组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

第 5 章　生成函数

生成函数

1. 引论
2. 形式幂级数代数
3. 生成函数的性质
4. 利用生成函数求解递推关系
5. 普通型生成函数
6. 指数型生成函数

引论：生成函数

生成函数（generating function）是一种简单而有效的数学工具，最早由 Laplace 和 Euler 引入，在组合计数中有广泛应用.

核心思想是将一个数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

表示为幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

将整个数列“整体化”，然后通过分析幂级数 $A(x)$ 来研究数列的构造与性质.

生成函数定义

序列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 的 生成函数 记为

$$G\{a_n\} = A(x).$$

通常，用 $[x^n]A(x)$ 表示 $A(x)$ 中 x^n 的系数.

二项式生成函数示例

考虑二项式系数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$$

生成函数为

$$f_n(x) = (1+x)^n.$$

例 1：全部系数和

对 $x=1$，得到全部系数和:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

例 2：加权系数和

通过对 $(1+x)^n$ 求导:

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}.$$

例 3：范德蒙德恒等式

比较等式

$$(x+1)^{m+n} = (x+1)^m (x+1)^n$$

两边 x^k 的系数，可得到

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

例 1

投掷一次骰子, 出现点数 $1, 2, \cdots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$.

连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少?

连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少?

例 1

投掷一次骰子, 出现点数 $1, 2, \cdots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$.
连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少?
连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少?

一次投掷出现的点数有 6 种可能.

连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i, j)(1 \leqslant i, j \leqslant 6)$, 共有 $6^2 = 36$ 种可能.

由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能:

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4),$$

所以概率为 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

例 1

投掷一次骰子, 出现点数 $1,2,\cdots,6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$.
连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少?
连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少?

一次投掷出现的点数有 6 种可能.

连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i,j)(1 \leqslant i,j \leqslant 6)$, 共有 $6^2=36$ 种可能.

由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能:

$$(4,6),(5,5),(6,4),$$

所以概率为 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

如果问题是连续投掷 10 次, 其点数之和为 30 的概率有多少, 这时就不那么简单了.

这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多, 难以一一列举, 要解决这个问题, 只能另辟新径.

解 我们用多项式

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

表示投掷一次可能出现点数 $1, 2, \cdots, 6$, 观察

$$\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right).$$

从两个括号中分别取出 x^m 和 x^n, 使

$$x^m \cdot x^n = x^{10},$$

即是两次投掷分别出现点数 m, n, 且 $m + n = 10$.

由此得出, 展开式中 x^{10} 的系数就是满足条件的方法数.

同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为

$$\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}$$

中 x^{30} 的系数.

因为

$$\begin{aligned}
&\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}\\
=&x^{10}\left(1-x^6\right)^{10}(1-x)^{-10}\\
=&x^{10}\cdot\left(\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}x^{6i}\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{10-1+i}{i}x^i\right)
\end{aligned}$$

同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为

$$\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}$$

中 x^{30} 的系数.

因为

$$\begin{aligned}
&\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^{10}\\
=&x^{10}\left(1-x^6\right)^{10}(1-x)^{-10}\\
=&x^{10}\cdot\left(\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}x^{6i}\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{10-1+i}{i}x^i\right)
\end{aligned}$$

所以, x^{30} 的系数为

$$\binom{29}{20}-\binom{23}{14}\binom{10}{1}+\binom{17}{8}\binom{10}{2}-\binom{11}{2}\binom{10}{3}=2930455.$$

故所求概率为

$$\frac{2930455}{6^{10}}\approx 0.0485$$

生成函数

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \tag{1}$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题.

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \tag{1}$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题.

为了解决这个问题, 我们从代数的观点引入形式幂级数的概念.

我们称幂级数 (2) 是形式幂级数, 其中的 x 是未定元, 看作是抽象符号.

对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$, x 是 $\mathbb{R}$ 上的未定元, 表达式

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

称为 $\mathbb{R}$ 上的形式幂级数.

形式幂级数

一般情况下, 形式幂级数被认为是形式的, x 只是一个抽象符号, 并不需要对 x 赋予具体数值, 因而就不需要考虑它的收敛性.

在这样定义下, 解析收敛不是问题, 对于 $\sum_{n\geq 0} n!x^n$, 除了在 $x=0$ 处外没有其他点收敛, 我们也可讨论形式幂级数.

定义 2.1

设 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $B(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 是 $\mathbb{R}$ 上的两个形式幂级数, 若对任意 $k\geqslant 0$, 有 $a_k=b_k$, 则称 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相等, 记作 $A(x)=B(x)$.

我们用符号

$$\mathbb{R}[[x]] = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ 对于所有的} n \geq 0 \right\}$$

表示形式幂级数的集合.

它的加法、数乘、乘法规则定义如下

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n,$$

$$c \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (c a_n) x^n,$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} c_n x^n,$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 且

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

定理 2.2

对 $\mathbb{R}[[x]]$ 中的任意一个元素 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 有乘法逆元当且仅当 $a_0 \neq 0$.

证明 $\Rightarrow$ 设存在 $B(x)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ ，使 $A(x)B(x)=1$

比较两边的常数项得到 $a_0 b_0 = 1$, 因而 $a_0 \neq 0$.

$\Leftarrow$ 若 $a_0 \neq 0$.

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 \\ \cdots \\ a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_0 b_k = 0 \\ \cdots \end{cases}$$

其为关于 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_k, \cdots$ 的一个非齐次线性方程组,

对任意固定的正整数 k，将 $b_0, b_1, \ldots, b_k$ 当作未知量, 解前 $k+1$ 个非齐次线性方程组.

前 $k+1$ 个方程的系数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = a_0^{k+1} \neq 0$$

由克拉默法则知该非齐次线性方程组有唯一解，

即方程组对（$b_0, b_1, \ldots, b_k$）有唯一解.

所对应形式幂级数为

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

则 $B(x)$ 为 $A(x)$ 的乘法逆元.

