一.导论

1. 误差分析　x~准确值　$\hat{x}$~近似值

$e(\hat{x})=\hat{x}-x$, $e_r(\hat{x})=\frac{\hat{x}-x}{x}$，误差限 $\varepsilon(\hat{x})$ $\varepsilon_r(\hat{x})$

x有p位有效数字相同 $\Rightarrow |e_r(\hat{x})|\le \frac{1}{a_0}\times 10^{1-p}$

x保留p位有效数字$\hat{x}$ $\Rightarrow |e_r(\hat{x})|\le \frac{5}{a_0}\times 10^{-p}$

$|e_r(\hat{x})|\le \frac{5}{a_0+1}\times 10^{-p} \Rightarrow$ 前p位相同或保留p位相同

条件数 $cond=\frac{\|\text{问题的解的相对变化量}\|}{\|\text{输入数据的相对变化量}\|}$

函数求值问题 $cond=\left|\frac{[f(\hat{x})-f(x)]/f(x)}{(\hat{x}-x)/x}\right|\approx\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$

2. 浮点数　指数E：上限U 下限L，p位尾数

机器精度 $\varepsilon_{mach}=2^{-p}$

下溢值 2^L，上溢值 $(2-2^{-p+1})\times 2^U$

二进制表示 $[\underbrace{b_1\ b_2 b_3\cdots b_{12}}_{E+U}\ b_{13}\cdots b_{64}]_2$

	p	L	U	ε_{mach}
单	24	-126	127	5.960×10^{-8}
双	53	-1022	1023	1.110×10^{-16}

x的浮点数 $fl(x)$，$\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right|\le\varepsilon_{mach}$

若 $\left|\frac{x_2}{x_1}\right|\le\frac{1}{2}\varepsilon_{mach}$，$x_2$对浮点运算 x_1+x_2 无影响

若 $\left|\frac{x_2}{x_1}\right|>\varepsilon_{mach}$，$x_2$对浮点运算 x_1+x_2 一定有影响

二.非线性方程求根

$f(x)=y$，求$y=0$时的x

绝对条件数 $\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right|\approx\left|\frac{1}{f'(x^*)}\right|$

1.二分法　线性(1阶)收敛

最小有根区间长度 $2^E\cdot 2\varepsilon_{mach}$

相对误差 $\le 2\varepsilon_{mach}$

2.不动点迭代法

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x) \Rightarrow x_{k+1}=g(x_k)$

满足 $x=g(x)$ 的x称为$g(x)$的不动点

全局收敛(充分条件)：$g(x)\in C[a,b]$，若

(1) $\forall x\in[a,b]$，$a\le g(x)\le b$

(2) $\exists L\in[0,1]$，$\forall x_1,x_2\in[a,b]$ 有 $|g(x_1)-g(x_2)|\le L|x_1-x_2|$

则 $\forall x_0\in[a,b]$，收敛到x^*且 $|x_k-x^*|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$

条件(2)常替换为 (2)' $\forall x\in[a,b]$，$|g'(x)|<1$

局部收敛：x^*是$g(x)$的不动点，$|g'(x^*)|<1$

收敛阶 $e(x_k)=x_k-x^*$，$\lim_{k\to\infty}\frac{|e(x_{k+1})|}{|e(x_k)|^p}=C \Rightarrow p$阶收敛

迭代法 $x_{k+1}=g(x_k)$，在x^*邻域上p阶收敛$\Leftrightarrow$

$g'(x^*)=g''(x^*)=\cdots=g^{(p-1)}(x^*)=0$，$g^{(p)}(x^*)\ne0$

3.牛顿法　$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

局部收敛性：$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$　$g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

$f'(x)\ne0$即单根，$g'(x^*)=0$，至少局部二阶收敛

4.割线法　$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$

$p\approx1.618$阶收敛

5.牛顿下山法　$x_{k+1}=x_k-\lambda_i\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

保证 $|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$

三.线性方程组直接解法

1.范数　$\|x\|\ge0$　$x=0\Leftrightarrow\|x\|=0$

$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$　$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

矩阵范数 $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$

$\|A\|_v=\max_{x\ne0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$

$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|$　最大列和

$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$　最大行和

$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

2.方程组求解问题的敏感性

$Ax=b$，$cond=\frac{\|\Delta x\|/\|x\|}{\|\Delta b\|/\|b\|}\le\|A\|\|A^{-1}\|$

矩阵条件数 $cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$

$cond(A)=\max_{x\ne0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\Big/\min_{x\ne0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

