

组合数学

第二章 鸽巢原理

主要内容

- 1. 鸽巢原理及其应用
- 2. 中国剩余定理
- 3. 加强形式的鸽巢原理
- 4. Ramsey定理

鸽巢原理

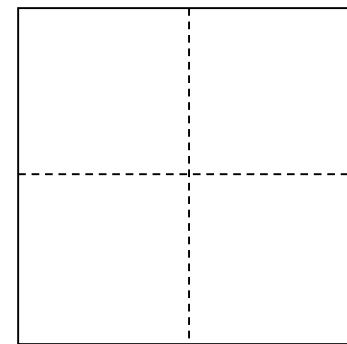
定理: 若有 n 个鸽巢, $n+1$ 只鸽子,
则至少有一个鸽巢里至少有两只鸽子.
注意这里的任意性.

例1. 一年365天, 今有366个人,
则其中至少有两个人生日相同.

例2. 抽屉里有10双手套, 从中取11只出来,
其中至少有两只是完整配对的.

应用举例

例. 在边长为1的正方形内任取5点, 则其中至少有2点的距离不超过 $\sqrt{2}/2$



故事: Halloween treats

例. 设 a_1, a_2, \dots, a_m 是正整数序列, 则至少存在整数 k 和 l , $0 \leq k < l \leq m$, 使得 $m \mid (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l)$.

令 $r_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k \bmod m$, $k = 1, 2, \dots, m$, 则

(a) 若有 $r_h = 0$, 即 $m \mid (a_1 + a_2 + \dots + a_h)$;

(b) 否则, r_1, r_2, \dots, r_m 取值为 $\{1, 2, \dots, m-1\}$, 所以存在 $k < l$ 使得 $r_k = r_l$, 即 $m \mid (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l)$.

应用:国际象棋大师

一位国际象棋大师有11周的时间备战比赛, 他决定每天至少下1盘棋,但每周不超过12盘. 则存在连续若干天,他恰好下了21盘棋.

证明: 令 a_i 为到第 i 天下的总盘数, ($a_i+21=a_j$?)

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{77} \leq 11 \times 12 = 132,$$

$$22 \leq a_1+21 < a_2+21 < \dots < a_{77}+21 \leq 132+21=153$$

总共有153种取值, 却有154个数

所以存在 $i < j$ 使得

$$a_i+21=a_j.$$

中国剩余定理(简单形式)

令 m, n 互素, $0 \leq a \leq m-1$, $0 \leq b \leq n-1$, 则方程组

$$x \equiv a \pmod{m}$$

$$x \equiv b \pmod{n}$$

在 $[0, mn)$ 内有唯一解.

证明: 下面的 n 个数(模 m 都是 a)

$$a, m+a, 2m+a, \dots, (n-1)m+a,$$

模 n 的余数两两不同.

中国剩余定理(完全形式)

令 m_1, \dots, m_r 两两互素, a_1, \dots, a_r 为整数,
则同余方程组

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}, i=1, \dots, r$$

模 $M(=m_1m_2\dots m_r)$ 有唯一解

$$x = \sum_{i=1}^r a_i M_i y_i \pmod{M}$$

其中 $M_i=M/m_i$, $y_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.

例: $(3,5,7)$ -- $(35,2), (21, 1), (15, 1)$

$$x = 70a_1 + 21a_2 + 15a_3 \pmod{105}$$

射雕英雄传中的问题

黄蓉给瑛姑出题：
今有物不知其数，
三三数之剩二，
五五数之剩三，
七七数之剩二，
问物几何。

答案：
三人同行七十稀，
五树梅花廿一支，
七子团圆正半月，
除百零五便得知。

同余方程组

$x \equiv a_1 \pmod{3}, x \equiv a_2 \pmod{5}, x \equiv a_3 \pmod{7}$
的解是

$$x = 70a_1 + 21a_2 + 15a_3 \pmod{105}$$

韩信点兵, 孙子算经, 数书九章(秦九韶)

补充: 不互素的情况

定理: 设 m, n 是正整数, $0 \leq a < m$, $0 \leq b < n$, 则方程组

$$x \equiv a \pmod{m}, \quad x \equiv b \pmod{n} \quad (*)$$

有解当且仅当 $\gcd(m, n) \mid (b - a)$.

