

组合数学

张彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn



Outline

第一类 Stirling 数

定义 1.1

对于正整数 n, k , 定义 $c(n, k)$ 为 n 元对称群 S_n 中恰好由 k 个不交轮换构成的置换个数（不动点也看作一个轮换）.

$s(n, k) = (-1)^{n-k} c(n, k)$ 被称为**第一类 Stirling 数**, $c(n, k)$ 也常称为**无符号的第一类 Stirling 数**.

规定 $c(0, 0) = 1$ 以及当 $n \geq 1$ 时, $c(n, 0) = c(0, n) = 0$, 这显然是合理的.

第一类 Stirling 数的递推关系

引理 1.2

对任意 $n \geq 1, k \geq 1$, $c(n, k)$ 满足如下递推式

$$c(n, k) = (n - 1)c(n - 1, k) + c(n - 1, k - 1).$$

第一类 Stirling 数的递推关系

引理 1.2

对任意 $n \geq 1, k \geq 1$, $c(n, k)$ 满足如下递推式

$$c(n, k) = (n - 1)c(n - 1, k) + c(n - 1, k - 1).$$

证明.

设置换 σ 是 S_n 中恰好有 k 个轮换的置换, 若 $\sigma(n) = n$, 则 n 在 σ 中为一个单独的轮换, 从而这样的 σ 的个数等于 S_{n-1} 中恰有 $k - 1$ 个轮换的置换的个数, 即 $c(n - 1, k - 1)$ 个; 若 $\sigma(n) = i, 1 \leq i \leq n - 1$, 则将轮换中的 n 与 i 看为一个元素, 从而这样的 σ 的个数等于 S_{n-1} 中恰有 k 个轮换的置换的个数, 即 $c(n - 1, k)$ 个, 因此

$$c(n, k) = (n - 1)c(n - 1, k) + c(n - 1, k - 1).$$



第一类 Stirling 数的普通生成函数

定理 1.3

$\{c(n, k)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足如下的函数方程

$$\sum_{k=1}^n c(n, k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$$

第一类 Stirling 数的普通生成函数

证明.

对 n 用归纳法证明命题. $n = 1$ 时命题即 $x = x$, 显然成立. 设对 $n \geq 2, n - 1$ 时命题成立, 则当 n 时, 由归纳假设及 $c(n, k)$ 的递推性质知, 任意 $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} [x^k]x \cdots (x + n - 1) &= [x^k]x \cdots (x + n - 2)x + (n - 1)[x^k]x \cdots (x + n - 2) \\ &= [x^{k-1}]x \cdots (x + n - 2) + (n - 1)[x^k]x \cdots (x + n - 2) \\ &= c(n - 1, k - 1) + (n - 1)c(n - 1, k) \\ &= c(n, k). \end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=1}^n c(n, k)x^k = x(x + 1)(x + 2) \cdots (x + n - 1),$$

即命题对 n 成立.

由归纳原理知命题对一切正整数 n 成立, 即 $\{c(n, k)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足定理中所述函数方程.



第一类 Stirling 数的普通生成函数

很多情况下, 第一类 Stirling 数 $s(n, k)$ 往往比无符号的第一类 Stirling 数 $c(n, k)$ 更容易处理. 针对 $\{s(n, k)\}_{n=1}^{\infty}$, 定理 (1.3) 相应的等价形式是下面定理.

定理 1.4

$\{s(n, k)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足如下的函数方程

$$\sum_{k=1}^n s(n, k)x^k = (x)_n.$$

这里 $(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

第一类 Stirling 数的普通生成函数

定理 1.4 $\{s(n, k)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足如下的函数方程

$$\sum_{k=1}^n s(n, k)x^k = (x)_n.$$

这里 $(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

证明.

在定理 (1.3) 中用 $-x$ 代替 x 得

$$\sum_{k=1}^n c(n, k)(-x)^k = -x(-x+1)(-x+2)\cdots(-x+n-1),$$

两边同时乘以 $(-1)^n$ 得

$$\sum_{k=1}^n (-1)^n c(n, k)(-x)^k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

即

$$\sum_{k=1}^n s(n, k)x^k = (x)_n.$$

第一类 Stirling 数的普通生成函数

证明 现在我们用另外一种方法证明定理 (1.4). 回顾引理 (1.2) 中无符号的第一类 Stirling 数 $c(n, k)$ 满足的递推关系及初始条件, 将其转化成第一类 Stirling 数 $s(n, k)$, 且当 $n \geq 1$ 时, 满足如下递推式

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k).$$

我们希望找到生成函数 $f_n(x) = \sum_{k \geq 0} s(n, k)x^k$. 在上述递推式左右两边同乘以 x^k , 并对 $k, k \geq 1$ 求和, 得

$$\sum_{k \geq 1} s(n, k)x^k = \sum_{k \geq 1} s(n-1, k-1)x^k - (n-1) \sum_{k \geq 1} s(n-1, k)x^k.$$

接下来使用 $f_n(x)$ 表示上述等式, 得

$$f_n(x) - s(n, 0)x^0 = f_n(x) = xf_{n-1}(x) - (n-1)f_{n-1}(x),$$

即

$$f_n(x) = (x - n + 1)f_{n-1}(x).$$

这就得到生成函数序列 $f_n(x)$ 的递推关系. 由初始条件 $s(0, k)$ 得 $f_0(x) = 1$. 现在容易猜出 $f_n(x)$ 的表达式, 只需写出前面一些值然后用归纳法证明即可. 这样就证明了当 $n, k \geq 1$ 时定理成立.