例 2

求 $(1-x)$ 的逆元

例 2

求 $(1-x)$ 的逆元

解 令 $A(x)=(1-x)$，设其逆为 $B(x)=\sum_{n\geq 0} b_n x^n$.

$$a_0=1,\quad a_1=-1,\quad a_i=0\quad (i=2,3,\cdots)$$

由 $A(x)B(x)=1$，对应关于 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots$ 的非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_0b_0=1, \\ a_1b_0+a_0b_1=0, \\ a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2=0, \\ \cdots \\ a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k=0, \\ \cdots \end{cases}$$

解得 $b_i=1\quad (i=0,1,2,\cdots)$. 故

$$B(x)=\sum_{n\geq 0} x^n.$$

形式幂级数复合的定义与存在性

考虑 $A(x)=\sum_n a_n x^n$ 与 $B(x)$ 的 复合:

$$A(B(x))=\sum_{n\geq 0} a_n B(x)^n$$

右边是关于形式幂级数的无限求和，不只是形式变量.

形式幂级数复合 $A(B(x))$ 存在性依赖“避免无限累加常数项”.

定理 2.3

给定 $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$，复合 $A(B(x))$ 存在

当且仅当:

- $A(x)$ 为多项式，或
- $B(x)$ 常数项为 0.

(证明略)

例子：复合存在

例 1：$A(x)$ 是多项式

$$A(x) = 1 + 2x + x^2, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

尽管 $B(0) = 1 \neq 0$，A 是多项式，复合存在：

$$A(B(x)) = 1 + 2\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

例 2：$B(0) = 0$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad B(x) = x + x^2$$

A 非多项式，但 $B(0) = 0$，复合存在：

$$A(B(x)) = \frac{1}{1-(x+x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x+x^2)^n$$

反例：复合不存在

反例 1

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad B(x) = 1 + x$$

- A 不是多项式 - $B(0) \neq 0$

$$A(B(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + x)^n$$

常数项 $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ 发散 $\rightarrow$ 不存在.

反例 2：指数级数与平移

$$A(x) = e^x, \quad B(x) = x + 1$$

- A 不是多项式 - $B(0) \neq 0$

形式复合：

$$A(B(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + 1)^n}{n!}$$

每个 x^k 的系数为无限和 $\rightarrow$ 不存在于 $\mathbb{R}[[x]]$.

(e^{x+1} 的泰勒级数存在，但不是形式复合定义的)

形式幂级数中交换求和的合法性

定理 2.4

设 $\{a_{i,k}\}_{i,k\geq 0}\subseteq K$，并且对每个固定的 $n\geq 0$，集合

$$\{(i,k)\mid i+k=n,\ a_{i,k}\neq 0\}$$

是有限的. 则在形式幂级数环 $K[[x]]$ 中有

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq 0}a_{i,k}x^{i+k}=\sum_{i\geq 0}\sum_{k\geq 0}a_{i,k}x^{i+k}.$$

证明 在 $K[[x]]$ 中两个幂级数相等当且仅当每个幂次上的系数相等. 记

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq 0}a_{i,k}x^{i+k},\qquad G(x)=\sum_{i\geq 0}\sum_{k\geq 0}a_{i,k}x^{i+k}.$$

固定 $n\geq 0$，x^n 项的系数只由满足 $i+k=n$ 的有限个 $a_{i,k}$ 决定. 因此

$$[x^n]F(x)=\sum_{i+k=n}a_{i,k}=[x^n]G(x).$$

所以对所有 $n\geq 0$ 有 $[x^n]F(x)=[x^n]G(x)$，从而 $F(x)=G(x)$ 成立.

在环 $\mathbb{R}[[x]]$ 上还可以定义形式导数.

定理 2.5

对于任意 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}[[x]]$, 规定

$$\mathrm{D}A(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

称 $\mathrm{D}A(x)$ 为 $A(x)$ 的形式导数.

$A(x)$ 的 n 阶形式导数可以递归地定义为

$$\begin{cases} \mathrm{D}^0 A(x) \equiv A(x) \\ \mathrm{D}^n A(x) \equiv \mathrm{D}\left(\mathrm{D}^{n-1} A(x)\right) \quad (n \geqslant 1) \end{cases}$$

形式导数满足如下规则：

(1) $\mathrm{D}[\alpha A(x)+\beta B(x)]=\alpha \mathrm{D} A(x)+\beta \mathrm{D} B(x)$

(2) $\mathrm{D}[A(x) \cdot B(x)]=A(x) \mathrm{D} B(x)+B(x) \mathrm{D} A(x)$

(3) $\mathrm{D}\left(A^n(x)\right)=n A^{n-1}(x) \mathrm{D} A(x)$

由此可知，形式导数满足微积分中求导运算的规则.

当某个形式幂级数在某个范围内收敛时，形式导数就是微积分中的求导运算.

为了书写方便，以后用 $A'(x)$, $A''(x), \cdots$ 分别代表 $\mathrm{D} A(x), \mathrm{D}^{(2)} A(x), \cdots$.

生成函数

生成函数：给数列“挂”上标记

核心直觉

生成函数就像一条无限长的**晾衣绳**，x^k 是**挂钩**，我们将数列的第 k 项 a_k 挂在上面.

数列 A

$$\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$$

$$\Updownarrow$$

$$A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots$$

数列 B

$$\{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$$

$$\Updownarrow$$

$$B(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots$$

因为二者是一一对应的，所以生成函数间的运算关系直接对应着数列间的递推关系.

我们可以得到生成函数的如下一些性质：

性质 1

若

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < \ell) \\ a_{k-\ell} & (k \geq \ell) \end{cases}$$

则

$$B(x) = x^{\ell} A(x).$$

解释：

把序列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 整体向后移了 ℓ 位.

生成函数中，整体后移 ℓ 位就相当于 乘以 x^{ℓ}.

(和多项式整体乘上 x^{ℓ} 的效果一样.)

性质 2

若

$$b_k = a_{k+l},$$

则

$$B(x) = \frac{1}{x^l}\left(A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k\right).$$

解释：

这次是把序列向前移 l 位. 向前移对应 除以 x^l.

