第四章　数据的分解和平滑

zhaixbh@126.com

学习目标与要求

- 了解时间序列分解的一般原理
- 理解时间序列数据分解的形式
- 掌握趋势拟合的方法
- 掌握数据光滑的几种常用方法

本章结构

1. 序列分解原理
2. 趋势拟合法
3. 移动平均法
4. 指数平滑方法
5. 季节效应分析

平稳序列的 Wold 分解

- 绪 论

从整体来看，任何一个序列的变动都可以视为同时受到了确定性影响和随机性影响的综合作用. 一般地，平稳时间序列要求这两种影响都是稳定的，而非平稳时间序列则要求这两种影响至少有一种是不稳定的. 确定性对序列变化的影响往往表现出长期的趋势性、循环的波动性以及季节变化等的特点. 对于具有长期观测值的经济序列，确定性分析具有特殊的意义.

对于平稳时间序列，Wold 于 1938 年提出了著名的 **Wold 分解定理 (decomposition theorem)**. Wold 定理表明，任何离散平稳序列$\{x_t,\ t\in T\}$ 都可以分解为不相关的两个部分

平稳序列的 Wold 分解

- Q_t 和 η_t 之和，即

$$x_t = Q_t + \eta_t$$

其中，Q_t 是确定性部分，由历史信息完全确定；η_t 为非确定性的随机序列，且

$$\eta_t = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \varepsilon_{t-k},$$

其中，ε_t 是零均值白噪声序列；$\varphi_0 = 1$，且 $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^2 < \infty$.

φ_k 平方和的收敛保证了 x_t 序列存在二阶矩.同时，这一分解定理的成立对变量的分布没有要求，而且并不要求 ε_t 之间独立，只需它们之间不相关即可.

对于均值，我们有

平稳序列的 Wold 分解

- 对于均值，我们有

$$\mathrm{E}(x_t - Q_t)=\mathrm{E}(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\varepsilon_{t-k}) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k \mathrm{E}(\varepsilon_{t-k}) = 0,$$

即 $$\mathrm{E}(x_t) = Q_t.$$

这说明，确定性部分就是序列的均值函数. 方差计算如下:

$$\mathrm{Var}(x_t)=\mathrm{E}(x_t - Q_t)^2=\mathrm{E}(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\varepsilon_{t-k})^2 = \sigma_\varepsilon^2\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k^2.$$

可见，方差有界且和时间无关. 设 $\tau > 0$, 则

$$Cov(x_t, x_{t+\tau}) = \mathrm{E}(x_t - Q_t)(x_{t+\tau} - Q_{t+\tau}) = \mathrm{E}\left[(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\varepsilon_{t-k})(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\varepsilon_{t+\tau-k})\right]$$

$$=\sigma_\varepsilon^2\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\varphi_{\tau+k} < \infty.$$

平稳序列的 Wold 分解

显然，自协方差函数仅仅是两个随机变量相隔时间τ的函数. 因此，从上面讨论看出，序列$\{x_t\}$满足平稳性的所有条件.

事实上，我们之前讨论的平稳的 ARMA(p,q) 序列就可分解为

$$x_t = \mu + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t$$

其中，$Q_t = \mu$ 为确定性部分；

$$\eta_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t$$

为随机性部分. 不过，Wold 分解定理的意义更多体现在理论层面.

一般序列的 Cramer 分解

- Cramer 于 1961 年进一步发展了 Wold 的分解思想，提出 **Cramer 分解**:

任何时间序列 $\{x_t, t \in T\}$ 都可以分解为两部分 D_t 和 ξ_t 之和，即

$$x_t = D_t + \xi_t$$

其中，$D_t = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i t^i \quad (l < \infty)$ 是多项式决定的确定性趋势部分，这里 $\alpha_i \ (0 \le i \le l)$ 是常数系数，由历史信息完全确定；ξ_t 为平稳的零均值误差成分构成的非确定性的随机序列，且

$$\xi_t = \Psi(B)\varepsilon_t,$$

其中，ε_t 是零均值白噪声序列；B 为延迟算子.

数据分解的形式

- 由 $\mathrm{E}x_t=\sum_{i=0}^{l}\alpha_i t^i$ 知，均值 $\sum_{i=0}^{l}\alpha_i t^i$ 反映了 x_t 受到的确定性影响，而 ξ_t 反映了 x_t 受到的随机性影响. 在数据分解中，Wold 定理 和 Cramer 定理在理论上具有重要意义.
- **数据分解的形式**

一般地，时间序列数据的分解主要是将序列所表现出来的规律性分解成不同的组成部分. 特别地，确定性部分对序列的影响所表现出来的规律性尤为显著，比如：长期趋势性、季节性变化和循环变化等. 这种规律性强的信息通常比较容易提取，而随机性部分所导致的波动则难以确定. 因而传统的时序分析方法往往把分析的重点放在确定性信息的提取上

数据分解的形式

- 经过观察发现，序列变化主要受以下一些因素综合的影响：

(1) 长期趋势 T_t .

长期趋势是时间序列在较长时期内所表现出的总的变化态势. 在长期趋势影响下，序列往往呈现出不断递增、递减或水平变动等基本趋势. 例如，自改革开放以来，我国城镇居民可支配收入呈现不断递增的趋势.

(2) 季节变化 S_t.

季节变化是指时间序列在长期内所表现出的有规律的周期性的重复变动的态势. 例如：受自然界季节更替的影响，一些商品的销售会层现出典型的季节波动态势.

数据分解的形式

(3)随机波动I_t.

随机波动是指受众多偶然的、难以预知和难以控制的因素影响而出现的随机变动. 随机波动是时间序列中较难分析的对象.

在进行时间序列分析时, 传统的分析方法都会假定序列受到上述几种因素的影响, 从而将序列表示为上述几部分的函数. 通常假定模型有两种相互作用的模式: 加法模式和乘法模式. 一般地, 若季节变动随着时间的推移保持相对不变, 则使用加法模型:

$$x_t = T_t + S_t + I_t$$

若季节变动随着时间的推移递增或递减, 则使用乘法模型:

数据分解的形式

若季节变动随着时间的推移递增或递减，则使用乘法模型：

$$x_t = T_t \cdot S_t \cdot I_t$$

根据上述加法模型和乘法模型的形式，可得时间序列数据分解的一般步骤.

(1) 第一步估计时间序列数据的长期趋势. 常用两种方法估计长期趋势：第一种方法是通过数据平滑方法进行估计；第二种方法是通过模拟回归方程加以估计.

(2) 第二步去掉时间序列数据的长期趋势. 若拟合的是加法模型，则将原来的时间序列减去长期趋势 $x_t - T_t$；若拟合的为乘法模型，则将原来的时间序列除以长期趋势 x_t / T_t.

数据分解的形式

(3) 第三步根据去掉长期趋势的时间序列数据，估计时间序列的季节变化 S_t .

(4) 第四步当将长期趋势和季节变化去掉之后，根据所得序列情况，可得不规则波动部分. 为了研究简便，本书把不规则波动部分仅视为随机波动. 对于加法模型，随机波动表示为

$$I_t = x_t - T_t - S_t;$$

对于乘法模型，随机波动表示为

$$I_t = x_t / (T_t \cdot S_t).$$

时间序列的古典分解方法目的是估计和提取确定性成分 T_t 和 S_t 从而得到平稳的噪声成分.

数据分解的形式

在 R 中, 用函数 decompose( ) 对时间序列数据进行分解. 该函数的命令格式如下:

```
decompose(x, type=c("additive", "multiplicative"))
```

该函数的参数说明:

- x: 待分解的时序数据.
- type: 选择的分解类型. type=“additive” 意味着选择的分解类型为加法模型; type=“multiplicative” 意味着选择的分解类型为乘法模型.

例 4.1 请将新西兰人 2001 年 1 月至 2012 年 10 月之间月均到中国旅游人数序列进行适当分解.

