组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

1. 引论
2. 形式幂级数代数
3. 生成函数的性质
4. 利用生成函数求解递推关系
5. 普通型生成函数
6. 指数型生成函数

1 引论

2 形式幂级数代数

3 生成函数的性质

4 利用生成函数求解递推关系

5 普通型生成函数

6 指数型生成函数

引论：生成函数

生成函数（generating function）是一种简单而有效的数学工具，最早由 Laplace 和 Euler 引入，在组合计数中有广泛应用.

核心思想是将一个数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$$

表示为幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

将整个数列“整体化”，然后通过分析幂级数 $A(x)$ 来研究数列的构造与性质.

生成函数定义

序列 $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ 的 **生成函数** 记为

$$G\{a_n\} = A(x).$$

通常，用 $[x^n]A(x)$ 表示 $A(x)$ 中 x^n 的系数.

二项式生成函数示例

考虑二项式系数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$$

生成函数为

$$f_n(x) = (1+x)^n.$$

例 1: 全部系数和

对 $x=1$，得到全部系数和:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

例 2: 加权系数和

通过对 $(1+x)^n$ 求导:

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}.$$

例 3: 范德蒙德恒等式

比较等式

$$(x+1)^{m+n} = (x+1)^m (x+1)^n$$

两边 x^k 的系数，可得到

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

例 1

投掷一次骰子，出现点数 $1, 2, \cdots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$.

连续投掷两次，出现的点数之和为 10 的概率有多少？

连续投掷 10 次，出现的点数之和为 30 的概率又是多少？

例 1

投掷一次骰子，出现点数 $1, 2, \cdots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$.
连续投掷两次，出现的点数之和为 10 的概率有多少？
连续投掷 10 次，出现的点数之和为 30 的概率又是多少？

一次投掷出现的点数有 6 种可能.

连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i, j)(1 \leqslant i, j \leqslant 6)$，共有 $6^2 = 36$ 种可能.

由枚举法，两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能:

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4),$$

所以概率为 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

例 1

投掷一次骰子, 出现点数 $1, 2, \cdots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$.
连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少?
连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少?

一次投掷出现的点数有 6 种可能.

连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i, j)(1 \leqslant i, j \leqslant 6)$, 共有 $6^2 = 36$ 种可能.

由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能:

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4),$$

所以概率为 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

如果问题是连续投掷 10 次, 其点数之和为 30 的概率有多少, 这时就不那么简单了.

这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多, 难以一一列举, 要解决这个问题, 只能另辟新径.

解 我们用多项式

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

表示投掷一次可能出现点数 $1, 2, \cdots, 6$, 观察

$$\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right).$$

从两个括号中分别取出 x^m 和 x^n, 使

$$x^m \cdot x^n = x^{10},$$

即是两次投掷分别出现点数 m, n, 且 $m + n = 10$.

由此得出, 展开式中 x^{10} 的系数就是满足条件的方法数.

同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为

$$\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}$$

中 x^{30} 的系数.

因为

$$\begin{aligned}
&\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}\\
=&x^{10}\left(1-x^6\right)^{10}(1-x)^{-10}\\
=&x^{10}\cdot\left(\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}x^{6i}\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{10-1+i}{i}x^i\right)
\end{aligned}$$

同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为

$$\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}$$

中 x^{30} 的系数.

因为

$$\begin{aligned}
&\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}\\
=&x^{10}\left(1-x^6\right)^{10}(1-x)^{-10}\\
=&x^{10}\cdot\left(\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}x^{6i}\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{10-1+i}{i}x^i\right)
\end{aligned}$$

所以, x^{30} 的系数为

$$\binom{29}{20}-\binom{23}{14}\binom{10}{1}+\binom{17}{8}\binom{10}{2}-\binom{11}{2}\binom{10}{3}=2930455.$$

故所求概率为

$$\frac{2930455}{6^{10}}\approx 0.0485$$

1 引论

2 形式幂级数代数

3 生成函数的性质

4 利用生成函数求解递推关系

5 普通型生成函数

6 指数型生成函数

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \tag{1}$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义，并可以作为函数进行各种运算，这样就有了级数收敛性的问题.

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \tag{1}$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题.

为了解决这个问题, 我们从代数的观点引入形式幂级数的概念.

我们称幂级数 (2) 是形式幂级数, 其中的 x 是未定元, 看作是抽象符号.

对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$, x 是 $\mathbb{R}$ 上的未定元, 表达式

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

称为 $\mathbb{R}$ 上的形式幂级数.

形式幂级数

一般情况下，形式幂级数被认为是形式的，x 只是一个抽象符号，并不需要对 x 赋予具体数值，

因而就不需要考虑它的收敛性.

在这样定义下，解析收敛不是问题，对于 $\sum_{n\geq 0} n!x^n$，除了在 $x=0$ 处外没有其他点收敛，我们也可讨论形式幂级数.

定义 2.1

设 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $B(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 是 $\mathbb{R}$ 上的两个形式幂级数，若对任意 $k\geqslant 0$，有 $a_k=b_k$，则称 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相等，记作 $A(x)=B(x)$.

我们用符号

$$\mathbb{R}[[x]] = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ 对于所有的} n \geq 0 \right\}$$

表示形式幂级数的集合.

它的加法、数乘、乘法规则定义如下

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n,$$

$$c \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (c a_n) x^n,$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} c_n x^n,$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 且

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

定理 2.2

对 $\mathbb{R}[[x]]$ 中的任意一个元素 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 有乘法逆元当且仅当 $a_0\neq 0$.

证明 $\Rightarrow$ 设存在 $B(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j$ ，使 $A(x)B(x)=1$

比较两边的常数项得到 $a_0b_0=1$, 因而 $a_0\neq 0$.

$\Leftarrow$ 若 $a_0\neq 0$.

$$\begin{cases} a_0b_0=1 \\ a_1b_0+a_0b_1=0 \\ a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2=0 \\ \dots \\ a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k=0 \\ \dots \end{cases}$$

其为关于 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots$ 的一个非齐次线性方程组,

对任意固定的正整数 k，将 $b_0,b_1,\dots,b_k$ 当作未知量, 解前 $k+1$ 个非齐次线性方程组.

例 1 投掷一次骰子, 出现点数 1, 2, · · · , 6 的概率均为 1 6 . 连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少? 连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少? 一次投掷出现的点数有 6 种可能. 连续两次投掷得到的点数构成二元数组 (i, j)(1 6 i, j 6 6), 共有 62 = 36 种可能. 由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能: (4, 6), (5, 5), (6, 4), 所以概率为 3 36 = 1 12 . 如果问题是连续投掷 10 次, 其点数之和为 30 的概率有多少, 这时就不那么简单了. 这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多, 难以一一列举, 要解决这个问题, 只能另辟新径. 6 / 63 解我们用多项式 x + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 表示投掷一次可能出现点数 1, 2, · · · , 6, 观察 (x + x2 + x3 + x4 + x5 + x6) (x + x2 + x3 + x4 + x5 + x6) . 从两个括号中分别取出 xm 和 xn, 使 xm · xn = x10, 即是两次投掷分别出现点数 m, n, 且 m + n = 10. 由此得出, 展开式中 x10 的系数就是满足条件的方法数. 7 / 63 同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为 (x + x2 + x3 + x4 + x5 + x6)10 中 x30 的系数. 因为 (x + x2 + x3 + x4 + x5 + x6)10 =x10 (1 − x6)10 (1 − x)−10 =x10 · (10 i=0 (−1)i (10 i) x6i) · (∞ i=0 (10 − 1 + i i) xi) 8 / 63 同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为 (x + x2 + x3 + x4 + x5 + x6)10 中 x30 的系数. 因为 (x + x2 + x3 + x4 + x5 + x6)10 =x10 (1 − x6)10 (1 − x)−10 =x10 · (10 i=0 (−1)i (10 i) x6i) · (∞ i=0 (10 − 1 + i i) xi) 所以, x30 的系数为 (29 20) − (23 14)(10 1) + (17 8)(10 2) − (11 2)(10 3) = 2930455. 故所求概率为 2930455 610

