启发式搜索

- A*搜索
- A*的性质
- 构建启发式
- 在例子上运行A*

*Slides based on those of Sheila McIlraith

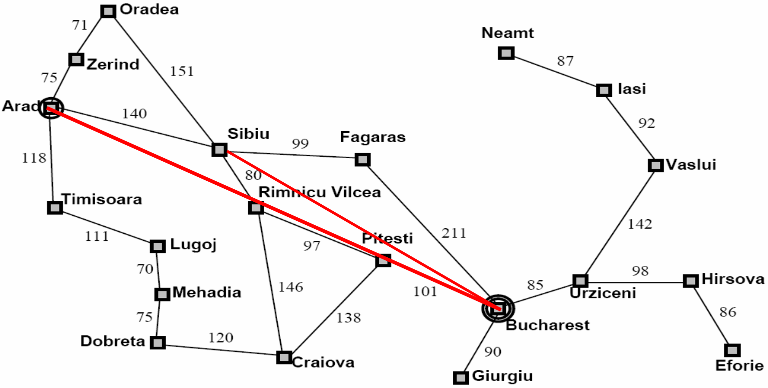
动因

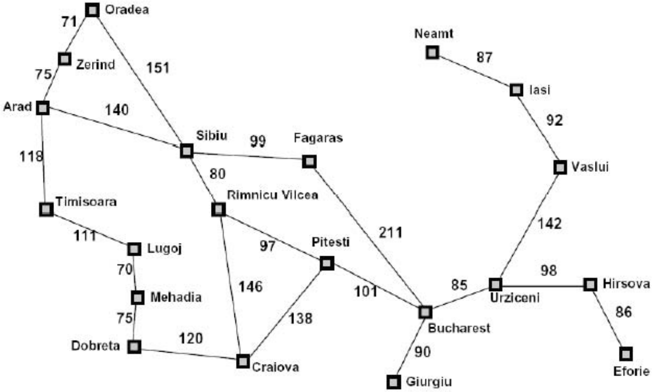
- 在无信息搜索中，我们不评估在边界中哪个节点是最有希望的.
  - *e.g.*, 在一致代价搜索中，总是扩展代价最低的路径. 不考虑从当前路径的终点到达目标的代价.
- 然而，通常我们对于节点的优势有一些知识.
  - *e.g.*, 从该节点到达目标的代价如何.

启发式搜索

- 基本思路是设计一个论域相关的启发式函数$h(n)$, 用于猜测从节点n 到达目标的代价.
- 要求对每个目标节点n有$h(n) = 0$.
- 在不同的论域中, 有不同的方法来猜测这个代价. 也就是说, 启发式是论域相关的.

示例: 直线距离, *i.e.*, 欧式(Euclidean) 距离



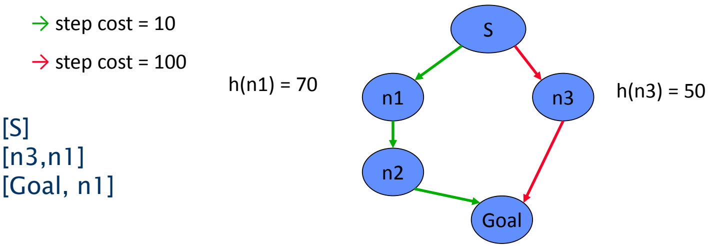


Straight−line distance to Bucharest

Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

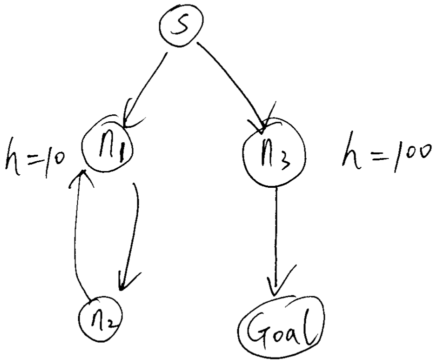
贪婪最佳优先搜索(Greedy best-first search)

- 使用$h(n)$来对边界上的节点进行排序.
- 试图实现一个低成本的解决方案.
- 然而这个方法忽视了到达n的代价, 因此它可能会误入歧途, 探索那些看起来接近目标但远离初始状态的节点.



