

组合数学

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn



第 5 章 生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数代数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 利用生成函数求解递推关系
- ⑤ 普通型生成函数
- ⑥ 指数型生成函数

生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数代数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 利用生成函数求解递推关系
- ⑤ 普通型生成函数
- ⑥ 指数型生成函数

引论：生成函数

生成函数 (generating function) 是一种简单而有效的数学工具，最早由 Laplace 和 Euler 引入，在组合计数中有广泛应用.

核心思想是将一个数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

表示为幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

将整个数列“整体化”，然后通过分析幂级数 $A(x)$ 来研究数列的构造与性质.

生成函数定义

序列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 的 **生成函数** 记为

$$G\{a_n\} = A(x).$$

通常，用 $[x^n]A(x)$ 表示 $A(x)$ 中 x^n 的系数.

二项式生成函数示例

考虑二项式系数序列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

生成函数为

$$f_n(x) = (1+x)^n.$$

例 1: 全部系数和

对 $x = 1$, 得到全部系数和:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

例 2: 加权系数和

通过对 $(1+x)^n$ 求导:

$$\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}.$$

例 3: 范德蒙德恒等式

比较等式

$$(x+1)^{m+n} = (x+1)^m (x+1)^n$$

两边 x^k 的系数, 可得到

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

例 1

投掷一次骰子, 出现点数 $1, 2, \dots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$.

连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少?

连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少?

例 1

投掷一次骰子, 出现点数 $1, 2, \dots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$.

连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少?

连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少?

一次投掷出现的点数有 6 种可能.

连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i, j) (1 \leq i, j \leq 6)$, 共有 $6^2 = 36$ 种可能.

由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能:

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4),$$

所以概率为 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

例 1

投掷一次骰子, 出现点数 $1, 2, \dots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$.

连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少?

连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少?

一次投掷出现的点数有 6 种可能.

连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i, j) (1 \leq i, j \leq 6)$, 共有 $6^2 = 36$ 种可能.

由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能:

$$(4, 6), (5, 5), (6, 4),$$

所以概率为 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

如果问题是连续投掷 10 次, 其点数之和为 30 的概率有多少, 这时就不那么简单了.

这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多, 难以一一列举, 要解决这个问题, 只能另辟新径.

解 我们用多项式

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

表示投掷一次可能出现点数 $1, 2, \dots, 6$, 观察

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

从两个括号中分别取出 x^m 和 x^n , 使

$$x^m \cdot x^n = x^{10},$$

即是两次投掷分别出现点数 m, n , 且 $m + n = 10$.

由此得出, 展开式中 x^{10} 的系数就是满足条件的方法数.

同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10}$$

中 x^{30} 的系数.

因为

$$\begin{aligned} & (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10} \\ &= x^{10} (1 - x^6)^{10} (1 - x)^{-10} \\ &= x^{10} \cdot \left(\sum_{i=0}^{10} (-1)^i \binom{10}{i} x^{6i} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{10-1+i}{i} x^i \right) \end{aligned}$$

同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10}$$

中 x^{30} 的系数.

因为

$$\begin{aligned} & (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10} \\ &= x^{10} (1 - x^6)^{10} (1 - x)^{-10} \\ &= x^{10} \cdot \left(\sum_{i=0}^{10} (-1)^i \binom{10}{i} x^{6i} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{10-1+i}{i} x^i \right) \end{aligned}$$

所以, x^{30} 的系数为

$$\binom{29}{20} - \binom{23}{14} \binom{10}{1} + \binom{17}{8} \binom{10}{2} - \binom{11}{2} \binom{10}{3} = 2930455.$$

故所求概率为

$$\frac{2930455}{6^{10}} \approx 0.0485$$

生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数代数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 利用生成函数求解递推关系
- ⑤ 普通型生成函数
- ⑥ 指数型生成函数

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \quad (1)$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad (2)$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题.

数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \quad (1)$$

的生成函数是幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad (2)$$

由于只有收敛的幂级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题.

为了解决这个问题, 我们从代数的观点引入形式幂级数的概念.

我们称幂级数 (2) 是形式幂级数, 其中的 x 是未定元, 看作是抽象符号.

对于实数域 \mathbb{R} 上的数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$, x 是 \mathbb{R} 上的未定元, 表达式

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

称为 \mathbb{R} 上的形式幂级数.

形式幂级数

一般情况下, 形式幂级数被认为是形式的, x 只是一个抽象符号, 并不需要对 x 赋予具体数值, 因而就**不需要考虑它的收敛性**.

在这样定义下, 解析收敛不是问题, 对于 $\sum_{n \geq 0} n!x^n$, 除了在 $x = 0$ 处外没有其他点收敛, 我们也可讨论形式幂级数.

定义 2.1

设 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 是 \mathbb{R} 上的两个形式幂级数, 若对任意 $k \geq 0$, 有 $a_k = b_k$, 则称 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相等, 记作 $A(x) = B(x)$.

我们用符号

$$\mathbb{R}[[x]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ 对于所有的 } n \geq 0 \right\}$$

表示形式幂级数的集合.

它的加法、数乘、乘法规则定义如下

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n,$$

$$c \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} (c a_n) x^n,$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} c_n x^n,$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 且

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

定理 2.2

对 $\mathbb{R}[[x]]$ 中的任意一个元素 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 有乘法逆元当且仅当 $a_0 \neq 0$.

证明 \Rightarrow 设存在 $B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, 使 $A(x)B(x) = 1$

比较两边的常数项得到 $a_0 b_0 = 1$, 因而 $a_0 \neq 0$.

\Leftarrow 若 $a_0 \neq 0$.

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 \\ \dots \\ a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_0 b_k = 0 \\ \dots \end{cases}$$

其为关于 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$ 的一个非齐次线性方程组,

对任意因定的正整数 k , 将 b_0, b_1, \dots, b_k 当作未知量, 解前 $k+1$ 个非齐次线性方程组.

例 1 投掷一次骰子, 出现点数 $1, 2, \dots, 6$ 的概率均为 $\frac{1}{6}$. 连续投掷两次, 出现的点数之和为 10 的概率有多少? 连续投掷 10 次, 出现的点数之和为 30 的概率又是多少? 一次投掷出现的点数有 6 种可能. 连续两次投掷得到的点数构成二元数组 $(i, j) (1 \leq i, j \leq 6)$, 共有 $6^2 = 36$ 种可能. 由枚举法, 两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能: $(4, 6), (5, 5), (6, 4)$, 所以概率为 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. 如果问题是连续投掷 10 次, 其点数之和为 30 的概率有多少, 这时就不那么简单了. 这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多, 难以一一列举, 要解决这个问题, 只能另辟新径. 6 / 63 解我们用多项式 $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ 表示投掷一次可能出现点数 $1, 2, \dots, 6$, 观察 $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$. 从两个括号中分别取出 x^m 和 x^n , 使 $x^m \cdot x^n = x^{10}$, 即是两次投掷分别出现点数 m, n , 且 $m + n = 10$. 由此得出, 展开式中 x^{10} 的系数就是满足条件的方法数. 7 / 63 同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为 $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10}$ 中 x^{30} 的系数. 因为 $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10} = x^{10} (1 - x^6)^{10} (1 - x)^{-10} = x^{10} \cdot \left(\sum_{i=0}^{10} (-1)^i \binom{10}{i} x^{6i} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{10-1+i}{i} x^i \right)$ 8 / 63 同理, 连续投掷 10 次, 其和为 30 的方法数为 $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10}$ 中 x^{30} 的系数. 因为 $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10} = x^{10} (1 - x^6)^{10} (1 - x)^{-10} = x^{10} \cdot \left(\sum_{i=0}^{10} (-1)^i \binom{10}{i} x^{6i} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{10-1+i}{i} x^i \right)$ 所以, x^{30} 的系数为 $(\binom{29}{20} - \binom{23}{14}) \binom{10}{1} + (\binom{17}{8}) \binom{10}{2} - (\binom{11}{2}) \binom{10}{3} = 2930455$. 故所求概率为 $\frac{2930455}{6^{10}}$

