童哲老师说说：**行列式**是什么

作者介绍：童哲，万门大学校长。18 岁厦门双十中学校运会 1500 米金牌；19 岁物理竞赛全省第一保送北京大学；20 岁北京大学校运会蝶泳第四名；22 岁法国巴黎高师入学考试全球前十名考入；24 岁获得巴黎高师 Mr.MEGA 称号；25 岁创办全国第一所网络大学— 万门大学；26 岁录制多门公开课并在 50 多所大学做演讲；27 岁创办在线教育公司成为 CEO；28 岁万门大学课程超过 150 门影响百万人

行列式这个“怪物”定义初看很奇怪，一堆逆序数什么的让人不免觉得恐惧，但其实它是有实际得不能更实际的物理意义的，理解只需要三步。

1. **行列式$det(A)$是针对一个$n\times n$的矩阵A而言的。A表示一个n维空间到n维空间的线性变换。那么什么是线性变换呢？无非是一个压缩或拉伸啊。假想原来空间中有一个n维的立方体（随便什么形状），其中立方体内的每一个点都经过这个线性变换，变成n维空间中的一个新立方体。**
2. **原来立方体有一个体积V_1，新的立方体也有一个体积V_2。**
3. **行列式$det(A)$是一个数对不对？这个数其实就是$\frac{V_2}{V_1}$，结束了。就这么简单？没错，就这么简单。**

所以说：行列式的本质就是一句话：**行列式就是线性变换的放大率！**

理解了行列式的物理意义，很多性质你根本就瞬间理解到忘不了!!! 比如这个重要的行列式乘法性质：$det(A)\times det(B)=det(BA)$

道理很简单，因为放大率是相乘的啊~！

你先进行一个A变换，再进行一个B变换，放大两次的放大率，就是式子左边。你把“先进行A变换，再进行B变换”定义作一个新的变换，叫做“BA”，新变换的放大律就是式子右边。然后你要问等式两边是否一定相等，我可以明确告诉你：too simple 必须相等。因为其实只是简单的把事实陈述出来了。这就好像：“ 你经过股票投资，把 1 块钱放大 3 被变成了 3 块钱，然后经过实业投资，把 3 块钱中的每一块钱放大 5 倍成了 5 块钱。请问你总共的投资放大率是多少？”

$$3\times 5=15$$

翻译成线性代数的表达就是：$det(A)\times det(B)=det(BA)$ 。这还不够！我来解锁新的体验!

刚刚咱们说到行列式其实就是线性变换的放大率，所以你理解了$det(A)\times det(B)=det(BA)$：那么很自然，你很轻松就理解了：$det(AB)=det(BA)$。So easy，因为$det(AB)=det(A)\times det(B)=det(BA)$

同时你也必须很快能理解了**“矩阵A可逆”完全等价于“$\det(A)\neq 0$”**。因为再自然不过了啊，试想$det(A)=0$是什么意思呢？不就是线性变换A把之前说的n维立方体给拍扁了啊？！这就是《三体》中的”降维打击”有木有!!! 如来神掌有木有!!! 直接把 3 维立方体 piaji 一声~一掌拍成 2 维的纸片，纸片体积多少呢？当然是 0 啦！

请注意我们这里说的体积都是针对n维空间而言的，$det(A)=0$ 就表示新的立方体在n维空间体积为 0，但是可能在$n-1$维还是有体积的，只是在n维空间的标准下为 0 而已。好比一张纸片，“2 维体积”也就是面积可以不为 0，但是“3 维体积”是妥妥的 0。

所以凡是$det(A)=0$的矩阵都是要流氓，因为这样的变换以后就再也回不去了，降维打击是致命性的。这样的矩阵必然是没有逆矩阵A^{-1}的。这就是物理意义和图象思维对理解数学概念的重要性。

当然要证明也是小菜一碟轻而易举的：由$AA^{-1}=I$可知$det(A)\times det(A^{-1})=det(I)=1$。这怎

么可能啊？ $det(A)=0$了，那么$det(A^{-1})$等于多少呢？毫无办法，只能不存在。一个矩阵怎么可能行列式不存在呢？只能是因为A^{-1}不存在。所以A自然不可逆。

我来加点儿烧脑的：

傅里叶变换也可以求行列式!!!

是的你没有听错，大名鼎鼎的傅里叶变换$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx$ 居然也可以求行列式!!!

首先一定有很多人要问责我，是不是没有学过行列式，因为按照绝大多数教科书来说，行列式是这样定义的：$det(A)=\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i)i}$

然后还有什么好说的，拿到一个矩阵各种化简然后算就好了呗，可是怎么说傅里叶变换也可以求行列式？傅里叶变换又不是一个矩阵，更别说矩阵元A_{ij}了。我在痴人说梦吗？但是，等等！桥度麻袋，“傅里叶变换”里面有个″变换″，难道它也是“线性变换”？ !!! 一检查，还真的是。所有函数$f(x)$就组成了一个向量空间，或者说线性空间。可是为什么呢？从高中咱们就熟悉的$f(x)$明明是函数啊，怎么就变成了向量v呢？向量v不是一个n维空间中的箭头吗？长得也不像啊。

其实 “所有$f(x)$组成的集合” 确实满足一切线性空间的定义，比如：

1，向量$f(x)$和向量$g(x)$可以相加，并且有交换律$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$

