

Art of counting (计数的艺术)

Bruce Sagan

目录

第一章 基本计数	5
1.1 集合的加法与乘法原则	5
1.2 排列与词	7
1.3 组合与子集	8
1.4 集合划分	12
1.5 按圈结构排列	13
1.6 整数分拆	16
1.7 有序分拆	17
1.8 十二模式	18
1.9 图和有向图	20
1.10 树	23
1.11 格路	25
1.12 有禁模式	27
1.13 练习	31
第二章 符号计数	39
2.1 容斥原理	39
2.2 符号相反的对合	41
2.3 Garsia-Milne 对合原理	45
2.4 反射原理	48
2.5 Lindström-Gessel-Viennot 引理	50
2.6 矩阵树定理	54
2.7 习题	58
第三章 普通型生成函数计数	65
3.1 生成多项式	65
3.2 统计量与 q -模拟	67
3.3 形式幂级数的代数	73
3.4 普通型生成函数的加法与乘法规则	77
3.5 整数分拆再讨论	80
3.6 递推关系与生成函数	83

3.7 有理生成函数与线性递归	86
3.8 色多项式	88
3.9 组合互反性	94
3.10 习题	96
第四章 指数生成函数计数	105
4.1 示例一	105
4.2 欧拉多项式的指数生成函数	108
4.3 标记结构	111
4.4 egfs 的和积规则	113
4.5 指数公式	116
4.6 习题	119

第一章 基本计数

(伍思懿 翻译)

本章我们将了解最基础的集合并数方法. 尽管这些方法是比较基础的, 但它们预示着会有更复杂的事情发生. 我们用 \mathbb{Z} 表示整数, 除非另有说明, 否则通常假设参数如 n 和 k 为整数. 对于非负整数和正整数, 我们分别使用符号 \mathbb{N} 和 \mathbb{P} 来表示, 并用 \mathbb{Q} 、 \mathbb{R} 和 \mathbb{C} 分别代表有理数、实数和复数. 最后, 每当使用基数集时, 我们都会假设它是有限的.

1.1 集合的加法与乘法原则

集合的加法与乘法原则是许多枚举的基础. 我们之后会看到它们在普通和指数生成函数中的各种推广. 尽管这些规则证明起来微不足道, 但我们将给出证明, 因为这个结果很有用. 给定一个有限集 S , 我们用符号 $\#S$ 或者 $|S|$ 来表示它的基数, 我们也用 $S \uplus T$ 来表示 S 和 T 的不相交并, 使用这个符号意味着不相交. 最后, 我们将笛卡尔积记为

$$S \times T = \{(s, t) \mid s \in S, t \in T\}.$$

引理 1.1.1. 令 S, T 为有限集.

(1) (加法原则) 如果 $S \cap T = \emptyset$, 则

$$|S \uplus T| = |S| + |T|.$$

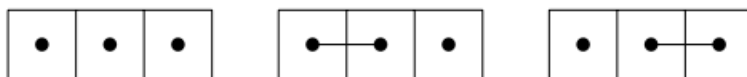
(2) (乘法原则) 对任意有限集, 有

$$|S \times T| = |S| \cdot |T|.$$

证明. $S = \{s_1, \dots, s_m\}$, $T = \{t_1, \dots, t_n\}$. 如果 S 和 T 是不相交的, 则 $S \uplus T = \{s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n\}$, 因此 $|S \uplus T| = m + n = |S| + |T|$. 对任意集合 S, T , 将 $S \times T$ 的元素放入一个 $m \times n$ 的矩阵, 其中位于 (i, j) 的元素为 (s_i, t_j) . 计算这个矩阵元素的个数可得 $|S \times T| = mn = |S| \cdot |T|$. \square

在组合选择问题中, 我们通常只能做一个选择或做另一个, 或者两者都做. 假设做第一个选择有 m 种方法, 做第二个选择有 n 种方法. 如果没有相同的选择, 那么加法原则告诉我们方法数是 $m + n$. 如果做第一个选择对做第二个选择没有影响, 那么由乘法原则可得做第一个选择, 然后再做第二个选择有 mn 种. 所以在实践中, 人们用“或”代表加法, 用“和”代表乘法.

我们将用所有组合学中最著名的序列之一: 斐波那契数列来说明这些概念. 有时也这样说, 关于这个序列有一个有趣的故事 (多少有点不可能). 一开始有一对未成熟的兔子, 一雄一雌, 兔子要一个月才能成熟. 在之后的每一个月, 一对兔子会产下一对幼兔, 一雄一雌. 如果兔子只和它们的

图 1.1: \mathcal{T}_3

生育伙伴繁殖并长生不老 (就像我说的, 这个故事有点不太可能), 那么在第 n 个月初有多少对兔子? 我们称这个数字为 F_n . 为了方便, 我们令 $F_0 = 0$. 因为我们一开始只有一对, $F_1 = 1$. 在第二个月初, 这一对已经成熟, 但没有生产后代, 所以 $F_2 = 1$. 在后面的月份中, 兔子的数量是之前月份所有的兔子加上这个月新出生的兔子, 记为 F_{n-1} . 新生的对数等于前一个月的成熟兔子对数, 等于前一个月的配对总数, 为 F_{n-2} . 因此, 用加法原则可得,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ 对 } n \geq 2 \text{ 有 } F_0 = 0 \text{ 及 } F_1 = 1. \quad (1.1)$$

因为我们令 $F_0 = 0$, 故我们的递归公式从 $n = 2$ 开始而不是 $n = 3$. F_n 就称作斐波那契数. 同样, 要注意一些作者将这个数列定义为

$$f_0 = f_1 = 1 \quad \text{且} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (1.2)$$

因此, 我们必须明确文章讨论的是哪一种斐波那契数列.

人们可能会想, 除了上面的递归公式之外, 是否还有一个显式的 F_n 公式. 这样的表达式是存在的, 尽管从我们目前所做的来推导出它还很困难. 事实上, 我们需要在第三章中讨论的生成函数的理论来推导它.

另一个我们需要了解的是 F_n 的组合解释. 非负整数序列 a_0, a_1, a_2, \dots 的组合解释是一个集合的序列 S_0, S_1, S_2, \dots , 其中, 对所有 n 有 $\#S_n = a_n$. 这样的解释常常能得到关于原序列的非常漂亮和直观的证明, 因此是非常可取的. 有人可能会说, 兔子的故事已经给出了这样的解释, 但我们想要更适合数学操作的东西.

假设我们有一排方块. 我们给出两种类型的瓷砖: 覆盖两个方块的双方块和覆盖一个方块的单方块. 则这一排方块的平铺为: 每个方块被覆盖一次的瓷砖序列. 令 \mathcal{T}_n 为一排 n 个的平铺集合. 图1.1中列出了 \mathcal{T}_3 的所有元素. 平铺和斐波那契数列之间有一个简单的关系.

定理 1.1.2. 对 $n \geq 1$, 有

$$F_n = \#\mathcal{T}_{n-1}.$$

证明. 只需证方程两边满足相同的初始条件和递归关系就足够了. 当不包含方块时, 它只有空的覆盖, 故 $\#\mathcal{T}_0 = 1 = F_1$. 当有一个方块的时候, 它只能被一个单方块覆盖, 故 $\#\mathcal{T}_1 = 1 = F_2$. 对于递归, \mathcal{T}_n 中的平铺可分为两种类型: 以单方块结尾的平铺和以双方块结尾的平铺. 去掉最后的瓷砖我们可以得到这两种平铺分别与 \mathcal{T}_{n-1} 和 \mathcal{T}_{n-2} 构成双射. 因此, 可得 $\#\mathcal{T}_n = \#\mathcal{T}_{n-1} + \#\mathcal{T}_{n-2}$. \square

为了展示一个好的组合解释的威力, 我们现在给出一个 F_n 的恒等式的简单证明. 这样的恒等式有很多. 比如, Benjamin 和 Quinn 的书 [10].

推论 1.1.3. 对 $m \geq 1$ 及 $n \geq 0$, 有

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

证明. 由之前的定理, 左边为 $m+n-1$ 个方块的平铺数. 故我们只需证右边也是如此. 给这些方块从左至右记为 $1, \dots, m+n-1$. 记 $\mathcal{T}_{m+n-1} = \mathcal{S} \uplus \mathcal{T}$, 其中 \mathcal{S} 是所有以双方块覆盖第 $m-1$ 和第 m 个方块的平铺的集合, \mathcal{T} 是所有第 $m-1$ 和第 m 个在不同瓷砖覆盖下的平铺的集合. \mathcal{T} 中的平铺事实上是由两个平铺组成的, 第一个覆盖了前面 $m-1$ 个方块, 而第二个覆盖了最后的 n 个方块. 故由乘积规则得 $|\mathcal{T}| = |\mathcal{T}_{m-1}| \cdot |\mathcal{T}_n| = F_m F_{n+1}$. 将 \mathcal{S} 中的平铺删掉包含第 $m-1$ 和第 m 个方块的双方块, 同样, 将每个平铺拆成两个, 第一个覆盖前 $m-2$ 个方块, 而第二个覆盖后 $n-1$ 个方块. 取基数可得 $|\mathcal{S}| = F_{m-1} F_n$, 最后由加法原则即得证. \square

刚才给出的论证被称为组合证明, 因为它涉及到对离散对象的计数. 在接下来的过程中, 我们将遇到其他有用的证明技巧. 但组合证明通常被认为是最令人愉快的, 部分原因是它们比只涉及形式操作的演示更具启发性.

1.2 排列与词

在考虑枚举问题时, 确定所考虑的对象是否有序总是很重要的. 在这一节中, 我们将考虑最基本的有序结构, 即排列和词.

若集合 S 有 $\#S = n$, 则 S 的一个排列就是通过把 S 的元素按一定顺序列出来得到的一个序列 $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$. 如果 π 是一个排列, 我们通常用 π_i 来表示 π 的第 i 个元素, 同样地, 对于其他有序结构也是如此. 我们用 $P(S)$ 表示 S 所有排列的集合, 例如

$$P(\{a, b, c\}) = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}.$$

显然, $\#P(S)$ 只取决于 $\#S$. 故我们通常选择正则 n 元集

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

我们也考虑 S 的 k -排列, 即由 S 的 k 个不同元素通过线性排序得到的序列 $\pi = \pi_1 \dots \pi_k$. 这里 k 被称为排列的长度, 记为 $\ell(\pi) = k$. 我们用同样地名称和符号来表示其他有序结构. S 的所有 k -排列的集合记为 $P(S, k)$. 以实例说明,

$$P(\{a, b, c, d\}, 2) = \{ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc\}.$$

特别的, 如果 $\#S = n$, 则 $P(S, n) = P(S)$. 并且, 当 $k > n$ 时, $P(S, k) = \emptyset$, 因为在这种情况下, 不可能从只有 n 个元素的集合中选出 k 个不同的元素. 以及 $P(S, 0) = \{\epsilon\}$, 其中 ϵ 是空序列.

为了计算排列, 引入下面的符号会很方便. 给定非负整数 n, k , 我们可以生成降阶

$$n \downarrow_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

注意, k 表示乘积中因数的数量.

定理 1.2.1. 对 $n, k \geq 0$, 我们有

$$\#P([n], k) = n \downarrow_k.$$

特别地

$$\#P([n]) = n!$$

证明. 因为 $P([n]) = P([n], n)$, 故证明第一个公式就足够了, 给定 $\pi = \pi_1 \dots \pi_k \in P([n], k)$, 有 n 种方法取 π_1 . 因为 $\pi_2 \neq \pi_1$, 故 π_2 还有 $n-1$ 种取法, 由于 π_2 的取法与 π 中实际所选元素无关, 所以可以继续这样做, 应用一个改进后的乘积规则即得证. \square

注意, 当 $0 \leq k \leq n$ 时, 记

$$n \downarrow_k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (1.3)$$

但当 $k > n$ 时, 尽管乘积 $n \downarrow_k$ 不能表示为阶乘的商, 但其仍有意义. 事实上, 如果 $k > n$, 则 0 也是一个因数, 故 $n \downarrow_k = 0$. 这与 $P([n], k) = \emptyset$ 相符. 在特殊情况 $k = 0$ 时, $n \downarrow_k = 1$. 因为它是一个空的乘积. 同样, 这反映了 $\#P([n], 0) = \{\epsilon\}$ 中的组合逻辑.

在组合问题中需要注意的另一件事是元素是否允许重复. 在排列中没有重复, 但是当它们被允许的情况也很有趣. 一个集合 S 上的 k -词是 $w = w_1 \dots w_k$ 的序列, 其中对任意 i 有 $w_i \in S$. 注意, 这里并没有假设 w_i 是不同的. 我们把 S 上的 k -词的集合记为 $P((S, k))$. 注意, 使用双括号表示允许重复. 还要注意到 $P(S, k) \subseteq P((S, k))$, 但通常其包含的内容很严格, 例如

$$P((\{a, b, c, d\}, 2)) = P(\{a, b, c, d\}, 2) \uplus \{aa, bb, cc, dd\}.$$

下一个结果的证明与定理 1.2.1 的证明几乎相同, 因此留给读者来做.

定理 1.2.2. 对 $n, k \geq 0$ 有

$$\#P((\{n\}, k)) = n^k.$$

1.3 组合与子集

现在我们将考虑上一节中所研究组合对象的无序版本. 他们有时被称为组合, 尽管读者可能知道他们更熟悉的名字: 子集.

给定一个集合 S , 我们用 2^S 表示 S 的所有子集的集合. 注意, 2^S 是一个集合, 而不是一个数字. 例如,

$$2^{\{a, b, c\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

使用这种表示方法的原因可以通过下面的结果来说明.

定理 1.3.1. 对 $n \geq 0$ 我们有

$$\#2^{[n]} = 2^n.$$

证明. 根据定理 1.2.2, 得 $2^n = \#P((\{0, 1\}, n))$. 所以我们只需找到如下双射

$$f : 2^{[n]} \rightarrow P((\{0, 1\}, n)),$$

这是一个典型的例子. 特别地, 如果 $S \subseteq [n]$, 那么我们让 $f(S) = w_1 \dots w_n$, 其中, 对所有 i ,

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i \in S, \\ 0 & \text{如果 } i \notin S. \end{cases}$$

要证明 f 是一个双射, 只要找到它的逆就够了. 如果 $w = w_1 \dots w_n \in P((\{0, 1\}, n))$, 则设 $f^{-1}(w) = S$, 其中, 当 $w_i = 1$ 时 $i \in S$, $w_i = 0$ 时 $i \notin S$, $1 \leq i \leq n$. 很容易验证 $f \circ f^{-1}$ 和 $f^{-1} \circ f$ 是他们各自定义域上的恒等映射. 证毕. \square

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & 1 & & 1 & \\
& & 1 & & 2 & & 1 \\
& 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

图 1.2: 帕斯卡三角的 0 到 4 行

刚才给出的证明叫做双射证明法, 它是一种特别好的组合证明. 这是因为双射证明法可以将不同类型的组合对象联系起来, 有时会揭示出意想不到的联系. 还要注意, 我们证明了 f 是双射是通过求它的逆, 而不是直接证明他是一对一的和映上的. 因为有一个 f^{-1} 的具体描述可以在以后有用, 所以这是首选的方法. 最后, 在处理函数时, 我们总是从右向左去组合他们, 即

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

现在我们通过他们的基数来计算子集. 对于集合 S , 我们将使用如下符号

$$\binom{S}{k} = \{T \subseteq S \mid \#T = k\}.$$

例如,

$$\binom{\{a, b, c\}}{2} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

正如预期的那样, 我们现在找到了这个集合的基数.

定理 1.3.2. 对 $n, k \geq 0$, 我们有

$$\#\binom{[n]}{k} = \frac{n \downarrow_k}{k!}.$$

证明. 运用交叉相乘和定理 1.2.1 我们可知只需证明

$$\#P([n], k) = k! \cdot \#\binom{[n]}{k}.$$

为证上式, 我们可以取 $\pi_1 \dots \pi_k \in P([n], k)$, 并且将其对应于子集 $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq [n]$, 并且对 S 以所有可能的情况进行排序. S 的选取方法有 $\#\binom{[n]}{k}$ 种, 再次由定理 1.2.1, 排列 S 中元素的方法有 $k!$ 种. 由乘积法则即得结果. 证毕. \square

给定 $n, k \geq 0$, 我们定义二项式系数如下

$$\binom{n}{k} = \#\binom{[n]}{k} = \frac{n \downarrow_k}{k!}. \quad (1.4)$$

定义为这个名称的原因是这些数将出现在第三章研究的二项式展开中. 通常你会看到二项式系数显示在一个三角形数组中, 称为帕斯卡三角, 它的第 n 行的第 k 项是 $\binom{n}{k}$, 当 $k > n$ 时, 传统做

法是省略 0. 帕斯卡三角的 0 到 4 行见图 1.2. (很抱歉没有写出整个三角形, 但这一页不够大.) 对 $0 \leq k \leq n$, 我们可以用 (1.3) 来写

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1.5)$$

它的对称性令人愉悦. 我们也可以通过让 $\binom{n}{k} = 0$ 将二项式系数扩展到 $k < 0$. 在这种情况下, 它与 $\binom{[n]}{k} = \emptyset$ 这一事实相符.

在下一定理中, 我们综合了有关二项式系数的各种基本结果, 这些结果在后面的定理中是有用的. 在这里, 我们会用到克罗内克函数, 定义如下

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y, \\ 0 & \text{if } x \neq y. \end{cases}$$

还要注意, 我们没有在 (3) 和 (4) 中指定求和变量 k 的范围, 因为它在更大的求和中额外的项都是 0, 故它可以被视为 $0 \leq k \leq n$ 或 $k \in \mathbb{Z}$. 这两种观点都有用处.

定理 1.3.3. 设 $n \geq 0$. (1) 对 $n \geq 1$, 二项式系数满足初始条件

$$\binom{0}{k} = \delta_{k,0}.$$

和递推关系

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

(2) 二项式系数是对称的, 这意味着

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(3) 我们有

$$\sum_k \binom{n}{k} = 2^n.$$

(4) 我们有

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{n,0}.$$

证明. (1) 初始条件是显然的. 对于递推关系, 设 \mathcal{S}_1 为集合 $S \in \binom{[n]}{k}$, 其中 $n \in S$, 设 \mathcal{S}_2 为集合 $S \in \binom{[n]}{k}$, 其中 $n \notin S$. 则 $\binom{[n]}{k} = \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2$. 但如果 $n \in S$, 那么 $S - \{n\} \in \binom{[n-1]}{k-1}$. 这就给出了一个 \mathcal{S}_1 与 $\binom{[n-1]}{k-1}$ 之间的双射, 于是 $\#\mathcal{S}_1 = \binom{n-1}{k-1}$. 另一方面, 如果 $n \notin S$, 那么 $S \in \binom{[n-1]}{k}$, 这说明 $\#\mathcal{S}_2 = \binom{n-1}{k}$ 运用求和规则即得结论.

(2) 我们只需找到双射 $f: \binom{[n]}{k} \rightarrow \binom{[n]}{n-k}$. 考虑映射 $f: 2^{[n]} \rightarrow 2^{[n]}$, 且 $f(S) = [n] - S$, 其中负号表示集合的差. 注意, 复合函数 f^2 是恒等映射, 因此 f 是一个双射, 此外, $S \in \binom{[n]}{k}$ 当且仅当 $f(S) \in \binom{[n]}{n-k}$. 故 f 是被限制在这两个集合之间的双射.

(3) 对等式

$$2^{[n]} = \bigsqcup_k \binom{[n]}{k}$$

应用求和规则即得证.

(4) $n = 0$ 的情况很简单, 所以我们设 $n > 0$. 我们将在下一章学习处理带符号方程的一般方法. 但现在我们试着证明等价的等式

$$\sum_{k \text{ 奇}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ 偶}} \binom{n}{k}.$$

设 \mathcal{T}_1 是 $T \in 2^{[n]}$ 中 $\#T$ 为奇数的集合, \mathcal{T}_2 是 $T \in 2^{[n]}$ 中 $\#T$ 为偶数的集合. 我们希望找到一个双射 $g: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$. 考虑对称差分运算

$$S \Delta T = (S - T) \cup (T - S).$$

不难看出 $(S \Delta T) \Delta T = S$, 现我们用 $g(T) = T \Delta \{n\}$ 定义 $g: 2^{[n]} \rightarrow 2^{[n]}$. 因此, 由定义可得 g^2 是恒等映射. 此外 g 反转了奇偶性, 因此限制了所需的双射. \square

与排列和单词的情况一样, 我们希望枚举允许重复的“集合”. 一个多重集 M 是一个可以有重复的无序集合. 例如

$$M = \{\{a^3, b, c^2\}\}.$$

注意, 我们用双花括号表示多重集. 我们还将使用多重表示法, 其中 a^m 表示 m 个 a 相乘. 继续我们的例子

$$M = \{\{a^3, b, c^2\}\}.$$

与幂函数一样, 指数为 1 是可选的, 指数为 0 表示在这个多重集中没有这个元素. 多重集的基数是计算它的每个元素的重数和. 故在我们的例子中 $\#M = 2 + 1 + 3 = 6$. 如果 S 是一个集合, 则 M 是 S 上的一个多重集, 如果 M 上的每个元素都是 S 中的一个元素. 我们令 $\left(\left(\begin{smallmatrix} S \\ k \end{smallmatrix}\right)\right)$ 是 S 上所有基数为 k 的多重集的集合, 且

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)\right) = \#\left(\left(\begin{smallmatrix} [n] \\ k \end{smallmatrix}\right)\right).$$

例如

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} \{a, b, c\} \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\right) = \{\{\{a, a\}\}, \{\{a, b\}\}, \{\{a, c\}\}, \{\{b, b\}\}, \{\{b, c\}\}, \{\{c, c\}\}\}$$

$$\text{故 } \left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\right) = 6$$

定理 1.3.4. 对 $n, k \geq 0$ 我们有

$$\left(\binom{n}{k} \right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

证明. 我们希望找到一个双射

$$f: \left(\binom{[n]}{k} \right) \rightarrow \binom{[n+k-1]}{k}.$$

给定一个在 $[n]$ 上的多重集 $M = \{m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \dots \leq m_k\}$, 令

$$f(M) = \{m_1 < m_2 + 1 < m_3 + 2 < \dots < m_k + k - 1\}.$$

现在 $m_i + i - 1$ 是不同的, 且由 $m_k \leq n$ 有 $m_k + k - 1 \leq n + k - 1$. 则 $f(M) \in \binom{[n+k-1]}{k}$ 且这个映射是良好定义的. 现在读者可以很容易构造一个逆函数来证明 f 是一个双射. \square

和二项式系数一样, 我们把 $\left(\binom{n}{k} \right)$ 扩展到负 k 并让他等于 0. 以后我们会对其他自然定义域为 $n, k \geq 0$ 的常数做同样地处理.

我们确实希望讨论计数集和多重集之间有一个有趣的关系. 注意, 定义 (1.4) 对于任何复数 n 都有良好定义, 因为下降的阶乘只是一个乘积, 同样对于负整数也有意义. 事实上, 如果 $n \in \mathbb{N}$, 则由定理 1.3.4.

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{n}{k} \quad (1.6)$$

在这种情况下, 一个枚举公式在负参数的计算下会产生另一个枚举函数, 称为组合互易, 我们将在 3.9 节中研究.

1.4 集合划分

我们已经知道不相交并是一个很好的组合性质. 故集合划分也扮演着重要角色就不足为奇了.

集合 T 的一个划分是集合 ρ 的非空子集 B_1, \dots, B_k 使得 $T = \cup_i B_i$. 记作 $\rho \vdash T$. B_i 被称为块, 我们用 $\rho = B_1 / \dots / B_k$ 并去掉所有的花括号和逗号, 即使块的元素以及块本身是无序的. 例如, $T = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ 的一个划分为

$$\rho = acf/bc/d/g = d/eb/g/cfa.$$

我们令 $B(T)$ 是所有 $\rho \vdash T$ 的集合. 举个例子

$$B(\{a, b, c\}) = \{a/b/c, ab/c, ac/b, a/bc, abc\}.$$

第 n 贝尔数为 $B(n) = \#B([n])$. 虽然 $B(n)$ 没有已知的显示表达式, 但它有一个递归关系.

定理 1.4.1. 贝尔数满足初始条件 $B(0) = 1$ 和递归关系, 即对 $n \geq 1$ 有

$$B(n) = \sum_k \binom{n-1}{k-1} B(n-k)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & & 1 & & 1 \\
& & & 1 & & 3 & & 1 \\
& & 1 & & 7 & & 6 & & 1 \\
1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1
\end{array}$$

图 1.3: 第二类斯特林数的 1 到 5 行

证明. 初始条件即计算 \emptyset 的空划分. 对于递归, 给定 $\rho \in B([n])$, 设 k 为包含 n 的分块 B 中元素的个数. 则有 $\binom{n-1}{k-1}$ 种方法在 $[n-1]$ 中选取 B 中剩余的 $k-1$ 个元素. 且划分 $[n]-B$ 的方法有 $B(n-k)$ 种. 把所有有可能的 k 求和即得证. \square

有时, 我们可能想要知道划分中分块的数量. 定义 $S(T, k)$ 是所有含 k 个分块的 $\rho \vdash T$ 的集合. 第二类斯特林数为 $S(n, k) = \#S([n], k)$. 我们将在下一节介绍第一类斯特林数. 例如

$$S(\{a, b, c\}, 2) = \{ab/c, ac/b, a/bc\}.$$

故 $S(3, 2) = 3$, 与二项式系数一样, $1 \leq k \leq n$ 时, $S(n, k)$ 可以用图 1.3 中的三角形表示, 且这些斯特林数满足一个简单的递推关系.

定理 1.4.2. 第二类斯特林数满足初始条件

$$S(0, k) = \delta_{k,0},$$

且对 $n \geq 1$ 有递归公式

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

证明. 现在, 读者应该能毫不费力地证明初始条件了. 对于递归, $\rho \in S([n], k)$ 中的元素有两种: 第一种, 删除 n , 则剩下部分的拆分数量为 $S([n-1], k-1)$, 这是一个双射. 这就解释了 $S([n-1], k-1)$ 的和. 第二种, 删除 n 得到 $\sigma \in S([n-1], k)$, 但这个映射不是双射. 特别地, 给定 σ , 可以将 n 插入到它 k 块中的任一个以得到 $S([n], k)$. 因此, 在这种情况下总计数是 $kS(n-1, k)$. \square

1.5 按圈结构排列

将一个集合分解成一个拆分可以类比为将 $[n]$ 的排列分解成圈. 这些是由第一类斯特林数来进行计数的.

对称群为 $\mathfrak{S}_n = P([n])$. 顾名思义, \mathfrak{S}_n 有一个定义如下的群结构. 如果 $\pi = \pi_1 \dots \pi_n \in \mathfrak{S}_n$, 那么我们可以把这些排列看做一个双射 $\pi: [n] \rightarrow [n]$, 其中 $\pi(i) = \pi_i$. 由此可以得出 \mathfrak{S}_n 是一个用复合函数来计算的群.

给定 $\pi \in \mathfrak{S}_n$, $i \in [n]$, 有一个最小的指数 $\ell \geq 1$ 使得 $\pi^\ell(i) = i$. 这和下面的各种其他声明将在 1.9 节中使用有向图来证明. 在这种情况下, 元素 $i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{\ell-1}(i)$ 互不相同, 记

$$c = (i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{\ell-1}(i))$$

我们称它为长度为 ℓ 的圈, 或简称为 π 的 ℓ -圈. 长度为 1 的圈称为不动点. 例如, 若 $\pi = 6514237$ 且 $i = 1$, 则 $\pi(1) = 6, \pi^2(1) = 3, \pi^3(1) = 1$, 故 $c = (1, 6, 3)$ 是 π 的一个圈. 现在我们重复这一过程: 如果到目前为止还有 $j \in [n]$ 不存在于任一圈中, 那我们就找到包含 j 的圈使得每个元素都在一个圈中. π 的圈分解是 $\pi = c_1 \dots c_k$, 其中 c_j 是圈. 继续我们的例子可以得到

$$\pi = (1, 6, 3)(2, 5)(4)(7).$$

为了将 π 的圈分解与其描述 $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$ 区别开, 我们称后者为 π 的单行表示法. 这也与两行表示法不同, 两行表示法是一种写法如下

$$\pi = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{array} \quad (1.7)$$

注意, 根据从哪个元素开始, ℓ -圈有 ℓ 种写法, 例如

$$(1, 6, 3) = (6, 3, 1) = (3, 1, 6).$$

此外, π 的不同圈是不相交的. 所以如果我们把圈 c 看作 $[n]$ 的排列, 它与 c 的元素一致并且所有其他元素都是不动点, 那么 $\pi = c_1 \dots c_k$ 的圈可交换由于我们认为乘积是排列的组合. 回到我们的例子, 我们可以写成

$$\pi = (1, 6, 3)(2, 5)(4)(7) = (4)(1, 6, 3)(7)(2, 5) = (5, 2)(3, 1, 6)(7)(4).$$

如上所述, 我们将以下结果的证明推迟到 1.9 节.

定理 1.5.1. 每个 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 都有一个圈分解 $\pi = c_1 \dots c_k$, 这个分解是唯一的且取决于因子的顺序和每个 c_i 内元素的重新排序.

现在, 我们可以同时对上一节中给定数量块的集合划分进行研究. $n \geq 0$ 时, 我们用 $c([n], k)$ 表示 \mathfrak{S}_n 中具有 k 个圈的排列的集合. 注意表示圈数量的“ k 圈”与表示圈长度的“ k -圈”之间的区别. 第一类无符号的斯特林数是 $c(n, k) = \#c([n], k)$. 故, 类似于我们之前看到的, 对 $k < 0$ 或 $k > n$, 有 $c(n, k) = 0$. 为了理解这个符号

$$c([4], 1) = \{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2)\},$$

故 $c(4, 1) = 6$. 一般来说, 正如你在联系中需要证明的, $c([n], 1) = (n-1)!$. 第一类斯特林数的一部分展示在图 1.4 中. 同样, 我们有一个递归公式.

定理 1.5.2. 第一类无符号斯特林数满足初始条件

$$c(0, k) = \delta_{k,0},$$

且对 $n \geq 1$ 有递归公式

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k).$$

			1		
		1		1	
	2		3		1
	6	11		6	1
24	50		35	10	1

图 1.4: 第一类斯特林数的 1 到 5 行

证明. 像往常一样, 我们关注递归公式. 给定 $\pi \in c([n], k)$, 我们可以从他的圈中删除 n . 若 n 是个不动点, 则结果为 $c(n-1, k-1)$. 若 n 在一个长度至少为 2 的圈中, 则将 n 删除后我们得到的排列数为 $c([n-1], k)$. 故我们必须找到 n 插入 $\sigma \in c([n-1], k)$ 的方法数. 对于长度为 ℓ 的圈, 有 ℓ 个位置来插入 n . 故可插入的位置为 σ 中所有圈的长度之和, 即 $n-1$. \square

读者可能已经猜到, 还有一种 (带符号的) 第一类斯特林数定义如下:

$$s(n, k) = (-1)^{n-k} c(n, k).$$

为什么要给这些常数加符号还不能马上看出来, 我们将在第五章了解到原因, 它表明 $s(n, k)$ 是通过细化排序的分拆晶格的第一类惠特尼数. 在这里, 我们将用一个类比的方法来证明定理 1.3.3 的 (4).

推论 1.5.3. 对 $n \geq 0$, 我们有

$$\sum_k s(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \text{ or } 1, \\ 0 & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

证明. $n = 0$ 或 1 的情况很容易验证, 故我们假设 $n \geq 2$. 因为 $s(n, k) = (-1)^{n-k} c(n, k)$ 且 $(-1)^n$ 在整个求和过程中都是常数, 因此证明 $\sum_k (-1)^k c(n, k) = 0$ 就够了. 利用定理 1.5.2 和对 n 进行归纳可得

$$\begin{aligned} \sum_k (-1)^k c(n, k) &= \sum_k (-1)^k c(n-1, k-1) + \sum_k (-1)^k (n-1) c(n-1, k) \\ &= - \sum_k (-1)^{k-1} c(n-1, k-1) + (n-1) \sum_k (-1)^k c(n-1, k) \\ &= -0 + (n-1)0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

命题得证. \square

注意, 前面证明中考虑和的作用是除以 $k \in \mathbb{Z}$ 而不是 $0 \leq k \leq n$. 这样就不用考虑 $k = 0$ 或 $k = n$ 时的特殊情况了.

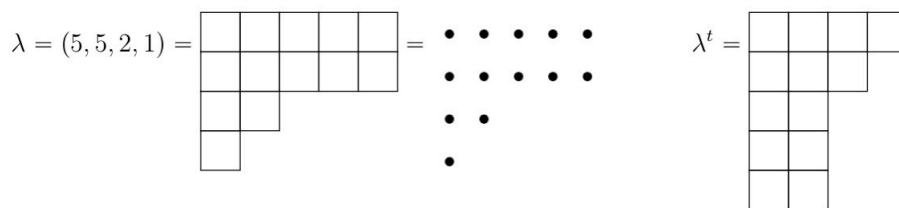


图 1.5: 一个分拆, 它的杨图和共轭

1.6 整数分拆

就像人们可以将一个集合划分成块一样, 一个非负整数也可以分割成一个和. 整数分拆不仅在组合学中占有重要地位, 而且在数论和对称群表示理论中也占有重要地位. 有关后者的更多信息, 请参阅附录 A.

$n \geq 0$ 的整数分拆是一个正整数的多重集 λ , λ 的元素之和为 n , 记为 $\lambda \vdash n$ 或 $|\lambda| = n$. 其中, 令 $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$. 这些元素被称为部分. 由于 λ 的部分是无序的, 故我们通常按照规定顺序列出它们, 即弱减的 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. 我们用 $P(n)$ 表示 n 的所有分拆的集合, 且 $p(n) = \#P(n)$. 例如,

$$P(4) = \{(1, 1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2), (3, 1), (4)\}.$$

故 $p(4) = 5$. 注意 $P([n])$ 与 $P(n)$ 的区别, $P([n])$ 是集合划分的集合而 $P(n)$ 是整数分拆的集合. 我们将对整数分拆使用多重表示法, 就像我们写多重集一样

$$\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$$

其中 m_i 为 i 在 λ 中的数量.

$p(n)$ 没有已知的闭式解. 事实上, 它甚至没有一个简单的递推公式. 人们可以用生成函数来得出这些数字的结果, 但这必须等到第三章. 这里我们只介绍一个有用的几何方法来研究 $p(n)$. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ 的 Ferrers 或杨图为一个数组, 这个数组由 n 个左对齐的箱子组成, 其中第 i 行有 λ_i 个箱子. 有时我们也用点来代替箱子. 我们通常不将分拆和它的杨图区分开来. $\lambda = (5, 5, 2, 1)$ 的杨图如图 1.5 所示. 我们应该提醒读者, 我们用英文表示杨图, 其中行从 1 到 k , 从上到下编号, 就像在一个矩阵中一样. 有些作者喜欢用法文表示, 在这种符号下, 行从下到上编号, 就像在笛卡尔坐标系中一样. λ 的共轭或转置是一个分拆 λ^t , 这个分拆的杨图是通过关于 λ 的主对角线进行反射得到的. 这在图 1.5 中完成, 这表明 $(5, 5, 2, 1)^t = (4, 3, 2, 2, 2)$. 还有另一种方法来表示共轭的各部分.

命题 1.6.1. 若 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ 是一个分拆且 $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_l^t)$, 则对 $1 \leq j \leq l$,

$$\lambda_j^t = \#\{i \mid \lambda_i \geq j\}.$$

证明. 由定义知, λ_j^t 为 λ 第 j 列的长度. 但该列在第 i 行包含一个箱子当且仅当 $\lambda_i \geq j$. \square

分拆 λ 的部分数称为它的长度, 记为 $\ell(\lambda)$. 在这一点上, 读者可能希望讨论那些 $\ell(\lambda) = k$ 的 n 的分拆. 其实, 考虑 $P(n, k)$ 会更简单一些, 它是所有 n 的 $\ell(\lambda) \leq k$ 的分拆的集合. 注意 $\ell(\lambda) = k$

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3
4	0	1	3	4	5	5

图 1.6: $0 \leq n \leq 4, 0 \leq k \leq 5$ 时 $p(n, k)$ 的值

的分拆 $\lambda \vdash n$ 的数量就是 $p(n, k) - p(n, k - 1)$. 所以在某种意义上这两种观点是等价的. 但是用 $p(n, k)$ 来表示结果会更容易. 同时

$$p(n, 0) \leq p(n, 1) \leq \cdots \leq p(n, n) = p(n, n+1) = \cdots = p(n)$$

由于这种关系. 我们最好将 $p(n, k)$ 表示在一个矩阵而不是一个三角形中, 记住, 第 n 行中的元素最终稳定为常数 $p(n)$ 的无限重复. 这个数组的一部分将在图 1.6 中表示. 如果 $n < 0$ 或 $k < 0$, 则令 $p(n, k) = 0$. 不像 $p(n)$, 我们可以写出 $p(n, k)$ 的一个简单的递归关系.

定理 1.6.2. $p(n, k)$ 满足

$$p(0, k) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } k < 0, \\ 1 & \text{如果 } k \geq 0, \end{cases}$$

和 $n \geq 1$ 时,

$$p(n, k) = p(n - k, k) + p(n, k - 1)$$

证明. 我们直接跳到递归. 注意, 因为共轭是一个双射, $p(n, k)$ 也计算分拆 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$, 其中 $\lambda_1 \leq k$. 用 $p(n, k)$ 的这种解释来证明会很方便. 我们有两种可能的情况. 若 $\lambda_1 = k$, 则 $\mu = (\lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n - k$, 且 $\lambda_2 \leq \lambda_1 = k$. 故这个分拆可以用 $p(n - k, k)$ 来计算. 另一种可能是 $\lambda_1 \leq k - 1$. 这种情况可以用 $p(n, k - 1)$ 来计数. \square

1.7 有序分拆

回想一下, 整数分拆实际上是无序的, 即使我们通常以弱递减的方式列出它们. 这就引出了一个问题, 如果我们考虑把 n 写成和且有序会发生什么. 这就是有序分拆的概念.

n 的有序分拆是一个正整数序列 $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]$, 称为部分且 $\sum_i \alpha_i = n$. 我们记 $\alpha \vdash n$, 并用方括号来区分有序分拆和整数分拆. 这导致 n 的有序分拆 $[n]$ 与整数 1 到 n 之间出现符号冲突, 但上下文应该清楚地表明这一点. 令 $Q(n)$ 为所有 n 的有序分拆的集合且 $q(n) = \#Q(n)$. 故 4 的有序分拆为

$$Q(4) = \{[1, 1, 1, 1], [2, 1, 1], [1, 2, 1], [1, 1, 2], [2, 2], [3, 1], [1, 3], [4]\}.$$

故 $q(4) = 8$, 即 2 的次幂. 正如作者喜欢说的那样, 这并非巧合.

定理 1.7.1. 对 $n \geq 1$ 我们有

$$q(n) = 2^{n-1}.$$

证明. 有一个著名的双射 $\phi: 2^{[n-1]} \rightarrow Q(n)$ 我们可以用来证明这个结果. 在第 8 章中使用准对称函数时这个映射将会很有用. 按递增顺序给定 $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq [n-1]$, 我们定义

$$\phi(S) = [s_1 - s_0, s_2 - s_1, \dots, s_k - s_{k-1}, s_{k+1} - s_k] \quad (1.8)$$

其中, 由定义, $s_0 = 0$ 且 $s_{k+1} = n$. 为了表明 ϕ 是良好定义的, 我们假设 $\phi(S) = [\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}]$. 因为 S 是递增的, 故 $\alpha_i = s_i - s_{i-1}$ 是一个正整数. 此外

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k+1} (s_i - s_{i-1}) = s_{k+1} - s_0 = n.$$

因此 $\phi(S) \in Q(n)$ 符合要求.

为了证明 ϕ 是双射, 我们构造它的逆 $\phi^{-1}: Q(n) \rightarrow 2^{[n-1]}$. 给定 $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}] \in Q(n)$, 我们令

$$\phi^{-1}(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k\}.$$

读者应该不难证明 ϕ^{-1} 是良好定义的且是 ϕ 的逆. □

通常, 我们希望通过限制所讨论对象的组成部分的数目来作出更精确的计算. 设 $Q(n, k)$ 为 n 的所有恰好有 k 个部分的有序分拆, 且 $q(n, k) = \#Q(n, k)$. 由于 $q(n, k)$ 将被证明是先前研究过的常数, 故我们不使用之前的三角. 通过前面的证明中限制函数 ϕ , 容易得出以下结果, 因此省略过程.

定理 1.7.2. 有序分拆数满足

$$q(0, k) = \delta_{k,0}$$

和

$$q(n, k) = \binom{n-1}{k-1}$$

$n \geq 1$.

1.8 十二模式

现在我们已经有了计算特定函数的所有工具. 有 12 个这样的函数, 所以它们被称为十二模式, 这个概念是吉安-卡罗·罗塔在一系列讲座中介绍的. 这个名字是由乔尔·斯宾塞提出的, 不应该与佛教的十二重道相混淆!

我们将考虑三种类型的函数 $f: D \rightarrow R$, 即任意函数, 单射和满射. 我们还允许定义域 D 和值域 R 各有两种类型: 一种是可区分的, 这意味着它是一个集合; 一种是不可区分的, 这意味着它是一个由重复若干次的单个元素组成的多重集. 因此, 考虑的函数总数为 f, D 和 R 所有可能数的乘积, 即 $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. 我们将一直假设 $|D| = n$ 及 $|R| = k$ 且它们都是非负整数. 我们将在图 1.7 的图表中整合结果.

首先, 如果 D 和 R 都是可区分的. 在不丧失一般性的前提下, 我们可以假设 $D = [n]$. 因此函数 $f: D \rightarrow R$ 可以被看成一个单词 $w = f(1)f(2)\dots f(n)$. 因为每个 $f(i)$ 有 k 个选项. 根据定理 1.2.2, 这样的 f 有 $\#P([k], n) = k^n$ 种. 如果 f 是单射, 则 w 为一个排列, 由定理 1.2.1 可得有

D	R	arbitrary f	injective f	surjective f
dist.	dist.	k^n	$k \downarrow_n$	$k!S(n, k)$
indist.	dist.	$\binom{n+k-1}{n}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$
dist.	indist.	$S(n, 0) + \cdots + S(n, k)$	$\delta(n \leq k)$	$S(n, k)$
indist.	indist.	$p(n, k)$	$\delta(n \leq k)$	$p(n, k) - p(n, k-1)$

图 1.7: 十二模式

$\#P([k], n) = k \downarrow_n$ 种. 对于满射, 我们需要一个新的概念. 如果 D 是一个集合, 则函数 $f: D \rightarrow R$ 的核是 D 的划分, 它的分块是 $f^{-1}(r)$ 的非空子集, $r \in R$. 例如, 如果 $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 是由 $f(a) = f(c) = 2, f(b) = 3$ 和 $f(d) = 1$ 给出, 那么 $\ker f = ac/b/d$. 如果 f 是满射, 那么函数可以通过选择 D 的一个划分指定 $\ker f$, 然后从 $\ker f$ 的分块到 R 选择一个双射 g . 继续我们的例子, f 完全取决于其核与双射 $g(ac) = 2, g(b) = 3$ 和 $g(d) = 1$. 由定义, 选择 $\ker f = B_1/\dots/B_k$ 的方法有 $S(n, k)$ 种. 利用单射下 $n = k$ 的情况, 双射 $g: \{B_1, \dots, B_k\} \rightarrow R$ 的数量为 $k \downarrow_k = k!$. 所以总数为 $k!S(n, k)$.

现在假设 D 是不可区分的, R 是可区分的, 我们假设 $R = [k]$. 那么可以认为 $f: D \rightarrow R$ 是一个在 R 上的多重集 $M = \{\{1^{m_1}, \dots, k^{m_k}\}\}$, 其中 $m_i = \#f^{-1}(i)$. 由此有 $\sum_i m_i = \#D = n$. 故根据定理 1.3.4, 这样的 f 数量为

$$\left(\binom{k}{n} \right) = \binom{n+k-1}{n}$$

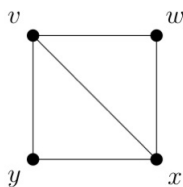
如果 f 为单射, 那么我们选择一个包含 n 个元素的 $R = [k]$ 的子集, 其计数为 $\binom{k}{n}$. 如果 f 是满射, 那么对所有 i 有 $m_i \geq 1$, 故 $[m_1, \dots, m_k]$ 是 n 的一个有序分拆. 由定理 1.7.2 知, 这样的函数有 $q(n, k) = \binom{n-1}{k-1}$ 种.

