组 合 数 学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

基本计数问题

加法原则

以下假设 A 和 B 是两类不同的、互不关联的事件.

定理 1.1

设事件 A 有 m 种选取方式, 事件 B 有 n 种选取方式, 则选 A 或 B 共有 $m+n$ 种方式.

加法原则

以下假设 A 和 B 是两类不同的、互不关联的事件.

定理 1.1

设事件 A 有 m 种选取方式, 事件 B 有 n 种选取方式, 则选 A 或 B 共有 $m+n$ 种方式.

用集合的语言可将加法原则叙述成以下定理:

定理 1.2

设 A, B 为有限集, $A \cap B = \varnothing$, 则

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

例 1.1

从北京到上海可以乘飞机 *(3 种方案)*, 或者火车 *(5 种方案)*.

问从北京到上海共几种方案?

例 1.2

假定要选一位数学教师或数学类专业的学生作为校委会的代表. 如果有 37 位数学教师和 83 位数学类专业的学生, 那么有多少种不同的方式来挑选这个代表?

例 1.3

一个学生可以从三个表中的一个表中选择一个创新研究课题, 这三个表分别包含 23,15 和 19 个课题, 那么学生可以选择的课题共有多少种?

例 1.2

假定要选一位数学教师或数学类专业的学生作为校委会的代表. 如果有 *37* 位数学教师和 *83* 位数学类专业的学生, 那么有多少种不同的方式来挑选这个代表?

解 完成第一项任务: 选一位数学教师, 有 37 种方式;
完成第二项任务: 选一位数学类专业的学生, 有 83 种方式.
所以, 有 $37 + 83 = 120$ 种不同的方式来挑选这个代表.

例 1.3

一个学生可以从三个表中的一个表中选择一个创新研究课题, 这三个表分别包含 *23,15* 和 *19* 个课题, 那么学生可以选择的课题共有多少种?

解 学生从第一个、第二个和第三个表中选择课题的方式分别有 23 种、15 种和 19 种. 所以, 学生可选择的课题共有 $23 + 15 + 19 = 57$ 种.

乘法原则

定理 1.3

设事件 A 有 m 种选取方式, 事件 B 有 n 种选取方式, 那么选取 A 以后再选取 B 共有 $m \cdot n$ 种方式.

乘法原则

定理 1.3

设事件 A 有 m 种选取方式, 事件 B 有 n 种选取方式, 那么选取 A 以后再选取 B 共有 $m \cdot n$ 种方式.

用集合论的语言可将上述乘法原则叙述成如下的定理:

定理 1.4

设 A, B 是两个有限集合, $|A| = m$, $|B| = n$, 则

$$|A \times B| = |A| \times |B| = m \cdot n.$$

例 1.4

从北京到上海有 2 条路线, 从上海到深圳有 5 条路线.
问从北京出发经由上海到深圳会有多少种路线?

例 1.5

求 1400 的不同的正因子个数.

例 1.4

从北京到上海有 *2* 条路线, 从上海到深圳有 *5* 条路线.
问从北京出发经由上海到深圳会有多少种路线?

解 $2 \times 5 = 10.$

例 1.5

求 *1400* 的不同的正因子个数.

解 $1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7^1$
正因子为:$2^i \times 5^j \times 7^k$, 其中 $0 \le i \le 3, 0 \le j \le 2, 0 \le k \le 1$
共计 $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$

例 1.6

在 *30* 名男生、*10* 名女生中选一男一女作为班级代表, 问有多少种选择方法？

例 1.7

有多少个不同的 *7* 位二进制串？

例 1.6

在 *30* 名男生、*10* 名女生中选一男一女作为班级代表，问有多少种选择方法？

解 此任务可分解为先选一名男生，再选一位女生，于是共有 $30 \times 10 = 300$ 种选择方法.

例 1.7

有多少个不同的 *7* 位二进制串？

解 一个二进制串每位可以是 0 或 1，有两种选择方式，因此 7 位二进制串共有 $2^7 = 128$ 个.

例 1.8

在 0 和 10000 之间有多少个整数恰好有一位数字是 5？

例 1.8

在 *0* 和 *10000* 之间有多少个整数恰好有一位数字是 *5*？

解 通过添加 0，把所有的数都看成是四位数，例如 6=0006.

假如第 i 位数是 5，则有 $9\times 9\times 9=729$ 种可能.

共计 $4\times 729=2916$

例 1.9

在 *1000* 和 *9999* 之间各位数字不同的奇数有多少个？

例 1.9

在 *1000* 和 *9999* 之间各位数字不同的奇数有多少个？

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

例 1.9

在 *1000* 和 *9999* 之间各位数字不同的奇数有多少个？

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序:

例 1.9

在 *1000* 和 *9999* 之间各位数字不同的奇数有多少个？

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序: 个位 $\to$ 千位 $\to$ 百位 $\to$ 十位

例 1.9

在 *1000* 和 *9999* 之间各位数字不同的奇数有多少个？

数位	千位	百位	十位	个位
选择范围	1-9	0-9	0-9	13579

选取顺序: 个位 $\to$ 千位 $\to$ 百位 $\to$ 十位

答案: $5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240$

例 1.10

从一个 m 元集合 A 到一个 n 元集合 B 存在多少个映射？

例 1.11

从一个 m 元集合 A 到一个 n 元集合 B 存在多少个单射？

例 1.10

从一个 m 元集合 A 到一个 n 元集合 B 存在多少个映射？

解 对于集合 A 中的全部 m 个元素，其中每一个元素在 B 中对应的像都有 n 种选择．由于每个元素的选择是相互独立的，根据**乘法原理**，从 A 到 B 的映射总数即为：$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m\text{ 个}} = n^m$

例 1.11

从一个 m 元集合 A 到一个 n 元集合 B 存在多少个单射？

解 首先当 $m > n$ 时，不存在 $A \to B$ 的单射．当 $m \leq n$ 时：我们可以按顺序为 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 中的元素在 B 中选择不同的像．

- 为 a_1 选择像 $f(a_1)$，有 n 种可能；
- 由于单射要求 $f(a_2) \neq f(a_1)$，为 a_2 选择像时，只剩下 $n-1$ 种可能；
- 以此类推，为第 k 个元素 a_k 选择像时，由于其不能与前面 $k-1$ 个元素的像相同，故有 $n-(k-1) = n-k+1$ 种可能．

根据**乘法原理**，从 A 到 B 的单射总数为：$n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)$

例 1.12

已知某个计算机系统的每个用户有一个 6 到 8 个字符构成的登录密码，其中每个字符是一个字母或者数字，字母不区分大小写，且每个密码必须至少包含一个数字，问有多少个可能的密码？

例 1.12

已知某个计算机系统的每个用户有一个 *6* 到 *8* 个字符构成的登录密码，其中每个字符是一个字母或者数字，字母不区分大小写，且每个密码必须至少包含一个数字，问有多少个可能的密码？

解 首先，我们明确密码的构成规则:

1. 密码长度可以是 6、7 或 8 位.
2. 密码字符由字母（26 个）和数字（10 个）组成.
3. **密码必须包含至少一个数字**.

