

组合数学

卢伟

教材与参考书

- 教材:
- R. A. Brualdi, 《组合数学》, 机械工业出版社(中译第4版)
- 参考:
- 卢开澄, 《组合数学》(第4版), 清华大学出版社

课程特点

- 研究内容：
离散结构的存在、计数、分析和优化。
- 技巧的应用来自于经验的积累，所以解决的组合数学问题越多，那么能够解决下一个组合数学问题的可能性就越大。
- 结合数论思考问题

课程内容简介

- 鸽巢原理 (例 Ramsey定理)
- 排列组合
- 容斥原理 (例 Euler函数)
- 递推关系与生成函数
- 二分图匹配
- 组合设计
- Polya计数定理 (例: 圆排列)

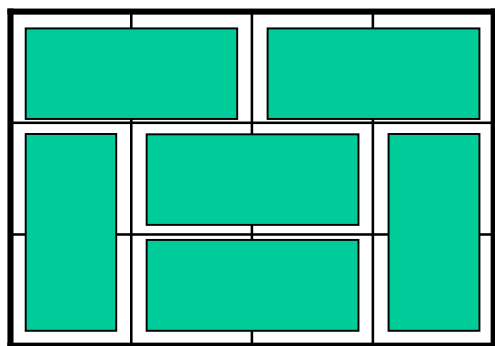
例:棋盘的完美覆盖

$m \times n$ 棋盘: m 行 n 列方格, **b -牌**: 1行 b 个的方格条

$m \times n$ 棋盘被 b -牌的一个**完美覆盖**是

b -牌在棋盘上的一个排列, 满足:

- (1) 每个格子恰好只被一张牌覆盖;
- (2) 每条 b -牌覆盖 b 个方格.



3×4棋盘有2-牌的完美覆盖.

6×6棋盘有4-牌的完美覆盖吗?

定理: $m \times n$ 棋盘有 b -牌的完美覆盖 $\Leftrightarrow b|m$ 或 $b|n$.

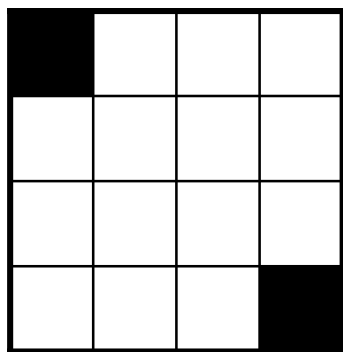
棋盘覆盖及其变化

1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1

6×6棋盘用1,2,3,4如图填数，4牌在任何位置都覆盖1,2,3,4，去掉成组的1234，多余1124。所以6×6棋盘不能用4牌完美覆盖。

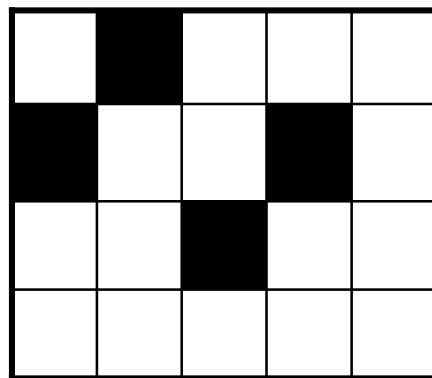
完美覆盖

变化：带禁止方格，用多米诺牌(2-牌)覆盖



4×4棋盘去掉2格

用多米诺牌(2-牌)覆盖



4×5棋盘去掉4格

用多米诺牌覆盖

- 转化为二分图, 应用二分图匹配算法.
- $2 \times n$ 棋盘用2-牌覆盖有多少种方案?
- $3 \times 2n$ 棋盘用2-牌覆盖有多少种方案?

例:Nim取子游戏

设有 $k \geq 1$ 堆硬币,各堆分别含有 n_1, n_2, \dots, n_k 枚硬币.

游戏规则:

- (1)两游戏人交替取子;
- (2)每人的一次取子时只能取一堆中的硬币,
取至少一枚,至多全堆硬币;
- (3)所有堆都变成空堆时,游戏结束,
最后取子的人获胜.

例1. (100, 389) 游戏人I有必胜策略

例2. (7, 8, 15) 游戏人II有必胜策略

平衡态

设有游戏 (n_1, n_2, \dots, n_k) , 且各数的二进制展开是

$$n_i = a_{is}a_{i(s-1)} \dots a_{i1}, i=1, 2, \dots, k$$

若 $a_{11} + a_{21} + \dots + a_{k1}$ (各数第1位之和),

...

$a_{1s} + a_{2s} + \dots + a_{ks}$ (各数第s位之和)

都是偶数, 则称游戏处于平衡态.

