

第六章

信号与系统的时域和频域特性

本章主要内容

1. 傅立叶变换的模与相位。
2. LTI系统的幅频特性与相频特性，系统的失真，Bode图。
3. 理想滤波器的时域和频域特性。
4. 非理想滤波器的特性及逼近方式。

6.0 引言 Introduction

在以前的讨论中，已经看到

- 在时域，系统的特性由 $h(n)$ 或 $h(t)$ 描述；
- 在频域，系统的特性由 $H(j\omega)$ 或 $H(e^{j\omega})$ 描述；

工程中设计系统时，往往会对系统的特性从时域角度或频域角度提出某些要求。

- 在**LTI**系统分析中，由于时域中的微分（差分）方程和卷积运算在频域都变成了代数运算，所以利用频域分析往往特别方便。
- 系统的时域特性与频域特性是相互制约的。在进行系统的分析与设计时，要权衡考虑系统的时域与频域特性。
- 本章的基本内容旨在建立对系统的时域和频域特性进行综合分析的思想和方法。

6.1 傅里叶变换的模和相位表示

无论CTFT还是DTFT，一般情况下都表现为一个复函数。

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

这说明：一个信号所携带的全部信息分别包含在其频谱的模和相位中。

因此，导致信号失真的原因有两种：

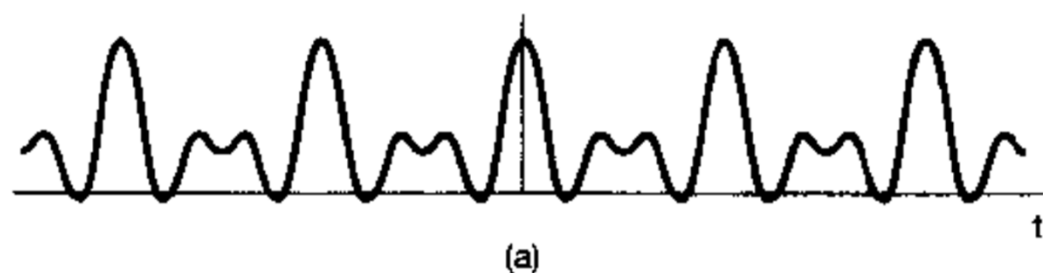
- 1.幅度失真：** 由于频谱的模改变而引起的失真。
- 2.相位失真：** 由于频谱的相位改变引起的失真。

在工程实际中，不同的应用场合，对幅度失真和相位失真有不同的敏感程度，也会有不同的技术指标要求。

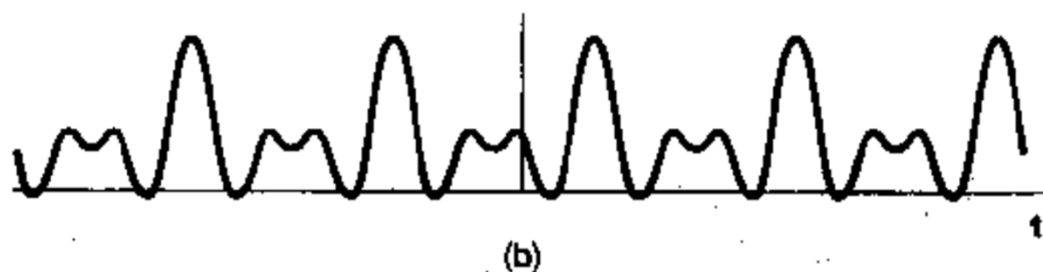
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad |X(j\omega)|^2 d\omega$$

各复指数信号相对振幅的信息

相位影响



$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t + \phi_1) + \cos(4\pi t + \phi_2) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t + \phi_3)$$

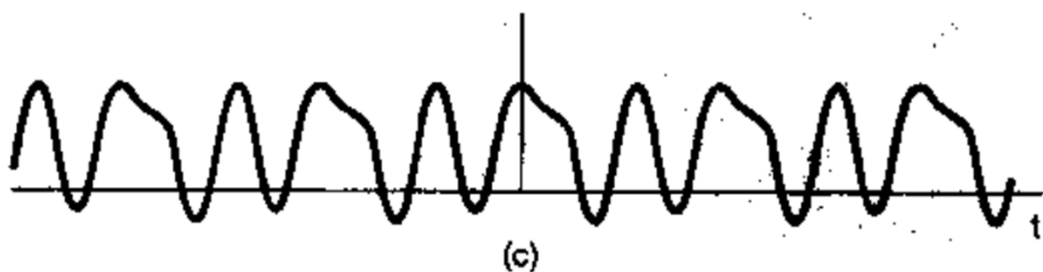


(a) $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$;

(b) $\phi_1 = 4 \text{ rad}$, $\phi_2 = 8 \text{ rad}$, $\phi_3 = 12 \text{ rad}$;

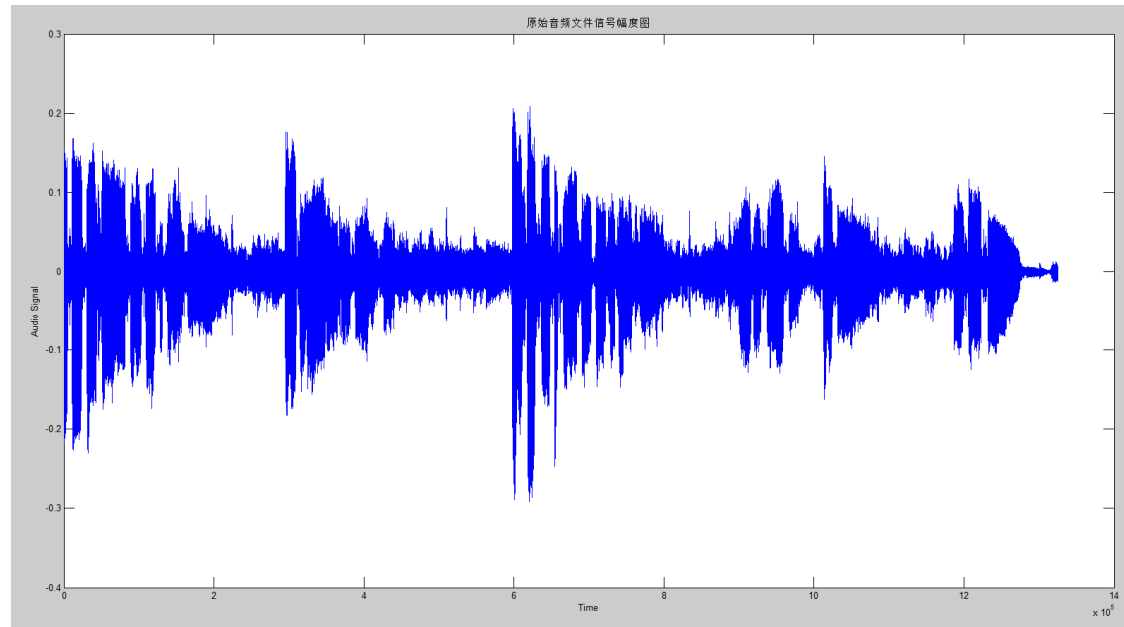
(c) $\phi_1 = 6 \text{ rad}$, $\phi_2 = -2.7 \text{ rad}$, $\phi_3 = 0.93 \text{ rad}$;

(d) $\phi_1 = 1.2 \text{ rad}$, $\phi_2 = 4.1 \text{ rad}$, $\phi_3 = -7.02 \text{ rad}$