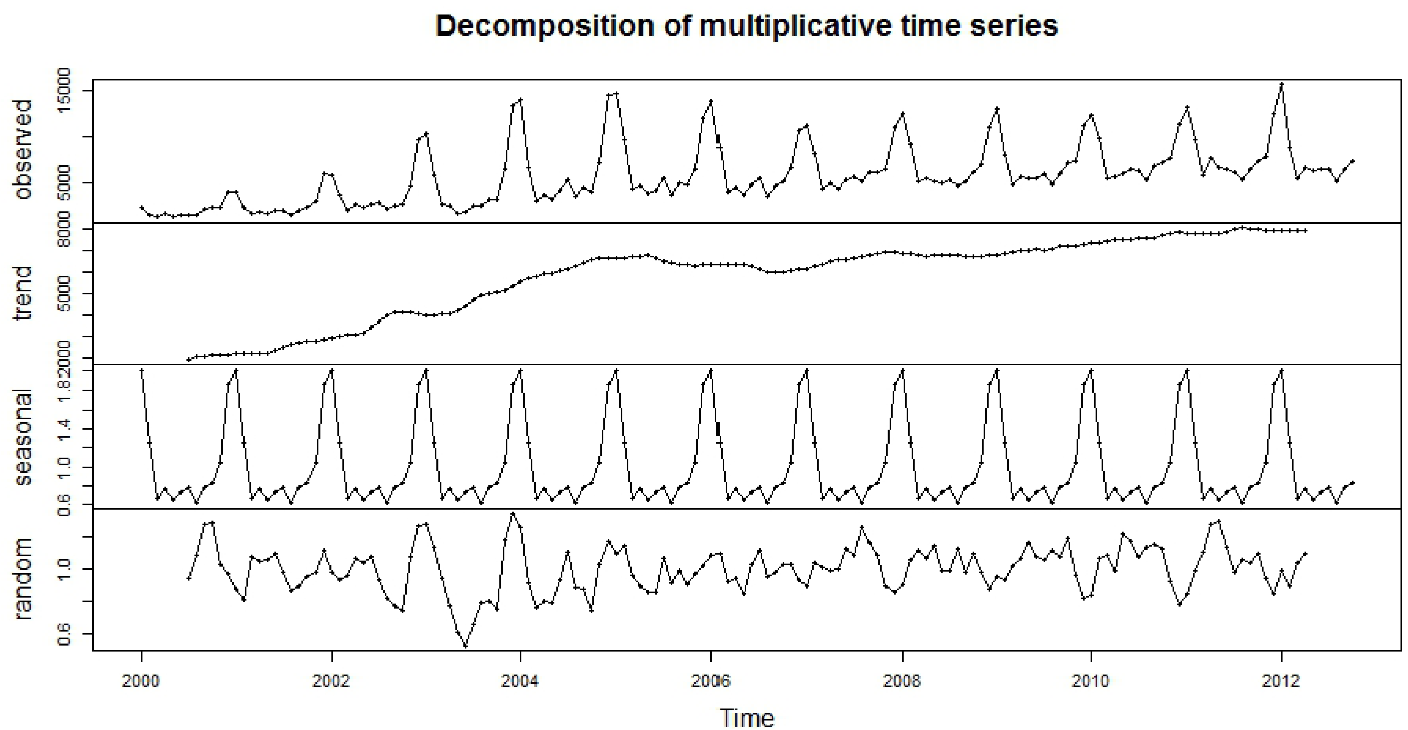
数据分解的形式

例 4.1 请将新西兰人 2001 年 1 月至 2012 年 10 月之间月均到中国旅游人数序列进行适当分解.

解: 现在对新西兰人 2001 年 1 月至 2012 年 10 月之间月均到中国旅游人数序列进行分解, 选择的分解类型是乘法模型, 这是因为季节变动随着时间的推移而递增. 具体命令如下, 运行结果如图 4.1 所示.

```
> NZTraveller <- read.csv("E:/DATA/CHAP1/NZTravellersDestination.c
+ sv",header=T)
> CNZTraveller <- ts(NZTraveller$China,start=c(2000,1),frequency = 12)
> x2 <- decompose(CNZTraveller,type="multiplicative")
> plot(x2,type="o")
```

数据分解的形式



- 描绘了乘法模型分解的直观图，其中，observed 是原来数据的时序图；trend 代表了长期趋势；seasonal 代表季节变动；random 代表不规则波动.

数据分解的形式

- 可以使用如下命令查看分解之后各部分的具体数值:

```
> Trend <- x2$trend

> Seasonal <- x2$seasonal

> Random <- x2$random

> Trend;Seasonal;Random
```

本章结构

1. 序列分解原理
2. 趋势拟合法
3. 移动平均法
4. 指数平滑方法
5. 季节效应分析

线性拟合

- 所谓**趋势拟合法** (trend fitting), 就是把时间作为自变量, 相应的序列观察值作为因变量,建立序列值随时间变化的回归模型的方法. 根据序列所表现出的线性或非线性特征, 拟合方法又可以具体分为线性拟合和曲线拟合.
- **线性拟合**

如果长期趋势呈现线性特征, 那么我们可以用如下线性关系来拟合:

$$x_t = a + bt + \mathrm{I}_t,$$

式中, $\{\mathrm{I}_t\}$ 为随机波动, 满足 $\mathrm{E}(\mathrm{I}_t)=0, \mathrm{Var}(\mathrm{I}_t)=\sigma^2, T_t = a + bt$ 为该序列的长期趋势.

线性拟合

- 在 R 中, 使用函数 lm( ) 来拟合线性趋势. lm( ) 函数的命令格式如下:

  lm(Y~a+X1+X2+…+Xn, data=)

该函数的参数说明:

- Y: 响应变量.

- a: 指定是否需要常数项. a=1 意味着模型有非零常数项, 这是默认设置; a=0 意味着模型不需要常数项.

- X1, X2, ・・・, Xn: 自变量.

- data: 数据框名. 如果自变量和响应变量不是独立输入变量而是共同存在于某个数据框中, 则需要指定数据框名.

线性拟合

- **例 4.2** 选择合适的模型拟合美国 1974 年至 2006 年月度发电量, 单位: 10^6 kW/h.

解: 该序列时序图显示序列有显著的线性递增趋势, 于是考虑使用线性模型 (为简便, 时间变量选择从 1 开始的整数):

$$\begin{cases} x_t = a + bt + \mathrm{I}_t, \quad t = 1, 2, \cdots, 396; \\ \mathrm{E}(\mathrm{I}_t)=0,\ \mathrm{Var}(\mathrm{I}_t)=\sigma^2. \end{cases}$$

具体命令及运行结果如下, 拟合效果图见图.

```
> electricity <- scan("E:/DATA/CHAP4/1.txt") #读入数据
Read 396 items
> t <- 1:396 #产生时间向量
```

