数学建模融入经济数学中的案例及分析

钱和平，徐清舟

一．怎么才能保证宏观经济稳定．

在完全自由竞争的市场经济中会经常出现供大于求导致价格下降供不应求导致价格上涨这样的循环往复的局面，有的振幅小趋向平衡有的振幅越来越大，如果没有外界如政府的干预，将导致经济崩溃．下面我们用导数和微分建模讨论政府应该采取什么样的措施才能保证宏观经济的稳定．对于一个特定商品的需求与供给同时依赖于许多因素，如它的价格、其它商品的价格、消费者的偏 爱、消费者人数、消费者的收入等．为了简化对问题的分析，假定其它因素暂时保持某种状态不变，只考虑与价格的关系．在许多市场上，时间不能看成连续变量而应该看成是离散变量，我们用整数来标记生产和购买的时间．生产者可根据以前的信息决定其第（n＋1）批生产的产品的总量，假设他做决定是基于第 n 次市场的行为，记S_{n+1}为$n+1$次市场的总合供给，则有：

$$S_{n+1}=S(p_n) \tag{1.1}$$

其中p_n为第n次市场的价格．设市场是一个理想竞争市场，很快就出现均衡，即第n次市场上供给等于需求

$$D(p_n)=S_n=S(p_{n-1}) \tag{1.2}$$

方程(1.1)和方程(1.2)就确定了市场上的价格．一般情况下，需求随着价格上涨而减少，供给随着价格上涨而增加．如图 1 ，图 2 ，在同一坐标系上画上总合需求曲线和总合供给曲线

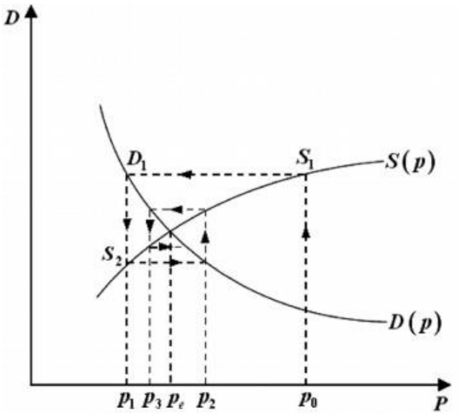

图 1　点 p ＝ p e 是稳定的平衡点

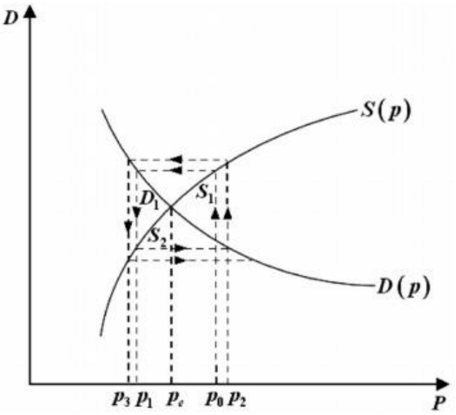

图 2　点 p ＝ p e 是不稳定的平衡点

图中的虚线形似蛛网，图 1 中，蛛网向内部前进趋向于点$p=p_e, D(p_e)=S(p_e)$.在这个点上，价格不再变化，表明点$p=p_e$是稳定的平衡点，意味着商品的供需与价格趋向稳定．图 2 中，蛛网向外部前进远离点$p=p_e$，即点$p=p_e$是不稳定的平衡点，意味着商品的供需与价格将出现越来越大的振荡．这种用需求曲线和供给曲线分析市场经济稳定性的图示法在经济学中称蛛网模型．我们分析一下图 1 和图 2 的不同之处就会发现，需求曲线比供给曲线陡峭，有利于经济的稳定．为了进一步分析这种现象，下面利用导数和微分工具来定量分析蛛网模型．令$\Delta p=p-p_e$，则有

$$\Delta D=D(p)-D(p_e)=D'(p_e)(p-p_e)+o(p-p_e);$$
$$\Delta S=S(p)-S(p_e)=S'(p_e)(p-p_e)+o(p-p_e)$$

当Δp很小时，有

$$D(p)\approx D(p_e)+D'(p_e)(p-p_e),$$

$$S(p) \approx S(p_e) + S'(p_e)(p - p_e)$$

从而近似有

$$D(p_n) = D(p_e) + D'(p_e)(p_n - p_e),$$
$$S(p_{n-1}) = S(p_e) + S'(p_e)(p_{n-1} - p_e)$$

注意到$D(p_n) = S(p_{n-1}), D(p_e) = S(p_e)$，所以不难得到

$$p_n = (p_0 - p_e)\left(\frac{S'(p_e)}{D'(p_e)}\right)^n + p_e$$

如果系统稳定，那么必须$\left(\frac{S'(p_e)}{D'(p_e)}\right)^n \to 0(n \to \infty)$, 于是有$|D'(p_e)| > |S'(p_e)|$，即需求曲线变化强于供给曲线变化时，系统是稳定的．模型中$|D'(p_e)|$表示价格下跌一个单位时需求量上升的幅度，$|S'(p_e)|$表示价格上涨 1 个单位时（下一时期）商品供应的增加量．它要求人们对商品的消费能力适当高于商品的供给能力，有利于宏观经济的稳定．一方面，政府在控制物价的同时，应出台更多的刺激消费政策，扩大人们的消费需求，提高人们的消费能力．另一方面，政府要正确处理好增长投资和拉动消费的关系，不管商品价格如何变化，都要 保证商品的有效供给，当供应量少于需求时，从外地收购或调拨，投入市场；当供过于求时，收购过剩部分，维持商品上市量不变．