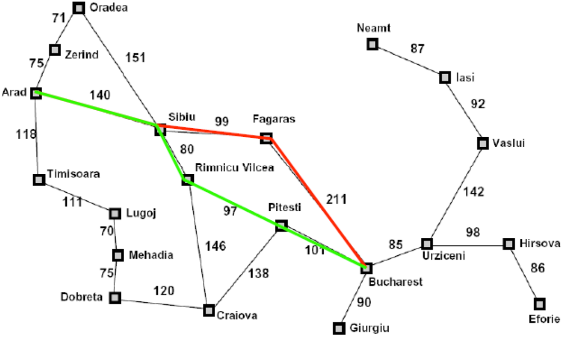
- 因此Greedy BFS 不是最优的

Greedy BFS 是不完备的



$h(n_2) = 10$

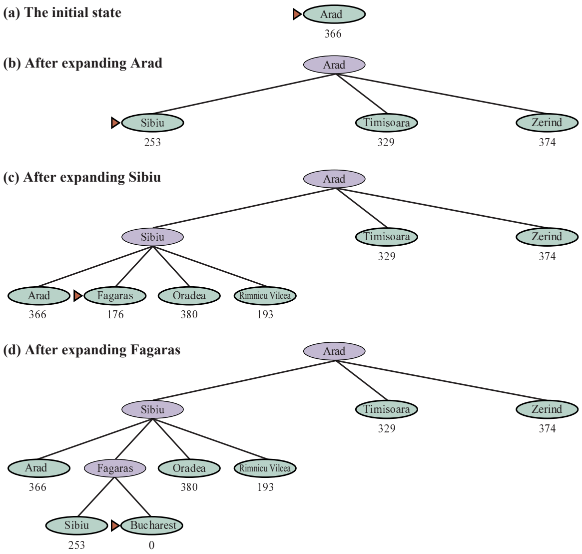
一个示例



Straight−line distance to Bucharest

Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

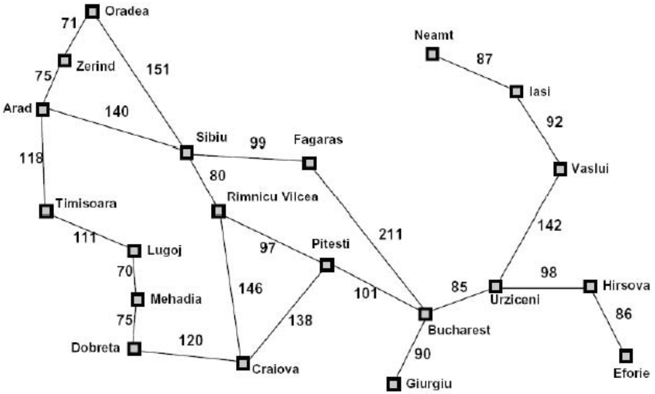
Arad-Sibiu-RV-Pitesli-Bucharest:
$140 + 80 + 97 + 101 = 140 + 278 = 418$
Arad-Sibiu-Fagaras-Bucharest: $140 + 99 + 211 = 140 + 310 = 450$


(a) The initial state
Arad
366
(b) After expanding Arad
Arad
Sibiu
253
Timisoara
329
Zerind
374
(c) After expanding Sibiu
Arad
Sibiu
Timisoara
329
Zerind
374
Arad
366
Fagaras
176
Oradea
380
Rimnicu Vilcea
193
(d) After expanding Fagaras
Arad
Sibiu
Timisoara
329
Zerind
374
Arad
366
Fagaras
Oradea
380
Rimnicu Vilcea
193
Sibiu
253
Bucharest
0

A^*搜索

- 定义一个评价函数$f(n) = g(n) + h(n)$
  - $g(n)$是从初始状态到节点n的路径的代价.
  - $h(n)$是从n到一个目标节点的代价的启发式估计.
- 因此$f(n)$是通过节点n到达目标的代价的估计值.
- 我们使用$f(n)$来对边界上的节点进行排序.