性质：$cond(A)\ge1$，$cond(A^{-1})=cond(A)$

$cond(cA)=cond(A)$

$cond(I)=1$　$cond(D)=\frac{\max|d_{ii}|}{\min|d_{ii}|}$

2-范数　$cond(A)_2=\sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}}$

$cond(Q)_2=1$　$cond(QA)_2=cond(A)_2$

3. LU分解　$M_{k-1}\cdots M_1A=U$，$A=M_1^{-1}\cdots M_{k-1}^{-1}U$

对$Ax=b$执行高斯消去，主元 $a_{kk}^{(k)}\ne0\Leftrightarrow$

A存在唯一的LU分解

对A，高斯消去不出现零主元$\Leftrightarrow$

A的前$n-1$个顺序主子式不为0即$det(A_k)\ne0$

$det(A)=0$的奇异阵也可能完成消去

若不满足条件，LU分解不存在或不唯一

4. 选主元的LU分解　→ 原地存储

$M_{n-1}P_{n-1}\cdots M_2P_2M_1P_1A=U$

$P_{n-1}\cdots P_2P_1A=\bar{M}_1^{-1}\cdots\bar{M}_{n-2}^{-1}M_{n-1}^{-1}U$

$PA=LU$

5. 对称正定矩阵的Cholesky分解　$A=LL^T$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn}\end{bmatrix}=A$$

作LU分解不必选主元的矩阵：

对称正定阵

按行对角占优矩阵

$|a_{ii}|\ge\sum_{j=1,j\ne i}^n|a_{ij}|$　且至少一个大于号

按列对角占优矩阵

四.线性方程组的迭代解法

1.一阶定常迭代法　$Ax=b$

$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$

$A=M-N \Rightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b$

2.Jacobi迭代法

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-\frac{1}{a_{11}}(\quad a_{12}x_2^{(k)}+a_{13}x_3^{(k)})+\frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)}\quad +a_{23}x_3^{(k)})+\frac{b_2}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1^{(k)}+a_{32}x_2^{(k)}\quad)+\frac{b_3}{a_{33}}\end{cases}$$

$A=D-(D-A)\Rightarrow x^{(k+1)}=D^{-1}(D-A)x^{(k)}+D^{-1}b$

3.收敛性　$e^{(k+1)}=Be^{(k)}\Rightarrow e^{(k+1)}=B^ke^{(0)}$

收敛需要 $\lim_{k\to\infty}B^k=0$

矩阵的谱半径 $\rho(A)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$

$\rho(A)\le\|A\|$；若A实对称，$\rho(A)=\|A\|_2$

$\lim_{k\to\infty}B^k=0\Leftrightarrow\rho(B)<1$

收敛判据

$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$，且$I-B$非奇异，则：

对任意$x^{(0)}$收敛$\Leftrightarrow\rho(B)<1$，且x^*唯一解

若某种范数下 $\|B\|_t<1$，则收敛

收敛阶

$\lim_{k\to\infty}\|e^{(k+1)}\|/\|e^{(k)}\|^p=C$，则$p$阶收敛

收敛速度 $R=-\log_{10}\rho(B)$

$\frac{1}{R}$为主误差成分缩小10倍的迭代步数

4. G-S迭代法

求出$x^{(k+1)}$第1个分量后，用它求第2个分量 $x_2^{(k+1)}$

$A=D-\tilde{L}-\tilde{U}\Rightarrow x^{(k+1)}=L^{-1}(L-A)x^{(k)}+L^{-1}b$

5. SOR迭代法

$x^{(k+1)}=(1-\omega)x^{(k)}+\omega D^{-1}[\tilde{L}x^{(k+1)}+\tilde{U}x^{(k)}+b]$

6. 三种迭代法的收敛条件

Jacobi：$\|B_J\|_1<1$ 或 $\|B_J\|_\infty<1\Rightarrow$ 收敛

若A为对角元>0的对称阵，全局收敛$\Leftrightarrow A$与$2D-A$正定

G-S：Jacobi的B_J，$\|B_J\|_1<1$ 或 $\|B_J\|_\infty<1\Rightarrow$ 收敛

SOR：收敛的必要条件：$0<\omega<2$

A	Jacobi	G-S	SOR
严格对角占优或不可约弱对角占优	收敛	收敛	$0<\omega\le1$
对称正定	A对角元>0 2D-A对称正定	收敛	$0<\omega<2$

