## 行列式定义

1 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

2 三阶行列式：展开式六项，三个正项，三个负项.

3 n 阶行列式：行取自然排列，列取排列所有可能，不同行不同列取 n 个元素相乘，符号由列标排列逆序数的奇偶决定。(第一种定义)

4 

下三角 上三角 对角形

主对角线元素相乘

5 

山寨上三角 山寨下三角 山寨对角形

次对角线元素相乘

符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

## 行列式性质

6 $D^T = D$

7 交换两行(列)，行列式变号.

8 两行(列)元素相等，D=0.

9 某一行(列)有公因子 k，k 外提一次，所有行(列)有公因子 k，k 外提 n 次.

10 两行(列)元素成比例，D=0.

11 某一行(列)元素全为 0，D=0.

12 某一行元素全是两数和，拆成两行列式和.

那一行拆开
其余行不变

13 某一行乘以一个数加到另一行，D 不变.

## 行列式展开

14 D=某一行(列)元素与其代数余子式乘积之和.

15 异乘变零：一行(列)元素与其他行(列)的代数余子式乘积之和为 0.

16 拉普拉斯定理：任取 k 行(列)，由这 k 行(列)元素组成的所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和=D.

## 范德蒙德

17 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ x_1 & x_2 & .. & x_n \\ .. & .. & .. & .. \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & .. & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$

## 克莱姆法则

18 n 个方程 n 个未知数的方程组，系数行列式 D≠0，有唯一解：$x_i = \frac{D_i}{D}$

19 n 个方程 n 个未知数的齐次方程组，如系数行列式 D≠0，只有零解。

## 矩阵的运算

20 矩阵加(减)法：同型矩阵，对应元素相加(减).

21 矩阵数乘：$kA$，用 k 乘 A 的每个元素.

22 矩阵提公因子：每个元素都有公因子，提一次.

23 AB 相乘条件：A 的列数=B 的行数.

24 C=AB，结果矩阵形状：C 的行数=A 的行数，C 的列数=B 的列数.

25 乘法不满足

- AB 一般不等于 BA
- AB=AC,且 A≠0，推不出 B=C
- AB=0，推不出 A=0 或 B=0
- $(AB)^2 \neq A^2 + B^2$
- $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

26 次幂：$A^k$=AA⋯A(k 个相乘).

27 $A^m \times A^n = A^{m+n}$，$(A^m)^n = A^{mn}$，$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

28 转置：(1) $(A^T)^T = A$
(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
(3) $(kA)^T = kA^T$
(4) $(AB)^T = B^TA^T$

29 对称矩阵↔ $A^T = A$
反对称矩阵↔ $A^T = -A$

30 $|A^T| = |A|$
$|kA| = k^n|A|$
$|AB| = |A|\cdot|B|$

31 分块矩阵求转置，两步走.

## 初等矩阵初等变换

37 三种初等行变换，三种初等列变换

38 等价：AB 是同型矩阵，A 经初等变换得到 B

39 等价：AB 同型，存在可逆 P，Q，PAQ=B

40 初等矩阵均可逆，其逆矩阵也是初等矩阵，转置矩阵也是初等矩阵

41 初等矩阵左乘 A，相当于对 A 做初等行变换；初等矩阵右乘 A，相当于对 A 做初等列变换

## 逆矩阵

32 逆矩阵：AB=BA=E

33 求$A^{-1}$：1) $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，伴随矩阵法
2) $(A \vdots E) \rightarrow (E \vdots A^{-1})$，初等变换法

34 $(A^{-1})^{-1} = A$，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

35 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$，$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

36 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$,$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$