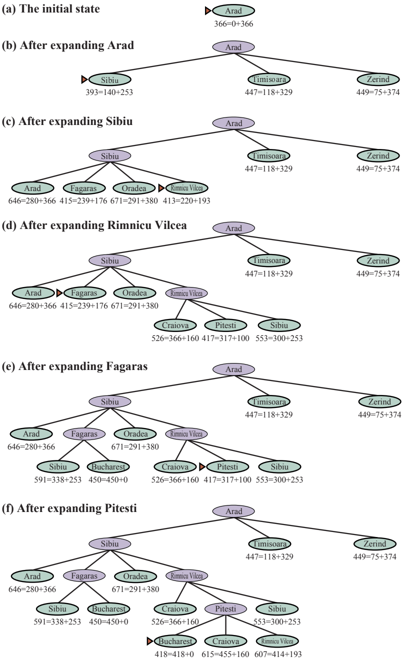
一个示例



Straight−line distance to Bucharest

Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

Arad-Sibiu-RV-Pitesli-Bucharest: 418



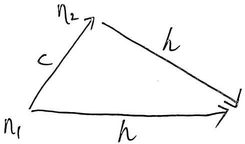
(a) The initial state
Arad
366=0+366
(b) After expanding Arad
Arad
Sibiu
393=140+253
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
(c) After expanding Sibiu
Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
415=239+176
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
413=220+193
(d) After expanding Rimnicu Vilcea
Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
415=239+176
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
Craiova
526=366+160
Pitesti
417=317+100
Sibiu
553=300+253
(e) After expanding Fagaras
Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
Sibiu
591=338+253
Bucharest
450=450+0
Craiova
526=366+160
Pitesti
417=317+100
Sibiu
553=300+253
(f) After expanding Pitesti
Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
Sibiu
591=338+253
Bucharest
450=450+0
Craiova
526=366+160
Pitesti
Sibiu
553=300+253
Bucharest
418=418+0
Craiova
615=455+160
Rimnicu Vilcea
607=414+193

$h(n)$ 的条件: 可采纳的(Admissible)

- 我们总是假设$c(n1 \to n2) \geq \epsilon > 0$，即任何变迁的代价都大于零, 并且不能任意小.
- 令$h^*(n)$是从n到一个目标节点的最优路径的代价(如果没有路径, 则为∞).
- $h(n)$是可采纳的如果对所有的节点n, $h(n) \leq h^*(n)$
- 因此, 一个可采纳的启发式低估从当前节点到达目标的真实代价.
- 故对任意目标节点g，$h(g) = 0$

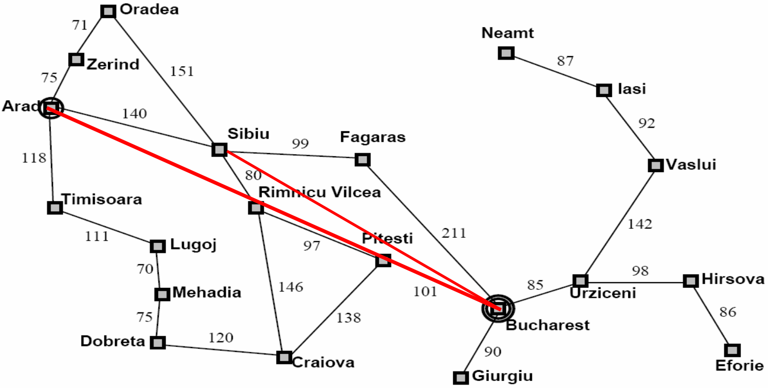
一致性(Consistency)，即单调性(monotonicity)

- $h(n)$是一致的/单调的如果对所有的节点n_1和n_2，$h(n_1) \leq c(n1 \rightarrow n2) + h(n_2)$



- 注意：一致性蕴涵可采纳性，以下为证明：
  - Case 1: 从n 到目标没有路径: $h^*(n) = \infty$
  - Case 2: 令$n = n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow \ldots \rightarrow n_k$是一条从$n$到目标节点的最优路径. 我们对$i$做归纳, 证明对所有的$i$, $h(n_i) \leq h^*(n_i)$.
    Base: $h(n_k) = 0$.
    Induction: $h(n_{i-1}) \leq c(n_{i-1} \rightarrow n_i) + h(n_i)$
    $\leq c(n_{i-1} \rightarrow n_i) + h^*(n_i) = h^*(n_{i-1})$ (why?)
- 大多数可采纳的启发式也是单调的.