但向前移会把前 l 个元素删掉，所以要先把 $A(x)$ 的低次项扣掉：

$$A(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{l-1} x^{l-1}.$$

性质 3

若

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i,$$

则

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

性质 3

若

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i,$$

则

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

证明 考虑 $(1-x)B(x)$

$$(1-x)B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k - \sum_{k\geq 0} b_k x^{k+1} = b_0 + \sum_{k\geq 1}(b_k - b_{k-1})x^k.$$

由于 $b_k - b_{k-1} = a_k$（约定 $b_{-1} = 0$），因此

$$(1-x)B(x) = b_0 + \sum_{k\geq 1} a_k x^k = \sum_{k\geq 0} a_k x^k = A(x).$$

于是

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

性质 4

若

$$b_k = k a_k,$$

则

$$B(x) = x A'(x).$$

性质 5

若

$$b_k = \frac{a_k}{k+1},$$

则

$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\mathrm{d}t.$$

性质 4

若

$$b_k = k a_k,$$

则

$$B(x) = xA'(x).$$

性质 5

若

$$b_k = \frac{a_k}{k+1},$$

则

$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\mathrm{d}t.$$

证明 由 $A'(x)$ 的定义知

$$\begin{aligned} xA'(x) &= x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x). \end{aligned}$$

性质 4

若

$$b_k = k a_k,$$

则

$$B(x) = xA'(x).$$

证明 由 $A'(x)$ 的定义知

$$\begin{aligned} xA'(x) &= x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x). \end{aligned}$$

性质 5

若

$$b_k = \frac{a_k}{k+1},$$

则

$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\mathrm{d}t.$$

证明 由假设条件，有

$$\begin{aligned} \int_0^x A(t)\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x a_k t^k \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x b_k (k+1) t^k \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = xB(x). \end{aligned}$$

性质 6 (线性性)

若 $c_k = \alpha a_k + \beta b_k$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \alpha A(x) + \beta B(x).$$

性质 7 (卷积)

若 $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = A(x) \cdot B(x).$$

这两个性质可由形式幂级数的数乘、加法及乘法运算的定义直接得出.

利用这些性质, 我们可以求某些数列的生成函数, 也可以计算数列的和.

常见数列生成函数 (I)

Sequence (a_k)	**Generating Function** $G(x)$	**Expansion (前三项)**
1	$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots$
a^k	$\frac{1}{1-ax}$	$1 + ax + a^2x^2 + \cdots$
k	$\frac{x}{(1-x)^2}$	$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$
k^2	$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$	$x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots$
$k(k+1)$	$\frac{2x}{(1-x)^3}$	$2x + 6x^2 + 12x^3 + \cdots$

常见数列生成函数 (II)

Sequence (a_k)	Generating Function $G(x)$	Expansion
$\binom{\alpha}{k}$	$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots$
$\binom{n+k-1}{k}$	$\frac{1}{(1-x)^n}$	$1+nx+\frac{n(n+1)}{2}x^2+\cdots$
$\dfrac{1}{k!}$	e^x	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots$
$\dfrac{(-1)^k}{k}$	$\ln(1+x)$	$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$

下面证明其中的几个生成函数.

证明 (3)

$$G\{k\} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

$$= x\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(4)

$$G\{k(k+1)\} = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^k = \left(x\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)'$$

$$= \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

或者

$$G\{k(k+1)\} = x^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)''$$

$$= x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

(5)

$$
\begin{aligned}
G\left\{k^2\right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^k - \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \\
&= \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
G\left\{k^2\right\} &= x\left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)' = x\left(G\{k\}\right)' \\
&= x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' \\
&= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

利用生成函数的性质, 可以求出一些序列以及一些序列的和.

下面的几个例子说明了一些求解方法.

例 3

已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x},$$

求 a_n.

例 3

已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x},$$

求 a_n.

解 用部分分式的方法得

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x} = \frac{2}{1-2x} + 3x,$$

而

$$\frac{2}{1-2x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n.$$

所以有

$$a_n = \begin{cases} 2^{n+1} & (n \neq 1) \\ 2^2 + 3 = 7 & (n = 1) \end{cases}$$

例 4

计算

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

例 4

计算
$$1^2+2^2+\cdots+n^2.$$

解 由前面列出的第 (5) 个数列的生成函数知, 数列 $\{n^2\}$ 的生成函数为
$$A(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,$$
此处, $a_k=k^2$. 令
$$b_n=1^2+2^2+\cdots+n^2,$$
则
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

因此，数列 $\{b_n\}$ 的生成函数为

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

$$= \left(x + x^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k.$$

比较等式两边 x^n 的系数，得

$$b_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3} + \binom{n-1}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

例 5

计算

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

例 5

计算

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

步骤 1：求生成函数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k$

- 已知 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$；
- 求导整理得 $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$

步骤 2：提取有限和的系数展开生成函数的分子：

$$\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4} = x \cdot \frac{1}{(1-x)^4} + 4x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^4} + x^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^4}$$

结合组合数展开 $\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n$，得有限和：

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+3}{4} + 4\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{4}$$

从具体到推广：一般形式

观察 $m = 1, 2, 3$ 的规律，推广到任意正整数 m：

无穷生成函数的一般形式

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m x^k = \frac{x A_m(x)}{(1-x)^{m+1}}$$

其中:

- $A_m(x)$：$m-1$ 次欧拉多项式（整数系数）;
- 分母幂次：恒为 $m+1$（由幂和次数 m 决定）.

生成函数

生成函数的威力：化递推为通项

利用生成函数，我们可以将复杂的递推关系转化为封闭的通项公式.

递推关系

(已知条件)

$$a_n + r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} = 0$$

$\dashrightarrow$

通项公式

(最终目标)

$$a_n = f(n)$$

$\downarrow$ 转化

$\uparrow$ 展开

核心工具：生成函数 $A(x)$

将递推转化为代数方程 $\Longrightarrow$ 解出 $A(x)$

本节将详细介绍这一“转换-求解-展开”的标准流程.

利用生成函数求解各类递推关系有广泛的适用性，

给定关于 $f(n)$ 的递推关系式，求解 $f(n)$ 的基本步骤是：

基本步骤

1. 令 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$;
2. 将关于 $f(n)$ 的递推关系式转化成关于 $A(x)$ 的方程式;
3. 解出 $A(x)$, 将 $A(x)$ 展开成 x 的幂级数，x^n 的系数即为 $f(n)$.