根据**加法原理**，可能的密码总数 P 是这三种长度的有效密码数量之和:

$$P = P_6 + P_7 + P_8$$

其中 P_k 表示长度为 k 的有效密码数量.

接下来，我们对任意长度 k 的密码数 P_k 进行计算. 这里使用**或减法原理**，即:

$$P_k = (\text{长度为}k\text{ 的任意字符串总数}) - (\text{长度为}k\text{ 的无效字符串数})$$

无效字符串指“完全由字母构成，不含任何数字”的字符串.

- **计算 P_6 (6 位密码):** 可用字符共 $26+10=36$ 个. 任意组成的 6 位字符串总数为 36^6. 完全由 26 个字母组成的 6 位字符串（无效密码）总数为 26^6. 因此, 有效的 6 位密码数 $P_6=36^6-26^6$.
- **计算 P_7 和 P_8:** 同理, 有效的 7 位密码数 $P_7=36^7-26^7$, 有效的 8 位密码数 $P_8=36^8-26^8$.

最终汇总: 将上述结果代入总公式, 可得:

$$P=(36^6-26^6)+(36^7-26^7)+(36^8-26^8)=36^6+36^7+36^8-(26^6+26^7+26^8)$$

基本计数问题

集合的排列

定义 2.1

给定某个含有不同的元素集合 S, 我们把它的元素排成一个线性序, 使得每个元素恰好出现一次, 叫做该集合的一个排列 *(permutation)*.

以 $[n]$ 表示 n 个正整数构成的集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$, 那么 $[n]$ 上的一个排列可以看成是 $[n]$ 到自身的一个双射.

对于一个排列, 我们可以用一行

$$\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$$

来表示, 其中 π_i 表示 i 的像.

我们来看一下 n 元集合的排列的个数.

定理 2.2

n 元集合上全部排列的个数为

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!.$$

注意, 为方便起见, 我们令 $0! = 1$.

例 2.1

集合 $[3]$ 上的排列个数为 $3! = 6$, 它们分别为

$$1\,2\,3,\quad 1\,3\,2,\quad 2\,1\,3,\quad 2\,3\,1,\quad 3\,1\,2,\quad 3\,2\,1.$$

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列.

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列.

例 2.2

集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ 上的 1-排列为

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列.

例 2.2

集合 $[3]=\{1,2,3\}$ 上的 1-排列为

$$1,\quad 2,\quad 3,$$

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列.

例 2.2

集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ 上的 1-排列为

$$1,\quad 2,\quad 3,$$

2-排列为

定义 2.3

令 r 为正整数，从含有 n 个元素的集合 S 中取出 r 个元素排成一个线性序，叫做一个r-排列.

例 2.2

集合 $[3]=\{1,2,3\}$ 上的 1-排列为

$$1,\quad 2,\quad 3,$$

2-排列为

$$12,\quad 13,\quad 21,\quad 23,\quad 31,\quad 32.$$

用 $P(n,r)$ 表示 n 元集合的 r-排列的数目.

如果 $r > n$, 则 $P(n,r) = 0$.

定理 2.4

对于正整数 n 和 r, $r \leq n$, 有

$$P(n,r) = n\,(n-1)\cdots(n-r+1).$$

记 $(n)_r = n\,(n-1)\cdots(n-r+1)$, 称为 n 的 (r 阶)下阶乘.

例 2.3

将 a, b, c, d, e, f 进行排列, 问:

(1) 使得字母 b 正好在字母 e 左邻的排列有多少种?

(2) 使得字母 b 正好在字母 e 左边的排列有多少种?

例 2.3

将 a, b, c, d, e, f 进行排列, 问:

(1) 使得字母 b 正好在字母 e 左邻的排列有多少种？

(2) 使得字母 b 正好在字母 e 左边的排列有多少种？

例 2.4

从集合 $\{1, 2, \ldots, 9\}$ 中取出 7 个不同的数字组成 7 位数，要求 5 和 6 不相邻，问有多少不同的种？

例 2.4

从集合 $\{1,2,\ldots,9\}$ 中取出 *7* 个不同的数字组成 *7* 位数，要求 *5* 和 *6* 不相邻，问有多少不同的种？

所有的 7 位数 $P(9,7)=\frac{9!}{2!}=181440$

5 和 6 相继出现的 7 位数 $P(7,5)\times P(6,1)\times P(2,1)=\frac{7!}{2!}\times 6\times 2=30240$

共计 181440−30240=151200

圆排列

从 n 个不同的元素中取出 r 个元素排成一个圆环，按逆时针看去，完全相同这被认为是同一个**圆排列**.

定理 2.5

n 元集合的 r-圆排列的个数为

$$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}.$$

特别地，n 元集合的圆排列是 $(n-1)!$.

例 2.5

10 个人围坐一圈，其中有两人不愿挨着坐，问有多少种旋转排列方式？

圆排列

从 n 个不同的元素中取出 r 个元素排成一个圆环，按逆时针看去，完全相同这被认为是同一个**圆排列**.

定理 2.5

n 元集合的 r-圆排列的个数为

$$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}.$$

特别地，n 元集合的圆排列是 $(n-1)!$.

例 2.5

10 个人围坐一圈，其中有两人不愿挨着坐，问有多少种旋转排列方式？

答案: $(10-1)! - 2 \times (9-1)! = 282240.$

例 2.6

7 个男生和 3 个女生聚餐，围坐在圆桌旁，任意两个女生不相邻.

问有多少种旋转排列方式？

例 2.6

7 个男生和 *3* 个女生聚餐, 围坐在圆桌旁, 任意两个女生不相邻.
问有多少种旋转排列方式?

答案: $(7-1)! \times P(7,3) = 151200.$

例 2.7

用 7 颗不同的珠子可以做成多少种不同的项链？

例 2.7

用 *7* 颗不同的珠子可以做成多少种不同的项链？

答案: $\frac{1}{2}(7-1)! = 360$

例 2.8

有 4 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡．不同的取法有多少种？

例 2.8

有 *4* 位同学各写一张贺卡，放在一起，然后每人从中取出一张，但不能取自己写的那一张贺卡. 不同的取法有多少种？

答案: $3! + 3 = 9$.