## 矩阵的秩

42 r(A)：非零子式的最高阶数

43 零矩阵的秩为 0

44 0≤r(A)≤min{行数，列数}

45 $r(A) = r \Leftrightarrow$有一个 r 阶非零子式，所有 r+1 阶子式均为零

46 初等变换(行，列)不改变矩阵的秩

47 求 r(A)：将 A 化为阶梯型，数非零行的行数

48 $r(A) = r(A^T)$

49 P，Q 可逆，$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

## 向量的线性组合

50 kα=0⇔k=0 或 α=0

51 零向量可由任意向量组表示

52 向量组中的一个向量，可由该向量组表示

53 任意向量可由单位向量组表示

54 向量组等价：两向量组可相互表示

## 线性相关 线性无关

55 线性相关：存在不全是 0 的 $k_1,\cdots,k_n$ 使 $k\alpha_1+\cdots+k\alpha_n=0$

56 线性无关：$k\alpha_1+\cdots+k\alpha_n=0$ 成立，$k_1$，⋯，$k_n$ 全取 0

## 线性相关无关的性质

57 向量组中两个向量分量成比例，向量组线性相关

58 一个零向量线性相关，一个非零向量线性无关

59 含零向量的向量组必线性相关

60 部分组线性相关，则整体组线性相关
整体组线性无关，则部分组线性无关

61 向量组线性无关，则接长组线性无关
向量组线性相关，则截短组线性相关

62 n 个 n 维向量线性无关⇔ D ≠ 0
n 个 n 维向量线性相关⇔ D = 0

## 线性相关无关的定理

63 向量线性相关⇔至少一个向量是其余向量的限行组合.

64 $\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$，β 线性相关，则β可由 $\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$ 唯一线性表示

65 $\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$ 线性无关，可由 $\beta_1$，⋯，$\beta_s$ 线性表示，则 s≤t

66 $\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$ 可由 $\beta_1$，⋯，$\beta_t$ 线性表示，且 s＞t，则 $\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$ 线性相关

67 向量个数＞向量维数，向量组线性相关

68 n+1 个 n 维向量必线性相关

69 等价的线性无关的向量组，含相同个数的向量

## 极大线性无关组

70 线性无关组定义

71 线性无关向量组的极大无关组是本身

72 向量组与其极大无关组等价

73 向量组的不同极大无关组含向量个数相同

74 向量组的秩：极大无关组含向量的个数

75 0≤r($\alpha_1$,⋯,$\alpha_s$)≤min{向量个数，向量维数}

76 A 的行秩=A 的列秩=r(A)

77 r(AB)≤min{r(A)，r(B)}

## 伴随矩阵

78 $A^*$定义：按行求，按列放

79 $AA^* = A^*A = |A|E$

80 $|A^*| = |A|^{n-1}$

81 $(A^*) = \begin{cases} n, 当r(A) = 1 \\ 1, 当r(A) = n-1 \\ 0, 当r(A) < n-1 \end{cases}$

## 方阵 A 可逆充要条件

82 $|A| \neq 0$

83 A 满秩

84 A 的标准形是 E

85 $A=E_1E_2\cdots E_s$，$E_i$是初等矩阵

86 A 的所有特征值不为 0

87 r(A)=n

88 A 的行秩=A 的列秩

89 A 的行(列)向量组无关

90 A 的非零子式最高阶数为 n

91 AX=0 只有零解
AX=B 有唯一解

## 行列式定义

1 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

2 三阶行列式：展开式六项，三个正项，三个负项.

3 n 阶行列式：行取自然排列，列取排列所有可能，不同行不同列取 n 个元素相乘，符号由列标排列逆序数的奇偶决定。( 第一种定义 )

4 

下三角 上三角 对角形

主对角线元素相乘

5 

山寨上三角 山寨下三角 山寨对角形

次对角线元素相乘 符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

## 行列式性质

6 $D^T = D$

7 交换两行(列)，行列式变号.

8 两行(列)元素相等，D=0.

9 某一行(列)有公因子 k，k 外提一次，所有行(列)有公因子 k，k 外提 n 次.

10 两行(列)元素成比例，D=0.

11 某一行(列)元素全为 0，D=0.

12 某一行元素全是两数和，拆成两行列式和.

那一行拆开 其余行不变

13 某一行乘以一个数加到另一行，D 不变.

