二、维势场的粒子

2.2 方势

2.2.1无限深方势阱

先考虑一个理想的情况 —— 无限深方势阱中粒子，势阱表示为

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a \\ \infty, & x<0,\, x>a\end{cases} \tag{1}$$

在阱内$(0<x<a)$，能量本征方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0 \tag{2}$$

m为粒子质量，$E>0$。令

$$k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{3}$$

则方程(2)的解可表示为

$$\psi(x)=A\sin(kx+\delta) \tag{4}$$

由：

$$\psi(0)=0,\psi(a)=0 \tag{5}$$

得$sinka=0$，即：

$$ka=n\pi，n=1,2,3 \tag{6}$$

联合(3)和(6):

$$E=E_n=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2},n=1,2,3\cdots \tag{7}$$

这样,我们就得出:一维无限深方势阱中粒子的能量是量子化的,即构成的能谱是离散的(discrete). E_n 称为体系的能量本征值.与 E_n对应的波函数记为 $\psi_n(x)$,称为能量本征函数，

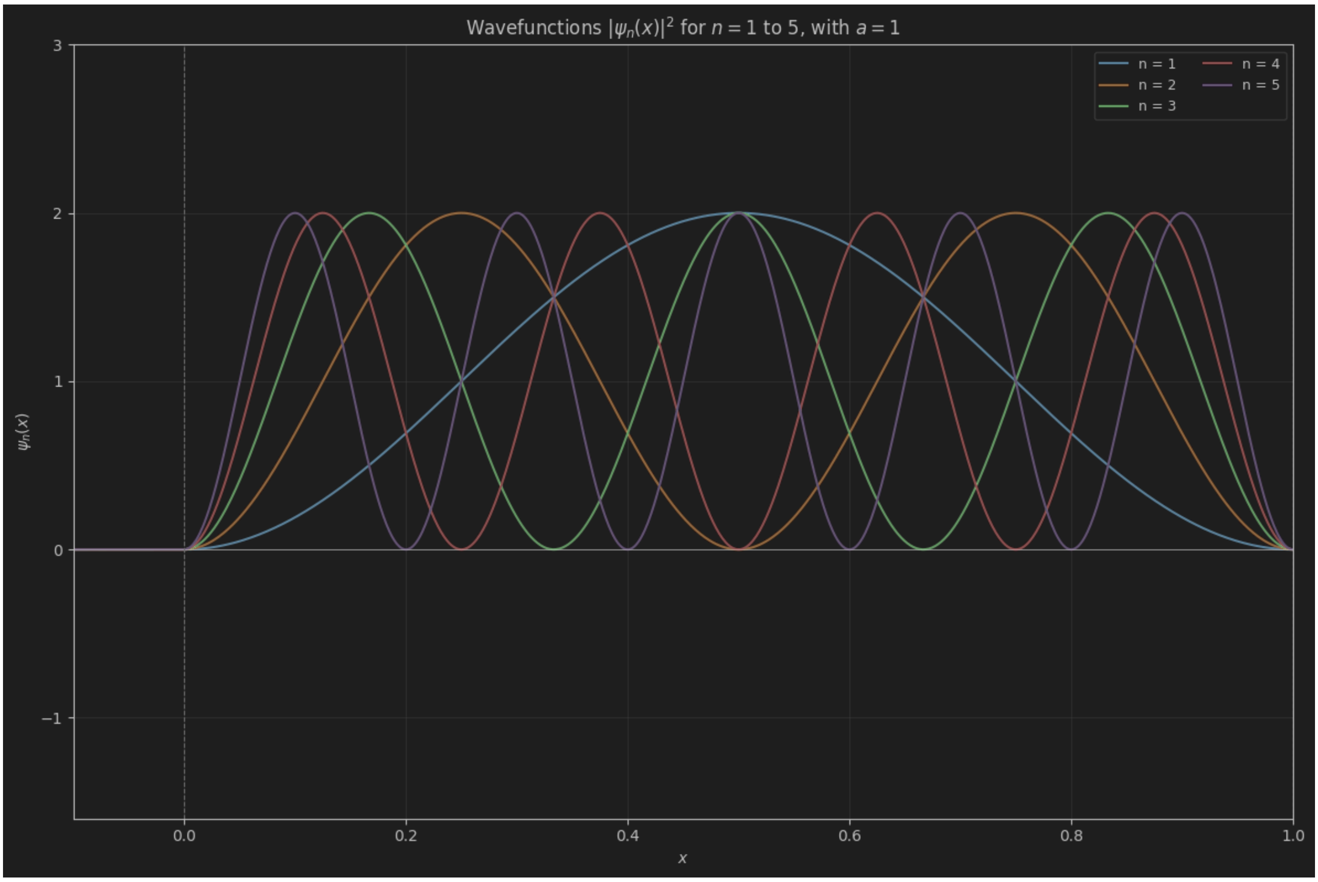
$$\psi_n(x)=A\sin(\frac{n\pi x}{a}),\ \ 0<x<a \tag{8}$$

