第七章　格与布尔代数

7.1 格与子格

7.2 特殊格

7.3 布尔代数

布尔十九世纪英国一位小学数学老师。1854年写《思维规律》一书，第一次向人们展示如何用数学的方法解决逻辑问题。

布尔代数又称为逻辑代数，运算数只有两个，基本运算只有三种，全部运算用真值表描述。

布尔代数提出八十多年没有得到应用。1938年美国数学家香农（Shannon）提出用布尔代数实现开关电路，才使得布尔代数成为数字电路的基础，所有的数学运算：加、减、乘、除、乘方、开方等，全部能转换成二值的布尔代数。

在现代互联网的搜引擎、三维动画的建模、程序设计的组合条件等方面， 布尔运算有着广泛的实际应用。

本节基本要求

1. 理解格的概念、性质

2. 理解两种定义格的等价性及其

相互转换

3. 会证明格的一些简单关系式。

格

- **定义7.1.1 格**

设$\langle S, \leqslant \rangle$是偏序集，如果$\forall x, y \in S$，$\{x, y\}$都有最小上界和最大下界，则称S关于$\leqslant$构成一个格.

- $x \vee y$表示x和y的最小上界（上确界）
- $x \wedge y$表示x和y的最大下界（下确界）

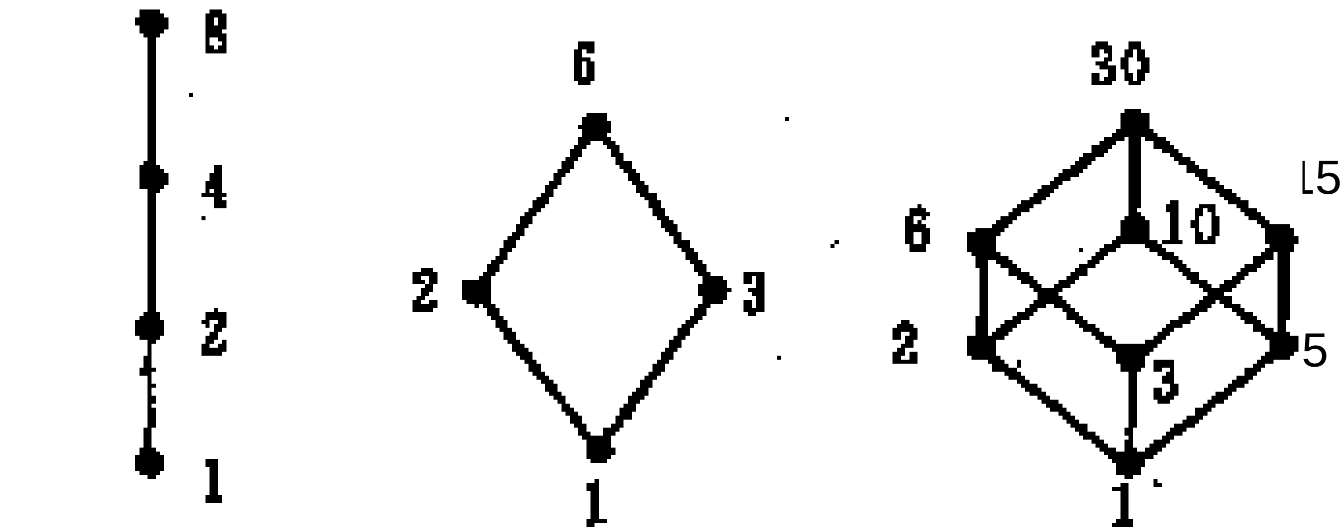
例1

设n为正整数, S_n为n的正因子的集合, $|$为整除关系, 则$\langle S_n, | \rangle$构成格.

因为$\forall x, y \in S_n$,

- $x \vee y$是x, y的最小公倍数LCM(x, y)
- $x \wedge y$是x, y的最大公约数GCD(x, y)

格$<S_8,D>$,$<S_6,D>$和$<S_{30},D>$



$\langle S_8,D\rangle$　　$\langle S_6,D\rangle$　　$\langle S_{30},D\rangle$

$x \vee y$是x,y的最小公倍数LCM(x,y), $x \wedge y$是x,y的最大公约数GCM(x,y)

例2：

设$\langle N, \leqslant \rangle$是一个偏序集，这里N是自然数集合，$\leqslant$ 是普通的小于等于关系，则$\langle N, \leqslant \rangle$构成格.

