数。譬如我们用直角坐标 (x,y,z) 来描写空间各点的位置，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 是 x、y、z 的三元函数，即

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x,y,z).} \tag{B.3}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 还可以分解成三个分量 A_x、A_y、A_z，每个分量都是 x、y、z 的函数，所以若将(B.3)式写成分量形式的话，它实际包含了三个函数式：

$$\boxed{\begin{cases} A_x = A_x(x,y,z), \\ A_y = A_y(x,y,z), \\ A_z = A_z(x,y,z). \end{cases}} \tag{B.4}$$

如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 指的是流体的流速 $\boldsymbol{v}$，这矢量场就叫做流速场；如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 指的是电场强度 $\boldsymbol{E}$，这矢量场就叫做电场，● 等等。

● 这里所说的"电场"和其它矢量场（如流速场）一样，是个偏重数学的概念。物理中所说的"电场"还具有不同的含义，它常常指的是一种物理实在，是物质存在的一种形式。

研究任何矢量场时，人们常引入“场线”和“场管”的概念。所谓场线，就是这样一些有方向的曲线，其上每一点的切线方向都和该点的场矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向一致。由一束场线围成的管状区域，叫做场管。如流速场中的流线，电场中的电场线都是场线，流速场中的流管，电场中的电场管都是场管，等等。

2. 标量场的梯度

(1) 定义

平常所谓“梯度”是指一个空间位置函数的变化率，在数学上就是它的微商。对于多元函数，它对每个空间坐标变量都有一个偏微商，如 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$、$\frac{\partial \Phi}{\partial y}$、$\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ 等。这些偏微商表示标量场 $\Phi(x,y,z)$ 沿三个坐标方向的变化率。如果要问 $\Phi(x,y,z)$ 沿任意方向 $\Delta \boldsymbol{l}$ 的变化率是多少呢？如图 B－1 所示，P 是标量场中的某个点，设此点标量场的数值是 $\Phi(P)$，由 P 点引一个位移矢量 $\Delta \boldsymbol{l}$，到达附近的另一点 Q，设 Q 点标量场的数值为 $\Phi(Q)=\Phi(P)+\Delta\Phi$，令 Q 点向 P 点趋近，$\Delta \boldsymbol{l}\to 0$，则标量场沿 $\Delta \boldsymbol{l}$ 方向的变化率为

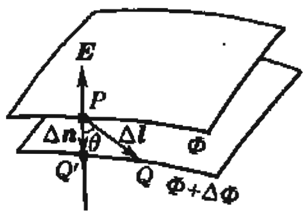


图 B－1 标量场的梯度

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta \Phi}{\Delta l}, \tag{B.5}$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ 叫做标量场 Φ 在 P 点沿 $\Delta \boldsymbol{l}$ 方向的方向微商。

显然，在同一地点 P，Φ 沿不同方向的方向微商一般说来是不同的。那么沿哪个方向的方向微商最大呢？如图 B－1 所示，作通过 P、Q 两点 Φ 的等值面，在两等值面上标量场的数值分别是 $\Phi(P)$ 和 $\Phi(P)+\Delta\Phi$. 在局部范围看来，两等值面近似平行。通过 P 点引等值面的法线与另一等值面交于 Q' 点。法线方向的位移矢量 $\Delta \boldsymbol{n}=\overrightarrow{PQ'}$ 是两等值面间最短的位移矢量，其它方向的位移矢量都比 $\Delta \boldsymbol{n}$ 长。例如对于上述位移矢量 $\Delta \boldsymbol{l}$，设它与 $\Delta \boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ，则由图 B－1 不难看出，

$$\Delta n=\Delta l\cos\theta\leqslant\Delta l,\quad 或\quad \Delta l=\frac{\Delta n}{\cos\theta}\geqslant\Delta n.$$

沿 $\Delta \boldsymbol{n}$ 方向的方向微商为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=\lim_{\Delta n\to 0}\frac{\Delta \Phi}{\Delta n}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta \Phi}{\Delta l}\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\partial \Phi}{\partial l}\frac{1}{\cos\theta}\geqslant\frac{\partial \Phi}{\partial l}. \tag{B.6}$$

