第 2 章

随机信号的描述与分析

第 2 章　随机信号的描述与分析

- 所有事件可分为确定事件和不确定事件
- 确定性事件采用确定性数学方法描述

不确定性的描述

- 概率论和统计学方法
- 模糊集合理论
- 粗糙集理论
- 灰色系统理论

概率论。概率是对随机事件发生的可能性的度量，一般以一个在0到1之间的实数表示一个事件发生的可能性大小。越接近1，该事件更可能发生；越接近0，则该事件更不可能发生，其是客观论证，而非主观验证。概率论是研究随机现象数量规律的数学分支。

统计学是通过搜索、整理、分析、描述数据等手段，以达到推断所测对象的本质，甚至预测对象未来的一门综合性科学。统计学用到了大量的数学及其它学科的专业知识，其应用范围几乎覆盖了社会科学和自然科学的各个领域。

在日常生活中，经常遇到许多模糊事物，没有分明的数量界限，要使用一些模糊的词句来形容、描述。比如，比较年轻、高个、大胖子、好、漂亮、善、热、远……。这些概念是不可以简单地用是、非或数字来表示的。

模糊数学是研究和处理模糊性现象的一种数学理论和方法。在1965 年美国控制论学者L.A. Zadeh发表论文《模糊集合》，标志着这门新学科的诞生。

模糊数学的基本思想是隶属度的思想。应用模糊数学方法建立数学模型的关键是建立符合实际的隶属函数。

粗糙集理论。是由波兰华沙理工大学Pawlak教授于20世纪80年代初提出的一种研究不完整、不确定知识和数据的表达、学习、归纳的理论方法，它是一种刻画不完整性和不确定性的数学工具，能有效地分析不精确、不一致(inconslsteni)、不完整(incomPlete)等各种不完备的信息，还可以对数据进行分析和推理，从中发现隐含的知识，揭示潜在的规律。

灰色系统是按颜色的深浅形容信息的明确程度。我们用“黑”表示信息未知，用“白”表示信息完全明确，用“灰”表示部分信息明确、表示部分信息不明确。相应地，信息完全明确的系统称为白色系统，信息未知的系统称为黑色系统，部分信息明确、部分信息不明确的系统称为灰色系统。

灰色系统理论的研究对象是“部分信息已知，部分信息未知”的“贫信息”不确定性系统，它通过对“部分”已知信息的生成、开发，实现对现实世界的确切描述和认识。

1982我国学者邓聚龙教授发表第一篇中文论文《灰色控制系统》标志着灰色系统这一学科诞生。

自然界中事物的变化过程

确定性过程

变化过程可以用一个或几个时间*t*的确定函数来描述。

不确定过程

变化的过程不可能用一个或几个时间*t*的确定函数来描述。

不确定过程描述一般采用**随机过程**

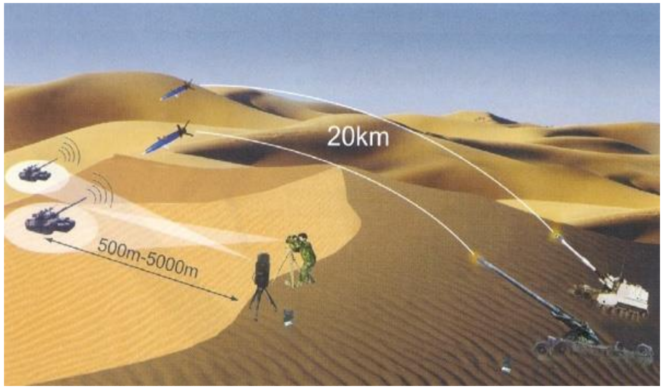
确定信号的特征

1) 相同条件下重复多次进行测量波形相同；

2) 可用一个或几个确定时间函数进行描述；

确定性体现事物的必然规律，是由事物的基本因素决定的

随机性体现事物的统计规律，是由事物的次要因素决定的

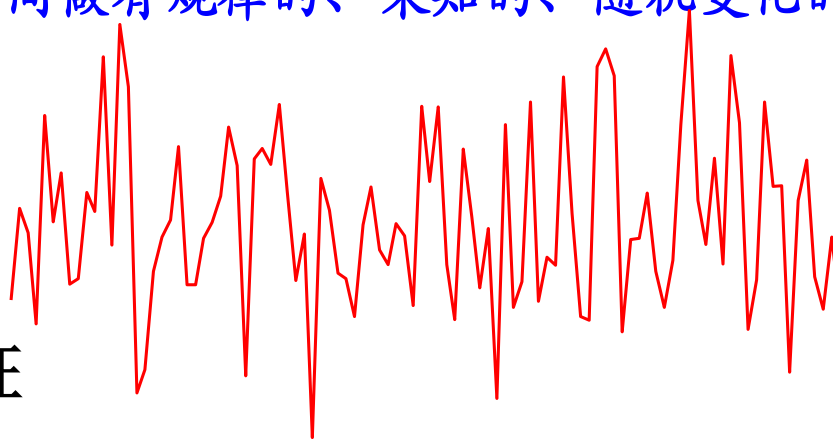


发射炮弹

抛硬币

什么是随机信号？

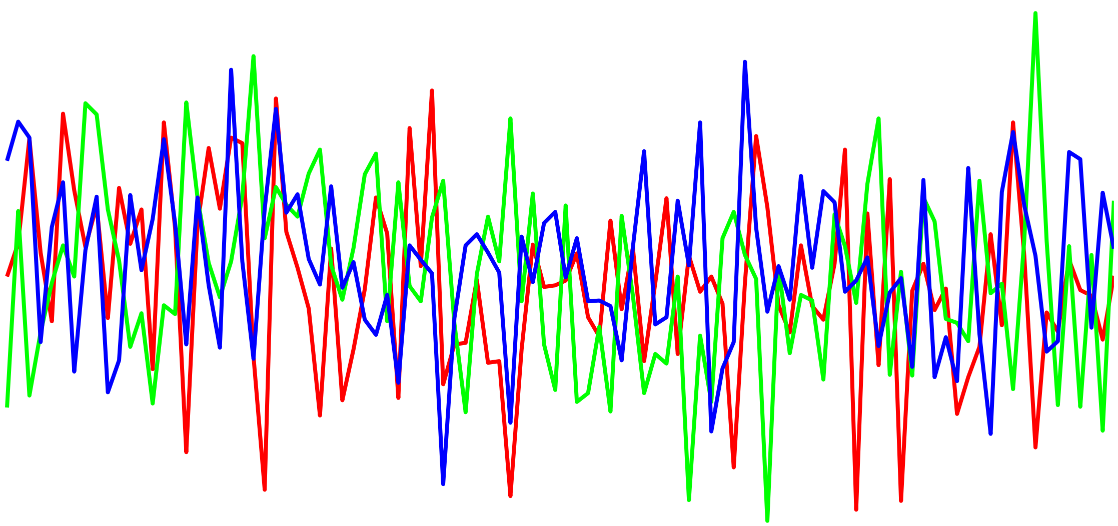
随机信号： 随时间做有规律的、未知的、随机变化的信号



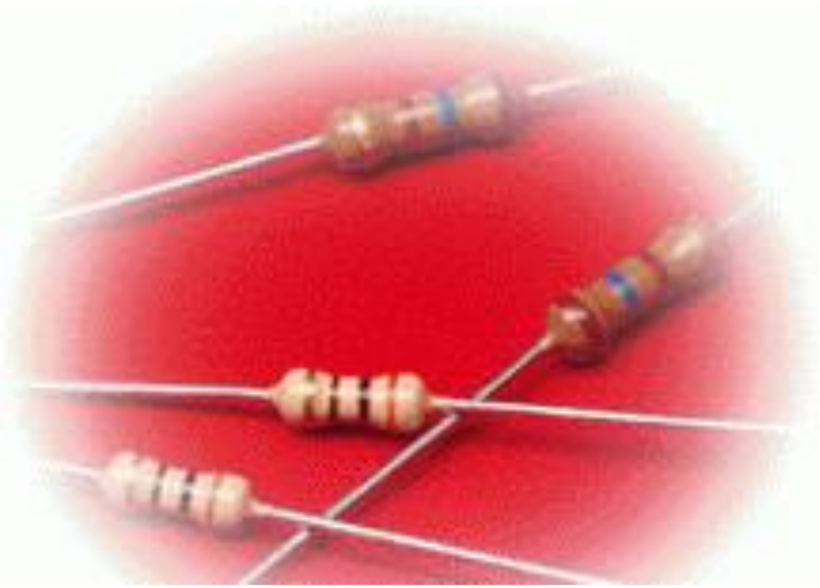
随机信号的特征

1) 相同条件下重复多次进行测量所得波形不同；

2) 不能用一个或几个确定的时间函数进行描述；

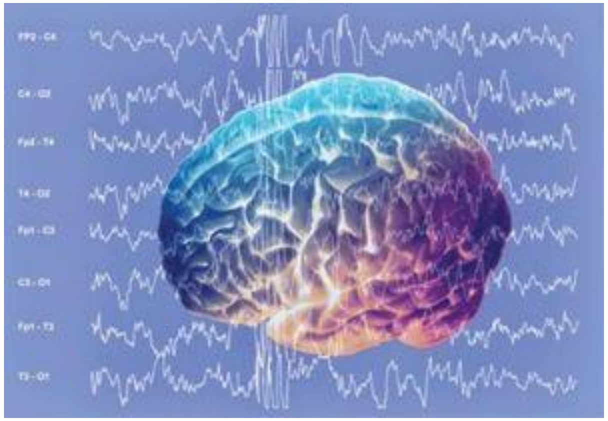


自然界将遇到大量的随机信号

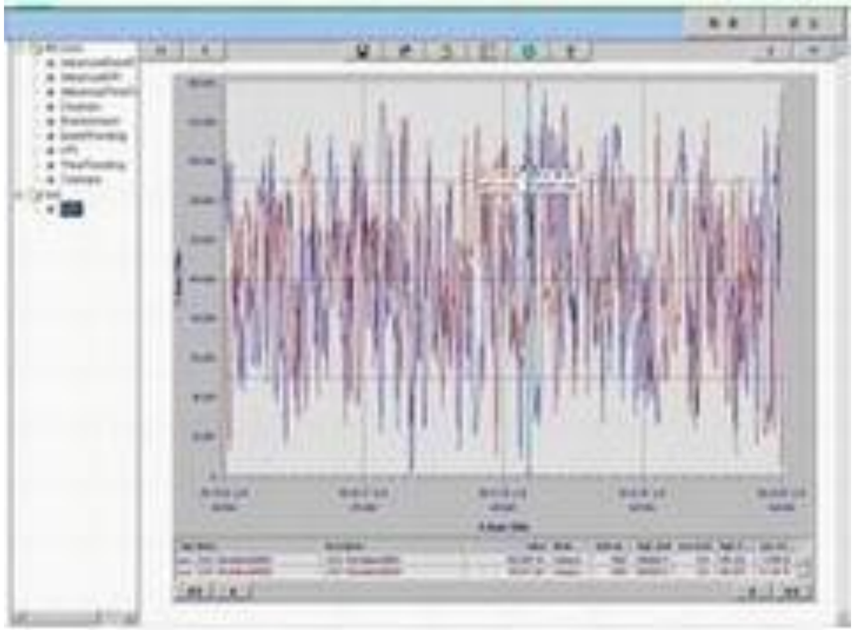


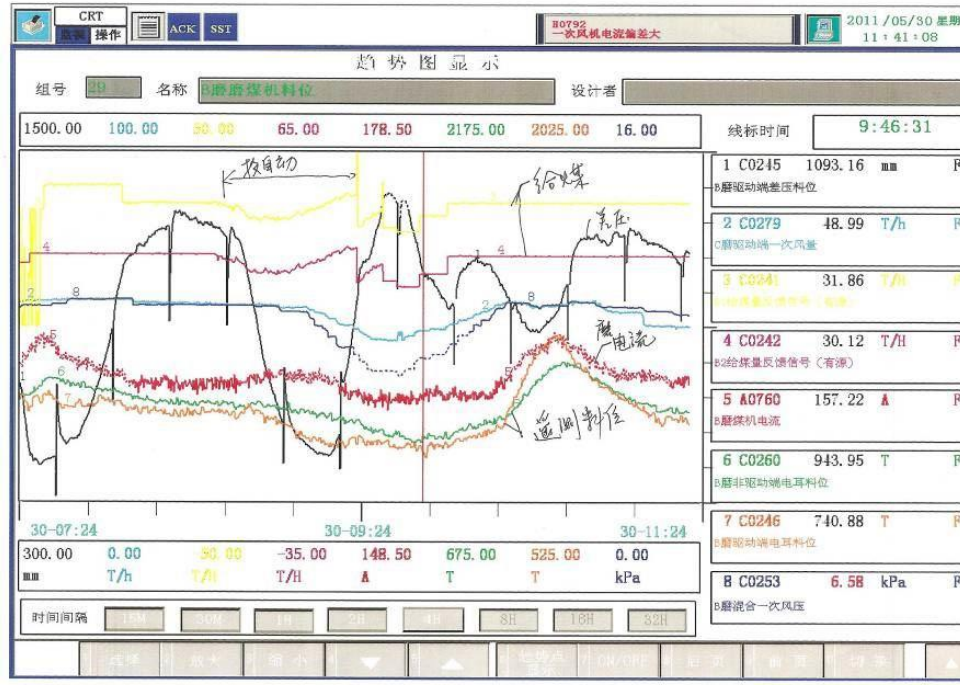
电阻热噪声

股价走势



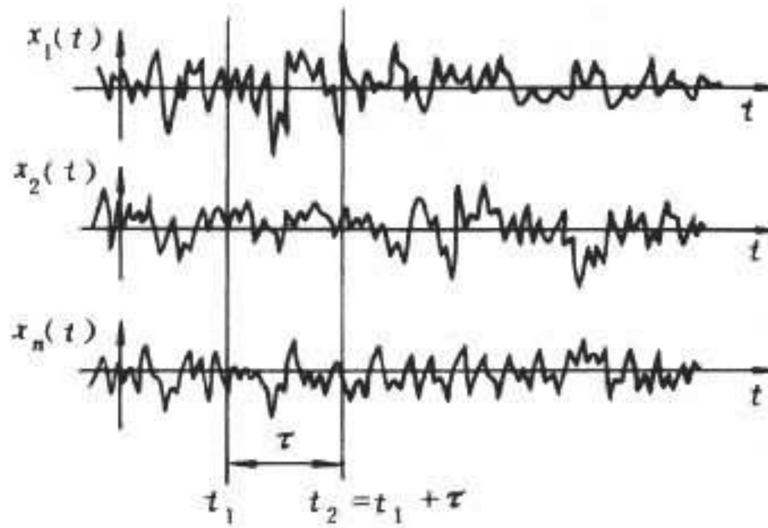
脑电波





CRT
操作
ACK
SST
一次风机电流偏差大
2011/05/30 星期一
11:41:08
趋势图显示
组号
29
名称
B磨磨煤机料位
设计者
1500.00 100.00 50.00 65.00 178.50 2175.00 2025.00 16.00
线标时间
9:46:31
投自动
给煤
差压
磨电流
1 C0245 1093.16 mm F
B磨驱动端差压料位
2 C0279 48.99 T/h F
C磨驱动端一次风量
3 C0241 31.86 T/H F
4 C0242 30.12 T/H F
B2给煤量反馈信号（有源）
5 A0760 157.22 A F
B磨煤机电流
6 C0260 943.95 T F
B磨非驱动端电耳料位
7 C0246 740.88 T F
B磨驱动端电耳料位
8 C0253 6.58 kPa F
B磨混合一次风压
30-07:24
30-09:24
30-11:24
300.00 0.00 50.00 -35.00 148.50 675.00 525.00 0.00
mm T/h T/H T/H A T T kPa
时间间隔

