第 3章

经典辨识方法

3.1 引言
3.2 阶跃响应法
3.3 脉冲响应法
3.4 频率响应法
3.5 相关分析法
3.6 谱分析法

目前已有的辨识方法所涉及的模型形式而言可分为两类：

- 非参数辨识方法
- 参数辨识方法

- 非参数辨识方法
  - 获得模型是非参数模型；
  - 在假设过程是线性的前提下：
    - 不必事先确定模型的具体结构
    - 因而这类方法适用于任意复杂的过程

工程上至今仍经常使用

- 参数辨识方法
  - 必须首先假定一种模型结构，通过极小化模型与过程之间的误差准则函数来确定模型的参数。
  - 如果无法确定模型的结构，先进行结构辨识，确定模型的结构参数，然后再确定模型参数。

根据基本原理分类，参数辨识方法可分为

- 最小二乘法
- 梯度校正法
- 最大似然法
- 预报误差法
- ......

在经典控制理论中

线性过程的动态特性通常用如下形式表示

1). 传递函数 $G(s)$

2). 频率响应 $G(j\omega)$

3). 脉冲响应 $g(t)$

4). 阶跃响应 $h(t)$

后三种为非参数模型

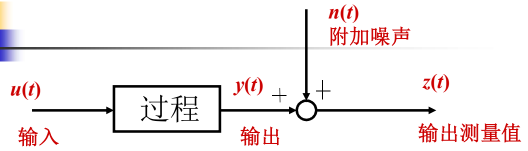


图1 **SISO** 过程

对过程

- 施加特定的实验信号；
- 测定过程的输出；
- 求得这些过程的非参数模型；
- 经过适当的数学处理, 将它们的转化成参数模型–传递函数形式。

通常有以下几种方法

- 阶跃响应法
- 脉冲响应法
- 频率响应法
- 相关分析法
- 谱分析法

3.1 引言
3.2 阶跃响应法
3.3 脉冲响应法
3.4 频率响应法
3.5 相关分析法
3.6 谱分析法

采用阶跃响应法辨识的步骤

- 第一步：实际测取过程的阶跃响应。
- 第二步：由阶跃响应求过程的传递函数。
- 常用方法：
  - 近似法、半对数法、切线法、两点法、面积法等
  - 当阶跃曲线比较规则时，采用近似法，半对数法，切线法和两点法都能比较有效的求得传递函数

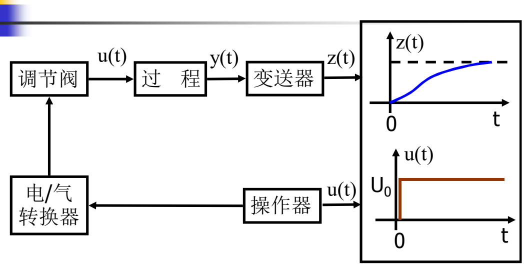


图2 测试线路

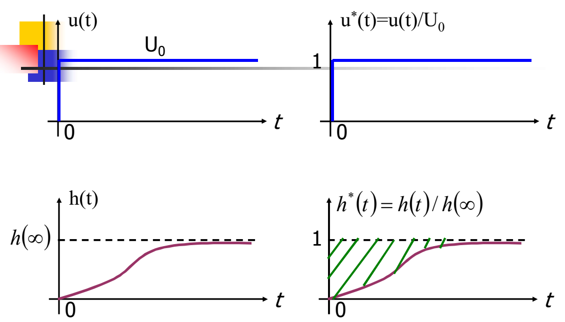


图3 把阶跃响应转化成无因次的形式

近似法

当过程传递函数可用一阶惯性特性描述时

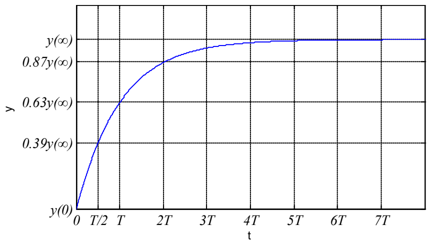


图4 一阶惯性环节的阶跃响应曲线

13

$$G(s)=\frac{K}{1+Ts} \qquad (3.2.1)$$

$$K=\frac{y(\infty)-y(0)}{\Delta u} \qquad (3.2.2)$$

$$y(t)=K\Delta u(1-e^{-\frac{t}{T}}) \qquad (3.2.3)$$

对于时间常数T，由于$t=T$时，$y(t)=0.63K$，所以取$y(t)=0.63y(\infty)$时对应的t就是过程的时间常数T。

14

当过程传递函数可用一阶惯性加纯滞后描述时

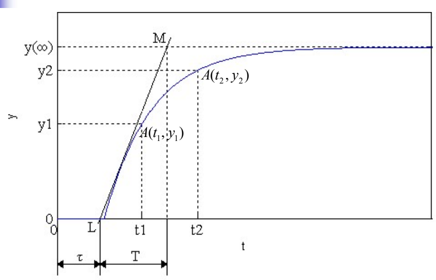


图5 一阶惯性加纯滞后环节的阶跃响应曲线

15

$$G(s)=\frac{K}{1+Ts}e^{-\tau s} \qquad (3.2.4)$$

K的求法与前面相同，T和τ可通过图解求得。在响应曲线的拐点处作一切线，该切线与时间轴相交于L，与稳态值渐近线相交于M，则$0L$即为τ值，切线ML在时间轴上的投影就是T。

16

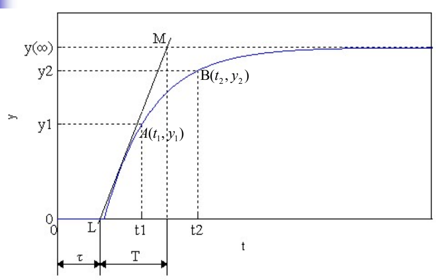


图5 一阶惯性加纯滞后环节的阶跃响应曲线

17

两点法

当过程传递函数可用式(3.2.4)描述时，若用近似法求解参数T和τ，寻找拐点时会存在一定程度上的误差，在这种情况下，可以使用两点法计算出参数T和τ。在响应曲线上取两点 $A(t_1,y_1)$ 和 $B(t_2,y_2)$，如图5所示，联立求解得

18

$$\begin{cases} T = \dfrac{t_2 - t_1}{M_1 - M_2} \\ \tau = \dfrac{t_2 M_1 - t_1 M_2}{M_1 - M_2} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

其中，

$$\begin{cases} M_1 = \ln(1 - \dfrac{y_1}{K}) \\ M_2 = \ln(1 - \dfrac{y_2}{K}) \end{cases} \quad (3.2.6)$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \tau \\ K\Delta u(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}) & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (3.2.7)$$

为了反映过程的动态特性，输出响应曲线上的两点可以如下匹配：具有一阶惯性加纯滞后环节的常用配对点和参数计算

y_1	y_2	T	τ
0.284	0.632	$1.5(t_2\text{-}t_1)$	$(3t_2\text{-}t_1)/2$
0.393	0.632	$2(t_2\text{-}t_1)$	$2t_1\text{-}t_2$
0.55	0.865	$(t_2\text{-}t_1)/1.2$	$(2.5t_1\text{-}t_2)/1.5$

由二阶惯性加纯迟延的传递函数拟合

二阶惯性环节加纯滞后传递函数：

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, T_1 \geq T_2 \quad \textbf{(3.2.8)}$$

增益K值按下式计算：

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{\Delta u} \quad \textbf{(3.2.9)}$$

时间延迟 τ 可根据阶跃响应曲线脱离起始的毫无反应的阶段到开始变化的时刻来确定，见图**6**。

截去纯延迟部分，并化为无量纲形式的阶跃响应$y^*(t)$此时传递函数变成：

$$G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, T_1 \geq T_2 \quad \textbf{(3.2.10)}$$

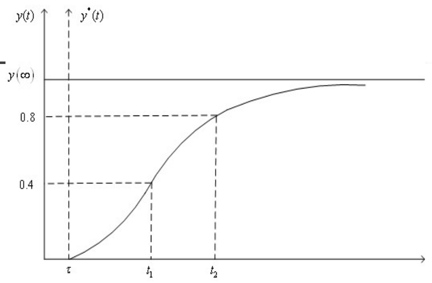


图**6** 根据阶跃响应曲线上的两个点的数据确定T_1 和T_2

对应的阶跃响应为：

$$y^*(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2} \quad \textbf{(3.2.11)}$$

根据上式可利用响应曲线上的两个数据点$[t_1\ y^*(t_1)]$和$[t_2\ y^*(t_2)]$确定参数 T_1和 T_2，一般取 $y^*(t)$ 为**0.4**和**0.8**，再从曲线上定出 t_1 和 t_2，然后可得：

$$\frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t_1/T_1} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t_1/T_2} = 0.6 \quad \textbf{(3.2.12)}$$

$$\frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t_2/T_1} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t_2/T_2} = 0.2 \quad \textbf{(3.2.13)}$$

将$y^*(t)$ 所取两点查得到的 t_1、t_2代入上式可得所需的 T_1、T_2 。

➢ 面积法

一般地传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^n} e^{-\tau s} \quad (3.2.14)$$

或

$$G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)(1 + bTs)^{n-1}} \quad (3.2.15)$$

参数 n, k, T, τ, b 也可直接从阶跃响应曲线求得

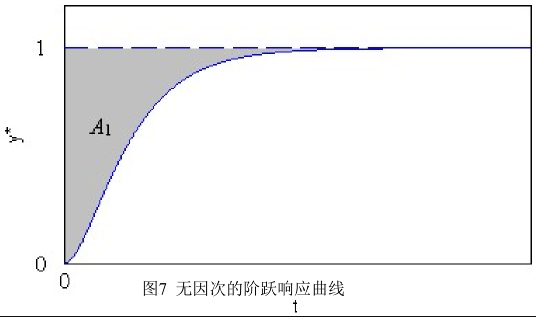


图7 无因次的阶跃响应曲线

现考虑系统的传递函数如下

$$G(s)=\frac{1}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+1} \qquad (3.2.16)$$