## 行列式展开

14 D=某一行(列)元素与其代数余子式乘积之和.

15 异乘变零：一行(列)元素与其他行(列)的代数余子式乘积之和为 0.

16 拉普拉斯定理：任取 k 行(列)，由这 k 行(列)元素组成的所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和=D.

## 范德蒙德

17 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ x_1 & x_2 & .. & x_n \\ .. & .. & .. & .. \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & .. & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$

## 克莱姆法则

18 n 个方程 n 个未知数的方程组，系数行列式 D≠ 0，有唯一解：$x_i = \frac{D_i}{D}$

19 n 个方程 n 个未知数的齐次方程组，如系数行列式 D≠ 0，只有零解。

## 矩阵的运算

20 矩阵加(减)法：同型矩阵，对应元素相加(减).

21 矩阵数乘：$kA$，用 k 乘 A 的每个元素.

22 矩阵提公因子：每个元素都有公因子，提一次.

23 AB 相乘条件：A 的列数=B 的行数.

24 C=AB，结果矩阵形状：C 的行数=A 的行数，C 的列数=B 的列数.

25 乘法不满足：
- AB 一般不等于 BA
- AB=AC,且 A≠0，推不出 B=C
- AB=0，推不出 A=0 或 B=0
- $(AB)^2 \neq A^2 B^2$
- $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

26 次幂：$A^k$=AA⋯A(k 个相乘).

27 $A^m \times A^n = A^{m+n}$，$(A^m)^n = A^{mn}$，$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

28 转置：( 1 ) $(A^T)^T = A$
( 2 ) $(A+B)^T = A^T + B^T$
( 3 ) $(kA)^T = kA^T$
( 4 ) $(AB)^T = B^T A^T$

29 对称矩阵↔ $A^T = A$
反对称矩阵↔ $A^T = -A$

30 $|A^T| = |A|$
$|kA| = k^n|A|$
$|AB| = |A| \cdot |B|$

31 分块矩阵求转置，两步走.

## 逆矩阵

32 逆矩阵：AB=BA=E

33 求$A^{-1}$：1 ) $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，伴随矩阵法
2 ) $(A \vdots E) \to (E \vdots A^{-1})$，初等变换法

34 $(A^{-1})^{-1} = A$，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

35 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$，$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

36 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$,$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$

## 初等矩阵初等变换

37 三种初等行变换，三种初等列变换

38 等价：AB 是同型矩阵，A 经初等变换得到 B

39 等价：AB 同型，存在可逆 P，Q，PAQ=B

40 初等矩阵均可逆，其逆矩阵也是初等矩阵，转置矩阵也是初等矩阵

41 初等矩阵左乘 A，相当于对 A 做初等行变换；初等矩阵右乘 A，相当于对 A 做初等列变换

## 矩阵的秩

42 r(A)：非零子式的最高阶数

43 零矩阵的秩为 0

44 0≤r(A)≤min{行数，列数}

45 $r(A) = r$ ⇔有一个 r 阶非零子式 所有 r+1 阶子式均为零

46 初等变换(行，列)不改变矩阵的秩

47 求 r(A)：将 A 化为阶梯型，数非零行的行数

48 $r(A) = r(A^T)$

49 P，Q 可逆，$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

## 向量的线性组合

50 kα=0⇔k=0 或 α=0

51 零向量可由任意向量组表示

52 向量组中的一个向量，可由该向量组表示

53 任意向量可由单位向量组表示

54 向量组等价：两向量组可相互表示

## 线性相关 线性无关

55 线性相关：存在不全是 0 的 $k_1, \cdots, k_n$ 使 $k\alpha_1+\cdots+k\alpha_n=0$

56 线性无关：$k\alpha_1+\cdots+k\alpha_n=0$ 成立，$k_1$，⋯，$k_n$ 全取 0

## 线性相关无关的性质

57 向量组中两个向量分量成比例，向量组线性相关

58 一个零向量线性相关，一个非零向量线性无关

59 含零向量的向量组必线性相关

60 部分组线性相关，则整体组线性相关
整体组线性无关，则部分组线性无关

61 向量组线性无关，则接长组线性无关
向量组线性相关，则截短组线性相关

62 n 个 n 维向量线性无关⇔ D ≠ 0
n 个 n 维向量线性相关⇔ D = 0

## 线性相关无关的定理

63 向量线性相关⇔至少一个向量是其余向量的限行组合.

