组合数学
第九章 二分图匹配

主要内容

- 1. 问题举例
- 2. 匹配与交错链
- 3. 匹配算法
- 4. 最小覆盖与最大独立集
- 5. 互异代表系统

Guardian of Decency

一保守教师想带学生郊游, 却怕他们途中谈恋爱, 他认为满足下面条件之一的两人谈恋爱几率很小:

(1) 身高差>**40** **(2)** 性别相同

(3) 爱好不同类型的音乐 **(4)** 爱好同类型的运动

输入是学生的数据, 求最多能带多少学生. 例:

```
35 M classicism programming
0 M baroque skiing
43 M baroque chess
30 F baroque soccer
```

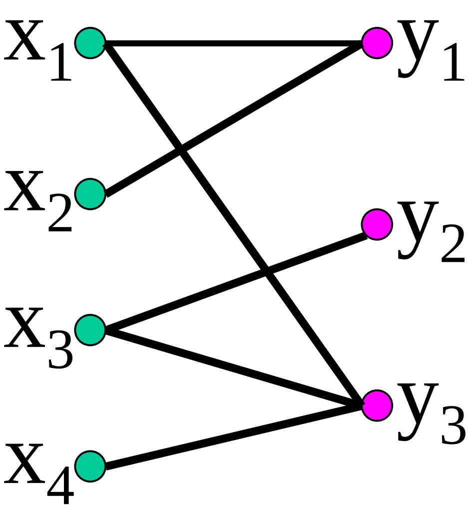
二分图

定义: 称三元组$G=(X,\Delta,Y)$是二分图,

其中$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$是左顶点集合,

$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$是右顶点集合,

$\Delta\subseteq\{ \{x,y\} \mid x\in X, y\in Y \}$是无向边集合



$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$Y=\{y_1, y_2, y_3\}$

$\Delta=\{ \{x_1,y_1\}, \{x_1,y_3\}, \{x_2,y_1\}, \{x_3,y_2\}, \{x_3,y_3\}, \{x_4,y_3\} \}$

二分图匹配

定义: 对二分图G=(X,Δ,Y), 称M⊆Δ为匹配,

若M中任意两条边没有公共顶点.

G的最大匹配数定义为

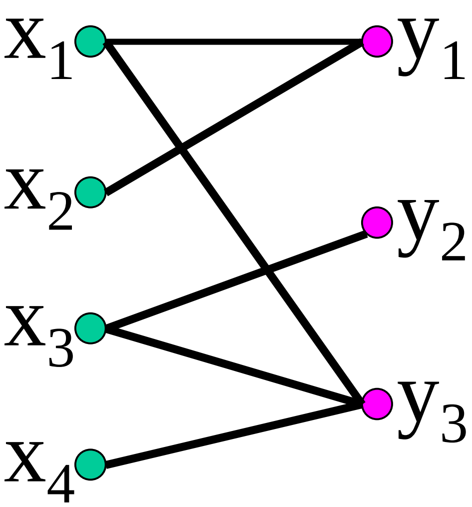
ρ(G)=max{ |M| | M是G的匹配 }

性质: ρ(G)≤min{|X|,|Y|}

定义: 满足 $|M^*| = \rho(G)$ 的匹配M^* 称为最大匹配.

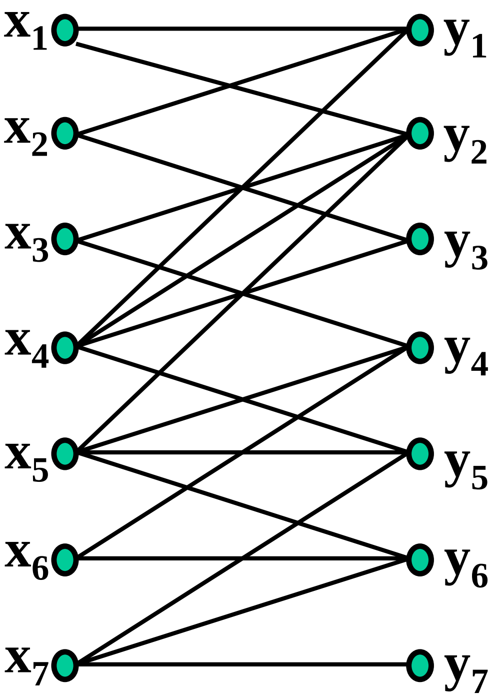
最大匹配数=3

最大匹配判据?