为了处理 $D = [n]$ 是可区分的而 R 是不可区分的情况, 我们引入克罗内克函数的一个有用扩展. 如果 S 是任一表述, 则

$$\delta(S) = \begin{cases} 1 & \text{若 } S \text{ 为真,} \\ 0 & \text{若 } S \text{ 为假.} \end{cases} \quad (1.9)$$

回到我们的计数, f 完全由它的核决定, 也就是 $[n]$ 的一个划分. 如果我们考虑所有的 f , 那么核可以有任意数量的分块直到包括 k . 将相应的斯特林数相加得到图 1.7 中的相应结果. 如果 f 是单射, 那么为了这个函数存在, 必须有 $n \leq k$. 在这种情况下, 只有一种可能的核, 即划分为单块. 这个计数为 $\delta(n \leq k)$. 对于满射 f , 我们将 $[n]$ 划分为 k 个块, 这样就有 $S(n, k)$ 种可能.

如果 D 和 R 都是不可区分的, 那么对 $r \in R, m_i = \#f^{-1}(r)$ 的非零数完全决定了 f . 这些数使得 $n = \#D$ 至多划分成 $k = \#R$ 个部分. 回顾 1.6 节的符号, 这样的 f 总数为 $p(n, k)$. 对于满射, 我们恰好需要 k 个部分, 故计数为 $p(n, k) - p(n, k-1)$.

图 1.8: 图 G

1.9 图和有向图

图论是组合学的重要组成部分. 我们将在后面利用有向图给出 \mathfrak{S}_n 中排列的圈分解存在唯一性的证明.

一个标号图 $G = (V, E)$ 由一组称为顶点的元素 V 和一组称为边的元素 E 组成, 其中边由一对无序的顶点组成. 我们分别将 G 的顶点集和边集记为 $V(G)$ 和 $E(G)$. 几何上, 我们认为顶点是节点, 而边是连接它们的线段或曲线. 通常, 图论中连接顶点 v 和 w 的边写成 $e = vw$ 而不是 $e = \{v, w\}$. 这种情况下, 我们说 e 包含 v 和 w , 或者说 e 有端点 v 和 w , 我们也说 v 和 w 相邻. 例如, 图 1.8 中展示了图 G , 它的顶点集为 $V = \{v, w, x, y\}$, 边集为 $E = \{vw, vx, vy, wx, xy\}$. 如果 $\#V = 1$, 则只有一个图有这样的顶点集, 我们把它叫做平凡图

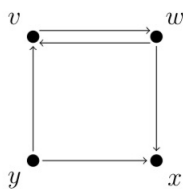
如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$, 则我们将图 H 称为图 G 的子图, 记为 $H \subseteq G$. 在这种情况下, 我们也说 G 包含 H . 接下来介绍几种重要的子图. 在图 G 中, 一个长度为 ℓ 的途径是一个顶点序列 $W: v_0, v_1, \dots, v_\ell$, 其中 $v_{i-1}v_i \in E$, $1 \leq i \leq \ell$. 我们称这条途径为从 v_0 到 v_ℓ , 或称为一条 $v_0 - v_\ell$ 途径, 或称 v_0, v_ℓ 是 W 的端点. 如果所有顶点都是不同的, 则称 W 为路, 通常我们用字母 P 代表路. 特别地, 我们用 W_n 或 P_n 来表示一条途径或一条有 n 个顶点的路径. 在我们的例图中, $P: y, v, x, w$ 是一条从 y 到 w 长度为 3 的路. 注意, 长度指的是路上的边的数量

比顶点的数量少 1. 在图 G 中, 一个长度为 ℓ 的圈是顶点序列 $C: v_1, v_2, \dots, v_\ell$, 其中有互不相同的边 $v_{i-1}v_i$, $1 \leq i \leq \ell$, 下标取 ℓ 的模, 故 $v_0 = v_\ell$. 在我们的例子中, $C: v, x, y$ 是 G 中一个长度为 3 的圈. 在一个圈中, 长度即是顶点的数量也是边的数量. 我们用 C_n 表示一个有 n 个顶点的圈, 我们称之为 n -圈. 我们用 K_n 表示完全图, 即包含 n 个顶点和它们之间所有可能的 $\binom{n}{2}$ 条边. 我们刚才定义的图的某些部分之间有着密切的关系.

引理 1.9.1. 设 G 是一个图, $u, v \in V$ (1) 任意一条从 u 到 v 的途径都包含一条从 u 到 v 的路. (2) 任意两条不同的从 u 到 v 的路的并集包含一个圈

证明. 我们将证明 (1), (2) 作为练习. 令 $W: v_0, \dots, v_\ell$ 为一条途径, 对 ℓ 进行归纳法, 即 W 的长度. 如果 $\ell = 0$, 则 W 就是条路. 故设 $\ell \geq 1$. 如果 W 是条路, 则证毕. 如果不是, 那么 W 的顶点一定有重复的, 记为 $v_i = v_j$, $i < j$. 则我们有一条 $u - v$ 途径 $W': v_0, v_1, \dots, v_i, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_\ell$ 比 W 更短. 由归纳法可知 W' 包含路 P 故 W 也包含 P . \square

设 $\mathcal{G}(V)$ 是顶点集 V 上所有图的集合. 我们也将用 $\mathcal{G}(V, k)$ 表示 $\mathcal{G}(V)$ 中所有有 k 条边的图的集合.

图 1.9: 图 G

定理 1.9.2. $n \geq 1$, $k \geq 0$ 时我们有

$$\#\mathcal{G}([n]) = 2^{\binom{n}{2}}$$

及

$$\#\mathcal{G}([n], k) = \binom{\binom{n}{2}}{k}.$$

证明. 给定 $V = [n]$, 则顶点集 V 的图 G 完全由其边集决定. 因为有 n 个顶点, 所以有 $\binom{n}{2}$ 种可能的边可供选择. 所以 $\mathcal{G}([n])$ 中 G 的个数就是这些边的子集个数, 由定理 1.3.1 可知这种情况为 2 的次幂. 对于 $\mathcal{G}([n], k)$ 的证明是类似的, 只是使用了 (1.4) 的定义. \square

如果 V 中顶点不可区分, 则说它是未标号的. 如果图的类型从上下文来看比较清晰, 或对于目前做的事没有影响, 我们就省略形容词“标号的”和“未标号的”. 未标号图的枚举比标号图复杂得多. 因此, 这个讨论被推迟到 6.4 节.

如果 G 是一个图且 $v \in V$, 那么 v 的度为

$$\deg v = \text{包含 } v \text{ 的 } e \in E \text{ 的数量}$$

在我们的例子中, $\deg v = \deg w = 3$, $\deg x = \deg y = 2$. 顶点的度和边集的基数之间有很好的关系. 下一个结果说明了组合学中一种重要的证明方法: 成对计数.

定理 1.9.3. 对任意图 G 有

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

证明. 考虑

$$P = \{(v, e) \mid v \text{ 包含于 } e\},$$

则

$$\#P = \sum_{v \in V} (\text{number of } e \text{ containing } v) = \sum_{v \in V} \deg v.$$

另一方面,

$$\#P = \sum_{e \in E} (\text{number of } v \text{ contained in } e) = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|.$$

将两种计数等同即证毕. \square

定理 1.9.3 通常被称为握手引理, 它有以下解释. 假设 V 是聚会上的一群人, 如果他们在庆祝活动中握手的话就在 v 和 w 之间画一条线. 然后把每个人握手的次数加起来, 为总共握手次数的两倍.

边的方向通常是有用的. 一个标号的有向图, 也叫有向图, 记为 $D = (V, A)$, 其中 V 是顶点集而 A 是有序顶点对的弧集. 我们用 $a = \overrightarrow{vw}$ 表示弧, 并且说 a 从 v 到 w . 例如, 图 1.9 中, 它有 $V = \{v, w, x, y\}$ 和 $A = \{\overrightarrow{vw}, \overrightarrow{wv}, \overrightarrow{wx}, \overrightarrow{yw}, \overrightarrow{yx}\}$. 我们用 $V(D)$ 和 $A(D)$ 分别表示有向图 D 的顶点集和弧集. 有向途径, 路和圈的定义与无向的相似, 只是强调 i 在适当范围内有 $\overrightarrow{v_{i-1}v_i} \in A$. 故, 在我们的例子中, $P: y, v, w, x$ 是有向路, $C: v, w$ 是有向圈. 注意, w, x, y, v 不是有向路, 因为 x 和 y 之间的弧线方向错误.

令 $\mathcal{D}(V)$ 和 $\mathcal{D}(V, k)$ 分别是有向图的集合与有 k 条弧的有向图的集合, 它们有顶点集 V . 下一个结果的证明方式与定理 1.9.2 基本相同, 故省略.

定理 1.9.4. $n \geq 1, k \geq 0$ 时有

$$\#\mathcal{D}([n]) = 2^{n(n-1)}$$

和

$$\#\mathcal{D}([n], k) = \binom{n(n-1)}{k}$$

在有向图 D 中有两种度. 顶点 $v \in V$ 有出度和入度, 分别为

$\text{odeg } v = \text{满足 } a = \overrightarrow{vw} \text{ 的 } a \in A \text{ 的数量,}$

$\text{iddeg } v = \text{满足 } a = \overrightarrow{wv} \text{ 的 } a \in A \text{ 的数量.}$

在图 1.9 中, $\text{odeg } v = 1, \text{iddeg } v = 2$. 下一个结果将允许我们完成 1.5 节剩下的证明. 有向图 $D \cup E$ 的并集是顶点集 $V(D \cup E) = V(D) \cup V(E)$ 和弧集 $\text{arcs } A(D \cup E) = A(D) \cup A(E)$.

引理 1.9.5. 设 $D = (V, A)$ 为有向图. 对于所有的 $v \in V$ 有 $\text{odeg } v = \text{iddeg } v = 1$ 当且仅当 D 是有向圈的不相交并集.

证明. 反方向很容易看出, 因为 D 的任一顶点 v 的出度和入度都与包含 v 的有向圈中的度相同. 而在这样的圈中 $\text{odeg } v = \text{iddeg } v = 1$. \square

对于正向, 取任意 $v = v_1 \in V$. 因为 $\text{odeg } v_1 = 1$, 所以必然存在一个顶点 v_2 使得 $\overrightarrow{v_1 v_2} \in A$. 同理, 也必然存在 v_3 使得 $\overrightarrow{v_2 v_3} \in A$. 继续以这种方式生成序列 v_1, v_2, \dots , 由于 V 是有限的, 那么必有两个索引 $i < j$ 使得 $v_i = v_j$. 设 j 为使 v_j 等于序列中较早出现的顶点 v_i 的最小索引. 因此, $i = 1$, 因为如果不是, 那么我们有 $\overrightarrow{v_{i-1} v_i}, \overrightarrow{v_{j-1} v_i} \in A$ 与 $\text{iddeg } v_i = 1$ 相矛盾. 由 j 的定义, 我们有一个有向圈 $C: v_1, v_2, \dots, v_{j-1}$. 此外, C 的顶点不能卷入另一条弧中, 否则会使它的出度和入度过大. 继续这样, 我们就可以把 D 分解成不相连的有向圈. \square

有时, 允许图中边为 $e = vv$ 的环是有用的. 同样, 我们可以允许有向图中的环为 $a = \overrightarrow{vv}$. 另一种可能性是我们希望有多条边, 这意味着在给定的一对顶点之间可以有多条边, 这使得 E 成为一个多重集. 多个弧的定义类似. 如果我们没有对我们的有向图做任何说明, 那么我们就假设它既没有圈也没有多条边. 现在我们来证明定理 1.5.1.

定理 1.5.1 的证明. 对任意 $\pi \in \mathfrak{S}_n$, 我们将其与包含 $V = [n]$ 和弧 $\overrightarrow{ij} \in A$ (等价于 $\pi(i) = j$) 的函数有向图 D_π 联系起来. D_π 是一个有环的有向图. 因为 π 是一个函数, 且对所有 $i \in [n]$ 有 $\text{odeg } i = 1$. 而且因为 π 是双射, 故对所有 i 有 $\text{iddeg } i = 1$. 如果允许环存在, 前面引理的证明同样有效. 故 D_π 是圈的不相交并. 但有向图 D_π 的圈对应的是排列的圈. 因此存在 π 的圈分解. 在引理 1.9.5 的必要性论证中, 也很容易验证这样分解产生的 D_π 的圈是否唯一. 这意味着关于圈的唯一性命题我们做完了. \square

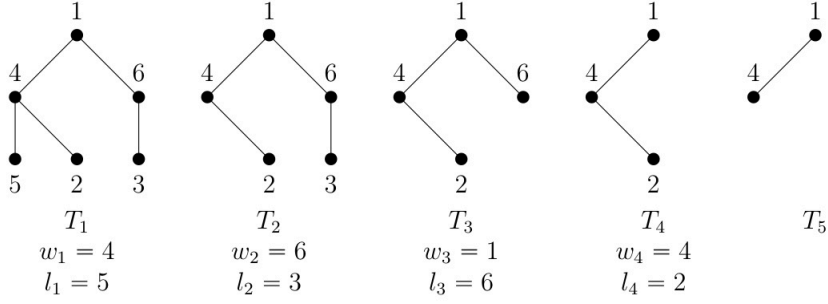


图 1.10: Prüfer 算法

1.10 树

树是一种图, 它经常出现在实践中, 甚至出现在数学之外的领域. 例如, 树在计算机科学中用作数据结构, 或在遗传学中用作进化模型. 如果每一对顶点 $v, w \in V$ 都存在一条 G 中的途径从 v 到 w , 则称 G 是连通的. 由引理 1.9.1 的 (1), 这相当于存在 G 中的一条从 v 到 w 的路. G 的连通部分是最大连通子图. 如果 G 连通, 则只有一个部分. 如果 G 中没有圈, 则称它为无圈的. 无圈图的另一个名称为森林. 森林的连通部分称为树. 故, 如果图 T 连通且无圈, 那么它就是树. 图 1.10 包含五棵树 T_1, \dots, T_5 .

图 G 的叶子是 $\deg v = 1$ 的顶点 v . 下一个结果将显示非平凡的树有叶子 (无论何时). 此外, 从这个引理可以清楚地看出, 为什么叶子是树的一个有用的归纳工具. 为了说明, 我们需要下面的符号. 如果 G 是一个图且 $W \subseteq V$, 则图 $G - W$ 的顶点集为 $V - W$, 边集由 E 中所有端点在 $V - W$ 中的边组成. 如果对某些 v 有 $W = \{v\}$, 那么我们把 $G - \{v\}$ 记为 $G - v$. 在图 1.10 中, $T_2 = T_1 - 5$. 同理, 如果 $F \subseteq E$, 那么图 $G - F$ 的顶点集为 $V(G - F) = V(G)$, 边集为 $E(G - F) = E(G) - E(F)$. 如果 F 只有一条边, 那么我们就使用与顶点类似的缩写.

引理 1.10.1. 设 T 是一棵 $\#V \geq 2$ 的树 (1) T 至少有两片叶子. (2) 如果 v 是 T 的叶子, 那么 $T' = T - v$ 也是一棵树.

证明. (1) 设 $P: v_0, \dots, v_\ell$ 是 T 中最长的一条路. 因为 T 是非平凡的, $v_0 \neq v_\ell$. 可证 v_0, v_ℓ 是叶子, 我们将证明 v_0 , 同样地证明也适用于 v_ℓ . 假设 $\deg v_0 \geq 2$. 那么一定有一个顶点 $w \neq v_1$ 使得 $v_0 w \in E$. 现在有两种可能. 如果 w 不是 P 的顶点, 则 $P': w, v_0, \dots, v_\ell$ 比 P 更长, 与 P 的定义相矛盾. 如果 $w = v_i, 2 \leq i \leq \ell$, 则 P 从 v_0 到 v_i 连同边 $v_0 v_i$ 形成了 T 中的一个圈, 再次矛盾.

(2) 显然 T' 是无圈的, 因为移除顶点不能创建一个圈. 为了证明它是连通的, 取 $x, y \in V(T')$. 因为 T 是连通的, 故 x, y 也是 T 的顶点. 引理 1.9.1 的 (1) 表明 T 中有一条从 x 到 y 的路 P . 如果这条路也在 T' 中, 则证明完成. 但如果 P 经过 v , 那么, 因为只有一个唯一的顶点 v' 与 v 相邻, 所以 P 在经过 v 之前与之后都必须经过 v' . 这就与 P 的所有顶点都是不同的相矛盾. \square

树有许多特征. 我们在这里收集了一些, 因为它们在后继中 useful.

引理 1.10.2. 设 T 是 $\#V = n$ 及 $\#E = m$ 的图. 下面是 T 为树的等价条件.

(1) T 是连通的且无圈.

- (2) T 是无圈的且 $n = m + 1$.
 (3) T 是连通的且 $n = m + 1$.
 (4) 对于每一对顶点 u, v , 都有一条唯一的从 u 到 v 路径.

证明. 我们将证明 (1),(2),(3) 的等价性. (1) 与 (4) 的等价性留作练习. 要证明 (1) 可推 (2), 通过归纳法证明 $n = m + 1$ 就够了. $n = 1$ 时易证, 如果 $n \geq 2$, 由引理 1.10.1, T 有一个叶子 v . 对 $T' = T - v$, 它的顶点数与边数的关系为 $n' = m' + 1$. 但 $n = n' + 1$ 且 $m = m' + 1$, 故 $n = m + 1$.

要证 (2) 可推 (3), 考虑 T 的连通部分 T_1, \dots, T_k . 因为 T 是无圈的, 所以每个连通部分都是树. 由 (1) \implies (2), 我们有 $n_i = m_i + 1$, $1 \leq i \leq k$, 其中 $n_i = \#V(T_i)$ 且 $m_i = \#E(T_i)$. 因为有 $\sum_i n_i = n$ 及 $\sum_i m_i = m$, 故把这些等式加在一起可得 $n = m + k$. 又因为 $n = m + 1$, 故 $k = 1$. 这意味着 T 只有一个部分, 故是连通的.

我们用反证法由 (3) 推 (1). 假设 T 包含一个圈 C , 令 $e = uv \in E(C)$. 我们说 $T - e$ 仍是连通的. 如果 x, y 是 $T - e$ 中任意两个顶点, 那么在 T 中有一个从 x 到 y 的途径 W . 如果 W 不包含 e , 那么 W 仍在 $T - e$ 中. 如果 W 包含 e , 则将 W 中的 e 替换为路 $C - e$, 形成 $T - e$ 中从 x 到 y 的新途径 W' . 我们可以一直这样移除边直到得到的图 T' 是无圈的, 因为 T' 仍然是连通的, 所以它是一棵树, 故 $n' = m' + 1$, 但 $n' = n$ 且 $m' < m$ 所以 $n < m + 1$, 矛盾. \square

设 $\mathcal{T}(V)$ 是顶点集 V 上所有树的集合. 对于 $\#\mathcal{T}(V)$, 下面这个漂亮的公式有很多不同的证明, 其中很多在 Moon 的书中有. \square

定理 1.10.3. 当 $n \geq 1$ 时, 我们有

$$\#\mathcal{T}([n]) = n^{n-2}.$$

证明. $n = 1$ 的情况易证, 所以假设 $n \geq 2$. 由定理 1.2.2 可以找到一个双射 $f : \mathcal{T}([n]) \rightarrow P([n], n-2)$. 有一个著名的构造 f 的算法叫做 Prüfer 算法, 图 1.10 为示例. 给定 $T \in \mathcal{T}([n])$, 为了求 $f(T) = w_1 \dots w_{n-2}$, 我们构造一个通过将 T 的顶点移除的树的序列 $T = T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$, 如下所示, 由于 T 的顶点标记为 $1, \dots, n$, 所以我们可以找到最大顶点. 给定 T_i , 我们找到叶子 $l_i \in V(T_i)$ 使得 l_i 最大, 并且令 $T_{i+1} = T_i - l_i$. 由先前的引理, T_{i+1} 也是一棵树. 因为 l_i 是叶子, 故它只与 T_i 中的 w_i 相邻, 其中 w_i 是 $f(T)$ 中的第 i 个元素. 现根据定义, 每个 $w_i \in [n]$ 与 $f(T)$ 长度为 $n-2$. 故 $f(T) \in P([n], n-2)$.

为了证明 f 是双射, 我们要找到它的逆. 给定 $w \in P([n], n-2)$, 我们首先构造一个排列 $l = l_1 \dots l_{n-2} \in P([n], n-2)$, 其中 l_i 是从 T_i 中移除的叶子, 将 T_i 移除 l_i 后得到 T_{i+1} . 故我们构造 l_i 为

$$l_i = \max([n] - \{l_1, \dots, l_{i-1}, w_i, \dots, w_{n-2}\}) \quad (1.10)$$

最后我们构造 $f^{-1}(w) = T$, 这里 T 的边为 $e_i = l_i w_i$, $1 \leq i \leq n-2$, 以及边 $e_{n-1} = l_{n-1} l_n$, 其中 $[n] - \{l_1, \dots, l_{n-2}\} = \{l_{n-1}, l_n\}$. 为了证明 $f^{-1}(w) = T$ 是树, 首先注意 l_1 是 T 的叶子, 因为由 (1.10) 和 e_{n-1} 的定义, l_1 与 w_1 相邻且不与 T 的其他任何叶子相邻. 考虑 $w' = w_2 \dots w_{n-2}$, 用集合 $[n] - \{l_1\}$ 代替 $[n]$ 来将算法 f^{-1} 应用到 w' 上. 通过归纳, 得到树 T' . 而 T 是通过把 l_1 作为叶子加到 T' 上形成的, 故 T 也是一棵树.

为了证明 f 和 f^{-1} 互逆, 我们将证 $f^{-1} \circ f$ 是恒等映射, 将 $f \circ f^{-1}$ 的证明留给读者. 设 $f(T) = w_1 \dots w_{n-2}$, 同时, 令在构造 $f(T)$ 时移除的叶子序列为 $l'_1 \dots l'_{n-2}$. 那么根据算法的定义, T 的边为 $l'_i w_i$, $1 \leq i \leq n-2$, 以及 $l'_{n-1} l'_n$, 其中 $[n] - \{l'_1, \dots, l'_{n-2}\} = \{l'_{n-1}, l'_n\}$. 将它与 f^{-1} 的定义比较

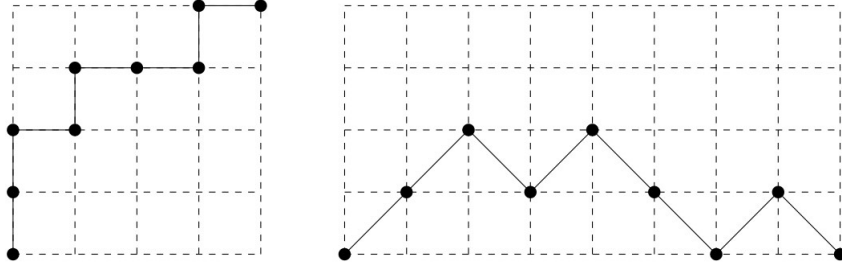


图 1.11: Dyck 路

我们可证对所有 i 有 $l_i = l'_i$, 且如果我们能证明对 $1 \leq i \leq n-2$ 等式成立则证明完成. 因为 l'_i 是 T_i 中一个叶子, 所以它不能是之前被移除的叶子 l'_1, \dots, l'_{i-1} . 其余的顶点中, w_i, \dots, w_{n-2} 不是这个叶子, 因为它们与将要被移除的叶子相邻. 相反, 那些不属于 w_i, \dots, w_{n-2} 的必须是叶子, 否则只要它们相邻的叶子被移除就会被列为 $w_j, j \geq i$. 因此 T_i 的叶子一定是 $[n] - \{l'_1, \dots, l'_{i-1}, w_i, \dots, w_{n-2}\}$ 中的元素. 因为我们总是移除最大的叶子, 所以我们可以得到选择 l'_i 与 (1.10) 的方法完全相同. 因此 $l_i = l'_i$ 得证. \square

1.11 格路

格路可以引出组合学中许多有趣的问题. 它们在概率与统计中也很重要; 参见 Mohanty 的书.

考虑平面上的整数格

$$\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

格路由 \mathbb{Z}^2 上的元素 $P: (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_\ell, y_\ell)$ 组成的序列. 与图论中一样, 我们说路从 (x_0, y_0) 到 (x_ℓ, y_ℓ) 有长度 ℓ , (x_0, y_0) 与 (x_ℓ, y_ℓ) 是它的端点. 与图论的路不通, 我们不假定 (x_i, y_i) 是不同的. 为了说明这个符号, 如果我们假设图 1.11 中左边的路从原点开始, 那么它将被写成

$$P: (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4).$$

P 上 (x_{i-1}, y_{i-1}) 和 (x_i, y_i) 之间的步是向量 $s_i = [x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}]$. 注意使用方括号和圆括号来区分步与路中的顶点. 注意 P 是由它的步决定的, 且完全由它的步和初始顶点决定. 如果没有指定初始顶点, 则设它是原点. 设 $E = [1, 0]$ 与 $N = [0, 1]$ 分别为向东和向北步. 图 1.11 左边的路也可表示为 $P: NNENEENE$.

我们用符号 $\mathcal{NE}(m, n)$ 表示从 $(0, 0)$ 到 (m, n) 的格路, 且只使用向东步和向北步. 我们称只使用 N 和 E 步的格路为东北路.

定理 1.11.1. $m, n \geq 0$ 时, 有

$$\#\mathcal{NE}(m, n) = \binom{m+n}{m}$$

证明. 设 P 是从 $(0, 0)$ 到 (m, n) 的东北路, 则 P 共有 $m+n$ 步. 且一旦有 m 步选为 E , 则其余的必然是 N . \square

我们将关注一种特殊的东北路. 一条从 $(0,0)$ 开始, 到 (n,n) , 结束, 且从不低于直线 $y=x$ 的东北路称为半长为 n 的 Dyck 路. 图 1.11 中的第一条路就是这种类型的. 注意, n 被称为半长是因为 Dyck 路本身有 $2n$ 步. 我们用 $\mathcal{D}(n)$ 表示半长为 n 的 Dyck 路的集合. 这不会与顶点集 V 上的有向图 $\mathcal{D}(V)$ 混淆, 因为前者的符号 n 是一个非负整数而后者是一个集合. 我们现在定义卡特兰数如下

$$C(n) = \#\mathcal{D}(n)$$

卡特兰数在组合学中随处可见. 事实上, Stanley 写了一本书, 其中包含 214 种不同的 $C(n)$ 的组合解释.

定理 1.11.2. 我们有初始条件

$$C(0) = 1$$

和 $n \geq 1$ 时的递归关系

$$C(n) = C(0)C(n-1) + C(1)C(n-2) + C(2)C(n-3) + \cdots + C(n-1)C(0)$$

证明. 初始条件计算的是只有一个顶点的路. 对于递归, 取 $P: v_0, \dots, v_{2n} \in \mathcal{D}(n)$, 其中对所有 i 有 $v_i = (x_i, y_i)$. 设 $j > 0$ 是使得 v_{2j} 在直线 $y=x$ 上最小的下标. 因为 $v_{2n} = (n, n)$ 满足这个条件, 所以这样的指标一定存在. 还要注意, 在 $y=x$ 上没有奇数下标的顶点, 因为在该顶点之前的向北步与向东步地步数不可能相等. 故我们可得 P_1 , 即从 v_1 到 v_{2j-1} 的部分, 它保持在 $y=x+1$ 之上. 所以可选择的 P_1 有 $C(j-1)$ 种. 如果 P_2 是 P 从 v_{2j} 到 v_{2n} 的一部分, 则 P_2 是半长为 $n-j$ 的 Dyck 路. 故可选择的 P_2 有 $C(n-j)$ 种. 因此所有这样的 P 有 $C(j-1)C(n-j)$ 种, 再把所有 $1 \leq j \leq n$ 相加即证毕. \square

卡特兰数有一个显示表达式, 但为了推导这个公式, 我们使用由 $C(n)$ 计算的第二种路更为方便. 我们分别称 $U = [1, 1]$ 与 $D = [1, -1]$ 升步和降步. 则升降路为只使用升步与降步的路. 显然, 如果我们令 $\tilde{\mathcal{D}}(n)$ 为不低于 x 轴的从 $(0,0)$ 到 $(2n, 0)$ 的升降路的集合, 则 $\#\tilde{\mathcal{D}}(n) = \#\mathcal{D}(n) = C(n)$. 事实上, 通过旋转和平面膨胀可以从一个集合的路对应到另一个平面的路. 图 1.11 中的两条路在这个映射下对应, 第二条路径表示为 $P: UUDUDDUD$.

定理 1.11.3. $n \geq 0$ 时有

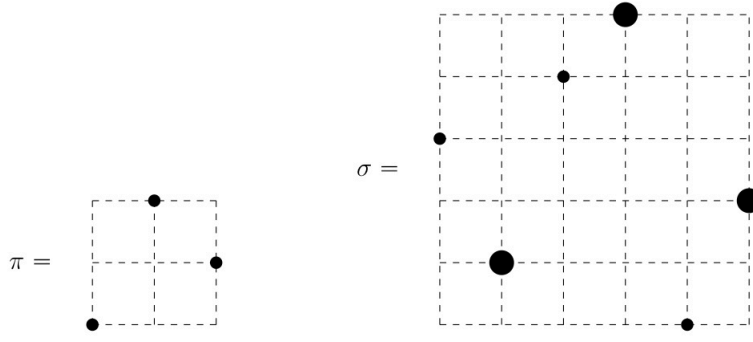
$$C(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

证明. 我们把右边改写为

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}.$$

设 \mathcal{P} 为从 $(0,0)$ 开始到 $(2n+1, -1)$ 结束的所有升降路的集合, 这样的路有 $2n+1$ 步, 其中 n 步是升的 (这使得其他 $n+1$ 步是降的), 故 $\#\mathcal{P} = \binom{2n+1}{n}$. 我们需要找到 \mathcal{P} 的一个划分 ρ 满足以下条件:

1. ρ 的每个分块 B 都有 $\#B = 2n+1$
2. ρ 的分块与 $\tilde{\mathcal{D}}(n)$ 中的路之间存在双射.

图 1.12: $\pi = 132$ 与 $\sigma = 425613$

这可得到 $\#\tilde{\mathcal{D}}(n)$ 等于 ρ 的分块数, 即 $\#\mathcal{P}/(2n+1)$, 从而得到需要的等式.

为了确定 ρ , 我们取任意 $P \in \mathcal{P}$ 并说分块 B 包含 P . 我们将 P 的顶点 v 的 y 坐标称为它的高度, 记为 $\text{ht } v$. 假设 P 可由步表示为 $P: s_1 s_2 \dots s_{2n+1}$. 定义 P 的第 r 次旋转为路

$$P_r: s_{r+1} s_{r+2} \dots s_{2n+1} s_1 s_2 \dots s_r$$

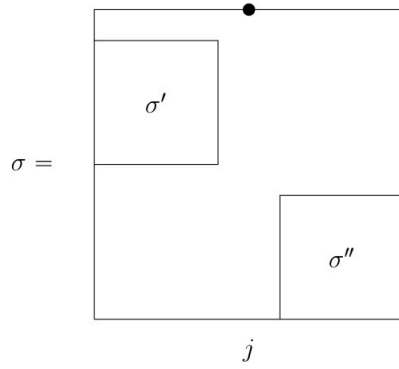
其中, 所有路都从原点开始. 令 $B = \{P_0, \dots, P_{2n}\}$. 为了证明 B 有正确的基数, 我们必须证明 P_i 是不同的. 假设存在两条路是相等的, 我们可以重新编号, 使得存在 $1 \leq j \leq 2n$ 有 $P_0 = P_j$. 取 j 为最小的一个. 迭代这个等式, 我们可以得到 $P_0 = P_j = P_{2j} = \dots$ 这些等式, 以及 j 越小越好, 这意味着 $P = P_0$ 连接了 $P': s_1 \dots s_j$ 与它自身, 且 P 为它的 k 倍, $k \geq 2$. 设 P' 在高度为 h 时结束, 那么 P 必须在高度为 kh 时结束, 因此 $kh = -1$. 这就使得 $k = 1$, 矛盾.

为了完成证明, 我们必须证明 ρ 的分块与 $\tilde{\mathcal{D}}(n)$ 中的路是双射的. 设 $\tilde{\mathcal{D}}'(n)$ 为在 $\tilde{\mathcal{D}}(n)$ 中的每条路再加上一个降步所得到的路的集合. 故 ρ 的划分 $\mathcal{P} \supseteq \tilde{\mathcal{D}}'(n)$. 这就足以说明在 ρ 的每一个分块 B 都有唯一一条 $\tilde{\mathcal{D}}'(n)$ 中的路. 令 B 像前一段那样旋转路生成的, 设 $P: v_0 \dots v_{2n+1}$ 为 P 的格点, h 是 P 的一个顶点的最小高度, 然后在 P 中所有高度为 h 的顶点中设 v_r 为最左边的那个. 我们说 $P_r \in \tilde{\mathcal{D}}'(n)$ 且对 $s \in \{0, 1, \dots, n\} - \{r\}$ 没有其他的 P_s 在这个集合中. 我们将证明这两个声明中的第一个. 由于 v_r 被移到了原点, 且在 P 中高度最小, 所以 $i \geq r$ 时其他所有 v_i 平移后都保持在 x 轴上方. 至于 $i < r$ 时的 v_i , 他们也必须被平移, 因此 v_r 是 P_r 的最后一个顶点, 且高度为 -1 . 但由于 v_r 是 P 中第一个高度最小的顶点, 在它之前的所有顶点的高度一定比它大, 即大于 -1 , 因此它们也必须在 x 轴上方 (或之上). 因此只有 P 的最后一个顶点在 x 轴下方, 这就是我们想要证明的. \square

1.12 有禁模式

有禁模式是组合学中一个相对较新的研究领域. 由于它与代数几何和计算机科学的联系, 它有了很多的发展, 有关此主题的更多信息请参阅 Bóna 或 Kitaev 的书.

设 S 是 $\#S = k$ 的整数集合, 考虑排列 $\sigma \in P(S)$. σ 的标准化是将 σ 中最小元素替换为 1, 其次最小元素替换为 2, 以此类推得到的排列 $\text{std } \sigma \in P([k])$. 例如, 如果 $\sigma = 263$, 那么 $\text{std } \sigma = 132$. 用单行表示法表示 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 与 $\pi \in \mathfrak{S}_k$. 如果 σ 中存在一个子序列 σ' 使得 $\text{std } \sigma' = \pi$, 那么称 σ

图 1.13: $\sigma \in \text{Av}_n(132)$ 的分解

包含 π 的副本. 注意, 一个子序列不需要由 π 中连续的元素组成. 在这种情况下, π 称为模式. 例如, $\sigma = 425613$ 包含模式 $\pi = 132$, 因为 $\sigma' = 263$ 可标准化为 π . 另一方面, 我们说如果不存在子序列 σ' 使得 $\text{std } \sigma' = \pi$, 则称 σ 禁用 π . 继续我们的例子, 我们可以发现 σ 禁用 4321 , 因为 σ 不包含一个长度为 4 的递减子序列. 如果 S, T 是 $\#S = \#T = k$ 的集合, 且对所有 i, j 有 $\sigma_i < \sigma_j$ 等价于 $\tau_i < \tau_j$, 那么我们说 $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k \in P(S)$ 与 $\tau = \tau_1 \dots \tau_k \in P(T)$ 阶同构. 很容易看出, σ 包含一个子序列与 π 同构.

为了研究模式, 有一个与其排列矩阵相应的排列的几何模型是很有用的, 我们再一次要用到格路. 给定 $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$, 它的图是 $1 \leq i \leq n$ 时点 $(i, \sigma_i) \in \mathbb{Z}^2$ 的集合. 在图中, 我们总是假设左下角的坐标为 $(1, 1)$. 用先前的例子, $\pi = 132$ 与 $\sigma = 425613$ 的图如图 1.12 所示. 与 π 的副本 263 相对应的点已经被放大, 以强调使用图表可以很容易得看到图的包含.

从枚举的角度看, 禁用通常比包含更容易处理, 设 $\pi \in \mathfrak{S}_k$, 我们考虑

$$\text{Av}_n(\pi) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \text{ 禁用 } \pi\}.$$

注意, 许多作者用 $\mathfrak{S}_n(\pi)$ 而不是 $\text{Av}_n(\pi)$ 来表示这个集合. 如果对所有 $n \geq 0$ 有 $\#\text{Av}_n(\pi) = \#\text{Av}_n(\pi')$, 我们称 π 与 π' Wilf 等价, 记为 $\pi \equiv \pi'$. 很容易看出这是 \mathfrak{S}_n 上的等价关系. 我们将证明在 \mathfrak{S}_3 中任何两种排列都是 Wilf 等价的.

某些等价的 Wilf 很容易从图表的操作中得到. 考虑正方形的二面体群

$$D = \{\rho_0, \rho_{90}, \rho_{180}, \rho_{270}, r_0, r_1, r_{-1}, r_\infty\} \quad (1.11)$$

其中 ρ_θ 是逆时针旋转 θ 度得到的, r_m 是关于一条斜率为 m 的直线反射得到的. 如果 σ 包含 π 的副本 σ' 且 $f \in D$, 那么 $f(\sigma)$ 包含 $f(\pi)$ 的副本 $f(\sigma')$. 用 f^{-1} , 我们可得前面的论断反过来也是正确的. 由此得出, σ 禁用 π 当且仅当 $f(\sigma)$ 禁用 $f(\pi)$. 我们已经证明了以下结果.

引理 1.12.1. 对任意 $\pi \in \mathfrak{S}_k$ 及 $f \in D$, 我们有 $\pi \equiv f(\pi)$.

这个引理中的等价叫做平凡 Wilf 等价. 特别地, 在 \mathfrak{S}_3 中, 通过反复运用 ρ_{90} 可以得到 $132 \equiv 231 \equiv 213 \equiv 312$ 及 $123 \equiv 321$. 事实上, 所有六种排列都是 Wilf 等价的, 并且它们的禁用集由卡特林数来计算. 我们从等价排列中第一个集合中的 132 开始.

定理 1.12.2. $n \geq 0$ 时有

$$\#Av_n(132) = C(n).$$

证明. 利用定理 1.11.2 中给出的 $C(n)$ 的初始条件和递归关系对 n 进行归纳. 与之前一样, 我们主要关注递归公式. 取 $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n \in Av_n(132)$, 且设 $\sigma_j = n$. 故我们可记 $\sigma = \sigma' n \sigma''$, 其中 $\sigma' = \sigma_1 \dots \sigma_{j-1}$ 且 $\sigma'' = \sigma_{j+1} \dots \sigma_n$. 显然 σ' 与 σ'' 必须禁用 132, 因为它们是 σ 的子序列. 我们还可设 $\min \sigma' > \max \sigma''$, 因此我们可得 σ 分解为图 1.13 所示. 事实上, 如果存在 $s \in \sigma'$ 及 $t \in \sigma''$ 有 $s < t$, 则 σ 包含 snt , 而 snt 是 132 的一个副本, 矛盾. 因此 σ' 与 σ'' 是排列 $\{n-1, n-2, \dots, n-j+1\}$ 与 $[n-j]$, 两者都禁用 132. 相反的, 如果 σ 的 σ', σ'' 禁用 132 且有图 1.13 中的形式, 则 σ 一定禁用 132. 为了完成计数, 根据我们所展示的和归纳的, σ' 有 $C(j-1)$ 种选择, σ'' 有 $C(n-j)$ 种选择. 将它们相乘且对 $j \in [n]$ 进行求和可得 σ 有 $C(n)$ 种选择. \square

接下来我们将处理 123, 但要证明这个我们需要一些新概念. $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ 的从左到右最小值为满足 $\sigma_i < \min \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}\}$ 的 σ_i . 例如, $\sigma = 698371542$ 有从左到右最小值 $\sigma_1 = 6, \sigma_4 = 3$, 及 $\sigma_6 = 1$. 如果有必要可以区分不同的位置, σ_j 被称为从左到右最小值的值. 按照从左到右的顺序找出从左到右的最小值, 位置和值总是满足

$$1 = i_1 < i_2 < \dots < i_l \text{ and } m_1 > m_2 > \dots > m_l = 1. \quad (1.12)$$

这里 $l \geq 1$.

我们需要确定, 给定一组值和位置, 是否存在具有这些从左到右最小值的排列. 为此, 我们引入了再组合学和其他领域上也很有用的组合上的优势序位. n 的一个弱有序分拆是一个非负整数序列 $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_l]$, 其中 $\sum_i \alpha_i = n$. 因此, 在弱有序分拆中 0 是允许的, 且我们使用 0 作为下标. 如果对所有 $j \geq 1$ 有

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_j,$$

其中如果 $j > \ell(\alpha)$ 时 $\alpha_j = 0$, 且 $\alpha, \beta \models_0 n$ 则 α 由 β 支配, 记为 $\alpha \leq \beta$. 对 β 也是相似的. 举个例子, $[2, 2, 1, 1] \leq [3, 1, 2]$ 因为 $2 \leq 3, 2+2 \leq 3+1, 2+2+1 \leq 3+1+2$, 及 $2+2+1+1 = 3+1+2+0$. 由于 $\alpha, \beta \models_0 n$, 所以最后一个不等式总是一个等式. 在下一个结果中, 读者将注意到 ι 与 μ 的构造与 (1.8) 定义的映射 ϕ .

引理 1.12.3. 设 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

(1) $\sigma \in Av_n(123)$ 当且仅当它的非从左到右最小值是递减的

(2) 存在 $\sigma \in Av_n(123)$ 的从左到右最小值的位置与值给定如 (1.12) 当且仅当 $\iota \leq \mu$, 其中

$$\iota = (i_2 - i_1 - 1, i_3 - i_2 - 1, \dots, i_{l+1} - i_l - 1)$$

$$\mu = (m_0 - m_1 - 1, m_1 - m_2 - 1, \dots, m_{l-1} - m_l - 1)$$

且 $i_{l+1} = m_0 = n + 1$, 在这种情况下, σ 是唯一的.

证明. (1) 我们将证明这个命题的对偶形式. 首先假设 σ 包含 123 的副本 $\sigma_i \sigma_j \sigma_k$. 则 σ_j, σ_k 不可能从左到右最小. 因为 σ_i 在它们左边且比它们小. 又因为 $\sigma_j < \sigma_k$, 所以非从左到右最小值序列包含一个递增. 反过来, 假设 $j < k$ 时有 $\sigma_j < \sigma_k$, 且它们都不是从左到右最小值. 令 σ_i 为 σ_j 左边最接近的一个从左到右最小值. 这样的 σ_i 一定存在, 因为 σ 一定由一个从左到右最小值开始. 因此 $\sigma_i < \sigma_j < \sigma_k$ 给出 123 的副本.

(2) 显然, 如果 σ 存在, 那么它必须是唯一的, 因为它的从左到右最小值的位置和值由 (1.12) 给出, 且其余元素只能按 (1) 的方式排列. 我们可以尝试构造满足下列给定条件的 σ . 在这个证明后会给出一个例子. 我们从有 n 个空位的一行开始, 现在我们在位置 $i_1 < \cdots < i_l$ 填进值 $m_1 > \cdots > m_l$. 用降序将元素 $S = [n] - \{m_1, \dots, m_l\}$ 填满其余的位置 (非从左到右最小值的集合), 这样得到的 σ 禁用 123, 因为 σ 是两个递减子序列的并. 所以唯一的问题是这样做是否会导致一个排列有 m_j 作为它的从左到右最小值. 我们知道 m_1 总是一个从左到右最小值, 不管其他元素是什么. 现在 m_{j+1} 是 m_j 之后的第一个从左到右最小值当且仅当在位置 i_{j+1} 之前的空位填进了一个比 m_j 大的元素. 注意 $\iota_j = i_{j+1} - i_j - 1$ 是位置 i_j 与 i_{j+1} 之间的空位数量. 同样 $\mu_j = m_{j-1} - m_j - 1$ 是 $m_j < s < m_{j-1}$ 的 $s \in S$ 的数量. 由此可见 $\iota_1 + \cdots + \iota_j$ 是位置 i_{j+1} 之前的空位数, $\mu_1 + \cdots + \mu_j$ 是 S 中比 m_j 大的数. 故填满空位且能保持从左到右最小值不变当且仅当满足 $\iota \leq \mu$ 的不等式. 证毕. \square

假设我们想看是否 $\sigma \in \text{Av}_9(123)$ 在位置 $1 < 4 < 6$ 有从左到右最小值 $6 > 3 > 1$, 我们可以从下面看

$$\sigma = 6 _ 3 _ 1 _ _. \quad (1.13)$$

我们希望验证是否用 [9] 中剩余的元素以递减的顺序填满空位会得到以初始元素为从左到右最小值的排列. 一种方法是填补空位, 并验证所需的元素是从左到右最小值: $\sigma = 698371542$. 另一种方法就是使用 ι 与 μ 的组合. 注意, $\iota_1 = 4 - 1 - 1 = 2$ 是原式中 $m_1 = 6$ 与 $m_2 = 3$ 之间的空位数, 类似 $\mu_1 = 10 - 6 - 1 = 3$ 是 $S = [9] - \{6, 3, 1\}$ 中比 $m_1 = 6$ 大的元素数. 为了填补 6 和 3 之间的空位使得 6 是从左到右最小值, 我们使用的数字都必须大于 6, 当 $\iota_1 \leq \mu_1$ 时这是可能的. 同样 $\iota_1 + \iota_2 \leq \mu_1 + \mu_2$ 确保可以用大于 $m_2 = 3$ 的数字填 $m_3 = 1$ 左边的空位, 以此类推. 故检查是否满足 $\iota \leq \mu$ 也决定了 σ 是否有正确的从左到右最小值.