示例：直线距离

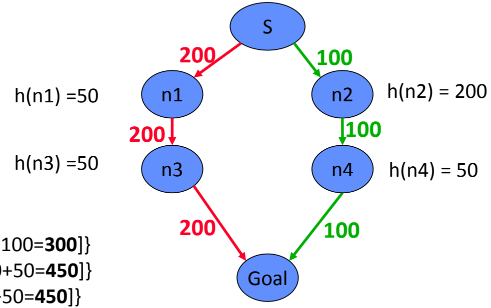


Oradea
71
Zerind
151
75
Arad
140
Sibiu
99
Fagaras
118
80
Rimnicu Vilcea
Timisoara
111
Lugoj
97
Pitesti
211
70
Mehadia
146
101
75
138
Dobreta
120
Craiova
Neamt
87
Iasi
92
Vaslui
142
85
Urziceni
98
Hirsova
86
Bucharest
90
Giurgiu
Eforie

示例：可采纳但是非单调

The following *h* is **not consistent (i.e., not monotone)** since *h(n2)>c(n2→n4)+h(n4). But it is **admissible**.*

→ step cost = 200
→ step cost = 100



g(n)+h(n)=f(n)

{S} → {n1 [200+50=**250**], n2 [200+100=**300**]}
→ {n2 [100+200=**300**], n3 [400+50=**450**]}
→ {n4 [200+50=**250**], n3 [400+50=**450**]}
→ {goal [300+0=**300**], n3 [400+50=**450**]}

We **do find** the optimal path as the heuristic is still admissible. **But** we are mislead into ignoring n2 until after we expand n1.

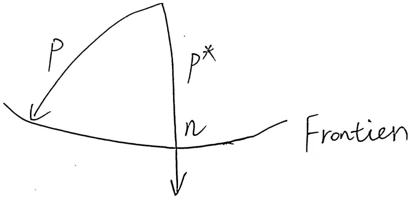
时间和空间复杂性

- 当对所有的n, $h(n)=0$, h 是单调的. A*变为一致代价.
- 因此, 与一致代价的复杂性相同. (这些是最坏复杂性). 仍然是指数级的, 除非有一个很好的h!

可采纳性蕴涵最优性

- 假设一个最优解的代价为C^*
- 任何最优解都将在任何代价$> C^*$ 的路径之前被扩展(稍后证明).
- 请注意，一般情况下，路径不会按照代价的顺序被扩展(参见16面的示例).
- 因此，在最优解之前扩展的路径必须有代价$\leq C^*$
- 代价$\leq C^*$ 的路径只有有穷多个.
- 最终，我们会考查一个最优解.

任何最优路径都将在任何代价$> C^*$ 的路径之前进行扩展.



证明:

- 令p^*是一个最优解.
- 假设p是一条路径使得$c(p) > c(p^*)$并且p 在p^* 前被扩展.
- 则p^*上必定有一个节点n使得当p被扩展时，n仍在边界上.
- 所以$c(p) = g(p) \leq g(p) + h(p) = f(p) \leq f(n) = g(n) + h(n)$
$\leq g(n) + h^*(n) = c(p^*)$, 与$c(p) > c(p^*)$ 矛盾.

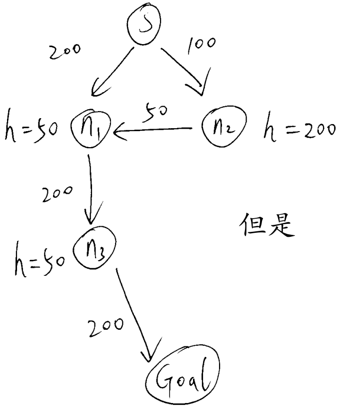
环检测保最优性吗?