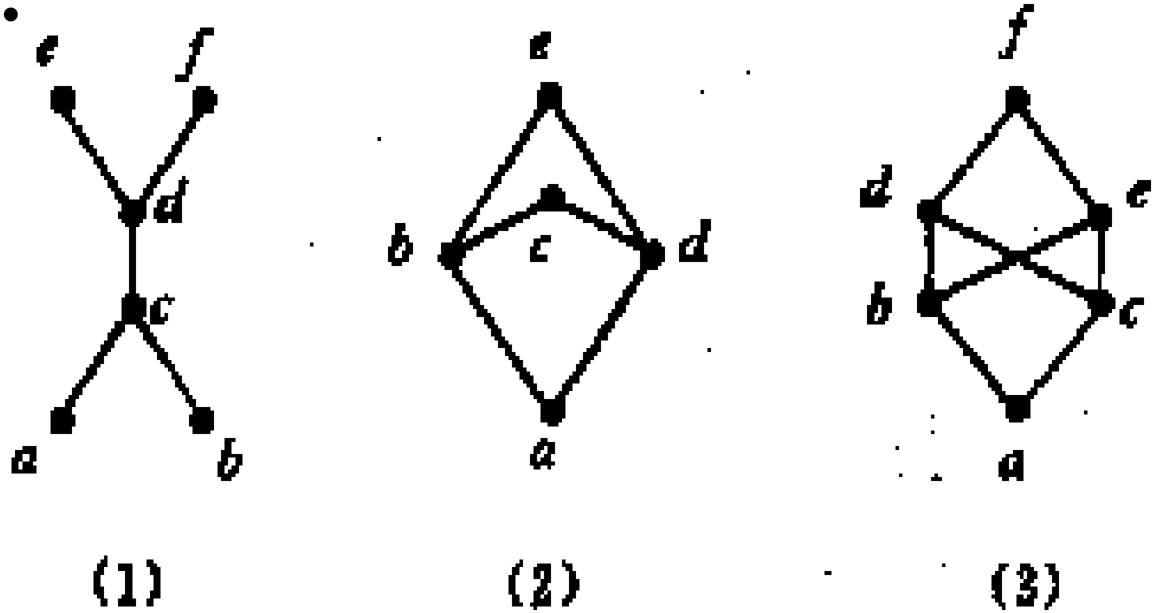
因为 $\forall a, b \in N$,

$$a \vee b = \max(a, b)$$

$$a \wedge b = \min(a, b)$$

例3

判断图中偏序集是否构成格,说明为什么.



•

对偶原理

设f是含有格中的元素以及符号$\leqslant$, $\geqslant$, $\vee$, $\wedge$的命题, 令f^*是将f中的≤改写成≥,将≥改写成≤, ∨改写成∧,∧改写成∨所得到的式子, 称为f的对偶式.

对偶原理:

若 f对一切格为真, 则f^*也对一切格为真.

例如, 在格中有

$$(a \vee b) \wedge c \leqslant c \text{ 成立, 则}$$

$$(a \wedge b) \vee c \geqslant c \text{ 成立.}$$

格的性质：

设$<L, \leq>$是格， $\forall a,b,c \in L$，

（1） $a \leq a$ 自反性

(2) 若$a \leq b$， $b \leq c$则 $a \leq c$ 传递性

(3)若$a \leq b$， $b \leq a$ 则 $a=b$ 反对称性

（4）若$a \leq b$，则$a \vee b = b$， $a \wedge b = a$

格的其他性质：

定理 7.1.3

设$<L, \leq>$是格，$\forall a,b,c \in L$，

（1）$a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$

$a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$

(2) 若$a \leq b$，$c \leq d$ 则 $a \vee c \leq b \vee d$,

$a \wedge c \leq b \wedge d$

(3) 运算的保序性

若$a \leq b$，则 $a \wedge c \leq b \wedge c$,

$a \vee c \leq b \vee c$

定理7.1.4

设$\langle L, \preccurlyeq \rangle$为格，则运算$\vee$和$\wedge$适合交换律、结合律、幂等律和吸收律，即

(1) 交换律

$\forall a, b \in L$有 $\quad a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a$

(2) 结合律

$\forall \ a, b, c \in L$有

- $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

(3) 幂等律

$\forall a \in L$ 有

- $a \vee a = a, \quad a \wedge a = a.$

(4) 吸收律

$\forall\ a, b \in L$, 有

$a \vee (a \wedge b) = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a.$

证明 结合律

$\forall$ a,b,c$\in$L有

- $(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c)$,
- $(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$.

由最小上界的定义有

- $(a\vee b)\vee c \geqslant a\vee b \geqslant a$, (6.1)
- $(a\vee b)\vee c \geqslant a\vee b \geqslant b$, (6.2)
- $(a\vee b)\vee c \geqslant c$. (6.3)
- 由式6.2和6.3得
- $(a\vee b)\vee c \geqslant b\vee c$, (6.4)
- 再由式6.1和6.4得
- $(a\vee b)\vee c \geqslant a\vee(b\vee c)$,
- 同理可证
- $(a\vee b)\vee c \leq a\vee(b\vee c)$
- 根据偏序的反对称性有
- $(a\vee b)\vee c = a\vee b\vee c$
- 类似地可以证明 $(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$

证明 幂等律

$\forall a \in L$有　$a \vee a = a,\ a \wedge a = a.$

- 证明:显然$a \le a \vee a$,又由$a \le a$可得$a \vee a \le a$.根据偏序的反对称性有
- $a \vee a = a$
- 同理可证$a \wedge a = a$

证明 吸收律 $\forall\, a,b\in L$,有

- $a\vee(a\wedge b)=a,\ a\wedge(a\vee b)=a.$

- 证明:$a\vee(a\wedge b)\geqslant a$

又由$a\leqslant a$, $a\wedge b\leqslant a$ 所以, 有

- $a\vee(a\wedge b)\leqslant a.$

由这两个式子可得

$$a\vee(a\wedge b)=a.$$

同理可证 $a\wedge(a\vee b)=a$

格的另一个等价的定义.

设$\langle S, *, \circ\rangle$是具有两个二元运算的代数系统，且对于$*$和$\circ$运算适合交换律、结合律、吸收律，则可以适当定义S中的偏序$\leqslant$使得$\langle S, \leqslant\rangle$构成一个格$\langle S, *, \circ\rangle$，其中$\forall a, b \in S$

- $a \wedge b = a * b$,
- $a \vee b = a \circ b$.

证明：分两步。

第一步：(1) **先证明幂等律**

$\forall a \in L$ 有 $a*a = a*(a \circ (a*b)) = a$,

$a \circ a = a \circ (a*(a \circ b)) = a$.