富力地產 (2777)
AASTOCKS.com Copyright
23.500
21.700
19.950
18.150
16.350
14.550
01
02
03
04
05
06
jjsoso.com



$x_1(t)$
t
$x_2(t)$
t
$x_n(t)$
t
τ
t_1
$t_2=t_1+\tau$

第 2 章　随机信号的描述与分析

描述随机信号的数学工具是**随机过程**。

随机过程的数学定义：

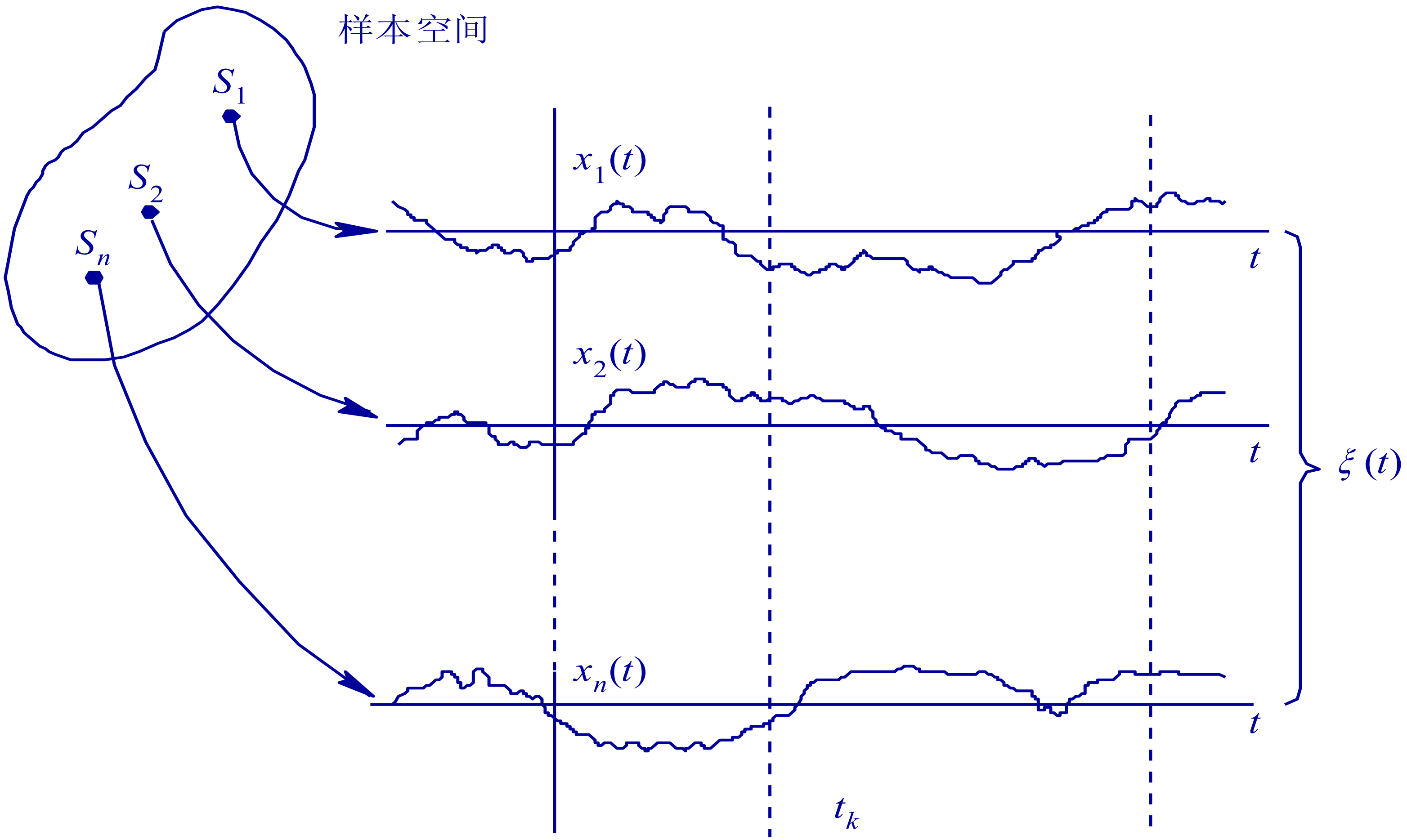
设随机试验**E**的可能结果为$\xi(t)$，试验的样本空间S为$\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots\}$，$x_i(t)$是第$i$次试验的样本函数或实现，每次试验得到一个样本函数，所有可能出现的结果的总体就构成一随机过程，记作$\xi(t)$。

两层含义：

随机过程$\xi(t)$在任一时刻都是随机变量；

随机过程$\xi(t)$是大量样本函数的集合。

随机过程：无穷多个随机样本函数的总体在统计学中称作一个**随机函数的总集**，又称**随机过程**。



样本的总体构成随机过程

2.2.1 随机过程基本特征

（1）它是一个时间函数；

（2）在固定的某一观察时刻t_1，$\xi(t_1)$是随机变量。

- 随机过程具有随机变量和时间函数的特点。
  - 随机过程$\xi(t)$在任一时刻都是随机变量；
  - 随机过程$\xi(t)$是大量样本函数的集合。

- 当随机变量x的取值个数是有限的或可数无穷个时，则称$\xi(t)$为**离散随机过程**；否则，就称$\xi(t)$为**连续随机过程**，即可能的取值充满某一有限或无限区间。

2.2.2 随机过程的统计描述

（1）随机过程的概率分布函数和概率密度函数

设$\xi(t)$表示一个随机过程，在任意给定的时刻$t_1 \in T$， 其取值$\xi(t_1)$是一个一维随机变量。

- **一维分布函数**：随机变量$\xi(t_1)$小于或等于某一数值x_1的概率

即：$F_1(x_1,t_1)=P\{\xi(t_1) \le x_1\}$

为随机过程$\xi(t)$的一维分布函数。

- **一维概率密度函数**

$$f_1(x_1,t_1)=\frac{\partial F_1(x_1,t_1)}{\partial x_1}$$

随机过程的一维分布函数（或一维概率密度函数）仅仅描述了随机过程在各个孤立时刻的统计特性。

概率密度函数是一个描述这个随机变量的输出值，在某个确定的取值点附近的可能性的函数。

- **二维分布函数**

任给两个时刻$t_1, t_2 \in T$，则随机变量$\xi(t_1)$和$\xi(t_2)$构成一个二元随机变量$\{\xi(t_1), \xi(t_2)\}$，把两个事件$(\xi(t_1) \le x_1)$和$(\xi(t_2) \le x_2)$同时出现的概率定义为二维随机过程$\xi(t)$的二维分布函数。

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=P\{\xi(t_1)\le x_1, \xi(t_2)\le x_2\}$$

- **二维概率密度函数**

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2}$$

- ***n*维分布函数**

$$F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=P\{\xi(t_1)\le x_1,\ldots,\xi(t_n)\le x_n\}$$

- ***n*维概率密度函数**

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2 \cdot \ldots \cdot \partial x_n}$$

随机过程的数字特征

有限维概率密度函数族可完全确定随机过程的全部统计特性，但有时得到该函数族相当困难，甚至不可能。

幸运的是，很多时候只需要掌握随机过程的几个统计值即可；这些统计值即为随机过程的数字特征，有数学期望、均方值、方差、相关函数等。

数字特征既能描述随机过程的重要特性，又便于实际测量；对随机过程的数字特征的计算方法，是先把时间t固定，然后用随机变量的分析方法来计算。

（2）随机过程的数字特征

➢ 随机过程的一维数字特征

- **数学期望**　　反映了随机过程取值的集中位置（**均值**）

设$P(x_i)(i=1,2,\ldots,K)$是离散随机过程$\xi(t)$的取值x_i的概率，则其数学期望为：

$$E\{\xi(t)\}=\sum_{i=1}^{K}x_iP(x_i)=m_\xi(t)$$

对于连续随机过程$\xi(t)$，设 $f_\xi(x,t)$为其概率密度函数，则其数学期望为：

$$E\{\xi(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x,t)dx=m_\xi(t)$$

它本该在t_1时刻求得，但t_1是任意的，所以它是时间t 的函数。

数学期望是随机过程所有样本函数在t时刻取值的平均，该平均被称为统计平均或者集合平均；

直观上，$m_\xi(t)$表示随机过程$\xi(t)$ 的波动中心

随机过程的均方值

随机过程{ξ(t), $t\in T$}的二阶原点矩

$$\psi_{\xi}^{2}(t)=E\left[\xi^{2}(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x^{2}f_{\xi}\left(x;t\right)\mathrm{d}x$$

称为随机过程的均方值函数，简称均方值.

随机过程的方差

随机过程{ξ(t), $t\in T$}的二阶中心矩

$$\sigma_{\xi}{}^{2}=D[\xi(t)]=E\left\{\left[\xi(t)-m_{\xi}(t)\right]^{2}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}[\xi(t)-m_{\xi}(t)]^{2}f_{\xi}(x,t)dx$$

称为随机过程的方差函数，简称方差.

随机过程的标准差

方差 $\sigma_\xi^2(t)$ 的平方根

$$\sigma_\xi(t)=\sqrt{D[\xi(t)]}$$

称为随机过程的标准差、方差根或者均方差。

方差和标准差描述了随机过程ξ(t)的所有样本函数在t时刻取值相对于其的波动中心$m_\xi(t)$的偏离程度；

当ξ(t)表征的是接收机输出端的噪声电压时，则：

均方值表征消耗在单位电阻上的瞬时功率统计平均值；

方差表征消耗在单位电阻上的瞬时交流功率统计平均值。

➢ 随机过程的二维数字特征

- **自协方差函数** 用来衡量任意两个时刻上获得的随机变量的统计相关特性

$$B(t_1,t_2)=E\{[\xi(t_1)-m_\xi(t_1)][\xi(t_2)-m_\xi(t_2)]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-m_\xi(t_1)][x_2-m_\xi(t_2)]\,f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2$$

- **自相关函数**

$$R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\xi(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2\,f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2$$

- 二者关系为

$$B(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-E[\xi(t_1)]\cdot E[\xi(t_2)]$$

如果B（t_1，t_2）和R（t_1，t_2）是衡量同一随机过程不同时刻的相关程度的，称为**自协方差函数**和**自相关函数**。

如果是两个或多个随机过程，用**互协方差函数**和**互相关函数**描述不同随机过程在不同时刻的相关程度。

$$B_{\xi\eta}(t_1,t_2)=E\{[\xi(t_1)-m_\xi(t_1)][\eta(t_2)-m_\eta(t_2)]\}$$

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\eta(t_2)]$$

引入时间间隔τ： $t_2=t_1+\tau$

自相关函数定义： $R(\tau)=E\{[\xi(t\ )\,\xi(t\ +\tau)]\}$

自相关函数的性质：

$$(a)\quad R(0)=E[\xi^2(t)]$$

$$(b)\quad R(\tau)=R(-\tau)$$

$$(c)\quad |R(\tau)|\le R(0)$$

互相关函数的性质：

$$(a)\quad R_{\xi\eta}(\tau)=R_{\eta\xi}(-\tau)$$

$$(b)\quad |R_{\xi\eta}(\tau)|\le\sqrt{R_\xi(0)R_\eta(0)}$$

$$(c)\quad R_{\xi\eta}(\tau)\le\frac{1}{2}[R_\xi(0)+R_\eta(0)]$$

如果

$$R_{\xi\eta}(\tau)=0$$

表示两个随机过程是不相关（正交的随机过程）

[例] 试求下列均匀概率密度函数的数学期望和方差。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & -a\le x\le a\\ 0 & 其它x\end{cases}$$

$$E\{\xi(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=a(t)$$

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)-a(t)]^2f(x)\,dx$$

解：$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-a}^{a}\frac{x}{2a}dx=\left.\frac{x^2}{4a}\right|_{-a}^{a}=0,$

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(x)]^2f(x)dx=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{2a}dx=\left.\frac{x^3}{6a}\right|_{-a}^{a}=\frac{a^2}{3}$$

第 2 章　随机信号的描述与分析

根据定义，随机过程$\xi(t)$是t为参数的函数族，如同普通函数一样，连续性是可导(可微)的前提，因此考虑随机过程的微分和积分，首先需考虑随机过程的连续性.