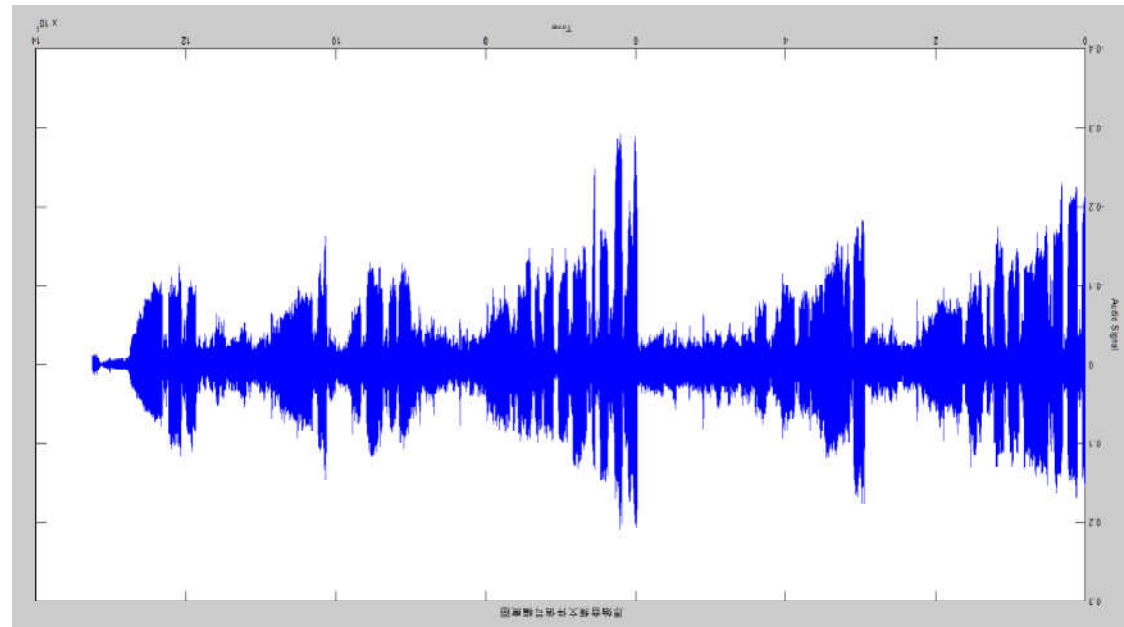


相位变化导致时域特征变化

$x(t)$

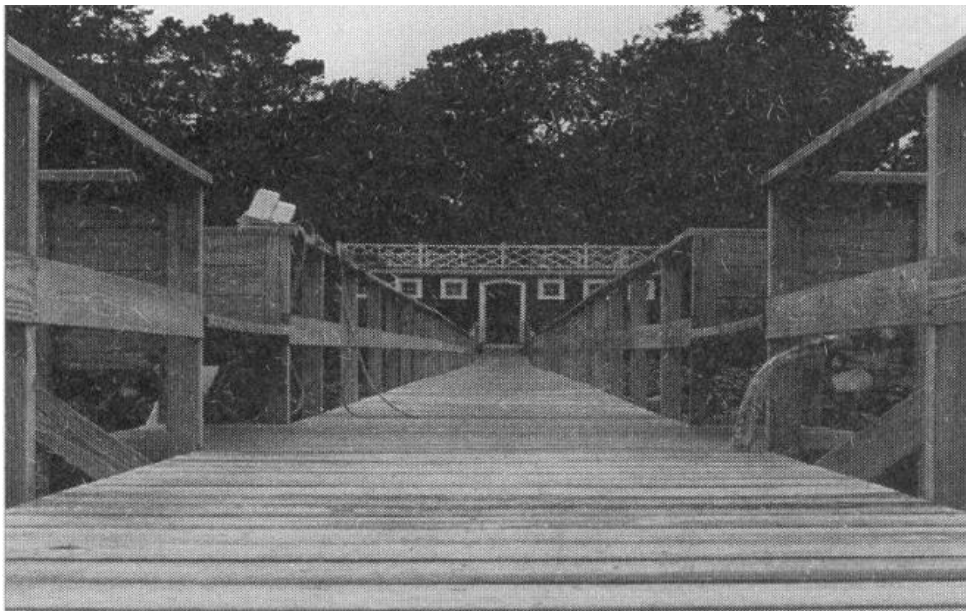


$x(-t)$

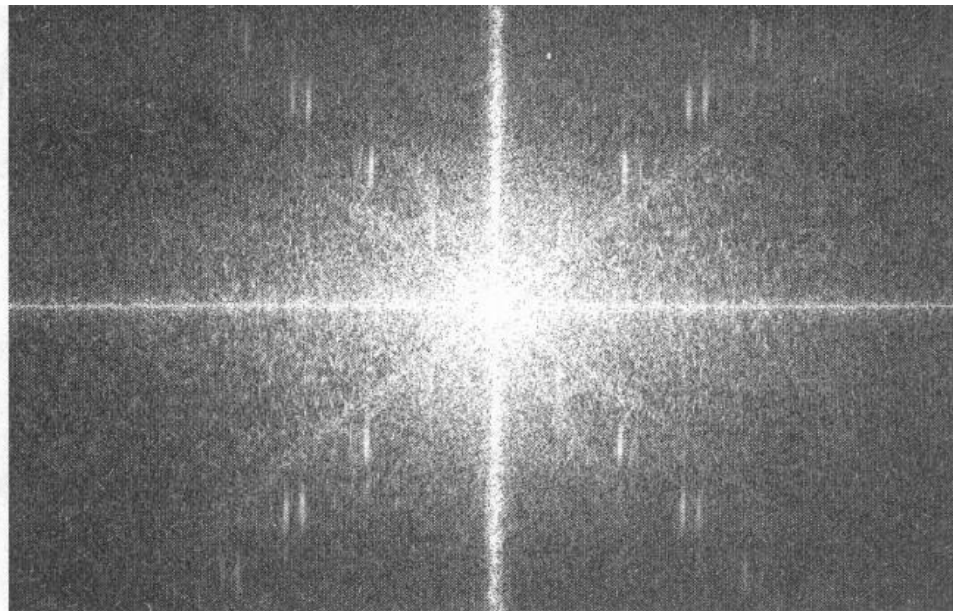


$$\Im\{x(-t)\} = X(-j\omega) = |X(j\omega)| e^{-j\angle X(j\omega)}$$

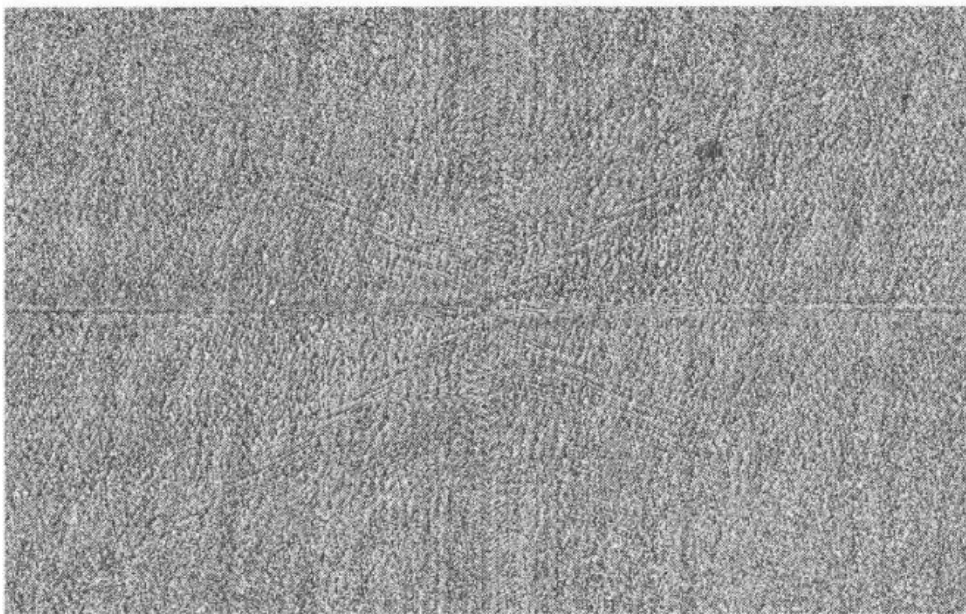
$$x(t_1, t_2) \longleftrightarrow X(j\omega_1, j\omega_2)$$



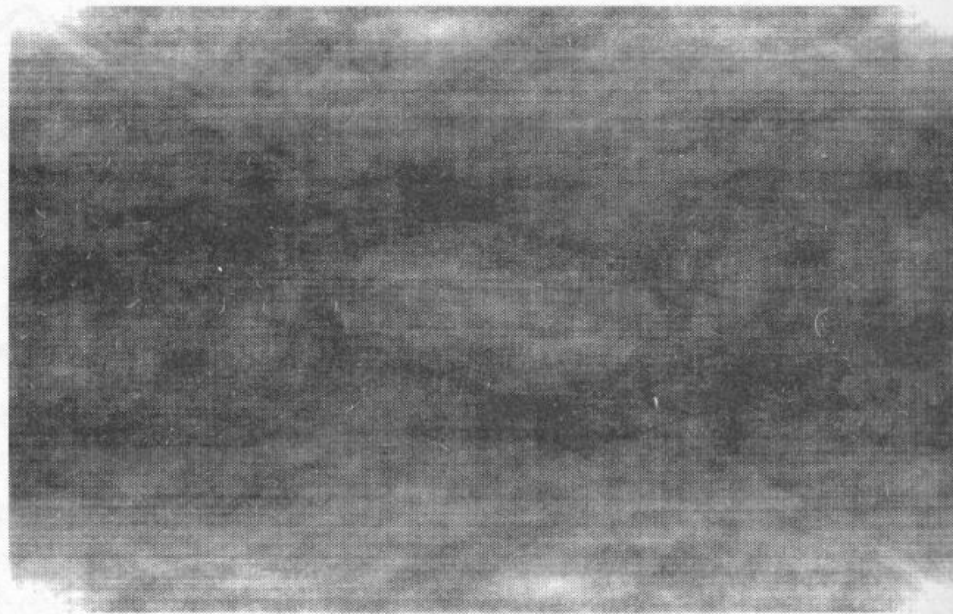
(a) 原照片



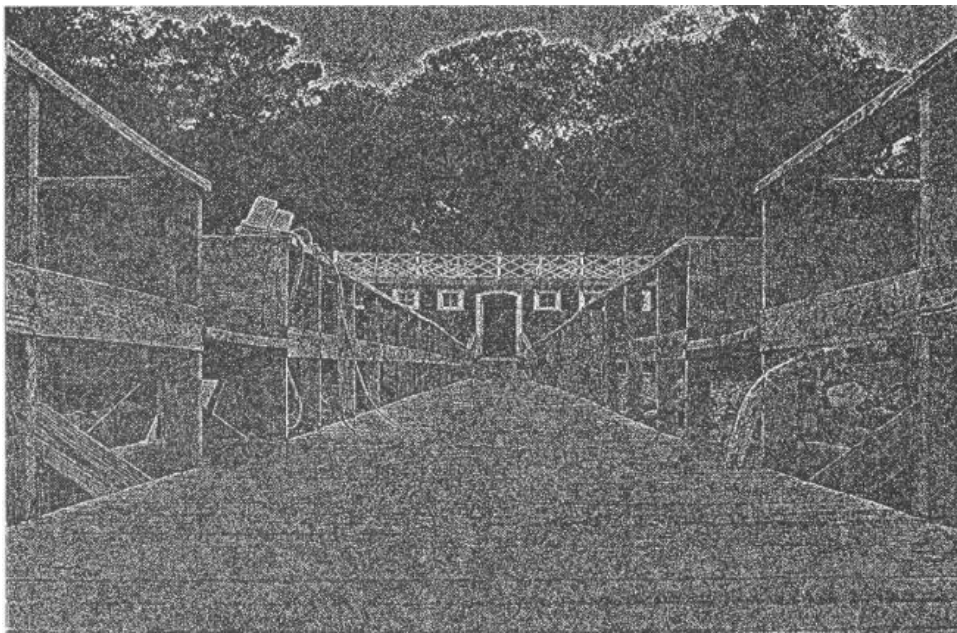
(b) 模



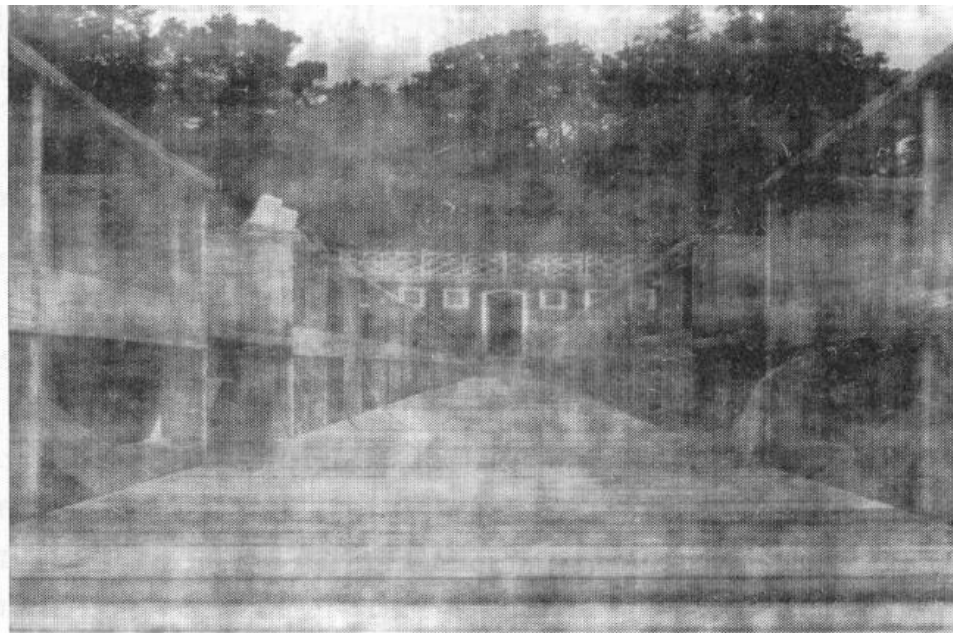
(c) 相位



(d) 模相同, 相位为零



(e) 模为1, 相位为图(c)的相位



(f) 模为图(g)的模, 相位为图(c)的相位



(g)

6.2 LTI系统频率响应的模和相位表示

LTI系统对输入信号所起的作用包括两个方面:

1. 改变输入信号各频率分量的幅度;
2. 改变输入信号各频率分量的相对相位。

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$|Y(j\omega)| = |X(j\omega)| \underbrace{|H(j\omega)|}_{\text{增益 (gain)}}$$

$$\angle Y(j\omega) = \underbrace{\angle H(j\omega)}_{\text{相移 (phase shift)}} + \angle X(j\omega)$$

一. 线性与非线性相位

信号在传输过程中，相位特性或幅度特性发生改变都会引起**信号波形的改变**，即发生**失真 (distortion)**。

当相位特性仅仅是附加一个线性相移时，则只引起信号在时间上的平移。若连续时间LTI系统：

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad \text{则} \quad y(t) = x(t - t_0)$$

