第7章 采样

本章主要内容

1.如何用连续时间信号的离散时间样本来表示连续时间信号——采样定理。

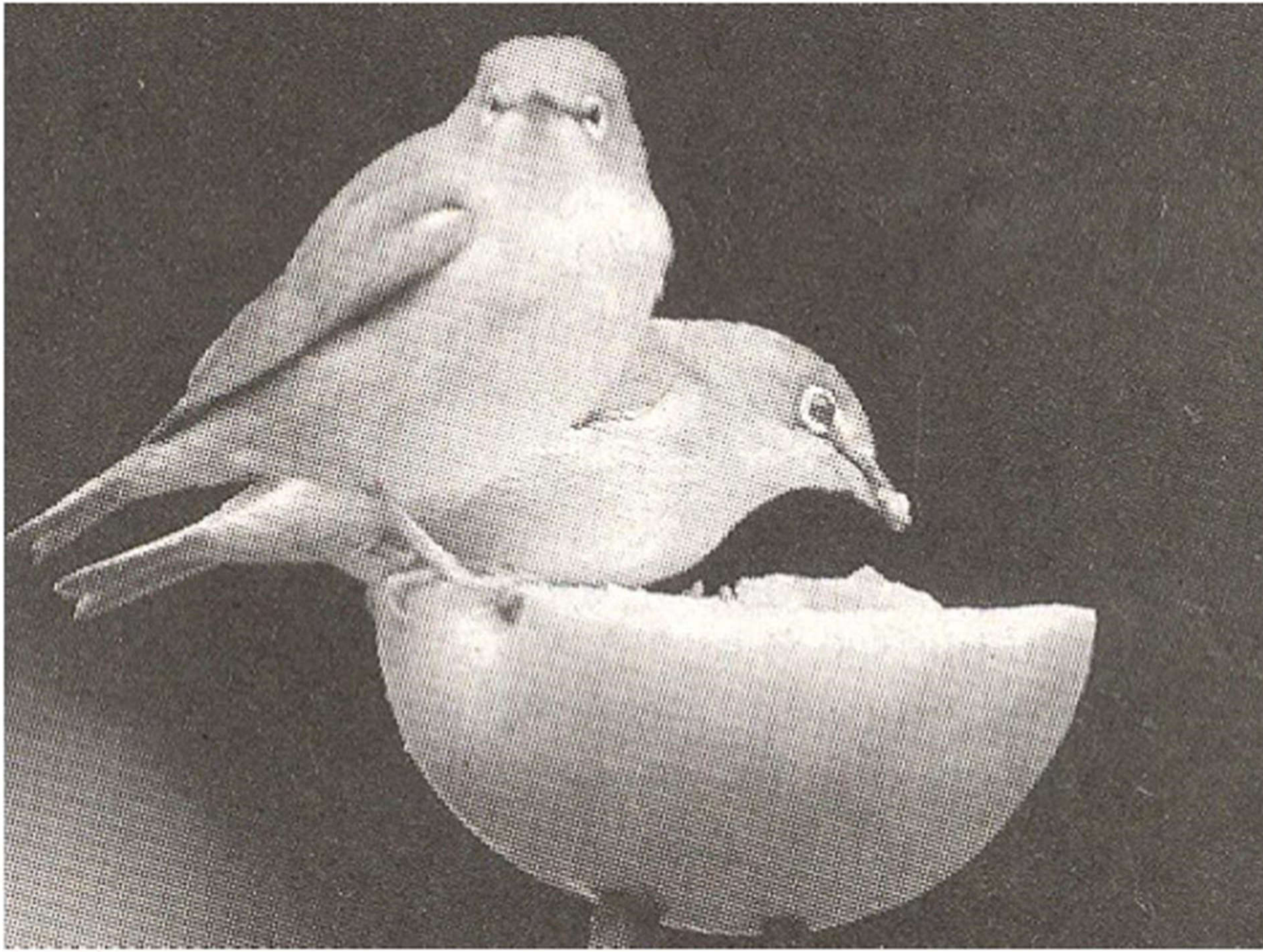
2. 如何从采样所得到的样本重建连续时间信号。

3. 欠采样导致的后果——频谱混叠。

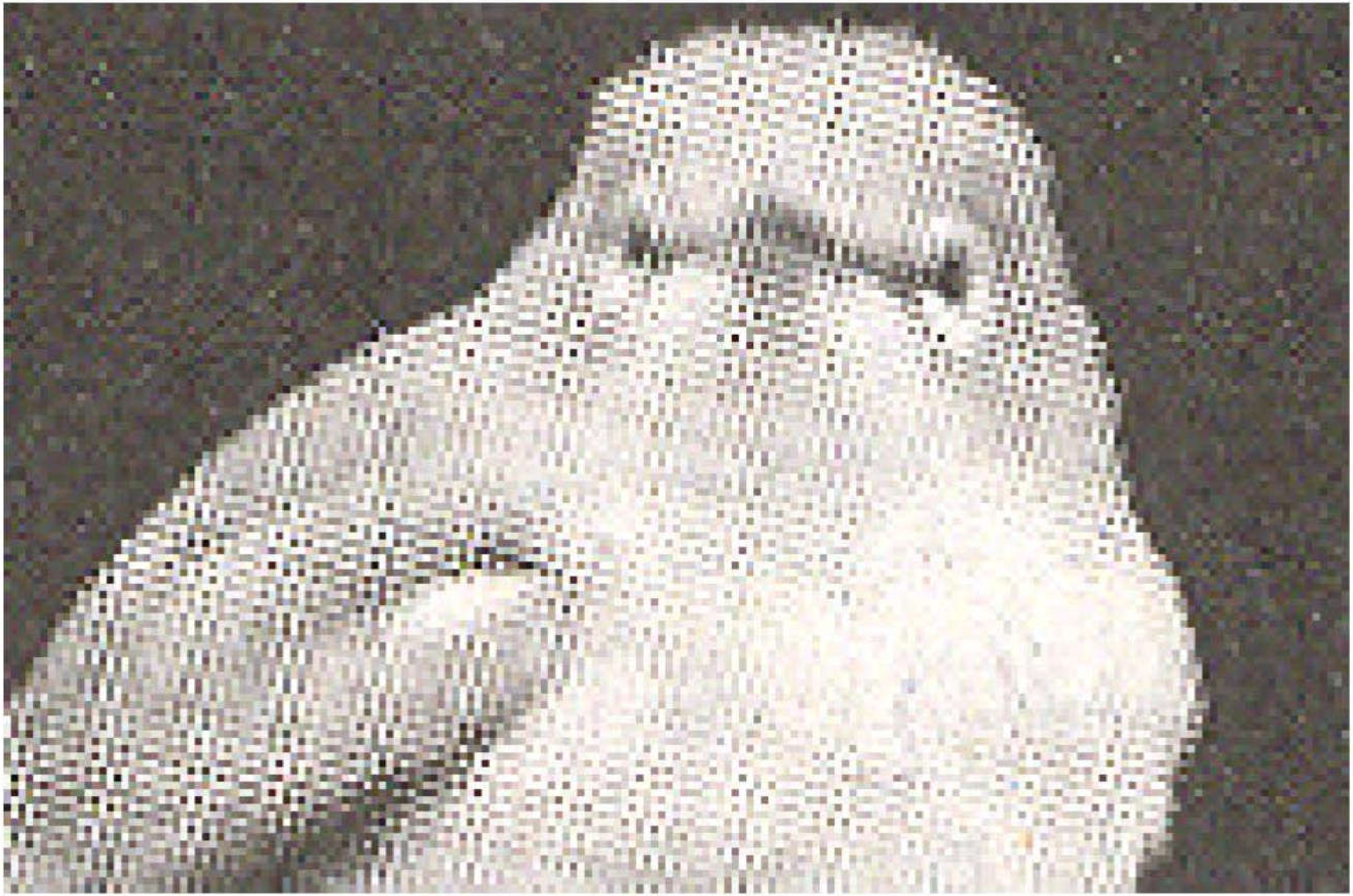
7.0 引言

在日常生活中，常可以看到用离散时间信号表示连续时间信号的例子。如传真的照片、电视屏幕的画面、电影胶片等等，这些都表明连续时间信号与离散时间信号之间存在着密切的联系。在一定条件下，可以用<u>离散时间信号代替连续时间信号</u>而并不丢失原来信号所包含的信息。

