



# IMAGE - ANALYSE ET TRAITEMENTS D'IMAGES

Caméra

# PLAN

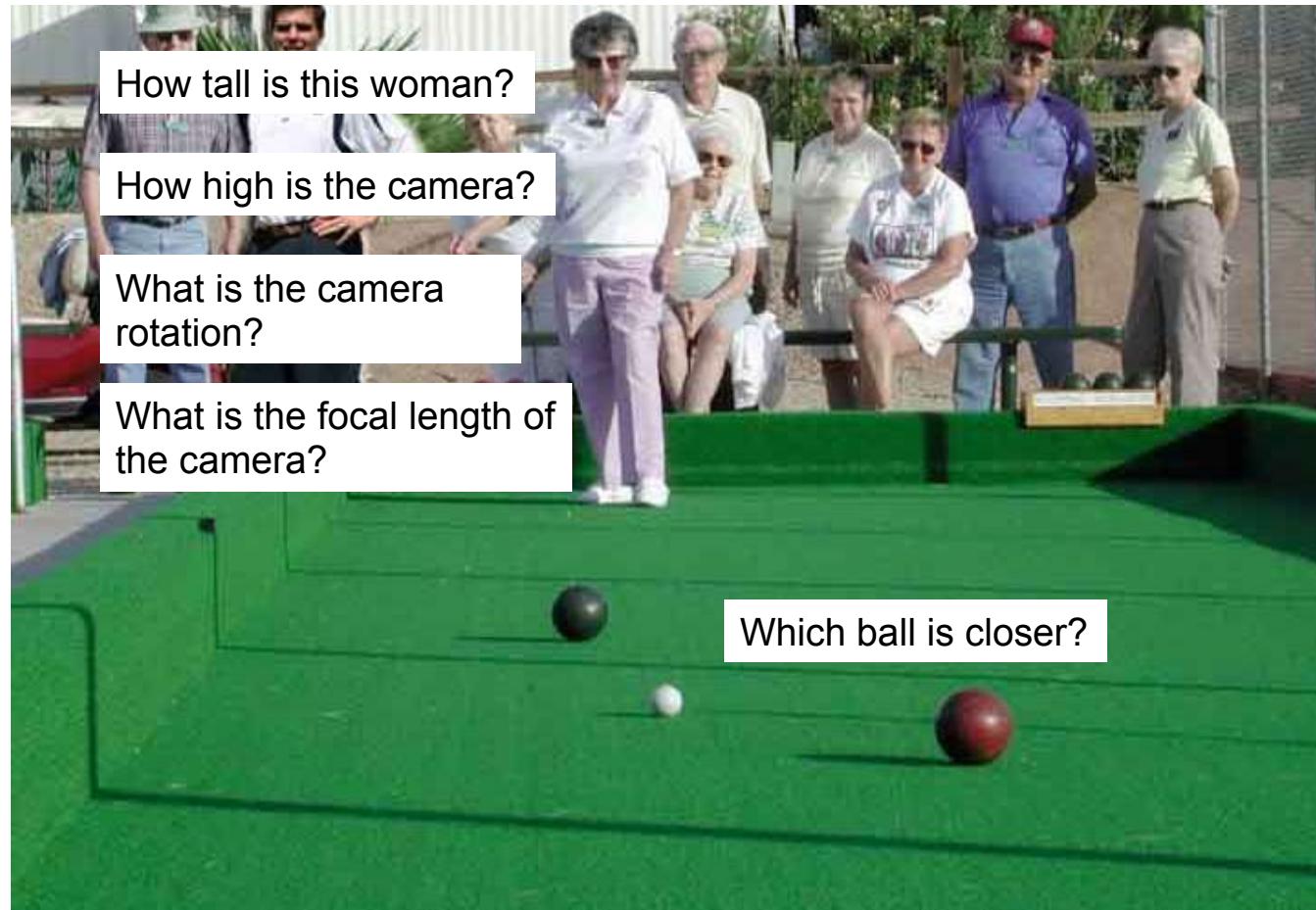
- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

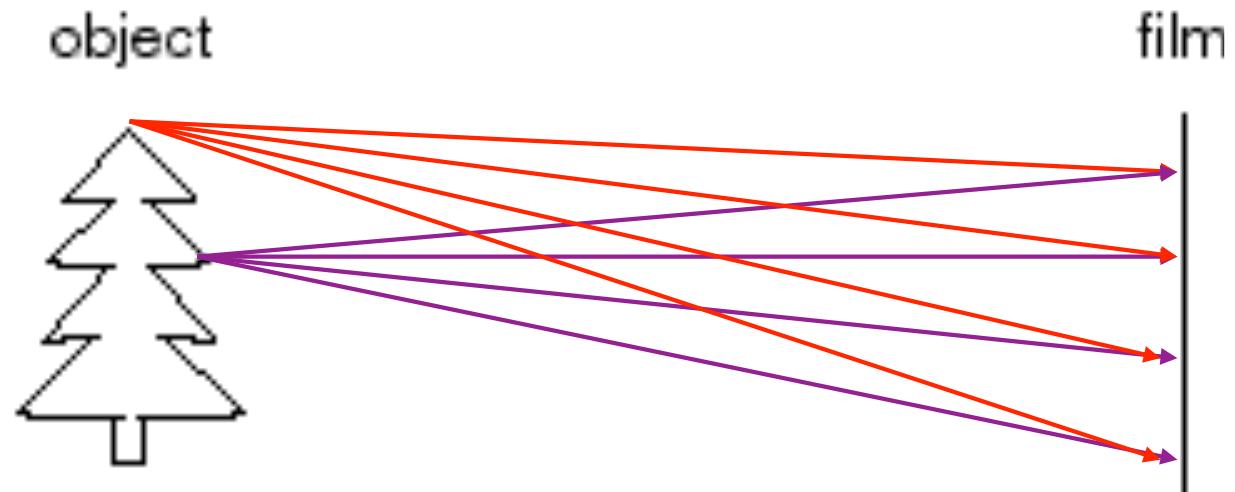
# INTRODUCTION

- Géométrie d'une caméra vs géométrie du monde [14]



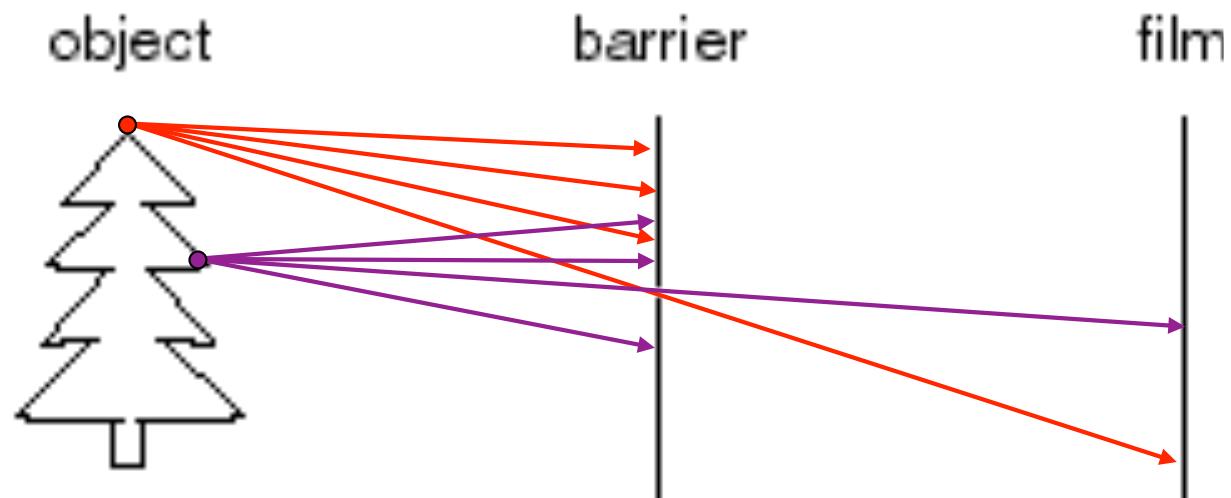
# INTRODUCTION

- Comment voyons nous le monde ? [14]
  - Fabriquons une caméra
    - 1er idée : mettre un film devant un objet
    - Avons-nous une image correcte ?



# INTRODUCTION

- Comment voyons nous le monde ? [14]
  - Fabriquons une caméra
    - Ajoutons une barrière pour bloquer la plupart des rayons
      - Cela réduit le flou
      - Taille de l'ouverture : ouverture (*aperture*)



# INTRODUCTION

## ○ Ouverture

- Réglage qui permet d'ajuster le diamètre d'ouverture du diaphragme.
- Caractérisée par le nombre d'ouverture ou ouverture géométrique
- notée «  $f / N$  , nombre sans dimension est défini comme le rapport de la focale  $f$  au diamètre  $d$  de la pupille d'entrée :  $N = f/d$



# INTRODUCTION

- Caméra *pin-hole* – modèle sténopé

Connue dans l'antiquité en Chine et en Grèce

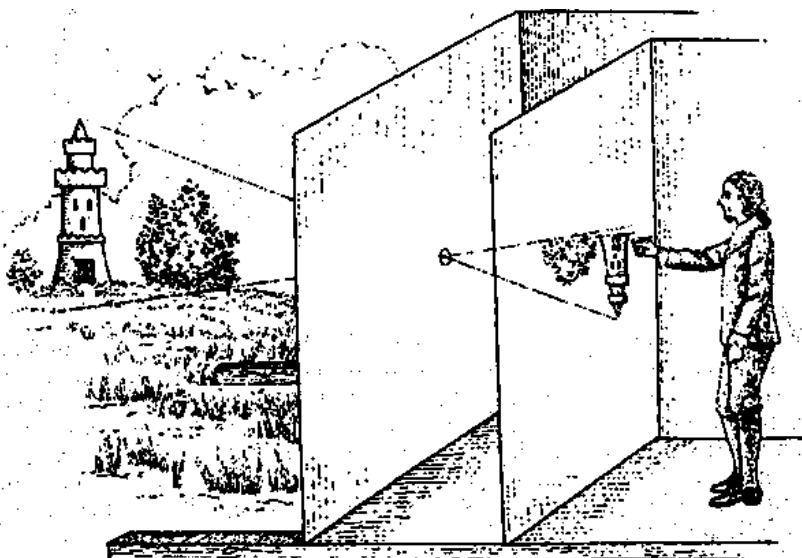
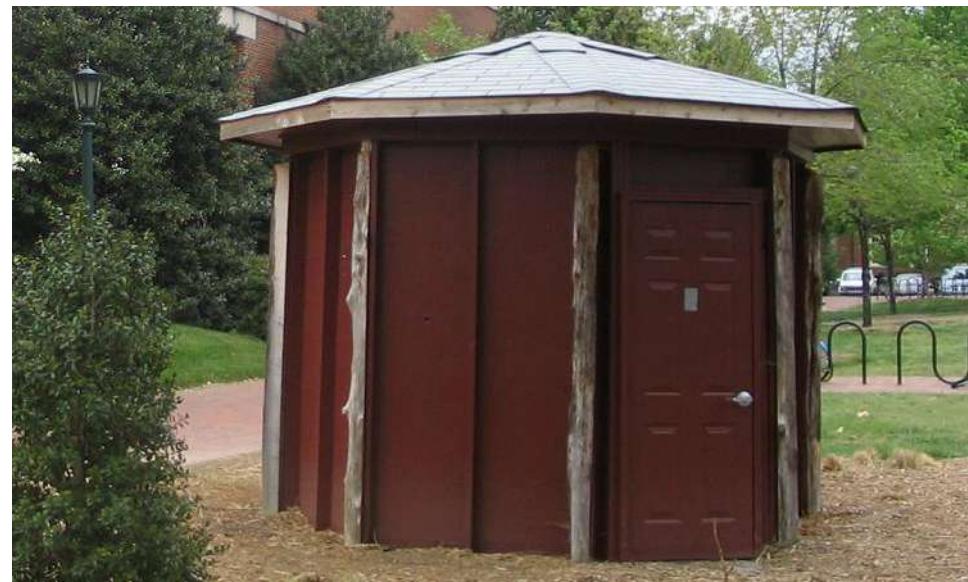


Illustration of Camera Obscura



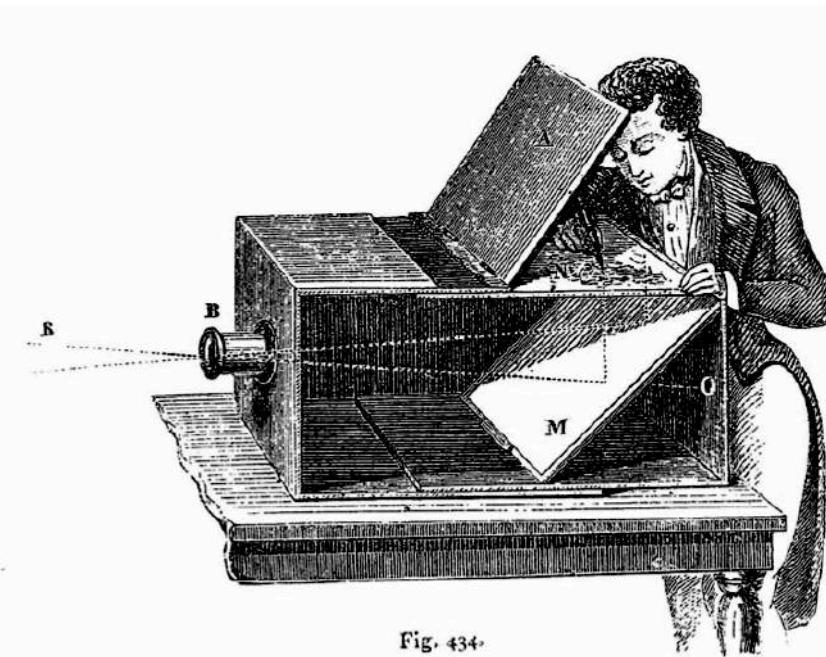
Freestanding camera obscura at UNC Chapel Hill

Photo by Seth Ilys

[extrait de [4]]

# INTRODUCTION

- Caméra *pin-hole* – modèle sténopé  
Utilisée pour faire de la recopie



Lens Based Camera Obscura, 1568

[extrait de [4]]

# INTRODUCTION

- Caméra *pin-hole* – modèle sténopé  
Première photographie

Oldest surviving photograph

- Took 8 hours on pewter plate



Joseph Niepce, 1826

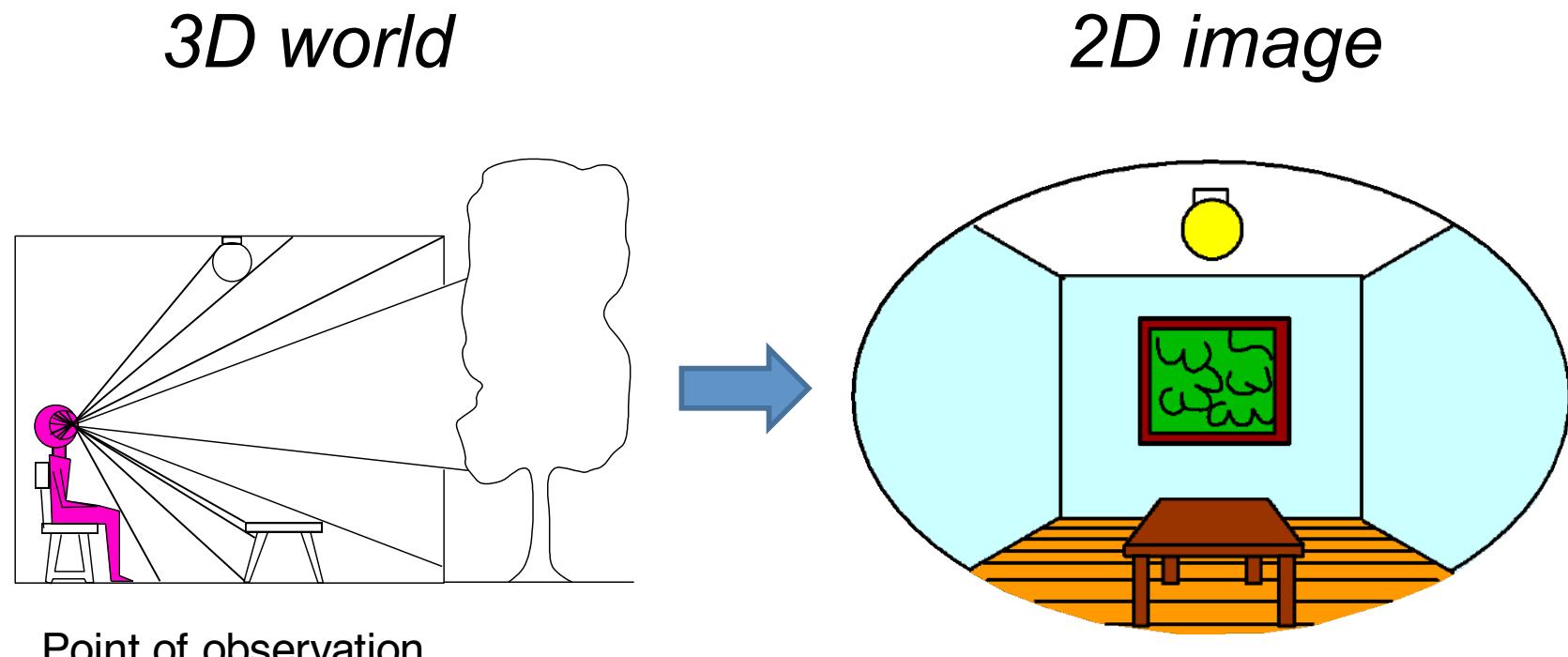
Photograph of the first photograph



Stored at UT Austin

## INTRODUCTION [4]

- Réduction du nombre de dimension (3D->2D)



Point of observation

Figures © Stephen E. Palmer, 2002

# INTRODUCTION [4]

- Ne pas toujours croire les projections



12

# INTRODUCTION [4]

- Ne pas toujours croire les projections

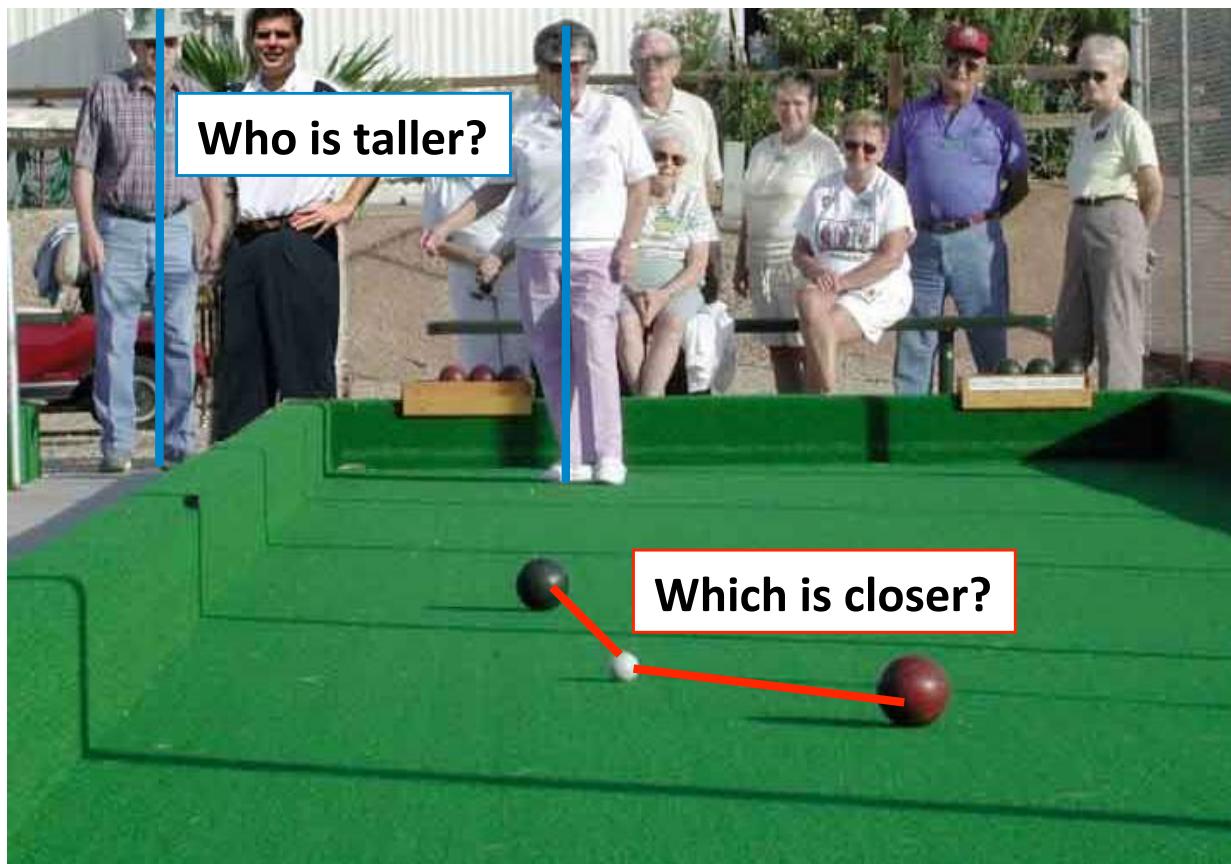


CoolOpticalIllusions.com

13

# INTRODUCTION [4]

- Géométrie projective, que perdons-nous ?
  - Longueurs



14

Slide credit: J. Hayes

# INTRODUCTION

- Les longueurs ne sont pas préservées

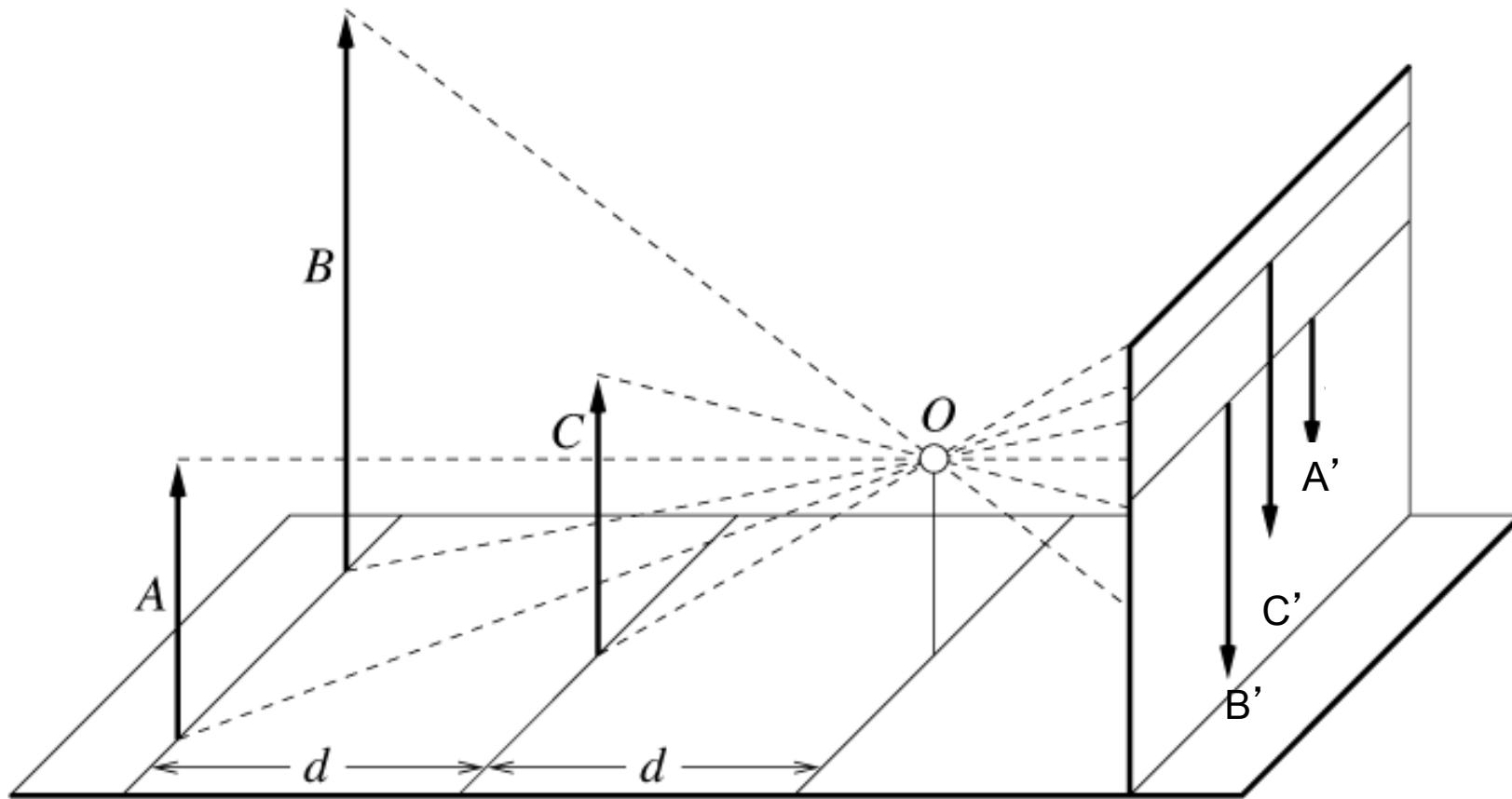
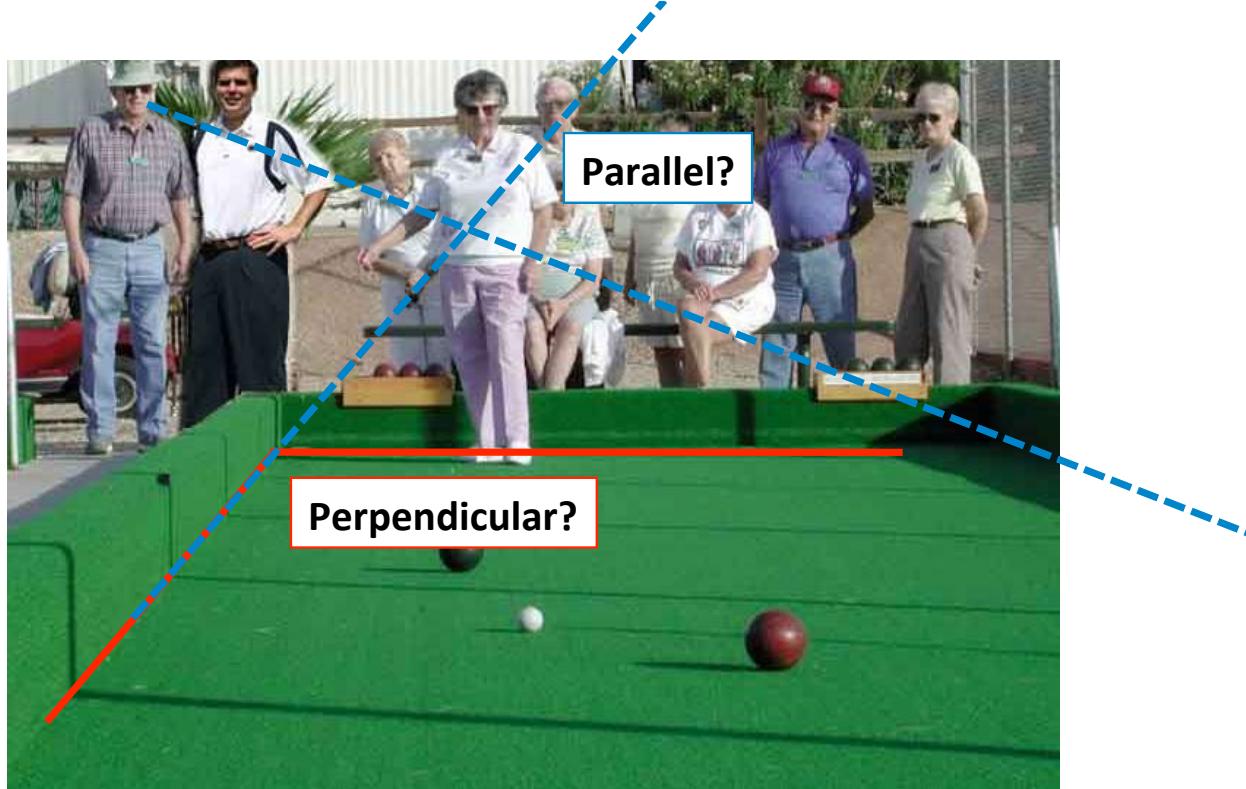


Figure by David Forsyth

# INTRODUCTION [4]

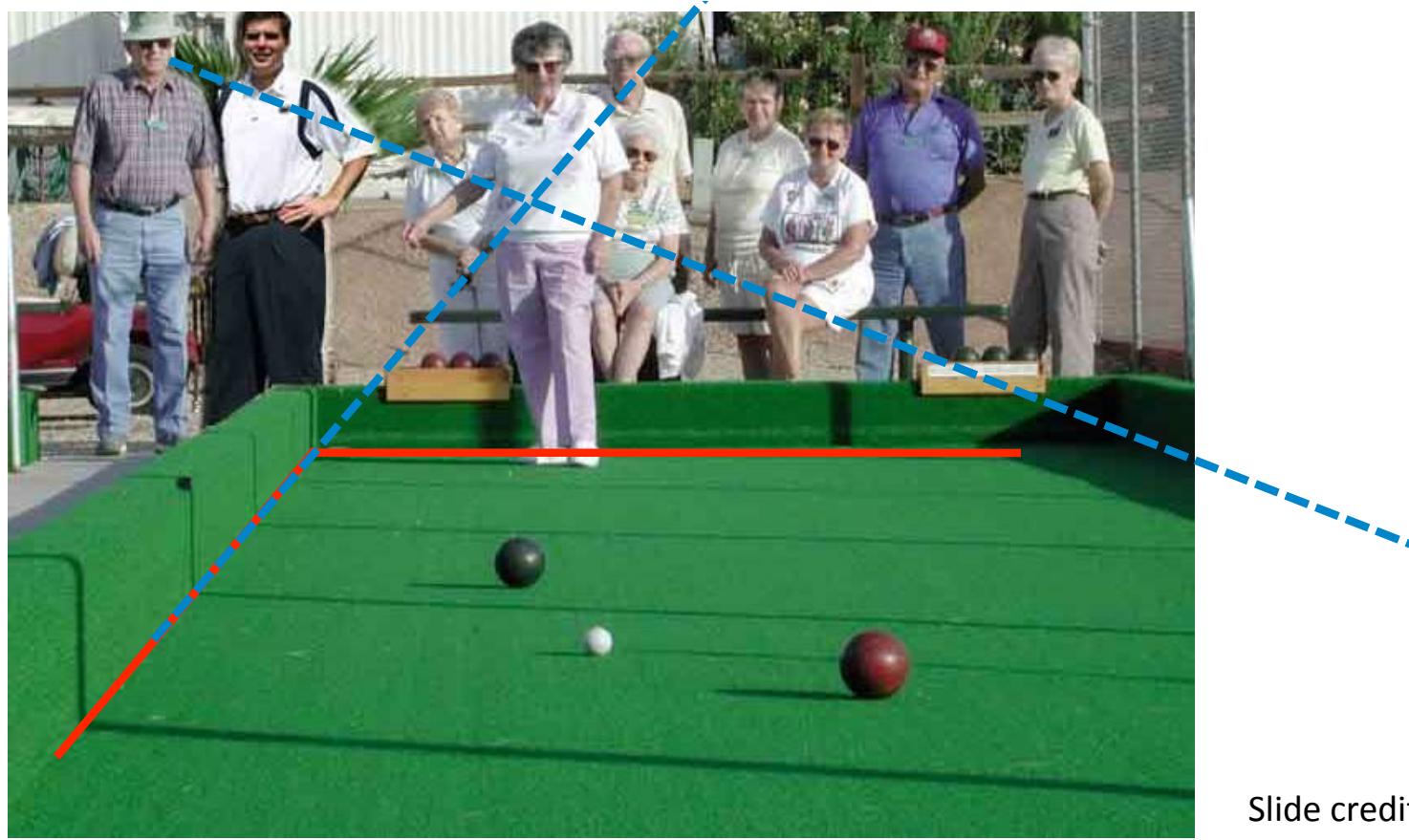
- Géométrie projective, que perdons-nous ?
  - Longueurs
  - Angles