系统的传递函数与微分方程存在着一一对应的关系，因此，可以通过求取微分方程的系数来辨识系统的传递函数。在求得系统的放大倍数 ***K*** 后，要得到无因次阶跃响应 ***y(t)***（设 $\tau=0$）。大多数自衡的工业过程对象的 ***y(t)*** 可以用下式描述来近似

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=1 \qquad (3.2.17)$$

面积法原则上可以求出 ***n*** 为任意阶的各系数。以 ***n*=3** 为例，注意到

$$\begin{cases}\left.\dfrac{d^3y(t)}{dt}\right|_{t\to\infty}=\left.\dfrac{d^2y(t)}{dt}\right|_{t\to\infty}=\left.\dfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t\to\infty}=0\\ y(t)|_{t\to\infty}=1\end{cases} \qquad (3.2.18)$$

将式（3.2.17）的 ***y(t)*** 项移至右边，在 **[0,*t*]** 上积分，得

$$a_3\frac{d^2y(t)}{dt}+a_2\frac{dy(t)}{dt}+a_1y(t)=\int_0^t[1-y(t)]dt \qquad (3.2.19)$$

定义

$$F_1(t)=\int_0^t[1-y(t)]dt \qquad (3.2.20)$$

则由式（**3.2.18**）给出的初始条件可知，当 $t\to\infty$

$$a_1=\int_0^\infty[1-y(t)]dt \qquad (3.2.21)$$

如图所示，a_1 的数值相当于图中阴影部分的面积 A_1。

将式 $a_1y(t)$ 移到等式的右边，定义

$$a_3\frac{dy(t)}{dt}+a_2y(t)=\int_0^t[F_1(t)-a_1y(t)]dt=F_2(t) \qquad (3.2.22)$$

利用初始条件（**3.2.18**）当 $t\to\infty$ 时

$$a_2=F_2(\infty) \qquad (3.2.23)$$

同样，可定义

$$a_3y(t)=\int_0^t[F_2(t)-a_2y(t)]dt=F_3(t) \qquad (3.2.24)$$

可得

$$a_3=F_3(\infty) \qquad (3.2.25)$$

以此类推，若 $n\geq 2$，定义

$$F_n(t)=\int_0^t[F_{n-1}(t)-a_{n-1}y(t)]dt \qquad (3.2.27)$$

得到

$$a_n=F_n(\infty) \qquad (3.2.28)$$

若过程模型采用如下描述

$$G(s)=K\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots b_1 s+1}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+1} \quad (n\geq m) \qquad (3.2.29)$$

$$K=h(\infty)/u_0 \qquad (3.2.30)$$

定义

$$G(s)\overset{\Delta}{=}K\frac{1}{P(s)} \qquad (3.2.31)$$

- 其中

$$P(s)=\frac{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+1}{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+1} =1+\sum_{i=1}^{\infty}c_i s^i \qquad (3.2.32)$$

由于 $\boxed{L[1-h^*(t)]=\int_0^{\infty}[1-h^*(t)]e^{-st}dt}$

- 则 $[1-h^*(t)]$ 的Laplace变换为

$$L[1-h^*(t)]=\frac{1}{s}-\frac{1}{sP(s)}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}c_i s^{i-1}}{1+\sum_{i=1}^{\infty}c_i s^i} \qquad (3.2.33)$$

- 一阶面积A_1为

$$A_1=\int_0^{\infty}[1-h^*(t)]dt=\lim_{s\to 0}L[1-h^*(t)] =\lim_{s\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{\infty}c_i s^{i-1}}{1+\sum_{i=1}^{\infty}c_i s^i}=c_1 \qquad (3.2.34)$$

因此

一阶面积 $A_1=c_1$ (3.2.35)

令 $L[h_1^*(t)]=\dfrac{1}{s(1+c_1 s)}$ (3.2.36)

定义二阶面积为

$$A_2=\int_0^{\infty}\int_0^{t}[h_1^*(\tau)-h^*(\tau)]d\tau dt=\lim_{s\to 0}L\{\int_0^{t}[h_1^*(t)-h^*(t)]dt\}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{L[h_1^*(t)]-L[h^*(t)]}{s} \qquad (3.2.37)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\sum_{i=2}^{\infty}c_i s^{i-2}}{(1+c_1 s)(1+\sum_{i=1}^{\infty}c_i s^i)}=c_2$$

- 同理，令

$$L[h_2^*(t)]=\frac{1}{s(1+c_1 s+c_2 s^2)} \qquad (3.2.38)$$

- 可得三阶面积A_3为:

$$A_3=\int_0^{\infty}\int_0^{t}\int_0^{\tau}[h_2^*(\tau)-h^*(\tau)]d\tau^2 dt=c_3 \qquad (3.2.39)$$

- 以此类推，i阶面积A_i为

$$A_i=\int_0^\infty\int_0^t\cdots\int_0^\tau[h_{i-1}*(\tau)-h*(\tau)]d\tau^{i-1}dt=c_i \qquad (3.2.40)$$

- 其中：

$$L[h_{i-1}*(t)]=\frac{1}{s(1+c_1s+c_2s^2+\cdots+c_{i-1}s^{i-1})} \qquad (3.2.41)$$

37

进一步利用

$$e^{-st}=1+\frac{s}{1!}(-t)+\frac{s^2}{2!}(-t)^2+\cdots+\frac{s^i}{i!}(-t)^i+\cdots \qquad (3.2.42)$$

可得

$$L[1-h*(t)]=\int_0^\infty[1-h*(t)]e^{-st}dt=\sum_{i=0}^\infty M_is^i \qquad (3.2.43)$$

其中

$$M_i=\int_0^\infty[1-h*(t)]\frac{(-t)^i}{i!}dt \qquad (3.2.44)$$

38

由（3.2.33和（3.2.43）式以及$c_i=A_i$，可得

$$\left(1+\sum_{i=1}^\infty A_is^i\right)\left(1-\sum_{i=0}^\infty M_is^{i+1}\right)=1 \qquad (3.2.45)$$

$$\begin{cases}A_1=M_0\\A_2=M_1+A_1M_0\\A_3=M_2+A_1M_1+A_2M_0\\\cdots\\A_i=M_{i-1}+\sum_{j=0}^{i-2}A_{i-j-1}M_j\end{cases} \qquad (3.2.46)$$

有

$$A_i=\int_0^\infty[1-h*(t)]\frac{(-t)^{i-1}}{(i-1)!}dt+\sum_{j=0}^{i-2}A_{i-j-1}\int_0^\infty[1-h*(t)]\frac{(-t)^j}{j!}dt$$

(3.2.47)

40

- 根据 $A_i=c_i$ ，可得

$$a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+1$$
$$=(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+1)(1+\sum_{i=1}^\infty A_is^i) \qquad (3.2.48)$$

- 比较上式两边s的各次幂，有

41

$$\begin{cases}a_1=A_1+b_1\\a_2=A_2+b_2+b_1A_1\\a_3=A_3+b_3+b_2A_1+b_1A_2\\\cdots\\a_i=A_i+b_i+\sum_{j=1}^{i-1}b_jA_{i-j}\\i=1,2,\cdots,n+m\end{cases} \qquad (3.2.49)$$

由上式可求出传递函数的系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_m$

42

上式可以写成如下形式

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A_n & A_{n-1} & \cdots & A_{n-m+1} \\ A_{n+1} & A_n & \cdots & A_{n-m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n+m-1} & A_{n+m-2} & & A_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{n+1} \\ A_{n+2} \\ \vdots \\ A_{n+m} \end{bmatrix} \quad (3.2.50)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n-1} & A_{n-2} & \cdots & A_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad (3.2.51)$$

令 $t_1 = t / A_1$ （3.2.52)

则（**3.2.47**）式可写成

$$A_i = \int_0^\infty [1-h^*(t)] \frac{(-t)^{i-1}}{(i-1)!} dt + \sum_{j=0}^{i-1} A_{i-j-1} \int_0^\infty [1-h^*(t)] \frac{(-t)^j}{j!} dt$$

$$A_i = A_1^i \int_0^\infty [1-h^*(t_1)] \left[\frac{(-t_1)^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{(-t_1)^{i-2}}{(i-2)!} + \sum_{j=0}^{i-3} \frac{A_{i-j-1}}{A_1^{i-j-1}} \frac{(-t_1)^j}{j!} \right] dt_1 \quad (3.2.53)$$

（3.2.50）、（3.2.51）、（3.2.53）式分别编制成子程序，调用它们可以从阶跃响应数据求得对应的传递函数。

例 3.1 $G(s) = \dfrac{1}{10s^2 + 6.5s + 1}$

采样时间取4秒、数据长度取12（此时阶跃响应已进入稳态）时，调用相应的子程序，其辨识结果如下表所示。

噪声情况	条件		增益K	a_1	a_2	参数
	采样时间	数据长度	1.0	10.0	6.5	真值
无测量噪声	4秒	12	0.999984	11.7097	6.52053	估计值
	1.5秒	30	0.999965	10.2171	6.49897	
有测量噪声（方差为0.01）	1.5秒	30	1.00204	11.5776	6.47451	

例 3.2 $G(s) = \dfrac{17.5s^2 + 7.5s + 1}{4s^4 + 15s^3 + 17.5s^2 + 7.5s + 1}$

若传递函数的阶次取n=6,m=0,采样时间取0.2秒，数据长度取400，调用相应的子程序，其辨识结果如下表所示。

参数	增益K	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
估计值	1.0000	0.00003	0.0034	15.0000	-108.499	551.327	-2235.99