- **随机过程的连续性**

如果随机过程$\xi(t)$在$\Delta t\to 0$时满足$E\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]^2\}\to 0$, 则称该随机变量在t时刻在均方意义下连续，简称m.s连续.

$$E\{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]^2\}$$
$$=R_\xi(t+\Delta t, t+\Delta t)-R_\xi(t, t+\Delta t)-R_\xi(t+\Delta t, t)+R_\xi(t, t)$$

可见，若$R_\xi(t_1, t_2)$在$t_1=t_2=t$点处连续，则$\xi(t)$必在t点处连续

若$R_\xi(t_1, t_2)$沿着$t_1=t_2$线处处连续，则$\xi(t)$对每个t都是连续的。

如果随机变量$\xi(t)$是连续的，则其数学期望也必定连续，即

$$E[\xi(t+\Delta t)] \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} E[\xi(t)]$$

证明：

设 $Y = \xi(t+\Delta t) - \xi(t)$

由于 $E[Y^2] = \sigma_Y^2 + E^2[Y] \geq E^2[Y]$

因此 $E\{[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]^2\} \geq E^2[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]$

左边随$\Delta t \to 0$而趋近于0，此时有 $E[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)] \to 0$

该结果可写作：

$$\lim_{\Delta t \to 0} E[\xi(t+\Delta t)] = E\left[\xi(t)\right] = E[\lim_{\Delta t \to 0} \xi(t+\Delta t)]$$

可见，求极限和求数学期望可以互换次序

➢ 随机过程的微分(导数)

随机过程$\xi(t)$的导数可定义为一个极限

$$\dot{\xi}(t) = \frac{d\xi(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t}$$

若该极限式在m.s意义下存在，则称$\xi(t)$具有均方意义的导数

➢ 随机过程的微分(导数)

如果能找到另一个过程$\dot{\xi}(t)$ 满足

$$\lim_{\Delta t \to 0} E\left[\left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \dot{\xi}(t)\right)^2\right] = 0$$

则称$\xi(t)$在t时刻具有均方导数

使用柯西准则判断随机过程导数是否存在

若下式成立，则表明导数存在

$$\lim_{\Delta t_1,\Delta t_2\to 0} E\left[\left(\frac{\xi(t+\Delta t_1)-\xi(t)}{\Delta t_1}-\frac{\xi(t+\Delta t_2)-\xi(t)}{\Delta t_2}\right)^2\right]=0$$

由于 $\left(\frac{\xi(t+\Delta t_1)-\xi(t)}{\Delta t_1}-\frac{\xi(t+\Delta t_2)-\xi(t)}{\Delta t_2}\right)^2$

$$=\frac{1}{\Delta t_1^2}[R_\xi(t+\Delta t_1,t+\Delta t_1)+R_\xi(t,t)-R_\xi(t+\Delta t_1,t)-R_\xi(t,t+\Delta t_1)]$$

$$+\frac{1}{\Delta t_2^2}[R_\xi(t+\Delta t_2,t+\Delta t_2)+R_\xi(t,t)-R_\xi(t+\Delta t_2,t_2)-R_\xi(t,t+\Delta t_2)]$$

$$-\frac{2}{\Delta t_1\Delta t_2}[R_\xi(t+\Delta t_1,t+\Delta t_2)+R_\xi(t,t)-R_\xi(t+\Delta t,t_2)-R_\xi(t,t+\Delta t_2)]$$

若偏导数 $\frac{\partial R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1}$, $\frac{\partial R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2}$, $\frac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ 存在，则

$$\lim_{\Delta t_1,\Delta t_2\to 0} E\left[\left(\frac{\xi(t+\Delta t_1)-\xi(t)}{\Delta t_1}-\frac{\xi(t+\Delta t_2)-\xi(t)}{\Delta t_2}\right)^2\right]$$

$$=\left[\frac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_1}+\frac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2 \partial t_2}-2\frac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right]_{t_1=t_2=t}=0$$

即柯西准则成立，随机过程的导数过程存在。

可见，随机过程在均方意义下有导数的充分条件是相关函数在其自变量相等时，二阶偏导数存在，即存在

$$\left.\frac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1=t_2}$$

注：随机过程有导数，则该过程必连续，反之不成立

➢ 随机过程导数的数学期望

设 $Y(t)=\dot{\xi}(t)=\dfrac{d\xi(t)}{dt}$

则**Y(t)**的数学期望为：

$$E\left[\frac{d\xi(t)}{dt}\right]=E\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}E\left[\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_\xi(t+\Delta t)-m_\xi(t)}{\Delta t}$$

$$=m'_\xi(t)=\frac{dm_\xi(t)}{dt}$$

可见，随机过程导数的数学期望等于过程数学期望的导数，即

$$E\left[\frac{d\xi(t)}{dt}\right]=\frac{d}{dt}E[\xi(t)]$$

注：导数运算和数学期望运算次序可交换

➢ 随机过程导数的相关函数

$\xi(t)$和$Y(t)$的互相关函数为：

$$R_{\xi Y}\left(t_1,t_2\right)=E\left[\xi(t_1)Y\left(t_2\right)\right]=E\left[\xi(t_1)\lim_{\Delta t_2\to 0}\frac{\xi(t_2+\Delta t_2)-\xi(t_2)}{\Delta t_2}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t_2\to 0}\frac{R_\xi\left(t_1,t_2+\Delta t_2\right)-R_\xi\left(t_1,t_2\right)}{\Delta t_2}=\frac{\partial R_\xi\left(t_1,t_2\right)}{\partial t_2}$$

$Y(t)$和$\xi(t)$ 的互相关函数为：

$$R_{Y\xi}\left(t_1,t_2\right)=E\left[Y(t_1)\xi\left(t_2\right)\right]=E\left[\lim_{\Delta t_1\to 0}\frac{\xi(t_1+\Delta t_1)-\xi(t_1)}{\Delta t_1}\xi(t_2)\right]$$

$$=\lim_{\Delta t_2\to 0}\frac{R_\xi\left(t_1+\Delta t_1,t_2\right)-R_\xi\left(t_1,t_2\right)}{\Delta t_1}=\frac{\partial R_\xi\left(t_1,t_2\right)}{\partial t_1}$$

$Y(t)$ 的自相关函数为：

$$R_Y(t_1,t_2)=E\left[Y(t_1)Y(t_2)\right]=E\left[\lim_{\Delta t_1\to 0}\frac{\xi(t_1+\Delta t_1)-\xi(t_1)}{\Delta t_1}Y(t_2)\right]$$

$$=\lim_{\Delta t_1\to 0}\frac{R_{\xi Y}(t_1+\Delta t_1,t_2)-R_{\xi Y}(t_1,t_2)}{\Delta t_1}=\frac{\partial R_{\xi Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1}$$

而 $R_{\xi Y}(t_1,t_2)=\dfrac{\partial R_{\xi}(t_1,t_2)}{\partial t_2}$

于是： $R_Y(t_1,t_2)=\dfrac{\partial^2 R_{\xi}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$

随机过程导数的相关函数等于该随机过程相关函数的混合偏导数

随机过程的积分

对于给定实随机过程**$\xi(t)$**，若在确定区间**[*a*,*b*]**上每一个样本函数的下列积分都存在，即

$$Y=\int_a^b \xi(t)dt$$

则称***Y***为随机过程**$\xi(t)$**的积分。

随机过程的积分

对实随机过程**$\xi(t)$**，若满足

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} E[(Y-\sum_{i=1}^{n}\xi(t_i)\Delta t_i)^2]=0$$

其中$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$是$[a,b]$上的任一划分，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，

则称 $Y=\int_a^b \xi(t)dt=\lim_{\Delta t_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi(t_i)\Delta t_i$ 为**$\xi(t)$**在**[*a*,*b*]**上的均方积分。

- 随机过程的带“权函数的”积分

对于给定实随机过程$\xi(t)$和普通函数$h(\lambda,t)$, 在确定区间$[a,b]$上的积分

$$Y=\int_a^b \xi(\lambda)h(\lambda,t)d\lambda$$

为$\xi(t)$在区间$[a,b]$上的加权积分。

- 随机过程的变上限积分

对于给定实随机过程$\xi(t)$，有

$$Y=\int_a^t \xi(\lambda)d\lambda$$

为$\xi(t)$在区间$[a,b]$上的变上限积分。

➢ 随机过程积分的数学期望

随机过程积分的数学期望为：

$$E[Y]=E\left[\int_a^b \xi(t)dt\right]=E\left[\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi(t_i)\Delta t_i\right]$$

$$=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}E[\xi(t_i)]\Delta t_i=\int_a^b E[\xi(t)]dt=\int_a^b m_\xi(t)dt$$

随机过程积分的数学期望等于随机过程数学期望的积分；即积分运算和数学期望运算的次序可交换

对随机过程$\xi(t)$的加权积分和变上限积分来说，其数学期望等于原始随机过程$\xi(t)$的数学期望$m_\xi(t)$的加权积分和变上限积分

- 随机过程积分均方值

$$E[Y^2]=E[\int_a^b \xi(t_1)dt_1\int_a^b \xi(t_2)dt_2]=E[\int_a^b\int_a^b \xi(t_1)\xi(t_2)dt_1dt_2]$$

$$=\int_a^b\int_a^b E[\xi(t_1)\xi(t_2)]dt_1dt_2=\int_a^b\int_a^b R_\xi(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

- 随机过程积分的方差

$$\sigma_Y^2=E[Y^2]-E^2[Y]$$

$$=\int_a^b\int_a^b R_\xi(t_1,t_2)dt_1dt_2-\int_a^b E[\xi(t_1)]dt_1\int_a^b E[\xi(t_2)]dt_2$$

$$=\int_a^b\int_a^b [R_\xi(t_1,t_2)-m_\xi(t_1)m_\xi(t_2)]dt_1dt_2=\int_a^b\int_a^b B_\xi(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

随机过程积分的均方值等于随机过程自相关函数的二重积分

随机过程积分的方差等于随机过程协方差函数的二重积分

- **随机过程加权积分的相关函数**

$$R_Y(t_1,t_2)=E\left[Y(t_1)Y(t_2)\right]$$
$$=E\left[\int_a^b \xi(\lambda_1)h(\lambda_1,t_1)d\lambda_1\int_a^b \xi(\lambda_2)h(\lambda_2,t_2)d\lambda_2\right]$$
$$=\int_a^b\int_a^b R_\xi(\lambda_1,\lambda_2)h(\lambda_1,t_1)h(\lambda_2,t_2)d\lambda_1 d\lambda_2$$

- **随机过程变上限积分的相关函数**

$$R_Y(t_1,t_2)=E\left[\int_a^{t_1}\xi(\lambda_1)d\lambda_1\int_a^{t_2}\xi(\lambda_2)d\lambda_2\right]$$
$$=\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}E\left[\xi(\lambda_1)\xi(\lambda_2)\right]d\lambda_1 d\lambda_2$$

对随机过程$\xi(t)$的变上限积分的相关函数等于$\xi(t)$的相关函数的二重变上限积分

第 2 章　随机信号的描述与分析

2.4.1 定义

对于任意的正整数*n*和任意实数t_1，t_2，…，t_n，τ，随机过程$\xi(t)$的*n*维概率密度函数满足

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

则称$\xi(t)$为平稳随机过程（严平稳随机过程或狭义平稳随机过程）.

2.4.2 平稳随机过程的特点

- 一维概率密度函数 $f_1(x,t_1)=f_1(x,t_1+\tau)=f_1(x)$
- 二维概率密度函数 $f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;t_1,t_1+\tau)$
- 平稳随机过程的数学期望

$$m_\xi(t)=E\{\xi(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx=m_\xi=const.$$

- 平稳随机过程的方差

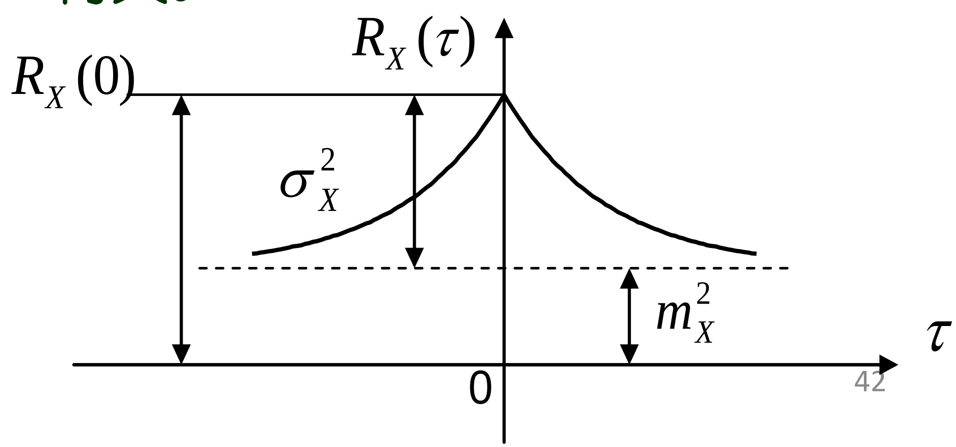
$$\sigma^2(t)=D\{\xi(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_\xi(t)]^2 f_1(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_\xi]^2 f_1(x)dx=\sigma^2$$

- 自相关函数

$$R(t_1,t_1+\tau)=E[\xi(t_1)\xi(t_1+\tau)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2 f_2(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2=R(\tau)$$

推论

- 平稳随机过程的一维概率密度与时间无关；
- 二维概率密度只与时间间隔 τ 有关；
- 数学期望和方差均与时间无关；
- 它的自相关函数只与时间间隔 τ 有关。



2.4.2 广义平稳随机过程

- 定义：

  若随机过程$\xi(t)$的数学期望和方差与时间无关，自相关函数仅是τ的函数，则称它为宽平稳随机过程或广义平稳随机过程。

- 各态历经性

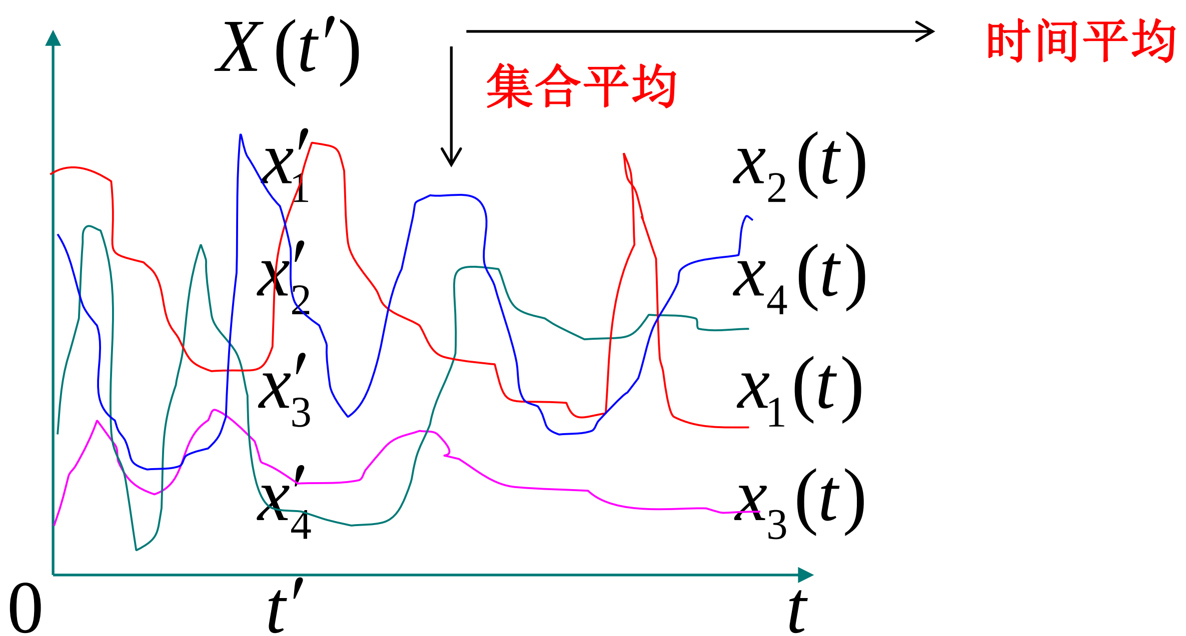
  假设 $\xi(t)$ 是一个平稳随机过程

  - 该随机过程统计平均（数学期望）可用时间平均代替

$$m_{\xi} = E[\xi(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt = \bar{m}_{\xi}$$

在随机过程的概率分布未知情况下，如要得到随机过程的数字特征如：$E[\xi(t)]$、$D[\xi(t)]$、$R_\xi(t_1, t_2)$…，只有通过做大量重复的观察试验找到“所有样本函数{x(t)}”，找到各个样本函数$x(t)$发生的概率，再对过程的“所有样本函数{x(t)}”求统计平均才可能得到。这在实际应用中不易实现。因此，人们想到：能否从一个样本函数$x(t)$中提取到整个过程统计特征的信息？

19世纪俄国的数学家辛钦从理论上证明：存在一种平稳过程，在具备了一定的补充条件下，对它的任何一个样本函数$x(t)$所做的时间平均，在概率意义上趋近于它的统计平均，对于具有这样特性的随机过程称之为“各态历经过程”