由此可见，沿 $\Delta \boldsymbol{n}$ 方向的方向微商比任何其它方向的方向微商都大。

标量场的梯度定义为这样一个矢量，它沿方向微商最大的方向（即 $\Delta \boldsymbol{n}$ 方向），数值上等于这个最大的方向微商$\left(即\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)$。标量场 Φ 的梯度通常记

作 gradΦ 或 $\nabla\Phi$. 根据上面的分析可知，Φ 的梯度的方向总是与 Φ 的等值面垂直的。

标量场的梯度是个矢量场。例如，电场中电势 U 是个标量场，它的负梯度等于场强 $\boldsymbol{E}$，是个矢量场。

(2) 坐标表示式

在正交曲线坐标系中标量场梯度的一般表示式为

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial l_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial l_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial l_3}\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial U}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3. \tag{B.7}$$

u_1、u_2、u_3、l_1、l_2、l_3、h_1、h_2、h_3 的含义见附录 A 中 6-8 节。在各种坐标系中的具体表示式如下：

直角坐标系
$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{B.8}$$

柱坐标系
$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_z, \tag{B.9}$$

球坐标系
$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{B.10}$$

3. 矢量场的通量和散度 高斯定理

(1) 定义

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 通过一个截面 S 的通量 Φ_A 定义为下列面积分：

$$\Phi_A = \iint_{(S)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{(S)} A\cos\theta\, dS, \tag{B.11}$$

式中 θ 为 $\boldsymbol{A}$ 与面元 dS 的法线 $\boldsymbol{n}$ 之间夹角，$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$. 如流速场中的流量，电场和磁场中的电通量、磁通量，都属于"通量"的概念。

令 S 为一闭合曲面，它包含的体积为 ΔV，设想 S 面逐渐缩小到空间某点 P. 用 Φ_A 代表矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在闭合面 S 上的通量：

$$\Phi_A = \oiint_{(S)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

当 $\Delta V \to 0$，Φ_A 也趋于 0。若两者之比有一极限，则这极限值为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 P 点的散度，记作 div$\boldsymbol{A}$ 或 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi_A}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_{(S)}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}. \tag{B.12}$$

矢量场的散度是个标量场。

(2) 散度的坐标表示式

上述散度的定义式(B. 12)是与坐标的选取无关的，下面我们来研究它的直角坐标表示式。如图 B－2，以 P 点为中心取一个棱边分别与 x、y、z 轴平行的平行六面体，设边长分别为 Δx、Δy、Δz. 现在来计算通过这平行六面体表面的通量。

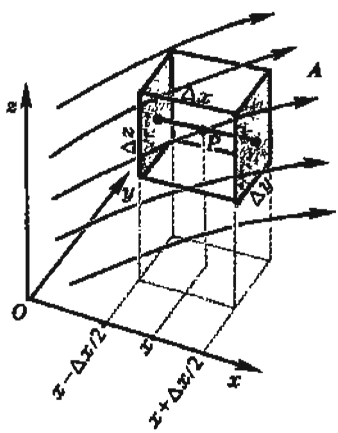


图 B－2 散度直角坐标表示式的推导

先考虑与 x 轴垂直的一对表面。它们的面积都是 $\Delta y\Delta z$. 设 P 点的坐标为 x、y、z，则这一对表面的 x 坐标分别为 $x-\Delta x/2$ 和 $x+\Delta x/2$，从而在这一对表面上矢量场分别为 $\boldsymbol{A}(x-\Delta x/2,y,z)$ 和 $\boldsymbol{A}(x+\Delta x/2,y,z)$. 在计算通量的时候，只有与表面垂直的分量，即 A_x 分量起作用，它们在两表面上的数值分别是 $A_x(x-\Delta x/2,y,z)$ 和 $A_x(x+\Delta x/2,y,z)$，于是穿过这一对表面的通量分别是 $A_x(x-\Delta x/2,y,z)\Delta x\Delta y$ 和 $A_x(x+\Delta x/2,y,z)\Delta x\Delta y$，二者一进一出，它们的代数和为

$$\Phi_x=A_x(x+\Delta x/2,y,z)\Delta y\Delta z-A_x(x-\Delta x/2,y,z)\Delta y\Delta z.$$

围绕 P 点将 A_x 按泰勒级数展开：

$$A_x(x\pm\Delta x/2,y,z)=A_x(x,y,z)\pm\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}+\text{高次项},$$