0.0485 8 / 63 生成函数 1 引论 2 容斥原理 3 容斥原理的应用第二类 Stirling 数满射的计数欧拉函数错排问题不含连续数对的排列问题有限重数的多重集合的组合数 4 偏序集上的反演公式 9 / 63 数列 a0, a1, a2, · · · (1) 的生成函数是幂级数 A(x) = a0 + a1x + a2x2 + · · · (2) 由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题. 10 / 63 数列 a0, a1, a2, · · · (1) 的生成函数是幂级数 A(x) = a0 + a1x + a2x2 + · · · (2) 由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题. 为了解决这个问题, 我们从代数的观点引入形式幂级数的概念. 我们称幂级数 (2) 是形式幂级数, 其中的 x 是末定元, 看作是抽象符号. 对于实数域 R 上的数列 a0, a1, a2, · · · , x 是 R 上的末定元, 表达式 A(x) = a0 + a1x + a2x2 + · · · 称为 R 上的形式幂级数. 10 / 63 形式幂级数一般情况下, 形式幂级数被认为是形式的, x 只是一个抽象符号, 并不需要对 x 赋予具体数值, 因而就不需要考虑它的收敛性. 在这样定义下, 解析收敛不是问题, 对于 n 0 n!xn, 除了在 x = 0 处外没有其他点收敛, 我们也可讨论形式幂级数. 定义 2.1 设 A(x) = ∞ k=0 akxk 与 B(x) = ∞ k=0 bkxk 是 R 上的两个形式幂级数, 若对任意 k > 0, 有 ak = bk, 则称 A(x) 与 B(x) 相等, 记作 A(x) = B(x). 11 / 63 我们用符号 R[[x]] = n 0 anxn | an R 对于所有的 n 0 表示形式幂级数的集合. 它的加法、数乘、乘法规则定义如下 n 0 anxn + n 0 bnxn = n 0 (an + bn) xn, c n 0 anxn = n 0 (can) xn, n 0 anxn · n 0 bnxn =

n 0 cnxn, 其中 c R 且 cn = n k=0 akbn−k. 12 / 63 定理 2.2 对 R[[x]] 中的任意一个元素 A(x) = ∞ k=0 akxk 有乘法逆元当且仅当 a0 = 0. 证明 设存在 B(x) = ∞ j=0 bj xj，使 A(x)B(x) = 1 比较两边的常数项得到 a0b0 = 1, 因而 a0 = 0. 若 a0 = 0. a0b0 = 1 a1b0 + a0b1 = 0 a2b0 + a1b1 + a0b2 = 0 · · · akb0 + ak−1b1 + · · · + a0bk = 0 · · · 其为关于 b0, b1, b2, · · · , bk, · · · 的一个非齐次线性方程组，对任意因定的正整数 k，将 b0, b1, . . . , bk 当作未知量, 解前 k + 1 个非齐次线性方程组. 13 / 63

前 $k+1$ 个方程的系数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = a_0^{k+1} \neq 0$$

由克拉默法则知该非齐次线性方程组有唯一解，

即方程组对（$b_0, b_1, \ldots, b_k$）有唯一解.

所对应形式幂级数为

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

则 $B(x)$ 为 $A(x)$ 的乘法逆元.

例 2

求 $(1-x)$ 的逆元

例 2

求 $(1-x)$ 的逆元

解 令 $A(x)=(1-x)$，设其逆为 $B(x)=\sum_{n\geq 0} b_n x^n$.

$$a_0=1,\quad a_1=-1,\quad a_i=0\quad (i=2,3,\cdots)$$

由 $A(x)B(x)=1$，对应关于 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots$ 的非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_0b_0=1,\\ a_1b_0+a_0b_1=0,\\ a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2=0,\\ \cdots\\ a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k=0,\\ \cdots \end{cases}$$

解得 $b_i=1\quad (i=0,1,2,\cdots)$. 故

$$B(x)=\sum_{n\geq 0} x^n.$$

形式幂级数复合的定义与存在性

考虑 $A(x)=\sum_n a_n x^n$ 与 $B(x)$ 的 **复合**:

$$A(B(x))=\sum_{n\geq 0} a_n B(x)^n$$

右边是关于形式幂级数的无限求和，不只是形式变量.

形式幂级数复合 $A(B(x))$ 存在性依赖“避免无限累加常数项”.

定理 2.3

给定 $A(x), B(x)\in\mathbb{R}[[x]]$，复合 $A(B(x))$ 存在当且仅当:

- $A(x)$ 为多项式，或
- $B(x)$ 常数项为 0.

(证明略)

例子：复合存在

例 1：$A(x)$ **是多项式**

$$A(x) = 1 + 2x + x^2, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

尽管 $B(0) = 1 \neq 0$，A **是多项式，复合存在**：

$$A(B(x)) = 1 + 2\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

例 2：$B(0) = 0$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad B(x) = x + x^2$$

A **非多项式，但** $B(0) = 0$，**复合存在**：

$$A(B(x)) = \frac{1}{1-(x+x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x+x^2)^n$$

反例：复合不存在

反例 1

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad B(x)=1+x$$

- A 不是多项式 - $B(0)\neq 0$

$$A(B(x))=\sum_{n=0}^{\infty}(1+x)^n$$

常数项 $\sum_{n=0}^{\infty}1$ 发散 $\to$ 不存在.

反例 2：指数级数与平移

$$A(x)=e^x,\quad B(x)=x+1$$

- A 不是多项式 - $B(0)\neq 0$

形式复合：

$$A(B(x))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!}$$

每个 x^k 的系数为无限和 $\to$ 不存在于 $\mathbb{R}[[x]]$.

(e^{x+1} 的泰勒级数存在，但不是形式复合定义的)

形式幂级数中交换求和的合法性

定理 2.4

设 $\{a_{i,k}\}_{i,k\geq 0} \subseteq K$，并且对每个固定的 $n \geq 0$，集合

$$\{(i,k) \mid i+k=n,\ a_{i,k} \neq 0\}$$

是有限的. 则在形式幂级数环 $K[[x]]$ 中有

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq 0} a_{i,k}x^{i+k} = \sum_{i\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{i,k}x^{i+k}.$$

证明 在 $K[[x]]$ 中两个幂级数相等当且仅当每个幂次上的系数相等. 记

$$F(x) = \sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq 0} a_{i,k}x^{i+k}, \qquad G(x) = \sum_{i\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{i,k}x^{i+k}.$$

固定 $n \geq 0$，x^n 项的系数只由满足 $i+k=n$ 的有限个 $a_{i,k}$ 决定. 因此

$$[x^n]F(x) = \sum_{i+k=n} a_{i,k} = [x^n]G(x).$$

所以对所有 $n \geq 0$ 有 $[x^n]F(x) = [x^n]G(x)$，从而 $F(x) = G(x)$ 成立. □

在环 $\mathbb{R}[[x]]$ 上还可以定义形式导数.

定理 2.5

对于任意 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}[[x]]$, 规定

$$\mathrm{D}A(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

称 $\mathrm{D}A(x)$ 为 $A(x)$ 的形式导数.

