



第2章 线性时不变系统

本章主要内容：

- 信号的时域分解——用 $\delta(n)$ 表示离散时间信号；用 $\delta(t)$ 表示连续时间信号。
- LTI系统的时域分析——卷积积分与卷积和。
- LTI系统的微分方程及差分方程表示。
- LTI系统的框图结构表示。
- 奇异函数。

2.0 引言 (Introduction)

LTI系统满足齐次性和叠加性，并且具有时不变性，这些特点为建立信号与系统分析的理论与方法奠定了基础。

基本思想： 如果能把任意输入信号分解成基本信号的线性组合，那么只要得到了LTI系统对基本信号的响应，就可以利用系统的线性特性，将系统对任意输入信号产生的响应表示成系统对基本信号的响应的线性组合。

引言 (Introduction)

- **问题的实质:**

1. **研究信号的分解:**

即以什么样的信号作为构成任意信号的基本信号单元,
如何用基本信号单元的线性组合来构成任意信号;

2. **如何得到LTI系统对基本单元信号的响应。**

- **作为基本单元的信号应满足以下要求:**

1. **本身尽可能简单, 并且用它的线性组合能够表示 (构成)**

尽可能广泛的其它信号;

2. **LTI系统对这种信号的响应易于求得。**

引言 (Introduction)

如果解决了信号分解的问题，即：若有

$$\begin{array}{ccc} x(t) = \sum_i a_i x_i(t) & & x_i(t) \rightarrow y_i(t) \\ \downarrow & & \\ \text{则 } y(t) = \sum_i a_i y_i(t) & & \end{array}$$

- **分析方法：**

将信号分解可以在时域进行，也可以在频域或变换域进行，相应地就产生了对LTI系统的时域分析法、频域分析法和变换域分析法。

2.1 离散时间LTI系统：卷积和

(Discrete-Time LTI Systems: The Convolution Sum)

一. 用单位脉冲表示离散时间信号

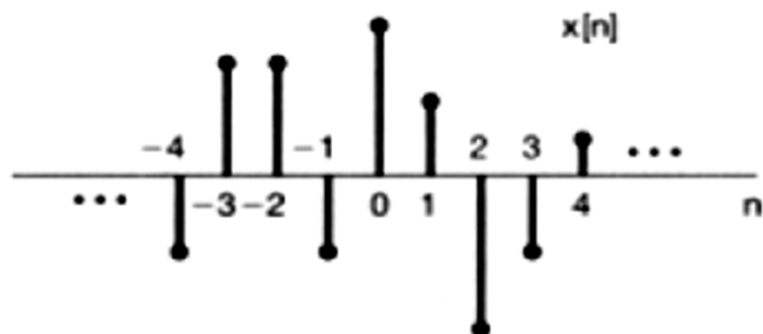
离散时间信号中,最简单的是 $\delta(n)$,

可以由它的线性组合构成 $u(n)$, 即:

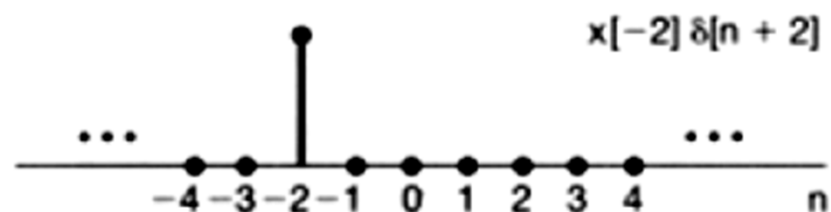
$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

对任何离散时间信号 $x(n)$,如果每次从其中取出一个点,就可以将信号拆开来,每次取出的一个点都可以表示为不同加权、不同位置的单位脉冲。

一. 用单位脉冲表示离散时间信号



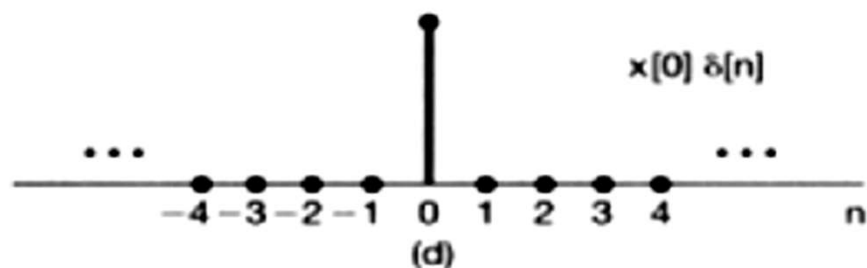
(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

$$\begin{aligned}
 x(n) = & \dots + x(-3)\delta(n+3) + x(-2)\delta(n+2) \\
 & + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) \\
 & + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) \\
 & + x(3)\delta(n-3) + \dots
 \end{aligned}$$

于是有：

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

表明：任何信号 $x(n)$ 都可以被分解成移位加权的单位脉冲信号的线性组合。

二. 卷积和 (Convolution sum)

如果一个线性系统对 $\delta(n-k)$ 的响应是 $h_k(n)$,
由线性特性就有系统对任何输入 $x(n)$ 的响应为:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n)$$

若系统具有时不变性, 即:

若 $\delta(n) \rightarrow h(n)$, 则 $\delta(n-k) \rightarrow h(n-k)$

因此，只要得到了LTI系统对 $\delta(n)$ 的响应 $h(n)$

——单位脉冲响应(impulse response),

就可以得到LTI系统对任何输入信号 $x(n)$ 的响应:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

这表明：一个LTI系统可以完全由它的单位脉冲响应来表征。这种求得系统响应的运算关系称为**卷积和** (The convolution sum) 。

三. 卷积和的计算——图解法计算卷积和



卷积和的定义为

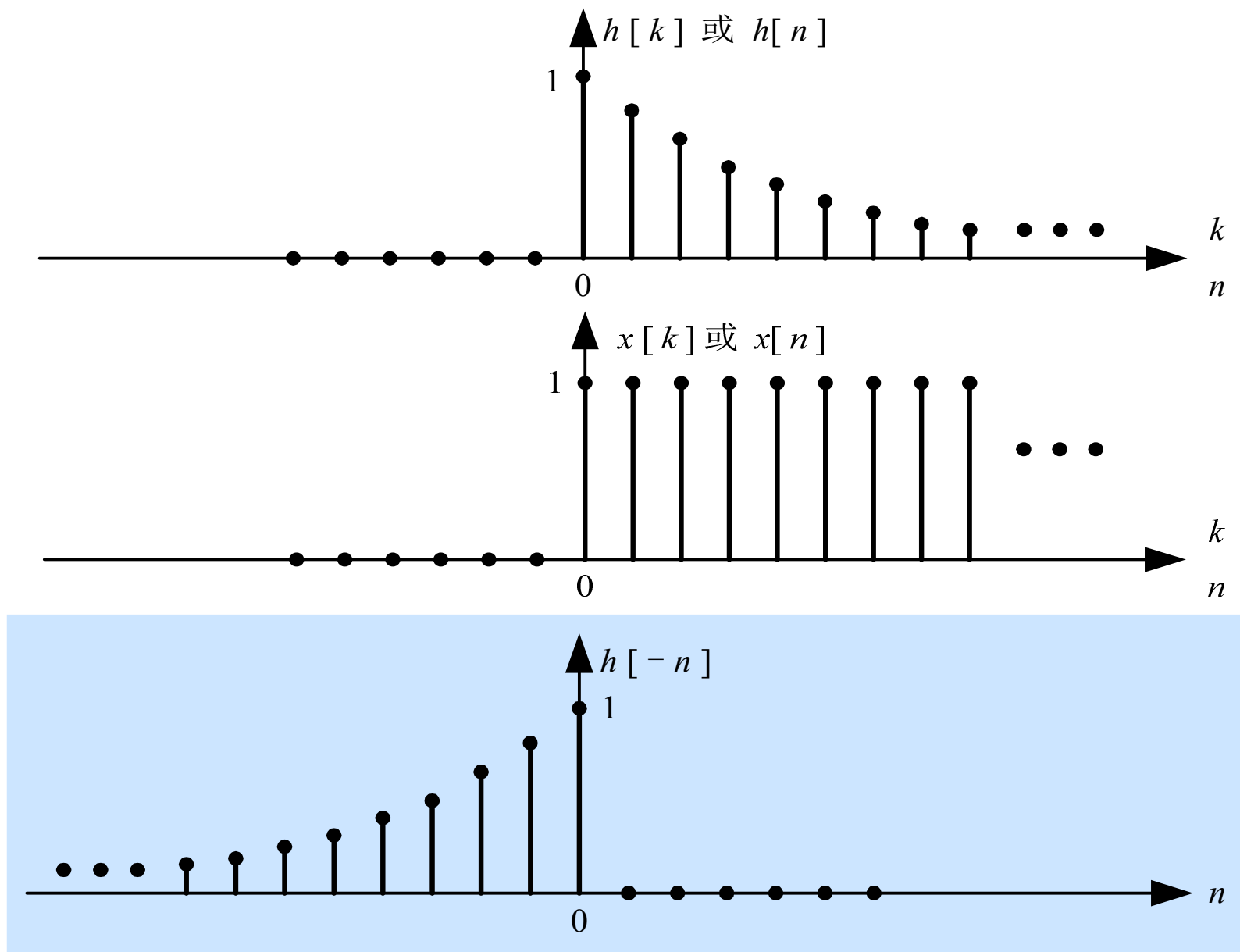
$$x[k] * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n]$$



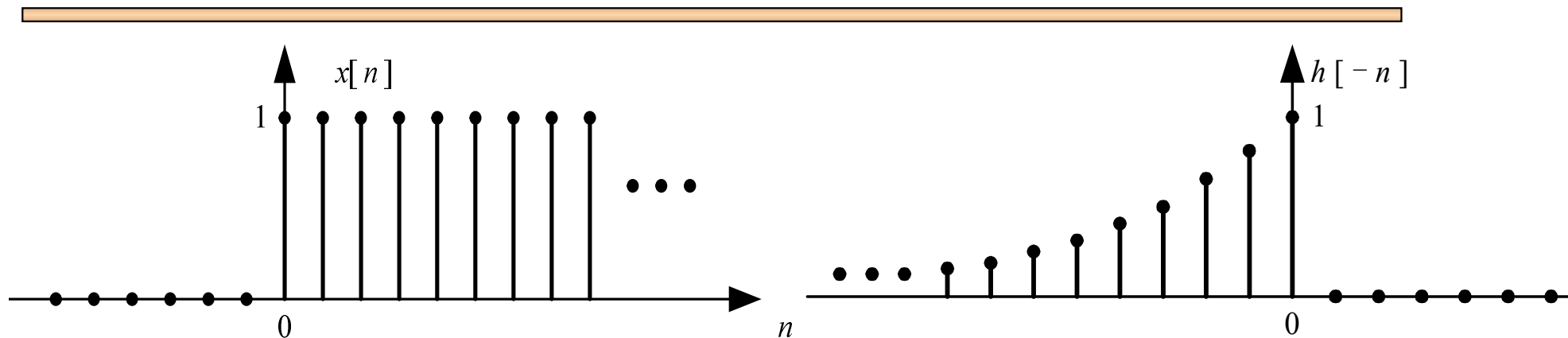
计算步骤:

- (1) 将 $x[k]$ 、 $h[k]$ 中的自变量由 k 改为 n ;
- (2) 把其中一个信号翻转, 如将 $h[n]$ 翻转得 $h[-n]$;
- (3) 把 $h[-n]$ 平移 k , k 是参变量, $k>0$ 图形右移, $k<0$ 图形左移;
- (4) 将 $x[n]$ 与 $h[k-n]$ 相乘;
- (5) 对乘积后的图形求和。