于是

$$\Phi_x=\left[A_x(x,y,z)+\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta y\Delta z$$
$$-\left[A_x(x,y,z)-\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta y\Delta z+\text{高次项},$$

即

$$\Phi_x=\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z+\text{高次项}.$$

同理可以得到穿过与 y 轴和 z 轴垂直的两对表面的通量代数和分别为

$$\Phi_y=\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z+\text{高次项},$$

$$\Phi_z=\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z+\text{高次项}.$$

最后我们得到穿过平行六面体六个表面的通量代数总和为

$$\Phi = \underset{(平行六面体表面)}{\oint\!\!\oint} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Phi_x+\Phi_y+\Phi_z$$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z+\text{高次项},$$

因为平行六面体的体积 $\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$，按照散度的定义(B.12)式，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\!\!\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z+\text{高次项}}{\Delta x\Delta y\Delta z},$$

即

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}.} \tag{B.13}$$

这就是散度的直角坐标表示式。下面我们不加推导地写出散度在其它常用坐标中的表示式，以备参考。

柱坐标系
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{B.14}$$

球坐标系
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}. \tag{B.15}$$

(3) 高斯定理

在矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 中取任意闭合面 S，用 V 代表它所包围的体积。如图 B－3a，用一曲面 D(下面叫它“隔板”)把体积 V 及其表面 S 分为两部分：V_1 和 V_2，以及 S_1' 和 S_2'，这里 $V_1+V_2=V$，$S_1'+S_2'=S$，体积 V_1 的全部表面为 $S_1'+D=S_1$，体积 V_2 的全部表面为 $S_2'+D=S_2$. 穿过 S_1 和 S_2 的通量分别是

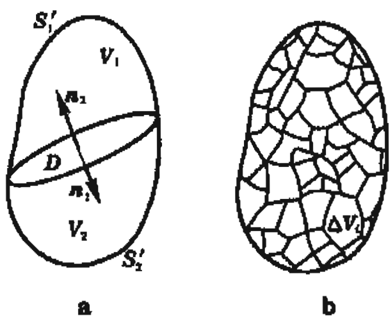


图 B－3 高斯定理的证明

$$\Phi_{A1} = \underset{(S_1)}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 = \underset{(S_1')}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1+\underset{(D)}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1,$$

$$\Phi_{A2} = \underset{(S_2)}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \underset{(S_2')}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2+\underset{(D)}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2.$$

在上两式中右端的第二项 $\underset{(D)}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$ 和 $\underset{(D)}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2$ 虽然都是矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过“隔板”D 的通量，但对于闭合曲面 S_1 和 S_2 来说，在 D 上的外法线 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 方向相反，所以这两项绝对值相等，正负号相反。于是

$$\Phi_{A1}+\Phi_{A2} = \underset{(S_1)}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1+\underset{(S_2)}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \underset{(S)}{\oint\!\!\oint}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Phi_A.$$

这就是说，将闭合曲面 S 所包围的空间用"隔板"隔开后，穿过两部分通量的代数和不变，它仍等于穿过 S 的总通量 Φ_A.

以上结论不难推广到把 V 分割成更多块的情形（见图 B－3b）。这时我们有

$$\Phi_A = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{Ai}. \tag{B.16}$$

如果把体积 V 无限分割下去，使每块体积 ΔV_i 都趋于 0，则按照散度的定义，

$$\Phi_{Ai} = \oint\!\!\!\!\oint_{(S_i)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_i = (\nabla\cdot\boldsymbol{A})_i\,\Delta V_i,$$

其中 $(\nabla\cdot\boldsymbol{A})_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的散度在体积元 ΔV_i 内的数值。把上式代入式(B.16)：

$$\Phi_A = \oint\!\!\!\!\oint_{(S)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \approx \sum_{i=1}^{n} (\nabla\cdot\boldsymbol{A})_i\,\Delta V_i,$$

取极限后右端变为体积分：

$$\boxed{\oint\!\!\!\!\oint_{(S)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{(V)} \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V.} \tag{B.17}$$

(B.17) 式表明：矢量场通过任意闭合曲面 S 的通量等于它所包围的体积 V 内散度的积分。这就是矢量场论中的高斯定理。

高斯定理是矢量场论中重要的定理之一，利用它可以把面积分化为体积分，或反过来把体积分化为面积分。应注意，这是一个数学的定理，不要和第一章 §4 中静电场的高斯定理混淆！静电场高斯定理成立的前提是库仑定律（即平方反比律），而这个数学上的高斯定理对场的物理规律没有要求，只要求场函数是连续可微的。