Slide credit: J. Hayes

## INTRODUCTION [4]

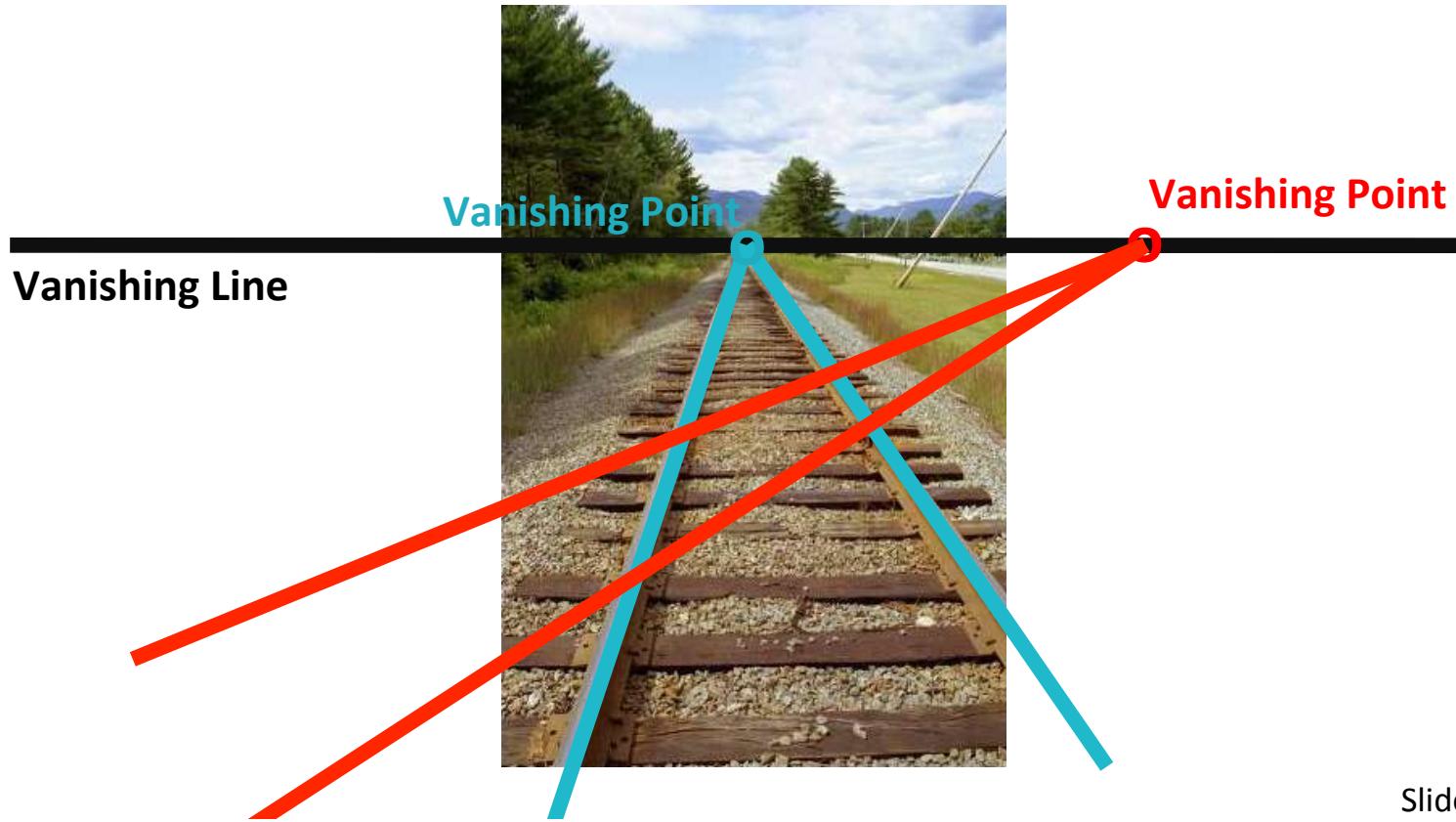
- Géométrie projective, que gardons-nous ?
  - Les lignes droites restent droites



Slide credit: J. Hayes

## INTRODUCTION [4]

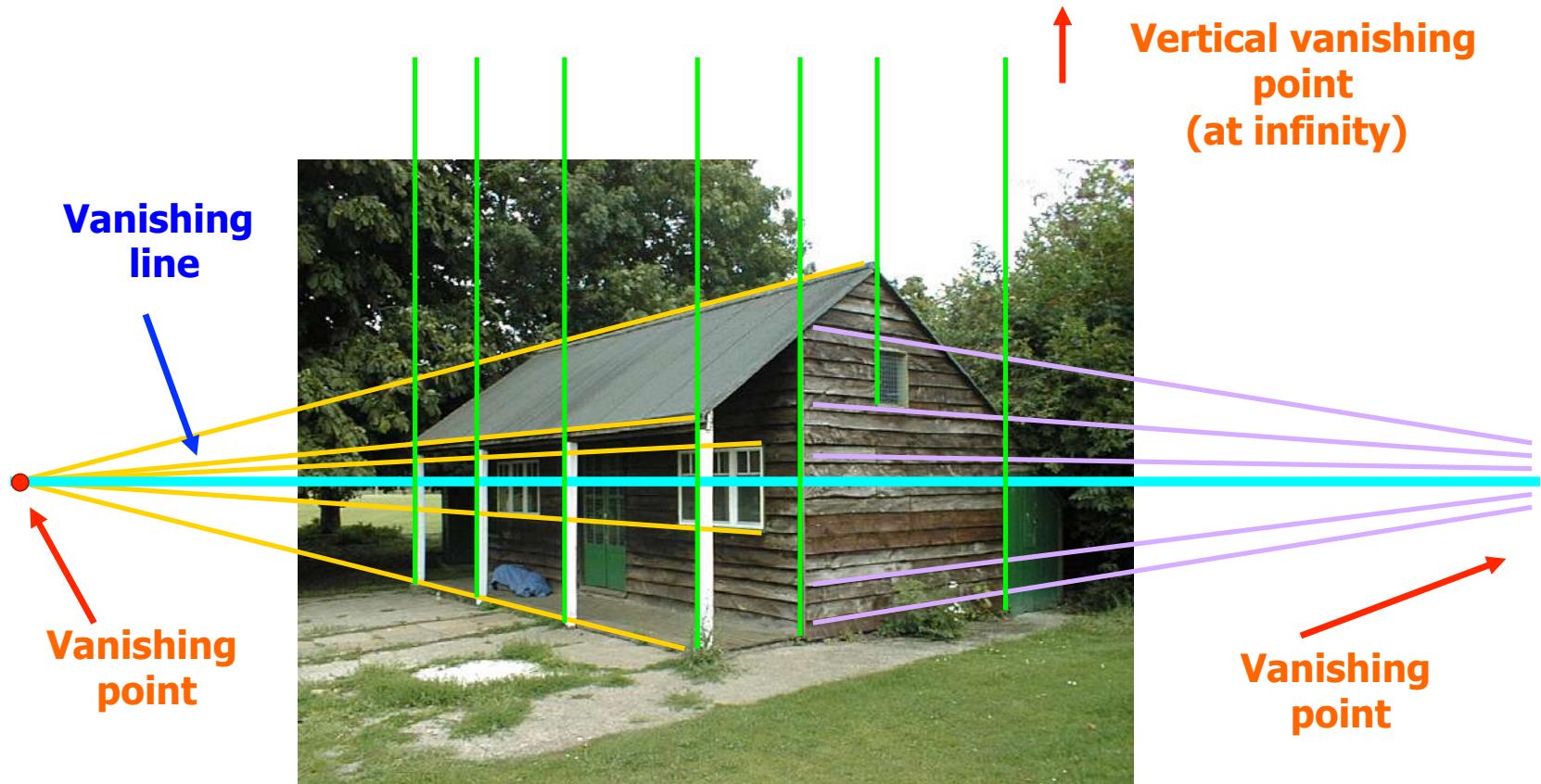
- Les lignes parallèles dans le monde s'intersectent dans l'image à un point de fuite (*vanishing point*)



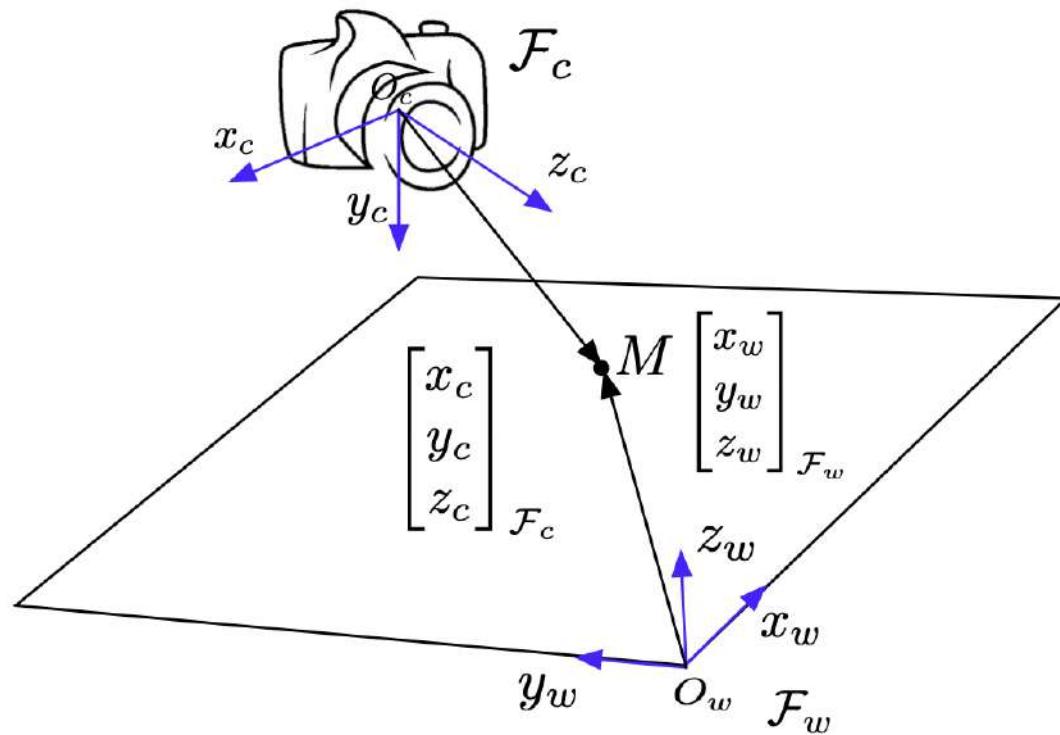
Slide credit: J. Hayes

## INTRODUCTION [4]

- Les lignes parallèles dans le monde s'intersectent dans l'image à un point de fuite (*vanishing point*)



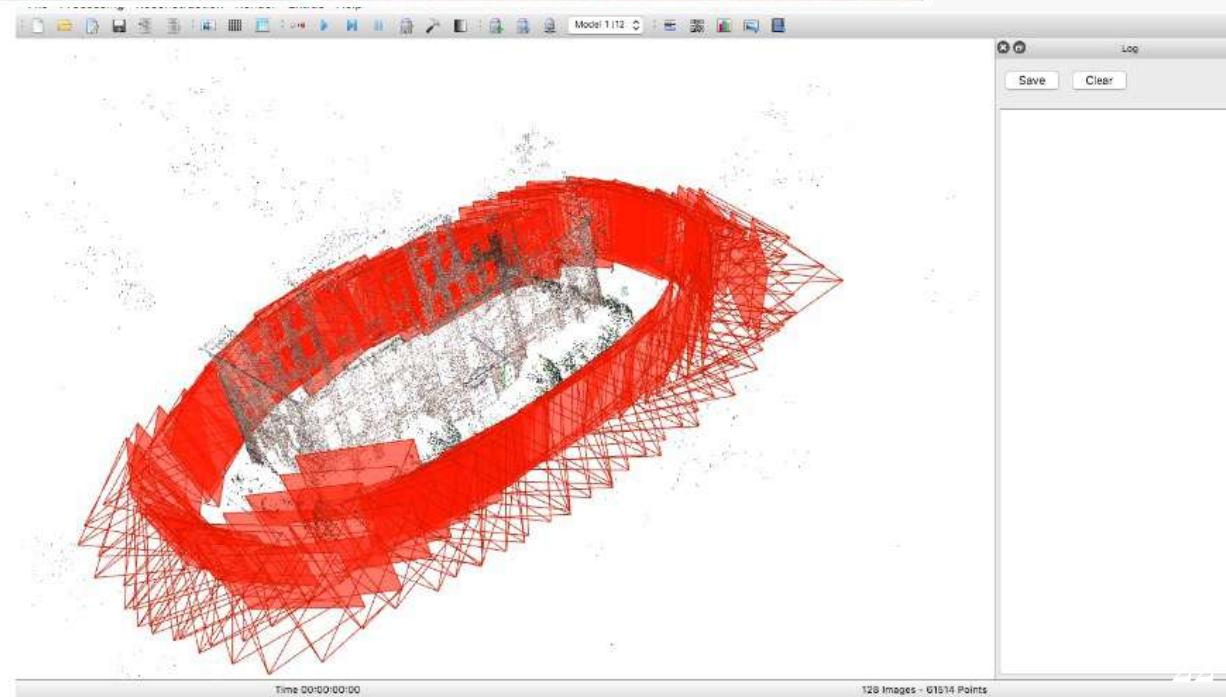
# INTRODUCTION – CALCUL DE POSE [5]



Position et orientation de la caméra dans un référentiel fixe

# INTRODUCTION - POURQUOI AVONS NOUS BESOIN DE CALCULER LA POSE [5]

- Extraction d'informations à partir d'images
- Connaître un déplacement uniquement à partir d'une vidéo
- Réalité augmentée
- Reconstruction d'un modèle 3D
- ...



3D model reconstructed with COLMAP with an example dataset [SF16, SZPF16]

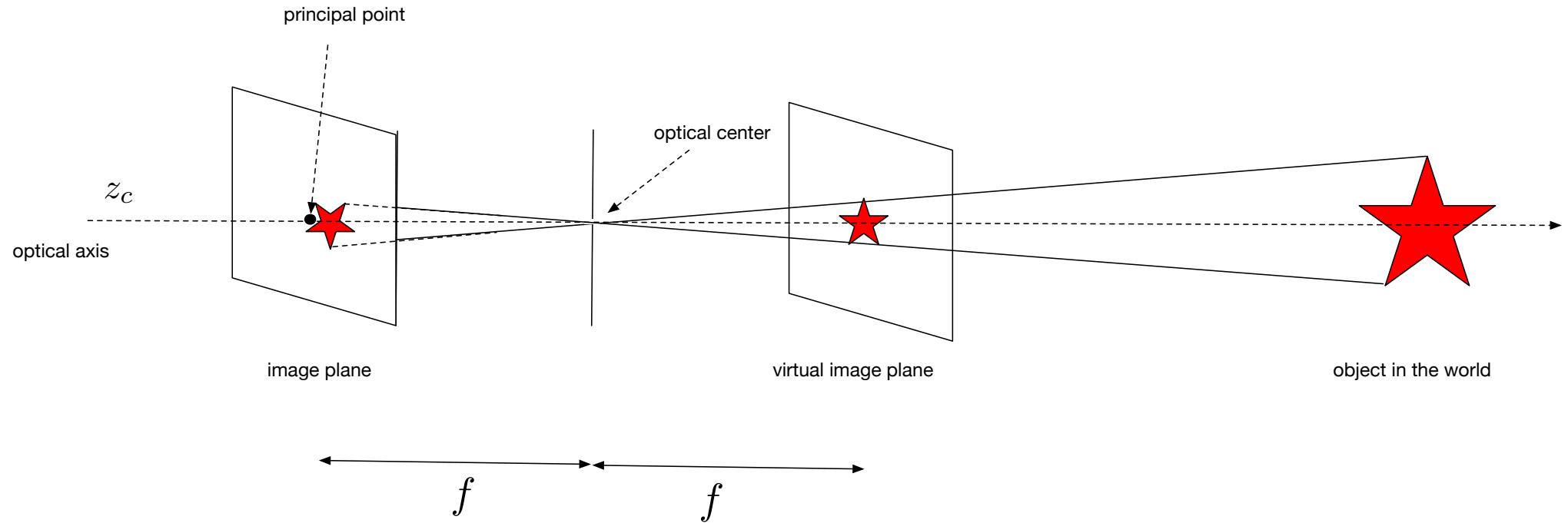
► <https://demuc.de/colmap/#tutorial>



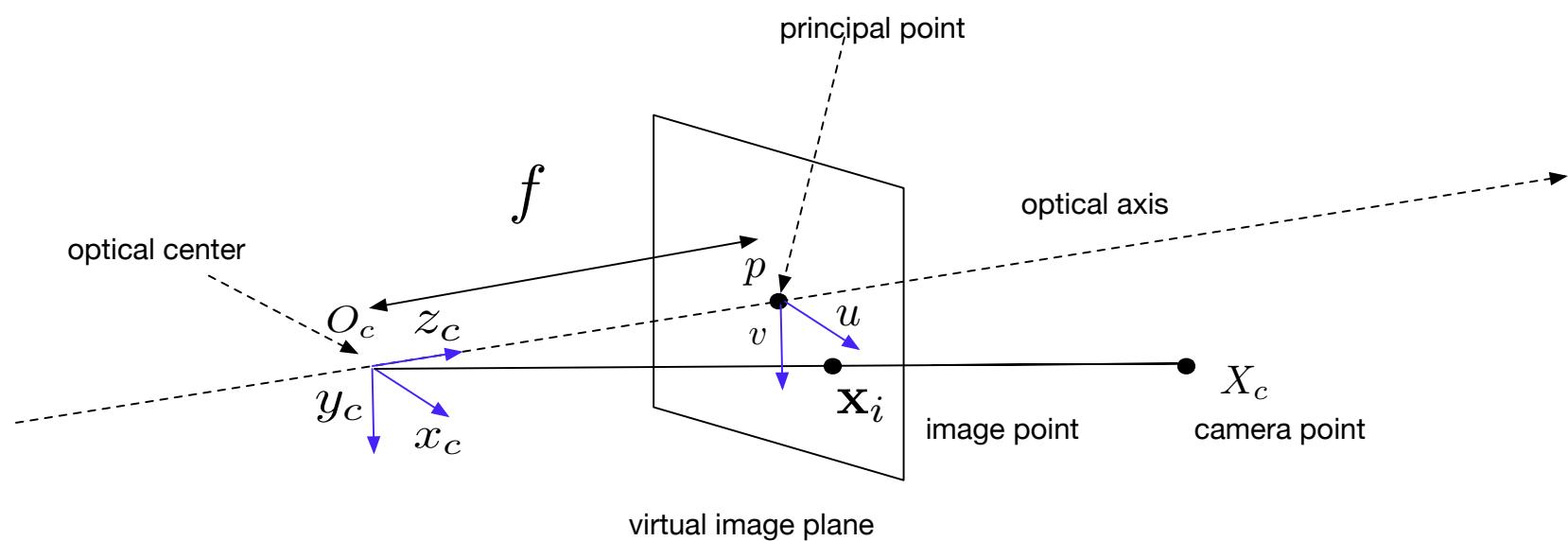
# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

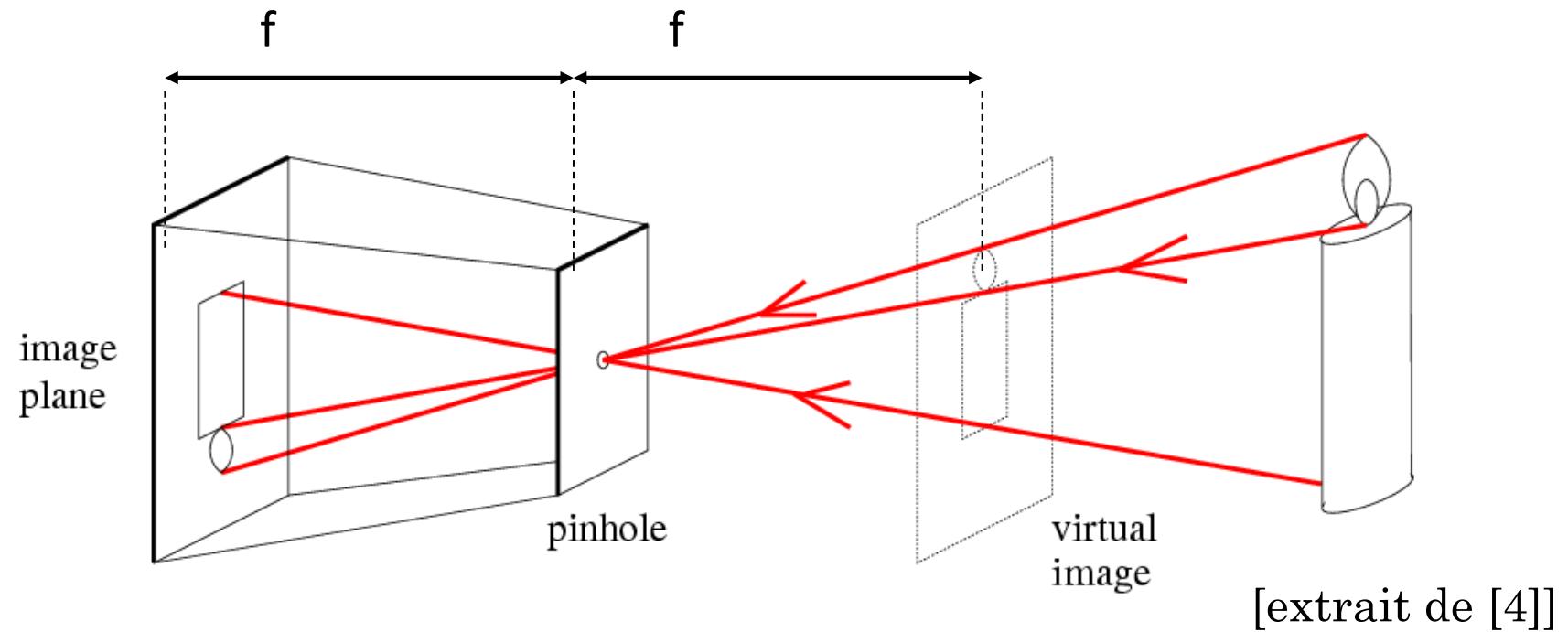
# CAMÉRA [5]



# CAMÉRA [5]



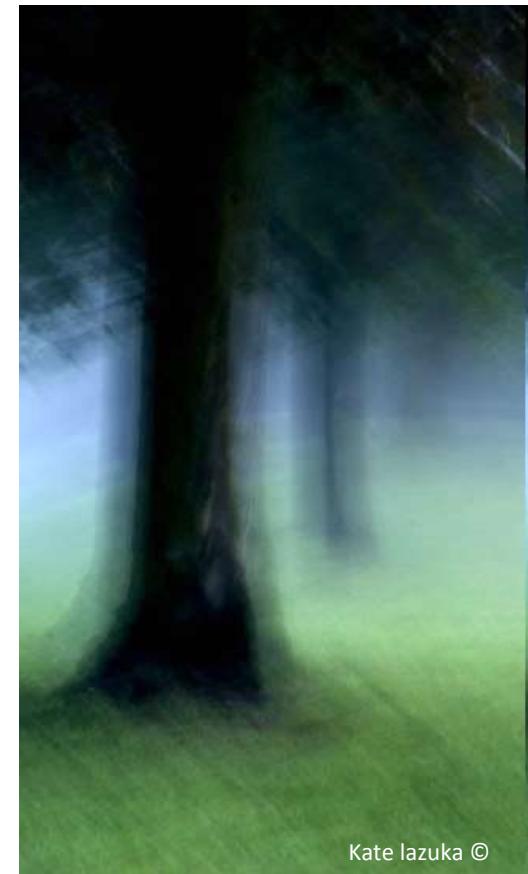
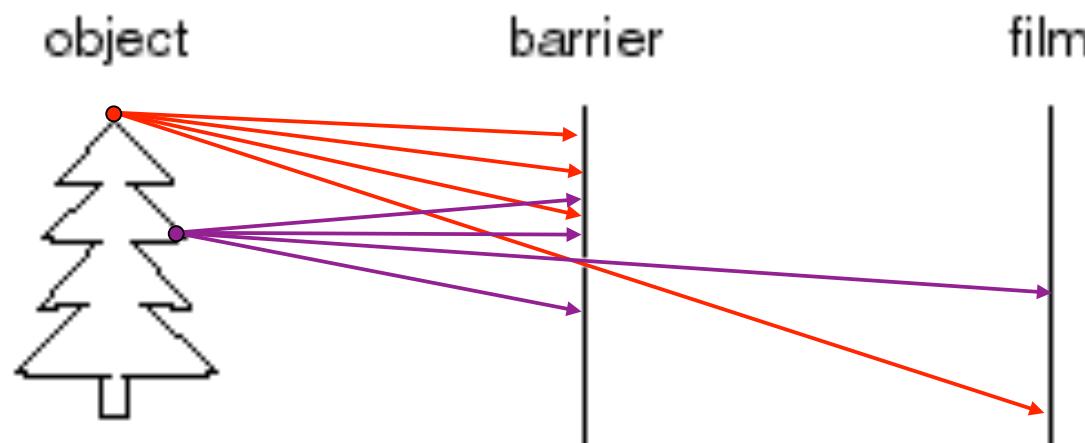
# CAMÉRA – MODÈLE STÉNOPÉ



- Commun de dessiner l'image devant le point focal
- Déplacer le plan image ne fait que redimensionner l'image

## CAMÉRA – MODÈLE STÉNOPÉ [4]

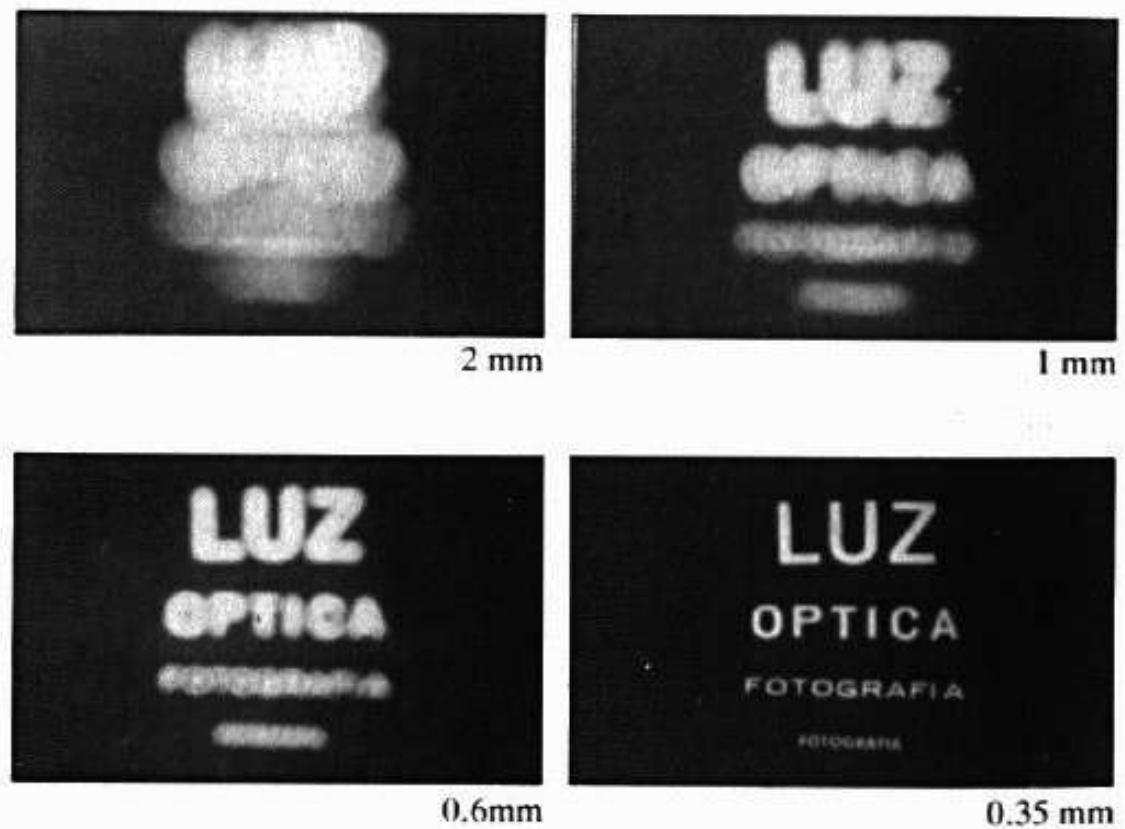
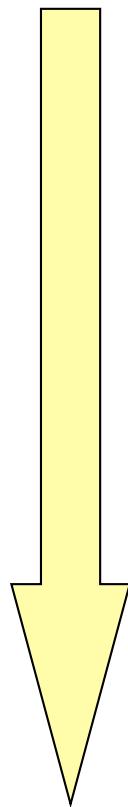
- Est-ce que la taille de l'ouverture de la caméra a de l'importance ?



## CAMÉRA – MODÈLE STÉNOPÉ [4]

Shrinking  
aperture  
size

- Rays are mixed up



-Why the aperture cannot be too small?

- Less light passes through
- Diffraction effect

Adding lenses!

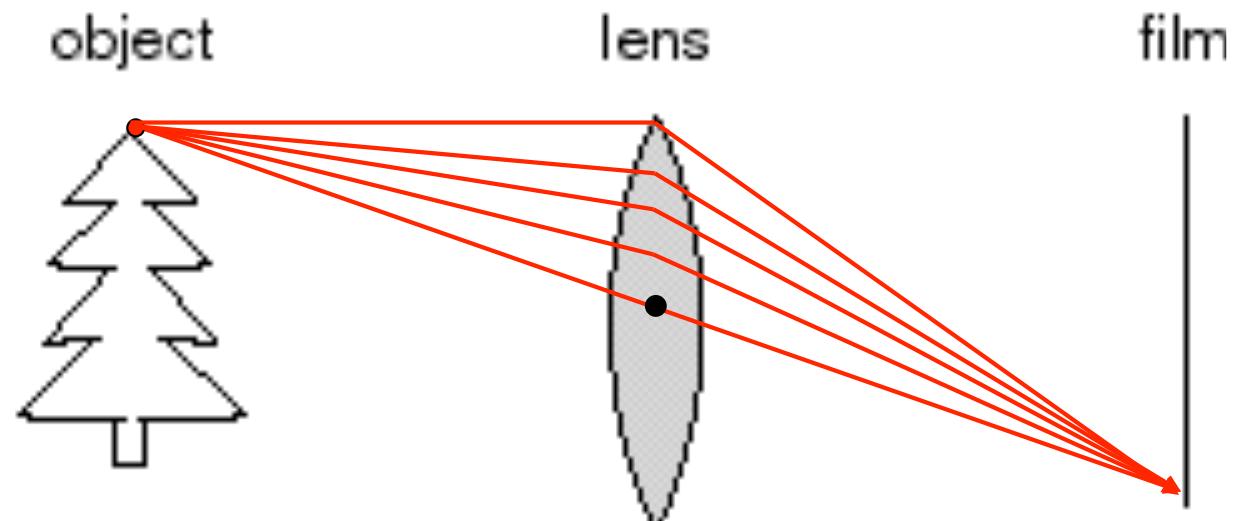
# CAMÉRA – MODÈLE STÉNOPÉ

- Petite ouverture -> peu de lumière
- Effet de diffraction, i.e. courbure des rayons à cause des rebords d'objets opaques. La diffraction crée un flou. L'effet augmente si le diamètre de l'ouverture diminue.
- Si on augmente la taille de l'ouverture, la profondeur de champ diminue.

