

第八章 异方差时间序列模型



学习目标与要求

- 了解异方差现象的影响.
- 理解自回归条件异方差模型的概念和性质, 并掌握它的估计和检验方法.
- 理解广义自回归异方差模型的概念和特性.
- 学会自回归条件异方差模型和广义自回归异方差模型的建模方法.



本章结构

1. 简单异方差模型

2. 自回归条件异方差模型

3. 广义自回归条件异方差模型

简单异方差模型

- 简单异方差模型

在前面的建模中, 我们基本默认残差序列是满足方差齐性条件, 即残差的方差始终为一常数. 但是, 在处理金融时间数据时, 忽视异方差的存在会导致参数显著性检验容易犯纳伪错误, 这使得参数的显著性检验失去意义, 继而影响模型的拟合精度. 为了提高模型的拟合精度, 我们必须对异方差序列进行深入研究.

- 异方差的现象

由于对序列进行中心化处理后残差序列均值为零, 所以残差方差实际上就是它平方的期望, 即

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2).$$



简单异方差模型

因而残差序列的方差是否齐性主要考察残差平方的性质. 像前面章节一样, 我们可以通过观察残差平方的时序图对残差序列的方差齐性进行诊断. 一般地, 如果残差序列的方差满足齐性, 那么残差平方的时序图应该在某个常数值附近随机波动, 它不应该具有任何明显的趋势, 否则就呈现出异方差性.

例 8.1 考察新西兰 1970 年第一季度至 2012 年 第一季度居民消费价格指数 (CPI) 序列的方差齐性.

解 读入数据, 并对序列作 1 阶差分, 然后绘制残差平方时序图. 具体命令如下, 运行结果如图 8.1 所示.

```
> x <- read.csv("E:/DATA/CHAR8/1.csv",header=T)
> y <- ts(x$All.groups,start=c(1970,1),frequency=4)
> z.re <- diff(y)
> plot(z.re^2)
```



简单异方差模型

```
> abline(v=c(1980,1990),col=4,lty=2)
```

```
> abline(v=c(2006,2011),col=4,lty=2)
```

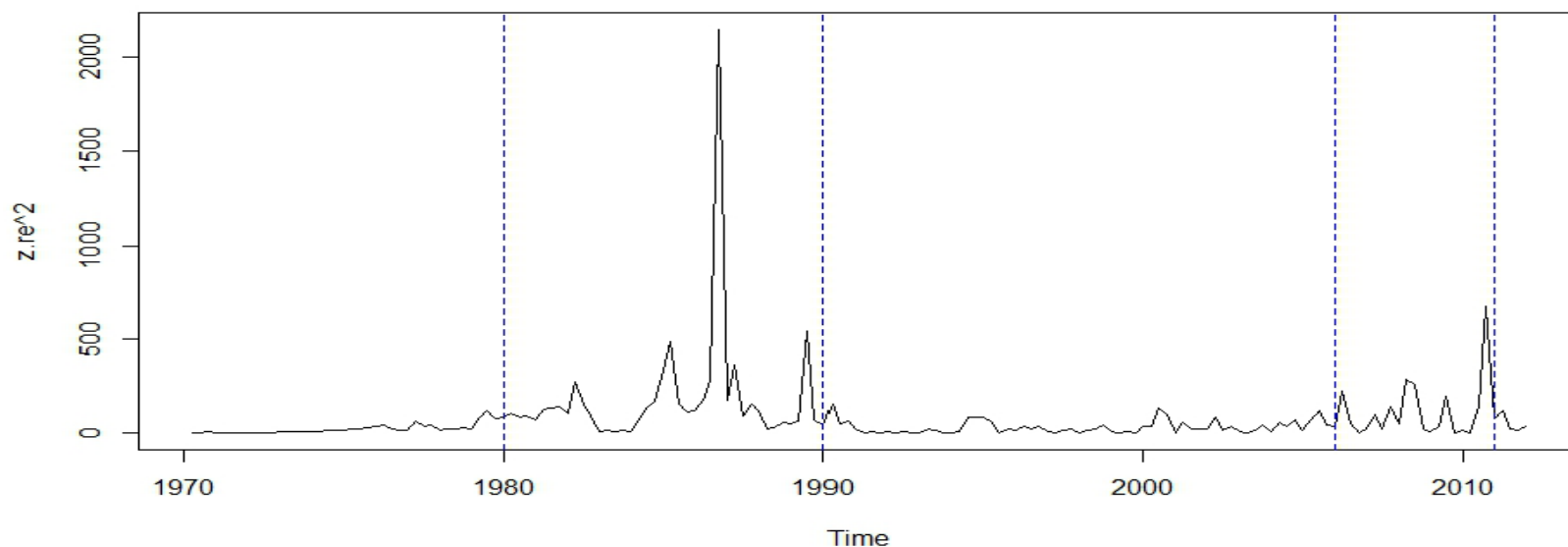


图 8.1 新西兰居民消费价格指数 1 阶差分后残差平方时序图

简单异方差模型

从图 8.1 明显地看出, 残差平方时序图呈现出新西兰居民消费价格指数序列具有异方差性.

许多经济或金融市场的时间数据表现出在经历一段相对平稳的时期后, 集中出现非常大的波动, 我们称这种现象为集群效应 (cluster effect). 由于集群效应的存在, 所以我们对序列同方差的假设是不恰当的.

例 8.2 分析 2000 年 1 月 3 日至 2017 年 9 月 29 日美元对欧元汇率: 绘制汇率的对数时序图, 观察走势; 绘制回报率 (即汇率对数的差分) 平方时序图, 观察集群效应.

解 读入数据, 并应用样条插值法补充缺失数据, 然后绘制汇率的对数时序图和回报率平方时序图. 具体命令如下, 运行结果如图 8.2 所示.