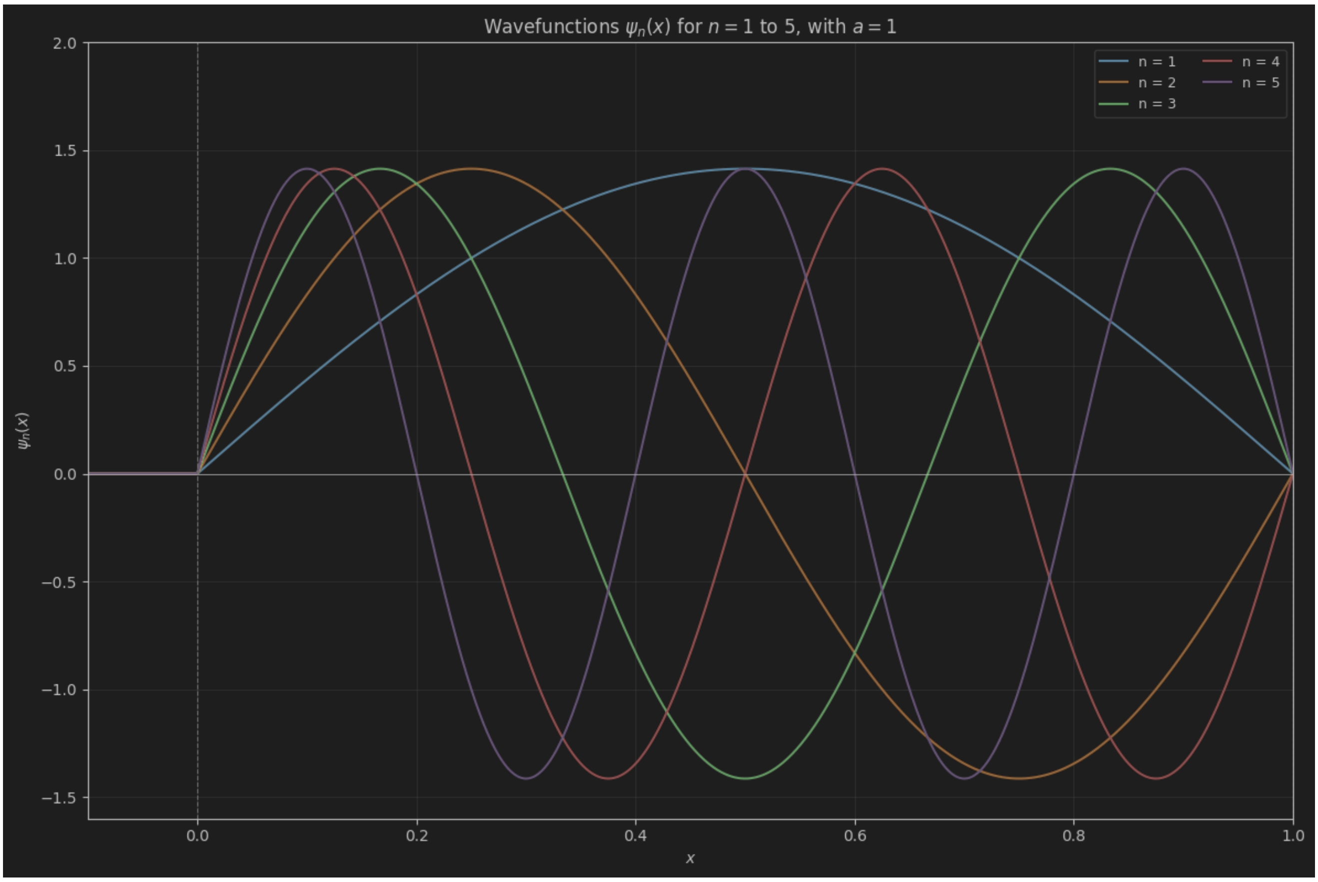
利用归一化条件

$$\int_0^a|\psi_n(x)|^2\mathrm{d}x=1 \tag{9}$$

可求出 $|A| = \sqrt{2/a}$.不妨取 A 为实数,则归一化波函数表示为

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & 0 < x < a \\ 0, & x < 0, x > a \end{cases} \tag{10}$$





2.2.2 有限深方势阱

设势函数为:

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<\frac{a}{2}\\ V_0, & |x|\geq\frac{a}{2}\end{cases} \tag{11}$$

其中，a为阱宽，V_0 为势阱高度。以下讨论束缚态$(0<E<V_0)$情况。

从经典力学来看，粒子将被限制在阱内运动。在阱外($|x|>\frac{a}{2}$，经典禁区），能量本征方程为:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi=0 \tag{12}$$

令:

$$\beta=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} \quad (实数) \tag{13}$$

则方程的解具有如下指数函数形式:

$$\psi(x)\sim e^{\pm\beta x} \tag{14}$$

但考虑到束缚态边条件（要求 $|x|\to\infty$时， $\psi(x)\to 0$），波函数应取如下形式:

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{-\beta x}, & x\geq\frac{a}{2}\\ Be^{\beta x}, & x<-\frac{a}{2}\end{cases} \tag{15}$$

常数 A与B 待定。当 $V_0\to\infty$（无限深势阱）时，$\beta\to\infty$，则在阱外 $|x|\geq\frac{a}{2}$，上式 $\psi(x)=0$，这正是无限深方势阱的边条件式5的根据。

在阱内（ $|x|<\frac{a}{2}$，经典允许区），能量本征方程为:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0 \tag{16}$$