提示:(错排问题) 把 4 位同学分别记为 1,2,3,4, 假设第 i 位同学拿到了第 π_i 位同学写的贺卡，则 $\pi_i \neq i$ 对于所有的 $1 \leq i \leq 4$. 于是，所求问题可以转化为求排列满足 $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$，其中 $\pi_i \neq i$ 对于 $1 \leq i \leq 4$ 的个数.

然后，再考虑排列的圈表示，即求圈表示中不含 1-圈的排列的个数.

例 2.9 (ménage 问题)

有 4 对夫妇参加宴会围圆桌，要求男女相邻并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式？

例 2.9 (ménage 问题)

有 4 对夫妇参加宴会围圆桌，要求男女相邻并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式？

答案:$(4-1)! \times 2 = 12.$

提示：先让女士就座，就座方式有 $(4-1)! = 6$ 种，然后再让男士就座，只有 2 种可能.

集合的组合

定义 2.6

n 元集合的k-组合是指从 S 中取出 k 个元素的一种无序选择,
也可以看作是 S 的一个 k 元子集.

例 2.10

若 $S = \{a, b, c, d\}$, 则

$$\{a, b\},\ \{a, c\},\ \{a, d\},\ \{b, c\},\ \{b, d\},\ \{c, d\}$$

是 S 的所有 2-组合.

用 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k-组合的个数, 读作“n 取 k”.

用 $\binom{n}{k}$ 表示 n 元集合的 k-组合的个数，读作 “n 取 k”．

显然，当 $k>n$ 时，$\binom{n}{k}=0$.

定理 2.7

若 $0\le k\le n$，则

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\overset{why?}{=}\binom{n}{k}\cdot k!$$

例 2.11

系里欲将 *6* 名保送研究生推荐给 *3* 个单位, 每个单位 *2* 名, 问有多少种方案?

例 2.12

从 $1, 2, \cdots, 100$ 中选出两个不同的数, 使其和为偶数, 问有多少种取法?

例 2.11

系里欲将 *6* 名保送研究生推荐给 *3* 个单位，每个单位 *2* 名，问有多少种方案？

例 2.12

从 $1, 2, \cdots, 100$ 中选出两个不同的数，使其和为偶数，问有多少种取法？

例 2.13

在平面上给出 25 个点，任意三点不共线，这些点可以确定多少条直线？确定多少个三角形？

例 2.14

在一个凸 $n(n \geqslant 4)$ 边形 C 的内部，如果没有三条对角线共点，求其全部对角线在 C 内部的交点的个数.

例 2.13

在平面上给出 25 个点，任意三点不共线，这些点可以确定多少条直线？确定多少个三角形？

两点确定一条直线 $\binom{25}{2} = 300$,

三点确定一个三角形 $\binom{25}{3} = 2300$.

例 2.14

在一个凸 $n(n \geqslant 4)$ 边形 C 的内部，如果没有三条对角线共点，求其全部对角线在 C 内部的交点的个数.

四点确定一个四边形 $\binom{n}{4}$.

例 2.15

如果要求每个“单词”包含 $3, 4$ 或 5 个元音字母, 那么用 26 个英文字母可以构造多少个长度为 8 的“单词”? (字母使用次数无限制)

例如单词 *Andee* 使用了 3 个元音字母.

例 2.15

如果要求每个 “单词” 包含 *3, 4* 或 *5* 个元音字母, 那么用 *26* 个英文字母可以构造多少个长度为 *8* 的 “单词”? (字母使用次数无限制)

例如单词 *Andee* 使用了 *3* 个元音字母.

3 元音单词: $\binom{8}{3} \times 5^3 \times 21^5$,

4 元音单词: $\binom{8}{4} \times 5^4 \times 21^4$,

5 元音单词: $\binom{8}{5} \times 5^5 \times 21^3$,

共计:

$$\binom{8}{3}5^3 21^5 + \binom{8}{4}5^4 21^4 + \binom{8}{5}5^5 21^3.$$

例 2.16

一个俱乐部有 10 名男成员和 12 名女成员, 现从中选出 4 人组成一个委员会, 若要求:

(1) 至少要有 2 名女成员;

(2) 除 (1) 外, 又要求 A 先生和 B 女士不能同时入选.

分别求出有多少种不同的选法.

例 2.16

一个俱乐部有 *10* 名男成员和 *12* 名女成员，现从中选出 *4* 人组成一个委员会，若要求：

(1) 至少要有 *2* 名女成员；

(2) 除 *(1)* 外，又要求 A 先生和 B 女士不能同时入选.

分别求出有多少种不同的选法.

解 (1) 设入选的女成员有 i 名，那么入选的男成员就有 $4-i$ 名，其选法数为

$$\binom{12}{i}\binom{10}{4-i}.$$

又 $2 \leqslant i \leqslant 4$，所以选法总数为

$$\binom{12}{2}\binom{10}{2}+\binom{12}{3}\binom{10}{1}+\binom{12}{4}\binom{10}{0}=5665.$$

(2) 从 (1) 中减去 A 先生和 B 女士同时入选的可能情况, 即为所求选法.

若 A 先生和 B 女士同时入选, 则另两名成员应从 9 名男士和 11 名女士中选出, 且至少再选 1 名女士（即总共至少 2 名女成员, 其中已含 B）. 其选法数为

$$\binom{11}{2}\binom{9}{0}+\binom{11}{1}\binom{9}{1}=55+99=154.$$

因此, 共有 $5665-154=5511$ 种选法.

另法: 总方案数 $=A,B$ 都不入选 $+$ A 入选 B 不入选 $+$ A 不入选 B 入选, 即

$$\sum_{i=2}^{4}\binom{11}{i}\binom{9}{4-i}+\sum_{i=2}^{3}\binom{11}{i}\binom{9}{3-i}+\sum_{i=1}^{3}\binom{11}{i}\binom{9}{3-i}.$$

定义 2.8

不相邻的 r–组合是指从序列 $A=\{1,2,\ldots,n\}$ 中取出 r 个元素构成的，且不存在两个相邻的数 $i,i+1$ 同时出现的组合.

定义 2.8

不相邻的 r–组合是指从序列 $A=\{1,2,\dots,n\}$ 中取出 r 个元素构成的，且不存在两个相邻的数 $i, i+1$ 同时出现的组合.