简单异方差模型

```
> x <- read.csv("E:/DATA/CHAR8/2.csv",header=T)
> USEU <- na.spline(x$exchangerate)
> USEU.log <- log(USEU)
> par(mfrow=c(2,1))
> plot.ts(USEU.log,type="l")
> squa <- (diff(USEU.log*100))^2
> plot.ts(squa)
```

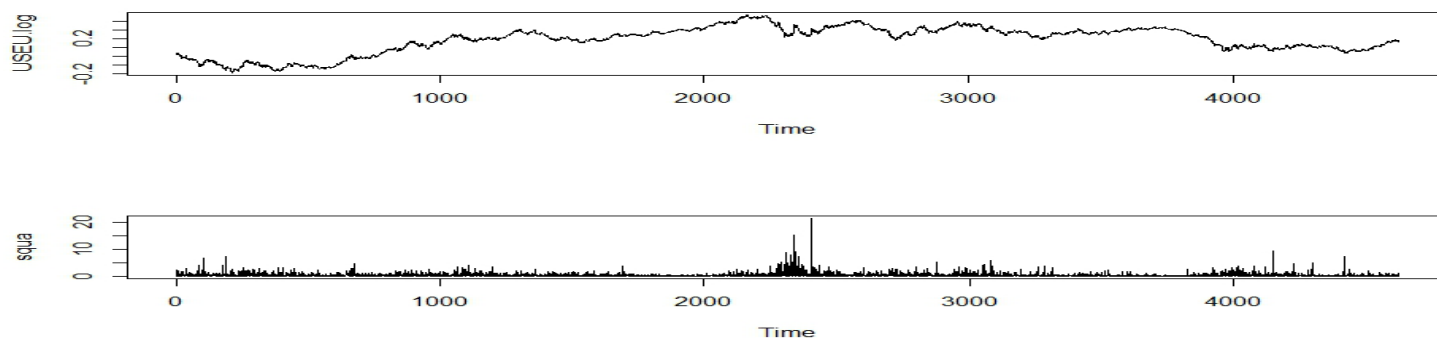


图 8.2 美元对欧元汇率对数时序图和回报率平方时序图

简单异方差模型

从图 8.2 可见, 美元对欧元汇率的对数时序图呈现较大波动. 进一步观察其 1 阶差分之后的残差平方时序图发现, 具有明显的集群效应. 显然, 这时对汇率序列建模, 应该充分考虑到集群效应引起的异方差现象, 否则导致模型不准确, 预测偏差过大.

当序列出现异方差时, 一般有两种处理手段:

(1) 如果方差函数具体形式已知, 那么可以通过方差齐性变换, 化为方差齐性序列进行建模.

(2) 如果方差函数具体形式未知, 那么建立条件异方差模型. 第一种处理手段较为简单, 但是假设过于理想化, 适用范围不广. 下面我们首先来处理这种模型, 第二种处理手段留待后续小节来处理.



方差齐性变换

■ 方差齐性变换

设时间序列 $\{x_t, t \in T\}$ 的方差函数 σ_t^2 与均值函数 μ_t 之间存在函数关系 $\sigma_t^2 = f(\mu_t)$, 其中, $f(\cdot)$ 是已知函数. 现在尝试寻找一个变换 $g(\cdot)$, 使得经过变换之后的序列 $\{g(x_t)\}$ 满足方差齐性条件: $\text{Var}[g(x_t)] = \sigma^2$.

将 $g(x_t)$ 在 μ_t 附近作 1 阶泰勒展开, 得

$$g(x_t) \approx g(\mu_t) + (x_t - \mu_t)g'(\mu_t).$$

上式两边求方差得

$$\text{Var}[g(x_t)] \approx \text{Var}[g(\mu_t) + (x_t - \mu_t)g'(\mu_t)] = [g'(\mu_t)]^2 \text{Var}(x_t) = [g'(\mu_t)]^2 f(\mu_t).$$

可见, 要使得 $\text{Var}[g(x_t)]$ 恒为常数, 必须有 $g'(\cdot) \propto \frac{1}{\sqrt{f(\cdot)}}$.

方差齐性变换

在金融时间数据分析中,一些序列的标准差与其水平之间存在某种正比关系,即序列的水平低时,序列的波动范围较小,序列的水平高时,序列的波动范围大.此时,可以简单地假定 $\sigma_t = \mu_t$, 即等价于 $f(\mu_t) = \mu_t^2$. 令变换为 $g(\cdot)$, 则不妨取等式

$$g'(\mu_t) = \frac{1}{\sqrt{f(\mu_t)}} = \frac{1}{\mu_t}.$$

于是推得 $g(\mu_t) = \ln(\mu_t)$. 这表明对于标准差与水平成正比的异方差序列,对数变换可以有效地实现方差齐性.

例 8.3 考察 2016 年 8 月 3 日至 2017 年 10 月 4 日 10 年期美国国债收益率序列,并使用方差齐性变换方法进行分析.



方差齐性变换

解 首先读取数据, 并绘制 2016 年 8 月 3 日至 2017 年 10 月 4 日 10 年期美国国债收益率序列的时序图. 具体命令如下, 运行结果见图 8.3.

```
> x <- read.csv("E:/DATA/CHAR8/3.csv",header=T)
> y <- ts(na.spline(x$DGS10))
> plot(y,ylab="10-Year Treasury Constant Maturity Rate")
```

从图 8.3 我们看到, 10 年期美国国债收益率序列的波动性与序列水平值之间有正相关性, 于是假定它们之间具有正比关系. 对原序列作对数变换, 并绘制对数变换之后序列的时序图. 然后作 1 阶差分, 并绘制 1 阶差分后所得序列的时序图. 最后对 1 阶差分后所得序列作白噪声检验. 具体命令如下, 运行结果如图 8.4 所示.