7. 共轭梯度法　$Ax=b$

A对称正定，求$\varphi(x)=\frac{1}{2}x^TAx-b^Tx$的最小值

$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_kp^{(k)}$

步长 $\alpha_k=\frac{(r^{(k)})^Tp^{(k)}}{(p^{(k)})^TAp^{(k)}}$，$r^{(k)}=b-Ax^{(k)}$

最速下降法　$p^{(k)}=r^{(k)}$

共轭梯度法　$p^{(k)}=r^{(k)}+\beta_{k-1}p^{(k-1)}$

$\beta_{k-1}=-\frac{(r^{(k)})^TAp^{(k-1)}}{(p^{(k-1)})^TAp^{(k-1)}}$

五.矩阵特征值

$\lambda(A)=\lambda(A^T)$

A为对角阵或三角阵，$\lambda(A)=$对角元

A为分块对角/三角阵，$\lambda(A)=\bigcup_{j=1}^b\lambda(A_{jj})$

$\lambda(cA)=\{c\lambda_j\}$　$\lambda(A+cI)=\{\lambda_j+c\}$

$\lambda(A^k)=\{\lambda_j^k\}$　$\lambda(A^{-1})=\{\lambda_j^{-1}\}$

1. 圆盘定理：以a_{kk}为圆心，$r_k=\sum_{j=1,j\ne k}^n|a_{kj}|$的圆

A的特征值在n个圆盘并集上。

m个连通且与其他分离，含m个特征值

2. 幂法：若A有唯一主特征值λ_1，$v_k=Av_{k-1}$

$k\to\infty$，$v_k\to\lambda_1$的特征向量

原点位移：$B=A-sI$，$\lambda(B)=\lambda(A)-s$

反幂法　$\lambda(A^{-1})=\lambda(A)^{-1}$

对A^{-1}幂法 得A最小的特征值

3. Householder变换

$\|w\|_2=1$，$H(w)=I-2ww^T$，对称正交

$Hx=x-2(w^Tx)w$

QR分解

$y=-\sigma e_1$，$\sigma=\mathrm{sign}(x_1)\|x_1\|_2$

$v=x+\sigma e_1$ 构造H

$Ha=a-2\frac{v^Ta}{v^Tv}v$

$H_k\cdots H_2H_1A=R$，$A=H_1H_2\cdots H_kR=QR$ 正交阵

$H_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&H_1'\end{bmatrix}$ v第一个分量为0

4. 旋转变换 $G=\begin{bmatrix}c&s\\-s&c\end{bmatrix}$

$G\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\0\end{bmatrix}$，$c=\frac{x_1}{\alpha}$，$s=\frac{x_2}{\alpha}$

六、函数逼近与函数插值

$C[a,b]$的范数

$\|f(x)\|_\infty=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$

$\|f(x)\|_1=\int_a^b|f(x)|dx$

$\|f(x)\|_2=\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$

$C[a,b]$上的内积 $\langle u(x),v(x)\rangle=\int_a^b u(x)v(x)dx$

Gram矩阵 $G=\begin{bmatrix}\langle u_1,u_1\rangle&\langle u_2,u_1\rangle&\cdots&\langle u_n,u_1\rangle\\\langle u_1,u_2\rangle&\langle u_2,u_2\rangle&\cdots&\langle u_n,u_2\rangle\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\langle u_1,u_n\rangle&\langle u_2,u_n\rangle&\cdots&\langle u_n,u_n\rangle\end{bmatrix}$

非奇异 $\Leftrightarrow$ $u_1,u_2,\cdots u_n$线性无关

1. 连续函数的最佳平方逼近

$f(t)\in C[a,b]$，函数类Φ，$\mathrm{span}\{\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)\}$

求 $S(t)=\sum_{j=1}^n x_j\varphi_j(t)$，使$\|S(t)-f(t)\|_2$最小

法方程法：$Gx=b$

$G=\begin{bmatrix}\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle&\cdots&\langle\varphi_n,\varphi_1\rangle\\\langle\varphi_1,\varphi_n\rangle&\cdots&\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}\langle f,\varphi_1\rangle\\\vdots\\\langle f,\varphi_n\rangle\end{bmatrix}$

G对称正定，存在唯一解

正交基函数 $S^*(t)=\sum_{k=1}^n\frac{\langle f(t),\varphi_k(t)\rangle}{\langle\varphi_k(t),\varphi_k(t)\rangle}\varphi_k(t)$