例 2.17

从 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 中取出 3 个不相邻的组合共有多少个？列举出这些组合.

定义 2.8

不相邻的 r–组合是指从序列 $A=\{1,2,\ldots,n\}$ 中取出 r 个元素构成的，且不存在两个相邻的数 $i, i+1$ 同时出现的组合.

例 2.17

从 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 中取出 *3* 个不相邻的组合共有多少个？列举出这些组合.

解从 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 中取出 3 个不相邻的组合共有 10 个，分别为

$$\begin{array}{lllll}\{1,3,5\}, & \{1,3,6\}, & \{1,3,7\}, & \{1,4,6\}, & \{1,4,7\}, \\ \{1,5,7\}, & \{2,4,6\}, & \{2,4,7\}, & \{2,5,7\}, & \{3,5,7\}.\end{array}$$

定理 2.9

令 $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, 则不相邻的 r–组合数为

$$\binom{n-r+1}{r}.$$

基本计数问题

多重集合的排列

例 3.1

用 3 个 A, 2 个 B, 4 个 C, 1 个 D 可以构成多少个长度为 10 的字符串？

例 3.1

用 *3* 个 *A*, *2* 个 *B*, *4* 个 *C*, *1* 个 *D* 可以构成多少个长度为 *10* 的字符串？

多重集是元素可以重复出现的集合.

把某个元素 a_i 出现的次数 k_i, 叫做该元素的重数.

通常把含有 k 个不同元素的多重集 S 记做

$$\{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \ldots, k_n \cdot a_n\}.$$

多重集合的排列

定理 3.1

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列数为 n^k.

该定理可叙述为: 具有 n 个元素的集合允许重复的 k 排列数为 n^k.

多重集合的排列

定理 3.1

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$ 的 k 排列数为 n^k.

该定理可叙述为: 具有 n 个元素的集合允许重复的 k 排列数为 n^k.

例 3.2

用英语字母可以构成多少个 n 位字符串？

多重集合的排列

定理 3.1

多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列数为 n^k.

该定理可叙述为: 具有 n 个元素的集合允许重复的 k 排列数为 n^k.

例 3.2

用英语字母可以构成多少个 n 位字符串？

因为英语字母有 26 个, 且每个字母可以被重复使用, 所以有 26^n 个 n 位字符串.

多重集合的排列

用 $\binom{k_1+k_2+k_n}{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ 表示多重集合 $\{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \ldots, k_n \cdot a_n\}$ 的全排列个数.

定理 3.2

$$\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}.$$

先把 $k_1+k_2+\cdots+k_n$ 个元素看成是互不相同的,
但这里 k_i 个 a_i 是相同的, 只要两个排列中这些 a_i 的位置相同, 就可以视为相同的多重集的排列.

例 3.3

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法？

例 3.3

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法？

$$\binom{11}{1,2,4,4} = 34650$$

例 3.4

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，要求不能出现连续的四个 S，问有多少种排法？

例 3.3

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，问有多少种排法？

$$\binom{11}{1,2,4,4} = 34650$$

例 3.4

将单词 *MISSISSIPPI* 的字母重排，要求不能出现连续的四个 S，问有多少种排法？

$$\binom{11}{1,2,4,4} - \binom{8}{1,1,2,4} = 33810$$

例 3.5

令 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是一个具有 n 元素的集合，或简称 n 元集．再令 2^S 表示 S 的所有子集组成的集合，称为幂集．构造一个双射 $\theta\colon 2^S\to\{0,1\}^n$，使得集合 S 上的 k 元子集 与多重集 $\{(n-k)\cdot 0,k\cdot 1\}$ 的排列一一对应．

例 3.5

令 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是一个具有 n 元素的集合, 或简称 n 元集. 再令 2^S 表示 S 的所有子集组成的集合, 称为幂集. 构造一个双射 $\theta\colon 2^S\to\{0,1\}^n$, 使得集合 S 上的 k 元子集 与多重集 $\{(n-k)\cdot 0, k\cdot 1\}$ 的排列一一对应.

解: 令 $\{0,1\}^n=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\colon \varepsilon_i=0\text{或}1\}$. 因为每个 ε_i 有两种可能的取值, 所以有

$$\#\{0,1\}^n=2^n.$$

定义映射 $\theta\colon 2^S\to\{0,1\}^n$ 为

$$\theta(T)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n),$$

其中

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1, & \text{若}x_i\in T\\ 0, & \text{若}x_i\notin T.\end{cases}$$

容易看出 θ 是一个双射. 于是, $\#2^S=2^n$.

例 3.5

令 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是一个具有 n 元素的集合，或简称 n 元集. 再令 2^S 表示 S 的所有子集组成的集合，称为幂集. 构造一个双射 $\theta\colon 2^S\to\{0,1\}^n$，使得集合 S 上的 k 元子集 与多重集 $\{(n-k)\cdot 0, k\cdot 1\}$ 的排列一一对应.

解: 令 $\{0,1\}^n=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\colon \varepsilon_i=0\text{或}1\}$. 因为每个 ε_i 有两种可能的取值，所以有

$$\#\{0,1\}^n=2^n.$$

定义映射 $\theta\colon 2^S\to\{0,1\}^n$ 为

$$\theta(T)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n),$$

其中

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1, & \text{若}x_i\in T\\ 0, & \text{若}x_i\notin T.\end{cases}$$

容易看出 θ 是一个双射. 于是，$\#2^S=2^n$.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{n-k,k}$$

例 3.6 (格路计数问题)

在平面上有多少从 $(0,0)$ 到 $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 点的格路径，其每一步都具有形式 $(1,0)$ 或 $(0,1)$ （即每一步沿水平方向向右走或沿铅直方向向上走一个单位距离）.

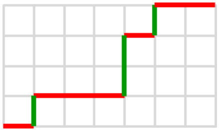

图: 格路

例 3.6 (格路计数问题)

在平面上有多少从 $(0,0)$ 到 $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 点的格路径，其每一步都具有形式 $(1,0)$ 或 $(0,1)$ （即每一步沿水平方向向右走或沿铅直方向向上走一个单位距离）.

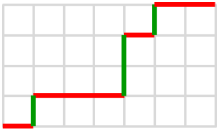

图: 格路

从 $(0,0)$ 到 (m,n) 的路径，记沿水平方向向右走一个单位距离为 E，记沿竖直方向向上走一个单位距离为 N，其与多重集 $\{m\cdot E, n\cdot N\}$ 的排列一一对应，一条路径对应该多重集合上的一个全排列. 所以共有 $\frac{(m+n)!}{m!n!}=\binom{m+n}{m}$ 种不同的走法.