令:

$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{17}$$

则方程(16)的解可表示为如下震荡函数形式

$$e^{ikx}或sinkx,coskx$$

偶宇称推导

1. 势阱与定态 Schrödinger 方程
   势函数

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<\frac{a}{2}\\ V_0, & |x|\geq\frac{a}{2}\end{cases}$$

定态方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x).$$

2. 分区通解（先不管归一化）
阱内$|\ x\ |< a/2$：

$$\psi_{in}''+k^2\psi_{in}=0, k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

偶宇称 ⇒ 取偶函数 $coskx$：

$$\psi_{in}(x)=Acoskx, A\text{待定}.$$

阱外 $|\ x\ |\geq a/2$：

$$\psi_{out}''-\beta^2\psi_{out}=0, \beta=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}.$$

束缚态要求，故

$$\psi_{\text{out}}(x)=\begin{cases}Be^{-\beta x}, & x\geq\dfrac{a}{2}\\ Be^{+\beta x}, & x\leq-\dfrac{a}{2}\end{cases}\qquad(\text{偶宇称}\Rightarrow\text{左右指数系数相同}).$$

3. 用“对数导数”连续避免归一化
在边界$x=\frac{a}{2}$处：

$$\frac{\psi'}{\psi}\text{必须连续}.$$

阱内：

$$\frac{\psi_{\text{in}}'(x)}{\psi_{\text{in}}(x)}=-k\tan kx\implies\left.\frac{\psi_{\text{in}}'}{\psi_{\text{in}}}\right|_{x=a/2}=-k\tan\frac{ka}{2}.$$

阱外：

$$\frac{\psi_{\text{out}}'(x)}{\psi_{\text{out}}(x)}=-\beta\implies\left.\frac{\psi_{\text{out}}'}{\psi_{\text{out}}}\right|_{x=a/2}=-\beta.$$

令两者相等：

$$-k\tan\frac{ka}{2}=-\beta\implies\boxed{k\tan\frac{ka}{2}=\beta}\qquad(\text{偶宇称本征方程}).$$

4. 无量纲化（作图或数值用）
令

$$\xi=\frac{ka}{2},\qquad\eta=\frac{\beta a}{2}.$$

则

$$\tan\xi=\eta,\qquad \xi^2+\eta^2=\frac{mV_0a^2}{2\hbar^2}\equiv R^2.$$

第一条曲线是正切，第二条是圆，交点给出 $\xi\Rightarrow E$。

奇宇称推导

奇宇称态详细推导

1. 势函数与基本参数

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<\dfrac{a}{2}\\ V_0, & |x|\ge\dfrac{a}{2}\end{cases}\qquad (0<E<V_0).$$

定义

$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},\qquad \beta=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}.$$

2. 阱内 $|x|<a/2$：奇宇称 ⇒ 取正弦函数

$$\psi_{\text{in}}(x)=A\sin kx,\qquad A\text{ 待定}.$$

3. 阱外 $|x|\ge a/2$：束缚态 + 奇宇称
奇函数要求 $\psi(-x)=-\psi(x)$，同时 $x\to\pm\infty$ 时 $\psi\to0$，故

$$\psi_{\text{out}}(x)=\begin{cases}Be^{-\beta x}, & x\ge\dfrac{a}{2}\\ -Be^{+\beta x}, & x\le-\dfrac{a}{2}\end{cases}\text{（左右指数系数反号，保证奇对称）。}$$

4. 用“对数导数”连续避开归一化
只需在 $x=\dfrac{a}{2}$处匹配（另一半由奇对称自动满足）。
阱内:

$$\frac{\psi'_{\text{in}}(x)}{\psi_{\text{in}}(x)}=k\cot kx\implies\left.\frac{\psi'_{\text{in}}}{\psi_{\text{in}}}\right|_{x=a/2}=k\cot\frac{ka}{2}.$$

阱外:

$$\frac{\psi'_{\text{out}}(x)}{\psi_{\text{out}}(x)}=-\beta\implies\left.\frac{\psi'_{\text{out}}}{\psi_{\text{out}}}\right|_{x=a/2}=-\beta.$$

令两者相等:

$$k\cot\frac{ka}{2}=-\beta\implies\boxed{-k\cot\frac{ka}{2}=\beta}\qquad\text{(奇宇称本征方程)}.$$