我们需要一个类似引理 1.12.3 的 $\text{Av}_n(132)$ 的元素. 为了说明它, 我们定义 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l]$ 的弱有序分拆的反转为

$$\alpha^r = [\alpha_l, \alpha_{l-1}, \dots, \alpha_1]$$

引理 1.12.4. 设 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (1) $\sigma \in \text{Av}_n(132)$ 当且仅当对每一个从左到右最小值 m , σ 的右边和大于 m 的元素构成一个递增的子序列.

(2) 存在 $\sigma \in \text{Av}_n(132)$, 且有 (1.12) 所示的从左到右最小值的位置与值当且仅当 $\mu^r \leq \iota^r$, 其中 ι, μ 由引理 1.12.3 给出. 这种情况下, σ 唯一.

证明. 这一结果的证明与引理 1.12.3 的证明相似, 因此将留作练习. 这里我们只从它从左到右最小值与空位的式子给出 $\sigma \in \text{Av}_n(132)$ 的构造. 同样, 在证明后会给出一个例子. 我们保留之前引理证明的记号. 我们首先用元素 $s \in S$ 填满 $m_l = 1$ 右边的空位, 使得 $m_l < s < m_{l-1}$ 按递增顺序排列且尽可能靠左 (这样他们将是连续的). 接下来, 我们用 $m_{l-1} < s < m_{l-2}$ 的 $s \in S$ 来填 m_{l-1} 右边剩余的空位, 使它们形成一个递增的子序列, 且尽可能靠左. 继续以这种方式进行下去, 直到所有空位被填满. \square

假设我们希望填满 (1.13), 并让 σ 禁用 132. 如果 $m_3 < s < m_2$ 则 $s = 2$, 故我们把 2 放在 $m_3 = 1$ 的右边可得 $\sigma = 6 _ 3 _ 12 _$. 同样, 满足 $m_1 < s < m_2$ 的有 $s = 4, 5$, 故我们将这些元素以递增顺序从左到右依次填进可得 $\sigma = 6 _ 34125 _$. 最后, 我们将比 $m_1 = 6$ 大的元素用同样的方法填进可得最后的结果 $\sigma = 678341259$.

在我们得到 \mathfrak{S}_3 中所有元素都是 Wilf 等价的结果之前还需要最后一个概念. 假设 $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_l]$ 和 $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_l]$ 都是 n 的弱有序分拆. 我们称 $\alpha \preceq \beta$ 当且仅当 $\beta^r \preceq \alpha^r$. 为了证明这一点, 注意不等式 $\alpha_1 + \dots + \alpha_j \leq \beta_1 + \dots + \beta_j$ 等于 $n - (\beta_1 + \dots + \beta_j) \leq n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_j)$. 但 $n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_j) = \alpha_r + \alpha_{r-1} + \dots + \alpha_{j+1}$, 对 β 也是如此. 做这个替换我们可得 $\beta^r \preceq \alpha^r$ 的不等式, 这里所有步骤都是可逆的. 最后我们说双射 $f: S \rightarrow T$ 保持性质 P 如果对所有 $s \in S$ 有性质 P 等价于 $f(s)$ 有性质 P .

定理 1.12.5. $n \geq 0$ 时, 对 $\pi \in \mathfrak{S}_3$ 有

$$\# \text{Av}_n(\pi) = C(n).$$

证明. 由定理 1.12.2 和前面的讨论, 可以证明 $\# \text{Av}_n(123) = C(n)$. 如果我们能找到双射 $f: \text{Av}_n(123) \rightarrow \text{Av}_n(132)$, 即可证明定理. 事实上, f 会保持从左到右最小值的位置和值不变. 假设 $\sigma \in \text{Av}_n(123)$ 的位置和值由 (1.12) 给出. 由引理 1.12.3, 存在唯一 $\iota \preceq \mu$. 但正如之前提到的, 这等价于 $\mu' \preceq \iota'$. 故由引理 1.12.4, 存在唯一 $\sigma' \in \text{Av}_n(132)$ 的从左到右最小值有给定的位置和值, 令 $f(\sigma) = \sigma'$. 因为 σ 与 σ' 的存在唯一性可得这是一个双射. \square

注意, 前面证明中对 f 的描述是很有用的. 给定 $\sigma \in \text{Av}_n(123)$, 我们去掉它的非从左到右最小值, 并使用引理 1.12.4 证明中的算法重新排列它们, 因此, 用先前的例子可得 $f(698371542) = 678341259$.

1.13 练习

(1) $n \geq 1$ 时, 用归纳法和组合学的方法来证明下列等式:

(a) $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1.$

(b) $\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$

(c) $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}.$

(2) 证明如果 $k, n \in \mathbb{P}$ 满足 $k \mid n$ (即 k 平均分配到 n), 则 $F_k \mid F_n$.

(3) 给定 $m \in \mathbb{P}$, 证明斐波那契数序列是周期模 m 的; 也就是说, 存在 $p \in \mathbb{P}$ 使得对所有 $n \geq 0$

$$F_{n+p} \equiv F_n \pmod{m}.$$

周期模 m 就是最小的 p 使该同余式成立. 注意, 对任意的 m , 寻找斐波那契序列的周期是一个公开问题.

(4) 卢卡斯数定义为 $L_0 = 2, L_1 = 1$, 且

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ for } n \geq 2.$$

当 $m, n \geq 1$ 时, 证明:

(a) $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}.$

- (b) 设 C_n 为 n 个箱子以双方块和单方块排成一个圈的平铺, 证明 $\#C_n = L_n$.
- (c) $L_{m+n} = F_{m-1}L_n + F_mL_{n+1}$.
- (d) $F_{2n} = F_nL_n$.
- (5) 证明定理 1.2.2.
- (6) 验证定理 1.3.1 证明中两个映射是否为互逆的.
- (7) (a) 用等式 (1.5) 证明定理 1.3.3 的 (2).
 (b) 给出定理 1.3.3 中 (3) 的一个归纳法证明.
 (c) 给出定理 1.3.3 中 (4) 的一个归纳法证明.
- (8) (a) 设 S, T 为集合.
 (b) 证明 $S\Delta T = (S \cup T) - (S \cap T)$.
 (c) 证明 $(S\Delta T)\Delta T = S$.
- (9) 给定满足 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ 的非负整数. 对应的多项式系数为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_m!}. \quad (1.14)$$

我们将这个定义扩展到负的 n_i , 若任意的 $n_i \leq 0$, 则多项式系数为零. 注意到当 $m = 2$ 时, 我们令二项式系数为

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k}.$$

- (a) 找出并证明与定理 1.3.3(a)、(b)、(c) 类似的多项式系数.
- (b) 一个多重集 $M = 1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m}$ 的排列是 M 中元素的线性排列. 例如

$$P(\{\{1^2, 2^2\}\}) = \{1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211\}.$$

用以下三种方式证明:

$$\#P(\{\{1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m}\}\}) = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m}.$$

- (i) 组合,
 (ii) 归纳法,
 (iii) 通过证明

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2, \dots, n_m}$$

然后在 m 上进行归纳.

- (10) (a) 证明杨辉三角是**分形模 2**. 具体来说, 如果用除 2 的余数代替每个二项式系数, 那么, 对于任何 $k \geq 0$, 由第 0 行到第 $2^k - 1$ 行成的三角形在左侧和右侧的第 2^k 行到 2^{k+1} 行中重复, 中间是一个倒三角. 前 8 行参见图 1.14. 提示: 在 k 上进行归纳.

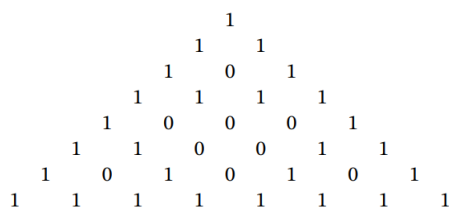


图 1.14: 杨辉三角模 2

(b) 对于任意素数 p , 给出并证明一个模 p 的类似结果.

(11) 在定理 1.3.4 的证明中找到映射的逆, 证明它是定义良好的, 并且是给定函数的逆.

(12) 当 $n \geq 0$ 时, 定义第 n 个斐波拉契序列为乘积 $F_n! = F_1 F_2 \cdots F_n$. 同样, 对于 $0 \leq k \leq n$ 定义斐波拉契序列系数为

$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_n!}{F_k! F_{n-k}!}.$$

注意, 从这个定义来看, 这是不是一个整数并未可知.

(a) 证明斐波拉契序列系数满足初始条件 $\binom{n}{0}_F = \binom{n}{n}_F = 1$, 并且对 $0 < k < n$ 满足递归关系:

$$\binom{n}{k}_F = F_{n-k+1} \binom{n-1}{k-1}_F + F_{k-1} \binom{n-1}{k}_F.$$

(b) 说明 $\binom{n}{k}_F$ 对于所有 $0 \leq k \leq n$ 的情况, 其值为整数.

(c) 找到 $\binom{n}{k}_F$ 的组合解释.

(13) 证明对于 $n \geq 1$ 第二类斯特林数有如下值:

(a) $S(n, 1) = 1$.

(b) $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

(c) $S(n, n) = 1$.

(d) $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

(e) $S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$.

(14) 证明对于 $n \geq 1$ 第一类无符号斯特林数有如下值:

(a) $c(n, 1) = (n-1)!$.

(b) $c(n+1, 2) = n! \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

(c) $c(n, n) = 1$.

(d) $c(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

(e) $c(n, n-2) = 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$.

(15) 如果 $\lambda' = \lambda$, 则称整数划分 λ 为自共轲的. 证明自共轲 $\lambda \vdash n$ 的个数等于 $\mu \vdash n$ 的具有不同部分 (任何部分都不能重复) 和奇数部分的个数之和. 提示: 使用杨图, 并尝试通过 n 来归纳地猜测一个双射. 然后尝试为 $n+1$ 构造一个双射, 它将在某种程度上与之前的值一致. 最后, 试着用一种非归纳的方式来描述你的双射.

(16) 杨图的主对角线是一组正方形, 从左上角开始, 沿对角线向右和向下移动. 所以在图 1.5 中, 主对角线由两个正方形组成. 证明以下内容.

(a) 如果如上一题中定义的那样, λ 是自共轲的, 则 $|\lambda| \equiv d \pmod{2}$ 其中 d 是主对角线的长度 (平方数).

(b) 设 $p_d(n)$ 对角线长度为 d 的 n 的分区数. 则:

$$p_d(n) = \sum_{m \geq 0} p(m, d) p(n - m - d^2, d).$$

(17) 定义 $p_e(n, k)$ 为恰好包含 k 个部分的 $\lambda \vdash n$ 的个数. 假设 $n \geq 4$, 其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 为四舍五入函数, 证明:

(a) $p_e(n, k) = p(n - k, k)$.

(b) $p_e(n, 1) = 1$.

(c) $p_e(n, 2) = \lfloor n/2 \rfloor$.

(d) $p_e(n, n - 2) = 2$.

(e) $p_e(n, n - 1) = 1$.

(f) $p_e(n, n) = 1$.

(18) 完成定理 1.7.1 的证明.

(19) 证明定理 1.7.2.

(20) 考虑一行包含 n 个整数 1 的情况. 现在可以在 1 之间的空格中加上斜杠, 并计算每对相邻斜杠之间的 1 的数量, 从而形成 n 的组合. 例如, 如果 $n = 6$, 那么我们从 1 1 1 1 1 1 开始. 插入斜杠的一种方式 1 1 / 1 1 1, 对应于 $2 + 1 + 3 = 6$ 的组合. 用这个思路给出定理 1.7.1 和 1.7.2 的替代证明.

(21) 将 n 分解为 k 个部分的弱组合是一个由 k 个非负整数之和为 n 的序列. 找出一个公式, 将 n 的弱组分分成 k 个部分, 然后用三种不同的方法证明它:

(a) 通过使用 (1.8) 中定义的映射 ϕ ,

(b) 通过找出弱组合和弱组合之间的关系, 然后使用定理 1.7.2 的陈述 (与 (a) 部分的证明相反),

(c) 通过修改前面练习中的构造.

(22) 证明表 1.1 中最后两列在 f 为双射且 $n = k$ 是正整数时一致.

(23) 证明引理 1.9.1(b).

(24) 如果一个图 $G = (V, E)$ 的所有顶点都具有相同的度, 那么它就是正则图. 如果所有顶点 v 的 $\deg v = r$, 则 G 是度 r 的正则表示.

(a) 证明如果 G 是度 r 的正则表示, 则

$$|E| = \frac{r|V|}{2},$$

(b) 如果有一个 $V = V_1 \uplus V_2$ 的集合分拆, 使得对所有 $uv \in E$ 有 $u \in V_1, v \in V_2$, 则称 G 为二部图, 反之亦然. 证明度 $r \geq 1$ 的正则二部图满足 $|V_1| = |V_2|$.

(25) 如果一个图 G 可以没有边交叉的画在平面 \mathbb{R}^2 上, 则称其是平面图. 在这种情况下 G 的区域是集合论差分 $\mathbb{R}^2 - G$ 的拓扑连接的组成部分. 令 R 为 G 的区域集合. 若 $r \in R$, 则设 $\deg r$ 表示 r 边界上的边数. 证明,

$$\sum_{r \in R} \deg r \leq 2|E|.$$

另外, 找到并证明 G 的循环上等价的一个条件.

(26) 两个图 G, H 如果它们在未标号时是相等的, 则是同构的, 记作 $G \cong H$. 当且仅当 $uv \notin E$ 时, 图 $G = (V, E)$ 的补集是有顶点 V 且有 uv 边的图 \bar{G} . 若 $G \cong \bar{G}$, 则称 G 为自互补的.

(a) 证明当且仅当 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 或 $n \equiv 1 \pmod{4}$ 时, 存在一个顶点为 n 的自互补图.

(b) 证明在一个顶点为 n 且 $n \equiv 1 \pmod{4}$ 的自互补图中, 至少有一个顶点的度数为 $(n-1)/2$. 提示: 证明度数为 $(n-1)/2$ 的顶点数必须是奇数.

(27) 证明定理 1.9.4.

(28) 证明在任意有向图 $D = (V, A)$ 中有

$$\sum_{v \in V} \text{iddeg } v = \sum_{v \in V} \text{odeg } v = |A|.$$

(29) 证明定理 1.10.2 中 (a)、(d) 的等价性. 提示: 使用引理 1.9.1(b).

(30) 考虑一个非负整数序列 $d : d_1, \dots, d_n$. 如果具有顶点 v_1, \dots, v_n 的图, 使得对所有 i 有 $\deg v_i = d_i$, 则称 d 为一个度序列.

(a) 令 T 为具有 n 个顶点的树, 并将其度序列按弱降序排列. 证明对 $1 \leq i \leq n$ 有

$$d_i \leq \lceil \frac{n-1}{i} \rceil.$$

(b) 令 T 为具有 n 个顶点的树, $k \geq 2$ 为整数. 假设 T 的度序列对于所有的 i 满足 $d_i = 1$ 或 k . 证明 $d_i = k$ 对于索引 i 是 $(n-2)/(k-1)$.

(31) 完成定理 1.10.3 的证明.

(32) 考虑 n 辆车 C_1, \dots, C_n 按此顺序经过一排的 n 个停车位, 编号为 $1, \dots, n$. 每辆车 C_i 都有一个优先停放的停车位 c_i . 如果 C_i 到达停车位 c_i , 并且它是空闲的, 那么它就在这个停车位停车. 否则, 它将继续到下一个空闲停车位 (该停车位的编号大于 c_i), 如果存在这样的停车位, 它将停在那里. 如果没有这样的停车位存在, 它不会停车. 如果所有的车都停在一个停车位上, 则称 $c = (c_1, \dots, c_n)$ 为长度为 n 的停车函数.

- (a) 证明 c 是一个停车函数当且仅当其唯一弱递增重排 $d = (d_1, \dots, d_n)$ 对于所有的 $i \in [n]$ 都满足 $d_i \leq i$.
- (b) 使用计数的方法证明长度为 n 的停车函数的个数为 $(n+1)^{n-1}$. 提示: 考虑在有 $n+1$ 个圆形停车位的地方停车, $n+1$ 是允许汽车优先停放的.
- (c) 通过寻找长度为 n 的停车函数与 $n+1$ 个顶点上的树之间的双射来改进 (b). 提示: 设 T 为 $n+1$ 个顶点标号为 $0, \dots, n$ 的树, 并将顶点 0 称为树的根. 在平面上绘制 T , 使连接到根的顶点 (称为根的子节点) 按从左到右的递增顺序排列. 继续对根的每个子节点, 子节点做同样的事情, 以此类推. 通过从左向右读取根的子节点, 然后从左向右读取根的孙子节点, 以此创建一个排列 π . 最后, 调整 T 的每条边的方向, 使其从一个顶点指向它的父顶点, 并称它为 A 的集合: 将 T 映射到 $c = (c_1, \dots, c_n)$, 其中

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{若 } i\vec{0} \in A, \\ 1+j & \text{若 } i\vec{\pi}_j \in A. \end{cases}$$

(33) 考虑沿 x 轴方向的 EW 格路, 这些路径从原点开始, 使用步骤 $E = [1, 0], W = [-1, 0]$.

- (a) 证明如果一个长度为 n 的 EW 格路, 终点为 $(k, 0)$, 则 n 和 k 具有相同的奇偶性, 且 $|k| \leq n$.
- (b) 证明终点为 $(k, 0)$ 的长度为 n 的 EW 格路的个数为

$$\binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$$

- (c) 证明长度为 $2n$, 终点为原点, 并始终停留在轴的非负侧的 EW 格路的个数是 $C(n)$.

(34) 证明以下对象的个数为: 卡特兰数 $C(n)$.

- (a) 选票序列是包含 n 个 1 和 n 个 2 的词 $w = w_1 \cdots w_{2n}$, 使得任何前缀 $w_1 \cdots w_i$ 中 1 的个数总是至少和 2 的个数一样多,
- (b) 正整数序列

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

其中对于 $1 \leq i \leq n$ 有 $a_i \leq i$,

- (c) 用不相交的对角线对凸 $n+2$ 边形进行三角剖分,
- (d) 非交叉分区 $\rho = B_1/\cdots/B_k \vdash [n]$, 其中一个交叉是 $a < b < c < d$, 使得对于 $i \neq j$ 满足 $a, c \in B_i$ 和 $b, d \in B_j$.

(35) 补充定理 1.11.3 的证明细节.

τ	stack	σ
ϵ	ϵ	3124
ϵ	3	124
	1	
ϵ	3	24
1	3	24
	2	
1	3	4
12	3	4
123	ϵ	4
123	4	ϵ
1234	ϵ	ϵ

图 1.15: 堆栈排序算法

- (36) 堆栈是具有两个操作的一进一出 (FIFO) 的数据结构. 一方面可以把一些东西放在堆栈的顶部, 称为推, 或者从堆栈的顶部取一些东西, 称为弹出. 如果它的元素被重新排列形成排列 $\tau = 12 \cdots n$, 则称排列 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$.

考虑下面的排列 σ 的算法. 从一个空的堆栈和一个空的输出排列 τ 开始. 在每个阶段都有两种选择. 如果堆栈为空或 σ 中当前的第一个元素 s 小于堆栈的顶部元素, 则将 s 推到堆栈上. 如果 σ 变成空集或者堆栈的顶层元素 t 小于 σ 的顶层元素, 则从堆栈中取出 t , 并将其附加到 τ 的末端. 如图 1.15 说明了对模型 $\sigma = 3124$ 的排序. 注意, 输入排列 σ 在右边, 输出排列 τ 在左边, 使得 τ 的头和 σ 的尾是最接近堆栈的.

(a) 证明当且仅当 $\sigma \in Av_n(231)$ 时, 该算法对 σ 进行排序.

(b) 证明了如果存在一个推和弹出的序列排列了 σ , 那么它一定是算法给出的序列.

- (37) 假设 $\pi = \pi_1 \cdots \pi_k \in \mathfrak{S}_k$. 用一行符号表示证明以下对 D 中元素作用的描述.

(a) $r_\infty(\pi) = \pi_k \cdots \pi_1 := \pi^r$, π 的逆.

(b) $r_0(\pi) = (k+1-\pi_1) \cdots (k+1-\pi_k) := \pi^c$, π 的补.

(c) $r_1(\pi) = \pi^{-1}$, π 的群理论的逆.

- (38) 完成定理 1.12.2 的证明.

- (39) 给定任意一组排列 Π , 令

$$Av_n(\Pi) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \text{ 避免所有的 } \pi \in \Pi\}.$$

如果 $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_m \in \mathfrak{S}_m$ 是一个排列, 并且 $n \in \mathbb{N}$, 构造一个新的排列

$$\pi + n = \pi_1 + n, \pi_2 + n, \cdots, \pi_m + n.$$

给定不相交集的排列 π, σ , 连接它们得到的排列记为 $\pi\sigma$. 在 $\pi \in \mathfrak{S}_m, \sigma \in \mathfrak{S}_n$ 上定义两个其他的连接,

直和

$$\pi \oplus \sigma = \pi(\sigma + m)$$

和偏和

$$\pi \ominus \sigma = (\pi + n)\sigma.$$

最后, 对于 $n \geq 0$, 使用

$$\iota_n = 12 \cdots n$$

表示对于长度为 n 的递增排列, 使用

$$\delta_n = n \cdots 21.$$

表示对于长度为 n 的递减排列.

证明:

$$(a) \ Av_n(213, 231) = \{\iota_{k_1} \oplus (\iota_{k_2} \ominus \iota_{k_3}) \mid k_1 + k_2 + k_3 = n\}.$$

$$(b) \ Av_n(132, 213) = \{\iota_{k_1} \ominus \iota_{k_2} \ominus \cdots \mid \sum_i k_i = n\}.$$

$$(c) \ Av_n(132, 213, 321) = \{\iota_{k_1} \ominus \iota_{k_2} \mid k_1 + k_2 = n\}.$$

$$(d) \ Av_n(132, 231, 312) = \{\delta_{k_1} \oplus \iota_{k_2} \mid k_1 + k_2 = n\}.$$

$$(e) \ Av_n(132, 231, 321) = \{(1 \ominus \iota_{k_1}) \oplus \iota_{k_2} \mid k_1 + k_2 = n - 1\}.$$

$$(f) \ Av_n(123, 132, 213) = \{\iota_{k_1} \ominus \iota_{k_2} \ominus \cdots \mid \sum_i k_i = n \text{ 且对于所有的 } i, k_i \leq 2\}.$$

(40) 完成引理 1.12.4 的证明.

第二章 符号计数

(朱瑶瑶 翻译)

在前一章中, 我们集中讨论了所有项都为正的计数公式. 但是当其中一项也允许为负数时, 有一些有趣的事要说. 本章专门介绍在这种情况下可以使用的主要技术.

2.1 容斥原理

容斥原理, 简称 PIE, 是符号计数的经典方法之一. 在介绍了该原理本身之后, 我们将应用于错排, 即无不动点的排列.

在加法原则中, 引理 1.1.1(a), 我们假设集合 S, T 是不相交的. 当然, 很容易看出, 对于任何有限集合 S, T , 我们有

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T| \quad (2.1)$$

事实上, $|S| + |T|$ 计算了两次 $S \cap T$, 所以为了只计算一次, 我们必须减去相交部分的基数. 但有人可能会问, 对于任意数量的集合的并集, 是否有类似的公式. 事实证明, 将这些集合视为某些全集 S 的子集, 并计算 S 中不在任何子集中的元素个数, 这通常更有用. 这类似于模式避免中所使用的观点. 我们设置符号, 令 S 是一个集合, 并且令 $S_1, \dots, S_n \subseteq S$. 我们希望找到一条针对 $|S - \bigcup_{i=1}^n S_i|$ 的公式. 当 $n = 1$ 时, 我们显然有

$$|S - S_1| = |S| - |S_1|$$

并且对于 $n = 2$, 由等式 (2.1) 得到

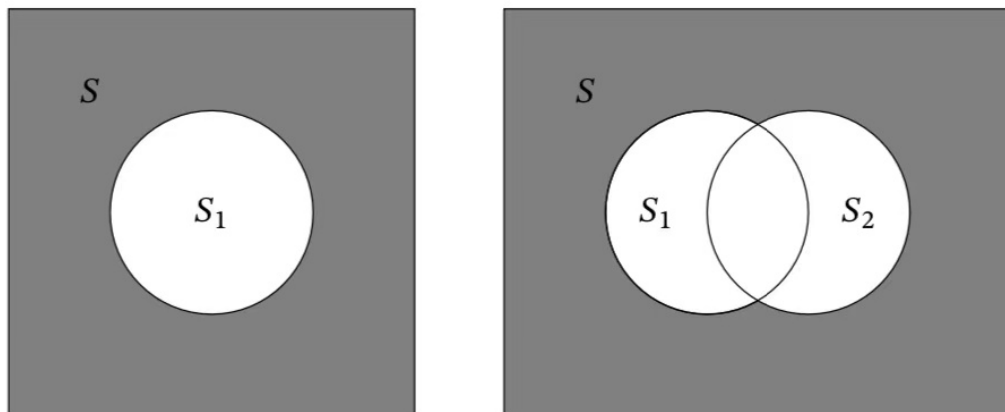
$$|S - (S_1 \cup S_2)| = |S| - |S_1| - |S_2| + |S_1 \cap S_2|$$

图 2.1 给出了两种情况下计算阴影区域的韦恩图. 读者可能已经猜到对于任意 n 的归纳. 这种基数加减交替的枚举有时也被称为筛.

定理 2.1.1. (容斥原理, PIE) 假设 S 是有限集合, 有子集 S_1, \dots, S_n , 则

$$|S - \bigcup_{i=1}^n S_i| = |S| - \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| - \dots + (-1)^n \left| \bigcap_{i=1}^n S_i \right| \quad (2.2)$$

证明. 对于任意集合 S 我们有 $|S| = \sum_{s \in S} 1$. 我们将会使用符号 $|S| = \sum_{s \in S} 1_s$, 即 1_s 表示 s 对总和的贡献. 因此, 只要证明若 $s \notin \bigcup_{i=1}^n S_i$, 则交替和中 1_s 的系数为 1, 否则为 0. 在第一种情况中, 1_s 只出现在 $|S|$, 给出了所希望的系数. 在第二种情况中, 假设 $s \in S_i$, $m \geq 1$, 指标为 i . 现在, 当

图 2.1: $n = 1, 2$ 时的 PIE

S_{i_1}, \dots, S_{i_k} 是包含 m 个包含 s 的子集中的 k 个, 则有 $s \in S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_k}$. 因此, 在 k 次交和中, 求和数 1_s 的个数为 $\binom{m}{0}$. 因此, (2.2) 右侧的 1_s 系数为

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots = 0$$

根据定理 1.3.3(d). 证明结束. \square

为了简化符号, 我们通常简写 $\bigcup_{i=1}^n S_i$ 为 $\bigcup S_i$, 我们也将用 S_I 代替 $\bigcap_{i \in I} S_i$.

我们将会计算没有不动点的排列, 来作为 PIE 的一个应用. 这个问题有时候伴随着下面的故事. 假设在餐厅用餐前, 有 n 个开心的狂欢者 (他们是开心的, 这很重要), 将他们的 n 顶相同的圆顶礼帽放在帽架上. 在用餐时, 帽架会被掀翻 (我告诉过你他们很开心), 因此当狂欢者离开时, 没有识别标记的帽子会被随意重新翻转. 没有人能拿回自己帽子的可能性有多大?

如果把男人编号为 $1, \dots, n$, 同样地对帽子进行编号, 帽子 i 属于男人 i , 则一个拿回帽子的方法只是一个排列 $\pi = \pi_1 \dots \pi_n \in \mathfrak{S}_n$, 其中 $\pi_i = j$ 意味着男人 i 拿到了帽子 j . 所以这种情况下没有男人拿回来自己的帽子, 意味着 $\pi_i \neq i$ 对于所有的 i ; 也就是说 π 没有不动点. 这种排列被称为错排, 标记 \mathfrak{S}_n 中的错排数为 $D(n)$, 并称为第 n 错排数.

我们现在希望解决一个问题, 以便于我们可以使用 PIE. 特别是, 我们想要定义 S 和子集 S_1, \dots, S_n , 使得 $D(n) = |S - \bigcup S_i|$. 要做到这一点, 我们将这个问题视为计算一个元素受到某些限制的集合的数量, 并且令

- (i) S 是一个元素没有受到限制的集合, 以及
- (ii) S_1, \dots, S_n 是 S 的子集, 则从 S 中删去 S_i , 即施加第 i 个限制

如果 (2.2) 右边式子的基数可以被算出, 我们将正确选择 S 和 S_i . 在考虑这种情况时, 我们想要计算没有不动点的排列的个数. 所以我们应该令 $S = \mathfrak{S}_n$, 为所有不动点没有任何限制的排列的集合. 我们也将令 S_i 为 $\pi \in \mathfrak{S}_n, \pi_i = i$ 的集合, 即我们删去那些以 i 作为不动点的排列. 请注意, 我们不选择子集 S'_i , 其中 S'_i 被定义为有不动点 i 的 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 集合. 因为我们这样做, 那么 S'_i 将会是不相交的, 则 $|S - \bigcup S'_i| = |S| - |S'_1| - \dots - |S'_n|$. 因此, 计算 S'_i 的基数与直接计算差集的基数是一样困难的, 我们什么也得不到. 但是, 我们最初选择的子集将非常好.

我们现在计算必要的基数. 当然, $|S| = |\mathfrak{S}_n| = n!$. 接下来, 如果 $\pi \in S_1$, 则 $\pi = 1\pi_2 \dots \pi_n$, 其中 $\pi_2 \dots \pi_n$ 构成 $2, \dots, n$ 的排列. 所以 $|S_1| = (n-1)!$. 显然, 相同的参数可以应用于任何 S_i , 所以

$$\sum_i |S_i| = n \cdot (n-1)! = n!$$

类似地, $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k$ 是所有形式为 $\pi = 12 \dots k \pi_{k+1} \dots \pi_n$ 的集合, 则有 $(n-k)!$ 种方法选择 $\pi_{k+1} \dots \pi_n$. 事实上, 所有 k 次交和中的项有相同的值, 并且 $\binom{n}{k}$ 这样的项给出了总数

$$(n-k)! \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!}$$

总而言之, 我们已经证明了以下几点.

定理 2.1.2. 对于任意正整数 n , 有

$$D(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

读者应该认识到上一个结果中的序列是 $1/e$ 序列的截断. 因为没有人能拿回帽子的概率是归还帽子的排列总数中, 这种情况可能发生的方式总数, 或者 $D(n)/n!$. 对于最初提出的问题, 我们得到了一个非常漂亮的答案.

推论 2.1.3. 取极限, 即 $n \rightarrow \infty$, 则没有人能拿回帽子的概率为 $1/e$.

令人惊讶的是, e 是一个典型的超越数, 出现在一个最开始只涉及整数的组合问题的解决方案.

2.2 符号相反的对合

符号相反的对合是证明包含符号的恒等式甚至是没有明确符号的恒等式的一种有效方法. 正如我们看到的, 这些映射可以用来证明 PIE, 并且在 Garsia-Milne 对合原则中发挥重要作用, 我们将在下一节中学习.

令 S 是一个 (不一定有限的) 集合. 函数 $\iota: S \rightarrow S$ 是一个对合, 如果 ι^2 是一个 S 上的恒等映射. 等价地, 如果 $\iota^{-1} = \iota$, 则 ι 是一个双射. 一旦我们引入符号, 对合的另一种很好的刻画将是至关重要的. 对于任意 $f: S \rightarrow S$, 它的不动点集为

$$\text{Fix } f = \{s \in S \mid f(s) = s\}$$

我们还说, 不同的元素 $s, t \in S$ 形成了一个 f 的 2-圈, 如果 $f(s) = t, f(t) = s$. 在这种情况下, 我们用 (s, t) 或者 $s \leftrightarrow t$ 来表示 2-圈.

引理 2.2.1. 考虑 $\iota: S \rightarrow S$. 该映射 ι 是一个对合当且仅当 S 是不动点的不相交集, 并且是 ι 的 2-圈.

证明. 对于正向, 只要证明如果 $s \in S$ 不是一个不动点, 那么它在一个 2-圈中. 因此假设 $\iota(s) = t$, 那么 $\iota(t) = \iota(s)^2 = s$.

相反地, 假设 S 是一个不相交的集合, 并选择 $s \in S$. 如果 $s \in \text{Fix } \iota$, 那么 $\iota(s)^2 = \iota(s) = s$. 否则, s 在 2-圈 (s, t) 中, 使得 $\iota(s)^2 = \iota(t) = s$. 所以 ι^2 是一个恒等映射. 结论得证. \square

有符号集合是集合 S 与符号函数 $\text{sgn} : S \rightarrow \{+1, -1\}$ 的结合. 在这种情况下, 我们令

$$S^+ = \{s \in S \mid \text{sgn } s = +1\}$$

类似的有 S^- . 如果 $\iota : S \rightarrow S$ 是 S 上的一个对合, 那么我们说 ι 是符号相反的, 如果 $\text{sgn } \iota(s) = -\text{sgn } s$ 对于每个在 ι 的 2-圈中的 s . 这种情况的图示将在图 2.2 中找到. 现在假设 S 是有限的. 因此

$$\sum_{s \in S} \text{sgn } s = \sum_{s \in \text{Fix } \iota} \text{sgn } s. \quad (2.3)$$

事实上, 如果 s 在 2-圈 $(s, \iota(s))$ 中, 那么在等式左边, 我们有 $\text{sgn } s + \text{sgn } \iota(s) = 0$. 所以所有 2-圈中

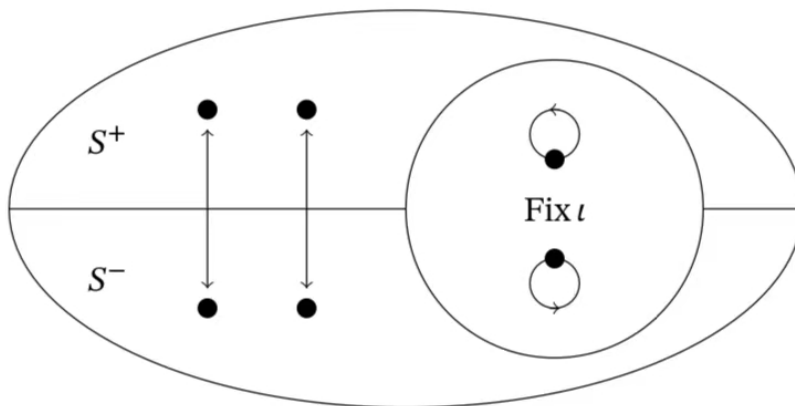


图 2.2: 集合 S 上的一个符号相反对合

的元素都会从求和中抵消, 只剩下 $\text{Fix } \iota$ 中的一项. 如果右边和式比左边少得多, 这个公式将会非常有用. 如果 ι 中的所有不动点有相同的符号, 使得等式 (2.3) 的右边为 $\pm |\text{Fix } \iota|$, 那么我们可以得到更多的信息. 尝试证明关于符号求和 $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$ 对于正整数 a_k 的事实的一般方法如下:

- (i) 找到一个由正数和 $\sum_k a_k$ 枚举得到的集合 S .
- (ii) 给 S 标记符号, 使得等式 (2.3) 左边等于 $\sum_k (-1)^k a_k$.
- (iii) 构造一个在 S 上的具有多个 2-圈的符号相反对合 ι

作为符号相反对合的首次应用, 我们将重新证明定理 (1.3.3)(d) 中二项式系数的交替和公式. 事实上, 最初的证明隐晦地运用了这种技巧, 但是现在我们可以充分展示对合证明. 为了便于参考, 我们重新写出这个等式:

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{n,0}. \quad (2.4)$$

证明. 通常我们假设 $n \geq 1$, 因为 $n = 0$ 时是平凡的. 从去掉符号的和来看, 很显然我们应该令 $S = 2^{[n]}$. 从 k 在最初的和式里的使用方法来看, 我们倾向于令 $\text{sgn } s = (-1)^{\#s}$ 对于 $s \subseteq [n]$. 我们现在需要检查 (2.3) 和 (2.4) 的左边是否一致. 我们将使用的技术, 把单和变成二重和, 然后分组

项, 是枚举组合中常见的一种技术. 在这种情况下

$$\begin{aligned}\sum_{s \in S} \operatorname{sgn} s &= \sum_{s \subseteq [n]} (-1)^{\#S} \\ &= \sum_k \sum_{s \in \binom{[n]}{k}} (-1)^k \\ &= \sum_k I(-1)^k \binom{n}{k}\end{aligned}$$

这就是要证明的.

至于符号相反对合, 我们已经在这个结果的最初证明中看到了. 定义 $\iota : 2^{[n]} \rightarrow 2^{[n]}$, $\iota(s) = s \Delta \{n\}$. 如前所述, 这是一个对合. 为了证明这是符号相反的, 我们有 $|s \Delta \{n\}| = |s| \pm 1$. 因此, $\operatorname{sgn} \iota(s) = (-1)^{|s| \pm 1} = -\operatorname{sgn} s$. 最后我们只需证明 $\operatorname{Fix} \iota$. 但是 $s \Delta \{n\} \neq s$, 对于所有的 $s \subseteq [n]$. 因此 (2.3) 的右边是空和. 因为这等于零, 这个证明就完成了. \square

考虑到 (2.4) 是证明 PIE 的一个关键工具, 所以可以用符号相反对合来证明这个原理本身也就不足为奇了. 我们在这里重新陈述 PIE, 是为了不与我们为符号相反对合设置的符号相冲突. 给定一个有限集 A 和子集 A_1, \dots, A_n , 我们希望证明

$$|A - \bigcup_{i=1}^n A_i| = |A| - \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|. \quad (2.5)$$

证明. 在证明结束后我们将找到一个例子来说明这个证明. 我们不能取 $S = A$, 因为 (2.5) 右边的许多项都计算了 A 中的相同元素. 为了处理这些重复, 令

$$S = \{(a, I) \in A \times 2^{[n]} \mid a \in A_I\} \quad (2.6)$$

回忆这个符号

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i \quad (2.7)$$

注意, 他们在其中发挥了作用, 尽管从证明结果的原始陈述中并不明显, 就像定理 1.9.3 的证明一样. 注意到 $A_\emptyset = A$. 所以 (a, \emptyset) 是一对, 对于所有的 $a \in A$, 并且如果 $a \notin \bigcup A_i$, 这是唯一出现 a 的一对. 因为 (2.5) 中的符号来自交集的子集个数, 我们定义

$$\operatorname{sgn}(a, I) = (-1)^{\#I}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{s \in S} \operatorname{sgn} s &= \sum_{(a, I) \in S} (-1)^{\#I} \\ &= \sum_{I \in 2^{[n]}} \sum_{a \in A_I} (-1)^{\#I} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \sum_{a \in A_I} (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |A_I|\end{aligned}$$

这就是要证明的.

为了构造一个对合, 定义每一个 $a \in \bigcup A_i$, 指标

$$m(a) = \max \{i \mid a \in A_i\}$$

最后, 我们令

$$\iota(a, I) = \begin{cases} (a, I \Delta \{m(a)\}) & \text{若 } a \in \bigcup A_i \\ (a, I) & \text{其他} \end{cases}$$

从定义中可以清楚地看出, 这是一个对合, 其不动点含有元素 $A - \bigcup A_i$ 的双射中, 并且他的 2-圈包含了相反符号的元素. 因为 $A - \bigcup A_i$ 中的元素每个出现在一对里, 因此 (2,3) 右边的是这个集合的基数. 结论得证. \square

为了说明这个证明, 假设 $A = a, b, c, d, A_1 = a, b, A_2 = b, c$. 为了可读性, 在索引集省略了花括号和逗号,

$$S = \{(a, \emptyset), (a, 1), (b, \emptyset), (b, 1), (b, 2), (b, 12), (c, \emptyset), (c, 2), (d, \emptyset)\}$$

并且 $m(a) = 1, m(b) = m(c) = 2$, 因此对合产生以下 2-圈:

$$(a, \emptyset) \leftrightarrow (a, 1), (b, \emptyset) \leftrightarrow (b, 2), (b, 1) \leftrightarrow (b, 12), (c, \emptyset) \leftrightarrow (c, 2).$$

唯一的不动点为 (d, \emptyset) 并且有 $A - (A_1 \cup A_2) = d$

在使用我们的新技术之前, 如果能证明一些我们从未见过的东西, 那就太好了. 这里有一个涉及第二类斯特林数的恒等式.

定理 2.2.2. 对于 $n \geq 0$, 我们有

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k k! S(n, k) = (-1)^n.$$

证明. 首要任务是对求和进行组合解释. 集合 T 的组成是一个非空子集 $\rho = (B_1, \dots, B_k)$ 的序列, 使得 $\cup_i B_i = T$. 在这种情况下, 我们写作 $\rho \models T$. 因此有 k 块的 $\rho \models [n]$ 的个数为 $k! S(n, k)$, 因为我们从 $S([n], k)$ 中任意的 $S(n, k)$ 分拆开始, 他的块的排列方式有 $k!$ 种. 读者应该充分体会到了带有符号的集合, 在这种情况下, 我们想要令 S 为所有 $\rho \models [n]$, 并且 $\text{sgn } \rho = (-1)^k$ 如果 ρ 有 k 块. 这是一个正确的交替和的证明留给读者作为练习.

这个对合将会非常有趣. 我们将把它分成两个相反的情况. 通常情况下, 证明后面会有一个例子. 给定 $\rho = (B_1, \dots, B_k) \models [n]$, 我们说 B_j 是可拆分的, 如果 $\#B_j \geq 2$. 在这种情况下, 将 B_j 上的可拆分的函数定义为

$$\sigma(B_1, \dots, B_k) = (B_1, \dots, B_{j-1}, \{b\}, B_j - \{b\}, B_{j+1}, \dots, B_k)$$

其中 $b = \min B_j$. 换句话说, B_j 被一对块替代, 第一个包含其最小值, 其他则为其的剩余元素. 虽然符号 ρ 并不表示要分拆哪个块, 但这将从文章中明确. 我们将定义对合中撤销分拆的部分. 给定 ρ , 我们说 B_j 可以和 B_{j+1} 合并, 如果

- (1) $B_j = \{b\}$, 对某些元素 $b \in [n]$, 以及
- (2) $b < \min B_{j+1}$

在这种情况下, B_j 上的合并映射定义为

$$\mu(B_1, \dots, B_k) = (B_1, \dots, B_{j-1}, B_j \cup B_{j+1}, B_{j+2}, \dots, B_k).$$

应该清楚的是, 如果 B_i 可以被拆分为 B'_i 和 B'_{i+1} , 那么素块可以合并到 B_i , 反之亦然. 为了定义对合 ι , 假设给定 $\rho(B_1, \dots, B_k)$. 我们从左到右观察 ρ , 直到我们找到第一个指标 j , 如果有的话, 使得 B_j 可以拆分或者与 B_j 合并. (显然, 我们不能两者兼而有之. 因为拆分意味着 $\#B_j \geq 2$, 合并意味着 $\#B_j = 1$.) 现在定义

$$\iota(\rho) = \begin{cases} \sigma(\rho) & \text{若 } B_j \text{ 可以被拆分,} \\ \mu(\rho) & \text{若 } B_j \text{ 可以被合并.} \end{cases}$$

如果不存在这样的指标, 那么 ρ 将会是 ι 的一个不动点.

我们需要做一些工作来验证 ι 是一个对合. 具体来说, 我们必须证明如果 $\iota(\rho) = \rho'$ 是通过从指标 j 处拆分 ρ 得到的, 那么 $\iota(\rho')$ 将通过在同一指标处合并得到, 反之亦然. 我们将证明第一种情况, 将第二个留给读者. 首先要注意的是, 因为在 ρ 中没有 $B_i, i < j$ 可以被拆分, 我们必须有 $B_i = \{b_i\}$ 对每个在范围中的 i 的 b_i . 此外, 由于没有 B_i 可以被合并到 B_{i+1} , 我们必须有 $b_1 > b_2 > \dots > b_{j-1} > b_j = \min B_j$. 现在在 ρ' 中我们有 $B'_i = \{b_i\}, i \leq j, b_1 > \dots > b_j$. 因此, 当 $i < j$ 没有 B'_i 可能被拆分或合并, 所以 $\iota(\rho')$ 将合并 B'_j 到 B'_{j+1} . 因此 $\iota(\rho') = \rho$, 结论得证.

