数说

MATH SAID

2017.11

主办：华中科技大学数学与统计学院科学与技术协会
（电子设备适配版）

11月

写在前面

数说："从先贤而学，学而思，思无果而问道，道通辄引以经世之用。"

好久不见！又一本《数说》新鲜出炉啦！

这次，我们得到了很多原创稿件作者的投稿支持，相信随着期刊的发展，会有我们会收到更多的原创稿件，在此感谢原创稿件的作者。

这次，经过招新后新的血液融入到了期刊部的大家庭，放在嘴边很久的副刊终于要着手开工了，小伙伴们有没有一丝丝的期待呢。

这次，为了为大家献上更好的文章内容，更优雅的格式排版，我们进行了数次集体培训，"更美更实用"这一目标，我想，我们做到了。

这次，鉴于大多数学著作都是用英文出版，我们还在主刊增加了英文内容的篇幅，使得主刊更符合自身学术性的定位，希望会对读者有所帮助。

，最后，特别感谢学院老师对稿件认真负责的审核！感谢院系领导,各位老师，辅导员，以及广大同学，数

学爱好者对本刊的支持与帮助！由于编辑团队自身的能力依旧不完善，又及缺乏可以参考的经验，还望广大师生以及数学爱好者见谅，并积极向本刊提出意见与建议，让本刊更加完善，更好地满足大家对数学知识的渴望！

《数说》期刊部

2017.11

数学与统计学院科学与技术协会

《数说》期刊部

部长 刘文博

文字编辑组 刘浩喆

排版美工组 孙诗涵

宣传策划组 易世钰

部员 彭源源 李征洋 张展硕 张曦林 付海东 黄涵琦 蔡少帅

目 录

只言片语看选择公理

在介绍选择公理之前，我们先来看一个例子。

考虑以下问题：容易找到两个无理数a,b使得$a+b$有理数，或者使ab为有理数（在这两个情况下都可以取$a=\sqrt{2},b=-\sqrt{2}$），但是能否使得a^b也是有理数？回答是是的。

下面我们将给出一个优美的回答。令$\mathrm{x}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$。如果x已是一个有理数，则得到所需的例子；但是，如果x不是有理数，而是无理数，则令$\mathrm{a}=\mathrm{x},\mathrm{b}=\sqrt{2}$，就又得到了一个例子。

现在的这个论证肯定已经确定了有这样的可能，即a和b都是无理数，而a^b是有理数。然而这个证明有一个非常有趣的特点：它是**非构造性的**，就是说，它并没有明确指出哪个无理数能行。相反，它告诉我们两种情况总有一种能行，但并没有告诉我们起作用的究竟是哪一种情况，甚至一点线索都没有留给我们。

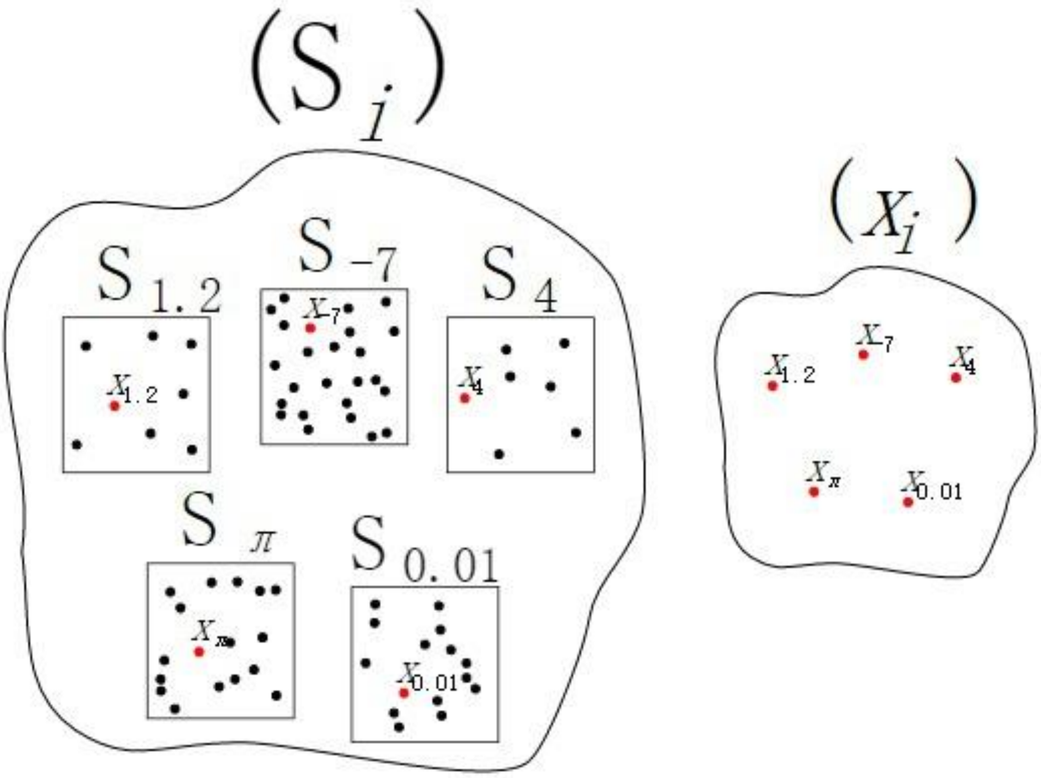
这样的一种论证一直让哲学家和倾向于哲学的数学家烦心，但是就主流的数学而言，它是一个完全被接受的重要类型的推理方法。形式地说，我们是求助于“排中律”。我们已经证明了某个命题的否定不可能

为真，由此导出这个命题本身必定为真。对于以上证明的典型反应，并不是说它在哪种意义下不行，而是它的非构造性本性让人惊奇。

然而面对着一个非构造的证明，很自然地会去问，能否找到构造性的证明。说到底，一个实实在在的构造会使我们对这个命题有更多的洞察，这一点很重要，因为我们去证明一件事情，不仅是为了确知他为真，而想对于它**为什么**为真有一点概念。当然，要找一个构造性证明并不是因为非构造性的证明不对，而只是有一个构造性的证明可以提供更多信息。

说了这么多，那么什么是选择公理呢？

选择公理，简单地说，就是对于所有的集族，均存在选择函数，或是说，如果有一组非空集合，那么我们可以从每个集合里取出一个元素。（如图）



而严格的说，**选择公理**是从一些集合作出其他集合的几个规则之一。这种规则的两个典型例子是下面的命题：对于任意的集合 A，可以作出其一切子集合的集合[称为 A 的幂集]，还有对于任意的集合 A 和任意的性质p，可以作出 A 中的所有性质p的元素的集合（这两条规则分别叫做幂集公理和概括公理）。

和其他公理一样，选择公理可能看起来是那么自然，以至于我们在使用它的时候还不觉得正在用它，真正的情况也是，在它第一次被形式的陈述以前，许多数学家都用过它了。为了对于它说的是什么有所了解，我们再来看一个例子。

就来看一下大家知道的可数集合的可数族之并仍

是可数集合的证明吧。这个族为可数的事实，使我们能把它们列成一个单子A_1，A_2，$A_3\cdots$，然后，每一个单个的集合A_n也可数这一事实，又使我们能把它的元素列成一个单子a_{n1}，a_{n2}，$a_{n3}\cdots$最后，找一个系统的方法把元素a_{mn}都数遍，就完成了证明。

在这个证明里面，我们确实做了无数次未经特别说明的选择。我们被告知，每个A_n都是可数的，然后就对A_n的元素“选择”了一个单子，而**未特别说明**是怎么选的。进一步，因为绝对没有有对我们说明过这些A_n，所以当然也不可能说明是怎样把它们排列成一个单子的。这一点并没使证明失效，但是它确实说明这个证明是非构造性的。

（remark:如果确实告诉了我们这些集合A_n究竟是什么，就很可能说明怎样把它的元素列成单子，这样就对这些集合之并为可数集合得出一个构造性的证明）

一般来说，选择公理宣称：若给定一族非空集合X_i中，可以选择一个元素x_i。更准确地说，它宣称：若X_i为非空集合，而i是一个指标集合I的元，则有一个定义在I上的函数f，使对所有的i，f（i）$\in X_i$。这个函数称为这个族的选择函数。

为什么要对选择公理大惊小怪呢？主要的理由在

于，如果在某个证明中应用了选择公理，则证明的那一部分就自动地是非构造的了。这一点也就会反映在命题本身。对于我们所用的其他规则，例如“我们可以取两个集合之并”，则断定其存在的那个集合是由它的型组织唯一的确定的。但是对于选择公理就不是这样，断定其存在的对象（选择函数）并不是由它的性质唯一地指定的，在典型情况下，都有许多选择函数存在。

由于这个原因，主流数学的一般观点是，哪怕选择公理用得没有问题，最好还是指明是应用了它，以便提醒这个证明是非构造性的。

跟现实生活不同，数学里所有的东西都是形式化的，即使是数字“42”也是：你可以拿来 42 个苹果，或是召集42个伙伴，但现实生活中没有42这个东西。

所以，我们有很多“数学世界”，每一个世界都有不同的规则，我们把这些规则称为“公理”只要这些公理不会导致矛盾，那么无论公理有多么奇怪都是可以的。

哥德尔和寇恩证明了，无论接受选择公理与否，都不会导致矛盾，只是身处不同的“**数学世界**”而已。不过，除了一些研究集合论的数学家和逻辑学家以外，大部分数学家都选择接受选择公理，因为在含有选择

公理的数学世界里，事情会简单一些。

人们有时会说，应用选择公理令人不快，或者说他的结果是高度违反直观的，但是在绝大多数情况下，稍想一想就会发现，这些结果并没有违反直观，例如，考虑一下**巴拿赫-塔尔斯基驳论**：一个球可以被分成五份，接着拼成两个与原来一样大的球。为什么它看上去很奇怪，似乎是驳论？这是因为我们觉得体积没有保持不变。而事实上可以把这种感觉转变为严格的论据，即这个分解所形成的子集合不可能都是可以有意义地赋予体积的那种集合。但是这根本不是驳论，对于一个好的集合，比如多面体，我们可以说清楚所谓体积是什么意思，但是完全没有理由假设对于球体的所有子集合，我们都能够有意义地定义其体积（完全没有理由相信所有的集合都是可测集，而且可以证明确实有不可测集的存在，不过这里又要用到选择公理了）。

选择公理在日常的数学生活里比上述的基本形式用得更多的还有两个形式。其一是**良序原理**，它宣称所有的集合都可以良序。另一个是**佐恩引理**，它指出，在一定条件下必有“最大”元素存在。例如，一个向量空间的基底就是最大的线性无关集合，而结果是，若对向量空间的线性无关集合的整体应用佐恩引理，

就可以证明每一个向量空间都有基底存在。

这两个命题都被说成是选择公理的形式，是因为它们都等价于选择公理，就是说，在其他的构造集合的规则都存在的条件下，它们的每一个都蕴含着选择公理，也可以从选择公理导出。要想看出为什么选择公理的这两个形式都有一种非构造的感觉，一个好办法是花上几分钟想一想怎样找出实数集合的良序，或者找出有所有实数序列所成的向量空间的基底。