方差齐性变换

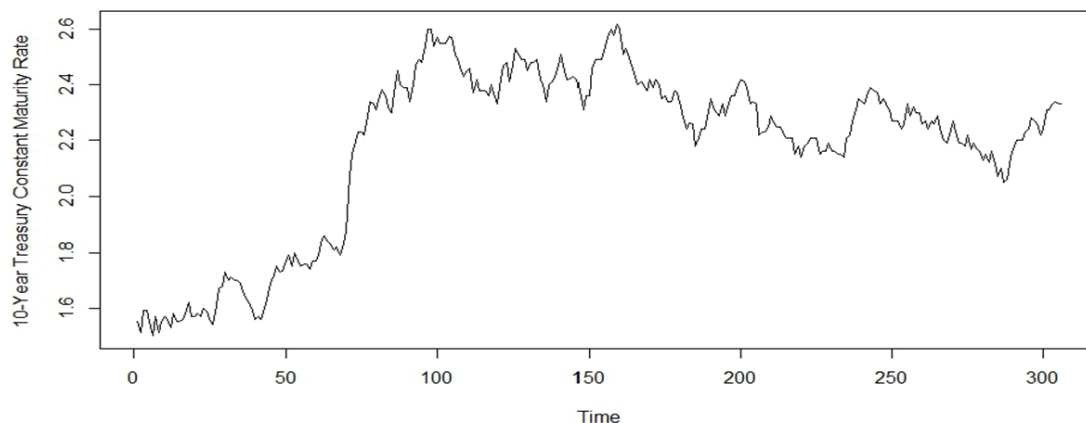


图 8.3 10 年期美国国债收益率序列时序图

```
> x <- read.csv("E:/DATA/CHAR8/3.csv",header=T)
> y <- ts(na.spline(x$DGS10))
> par(mfrow=c(1,2))
> y.log <- log(y)
> plot(y.log)
> y.log.dif <- diff(y.log)
> plot(y.log.dif)
```

方差齐性变换

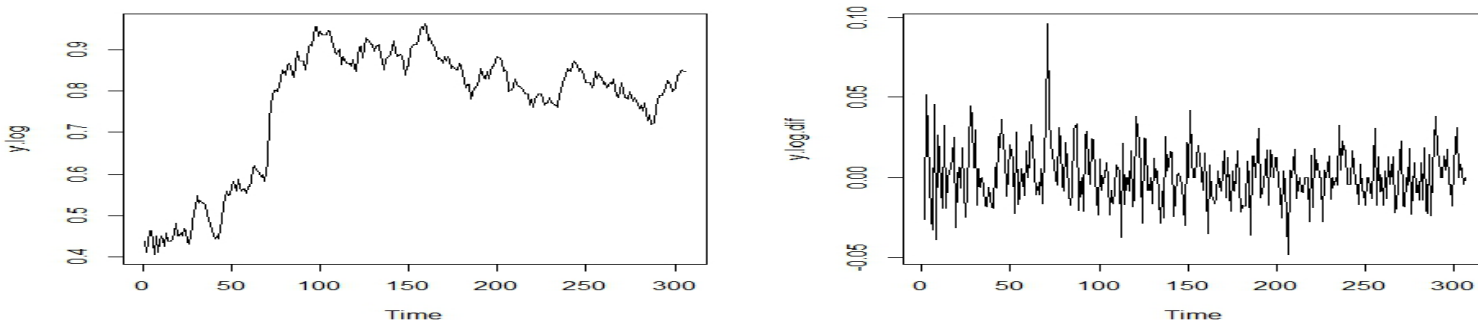


图 8.4 10 年期美国国债收益率序列的对数及其 1 阶差分序列时序图

从图 8.4 可见, 10 年期美国国债收益率对数序列保持了原序列的变化趋势. 但是, 其 1 阶差分时序图表明残差序列的波动基本平稳. 下面作白噪声检验, 具体命令及运行结果如下:

```
> for(i in 1:2)print(Box.test(y.log.dif,lag=6*i))
```

Box-Pierce test

data: y.log.dif

自回归条件异方差模型

X-squared = 5.6637, df = 6, p-value = 0.4619

Box-Pierce test

data: y.log.dif

X-squared = 13.037, df = 12, p-value = 0.3664

白噪声检验显示残差序列为白噪声. 于是可以得到序列的拟合模型: $\nabla \ln(x_t) = \varepsilon_t$, 其中 ε_t 为零均值白噪声序列.



本章结构

1. 简单异方差模型

2. 自回归条件异方差模型

3. 广义自回归条件异方差模型

自回归条件异方差模型

■ 自回归条件异方差模型

首先, 我们简述 ARCH 模型的构造原理. 假设历史数据已知, 均值为零的残差序列具有异方差性, 即

$$\rho(k) = \frac{\text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2)}{\text{Var}(\varepsilon_t^2)}.$$

当自相关系数恒为零, 即 $\rho(k) = 0 (k = 1, 2, \dots)$ 时, 表明残差平方序列是纯随机的序列, 历史数据对未来残差的估计没有作用. 这种情况难以分析, 本书不做讨论. 当存在某个 $k \geq 1$, 使得 $\rho(k) \neq 0$ 时, 表明残差平方序列中蕴含着某种相关信息, 可以通过构造适当的模型提取这些相关信息, 以获得序列异方差波动特征.



自回归条件异方差模型

当自相关系数恒为零, 即 $\rho(k)=0(k=1,2,\cdots)$ 时, 表明残差平方序列是纯随机的序列, 历史数据对未来残差的估计没有作用. 这种情况难以分析, 本书不做讨论. 当存在某个 $k \geq 1$, 使得 $\rho(k) \neq 0$ 时, 表明残差平方序列中蕴含着某种相关信息, 可以通过构造适当的模型提取这些相关信息, 以获得序列异方差波动特征.

ARCH 模型就是基于这种情况构造的模型.

一般地, 设一个时间序列 $\{x_t, t \in T\}$ 满足

$$x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots) + \mu_t,$$

其中, $f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots)$ 为 $\{x_t\}$ 的确定信息拟合模型; μ_t



自回归条件异方差模型

为残差项. 如果 μ_t 满足下列条件

$$\begin{cases} \mu_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t), \\ h_t = h(\mu_{t-1}, \mu_{t-2}, \dots, \mu_{t-q}), \end{cases}$$

其中, Ω_{t-1} 为包含了 t 期以前全部信息的集合; $h(\cdot)$ 是一个 q 元非负函数, 那么我们称 $\{\mu_t\}$ 服从 q 阶自回归条件异方差模型, 简称为 ARCH(q) 模型.