此时并未丢失信号所携带的任何信息，只是发生时间上的延迟，因而在工程应用中是允许的。

如果系统的相位特性是非线性的，由于不同频率分量受相位特性影响所产生的时移不同，叠加起来一定会变成一个与原来信号很不相同的信号波形。对离散时间LTI系统，也有同样的结论。

- 但对线性相位系统，当相位特性的斜率是整数时，只引起信号的时域移位。**
- 若相位特性的斜率不是整数，由于离散时间信号的时移量只能是整数，需要采用其他手段实现，其含义也不再是原始信号的简单移位。**

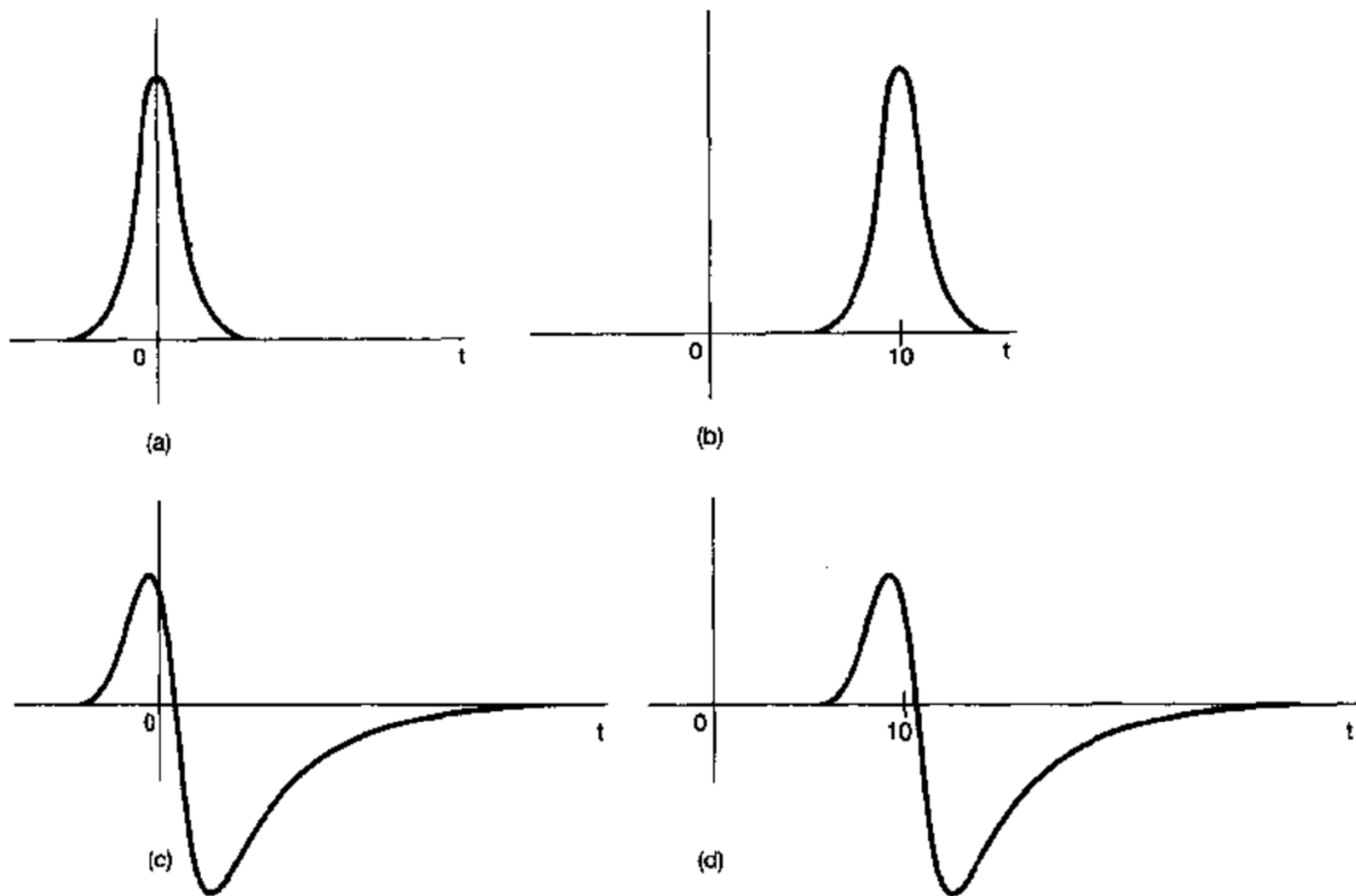


图 6.3 (a) 作为输入加到几个频率响应模为 1 的系统上的信号;
 (b) 具有线性相位的系统响应; (c) 具有非线性相位系统的响应;
 (d) 相位特性为(c) 系统的非线性相位外加一个线性相移项的系统响应

二. 信号的不失真传输条件

如果系统响应与输入信号满足下列条件，可视为在传输中未发生失真。

$$y(t) = kx(t - t_0) \qquad y(n) = kx(n - n_0)$$

这就要求系统的频率特性为

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0} \qquad H(e^{j\omega}) = ke^{-j\omega n_0}$$

全通系统: 系统的幅频特性为1。

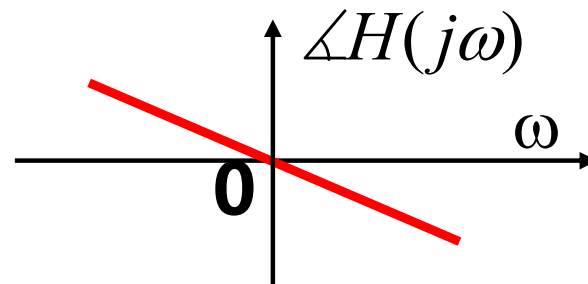
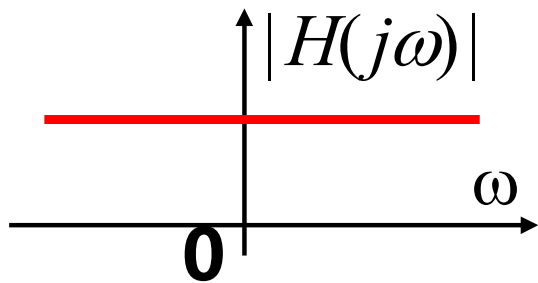
$$|H(j\omega)| \text{ or } |H(e^{j\omega})| = 1$$

据此可得出信号传输的不失真条件：

$$h(t) = k\delta(t - t_0) \quad \text{——时域表征}$$

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0}, \quad \text{——频域表征}$$

$$|H(j\omega)| = k, \quad \angle H(j\omega) = -\omega t_0$$



通常，系统若在被传输信号的带宽范围内满足不失真条件，则认为该系统对此信号是不失真系统。

三. 群延迟 Group Delay

对线性相位系统，系统的相位特性表明了信号的各个频率分量在通过系统时，系统对它所产生的附加相移。相位特性的斜率就是该频率分量在时域产生的时延。

对非线性相位系统，定义群延迟为

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(j\omega)$$

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} (-\omega t_0) \\ = t_0$$

群延迟: 代表了“在以 ω_0 为中心的一个很小的频带或很少的一组频率上”信号所受到的有效公共延迟。

考察一个中心频率为 $\omega=\omega_0$ 的窄带输入信号，一个非线性相位的系统在此窄带范围内，可将其相位的变化近似看成线性的，即：

$$\angle |H(j\omega)| \simeq -\phi - \omega\alpha$$

因此，该系统对窄带输入信号的近似效果就是：

$$Y(j\omega) = X(j\omega) |H(j\omega)| e^{-j\phi} e^{-j\omega\alpha}$$

因此，该近似效果由如下部分组成：

- 1. 由 $|H(j\omega)|$ 引起的幅度成形部分；**
- 2. 对应系统在 ω_0 的恒定相位 ϕ 的因子 $e^{-j\phi}$ 的影响；**
- 3. 对应系统在窄带内的近似线性相位 $\omega\alpha$ 所产生的时延 α 。该时延就是系统在 $\omega=\omega_0$ 的群延迟。**