显然, ι 是符号相反的, 因为 $\iota(\rho)$ 比 ρ 多了一个或少了一个块. 所以我们只要找到不动点. 但是如果 $\rho \in \text{Fix } \iota$, 那么所有 ρ 的块都只包含一个元素; 否则会有一个被拆分. 因此 $\rho = (\{b_1\}, \dots, \{b_n\})$. 此外, 没有一个块可以被合并, 因此 $b_1 > \dots > b_n$. 这迫使我们的集合组成为 $\rho = (\{n\}, \{n-1\}, \dots, \{1\})$, 并且 $\text{sgn } \rho = (-1)^n$, 证明完成. \square

为了举例说明, 假设 $n = 8$. 正如我们前面所做的那样, 我们将在集合中省去括号和逗号. 考虑 $\rho = (\{B_1\}, \dots, \{B_5\}) = (5, 3, 147, 2, 68)$. 那么 B_3 是可拆分的, 拆分后得到 $\sigma(\rho) = (5, 3, 147, 2, 68)$. 同样, B_4 可以合并到 ρ 中的 kB_5 中, 因为 $B_4 = \{2\}$ 和 $2 < \min B_5 = 6$. 合并这两个块得 $\mu(\rho) = (5, 3, 147, 268)$. 为了决定使用哪个操作, 我们从 B_1 开始. 它不能拆分, 因为只有一个元素. 而且它不能与 B_2 合并, 因为 $5 > \min B_2 = 3$. 类似地, B_2 不能与 B_3 拆分或合并. 但我们已经看到 B_3 可以拆分, 以便 $\iota(\rho) = (5, 3, 1, 47, 2, 68) = \rho'$. 检查 $\iota(\rho') = \rho$ 是否相似.

在寻找 Hopf 代数中的对极公式时, 经常会出现涉及合并和分裂的对合. 例如, 可以查阅 Benedetti Bergeron 【7】、Benedetti Hallam Machacek 【8】、Benedetti Sagan 【9】或 Bergeron Ceballos 【12】的论文.

2.3 Garsia-Milne 对合原理

到目前为止, 我们已经使用符号相反对合来解释了交替和中的化简. 但是他们也能提供一个双射来证明两个给定集合具有相同的基数吗? 在某些情况下, 答案是对的, 而实现这一点的标准技术是 Garsia-Milne 对合原理. Garsia-Milne 介绍了这种方法, 给出了 Rogers-Ramanujan 恒等式的首个双射证明, Rogers-Ramanujan 恒等式是涉及某些整数集划分的著名公式. 从那时起, 对合原理有了许多其他应用. 例如, 参见 Remmel[73] 或 Wilf[100] 的文章.

为了证明 Garsia-Milne 的结果, 我们需要引理 1.9.5 的一个适用于稍大一点的有向图的版本. 由于下一个结果的证明类似于前一个结果的证明, 我们很高兴向读者证明这一点.

引理 2.3.1. 设 $D = (V, A)$ 为有向图, 我们有 $\text{odeg } v, \text{ideg } v \leq 1$ 对所有的 $v \in V$, 当且仅当 D 为有向路径和有向圈的不交并.

对合原理的基本思想是, 在适当的条件下, 如果一个图有两个符号集合, 每个符号集合都有自己的符号相反对合, 那么我们可以在这两个集合之间使用双射, 建立他们的不动点集之间的双射. 所以, 令 S, T 为不相交的符号集合, 其符号相反对合 $\iota : S \rightarrow S$ 和 $\kappa : T \rightarrow T$, 使得 $\text{Fix } \iota \subseteq S^+$, $\text{Fix } \kappa \subseteq T^+$. 此外, 我们假设有一个双射 $f : S \rightarrow T$, 其保持前后符号一致, 即 $\text{sgn } f(s) = \text{sgn } s$, 对所有的 $s \in S$. 图 2.3 中可以找到此设置的一个图. 注意, 尽管所有箭头实际上都是双向, 但由于即将发生的事情, 我们仅在一个方向上证明. 指向不动点的方向被忽略了. 我们现在构建一个映射 $F : \text{Fix } \iota \rightarrow \text{Fix } \kappa$. 为了定义 $F(s), s \in \text{Fix } \iota$, 我们首先计算 $f(s) \in T^+$. 如果 $f(s) \in \text{Fix } \kappa$, 那么我们令 $F(s) = f(s)$. 如果不是, 我们将应用复合映射 $\phi = f \circ \iota \circ f^{-1} \circ \kappa$ 到 $f(s)$. 记住我们从右往左构造, 为 $f(s), T^-, S^-, S^+, T^+$ 的顺序. 取 $\text{Fix } \kappa$ 中的一个元素, 那么我们令 $F(s) = \phi(f(s))$. 否则我们可以根据需要多次应用 ϕ , 例如需使用 m 次才能到达 $\text{Fix } \kappa$ 中的一个元素, 定义

$$F(s) = \phi^m(f(s)) \quad (2.8)$$

继续图 2.3 中的例子, 我们可以看到 $f(s) = u \notin \text{Fix } \kappa$. 所以我们应用 ϕ , 把 u 依次带到 v, r, q, t . 由于 $t \in \text{Fix } \kappa$, 我们令 $F(s) = t$. 当然, 我们必须担心这是否是定义良好的; 例如, m 是否总是存在? 我们也需要证明 F 是一个双射. 这是下一个定理所关心的.

定理 2.3.2. (Garsia-Milne 对合原理) 符号与之前相同, 映射 $F : \text{Fix } \iota \rightarrow \text{Fix } \kappa$ 是良好定义的双射.

证明. 回忆第 1.9 节定理 1.5.1 中使用的函数有向图的概念. 通过限制定义域定义以下函数:

$$\bar{f} = f|_{S^+}, \quad \bar{g} = f^{-1}|_{T^-}, \quad \bar{\iota} = \iota|_{S^-}, \quad \bar{\kappa} = \kappa|_{T^+ - \text{Fix } \kappa}$$

考虑 D 为函数有向图 $\bar{f}, \bar{g}, \bar{\iota}, \bar{\kappa}$ 的集合. 从定义很容易证明, $x \in V(D)$, 其在包含 x 的 $S \cup T$ 的子

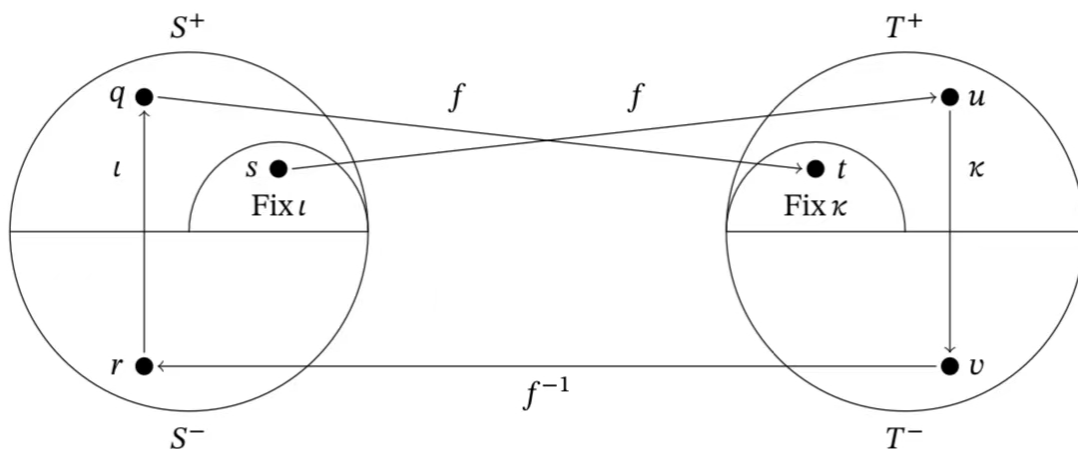


图 2.3: 一个 Garsia-Milne 构造的例子

集中的出度, 入度如表所示:

subset	odeg x	ideg x
$\text{Fix } \iota$	1	0
$\text{Fix } \kappa$	0	1
$(S - \text{Fix } \iota) \cup (T - \text{Fix } \kappa)$	1	1

例如, 如果 $x \in \text{Fix } \iota$, 那么只有一条从 \bar{f} 出来的包含 x 的弧, 所以 $\text{odeg } x = 1, \text{ideg } x = 0$. 另一方面, 如果 $x \in S^+ - \text{Fix } \iota$, 那么 x 有一条从 \bar{f} 出来的弧, 以及一条进入 \bar{t} 的弧, 所以 $\text{odeg } x = \text{ideg } x = 1$.

现在 D 满足了引理 2.3.1 向前方向上的假设. 即 D 是有向路径和有向圈的不交并. 每条有向路径必须从一个出度为 1, 入度为 0 的顶点出发, 在出度为 0, 入度为 1 的顶点结束. 此外, 所有其他顶点的出度, 入度都为 1. 从这些观察结果和图表可以看出, 这些路径定义了一个 $\text{Fix } \iota$ 与 $\text{Fix } \kappa$ 间的一一对应. 此外, 从 D 的定义中, 我们可以看到, 每条路径都精确地对应于一个复合函数 $\phi^m f(s)$, 其中 $s \in \text{Fix } \iota, m \geq 0$. 所以 F 是由这些路径定义的双射. \square

在我们给出上述定理的一个应用前, 我们应该提及一个在构造必要的集合与双射上非常有用的方法. 这里有一种尝试找到两个有限集 X, Y 之间的双射 $F: X \rightarrow Y$ 的方法.

(i) 和 PIE 一样, 构造一个集合 A , 有子集 A_1, \dots, A_n , 使得 $X = A - \bigcup A_i$. 类似构造 Y 中的 B 以及 B_1, \dots, B_N .

(ii) 利用 PIE 中的第二个证明方法, 去构造一个 (2.6) 给定集合 S 上的符号相反对合 ι . 类似构造集合 T 上的 κ .

(iii) 找到一个双射 $f: S \rightarrow T$, 其形式为

$$f(a, I) = (b, J)$$

$a \in A_I$ 当且仅当 $b \in B_J$, 这是定义良好的.

回忆 $\text{Fix } \iota = (a, \emptyset)$, 其中 $a \in A - \bigcup A_i$. 因此 $\text{Fix } \iota \in S^+$ 根据需要应用于对合原则, 这里自然有一个 $\text{Fix } \iota$ 和 X 间的双射. 并且注意, 由于 $\text{sgn}(a, I) = (-1)^{\#I} = \text{sgn}(b, J)$, f 是自动符号保持的. 所以当这三步完成后, 定理 2.3.2 保证了我们得到一个双射 $X \rightarrow Y$.

如前所述, 对合原则对证明整数分拆恒等式非常有用. 如果 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$, 那么说分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ 有不同的部分 (与通常的弱减情况相反). 另一方面, 如果所有 λ_i 为奇数, 那么说 λ 有奇部. 下一个结论是非常有名的欧拉原理. 按照惯例, 证明后面会有一个例子.

定理 2.3.3. (欧拉规则) 设 $P_d(n)$ 为有不同部分的 n 的分拆的集合, 并且令 $\#P_o(n)$ 为有奇部的 n 的分拆的集合. 当 $n \geq 0$, 我们有

$$\#P_d(n) = \#P_o(n).$$

证明. 只要证明 $P_d(n) \rightarrow P_o(n)$ 是一个双射. 在 $P_d(n)$ 上应用 PIE, 我们可以得到 $A = P(n)$, 是所有 n 分拆的集合, 有子集 A_1, \dots, A_n , 其中

$$A_i = \{\lambda \vdash n \mid \lambda \text{ (至少) 有部分 } i \text{ 中的两项}\}$$

注意, 如果 $i > n/2$, 则 $A_i = \emptyset$, 但是这不会造成什么危害, 并能保持符号简单. 从定义能够清楚看出, $P_d(n) = A - \bigcup A_i$. 类似地, 对于 $P_o(n)$, 我们令 $B = P(n)$, 有子集

$$B_i = \{\mu \vdash n \mid \mu \text{ 有一个形式为 } 2i \text{ 的部分}\}$$

对于 $1 \leq i \leq n$. 再次, 能轻易地看到 $P_o(n) = B - \bigcup B_i$

S, ι, T, κ 的构造与 PIE 的第二个证明相同. 因此只要构造一个合适的双射 $f : S \rightarrow T$. 给定 $(\lambda, I) \in S$, 我们用 $2i$ 部分代替在 λ 中 i 的一对, 其中 $i \in I$, 形成 μ . 所以如果 $\lambda \in A_i$, 那么 $\mu \in B_i$, 其中 $i \in I$, 并且映射 $f(\lambda, I) = (\mu, I)$ 是定义良好的. 构造 f^{-1} 也很容易, 在 μ 中取一个偶数部分 $2i$. 当 i 取遍 I 时, 用 i 中的两项替换它, 形成 λ . 借助定理 2.3.2 完成证明. \square

为了说明这个证明, 假设我们从 $(6, 2, 1) \in P_d(9)$ 开始. 对于 S 和 T 中的对, 我们通常不使用分隔符和逗号. 所以

$$\begin{aligned}
 (621, \emptyset) &\xrightarrow{f} (621, \emptyset) \xrightarrow{\kappa} (621, 3) \xrightarrow{f^{-1}} (3321, 3) \xrightarrow{\iota} (3321, \emptyset) \\
 &\xrightarrow{f} (3321, \emptyset) \xrightarrow{\kappa} (3321, 1) \xrightarrow{f^{-1}} (33111, 1) \xrightarrow{\iota} (33111, 13) \\
 &\xrightarrow{f} (621, 13) \xrightarrow{\kappa} (621, 1) \xrightarrow{f^{-1}} (6111, 1) \xrightarrow{\iota} (6111, \emptyset) \\
 &\xrightarrow{f} (6111, \emptyset) \xrightarrow{\kappa} (6111, 3) \xrightarrow{f^{-1}} (33111, 3) \xrightarrow{\iota} (33111, \emptyset) \\
 &\xrightarrow{f} (33111, \emptyset).
 \end{aligned}$$

因此, 我们应该映射 $(6, 2, 1) \xrightarrow{F} (3, 3, 1, 1, 1)$. 显然, 如果存在双射, 人们可能会希望找到一种更有效的双射. 这一问题将在练习中进一步探讨.

2.4 反射原理

反射原理是一种几何方法, 用于处理涉及格路的某些组合问题. 特别是, 他将允许我们对卡特兰数的二项式系数公式给出一个非常简单的证明. 他也有助于证明单峰性, 这是实数序列的一个有趣性质.

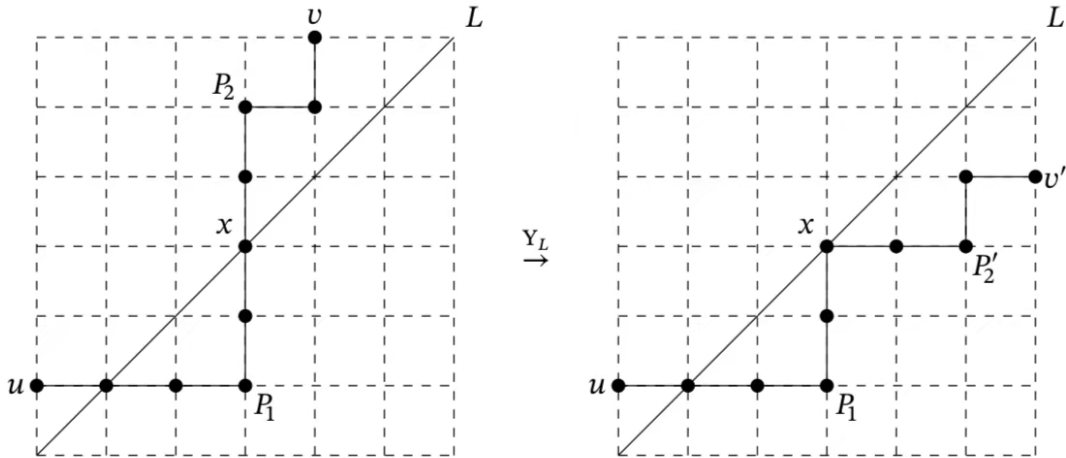


图 2.4: 映射 Y_L

考虑整数格 \mathbb{Z} 以及该格路中的东北路径. 假设对于某些 $b \in \mathbb{Z}$, 给定平面上一条形式为 $L : y = x + b$ 的直线. 注意, 任意东北路径的反射仍为东北路径. 如果 P 是从 u 到 v 的一条路, 那么

我们记作 $P: u \rightarrow v$ 或者 $u \xrightarrow{P} v$. 假设 $P: u \rightarrow v$ 与 L 相交, 令 x 为最后 (最东北方向) 的交点. 那么 P 可以写成串联形式

$$Y_L(P): u \xrightarrow{P_1} x \xrightarrow{P'_2} v'$$

其中 P'_2, v' 分别是 P_2, v 在 L 中的反射. 回到我们的例子, $P'_2 = EENE$, 这是通过简单地交换东北方向而得到的, 因此如图 2.4 中右图所示, $Y_L(P) = EEENNEENE$. 这是使用反射原理的基本映射. 精确地说, 让 $\mathcal{NE}(u; v)$ 表示从 u 到 v 的东北路径的集合, 并让 $\mathcal{NE}_L(u; v)$ 表示与 L 相交路径的子集. 如果省略 u , 那么可以假定 $u = (0, 0)$. 此外, 为确保将从 u 到 v 的东北路径的符号 $\mathcal{NE}(u; v)$ 与从 $(0, 0)$ 到 (m, n) 的东北路径的符号 $\mathcal{NE}(m, n)$ 区分开来. 前者包含分号, 后者包含逗号.

定理 2.4.1. (映射原则) 给定直线 $L: y = x + b$, 其中 $b \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}^2$, 我们令 v' 为 v 在 L 中的反射. 那么映射 $Y_L: \mathcal{NE}_L(u; v) \rightarrow \mathcal{NE}_L(u; v')$ 是一个双射.

证明. 事实上, 我们可以证明 Y_L 是 $\mathcal{NE}_L(u; v) \cup \mathcal{NE}_L(u; v')$ 的一个对合. 那么根据事实, 在 L 上的反射为一个对合, 并且从 $P \cap L$ 传递到 $Y_L(P) \cap L$ 时, 交点的集合不变. \square

作为定理 2.4.1 的第一个应用, 我们将给出定理 1.11.3 的一个更简单的证明, 尽管这不是纯粹的组合同证. 我们在此引用公式:

证明. 回忆一下, $C(n)$ 是对从 $(0, 0)$ 到 (n, n) , 东北方向的 Dyck 路的集合 $\mathcal{D}(n)$ 进行计数. 从定理 1.11.1, 我们知道从原点到 (n, n) 的所有东北路径 P 的总数是

$$\#\mathcal{NE}(n, n) = \binom{2n}{n}$$

注意, 当且仅当 P 与直线 $L: y = x - 1$ 相交时, P 不会保持在 $y = x$ 的上方. 根据反射原理, 由于 $(n+1, n-1)$ 是 (n, n) 在 L 中的反射, 则这类路径 $\mathcal{NE}_L((0, 0); (n+1, n-1))$ 是双射的. 但是由于这两个点位于直线的两侧, 故所有从 $(0, 0)$ 到 $(n+1, n-1)$ 的路径都会穿过 L . 因此, 再次利用定理 1.11.1,

$$\#\mathcal{NE}_L((0, 0); (n+1, n-1)) = \#\mathcal{NE}(n+1, n-1) = \binom{2n}{n+1}$$

因此从 $\mathcal{NE}(n, n)$ 中的路径总数减去非 Dyck 路径的数量, 得到

$$\begin{aligned} C(n) &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

这是我们要证明的. \square

反射原理也可用于证明某些序列具有单峰性. 称实数序列 a_0, a_1, \dots, a_n 是单峰的, 若指标 m 如下所示

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \geq a_{m+1} \geq \dots a_n$$

这是继弱增, 弱减后的第二个复杂的行为. 事实上, 后者是单峰的特例, 其中 $m = n$ 或者 $m = 0$. 组合数学, 代数学和几何学中出现的许多序列都是单峰序列. 更多详情请参见 Stanley[89], Brenti[20], Brändén[19] 的调查文章. 术语“单峰”来自概率和统计学, 人们认为 a_i 给出了随机变量的分布, 取值为 $\{0, 1, \dots, n\}$. 并且, 单峰分布只有一个驼峰.

我们已经得到了一列单峰序列, 尽管我们没有证明这个事实, 但这是非常简单的.

定理 2.4.2. 当 $n \geq 0$ 时, 序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

是单峰的.

证明. 由于二项式系数是对称的, 由定理 1.3.3(b), 只要证明这个序列递增到它的中间点. 因此我们首先证明

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$$

当 $k < \lfloor n/2 \rfloor$. 从定理 1.11.1, 我们知道

$$\binom{n}{k} = \#\mathcal{NE}(k, n-k), \binom{n}{k+1} = \#\mathcal{NE}(k+1, n-k-1)$$

因此只要找到单射 $i: \mathcal{NE}(k, n-k) \rightarrow \mathcal{NE}(k+1, n-k-1)$. 令 L 为从 $(k, n-k)$ 到 $(k+1, n-k-1)$ 的线段垂直平分线. 这很容易发现 L 的形式为 $y = kx + b$, 其中 $b \in \mathbb{Z}$. 从反射原理中, 我们有双射 $Y_L: \mathcal{NE}_L(k, n-k) \rightarrow \mathcal{NE}_L(k+1, n-k-1)$. 但是由于 $k < \lfloor n/2 \rfloor$, 格点 $(0, 0), (k, n-k)$ 在 L 的两侧, 使得 $\mathcal{NE}_L(k, n-k) = \mathcal{NE}(k, n-k)$. 此外, $\mathcal{NE}_L(k+1, n-k-1) \subseteq \mathcal{NE}(k+1, n-k-1)$. 因此扩大 Y_L 的范围, 我们得到想要的单射. \square

事实证明, 斯特林数序列

$$c(n, 0), c(n, 1), \dots, c(n, n) \quad \text{和} \quad S(n, 0), S(n, 1), \dots, S(n, n)$$

也是单峰的. 但是直接证明这一点并不容易. 其中一个原因是, 这些序列不像二项式系数序列那样是对称的. 对于指标 m 在哪里达到最大值, 没有已知的简单的表达式. 相反, 这最好利用实数序列的另一个性质, 称为对数凹性, 这可以表明单峰性. 这是下一节的动机之一.

2.5 Lindström-Gessel-Viennot 引理

所讨论的引理是处理某些确定的恒等式的强大技术. 他最早由 Lindström 发现, 然后被 Gessel 和 Viennot 以及许多其他作者使用, 产生了巨大影响. 与反射原理一样, 该方法使用定向路径. 另一方面, 它使用多种路径, 并不局限于整数格路. 特别地, 当这里有两条路径时, 可以得到对数凹性的结果.

一实数序列 a_0, a_1, \dots, a_n 被称为对数凹的, 如果对所有的 $0 < k < n$, 我们有

$$a_k^2 \geq a_{k-1}a_{k+1} \tag{2.9}$$

通常, 我们可以通过令 $a_k = 0$ 当 $k < 0$ 或 $k > n$, 将其扩展到所有 $k \in \mathbb{Z}$. 对数凹序列, 例如单峰序列, 在组合数学, 代数学和几何学中普遍存在. 详见之前引用的 Stanley, Brenti, Brändén 的调查文章. 例如, 一排帕斯卡三角形或任一斯特林三角形是对数凹的.

对数凹的名字来源于以下场景. 假设我们有一个函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是向下凹的. 所以在 f 的图上任意取两个点, 则该两点连线在 f 的下方. 取点 $(k-1, f(k-1))$ 和 $(k+1, f(k+1))$, 将相应线段中点的 y 坐标与 f 上的坐标比较, 得到 $(f(k-1) + f(k+1))/2 \leq f(k)$. 现在, 如果对于所有的 x , $f(x) > 0$, 并且函数 $\log f(x)$ 是向下凹的, 那么代入之前的不等式并求幂, 得到 $f(k-1)f(k+1) \leq f(k)^2$, 就像序列对数凹的定义一样.

事实证明, 对数凹性和单峰性是相关的.

命题 2.5.1. 假设 a_0, a_1, \dots, a_n 是一个正实数序列. 如果序列是对数凹的, 那么他是单峰的.

证明. 为了证明一个序列是单峰的, 只要证明他在第一次严格减少之后, 继续减少. 但是, $a_{k-1} > a_k$ 等价于 $a_{k-1}/a_k > 1$, 其中 a_k 为正数. 将 (2.9) 重新写为 $a_k/a_{k+1} \geq a_{k-1}/a_k$, 我们可以看到, 如果 $a_{k-1}/a_k > 1$, 那么 $a_{l-1}/a_l > 1$, 对于所以 $l \geq k$. 因此这个序列是单峰的. \square

尽管对数凹性意味着正数序列是单峰的, 但从对位角度来看, 证明对数凹性通常比证明单峰性更容易. 这在一定程度上是因为对数凹的条件对所有 k 是一致的, 相对于单峰性, 其必须知道序列的最大值出现在哪里.

我们可以将 (2.9) 改写作 $a_k^2 - a_{k-1}a_{k+1} \geq 0$, 或者写作行列式

$$\begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} \\ a_{k-1} & a_k \end{vmatrix} \geq 0 \quad (2.10)$$

为了证明该行列式是非负的, 我们可以证明它对某些事物进行计数, 这就是 Lindström-Gessel-Viennot 引理所要做的. 我们将首先考虑 2×2 行列式的情况, 并在本节末尾说明如何处理一般情况. 在这个例子中, 我们将展示如何证明定理 2.4.2 中的二项式系数序列的对数凹性.

设 D 是无环的有向图, 因为它不包含有向圈. 给定两个顶点 $u, v \in V(D)$, 我们让 $\mathcal{P}(u; v)$ 表示从 u 到 v 有向路径的集合. 我们假设 u, v 总是被选择, 使得 $p(u; v) = \#\mathcal{P}(u; v)$ 是有限的, 即使 D 本身不是有限的. 为了说明, 设 D 为有向图, 有顶点 \mathbb{Z}^2 , 以及从 (m, n) 到 $(m+1, n)$, 再到 $(m, n+1)$ 的弧对于所有 $m, n \in \mathbb{Z}$. 那么 $\mathcal{P}(u; v)$ 就是从 u 到 v 东北格路的集合, 这在上一节中表示为 $\mathcal{NE}(u; v)$. 我们将继续使用该节中一般路径的符号来表示任何无环有向图. 我们也将该符号扩展如下. 给定有向路径 $P: u \rightarrow v$ 并且在 P 上顶点 x 出现在 y 的前面, 我们假设 $x \xrightarrow{P} y$ 为 P 在 x 和 y 之间的部分.

继续一般的解释, 假设我们给出 $u_1, u_2 \in V$ 称为起点, 以及 $v_1, v_2 \in V$ 称为终点. 我们希望考虑如下形式的决定因素

$$\begin{vmatrix} p(u_1; v_1) & p(u_1; v_2) \\ p(u_2; v_1) & p(u_2; v_2) \end{vmatrix} = p(u_1; v_1)p(u_2; v_2) - p(u_1; v_2)p(u_2; v_1) \quad (2.11)$$

注意, $p(u_1; v_1)p(u_2; v_2)$ 对路径对进行计数

$$(P_1, P_2) \in \mathcal{P}(u_1; v_1) \times \mathcal{P}(u_1; v_1) := \mathcal{P}_{12}$$

类似有 $p(u_1; v_2)p(u_2; v_1)$, 以及

$$\mathcal{P}(u_1; v_2) \times \mathcal{P}(u_2; v_1) := \mathcal{P}_{21}$$

回到我们的例子, 我们希望证明

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1} \geq 0$$

那么我们可以得到

$$u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1), v_1 = (k+1, n-k), v_2 = (k, n-k+1)$$

根据定理 1.11.1, $p(u_1; v_1) = p(u_2; v_2) = \binom{n}{k}$, 当 $p(u_1; v_2) = \binom{n}{k-1}$ 以及 $p(u_2; v_1) = \binom{n}{k+1}$. 更具体地说, 如果 $n = 7, k = 3$, 那么在图 2.5 中我们有一对 \mathcal{P}_{21} 中的路径在左边, 按 $\binom{7}{2} \binom{7}{4}$ 计算, 有另一对 \mathcal{P}_{12} 中的路径在右边, 按 $\binom{7}{3}^2$ 计算. 为了可读性, 去掉整数格路上的网格, 只留下 \mathbb{Z}^2 上的顶点.

为了证明行列式 (2.11) 是非负的, 我们将构造一个在集合 $\mathcal{P} := \mathcal{P}_{12} \cup \mathcal{P}_{21}$ 上的符号逆对合 Ω , 其中

$$\text{sgn}(P_1, P_2) = \begin{cases} +1 & \text{若 } (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_{12} \\ -1 & \text{若 } (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_{21} \end{cases}$$

我们将构造 Ω 使得 \mathcal{P}_{21} 中每一对都在有一对在 \mathcal{P}_{12} 的 2-圈中. 此外, 剩下 \mathcal{P}_{12} 中的不动点就是 \mathcal{P} 中不相交的路径对. 因此, (2.11) 只是 \mathcal{P} 中不相交路径对的数量, 因此必须是非负的.

为了定义 Ω , 考虑一个路径对 $(P_1, P_2) \in (P)$. 如果 $P_1 \cap P_2$ 是空的, 那么这对在 \mathcal{P}_{21} 中, 因为在 $(P)_{21}$ 中每个路径对都相交. 所以在这个例子中, 我们令 $\Omega(P_1, P_2) = (P_1, P_2)$, 为不动点. 如果 $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, 那么考虑交点 x_1, \dots, x_t , 按照他们在 P_1 上遇到的顺序. 我们声称他们必须按照在 P_2 中的顺序相遇. 如果存在交点 x, y , 使得在 P_1 中 x 出现在 y 前面, 在 P_2 中 y 出现在 x 前面, 那么可以找到一条有向路 $x \xrightarrow{P_1} y \xrightarrow{P_2} x$, 包含一有向环, 就像读者在练习中被要求做的那样. 这与 D 是无环的假设相矛盾. 所以第一个交点 $x = x_1$ 是定义良好的. 我们现在令 $\Omega(P_1, P_2) = (P'_1, P'_2)$ 其中

$$\begin{aligned} P'_1 &= u_1 \xrightarrow{P_1} x \xrightarrow{P_2} v_2 \\ P'_2 &= u_2 \xrightarrow{P_2} x \xrightarrow{P_1} v_1 \end{aligned}$$

如果 $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_{12}$, 类似地如果 $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_{21}$, 则 v_1, v_2 相反. 图 2.5 展示了该映射.

因为在 (P_1, P_2) 的交点集与 (P'_1, P'_2) 的相同, 第一个交点保持不变, 这就使得 Ω 成为一个对合. 从他的定义中也可以清楚地看出, 他改变了符号. 我们已经证明了下面的引理和推论.

引理 2.5.2. 设 D 为无环有向图, 设 $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V(D)$, 使得每对路径 $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_{21}$ 相交. 那么

$$\begin{vmatrix} p(u_1; v_1) & p(u_1; v_2) \\ p(u_2; v_1) & p(u_2; v_2) \end{vmatrix} = \text{不相交的路径对 } (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_{21} \text{ 的个数}$$

特别是, 该行列式是非负的.

推论 2.5.3. 当 $n \geq 0$, 序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

是对数凹的.

如下所示, 引理 2.5.2 可以扩展到 $n \times n$ 行列式. 令 $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ 为无环图中不同顶点的 n 元组. 对于 $\pi \in \mathfrak{S}_n$, 我们令

$$\mathcal{P}_\pi = \{(P_1, \dots, P_n) | P_i : u_i \rightarrow v_{\pi(i)}, i \in [n]\}$$

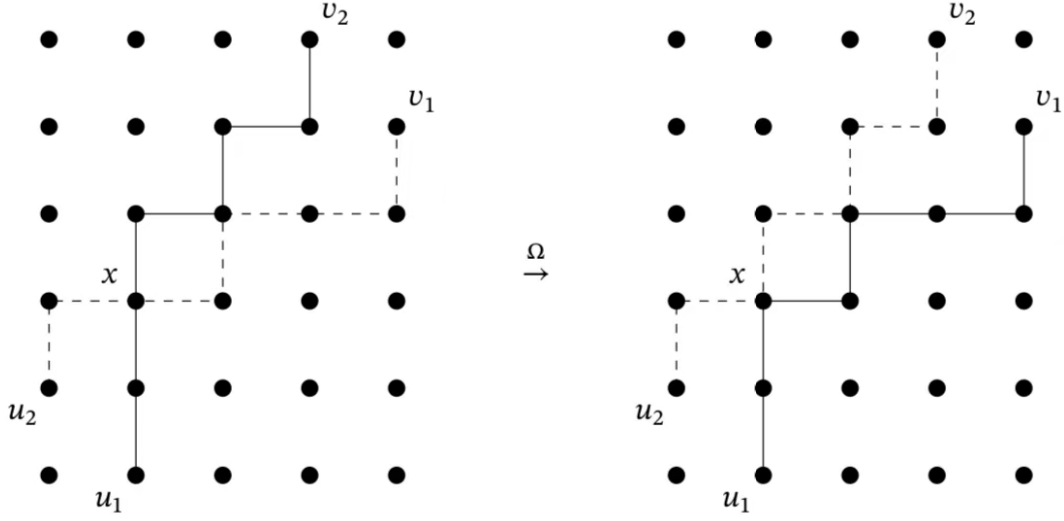


图 2.5: Lindström – Gessel – Viennot 对合

以及

$$\mathcal{P} = \bigcup_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{P}_\pi$$

为了使得 \mathcal{P} 成为符号集, 回忆抽象代数中 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 的符号为

$$\text{sgn } \pi = (-1)^{n-k}$$

如果 π 在他的不相交环的分拆中有 k 个环. 还有其他定义 $\text{sgn } \pi$ 的方法, 但他们都是等价的. 这个符号函数的一个关键特性是, 如果 $A = [a_{i,j}]$ 是一个矩阵, 那么

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\text{sgn } \pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)}$$

现在如果 $(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}_\pi$, 那么我们令 $\text{sgn}(P_1, \dots, P_n) = \text{sgn } \pi$

为了扩展对合 Ω , 称 $P = (P_1, \dots, P_n)$ 相交, 如果有一对 P_i, P_j 相交. 给定一个相交的 P , 我们找到最小的 i , 使得 P_i 与 P 的另一条路径相交, 并且令 x 为 P_i 与 P 的另一条路径的第一个交点. 现在取最小的 $j > i$, 使得 P_j 穿过 x . 我们现在令 $\Omega(P) = P'$, 其中 P' 为 P 中 P_i, P_j 分别由

$$\begin{aligned} P'_i &= u_i \xrightarrow{P_i} x \xrightarrow{P_j} v_{\pi(j)}, \\ P'_j &= u_j \xrightarrow{P_j} x \xrightarrow{P_i} v_{\pi(i)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

代替. 现在需要证明 Ω 是符号逆对合. 和之前一样, 非相交路径族 P 是 Ω 的不动点. 根据 Ω 的相关细节, 我们现在已经证明了以下几点.

引理 2.5.4. (*Lindström-Gessel-Viennot*) 设 D 为无环有向图. 考虑两个顶点序列 $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in V(D)$, 使得每个 $P \in \mathcal{P}_\pi$ 是相交的, 其中 $\pi \neq id$, 恒等排列. 我们有

$$\det[p(u_i; v_j)]_{1 \leq i, j \leq n} = \text{不相交 } P \in \mathcal{P}_{id} \text{ 的个数}$$

特别地, 该行列式是非负的.

这个定理对实数序列也有一些说明. 任意序列 a_0, \dots, a_n 有一个相应的托普利兹矩阵, 为无限矩阵 $A = [a_{j-i}]_{i,j \geq 0}$. 因此

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

如果 A 的每个子方阵都有一个非负行列式, 则称该序列为波利亚频率, 简称 PF . 注意, 特别是, 我们在 (2.10) 中得到行列式, 因此 PF 意味着对数凹. 引理 2.5.4 可以用来证明一个序列是 PF , 就像引理 2.5.2 可以用来证明它是对数凹的一样. 读者现在应该不难证明以下结果.

定理 2.5.5. 当 $n \geq 0$, 序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

是 PF .

2.6 矩阵树定理

我们以行列式的另一个应用来结束本章. 在计数组合学中, 有很多地方生活着动物, Krattenthaler[54,55] 的文章中有一个很好的调查. 在这里, 我们将使用著名的基尔霍夫矩阵树定理来计算生成树.

如果 $V(H) = V(G)$, 则称子图 $H \subseteq G$ 为生成图. 因此生成子图完全由他的边集决定. G 的生成树 T 是生成子图, 他是一棵树. 显然, 生成树要存在, G 必须是连通的. 设 $ST(G)$ 是 G 的生成树集. 如果考虑图 2.6 中左侧的图 G , 以及他的八个生成树的列表位于图的中间 (缩小到一半大小, 使得他们适合放在图中, 并且没有顶点和边的标记). 为了开发证明我们的主要定理所需的工具, 我们首先需要对组合矩阵做一些注释.

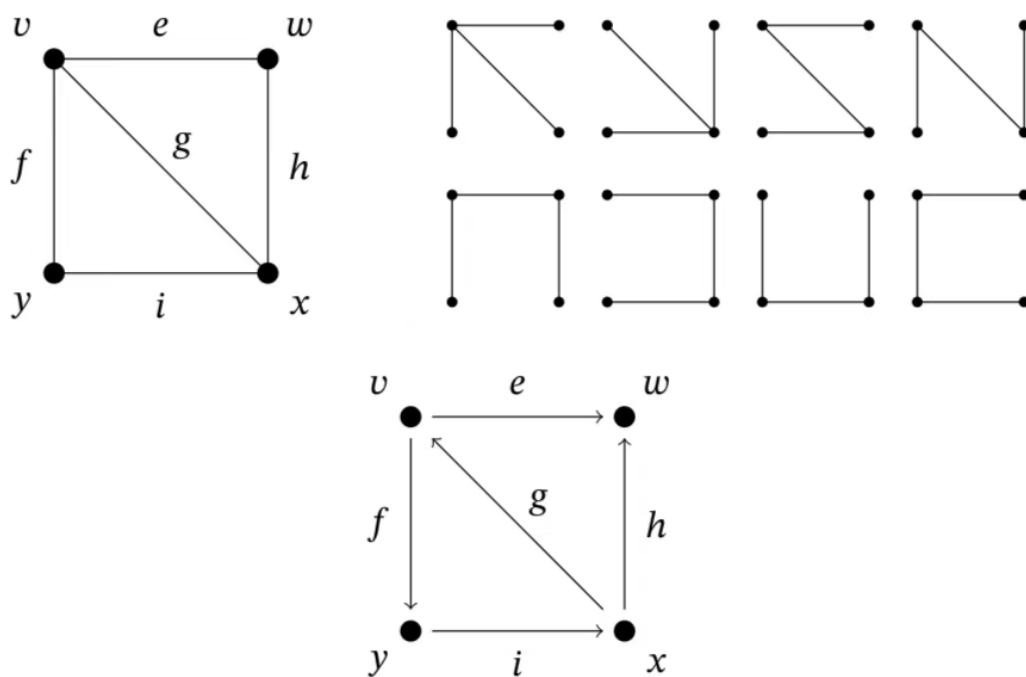
我们将经常有机会创建矩阵, 其行列由集合索引而不是数字. 如果 S, T 是集合, 则 $S \times T$ 矩阵 M 的构造方法是: 对 S 和 T 的元素给定一个线性顺序, 并使用他们分别对 M 的行和列进行索引. 因此, 如果 $(s, t) \in S \times T$, 那么 $m_{s,t}$ 是矩阵 M 中由 s 索引的行和由 t 索引的列中的项. 读者可能已经注意到, 这样的矩阵不仅取决于 S, T , 还取决于他们的线性顺序. 然而, 只是更改 M 中的行列顺序, 这通常不会影响我们希望从中提取到的信息.

如果 $G = (V, E)$ 是一个图, 那么有几个重要的矩阵与之相关. G 的邻接矩阵是 $V \times V$ 矩阵 $A = A(G)$, 其中

$$a_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{若 } vw \in E, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

使用顺序 v, w, x, y , 图 2.6 左侧的图有邻接矩阵

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & w & x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

图 2.6: 图 G , 他的生成树, 以及一个方向

邻接矩阵总是对称的, 由于 vw 和 wv 表示同一条边. 他在对角线上也有零, 因为我们的图 (通常) 是无环的.

与 G 相关的第二个矩阵是他的关联矩阵, $B = B(G)$, 为 $V \times E$ 矩阵, 其中项为

$$b_{v,e} = \begin{cases} 1 & \text{若 } v \text{ 为 } e \text{ 的端点,} \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

回到我们的例子, 这个图有

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e & f & g & h & i \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

通过构造, B 的第 v 行包含 $\deg v$ 个, 每一列包含两个. 我们还需要对角 $V \times V$ 矩阵 $C = C(G)$, 其 对角线上的项 $c_{v,v} = \deg v$. 这三个矩阵有很好的相关性.

命题 2.6.1. 对任意图 G , 我们有

$$BB^t = A + C$$

证明. BB^t 的 (v, w) 项为 B 的第 v 行和第 w 行的内积. 如果 $v = w$, 那么, 使用 (1.9) 中的符号,

$$\sum_e b_{v,e}^2 = \sum_e \delta(v \text{ 为 } e \text{ 的端点})^2 = \deg v = c_{v,v}$$

$0^2 = 0, 1^2 = 1$. 类似地, 如果 $v \neq w$, 那么项为

$$\begin{aligned} \sum_e b_{v,e} b_{w,e} &= \sum_e \delta(v \text{ 为 } e \text{ 的端点}) \cdot \delta(w \text{ 为 } e \text{ 的端点}) \\ &= \delta(vw \in E) \\ &= a_{v,w} \end{aligned}$$

证明完成. □

有趣的是, 为了计算 G 的生成树的个数, 我们必须将 G 转化为一个有向图. G 的方向是有向图 D , 其 $V(D) = V(G)$, 每条边 $vw \in E(G)$, 每条弧 \vec{vw} 或者 \vec{wv} 在 $A(D)$ 上. 在这种情况下, G 被称为 D 的基础图. 图 2.6 中右侧的有向图是例子中的图 G 的一个方向. 有向图的邻接矩阵的定义与图一样, 这不是我们关心的. 但是我们需要有向关联矩阵, $B = B(D)$, 定义为

$$b_{v,a} = \begin{cases} -1 & \text{若 } a = \vec{vw}, \\ 1 & \text{若 } a = \vec{wv}, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

对于图 2.6 中的有向图, 我们有

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e & f & g & h & i \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

这里有两个关于 $B(D)$ 的命题, 这对我们很重要.

命题 2.6.2. 设 D 为有向图, $B = B(D)$.

(a) 如果 B 的行为 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, 那么

$$\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{b}_n = \mathbf{0},$$

其中 $\mathbf{0}$ 为零向量.

(b) 如果 D 为图 G 的一个方向, 那么

$$BB^t = C(G) - A(G) \tag{2.13}$$

证明. (a), 只需注意 B 的每一列都包含一个 1 和一个 -1, 这将在总数中抵消. (b) 的证明与命题 2.6.1 类似, 因此留给读者. □

值得注意的是, 虽然 (2.13) 左侧的矩阵 B 依赖于 D , 但右侧仅依赖于基础图 G . 矩阵 $L(G) = C(G) - A(G)$ 被称为 G 的拉普拉斯算子, 并控制图的许多组合方面. 回到我们的例子, 我们有

$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

注意到, $L = L(G)$ 的行之和为零, 由于对所有的 $v \in V$ 第 v 列包含了 $\deg v$ 在对角线上, 并且其他非零项均为-1. 因此 $\det L = 0$. 但是去掉前面显示的矩阵的最后一行和最后一列, 并取行列式, 有

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 8.$$

读者可能还记得, 8 也是 G 的生成树的个数. 这并不是巧合! 但在证明隐含定理之前, 我们还需要一个结果.

设 M 是一个 $S \times T$ 矩阵, 设 $I \subseteq S, J \subseteq T$. 设 $M_{I,J}$ 表示 M 的子矩阵, 其行由 I 索引, 列由 J 索引. 在 $B(G)$ 中, 对于我们例子中的图 G , 其 $I = \{v, x\}, J = \{f, g, i\}$, 我们有

$$B_{I,J} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

如果对某些 $s \in S$ 有 $I = S - \{s\}$, 对某些 $t \in T$ 有 $J = T - \{t\}$, 那么我们对 $M_{I,J}$ 使用缩写 $M_{\hat{s}, \hat{t}}$. 在这种情况下, 当 $S = T = [n]$, M 的第 (i, j) 余子式为

$$m_{\hat{i}, \hat{j}} = (-1)^{i+j} \det M_{\hat{i}, \hat{j}}.$$

我们将需要以下关于行列式的著名结论, 叫做柯西-比奈定理. 由于这实际上是一个关于线性代数而非组合数学的陈述, 我们将在练习中概述他的证明.