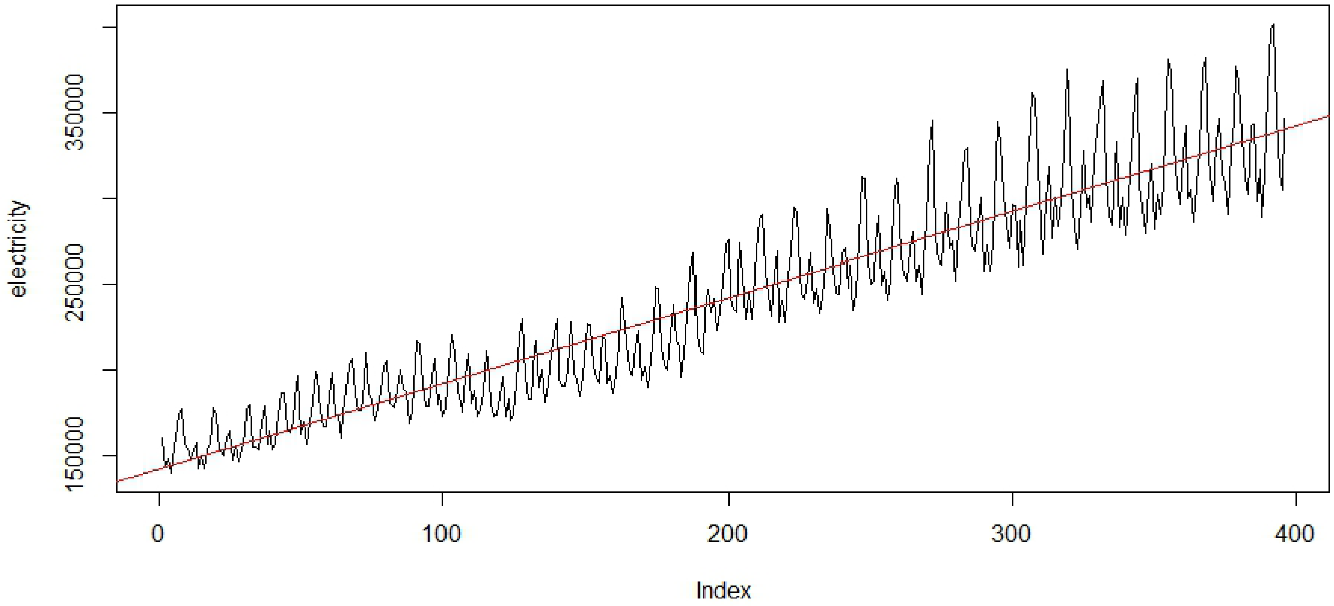
线性拟合

```
> elec.fix <- lm(electricity~t) #拟合回归模型
> summary(elec.fix) #查看拟合结果
Call:
lm(formula = electricity~t)
Residuals:
Min 1Q Median 3Q Max
-47448 -16661 -1941 11143 73861
Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.423e+05 2.267e+03 62.78 <2e-16 ***
t 4.993e+02 9.895e+00 50.46 <2e-16 ***
```

线性拟合

```
---
Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
Residual standard error: 22510 on 394 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.866, Adjusted R-squared: 0.8656
F-statistic: 2546 on 1 and 394 DF, p-value: < 2.2e-16
> plot(electricity,type="l") #绘制拟合效果图
> abline(lm(electricity~t),col=2)
```

线性拟合



根据输出结果, 可知美国 1974 年至 2006 年月度发电量序列线性拟合模型为 $x_t = 142300 + 499.3t + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0,\ 22510^2)$

曲线拟合

- 如果长期趋势呈现出显著的非线性特征，那么就可以尝试用曲线模型来拟合它. 在进行曲线拟合时，应遵循的一般原则是，能转换成线性模型的就转换成线性模型，用线性最小二乘法进行参数估计；不能转换成线性模型的，就用迭代法进行参数估计.
- 例如：对于指数模型 $\mathrm{T}_t = ab^t$ ，我们令

$$\mathrm{T}_t' = \ln(\mathrm{T}_t),\ a' = \ln(a),\ b' = \ln(b)$$

则原模型变为 $\mathrm{T}_t' = a' + b't$. 然后，用线性最小二乘法求出 a', b'. 最后，再做变换：$a = e^{a'},\ b = e^{b'}$

- 在 R 中，对非线性趋势的拟合也分为两类：一类可以写成关于时间 t 的多项式，这时仍然可以用函数 lm( ) 来拟合；

曲线拟合

- 另一类无法通过适当的变换变成线性回归模型, 则只能通过非线性回归解决, 这时需要调用函数 nls( ). nls( ) 函数的命令格式如下:

  nls(Y~f(X1,X2,...,Xn), data=, start=)

  该函数的参数说明:

  - Y: 响应变量.

  - X1, X2, · · · , Xn: 自变量.

  - f: 非线性函数.

  - data: 数据框名. 如果自变量和响应变量不是独立输入变量而是共同存在于某个数据框中, 则需要指定数据框名.

  - start: 如果需要利用迭代法计算未知参数, 可以指定迭代初始值.

曲线拟合

- **例 4.3** 对 1996 年至 2015 年宁夏回族自治区地区生产总值进行曲线拟合.

解 时序图 1.11 显示该序列有显著的曲线递增趋势，于是我们尝试使用二次型模型

$$\begin{cases} x_t = a + b*t + c*t^2,\ t = 1,2,\cdots 20; \\ \mathrm{E}(\mathrm{I}_t)=0,\ \mathrm{Var}(\mathrm{I}_t)=\sigma^2 \end{cases}$$

拟合该序列的趋势. 具体命令及运行结果如下:

```
> a <- read.table(file="E:/DATA/CHAP1/SMGDP.csv",sep=",",header=T)
> NXGDP <- ts(a$NX,start=1996)
> t1 <- 1:20
> t2 <- t1^{2}
```

曲线拟合

```
> x.fit1 <- lm(NXGDP~t1+t2) #lm( ) 函数拟合
> summary(x.fit1)
Call:
lm(formula = NXGDP ~ t1 + t2)
Residuals:
Min 1Q Median 3Q Max
-204.085 -54.770 -0.711 42.629 198.210
Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 306.1806 74.0964 4.132 0.000697 ***
```

曲线拟合

t1 -62.6163 16.2505 -3.853 0.001275 **

t2 10.1550 0.7517 13.510 1.61e-10 ***

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 99.59 on 17 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9901, Adjusted R-squared: 0.989

F-statistic: 851.9 on 2 and 17 DF, p-value: < 2.2e-16

> x.fit2 <- nls(NXGDP~a+b*t1+c*t1^{2},start=list(a=1,b=1,c=1))

> summary(x.fit2)

Formula: NXGDP ~ a + b * t1 + c * t1^{2}

曲线拟合

Parameters:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

a 306.1806 74.0964 4.132 0.000697 ***

b -62.6163 16.2505 -3.853 0.001275 **

c 10.1550 0.7517 13.510 1.61e-10 ***

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 99.59 on 17 degrees of freedom

Number of iterations to convergence: 1

Achieved convergence tolerance: 1.655e-08

曲线拟合

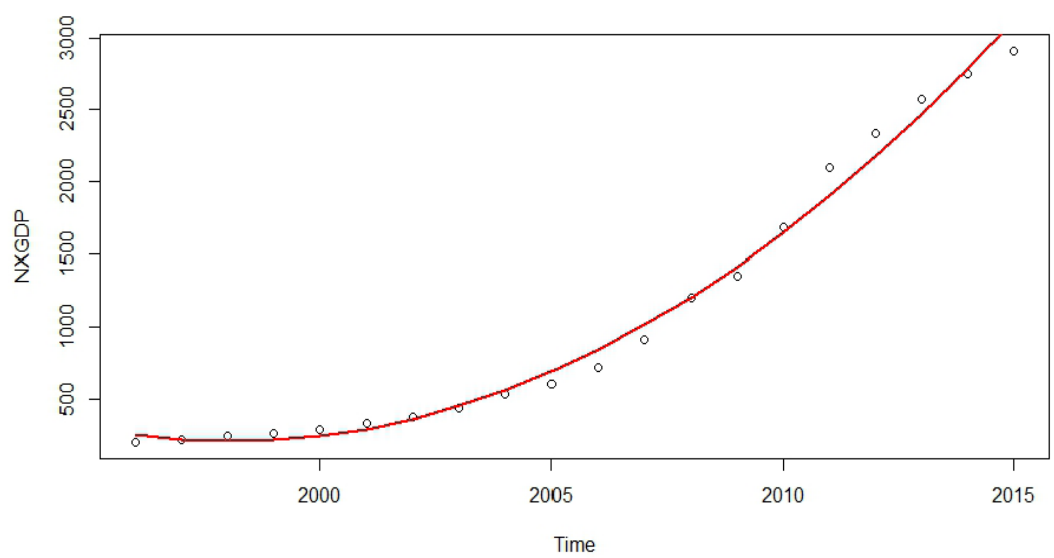
进一步，绘制拟合曲线图. 具体命令如下，运行结果见图.

```
> y <- predict(x.fit2) #把 nls() 函数得到的拟合值赋值给 y

> y <- ts(y,start=1996)

> plot(NXGDP,type="p")

> lines(y,col=2,lwd=2)
```



曲线拟合

根据输出结果可以知道, 函数 lm() 和 nls() 得到的拟合结果完全一致. 1996 年至 2015 年宁夏回族自治区地区生产总值序列拟合模型为

$$x_t = 306.1806 - 62.6163t + 10.1550t^2 + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0,\ 99.59^2)$$

本章结构

1. 序列分解原理
2. 趋势拟合法
3. 移动平均法
4. 指数平滑方法
5. 季节效应分析

移动平均法

- 进行趋势分析时常用的一种方法是所谓的平滑法，即利用修均技术，削弱短期随机波动对序列的影响，使序列平滑化，从而显示出变化的趋势. 根据所用的平滑技术不同，平滑法又可分为移动平均法和指数平滑法. 所谓移动平均法(moving averagemethod)，就是通过取该时间序列特定时间点周围一定数量的观测值的平均来平滑时间序列不规则的波动部分，从而显示出其特定的变化规律. 特别地，移动平均法还能够平滑含有季节变化的部分，显示出序列本身的长期趋势. 因此，通过移动平均法平滑的时间序列可看做是原序列长期趋势变动序列，按方式不同，可分为中心化移动平均法、简单移动平均法和二次移动平均法.