(2) **再证明** $a \circ b = b$ **当且仅当** $a*b = a$

第二步：证明 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是格

(1) **证明有偏序关系存在**

构造 $\forall a, b \in S$，aRb 当且仅当 $a*b = a$；aRb 当且仅当 $a \circ b = b$

证明 R 是偏序关系

(2) **证明** $\forall a, b \in S$，$a*b$ **为** $\{a, b\}$ **的下确界**，$a \circ b$ **为** $\{a, b\}$ **的上确界**

因为 $a*(a \circ b) = a$，所以 $a \leqslant a \circ b$；

- 因为 $b*(a \circ b) = b$，所以 $b \leqslant a \circ b$；所以 $a \circ b$ 为 $\{a, b\}$ 的上界
- 假设 $\{a, b\}$ 还有上界 c，即 $a \leqslant c$ 且 $b \leqslant c$，则 $a \circ c = c$ 且 $b \circ c = c$，
- $a \circ (b \circ c) = a \circ c = c$，所以 $a \circ b \leqslant c$，所以 $a \circ b$ 为 $\{a, b\}$ 的上确界

实例

1. 〈 S_n ，*，°〉是格。其中S_n为正整数n的正因子的集合，｜为整除关系，则〈S_n，｜〉构成偏序集，x ° y是x，y的最小公倍数LCM(x，y) x*y是x，y的最大公约数GCD(x，y)
2. <P（A），∩，∪>
3. <{0，1}，∧，∨>

子格

- 定义7.1.3
- 设$\langle L, \preccurlyeq \rangle$为格，设$S \neq \emptyset$且$S \subseteq L$，若对任意$a, b \in S$, $a \vee b \in S$，和$a \wedge b \in S$，则称$\langle S, \preccurlyeq \rangle$为格$\langle L, \preccurlyeq \rangle$的子格。
- 注意：
- 子格必是格，但是格的子集构成的格，不一定是子格。

格同构 格同态

- 定义7.1.4
- 设$\langle L,*,\circ \rangle$，$\langle S, \wedge, \vee \rangle$是两个格,存在映射$f:L \to S$, $\forall a,b \in L$满足$f(a*b)=f(a) \wedge f(b)$
- $f(a \circ b)=f(a) \vee f(b)$
- **称f为格同态。如果f为双射，则f为格同构。**

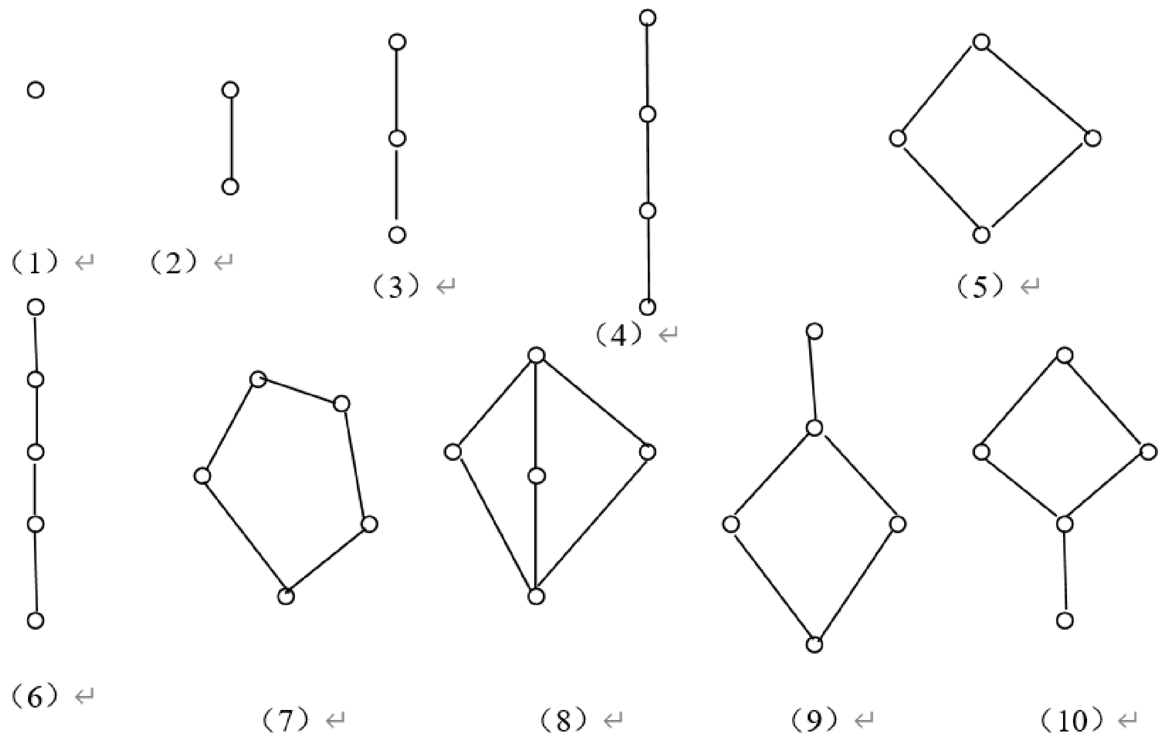
序同态 序同构

- 定义7.1.5
- 设〈L,*,°>，<S, ∧ , ∨ >是两个格, $\leqslant_1$, $\leqslant_2$ 分别为格L,S上的偏序关系，存在映射f:L->S, ∀a,b∈L满足a $\leqslant_1$ b =>f(a) $\leqslant_2$ f(b)
- **称f为序同态。如果f为双射，则f为序同构。**

- 定理7.1.7：
- f为格$\langle L, \leqslant_1 \rangle$到格$\langle S, \leqslant_2 \rangle$的格同态，则f为序同态，即同态是保序的。

- 定理7.1.8：
- 双射f为格$\langle L, \leqslant_1 \rangle$到格$\langle S, \leqslant_2 \rangle$的格同构的充分必要条件是$\forall a, b \in L$有$a \leqslant_1 b$当且仅当$f(a) \leqslant_2 f(b)$