定理 2.6.3. (柯西-比奈定理) 设 Q 是一个 $[m] \times [n]$ 矩阵, 设 R 是一个 $[n] \times [m]$ 矩阵. 那么

$$\det QR = \sum_{K \in \binom{[n]}{m}} \det Q_{[m], K} \cdot \det R_{K, [m]}.$$

注意, 在特例 $m = n$ 中, 这将简化为众所周知的表述 $\det QR = \det Q \cdot \det R$.

定理 2.6.4. (矩阵树定理) 设 G 为一个图, 并且 $V = [n], E = [m]$, 设 $L = L(G)$. 对任意 $i, j \in [n]$ 有

$$\#ST(G) = \ell_{\hat{i}, \hat{j}}$$

证明. 我们将在 $i = j = n$ 的情况下进行计算, 因为其他情况类似. 所以

$$\ell_{\hat{n}, \hat{n}} = (-1)^{n+n} \det L_{\hat{n}, \hat{n}} = \det L_{\hat{n}, \hat{n}}.$$

设 D 是 G 的任意方向, 并且 $B = B(D)$. 根据命题 2.6.2(b), 我们有 $L = C(G) - A(G) = BB^t$. 因此

$$L_{\hat{n}, \hat{n}} = B_{W, E} (B_{W, E})^t$$

其中 $w = [n-1]$. 应用柯西-比奈定理, 我们得到

$$\ell_{\hat{n}, \hat{n}} = \sum_{F \in \binom{E}{n-1}} \det B_{W, E} \det (B_{W, E})^t = (\det B_{W, E})^2.$$

这个定理将会被证明, 如果我们能证明

$$\det B_{W, E} = \begin{cases} \pm 1 & \text{若 } F \text{ 的边为 } G \text{ 的生成树} \\ 0 & \text{其他.} \end{cases} \quad (2.14)$$

注意, $B_{W,F}$ 是图 D_F 的关联矩阵, 其中 $V(D_F) = V, A(D_F) = F$, 但除去了顶点 n 所在的行. 如果他的基本图是一棵树, 我们就说 D_F 是一棵树.

我们首先考虑的情况是 D_F 不是一棵树. 我们知道 $\#F = n - 1$, 所以根据定理 1.10.2, D_F 必须是非连通的. 因此 D_F 有一个不含顶点 n 的分量. 根据命题 2.6.2(a), $B_{W,F}$ 行向量的和对应分量为零向量. 因此在这种情况下 $\det B_{W,F} = 0$.

现在假设 D_F 是一棵树. 为了证明 (2.14) 的这种情况, 只需排列 $B_{W,F}$ 的行和列就足够了, 使得矩阵变成下三角形, 对角线元素为 ± 1 . 这种排列对应于 D_F 的顶点和边的重新标记. 如果 $n = 1$, 那么 $B_{W,F}$ 是行列式为 1 的空矩阵. 如果 $n > 1$, 那么, 根据引理 1.10.1, D_F 至少有两片叶子. 特别是, $W = [n - 1]$ 中有一片叶子. 通过重新标记 D_F , 我们可以假设 $v = 1$ 是叶子, $a = 1$ 是包含 v 的唯一弧. 由此得出 $B_{W,F}$ 的第一行的 (1,1) 位置为 ± 1 , 其他位置为 0. 现在我们考虑 $D_F - v$ 和递归来完成矩阵的构造. \square

我们可以用这个定理来重新推导 Cayley 的结果, 定理 1.10.3, 枚举给定顶点集上的所有树. 为此, 考虑顶点集为 $V = [n]$ 的完全图 K_n . 显然, 有 n 个顶点的树与 K_n 的生成树的个数相同. 拉普拉斯算子 $L(K_n)$ 由 $n - 1$ 沿对角线向下构成, 其他地方为 -1 . 所以 $L_{\hat{n}, \hat{n}}$ 是同一个矩阵, 但维数为 $(n - 1) \times (n - 1)$. 将矩阵的所有行添加到第一行. 结果是第一行的元素都是同一个数, 因为每列都由 $n - 1$ 和 $n - 2$ 减 1 按一定顺序组成. 接下来, 将第一行加到其他每一行. 这将消去这些行中的负数, 并将每个对角线项从 $n - 1$ 改为 n . 现在矩阵是上三角形的, 因为矩阵的初等行变换不会改变行列式, 我们得到 $\ell_{\hat{n}, \hat{n}}$ 是对角线项的乘积, 其包含了 n 中的一项或 $n - 2$ 项. Cayley 定理得证.

2.7 习题

(1) 设 n 为正整数, p_1, \dots, p_k 为不同素数. 证明 1 到 n 之间不能被任何 p_i 整除的整数的个数是

$$n - \sum_{1 \leq i \leq k} \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor - \dots + (-1)^k \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k} \right\rfloor.$$

(2) 设 $A(n)$ 为 $\rho \vdash [n]$ 的个数, 使得对于任何 $i \in [n - 1], i, i + 1$ 永远不会出现在 ρ 的同一块中.

(a) 证明

$$A(n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} B(n-i),$$

其中 $B(n)$ 是第 n 个贝尔数.

(b) 找到并证明涉及第二类斯特林数的类似恒等式.

(c) 表明 (a) 部分遵循 (b) 部分.

(3) 固定正整数 $k \leq n$. 使用包含和排除原理找到一个组合数 $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_k] \vdash n$ 的公式, 其性质是对所有的 $i \in [k]$ 有 $\alpha_i \geq 2$.

(4) 用两种方法证明对 $n \geq 3$ 有

$$D(n) = (n - 1)(D(n - 1) + D(n - 2))$$

(a) 利用定理 2.1.2,

(b) 通过组合论证.

(5) 证明对 $n \geq 1$ 有

$$D(n) = nD(n-1) + (-1)^n.$$

(6) 如果 $\gcd(k, n) = 1$, 其中 \gcd 是最大公约数, 则调用两个相对素数的正整数 k, n . Euler Totient 函数, 也称为 Euler phi 函数, 是

$$\phi(n) = \#\{k \in [n] | \gcd(k, n) = 1\}.$$

使用 PIE, 证明乘积覆盖所有素数 p 除以 n 的

$$\phi(n) = n \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

(7) 利用定理 1.5.1 给出了当 S 是有限的时引理 2.2.1 的另一个证明.

(8) 固定集合 A 和子集 $A_1, \dots, A_n \subseteq A$. 用 (2.7) 定义 $I \subseteq [n]$ 的 A_I . 证明

$$A_\emptyset = A.$$

(9) 证明对于第一类 (有符号) 斯特林数

$$\sum_k s(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \text{ or } 1, \\ 0 & \text{if } n \geq 2, \end{cases}$$

使用符号可逆对合.

(10) 填写定理 2.2.2 的证明细节.

(11) 考虑排列 $\pi \in P(S)$ 和 $\sigma \in P(T)$, 其中 $S \cap T = \emptyset$. π 和 σ 的无序排列是

$$\pi! \sigma = \{\tau \in P(S \uplus T) | \pi \text{ 和 } \sigma \text{ 是 } \tau \text{ 的 } \textit{text}\}$$

例如, $3!2!4 = \{3124, 3214, 3241, 2314, 2341, 2431\}$. 我们把排列的线性组合当作向量. 例如

$$6(3124) - 7(3241) - 9(3124) + (3241) = -3(3124) - 6(3241).$$

一组排列表示集合中所有元素的和, 系数为 1. 所以我们会写

$$3!2!4 = 3124 + 3214 + 3241 + 2314 + 2341 + 2431$$

以及让上下文确定 $3!2!4$ 是指集合还是和. 证明

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^k \sum_{w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k = 12 \dots n} w_1! w_2! \dots w_k! = (-1)^n (n \dots 21),$$

其中, 总和覆盖所有串联 $w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k = 12 \dots n$. 例如, 当 $n = 3$ 时, 则串联为

$$123 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 23 = 12 \cdot 3 = 123.$$

提示: 考虑一个包含在无序排列 $w_1!w_2!\dots!w_k$ 中的排列 v . 找到最大索引 $j \geq 0$ (如果有), 这样 (i) $|w_1| = |w_2| = \dots = |w_j| = 1$ (这意味着 $i \in [j]$ 代表 $w_i = i$) 以及 (ii) $j \dots 21$ 是 v 的子字. 使用 j 和 $j+1$ 在 v 中的相对位置以及合并和拆分, 在另一个相反符号的无序排列中找到 v 的副本.

(12) 证明引理 2.3.1.

(13) 下面是一种获得直接双射 $g : P_d(n) \rightarrow P_o(n)$ 的方法. 考虑 $\lambda \in P_d(n)$. 对于某些奇数 h 和整数 x, λ 的每个部分 p 都可以唯一地写为 $p = q2^r$. 将 p 替换为 2^r 的 q 个副本以获得分区 $\mu = g(\lambda)$. 例如, 如果 $\lambda = (6, 4, 1)$ 那么 $6 = 3 \cdot 2^1 = 3 + 3, 4 = 1 \cdot 2^2 = 1 + 1 + 1 + 1$, 以及 $1 = 1 \cdot 2^0 = 1$. 因此 $g(6, 4, 1) = (3, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$.

(a) 证明 g 是双射

(b) 证明 g 与定理 2.3.3 证明中使用对合原理得到的双射相同.

(14) 如果每个组件都有一个称为该组件根的可分辨顶点, 则调用 G 根. 如果有一个双射 $f : V_1 \rightarrow V_2$ 同时保持根 (r 是 G_1 的根, 当且仅当 $f(r)$ 是 G_2 的根) 和边 ($vw \in E_1$ 当且仅当 $f(v)f(w) \in E_2$), 则两个无标号有根图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 相等. 调用有根树 T , 即使有一些边 rv , 其中 r 是根, 这样从 T 中删除该边并使 v 成为其分量的根, 就会得到一个具有两个相等分量的图. 如果根林的所有组件树都不相等, 则将其称为不同的.

(a) 使用 Garsia-Milne 对合原理, 在没有均匀分量树的 n 顶点上的有根族和不同 n 顶点上的有根族之间找到一个双射.

(b) 使用练习 13 中的想法描述 (a) 的双射.

(c) 证明 (a) 和 (b) 中的双射实际上是相同的.

(15) 可以用以下方式推广定理 2.3.3. 固定正整数 m . 设 $P_{<m}(n)$ 为 $\lambda \mapsto n$ 的集合, 其中每个部分的重复次数少于 m 次. 设 $P_{\neq lm}(n)$ 是 $\lambda \mapsto n$ 的集合, 使得所有部分都不能被 m 整除.

(a) 证明 $P_{<2}(n) = P_d(n)$ 和 $P_{\neq l2}(n) = P_o(n)$.

(b) 通过推广前面练习的双射来证明 $\#P_{<m}(n) = \#P_{\neq lm}(n)$.

(c) 用对合原理重新计算 $\#P_{<m}(n) = \#P_{\neq lm}(n)$.

(d) 证明 (b) 和 (c) 中的双射是相同的.

(16) 设 $\mathcal{S} = (\mathcal{S}; S_1, \dots, S_n)$, 其中 \mathcal{S} 是有限集并且 S_1, \dots, S_n 是子集. 同样地定义 $\mathcal{T} = (\mathcal{T}; T_1, \dots, T_n)$. 若对所有的 $I \subseteq [n]$ 有 $\#S_I = \#T_I$, 那么就叫 \mathcal{S} 和 \mathcal{T} 是筛当量.

(a) 使用 PIE 证明如果 \mathcal{S} 和 \mathcal{T} 是筛当量, 就有

$$\left| \mathcal{S} - \bigcup_{i=1}^n S_i \right| = \left| \mathcal{T} - \bigcup_{i=1}^n T_i \right|.$$

(b) 如果 \mathcal{S} 和 \mathcal{T} 是筛当量, 那么可以利用对合原理构造双射证明 (a) .

(17) (a) 检查定理 2.4.2 证明中使用的线 L 的形式是否正确. 使用此方程式验证 $(0, 0)$ 和 $(k, n - k)$ 位于 L 的两侧.

(b) 利用二项式系数的阶乘表达式, 给出该定理的第二个证明.

(c) 用归纳法给出这个定理的第三个证明.

(18) 考虑长度为 n 的格路, 从原点开始, 到 (x, y) 结束, 使用步骤 N, E, S, W , 其中 $S = [0, -1], W = [-1, 0]$. 令 $r = (n - x - y)/2, s = (n + x - y)/2$.

(a) 证明此类路径的数目由

$$\binom{n}{r} \binom{n}{s}.$$

给出. 提示: 找到一个具有 EW -格路对的双射, 这些路径在第一章练习 33 中定义.

(b) 证明在 x 轴上方保持弱的路径数为

$$\binom{n}{r} \binom{n}{s} - \binom{n}{r-1} \binom{n}{s-1}.$$

(c) 证明对于正整数 n, r , 序列

$$\binom{n}{r} \binom{n}{0}, \binom{n}{r-1} \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{0} \binom{n}{r}$$

是单峰的.

(19) 设 D 为有向图.

(a) 证明从 u 到 v 的任意有向行走, 其中 $u \neq v$ 包含从 u 到 v 的有向路径.

(b) 证明从 u 到 v 长度至少为 2 的带 $u = v$ 的任何有向游动都包含一个有向循环.

(20) 使用因子的二项式系数公式证明对于 $n \in \mathbb{N}$, 序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

是对数凹的.

(21) 设 a_0, a_1, \dots, a_n 是一个正实数序列. 证明序列是对数凹的当且仅当所有 $0 < k \leq l < n$ 都有

$$a_k a_l \geq a_{k-1} a_{l+1}.$$

提示: 使用命题 2.5.1 证明中的想法.

(22) (a) 设 $t(n, k)$ 是 $0 \leq k \leq n$ 的实数三角形数组. 如果序列 $t(n, 0), \dots, t(n, n)$ 对所有 n 都是对数凹的, 则称 k 中的数组为对数凹. 假设 $t(n, k)$ 满足递归

$$t(n, k) = a(n, k)t(n-1, k-1) + b(n, k)t(n-1, k),$$

其中 $n \geq 1, a(n, k), b(n, k), t(n, k)$ 是非负实数, 并且对于 $k < 0$ 或者 $k > n$ 有 $a(n, k) = b(n, k) = t(n, k) = 0$. 还假设

- (i) $a(n, k)$ 和 $b(n, k)$ 是 k 中的对数凹以及
(ii) $n \geq 1$, 时有 $a(n, k-1)b(n, k+1) + a(n, k+1)b(n, k-1) \leq 2a(n, k)b(n, k)$.

证明 $t(n, k)$ 是 k 中的对数凹.

- (b) 使用第 (a) 部分证明 $\binom{n}{k}, c(n, k)$ ((第一类无符号斯特林数), 和 $S(n, k)$ (第二类斯特林数) 是 k 中的对数凹.

(23) 设 $0 \leq k < n$. 通过使用因子的二项式系数表达式和使用格路径这两种方法证明

$$\binom{n}{k}^2 \geq \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k}.$$

(24) 检查一般路径族 $P = (P_1, \dots, P_n)$ 定义的 Ω 是否为反向对合符号.

(25) 证明定理 2.5.5.

(26) 考虑第一类无符号斯特林数的序列 $c(n, 0), \dots, c(n, n)$.

- (a) 用引理 2.5.2 证明这个序列是对数凹的. 提示: 尝试用 $V = \mathbb{Z}^2$ 构造 D , 使从 $(0,0)$ 到 (n, k) 的路径数为 $c(n, k)$. 使用多个但可区分的弧将很有帮助.

- (b) 用引理 2.5.4 证明, 实际上, 这是一个 PF 序列.

(27) (a) 找到一个单峰但不是对数凹的正实数序列.

- (b) 找到一个对数凹但不是 PF 的正实数序列.

(28) (a) 表明 $A(G)^n$ 的 (v, w) 项是长度 n 从 v 到 w 的行走次数.

- (b) 表明类似的结果适用于有向图.

(29) 使用矩阵 $B(G)$ 证明 Handshaking 引理, 定理 1.9.3.

(30) 证明命题 2.6.2 (b) .

(31) 给出定理 2.6.3 的两个证明, 如下所示.

- (a) 使用 Lindström–Gessel–Vienno 引理给出一个证明.

- (b) 根据下面的大纲进行第二次演示.

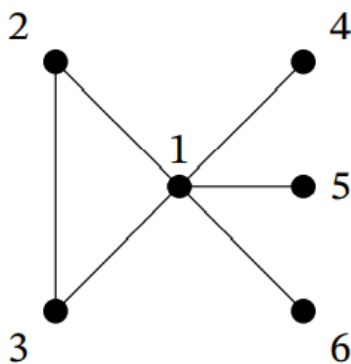
- (i) 证明如果 $m > n$, 那么两边都是零.
(ii) 假设 $m \leq n$, 写出 QR , 并使用多线性展开乘积的列, 以显示

$$\det QR = \sum_{\pi \in P([n], m)} (\det Q_{\cdot, \pi}) r_{\pi_1, 1} r_{\pi_2, 2} \cdots r_{\pi_m, m},$$

其中 $Q_{\cdot, \pi}$ 是矩阵, 其第 j 列是 Q 的 π_j 列.

- (iii) 表明在上一个求和中, 如果 π 包含一个重复条目, 则为 $\det Q_{\cdot, \pi} = 0$.

- (iv) 证明如果 $k \in \binom{[n]}{m}$, 那么 $\det Q_{[m], K}$ 可以从和中的所有项中分解出来, 其中 π 是 K 的置换, 剩下的和是 $\det R_{K, [m]}$.

图 2.7: 图 G_6

(32) 证明定理 2.6.4 的情况, 其中 $i = 1$ 和 $j = 2$.

(33) 设 G_n 是具有顶点集 $V = [n]$ 和边集

$$E = \{12, 13, 14, \dots, 1n, 23\}.$$

图 G_6 如图 2.7 所示. 用两种方法求 G_n 的生成树数: 直接计数法和矩阵树定理.

(34) 完整的双向图 $K_{m,n}$, 有 $v = \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n\}$ 和由 $v_i w_j$ 组成的边集, 对所有 i, j (没有其他边) 成立. 证明

$$\#ST(K_{m,n}) = m^{n-1} n^{m-1}.$$

第三章 普通型生成函数计数

(杜玉洁 翻译)

本章引入计数工具中最重要的技巧：生成函数。Wilf 关于生成函数的性质写了一整本书。现有数种不同类型的生成函数，我们从最简单的普通型生成函数开始。在第四、七、八章我们将处理其他类型的生成函数。对于所有类型生成函数的研究，基本的观点都是拿出一列我们感兴趣的数，然后用代数对象，也即多项式或形式幂级数来替代它。这样做的好处是，我们可以用代数对象所具有的性质来研究初始序列。这使得序列的结果的证明有如下优点：

- (1) 证明会非常短。
- (2) 许多证明可以直接计算而不需要其他的方法。
- (3) 有时没有其他已知方法来获取给定的结果。

3.1 生成多项式

令 x 为变量，复数序列

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \quad (3.1)$$

有普通生成多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k.$$

在这里，“普通”是为了区别于其他类型的生成多项式。因为我们只在这一章中处理普通生成多项式的情况，我们经常去掉形容词。注意 $f(x)$ 是复数域上一元多项式环 $\mathbb{C}[x]$ 中的元素， x 的系数为复数。我们也称 $f(x)$ 为序列 (3.1) 的生成函数，因为它是可数项序列（但是可能非有限项）生成函数的特殊情况。这种更一般的设定将在 3.3 节中讨论。

我们从一个简单的例子开始讨论，考虑帕斯卡三角形的一行中的二项式系数

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}.$$

相应的生成函数为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

特别地，当 $n = 4$ 时，我们有

$$f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 = (1+x)^4.$$

这就是众所周知的二项式定理. 我们给出这一结果的两种证明, 一种是组方法, 另一种是代数运算.

定理 3.1.1 (二项式定理). 对于 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

证明. (组合证明) 用乘法分配律展开乘积

$$(1+x)^n = \overbrace{(1+x)(1+x) \cdots (1+x)}^n.$$

我们得到 x^k 项是通过选取 k 项 x 和 $n-k$ 项 1 . 但是从 n 个对象中选 k 个的方法数为 $\binom{n}{k}$, 这就是乘积中 x^k 项系数. \square

证明. (代数证明) 我们对 n 做归纳. 当 $n=0$ 时等式显然成立. 因此假设 $n \geq 1$. 注意, 根据二项式系数的性质, 我们可以将生成函数写作

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n}{k} x^k.$$

这样做的好处在于不用处理求和的界. 现在利用定理 1.3.3(a) 中关于二项式递归, 改变符号, 归纳得

$$\begin{aligned} \sum_k \binom{n}{k} x^k &= \sum_k \binom{n-1}{k-1} x^k + \sum_k \binom{n-1}{k} x^k \\ &= x \sum_k \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} + \sum_k \binom{n-1}{k} x^k \\ &= x \sum_k \binom{n-1}{k} x^k + \sum_k \binom{n-1}{k} x^k \\ &= x(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-1} \\ &= (1+x)^n \end{aligned}$$

\square

第一个证明展示了权重生成函数的乘法规则的使用, 我们将在 3.4 节讨论. 第二个证明表明有关生成函数的计算可以基于传统运算法则. 并且, 扩展求和域的技巧是我们经常使用以简便运算的方法之一. 我们现在想给出一个例子来展示一个生成函数是如何产生的, 到如何使用生成函数来给出其他结果的简单证明. 特别地, 在二项式定理中令 $x=1$ 就得到

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n,$$

这就是定理 1.3.3 的 (c). 类似地, 我们令 $x=-1$, 就有

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0^n = \delta_{0,n},$$

这就是定理 1.3.3 的 (d).

我们通过介绍第一类斯特林数的生成函数来结束本节. 这一结果的证明与二项式定理的代数证明类似, 留作习题. 第二类斯特林数的生成函数将在 3.3 节介绍形式幂级数之后讨论.

定理 3.1.2. 对于 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\sum_{k=0}^n c(n, k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$$

在等式左边, 令 $x = 1$ 就得到特殊情况

$$\#P([n]) = \sum_k c(n, k) = n!.$$

因此该命题可以看做是定理 1.2.1 的一般化. 这样的扩展被称为 q -模拟, 将在下一节讨论.

3.2 统计量与 q -模拟

一种构造生成函数的方法是通过使用统计量与 q -模拟. 因为超几何级数理论与变量 q 的关系通常被用于这些生成函数. 这是一个助记符选择, 因为有时, 正如我们将在下面看到的, q 代表素数 p 的幂. 目前还没有对 q -模拟的正式定义, 因此我们将用一个例子开始, 将说明我们最终给出的元定义.

集合 S 上的统计量就是 $S \rightarrow \mathbb{N}$ 的函数 st . 因为统计量的值域为 \mathbb{N} , 因此我们可以为有限集合 S 定义相应的生成多项式

$$f(q) = \sum_{s \in S} q^{\text{st}s}.$$

这一生成函数有时被称为 st 在 S 上的分布, 因为它也可以被写作

$$f(q) = \sum_{k \geq 0} a_k q^k$$

其中 a_k 为 $s \in S$ 中满足 $\text{st } s = k$ 的元素个数, 这与概率论中随机变量的分布相似. 排列中最著名的统计量之一是逆序数. 排列 $\pi = \pi_1 \dots \pi_n \in P([n])$ 有逆序集

$$\text{Inv } \pi = \{(i, j) \mid i < j \text{ and } \pi_i > \pi_j\}.$$

我们可以认为该集合是指数对的集合, 其中 π 的相应元素并非它们的自然增长序. 注意, 我们使用指数对而非 π 的元素, 因为这可以更容易地将这个概念推广到允许重复的词. 比如说, 如果 $\pi = \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 = 41532$, 那么

$$\text{Inv } \pi = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}.$$

π 的逆序数就是

$$\text{inv } \pi = \# \text{Inv } \pi.$$

我们经常使用最开始函数的约定, 首字母大写代表集合, 小写代表集合的基数. 继续我们的例子, $\text{inv } 41532 = 6$. 显然 $\text{inv}: P([n]) \rightarrow \mathbb{N}$ 是一个统计量, 并且它有一个非常有趣的生成多项式.

定理 3.2.1. 对于 $n \geq 0$, 我们有

$$\sum_{\pi \in P([n])} q^{\text{inv } \pi} = (1)(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}).$$

证明. 我们对 n 作归纳, 并且省去琐碎的基本情况. 对每一个 $\pi \in P([n])$, 可以通过 $\sigma \in P([n-1])$ 获得, 只需在 σ 的元素之间形成的 n 个空 (包括 σ_1 的前面和 σ_{n-1} 的后面) 中插入 n 即可. 令 σ^i 表示把 n 放在距离右边的第 i 个空, 其中 σ_{n-1} 后面的空记为 0. 于是显然有

$$\text{inv } \sigma^i = i + \text{inv } \sigma.$$

用该等式然后进行归纳得到

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in P([n])} q^{\text{inv } \pi} &= \sum_{\sigma \in P([n-1])} \sum_{i=0}^{n-1} q^{\text{inv } \sigma^i} \\ &= \sum_{\sigma \in P([n-1])} q^{\text{inv } \sigma} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i \\ &= (1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}). \end{aligned}$$

□

将 $q=1$ 代入此结果得到

$$\#P([n]) = \sum_{\pi \in P([n])} 1 = n!$$

这就是定理 1.2.1 的第二条内容.

现在我们已经遇到了一些 q -模拟 (尽管我们还没有这样命名), 它们的元定义会更有意义. 一个组合对象 O 的 q -模拟就是 $O(q)$ 满足

$$\lim_{q \rightarrow 1} O(q) = O.$$

注意 O 可以是许多东西: 一个数, 一个定义或者一个定理. 比如 $n \in \mathbb{N}$ 的标准 q -模拟是多项式

$$[n]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \quad (3.2)$$

显然 $[n]_1 = n$ 的另一可能的 q -模拟是有理函数 $(1-q^n)/(1-q)$. 在这种情况下我们不能直接代入 $q=1$, 而是必须要取极限. 当然, 商和 $[n]_q$ 在 $q \neq 1$ 时是相等的. 另一 q -模拟是 q -阶乘

$$[n]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q.$$

因此定理 3.2.1 可被重新表述为

$$\sum_{\pi \in P([n])} q^{\text{inv } \pi} = [n]_q!.$$

注意, 有时我们把 $[n]_q$ 写作 $[n]$. 这可能与 $[n]$ 作为集合引起混淆, 因此我们只在清楚知道到底代表着什么时才使用此简便记号. 类似地, 在不致引起混淆时我们也可删除下标 q .

还有另一著名的统计量, 用 $[n]_q!$ 作为其分布. $\pi \in P([n])$ 的降序集为

$$\text{Des } \pi = \{i \mid \pi_i > \pi_{i+1}\}. \quad (3.3)$$

相应的降序数为 $\text{des } \pi = \#\text{Des } \pi$. 并且如果 $i \in \text{Des } \pi$ 当且仅当 $(i, i+1) \in \text{Inv } \pi$. 我们也可以定义升序集 $\text{Asc } \pi$ 和升序数 $\text{asc } \pi$, 只需调转 (3.3) 中不等号的方向. 继续我们之前的例子, 有 $\text{Des } 41532 = \{1, 3, 4\}$ 并且 $\text{des } 41532 = 3$. π 的主要指标为

$$\text{maj } \pi = \sum_{i \in \text{Des } \pi} i.$$

因此 $\text{maj } 41532 = 1 + 3 + 4 = 8$. “主要指标”一词是由多米尼克·福阿塔 [26] 创造的, 以纪念英国军队的一名少校珀西·麦克马洪 (Percy MacMahon), 他首先研究了这一统计数据 [61].

定理 3.2.2. 对于 $n \geq 0$, 我们有

$$\sum_{\pi \in P([n])} q^{\text{maj } \pi} = [n]_q!.$$

证明. 我们像定理 3.2.1 一样证明, 但是现在 σ 的空隙编号方式不同. 我们先给我们给 σ_i 和 σ_{i+1} (当 i 为降序) 之间的空以及 σ_{n-1} 之后的空编号, 从右到左从 0 开始编号. 然后给剩下的空编号, 从左到右用 $\text{des } \sigma + 1, \text{des } \sigma + 2, \dots, n-1$ 进行编号. 例子见证明后.

令 $\sigma^{(j)}$ 表示把 n 放在第 j 个位置后的结果. 我们称

$$\text{maj } \sigma^{(j)} = j + \text{maj } \sigma \quad (3.4)$$

事实上, 如果空 j 是下降位或者在 σ 的最后, 那么插入 n 只会移动 j 下降到右侧并包括给定下降一个位置的右侧. 通过定义主指标, $\text{maj } \sigma$ 总共增加了 j . 如果空 j 是在上升位或者 σ 的开始, 那么插入 n 增加了一个新的下降位, 并且把下降位移到空的后面某一位置的右边. 容易验证, 如果在空 j 插入 n 导致 $\text{maj } \sigma$ 增加了 j , 那么在空 $j+1$ 插入 n 导致 $\text{maj } \sigma$ 增加 $j+1$. 由归纳法知等式 (3.4) 对每个 j 都成立. 证毕. \square

继续前面的例子 $\sigma = 41532$ 且 $\text{maj } \sigma = 8$, 空的编号顺序如下:

$${}_44_31_55_23_12_0.$$

在每一个空依次插入 6 得到

j	0	1	2	3	4	5
$\sigma^{(j)}$	415326	415362	415632	461532	641532	416532
$\text{maj } \sigma^{(j)}$	8	9	10	11	12	13

有很多排列统计量的分布为 $[n]_q!$, 这些统计数据被 Foata 称为 Mahonian. 可以参考文章 Babson 和 Steingrímsson [3] 的 Mahonian 统计列表.

找到了涉及置换的 q -模拟后, 读者可能会怀疑它们也存在于组合中. 对于整数 $0 \leq k \leq n$, 定义 q -二项式系数或高斯系数为

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

和往常一样, 如果 $k < 0$ 或 $k > n$, 令这一函数为 0. 比如

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} &= \frac{[4]!}{[2]![2]!} \\ &= \frac{[4][3]}{[2][1]} \\ &= \frac{(1+q+q^2+q^3)(1+q+q^2)}{(1+q)} \\ &= 1+q+2q^2+q^3+q^4 \end{aligned} \quad (3.5)$$

只给出定义并不清楚这是一个 q -多项式还是有理函数. 但是利用归纳法及我们下一个结果就很清楚了. 注意, 这一定理给出了普通二项式系数递归的两个 q -模拟. 这说明了一个一般原则, 即 q -模拟不一定是唯一的, 正如我们在 $[n]_q!$ 的 inv 和 maj 解释中也看到的.

定理 3.2.3. 我们有

$$\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}_q = \delta_{0,k}$$

并且对 $n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

证明. 初始条件是平凡的. 我们将证明 q -二项式的第一个递归, 剩下的留作练习. 使用 q -阶乘的定义并找到一个公分母得到

$$\begin{aligned} q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} &= \frac{[n-1]!}{[k]![n-k]!} (q^k [n-k] + [k]) \\ &= \frac{[n-1]!}{[k]![n-k]!} \cdot [n] \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

证毕. □

下面我们给出二项式定理 (定理 3.1.1) 的 q -模拟. 令 q, t 为两个变量.

定理 3.2.4. 对于 $n \geq 0$ 我们有

$$(1+t)(1+qt)(1+q^2t) \cdots (1+q^{n-1}t) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k. \quad (3.6)$$

证明. 我们对 n 作归纳, $n=0$ 的情况很容易验证. 对于 $n>0$ 的情形, 我们用前面结果的第二个递推关系以及归纳假设有

$$\begin{aligned} \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k &= \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q t^k + \sum_k q^{\binom{k}{2}+n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q t^k \\ &= (1+t)(1+qt) \cdots (1+q^{n-2}t) + q^{n-1}t \sum_k q^{\binom{k-1}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q t^{k-1} \\ &= (1+t)(1+qt) \cdots (1+q^{n-2}t) + q^{n-1}t(1+t)(1+qt) \cdots (1+q^{n-2}t) \\ &= (1+t)(1+qt) \cdots (1+q^{n-1}t), \end{aligned}$$

这就是我们想要的结果. □

q -二项式系数有许多种组合解释, 我们在这里展示其中两种. 假设 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ 与 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ 是整数分拆, 如果 $k \geq l$ 且当 $i \leq l$ 时有 $\lambda_i \geq \mu_i$. 则称 λ 包含 μ , 记作 $\lambda \supseteq \mu$. 换句话说, λ 的杨图包含 μ 的杨图, 如果适当放置使它们的西北角对齐. 比如说, $(5, 5, 2, 1) \supseteq (3, 2, 2)$, 见图 3.1, 阴影部分是 μ 的杨图, 包含在 λ 的杨图中. 符号 $\mu \subseteq \lambda$ 应该是不言自明的. 给定 $\mu \subseteq \lambda$, 也有相应的倾斜分拆

$$\lambda/\mu = \{(i, j) \in \lambda \mid (i, j) \notin \mu\}. \quad (3.7)$$

图 3.1 中倾斜分拆的单元格是白色的.

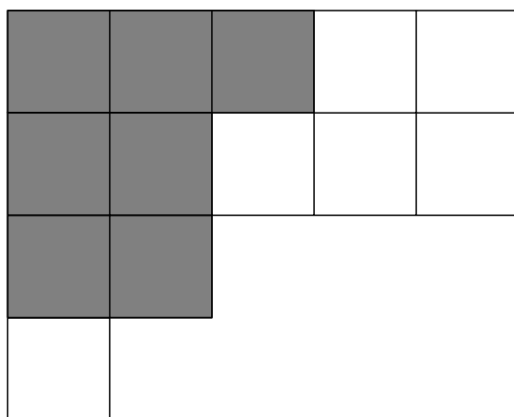


图 3.1: $(5, 5, 2, 1) \supseteq (3, 2, 2)$ 的杨图

$k \times l$ 矩形是整数分拆, 其重数表示法为 (k^l) . 考虑包含在这一矩形的分拆集合

$$\mathcal{R}(k, l) = \{\lambda \mid \lambda \subseteq (k^l)\}$$

$|\lambda|$ 是分拆 λ 的部分数, 我们考虑生成函数 $\sum_{\lambda \in \mathcal{R}(k, l)} q^{|\lambda|}$. 比如, 如果 $k = l = 2$, 那么我们有

$$\frac{\lambda \subseteq (2^2)}{q^{|\lambda|}} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \emptyset & (1) & (2) & (1^2) & (2, 1) & (2^2) \\ \hline 1 & q & q^2 & q^2 & q^3 & q^4 \end{array},$$

因而

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{R}(2, 2)} q^{|\lambda|} = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4.$$

读者会注意到这一结果与 (3.5) 类似, 这并非巧合.

定理 3.2.5. 对于 $k, l \geq 0$, 我们有

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{R}(k, l)} q^{|\lambda|} = \left[\begin{array}{c} k+l \\ k \end{array} \right]_q.$$

证明. 我们对 k 和 l 进行双重归纳, 其中 $k = 0$ 和 $l = 0$ 的情况留给读者自行验证. 当 $k, l > 0$ 时且 $\lambda \subseteq (k^l)$, 则有两种可能. 一种情况是 $\lambda_1 < k$ 并且 $\lambda \subseteq ((k-1)^l)$. 另一种情况是 $\lambda_1 = k$, 此时

λ 可以写作 $\lambda = (k, \lambda')$, 其中 λ' 是 λ 的不包含 λ_1 的分拆. 因此 $\lambda' \subseteq (k^{l-1})$. 注意在这种情况下 $|\lambda| = |\lambda'| + k$. 我们用归纳法及定理 3.2.3 得到

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Pi(k, l)} q^{|\lambda|} &= \sum_{\lambda \in \mathcal{R}(k-1, l)} q^{|\lambda|} + \sum_{\lambda' \in \mathcal{R}(k, l-1)} q^{|\lambda'|+k} \\ &= \begin{bmatrix} k+l-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} k+l-1 \\ k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k+l \\ k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

证毕. □

对于高斯多项式的第二种组合解释, 需要一些线性代数的工具. 令 q 为素幂, 令 \mathbb{F}_q 为具有 q 个元素的伽罗瓦域. 令 V 为 \mathbb{F}_q 上维数 $\dim V = n$ 的向量空间. 我们用 $W \leq V$ 表示 W 是 V 的子空间. 令

$$\begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix} = \{W \leq V \mid \dim W = k\}.$$

维数为 k 的子空间与 $k \times n$ 的满秩的行最简形矩阵成一一对应. 比如说, 如果 $n = 4$, $k = 2$, 那么可能的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{bmatrix},$$

其中 $*$ 表示 \mathbb{F}_q 的任意元素. 所以相应 $*$ 图之一的子空间的数目是 q^s , 其中 s 是 $*$ 的数量. 因此

$$\# \begin{bmatrix} \mathbb{F}_q^4 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4,$$

在这一点上看来非常相似. 但是请注意, 与之前的情况相反, 这实际上代表一个整数而不是多项式, 因为 q 是素幂. 当然, 这个例子是概括性的. 因为这个结果, 人们有时半开玩笑地称伽罗瓦域上只有一个元素的集合成为向量空间是不存在的.

定理 3.2.6. 如果 V 是 \mathbb{F}_q 维数为 n 的向量空间, 那么

$$\# \begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q.$$

证明. 给定 $W \leq V$ 使得 $\dim W = k$, 我们首先确定 W 的可能有序基 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ 的数目. 注意, 因为 $\dim V = n$, 我们有 $\#V = \#\mathbb{F}_q^n = q^n$. 我们可以为 \mathbf{v}_1 选出任意非零向量, 因此可以选择的数目为 $q^n - 1$. 对于 \mathbf{v}_2 , 我们可以在 V 中选择不由 \mathbf{v}_1 生成的任意向量, 有 $q^n - q$ 种可能选择. 用这种方式继续, 计数得

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{k-1}).$$

通过类似的论证, 生成维数为 k 的空间 W 的不同有序基的数目为

$$(q^k - 1)(q^k - q)(q^k - q^2) \cdots (q^k - q^{k-1}).$$

因此可能的子空间 W 的数目为

$$\begin{aligned} \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})} &= \frac{q^{\binom{k}{2}}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)}{q^{\binom{k}{2}}(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdots (q - 1)} \\ &= \frac{(q - 1)^k [n][n-1] \cdots [n-k+1]}{(q - 1)^k [k][k-1] \cdots [1]} \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

证毕. □

由于 Knuth [50] 使用了前一个示例中的行缩减梯形矩阵来证明这一结果. 读者在练习中给出详细计算证明.

3.3 形式幂级数的代数

我们现在希望将生成函数的概念从有限序列推广到可数无限序列. 为此, 我们将不得不使用幂级数. 但我们希望避免使用解析幂级数时出现的收敛问题. 因此, 我们将研究形式幂级数的代数. 这将意味着我们必须小心, 因为在代数中, 只允许有限次数的加法或乘法. 但是还有收敛的另一个概念会考虑这个问题. 我们应该注意到有一个组合学的分支, 它使用分析技术从相应幂级数的序列提取有用的信息, 例如其增长率. 有关此方法的信息, 请参阅 Flajolet 和 Sedgewick 的书 [25].

形式幂级数形如

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

其中 a_n 是复数. 我们也称 $f(x)$ 是序列 $a_n, n \geq 0$ 的普通型生成函数. 在本章中我们通常省去形容词“普通”, 因为我们没有遇到其他类型的生成函数.

注意, 这些级数被认为是形式的, 因为 x 的幂只是占位符, 不允许用值替换 x . 在这样定义下, 解析收敛不是问题, 对于 $\sum_{n \geq 0} n!x^n$, 除了在 $x = 0$ 处外没有其他点收敛, 我们也可讨论形式幂级数. 我们用符号

$$\mathbb{C}[[x]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_nx^n \mid a_n \in \mathbb{C} \text{ for all } n \geq 0 \right\}$$

表示形式幂级数的集合. 这个集合是代数, 称为形式幂级数的代数, 加法、数乘、乘法规则定义如下

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_nx^n + \sum_{n \geq 0} b_nx^n &= \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n)x^n, \\ c \sum_{n \geq 0} a_nx^n &= \sum_{n \geq 0} (ca_n)x^n, \\ \sum_{n \geq 0} a_nx^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_nx^n &= \sum_{n \geq 0} c_nx^n, \end{aligned}$$

其中 $c \in \mathbb{C}$ 且

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

读者可能会反对, 正如前面提到的, 在代数中只允许有限数量的加法, 而 $C[[x]]$ 的元素似乎涉及无限多个. 但这是一种错觉. 请记住, x 只是一个形式参数, 因此表达式 $\sum_n a_n x^n$ 只是一个助记符, 帮助定义三种代数运算, 特别是乘法. 我们可以简单地把 $\mathbb{C}[[x]]$ 定义为复数向量 (a_0, a_1, a_2, \dots) 的集合, 服从向量加法运算规则

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots),$$

数乘和乘法规则也可类似定义. 值得注意的是, $C[[x]]$ 中的元素只允许加或乘有限次. 因此只能进行改变 x 的给定幂的系数有限次的运算.

给定一个复数序列 a_0, a_1, a_2, \dots , 我们将它与普通型生成函数联系起来

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \in \mathbb{C}[[x]].$$

我们有时称, 如果合适的话, 这一级数对由 a_n 枚举的对象计数. 就像对生成多项式做的一样, 这样做的原因在于挖掘 $\mathbb{C}[[x]]$ 的性质, 以获取关于原始序列的相关信息. 我们经常把这一生成函数写作 $\sum_n a_n x^n$, 假定指数的范围为 $n \geq 0$.

我们用一个简单的例子开始, 考虑序列 $1, 1, 1, \dots$, 其生成函数为 $\sum_n x^n$. 我们想将其简化为几何级数

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}. \quad (3.8)$$

但是右边的等式意味着什么? 因为 $1/(1-x)$ 作为有理函数出现, 因此它不属于 $C[[x]]$ 吗? 解决这个难题的方法是记住, 给定代数 A 中的元素 a , a 有可能有一个逆元素, 即元素 a^{-1} 使得 $a \cdot a^{-1} = 1$, 其中 1 是 A 的单位元素. 因此要证 (3.8) 式, 即证 $\sum_n x^n$ 与 $1-x$ 互逆. 由分配律很易证明:

$$\begin{aligned} (1-x)(1+x+x^2+\dots) &= (1+x+x^2+\dots) - x(1+x+x^2+\dots) \\ &= (1+x+x^2+\dots) - (x+x^2+x^3+\dots) \\ &= 1. \end{aligned}$$

这一例子表明, 关于分析幂级数的结果同样适用于形式幂级数, 尽管某些地方需要验证是否成立. 在大多数情况下, 我们都可以这样做. 但明智的做法再举几个例子来说明. 另一例子是 $1/x$ 在 $C[[x]]$ 中没有意义, 因为 x 没有逆. 假设对形式幂级数 $f(x)$, 有 $xf(x) = 1$. 那么左边常数项系数为 0, 右边为 1, 产生矛盾.

另一例子, 对 $n \geq 0$ 考虑序列 $1/n!$. 相应的生成函数为

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

但是, 问题是 e^x 不是 $C[[x]]$ 的先验元素. 解决问题的方法是把 e^x 定义为这一幂级数的形式代表. 然后, 为了完整, 我们会验证所有通常的指数规则都成立, 例如 $e^{2x} = (e^x)^2$. 在这我们不再验证. 但是我们要指明这一规则不成立的情况. 特别地, 在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中, 不能写作

$$e^{1+x} = ee^x.$$

这是因为左边没有定义良好. 确实, 在展开 $\sum_n (1+x)^n/n!$ 时, 计算 x 的给定幂的系数需要无限次做加法, 然而我们已经指出的, 这是不允许的.

尽管我们不会证明本文中形式幂级数所需的每一个分析幂级数等式, 在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中有一些关于运算的一般结果也是好的. 首先我们要处理形式幂级数可逆的情形.

定理 3.3.1. 如果 $f(x) = \sum_n a_n x^n$, 那么在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中 $f(x)^{-1}$ 存在, 当且仅当 $a_0 \neq 0$.

证明. 一方面, 假设 $f(x)g(x) = 1$, 其中 $g(x) = \sum_n b_n x^n$. 比较两边的常数项得到 $a_0 b_0 = 1$, 因而 $a_0 \neq 0$.

另一方面, 假设 $a_0 \neq 0$. 我们构造逆 $g(x) = \sum_n b_n x^n$, 满足 $f(x)g(x) = 1$. 比较两边 x^n 系数, 有 $a_0 b_0 = 1$, 且当 $n \geq 1$ 时,

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = 0.$$

因为 $a_0 \neq 0$, 所以 $b_0 = 1/a_0$. 类似地, 当 $n \geq 1$ 时, 我们可以在上式中解出 b_n , 通过给出其递推关系. 这样我们就建立了 $g(x)$.

