



核创能源科技
NUCLEAR ENERGY CREATIVE POWER

内部文件

NECP-2020/0103/V1.0

圆柱几何基于中子扩散方程的时空动力学计算 技术方案

编制：_____王永平_____

校核：_____

审核：_____徐嘉隆_____

批准：_____郑友琦_____

2020 年 4 月

目录

1 概述	1
2 三维圆柱扩散中子方程求解模型	1
2.1 中子扩散方程	2
2.2 横向积分技术	3
2.3 节块展开和响应方程	3
2.4 节块中子平衡方程	12
2.5 迭代求解流程	13
3 三维圆柱几何中子时空动力学计算模型	14
3.1 中子扩散动力学方程	14
3.2 预估校正准静态策略的计算模型	15
3.2.1 中子通量密度方程	15
3.2.2 中子通量密度预估求解	17
3.2.3 准静态近似	17
3.2.4 幅度函数求解	19
3.3 时间步进流程	21
4 总结	24
参考文献	24

1 概述

为了开发一套适用于圆柱（ $R-\theta-Z$ ）几何的中子扩散时空动力学程序，本文档详细推导了动力学计算理论模型、建立了数值求解方案，为程序开发提供了理论支撑。

在中子时空动力学的计算中，对中子扩散动力学方程采用预估校正准静态策略进行时间离散，其主要思想为将中子通量密度与缓发中子先驱核密度近似为强时间相关的幅度函数与弱时间相关的形状函数的乘积，然后在不同时间尺度上分别计算幅度函数和形状函数。其中，形状函数通过在较大时间步上求解带固定源的中子扩散方程得到，幅值函数则通过在小时间步上求解点堆方程获得。这种时间步进策略在保证计算精度的同时能有效提高计算效率。

本文档第二章详细推导了三维圆柱几何下中子扩散方程的求解方案，总体上采用了传统横向积分技术和节块展开方法，最终建立了幂迭代数值求解流程。这部分为动力学中大时间步上形状函数的计算提供了计算模型。

本文档第三章详细推导了利用预估校正准静态策略求解中子时空动力学的理论模型，分别建立了幅度函数和形状函数求解的具体方程形式，其中形状函数由第二章所述方法完成具体求解，点堆方程组的求解模型由 3.2.4 节所述。最终，建立了完整的中子时空动力学计算流程，为后续程序编制提供了理论指导。

2 三维圆柱扩散中子方程求解模型

本章从三维多群中子扩散方程出发，推导了圆柱几何下中子扩散

方程形式, 并基于横向积分技术将三维方程转化为三个方向的一维方程。通过一维多项式展开和引入中子偏流的中间变量, 建立了节块内偏流、通量的响应关系式, 最终建立了幂迭代数值求解流程。

2.1 中子扩散方程

三维空间多群稳态中子扩散方程为:

$$-D_g(\mathbf{r})\nabla^2\phi_g(\mathbf{r})+\Sigma_{rg}(\mathbf{r})\phi_g(\mathbf{r})=Q_g(\mathbf{r}) \quad (2-1)$$

$$Q_g(\mathbf{r})=\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq g}}^G \Sigma_{s,h \rightarrow g}(\mathbf{r})\phi_h(\mathbf{r})+\frac{\chi_g(\mathbf{r})}{k_{eff}} \sum_{h=1}^G \nu\Sigma_{fh}(\mathbf{r})\phi_h(\mathbf{r}) \quad (2-2)$$

其中的符号定义为:

\mathbf{r} —— 空间位置向量

ϕ_g —— 第 g 能群中子通量密度 (中子/ ($m^2 \cdot s$))

D_g —— 扩散系数 (m^{-1})

ν —— 每次裂变产生的平均中子数

Σ_{fh}^k —— 第 h 群宏观裂变截面 (m^{-1})

χ_g —— 第 g 能群的裂变能谱

k_{eff} —— 有效增殖系数

$\Sigma_{s,h \rightarrow g}^k$ —— 第 h 群散射至第 g 群的宏观散射截面 (m^{-1})

Σ_{rg}^k —— 第 g 群宏观移出截面 (m^{-1}), 为总截面减去自散射截面:

$$\Sigma_{rg}^k = \Sigma_{tg}^k - \Sigma_{s,g \rightarrow g}^k \quad (2-3)$$

在三维圆柱(r, θ, z)几何下, 将圆柱进行节块划分, 节块 k 的中子扩散方程的形式可写为:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_g^k \frac{\partial \phi_g^k(\mathbf{r})}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_g^k \frac{\partial \phi_g^k(\mathbf{r})}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_g^k \frac{\partial \phi_g^k(\mathbf{r})}{\partial z} \right) + \Sigma_{rg}^k \phi_g^k(\mathbf{r}) = Q_g^k(\mathbf{r}) \quad (2-4)$$

其中, r 为径向半径坐标, θ 为周向角度坐标, z 为轴向高度坐标。节

块 k 的坐标取值范围为：

$$r \in [r_k - a_k, r_k + a_k], \theta \in [\theta_k - b_k, \theta_k + b_k], z \in [z_k - c_k, z_k + c_k] \quad (2-5)$$

2.2 横向积分技术

在三维圆柱几何下，对节块 k 的中子扩散方程进行横向积分处理，得到三个一维方程：

1. 对 $d\theta dz$ 平面进行积分，可得 r 方向一维方程：

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r D_g^k \frac{d\phi_{g,r}^k(r)}{dr} \right) + \Sigma_{rg}^k \phi_{g,r}^k(r) = Q_{g,r}^k(r) - \frac{1}{2r_k b_k} \frac{1}{r_k} (L_{g,\theta,R}^k(r) - L_{g,\theta,L}^k(r)) - \frac{1}{2c_k} (L_{g,z,R}^k(r) - L_{g,z,L}^k(r)) \quad (2-6)$$

2. 对 $rdrdz$ 平面进行积分，可得 θ 方向一维方程：

$$-\frac{1}{r_k} \frac{d}{d\theta} \left(D_g^k \frac{d\phi_{g,\theta}^k(\theta)}{r_k d\theta} \right) + \Sigma_{rg}^k \phi_{g,\theta}^k(\theta) = Q_{g,\theta}^k(\theta) - \left(\frac{r_k + a_k}{2a_k r_k} L_{g,r,R}^k(\theta) - \frac{r_k - a_k}{2a_k r_k} L_{g,r,L}^k(\theta) \right) - \frac{1}{2c_k} (L_{g,z,R}^k(\theta) - L_{g,z,L}^k(\theta)) \quad (2-7)$$

3. 对 $rdrd\theta$ 平面进行积分，可得 z 方向一维方程：

$$-\frac{d}{dz} \left(D_g^k \frac{d\phi_{g,z}^k(z)}{dz} \right) + \Sigma_{rg}^k \phi_{g,z}^k(z) = Q_{g,z}^k(z) - \left(\frac{r_k + a_k}{2a_k r_k} L_{g,r,R}^k(z) - \frac{r_k - a_k}{2a_k r_k} L_{g,r,L}^k(z) \right) - \frac{1}{2r_k b_k} \frac{1}{r_k} (L_{g,\theta,R}^k(z) - L_{g,\theta,L}^k(z)) \quad (2-8)$$

可见，每个方程等号右边存在由其他两个方向产生的泄漏源项，这些泄漏源项将三个方程耦合在一起。

2.3 节块展开和响应方程

由 2.2 节可知，径向一维方程与轴向和周向方程形式略有差别，因此本节分别对径向、轴向和周向方程进行多项式展开处理。

2.3.1 轴向和周向处理

轴向（ z 方向）一维方程和周向（ θ 方向）一维方程可统一写为如下形式：

$$-\lambda \frac{d}{d\xi} \left(D_g^k \frac{d\phi_{g,\xi}^k(\xi)}{d\xi} \right) + \Sigma_{rg}^k \phi_{g,\xi}^k(\xi) = \tilde{Q}_{g,\xi}^k(\xi) \quad (2-9)$$