- 我们将证明单调性保证我们在第一次扩展一个节点时已找到了到该节点的最优路径.
- 因此, 如果具有单调性, 则环检测保最优性.
- 然而, 如果只有可采纳性, 环检测可能不能保最优性.
- 要解决此问题: 对于以前扩展的节点, 必须记住以前路径的代价. 如果新的路径代价更低, 重新探索一次.

一个示例：环检测破坏了最优性

h是可采纳的但不是单调的，因为$h(n_2) > c(n_2 \to n_1) + h(n_1)$

$$
\begin{aligned}
\{S\} &\to \{n_1[200+50=250], \\
&\qquad n_2[200+100=300]\} \\
&\to \{n_2[100+200=300], \\
&\qquad n_3[400+50=450]\} \\
&\to \{n_3[400+50=450]\} \\
&\to \{goal[600+0=600]\}
\end{aligned}
$$



最优路径是$S \to n_2 \to n_1 \to n_3 \to Goal$

一致性的推论

命题1. 一条路径上的节点的f-值是非递减的.

请注意, 只有可采纳性时, 这不成立. (参见16页示例)
证明:

- 令$\ldots \to n_1 \to n_2 \to \ldots$ 是一条路径.
- 则$f(n_1) = g(n_1) + h(n_1) \leq g(n_1) + c(n_1 \to n_2) + h(n_2)$
$= g(n_2) + h(n_2) = f(n_2)$.

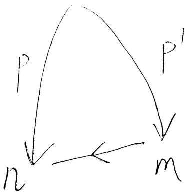
一致性的推论

命题2. 如果n_2在n_1之后被扩展，则$f(n_1) \le f(n_2)$.

证明. 有两个情况:

1. 当n_1被扩展，n_2在边界上.
2. 当n_1被扩展，n_2的某个祖先节点n在边界上.
   由命题1，$f(n_1) \le f(n) \le f(n_2)$.

命题3. A*首次扩展一个状态时，它找到了到达该状态的最小代价路径.



证明.

- 令$p = \ldots \to n$是当n第一次被扩展时到达n的路径.
- 令$p' = \ldots \to m \to n$是一条后来发现的到达n的路径.
- 由命题2, $f(n)$通过$p = g(p) + h(n) \leq f(m)$
- 由命题1, $f(m) \leq f(n)$通过$p' = g(p') + h(n)$
- 因此$g(p) \leq g(p')$, 即$c(p) \leq c(p')$.

IDA*

- A*具有与BFS或UCS相同的潜在空间问题.
- IDA*-迭代加深A*类似于迭代加深搜索，同样解决了空间问题
- 就像迭代加深一样，在每次迭代时都要进行DFS，但是现在的截断依据是f值$(g + h)$而不是深度.
- 在每次迭代中，截断值是在上一次迭代中超出截断值的最小f值.
- 当h是可采纳的，IDA*是最优的：令C^*是最优解的代价，截断值将增加到C^*，从而找到一个最优解.

A*搜索：总结

- 定义一个评价函数$f(n) = g(n) + h(n)$
- 使用$f(n)$对边界上的节点排序.
- $h(n)$是可采纳的如果对所有的节点n, $h(n) \leq h^*(n)$.
- $h(n)$是一致的/单调的如果对任意的节点n_1和n_2, $h(n_1) \leq c(n1 \rightarrow n2) + h(n_2)$
- 一致性蕴涵可采纳性.
- 可采纳性蕴涵最优性.
- 具有指数时间和空间复杂度.

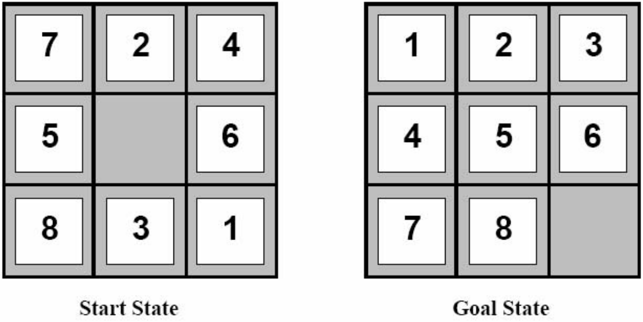
一致性的推论: 总括

1. 一条路径上的节点的f值是非递减的.
2. 如果n_2在n_1之后被扩展, 则$f(n_1) \leq f(n_2)$.
3. A*首次扩展一个状态时, 它找到了到达该状态的最小代价路径.