0.0485 8 / 63 生成函数 1 引论 2 容斥原理 3 容斥原理的应用第二类 Stirling 数满射的计数欧拉函数
错排问题不含连续数对的排列问题有限重数的多重集合的组合数 4 偏序集上的反演公式 9 / 63 数
列 a_0, a_1, a_2, \dots (1) 的生成函数是幂级数 $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ (2) 由于只有收敛的幂
级数才有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题. 10 / 63 数列 a_0, a_1, a_2, \dots (1) 的生成函数是幂级数 $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ (2) 由于只有收敛的幂级数才
有解析意义, 并可以作为函数进行各种运算, 这样就有了级数收敛性的问题. 为了解决这个问题, 我
们从代数的观点引入形式幂级数的概念. 我们称幂级数 (2) 是形式幂级数, 其中的 x 是未定元, 看作
是抽象符号. 对于实数域 R 上的数列 a_0, a_1, a_2, \dots , x 是 R 上的未定元, 表达式 $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ 称为 R 上的形式幂级数. 10 / 63 形式幂级数一般情况下, 形式幂级数被认为是形式
的, x 只是一个抽象符号, 并不需要对 x 赋予具体数值, 因而就不需要考虑它的收敛性. 在这样定义
下, 解析收敛不是问题, 对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 除了在 $x=0$ 处外没有其他点收敛, 我们也可讨论形式幂级
数. 定义 2.1 设 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 与 $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 是 R 上的两个形式幂级数, 若对任意
 $k \geq 0$, 有 $a_k = b_k$, 则称 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相等, 记作 $A(x) = B(x)$. 11 / 63 我们用符号 $R[[x]] = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_n \in R \text{ 对于所有的 } n \geq 0 \}$ 表示形式幂级数的集合. 它的加法、数乘、乘法规则定义如下
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$, $c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n =$

$\sum_{k=0}^n c_k x^k$, 其中 $c_k \in R$ 且 $c_n \neq 0$. 12 / 63 定理 2.2 对 $R[[x]]$ 中的任意一个元素 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 有乘法逆元当且仅当 $a_0 \neq 0$. 证明 设存在 $B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, 使 $A(x)B(x) = 1$. 比较两边的常数项得到 $a_0 b_0 = 1$, 因而 $a_0 \neq 0$. 若 $a_0 \neq 0$. $a_0 b_0 = 1$ $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$ $a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 \cdots a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_0 b_k = 0 \cdots$ 其为关于 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_k, \cdots$ 的一个非齐次线性方程组, 对任意因定的正整数 k , 将 b_0, b_1, \dots, b_k 当作未知量, 解前 $k+1$ 个非齐次线性方程组. 13 / 63

前 $k + 1$ 个方程的系数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = a_0^{k+1} \neq 0$$

由克拉默法则知该非齐次线性方程组有唯一解,

即方程组对 (b_0, b_1, \dots, b_k) 有唯一解.

所对应形式幂级数为

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

则 $B(x)$ 为 $A(x)$ 的乘法逆元.

例 2

求 $(1 - x)$ 的逆元

例 2

求 $(1-x)$ 的逆元

解 令 $A(x) = (1-x)$, 设其逆为 $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots)$$

由 $A(x)B(x) = 1$, 对应关于 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$ 的非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1, \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0, \\ \dots \\ a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_0 b_k = 0, \\ \dots \end{cases}$$

解得 $b_i = 1 \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$. 故

$$B(x) = \sum_{n \geq 0} x^n.$$

形式幂级数复合的定义与存在性

考虑 $A(x) = \sum_n a_n x^n$ 与 $B(x)$ 的 **复合**:

$$A(B(x)) = \sum_{n \geq 0} a_n B(x)^n$$

右边是关于形式幂级数的无限求和, 不只是形式变量.

形式幂级数复合 $A(B(x))$ 存在性依赖 “避免无限累加常数项” .

定理 2.3

给定 $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$, 复合 $A(B(x))$ 存在

当且仅当:

- $A(x)$ 为多项式, 或
- $B(x)$ 常数项为 0.

(证明略)

例子：复合存在

例 1： $A(x)$ 是多项式

$$A(x) = 1 + 2x + x^2, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

尽管 $B(0) = 1 \neq 0$, A 是多项式, 复合存在:

$$A(B(x)) = 1 + 2\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

例 2： $B(0) = 0$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad B(x) = x + x^2$$

A 非多项式, 但 $B(0) = 0$, 复合存在:

$$A(B(x)) = \frac{1}{1-(x+x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x+x^2)^n$$

反例：复合不存在

反例 1

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad B(x) = 1 + x$$

- A 不是多项式 - $B(0) \neq 0$

$$A(B(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+x)^n$$

常数项 $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ 发散 \rightarrow 不存在.

反例 2：指数级数与平移

$$A(x) = e^x, \quad B(x) = x + 1$$

- A 不是多项式 - $B(0) \neq 0$

形式复合：

$$A(B(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$$

每个 x^k 的系数为无限和 \rightarrow 不存在于 $\mathbb{R}[[x]]$.

(e^{x+1} 的泰勒级数存在，但不是形式复合定义的)

形式幂级数中交换求和的合法性

定理 2.4

设 $\{a_{i,k}\}_{i,k \geq 0} \subseteq K$, 并且对每个固定的 $n \geq 0$, 集合

$$\{(i, k) \mid i + k = n, a_{i,k} \neq 0\}$$

是有限的. 则在形式幂级数环 $K[[x]]$ 中有

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{i \geq 0} a_{i,k} x^{i+k} = \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} a_{i,k} x^{i+k}.$$

证明 在 $K[[x]]$ 中两个幂级数相等当且仅当每个幂次上的系数相等. 记

$$F(x) = \sum_{k \geq 0} \sum_{i \geq 0} a_{i,k} x^{i+k}, \quad G(x) = \sum_{i \geq 0} \sum_{k \geq 0} a_{i,k} x^{i+k}.$$

固定 $n \geq 0$, x^n 项的系数只由满足 $i + k = n$ 的有限个 $a_{i,k}$ 决定. 因此

$$[x^n]F(x) = \sum_{i+k=n} a_{i,k} = [x^n]G(x).$$

所以对所有 $n \geq 0$ 有 $[x^n]F(x) = [x^n]G(x)$, 从而 $F(x) = G(x)$ 成立.

在环 $\mathbb{R}[[x]]$ 上还可以定义形式导数.

定理 2.5

对于任意 $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}[[x]]$, 规定

$$DA(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

称 $DA(x)$ 为 $A(x)$ 的形式导数.