- Taille de l'ouverture ↑
  - Profondeur de champ ↓
  - Flou ↑
- Taille de l'ouverture ↓
  - Effet de diffraction
  - Flou ↑
- Images sombres

## CAMERA - LENTILLES

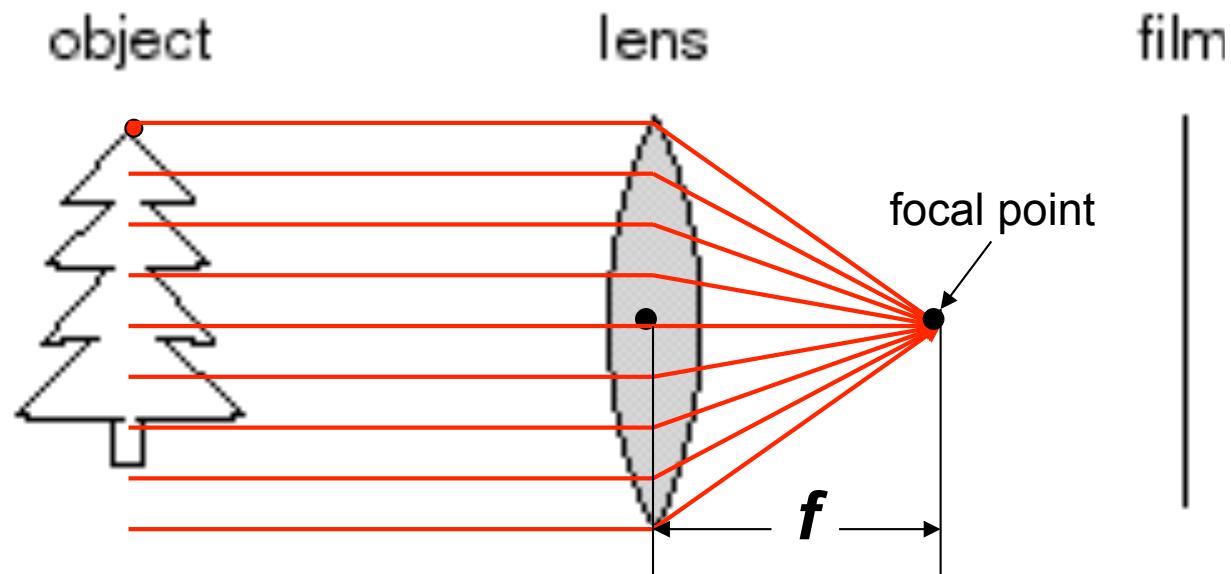
- Ajout de lentilles pour focaliser la lumière sur le film



[extrait de [4]]

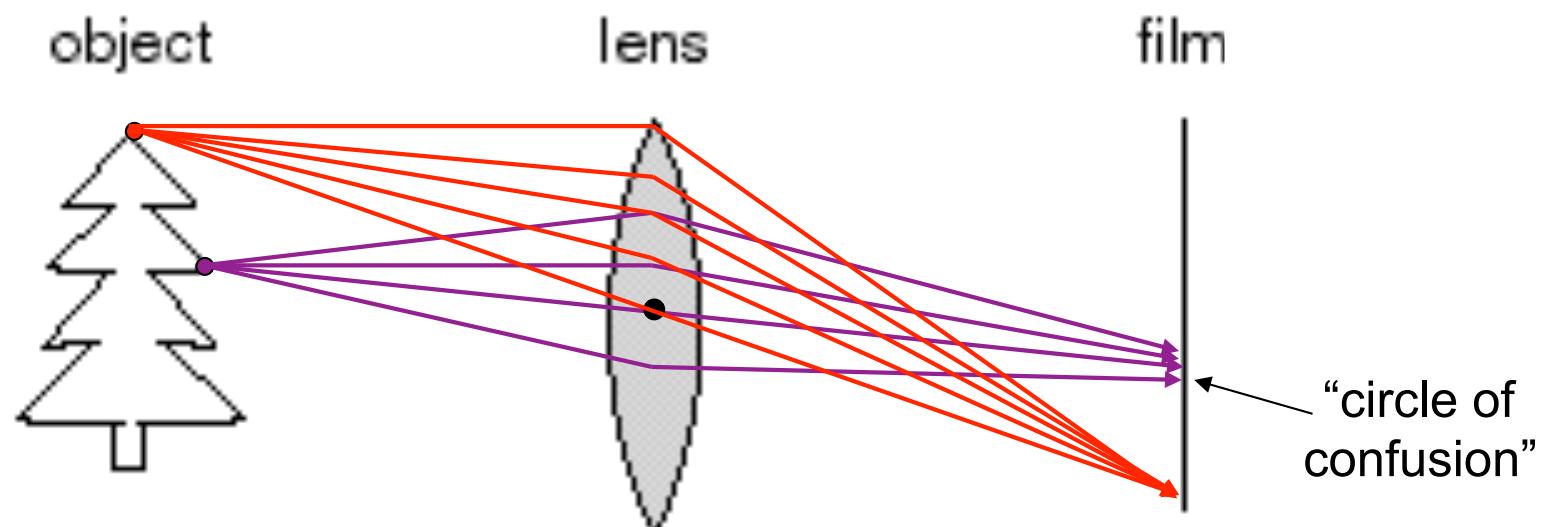
# CAMERA - LENTILLES

- Ajout de lentilles pour focaliser la lumière sur le film
  - Les rayons passant par le centre optique ne sont pas déviés
  - Tous les rayons parallèles convergent en un point sur un plan appelé le plan focal situé à une distance  $f$  (focale)



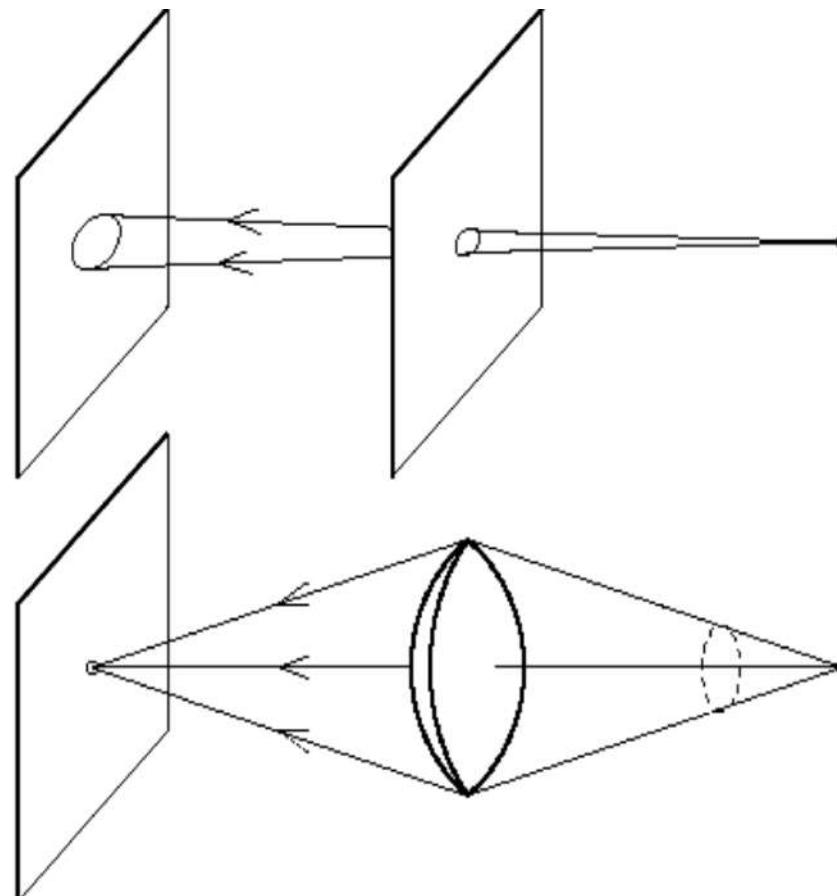
# CAMERA - LENTILLES

- Ajout de lentilles pour focaliser la lumière sur le film
  - Il y a une distance spécifique où les objets sont « dans le focus », les autres sont projetés dans un « cercle de confusion » de l'image



# CAMERA - LENTILLES

- **avantage** : modèle équivalent au sténopé
- **inconvénient** : seuls des points à une distance donnée de la lentille sont au focus
  - profondeur de champ limitée
- **Profondeur de champ :** intervalle de profondeur sur lequel les objets sont projetés avec une netteté suffisante
  - *Critère de netteté (exemple)* :
    - disque flou a un diamètre inférieur à 1 pixel



## CAMERA – LENTILLES [4]

- Lois de l'optique :

- La lumière voyage en ligne droite dans un milieu homogène
- Réflexion sur une surface : rayon incident, rayon réfléchi et normale à la surface sont coplanaires
- Réfraction : quand un rayon passe d'un milieu à un autre

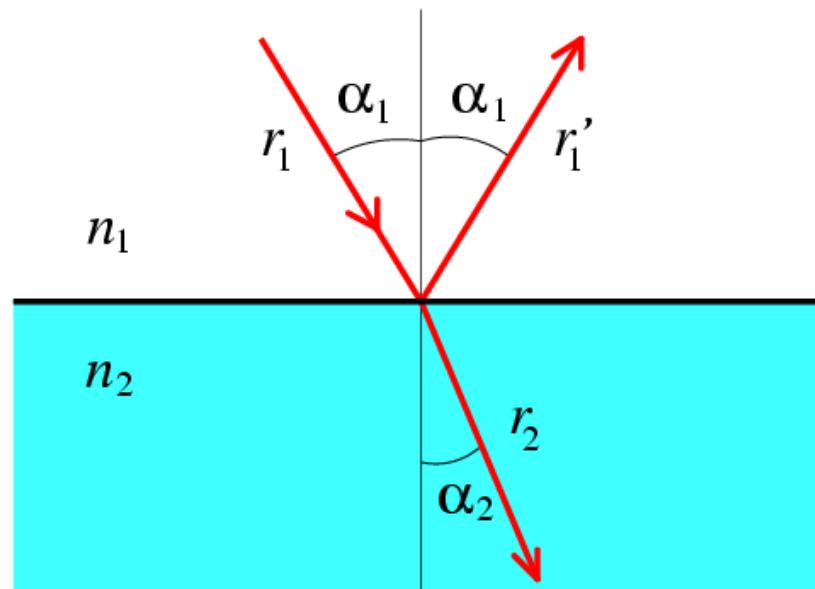
Loi de Snell-Descartes

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$\alpha_1$  = incident angle

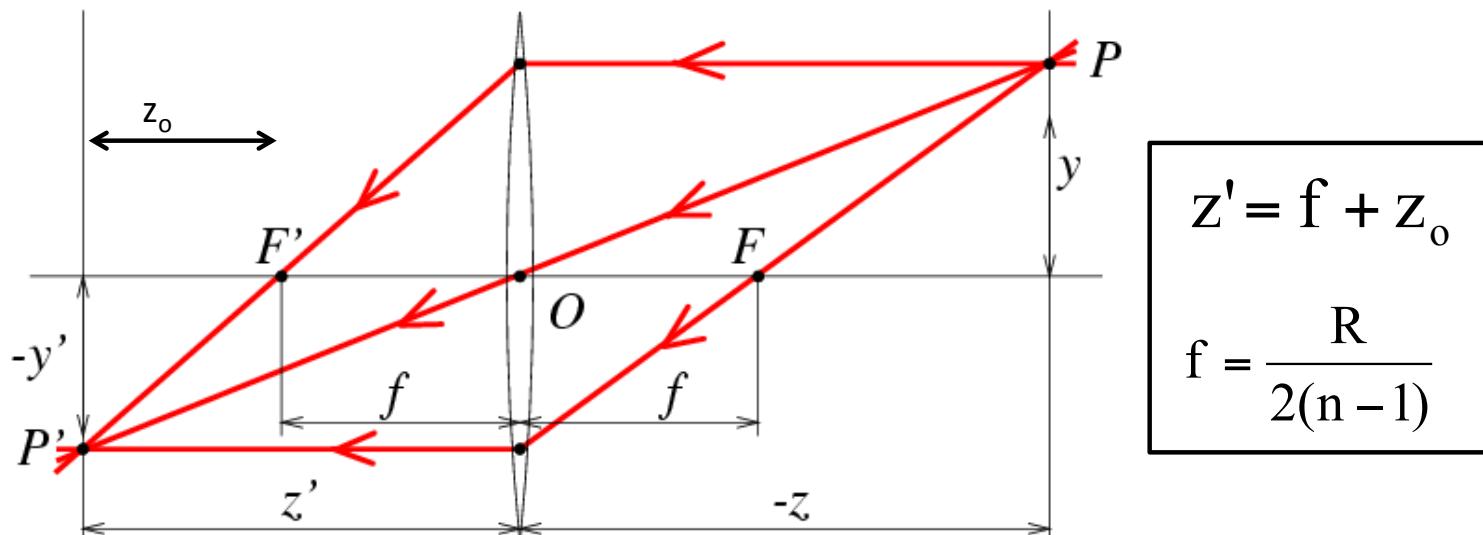
$\alpha_2$  = refraction angle

$n_i$  = index of refraction



# CAMERA – LENTILLES

- Lentilles fines [4]



Snell's law:

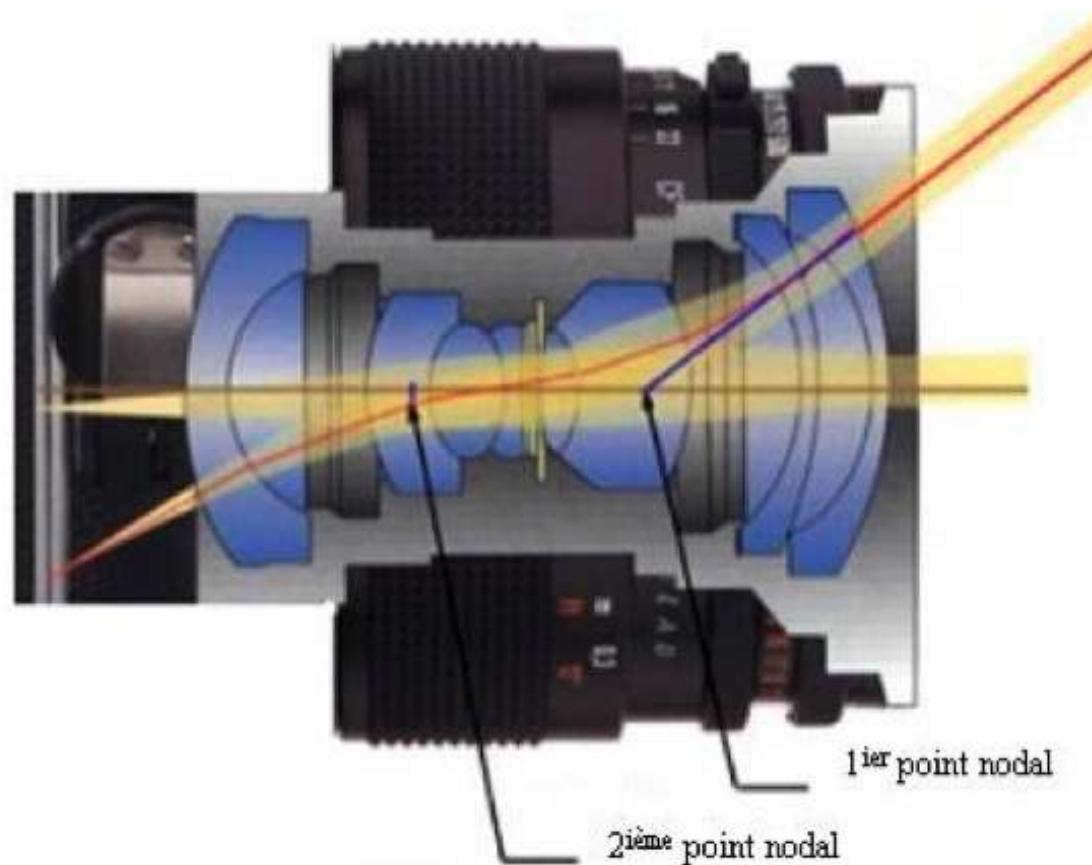
$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Small angles:} \\ n_1 \alpha_1 \approx n_2 \alpha_2 \\ n_2 = n \text{ (lens)} \\ n_1 = 1 \text{ (air)} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = z' \frac{x}{z} \\ y' = z' \frac{y}{z} \end{array} \right.$$

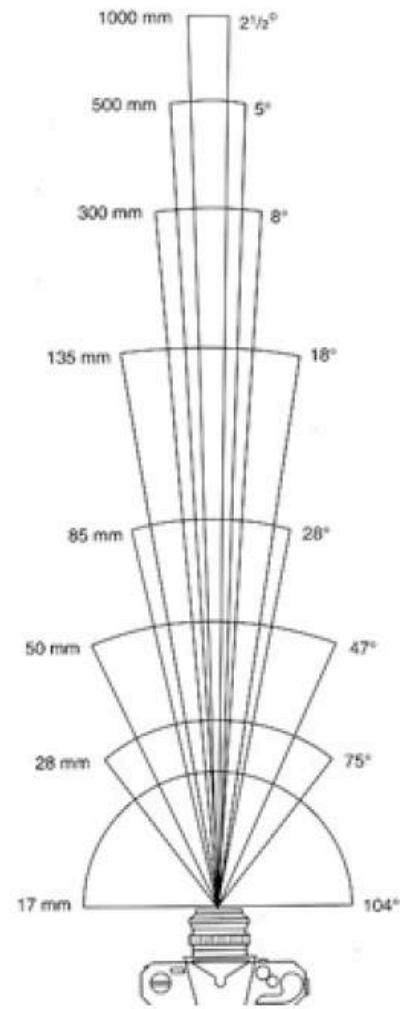
# CAMÉRA - LENTILLES [1]

- Caméra : hypothèse simplificatrice du point focal



# PROJECTIONS 3D VERS 2D [4]

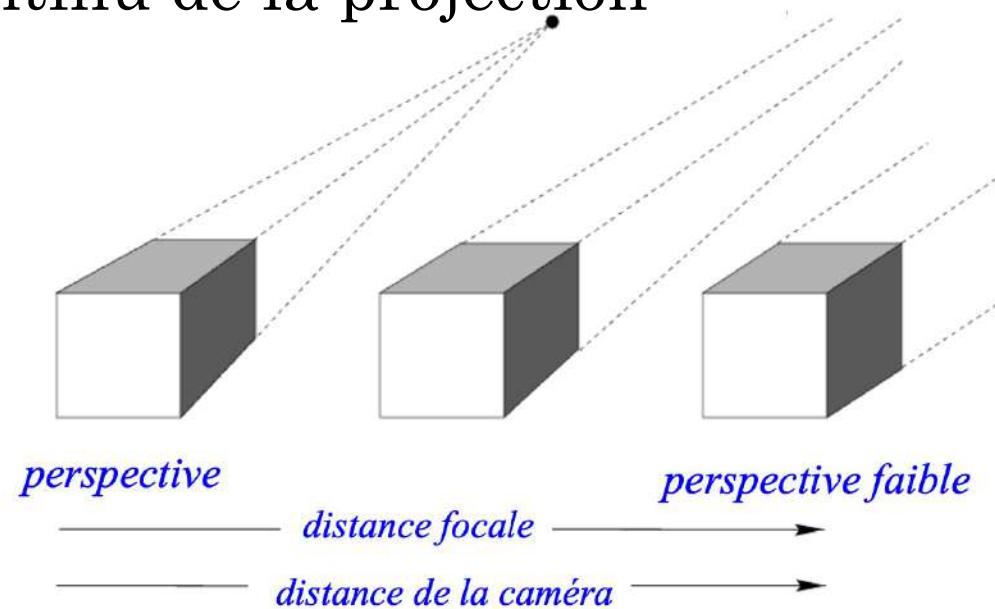
## ○ Angle de vue



**From London and Upton**

# PROJECTIONS 3D VERS 2D

- Modèle continu de la projection



# PROFONDEUR DE CHAMP



*Faible profondeur de champ*



*Grande profondeur de champ*

Source : Sébastien Roy, Vision 3D, Université de Montréal (Canada)

# PROFONDEUR DE CHAMP

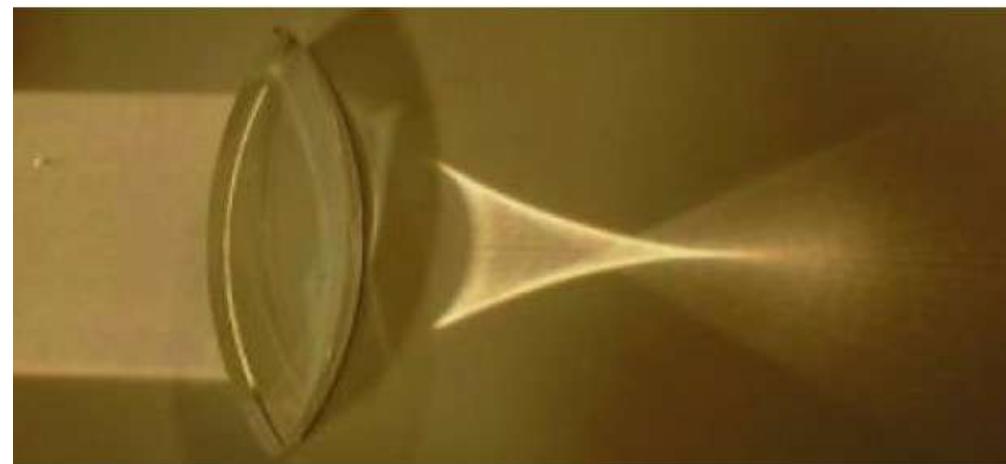


Même profondeur de champ  
Variation de la distance focale

*Source : Benoit Telle.*

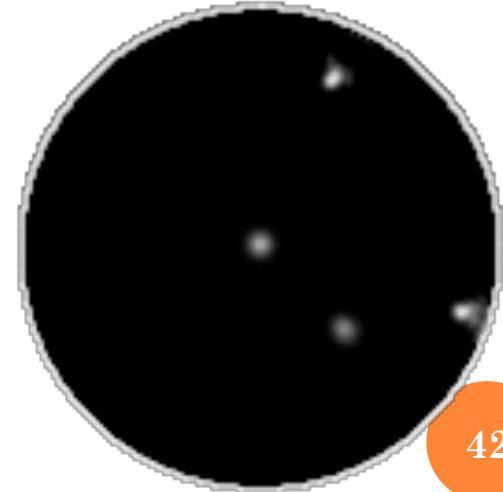
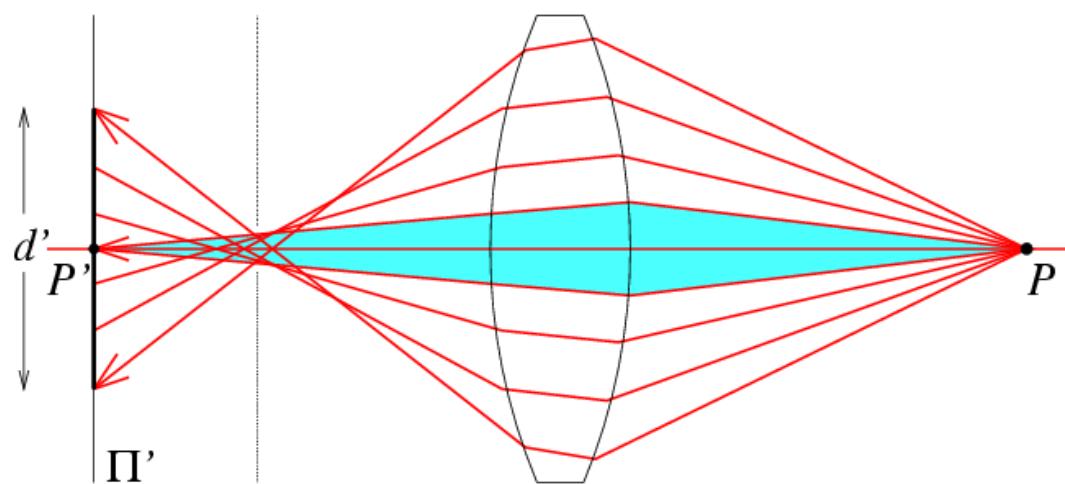
# CAMERA – DISTORTIONS [1]

- Distorsions ou aberration géométrique
  - Aberration sphérique
  - Astigmatisme
  - Aberration chromatique



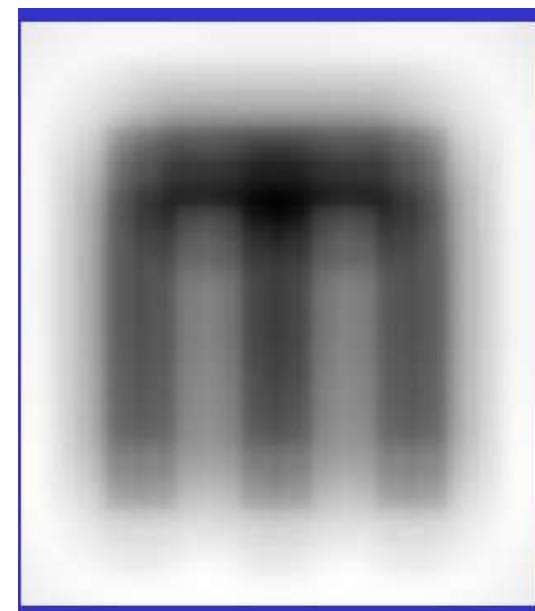
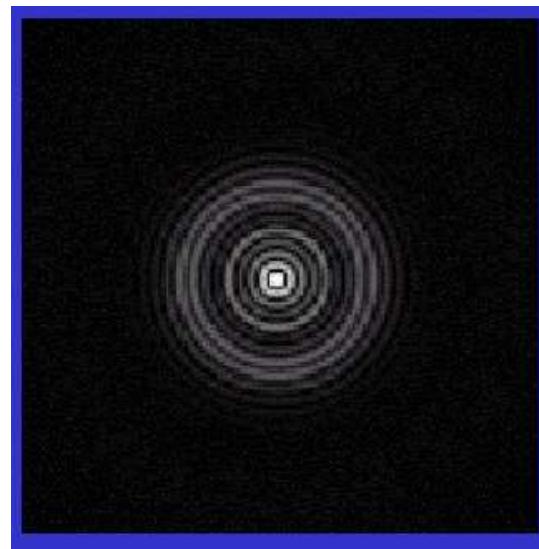
## CAMERA – DISTORTIONS [1,2]

- Distorsions ou aberration géométrique
  - Aberration sphérique : est provoquée essentiellement par les rayons convergents de la périphérie de la lentille. Il apparaît ensuite sur la matrice CCD une auréole connue sous l'appellation de Halo.



## CAMERA – DISTORTIONS [4]

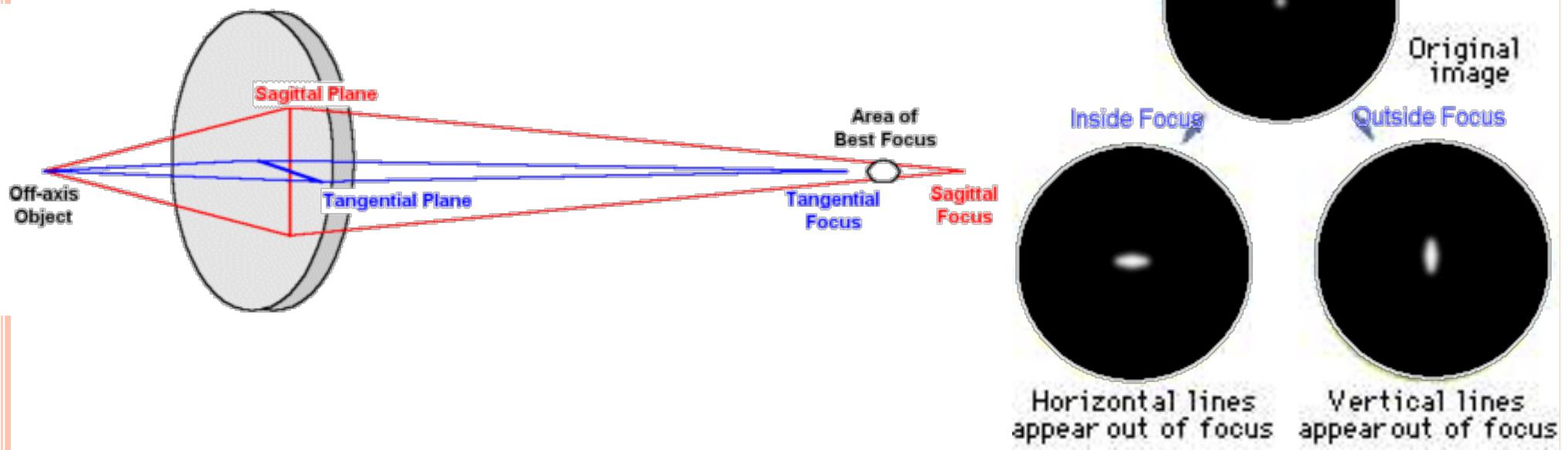
- Distorsions ou aberration géométrique



# CAMERA – DISTORTIONS [1]

## ○ Distorsions ou aberration géométrique

- Astigmatisme : est généré soit par le défaut de contact entre association de lentilles soit par différences de focales selon les directions et se caractérise sur la matrice CCD par une image légèrement dilatée.



# CAMERA – DISTORTIONS [1,2]

## ○ Distorsions ou aberration géométrique

- Aberration chromatique : est causée par l'indice de réfraction des lentilles qui subdivisent la lumière blanche en plusieurs faisceaux lumineux monochromatiques. De part leurs longueurs d'onde différentes, ces faisceaux ne se rejoignent pas au même point.

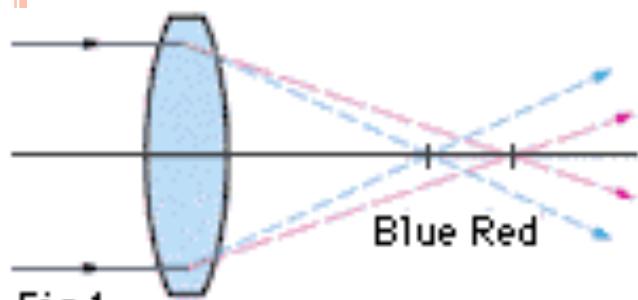


Fig.1  
Axial chromatic aderration

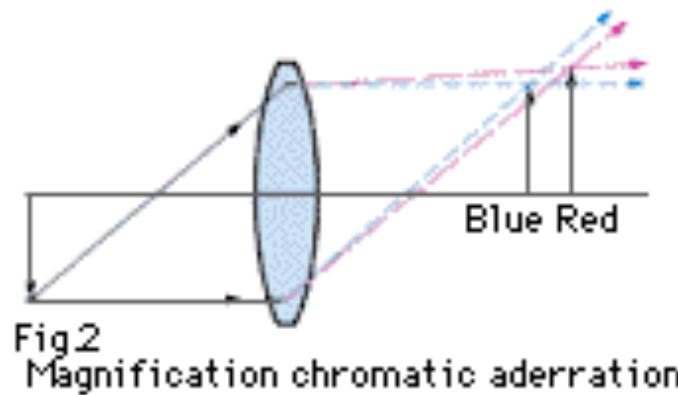


Fig.2  
Magnification chromatic aderration

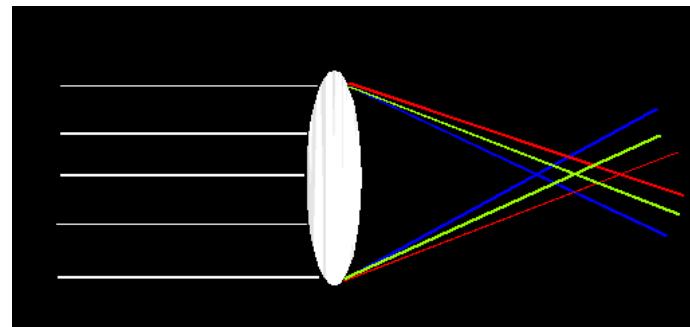


The image is blurred and appears colored at the fringe.

# CAMERA – DISTORTIONS

- Distorsions ou aberration géométrique
  - Aberration chromatique [4]
    - Lens has different refractive indices for different wavelengths: causes color fringing

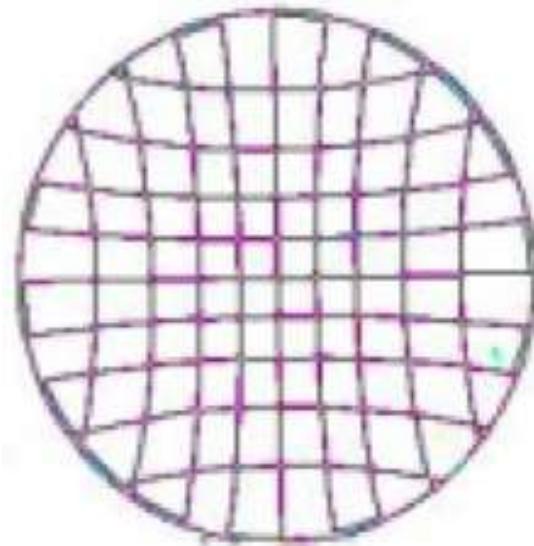
$$f = \frac{R}{2(n - 1)}$$



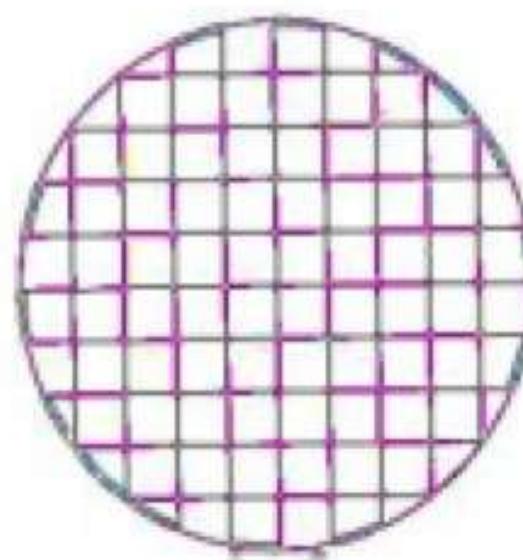
# CAMERA – DISTORTIONS [1]

- Le phénomène de distorsion

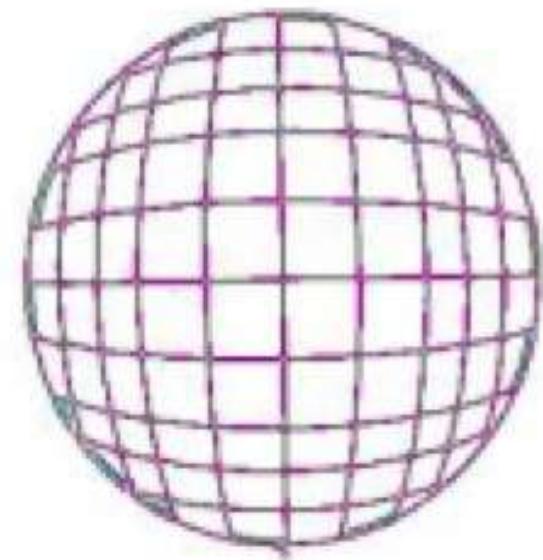
■ décentrage



Normal ou corrigé

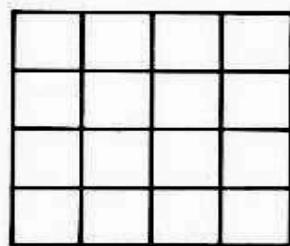


effet de loupe

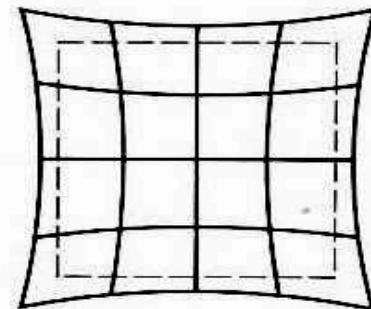


# CAMERA – DISTORTIONS [4]

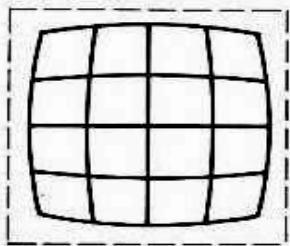
- Deviations are most noticeable for rays that pass through the edge of the lens



No distortion



Pin cushion



Barrel (fisheye lens)

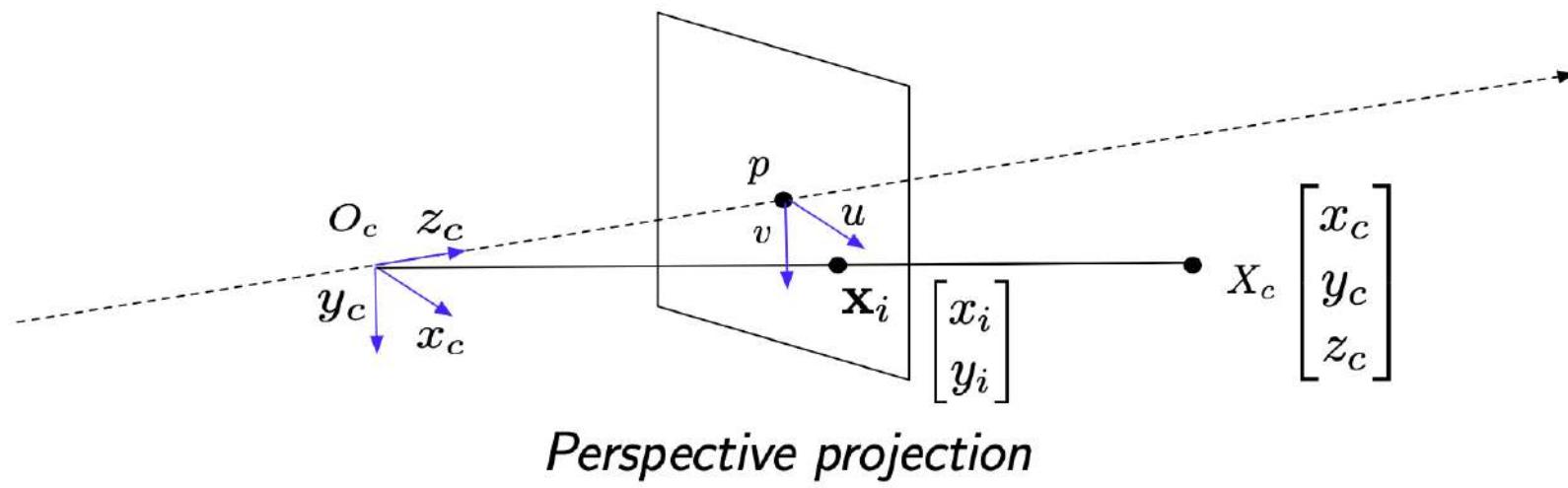
Image magnification  
decreases with distance from  
the optical axis