可以理解为："各态历经过程"的任一个样本函数$x(t)$都经历了过程的各种可能状态，从它的一个样本函数$x(t)$中就可以提取到整个过程统计特征的信息。

因此，可以用它的一个样本函数$x(t)$的**"时间平均"**来代替它的**"统计（集合）平均"**。

- 该随机过程统计平均（数学期望）可用时间平均代替

$$m_\xi = E[\xi(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt = \overline{m}_\xi$$

- 该随机过程的统计方差可用时间方差代替

$$\sigma^2 = E\{[\xi(t) - m_\xi]^2\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t) - \overline{m}_\xi]^2 dt = \overline{\sigma}^2$$

- 该随机过程统计自相关函数可用时间自相关函数代替

$$R(\tau) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)x(t+\tau)dt = \overline{R}(\tau)$$

称该平稳随机过程具有各态历经性（遍历性）。

“各态历经”的含义：随机过程中的任一实现都经历了随机过程的所有可能状态。

各态历经过程的一、二阶矩所代表的物理意义

（1）过程的“期望”→代表过程的“直流分量”

若将$\xi(t)$看成一个噪声电压或电流的样本，

$$E[\xi(t)] = \lim_{T->\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \Leftarrow$$ 就是平均电压或平均电流。

（2）过程的“均方值”→代表过程的“总平均功率”

$$E[\xi(t)^2] = R_\xi(0) = \lim_{T->\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt \leftarrow$$ 可以看成

噪声电压消耗在1Ω电阻上的总平均功率。

（3）过程的“方差”→代表过程的“交流平均功率”

$$\sigma^2 = C_X(0) = \lim_{T->\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [x(t) - m_\xi]^2 dt \leftarrow$$ 可以看成

噪声电压消耗在1Ω电阻上的交流平均功率。

第 2 章　随机信号的描述与分析

2.5.1 自相关函数的意义

- 平稳随机过程的统计特性（如数字特征等）可通过自相关函数来描述；
- 自相关函数与平稳随机过程的谱特性有着内在的联系。

2.5.2 自相关函数主要性质

$$\boxed{R(\tau)=E\{[\xi(t)\xi(t+\tau)]\}}$$

- $R(0)$为$\xi(t)$的平均功率 $\quad R(0)=E[\xi^2(t)]$
- $R(\tau)$为偶函数 $\quad R(\tau)=R(-\tau)$
- $R(0)$为$R(\tau)$的上界 $\quad |R(\tau)|\le R(0)$
- $R(\infty)$为$\xi(t)$的直流功率 $\quad R(\infty)=E^2[\xi(t)]$
- $R(0)$-$R(\infty)$为$\xi(t)$的交流功率(方差) $\quad R(0)-R(\infty)=\sigma^2$

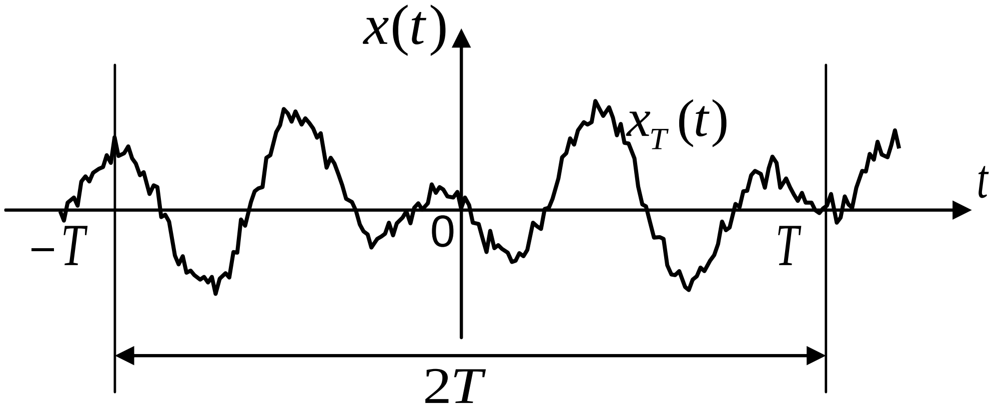
功率谱密度：信号或者时间序列的功率如何随频率分布。这里功率可能是实际物理上的功率，或者更经常便于表示抽象的信号被定义为信号数值的平方，也就是当信号的负载为1欧姆(ohm)时的实际功率。

信号的功率谱密度当且仅当信号是广义的平稳过程的时候才存在。如果信号不是平稳过程，那么自相关函数一定是两个变量的函数，这样就不存在功率谱密度，但是可以使用类似的技术估计时变谱密度。

2.5.3 平稳随机过程的频谱特性

- 谱密度的定义

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t), & -T\le t\le T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



随机过程的样本函数及其截尾函数

$x_T(j\omega)$ 为 $x_T(t)$ 的傅立叶变换

$$\begin{cases} x_T(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-j\omega t}dt \\ x_T(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{cases}$$

则定义 $\mathrm{P}_x(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}E\{\|x_T(j\omega)\|^2\}$

由于平均值不为零的信号不是平方可积的，所以在这种情况下就没有傅里叶变换。

幸运的是维纳-辛钦定理（**Wiener-Khinchin theorem**）提供了一个简单的替换方法，如果信号可以看作是平稳随机过程，那么功率谱密度就是信号自相关函数的傅里叶变换。

Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\| x_T(j\omega) \right\|^2 d\omega$$

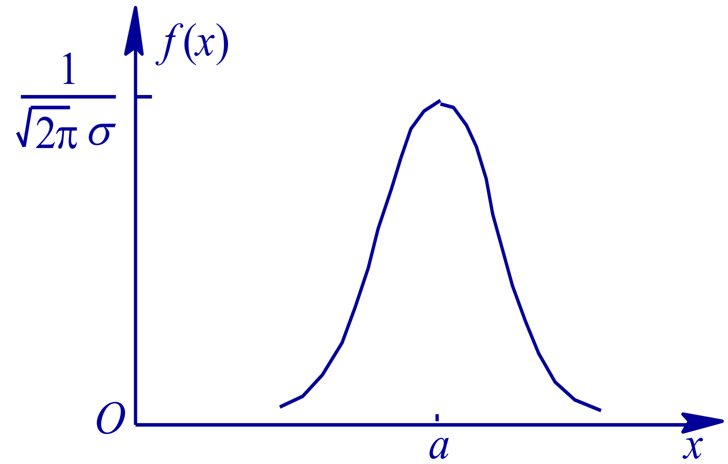
- 确定信号$x(t)$的自相关函数与其功率谱密度之间有确定的傅立叶变换关系。
- 平稳随机过程$\xi(t)$的自相关函数与其功率谱密度之间也互为傅立叶变换关系。

$$\left.\begin{aligned} P_\xi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega)e^{j\omega\tau}d\tau \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{R(\tau) \Leftrightarrow P_\xi(\omega)}$$

上式也称之为维纳-辛钦定理。

第 2 章　随机信号的描述与分析

2.6.1 高斯分布概率密度函数及其特点



- 一维高斯分布概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad -\infty < x < \infty$$

- 一维高斯分布概率密度函数的特点
  - 对称于均值 a；
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$
  - 在(-∞，a)单调上升,(a，∞)单调下降;
  - a表示分布中心，σ表示集中程度;
  - 当a=0，σ=1时，称 $f(x)$ 为标准正态分布的密度函数。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- 正态分布函数

$$F(x)=P\{\xi(t)\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right]dz=\phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

概率积分函数

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-z^2/2}dz$$

2.6.2 高斯过程的定义

若随机过程$\xi(t)$的任意n维（n=1, 2, …）分布都是正态分布，则称它为高斯随机过程或正态过程。其n维正态概率密度函数表示如下：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n|B|^{1/2}}\exp\left[\frac{-1}{2|B|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|B|_{jk}\left(\frac{x_j-a_j}{\sigma_j}\right)\left(\frac{x_k-a_k}{\sigma_k}\right)\right]$$

其中：

$$a_k=E[\xi(t_k)]$$

$$\sigma_k^2=E[\xi(t_k)-a_k]^2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & 1 & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

***b_{jk}*为*$\xi(t_j)$*和*$\xi(t_k)$*的归一化协方差函数**

$$b_{jk} = \frac{E\{\xi(t_j) - \bar{m}_\xi(t_j)\}E\{\xi(t_k) - \bar{m}_\xi(t_k)\}}{\sigma_j \sigma_k}$$

2.6.3 高斯过程的特点

- 高斯过程的n维分布完全由n个随机变量的数学期望、方差和两两之间的归一化协方差函数所决定。因此对于高斯过程，只要研究它的数字特征就可以了。
- 如果过程是宽平稳的，即其均值与时间无关，协方差函数只与时间间隔有关，而与时间起点无关，则它的n维分布也与时间起点无关，故它也是严平稳的。
- 如果高斯过程在不同时刻的取值是不相关的，则即对所有$j\neq k$，有$b_{jk}=0$，于是

统计独立

$$f_n=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j}e^{-\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-a_j)^2}{2\sigma_j^2}}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}e^{-\frac{(x_j-a_j)^2}{2\sigma_j^2}}=\prod_{j=1}^{n}f(x_j)$$

第 2 章　随机信号的描述与分析

2.7.1 经典系统分析的回顾

- 时域

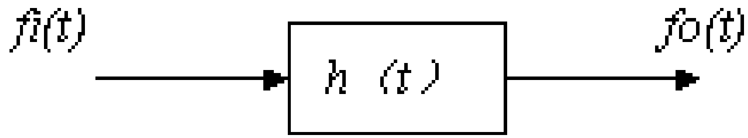
$$f_0(t) = f_i(t) * h(t)$$

- 频域

$$F_0(\omega) = F_i(\omega) H(\omega)$$

- 谱密度之间的关系

$$P_0(\omega) = P_i(\omega) |H(\omega)|^2$$

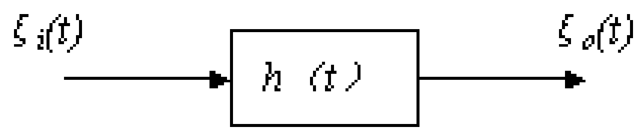


确定性信号通过线性系统

2.7.2 输入是平稳随机过程

$$\xi_0(t) = \xi_i(t) * h(t)$$

$$= \int_0^{\infty} h(\tau) \xi_i(t-\tau) d\tau$$



随机过程通过线性系统

需要解决两个问题：$\begin{cases} \text{a、输入平稳，输出平稳否？} \\ \text{b、输入、输出功率谱密度之间的关系。} \end{cases}$

2.7.3 输出随机过程的统计特性

- $\xi_0(t)$的数学期望

条件假设：$\xi_i(t)$平稳，$E[\xi_i(t)]$为已知，$h(t)$为已知，

$$E[\xi_0(t)] = E\left[\int_0^\infty h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau\right] = \int_0^\infty h(\tau)E[\xi_i(t-\tau)]d\tau$$

根据平稳性假定：

$$E[\xi_i(t-\tau)] = E[\xi_i(t)] = \mu_i\text{（常数）}$$

$$E[\xi_0(t)] = \mu_i \int_0^\infty h(\tau)d\tau = \mu_i \cdot H(0)$$

$$\boxed{H(\omega) = \int_0^\infty h(t)e^{-j\omega t}dt}$$

输出过程的数学期望与t无关。

- $\xi_0(t)$ 的自相关函数

$$R_0(t_1,t_1+\tau)=E[\xi_0(t_1)\xi_0(t_1+\tau)]$$
$$=E[\int_0^{\infty}h(\alpha)\xi_i(t_1-\alpha)d\alpha\int_0^{\infty}h(\beta)\xi_i(t_1+\tau-\beta)d\beta]$$
$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}h(\alpha)h(\beta)E[\xi_i(t_1-\alpha)\xi_i(t_1+\tau-\beta)]d\alpha d\beta$$

根据平稳性假定：$E[\xi_i(t_1-\alpha)\xi_i(t_1+\tau-\beta)]=R_i(\tau+\alpha-\beta)$

$$R_0(t_1,t_1+\tau)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau+\alpha-\beta)]d\alpha d\beta=R_0(\tau)$$

$$\left.\begin{aligned}&E[\xi_0(t)]=\mu_i\cdot H(0)\\&R_0(t_1,t_1+\tau)=R_0(\tau)\end{aligned}\right\}$$

输出过程是广义平稳的

- ◆ 平稳随机过程经线性系统传输后，输出仍然为平稳随机过程。
- ◆ 输入是各态历经的随机过程，输出也是各态历经的随机过程。
- ◆ ★输入是高斯过程，输出也是高斯过程，只是均值和方差发生了变化。

➢ $\xi_0(t)$ 的功率谱密度

维纳—欣辛定理：

任何时候其自相关函数和功率谱密度都是一对富氏变换。

$$P_{\xi_0}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_0(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_0^{\infty}d\alpha\int_0^{\infty}[h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau+\alpha-\beta)e^{-j\omega\tau}d\beta]$$

变量代换： $\tau'=\tau+\alpha-\beta$

$$P_{\xi_0}(\omega)=\int_0^{\infty}h(\alpha)e^{j\omega\alpha}d\alpha\int_0^{\infty}h(\beta)e^{-j\omega\beta}d\beta\int_{-\infty}^{\infty}R_i(\tau')e^{-j\omega\tau'}d\tau'$$

$$=H^*(\omega)\cdot H(\omega)\cdot P_{\xi_i}(\omega)$$

$$P_{\xi_0}(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2P_{\xi_i}(\omega)$$

和确定信号的结论相同

➢ 输出过程$\xi_o(t)$的概率分布

从原理上看，在已知输入过程分布的情况下，总可以确定输出过程的分布。

$$\xi_0 = \int_0^{\infty} h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau$$

改写为和式：

$$\xi_0(t) = \lim_{\Delta\tau_k \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_i(t-\tau_k)h(\tau_k)\Delta\tau_k$$