$A(x)$ 的 n 阶形式导数可以递归地定义为

$$\begin{cases} D^0 A(x) \equiv A(x) \\ D^n A(x) \equiv D(D^{n-1} A(x)) \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

形式导数满足如下规则：

$$(1) D[\alpha A(x) + \beta B(x)] = \alpha DA(x) + \beta DB(x)$$

$$(2) D[A(x) \cdot B(x)] = A(x)DB(x) + B(x)DA(x)$$

$$(3) D(A^n(x)) = nA^{n-1}(x)DA(x)$$

由此可知，形式导数满足微积分中求导运算的规则。

当某个形式幂级数在某个范围内收敛时，形式导数就是微积分中的求导运算。

为了书写方便，以后用 $A'(x)$, $A''(x)$, \dots 分别代表 $DA(x)$, $D^{(2)}A(x)$, \dots .

生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数代数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 利用生成函数求解递推关系
- ⑤ 普通型生成函数
- ⑥ 指数型生成函数

生成函数：给数列“挂”上标记

核心直觉

生成函数就像一条无限长的晾衣绳， x^k 是挂钩，我们将数列的第 k 项 a_k 挂上面。

数列 A

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$



$$A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots$$

数列 B

$$\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$$



$$B(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \dots$$

因为二者是一一对应的，所以生成函数间的运算关系直接对应着数列间的递推关系。

我们可以得到生成函数的如下一些性质:

性质 1

若

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < \ell) \\ a_{k-\ell} & (k \geq \ell) \end{cases}$$

则

$$B(x) = x^\ell A(x).$$

解释:

把序列 a_0, a_1, a_2, \dots 整体向后移了 ℓ 位.

生成函数中, 整体后移 ℓ 位就相当于 乘以 x^ℓ .

(和多项式整体乘上 x^ℓ 的效果一样.)

性质 2

若

$$b_k = a_{k+l},$$

则

$$B(x) = \frac{1}{x^l} \left(A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k \right).$$

解释:

这次是把序列向前移 l 位. 向前移对应 除以 x^l .

但向前移会把前 l 个元素删掉, 所以要把 $A(x)$ 的低次项扣掉:

$$A(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_{l-1} x^{l-1}.$$

性质 3

若

$$b_k = \sum_{i=0}^k a_i,$$

则

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

性质 3

若

$$b_k = \sum_{i=0}^k a_i,$$

则

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

证明 考虑 $(1-x)B(x)$

$$(1-x)B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k - \sum_{k \geq 0} b_k x^{k+1} = b_0 + \sum_{k \geq 1} (b_k - b_{k-1}) x^k.$$

由于 $b_k - b_{k-1} = a_k$ (约定 $b_{-1} = 0$), 因此

$$(1-x)B(x) = b_0 + \sum_{k \geq 1} a_k x^k = \sum_{k \geq 0} a_k x^k = A(x).$$

于是

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

性质 4

若

$$b_k = ka_k,$$

则

$$B(x) = xA'(x).$$

性质 5

若

$$b_k = \frac{a_k}{k+1},$$

则

$$B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(t) dt.$$

性质 4

若

$$b_k = ka_k,$$

则

$$B(x) = xA'(x).$$

证明 由 $A'(x)$ 的定义知

$$\begin{aligned} xA'(x) &= x \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x). \end{aligned}$$

性质 5

若

$$b_k = \frac{a_k}{k+1},$$

则

$$B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(t) dt.$$

性质 4

若

$$b_k = ka_k,$$

则

$$B(x) = xA'(x).$$

证明 由 $A'(x)$ 的定义知

$$\begin{aligned} xA'(x) &= x \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = B(x). \end{aligned}$$

性质 5

若

$$b_k = \frac{a_k}{k+1},$$

则

$$B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(t) dt.$$

证明 由假设条件, 有

$$\begin{aligned} \int_0^x A(t) dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x b_k (k+1) t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = xB(x). \end{aligned}$$

性质 6 (线性性)

若 $c_k = \alpha a_k + \beta b_k$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \alpha A(x) + \beta B(x).$$

性质 7 (卷积)

若 $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$, 则

$$C(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = A(x) \cdot B(x).$$

这两个性质可由形式幂级数的数乘、加法及乘法运算的定义直接得出.

利用这些性质, 我们可以求某些数列的生成函数, 也可以计算数列的和.

常见数列生成函数 (I)

Sequence (a_k)	Generating Function $G(x)$	Expansion (前三项)
1	$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \dots$
a^k	$\frac{1}{1-ax}$	$1 + ax + a^2x^2 + \dots$
k	$\frac{x}{(1-x)^2}$	$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$
k^2	$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$	$x + 4x^2 + 9x^3 + \dots$
$k(k+1)$	$\frac{2x}{(1-x)^3}$	$2x + 6x^2 + 12x^3 + \dots$

常见数列生成函数 (II)

Sequence (a_k)	Generating Function $G(x)$	Expansion
$\binom{\alpha}{k}$	$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots$
$\binom{n+k-1}{k}$	$\frac{1}{(1-x)^n}$	$1 + nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \dots$
$\frac{1}{k!}$	e^x	$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$
$\frac{(-1)^k}{k}$	$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$

下面证明其中的几个生成函数.

证明 (3)

$$\begin{aligned} G\{k\} &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \\ &= x \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} G\{k(k+1)\} &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kx^k = \left(x \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \right)' \\ &= \left(\frac{x^2}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} G\{k(k+1)\} &= x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = x^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)'' \\ &= x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} G\{k^2\} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kx^k - \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} G\{k^2\} &= x \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k \right)' = x (G\{k\})' \\ &= x \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

利用生成函数的性质, 可以求出一些序列以及一些序列的和.

下面的几个例子说明了一些求解方法.

例 3

已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 - 2x},$$

求 a_n .

例 3

已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 - 2x},$$

求 a_n .

解 用部分分式的方法得

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 - 2x} = \frac{2}{1 - 2x} + 3x,$$

而

$$\frac{2}{1 - 2x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n.$$

所以有

$$a_n = \begin{cases} 2^{n+1} & (n \neq 1) \\ 2^2 + 3 = 7 & (n = 1) \end{cases}$$

例 4

计算

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

例 4

计算

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

解 由前面列出的第 (5) 个数列的生成函数知, 数列 $\{n^2\}$ 的生成函数为

$$A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

此处, $a_k = k^2$. 令

$$b_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2,$$

则

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

因此, 数列 $\{b_n\}$ 的生成函数为

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} \\ &= (x+x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k. \end{aligned}$$

比较等式两边 x^n 的系数, 得

$$\begin{aligned} b_n &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3} + \binom{n-1}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

例 5

计算

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

例 5

计算

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

步骤 1: 求生成函数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k$

- 已知 $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$;
- 求导整理得 $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$

步骤 2: 提取有限和的系数展开生成函数的分子:

$$\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4} = x \cdot \frac{1}{(1-x)^4} + 4x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^4} + x^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^4}$$

结合组合数展开 $\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n$, 得有限和:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+3}{4} + 4\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{4}$$

从具体到推广：一般形式

观察 $m = 1, 2, 3$ 的规律，推广到任意正整数 m ：

无穷生成函数的一般形式

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m x^k = \frac{x A_m(x)}{(1-x)^{m+1}}$$

