

# 第9章 拉普拉斯变换

## 本章主要内容:

1. 拉普拉斯变换;
2. 拉普拉斯变换的收敛域;
3. 零极点图;
4. 拉普拉斯变换的性质;
5. 系统函数;
6. 单边拉普拉斯变换;

## 9.0 引言 Introduction

傅里叶分析方法之所以在信号与LTI系统分析中如此有用，很大程度上是因为相当广泛的信号都可以表示成复指数信号的线性组合，而**复指数函数是一切 LTI 系统的特征函数**。

傅里叶变换是以复指数函数中的特例，即以  $e^{j\omega t}$  和  $e^{j\omega n}$  为基底分解信号的。对于更一般的复指数函数  $e^{st}$  和  $z^n$ ，也理应能以此为基底对信号进行分解。

$$x(t) = Ce^{at} \quad x(n) = C\alpha^n$$

**将傅里叶变换推广到更一般的情况就是本章及下一章要讨论的中心问题。**

**通过本章及下一章，会看到拉氏变换和 Z 变换不仅具有很多与傅里叶变换相同的重要性质，**

- 不仅能适用于用傅里叶变换的方法可以解决的信号与系统分析问题，**
- 而且还能解决傅里叶分析方法不适用的方面，例如用于不稳定系统的分析。**

**拉氏变换与 Z 变换的分析方法是傅里叶分析法的推广，傅里叶分析是它们的特例。**

## 9.1 拉普拉斯变换 The Laplace Transform

复指数信号  $e^{st}$  是一切LTI系统的特征函数。

如果LTI系统的单位冲激响应为  $h(t)$ ，则系统对  $e^{st}$  产生的响应是：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) e^{st}$$

$$y(t) = H(s) e^{st}, \text{ 其中 } H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

显然当  $s = j\omega$  时，就是傅里叶变换。

## 一. 拉氏变换的定义:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

称为  $x(t)$  的双边拉氏变换, 其中  $s = \sigma + j\omega$ 。

若  $\sigma = 0$ ,  $s = j\omega$  则有:  $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

这就是  $x(t)$  的傅里叶变换。

表明: 连续时间傅里叶变换是双边拉普拉斯变换  
在  $\sigma=0$  或是在  $j\omega$  轴上的特例。

$$\begin{aligned}
 X(s) &= X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ x(t)e^{-\sigma t} \right] e^{-j\omega t} dt \\
 &= \mathbb{F}[x(t)e^{-\sigma t}]
 \end{aligned}$$

所以拉氏变换是对傅里叶变换的推广， $x(t)$ 的拉氏变换就是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。

- 实指数 $e^{-\sigma t}$ 在时间上可以是衰减的，或者是增长的，取决于 $\sigma$ 的正负。
- 只要有合适的 $\sigma$ 存在，就可以使某些本来不满足狄里赫利条件的信号在引入 $e^{-\sigma t}$ 后满足该条件。即有些信号的傅氏变换不收敛而它的拉氏变换存在。

拉氏变换比傅里叶变换有更广泛的适用性。

## Dirichlet conditions

- 1) **Absolute integrability**  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$
- 2) There are a **finite number of extrema** for each finite interval of time in  $x(t)$
- 3) There are a **finite number of discontinuities** for each finite interval of time in  $x(t)$ . All the discontinuities are finite.



**例1.**  $x(t) = e^{-at}u(t)$

**当  $a > 0$  时,  $x(t)$  的傅里叶变换存在/收敛**

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{a + j\omega} \quad (a > 0) \end{aligned}$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s + a}$$

或者，根据  $s=\sigma+j\omega$ ，有

$$\begin{aligned} X(\sigma + j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \mathbb{F}[e^{-(\sigma+a)t} u(t)] \end{aligned}$$

$$\therefore X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{\sigma + a + j\omega} \quad (\sigma + a > 0)$$


$$\mathbf{s=\sigma+j\omega, \quad \sigma=\text{Re}[s]}$$

$$X(s) = \frac{1}{s + a} \quad (\Re\{s\} > -a)$$

显然，在  $a > 0$  时，拉氏变换收敛的区域  $\text{Re}[s] > -a$ ，包括了  $\sigma = 0$ （即  $j\omega$  轴）。

比较  $X(s)$  和  $X(j\omega)$ ，显然有

$$X(s) \Big|_{s=j\omega} = X(j\omega)$$

当  $a = 0$  时，

$$x(t) = e^{-at}u(t) = u(t)$$

可知

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \text{Re}[s] > 0$$

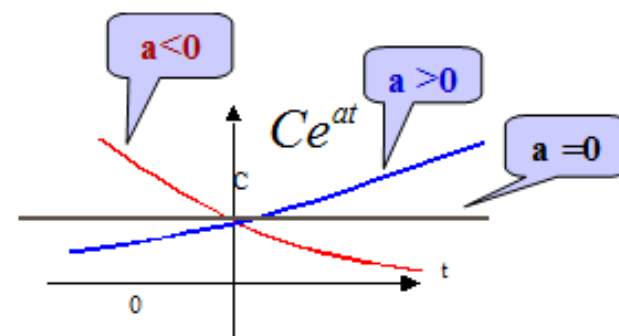
**例2.**  $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-st} u(-t) dt$$

$$= -\int_{-\infty}^0 e^{-at} e^{-st} dt$$

$$= -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt$$

$$= \frac{1}{s+a}$$



$$\operatorname{Re}[s+a] < 0$$

$$\text{或 } \operatorname{Re}[s] < -a$$

**与例1比较，区别仅在于收敛域不同。**

由以上例子，可以看出：

1. 拉氏变换与傅里叶变换一样存在收敛问题。并非任何信号的拉氏变换都存在，也不是  $s$  平面上的任何复数都能使拉氏变换收敛。
2. 使拉氏变换积分收敛的那些复数  $s$  的集合，称为拉氏变换的收敛域 ROC，拉氏变换的 ROC (Region of Convergence) 是非常重要的概念。

3. 不同的信号可能会有完全相同的拉氏变换表达式，只是它们的收敛域不同。

4. 只有拉氏变换表达式连同相应的收敛域，才能和信号建立一一对应的关系。

5. 收敛域由这样一些 $s=\sigma+j\omega$ 组成，对这些 $s$ 来说， $x(t)e^{-\sigma t}$  的傅里叶变换收敛

6. 如果拉氏变换的ROC包含 $j\omega$  轴，则有

$$X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega}$$

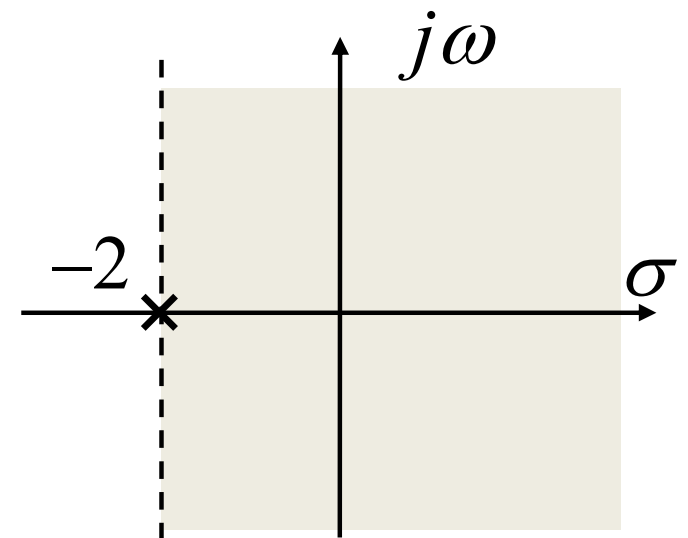
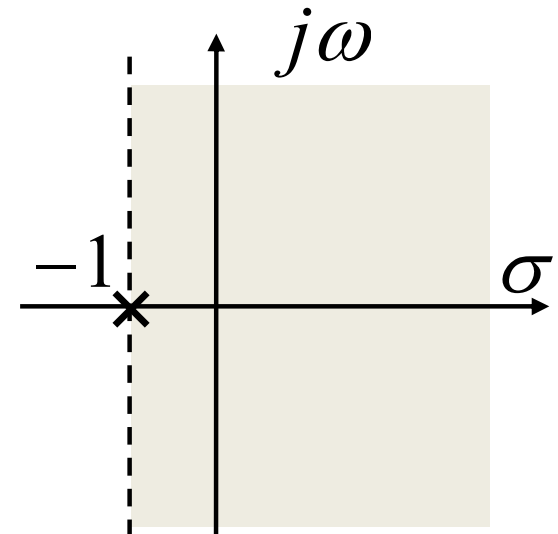
## 二. 拉氏变换的ROC及零极点图:

**例3.**  $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt$$

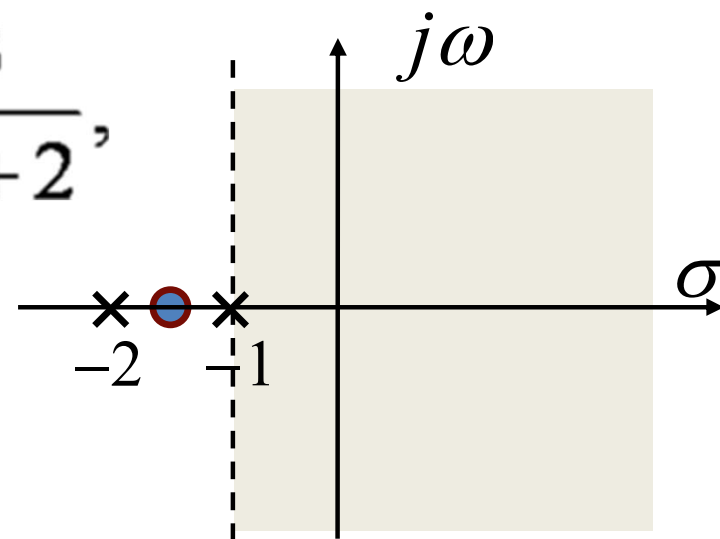
$$\because e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}[s] > -1$$

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}[s] > -2$$



$$\therefore X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2},$$

$$\text{Re}[s] > -1$$



**可见：**拉氏变换的收敛域是各个收敛域的公共部分。ROC总是以平行于 $j\omega$ 轴的直线作为边界的，ROC的边界总是与 $X(s)$ 的分母的根对应的。

**若 $X(s)$ 是有理函数**

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = M \frac{\prod_i (s - \beta_i)}{\prod_i (s - \alpha_i)}$$



分子多项式的根称为**零点**，分母多项式的根称为**极点**。

将 $X(s)$ 的全部零点和极点表示在  $s$  平面上就构成了**零极点图**。零极点图及其收敛域可以表示一个 $X(s)$ ，最多与真实的 $X(s)$ 相差一个常数因子  $M$ 。

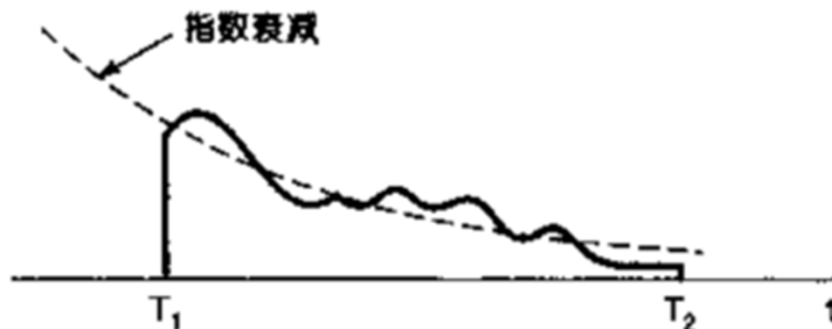
因此，**零极点图是拉氏变换的图示方法。**

## 9.2 拉氏变换的收敛域

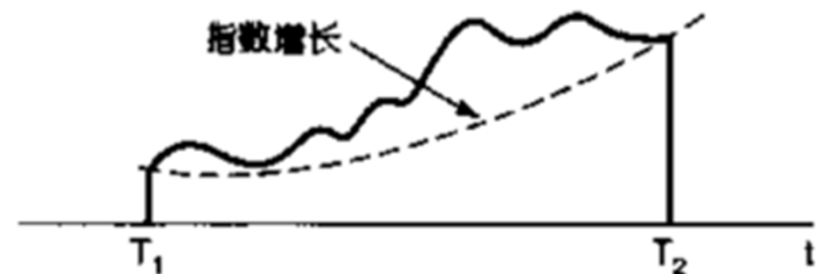
### The Region of Convergence for Laplace Transforms

可以归纳出ROC的以下性质：

1. ROC是  $s$  平面上平行于  $j\omega$  轴的带状区域。
2. 对有理拉普拉斯变换来说，在ROC内无任何极点。
3. 时限且绝对可积信号的ROC是整个  $s$  平面。



有限持续信号乘以衰减指数



有限持续信号乘以增长指数

**例1.**  $x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 < t < T \\ 0 & \text{其它 } t \end{cases}$

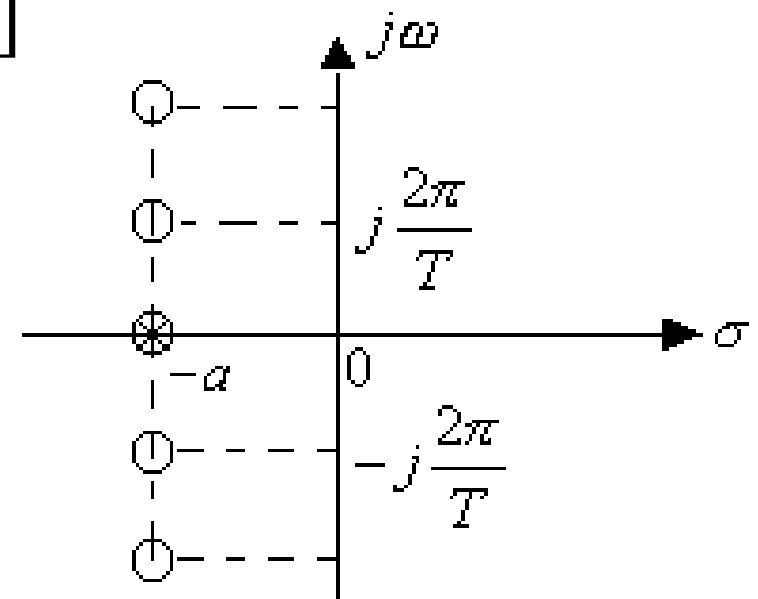
$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt$$

$$= \int_0^T e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}]$$

**X(s)有极点s=-a**

**考查零点, 令  $e^{-(s+a)T} = 1$**

**得**  $s = -a + j\frac{2\pi}{T}k$



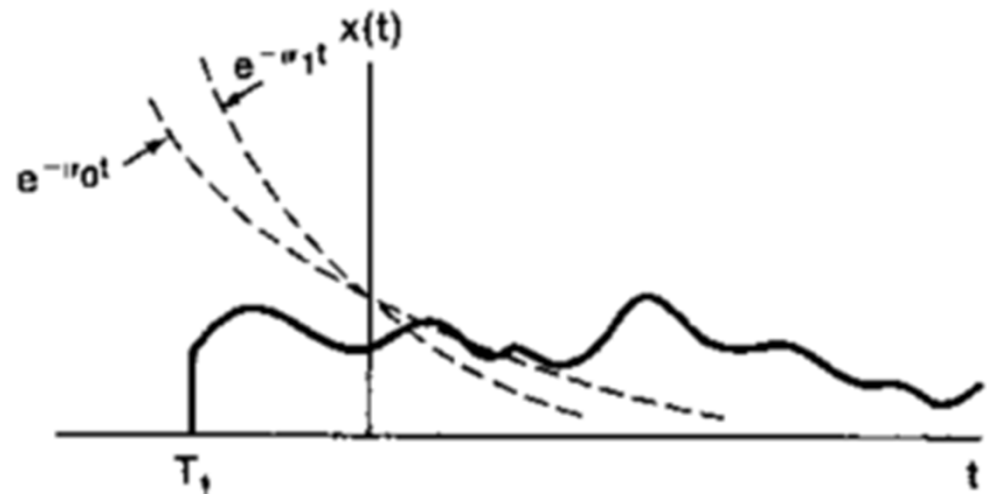
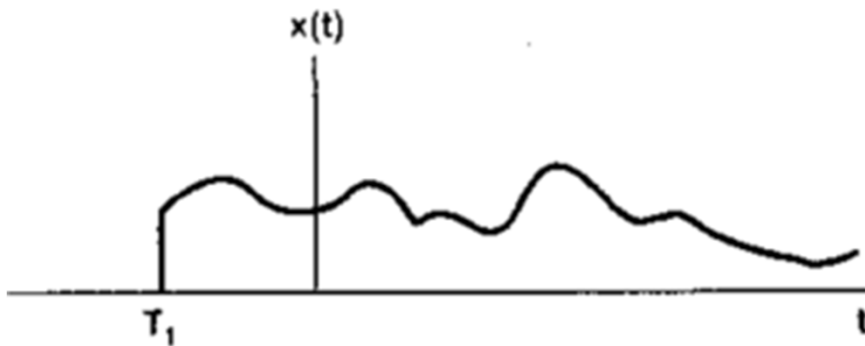
**显然X(s)在s=-a也有一阶零点, 由于零极点相抵消, 致使在整个 s 平面上无极点。**