5. 无量纲化（作图或数值用）
令

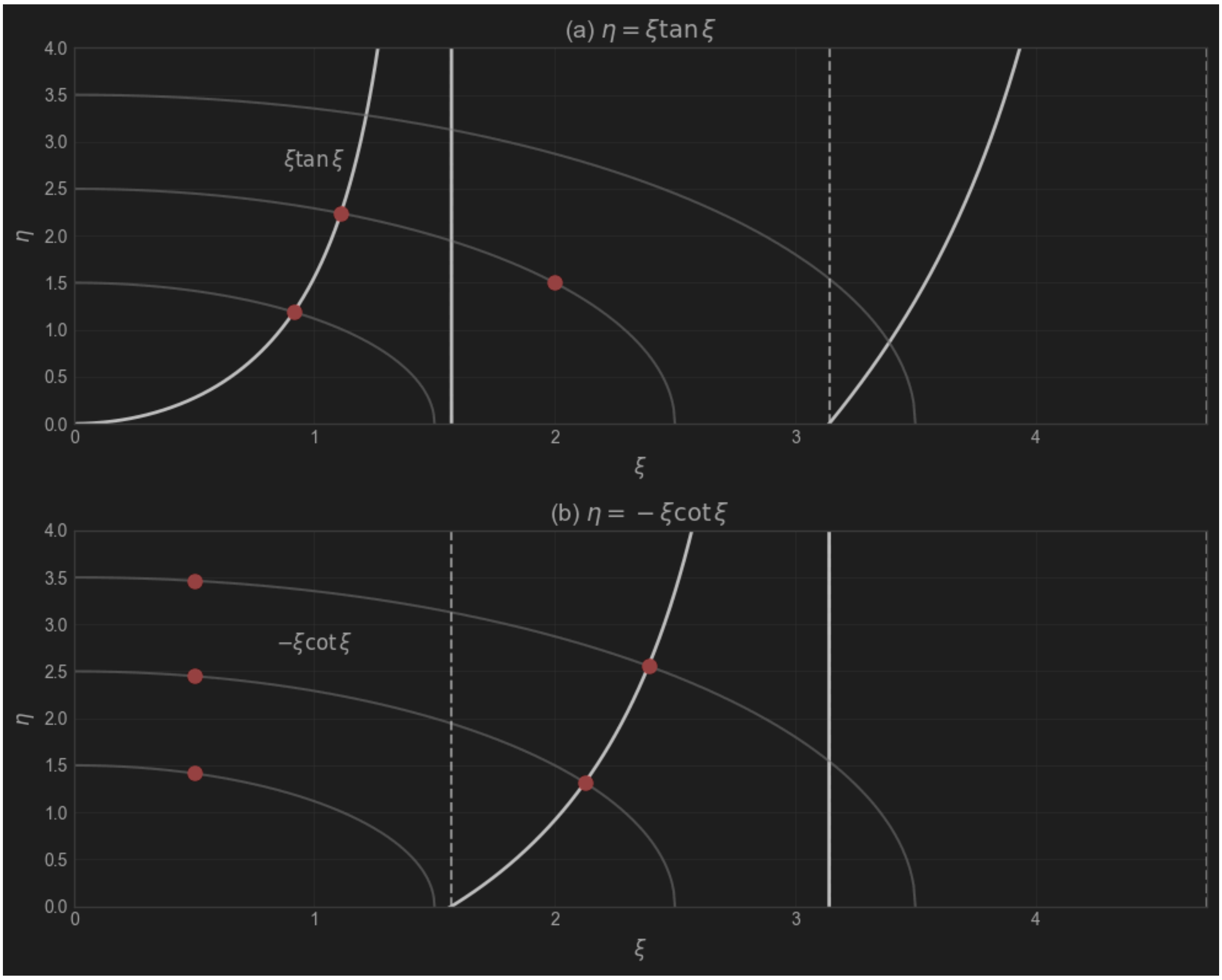
$$\xi = \frac{ka}{2}, \qquad \eta = \frac{\beta a}{2}.$$

则

$$-\cot\xi = \eta, \qquad \xi^2 + \eta^2 = \frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2} \equiv R^2.$$

第一条曲线是“负余切”，第二条是圆。
由于 $\cot\xi$ 在 $0 < \xi < \pi/2$ 从$+\infty$ 降到0，$-\cot\xi$ 从$-\infty$ 升到0，只有圆足够大（即$V_0 a^2$ 超过临界值）才会出现交点，因此
奇宇称束缚态不会永远存在，必须

$$R \geq \frac{\pi}{2} \implies V_0 a^2 \geq \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}.$$



2.2.3 方势垒的反射和透射

模型

势垒：$V(x) = V_0$ for $0 < x < a$

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

波函数分段

区域 I: $x < 0$

$$\psi_I(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

区域 II: $0 < x < a$

- 若 $E < V_0$: $\psi_{II}(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$
- 若 $E > V_0$: $\psi_{II}(x) = Ce^{i\kappa' x} + De^{-i\kappa' x}, \quad \kappa' = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$

区域 III: $x > a$

$$\psi_{III}(x) = Se^{ikx}$$

边界条件

- ψ 连续
- ψ' 连续

推导结果

透射系数（$E < V_0$）

$$T = |S|^2 = \frac{4k^2\kappa^2}{(k^2 - \kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2}$$

近似（$\kappa a \gg 1$）

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right)$$

反射系数

$$|R|^2 = 1 - T$$

三种情况

- (a) $E < V_0$：隧穿效应
- (b) $E > V_0$：部分透射
- (c) $E = V_0$：共振透射

物理意义

- 量子粒子具有波动性，即使能量不足也能“穿”过势垒
- 应用：α衰变、扫描隧道显微镜、半导体器件

δ势阱的穿透系数与共振态

δ势阱是一种理想化的势场模型，其势能形式为：

$$V(x) = \gamma\delta(x) \tag{1}$$

其中 γ 为势阱强度（常数）。本节基于量子力学理论，求解δ势阱的穿透系数（透射率）和共振态（resonance），核心是**一维定态Schrodinger方程的求解**与**边界条件匹配。**