四. 对数模与Bode图

在工程应用中，往往采用对数模特性（或称为Bode图）来描述系统的频率特性。在对数坐标下，采用对数模，可以给频率特性的表示带来方便。这是因为：

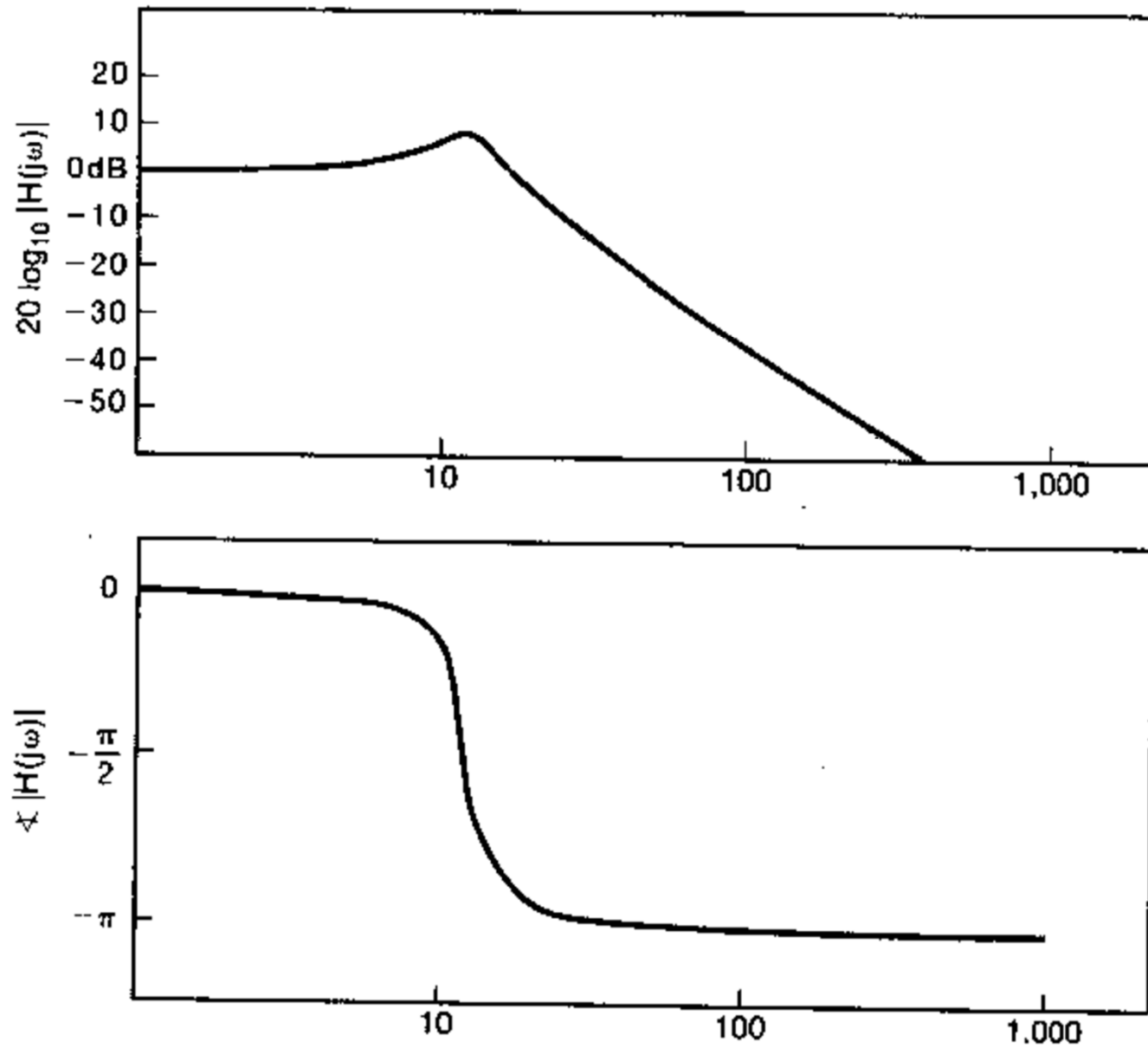
1. 可以将波特特性的相乘关系变为相加关系；

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| |X(j\omega)|$$



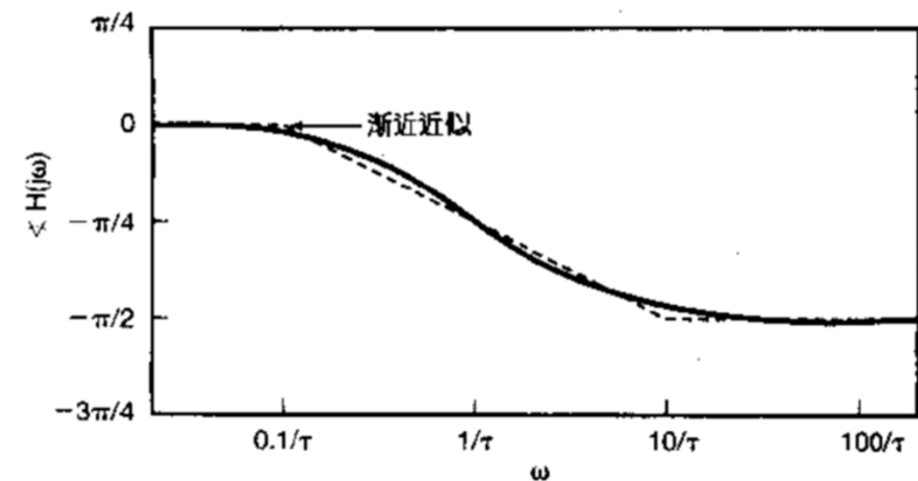
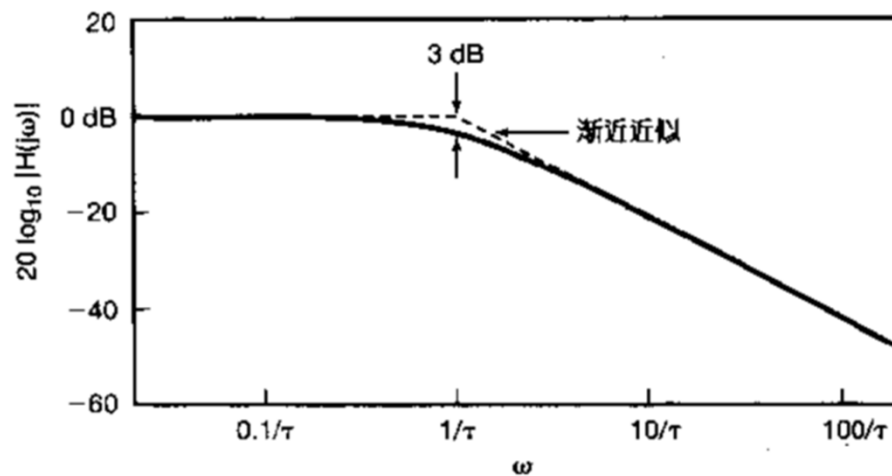
$$\log|Y(j\omega)| = \log|H(j\omega)| + \log|X(j\omega)|$$

一个级联系统的总频率响应的对数模和相位图分别将对应各部分系统的图相加而求得



ω 用对数坐标画出

2. 可以利用对数坐标的非线性，展示更宽范围的频率特性，并使低频端更详细而高频端相对粗略；
3. 对连续时间系统，可以方便地建立波特特性和相位特性的直线型渐近线。



$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

一个连续时间一阶系统的伯德图

对离散时间系统，由于其有效频率范围只有 2π ，而且，即使在对数坐标下也不存在直线型的渐近线。因而不采用对数坐标，只采用对数模。

采用对数模（或Bode图）表示频率特性，对于幅频特性有零点或在某些频段上为零的系统，是不适用的。

工程中广泛应用的有两种对数模：

$$\ln|H(j\omega)| \sim \log_{10} \omega = \lg \omega \quad \text{单位奈培 (Np)}$$

$$20\lg|H(j\omega)| \sim \log_{10} \omega = \lg \omega \quad \text{单位分贝 (dB) \textbf{decibel}}$$

$$0\text{dB} \sim |H(j\omega)|=1$$

$$20\text{dB} \sim |H(j\omega)|=10$$

$$-20\text{dB} \sim |H(j\omega)|=0.1$$

$$6\text{dB} \approx |H(j\omega)|=2$$

6.3 理想频率选择性滤波器

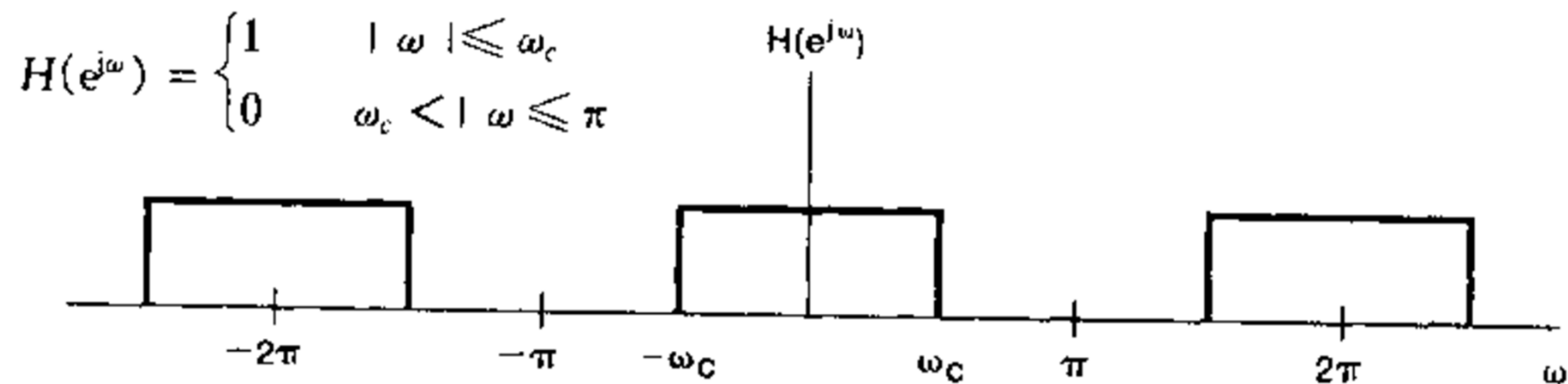
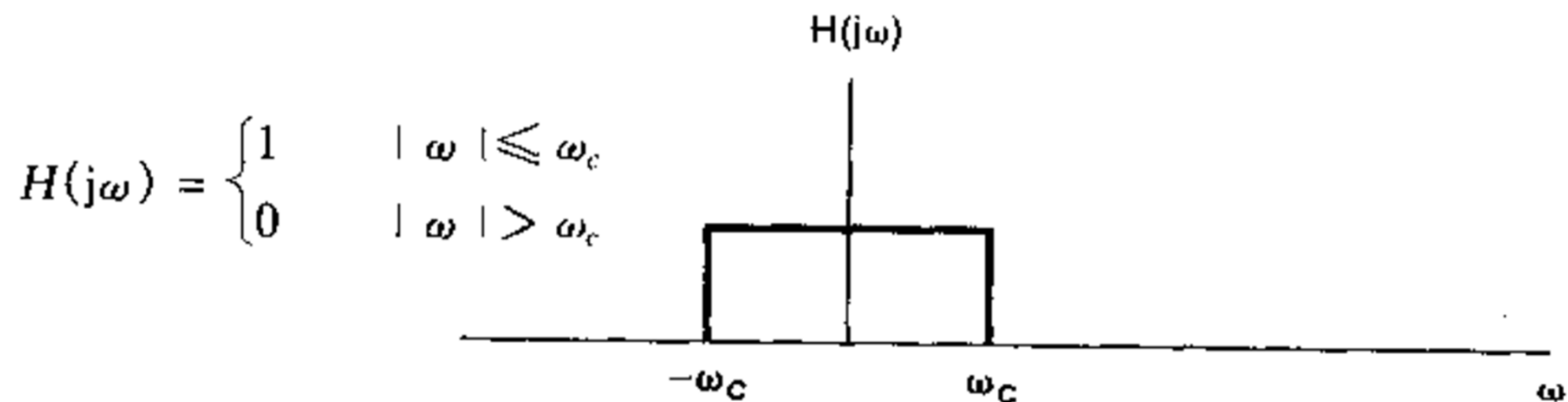
一. 滤波