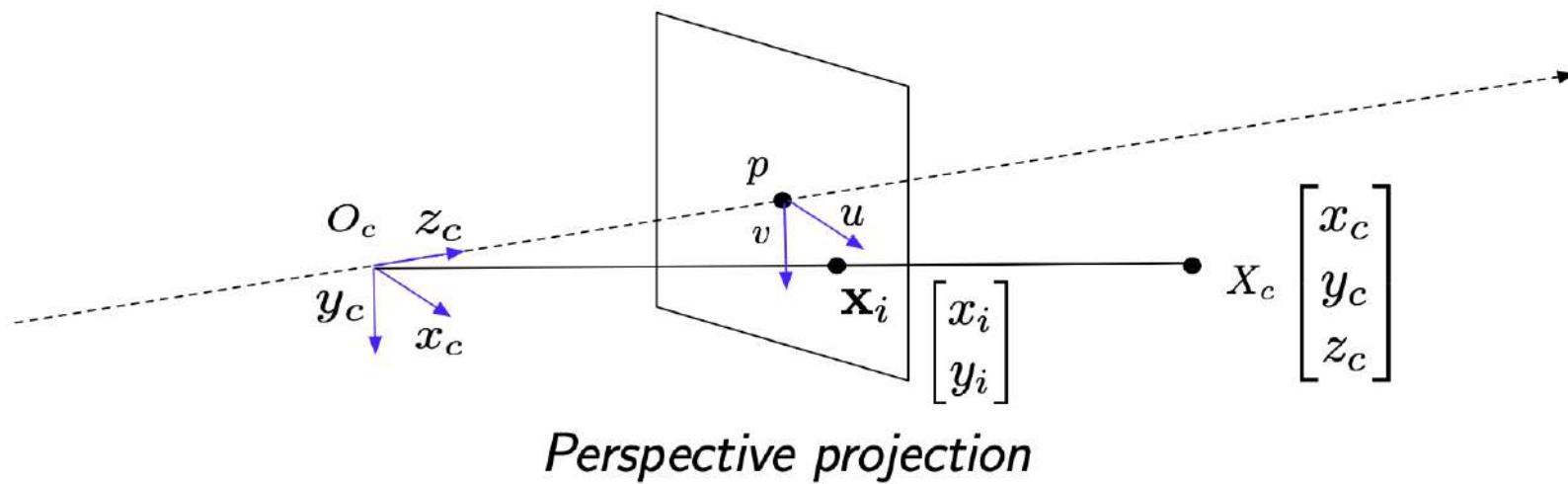
# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

# GÉOMÉTRIE – PROJECTION MONDE VERS IMAGE [5]



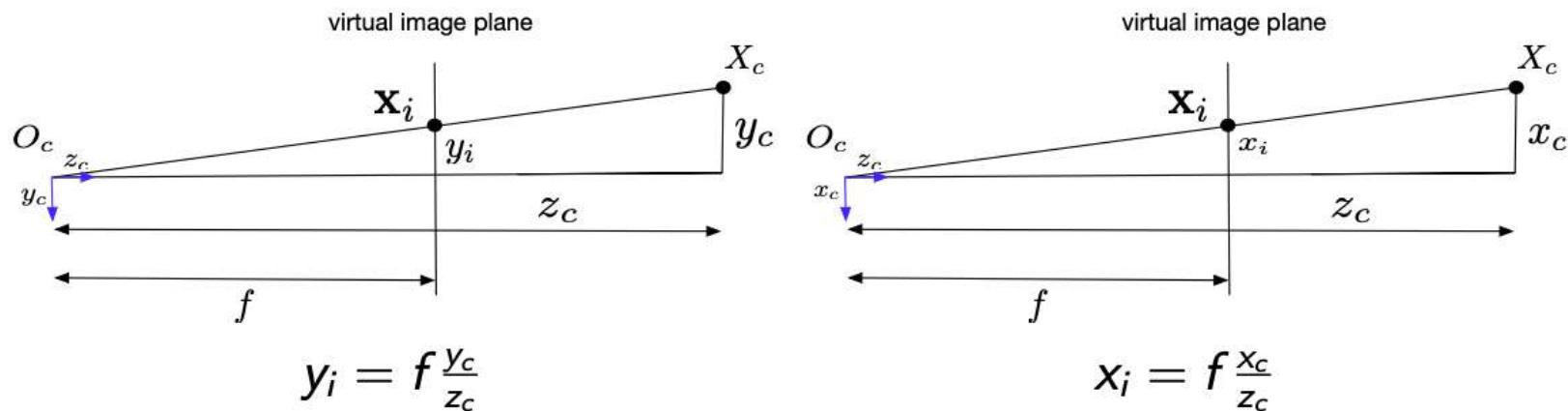
# GÉOMÉTRIE – PROJECTION MONDE VERS IMAGE [5]



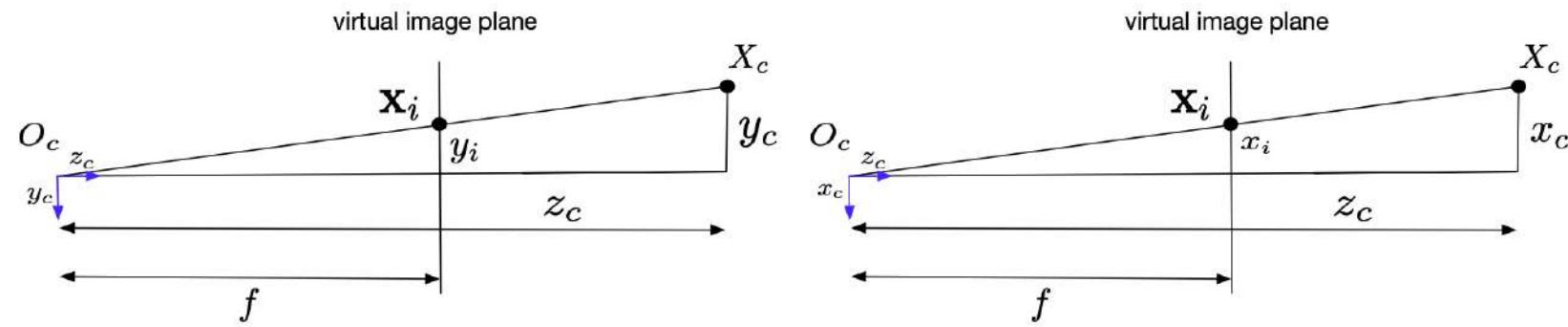
- Calibration
  - Modéliser la géométrie de la caméra
  - Modélisation des distorsions de la lentille

# GÉOMÉTRIE – PROJECTION MONDE VERS IMAGE

## [5] - LIEN ENTRE LE POINT VISUALISÉ ET LE POINT SUR L'IMAGE



# LIEN ENTRE LE POINT VISUALISÉ ET LE POINT SUR L'IMAGE

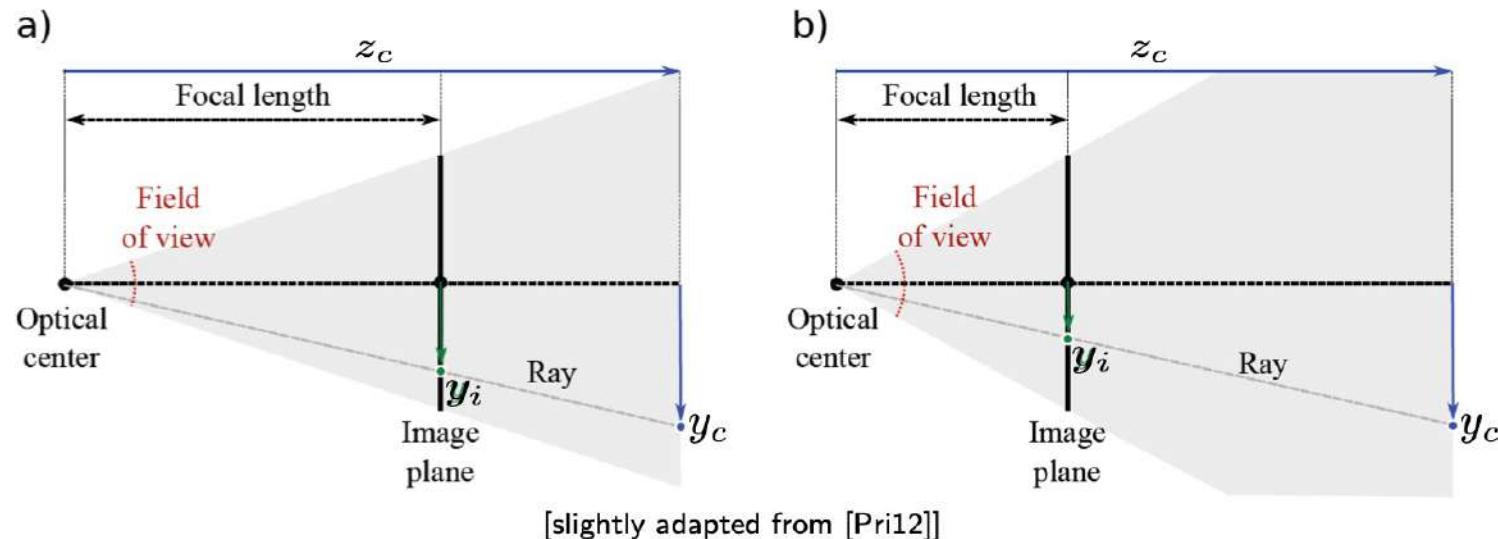


$$y_i = f \frac{y_c}{z_c}$$

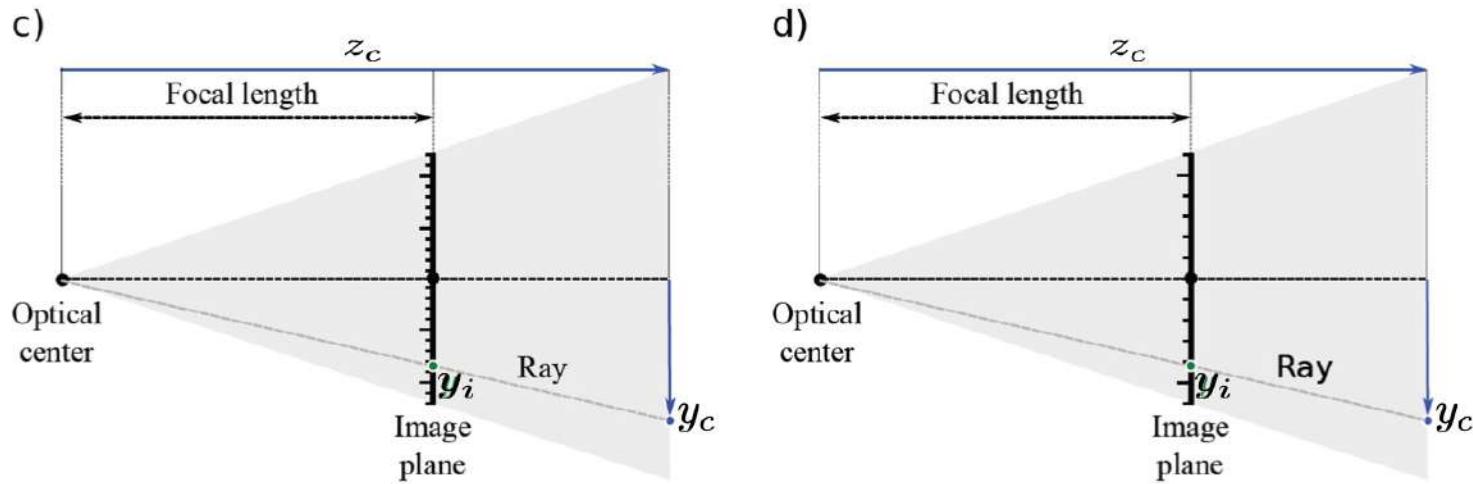
$$x_i = f \frac{x_c}{z_c}$$

$x_i, y_i, x_c, y_c$  and  $z_c$  are measured in the same real-world units  
(e.g. mm)

# LIEN ENTRE LE POINT VISUALISÉ ET LE POINT SUR L'IMAGE - DISTANCE FOCALE ET ESPACEMENT DES PHOTORÉCEPTEURS [5]



# LIEN ENTRE LE POINT VISUALISÉ ET LE POINT SUR L'IMAGE - DISTANCE FOCALE ET ESPACEMENT DES PHOTORÉCEPTEURS [5]



[slightly adapted from [Pri12]]

# LIEN ENTRE LE POINT VISUALISÉ ET LE POINT SUR L'IMAGE – UNITÉ EN PIXEL SUR L'IMAGE [5]

- Des pixels rectangulaires

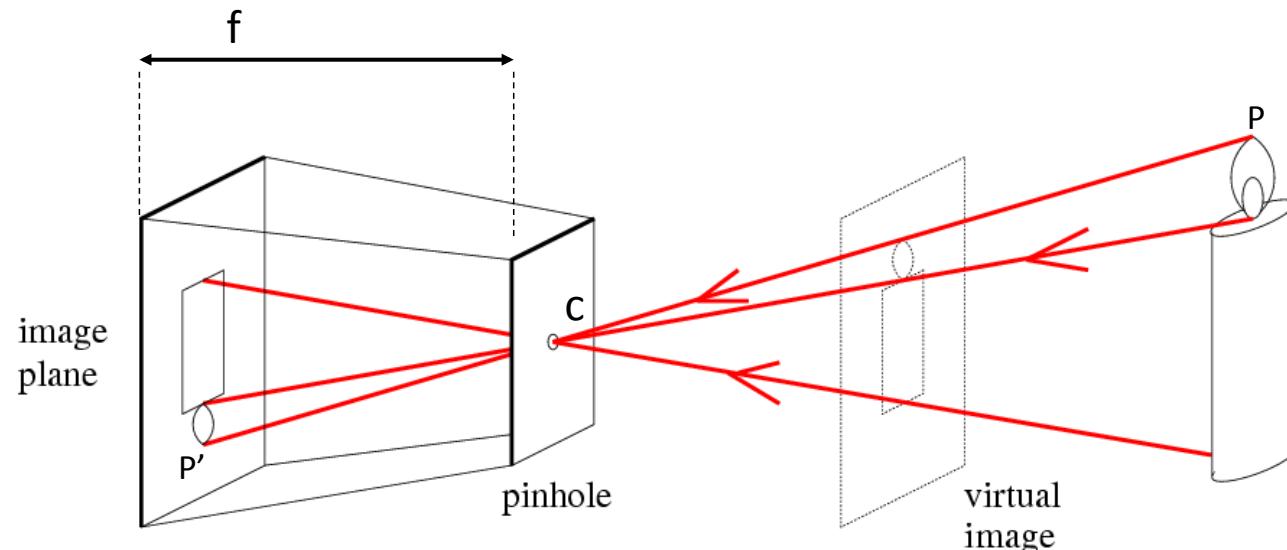
- deux longueurs focales différentes : fx et fy
- $fx = f \cdot sx$  et  $fy = f \cdot sy$  avec
  - f la distance focale physique dans l'unité du monde réel choisie (par exemple, mm)
  - sx (resp. sy) la taille des éléments individuels de l'imageur le long de x (resp. y) en px/unité du monde réel choisie (par exemple, px/mm).
- Seules fx et fy peuvent être calculées par le processus de calibrage.

$$u = f_x \frac{x_c}{z_c}$$

$$v = f_y \frac{y_c}{z_c}$$

# GÉOMÉTRIE – PROJECTION MONDE VERS IMAGE

- Mise en correspondance d'un point du monde avec un point image



$f$  = focal length  
 $c$  = center of the camera

$$P = (x, y, z) \rightarrow P' = \left( f \frac{x}{z}, f \frac{y}{z} \right)$$

$$\mathfrak{R}^3 \xrightarrow{E} \mathfrak{R}^2$$

[extrait de [4]]

# GÉOMÉTRIE – PROJECTION MONDE VERS IMAGE

- Mise en correspondance d'un point du monde avec un point image
  - Est-ce une transformation linéaire ?

$$P = (x, y, z) \rightarrow P' = \left( f \frac{x}{z}, f \frac{y}{z} \right)$$

Non – une division par z est non-linéaire

Comment le rendre linéaire ?

# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

## GÉOMÉTRIE – COORDONNÉES HOMOGÈNES [4]

- En général, une multiplication de matrice permet une combinaison linéaire de vecteurs

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

- C'est suffisant pour le changement d'échelle, la rotation et la déformation
- Mais on ne peut pas ajouter de constante

## GÉOMÉTRIE – COORDONNÉES HOMOGÈNES [4]

- Augmenter d'une dimension

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Fonctionne pour le changement d'échelle, la rotation, la déformation ET la translation
- Cette forme est appelée “coordonnées homogènes”

## GÉOMÉTRIE – COORDONNÉES HOMOGÈNES [4]

- En coordonnées homogènes, la dernière colonne de la matrice correspond à un vecteur qui est ajouté

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Généralement, une matrice de transformation en coordonnées homogènes a une dernière ligne de la forme [0 0 1], ce qui donne aussi un “1” dans le vecteur résultat

## GÉOMÉTRIE – COORDONNÉES HOMOGÈNES [4]

- Une autre chose que nous pourrions avoir besoin de faire : diviser le résultat par quelque chose
  - Par exemple, nous pourrions vouloir diviser par une coordonnée pour diminuer l'échelle de représentation quand un objet est plus loin de la caméra
  - Une multiplication de matrice ne permet pas de diviser
  - Ainsi, par convention, en coordonnées homogènes, on divise le résultat par la dernière coordonnée après une multiplication de matrice

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x/7 \\ y/7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## GÉOMÉTRIE – COORDONNÉES HOMOGÈNES [4]

$$(x, y) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

homogeneous image  
coordinates

$$(x, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

homogeneous scene  
coordinates

- Conversion à partir de coordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

# REPRÉSENTATION EN COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

- $X_c = [x_c, y_c, z_c]^T$  correspond to  $\mathbf{x}_{i_{pix}} = [u, v]^T = [f_x \frac{x_c}{z_c}, f_y \frac{y_c}{z_c}]^T$
- non-linear operation ( $/z_c$ )  $\rightarrow$  perspective projection
- Use homogeneous coordinates to get a linear form (add one dimension).

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

- conversion from homogeneous coordinates

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u/w \\ v/w \\ 1 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \\ 1 \end{bmatrix}$$

# REPRÉSENTATION EN COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

- Using homogeneous coordinates

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \frac{x_c}{z_c} \\ f_y \frac{y_c}{z_c} \end{bmatrix}$$

can be expressed in a matrix form

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{bmatrix} f_x & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}$$

# REPRÉSENTATION EN COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

- Using homogeneous coordinates

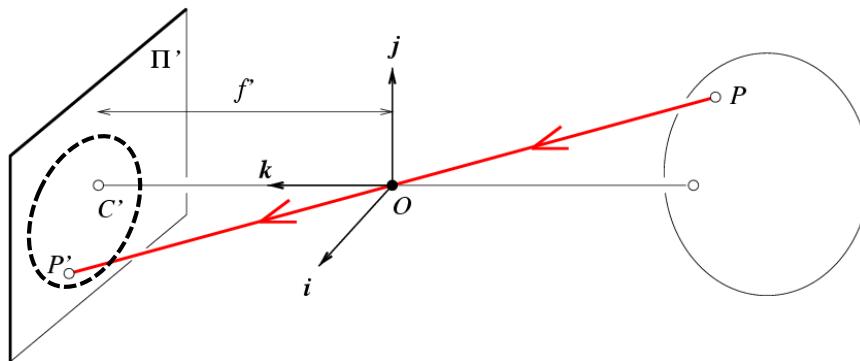
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \frac{x_c}{z_c} \\ f_y \frac{y_c}{z_c} \end{bmatrix}$$

can be expressed in a matrix form

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{bmatrix} f_x & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}$$

with  $\lambda$  a scale factor

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]



In Cartesian coordinates:

$$P = (x, y, z) \rightarrow P' = \left( f \frac{x}{z}, f \frac{y}{z} \right)$$

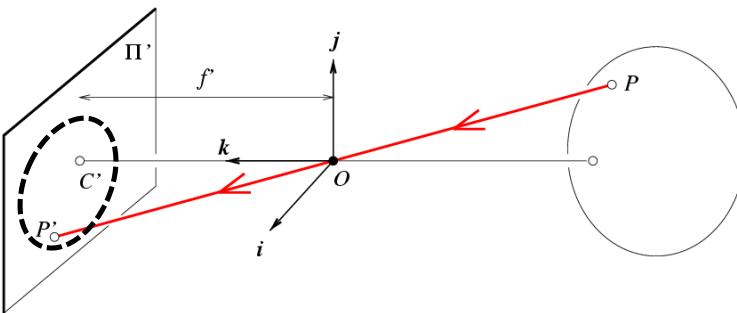
In homogeneous coordinates:

$$P' = \begin{bmatrix} f & x \\ f & y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

**“Projection matrix”**

$$P' = M P \quad \Re^4 \xrightarrow{H} \Re^3$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D'UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]



In homogeneous coordinates:

$$P' = \begin{bmatrix} f & x \\ f & y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

ideal world

## Intrinsic Assumptions

- Unit aspect ratio
- Optical center at (0,0)
- No skew

## Extrinsic Assumptions

- No rotation
- Camera at (0,0,0)

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]

- Suppression de l’hypothèse : centre optique connu

## Intrinsic Assumptions

- ~~Optical center at (0,0)~~
- **Optical center at  $(u_0, v_0)$**
- Square pixels
- No skew

## Extrinsic Assumptions

- No rotation
- Camera at  $(0,0,0)$

$$P' = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} P \xrightarrow{\text{ }} w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & u_0 \\ 0 & f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D'UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]

- Suppression de l'hypothèse : pixel carré

## Intrinsic Assumptions

- Optical center at  $(u_0, v_0)$
- Square pixels
- Rectangular pixels
- No skew

## Extrinsic Assumptions

- No rotation
- Camera at  $(0,0,0)$

$$P' = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} P \rightarrow w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = f_x \frac{x_c}{z_c} + u_0$$

$$v = f_y \frac{y_c}{z_c} + v_0$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D'UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]

- Suppression de l'hypothèse : pixel perpendiculaire

## Intrinsic Assumptions

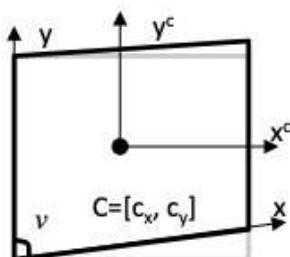
- Optical center at  $(u_0, v_0)$
- Rectangular pixels
- No skew
- Small skew

## Extrinsic Assumptions

- No rotation
- Camera at  $(0,0,0)$

$$P' = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} P \rightarrow$$

$$w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$u = f_x \frac{x_c + s \cdot y_c}{z_c} + u_0$$

$$v = f_y \frac{y_c}{z_c} + v_0$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D'UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]

- Suppression de l'hypothèse : pixel perpendiculaire

## Intrinsic Assumptions

- Optical center at  $(u_0, v_0)$
- Rectangular pixels
- Small skew

## Extrinsic Assumptions

- No rotation
- Camera at  $(0,0,0)$

$$P' = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} P \xrightarrow{\quad} w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 & 0 \\ 0 & \beta & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Intrinsic parameters

Linéaire !

## MODÈLE COMPLET STÉNOPÉ SOUS FORME DE MATRICE [5]

$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & s & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}$$

(linear!)

Matrice intrinsèque

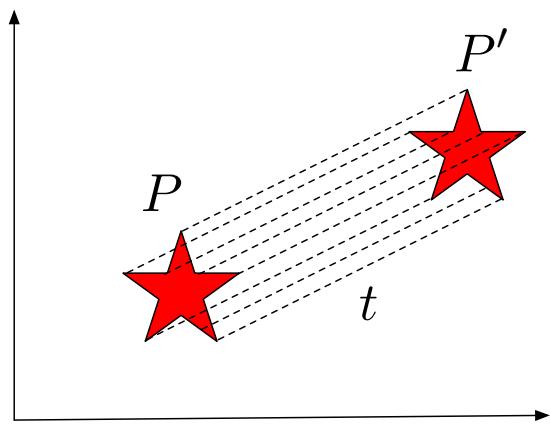
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & s & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

## 2D translation



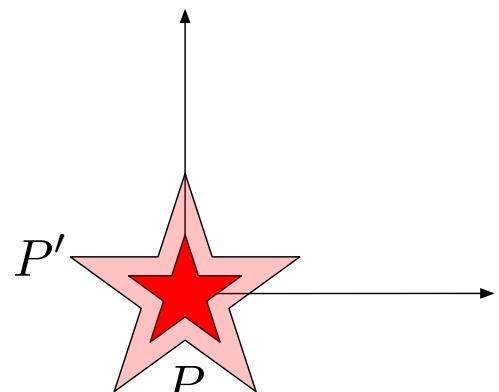
$$P = [x, y]^T \rightarrow [x, y, 1]^T$$
$$t = [t_x, t_y]^T \rightarrow [t_x, t_y, 1]^T$$
$$P' = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$P' = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \mathbf{T}.P$$

2 D.o.F

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

## 2D scale change



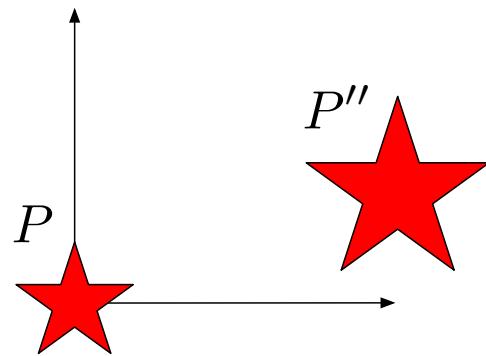
$$P = [x, y]^T \rightarrow [x, y, 1]^T$$
$$P' = [s_x \cdot x, s_y \cdot y]^T \rightarrow [s_x \cdot x, s_y \cdot y, 1]^T$$

$$P' = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} \mathbf{s} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P = \mathbf{S} \cdot P$$

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

2D scale change and translation



$$P'' = \mathbf{T}.P' = \mathbf{T}.\mathbf{S}.P$$

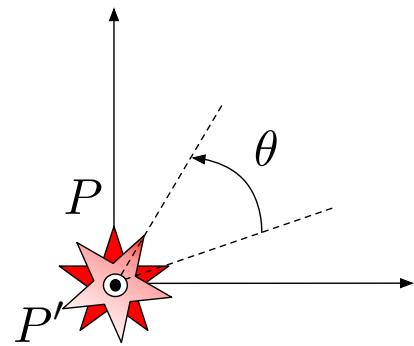
note :  $\mathbf{T}.\mathbf{S}.P \neq \mathbf{S}.\mathbf{T}.P$

$$\mathbf{T}.\mathbf{S}.P = \begin{bmatrix} s_x.x + t_x \\ s_y.y + t_y \\ 1 \end{bmatrix} \text{ and}$$

$$\mathbf{S}.\mathbf{T}.P = \begin{bmatrix} s_x.x + s_x.t_x \\ s_y.y + s_y.t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

2D rotation



$$P' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

1 D.o.F.

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

## 2D similarity

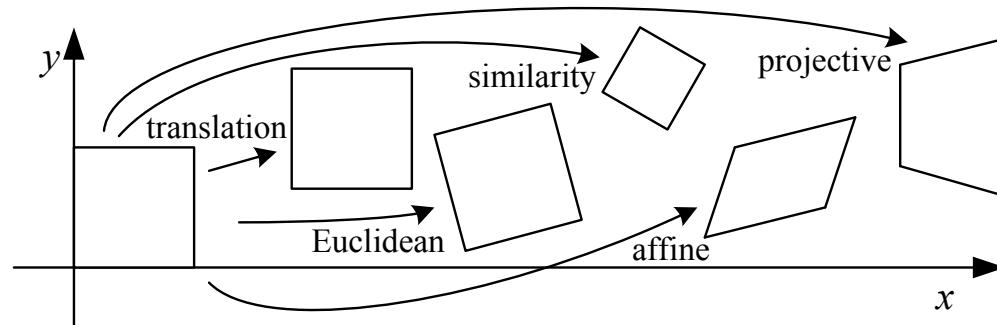
- Similarity = scale (with  $s_x = s_y$ ) + rotation + translation

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{S} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

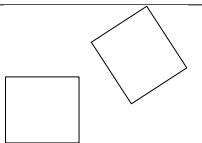
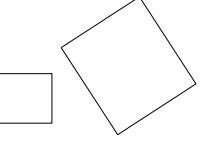
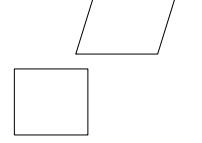
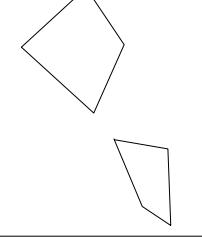
## 2D transformation summary



Extracted from [Sze10].

