小朋友的涂鸦（一）：从 8 和 9 说起

方弦

看到题目，你也许会问：8 和 9，两个普通的数字，又有什么可说的呢？但在数学家眼中，这两个数字可不寻常：9 比 8 大 1，8 是一个立方数，它是 2 的立方，而 9 是一个平方数，它是 3 的平方。8 和 9，就是一个立方数紧紧挨着平方数的例子。那么，数学家自然会问：还有没有别的立方数，它紧紧挨着一个平方数呢？

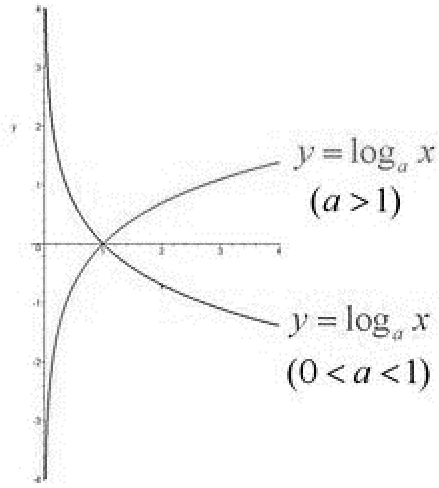
或者用数学的语言来说，$x^2 - y^3 = 1$这个方程，除了$x = 3, y = 2$外，还有别的正整数解吗？我们先在直觉上探索一下，平方数和立方数，当它们越变越大的时候，在所有正整数当中也会越来越稀疏。就像两个越来越不喜欢出外的人，即使是邻居，也许一开始会打个照面，但之后出门的次数越来越少，也就越来越不可能碰上面。数学家们甚至猜测，即使不限定于平方数和立方数，就算是任意大于 1 的次方数，它们“碰面”也只有 8 和 9 这一回。用严谨的数学语言来说，就是方程$x^a - y^b = 1$，在a和b大于 1 的条件下，只有一组解，就是$x = 3, a = 2, y = 2, b = 3$。这又被称为卡特兰猜想（Catalan's conjecture）。

直觉上，卡特兰猜想应该是对的，但直觉毕竟是直觉，它不是数学证明。虽然平方数和立方数它们越来越稀疏，但是正整数有无限多个，它们有无数次碰面的机会，谁知道它们会不会在通向无限地平线的路途中就抓住了又一次机会呢？所以，我们需要数学证明，只有数学证明，才能从逻辑上根本地否决这种可能性。

我们来看看数学家是怎么思考的。

数学家们想要的是一个数学证明。我们重新考虑方程$x^a - y^b = 1$。在这个方程里什么东西最麻烦呢？减法很简单，等于号很简单，剩下的就是乘幂操作了。那么，有什么办法能去掉乘幂这个麻烦事呢？这个办法就是对数，大家在中学都学过。对数能将乘幂转化为更简单的乘法：$\ln(x^a) = a\ln(x)$。我们先将方程改写成$x^a = y^b + 1$，然后两边取对数，就得到了$a\ln(x) = \ln(y^b + 1)$

现在，方程里最麻烦的又是什么呢？就是对数里边的加法，因为对数和乘法很友好，但跟加法实在谈不来，$\ln(x + y)$并没有一个好的表达式。有什么方法可以绕过去呢？我们想到，y^b是一个次方数，它可以非常大，要多大有多大，而相比之下，加上去的这个 1 非常小非常小，小得几乎可以忽略不计。而对数函数增长得又非常慢非常慢，ln(20)大概是 3，ln(400)大概是 6，要想对数值增加 3，原来的数要增加 20 倍，要等到10^{13}，也就是万亿，对数值才达到 30。而对于一万亿来说，这个小小的 1 实在是零头中的零头。



对数函数的图象

但数学是严谨的，虽然这个 1 很小，带来的影响更小，但我们不能直接说可以把 1 去掉。但这难不倒数学家：既然不是直接相等，划个界限总可以吧？用一点简单的高等数学，我们可以得到如下的不等式：

$$b\ln(y) < \ln(y^b + 1) < b\ln(y) + y^{-b}$$

也就是说，去掉 1 和不去掉 1，对于对数值的影响只有y^{-b}，也就是y^b的倒数。因为y^b可以非常大，它的倒数也就非常小。如果它增长十倍，它的倒数就会变成原来的十分之一。我们刚才说到，y^b要达到万亿，它的对数值达到 30，这时候它的倒数，也就是加 1 造成的误差，只有万亿分之一。这是个什么概念呢？相当于在测量地球到太阳的距离时，不小心多加了根头发丝。在现实

