

第一章 多项式 练习题

一. 填空

1. 数集 $\{0\}$ 对四则运算中的哪几个是封闭的_____.
2. 多项式 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$, 则 $f(x)g(x)$ 的 k 次项的系数为_____.
3. $g(x) = x^2 - x + 2$ 除 $f(x) = x^4 - 2x + 5$ 所得商式 $q(x) = \underline{\quad}$, 余式 $r(x) = \underline{\quad}$.
4. $x - 3$ 除 $2x^4 - x^2 - 9x$ 的余式为_____.
5. 取多项式 $f(x)$, 用 $x - 1$ 除余式为 3, 用 $x - 3$ 除余式为 5, 则用 $(x - 1)(x - 3)$ 除余式为_____.
6. $f(x), g(x)$ 是非零多项式, $d_1(x), d_2(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的两个最大公因式, 则 $d_1(x), d_2(x)$ 的关系为_____.
7. 两个多项式互相整除的充要条件是_____.
8. 已知 $(x + 1)^2 | ax^4 + bx^2 - 1$, 则 $a = \underline{\quad}, b = \underline{\quad}$.
9. 设 $g(x) = x^2 - x - 2$ 除 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 的余式为 $2x + 1$, 则 $a = \underline{\quad}, b = \underline{\quad}$.
10. 多项式 $f(x)$ 有重因式的充要条件是_____.
11. 多项式函数 $f(x) = x^3 - \frac{11}{2}x^2 + \frac{17}{2}x - 3$ 的有理根为_____.
12. 以 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 为根的首一不可约有理系数多项式为_____.
13. 把有理系数多项式 $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 3$ 写成一个有理数与一个本原多项式的乘积_____.
14. 多项式 $f(x) = [(4x - 3)^{2018} x^2 - 3x + 1]^{2018} (7x^3 - 10x + 2)^{2017}$ 的各项系数之和为_____, 常数项为_____.
二. 计算题

1. 设 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 4$, $g(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$.
(1) 求 $(f(x), g(x))$, (2) 求 $u(x), v(x)$, 使得 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.
2. 设 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.
(1) 求 $(f(x), g(x))$, (2) 求 $u(x), v(x)$, 使得 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.
3. $f(x) = x^3 + tx^2 + x + u$ 和 $g(x) = x^3 + (1+t)x^2 + 1$ 的最大公因式是一个二次多项式, 求 t, u 的值.
4. 设 $f_1(x), f_2(x)$ 是首 1 的次数 ≤ 3 的互异多项式, 设 $x^4 + x^2 + 1 | f_1(x^3) + x^4 f_2(x^3)$, 求 $(f_1(x), f_2(x))$.
5. m, p, q 适合什么条件时, 有 $(x^2 + mx + 1) | x^4 + px + q$.
6. 如果 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ 能被 $x^2 - 1$ 整除, 求 a, b .
7. 如果 $f'(x) | f(x)$, 求多项式 $f(x)$.

8. 判断多项式 $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ 有无重因式.
9. 分别在有理数域、实数域和复数域上把 $x^4 + 1$ 写成不可约多项式的乘积.
10. 求满足下列三个条件的一个二次多项式 $f(x)$:
- (a). $x + 2$ 整除 $f(x)$, (b). $x - 3$ 除 $f(x)$ 的余式为 10, (c). $x + 1$ 除 $f(x)$ 的余式等于 $x - 1$ 除 $f(x)$ 的余式.
11. 求一个三次多项式 $f(x)$, 使得 $f(x) + 1$ 可被 $(x - 1)^2$ 整除, $f(x) - 1$ 可被 $(x + 1)^2$ 整除.
12. 设 $f(x) = x^2 - 4x + a$, 若存在唯一的 3 次首一多项式 $g(x)$, 使得 $f(x) | g(x)$, $g(x) | f^2(x)$, 求 a 与 $g(x)$.

三. 证明题

1. 若 P 为一数域, 且 $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in P$, 证明 $\sqrt{2} \in P$, $\sqrt{6} \in P$; 问 $\sqrt{7}$ 是否属于 P ?
2. 证明: 设 $f(x)$ 是数域 P 上的次数大于 0 的多项式, 证明 $f(x)$ 是不可约多项式的充要条件是对任意的常数 $a \in P$, $f(x+a)$ 是不可约的.
3. 证明 $x | f^k(x)$ 当且仅当 $x | f(x)$.
4. 设 $f(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式, 证明 $f(x)$ 在复数域 C 上无重根.
5. 任取多项式 $f(x), g(x) \in P[x]$, 证明 $(f(x), g(x)) = (f(x) + g(x), g(x))$
6. 证明: 若 $p(x)$ 不可约, $p(x) | f(x)g(x)$, 且 $p(x) | [f(x) + g(x)]$, 则 $p(x) | f(x)$ 且 $p(x) | g(x)$.
若 $p(x)$ 可约, 上述结论是否成立? 为什么?
7. 设 f, g 非零, 若任给 $h(x)$, 由 $f(x) | g(x)h(x)$, 都可得 $f(x) | h(x)$, 证明 $(f, g) = 1$.
8. 设 f, g 非零, 若任给 $h(x)$, 由 $f(x) | h(x)$, $g(x) | h(x)$, 都可得 $f(x)g(x) | h(x)$, 证明 $(f, g) = 1$.
9. 设一元多项式 $f(x), g(x), h(x)$, 其中 $(f(x), h(x)) = 1$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 被 $h(x)$ 除所得余式相等,
证明: $(f(x)g(x), h(x)) = 1$.
10. 证明: $\sin x$ 不是多项式.
11. $f(x), g(x)$ 是非零多项式, 证明存在自然数 N , 当 $n_1, n_2 > N$ 时有 $(f^{n_1}(x), g(x)) = (f^{n_2}(x), g(x))$.
12. 设 $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$, 证明存在 $p(x) \in F[x]$ 使得 $f(x) | p(x)$, 且 $g(x) | (p(x) + h(x))$ 当且仅当 $(f(x), g(x)) | h(x)$.
13. 证明: 任给非负整数 n , 都有 $x^2 + x + 1 | (x^{n+2} + (x+1)^{2n+1})$.
14. 证明: $x^d - 1 | x^n - 1 \Leftrightarrow d | n$, 其中 d, n 是正整数.
15. 证明: $(x^n - 1, x^m - 1) = x^{(n,m)} - 1$.