2.3.1 δ势阱的穿透系数

1. 定态Schrodinger方程

设粒子质量为 m，能量为 E，定态波函数为 $\psi(x)$，则Schrodinger方程为：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \tag{2}$$

代入 $V(x) = \gamma\delta(x)$，得：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \gamma\delta(x)\psi = E\psi \tag{2'}$$

2. 区域划分与边界条件

δ势阱位于 $x = 0$ 处，将空间划分为 $x < 0$和$x > 0$ 两个区域：

- **区域I（$x < 0$）**：$V(x) = 0$，方程为：

$$\frac{d^2\psi_I}{dx^2} + k^2\psi_I = 0, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{4}$$

  解为振荡解：$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$（$A, B$ 为常数）。
- **区域II（$x > 0$）**：$V(x) = 0$，方程与区域I相同，解为：

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx} \tag{5}$$

- **边界条件**：
  1. 波函数连续性：$\psi_I(0^-) = \psi_{II}(0^+)$；
  2. 导数跳跃条件：由 $\delta(x)$ 项导致导数不连续，积分Schrodinger方程在 $x = 0$ 附近得：

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0^+} - \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0^-} = \frac{2m\gamma}{\hbar^2}\psi(0) \tag{3}$$

3. 穿透系数计算

联立边界条件，解得系数 A, B, C, D，进而求得穿透系数 T（透射率）：

$$T = \left| \frac{\text{透射波振幅}}{\text{入射波振幅}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{m\gamma}{\hbar^2 k}\right)^2} \tag{11}$$

其中 $k = \sqrt{2mE}/\hbar$。

2.3.2 共振态（Resonance）

当 $E \to 0^+$ 时，穿透系数 $T \to 1$（全透射），此时发生**共振**（resonance）。共振条件为：

$$\frac{m\gamma}{\hbar^2 k} \gg 1 \implies \gamma \gg \frac{\hbar^2 k}{m} = \frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\hbar$$

即势阱强度 γ 足够大时，低能粒子几乎完全透过势阱（如隧道效应中的“共振隧穿”）。

2.3.3 δ势阱的束缚态

当 $E < 0$ 时，粒子处于束缚态（bound state），波函数在无穷远处衰减为零。此时 $k = i\kappa$（$\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar > 0$），方程解为指数衰减解：

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}, & x < 0 \\ Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}, & x > 0 \end{cases} \tag{22}$$

联立边界条件，得束缚态能量：

$$E_n = -\frac{m\gamma^2}{2\hbar^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{24}$$

（注：束缚态能量为离散谱，呈抛物线分布。）

一维谐振子

核心概念与物理图像

自然界中广泛存在简谐运动，如分子振动、晶格振动等。在量子层面，这些微小振动可以被模型化为一个“量子谐振子”。它不仅是理论上的理想模型，更是理解更复杂系统（如原子、分子光谱）的基础。本节我们将用薛定谔方程来求解其能量本征值和本征函数。

> 谐振子是量子力学中少有的几个可以精确求解的问题之一。它的解优美且深刻，揭示了量子世界的几个核心特征：能量量子化、零点能、波函数的概率分布等。学习它时，不要只盯着公式，要试着想象那个在势阱中"量子化"振动的粒子，它的行为与经典小球完全不同。

第一步：建立薛定谔方程

我们从经典的谐振子势能开始：

$$V(x) = \frac{1}{2}Kx^2 \tag{1}$$

其中 K 是弹簧常数，代表作用力强度。根据胡克定律，受力 $F = -\frac{dV}{dx} = -Kx$。

定义自然频率 $\omega = \sqrt{K/m}$，这是经典力学中的基本量。

> 这里的 ω 不是角速度，而是系统的固有振动频率。记住这个定义，它会在后面贯穿始终。质量 m 和劲度系数 K 通过 ω 联系起来，这暗示了能量和频率的直接关联——这也是量子力学的核心思想之一。

代入含时薛定谔方程的定态形式，得到一维谐振子的能量本征方程：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{3}$$

这是一个二阶线性微分方程。我们需要找到满足束缚态边界条件的解。

> ⚠️ **注意**：
> 边界条件非常重要！对于无限深势阱，我们要求 $\psi(\pm\infty) = 0$。这里的势能虽然不是无限深，但随 x^2 增长，粒子无法逃逸到无穷远，因此同样要求 $\psi(x) \to 0$ 当 $|x| \to \infty$。这是物理上合理的约束。

无量纲化简化问题

为了简化计算，引入无量纲变量：

$$\xi = \alpha x, \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \tag{5a}$$

$$\lambda = \frac{E}{\frac{1}{2}\hbar\omega} \tag{5b}$$

> 它把复杂的物理量（质量、频率、普朗克常数）浓缩成一个无单位的参数 ξ，让方程形式变得简洁。α 的量纲是 $[\text{长度}]^{-1}$，所以 ξ 是纯数字。而 λ 则告诉我们能量是以 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ 为单位来衡量的——这正是我们要找的"量子化单位"。