关于选择公理，特别是关于它与形式集合理论的其他公理的关系，可以参看集合理论相关的书籍。

（文稿来源：
《普林斯顿数学指南》）

勾股数是否有无穷多组？

一个解答的结构是这样的：先回答问题（即证明丢番图定理），接着讲该证明中的思想的重要性，最后讲一点点丢番图定理与费马大定理的联系。

先回答问题：最简形式（最大公约数为 1）的勾股数有无穷多组，并且它们的形式都恰好是：$x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2$，$gcd(x,y,z) = 1$。注意，不仅把 a，b 带进去可以得到一组最简形式的勾股数，而且任意一组最简形式的勾股数一定是这个形式。

公元三世纪，数学家丢番图在他的《算术》一书中就写下这个定理。而实际上人们很早以前就知道构造勾股数的方法了——甚至是在毕达哥拉斯之前。在一块被称为 Plimpton 322 的约公元前 1800 年写成的古巴比伦泥板上，人们发现了很多勾股数的记载，最大的一组是(12709,13500,18541). 显然古巴比伦人肯定掌握了某种构造勾股数的方法，这么大的勾股数几乎不可能是凑出来的。（在代数数论课上得知 Plimpton 322 就在我们学校图书馆……看这里：Item 158: Plimpton 322）

一个朋友提到了一种很漂亮的证明方法，我稍微

仔细地说一下：

对于每一组最简形式的（非平凡的）勾股数组(a,b,c)，我们都可以把$a^2+b^2=c^2$的两边同时除以c^2，得到$(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$。这就是方程$x^2+y^2=1$的（既约）有理数解。

同样地，每一组$x^2+y^2=1$的（既约）有理数解都可以乘上c^2得到一组最简形式的勾股数。

所以最简形式的勾股数与$x^2+y^2=1$的既约有理数解有一一对应的关系。

而高中学的解析几何告诉我们，$x^2+y^2=1$对应了平面上的单位圆。任何一条不垂直于 x 轴的过$(-1,0)$的直线都有$y=k(x+1)$的形式。注意到$(-1,0)$是该直线与单位圆的交点。

当 k 是有理数时，这条直线与单位圆的另一个交点一定是有理点，因为韦达定理告诉我们它们的和是有理数。反之，如果另一个交点(a,b)是有理点，那么$k=b/(a+1)$是有理数。

所以，$x^2+y^2=1$的既约有理数解与过$(-1,0)$的斜率为有理数的直线有一一对应的关系。于是，将$y=k(x+1)$代入$x^2+y^2=1$，解得$x=\frac{-k^2+1}{1+k^2}$，所以另一个交点坐标是$(\frac{1-k^2}{1+k^2},\frac{2k}{1+k^2})$。接着将既约形式的

$k=\frac{b}{a}$代入，就得到$(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\frac{2ab}{a^2+b^2})$。

再根据之前所说的一一对应关系，所有最简形式的勾股数组恰好就是$x=a^2-b^2, y=2ab, z=a^2+b^2$。

我把这个证明过程详细地写出来，是因为这个方法可以推广到其他地方，比如椭圆曲线——过有理椭圆曲线上两个有理点的直线与该曲线另一个交点也是有理点。

有这样的性质之后，我们就可以通过两个有理点得到第三个有理点，于是可以定义一种有理椭圆曲线上有理点之间的运算，并且这个运算使得所有有理点构成了一个群。

而且 Mordell-Weil theorem 告诉我们这个群是有限生成的交换群——这个群在数论中有很重要的作用，与费马大定理也有关系。

说到费马大定理，借助之前的丢番图定理，我们可以很快证明费马大定理的一个特殊情形：方程$x^4+y^4=z^4$没有非平凡的整数解。

在讲证明之前，大概说一下费马大定理是怎么回事：

1637 年，费马在阅读丢番图的《算术》一书时，在第 11 卷第 8 命题旁写道：

将一个立方数分成两个立方数之和，或一个四次幂分成两个四次幂之和，或者一般地将一个高于二次的幂分成两个同次幂之和，这是不可能的。关于此，我确信已发现了一种美妙的证法，可惜这里空白的地方太小，写不下。

费马的意思也就是说，当 $n>2$ 时，方程$x^n+y^n=z^n$没有非零整数解。

由于『写不下』，所以费马没有把他的『美妙的证法』写出来……而数学家们不看到证明是不相信结论的，所以他们开始寻找证明，一找就找了 358 年。直到 1995 年，英国数学家怀尔斯和他的学生泰勒才最终完成费马大定理的证明。

稍微想一下就可以意识到，我们只需要证明 n=4 和 n 为奇质数的情况，因为任何大于 2 的整数的约数中要么有 4，要么有奇质数，而如果该方程对于 n=k 没有非零整数解，那么对于 k 的倍数都没有非零整数解。

我们来看 n=4 的情况。

注意到如果方程$x^4+y^4=z^2$没有非零整数解，那么$x^4+y^4=z^4$也没有，因为如果$(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})$是后者的解，$(\mathrm{a},\mathrm{b},c^2)$就是前者的解。所以我们只需要证明前者就够了。

接下来就需要用到之前的丢番图定理啦。再强调

一遍：不仅把a, b带进公式可以得到一组最简形式的勾股数，而且任意一组最简形式的勾股数一定是这个形式。

我们采用反证法：

假设$x^4+y^4=z^2$有非零整数解，由于是 2 次方和 4 次方，所以不妨设x, y, z都是正整数。

取z最小的一组解x, y, z，于是z一定是奇数而x, y一奇一偶，不妨设x, z是奇数而y是偶数。（想想为什么，提示：模 4

根据丢番图定理，$\mathrm{x}=a^2-b^2, y=2ab, z=a^2+b^2$，其中$\gcd(\mathrm{a},\mathrm{b})=1$；

注意到$x^2+b^2=a^2$并且$\gcd(\mathrm{x},\mathrm{b})=1$，所以再次根据丢番图定理，$\mathrm{x}=c^2-d^2$, $\mathrm{b}=2\mathrm{cd}$, $\mathrm{a}=c^2+d^2$，其中$\gcd(\mathrm{c},\mathrm{d})=1$；

于是$y^2=2\mathrm{ab}=2*2\mathrm{cd}(c^2+d^2)$，所以$\mathrm{y}=2\mathrm{k}, \mathrm{k}\in \mathrm{Z}$，等式化为$k^2=cd(c^2+d^2)$。

注意到c, d, c^2+d^2是两两互质的，所以它们一定都是平方数：$\mathrm{c}=e^2$, $\mathrm{d}=f^2$, $c^2+d^2=g^2$；

然而$e^4+f^4=g^4$且$\mathrm{g}\le c^2+d^2=a<z$，所以与z最小矛盾。所以$x^4+y^4=z^2$没有非零整数解，于是$x^4+y^4=z^4$也没有。

证毕。

既然已经说到了费马，我不得不吐槽一下。很多人都知道费马大定理的故事，也有不少人知道他其实经常只写结论不写证明，然而更『过分』的是……

费马这一辈子只写过一个证明！！！就是上述 n=4 的情形……

（Ian Stewart. Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem. Chapter 11, Section 1.）不过吐槽归吐槽，费马比我等凡人不知道高到哪里去了。

好啦，n=4 的情况已经搞定了，接下来就只剩 n 为奇质数的情况了。**『只剩』？？？**

后一种情况目前没有初等证明方法，需要**很多很多很多很多很多很多**数学知识，就不再这里写了。想知道就去看教材吧~

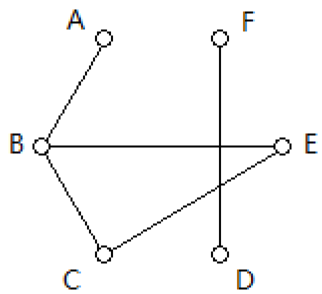
很多人会问：离散数学以及图论，有没有在 A 数学本身以外的方面有应用呢？

确实，接触到离散数学和图论的人都知道这方面的知识比较抽象。包括线性代数亦是如此。那我们来看一下线性代数，离散数学,有限域以及图论在通讯网络中的应用吧。

方便起见，先介绍一些基础概念（总共十个，略多，但都非常直观）：

假设有 n 个人（n 个通信地址），我们用 n 个顶点来代表他们。如果 A 和 B 之间可以互通电话，那么我们就用一条线段把 A、B 两点连起来，称其为以 A 与 B 为端点的边，记作 AB。

这样一来，n 个顶点与连接它们的一些线段就表示了一个电话系统，在数学上我们称其为具有 n 个顶点的图。例如，一个具有六个顶点与五条边的图长这样：



从图中我们可以看出，B 与 E 是可以互通电话的，而 C 和 D 则不能。

假定任意两个点之间最多连一条边。若图中以点 A 为端点的边有 k 条，我们就说点 A 的次数是 k。与点 A 直接相连的点则被称为点 A 的邻居。

例如，上图中，点 B 的次数是 3，其邻居是点 A、C、E。

在上图的情况中，如果 A 想把一个消息告诉 E，那么 A 可以打电话给 B，然后 B 再打电话给 E。经过

两次电话，E 便得知了这个消息。首尾相接的两条边 AB、BE 组成了一条长度为 2 的道路。

一般地，长度为 n 的道路是指图中首尾相接的 n 条边（可重复）。如果任意两个点之间都存在有限长度的道路，那么这个图就是连通的。

好吧我知道概念有点多，再讲两个就开始步入正题：

A、B 两点之间所有道路的长度的最小值被称为点 A 与点 B 的距离；而一个连通图 G 的不同顶点之间的所有距离的最大值被称为图 G 的直径。

好了！我们已经知道，一个通信网络可以用一个图来表示。那么，什么样的通信网络比较好呢？我们需要从三个方面考虑：经济性、有效性和可靠性。

（1）经济性：

对于 n 个人构成的通信网络来说，最方便的情况自然是任意两个人都可以直接通话，但这样就需要 n(n-1)/2 条边。当 n 很大时，需要连 } n(n-1)/2 条电话线，成本上很不合算。所以，我们希望边数越少越好。

（2）有效性：

每个人都只能打电话给邻居，接着邻居再打电话给邻居的邻居……为了能让每两个人之间都能传递消

息，每个人的信息经过有限次通话必须可以传递给其他所有人。并且，为了保证信息传递的速度，我们希望传递的次数越少越好。用之前的术语来说，图必须得是连通的，并且直径越小越好。

（3）可靠性：

实际生活中难免会出现一些意外情况，比如电话线可能会断掉，或者某个人可能会临时有事不方便接电话。我们希望这些意外情况不影响其他人的通信；用术语来说就是，我们希望从图 G 中去掉一些顶点或边之后，剩下的顶点与边构成的图依然是连通的。

我们没有办法对可靠性下一个笼统的数学定义，因为从工程实际的角度出发，『可靠』与否的标准会有不同。一般来说，这三个方面是互相制约的。有效性与可靠性越好，经济性就越差。那我们怎么来定量分析呢？额……我发现我不得不再介绍一个概念：

