珠海科技学院《线性代数》2019-2020 第二学期期末试卷

一、填空题（将正确答案填在题中横线上。每小题 2 分，共 10 分）

1. 若 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & x \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$，则 $\chi =$________。

2. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足______。

3. 已知矩阵 A，B，$C = (c_{ij})_{s\times n}$，满足 $AC = CB$，则 A 与 B 分别是_______阶矩阵。

4. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ 的行向量组线性______。

5. n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A - E = 0$，则 $A^{-1} =$_______。

二、判断正误（正确的在括号内填"√"，错误的在括号内填"×"。每小题 2 分，共 10 分）

1. 若行列式 D 中每个元素都大于零，则 $D > 0$。（ ）

2. 零向量一定可以表示成任意一组向量的线性组合。（ ）

3. 向量组 a_1，$a_2, \cdots$，a_m 中，如果 a_1 与 a_m 对应的分量成比例，则向量组 a_1，$a_2, \cdots$，a_s 线性相关。（ ）

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1} = A$。（ ）

5. 若 λ 为可逆矩阵 A 的特征值，则 A^{-1} 的特征值为 λ。（ ）

三、单项选择题（每小题仅有一个正确答案，将正确答案题号填入括号内。每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A| = 2$，则 $\left||A|A^T\right| =$（ ）。

① 2^n　　② 2^{n-1}　　③ 2^{n+1}　　④ 4

2. n 维向量组 α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_s（3 ≤ s ≤ n）线性无关的充要条件是（ ）。

① α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_s 中任意两个向量都线性无关

② α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_s 中存在一个向量不能用其余向量线性表示

③ α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_s 中任一个向量都不能用其余向量线性表示

④ α_1，$\alpha_2, \cdots$，α_s 中不含零向量

3. 下列命题中正确的是( )。

① 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性相关

② 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性无关

③ 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关

④ 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性无关

4. 设 A，B 均为 n 阶方阵，下面结论正确的是( )。

① 若 A，B 均可逆，则 $A+B$ 可逆　　② 若 A，B 均可逆，则 AB 可逆

③ 若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆　　④ 若 $A+B$ 可逆，则 A，B 均可逆

5. 若 ν_1， ν_2， ν_3， ν_4 是线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，则 $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4$ 是 $AX=0$ 的（ ）

① 解向量　② 基础解系　③ 通解　④ A 的行向量

四、计算题（每小题 9 分，共 63 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$。

解·

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c+d & b & c & d \\ x+a+b+c+d & x+b & c & d \\ x+a+b+c+d & b & x+c & d \\ x+a+b+c+d & b & c & x+d \end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & x+b & c & d \\ 1 & b & x+c & d \\ 1 & b & c & x+d \end{vmatrix} = (x+a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c+d)x^3$$

2. 设 $AB=A+2B$，且 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 B。

解. $(A-2E)B=A$　　$(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B=(A-2E)^{-1}A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. 设 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 且矩阵 X 满足关系式 $X(C-B)'=E$，求 X。

4. 问 a 取何值时，下列向量组线性相关？$\alpha_1=\begin{pmatrix} a \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ a \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ a \end{pmatrix}$。

5. λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$ 有唯一解，无解和有无穷多解？当方程组有无穷多解时求其通解。

① 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，方程组有唯一解；

②**当 $\lambda=-2$ 时方程组无解**

③**当 $\lambda=1$ 时，有无穷多组解，通解为** $X=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

6. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\9\\-1\\-3\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}3\\10\\-7\\-7\end{pmatrix}$. 求此向量组的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A 的特征值及对应的特征向量。

五、证明题 (7 分)

若 A 是 n 阶方阵，且 $AA^{\mathrm{T}}=I, |A|=-1$，证明 $|A+I|=0$。其中 I 为单位矩阵。