例 6

利用生成函数求解递推关系：

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, \quad a_1 = 9, a_0 = 1.$$

例 6

利用生成函数求解递推关系：

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, \quad a_1 = 9, a_0 = 1.$$

解 令 $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则由 $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$，$a_1 = 9$，$a_0 = 1$ 可知，

$$\begin{aligned}
G(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(8a_{n-1} + 10^{n-1}\right) x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 8a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^n \\
&= 8x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^{n-1} \\
&= 8x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} (10x)^n \\
&= 8xG(x) + \frac{x}{1-10x}.
\end{aligned}$$

求解 $G(x)$，得

$$G(x) = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{1-10x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(8x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}((10x)^n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(8^n + 10^n\right)x^n.$$

所以，

$$a_n = \frac{1}{2}\left(8^n + 10^n\right).$$

例 7

求解递推关系:

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \quad (n \geq 2) \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 7. \end{cases} \tag{4.3}$$

例 7

求解递推关系：

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, & (n \geq 2) \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 7. \end{cases} \tag{4.3}$$

解： 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 利用递推关系可得：

$$\begin{aligned} A(x) - a_0 - a_1 x &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (7a_{n-1} - 12a_{n-2}) x^n \\ &= 7x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 12x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 7x(A(x) - a_0) - 12x^2 A(x) \end{aligned}$$

代入 $a_0 = 2, a_1 = 7$ 并整理，得：

$$A(x) = \frac{2 - 7x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{1-4x}$$

由此得出通项公式：

$$a_n = 3^n + 4^n.$$

例 8

求解递推关系：

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad (n \geqslant 2) \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \end{cases}$$

例 8

求解递推关系:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, & (n \geqslant 2) \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \end{cases}$$

解 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 同理可得:

$$\begin{aligned} A(x) - a_0 - a_1 x &= \sum_{n=2}^{\infty} (4a_{n-1} - 4a_{n-2}) x^n \\ &= 4x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 4x[A(x) - a_0] - 4x^2 A(x) \end{aligned}$$

代入初始条件 $a_0 = 0, a_1 = 1$，方程化简为:

$$A(x) - x = 4xA(x) - 4x^2 A(x)$$

整理得生成函数:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 4x + 4x^2} = \frac{x}{(1 - 2x)^2}$$

对 $A(x)$ 进行部分分式展开，设：

$$A(x) = \frac{x}{(1-2x)^2} = \frac{C_1}{1-2x} + \frac{C_2}{(1-2x)^2}$$

通分比较分子系数 $(x = C_1(1-2x) + C_2)$：

$$\begin{cases} \text{常数项：} C_1 + C_2 = 0 \\ \text{一次项：} -2C_1 = 1 \end{cases} \implies C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

于是展开 $A(x)$：

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}(2x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot 2^n + \frac{1}{2}(n+1)2^n\right]x^n \end{aligned}$$

提取系数 a_n 并化简：

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot 2^n(-1+n+1) = \frac{1}{2}\cdot n\cdot 2^n = \color{red}{n\cdot 2^{n-1}}$$

定理

给定序列 a_n, 其中 $n \geq 0$ 及 $d \in \mathbb{P}$, 则下列命题等价.

(1) 序列满足存在常数 $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{C}, c_d \neq 0$ 使得

$$a_{n+d} + c_1 a_{n+d-1} + c_2 a_{n+d-2} + \cdots + c_d a_n = 0.$$

(2) 生成函数 $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 具有形式

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

其中 $q(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_d x^d$, 且 $\deg p(x) < d$.

(3) a_n 可写作

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) r_i^n,$$

其中 r_i 为互不相同的非负复数, 满足

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_d x^d = \prod_{i=1}^{k} (1 - r_i x)^{d_i},$$

对每个 i, $p_i(n)$ 是 $\deg p_i(n) < d_i$ 的多项式.

生成函数

组合数的生成函数

本节介绍组合数序列的生成函数, 进而介绍如何用生成函数来求解组合型分配问题.

我们在前面几章中讨论过三种不同类型的组合问题:

(1) 求 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 k 组合数;

(2) 求 $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 组合数;

(3) 求 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10 组合数.

我们已经知道

- 问题 (1) 是普通集合的组合问题;
- 问题 (2) 转化为不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

  的非负整数解的个数问题;

(3) 求 $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的 10 组合数.

- 问题 (3) 是利用容斥原理在 $M=\{\infty\cdot a,\ \infty\cdot b,\ \infty\cdot c\}$ 中求不满足下述三个性质:
    - P_1 : 10 组合中 a 的个数大于或等于 4 ;
    - P_2 : 10 组合中 b 的个数大于或等于 5 ;
    - P_3 : 10 组合中 c 的个数大于或等于 6

  的 10 组合数, 它们在解题方法上各不相同.

下面我们将看到, 引入生成函数的概念后, 上述三类组合问题可以统一地处理.

问题 (1) 的解决

在普通集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 k 组合中, $a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 或者出现或者不出现, 故该集合的 k 组合数序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

从而

$$b_k = \binom{n}{k}.$$

问题 (2) 的解决

令

$$M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$$

的 k 组合数为 b_k. 考虑 n 个形式幂级数的乘积

$$\underbrace{\left(1+x+x^2+\cdots\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right)\cdots\left(1+x+x^2+\cdots\right)}_{n\text{ 组}}$$

它的展开式中, 每一个 x^k 均为

$$x^{m_1}x^{m_2}\cdots x^{m_n}=x^k \quad (m_1+m_2+\cdots+m_n=k)$$

其中 $x^{m_1},x^{m_2},\cdots,x^{m_n}$ 分别取自代表 a_1 的第一个括号,

代表 a_2 的第二个括号 $\cdots\cdots$ 代表 a_n 的第 n 个括号;

$m_1,m_2,\cdots,m_n$ 分别表示取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的个数.

于是, 每个 x^k 都对应着多重集合 M 的一个 k 组合.

问题 (2) 的解决

因此
$$\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n$$
中 x^k 的系数就是 M 的 k 组合数 b_k. 由此得出序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为
$$\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$
从而
$$b_k = \binom{n-1+k}{k}.$$
这时, 我们再次得到了第 2 章中多重集合 M 的 k 组合数的公式, 只不过现在是用生成函数获得的.

问题 (3) 的解决

用生成函数方法解问题 (3) 尤为简单.