例1 已知 $x[k] = u[k]$, $h[k] = a^k u[k]$, $0 < a < 1$,
计算 $y[k] = x[k] * h[k]$

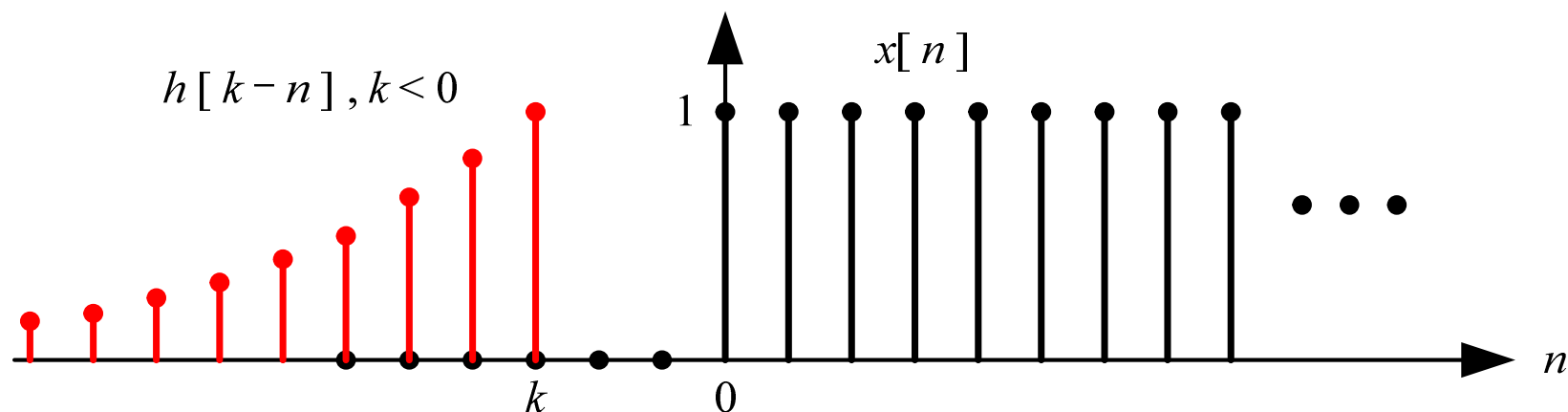


例1 已知 $x[k] = u[k]$, $h[k] = a^k u[k]$, $0 < a < 1$,
计算 $y[k] = x[k] * h[k]$

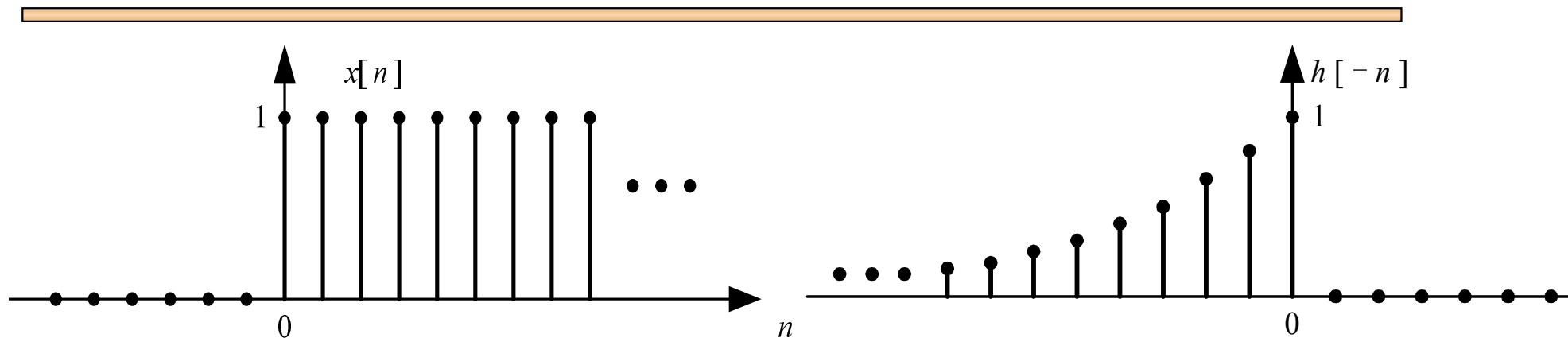


$k < 0$, $x[n]$ 与 $h[k-n]$ 图形没有相遇

$$y[k]=0$$

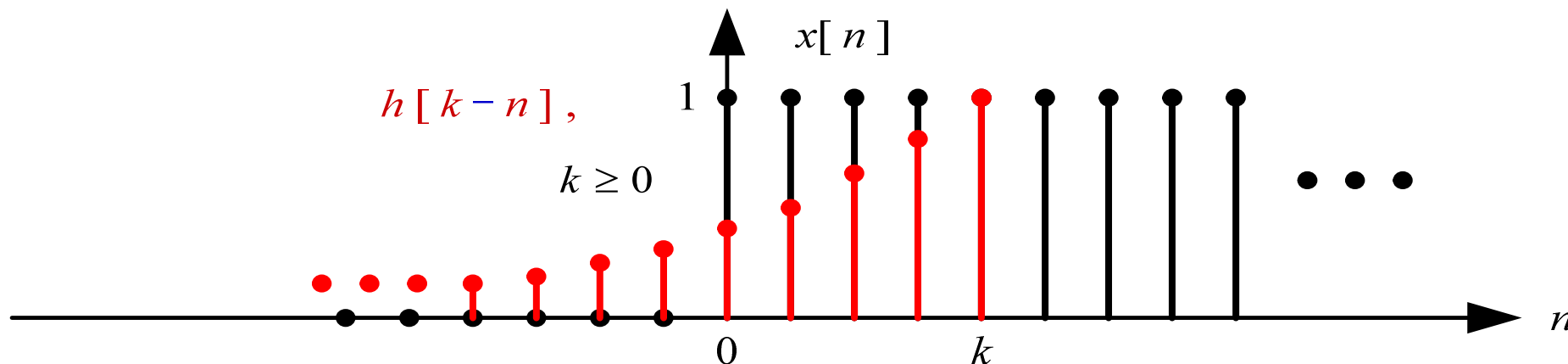


例1 已知 $x[k] = u[k]$, $h[k] = a^k u[k]$, $0 < a < 1$,
计算 $y[k] = x[k] * h[k]$



$k \geq 0$, $x[n]$ 与 $h[k-n]$ 图形相遇

$$y[k] = \sum_{n=0}^k a^{k-n}$$

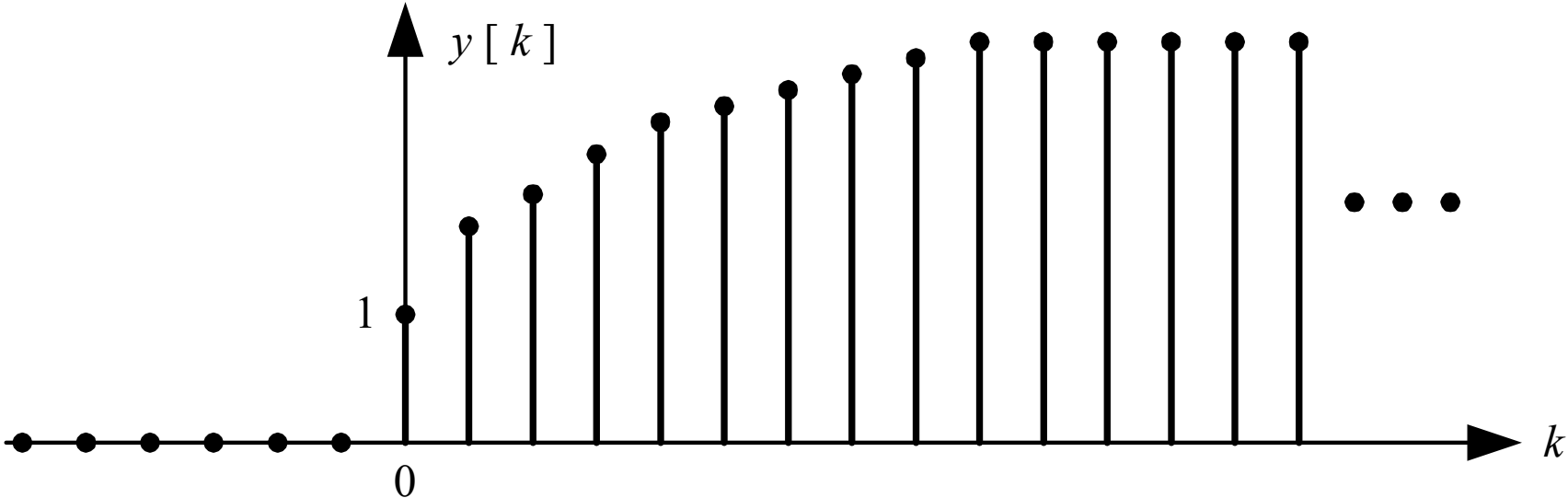


$k < 0$, $x[n]$ 与 $h[k-n]$ 图形没有相遇

$$y[k]=0$$

$k \geq 0$, $x[n]$ 与 $h[k-n]$ 图形相遇

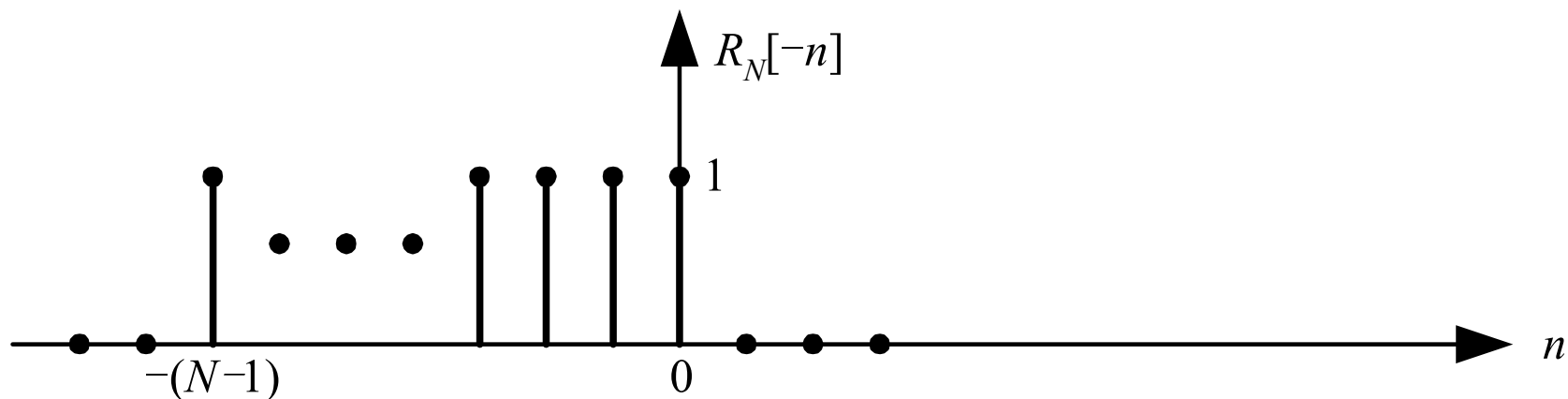
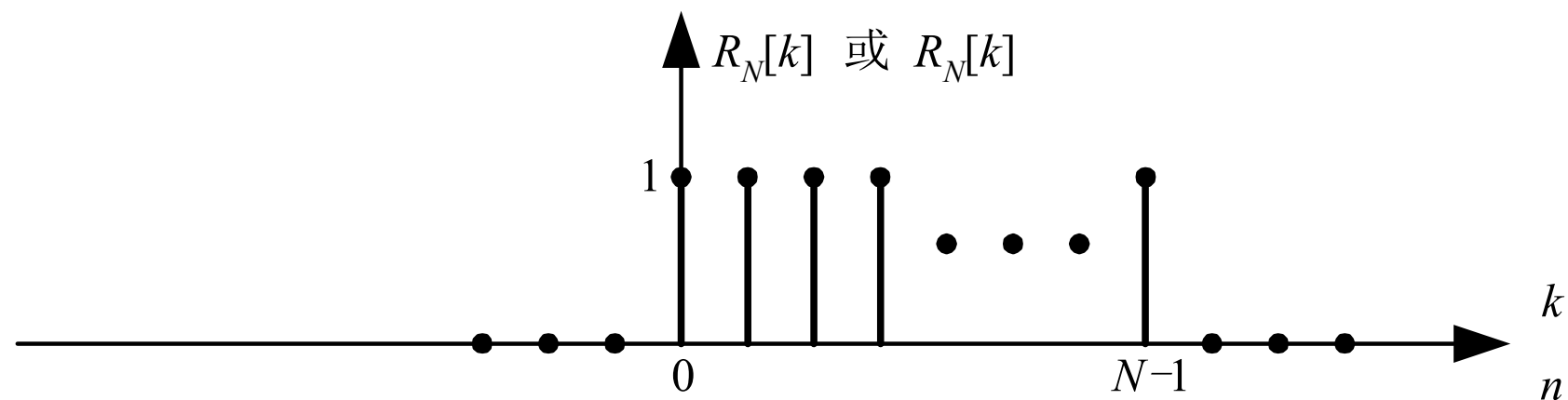
$$y[k] = \sum_{n=0}^k a^{k-n}$$



例2 计算

$$y[k] = R_N[k] * R_N[k]$$

$$R_N[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



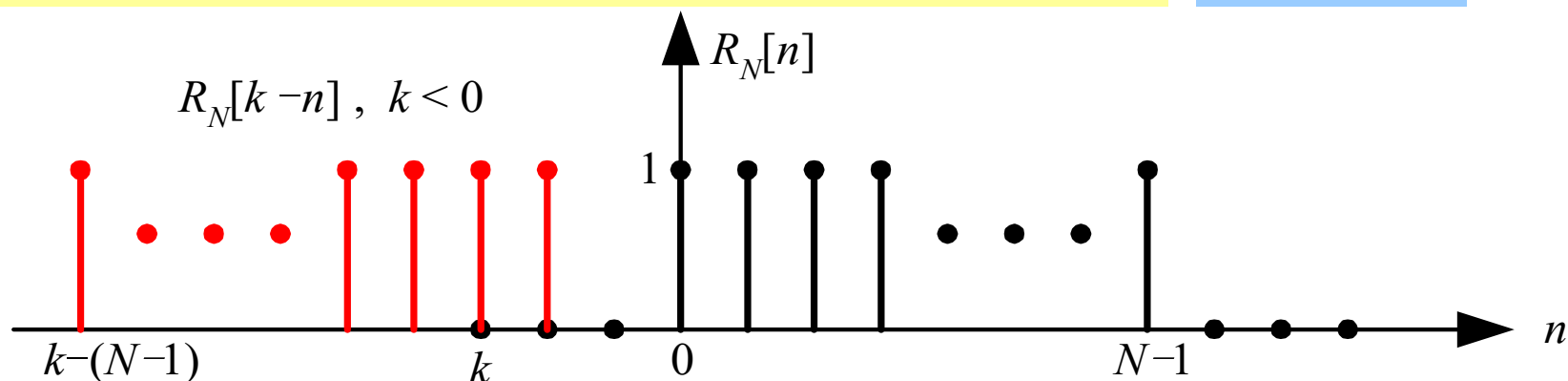
例2 计算

$$y[k] = R_N[k] * R_N[k]$$

$$R_N[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

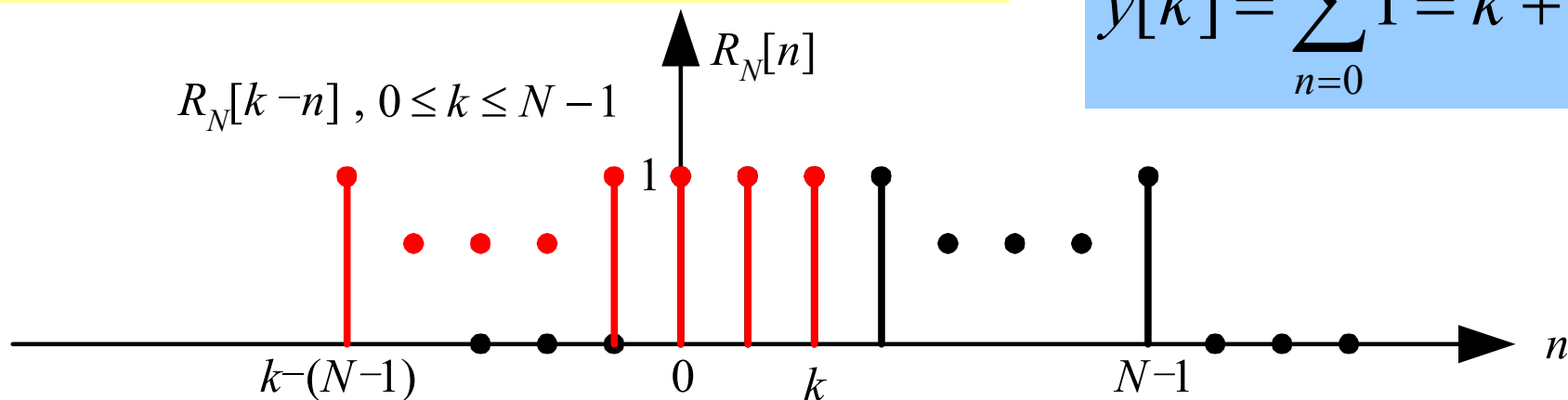
➤ $k < 0$ 时, $R_N[n]$ 与 $R_N[k-n]$ 图形没有相遇

$$y[k] = 0$$



➤ $0 \leq k \leq N-1$ 时, 重合区间为 $[0, k]$

$$y[k] = \sum_{n=0}^k 1 = k + 1$$



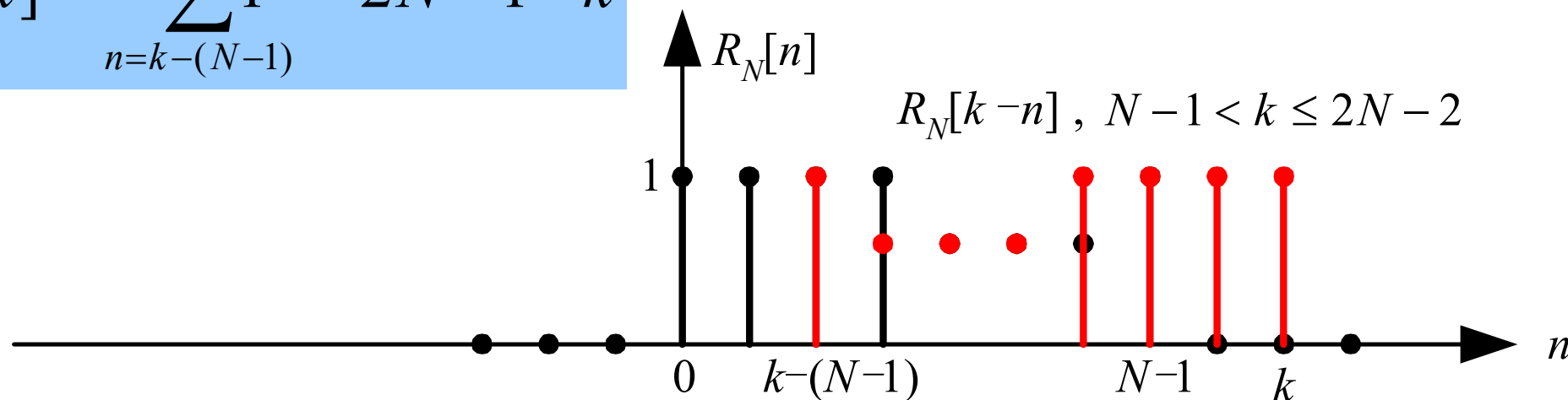
例2 计算

$$y[k] = R_N[k] * R_N[k]$$

$$R_N[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

➤ $N-1 < k \leq 2N-2$ 时，重合区间为 $[k-(N-1), N-1]$

$$y[k] = \sum_{n=k-(N-1)}^{N-1} 1 = 2N-1-k$$



➤ $k > 2N-2$ 时， $R_N[n]$ 与 $R_N[k-n]$ 图形不再相遇

$$y[k] = 0$$

例2 计算

$$y[k] = R_N[k] * R_N[k] \quad R_N[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

➤ $k < 0$ 时, $R_N[n]$ 与 $R_N[k-n]$ 图形没有相遇

$$y[k] = 0$$

➤ $0 \leq k \leq N-1$ 时, 重合区间为 $[0, k]$

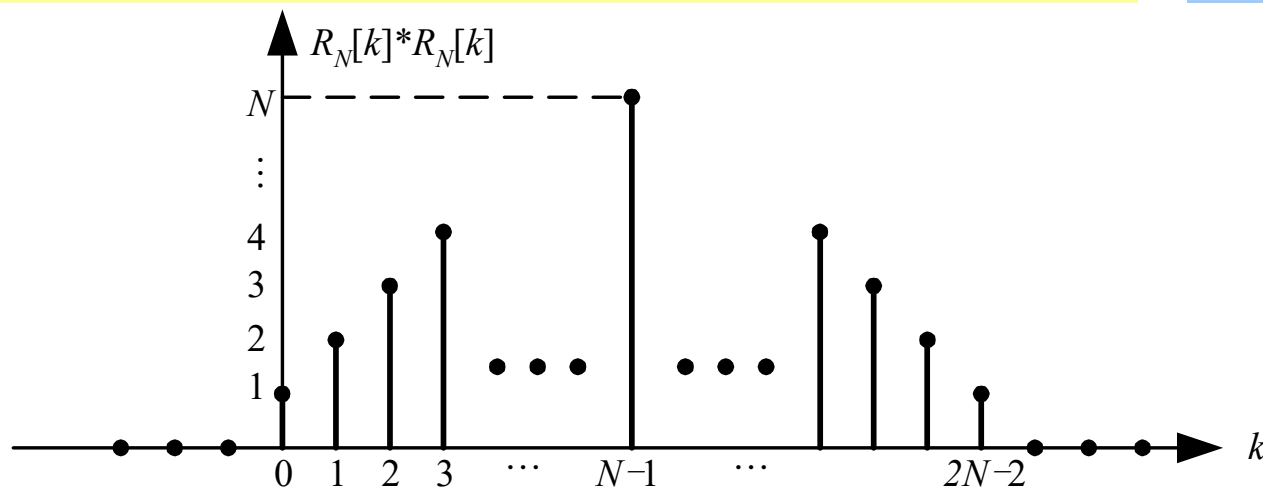
$$y[k] = \sum_{n=0}^k 1 = k + 1$$

➤ $N-1 < k \leq 2N-2$ 时,
重合区间为 $[k-(N-1), N-1]$

$$y[k] = \sum_{n=k-(N-1)}^{N-1} 1 = 2N-1-k$$

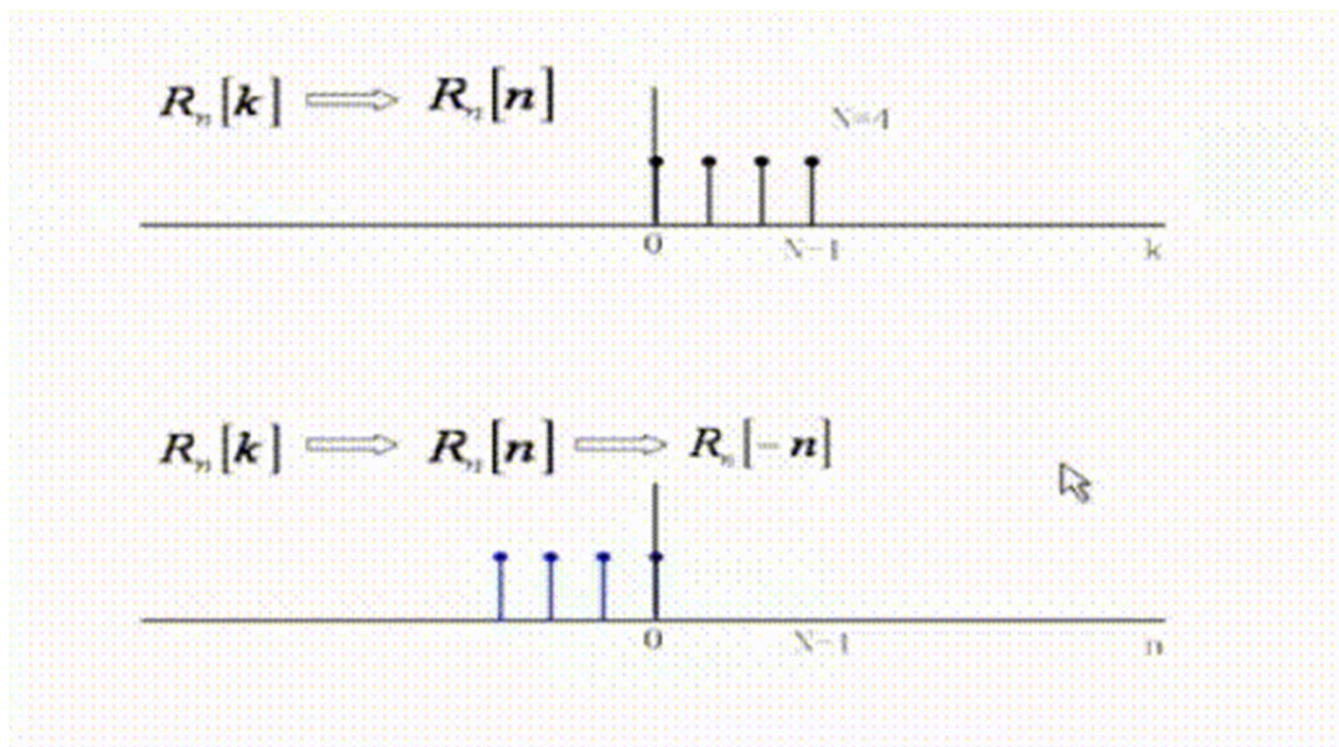
➤ $k > 2N-2$ 时, $R_N[n]$ 与 $R_N[k-n]$ 图形不再相遇