$A(x)$ 的 n 阶形式导数可以递归地定义为

$$\begin{cases} \mathrm{D}^0 A(x) \equiv A(x) \\ \mathrm{D}^n A(x) \equiv \mathrm{D}\left(\mathrm{D}^{n-1} A(x)\right) \quad (n \geqslant 1) \end{cases}$$

形式导数满足如下规则:

(1) $\mathrm{D}[\alpha A(x)+\beta B(x)]=\alpha \mathrm{D} A(x)+\beta \mathrm{D} B(x)$

(2) $\mathrm{D}[A(x) \cdot B(x)]=A(x) \mathrm{D} B(x)+B(x) \mathrm{D} A(x)$

(3) $\mathrm{D}\left(A^{n}(x)\right)=n A^{n-1}(x) \mathrm{D} A(x)$

由此可知, 形式导数满足微积分中求导运算的规则.

当某个形式幂级数在某个范围内收敛时, 形式导数就是微积分中的求导运算.

为了书写方便, 以后用 $A'(x)$, $A''(x), \cdots$ 分别代表 $\mathrm{D} A(x), \mathrm{D}^{(2)} A(x), \cdots$.

生成函数

1 引论

2 形式幂级数代数

3 生成函数的性质

4 利用生成函数求解递推关系

5 普通型生成函数

6 指数型生成函数

生成函数：给数列“挂”上标记

核心直觉

生成函数就像一条无限长的**晾衣绳**，x^k 是**挂钩**，我们将数列的第 k 项 a_k 挂在上面.

数列 A

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

$$\Updownarrow$$

$$A(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots$$

数列 B

$$\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$$

$$\Updownarrow$$

$$B(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \cdots$$

因为二者是一一对应的，所以生成函数间的运算关系直接对应着数列间的递推关系.

我们可以得到生成函数的如下一些性质:

性质 1

若

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < \ell) \\ a_{k-\ell} & (k \geq \ell) \end{cases}$$

则

$$B(x) = x^\ell A(x).$$

性质 2

若

$$b_k = a_{k+l},$$

则

$$B(x) = \frac{1}{x^l}\left(A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k\right).$$

解释:

把序列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 整体向后移了 ℓ 位.

生成函数中，整体后移 ℓ 位就相当于 乘以 x^ℓ.

(和多项式整体乘上 x^ℓ 的效果一样.)

解释:

这次是把序列向前移 l 位. 向前移对应 除以 x^l.

但向前移会把前 l 个元素删掉，所以要先把 $A(x)$ 的低次项扣掉:

$$A(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{l-1} x^{l-1}.$$

性质 3

若

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i,$$

则

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

性质 3

若

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i,$$

则

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

证明 考虑 $(1-x)B(x)$

$$(1-x)B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k - \sum_{k\geq 0} b_k x^{k+1} = b_0 + \sum_{k\geq 1}(b_k - b_{k-1})x^k.$$

由于 $b_k - b_{k-1} = a_k$（约定 $b_{-1} = 0$），因此

$$(1-x)B(x) = b_0 + \sum_{k\geq 1} a_k x^k = \sum_{k\geq 0} a_k x^k = A(x).$$

于是

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

性质 4

若

$$b_k = ka_k,$$

则

$$B(x) = xA'(x).$$

性质 5

若

$$b_k = \frac{a_k}{k+1},$$

则

$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\mathrm{d}t.$$

性质 4

若
$$b_k = ka_k,$$
则
$$B(x) = xA'(x).$$

性质 5

若
$$b_k = \frac{a_k}{k+1},$$
则
$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\mathrm{d}t.$$

证明 由 $A'(x)$ 的定义知

$$\begin{aligned} xA'(x) &= x\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x). \end{aligned}$$

性质 4

若
$$b_k = ka_k,$$
则
$$B(x) = xA'(x).$$

证明 由 $A'(x)$ 的定义知

$$\begin{aligned} xA'(x) &= x\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x). \end{aligned}$$

性质 5

若
$$b_k = \frac{a_k}{k+1},$$
则
$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\mathrm{d}t.$$

证明 由假设条件，有

$$\begin{aligned} \int_0^x A(t)\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x a_k t^k \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x b_k(k+1)t^k \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = xB(x). \end{aligned}$$

性质 6 (线性性)

若 $c_k = \alpha a_k + \beta b_k$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \alpha A(x) + \beta B(x).$$

性质 7 (卷积)

若 $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = A(x) \cdot B(x).$$

这两个性质可由形式幂级数的数乘、加法及乘法运算的定义直接得出.

利用这些性质, 我们可以求某些数列的生成函数, 也可以计算数列的和.

常见数列生成函数 (I)

Sequence (a_k)	**Generating Function** $G(x)$	**Expansion (前三项)**
1	$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots$
a^k	$\frac{1}{1-ax}$	$1 + ax + a^2x^2 + \cdots$
k	$\frac{x}{(1-x)^2}$	$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$
k^2	$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$	$x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots$
$k(k+1)$	$\frac{2x}{(1-x)^3}$	$2x + 6x^2 + 12x^3 + \cdots$

常见数列生成函数 (II)

Sequence (a_k)	Generating Function $G(x)$	Expansion
$\binom{\alpha}{k}$	$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots$
$\binom{n+k-1}{k}$	$\frac{1}{(1-x)^n}$	$1+nx+\frac{n(n+1)}{2}x^2+\cdots$
$\dfrac{1}{k!}$	e^x	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots$
$\dfrac{(-1)^k}{k}$	$\ln(1+x)$	$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$

下面证明其中的几个生成函数.

证明 (3)

$$
\begin{aligned}
G\{k\} &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \\
&= x\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
G\{k(k+1)\} &= \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^k = \left(x\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)' \\
&= \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
G\{k(k+1)\} &= x^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)'' \\
&= x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
G\left\{k^2\right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^k - \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \\
&= \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
G\left\{k^2\right\} &= x\left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)' = x\left(G\{k\}\right)' \\
&= x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' \\
&= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

利用生成函数的性质, 可以求出一些序列以及一些序列的和.

下面的几个例子说明了一些求解方法.

例 3

已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 - 2x},$$

求 a_n.

例 3

已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x},$$

求 a_n.

解 用部分分式的方法得

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x} = \frac{2}{1-2x} + 3x,$$

而

$$\frac{2}{1-2x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n.$$

所以有

$$a_n = \begin{cases} 2^{n+1} & (n \neq 1) \\ 2^2 + 3 = 7 & (n = 1) \end{cases}$$

例 4

计算

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

例 4

计算
$$1^2+2^2+\cdots+n^2.$$

解 由前面列出的第 (5) 个数列的生成函数知, 数列 $\{n^2\}$ 的生成函数为
$$A(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,$$
此处, $a_k=k^2$. 令
$$b_n=1^2+2^2+\cdots+n^2,$$
则
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

因此, 数列 $\{b_n\}$ 的生成函数为

$$
\begin{aligned}
B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} \\
= \left(x + x^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k.
\end{aligned}
$$

比较等式两边 x^n 的系数, 得

$$
\begin{aligned}
b_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3} + \binom{n-1}{3} \\
= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

例 5

计算

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

例 5

计算

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

步骤 1：求生成函数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^3x^k$

- 已知 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^k=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$；
- 求导整理得 $\sum_{k=1}^{\infty} k^3x^k=\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$

步骤 2：提取有限和的系数展开生成函数的分子：

$$\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}=x\cdot\frac{1}{(1-x)^4}+4x^2\cdot\frac{1}{(1-x)^4}+x^3\cdot\frac{1}{(1-x)^4}$$