若 $\xi_i(t)$ 为正态随机过程， $\xi_0(t)$ 也为正态随机过程

高斯过程经线性变换后的过程仍为高斯的。

由于线性系统的介入，与输入高斯过程相比，输出过程的数字特征已经改变了。

随机序列的数字特征

设$\{X_n\}$,$\{Y_n\}$为随机序列,则

(1) 均值函数: $\mu_X\{n\}=E\{X_n\}$

(2) 相关函数: $R_X(n_1,n_2)=E\{X_{n1}X_{n2}\}$

(3) 均方值函数: $\Psi^2{}_X(n)=E\{X^2{}_n\}$

(4) 方差函数: $\sigma^2{}_X(n)=E\{[X_n-\mu_X(n)]^2\}$

(5) 协方差函数:

$$Cov_X(n_1,n_2)=E\{[X_{n1}-\mu_X(n_1)][X_{n2}-\mu_X(n_2)]\};$$

(6) 互相关函数: $R_{XY}(n_1,n_2)=E[X_{n1}Y_{n2}]$

第 2 章　随机信号的描述与分析

2.1 引言

2.2 随机过程一般描述

2.3 时间连续随机过程的微分和积分

2.4 平稳随机过程

2.5 平稳随机过程的相关函数与功率谱

2.6 高斯过程

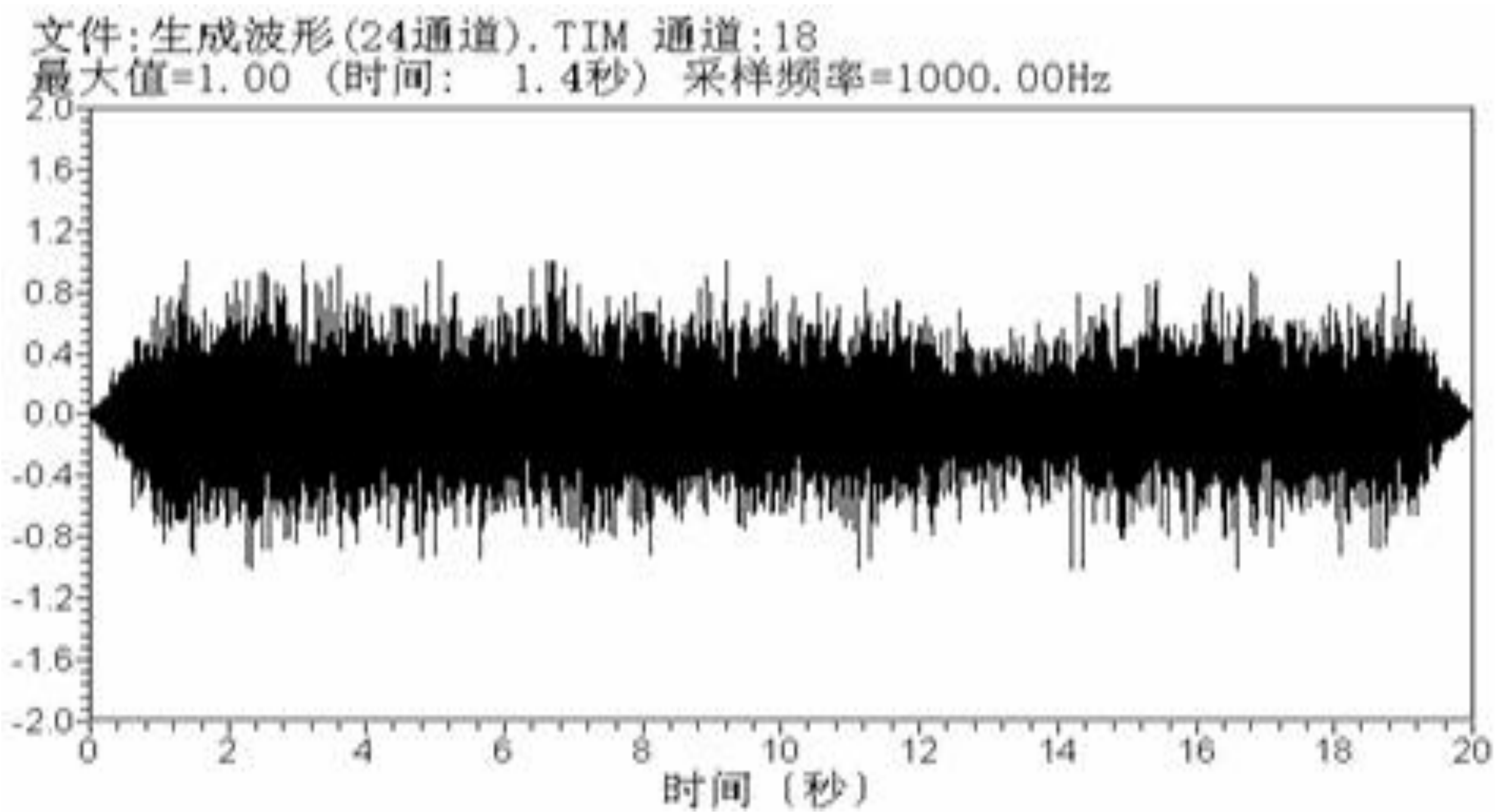
2.7 随机过程通过线性系统

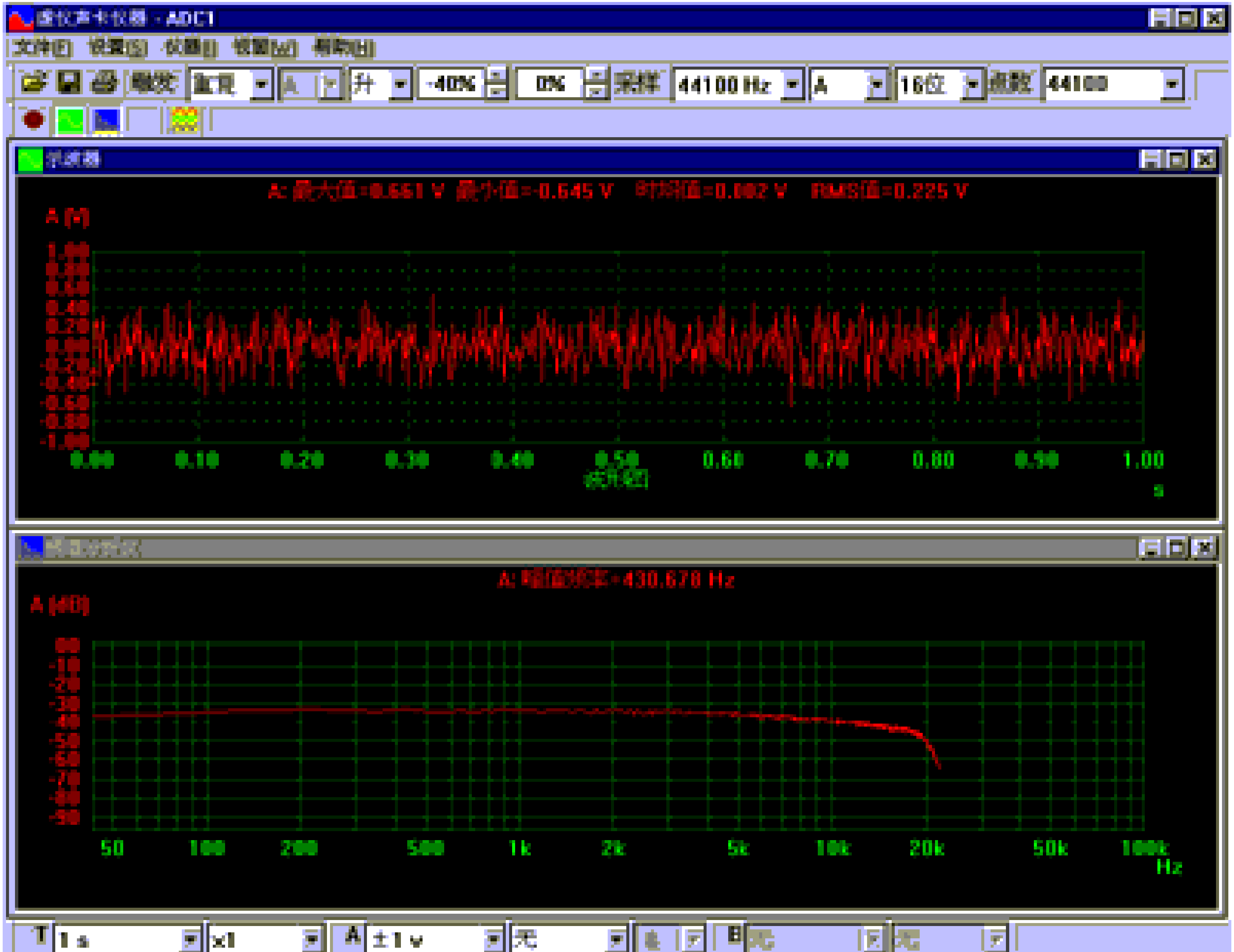
2.8 白噪声

2.9 伪随机码的产生及其性质

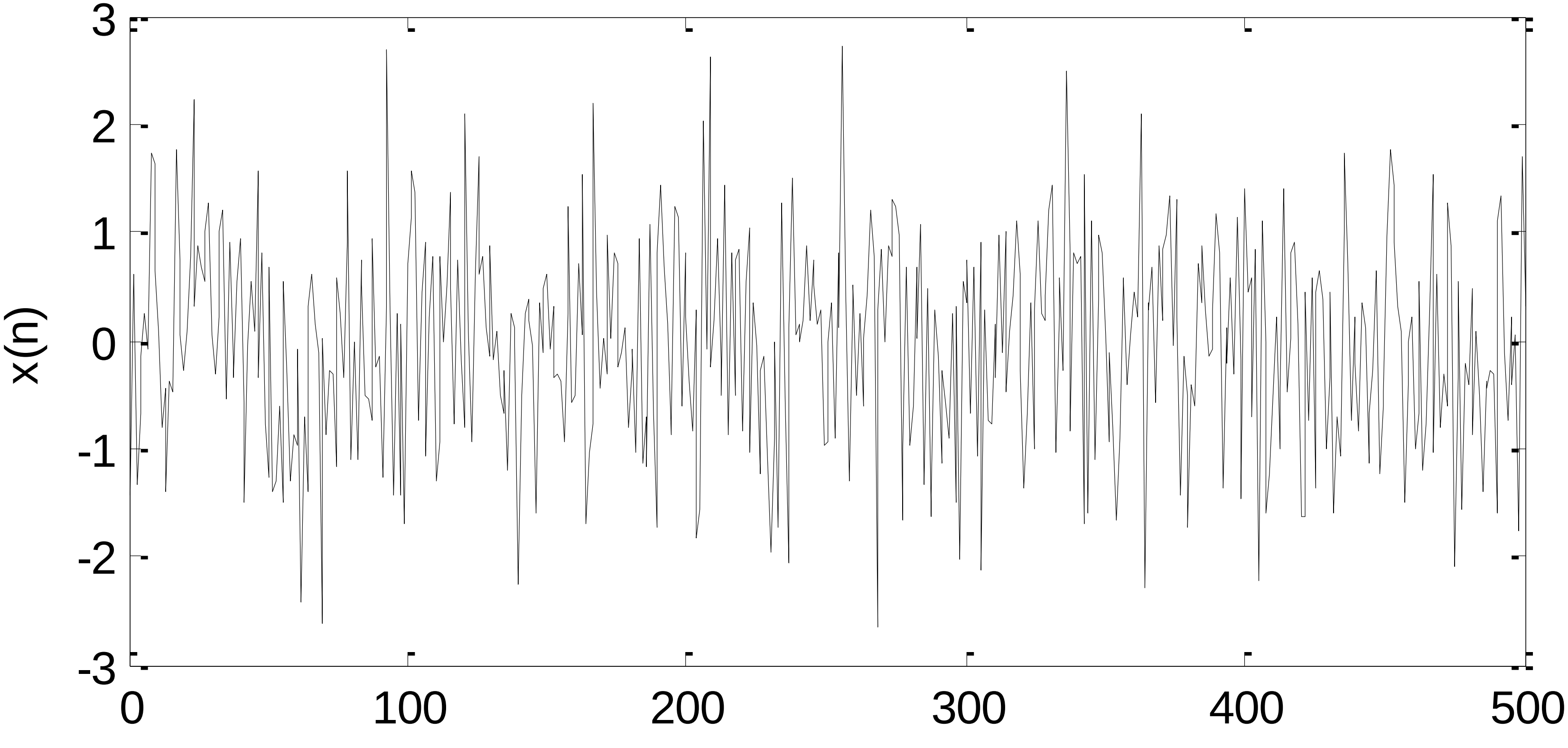
2.8.1 白噪声过程

- 一种最简单的随机过程；
- 均值为零、谱密度为非零常数的平稳随机过程；
- 或由一系列不相关的随机变量组成的一种理想化随机过程；
- 没有“记忆性”
  - t 时刻的数值与 t 时刻以前的过去值无关
  - 不影响 t 时刻以后的将来值


文件:生成波形(24通道).TIM 通道:18
最大值=1.00 (时间: 1.4秒) 采样频率=1000.00Hz
2.0
1.6
1.2
0.8
0.4
0.0
-0.4
-0.8
-1.2
-1.6
-2.0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
时间 (秒)



-40%
0%
44100 Hz
16位
44100
RMS值=0.225 V
0.00 0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1.00
s
A: 峰值频率=430.678 Hz
50 100 200 500 1k 2k 5k 10k 20k 50k 100k
Hz
1 s
x1
±1 v


3
2
1
0
-1
-2
-3
x(n)
0
100
200
300
400
500

➢ 白噪声的数学特征 $w(t)$

（1）均值为 0

即 $E\{w(t)\}=0$

（2）自相关函数

$$R_w(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$$

其中 $\delta(\tau)$ 为 Dirac 函数

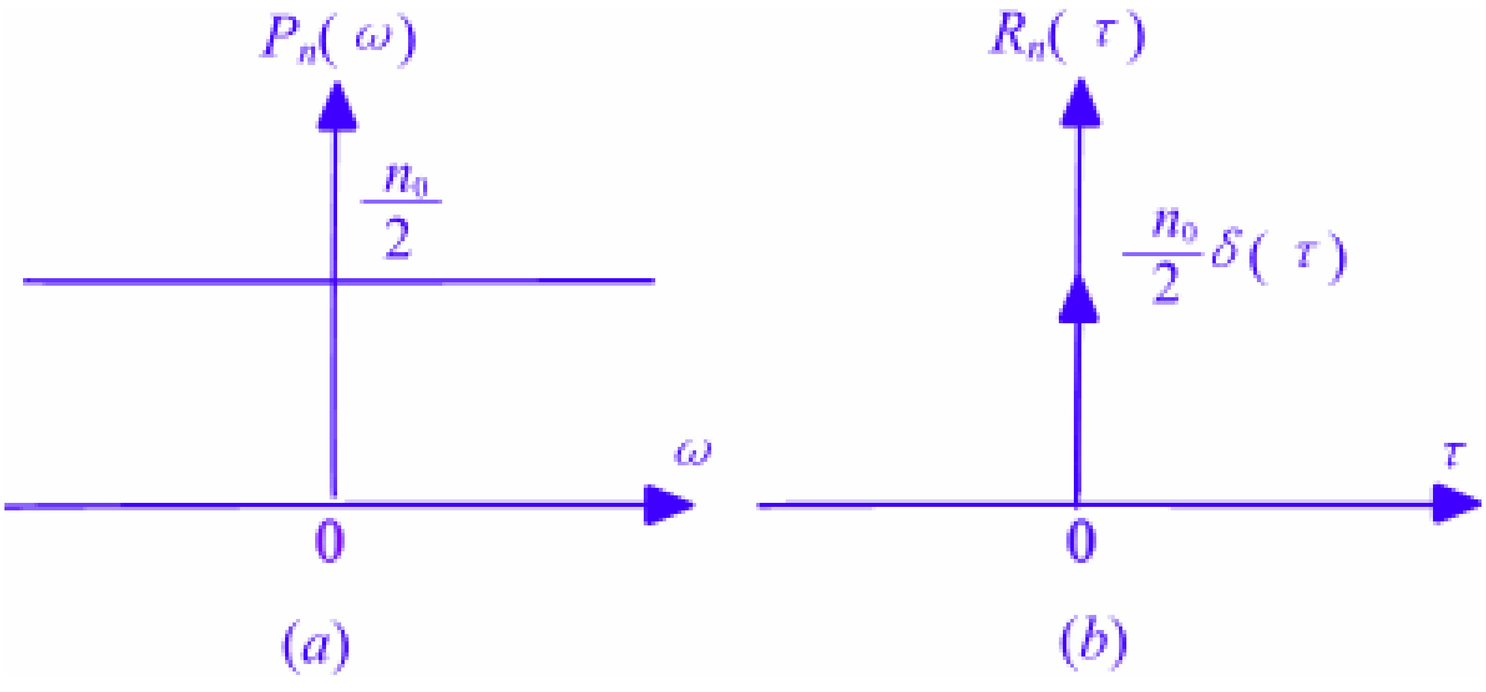
$$\delta(\tau)=\begin{cases}\infty, & \tau=0\\ 0, & \tau\neq 0\end{cases}$$