若 $\xi = z$ ，即表示轴向一维方程时， $\lambda = 1$ 且源项表达式为

$$\tilde{Q}_{g,z}^k(z) = Q_{g,z}^k(z) - \left(\frac{r_k + a_k}{2a_k r_k} L_{g,r,R}^k(z) - \frac{r_k - a_k}{2a_k r_k} L_{g,r,L}^k(z) \right) - \frac{1}{2r_k b_k} \frac{1}{r_k} (L_{g,\theta,R}^k(z) - L_{g,\theta,L}^k(z)) \quad (2-10)$$

若 $\xi = \theta$ ，即表示周向一维方程时， $\lambda = \frac{1}{r_k^2}$ 且源项表达式为

$$\tilde{Q}_{g,\theta}^k(\theta) = Q_{g,\theta}^k(\theta) - \left(\frac{r_k + a_k}{2a_k r_k} L_{g,r,R}^k(\theta) - \frac{r_k - a_k}{2a_k r_k} L_{g,r,L}^k(\theta) \right) - \frac{1}{2c_k} (L_{g,z,R}^k(\theta) - L_{g,z,L}^k(\theta)) \quad (2-11)$$

下面以轴向一维方程为例，进行节块展开和响应关系推导，周向方程关系式只需进行上述变量替换即可。

将轴向通量和源项进行二阶展开：

$$\phi_{g,z}^k(z) = \sum_i \phi_{g,zi}^k P_i^k(z), i = 0, 1, 2 \quad (2-12)$$

$$\tilde{Q}_{g,z}^k(z) = \sum_i q_{g,zi}^k P_i^k(z), i = 0, 1, 2 \quad (2-13)$$

其中展开函数为：

$$P_0^k(z) = 1 \quad (2-14)$$

$$P_1^k(z) = \frac{z - z_k}{c_k} \quad (2-15)$$

$$P_2^k(z) = \frac{3}{2} \left(\frac{z - z_k}{c_k} \right)^2 - \frac{1}{2} \quad (2-16)$$

展开函数具有以下性质

$$\frac{1}{2c_k} \int_{z_k - c_k}^{z_k + c_k} P_i^k(z) dz = 0, i \neq 0$$

$$\frac{1}{2c_k} \int_{z_k - c_k}^{z_k + c_k} P_i^k(z) dz = 1, i = 0$$

对一维方程在轴向 $z \in [z_k - c_k, z_k + c_k]$ 内积分，可得节块的平衡方程：

$$R^k(J_{g,z,R}^k - J_{g,z,L}^k) + \sum_{rg}^k \bar{\phi}_{g,z}^k = \bar{Q}_{g,z}^k \quad (2-17)$$

其中：

$$R^k = \frac{\lambda}{2c_k} \quad (2-18)$$

$$J_{g,z,R}^k = -D_g^k \frac{d\phi_{g,z}^k(z)}{dz} \Big|_{z_k+c_k} \quad (2-19)$$

$$J_{g,z,L}^k = -D_g^k \frac{d\phi_{g,z}^k(z)}{dz} \Big|_{z_k-c_k} \quad (2-20)$$

$$\bar{\phi}_{g,z}^k = \frac{1}{2c_k} \int_{z_k-c_k}^{z_k+c_k} \phi_{g,z}^k(z) dz \quad (2-21)$$

$$\bar{\tilde{Q}}_{g,z}^k = \frac{1}{2c_k} \int_{z_k-c_k}^{z_k+c_k} \tilde{Q}_{g,z}^k(z) dz \quad (2-22)$$

由上面定义可知：

平均通量为：

$$\bar{\phi}_{g,z}^k = \phi_{g,z0}^k \quad (2-23)$$

平均源项为（可由通量展开系数和横向泄漏求得）：

$$\bar{\tilde{Q}}_{g,z}^k = q_{g,z0}^k \quad (2-24)$$

右边净流为：

$$J_{g,z,R}^k = -\frac{D_g^k}{c_k} (\phi_{g,z1}^k + 3\phi_{g,z2}^k) \quad (2-25)$$

左边净流为：

$$J_{g,z,L}^k = -\frac{D_g^k}{c_k} (\phi_{g,z1}^k - 3\phi_{g,z2}^k) \quad (2-26)$$

右边面通量为：

$$\phi_{g,z,R}^k = \phi_{g,z0}^k + \phi_{g,z1}^k + \phi_{g,z2}^k \quad (2-27)$$

左边面通量为：

$$\phi_{g,z,L}^k = \phi_{g,z0}^k - \phi_{g,z1}^k + \phi_{g,z2}^k \quad (2-28)$$

为提高计算效率，以节块表面偏流为中间变量构建迭代计算格

式，利用以下几式：

右边净流为两个偏流之差：

$$J_{g,z,R}^k = J_{g,z,R}^{k,out} - J_{g,z,R}^{k,in} \quad (2-29)$$

左边净流为两个偏流之差(注意节块左边的净流是入射减出射)：

$$J_{g,z,L}^k = J_{g,z,L}^{k,in} - J_{g,z,L}^{k,out} \quad (2-30)$$

右边净流可由菲克定律求得：

$$J_{g,z,R}^k = -\frac{D_g^k}{c_k}(\phi_{g,z,1}^k + 3\phi_{g,z,2}^k) \quad (2-31)$$

左边净流可由菲克定律求得：

$$J_{g,z,L}^k = -\frac{D_g^k}{c_k}(\phi_{g,z,1}^k - 3\phi_{g,z,2}^k) \quad (2-32)$$

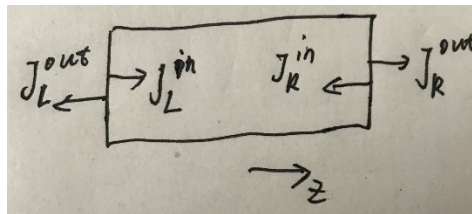
右边面通量为两个偏流之和的两倍：

$$\phi_{g,z,R}^k = \phi_{g,z,0}^k + \phi_{g,z,1}^k + \phi_{g,z,2}^k = 2(J_{g,z,R}^{k,out} + J_{g,z,R}^{k,in}) \quad (2-33)$$

左边面通量为两个偏流之和的两倍：

$$\phi_{g,z,L}^k = \phi_{g,z,0}^k - \phi_{g,z,1}^k + \phi_{g,z,2}^k = 2(J_{g,z,L}^{k,out} + J_{g,z,L}^{k,in}) \quad (2-34)$$

*这里注意平均通量和两个面通量可以用三个展开系数表示，同样三个展开系数也可用平均通量和两个面通量表示。



最终可得出射偏流与平均通量和入射偏流的关系式(利用上述 6 式进行消去、推导，过程比较繁琐，这里省略)：

$$J_{g,z,L}^{k,out} = A_{g,0}^k \bar{\phi}_{g,z}^k + A_{g,1}^k J_{g,z,L}^{k,in} + A_{g,2}^k J_{g,z,R}^{k,in} \quad (2-35)$$

$$J_{g,z,R}^{k,out} = A_{g,0}^k \bar{\phi}_{g,z}^k + B_{g,1}^k J_{g,z,L}^{k,in} + B_{g,2}^k J_{g,z,R}^{k,in} \quad (2-36)$$

$$A_{g,0}^k = \frac{3D_g^k}{6D_g^k + c_k} \quad (2-37)$$

$$A_{g,1}^k = \frac{-12(D_g^k)^2 + c_k^2}{(6D_g^k + c_k)(2D_g^k + c_k)} \quad (2-38)$$

$$A_{g,2}^k = \frac{-4c_k D_g^k}{(6D_g^k + c_k)(2D_g^k + c_k)} \quad (2-39)$$

$$B_{g,1}^k = \frac{-4c_k D_g^k}{(6D_g^k + c_k)(2D_g^k + c_k)} \quad (2-40)$$

$$B_{g,2}^k = \frac{-12(D_g^k)^2 + c_k^2}{(6D_g^k + c_k)(2D_g^k + c_k)} \quad (2-41)$$