其中：

- $A_m(x)$ ： $m - 1$ 次欧拉多项式（整数系数）；
- 分母幂次： 恒为 $m + 1$ （由幂和次数 m 决定）。

欧拉多项式与欧拉数

- 在组合数学中, **欧拉数** $A(n, k)$ 表示 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列中含 k 个“升高”的排列数.
- 对于较小的 n 和 k 值, $A(n, k)$ 可手动计算. 例如:

n	k	排列 (Permutations)	$A(n, k)$
1	0	(1)	$A(1, 0) = 1$
2	0	(2, 1)	$A(2, 0) = 1$
2	1	(1, 2)	$A(2, 1) = 1$
3	0	(3, 2, 1)	$A(3, 0) = 1$
3	1	(1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)	$A(3, 1) = 4$
3	2	(1, 2, 3)	$A(3, 2) = 1$

- 这些公式出自欧拉 1755 年的研究, 是欧拉多项式的早期形式.
- $\frac{A_n(p)/p}{n!(p-1)^n}$ ($1 \leq n \leq 7$) 是图中定义的 7 个多项式统一形式, 其中 $A_n(p)$ 即对应阶的欧拉多项式.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{1(p-1)} \\
 \beta &= \frac{p+1}{1 \cdot 2 (p-1)^2} \\
 \gamma &= \frac{pp+4p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 (p-1)^3} \\
 \delta &= \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (p-1)^4} \\
 \epsilon &= \frac{p^4+26p^3+66p^2+26p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 (p-1)^5} \\
 \zeta &= \frac{p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 (p-1)^6} \\
 \eta &= \frac{p^6+120p^5+1191p^4+2416p^3+1191p^2+120p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 (p-1)^7} \\
 &\quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

L. Euler, 1755.
Eulerian Polynomials
 $\frac{A_n(p)/p}{n!(p-1)^n}$ ($1 \leq n \leq 7$)

利用欧拉数表示的幂和公式

$$\sum_{k=1}^n k^s = \sum_{k=0}^{s-1} A(s, k) \binom{n+k+1}{s+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n k^s \right) x^n = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^s x^k}{1-x} = \frac{x \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^s x^k}{1-x} = \frac{\frac{x A_s(x)}{(1-x)^{s+1}}}{1-x} = \frac{x A_s(x)}{(1-x)^{s+2}}$$

由欧拉多项式 $A_s(x) = \sum_{j=0}^{s-1} A(s, j) x^j$ 带入可得:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s x^k = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} A(s, j) x^{j+1}}{(1-x)^{s+2}}.$$

利用欧拉数表示的幂和公式

广义二项式:

$$(1-x)^{-N} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+N-1}{N-1} x^i \implies \frac{1}{(1-x)^{s+2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+s+1}{s+1} x^i.$$

代入展开式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s x^k = \sum_{j=0}^{s-1} A(s, j) x^{j+1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+s+1}{s+1} x^i,$$

匹配 x^n : $i = n - j - 1$, 组合数化简:

$$\binom{(n-j-1)+s+1}{s+1} = \binom{n+s-j}{s+1},$$

幂和公式:

$$\sum_{k=1}^n k^s = \sum_{j=0}^{s-1} A(s, j) \binom{n+s-j}{s+1},$$

对称变体 ($A(s, j) = A(s, s-1-j)$):

$$\sum_{k=1}^n k^s = \sum_{k=0}^{s-1} A(s, k) \binom{n+k+1}{s+1}.$$

例 6

计算

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

例 6

计算

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

结合 $\sum_{k=1}^n k^s = \sum_{k=0}^{s-1} A(s, k) \binom{n+k+1}{s+1}$, 得有限和:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+3}{4} + 4 \binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{4}$$

生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数代数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 利用生成函数求解递推关系
- ⑤ 普通型生成函数
- ⑥ 指数型生成函数

生成函数的威力：化递推为通项

利用生成函数，我们可以将复杂的递推关系转化为封闭的通项公式.

递推关系

(已知条件)

$$a_n + r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} = 0$$

↓ 转化

通项公式

(最终目标)

$$a_n = f(n)$$

↑ 展开

→

核心工具：生成函数 $A(x)$

将递推转化为代数方程 \implies 解出 $A(x)$

本节将详细介绍这一“转换-求解-展开”的标准流程.

利用生成函数求解各类递推关系有广泛的适用性,

给定关于 $f(n)$ 的递推关系式, 求解 $f(n)$ 的基本步骤是:

基本步骤

- ① 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$;
- ② 将关于 $f(n)$ 的递推关系式转化成关于 $A(x)$ 的方程式;
- ③ 解出 $A(x)$, 将 $A(x)$ 展开成 x 的幂级数, x^n 的系数即为 $f(n)$.

例 7

利用生成函数求解递推关系

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, \quad a_0 = 1, a_1 = 9.$$

例 7

利用生成函数求解递推关系

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, \quad a_0 = 1, a_1 = 9.$$

解 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则由 $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$, $a_0 = 1, a_1 = 9$ 可知,

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (8a_{n-1} + 10^{n-1}) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 8a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^n \\ &= 8x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^{n-1} \\ &= 8x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} (10x)^n \\ &= 8xG(x) + \frac{x}{1-10x}. \end{aligned}$$

求解 $A(x)$, 得

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{1-10x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (8x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} ((10x)^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (8^n + 10^n) x^n. \end{aligned}$$

所以,

$$a_n = \frac{1}{2} (8^n + 10^n).$$

例 8

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, & (n \geq 2) \\ a_0 = 2, & a_1 = 7. \end{cases} \quad (4.3)$$

例 8

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, & (n \geq 2) \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 7. \end{cases} \quad (4.3)$$

解 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 利用递推关系可得

$$\begin{aligned} A(x) - a_0 - a_1 x &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (7a_{n-1} - 12a_{n-2}) x^n \\ &= 7x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 12x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 7x(A(x) - a_0) - 12x^2 A(x) \end{aligned}$$

例 8

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, & (n \geq 2) \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 7. \end{cases} \quad (4.3)$$

解 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 利用递推关系可得

$$\begin{aligned} A(x) - a_0 - a_1 x &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (7a_{n-1} - 12a_{n-2}) x^n \\ &= 7x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 12x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 7x(A(x) - a_0) - 12x^2 A(x) \end{aligned}$$

代入 $a_0 = 2, a_1 = 7$ 并整理, 得

$$A(x) = \frac{2 - 7x}{(1 - 3x)(1 - 4x)} = \frac{1}{1 - 3x} + \frac{1}{1 - 4x}$$

由此得出通项公式

$$a_n = 3^n + 4^n.$$

例 9

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, & (n \geq 2) \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \end{cases}$$

例 9

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, & (n \geq 2) \\ a_0 = 0, & a_1 = 1. \end{cases}$$

解 令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 同理可得

$$\begin{aligned} A(x) - a_0 - a_1 x &= \sum_{n=2}^{\infty} (4a_{n-1} - 4a_{n-2}) x^n \\ &= 4x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 4x[A(x) - a_0] - 4x^2 A(x) \end{aligned}$$