例　一幅新闻照片

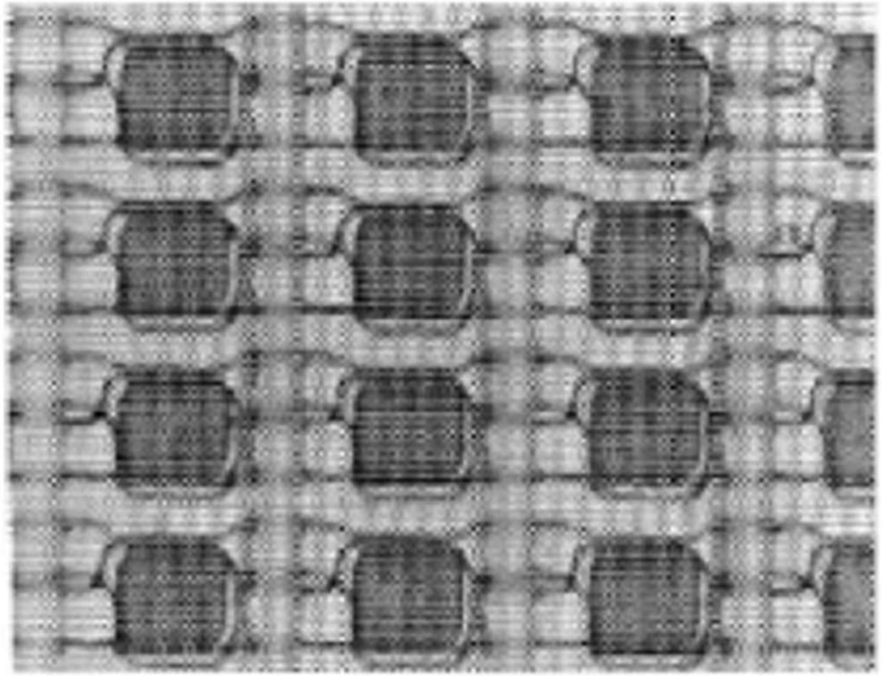


局部放大后的图片



例 CCD芯片的光显微图

CCD芯片用VLSI技术制造。被分为许多微小区，每个小区的尺寸为13*11 μm（对应一个象素），在10*9.3mm面积上有500*582个象素。



当光成象在CCD芯片上时，就在这些空间离散的象素点上被采样，而生成了离散时间图象信号。

研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系主要包括：

1. 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息。

2. 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号。

3. 如何对一个连续时间信号进行离散时间处理。

4. 对离散时间信号如何进行采样、抽取及内插。

7.1 用样本表示连续时间信号: 采样定理

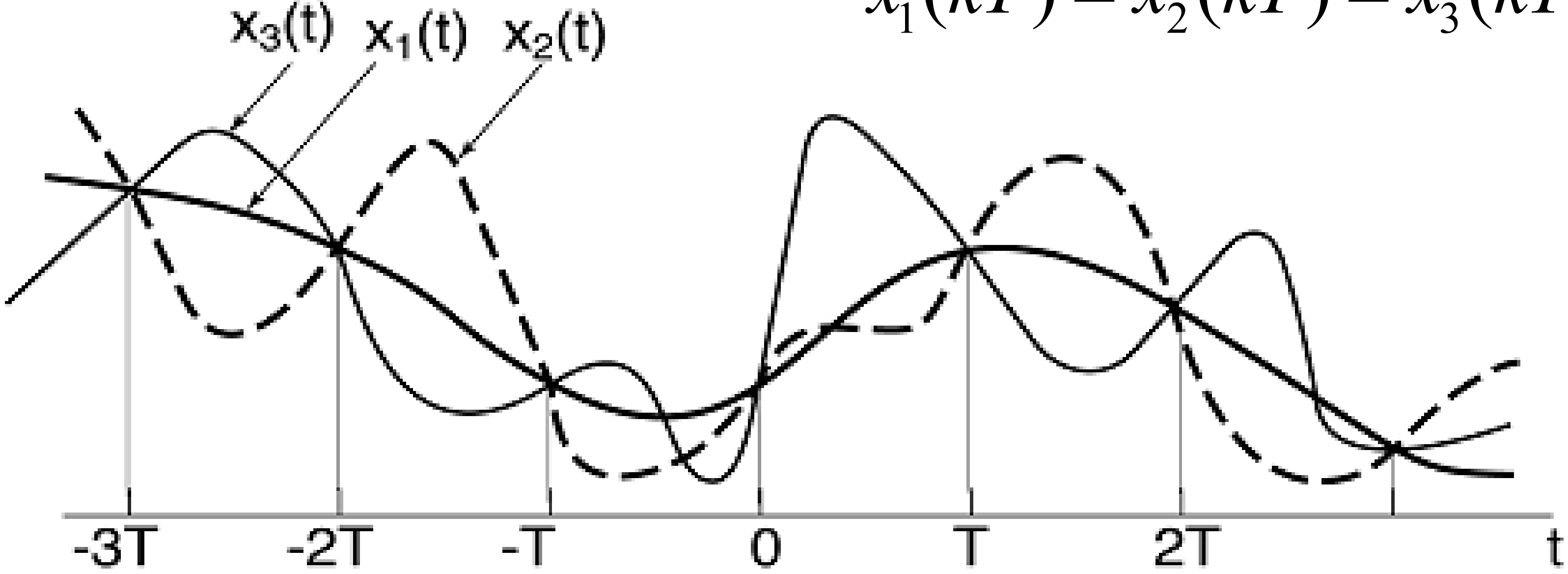
一. 采样

在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为**采样**。

是否任何信号都可以由它的离散时间样本来表示?

对一维连续时间信号采样的例子:

$$x_1(kT)=x_2(kT)=x_3(kT)$$



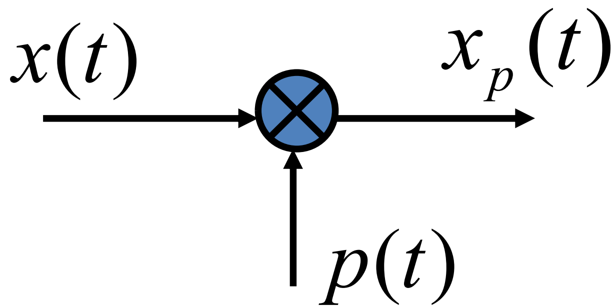
在没有任何条件限制的情况下，从连续时间信号采样所得到的样本序列不能唯一地代表原来的连续时间信号。

此外，对同一个连续时间信号，当采样间隔不同时也会得到不同的样本序列。

如果一个信号是带限的（即它的FT在某一有限频带范围以外均为零），并且它的样本取得足够密（相对于信号的最高频率而言），这些样本值就能**唯一地**用来表征这一信号，并且能从这些样本中把信号完全恢复出来，这一结果就是**采样定理**（sampling theorem）。

二. 采样的数学模型：

在时域：



$$x_p(t) = x(t)\,p(t)$$

在频域:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

三. 冲激串采样（理想采样）：

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$x_p(t)=x(t)p(t)$$

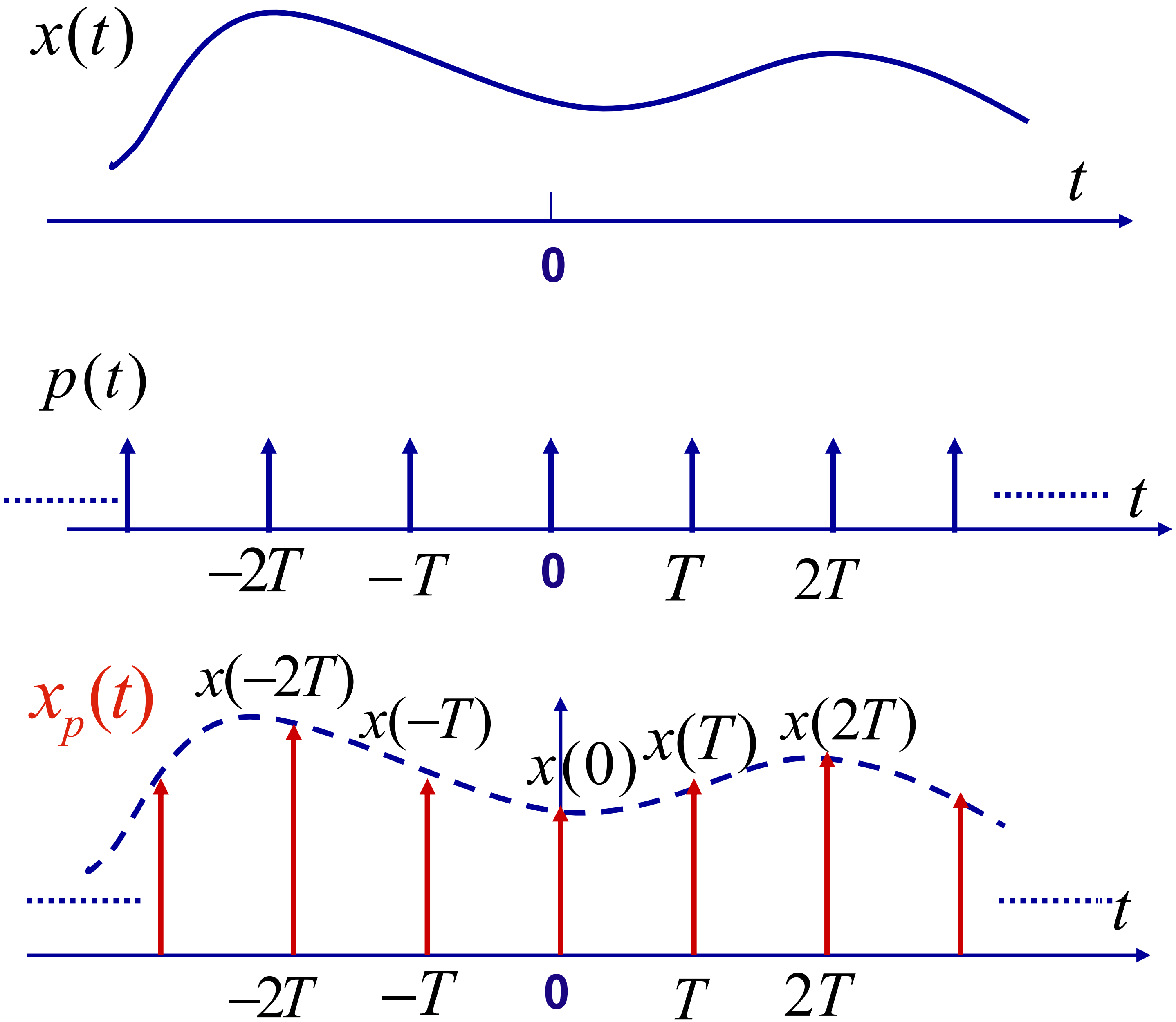
$$=\sum_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

p(t)为采样函数

T为采样周期

$\omega=2\pi/T$为采样频率



x(t)
t
0
p(t)
t
–2T
–T
0
T
2T
x_p(t)
x(–2T)
x(–T)
x(0)
x(T)
x(2T)
t
–2T
–T
0
T
2T