将 $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的 k 组合数记为 $b_k, \{b_k\}$ 的生成函数就是

$$\left(1+x+x^2+x^3\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right).$$

其原因是展开式中的 x^k 必定为

$$x^{m_1}x^{m_2}x^{m_3}=x^k \quad (m_1+m_2+m_3=k).$$

由于 $x^{m_1}, x^{m_2}, x^{m_3}$ 分别取自第一、第二、第三个括号, 故

$$0\leqslant m_1\leqslant 3, 0\leqslant m_2\leqslant 4, 0\leqslant m_3\leqslant 5.$$

问题 (3) 的解决

于是每个 x^k 对应集合 $\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的一个 k 组合. 特别令 $k=10$, 则

$$
\begin{aligned}
&\left(1+x+x^2+x^3\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\\
=&\left(1-x^4\right)\cdot\left(1-x^5\right)\cdot\left(1-x^6\right)\cdot\frac{1}{(1-x)^3}\\
=&\left(1-x^4-x^5-x^6+x^9+x^{10}+x^{11}-x^{15}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^n.
\end{aligned}
$$

所以, x^{10} 的系数 b_{10} 为

$$
\begin{aligned}
b_{10}=&\binom{10+2}{10}-\binom{6+2}{6}-\binom{5+2}{5}-\binom{4+2}{4}+\binom{1+2}{1}+\binom{0+2}{0}\\
=&6
\end{aligned}
$$

与用容斥原理得到的结果相同.

定理 5.1

设从 n 元集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中取 k 个元素的组合数为 b_k，若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right).$$

定理 5.1

设从 n 元集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中取 k 个元素的组合数为 b_k, 若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$, 则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right).$$

例 9

求多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的每个 a_i 至少出现一次的 k 组合数 b_k.

解 因为

$$M_i = \{1, 2, 3, \cdots\} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

所以

$$\begin{aligned}
G\{b_k\} &= \left(x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n \\
&= x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1+i}{i} x^{n+i} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{k-n} x^k \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k,
\end{aligned}$$

因此

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < n) \\ \binom{k-1}{n-1} & (k \geqslant n) \end{cases}$$

组合型分配问题的生成函数

定理 5.2

把 k 个相同的球放入 n 个不同的盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中, 限定盒子 a_i 的容量集合为 $M_i(1 \leqslant i \leqslant n)$, 则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m \in M_i} x^m\right).$$

组合型分配问题的生成函数

定理 5.2

把 k 个相同的球放入 n 个不同的盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中, 限定盒子 a_i 的容量集合为 $M_i(1 \leqslant i \leqslant n)$, 则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m \in M_i} x^m\right).$$

证明 不妨设盒子 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中放入的球数分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \quad (x_i \in M_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$$

一种符合要求的放法相当于 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的一个 k 组合, 前面关于盒子 a_i 容量的限制转变成 k 组合中 a_i 出现次数的限制. 所以, 组合型分配问题方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m \in M_i} x^m\right).$$

例 10

求不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

满足 $x_1 \geqslant 3, x_2 \geqslant 2, x_3 \geqslant 4, x_4 \geqslant 6, x_5 \geqslant 0$ 的整数解的个数.

例 10

求不定方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=20$$

满足 $x_1 \geqslant 3, x_2 \geqslant 2, x_3 \geqslant 4, x_4 \geqslant 6, x_5 \geqslant 0$ 的整数解的个数.

解 本问题相当于把 20 个相同的球放入 5 个不同的盒子中, 盒子的容量集合分别为

$$M_1=\{3,4,\cdots\} \qquad M_2=\{2,3,\cdots\} \qquad M_3=\{4,5,\cdots\}$$
$$M_4=\{6,7,\cdots\} \qquad M_5=\{0,1,2,\cdots\}$$

该组合型分配问题的生成函数为

$$\begin{aligned}
&\left(x^3+x^4+\cdots\right)\left(x^2+x^3+\cdots\right)\left(x^4+x^5+\cdots\right)\\
&\cdot\left(x^6+x^7+\cdots\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right)\\
=&x^{15}\cdot\left(1+x+x^2+\cdots\right)^5=x^{15}\cdot\frac{1}{(1-x)^5}\\
=&x^{15}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{n}x^n
\end{aligned}$$

其中, x^{20} 的系数 $\binom{5+4}{5}=126$ 就是满足条件的整数解的个数.

例 11

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \le x_1 \le 5, \quad -2 \le x_2 \le 4,$$
$$0 \le x_3 \le 5, \quad 3 \le x_4 \le 9$$

的整数解个数.

例 11

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \le x_1 \le 5, \quad -2 \le x_2 \le 4,$$
$$0 \le x_3 \le 5, \quad 3 \le x_4 \le 9$$

的整数解个数.

解 令

$$y_1 = x_1 - 1,\ y_2 = x_2 + 2,\ y_3 = x_3,\ y_4 = x_4 - 3,$$

则方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

相应的条件即

$$0 \le y_1 \le 4,\ 0 \le y_2 \le 6,\ 0 \le y_3 \le 5,\ 0 \le y_4 \le 6.$$

对应的生成函数为

$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\\
&\quad\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2\\
=&\frac{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)^2}{(1-x)^4}\\
=&(1-x^5-x^6-2x^7+x^{11}+2x^{12}+2x^{13}+x^{14}-2x^{18}-x^{19}-x^{20}+x^{25})\\
&\quad\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k
\end{aligned}
$$

所以它的 x^{16} 的系数为

$$
\begin{aligned}
&\binom{16+3}{3}-\binom{11+3}{3}-\binom{10+3}{3}-2\binom{9+3}{3}+\binom{5+3}{3}\\
&\quad+2\binom{4+3}{3}+2\binom{3+3}{3}+\binom{2+3}{3}\\
=&\,969-364-286-2\times 220+56+2\times 35+2\times 20+10\\
=&\,55.
\end{aligned}
$$

例 12

设有 2 个红球、1 个黑球、3 个白球, 若每次从中任取 3 个球, 有多少种不同的取法?

例 12

设有 2 个红球、1 个黑球、3 个白球, 若每次从中任取 3 个球, 有多少种不同的取法?