如果图 G 的每个顶点的次数都是 k（即每个人都恰好有 k 个邻居），那么图 G 就叫 k 次正则图。

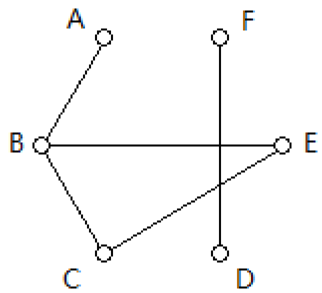
为了使问题变得简单，通常我们固定人数 n 与次数 k，于是问题就变成了：

在所有 n 顶点 k 次正则连通图中，哪些最有效（即直径最小）？哪些最可靠？

数学家们发现，有效性和可靠性都依赖于图的同一个参数——图的次根。

================以下内容需要一点点线性代数知识================

再看一下之前的图：



根据这个图，我们可以列出一个表格：

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	1	0	1	0	1	0
C	0	1	0	0	1	0
D	0	0	0	0	0	1
E	0	1	1	0	0	0
F	0	0	0	1	0	0

如果两个顶点是直接相连的，那么我们就在对应的格子里填上 1；否则就填上 0。

这个规则很简单吧？

于是我们就可以得到一个矩阵 M：

$$
M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

矩阵 M 被称为图的邻接矩阵(adjacency matrix)。显然，$a_{ij} = a_{ji}$，所以 M 是一个实对称矩阵。

（学过线代的同学应该已经很激动了：实对称矩阵对应了自伴算子，而自伴算子有一系列非常好的性质。比如，谱定理告诉我们，自伴算子有由本征向量组成的规范正交基。）

我先来介绍邻接矩阵 M 的一个相当精彩的性质：

设 l 是正整数，我们将 M 自乘 l 次得到：

$M^l = ({a_{ij}}^{(l)})$.

根据矩阵乘法规则以及邻接矩阵的定义，${a_{ij}}^{(l)}$ 恰好是 G 中以v_i和v_j为两端的长度为 l 的道路的数量！

我第一次知道这个性质的时候（其实就是昨天）真是太震惊了， 光是这个性质本身就可以帮我们解决很多问题，比如那些看起来很难但做起来很简单数学题：

A、B、C、D 四人传球 6 次，从 A 开始，最终回到 A 手里，有多少种传法？

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},A^6=\begin{pmatrix}183&182&182&182\\182&183&182&182\\182&182&183&182\\182&182&182&183\end{pmatrix}$$

所以答案是 183 种。

像这样利用线性代数（群表示论、交换代数）作为数学工具，通过邻接矩阵的各种代数性质来研究图 G 的特性的领域，是图论里的一个有趣的分支，叫代数图论。想认真学习这一领域可以看 GTM207，接下来我只能大概地讲一些结论……

我们还需要一个定义：

如果可以把图 G 的所有顶点分为两个集合V_1和V_2，使得 G 中每条边均一端在V_1中，另一端在V_2中，那么我们就称图 G 为二分图(bipartite graph)。

我们有如下结论：

（A）设 G 是 k 次正则图，则 k 是邻接矩阵 M 的特征值，并且 G 是连通图的充分必要条件是 k 的代数重数是 1；

（B）设 G 是 k 次正则二分图，则-k 是邻接矩阵 M 的特征值，并且 G 是连通图的充分必要条件是-k 的代数重数是 1.

证明（A）的前半部分，只需要证明(1,1,...,1)是对应特征值 k 的本征向量；

证明（B）的前半部分，只需要证明(1,1,...,1,-1,-1,...,-1)（一半是 1，一半是-1）是对应本征值-k 的特征向量；

（A）与（B）后半部分可以通过分块矩阵来证明。

接下来就是『次根』的定义：

（A）如果 G 不是二分图，则邻接矩阵 M 的 n 个特征值为$a_1 = k, a_2, \dots, a_n$，并且$a_i \neq k, (2 \leq i \leq n)$。图 G 的次根为：$\lambda(\mathrm{G}) = \max\{|a_3|, |a_4|, \dots, |a_4|\}$ ；

（B）如果 G 是二分图，则邻接矩阵 M 的 n 个特征值为$a_1 = k, a_2, \dots, a_n$，并且$a_i \neq \pm k (3 \leq i \leq n)$。图 G 的次根为：$\lambda(\mathrm{G}) = \max\{|a_3|, |a_4|, \dots, |a_4|\}$。

数学家们发现，次根小的连通正则图具有较小的直径，即这种图是有效性好的通信网络（注意$\lambda(\mathrm{G}) < k$，想想为什么）。并且，利用次根小的连通正则图可以构造出一系列可靠性好的通信网络。

我们可以利用正则连通图 G 的次根$\lambda(\mathrm{G})$)来估计 G 的直径$\mathrm{d(G)}$——下述定理是由华人数学家金芳蓉（Ronald Graham 的妻子，Paul Erdős 的好朋友与合作者）于 1989 年证明的：

如果 G 不是二分图，那么$d(G) \le [\frac{\log(n-1)}{\log(k/\lambda)}]+1$，其中方括号表示取整函数。

这个定理的证明并不难懂，不要被 log 吓着，log 的出现只是因为做了换底。（不过组合学相关的定理有很多都是“任何人都能读懂证明，但只有神才能把它想出来”……）

如果 G 是二分图呢？我们也有办法估计，不过就不在这里写出来了。

那么连通 k 次正则图的次根到底可以小到什么程度呢……1988 年，Alon 和 Boppana 证明了：

对于任意正整数$k \ge 2$和任意小的实数 $\varepsilon>0$，不可能存在无穷多个不同的连通 k 次正则图，使得它们的次根均不大于$2\sqrt{k-1}-\varepsilon$。

具体可见：The Alon-Boppana Theorem.

那么对于正整数$k \ge 2$，是否存在无穷多个不同的连通 k 次正则图，使得它们的次根均不大于$2\sqrt{k-1}-\varepsilon$呢？

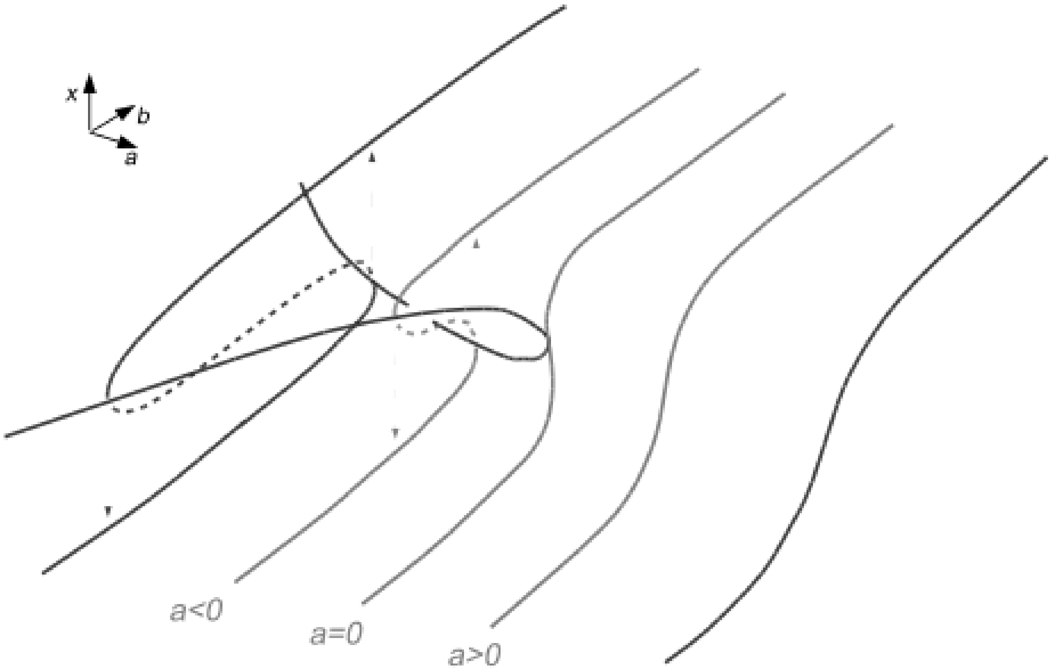
这个问题相当困难，我们便不在此讨论。

小朋友的涂鸦（二）：球面覆盖

● 球面覆盖

我们每天睡觉亲密接触的被褥，它的卫生状况值得重视，偶尔就要把被套拆下来洗一洗，洗完再套上去。但这不是个顺当的活计，尽管有系绳，但固定还是相当困难，手艺不好的，实在是难以把它弄得服服帖帖，总是会有些褶皱。这时候难免萌生出偷懒的想法，懒得把被套拉链拉开然后把内芯塞进去了，就随便用被套把内芯当粽子捆了，反正严格来说，的确也是用被套把内芯“套住了”，被套也完成了自身的责任：把内芯的每一处都“挡住”，不让睡觉的人把内芯弄脏。可惜被套一般没有弹性不能延伸，包起来的“粽子”实用面积实在太小，否则这也不失为一个好办法。

无论是正常的还是包粽子的方法，我们都可以说，被套把内芯“覆盖”了。最完美的当然是从头到尾平



整光滑的覆盖，内芯上每个地方都被一层被套覆盖；稍差一些，有点皱褶的话，皱褶的地方就会有至少三层被套覆盖着内芯的同一个地方，而且还会有一些“分支点”，皱褶在这些点上开始，又在这些点上终结。如果是包粽子的话，那就不好说了，不过可以肯定的是，内芯上每个点至少有两层被套覆盖。

在数学家眼中，被套可以看成一个球面：假设被套有弹性，那么在里边装一个气球，再把气球吹起来，被

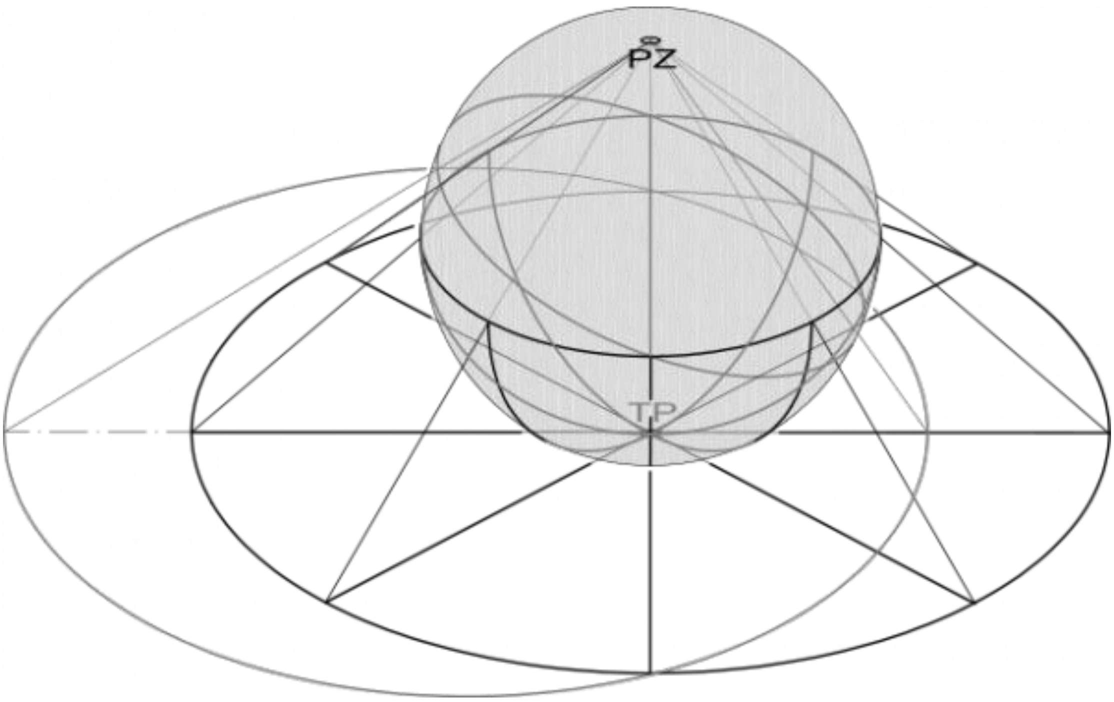
套自然会鼓起来变成球面。同样，内芯也可以看成一个球面。如果我们先在内芯放一个气球，然后把内芯和覆盖它的被套缝起来，不让它们移位，最后将气球吹起来，那么我们就得到了被套这个球面对内芯这个球面的一个覆盖。这样的覆盖变化多端，可以是平滑的，也可以有皱褶，在每一点处，覆盖可以是单薄的，也可以是多重的。