例 3.7

从 6 男 2 女共 8 名学生中选出队长 1 人，副队长 1 人，普通队员 2 人组成 4 人服务队，要求服务队中至少有 1 名女生，共有多少种不同的选法？

例 3.7

从 *6* 男 *2* 女共 *8* 名学生中选出队长 *1* 人，副队长 *1* 人，普通队员 *2* 人组成 *4* 人服务队，要求服务队中至少有 *1* 名女生，共有多少种不同的选法？

先选出 4 人： 3 男 1 女 或 2 男 2 女

再考虑多重集合 $\{1\cdot\text{队长}, 1\cdot\text{副队长}, 2\cdot\text{普通队员}\}$ 的排列，比如

$$\begin{pmatrix} \text{张三} & \text{李四} & \text{王五} & \text{赵六} \\ \text{队长} & \text{队员} & \text{副队长} & \text{队员} \end{pmatrix}$$

共计 $\left(\binom{6}{3}\binom{2}{1}+\binom{6}{2}\binom{2}{2}\right)\times\binom{4}{1,1,2}=(40+15)\times 12=660.$

该题来自 2017 年浙江高考.

例 3.8

在由四个 0 和八个 1 组成的序列 $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ 中，没有两个连续 0 的序列有多少个？

例 3.8

在由四个 0 和八个 1 组成的序列 $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ 中，没有两个连续 0 的序列有多少个？

插空法 $\binom{8+1}{4} = 126$

例 3.9

将 6 个蓝球、5 个红球、4 个白球、3 个黄球排成一行, 要求黄球不挨着, 问有多少种排列方式?

例 3.9

将 *6* 个蓝球、*5* 个红球、*4* 个白球、*3* 个黄球排成一行, 要求黄球不挨着, 问有多少种排列方式?

先将蓝、红、白三种球进行全排列, 再将 3 个黄球插入其中.

令 $M=\{6\cdot b,5\cdot r,4\cdot w\}$, 则 M 的全排列数为 $\frac{15!}{6!5!4!}$.

每个 "*" 表示 M 的一个全排列中的一个元素, 共有 15 个 "*" , 则可以在 16 个 "△ " 所示位置中选出 3 个插入 3 个黄球, 共有 $\binom{16}{3}$ 种取法.

所以, 共有 $\frac{15!}{6!5!4!}\cdot\binom{16}{3}$ 种排列方法.

多重集合的组合

引例

一家面包房生产 8 种炸面包圈. 如果将一打（12 个）炸面包圈装进盒内, 则一共有多少种不同的盒装组合？

引例

求

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

的非负整数解的个数.

引例

将 r 个相同的小球放入 n 个不同的盒子中, 要求每个盒子小球的个数不受限制, 有多少种方法？

多重集合的组合

设元素 a_i 出现 x_i 次. 该问题等价于求

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

的非负整数解的个数.

这相当于, 将 r 个相同的小球放入 n 个不同的箱子中 (即将 r 个相同的小球排成一排, 然后在小球中间插入 $n-1$ 个隔板, 隔板将小球分成了 n 份).

因此, 原问题转化为多重集合 $\{r \cdot \circ, (n-1) \cdot |\}$ 的排列数, 个数为 $\binom{n+r-1}{r}$.

多重集合的组合

多重集合的组合是指从 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_n\}$ 中无序的选出 r 个元素的组合，用 $\left(\!\binom{n}{r}\!\right)$ 表示该选取的方法数.

定理 3.3

多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_n\}$ 的 r–组合数，即多重集合 M 的 r 元子集的个数为

$$\left(\!\binom{n}{r}\!\right)=\binom{n+r-1}{r}$$

注：该定理中给出的组合数 $\left(\!\binom{n}{r}\!\right)$ 也称为二重二项式系数，计数了 n 元集中允许重复的 r 元子集的个数.

例 3.10

一家面包房生产 8 种炸面包圈.

i) 如果将一打（12 个）炸面包圈装进盒内, 则一共有多少种不同的盒装组合？

ii) 若每盒必定包含所有的 8 种炸面包圈呢？

例 3.10

一家面包房生产 *8* 种炸面包圈.

i) 如果将一打（*12* 个）炸面包圈装进盒内，则一共有多少种不同的盒装组合？

ii) 若每盒必定包含所有的 *8* 种炸面包圈呢？

i) $\left(\!\binom{8}{12}\!\right) = \binom{12+8-1}{12} = \binom{19}{12}$, ii) $\left(\!\binom{8}{4}\!\right) = \binom{12-1}{4} = \binom{11}{4}$

例 3.11

方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

i) 非负整数解有多少个？

ii) 正整数解有多少个？

例 3.11

方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

i) 非负整数解有多少个？

ii) 正整数解有多少个？

i) $\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$,

ii) 法一: 把 r 个相同的小球放入 n 个不同的盒子, 要求每个盒子非空. 这相当于, 将 r 个相同的小球排成一列, 然后在小球之间插入 $n-1$ 个隔板将小球分成了 n 份, 每一份的数量都要大于或等于 1 , 对应上述方程的一组正整数解.

○ ○ ○ | ○ ○ | ○ ○○

也就是说, 从 $r-1$ 个位置挑出 $n-1$ 个位置, 用于放置隔板, 即 $\binom{r-1}{n-1}$.

法二: 令 $y_i = x_i - 1$, 则问题转化为方程 $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = r - n$ 的非负整数解的个数, 即 $\binom{n+(r-n)-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}$.