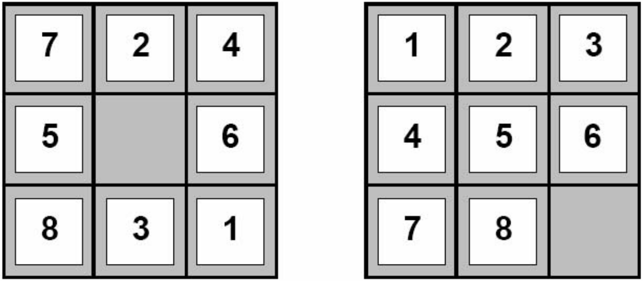
因此, 如果具有单调性, 则环检测保最优性.

构建启发式: 放松的问题

- 一个有用的技术是考虑一个更容易的问题, 并让$h(n)$ 是在更容易的问题中达到目标的代价.
- 8-数码移动: 可以把一个滑块从位置A移动到位置B, 如果
  - A与B(左, 右, 上, 下)相邻.
  - 并且B是空的.



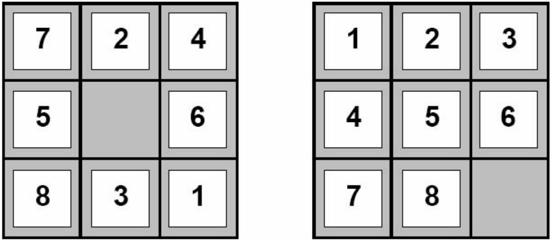
- 可以放松这些条件
  1. 可以移动一个滑块从A到B, 如果A与B相邻(忽视B是否为空), h 是什么?
  2. 可以移动一个滑块从A到B, 如果B为空(忽视相邻).
  3. 可以移动一个滑块从A到B (两个条件都忽视), h 是什么?



Start State Goal State

#3引出了错位的数码 启发式

- $h(n)$ =错位的数码的数量
- 可采纳的: 对每个错位的数码, 我们需要至少一个动作来将其移动到目标位置; 对于任何两个不同的错位数码, 这样的动作都是不同的.
- 单调的: 任何动作最多可以消除一个错位的数码,
  因此对于任何节点n_1 和n_2, $h(n_1) - h(n_2) \leq c(n1 \rightarrow n2)$



Start State　　Goal State

#1引出了Manhattan距离启发式

- $h(n) =$ Manhattan距离之和
- 可采纳的: 对每个错位的数码, 我们需要至少d 个动作来将其移动到目标位置, 其中d 是初始位置和目标位置之间的Manhattan距离; 对于任何两个不同的错位数码, 这些动作的集合是不相交的.
- 单调的: 任何动作至多使$h(n)$减少1.

7	2	4
5		6
8	3	1

Start State

1	2	3
4	5	6
7	8	

Goal State

构建启发式: 放松的问题

定理. 在放松的问题中节点的最优代价是原问题的可采纳的启发式!

证明:

- 令P是原始问题，P'是放松的问题
- 则$Sol(P) \subseteq Sol(P')$
- 所以$mincost(Sol(P')) \leq mincost(Sol(P))$
- 因此$h(n) \leq h^*(n)$

比较两个启发式

定义. 我们说h_2 支配h_1, 如果两者都是可采纳的, 并且对于每个节点n, 我们有$h_1(n) \leq h_2(n)$.

定理. 如果h_2支配h_1, 则A*使用h_2扩展的节点集合是A*利用h_1扩展的节点集合的子集。

Depth	IDS	A*(Misplaced) **h1**	A*(Manhattan) **h2**
10	47,127	93	39
14	3,473,941	539	113
24	---	39,135	1,641

对8-码数问题运行带环检测的A* 算法

采用Manhattan启发式函数，用带环检测的A*搜索初始状态和目标状态如下图所示的8数码问题，画出搜索图，图中标明所有节点的f, g, h 值.