通过系统改变信号中各频率分量的相对大小和相位，甚至完全去除某些频率分量的过程称为**滤波**。

滤波器可分为两大类：

1. 频率成形滤波器
2. 频率选择性滤波器

二. 理想频率选择性滤波器的频率特性

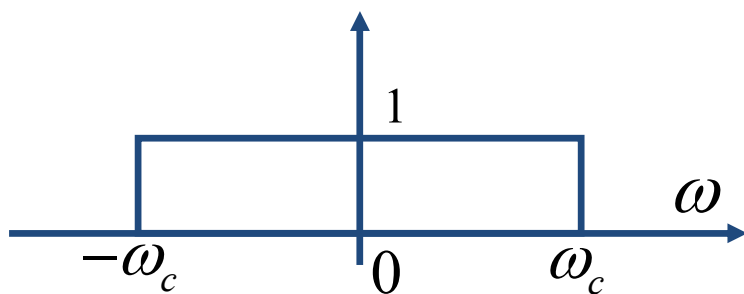


理想频率选择性滤波器的频率特性在某一个（或几个）频段内，频率响应为常数，而在其它频段内频率响应等于零。

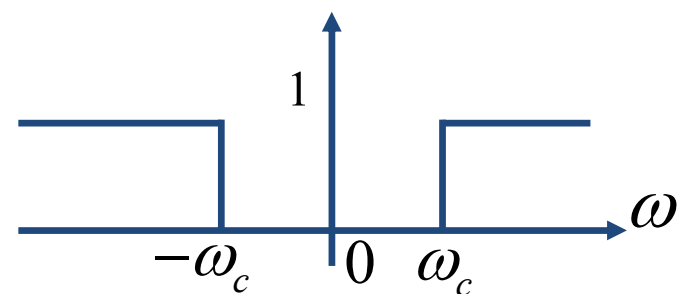
理想滤波器可分为低通、高通、带通、带阻。

滤波器允许信号完全通过的频段称为滤波器的通带（pass band），完全不允许信号通过的频段称为阻带（stop band）。

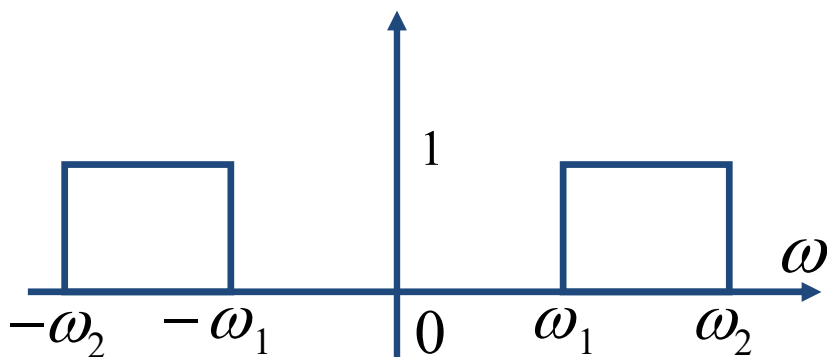
连续时间理想频率选择性滤波器的频率特性



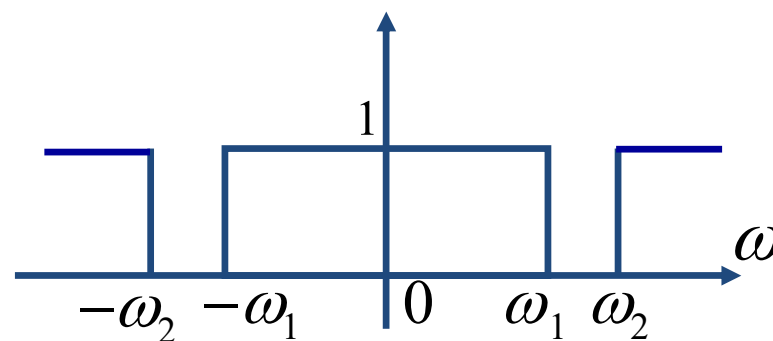
低通



高通

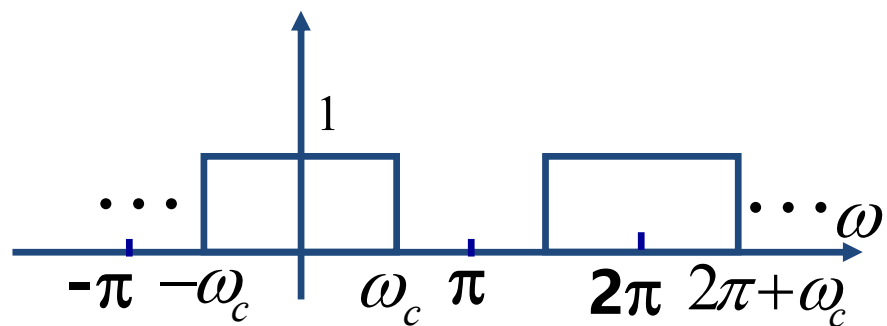


带通

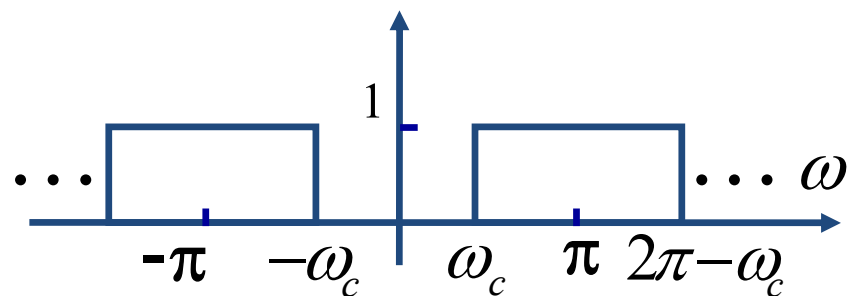


带阻

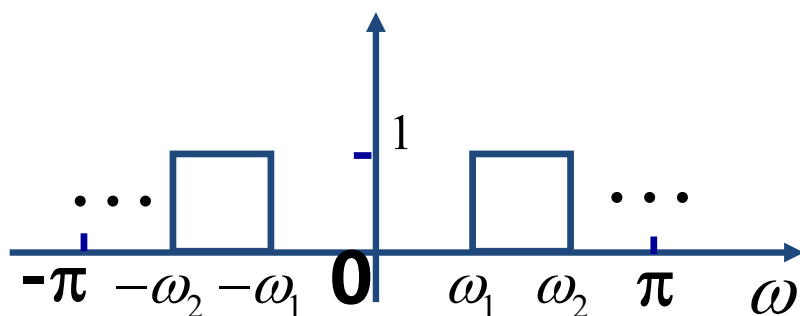
离散时间理想频率选择性滤波器的频率特性



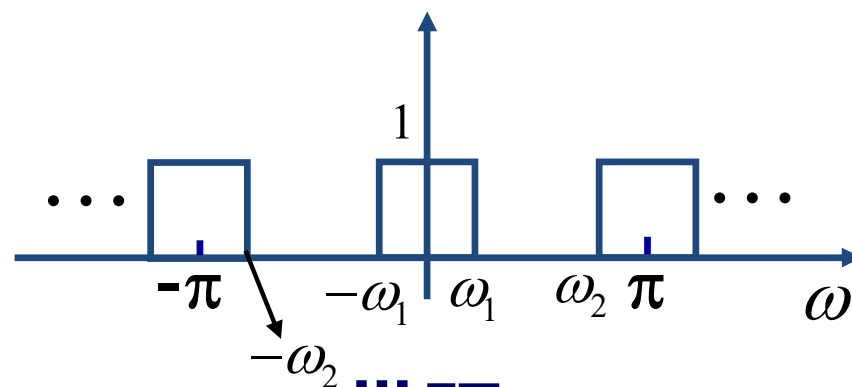
低通



高通



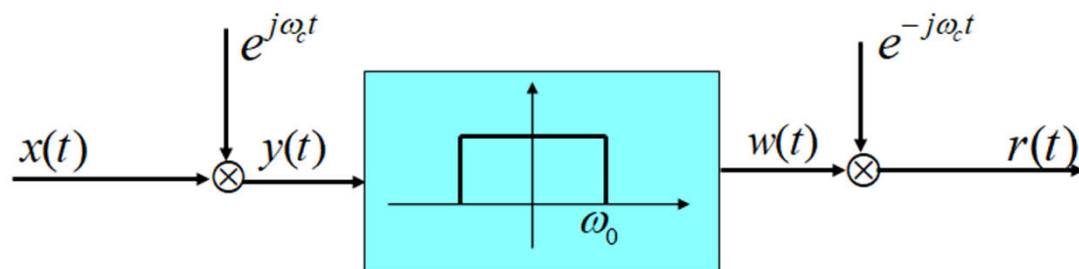
带通



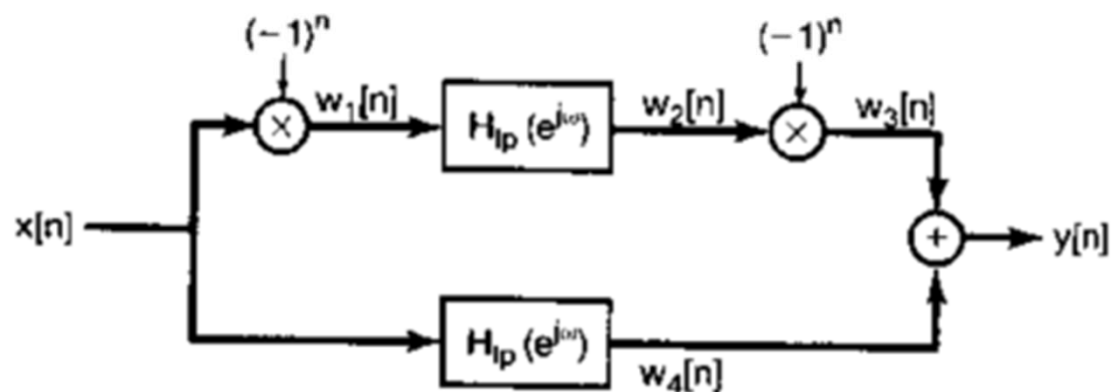
带阻

各种滤波器的特性都可以从理想低通特性而来。
离散时间理想滤波器的特性在 $-\pi \sim \pi$ 区间上，与
相应的连续时间滤波器特性完全相似。

带通滤波器



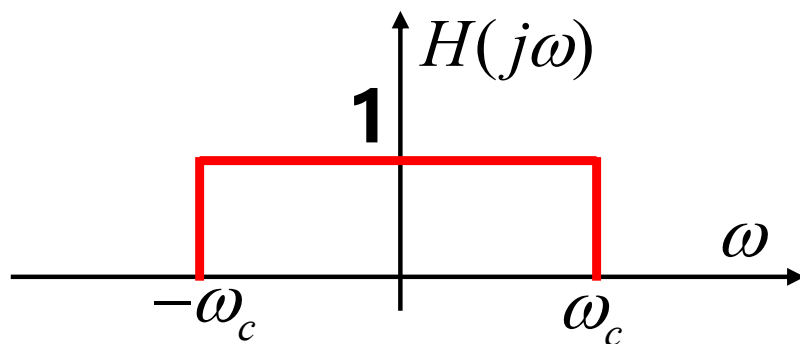
带阻滤波器



三. 理想滤波器的时域特性

以理想低通滤波器为例

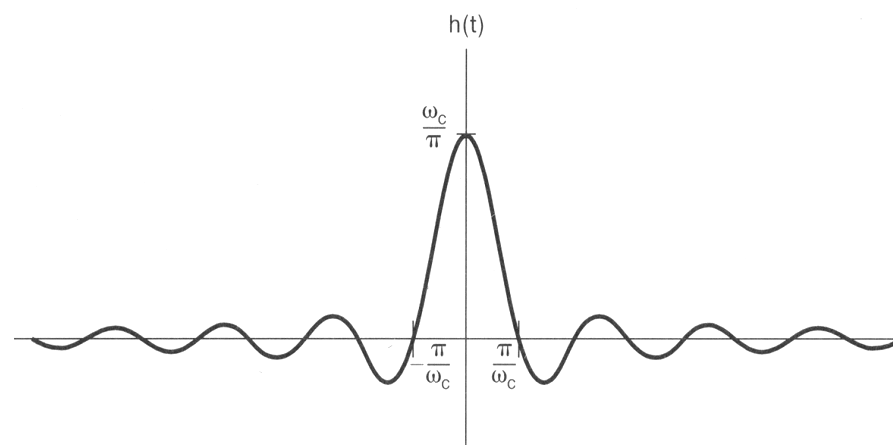
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



连续时间理想低通滤波器

由傅里叶反变换可得:

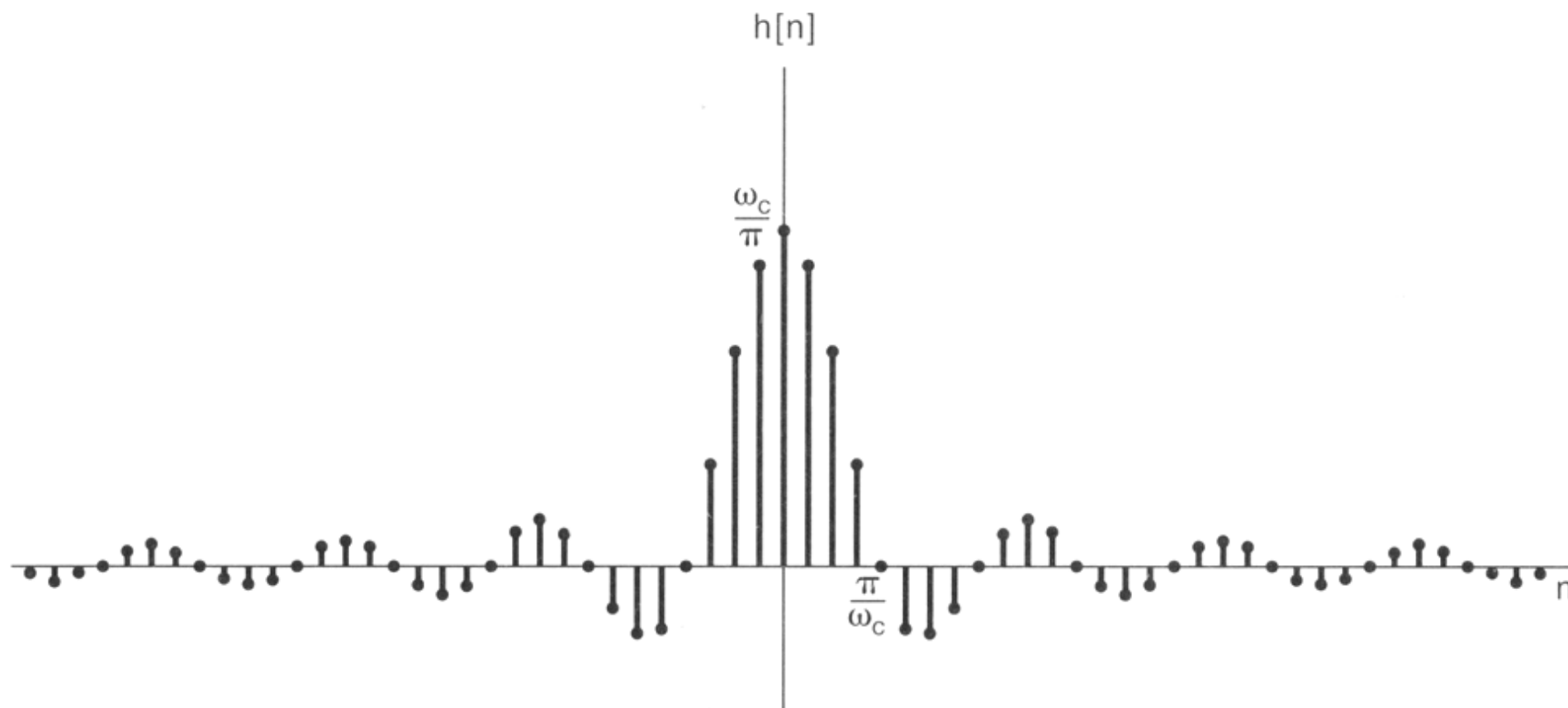
$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \end{aligned}$$



noncausal, oscillating

对离散时间理想低通滤波器有：

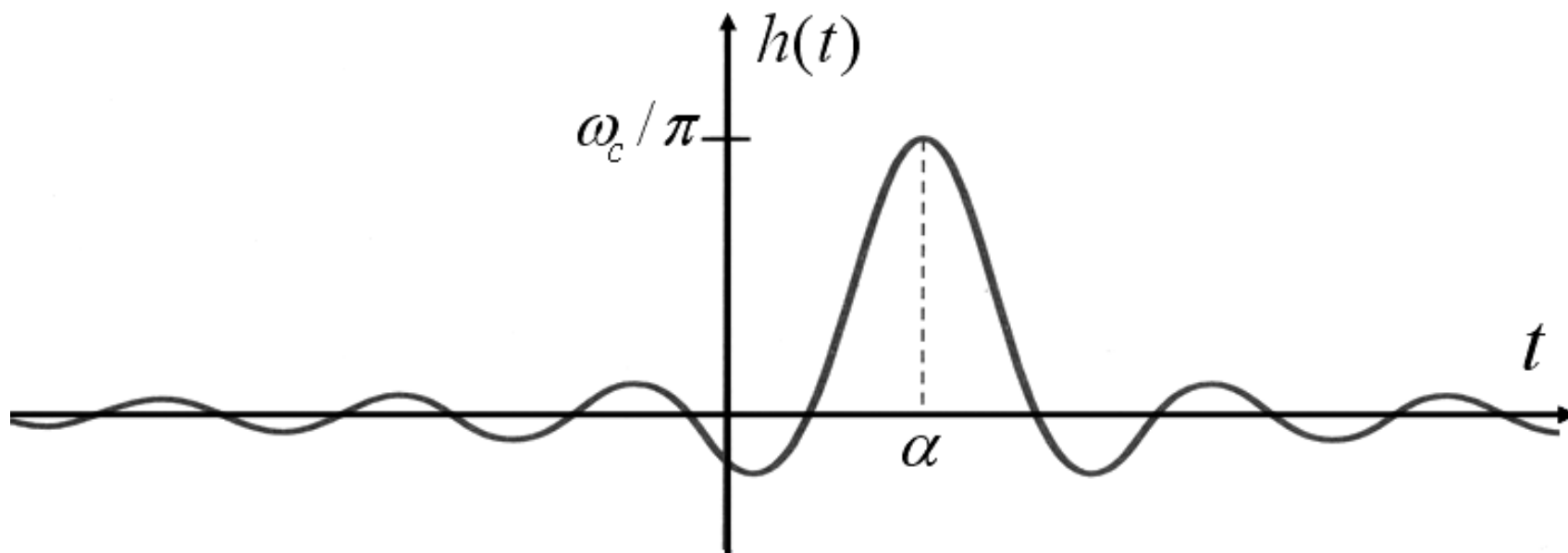
$$h(n) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c n)$$



如果理想低通滤波器具有线性相位特性

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

则
$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - \alpha)] = \frac{\sin \omega_c(t - \alpha)}{\pi(t - \alpha)}$$



理想低通滤波器的单位阶跃响应

$$s(t) = h(t) * u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^t \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c t} \frac{\sin x}{x} dx$$

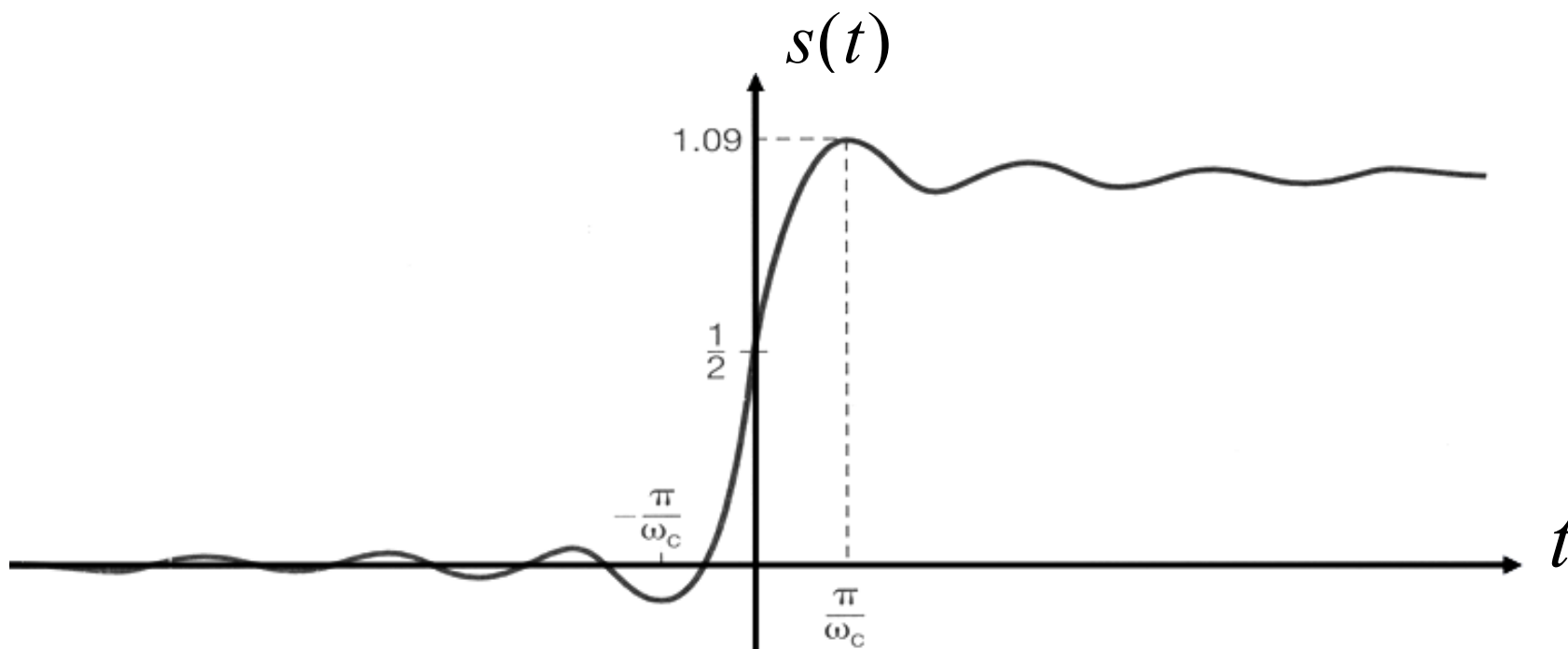
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c t} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\text{令 } \int_0^x \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \text{Si}(x) \text{ —— 正弦积分}$$

由于 $x \rightarrow \infty, \text{Si}(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}; \quad x \rightarrow -\infty, \text{Si}(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

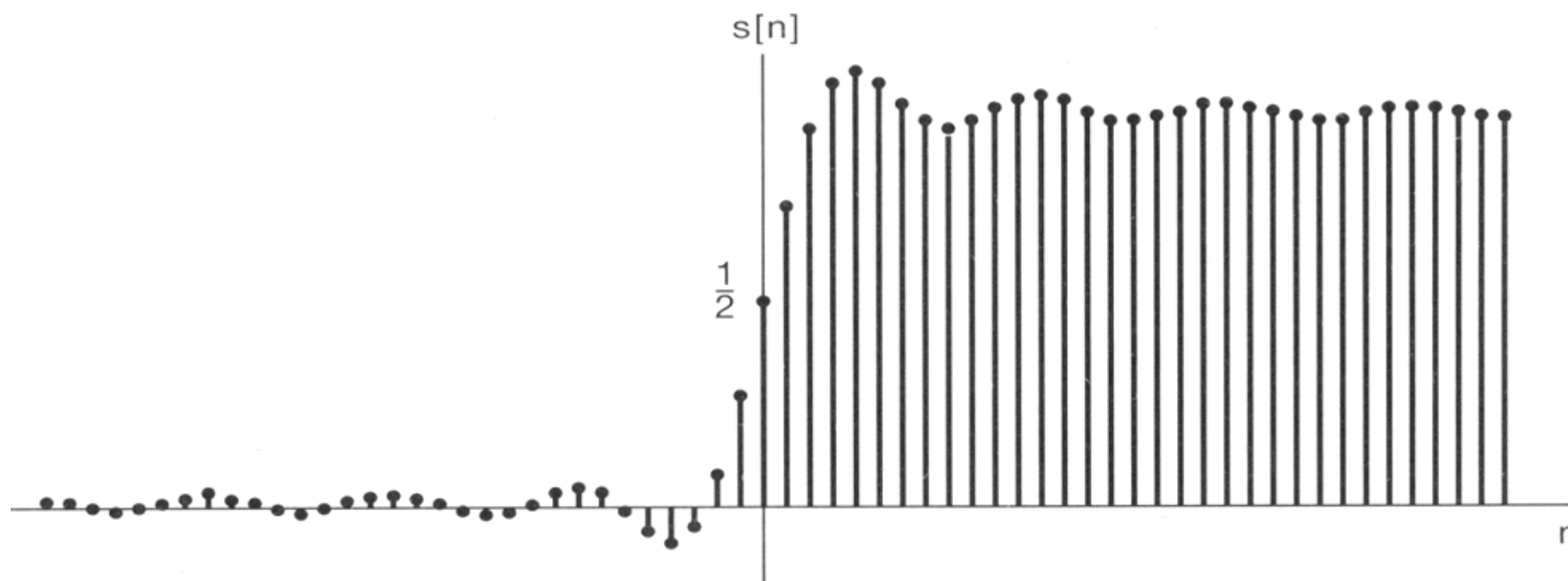
$$\text{Si}(0) = 0$$

$$s(t) = \frac{1}{\pi} [\text{Si}(0) - \text{Si}(-\infty)] + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega_c t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega_c t)$$