解 方法 1:

$$
\begin{aligned}
&\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1+x+x^2+x^3\right)\\
=&\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x}\\
=&\left(1-x^2-x^3+x^5\right)\left(1-x^4\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k
\end{aligned}
$$

x^3 的系数为 $\binom{5}{2}-\binom{3}{2}-\binom{2}{2}=10-3-1=6$

方法 2：$(x_1,x_2,x_3)=(0,0,3)(0,1,2)(1,0,2)(1,1,1)(2,0,1)(2,1,0)$

例 13

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量?（0 克不计入）

例 13

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? (0 克不计入)

解 $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)=1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

例 13

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? (0 克不计入)

解 $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)=1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

例 14

用 1 分、2 分、3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案.

例 13

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? (0 克不计入)

解 $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)=1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

例 14

用 1 分、2 分、3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案.

解 $1+1+1+1 \quad 1+1+2 \quad 1+3 \quad 2+2$, 故四种.

例 15

求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有 n 个水果的不同水果篮的个数, 其中要求苹果有偶数个（包括 0 个）, 香蕉有 5 的倍数个（包括 0 个）, 橘子不超过 4 个, 梨最多 1 个.

例 15

求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有 n 个水果的不同水果篮的个数, 其中要求苹果有偶数个（包括 0 个），香蕉有 5 的倍数个（包括 0 个），橘子不超过 4 个, 梨最多 1 个.

解

$$
\begin{aligned}
&\left(1+x^{2}+\cdots+x^{2n}+\cdots\right)\left(1+x^{5}+\cdots+x^{5n}+\cdots\right)\\
&\quad\cdot\left(1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}\right)(1+x)\\
=&\frac{1}{1-x^{2}}\cdot\frac{1}{1-x^{5}}\cdot\frac{1-x^{5}}{1-x}\cdot(1+x)\\
=&\frac{1}{(1-x)^{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{k}
\end{aligned}
$$

故所求为 $n+1$ 种.

例 16

求不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 满足条件 $x_1 \leqslant 8, x_2 \leqslant 8,\ x_3 \leqslant 8$ 的非负整数解的个数.

例 16

求不定方程 $x_1+x_2+x_3=14$ 满足条件 $x_1\leqslant 8, x_2\leqslant 8,\ x_3\leqslant 8$ 的非负整数解的个数.

解 设所求为 N, 则 N 是

$$A(t)=\left(1+t+t^2+\cdots+t^8\right)^3$$

展开式中 t^{14} 的系数, 而

$$\begin{aligned}A(t)&=\left(\frac{1-t^9}{1-t}\right)^3=\left(1-t^9\right)^3(1-t)^{-3}\\&=\left(1-3t^9+3t^{18}-t^{27}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}t^k,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}N&=\binom{14+2}{2}-3\binom{5+2}{2}\\&=\binom{16}{2}-3\binom{7}{2}=120-3\times 21=57\end{aligned}$$

例 17

求方程 $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21$ 的正整数解的个数.

例 17

求方程 $x_1+2x_2+4x_3=21$ 的正整数解的个数.

解 设所求为 N, 故 N 是

$$A(t)=\left(t+t^2+\cdots\right)\cdot\left(t^2+t^4+t^6+\cdots\right).$$
$$\left(t^4+t^8+t^{12}+\cdots\right)$$

展开式中 t^{21} 的系数, 而

$$\begin{aligned}A(t)&=t\,(1-t)^{-1}\cdot t^2\left(1-t^2\right)^{-1}\cdot t^4\left(1-t^4\right)^{-1}\\&=t^7\,(1+t)\left(1-t^2\right)^{-2}\left(1-t^4\right)^{-1}=t^7\,(1+t)\left(1+t^2\right)^2\left(1-t^4\right)^{-3}\\&=\left(t^7+t^8+2t^9+2t^{10}+t^{11}+t^{12}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}t^{4k}.\end{aligned}$$

且只有 $9+4k=21$ 有整数解，解为 $k=3$, 所以

$$N=2\cdot\binom{3+2}{2}=20$$

例 18

求由直线 $x+3y=12$, 直线 $x=0$ 及直线 $y=0$ 所围成的三角形（包括边界）的整点（横坐标和纵坐标均是整数的点）的个数.

例 18

求由直线 $x+3y=12$, 直线 $x=0$ 及直线 $y=0$ 所围成的三角形（包括边界）的整点（横坐标和纵坐标均是整数的点）的个数.

解 设所求为 N, 则 N 是满足条件 $x+3y\leqslant 12$ 的非负整数率的个数. 令 $z=12-x-3y$, 如果 $x+3y\leqslant 12$, 则 $z\geqslant 0$ 且 $x+3y+z=12$, 所以 N 是方程 $x+3y+z=12$ 的非负整数解的个数, 故 N 是

$$A(t)=\left(1+t+t^2+\cdots\right)^2\left(1+t^3+t^6+\cdots\right)$$

展开式中 t^{12} 的系数, 而

$$\begin{aligned}A(t)&=(1-t)^{-2}\left(1-t^3\right)^{-1}\\&=\left(1+t+t^2\right)^2\left(1-t^3\right)^{-3}\\&=\left(1+2t+3t^2+2t^3+t^4\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}t^{3k},\end{aligned}$$

所以

$$N=\binom{4+2}{2}+2\binom{3+2}{2}=15+20=35.$$

例 19

求平面直角坐标系 Oxy 中, 以 $A(5,0),B(0,5),C(-5,0),D(0,-5)$ 为顶点的正方形（包括边界）的整点的个数.

例 19

求平面直角坐标系 Oxy 中, 以 $A(5,0), B(0,5), C(-5,0), D(0,-5)$ 为顶点的正方形（包括边界）的整点的个数.

解 设所求为 N. 过点 $A(5,0)$ 和点 $B(0,5)$ 的直线方程为 $x+ y = 5$.

由对称性知, 点 (x, y) 是该正方形内的一个整点的充分必要条件是

$$|x| + |y| \leqslant 5$$

且 x 和 y 均为整数.

所以 N 是方程

$$|x| + |y| + z = 5$$

满足条件 $z \geqslant 0$ 的整数解的个数.