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

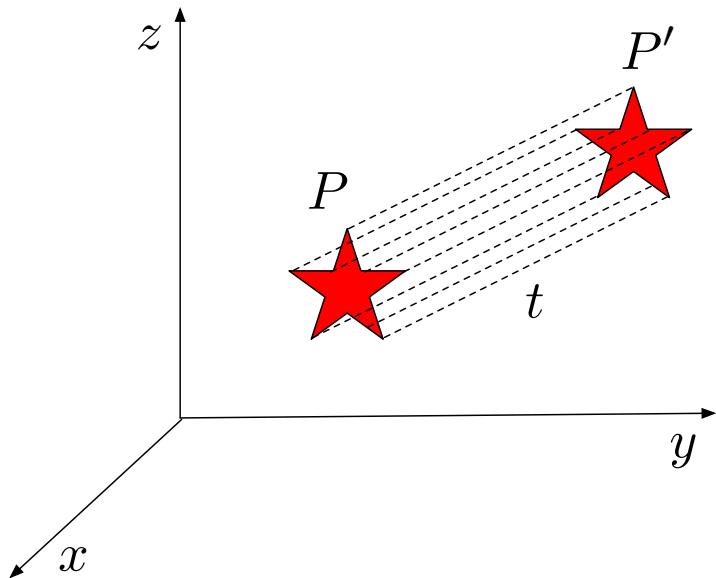
## 2D transformation summary

type	D.o.F.	matrix	transformed square	invariants
Euclidean	3	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		lengths, angles, parallelism, straight lines
Similarity	4	$\begin{bmatrix} s.r_{11} & s.r_{12} & t_x \\ s.r_{21} & s.r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		angles, parallelism, straight lines
Affine	6	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		parallelism, straight lines
Projective	8	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$		straight lines

Adapted from [Sze10, HZ04]

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

## 3D translation



$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \text{ and } t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

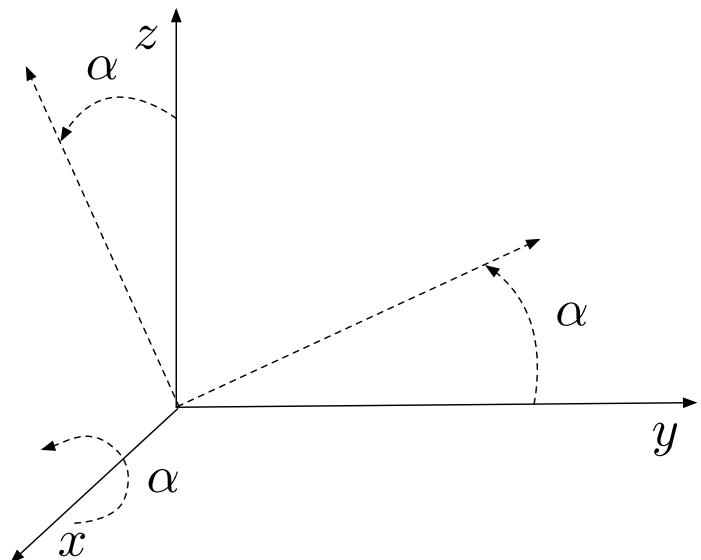
$$P' = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 D.o.F

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

## 3D rotation

Counter-clockwise rotation around coordinate axes

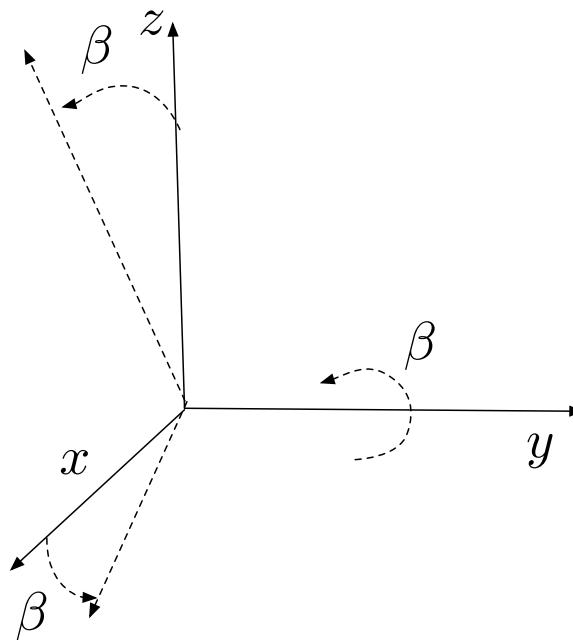


$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

## 3D rotation

Counter-clockwise rotation around coordinate axes



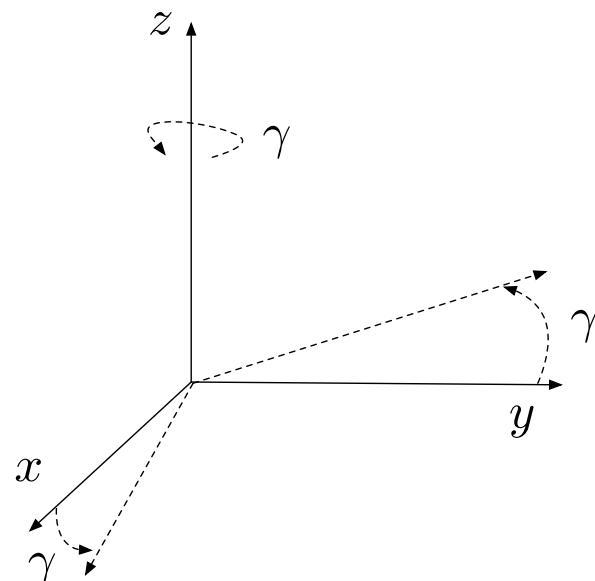
$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

## 3D rotation

Counter-clockwise rotation around coordinate axes



$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

## 3D rotation

$$P' = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \text{ with } \mathbf{R} = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha) \text{ or}$$

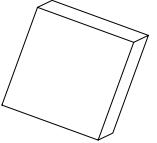
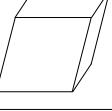
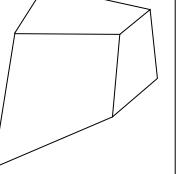
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

Simplified notation :  $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

Reminder :  $R^T R = R R^T = I$

# TRANSFORMATIONS EN UTILISANT DES COORDONNÉES HOMOGÈNES [5]

## 3D transformation summary

type	D.o.F.	matrix	transformed cube	invariants
Euclidean	6	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		lengths, angles, parallelism, straight lines
Similarity	7	$\begin{bmatrix} s.r_{11} & s.r_{12} & s.r_{13} & t_x \\ s.r_{21} & s.r_{22} & s.r_{23} & t_y \\ s.r_{31} & s.r_{32} & s.r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		angles, parallelism, straight lines
Affine	12	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		parallelism, straight lines
Projective	15	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$		straight lines

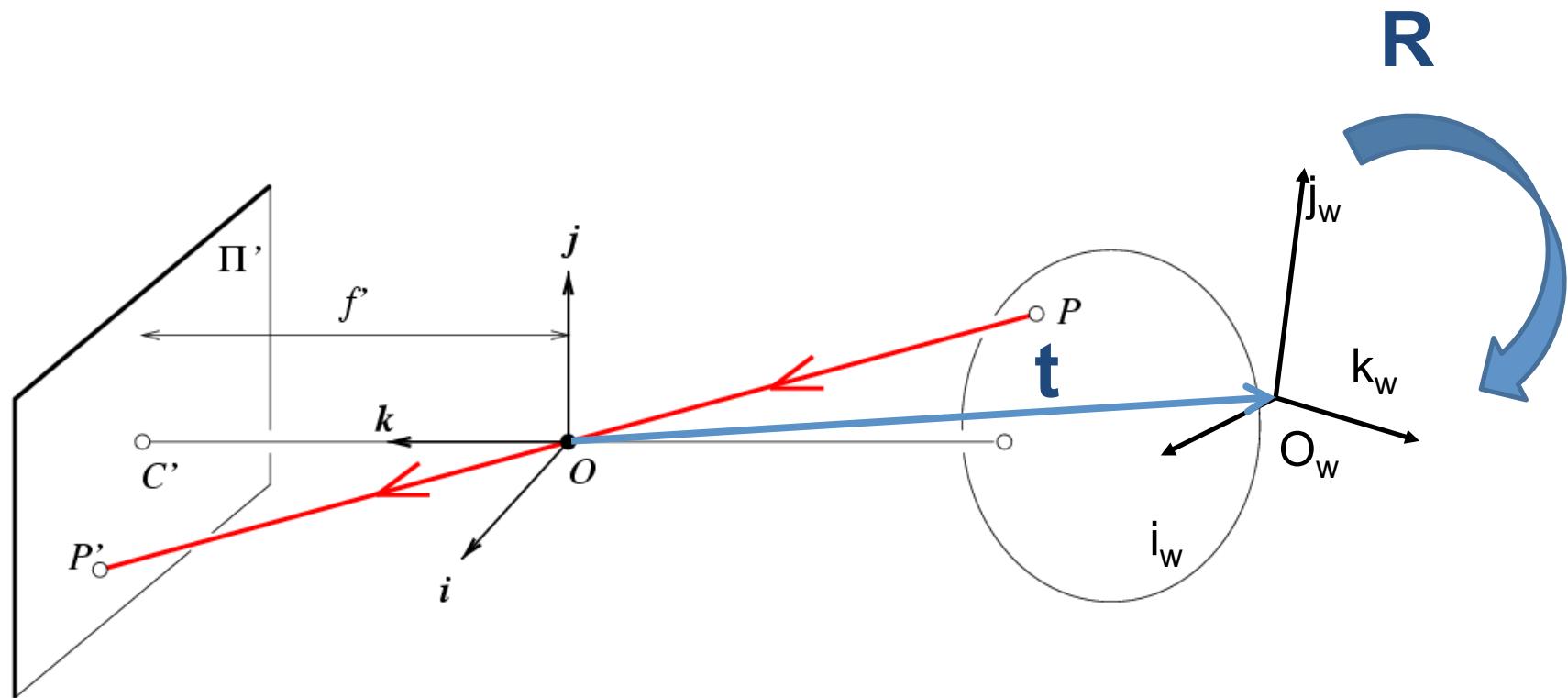
Adapted from [Sze10, HZ04]

# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

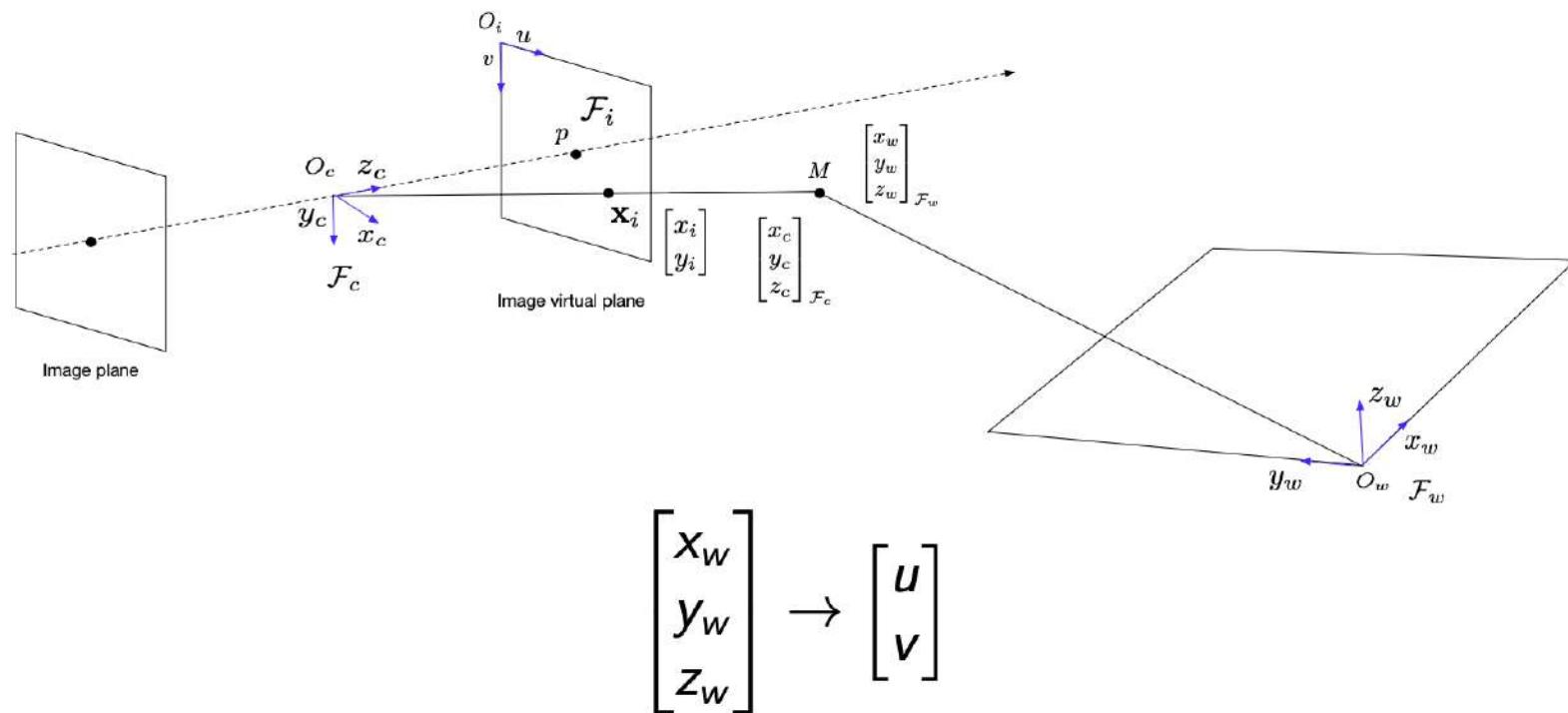
# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D'UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]

- Caméra réelle : translation + rotation



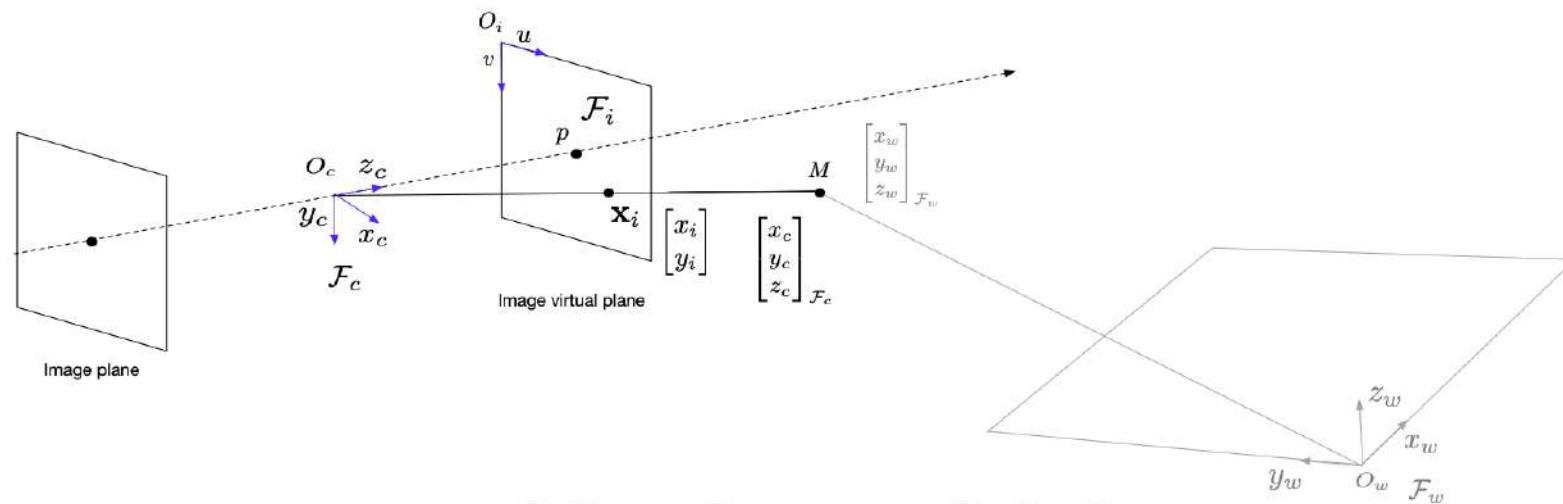
# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL – PARAMÈTRES EXTRINSEQUES [5]

What we want:



# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL – PARAMÈTRES EXTRINSEQUES [5]

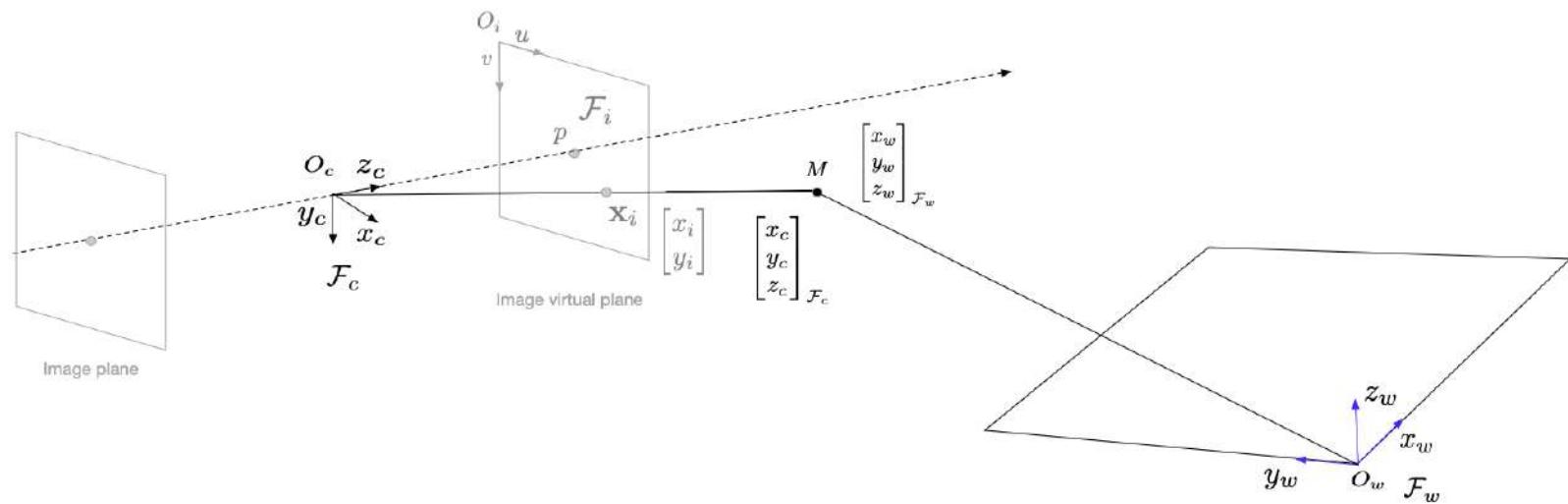
What we have:



$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & s & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL – PARAMÈTRES EXTRINSEQUES [5]

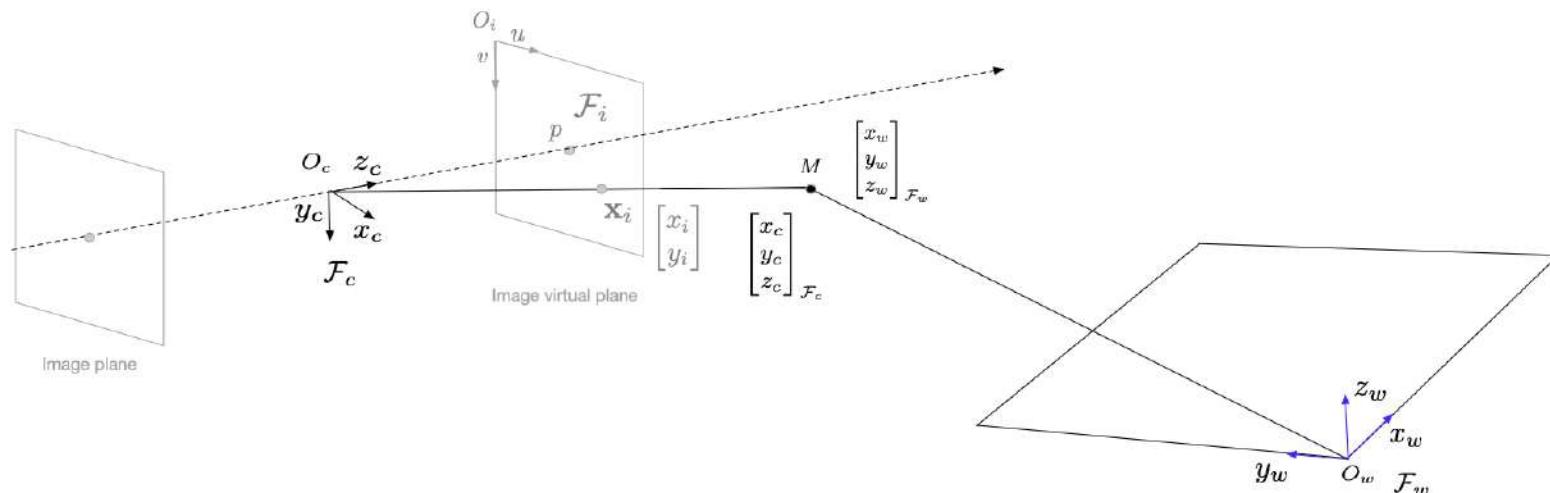
What is missing:



Position and orientation of the camera frame  $\mathcal{F}_c$   
in the world frame  $\mathcal{F}_w$ .

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL – PARAMÈTRES EXTRINSEQUES [5]

What is missing:

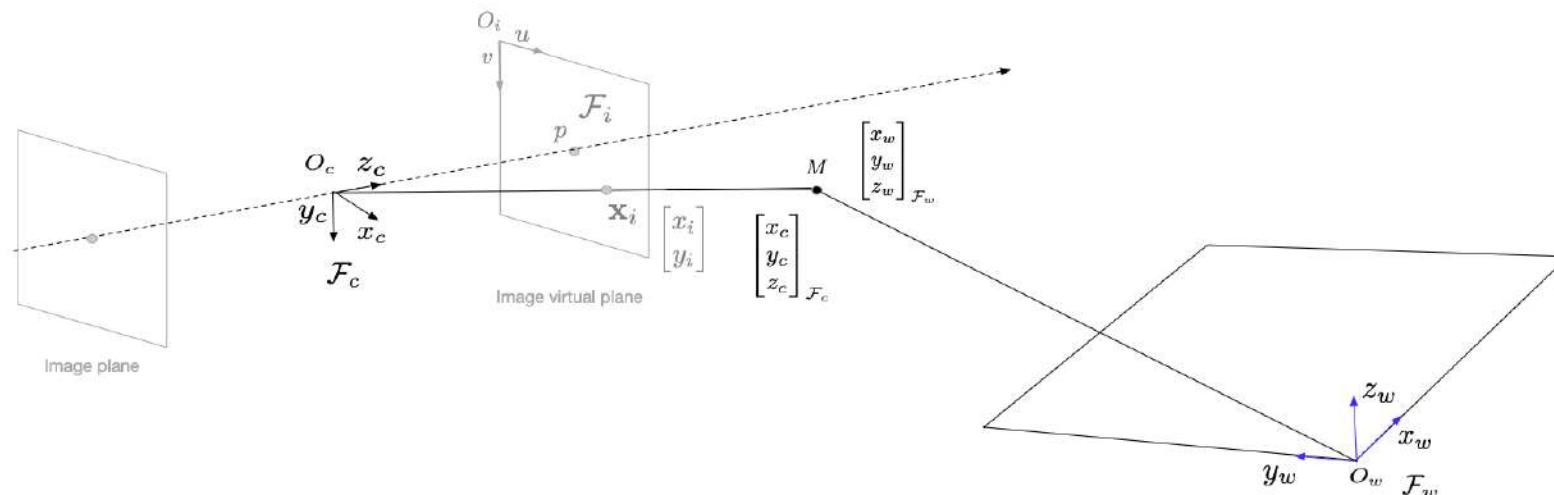


Position and orientation of the camera frame  $\mathcal{F}_c$   
in the world frame  $\mathcal{F}_w$ .

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL – PARAMÈTRES EXTRINSEQUES [5]

What is missing:



Position and orientation of the camera frame  $\mathcal{F}_c$   
in the world frame  $\mathcal{F}_w$ .

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \text{ with } \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ extrinsic parameters matrix.}$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]

- Suppression de l’hypothèse : autoriser la translation

## Intrinsic Assumptions

- Optical center at  $(u_0, v_0)$
- Rectangular pixels
- Small skew

## Extrinsic Assumptions

- No rotation
- Camera at  $(0,0,0) \rightarrow (t_x, t_y, t_z)$

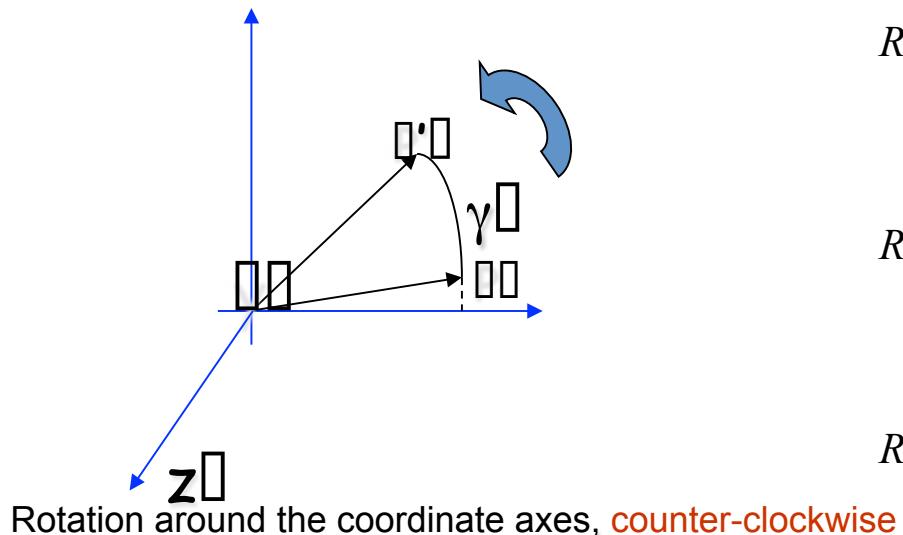
$$P' = K \begin{bmatrix} I & \bar{t} \end{bmatrix} P \quad \Rightarrow \quad w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]

- Suppression de l’hypothèse : autoriser la rotation

## Intrinsic Assumptions

- Optical center at  $(u_0, v_0)$
- Rectangular pixels
- Small skew



## Extrinsic Assumptions

- ~~No~~ rotation
- Camera at  $(t_x, t_y, t_z)$

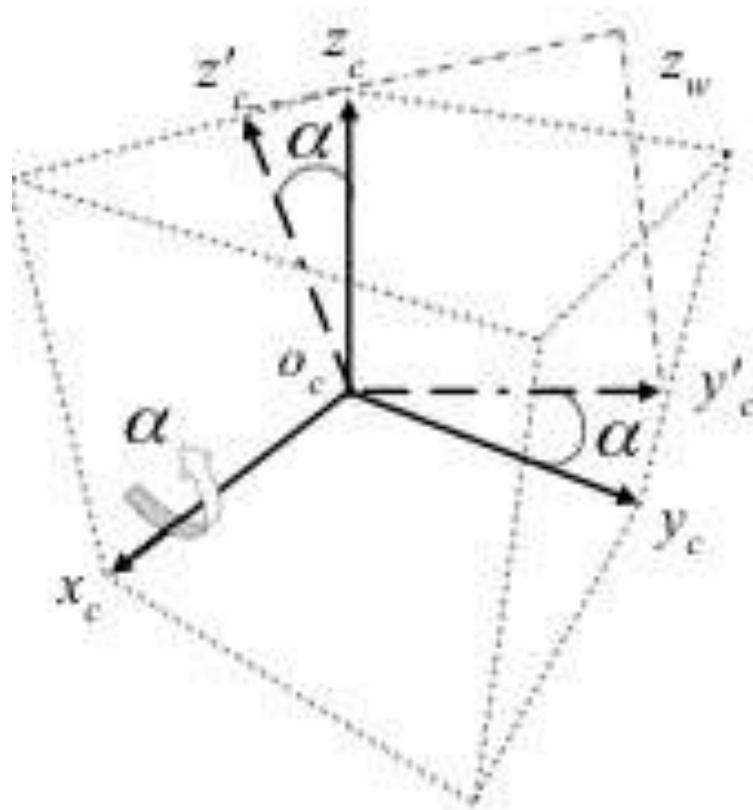
$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# GÉOMÉTRIE PROJECTIVE – VISION 3D [1]

Paramètres extrinsèques et rotation  $x_c$



$$x'_c = x_c$$

$$y'_c = y_c \cos \alpha - z_c \sin \alpha$$

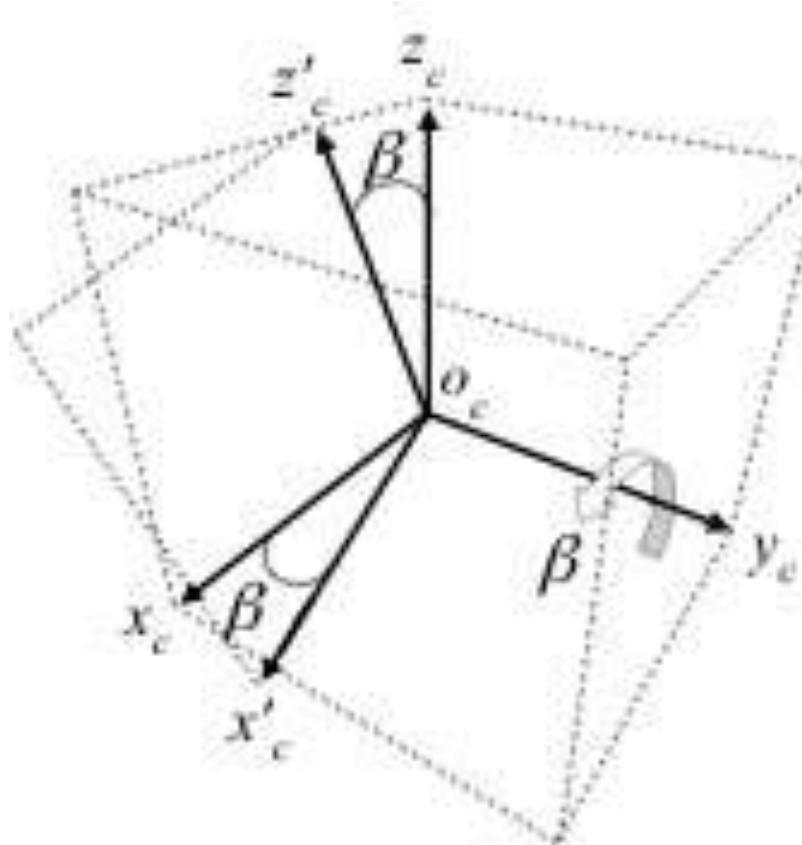
$$z'_c = y_c \sin \alpha + z_c \cos \alpha$$

$$R_{(x,\alpha)} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Traitement image

# GÉOMÉTRIE PROJECTIVE – VISION 3D [1]

Paramètres extrinsèques et rotation  $y_c$



$$x'_c = x_c \cos \beta + z_c \sin \beta$$

$$y'_c = y_c$$

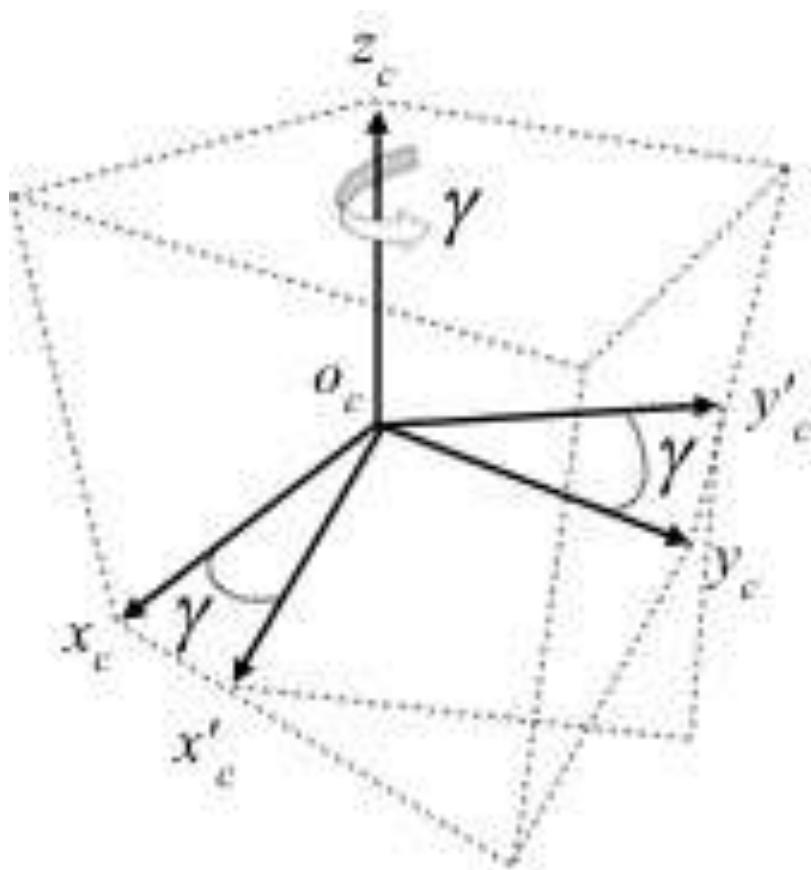
$$z'_c = -x_c \sin \beta + z_c \cos \beta$$

$$R_{(y, \beta)} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Traitement image

# GÉOMÉTRIE PROJECTIVE – VISION 3D [1]

Paramètres extrinsèques et rotation  $z_c$



$$x'_c = x_c \cos \gamma - y_c \sin \gamma$$

$$y'_c = y_c \sin \gamma + x_c \cos \gamma$$

$$z'_c = z_c$$

$$R_{(z,\gamma)} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traitement image

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]

- Suppression de l’hypothèse : autoriser la rotation

## Intrinsic Assumptions

- Optical center at  $(u_0, v_0)$
- Rectangular pixels
- Small skew

## Extrinsic Assumptions

- ~~No~~ rotation
- Camera at  $(t_x, t_y, t_z)$

$$P' = K \begin{bmatrix} R & \bar{t} \end{bmatrix} P \rightarrow w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D'UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]

- Matrice de projection générique

## Intrinsic Assumptions

- Optical center at  $(u_0, v_0)$
- Rectangular pixels
- Small skew

## Extrinsic Assumptions

- Allow rotation
- Camera at  $(t_x, t_y, t_z)$

$$P' = K \begin{bmatrix} R & \bar{t} \end{bmatrix} P \xrightarrow{\text{ }} w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# GÉOMÉTRIE PROJECTIVE – VISION 3D [1]

Paramètres extrinsèques et rotations

$$R_{(\alpha, \beta, \gamma)} = R_{(z, \gamma)} \cdot R_{(y, \beta)} \cdot R_{(x, \alpha)}$$

$$R_{(\alpha, \beta, \gamma)} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

Traitement image

Notation simplifiée

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D'UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL [4]

- Matrice de projection générique

## Intrinsic Assumptions

- Optical center at  $(u_0, v_0)$
- Rectangular pixels
- Small skew

## Extrinsic Assumptions

- Allow rotation
- Camera at  $(t_x, t_y, t_z)$

$$P' = K \begin{bmatrix} R & \bar{t} \end{bmatrix} P \xrightarrow{\text{ }} w \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & s & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

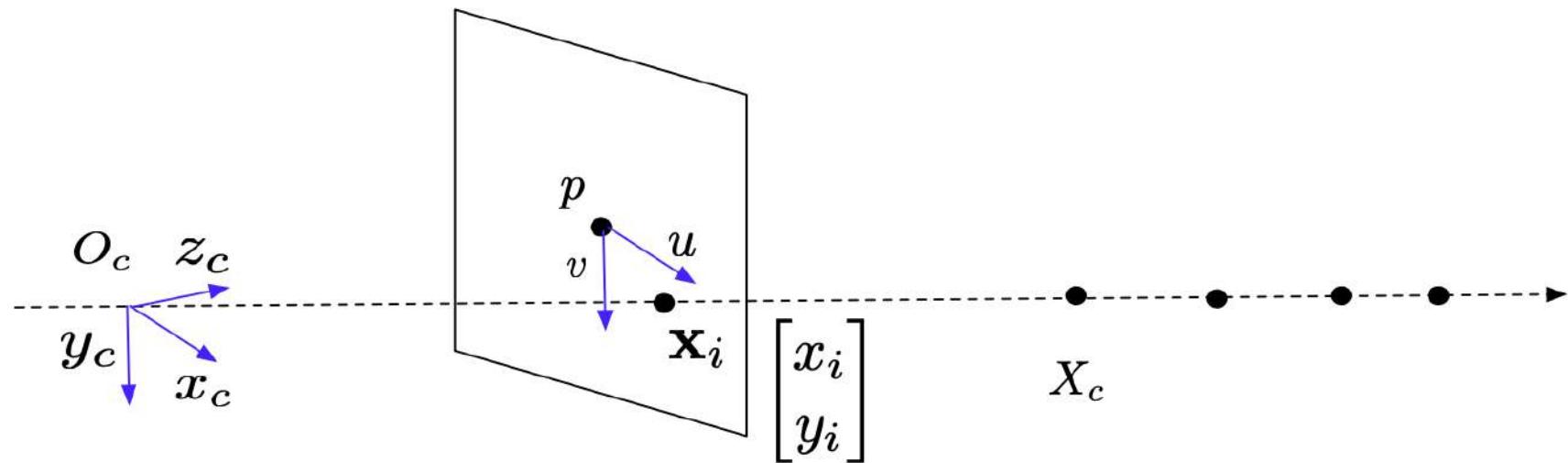
Nombre de degrés de liberté ?

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL – MATRICE DE LA CAMÉRA [5]

Finally we get :

$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL – MATRICE DE LA CAMÉRA [5]



All the 3D points on the same line passing through  $\mathbf{x}_i$  have the same image point.