(7,8,15): 平衡态

(100,389): 非平衡态

(7,12,13): 非平衡态

平衡态与非平衡态的转化

$\mathbf{n}_1 =$	\mathbf{a}_{1s}	$\mathbf{a}_{1(s-1)}$	\dots	\mathbf{a}_{11}
$\mathbf{n}_2 =$	\mathbf{a}_{2s}	$\mathbf{a}_{2(s-1)}$	\dots	\mathbf{a}_{21}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$\mathbf{n}_k =$	\mathbf{a}_{ks}	$\mathbf{a}_{k(s-1)}$	\dots	\mathbf{a}_{k1}
Label =	\mathbf{c}_s	$\mathbf{c}_{(s-1)}$	\dots	\mathbf{c}_1

(7,8,15):平衡态
 (100,389):非平衡态
 (7,8,13):非平衡态

- 游戏终止时是平衡态
- 平衡态不能经一次取子达到平衡态
- 非平衡态可经一次取子达到平衡态(?)

取子目标分析

非平衡位	1	0	0
	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1
<hr/>			
Label = 0	1	1	0

最大非平衡位

堆1: 1 0 0
目标: 0 1 0

堆2: 1 0 1
目标: 0 1 1

堆3: 1 0 0 0
目标: 1 1 1 0

堆4: 1 1 1 1
目标: 1 0 0 1

命题: 可从某堆取币到平衡态 当且仅当
其最大非平衡位是1. (比较习题1.33)

结论

- 游戏终止时是平衡态
- 平衡态不能经一次取子达到平衡态
- 非平衡态可经一次取子达到平衡态

定理: 若游戏非平衡, 则游戏人I有必胜策略;
若游戏平衡, 则游戏人II有必胜策略.

拉丁方

定义: 若A是由n个元素构成的n阶方阵,
其中每个元素在每行每列各出现一次,
则称A是**拉丁方**.

设 $A=(a_{ij})$, 每个元素每行(列)只出现一次:

$$a_{ij}=a_{ik} \Rightarrow j=k \quad (a_{ji}=a_{ki} \Rightarrow j=k)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

36名军官问题

(18世纪)**36军官**问题: 6个地区, 6种军衔各一名.

将这36名军官排成 6×6 方阵, 使得

- 1) 每行每列都有任一地区的军官;
- 2) 每行每列都有任一军衔的军官.

i : **军衔**, j : **地区**, 军官对应数偶 (i, j) , $i, j \in [0, 5]$

问题等价于构造数偶 (i, j) 排成的6阶方阵, 使得

- 1) 数偶第一个数字构成拉丁方;
- 2) 数偶第二个数字构成拉丁方;
- 3) 每个数偶只出现一次.

正交拉丁方

定义: 设 $A=(a_{ij})_{n \times n}, B=(b_{ij})_{n \times n}$ 是两个 $n \times n$ 拉丁方.

令 $C=((a_{ij}, b_{ij}))_{n \times n}$, 若 C 的 n^2 对数偶互不相同, 则称 A 与 B 正交.

36军官问题等价于构造两个正交的6阶拉丁方.

例: 3阶正交拉丁方

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} (0,0) & (1,1) & (2,2) \\ (1,2) & (2,0) & (0,1) \\ (2,1) & (0,2) & (1,0) \end{bmatrix}$$

正交拉丁方的实际意义

正交的拉丁方的一个应用: 药物配合试验
三种治发烧药和三种治感冒药, 对三位病人试验,
要求三天内每人都服这几种药, 比较配合疗效.
这时就可用上面讨论过的3阶正交拉丁方.

$$C = \begin{bmatrix} (1,1) & (2,3) & (3,2) \\ (2,2) & (3,1) & (1,3) \\ (3,3) & (1,2) & (2,1) \end{bmatrix}$$

行:人, 列:天
(i,j): i, 发烧药
j, 感冒药

Euler的猜测

令 $N(n)$ 为两两正交的 n 阶拉丁方的最大个数.

$$N(1)=2, N(2)=1, N(3)=2$$

定理1: 若 $n>1$, 则 $N(n)\leq n-1$.

定理2: 若 $n=p^a$, p 是素数, $a>0$, 则 $N(n)=n-1$.

定理3: 若 n 是奇数, 则 $N(n)\geq 2$.

定理4: 若 $N(m)\geq 2, N(n)\geq 2$, 则 $N(mn)\geq 2$.(自学)

推论: 若 $n\geq 2$ 且 $n\neq 4k+2, k\geq 0$, 则 $N(n)\geq 2$.(?)

Euler(1707~1783)猜测:

对任意 $n=4k+2, k\geq 0, N(n)=1$.

Euler猜测的解决

1900年 Tarry(法) 验证了 $N(6)=1$.

1959年 Parker(美) 证明 $N(10) \geq 2$.

1959年 Bose(印), Parker, Shrikhande(印)
证明 对任意 $k > 1$, $N(4k+2) \geq 2$.