把这些直观印象翻译成数学概念，这是数学家们的拿手好戏。球面之间的覆盖，用数学术语来说，就是从一个球面（被套）到另一个球面（内芯）的连续满射函数f，如果x是被套上的一点，那么$f(x)$就是内芯上被x这一点覆盖的点。我们要求函数是连续的，因为我们不想把被套扯坏，所以要求被套上的一小块“保护”的也是内芯上的一小块，而不是“分隔异地”的两块；我们要求函数是满射，因为我们希望保护内芯不被弄脏，所以要求内芯上的每一点都有被套保护。当然，数学毕竟是数学，比现实要更天马行空一些。现实中的被套不能穿过自身，而数学中的覆盖则可以。正因为如此，在数学中我们可以把覆盖的皱褶“抚平”，只留下一个个孤立的分支点，这在现实中是不可能的。而我们要求除了分支点以外，球面上

的其他点被覆盖的次数都相同，这个次数又被称为球面覆盖的次数。

然而，这些东西跟多项式又有什么关系呢？

对于数学家来说，关系非常大。因为他们知道，复数组成的复平面，差不多就是一个球面。有一种叫“球极平面投影”的方法，可以将复平面转化为只缺一个



点的球面。而如果我们将“无穷大”也加到复平面里，就能把球面缺的点补上，得到的就是所谓的“黎曼球面”。而黎曼球面上的有理函数，也就是两个多项式的商，实际上就是一个球面覆盖。通过研究球面覆盖的性质，数学家们就能间接得知对应的有理函数的性质。

我们接下来考虑有理函数给出的球面覆盖。球面覆盖的许多性质都被它的分支点所决定，因为分支点以外的地方都非常平滑，到了乏善可陈的地步，而分支点正是曲面“叠起来”的地方，自然包含了我们想要的性质。我们可以说，球面覆盖的分支点越少，它就越简单。

那么，对于有理函数来说，怎么寻找它的分支点呢？还是拿被套作例子。当被套有皱褶时，皱褶的部分实际上是三层被套覆盖同一点，但同样应该属于皱褶一部分的分支点上，却只有一层被套。也就是说，分支点覆盖的层数比正常的要少一些。如此类推，对于函数$f(x)$ 引出的球面覆盖来说，假设它的覆盖次数是d，那么说某个点a是分支点，就相当于说$f(x)=a$这个方程的解值少于d个，因为这个方程的每一个解其实都是“被套”上覆盖a的一点。换句话说，a是分支点当且仅当$f(x)=a$有重根。

举个实际的例子。我们考虑函数

$$f(x)=-\frac{(x-1)^3(x-9)}{64x}$$

显然方程$f(x)=0$有三次重根$x=1$，所以 0 是它的一个分支点；而稍微令人意想不到的是，如果我们将它减去 1，就会得到

$$f(x)-1=-\frac{(x^2-6x-3)^2}{64x}$$

可以看出来，方程$f(x)-1=0$有两个二次重根，分别是二次方程x^2-6x-3的两个解，所以 1 也是一个分支点。最后还有一个分支点比较难想像，那就是无穷远点，因为当x趋向无穷或者 0 时，$f(x)$趋向于无穷，所以无穷远点也是一个分支点。可以证明，这个函数再也没有别的分支点了。

最简单的球面覆盖，一个分支点都没有，就是最标准的把内芯塞进被套里的方法。球面到自身的恒等映射$f(x)=x$就是这样的一个例子。可以证明，不存在只有一个分支点的球面覆盖，也就是说，接下来第二简单的情况就是拥有两个分支点的球面覆盖。可以证明，所有拥有两个分支点的球面覆盖，都可以利用适当的变换来“拉扯”变形到$f(x)$是多项式的情况。

数学家们接下来要研究的，自然就是拥有三个分支点的球面覆盖。利用有名的莫比乌斯变换

$$z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$$

我们可以将三个分支点分别移动到 0、1 和无穷远点（∞），而莫比乌斯变换不会改变球面覆盖的本质。所以说，我们只需要研究分支点分别在 0、1 和∞的

球面覆盖，而能产生这样的球面覆盖的函数又叫别雷函数（Belyi function，正确地说是球面上的特殊情况），它的名字来源于 20 世纪的俄罗斯数学家别雷（G. V. Belyi）。但实际上，别雷并不是第一个研究别雷函数的人。早在 19 世纪末，大数学家菲利克斯·克莱因（Felix Klein）就已经利用别雷函数构造过一些特殊的球面覆盖（更精确地说，是单值群为有限单群 PSL(2,11)的球面覆盖，它是一个 11 次覆盖）。但球面覆盖毕竟太抽象，即使是数学家，不借助适当的工具也难以“脑补”某个具体函数引出的覆盖，而对于一般人来说，光是球面可以穿过自身这一点就足够喝一壶的了，更不要说想像那些“折痕”都集中在几个分支点上的高次覆盖。要研究这些球面覆盖，似乎是难于登天。

但数学家却说，三个分支点的球面覆盖，其实简单得连小朋友都能画出来。

● 小朋友的涂鸦

要讨论别雷函数，就要对球面覆盖和复分析有些更深入的了解。接下来的内容可能有一点抽象，如果实在不适应，可以跳过，直接看本节最后的结论。

我们要研究的，是分支点分别在 0、1 和∞的球面覆盖，或者说某个别雷函数$f(x)$ 。既然球面覆盖的所有玄妙之处都蕴藏在分支点里，那么肯定要抓住这些分支点来研究。我们之前考虑过一个例子：

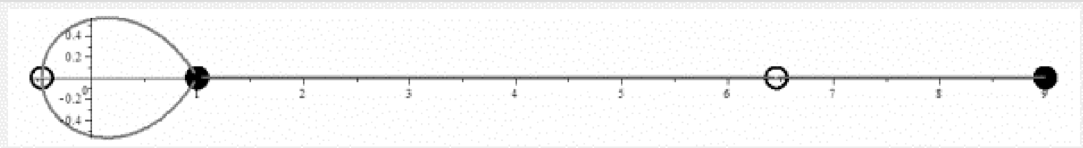
$$f(x) = -\frac{(x-1)^3(x-9)}{64x}$$

它是一个别雷函数，对应着一个球面覆盖。用一点点复分析的知识（代数基本定理），容易知道除去一些特殊情况外，对于任意的常数a，$f(x) = a$都有 4 个解。也就是说，这个别雷函数对应着一个次数为 4 的球面覆盖。我们再来看看这个函数的分支点。它在$f(x) = 0$处有一个分支点，因为$x = 1$是这个方程的三重根，但它还有另一个根$x = 9$也就是说，0 这个分支点实际上对应两个不同的点：三重根$x = 1$和单根 9.

同理，1 这个分支点同样对应两个不同的点，两个都是双重根。我们能看到，两个分支点的分支方式不同，但既然它们从属于同一个球面覆盖，那么之间必然有某种联系。怎么样才能考察它们之间的联系呢？

办法很简单：直接把两个点连起来就好了。也就是说，我们希望观察这两个分支点的每一层覆盖分支之间是如何连接起来的。

更具体地说，因为球面覆盖就是一个球面覆盖着另一个球面，只要在被覆盖的球面上连结 0 和 1 两个点，在得到的线段上涂上极浓重的颜料，等到颜料渗透到覆盖的每一层之后，再将覆盖展开，得到的就是球面上的一幅图。用术语来说，就是研究。那么，我们得到的图像会是怎么样的呢？还是用刚才的函数来举例，我们得到的图像如下：



由方弦使用Maple制作

在上图中，黑点代表 0 对应的点，而白点代表 1 对应的点和。因为这个球面覆盖的次数是 4，所以线段 [0, 1]上的点实际上被覆盖了四次，也就是说，当覆盖展开之后，我们将会看到四段曲线（四条边），它们连接着 0 对应的两个点，还有 1 对应的两个点三重根 x=1 上连着三条边，单根上连着三条边，单根 x=9 只有一条，而两个双重根各自连接两条边。函数在两个点上发散，而这个图恰好又有两个面，外部的面对应, 而内部的面对应 x=0, 而这些面的度数（也就是边界的长度）与函数在对应点上发散的度数相关。也就是说，单单从这幅图像里，我们就能读出函数本身的许多代数性质。如果把顶点连接的边的数目称为顶点

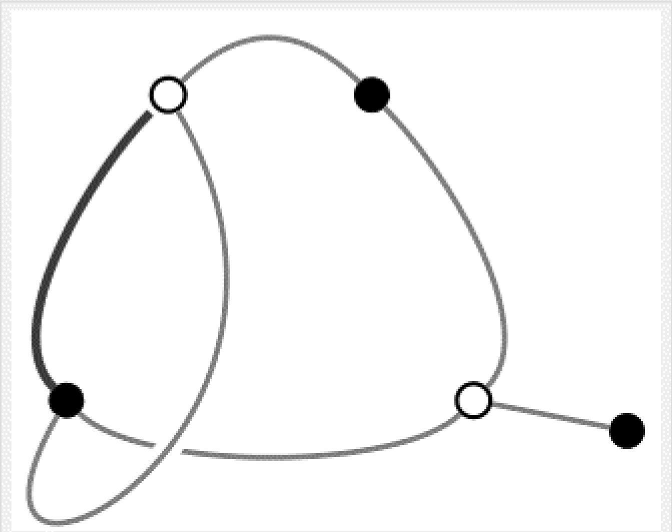
的度数的话，图像性质与代数性质的对应可以归纳成下面的列表：

别雷函数	平面二部地图
覆盖的次数	边的条数
0 处的分支点	黑色顶点
1 处的分支点	白色顶点
∞处的分支点	面
0 处和 1 处分支点的重数	顶点的度数
∞处分支点的重数	面的度数的一半