对离散时间理想低通滤波器，相应有：

$$s(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega_c n)$$

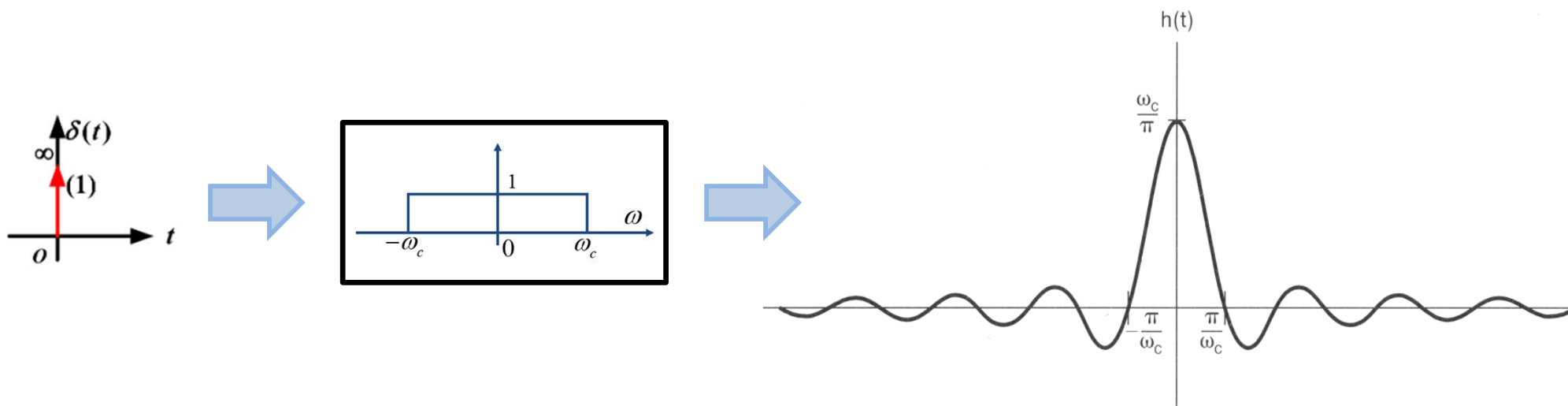


从理想滤波器的时域特性可以看出：

1.理想滤波器是非因果系统。因而是物理不可实现的。

2.尽管从频域滤波的角度看，理想滤波器的频率特性是最佳的。但它们的时域特性并不是最佳的。 $h(t)$ 或 $h(n)$ 都有起伏、旁瓣、主瓣，这表明理想滤波器的时域特性与频域特性并不兼容。

3.在工程应用中，当要设计一个滤波器时，必须对时域特性和频域特性作出恰当的折中。



对连续时间系统有: $h(t) = 0, \quad t < 0$

这是LTI系统具有因果性的充分必要条件。

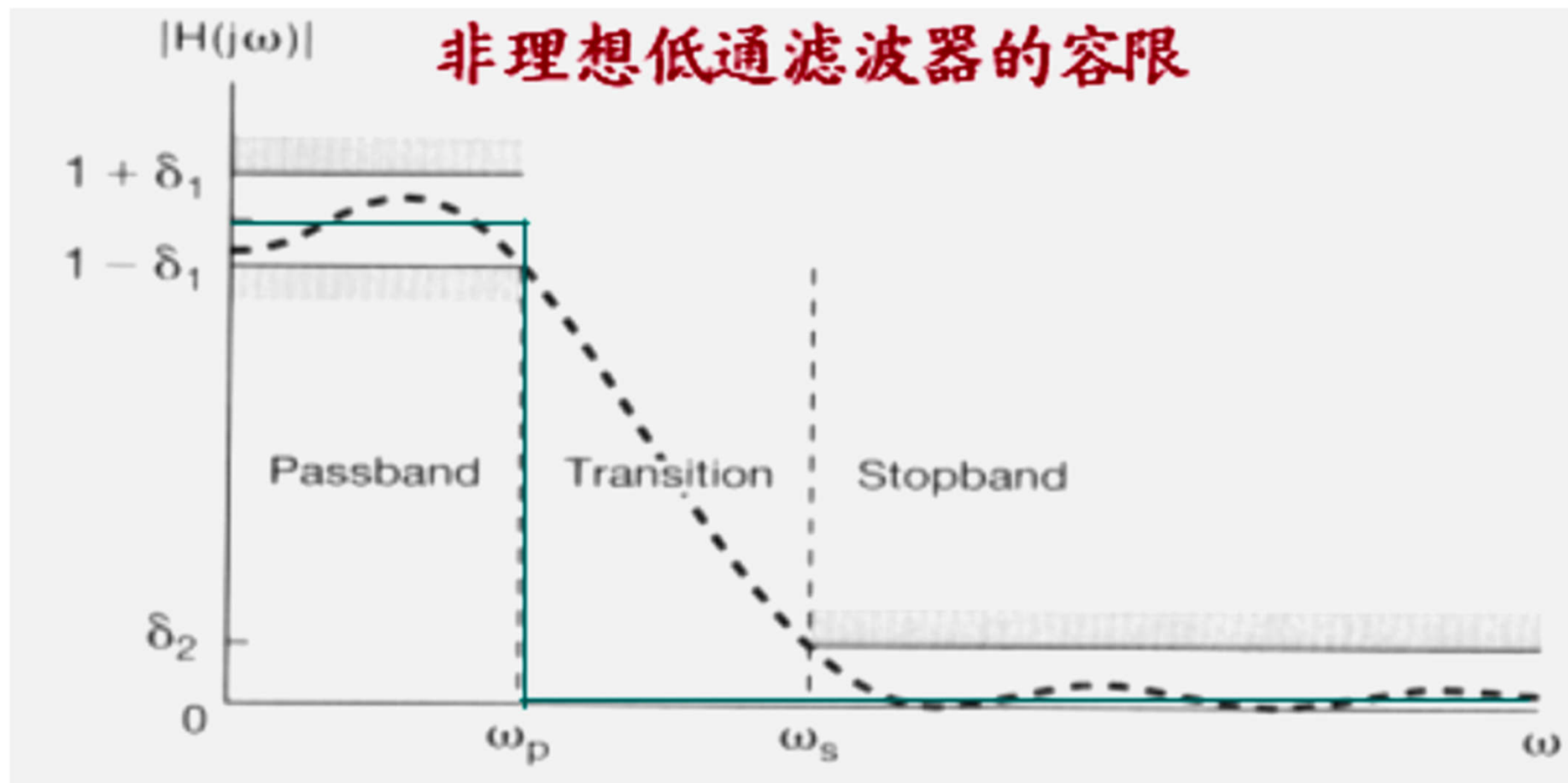
6.4 非理想滤波器

由于理想滤波器是物理不可实现的，工程应用中就必须寻找一个物理可实现的频率特性去逼近理想特性，这种物理可实现的系统就称为**非理想滤波器**。

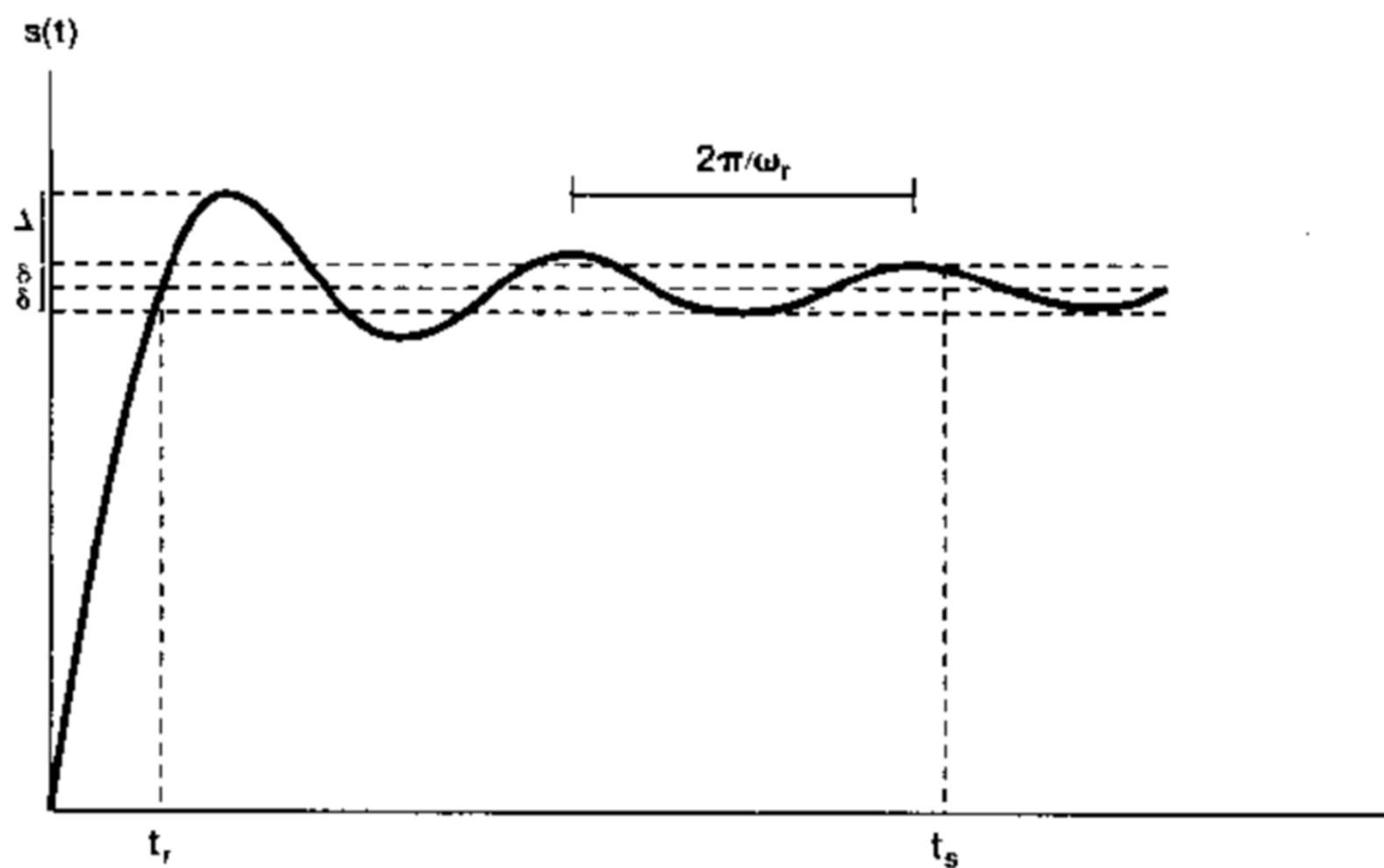
对理想特性逼近得越精确，实现时付出的代价越大，系统的复杂程度也越高。

非理想滤波器的频率特性以容限方式给出。

| 理想滤波器特性 | 非理想滤波器特性 |
|--|---|
| <p data-bbox="253 443 1066 651">1.通带绝对平坦，通带内衰减为零。</p> <p data-bbox="253 794 1066 1002">2.阻带绝对平坦，阻带内衰减为∞。</p> <p data-bbox="253 1145 701 1225">3.无过渡带。</p> | <p data-bbox="1218 443 1939 667">通带内允许有起伏，有一定衰减范围$\pm\delta_1$</p> <p data-bbox="1218 786 1906 1010">阻带内允许有起伏，有一定衰减范围δ_2</p> <p data-bbox="1218 1145 1973 1233">有一定的过渡带宽度</p> |