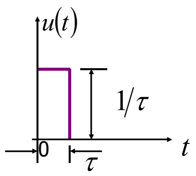
若传递函数的阶次取n=4,m=2,采样时间取0.2秒，数据长度取400，调用相应的子程序，其辨识结果如下表3所示。

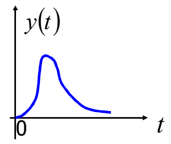
参数	增益K	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2
真值	1.0	7.5	17.5	15	4	7.5	17.5
估计值	1.0000	7.50405	17.5269	15.0258	4.1207	7.50402	17.5233

3.1 引言
3.2 阶跃响应法
3.3 脉冲响应法
3.4 频率响应法
3.5 相关分析法
3.6 谱分析法

脉冲响应

- 指在脉冲信号的作用下系统的输出响应
- 在实际中不可能输入理想脉冲，所以通常用矩阵脉冲输入
- 也可以直接由阶跃响应经差分处理后求得





脉冲响应也可以直接由阶跃响应经差分处理后求得：

$$g(k)=\frac{1}{T_0}[h(k)-h(k-1)] \qquad (3.3.1)$$

T_0 – 采样时间，应充分小

由脉冲响应求过程的传递函数方法较多，常用的方法：

- 一阶过程
- 二阶过程

49

1. 一阶过程（图解法）

$$G(s)=K/(Ts+1)$$

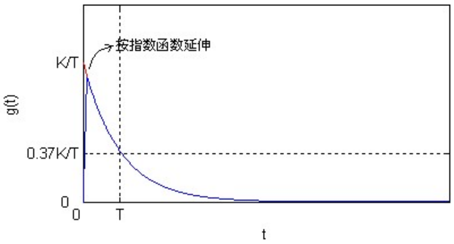
参数T和K可以直接在脉冲响应曲线图上直接确定

$$g(t)=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\log[g(t)]=\log\frac{K}{T}-\frac{t}{T}$$

50

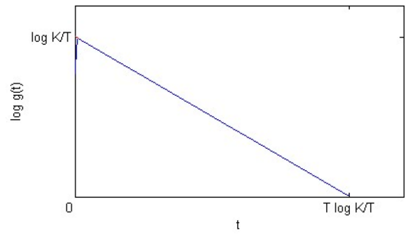
$$g(t)=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$



一阶惯性环节脉冲响应与传递函数参数的关系

51

$$\log[g(t)]=\log\frac{K}{T}-\frac{t}{T}$$



一阶惯性环节脉冲响应与传递函数参数的关系

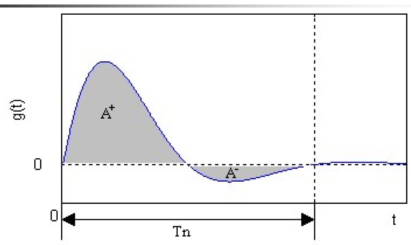
52

2. 二阶过程（图解法）

$$G(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2} \qquad (3.3.2)$$

- 参数 ζ ，$0<\zeta<1$ 和 ω_0 可以直接在脉冲响应曲线图上直接确定

53



二阶惯性环节脉冲响应与传递函数参数的关系

54

$$\zeta = \frac{\log(A_+/A_-)}{\sqrt{\pi^2 + [\log(A_+/A_-)]^2}} \qquad (3.3.3)$$

$$\omega_0 = 2\pi / T_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (3.3.4)$$

3. 差分方程法（高阶过程）

- 设过程的传递函数

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1 s + 1}, \quad (n > m) \qquad (3.3.5)$$

则当特征方程有n个单根$s_1, s_2, \ldots, s_n$时，传递函数可写成

$$G(s) = \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-s_n} \qquad (3.3.6)$$

- 对应的脉冲响应为

$$g(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \cdots + c_n e^{s_n t} \qquad (3.3.7)$$

- 当特征方程有n-r个单根$s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}$，$r$阶重根$s_0$时，传递函数可写成

$$G(s) = \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{c_{n-r}}{s-s_{n-r}} + \frac{c_{n-r+1}}{s-s_0} + \frac{c_{n-r+2}}{(s-s_0)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(s-s_0)^r} \qquad (3.3.8)$$

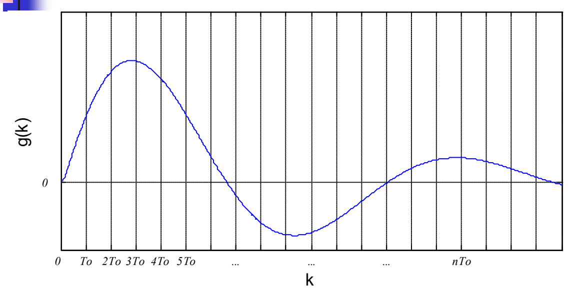
- 对应的脉冲响应为

$$g(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \cdots + c_{n-r} e^{s_{n-r} t} + c_{n-r+1} e^{s_0 t} + c_{n-r+2} t e^{s_0 t} + \cdots + c_n t^{r-1} e^{s_0 t} \qquad (3.3.9)$$

- 为了确定c_i和s_i，从获取的过程输出脉冲响应$g(t)$中，选取前$n+1$个坐标点，每个坐标点间隔相同的采样时间T_0，如图所示。各坐标点上的脉冲响应记为$g(k)$，$g(k+1)$，…，$g(k+n)$，组成一个自回归模型：

$$g(k) + \alpha_1 g(k+1) + \cdots + \alpha_n g(k+n) = 0 \qquad (3.3.10)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为待定系数。



如果特征方程

$$1 + \alpha_1 x^{T_0} + \alpha_2 x^{2T_0} \cdots + \alpha_n x^{nT_0} = 0 \qquad (3.3.11)$$

有一个单根$x_i^{T_0}$，则$x_i^{T_0}$必是AR模型的解，它们的线性组合也是AR模型的解。

$$\boxed{\begin{gathered} 1 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 \cdots + \alpha_n \lambda^n = 0 \\ g(k) = \beta_1 \lambda_1^k + \beta_2 \lambda_2^k + \cdots + \beta_n \lambda_n^k \end{gathered}}$$

■ 当其特征方程有n个单根 $x_1^{T_0},x_2^{T_0},\cdots,x_n^{T_0}$ 时，自回归模型的解为

$$g(k)=\beta_1 x_1^{kT_0}+\beta_2 x_2^{kT_0}+\cdots+\beta_n x_n^{kT_0} \quad (3.3.12)$$

■ 当其特征方程有n-r个单根 $x_1^{T_0},x_2^{T_0},\cdots,x_{n-r}^{T_0}$ ，r阶重根 $x_0^{T_0}$时，自回归模型的解为

$$g(k)=\beta_1 x_1^{kT_0}+\beta_2 x_2^{kT_0}+\cdots+\beta_{n-r}x_{n-r}^{kT_0}+ \\ \beta_{n-r+1}x_0^{kT_0}+\beta_{n-r+2}kx_0^{kT_0}+\cdots+\beta_n k^{r-1}x_0^{kT_0} \quad (3.3.13)$$

■ 对照上述公式不论是单根还是重根，都有

$$\begin{cases} c_i=\beta_i \\ s_i=\dfrac{1}{T_0}\log x_i^{T_0} \end{cases} \quad (3.3.14)$$

■ 显然，一旦求出 $x_i^{T_0}$和β_i ，便可得传递函数。

$$\begin{cases} c_i=\beta_i \\ s_i=\dfrac{1}{T_0}\log x_i^{T_0} \end{cases}$$

例3. 3 设已获得一个三阶过程的脉冲响应，如下表所示（T0=1）

时刻 K	脉冲响应 $\hat{g}(k)$
0	0
1	0.3025
2	0.4183
3	0.3008
4	0.1226
5	-0.0086
⋮	⋮

（1）确定待定系数α_i

根据（3.3.10）取k=0,1,2,可得如下方程组

$$\begin{cases} 0.3025\alpha_1+0.4183\alpha_2+0.3008\alpha_3=0; & (k=0) \\ 0.3025+0.4183\alpha_1+0.3008\alpha_2+0.1226\alpha_3=0; & (k=1) \\ 0.4183+0.3008\alpha_1+0.1226\alpha_2-0.0086\alpha_3=0; & (k=2) \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} \alpha_1=-22.538 \\ \alpha_2=48.831 \\ \alpha_3=-45.238 \end{cases}$$

（2）求特征方程的单根 $x_i^{T_0}$

根据（3.3.11）式，对应的特征方程为

$$1-22.538x^{T_0}+48.831x^{2T_0}-45.238x^{3T_0}=0$$

解得
$$\begin{cases} x_1^{T_0}=0.0494 \\ x_{2,3}^{T_0}=0.5247\pm j0.4147 \end{cases}$$

（3）求传递函数的极点s_i

根据（3.3.14）式，对应的极点为

$$\begin{cases} s_1=\dfrac{1}{T_0}\log x_1^{T_0}=\log 0.0494=-3.0078 \\ s_{2,3}=\dfrac{1}{T_0}\log x_2^{T_0}=\log(0.5247\pm j0.4147)=\text{-}0.4023\ \pm\ 0.6685\mathrm{i} \end{cases}$$

（4）求β_i 的值

由(3.3.12),取k=0,1,2,得如下方程组

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2+\beta_3=0 \\ 0.0494\beta_1+(0.5247+j0.4147)\beta_2+(0.5247-j0.4147)\beta_3=0.3025 \\ (0.0494)^2+(0.5247+j0.4147)^2\beta_2+(0.5247-j0.4147)^2\beta_3=0.4183 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} \beta_1=0.2533 \\ \beta_{2,3}=-0.1267\pm j0.5041 \end{cases}$$