实际上，对于所有的别雷函数，展开对应的球面覆盖后，线段[0, 1]的图像总是包含着我们想要的很多代数性质：边的数目对应着覆盖的次数，黑点对应着的分支，白点对应着的分支，面对应着无穷大的分支，而每一个点和每一个面连接多少条边，都对应着球面覆盖在对应的分支上“折叠”起来的方法。

那么，别雷函数对应的这些图像，到底又是什么呢？我们先忽略那些点和线的具体位置和形状，而只关注它们是如何在球面上连结起来的。用数学术语来说，就是先忽略它们的几何性质，而专注于它们的组合性

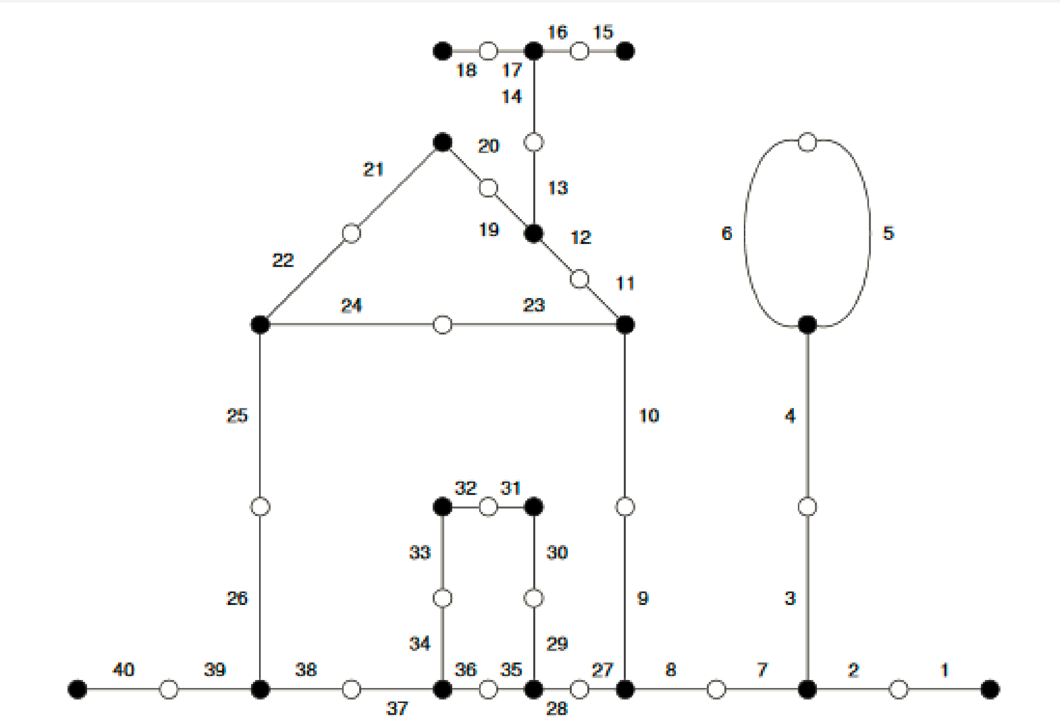
质。首先，因为每条边实际上都来自线段[0,1]，所以它们连结的必定是一个对应着的黑点和一个对应着的白点。也就是说，别雷函数对应的图像，实际上可以抽象成一个二部图，这类图的顶点，一黑一白，而每条边的两端恰好是一黑一白两个顶点。但这些图像跟一般所说的二部图不完全一样。在数学中，一个图就是一堆顶点加上连结顶点的一些边，但连结同一个顶点的边之间并没有什么特别的关系。但别雷函数对应的图像实际上是一个画在了球面上的图，所以连结同一个顶点的边会在围绕在顶点周围，这就给它们赋予了顺序关系。这样画在了球面（或者别的封闭曲面）上的图，又叫组合地图。而别雷函数对应的图像，正式的名称是平面上的二部地图。在这里，组合地图即使画歪了一点，只要保持顶点、边以及边之间的关系，还算是同一个地图。



一个亏格为1的二部地图，由方弦制作

现在我们知道，每个别雷函数都对应着一个平面上的二部地图，那么是不是所有这样的地图都对应着一个别雷函数呢？事实上，利用一些复分析方面的知识，可以证明别雷函数与球面上的二部地图有着一一对应的关系。不仅如此，我们还能把这些别雷函数限定为系数是代数数的分式（代数数就是整系数多项式方程的解）。这实际上就是别雷的贡献：他在 1979 年证明了，对于一大类重要函数（所谓的“光滑代数曲线”），它们（的适当的等价类）与别雷函数引出的球面覆盖有着一一对应的关系。这些“光滑代数曲线”可以粗略理解为分支点只有 0、1 和∞，系数是代数数的分式。也就是说，如果我们要找分支点满足某些条件的分式，只需要看看根据这些条件能不能在平面上画出一个二部地图就可以了。

总结一下：三个分支点的球面覆盖，等价于所谓的“平面上的二部地图”，在这个地图上有黑色和白色两种顶点，而每条边都连接一黑一白两个顶点，从而把所有顶点连成一片。而球面覆盖的许多性质，都能反映在地图上的顶点、边和面上。别雷证明了，“光滑代数曲线”（大概就是某一类系数是代数数的分式）与三个分支点的球面覆盖有着一一对应的关系。所以，要寻找分支点满足某些条件的分式，只需要看看能不能画出满足对应条件的二部地图。而任意一个二部地图，哪怕是小朋友的涂鸦作品，也必然存在对应的分式，它的球面覆盖展开之后就是这个二部地图。

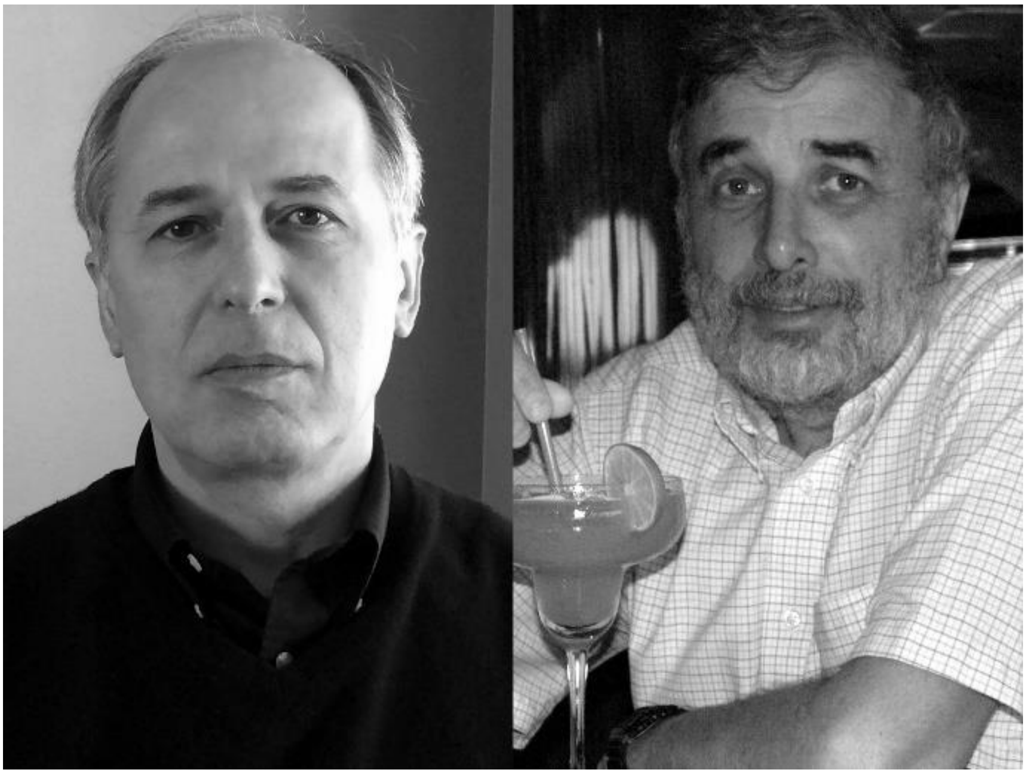


涂鸦的例子，作者为Laurent Bartholdi

说了半天，云里雾里的，这又有什么意义？

Maths news

2018 Steele Prize for Seminal Contribution to Research in Discrete Mathematics/Logic to Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky



The 2018 Steele Prize for Seminal Contribution to Research in Discrete Mathematics/Logic will be awarded to Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky (posthumously) for their paper "Cluster algebras I: Foundations," published in 2002 in the Journal of the American Mathematical Society. (Photos courtesy of Sergey Fomin, left, and Galina Narkounskaia.)

The paper is a modern exemplar of how combinatorial imagination can influence mathematics at large. In the fifteen years since their introduction, cluster algebras have been shown to be important in many seemingly different areas of mathematics, including root systems, Poisson geometry, Teichmüller theory, quiver representations, integrable systems, and quantum affine algebras. This paper is a work of lasting importance, both for its varied applications and for the intrinsic beauty of the theory.

Biographical Sketch of Sergey Fomin

Sergey Fomin is the Robert M. Thrall Collegiate Professor of Mathematics at the University of Michigan. Born in Leningrad (now St. Petersburg), he came to the United States in 1992, first working at the Massachusetts Institute of Technology, and then, since 1999, at the University of Michigan. Fomin was an invited speaker at the ICM in Hyderabad in 2010, and is the current managing editor of the Journal of the AMS. He is a member of the AMS Council and a Fellow of the AMS.

Biographical Sketch of Andrei Zelevinsky

Andrei Zelevinsky was born in Moscow and moved to the United States in 1990. After a year at Cornell University, he took a professorship at Northeastern University, where he remained until his untimely death in April 2013. He was an invited speaker at the ICM in Berlin in 1998, a Fellow of the AMS, and a recipient of the Humboldt Research Award.

Response from Sergey Fomin

Fomin writes that he is honored to receive the Steele Prize but adds:

The feeling is bittersweet, as my co-author Andrei Zelevinsky did not live to enjoy this recognition of his research accomplishments. He was a dear friend, an inspiring teacher, and a brilliant mathematician. Although Andrei and I lived until our mid-thirties in Moscow and St. Petersburg, a short train ride from each other, we have only met in 1992 in Boston, where our 20-year-long collaboration took root. I am forever thankful to fate---and to Andrei---for this most momentous partnership of my professional life.

Source:http://www.ams.org/news?news_id=3803
Scan this qr-code to find out more!

About the Prize

Presented annually, the Steele Prize for Seminal Contribution to Research is awarded for a paper that has proved to be of fundamental or lasting importance in its field, or a model of important research. The prize will be awarded Thursday, January 11, 2018, at the Joint Mathematics Meetings in San Diego.