上面的定义是 ARCH 模型的一般性定义, 在应用中可以有不同的形式. 比如: 如果 μ_t 满足

$$\mu_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \mu_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \mu_{t-q}^2 + \varepsilon_t,$$



自回归条件异方差模型

其中, 系数 $\beta_0 > 0, \beta_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, q; \{\varepsilon_t\}$ 为白噪声, 则有

$$h_t = \text{Var}(\mu_t | \Omega_{t-1}) = E(\mu_t^2 | \Omega_{t-1}) = \beta_0 + \beta_1 \mu_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \mu_{t-q}^2.$$

可见条件方差 h_t 随 $\{\mu_t\}$ 过去值的变化而变化. 我们称满足这种情况的 $\{\mu_t\}$ 为服从具有线性参数形式的 q 阶自回归条件异方差模型 ARCH(q).

在实际应用中, 为了简化模型, 可以对模型做出一些合理假设. 一种比较简便的处理方式是假定

$$\begin{cases} x_t = X_t^T \eta + \mu_t, \\ \mu_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \\ h_t = \beta_0 + \beta_1 \mu_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \mu_{t-q}^2, \end{cases} \quad (8.1)$$



自回归条件异方差模型的估计

其中, X_t 是前定解释变量向量, 包括被解释变量的滞后项, η 是回归参数, ε_t 独立同分布, 且

$$E(\mu_t | \Omega_{t-1}) = E(\sqrt{h_t} \varepsilon_t | \Omega_{t-1}) = \sqrt{h_t} E(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}) = 0,$$

$$\text{Var}(\mu_t | \Omega_{t-1}) = E(\mu_t^2 | \Omega_{t-1}) = h_t E(\varepsilon_t^2 | \Omega_{t-1}) = h_t,$$

即 $\mu_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t)$, 从而 $\{\mu_t\}$ 服从 ARCH(q) 模型.

下面, 我们主要以模型 (8.1) 所表示的情况展开讨论.

■ 自回归条件异方差模型的估计

估计自回归条件异方差模型的常用方法是极大似然方法. 对于回归模型 (8.3) 而言, 假设前 q 组观测值已知, 记



自回归条件异方差模型的估计

$$\Omega = \{x_t, x_{t-1}, \dots, x_1, x_0, \dots, x_{-q+1}, X_t^T, X_{t-1}^T, \dots, X_1^T, X_0^T, X_{-q+1}^T\}$$

则
$$x_t | \Omega_{t-1} \sim N(X_t^T \eta, h_t),$$

从而 x_t 的条件密度函数为

$$p(x_t | X_t, \Omega_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp \left\{ -\frac{(x_t - X_t^T \eta)^2}{2h_t} \right\},$$

其中

$$\begin{aligned} h_t &= \beta_0 + \beta_1 u_{t-1}^2 + \dots + \beta_q u_{t-q}^2 \\ &= \beta_0 + \beta_1 (x_{t-1} - X_{t-1}^T \eta)^2 + \dots + \beta_q (x_{t-q} - X_{t-q}^T \eta)^2 \\ &= [W_t(\eta)]^T \beta, \end{aligned}$$

自回归条件异方差模型的估计

这里

$$\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q)^T, W_t(\eta) = \left[1, (x_{t-1} - X_{t-1}^T \eta)^2, \dots, (x_{t-q} - X_{t-q}^T \eta)^2 \right]^T.$$

可见待估参数向量为 η 和 β . 记

$$\theta = \begin{pmatrix} \beta \\ \eta \end{pmatrix}$$

则 θ 为回归模型 (8.1) 的参数向量. 于是, 样本的对数似然函数为

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln p(x_t | X_t, \Omega_{t-1}; \theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(x_t - X_t^T \eta)^2}{h_t}.$$

上式两边关于 θ 求 1 阶偏导数, 并令偏导数为零, 得

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \frac{\ln(h_t)}{\partial \theta} + \left[\frac{1}{h_t} \frac{\partial (x_t - X_t^T \eta)^2}{\partial \theta} - \frac{(x_t - X_t^T \eta)^2}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \right] \right\} = 0.$$

自回归条件异方差模型的检验

解此方程组, 可得到 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$. 在实际应用中, 可借助于软件进行计算.

■ 自回归条件异方差模型的检验

ARCH 模型的检验不仅要检验序列具有异方差性, 而且要检验这种异方差性是可以由残差序列的自回归模型进行拟合. 常用的两种 ARCH 检验方法是 LM 检验和 Q 检验.

1. Lagrange 乘子检验

Lagrange 乘子检验, 简记为 LM 检验, 其构造思想是, 如果残差序列方差非齐, 且具有集群效应, 那么残差平方序列通常具有自相关性. 于是, 可以使用 ARCH(q) 模型拟合残差平方序列



自回归条件异方差模型的检验

$$u_t^2 = \beta_0 + \beta_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q u_{t-q}^2 + \varepsilon_t. \quad (8.2)$$

这样方差齐性的检验就转化为 (8.2) 式是否显著成立的检验. 因此, 针对回归方程 (8.2), Lagrange 乘子检验的假设条件为:

原假设 $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0 \leftrightarrow$ 备择假设 $H_1: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ 不全为零. Lagrange 乘子检验的统计量为

$$LM(q) = \frac{\left[\sum_{t=q+1}^T (u_t^2 - \varepsilon_t^2) \right] / q}{\left(\left[\sum_{t=q+1}^T \varepsilon_t^2 \right] \right) / (T - 2q - 1)}$$

经过计算可知, 在原假设成立时统计量 $LM(q)$ 近似服从自由度为 $q-1$ 的 χ^2 分布, 即



自回归条件异方差模型的检验

$$\text{LM}(q) \sim \chi^2(q-1).$$

当 $\text{LM}(q)$ 检验统计量的 p 值小于显著性水平 α 时, 拒绝原假设, 认为该序列方差非齐, 可用(8.4) 式拟合残差平方序列中的自相关关系.

2. Portmanteau Q 检验

Portmanteau Q 检验, 简记为 Q 检验, 其检验思想是, 如果残差序列方差非齐, 且具有集群效应, 那么残差平方序列通常具有自相关性. 故可将方差非齐次的检验转化为残差平方序列的自相关性检验. 该检验的假设条件为:

原假设 H_0 : 残差平方序列纯随机 \longleftrightarrow 备择假设 H_1 : 残差平方序列自相关.