带禁止位棋盘的2-牌完美覆盖

×	x_1	y_1	x_2
x_3	y_2	x_4	y_3
y_4	x_5	y_5	×
x_6	y_6	x_7	y_7



- 带禁止位棋盘→二分图:
- 用黑白两种颜色涂棋盘
  相邻两格颜色不同
- 每个黑格对应一个左顶点
- 每个白格对应一个右顶点
- 每相邻的两格对应一条边
- 覆盖↔匹配

棋盘完美覆盖的条件:
左顶点数=右顶点数=最大匹配数

链与交错链

给定二分图$G=(X,\Delta,Y)$.

- 定义: 称$\gamma=(u_0,u_1,\ldots,u_p)$为G的连接$u_0,u_p$的链,若

$$\{u_{i-1}, u_i\}\in \Delta,\ \ \forall i = 1,\ldots,p.$$

- 顶点u_0和u_p称为链的端点.
- 链中的顶点一定交错地为左顶点和右顶点。
- 链γ 的长等于它的边数p.
- 若$u_0 = u_p$, 链也称为圈.
- 二分图的圈的长度一定为偶数.

链与交错链

给定二分图G=(X,Δ,Y).

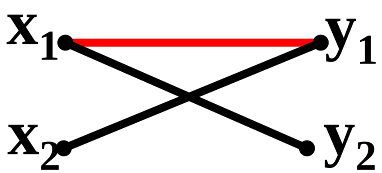
定义: 设M是G的匹配, $u\in X$, $v\in Y$,

称连接u,v的一条链γ为M交错链, 若

(1) γ的第1,3,5,…条边在Δ－M中,

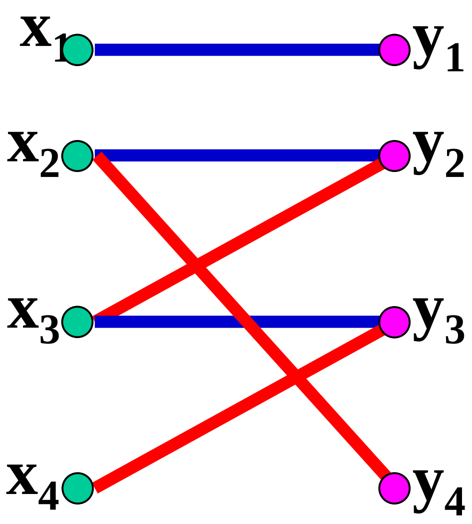
(2) γ的第2,4,6,…条边在M中,

(3) u和v都不与M的边关联.



匹配$M=\{\{x_1,y_1\}\}$有一条交错链 (x_2,y_1,x_1,y_2)

交错链的用处



匹配$M=\{\{x_1,y_1\}, \{x_2,y_2\}, \{x_3,y_3\}\}$

有交错链$\gamma = (x_4,y_3,x_3,y_2, x_2,y_4)$

去掉$\{\{x_3, y_3\}, \{x_2, y_2\}\}$

添上$\{\{x_4, y_3\}, \{x_3, y_2\}, \{x_2, y_4\}\}$

得到$\{\{x_1,y_1\}, \{x_4, y_3\}, \{x_3, y_2\}, \{x_2, y_4\}\}$

是比M多一条边的匹配.

交错链判据

由M交错链可构造比M大的匹配

存在M交错链$\Rightarrow$M非最大匹配

定理: 设G是二分图, M是G的匹配, 则有

M是G的最大匹配$\Leftrightarrow$G中没有M交错链.

证明: ($\Rightarrow$)由上.

($\Leftarrow$)设M,M'是匹配, $|M'| > |M|$

下面证明存在M交错链.