世界中，即使多么严谨的测量，这种程度的误差可能也就放过去了。但在数学中，无论多小的误差，不应该舍弃的时候就不能舍弃。

将这个误差的结论代入原来的方程，我们得到：

$$|aln(x) - bln(y)| < y^{-b}$$

也就是说，我们要寻找两个正整数，它们的对数值的某个倍数非常接近。这就需要对正整数的对数进行深入的研究。在 1966 年到 1967 年，数学家阿兰·贝克（Alan Baker）写出了一系列的文章，其中给出了正整数乃至所谓“代数数”（也就是多项式方程的解），它们的对数的倍数之间距离的一个下界。也就是说，上面的不等式左边其实不会太小，它会大于某一个关于a, b, x, y的函数，可以写成：

$$C(x, y, a, b) < |aln(x) - bln(y)|$$

那么，如果我们能证明对于绝大部分的x, y, a, b都有$C(x, y, a, b) > y^{-b}$，那么两个不等式就会产生矛盾，方程也就不可能有整数解，这不就解决了卡塔兰猜想了吗？

当然，实际上这种简单粗暴的方法并不能解决问题。C(x, y, a, b)这个函数，虽然可以明确计算出来，然而得出的函数太小，不足以解决问题。但引出矛盾的方法不只一种。为了证明这类型的结论，贝克发明了一种方法，可以在不同的角度上引出矛盾。而另一位数学家Tijdeman 利用贝克的方法，找到了一个巧妙的角度，证明了当a和b足够大的时候，方程必定没有解。而此前人们已经证明了，当a和b固定的时候，关于x和y的方程最多只有有限个解，而且给出了这些解的一个上界。结合两个结果，数学家们证明了，整个关于a, b, x, y的方程最多只有有限个解。现在在波尔多大学的数学家米歇尔·朗之万（Michel Langevin）计算出了一个明确的上界：

Alan Baker

$$e^{e^{e^{e^{730}}}}$$

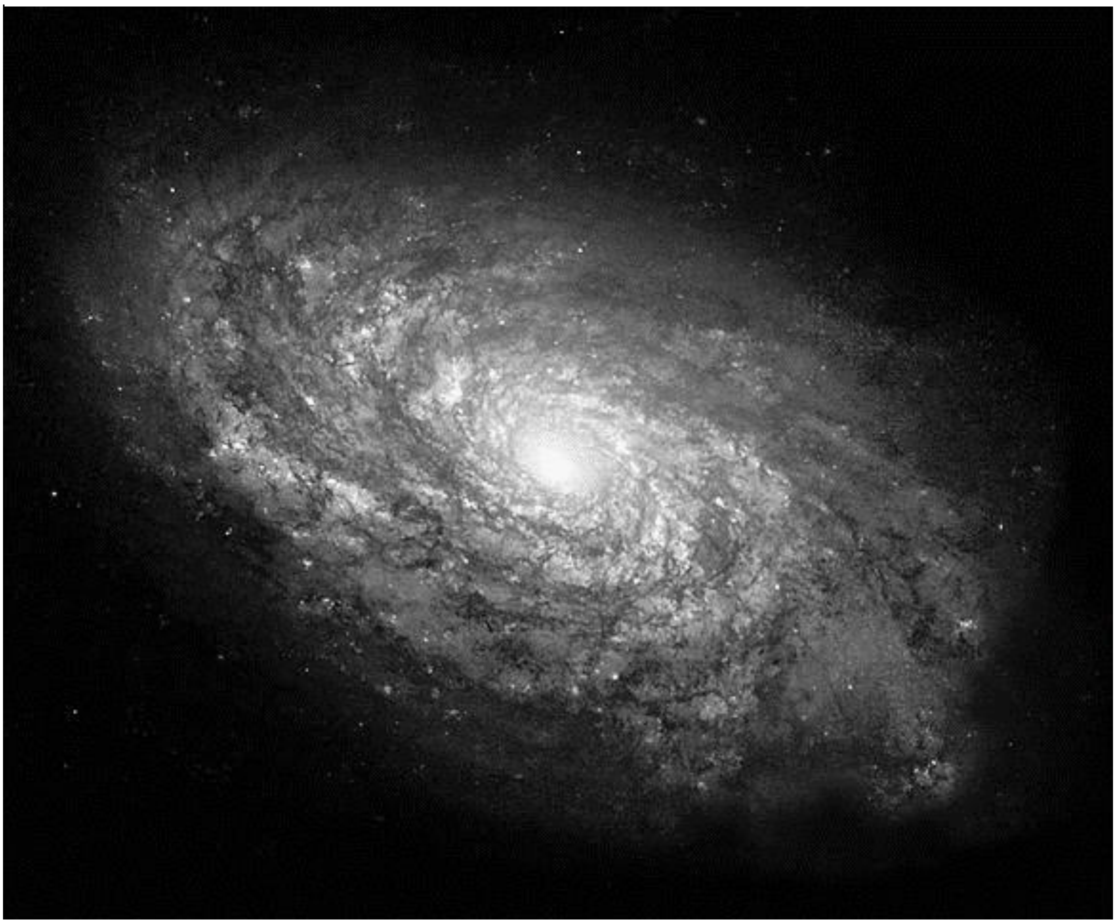
也就是说，只要检查比这个数小的所有正整数，如果没有找到别的解，那么就说明 8 和 9 是唯一一对靠在一起的次方数。但这个任务看起来容易，做起来却是无计可施。

