组合数学
第六章 容斥原理及其应用

主要内容

- 1. 容斥原理及简单应用
- 2. 错排问题
- 3. 带禁止位置的排列
- 4. 莫比乌斯反演

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

容斥原理

“容”是inclusion, “斥”是exclusion.

Principle of inclusion and exclusion

容斥原理是加法原理的一般情况

设全集为U, A⊆U, 则有

$$|A^c| = |U| - |A|.$$

简单形式的容斥原理

因为 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,

所以 设全集为U, 且$A,B \subseteq U$, 则有

$$|A^c \cap B^c| = |U| - |A \cup B|$$

$$= |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

类似的设全集为U, 且$A,B,C \subseteq U$, 则有

$$|A^c \cap B^c \cap C^c| = |U| - |A| - |B| - |C|$$

$$+ |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|$$

$$- |A \cap B \cap C|.$$

简单应用举例

例. 求1~1000中不能被5,6,8整除的数的个数.

A_5={1~1000中能被5整除的数}, A_6, A_8,

$|A_5 \cup A_6 \cup A_8| = ?$

例. 多重集的组合. $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$的10组合个数

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad \text{--------}* \\ 0 \le x_1 \le 3,\ 0 \le x_2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 5 \end{cases}$$

$U=\{*, x_i \ge 0\}$, $A=\{*, x_1 > 3\}$, $B=\{*, x_2 > 4\}$, $C=\{*, x_3 > 5\}$,

$|A^c \cap B^c \cap C^c| = ?$

容斥原理

定理: 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是U中的有限集合, 则

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c|$$

$$= |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

$$+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

证明:

推论

定理: 设$A_1, A_2,\ldots, A_n$是有限集合, 则

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

欧拉函数$\phi(n)$

$\phi(n)$是1~n中与n互素的数的个数.

例$\phi(3)=2$, $\phi(6)=2$. 设n的素分解为$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$

设A_i为1~n中p_i的倍数的集合, $i, j = 1,\ldots,k$

$|A_i| = n/p_i$, $|A_i \cap A_j| = n/(p_i p_j)$, ……

$\phi(n) = |A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_k^c|$

$$= n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{i \neq j} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots \pm \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

错位排列

定义: 若$S=\{1,2,\ldots,n\}$的排列$i_1 i_2 \ldots i_n$满足

$$i_1 \neq 1,\ i_2 \neq 2,\ \ldots,\ i_n \neq n,$$

则称它为n元素的错位排列.

以D_n记n元素的错位排列数.

$D_1 = 0,\ D_2 = 1,\ D_3 = ?,$

定理: $D_n = n![1-1/1!+1/2!-1/3!+\ldots+(-1)^n/n!\ ]$

定理: $D_n = (n-1)\ D_{n-1} + (n-1)\ D_{n-2}$.

注: $\{1,\ldots,n\}$中 $i_2=2$,其它错排的排列数为D_{n-1}.

错排公式

设A_i为数i在第i位的全体排列, i , j =1,2,…,n

$|A_i|=(n-1)!$, $|A_i \cap A_j|=(n-2)!$, … …

错排数$=|A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c|$?

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots \pm \frac{n!}{n!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}\right)$$

错排的递推关系

定理: $D_n = (n-1)\, D_{n-2} + (n-1)\, D_{n-1}$.

证明: 对错排$i_1 \ldots i_n$,

(1) i_1有n-1种取值, 设$i_1 = k$;

(2) 或(2a) $i_k=1$; 或(2b) $i_k\neq 1$. 将i_1,i_k互换则有

(2a) $\{2,\ldots,n\}\backslash\{k\}$是错排.

(2b) $\{1,2,\ldots,n\}\backslash\{k\}$是错排.

问题举例

n位男士, n位女士聚会, 女士选择舞伴,
第一次跳舞有多少种方案?
若每人都换舞伴,第二次跳舞方案数?
第二次跳舞每人都换舞伴的概率是多少?

带禁止位置的排列

问题的描述: 设$S=\{1,\ldots,n\}$, $X_1,\ldots,X_n \subseteq S$,

求满足$i_1 \notin X_1,\ldots, i_n \notin X_n$的排列$i_1\ldots i_n$的个数.

例. $X_1=\{1,4\},X_2=\{3\},X_3=\varnothing,X_4=\{1,5\},X_5=\{2,5\}$

	1	2	3	4	5
i_1	X			X	
i_2			X		
i_3					
i_4	X				X
i_5		X			X

问题的解

定义: 设将k个棋子放在棋盘的禁止位置上,
没有棋子位于同行同列,方案数为r_k.