- 例：画出同构意义下的1-5个元素的格



第七章　格与布尔代数

7.1 格与子格

7.2 特殊格

7.3 布尔代数

7.2 特殊格

1 模格

2 分配格

3 有界格

4 有补格

5 有补分配格

本节基本要求

了解分配格、模格、有补格的概念，会由Hasse图判别。

7.2 特殊格

1 模格

2 分配格

3 有界格

4 有补格

5 有补分配格

模格

定义：

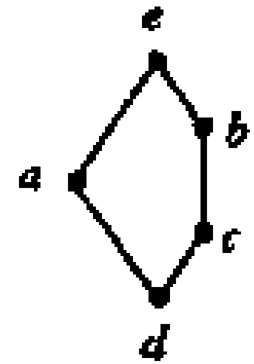
设 $<L, \wedge, \vee>$是格， $\forall$ a,b,c $\in$L， 有

若 $a \leq c$ 则

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

则L称为模格

- 例：判断五角格是否是模格？
- 解：因为
- $c \vee (a \wedge b) = c \vee d = c$



- $(c \vee a) \wedge b = e \wedge b = b$
- 所以五角格**不**是模格

模格的判定定理

定理：

格L是模格当且仅当它不含与五角格同构的子格。

定理　分配不等式

设 $<L, \wedge, \vee>$是格， $\forall a,b,c \in L$，有

1） $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

2） $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

定理　分配不等式

设 $<L, \wedge, \vee>$是格，$a,b,c \in L$，有

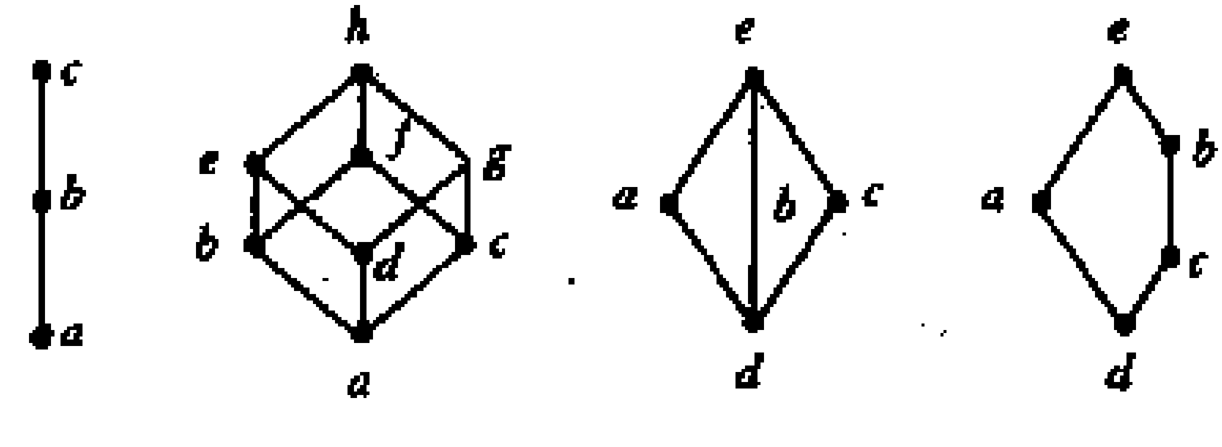
1）$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

2）$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

分配格

- 定义6.11
- 设$\langle L, \wedge, \vee \rangle$是格. $\forall$ $a, b, c \in L$有
- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- 成立, 则称L为分配格.

- 图中(1)、(2)、(3)、(4)是分配格吗？

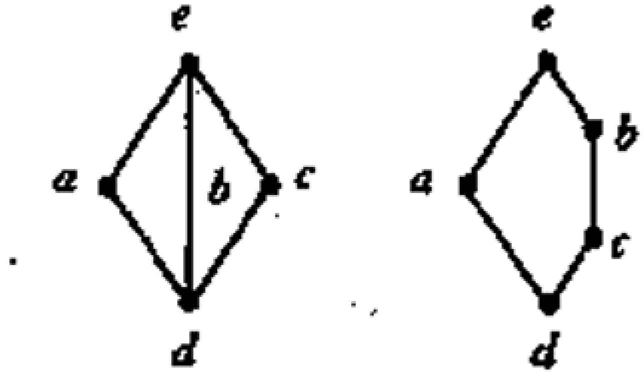


(1) (2) (3) (4)

- (3)a∧(b∨c)＝a∧e＝a
- (a∧b)∨(a∧c)＝d∨d＝d
- (4)b∧(a∨c)＝b∧e＝b
- (b∧a)∨(b∧c)＝d∨c=c.

分配格的判断

- 一个格是分配格的充分必要条件是格中不含与五角格和钻石格同构的子格。
-



- 定理　每个链是分配格。

证明：每个链是全序集，$\forall\ a, b, c \in L$，

分情况讨论

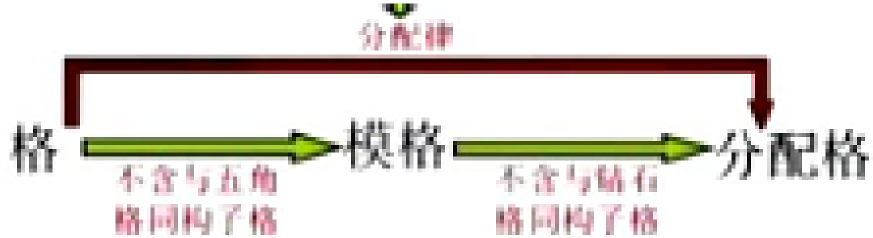
(1) $b<a,\ c<a$,

$a\wedge(b\vee c)=b\vee c$ 同时 $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=b\vee c$

(2) $a<b,\ a<c$,

$a\wedge(b\vee c)=a$ 同时 $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=a$

综上有 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$



- **定理：分配格是模格**
- 证明：**设 <L, ∧ , ∨ >是格，∀ a,b,c ∈L，有**

若 $a \leq c$ 则 $a \vee c = c$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$= (a \vee b) \wedge c$$