例 3.12

对于非负整数 x_1, x_2, x_3, 方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ 有多少个解？

例 3.12

对于非负整数 x_1, x_2, x_3，方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ 有多少个解？

$$\left(\!\binom{3}{11}\!\right) = \binom{3+11-1}{11} = \binom{13}{11} = \binom{13}{2} = 78.$$

例 3.13

方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

的满足

$$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3$$

的整数解有多少个？

例 3.13

方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

的满足

$$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3$$

的整数解有多少个？

我们引入新变量 $y_1 = x_1 - 1,\ y_2 = x_2 - 2,\ y_3 = x_3 - 3.$
原问题变为方程

$$y_1 + y_2 + y_3 = 5$$

的非负整数解的个数，即为 $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21.$

例 3.14

i) 将 r 个相同的小球放入 n 个不同的盒子中，有多少种方法？

ii) 若要求每个盒子中至少有一个小球，有多少种方法？

例 3.14

i) 将 r 个相同的小球放入 n 个不同的盒子中，有多少种方法？

ii) 若要求每个盒子中至少有一个小球，有多少种方法？

对于 i)，很显然有 $\left(\!\binom{r}{n}\!\right) = \binom{r+n-1}{r}$ 种方法. 那如何解决 ii)？

定理 3.4

对于多重集合 $M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_n\}$, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 至少出现一次的 r–组合数为

$$\binom{r-1}{n-1}.$$

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$

i) 非负整数解

ii) 正整数解

对 $\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n+r-1}{r}$ 的一个直接的组合证明如下.
令

$$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_r \le n + r - 1$$

为 $[n + r - 1]$ 的一个 r 元子集. 令 $b_i = a_i - i + 1$, 则 $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ 是 $[n]$ 的一个 r 元重集.
反之, 给定 $[n]$ 上的一个 r 元重集

$$1 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_r \le n,$$

定义 $a_i = b_i + i - 1$, 则 $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ 是 $[n + r - 1]$ 的 r 元子集.
这样就定义了 $[n]$ 的 r 元重集与 $[n + r - 1]$ 的 r 元子集之间的双射.

多重集合的组合数（有重数限制）

令

$$S = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \ldots, k_n \cdot a_n\}$$

是一个多重集，多重集合的 $r-$ 组合数的计数问题更为困难. 等价于方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

的整数解的个数，其中 $0 \le x_1 \le k_1$, $0 \le x_2 \le k_2$, $\ldots$, $0 \le x_n \le k_n$.

将在后面的课程中解决该问题.

基本计数问题

1. 加法原则与乘法原则
2. 集合的排列与组合
3. 多重集合的排列与组合
4. **集合划分**
5. 整数拆分
6. 分配问题

集合划分

定义 4.1

设 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 是 A 的 k 个子集, 若它们满足:

(1) $A_i \neq \varnothing \quad (1 \leqslant i \leqslant k)$;

(2) $A_i \cap A_j = \varnothing \quad (1 \leqslant i \neq j \leqslant k)$;

(3) $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$,

则称 $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ 是 A 的一个 k 划分, 并记为 $A = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_k$, 其中 $A_i\,(1 \leqslant i \leqslant k)$ 称为 A 的 k 划分的一个块.

集合划分

定义 4.2 (第二类斯特林数)

一个 n 元集合的 k 划分的个数即为**第二类斯特林数**, 记作 $S(n,k)$, 并规定 $S(0,0)=1$.

图: James Stirling

詹姆斯 · 斯特林（James Stirling），苏格兰数学学家. 他在无穷级数和无穷小微积分理论研究中做出了重要贡献, 并在他的最重要的著作《Methodus Differentialis》中首次使用了斯特林数这一名词. 斯特林研究并给出了集合的 k 划分的个数, 这一组合序列也被称为第二类斯特林数.

由 $S(n,k)$ 的定义易知, $S(n,k)=0\ (k>n)$, $S(n,0)=0\ (n>0)$, $S(n,1)=1\ (n>0)$, $S(n,n)=1$.

例如, 集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 有 7 个 2 划分, 它们是

$$\{a\}\dot\cup\{b,c,d\},\quad \{b\}\dot\cup\{a,c,d\},\quad \{c\}\dot\cup\{a,b,d\},\quad \{d\}\dot\cup\{a,b,c\},$$

$$\{a,b\}\dot\cup\{c,d\},\quad \{a,c\}\dot\cup\{b,d\},\quad \{a,d\}\dot\cup\{b,c\}.$$

因此, $S(4,2)=7$.

基本计数问题

1. 加法原则与乘法原则
2. 集合的排列与组合
3. 多重集合的排列与组合
4. 集合划分
5. **整数拆分**
6. 分配问题

整数拆分

图: Leonhard Euler

莱昂哈德 · 欧拉（Leonhard Euler, 1707 年 4 月 15 日–1783 年 9 月 18 日）是瑞士数学家、物理学家、天文学家、地理学家、逻辑学家和工程师, 在数学和物理学的多个领域做出了开创性的贡献. 18 世纪 40 年代, 欧拉提出了用生成函数的方法研究整数分拆, 奠定了整数分拆理论的基础.

整数拆分

图: Leonhard Euler

莱昂哈德 · 欧拉（Leonhard Euler, 1707 年 4 月 15 日–1783 年 9 月 18 日）是瑞士数学家、物理学家、天文学家、地理学家、逻辑学家和工程师, 在数学和物理学的多个领域做出了开创性的贡献. 18 世纪 40 年代, 欧拉提出了用生成函数的方法研究整数分拆, 奠定了整数分拆理论的基础.

上节介绍的 “集合划分” 可以视作将互不相同的 n 个球划分为 k 个组, 本节将讨论把完全相同的 n 个球划分为 k 个组的问题, 即 “正整数的分拆” 问题.

整数拆分

正整数 n 的一个 k 分拆是指把 n 表示成 k 个正整数之和:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \quad (k \geqslant 1),$$

其中, $n_i \in \mathbb{N}_+$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 称为分拆的第 i 个部分. 称 n 的 k 分拆的个数为 n 的 k 分拆数.

整数拆分

正整数 n 的一个 k 分拆是指把 n 表示成 k 个正整数之和:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \quad (k \geqslant 1),$$

其中, $n_i \in \mathbb{N}_+$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 称为分拆的第 i 个部分. 称 n 的 k 分拆的个数为 n 的 k 分拆数.

正整数的分拆可分为有序和无序两种情形, 这里举例说明.

整数拆分

若考虑顺序，以下为 4 的三个不同的有序 3 拆分.

$$
\begin{aligned}
4 &= 2+1+1 \\
&= 1+2+1 \\
&= 1+1+2.
\end{aligned}
$$

整数拆分

若考虑顺序, 以下为 4 的三个不同的有序 3 拆分.

$$\begin{aligned}4 &= 2+1+1\\ &= 1+2+1\\ &= 1+1+2.\end{aligned}$$

若不考虑顺序, 则这 3 个分拆视为 4 的同一个无序分拆, 通常表示为 $4 = 2+1+1$, 即无序分拆中将各部分按非递增顺序排列. 例如, 4 的所有无序分拆共有下列 5 个:

$$\begin{aligned}4 &= 4\\ &= 3+1\\ &= 2+2\\ &= 2+1+1\\ &= 1+1+1+1\end{aligned}$$

有序分拆

定理 5.1

正整数 n 的有序 k 分拆的个数为 $\binom{n-1}{k-1}$.

n 的一个有序分拆可表示为将 n 个点分为 k 个非空的部分. 将 n 个点排成一行则有 $n-1$ 个空隙, 在其中插入 $k-1$ 个竖线, 即可将之分为 k 个非空的部分. 因此, 正整数 n 的有序 k 分拆的个数为

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

有序分拆

定理 5.1

正整数 n 的有序 k 分拆的个数为 $\binom{n-1}{k-1}$.

n 的一个有序分拆可表示为将 n 个点分为 k 个非空的部分. 将 n 个点排成一行则有 $n-1$ 个空隙, 在其中插入 $k-1$ 个竖线, 即可将之分为 k 个非空的部分. 因此, 正整数 n 的有序 k 分拆的个数为

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

注: 正整数 n 的一个有序 k 分拆 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, 等价于方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的一个正整数解

$$(n_1, n_2, \cdots, n_k).$$

由第三节中的定理亦可得上述结论.