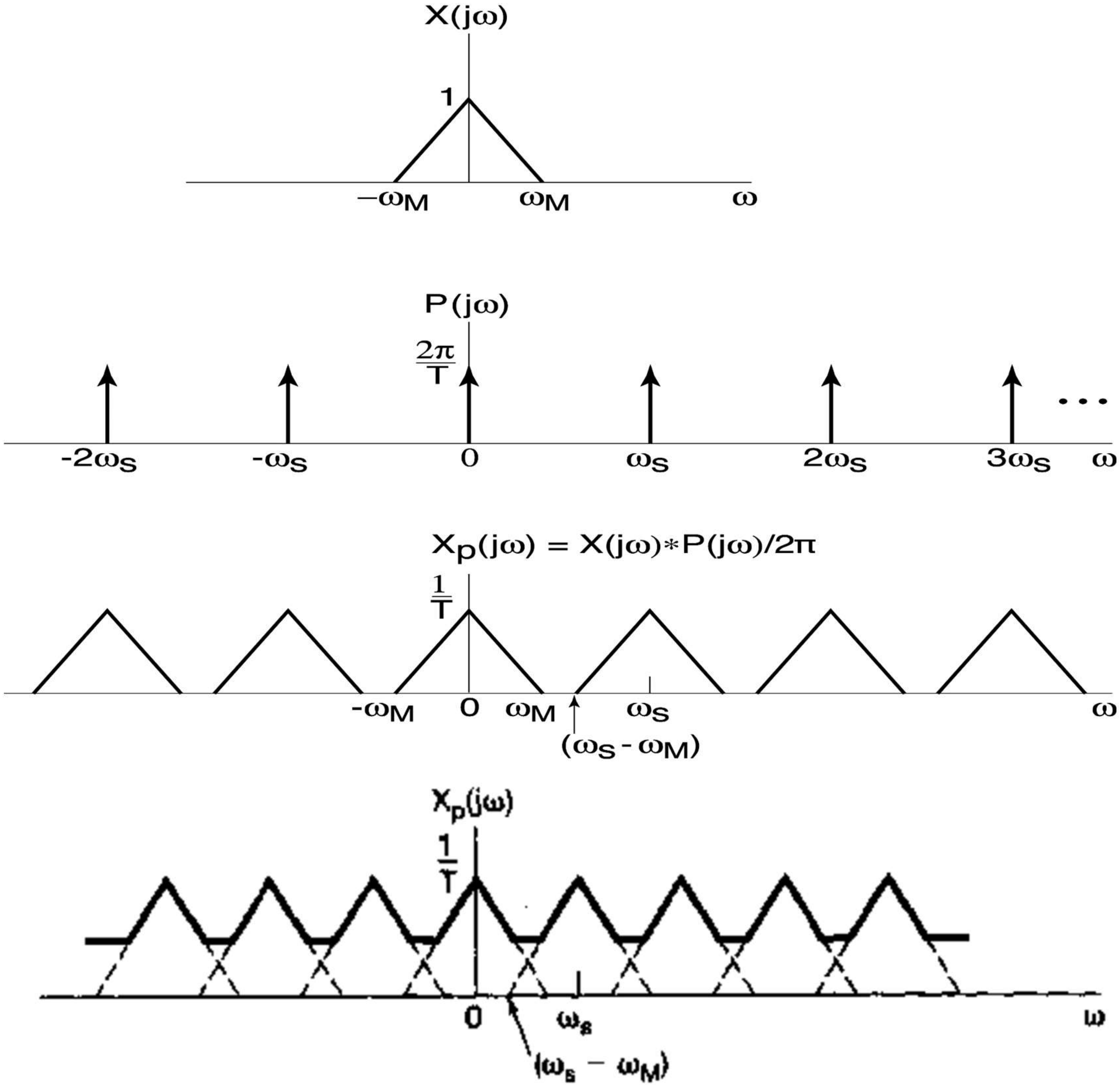
在频域由于 $p(t) \leftrightarrow P(j\omega) = \dfrac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \dfrac{2\pi}{T}k)$

所以 $X_p(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega)$ ← 相乘性质而得

$$= \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega - k\omega_s)) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

可见，在时域对连续时间信号进行理想采样，就相当于在频域将连续时间信号的频谱以ω_s为周期进行延拓。

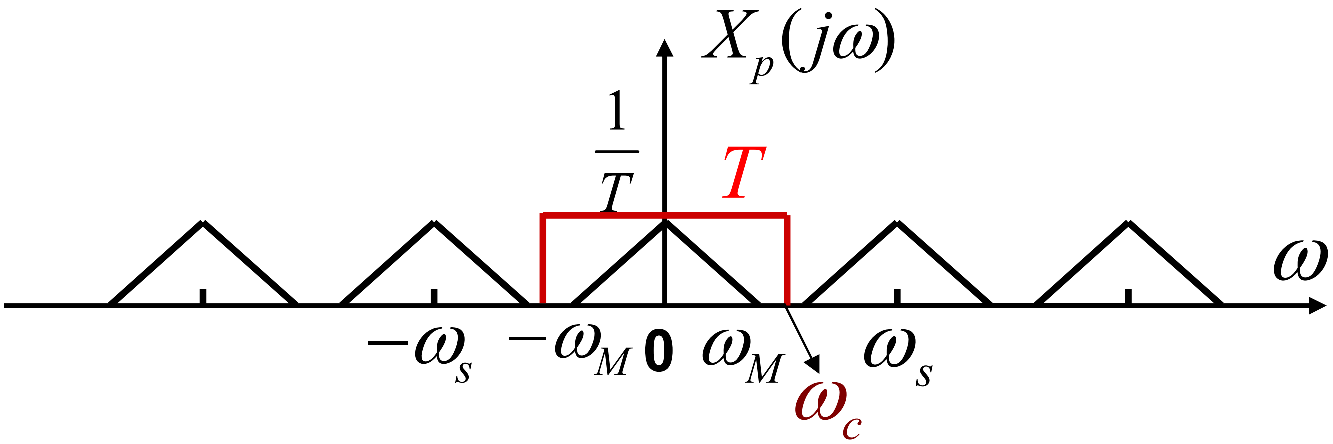


X(jω)
1
−ωM
ωM
ω
P(jω)
2π/T
-2ωS
-ωS
0
ωS
2ωS
3ωS
ω
Xp(jω) = X(jω)∗P(jω)/2π
1/T
-ωM
0
ωM
ωS
ω
(ωS - ωM)
Xp(jω)
1/T
0
ωs
ω
(ωs − ωM)

要想使采样后的信号样本能完全代表原来的信号，就意味着要能够从$X_p(j\omega)$中不失真地分离出$X(j\omega)$。这就要求$X_p(j\omega)$在周期性延拓时不能发生频谱的混叠。为此必须要求:

1. $x(t)$必须是带限的，最高频率分量为ω_M。
2. 采样间隔(周期)不能是任意的，必须保证采样频率$\omega_s>2\omega_M$。其中$\omega_s=2\pi/T$ 为采样频率。

在满足上述要求时，可以通过理想低通滤波器从$X_p(j\omega)$中不失真地分离出$X(j\omega)$。

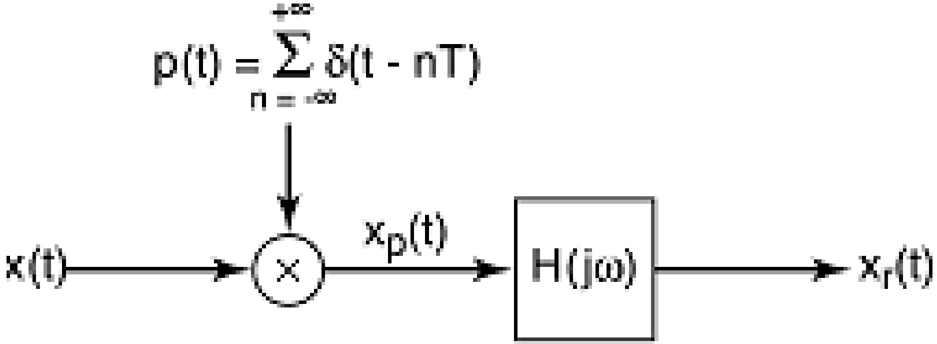


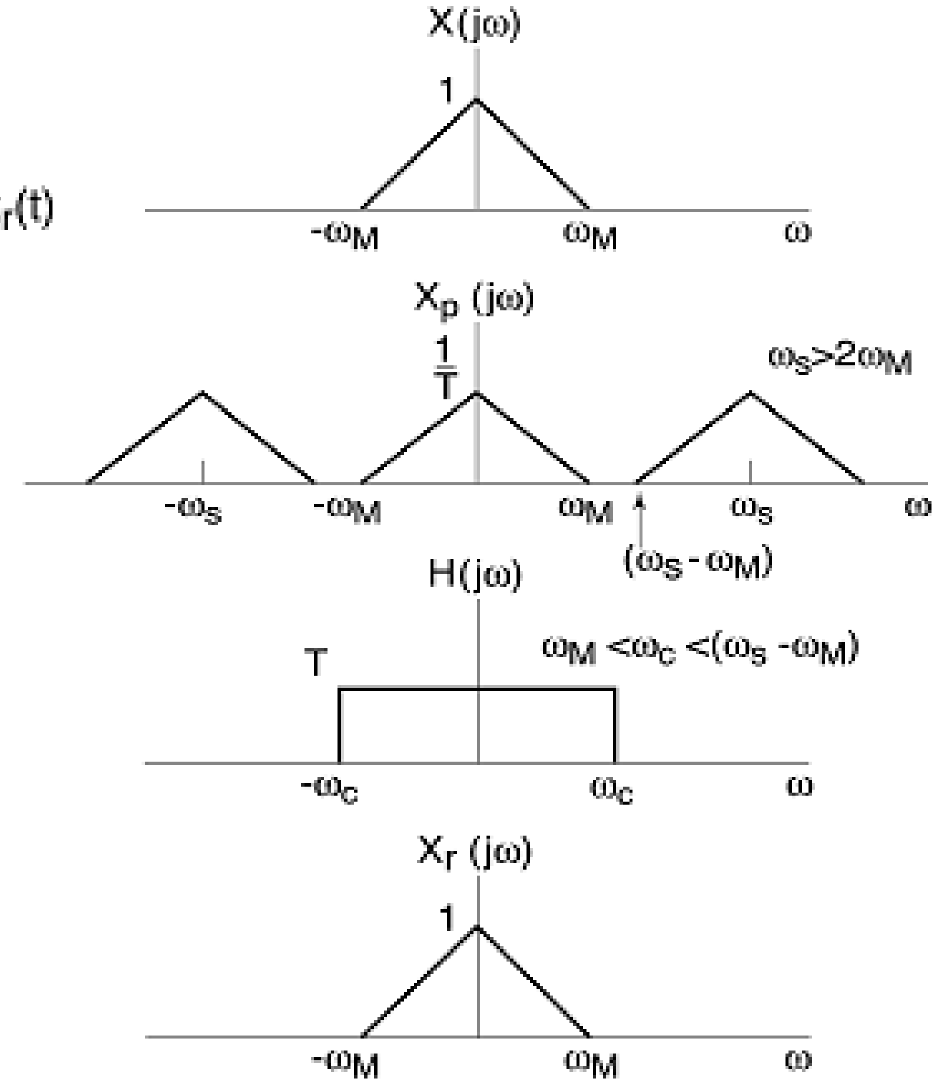
四. Nyquist 采样定理：

对于最高频率ω_M的连续时间带限信号x(t)，如果以$\omega_s>2\omega_M$的频率进行理想采样，则x(t)可以唯一的由其样本x(nT), n=0, ±1, ±2, …来确定。