$$y[k] = 0$$



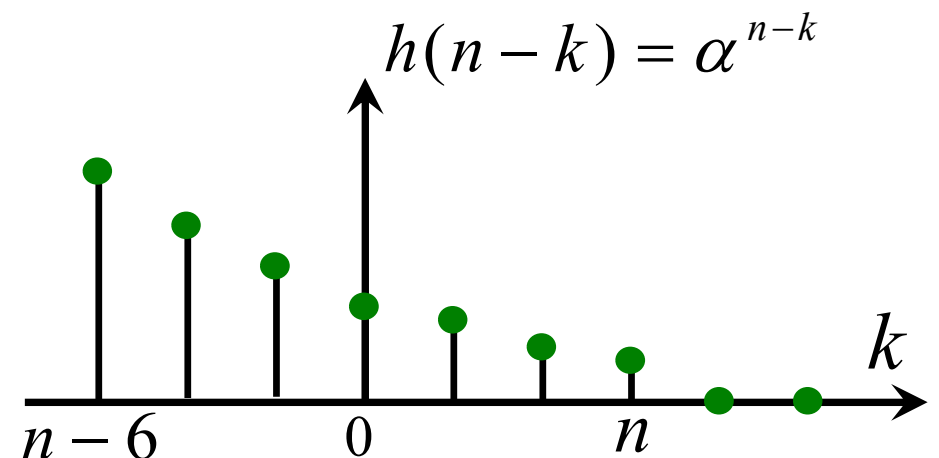
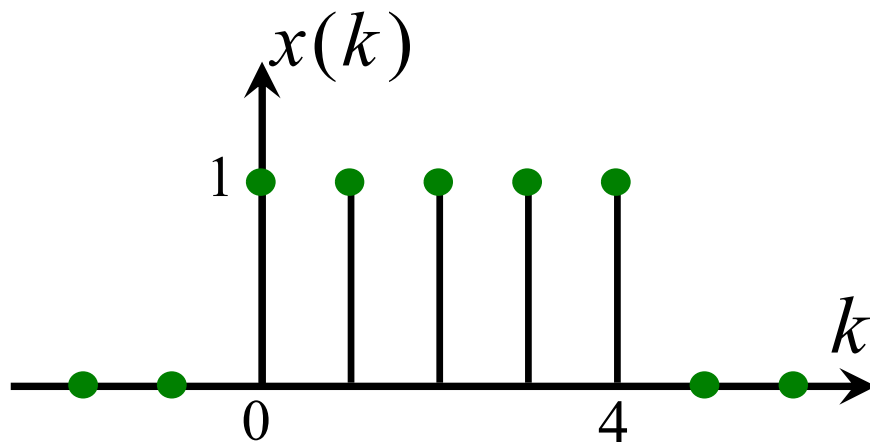
例2 计算

$$y[k] = R_N[k] * R_N[k] \quad R_N[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



例3:
$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} \alpha^n & \alpha > 1, 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\textcircled{1} \quad n < 0 \text{ 时,} \quad y(n) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 0 \leq n \leq 4 \text{ 时,}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n \geq 2, a_{n-1} \neq 0, q \neq 0)$$

$$S_n = na_1 \quad (q = 1)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

$$\textcircled{3} \quad 4 \leq n \leq 6 \text{ 时,}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^n \alpha^{-k} \\ &= \alpha^n \cdot \frac{1 - \alpha^{-(n+1)}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^4 \alpha^{n-k} = \alpha^n \cdot \frac{1 - \alpha^{-5}}{1 - \alpha^{-1}} \\ &= \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad 6 \leq n \leq 10 \text{ 时,}$$

$$y(n) = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{5} \quad n > 10 \text{ 时,} \quad y(n) = 0$$

例4 计算 $x[k] = \alpha^k u[k]$ 与 $h[k] = \beta^k u[k]$ 的卷积和。

解: $\alpha^k u[k] * \beta^k u[k]$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u[n] \cdot \beta^{k-n} u[k-n]$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n \geq 2, a_{n-1} \neq 0, q \neq 0)$$

$$S_n = na_1 \quad (q = 1)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^k \alpha^n \cdot \beta^{k-n} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}}{\beta - \alpha} u[k] & \alpha \neq \beta \\ (k+1)\alpha^k u[k] & \alpha = \beta \end{cases}$$

$$e^{\alpha t} u(t) * e^{\beta t} u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{\beta t} - e^{\alpha t}) u(t) & \alpha \neq \beta \\ te^{\alpha t} u(t) & \alpha = \beta \end{cases}$$

2.2 连续时间LTI系统：卷积积分

(Continuous-Time LTI Systems: The convolution integral)

一. 用冲激信号表示连续时间信号

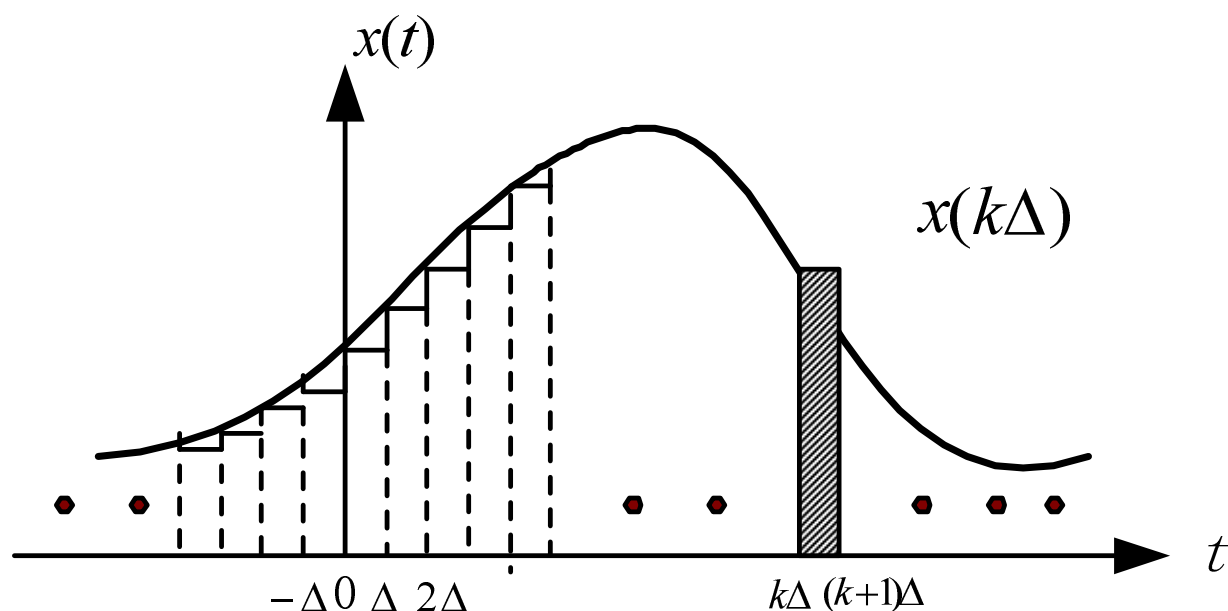
与离散时间信号分解的思想相一致，连续时间信号应该可以分解成一系列移位加权的**单位冲激信号**的**线性组合**。至少单位阶跃与单位冲激之间有这种关系：

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau$$

对一般信号 $x(t)$ ，可以将其分成很多 Δ 宽度的区段，用一个阶梯信号 $x_{\Delta}(t)$ 近似表示 $x(t)$ 。当 $\Delta \rightarrow 0$ 时，有

$$x_{\Delta}(t) \rightarrow x(t)$$

一. 用冲激信号表示连续时间



连续信号表示为冲激信号的迭加

$$x(t) \approx \cdots + x(0)[u(t) - u(t - \Delta)] + x(\Delta)[u(t - \Delta) - u(t - 2\Delta)] + \cdots \\ + x(k\Delta)[u(t - k\Delta) - u(t - k\Delta - \Delta)] + \cdots$$

一. 用冲激信号表示连续时间

$$x(t) \approx \cdots + x(0) \frac{[u(t) - u(t - \Delta)]}{\Delta} \Delta + x(\Delta) \frac{[u(t - \Delta) - u(t - 2\Delta)]}{\Delta} \Delta + \cdots \\ + x(k\Delta) \frac{[u(t - k\Delta) - u(t - k\Delta - \Delta)]}{\Delta} \Delta + \cdots$$

$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \frac{[u(t - k\Delta) - u(t - k\Delta - \Delta)]}{\Delta} \Delta$$

$$\approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $k\Delta \rightarrow \tau$, $\Delta \rightarrow d\tau$, 且

$$\frac{[u(t - k\Delta) - u(t - k\Delta - \Delta)]}{\Delta} = \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \rightarrow \delta(t - \tau)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

信号分解 $\delta(t)$ 为物理意义与实际应用

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

✿ 物理意义:

不同的连续信号都可以分解为冲激信号，不同的信号只是它们的系数不同。

✿ 实际应用:

当求解信号通过系统产生的响应时，只需求解冲激信号通过该系统产生的响应，然后利用线性时不变系统的特性，进行迭加和延时即可求得信号 $x(t)$ 产生的响应。

二. 卷积积分 (The convolution integral)

与离散时间系统的分析类似，如果一个线性系统对 $\delta(t - \tau)$ 的响应为 $h_\tau(t)$ ，则该系统对 $x(t)$ 的响应可表示为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau$$

若系统是时不变的，即：若 $\delta(t) \rightarrow h(t)$ ，则有：
 $\delta(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$ 于是系统对任意输入 $x(t)$ 的响应可表示为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

表明：LTI系统可以完全由它的单位冲激响应 $h(t)$ 来表征。这种求得系统响应的运算关系称为卷积积分 (The convolution integral) 。

三. 卷积积分的计算

 卷积的定义:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

 卷积的计算步骤:

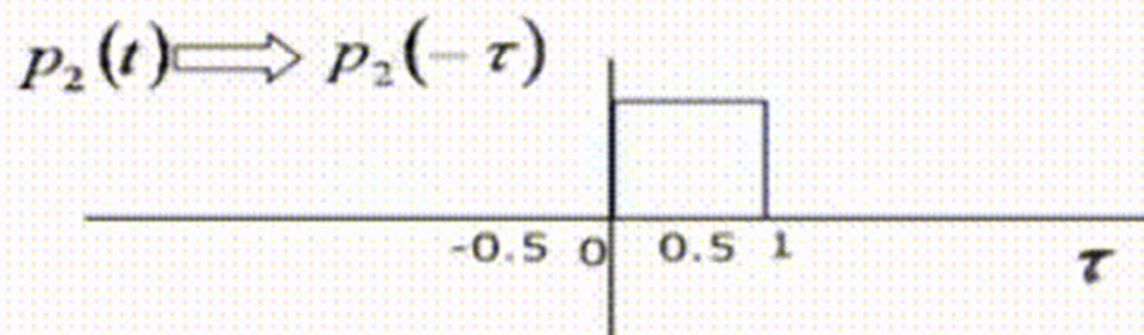
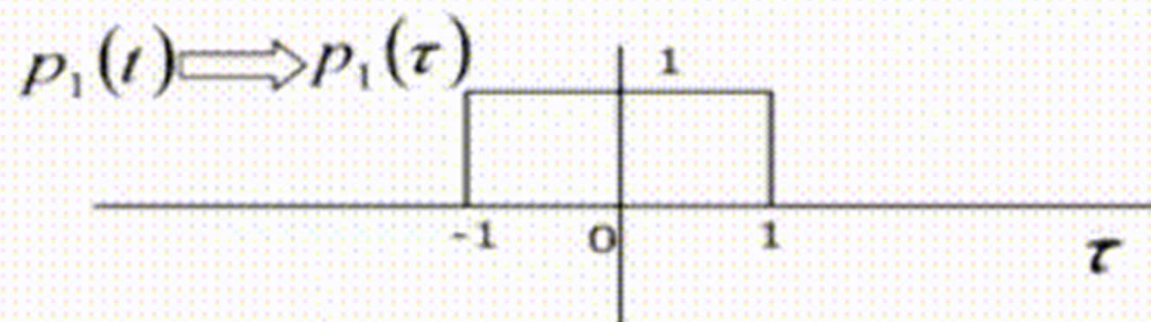
(1) 将 $x(t)$ 和 $h(t)$ 中的自变量由 t 改为 τ ;

(2) 把其中一个信号翻转得 $h(-\tau)$, 再平移 t ;

$$h(\tau) \xrightarrow{\text{翻转}} h(-\tau) \xrightarrow{\text{平移 } t} h(-(\tau - t)) = h(t - \tau)$$

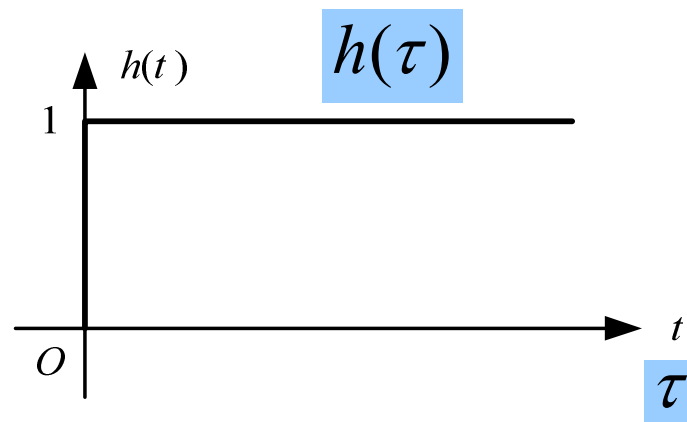
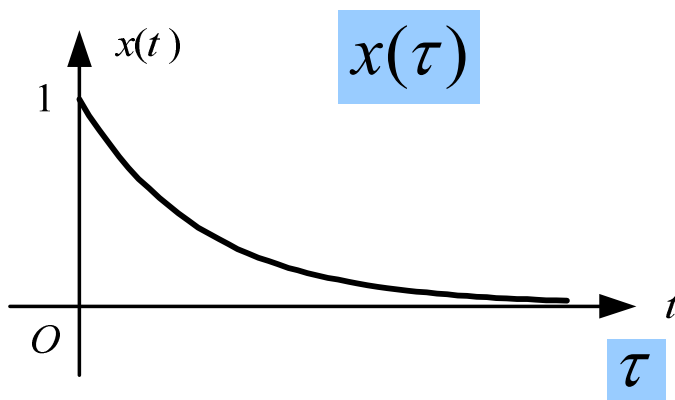
(3) 将 $x(t)$ 与 $h(t-\tau)$ 相乘; 对乘积后信号的积分。