代入初始条件 $a_0 = 0, a_1 = 1$, 方程化简为

$$A(x) - x = 4xA(x) - 4x^2 A(x)$$

整理得生成函数

$$A(x) = \frac{x}{1 - 4x + 4x^2} = \frac{x}{(1 - 2x)^2}$$

线性齐次三阶递推关系

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 15$$

Mathematica 求解线性递推关系

线性齐次三阶递推关系

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 15$$

Mathematica 求解命令

```
RSolve[{a[n]==6a[n-1]-11a[n-2]+6a[n-3],  
a[0]==2,a[1]==5,a[2]==15},a[n],n]
```

Mathematica 求解线性递推关系

线性齐次三阶递推关系

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 15$$

Mathematica 求解命令

```
RSolve[{a[n]==6a[n-1]-11a[n-2]+6a[n-3],  
a[0]==2,a[1]==5,a[2]==15},a[n],n]
```

输出结果

```
{{a[n] -> 1 - 2^n + 2*3^n}}
```

Mathematica 求解线性递推关系

线性齐次三阶递推关系

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 15$$

Mathematica 求解命令

```
RSolve[{a[n]==6a[n-1]-11a[n-2]+6a[n-3],  
a[0]==2,a[1]==5,a[2]==15},a[n],n]
```

输出结果

```
{{a[n] -> 1 - 2^n + 2*3^n}}
```

得到通项公式：

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$$

(特征根为 1, 2, 3, 因此解为指数组合形式)

定理

给定序列 a_n , 其中 $n \geq 0$ 及 $d \in \mathbb{P}$, 则下列命题等价.

(1) 序列满足存在常数 $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{C}, c_d \neq 0$ 使得

$$a_{n+d} + c_1 a_{n+d-1} + c_2 a_{n+d-2} + \cdots + c_d a_n = 0.$$

(2) 生成函数 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 具有形式

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

其中 $q(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_d x^d$, 且 $\deg p(x) < d$.

(3) a_n 可写作

$$a_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) r_i^n,$$

其中 r_i 为互不相同的非负复数, 满足

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_d x^d = \prod_{i=1}^k (1 - r_i x)^{d_i},$$

对每个 i , $p_i(n)$ 是 $\deg p_i(n) < d_i$ 的多项式.

生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数代数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 利用生成函数求解递推关系
- ⑤ 普通型生成函数**
- ⑥ 指数型生成函数

组合数的生成函数

本节介绍组合数序列的生成函数, 进而介绍如何用生成函数来求解组合型分配问题.

我们在前面几章中讨论过三种不同类型的组合问题:

- (1) 求 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的 k 组合数;
- (2) 求 $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 组合数;
- (3) 求 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10 组合数.

我们已经知道

- 问题 (1) 是普通集合的组合问题;
- 问题 (2) 转化为不定方程

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

的非负整数解的个数问题;

(3) 求 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10 组合数.

- 问题 (3) 是利用容斥原理在 $M = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$ 中求不满足下述三个性质:
 - P_1 : 10 组合中 a 的个数大于或等于 4 ;
 - P_2 : 10 组合中 b 的个数大于或等于 5 ;
 - P_3 : 10 组合中 c 的个数大于或等于 6

的 10 组合数, 它们在解题方法上各不相同.

下面我们将看到, 引入生成函数的概念后, 上述三类组合问题可以统一地处理.

问题 (1) 的解决

(1) 求 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的 k 组合数;

在普通集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的 k 组合中, $a_i (1 \leq i \leq n)$ 或者出现或者不出现, 故该集合的 k 组合数序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

从而

$$b_k = \binom{n}{k}.$$

问题 (2) 的解决

(2) 求 $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 组合数;

$M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 组合数为 b_k .

考虑 n 个形式幂级数的乘积

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) \cdots (1 + x + x^2 + \dots)}_{n \text{ 组}}$$

它的展开式中, 每一个 x^k 均为

$$x^{m_1} x^{m_2} \cdots x^{m_n} = x^k \quad (m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k)$$

其中 x^{m_1} 取自代表 a_1 的第一个括号, x^{m_2} 取自代表 a_2 的第二个括号, \dots

x^{m_n} 取自代表 a_n 的第 n 个括号;

m_1, m_2, \dots, m_n 分别表示取 a_1, a_2, \dots, a_n 的个数.

于是, 每个 x^k 都对应着多重集合 M 的一个 k 组合.

问题 (2) 的解决

因此

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^n$$

中 x^k 的系数就是 M 的 k 组合数 b_k . 由此得出序列 $\{b_k\}$ 的生成函数为

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^n = \frac{1}{(1 - x)^n}.$$

从而

$$b_k = \binom{n - 1 + k}{k}.$$

这时, 我们再次得到了多重集合 M 的 k 组合数的公式, 只不过现在是用生成函数获得的.

问题 (3) 的解决

(3) 求 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10 组合数.

用生成函数方法解决问题 (3) 尤为简单.

将 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 k 组合数记为 b_k , $\{b_k\}$ 的生成函数就是

$$(1 + x + x^2 + x^3) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5).$$

其原因是展开式中的 x^k 必定为

$$x^{m_1} x^{m_2} x^{m_3} = x^k \quad (m_1 + m_2 + m_3 = k).$$

由于 $x^{m_1}, x^{m_2}, x^{m_3}$ 分别取自第一、第二、第三个括号, 故

$$0 \leq m_1 \leq 3, 0 \leq m_2 \leq 4, 0 \leq m_3 \leq 5.$$

问题 (3) 的解决

于是每个 x^k 对应集合 $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的一个 k 组合. 特别令 $k = 10$, 则

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + x^3) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \\ &= (1 - x^4) \cdot (1 - x^5) \cdot (1 - x^6) \cdot \frac{1}{(1 - x)^3} \\ &= (1 - x^4 - x^5 - x^6 + x^9 + x^{10} + x^{11} - x^{15}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^n. \end{aligned}$$

所以, x^{10} 的系数 b_{10} 为

$$\begin{aligned} b_{10} &= \binom{10+2}{10} - \binom{6+2}{6} - \binom{5+2}{5} - \binom{4+2}{4} + \binom{1+2}{1} + \binom{0+2}{0} \\ &= 6 \end{aligned}$$

与用容斥原理得到的结果相同.

定理 5.1

设从 n 元集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中取 k 个元素的组合数为 b_k , 若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i (1 \leq i \leq n)$, 则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

定理 5.1

设从 n 元集合 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中取 k 个元素的组合数为 b_k , 若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i (1 \leq i \leq n)$, 则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

例 10

求多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的每个 a_i 至少出现一次的 k 组合数 b_k .

解 因为

$$M_i = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

所以

$$\begin{aligned} G\{b_k\} &= (x + x^2 + x^3 + \dots)^n \\ &= x^n \cdot \frac{1}{(1-x)^n} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1+i}{i} x^{n+i} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{k-n} x^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k, \end{aligned}$$

因此

$$b_k = \begin{cases} 0 & (k < n) \\ \binom{k-1}{n-1} & (k \geq n) \end{cases}$$

组合型分配问题的生成函数

定理 5.2

把 k 个相同的球放入 n 个不同的盒子 a_1, a_2, \dots, a_n 中, 限定盒子 a_i 的容量集合为 $M_i (1 \leq i \leq n)$, 则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

组合型分配问题的生成函数

定理 5.2

把 k 个相同的球放入 n 个不同的盒子 a_1, a_2, \dots, a_n 中, 限定盒子 a_i 的容量集合为 $M_i (1 \leq i \leq n)$, 则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

证明 不妨设盒子 a_1, a_2, \dots, a_n 中放入的球数分别为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \quad (x_i \in M_i, \quad 1 \leq i \leq n)$$

一种符合要求的放法相当于 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的一个 k 组合, 前面关于盒子 a_i 容量的限制转变成 k 组合中 a_i 出现次数的限制. 所以, 组合型分配问题方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} x^m \right).$$

例 11

求不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

满足 $x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 6, x_5 \geq 0$ 的整数解的个数.

