第1题答案：

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的观察值，则似然函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}$$
$$=(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}(0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n),$$

取对数得 $\ln L = n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$

从而得对数似然方程

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解出 θ，得 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i},$$

从而得 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}_L=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

第2题答案：

2. 答案是：[4.412,5.588].

分析　这是一个已知方差，估计均值的问题. 由于 $1-\alpha=0.95$，查 $\Phi(\lambda)=1-\frac{\alpha}{2}=0.975$ 得到 $\lambda=1.96$，因此，置信区间为

$$\left[5-1.96\times\frac{0.9}{\sqrt{9}}, 5+1.96\times\frac{0.9}{\sqrt{9}}\right],$$

即[4.412,5.588].

第3题答案：

【命题目的】 考查求随机变量未知参数的矩估计量和极大似然估计.

【思路点拨】 先由分布函数求出概率密度，再根据求矩估计量和极大似然估计的标准方法进行讨论却可.

【详细解答】 (1) 由题设，总体 X 的分布函数为：

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\beta}}, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$$

则分布密度函数为：

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\beta x^{-\beta-1}, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$$

$$EX=\int_1^{+\infty}x\beta x^{-\beta-1}dx=\frac{\beta}{1-\beta}$$

令 $EX=\frac{\beta}{1-\beta}=\overline{X}$

$\therefore \beta$ 的矩估计量为：$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{1+\overline{X}}$

(2) 似然函数为：$L(x_1,\cdots,x_n,\beta)=f(x_1,\beta)f(x_2,\beta)\cdots f(x_n,\beta)$
$=\beta^n x_1^{-\beta-1}x_2^{-\beta-1}\cdots x_n^{-\beta-1}$

两边取对数有：$\ln L=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$$\frac{d\ln L}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\frac{d\ln L}{d\beta}=0\Rightarrow\beta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

于是得 β 的极大似然估计量为：$\hat{\beta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$

【易错辨析】 本题计算量较大，应注意计算的准确性.

【延伸拓展】 本题是基本题型，难度不大，有固定解法.

第4题答案：

单侧置信上限为 74.0351.

4. 构造枢轴量：$\hat{W}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{9S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$

$P\{\hat{W}>\chi^2_{1-\alpha}(9)\}=1-\alpha=0.95$

查表知，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$

$\therefore P\left(\sigma^2<\frac{9\times45^2}{3.325}\right)=0.95$

$\therefore \sigma$ 的单侧置信上限为：$\sqrt{\frac{9\times45^2}{3.325}}=74.035$ h.

第5题答案：

矩估计量为 $\overline{X}-\frac{1}{2}$，最大似然估计量为 $\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

第6题答案：

解 分别记两种固体燃料火箭推进器的燃烧率总体为 X_1 和 X_2，按题意 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中 μ_1,μ_2 未知，σ_1^2,σ_2^2 已知，两样本独立，此时有

$$\overline{X}_1-\overline{X}_2\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1),$$

因而有

$$P\left\{-z_{\alpha/2}<\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha.$$

在 { } 内的不等式中解出 $\mu_1-\mu_2$，得

$$P\left\{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right\}$$
$$=1-\alpha,$$

即得 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

今 $\sigma_1=\sigma_2=0.05$，$n_1=n_2=20$，$\overline{x}_1=18$，$\overline{x}_2=24$，$1-\alpha=0.99$，$\alpha/2=0.005$，$z_{0.005}=2.57$，得到 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为 0.99 的置信区间为

$$\left(18-24\pm2.57\sqrt{\frac{(0.05)^2}{20}+\frac{(0.05)^2}{20}}\right)$$
$$=(-6\pm0.04)=(-6.04,-5.96).$$

第7题答案：

解 (1) $E\left(c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right)=c\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}^2-2X_iX_{i+1}+X_i^2)$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}\{D(X_{i+1})+[E(X_{i+1})]^2-2E(X_i)E(X_{i+1})+D(X_i)+[E(X_i)]^2\}$$

$$=c(n-1)(\sigma^2+\mu^2-2\mu^2+\sigma^2+\mu^2)=2(n-1)\sigma^2c.$$

令 $2(n-1)\sigma^2c=\sigma^2$，得

$$c=\frac{1}{2(n-1)}.$$

(2) $E[(\overline{X})^2-cS^2]=E(\overline{X}^2)-cE(S^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2-c\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-c\sigma^2.$

令 $\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-c\sigma^2=\mu^2$，则得

$$c=\frac{1}{n}.$$

第8题答案：

解：(1) $L(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta,c)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(X_i-c)},X_i\geqslant c$

$$\ln L(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta,c)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(X_i-c)$$

$\frac{\partial\ln L}{\partial c}=\frac{n}{\theta}\neq0$，但 $c=\min(x_1,\cdots,x_n)=x_1$ 使 L 取最大值，按最大似然估计的定义，故 c 的最大似然估计为 $\hat{c}=x_1$.

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)}{\theta^2}\xlongequal{令}0$$

得 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\bar{x}-\hat{c}=\bar{x}-x_1$.

(2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{c}^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x-c}{\theta}}dx=\theta+c$

$$E(X^2)=\int_{c}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x-c}{\theta}}dx=\theta^2+(\theta+c)^2$$

令 $EX=\bar{x},E(X^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

那么 θ 和 c 的矩估计为 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\hat{c}=\bar{x}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$.

第9题答案：

解 先求均值 μ 的置信区间.

$$\bar{x}=1\,500,\sqrt{\frac{S^2}{n}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=6.325,$$

查附表 2(自由度$=10-1=9,\alpha=0.05$)得 $\lambda=2.262$，于是 $\lambda\sqrt{\frac{S^2}{n}}=14.3$，故 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是

$$(1\,500-14.3,1\,500+14.3).$$

再求标准差 σ 的置信区间. 由本章§6 中(6.6)式知 σ 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\lambda_2}},\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\lambda_1}}\right),$$

其中 λ_1,λ_2 是 $\chi^2(n-1)$的分位数，可由附表 3 查出. 本题中

$$\sum(x_i-\bar{x})^2=9\cdot S^2=3\,600.$$

对于自由度$=10-1=9$，查附表 3，得

$$P(\chi^2>2.70)=0.975,P(\chi^2>19.0)=0.025.$$

于是 $\lambda_1=2.70,\lambda_2=19.0.$

因此

$$\left(\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\lambda_2}},\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\lambda_1}}\right)=\left(\sqrt{\frac{3\,600}{19.0}},\sqrt{\frac{3\,600}{2.70}}\right)=(13.8,36.5).$$

第10题答案：

本题属于已知σ^2，估计μ的类型． μ的满足置信度为1—α的置信区间应为

$\left(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. 由题意

$u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1$，且$\sigma=\sqrt{8}$，n=36，故

$u_{\frac{\alpha}{2}}=2.12$，查表可得置信度1—α=0．966．