(4) 不断改变平移量 t , 计算 $x(t) h(t-\tau)$ 的积分。

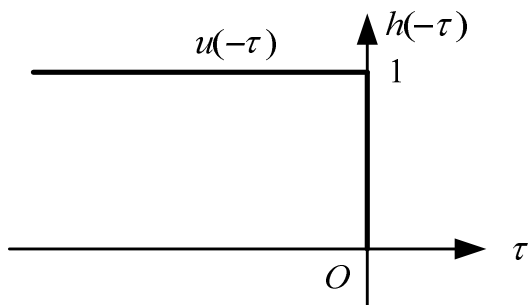


[例] 计算 $x(t) * h(t)$, $x(t) = e^{-t}u(t)$, $h(t) = u(t)$

解：将信号的自变量由 t 改为 τ



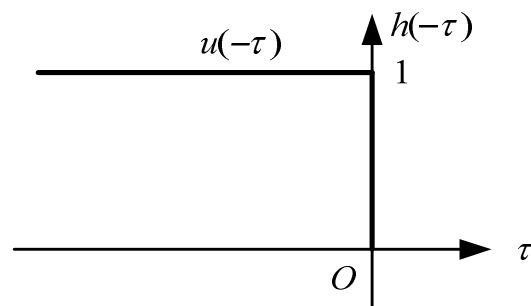
将 $h(\tau)$ 翻转得 $h(-\tau)$



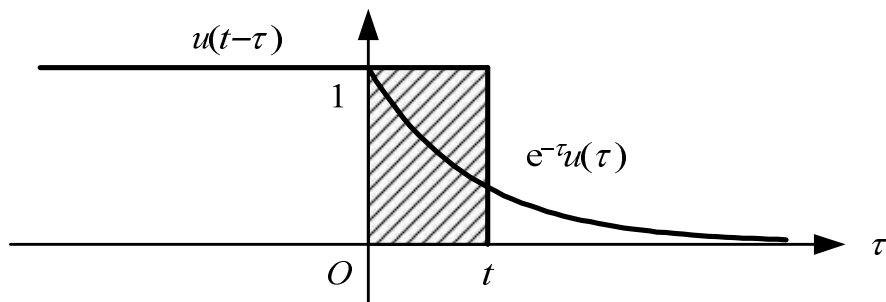
将 $h(-\tau)$ 平移 t 。

当 $t < 0$ 时, $x(\tau) h(t - \tau) = 0$

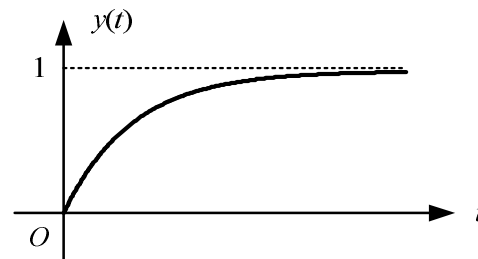
故 $x(t) * h(t) = 0$



当 $t > 0$ 时, $x(\tau)h(t-\tau) = e^{-\tau}[u(\tau) - u(\tau-t)]$



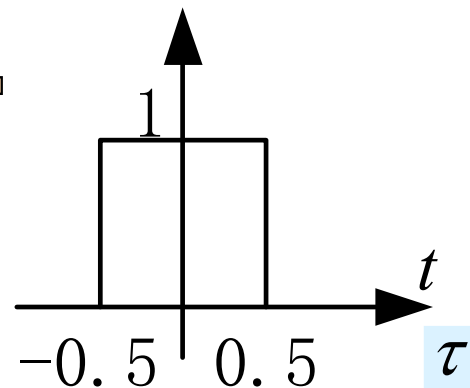
$$x(t) * h(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}$$



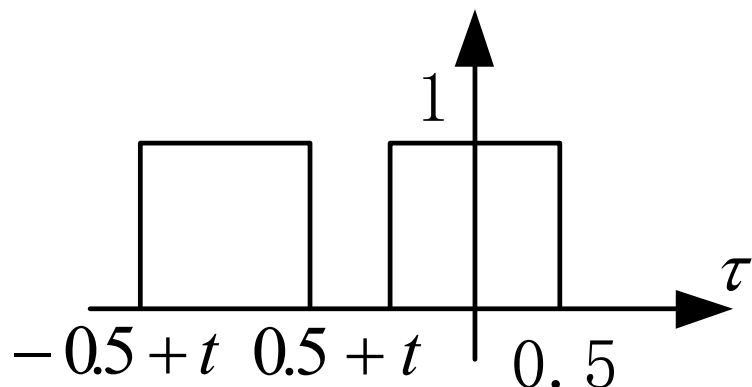
由此可得 $x(t) * h(t) = (1 - e^{-t})u(t)$

[例] 计算 $y(t) = p_1(t) * p_1(t)$ 。

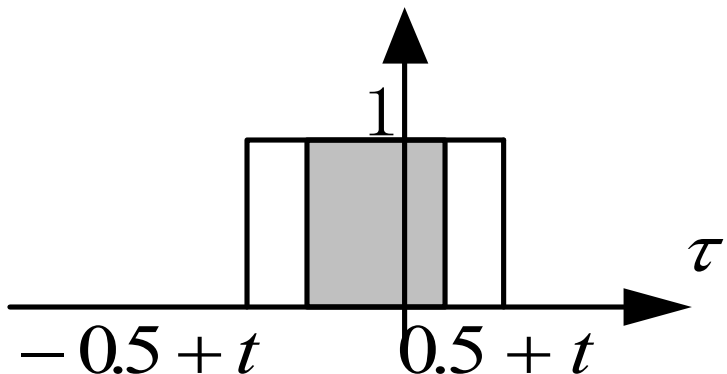
$p_1(t)$ $p_1(\tau)$



解: $-\infty < t < -1$
 $p_1(\tau)p_1(t - \tau)$



$-1 \leq t < 0$
 $p_1(\tau)p_1(t - \tau)$



a) $-\infty < t \leq -1$

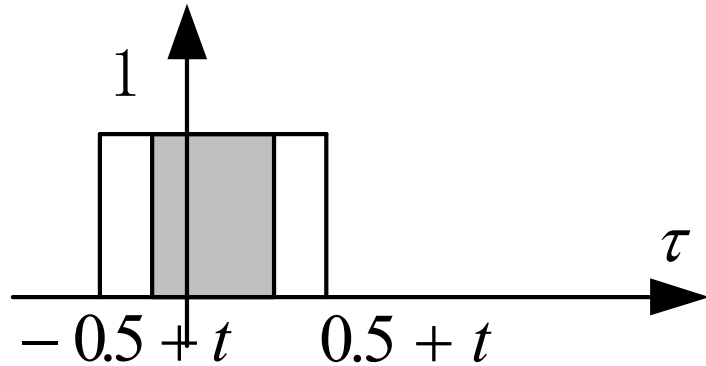
$$y(t) = 0$$

b) $-1 < t \leq 0$

$$y(t) = \int_{-0.5}^{0.5+t} dt = 1 + t$$

$$0 < t \leq 1$$

$$p_1(\tau)p_1(t - \tau)$$

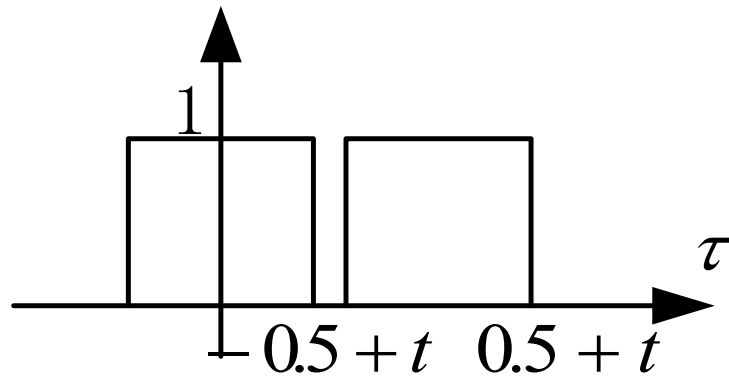


c) $0 < t \leq 1$

$$y(t) = \int_{-0.5+t}^{0.5} dt = 1 - t$$

$$t > 1$$

$$p_1(\tau)p_1(t - \tau)$$



d) $t > 1$

$$y(t) = 0$$

a) $-\infty < t \leq -1$ $y(t) = 0$

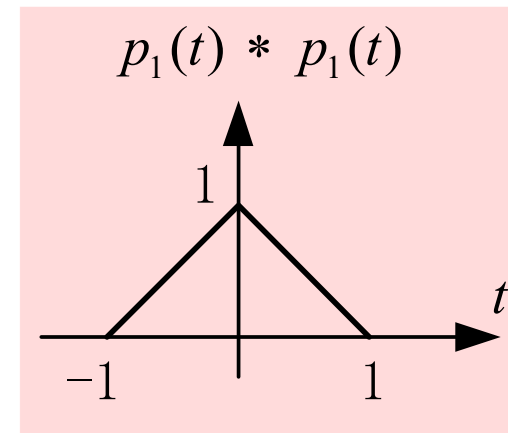
b) $-1 < t \leq 0$

$$y(t) = \int_{-0.5}^{0.5+t} dt = 1 + t$$

c) $0 < t \leq 1$

$$y(t) = \int_{-0.5+t}^{0.5} dt = 1 - t$$

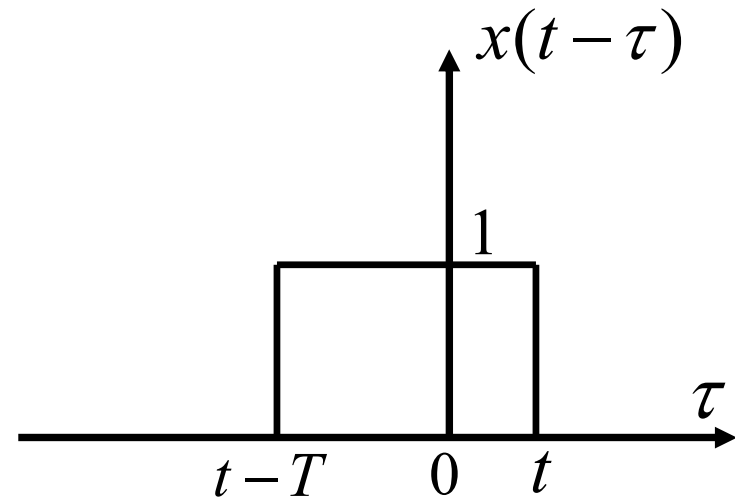
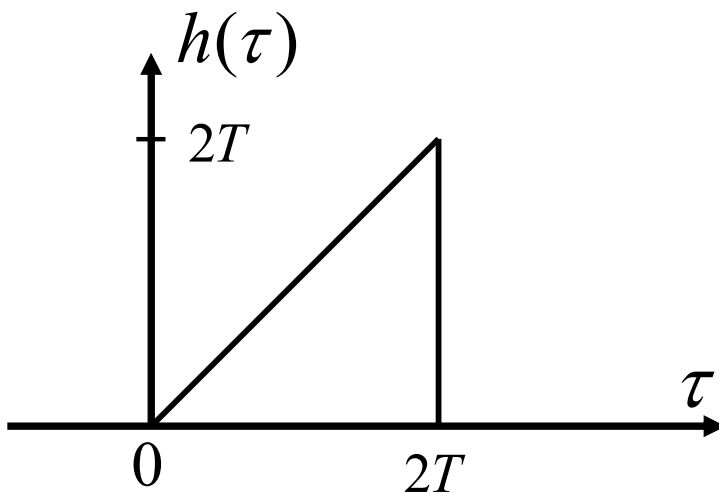
d) $t > 1$ $y(t) = 0$



例： $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau$$



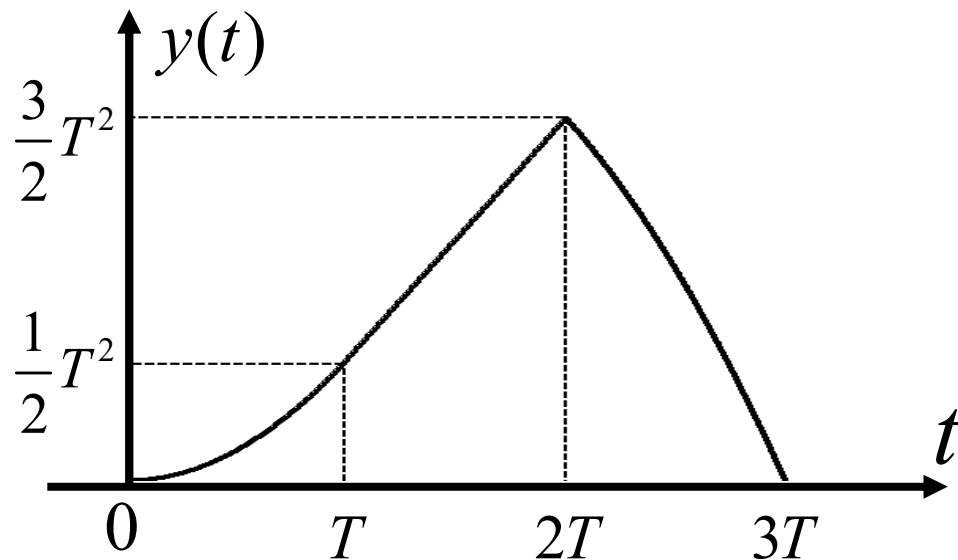
① 当 $t < 0$ 时, $y(t) = 0$

② 当 $0 < t < T$ 时, $y(t) = \int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{2}t^2$

③ 当 $T < t < 2T$ 时, $y(t) = \int_{t-T}^t \tau d\tau = Tt - \frac{1}{2}T^2$

④ 当 $2T < t < 3T$ 时, $y(t) = \int_{t-T}^{2T} \tau d\tau = 2T^2 - \frac{1}{2}(t-T)^2$

⑤ 当 $t > 3T$ 时, $y(t) = 0$



2.3 线性时不变系统的性质

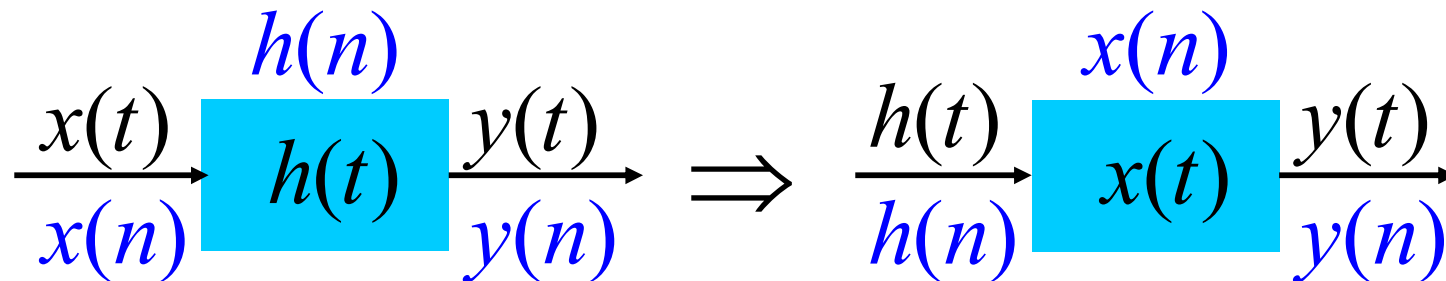
(Properties of Linear Time-Invariant Systems)

一. 卷积积分与卷积和的性质

1. 交换律:

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = h(n) * x(n) \\ y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = h(t) * x(t) \end{aligned}$$

1. 交换律:



结论:

一个单位冲激响应是 $h(t)$ 的LTI系统对输入信号 $x(t)$ 所产生的响应, 与一个单位冲激响应是 $x(t)$ 的LTI系统对输入信号 $h(t)$ 所产生的响应相同。

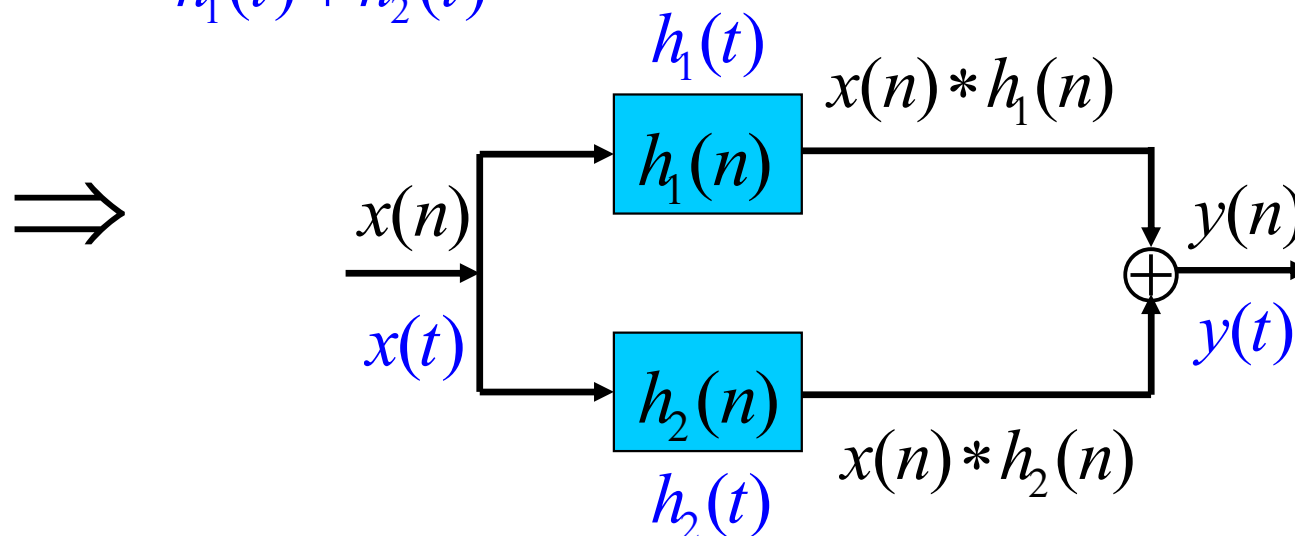
2. 分配律:

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

$$\begin{array}{c} x(n) \\ \xrightarrow{x(t)} \end{array} \boxed{h_1(n) + h_2(n)} \begin{array}{c} y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \\ \xrightarrow{y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]} \end{array}$$