（5）令$c_i=\beta_i$

（6）确定传递函数 $G(s)=\dfrac{0.0144s+1.8752}{s^3+3.8138s^2+3.034s+0.1834}$

实际传递函数 $G(s)=\dfrac{1.92}{s^3+3.8s^2+3.04s+1.92}$

4. Hankel矩阵法（高阶过程）

- 一个n阶过程的脉冲传递函数为

$$G(z^{-1})=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}} \quad (3.3.15)$$

- 将传递函数转化成状态方程后，并进一步推导，可知

$$G(z^{-1})=g(1)z^{-1}+g(2)z^{-2}+g(3)z^{-3}+\cdots \quad (3.3.16)$$

67

根据上述公式，可得

$$\begin{aligned}
&b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}\\
&=[g(1)z^{-1}+g(2)z^{-2}+g(3)z^{-3}+\cdots][1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}]\\
&=g(1)z^{-1}+[g(2)+a_1g(1)]z^{-2}+\cdots+\left[g(n)+\sum_{i=1}^{n-1}g(i)a_{n-i}\right]z^{-n}\\
&\quad+\left[g(n+1)+\sum_{i=1}^{n}g(i)a_{n+1-i}\right]z^{-(n+1)}+\cdots+\left[g(2n)+\sum_{i=n}^{2n-1}g(i)a_{2n-i}\right]z^{-2n}
\end{aligned} \quad (3.3.17)$$

68

比较上式两边的同幂次项系数，可得

$$\begin{bmatrix} g(1) & g(2) & \cdots & g(n)\\ g(2) & g(3) & \cdots & g(n+1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g(n) & g(n+1) & \cdots & g(2n-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n\\ a_{n-1}\\ \vdots\\ a_1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} g(n+1)\\ g(n+2)\\ \vdots\\ g(2n)\end{bmatrix} \quad (3.3.18)$$

$$\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} g(1)\\ g(2)\\ \vdots\\ g(n)\end{bmatrix} \quad (3.3.19)$$

69

Hankel矩阵的定义：

$$H(l,k)=\begin{bmatrix} g(k) & g(k+1) & \cdots & g(k+l-1)\\ g(k+1) & g(k+2) & \cdots & g(k+l)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g(k+l-1) & g(k+l) & \cdots & g(k+2l-2)\end{bmatrix} \quad (3.3.20)$$

式（**3.3.18**）左边的矩阵是一种待定的**Hankel**矩阵，只要将获取的脉冲响应值$g(k)$，k=1,2,…,2n填入式的相应位置，就可以得到脉冲传递函数的估计值。

例3.4

设一个三阶过程的脉冲响应如下表所示，利用Hankel矩阵法，确定过程的传递函数（T_0=0.05s）

时刻 k	脉冲响应
0	0
1	7.157039
2	9.491077
3	8.563889
4	5.930506
5	2.845972
6	0.144611
⋮	⋮

解：

构造Hankel矩阵H(3,1)

$$H(3,1)=\begin{bmatrix}\hat g(1) & \hat g(2) & \hat g(3)\\ \hat g(2) & \hat g(3) & \hat g(4)\\ \hat g(3) & \hat g(4) & \hat g(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.157039 & 9.491077 & 8.563889\\ 9.491077 & 8.563889 & 5.930506\\ 8.563889 & 5.930506 & 2.845972\end{bmatrix}$$

$$H(3,1)\begin{bmatrix}a_3\\a_2\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g(4)\\g(5)\\g(6)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a_3\\a_2\\a_1\end{bmatrix}=-H^{-1}(3,1)\cdot\begin{bmatrix}g(4)\\g(5)\\g(6)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a_3\\a_2\\a_1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}7.157039 & 9.491077 & 8.563889\\9.491077 & 8.563889 & 5.930506\\8.563889 & 5.930506 & 2.845972\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}5.930506\\2.845972\\0.144611\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a_3\\a_2\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.4966\\1.7641\\-2.2326\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\a_1&1&0\\a_2&a_1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g(1)\\g(2)\\g(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2.2326&1&0\\1.7641&-2.2326&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7.157039\\9.491077\\8.563889\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7.1570\\-6.4875\\0\end{bmatrix}$$

则过程脉冲传递函数的估计值为

$$G(z^{-1})=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}$$

$$=\frac{7.1570z^{-1}-6.4875z^{-2}}{1-2.2326z^{-1}+1.7641z^{-2}-0.4966z^{-3}}$$

由双线性变换

$$z\cong\frac{2+T_0s}{2-T_0s}=\frac{2+0.05s}{2-0.05s}$$

可得连续传递函数的估计值为

$$\hat{G}(s)=\frac{200.0s+400.0}{(s+4.0)(s^2+10.0s+100.0)}$$

而其实际传递函数为

$$\mathrm{G(s)}=\frac{200\mathrm{s}+400}{(\mathrm{s}+4)(\mathrm{s}^2+10\mathrm{s}+100)}$$

例3. 5

一个三阶过程的脉冲响应如下，利用Hankel矩阵法确定过程的传递函数。(T_0=1s)

	k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{g}(k)$		0	3	6	5	4	3	2	1

解：构造Hankel矩阵H(3,1)

$$H(3,1)=\begin{bmatrix}\hat{g}(1)&\hat{g}(2)&\hat{g}(3)\\\hat{g}(2)&\hat{g}(3)&\hat{g}(4)\\\hat{g}(3)&\hat{g}(4)&\hat{g}(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6&5\\6&5&4\\5&4&3\end{bmatrix}$$

$$H(3,1)\begin{bmatrix}\hat{a}_3\\\hat{a}_2\\\hat{a}_1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\hat{g}(4)\\\hat{g}(5)\\\hat{g}(6)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\hat{a}_3\\\hat{a}_2\\\hat{a}_1\end{bmatrix}=-H^{-1}(3,1)\begin{bmatrix}\hat{g}(4)\\\hat{g}(5)\\\hat{g}(6)\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}3&6&5\\6&5&4\\5&4&3\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}-0.25&0.5&-0.25\\0.5&-4&4.5\\-0.25&4.5&-5.25\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\a_1&1&0\\a_2&a_1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{b}_1\\\hat{b}_2\\\hat{b}_3\end{bmatrix}=A_3\begin{bmatrix}\hat{g}(1)\\\hat{g}(2)\\\hat{g}(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\6\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\-4\end{bmatrix}$$

则过程脉冲传递函数的估计值为

$$\hat{G}(z^{-1}) = \frac{3z^{-1} - 4z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

由双线性变换

$$z \cong \frac{2 + T_0 s}{2 - T_0 s} \Rightarrow z^{-1} = \frac{2 - T_0 s}{2 + T_0 s} = \frac{2 - s}{2 + s}$$

$$\Rightarrow \hat{G}(s) = \frac{3 \cdot \frac{2-s}{2+s} - 4 \cdot \left(\frac{2-s}{2+s}\right)^3}{1 - 2 \cdot \frac{2-s}{2+s} + \left(\frac{2-s}{2+s}\right)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{2-s}{2+s} - \frac{4(2-s)^3}{(2+s)^3}}{1 - \frac{2(2-s)}{2+s} + \frac{(2-s)^2}{(2+s)^2}} = \frac{\frac{3(2-s)(2+s)^2 - 4(2-s)^3}{(2+s)^3}}{1 - \frac{2(2-s)(2+s) + (2-s)^2}{(2+s)^2}}$$

$$= \frac{3(2-s)(2+s)^2 - 4(2-s)^3}{(2+s)^3 - 2(2-s)(2+s)^2 + (2-s)^2(2+s)}$$

$$= \frac{3(4-s^2)(2+s) - 4(4-4s+s^2)(2-s)}{(4+4s+s^2)(2+s) - 2(4-s^2)(2+s) + (2-s)(4-s^2)}$$

$$= \frac{3(8+4s-2s^2-s^3) - 4(8-8s+2s^2-4s+4s^2-s^3)}{8+4s+8s+4s^2+2s^2+s^3-2(8+4s-2s^2-s^3)+8-2s^2-4s+s^3}$$

$$= \frac{s^3 - 30s^2 + 60s - 8}{8s^2 + 4s^3}$$

3.1 引言
3.2 阶跃响应法
3.3 脉冲响应法
3.4 频率响应法
3.5 相关分析法
3.6 谱分析法

频率响应

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \tag{3.4.1}$$

- $Y(j\omega)$ – 输出y(t)的 Fourier 变换
- $U(j\omega)$ – 输入u(t)的 Fourier 变换

现场测取过程频率响应的测试信号通常有：

- **阶跃信号**
- **斜波信号**
- **三角信号**
- **矩形（宽脉冲）信号**
- **带正负极性的矩形信号**
- **组合正弦信号**
- **任意信号**

（1）当测试信号采用单一正弦波法

- 在待测系统输入端加上某个频率的正弦信号，记录输出达到稳态后输出的振荡波形；
- 对于线性系统，得到的是一个与输入同频率的、但幅值与相位发生变化的正弦波，根据幅值比和相位移，可得到线性系统的频率特性；
- 使用正弦波法可测出系统的带宽，当增加输入正弦信号频率至ω_{max}时，系统输出幅值将趋近于零；
- 此法对缓慢响应过程非常费时，此时可利用线性系统符合叠加原理的特点，采用组合正弦信号。

(2) 当测试信号采用组合正弦信号时

- 一般采用组合频率的正弦信号作为测试信号，在被测过程输入端加入频率、幅值均已知的组合正弦波，然后在稳态下测取输出组合波，利用Fourier变换对输出组合波进行分解。
- 取输出 $y(t)$ 波形的一个周期作Fourier级数展开：

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \qquad (3.4.2)$$

其中，$\omega = 2\pi / T$，T为基波周期，

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{T}\int_0^T y(t)dt \\ A_n = \dfrac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos n\omega t dt \quad (n=1,2,\cdots) \\ B_n = \dfrac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin n\omega t dt \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad (3.4.3)$$

