组合数学 — Catalan 数

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

引例 (姐妹洗碗问题)

姐姐和妹妹一起洗 4 个碗，姐姐洗好的碗一个一个往上摆，妹妹再从最上面一个一个地拿走放入碗柜摆成一摞，姐姐一边洗，妹妹一边拿，那么妹妹摆好的碗一共有多少种不同的方法?

图: 姐妹洗碗问题

引例 (姐妹洗碗问题)

姐姐和妹妹一起洗 4 个碗, 姐姐洗好的碗一个一个往上摆, 妹妹再从最上面一个一个地拿走放入碗柜摆成一摞, 姐姐一边洗, 妹妹一边拿, 那么妹妹摆好的碗一共有多少种不同的方法?

图: 姐妹洗碗问题

例如

- 姐姐洗 2 个碗,
- 妹妹摆 1 个碗,
- 姐姐再洗 2 个碗,
- 妹妹再摆 3 个碗.

怎么去描述数学的语言这种取法?

引例 (姐妹洗碗问题)

姐姐和妹妹一起洗 4 个碗, 姐姐洗好的碗一个一个往上摆, 妹妹再从最上面一个一个地拿走放入碗柜摆成一摞, 姐姐一边洗, 妹妹一边拿, 那么妹妹摆好的碗一共有多少种不同的方法?

图: 姐妹洗碗问题

例如

- 姐姐洗 2 个碗,
- 妹妹摆 1 个碗,
- 姐姐再洗 2 个碗,
- 妹妹再摆 3 个碗.

怎么去描述数学的语言这种取法?

- 令 j 为姐姐洗完的碗的个数, i 为妹妹摆碗的个数
- 条件为妹妹摆碗的个数不能超过姐姐洗完的碗的个数, 即 $i \leq j$

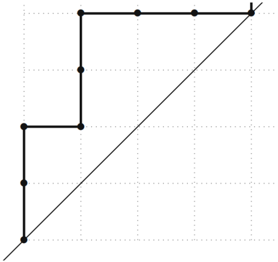
上面例子可以叙述为如下的过程

引例 (姐妹洗碗问题)

姐姐和妹妹一起洗 4 个互不相同的碗, 姐姐洗好的碗一个一个往上摆, 妹妹再从最上面一个一个地拿走放入碗柜摆成一摞, 姐姐一边洗, 妹妹一边拿, 那么妹妹摆好的碗一共有多少种不同的方法?

令 j 为姐姐洗完的碗的个数，i 为妹妹摞碗的个数，条件转化为 $i \leq j$

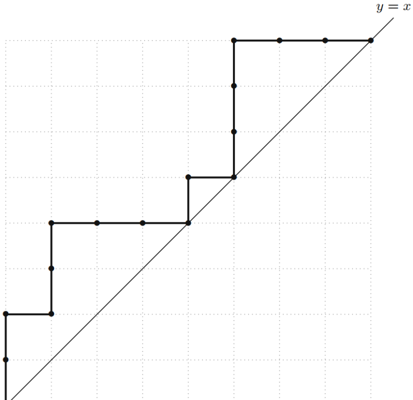
- 纵坐标表示姐姐洗完的碗的个数，横坐标表示妹妹摞碗的个数,
- 要求摆法的方案数实际上是求从坐标 (0，0) 到坐标 (4,4) 的所有满足条件的路径数.



Catalan 数

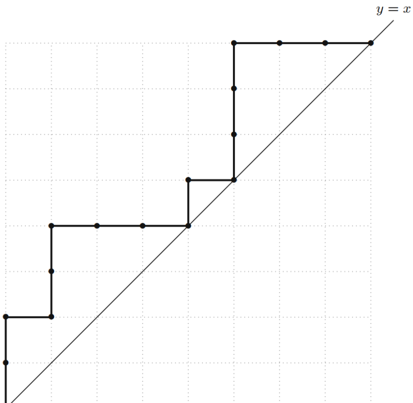
一个长度为 $2n$ 的Dyck 路是一个从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的格路，它

- 含有 n 个水平步骤 “E” $(i,j) \to (i+1,j)$
  和 n 个垂直步骤 “N” $(i,j) \to (i,j+1)$,
- 且路径上所有整数格点满足 $i \le j$, 即在平面中位于 $y=x$ 以上.