震惊！！ 单身的真相竟然是……

彭成志 华中科技大学电气 1607 班

广大单身同胞可能都有体会，每次在自习室、图书馆、青年园，总能看见许多小情侣秀恩爱，狗粮是一把一把的撒。特别是前不久的五一小长假，我一打开 QQ 空间就能看到各种花式秀恩爱的照片。好气啊，这些人完全不考虑像我这样的单身狗的感受！为什么我科有这么多优秀的小哥哥和小姐姐，但是依然有很多人是单身呢？我们可以在晚上睡觉之前，想想这个问题。

假设有 n 个华科优质单身小哥哥或者小姐姐排队来找你脱单，由于不是随意两个人在一起都会合适，而且你也是有原则的，不能说说就答应，对吧？所以可以采用一个“合适指数”衡量每个人相对于你的合适程度。这个指数的取值范围不妨选择 0 到 1，并且它的值越大，表示所对应的人跟你就越合适。那么脱单就可以理解为选取一个“合适指数”相对较大的人。关于“合适指数”还有一个假定：它在 n 个人里的分布是均匀的。也就是说，这 n 个人的“合适指数”分别是 1/n、2/n……1.这个假设可能跟实际略有差距，

因为你可能感觉自己跟大部分人都还合得来。不过就算这样，你跟每个人的亲密程度也总会有个排序，而且三观跟你相差很远的人你并不会把他们考虑在脱单备选之内，相当于你已经开始了筛选。所以我们在这里还是做这种均匀分布的假设。

接下来就是策略与期望。既然有 n 个人排着队等你呢，但是依照我国目前法律法规，你最多只能跟一个人结婚。于是你就要从中选择一个。选择的方法就叫策略。选中的这个人我们希望“合适指数”越接近 1 越好，这表示你们越合适。所以要求采取尽可能好的策略。选定策略之后，依照这个策略行动，将会找到一个人，这个人“合适指数”不是定值，不过会有一个平均的预期，这就是期望。

我们先选择一条简单的策略作为对比:随机选取一个人。由于每个人被选中的概率是相等的，而“合适指数”又是一个等差数列，于是期望就是等差中项：(n+1)/2n，随着 n 的增大，它会趋于 0.5 这个值。第二条策略比之前随机选择更复杂，也更好，而它也恰巧是广大单身贵族普遍采用的策略:先观察,再决定。抽象出来就是这样：对于前 a 个人（a<n），不管他们“合适指数”怎样，统统选择拒绝。这些人失望地走过去之后，会留下一个“合适指数”的最大值。那么

对于后面（n-a）个人，只要是“合适指数”大于这个最大值的，就选择同意，否则拒绝，下一个。

大家不妨在这里停一会，稍稍做个估计，在这第二种策略下，如果要取得最大期望，大概要先观测多大比例。

预估完就是精确计算了，先看看它的期望。前 a 个人里，“合适指数”最小也有 a/n，最大可能到 1。记前 a 个人里“合适指数”的最大值为 max。后（n-a）个人里，挑选到的平均“合适指数”为 avg。当 max=1 的时候，很不幸，这群人全部走了，而你依旧没有找到心中的 Ta。然后会发出感叹“曾经，有一段真挚的感情放在我面前，我没有好好珍惜，等到失去后，我才追悔莫及。人世间最大的痛苦……”。打住，别往下想，这种情况概率只有 a/n。其他情况你都是会脱单的，放心！接下来当 max=（n-1）/n 时，avg 只能取 1。你看，这样就选到完美匹配的那一位，多幸运！不过概率怎么算？其实只需要“合适指数”为 1 的人在后（n-a）个人中，并且“合适指数”为（n-1）/n 的人在前 a 个人里面即可，其他人的位置没有关系。因为剩下的人“合适指数”都大不过这两个人，而且你的策略是选择最大值。所以这个时候的概率就是（n-a）a/n^2。

接着，当 max 不断减小到 a/n，容易发现，事件的概率其实就是之前情况的概率乘以（n-a）/a。虽然概率很容易计算，不过值得一提的是，当 max=（a+1）/n 时，概率为【（n-a）/n】^(n-a-1) 再乘以 a/n；而 max=a/n 时，概率不满足递推，变成了【（n-a）/n】^(n-a)。

求得概率，我们看看 avg。第一种情况 max=1，avg 显然是 0。后面的每一种情况对应的可能的取值，根据我们的假设都是等梯度的。比如第三种情况，max=（n-2）/n，后（n-a）个人可能被选中的只有指数为 n/n、（n-1）/n 这两个人。又由于这些人被选中是等可能的，所以 avg 就等于这些人中指数最大值和最小值的算术平均数。如上例，第三种情况，avg=1/2【n/n+(n-1)/n】。

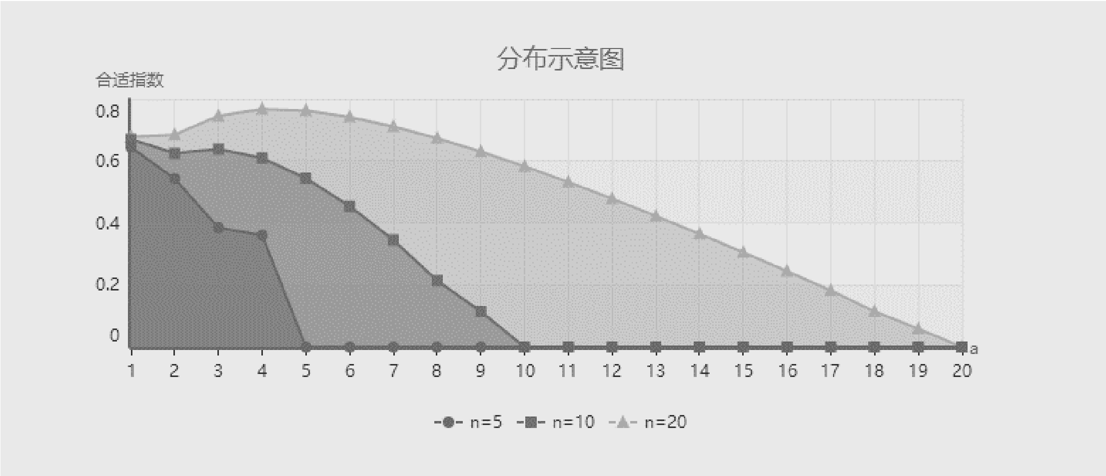
接下来是计算，把每种情况的概率与对应 avg 相乘，再对不同的情况相加求和，可以得到期望。这个我们交给计算机。我用 C++做了一个简单算法，根据不同的 n 和 a 的取值，计算输出每种情况对应期望。并且我把这些数据整理成了折线图，这样就能很直观地看到分布了。我选取的是 n=5、10、20 三种情况。三条折线从左到右分别对应 n=5、10、20，横坐标是 a 的取值，纵坐标是对应特定 n、a 情况下的期望。由图可以看出，当 n=5、10 这两种情况时，期望的最大值都

取在 a=1 处。而 n=20 时，期望在 a=4 处取得最大值。对比之前随机选择的策略，这种方法要好得多。

其实在计算之前我的预估观测值是 50%左右，没想到算出来结果大概只有 20%。这个数据的意思是，大概等我们见过 1/5 的人以后，就要开始认真考虑脱单这个问题啦，因为这时最有可能找到自己理想的“1”。而 n=20 的分布显示，随着 a 取值增大，后期期望就近似会直线下降，所以还是要早早准备，好好把握机会。再说了，就算你失败了，也可能是对方正在观测，而你又恰巧是前 a 个人，被拒绝并且当做了样本，没什么好伤心。