□

我们关于 e^x 的例子表明我们在替换时要特别注意. 定义 $g(x)$ 在 $f(x) = \sum_n a_n x^n$ 中的替换为

$$f(g(x)) = \sum_{n \geq 0} a_n g(x)^n.$$

上式右边是关于形式幂级数的无限求和, 而不仅仅是形式变量. 为讨论这样的和, 需要在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中引入收敛的概念.

下面这一记号对形式幂级数 $f(x)$ 来说非常方便:

$$[x^n] f(x) = \text{在 } f(x) \text{ 中 } x^n \text{ 项系数},$$

也即 a_n . 假设有形式幂级数序列 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$. 如果, 对于任意 n , 幂级数序列中 x^n 项系数趋近于常数, 且该常数等于 $f(x)$ 中 x^n 项系数, 则称这一序列收敛到 $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, 记作

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x).$$

一般地, 给定 n , 存在相应的 K 使得 $[x^n] f_k(x) = [x^n] f(x)$ 对于 $k \geq K$ 都成立. 否则, 我们称序列不收敛或极限不存在.

考虑序列

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = 1 + x, f_2(x) = 1 + x + x^2, \dots,$$

因而 $f_k(x) = 1 + x + \cdots + x^k$. 那么该序列有极限, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

对于给定 n , 令 $K = n$. 因此对 $k \geq n$ 有 $[x^n] f_k = [x^n] f_n = 1$. 另一方面, 考虑序列

$$f_0(x) = 1 + x, f_1(x) = 1/2 + x/2, f_2(x) = 1/4 + x/4, \dots,$$

其通项为 $f_k(x) = 1/2^k + x/2^k$. 这一序列在 $\mathbb{C}[[x]]$ 上不收敛, 因为对于 $n = 1$, $[x]f_k(x)$ 对不同的 k 是不等的. 这与该序列收敛到 0 的分析情形矛盾.

像在分析幂级数中一样, 我们用序列的收敛定义级数的收敛. 给定 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$, 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = f(x),$$

我们称其和存在且收敛到 $f(x)$, 记作 $\sum_{k \geq 0} f_k(x) = f(x)$, 其中

$$s_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_k(x)$$

为其前 k 项和. 注意, 这一定义域形式幂级数定义一致, 因为给定序列 a_0, a_1, a_2, \dots , 可以令 $f_k(x) = a_k x^k$, 然后证明 $\sum_{k \geq 0} f_k(x) = f(x)$, 其中 $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$.

为陈述级数收敛准则, 需要定义 $f(x) = \sum_n a_n x^n$ 的最小度. 如果 $f(x) \neq 0$,

$$\text{mdeg } f(x) = \text{满足 } a_n \neq 0 \text{ 的最小 } n.$$

如果 $f(x) = 0$ 则 $\text{mdeg } f(x) = \infty$. 事实证明, 要说明幂级数和收敛, 取整数的极限就足够了.

定理 3.3.2. 给定 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots \in \mathbb{C}[[x]]$, 那么 $\sum_{k \geq 0} f_k(x)$ 存在当且仅当

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\text{mdeg } f_k(x)) = \infty.$$

证明. 我们先证必要性, 充分性的证明留作练习. 我们按照 (3.9) 式定义序列 $s_k(x)$. 对于给定的 n , 存在 K 使得

$$[x^n] s_K(x) = [x^n] s_{K+1}(x) = [x^n] s_{K+2}(x) = \dots$$

但是对于 $j \geq 0$, 有

$$s_{K+j}(x) = s_K(x) + f_{K+1}(x) + f_{K+2}(x) + \dots + f_{K+j}(x).$$

因而当 $k > K$ 时有 $[x^n] f_k(x) = 0$. 对于给定的 n , 令 N 为所有 K -值的最大值, 其中 K 是小于或等于 n 的整数. 因而, 当 $k > N$ 时, $\text{mdeg } f_k(x) > n$. 根据实数极限的定义, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\text{mdeg } f_k(x)) = \infty$. \square

我们现在对替代的定义很清楚了, 这意味着幂级数的总收敛. 我们可以使用前面的结果给出将一个生成函数替换为另一个生成函数时的简单收敛标准.

定理 3.3.3. 给定 $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, 复合 $f(g(x))$ 存在当且仅当

- (1) $f(x)$ 为多项式或者
- (2) $g(x)$ 常数项为 0.

证明. 如果 $f(x)$ 为多项式, 那么 $f(g(x))$ 为有限和, 显然收敛. 因此假设 $f(x) = \sum_n a_n x^n$ 不是多项式. 如果 $g(x)$ 没有常数项, 则 $\text{mdeg } a_n g(x)^n \geq n$. 由前一定理, 收敛的极限为无穷, $f(g(x))$ 是定义良好的.

若 $[x^0] g(x) \neq 0$, 因为 $f(x)$ 不是多项式, 存在无穷多个 n 使得 $a_n \neq 0$. 但是对于这些 n , $\text{mdeg } a_n g(x)^n = 0$. 因此极限不是无穷, 并且 $f(g(x))$ 在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中不存在. \square

我们还会发现考虑某些无限乘积很有用. 他们的收敛性和无限和一样. 给定序列 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k(x) = f(x),$$

我们称他们的积存在并且收敛到 $f(x)$ 记作 $\prod_{k \geq 0} f_k(x) = f(x)$, 其中

$$p_k(x) = f_0(x)f_1(x) \dots f_k(x).$$

下面结果的证明与定理 3.3.2 非常类似, 将其留给读者.

定理 3.3.4. 令 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ 为常数项为 0 的幂级数. 则 $\prod_{k \geq 0} (1 + f_k(x))$ 存在当且仅当

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\text{mdeg } f_k(x)) = \infty.$$

□

让我们通过展示前面的结果如何简单地验证积是否存在来结束本节. 考虑 $\prod_{k \geq 1} (1 + x^k)$. 在这种情况下, $f_k(x) = x^k$ 且 $\text{mdeg } x^k = k$. 因此极限为无穷, 积存在. 我们会在 3.5 节中看到, 我们将在 3.5 节中看到, 它计算具有不同部分的整数分区. 相比之下, $\prod_{k \geq 0} (1 + x/2^k)$ 不收敛因为 $\text{mdeg } x/2^k = 1$.

3.4 普通型生成函数的加法与乘法规则

就像集合一样, 普通型生成函数也有加法规则和乘积规则. 为了说明这些结果, 我们需要权重生成函数的概念. 这种方法使得用组合方式为各种序列构建生成函数成为可能. 我们将其首先应用于更深入探索二项式定理.

令 S 为集合. S 的权重为函数 $\text{wt} : S \rightarrow \mathbb{C}[[x]]$. 大多数情况下, 如果 $s \in S$, 那么 $\text{wt } s$ 将只是反映 s 某些性质的单项式. 比如说, 如果 st 是 S 上的任意统计量, 那么我们可以取 $\text{wt } s = x^{\text{st } s}$. 选一个贯穿此节的更具体的例子, 令 $S = 2^{[n]}$, 对于 $T \in S$, 定义

$$\text{wt } T = x^{|T|} \quad (3.10)$$

给定权重集 S , 我们可以形成相应的权重生成函数

$$f(x) = f_S(x) = \sum_{s \in S} \text{wt } s.$$

值得注意的是, 上述求和属于 $\mathbb{C}[[x]]$, 若若此, 称集合 S 为可求和集. 当然, 如果 S 是有限集, 自然是可求和的. 以 $S = 2^{[3]}$ 为例, 有

T	\emptyset	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\text{wt } T$	1	x	x	x	x^2	x^2	x^2	x^3

因此

$$f_S(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

更一般地, 对于 $S = 2^{[n]}$ 有

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \sum_{T \in 2^{[n]}} x^{|T|} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{T \in \binom{[n]}{k}} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k. \end{aligned}$$

我们得出了一行帕斯卡三角形的生成函数.

以下定理使得使用权重生生成函数更轻松. 对于加法规则, 如果 S, T 是互不相交的权重集, 那么我们求 $u \in S \uplus T$ 的权重就需要在求 u 在 S 或 T 中的权重, 这分别取决于 $u \in S$ 或 $u \in T$. 对于任意的 S, T , 我们计算 $S \times T$ 的权重即令

$$\text{wt}(s, t) = \text{wt}s \cdot \text{wt}t.$$

引理 3.4.1. 令 S, T 为可求和的集合.

(1) (加法规则) 集合 $S \uplus T$ 是可求和的. 如果 $S \cap T = \emptyset$, 则

$$f_{S \uplus T}(x) = f_S(x) + f_T(x).$$

(2) (乘法规则) $S \times T$ 是可求和的, 且

$$f_{S \times T}(x) = f_S(x) \cdot f_T(x).$$

证明. (1) 因为 S 是可求和的, 对于给定的 $n \in \mathbb{N}$, 只存在有限个 $s \in S$ 使得 $\text{wt}s$ 中 x^n 项的系数非零. 这对 T 同样成立. 这就说明 $S \uplus T$ 中只有有限个元素满足 x^n 项的系数非零, 意味着 $S \uplus T$ 是可求和的. 且

$$f_{S \uplus T}(x) = \sum_{u \in S \uplus T} \text{wt } u = \sum_{u \in S} \text{wt } u + \sum_{u \in T} \text{wt } u = f_S(x) + f_T(x).$$

(2) $S \times T$ 的可求和性留作练习.

$$f_{S \times T}(x) = \sum_{(s, t) \in S \times T} \text{wt}(s, t) = \sum_{s \in S} \text{wt } s \cdot \sum_{t \in T} \text{wt } t = f_S(x) \cdot f_T(x)$$

□

我们可以使用这些规则直接计算各种生成函数. 首先用这种方式重新证明二项式定理. 我们发现求和一边是 $S = 2^{[n]}$ 的权重生成函数. 对于乘积一边, 我们用多重符号重新表示 S . 特别地, 考虑

$$S' = \{T' = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}) \mid m_i = 0 \text{ 或 } 1, \forall i \in [n]\},$$

权重为

$$\text{wt } T' = x^{\sum_i m_i}.$$

很显然我们有双射 $f: S \rightarrow S'$, $f(T) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$, 其中

$$m_i = \begin{cases} 0 & \text{若 } i \notin T, \\ 1 & \text{若 } i \in T. \end{cases}$$

(事实上, 这就是定理 1.3.1 的证明中用到的映射.) 此外, 这一双射是保持权重不变的: $\text{wt } f(T) = \text{wt } T$. 考虑一个具体的例子, 如果 $n = 5$ 且 $T = \{2, 4, 5\}$, 那么 $f(T) = (1^0, 2^1, 3^0, 4^1, 5^1)$, $\text{wt } f(T) = x^3 = \text{wt } T$. 使用 S' 的好处在于, 它明显是集合 $\{i^0, i^1\}$ ($i \in [n]$) 的权重乘积, 其中 $\text{wt } i^0 = 1$, $\text{wt } i^1 = x$. 因此我们可以写作 S

$$S' = \{1^0, 1^1\} \times \{2^0, 2^1\} \times \dots \times \{n^0, n^1\} = (1^0 \uplus 1^1) \times (2^0 \uplus 2^1) \times \dots \times (n^0 \uplus n^1),$$

其中对于不同的 a 和 b , 我们用 $a \uplus b$ 表示 $\{a\} \uplus \{b\}$. 将此表达式分别应用引理 3.4.1 中加法和乘法规则, 得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k &= f_S(x) \\ &= f_{S'}(x) \\ &= (\text{wt}1^0 + \text{wt}1^1) (\text{wt}2^0 + \text{wt}2^1) \cdots (\text{wt}n^0 + \text{wt}n^1) \\ &= (1+x)^n. \end{aligned}$$

这是应用生成函数的第一个例子, 所以写得比较详细. 然而, 在实践中, 通常比较简洁, 例如, 不区分 S 与 S' 的区别, 因为它们产生相同的权重生成函数, 所以可以认为它们是相同的集合. 我们通常忽略可求和性的验证. 下面考虑一个更实质性的例子, 即负指数的二项式定理.

定理 3.4.2. 如果 $n \in \mathbb{N}$, 那么

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k \geq 0} \left(\binom{n}{k} \right) x^k$$

证明. 求和一边表明我们应该考虑

$$S = \{T \mid T \text{ 是 } [n] \text{ 上的多重集}\},$$

权重函数见 (3.10) 式. 于是

$$f_S(x) = \sum_{T \in S} \text{wt } T = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{T \in \left(\binom{[n]}{k} \right)} x^k \right) = \sum_{k \geq 0} \left(\binom{n}{k} \right) x^k.$$

将集合 S 写作

$$\begin{aligned} S &= \{(1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}) \mid m_i \geq 0, \forall i \in [n]\} \\ &= (1^0 \uplus 1^1 \uplus 1^2 \uplus \dots) \times (2^0 \uplus 2^1 \uplus 2^2 \uplus \dots) \times \cdots \times (n^0 \uplus n^1 \uplus n^2 \uplus \dots), \end{aligned}$$

其权重函数为 $\text{wt}i^k = x^k$. 由引理 3.4.1 得到

$$\begin{aligned} f_S(x) &= (\text{wt}1^0 + \text{wt}1^1 + \text{wt}1^2 + \cdots) \cdots (\text{wt}n^0 + \text{wt}n^1 + \text{wt}n^2 + \cdots) \\ &= (1+x+x^2+\cdots)^n \\ &= \frac{1}{(1-x)^n}. \end{aligned}$$

证毕. □

关于这个结果, 有几点需要说明. 首先, 将其与我们的第一个版本的二项式定理进行对比. 在定理 3.1.1 中, 我们对 $[n]$ 的子集计数, 其中不允许重复元素, 且生成函数为 $(1+x)^n$. 在定理 3.4.2 中我们对 $[n]$ 上的多重集计数, 其中元素允许重复, 其生成函数为 $1/(1-x)^n$. 在下节中我们用另一例子继续讨论.

我们还可以使定理 3.4.2 看起来几乎完全像定理 3.1.1. 事实上, 如果 $n \leq 0$, 那么由定理 3.4.2 及等式 (1.6) (用 $t - n$ 替代 n), 得

$$(1+x)^n = \frac{1}{(1-(-x))^{-n}} = \sum_{k \geq 0} \left(\binom{-n}{k} \right) (-x)^k = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k.$$

这就很像定理 3.1.1, 除了我们有一个无限级数, 而对于正的 n 我们有一个多项式.

二项式定理对任何 $n \in \mathbb{C}$ 都是有意义的, 只要 $|x| < 1$ 使级数收敛. 在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中, 可以使 $(1+x)^n$ 对任意有理数 $n \in \mathbb{Q}$ 有意义. 见本章练习 12, 并证明下式:

定理 3.4.3. 对于任意 $n \in \mathbb{Q}$, 有

$$(1+x)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k$$

□

3.5 整数分拆再讨论

整数分拆理论是普通型生成函数发挥了核心作用的一部分内容. 在这种情况下和其他情况下, 有必要考虑无限乘积. 但是, 正如我们在上一节中看到的, 我们必须注意这些乘积收敛. 我们对集合有相应的限制可以用来构造权重生成函数. 我们从讨论下一问题开始.

令 S 为权重集. 我们称 S 是有根的, 如果存在元素 $r \in S$ 满足

(1) $\text{wt } r = 1$ 且

(2) 如果 $s \in S - \{r\}$ 则 $\text{wt } s$ 常数项为 0,

此时 r 被称为根. 比如, 定理 3.4.2 的证明中用到的集合 (n^0, n^1, n^2, \dots) , 其根为 $r = n^0$, 因为 $\text{wt } n^0 = 1$ 且当 $k \geq 1$ 时 $\text{wt } n^k = x^k$. 给定有根集的序列 S_1, S_2, S_3, \dots , 其中 S_i 的根为 r_i , 它们的直和定义为

$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus \dots$$

$$= \{(s_1, s_2, s_3, \dots) \mid s_i \in S_i (\forall i \in \{1, 2, \dots\}) \text{ 且 } s_i \neq r_i \text{ 只对有限个 } i \text{ 成立}\}.$$

注意, 如果 S_i 的个数是有限的, 那么它们的直和等于它们的积. 但是当其数量无限时, 根的条件就开始起作用了. 因为这一条件, 我们在 $\oplus_{i \geq 1} S_i$ 上有定义良好的权重, 即

$$\text{wt}(s_1, s_2, s_3, \dots) = \prod_{i \geq 1} \text{wt } s_i,$$

因为该乘积只有有限多个不等于 1 的因子. 此外, 引理 3.4.1 中的乘法规则必须适当修改以满足收敛. 但是证明与前面的结果相似, 因而留作练习.

定理 3.5.1. 令 S_1, S_2, S_3, \dots 是可求和的有根集序列, 满足

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [\text{mdeg}(f_{S_i}(x) - 1)] = \infty.$$

那么直和 $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus \dots$ 也是可求和的, 且

$$f_{S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus \dots}(x) = \prod_{i \geq 1} f_{S_i}(x).$$

□

我们现在将证明一个欧拉定理, 给出 $p(n)$ 的生成函数, 即 n 的整数分拆数. 读者应将证明与定理 3.4.2 中给出的计数多重集的证明进行对比, 明显相似.

定理 3.5.2.

$$\sum_{n \geq 0} p(n)x^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-x^i}.$$

证明. 根据上式求和一边, 我们考虑 $n \geq 0$ 的整数分拆集合 λ 组成的集合 S , 权重为

$$\text{wt } \lambda = x^{|\lambda|}, \quad (3.11)$$

$|\lambda|$ 为 λ 的部分数. 因而

$$f_S(x) = \sum_{\lambda \in S} \text{wt } \lambda = \sum_{n \geq 0} \sum_{|\lambda|=n} x^n = \sum_{n \geq 0} p(n)x^n.$$

我们用多重集符号将 S 表示成直和的形式, 即

$$\begin{aligned} S &= \{(1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots) \mid m_i \geq 0 \forall i \in [n], \text{ 且只有有限多个 } m_i \neq 0\} \\ &= (1^0 \uplus 1^1 \uplus 1^2 \uplus \dots) \oplus (2^0 \uplus 2^1 \uplus 2^2 \uplus \dots) \oplus (3^0 \uplus 3^1 \uplus 3^2 \uplus \dots) \oplus \dots \end{aligned}$$

请注意, 由于我们希望 $\text{wt } \lambda$ 上的指数是其各部分的总和, 且 i^k 表示部分 i 重复 k 次, 我们取

$$\text{wt } i^k = x^{ik},$$

与定理 3.4.2 证明中使用的权重相反. 由前面的定理将其用生成函数表示得

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \prod_{i \geq 1} (\text{wt } i^0 + \text{wt } i^1 + \text{wt } i^2 + \text{wt } i^3 + \dots) \\ &= \prod_{i \geq 1} (1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \dots) \\ &= \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-x^i}. \end{aligned}$$

证毕. □

读者会注意到以前的证明实际上说明更多. 特别地, 因子 $1/(1-x^i)$ 表示 λ 中等于 i 的部分. 下面详细说明.

命题 3.5.1. 给定 $n \in \mathbb{N}$ 且 $P \subseteq \mathbb{P}$, 令 $p_P(n)$ 表示 n 的满足分拆部分属于 P 的分拆个数. 则

(1)

$$\sum_{n \geq 0} p_P(n)x^n = \prod_{i \in P} \frac{1}{1-x^i}.$$

(2) 特别地, 对 $k \in \mathbb{P}$,

$$\sum_{n \geq 0} p_{[k]}(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}.$$

证明. 对 (1), 使用定理 3.5.2 证明中的想法, 除了 S 的元素只包含 r^{m_r} 形式的分量, 其中 $r \in P$. (2) 是 (1) 的直接结果. □

我们可以限制分拆的部分数, 而不是限制分拆的部分的集合. 回顾 $p(n, k)$ 是长度为 $\ell(\lambda) \leq k$ 的 $\lambda \vdash n$ 分拆数.

推论 3.5.3. 对 $k \geq 0$, 有

$$\sum_{n \geq 0} p(n, k) x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^k)}.$$

证明. 从前面的结果可以看出, 由 $p_{[k]}(n)$ 计算的分拆与由 $p(n, k)$ 计算的分拆之间存在保持大小的双射. $\lambda \rightarrow \lambda'$ 就是满足条件的一个映射. 事实上, λ 只使用 $[k]$ 中的部分当且仅当 $\lambda_1 \leq k$. 用杨图来说, 这意味着 λ 的第一行的长度最多为 k . 随之有 λ' 的第一列长度最多为 k , 相当于 λ' 有最多 k 部分. \square

在上一节中, 我们指出了集合和多重集合的生成函数之间的关系. 这一关系对整数分拆同样成立. 就像在 2.3 节定义的, $p_d(n)$ 表示将 n 分拆成不同部分的分拆个数.

定理 3.5.4.

$$\sum_{n \geq 0} p_d(n) x^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i)$$

证明. 到目前为止, 我们一直在写出用权重生成函数证明的大部分细节, 来让读者熟悉该方法. 但是到现在, 仅仅写出重点就足够了. 我们用 S 表示将 $n \in \mathbb{N}$ 分拆成不同部分的所有分拆集合, 并且使用 (3.11) 式中的权重. $f_S(x)$ 是定理的和侧. 为得到乘积一边, 我们写作

$$\begin{aligned} S &= \{(1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots) \mid m_i = 0 \text{ 或 } 1, \text{ 只有有限多个 } m_i \neq 0\} \\ &= \bigoplus_{i \geq 1} (i^0 \uplus i^1). \end{aligned}$$

因而生成分函数即为

$$f_S(x) = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i).$$

证毕. \square

定理 3.5.5 (欧拉). 对所有的 $n \geq 0$,

$$p_o(n) = p_d(n).$$

证明. 只需证这两个序列有相同的生成函数. 由定理 3.5.3 (1) 和定理 3.5.5, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} p_d(n) x^n &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots \\ &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots \frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \cdots} \\ &= \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6) \cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \cdots} \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5) \cdots} \\ &= \sum_{n \geq 0} p_o(n) x^n. \end{aligned}$$

证毕. \square

3.6 递推关系与生成函数

读者可能已经注意到, 第 1 章中描述的许多组合序列满足递推关系. 如果有一个由递归定义的序列, 则可以用生成函数找到该序列的显式表达式. 对于那些难以从递归本身提取信息的序列, 可通过生成函数收集信息. 本节就来解决这些问题.

我们从一个简单的例子入手, 利用生成函数求递推关系. 给定递归序列 a_0, a_1, a_2, \dots 及初始条件, 我们希望找到第 n 项的表达式.

(1) 将递推同乘以 x^n ; 一般地, n 的最佳选择是递推中所有项的最大指标. 对所有 $n \geq d$ 求和, 其中 d 是使得递推为空的最小指标.

(2) 令

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

使用边界条件用 $f(x)$ 表示步骤 (1) 中的等式.

(3) 解出 $f(x)$.

(4) 求 a_n 作为 x^n 在 $f(x)$ 中的系数.

我们注意到部分分式展开有助于完成步骤 (4).

考虑一个简单的例子, 假设序列定义为 $a_0 = 2$, 且当 $n \geq 1$ 时, $a_n = 3a_{n-1}$. 计算该序列一些前面项的值, 得 $a_1 = 2 \cdot 3, a_2 = 2 \cdot 3^2, a_3 = 2 \cdot 3^3$. 因此, 很容易猜出然后归纳证明得 $a_n = 2 \cdot 3^n$. 我们现在想要用生成函数来解决. 步骤 (1) 很容易, 就是写作 $a_n x^n = 3a_{n-1} x^n$, 然后对其求和得

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n.$$

由步骤 (2), 令 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, 即得

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = f(x) - a_0 = f(x) - 2,$$

且

$$\sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n = 3x \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^{n-1} = 3xf(x),$$

其中最后一个等式由在和中将 n 替换为 $n-1$ 得到. 由步骤 (3) 得

$$f(x) - 2 = 3xf(x) \implies f(x) - 3xf(x) = 2 \implies f(x) = \frac{2}{1-3x} \quad (3.12)$$

对步骤 (4), 我们可将 $1/(1-3x)$ 展开为几何级数, 也就是利用 (3.8) 式, 将 $3x$ 替换为 x , 我们得到

$$f(x) = 2 \sum_{n \geq 0} 3^n x^n = \sum_{n \geq 0} 2 \cdot 3^n x^n.$$

提取出 x^n 的系数即得 $a_n = 2 \cdot 3^n$.

在前面的例子中, 猜出 a_n 的表达式然后用归纳法证明比生成函数的方法更简单. 但是, 有时候不能猜出表达式, 但仍可用生成函数求递推关系. 我们以斐波那契数列为例. 如果我们使用由 (1.1) 给出的此序列的定义, 我们的结果将略微更好. 遵循算法, 我们写作

$$\sum_{n \geq 2} F_n x^n = \sum_{n \geq 2} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n.$$

令 $f(x) = \sum_{n \geq 0} F_n x^n$ 得

$$\sum_{n \geq 2} F_n x^n = f(x) - F_0 - F_1 x = f(x) - x$$

且

$$\sum_{n \geq 2} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n = x(f(x) - F_0) + x^2 f(x) = (x + x^2) f(x).$$

令左右两边的表达式相等并求解 $f(x)$ 得到

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

对于最后一步, 我们希望使用部分分式, 即因子 $1 - x - x^2$. 使用二次公式, 我们看到分母有根

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{且} \quad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

因而

$$1 - x - x^2 = \left(1 - \frac{x}{r_1}\right) \left(1 - \frac{x}{r_2}\right).$$

因为两边都在 $x = r_1, r_2$ 处无意义, 并且两边都有常数项 1. 所以我们有下面部分分式分解

$$f(x) = \frac{x}{\left(1 - \frac{x}{r_1}\right) \left(1 - \frac{x}{r_2}\right)} = \frac{A}{\left(1 - \frac{x}{r_1}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{x}{r_2}\right)}.$$

A, B 为常数. 约分得

$$x = A \left(1 - \frac{x}{r_2}\right) + B \left(1 - \frac{x}{r_1}\right).$$

将 $x = r_1$ 代入此等式化简得 $r_1 = A(1 - r_1/r_2)$, 解出 A 得 $A = 1/\sqrt{5}$. 类似地, 将 $x = r_2$ 代入得 $B = -1/\sqrt{5}$. 将这些值重新代入 (3.13) 式并展开级数, 得

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{r_1^n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{r_2^n}.$$

通过分母有理化可以检验 $1/r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ 且 $1/r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. 取两边 x^n 系数得

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (3.14)$$

这个例子展示了生成函数方法的真正威力. 仅通过计算 F_n 的值是不可能猜出 (3.14) 中的表达式的. 实际上, 右边是一个整数甚至都不明显!

我们的算法可用于在以下情况下推导生成函数: 有一个三角形数列, 而不仅仅是一个序列. 在这我们用斯特林数来说明. 回顾定理 1.5.2 中第一类无符号斯特林数满足的递推关系及初始条件, 将其转化成有符号版本得到 $s(0, k) = \delta_{0,k}$ 且当 $n \geq 1$ 时,

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k).$$

我们希望找到生成函数 $f_n(x) = \sum_k s(n, k)x^k$. 应用算法得

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_k s(n, k)x^k \\ &= \sum_k [s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k)]x^k \\ &= xf_{n-1}(x) - (n-1)f_{n-1}(x) \\ &= (x-n+1)f_{n-1}(x), \end{aligned}$$

这就得到生成函数序列 $f_n(x)$ 的递推关系. 由初始条件 $s(0, k)$ 得 $f_0(x) = 1$. 现在容易猜出 $f_n(x)$ 的表达式, 只需写出前面一些值然后用归纳法证明, 并得到如下定理, 这由定理 3.1.2 很容易得出.

定理 3.6.1. 对于 $n \geq 0$, 有

$$\sum_k s(n, k)x^k = x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

□

以完全类似的方式, 可以得到第二类斯特林数的生成函数. 证明留给读者.

定理 3.6.2. 对于 $k \geq 0$, 有

$$\sum_n S(n, k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

□

比较前两个结果, 读者会注意到无重复对象 (集合、不同分拆) 的生成函数与那些允许重复 (多重集、普通分拆) 的生成函数比较相似. 前面提过了, 这将在 3.9 节解释.

到目前为止, 我们从递归中导出的所有生成函数都是有理函数. 这是因为递归是线性的, 我们将在下一节证明一般结果. 我们将通过举一些更复杂的例子来结束本节, 例如代数函数. 我们考虑卡特兰数 $C(n)$, 其生成函数为 $c(x) = \sum_{n \geq 0} C(n)x^n$. 利用定理 1.11.2 中的递推关系和初始条件, 并用我们习惯的方法计算得

$$c(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} C(n)x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i+j=n-1} C(i)C(j) \right) x^n = 1 + xc(x)^2.$$

将其写作 $xc(x)^2 - c(x) + 1 = 0$ 并用二次公式解出 $c(x)$ 得

$$c(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

$c(x)$ 的这个公式似乎有两个问题. 首先, 我们不知道正号与负号哪个是对的. 其次, 我们似乎遗漏了形式幂级数的环, 因为我们除以 x , 它没有逆. 可以通过选择符号同时解决这两个问题, 使得分子没有常数项. 然后可以简单地通过降低幂次来除以 x . 由定理 3.4.3 得到, $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2}$ 的生成函数有常数项 $\binom{1/2}{0} = 1$. 因此正确的符号应该是负号, 然后我们得到

定理 3.6.3.

$$\sum_{n \geq 0} C(n)x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

□

可以使用这个生成函数来重新导出定理 1.11.3 中 $C(n)$ 的显式表达式, 读者在练习中详细证明.

3.7 有理生成函数与线性递归

读者可能已经注意到, 在前面的章节中, 不管是初始例子还是斐波那契数列, a_n 的递推关系都是形式为 r^n 的函数的线性组合, 其中 r 在相应生成函数分母根的倒数上变化. 这对我们本节研究的递推关系来说都很普遍. 在给出一个刻画这种情况的定理之前, 我们将再研究一个例子来说明会发生什么.

考虑如下定义的序列, $a_0 = 1, a_1 = -4$, 且

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad \text{对于 } n \geq 2. \quad (3.15)$$

根据前面四步算法, 对 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, 有

$$\begin{aligned} f(x) - 1 + 4x &= \sum_{n \geq 2} a_n x^n \\ &= 4x \sum_{n \geq 2} a_{n-1} x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^{n-2} \\ &= 4x(f(x) - 1) - 4x^2 f(x) \end{aligned}$$

解出 $f(x)$ 并计算部分分式展开的常数得到

$$f(x) = \frac{1-8x}{1-4x+4x^2} = \frac{1-8x}{(1-2x)^2} = \frac{4}{1-2x} - \frac{3}{(1-2x)^2}.$$

两边拿出 x^n 项系数, 利用定理 3.4.2 (互换 n 和 k 的位置), 以及如下等式

$$\left(\binom{k}{n} \right) = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1} \quad (3.16)$$

得到

$$a_n = 4 \cdot 2^n - 3 \binom{n+1}{1} 2^n = (1-3n)2^n \quad (3.17)$$

现在, 我们的用 n 的多项式而非数幂 r^n 作为系数的多项式. 并且多项式的次数小于作为分母根的 $1/r$ 的重数.

考虑复数序列 a_n , 其中 $n \geq 0$. 我们称序列满足带有常数项的度为 d 的齐次线性递归, 即存在 $d \in \mathbb{P}$ 及常数 $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{C}, c_d \neq 0$ 使得

$$a_{n+d} + c_1 a_{n+d-1} + c_2 a_{n+d-2} + \dots + c_d a_n = 0. \quad (3.18)$$

为了稍后简化, 我们将递归的所有项放在左侧使 a_{n+d} 而非 a_n 成为指数最高的项. 我们也可考虑非齐次的情况, 其中有一个总和 c_{d+1} , 它没有乘以序列的任何项, 但我们在这里暂不考虑此情形. 满足递推关系 (3.18) 的序列就是有理生成函数的序列.

定理 3.7.1. 给定序列 a_n , 其中 $n \geq 0$ 及 $d \in \mathbb{P}$, 则下列命题等价.

(1) 序列满足 (3.18) 式.

(2) 生成函数 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 具有形式

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (3.19)$$

其中

$$q(x) = 1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_dx^d \quad (3.20)$$

且 $\deg p(x) < d$.

(3) 可写作

$$a_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) r_i^n,$$

其中 r_i 为互不相同的非负复数, 满足

$$1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_dx^d = \prod_{i=1}^k (1 - r_ix)^{d_i}, \quad (3.21)$$

对每个 i , $p_i(n)$ 是度 $\deg p_i(n) < d_i$ 的多项式.

证明. 我们首先证明 (1) 与 (2) 等价. 证明 (1) 意味着 (2) 本质上是我们算法的应用. (3.18) 式乘以 x^{n+d} 并对 $n \geq 0$ 求和可得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n \geq 0} a_{n+d} x^{n+d} + c_1 x \sum_{n \geq 0} a_{n+d-1} x^{n+d-1} + \cdots + c_d x^d \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ &= \left[f(x) - \sum_{n=0}^{d-1} a_n x^n \right] + c_1 x \left[f(x) - \sum_{n=0}^{d-2} a_n x^n \right] + \cdots + c_d x^d f(x) \\ &= q(x) f(x) - p(x), \end{aligned}$$

其中 $q(x)$ 由 (3.20) 给出, $p(x)$ 是剩余项的求和, 意味着 $\deg p(x) < d$. 解出 $f(x)$ 即证出这一方向.

为证 (2) 包含 (1), 对 (3.19) 做交叉乘法并使用 (3.20) 写作

$$p(x) = q(x) f(x) = (1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_dx^d) f(x).$$

因为 $\deg p(x) < d$, 我们有 $[x^{n+d}] p(x) = 0$, 对任意 $n \geq 0$ 成立. 拿出上式两边 x^{n+d} 项系数即得递推关系 (3.18).

我们现在证明 (2) 和 (3) 等价. (2) 包含 (3) 由算法得出. 特别地, 使用 (3.19), (3.20) 及 (3.21), 以及部分分式展开, 可得

$$f(x) = \frac{p(x)}{\prod_{i=1}^k (1 - r_ix)^{d_i}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{d_i} \frac{A_{i,j}}{(1 - r_ix)^j}, \quad (3.22)$$

其中 $A_{i,j}$ 是确定常数. 但是由定理 3.4.2 及等式 (3.16), 我们有

$$[x^n] \frac{1}{(1 - r_ix)^j} = \left(\binom{j}{n} \right) r_i^n = \binom{n+j-1}{j-1} r_i^n,$$

其中

$$\binom{n+j-1}{j-1} = \frac{(n+j-1)(n+j-2) \cdots (n+1)}{(j-1)!}$$

是关于 n 的度为 $j-1$ 的多项式, 现在取 (3.22) 式两边 x^n 系数得

$$a_n = \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^{d_i} A_{i,j} \binom{n+j-1}{j-1} \right] r_i^n.$$

称方括号内的多项式为 $p_i(n)$, 就得到我们想要的展开式.

(3) 包含 (2) 的证明留作练习. □

我们注意到, 上述定理不仅具有理论意义, 而且在计算上非常有用. 特别是, 由于 (1) 和 (3) 的等价性, 可以更直接的方式解决线性、常数系数递归, 而无需必须使用生成函数. 假设我们有一个满足 (3.18) 式的序列. 然后我们知道 (3) 中的解是关于 r_i , 它们是由 (3.20) 给出的 $q(x)$ 的根的倒数. 为简化, 我们考虑多项式

$$r(x) = x^d q(1/x) = x^d + c_1 x^{d-1} + c_2 x^{d-2} + \cdots + c_d.$$

与 (3.21) 比较表明 r_i 是 $r(x)$ 的根. 我们现在通过使用初始条件求解这些多项式的系数来找到 $p_i(n)$. 具体来说, 再次考虑我们开始本节的例子 (3.15). 因为当 $n \geq 2$ 时, $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$, 我们考虑 $r(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. 因此 $a_n = p(n)2^n$, 其中 $\deg p(n) < 2$. 因而 $p(n) = A + Bn$, A, B 是常数. 将 $n=0$ 代入得 $1 = a_0 = A2^0 = A$. 再令 $n=1$ 得 $-4 = a_1 = (1+B)2^1$ 或 $B = -3$. 因此 a_n 又如 (3.17) 给出. 但这个解显然比第一个解更简单. 这种方法称为待定系数法. 当然, 使用生成函数的最大好处是它们可以用来解决递归, 即使在它们不是线性常系数.

在本节的理论与待定系数法求解常系数线性微分方程之间存在着惊人的相似之处. 这不是偶然, 本节中的材料可以被认为是有限差异理论的一部分, 这与离散的微分方程理论类似. 我们在 5.5 节学习莫比乌斯反演时会详细讨论.

3.8 色多项式

有时生成函数或多项式会以意想不到的方式出现. 我们现在用图的色多项式说明这一现象.

令 $G = (V, E)$ 为图. G 的用颜色集合 S 对 (顶点) 着色就是函数 $c: V \rightarrow S$. 图 3.2 包含一个图表, 它用集合 $S = \{\text{白, 灰, 黑}\}$ 进行两种着色, 我们用该图表继续后面的讨论. 我们称 c 是正常的, 如果对所有的边 $uv \in E$, 有 $c(u) \neq c(v)$. 图 3.2 中第一个着色是正常的, 然而第二个不是, 因为边 vx 的两个端点都染灰色. G 的色数, 用 $\chi(G)$ 表示, 是集合 S 的满足存在一个正常着色 $c: V \rightarrow S$ 的最小基数. 在我们的例子中 $\chi(G) = 3$, 因为我们在图 3.2 中展示了用 3 种颜色的正常着色, 我们不能用少于 3 种颜色进行正常着色, 因为存在三角形 uvx .

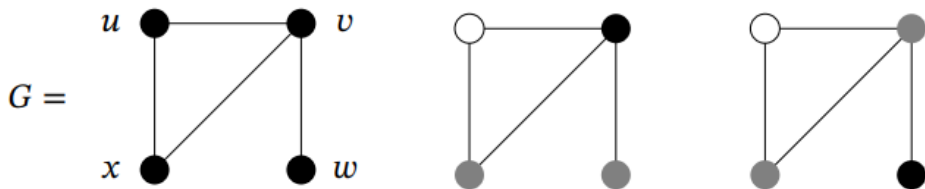


图 3.2: 一个图与两种着色

色数是图论中一个重要的不变量. 但是由它的定义, 它更多地属于极值组合学 (研究最小化或最大化约束的结构), 而不是枚举方面. 虽然在这关于 $\chi(G)$ 我们没什么可多说的, 但是我们得说这是最著名的数学定理之一. 称一个图为平面图, 如果它可以画在平面上, 没有任何两条边交叉.

定理 3.8.1 (四色定理). 如果 G 是平面图, 则

$$\chi(G) \leq 4.$$

□

请注意, 此结果与可以具有任意大色数的普通图形成鲜明对比. 例如, 对完全图有 $\chi(K_n) = n$. 四色定理在 1977 年被 Appel 和 Haken 证明时 (在科赫的帮助下) 引起了不小的轰动 [1,2]. 一方面, 据四色猜想被提出已经过去了 100 多年. 他们的证明也是第一个大量使用计算机来完成, 所有各种情况的计算和演示不能完全由人工检查.

我们现在转向枚举图着色. 令 $t \in \mathbb{N}$. G 的色多项式定义为

$$P(G; t) = \text{正常着色数 } c: V \rightarrow [t].$$

这个概念是由 George Birkhoff [13] 提出的. 目前尚不清楚为什么 $P(G; t)$ 应该称为多项式, 让我们用图 3.2 中的图形计算它. 按顺序 u, v, w, x 考虑顶点着色. 顶点 u 的着色有 t 种选择. 因为 v 不能与 u 染相同的颜色, 于是 v 有 $t-1$ 种选择. 同理, w 的选择数为 $t-1$. 最后, x 的选择方法数为 $t-2$, 因为它不能和 u 与 v 染相同的颜色. 因此, 最终的计数为

$$P(G) = P(G; t) = t(t-1)(t-1)(t-2) = t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t. \quad (3.23)$$

这是一个关于 t 的多项式, 是染色的方法数! 在证明之前, 我们有一些说明. 首先 $P(G; t)$ 和 $\chi(G)$ 关系密切, 即当 $0 \leq t < \chi(G)$, $P(G; t) = 0$, 但是 $P(G; \chi(G)) > 0$. 这是由 P 和 χ 的定义得来的, 因为后者是 G 的正常着色存在的最小的非负整数, 前者是对这些着色方法数的计数. 其次, 我们并不总能够用上面方法计算出 $P(G; t)$, 并对整数 k 将其表达为因子 $t-k$ 的乘积. 例如, 考虑圈 C_4 , 顶点按顺时针标记为 u, v, w, x . 如果我们试着用这种方式计算 $P(C_4; t)$, 除了顶点 x 的着色外, 其他都很简单, 因为 x 与 u 和 w 都相邻. 但是我们不能确定是否 u 和 w 着色相同, 因为它们本身不相邻.

事实证明, 相同的想法可以用于证明 $P(G; t)$, 并降低计算 $P(C_4; t)$ 的难度. 考虑图 $G = (V, E)$ 及一条边 $e \in E$. 这个图是由 G 删去边 e 得到的, 记作 $G \setminus e$, 它的顶点为 V 且边集为 $E - \{e\}$. 图 3.3 中中间的图就是例子中删去边 $e = vx$ 得到的. 在 G 中收缩一条边 e 表示为 G/e , 它是通过收缩 e 到一个新的顶点 v_e , 使得 v_e 与 e 的端点相邻, 其他顶点和边不变. 在我们的示例图中收缩 vx 得到图 3.3 右侧的图. 下一个引理在 $P(G; t)$ 的研究中至关重要. 理想情况下, 对 $\#E$ 作归纳, 因为 $G \setminus e$ 和 G/e 的边都比 G 的边少.

引理 3.8.2 (删除-收缩引理). 如果 G 是一个图, $e \in E$, 有

$$P(G; t) = P(G \setminus e; t) - P(G/e; t).$$

证明. 我们证明形式 $P(G \setminus e) = P(G) + P(G/e)$. 假定 $e = uv$. 因为 e 不出现在 $G \setminus e$ 中, 其正常着色数有两种类型: 一种是 $c(u) \neq c(v)$, 另一种是 $c(u) = c(v)$. 如果 $c(u) \neq c(v)$, 那么 $G \setminus e$ 的正常着色数等于 G 的正常着色数, 因而有 $P(G)$ 种着色. 当 $c(u) = c(v)$ 时, $G \setminus e$ 的正常着色与 G/e 之间也有一个双射, 即对 v_e 着色为和 u 与 v 相同的颜色, 其他点与 G 着色相同. 这种情况下有 $P(G/e)$ 种着色方式. 利用加法原则, 证毕. □

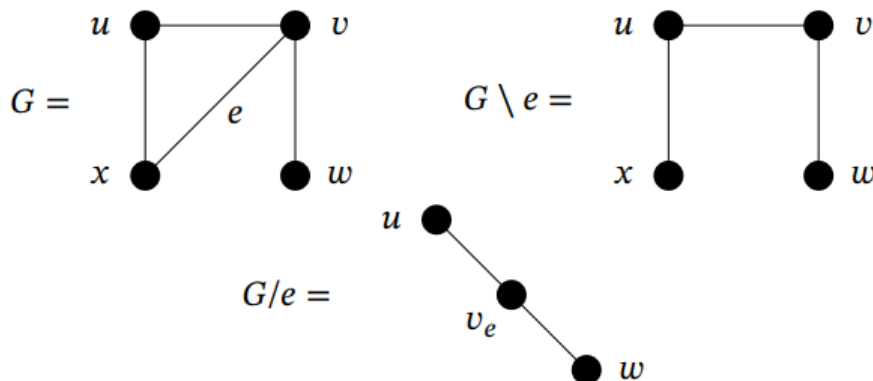


图 3.3: 删除与收缩

定理 3.8.3. 对任意图 G , $P(G; t)$ 是关于 t 的多项式.

证明. 我们对 $|E|$ 作归纳. 如果 G 没有边, 那么 $P(G; t) = t^{|V|}$, 显然是关于 t 的多项式. 如果 $|E| \geq 1$, 则取边 $e \in E$. 由删除-收缩定理, $P(G; t) = P(G \setminus e; t) - P(G/e; t)$. 由归纳假设, $P(G \setminus e; t)$ 与 $P(G/e; t)$ 都是关于 t 的多项式. 因而它们的差也是关于 t 的多项式. \square

我们现在可以利用引理 3.8.2 来计算 C_4 的色多项式. 回顾一下符号表示, P_n 和 K_n 分别表示 n 个顶点的路和完全图. 现在选出任一边 $e \in E(C_4)$, 我们可以运用删除-收缩定理, 然后确定通过逐个顶点着色得到的图的多项式

$$P(C_4) = P(P_4) - P(K_3) = t(t-1)^3 - t(t-1)(t-2) = t(t-1)(t^2 - 3t + 3).$$

请注意, 二次因子具有复数根, 因此证实了 $P(G)$ 并不总是有整数的根.