移动平均法

- 进行趋势分析时常用的一种方法是所谓的平滑法，即利用修均技术，削弱短期随机波动对序列的影响，使序列平滑化，从而显示出变化的趋势．根据所用的平滑技术不同，平滑法又可分为移动平均法和指数平滑法．所谓移动平均法(moving averagemethod)，就是通过取该时间序列特定时间点周围一定数量的观测值的平均来平滑时间序列不规则的波动部分，从而显示出其特定的变化规律．特别地，移动平均法还能够平滑含有季节变化的部分，显示出序列本身的长期趋势．因此，通过移动平均法平滑的时间序列可看做是原序列长期趋势变动序列，按方式不同，可分为中心化移动平均法、简单移动平均法和二次移动平均法．

中心化移动平均法

- 中心化移动平均法就是通过以时间序列特定时间点为中心，取其前后观测值的平均值作为该时间点的趋势估计值. 一般来讲，移动项数的选择会对移动平均法产生影响. 若采用奇数项移动平均，以三项为例，第一个移动平均值为

$$\hat{l}_2 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

此时的移动平均值可作为时期 2 的趋势估计值，以此类推. 所以，采用奇数项求移动平均，只需要移动平均一次就得到长期趋势估计值. 若采用偶数项求移动平均，以四项为例，第一个移动平均值为

$$\hat{l}_{2-3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

中心化移动平均法

此时移动平均值位于时期 2 和时期 3 之间. 同理, 第二个移动平均值位于时期 3 和时期 4 之间.由于我们需要得到整数时期的平均移动, 故需要再进行一次移动平均, 即将第一个移动平均数与第二个移动平均数再平均, 即

$$\hat{l}_3 = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5}{4}.$$

此时的移动平均值可作为时期 3 的趋势估计值, 以此类推. 因此, 采用偶数项求移动平均时, 需要两次移动平均.

在实际的操作中, 为消除季节变化的影响, 移动平均项数应等于季节周期的长度. 比如: 常见的季度数据中, 移动平均项数应为 4, 此时需要移动平均两次, t 时期的趋势估计值为

中心化移动平均法

$$\hat{l}_t = \frac{\frac{1}{2}x_{t-2} + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \frac{1}{2}x_{t+2}}{4}, \qquad t=3,4,\cdots,n\text{-}2.$$

再如: 在月度数据中, 移动平均项数应为 12, 此时 t 时期的趋势估计值为

$$\hat{l}_t = \frac{\frac{1}{2}x_{t-6} + x_{t-5} + x_{t-4} + x_{t-3} + x_{t-2} + x_{t-1} + x_t}{12}$$

$$+ \frac{x_{t+1} + x_{t+2} + x_{t+3} + x_{t+4} + x_{t+5} + \frac{1}{2}x_{t+6}}{12}, \qquad t = 7,8,\cdots,n-6.$$

简单移动平均法

- 简单移动平均法

简单移动平均法的基本思想是，对于一个时间序列 $\{x_t\}$ 来讲，假定在一个比较短的时间间隔里，序列的取值是比较稳定的，它们之间的差异主要是由随机波动造成的．根据这种假定，我们可以用一定时间间隔内的平均值作为下一期的估计值．该方法适合于未含有明显趋势的时间序列数据的平滑．具体来说，t 时期的 n 项简单移动平均值为

$$\hat{l}_t = \frac{x_{t-n+1} + x_{t-n+2} + \cdots + x_{t-1} + x_t}{n}, \qquad t=n, n+1, \cdots.$$

移动平均项数决定了序列的平滑程度：移动平均项多，序列的平滑效果强，但是对序列变化的反应较为缓慢；相反，移动平均项数少，序列平滑效果弱，但对序列变化的反应迅速．

简单移动平均法

移动平均后得到的序列, 比原序列的项数少, 因此信息也比原序列少. 事实上, 移动平均的项数不宜过大.

在有季节变化的时间序列数据分析时, 一般移动平均项数等于季节周期的长度. 例如: 在季度数据中, 移动平均项数为 4, t 时期的趋势估计值为

$$\hat{l}_t = \frac{x_{t-3} + x_{t-2} + x_{t-1} + x_t}{4}, \qquad t=4,5,\cdots.$$

而在月度数据中, 移动平均数为 12, t 时期的趋势估计值为

$$\hat{l}_t = \frac{x_{t-11} + x_{t-10} + x_{t-9} + \cdots + x_{t-2} + x_{t-1} + x_t}{12}, \qquad t=12,13,\cdots.$$

简单移动平均法

简单移动平均法除了用于平滑时间序列外，还能用于时间序列的外推预测，但一般仅用于时间序列的向前一步预测. 如: n 项简单移动平均为例，t 时期的向前一步预测值为

$$\hat{l}_{t+1} = \frac{x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \cdots + x_{t-n+1}}{n}.$$

在 R 中，通过调用函数 SMA() 来作简单移动平均趋势拟合. 在调用函数 SMA() 之前，需要下载 TTR 程序包，并且用 library() 加载. SMA() 函数的命令格式如下:

```
SMA(x, n=)
```

该函数的参数说明:

- x: 需要做简单移动平均的序列名.

简单移动平均法

- n: 移动平均期数.

例 4.4 对 1871—1970 年尼罗河的年度流量序列, 进行 5 期移动平均拟合.

解 用以下语句进行拟合, 拟合的结果见图 4.4.

```
> library(TTR)
> Nile1 <- scan("E:/DATA/CHAP4/Nile.txt")
Read 100 items
> Nile2 <- ts(Nile1,start=1871)
> Nile.ma <- SMA(Nile2,n=5)
> plot(Nile2,type = "o")
> lines(Nile.ma,col=2,lwd=2)
```