# GÉOMÉTRIE – MISE EN CORRESPONDANCE D’UN POINT DU MONDE AVEC UN POINT SUR LE PLAN PRINCIPAL – MATRICE DE LA CAMÉRA [5]

$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda$  is a scale factor.
- $\mathbf{P} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}[\mathbf{R}|\mathbf{t}]$  is the camera matrix.
- $\mathbf{K}$  5 D.o.F. and  $\mathbf{R}$  3 D.o.F.,  $\mathbf{t}$  3 D.o.F.  
 $\Rightarrow$  11 D.o.F. in total (+1 for the scale)

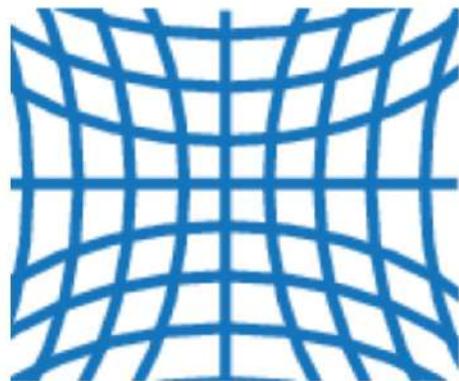
# DISTORTIONS DUES AUX LENTILLES [5]

- Real-world cameras are not pinhole: use of lenses
- Lenses introduce distortions:
  - ▶ Radial distortions
  - ▶ Tangential distortions

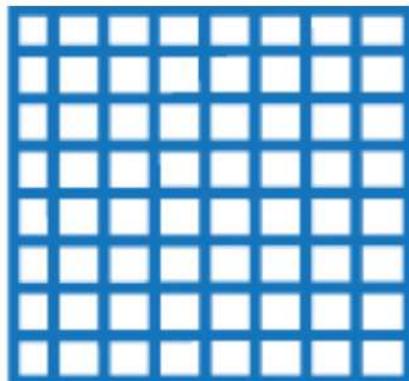


©Photo credits Nicolas Antigny

# DISTORSIONS DUES AUX LENTILLES - RADIALES [5]



Negative radial distortion  
“pincushion”



No distortion



Positive radial distortion  
“barrel”

©Mathworks source

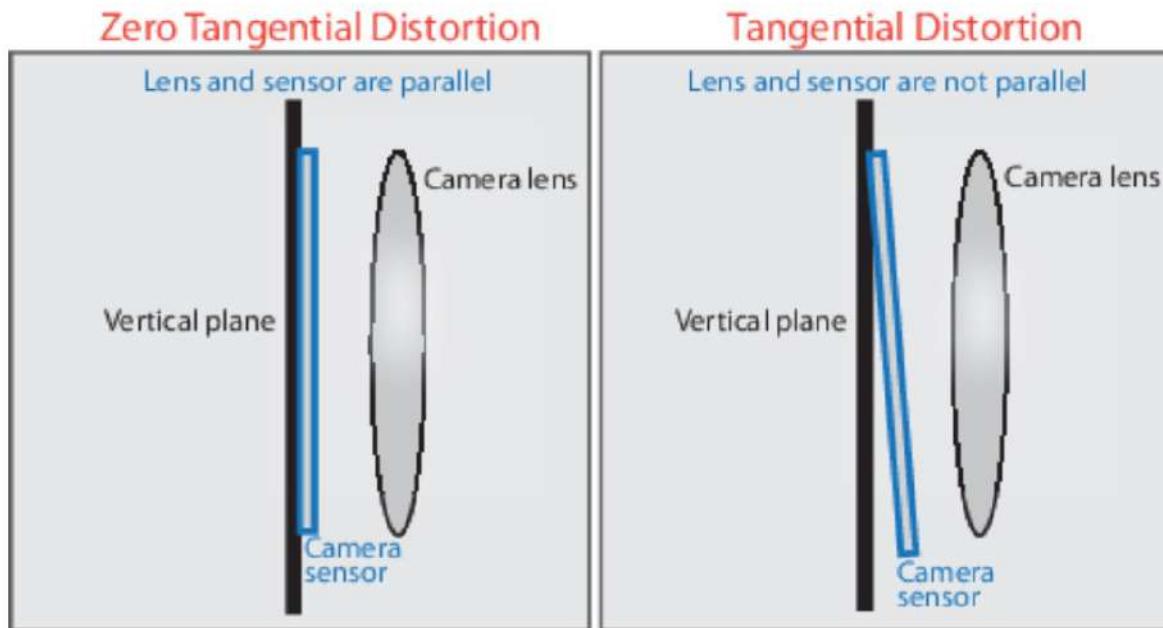
$$x_{final} = x(1 + k_1 * r^2 + k_2 * r^4 + k_3 * r^6)$$

$$y_{final} = y(1 + k_1 * r^2 + k_2 * r^4 + k_3 * r^6)$$

with  $k_1, k_2, k_3$  distortion coefficients and  $r$  distance to optical center

Note: This distortion is implemented after perspective projection but before the effect of the intrinsic parameters so the warping is relative to the optical axis and not the origin of the pixel coordinate system.

# DISTORSIONS DUES AUX LENTILLES - TANGENTIELLES [5]



©Mathworks source

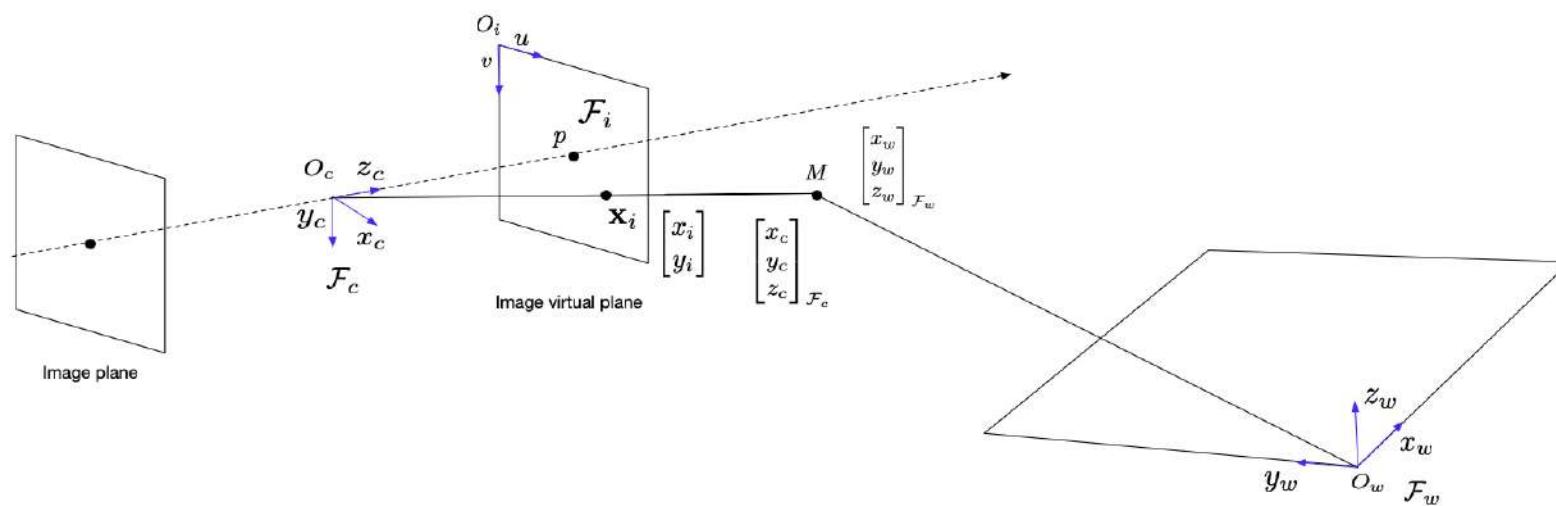
$$x_{final} = x + [2p_1y + p_2(r^2 + 2x^2)]$$
$$y_{final} = y + [p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2x]$$

with  $p_1, p_2$  tangential distortion parameters.

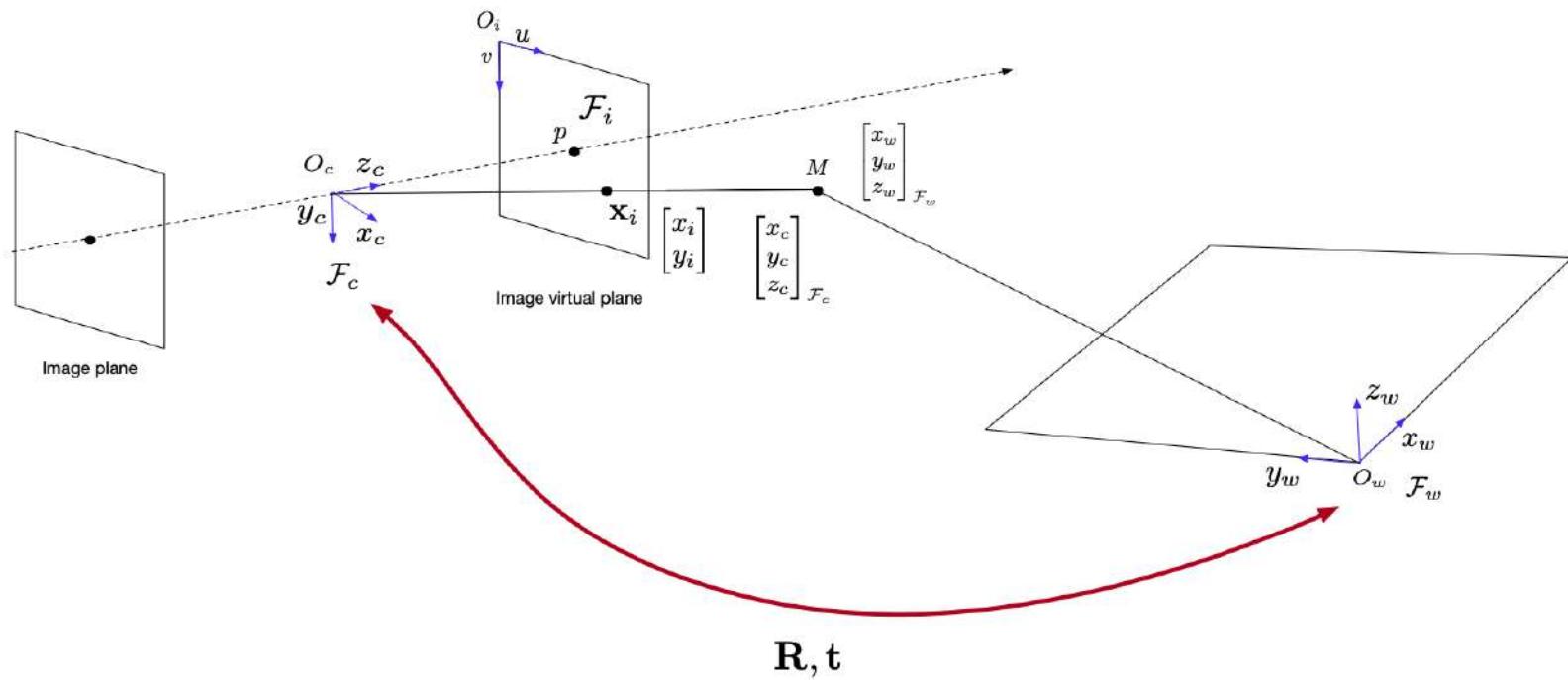
# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

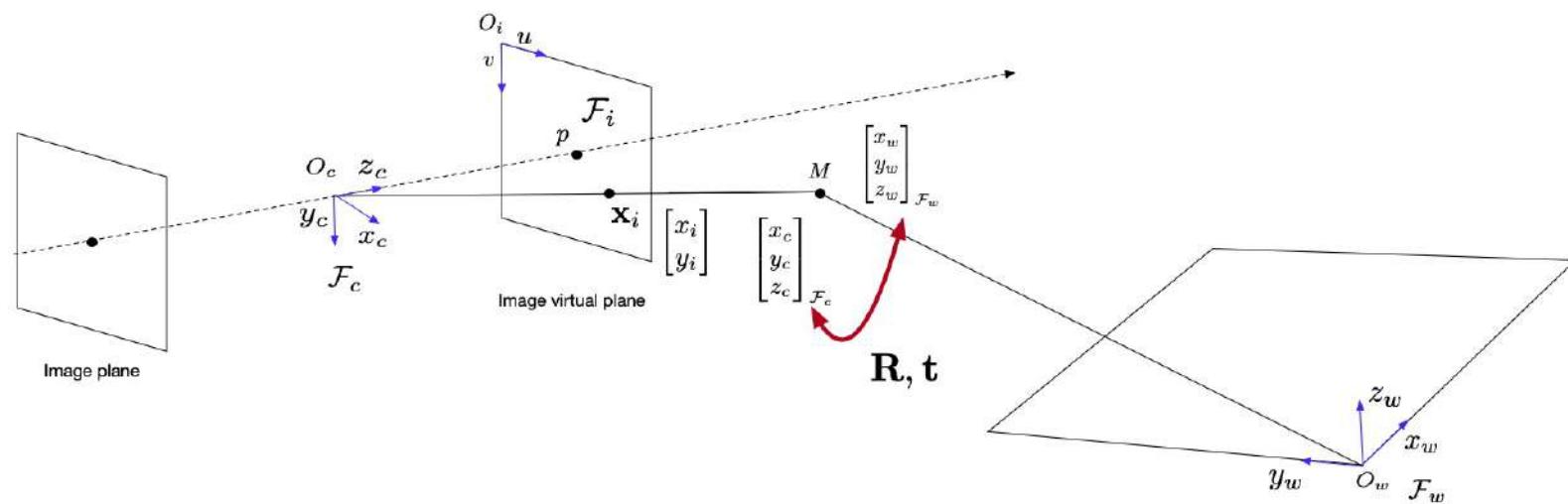
# RÉSUMÉ – PROJECTION PERSPECTIVE



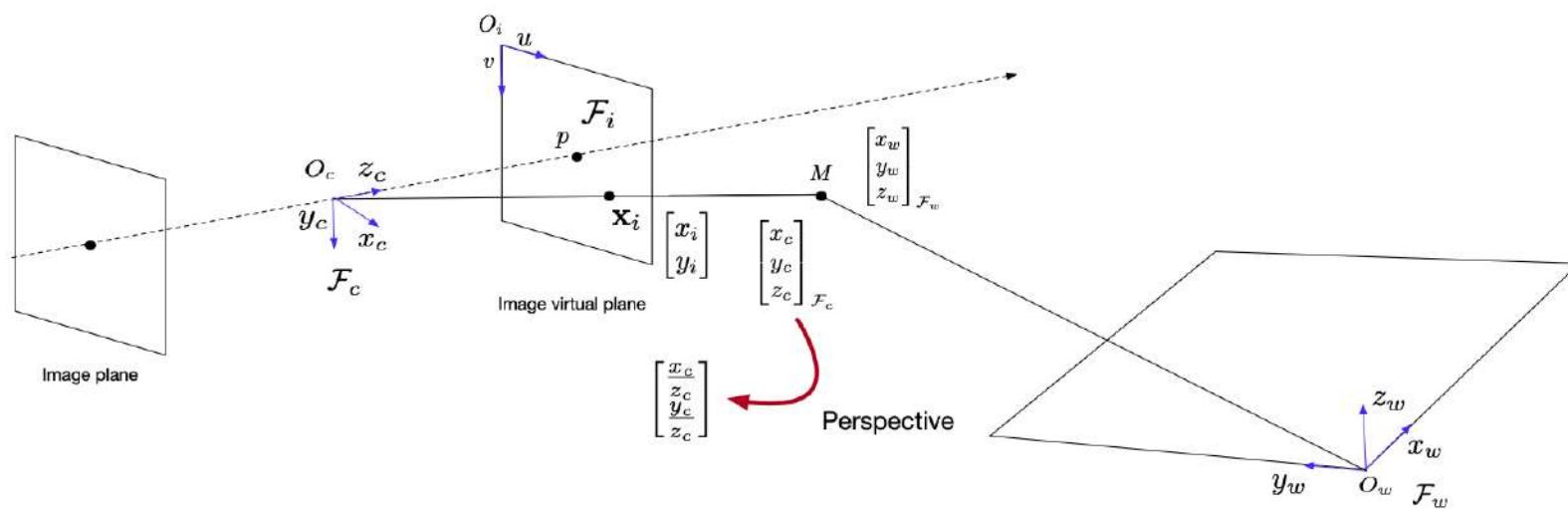
# RÉSUMÉ – PROJECTION PERSPECTIVE



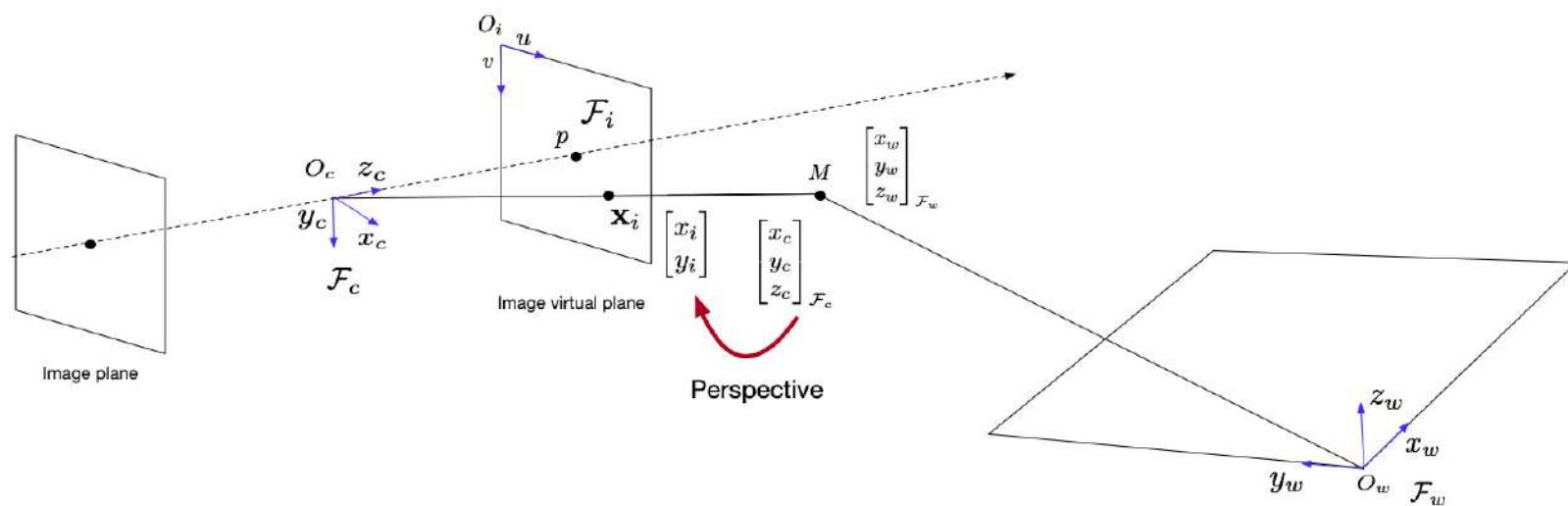
# RÉSUMÉ – PROJECTION PERSPECTIVE



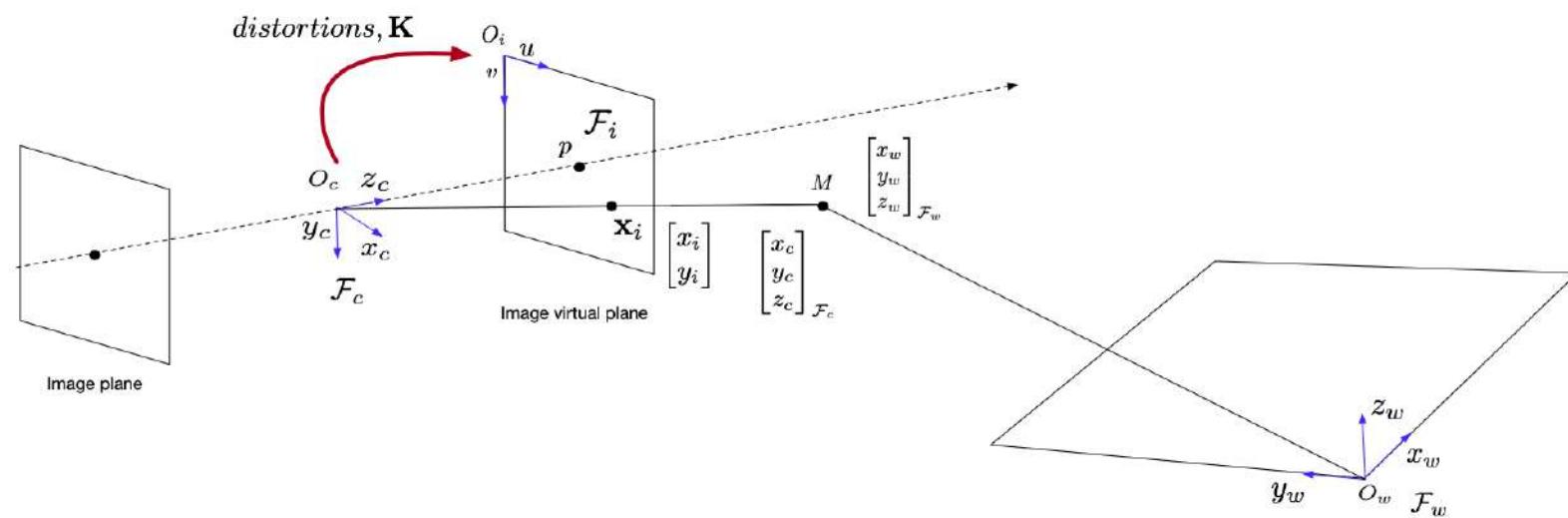
# RÉSUMÉ – PROJECTION PERSPECTIVE



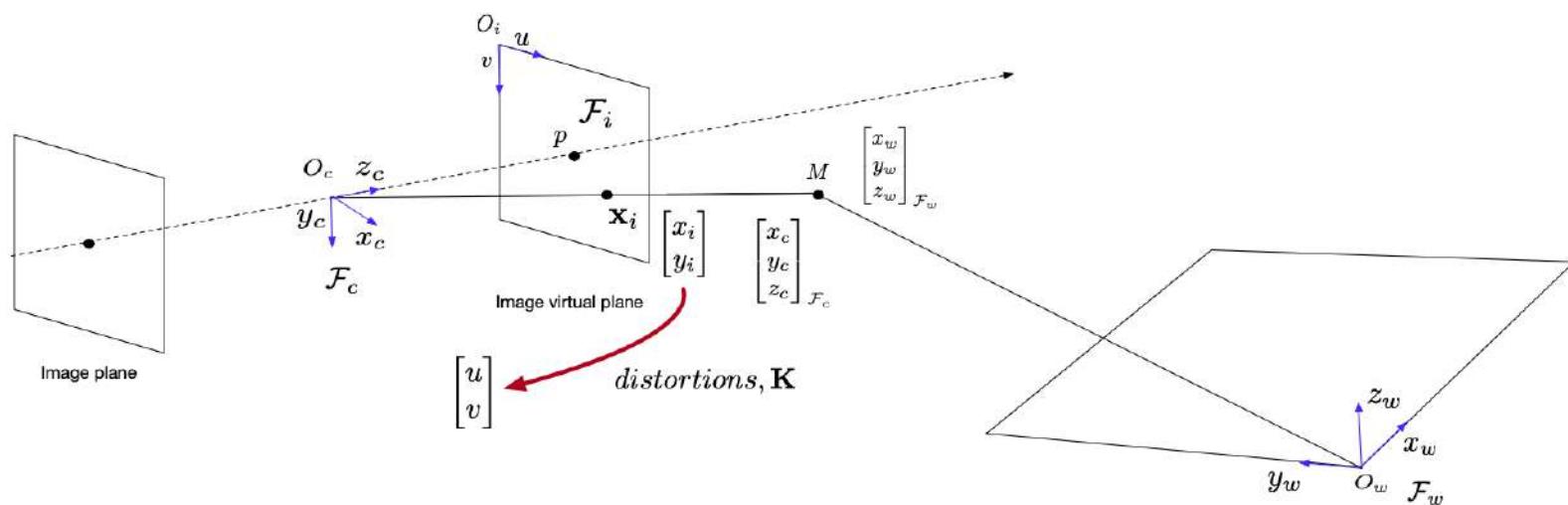
# RÉSUMÉ – PROJECTION PERSPECTIVE



# RÉSUMÉ – PROJECTION PERSPECTIVE



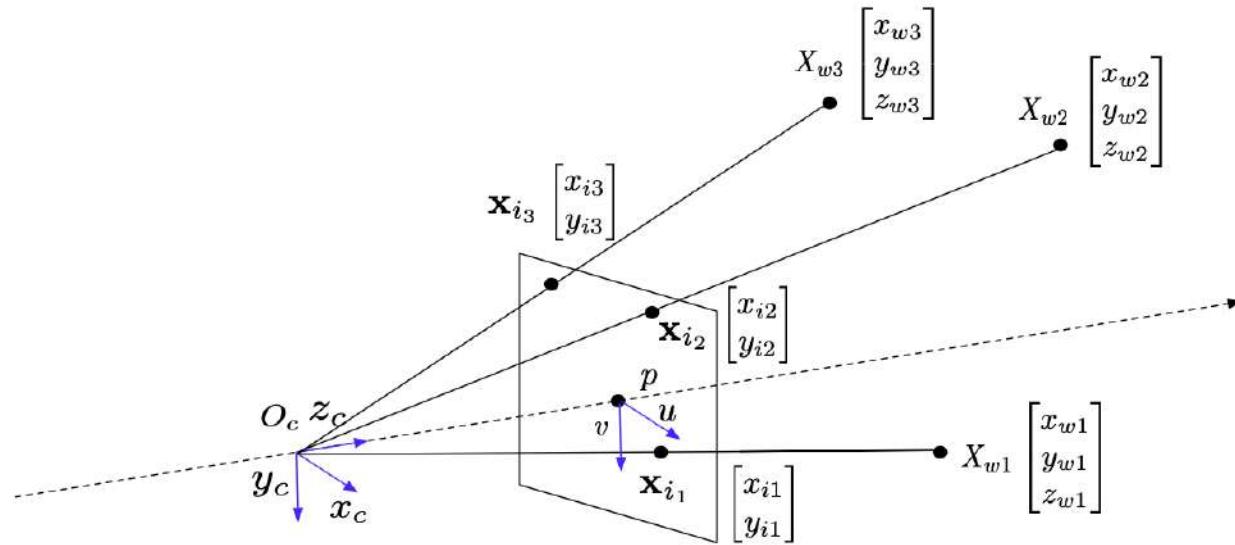
# RÉSUMÉ – PROJECTION PERSPECTIVE



# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

# MÉTHODES DE CALIBRATION – PRINCIPE DE L'APPROCHE LINÉAIRE [5]



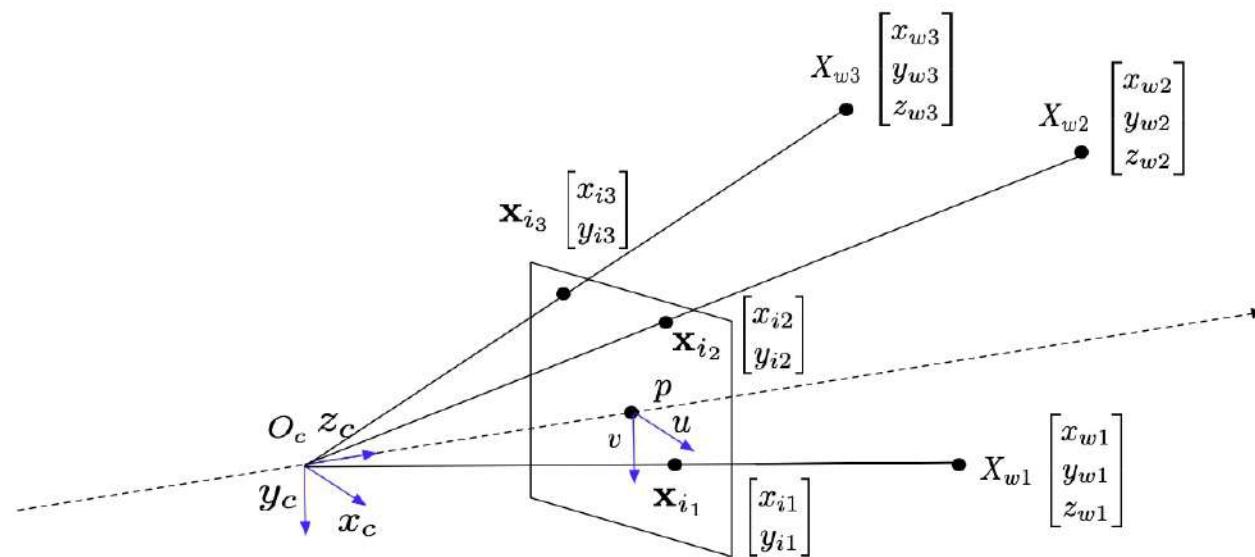
Knowing 3D points  $X_{w_i}$  and their corresponding points in the image

$\mathbf{x}_{i_j}$

$P-n-P$ : Perspective- $n$ -point

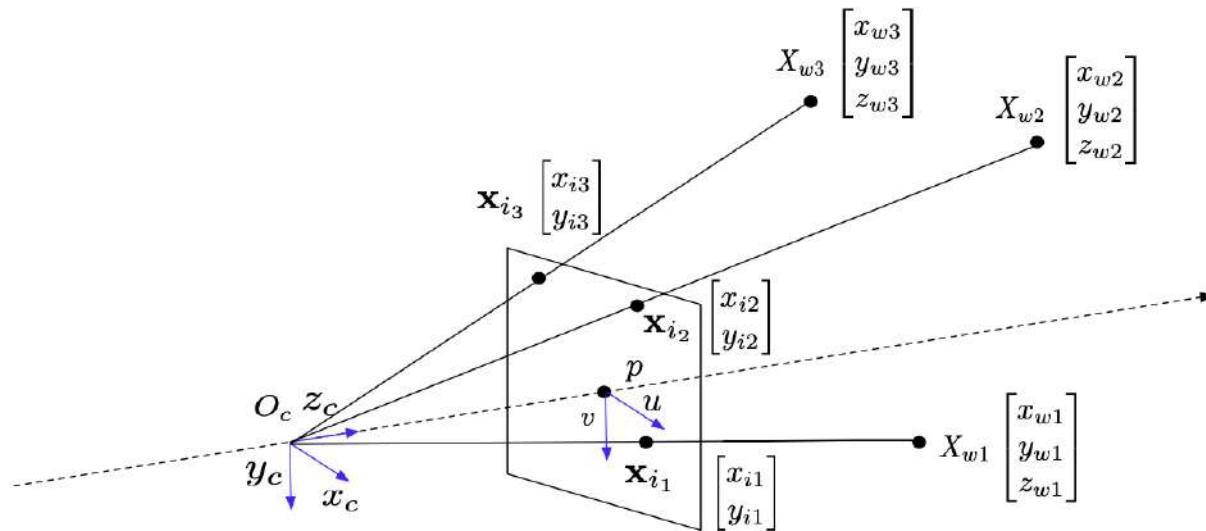
- Estimate  $\mathbf{P}$
- Extract  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{t}$  from  $\mathbf{P}$

# MÉTHODES DE CALIBRATION – PRINCIPE DE L'APPROCHE LINÉAIRE [5]



How many corresponding points are needed?

# MÉTHODES DE CALIBRATION – PRINCIPE DE L'APPROCHE LINÉAIRE [5]



How many corresponding points are needed?

- $\mathbf{P} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$  as 12 entries and 11 D.o.F. (ignoring the scale)
- each correspondence point leads to 2 eq.  
 $\Rightarrow$  5 correspondences + 1 eq. are needed: 6 correspondence points

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

- Considering  $\mathbf{P}_{3 \times 4}$  and  $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$  a point in the image

corresponding to a 3D point  $X_w = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{x}_i = \mathbf{P}X_w$  for all corresponding points
- We have the linear relationship:

$$\mathbf{x}_i \times \mathbf{P}X_w = 0 \text{ (with } \times \text{ cross product)}$$

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

Direct Linear Transform:  $\mathbf{x}_i \times \mathbf{P}X_w = 0$

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- writing  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$  with  $P_i$  a 4-vector of the  $i$ -th row of  $\mathbf{P}$
- then  $\mathbf{P}X_w = \begin{bmatrix} P_1^T \cdot X_w \\ P_2^T \cdot X_w \\ P_3^T \cdot X_w \end{bmatrix}$
- and  $\mathbf{x}_i \times \mathbf{P}X_w = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1^T \cdot X_w \\ P_2^T \cdot X_w \\ P_3^T \cdot X_w \end{bmatrix}$

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

Direct Linear Transform:  $\mathbf{x}_i \times \mathbf{P}X_w = 0$

- $\mathbf{x}_i \times \mathbf{P}X_w = 0$

- Developing it:

$$\begin{bmatrix} x_i P_2^T X_w - y_i P_1^T X_w \\ -x_i P_3^T X_w + z_i P_1^T X_w \\ y_i P_3^T X_w - z_i P_2^T X_w \end{bmatrix} = 0$$

- As  $P_i^T X_w = X_w^T P_i$ :

$$\begin{bmatrix} x_i X_w^T P_2 - y_i X_w^T P_1 \\ -x_i X_w^T P_3 + z_i X_w^T P_1 \\ y_i X_w^T P_3 - z_i X_w^T P_2 \end{bmatrix} = 0$$

- and writing in a matrix form:

$$\begin{bmatrix} 0 & -z_i X_w^T & y_i X_w^T \\ z_i X_w^T & 0 & -x_i X_w^T \\ -y_i X_w^T & x_i X_w^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = 0$$

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

## Direct Linear Transform: determination of $\mathbf{P}$

- the 3 rows are linearly dependent

$$\begin{bmatrix} 0 & -z_i X_w^T & y_i X_w^T \\ z_i X_w^T & 0 & -x_i X_w^T \\ -y_i X_w^T & x_i X_w^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = 0$$

- So we choose only the 2 first ones

$$\begin{bmatrix} 0 & -z_i X_w^T & y_i X_w^T \\ z_i X_w^T & 0 & -x_i X_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = 0$$

- this will be written

$A_i \mathbf{p} = 0$  with  $\mathbf{p}$  a 12-vector made up of the entries of  $\mathbf{P}$ .

- note: The eq. hold for any homogeneous representation of  $\mathbf{x}_i$ .

Choosing  $z_i = 1$ , then  $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$  are coordinate on the image

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

## Direct Linear Transform: determination of $\mathbf{P}$

- Staking all eq. for each correspondence point leads to:  
 $\mathbf{Ap} = \mathbf{0}$  with  $A$  matrix of eq. coefficients built from the matrix rows  $A_i$  and  $\mathbf{p}$  and 12-vector made up of the entries of the matrix  $\mathbf{P}$
- Obtain the SVD of  $A$ . The unit singular vector corresponding to the smallest singular value is the solution of  $\mathbf{p}$ . Specifically, if  $A = UDV^T$  with  $D$  diagonal with positive diagonal entries, arranged in descending order down the diagonal, then  $\mathbf{p}$  is the last column of  $V$ .
- $\mathbf{P}$  is then given by  $\mathbf{p}$

[DLT algorithm from [HZ04]].