$e^{e^{e^{e^{730}}}}$有多大？在现实中，能与其相比的数字根本不存在，即使是 1 后面添上宇宙里所有的原子当作 0，这样得到的无量大数，还是连零头的零头都赶不上。对于这么大的数字，表达它都有困难，更何况检查！

你可能觉得，这样找正整数的对数之间的关系，又有什么用呢？好不容易得出一个结果，却只是“原则上可以验证”，根本不能实际计算，这种方法又有什么用？但不要忘记，方法之所以是方法，就是因为它能应用到许多问题上。贝克的这套方法，可以应用到所谓的“丢番图方程”，也就是系数和解都是正整数的方程。大家耳熟能详的费马大定理，可能大家不太熟悉的完美长方体问题，都是悬而未决的丢番图方程。而对这类方程的研究，涉及数论的方方面面。贝克的方法给丢番图方程地研究带来了全新的工具，他也因此获得了 1970 年的菲尔兹奖，那时离他发表相

关论文还不到四年。

数目远超银河中原子个数，图片来自 Wikipedia



但卡特兰猜想仍然悬而未决。要等到 2002 年，罗马尼亚的数学家 Preda Mihăilescu 才最终证明了卡特兰猜想。他的方法大量用到了分圆域与伽罗华模的知识，这些都是代数数论中的艰深概念，哪怕是稍稍涉猎，恐怕也需要本文十倍以上的篇幅才能讲个大概。但无论如何，我们现在终于可以确定，8 和 9 在自然数中的确是绝无仅有的一对，在无限的可能中，唯一一对能紧靠在一起的次方数。

卡特兰猜想还有别的变体，比如说人们猜想，对于任意的正整数 k，间距为 k 的次方数对只有有限个。对这些变体的探索也非常引人入胜。

但这不是这篇文章的主题。

从整数到多项式

我们在中学里就学过多项式。对于一个变量 x，我们取它的一些次方x^a, x^b等等，乘上系数，然后加起来，就得到了一个多项式，比如说$x^7 + 6x^3 + 4$，就是一个关于x的多项式。在这里，我们考虑那些系数都是复数的多项式，也就是复系数多项式。

数学家们很早就发现，这些多项式与正整数有一种神奇的相似性：可以做加法、减法、乘法，也可以分解因数，可以求最大公约数和最小公倍数，同样有着唯一分解定理：正整数可以唯一分解成素数的乘积，而多项式也能唯一分解成所谓“不可约多项式”的乘积。基本上，在数论中对正整数性质的研究，很多都可以直接搬到多项式上来。于是，遇上有关正整数的问题，把它迁移到多项式之中，未尝不是一个提出问题的好办法。自然，因为多项式本来结构就比较复杂，相关的问题也更难解决，但这不妨碍数学家的步伐，毕竟他们要攻克的就是难题。

> 注：更准确地说，因为正整数和多项式都组成了所谓的“欧几里德整环”（Euclidean domain），所以它们共享非常多的数论性质，比如说，它们都是所谓的“主理想整环”，它们的所有理想都是主理想，也就是某个元素的倍数组成的理想。此处插播一则笑话：为什么 QQ 只有 QQ 群？因为 QQ 没有理想……

在 1965 年，Birch、Chowla、Hall 和 Schinzel 问了一个问题：如果有两个多项式P和Q，它们是互质的，那么P的平方和Q的立方之间的差距，也就是说P^2-Q^3，可以有多小？这个问题很显然是卡塔兰猜想的延伸。卡塔兰猜想最原始的版本问的是，除了 8 和 9 以外，平方数和立方数的距离能不能达到 1。而 Birch 等人现在问的是，多项式平方和立方的距离最小能达到多少？

当然，要回答这个问题，首先要想办法衡量多项式的大小。对于不同的多项式P(x)，当x趋向于正无穷时，P(x)趋向无穷的速度各有千秋，而决定这个速度的主要因素，就是多项式的次数，也就是多项式中x的最高次方是多少。所以，我们选择多项式的次数作为衡量多项式大小的标尺。现在，我们可以用更严谨的方式叙述那四位数学家的问题：