4. 右边信号的ROC是  $s$  平面内某一条平行于  $j\omega$  轴的直线的右边。

若  $x(t)$  是右边信号,  $T \leq t < \infty$ ,  $\sigma_0$  在ROC内, 则有  $x(t)e^{-\sigma_0 t}$  绝对可积, 即:

$$\int_T^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$$

若  $\sigma_1 > \sigma_0$ , 则  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-\sigma_1 t}$  衰减比  $e^{-\sigma_0 t}$  快, 如下图所示, 那么  $x(t)e^{-\sigma_1 t}$  也就一定绝对可积。



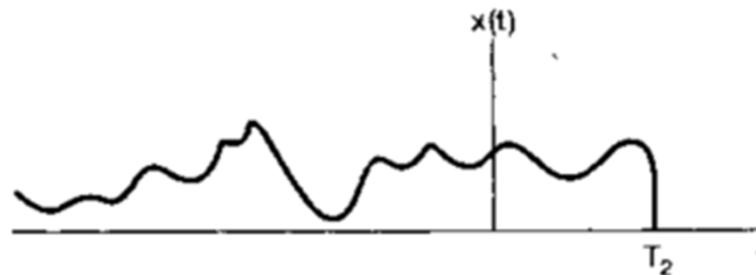
**正规来说, 若  $\sigma_1 > \sigma_0$ , 则**

$$\begin{aligned} & \int_T^{\infty} \left| x(t) e^{-\sigma_1 t} \right| dt \\ &= \int_T^{\infty} \left| x(t) e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} \right| dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T} \int_T^{\infty} \left| x(t) e^{-\sigma_0 t} \right| dt < \infty \end{aligned}$$

**表明  $\sigma_1$  也在收敛域内。**

**由于  $t < T$  时,  $x(t) = 0$ ,  $x(t)e^{-\sigma_1 t}$  在负的时间轴方向也不能无界地增长。如果有某一点  $s$  在收敛域内, 那么所有位于这个  $s$  点右边的点 (所有具有更大实部的点), 都在收敛域内。**

5. 左边信号的ROC是  $s$  平面内的一条平行于  $j\omega$  轴的直线的左边。

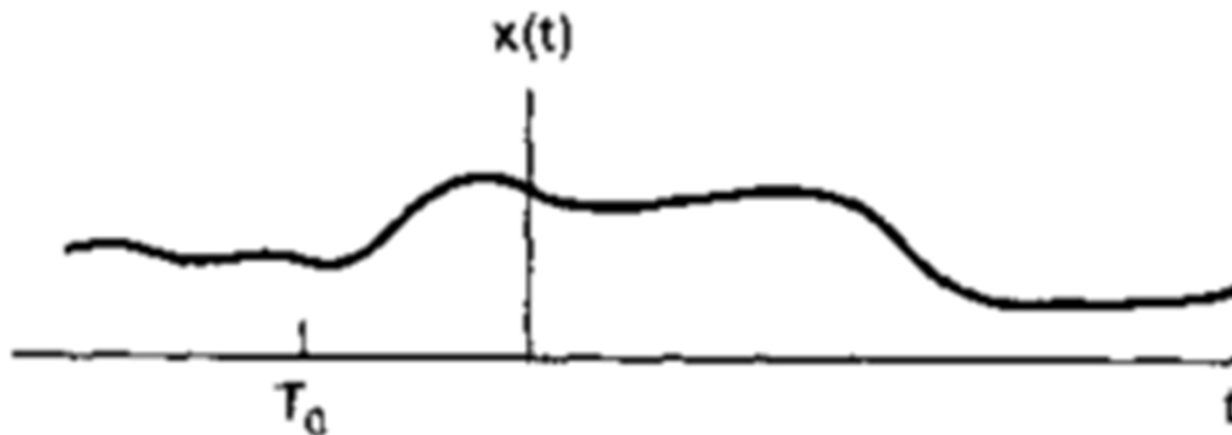


若  $x(t)$  是左边信号，定义于  $(-\infty, T]$ ， $\sigma_0$  在 ROC 内， $\sigma_1 < \sigma_0$ ，则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt &= \int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}| dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T} \int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty \end{aligned}$$

表明  $\sigma_1$  也在收敛域内。

6. 双边信号的ROC如果存在，一定是  $s$  平面内平行于  $j\omega$  轴的带形区域。

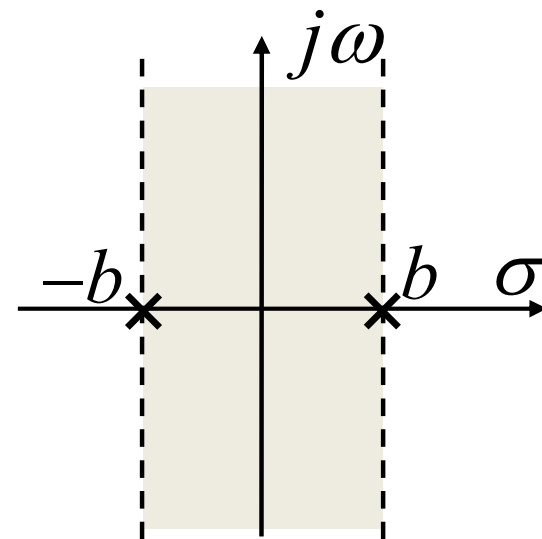


**例2.**  $x(t) = e^{-b|t|}$

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

$$e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, \quad \text{Re}[s] > -b$$

$$e^{bt}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-b}, \quad \text{Re}[s] < +b$$



**当 $b>0$ 时，上述ROC有公共部分，**

$$X(s) = \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} \quad -b < \text{Re}[s] < b$$

**当 $b<0$ 时，上述 ROC 无公共部分，表明 $X(s)$**

**不存在。**

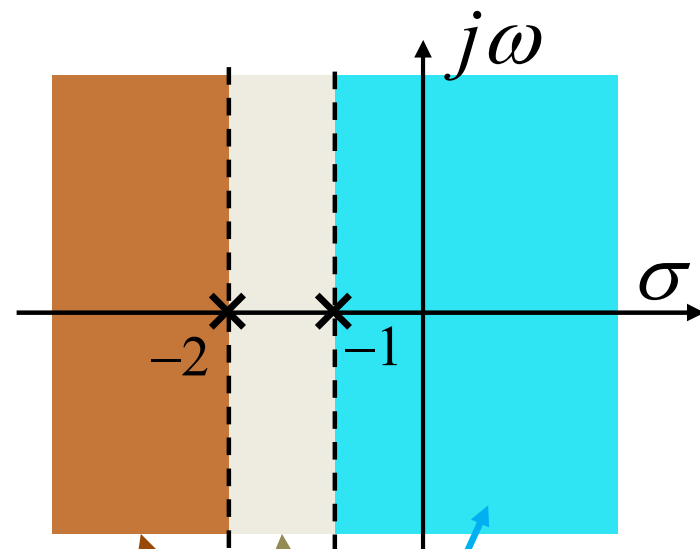


**7. 当 $X(s)$ 是有理函数时，其ROC总是由 $X(s)$ 的极点分割的。ROC必然满足下列规律：**

- **1. 右边信号的ROC一定位于 $X(s)$ 最右边极点的右边。**
- **2. 左边信号的ROC一定位于 $X(s)$ 最左边极点的左边。**
- **3. 双边信号的ROC可以是任意两相邻极点之间的带状区域。**

**例3.** 
$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



**可以形成三种 ROC:**

**1) ROC:**  $\text{Re}[s] > -1$

**此时  $x(t)$  是右边信号。**

**2) ROC:**  $\text{Re}[s] < -2$

**此时  $x(t)$  是左边信号。**

**3) ROC:**  $-2 < \text{Re}[s] < -1$

**此时  $x(t)$  是双边信号。**

## 9.3 拉普拉斯逆变换

### The Inverse Laplace Transform

一. 定义： 由  $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$

若  $s = \sigma + j\omega$  在ROC内，则有：

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \mathbb{F}[x(t)e^{-\sigma t}]$$

$$\therefore x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{\sigma t} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) e^{st} d\omega$$

由  $s = \sigma + j\omega$  得  $ds = j d\omega$

当  $\omega$  从  $-\infty \rightarrow +\infty$  时,  $s$  从  $\sigma - j\infty \rightarrow \sigma + j\infty$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

—— $X(s)$  的逆变换

拉氏逆变换表明:

$x(t)$  可以被分解成复振幅为  $\frac{1}{2\pi j} X(s) ds$  的复指数信号  $e^{st}$  的线性组合。

## 二. 拉氏反变换的求法:

对有理函数形式的 $X(s)$ 求反变换一般有两种方法, 即部分分式展开法和留数法。

### ❖ 部分分式展开法:

1. 将 $X(s)$ 展开为部分分式。

$$X(s) = \sum_{2\pi j}^m \frac{A_i}{s + a_i}$$

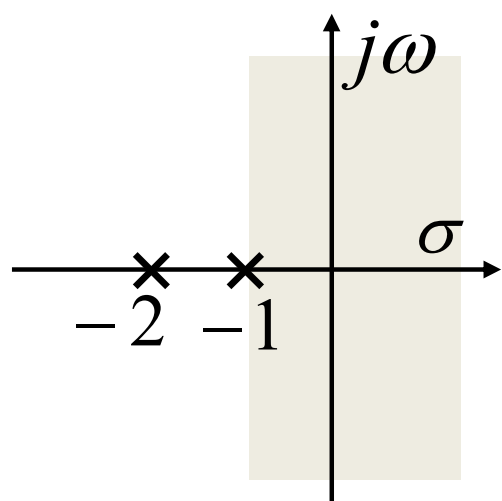
2. 根据 $X(s)$ 的ROC, 确定每一项的ROC。

3. 利用常用信号的变换对与拉氏变换的性质, 对每一项进行反变换。

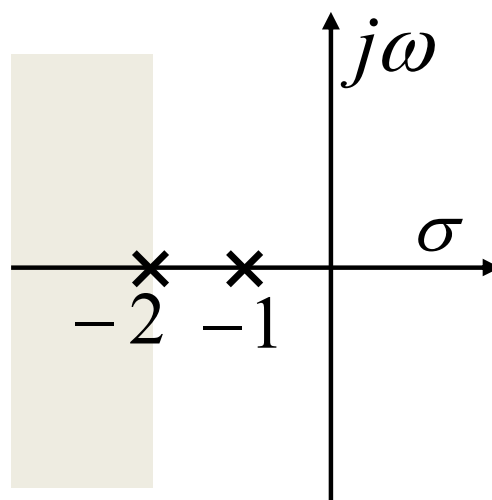
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

确定其可能的收敛域及所对应信号的属性。

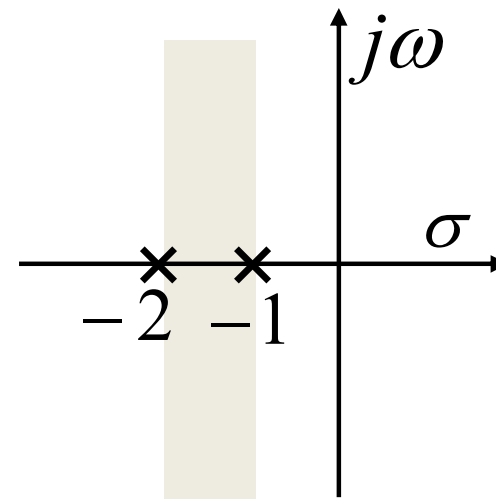
极点:  $s = -1, s = -2$



右边信号



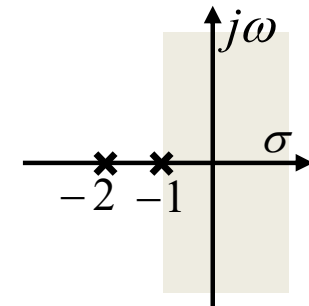
左边信号



双边信号

**例1.**  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$       ROC:  $\text{Re}[s] > -1$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



$$\frac{1}{s+1} \rightarrow \text{ROC: } \text{Re}[s] > -1 \leftrightarrow e^{-t}u(t)$$

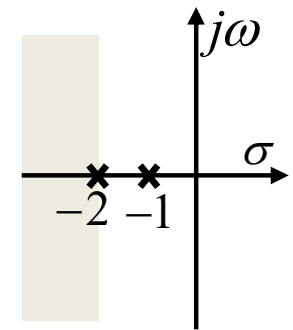
$$\frac{1}{s+2} \rightarrow \text{ROC: } \text{Re}[s] > -2 \leftrightarrow e^{-2t}u(t)$$

$$\therefore x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

**例2.**  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

ROC:  $\text{Re}[s] < -2$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



$$\frac{1}{s+1} \rightarrow \text{ROC: } \text{Re}[s] < -1 \leftrightarrow -e^{-t}u(-t)$$

$$\frac{1}{s+2} \rightarrow \text{ROC: } \text{Re}[s] < -2 \leftrightarrow -e^{-2t}u(-t)$$

$$\therefore x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)$$



**例3.**  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$       ROC:  $-2 < \text{Re}[s] < -1$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{1}{s+1} \rightarrow \text{ROC: } \text{Re}[s] < -1 \leftrightarrow -e^{-t}u(-t)$$

$$\frac{1}{s+2} \rightarrow \text{ROC: } \text{Re}[s] > -2 \leftrightarrow e^{-2t}u(t)$$

$$\therefore x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

❖ 留数法 (当  $X(s)$  是有理函数时) :