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

## Direct Linear Transform: determination of $\mathbf{P}$

- Minimal solution

Given 6 correspondences, the solution is exact.

The solution is obtained solving  $A\mathbf{p} = 0$  where  $A$  is  $11 \times 12$ .

In general  $A$  will have rank 11, and the solution vector  $\mathbf{p}$  is the 1-dimensional right null-space of  $A$ .

- Over-determined solution

If data are not exact (noise) and  $n \geq 6 \rightarrow$  not an exact solution to  $A\mathbf{b} = 0$ .

Then the estimation of  $\mathbf{P}$  may be obtained by minimizing an algebraic error with the normalization constraint  $\|\mathbf{p}\| = 1$

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

## DLT: points normalization

- DLT is not invariant to similarity transformations (details in [HZ04])  
⇒ apply a normalizing transformation to the data before applying the DLT algorithm
- Normalization for 2D points: Isotropic scaling
  - ▶ points are translated so that their centroid is at the origin.
  - ▶ points are then scaled so that their root-mean-square distance from the origin is equal to  $\sqrt{2}$
- Normalization for 3D points - case with small variations in points depth
  - ▶ centroid of the points is translated to the origin
  - ▶ coordinates of the points are scaled so that their root-mean-square distance from the origin is  $\sqrt{3}$

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

## Direct Linear Transform complete algorithm [HZ04]

### Objective:

Given  $n \geq 6$  world to image point correspondences  $X_w \leftrightarrow \mathbf{x}_i$ , determine the camera projection matrix  $\mathbf{P}$  such as  $\mathbf{x}_i = \mathbf{P}X_w$

### Algorithm

- ① **Normalization of  $\mathbf{x}_i$ :** Compute a similarity transformation  $T$ , consisting of a translation and scaling, that takes points  $\mathbf{x}_i$  to a new set of points  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  such that the centroid of the points  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  is the coordinate origin  $[0, 0]^T$ , and their average distance from the origin is  $\sqrt{2}$ .

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

## Direct Linear Transform complete algorithm [HZ04]

### Objective:

Given  $n \geq 6$  world to image point correspondences  $X_w \leftrightarrow \mathbf{x}_i$ , determine the camera projection matrix  $\mathbf{P}$  such as  $\mathbf{x}_i = \mathbf{P}X_w$

### Algorithm

- ① **Normalization of  $\mathbf{x}_i$ :** Compute a similarity transformation  $T$
- ② **Normalization of  $X_w$ :** Compute a similarity transformation  $U$ , consisting of a translation and scaling, that takes points  $X_w$  to a new set of points  $\tilde{X}_w$  such that the centroid of the points  $\tilde{X}_w$  is the coordinate origin  $[0, 0, 0]^T$ , and their average distance from the origin is  $\sqrt{3}$ .

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

## Direct Linear Transform complete algorithm [HZ04]

### Objective:

Given  $n \geq 6$  world to image point correspondences  $X_w \leftrightarrow \mathbf{x}_i$ , determine the camera projection matrix  $\mathbf{P}$  such as  $\mathbf{x}_i = \mathbf{P}X_w$

### Algorithm

- ① **Normalization of  $\mathbf{x}_i$ :** Compute a similarity transformation  $T$
- ② **Normalization of  $X_w$ :** Compute a similarity transformation  $U$
- ③ **DLT:**
  - ① For each correspondence  $\tilde{X}_w \leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}_i$  compute the matrix  $A_i$ . Only the first two rows need be used in general.
  - ② Form the  $2n \times 12$  matrix  $A$  by stacking the equations generated by each correspondence  $\tilde{X}_w \leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}_i$ .
  - ③ Write  $\mathbf{p}$  for the vector containing the entries of the matrix  $\tilde{\mathbf{P}}$ . A solution of  $A\mathbf{p} = 0$ , subject to  $\|\mathbf{p}\| = 1$ , is obtained from the unit singular vector of  $A$  corresponding to the smallest singular value.

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

## Direct Linear Transform complete algorithm [HZ04]

### Objective:

Given  $n \geq 6$  world to image point correspondences  $X_w \leftrightarrow \mathbf{x}_i$ , determine the camera projection matrix  $\mathbf{P}$  such as  $\mathbf{x}_i = \mathbf{P}X_w$

### Algorithm

- ① **Normalization of  $\mathbf{x}_i$ :** Compute a similarity transformation  $T$
- ② **Normalization of  $X_w$ :** Compute a similarity transformation  $U$
- ③ **DLT:** Compute  $\mathbf{p}$  from  $A$  then get  $\tilde{\mathbf{P}}$
- ④ **Denormalization.** The camera matrix for the original (unnormalized) coordinates is obtained from  $\tilde{\mathbf{P}}$  as :

$$\mathbf{P} = T^{-1}\tilde{\mathbf{P}}U$$

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

- De  $\mathbf{P}$  on extrait  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}$

Having  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

We can write:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & s & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix}$$

Then:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} f_x r_{11} + s r_{21} + u_0 r_{31} & f_x r_{12} + s r_{22} + u_0 r_{32} & f_x r_{13} + s r_{23} + u_0 r_{33} & f_x t_1 + s t_2 + u_0 t_3 \\ f_y r_{21} + v_0 r_{31} & f_y r_{22} + v_0 r_{32} & f_y r_{23} + v_0 r_{33} & f_y t_2 + v_0 t_3 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix}$$

[From [Mar13]]

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

- De  $\mathbf{P}$  on extrait  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x r_{11} + s r_{21} + u_0 r_{31} & f_x r_{12} + s r_{22} + u_0 r_{32} & f_x r_{13} + s r_{23} + u_0 r_{33} & f_x t_1 + s t_2 + u_0 t_3 \\ f_y r_{21} + v_0 r_{31} & f_y r_{22} + v_0 r_{32} & f_y r_{23} + v_0 r_{33} & f_y t_2 + v_0 t_3 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix}$$

leads to:

- $r_{3i} = \frac{p_{3i}}{\|p_{3i}\|}$  for  $i = 1, 2, 3$
- $t_3 = p_{34}$

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

- De  $\mathbf{P}$  on extrait  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}$ 
  - cas  $s=0$  – paramètres intrinsèques

$$\begin{bmatrix} f_x r_{11} + u_0 r_{31} & f_x r_{12} + u_0 r_{32} & f_x r_{13} + u_0 r_{33} & f_x t_1 + u_0 t_3 \\ f_y r_{21} + v_0 r_{31} & f_y r_{22} + v_0 r_{32} & f_y r_{23} + v_0 r_{33} & f_y t_2 + v_0 t_3 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix}$$

$$u_0 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix}$$

$$f_x = \left\| \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} - u_0 \cdot \begin{bmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix} \right\|$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix}$$

$$f_y = \left\| \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{bmatrix} - v_0 \cdot \begin{bmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix} \right\|$$

# MÉTHODES DE CALIBRATION – DIRECT LINEAR TRANSFORM [5]

- De  $\mathbf{P}$  on extrait  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}$ 
  - cas  $s=0$  – paramètres extrinsèques

$$\begin{bmatrix} f_x r_{11} + u_0 r_{31} & f_x r_{12} + u_0 r_{32} & f_x r_{13} + u_0 r_{33} & f_x t_1 + u_0 t_3 \\ f_y r_{21} + v_0 r_{31} & f_y r_{22} + v_0 r_{32} & f_y r_{23} + v_0 r_{33} & f_y t_2 + v_0 t_3 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} - u_0 \cdot \begin{bmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix} \right] \cdot \frac{1}{f_x}$$

$$\begin{bmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{bmatrix} - v_0 \cdot \begin{bmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \end{bmatrix} \right] \cdot \frac{1}{f_y}$$

$$t_1 = \frac{p_{14} - u_0 \cdot t_3}{f_x}$$

$$t_2 = \frac{p_{24} - v_0 \cdot t_3}{f_y}$$

Notes: we must ensure  $\|r_i\| = 1$  with  $r_i$   $i$ -th column of  $R$  and we are not sure that  $r_3 = r_1 \times r_2$

[From [Mar13]]

# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

# MÉTHODES DE CALIBRATION – APPROCHE NON LINÉAIRE [5]

## Non linear approach principle

Consider the projection of a 3D point  $X_w = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix}$  onto a 2D point

$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$  with  $z_i = f$  (the focal length):

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \lambda_i \left[ \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} + \mathbf{t} \right]$$

with :

- $\mathbf{R}$  the rotation matrix
- $\mathbf{t}$  the translation vector
- $\lambda$ : a scale factor

# MÉTHODES DE CALIBRATION – APPROCHE NON LINÉAIRE [5]

Suppressing the scale factor, we can write:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \frac{r_{11}x_w + r_{12}y_w + r_{13}z_w + t_1}{r_{31}x_w + r_{32}y_w + r_{33}z_w + t_3} \\ f \frac{r_{21}x_w + r_{22}y_w + r_{23}z_w + t_2}{r_{31}x_w + r_{32}y_w + r_{33}z_w + t_3} \end{bmatrix}$$

Expressing  $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$  in pixels coordinates:

$$x_i = \frac{(u + e_x - u_0)}{s_x} - d_{0_x}$$

$$y_i = \frac{(v + e_y - v_0)}{s_y} - d_{0_y}$$

- $e_x, e_y$ : measurement errors on  $x_i, y_i$
- $s_x, s_y$ : imager size along  $x$  and  $y$
- $d_{0_x}, d_{0_y}$ : distortions

# MÉTHODES DE CALIBRATION – APPROCHE NON LINÉAIRE [5]

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \frac{r_{11}x_w + r_{12}y_w + r_{13}z_w + t_1}{r_{31}x_w + r_{32}y_w + r_{33}z_w + t_3} \\ f \frac{r_{21}x_w + r_{22}y_w + r_{23}z_w + t_2}{r_{31}x_w + r_{32}y_w + r_{33}z_w + t_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(u + e_x - u_0)}{s_x} - d_{0x} \\ \frac{(v + e_y - v_0)}{s_y} - d_{0y} \end{bmatrix}$$

We can express:

$$\begin{bmatrix} u + e_x \\ v + e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\Phi) \\ Q(\Phi) \end{bmatrix}$$

with  $\Phi = [u_0, v_0, k_1, k_2, k_3, p_1, p_2, f_x, f_y, t_1, t_2, t_3, \alpha, \beta, \gamma]^T$  a 15 parameters vector where  $(\alpha, \beta, \gamma)^T$  parametrize the orientation.

[From [Mar13]]

# MÉTHODES DE CALIBRATION – APPROCHE NON LINÉAIRE [5]

Then:  $\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\Phi) - u \\ Q(\Phi) - v \end{bmatrix} \Rightarrow V(\Phi) = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix}$

We must find  $\Phi$  which minimizes the reprojection error  $S$ :

- if 1 image and  $n$  correspondence points:

$$S = \sum_{i=1}^n (e_{x_i}^2 + e_{y_i}^2)$$

- if  $m$  image and  $n$  correspondence points on each image:

$$S = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (e_{x_{ij}}^2 + e_{y_{ij}}^2)$$

[From [Mar13]]

# MÉTHODES DE CALIBRATION – APPROCHE NON LINÉAIRE [5]

Then:  $\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\Phi) - u \\ Q(\Phi) - v \end{bmatrix} \Rightarrow V(\Phi) = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix}$

We must find  $\Phi$  which minimizes the reprojection error  $S$ :

- if 1 image and  $n$  correspondence points:  $S = \sum_{i=1}^n (e_{x_i}^2 + e_{y_i}^2)$
- if  $m$  image and  $n$  correspondence points on each image:

$$S = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (e_{x_{ij}}^2 + e_{y_{ij}}^2)$$

Non-linear optimization problem!

That can be solved using algorithm as Gauss-Newton or Levenberg-Marquardt.

[From [Mar13]]

# MÉTHODES DE CALIBRATION – APPROCHE NON LINÉAIRE [5]

Then:  $\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\Phi) - u \\ Q(\Phi) - v \end{bmatrix} \Rightarrow V(\Phi) = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix}$

We must find  $\Phi$  which minimizes the reprojection error  $S$ :

Note: An implementation for learning purposes of a pose estimation using Gauss-Newton can be found at

<http://people.rennes.inria.fr/Eric.Marchand/pose-estimation/tutorial-pose-gauss-newton-opencv.html>

# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

# MÉTHODES DE CALIBRATION – « GOLD STANDARD » ALGORITHM

## Objective

Given  $n \geq 6$  world to image point correspondences  $X_w \leftrightarrow \mathbf{x}_i$ , determine the Maximum Likelihood estimate of the camera projection matrix  $\mathbf{P}$ , i.e. the  $\mathbf{P}$  which minimizes  $\sum_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{P}X_w)$ .  $\sum_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{P}X_w)$  is the geometric error in the image.

Minimizing geometric error require the use of iterative techniques (as Levenberg-Marquardt).

If the measurement error are Gaussian then the solution of

$$\min_{\mathbf{P}} \sum_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{P}X_w)$$

is the Maximum Likelihood estimate under  $\mathbf{P}$ .

DLT solution (or a minimal solution) is used as a starting point for the iterative minimization.

[From [HZ04]]

# MÉTHODES DE CALIBRATION – « GOLD STANDARD » ALGORITHM

## Objective

Given  $n \geq 6$  world to image point correspondences  $X_w \leftrightarrow \mathbf{x}_i$ , determine the Maximum Likelihood estimate of the camera projection matrix  $\mathbf{P}$ , i.e. the  $\mathbf{P}$  which minimizes  $\sum_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{P}X_w)$

- ① **Linear Solution** Compute an initial estimate of  $\mathbf{P}$  using previous linear method.
  - ① **Normalization** Use a similarity transformation  $T$  to normalize the image points  $\tilde{\mathbf{x}}_i = T\mathbf{x}_i$ , and a second similarity transformation  $U$  to normalize the space points  $\tilde{X}_w = UX_w$
  - ② **Apply DLT algorithm**
- ② **Minimize geometric error** Using the linear estimate as a starting point minimize the geometric error

$$\sum_i d(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{P}}\tilde{X}_w)$$

over  $\tilde{\mathbf{P}}$ , using an iterative algorithm such as Levenberg-Marquardt.

# MÉTHODES DE CALIBRATION – « GOLD STANDARD » ALGORITHM

## Objective

Given  $n \geq 6$  world to image point correspondences  $X_w \leftrightarrow \mathbf{x}_i$ , determine the Maximum Likelihood estimate of the camera projection matrix  $\mathbf{P}$ , i.e. the  $\mathbf{P}$  which minimizes  $\sum_i d(\mathbf{x}_i, \mathbf{P}X_w)$

- ① **Linear Solution** Compute an initial estimate of  $\mathbf{P}$  using previous linear method.
- ② **Minimize geometric error** Using the linear estimate as a starting point minimize the geometric error

$$\sum_i d(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{\mathbf{P}}\tilde{X}_w)$$

over  $\tilde{\mathbf{P}}$ , using an iterative algorithm such as Levenberg-Marquardt.

- ③ **Denormalization** The camera matrix for the original (unnormalized) coordinates is obtained from  $\tilde{\mathbf{P}}$  as

$$\mathbf{P} = T^{-1}\tilde{\mathbf{P}}U$$

# MÉTHODE DE CALIBRATION – AVEC UN ÉCHIQUIER (EN TP)

Any appropriately characterized object could be used as a calibration object

⇒ practically: use of regular pattern as a chessboard

Rq.: The specific use of this calibration object and much of the calibration approach itself comes from [Zha00] and [SM99]

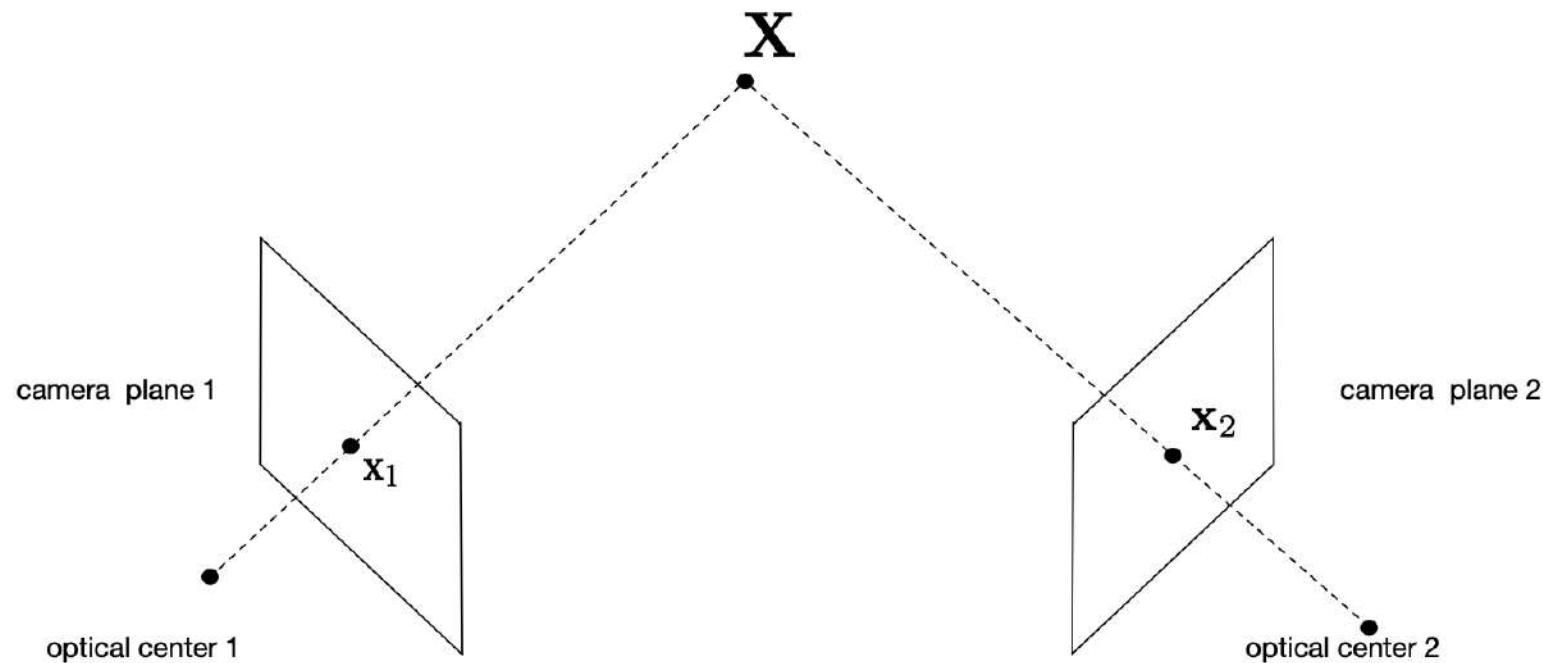
In the yml file, you will find the camera matrix  
 $[f_x, 0, u_0, 0, f_y, v_0, 0, 0, 1]$  and the distortion coefficients  
 $[k_1, k_2, p_1, p_2, k_3]$

Rq: Use Homography (see later)

# PLAN

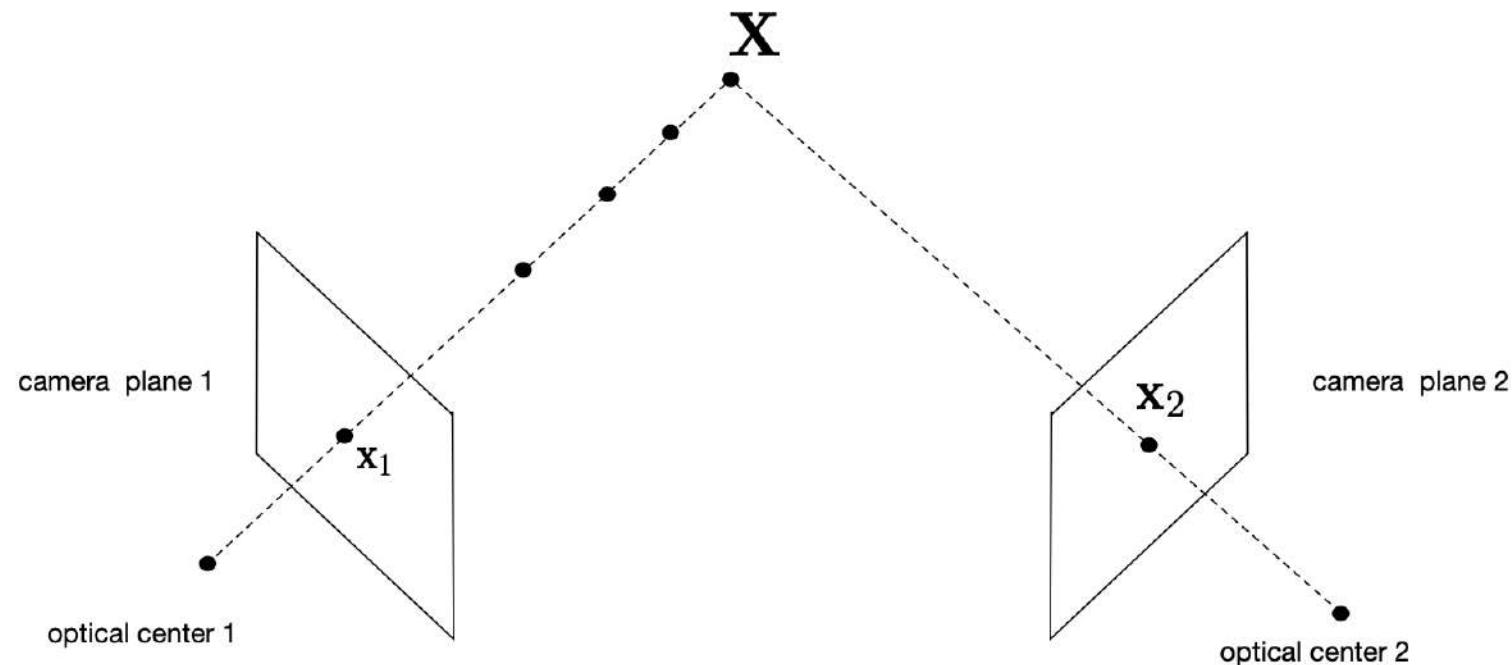
- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – CONTRAINTE ÉPIPOLAIRE



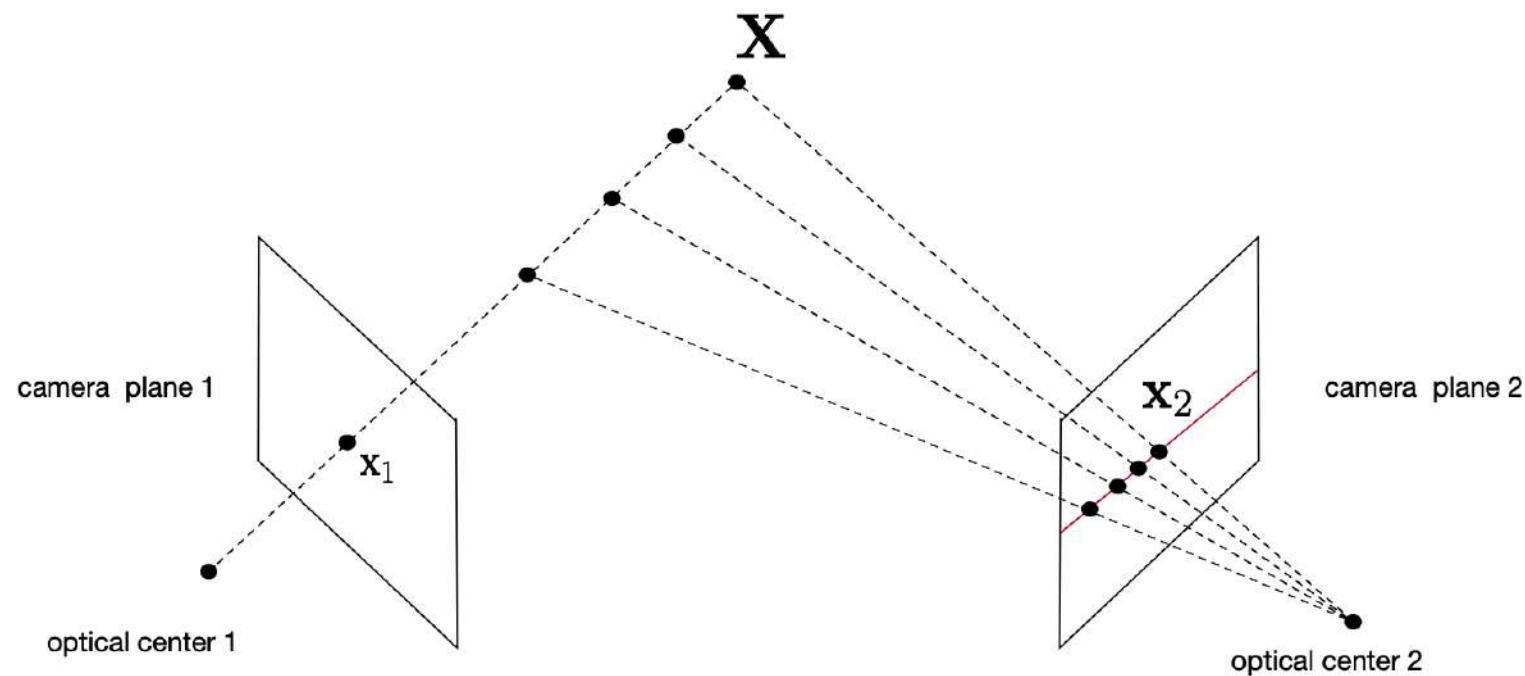
[From [Pri12]]

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – CONTRAINTE ÉPIPOLAIRE



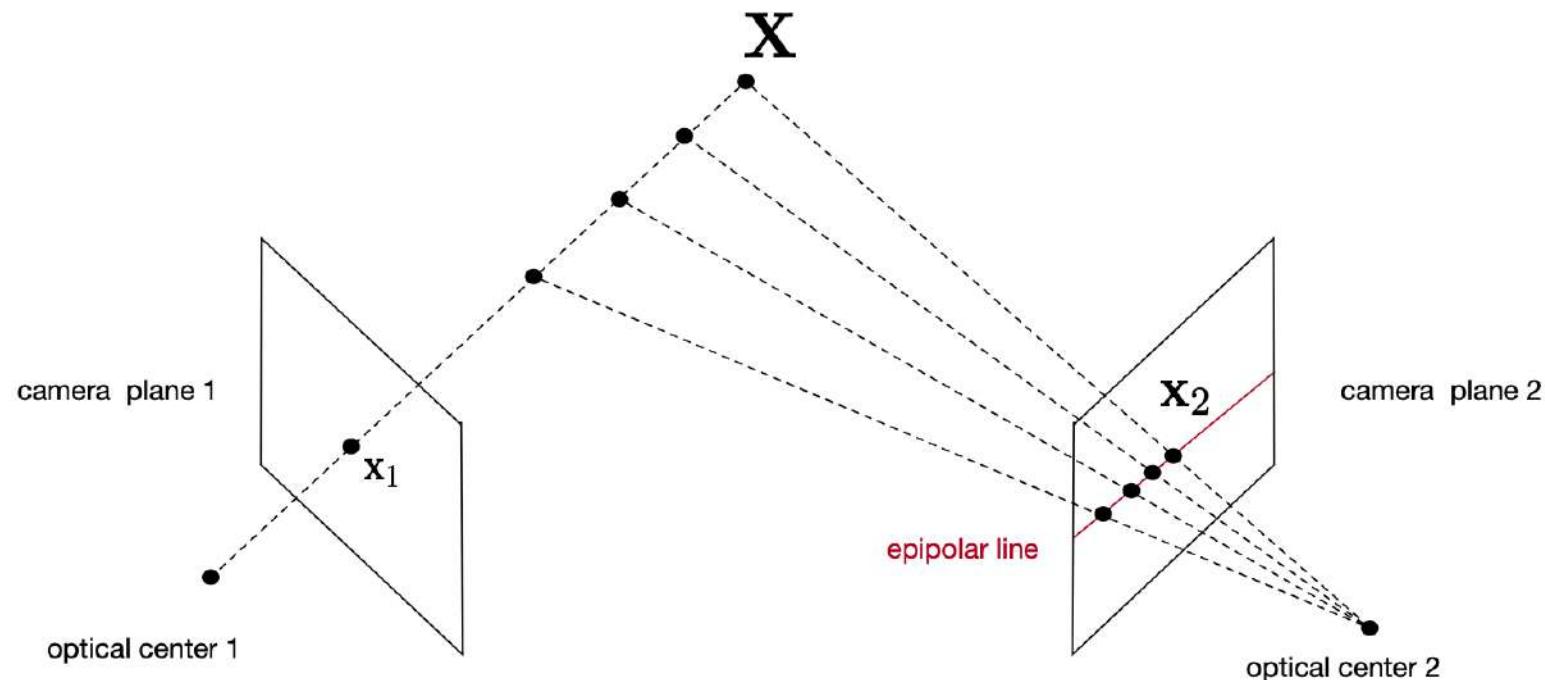
[From [Pri12]]

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – CONTRAINTE ÉPIPOLAIRE



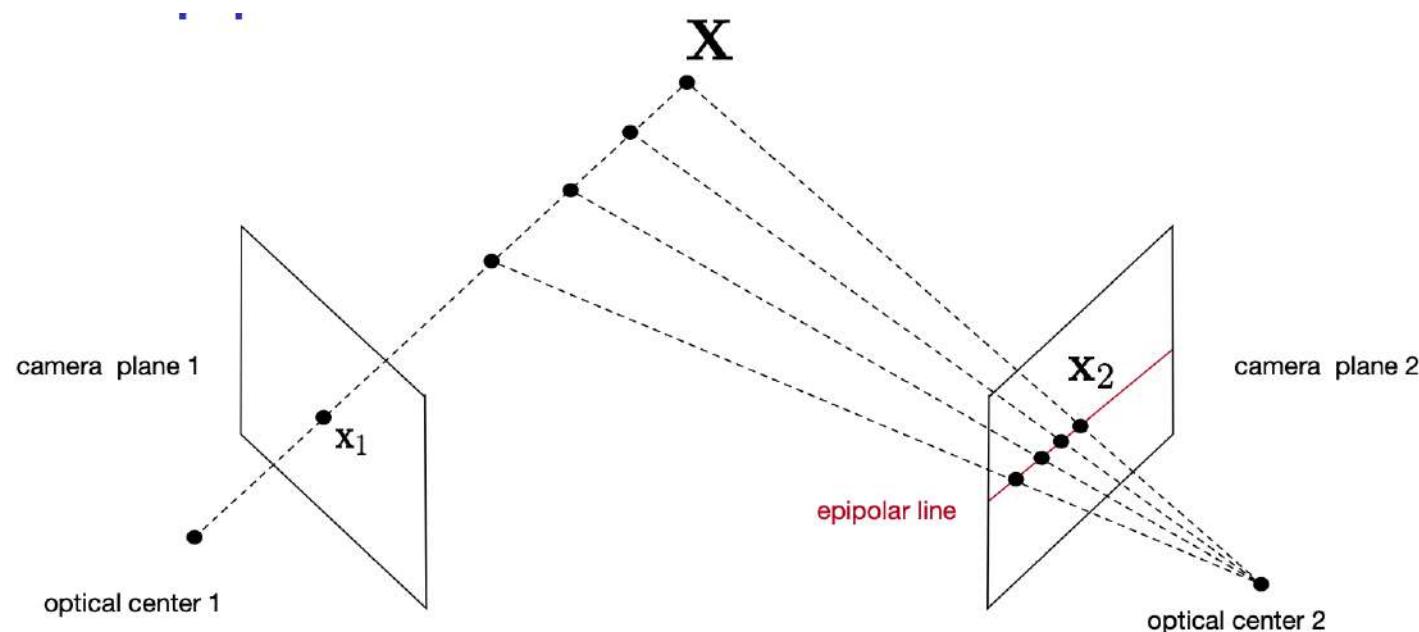
[From [Pri12]]

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – CONTRAINTE ÉPIPOLAIRE



[From [Pri12]]

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – CONTRAINTE ÉPIPOLAIRE



- *epipolar constraint*: for any point in the first image, the corresponding point in the second image is constrained to lie on a line
- The epipolar line depends on the intrinsic and extrinsic parameters of the cameras