二次移动平均法

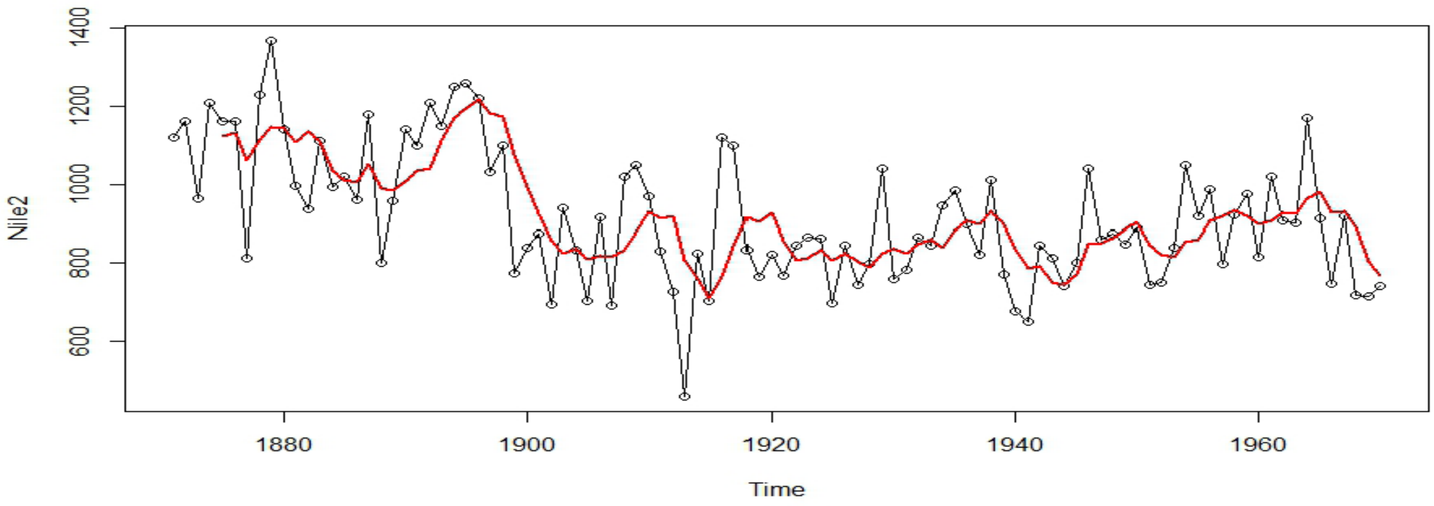


图 4.4 1871—1970 年尼罗河的年度流量序列 5 期移动平均拟合图

- 二次移动平均法

二次移动平均法是在简单移动平均法得到的序列基础上再进行的一次移动平均. 具体地, t时期的 n 项二次移动平均值为

二次移动平均法

$$\hat{L}_t = \frac{\hat{l}_{t-n+1} + \hat{l}_{t-n+2} + \cdots + \hat{l}_{t-1} + \hat{l}_t}{n}, \qquad t = 2n-1, 2n, \cdots,$$

其中，$\hat{l}_t$ 为 t 时期的简单移动平均值. 一般来讲，两次移动平均的项数应该相等. 移动平均项数决定了时间序列的平滑程度，其理由与简单移动平均相同.

若时间序列存在明显的线性趋势，即序列观察值随着时间的变动呈现出每期递增 b 或递减b 的趋势，由于随机因素的影响，每期的递增或递减值不会恒为 b，b 值会随时间变化上下波动.若仅使用简单移动平均法，得到的平滑值相比于实际值会存在滞后偏差，此时应使用二次移动平均法对时间序列进行平滑.

根据两次移动平均后的序列，即可得到原序列的长期趋势变

二次移动平均法

动序列，或称为水平值序列$\{a_t\}$和斜率变化序列$\{b_t\}$它们满足如下变化过程：

$$\begin{cases} a_t = 2\hat{l} - \hat{L}_t; \\ b_t = \dfrac{2}{n-1}\left(\hat{l}_t - \hat{L}_t\right), \end{cases}$$

其中，$\hat{l}_t$ 和 $\hat{L}_t$ 分别表示 t 时期的简单移动平均和二次移动平均值；n 表示移动平均的项数.

于是，根据两次移动平均计算的在 t 时期的水平值 a_t 和斜率值 b_t，可得在时期 t 任何 1 步向前预测值 $\hat{x}_{t+l}$ 为

$$\hat{x}_{t+l} = a_t + b_t l, \quad l = 1, 2 \cdots.$$

二次移动平均法

例 4.5 分析 2013 年第一季度至 2017 年第二季度我国季度 GDP 数据序列，选择合适的移动平均法拟合该时间序列数据的长期趋势变动序列.

解 观察我国季度 GDP 数据时序图知，该时间序列数据呈现出明显的上升趋势，故可选择中心化移动平均法和二次移动平均法平滑该时间序列数据，得到序列的长期趋势变动序列.

选择中心化移动平均法进行拟合. 具体命令如下，拟合结果见图 4.5.

```
> a <- read.table(file="E:/DATA/CHAP4/JDGDP.csv",sep=",",header=T)
> JDGDP <- ts(a$JDGDP,start=2013,frequency = 4)
```

二次移动平均法

```
> Trendnx <- filter(JDGDP,filter=c(1/8,1/4,1/4,1/4,1/8),sides=2)
> plot(JDGDP,type="o")
> lines(Trendnx)
```

选择二次移动平均法进行拟合. 具体命令如下, 拟合结果见图 4.6.

```
> m1 <- filter(JDGDP,filter=rep(1/4,4),sides=1)
> m2 <- filter(m1,filter=rep(1/4,4),sides=1)
> trend <- 2*m1-m2
> plot(JDGDP,type="o")
> lines(trend)
```

二次移动平均法

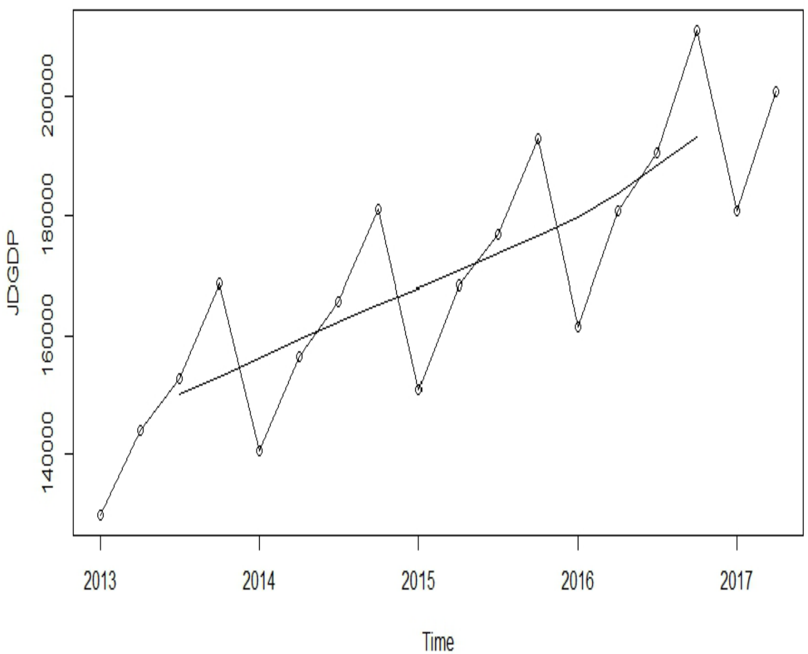


图 4.5 中心化移动平均法下的拟合图

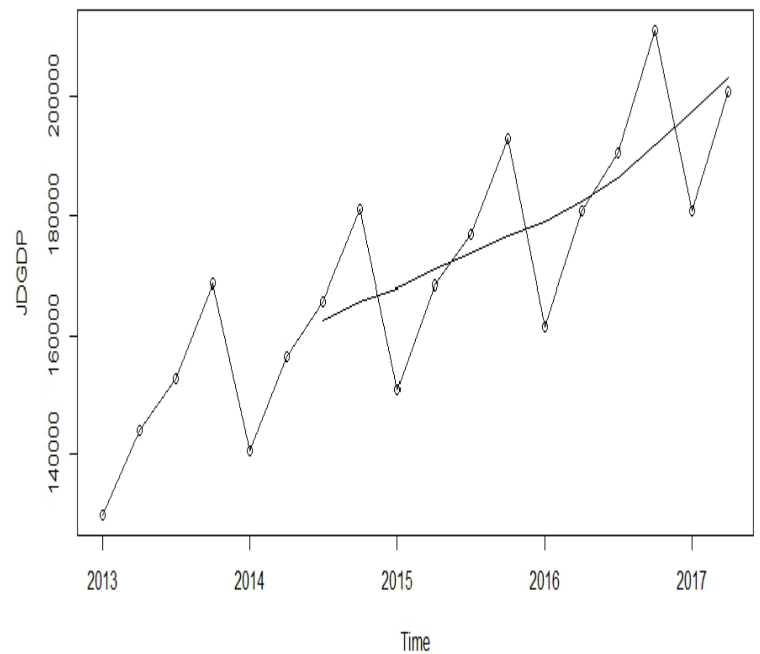


图 4.6 二次移动平均法下的拟合图

本章结构

1. 序列分解原理
2. 趋势拟合法
3. 移动平均法
4. 指数平滑方法
5. 季节效应分析

指数平滑方法

- 指数平滑方法

移动平均法实际上就是用一个简单的加权平均数作为某一期趋势的估计值. 以 n 期简单移动平均为例,

$\hat{l}_t=(x_t+x_{t-1}+\cdots+x_{t-n+1})/n$, 相当于用最近 n 期的加权平均数作为最后一期趋势的估计值. 由于简单移动平均的权数一样, 所以事实上是假定了这 n 期观察值对第 t 期的影响一样.