上面就是我的胡思乱想，欢迎大家与我交流沟通，一起脱单。

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    double a,n,first,last=1,i,left,right,s,middle=0;
    for(n=20,a=1;a<n;a++)
    {
        first=(n-a)*a/(n*n);
        for(i=0;i<n-a;i++)
        {
            last=last*(n-a)/n;
        }
        last=last*(n+a+1)/(2*n);
        left=(n-a)/n;
        right=2;
        for(i=2;i<n-a;i++)
        {
            left=left*(n-a)/n;
            right=right-1/n;
            middle+=left*right;
        }
        middle=middle*a/(2*n);
        s=middle+first+last;
        cout<<n<<"   "<<a<<"   "<<s<<endl;
    }
    return 0;
}
```



发散级数在其它意义下的求和

关于$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$这个问题依赖于数列极限的定义。$\sum$

考虑 Cauchy 的数列极限定义：

如果部分和数列 S_n（$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$）收敛于有限数 s，则对于任意 ε >0，存在正整数 N，当 n>N 时，$|S_n-s|<\varepsilon$。即加的项数足够多以后，部分和 S_n 与 s“要多接近有多接近”。

在上面的定义下级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$是不收敛的。这可以通过 Cauchy 收敛定理加以说明：任何收敛的级数其通项必须趋于 0。显然这个交错级数不满足这一性质。其实从上面的定义中可以看出部分和在 0 和 1 之间来回震荡，不可能稳定于某个 s。

数学家为了让这样的数列收敛，就修改了数列收敛的定义。其中一个就是 Cesaro 平均收敛。所谓平均收敛，只要求$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}S_i}{n}$收敛即可，即相当于对 S_n 求平均值。在这个意义下级数收敛：S_n 在 0 和 1 之间来回震荡，它的平均值是$\frac{1}{2}$。

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}$ （-1）^{n}收敛与否，归根结底是我们对“和”的定义不同。但要指出，Cesaro 和与 Cauchy 和的定义是相容的：如果一个数列在 Cauchy 和的意义下收敛于 s，则在 Cesaro 和的意义下也收敛于 s，但反之不然。

有关发散级数在其他定义下的“和”还有很多：比如 Abel 和定义为 $\lim_{x\to1^-} a_n x^n$。容易证明 Abel 和比 Cesaro 和更弱：如果一个数列在 Cesaro 和的意义下收敛于 s，则在 Abel 和的意义下也收敛于 s，但反之不然。一个反例是 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)$，可以证明这个数列在 Abel 和下收敛于$\frac{1}{4}$，但不能 Cesaro 求和。其他一些例子可以参考

Wikipedia：发散级数。

所有自然数的和 $\sum_{n=1}^{\infty} n$这个级数在 Cesar 和 Abel 和的意义下都不收敛。因此为了得到 $\sum_{n=1}^{\infty} n=-\frac{1}{12}$我们还需要更进一步的看法。

有关错位相加

条件收敛的级数不能随便改变求和顺序，更不必谈原本就发散的级数。所以错位相加肯定是错误的。举一个例子：考虑级数A_n=1+1+1……（n 个），B_n=-

1-1-1……（n 个），这两个级数显然都是发散的。但是我们将其错位相加：如果错一位得到的结果便是 1（或-1，取决于你错位的方法），错两位便是 2（或-2）。不同的错位方法得到的结果不同，错位相加自然不是一个合理的计算方法。

Casimir effect 与权重因子（最好能有量子场论的背景知识）

所有自然数之“和”是$-\frac{1}{12}$这个结论曾经出现在 A.Zee 的《Quantum Field Theory in a Nutshell》关于 Casimir effect 的推导中。具体可以参考 1.9 中 Disturbing the vacuum 一节。在弦论中也出现过很多类似的求和。这也就是说，$\sum_{n=1}^{\infty} n=-\frac{1}{12}$这个奇怪的结果有确实可观测的物理效应。这已经不是单纯利用定义的不同所可以解释的了。

在 A.Zee 的关于 Casimir effect 的推导中，所用的解释是板振动的频率不可能无限高，高于某个截止频率 a 以后的项都要忽略最终得到这样的结果。他所采用的方法是为 n 配了一个 $e^{-an/d}$ 的“权重因子”，再对权重因子求和，当 $a\to 0$时展开保留第一项，这是一种常见的方法。下面的这段计算来源于

Polchinski 的《String Theory》的书后习题：

S=$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\varepsilon n}=\frac{e^{\varepsilon}}{(e^{\varepsilon}-1)^2}$，它在 ε=0 附近的 Laurent 展开是$\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{12}+\frac{\varepsilon^2}{240}+O(\varepsilon^4)$。在 Casimir effect 中第一项被真空中的零点能抵消，所以只剩下$-\frac{1}{12}$。真空中的零点能也出现在弦论中，而且弦论中类似的计算中第一项也会被消去。这种找到无穷大的方法实际就是量子场论中的正规化(regularization)，而扔掉它则对应着重整化(renormalization)的想法。

因此$\sum_{n=1}^{\infty} n=-\frac{1}{12}$实际上被物理学家解读为 S=$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\varepsilon n}$在 ε=0 附近的 Laurent 展开的零阶项的系数。

ζ函数与解析延拓（需要复分析或者复变函数水平的背景知识）

注意到这样一个幂级数展开：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x},\quad |x|<1$$

如果在上式中令 x=1，似乎就得到了$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=\frac{1}{2}$的结果。但要注意上式只有在|x|<1 的区域内收敛，令 x=1 实际上是对相当是对$\sum_{n=0}^{\infty}$（−

1）$^{n}x^{n}=\frac{1}{1+x}$, |x|<1 作解析延拓到全平面（除了-1）的结果。

因此所有自然数之“和”是$-\frac{1}{12}$其实还有一种更简单的看法。注意到黎曼 ζ 函数的定义是$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$。所谓所有自然数之“和”便是$\zeta(-1)$。在解析延拓的意义下，$\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$。

解析延拓很不直观，这个结果和我们之前有关的结论能否对应？答案是肯定的。在陶哲轩的博文 The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation 中，便提到解析延拓和光滑渐进形式的联系。在第一部分陶哲轩把一个级数改写成 smoothing sum 的形式并且估计 smoothing sum 的余项。第二部分用这个渐进形式可以得到和解析延拓的关系。这篇文章答主并没有仔细阅读过，感兴趣的同学可以自行阅读。

博文网址：

http://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula-bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation/

总结

我认为这个问题的来源于对数学中定义的滥用，以及人们对定义的误解。

数学家是这个世界上最严谨的一批人，他们谈论什么都有据可循。事实上，数列极限本身就是一个有严格定义的概念（可见答案最开始处的 ε -N定义）。所有学过微积分的同学不妨问自己$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$中这个等号的意义是什么，和 1+1=2 中的等号是否意义相同？就此而言，一个严肃的数学家绝对不会轻易写下“$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$”，而是可能会告诉你这是在 Cesaro 和意义下的结果或是解析延拓意义下的结果，这里等号的意义已不是$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$中的等号或是 1+1=2 等号的意义。

至于在解析延拓的意义下这个式子为何会有物理上的效应，这是另外一个问题。粗略地说是因为解析延拓可以反映求和的某些渐进行为。而这背后蕴含的则是物理中正规化的方法和重整化的思想。

（文章来源于知乎网）

一封数学情书

还生我的气吗？我总是喜欢叫你术子，知道为什么吗？因为你的名字和我最喜欢的数学有一个字发音相同，而且在小学的时候，数学就叫做算术。也许你真的是生我的气了，然而你知道为什么我陪你的时间在定义域里变成了一列减函数了吗？我是有原因的。我们都高三了，面临着即将到来的各种新的排列组合，我是多么想继续和你呆在同一个集合里无穷下去，我多么希望我们的爱情是一条射线，只有起点没有终点，而不是一根只有高中三年那么丁点儿长的线段。如果从现在开始我们都努力学习，则上面的理想可以实现。这是一个真命题。我所作的一切一切都是在为我们的将来作辅助线，∴你不应该生我的气，→我对你说："别生气了。"但你依然没有原谅我，你对我说："⑴我们两个之间的距离越来越远了。⑵你跟别的女生好了。"看来，我真的需要证明一下你这两个推论是错误的了。

证明：⑴你说我们之间的距离越来越远了。

我注意了一下，班里的座位横着有七排，竖着是 9 行，再加两个过道，可以算 11 行。设坐在 5 行四排的同学为坐标原点，第四排为 x 轴，第 5 行为 y 轴。

则你的坐标： 你（-4，1）； 我的坐标： 我（3，-2）。∴我们俩之间的距离：｜ 你我 ｜=根号下（3+4）平方+（-2—1）平方 ≈7.6∵当两人距离 L≥10 时，才可以算远。0＜7.6＜10

∴我们俩之间距离并不远。

∴原命题为假命题，错误。

你说我跟别的女生好了。

在做题之前先说明一下，为了做题方便，这里暂用“她”来代替“别的女生”

设：一 RtΔABC，∠C=90 度，斜边 AB=我，两条直角边分别对应你和她。

我和你的夹角∠ABC=α 。（说明：至于为什么只设我们之间的夹角，而不去管我和她的，那是因为我们曾经有过交集，而你也说过，相信我和别的女生的关系还没有发生到有公垂线的地步。这一点，我略感安慰）

则 我们俩在一起 ∵你在我上面 ∴为 cosα

我和她 ∵我在她上面 ∴为 cscα

你和她 ∵你在她上面 ∴为 ctgα∵我和你的夹角 α（我确信曾经有过）非常小（小到两片药便对付了）∴α 趋于 0（α＞0）

当 α=0 时，①cosα=1， ∴我心里只有一个你②cscα=0， ∴我和她没有关系

③ctgα=+∞， ∴你比她重要无数倍∴我爱你，不爱她。

同理可证：我爱你，不爱她’、她’’、她’’’……将此概念推广开来，

则可证：我爱你，不爱每一个“别的女生”即：我爱你，而不爱每一个你所说的“她”。∴我爱且仅爱一个你

∴原命题是假命题，错误。

好了，现在，还生气吗？

我与“她”就像是开口向上的抛物线与坐标横轴，而我对“她”的心：△＜＜＜0，∴不会有交点。

我与“她”就像是两根异面直线，无论怎样延伸，不会有交点。

我与“她”就像是双曲线的两支。尽管有些对称，但是没有交点。

其实，术子，到现在，我仍然没有求出你所说的那个“她”的具体值是多少。

不要再提“她”了，让“她”永远消失吧！

术子，让我们回到一起吧，忘记所有不愉快的事，和差化积，从新整理思路。

术子，真的原谅我吧，我绝不会背着你搞出什么增根，不信的话，我随时接受你的检验。

术子，你知道吗？在你不理我了的这些日子里，我的生活就好象是一列等比数列{an}，首项 a1=痛苦，公比 q=想念（q＞1），n=天数，前 n 项和 Sn=煎熬程度。

想想今天已经 n=7，我实在不能忍受这痛苦和想念相交构成的煎熬了。

术子，给我一个正确答案吧！可以吗？

昨天，我做出一道诗，在这儿送给你。

术子，

你是我对称轴，

如果没有你，

我找不到另一半自己；

术子，

你是我的值域，

如果没有你，

我不知道该去哪里；

术子，

你是我的公理，

如果没有你，

我没有一点头绪；

术子，

你是我的必要条件，

也许你可以没有我，

但是，

我绝对不能没有你！

好了，术子，到这吧，我的心真的永永远远都只有一个你。

写了这么多，你不会感到复杂吧？最后，我还要写一句话。

答：我爱你。

请求你原谅的 maths

于月亮为半圆时

（文章来源于网络）

An Interesting Junior Problem Sovled by Mathematical Analysis

MathOverFlow: A. Sven
Department of Mathematics and Statistics
Huazhong University of Science and Technology,
430074, Wuhan, China

Problem. If $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(f(x) - x^2 + x) = f(x) - x^2 + x$. Find $f(x)$.

Solution. Let f(x) = x + g(x), then we have

$$g(-x^2 + 2x + g(x)) = 0. \quad (1)$$

$g(x) \equiv 0$ is surely one of the solutions, then $f(x) = x$.

Now we consider a special case. Suppose $g(x)$ is continuous, and has at most countably many zeros on $\mathbb{R}$. We assert that $g(x)$ have to be the form $g(x) = x^2 - 2x + C$, where C is a constant. Otherwise, put $g(x) = x^2 - 2x + h(x)$, where $h(x)$ is a nonconstant continuous function. Then (1) turns out to be $g(h(x)) = 0$. Since h is continuous, and $\mathbb{R}$ is connected, we have that

$R(h)=\{h(x)|x\in R\}$ is connected, and $R(h)$ contains at least two elements, say $a,b(a<b)$, then the connection of $R(h)$ tells us that $[a,b]\subset R(h)$. Similarly, we know that g is continuous, and $R(h)$ is connected, then $R(g(h))$ is also connected. If $R(g(h)) = \{0\}$, this contradict the assumption that g has st most countable zeros, since $[a,b]\subset R(h)$ is an uncountable set. If $R(g(h)) \neq \{0\}$, this contradict the fact that $g(h)=0$. So, $g(x)$ has the only representation, that is, x^2-2x+C. It is easy to get $C=0$, or 1 by substituting $g(x)=x^2-2x+C$ in (1). Then $f(x)$ can only be x^2-x or x^2-x+1.

We still suppose g is continuous. It is difficult to deal with the case that $g(x)$ has uncountable zeros. To simplify the question, we restrict $g(x)$ to two situations: $g(x)$ equals 0 or has at most countably many zeros on a single segment of $\mathbb{R}$.. With this simplification, $g(x)$ can only be 0, orx^2-2x, or x^2-2x+1 in a single segment, so we just need to arrange $f(x)$ to be x, or x^2-x, or x^2-x+1on different segments. To satisfy the condition that

f is continuous, we have to find x such that these three functions can splice seamlessly. Through this method, we can get the following two continuous functions, denoted by $f1, f2$.