一个长度为 $2n$ 的Dyck 路是一个从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的格路，它

- 含有 n 个水平步骤 “E” $(i,j)\to(i+1,j)$
  和 n 个垂直步骤 “N” $(i,j)\to(i,j+1)$,
- 且路径上所有整数格点满足 $i\le j$, 即在平面中位于 $y=x$ 以上.



我们可以画出

- 格路的图 或
- 遵循路径的步骤列表写成一个多重集合 $\{N,E\}$ 的排列.

例如，左边的 Dyck 路所对应的多重集合 $\{N,E\}$ 的排列如下

$$NNENNEEENENNNEEE$$

Catalan 数

图: Dyck 路 $(n=3)$

我们用 $\mathcal{D}(n)$ 表示长度为 $2n$ 的 Dyck 路的集合，且定义 *Catalan* 数如下

$$C_n = \#\mathcal{D}(n).$$

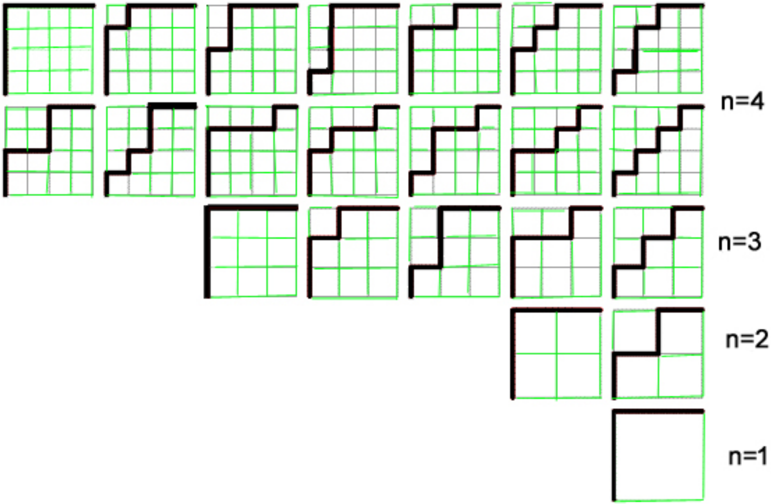
定理

第 n 项 *Catalan* 数的表达式为

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!(n+1)!} = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}.$$

历史上，清代数学家明安图 (1692-1763) 在其《割圆密率捷法》最早用到 “卡塔兰数”，远远早于比利时的数学家卡塔兰 (1814–1894).

经过计数, 可得 $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14$.



Catalan 数

递推关系的建立

以半 n 长 Dyck 路为例. 设满足条件的 Dyck 路的条数即 Catalan 数为 C_n. 设满足条件的一条 Dyck 路: $P = v_0 v_1 \cdots v_{2n}$, 其中 $v_0 = (0,0)$, $v_{2n} = (n,n)$.

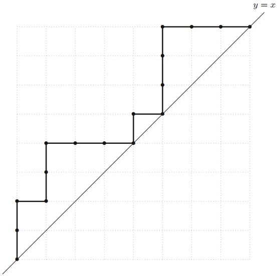


图: Dyck 路 $(n = 8, i = 4)$

设第一个与 $y = x$ 相交的顶点为 $v_{2i} = (i,i)$. 将 Dyck 路 P 按照 v_{2i} 分成两段,

1. $v_0 = (0,0) \to v_{2i} = (i,i)$. 此时第一步一定向上, 最后一步一定向右, 故只需考虑 $(0,1) \to (i-1,i)$ 的格路条数, 计数为 C_{i-1}.
2. $v_{2i} = (i,i) \to v_{2n} = (n,n)$. 计数为 C_{n-i}. (为什么?)