结合组合数展开 $\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n$，得有限和：

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\binom{n+3}{4}+4\binom{n+2}{4}+\binom{n+1}{4}$$

从具体到推广：一般形式

观察 $m = 1, 2, 3$ 的规律，推广到任意正整数 m：

无穷生成函数的一般形式

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m x^k = \frac{x A_m(x)}{(1-x)^{m+1}}$$

其中：

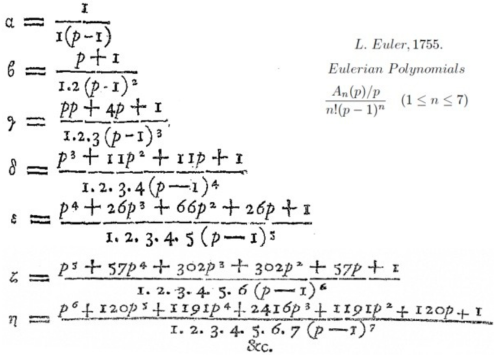
- $A_m(x)$： $m-1$ 次欧拉多项式（整数系数）；
- 分母幂次：恒为 $m+1$（由幂和次数 m 决定）.

欧拉多项式与欧拉数

- 在组合数学中，**欧拉数** $A(n,k)$ 表示 $\{1,2,\dots,n\}$ 的排列中含 k 个“升高”的排列数.
- 对于较小的 n 和 k 值，$A(n,k)$ 可手动计算. 例如：

n	k	排列（Permutations）	$A(n,k)$
1	0	(1)	$A(1,0)=1$
2	0	$(2,1)$	$A(2,0)=1$
2	1	$(1,\mathbf{2})$	$A(2,1)=1$
3	0	$(3,2,1)$	$A(3,0)=1$
3	1	$(1,\mathbf{3},2),(2,1,\mathbf{3}),(2,\mathbf{3},1),(3,1,\mathbf{2})$	$A(3,1)=4$
3	2	$(1,\mathbf{2},\mathbf{3})$	$A(3,2)=1$

- 这些公式出自欧拉 1755 年的研究，是欧拉多项式的早期形式.
- $\dfrac{A_n(p)/p}{n!(p-1)^n}$ $(1\le n\le 7)$ 是图中定义的 7 个多项式统一形式，其中 $A_n(p)$ 即对应阶的欧拉多项式.



$$\alpha = \frac{1}{1(p-1)}$$
$$\beta = \frac{p+1}{1.2(p-1)^2}$$
$$\gamma = \frac{pp+4p+1}{1.2.3(p-1)^3}$$
$$\delta = \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1.2.3.4(p-1)^4}$$
$$\varepsilon = \frac{p^4+26p^3+66p^2+26p+1}{1.2.3.4.5(p-1)^5}$$
$$\zeta = \frac{p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1}{1.2.3.4.5.6(p-1)^6}$$
$$\eta = \frac{p^6+120p^5+1191p^4+2416p^3+1191p^2+120p+1}{1.2.3.4.5.6.7(p-1)^7}$$
&c.

利用欧拉数表示的幂和公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^s = \sum_{k=0}^{s-1} A(s,k)\binom{n+k+1}{s+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} k^s\right)x^n = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^s x^k}{1-x} = \frac{x\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^s x^k}{1-x} = \frac{\frac{xA_s(x)}{(1-x)^{s+1}}}{1-x} = \frac{xA_s(x)}{(1-x)^{s+2}}$$

由欧拉多项式 $A_s(x) = \sum_{j=0}^{s-1} A(s,j)x^j$ 带入可得:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s x^k = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} A(s,j)x^{j+1}}{(1-x)^{s+2}}.$$

利用欧拉数表示的幂和公式

广义二项式：

$$(1-x)^{-N}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+N-1}{N-1}x^i \implies \frac{1}{(1-x)^{s+2}}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+s+1}{s+1}x^i.$$

代入展开式：

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^s x^k=\sum_{j=0}^{s-1}A(s,j)x^{j+1}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+s+1}{s+1}x^i,$$

匹配 x^n： $i=n-j-1$，组合数化简：

$$\binom{(n-j-1)+s+1}{s+1}=\binom{n+s-j}{s+1},$$

幂和公式：

$$\sum_{k=1}^{n}k^s=\sum_{j=0}^{s-1}A(s,j)\binom{n+s-j}{s+1},$$

对称变体 $(A(s,j)=A(s,s-1-j))$：

$$\sum_{k=1}^{n}k^s=\sum_{k=0}^{s-1}A(s,k)\binom{n+k+1}{s+1}.$$

例 6

计算

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

例 6

计算
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

结合 $\sum_{k=1}^{n} k^s=\sum_{k=0}^{s-1} A(s,k)\binom{n+k+1}{s+1}$，得有限和：
$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\binom{n+3}{4}+4\binom{n+2}{4}+\binom{n+1}{4}$$

1 引论

2 形式幂级数代数

3 生成函数的性质

4 利用生成函数求解递推关系

5 普通型生成函数

6 指数型生成函数

生成函数的威力：化递推为通项

利用生成函数，我们可以将复杂的递推关系转化为封闭的通项公式.

递推关系

(已知条件)

$$a_n + r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} = 0$$

$\dashrightarrow$

通项公式

(最终目标)

$$a_n = f(n)$$

$\downarrow$ 转化

$\uparrow$ 展开

核心工具：生成函数 $A(x)$

将递推转化为代数方程 $\Longrightarrow$ 解出 $A(x)$

本节将详细介绍这一“转换-求解-展开”的标准流程.

利用生成函数求解各类递推关系有广泛的适用性,

给定关于 $f(n)$ 的递推关系式,求解 $f(n)$ 的基本步骤是:

基本步骤

1. 令 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$;
2. 将关于 $f(n)$ 的递推关系式转化成关于 $A(x)$ 的方程式;
3. 解出 $A(x)$, 将 $A(x)$ 展开成 x 的幂级数, x^n 的系数即为 $f(n)$.

例 7

利用生成函数求解递推关系

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, \quad a_0 = 1, a_1 = 9.$$

例 7

利用生成函数求解递推关系

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, \quad a_0 = 1, a_1 = 9.$$

解 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则由 $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$，$a_0 = 1, a_1 = 9$ 可知，

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(8a_{n-1} + 10^{n-1}\right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 8a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^n \\ &= 8x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^{n-1} \\ &= 8x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} (10x)^n \\ &= 8xG(x) + \frac{x}{1-10x}. \end{aligned}$$

求解 $A(x)$，得

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8x}+\frac{1}{1-10x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(8x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}((10x)^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(8^n+10^n\right)x^n. \end{aligned}$$

所以，

$$a_n = \frac{1}{2}\left(8^n+10^n\right).$$

例 8

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \quad (n \geq 2) \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 7. \end{cases} \tag{4.3}$$

例 8

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \quad (n \geq 2) \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 7. \end{cases} \tag{4.3}$$

解 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 利用递推关系可得

$$\begin{aligned} A(x) - a_0 - a_1 x &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (7a_{n-1} - 12a_{n-2}) x^n \\ &= 7x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 12x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 7x(A(x) - a_0) - 12x^2 A(x) \end{aligned}$$

例 8

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, & (n \geq 2) \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 7. \end{cases} \tag{4.3}$$

解 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 利用递推关系可得

$$\begin{aligned} A(x) - a_0 - a_1 x &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (7a_{n-1} - 12a_{n-2}) x^n \\ &= 7x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 12x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 7x(A(x) - a_0) - 12x^2 A(x) \end{aligned}$$