4. 矢量场的环量和旋度　斯托克斯定理

(1) 定义

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭合回路的线积分称为环量，用 Γ_A 表示环量，则有：

$$\boxed{\Gamma_A = \oint_{(L)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.} \tag{B.18}$$

令 ΔS 为闭合曲线 L 包围的面积，$\boldsymbol{n}$ 为 ΔS 的右旋单位法向矢量。设想回路 L 逐渐缩小，最后缩到空间某点 P. 当 $\Delta S\rightarrow 0$ 时，Γ_A 也趋于 0。若两者之比有一极限，则这极限值为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度（它是个矢量）在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影。$\boldsymbol{A}$ 的旋度记作 curl$\boldsymbol{A}$ 或 rot$\boldsymbol{A}$，或 $\nabla\times\boldsymbol{A}$. 上述定义可写作

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_n = \lim_{\Delta S\rightarrow 0}\frac{\Gamma_A}{\Delta S} = \lim_{\Delta S\rightarrow 0}\frac{\oint_{(L)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}. \tag{B.19}$$

矢量场的旋度也是个矢量场。

(2) 旋度的坐标表示式

下面我们来研究旋度的直角坐标表示式。先看旋度的 x 分量。如图 B－4a，取一个与 x 轴垂直的矩形回路 L_x，它的边分别与 y、z 轴平行，边长为 Δy 和 Δz. 取回路 L_x 的环绕方向，使它的右旋法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 指向 $+x$ 方向。设回路的中心 P 点的坐标为 x、y、z，则在 1、2、3、4 四边上矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿回路元的平行分量是 $A_z(x,y+\Delta y/2,z)$，$-A_y(x,y,z+\Delta z/2)$，$-A_z(x,y-\Delta y/2,z)$，$A_y(x,y,z-\Delta z/2)$. 所以

$$\oint_{(L_x)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = A_z(x,y+\Delta y/2,z)\Delta z - A_z(x,y-\Delta y/2,z)\Delta z - A_y(x,y,z+\Delta z/2)\Delta y - A_y(x,y,z-\Delta z/2)\Delta y,$$

围绕 P 点将 A_y、A_z 按泰勒级数展开：

$$A_y(x,y,z\pm\Delta z/2) = A_y(x,y,z) \pm \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2} + \text{高次项},$$

$$A_z(x,y\pm\Delta y/2,z) = A_z(x,y,z) \pm \frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2} + \text{高次项},$$

代入前式，得

$$\oint_{(L_x)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta y \Delta z + \text{高次项}.$$

因为回路 L_x 包围的矩形面积为 $\Delta S = \Delta y \Delta z$，按照旋度的定义(B. 19) 式，得

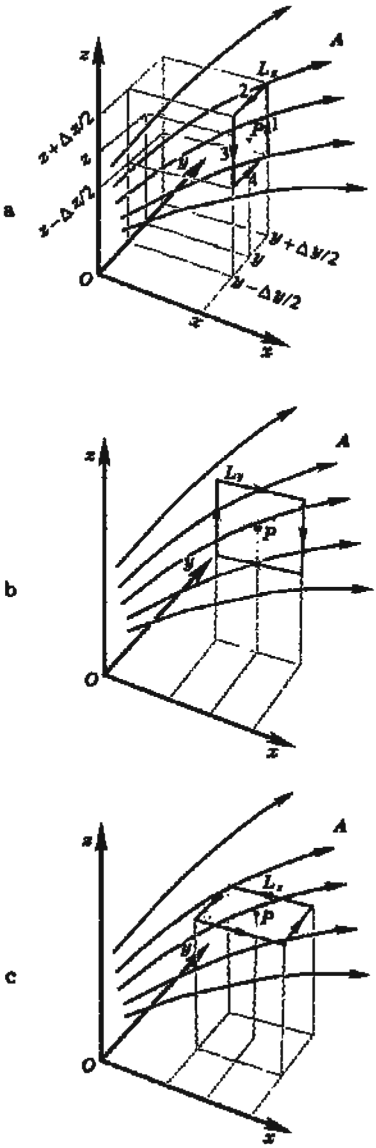


图 B－4 旋度直角坐标表示式的推导

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_x = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\oint_{(L_x)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \frac{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z + \text{高次项}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \qquad \text{(B. 20)}$$