64 $\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$，β 线性相关，则β可由 $\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$ 唯一线性表示

65 $\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$ 线性无关，可由 $\beta_1$，⋯，$\beta_s$ 线性表示，则 s≤t

66 $\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$ 可由 $\beta_1$，⋯，$\beta_t$ 线性表示，且 s＞t，则 $\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$ 线性相关

67 向量个数＞向量维数，向量组线性相关

68 n+1 个 n 维向量必线性相关

69 等价的线性无关的向量组，含相同个数的向量

## 极大线性无关组

70 线性无关组定义

71 线性无关向量组的极大无关组是本身

72 向量组与其极大无关组等价

73 向量组的不同极大无关组含向量个数相同

74 向量组的秩：极大无关组含向量的个数

75 0≤r($\alpha_1$，⋯，$\alpha_s$)≤min{向量个数，向量维数}

76 A 的行秩=A 的列秩=r(A)

77 r(AB)≤min{r(A)，r(B)}

## 伴随矩阵

78 $A^*$定义：按行求，按列放

79 $AA^* = A^*A = |A|E$

80 $|A^*| = |A|^{n-1}$

81 $(A^*) = \begin{cases} n, 当r(A) = 1 \\ 1, 当r(A) = n-1 \\ 0, 当r(A) < n-1 \end{cases}$

## 方阵 A 可逆充要条件

82 $|A| \neq 0$

83 A 满秩

84 A 的标准形是 E

85 $A=E_1E_2\cdots E_s$，$E_i$ 是初等矩阵

86 A 的所有特征值不为 0

87 r(A)=n

88 A 的行秩=A 的列秩

89 A 的行(列)向量组无关

90 A 的非零子式最高阶数为 n

91 AX=O 只有零解
AX=B 有唯一解

## AX=B 有解判定

92 $r(A)=r(\bar{A})=n$，有唯一解.

93 $r(A)=r(\bar{A})<n$，有无穷解.

94 $r(A)\neq r(\bar{A})$，无解.

## AX=0 齐次方程组

95 齐次方程组一定有解，至少有零解.

96 齐次方程组仅有零解⇔r(A)=n.

97 齐次方程组有非零解⇔r(A)＜n.

98 齐次方程组，方程个数＜未知数个数，有非零解.

99 齐次方程组，方程个数=未知数个数，
有非零解⇔系数行列式=0，
仅有零解⇔系数行列式≠0.

## AX=0 解的结构

100 AX=0 的两个解相加，仍然是解.

101 η是 AX=0 的解，则 cη也是解.

102 AX=0 的解的线性组合，仍然是解.

103 基础解系：$\eta_1$，…，$\eta_s$是解。
满足：
（1）$\eta_1$，…，$\eta_s$线性无关；
（2）任意解可由$\eta_1$，…，$\eta_s$表示.

104 AB=0，则 r(A)+r(B)≤n.

## AX=B 解的结构

105 AX=B→AX=0(导出组).

106 AX=B 的两个解相减是 AX=0 的解.

107 AX=B 的一个解和
AX=0 的一个解相加，
是 AX=B 的一个解.

108 AX=B 通解：
(1)AX=B 的一特解；
(2)AX=0 的基础解系；
特解+基础解系的线性组合.

## 特征值特征向量

109 Aα=λα，特征值可以是 0，特征向量是非零向量

110 $|\lambda E-A|=0$,求特征值.