但是实际上, 一般而言, 近期的变化对现在的影响更大一些, 而远期的变化对现在的影响已经很小了. 基于此, 人们提出了指数平滑方法. 指数平滑方法也是一种加权平均方法, 它考虑了时间的远近对 t 时期趋势估计值的影响, 假定各期权重随着时间间隔的增大呈指数递减形式. 根据时间序列数据不同的波动形式, 可采用不同的指数平滑法.

简单指数平滑方法

- 简单指数平滑方法

简单指数平滑方法是指数平滑方法最基本的形式，主要用来平滑无季节变化或趋势变化的时序观察值，其运算公式为 t 期的序列平滑值等于 t 期的序列观测值和 $t-1$ 期的序列平滑值的加权平均，即 $\bar{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\bar{x}_{t-1}, \quad 0<\alpha<1, \quad (4.1)$

式中 α 称为平滑系数. 通过对 (4.1) 式的反复迭代，可以得到

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_t &= \alpha x_t + (1-\alpha)\bar{x}_{t-1} \\
&= \alpha x_t + (1-\alpha)\left[\alpha x_{t-1} + (1-\alpha)\bar{x}_{t-2}\right] \\
&\ \ \vdots \\
&= \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \cdots + \alpha(1-\alpha)^{t-1}x_1 + (1-\alpha)^t \tilde{x}_0.
\end{aligned}
$$

可以看到，t 期的序列平滑值是历史观测值的加权平均，而且由于权数 $\alpha(1-\alpha)^k$ 随着 k 的增大而减小，所以前期序列值对

简单指数平滑方法

当期的影响越来越小.

简单指数平滑法的运算公式 (4.2) 其实是一个递推公式, 因此需要确定 $\tilde{x}_0$ 的值. 最简单的确定方法是指定 $\tilde{x}_0 = x_1$. 平滑系数 α 的值由序列变化决定. 一般地, 变化缓慢的序列常取较小值; 变化迅速的序列, 常取较大的值. 经验表明, α 的取值介于 0.05 ~ 0.3 之间, 修均效果比较好.

简单指数平滑法也是一种平稳序列的预测方法. 假定最后一期的观察值为 x_t, 那么使用指数平滑法, 向前预测 1 期的预测值为 $\hat{x}_{t+1} = \bar{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\bar{x}_{t-1}$. 进一步, 向前预测 2 期的预测值为 $\hat{x}_{t+2} = \alpha \hat{x}_{t+1} + (1-\alpha)\bar{x}_t = \alpha \hat{x}_t + (1-\alpha)\bar{x}_t = \bar{x}_t$. 以此类推可得, 使用简单指数平滑法预测任意 1 期的预测值都是常数. 因此, 使用简单指数平滑法最好只做 1 期预测.

简单指数平滑方法

当期的影响越来越小.

简单指数平滑法的运算公式 (4.2) 其实是一个递推公式, 因此需要确定 $\tilde{x}_0$ 的值. 最简单的确定方法是指定 $\tilde{x}_0 = x_1$. 平滑系数 α 的值由序列变化决定. 一般地, 变化缓慢的序列常取较小值; 变化迅速的序列, 常取较大的值. 经验表明, α 的取值介于 0.05 ~ 0.3 之间, 修均效果比较好.

简单指数平滑法也是一种平稳序列的预测方法. 假定最后一期的观察值为 x_t, 那么使用指数平滑法, 向前预测 1 期的预测值为 $\hat{x}_{t+1} = \overline{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\overline{x}_{t-1}$. 进一步, 向前预测 2 期的预测值为 $\hat{x}_{t+2} = \alpha \hat{x}_{t+1} + (1-\alpha)\overline{x}_t = \alpha \hat{x}_t + (1-\alpha)\overline{x}_t = \overline{x}_t$. 以此类推可得, 使用简单指数平滑法预测任意 1 期的预测值都是常数. 因此, 使用简单指数平滑法最好只做 1 期预测.

Holt 线性指数平滑方法

- Holt 线性指数平滑方法

简单指数平滑法主要是处理无趋势、无季节变化的观察值序列. 对于含有线性趋势的数据,我们往往采用 Holt 线性指数平滑方法. 具体地, 假设序列有一个比较固定的线性趋势, 即每期递增或递减 r_t, 那么第 t 期的估计值为 $\hat{x}_t = x_{t-1} + r_{t-1}$. 现在用第 t 期观察值和第 t 期的估计值的加权平均数作为第 t 期的修均值 $\bar{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\hat{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(x_{t-1} + r_{t-1}), 0 < \alpha < 1.$ (4.2)

由于 $\{r_t\}$ 也是随机序列, 为了使得修均序列 $\{\bar{x}_t\}$ 更平滑, 现在对 $\{r_t\}$ 也修均如下:

$$r_t = \beta(\tilde{x}_t - \tilde{x}_{t-1}) + (1-\beta)r_{t-1}, 0 < \beta < 1. \quad (4.3)$$

将 (4.3) 式代入 (4.2) 式, 就能得到较为光滑的修均序列 $\{\bar{x}_t\}$.

Holt 线性指数平滑方法

这就是 Holt 线性指数平滑方法的构造思想. 它的平滑公式为

$$\begin{cases} \tilde{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(\tilde{x}_{t-1} + r_{t-1}); \\ r_t = \beta(\tilde{x}_t - \tilde{x}_{t-1}) + (1-\beta) r_{t-1}, \end{cases}$$

式中, α, β 为两个平滑系数, 并且 $0 < \alpha, \beta < 1$.

与简单指数平滑法一样, Holt 线性指数平滑方法也需要确定平滑系数 α, β 以及初始值 $\tilde{x}_0, \mathrm{r}_0$. 平滑系数 α, β 决定了平滑程度, 其确定方法与简单指数平滑法相同. 至于平滑序列的初始值 $\tilde{x}_0$, 最简单的方法是指定 $\tilde{x}_0 = x_1 . r_t$ 的初始值 r_0 的确定有许多方法, 最简单的方法是: 任意指定一个区间长度 n, 用这段区间的平均趋势作为趋势初始值:

$$r_0 = \frac{x_{n+1} - x_1}{n}.$$

Holt-Winters 指数平滑方法

Holt 线性指数平滑方法也可以用于时间序列的预测. 假定最后一期的修均值为 $\tilde{x}_T$,, 那么向前 l 期的预测值为

$$\tilde{x}_{T+l} = \tilde{x}_T + l.r_T.$$

- Holt-Winters 指数平滑方法

简单指数平滑法和 Holt 线性指数平滑法均是在不考虑季节波动部分下对时间序列数据进行修匀的方法, 但是在现实中, 存在更多的是包含季节变动部分的时间序列. 对于含有季节变动的时间序列进行平滑的常用方法为 Holt-Winters 指数平滑法. 该方法是在 Holt 线性指数平滑法基础上考虑季节变动的影响, 可采用加法形式或乘法形式.一般来讲, 对于趋势和季节的加法模型, Holt-Winters 指数平滑法的公式如下:

Holt-Winters 指数平滑方法

$$\begin{cases} a_t = \alpha\left(x_t - s_{t-\pi}\right) + \left(1-\alpha\right)\left(a_{t-1} + b_{t-1}\right); \\ b_t = \beta\left(a_t - a_{t-\pi}\right) + \left(1-\beta\right)b_{t-1}; \\ s_t = \gamma\left(x_t - a_t\right) + \left(1-\gamma\right)s_{t-\pi}, \end{cases} \tag{4.4}$$

式中, a_t 为该序列的水平部分; b_t 为该序列的趋势部分; s_t 为该序列的季节部分 (或称为季节因子); π 为一个季节的周期长度; α,β,γ 为平滑系数, 介于 0 和 1 之间. 在 (4.4) 式中, 第一个方程是水平方程; 第二个方程是趋势方程. 这两个方程与 Holt 线性指数平滑法类似, 不同的地方是第三个方程. 第三个方程是季节方程, 它表示 t 时期的季节变动值为 t 时期的观测值与水平值的差和 $t-\pi$ 时期的季节变动值的加权平均. 至于初始值 a_0, b_0 以及平滑系数 α,β,γ 的确定原则与前面指数

Holt-Winters 指数平滑方法

平滑法确定类似,而季节变动初始值 $s_1, s_2, \cdots, s_\pi$ 的确定, 一般通过经验估计或者直接设为 0.