将平衡方程中净流用偏流表示：

$$R^k J_{g,z,R}^{k,out} + R^k J_{g,z,L}^{k,out} + \Sigma_{rg}^k \bar{\phi}_{g,z}^k = \bar{Q}_{g,z}^k + R^k J_{g,z,R}^{k,in} + R^k J_{g,z,L}^{k,in} \quad (2-42)$$

根据偏流更新 1 阶展开矩的关系式：

$$\phi_{g,z1}^k = J_{g,z,R}^{k,out} + J_{g,z,R}^{k,in} - J_{g,z,L}^{k,out} - J_{g,z,L}^{k,in} \quad (2-43)$$

根据偏流更新 2 阶展开矩的关系式：

$$\phi_{g,z2}^k = J_{g,z,R}^{k,out} + J_{g,z,R}^{k,in} + J_{g,z,L}^{k,out} + J_{g,z,L}^{k,in} - \phi_{g,z0}^k \quad (2-44)$$

根据平均通量和横向泄漏计算平均源项的关系式：

$$\bar{Q}_{g,z}^k = \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq g}}^G \Sigma_{s,h \rightarrow g}^k \bar{\phi}_{h,z}^k + \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{fh}^k \bar{\phi}_{h,z}^k - \bar{L}_{g,z}^k \quad (2-45)$$

将平衡方程代入 ‘出射偏流与平均通量和入射偏流的关系式’，

可得最终出射偏流与平均通量和入射偏流的关系式：

$$J_{g,z,L}^{k,out} = \tilde{A}_{g,0}^k \bar{Q}_{g,z}^k + \tilde{A}_{g,1}^k J_{g,z,L}^{k,in} + \tilde{A}_{g,2}^k J_{g,z,R}^{k,in} \quad (2-46)$$

$$J_{g,z,R}^{k,out} = \tilde{A}_{g,0}^k \bar{Q}_{g,z}^k + \tilde{B}_{g,1}^k J_{g,z,L}^{k,in} + \tilde{B}_{g,2}^k J_{g,z,R}^{k,in} \quad (2-47)$$

其中的系数为：

$$\tilde{A}_{g,0}^k = \frac{A_{g,0}^k}{2A_{g,0}^k R^k + \Sigma_{rg}^k} \quad (2-48)$$

$$\tilde{A}_{g,1}^k = \frac{A_{g,0}^k R^k (1 + A_{g,1}^k - B_{g,1}^k) + \Sigma_{rg}^k A_{g,1}^k}{2A_{g,0}^k R^k + \Sigma_{rg}^k} \quad (2-49)$$

$$\tilde{A}_{g,2}^k = \frac{A_{g,0}^k R^k (1 + A_{g,2}^k - B_{g,2}^k) + \Sigma_{rg}^k A_{g,2}^k}{2A_{g,0}^k R^k + \Sigma_{rg}^k} \quad (2-50)$$

$$\tilde{B}_{g,1}^k = \frac{A_{g,0}^k R^k (1 - A_{g,1}^k + B_{g,1}^k) + \Sigma_{rg}^k B_{g,1}^k}{2A_{g,0}^k R^k + \Sigma_{rg}^k} \quad (2-51)$$

$$\tilde{B}_{g,2}^k = \frac{A_{g,0}^k R^k (1 - A_{g,2}^k + B_{g,2}^k) + \Sigma_{rg}^k B_{g,2}^k}{2A_{g,0}^k R^k + \Sigma_{rg}^k} \quad (2-52)$$

2.3.2 径向处理

径向（ r 方向）一维方程为：

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r D_g^k \frac{d\phi_{g,r}^k(r)}{dr} \right) + \Sigma_{rg}^k \phi_{g,r}^k(r) = \tilde{Q}_{g,r}^k(r) \quad (2-53)$$

其中：

$$\tilde{Q}_{g,r}^k(r) = Q_{g,r}^k(r) - \frac{1}{2r_k b_k} \frac{1}{r_k} (L_{g,\theta,R}^k(r) - L_{g,\theta,L}^k(r)) - \frac{1}{2c_k} (L_{g,z,R}^k(r) - L_{g,z,L}^k(r)) \quad (2-54)$$

将通量和源项进行二阶展开：

$$\phi_{g,r}^k(r) = \sum_i \phi_{g,ri}^k P_i^k(r), i = 0, 1, 2 \quad (2-55)$$

$$\tilde{Q}_{g,r}^k(r) = \sum_i q_{g,ri}^k P_i^k(r), i = 0, 1, 2 \quad (2-56)$$

其中：

$$P_0^k(r) = 1 \quad (2-57)$$

$$P_1^k(r) = 3 \left(\frac{r - r_k}{a_k} \right) - \frac{a_k}{r_k} \quad (2-58)$$

$$P_2^k(r) = 3 \left(\frac{r - r_k}{a_k} \right)^2 - 1 \quad (2-59)$$

展开函数具有以下性质：

$$\frac{1}{2r_k a_k} \int_{r_k - a_k}^{r_k + a_k} P_i^k(r) r dz = 0, i \neq 0$$

$$\frac{1}{2r_k a_k} \int_{r_k - a_k}^{r_k + a_k} P_i^k(r) r dr = 1, i = 0$$

把一维方程对 rdr 在 $r \in [r_k - a_k, r_k + a_k]$ 内积分，可得节块的平衡方程：

$$R^k J_{g,r,R}^k - L^k J_{g,r,L}^k + \Sigma_{rg}^k \bar{\phi}_{g,r}^k = \bar{Q}_{g,r}^k \quad (2-60)$$

其中：

$$J_{g,r,R}^k = -D_g^k \left. \frac{d\phi_{g,r}^k(r)}{dr} \right|_{r_k + a_k} \quad (2-61)$$

$$J_{g,r,L}^k = -D_g^k \left. \frac{d\phi_{g,r}^k(r)}{dr} \right|_{r_k - a_k} \quad (2-62)$$

$$R^k = \frac{r_k + a_k}{2a_k r_k}, L^k = \frac{r_k - a_k}{2a_k r_k} \quad (2-63)$$

$$\bar{\phi}_{g,r}^k = \frac{1}{2r_k a_k} \int_{r_k - a_k}^{r_k + a_k} \phi_{g,r}^k(r) dr \quad (2-64)$$

$$\bar{Q}_{g,r}^k = \frac{1}{2r_k a_k} \int_{r_k - a_k}^{r_k + a_k} \tilde{Q}_{g,r}^k(r) dr \quad (2-65)$$

那么由以上定义可知：

平均通量为：

$$\bar{\phi}_{g,r}^k = \phi_{g,r0}^k \quad (2-66)$$

平均源项为（可由通量展开系数和横向泄漏求得）：

$$\bar{Q}_{g,r}^k = q_{g,r0}^k \quad (2-67)$$

右边净流为：

$$J_{g,r,R}^k = -\frac{D_g^k}{a_k}(3\phi_{g,r1}^k + 6\phi_{g,r2}^k) \quad (2-68)$$

左边净流为：

$$J_{g,r,L}^k = -\frac{D_g^k}{a_k}(3\phi_{g,r1}^k - 6\phi_{g,r2}^k) \quad (2-69)$$

右边面通量为：

$$\phi_{g,r,R}^k = \phi_{g,r0}^k + (3 - \frac{a_k}{r_k})\phi_{g,r1}^k + 2\phi_{g,r2}^k \quad (2-70)$$

左边面通量为：

$$\phi_{g,r,L}^k = \phi_{g,r0}^k - (3 + \frac{a_k}{r_k})\phi_{g,r1}^k + 2\phi_{g,r2}^k \quad (2-71)$$