$[-1,1]$上，权函数$\rho(t)\equiv1$，勒让德多项式

$\begin{cases}P_0(t)=1\quad P_1(t)=t\\(k+1)P_{k+1}(t)=(2k+1)tP_k(t)-kP_{k-1}(t)\end{cases}$

$[a,b]$上勒让德多项式 $\tilde{P}_j(s)=P_j\left(\frac{2s-(a+b)}{b-a}\right)$

$\langle P_k(t),P_k(t)\rangle=\frac{2}{2k+1}$ $\langle\tilde{P}_k(s),\tilde{P}_k(s)\rangle=\frac{b-a}{2k+1}$

2. 曲线拟合的最小二乘法

数据点(t_i,f_i)，$(i=1,\cdots,m)$，$S(t)=\sum_{j=1}^n x_j\varphi_j(t)$

使 $\sum_{i=1}^m[S(t_i)-f_i]^2$ 最小

法方程法

$\left.\begin{array}{l}f=[f(t_1),\cdots,f(t_m)]^T\\A=\begin{bmatrix}\varphi_1(t_1)&\cdots&\varphi_n(t_1)\\\varphi_1(t_m)&\cdots&\varphi_n(t_m)\end{bmatrix}\end{array}\right\}$ $f\approx Ax$

角解 $A^TAx=A^Tf$

若表格函数$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$线性无关 $\Rightarrow$ 唯一解

若t_i，$(i=1,\cdots,m)$至少有n个不同值，P_{n-1}表格函数线性无关

正交变换法角平线性最小二乘

$A=QR\Rightarrow\|f-Ax\|_2=\|Q^Tf-Rx\|_2$最小

对A作QR分角解，f变换为$\tilde{f}=Q^Tf$

角解 $Rx=\tilde{f}$ （前n行）

3. 多项式插值

求n次多项式$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

满足 n+1个插值点的条件$P(x_i)=y_i$

Lagrange插值

$n=1$，$y=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$

$n=1$，$y=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$

$L_n(x)=\sum_{k=0}^n y_kl_k(x)$，$l_k(x)\in P_n$，$l_k(x)=\begin{cases}1,&i=k\\0,&i\neq k\end{cases}$

$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

设$\omega_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^n(x-x_j)$，$\omega'_{n+1}(x_k)=\prod_{j=0,j\neq k}^n(x_k-x_j)$

$l_k(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$

Lagrange插值余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

Newton插值：$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

差商：$c_k=f[x_0,\cdots,x_k]$

0阶 $f[x_i]=f(x_i)$

1阶 $f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

k阶 $f[x_0,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$

$f[x_0,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^k\frac{f(x_j)}{\prod_{i=0,i\neq j}^k(x_j-x_i)}$

差商表

x_k	$f(x_k)$	1阶差商	2阶差商
x_0	$f(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$

Newton插值余项 $R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$

$f[x,x_0,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，$\xi\in(a,b)$

4. 分段多项式插值

分段线性插值 $I_h(x)=\sum_{j=0}^n f_jl_j(x)$

$l_j(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}},&x_{j-1}\le x\le x_j\\\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}},&x_j\le x\le x_{j+1}\\0,&x\notin[x_{j-1},x_{j+1}]\end{cases}$

分段三次埃尔米特插值 $H_h(x)=\sum_{j=0}^n[f_j\alpha_j(x)+f'_j\beta_j(x)]$

$\alpha_j(x)=\begin{cases}(1+2\frac{x-x_j}{x_{j-1}-x_j})(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})^2\\(1+2\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j})(\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}})^2\\0\end{cases}$ $\beta_j(x)=\begin{cases}(x-x_j)(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})^2\\(x-x_j)(\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}})^2\\0\end{cases}$

七、数值积分 $I(f)=\int_a^bf(x)dx$

1. 机械求积公式 $I_n(f)=\sum_{k=0}^nA_kf(x_k)$

插值型求积公式 $I_n(f)=\sum_{k=0}^nf(x_k)\int_a^bl_k(x)dx$

$\int_a^bf(x)dx\approx\int_a^bp(x)dx$ $p(x)=\sum_{k=0}^nf(x_k)l_k(x)$

$I_0=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$ 中矩形公式

$I_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ 梯形公式

积分余项 $R[f]=I(f)-I_n(f)$

插值型 $R[f]=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$

代数精度 $I_n(f)$对$f(x)$次数$\le m$的多项式是准的

但对m+1次不准 $\Rightarrow$ 求积公式有m次代数精度

机械求积公式m次代数精度 $\Leftrightarrow f(x)=1,\cdots,x^m$，$I(f)=I_n(f)$

推论：$\sum_{k=0}^nA_k=b-a$

$I_n(f)$是插值型 $\Leftrightarrow$ 至少有n次代数精度

若 $k=0,\cdots,n$，$A_k>0$，机械求积公式稳定

2. Newton-Cotes公式 $h=\frac{b-a}{n}$ $x_k=a+kh$

$n=1$ $T(f)=(b-a)\left[\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right]$ 梯形公式