全上界、全下界

定义6.12

若在格$\langle L, \wedge, \vee \rangle$中存在一个元素a，$\forall b \in L$，$a \leqslant b$或$(b \leqslant a)$，则称a为格L的全下界(或全上界)

定理：

对于一个格L，全上界、全下界如果存在必唯一。

全下界记为0．全上界记为1。

有界格

定义：

具有全上界和全下界的格称为有界格，记作$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$

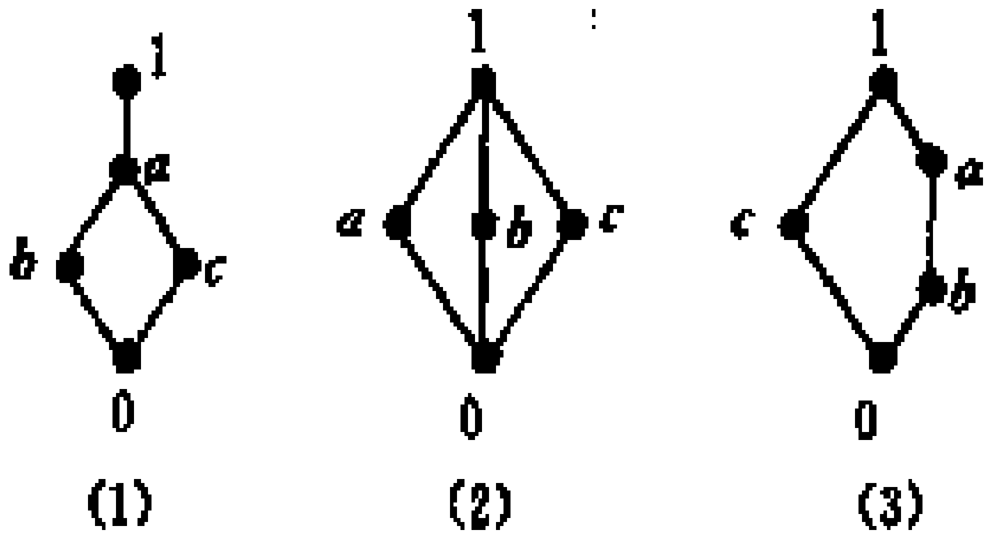
- **性质：**
- 设$<L,\wedge,\vee>$是有界格.$\forall a\in L$有
- $a\wedge 0=0 \quad a\wedge 1=a$
- $a\vee 0=a \quad a\vee 1=1$
- **设问：什么律？**

补元

- 定义6.13
- 设$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$是有界格$\forall a \in L$, 若存在$b \in L$使得$a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$, 则称b为a的补元.

•在定义中可以看到补元的概念是建立在有界格的基础上的，即补元的先决条件是，此格必须是有界格。补元是对某个元素而言，有补格则是对所有的元素而言。一个元素可能有补元，也可能没有补元，但在有补格中，则要求每个元素有补元。

• 另外由$\wedge$和$\vee$的交换律知，当b是a的补元时，a也是b的补元。最大元的补元是最小元，最小元的补元是最大元。



- (1)的a,b,c都不存在补元,0与1互为补元.
- (2)的a,b,c中任意两个都互为补元, 0与1互为补元.
- (3)中a和b的补元都是c,而c的补元是a和b,0与1互为补元.

例4.设S_{24}是24的所有因子的集合， 由图可知

$< S_{24}, GCD,LCM,1,24>$是格，这是一个有界格，

最大元为?

最小元为?

1的补元是?

2的补元是?

3的补元是?

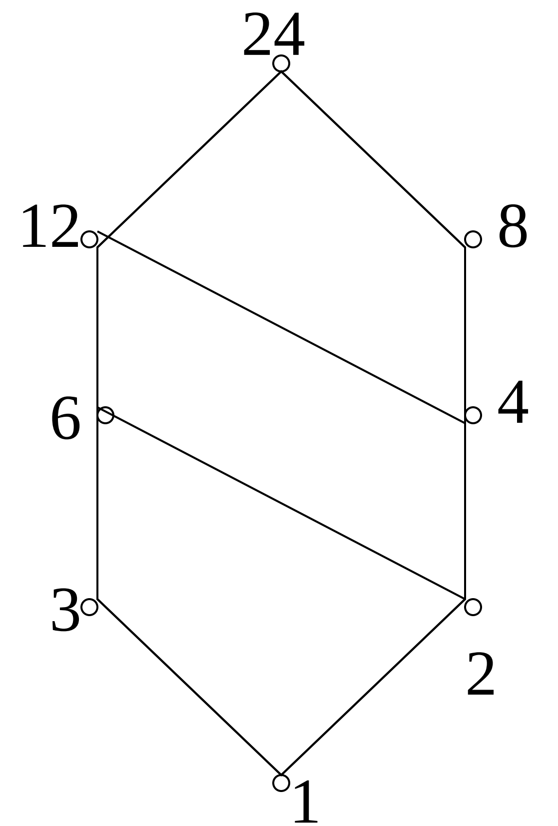
4的补元是?

6的补元是?

8的补元是?

24的补元是?

此格是有补格? 此格是分配格?



有补格

- 定义7.2.6
- 如果有界格$\langle L, \vee, \wedge \rangle$中每个元素都至少有一个补元，则称L为**补格**

有补分配格(布尔格)

定理：

对分配格L来说，如果$a \in L$有补元，则一定有唯一的补元，记为a'.