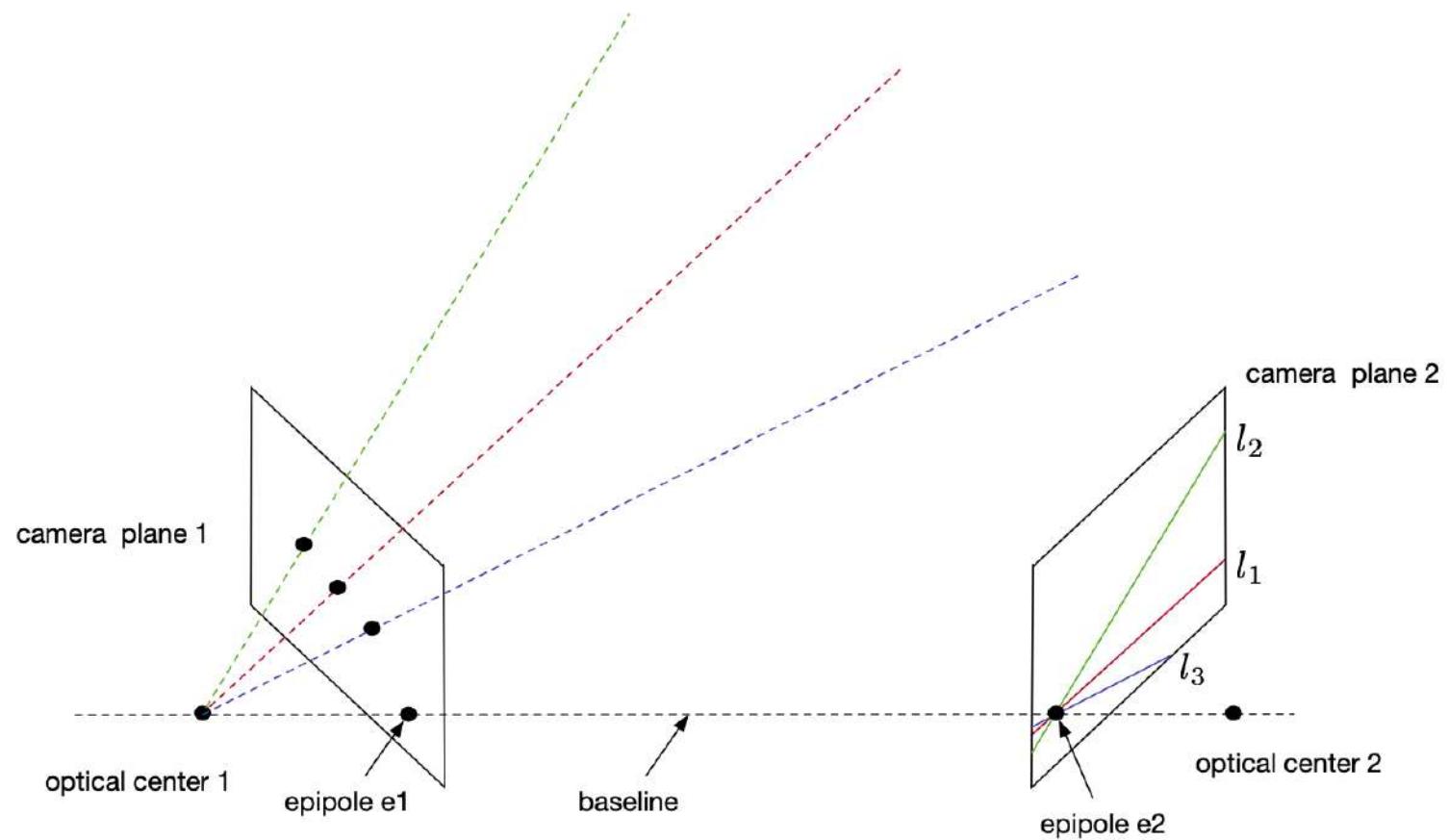
[From [Pri12]]

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – CONTRAINTE ÉPIPOLAIRE

Practical applications [Pri12]:

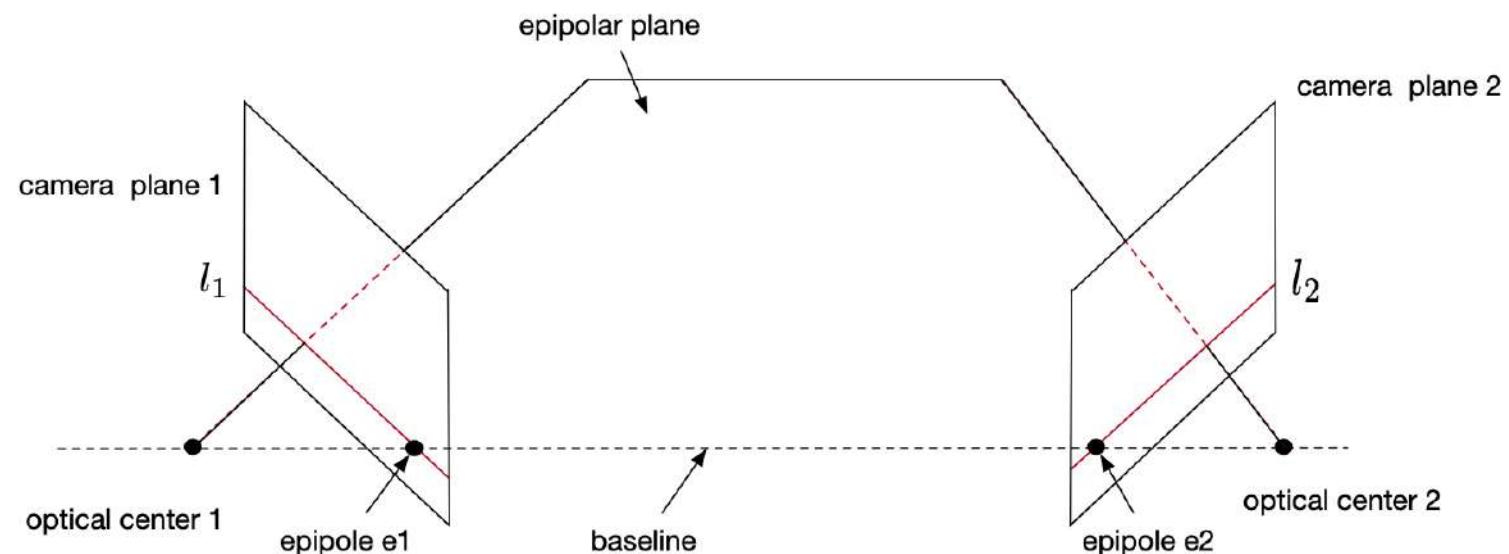
- Finding point correspondences (given intrinsic and extrinsic parameters): for a point in the first image, perform a 1D search along the epipolar line in the second image for the corresponding position
- Constraint on corresponding points is a function of the intrinsic and extrinsic parameters
  - ⇒ Use the observed pattern of point correspondences to determine the extrinsic parameters
  - ⇒ Get the geometric relationship between the two cameras

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – L'ÉPIPOLE



[From [Pri12]]

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – L'ÉPIPOLE



[From [Sze10]]

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE ESSENTIELLE

Coordonnées normalisées

Let's consider:

- $\tilde{X}_w = \begin{bmatrix} X_w \\ 1 \end{bmatrix}$  a point in the word in homogeneous coordinates
- Camera matrix  $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{R}|\mathbf{t}]$  and  $\lambda\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{P}\tilde{X}_w$  a point in the image
- $\mathbf{K}$  is known

We can get normalized coordinates:

- $\lambda\hat{\mathbf{x}}_i = \lambda\mathbf{K}^{-1}\tilde{X}_i \Rightarrow \lambda\hat{\mathbf{x}}_i = [\mathbf{R}|\mathbf{t}]\tilde{X}_w$  ( $\hat{\mathbf{x}}_i$  stills in homogeneous coordinates)
- equivalent to a camera where  $\mathbf{K} = \mathbf{I}$

*Normalized camera matrix:*  $\mathbf{P}' = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} = [\mathbf{R}|\mathbf{t}]$

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE ESSENTIELLE

The geometric relationship between the two cameras is captured by the essential matrix.

- Assume normalized cameras, first camera at origin.

$$\lambda_1 \hat{\mathbf{x}}_{i1} = [\mathbf{I}|0] \tilde{\mathbf{X}}_w$$

$$\lambda_2 \hat{\mathbf{x}}_{i2} = [\mathbf{R}|\mathbf{t}] \tilde{\mathbf{X}}_w$$

- 1<sup>st</sup> camera:  $\lambda_1 \hat{\mathbf{x}}_{i1} = \mathbf{X}_w$
- 2<sup>nd</sup> camera:  $\lambda_2 \hat{\mathbf{x}}_{i2} = \mathbf{R}\mathbf{X}_w + \mathbf{t}$
- Substituting:

$$\lambda_2 \hat{\mathbf{x}}_{i2} = \lambda_1 \mathbf{R} \hat{\mathbf{x}}_{i1} + \mathbf{t}$$

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE ESSENTIELLE

- Constraint between the possible positions of corresponding points in the two images

$$\lambda_2 \hat{\mathbf{x}}_{i2} = \lambda_1 \mathbf{R} \hat{\mathbf{x}}_{i1} + \mathbf{t}$$

- take cross product with  $\mathbf{t}$ :

$$\lambda_2 \mathbf{t} \times \hat{\mathbf{x}}_{i2} = \lambda_1 \mathbf{t} \times \mathbf{R} \hat{\mathbf{x}}_{i1}$$

- take inner product with  $\hat{\mathbf{x}}_{i2}$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_{i2}^T \mathbf{t} \times \mathbf{R} \hat{\mathbf{x}}_{i1} = 0$$

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE ESSENTIELLE

$$\hat{\mathbf{x}}_{i2}^T \mathbf{t} \times \mathbf{R} \hat{\mathbf{x}}_{i1} = 0$$

- The cross product term can be expressed as a matrix:

$$\mathbf{t}_x = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix}$$

- Defining the *essential matrix*:

$$\mathbf{E} = \mathbf{t}_x \mathbf{R}$$

- and the essential matrix relation:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i2}^T \mathbf{E} \hat{\mathbf{x}}_{i1} = 0$$

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE ESSENTIELLE - PROPRIÉTÉS

$$\hat{\mathbf{x}}_{i2}^T \mathbf{E} \hat{\mathbf{x}}_{i1} = 0$$

- Rank 2:  $\det[\mathbf{E}] = 0$
- 5 D.o.F.
- Non-linear constraint between elements:

$$2\mathbf{E}\mathbf{E}^T \mathbf{E} - \text{trace}[\mathbf{E}\mathbf{E}^T]\mathbf{E} = 0$$

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE ESSENTIELLE - CALCUL

- 5-point algorithm [Nis04]
- 8-point algorithm [Lh81]
  - ▶  $\hat{\mathbf{x}}_{i2}^T \mathbf{E} \hat{\mathbf{x}}_{i1} = 0$
  - ▶ can be solved with SVD

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – RÉCUPÉRATION DES LIGNES ÉPIPOLAIRES

- Equation of a line:

$$ax + by + c = 0$$

- or:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

- or:

$$l\tilde{x} = 0$$

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – RÉCUPÉRATION DES LIGNES ÉPIPOLAIRES

- Equation of a line :  $l\tilde{x} = 0$
- Now consider:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i2}^T \mathbf{E} \hat{\mathbf{x}}_{i1} = 0$$

- This has the form  $l_1 \hat{\mathbf{x}}_{i1} = 0$  where  $l_1 = \hat{\mathbf{x}}_{i2}^T \mathbf{E}$
- So the epipolar lines can be expressed as:

$$l_1 = \hat{\mathbf{x}}_{i2}^T \mathbf{E}$$

$$l_2 = \hat{\mathbf{x}}_{i1}^T \mathbf{E}$$

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – RÉCUPÉRATION DES ÉPIPOLES

- Every epipolar line in image 1 passes through the epipole  $e_1$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{i_2}^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{e}}_1 = 0$$

for all  $\hat{\mathbf{x}}_{i_2}^T$

- This can only be true if  $\tilde{\mathbf{e}}_1$  is in the nullspace of  $\mathbf{E}$ :

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \text{null}[\mathbf{E}]$$

- Similarly:

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \text{null}[\mathbf{E}^T]$$

We find the null spaces by computing the SVD of  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = UDV^T$$

167

and taking  $\tilde{\mathbf{e}}_1$  the last column of  $V$  and  $\tilde{\mathbf{e}}_2$  the last row of  $U$

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – RÉCUPÉRATION DE $\mathbf{R}, \mathbf{t}$ À PARTIR DE $\mathbf{E}$

*Relative orientation problem:* recover  $\mathbf{R}, \mathbf{t}$  from  $\mathbf{E}$

- Essential matrix

$$\mathbf{E} = \mathbf{t}_x \mathbf{R}$$

- To recover  $\mathbf{R}, \mathbf{t}$  use the matrix

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- With  $\mathbf{E} = UDV^T$  we get:

$$\mathbf{t}_x = UDWU^T$$

$$\mathbf{R} = UW^{-1}V^T$$

(details in [HZ04])

- Need 2 corresponding points to solve ambiguities and have  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{t}$  where points are in front of both cameras

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE FONDAMENTALE

- Lets consider two normal (not normalized) cameras:

$$\lambda_1 \tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{K}_1 [\mathbf{I} | 0] \tilde{\mathbf{X}}_w$$

$$\lambda_2 \tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{K}_2 [\mathbf{R} | \mathbf{t}] \tilde{\mathbf{X}}_w$$

- Using a similar procedure we can get the relation:

$$\tilde{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{K}_2^{-T} \mathbf{E} \mathbf{K}_1^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_1 = 0$$

- or:

$$\tilde{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{x}}_1 = 0$$

- with:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_2^{-T} \mathbf{E} \mathbf{K}_1^{-1} = \mathbf{K}_2^{-T} \mathbf{t}_x \mathbf{R} \mathbf{K}_1^{-1}$$

- Relation between essential and fundamental matrix:

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}_2^T \mathbf{F} \mathbf{K}_1$$

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE FONDAMENTALE

- When the fundamental matrix is correct with  $\tilde{\mathbf{x}}_{i2}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{x}}_{i1} = 0$ , the epipolar line induced by a point in the first image should pass through the matching point in the second image and vice-versa
- Constraint parameterized by the nine entries of  $\mathbf{F}$
- Criterion: minimize the squared distance between every point and the epipolar line predicted by its match in the other image ( $I$  corresponding points):

$$\hat{\mathbf{F}} = \arg \min_{\mathbf{F}} \left[ \sum_{i=1}^I ((dist[\mathbf{x}_{i1}, l_{i1}])^2 + (dist[\mathbf{x}_{i2}, l_{i2}])^2) \right]$$

- $dist[\mathbf{x}, l] = \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$  with  $l = [a, b, c]$  and  $\mathbf{x} = [x, y]^T$

No closed form solution

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE FONDAMENTALE – ESTIMATION PAR L'ALGORITHME 8-POINT

## Approach

- ▶ solve for fundamental matrix using homogeneous coordinates
- ▶ closed form solution (but don't minimize a geometric error but an algebraic error)
- ▶ solution usually very close to the values that optimize the previous cost function

## In homogeneous coordinates:

$$\tilde{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{x}}_1 = 0 \Rightarrow [x_{i2} \quad y_{i2} \quad 1] \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ y_{i1} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE FONDAMENTALE – ESTIMATION PAR L’ALGORITHME 8-POINT

- Can be expressed as:  $A\mathbf{f} = 0$  with  
 $\mathbf{f} = [f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33}]^T$  and  $A$  contains the combination of at least 8 pairs of points coordinates
- Find minimum of  $|A\mathbf{f}|^2$  subject to  $|\mathbf{f}| = 1$
- Solution can be found by SVD of  $A$ :  $A = UDV^T$ , setting  $\mathbf{f}$  to the last column of  $V$
- Reform  $\mathbf{F}$  from  $\mathbf{f}$

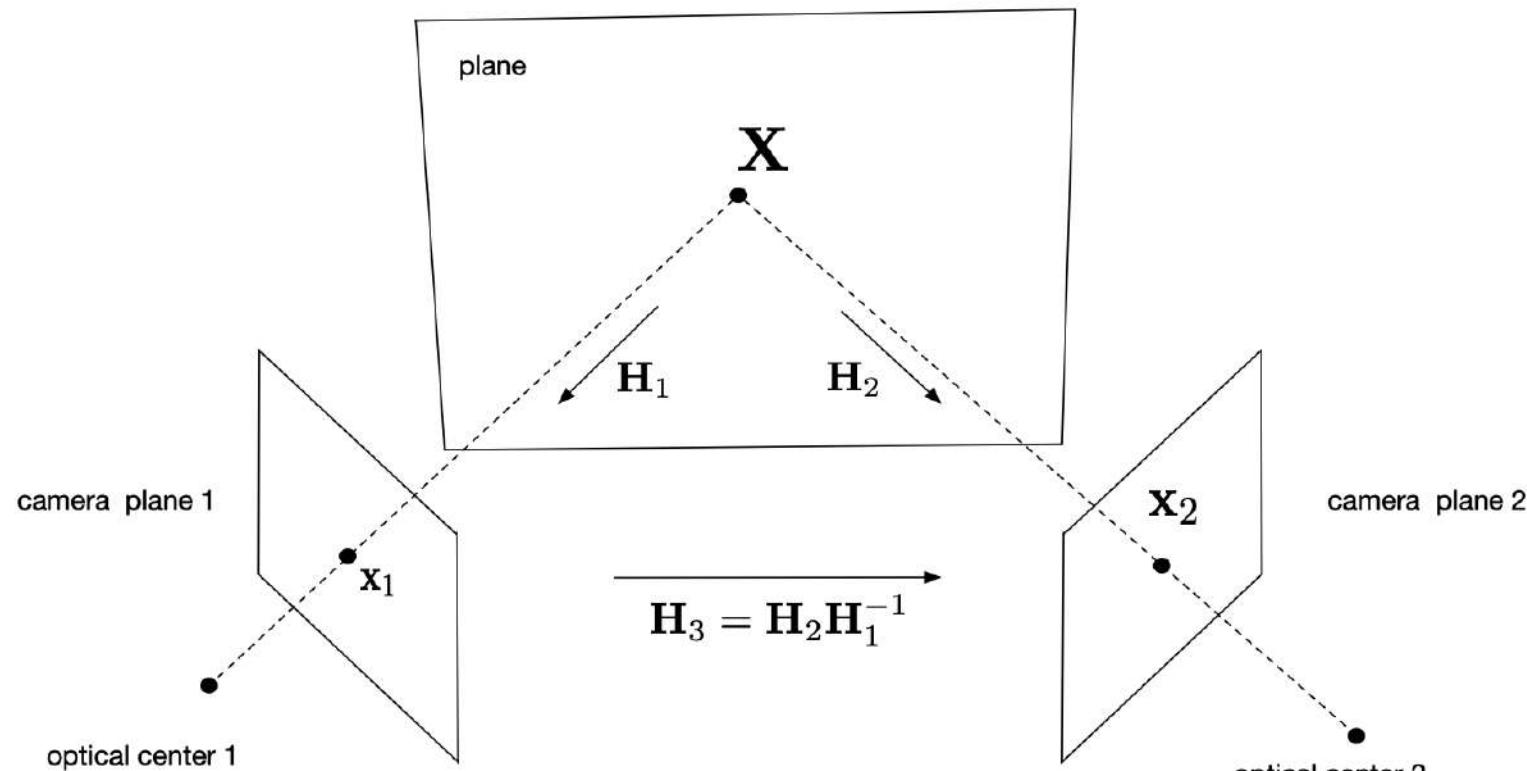
# GÉOMÉTRIE ÉPIPOLAIRE – MATRICE FONDAMENTALE – ESTIMATION PAR L’ALGORITHME 8-POINT

- This procedure does not ensure that solution is rank 2.  
Solution: set last singular value to zero.
- Can be unreliable because of numerical problems to do with the data scaling → better to re-scale the data first
- Needs 8 points in general positions (cannot all be planar).
- Fails if there is not sufficient translation between the views

# PLAN

- Introduction
- Caméra
  - Modèle sténopé
  - Lentilles
  - Distorsions
- Géométrie des caméras sténopés
  - Projection monde vers image
  - Coordonnées homogènes
  - Transformations en utilisant les coordonnées homogènes
  - Mise en correspondance d'un point du monde avec un point sur le plan principal
  - Résumé
- Méthodes de calibration
  - DLT
  - Principe des méthodes non-linéaires
  - « Gold Standard » algorithme
- Transformations entre images
  - Géométrie Épipolaire
  - Homographies

# HOMOGRAPHIE – DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS [5]



[From [Pri12]]

# HOMOGRAPHIE – DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS [5]

- Homography mapping  $\tilde{\mathbf{x}}_1$  and  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  linear in homogeneous coordinates

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- images seen by different cameras with the *pinhole in the same place* are related by homographies
- special case **pure rotation**: If the camera rotates but *does not translate*, the tomography mapping image 1 to image 2 is written:

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^{-1}$$

with **K** intrinsic matrix and **R** rotation between the two camera positions

# HOMOGRAPHIE – DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS [5]

Homography maps between [Pri12]:

- points on a plane in the world and their positions in an image,
- points in two different images of the same plane
- two images of a 3D object where the camera has rotated but not translated

In the planar case, we can chain the homographies between consecutive frames.

# HOMOGRAPHIE – ESTIMATION [5]

## Objective:

Given  $n \geq 4$  2D to 2D point correspondences  $\mathbf{x}'_i \leftrightarrow \mathbf{x}_i$ , determine the 2D homography matrix  $\mathbf{H}$  such as  $\mathbf{x}'_i = \mathbf{H}\mathbf{x}_i$

## Algorithm

- ① **Normalization of  $\mathbf{x}_i$ :**  $\tilde{\mathbf{x}}_i = T\mathbf{x}_i$
- ② **Normalization of  $\mathbf{x}'_i$ :**  $\tilde{\mathbf{x}}'_i = T\mathbf{x}'_i$
- ③ **DLT:**

- ① For each correspondence  $\tilde{\mathbf{x}}'_i \leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}_i$  compute the matrix  $A_i$ .
- ② Form the  $2n \times 9$  matrix  $A$
- ③ Write  $\tilde{\mathbf{h}}$  for the vector containing the entries of the matrix  $\tilde{\mathbf{H}}$ . A solution of  $A\tilde{\mathbf{h}} = 0$ , subject to  $\|\tilde{\mathbf{h}}\| = 1$ , is obtained from the unit singular vector of  $A$  corresponding to the smallest singular value.
- ④ The matrix  $\tilde{\mathbf{H}}$  is determined from  $\tilde{\mathbf{h}}$

- ④ **Denormalization:** Set  $\mathbf{H} = T'^{-1}\tilde{\mathbf{H}}T$

# HOMOGRAPHIE – DU CALCUL DE L'HOMOGRAPHIE À L'ESTIMATION DE LA POSE [5]

- All points are in the same plane, then fix  $z_w = 0$

- $\Rightarrow$  each 3D point coordinate is given by  $X_w = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Their projections in the image plane are given by

$$X_c = [\mathbf{I}|0][\mathbf{R}|\mathbf{t}] \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{I}|0][r_1 r_2 \mathbf{t}] \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

- with  $r_i$  the  $i^{th}$  column of  $\mathbf{R}$
- $\mathbf{H}$  can be computed using DLT

# HOMOGRAPHIE – DU CALCUL DE L'HOMOGRAPHIE À L'ESTIMATION DE LA POSE [5]

- Knowing  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{t}$  can be computed noting:

$$[r_1 \ r_2 \ \mathbf{t}] = [\mathbf{I} | \mathbf{0}]^{-1} \mathbf{H}$$

- $\mathbf{R}$  is orthogonal then :  $r_3 = r_1 \times r_2$

# CALIBRATION EN PRATIQUE

## Motivations

- La calibration est une étape nécessaire pour extraire des informations métriques à partir d'images 2D.
- Plusieurs techniques existantes
  - Étalonnage photogrammétrique
  - Auto-étalonnage
  - Points de fuite pour les directions orthogonales
  - Calibration à partir de la rotation pure

# CALIBRATION EN PRATIQUE

## Entrées

- Observation par la caméra d'un motif planaire sous au moins deux orientations différentes
- Camera ou motif planaire déplacés à la main
- Pas de nécessité de connaître le mouvement

## Sorties

- Paramètres intrinsèques, extrinsèques et coefficients de distorsion

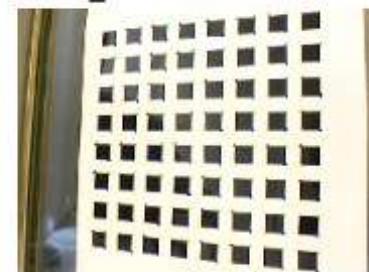
Z. Zhang, "A flexible new technique for camera calibration," in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 22, no. 11, pp. 1330-1334, Nov. 2000, doi: 10.1109/34.888718.

# CALIBRATION EN PRATIQUE – CALIBRAGE MULTIPLAN

Utilise plusieurs images d'une mire plane avec des orientations inconnues [Zhang 99]

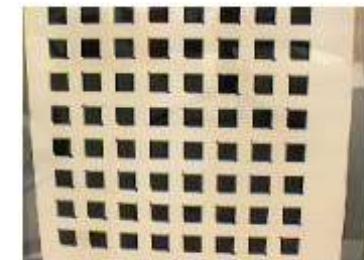
- Calculer les homographies planes

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} \sim \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} \sim \mathbf{H}\mathbf{X}$$



- Résoudre  $\mathbf{K}^T \mathbf{K}^{-1}$  à partir des  $\mathbf{H}_k$

- 1 plan si seulement  $f$  inconnu
  - 2 plans si  $(f, u_c, v_c)$  inconnus
  - 3 plans ou + pour  $\mathbf{K}$



- Code disponible de Zhang et OpenCV

# CALIBRATION EN PRATIQUE – CALIBRAGE MULTIPLAN

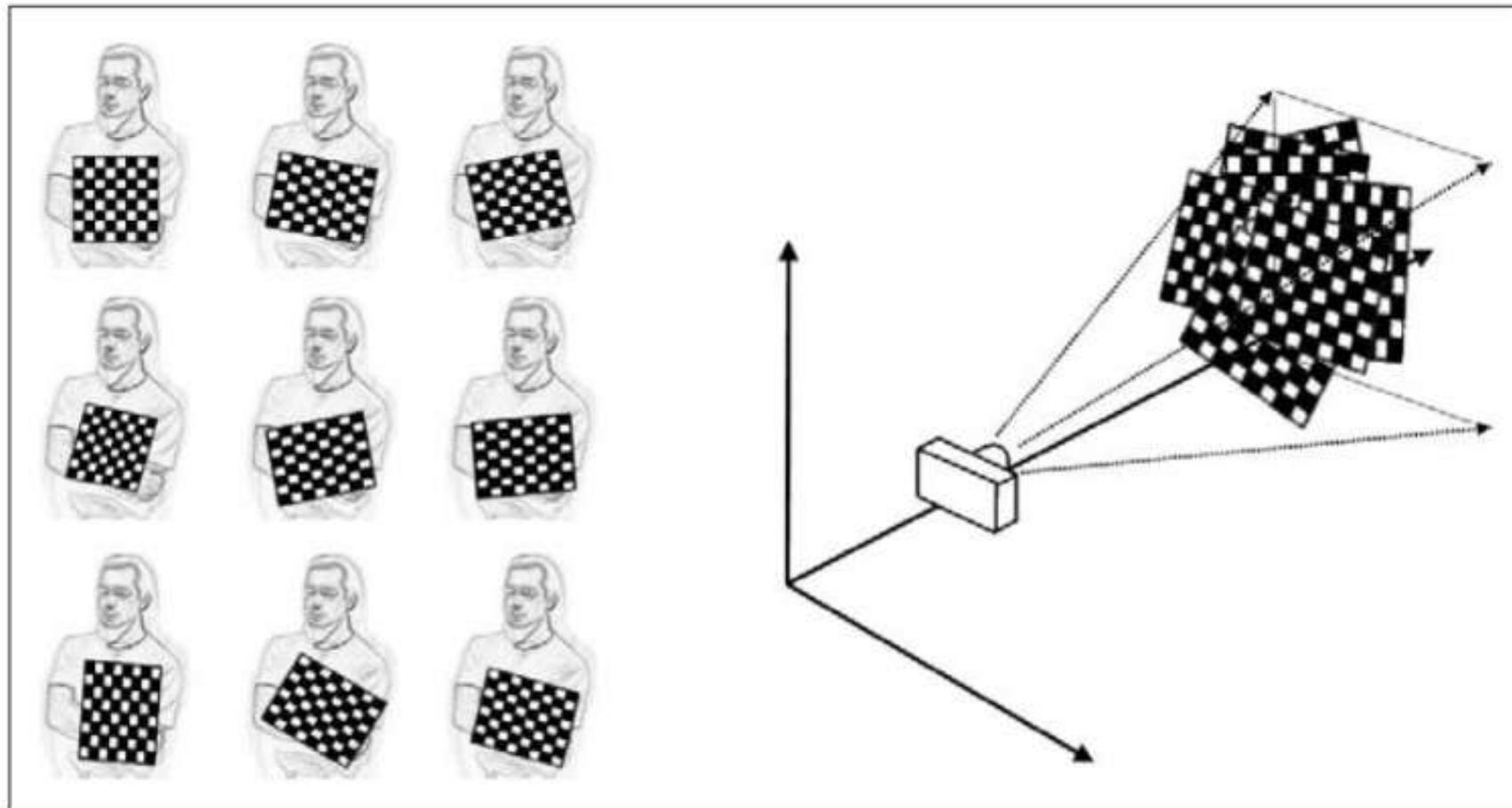
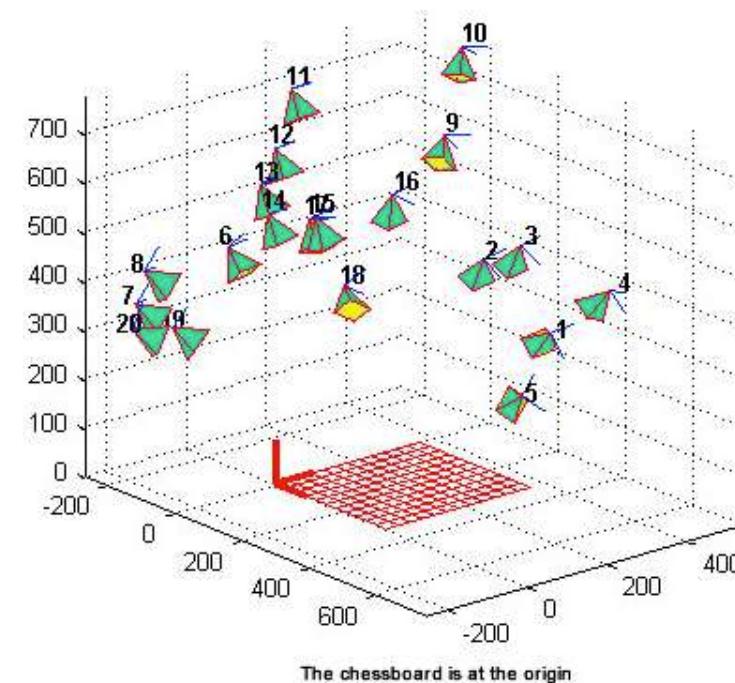
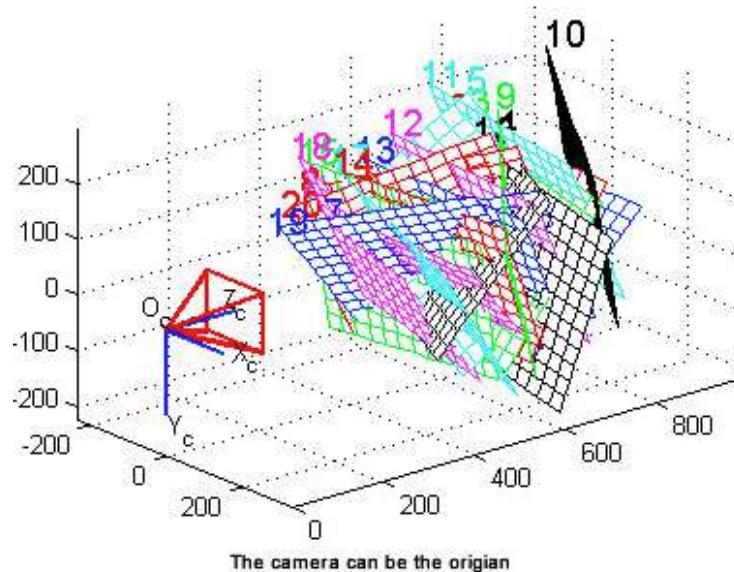


Figure 11-9. Images of a chessboard being held at various orientations (left) provide enough information to completely solve for the locations of those images in global coordinates (relative to the camera) and the camera intrinsics

# CALIBRATION EN PRATIQUE – CALIBRAGE MULTIPLAN

# Deux approches pour la calibration



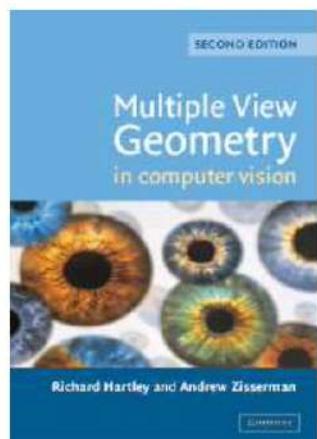
# BIBLIOGRAPHIE

1. Computer Vision -- A modern approach, *D. Forsyth and J. Ponce*, 2006
2. La compression des images numériques, *Hervé Guittet*, Hermès, 1995.
3. Computer Vision : *Algorithms and Applications*, Richard Szeliski, 2007
4. Stanford University - CS 131 Computer Vision: Foundations and Applications
5. If you tell me what you look at, I could tell you where you are - Some state of the art pose estimation methods in computer vision – Tutorial IPIN 2018 – M. Servières

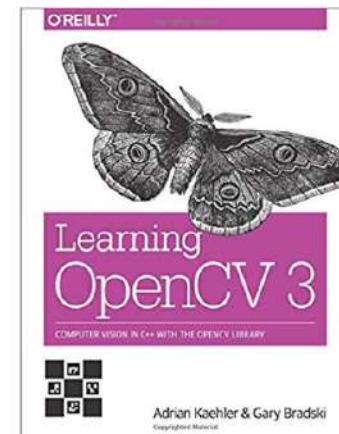
# BIBLIOGRAPHIE

- **Multiple View Geometry in Computer Vision [HZ04]**  
From Richard Hartley,  
Andrew Zisserman

▶ Book site



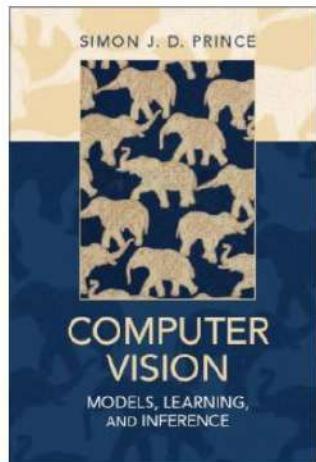
- **Learning OpenCV 3: Computer Vision in C++ with the OpenCV Library [KB17]**  
From Adrian Kaehler and  
Gary Bradski



# BIBLIOGRAPHIE

- **Computer Vision: Models Learning and Inference [Pri12]**  
From Simon J.D. Prince,

► <http://www.computervisionmodels.com>



- **Computer Vision: Algorithms and Applications [Sze10]**  
From Richard Szeliski

► <http://szeliski.org/Book/>