因此, N 是

$$A(t)=\left(1+2t+2t^2+2t^3+\cdots\right)^2\left(1+t+t^2+t^3+\cdots\right)$$

展开式中 t^5 的系数, 而

$$\begin{aligned}A(t)&=\left(2(1-t)^{-1}-1\right)^2(1-t)^{-1}\\&=(1+t)^2(1-t)^{-3}\\&=\left(1+2t+t^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}t^k,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}N&=\binom{5+2}{2}+2\binom{4+2}{2}+\binom{3+2}{2}\\&=\binom{7}{2}+2\cdot\binom{6}{2}+\binom{5}{2}\\&=21+30+10=61.\end{aligned}$$

生成函数

排列数的指数型生成函数

n 元集合的 k 排列数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式.

排列数的指数型生成函数

n 元集合的 k 排列数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式. 但如果把基底函数 x^k 改换成 $\frac{x^k}{k!}$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{x^k}{k!} = (1+x)^n,$$

这启发人们引入指数型生成函数的概念.

数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的指数型生成函数 定义为形式幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

因为 $[x^k]f(x) = \frac{a_k}{k!}$, 所以

$$a_k = k! \cdot [x^k]f(x).$$

定理 6.1

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列中，若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right).$$

证明 将和积式展开，得

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right)=\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k\\ k_i\in M_i,i=1,2,\ldots,n}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\right)\frac{x^k}{k!}.$$

只要证明展开式中 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数就是满足限定条件的 k 可重排列数即可.

- 首先，对于集合 M 的满足限定条件的每个 k 可重排列，设其中 a_i 出现 k_i 次 $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 就是方程

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=k\quad(k_i\in M_i,i=1,2,\cdots,n)$$

的一个解.

定理 5.1

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列中，若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right).$$

- 其次，方程 $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$ 的每个解 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 都对应一类 k 可重排列，此类中的每一个 k 可重排列里，元素 a_i 出现 k_i 次.
- 而此类 k 可重排列的个数就是多重集合 $\{k_1\cdot a_1,k_2\cdot a_2,\cdots,k_n\cdot a_n\}$ 的全排列的个数，即 $\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$. 可见，与解 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 相对应的 k 可重排列有 $\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$ 个.
- 再者，方程 $k_1+k_2+\cdots+k_n=k$ 的不同解 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 所对应的不同 k 可重排列类中没有相同的排列.
- 因此，由加法原则，集合 M 满足给定条件的 k 可重排列的总个数为

$$\sum_{\substack{k_1+k_2,\cdots+k_n=k\\(k_1\in M_i,i=1,2,\cdots,n)}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}.$$

特别地, 数列 $\{1, 1, \cdots\}$ 的指数型生成函数 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 具有与指数函数相似的性质:

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

这是因为

$$\begin{aligned}
e^x e^y &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{y}{x}\right)^j x^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{y}{x}\right)^k \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= e^{x+y}.
\end{aligned}$$

特别有

$$e^x e^{-x} = e^0 = 1,$$

从而

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

例 20

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列数序列 $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)=(e^x)^n=e^{nx}=\sum_{k=0}^{\infty}n^k\frac{x^k}{k!}$$

从而

$$b_k=n^k$$

例 21

由数字 $0, 1, 2, 3$ 组成的长为 k 的序列中, 要求含有偶数个 0 , 问这样的序列有多少个?

例 21

由数字 $0,1,2,3$ 组成的长为 k 的序列中，要求含有偶数个 0，问这样的序列有多少个？

解 根据题意，有

$$
\begin{aligned}
M_1 = M_2 = M_3 &= \{0,1,2,\cdots\} \\
M_0 &= \{0,2,4,\cdots\}
\end{aligned}
$$

由定理 5.5.1 知，该排列数的指数型生成函数为

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right) \\
=&\left(e^x\right)^3\cdot\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right) \\
=&\frac{1}{2}\left(e^{4x}+e^{2x}\right) \\
=&\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}4^k x^k+\sum_{k=0}^{\infty}4^k x^k\right)
\end{aligned}
$$

所以 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数为

$$
b_k=\frac{1}{2}\left(4^k+2^k\right).
$$

例 22

由 $1, 2, 3, 4$ 能组成多少个 1 出现两次或三次, 2 最多出现一次, 4 出现偶数次的五位数?

例 22

由 $1,2,3,4$ 能组成多少个 1 出现两次或三次, 2 最多出现一次, 4 出现偶数次的五位数?

解 根据题意, 有

$$M_1 = \{2,3\} \qquad M_3 = \{0,1,2,\cdots\}$$
$$M_2 = \{0,1\} \qquad M_4 = \{0,2,4,\cdots\}$$

由定理 $5.5.1$ 知, 该排列数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\\
&=\frac{x^2}{6}\left(3+4x+x^2\right)e^x\frac{e^x+e^{-x}}{2}\\
&=\frac{x^2}{12}\left(3+4x+x^2\right)\left(e^{2x}+1\right).
\end{aligned}$$

所以 $\frac{x^5}{5!}$ 的系数为

$$5!\times\frac{1}{12}\left(3\times\frac{2^3}{3!}+4\times\frac{2^2}{2!}+1\times\frac{2^1}{1!}\right)=140,$$

即满足题意的五位数有 140 个.

例 23

确定每位数字都是奇数, 且 1 和 3 出现偶数次的 n 位数的个数.

例 23

确定每位数字都是奇数，且 1 和 3 出现偶数次的 n 位数的个数.