代入 $a_0 = 2, a_1 = 7$ 并整理，得

$$A(x) = \frac{2 - 7x}{(1 - 3x)(1 - 4x)} = \frac{1}{1 - 3x} + \frac{1}{1 - 4x}$$

由此得出通项公式

$$a_n = 3^n + 4^n.$$

例 9

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad (n \geqslant 2) \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \end{cases}$$

例 9

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad (n \geqslant 2) \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \end{cases}$$

解 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 同理可得

$$\begin{aligned} A(x) - a_0 - a_1 x &= \sum_{n=2}^{\infty} (4a_{n-1} - 4a_{n-2}) x^n \\ &= 4x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 4x[A(x) - a_0] - 4x^2 A(x) \end{aligned}$$

代入初始条件 $a_0 = 0, a_1 = 1$，方程化简为

$$A(x) - x = 4xA(x) - 4x^2 A(x)$$

整理得生成函数

$$A(x) = \frac{x}{1 - 4x + 4x^2} = \frac{x}{(1 - 2x)^2}$$

线性齐次三阶递推关系

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 15$$

Mathematica 求解线性递推关系

线性齐次三阶递推关系

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 15$$

Mathematica 求解命令

```
RSolve[{a[n]==6a[n-1]-11a[n-2]+6a[n-3],
    a[0]==2,a[1]==5,a[2]==15},a[n],n]
```

Mathematica 求解线性递推关系

线性齐次三阶递推关系

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 15$$

Mathematica 求解命令

```
RSolve[{a[n]==6a[n-1]-11a[n-2]+6a[n-3],
    a[0]==2,a[1]==5,a[2]==15},a[n],n]
```

输出结果

```
{{a[n] -> 1 - 2^n + 2*3^n}}
```

Mathematica 求解线性递推关系

线性齐次三阶递推关系

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 15$$

Mathematica 求解命令

```
RSolve[{a[n]==6a[n-1]-11a[n-2]+6a[n-3],
    a[0]==2,a[1]==5,a[2]==15},a[n],n]
```

输出结果

```
{{a[n] -> 1 - 2^n + 2*3^n}}
```

得到通项公式：

$$\boxed{a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n}$$

(特征根为 $1, 2, 3$，因此解为指数组合形式)

定理

给定序列 a_n，其中 $n \geq 0$ 及 $d \in \mathbb{P}$，则下列命题等价.

(1) 序列满足存在常数 $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}, c_d \neq 0$ 使得

$$a_{n+d} + c_1 a_{n+d-1} + c_2 a_{n+d-2} + \cdots + c_d a_n = 0.$$

(2) 生成函数 $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 具有形式

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

其中 $q(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_d x^d$，且 $\deg p(x) < d$.

(3) a_n 可写作

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) r_i^n,$$

其中 r_i 为互不相同的非负复数，满足

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_d x^d = \prod_{i=1}^{k} (1 - r_i x)^{d_i},$$

对每个 i，$p_i(n)$ 是 $\deg p_i(n) < d_i$ 的多项式.

1 引论

2 形式幂级数代数

3 生成函数的性质

4 利用生成函数求解递推关系

5 普通型生成函数

6 指数型生成函数

组合数的生成函数

本节介绍组合数序列的生成函数, 进而介绍如何用生成函数来求解组合型分配问题.

我们在前面几章中讨论过三种不同类型的组合问题:

(1) 求 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 k 组合数;

(2) 求 $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 组合数;

(3) 求 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10 组合数.

我们已经知道

- 问题 (1) 是普通集合的组合问题;
- 问题 (2) 转化为不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

  的非负整数解的个数问题;

(3) 求 $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的 10 组合数.

- 问题 (3) 是利用容斥原理在 $M=\{\infty\cdot a,\ \infty\cdot b,\ \infty\cdot c\}$ 中求不满足下述三个性质:
  - $P_1: 10$ 组合中 a 的个数大于或等于 4 ;
  - $P_2: 10$ 组合中 b 的个数大于或等于 5 ;
  - $P_3: 10$ 组合中 c 的个数大于或等于 6

  的 10 组合数, 它们在解题方法上各不相同.

下面我们将看到, 引入生成函数的概念后, 上述三类组合问题可以统一地处理.

问题 (1) 的解决

(1) 求 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 k 组合数;

在普通集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 k 组合中, $a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 或者出现或者不出现, 故该集合的 k 组合数序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

从而

$$b_k = \binom{n}{k}.$$

问题 (2) 的解决

(2) 求 $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 组合数;

$M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 组合数为 b_k.

考虑 n 个形式幂级数的乘积

$$\underbrace{\left(1+x+x^2+\cdots\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right)\cdots\left(1+x+x^2+\cdots\right)}_{n\text{ 组}}$$

它的展开式中, 每一个 x^k 均为

$$x^{m_1}x^{m_2}\cdots x^{m_n} = x^k \qquad (m_1+m_2+\cdots+m_n=k)$$

其中 x^{m_1} 取自代表 a_1 的第一个括号, x^{m_2} 取自代表 a_2 的第二个括号, $\cdots$

x^{m_n} 取自代表 a_n 的第 n 个括号;

$m_1, m_2, \cdots, m_n$ 分别表示取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的个数.

于是, 每个 x^k 都对应着多重集合 M 的一个 k 组合.

问题 (2) 的解决

因此

$$\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n$$

中 x^k 的系数就是 M 的 k 组合数 b_k. 由此得出序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

从而

$$b_k = \binom{n-1+k}{k}.$$

这时, 我们再次得到了多重集合 M 的 k 组合数的公式, 只不过现在是用生成函数获得的.

问题 (3) 的解决

(3) 求 $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的 10 组合数.

用生成函数方法解问题 (3) 尤为简单.

将 $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的 k 组合数记为 b_k, $\{b_k\}$ 的生成函数就是

$$\left(1+x+x^2+x^3\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right).$$

其原因是展开式中的 x^k 必定为

$$x^{m_1}x^{m_2}x^{m_3}=x^k \quad (m_1+m_2+m_3=k).$$

由于 $x^{m_1}, x^{m_2}, x^{m_3}$ 分别取自第一、第二、第三个括号, 故

$$0\leqslant m_1\leqslant 3, 0\leqslant m_2\leqslant 4, 0\leqslant m_3\leqslant 5.$$

问题 (3) 的解决

于是每个 x^k 对应集合 $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的一个 k 组合. 特别令 $k=10$, 则

$$\begin{aligned}
&\left(1+x+x^2+x^3\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\\
=&\left(1-x^4\right)\cdot\left(1-x^5\right)\cdot\left(1-x^6\right)\cdot\frac{1}{(1-x)^3}\\
=&\left(1-x^4-x^5-x^6+x^9+x^{10}+x^{11}-x^{15}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^n.
\end{aligned}$$

所以, x^{10} 的系数 b_{10} 为

$$\begin{aligned}
b_{10}=&\binom{10+2}{10}-\binom{6+2}{6}-\binom{5+2}{5}-\binom{4+2}{4}+\binom{1+2}{1}+\binom{0+2}{0}\\
=&6
\end{aligned}$$

与用容斥原理得到的结果相同.

定理 5.1

设从 n 元集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中取 k 个元素的组合数为 b_k，若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right).$$

定理 5.1

设从 n 元集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中取 k 个元素的组合数为 b_k，若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i} x^m\right).$$

例 10

求多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的每个 a_i 至少出现一次的 k 组合数 b_k.