同理可以得到旋度的 y、z 两个分量(参见图 B－4b 和 c)。现将全部分量的直角坐标表示罗列如下：

$$\begin{cases} (\nabla\times\boldsymbol{A})_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}, \\ (\nabla\times\boldsymbol{A})_y = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}, \\ (\nabla\times\boldsymbol{A})_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}. \end{cases} \tag{B.21}$$

旋度矢量的直角坐标表示式为❶

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{B.22}$$

下面不加推导地给出旋度在其它常用坐标中的表示式，以备参考。

柱坐标系

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z, \tag{B.23}$$

球坐标系

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{A} = &\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi. \end{aligned} \tag{B.24}$$

(3) 斯托克斯定理

在矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 中取任意闭合回路 L(见图 B－5a)。现用一条曲

---

❶ 我们已多次使用了符号“∇”，但一直是将它和一个场函数 Φ 或 $\boldsymbol{A}$ 连起来写，而未说明它单独代表什么。其实 ∇ 是个矢量性质的算符，叫做*劈形算符*或*纳布拉算符*，它的直角坐标表示式为

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

我们可以把 ∇ 形式地“乘”在一个标量场 Φ 上，成为它的梯度 $\nabla\Phi$，也可以把 ∇ 形式地“点乘”或“叉乘”在一个矢量场 $\boldsymbol{A}$ 上，成为它的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 或旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$。不难验证，这样做的结果，我们得到的正是前面的(B.7)、(B.13)和(B.22)式。由此也可以看出，把梯度、散度和旋度写成 $\nabla\Phi$、$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$、$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的依据。

线搭在回路 L 上的 M、N 两点之间。M 和 N 把 L 分割为 L_1' 和 L_2' 两部分，L_1' 和 MN 组成新的小闭合回路 L_1，L_2' 和 NM 组成新的小闭合回路 L_2，L_1 和 L_2 的环绕方向一致。沿 L_1 和 L_2 的环量分别是

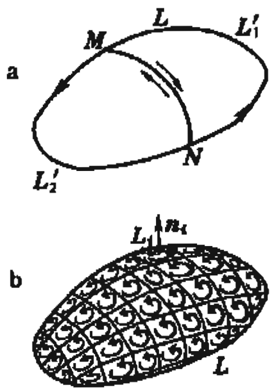


图 B－5 斯托克斯定理的证明

$$\Gamma_{A1} = \oint_{(L_1)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{(L_1')} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_M^N \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

$$\Gamma_{A2} = \oint_{(L_2)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{(L_2')} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_N^M \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

故

$$\Gamma_{A1} + \Gamma_{A2} = \int_{(L_1')} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{(L_2')} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{(L)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \Gamma_A,$$

即矢量在闭合回路 L 上的环量等于分割出来的两个闭合回路 L_1 和 L_2 上环量之和。这个结论不难推广到更多个小回路。如图 B－5b，用许多曲线，像织成的网子一样绷在回路 L 的"框架"上，则每个网眼是一小闭合回路 L_i。令它们的环绕方向都一致，用 Γ_{Ai} 代表 L_i 上的环量，则有

$$\Gamma_A = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{Ai}. \tag{B.25}$$

这就是说，L 上的环量是由各局部的环量累积起来的。

如果把上述分割过程无限继续下去，使每个小回路的面积 ΔS_i 都趋于 0，则按照旋度的定义，

$$\Gamma_{Ai} = \oint_{(L_i)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\nabla\times\boldsymbol{A})_{ni}\Delta S_i = (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i,$$

这里 $(\nabla\times\boldsymbol{A})_{ni}$ 代表旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 在 ΔS_i 的右旋单位法线矢量 $\boldsymbol{n}_i$ 上的投影，$\Delta\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{n}_i\,\Delta S_i$ 是矢量面元。代入(B.25)式，得

$$\Gamma_A = \oint_{(L)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{n} (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i.$$

取极限后，右端变为面积分：

$$\boxed{\oint_{(L)} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_{(S)} (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.} \tag{B.26}$$