初始：

2	8	3
1	6	4
7		5

目标：

1	2	3
8		4
7	6	5

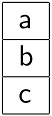
积木世界规划

现有积木若干，积木可以放在桌子上，也可以放在另一块积木上面。有两种操作：

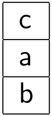
1. $move(x, y)$：把积木x放到积木y上面。前提是积木x和y上面都没有其他积木。
2. $moveToTable(x)$：把积木x放到桌子上，前提是积木x上面无其他积木，且积木x不在桌子上。

设计本问题的一个可采纳的启发式函数，然后用A*搜索初始状态和目标状态如下图所示的规划问题:

初始：



目标：



积木世界规划

- 我们说一块积木在其目标位置如果以这块积木为顶的子塔出现在目标状态。
- 令$h(n)$为不在目标位置的积木个数。
- 可采纳的: 对每个错位积木, 我们需要至少一个动作来将其移动到目标位置; 对于任何两个不同的错位积木, 这样的动作都是不同的.
- 单调的: 任何动作最多可以消除一个错位的积木.

滑动积木块游戏

B	B	B	W	W	W	E

- 一个盒子中有七个格子，里面放了黑色，白色两种木块;
- 三个黑色在左边，三个白色在右边，最右边一个格子空着；
- 一个木块移入相邻空格，代价为1;
- 一个木块相邻一个或两个其他木块跳入空格，代价为跳过的木块数；
- 游戏中将所有白色木块跳到黑色木块左边为成功；

滑动积木块游戏

- 令$h(n)$为每个白色木块前的黑色木块数目和
- EX=>XE, EXY=>YXE, EXYZ=>ZXYE
- 每个代价为1的动作使$h(n)$至多下降1
- 每个代价为2的动作使$h(n)$至多下降2
- 因此$h(n)$是单调的

传教士和食人族问题

- N个传教士和N个食人族都在一条河的左岸.
- 有一艘可以容纳K个人的船.
- 目的是让每个人都去河的右岸.
- 但是，在任何时候，在任何地方(在两岸，或在船上), 都有#传教士$\geq$ #食人族或#传教士=0

MC问题的形式化

- 状态(M, C, B)，其中M – #左岸的传教士, C – #左岸的食人族, $B = 1$表示船在左岸.
- 动作(m, c)，其中m – #船上的传教士, c – #船上的食人族.
- 前提条件: #传教士和#食人族满足约束条件.
- 效果: $(M, C, 1) \overset{(m,c)}{\Rightarrow} (M - m, C - c, 0)$ and $(M, C, 0) \overset{(m,c)}{\Rightarrow} (M + m, C + c, 1)$

$K \leq 3$时的启发式

- $h_1(n) = M + C$是否可采纳? 不, 例如对$(1,1,1)$, $h_1(n) = 2$, 但是$h^*(n) = 1$
- 令$h(n) = M + C - 2B$
- 单调性:
  - $(M, C, 1) \stackrel{(m,c)}{\Rightarrow} (M - m, C - c, 0)$:
    $h(n_1) - h(n_2) = m + c - 2 \leq K - 2 \leq 1$
  - $(M, C, 0) \stackrel{(m,c)}{\Rightarrow} (M + m, C + c, 1)$:
    $h(n_1) - h(n_2) = 2 - (m + c) \leq 1$, since $m + c \geq 1$

直接证明可采纳性

当$B = 1$, 在最佳情况下

- 在最后一步, 可以让3 个人到右岸.
- 在此之前, 我们可以让3 个人到右岸, 然后一个人把船送回左岸.
- 因此, 需要$\geq 2 \cdot \lceil \frac{M+C-3}{2} \rceil + 1 \geq M + C - 2$ 个动作.

当$B = 0$,

- 我们需要一个人来把船送回左岸.
- 由上得到，为了让$M + C + 1$个人到右岸, 需要$\geq M + C + 1 - 2$个动作.
- 因此, 总共需要$\geq M + C$个动作.

练习

对$M = 5$ 和$K = 3$ 运行带环检测的A* 算法.