$h_1(t) + h_2(t)$

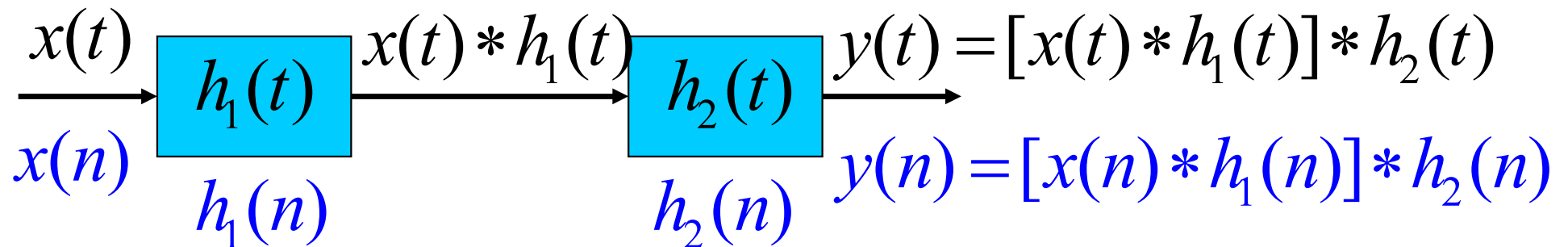


结论：两个LTI系统并联，其总的单位脉冲(冲激)响应等于各子系统单位脉冲(冲激)响应之和。

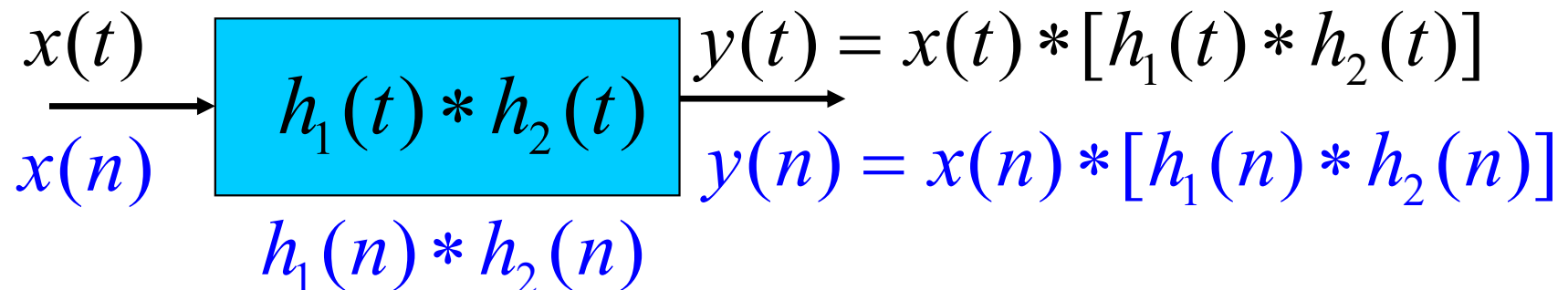
3. 结合律:

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$



\Rightarrow



3. 结合律:

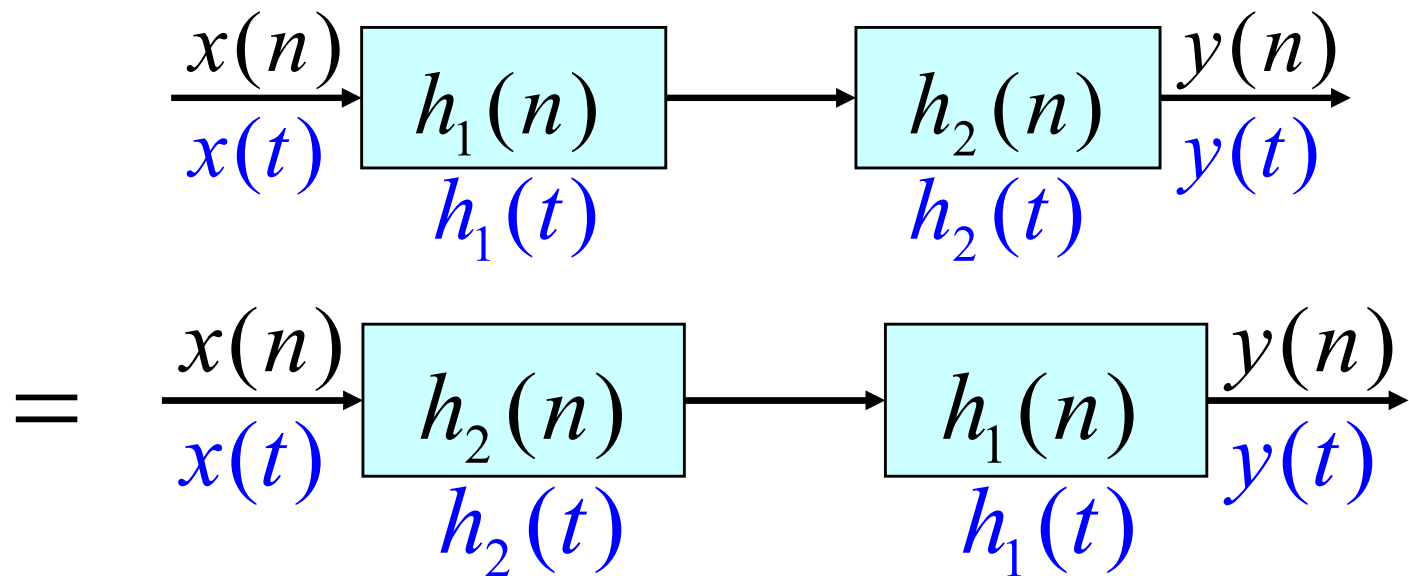
结论:

- 两个LTI系统级联时，系统总的单位冲激(脉冲)响应等于各子系统单位冲激(脉冲)响应的卷积。
- 由于卷积运算满足交换律，因此，系统级联的先后次序可以调换。

3. 结合律:

$$x(n) * h_1(n) * h_2(n) = x(n) * h_2(n) * h_1(n)$$

$$x(t) * h_1(t) * h_2(t) = x(t) * h_2(t) * h_1(t)$$

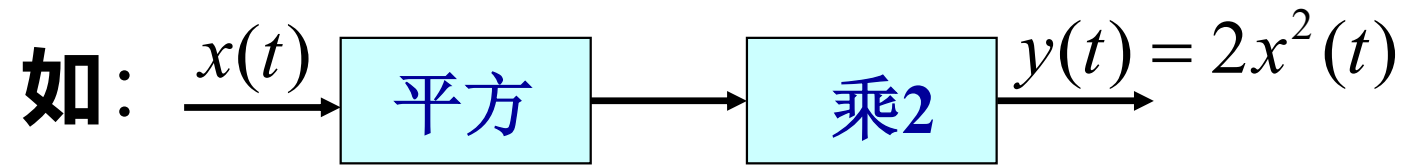


产生以上结论的前提条件:

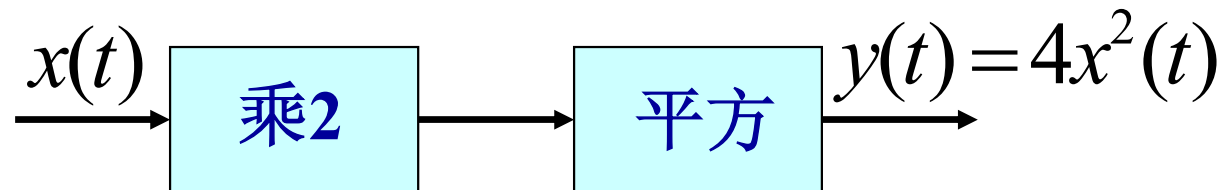
①系统必须是LTI系统;

②所有涉及到的卷积运算必须收敛。

3. 结合律:

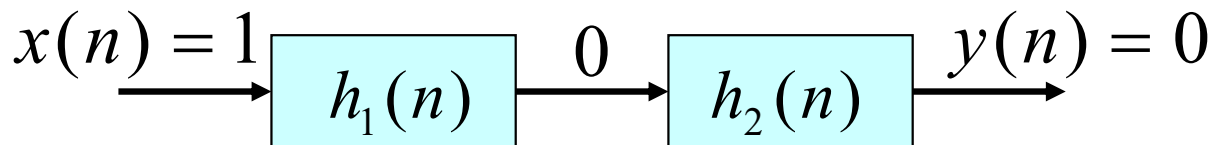


若交换级联次序，即成为：



显然与原来是不等价的。因为系统不是LTI系统。

又如：若 $h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$, $h_2(n) = u(n)$,
虽然系统都是LTI系统。当 $x(n) = 1$ 时，如果交换级联次序，则由于 $x(n) * u(n)$ 不收敛，因而也是不允许的。



4. 卷积运算还有如下性质：

卷积积分满足微分、积分及时移特性：

①若 $x(t) * h(t) = y(t)$, 则

$$x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t) = y'(t)$$

$$\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] * h(t) = x(t) * \left[\int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \right] = \left[\int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau \right]$$

②若 $x(t) * h(t) = y(t)$, 则

$$x(t - t_0) * h(t) = x(t) * h(t - t_0) = y(t - t_0)$$

4. 卷积运算还有如下性质：

卷积和满足差分、求和及时移特性：

① 若 $x(n) * h(n) = y(n)$ ，则

$$[x(n) - x(n-1)] * h(n) = y(n) - y(n-1)$$

$$\left[\sum_{k=-\infty}^n x(k) \right] * h(n) = x(n) * \left[\sum_{k=-\infty}^n h(k) \right] = \sum_{k=-\infty}^n y(k)$$

② 若 $x(n) * h(n) = y(n)$ ，则

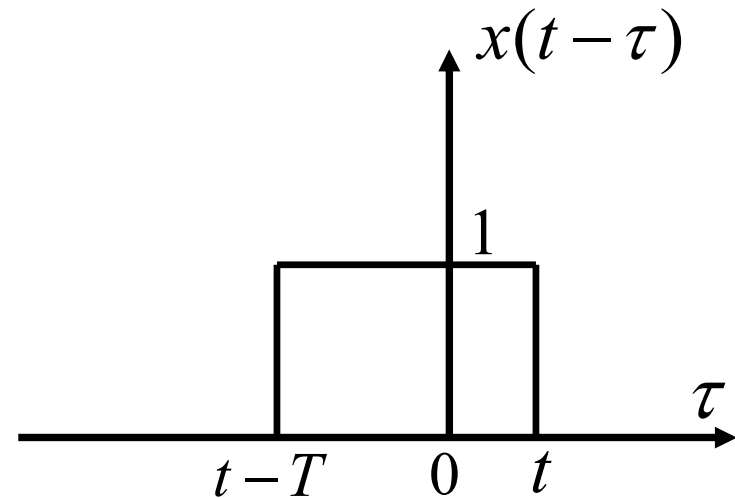
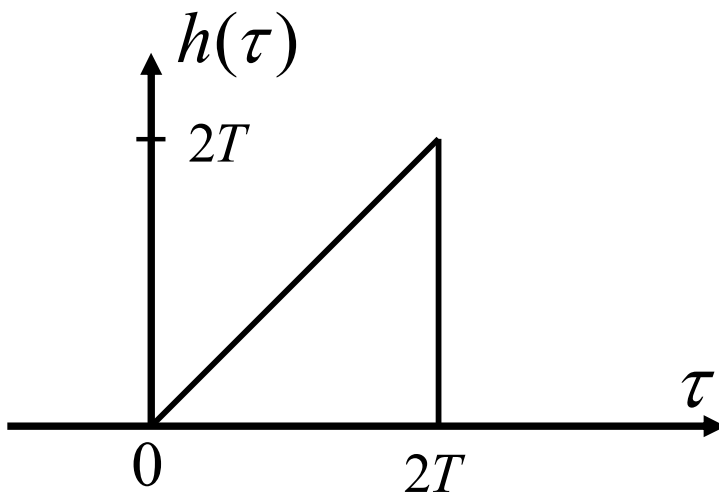
$$x(n - n_0) * h(n) = x(n) * h(n - n_0) = y(n - n_0)$$

恰当地利用卷积的性质可以简化卷积的计算：

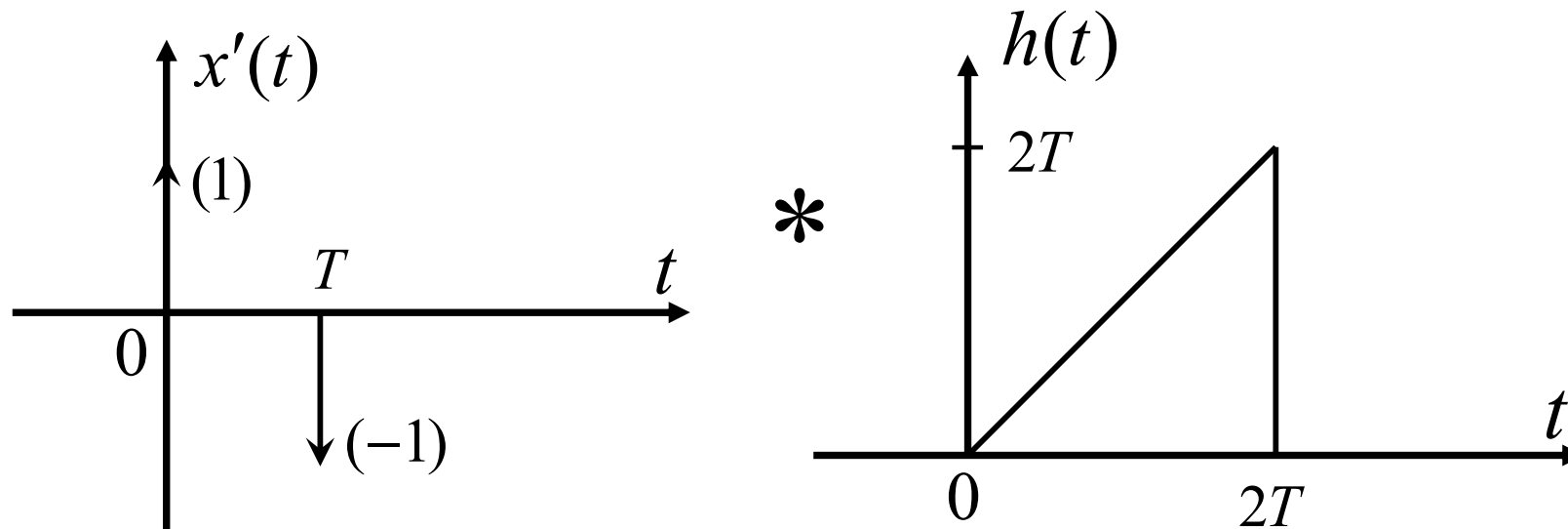
例：

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

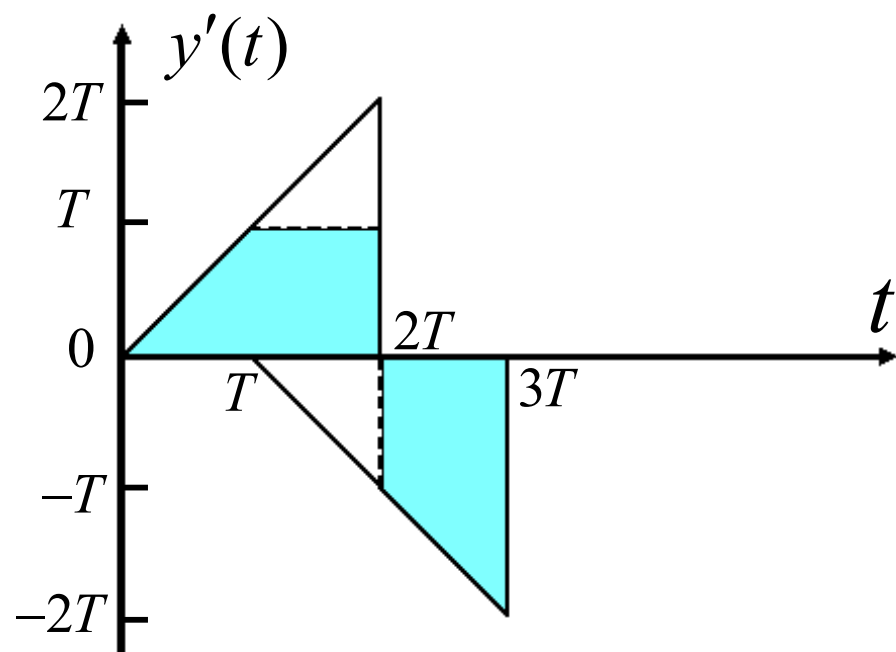


将 $x(t)$ 微分一次有: $x'(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$



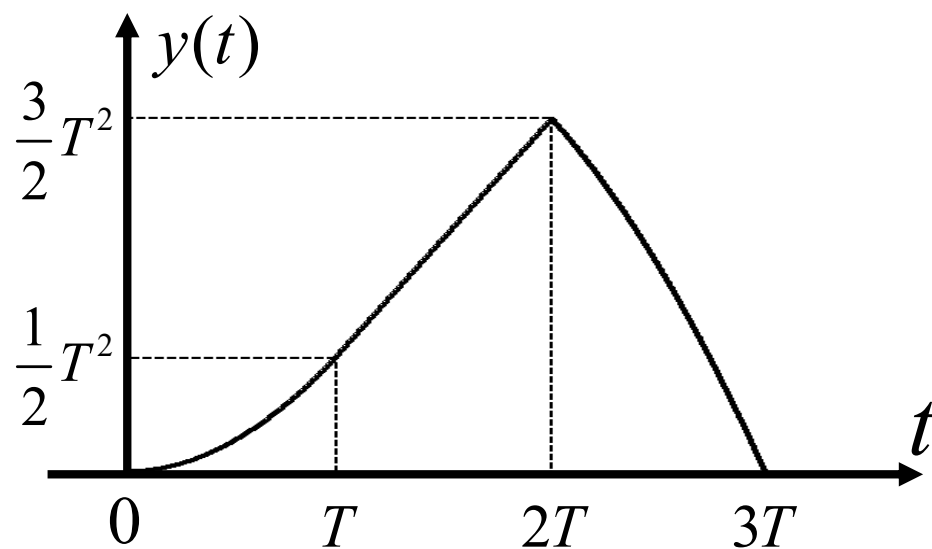
根据微分特性有:

$$\begin{aligned} y'(t) &= x'(t) * h(t) = h(t) * [\delta(t) - \delta(t - T)] \\ &= h(t) - h(t - T) \end{aligned}$$