解 因为

$$M_i = \{1, 2, 3, \cdots\} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

所以

$$\begin{aligned} G\{b_k\} &= \left(x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n \\ &= x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1+i}{i} x^{n+i} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{k-n} x^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k, \end{aligned}$$

因此

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < n) \\ \binom{k-1}{n-1} & (k \geqslant n) \end{cases}$$

组合型分配问题的生成函数

定理 5.2

把 k 个相同的球放入 n 个不同的盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中, 限定盒子 a_i 的容量集合为 $M_i(1 \leqslant i \leqslant n)$, 则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m \in M_i} x^m\right).$$

组合型分配问题的生成函数

定理 5.2

把 k 个相同的球放入 n 个不同的盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中，限定盒子 a_i 的容量集合为 $M_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m \in M_i} x^m\right).$$

证明 不妨设盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中放入的球数分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \quad (x_i \in M_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$$

一种符合要求的放法相当于 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的一个 k 组合，前面关于盒子 a_i 容量的限制转变成 k 组合中 a_i 出现次数的限制．所以，组合型分配问题方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m \in M,} x^m\right).$$

例 11

求不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

满足 $x_1 \geqslant 3, x_2 \geqslant 2, x_3 \geqslant 4, x_4 \geqslant 6, x_5 \geqslant 0$ 的整数解的个数.

例 11

求不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

满足 $x_1 \geqslant 3, x_2 \geqslant 2, x_3 \geqslant 4, x_4 \geqslant 6, x_5 \geqslant 0$ 的整数解的个数.

解 本问题相当于把 20 个相同的球放入 5 个不同的盒子中, 盒子的容量集合分别为

$$M_1 = \{3, 4, \cdots\} \qquad M_2 = \{2, 3, \cdots\} \qquad M_3 = \{4, 5, \cdots\}$$
$$M_4 = \{6, 7, \cdots\} \qquad M_5 = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

该组合型分配问题的生成函数为

$$\begin{aligned}
&\left(x^3 + x^4 + \cdots\right)\left(x^2 + x^3 + \cdots\right)\left(x^4 + x^5 + \cdots\right) \\
&\cdot\left(x^6 + x^7 + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\
=&x^{15} \cdot \left(1 + x + x^2 + \cdots\right)^5 = x^{15} \cdot \frac{1}{(1-x)^5} \\
=&x^{15} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} x^n
\end{aligned}$$

其中, x^{20} 的系数 $\binom{5+4}{5} = 126$ 就是满足条件的整数解的个数.

例 12

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$\begin{aligned} &1 \le x_1 \le 5, \quad -2 \le x_2 \le 4, \\ &0 \le x_3 \le 5, \quad\ \ \ 3 \le x_4 \le 9 \end{aligned}$$

的整数解个数.

例 12

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \le x_1 \le 5, \quad -2 \le x_2 \le 4,$$
$$0 \le x_3 \le 5, \quad 3 \le x_4 \le 9$$

的整数解个数.

解 令

$$y_1 = x_1 - 1,\ y_2 = x_2 + 2,\ y_3 = x_3,\ y_4 = x_4 - 3,$$

则方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

相应的条件即

$$0 \le y_1 \le 4,\ 0 \le y_2 \le 6,\ 0 \le y_3 \le 5,\ 0 \le y_4 \le 6.$$

对应的生成函数为

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\\
&\quad\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2\\
=&\frac{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)^2}{(1-x)^4}\\
=&(1-x^5-x^6-2x^7+x^{11}+2x^{12}+2x^{13}+x^{14}-2x^{18}-x^{19}-x^{20}+x^{25})\\
&\quad\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k
\end{aligned}
$$

所以它的 x^{16} 的系数为

$$
\begin{aligned}
&\binom{16+3}{3}-\binom{11+3}{3}-\binom{10+3}{3}-2\binom{9+3}{3}+\binom{5+3}{3}\\
&\quad+2\binom{4+3}{3}+2\binom{3+3}{3}+\binom{2+3}{3}\\
=&969-364-286-2\times 220+56+2\times 35+2\times 20+10\\
=&55.
\end{aligned}
$$

例 13

设有 2 个红球、1 个黑球、3 个黄球，若每次从中任取 3 个球，有多少种不同的取法？

例 13

设有 2 个红球、1 个黑球、3 个黄球，若每次从中任取 3 个球，有多少种不同的取法？

解 方法 1：

$$
\begin{aligned}
&\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1+x+x^2+x^3\right) \\
=&\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x} \\
=&\left(1-x^2-x^3+x^5\right)\left(1-x^4\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k
\end{aligned}
$$

x^3 的系数为 $\binom{5}{2}-\binom{3}{2}-\binom{2}{2}=10-3-1=6$

方法 2：$(x_1,x_2,x_3)=(0,0,3)(0,1,2)(1,0,2)(1,1,1)(2,0,1)(2,1,0)$

例 14

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量 ? $(0$ 克不计入$)$

例 14

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量 ? (0 克不计入)

解 $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)=1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

例 14

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量？(0 克不计入)

解 $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)=1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

例 15

用 1 分、2 分、3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案.

例 14

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量？(0 克不计入)

解 $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)=1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

例 15

用 1 分、2 分、3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案.

解 $1+1+1+1 \quad 1+1+2 \quad 1+3 \quad 2+2$, 故四种.

例 16

求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有 n 个水果的不同水果篮的个数，其中要求苹果有偶数个（包括 0 个），香蕉有 5 的倍数个（包括 0 个），橘子不超过 4 个，梨最多 1 个.

例 16

求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有 n 个水果的不同水果篮的个数, 其中要求苹果有偶数个（包括 0 个）, 香蕉有 5 的倍数个（包括 0 个）, 橘子不超过 4 个, 梨最多 1 个.

解

$$
\begin{aligned}
&\left(1+x^2+\cdots+x^{2n}+\cdots\right)\left(1+x^5+\cdots+x^{5n}+\cdots\right) \\
&\quad\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)(1+x) \\
=&\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot(1+x) \\
=&\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k
\end{aligned}
$$

故所求为 $n+1$ 种.

例 17

求不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 满足条件 $x_1 \leqslant 8, x_2 \leqslant 8,\ x_3 \leqslant 8$ 的非负整数解的个数.

例 17

求不定方程 $x_1+x_2+x_3=14$ 满足条件 $x_1 \leqslant 8, x_2 \leqslant 8,\ x_3 \leqslant 8$ 的非负整数解的个数.

解 设所求为 N, 则 N 是

$$A(t)=\left(1+t+t^2+\cdots+t^8\right)^3$$

展开式中 t^{14} 的系数, 而

$$\begin{aligned}A(t)&=\left(\frac{1-t^9}{1-t}\right)^3=\left(1-t^9\right)^3(1-t)^{-3}\\&=\left(1-3t^9+3t^{18}-t^{27}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}t^k,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}N&=\binom{14+2}{2}-3\binom{5+2}{2}\\&=\binom{16}{2}-3\binom{7}{2}=120-3\times 21=57\end{aligned}$$

例 18

求方程 $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21$ 的正整数解的个数.

例 18

求方程 $x_1+2x_2+4x_3=21$ 的正整数解的个数.