证明存在M交错链

二分图G=(X,Δ,Y), M,M’是G的匹配, |M’| > |M|, 构造子二分图G* = (X, (M-M’) ∪ (M’-M), Y)

- 每个顶点至多与M-M’的一条边关联
- 每个顶点至多与M’-M中一条边关联
- G*的各连通分支是链或圈
- 这些链和圈的边在M-M’和M’-M间交替出现
- 若没有M交错链, 则|M’-M| ≤ |M-M’|
- 但是 |M’| > |M| ⇒ |M’-M| > |M-M’|

⇒ 存在M交错链

没有M交错链 $\Rightarrow |M'-M| \le |M-M'|$

每条链γ的边在M-M'和M'-M间交替出现

连通分支γ	$\lvert\gamma\cap(M'-M)\rvert - \lvert\gamma\cap(M-M')\rvert$
头在M中 尾M'	0
头M 尾M	-1
头M' 尾M	0
圈	0
头M' 尾M'(M交错链)	+1

匹配算法(寻找交错链)

设 $G = (X,\Delta,Y)$, $X = \{x_1,\ldots,x_m\}$,$Y=\{y_1,\ldots,y_n\}$, M是匹配,

(1) 非M左顶点标记(*),无则停止. 称所有顶点未扫描(-).

(2) 若上一步没有新标记出现, 则停止.

(3) (找奇数号边)∀已标记未扫描x_i,

{对∀未标记y_j, 若$(x_i, y_j)\in\Delta-M$, 用(x_i)标记y_j. 称x_i已扫描.}

(4) 若上一步没有新标记出现,则停止.

(5) (找偶数号边) ∀已标记未扫描y_j,

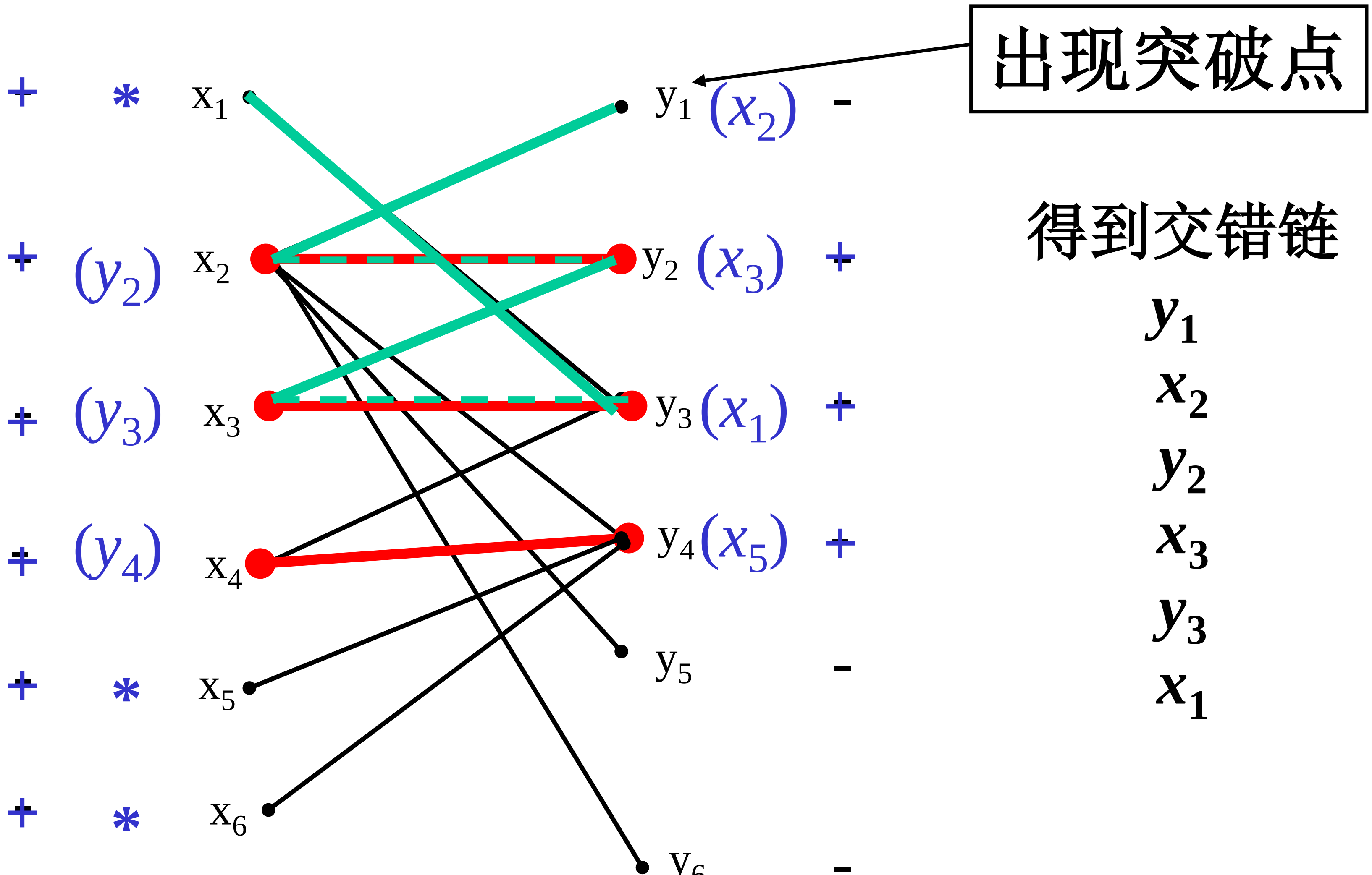
{ 若有x_i, $(x_i, y_j)\in M$, 用(y_j)标记x_i; 否则出现突破点.

