

《高等数学》单元自测题

第五章 定积分 第六章 定积分应用

专业_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一、填空题

- $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx =$ _____。
- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} =$ _____。
- $\int_0^2 f(x) dx =$ _____。其中 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ 2-x & (1 < x \leq 2) \end{cases}$ 。
- 利用定积分的几何意义计算定积分 $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx =$ _____。
- 正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V =$ _____。

二、单项选择题

- 下列说法中正确的是 ()。
(A) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积;
(B) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积;
(C) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;
(D) 以上说法都不正确。
- 设 $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1, \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$, 则 $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式为 ()。
(A) $\Phi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$; (B) $\Phi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$; (C) $2x$; (D) x^2 。
- 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = x + x^2 \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) =$ ()。
(A) $\frac{3}{4}x + x^2$; (B) $x + \frac{3}{4}x^2$; (C) $\frac{3}{2}x + x^2$; (D) $x + \frac{3}{2}x^2$ 。
- 设 $f(u)$ 连续, 且 $\int_0^2 xf(x) dx \neq 0$, 若 $k \int_0^1 xf(2x) dx = \int_0^2 xf(x) dx$, 则 $k =$ ()。
(A) $\frac{1}{4}$; (B) 1; (C) 2; (D) 4。
- 下列反常积分中收敛的是 ()。
(A) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$; (B) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; (C) $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx$; (D) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ 。

三、计算题

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$ 。

2. $\int_0^2 x^3 \sqrt{4-x^2} dx$ 。

3. $\int_0^1 \ln(x^2+1) dx$ 。

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin x \cos x dx$ 。

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t \cdot e^{-t^2} dt}{x^3 \sin x}$ 。

四、应用题

1. 求由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$, $x = 2$ 所围成平面图形的面积.

2. 求由曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

3. 求由曲线 $r = 4\cos\theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 所围成平面图形的面积.

4. 求曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上相应于 x 从 0 到 1 的一段弧的长度.