- 一般通过实验得到的都是采样信号，当一个周期T内的采样数为N时，采样点时间间隔$\Delta T=T/N$，则有 $\omega = 2\pi/(N\cdot\Delta T)$，$\Delta T$的选择应满足采样定理的要求。离散Fourier变换的计算公式为

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y(i) \\ A_n = \dfrac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y(i)\cos(\dfrac{2n\pi}{N}i) \\ B_n = \dfrac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y(i)\sin(\dfrac{2n\pi}{N}i) \end{cases} \qquad (3.4.4)$$

- 计算出A_n、B_n后可进一步求出各谐波幅值r_n和相位φ_n：

$$\begin{cases} r_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \varphi_n = \arctan(B_n / A_n) \end{cases} \qquad (3.4.5)$$

(3) 当测试信号采用任意信号时

- 当$t<0$ 时，使过程处于平衡状态
- 当 $t \ge 0$ 时考虑时间区间$[0,t_u]$ 和 $[0,t_y]$ 上$u(t)$和$y(t)$的傅里叶变换

$$U(j\omega) = \int_0^{t_u} u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{t_u} u(t)\cos\omega t dt - j\int_0^{t_u} u(t)\sin\omega t dt$$

$$(3.4.6)$$

$$Y(j\omega) = \int_0^{t_y} y(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{t_y} y(t)\cos\omega t dt - j\int_0^{t_y} y(t)\sin\omega t dt$$

t_u，t_y 应满足如下要求

（1）计算积分 $\int_0^{t_u} u(t)\cos\omega t dt$ 和 $\int_0^{t_y} y(t)\cos\omega t dt$ 时

积分上限记作 t_{uc}，t_{yc}

应使

$$\cos\omega t_{uc} = \pm 1$$

$$\cos\omega t_{yc} = \pm 1$$

即 $t_{uc}=k_u\dfrac{\pi}{\omega}$ $\quad t_{yc}=k_y\dfrac{\pi}{\omega}$

k_u，k_y 为正整数

- 选择 k_u，使 $t=t_{uc}$ 时
  $u(t)$ 已接近于 0
- k_y 的选择必须使 $t=t_{yc}$ 时
  $y(t)$ 的过渡过程已基本结束

91

（2）计算积分 $\int_0^{t_u} u(t)\sin\omega t dt$ 和 $\int_0^{t_y} y(t)\sin\omega t dt$ 时

积分上限记作 t_{us}，t_{ys}

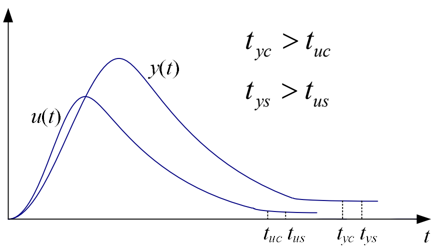
应使 $\sin\omega t_{us}=\pm 1$

$\sin\omega t_{ys}=\pm 1$

即

$$t_{us}=(k_u+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega} \qquad t_{ys}=(k_y+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}$$

92



$t_{yc}>t_{uc}$

$t_{ys}>t_{us}$

（3）计算四个积分值时，采用数值积分

频率响应的确定必须依据输入输出数据计算四个积分值：

$$\int_0^{t_{uc}} u(t)\cos\omega t dt$$

$$\int_0^{t_{us}} u(t)\sin\omega t dt$$

$$\int_0^{t_{yc}} y(t)\cos\omega t dt$$

$$\int_0^{t_{ys}} y(t)\sin\omega t dt$$

这个四个积分值一般采用数值计算，具体方法为：

1）计算 $\int_0^{t_{uc}} u(t)\cos\omega t dt$

$$\int_0^{t_{uc}} u(t)\cos\omega t dt \approx -\frac{1}{\omega^2\Delta t_{uc}}\left[\sum_{i=1}^{n-1}u(i)K_{ic}^{(u)}+u(n)K_{nc}^{(u)}\right] \quad (3.4.7)$$

其中 $\Delta t_{uc}=\dfrac{t_{uc}}{n}$，n 一般在工程上取**10**即可，$u(i)$ 表示时刻 $i\Delta t_{uc}$ 的输入数据，且

$$\begin{cases}K_{ic}^{(u)}=\cos\omega(i-1)\Delta t_{uc}-2\cos\omega i\Delta t_{uc}+\cos\omega(i+1)\Delta t_{uc}\\ K_{nc}^{(u)}=\cos\omega(n-1)\Delta t_{uc}-\cos\omega n\Delta t_{uc}\end{cases} \quad (3.4.8)$$

2）计算 $\int_0^{t_{us}} u(t)\sin\omega t dt$

$$\int_0^{t_{us}} u(t)\sin\omega t dt \approx -\frac{1}{\omega^2\Delta t_{us}}\left[\sum_{i=1}^{n-1}u(i)K_{is}^{(u)}+u(n)K_{ns}^{(u)}\right] \quad (3.4.9)$$

其中，$\Delta t_{us}=\dfrac{t_{us}}{n}$，且

$$\begin{cases}K_{is}^{(u)}=\sin\omega(i-1)\Delta t_{us}-2\sin\omega i\Delta t_{us}+\sin\omega(i+1)\Delta t_{us}\\ K_{ns}^{(u)}=\sin\omega(n-1)\Delta t_{us}-\sin\omega n\Delta t_{us}\end{cases} \quad (3.4.10)$$

3）计算 $\int_0^{t_{yc}} y(t)\cos\omega t dt$

$$\int_0^{t_{yc}} y(t)\cos\omega t dt \approx -\frac{1}{\omega^2 \Delta t_{yc}}\left[\sum_{i=1}^{n-1} y(i)K_{ic}^{(y)} + y(n)K_{nc}^{(y)}\right] \qquad (3.4.11)$$

- 其中 $\Delta t_{yc}=\frac{t_{yc}}{n}$，$y(i)$ 表示 $i\Delta t_{yc}$ 时刻的输出数据，且

$$\begin{cases} K_{ic}^{(y)} = \cos\omega(i-1)\Delta t_{yc} - 2\cos\omega i\Delta t_{yc} + \cos\omega(i+1)\Delta t_{yc} \\ K_{nc}^{(y)} = \cos\omega(n-1)\Delta t_{yc} - \cos\omega n\Delta t_{yc} \end{cases} \qquad (3.4.12)$$

4）计算 $\int_0^{t_{ys}} y(t)\sin\omega t dt$

$$\int_0^{t_{ys}} y(t)\sin\omega t dt \approx -\frac{1}{\omega^2 \Delta t_{ys}}\left[\sum_{i=1}^{n-1} y(i)K_{is}^{(y)} + y(n)K_{ns}^{(y)}\right] \qquad (3.4.13)$$

- 其中 $\Delta t_{ys}=\frac{t_{ys}}{n}$，且

$$\begin{cases} K_{is}^{(y)} = \sin\omega(i-1)\Delta t_{ys} - 2\sin\omega i\Delta t_{ys} + \sin\omega(i+1)\Delta t_{ys} \\ K_{ns}^{(y)} = \sin\omega(n-1)\Delta t_{ys} - \sin\omega n\Delta t_{ys} \end{cases} \qquad (3.4.14)$$

若令

$$\begin{cases} p = \frac{1}{\Delta t_{yc}}\left[\sum_{i=1}^{n-1} y(i)K_{ic}^{(y)} + y(n)K_{nc}^{(y)}\right] \\ q = \frac{1}{\Delta t_{ys}}\left[\sum_{i=1}^{n-1} y(i)K_{is}^{(y)} + y(n)K_{ns}^{(y)}\right] \\ r = \frac{1}{\Delta t_{uc}}\left[\sum_{i=1}^{n-1} u(i)K_{ic}^{(u)} + u(n)K_{nc}^{(u)}\right] \\ s = \frac{1}{\Delta t_{us}}\left[\sum_{i=1}^{n-1} u(i)K_{is}^{(u)} + u(n)K_{ns}^{(u)}\right] \end{cases} \qquad (3.4.15)$$

则实频特性和虚频特性分别为：

$$\begin{cases} R_e(\omega) = \frac{pr+qs}{r^2+s^2} \\ I_m(\omega) = \frac{ps-qr}{r^2+s^2} \end{cases} \qquad (3.4.16)$$

在控制系统的分析与综合中，需要将过程的频率响应转换为传递函数的形式，转换的方法有很多，可以采用**Bode**图法确定过程的动态参数，可以用实验测得的实频特性和虚频特性确定传递函数的**Levy**法，也可以采用加权最小二乘及最小二乘法等。

Levy 法

如果已经获得过程的实频特性 **Re(ω)** 和虚频特性 **Im(ω)**，则可以利用 **Re(ω)**和**Im(ω)**来估计过程的传递函数。设一个最小相位系统的传递函数写成

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}, \quad (n > m) \qquad (3.4.17)$$

对应的频率响应为

$$G(j\omega) = \frac{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \cdots) + j\omega(b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 - \cdots)}{(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \cdots) + j\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \cdots)}$$

$$\triangleq \frac{\alpha(\omega) + j\omega\beta(\omega)}{\sigma(\omega) + j\omega\tau(\omega)} \triangleq \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \qquad (3.4.18)$$

在频率ω_i点上，频率响应的（估计的频率响应与实际的频率响应）误差为

$$\varepsilon(j\omega_i)=\left[\mathbf{Re}(\omega_i)+j\,\mathbf{Im}(\omega_i)\right]-\frac{N(j\omega_i)}{D(j\omega_i)} \qquad (3.4.19)$$