对于某个正整数k，假设有两个互质的多项式P, Q，其中P的次数是$3k$，Q的次数是$2k$。那么，多项式$R=\mathrm{P}^2-Q^3$的次数最小可以有多小？

我们能看出来，在这个问题中P和Q的次数不是随便选取的。如果P的平方和Q的立方次数不一样的话，那么R就跟P, Q一样大。只有上面的选择方法，才能至少使两者的最高次项互相抵消，使问题变得不那么无聊。另外，对于任何一个例子，我们只要将所有多项式都乘上一个合适的常数，就能得到另一个本质上相同的例子。所以，我们只考虑本质上不同的那些例子。

在论文中，四位数学家给出了一个$\mathrm{k}=5$的例子：

$$\mathrm{P}=\frac{1}{27}t^{15}+\frac{1}{3}t^{12}+\frac{4}{3}t^{9}+\frac{8}{3}t^{6}+\frac{5}{2}t^{3}+\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Q}=\frac{1}{9}t^{10}+\frac{2}{3}t^{7}+\frac{5}{3}t^{4}+\frac{4}{3}t$$

$$\mathrm{R}=\frac{1}{36}t^{6}+\frac{7}{54}t^{3}+4$$

在这个例子里，P, Q, R的次数分别是 15、10 和 6。虽然P^2 和Q^3 的次数都是 30，但是它们凑巧在前 24 项的系数都相同，而它们的差仅仅只是一个六次多项式，真是一个难得的巧合。但数学家总是有些贪心，面对这个例子，他们想的是：能不能把R的次数再压低一点？能不能找到差距更小的平方多项式和立方多项式？这个想法非常自然，但在反反复复的尝试中，似乎找不到次数更低的例子了。于是，这四位数学家就猜想：这个例子是不是已经无法改进了呢？他们提出了这样的猜想：

对于两个互质的多项式P, Q, 假设其中P的次数是$3k$，Q的次数是$2k$。那么，多项式$\mathrm{R}=\mathrm{P}^2-Q^3$的次数至少也有$k+1$，而且总能找到使R的次数恰好是$k+1$的例子，也就是说这个下界是紧的。在刚才的例子中$k=5$ ，而R的次数恰好就是 5+1=6，符合猜想。数学家们想寻找更多的这样达到最小差距的例子，尝试在其中寻找规律。但出人意料的是，$k=5$的第二个例子，要到 35 年之后的 2000 年，才被 Elkies 发现，而且这个例子的复杂度远远超出了预期。在上面的例子中，我们看到的系数都是相对简单的分数。而现在，请看 Elkies 的这个例子：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}=\mathrm{x}^{15}-3x^{14}+51x^{13}-67x^{12}+969x^{11}+33x^{10}+10963x^{9}+9729x^{8}+96507x^{7}\\+108631x^{6}+580785x^{5}+700503x^{4}+2102009x^{3}+1877667x^{2}+3904161x\\+1164691\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}=\mathrm{x}^{10}-2x^{9}+33x^{8}-12x^{7}+378x^{6}+336x^{5}+2862x^{4}+2652x^{3}+14397x^{2}+9922x\\+18553\end{aligned}$$

$$\mathrm{R}=-2^{6}3^{15}(5x^{6}-6x^{5}+111x^{4}+64x^{3}+795x^{2}+1254x+5477)$$

在这个新例子中，多项式的系数大大膨胀了，这就解释了为什么寻找第二个例子花了这么长的

时间。我们也能从另一个侧面窥见这个问题的难度。比方说，我们希望用待定系数法寻找例子：先将多项式P,Q的系数都设为未知数（最高次的系数设为 1），然后计算R的所有系数，它们都是之前未知数的多项式。在$k=5$的情况下，我们要求R从x^{29} 到x^7的这 23 个系数都是 0，这样就得到了 23 个方程。将它们联立起来，就得到了一个关于 25 个变量的 23 个方程组成的高次方程组，理论上只需要解出这个方程组，就能得到所有的例子。但问题是，这个方程组的总次数是 6198727824，大约是六十亿！这样的方程，不要说是人脑，就是计算机也几乎无法解开。但至少，我们知道这些系数都是所谓的“代数数”，也就是代数方程的解。这样庞大而困难的问题，难免令人望而却步。寻找新的例子已经如此困难，更不要说穷尽所有例子了。

但有一帮数学家，光是看了看问题，在餐巾纸上随手涂鸦了一下，就拍着胸脯宣称：$\mathrm{k}=5$的情况一共就只有 4 个例子，还有两个就继续找吧；不光这样，对于任意k的情况，我们都能证明你们的猜想是对的，而且还能帮你们计算所有本质上不一样的例子一共有多少个。

这是什么魔法？