(B.26)式表明：*矢量场在任意闭合回路 L 上的环量等于以它为边界的曲面 S 上旋度的积分。*这就是斯托克斯定理。

斯托克斯定理和高斯定理一样，也是矢量场论中的一个重要定理。利用

它可以把线积分化为面积分，或反过来把面积分化为线积分。

5. 一些公式

下面再给出一些常用的公式，推导从略。读者可用直角坐标表示式直接验证。

（1）场量乘积的微商公式

梯度

$$\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi), \tag{B.27}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}). \tag{B.28}$$

散度

$$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A}) = \nabla\Phi\cdot\boldsymbol{A} + \Phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}, \tag{B.29}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}. \tag{B.30}$$

旋度

$$\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A}) = \Phi\,\nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\Phi\times\boldsymbol{A}, \tag{B.31}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}). \tag{B.32}$$

其中 Φ、Ψ 是任意标量场，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是任意矢量场。[●]

（2）二阶微商的公式

$$\nabla\times\nabla\Phi = 0, \tag{B.33}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A} = 0, \tag{B.34}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla\cdot\nabla\boldsymbol{A}, \tag{B.35}$$

其中算符 $\nabla\cdot\nabla$ 常写作 ∇^2，叫做拉普拉斯算符。

6. 矢量场的类别和分解

（1）有散场和无散场

若一矢量场在空间某范围内散度为 0，我们就说它在此范围内无源，或它是无散场；若散度不为 0，则这矢量场是有源的，或它是有散场。

（B.34）式表明，任何矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 永远是个无散场。反之亦然，任何无散场 $\boldsymbol{B}$ 可以表示成某个矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0. \tag{B.36}$$

证明从略。

（2）有旋场和无旋场

若一矢量场在空间某范围内旋度为 0，我们就说它在此范围内无旋，或

● 在（B.27）和（B.31）式中出现 $(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$ 一类的项，它代表矢量场 $\boldsymbol{B}$ 和矢量场的梯度 $\nabla\boldsymbol{A}$ 的点乘，后者是个张量。

它是无旋场;若旋度不为 0,则这矢量场是有旋的,或它是有旋场。

(B.33) 式表明,任何标量场 Φ 的梯度 $\nabla\Phi$ 永远是个无旋场。反之亦然,任何无旋场 $\boldsymbol{A}$ 可以表成某个标量场 Φ 的梯度:

$$\boldsymbol{A}=\nabla\Phi,\quad \nabla\times\boldsymbol{A}=0. \tag{B.37}$$

Φ 为无旋场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数,故无旋场又称为势场。

(3) 谐和场

若一矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在某空间范围内既无散又无旋,则这矢量场称为谐和场。

因谐和场无旋,它也是势场:

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=0,\quad \boldsymbol{A}=\nabla\Phi,$$

又因它同时无散:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,$$

故

$$\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi=0. \tag{B.38}$$

上式叫做拉普拉斯方程,即谐和场的势函数满足拉普拉斯方程。

(4) 一般矢量场的分解

在普遍的情形下,一个矢量场 $\boldsymbol{A}$ 可以既是有旋的,又是有散的。在这种情况下 $\boldsymbol{A}$ 可以分解为两部分:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{势}+\boldsymbol{A}_{旋}, \tag{B.39}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{势}$ 是势场,即无旋场;$\boldsymbol{A}_{旋}$ 是无散的有旋场。但上述分解并不唯一,其中可以相差一个任意的谐和场。

现以电磁场为例,麦克斯韦方程组(6.10)中的(Ⅰ)、(Ⅱ)两式表明,在非恒定的情况下,电场既有散度,又有旋度。这时电场 $\boldsymbol{E}$ 可分解为势场和无散的有旋场:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{势}+\boldsymbol{E}_{旋}.$$

在恒定的状态下,$\nabla\times\boldsymbol{E}_{势}=0$, $\boldsymbol{E}_{旋}=0$,电场 $\boldsymbol{E}$ 可以写成某个势函数 Φ 的梯度,这势函数 Φ 正是电势 U 的负值,即

$$\boldsymbol{E}=-\nabla U.$$

麦克斯韦方程组(6.10)中的(Ⅲ)式表明,磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 永远是个无散场,故它可写作某个矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度,即

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{B.40}$$

这个 $\boldsymbol{A}$ 就是磁矢势。