1. 求出  $X(s)$  的全部极点。
2. 求出  $X(s)e^{st}$  在 ROC 左边的所有极点处的留数之和, 它们构成了  $x(t)$  的因果部分。
3. 求出  $X(s)e^{st}$  在 ROC 右边的所有极点处的留数之和, 并加负号, 它们构成了  $x(t)$  的反因果部分。

**例.**  $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$       **ROC** :  $\text{Re}[s] < -2$

$X(s)$  **的极点**  $s = -1, s = -2$ , **均位于ROC右边**

$$\begin{aligned} x(t) &= -\sum_{i=1}^2 \text{Res}[X(s)e^{st}, s_i] \\ &= -\left(\frac{1}{s+2}e^{st}\Big|_{s=-1} + \frac{1}{s+1}e^{st}\Big|_{s=-2}\right) \\ &= -(e^{-t} - e^{-2t})u(-t) \end{aligned}$$

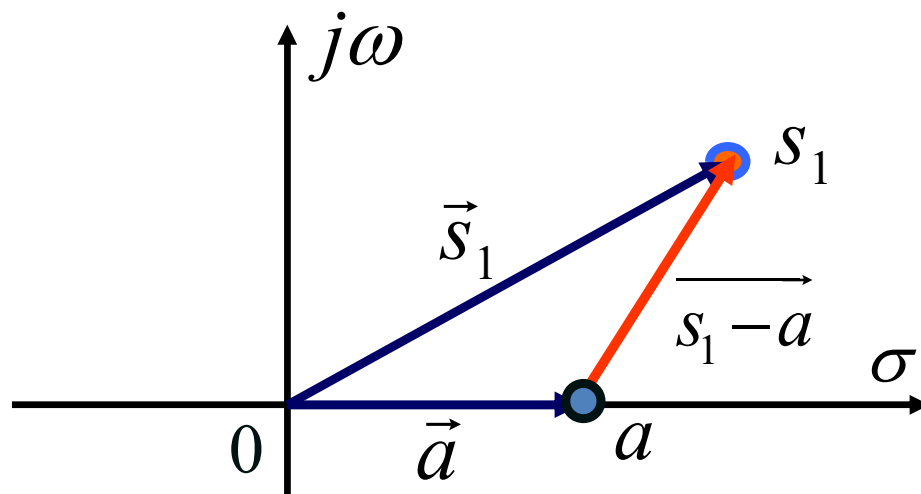
## 9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

### Geometric Evaluation of the Fourier Transform from the Pole-Zero Plot

- 可以用零极点图表示 $X(s)$ 的特征。当ROC包括 $j\omega$ 轴时，以 $s=j\omega$ 代入 $X(s)$ ，就可以得到 $X(j\omega)$ 。以此为基础可以用几何求值的方法从零极点图求得 $X(j\omega)$ 的特性。这在定性分析系统频率特性时有很大用处。

## 1. 单零点情况 $[X(s)=(s-a)]$ :

零点  $s=a$ , 要求出  $s=s_1$  时的  $X(s_1)$ , 可以作两个矢量  $s_1$  和  $a$ , 则  $X(s_1) = \overrightarrow{s_1 - a}$ 。



矢量  $\overrightarrow{s_1 - a}$  称为**零点矢量**, 它的长度

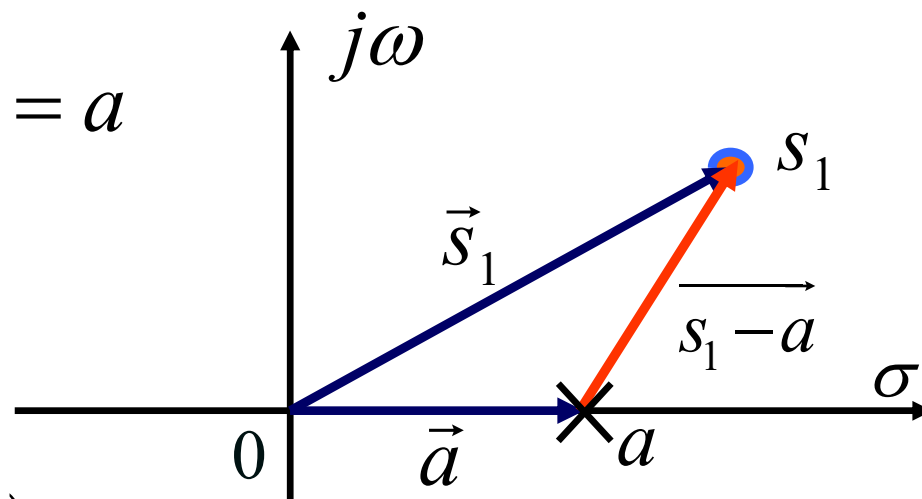
$|\overrightarrow{s_1 - a}|$  表示  $|X(s_1)|$ , 其幅角即为  $\angle X(s_1)$ 。

## 2. 单极点情况:

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \text{极点 } s = a$$

$$|X(s_1)| = \frac{1}{|s_1 - a|}$$

$$\angle X(s_1) = -\angle(s_1 - a)$$



直接由极点向 $s_1$ 点作矢量（称为**极点矢量**），其长度的倒数为 $|X(s_1)|$ ，幅角的负值为 $\angle X(s_1)$ 。

### 3. 一般情况:

对有理函数形式的  $X(s)$

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = M \frac{\prod_i (s - \beta_i)}{\prod_i (s - \alpha_i)}$$

因此有:

$$X(s_1) = M \frac{\prod_i (s_1 - \beta_i)}{\prod_i (s_1 - \alpha_i)} \quad |X(s_1)| = |M| \frac{\prod_i |s_1 - \beta_i|}{\prod_i |s_1 - \alpha_i|}$$

$$\angle X(s_1) = \sum_i \angle(s_1 - \beta_i) - \sum_i \angle(s_1 - \alpha_i)$$

即：从所有零点向  $s_1$  点作**零点矢量**，从所有极点向  $s_1$  点作**极点矢量**。所有零点矢量的长度之积除以所有极点矢量的长度之积即为  $|X(s_1)|$ 。所有零点矢量的幅角之和减去所有极点矢量的幅角之和即为  $\angle X(s_1)$ 。

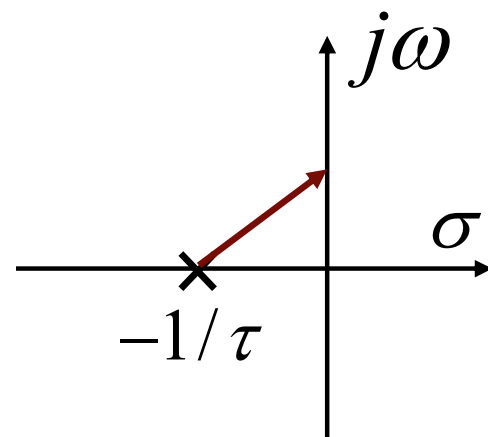
当  $s_1$  取为  $j\omega$  轴上的点时，即为傅里叶变换的几何求值。考查  $s_1$  在  $j\omega$  轴上移动时所有零、极点矢量的长度和幅角的变化，即可得出  $X(j\omega)$  的特性。



**例1. 一阶系统:**  $\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t),$$

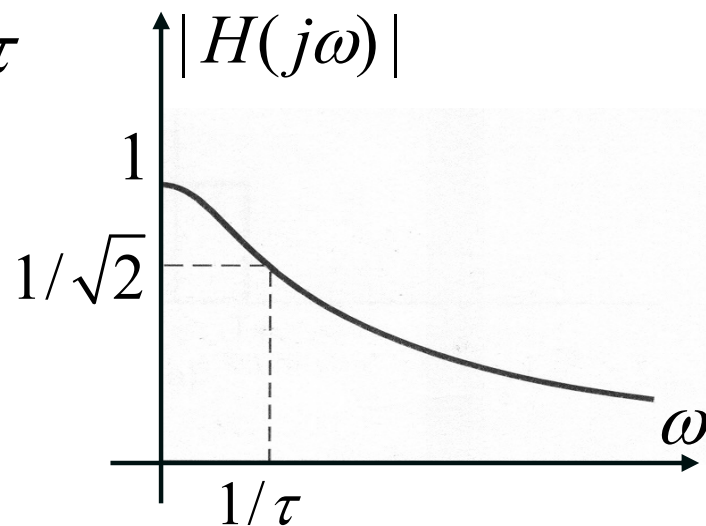
$$H(s) = \frac{1/\tau}{s + (1/\tau)}, \quad \text{Re}[s] > -\frac{1}{\tau}$$



随着  $\omega \uparrow$ ,  $|H(j\omega)|$  单调下降,

$\omega = \frac{1}{\tau}$  时, 下降到最大值的  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

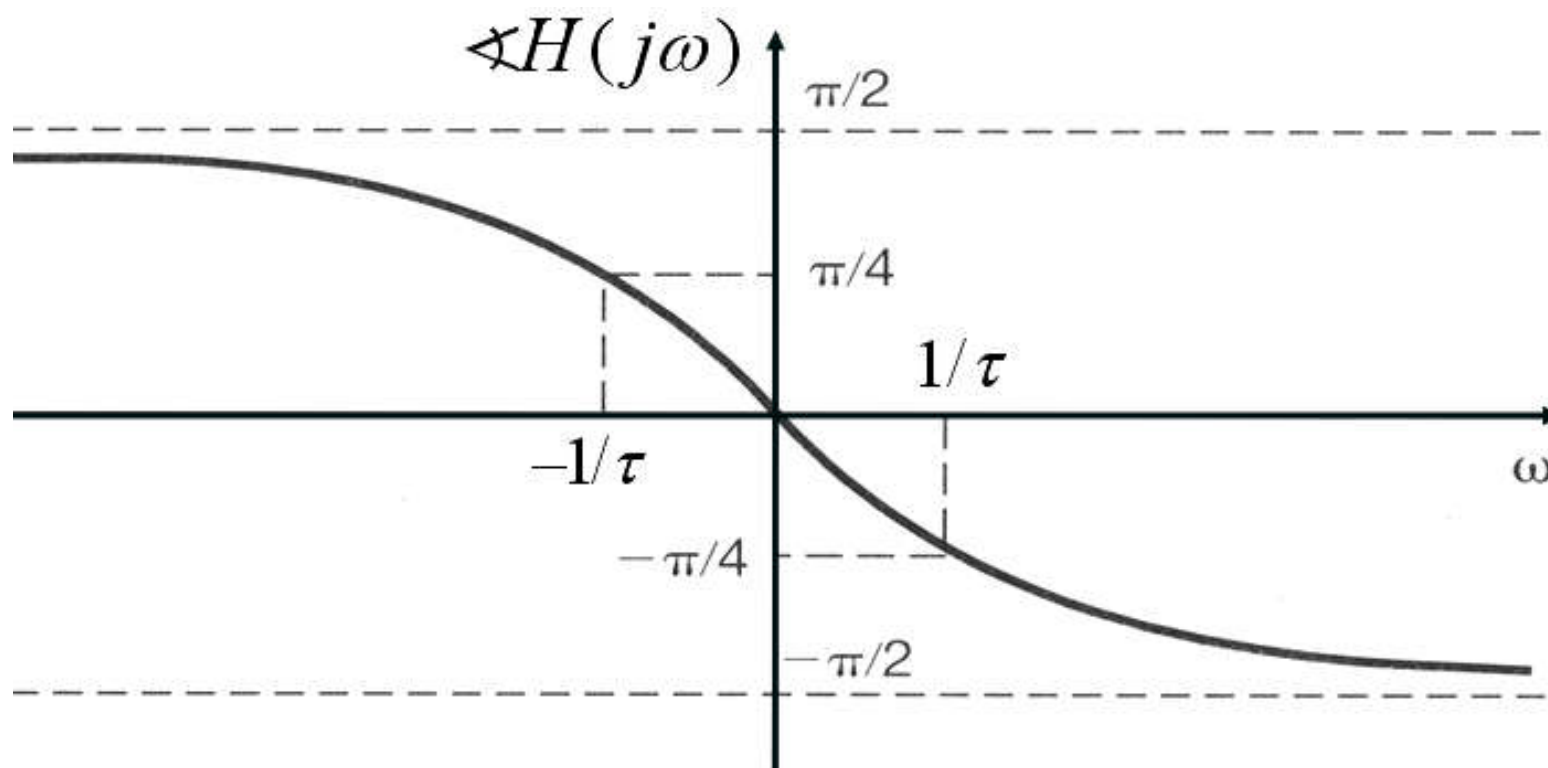
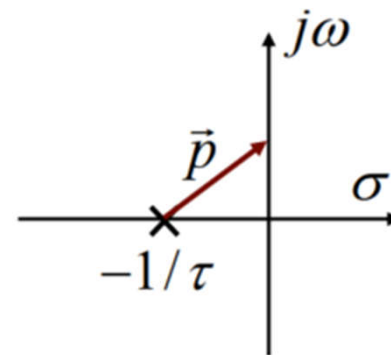
最大值在  $\omega=0$  时取得。



相位特性, 当  $\omega = 0$  时  $\angle H(j\omega) = 0$        $\angle H(j\omega) = -\angle \vec{p}$

随着  $\omega \uparrow$ ,  $\angle H(j\omega)$  趋向  $-\pi/2$  ;

$\omega \downarrow$ ,  $\angle H(j\omega)$  趋向  $\pi/2$  。



## 例2. 二阶系统:

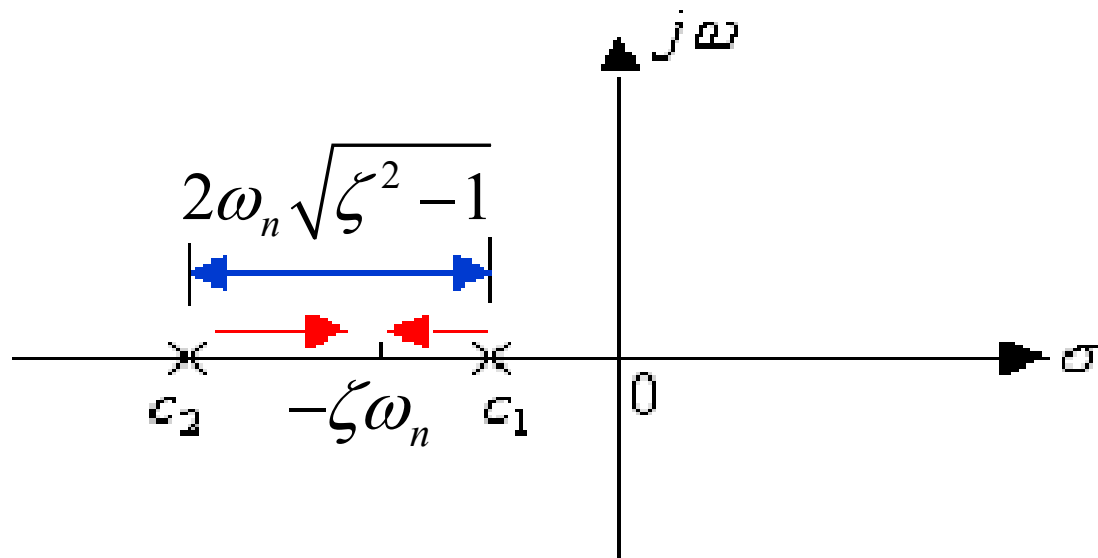
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dx(t)} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

$$h(t) = M \left( e^{c_1 t} - e^{c_2 t} \right) u(t),$$

其中,  $c_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$   $M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$