111 A 和$A^T$有相同的特征值

112 $\Sigma\lambda_i=\Sigma a_{ii}$，$\lambda_1\cdots\lambda_n=|A|$

113 矩阵的迹 $tr(A)=\Sigma a_{ii}$

114 不同特征值对应的特征向量线性无关

115 k 重特征值的线性无关的特征向量个数≤k

λ是方阵 A 的特征值
- 116 kλ是 kA 的特征值
- 117 $\lambda^k$是 $A^k$的特征值
- 118 求 A 的多项式的特值：A 替换成λ，E 替换成 1
- 119 $\lambda^{-1}$是 $A^{-1}$的特值
- 120 $\frac{1}{\lambda}|A|$是 $A^*$的特值

## 相似矩阵

121 A，B 同阶方，存在可逆 P，$P^{-1}AP=B$

122 反身性，对称性，传递性

A~B
- 123 A，B 有相同特征值
- 124 |A| = |B|
- 125 tr(A)=tr(B)
- 126 A,B 同时可逆，或同时不可逆.
- 127 A，B 若可逆，$A^{-1}\sim B^{-1}$
- 128 $A^m\sim B^m$

## 对角化

129 A 相似于对角形⇔A 有 n 个线性无关的特征向量.

130 A 有 n 个互异特征值，可对角化.

131 技巧：不管单根；每个 k 重特征根，都有 k 个特征向量，则可对角化.

132 特征向量做列构成 P，特征值做主对角线构成Λ，特征值和特征向量位置对应.

## 内积

133 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$,若 α，β 是列向量.

134 内积是一个数

135 $(\alpha,\alpha)\geq 0,(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$
$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$
$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

136 长度$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

137 单位化$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$

138 $\|\alpha\|\geq 0,\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0$

139 $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$

$|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$

140 $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

141 $(\alpha,\beta)=0$，正交，$\alpha\perp\beta$

142 正交向量组 不含零向量，两两正交.

143 标准正交向量组：正交向量组，每个向量都是单位向量.

144 施密特正交化.

## 正交

145 A 方阵，$A^TA=E$，A 为正交矩阵

146 A 正交，$|A|=1$或-1，$A^{-1}=A^T$

147 A 正交，$A^{-1}$和$A^T$也正交　A，B 正交，AB 也正交

148 A 正交，$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$

149 A 正交⇔列(行)向量组是标准正交向量

## 正交相似

150 实对称矩阵 A 的不同特值的特量必正交

151 正交相似：A，B 同阶方，存在正交 P，$P^{-1}AP=P$

152 A 实对称，存在正交 Q，$Q^{-1}AQ=\Lambda$

153 Q：正交单位化后的特量作列
Λ：特值作为主对角线元素

## 二次型

154 二次型→矩阵：
（1）平方项系数作主对角线；
（2）交叉项系数除以 2，放两对称位置

155 矩阵→二次型：
（1）主对角线做平方项系数；
（2）主对角线右上角元素乘 2，做交叉

156 二次型的矩阵对称

157 X=CY，线性替换

## 合同 ≃

158 合同：A，B 是 n 方，存在可逆 C，$C^TAC=B$

159 反身性，对称性，传递性

160 A~B→r(A)=r(B)
A~B→A 对称⇔B 对称
A~B→A,B 可逆，$A^{-1}\sim B^{-1}$
A~B→$A^T\sim B^T$

注：此处~指合同符号.

## 化标准形

161 标准形：只有平方项，没有交叉项.（平方项变量的下标可以不连）

162 化标准形：
（1）配方法；
（2）初等变换法：

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{只对 A 做相应行}]{\text{对 A,E 做列}}\begin{pmatrix}\Lambda\\C\end{pmatrix}$$

（3）正交替换法：正交 Q，$Q^TAQ=\Lambda$

163 标准形不唯一

## 规范形

164 规范形：只有平方项，系数是 1，-1，0，变量的下标连着.

165 规范形是唯一的.