可以使用归纳法和引理 3.8.2 来证明关于 $P(G; t)$ 的一系列结果. 由于这些证明都是相似的, 我们将它们留给读者. 我们会使用一种非标准的方式写下这个多项式的系数, 这在后面使用比较简单.

定理 3.8.4. 令 $G = (V, E)$, 且

$$P(G; t) = a_0 t^n - a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n.$$

(1) $n = |V|$.

(2) $mdeg P(G; t) = G$ 的分支数.

(3) 对所有 i 有 $a_i \geq 0$, 且对 $0 \leq i \leq n - mdeg P(G; t)$ 有 $a_i > 0$.

(4) $a_0 = 1$ 且 $a_1 = |E|$.

现在我们知道 $P(G; t)$ 是一个多项式, 我们想要知道其系数是否存在组合解释, 我们方法的逆可以用来处理序列, 然后找到其生成函数. 对边集 E 设置一个总序, 如果边 e 在这一序下是小于边 f 的, 记作 $e < f$, 其他符号类似. 如果 C 是 G 中一个圈, 那么相应的破圈 B 就是在 $E(C)$ 移除总序中最小的边得到的边集. 回到图 3.2 中的例子, 令 $b = uv, c = ux, d = vw, e = vx$, 并设置序

$b < c < d < e$. 唯一的圈有边 b, c, e , 且相应的破圈 $B = \{c, e\}$, 就是一条路的边. 也就是说边集 $A \subseteq E$ 不包含破圈或者说是一个 NBC 集合, 如果 $A \not\supseteq B$ 对任意破圈 B . 令

$$\text{NBC}_k = \text{NBC}_k(G) = \{A \subseteq E \mid \#A = k \text{ 且 } A \text{ 是一个 NBC 集合}\}$$

且 $\text{nbc}_k = \text{nbc}_k(G) = \#\text{NBC}_k(G)$. 在我们的例图中, 比较上表的最后一列与 $P(G; t)$ 的系数得出

k	$\text{NBC}_k(G)$	$\text{nbc}_k(G)$
0	$\{\emptyset\}$	1
1	$\{\{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$	4
2	$\{\{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$	5
3	$\{\{b, c, d\}, \{b, d, e\}\}$	2
4	\emptyset	0

我们下面的结果, 这就是 Whitney[99] 的结果. 令人惊讶的是结论确实不取决于赋予边的总序. 我们给出的证明是基于 Blass 和 Sagan [16] 的结果.

定理 3.8.5. 如果 $\#V = n$, 那么边集 E 的任意序,

$$P(G; t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \text{nbc}_k(G) t^{n-k}.$$

证明. 将每一个 $A \in \text{NBC}_k(G)$ 与生成子森林联系起来. 那么 A 是无圈的因为任何圈都包含一个破圈. 由定理 1.10.2 得 A 是一个有 $n - k$ 个分支树的森林. 因此 $\text{nbc}_k(G) t^{n-k}$ 是数对 (A, c) 的数目, 其中 $A \in \text{NBC}_k(G)$ 且 $c: V \rightarrow [t]$ 是 A 的每一个分支上的染色常数. 我们称这样的染色为 A -不正常. 通过令 $\text{sgn}(A, c) = (-1)^{\#A}$ 使这样的数对集合成为符号集. 因此, 如果我们找到一个在这些数对上的符号反转对合 ι , 其固定点集是正的符号, 并且和 G 的正常着色之间存在双射, 即可证明这一定理.

定义 ι 的固定点集为 (A, c) 使得 $A = \emptyset$ 且 c 是正常的. 这些数对显然具有所需的特性. 对于任何其他数对, c 不是正常的着色, 因此一定有边 $e = uv$ 满足 $c(u) = c(v)$. 令 e 是总序中最小的这样的边. 现在定义 $\iota(A, c) = (A \Delta \{e\}, c) := (A', c)$. 很明显 ι 是符号反转的. 并且它是一个对合, 因为 c 没有改变, 因此最小的单色边在一个对及其图像中是相同的. 我们只需要检验 ι 是定义良好的. 如果 $A' = A - \{e\}$, 那么很明显 A 仍然是一个 NBC 集合, 并且 c 是 A' -不正常的. 如果 $A' = A \cup \{e\}$, 由于 e 连接两个相同颜色的顶点, 所以 c 仍然是 A' -不正常的. 但是利用反证法, 假设 A' 不是 NBC 集. 那么 $A' \supseteq B$, 其中 B 是一个破圈, 且 $e \in B$, 因为 A 是 NBC 的. 因为 c 是 A' -不正常, B 中所有的边有顶点着色 $c(u)$. 但是 e 是有那样性质的最小的边, 因此通过移除这一条边来得到 B 是不存在的. 因此 A' 是 NBC, ι 是定义良好的, 证毕. \square

关于色多项式的一个令人惊奇的事情是, 它经常出现在先验没有业务的地方, 因为不涉及图形着色. 我们现在给出两个例子来说明这一点. 回想一下第 2.6 节, 图 G 中的一个方向图 O , 它是和 G 有相同顶点集的有向图, 通过将 G 的每条边 uv 替换为可能的弧之一 \overrightarrow{uv} 或者 \overleftarrow{uv} . 图 3.4 就是图 G 的两个方向图. 称 O 是无圈的, 如果它不包含任何有向圈, 令 $\mathcal{A}(G)$ 和 $a(G)$ 分别表示图 G 的无圈方向图的集合和计数. 图 3.4 中第一个方向图是无圈的, 而第二个是有圈的. 圈 u, v, x, u 的方向图的总数目为 2^3 , 那些形成一个圈的数目是 2 (顺时针和逆时针). 因为 vw 的任何方向都

不可能产生圈, 我们有 $a(G) = 2(2^3 - 2) = 12$. 我们现在做一些非常奇怪的事情, 将 $t = -1$ 代入色多项式 (3.23) 并得到 $P(G; -1) = (-1)(-2)(-2)(-3) = 12$. 虽然完全不清楚用 -1 颜色为图形着色意味着什么, 我们刚刚看到的是下面的著名的斯坦利定理的例子 [85].

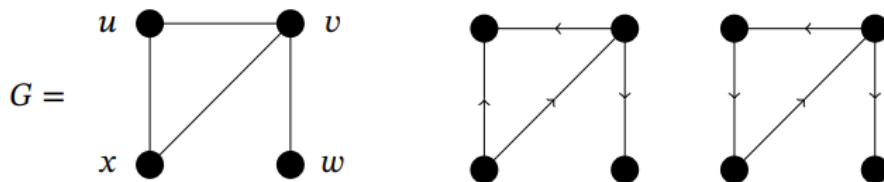


图 3.4: 一个图两种方向

定理 3.8.6. 对任意图 G , 顶点数 $\#V = n$, 我们有

$$P(G; -1) = (-1)^n a(G).$$

证明. 我们对 $\#E$ 作归纳, 初始的情况容易验证. 只需验证 $(-1)^n P(G; -1)$ 和 $a(G)$ 满足相同的递推关系. 利用删除-收缩引理, 我们发现只需证明对固定边 $e = uv \in E$ 有 $a(G) = a(G \setminus e) + a(G/e)$. 考虑映射

$$\phi : A(G) \rightarrow A(G \setminus e),$$

它将 $O \mapsto O'$, 其中 O' 通过 O 移除 e 对应的弧得到. 很明显 O' 仍然是无圈的, 因此函数是定义良好的.

我们称 ϕ 是满射. 假设相反, 存在一些 $O' \in A(G \setminus e)$ 使得添加回 \overrightarrow{uv} 得到一个有向圈 C , 类似地添加回 \overleftarrow{uv} 得到一个有向圈 C' . 那么 $(C - \overrightarrow{uv}) \cup (C' - \overleftarrow{uv})$ 是闭的, 由第二章习题 19 (2) 得到, 有向途径一定包含一条有向圈. 但是第三条有向圈包含在 O' 中, 产生矛盾.

如果 $O' \in A(G \setminus e)$, 那么由映射的定义, $\#\phi^{-1}(O') \leq 2$. 从前一段我们知道 $\#\phi^{-1}(O') \geq 1$. 因此 $a(G) = x + 2y$, 其中 $x = \#\{O' \mid \#\phi^{-1}(O') = 1\}$, $y = \#\{O' \mid \#\phi^{-1}(O') = 2\}$. 因为 $a(G \setminus e) = x + y$, 只需证明 $a(G/e) = y$. 我们建立如下双射

$$\psi : \{O' \in A(G \setminus e) \mid \#\phi^{-1}(O') = 2\} \rightarrow A(G/e).$$

令 Y 为 ψ 的定义域. 如果存在一对边 $wu, wv \in E(G)$, 那么任意 $O' \in Y$ 包含 \overrightarrow{wu} 和 \overrightarrow{wv} , 或者包含 \overleftarrow{wu} 和 \overleftarrow{wv} . 这是因为在所有其他情形中, 添加回 e 的一个方向将形成 G 的带圈的方向图, 与 $\#\phi^{-1}(O') = 2$ 矛盾. 因此定义 $O'' = \psi(O')$ 为 G/e 的方向图, 它和 O' 上不包含新顶点 v_e 的那些弧是一致的, 在形式为 wv_e 的那些边和 wu 或 wv 方向相同. (如图所示, 这两个方向要么都朝向 e , 要么都远离 e). 证明 ψ 是定义良好的双射留作练习. \square

我们应该提到的是, Stanley 实际上证明了对所有负整数 $-t$ 的 $P(G; -t)$ 进行组合解释的更强结果. 具体细节见练习 28 (2). 所以, 正如我们在 (1.6) 中看到的二项式系数, 我们有其组合解释的另一个实例. 我们将在下一节更广泛地研究这种现象.

对于色多项式的多变性质的第二个示例, 我们需要假设我们的图 G 有顶点集 $[n]$ 以便顶点有一个总序. 令 F 为 G 的生成森林, 并将 F 的每个分支树 T 的最小顶点 r 作为根. 称 F 是增的,

如果对于所有的根 r , 以 r 为起点的路的顶点编号形成增序. 在图 3.5 中, 是一个图 G , 其顶点用 [4] 编号, 与两个生成树. 我们称 F_1 是增序, 因为任意单元素节点都是增的, 并且对非平凡树, 从根开始的唯一的最大路为 1, 2, 4, 显然是一个增序. 另一方面, F_2 非增, 因为有路 1, 4, 2.

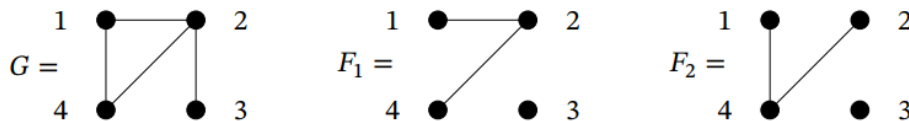


图 3.5: 一个图与两种生成森林

对一个图 $G = (V, E)$, 我们定义

$$\text{ISF}_m(G) = \{F \mid F \text{ 是 } G \text{ 的有 } m \text{ 条边的生成森林}\},$$

且 $\text{isf}_m(G) = \# \text{ISF}_m(G)$. 如果 $\#V = n$, 那么考虑相应的生成多项式

$$\text{isf}(G) = \text{isf}(G; t) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \text{isf}_m(G) t^{n-m}.$$

我们用这一公式计算我们的例图. 有零条边或一条边的树都是增的, 因此 $\text{isf}_0(G) = 1$ 且 $\text{isf}_1(G) = \#E = 4$. G 的任意的这样的边对形成一个增森林, 除了图 3.5 中 F_2 那样的边对. 因此 $\text{isf}_2(G) = \binom{4}{2} - 1 = 5$. 类似地我们可以验证 $\text{isf}_3(G) = 2$. 并且 $\text{isf}_4(G) = 0$, 因为 G 本身不是森林. 因此

$$\text{isf}(G; t) = t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t = t(t-1)^2(t-2) = P(G; t).$$

我们并不总是有 $\text{isf}(G) = P(G)$, 因为前者依赖于顶点的编号 (即使我们的符号掩盖了事实), 然而后者并不依赖. 因此, 我们将暂时不考虑它们何时相等, 现在只关注它们在 \mathbb{Z} 上的因式分解, 正如我们将看到的, 它不是巧合. 事实上, 根将是由如下定义的边集的基数

$$E_k = \{ik \in E \mid i < k\}, \quad (3.12)$$

其中 $1 \leq k \leq n$. 在我们的例子中 $E_1 = \emptyset$ (因为没有顶点比 1 小), $E_2 = \{12\}$, $E_3 = \{23\}$, $E_4 = \{14, 24\}$.

引理 3.8.7. 如果 G 有顶点 $V = [n]$, 那么一个生成子图 F 是一个增森林当且仅当对于 $k \in [n]$ 它是通过从每个 E_k 中选择最多一条边获得的.

证明. 对于前一个方向, 利用反证法, 假设 F 包含 ik 和 jk , 其中 $i, j < k$. 因此如果 r 是包含 i, j, k 的树的根, 那么, 由增序条件, i 必须是唯一的 $r-k$ 路径上 k 之前的顶点. 但是 j 也必须如此, 这就产生矛盾.

对于另一个方向, 我们必须首先验证 F 是无圈的. 但是如果 F 包含一个圈 C , 那么令 k 为其最大顶点. 因此有 $ik, jk \in E(C)$, 并且根据最大要求, 有 $i, j < k$. 这与假设相矛盾. 类似地, 可以证明如果 F 不是增序, 则可以从相同的 E_k 产生两个边, 证毕. \square

现在证明 Hallam 和 Sagan [41] 的以下结果就很简单了. 这里给出的证明是由 Hallam, Martin 和 Sagan [40] 得到的.

定理 3.8.8. 如果 G 有顶点 $V = [n]$, 那么

$$\text{isf}(G; t) = \prod_{k=1}^n (t - |E_k|)$$

证明. 乘积中 t^{n-m} 的系数是形式 $|E_{i_1}| |E_{i_2}| \cdots |E_{i_m}|$ 的所有项的和, 其中 i_j 是不同的指标. 但是这个乘积是从每个集合 $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_m}$ 中选出一条边的方法数. 所以, 根据前面引理, 总和是具有 m 条边的增森林的数量, 证毕. \square

回到色多项式与增生成森林多项式何时相等的问题, 我们需要下面的定义. 如果 V 的总序 v_1, v_2, \dots, v_n 使得对所有的 k , 在总序中在 v_k 之前并与 v_k 相邻的顶点集合形成一个团 (G 的完整子图), 则图 G 具有完美消除序 (peo). 乍一看, 这个定义似乎很奇怪, 但是它在各种图理论环境中很有用. 回到我们的例子, 我们看到序 $1, 2, 3, 4$ 是一个完美消除序, 因为 1 与之前的顶点不相邻, 顶点 2 和 3 都与单个先前的顶点相邻, 即 K_1 , 并且 4 与 1 和 2 相邻, 这形成一条边, 也即 K_2 . 我们可以证明来自 [40] 的另一个结果.

引理 3.8.9. 令 G 顶点 $V = [n]$. 将 G 的边写作 ij 其中 $i < j$, 并将它们按字典序排列. 对所有的 $m \geq 0$, 我们有

$$\text{ISF}_m(G) \subseteq \text{NBC}_m(G).$$

此外, 对所有的 m 上面两个集合相等当且仅当 $[n]$ 上的自然顺序是完美消除序.

证明. 为了证明包含关系, 我们假设 F 是一个增的生成森林, 它包含破圈 B , 并导出矛盾. 按边的字典序, B 必须是形式为 v_1, v_2, \dots, v_l 的路, 其 $v_1 = \min\{v_1, \dots, v_l\}$, 且 $v_2 > v_l$. 所以一定存在一个最小指标 $i \geq 2$ 使得 $v_i > v_{i+1}$. 随之有 $v_{i-1}, v_{i+1} < v_i$, 所以 B 的两条相应的边与引理 3.8.7 矛盾.

对于第二个陈述的前一个方向, 我们必须证明如果 $i, j < k$ 并且 $ik, jk \in E(G)$, 那么 $ij \in E(G)$. 再利用引理 3.8.7, $\{ik, jk\}$ 不是增生成森林的边集. 因此, 通过假定的相等性, 这个集合必须包含一个破圈. 由于只有两条边, 这一边集一定是破圈, 并且 $ij \in E(G)$ 一定是用来形成圈的边. 另一方向的证明留作练习. \square

从这个结果, 我们立即得出以下结论.

定理 3.8.10. 令 G 顶点 $V = [n]$. 那么 $\text{isf}(G; t) = P(G; t)$ 当且仅当 $[n]$ 上的自然序是一个完美消除序. \square

3.9 组合互反性

将一个负参数代入一个计数函数得到一个符号乘另一个计数函数, 那么这就称为组合互反. 这一概念是由 Stanley[86] 引入和研究的. 我们已经在等式 (1.6) 与定理 3.8.6 中看到了两个例子 (更一般地, 见本章练习 28). 在这里, 我们将递归与有理生成函数联系起来. 请参阅 Beck 和 Sanyal [5] 的关于该问题的论述.

在陈述一个一般定理之前, 我们回到第 3.6 节开始的例子. 也即如下定义的序列 $a_0 = 2$, 且当 $n \geq 1$ 时 $a_n = 3a_{n-1}$. 我们可以将这一递推关系的定义域扩展到所有的整数 n , 在这种情况下可以

得到 $2 = a_0 = 3a_{-1}$, 因此 $a_{-1} = 2/3$. 那么 $2/3 = a_{-1} = 3a_{-2}$, 于是得到 $a_{-2} = 2/3^2$, 以此类推. 作简单的归纳得到当 $n \leq 0$ 有 $a_n = 2 \cdot 3^n$, 与 $n \geq 0$ 时一样. 我们也可对这一序列的负指标部分计算生成函数, 从 a_{-1} 开始计算, 得到几何级数

$$\sum_{n \geq 1} a_{-n} x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{2x^n}{3^n} = \frac{2x/3}{1 - x/3} = \frac{2x}{3 - x}.$$

将其与 (3.12) 中的式子 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 比较得到

$$-f(1/x) = \frac{-2}{1 - 3/x} = \frac{2x}{3 - x} = \sum_{n \geq 1} a_{-n} x^n.$$

读者应该对写 $f(1/x)$ 有些疑虑, 因为我们已经指出 x 在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中没有逆. 事实上, 如果我们使用定义 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, 那么 $f(1/x) = \sum_{n \geq 0} a_n / x^n$, 这不是一个形式幂级数. 但是如果 $f(x)$ 可以被表达成有理函数的形式, 即 $f(x) = p(x)/q(x)$, 其中 $\deg p(x) \leq \deg q(x) := d$, 那么作如下替换就有意义. 因为 $q(x)$ 度为 d , 我们知道 $x^d q(1/x)$ 也是一个多项式, 并且是可逆的, 因为它的常数项不为零 (定理 3.3.1). 此外, $x^d p(1/x)$ 也是一个多项式, 因为 $d \geq \deg p(x)$. 所以我们可以定义

$$f(1/x) = \frac{x^d p(1/x)}{x^d q(1/x)}, \quad (3.25)$$

它仍在形式幂级数环中. 在这样定义下, 下面的结果就有意义.

定理 3.9.1. 假设 a_n 是一个序列, $n \in \mathbb{Z}$ 满足 (3.18) 中常系数的线性递推关系. 令 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, 我们有

$$\sum_{n \geq 1} a_{-n} x^n = -f(1/x)$$

证明. 由 (3.25), 要证明该定理只需证明

$$x^d q(1/x) \sum_{n \geq 1} a_{-n} x^n = -x^d p(1/x).$$

注意由 (3.20) 式, 我们有

$$x^d q(1/x) = x^d + c_1 x^{d-1} + c_2 x^{d-2} + \cdots + c_d.$$

因此, 如果 $m \geq 1$, 那么利用 (3.18) 及 $x^d p(1/x)$ 的度至多为 d , 得

$$\begin{aligned} [x^{m+d}] x^d q(1/x) \sum_{n \geq 1} a_{-n} x^n &= a_{-m} + c_1 a_{-m-1} + c_2 a_{-m-2} + \cdots + c_d a_{-m-d} \\ &= 0 \\ &= [x^{m+d}] (-x^d p(1/x)). \end{aligned}$$

类似地, 我们可以证明该不等式对 $-d \leq m \leq 0$ 仍成立. 证毕. \square

为了说明这一定理, 我们考虑负的二项式展开. 如果固定 $n \geq 1$, 应用定理 3.4.2 及等式 (3.16), 得

$$f(x) := \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{n-1} x^k.$$

注意因为 n 是固定的, 我们将 $\binom{n+k-1}{n-1}$ 看作关于 k 的函数. 在二项式系数中将 k 替换为 $-k$, 我们考虑相应的生成函数

$$g(x) = \sum_{k \geq 1} \binom{n-k-1}{n-1} x^k.$$

注意到当 $1 \leq k < n$ 时 $\binom{n-k-1}{n-1} = 0$, 因为 $0 \leq n-k-1 < n-1$. 所以 x^n 可以从 $g(x)$ 分解出来, 使用 (1.6) 和上面的负二项式展开, 得到

$$\begin{aligned} g(x) &= x^n \sum_{k \geq n} \binom{n-k-1}{n-1} x^{k-n} \\ &= x^n \sum_{j \geq 0} \binom{-j-1}{n-1} x^j \\ &= (-1)^{n-1} x^n \sum_{j \geq 0} \binom{j+1}{n-1} x^j \\ &= (-1)^{n-1} x^n \sum_{j \geq 0} \binom{n+j-1}{n-1} x^j \\ &= \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(1-x)^n}. \end{aligned}$$

另一方面, 我们可以应用定理 3.9.1 将 $g(x)$ 写作

$$g(x) = \frac{-1}{(1-1/x)^n} = \frac{-x^n}{(x-1)^n} = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(1-x)^n},$$

得到同样的结果, 但是计算更少.

3.10 习题

(1) 用以下三种方式证明对 $n \in \mathbb{N}$, 成立

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

- (a) 应用二项式定理;
- (b) 应用组合解释;
- (c) 对任意 $c \in \mathbb{N}$, 通过把 2^k 替换为 c^k 将等式一般化, 用二项式定理及组合解释给出证明。

(2) 用以下三种方式证明对 $m, n, k \in \mathbb{N}$, 成立

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{l \geq 0} \binom{m}{l} \binom{n}{k-l}$$

- (a) 归纳法;
- (b) 应用二项式定理;
- (c) 应用组合解释。

(3) 令 x_1, \dots, x_m 为一组变量, 用以下三种方式证明多项式系数恒等式:

$$\sum_{n_1 + \dots + n_m = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_m} x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} = (x_1 + \dots + x_m)^n$$

- (a) 对 n 进行归纳;
- (b) 应用二项式定理, 归纳出 m ;
- (c) 应用组合解释。

(4) (a) 证明定理 3.1.2.

(b) 利用这个生成函数重新推导出定理 1.5.3。

(5) (a) 回忆一下, 对于排列 $\pi \in P([n])$, 一个逆序对 (i, j) 是指满足 $i < j$ 且 $\pi_i > \pi_j$ 的所有序对, 我们称 π_i 为该逆序对的最大值。排列 π 的逆序表记作: $I(\pi) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 其中 a_k 是以 k 为最大值的逆序对的数量。证明对于所有 k , 都有 $0 \leq a_k < k$, 并且成立等式:

$$\text{inv } \pi = \sum_{k=1}^n a_k$$

(b) 令

$$I_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid 0 \leq a_k < k \text{ for all } k\}.$$

证明映射 $\pi \mapsto I(\pi)$ 是从 $P([n])$ 到 I_n 的双射。

(c) 利用 (a) 和 (b) 以及权重生成函数重新推导定理 3.2.1。

(6) 令 $\text{st}: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{N}$ 是一个排列统计量。回忆一下, 对于排列 π , 我们用 $\text{Av}_n(\pi)$ 来表示在 \mathfrak{S}_n 中避免 π 的所有排列的集合。如果对于所有 $n \geq 0$ 它们的生成函数相等, 即

$$\sum_{\tau \in \text{Av}_n(\pi)} q^{\text{st } \tau} = \sum_{\tau \in \text{Av}_n(\sigma)} q^{\text{st } \tau}$$

称排列 π, σ 是关于统计量 st -Wilf-等价的, 记作 $\pi \stackrel{\text{st}}{\equiv} \sigma$ 。

(a) 证明如果 π 和 σ 是关于统计量 st -Wilf-等价的, 则 π 和 σ 也是 Wilf-等价的。

(b) 证明

$$132 \stackrel{\text{inv}}{\equiv} 13$$

和

$$231 \stackrel{\text{inv}}{\equiv} 312$$

并证明在 \mathfrak{S}_3 中的两个排列之间不存在 inv -Wilf-等价关系。

(c) 证明

$$132 \stackrel{\text{maj}}{\equiv} 231$$

$$213 \stackrel{\text{maj}}{\equiv} 312$$

并且在 \mathfrak{S}_3 中的两个排列之间不存在其他的 maj -Wilf-等价关系。

(7) (a) 用以下三种方法证明

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$$

应用 q -阶乘的定义；应用整数划分的解释；应用子空间的解释。

(b) 用两种方法证明定理 3.2.3 中的第二个递推式：应用类比第一个递推式的证明；应用将第一个递推式与部分 (a) 的结合。

(c) 如果 $S \subseteq [n]$ ，那么让 ΣS 表示 S 中所有元素的和。分别用使用归纳法和应用定理 3.2.5，给出以下 q -模拟的两个证明，该模拟基于以下事实： $\# \begin{pmatrix} [n] \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ：

$$\sum_{S \in \begin{pmatrix} (n) \\ k \end{pmatrix}} q^{\Sigma S} = q^{\begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q,$$

(d) 给出定理 3.2.6 的另外两种证明：对 n 进行归纳，以及结合定理 3.2.5。

(8) (a) 给出定理 3.2.4 的另外两种证明：用整数划分和子空间证明。

(b) 负 q -B 二项式定理表明：

$$\frac{1}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)\dots(1-q^{n-1}t)} = \sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} t^k$$

给出该结果的三种证明：归纳法、使用整数划分、以及应用子空间。

(9) (a) 给定 $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ ，定义相应的 q -多重二项式系数为

$$[n_1, n_2, \dots, n_m]_q = \frac{[n]_q}{[n_1]_q! [n_2]_q! \dots [n_m]_q!}$$

如果所有 $n_i \geq 0$ ，否则为 0，证明

$$\begin{aligned} & [n_1, n_2, \dots, n_m]_q \\ &= \sum_{i=1}^m q^{n_1+n_2+\dots+n_{i-1}} \begin{bmatrix} n-1 \\ n_1, \dots, n_{i-1}, n_i-1, n_{i+1}, \dots, n_m \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

(b) 定义多重集 $M = \{1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m}\}$ 的排列（线性排序）中的逆序对、下降和主要指标，其方式与没有重复元素的排列完全相同。设 $P(M)$ 为 M 的排列的集合。证明

$$\sum_{\pi \in P(M)} q^{\text{inv} \pi} = \sum_{\pi \in P(M)} q^{\text{maj} \pi} = \begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_m \end{bmatrix}_q$$

(c) 设 V 是域 \mathbb{F}_q 上的 n 维向量空间。假设 $S = \{s_1 < \dots < s_m\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ ，那么，一个类型为 S 的旗 (flag) 是 V 的一系列子空间链，这些子空间满足

$$F : W_1 < W_2 < \dots < W_m \leq V$$

使得对于所有的 i , 都有 $\dim W_i = s_i$ 。这个术语的由来是, 当 $n = 2$ 且 $S = \{0, 1, 2\}$ 时, F 由一个点 (原点) 开始, 这个点在一条直线上, 而这条直线又在一个平面上。这可以被视为一个物理旗帜的绘制, 其中点是地面上的洞, 直线是旗杆, 而平面则是旗帜本身。用以下两种方法证明

$$\#\{F \text{ of type } S\} = [s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, s_m - s_{m-1}, n - s_m]_q,$$

类比定理 3.2.6 的证明过程; 通过对 m 进行归纳来证明。

- (10) (a) 证明在 $C[[x]]$ 中, 对于任意的 $k \in \mathbb{N}$, 都有 $e^{kx} = (e^x)^k$ 。
 (b) 使用三角函数通常的泰勒展开式来定义它们的形式幂级数。证明在形式幂级数环 $C[[x]]$ 中, 我们有 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 和 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 。
 (c) 如果给定一个序列 a_0, a_1, a_2, \dots 并定义

$$f_k(x) = a_k x^k,$$

那么证明 $\sum_{k \geq 0} f_k(x) = f(x)$, 其中 $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ 。

- (d) 证明定理 3.3.2 的逆定理。
 (e) 用定理 3.3.1 和 3.3.3 来证明 $1/x$ 和 e^{1+x} 在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中定义不是良的。
 (f) 证明定理 3.3.4。
 (11) 证明如果 S, T 是可求和集, 那么 $S \times T$ 也是可求集合。
 (12) 如果说 $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ 有一个平方根, 那么存在 $g(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ 使得 $f(x) = g(x)^2$ 。
 (a) 证明 $f(x)$ 有一个平方根当且仅当 $f(x)$ 是偶函数。
 (b) 证明如下形式幂级数成立:

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} x^k$$

- (c) 证明如下形式幂级数成立:

$$(e^x)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{2^k k!}$$

- (d) 将本练习前面的部分推广到 m 次方根, 其中 $m \in \mathbb{P}$ 。

- (13) 通过使用归纳法给出定理 3.4.2 的第二个证明。
 (14) 证明定理 3.4.3。
 (15) 证明定理 3.5.1。
 (16) (a) 完成定理 3.5.3 (a) 的证明。
 (b) 通过定理 3.2.5 给出定理 3.5.3 (b) 的第二个证明。

- (c) 证明具有最大部分 k 的 n 的划分的生成函数等于具有恰好 k 个部分的 n 的划分的生成函数, 并且两者都等于它们的乘积。

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$$

- (d) 一个杨图 λ 的 Durfee 平方是最大的平方划分 (d^d) 使得 $(d^d) \subseteq \lambda$ 。利用这个概念来证明

$$\sum_{n \geq 0} p(n)x^n = \sum_{d \geq 0} \frac{x^{d^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2\cdots(1-x^d)^2}$$

- (17) 设 a_n 为整数 n 的分区数, 其中任何部分 i 重复的次数都少于 i 次, 设 b_n 为整数 n 的分区数, 其中没有任何部分是平方数。用生成函数来证明对于所有的 n , 都有 $a_n = b_n$ 。
- (18) 给定 $m \geq 2$, 用生成函数来证明每个部分重复次数少于 m 次的 n 的划分数目等于 n 的划分中不被 m 整除的部分的数量。注意, 这个结果的双射证明在第二章的练习 15 中已给出。
- (19) (a) 证明对于 $n \geq 1$, F_n 是最接近整数的数, 该整数由下式给出:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- (b) 分别用方程 ((3.14)) 和组合解释这两种方法来证明

$$F_n^2 = \begin{cases} F_{n-1}F_{n+1} + 1 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ F_{n-1}F_{n+1} - 1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

- (20) (a) 使用第 2.6 节中的算法重新推导定理 3.1.1。
- (b) 完成定理 3.6.1 的证明。
- (c) 用定理 3.1.2 给出定理 3.6.1 的第二个证明。
- (d) 证明定理 3.6.2。
- (e) 设 s 是一个无限阶矩阵, 其行和列由 \mathbb{N} 索引, 且 $s(n, k)$ 是第 n 行第 k 列的元素。类似地, 定义 S , 其元素为 $S(n, k)$ 。证明 $Ss = sS = I$, 其中 I 是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 单位矩阵。提示: 用定理 3.6.1 和 3.6.2。
- (21) 给定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$, 通 $S[0, k] = \delta_{0,k}$ 定义第二类 q -Stirling 数, 并且对于 $n \geq 1$,

$$S[n, k] = S[n-1, k-1] + [k]_q S[n-1, k].$$

- (a) 证明

$$\sum_{n \geq 0} S[n, k]x^n = \frac{x^k}{(1-[1]_qx)(1-[2]_qx)\cdots(1-[k]_qx)}.$$

- (b) 在本问题的其余部分中, 所有集合划分 $\rho = B_1/B_2/\dots/B_k$ 都将以标准形式书写, 这意味着

$$1 = \min B_1 < \min B_2 < \cdots < \min B_k.$$

ρ 的一个逆序对是一个对 (b, B_j) , 其中 $b \in B_i$ 对于某些 $i < j$, 并且 $b > \min B_{i+1}$ 。我们定义 $\text{inv} \rho$ 为 ρ 的逆序对的数量。例如, $\rho = B_1/B_2/B_3 = 136/25/4$ 有逆序对 $(3, B_2), (6, B_2), (6, B_3)$ 和 $(5, B_3)$, 所以 $\rho = 4$ 。证明

$$S[n, k] = \sum_{\rho \in S([n], k)} q^{\text{inv} \rho}.$$

(c) 一个集合划分 ρ 的下降对是一对 (b, B_{i+1}) , 其中 $b \in B_i$ 且 $b > \min B_j$ 。我们定义 $\text{des} \rho$ 为 ρ 的下降对的数量。在前面的例子中, ρ 有下降对 $(3, B_2), (6, B_2)$ 和 $(5, B_3)$, 所以 $\text{des} \rho = 3$ 。 ρ 的下降多重集记作 $\text{Des} \rho$, 并且这个多重集为

$$\{ \{1^{d_1}, 2^{d_2}, \dots, k^{d_k} \mid \text{for all } i, d_i = \text{number of descents } (b, B_{i+1})\} \}.$$

ρ 的主指标 (major index) 定义为

$$\text{maj} \rho = \sum_{i \in \text{Des} \rho} i = d_1 + 2d_2 + \dots + kd_k.$$

在我们上个示例中, $\text{Des} \rho = \{ \{1^2, 2^1\} \}$, 所以 $\text{maj} \rho = 1 + 1 + 2 = 4$ 。证明

$$S[n, k] = \sum_{\rho \in S([n], k)} q^{\text{maj} \rho}.$$

(22) 给定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$, 定义第一类无符号的 q -Stirling 数 $c[0, k] = \delta_{0,k}$ 如下: 对于 $n \geq 1$,

$$c[n, k] = c[n-1, k-1] + [n-1]_q c[n-1, k]$$

(a) 证明

$$\sum_{k \geq 0} c[n, k] x^k = x (x + [1]_q) (x + [2]_q) \cdots (x + [n-1]_q).$$

(b) 排列 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 的标准形式是 $\pi = \kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_k$, 其中 κ_i 是 π 的循环,

$$\min \kappa_1 < \min \kappa_2 < \cdots < \min \kappa_k,$$

并且每个 κ_i 都是从 $\min \kappa_i$ 开始。定义 π 的循环主要指标 $\text{maj}_c \pi = \text{maj} \pi'$, 其中 π' 是通过将 π 的标准形式中的循环括号去除后得到的一行排列形式。例如, 如果 $\pi = (1, 7, 2)(3, 6, 8)(4, 5)$, 则 $\pi' = 17236845$ 因此 $\text{maj}_c \pi = 2 + 6 = 8$ 。证明

$$c[n, k] = \sum_{\pi \in c([n], k)} q^{\text{maj}_c \pi}.$$

(23) 使用定理 2.6.3 重新证明公式

$$C(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

(24) (a) 证明如果 $k, l \in \mathbb{N}$ 是常数, 那么 $\binom{n+l}{k}$ 是关于 n 的一个 k 次多项式。

(b) 证明多项式

$$\binom{n}{0}, \binom{n+1}{1}, \binom{n+2}{2}, \dots$$

能作为 n 维多项式空间中的一组基。

(c) 利用 (a) 来完成定理 3.7.1 的证明。

(25) 重新使用待定系数法求解第 3.6 节中的第一个递推式以及 F_n 的递推式。

(26) 用以下两种方法证明对于 n -循环, 有

$$P(C_n; t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1)$$

一种是用删除-收缩法, 另一种是用无割边集。

(27) 用归纳法证明定理 3.8.4, 并用无割边集给出 (b)-(d) 部分的第二个证明。

(28) (a) 完成定理...的证明。

(b) 设 $G = (V, E)$ 是一个图, 且 $t \in \mathbb{P}$, 称一个无环定向 O 和一个 (不一定真) 着色 $c: V \rightarrow [t]$ 是相容的, 如果对 O 的所有弧 \vec{uv} , 都有 $c(u) \leq c(v)$ 。证明如果 $\#V = n$, 则

$$P(G; -t) = (-1)^n (\text{number of compatible pairs } (O, c)).$$

(c) 证明定理 3.8.6 是 (b) 的一个特例。

(29) 完成引理 3.8.7 和引理 3.8.9 的证明。

(30) (a) 称避免模式集 $\Pi = \{231, 312, 321\}$ 的排列集 σ 为紧密的。证明 σ 是紧密的当且仅当对某些 i , σ 是一个只包含形式为 $(i, i+1)$ 的 2-循环的对合。

(b) 设 G 是一个顶点集为 $V = [n]$ 的图, 称 G 的一个生成森林 F 为紧密的, 如果以 F 的任一根为起点的路径上的标签序列都避免了模式集 Π , 如 (a) 所述。令 $\text{Tsf}_m(G) = \{F \mid F \text{ 是 } G \text{ 的一个具有 } m \text{ 条边的紧密生成森林}\}$

证明如果 G 没有 3-循环, 则对于所有 $m \geq 0$

$$\text{Tsf}_m(G) \subseteq \text{NBC}_m(G).$$

其中 $\text{NBC}_m(G)$ 表示 G 的所有具有 m 条边且不含非基本循环的生成子图的集合。

(c) 在一个没有 3-循环的图 G 中, 一条候选路径是具有以下形式的路径:

$$a, c, b, v_1, v_2, \dots, v_m = d$$

其中 $a < b < c, m \geq 1$, 且 v_m 是唯一一个小于 c 的 v_i 。如果图 G 的顶点集 $V(G)$ 上的一个全序满足以下条件: 对于每一条候选路径, 要么 $ad \in E(G)$, 要么 $d < b$ 且 $cd \in E(G)$, 则称这个全序为准完美序 (qpo)。考虑生成函数

$$\text{tsf}(G; t) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \text{tsf}_m(G) t^{n-m}.$$

证明: $\text{tsf}(G; t) = P(G; t)$ 当且仅当 $[n]$ 上的自然序是一个 qpo。

(31) 在定理 3.9.1 的证明中, 补全 $-d \leq m \leq 0$ 这一情况的证明细节。

(32) (a) 通过坚持斐波那契数列 F_n 的递推关系在 $n < 0$ 时也成立, 将其拓展到所有 $n \in \mathbb{Z}$ 。证明如果 $n \geq 0$, 则

$$F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n.$$

(b) 用两种方法求 $\sum_{n \geq 1} F_{-n} x^n$: 应用 (a) 的结果; 结合定理 3.9.1。

第四章 指数生成函数计数

(韩甜 翻译)

给定一个复数序列 a_0, a_1, a_n, \dots , 将其与一个指数生成函数相关联, 其中 a_n 是 $x^n/n!$ 的系数. 事实证明, 在某些情况下指数生成函数比普通函数更容易处理. 尤其是 a_n 从某个标签集获得的组合对象中计数. 我们给出了一种处理这种结构的方法, 这种结构又会产生求和和积规则, 以及这种方法所特有的指数公式.

4.1 示例一

复数序列 a_0, a_1, a_n, \dots , 其中对任意 n 有 $a_n \in \mathbb{C}$, 相应的指数生成函数 (egf) 是

$$F(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

为了与前一章中的普通生成函数 (ogfs) 区分开来, 我们通常使用大写字母表示指数生成函数, 小写字母表示普通生成函数. 形容词“指数”的使用是因为在对任意 n 有 $a_n = 1$ 的简单情况下, 相应的指数生成函数是 $F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$. 为了说明指数生成函数在序列研究中的作用, 考虑对任意 $n \geq 0$ 有 $a_n = n!$ 的序列. 普通生成函数 $f(x) = \sum_{n \geq 0} n!x^n$ 并且该幂级数无法简化. 此外, 如果需要, 现在就可以对指数生成函数

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$$

进行操作.

为了练习使用指数生成函数, 我们现在将计算一些例题. 在确定生成函数时经常出现的一种技术是求和的交换. 例如, 考虑错乱数 $D(n)$ 以及定理 2.1.2 中给出的公式. 因此

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} Dn \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} n! \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n \geq k} x^n \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} \sum_{k \geq 0} \frac{(-x)^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-x}}{1-x}. \end{aligned}$$

在第 4.3 节中介绍标记结构理论之后, 我们将能够对该公式进行更多的组合推导. 目前, 我们只记录结果以供将来参考.

定理 4.1.1. 我们有

$$\sum_{n \geq 0} D(n) \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

如果给定序列由递推关系定义, 则可以对第 3.6 节中的算法稍作修改, 以计算其指数生成函数. 只需乘以 $x^n/n!$, 而不是 x^n , 然后求和. 需要注意的是, 由于以下考虑因素, 递归中的最大索引可能不是用作 x 上的幂的最佳选择. 对于 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, 其形式导数就是形式幂级数

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1}.$$

该导数具有普通解析导数的大多数常见特性, 如线性和乘积法则. 以类似的定义形式积分. 需要注意的是, 如果以指数生成函数 $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n/n!$ 开头, 然后

$$F'(x) = \sum_{n \geq 0} n a_n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \frac{x^n}{n!} \quad (4.1)$$

这就是同一序列的指数生成函数向上移动了 1. 因此, 如果序列中某个元素的下标大于 x 的相应幂的指数, 它可以简化问题.

让我们考虑定理 1.4.1 中给出的贝尔数及其递推关系. 让 $B(x) = \sum_{n \geq 0} B_n x^n/n!$. 在用 $x^n/n!$ 相乘和求和之前, 可以方便地在递归中用 $n+1$ 替换 n , 用 $k+1$ 替换 k . 因此, 使用 (4.1) 和求和交换技巧我们可以得到

$$\begin{aligned} B'(x) &= \sum_{n \geq 0} B(n+1) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(n-k) \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} B(n-k) x^n \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \sum_{n \geq k} B(n-k) \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} B(x) \\ &= e^x B(x). \end{aligned}$$

我们现在有一个微分方程要解, 但我们必须注意确保这可以完成. 为此, 我们定义

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (4.2)$$

的形式自然对数, 这可以认为是对 $1/(1+x)$ 的几何级数的形式积分. 注意, 由于 $\ln(1+x)$ 有无穷多个项, 要定义 $\ln(1+f(x))$, 必须根据定理 3.3.3, $f(x)$ 有常数项 0. 换句话说, 对于无穷级数 $g(x)$, 我们有 $\ln(g(x))$ 仅当 $g(x)$ 的常数项为 1. 幸运的是, 这对于 $B(x)$ 是正确的, 所以我们可以分离上面的变量来得到 $B'(x)/B(x) = e^x$, 然后形式积分得到某个常数 c 的 $\ln(B(x)) = e^x + c$. 根据定义

(4.2), 自然对数没有常数项, 因此我们必须取 $c = -1$. 求解 $B(x)$, 我们得到以下结果. 同样, 稍后将给出更多的组合证明.

定理 4.1.2. 我们有

$$\sum_{n \geq 0} B(n) \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}.$$

在这一节的结尾, 我们将讨论某些具有良好结构的下降集的排列. 为了计算它们的指数生成函数, 我们需要定义

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

和

$$\cos x = (\sin x)', \sec x = \frac{1}{\cos x}, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

的形式正弦幂级数. 请注意, $\sin x$ 和 $\tan x$ 由定理 3.3.1 明确定义.

对于 $\pi \in P([n])$ 排列, 若

$$\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \pi_4 < \cdots \quad (4.3)$$

则称其是交错的, 同样的, 若 $Des\pi$ 是由 $[n]$ 中的奇数组成, 则称其是交错的. 第 n 个 Euler 数为

$$E_n = \pi \in P([n]) \text{ 的交错次数.}$$

例如, 当 $n = 4$ 时, 交错排列为

$$2143, 3142, 3241, 4132, 4231$$

因此 $E_4 = 5$. 如果 $\pi_1 < \pi_2 > \pi_3 < \pi_4 > \cdots$ 或者 π^c 是交错的, 其中 π^c 是第 1 章练习 (37) (b) 中定义的 π 的补集, 则称排列是互补交错的. 很明显, E_n 也计算互补交错 $\pi \in P([n])$ 的次数. 更一般地, 使用 (4.3) 定义任何要交错的整数序列, 对于互补交错也是如此. 欧拉数的结果如下.