定义: $A_k = \{ i_k \in X_k \}$

关联: $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = r_1(n-1)!$

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = r_k(n-k)!$$

定理: 带禁止位置的排列数为

$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \ldots + (-1)^n r_n\, 0!$,

问题举例

X					
X	X				
		X	X		
		X	X		

$r_1=7$, $r_2=15$, $r_3=10$,

$r_4=2$, $r_5 = r_6 = 0$

带如图禁止位置排列数为

$$6!-7\cdot5!+15\cdot4!-10\cdot3!+2\cdot2!$$

$$= 184$$

另外的禁排问题

n个人练走步, 排成一列前行. 第二天要求每人前面的人与前一天不同, 记方案数为Q_n.

定理: 对于n>0,

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n-1}{n-1} 1!$$

魔法手镯

Potter的女朋友Ginny的生日快到了.

Potter打算做魔法手镯作为生日礼物.

手镯上要均匀地点缀n($1 \le n \le 10^9$)个魔珠.

有m($1 \le m \le 10$)种魔珠,有些魔珠不能相邻.

输入第一行: t // 测试样例数.

第二行: n m k // $1 \le k \le m(m-1)/2$

接下来k行: a b // $1 \le a,b \le m$, a和b号珠不能相邻

…

输出: 不同手镯数模9973的结果.

m种元素的多重集的圆排列

长为n圆排列在n个位置断开可得n个线排列可能相同, 例:123412341234123412341234

只能形成4个不同的线排列, 称为周期4.

设一圆(线)排列可由长为k的线排列拷贝形成,

则这样的k中最小者称为该排列的周期.

长为n线(圆)排列数?周期取值?各数间的关系?

n=4, m=2: 周期1: 1111, 2222

周期2: 1212

周期4: 1112, 1122, 1222

多重集线排列与圆排列的关系

固定**m**, 令S={∞·1,…, ∞·m}.

T(n) : S的长为n的圆排列个数.

m^n : S的长为n的线排列数 (≠T(n)×n,举例).

M(d): S的**周期**为d的线排列数.

则有

$$m^n = \sum_{d|n} M(d) \qquad T(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} M(d)$$

可以由此解出M(n)和T(n)吗?

经典的Möbius函数μ(n)

∀n>0 可以唯一地分解为素数幂的乘积:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

其中$p_1, p_2, \ldots, p_k$是不同的素数, $a_i \geq 1$. 定义

$$\mu(n)=\begin{cases} 1, & \text{若} n=1; \\ 0, & \text{若}\exists i, \text{使得} a_i>1; \\ (-1)^k, & \text{其它}. \end{cases}$$

例如: 30=2·3·5, $\mu(30)=(-1)^3=-1$,

14=2·7, $\mu(14)=(-1)^2=1$,

$44=2^2\cdot 11$, $\mu(44)=0$,

Möbius函数的性质

定理: 对任意正整数n, 有 $\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{if } n=1,\\ 0, & \text{if } n>1.\end{cases}$

证明: n=1, 定理成立. 若n>1, 设

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k},\quad n_1=p_1p_2\cdots p_k.$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|n_1}\mu(d)$$

$$=\mu(1)+\sum_{1\le i\le k}\mu(p_i)+\sum_{1\le i<j\le k}\mu(p_ip_j)+\ldots+\mu(p_1\cdots p_k)$$

$$=\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}=0$$

Möbius反演定理

定理:设F(n)和G(n)是正整数集上的函数, 则

$$G(n)=\sum_{d|n}F(d)\Leftrightarrow F(n)=\sum_{d|n}\mu(d)G\left(\frac{n}{d}\right).$$

设{∞·1,…, ∞·m}的周期d线排列数为M(d), 则有

$$\sum_{d|n}M(d)=m^n \quad\Rightarrow\quad M(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)m^d$$

Möbius函数与欧拉函数

定理: 对任意正整数n, 有 $\sum_{d|n}\mu(d)/d = \phi(n)/n$.

证明: n=1, 定理成立. 若n>1, 设

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}, \quad n_1 = p_1 p_2 \cdots p_k.$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)/d = \sum_{d|n_1}\mu(d)/d$$

$$= \mu(1) + \sum_{1\le i\le k}\frac{\mu(p_i)}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le k}\frac{\mu(p_i p_j)}{p_i p_j} + \ldots + \frac{\mu(p_1\cdots p_k)}{p_1\cdots p_k}$$

$$= \mu(1) - \sum_{1\le i\le k}\frac{1}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le k}\frac{1}{p_i p_j} + \ldots + \frac{(-1)^k}{p_1\cdots p_k} = \frac{\phi(n)}{n}$$

多重集的圆排列数

设{∞·1,…, ∞·m}的长为n的圆排列数为T(n), 周期是d的线排列数为M(d), 则有

$$\sum_{d|n} M(d) = m^n \Rightarrow M(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) m^d$$

$$T(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} M(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) m^d$$

应用二: 魔法手镯

设有m种魔法珠, $B=(b_{ij})_{m\times m}$为其邻接矩阵

$T^{\wedge}(n)$: 满足B, 且长为n的圆排列数.