令 $d = \gcd(m, n)$, $M = \text{lcm}(m, n)$.

若 $d \mid (b - a)$, 则 $(*)$ 在 $[0, M)$ 内有唯一解:

$$x \equiv a + c m [(b - a)/d] \pmod{M}.$$

参考多元一次同余方程组的解法.

加强形式

条件

鸽巢 n 个, 鸽子 $m_1+m_2+\dots+m_n-n+1$ 只,
其中 m_1, m_2, \dots, m_n, n 都是正整数,

结论

鸽巢1鸽子数 $\geq m_1$,
或, 鸽巢2鸽子数 $\geq m_2$,
... ..
或, 鸽巢 n 鸽子数 $\geq m_n$,
至少有一个成立.

证明: 否则, 总鸽子数 $\leq (m_1-1) + (m_2-1) + \dots + (m_n-1)$
与总鸽子数为 $m_1+m_2+\dots+m_n-n+1$ 矛盾.

颜色重合扇形数目

大小两圆盘, 划分成200个恒等扇形.

大盘任选100个扇形涂红色, 其余涂蓝色.

小盘的200个扇形任选涂红或蓝色.

求证能大小盘对齐使得100个以上扇形同色.

- 固定大盘, 小盘转动, 有200种对齐方式.
- 小盘的每个扇形有200个对齐位置.
- 小盘的每个扇形有100个位置发生颜色重合.
- 所有对齐位置颜色重合总次数?
- 若小盘的每种对齐方式颜色重合数 ≤ 99 ?

Erdős-Szekeres定理

定理: 在由 n^2+1 个实数构成的序列中, 必然含有长为 $n+1$ 的单调(增或减)子序列.

证明: 设序列为 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$,

令 m_k 是从 a_k 开始的最长单调增子序列的长度.

若没有长于 $n+1$ 的单增序列, 则 $m_1, \dots, m_{n^2+1} \in [1, n]$

由加强鸽巢原理, 存在 $k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1}$ 使得

$$m_{k_1} = m_{k_2} = \dots = m_{k_{n+1}}$$

若 $a_{k_1} \leq a_{k_2}$ 则必有 $m_{k_1} > m_{k_2}$, 于是:

$$a_{k_1} > a_{k_2} > \dots > a_{k_{n+1}}$$

a_k	5	4	6	3	4	2	3	1	9	2
m_k	3	3	2	3	2	3	2	2	1	1

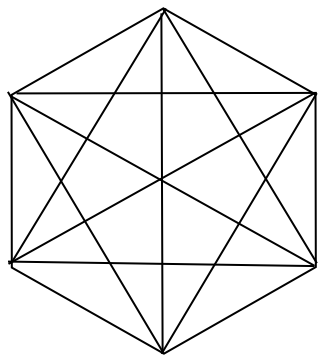
Ramsey问题

命题: 6人中或者至少存在3人互相认识,
或者至少存在3人互相不认识.

特点: 对所有具体互相认识情况(2^{15})都成立.

该Ramsey问题等价于:

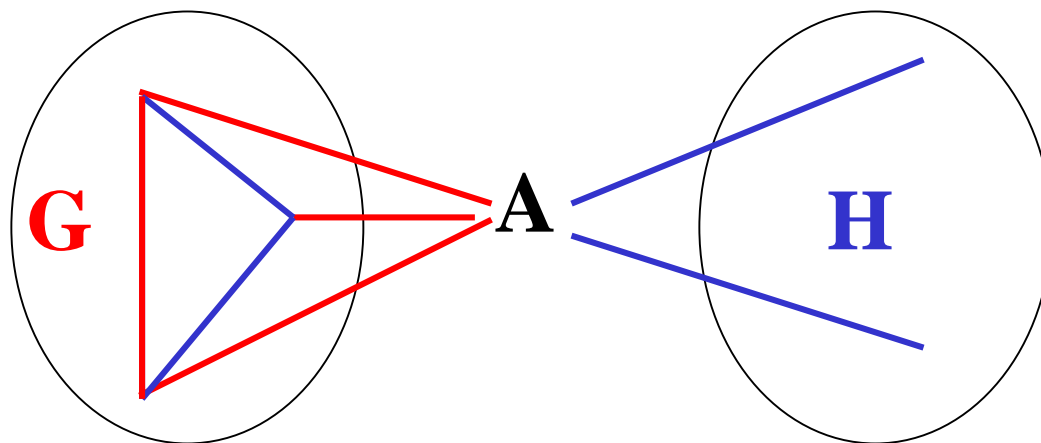
六个顶点的完全图的边, 用红, 蓝二色任意着色,
则至少存在一红色边三角形, 或一蓝色边三角形.