如果极小化下列误差准则

$$J=\sum_{i=1}^{L}\left\|\varepsilon(j\omega_i)\right\|^2 \qquad (3.4.20)$$

原则上可以求得传递函数G(s)的系数。但是这个误差函数准则关于参数空间是非线性的，求解非常困难。

Levy修正了上式的误差准则，提出采用如下误差准则，使得问题变成线性问题。

$$J=\sum_{i=1}^{L}\left\|D(j\omega_i)\varepsilon(j\omega_i)\right\|^2 \qquad (3.4.21)$$

$$J=\sum_{i=1}^{L}\{[\sigma(\omega_i)\mathrm{Re}(\omega_i)-\omega_i\tau(\omega_i)\mathrm{Im}(\omega_i)-\alpha(\omega_i)]^2$$
$$+[\omega_i\tau(\omega_i)\mathrm{Re}(\omega_i)+\sigma(\omega_i)\mathrm{Im}(\omega_i)-\omega_i\beta(\omega_i)]^2\} \qquad (3.4.22)$$

设 $\hat{b}_0,\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_m$和$\hat{a}_1,\hat{a}_2,\cdots,\hat{a}_n$ 使得J=min，则下列方程组成立

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial J}{\partial b_0}\right|_{b_0=\hat{b}_0}=\displaystyle\sum_{i=1}^{L}\{2[\sigma(\omega_i)\mathrm{Re}(\omega_i)-\omega_i\tau(\omega_i)\mathrm{Im}(\omega_i)-\alpha(\omega_i)(-1)]\Big|_{b_0=\hat{b}_0}=0\\ \left.\dfrac{\partial J}{\partial b_1}\right|_{b_1=\hat{b}_1}=\displaystyle\sum_{i=1}^{L}\{2[\sigma(\omega_i)\mathrm{Re}(\omega_i)-\omega_i\tau(\omega_i)\mathrm{Im}(\omega_i)-\omega_i\beta(\omega_i)(-\omega_i)]\Big|_{b_1=\hat{b}1}=0\\ \vdots\end{cases} \qquad (3.4.23)$$

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial J}{\partial a_1}\right|_{a_1=\hat{a}_1}=\displaystyle\sum_{i=1}^{L}\{2[\sigma(\omega_i)\mathrm{Re}(\omega_i)-\omega_i\tau(\omega_i)\mathrm{Im}(\omega_i)-\alpha(\omega_i)][-\omega_i\,\mathrm{Im}(\omega_i)]\\ \qquad+2[\omega_i\tau(\omega_i)\mathrm{Re}(\omega_i)+\sigma(\omega_i)\mathrm{Im}(\omega_i)-\omega_i\beta(\omega_i)][\omega_i\,\mathrm{Re}(\omega_i)\}\Big|_{a_1=\hat{a}_1}=0\\ \left.\dfrac{\partial J}{\partial a_2}\right|_{a_2=\hat{a}_2}=\displaystyle\sum_{i=1}^{L}\{2[\sigma(\omega_i)\mathrm{Re}(\omega_i)-\omega_i\tau(\omega_i)\mathrm{Im}(\omega_i)-\alpha(\omega_i)][-\omega_i^2\,\mathrm{Re}(\omega_i)]\\ \qquad+2[\omega_i\tau(\omega_i)\mathrm{Re}(\omega_i)+\sigma(\omega_i)\mathrm{Im}(\omega_i)-\omega_i\beta(\omega_i)][-\omega_i^2\,\mathrm{Im}(\omega_i)\}\Big|_{a_2=\hat{a}_2}=0\\ \vdots\end{cases} \qquad (3.4.24)$$

其中

$$\begin{cases}\alpha(\omega_i)=b_0-b_2\omega_i^2+b_4\omega_i^4-\cdots\\ \beta(\omega_i)=b_1-b_3\omega_i^2+b_5\omega_i^4-\cdots\\ \sigma(\omega_i)=1-a_2\omega_i^2+a_4\omega_i^4-\cdots\\ \tau(\omega_i)=a_1-a_3\omega_i^2+a_5\omega_i^4-\cdots\end{cases} \qquad (3.4.25)$$

整理，可得

$$\begin{bmatrix} V_0 & 0 & -V_2 & & T_1 & S_2 & -T_3 & \\ 0 & V_2 & 0 & \cdots & -S_2 & T_3 & S_4 & \cdots \\ V_2 & 0 & -V_4 & & T_3 & S_4 & -T_5 & \\ & \vdots & & & & \vdots & & \\ T_1 & -S_2 & -T_3 & & U_2 & 0 & -U_4 & \\ S_2 & T_3 & -S_4 & \cdots & 0 & U_4 & 0 & \cdots \\ T_3 & -S_4 & -T_5 & & U_4 & 0 & -U_6 & \\ & \vdots & & & & \vdots & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{b}_0\\ \hat{b}_1\\ \hat{b}_2\\ \vdots\\ \hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_3\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_0\\ T_1\\ S_2\\ \vdots\\ 0\\ U_2\\ 0\\ \vdots\end{bmatrix} \qquad (3.4.26)$$

其中 $V_j=\sum_{i=0}^{L}\omega_i^j$ $\qquad S_j=\sum_{i=0}^{L}\omega_i^j\,\mathbf{Re}(\omega_i)$ $\qquad$ (3.4.27)

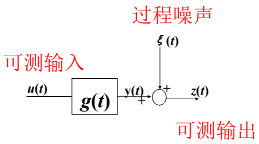
$T_j=\sum_{i=0}^{L}\omega_i^j\,\mathbf{Im}(\omega_i)$ $\qquad U_j=\sum_{i=0}^{L}\omega_i^j\left[\mathbf{Re}^2(\omega_i)+\mathbf{Im}^2(\omega_i)\right]$

3.1 引言
3.2 阶跃响应法
3.3 脉冲响应法
3.4 频率响应法
3.5 相关分析法
3.6 谱分析法

3.5.1 相关分析法

- 阶跃响应法、频率特性法
  - 对于高信噪比情况比较有效，而工程实际中噪声不可避免。
  - 采用阶跃输入、矩形脉冲输入、正弦波输入、矩形波输入得到阶跃响应、频率特性。
- 相关分析法
  - 具有抗干扰性
  - 采用伪随机输入
  - 得到脉冲响应

- 相关分析法的基本原理



- 辨识要解决的问题是：从$u(t)$，$z(t)$估计$g(t)$

$$y(t)=\int_0^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$z(t)=y(t)+\xi(t)$$

频率响应辨识的理论依据

系统的输入输出的关系：

$$y(t)=\int_0^{+\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \qquad (3.5.1)$$

离散化：令$u(t)=u(k), kT\le t<(k+1)T$，$g_T(l)=\int_{(l-1)T}^{lT} g(\tau)d\tau$，**则有：**

$$\begin{aligned}y(k)\triangleq y(kT)&=\int_0^{\infty} g(\tau)u(kT-\tau)d\tau=\sum_{l=1}^{\infty}\int_{(l-1)T}^{lT} g(\tau)u(kT-\tau)d\tau\\&=\sum_{l=1}^{\infty}\left[\int_{(l-1)T}^{lT} g(\tau)d\tau\right]u(k-l)=\sum_{l=1}^{\infty} g_T(l)u(k-l)\end{aligned} \qquad (3.5.2)$$

我们写成：

$$y(t)=\sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k),\quad t=0,1,2,\cdots \qquad (3.5.3)$$

考察具有测量噪声的系统，其输入输出的关系为：

$$y(t)=\sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k)+v(t) \qquad (3.5.4)$$

其中$v(t)$为测量噪声。

现在假定输入信号为：$u(t)=A\cos\omega t=A\mathrm{Re}(e^{j\omega t})$**，则稳态输出为：**

$$\begin{aligned}y(t)&=A\sum_{k=1}^{\infty} g(k)\mathrm{Re}(e^{j\omega(t-k)})+v(t)=A\mathrm{Re}\left\{e^{j\omega t}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} g(k)e^{-j\omega k}\right\}+v(t)\\&=A\mathrm{Re}\left\{e^{j\omega t}\cdot G(j\omega)\right\}+v(t)=A\|G(j\omega)\|\cos(\omega t+\varphi)+v(t)\end{aligned} \qquad (3.5.5)$$

其中：$\varphi=\arg G(j\omega)$。

令：

$$I_c(N)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)\cos\omega t,\ I_s(N)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)\sin\omega t \qquad (3.5.6)$$

将（3.5.5）代入，有：

$$\begin{aligned}I_c(N)&=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} A\|G(j\omega)\|\cos(\omega t+\varphi)\cos\omega t+\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t)\cos\omega t\\&=A\|G(j\omega)\|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\cos\varphi+\cos(2\omega t+\varphi)]+\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t)\cos\omega t\\&=\frac{A}{2}\|G(j\omega)\|\cos\varphi+A\|G(j\omega)\|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\cos(2\omega t+\varphi)+\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t)\cos\omega t\end{aligned} \qquad (3.5.7)$$

同理，有：

$$I_s(N) = -\frac{A}{2}\|G(j\omega)\|\sin\varphi + A\|G(j\omega)\|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\sin(2\omega t+\varphi) + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t)\sin\omega t \qquad (3.5.8)$$

上面两式中的第二项，当 $N\to\infty$ 时为零，第三项由下面的引理可知也为零。

引理：设 $\{v(t)\}$ 是均值为零的平稳随机过程，其相关函数满足：

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\tau R_v(\tau)| < \infty \qquad (3.5.9)$$

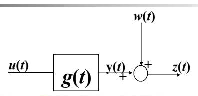
令：$S_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\alpha_t v(t)$，$|\alpha_t| \le C_1$，则存在一正常数 C_2，有：

$$E\{|S_N|^2\} \le \frac{C_2}{N} \qquad (3.5.10)$$

因此，当取足够大的 N 时，我们有关于 $G(j\omega)$ 的估计式如下：

$$\begin{cases}\|\hat{G}(j\omega)\| = \dfrac{2}{A}\sqrt{I_c^2(N)+I_s^2(N)} \\ \hat{\varphi}_N = \arg\hat{G}(j\omega) = -\arg\tan\dfrac{I_s(N)}{I_c(N)}\end{cases} \qquad (3.5.11)$$