且 $$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)d\tau=1$$

注：自相关函数定义

$$R_x(t_1,t_2)=E\{x(t_1)\cdot x(t_2)\}$$

白噪声过程的自相关函数



（3）谱密度为常数 σ^2

$$S_w(\omega)=\sigma^2,\quad -\infty<\omega<\infty$$

注：谱密度的定义

– 设 $x_T(t)=\begin{cases} x(t), & -T\le t\le T \\ 0, & 其他 \end{cases}$

- $x_T(j\omega)$ 为 $x_T(t)$ 的傅立叶变换

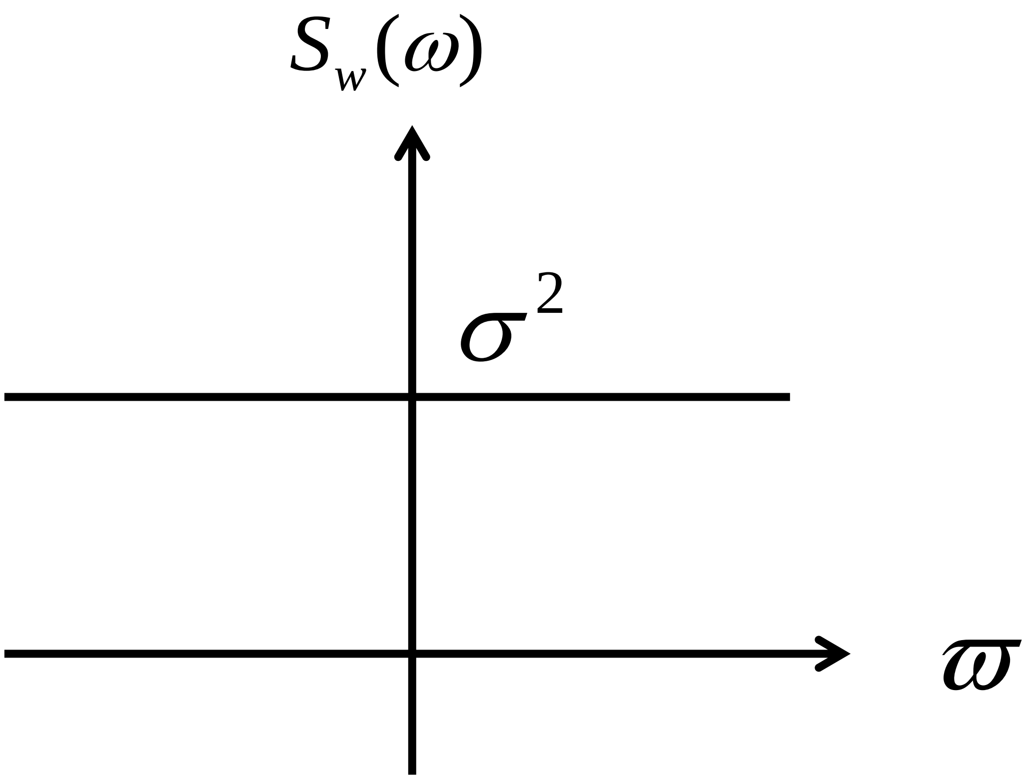
$$S_x(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\{\| x_T(j\omega) \|^2\}$$

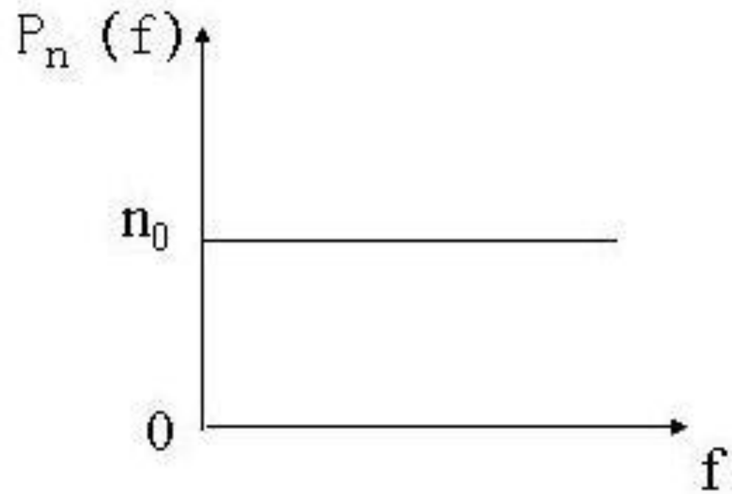
- 上式表明，白噪声过程的功率在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的全频段内均匀分布

- 平均功率

$$\varphi_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega$$

白噪声过程的谱密度





- 严格符合上述定义的自相关函数
  - ✓意味着它的方差和平均功率是无穷大
  - ✓而且它在任意两个瞬间取值，不管这两个瞬间相距多么近，都是互不相关的

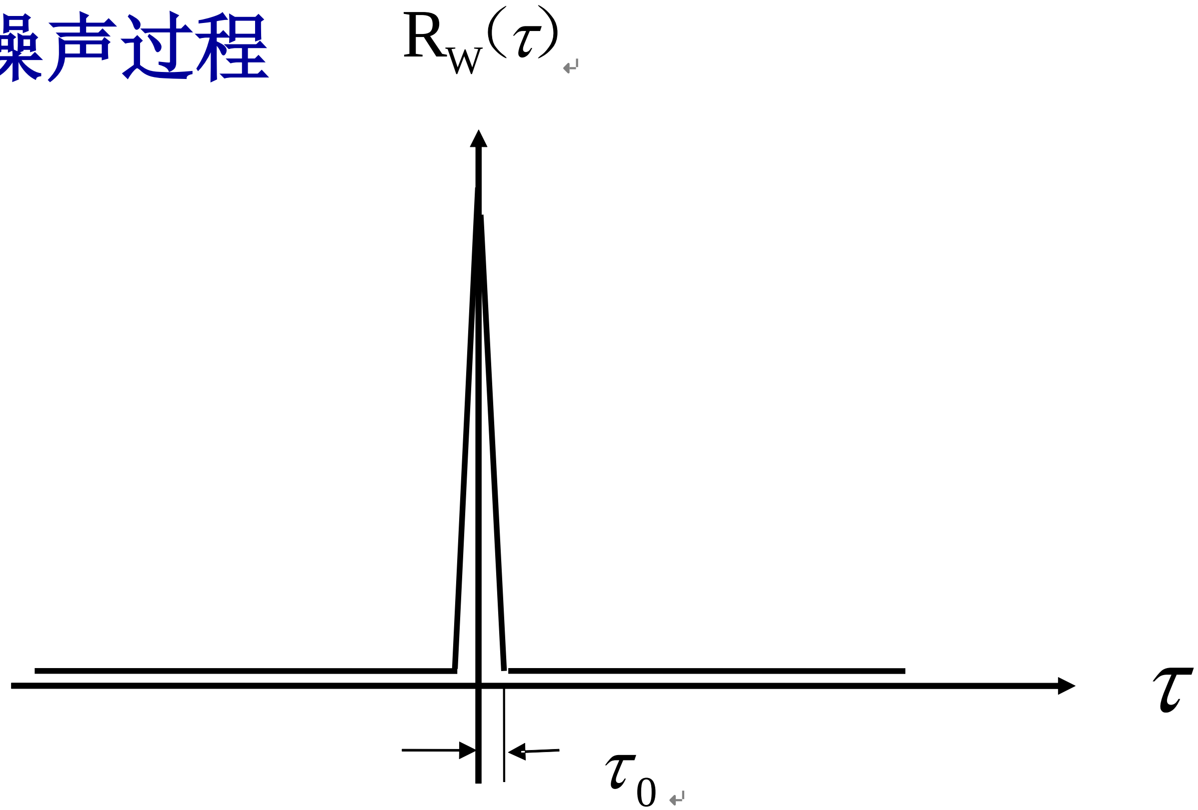
- 白噪声的概念

如同力学中的“质点”等概念一样，具有重要的实际意义

实际中

– 如果 $R_w(\tau)$ 接近 δ 函数

– 近似的白噪声过程



- 向量的噪声 $w(t)$

$$E\{w(t)\} = 0$$

$$Cov\{w(t), w(t+\tau)\} = E\{w(t)w^T(t+\tau)\} = Q\delta(\tau)$$

– Q – 正定的常数阵

– $\delta(\tau)$ – Dirac 函数

2.8.2 白噪声序列

- 白噪声序列
  - 白噪声过程的一种离散形式
  - 可以描述
    - 如果随机序列 $\{w(k)\}$ 是两两不相关的
    - 对应的自相关函数为

$$R_w(l)=\sigma^2\delta_l,\quad l=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

- δ_l – Kronecker 符号
  - 即

$$\delta_l = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases}$$

- 则称这种随机序列 $\{w(k)\}$ 为白噪声序列

注：自相关函数

- 设 $x(k)$ 是宽平稳多态的，均值为零
- 离散随机过程

$$R_x(l) = E\{x(k), x(k+l)\}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

- 白噪声序列的谱密度函数 σ^2

即

$$S_w(\omega)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}R_\omega(l)e^{-j\omega l}=\sigma^2$$

- 向量白噪声序列

$$E\{w(k)\}=0$$

$$Cov\{w(k),w(k+l)\}=E\{w(k)w^{\tau}(k+l)\}=R\delta_l$$

2.8.3 表示定理

表示定理

- 设平稳噪声序列 $\{e(k)\}$ 的谱密度 $S_e(\omega)$ 是 ω 的实函数或 $\cos\omega$ 的有理函数
- 那么必定存在一个渐近稳定的线性环节，使得如果环节的输入是白噪声序列
- 则环节的输出是谱密度为 $S_e(\omega)$ 的平稳噪声序列 $\{e(k)\}$

即

- 有色噪声序列可以看成由白噪声序列驱动的线性环节的输出
- 该线性环节叫作成形滤波器
- 成形滤波器

- 脉冲传递函数为

$$H(z^{-1}) = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1(z^{-1}) + \cdots + c_{nc}(z^{-n_c})$$

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1(z^{-1}) + \cdots + d_{nd}(z^{-n_d})$$