无序拆分

在 n 的 k 无序分拆中，各部分的顺序无关紧要，在其表示中一般将各部分按非递增顺序排序，即，若 n 的 k 无序分拆可表示为

$$n = (n_1, n_2, \cdots, n_k),$$

其中 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 且

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_k \geqslant 1.$$

我们称 k 为分拆的部分数，记为 $\ell(\lambda) = k$. 一般也将无序分拆简称为分拆.

无序拆分

在 n 的 k 无序分拆中，各部分的顺序无关紧要，在其表示中一般将各部分按非递增顺序排序，即，若 n 的 k 无序分拆可表示为

$$n = (n_1, n_2, \cdots, n_k),$$

其中 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 且

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_k \geqslant 1.$$

我们称 k 为分拆的部分数，记为 $\ell(\lambda) = k$. 一般也将无序分拆简称为分拆.

如果在 n 的 k 无序分拆中，i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 出现的次数为 k_i，则还可把该分拆记为

$$n = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \cdots + k_n \cdot n,$$

其中 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$，也可记为

$$n = \langle 1^{k_1} 2^{k_2} \cdots n^{k_n} \rangle.$$

一般地，$p(n)$ 称为分拆函数 (partition function)，其前几项初值为

$$p(0) = 1,\ p(1) = 1,\ p(2) = 2,\ p(3) = 3,\ p(4) = 5,\ p(5) = 7,\ p(6) = 11.$$

无序拆分

设 $p_k(n)$ 为 n 的 k 分拆的个数, $p(n)$ 为 n 的所有分拆的个数, 则有以下几个显然的结论.

1. $p_k(n) = 0 \ (k > n)$;
2. $p_1(n) = p_n(n) = 1$;
3. $p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(n)$.

无序拆分

设 $p_k(n)$ 为 n 的 k 分拆的个数, $p(n)$ 为 n 的所有分拆的个数, 则有以下几个显然的结论.

1. $p_k(n) = 0 \ (k > n)$;
2. $p_1(n) = p_n(n) = 1$;
3. $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n)$.

例如, $p_5(9) = 5$, 且 9 的所有 5 分拆为

$$\begin{aligned} 9 &= 5+1+1+1+1 \\ &= 4+2+1+1+1 \\ &= 3+3+1+1+1 \\ &= 3+2+2+1+1 \\ &= 2+2+2+2+1. \end{aligned}$$

基本计数问题

1. 加法原则与乘法原则
2. 集合的排列与组合
3. 多重集合的排列与组合
4. 集合划分
5. 整数拆分
6. 分配问题

分配问题

图: Gian-Carlo Rota

I will tell you shamelessly what my bottom line is:
It is placing balls into boxes.

— Gian-Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*

Gian-Carlo Rota was a math professor at MIT from 1959 until his death in 1999. He is arguably the father of the field today known as combinatorics.

本节将讨论前几节所介绍的各类计数结果在实际问题中的应用，尤其在分配问题中的应用.
所谓分配问题，可看作把一些球分配入一些盒子的方法问题.
具体为把 n 个球分放到 r 个盒子里，共有多少种不同的方案.

在对方案进行计数时，假定球在盒内是无序的，并考虑如下三方面因素:

1. n 个球是完全相同的还是完全不同的;
2. r 个盒子是完全相同的还是完全不同的;
3. 每个盒中可放的球数限制，包括: 任意个 (无限制)、至多一个或至少一个三种情况.

综合以上三个方面的因素，可得 12 种不同情况下的分配问题，其中每个分配方案可看作由球组成的集合到盒子组成的集合之间的映射.

- 若每个盒子中可放的球数没有限制，则对应任意映射;
- 若要求每个盒中至多一个球，则为单射;
- 若要求每个盒中至少一个球则为满射.

在对方案进行计数时，假定球在盒内是无序的，并考虑如下三方面因素:

1. n 个球是完全相同的还是完全不同的;
2. r 个盒子是完全相同的还是完全不同的;
3. 每个盒中可放的球数限制，包括: 任意个 (无限制)、至多一个或至少一个三种情况.

综合以上三个方面的因素，可得 12 种不同情况下的分配问题，其中每个分配方案可看作由球组成的集合到盒子组成的集合之间的映射.

- 若每个盒子中可放的球数没有限制，则对应任意映射;
- 若要求每个盒中至多一个球，则为单射;
- 若要求每个盒中至少一个球则为满射.

下面按不同情况进行分类讨论.

把 n 个不同的球放入 r 个不同的盒子里

(1) 把 n 个不同的球放入 r 个不同的盒子里，且每个盒中所放球数无限制的方案数为

$$r^n.$$

(2) 把 n 个不同的球放入 r 个不同的盒子里，且每个盒子至多放一个球的方案数为

$$(r)_n,$$

且若 $n > r$，则 $(r)_n = 0$.