自回归条件异方差模型的检验

或等价地表述为

原假设 $H_0: \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(q) = 0 \leftrightarrow$ 备择假设 $H_1: \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(q)$ 不全为零. 这里 ρ_k 表示残差平方序列的延迟 k 阶自相关函数.

Portmanteau Q 检验的统计量 $Q(q)$ 实际上就是 $\{u_t\}$ 的 LB 统计量. 因此, 当原假设成立时, Portmanteau Q 检验的统计量近似服从自由度为 $q-1$ 的 χ^2 分布. 当统计量 $Q(q)$ 的 p 值小于显著性水平 α 时, 拒绝原假设, 认为该序列方差非齐次且具有自相关关系.

在 R 语言中, 可用 FinTS 程序包中的函数 ArchTest() 来作 LM 检验. 而 Portmanteau Q 检验其实就是残差平方序列的纯随机性检验, 所以只需调用 Box.test() 函数就可以了. 函数 ArchTest() 的命令格式如下:



自回归条件异方差模型的检验

`ArchTest(x, lags=)`

该函数的参数说明:

- `x`: 需要进行检验的序列名.
- `lags`: 滞后阶数.

拟合 ARCH 模型可以用 `tseries` 程序包中的 `garch()` 函数.
函数 `garch()` 的命令格式如下:

`garch(x, order=)`

该函数的参数说明:

- `x`: 需要进行拟合的序列名.
- `order`: 拟合模型阶数. `order=c(0,q)` 表示拟合模型 ARCH(q); `order=c(p,q)` 表示拟合模型 GARCH(p,q).



自回归条件异方差模型的检验

例 8.4 分析 2012 年 10 月 8 日至 2017 年 10 月 5 日美国美银美林欧元高收益指数总回报指数序列, 对其 1 阶差分序列进行 ARCH 检验, 并拟合差分序列的波动性.

解 读取数据, 并作差分, 绘制差分平方时序图. 具体命令如下, 运行结果见图 8.5.

```
> x <- read.csv("E:/DATA/CHAR8/4.csv",header=T)
> EU <- x$BAMLHE00EHYITRIV
> EU.dif <- diff(EU)
> plot.ts(EU.dif^2,type="l",ylab="差分平方")
```



自回归条件异方差模型的检验

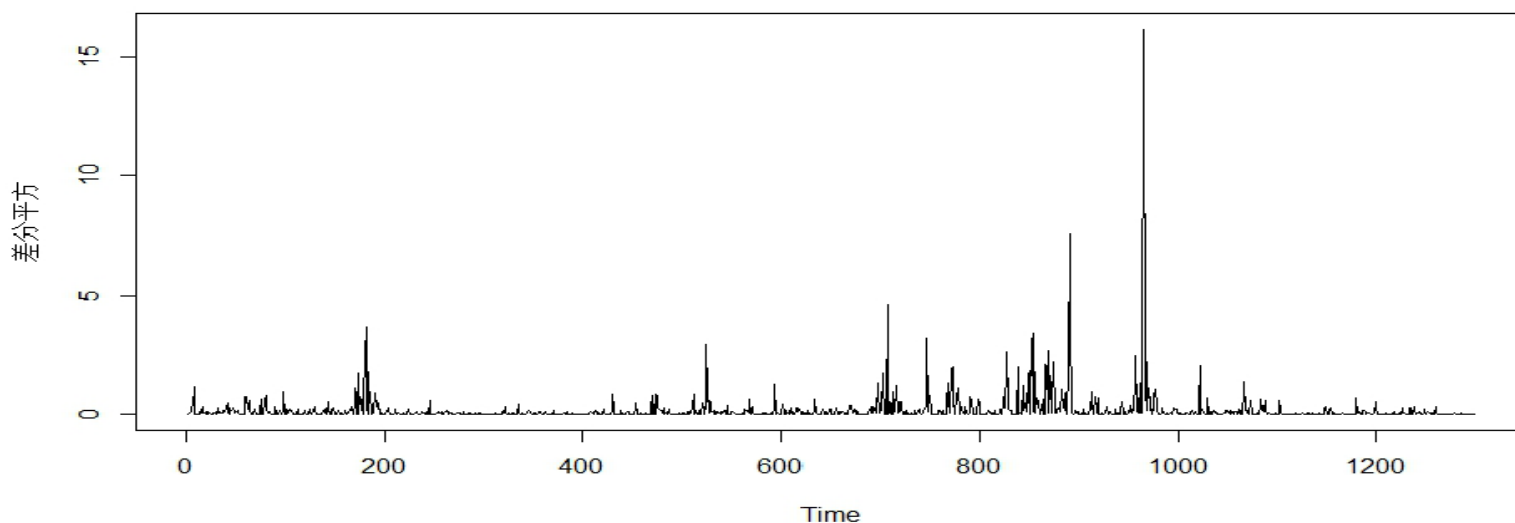


图 8.5 差分平方时序图

由图 8.5 可见, 该序列残差具有群集效应, 因此, 进一步进行 LM 检验和 Q 检验. 具体命令及运行结果如下:

```
> for(i in 1:5)print(ArchTest(EU.dif,lag=i))
```

自回归条件异方差模型的检验

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data: EU.dif

Chi-squared = 33.6, df = 1, p-value = 6.77e-09

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data: EU.dif

Chi-squared = 50.766, df = 2, p-value = 9.467e-12

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data: EU.dif

Chi-squared = 59.3, df = 3, p-value = 8.293e-13

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects



自回归条件异方差模型的检验

data: EU.dif

Chi-squared = 66.026, df = 4, p-value = 1.564e-13

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data: EU.dif

Chi-squared = 73.29, df = 5, p-value = 2.109e-14

```
> for(i in 1:5)print(Box.test(EU.dif^2,lag=i))
```