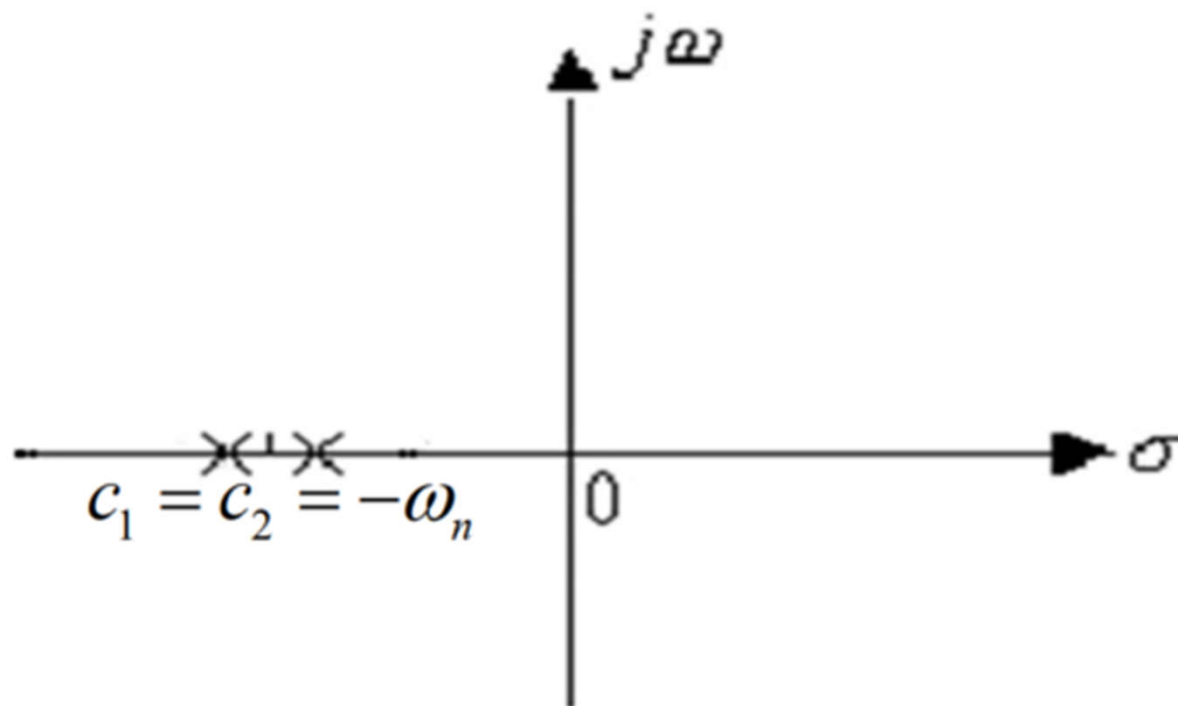
且  $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - c_1)(s - c_2)}$

1. 当  $\zeta > 1$  时,  $H(s)$  有两个实数极点, 此时系统过阻尼。 $c_1$  起主要作用。随着  $\zeta \downarrow$ , 两极点相向移动, 向  $-\zeta\omega_n$  处靠拢。



2. 当  $\zeta = 1$  时，两极点重合于  $-\omega_n$  处，成为二阶极点。系统处于临界阻尼状态。

$$\zeta = 1, c_1 = c_2 = -\omega_n, h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)$$



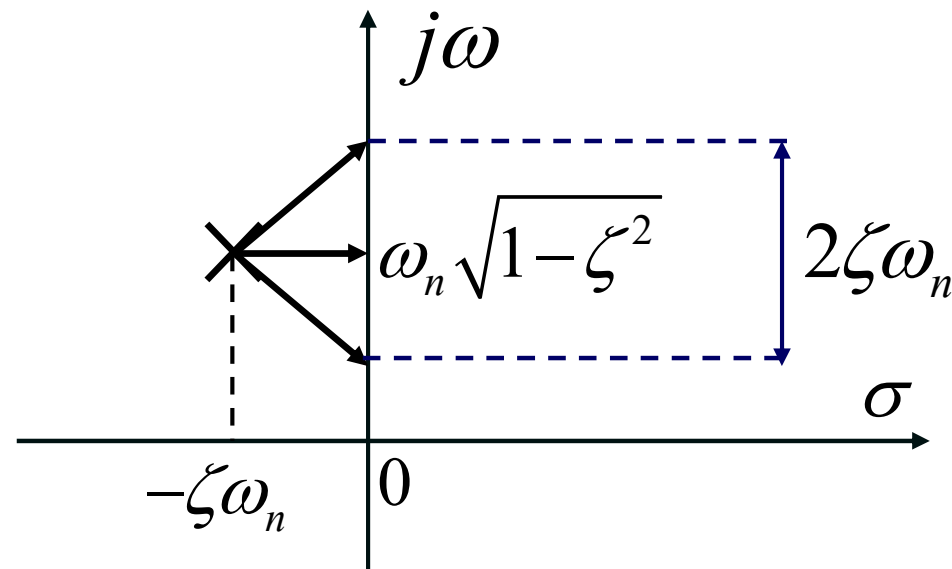
3.  $\zeta$  进一步减小, 则二阶极点分裂为共轭复数极点, 且随  $\zeta$  的减小而逐步靠近  $j\omega$  轴。极点运动的轨迹——根轨迹是一个半径为  $\omega_n$  的圆周。

此时系统处于欠阻尼状态, 随着  $\omega \uparrow$ , 位于第2象限的极点矢量比第3象限的极点矢量更短, 因此它对系统特性的影响较大。

当  $\zeta < 1/\sqrt{2}$  时, 由于该极点矢量变得很短, 因而会使  $|H(j\omega)|$  出现峰值。其峰点位于  $\omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  处,

峰值为  $|H(j\omega)|_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

在  $\zeta < 1/\sqrt{2}$  时，若认为主极点矢量增长  $\sqrt{2}$  倍时，对应的频率是系统带宽的截止频率，则可以近似确定此时的系统带宽约为  $2\zeta\omega_n$ 。

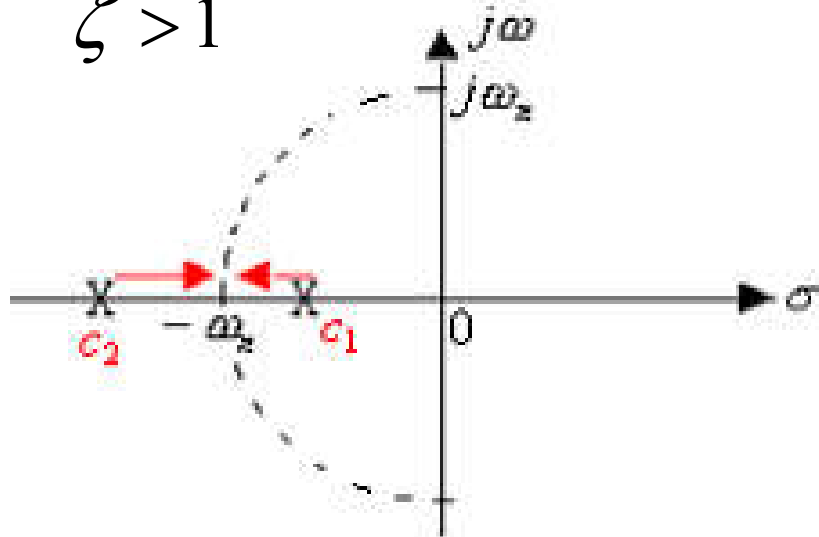


4. 当  $\zeta = 0$  时，两极点分别位于  $j\omega$  轴上的  $\pm j\omega_n$  处，此时系统处于**无阻尼状态**。

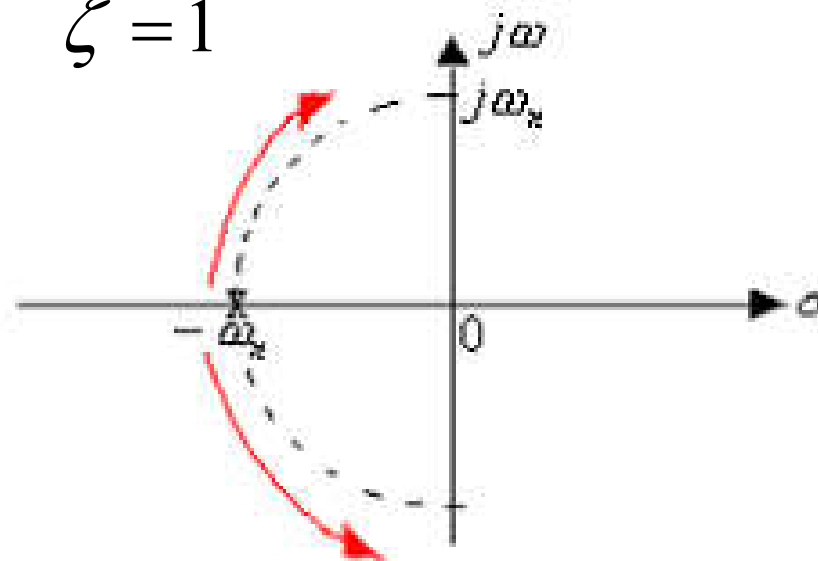
系统的相位特性也可以从零极点图得到。此时，只需考察当动点沿  $j\omega$  轴移动时所有极点矢量和所有零点矢量的幅角变化，用所有零点矢量的幅角之和减去所有极点矢量的幅角之和，即可得到系统的相位特性。



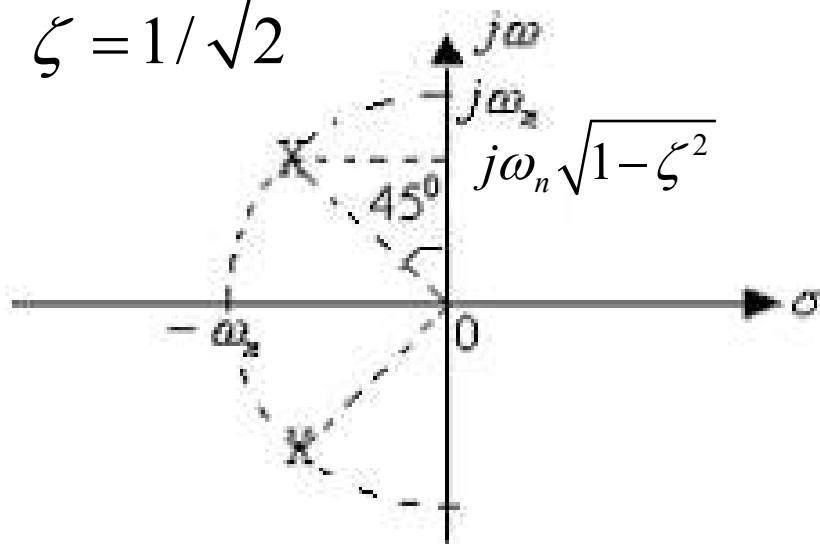
$$\zeta > 1$$



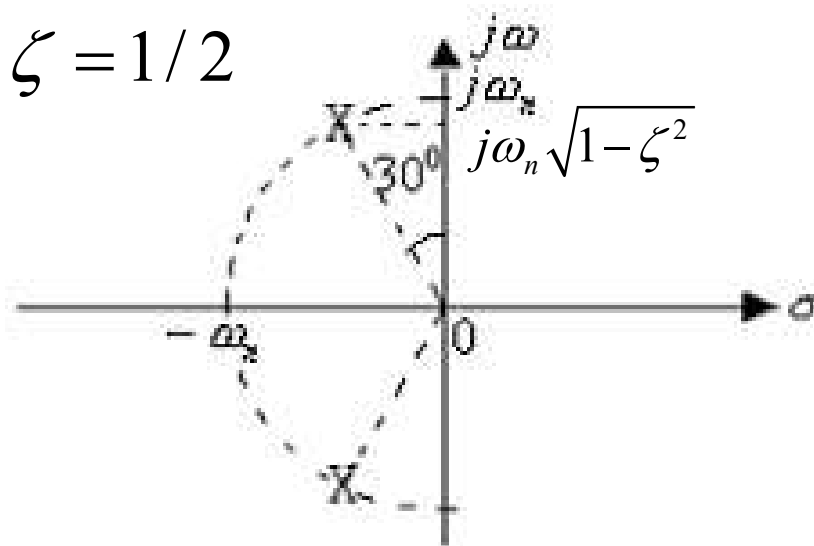
$$\zeta = 1$$



$$\zeta = 1/\sqrt{2}$$



$$\zeta = 1/2$$

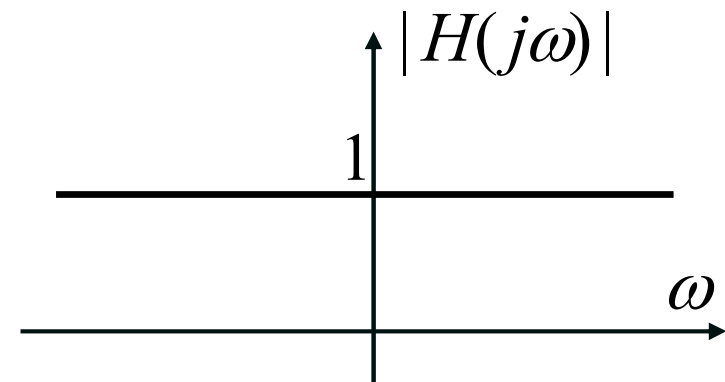
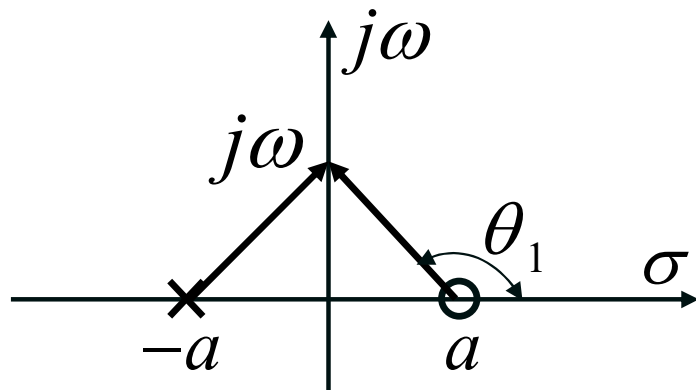