通常将偏离单位增益的 $\pm\delta_1$ 称为**通带起伏**（或波纹）， δ_2 称为**阻带起伏**（或波纹）， ω_p 称为**通带边缘**， ω_s 为**阻带边缘**， $\omega_s - \omega_p$ 为**过渡带**。



一个连续时间低通滤波器的阶跃响应，图中指出上升时间 t_r ，超量 Δ ，振荡频率 ω_r 和建立时间 t_s ， t_s 即阶跃响应位于其终值 $\pm\delta$ 内所需要的时间

工程实际中常用的逼近方式有：

1.Butterworth滤波器：

通带、阻带均呈单调衰减，也称通带最平伏逼近；

2.Chebyshev滤波器：

通带等起伏阻带单调，或通带单调阻带等起伏；

3.Cauer滤波器：（椭圆函数滤波器）

通带、阻带均等起伏。

它们都是从幅频特性出发逼近理想低通的模特性的。

从相位特性出发，逼近理想的线性相位特性有

1. Bassel滤波器：

群时延最平伏逼近；

2. 包络时延Chebyshev滤波器：

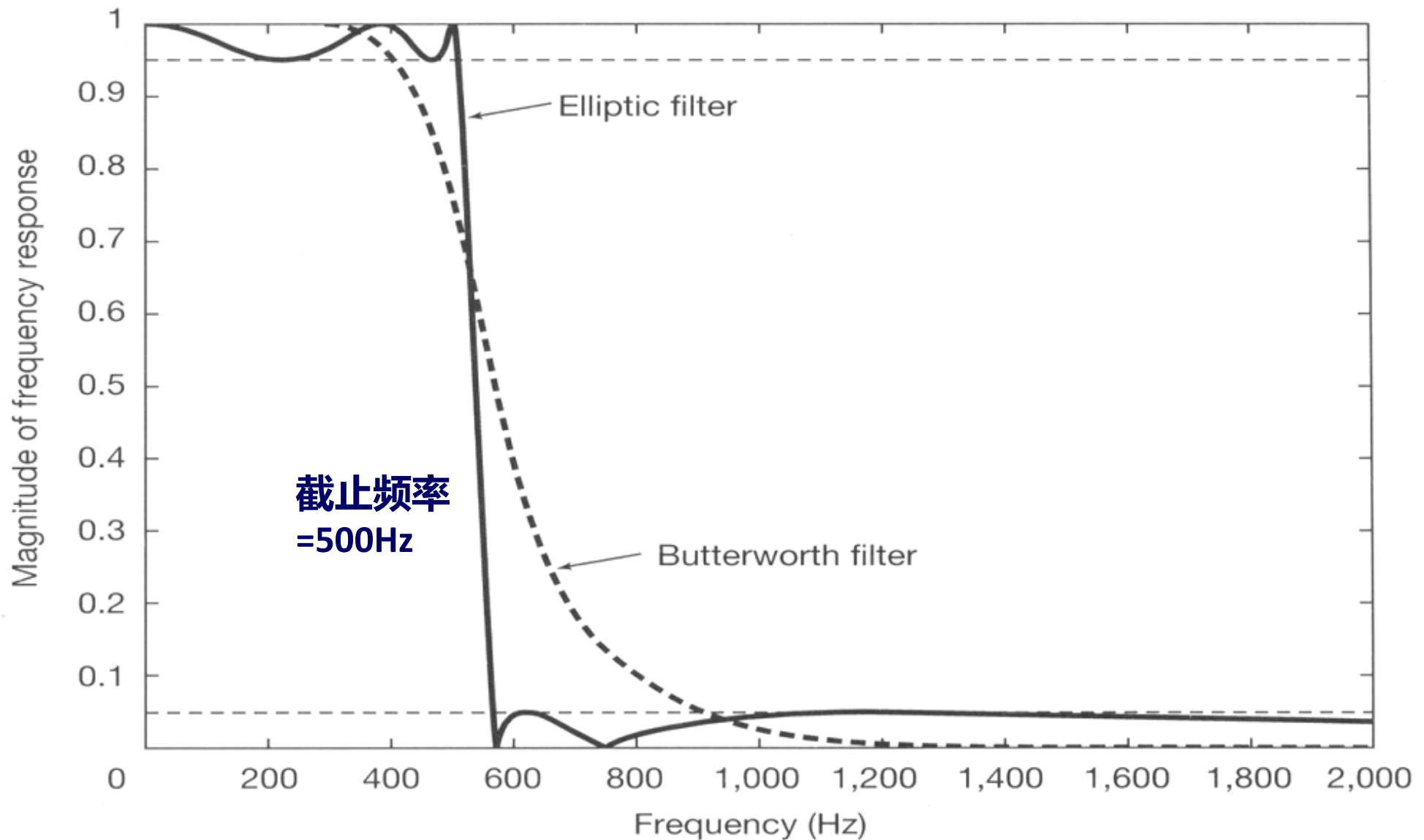
包络时延等起伏逼近；

3. Gauss滤波器。

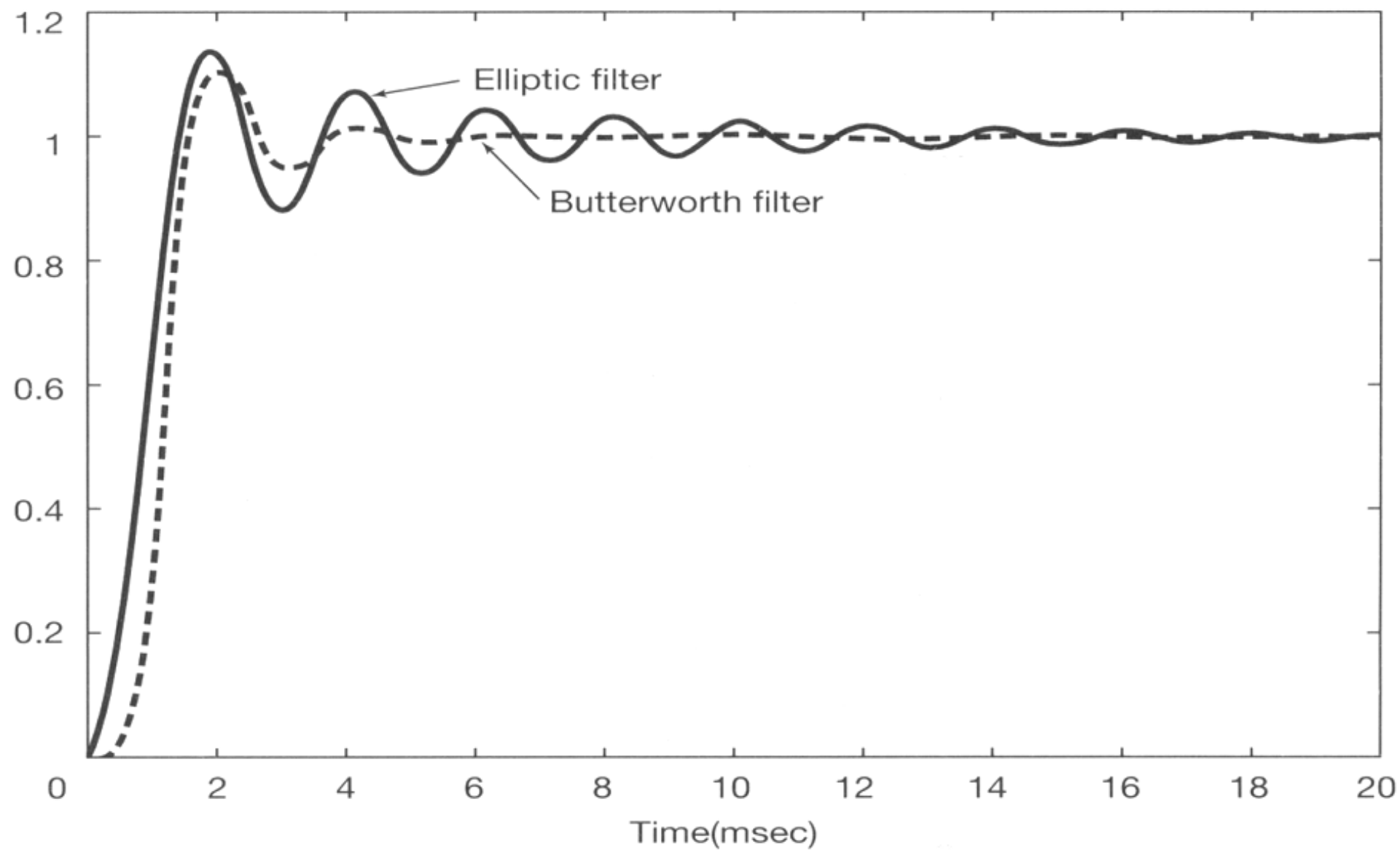
对同一种滤波器，阶数越高，对理想特性逼近得越好，过渡带越窄，但付出的代价是系统越复杂。

对同样阶数的滤波器，从 Butterworth \longrightarrow Chebyshev \longrightarrow Cauer，其幅频特性逼近得越来越好，但阶跃响应的起伏、超量和振荡也越厉害（体现了系统频域特性与时域特性的不兼容）。系统的复杂程度也越来越高，相应地，实现系统所付出的代价也越来越大。

5阶Butterworth滤波器与5阶Cauer滤波器的比较:



单位阶跃响应:



小结 Summary

- 从傅里叶变换的模和相位表示出发，研究了信号在传输中发生失真的原因和失真的种类。建立了信号传输的不失真条件。
- 介绍了滤波与滤波器的基本概念，理想频率选择性滤波器的频率特性和时域特性，理想滤波器的不可实现性，非理想滤波器的概念及工程中常用的逼近方式。

HW: 6.23(b)
提交ddl: 5月31日