Box-Pierce test

data: EU.dif^2

X-squared = 33.622, df = 1, p-value = 6.694e-09

Box-Pierce test

data: EU.dif^2

X-squared = 58.91, df = 2, p-value = 1.614e-13

Box-Pierce test

data: EU.dif^2

X-squared = 77.11, df = 3, p-value < 2.2e-16

Box-Pierce test



自回归条件异方差模型的检验

data: EU.dif^2

X-squared = 94.076, df = 4, p-value < 2.2e-16

Box-Pierce test

data: EU.dif^2

X-squared = 113.13, df = 5, p-value < 2.2e-16

LM 检验和 Q 检验都表明, 该序列残差平方具有显著的长期相关性, 可以建立 ARCH 模型进行拟合. 通过观察检验过程, 并尝试多次, 选择 ARCH(2) 进行拟合. 具体命令及运行结果如下:

```
> EU.fit <- garch(EU.dif,order=c(0,2))
```

```
> summary(EU.fit)
```

Call:

```
garch(x = EU.dif, order = c(0, 2))
```

Model:

GARCH(0,2)



自回归条件异方差模型的检验

Residuals:

Min 1Q Median 3Q Max

-8.3448 -0.1806 0.2935 0.6839 5.0174

Coefficient(s):

Estimate Std. Error t value Pr(> |t|)

a0 0.067602 0.001874 36.070 < 2e-16 ***

a1 0.630903 0.029150 21.644 < 2e-16 ***

a2 0.178153 0.028854 6.174 6.65e-10 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Diagnostic Tests:

Jarque Bera Test

data: Residuals

X-squared = 6925.1, df = 2, p-value < 2.2e-16

Box-Ljung test

data: Squared.Residuals



自回归条件异方差模型的检验

X-squared = 0.062658, df = 1, p-value = 0.8023

检验结果表明, 模型和参数均显著, 因此最后拟合的残差模型为 $u_t^2 = 0.067602 + 0.630903u_{t-1}^2 + 0.178153u_{t-2}^2 + \varepsilon_t$, 式中 ε_t 为白噪声.



本章结构

1. 简单异方差模型

2. 自回归条件异方差模型

3. 广义自回归条件异方差模型

广义自回归条件异方差模型

■ 广义自回归条件异方差模型

在实践中,许多残差序列的异方差函数具有长期自相关性,用 ARCH 模型拟合会产生很高的移动平均阶数. 在样本有限的情况下,不但增加了估计的难度,而且参数估计的效率大大降低. 为了弥补这一缺陷, Bollerslev 1986 年提出了广义自回归条件异方差 (generalized autoregressive conditional heteroskedastic, GARCH) 模型. 它的结构如下:



广义自回归条件异方差模型

$$\begin{cases} x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) + \mu_t, \\ \mu_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \mu_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \end{cases}$$

式中, $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0; \varepsilon_t$ 独立同分布, 且 $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

该模型简记为 GARCH(p, q).

可见 GARCH 模型实际上就是在 ARCH 模型的基础上增加了异方差函数的 p 阶自相关性而形成的; 它可以有效地拟合具有长期记忆性的异方差函数. ARCH 模型是 GARCH 模型当 $p = 0$ 时的一个特例.

当回归函数 $f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ 不能够充分提取原序列中的相关信息时, u_t 中还可能含有自相关性, 这时可先对 u_t 拟合自回归模型, 然后再考察自回归残差 $\{v_t\}$ 的方差齐性. 如果



广义自回归条件异方差模型

$\{v_t\}$ 异方差, 对它拟合 GARCH 模型. 此时, 模型结构如下:

$$\begin{cases} x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) + \mu_t, \\ \mu_t = \gamma_1 \mu_{t-1} + \gamma_2 \mu_{t-2} + \dots + \gamma_m \mu_{t-m} + v_t, \\ v_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i v_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \end{cases} \quad (8.3)$$

式中, ε_t 独立同分布, 且 $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, 形如 (8.3) 式的模型有时也被称为 $AR(m)-GARCH(p,q)$ 模型.

GARCH 模型的常用估计方法仍然是极大似然法, 常用检验法仍然是 LM 法.

例 8.5 分析拟合 2012 年 10 月 9 日至 2017 年 10 月 5 日中国/美国外汇汇率序列.



广义自回归条件异方差模型

解 读入数据, 并对缺失部分做样条插值, 然后绘制时序图. 从时序图 8.6 可见, 该序列没有任何平稳特征, 不过具有一定趋势性, 因此, 对序列作 1 阶差分, 并绘制差分序列的时序图. 1 阶差分时序图表明, 差分序列具有明显的群集效应. 作差分序列自相关图和偏自相关图. 具体命令如下, 运行结果如图 8.6 和图 8.7 所示.

```
> x <- read.csv("E:/DATA/CHAR8/5.csv",header=T)
> y <- ts(na.spline(x$DEXCHUS))
> y.dif <- diff(y)
> par(mfrow=c(1,2))
> plot(y,ylab=" China / U.S. Foreign Exchange Rate")
> plot(y.dif,ylab="difference of Exchange Rate")
> acf(y.dif,main=" "); pacf(y.dif,main=" ")
```