ω_M: *Nyquist frequency（奈奎斯特频率）*

$2\omega_M$: *Nyquist rate（奈奎斯特率）*





- 在工程实际应用中，理想滤波器是不可能实现的。而非理想滤波器一定有过渡带，因此，实际采样时，ω_s必须大于$2\omega_M$。

- 低通滤波器的截止频率必须满足：

$$\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$$

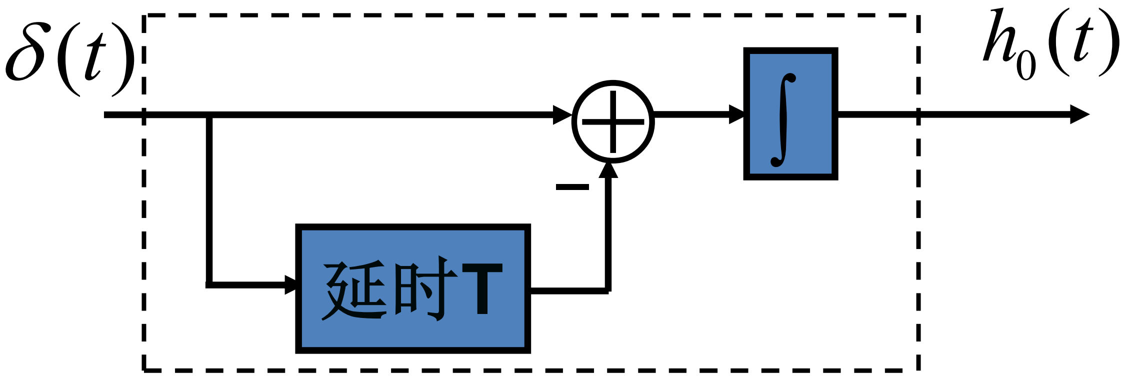
- 为了补偿采样时频谱幅度的减小，滤波器应具有T倍的通带增益。

三. 零阶保持采样:

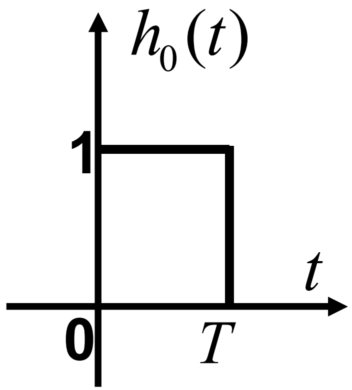
1. 零阶保持系统：是一个采样函数为矩形脉冲的系统。

- 采样定理 → 一个带限信号唯一地可以用它的样本来代表
- 产生和传输窄而幅度大的脉冲（近似于冲激）相当困难

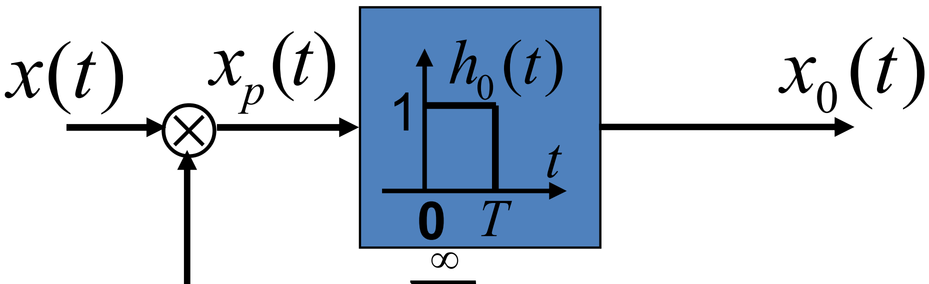
零阶保持（zero-order hold）产生采样



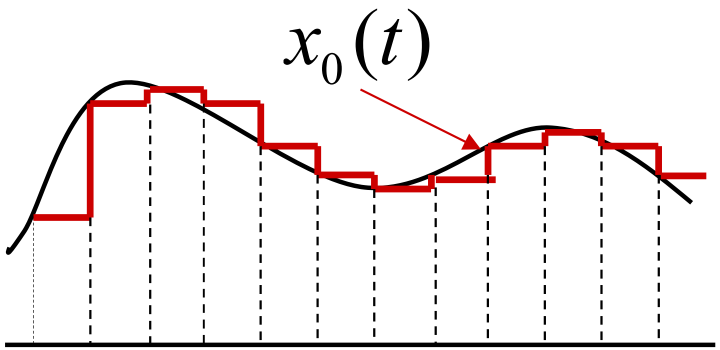
零阶保持系统



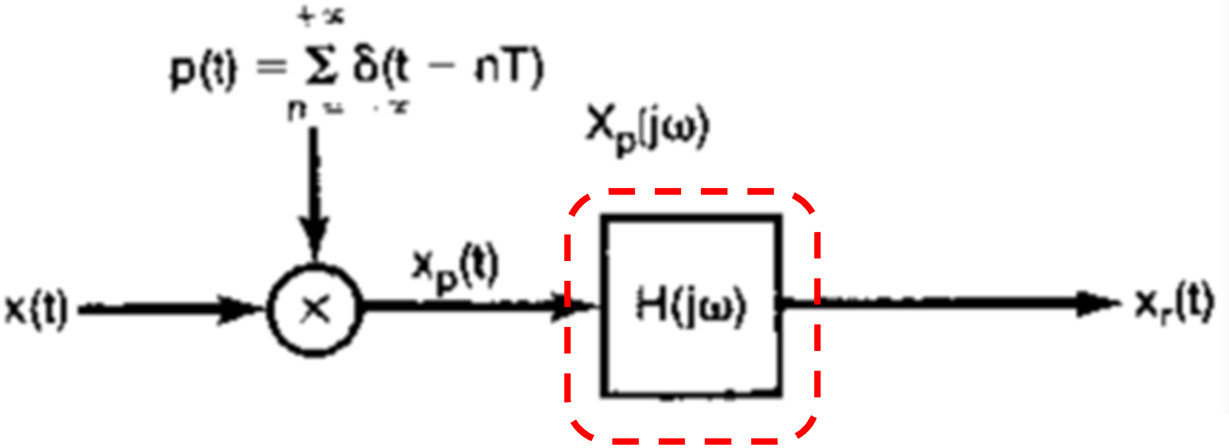
2. 零阶保持：信号的样本经零阶保持后，所得到的信号是一个阶梯形信号。



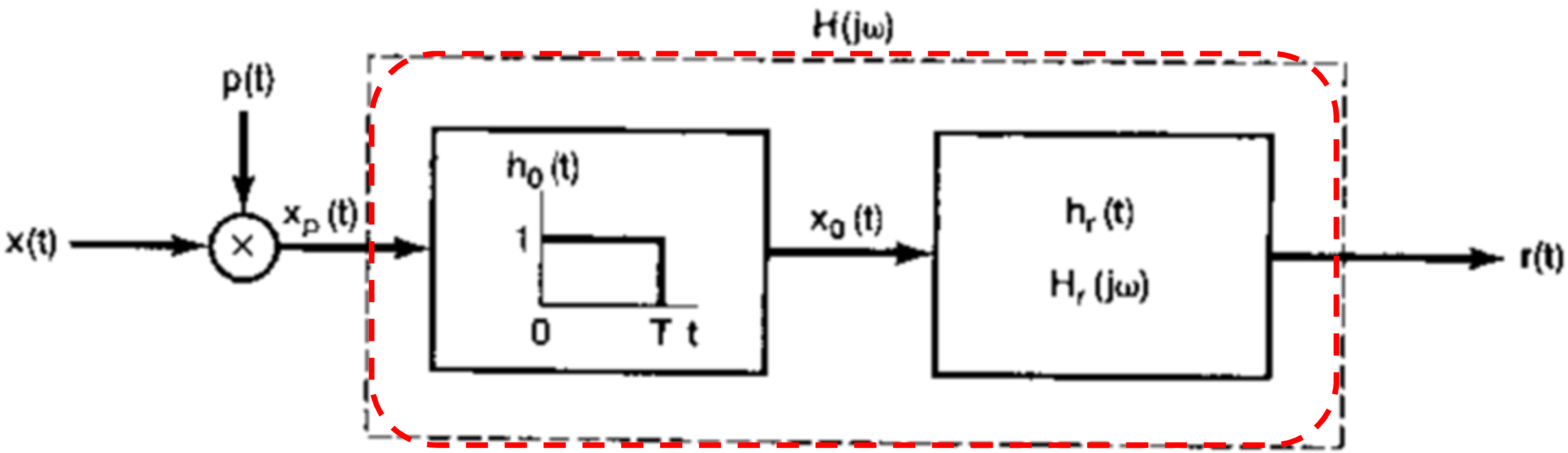
$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$



零阶保持采样相当于理想采样后，再级联一个零阶保持系统。



p(t) = Σ δ(t − nT)
Xp(jω)
x(t)
xp(t)
H(jω)
xr(t)



H(jω)
p(t)
x(t)
xp (t)
h0 (t)
1
0
T t
x0 (t)
hr (t)
Hr (jω)
r(t)

为了能从$x_0(t)$恢复$x(t)$，就要求零阶保持后再级联一个系统$H_r(j\omega)$。使得

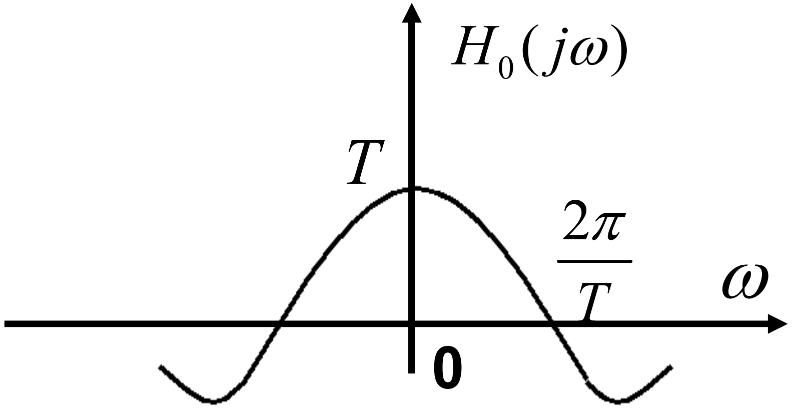
$$H_0(j\omega)H_r(j\omega)=H(j\omega)=\begin{cases}T, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

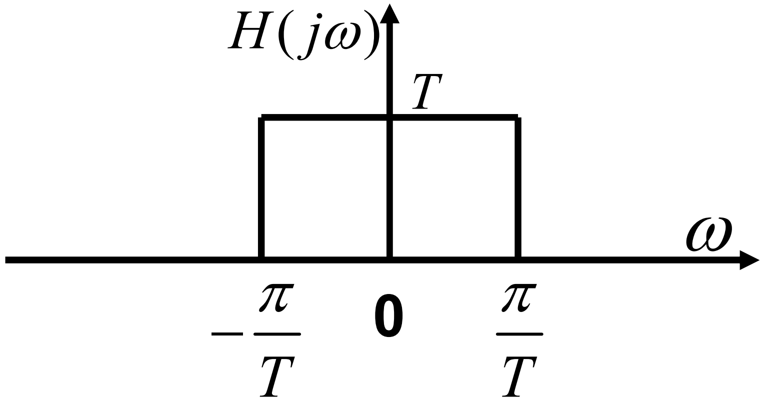
其中 $\omega_M<\omega_c<\omega_s-\omega_M$