证明：反证法 设a有两个不同的补元b, c,

$a \wedge b = 0,\ a \vee b = 1$ 且 $a \wedge c = 0,\ a \vee c = 1$

$$b = b \vee (b \wedge a) = (b \vee b) \wedge (b \vee a) = b \wedge (c \vee a)$$
$$= (b \wedge c) \vee (b \wedge a) = (b \wedge c) \vee (a \wedge c)$$
$$= c \wedge (b \vee a) = c$$

$$a \wedge a' = 0,\quad a \vee a' = 1$$

设问：什么律？

有补分配格（布尔格）

定理：

- 若$\langle L, \wedge, \vee \rangle$是有补分配格，则$\forall a \in L$，有$a'' = (a')' = a$

- 证明　$a'' \wedge a' = 0$，$a'' \vee a' = 1$, 由补元唯一可得
- $a'' = a$。

设问：什么律？

有补分配格(布尔格)

- 定理：设< L，∨，∧>是有补分配格，则对L中任意元素a，b，有
- (1) $(a\wedge b)' = a' \vee b'$
- (2) $(a\vee b)' = a' \wedge b'$
-

设问：什么律？

如何证明？

定理：

对有补分配格L来说，$\forall a, b \in L$，有

$a \leqslant b$ 当且仅当 $a \wedge b' = 0$

当且仅当 $a' \vee b = 1$

证明：循环证

(1) 若 $a \leqslant b \Rightarrow a \vee b = b$

$a \wedge b' = (a \wedge b') \vee (b \wedge b')$

$\Rightarrow (a \vee b) \wedge b' \Rightarrow b \wedge b' = 0$

(2) 若$a \wedge b' = 0 \Rightarrow a' \vee b = 1$ 设问：如何证明？

(3) 若 $a' \vee b = 1$，因

$a \vee b = (a \vee b) \wedge (a' \vee b) = b$

所以 $a \leq b$

第七章　格与布尔代数

7.1 格与子格

7.2 特殊格

7.3 布尔代数

本节基本要求

1. 了解布尔格和布尔代数

2. 理解布尔代数中运算律的证明

3. 了解斯通表示定理

布尔格、布尔代数

- 定义6.14
- 如果格$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$是有补分配格，则称L为布尔格，也叫做布尔代数（至少有两个元素）.
- 由于布尔代数L中的每个元都有唯一的补元，求补运算也可以看成是L中的一元运算.因此，布尔代数L可记为$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$，其中$'$表示求补运算.

- 定理6.8
- 设<L, $\wedge$, $\vee$, ', 0, 1>是布尔代数, 则有:
- $\forall a \in L$, $(a')' = a$,
- $\forall a, b \in L$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$
- $(a \wedge b)' = a' \vee b'$
-

- 证明: $(a \vee b) \vee (a \wedge b') = (a \vee b \vee a') \wedge (a \vee b \vee b')$
- $= ((a \vee a') \vee b) \wedge (a \vee (b \vee b'))$
- $= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1) = 1$.

- $(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = (a \wedge a' \wedge b') \vee (b \wedge a' \wedge b')$
- $= ((a \wedge a') \wedge b') \vee ((b \wedge b') \wedge a')$
- $= (0 \wedge b') \vee (0 \wedge a') = 0$.
- 所以$a' \wedge b'$是$a \vee b$的补元,即 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.
- 同理可证 $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

布尔代数有以下性质

(1) 交换律

$\forall a, b \in L$ 有 $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$

(2) 结合律

$\forall\ a, b, c \in L$ 有 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

(3) 幂等律

$\forall a \in L$ 有 $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$.

(4) 吸收律

$\forall\ a, b \in L$, 有 $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

(5) 分配律

$\forall\ a,b,c \in L$ 有 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$， $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(6) 同一律

$\forall\ a \in L$ 有 $a \wedge 1 = a, a \vee 0 = a$

(7) 零律

$\forall\ a \in L$ 有 $a \wedge 0 = 0, a \vee 1 = 1$

(8) 补元律

$\forall\ a \in L$ 有 $a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1$

(9) 德摩根律

- $\forall a,b \in L$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

布尔代数的另一个定义

•定义 7.3.2

设$\langle S, *, \circ, ' \rangle$是代数系统，其中$*, \circ$为两个二元运算和$'$为一元运算的，如果对于$*$和$\circ$运算满足

（1）交换律；

（2）分配律；

（3）同一律；

（4）补元律

则称$\langle S, *, \circ, ' \rangle$是布尔代数。

思考如何证明两个定义的等价性？

- 例
- 集合代数$\langle P(S), \cap, \cup, \sim, S, \varnothing\rangle$是布尔代数.
- 开关代数$\langle \{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg, 1, 0\rangle$是布尔代数, 其中$\wedge$为与运算, $\vee$为或运算, $\neg$为非运算.

子布尔代数

- 定义7.3.3

  设$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$是布尔代数, $S\neq\varnothing$ 且$S\subseteq B$, 若S含有0, 1, 且在运算$\wedge$, $\vee$, ‘, 下封闭, 则称S是B的子布尔代数, 记为$\langle S, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$

显然, $<B, \vee, \wedge, ',0,1>$ 和$<\{0, 1\}, \vee, \wedge, ',0,1>$是$< B, \vee, \wedge, ',0,1 >$的子布尔代数

- 其实，没有必要对所有三个运算$\vee$，$\wedge$和'都要检查封闭性，也没有必要验证0与1是否在T中，只要对运算集合$\{\vee, '\}$或$\{\wedge, '\}$检查其封闭性即可。这可从布尔代数中这两个运算集合是全功能集得出。因为对任意x，$y \in S$，有$x \wedge y = (x' \vee y')'$，$(x' \vee x)' = 0$，$x \vee x' = 1$，故对于$\oplus$和’的封闭便保证了$\wedge$的封闭以及0，$1 \in T$。