利用积分特性即可得:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t y'(\tau) d\tau$$



二. LTI系统的性质

**LTI 系统可以由它的单位冲激/脉冲响应来表征，
因而其特性：**

- 记忆性**
- 可逆性**
- 因果性**
- 稳定性**

都应在其单位冲激/脉冲响应中有所体现。

1. 记忆性:

根据 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$, 如果系统是**无记忆的**, 则在任何时刻 n , $y(n)$ 都只能和 n 时刻的输入有关, 和式中只能有 $k=n$ 时的一项为非零, 因此必须有:

$$h(n-k) = 0, \quad k \neq n \quad \text{即: } h(n) = 0, \quad n \neq 0$$

所以, **无记忆系统**的单位脉冲/冲激响应为:

$$h(n) = k\delta(n) \quad h(t) = k\delta(t)$$

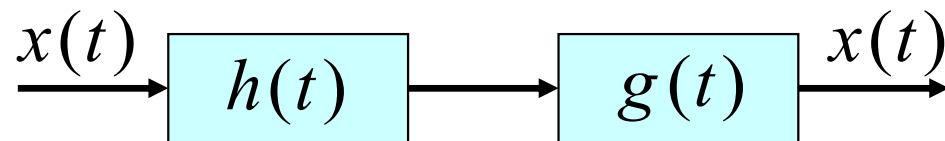
此时, $x(n) * h(n) = kx(n)$ $x(t) * h(t) = kx(t)$

当 $k=1$ 时系统是**恒等系统**。

如果LTI系统的单位冲激/脉冲响应不满足上述要求, 则系统是**记忆的**。

2. 可逆性:

如果LTI系统是可逆的，一定存在一个逆系统，且逆系统也是LTI系统，它们级联起来构成一个恒等系统。



因此有:

$$h(t) * g(t) = \delta(t)$$

$$h(n) * g(n) = \delta(n)$$

2. 可逆性:

延时器是可逆的LTI系统, $h(t) = \delta(t - t_0)$, **其逆系统是** $g(t) = \delta(t + t_0)$,

显然有:

$$h(t) * g(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

2. 可逆性:

累加器是可逆的LTI系统, $h(n) = u(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$,
其逆系统是 $g(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$, 显然也有:

$$\begin{aligned} h(n) * g(n) &= u(n) * [\delta(n) - \delta(n-1)] \\ &= u(n) - u(n-1) \\ &= \delta(n) \end{aligned}$$



3. 因果性:

由 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ ，当LTI系统是因果系统时，在任何时刻 n ， $y(n)$ 都只能取决于 n 时刻及其以前的输入，即和式中所有 $k > n$ 的项都必须为零，即：

$$h(n-k) = 0, \quad k > n$$

或：

$$h(n) = 0, \quad n < 0$$

对连续时间系统有： $h(t) = 0, \quad t < 0$

这是LTI系统具有因果性的充分必要条件。

4. 稳定性:

根据稳定性的定义, 由 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$,
若 $x(n)$ 有界, 则 $|x(n-k)| \leq A$; 若系统稳定, 则要求 $y(n)$ 必有界, 由

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| |x(n-k)| \leq A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

可知, 必须有:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

对连续时间系统, 相应有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

这是LTI系统稳定的充分必要条件。

5. LTI系统的单位阶跃响应:

在工程实际中，也常用单位阶跃响应来描述LTI系统。单位阶跃响应就是系统对 $u(t)$ 或 $u(n)$ 所产生的响应。因此有:

$$s(t) = u(t) * h(t) \quad s(n) = u(n) * h(n)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k) \quad h(n) = s(n) - s(n-1)$$

LTI系统的特性也可以用它的单位阶跃响应来描述。

2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

(Causal LTI Systems Described by Differential and Difference Equations)

- 在工程实际中有相当普遍的一类系统，其数学模型可以用线性常系数微分方程或线性常系数差分方程来描述。
- 在时域分析这类LTI系统，就是要求解线性常系数微分方程或差分方程。

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_s(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m} v(t) = \frac{1}{m} f(t)$$

- Describe the relationship between the input and output rather than an explicit expression of the output as a function of the input
- In order to obtain an explicit expression, we must solve the differential equation
- To find a solution, we need more information: *auxiliary conditions*
- We mainly focus on the use of differential equations to describe **causal** LTI systems: In this case, the auxiliary condition takes the form of the condition of **initial rest**

Its solution is composed of two parts:

the *homogeneous solution* + the *particular solution*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Homogeneous Solution $y_h(t)$

The homogeneous solution, often referred to as the **natural response** (自然响应) of the system, is the solution of the **homogeneous differential equation**.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

The form of the homogeneous solution is a linear composition of some exponentials like $e^{\lambda t}$, where λ is an **eigenvalue**.

The corresponding **eigenvalue equation** is :

$$\lambda + 2 = 0$$

The corresponding homogeneous solution (natural response) is then

$$y_h(t) = C e^{-2t}$$

Particular Solution $y_p(t)$

- The form of the particular solution, often referred to as the **forced response** (受迫响应) of the system, are related to the form of input signals.
- Substitute the form of the particular solution into the related differential equation and decide pending coefficients.

$$\begin{aligned} &\text{假定 } y_h(t) = C e^{\lambda t} \\ &\text{代入 } \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \text{ 后得} \\ &C\lambda e^{\lambda t} + 2C e^{\lambda t} = C e^{\lambda t}(\lambda + 2) = 0 \\ &\rightarrow \lambda + 2 = 0 \\ &\rightarrow \lambda = -2 \end{aligned}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

- Suppose the input signal is

$$x(t) = Ke^{3t}u(t)$$

- The particular solution for $t > 0$ has the following form

$$y_p(t) = Ye^{3t}$$

- Plug the input signal and the solution into the equation,

$$3Ye^{3t} + 2Ye^{3t} = Ke^{3t} \Rightarrow Y = \frac{K}{5}$$

- So

$$y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}, \quad t > 0$$

The overall solution for $t > 0$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t}$$

which is a sum of the homogeneous solution and the particular solution.

- Pending coefficients in the overall solution should be decided according to the **auxiliary conditions**.

Auxiliary conditions

- For a casual LTI system,
 - If $x(t) = 0$ for $t < t_0$, then $y(t) = 0$ for $t < t_0$

$$x(t) = Ke^{3t}u(t)$$

$$y(t) = Ce^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t}, \quad t > 0$$

- Setting $y(0) = 0$ when $t = 0$ yields

$$C = -\frac{K}{5}$$

- Because of the condition of initial rest

$$y(t) = \left(-\frac{K}{5}e^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t}\right)u(t)$$

一.线性常系数微分方程

(Linear Constant-Coefficient Differential Equation)

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad a_k, b_k \text{ 均为常数}$$

求解该微分方程，通常是求出通解 $y_h(t)$ 和一个特解 $y_p(t)$ ，则 $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$
特解 $y_p(t)$ 是与输入 $x(t)$ 同类型的函数，
通解 $y_h(t)$ 是齐次方程的解，即

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

的解。

一.线性常系数微分方程

(Linear Constant-Coefficient Differential Equation)

欲求得齐次解，可根据齐次方程建立一个特征方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0$$

求出其特征根。在特征根均为单阶根时，可得出齐次解的形式为：

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^N C_k e^{\lambda_k t},$$

其中 C_k 是待定的常数。

一.线性常系数微分方程 (LCCDE)

要确定系数 C_k ，需要有一组条件,称为**附加条件**。仅仅从确定待定系数 C_k 的角度来看，这一组附加条件可以是任意的，包括附加条件的值以及给出附加条件的时刻都可以是任意的。

当微分方程描述的系统是**线性系统**时，**必须满足系统零输入—零输出的特性**。也就是系统在没有输入，即 $x(t)=0$ 时， $y(t)=0$ 。此时，微分方程就蜕变成齐次方程，因而描述线性系统的微分方程其齐次解必须为零，这就要求所有的 C_k 都为零。

一.线性常系数微分方程 (LCCDE)

也就是要求确定待定系数所需的一组附加条件的值必须全部为零，即：**LCCDE具有一组零附加条件时，才能描述线性系统。**

可以证明：当这组零附加条件在信号加入的时刻给出时，LCCDE描述的系统不仅是线性的，也是因果的和时不变的。

在信号加入的时刻给出的零附加条件称为零初始条件。

一.线性常系数微分方程 (LCCDE)

结论：

LCCDE具有一组全部为零的初始条件可以描述一个LTI因果系统。这组条件是：

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \dots\dots, \quad y^{(N-1)}(0) = 0$$

如果一个因果的LTI系统由LCCDE描述，且方程具有零初始条件，就称该系统初始是静止的或最初是松弛的。

如果LCCDE具有一组不全为零的初始条件，则可以证明它所描述的系统是增量线性的。

二. 线性常系数差分方程:

(Linear Constant-Coefficient Difference Equation)

一般的线性常系数差分方程可表示为:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

与微分方程一样，它的解法也可以通过求出一个特解 $y_p(n)$ 和通解，即齐次解 $y_h(n)$ 来进行，其过程与解微分方程类似。

要确定齐次解中的待定常数，也需要有一组**附加条件**。同样地，当LCCDE具有一组全部为零的初始条件时，所描述的系统是线性、因果、时不变的。

二.线性常系数差分方程 (LCCDE)

对于差分方程，可以将其改写为：

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

可以看出：要求出 $y(0)$ ，不仅要知道所有的 $x(n)$ ，还要知道 $y(-1)$ ， $y(-2)$ ， \dots ， $y(-N)$ 这就是一组**初始条件**，由此可以得出 $y(0)$ 。进一步，又可以通过 $y(0)$ 和 $y(-1)$ ， $y(-2)$ ， \dots ， $y(-N+1)$ ，求得 $y(1)$ ，依次类推可求出所有 $n \geq 0$ 时的解。

Example. A causal discrete-time system is described by:

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n]$$

Given the auxiliary condition $y[0] = 0$, $y[1] = 2$, and the input signal $x[n] = 2^n u[n]$, determine the output $y[n]$.

Solution: According to the given conditions,

$$y[n] = -3y[n-1] - 2y[n-2] + x[n]$$

When $n = 2$, incorporating the auxiliary conditions, we have

$$y[2] = -3y[1] - 2y[0] + x[2] = -6 - 0 + 4 = -2,$$

Similarly: $y[3] = -3y[2] - 2y[1] + x[3] = 10,$

$$y[4] = -3y[3] - 2y[2] + x[4] = -10,$$

二.线性常系数差分方程 (LCCDE)

若将差分方程改写为：

$$y(n-N) = \frac{1}{a_N} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y(n-k) \right]$$

则可由 $y(1), y(2), \dots, y(N)$ 求得 $y(0)$,进而由 $y(0), y(1), y(2), \dots, y(N-1)$ 求得 $y(-1)$, 依次可推出 $n \leq 0$ 时的解。

由于这种差分方程可以通过递推求解，因而称**递归方程** (recursive equation) 。

二.线性常系数差分方程 (LCCDE)

当 $a_k = 0, k \neq 0$ 时, 差分方程变为:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x(n-k)$$

此时, 求解方程不再需要迭代运算, 因而称为**非递归方程 (nonrecursive equation)**。显然, 此时方程就是一个卷积和的形式, 相当于

$$h(n) = \frac{b_n}{a_0}, \quad 0 \leq n \leq M$$

此时, 系统单位脉冲响应 $h(n)$ 是有限长的, 因而把这种方程描述的LTI系统称为**FIR (Finite Impulse Response) 系统**。将递归方程描述的系统称为**IIR (Infinite Impulse Response) 系统**, 此时系统的单位脉冲响应是一个无限长的序列。

二.线性常系数差分方程 (LCCDE)

FIR系统与IIR系统是离散时间LTI系统中两类很重要的系统，它们的特性、结构以及设计方法都存在很大的差异。

由于无论微分方程还是差分方程的特解都具有与输入相同的函数形式，即特解是由输入信号完全决定的，因而特解所对应的这一部分响应称为**受迫响应**或**强迫响应**。齐次解所对应的部分由于与输入信号无关，也称为系统的**自然响应**。

二.线性常系数差分方程 (LCCDE)

增量线性系统的响应分为**零状态响应**和**零输入响应**。零输入响应由于与输入信号无关，因此它属于自然响应。零状态响应既与输入信号有关，也与系统特性有关，因而它包含了受迫响应，也包含有一部分自然响应。

三.由微分和差分方程描述的LTI系统的方框图表示

(Block-Diagram Representation of the LTI System described by LCCDE)

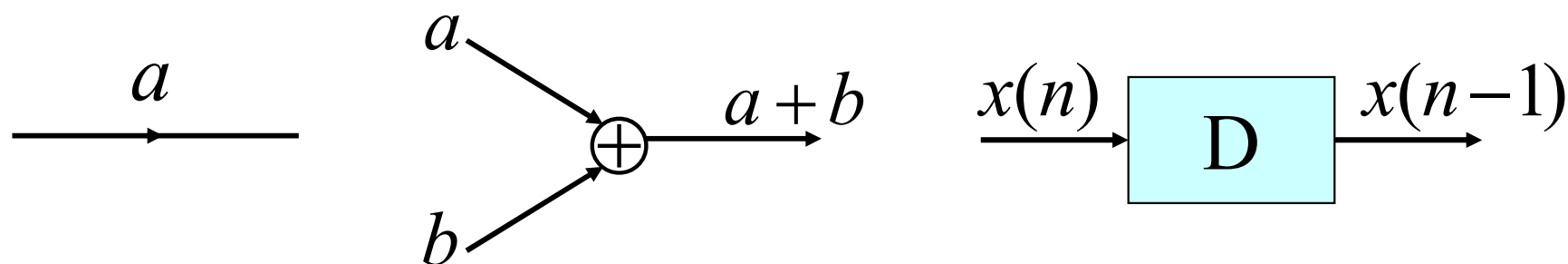
由LCCDE 描述的系统，其**数学模型**是由一些基本运算来实现的，如果能用一种图形表示方程的运算关系，就会更加形象直观；另一方面，分析系统很重要的目的是为了设计或实现一个系统，**用图形表示系统的数学模型**，将对系统的特性仿真、硬件或软件实现具有重要意义。

不同的结构也会在设计 and 实现一个系统时带来不同的影响：如系统的成本、灵敏度、误差及调试难度等方面都会有差异。

1. 由差分方程描述的LTI系统的方框图表示:

由
$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

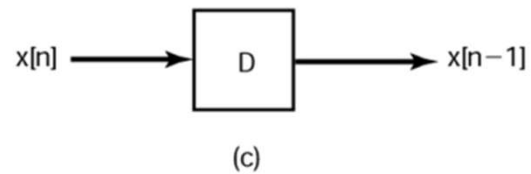
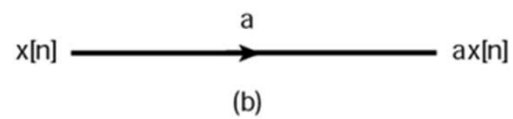
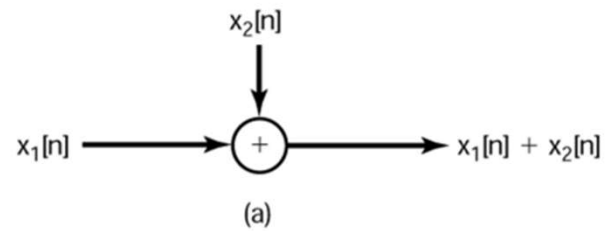
可看出：方程中包括三种基本运算：乘系数、相加、移位（延迟）。可用以下符号表示：



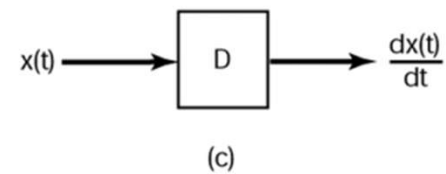
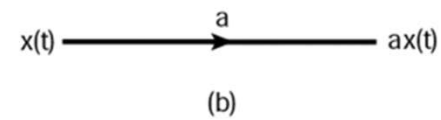
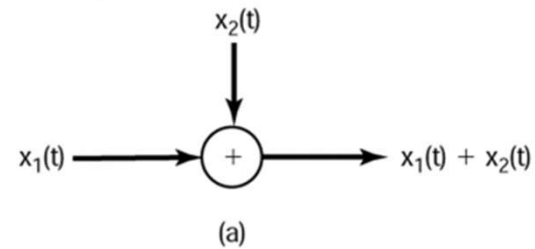
若令 $w(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$, 则
$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[w(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

Examples

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$



$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

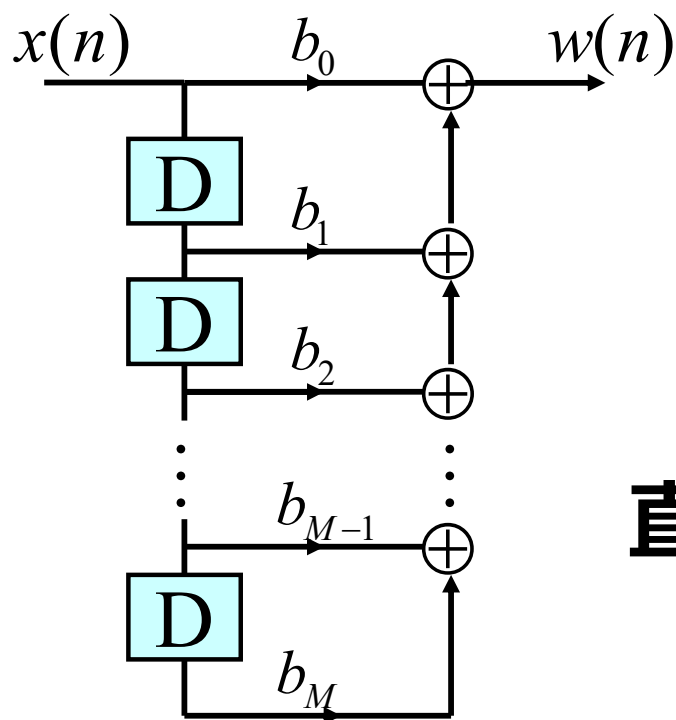


Some basic elements for the block diagram representation of LTI systems.