而 $H_0(j\omega)=\dfrac{2\,\mathrm{Sin}(\omega T/2)}{\omega}e^{-j\frac{\omega T}{2}}$

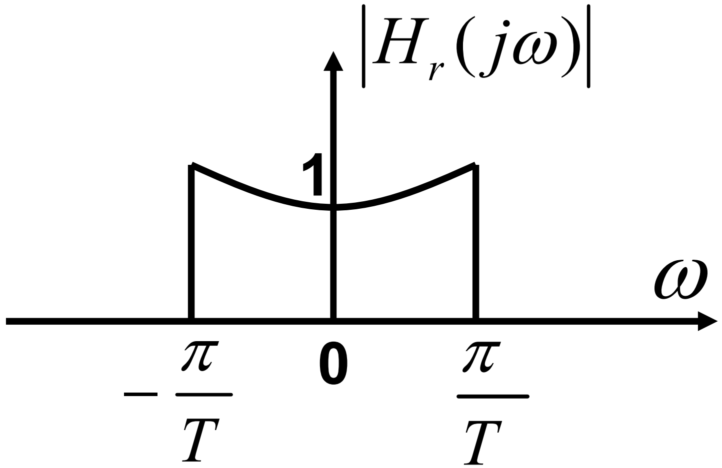
所以 $H_r(j\omega)=\dfrac{H(j\omega)}{\dfrac{2\,\mathrm{Sin}\,\omega T/2}{\omega}}\cdot e^{j\frac{\omega T}{2}}$

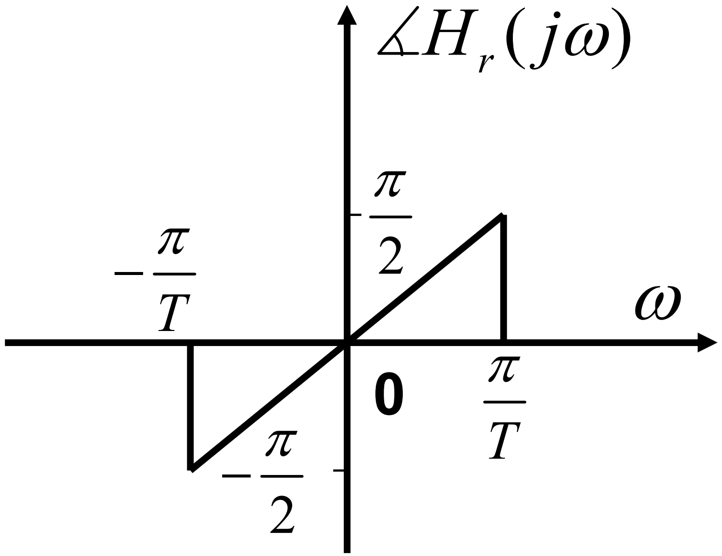
以 $H(j\omega)$ 表示理想低通滤波器的特性，则:





若 $\omega_c=\frac{1}{2}\omega_s=\frac{\pi}{T}$ 则

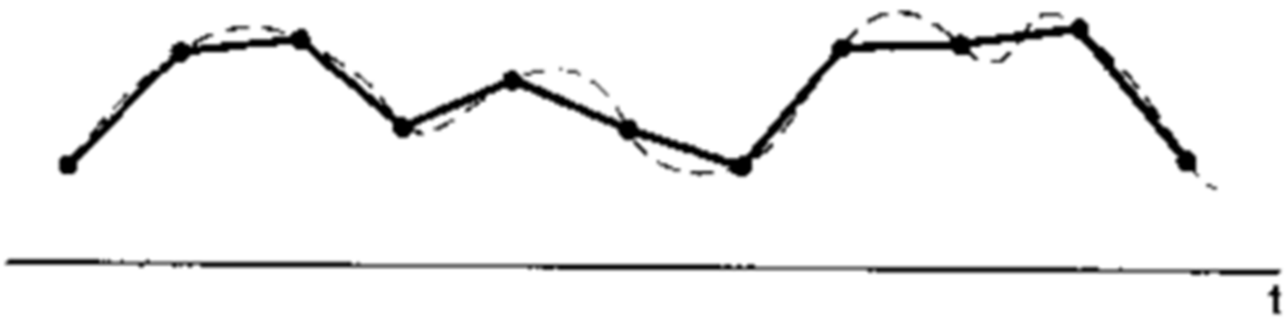




7.2 利用内插从样本重建信号

内插（用一个连续信号对一组样本值得拟合）：由样本值重建某一函数的过程，重建结果既可以是近似的，也可以是完全准确的。

- 一种简单的内插过程就是零阶保持；
- 另一种简单的内插形式是线性内插，将相邻的样本点用直线连起来；
- 高阶多项式或其他函数拟合。



一. 理想内插/带限内插:

若 $h(t)$ 为理想低通的单位冲激响应，则

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t)$$

$$= \sum_{n-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT)$$

上式体现了在样本点x(nT)之间如何拟合成一条连续曲线，因此代表了一种内插公式。

表明：理想内插以理想低通滤波器的单位冲激响应作为内插函数。

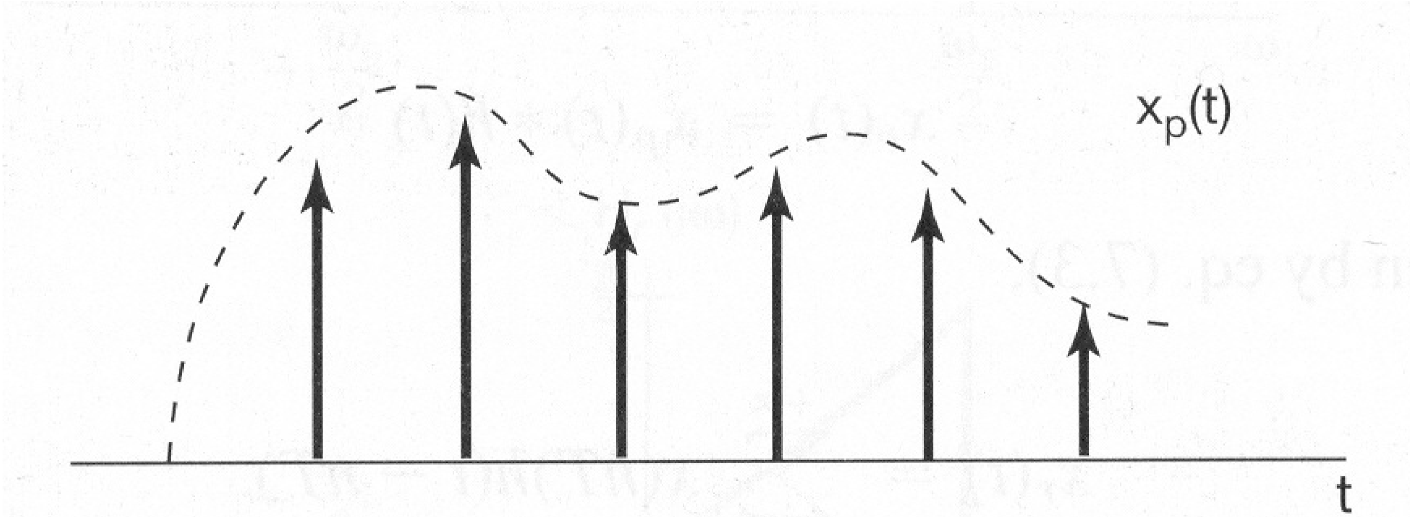
$$h(t)=\frac{T\omega_c}{\pi}\mathrm{Sinc}(\frac{\omega_c}{\pi}t)=\frac{T\omega_c}{\pi}\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c t}{\omega_c t}=T\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c t}{\pi t}$$

$$\therefore x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\frac{\omega_c T}{\pi}\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c(t-nT)}{\omega_c(t-nT)}$$

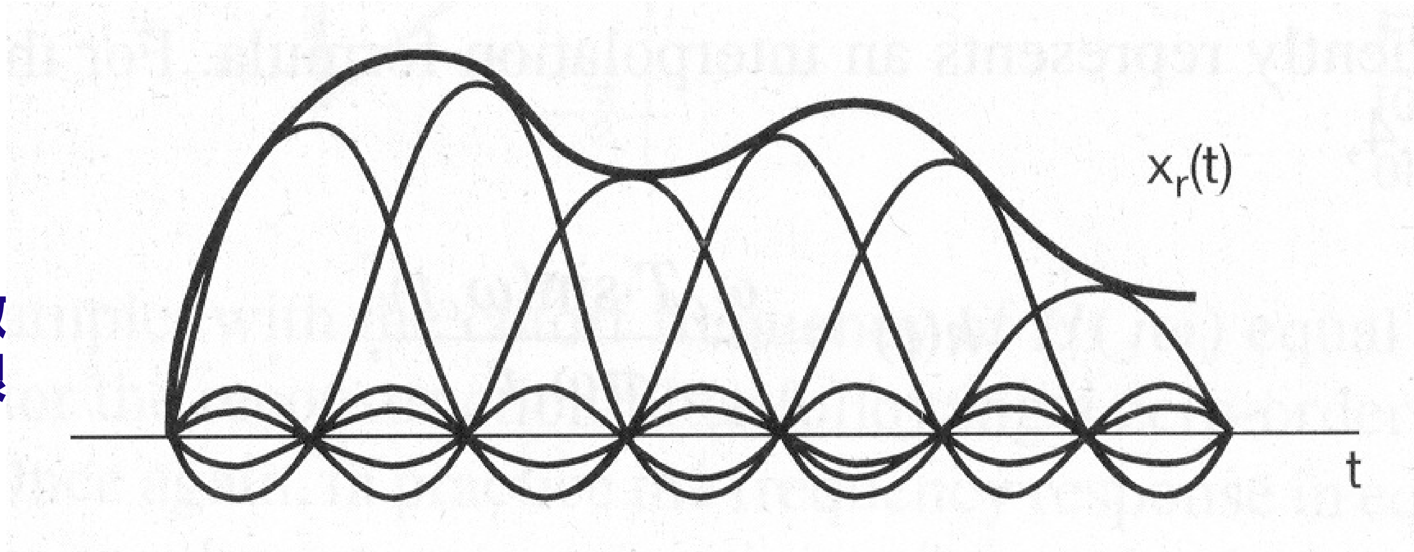
当 $\omega_c=\dfrac{\omega_s}{2}=\dfrac{\pi}{T}$ **时** $x_r(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c(t-nT)}{\omega_c(t-nT)}$