对于趋势和季节的乘法模型, Holt-Winters 指数平滑法的公式如下:

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{\alpha x_t}{s_{t-\pi}} + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}); \\ b_t = \beta(a_t - a_{t-\pi}) + (1-\beta) b_{t-1}; \\ s_t = \dfrac{\gamma x_t}{a_t} + (1-\gamma) s_{t-\pi}. \end{cases} \tag{4.5}$$

(4.5) 式与 (4.4) 式形式类似, 所不同的是, 加法模型在扣除因素影响的时候采用的是减法, 而乘法模型采用的是除法.

Holt-Winters 指数平滑方法

平滑法确定类似,而季节变动初始值 $s_1, s_2, \cdots, s_\pi$ 的确定, 一般通过经验估计或者直接设为 0.

对于趋势和季节的乘法模型, Holt-Winters 指数平滑法的公式如下:

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{\alpha x_t}{s_{t-\pi}} + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}); \\ b_t = \beta(a_t - a_{t-\pi}) + (1-\beta)b_{t-1}; \\ s_t = \dfrac{\gamma x_t}{a_t} + (1-\gamma)s_{t-\pi}. \end{cases} \tag{4.5}$$

(4.5) 式与 (4.4) 式形式类似, 所不同的是, 加法模型在扣除因素影响的时候采用的是减法, 而乘法模型采用的是除法.

Holt-Winters 指数平滑方法

Holt-Winters 指数平滑法也可用于序列预测. 在加法模型下, t 时期向前 l 步预测值为

$$\hat{x}_{t+l} = a_t + b_t.l + s_{t+l-\pi}, \qquad l \le \pi;$$

在乘法模型下, t 时期向前 l 步预测值为

$$\hat{x}_{t+l} = \left(a_t + b_t.l\right).s_{t+l-\pi}, \qquad l \le \pi,$$

式中, a_t, b_t 分别是 t 时期的水平值和趋势值; $s_{t+l+\pi}$ 为 $t+l+\pi$ 期的季节变动值.

在 R 语言中, 可以用 HoltWinters() 函数完成上述指数平滑拟合. HoltWinters() 函数的命令格式如下:

```
HoltWinters(x, alpha=, beta=,gamma=,seasonal=)
```

该函数的参数说明:

Holt-Winters 指数平滑方法

x: 需要进行指数平滑的序列名.

- alpha: 水平部分的参数.

- beta: 趋势部分的参数.

- gamma: 季节部分的参数.

三指数按如下方式取值, 确定了要拟合的指数平滑类型:

(1) 当 alpha 不指定, beta=F, gamma=F 时, 表示使用简单指数平滑法拟合模型.

(2) 当 alpha 和 beta 不指定, gamma=F 时, 表示使用 Holt 线性指数平滑法拟合模型.

(3) 当三个参数都不指定时, 表示使用 Holt-Winters 指数平滑法拟合模型.

Holt-Winters 指数平滑方法

- seasonal: 当既含有季节又含有趋势时, 指定季节与趋势的关系.

(1) seasonal= “additive” 表示加法关系, 这是系统默认选项.

(2) seasonal= “multiplicative” 表示乘法关系.

例 4.6 分析例 4.5 中的数据. 用 Holt-Winters 指数平滑法拟合该序列, 并预测未来 2 年的季度 GDP.

解 从时序图我们容易发现, 季度 GDP 序列呈现出明显的递增趋势和季节效应, 因此用Holt-Winters 指数平滑法拟合该序列, 并选用乘法模型. 具体命令及运行结果如下:

```
> a <- read.table(file="E:/DATA/CHAP4/JDGDP.csv",sep=",",header=T)
> JDGDP <- ts(a$JDGDP,start=2013,frequency = 4)
```

Holt-Winters 指数平滑方法

```
> JDGDP.fix <- HoltWinters(JDGDP,seasonal = "multiplicative")
> JDGDP.fix
Holt-Winters exponential smoothing with trend and multiplicative seasonal component.
Call:
HoltWinters(x = JDGDP, seasonal = "multiplicative")
Smoothing parameters:
alpha: 0.8764083
beta : 0.08285351
gamma: 1
Coefficients:
```

Holt-Winters 指数平滑方法

```
[,1]
a 2.040468e+05
b 3.867662e+03
s1 1.017008e+00
s2 1.099491e+00
s3 9.058240e-01
s4 9.841233e-01
```

绘制 Holt-Winters 指数平滑法拟合效果图的具体命令如下，运行结果见图 4.7.

```
plot(JDGDP.fix,type="o")
```

说明：图 4.7 中，无滞后序列为观察值序列，滞后序列为

Holt-Winters 指数平滑方法

Holt-Winters 指数平滑序列.

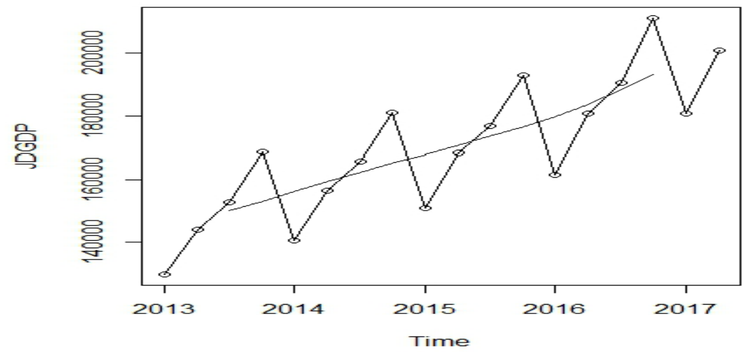


图 4.7 Holt-Winters 指数平滑法拟合效果图

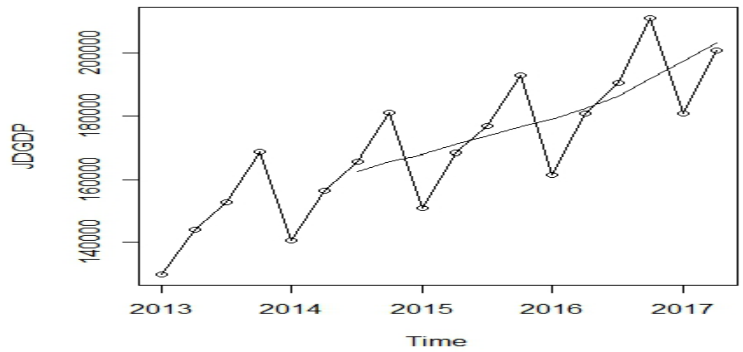


图 4.8 拟合序列的预测图

预测接下来 8 个季度的季度 GDP, 并绘制预测效果图. 具体命令及运行结果如下, 预测效果见图 4.8.

```
> library(forecast)

> JDGDP.fore <- forecast(JDGDP.fix,h=8)
```

Holt-Winters 指数平滑方法

```
> plot(JDGDP.fore,type="o",ylab="季度 GDP")
> JDGDP.fore
Point Forecast Lo 80 Hi 80 Lo 95 Hi 95
2017 Q3 211450.7 208689.2 214212.3 207227.3 215674.1
2017 Q4 232852.6 228896.1 236809.1 226801.7 238903.5
2018 Q1 195340.7 191027.7 199653.8 188744.5 201937.0
2018 Q2 216032.2 211232.8 220831.6 208692.2 223372.3
2018 Q3 227184.5 221006.2 233362.8 217735.6 236633.5
2018 Q4 249862.5 242412.6 257312.3 238468.9 261256.0
2019 Q1 209354.4 202306.8 216402.0 198576.0 220132.8
2019 Q2 231257.3 223442.3 239072.2 219305.3 243209.2
```