定理 4.1.3. 我们有 $E_0 = E_1 = 1$ 以及, 对于 $n \geq 1$, 有

$$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k E_{n-k}.$$

也有

$$\sum_{n \geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \sec x + \tan x.$$

证明. 为了证明递推性, 可以方便地考虑集 S , 它是 $P([n+1])$ 中所有交错排列或互补交错排列的并集. 因此 $\#S = 2E_{n+1}$. 令 $\pi \in S$ 并且假设 $\pi_{k+1} = n+1$. 然后 π 因子成为 $\pi = \pi'(n+1)\pi''$. 首先假设 π 是交错的. 然后 k 是偶数, π' 是交错的, π'' 是 π' 的互补交错. 选择 π' 元素的方法数是 $\binom{n}{k}$, 其余的用于 π'' . π' 元素按交错顺序排列的方式数为 E_k , π'' 元素为 E_{n-k} . 这样 π 的总数是 $\binom{n}{k} E_k E_{n-k}$, 其中 k 是偶数. 类似的考虑表明, 当 π 是互补交错的时, 相同的公式适用于奇数 k . 下面是递归的求和端.

现在, 让 $E(x)$ 是 E_n 的指数生成函数. 将递推乘以 $x^n/n!$, 然后对 $n \geq 1$ 的求和, 得到微分方程和边界条件

$$2E'(x) = E(x)^2 + 1 \text{ 和 } E(0) = 1$$

其中, 为了对形式幂级数进行良好定义, $E(0)$ 是 $E(x)$ 常数项的缩写. 现在可以通过分离变量或验证此函数满足微分方程和初始条件来获得唯一解 $E(x) = \sec x + \tan x$. \square

4.2 欧拉多项式的指数生成函数

在第 3.2 节中, 我们看到 inv 和 maj 统计数据具有相同的分布. 事实证明, 有一些统计数据与 des 具有相同的分布, 这些被称为欧拉分布. 具有这种分布的多项式具有很好的普通型和指数型对应生成函数. 我们将在本节中讨论它们. 彼得森 (Petersen) [69] 写了一整本关于这个主题的书.

给出 $n, k \in \mathbb{N}$, 其中 $0 \leq k < n$, 对应的欧拉数为

$$A(n, k) = \#\{\pi \in \mathfrak{S}_n \mid \text{des } \pi = k\}.$$

像往常一样, 除了 $A(0, 0) = 1$, 当 $k < 0$ 或者 $k \geq n$ 时, 我们让 $A(n, k) = 0$. 例如, 如果 $n = 3$, 我们有因此

k	0	1	2
$\text{des } \pi = k$	123	132, 213, 231, 312	321

$$A(3, 0) = 1, A(3, 1) = 4, A(3, 2) = 1.$$

请确保不要将这些欧拉数与上一节中介绍的欧拉数混淆. 此外, 一些作者使用 $A(n, k)$ 表示在 \mathfrak{S}_n 中具有 $k-1$ 下降的排列数. 下一个结果给出了 $A(n, k)$ 的一些基本性质. 我们让

$$A([n], k) = \{\pi \in \mathfrak{S}_n \mid \text{des } \pi = k\}$$

是非常方便的.

定理 4.2.1. 假设 $n \geq 0$.

(a) 欧拉数满足初始条件

$$A(0, k) = \delta_{k,0}$$

和递推关系

$$A(n, k) = (k+1)A(n-1, k) + (n-k)A(n-1, k-1), n \geq 1.$$

(b) 欧拉数在

$$A(n, k) = A(n, n-k-1)$$

中是对称的.

(c) 我们有

$$\sum_k A(n, k) = n!.$$

证明. 除了递推, 我们把所有的都留作练习. 假设 $\pi \in A([n], k)$. 然后, 根据元素相对于 π 中 n 两侧的相对大小, 从 π 中删除 n 将导致 $\pi' \in A([n-1], k)$ 或者 $\pi'' \in A([n-1], k-1)$. 如果 π 中的 n 在对应于 π' 下降的空间中或在 π' 的末端, 则会产生排列 π' . 因此, 给定的 π' 将通过这个方法得到 $k+1$ 次, 这就解释了求和中的第一项. 类似地, 如果 n 在上升空间或在开始时, 则得到 π'' . 因此, 这种情况下的总重复次数是 $n-k$, 并且证明了递推性. \square

第 n 个欧拉多项式是

$$A_n(q) = \sum_{k \geq 0} A(n, k) q^k = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{des } \pi}.$$

任何具有分布 $A_n(q)$ 的统计量都被称为欧拉统计量. 另一个著名的欧拉统计数据统计了超标情况. 排列 π 的超越是一个整数 i , 使得 $\pi(i) > i$. 这就产生了超越集

$$\text{Exc } \pi = \{i | \pi(i) > i\}$$

和超标统计

$$\text{exc } \pi = \# \text{Exc } \pi.$$

举例来说, 如果 $\pi = 3167542$, 那么 $\pi(1) = 3, \pi(3) = 6$, 以及 $\pi(4) = 7$, 而对其他 i 都有 $\pi(i) \leq i$. 因此 $\text{Exc } \pi = \{1, 3, 4\}$ 以及 $\text{exc } \pi = 3$. 做一个就像我们为 des 所做的那样的表格, 其中 $n = 3$, 有因

k	0	1	2
$\text{exc } \pi = k$	123	132, 213, 312, 321	231

此, 每列中的排列数由 $A(n, k)$ 给出, 即使两个表中的排列集不一定相等.

为了证明 $A(n, k)$ 也通过超越来计算排列, 我们需要一个在枚举组合学中非常重要的映射, 它有时被称为基本双射. 在定义此函数之前, 我们需要更多的概念. 与第 1.12 节中的操作类似, 如果

$$\pi_i > \max\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{i-1}\},$$

那么当 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 时就叫元素 π_i 为一个从左到右的极大值. 请注意, π_1 和 n 始终是从左到右的极大值, 并且从左到右的极大值从左向右增加. 举例来说, $\pi = 51327846$ 的从左到右的极大值是 5, 7, 和 8. π 的从左到右的极大值决定了 π 到因子 $\pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1}$ 的左右因式分解, 其中 π_i 是从左到右的极大值, π_j 是下一个这样的极大值. 在我们的示例 π 中, 因式分解是 5132, 7 和 846.

回想一下, 由于不相交循环交换, 有许多方法可以编写不相交循环分解 $\pi = c_1 c_2 \dots c_k$. 我们希望区分一种类似于左右因式分解的方法. π 的正则循环分解是通过写入每个 c_i , 使其从 $\max c_i$ 开始, 然后对循环排序, 使

$$\max c_1 < \max c_2 < \dots < \max c_k.$$

举例来说, 按照规范编写的排列 $\pi = (7, 1, 8)(2, 4, 5, 3)(6)$ 变成 $\pi = (5, 3, 2, 4)(6)(8, 7, 1)$.

基本映射是 $\Phi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$, 其中 $\Phi(\pi)$ 是通过将每个左右系数 $\pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1}$ 替换为循环 $(\pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1})$ 得到的. 例如,

$$\Phi(51327846) = (5, 1, 3, 2)(7)(8, 4, 6) = 35261874.$$

注意, 从定义中可以看出, 得到的 $\Phi(\pi)$ 的循环分解将是正则分解. 也很容易构造逆映射 Φ : 给定 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, 我们构造其正则循环分解, 然后去掉括号和逗号的生成函数得到 π . 这些映射是逆的, 因为定义左右因式分解和正则循环分解的不等式是相同的. 我们已经证明了以下几点.

定理 4.2.2. 基本映射 $\Phi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ 是一个双射.

推论 4.2.3. 对于 $n, k \geq 0$, 我们有

$$A(n, k) = \text{有 } k \text{ 个超越数的 } \pi \in \mathfrak{S}_n \text{ 的数量.}$$

证明. $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 的共超越是 $i \in [n]$, 因此 $\pi(i) < i$. 请注意, \mathfrak{S}_n 上的共超越分布与超越分布相同. 事实上, 我们在 \mathfrak{S}_n 上有一个由 $\pi \mapsto \pi^{-1}$ 定义的双射. 这个双射的性质是, π 的超越数是 π^{-1} 的共超越数, 因为我们通过取 π 的两行符号, 交换顶行和底行, 然后排列列, 直到第一行为 $12 \dots n$, 从而获得 π^{-1} 的两行符号 (如第 1.5 节所定义的).

我们现在说明, 如果 $\Phi(\pi) = \sigma$, 其中 Φ 是基本双射, 那么 $\text{des } \pi$ 是 σ 的共超越数, 这就得以证明. 但是如果我们在 π 中有下降 $\pi(i) > \pi(i+1)$, 那么 $\pi(i), \pi(i+1)$ 必须在左右因式分解的相同因子中. 所以在 $\Phi(\pi)$ 中, 我们有一个循环映射 π_i 到 $\pi_i + 1$. 这使得 π_i 是 σ 的共激. 类似的想法表明, σ 的上升不会引起 σ 的共激, 证毕. \square

现在我们将导出两个涉及欧拉多项式的生成函数, 一个普通函数和一个指数函数.

定理 4.2.4. 对于 $n \geq 0$, 我们有

$$\frac{A_n(q)}{(1-q)^{n+1}} = \sum_{m \geq 0} (m+1)^n q^m. \quad (4.4)$$

证明. 我们将计算由排列 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 组成的下降分区排列 $\bar{\pi}$, 排列 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 在元素之间、 π_1 之前或 π_n 之后的某些空间中插入条形, 但每个下降 $\pi(i) > \pi(i+1)$ 之间的空间必须有条形. 例如, 如果 $\pi = 2451376$, 那么我们有 $\bar{\pi} = 24|5||137|6|$. 让 $b(\bar{\pi})$ 是 $\bar{\pi}$ 中的条数. 我们将证明 (4.4) 的两边都是生成函数 $f(q) = \sum_{\pi} q^{b(\bar{\pi})}$.

首先, 给定 π , 它对 $f(q)$ 的贡献是什么? 首先, 我们必须把条放在 π 的下降方向上, 从而得到一个因子 $q^{\text{des } \pi}$. 现在, 我们可以把其余的条放在 $n+1$ 的任何 π 空间中, 重复是允许的, 根据定理 3.4.2, 它给出了一个因子 $1/(1-q)^{n+1}$. 因此

$$f(q) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \frac{q^{\text{des } \pi}}{(1-q)^{n+1}} = \frac{A_n(q)}{(1-q)^{n+1}}$$

这是我们希望证明的前一半.

另一方面, $f(q)$ 中 q^m 的系数是 $\bar{\pi}$ 的个数, $\bar{\pi}$ 中正好有 m 条. 我们可以如下构造这些排列, 从 m 条开始, 在它们之间创建 $m+1$ 个空格. 现在, 将数字 $1, \dots, n$ 放在两条线之间, 确保两条连续线之间的数字形成递增序列. 因此, 我们基本上是将 n 个可分辨球放入 $m+1$ 个可分辨框中, 因为每个框中的顺序是固定的. 按照十二倍的方法, 有 $(m+1)^n$ 种方法可以完成这项工作, 这就完成了证明. \square

我们现在可以使用刚刚导出的 ogf 来找到多项式 $A_n(x)$ 的 egf.

定理 4.2.5. 我们有

$$\sum_{n \geq 0} A_n(q) \frac{x^n}{n!} = \frac{q-1}{q - e^{(q-1)x}}. \quad (4.5)$$

证明. 将前面定理中等式的两边乘以 $(1-q)^n x^n / n!$ 和 n 的数量和. 左侧变成

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(1-q)^n A_n(q) x^n}{(1-q)^{n+1} n!} = \frac{1}{1-q} \sum_{n \geq 0} A_n(q) \frac{x^n}{n!}.$$

右边现在是

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} q^m \frac{(1-q)^n (m+1)^n x^n}{n!} &= \sum_{m \geq 0} q^m \sum_{n \geq 0} \frac{[(1-q)x(m+1)]^n}{n!} \\
 &= \sum_{m \geq 0} q^m e^{(1-q)x(m+1)} \\
 &= \frac{e^{(1-q)x}}{1 - qe^{(1-q)x}} \\
 &= \frac{1}{e^{(q-1)x} - q}.
 \end{aligned}$$

将两侧设置为相等并求解所需的生成函数, 即可完成证明. \square

4.3 标记结构

有一种组合使用指数生成函数的方法, 我们将在以下部分介绍. 它基于乔亚尔的物种理论 [47]. 他最初的方法使用了范畴和函子的机制. 但是对于我们将要进行的枚举类型, 没有必要使用这种级别的通用性. Bergeron、Labelle 和 Leroux 的教科书中有对完整理论的阐述 [11].

标记结构是一个函数 S , 它为每个有限集 $S(L)$ 指定一个有限集 L , 使得

$$\#L = \#M \implies \#S(L) = \#S(M). \quad (4.6)$$

我们称 L 为标签集, $S(L)$ 为 L 上的结构集. 我们让

$$s_n = \#S(L)$$

表示基数 n 的任意 L , 这是因为 (4.6) 而定义完善的. 我们有时使用 $S(\cdot)$ 作为结构 S 的替代符号. 我们也有相应的 egf

$$F_S = F_{S(\cdot)}(x) = \sum_{n \geq 0} s_n \frac{x^n}{n!}.$$

虽然这些定义看起来很抽象, 但我们已经看到了许多标记结构的示例. 只是我们没有确定他们的性质. 本节其余部分将专门介绍这些示例的上下文. 总结见表 4.1.

首先, 考虑由 $S(L) = 2^L$ 定义的标签结构. 因此 S 将 L 的子集集合指定给每个标签集 L . 以说明

$$S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

很明显, S 满足 (4.6) 和 $s_n = \#2^L = 2^n$, 所以相关的生成函数是

$$F_2(x) = \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} = e^{2x}. \quad (4.7)$$

我们还想通过对固定的 $k \geq 0$ 使用结构 $S(L) = \binom{L}{k}$ 来指定所考虑的子集的大小. 现在我们有 $s_n = \binom{n}{k}$, 并且利用 $n < k$ 的二项式系数为零的事实可得

$$F_{\binom{\cdot}{k}}(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{x^k}{k!} e^x. \quad (4.8)$$

拥有一个不向标签集添加额外映射的贴图将非常方便. 因此, 定义标记结构 $E(L) = \{L\}$. 注意, E 返回由 L 本身组成的集合, 而不是由 L 元素组成的集合. 因此, $s_n = 1$ 代表所有 n 和 $F_E = e^x$. 对该标记结构使用 E 既反映了其 egf 是指数函数的事实, 也反映了法语单词 “set” 是 “整体”. (乔亚尔是个讲法语的人.) 我们还需要通过定义

$$\bar{E}(L) = \begin{cases} \{L\} & \text{if } L \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{if } L = \emptyset. \end{cases}$$

来指定集合是非空的. 需注意, 尽管有 $\bar{E}(\emptyset) = \emptyset$, 仍有 $E(\emptyset) = \{\emptyset\}$. 对于 \bar{E} , 很明显对于 $n \geq 1$ 有 $s_n = 1$ 和 $s_0 = 0$. 很明显也有

$$F_{\bar{E}} = e^x - 1. \quad (4.9)$$

对于集合的划分, 我们将使用结构 $L \mapsto B(L)$, 其中 $B(L)$ 的定义如第 1.4 节所述. 所以 $s_n = B(n)$, 根据定理 4.1.2, egf 是

$$F_B = \sum_{n \geq 0} B(n) \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}.$$

一旦我们在第 4.5 节推导出指数公式, 而不是像以前那样使用递归和形式化操作, 我们将能够对这一事实进行组合推导.

表 4.1: 标记结构

$S(L)$	计数	s_n	egf
2^L	子集	2^n	$\sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} = e^{2x}$
$\binom{L}{k}$	k -子集	s_n	$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k e^x}{k!}$
$E(L)$	集合	1	$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$
$\bar{E}(L)$	非空集	$1 - \delta_{n,0}$	$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$
$B(L)$	集合划分	B_n	$\sum_{n \geq 0} B(n) \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$
$S(L, k)$	用 b 块设置分区	$S(n, k)$	$\sum_{n \geq 0} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k$
$S_o(L, k)$	有序的 $S(L, k)$ 版本	$k! S(n, k)$	$k! \sum_{n \geq 0} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = (e^x - 1)^k$
$\mathfrak{S}(L)$	排列	$n!$	$\sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$
$c(L, k)$	具有 c 圈的排列	$c(n, k)$	$\sum_{n \geq 0} c(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (\ln \frac{1}{1-x})^k$
$c_o(L, k)$	有序的 $c(L, k)$ 版本	$k! c(n, k)$	$k! \sum_{n \geq 0} c(n, k) \frac{x^n}{n!} = (\ln \frac{1}{1-x})^k$
$c(L)$	具有 1 个圈的排列	$(n-1)!$	$\sum_{n \geq 1} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \ln \frac{1}{1-x}$

与子集一样, 我们将使用 $L \mapsto S(L, k)$ 限制我们对具有给定块数的分区的关注. 现在我们有 $s_n = S(n, k)$, 即第二类斯特林数. 但我们尚未找到 egf $\sum_{n \geq 0} S(n, k) x^n / n!$ 的闭合形式, 以验证表 4.1 中的条目. 一旦我们在下一节中介绍了 egfs 的求和和积规则, 我们就可以很容易地做到这一点.

我们有时会处理块上有指定顺序的集合分区, 并使用符号

$$S_o(L, k) = \{B_1, B_2, \dots, B_k | B_1/B_2/\dots/B_k \vdash L\}.$$

我们称这些有序集分区或集合组合. 请注意, 顺序是块本身, 而不是每个块中的元素, 因此 $(\{1, 3\}, \{2\}) \neq (\{2\}, \{1, 3\})$ 但是 $(\{1, 3\}, \{2\}) = (\{3, 1\}, \{2\})$. 很明显, 标记的结构 $L \mapsto S_o(L, k)$ 有 $s_n = k!S(n, k)$, 可以对 egf 做出类似的陈述. 我们还需要允许空块的弱集合组合.

我们可以用类似于我们刚才看到的集合分区的方法来观察排列上的标记结构. 在这种情况下, 将 L 的排列视为分解为循环的双射 $\Pi: L \rightarrow L$ 是一个双射, 正如我们在第 1.5 节中对 $L = [n]$ 所做的那样. 设 $S(L) = \mathfrak{S}_L$ 是 L 的所有排列的标记结构, 使得 $s_n = n!$ 和 $F_{\mathfrak{S}} = \sum_n n!x^n n! = 1/(1-x)$. 我们有关联结构

$$c(L, k) = \{\pi = c_1 c_2 \dots c_k \mid \pi \text{ 是 } L \text{ 的 } k \text{ 个循环 } c_i \text{ 的排列}\}$$

和有序变量

$$c_o(L, k) = \{(c_1, c_2, \dots, c_k) \mid c_i \text{ 是 } L \text{ 排列的循环}\}.$$

使用第一类无符号斯特林数, 我们可以看到这两种结构的序列的计数分别是 $c(n, k)$ 和 $k!c(n, k)$. 同样, 我们将等待计算相应的 egfs.

最后, 我们会发现只有一个循环的特例 $c(L) := c(L, 1)$ 特别有用. 在这种情况下, 计数器很容易计算.

命题 4.3.1. 我们有

$$\#c([n]) = \begin{cases} (n-1)! & \text{if } n \geq 1, \\ 0 & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

证明. 空排列没有圈, 因此 $c(\emptyset) = 0$. 假设 $n \geq 1$, 并考虑 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in c([n])$. 那么这样的圈数是排序 a_i 的方式数除以给出相同圈的排序数, 即 $n!/n = (n-1)!$. \square

根据前面的命题,

$$F_c = \sum_{n \geq 1} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = \ln \frac{1}{1-x}$$

由 (4.2) 所定义.

4.4 egfs 的和积规则

与集合和 ogfs 一样, egfs 也有求和规则和乘积规则. 为了得到这些结果, 我们首先需要标记结构的相应规则.

假设 \mathcal{S} 和 \mathcal{T} 是标记的结构. 如果对于任何有限集 L 有 $\mathcal{S}(L) \cap \mathcal{T}(L) = \emptyset$, 那么我们说 \mathcal{S} 和 \mathcal{T} 是不相交的. 在这种情况下, 我们用

$$(\mathcal{S} \uplus \mathcal{T})(L) = \mathcal{S}(L) \uplus \mathcal{T}(L).$$

定义它们的不相交并结构 $\mathcal{S} \uplus \mathcal{T}$. 很容易看出, 我们将在下面的命题 4.4.1 中证明, $\mathcal{S} \uplus \mathcal{T}$ 满足标记结构的定义. 作为这个概念的例子, 假设 $\#L = n$. 那么 2^L 可以被划分为 L 的子集, 2^L 的大小为 k , 其中 $0 \leq k \leq n$. 换句话说

$$2^L = \binom{L}{0} \uplus \binom{L}{1} \uplus \dots \uplus \binom{L}{n}. \quad (4.10)$$

请注意, 要对所有 L 进行说明, 而不考虑基数, 因为对于 $k > \#L$ 有 $\binom{L}{k} = \emptyset$, 我们可以说 $2^L = \uplus_{k \geq 0} \binom{L}{k}$. 同样地, 我们有

$$B(L) = S(L, 0) \uplus S(L, 1) \uplus \cdots \uplus S(L, n) \quad (4.11)$$

和

$$\mathfrak{S}(L) = c(L, 0) \uplus c(L, 1) \uplus \cdots \uplus c(L, n). \quad (4.12)$$

要定义乘积, 让 \mathcal{S} 和 \mathcal{J} 是任意标记的结构. 它们的乘积, $\mathcal{S} \times \mathcal{J}$, 由

$$\mathcal{S} \times \mathcal{J} = \{(S, T) | S \in \mathcal{S}(L_1), T \in \mathcal{J}(L_2) \text{ 以及 } L \text{ 的弱组合 } (L_1, L_2)\}$$

所定义. 直观地, 我们以各种可能的方式将 L 划分为两个子集, 并在第一个子集上放置 \mathcal{S} 结构, 在第二个子集上放置 \mathcal{J} 结构. 我们将再次证明, 这确实是命题 4.4.1 中的标记结构. 严格地说, $\mathcal{S} \times \mathcal{J}$ 应该是一个多重集, 因为同一对 (S, T) 可能来自两个不同的有序分区. 然而, 在我们将使用的示例中, 情况永远不会是这样. 如果我们用多重数计算, 我们将证明的关于乘积的定理在更一般的情况下仍然成立.

为了给出一些乘积的例子, 我们需要一个结构等效的概念. 假设标记的结构 \mathcal{S} 和 \mathcal{J} 是相等的, 如果

$$\# \mathcal{S}(L) = \# \mathcal{J}(L)$$

对所有有限的 L 成立, 则让 $\mathcal{S} \equiv \mathcal{J}$. 有时, 如果上下文能够方便地包含通用标签集 L , 那么我们会为此令 $\mathcal{S}(L) \equiv \mathcal{J}(L)$. 显然, 如果 $\mathcal{S} \equiv \mathcal{J}$, 那么 $F_{\mathcal{S}}(x) = F_{\mathcal{J}}(x)$. 作为这些概念的第一个例证, 我们称

$$2^* \equiv (E \times E)(\cdot). \quad (4.13)$$

为了弄明白这个, 我们需注意的是, 子集 $S \in 2^L$ 是通过映射

$$S \leftrightarrow (S, L - S)$$

的弱组合的双射. 因此 $\#2^L = \#(E \times E)(L)$ 是我们希望得到的结果. 这些相同的想法表明, 我们有 $S_o(\cdot, 2) = (\bar{E} \times \bar{E})(\cdot)$, 更一般地说, 对于任何 $k \geq 0$, 有

$$S_o(\cdot, k) = \bar{E}^k(\cdot). \quad (4.14)$$

以类似的方式, 我们得到

$$c_o(\cdot, k) = c^k(\cdot). \quad (4.15)$$

现在是时候证明标记结构的和积规则了. 这样做, 我们还将证明它们满足标记结构的定义 (4.6).

命题 4.4.1. 令 \mathcal{S}, \mathcal{J} 是标记结构以及当 $\#L = n$ 时令 $s_n = \# \mathcal{S}(L), t_n = \# \mathcal{J}(L)$.

(a) (求和规则) 如果 \mathcal{S} 和 \mathcal{J} 不相交, 那么

$$\#(\mathcal{S} \uplus \mathcal{J})(L) = s_n + t_n.$$

(b) (求积规则) 对于任何 \mathcal{S}, \mathcal{J} 得到

$$\#(\mathcal{S} \times \mathcal{J})(L) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k t_{n-k}.$$

证明. 对于 (a), 我们有

$$\#(\mathcal{S} \uplus \mathcal{J})(L) = \#(\mathcal{S}(L) \uplus \mathcal{J}(L)) = \#\mathcal{S}(L) + \#\mathcal{J}(L) = s_n + t_n.$$

现在考虑 (b), 为了构建 $(\mathcal{S}, \mathcal{J}) \in (\mathcal{S} \times \mathcal{J})(L)$, 我们必须首先选取弱组合 $L = L_1 \uplus L_2$, 这相当于只选取 L_1 作为 $L_2 = L - L_1$. 因此, 如果 $\#L_1 = k$, 然后有 $\binom{n}{k}$ 种方法去可以执行此步骤. 接下来, 我们必须在 L_1 上放置 \mathcal{S} 结构, 在 L_2 上放置 \mathcal{J} 结构, 这可以用 $s_k t_{n-k}$ 种方式完成. 将两个计数相乘, 然后对所有可能的 k 求和, 得到所需的公式. \square

作为这个结果的应用, 请注意, 将求和规则应用于 (4.10) 只会得到 $2_n = \sum_k \binom{n}{k}$, 即定理 1.3.3 (c). 如果我们将乘积规则应用于 (4.13), 我们会再次得到

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

本章练习 8 (b) 推导出了一些更有趣的公式.

我们现在可以将命题 4.4.1 转换为指数生成函数的相应规则. 这将允许我们填写上一节中表 4.1 中后续的条目.

定理 4.4.1. 令 \mathcal{S}, \mathcal{J} 是标记结构.

(a) (求和规则) 如果 \mathcal{S} 和 \mathcal{J} 不相交, 那么

$$F_{\mathcal{S} \uplus \mathcal{J}}(x) = F_{\mathcal{S}}(x) + F_{\mathcal{J}}(x).$$

(b) (求积规则) 对于任何 \mathcal{S}, \mathcal{J} 得到

$$F_{\mathcal{S} \times \mathcal{J}}(x) = F_{\mathcal{S}}(x) \cdot F_{\mathcal{J}}(x).$$

证明. 令 $s_n = \mathcal{S}([n])$ 以及 $t_n = \mathcal{J}([n])$. 使用命题 4.4.1 中的求和规则, 得出

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{S}}(x) + F_{\mathcal{J}}(x) &= \sum_{n \geq 0} s_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} t_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} (s_n + t_n) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \#(\mathcal{S} \uplus \mathcal{J})([n]) \frac{x^n}{n!} \\ &= F_{\mathcal{S} \uplus \mathcal{J}}(x). \end{aligned}$$

现在使用同一命题的乘积法则得到

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{S}}(x) F_{\mathcal{J}}(x) &= \left(\sum_{n \geq 0} s_n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} t_n \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{s_k}{k!} \cdot \frac{t_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k t_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \#(\mathcal{S} \times \mathcal{J})([n]) \frac{x^n}{n!} \\ &= F_{\mathcal{S} \times \mathcal{J}}(x), \end{aligned}$$

这就完成了证明. \square

为了说明如何使用该结果, 我们可以将求和规则应用于 (4.10), 记住等式后面的注释, 写出

$$F_{2\cdot}(x) = \sum_{k \geq 0} F_{(\cdot)_k}(x).$$

我们可以使用 (4.7) 和 (4.8) 进行检查:

$$\sum_{k \geq 0} F_{(\cdot)_k}(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} e^x = e^x \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} = e^x \cdot e^x = e^{2x} = F_{2\cdot}(x).$$

还可以将乘积规则应用于 (4.13) 并得到

$$F_{2\cdot}(x) = F_E(x)F_E(x).$$

同样, 这产生了一个简单的恒等式; 即 $e^{2x} = e^x \cdot e^x$. 定理 4.4.2 的真正威力在于, 它可以用来推导 egfs, 而 egfs 更难用其他方法证明. 例如, 将乘积规则应用于等式 (4.14) 和 (4.9) 得到

$$F_{S_o}(\cdot, k)(x) = F_{\bar{E}}(x)^k = (e^x - 1)^k,$$

表 4.1 的新条目. 此外, 由于 $F_{S_o}(\cdot, k)(x) = k!F_{S(\cdot, k)}(x)$ 我们得到

$$F_{S(\cdot, k)}(x) = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

这允许我们给出 $B(n)$ 的 egf 的另一个推导. 使用求和规则和 (4.11) 得到

$$F_B(x) = \sum_{k \geq 0} F_{S(\cdot, k)}(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(e^x - 1)^k}{k!} = e^{e^x - 1}.$$

正如读者在练习中被要求做的那样, 这些相同的想法可用于推导具有给定周期数的排列的 egfs.

4.5 指数公式

在组合数学和其他数学领域中, 常常存在可以分解为组件的对象. 例如, 集合分区的组件是块, 排列的组件是循环. 指数公式根据标记结构成分的 egf 确定其 egf. 它也可以被视为 egfs 的乘积规则的类似物, 其中一个将 L 切割成任意数量的子集 (而不仅仅是 2 个), 而这些子集是无序的 (而不是有序的).

为了使这些想法更精确, 让 \mathcal{S} 是满足

$$\mathcal{S}(L) \cap \mathcal{S}(M) = \emptyset \text{ 如果 } L \neq M \quad (4.16)$$

的标记结构. 相应的分区结构, $\Pi(\mathcal{S})$, 由

$$(\Pi(\mathcal{S}))(L) = \{\{S_1, S_2, \dots\} \mid \text{任何 } i, \text{ 对于所有的 } L_1/L_2/\dots \vdash L \text{ 有 } S_i \in \mathcal{S}(L_i)\}$$

定义. 直观地说, 为了形成 $\Pi(\mathcal{S})(L)$, 我们以所有可能的方式对标签集 L 进行分区, 然后以所有可能的方式将 \mathcal{S} 的结构放在分区的每个块上. 施加条件 (4.16), 使得 $\Pi(\mathcal{S})(L)$ 的每个元素只能以一种方式从该过程中产生. 举例来说,

$$B(L) = \{L_1/L_2/\dots \vdash L\} \equiv (\Pi(E))(L) \quad (4.17)$$

因为 L_i 是任何 i 的 $E(L_i)$ 的唯一元素. 以同样的方式, 我们可以看到

$$\mathfrak{S}(L) = \{c_1 c_2 \dots \mid \text{任何 } i, \text{ 对于所有的 } L_1/L_2/\dots \vdash L \text{ 有 } c_i \text{ 是 } L_i \text{ 上的一个循环}\} \equiv (\Pi(c))(L). \quad (4.18)$$

在 $\Pi(\mathcal{S})$ 的 egf 和 $\bar{\mathcal{S}}$ 的 egf 之间有一个简单的关系, $\bar{\mathcal{S}}$ 的 egf 是由

$$\bar{\mathcal{S}}(L) = \begin{cases} \mathcal{S}(L) & \text{if } L \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{if } L = \emptyset. \end{cases}$$

定义的标记结构. 因此如果 $s_n = \#\mathcal{S}([n])$, 那么

$$F_{\bar{\mathcal{S}}}(x) = \sum_{n \geq 1} s_n \frac{x^n}{n!}.$$

我们需要 $F_{\bar{\mathcal{S}}}(x)$ 有一个零常数项, 这样下一个结果的构成成分就会得到很好的定义, 见定理 3.3.3.

定理 4.5.1. (指数公式). 如果 \mathcal{S} 是符合 (4.16) 要求的标记结构, 则

$$F_{\Pi(\mathcal{S})}(x) = e^{F_{\bar{\mathcal{S}}}(x)}.$$

证明. 从定理 4.4.2 中 egfs 的乘积规则可以看出, $F_{\bar{\mathcal{S}}}(x)^k$ 是将标签集的分区的 \mathcal{S} 结构放入 k 有序非空块的 egf. 所以, 根据 (4.16), $F_{\bar{\mathcal{S}}}(x)^k/k!$ 是 egf, 用于将标签集的分区的 \mathcal{S} 结构放入 k 无序的非空块中. 现在使用 egfs 的求和规则, 同样来自定理 4.4.2, 可以得出 $\sum_{k \geq 0} F_{\bar{\mathcal{S}}}(x)^k/k!$ 是 egf, 用于将标签集的分区的 \mathcal{S} 结构放入任意数量的无序非空块中. 但这正是结构 $\Pi(\mathcal{S})$, 所以我们完成了证明. \square

作为指数公式的首次应用, 请考虑 (4.17). 在这个例子中, $\mathcal{S} = E$ 和 $F_{\bar{E}}(x) = e^x - 1$. 因此, 应用前面的定理,

$$F_B(x) = F_{\Pi(\bar{E})}(x) = e^{F_{\bar{E}}(x)} = e^{e^x - 1}.$$

尽管我们已经知道这个生成函数, 但这个证明在计算和概念上都是最简单的.

我们可以以类似的方式使用 (4.18). 现在 $\mathcal{S} = c$ 以及

$$F_c(x) = \ln(1/(1-x)) = F_{\bar{c}}(x),$$

因为原 egf 已经没有常数项了. 应用指数公式得出

$$F_{\mathfrak{C}}(x) = F_{\bar{c}}(x) = e^{F_{\bar{c}}(x)} = e^{\ln(1/(1-x))} = \frac{1}{1-x},$$

这至少与我们之前计算的 egf 相一致, 尽管这是一种更为迂回的方法. 但有了定理 4.5.1, 就很容易得到关于排列或其他标记结构的更精确信息. 例如, 假设我们希望对定理 4.1.1 中的错乱数 $D(n)$ 的 egf 给出一个更简单、更组合的推导. 相应的结构由

$$\mathcal{D}(L) = L \text{ 上的错乱数}$$

定义. 为了将 $\mathcal{D}(L)$ 表示为分区结构, 我们需要只允许长度为 2 或更大的循环. 所以让

$$\mathcal{S}(L) = \begin{cases} c(L) & \text{if } \#L \geq 2, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此, $\mathcal{D} \equiv \Pi(\mathcal{S})$. 此外,

$$s_n = \begin{cases} (n-1)! & \text{if } n \geq 2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

因此

$$F_{\bar{\mathcal{S}}}(x) = \sum_{n \geq 2} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n!} = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) - x.$$

应用指数公式得出

$$\sum_{n \geq 0} D(n) \frac{x^n}{n!} = F_{\mathcal{D}}(x) = F_{\Pi(\mathcal{S})}(x) = \exp \left(\ln \left(\frac{1}{1-x} \right) - x \right) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \quad (4.19)$$

人们可以从定理 4.5.1 中挖掘更多的信息, 因为证明表明每个求和 $F_{\bar{\mathcal{S}}}(x)^k/k!$ 都有组合意义. 定义双曲正弦和余弦函数为形式幂级数

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

和

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

很容易看出, 对于任何形式的幂级数 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, 我们都可以通过

$$\sum_{n \geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1} = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{和} \quad \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n} = \frac{f(x) + f(-x)}{2}. \quad (4.20)$$

提取奇偶项级数. 因此,

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{和} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (4.21)$$

用

$$(\Pi_o(\mathcal{S}))(L) = \{S_1, S_2, \dots \in (\Pi_o(\mathcal{S}))(L) \mid L \text{ 划分为奇数个块}\}$$

定义奇数分区结构 $\Pi_o(\mathcal{S})$, 同样定义偶划分结构 $\Pi_e(\mathcal{S})$. 类似指数公式的证明可用于证明以下内容.

定理 4.5.2. 如果 \mathcal{S} 是满足 (4.16) 的标记结构, 则有

$$F_{\Pi_o(\mathcal{S})}(x) = \sinh F_{\bar{\mathcal{S}}}(x)$$

和

$$F_{\Pi_e(\mathcal{S})}(x) = \cosh F_{\bar{\mathcal{S}}}(x).$$

现在假设我们想要找到 a_n 的 egf, 它是 $[n]$ 的排列数, 具有奇数个循环. 与前面的 $\mathcal{S} = c$ 和 $F_c(x) = F_{\bar{c}}(x) = \ln(1/(1-x))$ 一样, 使用定理 4.5.2, 然后 (4.21), 我们可以看到

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} &= \sinh F_{\bar{c}}(x) \\ &= \frac{e^{\ln(1/(1-x))} + e^{-\ln(1/(1-x))}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - (1-x) \right) \\ &= x + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} x^n. \end{aligned}$$

从上述第一个和最后一个和中提取 $x^n/n!$ 的系数得到

$$a_n = \begin{cases} n!/2 & \text{if } n \geq 2, \\ 1 & \text{if } n = 1. \end{cases} \quad (4.22)$$

当然, 一旦你得到了这样一个简单的答案, 你就会想要一个纯粹的组合解释, 鼓励读者在本章练习 12 (c) 中找到一个.

4.6 习题

(1) (a) 使用第 2 章练习 4 中的错乱数递归来重新证明定理 4.1.1.

(b) 使用第 2 章练习 5 中的错乱数递归来重新证明定理 4.1.1.

(2) (a) 完成定理 4.2.1 的证明.

(b) 完成定理 4.2.3 的证明.

(c) 给出恒等式

$$(m+1)^n = \sum_{k \geq 0} A(n, k) \binom{m+n-k}{n}$$

的两个证明, 一个使用方程 (4.4), 另一个使用下降分区排列.

(d) 给出 $A(n, k)$ 的以下公式的组合证明:

$$A(n, k) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k-i+1)^n.$$

提示: 使用包含和排除以及下降分区排列的原则.

(e) 给出 $n \geq 1$ 的下列递归的组合证明:

$$A_n(q) = A_{n-1}(q) + q \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} A_i(q) A_{n-i-1}(q).$$

提示: 将每个 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 作为 $\pi = \sigma n \tau$ 的因子.

(f) 使用 (e) 再次证明 (4.5) .

(3) 设 $I \subset \mathbb{P}$ 是有限的, 如果 I 是非空的, 则设 $m = \max I$, 如果 $I = \emptyset$ 是 $m = 0$. 对于 $n > m$, 定义相应的下降多项式 $d(I; n)$ 为 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 的个数, 使得 $\text{Des } \pi = I$.

(a) 证明 $d([k]; n) = \binom{n-1}{k}$.

(b) 如果 $I \neq \emptyset$, 让 $I^- = I - \{m\}$. 证明

$$d(I; n) = \binom{n}{m} d(I^-; m) - d(I^-; n).$$

提示: 考虑 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 的集合, 使 $\text{Des } (\pi_1 \pi_2 \dots \pi_m) = I^-$ 和 $\pi_{m+1} < \pi_{m+2} < \dots < \pi_n$.

(c) 使用第 (b) 部分说明 $d(I; n)$ 是 n 中具有 $\deg(I; n) = m$ 次的多项式.

- (d) 用包含和排除原理证明 $d(I; n)$ 是 n 中的多项式.
- (e) 由于 $d(I; n)$ 是 n 中的多项式, 它的定义域可以扩展到所有 $n \in \mathbb{C}$. 显示如果 $i \in I$, 那么 $d(I; i) = 0$.
- (f) 证明 $d(I; n)$ 的复根都位于复平面上的圆 $|z| \leq m$ 中, 并且都有大于或等于 -1 的实部. 注: 这似乎是一个困难的问题.
- (g) (猜想) 证明 $d(I; n)$ 的复根都位于圆

$$\left| z - \frac{m+1}{2} \right| \leq \frac{m-1}{2}$$

中. 注意, 这个猜想暗示了 (f) 部分.

- (4) (a) 使用 $S(n, k)$ 的递归和表 4.1 中的生成函数这两种方法导出生成函数:

$$\sum_{n, k \geq 0} S(n, k) t^k \frac{x^n}{n!} = e^{t(e^x - 1)}.$$

- (b) 使用第 (a) 部分重新推导 Bell 数 $B(n)$ 的 egf.

- (5) (a) 找到一个 $\sum_{n, k \geq 0} c(n, k) t^k x^n / n!$ 的公式, 并用两种方法证明: 使用 $c(n, k)$ 的递归和表 4.1 中的生成函数.

- (b) 使用第 (a) 部分重新推导排列结构 $\mathfrak{S}(\cdot)$ 的 egf.

- (6) (a) 设 i_n 是 \mathfrak{S}_n 中的对合数. 证明 $i_0 = i_1 = 1$ 和 $n \geq 2$ 时有

$$i_n = i_{n-1} + (n-1)i_{n-2}.$$

- (b) 使用 (a) 部分中的递归和使用指数公式这两种方法证明

$$\sum_{n \geq 0} i_n \frac{x^n}{n!} = e^{x+x^2/2}.$$

- (c) 给定 $A \subseteq \mathbb{P}$, 设 $S(n, A)$ 是 $[n]$ 的分区数, 所有分区的块大小都是 A 的元素. 使用指数公式找到并证明 $\sum_{n \geq 0} S(n, A) x^n / n!$.

- (d) 对 $c(n, A)$ 重复第 (c) 部分, $[n]$ 的排列数中所有循环的长度都是 A 的元素.

- (7) 在定理 4.1.3 的证明中填写查找 egf 和求解微分方程的详细信息.

- (8) (a) 使用 (4.14) 和乘积规则标记结构, 对于 $n \geq 1$ 时, 证明

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1.$$

- (b) 使用 (4.15) 和乘积规则标记结构, 对于 $n \geq 0$, 证明

$$c(n+1, 2) = n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- (9) (a) 使用定理 4.4.2 推导表 4.1 中结构 $c_o(\cdot, k)$ 和 $c(\cdot, k)$ 的 egfs.

(b) 使用部分 (a) 重新推导结构 $\mathfrak{S}(\cdot)$ 的 egf.

(10) (a) 假设 \mathcal{S} 是满足 (4.16) 的标记结构, \mathcal{J} 是任何标记结构. 它们的组成 $\mathcal{S} \circ \mathcal{J}$ 是这样的结构, 即

$$(\mathcal{J} \circ \mathcal{S})(L) = \{(\{S_1, S_2, \dots\}, T) | \text{任何 } i \text{ 以及 } T \in \mathcal{J}(\{S_1, S_2, \dots\}), \text{ 对于所有的 } L_1/L_2/\dots \vdash L \text{ 有 } S_i \in \mathcal{S}(L_i)\}.$$

证明

$$F_{\mathcal{J} \circ \mathcal{S}}(x) = F_{\mathcal{J}}(F_{\mathcal{S}}(x)).$$

(b) 使用 (a) 重新推导指数公式.

(11) 设 \mathcal{F} 是由以 L 为顶点集的族组成的标记结构. 证明

$$\sum_{n \geq 0} \# \mathcal{F}([n]) \frac{x^n}{n!} = \exp \left(\sum_{n \geq 1} n^{n-2} x^n / n! \right).$$

(12) (a) 证明恒等式 (4.20) .

(b) 证明定理 4.5.2.

(c) 通过在具有奇数个循环的 $[n]$ 排列, 其中 $n \geq 2$, 以及具有偶数个循环的排列之间找到一个双射来证明 (4.22) .

(d) 用两种方法求循环数为偶数的 $[n]$ 的排列数的公式: 利用定理 4.5.2 和 (4.22)

(13) 设 a_n 是 \mathfrak{S}_n 中具有偶数个循环的排列数, 所有循环的长度均为奇数.

(a) 使用奇偶校验参数表明, 如果 n 是奇数, 那么 $a_n = 0$.

(b) 使用 egfs 证明, 如果 n 是偶数, 则

$$a_n = \binom{n}{n/2} \frac{n!}{2^n}.$$

(c) 使用部分 (b) 表明, 如果 n 是偶数, 那么在投掷一枚公平硬币的过程中, n 次恰好出现 $n/2$ 次正面的概率与从 \mathfrak{S}_n 中均匀随机选择的排列具有偶数个周期的概率相同, 所有周期的长度都是奇数.

(d) 当 n 为偶数时, 通过在对 (S, π) (其中 $S \in \binom{[n]}{n/2}$ 和 $\pi \in \mathfrak{S}_n$) 和对 (T, σ) (其中 $T \in 2^{[n]}$ 和 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$) 有偶数个循环之间给出一个双射来重新解释部分 (c), 所有循环的长度都为奇数.

(14) 设 j_n 是 \mathfrak{S}_n 中没有固定点的对合数.

(a) 给出 $j_{2n+1} = 0$ 和 $j_{2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$ 的组合证明.

(b) 使用指数公式找到指数生成函数 $\sum_{n \geq 0} j_n \frac{x^n}{n!}$ 的简单表达式.

(c) 使用 (b) 中的指数生成函数对 (a) 中的公式进行第二次推导.