这种内插称为时域中的带限内插（band limited interpolation）。

样本冲激串

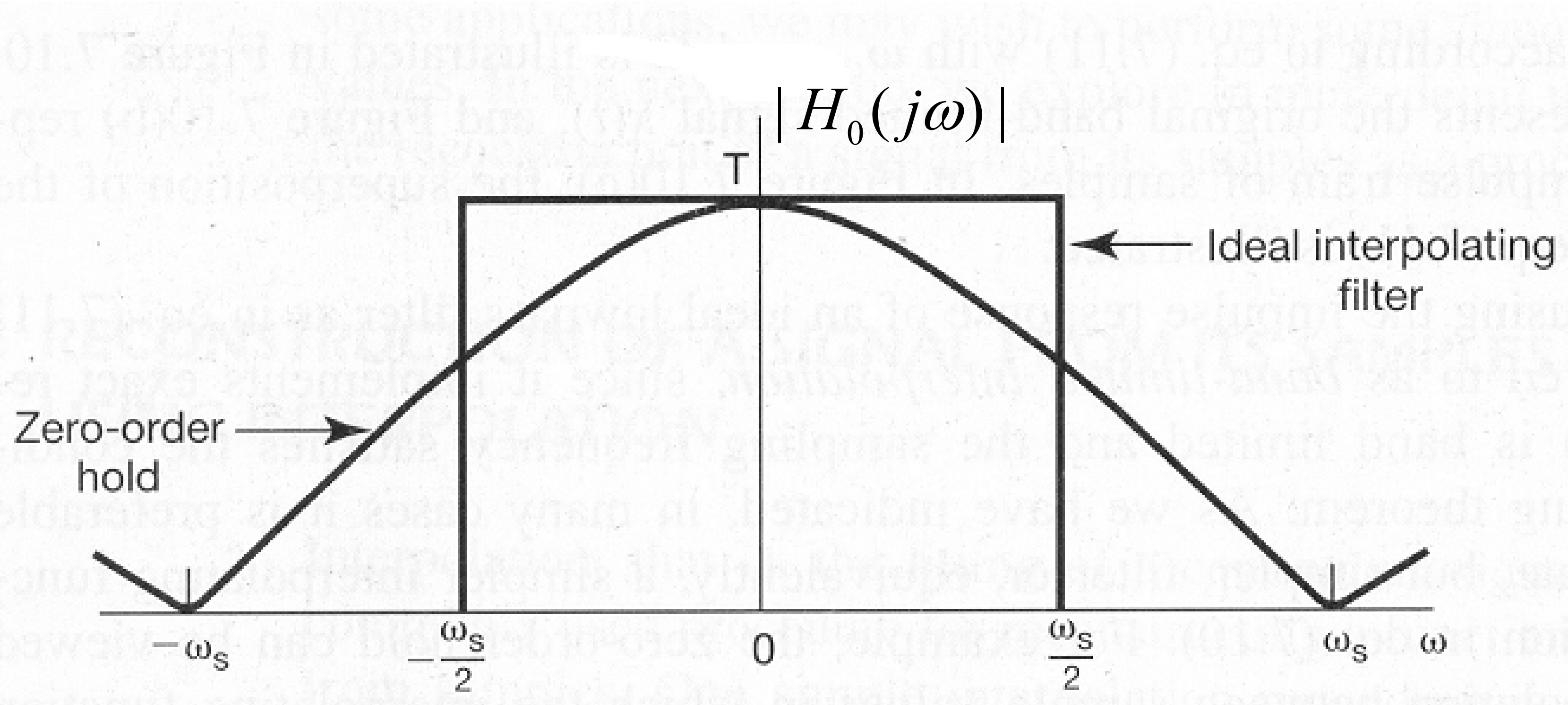


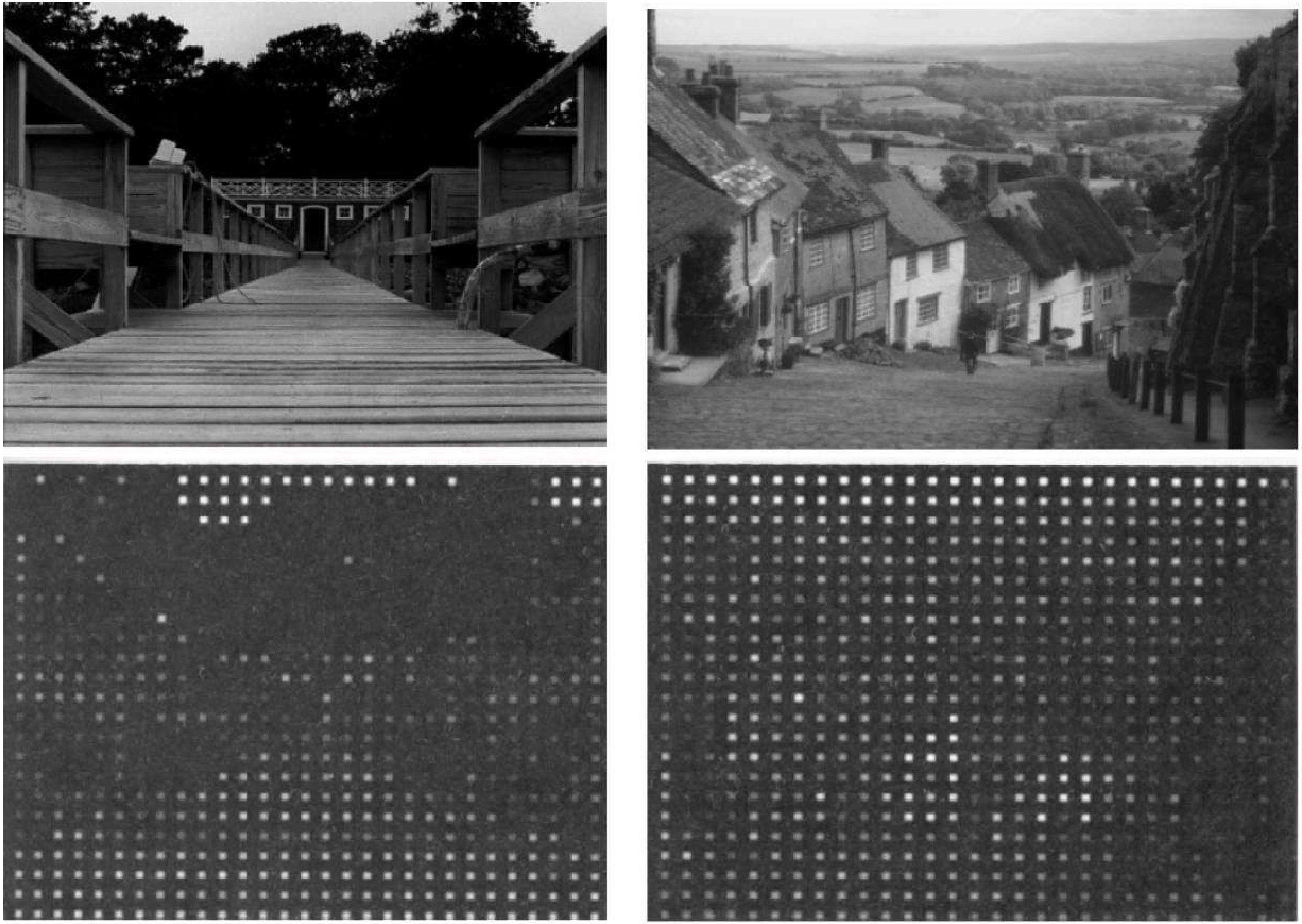
用sinc函数的叠加取代冲激串的理想带限内插



二. 零阶保持内插:

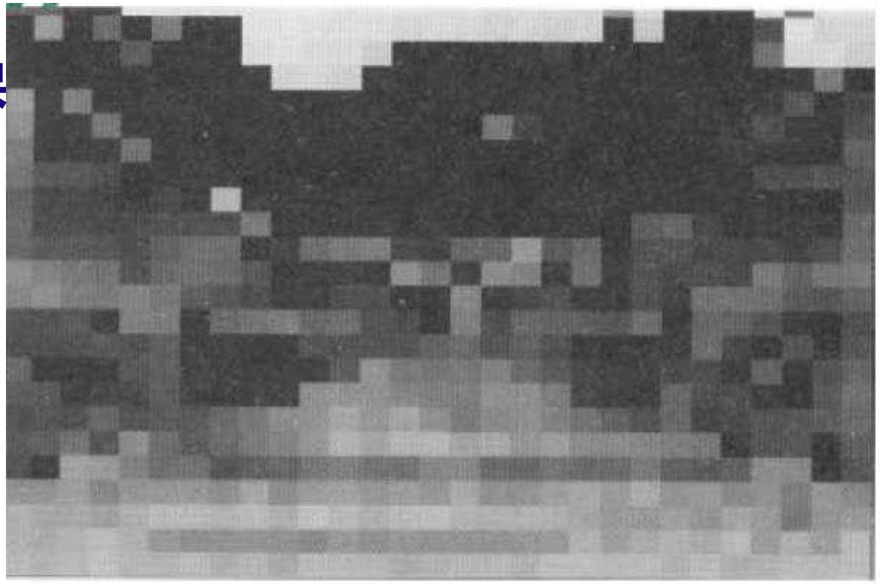
零阶保持内插的内插函数是零阶保持系统的单位冲激响应$h_0(t)$。

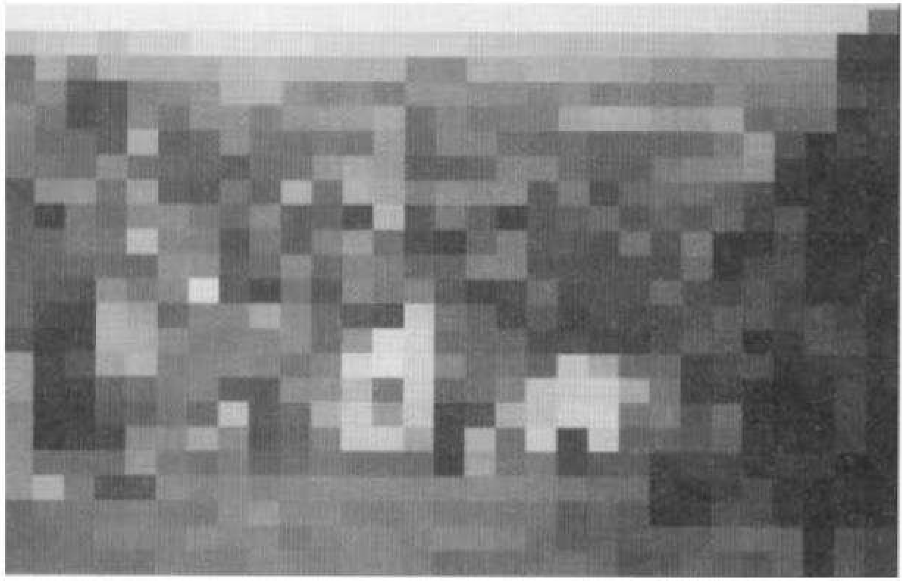




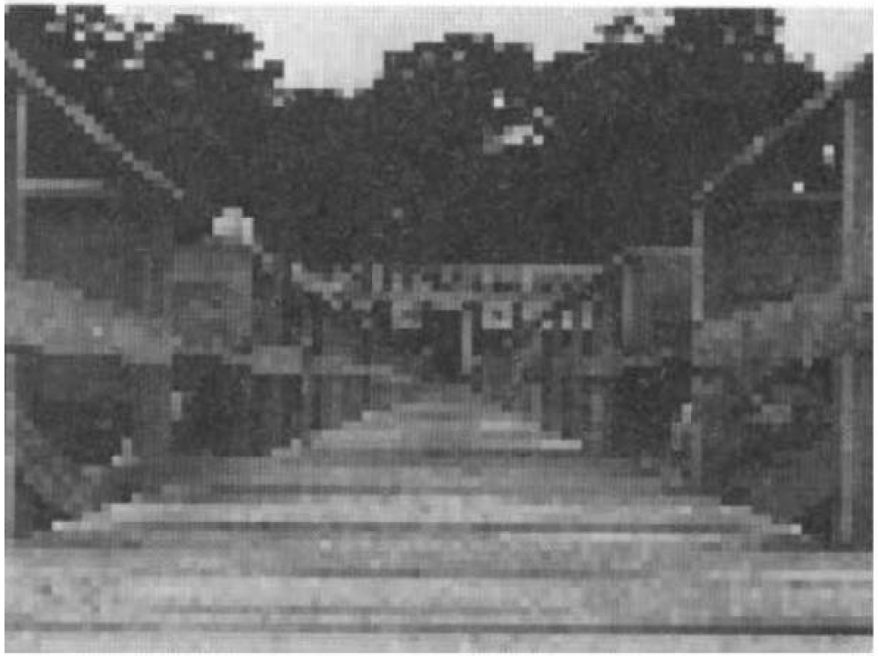
(a) 冲激串采样后

(b) 零阶保持滤波（视觉系统有固有的低通滤波作用，截止频率随距离减小）



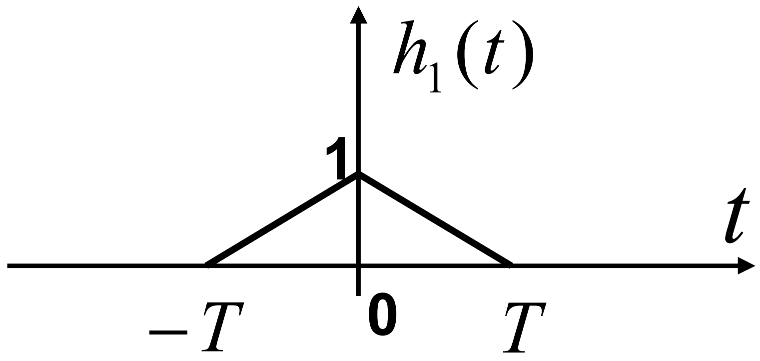


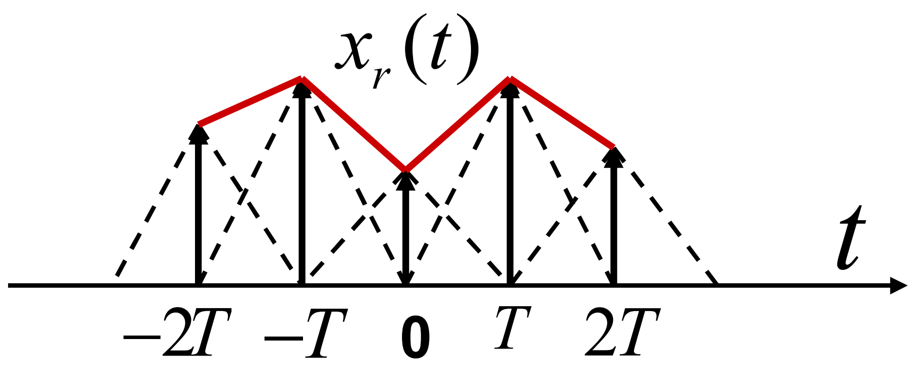
(c) 采样间隔是 (a) 和 (b) 的1/4，仍用零阶保持滤波



三. 一阶保持内插（线性内插）

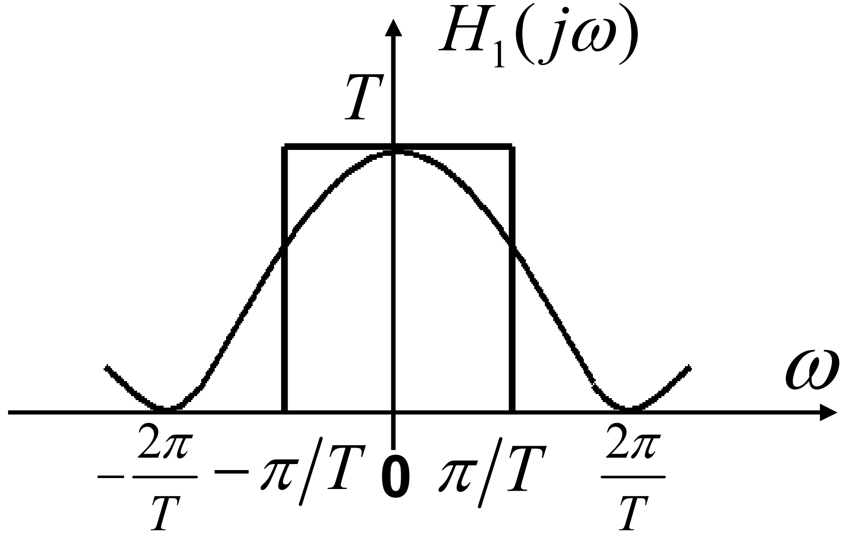
线性内插时，其内插函数是三角形冲激响应。





$$H_1(j\omega)=T\left[\frac{\mathrm{Sin}\left(\omega T/2\right)}{\omega T/2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{\mathrm{Sin}\left(\omega T/2\right)}{\omega/2}\right]^2$$



一阶保持内插的结果（采样间隔为T/4）

一阶保持内插的结果（采样间隔为T/4）

7.3 欠采样的效果—频谱混叠（aliasing）

一.欠采样与频谱混叠:

如果采样时，不满足采样定理的要求，就一定会在 $x(t)$ 的频谱周期延拓时，出现频谱混叠的现象。

此时，即使通过理想内插也得不到原信号。但是无论怎样，恢复所得的信号 $x_r(t)$ 与原信号 $x(t)$ 在采样点上将具有相同的值。

$$x_r(nT) = x(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

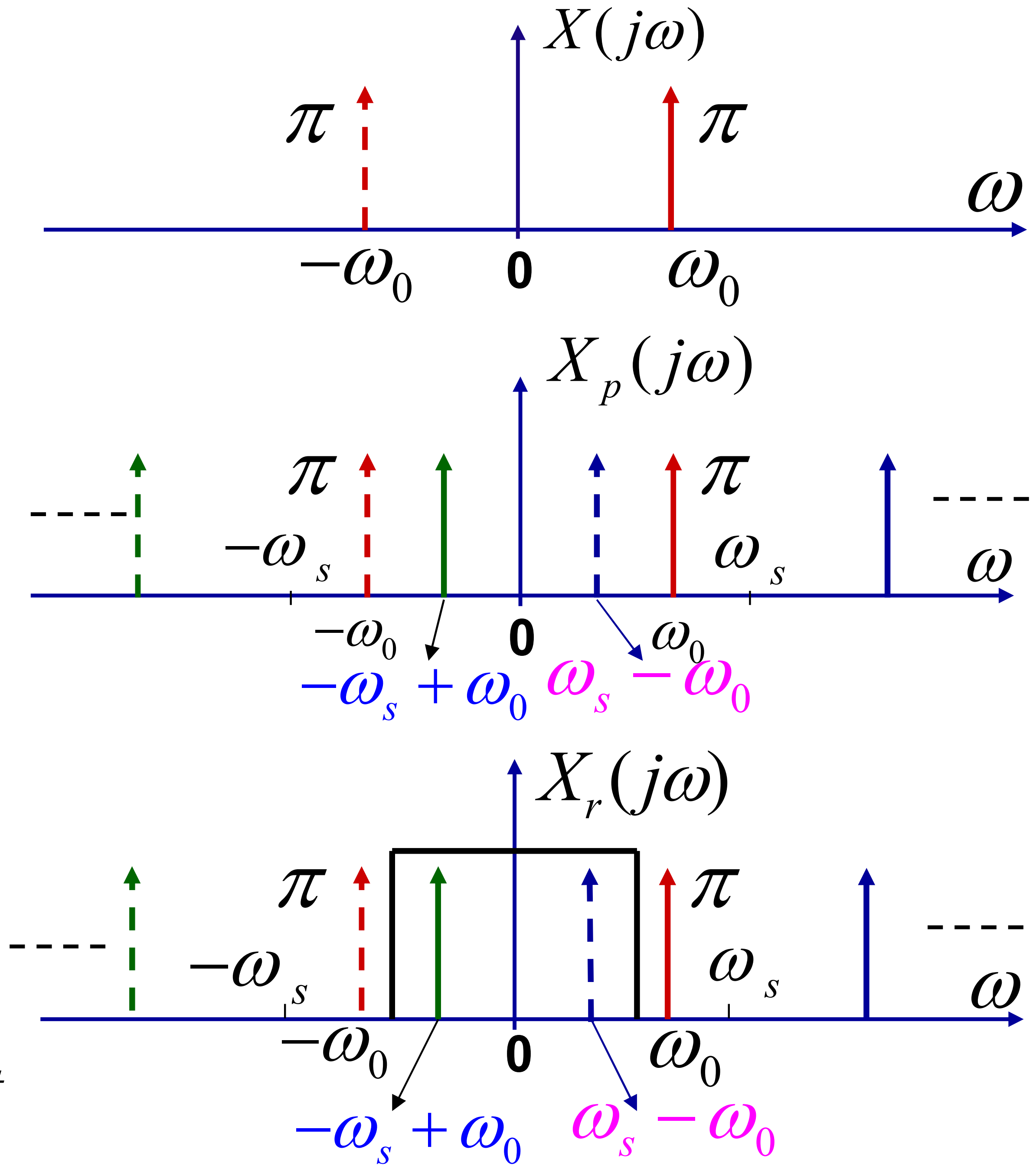
例：$x(t)=\cos\omega_0 t$

$x(t)$**的频谱** $X(j\omega)$

当 $\omega_0<\omega_s<2\omega_0$ **时，产生频谱混叠**

恢复的信号为

$$x_r(t)=\cos(\omega_s-\omega_0)t$$



显然当 $t = nT$ **时有**

$$x_r(nT) = \cos(\omega_s - \omega_0)nT$$

$$= \cos\omega_s nT \cdot \cos\omega_0 nT + \sin\omega_s nT \cdot \sin\omega_0 nT$$