本章结构

1. 序列分解原理
2. 趋势拟合法
3. 移动平均法
4. 指数平滑方法
5. 季节效应分析

季节效应分析

- 在实际问题中，许多序列值的变化受季节变化的影响，比如：某地区居民月平均用电量、某景点每季度的旅游人数，等等，它们都会呈现出明显的季节变动规律．将"季节"概念广义化，我们把凡是呈现出周期变化的事件统称为具有**季节效应** (seasonal effect) 的事件．习惯上，仍然将一个周期称为一"季"．
- 一般地，具有季节效应的时间序列在不同周期的相同时间段上会呈现出相似的性质．为了抽取季节信息加以研究，我们给出季节指数的概念．所谓季节指数，就是用简单平均法计算的周期内各时期季节性影响的相对数．具体地，假定序列的数据结构为 π 期为一周期，共有 n 个周期，则周期内各期的平均数为

季节效应分析

$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ik}}{n}, \quad k = 1, 2, \cdots, \pi;$$

序列总的平均数为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\pi} x_{ik}}{n\pi},$$

于是，用时期平均数除以总平均数就得到各时期的季节指数S_k，$k = 1, 2, \cdots, \pi$，即

$$S_k = \frac{\bar{x}_k}{\bar{x}}.$$

季节效应分析

- 季节指数反映了季度内各期平均值与总平均值之间的一种比较稳定的关系. 如果这个比值大于 1, 就说明该季度的值常常会高于总平均值; 如果这个比值小于 1, 就说明该季度的值常常低于总平均值; 如果这个比值等于 1, 那么就说明该序列没有明显的季节效应.
- **例 4.7** 对美国爱荷华州杜比克市 1964 年至 1976 年月平均气温 (单位：F) 数据进行季节效应分析.
- **解** 首先从网站读取数, 并绘制月均气温序列时序图. 具体命令如下, 运行结果见图 4.9所示.
-

```
> tempdub <- read.table("http://homepage.divms.uiowa.edu/~kchan/TSA
+ /Datasets/tempdub.dat",header=T)
```

季节效应分析

- > tempdub <- ts(tempdub,start=c(1964,1),frequency = 12)

```
> plot(tempdub,type="o",col="blue")
```

通过时序图可以看到，杜比克市 1964 年至 1976 年月平均气温随季节变化非常有规律. 气温的波动主要受到两个因素的影响: 一个是季节效应; 一个是随机波动. 假设每个月的季节指数分别为 $S_i, i=1,2,\cdots,12$, 那么第 i 年第 j 月的平均气温可以表示为:

$$x_{ij} = \bar{x} \cdot S_j + I_{ij},\ j = 1,2,\cdots,12$$

其中，$\bar{x}$ 为各月总平均气温; S_j 为第 j 个月的季节指数;I_{ij} 为第i 年第 j 月气温的随机波动.

季节效应分析

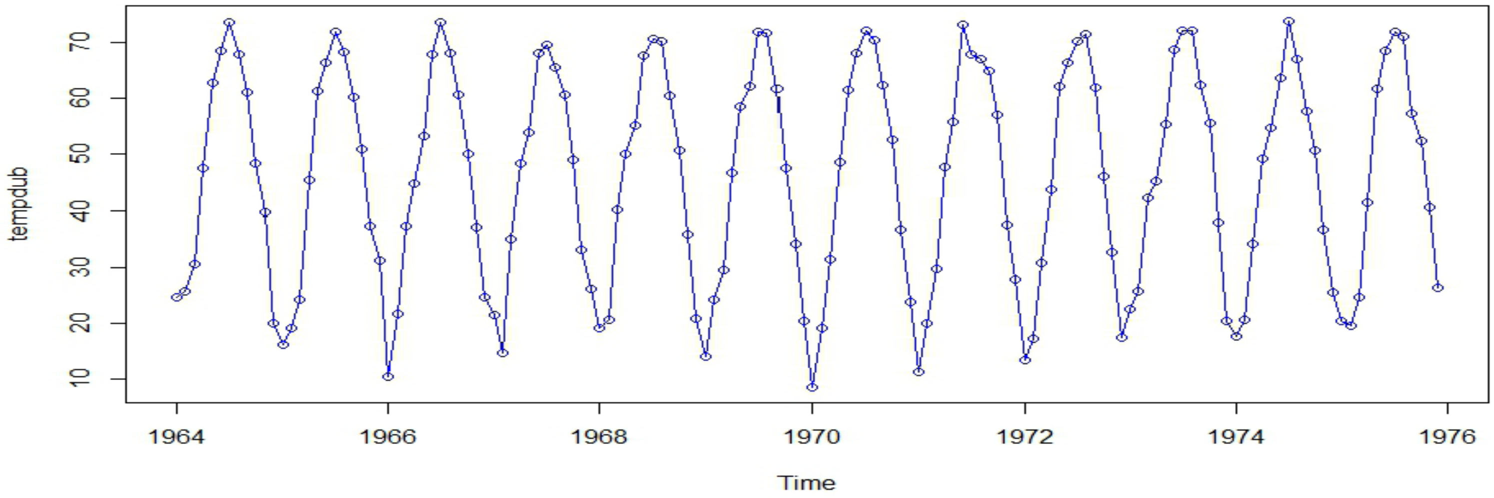


图 4.9　　美国爱荷华州杜比克市 1964 年至 1976 年月平均气温时序图

经计算可得其季节指数向量

$$(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12})$$

$$=(0.36, 0.45, 0.70, 1.00, 1.26, 1.46, 1.55, 1.50, 1.32, 1.10, 0.79, 0.51)$$

季节效应分析

将季节指数绘制成图 (见图 4.10). 可见 7 月的季节指数最大, 说明 7 月是杜比克市最热的月份; 1 月的季节指数最低, 说明 1 月是杜比克市最冷的月份. 4 月份的气温和年平均气温(46.27 F) 相等.

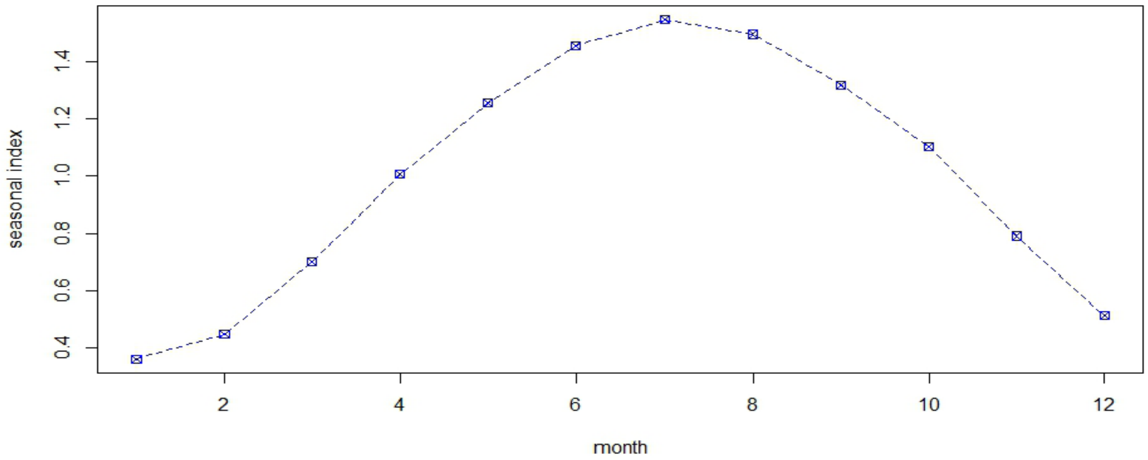


图 4.10　美国爱荷华州杜比克市 1964 年至 1976 年月平均气温季节指数图

如果不考虑随机波动的影响, 那么我们可以从季节指数的

季节效应分析

如果不考虑随机波动的影响，那么我们可以从季节指数的变化粗略地看出月平均气温的变化. 比如: 9 月的季节指数是 4 月的季节指数的 1.32 倍. 如果下一年 4 月平均气温是 48 F, 那么该年 9 月份的平均气温大约是 63.36 F.