例 11

求不定方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

满足 $x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 6, x_5 \geq 0$ 的整数解的个数.

解 本问题相当于把 20 个相同的球放入 5 个不同的盒子中, 盒子的容量集合分别为

$$M_1 = \{3, 4, \dots\}$$

$$M_2 = \{2, 3, \dots\}$$

$$M_3 = \{4, 5, \dots\}$$

$$M_4 = \{6, 7, \dots\}$$

$$M_5 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

该组合型分配问题的生成函数为

$$\begin{aligned} & (x^3 + x^4 + \dots) (x^2 + x^3 + \dots) (x^4 + x^5 + \dots) \\ & \cdot (x^6 + x^7 + \dots) (1 + x + x^2 + \dots) \\ & = x^{15} \cdot (1 + x + x^2 + \dots)^5 = x^{15} \cdot \frac{1}{(1-x)^5} \\ & = x^{15} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} x^n \end{aligned}$$

其中, x^{20} 的系数 $\binom{5+4}{5} = 126$ 就是满足条件的整数解的个数.

例 12

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \leq x_1 \leq 5, \quad -2 \leq x_2 \leq 4,$$

$$0 \leq x_3 \leq 5, \quad 3 \leq x_4 \leq 9$$

的整数解个数.

例 12

求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

满足

$$1 \leq x_1 \leq 5, \quad -2 \leq x_2 \leq 4,$$

$$0 \leq x_3 \leq 5, \quad 3 \leq x_4 \leq 9$$

的整数解个数.

解 令

$$y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 2, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 3,$$

则方程转化为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

相应的条件即

$$0 \leq y_1 \leq 4, 0 \leq y_2 \leq 6, 0 \leq y_3 \leq 5, 0 \leq y_4 \leq 6.$$

对应的生成函数为

$$\begin{aligned}& (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \\& \quad \cdot (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2 \\&= \frac{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)^2}{(1-x)^4} \\&= (1-x^5-x^6-2x^7+x^{11}+2x^{12}+2x^{13}+x^{14}-2x^{18}-x^{19}-x^{20}+x^{25}) \\& \quad \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k\end{aligned}$$

所以它的 x^{16} 的系数为

$$\begin{aligned}& \binom{16+3}{3} - \binom{11+3}{3} - \binom{10+3}{3} - 2\binom{9+3}{3} + \binom{5+3}{3} \\& \quad + 2\binom{4+3}{3} + 2\binom{3+3}{3} + \binom{2+3}{3} \\&= 969 - 364 - 286 - 2 \times 220 + 56 + 2 \times 35 + 2 \times 20 + 10 \\&= 55.\end{aligned}$$

例 13

设有 2 个红球、1 个黑球、3 个黄球, 若每次从中任取 3 个球, 有多少种不同的取法?

例 13

设有 2 个红球、1 个黑球、3 个黄球, 若每次从中任取 3 个球, 有多少种不同的取法?

解 方法 1:

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2)(1+x)(1+x+x^2+x^3) \\ &= \frac{1-x^3}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} \\ &= (1-x^2-x^3+x^5)(1-x^4) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k \end{aligned}$$

x^3 的系数为 $\binom{5}{2} - \binom{3}{2} - \binom{2}{2} = 10 - 3 - 1 = 6$

方法 2: $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 3)(0, 1, 2)(1, 0, 2)(1, 1, 1)(2, 0, 1)(2, 1, 0)$

例 14

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? (0 克不计入)

例 14

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? (0 克不计入)

解 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) = 1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

例 14

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? (0 克不计入)

解 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) = 1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

例 15

用 1 分、2 分、3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案.

例 14

设有 1 克、2 克、3 克、4 克的砝码各一枚. 若要求各砝码只能放在天平的一边, 问能称出多少种重量? (0 克不计入)

解 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) = 1+x+\cdots+x^{10}$, 故十种.

例 15

用 1 分、2 分、3 分的邮票可贴出多少种总面值为 4 分的方案.

解 $1+1+1+1$ $1+1+2$ $1+3$ $2+2$, 故四种.

例 16

求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有 n 个水果的不同水果篮的个数, 其中要求苹果有偶数个 (包括 0 个), 香蕉有 5 的倍数个 (包括 0 个), 橘子不超过 4 个, 梨最多 1 个.

例 16

求用苹果、香蕉、橘子、梨组成的有 n 个水果的不同水果篮的个数, 其中要求苹果有偶数个 (包括 0 个), 香蕉有 5 的倍数个 (包括 0 个), 橘子不超过 4 个, 梨最多 1 个.

解

$$\begin{aligned} & (1 + x^2 + \cdots + x^{2n} + \cdots) (1 + x^5 + \cdots + x^{5n} + \cdots) \\ & \quad \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) (1 + x) \\ &= \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot (1 + x) \\ &= \frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)x^k \end{aligned}$$

故所求为 $n + 1$ 种.

例 17

求不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 满足条件 $x_1 \leq 8, x_2 \leq 8, x_3 \leq 8$ 的非负整数解的个数.

例 17

求不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 满足条件 $x_1 \leq 8, x_2 \leq 8, x_3 \leq 8$ 的非负整数解的个数.

解 设所求为 N , 则 N 是

$$A(t) = (1 + t + t^2 + \cdots + t^8)^3$$

展开式中 t^{14} 的系数, 而

$$\begin{aligned} A(t) &= \left(\frac{1-t^9}{1-t} \right)^3 = (1-t^9)^3 (1-t)^{-3} \\ &= (1-3t^9+3t^{18}-t^{27}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} t^k, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} N &= \binom{14+2}{2} - 3 \binom{5+2}{2} \\ &= \binom{16}{2} - 3 \binom{7}{2} = 120 - 3 \times 21 = 57 \end{aligned}$$

例 18

求方程 $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21$ 的正整数解的个数.

例 18

求方程 $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 21$ 的正整数解的个数.

解 设所求为 N , 故 N 是

$$A(t) = (t + t^2 + \cdots) \cdot (t^2 + t^4 + t^6 + \cdots) \cdot (t^4 + t^8 + t^{12} + \cdots)$$

展开式中 t^{21} 的系数, 而

$$\begin{aligned} A(t) &= t(1-t)^{-1} \cdot t^2(1-t^2)^{-1} \cdot t^4(1-t^4)^{-1} \\ &= t^7(1+t)(1-t^2)^{-2}(1-t^4)^{-1} = t^7(1+t)(1+t^2)^2(1-t^4)^{-3} \\ &= (t^7 + t^8 + 2t^9 + 2t^{10} + t^{11} + t^{12}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} t^{4k}. \end{aligned}$$

且只有 $9 + 4k = 21$ 有整数解, 解为 $k = 3$, 所以

$$N = 2 \cdot \binom{3+2}{2} = 20$$

例 19

求由直线 $x + 3y = 12$, 直线 $x = 0$ 及直线 $y = 0$ 所围成的三角形（包括边界）的整点（横坐标和纵坐标均是整数的点）的个数.