解

$$
\begin{aligned}
& \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3 \\
= & \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 \cdot e^{3x} \\
= & \frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right) \cdot e^{3x} \\
= & \frac{1}{4}\left(e^{5x}+2e^{3x}+e^x\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 5^k \frac{x^k}{k!}+2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \\
= & \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty}\left(5^k+2 \cdot 3^k+1\right) \frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

因此，它的 $\frac{x^n}{n!}$ 系数为

$$
\frac{1}{4}\left(5^n+2 \cdot 3^n+1\right).
$$

例 24

证明：贝尔数 $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$（$S(n,k)$ 为第二类斯特林数）的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp\{e^x - 1\}.$$

例 24

证明：贝尔数 $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$（$S(n,k)$ 为第二类斯特林数）的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp\{e^x - 1\}.$$

解 设 $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$，由贝尔数递推关系：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \quad (B_0 = 1).$$

对 $B(x)$ 求导：

$$B'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}.$$

交换求和顺序，利用 $\binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} = \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{x^n}{(n-k)!}$，令 $m = n - k$：

$$B'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = B(x) \cdot e^x.$$

例 25

证明：贝尔数 $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$（$S(n,k)$ 为第二类斯特林数）的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp\{e^x - 1\}.$$

得到微分方程：

$$\frac{d(B(x))}{dx} = B(x) \cdot e^x.$$

分离变量并积分：

$$\frac{d(B(x))}{B(x)} = e^x dx \implies \ln|B(x)| = e^x + C \implies B(x) = \exp\{e^x + C\}.$$

代入初始条件 $x = 0$ 时 $B(0) = B_0 = 1$：

$$1 = \exp\{1 + C\} \implies C = -1.$$

故 $B(x) = \exp\{e^x - 1\}$，得证.

注记：贝尔数的另一种表达式

由 $B(x)=e^{e^x-1}=\frac{1}{e}e^{e^x}$，展开得：

$$B(x)=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{kx}}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

对比生成函数定义，贝尔数可表示为：

$$B_n=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

例 26

求 $M=\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列中每个 a_i 至少出现一次的排列数 P_k 的指数型生成函数.

例 26

求 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列中每个 a_i 至少出现一次的排列数 P_k 的指数型生成函数.

解 根据题意, 有

$$M_i=\{1,2,3,\cdots\}\qquad(1\leq i\leq n).$$

由定理 5.5.1 知, 排列数序列 $\{P_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^n&=(e^x-1)^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}e^{(n-i)x}\\&=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-i)^kx^k}{k!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k\right)\frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

所以

$$P_k=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k\quad(k\geq n).$$

例 27

用红、白、蓝 3 种颜色给 $1 \times n$ 棋盘着色, 要求白色方格数是偶数, 问有多少种着色方案?

例 27

用红、白、蓝 3 种颜色给 $1 \times n$ 棋盘着色, 要求白色方格数是偶数, 问有多少种着色方案?

解

$$M_r = M_b = \{0, 1, 2, \cdots\},$$
$$M_w = \{0, 2, 4, \cdots\}.$$

于是, 分配方案数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}
&\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \\
=& e^{2x} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^x\right) \\
=& \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(3x)^n}{n!} + \frac{x^n}{n!}\right).
\end{aligned}$$

因此, $\frac{x^n}{n!}$ 的系数 $\frac{1}{2}(3^n + 1)$ 就是满足要求的着色方案数.

命题 6.2

若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell+1} \frac{x^\ell}{\ell!},$$

即 $\{a_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f'(x)$.

命题 6.3

若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则 $\{a_{k+i}\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f^{(i)}(x)$.

命题 6.4

若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则 $\{ka_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} ka_k \frac{x^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{(k-1)!} = x\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= xf'(x) = x\frac{d}{dx}(f(x)).\end{aligned}$$

命题 6.5

若 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\frac{x^k}{k!}$ 且 $P(k)$ 是一个关于 k 的多项式, 则 $\{P(k)\,a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$P\left(x\frac{d}{dx}\right)(f(x)).$$

命题 6.6

若 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\frac{x^k}{k!}$ 且 $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\frac{x^k}{k!}$, 则

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\frac{x^i}{j!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i!}\cdot\frac{b_{n-i}}{(n-i)!}\right)\frac{x^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{i}a_ib_{n-i}\frac{x^n}{n!},
\end{aligned}$$

即 $\left\{\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_ib_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f(x)g(x)$.

例 28

置换 $\sigma \in S_n$ 称为错位排列，如果对任意 $1 \le i \le n$，均有 $\sigma(i) \neq i$. 令 d_n 表示 S_n 中错位排列的总数. 求 d_n 的指数型生成函数 $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$.

由组合解释得

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

由于 $\{1\}_{n\ge 0}$ 的指数型生成函数为 e^x，

而 $\{n!\}_{n\ge 0}$ 的指数型生成函数为

$$\sum_{n\ge 0} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n\ge 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

由前面的递推关系可得

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x),$$

即

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

例 (错排数)

置换 $\sigma \in S_n$ 称为错位排列, 如果对任意 $1 \le i \le n$, 均有 $\sigma(i) \neq i$. 令 d_n 表示 S_n 中错位排列的总数. 求 d_n 的指数型生成函数 $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$.

也可以利用错位排列数 d_n 的另外递推关系求解.

考虑 $\sigma \in S_{n+1}$ 的第一位 $\sigma(n+1)$ 的取值, 它有 n 种可能.

得到递推关系 (P84)

$$d_{n+1} = n\left(d_n + d_{n-1}\right).$$

所以

$$D'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(n-1)!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} x^n = xD'(x) + xD(x),$$

或

$$\frac{D'(x)}{D(x)} = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}.$$

从而
$$D(x)=\frac{1}{1-x}e^{-x+c}.$$
当 $x=0$ 时, $D(x)=d_0=1$, 得到 $c=0$, 这也求出
$$D(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$
展开得到
$$D(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}=\frac{1}{1-x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^i=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right)x^n$$
所以
$$d_n=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$
这表明, 在 S_n 中任取一个置换, 它是错位排列的概率为 $\frac{d_n}{n!}$, 其极限是 $e^{-1}(n\to\infty)$. 这真是个奇妙但并不显然的事实.

拓展

普通型生成函数

令 a_n 表示在一个 n-集合上完成某个任务的方法数, $a_0 = 0$.

对于 $n \geq 1$, 令 b_n 表示将区间集合 $[n]$ 划分成任意的非空子区间, 然后在这些非空子区间上完成前面任务的方法数, $b_0 = 1$.

设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ 的普通型生成函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 证明

$$b(x) = \frac{1}{1 - f(x)}.$$

指数型生成函数

令 a_n 表示在一个 n-集合上完成某个任务的方法数, $a_0 = 0$.

对于 $n \geq 1$, 令 b_n 表示将 n-集合 $[n]$ 划分成任意的非空子集, 然后在这些非空子集上完成前面任务的方法数, $b_0 = 1$.

设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ 的指数型生成函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 证明

$$b(x) \quad f(x)$$