于是有

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}. \tag{1}$$

设 C_n 为 Catalan 数, 规定 $C_0 = 1$. 令

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

对 (1) 式两边同乘以 x^n, 并关于 $n \geq 0$ 求和得

$$A(x) - 1 = xA(x)^2,$$

解得

$$A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

利用二项式定理

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n.$$

因此,

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad \text{(舍去正号，为什么？)} \\
&= \frac{1}{2x}\left(1-\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1}x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n. \quad \text{(计算过程请自行补充完整)}
\end{aligned}
$$

提取 x^n 项系数, 得

$$
C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.
$$

Catalan 数

设 $w = w_1 \cdots w_{2n}$ 是由 n 个 1 和 n 个 2 组成的序列, 对任意 $i = 1, 2, \cdots, 2n$, 要求前 i 个字 $w_1 \cdots w_i$ 中 1 的个数大于或等于 2 的个数. 满足上述条件的序列称为 $2n$ 长 Ballot 序列.

如 $n = 3$ 时, Ballot 序列如下

$$111222 \quad 112122 \quad 112212 \quad 121212 \quad 121122$$

Catalan 数的其他组合解释

1. Ballot 序列

设 $w = w_1 \cdots w_{2n}$ 是由 n 个 1 和 n 个 2 组成的序列, 对任意 $i = 1, 2, \cdots, 2n$, 要求前 i 个字 $w_1 \cdots w_i$ 中 1 的个数大于或等于 2 的个数. 满足上述条件的序列称为 $2n$ 长 Ballot 序列.

如 $n = 3$ 时, Ballot 序列如下

$$111222 \quad 112122 \quad 112212 \quad 121212 \quad 121122$$

长度为 $2n$ 的 Ballot 序列 $w = w_1 \cdots w_{2n}$ 与 Dyck 路径 P 之间存在如下双射:

- $w_i = 1 \rightarrow P$ 的第 i 步为垂直步骤"N";
- $w_i = 2 \rightarrow P$ 的第 i 步为水平步骤"E".

2. 括号的匹配

一个 $n+1$ 个 x 组成的括号字符串由插入 n 个左括号和 n 个右括号组成.

$n=3$ 时,

$$x(x(xx)) \quad x((xx)x) \quad (xx)(xx) \quad (x(xx))x \quad ((xx)x)x$$

注

对于 $(((xx)x)((xx)(xx)))$ 这种形式的元素, 我们通常忽略最左和最右的括号.

2. 括号的匹配

一个 $n+1$ 个 x 组成的括号字符串由插入 n 个左括号和 n 个右括号组成.

$n=3$ 时,

$$x(x(xx)) \quad x((xx)x) \quad (xx)(xx) \quad (x(xx))x \quad ((xx)x)x$$

注

对于 $(((xx)x)((xx)(xx)))$ 这种形式的元素, 我们通常忽略最左和最右的括号.

为给出其关于如下 Catalan 数递推关系的组合意义,

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}\, C_{n-k}, \qquad C_0 = 1,$$

考虑由 $n+1$ 个 x 通过插入 n 对合法括号所形成的完全括号化表达式。任一非平凡表达式可唯一分解为 $(A)(B)$，其中 A 包含 k 个 x（对应 C_{k-1} 种括号化方式），B 包含 $n-k+1$ 个 x（对应 C_{n-k} 种方式），$k=1,\ldots,n$。通常省略最外层括号，故总数为 C_n。

定义与性质

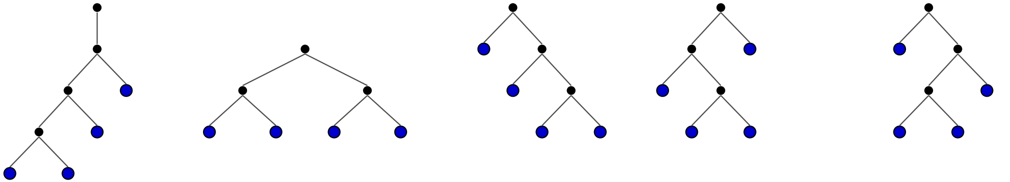
- 树是一种无回路连通图. 若指定某个节点为根，则称为**根树**.
- 度为 0 的节点称为**叶子**；度为 2 的节点称为**内节点**.
- 若每个内节点的度数最多为 2，则称为**二叉树**.
- 所有内节点度均为 2 的二叉树称为**完全二叉树 (full binary tree)**.
- 若完全二叉树有 n 个叶子，则必有 $n-1$ 个内节点，称其为 n 叶完全二叉树.