称y_j已扫描. } 转(2).

非突破点: 算法在(1)(2)(4)处终止.

突破点: 算法在(5)处终止.

寻找交错链算法举例



得到交错链

y_1
x_2
y_2
x_3
y_3
x_1

匈牙利算法

使用匹配算法出现突破点即得到一条交错链.

匈牙利数学家Edmonds于1965年提出的算法:

(1)置M为空.

(2)找一条交错链P, 用(M-P)∪(P-M)代替M.

(3)重复(2)操作直到找不出交错链为止.

最小覆盖

定义: 对二分图$G=(X,\Delta,Y)$, 称$S\subseteq X\cup Y$为**覆盖**, 若G中任意边都有顶点在S中.

G的最小覆盖数定义为

$c(G)=\min\{\ |S|\ |\ S是G的覆盖\ \}$

引理: G是图, 则$\rho(G)\le c(G)$.

König定理: G是二分图, 则$\rho(G) = c(G)$.

注: König定理对一般图不成立, 能否举例?

最小覆盖与匹配

定理: G=(X,Δ,Y).设非突破点在匹配算法中发生. 令

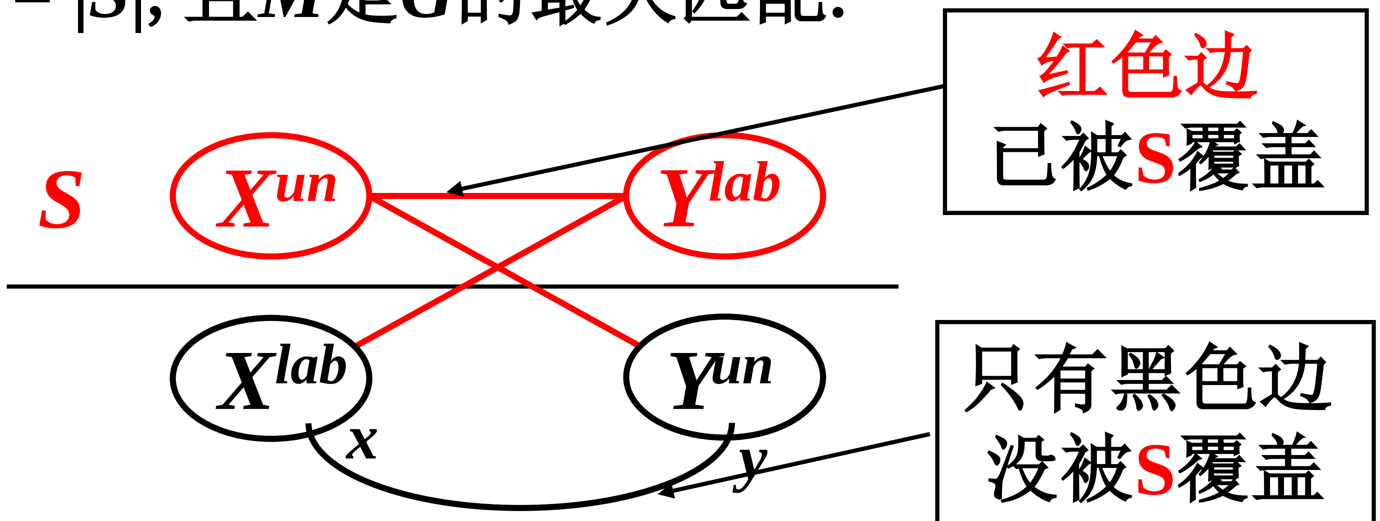
X^{un}为未标记左顶点集合,

Y^{lab}为有标记的右顶点集合.

则: 1) $S = X^{un} \cup Y^{lab}$是G的最小覆盖;

2) $|M| = |S|$, 且M是G的最大匹配.