例 19

求由直线 $x + 3y = 12$, 直线 $x = 0$ 及直线 $y = 0$ 所围成的三角形 (包括边界) 的整点 (横坐标和纵坐标均是整数的点) 的个数.

解 设所求为 N , 则 N 是满足条件 $x + 3y \leq 12$ 的非负整数解的个数. 令 $z = 12 - x - 3y$, 如果 $x + 3y \leq 12$, 则 $z \geq 0$ 且 $x + 3y + z = 12$, 所以 N 是方程 $x + 3y + z = 12$ 的非负整数解的个数, 故 N 是

$$A(t) = (1 + t + t^2 + \cdots)^2 (1 + t^3 + t^6 + \cdots)$$

展开式中 t^{12} 的系数, 而

$$\begin{aligned} A(t) &= (1 - t)^{-2} (1 - t^3)^{-1} \\ &= (1 + t + t^2)^2 (1 - t^3)^{-3} \\ &= (1 + 2t + 3t^2 + 2t^3 + t^4) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} t^{3k}, \end{aligned}$$

所以

$$N = \binom{4+2}{2} + 2\binom{3+2}{2} = 15 + 20 = 35.$$

例 20

求平面直角坐标系 Oxy 中, 以 $A(5, 0), B(0, 5), C(-5, 0), D(0, -5)$ 为顶点的正方形 (包括边界) 的整点的个数.

例 20

求平面直角坐标系 Oxy 中, 以 $A(5, 0), B(0, 5), C(-5, 0), D(0, -5)$ 为顶点的正方形 (包括边界) 的整点的个数.

解 设所求为 N . 过点 $A(5, 0)$ 和点 $B(0, 5)$ 的直线方程为 $x + y = 5$.

由对称性知, 点 (x, y) 是该正方形内的一个整点的充分必要条件是

$$|x| + |y| \leq 5$$

且 x 和 y 均为整数.

所以 N 是方程

$$|x| + |y| + z = 5$$

满足条件 $z \geq 0$ 的整数解的个数.

因此, N 是

$$A(t) = (1 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + \cdots)^2 (1 + t + t^2 + t^3 + \cdots)$$

展开式中 t^5 的系数, 而

$$\begin{aligned} A(t) &= (2(1-t)^{-1} - 1)^2 (1-t)^{-1} \\ &= (1+t)^2 (1-t)^{-3} \\ &= (1+2t+t^2) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} t^k, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} N &= \binom{5+2}{2} + 2 \binom{4+2}{2} + \binom{3+2}{2} \\ &= \binom{7}{2} + 2 \cdot \binom{6}{2} + \binom{5}{2} \\ &= 21 + 30 + 10 = 61. \end{aligned}$$

生成函数

- ① 引论
- ② 形式幂级数代数
- ③ 生成函数的性质
- ④ 利用生成函数求解递推关系
- ⑤ 普通型生成函数
- ⑥ 指数型生成函数

排列数的指数型生成函数

n 元集合的 k 排列数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式.

排列数的指数型生成函数

n 元集合的 k 排列数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, 按 5.4.1 小节中方法构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

没有简单的解析表达式. 但如果把基底函数 x^k 改换成 $\frac{x^k}{k!}$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) \frac{x^k}{k!} = (1+x)^n,$$

这启发人们引入指数型生成函数的概念.

数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的指数型生成函数 定义为形式幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

因为 $[x^k]f(x) = \frac{a_k}{k!}$, 所以

$$a_k = k! \cdot [x^k]f(x).$$

定理 6.1

多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列中, 若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i (1 \leq i \leq n)$, 则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} \frac{x^m}{m!} \right).$$

证明 将和积式展开, 得

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} \frac{x^m}{m!} \right) = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_n = k \\ k_i \in M_i, i=1, 2, \dots, n}} \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \right) \frac{x^k}{k!}.$$

只要证明展开式中 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数就是满足限定条件的 k 可重排列数即可.

- 首先, 对于集合 M 的满足限定条件的**每个 k 可重排列**, 设其中 a_i 出现 k_i 次 ($i = 1, 2, \dots, n$), 则 (k_1, k_2, \dots, k_n) 就是方程

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = k \quad (k_i \in M_i, i = 1, 2, \dots, n)$$

的一个解.

定理 5.1

多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列中, 若限定元素 a_i 出现的次数集合为 $M_i (1 \leq i \leq n)$, 则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{m \in M_i} \frac{x^m}{m!} \right).$$

- 其次, 方程 $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ 的每个解 (k_1, k_2, \dots, k_n) 都对应一类 k 可重排列, 此类中的每一个 k 可重排列里, 元素 a_i 出现 k_i 次.
- 而此类 k 可重排列的个数就是多重集合 $\{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \dots, k_n \cdot a_n\}$ 的全排列的个数, 即 $\frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$. 可见, 与解 (k_1, k_2, \dots, k_n) 相对应的 k 可重排列有 $\frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$ 个.
- 再者, 方程 $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ 的不同解 (k_1, k_2, \dots, k_n) 所对应的不同 k 可重排列类中没有相同的排列.
- 因此, 由加法原则, 集合 M 满足给定条件的 k 可重排列的总个数为

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n=k \\ (k_i \in M_i, i=1,2,\dots,n)}} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}.$$

特别地, 数列 $\{1, 1, \cdots\}$ 的指数型生成函数 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 具有与指数函数相似的性质:

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

这是因为

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{y}{x}\right)^j x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{y}{x}\right)^k \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= e^{x+y}. \end{aligned}$$

特别有

$$e^x e^{-x} = e^0 = 1,$$

从而

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

例 21

多重集合 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列数序列 $\{b_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) = (e^x)^n = e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

从而

$$b_k = n^k$$

例 22

由数字 0, 1, 2, 3 组成的长为 k 的序列中, 要求含有偶数个 0, 问这样的序列有多少个?

例 22

由数字 0, 1, 2, 3 组成的长为 k 的序列中, 要求含有偶数个 0, 问这样的序列有多少个?

解 根据题意, 有

$$M_1 = M_2 = M_3 = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

$$M_0 = \{0, 2, 4, \cdots\}$$

由定理 5.5.1 知, 该排列数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^3 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \\ &= (e^x)^3 \cdot \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{4x} + e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k \right) \end{aligned}$$

所以 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数为

$$b_k = \frac{1}{2} (4^k + 2^k).$$

例 23

由 1, 2, 3, 4 能组成多少个 1 出现两次或三次, 2 最多出现一次, 4 出现偶数次的五位数?

例 23

由 1, 2, 3, 4 能组成多少个 1 出现两次或三次, 2 最多出现一次, 4 出现偶数次的五位数?

