

《高等数学》单元自测题

第一章 函数与极限

专业_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一、填空题:

1. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则 $f[f(x)] =$ _____。

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} =$ _____。

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x} =$ _____。

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{3x + 2} \sin \frac{1}{x} =$ _____。

5. 已知 $x \rightarrow 0$ 时 $(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____。

6. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 的连续区间是_____。

二、单项选择题:

1、函数 $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ 的定义域是 ()

(A) $[0,2)$; (B) $(-2,2)$; (C) $[0,4]$; (D) $(-2,4]$ 。

2、已知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n} + kn\right) = 0$, 则常数 $k =$ ()。

(A) -1 ; (B) 0 ; (C) 1 ; (D) 2 。

3、若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则下列选项中不正确的是 ()。

(A) $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为无穷小; (B) $f(x)$ 在 x_0 点可以无意义;

(C) $A = f(x_0)$; (D) 若 $A > 0$, 则在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) > 0$ 。

4、当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列哪一个函数不是其他函数的等价无穷小 ()。

(A) $\sin x^2$; (B) $1 - \cos x^2$; (C) $\ln(1 + x^2)$; (D) $x(e^x - 1)$ 。

5、 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x > 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \ln(1-x), & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 则常数 a, b 的值为 ()。

(A) $a = 0, b = 0$;

(B) $a = 1, b = 1$;

(C) $a = -1, b = -1$;

(D) $a = 1, b = -1$ 。

6、 已知函数 $f(x) = x^3 + x - 3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加, 则方程 $x^3 + x - 3 = 0$ 必有一个根的区间是 ()。

(A) $(-1, 0)$; (B) $(0, 1)$; (C) $(1, 2)$; (D) $(2, 3)$ 。

三、 计算下列各题:

1、 求函数 $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ 的反函数, 并求反函数的定义域。

2、 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ 。

3、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$ 。

4、求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$ 。

5、设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2a}{x - a} \right)^x = 8$ ，求常数 a 。

6、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3 \tan^2 x \right)^{\frac{1}{x^2}}$ 。

7、讨论函数 $f(x) = \frac{|x|(x-1)}{x^2(x^2-1)}$ 的间断点及其类型。

四、证明题：

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $a < f(x) < b$ 。证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f(\xi) = \xi$ 。