先证明
S是覆盖
(⇒|M|≤|S|)



∈M?∈Δ-M?

⇒∉Δ

最小覆盖与匹配

定理: G=(X,Δ,Y).设非突破点在匹配算法中发生. 令

X^{un}为未标记左顶点集合,

Y^{lab}为有标记的右顶点集合.

则: 1) $S = X^{un} \cup Y^{lab}$是G的最小覆盖;

2) $|M| = |S|$, 且M是G的最大匹配.

证明: 再证 $|S| \le |M|$

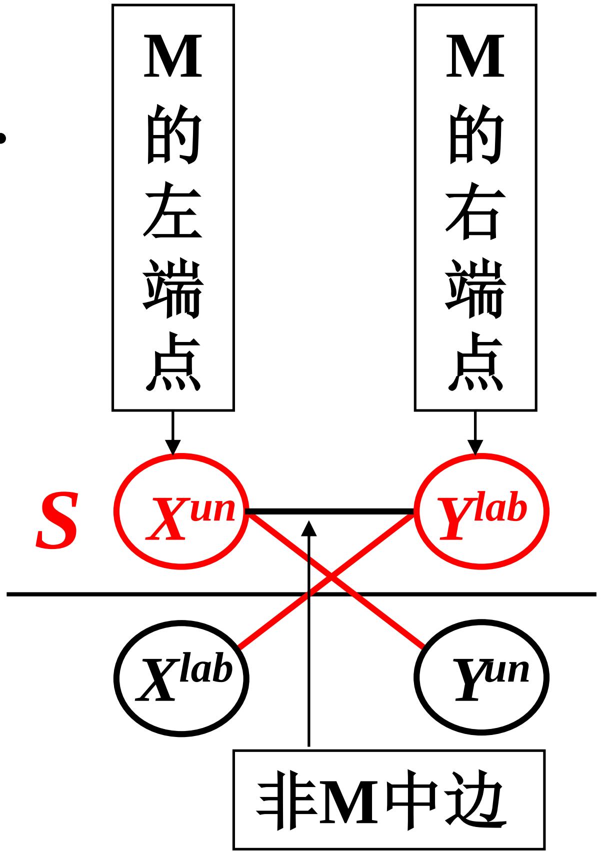
X^{un}都是M的左端点(?)

Y^{lab}都是M的右端点(?)

X^{un}与Y^{lab}无M中边相连(?)

☺ $|S| \le |M| \Rightarrow |S| = |M|$

所以M是最大匹配, S是最小覆盖.



最大独立集(补充)

定义: 对二分图$G=(X,\Delta,Y)$, 称$T\subseteq X\cup Y$为独立集,

若T中任两顶点都无G中的边相连.

G的最大独立集定义为

$\tau(G) = \max\{ |S| \mid S\text{是}G\text{的独立集} \}$

引理: S是G的覆盖$\Leftrightarrow X\cup Y-S$是G的独立集.

推论: $\tau(G) = |X\cup Y| - c(G) = |X\cup Y| - \rho(G)$.