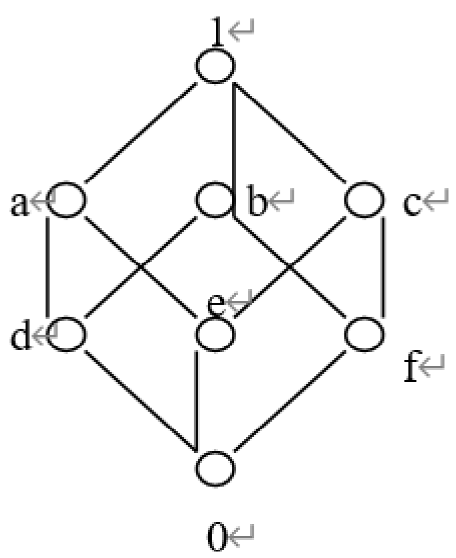
定理7.3.1

设$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$是布尔代数, $S\neq\emptyset$ 且 $S\subseteq B$，对$\forall a,b\in S$,有$a\vee b\in S$， $a'\in S$，则称S是B的子布尔代数， 记为 $\langle S, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$

- **证明** 若$\forall a, b\in S$, 则$a',b'\in S$, 由已知$a'\vee b'\in S$
- $(a'\vee b')'=a\wedge b\in S$
- 因为 $S\neq\emptyset$, 所以存在$a\in S$，因此$a'\in S$, 所以$a\wedge a'=0\in S$

和$a\vee a'=1\in S$

- **注意：** 布尔代数的子集可以是个布尔代数，但也可能不是布尔代数，这可从它对运算是否封闭而定。



给出一个布尔代数S1={1,a,f,0}是子布尔代数，

S2={1,a,c,e}不是子布尔代数。

因为0不在S2中。

布尔同态 布尔同构

- 定义7. 1. 4

  设$\langle B, \wedge, \vee, ' \rangle$和$\langle P, \cap, \cup, \sim \rangle$是两个布尔代数，存在映射 $f:B\to P$ 满足，$\forall a, b \in B$有

- $f(a \wedge b)=f(a) \cap f(b)$
- $f(a \vee b)=f(a) \cup f(b)$
- $f(a')= \sim f(a)$

称f为$\langle B, \wedge, \vee, ' \rangle$到$\langle P, \cap, \cup, \sim \rangle$的**布尔同态**。如果f为双射，则f为**布尔同构**。

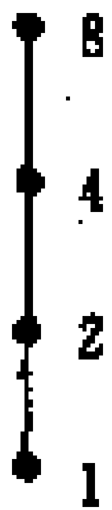
布尔代数的原子表示

- 在布尔集合代数中，每个子集可表成元素集合的并，而且这种表示在不计项的次序情况下是唯一的。对于任何有限布尔代数，也将有同样的结果，这里起着元素集合作用的那些元素，称它们是原子。

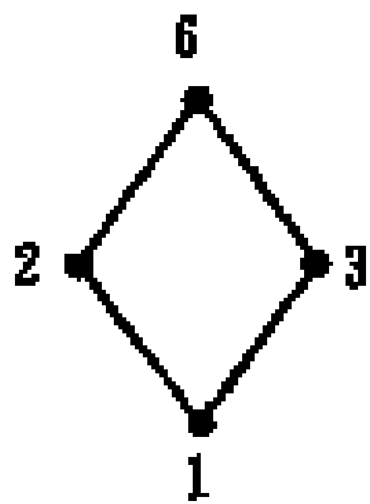
原子 (atom)

定义:

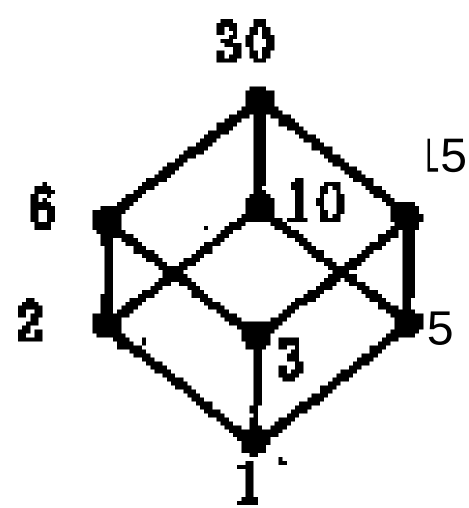
设B是布尔代数，如果a是元素0的一个覆盖，则称a是该布尔代数的一个原子。



$\langle S_8, D\rangle$



$\langle S_6, D\rangle$



$\langle S_{30}, D\rangle$

原子性质1

定理：

设B是布尔代数，B中元素a是原子的充分必要条件是$a \neq 0$且对于B中任何元素x有

- $a \wedge x = a$ 或 $a \wedge x = 0$

原子性质2

定理：

设a, b 是布尔代数B中任意两个原子，则有

- $a=b$ 或 $a \wedge b=0$

定义7.3.6：

设B是布尔代数，所有b属于B，定义集合

A(b)={a| **a属于B, a是原子且**a<=b}

- 引理1：
- **设B是布尔代数，B中任意元素b, 恒有元素**a，a<=b。
- 引理2：
- **设B是布尔代数，B中任意元素b, 设** $A(b)=\{a_1,a_2,\ldots a_m\}$,则$b= a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m$。

有限布尔代数的表示定理（Stone）

- 定理7.3.5

设 $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ 为有限代数系统，另 $A=\{a|a \in B$ 且 a 是原子$\}$，则B同构于 $\langle P(A), \cup, \cap, \sim, \varnothing, A\rangle$