(3) 把 n 个不同的球放入 r 个不同的盒子里，且每个盒子至少放一个球的方案数为

$$r!S(n, r).$$

把 n 个相同的球放入 r 个不同的盒子里

(4) 把 n 个相同的球放入 r 个不同的盒子里，且每个盒中所放球数无限制的方案数为

$$\binom{n+r-1}{n}.$$

(5) 把 n 个相同的球放入 r 个不同的盒子里，且每个盒中至多放一个球的方案数为

$$\binom{r}{n}.$$

(6) 把 n 个相同的球放入 r 个不同的盒子里，且每个盒中至少放一个球的方案数为

$$\binom{n-1}{r-1}.$$

把 n 个不同的球放入 r 个相同的盒子里

(7) 把 n 个不同的球放入 r 个相同的盒子里，且每个盒中所放球数无限制的方案数为

$$\sum_{i=1}^{r} S(n,i).$$

(8) 把 n 个不同的球放入 r 个相同的盒子里，且每个盒中至多放一个球的方案数为

$$1 \text{（若 } n \le r\text{）或 } 0 \text{（若 } n > r\text{）}.$$

(9) 把 n 个不同的球放入 r 个相同的盒子里，且每个盒中至少放一个球的方案数为

$$S(n,r).$$

把 n 个相同的球放入 r 个相同的盒子里

(10) 把 n 个相同的球放入 r 个相同的盒子里，且每个盒中所放球数无限制的方案数为

$$\sum_{i=1}^{r} p_i(n).$$

(11) 把 n 个相同的球放入 r 个相同的盒子里，且每个盒中至多放一个球的方案数为

$$1\ (\text{若 } n \le r)\ \text{或}\ 0\ (\text{若 } n > r)\ .$$

(12) 把 n 个相同的球放入 r 个相同的盒子里，且每个盒中至少放一个球的方案数为

$$p_r(n).$$

综合上述分析, 可得如下各种情形下的分配方案数表.

n 个球	r 个盒子	每个盒中球数无限制	每个盒中至多一个球	每个盒中至少一个球
不同	不同	r^n	$(r)_n$	$r!S(n,r)$
相同	不同	$\binom{n+r-1}{n}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$
不同	相同	$\sum_{i=1}^{r} S(n,i)$	$\begin{cases} 1, & 若 n \le r, \\ 0, & 若 n > r \end{cases}$	$S(n,r)$
相同	相同	$\sum_{i=1}^{r} p_i(n)$	$\begin{cases} 1, & 若 n \le r, \\ 0, & 若 n > r \end{cases}$	$p_r(n)$

作业

课后习题 1-30

补充题

1. 集合 $[10] = \{1, 2, \ldots, 10\}$ 有多少个至少包含一个奇数的子集？
2. 将十个人分成五组，每组两人，不考虑分组顺序，这样的分法有多少种？
3. 计算满足 $\pi_1 \neq 2$ 的 6 阶排列 $\pi = \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6$ 的个数.
4. 有多少个 6 阶排列恰好有两个圈？(不动点可以认为是长为 1 的圈)

补充题

1. 集合 $[10] = \{1, 2, \ldots, 10\}$ 有多少个至少包含一个奇数的子集？
2. 将十个人分成五组，每组两人，不考虑分组顺序，这样的分法有多少种？
3. 计算满足 $\pi_1 \neq 2$ 的 6 阶排列 $\pi = \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6$ 的个数.
4. 有多少个 6 阶排列恰好有两个圈？(不动点可以认为是长为 1 的圈)

1. $2^{10} - 2^5 = 992$
2. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945$
3. $5 \cdot 5! = 600$（或者 $6! - 5! = 600$）
4. $\binom{6}{1}4! + \binom{6}{2}3! + \frac{1}{2}\binom{6}{3}2!^2 = 274$

例 6.1

把集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 划分成 b_1 个 1 元集, b_2 个 2 元集, $\ldots, b_k$ 个 k 元集, 其中 $\sum_{i=1}^{k} ib_i = n$, 这样的分法有多少种?

例 6.1

把集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 划分成 b_1 个 *1* 元集，b_2 个 *2* 元集，$\ldots$，b_k 个 k 元集，其中 $\sum_{i=1}^{k} ib_i = n$，这样的分法有多少种？

解 从排列数出发. n 个元素的全排列有 $n!$ 种. 而对于每个划分，其中 b_i 个 i 元集是没有顺序的，且划分中每个集合的元素也是没有顺序的，因此每个划分对应 $b_1!b_2!\cdots b_k!(1!)^{b_1}(2!)^{b_2}\cdots(k!)^{b_k}$ 个不同的 n-排列. 所以答案为

$$\frac{n!}{b_1!b_2!\cdots b_k!(1!)^{b_1}(2!)^{b_2}\cdots(k!)^{b_k}}.$$

法二 从多重选取数出发，再考虑到划分得到的 i 元集彼此之间是没有顺序的，则有

$$\frac{1}{b_1!b_2!\cdots b_k!}\binom{n}{1,\cdots,1,2,\cdots,2,\cdots,k,\cdots,k}$$

种分法，这和上面的答案一样. (以上多重选取公式中的 i 有 b_i 个，$1\le i\le k$.)

例 6.2

记集合 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$. 由 $[n]$ 到其自身的双射 (即 n 元置换) 全体在映射合成下做成一个群, 即 n 元对称群 S_n, 其中任一置换 σ 均可表为 S_n 中一些互不相交 (即两两无公共元素) 的轮换之积, 且这种表示方式在不考虑轮换次序的意义下唯一, 称为 σ 的轮换分解. 对 $\sigma\in S_n$, 用 $l_i(\sigma)$ 表示 σ 的轮换分解中长为 i 的轮换个数, 则称 $(l_1(\sigma),l_2(\sigma),\cdots,l_n(\sigma))$ 为 σ 的轮换型号, 记为 *type* (σ). 若 $1l_1+2l_2+\cdots+nl_n=n$, 则 S_n 中轮换型号为 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 的置换有多少个?

例 6.2

记集合 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$. 由 $[n]$ 到其自身的双射 (即 n 元置换) 全体在映射合成下做成一个群, 即 n 元对称群 S_n, 其中任一置换 σ 均可表为 S_n 中一些互不相交 (即两两无公共元素) 的轮换之积, 且这种表示方式在不考虑轮换次序的意义下唯一, 称为 σ 的轮换分解. 对 $\sigma\in S_n$, 用 $l_i(\sigma)$ 表示 σ 的轮换分解中长为 i 的轮换个数, 则称 $(l_1(\sigma),l_2(\sigma),\cdots,l_n(\sigma))$ 为 σ 的轮换型号, 记为 *type* (σ). 若 $1l_1+2l_2+\cdots+nl_n=n$, 则 S_n 中轮换型号为 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 的置换有多少个?

解 与上例方法类似, 知所求结果为

$$\frac{n!}{l_1!l_2!\cdots l_n!(1!)^{l_1}(2!)^{l_2}\cdots(n!)^{l_n}}\cdot\prod_{i=1}^{n}((i-1)!)^{l_i}=\frac{n!}{l_1!l_2!\cdots l_n!1^{l_1}2^{l_2}\cdots n^{l_n}}.$$

此即 Cauchy 公式.