考虑一个含有输出测量噪声的过程



3.5.1 频率响应的辨识（数据含噪声情形）

$$\begin{cases}u(t) = A\sin\omega t \\ z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\sin(k\omega t+\theta_k) + w(t)\end{cases} \qquad (3.5.12)$$

其中 $w(t)$ 为均值为零的白噪声，相关函数为 $R_W(\tau)=\sigma_W^2\delta(\tau)$，输出第一项 $B_1\sin(\omega t+\theta_1)$ 是所要估计的频率响应。

其他分量是过程非线性畸变等原因形成的高次谐波。
现在的任务是利用含有噪声的输出数据 $z(t)$ 估计过程的频率响应。

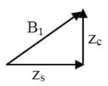
在时间 $T=2n\pi/\omega$（n 为整数）区间上，计算 $z(t)$ 与 $\sin\omega t$、$\cos\omega t$ 在 $\tau=0$ 时的互相关函数：

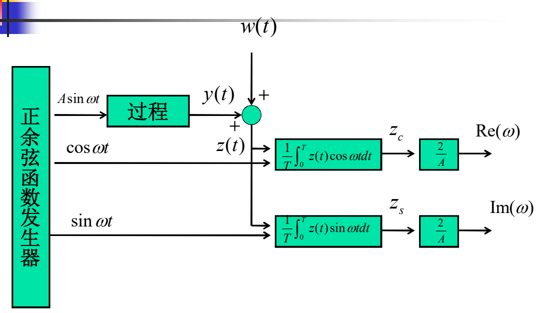
$$\begin{cases}z_s = R_{z(t),\sin\omega t}(0) = \dfrac{1}{T}\int_0^T z(t)\sin\omega t dt \\ \quad = \dfrac{B_1}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\theta_1)\sin\omega t dt + \sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{B_k}{T}\int_0^T \sin(k\omega t+\theta_k)\sin\omega t dt \\ \quad + \dfrac{1}{T}\int_0^T w(t)\sin\omega t dt = \dfrac{1}{2}B_1\cos\theta_1 \\ z_c = R_{z(t),\cos\omega t}(0) = \dfrac{1}{T}\int_0^T z(t)\cos\omega t dt \\ \quad = \dfrac{B_1}{T}\int_0^T \sin(\omega t+\theta_1)\cos\omega t dt + \sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{B_k}{T}\int_0^T \sin(k\omega t+\theta_k)\cos\omega t dt \\ \quad + \dfrac{1}{T}\int_0^T w(t)\cos\omega t dt = \dfrac{1}{2}B_1\sin\theta_1\end{cases} \qquad (3.5.13)$$

当 $T\to\infty$ 时，上述两个等式的后两项趋于0。

$$\begin{cases}\|\hat{G}(j\omega)\| = \dfrac{B_1}{A} = \dfrac{2}{A}\sqrt{z_s^2+z_c^2} \\ \angle\hat{G}(j\omega) = \theta_1 = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{z_c}{z_s}\end{cases} \qquad (3.5.14)$$

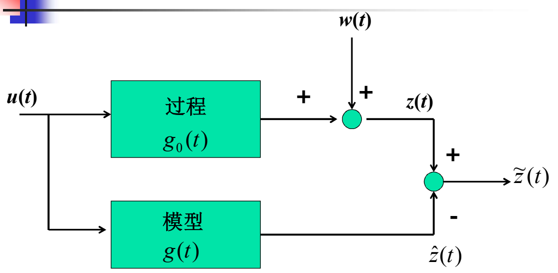
$$\begin{cases}\mathbf{Re}(\omega) = \dfrac{2z_s}{A} \\ \mathbf{Im}(\omega) = \dfrac{2z_c}{A}\end{cases} \Leftarrow \qquad (3.5.15)$$





相关分析法估计频率响应

3.5.2 脉冲响应辨识的基本原理



脉冲响应辨识示意图

$w(t)$ 是均值为零的噪声，其相关函数为：

$$R_w(\tau)=\sigma_w^2\delta(\tau)$$

$\tilde{z}(t)$ 是过程与模型的输出误差，即：

$$\tilde{z}(t)=z(t)-\hat{z}(t)$$

其中：$\hat{z}(t)=\int_0^\infty g(\theta)u(t-\theta)d\theta$

考虑如下准则函数

$$J=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{z}^2(t)dt$$

任务：依据过程的输入输出数据，确定脉冲响应 $g(t)$，使误差准则函数 $J=min$。

- 准则函数：

$$J=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(z(t)-\hat{z}(t)\right)^2dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(z(t)-\int_0^\infty g(\theta)u(t-\theta)d\theta\right)^2dt \qquad (3.5.16)$$

求此准则函数的极小化问题为典型的变分问题

- 导出 Wiener-Hopf 方程：

$$R_{uz}(\tau)=\int_0^\infty \hat{g}(t)R_u(t-\tau)dt \qquad (3.5.17)$$

此为辨识过程脉冲响应的理论依据。

由变分原理，给定任意小的函数 $g_\alpha(\theta)$，其中 α 为标量，则当 $g(\theta)=\hat{g}(\theta)$ 时准则函数达到最小的必要条件为：

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial J[\hat{g}(\theta)+\alpha g_\alpha(\theta)]}{\partial\alpha}=0 \qquad (3.5.18)$$

由于：

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial J[\hat{g}(\theta)+\alpha g_\alpha(\theta)]}{\partial\alpha}$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left[z(t)-\int_0^\infty(\hat{g}(\theta)+\alpha g_\alpha(\theta))u(t-\theta)\right]^2dt\right\} \qquad (3.5.19)$$
$$=\lim_{T\to\infty}-\frac{2}{T}\int_0^T\left\{\left[z(t)-\int_0^\infty\hat{g}(\theta)u(t-\theta)d\theta\right]\cdot\int_0^\infty g_\alpha(\theta)u(t-\theta)d\theta\right\}dt$$
$$\int_0^\infty g_\alpha(\tau)\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left[z(t)-\int_0^\infty\hat{g}(\theta)u(t-\theta)d\theta\right]\cdot u(t-\tau)dt\right\}d\tau=0$$

由于 $g_\alpha(\theta)$ 是不为零的任意函数，因此有：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left[z(t)-\int_0^\infty\hat{g}(\theta)u(t-\theta)d\theta\right]\cdot u(t-\tau)dt=0 \qquad \mathbf{(3.5.20)}$$

即有：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T z(t)u(t-\tau)dt=\int_0^\infty\hat{g}(\theta)\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(t-\theta)u(t-\tau)dt\right]d\theta \qquad (3.5.21)$$

假设过程的输入输出为平稳各态历经的随机过程，则有：

$$R_{uz}(\tau)=\int_0^\infty\hat{g}(t)R_u(t-\tau)dt \qquad (3.5.22)$$

此即为 Wiener-Hopf 方程。此方程为一积分方程，一般来说要求出估计量 $\hat{g}(\theta)$ 的解析式是困难的，但当过程的输入信号的自相关函数具有一定的特殊性时，由 Wiener-Hopf 方程有可能求出估计量 $\hat{g}(\theta)$ 的解析式。

- 白噪声输入时：

$$\begin{cases}R_u(\tau)=\sigma_u^2\delta(\tau)\\ \hat{g}(\tau)=\dfrac{1}{\sigma_u^2}R_{uz}(\tau)\end{cases} \qquad (3.5.23)$$

4.5.3 用 M 序列作输入信号的离散算法

M 序列的循环周期为 $N_P\Delta t$，$N_P = 2^P - 1$，Δt 为 M 序列移位脉冲周期，自相关函数近似于 δ 函数，a 为 M 序列的幅度。当 M 序列的循环周期 $N_P\Delta t$ 大于过程的过渡过程时间时，即 N_P 充分大时。

- 离散 Wiener-Hopf 方程

$$R_{Mz}(k) = \sum_{j=0}^{N_P-1} \hat{g}(j) R_M(k-j)\Delta t \qquad (3.5.24)$$

- 相关函数的计算

$$\begin{cases} R_{Mz}(k) = \dfrac{1}{N_P}\sum_{i=0}^{N_P-1} M(i-k)z(i) \\ R_M(k) = \dfrac{1}{N_P}\sum_{i=0}^{N_P-1} M(i-k)M(i) \end{cases} \qquad (3.5.25)$$

- 因 $R_M(k) = \begin{cases} a^2, & k = 0, N_P, 2N_P, \cdots \\ -\dfrac{a^2}{N_P}, & k \neq 0, N_P, 2N_P, \cdots \end{cases}$ (3.5.26)

则 $R_{Mz}(k) = \dfrac{(N_P+1)a^2\Delta t}{N_P}\hat{g}(k) - \dfrac{a^2\Delta t}{N_P}\sum_{j=0}^{N_P-1}\hat{g}(j)$ (3.5.27)

$$\hat{g}(k) = \frac{N_P}{(N_P+1)a^2\Delta t}\left[R_{Mz}(k) + c\right], \qquad c = \frac{a^2\Delta t}{N_P}\sum_{j=0}^{N_P-1}\hat{g}(j) \qquad (3.5.28)$$

工程上：$c = -R_{Mz}(N_P - 1)$ (3.5.29)