思考如何证明？

首先构造映射f：$B \to P(A)$，使得对任意 $b \in B$, $f(b)=A(b)$

证明 (1)f 是单设

（2） f 是满设

（3）设b，c为B中任意两个元素且 $b\neq 0$，$c\neq 0$, $f(b \vee c)=f(b) \cup f(c)$

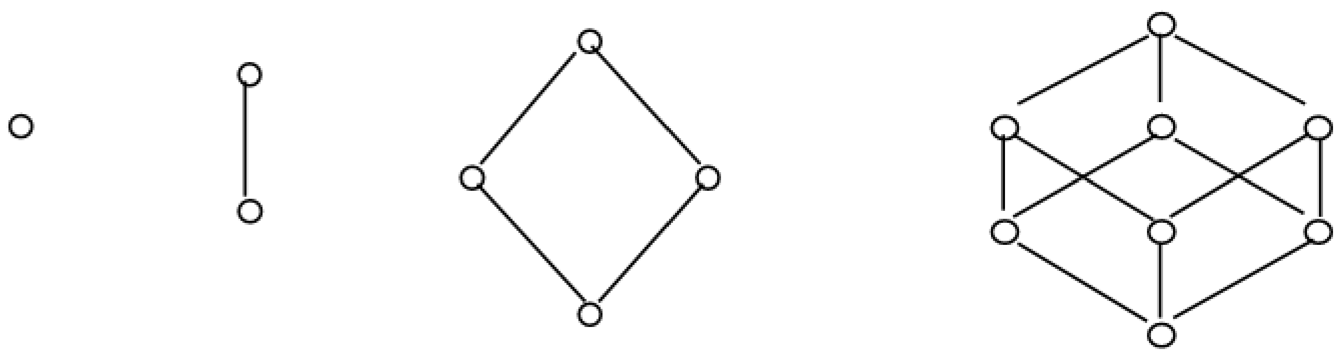
（4）设b，c为B中任意两个元素且 $b\neq 0$，$c\neq 0$, $f(b \wedge c)=f(b) \cap f(c)$

(5) 设b为B中任意元素且 $b\neq 0$, $f(b')=\sim f(b)$

有限布尔代数的表示定理（Stone）推论:

1. 若有限布尔代数有n个原子，则它有2^n个元素。

2.任何具有2^n元素的布尔代数互相同构；即：含2^n有个元素的布尔代数在同构的意义下只有一个，就是集合代数。



例：设G是30的因子集合，G上关系“|”是整除。

1) 画出〈G，|〉的Hasse图；

2) 画出〈G，|〉的所有元素个数大于等于4的不同构的子格的Hasse图。

3) 上面各子格都是什么格？（分配格，模格，有补格）

4) 上面各子格中有布尔代数吗？若有，指出并给出原子集合

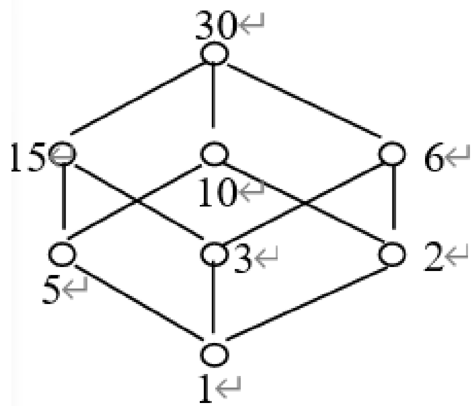
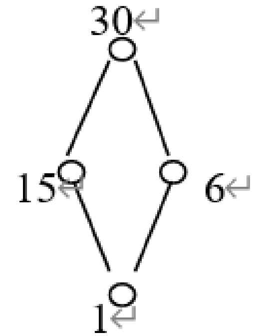

30
15
10
6
5
3
2
1

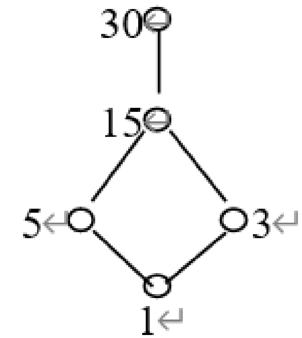
图 7.4-1


30
15
5
1

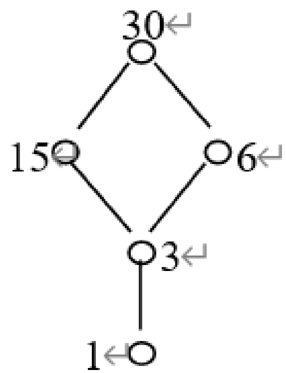
(a)


30
15
6
1

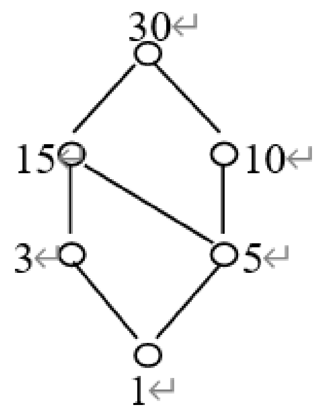
(b)


30
15
5
3
1

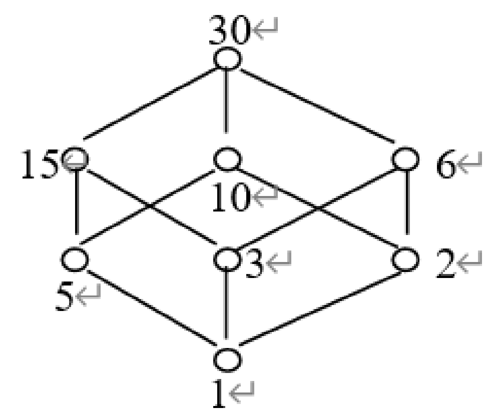
(c)


30
15
6
3
1

（d）


30
15
10
3
5
1

(e)


30
15
10
6
5
3
2
1

(f)

答疑与考试

- 答疑时间：周12-周13 下午1:30-5:00
- 地点：3-221

- 考试时间：2020年12月4号（教学第13周，周五）下午13：30-15：30
- 地点：软工1901-1903 2-2-302
-   其余学生：2-1-一阶