解 根据题意, 有

$$M_1 = \{2, 3\} \quad M_3 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$M_2 = \{0, 1\} \quad M_4 = \{0, 2, 4, \dots\}$$

由定理 5.5.1 知, 该排列数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) \left(1 + \frac{x}{1!} \right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \frac{x^2}{6} (3 + 4x + x^2) e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{x^2}{12} (3 + 4x + x^2) (e^{2x} + 1). \end{aligned}$$

所以 $\frac{x^5}{5!}$ 的系数为

$$5! \times \frac{1}{12} \left(3 \times \frac{2^3}{3!} + 4 \times \frac{2^2}{2!} + 1 \times \frac{2^1}{1!} \right) = 140,$$

即满足题意的五位数有 140 个.

例 24

确定每位数字都是奇数, 且 1 和 3 出现偶数次的 n 位数的个数.

例 24

确定每位数字都是奇数, 且 1 和 3 出现偶数次的 n 位数的个数.

解

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 \\
 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \cdot e^{3x} \\
 &= \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} + 2) \cdot e^{3x} \\
 &= \frac{1}{4} (e^{5x} + 2e^{3x} + e^x) = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 5^k \frac{x^k}{k!} + 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (5^k + 2 \cdot 3^k + 1) \frac{x^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

因此, 它的 $\frac{x^n}{n!}$ 系数为

$$\frac{1}{4} (5^n + 2 \cdot 3^n + 1).$$

例 25

证明：贝尔数 $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$ ($S(n, k)$ 为第二类斯特林数) 的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp\{e^x - 1\}.$$

例 25

证明：贝尔数 $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$ ($S(n, k)$ 为第二类斯特林数) 的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp\{e^x - 1\}.$$

解 设 $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$, 由贝尔数递推关系:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \quad (B_0 = 1).$$

对 $B(x)$ 求导:

$$B'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}.$$

交换求和顺序, 利用 $\binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} = \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{x^n}{(n-k)!}$, 令 $m = n - k$:

$$B'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = B(x) \cdot e^x.$$

例 26

证明：贝尔数 $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$ ($S(n, k)$ 为第二类斯特林数) 的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \exp\{e^x - 1\}.$$

得到微分方程：

$$\frac{d(B(x))}{dx} = B(x) \cdot e^x.$$

分离变量并积分：

$$\frac{d(B(x))}{B(x)} = e^x dx \implies \ln |B(x)| = e^x + C \implies B(x) = \exp\{e^x + C\}.$$

代入初始条件 $x = 0$ 时 $B(0) = B_0 = 1$ ：

$$1 = \exp\{1 + C\} \implies C = -1.$$

故 $B(x) = \exp\{e^x - 1\}$ ，得证.

注记：贝尔数的另一种表达式

由 $B(x) = e^{e^x - 1} = \frac{1}{e} e^{e^x}$ ，展开得：

$$B(x) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

对比生成函数定义，贝尔数可表示为：

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

例 27

求 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列中每个 a_i 至少出现一次的排列数 P_k 的指数型生成函数.

例 27

求 $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ 的 k 排列中每个 a_i 至少出现一次的排列数 P_k 的指数型生成函数.

解 根据题意, 有

$$M_i = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1 \leq i \leq n).$$

由定理 5.5.1 知, 排列数序列 $\{P_k\}$ 的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^n &= (e^x - 1)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} e^{(n-i)x} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-i)^k x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k \right) \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

所以

$$P_k = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k \quad (k \geq n).$$

例 28

用红、白、蓝 3 种颜色给 $1 \times n$ 棋盘着色, 要求白色方格数是偶数, 问有多少种着色方案?

例 28

用红、白、蓝 3 种颜色给 $1 \times n$ 棋盘着色, 要求白色方格数是偶数, 问有多少种着色方案?

解

$$M_r = M_b = \{0, 1, 2, \dots\},$$

$$M_w = \{0, 2, 4, \dots\}.$$

于是, 分配方案数的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} & \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \\ &= e^{2x} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} (e^{3x} + e^x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(3x)^n}{n!} + \frac{x^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

因此, $\frac{x^n}{n!}$ 的系数 $\frac{1}{2}(3^n + 1)$ 就是满足要求的着色方案数.

命题 6.2

若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell+1} \frac{x^{\ell}}{\ell!},$$

即 $\{a_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f'(x)$.

命题 6.3

若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则 $\{a_{k+i}\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f^{(i)}(x)$.

命题 6.4

若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, 则 $\{ka_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} ka_k \frac{x^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{(k-1)!} = x \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= xf'(x) = x \frac{d}{dx}(f(x)). \end{aligned}$$

命题 6.5

若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ 且 $P(k)$ 是一个关于 k 的多项式, 则 $\{P(k) a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$P\left(x \frac{d}{dx}\right)(f(x)).$$

命题 6.6

若 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ 且 $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$, 则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{x^j}{j!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i!} \cdot \frac{b_{n-i}}{(n-i)!}\right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

即 $\left\{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为 $f(x)g(x)$.

例 29

置换 $\sigma \in S_n$ 称为错位排列, 如果对任意 $1 \leq i \leq n$, 均有 $\sigma(i) \neq i$. 令 d_n 表示 S_n 中错位排列的总数. 求 d_n 的指数型生成函数 $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$.

由组合解释得

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

由于 $\{1\}_{n \geq 0}$ 的指数型生成函数为 e^x ,

而 $\{n!\}_{n \geq 0}$ 的指数型生成函数为

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

由前面的递推关系可得

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x),$$

即

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

例 (错排数)

置换 $\sigma \in S_n$ 称为错位排列, 如果对任意 $1 \leq i \leq n$, 均有 $\sigma(i) \neq i$. 令 d_n 表示 S_n 中错位排列的总数. 求 d_n 的指数型生成函数 $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!}$.

也可以利用错位排列数 d_n 的另外递推关系求解.

考虑 $\sigma \in S_{n+1}$ 的第一位 $\sigma(n+1)$ 的取值, 它有 n 种可能.

得到递推关系 (P84)

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}).$$

所以

$$D'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(n-1)!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} x^n = xD'(x) + xD(x),$$

或

$$\frac{D'(x)}{D(x)} = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}.$$

从而

$$D(x) = \frac{1}{1-x} e^{-x+c}.$$

当 $x = 0$ 时, $D(x) = d_0 = 1$, 得到 $c = 0$, 这也求出

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

展开得到

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right) x^n$$

所以

$$d_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

这表明, 在 S_n 中任取一个置换, 它是错位排列的概率为 $\frac{d_n}{n!}$, 其极限是 $e^{-1} (n \rightarrow \infty)$. 这真是个奇妙但并不显然的事实.

拓展

普通型生成函数

令 a_n 表示在一个 n -集合上完成某个任务的方法数, $a_0 = 0$.

对于 $n \geq 1$, 令 b_n 表示将区间集合 $[n]$ 划分成任意的非空子区间, 然后在这些非空子区间上完成前面任务的方法数, $b_0 = 1$.

设 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n \geq 0}$ 的普通型生成函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 证明

$$b(x) = \frac{1}{1 - f(x)}.$$

指数型生成函数

令 a_n 表示在一个 n -集合上完成某个任务的方法数, $a_0 = 0$.

对于 $n \geq 1$, 令 b_n 表示将 n -集合 $[n]$ 划分成任意的非空子集, 然后在这些非空子集上完成前面任务的方法数, $b_0 = 1$.

设 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 和 $\{b_n\}_{n \geq 0}$ 的指数型生成函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 证明

$$b(x) = e^{f(x)}.$$