$n=2$ $S(f)=(b-a)\left[\frac{1}{6}f(a)+\frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{6}f(b)\right]$ Simpson公式

$n=4$ $C(f)=(b-a)\left[\frac{7}{90}f(x_0)+\frac{32}{90}f(x_1)+\frac{12}{90}f(x_2)+\frac{32}{90}f(x_3)+\frac{7}{90}f(x_4)\right]$ Cotes公式

当n为偶数，n阶N-C公式至少n+1代数精度

积分余项：中矩形 $\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$

梯形 $R_T=-\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3$

Simpson $R_S=-\frac{f^{(4)}(\eta)}{2880}(b-a)^5$

3. 复合求积公式

$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$

$I(f)-T_n=-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{h^3}{12}f''(\eta_k)\right]=-\frac{h^2(b-a)}{12}f''(\eta)=O(h^2)$

准确度：截断误差$O(h^p)$，p阶准确度

$S_n=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$

$I(f)-S_n=-\frac{1}{2880}h^4(b-a)\cdot f^{(4)}(\eta)=O(h^4)$

步长折半 $T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$

4. 理查森外推 $T_0^{(n)}-I=\alpha_1h^2+\alpha_2h^4+\cdots$

$T_0^{(n+1)}-I=\alpha_1\frac{h^2}{4}+\alpha_2\frac{h^4}{16}+\cdots$

$\frac{4T_0^{(n+1)}-T_0^{(n)}}{3}-I=O(h^4)$

5. 高斯求积公式：2n+1或更高代数精度

x_k为高斯点 $\Leftrightarrow$ $\omega_{n+1}(x)$与$\forall P(x)\in P_n$正交

计算 $\int_{-1}^1f(x)dx$

n	x_k	A_k
0	0	2
1	$\pm\sqrt{3}/3$	1
2	0，±0.7745967	8/9，0.5555556
3	±0.8611363	0.3478548
	±0.3399810	0.6521452

6. 数值微分

$f'(x)=D_f(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 向前差分

$f'(x)=D_b(h)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ 向后差分

$f'(x)=D_c(h)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ 中心差分

$f[x_0,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

$f''(x)=G_c(h)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$

八、常微分方程初值问题 $y'=f(t,y)$

1. 欧拉法 $y_{n+1}=y_n+h_nf(t_n,y_n)$

稳定性：针对模型问题$y'=\lambda y$ $(\lambda<0)$

$y_{n+1}=(1+h\lambda)y_n$

y_n上扰动δ_n引起 $\delta_{n+1}=(1+h\lambda)\delta_n$

$|1+h\lambda|\le1$ $h\le-\frac{2}{\lambda}$

局部截断误差：

假设$y_{n-1}=y(t_{n-1})$，$l_{n+1}=y(t_{n+1})-y_{n+1}$

P阶准确度 $l_{n+1}=O(h^{p+1})$ （欧拉法1阶）

向后欧拉法 $y_{n+1}=y_n+h_nf(t_{n+1},y_{n+1})$

梯形法 $y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h_n[f(t_n,y_n)+f(t_{n+1},y_{n+1})]$

稳定性：$y'=\lambda y$

向后欧拉法 $\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right|\le1$ 无条件稳定（1阶准确）

梯形法 $\left|\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right|\le1$ 无条件稳定（2阶准确）

2. Runge-Kutta方法

4阶方法 $k_1=f(t_n,y_n)$

$k_2=f(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1)$

$k_3=f(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_2)$

$k_4=f(t_n+h,y_n+hk_3)$

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$

如何求参数：$y'=\lambda y$，局部截断误差（Taylor展开）

相容性条件：$y_{n+1}=y_n+h\varphi(t_n,y_n,h)$ $\varphi(t,y,0)=f(t,y)$

3. 多步法

单项式函数代入法求参数：P+1个参数

达到P阶准确度，设$y(t)=t^i$，$(i=0,\cdots,p)$代入