将原方程 (3) 代入上述变换，经过一番代数运算（过程略，但可自行验证），得到：

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0 \tag{6}$$

分析渐近行为

当 $|\xi| \to \infty$ 时，ξ^2 项主导，方程近似为：

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi = 0 \tag{7}$$

这个方程的解是 $\psi \sim e^{\pm\xi^2/2}$。

> 看似简单的指数函数，其实蕴含着深刻的物理意义。$e^{+\xi^2/2}$ 会随着 $|\xi|$ 增大而爆炸式增长，这违反了边界条件 $\psi \to 0$。因此我们必须舍弃它，只保留衰减解 $e^{-\xi^2/2}$。

于是我们令：

$$\psi(\xi) = e^{-\xi^2/2}u(\xi) \tag{9}$$

将此式代入方程 (7)，进行求导和整理，得到关于 $u(\xi)$ 的新方程：

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} - 2\xi\frac{du}{d\xi} + (\lambda - 1)u = 0 \tag{10}$$

这就是著名的 **Hermite 方程**A3-hermite多项式

> 这一步是整个推导的关键转折点。我们把一个看起来无解的方程，通过"猜解"的方式（即假设波函数是高斯函数乘以一个多项式），转化成了一个标准的数学方程——Hermite 方程

寻找多项式解与能量量子化

Hermite 方程 (10) 的通解是一个无穷级数。但在物理上，我们要求波函数在整个空间都是有限的，这就要求 $u(\xi)$ 必须是一个**多项式**，否则当 $|\xi| \to \infty$ 时，$u(\xi)$ 会发散，导致 ψ 不满足边界条件。

> 这就是量子化的根源！不是我们强行规定能量必须离散，而是物理边界条件（波函数必须平方可积）迫使我们只能选择那些能让 $u(\xi)$ 成为多项式的特定 λ 值。这比"能量量子化"本身更深刻——它是**边界条件导致的必然结果。**

可以证明，只有当：

$$\lambda - 1 = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{11}$$

时，方程才有多项式解。这个多项式就是 **Hermite 多项式**，记作 $H_n(\xi)$。

因此，能量本征值为：

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{12}$$

> 这个公式太重要了！它告诉我们：
>
> 1. 能量是**均匀分布**的，相邻能级间距恒为 $\hbar\omega$。
> 2. 最低能量不是零，而是 $\frac{1}{2}\hbar\omega$，称为**零点能**。这是量子世界与经典世界的根本区别之一——即使在绝对零度，粒子也不能静止不动！
> 3. n 是主量子数，决定了能级的高度。

归一化波函数

对应的本征函数为：

$$\psi_n(x) = A_n e^{-\alpha^2 x^2/2} H_n(\alpha x) \tag{14}$$

其中归一化常数 A_n 由正交归一条件确定：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn} \tag{15}$$

利用 Hermite 多项式的正交关系：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(\xi)H_n(\xi)e^{-\xi^2}d\xi = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{mn} \tag{13}$$

我们可以求得：

$$A_n = \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right]^{1/2} \tag{14}$$

所以对应的本征函数应该是

$$\psi_n(x) = \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right]^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} H_n(\alpha x) \tag{15}$$

> 归一化是为了保证概率总和为1。这里出现的 $\sqrt{\pi}$ 来自高斯积分 $\int e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$，是量子力学中最常见的积分之一。记住这个常数，它在很多地方都会出现。

谐振子位置动量平均值与不确定度

$$\triangle x = [\overline{(x - \bar{x})^2}]^{\frac{1}{2}}$$

$$\triangle p = [\overline{(p - \bar{p})^2}]^{\frac{1}{2}}$$

易知$\bar{x} = 0, \bar{p} = 0$
只需要求$\bar{x^2}$与$\bar{p^2}$即可

波函数$\psi_n(x)$为:

$$\psi_n(\xi)=N_n e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi)$$

其中:

$$\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, dx=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}d\xi, N_n^2=\frac{1}{2^n n!}(\frac{m\omega}{\pi\hbar})^2$$

$$\begin{aligned}\bar{x^2}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(x)x\psi_n(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}N_n e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi)\cdot\frac{\hbar}{m\omega}\xi^2\cdot N_n e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi)\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}d\xi\\&=\frac{\hbar}{\sqrt{\pi}m\omega 2^n n!}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}\xi^2 H_n^2(\xi)d\xi\end{aligned}$$

最低几条能级的波函数与概率密度

前三个能级的波函数为:

$$\psi_0(x)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}}e^{-\alpha^2x^2/2} \tag{16a}$$

$$\psi_1(x)=\frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi^{1/4}}\alpha x e^{-\alpha^2x^2/2} \tag{16b}$$

$$\psi_2(x)=\frac{1}{\pi^{1/4}}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(2\alpha^2x^2-1)e^{-\alpha^2x^2/2} \tag{16c}$$

位置概率密度为 $|\psi_n(x)|^2$。

> 基态 $(n=0)$ 波函数没有节点，概率密度在原点最大，呈高斯分布。
> 激发态 $(n>0)$ 波函数有 n 个节点，概率密度在节点处为零。
> 随着 n 增加，概率分布越来越“经典”，即粒子出现在经典允许区域的概率增大，而在经典禁区的概率减小——这就是“对应原理”的体现。