$$= \cos\omega_0 nT = x(nT)$$

$$\omega_s = 2\pi / T$$

如果 $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$ **，则在上述情况下:**

$$X_r(j\omega) = \pi\left\{\delta[\omega - (\omega_s - \omega_0)] \cdot e^{-j\varphi} + \delta[\omega + (\omega_s - \omega_0)] \cdot e^{j\varphi}\right\}$$

$$\therefore x_r(t) = \cos[(\omega_s - \omega_0)t - \varphi]$$

表明恢复的信号不仅频率降低，而且相位相反。

工程应用时，如果采样频率 $\omega_s = 2\omega_M$ 将不足以从样本恢复原信号。

例如 $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 在 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T} = 2\omega_0$ 时

$$x(t) = \cos\varphi \cos\omega_0 t + \sin\omega_0 t \sin\varphi$$

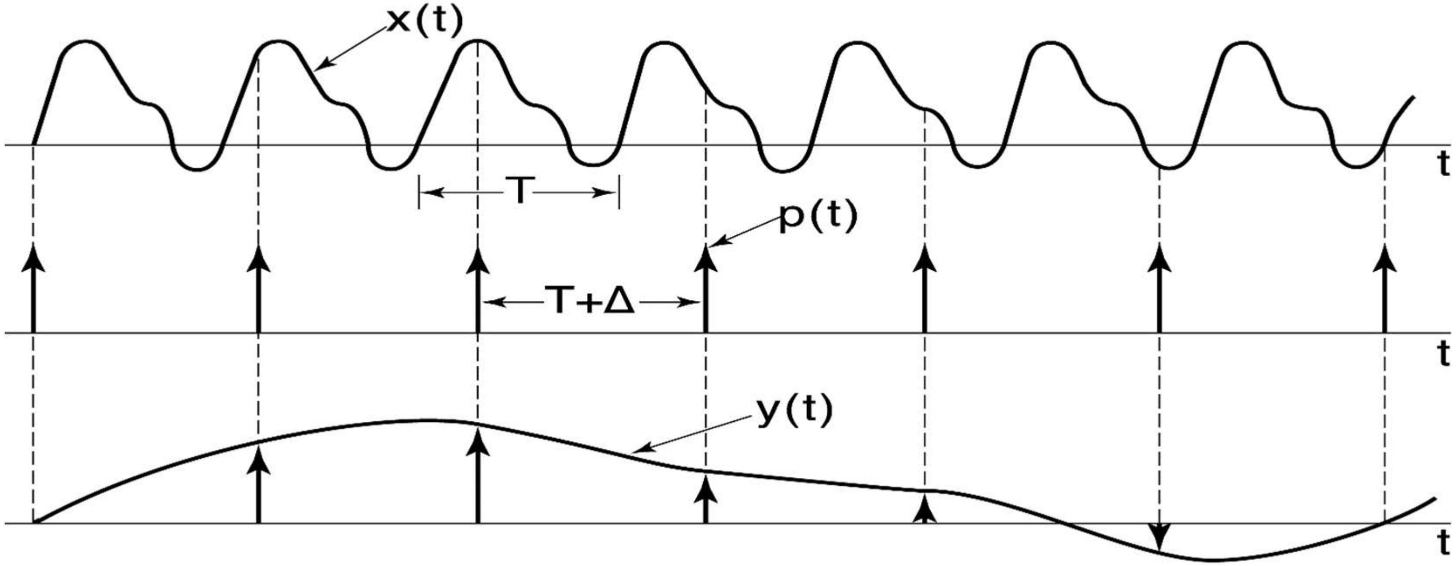
$$x(nT) = \cos\varphi \cos\omega_0 nT$$

这和对 $x_1(t) = \cos\varphi \cos\omega_0 t$ 采样的结果一样。

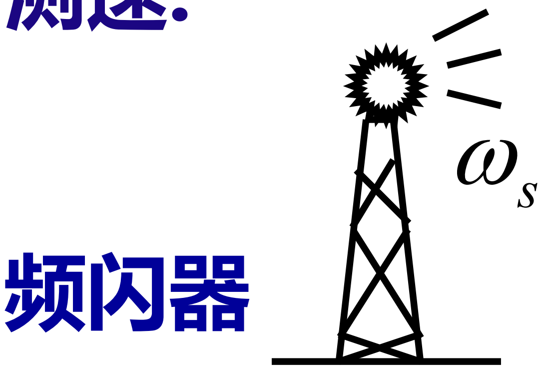
从用样本代替信号的角度出发，出现欠采样的情况是工程应用中不希望的。

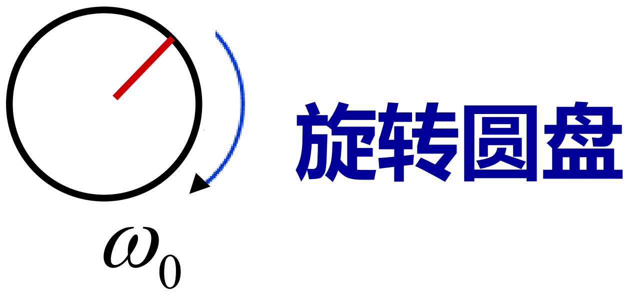
二. 欠采样在工程实际中的应用

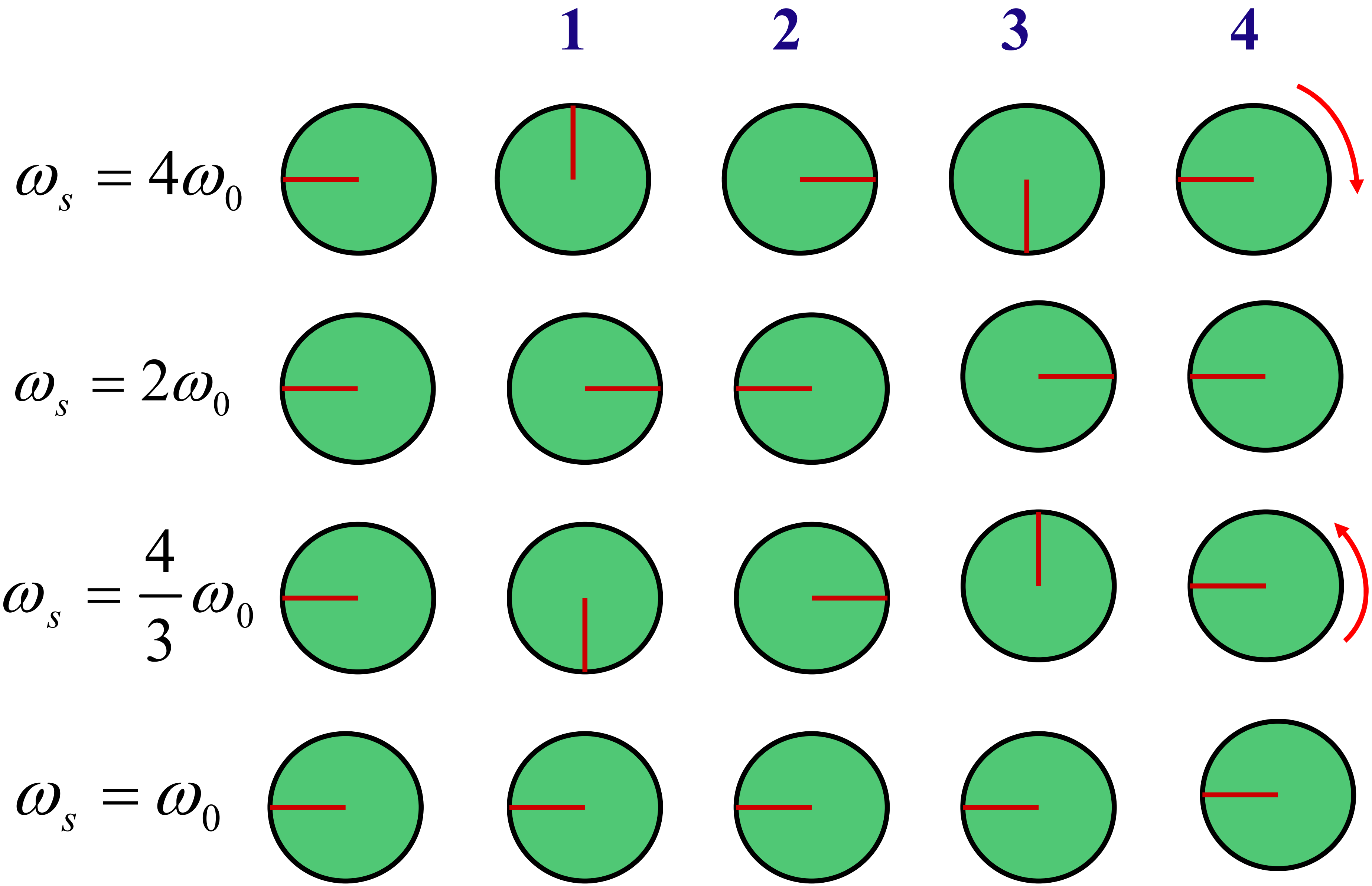
1. 采样示波器:



2. 频闪测速:






1
2
3
4
$\omega_s = 4\omega_0$
$\omega_s = 2\omega_0$
$\omega_s = \frac{4}{3}\omega_0$
$\omega_s = \omega_0$

小结

1. 连续时间信号的时域采样，采样定理。

2. 从样本通过内插重建信号。

3. 欠采样引起的频谱混叠，及欠采样在工程实际中的某些应用。

HW: 7.3, 7.6, 7.23
提交deadline：6月5日