为提高计算效率，同样以节块表面偏流为中间变量构建迭代计算格式，利用以下几式；

右边净流为两个偏流之差为：

$$J_{g,r,R}^k = J_{g,r,R}^{k,out} - J_{g,r,R}^{k,in} \quad (2-72)$$

左边净流为两个偏流之差为(注意节块左边的净流是入射减出射)：

$$J_{g,r,L}^k = J_{g,r,L}^{k,in} - J_{g,r,L}^{k,out} \quad (2-73)$$

右边净流可由菲克定律求得：

$$J_{g,r,R}^k = -\frac{D_g^k}{a_k}(3\phi_{g,r1}^k + 6\phi_{g,r2}^k) \quad (2-74)$$

左边净流也可由菲克定律求得：

$$J_{g,r,L}^k = -\frac{D_g^k}{a_k}(3\phi_{g,r1}^k - 6\phi_{g,r2}^k) \quad (2-75)$$

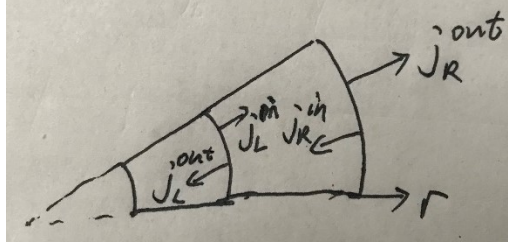
右边面通量为两个偏流之和的两倍：

$$\phi_{g,r,R}^k = \phi_{g,r0}^k + (3 - \frac{a_k}{r_k})\phi_{g,r1}^k + 2\phi_{g,r2}^k = 2(J_{g,r,R}^{k,out} + J_{g,r,R}^{k,in}) \quad (2-76)$$

左边面通量为两个偏流之和的两倍：

$$\phi_{g,r,L}^k = \phi_{g,r0}^k - (3 + \frac{a_k}{r_k})\phi_{g,r1}^k + 2\phi_{g,r2}^k = 2(J_{g,r,L}^{k,out} + J_{g,r,L}^{k,in}) \quad (2-77)$$

*这里注意平均通量和两个面通量可以用三个展开系数表示，同样三个展开系数也可用平均通量和两个面通量表示。



可推导出射偏流与平均通量和入射偏流的关系式(利用上述 6 式进行消去、推导，过程比较繁琐，这里省略)：

$$J_{g,r,L}^{k,out} = A_{g,0}^k \bar{\phi}_{g,r}^k + A_{g,1}^k J_{g,r,L}^{k,in} + A_{g,2}^k J_{g,r,R}^{k,in} \quad (2-78)$$

$$J_{g,r,R}^{k,out} = A_{g,0}^k \bar{\phi}_{g,r}^k + B_{g,1}^k J_{g,r,L}^{k,in} + B_{g,2}^k J_{g,r,R}^{k,in} \quad (2-79)$$

其中的系数为：

$$A_{g,0}^k = \frac{3D_g^k}{6D_g^k + a_k} \quad (2-80)$$

$$A_{g,1}^k = \frac{-12r_k (D_g^k)^2 + 2a_k^2 D_g^k + a_k^2 r_k}{r_k (6D_g^k + a_k)(2D_g^k + a_k)} \quad (2-81)$$

$$A_{g,2}^k = \frac{-4a_k r_k D_g^k - 2a_k^2 D_g^k}{r_k (6D_g^k + a_k)(2D_g^k + a_k)} \quad (2-82)$$

$$B_{g,1}^k = \frac{-4a_k r_k D_g^k + 2a_k^2 D_g^k}{r_k (6D_g^k + a_k)(2D_g^k + a_k)} \quad (2-83)$$

$$B_{g,2}^k = \frac{-12r_k (D_g^k)^2 - 2a_k^2 D_g^k + a_k^2 r_k}{r_k (6D_g^k + a_k)(2D_g^k + a_k)} \quad (2-84)$$

将平衡方程中净流用偏流表示，平衡方程可写为：

$$R^k J_{g,r,R}^{k,out} + L^k J_{g,r,L}^{k,out} + \sum_{rg}^k \bar{\phi}_{g,r}^k = \bar{Q}_{g,r}^k + R^k J_{g,r,R}^{k,in} + L^k J_{g,r,L}^{k,in} \quad (2-85)$$

根据偏流更新 1 阶展开矩的关系式：

$$\phi_{g,r1}^k = \frac{1}{3} (J_{g,r,R}^{k,out} + J_{g,r,R}^{k,in} - J_{g,r,L}^{k,out} - J_{g,r,L}^{k,in}) \quad (2-86)$$

根据偏流更新 2 阶展开矩的关系式：

$$\begin{aligned} \phi_{g,r2}^k = & -\frac{1}{2} \phi_{g,r0}^k + \frac{1}{2} (J_{g,r,R}^{k,out} + J_{g,r,R}^{k,in} + J_{g,r,L}^{k,out} + J_{g,r,L}^{k,in}) \\ & + \frac{a_k}{6r_k} (J_{g,r,R}^{k,out} + J_{g,r,R}^{k,in} - J_{g,r,L}^{k,out} - J_{g,r,L}^{k,in}) \end{aligned} \quad (2-87)$$

根据平均通量和横向泄漏计算平均源项的关系式：

$$\bar{Q}_{g,r}^k = \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq g}}^G \Sigma_{s,h \rightarrow g}^k \bar{\phi}_{h,r}^k + \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{fh}^k \bar{\phi}_{h,r}^k - \bar{L}_{g,r}^k \quad (2-88)$$

将平衡方程代入 ‘出射偏流与平均通量和入射偏流的关系式’，
可得最终的出射偏流与平均通量和入射偏流的关系式：

$$J_{g,r,L}^{k,out} = \tilde{A}_{g,0}^k \bar{Q}_{g,r}^k + \tilde{A}_{g,1}^k J_{g,r,L}^{k,in} + \tilde{A}_{g,2}^k J_{g,r,R}^{k,in} \quad (2-89)$$

$$J_{g,r,R}^{k,out} = \tilde{A}_{g,0}^k \bar{Q}_{g,r}^k + \tilde{B}_{g,1}^k J_{g,r,L}^{k,in} + \tilde{B}_{g,2}^k J_{g,r,R}^{k,in} \quad (2-90)$$

其中的系数为：

$$\tilde{A}_{g,0}^k = \frac{A_{g,0}^k}{A_{g,0}^k (L^k + R^k) + \Sigma_{rg}^k} \quad (2-91)$$

$$\tilde{A}_{g,1}^k = \frac{A_{g,0}^k [L^k + (A_{g,1}^k - B_{g,1}^k) R^k] + \Sigma_{rg}^k A_{g,1}^k}{A_{g,0}^k (L^k + R^k) + \Sigma_{rg}^k} \quad (2-92)$$

$$\tilde{A}_{g,2}^k = \frac{A_{g,0}^k (1 + A_{g,2}^k - B_{g,2}^k) R^k + \Sigma_{rg}^k A_{g,2}^k}{A_{g,0}^k (L^k + R^k) + \Sigma_{rg}^k} \quad (2-93)$$

$$\tilde{B}_{g,1}^k = \frac{A_{g,0}^k (1 - A_{g,1}^k + B_{g,1}^k) L^k + \Sigma_{rg}^k B_{g,1}^k}{A_{g,0}^k (L^k + R^k) + \Sigma_{rg}^k} \quad (2-94)$$

$$\tilde{B}_{g,2}^k = \frac{A_{g,0}^k [R^k + (B_{g,2}^k - A_{g,2}^k) L^k] + \Sigma_{rg}^k B_{g,2}^k}{A_{g,0}^k (L^k + R^k) + \Sigma_{rg}^k} \quad (2-95)$$

2.4 节块中子平衡方程

对节块 k 进行体积积分，可得节块中子平衡方程：

$$(A_R^k J_{g,\theta,R}^k - A_L^k J_{g,\theta,L}^k) + \frac{B^k}{r_k} (J_{g,\theta,R}^k - J_{g,\theta,L}^k) + C^k (J_{g,z,R}^k - J_{g,z,L}^k) + V_k \Sigma_{rg}^k \bar{\phi}_g^k = V_k \bar{Q}_g^k \quad (2-96)$$