对称性与零点能的物理意义

由于势能 $V(x)$ 是偶函数（$V(-x)=V(x)$），根据第 2.1 节定理 3，本征函数必有确定宇称:

$$\psi_n(-x)=(-1)^n\psi_n(x) \tag{17}$$

> 宇称守恒是空间反演对称性的体现。这意味着如果系统在空间反演下不变，那么它的状态要么是偶函数（宇称为 +1），要么是奇函数（宇称为 -1）。这在粒子物理中也非常重要。

基态能量 $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ 称为**零点能**。

> 零点能的存在可以用不确定性原理来解释：$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$。如果粒子静止在原点（$p = 0, x = 0$），则 $\Delta x = \Delta p = 0$，违反了不确定性原理。因此，粒子必须有一定的动能和势能，最低能量就是 $\frac{1}{2}\hbar\omega$。这是微观粒子波动性的直接表现！

经典禁区与量子隧穿

对于基态，概率密度为：

$$|\psi_0(x)|^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \tag{19}$$

这是一个高斯分布，在 $x = 0$ 处概率最大。

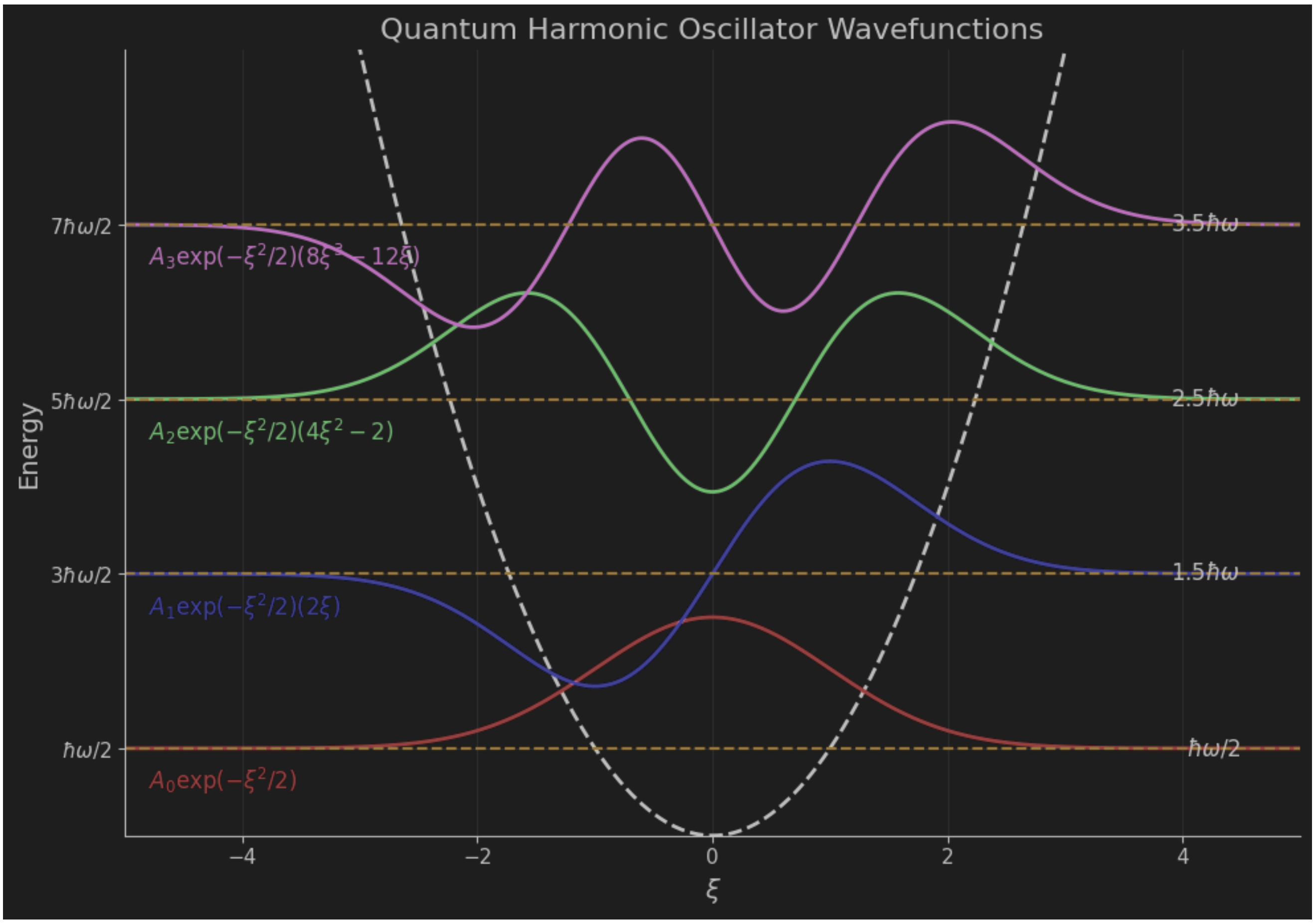
在经典力学中，粒子的能量为 E_0，它只能在 $|x| \leq 1/\alpha$ 的区域内运动（因为势能不能超过总能量）。超出这个范围就是“经典禁区”。