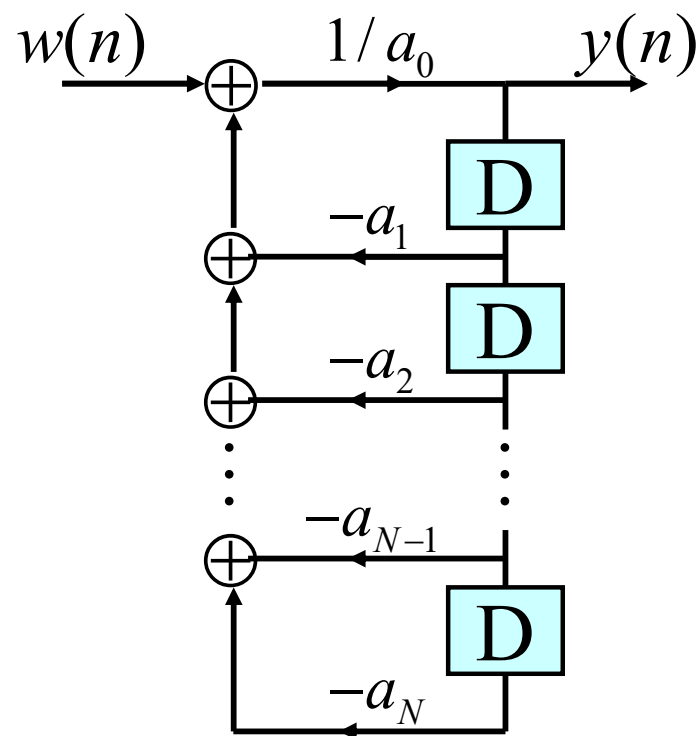
1. 由差分方程描述的LTI系统的方框图表示:

$$y(n] = \frac{1}{a_0} \left[w(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

据此可得方框图:

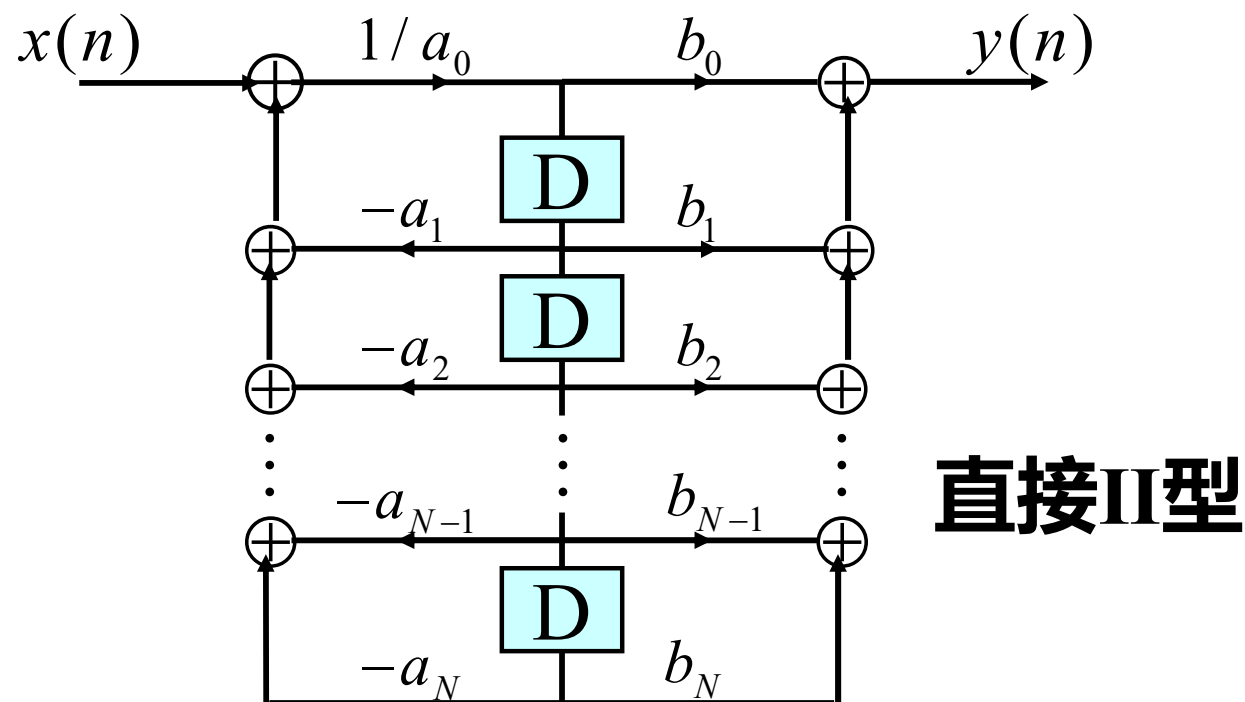


直接I型



1. 由差分方程描述的LTI系统的方框图表示:

将其**级联**起来，就成为LCCDE描述的系统，它具有与差分方程完全相同的运算功能。显然，它可以看成是两个级联的系统，可以调换其级联的次序，并将移位单元合并，于是得到：



2. 由微分方程描述的LTI系统的方框图表示:

由
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

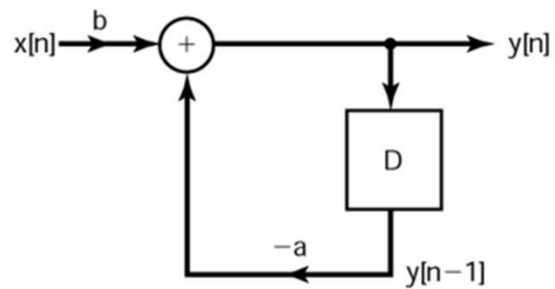
看出它也包括三种基本运算：**微分、相加、乘系数。**

但由于微分器不仅在工程实现上有困难，而且对误差及噪声极为灵敏，因此，**工程上通常使用积分器而不用微分器。**

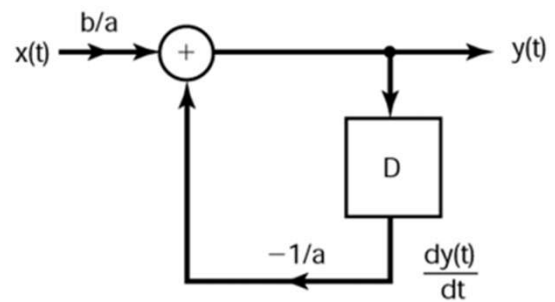
将微分方程两边同时积分 N 次，即可得到一个积分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t)$$

$$y[n] = -ay[n-1] + bx[n]$$

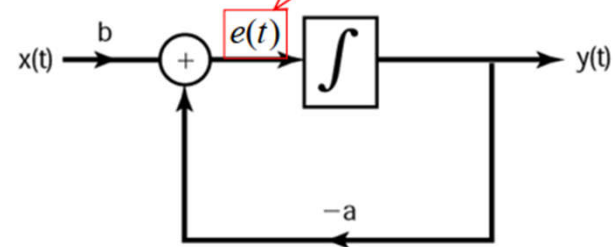


$$y(t) = -\frac{1}{a} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a} x(t)$$

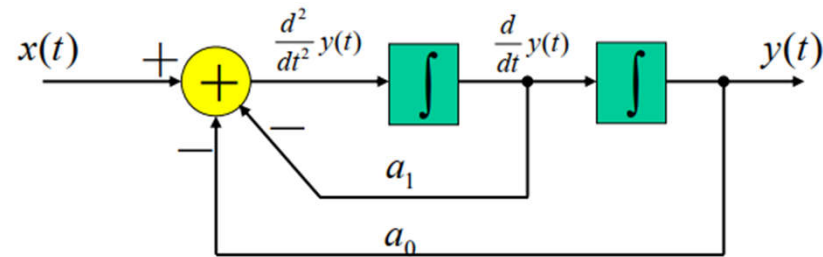


$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) + bx(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$



Example: Determine the differential equation corresponding to the given block diagram.



Solution:

Pay attention to the output of the adder, we have

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = -a_1 \frac{d}{dt} y(t) - a_0 y(t) + x(t)$$

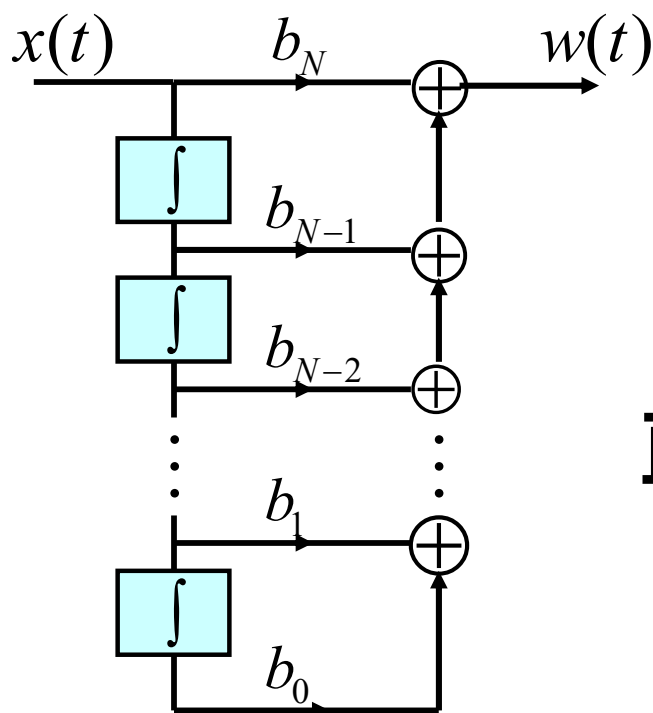
Rearranging the equation, we have

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

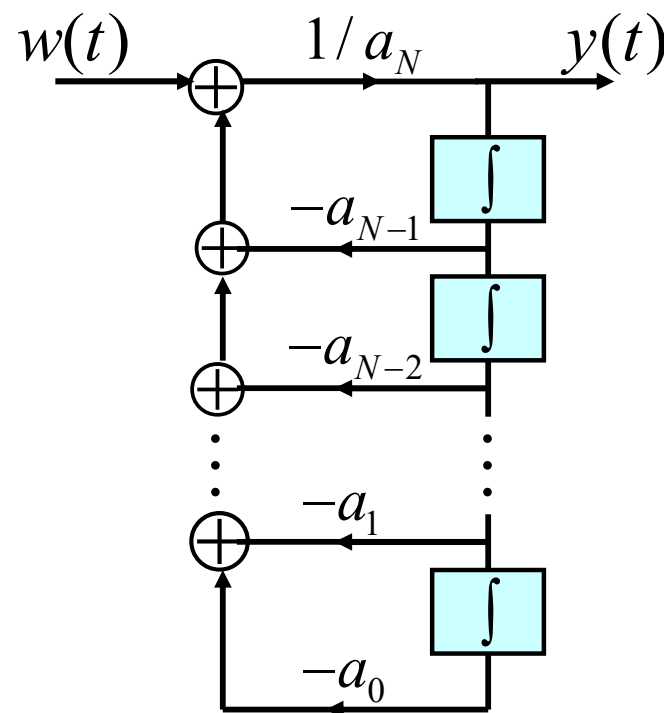
2. 由微分方程描述的LTI系统的方框图表示:

对此积分方程完全按照差分方程的办法有:

$$y(t) = \frac{1}{a_N} \left[\sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t) \right]$$

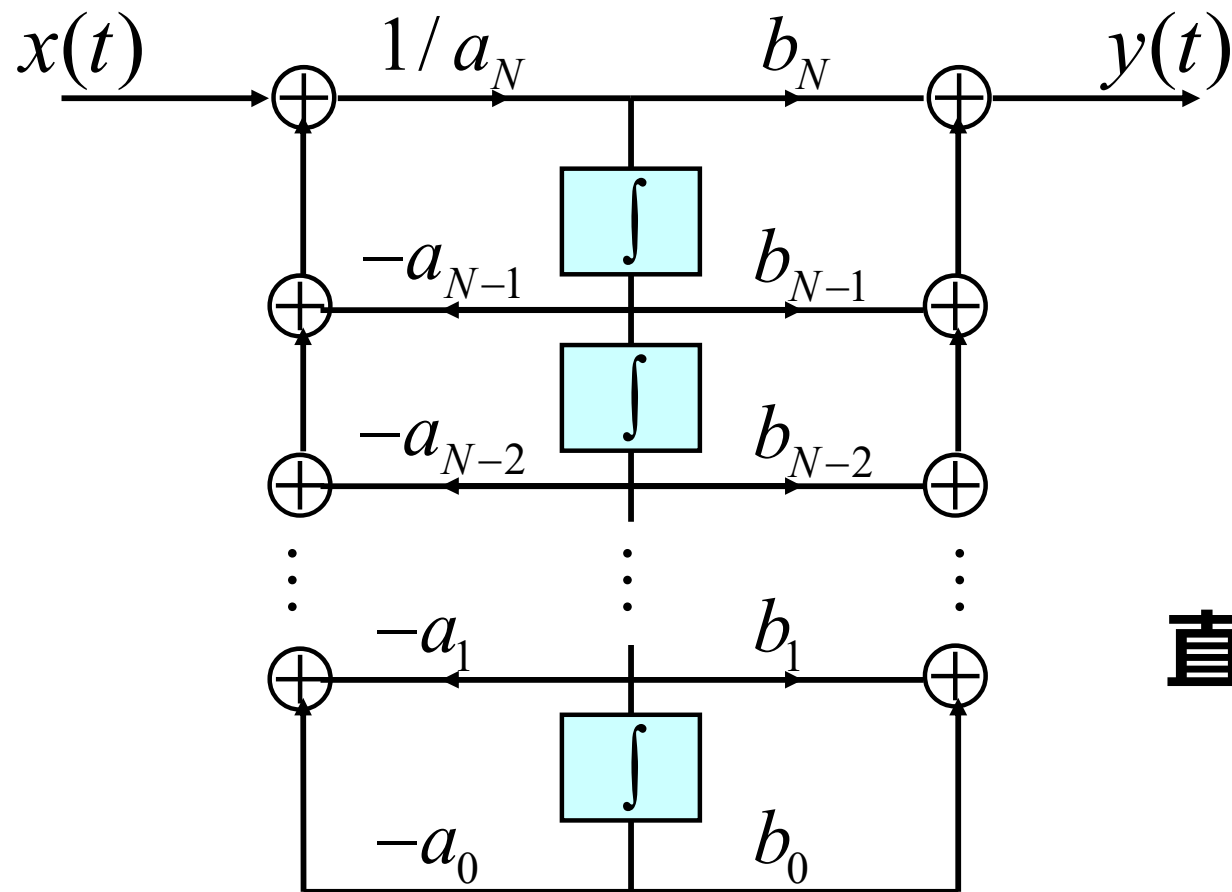


直接I型



2. 由微分方程描述的LTI系统的方框图表示:

通过交换级联次序，合并积分器可得直接II型：



直接II型

2.5 奇异函数 (Singularity function)

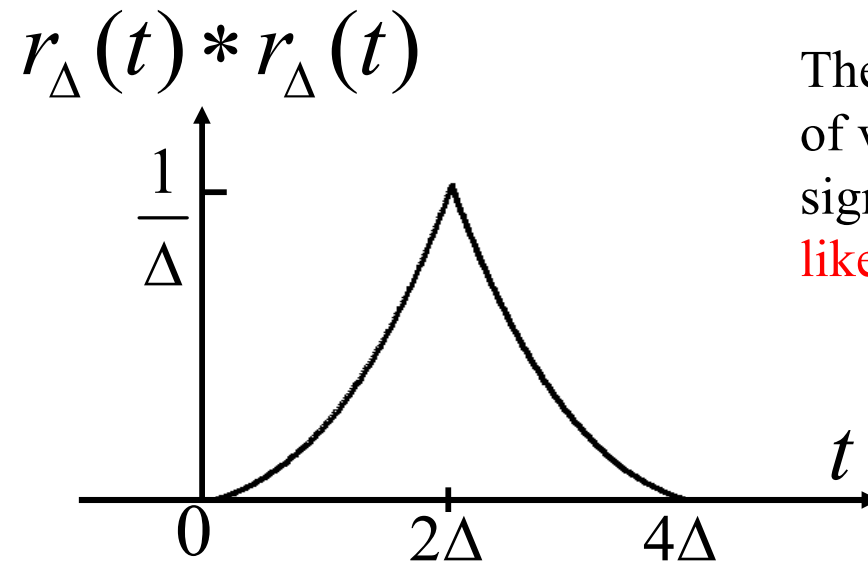
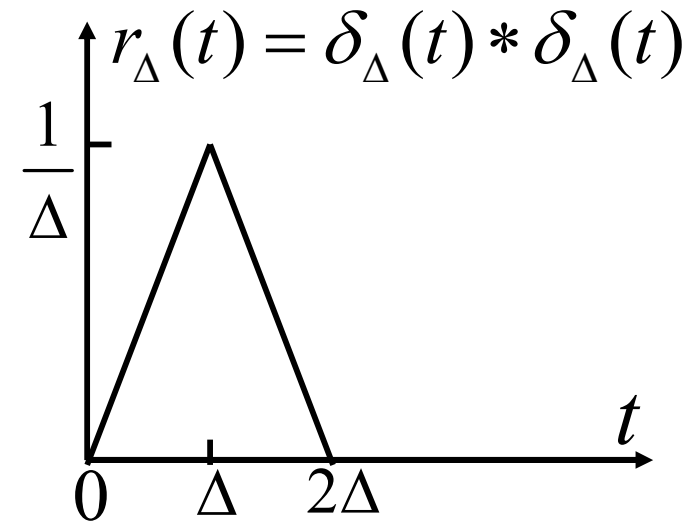
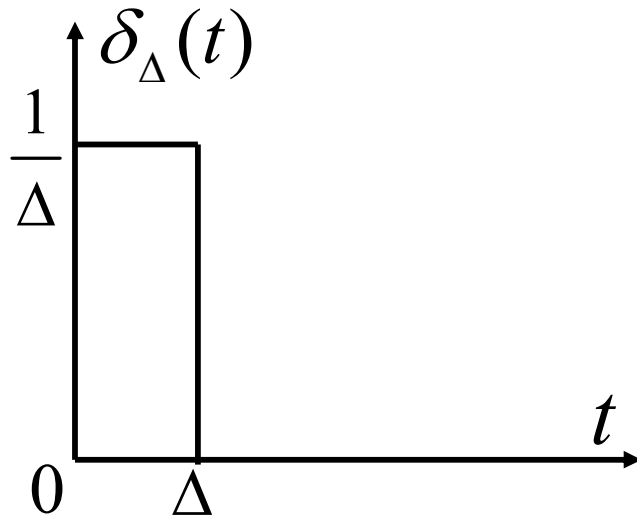
在第一章介绍单位冲激时，开始将 $\delta(t)$ 定义为