其中， A, B, C 为净流对应面的节块表面面积。利用中子平衡方程可得节块内中子平均通量密度。

2.5 迭代求解流程

迭代计算采用传统幂迭代方法，共包含三层迭代：裂变源迭代，多群迭代和内迭代。其中裂变源迭代更新计算裂变源和有效增殖因子；多群迭代更新各能群通量密度；内迭代进行空间扫描更新计算节块表面出射偏流。迭代流程如下所示：

先假设各群通量展开系数（0 阶为 1，其余为 0）出射流（0.25）和 k_{eff} （1.0）；

裂变源迭代 ===》（开始）

计算各群、各节块裂变源；

多群迭代 ===》（开始）

计算 g 群散射源；

更新 g 群出射偏流，即进行内迭代：进行空间扫描，利用‘出射偏流与平均通量和入射偏流的关系式’更新各节块得出射偏流，三个方向通过横向泄漏进行耦合。反复进行空间扫描，直至收敛；

更新 g 群通量；所有能群扫描完后判断通量是否收敛；若不收敛，重新进行能群扫描；

多群迭代 === 《（结束）

重新计算裂变源，根据裂变源更新 k_{eff} ，判断收敛；若不收敛，

继续迭代计算。

裂变源迭代 === 《(结束)》

3 三维圆柱几何中子时空动力学计算模型

在中子时空动力学的计算中,对中子扩散动力学方程采用预估校正准静态策略进行时间离散,在不同时间尺度上计算幅度函数和形状函数,提高计算效率,以下介绍具体理论模型。

3.1 中子扩散动力学方程

考虑缓发中子的衰变产生以及中子通量密度的时间导数关系,多群中子扩散动力学方程为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g(\mathbf{r},t)} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D_g(\mathbf{r},t) \nabla^2 \phi_g(\mathbf{r},t) - \Sigma_{rg}(\mathbf{r},t) \phi_g(\mathbf{r},t) + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq g}}^G \Sigma_{s,h \rightarrow g}(\mathbf{r},t) \phi_h(\mathbf{r},t) + \\ \frac{\chi_g^p(\mathbf{r},t)}{k_{eff}^s} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{f,h}(\mathbf{r},t) \phi_h(\mathbf{r},t) + \sum_{i_p=1}^{I_p} \chi_{i_p,g}^d(\mathbf{r},t) \lambda_{i_p}(\mathbf{r},t) C_{i_p}(\mathbf{r},t) + q_g(\mathbf{r},t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

式中: I_p —— 缓发中子先驱核分组数目; i_p —— 缓发中子分组标识, $i_p = 1, \dots, I_p$; k_{eff}^s —— 瞬态初始状态下的有效增殖因子; $v_g(\mathbf{r},t)$ —— 中子速度; $C(\mathbf{r},t)$ —— 缓发中子先驱核浓度; $\lambda(\mathbf{r},t)$ —— 缓发中子先驱核衰变常数; $q(\mathbf{r},t)$ —— 外中子源密度; G —— 能群数目; h, g —— 能群标识, $h, g = 1, \dots, G$

相应的,缓发中子先驱核方程为:

$$\frac{\partial C_{i_p}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{\beta_{i_p}(\mathbf{r},t)}{k_{eff}^s} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{f,h}(\mathbf{r},t) \phi_h(\mathbf{r},t) - \lambda_{i_p}(\mathbf{r},t) C_{i_p}(\mathbf{r},t) \quad (3-2)$$

其中，总缓发中子份额是各组的加和：

$$\beta(\mathbf{r}, t) = \sum_{i_p=1}^{I_p} \beta_{i_p}(\mathbf{r}, t) \quad (3-3)$$

令(3-1)、(3-2)式时间导数项为 0，即稳态初始状态：

$$\frac{1}{\nu_g(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial \psi_g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial C_{i_p}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (3-4)$$

则：

$$C_{i_p}(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta_{i_p}(\mathbf{r}, t)}{\lambda_{i_p}(\mathbf{r}, t) k_{\text{eff}}^s} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{f, h}(\mathbf{r}, t) \psi_h(\mathbf{r}, t) \quad (3-5)$$

代入至式(3-1)，得到稳态形式的多群中子扩散方程：

$$-D_g(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{rg}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq g}}^G \Sigma_{s, h \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_h(\mathbf{r}) + \frac{\chi_g^s(\mathbf{r})}{k_{\text{eff}}^s} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{fh}(\mathbf{r}) \phi_h(\mathbf{r}) + q(\mathbf{r}) \quad (3-6)$$

其中

$$\chi_g^s(\mathbf{r}, t) = \chi_g^p(\mathbf{r}, t) [1 - \beta(\mathbf{r}, t)] + \sum_{i_p=1}^{I_p} \chi_{i_p, g}^d(\mathbf{r}, t) \beta_{i_p}(\mathbf{r}, t) \quad (3-7)$$

解方程(3-6)即得到初值条件 k_{eff}^s 、 $\phi_g(\mathbf{r}, t_0)$ 。

3.2 预估校正准静态策略的计算模型

预估校正准静态策略的主要思想为：使用准静态近似下的广义因子分裂，将时空中子扩散动力学方程变为关于幅度函数的点堆动力学方程与关于形状函数的大时间步上的固定源方程，并通过预估-校正过程避免幅度函数与形状函数的非线性迭代，提高计算效率。

3.2.1 中子通量密度方程

采用数值微分法，对先驱核浓度方程(3-2)进行全隐式时间离散，

得到：

$$\frac{C_m(\mathbf{r}, t_{n+1}) - C_m(\mathbf{r}, t_n)}{\Delta t_{n+1}} = \beta_m(t_{n+1}) S^p(\mathbf{r}, t_{n+1}) - S_m^d(\mathbf{r}, t_{n+1}) \quad (3-8)$$

其中：

$$S^p(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{k_{eff}^s} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{f,h}(\mathbf{r}, t) \phi_h(\mathbf{r}, t) \quad (3-9)$$

$$S_m^d(\mathbf{r}, t) \equiv \lambda_{i_p}(\mathbf{r}, t) C_{i_p}(\mathbf{r}, t) \quad (3-10)$$

由式(3-8)可以得到先驱核浓度的计算表达式：

$$C_{i_p}(t_{n+1}) = \frac{1}{1 + \lambda_{i_p}(t_{n+1}) \Delta t_{n+1}} \left[C_{i_p}(\mathbf{r}, t_n) + \Delta t_{n+1} \beta_{i_p}(t_{n+1}) S^p(\mathbf{r}, t_{n+1}) \right] \quad (3-11)$$

同样的，对中子通量密度方程(3-1)进行全隐式格式离散：

$$\frac{1}{\nu_g(t_{n+1})} \frac{\phi_g(\mathbf{r}, t_{n+1}) - \phi_g(\mathbf{r}, t_n)}{\Delta t_{n+1}} = R_g(\mathbf{r}, t_{n+1}) \quad (3-12)$$

其中：

$$R_g(\mathbf{r}, t) \equiv M_g(\mathbf{r}, t) + \chi_g^p(\mathbf{r}, t) [1 - \beta(\mathbf{r}, t)] S^p(\mathbf{r}, t) + \sum_{i_p=1}^{I_p} \chi_{i_p,g}^d(\mathbf{r}, t) S_{i_p}^d(\mathbf{r}, t) + q_g(\mathbf{r}, t) \quad (3-13)$$