166 正惯性指数：规范形的正项个数
负惯性指数：规范形的负项个数
符号差：正惯性指数-负惯性指数

167 $A\simeq B$ ⇔有相同的秩和正惯性指数

## 定性

168 二次型$X^TAX$，任意 X≠0
（1）$X^TAX>0$，正定
（2）$X^TAX<0$，负定
（3）$X^TAX\geq 0$，半正定
（4）$X^TAX\leq 0$，半负定

169 正定二次型经非退化替换仍化为正定二次型

170 二次型正定⇔标准型每个变量的系数＞0.

171 二次型正定⇔正惯性指数为 n.

172 A 正定，$|A|>0$.

173 A 正定⇔A 的特征值都＞0.

174 A 正定⇔A 的各阶顺式主子式＞0.

175 A 正定→（1）$A^{-1}$正定，
（2）$A^*$正定，
（3）$A^k$正定，
（4）A 主对角线元素都＞0.

176 A 正定，B(半)正定→A+B 正定.

## AX=B 有解判定

- 92 $r(A)=r(\bar{A})=n$，有唯一解.
- 93 $r(A)=r(\bar{A})<n$，有无穷解.
- 94 $r(A)\neq r(\bar{A})$，无解.

## AX=0 齐次方程组

- 95 齐次方程组一定有解，至少有零解.
- 96 齐次方程组仅有零解⇔r(A)=n.
- 97 齐次方程组有非零解⇔r(A)＜n.
- 98 齐次方程组，方程个数＜未知数个数，有非零解.
- 99 齐次方程组，方程个数=未知数个数，
  有非零解⇔系数行列式=0，
  仅有零解⇔系数行列式≠0.

## AX=0 解的结构

- 100 AX=0 的两个解相加，仍然是解.
- 101 η是 AX=0 的解，则 cη也是解.
- 102 AX=0的解的线性组合，仍然是解.
- 103 基础解系：$\eta_1,\cdots,\eta_s$是解。
  满足：
  （1）$\eta_1,\cdots,\eta_s$线性无关；
  （2）任意解可由$\eta_1,\cdots,\eta_s$表示.
- 104 AB=0，则 r(A)+r(B)≤n.

## AX=B 解的结构

- 105 AX=B→AX=0(导出组).
- 106 AX=B的两个解相减是AX=0的解.
- 107 AX=B 的一个解和 AX=0 的一个解相加，是 AX=B 的一个解.
- 108 AX=B 通解：
  (1)AX=B 的一特解；
  (2)AX=0 的基础解系；
  特解+基础解系的线性组合.

## 特征值特征向量

- 109 Aα=λα，特征值可以是 0，特征向量是非零向量
- 110 $|\lambda E-A|=0$,求特征值.
- 111 A 和$A^T$有相同的特征值
- 112 $\Sigma\lambda_i=\Sigma a_{ij}$，$\lambda_1\cdots\lambda_n=|A|$
- 113 矩阵的迹 $tr(A)=\Sigma a_{ij}$
- 114 不同特征值对应的特征向量线性无关
- 115 k 重特征值的线性无关的特征向量个数≤k

λ是方阵 A 的特征值

- 116 kλ是 kA 的特征值
- 117 $\lambda^k$是 $A^k$的特征值
- 118 求 A 的多项式的特值：A 替换成λ，E 替换成 1
- 119 $\lambda^{-1}$是 $A^{-1}$的特值
- 120 $\frac{1}{\lambda}|A|$是 $A^*$的特值

## 相似矩阵

- 121 A，B 同阶方，存在可逆 P，$P^{-1}AP=B$
- 122 反身性，对称性，传递性

A~B

- 123 A，B 有相同特征值
- 124 |A| = |B|
- 125 tr(A)=tr(B)
- 126 A,B 同时可逆，或同时不可逆.
- 127 A，B 若可逆，$A^{-1}\sim B^{-1}$
- 128 $A^m\sim B^m$

## 对角化

- 129 A 相似于对角形⇔A 有 n 个线性无关的特征向量.
- 130 A 有 n 个互异特征值，可对角化.
- 131 技巧：不管单根；每个 k 重特征根，都有 k 个特征向量，则可对角化.
- 132 特征向量做列构成 P，特征值做主对角线构成Λ，特征值和特征向量位置对应.

