

《高等数学》单元自测题

第三章 微分中值定理与导数的应用

专业_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一、填空题

1. $f(x) = x\sqrt{3-x}$ 在 $[0,3]$ 上是否满足罗尔定理条件_____, 若满足, 则 $\xi =$ _____.
2. $f(x) = x^4$ 在 $[1,2]$ 上是否满足拉格朗日中值定理条件_____, 若满足, 则 $\xi =$ _____.
3. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 则 $f'(x) = 0$ 在 $(1,4)$ 内有实根_____个.
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax^2 + b}{x-2} = 8$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
5. 已知点 $(2, 5)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 上的拐点, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
6. 曲线 $y = \frac{2x+1}{x}$ 上有_____条渐近线, 它们分别是_____, _____.

二、选择题

1. 罗尔定理的三个条件: 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $f(a) = f(b)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f'(\xi) = 0$ 的().
(A) 必要条件; (B) 充分条件; (C) 充分必要条件; (D) 既非充分也非必要条件.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$ ().
(A) 1; (B) -1; (C) 0; (D) 不存在.
3. $y = x^2 + 12x + 1$ 在区间 $(-6, +\infty)$ 内是().
(A) 凸函数, 且单调递增; (B) 凸函数, 且单调递减;
(C) 凹函数, 且单调递增; (D) 凹函数, 且单调递减.
4. 曲线 $y = 4 - \sqrt[3]{x-1}$ 的拐点是().
(A) $(0, 5)$; (B) $(2, 3)$; (C) $(9, 2)$; (D) $(1, 4)$.
5. 下面结论正确的是().
(A) 驻点一定是极值点; (B) 可导函数的极值点一定是驻点;
(C) 函数的导数不存在的点一定是极值点; (D) 函数的极大值一定大于极小值.

三、计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}]$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

4. 求 $y = x^3 - 12x + 5$ 在 $[0, 5]$ 上的最大值和最小值.

5. 求函数 $y = xe^{-x}$ 的单调区间、凹凸区间、拐点和极值.

四、应用题

欲制作一个容积为 72 m^3 带盖的长方体箱子，箱子的底长 x 与宽 y 的比为 $1:2$ ，问该箱子的底长 x 、宽 y 及高 h 各为多少时，才能使用料最省？

五、证明题

1. 已知 $0 < a < b$ ，则有 $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.

2. 证明当 $x > 0$ 时， $\ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2$.