### 例3. 全通系统:

#### 考查零极点对称分布的系统

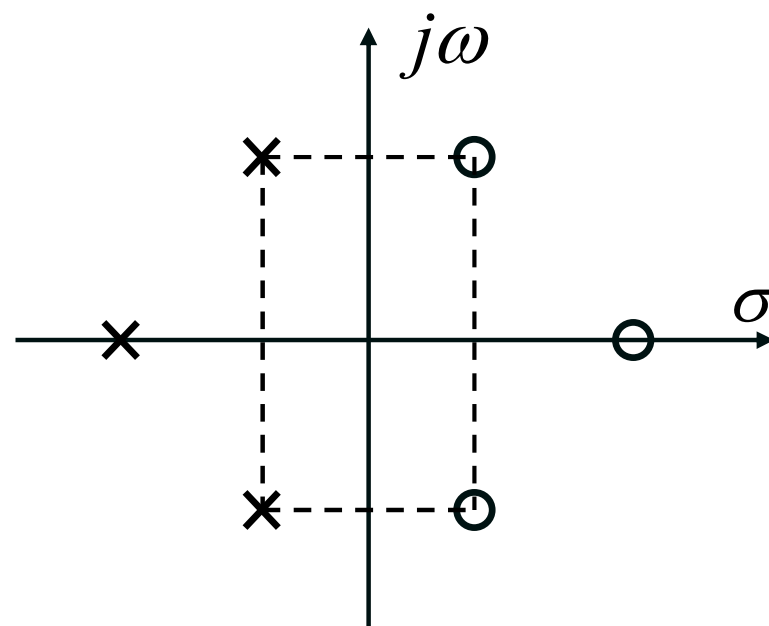
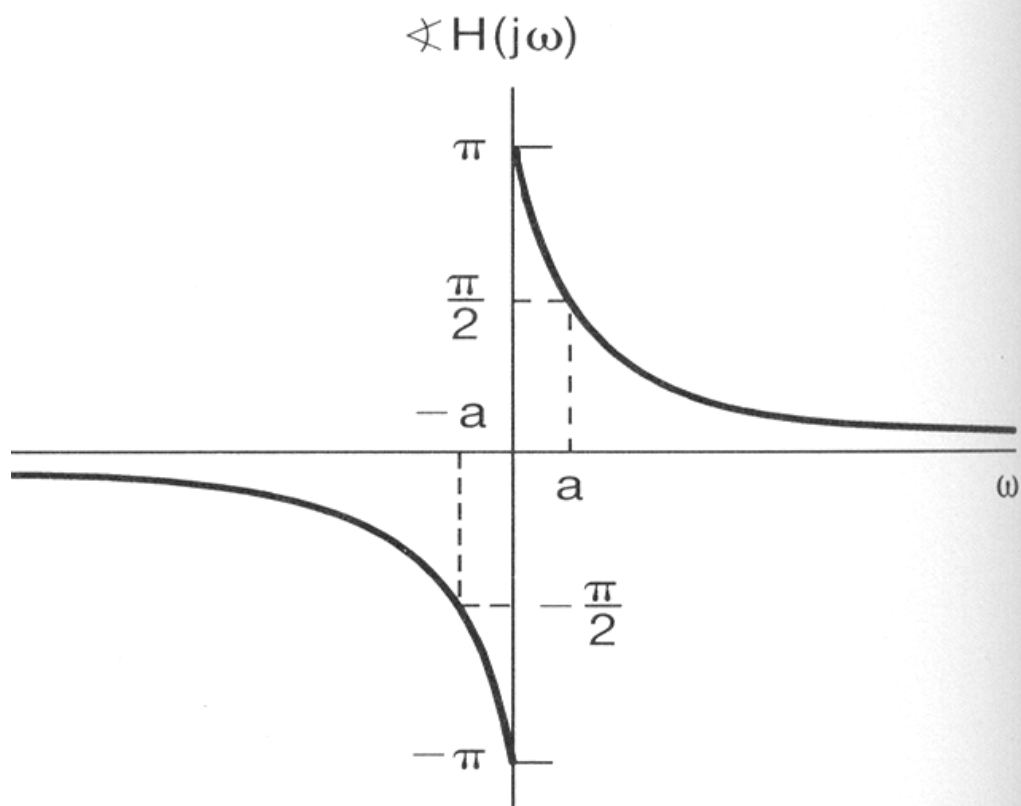
$$H(s) = \frac{s - a}{s + a} \quad (\text{一阶全通})$$

❖ 该系统的  $|H(j\omega)|$  在任何时候都等于1，所以称为全通系统。



## ❖ 其相位特性

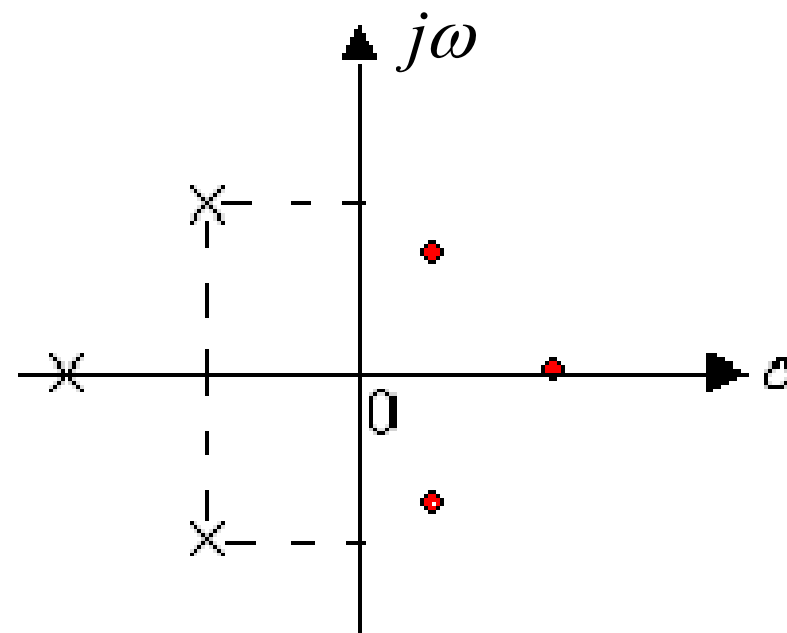
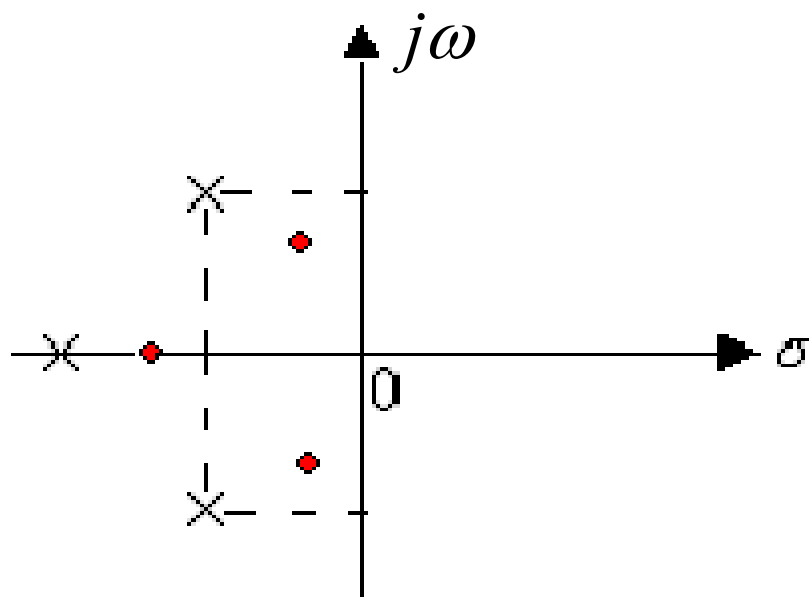
$$\angle H(j\omega) = \theta_1 - (\pi - \theta_1) = 2\theta_1 - \pi$$



图示为三阶全通系统，其零极点分布呈四角对称特征。

#### 例4. 最小相位系统:

考查两个系统，它们的极点相同，零点分布关于  $j\omega$  轴对称。其中一个系统的零点均在左半平面，另一个系统的零点均在右半平面。

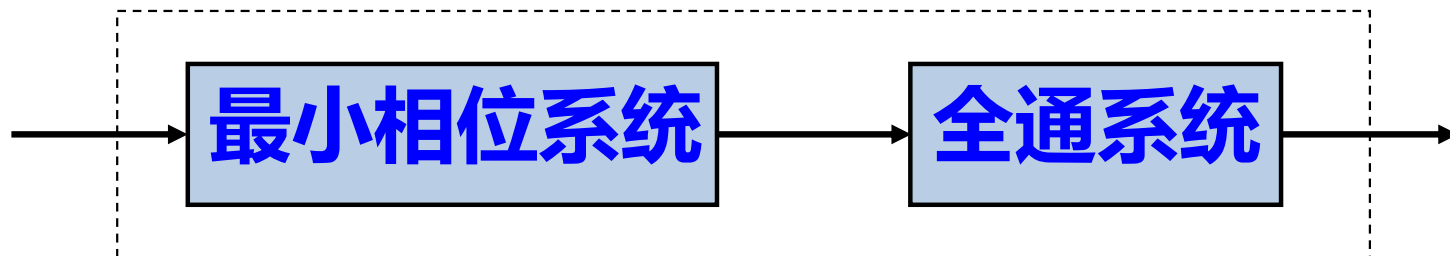


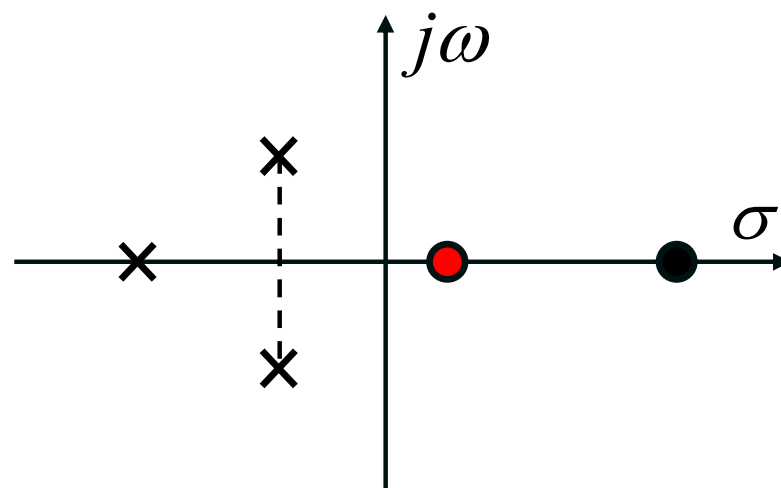
显然这两个系统的幅频特性是相同的。但零点在左半平面的系统其相位总小于零点在右半平面的系统。因此将零极点均位于左半平面的系统称为最小相位系统。

工程应用中设计的各种频率选择性滤波器，如：Butterworth、Chebyshev、Cauer滤波器都是最小相位系统。

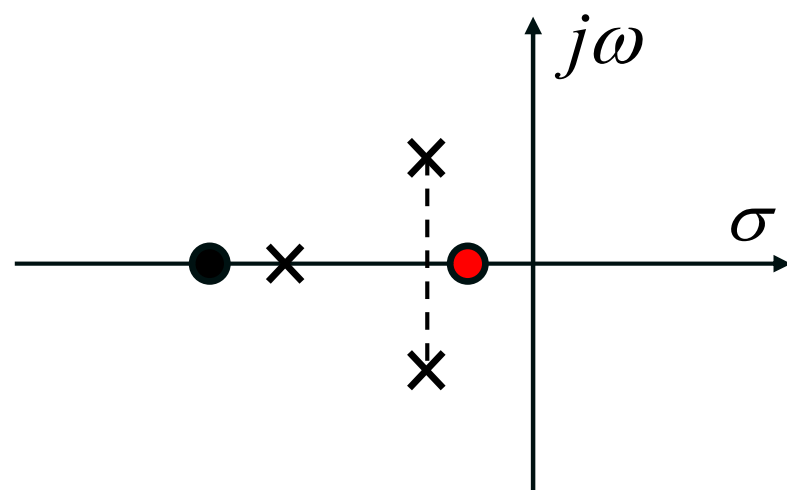
从本质上讲系统的特性是由系统的零、极点分布决定的。对系统进行优化设计，实质上就是优化其零、极点的位置。

当工程应用中要求实现一个非最小相位系统时，通常采用将一个最小相位系统和一个全通系统级联来实现。

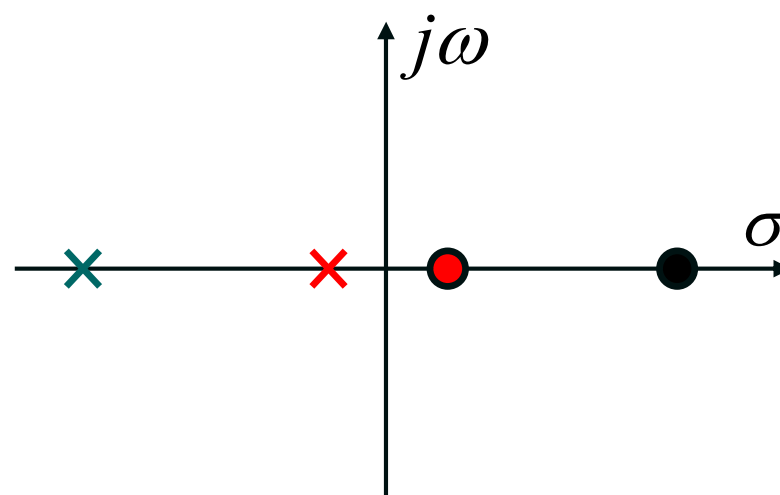




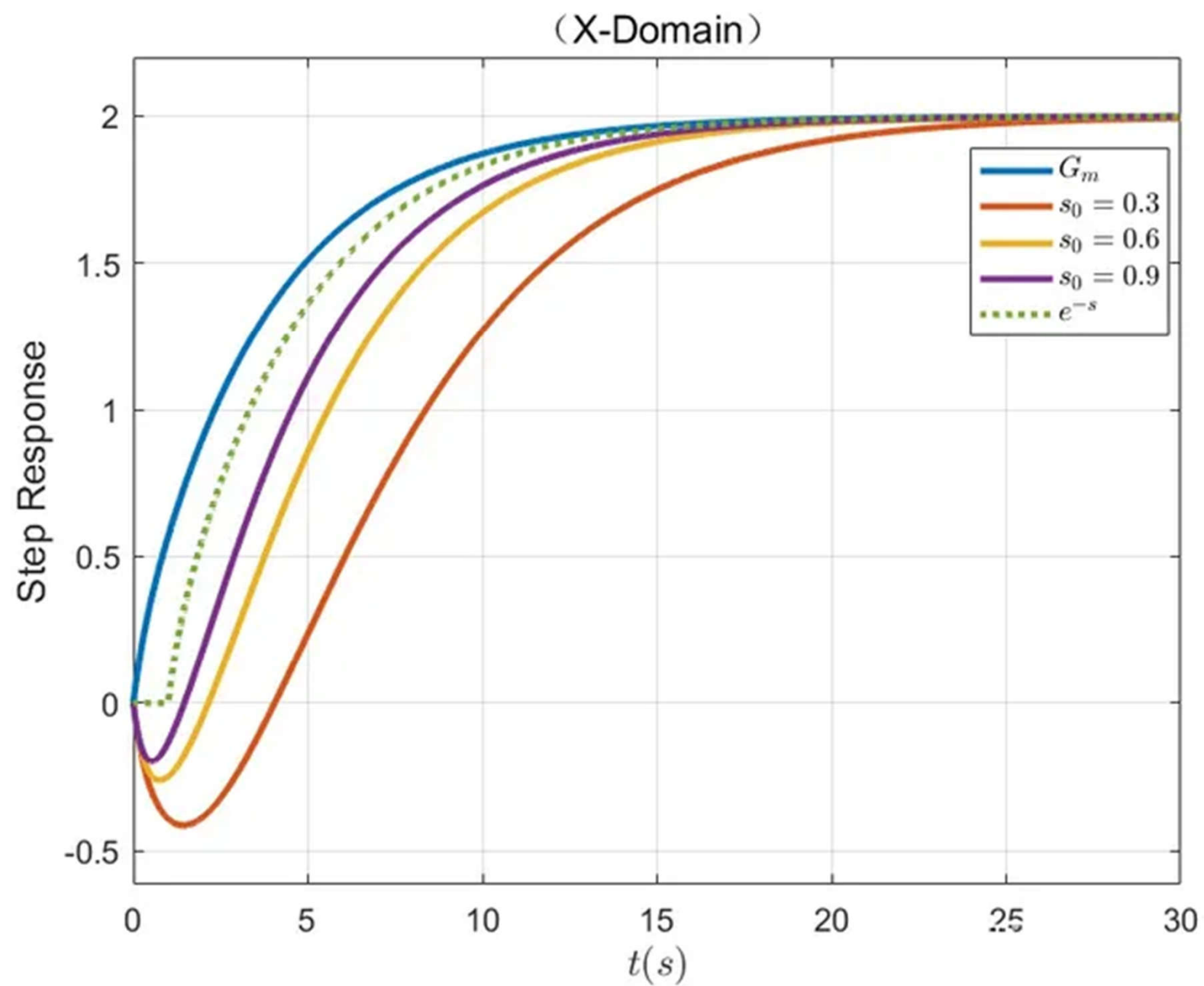
**非最小相位系统**



**最小相位系统**



**全通系统**





## 研究傅立叶变换几何求值的意义：

不是用来计算 $X(j\omega)$ ，而是用来进行系统的特性分析，以及零极点的移动对整个系统的影响。在零极点图上，可以通过几何向量的关系，判断出系统的频率响应 $H(j\omega)$ 的模和相位随 $\omega$ 的变化趋势，从而分析该系统的特性。