– 且 $C(z)$ 和 $D(z)$ 的根都在 Z 平面上的单位圆内

有色噪声

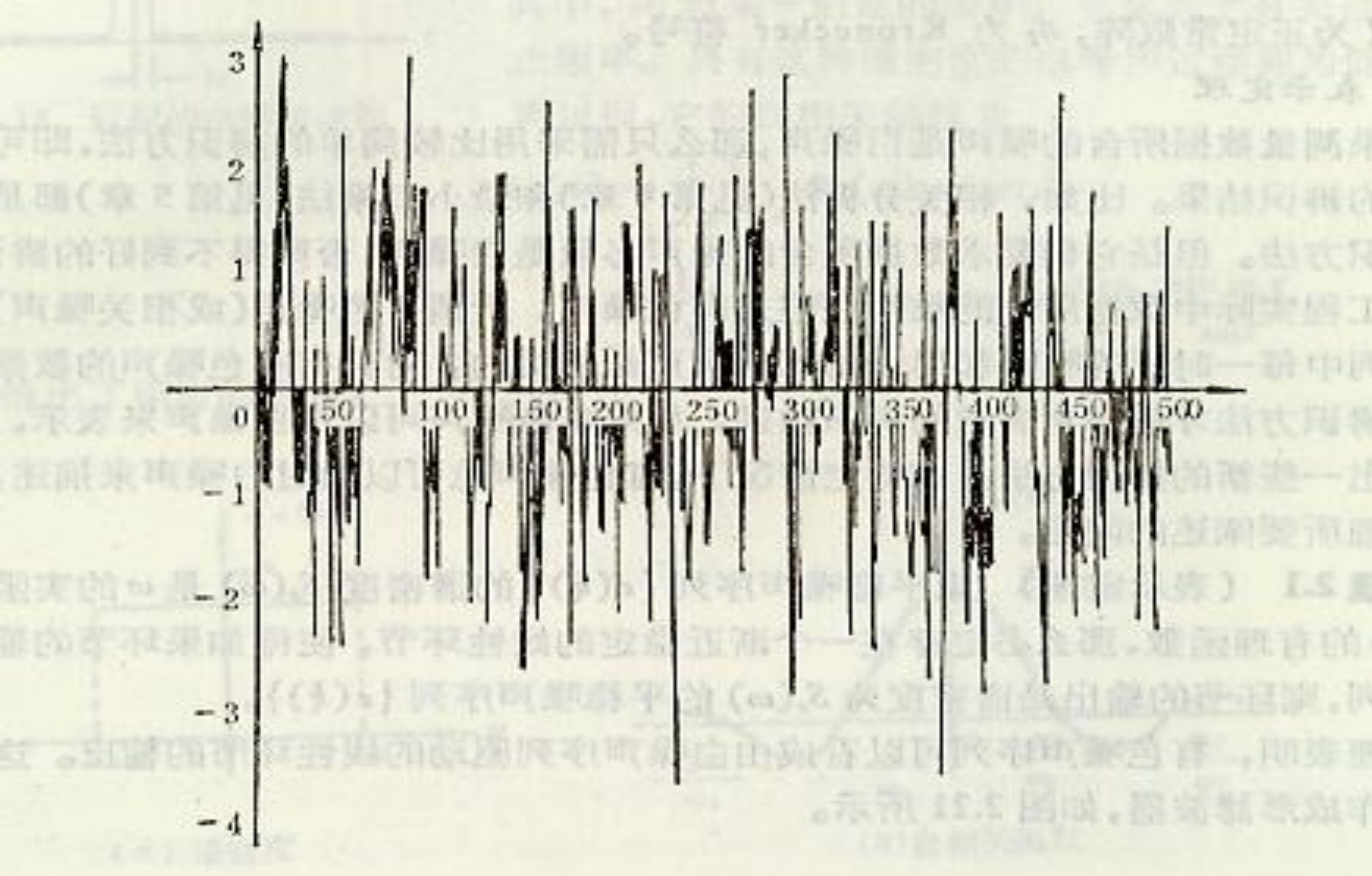


图 2.22 有色噪声序列 {e(k)}

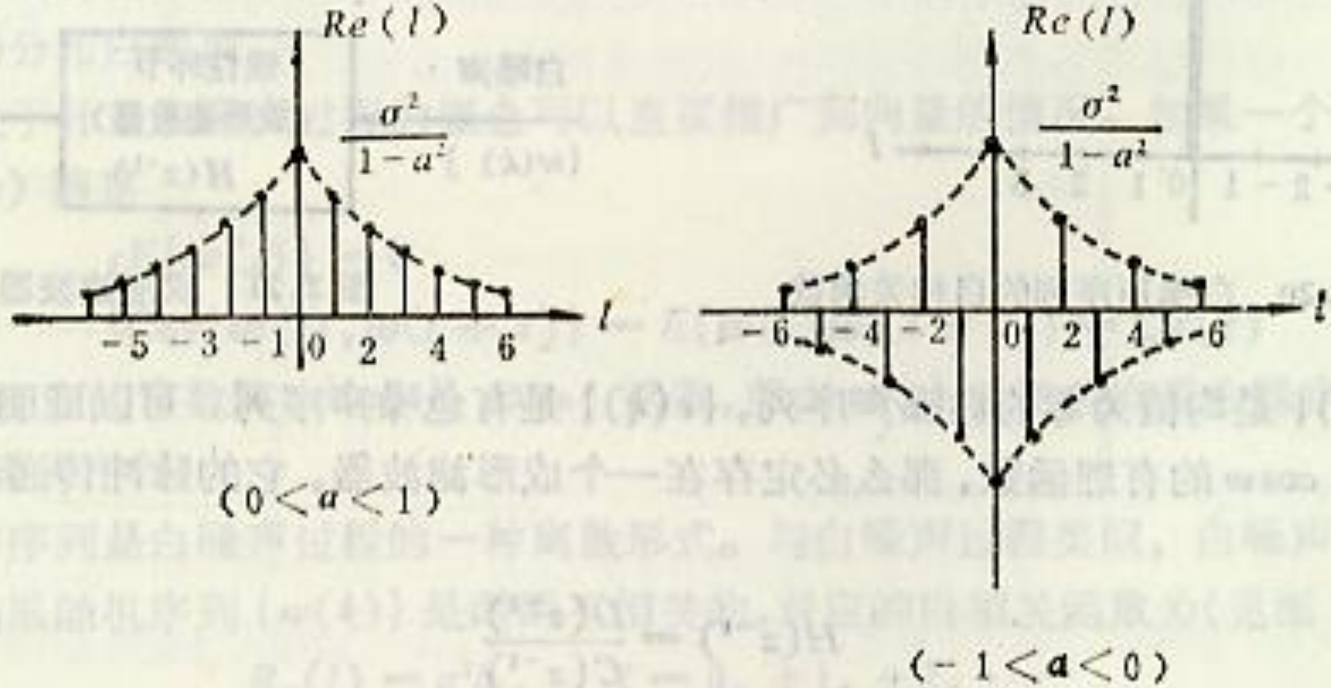


图 2.23 有色噪声 e(k) 的自相关函数

第 2 章 随机信号的描述与分析

M序列的由来

脉冲输入 $\longrightarrow$ 得脉冲响应，工程上不可实现

白噪声输入 $\longrightarrow$ 相关法得脉冲响应，工程上不可实现

因此，必须用工程中可重复产生的输入信号来辨识系统的脉冲响应序列。

工程上，采用M序列来辨识系统的脉冲响应序列。

- M 序列（最长线性移位寄存器序列）
  - 二进制伪随机码序列（PRBS，Pseudo-Random Binary Sequence ）的一种形式
  - 自相关函数接近脉冲函数
- 内容
  - M 序列的产生
  - M 序列的性质
  - M 序列的自相关函数

M 序列的产生

设有一无限长的二元序列 $x_1 x_2 \cdots x_P x_{P+1} \cdots$

- 各元素间存在下列关系

$$x_i = a_1 x_{i-1} \oplus a_2 x_{i-2} \cdots \oplus a_P x_{i-P}$$

- 其中
  - $i = P+1, \quad P+2, \quad \cdots$
  - 系数 $a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_{P-1}$ 取值 0 或1
  - 系数 a_P 总为 1
  - $\oplus$ 表示模 2 和

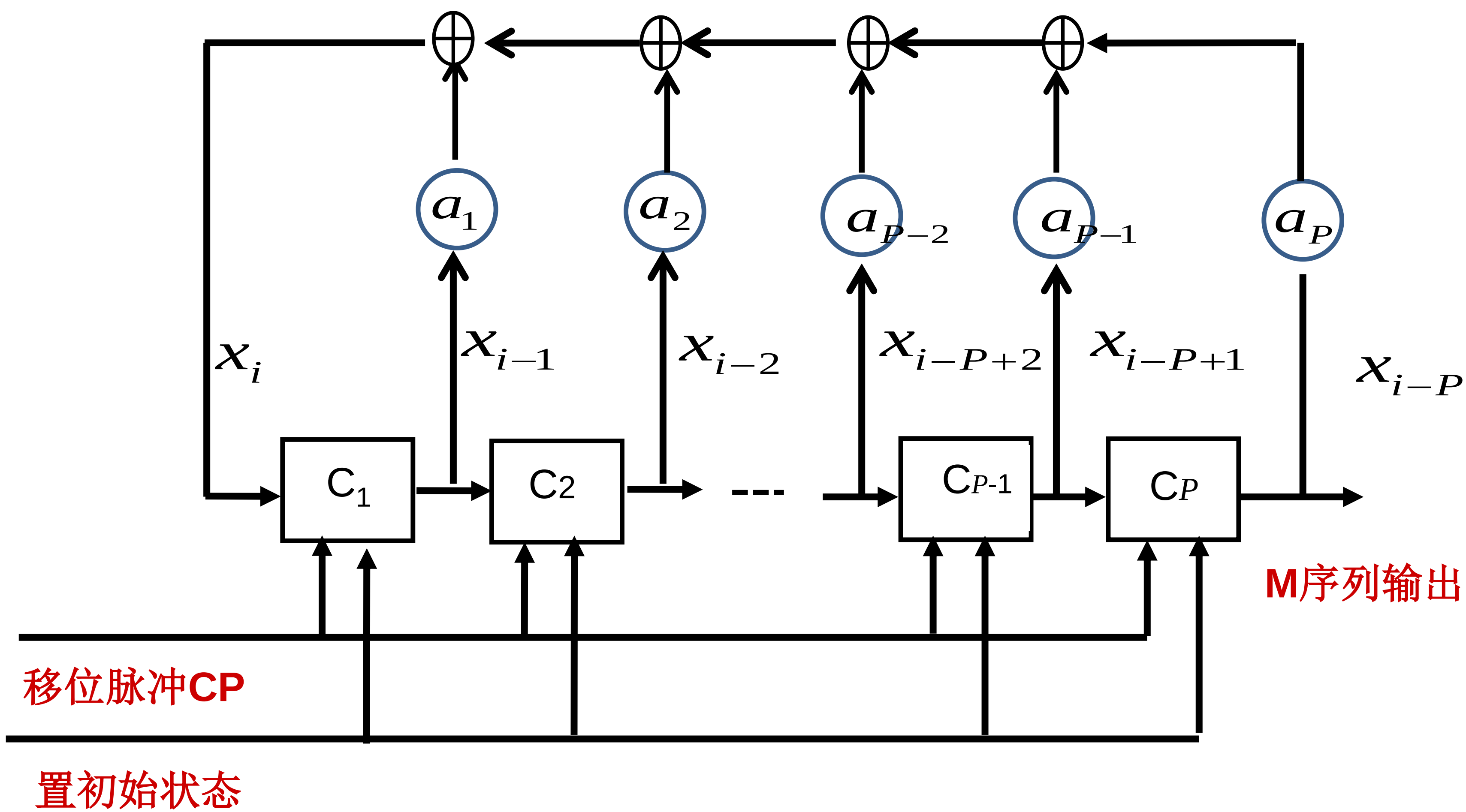
模 2 和运算规则

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- 只要适当选择系数 $a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_{P-1}$
  - 就可以使序列以 $(2^P - 1)bit$ 的最长周期循环
  - 这种具有最长循环周期的二元序列就称为 M 序列

根据上述可知

  - M 序列可以很容易地用线性反馈移位寄存器产生



x_i
a_1
a_2
a_{P-2}
a_{P-1}
a_P
x_{i-1}
x_{i-2}
x_{i-P+2}
x_{i-P+1}
x_{i-P}
C_1
C2
C_{P-1}
C_P
M序列输出
移位脉冲CP
置初始状态

生成M序列的一般结构

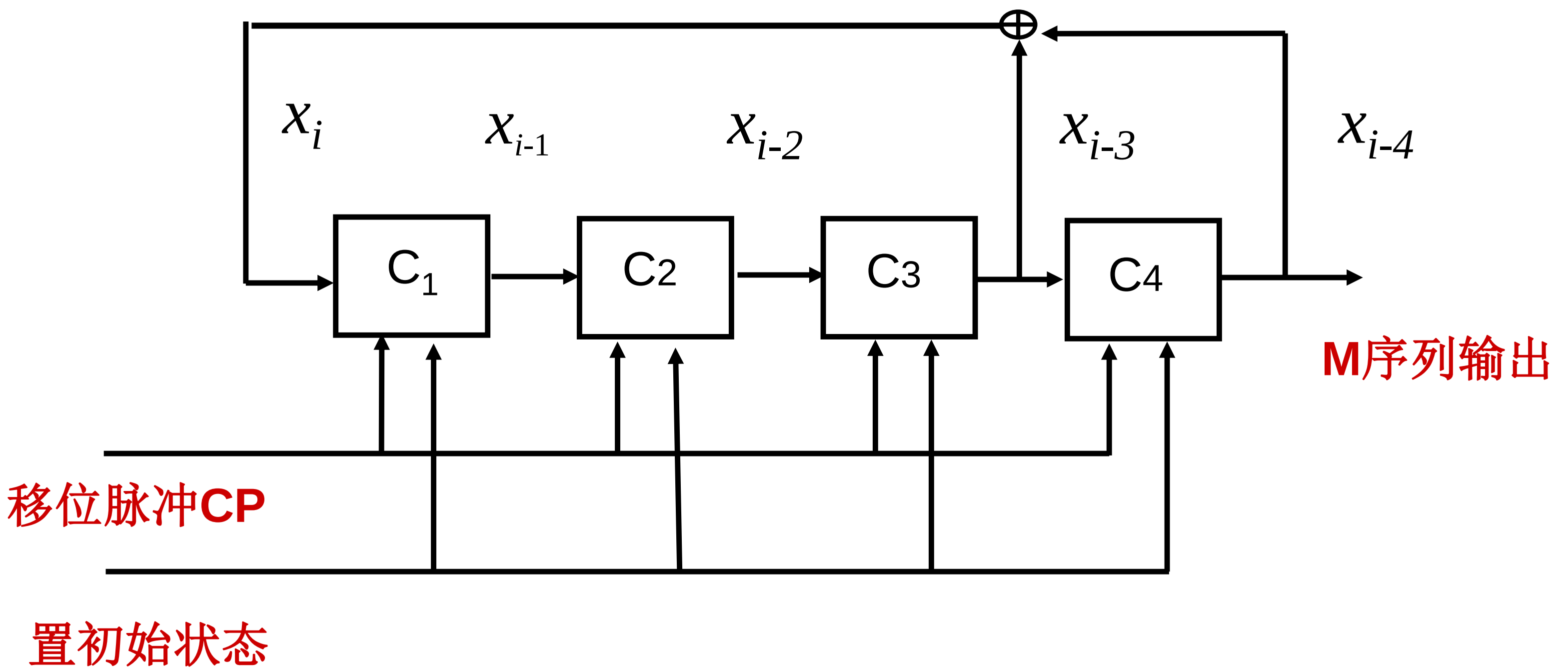
图中

- 双稳触发器 $C_1, \ C_2, \ \cdots, \ C_P$ 构成 P 级移位寄存器
- 系数 $a_1, \ a_2, \ \cdots, \ a_{P-1}, a_P$ 决定反馈通道的选择
- 若系数 $a_i = 0$，表示断开第 i 反馈通道
- 若系数 $a_j = 1$，表示需要第 j 反馈通道
- $x_{i-1}, \ x_{i-2}, \ \cdots, \ x_{i-P}$ 经各自的反馈通道进行模 2 和运算后反馈至 x_i

- 适当选择反馈通道
  - 在移位脉冲 CP 的作用下
  - 移位寄存器任一级的输出均可为 M 序列
- 置初始状态是防止移位寄存器出现全零状态

因为出现全零状态移位寄存器各级的输出将永远是“ 0 ”

例 4 级移位寄存器生成 M 序列的结构如图



- 反馈通道取自 C_3， C_4
  - 即有

$$x_i = x_{i-3} \oplus x_{i-4}$$

  - 若移位寄存器的初始状态为 1010
  - 在脉冲 CP 的作用下
  - 寄存器各级状态的变化如表

寄存器的各级状态表

CP / C_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
C_1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	…
C_2	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	…
C_3	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	…
C_4	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	…

上表表明

- 只要适当选择反馈通道，便可生成M 序列
- 但是，反馈通道的选择不是任意的，否则就不一定生成 M 序列
- 如何选择 $a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_{P-1}, a_P$ ？

特征多项式

设二元序列 $x_0x_1x_2\cdots$ 是一种 M 序列

- 各元素之间的关系

$$x_i = a_1x_{i-1} \oplus a_2x_{i-2} \oplus \cdots \oplus a_Px_{i-P}$$

- 记作

$$x_i = \sum_{j=1}^{P} \oplus a_j x_{i-j}$$

- 其循环周期为 $N_P = (2^P - 1)bit$
  - 即有

$$x_{N_P+k} = x_k, \quad 1 \le k \le N_P$$

现有一个多项式 $G(s)$ 来描述这个 M 序列

- 即把这个 M 序列 $x_0 x_1 x_2 \cdots x_i$ 写成多项式的形式

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \oplus x_i s^i$$

- x_i – M 序列的元素
- s^i – 元素 x_i 处于序列的第 i 位上

如上表中 C_1 序列

$$\{C_1\} = 1111000100110101\cdots$$

$$G(s) = s \oplus s^2 \oplus s^3 \oplus s^4 \oplus s^8 \oplus s^{11} \oplus s^{12} \oplus s^{14} \oplus \cdots$$

由此可以导出一个有趣的结论

- 无限阶多项式 $G(s)$ 可以表示成一个确定的有限阶多项式 $F(s)$ 的倒数

即

$$G(s) = \frac{1}{F(s)}$$

其中

$$F(s) = 1 \oplus \sum_{i=P+1}^{\infty} \oplus x_i s^i$$

- $F(s)$ 称作 M 序列的特征多项式

由此可见

- 只要确定了特征多项式
- 对应的M 序列 $F(s)$ 也就定下来
- 即生成 M 序列的结构图完全由特征多项式 $F(s)$ 确定

如

$$F(s)=1\oplus s^{3}\oplus s^{4}$$

– 相对的 M 序列为

$$G(s) = \frac{1}{F(s)} = \frac{1}{1 \oplus s^3 \oplus s^4}$$

$$= s \oplus s^2 \oplus s^3 \oplus s^4 \oplus s^8 \oplus s^{11} \oplus s^{12} \oplus s^{14} \oplus \cdots$$