将男女生分为左右顶点集, 若有男女生满足

身高差≤40, 音乐爱好相同, 运动爱好不同, 则添边.

保守教师带的人是此二分图的最大独立集.

互异代表系统

Y是有限集, $\mathcal{A} = \{A_1,\ldots,A_n\}$, $A_i \subseteq Y$,

称$(e_1,\ldots,e_n)$为$\mathcal{A}$的一个代表系统(SR), 若

- $e_i \in A_i$.

称$(e_1,\ldots,e_n)$为$\mathcal{A}$的一个互异代表系统(SDR),若

- $e_i \in A_i$,
- $e_i \neq e_j$, $i \neq j$.

例. $Y=\{a,b,c,d\}$, $A_1=\{a,b,c\}$, $A_2=\{b,d\}$,

$A_3=\{a,b,d\}$, $A_4=\{b,d\}$, 则有

(c,b,a,d)是一个SDR.

- SDR与二分图最大匹配的关系.

SDR与二分图匹配

设有SR $\mathscr{A} = \{A_1,\ldots,A_n\}$, $A_i \subseteq Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$

对应二分图$G = (\mathscr{A}, \Delta, Y)$,

左顶点 A_i 与 右顶点 y_j有边相连 $\Leftrightarrow y_j \in A_i$.

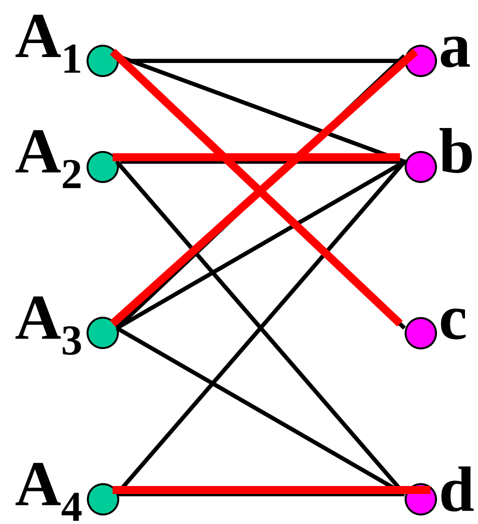
性质: $\mathscr{A}$有SDR $\Leftrightarrow \rho(G) = n$.

例:

$Y=\{a,b,c,d\}$,

$A_1=\{a,b,c\}$, $A_2=\{b,d\}$,

$A_3=\{a,b,d\}$, $A_4=\{b,d\}$,



SDR与成婚条件(MC)

定理: 集族$\mathcal{A} = \{A_1,\ldots,A_n\}$有SDR$\Leftrightarrow$MC成立.

MC: 对 $\forall k=1,2,\ldots,n$, $\forall\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}$,

都有 $|A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k}| \geq k$.

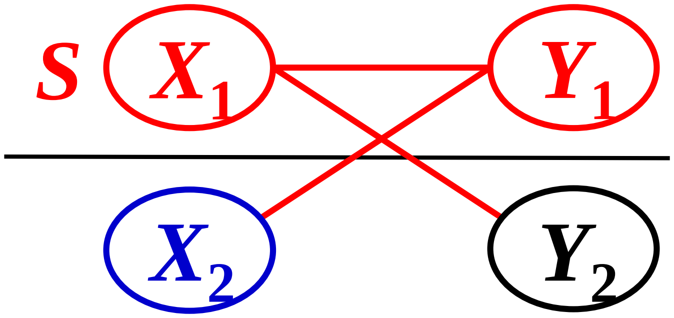
证明: ($\Rightarrow$) 由SDR定义.

($\Leftarrow$)设$\mathcal{A}$对应二分图G

$\mathcal{A}$无SDR $\Rightarrow$ G有覆盖$S=X_1\cup Y_1$, $|X_1|+|Y_1|<n$.

设$X_2=\{A_{i_1},\ldots,A_{i_k}\}$, 则有 $|X_1| = n-k$, $|Y_1|<n-|X_1|=k$.

$A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k} \subseteq Y_1$(见右图),



从而 $|A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k}| < k$.

本章小结

匹配与交错链

最小覆盖

最大独立集