则当前时刻的中子通量密度 $\phi_g(\mathbf{r}, t_{n+1})$ 可以直接迭代求解，将(3-11)带入(3-12)并且将其按照稳态方程形式进行整理，如下：

$$\begin{aligned} -D_g(\mathbf{r}, t_{n+1}) \nabla^2 \phi_g(\mathbf{r}, t_{n+1}) + \Sigma'_{rg}(\mathbf{r}, t_{n+1}) \phi_g(\mathbf{r}, t_{n+1}) &= \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq g}}^G \Sigma_{s,h \rightarrow g}(\mathbf{r}, t_{n+1}) \phi_h(\mathbf{r}, t_{n+1}) + \\ &Q_{f,g}(\mathbf{r}, t_{n+1}) + S_g(\mathbf{r}, t_{n+1}) \end{aligned} \quad (3-14)$$

其中（省略位置坐标）：

$$\Sigma'_{r,g}(t_{n+1}) = \Sigma_{r,g}(t_{n+1}) + \frac{1}{\nu_g(t_{n+1}) \Delta t_{n+1}} \quad (3-15)$$

$$Q_{f,g}(t_{n+1}) = \left[\chi_g^s(t_{n+1}) - \sum_{i_p=1}^{I_p} \frac{\chi_{i_p,g}^d(t_{n+1}) \beta_{i_p}(t_{n+1})}{1 + \lambda_{i_p}(t_{n+1}) \Delta t_{n+1}} \right] S^p(t_{n+1}) \quad (3-16)$$

$$S_g(t_{n+1}) = \sum_{i_p=1}^{I_p} \frac{\chi_{i_p,g}^d(t_{n+1}) \lambda_{i_p}(t_{n+1}) C_{i_p}(r, t_n)}{1 + \lambda_{i_p}(t_{n+1}) \Delta t_{n+1}} + \frac{\phi_g(t_n)}{\nu_g(t_{n+1}) \Delta t_{n+1}} + q_g(t_{n+1}) \quad (3-17)$$

式(3-14)是同时含有裂变源和外中子源项的问题，其中外中子源项包含上一时间点缓发中子的贡献、上一时间点中子通量密度的贡献以及当前时刻实际外中子源的贡献，称为时间相关固定源问题。

3.2.2 中子通量密度预估求解

中子通量密度方程(3-14)的预估求解是预估-校正过程中位置相关的形状函数的来源，其占据整个瞬态计算中的主要计算时间。方程的具体求解采用第一章中所介绍的基于横向积分技术的节块展开法进行固定源计算进行求解。

3.2.3 准静态近似

采用准静态近似下的广义因子分裂，将中子时空动力学方程的分布函数分为强时间相关的幅度函数部分与弱时间相关的形状函数部分：

$$\begin{aligned} \psi_g(r, t) &= n(t) \cdot \tilde{\psi}_g(r, t) \\ C_{i_p}(r, t) &= c_{i_p}(t) \cdot \tilde{C}_{i_p}(r, t) \end{aligned} \quad (3-18)$$

代入式(3-1)、(3-2)，得到：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_g(t)} \frac{\partial \tilde{\phi}_g(r, t)}{\partial t} &= D_g(r, t) \nabla^2 \tilde{\phi}_g(r, t) - \Sigma_{rg}(t) \tilde{\phi}_g(r, t) + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq g}}^G \Sigma_{s,h \rightarrow g}(r, t) \tilde{\phi}_h(r, t) + \\ &\quad \frac{1}{k_{\text{eff}}^s} \frac{\chi_g^p(t) [1 - \beta(t)]}{4\pi} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{f,h}(r, t) \tilde{\phi}_h(r, t) + \\ &\quad \frac{c_{i_p}(t)}{n(t)} \sum_{i_p=1}^{I_p} \chi_{i_p,g}^d(r, t) \lambda_{i_p}(r, t) \tilde{C}_{i_p}(r, t) - \frac{1}{n(t)} \frac{dn}{dt} \cdot \frac{1}{\nu_g(t)} \tilde{\phi}_g(r, t) \end{aligned} \quad (3-19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}_{i_p}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = & \frac{n(t)}{c_{i_p}(t)} \frac{\beta_{i_p}(\mathbf{r}, t)}{k_{\text{eff}}^s} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{f,h}(\mathbf{r}, t) \tilde{\phi}_h(\mathbf{r}, t) \\ & - \frac{1}{c_{i_p}(t)} \frac{dc_{i_p}}{dt} \tilde{C}_{i_p}(\mathbf{r}, t) - \lambda_{i_p}(\mathbf{r}, t) \tilde{C}_{i_p}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3-20)$$

选取权重函数为稳态时的共轭通量，通过求解稳态共轭中子扩散方程得到，由第一章中所介绍的基于横向积分技术的节块展开法进行共轭计算进行求解：

$$-D_g(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi_g^*(\mathbf{r}) + \Sigma_{rg}(\mathbf{r}) \phi_g^*(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq g}}^G \Sigma_{s,h \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_h^*(\mathbf{r}) + \frac{\chi_g(\mathbf{r})}{k_{\text{eff}}^*} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{fh}(\mathbf{r}) \phi_h^*(\mathbf{r}) \quad (3-21)$$

其中特征值满足关系式：

$$\frac{1}{k_{\text{eff}}^*} = \frac{1}{k_{\text{eff}}^s} \quad (3-22)$$

引入形状函数的归一化限制条件，使分裂过程唯一：

$$\begin{aligned} \sum_{g=1}^G \int_V \frac{\phi_g^*(\mathbf{r}) \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t)}{\nu_g(t)} d\mathbf{r} &= 1 \\ \sum_{g=1}^G \int_V \phi_g^*(\mathbf{r}) \chi_{i_p, g}^d(t) \tilde{C}_{i_p}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} &= 1, \quad i_p = 1, \dots, I_p \end{aligned} \quad (3-23)$$

忽略截面及动力学参数对时间导数，利用归一化限制条件，对方程(3-19)、(3-20)两端乘以共轭通量、(3-22)两端乘以形状函数，并将各式在除时间外的相空间区域积分并做变形和整理，得到点堆方程：

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho(t) - \bar{\beta}(t)}{\Lambda(t)} n(t) + \sum_{m=1}^M \bar{\lambda}_{i_p} c_{i_p}(t) \\ \frac{dc_{i_p}(t)}{dt} &= \frac{\bar{\beta}_{i_p}(t)}{\Lambda(t)} n(t) - \bar{\lambda}_{i_p} c_{i_p}(t) \end{aligned} \quad (3-24)$$

其中：

$$F(t) \equiv \sum_{g=1}^G \int_V d\mathbf{r} \frac{\phi_g^*(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \chi_g^s(t)}{k_{\text{eff}}^s} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{f,h}(\mathbf{r}, t) \tilde{\phi}_h(\mathbf{r}, t) \quad (3-25)$$

$$\rho(t) \equiv \frac{1}{F(t)} \cdot \sum_{g=1}^G \int_V d\mathbf{r} \left\{ \begin{aligned} & -\Delta\Sigma_{r,g} \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t) \phi_g^*(\mathbf{r}) + \\ & \phi_g^*(\mathbf{r}) \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq g}}^G \Delta\Sigma_{s,h \rightarrow g}(\mathbf{r}) \tilde{\phi}_h(\mathbf{r}, t) + \\ & \frac{\phi_g^*(\mathbf{r}) \chi_g^s}{k_{\text{eff}}^s} \sum_{h=1}^G \Delta\nu\Sigma_{f,h}(\mathbf{r}, t) \tilde{\phi}_h(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

$$\bar{\beta}_{i_p}(t) \equiv \frac{\sum_{g=1}^G \int_V d\mathbf{r} \left(\phi_g^*(\mathbf{r}) \frac{\chi_{i_p,g}^d \beta_{i_p}}{k_{\text{eff}}^s} \sum_{h=1}^G \nu\Sigma_{f,h}(\mathbf{r}, t) \tilde{\phi}_h(\mathbf{r}, t) \right)}{F(t)} \quad (3-27)$$

$$\bar{\beta}(t) = \sum_{i_p=1}^{I_p} \bar{\beta}_{i_p}(t) \quad (3-28)$$

$$\Lambda(t) \equiv \frac{\sum_{g=1}^G \int_V \frac{\phi_g^*(\mathbf{r}) \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t)}{\nu_g(t)} d\mathbf{r}}{F(t)} = \frac{1}{F(t)} \quad (3-29)$$

$$\bar{\lambda}_{i_p}(t) \equiv \frac{\sum_{g=1}^G \int_V d\mathbf{r} \left\{ \phi_g^*(\mathbf{r}) \chi_{i_p,g}^d(t) \lambda_{i_p}(t) \tilde{C}_{i_p}(\mathbf{r}, t) \right\}}{\sum_{g=1}^G \int_V d\mathbf{r} \left\{ \phi_g^*(\mathbf{r}) \chi_{i_p,g}^d(t) \tilde{C}_{i_p}(\mathbf{r}, t) \right\}} \quad (3-30)$$