$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ 显然是不严密的，因为 $u(t)$ 在 $t=0$ 不连续。

进而采用极限的观点，将 $\delta(t)$ 视为 $\delta_{\Delta}(t)$ 在 $\Delta \rightarrow 0$ 时的极限。这种定义或描述 $\delta(t)$ 的方法在数学上仍然是不严格的，因为可以有許多不同函数在 $\Delta \rightarrow 0$ 时都表现为与 $\delta_{\Delta}(t)$ 有相同的特性。

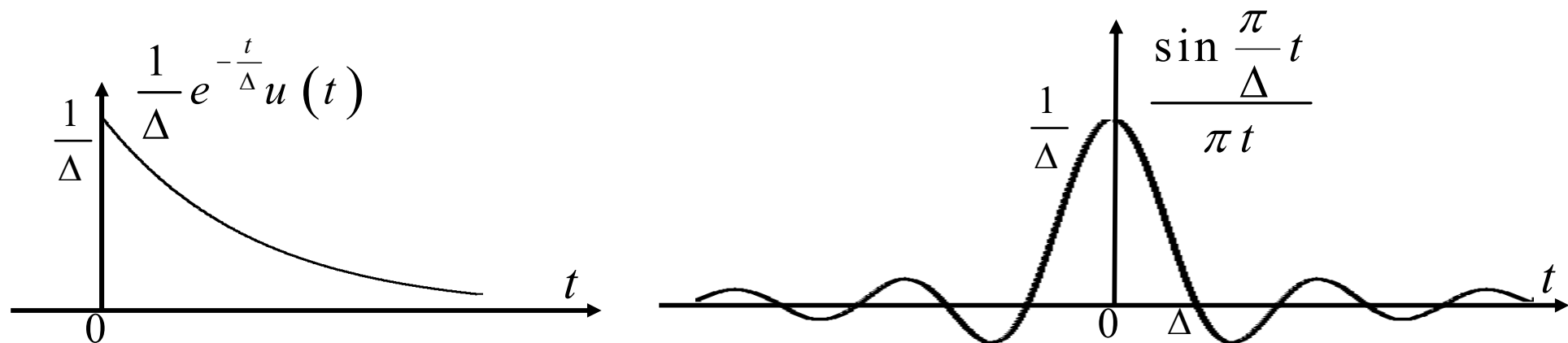
例如：以下信号的面积都等于1，而且在 $\Delta \rightarrow 0$ 时，它们的极限都表现为单位冲激。

2.5 奇异函数 (Singularity function)



There is an unlimited number of very dissimilar-looking signals, all of which **behave like an impulse in the limit.**

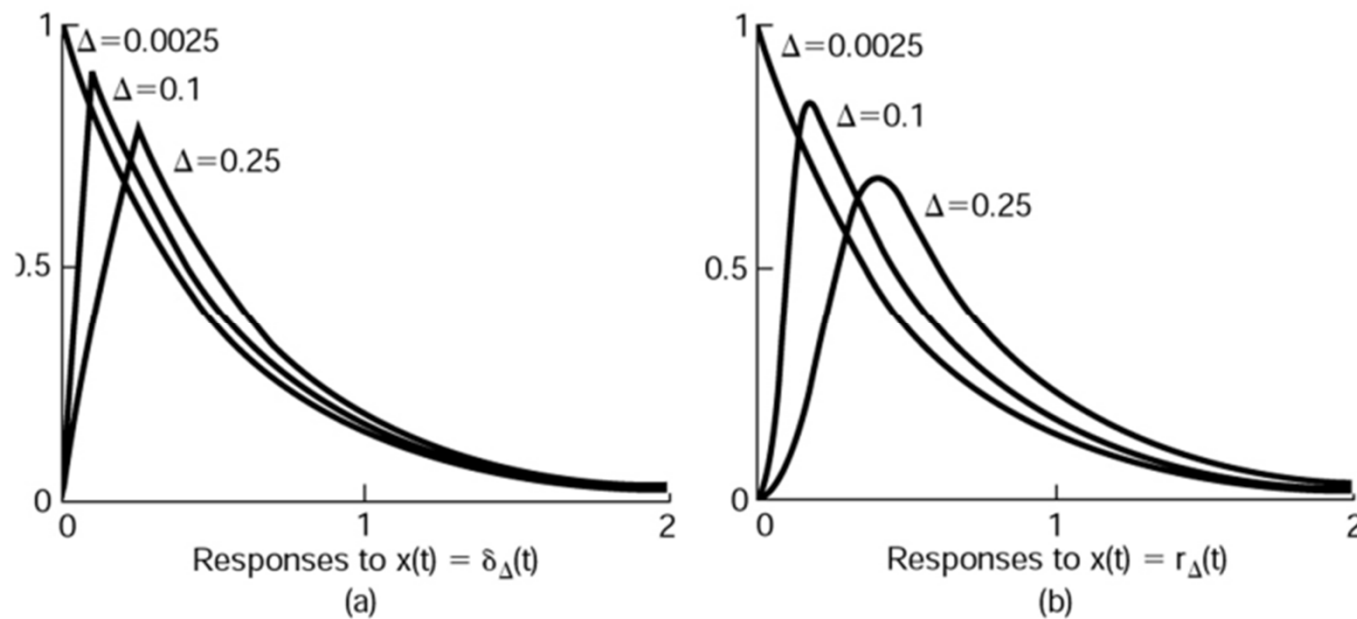
2.5 奇异函数 (Singularity function)

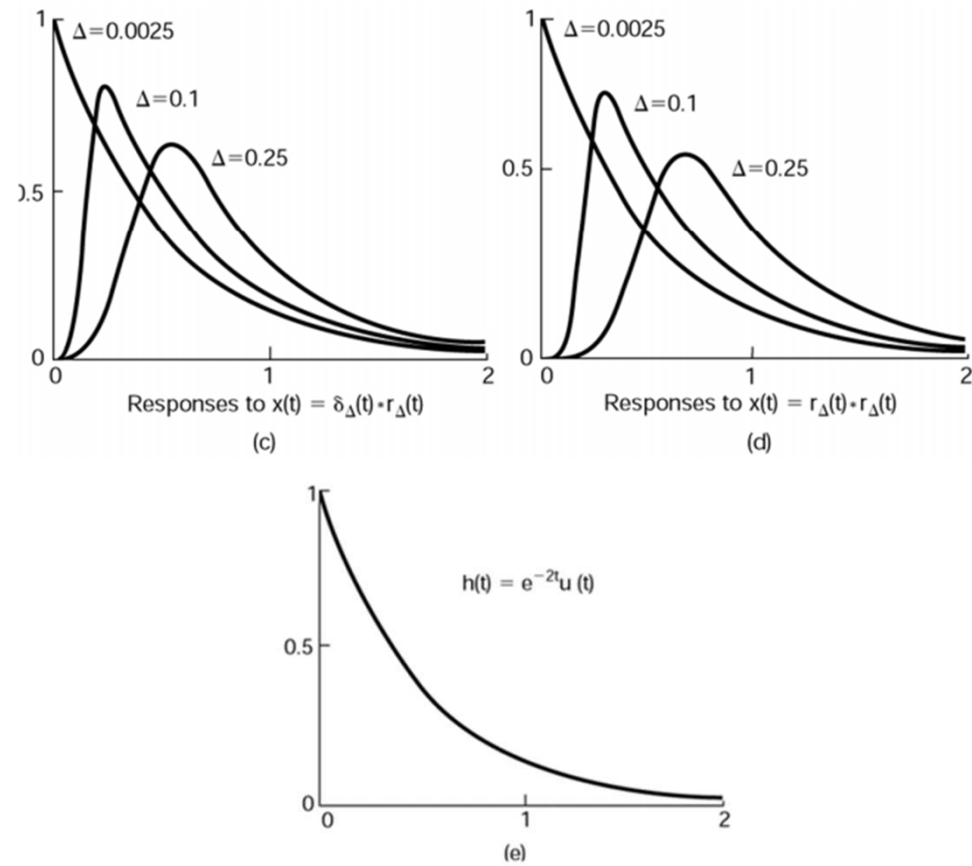


之所以产生这种现象，是因为 $\delta(t)$ 是一个理想化的非常规函数，被称为**奇异函数**。通常采用在卷积或积分运算下函数所表现的特性来定义奇异函数。

Example

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad \text{under the condition of initial rest.}$$





All responses converge to the impulse response when $\Delta \rightarrow 0$.

一. 通过卷积定义 $\delta(t)$

从系统的角度，可以说 $\delta(t)$ 是一个恒等系统的单位冲激响应，因此， $x(t) = x(t) * \delta(t)$ ——这就是在卷积运算下 $\delta(t)$ 的定义。

根据定义可以得出 $\delta(t)$ 的如下性质：

1

$$\because x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$\therefore \delta(t) * \delta(t) = \delta(t)$$

$$\delta(t - t_0) * \delta(t) = \delta(t - t_0)$$

一. 通过卷积定义 $\delta(t)$

2 当 $x(t)=1$ 时, 有

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau = 1$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

3 由此定义可得:

$$g(-t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau-t)\delta(\tau)d\tau = g(-t)$$

若 $t=0$, 则有:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(\tau)d\tau$$

此式即可作为在积分运算下 $\delta(t)$ 的定义式。

二. 通过积分定义 $\delta(t)$

积分表达式 $g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t)dt$ 也可以作为 $\delta(t)$

在积分运算下的定义，这就是**分配函数**的定义方法。

据此定义又可以推出：

4 若 $g(t)$ 是奇函数，则 $g(0)=0$ ，因此 $\delta(t)$ **是偶函数**，

即： $\delta(t)=\delta(-t)$

若令 $g(\tau)=x(t-\tau)$ ，代入积分定义式就有：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = x(t) * \delta(t)$$

这就是卷积运算下的定义。

二. 通过积分定义 $\delta(t)$

5 根据积分下的定义有:

$$g(0)f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)g(t)\delta(t)dt$$

$$\therefore f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

若 $f(t)=t$ ，则可推出 $t\delta(t)=0$

因此，若有 $tf_1(t) = tf_2(t)$ $f_1(t) = f_2(t) + C\delta(t)$

三. 单位冲激偶及其他奇异函数

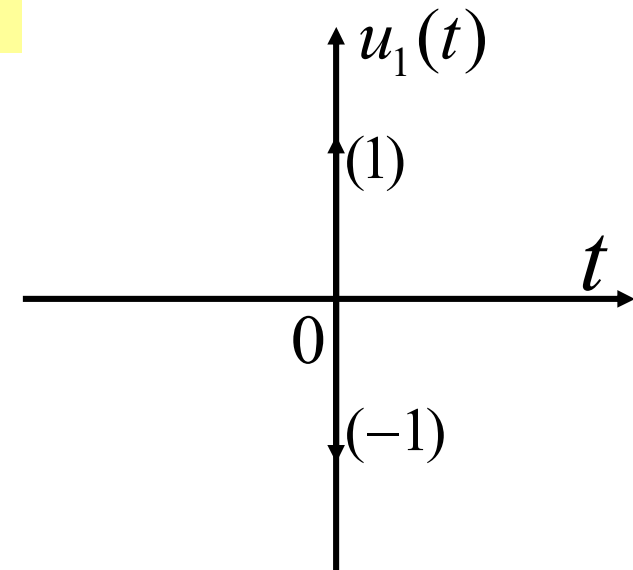
理想微分器的单位冲激响应应该是 $\delta(t)$ 的微分,

记为 $u_1(t) = \frac{d}{dt} \delta(t)$, 从卷积运算或LTI系统分析的角度应该有:

$$x(t) * u_1(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$



所以 $u_1(t)$ 称为**单位冲激偶**
(Unit doublet)



三. 单位冲激偶及其他奇异函数

由此定义出发可以推出：

1. 当 $x(t)=1$ 时，有：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)u_1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)d\tau = 0 \end{aligned} \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)dt = 0$$

2. 考察 $g(-t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau-t)u_1(\tau)d\tau$

$$= \frac{d}{dt} g(-t) = -\frac{d}{d\sigma} g(\sigma) \Big|_{\sigma=-t}$$

当 $t=0$ 时，有 $-g'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u_1(\tau)d\tau$ ，此积分可作为 $u_1(t)$ 在积分意义下的定义。

三. 单位冲激偶及其他奇异函数

3. 若 $g(t)$ 是一个偶函数, 则 $g'(0) = 0$ 。由此可推得 $u_1(t)$ 是奇函数, 即: $u_1(-t) = -u_1(t)$

4. 考察

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) u_1(t) dt &= -\frac{d}{dt} [f(t) g(t)] \Big|_{t=0} \\ &= -[f'(t) g(t) + f(t) g'(t)] \Big|_{t=0} \\ &= -[f'(0) g(0) + f(0) g'(0)] \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(0) g(t) \delta(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(0) g(t) u_1(t) dt\end{aligned}$$

$$\therefore f(t) u_1(t) = f(0) u_1(t) - f'(0) \delta(t)$$

三. 单位冲激偶及其他奇异函数

5. 若 $f(t)=t$, 进而有: $tu_1(t)=-\delta(t)$, $t^2u_1(t)=0$

因此, 若有 $t^2 f_1(t) = t^2 f_2(t)$

$$f_1(t) = f_2(t) + C_1\delta(t) + C_2u_1(t)$$

按此定义方法推广下去, 有:

$$u_2(t) = u_1(t) * u_1(t) \quad \left(\begin{array}{l} \because x(t) * u_2(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \\ = x(t) * u_1(t) * u_1(t) \end{array} \right)$$

$$u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{k \uparrow}$$

三. 单位冲激偶及其他奇异函数

在积分运算下有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)u_k(t)dt = (-1)^k g^{(k)}(0)$$

例如：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)u_2(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)du_1(t) = g(t)u_1(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(t)u_1(t)dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} g'(t)d\delta(t) = -g'(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} g''(t)\delta(t)dt$$

$$= g''(0)$$

四. $\delta(t)$ 的积分

用类似方法也可以定义 $\delta(t)$ 的积分。

若用 $u_0(t) \Leftrightarrow \delta(t)$ $u_{-1}(t) \Leftrightarrow u(t)$, 则有:

$$u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

$u_{-1}(t)$ 是理想积分器的单位冲激响应。

$$x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

因此: $u_{-2}(t) = u_{-1}(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^t u(t) dt = tu(t)$

——称为单位斜坡函数 (Unit ramp function)

四. $\delta(t)$ 的积分

$$u_{-3}(t) = u_{-1}(t) * u_{-1}(t) * u_{-1}(t) = \frac{1}{2}t^2u(t)$$

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u_{-1}(t) * u_{-1}(t) * \dots * u_{-1}(t)}_{k\uparrow}$$

$$= \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t)$$

事实上， $\delta(t)$ 的各次积分已经是常规函数了，当然可以按常规函数定义的方法去描述。

计算

$$\int_{-2}^5 \sin 2t \delta\left(t - \frac{\pi}{8}\right) dt =$$

$$\int_{-1}^3 e^{-2t} \delta^{(2)}(t-1) dt =$$

$$\int_{-1}^3 e^{-2t} \delta^{(2)}(2t-1) dt =$$

冲击的尺度变换

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

2.6 小结 (Summary)

本章主要讨论了以下内容：

1 信号的时域分解：

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

2 LTI系统的时域分析——卷积和与卷积积分

3 LTI系统的描述方法：

①用 $h(t)$ 、 $h(n)$ 描述系统（也可用 $s(t)$ 、 $s(n)$ 描述）；

②用LCCDE连同零初始条件描述LTI系统；

③用方框图描述系统（等价于LCCDE描述）。

本章主要讨论了以下内容

4 LTI系统的特性与 $h(t)$ 、 $h(n)$ 的关系:

- 记忆性、因果性、稳定性、可逆性与 $h(t)$ 、 $h(n)$ 的关系;
- 系统级联、并联时, $h(t)$ 、 $h(n)$ 与各子系统的关系。

5 奇异函数。