完全图, $C(6,2)$ 条边

图示证明

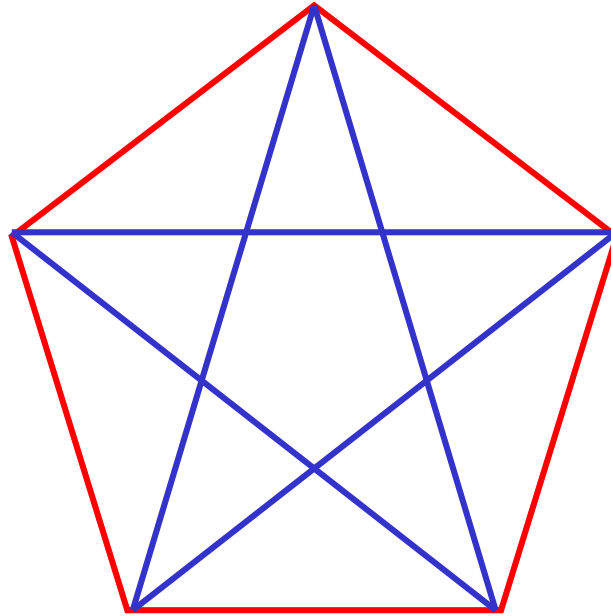
从6人任取一人A.



和A互相认识
的人的集合**G**

和A互不认识
的人的集合**H**

5个人的反例



$$K_6 \rightarrow K_3, K_3, \quad \neg(K_5 \rightarrow K_3, K_3)$$

Ramsey数与Ramsey定理

Ramsey数 $r(a,b)$ 定义为:

**$r(a,b) = \min\{ n \mid n \text{个人中必有 } a \text{个互相认识,}$
 $\text{或者 } b \text{个互相不认识} \}$**

$$= \min\{ n \mid K_n \rightarrow K_a, K_b \}$$

例如: $r(3,3)=6, r(3,4)=9, r(4,4)=18$.

Ramsey定理: $\forall a,b \geq 2, \exists p K_p \rightarrow K_a, K_b$.

即 $r(a,b) < \infty$

Ramsey定理的证明

$$r(a,b)=r(b,a), r(a,2)=r(2,a)=a$$

性质: 当 $a,b \geq 2$ 时, $r(a,b) \leq r(a-1,b) + r(a,b-1)$.

在 $r(a-1,b) + r(a,b-1)$ 个人中任选一人A,
其他人分成两个集合Know, Unknow.

$$|\text{Know}| + |\text{Unknow}| = r(a-1,b) + r(a,b-1) - 1$$

$$\Rightarrow |\text{Know}| \geq r(a-1,b) \text{ 或者 } |\text{Unknow}| \geq r(a,b-1)$$

$$K_{r(a-1,b)} \rightarrow K_{a-1}, K_b \Rightarrow A \cup \text{Know} \text{ 有 } K_a \text{ 或 } K_b.$$

Ramsey数表

b \ a	3	4	5
3	6	9	14
4	9	18	25
5	14	25	[43,49]
6	18	[35,41]	
7	23	[49,61]	
8	28	[55,84]	
9	36	[69,115]	
10	[40,43]		

Ramsey定理的推广

Ramsey定理: $\forall n_1, n_2, \dots, n_k \geq 2,$

$$\exists p \ K_p \rightarrow K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_k}.$$

例: $K_{17} \rightarrow K_3, K_3, K_3.$

证明: 若 $n > 1$, $t = \lceil (\log_2 n) / 2 \rceil$, 则 $r(t, t) \leq n$.