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 2 \\ x & x \geq 2 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 - x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

In the last part, we consider the case that f has discontinuities. Here, I give two kinds of discontinuous functions satisfying the condition $f(f(x) - x^2 + x) = f(x) - x^2 + x$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < a \\ x & x \geq a \end{cases}$$

Where $a \in (1,2) \cup (2, +\infty)$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < b \\ x^2 - x + 1 & x \geq b \end{cases}$$

Where $b \in (0,1)$.

数学是人们写给真理的情书--《爱与数学》

作者: [美] 爱德华·弗伦克尔
出版社: 中信出版社
原作名: Love and Math: The Heart of Hidden Reality
译者: 胡小锐
出版年: 2016-3
页数: 328
定价: 49.00 元
装帧: 平装
ISBN: 9787508658070

如果你不得不去上一门美术课，它却只是教你怎么油漆栅栏，你作何感想？如果你从未在美术课堂上见过凡•高和毕加索的画作，甚至根本不知道它们的存在，你又会作何感想？唉，这就是常见的数学教学方式，它导致我们中的大多数人都成了“坐等油漆干”的生物。

在《爱与数学》一书中，著名的数学家爱德华·弗伦克尔向我们展示了数学不为人知的一面，其中充满了如同艺术般的美和优雅。在这本用真诚和激情写就的书中，作者告诉我们，数学不是精英的玩具，它可以像爱一样超越文化、超越地域、超越时空，将世间万物联系在一起。

《爱与数学》有两个主轴，一个是梳理经典的、令人惊叹的数学原理，另一个则是作者学习数学、研究数学，并成为 21 世纪最著名的数学家之一的个人经历。他现在的主要研究课题是“朗兰兹纲领”，它被视为数学领域的“大统一理论”，可以证明像费马大定理之类的难题，也是把数学和量子物理学等其他自然科学连接起来的桥梁。

大部分人从小到大都有接触和学习数学的机会，却大都视其为洪水猛兽，难以领略数学的真谛，或是觉得数学与现实生活毫不相关。《爱与数学》用通俗易懂的语言告诉我们，数学的神秘世界并非遥不可及。比说，作者举了一个例子：很多人不知道 2/3 与 3/5 相比哪个数字比较大，但是如果你问一个爱喝酒的人，3 个人喝 2 瓶伏特加和 5 个人喝 3 瓶伏特加相比，他选哪种？那么，你得到的答案肯定是 3 个人喝 2 瓶伏特加。

其实,大家在现实生活中都可以像这样直观地运用数学法则。《爱与数学》可以让我们习得数学思维方式，从而丰富我们的生活，让我们更好地了解这个世界，以及自己在世界中的位置。

《爱与数学》是作者向读者发出的一封探索宇宙中隐藏的数学奇观的邀请书。

作者

爱德华•弗伦克尔（Edward Frenkel），哈佛大学博士，曾在哈佛大学任教，现为加州大学伯克利分校数学系教授。他在数学类专业期刊上发表了 80 多篇论文，并在世界多国做过关于“朗兰兹纲领研究”的巡回演讲，他的演讲视频在 youtube 网站上的点击率超过百万次。也由于其富有魅力的外表使其作品在网站上好评如潮，同时网友钻研数学的动力大增。

他参与制作、执导并主演了电影《爱与数学的仪式》（Rite of Love and Death），法国《世界报》

书评

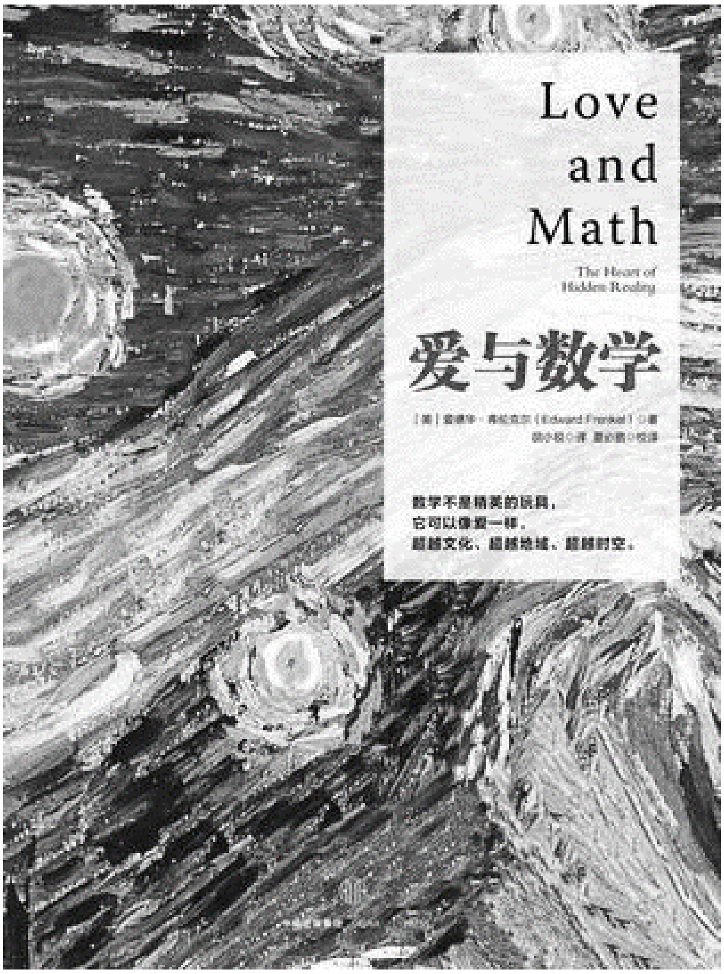
评价它是“一部绝妙的电影，给我们提供了一个看待数学家的不寻常的浪漫视角”。

Edward Frenkel’s new book Love and Math is now out. It’s a must-read for those who share the interests of this blogger, so go get a copy now.

The “Love” of the title is much more about love of mathematics than love of another person, as Frenkel provides a detailed story of what it is like to fall in love with mathematics, then pursue this deeply, ending up doing mathematics at the highest level. Along the way, there are lots of different things going on in the book, all of them quite interesting.

A large part of the book is basically a memoir, recounting Frenkel’s eventful career, which began in a small city in the former Soviet Union. He explains how he fell in love with mathematics, his struggles with the grotesque anti-Semitism of the Soviet system of that time (this chapter of the story was published earlier, available here), his experiences with Gelfand and others, and how he came to the US and ended up beginning a successful academic career in the West at Harvard. I remember fairly well the upheaval in the mathematics research community of that era, as the collapse of the Soviet system brought a flood of brilliant mathematicians from Russia to the West. It's fascinating to read Frenkel's account of what that all looked like from the other side.

Russia at the time had a vibrant mathematical culture, but one isolated from and quite different than that of the West. Many of its most talented members had rather marginal positions in official academia, and their community was driven much more by a passion for the subject than any sort of careerism. Frenkel comes out of this background with that passion intact, and it shines throughout his book. In some other ways though, he's more American and less Russian than just about anyone I know. Part of the Russian mathematical culture has sometimes included a certain cynicism and vision of great mathematics as an esoteric subject best closed to outsiders, with little interest in communication with the non-initiated. I confess to a personal sympathy with the cynicism part (as any reader of this blog has probably figured out) but no sympathy for obscurantism about mathematics research.



Frenkel’s sunny optimism and cheerful enthusiasm for his subject and life in general is very American, and in his writing he often gets through to melt the cynical part of this reader. What’s really wonderful though is his dedication to the cause of the opposite of obscurantism, that of doing the hard work of trying to explain mathematical insights to as wide an audience as possible. His book is packed with mathematics and physics, full of enlightening explanations of difficult topics at all different levels of mathematical sophistication.

Perhaps the most remarkable part of the book though is the way it makes a serious attempt to tackle the problem of explaining one of the deepest sets of ideas in mathematics, those which go under the name of the “Langlands program”. These ideas have fascinated me for years, and much of what I have learned about them has come from reading some of Frenkel’s great expository articles on the subject. To anyone who wants to learn more about this subject, the best advice for how to proceed is to read the overview in “Love and Math” (which you likely won’t fully understand, but which will give you a general picture and glimpses of what is really going on), and then try reading some of his more technical surveys (e.g. here, hereand here).

The Langlands story is a complex one, but it starts with a very deep and beautiful idea that brings together different parts of mathematics: one way to think about number theory is to think of rational numbers as rational functions on a space, the space of primes. One then ends up seeing all sorts of parallels between the study of Riemann surfaces and number theory. Frenkel explains this in detail, including André Weil's description of a "Rosetta stone", a translation between aspects of number theory, aspects of Riemann surface theory, and yet a third intermediate parallel theory, that of algebraic curves over a finite field.

He goes on to explain the subject of "geometric Langlands theory", the transposition of the Langlands program from the number theory to the Riemann surface case, creating a whole new area of mathematics, one with deep connections to quantum field theory. The book includes extensive discussion of discoveries by Witten and others linking duality in four-dimensional quantum field theory to the fundamental mysterious Langlands duality in the geometric Langlands case. Frenkel has been in the middle of these developments and is the ideal person to tell this story.

The connection between these ideas and two-dimensional quantum field theory seems to me to be a subject for which we have so far only seen the tip of an iceberg, with much more to come in the future. One part of this that I don't think Frenkel discusses is early work by Witten (before geometric Langlands was formulated) giving explicit analogies between 2d qft and reciprocity laws in number theory. For more about this, see Witten's 1988 Quantum field theory, Grassmanians and algebraic curves, or a more recent paper by Takhtajan. Working on writing up the material about the harmonic oscillator and representation theory from my last year's course has gotten me interested again in the number-theoretical version of that particular story. Unfortunately I don't know a really readable reference, hope some day to write something myself once I have a better understanding of the subject.

So, I heartily recommend this book to all with an interest in mathematics or its relation to physics. If the "Love" of the title has you hoping for a tale of romance between two people, you’re going to be disappointed, but you will find something much more unusual, a memoir of the romance of mathematics and its relation to the physical world.

征稿启事

震惊，这是一则来自数学与统计学院科学技术协会《数说》期刊部的有偿征稿启事！

就像兴趣小组以兴趣为动力不含其他要求门槛，我们的期刊面向全校师生，期待着各位热爱数学的老师同学们的来稿。

《数说》，由数学与统计学院科学技术协会主办的数学知识性期刊，每两月发行一期，旨在提升同学们的数学素养，培养同学们的数学兴趣，开拓大家的视野，使大家对数学有着更深的理解与热爱。

本期刊由数院科协期刊部负责编辑整理，由黄永忠与王湘君两位老师负责审稿，我们严肃的态度，保证对每一份来稿文件严谨的对待。同时，我们会根据稿件质量，适当给予稿酬。

如果你对课内的知识有一些感悟，无论是解题技巧，亦或回首前面的课程有了新的收获想要向大家分享，我们愿意作为一个平台，记录并分享你的感悟。

如果你最近看了一本书，当然，得与数学相关喔。

你的读后有感，我们愿意倾听，你的收获与疑问，我们愿意与你交流。在交流后，或许我们可以在期刊上将它分享给更多热爱数学的人。

如果你认为读过或是写过的学术论文对热爱数学，正在学习数学的同学有帮助，愿意推荐分享给他们，也可以向我们推荐。

当然，相较于推荐一些内容，我们更愿意看到各位同学与老师的原创内容，如果在原创内容中你引用了其他资料，请别忘了标明出处哟。

同时，我们也接受与数学领域相交汇的内容，比如计算机，物理等学科的投稿，如果能够对数学知识提供一定得理解帮助或是应用推广，还会被采纳喔。

除了一些感悟，如果在学习过程中，你遇到了一些问题，或是在思考过程中有些内容难以理解，也可以整理之后向我们投稿，我们将对这些问题进行处理总结，在期刊栏目中提供我们的思路。

投稿地址及稿酬咨询：hustmaths@163.com

如果对我们的期刊有什么期望或是一些改进意见，也可以通过此地址向我们表达你的意见，我们会不断改正，不断进步。

谨代表《数说》期刊部全体成员欢迎您的来稿！