解 设所求为 N, 故 N 是

$$A(t)=\left(t+t^2+\cdots\right)\cdot\left(t^2+t^4+t^6+\cdots\right)\cdot$$
$$\left(t^4+t^8+t^{12}+\cdots\right)$$

展开式中 t^{21} 的系数, 而

$$\begin{aligned}A(t)&=t\left(1-t\right)^{-1}\cdot t^2\left(1-t^2\right)^{-1}\cdot t^4\left(1-t^4\right)^{-1}\\&=t^7\left(1+t\right)\left(1-t^2\right)^{-2}\left(1-t^4\right)^{-1}=t^7\left(1+t\right)\left(1+t^2\right)^2\left(1-t^4\right)^{-3}\\&=\left(t^7+t^8+2t^9+2t^{10}+t^{11}+t^{12}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}t^{4k}.\end{aligned}$$

且只有 $9+4k=21$ 有整数解，解为 $k=3$, 所以

$$N=2\cdot\binom{3+2}{2}=20$$

例 19

求由直线 $x + 3y = 12$, 直线 $x = 0$ 及直线 $y = 0$ 所围成的三角形（包括边界）的整点（横坐标和纵坐标均是整数的点）的个数.

例 19

求由直线 $x+3y=12$，直线 $x=0$ 及直线 $y=0$ 所围成的三角形（包括边界）的整点（横坐标和纵坐标均是整数的点）的个数.

解 设所求为 N，则 N 是满足条件 $x+3y\leqslant 12$ 的非负整数率的个数. 令 $z=12-x-3y$，如果 $x+3y\leqslant 12$，则 $z\geqslant 0$ 且 $x+3y+z=12$，所以 N 是方程 $x+3y+z=12$ 的非负整数解的个数，故 N 是

$$A(t)=\left(1+t+t^2+\cdots\right)^2\left(1+t^3+t^6+\cdots\right)$$

展开式中 t^{12} 的系数，而

$$\begin{aligned}A(t)&=(1-t)^{-2}\left(1-t^3\right)^{-1}\\&=\left(1+t+t^2\right)^2\left(1-t^3\right)^{-3}\\&=\left(1+2t+3t^2+2t^3+t^4\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}t^{3k},\end{aligned}$$

所以

$$N=\binom{4+2}{2}+2\binom{3+2}{2}=15+20=35.$$

例 20

求平面直角坐标系 Oxy 中, 以 $A(5,0),B(0,5),C(-5,0),D(0,-5)$ 为顶点的正方形（包括边界）的整点的个数.

例 20

求平面直角坐标系 Oxy 中，以 $A(5,0), B(0,5), C(-5,0), D(0,-5)$ 为顶点的正方形（包括边界）的整点的个数.

解 设所求为 N. 过点 $A(5,0)$ 和点 $B(0,5)$ 的直线方程为 $x+y=5$.

由对称性知，点 (x,y) 是该正方形内的一个整点的充分必要条件是

$$|x|+|y| \leqslant 5$$

且 x 和 y 均为整数.

所以 N 是方程

$$|x|+|y|+z=5$$

满足条件 $z \geqslant 0$ 的整数解的个数.

因此, N 是

$$A(t)=\left(1+2t+2t^2+2t^3+\cdots\right)^2\left(1+t+t^2+t^3+\cdots\right)$$

展开式中 t^5 的系数, 而

$$\begin{aligned} A(t) &= \left(2(1-t)^{-1}-1\right)^2(1-t)^{-1} \\ &= (1+t)^2(1-t)^{-3} \\ &= \left(1+2t+t^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}t^k, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} N &= \binom{5+2}{2}+2\binom{4+2}{2}+\binom{3+2}{2} \\ &= \binom{7}{2}+2\cdot\binom{6}{2}+\binom{5}{2} \\ &= 21+30+10=61. \end{aligned}$$

1. 引论
2. 形式幂级数代数
3. 生成函数的性质
4. 利用生成函数求解递推关系
5. 普通型生成函数
6. 指数型生成函数

排列数的指数型生成函数

n 元集合的 k 排列数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式.

排列数的指数型生成函数

n 元集合的 k 排列数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式. 但如果把基底函数 x^k 改换成 $\frac{x^k}{k!}$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{x^k}{k!} = (1+x)^n,$$

这启发人们引入指数型生成函数的概念.

数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的指数型生成函数 定义为形式幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

因为 $[x^k]f(x) = \frac{a_k}{k!}$, 所以

$$a_k = k! \cdot [x^k]f(x).$$

定理 6.1

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列中，若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right).$$

证明 将和积式展开，得

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right)=\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k\\ k_i\in M_i,i=1,2,\ldots,n}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\right)\frac{x^k}{k!}.$$

只要证明展开式中 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数就是满足限定条件的 k 可重排列数即可.

- 首先，对于集合 M 的满足限定条件的每个 k 可重排列，设其中 a_i 出现 k_i 次 $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 就是方程
$$k_1+k_2+\cdots+k_n=k\quad(k_i\in M_i,i=1,2,\cdots,n)$$
的一个解.

定理 5.1

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列中，若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right).$$

- 其次，方程 $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$ 的每个解 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 都对应一类 k 可重排列，此类中的每一个 k 可重排列里，元素 a_i 出现 k_i 次.
- 而此类 k 可重排列的个数就是多重集合 $\{k_1\cdot a_1,k_2\cdot a_2,\cdots,k_n\cdot a_n\}$ 的全排列的个数，即 $\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$. 可见，与解 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 相对应的 k 可重排列有 $\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 个.
- 再者，方程 $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$ 的不同解 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 所对应的不同 k 可重排列类中没有相同的排列.
- 因此，由加法原则，集合 M 满足给定条件的 k 可重排列的总个数为

$$\sum_{\substack{k_1+k_2,\cdots+k_n=k\\(k_1\in M_i,i=1,2,\cdots,n)}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}.$$

特别地, 数列 $\{1, 1, \cdots\}$ 的指数型生成函数 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 具有与指数函数相似的性质:

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

这是因为

$$\begin{aligned}
e^x e^y &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{y}{x}\right)^j x^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{y}{x}\right)^k \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= e^{x+y}.
\end{aligned}$$

特别有

$$e^x e^{-x} = e^0 = 1,$$

从而

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

例 21

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列数序列 $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)=(e^x)^n=e^{nx}=\sum_{k=0}^{\infty}n^k\frac{x^k}{k!}$$

从而

$$b_k=n^k$$

例 22

由数字 $0, 1, 2, 3$ 组成的长为 k 的序列中，要求含有偶数个 0，问这样的序列有多少个?

例 22

由数字 $0,1,2,3$ 组成的长为 k 的序列中，要求含有偶数个 0，问这样的序列有多少个？

解 根据题意，有

$$
\begin{aligned}
M_1 = M_2 = M_3 &= \{0,1,2,\cdots\} \\
M_0 &= \{0,2,4,\cdots\}
\end{aligned}
$$

由定理 5.5.1 知，该排列数的指数型生成函数为

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right) \\
=&\left(e^x\right)^3\cdot\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right) \\
=&\frac{1}{2}\left(e^{4x}+e^{2x}\right) \\
=&\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}4^k x^k+\sum_{k=0}^{\infty}4^k x^k\right)
\end{aligned}
$$

所以 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数为

$$
b_k = \frac{1}{2}\left(4^k+2^k\right).
$$

例 23

由 $1,2,3,4$ 能组成多少个 1 出现两次或三次，2 最多出现一次，4 出现偶数次的五位数？

例 23

由 $1,2,3,4$ 能组成多少个 1 出现两次或三次，2 最多出现一次，4 出现偶数次的五位数？

解 根据题意，有

$$M_1=\{2,3\}\qquad M_3=\{0,1,2,\cdots\}$$
$$M_2=\{0,1\}\qquad M_4=\{0,2,4,\cdots\}$$

由定理 5.5.1 知，该排列数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\\=&\frac{x^2}{6}\left(3+4x+x^2\right)e^x\frac{e^x+e^{-x}}{2}\\=&\frac{x^2}{12}\left(3+4x+x^2\right)\left(e^{2x}+1\right).\end{aligned}$$

所以 $\frac{x^5}{5!}$ 的系数为

$$5!\times\frac{1}{12}\left(3\times\frac{2^3}{3!}+4\times\frac{2^2}{2!}+1\times\frac{2^1}{1!}\right)=140,$$

即满足题意的五位数有 140 个.