式中： $\Delta\Sigma_x = \Sigma_x(t) - \Sigma_x(t_0)$ —— 截面的变化量； x —— 截面的反应道。当选取权函数为稳态共轭中子通量时，估算的反应性误差是扰动状态通量密度变化的一阶小量。

3.2.4 幅度函数求解

点堆动力学方程组(3-24)为刚性方程组，通常的常微分方程组数值求解方法效率较差，本程序采用的时间离散方法如下：

将缓发中子先驱核幅度函数方程右端的产生项 $\frac{\bar{\beta}_{i_p}(t)}{\Lambda(t)} n(t)$ 近似为插值点为 t_{i-1} 、 t_i 、 t_{i+1} 的二次插值多项式，并在 $[t_i, t_{i+1}]$ 区间对方程积分，

变形得：

$$c_{i_p}(t_{i+1}) = e^{-\bar{\lambda}_{i_p}(t_i)\Delta t_i} c_{i_p}(t_i) + \omega_{i_p}^{i-1} \frac{\bar{\beta}_{i_p}(t_{i-1})}{\bar{\lambda}_{i_p}(t_{i-1})} n(t_{i-1}) + \omega_{i_p}^i \frac{\bar{\beta}_{i_p}(t_i)}{\bar{\lambda}_{i_p}(t_i)} n(t_i) + \omega_{i_p}^{i+1} \frac{\bar{\beta}_{i_p}(t_{i+1})}{\bar{\lambda}_{i_p}(t_{i+1})} n(t_{i+1}) \quad (3-31)$$

式中：

$$\omega_{i_p}^{i-1} = \frac{k_{i_p}^{i-1} - k_{i_p}^i}{\gamma_i(\gamma_i + 1)} \quad (3-32)$$

$$\omega_{i_p}^i = k_{i_p}^{i+1} - \frac{k_{i_p}^{i-1} + (\gamma_i - 1)k_{i_p}^i}{\gamma_i} \quad (3-33)$$

$$\omega_{i_p}^{i+1} = \frac{k_{i_p}^{i-1} + \gamma_i k_{i_p}^i}{\gamma_i + 1} \quad (3-34)$$

并定义：

$$\begin{aligned} \gamma_i &\equiv \frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i+1}} = \frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_i} \\ k_{i_p}^{i+1} &= 1 - e^{-\bar{\lambda}_{i_p}(t_i)\Delta t_{i+1}} \\ k_{i_p}^i &= 1 - \frac{k_{i_p}^{i+1}}{\bar{\lambda}_{i_p}(t_i)\Delta t_{i+1}} \\ k_{i_p}^{i-1} &= 1 - \frac{2k_{i_p}^i}{\bar{\lambda}_{i_p}(t_i)\Delta t_{i+1}} \end{aligned} \quad (3-35)$$

将式(3-31)代入方程(3-24)，得到：

$$n(t_{i+1}) = \frac{\frac{n(t_i)}{\Delta t_{i+1}} + \sum_{i_p=1}^{I_p} \left(\bar{\lambda}_{i_p}(t_i) e^{-\bar{\lambda}_{i_p}(t_i)\Delta t_i} c_{i_p}(t_i) + \frac{\omega_{i_p}^i \bar{\beta}_{i_p}(t_i)}{\Lambda(t_i)} n(t_i) + \frac{\omega_{i_p}^{i-1} \bar{\beta}_{i_p}(t_{i-1})}{\Lambda(t_{i-1})} n(t_{i-1}) \right)}{\frac{1}{\Delta t_{i+1}} - \frac{\rho(t_{i+1}) - \bar{\beta}(t_{i+1})}{\Lambda(t_{i+1})} - \sum_{i_p=1}^{I_p} \frac{\omega_{i_p}^{i+1} \bar{\beta}_{i_p}(t_{i+1})}{\Lambda(t_{i+1})}} \quad (3-36)$$

式(3-31)及(3-36)即为点堆方程组(3-24)的数值求解公式。在中时间步内求解时，方程中的动力学参数由时间步端点值线性插值得到。

3.3 时间步进流程

动力学求解的整体思路是在大时间步 Δt 上预估求解通量密度分布，中时间步 δt 上插值更新形状函数并由此计算点堆动力学参数，幅函数方程求解时将 δt 进一步离散为小时间步，其时间离散及步进流程如图 1 所示。

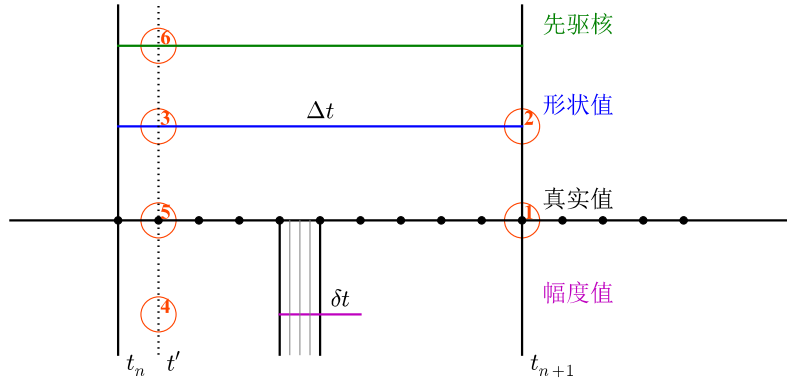


图 1 预估校正准静态方法的时间步示意

具体流程如下：

(1) 计算通量形状：根据上一时刻中子通量密度分布 $\phi_g(\mathbf{r}, t_n)$ 和先驱核密度分布 $C_{ip}(\mathbf{r}, t_n)$ ，通过求解 3.2.2 节中固定源方程，预估 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 时刻中子通量密度 $\phi_g(\mathbf{r}, t_{n+1})$ ，并计算响应缓发中子先驱核密度 $C_{ip}(\mathbf{r}, t_{n+1})$ ；

(2) 生成形状函数：由归一化条件生成 t_{n+1} 时刻的形状函数得到 $\tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t_{n+1})$ 和 $\tilde{C}_{ip}(\mathbf{r}, t_{n+1})$ ；

(3) 插值形状函数：根据 t_n 和 t_{n+1} 时刻形状函数在 t' 时刻采用线性插值得到 $\tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t')$ 和 $\tilde{C}_{ip}(\mathbf{r}, t')$ ，并以此计算幅度函数方程组的系数矩阵；

(4) 计算幅度函数：利用生成的系数矩阵计算 t' 时刻的幅度函数；

(5) 校正通量密度：利用步骤 (4) 中得到的幅度函数和步骤 (3) 中得到的形状函数得到校正的通量密度函数，如下：

$$\phi_g(\mathbf{r}, t_2) = n(t_2) \tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t_2) \quad (3-37)$$