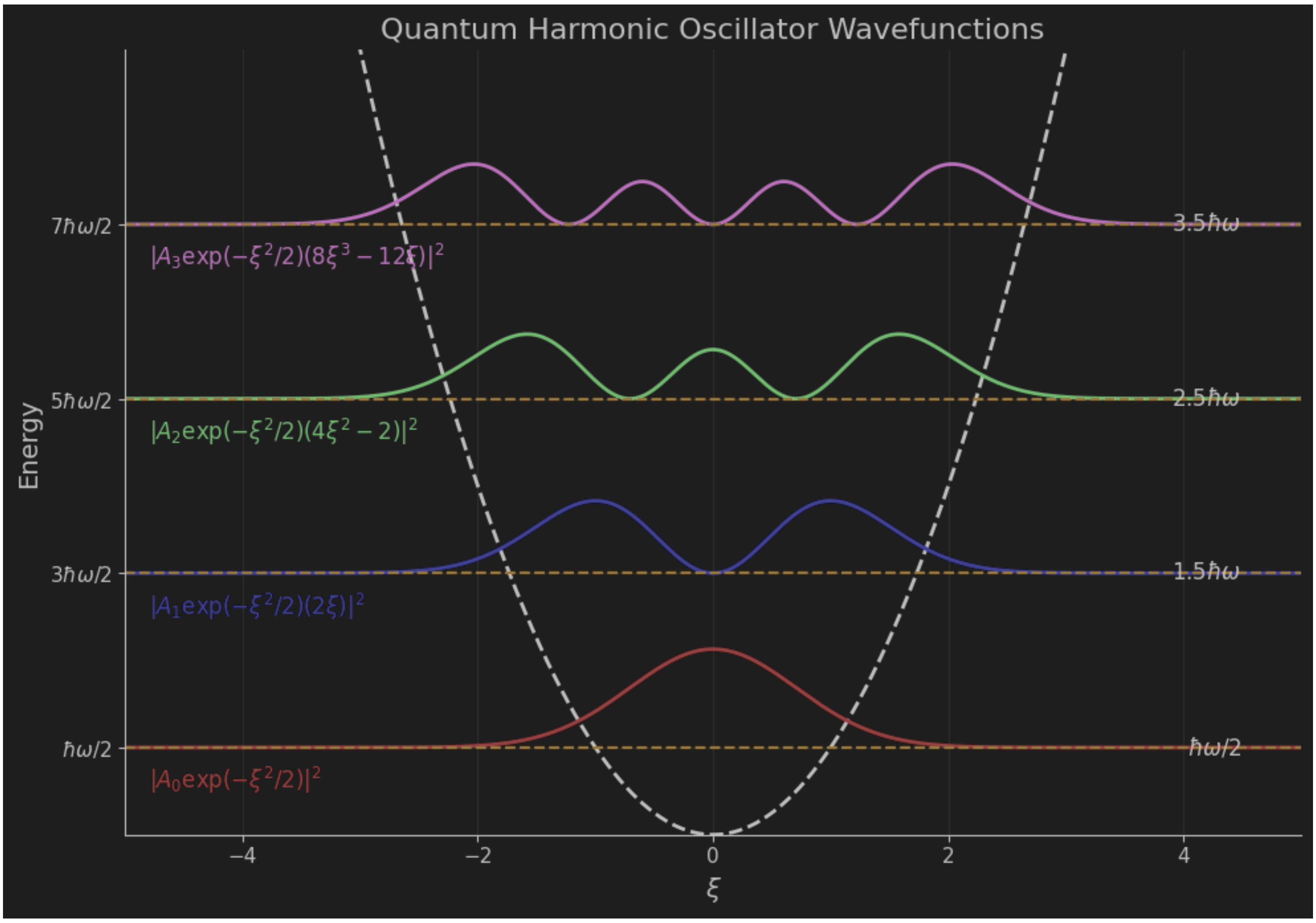
但在量子力学中，粒子有一定概率出现在经典禁区：

$$P_{\text{tunnel}} = \frac{\int_1^\infty e^{-\xi^2} d\xi}{\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi} \approx 16\% \tag{20}$$

> 这就是**量子隧穿效应**！粒子可以“穿过”经典上不可能穿越的势垒。这在扫描隧道显微镜（STM）、核聚变、半导体器件中都有重要应用。16% 的概率听起来不小，但在实际实验中，由于势垒高度和宽度的影响，隧穿概率通常非常小。

谐振子波函数图像


Quantum Harmonic Oscillator Wavefunctions
Energy
7ℏω/2
5ℏω/2
3ℏω/2
ℏω/2
$A_3\exp(-\xi^2/2)(8\xi^3-12\xi)$
$A_2\exp(-\xi^2/2)(4\xi^2-2)$
$A_1\exp(-\xi^2/2)(2\xi)$
$A_0\exp(-\xi^2/2)$
3.5ℏω
2.5ℏω
1.5ℏω
ℏω/2
−4
−2
0
2
4
ξ


Quantum Harmonic Oscillator Wavefunctions
Energy
7ℏω/2
5ℏω/2
3ℏω/2
ℏω/2
$|A_3\exp(-\xi^2/2)(8\xi^3-12\xi)|^2$
$|A_2\exp(-\xi^2/2)(4\xi^2-2)|^2$
$|A_1\exp(-\xi^2/2)(2\xi)|^2$
$|A_0\exp(-\xi^2/2)|^2$
3.5ℏω
2.5ℏω
1.5ℏω
ℏω/2
−4
−2
0
2
4
ξ