$M^{\wedge}(d)$: 满足B, 且周期是d的线排列数.

$\mathrm{tr}\, B^n$: B的长为n的回路的条数

$$\sum_{d|n} M^{\wedge}(d) = \mathrm{tr}(B^n) \Rightarrow \quad M^{\wedge}(n) = \sum_{d|n} \mu(d)[\mathrm{tr}\; B^d]$$

$$T^{\wedge}(n) = \sum_{d|n} \tfrac{1}{d} M^{\wedge}(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(\tfrac{n}{d})[\mathrm{tr} B^d]$$

样例分析

1
4 4 6
1 1
2 2
4 4
1 3
1 4
2 4
输出
8

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}B^2=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&2&1&1\\1&1&3&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}B^4=\begin{bmatrix}2&1&4&1\\1&6&6&4\\4&6&12&5\\1&4&5&3\end{bmatrix}$$

trB=1, tr B^2=7, tr B^4=23

观察各周期排列数与**B^4**的关系

周期**1: 3,** 周期**2: 12, 34, 23**

周期**4: 1232, 4323, 4333, 2333**

$(\phi(4)\cdot 1 + \phi(2)\cdot 7 + \phi(1)\cdot 23)\ /\ 4 = 8.$

偏序集$(X,\leq)$上的函数空间$\Omega(X)$

$\forall f\in\Omega(X)$, 都满足$f: X\times X\to R$, 及

若$\neg(x\leq y)$, 则必有$f(x,y)=0$.

$\Omega(X)$中的两个特殊函数:

δ函数:

$$\forall x\in X,\quad \delta(x,x)=1,$$

$$\forall x\neq y\in X,\quad \delta(x,y)=0.$$

ζ函数:

$$\forall x\leq y\in X,\quad \zeta(x,y)=1,$$

$$\text{否则},\quad \zeta(x,y)=0.$$

函数空间Ω(X)中的Möbius函数

任取$f,g\in\Omega(X)$, 定义f与g的卷积f*g为:

$$f*g(x,y) = \sum_{x\le z\le y} f(x,z)g(z,y),\ \ \forall x,y\in X.$$

Möbius函数$\mu\in\Omega(X)$满足:

$$\mu*\zeta = \zeta*\mu = \delta$$

Möbius函数的递归定义:

$$\forall x\in X,\quad \mu(x,x) = 1,$$

$$\forall x<y\in X,\quad \mu(x,y) = -\sum_{x\le z<y}\mu(x,z).$$

容易验证$\mu*\zeta = \zeta*\mu = \delta$ (卷积结合律).

Möbius反演公式

定理: 令$(X,\leq)$是下有限偏序集,

μ是它的Möbius函数, $F: X\to R$,

若

$$G(x) = \sum_{y\leq x}F(y),\ \forall x\in X$$

则有

$$F(x) = \sum_{y\leq x}G(y)\,\mu(y,x),\ \forall x\in X$$

与经典Möbius函数的对比

在偏序集(Z , |)上:

$\mu(1,3) = -1$, $\mu(1,5) = -1$,

$\mu(1,4) = 0$, $\mu(1,15) = 1$,

$\mu(3,15) = \mu(1,5) = -1$.

Möbius反演与容斥原理

- 设$X_n=\{1,\ldots,n\}$, 考虑偏序集$(P(X_n),\subseteq)$.
- 设$A\subseteq B\subseteq X_n$, 则$\mu(A,B)=(-1)^{|B|-|A|}$.

设有全集U的子集$A_1,A_2,\ldots,A_n$, 对$\forall L\in P(X_n)$, 令

$$F(L) = |\{ x\in U \mid (\forall i\in L,\ x\notin A_i) \text{ 且 } (\forall i\notin L,\ x\in A_i)\}|.$$

例 $F(\{1\}) = |A_1^c\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$,

$F(\{1,2,\ldots,n\}) = |A_1^c\cap\ldots\cap A_n^c|$.

令 $G(B) = \sum_{A\subseteq B} F(A)$, 则有 $G(B) = |\cap_{i\notin B} A_i|$,

$$F(X_n) = \sum_L (-1)^{n-|L|} G(L),$$

可见容斥原理也是一种Möbius反演.

本章小结

容斥原理及其简单应用

错排问题 带禁止位置的排列

莫比乌斯反演