现在的问题

- 如何寻找特征多项式

必须指出

- 不是任何多项式都可当作生成 M 序列的特征多项式，它必须满足两个条件

特征多项式的条件

（a）必要条件

- $F(s)$ 必须是既约多项式

即一定是不可分解的多项式

（b）充分条件

$F(s)$ 必须是本原多项式，即

F(s)可整除 $s^{N_P} \oplus 1$ ；

F(s)除不尽 $s^{N_q} \oplus 1$， $N_q < N_P$

即 $F(s)$ 是多项式 $s^{N_P} \oplus 1$ 的一个因子

其中 $N_P = 2^P - 1$ ，P 是 $F(s)$ 的阶次

即

$$\frac{s^{N_P} \oplus 1}{F(s)} = g(s)$$

如：

$$F_1(s)=1\oplus s^3\oplus s^4$$

$$F_2(s)=1\oplus s\oplus s^2\oplus s^3\oplus s^4$$

$$P=4$$

$$2^P-1=2^4-1=15$$

$$\frac{s^{15}\oplus 1}{1\oplus s^3\oplus s^4}=1\oplus s^3\oplus s^4\oplus s^6\oplus s^8\oplus s^9\oplus s^{10}\oplus s^{11}$$

– $F_1(s)$ - 特征多项式，$F_2(s)$ - 不是特征多项式

M 序列的性质

（1）在P级M序列的一个循环周期 $N_P = (2^P - 1)bit$ 内

- 逻辑“0”出现的次数为 $(N_P - 1)/2$
- 逻辑“1”出现的次数为 $(N_P + 1)/2$
- “0” 比 “1” 少 1
- 当 N_P 较大时，“0”和“1”出现的概率近似为 1/2

（2） M 序列中某种状态连续出现的段称为“游程”

- 一个 P 级 M 序列的游程总数等于 2^{P-1}
- 其中，“0”游程与“1”游程各占一半
- 且长度为 $1bit$ 的占1/2，即 2^{P-2} 个

  $2bit$ 的占1/4，即 2^{P-3} 个

  $3bit$ 的占1/8，即 2^{P-4} 个

  $\vdots$

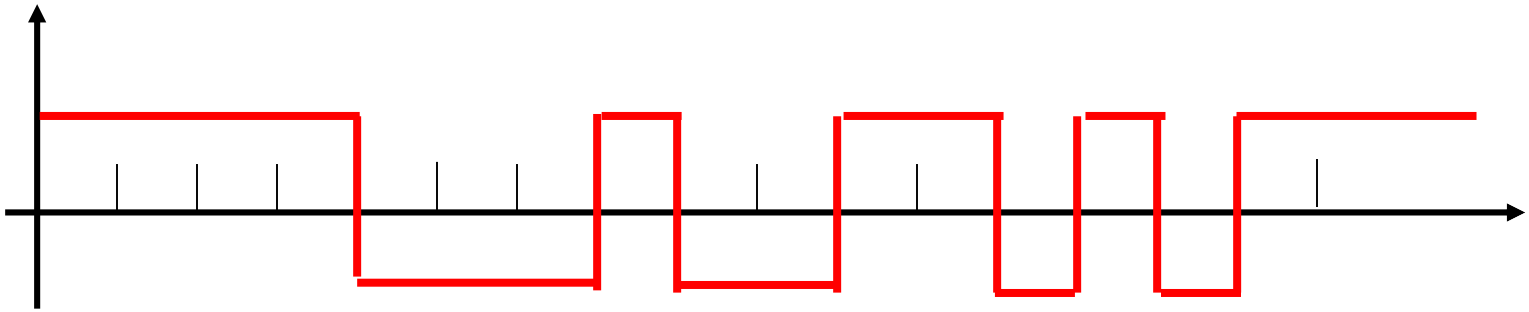
  $ibit$ 的占 $1/2^{i}$，即 2^{P-1-i} 个

– 但长度为$(P-1)bit$ 的游程只有一个

为 “0” 游程

– 长度为 $Pbit$ 的游程只有一个

为 “1” 游程



- 如 $P=4,\quad N^P-1=15$
  - 游程有 $2^{4-1}=2^3=8$
  - 其中，“0”，“1”游程各有 4 个

1	bit	4
2	bit	2
3	bit	1
4	bit	1

（3）所有 M 序列都具有移位可加性

- 即两个彼此移位等价的相异 M 序列按位模 2 和仍为 M 序列，并与原 M 序列移位等价
- 例 4级 M 序列

$$\cdots 111100010011010111 \cdots$$

延迟了3位

$$\cdots 110001001101011100 \cdots$$

按位模2和，得到新的序列

$$\cdots 001101011110001011 \cdots$$

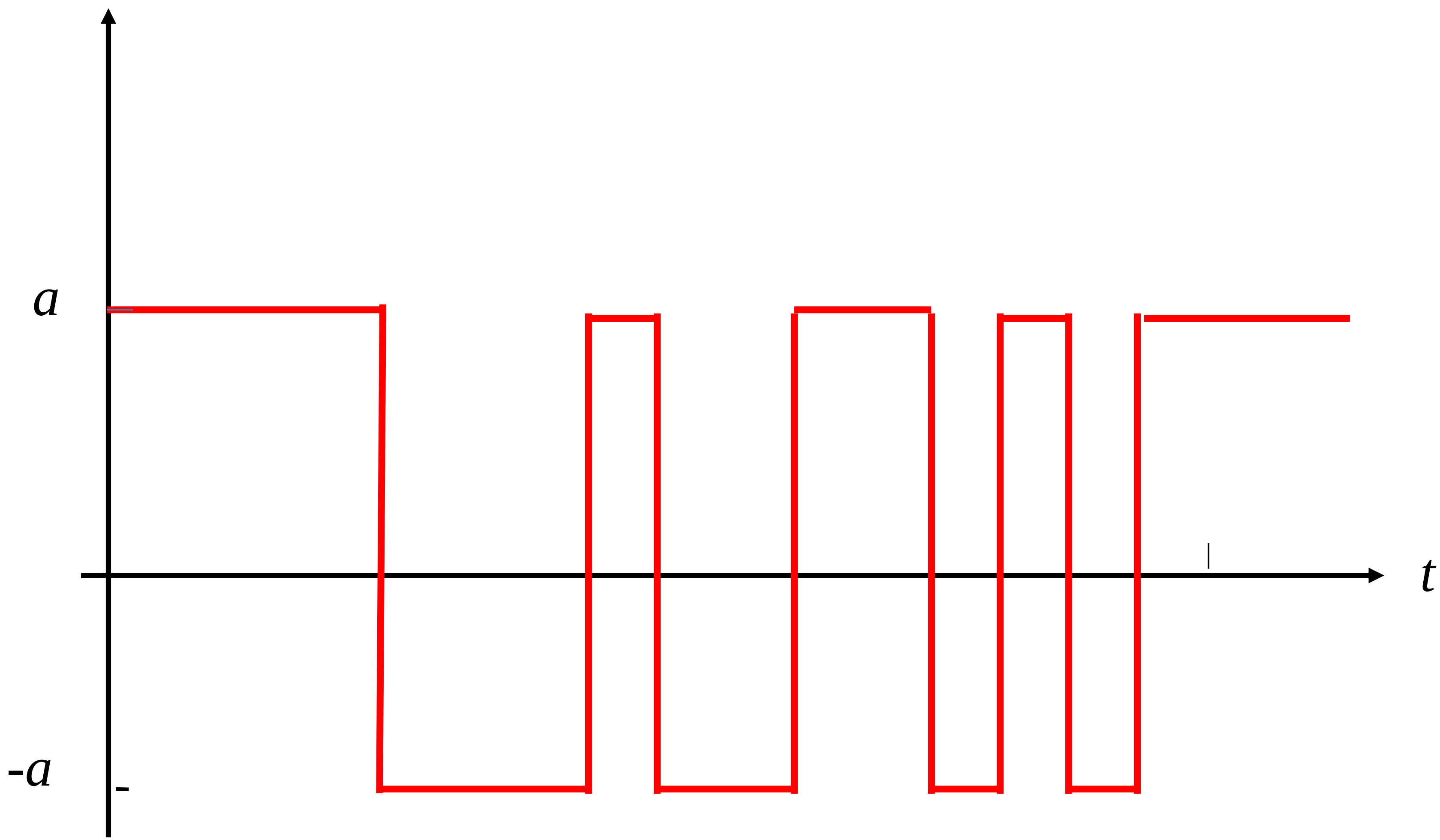
M序列及其性质

- M 序列的逻辑 “0” 和逻辑 “1”

  变换成幅度为 a 和 $-a$ 的序列

$$M(i)=a(1-2x_i)$$

4 级 M 序列变换成幅度为 *a* 和 –*a* 的序列



➢ 自相关函数为

$$R_M(\tau) = \frac{1}{N_P \Delta t} \int_0^{N_P \Delta t} M(t) M(t+\tau) dt$$

– $M(t)$ – 幅值为 a 或 $-a$ 的 M 序列

– Δt – 移位脉冲的周期

– 离散形式为

$$R_M(\tau) = \frac{1}{N_P} \sum_{k=0}^{N_P-1} M(k) M(k+\tau)$$

- 工程实际：将M序列转变成电平信号，“0”取为a，“1”取为-a 。
- 移位脉冲周期为Δ，则该二电平M序列的周期为NΔ。
- 数字特征：

(1) 均值m_x

在一个周期NΔ内，其均值m_x为

$$m_x = \frac{1}{N_P\Delta}\left(\frac{N_P-1}{2}a\Delta t - \frac{N_P+1}{2}a\Delta t\right) = -\frac{a}{N_P}$$

显然，当$N\to\infty$时，$m_x\to 0$.

(2) 自相关函数***Rx*(τ)**

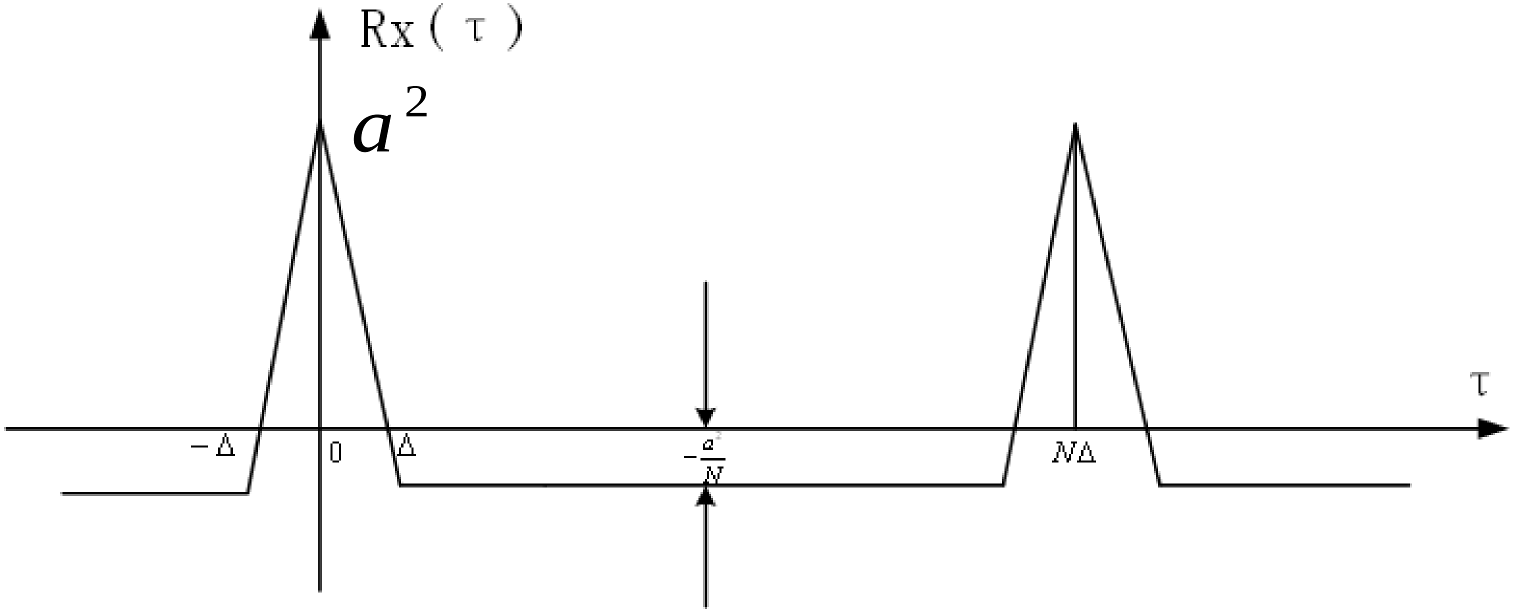
不加证明给出***Rx*(τ)**的计算结果。

$$R_x(\tau)=\begin{cases} -a^2/N_P & |\tau|>\Delta t \\ \dfrac{\Delta t-|\tau|}{\Delta t}a^2-\dfrac{|\tau|a^2}{N_P\Delta t}+\dfrac{|\tau|a^2}{N_P{}^2\Delta}t & |\tau|<\Delta t \end{cases}$$

当N很大时，上式可写为

$$R_x(\tau)=\begin{cases} a^2(1-\dfrac{N_P+1}{N_P}\dfrac{|\tau|}{\Delta t}) & -\Delta t<\tau<\Delta t \\ -\dfrac{a^2}{N_P} & \Delta t\le\tau\le(N_P-1)\Delta t \end{cases}$$

Rx(τ)的波形如下：



从图中可知， ***Rx(τ)***由两部分构成：

三角脉冲分量，记为$R_x^1(\tau)$；

直流分量，记为$R_x^2(\tau)$；

则有：

$$R_x(\tau) = R_x^1(\tau) + R_x^2(\tau)$$

其中:

$$R_x^2(\tau) = -a^2 / N_P$$

$$R_x^1(\tau) = R_x(\tau) - R_x^2(\tau)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{N_P}{N_P+1} a^2 (1 - \dfrac{|\tau|}{\Delta t}) & -\Delta t < \tau < \Delta t \\ 0 & \Delta t \le \tau \le (N_P - 1)\Delta t \end{cases}$$

$R_x^1(\tau)$ 的波形如下：

当 Δt 很小时，$R_x{}^1(\tau)$ 可认为是脉冲函数，则有

$$R_x^1(\tau)=\frac{N_P+1}{N_P}a^2\Delta t\delta(\tau)$$

$$R_x(\tau)=\frac{N_P+1}{N_P}a^2\Delta t\delta(\tau)-\frac{a^2}{N_P}$$

可见，M序列具有白噪声序列的数字特性。

- 可见
  - M 序列的自相关函数（当 $N_P \to \infty$ 时）近似于 δ 函数
  - 所以 M 序列是一种比较理想的辩识输入信号

第2章 结束