## 9.5 拉氏变换的性质

### Properties of the Laplace Transform

❖ 拉氏变换与傅氏变换一样具有很多重要的性质。这里只着重于ROC的讨论。

#### 1. 线性 (Linearity) :

若  $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \quad \text{ROC} : R_1$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \quad \text{ROC} : R_2$$

则  $ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s)$

**ROC至少是**  $R_1 \cap R_2$

**例.**  $x_1(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$        $x_2(t) = -e^{-t}u(t)$

$$X_1(s) = 1 + \frac{1}{s+1} = \frac{s+2}{s+1}, \quad \text{ROC: } \sigma > -1$$

$$X_2(s) = \frac{-1}{s+1}, \quad \text{ROC: } \sigma > -1$$

**而**  $x_1(t) + x_2(t) = \delta(t) \leftrightarrow 1$     **ROC为整个S平面**

- **当R1与R2无交集时，表明X(s)不存在。**

## 2. 时移性质 (Time Shifting) :

**若**  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ , ROC:  $R$

**则**  $x(t-t_0) \leftrightarrow X(s)e^{-st_0}$ , **ROC不变**

## 3. S域平移 (Shifting in the s-Domain) :

**若**  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ , ROC:  $R$  **则**

$$x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s-s_0), \text{ ROC: } R + \text{Re}[s_0]$$

**表明**  $X(s-s_0)$  **的ROC是将**  $X(s)$  **的ROC平移**  
**了一个**  $\text{Re}[s_0]$  **。**

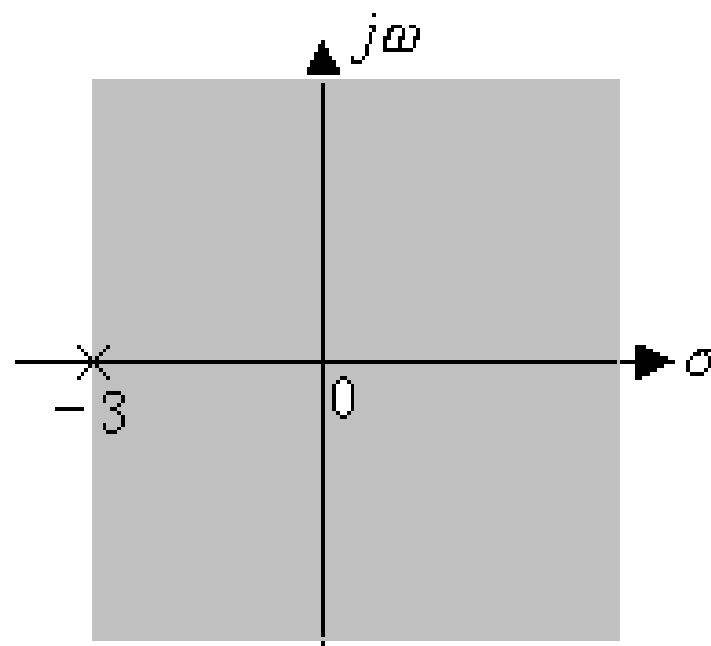
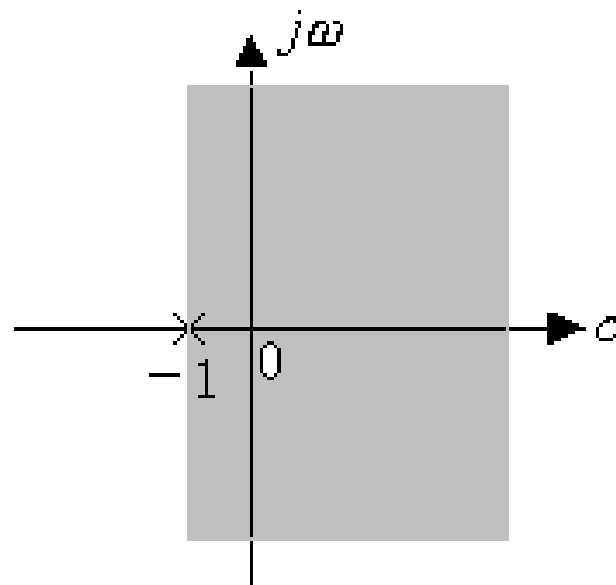
**例.**  $x(t) = e^{-t}u(t),$

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

$$x(t) \cdot e^{-2t} = e^{-3t}u(t)$$

$$X(s+2) = \frac{1}{s+3}$$

**显然** ROC:  $\sigma > -3$



#### 4. 时域尺度变换 (Time Scaling) :

若  $x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC} : R$

则  $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ROC} : aR$

当  $\sigma \in R$  时  $X(s)$  收敛,  $\text{Re}\left[\frac{s}{a}\right] \in R$  时  $X\left(\frac{s}{a}\right)$  收敛

$$\therefore \text{Re}[s] \in a \cdot R$$

例.  $x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$

求  $x\left(\frac{t}{2}\right) = e^{-\frac{t}{2}}u(t)$  的拉氏变换及ROC

$$X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} = \frac{2}{2s + 1}, \quad \text{ROC: } \sigma > -\frac{1}{2}$$

**可见：**若信号在时域尺度变换，其拉氏变换的ROC在S平面上作相反的尺度变换。

**特例**  $x(-t) \leftrightarrow X(-s), \quad \text{ROC: } -R$

**5. 共轭对称 (Conjugation) 性：**

**若**  $x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC: } R$  **则**

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(s^*), \quad \text{ROC: } R$$

**当  $x(t)$  为实信号时，有：**  $x^*(t) = x(t)$

$$\therefore X(s) = X^*(s^*)$$

**由此可得以下结论：**

**如果  $x(t)$  是实信号，且  $X(s)$  在  $s_0$  有极点（或零点），则  $X(s)$  一定在  $s_0^*$  也有极点或零点。这表明：实信号的拉氏变换其复数零、极点必共轭成对出现。**



## 6. 卷积性质: (Convolution Property)

**若**  $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \quad \text{ROC} : R_1$

$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \quad \text{ROC} : R_2$  **则**

$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s) \quad \text{ROC} : \text{包括 } R_1 \cap R_2$

**例.**  $X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{ROC} : R_1 = \sigma > -1$

$X_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}, \quad \text{ROC} : R_2 = \sigma > -2$

**显然有:**  $R_1 \cap R_2 = \sigma > -1$

$$X_1(s)X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad \sigma > -2, \quad \text{ROC扩大}$$

原因是  $X_1(s)$  与  $X_2(s)$  相乘时，发生了零极点相抵消的现象。当被抵消的极点恰好在ROC的边界上时，就会使收敛域扩大。

## 7. 时域微分: (Differentiation in the Time Domain)

若  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ , ROC:  $R$

则  $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s)$ , ROC包括  $R$  , 有可能扩大。

## 8. s 域微分: (Differentiation in the s-Domain)

若  $x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC} : R$

则  $-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}, \quad \text{ROC} : R$

例.  $X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{ROC} : \sigma > -a$  求  $x(t)$

$$\therefore \frac{1}{(s+a)^2} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s+a} \right)$$

$$\therefore x(t) = te^{-at}u(t)$$

## 9. 时域积分: (Integration in the Time Domain )

若  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ,    ROC :  $R$

则  $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$

ROC : **包括**  $R \cap (\operatorname{Re}[s] > 0)$

$$\because \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$$

ROC : **包括**

$R \cap (\operatorname{Re}[s] > 0)$

## 10. 初值与终值定理: (The Initial- and Final- Value Theorems)

如果  $x(t)$  是因果信号, 且在  $t = 0$  不包含奇异函数, 则  $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$  ——初值定理

证明:

$\because t < 0$  时  $x(t) = 0$ , 且在  $t = 0$  不包含奇异函数。

$$\therefore x(t) = x(t)u(t)$$

将  $x(t)$  在  $t=0^+$  展开为Taylor级数有:

$$x(t) = \left[ x(0^+) + x'(0^+)t + x''(0^+)\frac{t^2}{2} + \cdots + x^{(n)}(0^+)\frac{t^n}{n!} + \cdots \right] u(t)$$

对上式两边做拉氏变换:

$$X(s) = \frac{1}{s} x(0^+) + \frac{1}{s^2} x'(0^+) + \cdots + \frac{1}{s^{n+1}} x^{(n)}(0^+) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(0^+) \frac{1}{s^{n+1}}$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

Sec. 9.6

$$\frac{t^n}{n!} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^{n+1}}$$

ROC:  $\text{Re}\{s\} > 0$

如果  $x(t)$  是因果信号, 且在  $t = 0$  不包含奇异函数,  $X(s)$  除了在  $s = 0$  可以有单阶极点外, 其余极点均在  $s$  平面的左半边, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad \text{—— 终值定理}$$

证:  $\because x(t)$  是因果信号, 且在  $t = 0$  无奇异函数,

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt &= \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} dx(t) \\ &= x(t)e^{-st} \Big|_{0^+}^{\infty} + s \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} x(t) dt \end{aligned}$$

$\because X(s)$  除了在  $s = 0$  可以有一阶极点外, 其它极点均在  $s$  平面的左半平面 (即保证  $x(t)$  有终值)。故  $sX(s)$  的ROC中必包含  $j\omega$  轴。表明:

$s$  的实部  $\sigma$  可以大于零, 因此  $x(t)e^{-st} \Big|_{0^+}^{\infty} = -x(0^+)$

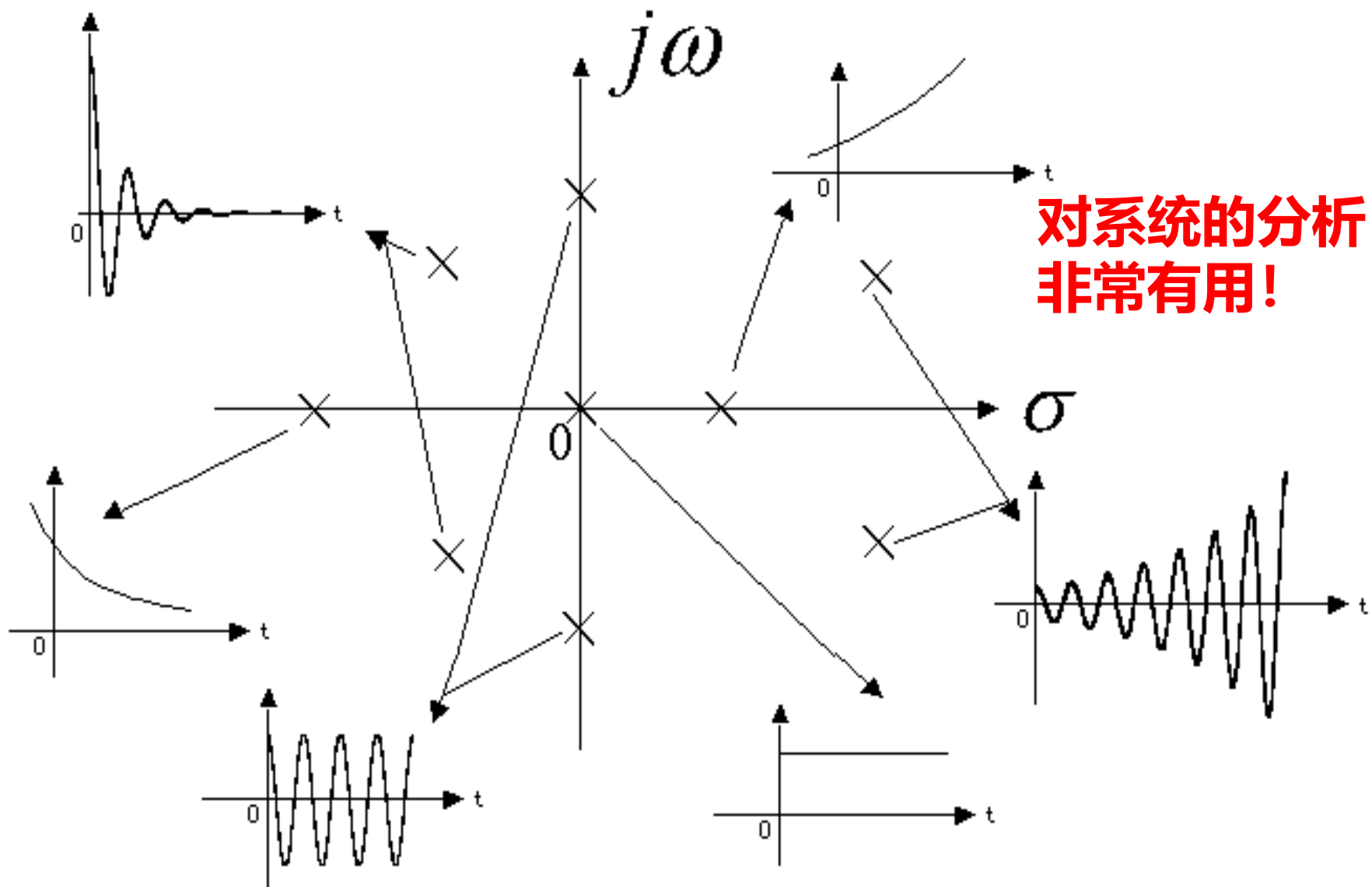
$$\therefore \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = -x(0^+) + sX(s) \quad \text{当 } s \rightarrow 0 \text{ 时,}$$

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} dx(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^+)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$