## 内积

- 133 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$,若 α，β 是列向量.
- 134 内积是一个数
- 135 $(\alpha,\alpha)\ge 0,(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$
  $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
  $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$
  $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$
- 136 长度$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$
- 137 单位化$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$
- 138 $\|\alpha\|\ge 0,\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0$
- 139 $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$
  $|(\alpha,\beta)|\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$
- 140 $\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$
- 141 $(\alpha,\beta)=0$，正交，$\alpha\perp\beta$
- 142 正交向量组 不含零向量，两两正交.
- 143 标准正交向量组：正交向量组，每个向量都是单位向量.
- 144 施密特正交化.

## 正交

- 145 A 方阵，$A^TA=E$，A 为正交矩阵
- 146 A 正交，$|A|=1$或-1，$A^{-1}=A^T$
- 147 A 正交，$A^{-1}$和$A^T$也正交　A，B 正交，AB 也正交
- 148 A 正交，$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$
- 149 A 正交⇔列(行)向量组是标准正交向量

## 正交相似

- 150 实对称矩阵 A 的不同特值的特量必正交
- 151 正交相似：A，B 同阶方，存在正交 P，$P^{-1}AP=P$
- 152 A 实对称，存在正交 Q，$Q^{-1}AQ=\Lambda$
- 153 Q：正交单位化后的特量作列
  Λ：特值作为主对角线元素

## 二次型

- 154 二次型→矩阵：
  （1）平方项系数作主对角线；
  （2）交叉项系数除以 2，放两对称位置
- 155 矩阵→二次型：
  （1）主对角线做平方项系数；
  （2）主对角线右上角元素乘 2，做交叉
- 156 二次型的矩阵对称
- 157 X=CY，线性替换

## 合同 ~

- 158 合同：A，B 是 n 方，存在可逆 C，$C^TAC=B$
- 159 反身性，对称性，传递性
- 160 A~B→r(A)=r(B)
  A~B→A 对称⇔B 对称
  A~B→A,B 可逆，$A^{-1}\sim B^{-1}$
  A~B→$A^T\sim B^T$

注：此处~指合同符号.

## 化标准形

- 161 标准形：只有平方项，没有交叉项.（平方项变量的下标可以不连）
- 162 化标准形：
  （1）配方法；
  （2）初等变换法：
  $$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{只对 A 做相应行}]{\text{对 A,E 做列}}\begin{pmatrix}\Lambda\\C\end{pmatrix}$$
  （3）正交替换法：正交 Q，$Q^TAQ=\Lambda$
- 163 标准形不唯一

## 规范形

- 164 规范形：只有平方项，系数是 1，-1，0，变量的下标连着.
- 165 规范形是唯一的.
- 166 正惯性指数：规范形的正项个数
  负惯性指数：规范形的负项个数
  符号差：正惯性指数-负惯性指数
- 167 $A\simeq B$ ⇔有相同的秩和正惯性指数

## 定性

- 168 二次型$X^TAX$，任意 X≠0
  （1）$X^TAX>0$，正定
  （2）$X^TAX<0$，负定
  （3）$X^TAX\ge 0$，半正定
  （4）$X^TAX\le 0$，半负定
- 169 正定二次型经非退化替换仍化为正定二次型
- 170 二次型正定⇔标准型每个变量的系数＞0.
- 171 二次型正定⇔正惯性指数为 n.
- 172 A 正定，$|A|>0$.
- 173 A 正定⇔A 的特征值都＞0.
- 174 A 正定⇔A 的各阶顺序主子式＞0.
- 175 A 正定→（1）$A^{-1}$正定，
  （2）$A^*$正定，
  （3）$A^k$正定，
  （4）A 主对角线元素都＞0.
- 176 A 正定，B(半)正定→A+B 正定.