为提高辨识精度，互相关函数可以采用多周期数据估计：

$$R_{Mz}(k) = \frac{1}{rN_P}\sum_{i=0}^{rN_P-1} M(i-k)z(i) \qquad (3.5.30)$$

一般地，$r = 1 \sim 4$。

4.5.4 用 M 序列作输入信号的一次完成算法

$$\hat{\mathbf{g}} = \frac{1}{N_P\Delta t}\mathbf{R}_M^{-1}\mathbf{Mz} = \frac{1}{(N_P+1)a^2\Delta t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}\mathbf{Mz} \qquad (3.5.31)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M(0) & M(1) & \cdots & M(N_P-1) \\ M(-1) & M(0) & \cdots & M(N_P-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M(-N_P+1) & M(-N_P+2) & \cdots & M(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = [z(0), z(1), \cdots, z(N_P-1)]^\tau$$

$$\hat{\mathbf{g}} = [\hat{g}(0), \hat{g}(1), \cdots, \hat{g}(N_P-1)]^\tau$$

4.5.5 用 M 序列作输入信号的递推算法

$$\hat{\mathbf{g}}^{(i)} = \frac{i}{i+1}\hat{\mathbf{g}}^{(i-1)} + \frac{1}{(i+1)\Delta t}\mathbf{R}_M^{-1}\mathbf{m}(i)z(i) \qquad (3.5.32)$$

$$\mathbf{m}(i) = [M(i), M(i-1), \cdots, M(i-N_P+1)]^\tau$$

$$\mathbf{R}_M^{-1} = \frac{N_P}{(N_P+1)a^2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

4.5.6 用 M 序列作输入信号时脉冲响应估计的统计性质

- $\mathrm{E}\{\hat{g}\} = g_0$ 条件：测量噪声序列的均值为零。
- $\begin{cases} \lim\limits_{N_P\to\infty} \mathrm{E}\{\hat{g}\} = g_0 \\ \lim\limits_{N_P\to\infty} \mathrm{Var}\{\hat{g}\} = 0 \end{cases}$ 条件：测量噪声序列为零均值的白噪声。

3.1 引言
3.2 阶跃响应法
3.3 脉冲响应法
3.4 频率响应法
3.5 相关分析法
3.6 谱分析法

132

- 输入输出互谱密度 $S_{xy}(j\omega)$ 与输入谱密度 $S_x(\omega)$ 之间存在以下关系

$$\begin{cases} S_y(\omega) = \|G(j\omega)\|^2 S_x(\omega) \\ S_{xy}(j\omega) = G(j\omega) S_x(\omega) \end{cases} \tag{3.6.1}$$

- 通过估计
  - 输入数据的自谱密度和输入输出数据的互谱密度
  - 利用关系可以辨识频率响应

133

特点：不需要对过程施加特定试验信号，只需利用正常操作下的输入输出数据就可以辨识过程的动态特性。具有较强的容噪性。

基本公式：$S_{xy}(j\omega) = G(j\omega) S_x(\omega)$。

4.6.1 周期图法

辨识步骤：

（1）设 $\{u(k)\},\{z(k)\}, k=1,2,\cdots,L$ 为观察到的输入输出数据，数据长度为 L，将数据分成长度为 L_1 的 N 个互不交叠段，记：

$$\begin{cases} u_i(k) = u(k+(i-1)L_1) \\ z_i(k) = z(k+(i-1)L_1) \\ i=1,2,\cdots,N; 1 \le k \le L_1 \end{cases} \tag{3.6.2}$$

（2）由教材中的式子 2.4.43，分别计算各数据段的周期图：

$$\begin{cases} I_{u_i,L_1}(\omega) = L_1^{-1} U_i(j\omega) U_i^*(j\omega) = L_1^{-1} \|U_i(j\omega)\| \\ I_{u_i z_i,L_1}(j\omega) = L_1^{-1} U_i(j\omega) Z_i^*(j\omega) \\ i=1,2,\cdots,N \end{cases} \tag{3.6.3}$$

其中：$w(k)$ 为数据窗，且

$$\begin{cases} U_i(j\omega) = \sum_{k=1}^{L_1} u_i(k) w(k) e^{-j\omega k} \\ Z_i(j\omega) = \sum_{k=1}^{L_1} z_i(k) w(k) e^{-j\omega k} \end{cases} \tag{3.6.4}$$

（3）求输入数据的自谱密度和输入输出的互谱密度估计：

$$\begin{cases} \hat{S}_{u,L}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I_{u_i,L_1}(\omega) \\ \hat{S}_{uz,L}(j\omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I_{u_i z_i,L_1}(j\omega) \end{cases} \tag{3.6.5}$$

（4）求频率响应估计：

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{\hat{S}_{uz,L}(j\omega)}{\hat{S}_{u,L}(\omega)} \tag{3.6.6}$$

4.6.2 平滑法

利用数据窗对样本谱密度进行平滑处理，得到谱密度的一致估计。提高过程频率响应的估计精度。

辨识步骤：

（1）设 $\{u(k)\},\{z(k)\}, k=1,2,\cdots,L$ 为观察到的输入输出数据样本，采样时间为 T_0。

（2）对数据预处理，去除直流分量和低频漂移。

（3）计算样本相关函数：

$$\begin{cases} \hat{R}_{u,L}(l) = L^{-1} \sum_{k=1}^{L-1} u(k) u(k+l) \\ \hat{R}_{uz,L}(l) = \hat{R}_{uz,L}(-l) = L^{-1} \sum_{k=1}^{L-1} u(k) z(k+l) \\ l=1,2,\cdots,M \end{cases} \tag{3.6.7}$$

（4）计算样本谱密度

$$\begin{cases} \hat{S}_{u,L}(\omega_r) = \hat{R}_{u,L}(0) + 2\sum_{l=1}^{M-1} \hat{R}_{u,L}(l) \cos(rl\pi/M) \\ \hat{S}_{uz,L}(j\omega_r) = \hat{L}_{uz,L}(\omega_r) - j\hat{Q}_{uz,L}(\omega_r) \\ \omega_r = \frac{r\pi}{MT_0}; r=0,1,2,\cdots,M \end{cases} \tag{3.6.8}$$

其中

$$\begin{cases} \hat{L}_{uz,L}(\omega_r) = \hat{A}_{uz,L}(0) + 2\sum_{l=1}^{M-1} \hat{A}_{uz,L}(l) \cos(rl\pi/M) \\ \hat{Q}_{uz,L}(\omega_r) = 2\sum_{l=1}^{M-1} \hat{B}_{zu,L}(l) \sin(rl\pi/M) \\ r=0,1,2,\cdots,M \end{cases} \tag{3.6.9}$$

$$\begin{cases} \hat{A}_{uz,L}(l) = 2^{-1}[\hat{R}_{uz,L}(l+l_0) + \hat{R}_{uz,L}(l-l_0)] \\ \hat{B}_{zu,L}(l) = 2^{-1}[\hat{R}_{zu,L}(l+l_0) + \hat{R}_{zu,L}(l-l_0)] \end{cases} \quad \left|\hat{R}_{uz,L}(l_0)\right| = \max\{\left|\hat{R}_{uz,L}(l)\right|\} \tag{3.6.10}$$

（5）计算谱密度的平滑估计量：

利用数据窗对样本谱密度平滑处理的原理：

$$\bar{S}_x(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}w(\tau)\hat{R}_{x,L}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{3.6.11}$$

其中 $w(\tau)$ 所加的数据窗，取 Hanning 窗或 Hamming 窗。统一表达为：

$$w(\tau)=\begin{cases}\sum_{n=-1}^{1}a_n e^{j\frac{n\pi}{M}\tau}, & |\tau|\le M\\ 0, & |\tau|>M\end{cases} \tag{3.6.12}$$

其中：M 为样本相关函数的最大滞后数。

由此有：

$$\bar{S}_x(\omega)=\sum_{n=-1}^{1}a_n\hat{S}_{x,L}(\omega) \tag{3.6.13}$$

具体计算如下式：

$$\begin{cases}\bar{S}_{u,L}(\omega_r)=\sum_{n=-1}^{1}a_n\hat{S}_{u,L}(\omega_{r-n})\\ \bar{L}_{uz,L}(\omega_r)=\sum_{n=-1}^{1}a_n\hat{L}_{uz,L}(\omega_{r-n})\\ \bar{Q}_{uz,L}(\omega_r)=\sum_{n=-1}^{1}a_n\hat{Q}_{uz,L}(\omega_{r-n})\\ \bar{S}_{uz,L}(j\omega_r)=\bar{L}_{uz,L}(\omega_r)-j\bar{Q}_{uz,L}(\omega_r)\\ r=0,1,2,\cdots,M\end{cases} \tag{3.6.14}$$

其中：a_n 为加 Hanning 窗、Hamming 窗时的系数。

（6）修正由于移动 l_0 而引起的偏差：

$$\begin{cases}L^*_{uz,L}(\omega_r)=\bar{L}_{uz,L}(\omega_r)\cos(rl_0\pi/M)-\bar{Q}_{uz,L}\sin(rl_0\pi/M)\\ Q^*_{uz,L}(\omega_r)=\bar{L}_{uz,L}(\omega_r)\sin(rl_0\pi/M)-\bar{Q}_{uz,L}\cos(rl_0\pi/M)\\ S^*_{uz,L}(j\omega_r)=L^*_{uz,L}(\omega_r)-jQ^*_{uz,L}(\omega_r)\\ S^*_{u,L}(\omega_r)=\bar{S}_{u,L}(\omega_r)\\ r=0,1,2,\cdots,M\end{cases} \tag{3.6.15}$$

（7）求频率响应估计：

$$\begin{cases}\|G(j\omega_r)\|=\sqrt{L^{*2}_{uz,L}(\omega_r)+Q^{*2}_{uz,L}(\omega_r)}/S^*_{u,L}(\omega_r)\\ \theta(\omega_r)=ArgG(j\omega_r)=-tg^{-1}[Q^*_{uz,L}(\omega_r)/L^*_{uz,L}(\omega_r)]\\ r=0,1,2,\cdots,M\end{cases} \tag{3.6.16}$$

第三章　结束