(6) 计算先驱核：利用校正的通量密度更新先驱核浓度；

重复步骤 (3) 到步骤 (6) 直至 $t' = t_{n+1}$ 时即完成了一个步进过程。
在下一个 Δt 的大时间步上重复上面整个过程。

以上动力学求解在 t_0 时刻的初始值由如下过程给出：

(1) 分布函数：中子通量密度的初值通过求解稳态中子输运方程式(3-6)得到，同时另式(3-2)左端的时间导数项为零，得到缓发中子先驱核浓度的初值：

$$C_{i_p}(\mathbf{r}, t_0) = \frac{1}{k_{\text{eff}}^s} \frac{\beta_{i_p}(\mathbf{r}, t_0)}{\lambda_{i_p}(\mathbf{r}, t_0)} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{f,h}(\mathbf{r}, t_0) \phi_h(\mathbf{r}, t_0) \quad (3-38)$$

(2) 幅度函数：中子通量密度的幅度函数的初值取为 $n(t_0)=1$ ，缓发中子先驱核的幅度函数的初值由式(3-24)时间导数为零得到：

$$c_{i_p}(t_0) = \frac{\bar{\beta}_{i_p}(t_0)}{\bar{\lambda}_{i_p}(t_0) \Lambda(t_0)} \quad (3-39)$$

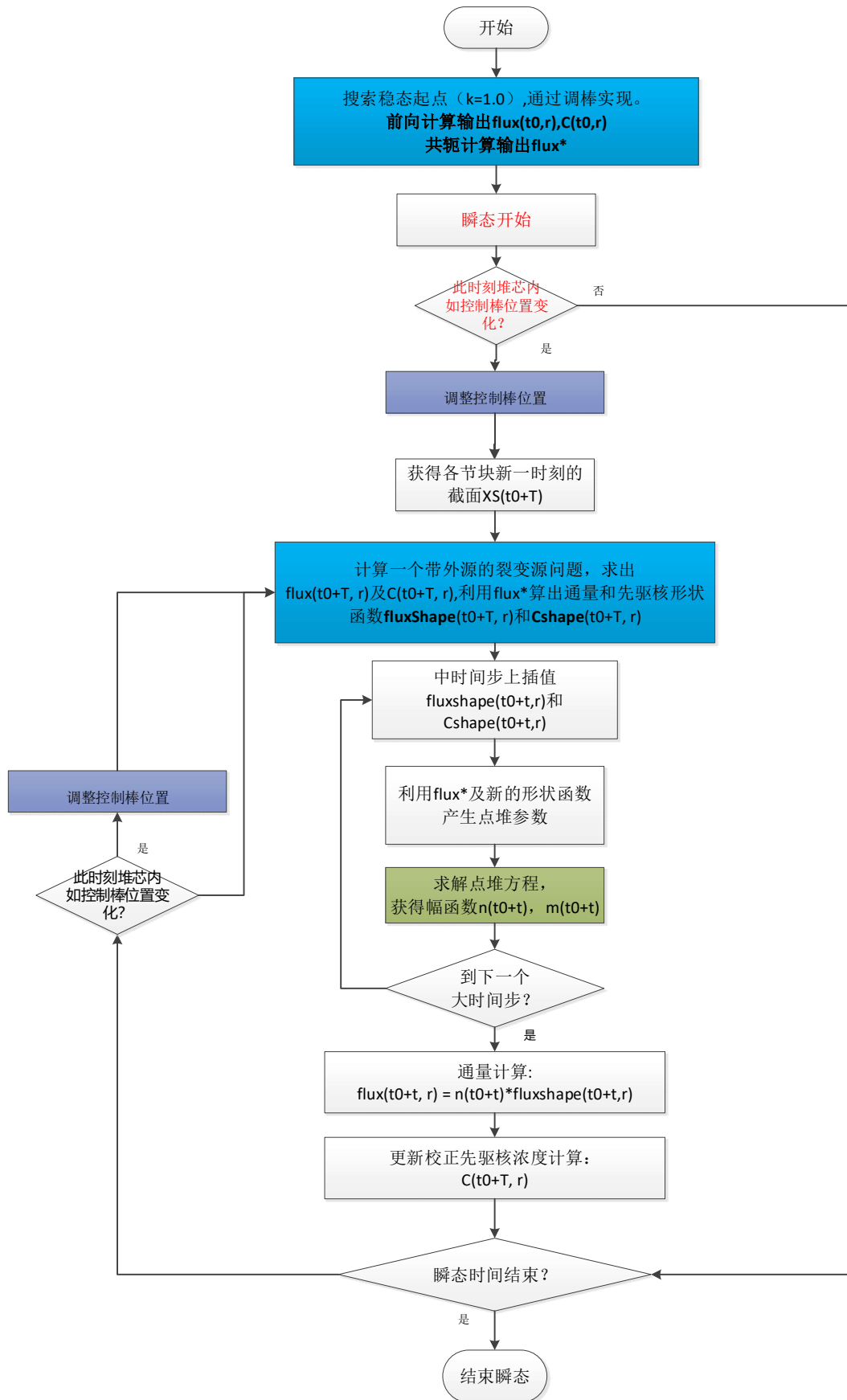
(3) 形状函数：由真实分布和幅度函数直接得到，通量密度的形状函数为：

$$\tilde{\phi}_g(\mathbf{r}, t_0) = \phi_g(\mathbf{r}, t_0) \quad (3-40)$$

先驱核浓度的初始形状函数为：

$$\tilde{C}_{i_p}(\mathbf{r}, t_0) \equiv \frac{C_{i_p}(\mathbf{r}, t_0)}{c_{i_p}(t_0)} = \frac{\bar{\lambda}_{i_p}(t_0) \Lambda(t_0)}{\bar{\beta}_{i_p}(t_0)} \frac{1}{k_{\text{eff}}^s} \frac{\beta_{i_p}(\mathbf{r}, t_0)}{\lambda_{i_p}(\mathbf{r}, t_0)} \sum_{h=1}^G \nu \Sigma_{f,h}(\mathbf{r}, t_0) \phi_h(\mathbf{r}, t_0) \quad (3-41)$$

下图为程序数值计算的整体流程图。



程序数值计算整体流程图

4 总结

本文档详细介绍了适用于三维圆柱（R- θ -Z）几何中子时空动力学计算技术方案，推导了相应理论模型和数值计算流程，目的是为后续程序开发提供理论支持。

总体来说，本方案采用预估校正准静态策略进行时间离散，其主要思想为将中子通量密度与缓发中子先驱核密度近似为强时间相关的幅度函数与弱时间相关的形状函数的乘积，然后在不同时间尺度上分别计算幅度函数和形状函数，最终获得时间相关的中子通量密度、缓发中子先驱核密度的空间分布。因此，求解幅度函数和形状函数为本方案计算核心，本文档第二章详细推导了三维圆柱几何下中子扩散方程的求解方案，为形状函数计算提供计算模型；3.2.4 节提供了点堆方程组的求解模型，用来求解幅值函数。最终，方案建立了完整的中子时空动力学计算流程，为后续程序编制提供了理论基础。

参考文献

- [1] 何明涛. 液态金属冷却快堆的瞬态输运计算方法及次锕系核素嬗变的瞬态特性分析研究[D]. 中国：西安交通大学，2016.
- [2] 李志峰. 氟盐冷却高温球床堆中子学特性研究[D]. 中国：西安交通大学，2017.
- [3] 王登营，李富，周旭华，郭炯. 圆柱几何节块展开法的研究[C]，第十二届反应堆数值计算与粒子输运学术会议，合肥，10月25日-31日，2008.
- [4] T. Singh, T. Mazumdar, P. Pandey. NEMSQR: A 3-D multi group diffusion theory code based on nodal expansion method for square geometry[J]. Annals of Nuclear Energy, 64: 230-243, 2014.
- [5] Watson JK. Implicit Time-Integration Method for Simultaneous Solution of a Coupled Non-Linear System[D]. USA: The Pennsylvania State University, 2010.
- [6] Zerkak O, Kozlowski T, Gajev I. Review of Multi-Physics Temporal Coupling Methods for Analysis of Nuclear Reactors[J]. Annals of Nuclear Energy, 2015, 84: 225-233.