广义自回归条件异方差模型

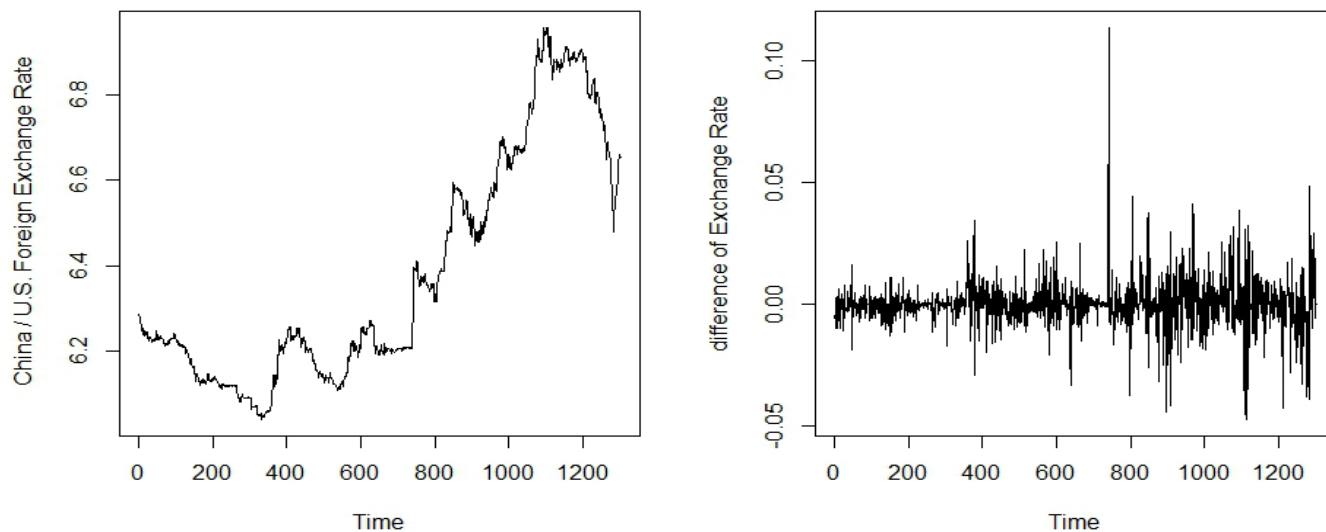


图 8.6 中国/美国外汇汇率序列与其差分序列时序图

广义自回归条件异方差模型

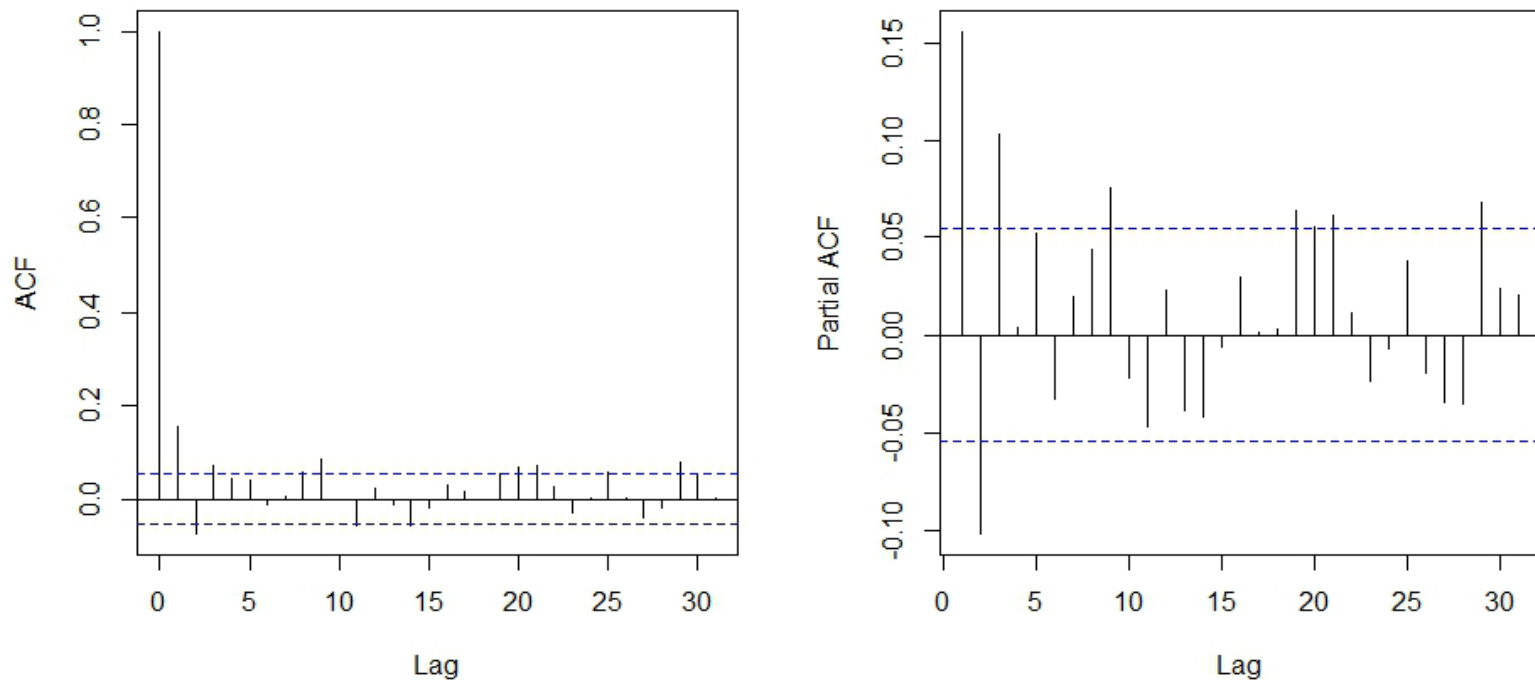


图 8.7 中国/美国外汇汇率差分序列自相关图和偏自相关图

广义自回归条件异方差模型

从图 8.7 可见, 自相关系数具有 3 阶截尾性, 偏自相关系数具有拖尾性. 于是, 选用ARIMA(0,1,3) 模型拟合差分序列, 并对残差作白噪声检验. 具体命令及运行结果如下:

```
> y.fix <- arima(y,order=c(0,1,3));y.fix
```

Call:

```
arima(x = y, order = c(0, 1, 3))
```

Coefficients:

```
ma1 ma2 ma3
```

```
0.1834 -0.0920 0.0737
```

```
s.e. 0.0278 0.0271 0.0280
```

```
sigma^2 estimated as 9.355e-05: log likelihood=4191.86, aic=-8375.72
```

```
> for(i in 1:3)print(Box.test(y.fix$residuals,lag=i))
```

Box-Pierce test

```
data: y.fix$residuals
```

```
X-squared = 0.0019883, df = 1, p-value = 0.9644
```



广义自回归条件异方差模型

Box-Pierce test

data: y.fix\$residuals

X-squared = 0.0028265, df = 2, p-value = 0.9986

Box-Pierce test

data: y.fix\$residuals

X-squared = 0.004207, df = 3, p-value = 0.9999

残差白噪声分析表明, 拟合之后的残差为白噪声. 对残差平方作异方差检验. 具体命令及运行结果如下:

```
> for(i in 1:5)print(Box.test(y.fix$residuals^2,type="Ljung-Box",  
+ lag=i))
```