2，存在零向量$f(x)=0(x)$ ，即处处值为零的函数

3，任何一个向量$f(x)$都存在一个与之对应的逆向量$-f(x)$，使得相加之和等于零向量$f(x)+\big(f(-x)\big)=0$

以及存在数乘以及分配率等性质…… 总之“所有向量$f(x)$组成的集合”完美满足线性空间的8 条黄金法则。

原来咱们熟悉的函数$f(x)$身世可不一般啊，其实它是一个掩藏得很好的向量!!! 对，我没有说错，因为所有函数$f(x)$组成的集合构成了一个线性空间！而且还是无穷维的线性空间!!! 一旦接受了向量$f(x)$是向量的设定，周围的一切都变得有趣起来了！

接下来不妨思考一下，傅里叶变换$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx$是把一个函数$f(x)$变成了另一个函数$F(k)$，难道不可以理解为把一个线性空间中的向量$f(x)$变成了另一个线性空间中的向量$F(k)$吗？！而且这个变换是妥妥的线性的，完美地满足线性变换的定义：$A(v_1+v_2)=Av_1+Av_2$ 以及$A(k\times v_1)=k\times Av_1$。因为积分变换的线性性：$f(x)+g(x)$的傅里叶变换$=\int_{-\infty}^{\infty}\big(f(x)+g(x)\big)e^{ikx}dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx+\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ikx}dx=f(x)$的傅里叶变换+$g(x)$的傅里叶变换.

加法达成。当然数乘也轻松满足：$\int_{-\infty}^{\infty}(kf(x))e^{ikx}dx=k\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx$。于是乎，我们通过以上内容知道了一个重要的结论：**傅里叶变换其实也是线性变换，所以也可以求行列式!!!**（其实傅里叶变换作为一个线性变换不但可以求行列式，更可以求它的特征向量!!比如$f(x)=e^{-x^2/2}$，以及其他很多很多东东，恭喜你又一扇新世界的大门被打开了。千万不要小看傅里叶变换，比如量子力学不确定性原理的秘密就都在这里了）

言归正传那么傅里叶变换神秘的行列式的值$det(F)$究竟是多少呢？难道这个无穷维线性变换也可以求出行列式吗？那我就把$det(F)$求出来给你看：

很明显的问题是这是一个比较困难的问题，因为求傅里叶变换的行列式让我们觉得没有工具可以用，行列式的定义式毫无用武之地。毕竟没有谁能够写出傅里叶变换的$\infty\times\infty$矩阵表达式并套用公式。所以一定要用到其他的化简办法，例如对称性啊等等。不妨先回顾一下之前的结论，对于任何可逆线性变换A有如下性质：$det(A)\times det(A^{-1})=det(I)=1$

如果把傅里叶变换F看做是一个无穷维的A，那么也一定满足这个性质。所以只要求出了傅里叶变换的逆变换的行列式，求一个倒数就得到了傅里叶变换的行列式。哎？问题变得更难了。傅里叶变换的逆变换？若傅里叶变换是：$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx$则它的逆变换是：$f(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-ikx}dx$ （说明傅里叶变换可逆，因为表达式都出来了）

现在的问题是，正负变换，我都不会求行列式，唯一知道的是$det(F)\times det(F^{-1})=1$,

为之奈何？我们还需要至少一个表达式能够反映二者的关系，连立起来才能够求解。

没问题，因为这两个变换真是太像了，像到几乎完全对称。差异点仅仅在于逆变换多一个乘积系数$\frac{1}{2\pi}$，以及积分因子e^{ikx}多了一个负号。除此之外完全是同一个线性变换。而积分因子e^{ikx}多一个负号是什么意思？意味着复数空间的手性定义相反，i变成了$-i$，左手变成右手，或者说虚数部分取负号实数部分不变。这样的手性改变，并不会改变线性变换的体积放大率（之前的知识）。于是乎在线性变化的方法率的意义下，傅里叶变换和它的逆变换放大率是一样的（还差一个乘积系数$\frac{1}{2\pi}$）。

于是也就是说$\det(F^{-1})=\frac{1}{2\pi}\det(F)$, 结合之前的式子$det(F)\times det(F^{-1})=1$, 我们很容易得到$\det(F)=\sqrt{2\pi}$ （更严格来说更对称的傅里叶变换版本$F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ikx}dx$的行列式为 1）

是的，你已经求出来了，虽然神一般的无穷维行列式的计算公式并没有出现，但你确实求出来了。

再附送大家一个彩蛋：都说求导可以把一个函数$f(x)$变成另一个函数$f'(x)$，如果我们把“求导这个操作”D当做是一个线性变换，发现其实也是完全合理的：$D: f(x)\to f'(x)$

线性性完美地满足：$D: k_1f(x)+k_2g(x)\to k_1f'(x)+k_2g'(x)$

那么请问″求导作为函数空间下的线性变换行列式”等于多少呢？思考一下。

$$\det(D)=0$$

因为，它是不可逆的！你要问我兹次不兹次？我可以明确告诉你，不可逆的线性变换都是要流氓，行列式都等于零。不要没事就搞个大新闻。

（全剧终，数学中的严格性在本文中并不能体现，请海涵。）