## 极点在 $s$ 平面的分布与终值的关系



## 9.6 常用拉氏变换对

### Some Laplace Transform Pairs

$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s + a}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-st_0}$

## 9.7 用拉氏变换分析与表征LTI系统

Analysis and Characterized of LTI Systems Using the Laplace Transform

### 一. 系统函数的概念:

以卷积特性为基础，可以建立LTI系统的拉氏变换分析方法，即

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

其中  $H(s)$  是  $h(t)$  的拉氏变换，称为系统函数或转移函数。

如果  $X(s)$  的ROC包括  $j\omega$  轴, 则  $X(s)$  和  $H(s)$  的ROC必定包括  $j\omega$  轴, 以  $s = j\omega$  代入, 即有

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

这就是LTI系统的傅里叶分析。  $H(j\omega)$  即是系统的频率响应。

这些方法之所以成立的本质原因在于复指数函数是一切LTI系统的特征函数。

当以  $e^{j\omega t}$  为基底分解信号时，LTI系统对输入信号的响应就是  $X(j\omega) \cdot H(j\omega)$ ；而以  $e^{st}$  为基底分解信号时，系统的输出响应就是  $X(s) \cdot H(s)$ 。

$H(s)$  连同相应的ROC也能完全描述一个LTI系统。系统的许多重要特性在  $H(s)$  及其ROC中一定有具体的体现。

## 二. 用系统函数表征LTI系统:

### 1. 因果性:

如果  $t < 0$  时  $h(t) = 0$  , 则系统是因果的。

如果  $t > 0$  时  $h(t) = 0$  , 则系统是反因果的。

因此, 因果系统的  $h(t)$  是右边信号, 其  $H(s)$  的 ROC 必是最右边极点的右边。由于反因果系统的  $h(t)$  是左边信号,  $H(s)$  的 ROC 必是最左边极点的左边。

应该强调指出, 反过来并不能判定系统是否因果。ROC 是最右边极点的右边并不一定系统因果。

只有当  $H(s)$  是有理函数时, 逆命题才成立。

## 2. 稳定性:

如果系统稳定, 则有  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$  , 因此  $H(s)$  必存在, 意味着  $H(j\omega)$  的ROC必然包括  $j\omega$  轴。

综合以上两点, 可以得到: 因果稳定系统的  $H(s)$ , 其全部极点必须位于  $s$  平面的左半边。

**例1. 某系统的  $h(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$**

**显然该系统是因果的，确定系统的稳定性。**

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}, \quad \text{ROC: } \text{Re}[s] > -1$$

**显然，ROC是最右边极点的右边。**

**$\therefore$  ROC包括  $j\omega$  轴**

**$\therefore$  系统也是稳定的。**

**H(s)的全部极点都在S平面的左半边。**



**例2. 若有**  $H(s) = \frac{e^s}{s+1}$ ,  $\text{Re}[s] > -1$

**$H(s)$ 的ROC是最右边极点的右边, 但  $H(s)$  是非有理函数,  $h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$ , 系统是非因果的。**

**由于ROC包括  $j\omega$  轴, 该系统仍是稳定的。**

**而对系统**  $H(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$ ,  $\text{Re}[s] > -1$

**$H(s)$  仍是非有理函数, ROC是最右边极点的右边, 但由于  $h(t) = e^{-(t-1)}u(t-1)$ , 系统是因果的。**

## 结 论:

1. 如果LTI系统的系统函数是有理函数，且全部极点位于S平面的左半边，则系统是因果、稳定的。
2. 如果LTI系统的系统函数是有理函数，且系统因果，则系统函数的ROC是最右边极点的右边。若系统反因果，则系统函数的ROC是最左边极点的左边。
3. 如果LTI系统是稳定的，则系统函数的ROC必然包括  $j\omega$  轴。

### 三. 由LCCDE描述的LTI系统的系统函数:

对  $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$  做拉氏变换, 可得

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)}, \text{ 是一个有理函数}$$

$H(s)$  的ROC需要由系统的相关特性来确定。

1) 如果LCCDE具有一组全部为零的初始条件, 则  $H(s)$  的ROC必是最右边极点的右边。

2) 如果已知LCCDE描述的系统是因果的, 则  $H(s)$  的ROC必是最右边极点的右边。

3) 如果已知LCCDE描述的系统是稳定的, 则  $H(s)$  的ROC 必包括  $j\omega$  轴。

## 四. 系统特性与系统函数的关系 (自学)

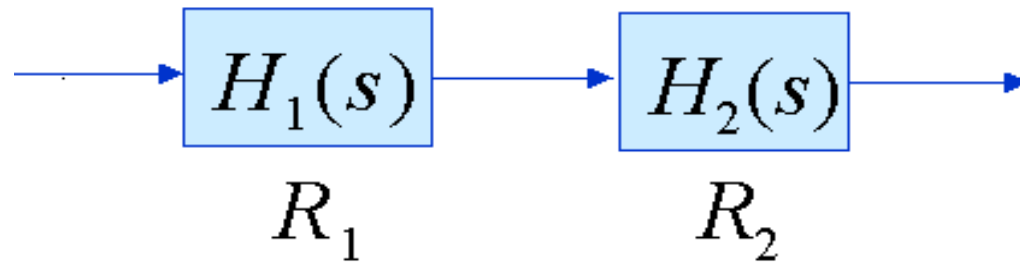
## 五. Butterworth滤波器 (自学)

## 9.8 系统函数的代数属性与系统的级联并联型结构

### System Function Algebra and Block Diagram Representations

#### 一. 系统互联时的系统函数:

##### 1. 级联:

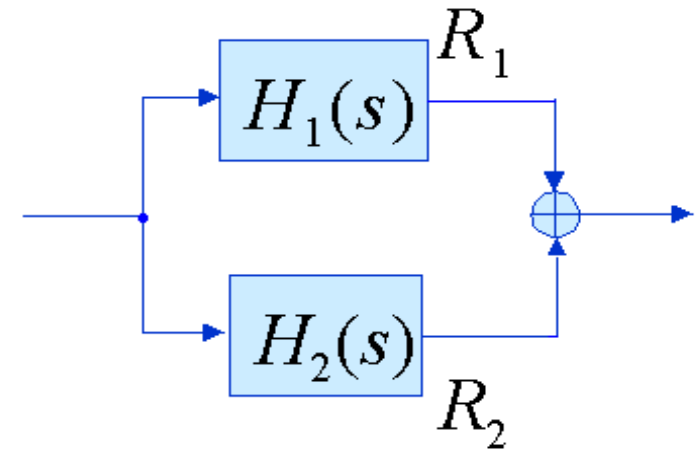


$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

ROC: **包括**  $R_1 \cap R_2$

2. 并联:  $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$

ROC: 包括  $R_1 \cap R_2$



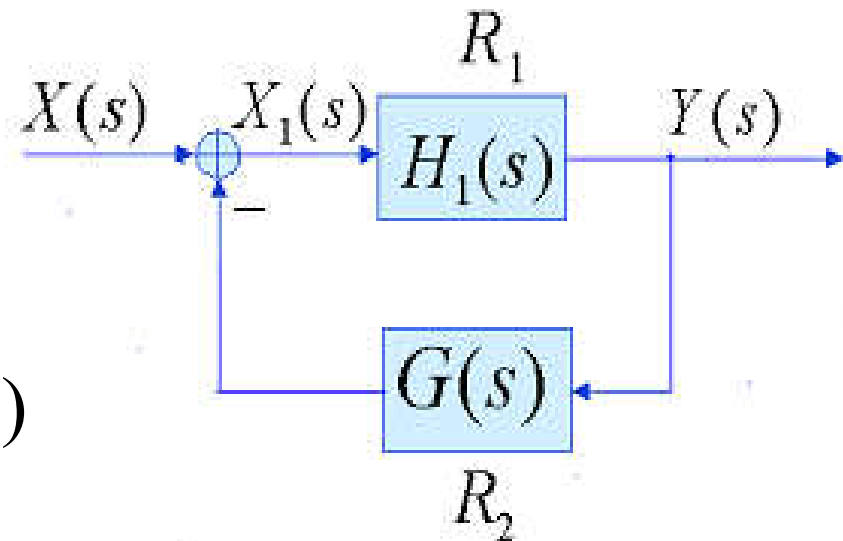
3. 反馈联结:

$$X_1(s) = X(s) - G(s)Y(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)H_1(s)$$

$$= [X(s) - G(s)Y(s)]H_1(s)$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + G(s)H_1(s)}$$



ROC: 包括  $R_1 \cap R_2$

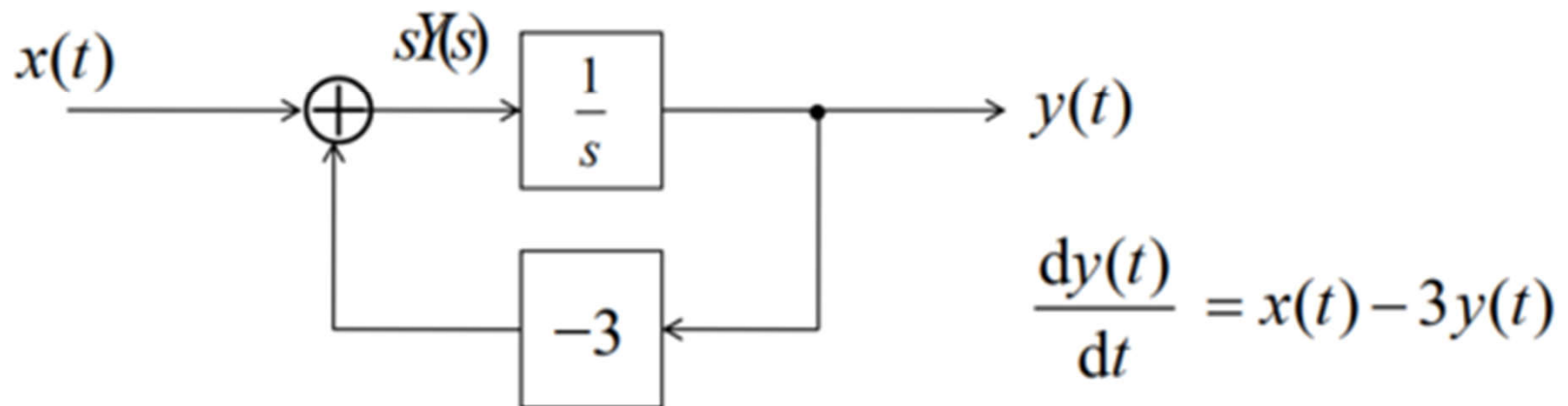
## 二. 由微分方程和有理系统函数描述的因果线性时不变系统的方框图表示

Example 1. Consider the following causal LTI system

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

i.e.

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \quad \text{or} \quad \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$



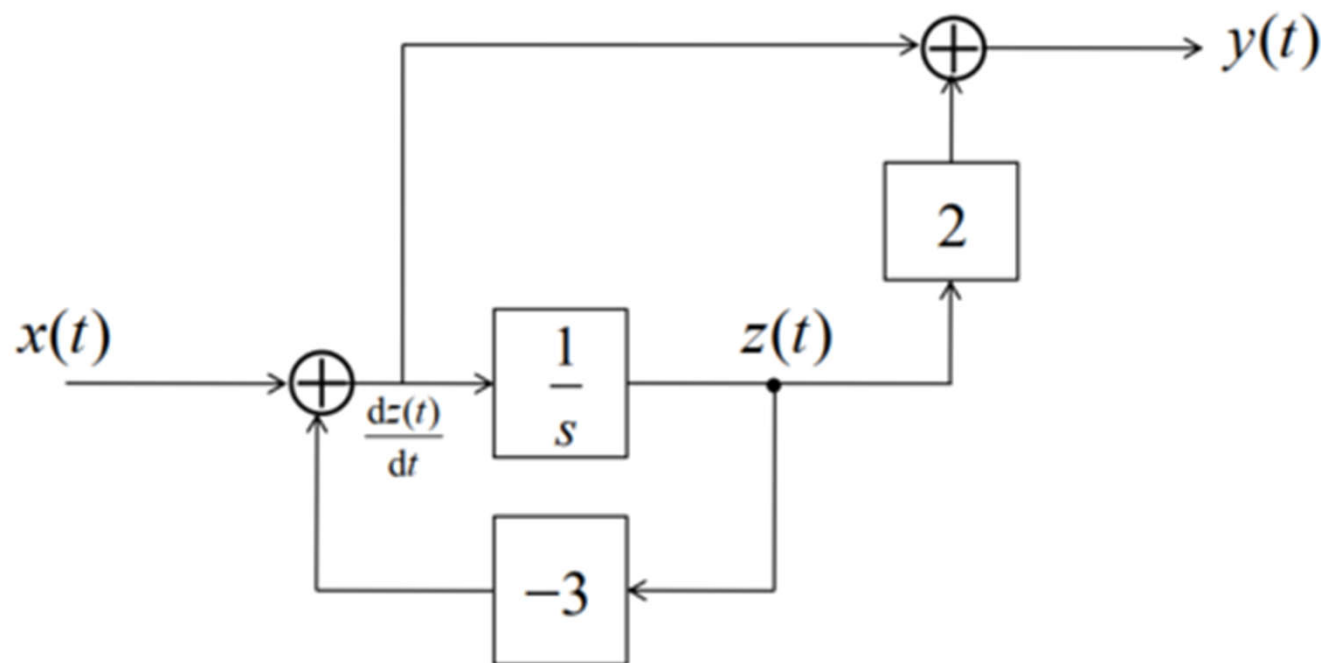


Example 2. Consider the following causal LTI system

$$H(s) = \frac{s+2}{s+3} \quad \text{i.e.} \quad Y(s) = \frac{s+2}{s+3} X(s)$$

Let

$$Z(s) = \frac{1}{s+3} X(s) \quad \text{Then} \quad Y(s) = sZ(s) + 2Z(s)$$



Example 3. Consider a second-order causal LTI system

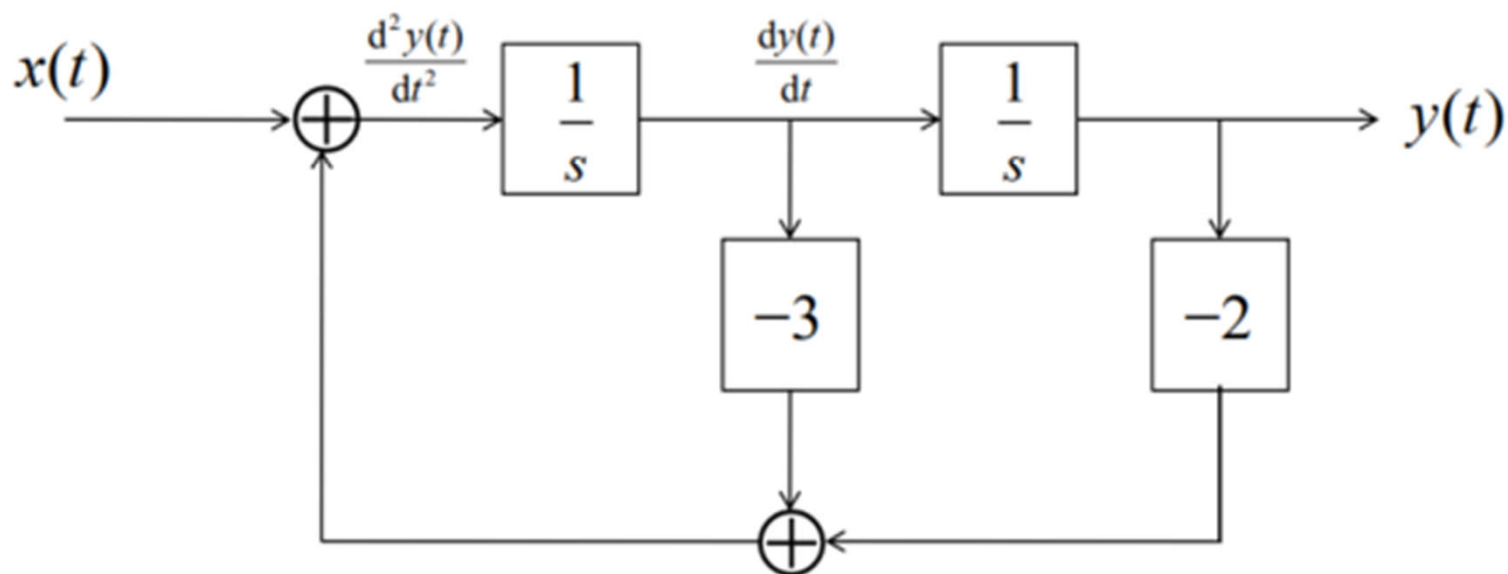
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

i.e.