完全二叉树与括号表达式的对应

设一棵有 n 个叶子的完全二叉树的叶子依次标为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

每个内节点与其左右子树分别对应两部分，若两个子树的叶子表达式分别为 x_1, x_2，则该内节点表示：$(x_1 x_2)$. 于是整棵树对应一个 n 元乘积 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的一种括号化方式.

结论： 含 n 个叶子的完全二叉树与 n 个元素乘积的所有合法括号化之间存在一一对应.



$(((a_1 a_2) a_3) a_4)$ $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$ $a_1(a_2(a_3 a_4))$ $(a_1(a_2 a_3))a_4$ $a_1((a_2 a_3) a_4)$

3. 二叉树

- 二叉树：顶点度小于等于 2 的树.

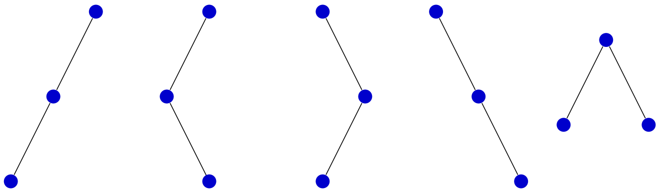


图: 三节点二叉树的 5 种结构

$n+1$ 个 x 组成的括号字符串与 n-二叉树间的双射

设 $n+1$ 个 x 组成的括号字符串为 w, 定义二叉树 B_w 的递推关系满足:

- 如果 $w = xx$, 则 B_w 只包含一个顶点 (根);
- 否则, 从 w 最外层括号开始, 如果 $w = st$, 则 B_w 有一个根顶点 v、左子树 B_s 及右子树 B_t.

例如, 对 3 个顶点的的二叉树, 其对应的括号为

$$((xx)x)x \quad (x(xx))x \quad x((xx)x) \quad x(x(xx)) \quad (xx)(xx)$$

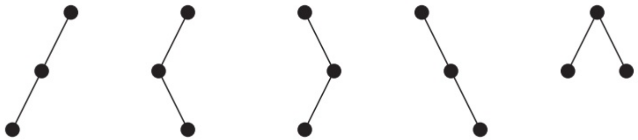


图: n 个顶点的二叉树 (n=3)

4. 凸多边形的三角剖分

- 将 $n+2$ 边形添加对角线, 使其被切割为 n 个三角形.

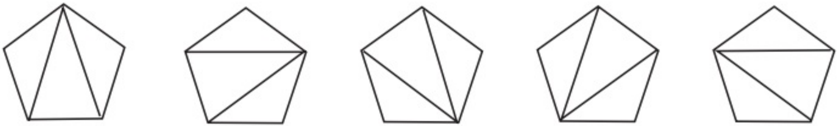
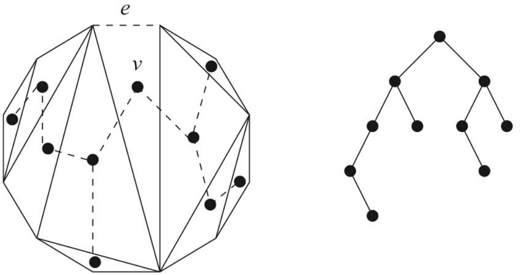


图: 凸 $n+2$ 边形切割 $(n=3)$

建立 n-二叉树与凸 $n+2$ 边形切割间双射

- 固定多边形的边 e, 在 T 的每个三角形内部放置一个顶点, 让根顶点对应于以 e 为边的三角形. 连接相邻三角形中的点, 如图 (a). 从顶点 v 出发, 确定边 f_1 及 f_2, 沿着边 f_1 逆时针旋转定义第一条边为左侧边 f_{11}, 第二条边为右侧边 f_{12}. 以此类推, 即可得到二叉树如 (b).



(a) (b)