Box-Ljung test

data: y.fix\$residuals^2

X-squared = 21.489, df = 1, p-value = 3.559e-06

Box-Ljung test

data: y.fix\$residuals^2



广义自回归条件异方差模型

X-squared = 25.123, df = 2, p-value = 3.505e-06

Box-Ljung test

data: y.fix\$residuals^2

X-squared = 26.958, df = 3, p-value = 6.008e-06

Box-Ljung test

data: y.fix\$residuals^2

X-squared = 29.599, df = 4, p-value = 5.906e-06

Box-Ljung test

data: y.fix\$residuals^2

X-squared = 31.285, df = 5, p-value = 8.23e-06



广义自回归条件异方差模型

检验结果表明, 残差具有群集效应, 且蕴含长期相关关系.
用 GARCH(1,1) 模型拟合异方差. 具体命令及运行结果如下:

```
> r.fix <- garch(y.fix$residuals, order=c(1,1))
```

```
> summary(r.fix)
```

Call:

```
garch(x = y.fix$residuals, order = c(1, 1))
```

Model:

GARCH(1,1)

Residuals:

Min 1Q Median 3Q Max



广义自回归条件异方差模型

-4.671511 -0.382684 0.004896 0.411170 15.928403

Coefficient(s):

Estimate Std. Error t value Pr(> |t|)

a0 1.694e-05 1.805e-06 9.383 < 2e-16 ***

a1 1.677e-01 2.461e-02 6.813 9.57e-12 ***

b1 6.653e-01 3.553e-02 18.727 < 2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Diagnostic Tests:

Jarque Bera Test



广义自回归条件异方差模型

data: Residuals

X-squared = 143320, df = 2, p-value < 2.2e-16

Box-Ljung test

data: Squared.Residuals

X-squared = 0.0028366, df = 1, p-value = 0.9575

绘制波动的 95% 置信区间. 具体命令如下, 运行结果如图 8.8 所示.

```
c.pred <- predict(r.fix)
```

```
plot(c.pred,main=" ")
```



广义自回归条件异方差模型

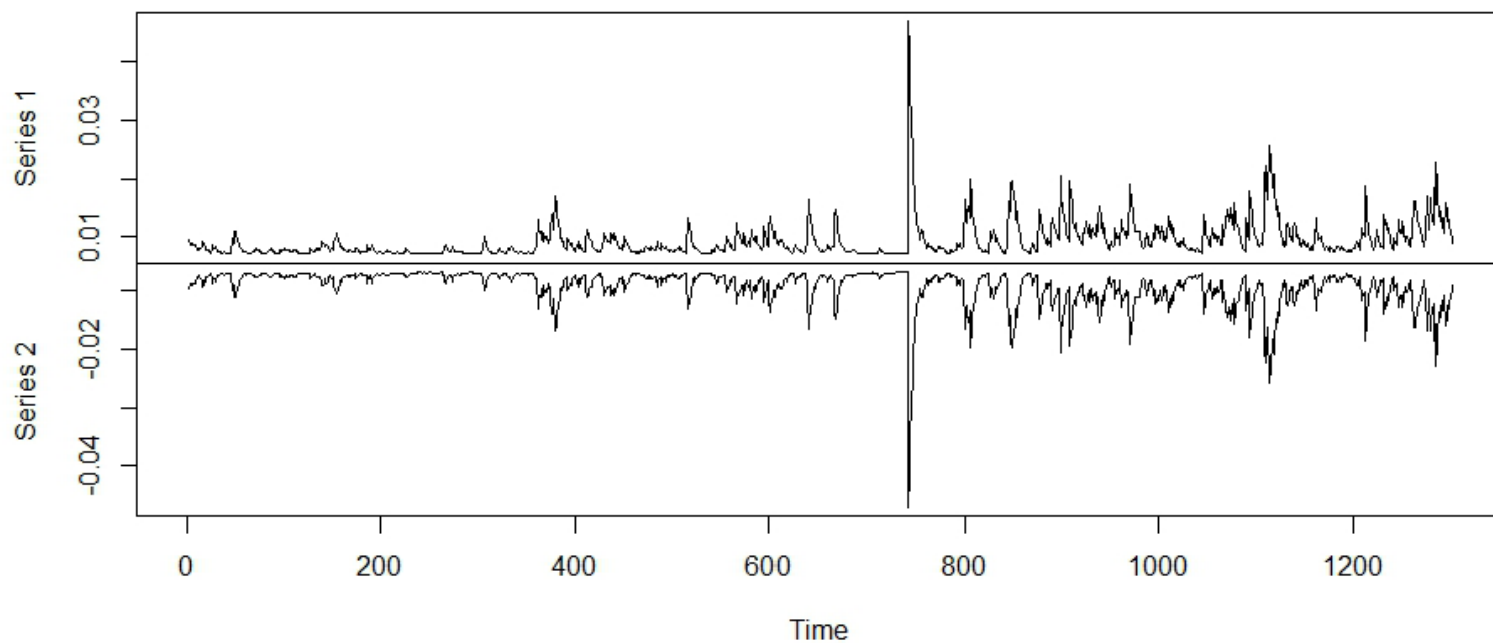


图 8.8 中国/美国外汇汇率序列波动置信区间图

广义自回归条件异方差模型

综合整个拟合过程, 我们得到完整的拟合模型:

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + \mu_t + 0.1843\mu_{t-1} - 0.0920\mu_{t-2} + 0.0737\mu_{t-3} + v_t, v_t \sim (0, 0.00009355), \\ v_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \\ h_t = 0.6653h_{t-1} + 0.1677v_{t-1}^2. \end{cases}$$

GARCH 模型为金融时间数据的波动性建模提供了有效的方法, 但是实际使用中也存在一些不足. 为此, 人们提出了许多 GARCH 的衍生模型, 以便高效地处理金融中的时间数据. 最常见的 GARCH 衍生模型有 EGARCH 模型、GARCH-M 模型和 IGARCH 模型, 等等. 感兴趣的读者可参阅有关书籍.