$$s^2 Y(s) = X(s) - 3sY(s) - 2Y(s)$$

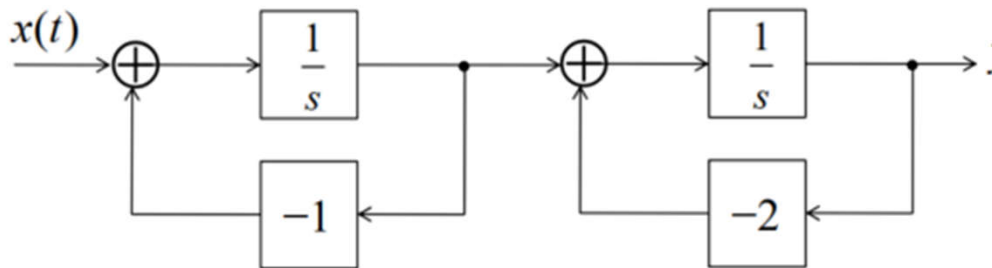
or

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t) - 3 \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t)$$



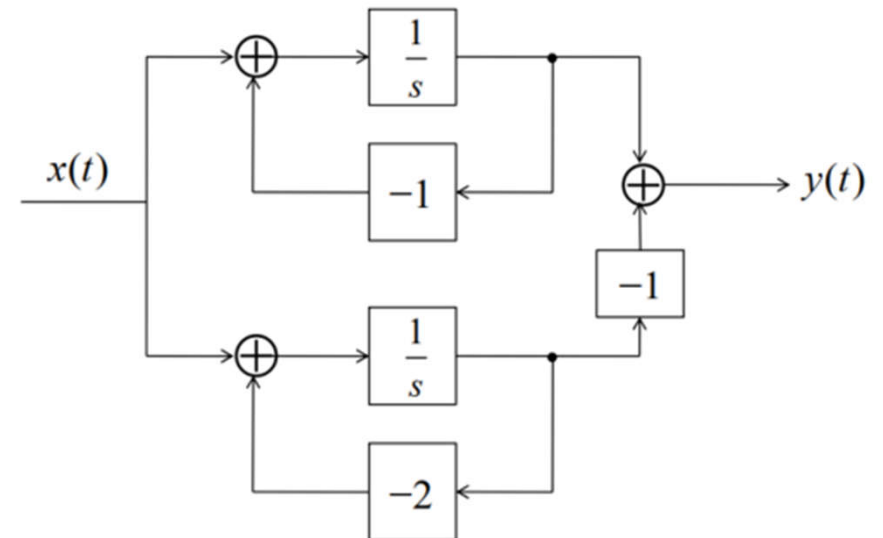
An alternative approach: through **series interconnection**

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}$$



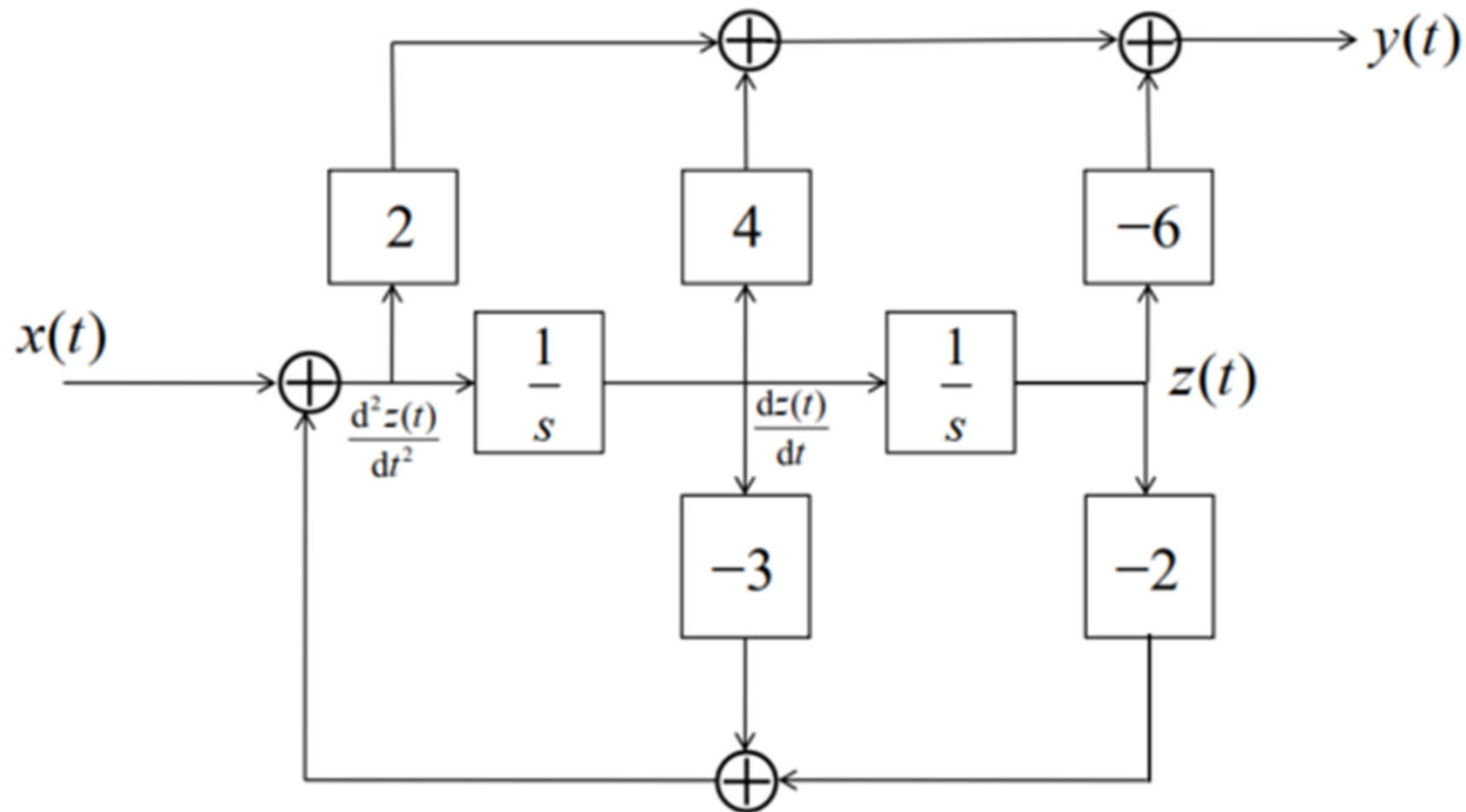
Still another approach: through **parallel interconnection**

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



Example 4. Consider a causal LTI system

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot (2s^2 + 4s - 6)$$



Other possible approaches:

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} \\&= \left( \frac{2(s-1)}{s+2} \right) \left( \frac{s+3}{s+1} \right) \\&= 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1} \\&= \left( \frac{2(s+3)}{s+2} \right) \left( \frac{s-1}{s+1} \right)\end{aligned}$$

## 9.9 单边拉普拉斯变换

### The Unilateral Laplace Transform

单边拉氏变换是双边拉氏变换的特例，也就是因果信号的双边拉氏变换。单边拉氏变换对分析LCCDE描述的增量线性系统具有重要的意义。

一. 定义: 
$$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

如果  $x(t)$  是因果信号，对其做双边拉氏变换和做单边拉氏变换是完全相同的。

单边拉氏变换也同样存在ROC。其ROC必然遵从因果信号双边拉氏变换时的要求，即：**一定位于最右边极点的右边。**

正因为这一原因，在讨论单边拉氏变换时，一般不再强调其ROC。

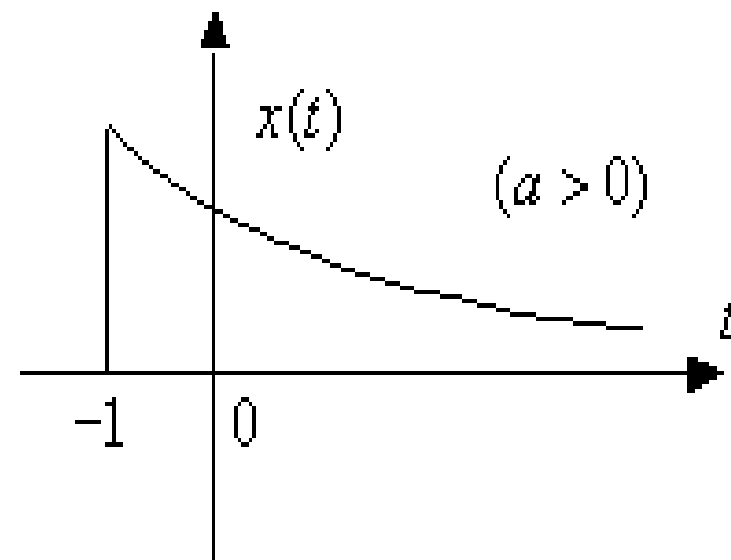
单边拉氏变换的反变换一定与双边拉氏变换的反变换相同。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \chi(s) e^{st} ds$$

**例1.**  $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$

**做双边拉氏变换：**

$$X(s) = \frac{1}{s+a} e^s \quad \text{Re}[s] > -a$$



**做单边拉氏变换，有：**

$$\chi(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-a(t+1)} e^{-st} dt = e^{-a} \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} e^{-a} \quad \text{Re}[s] > -a$$

$X(s)$  与  $\chi(s)$  不同，是因为  $x(t)$  在  $t < 0$  的部分对  $X(s)$  有作用而对  $\chi(s)$  没有任何作用所致。

$\mathcal{X}(s)$  is the bilateral Laplace transform of

$$x_1(t) = x(t)u(t) = e^{-a(t+1)}u(t) = e^{-a} \cdot e^{-at}u(t)$$



**例2.**  $\chi(s) = \frac{s^2 - 3}{s + 2}$

**由于其ROC为**  $\text{Re}\{s\} > -2$

$$\chi(s) = s - 2 + \frac{1}{s + 2}$$

$$\therefore x(t) = u_1(t) - 2\delta(t) + e^{-2t}u(t) \quad t > 0^-$$

## 二. 单边拉氏变换的性质:

单边拉氏变换的大部分性质与双边拉氏变换相同，但也有几个不同的性质。

### 1. 时域微分 (Differentiation in the Time Domain)

若  $x(t) \leftrightarrow \chi(s)$  则  $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow s\chi(s) - x(0^-)$

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = s\chi(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2 \chi(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

## 2. 时域积分 (Integration in the Time Domain)

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} \chi(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$$

$$\because \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$$

$$\therefore \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau \cdot \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt + \int_{0^-}^{\infty} \left( \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau - \frac{e^{-st}}{s} \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \Big|_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \frac{1}{s} \chi(s)$$

### 3. 时延性质 (Time Shifting)

$x(t)$  是因果信号时, 单边拉氏变换的时延特性与  
双边变换时一致。

若  $x(t)u(t) \leftrightarrow \chi(s)$

则  $x(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow \chi(s)e^{-st_0} \quad (t_0 > 0)$

$x(t)$  不是因果信号时,

$$\begin{aligned} x(t-t_0) &\leftrightarrow \int_{0^-}^{\infty} x(t-t_0)e^{-st} dt = \int_{-t_0}^{\infty} x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\ &= \int_{-t_0}^{0^-} x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau + \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\ &= \chi(s)e^{-st_0} + \int_{0^-}^{t_0} x(t-t_0)e^{-st} dt \end{aligned}$$

### 三. 利用单边拉氏变换求解增量线性系统:

单边拉氏变换特别适合于求解由LCCDE描述的增量线性系统。

例. 某LTI系统由微分方程描述

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \quad x(t) = 2u(t)$$
$$y(0^-) = 3, \quad y'(0^-) = -5 \quad \text{求响应 } y(t)$$

解: 对方程进行单边拉氏变换:

$$\left[ s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) \right] + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{y(0^-)(s+3)}{s^2+3s+2} + \frac{y'(0^-)}{s^2+3s+2}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\frac{\chi(s)}{s^2+3s+2}}_{\text{零状态响应}}$$

**代入**  $y(0^-) = 3$ ,  $y'(0^-) = -5$  **可得:**

$$Y(s) = \underbrace{\frac{3(s+3)}{s^2+3s+2} + \frac{-5}{s^2+3s+2}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\frac{2}{s(s^2+3s+2)}}_{\text{零状态响应}} = \frac{3s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \underbrace{\left( \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \right)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\left( \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right)}_{\text{零状态响应}}$$

$$= \underbrace{\left( \frac{1}{s} \right)}_{\text{受迫响应}} + \underbrace{\left( -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \right)}_{\text{自然响应}}$$

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \underbrace{\left( \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \right)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\left( \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right)}_{\text{零状态响应}} \\
 &= \underbrace{\left( \frac{1}{s} \right)}_{\text{受迫响应}} + \underbrace{\left( -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \right)}_{\text{自然响应}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore y(t) &= \underbrace{(e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})u(t)}_{\text{零状态响应}} \\
 &= \underbrace{u(t)}_{\text{受迫响应}} + \underbrace{(-e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)}_{\text{自然响应}} \\
 &= (1 - e^{-t} + 3e^{-2t})u(t), \quad t > 0^-
 \end{aligned}$$

## 9.10 小结



- 拉氏变换是傅氏变换的推广，在LTI系统分析中特别有用。它可以将微分方程变为代数方程，这对分析系统互联、系统结构、用系统函数表征系统、分析系统特性等都具有重要意义。
- ROC是双边拉氏变换的重要概念。离开了ROC，信号与双边拉氏变换的表达式将不再有一一对应的关系。



- **作为拉氏变换的几何表示，零极点图对分析系统的频率特性、零极点分布与系统特性的关系具有重要意义。从本质上讲，系统的特性完全是由系统函数的零极点分布决定的。**
- **拉氏变换的许多性质对于在变换域分析LTI系统，具有重要作用。**
- **作为双边拉氏变换的特例，单边拉氏变换特别适用于分析增量线性系统。**