二 • 怎样定价才能提高收益．

在争夺客户的战争中，价格战是企业管理者手中最常挥动的武器，体现了企业为实现自己的营销目标而实行的定价艺术和技巧．定价过高，会影响消费者的经济利益从而失去消费者；定价过低，则会影 响企业的收益目标和企业的长期发展．那么怎样定价才能提高收益呢？下面用微分学的知识建模来回答这个问题．假设某商品的需求函数用$D = D(p)$ 表示，且可微.$\frac{\Delta p}{p}$为价格p的相对该变量，$\frac{\Delta D}{D}$为需求 D 的相对该变量，则称

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta D}{D} \Big/ \frac{\Delta p}{p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta p}\frac{p}{D} = \frac{p}{D}\frac{dD}{dp}$$

为该商品的需求价格弹性，简称需求弹性，记为$\varepsilon_p = \frac{p}{D}\frac{dD}{dp}$. 需求弹性$\varepsilon_p$表示某商品需求量D对价格p的变动的反应程度．由于需求函数为价格减函数，故需 求弹性为负值．当商品价格上涨（或下跌） 1 ％时，其需求量将减少（或增加）约$|\varepsilon_p|$%. 在商品经济中，商品经营者关心的是提价$(\Delta p > 0)$或降价$(\Delta p < 0)$对总收益的影响．设销售收益 R=Dp，则当Δp很小时，有

$$\Delta R \approx dR = d(Dp) = Ddp + pdD = (1 + \varepsilon_p)Ddp,$$

于是有

$$\Delta R = (1 - |\varepsilon_p|)D\Delta p.$$

由此可知，当$|\varepsilon_p| > 1$（高弹性）时，降价可使总收益增加，薄利多销多收益，一般指一些非必需品的且容易找到替换物的商品；当$|\varepsilon_p| < 1$（低弹性）时，提价可使总收益增加，一般指社会必需品，如粮食等；当$|\varepsilon_p| = 1$（单位弹性）时，提价或降价对总收益没有明显的影响．

三 • 广告越多越好吗？

广告是通过一定媒体向用户推销产品或承揽服务以达到增加了解和信任以致扩大销售目的的一种 促销形式．当今世界，商业广告已十分发达，尤其是一种新产品、新技术的出现，靠行政手段推广，既缓慢 又有局限性，而通过广告直接与消费者见面，激发和诱导消费，能使新产品、新技术迅速在市场上站稳脚 跟，获得成功．那么，广告量越多越好吗？下面通过微分方程建模解释和分析这个问题

设$x(t)$表示对某商品的购买量, X_0表示该商品的最高需求水平，$y(t)$表示对该商品的广告量，Y_0

表示广告量的最高限制．商品的需求发展速度$\frac{dx}{dt}$受当前该商品的需求量x(t) 与实际的商品需求发展潜力$(1-\frac{x}{X_0})$ 影响；同时也受广告量y(t) 的影响，当y(t) 不超过Y_0时，广告能促进消费，当y(t) 超过Y_0，消费者往往会出现逆反心理，甚至顾虑该商品是否有质量问题等而影响x(t). 广告的投入速度$\frac{dy}{dt}$受消费者对该商品需求量的影响，于是有下面的广告与购物的微分方程模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x\left(1-\frac{x}{X_0}\right) + ky(1-\frac{y}{Y_0}) \\ \frac{dy}{dt} = r(X_0 - x) \end{cases} \tag{3.1}$$

其中μ, k, r是正常数, μ表示某商品的实际购买水平对该商品的购买速度增长潜力的影响系数, k表示广告量对商品的购买速度的影响系数，r 表示商品的实际购买水平对单位时间内的广告量的影响系数．

系统(3.1)有两个奇点是$P(X_0, 0)$, $Q(X_0, Y_0)$.

对于P点，(3,1)的线性近似系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\mu-\lambda & k \\ -r & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\lambda^2 + \mu\lambda + kr = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4kr}}{2}$$

当$\mu^2 - 4kr > 0$时P是稳定的结点，当$\mu^2 - 4kr < 0$时P是稳定的焦点。

对于Q点，(3.1)的线性近似系统的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\mu & -k \\ -r & 0 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\lambda^2 + \mu\lambda - kr = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4krY}}{2}$$

故Q点是鞍点

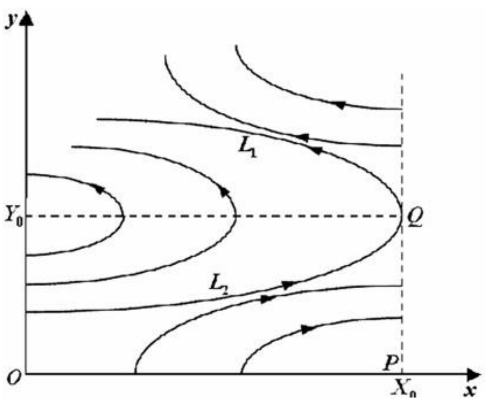

图 3 系统(3.1)的相图

系统(3.1)的相图如图 3 ，从相图上我们可以看到，当广告量不超过Y_0 时，广告有促销作用，x(t) 随时间之增加而增加；当广告量超过Y_0，x(t) 单调减少，广告过多引起了副作用．两条鞍点分界线L_1和L_2所夹的区域内，随时间的推移，购买量将变成零，对于t_0时刻的购买量$x(t_0)$, 要有一个合适的广告量与之相匹配，使得$(x(t_0), y(t_0))$ 落在L_2下方的区域内，才能使购买量随时间的推移而达到最大．如果$(x(t_0), y(t_0))$ 落在L_2上方，则随着时间的推移，购买量将变成零，这就是广告偏多的负面影响．