例 24

确定每位数字都是奇数, 且 1 和 3 出现偶数次的 n 位数的个数.

例 24

确定每位数字都是奇数, 且 1 和 3 出现偶数次的 n 位数的个数.

解

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3\\
=&\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cdot e^{3x}\\
=&\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right)\cdot e^{3x}\\
=&\frac{1}{4}\left(e^{5x}+2e^{3x}+e^x\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty}5^k\frac{x^k}{k!}+2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}3^k\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\\
=&\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(5^k+2\cdot 3^k+1\right)\frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

因此, 它的 $\frac{x^n}{n!}$ 系数为

$$
\frac{1}{4}\left(5^n+2\cdot 3^n+1\right).
$$

例 25

证明：贝尔数 $B_n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)$（$S(n,k)$ **为第二类斯特林数）的指数型生成函数为**

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}=\exp\{e^x-1\}.$$

例 25

证明：贝尔数 $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$（$S(n,k)$ 为第二类斯特林数）的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp\{e^x - 1\}.$$

解 设 $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$，由贝尔数递推关系：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \quad (B_0 = 1).$$

对 $B(x)$ 求导：

$$B'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}.$$

交换求和顺序，利用 $\binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} = \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{x^n}{(n-k)!}$，令 $m = n - k$：

$$B'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = B(x) \cdot e^x.$$

例 26

证明：贝尔数 $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$（$S(n,k)$ 为第二类斯特林数）的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp\{e^x - 1\}.$$

得到微分方程：

$$\frac{d(B(x))}{dx} = B(x) \cdot e^x.$$

分离变量并积分：

$$\frac{d(B(x))}{B(x)} = e^x dx \implies \ln|B(x)| = e^x + C \implies B(x) = \exp\{e^x + C\}.$$

代入初始条件 $x = 0$ 时 $B(0) = B_0 = 1$：

$$1 = \exp\{1 + C\} \implies C = -1.$$

故 $B(x) = \exp\{e^x - 1\}$，得证.

注记：贝尔数的另一种表达式

由 $B(x) = e^{e^x - 1} = \frac{1}{e} e^{e^x}$，展开得：

$$B(x) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

对比生成函数定义，贝尔数可表示为：

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

例 27

求 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列中每个 a_i 至少出现一次的排列数 P_k 的指数型生成函数.

例 27

求 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列中每个 a_i 至少出现一次的排列数 P_k 的指数型生成函数.

解 根据题意, 有

$$M_i=\{1,2,3,\cdots\}\qquad(1\le i\le n).$$

由定理 5.5.1 知, 排列数序列 $\{P_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^n &=(e^x-1)^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}e^{(n-i)x}\\ &=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-i)^k x^k}{k!}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k\right)\frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

所以

$$P_k=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k\quad(k\ge n).$$

例 28

用红、白、蓝 3 种颜色给 $1 \times n$ 棋盘着色，要求白色方格数是偶数，问有多少种着色方案？

例 28

用红、白、蓝 3 种颜色给 $1\times n$ 棋盘着色，要求白色方格数是偶数，问有多少种着色方案？

解

$$M_r = M_b = \{0,1,2,\cdots\},$$
$$M_w = \{0,2,4,\cdots\}.$$

于是，分配方案数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}
&\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\\
=&e^{2x}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{3x}+e^x\right)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(3x)^n}{n!}+\frac{x^n}{n!}\right).
\end{aligned}$$

因此，$\frac{x^n}{n!}$ 的系数 $\frac{1}{2}(3^n+1)$ 就是满足要求的着色方案数.

命题 6.2

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!}$, 则

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot k\cdot\frac{x^{k-1}}{k!}=\sum_{\ell=0}^{\infty}a_{\ell+1}\frac{x^{\ell}}{\ell!},$$

即 $\{a_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f'(x)$.

命题 6.3

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!}$, 则 $\{a_{k+i}\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f^{(i)}(x)$.

命题 6.4

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!}$, 则 $\{ka_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\frac{x^k}{k!}&=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{x^k}{(k-1)!}=x\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\\&=xf'(x)=x\frac{d}{dx}(f(x)).\end{aligned}$$

命题 6.5

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ 且 $P(k)$ 是一个关于 k 的多项式，则 $\{P(k)\,a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$P\left(x\frac{d}{dx}\right)(f(x)).$$

命题 6.6

若 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ 且 $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$，则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^i}{j!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i!}\cdot\frac{b_{n-i}}{(n-i)!}\right)\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

即 $\left\{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a_i b_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f(x)g(x)$.

例 29

置换 $\sigma \in S_n$ 称为错位排列，如果对任意 $1 \le i \le n$，均有 $\sigma(i) \ne i$. 令 d_n 表示 S_n 中错位排列的总数. 求 d_n 的指数型生成函数 $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$.

由组合解释得

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

由于 $\{1\}_{n\ge 0}$ 的指数型生成函数为 e^x，

而 $\{n!\}_{n\ge 0}$ 的指数型生成函数为

$$\sum_{n\ge 0} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n\ge 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

由前面的递推关系可得

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x),$$

即

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

例 (错排数)

置换 $\sigma \in S_n$ 称为错位排列, 如果对任意 $1 \le i \le n$, 均有 $\sigma(i) \neq i$. 令 d_n 表示 S_n 中错位排列的总数. 求 d_n 的指数型生成函数 $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$.

也可以利用错位排列数 d_n 的另外递推关系求解.

考虑 $\sigma \in S_{n+1}$ 的第一位 $\sigma(n+1)$ 的取值, 它有 n 种可能.

得到递推关系 (P84)

$$d_{n+1} = n\left(d_n + d_{n-1}\right).$$

所以

$$D'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(n-1)!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} x^n = xD'(x) + xD(x),$$

或

$$\frac{D'(x)}{D(x)} = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}.$$

从而

$$D(x)=\frac{1}{1-x}e^{-x+c}.$$

当 $x=0$ 时, $D(x)=d_0=1$, 得到 $c=0$, 这也求出

$$D(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

展开得到

$$D(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}=\frac{1}{1-x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^i=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right)x^n$$

所以

$$d_n=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

这表明, 在 S_n 中任取一个置换, 它是错位排列的概率为 $\frac{d_n}{n!}$, 其极限是 $e^{-1}(n\to\infty)$. 这真是个奇妙但并不显然的事实.

拓展

普通型生成函数

令 a_n 表示在一个 n-集合上完成某个任务的方法数，$a_0 = 0$.

对于 $n \geq 1$，令 b_n 表示将区间集合 $[n]$ 划分成任意的非空子区间，然后在这些非空子区间上完成前面任务的方法数，$b_0 = 1$.

设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ 的普通型生成函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$，证明

$$b(x) = \frac{1}{1 - f(x)}.$$

指数型生成函数

令 a_n 表示在一个 n-集合上完成某个任务的方法数，$a_0 = 0$.

对于 $n \geq 1$，令 b_n 表示将 n-集合 $[n]$ 划分成任意的非空子集，然后在这些非空子集上完成前面任务的方法数，$b_0 = 1$.

设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ 的指数型生成函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$，证明

$$b(x) = e^{f(x)}.$$