Outline

第二类 Stirling 数

定义 2.1

对于正整数 n, k , 定义 $S(n, k)$ 为把 $[n]$ 分成 k 个非空子集的划分的个数, 称为**第二类 Stirling 数**

规定 $S(0, 0) = 1$ 以及当 $n \geq 1$ 时, $S(n, 0) = S(0, n) = 0$, 这显然是合理的.

第二类 Stirling 数的递推关系

引理 2.2

对任意 $n \geq 1, k \geq 1$, 第二类 *Stirling* 数 $S(n, k)$ 满足如下递推式

$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1).$$

第二类 Stirling 数的递推关系

引理 2.2

对任意 $n \geq 1, k \geq 1$, 第二类 Stirling 数 $S(n, k)$ 满足如下递推式

$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1).$$

证明.

把 $[n]$ 分成 k 个非空子集的划分, 简称为把 $[n]$ 的一个 k -划分. 设 P 是 $[n]$ 的一个 k -划分. 若 n 在 P 中为一个单独的子集, 则这样的 P 的个数等于 $[n-1]$ 的 $(k-1)$ -划分个数, 即 $S(n-1, k-1)$. 若 n 在 P 中不是一个单独的子集, 则从 P 中去掉 n 可以得到一个 $[n-1]$ 的 k -划分, 而把 n 插入任意一个 $[n-1]$ 的 k -划分可得到 k 个不同的 $[n]$ 的 k -划分, 从而这样的 P 的个数等于 $[n-1]$ 的 k -划分个数的 k 倍, 即 $kS(n-1, k)$. 因此

$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1).$$



第二类 Stirling 数

定理 2.3

$\{S(n, k)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足如下的函数方程

$$\sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k = x^n.$$

这里 $(x)_k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$.

第二类 Stirling 数

证明 对 n 用归纳法证明命题. $n = 1$ 时命题即 $x = x$, 显然成立. 设对 $n \geq 2, n - 1$ 时命题成立, 则当 n 时, 由归纳假设及 $S(n, k)$ 的递推性质知

$$\begin{aligned}x^n &= x^{n-1}x \\&= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k)(x)_k x \\&= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k)(x)_k (x - k + k) \\&= \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k)(x)_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} k S(n-1, k)(x)_k \\&= \sum_{k=2}^n S(n-1, k-1)(x)_k + \sum_{k=1}^{n-1} k S(n-1, k)(x)_k\end{aligned}$$

第二类 Stirling 数

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n S(n-1, k-1)(x)_k + \sum_{k=1}^n kS(n-1, k)(x)_k \\ &= \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k. \end{aligned}$$

即命题对 n 成立.

由归纳原理知命题对一切正整数 n 成立, 即 $\{S(n, k)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足定理中所述函数方程. □

注: 设 x 为一个正整数, 则有 x^n 个从 $[n]$ 到 $[x]$ 的映射, 对 $[x]$ 的每个 k -子集 Y , 有 $k!S(n, k)$ 个从 $[n]$ 到 Y 的满射, 所以

$$x^n = \sum_{k=1}^n \binom{x}{k} k!S(n, k) = \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k.$$

第二类 Stirling 数的普通生成函数

定理 2.4

$\{S(n, k)\}_{k=1}^{\infty}$ 满足如下的函数方程

$$\sum_{n=1}^k S(n, k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

第二类 Stirling 数的普通生成函数

证明 回顾引理 (2.2) 中第二类 Stirling 数 $S(n, k)$ 满足如下递推式

$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1).$$

我们希望找到生成函数 $f_k(x) = \sum_{n \geq 0} S(n, k)x^n$. 在上述递推式左右两边同乘以 x^n , 并对 $n, n \geq 1$ 求和, 得

$$\sum_{n \geq 1} S(n, k)x^n = \sum_{n \geq 1} kS(n-1, k)x^n + \sum_{n \geq 1} S(n-1, k-1)x^n.$$

接下来使用 $f_k(x)$ 表示上述等式, 得

$$f_k(x) = kxf_k(x) + xf_{k-1}(x),$$

即

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx}f_{k-1}(x).$$

这就得到生成函数序列 $f_k(x)$ 的递推关系. 由初始条件 $S(n, 0)$ 得 $f_0(x) = 1$. 现在容易猜出 $f_k(x)$ 的表达式, 只需写出前面一些值然后用归纳法证明即可. 这样就证明了当 $n, k \geq 1$ 时定理成立.

Outline

$S(n, k)$ 的显式公式

在求第二类 Stirling 数的指数型生成函数之前, 我们先得到 $S(n, k)$ 的显式公式.

定理 3.1

对于任意的正整数 n, k ,

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} j^n (-1)^{k-j}.$$

注: 容易看到, $k!S(n, k)$ 就是容斥原理章节中例题里面所讨论的从 $[n]$ 到 $[k]$ 的满射的个数.

第二类 Stirling 数的指数型生成函数

定理 3.2

$\{S(n, k)\}_{n=1}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n, k)x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

第二类 Stirling 数的指数型生成函数

证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n, k) x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} j^n (-1)^{k-j} \frac{x^n}{n!} \\&= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{1}{k!} \binom{k}{j} \sum_{n=0}^{\infty} j^n \frac{x^n}{n!} \\&= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{1}{k!} \binom{k}{j} e^{jx} \\&= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (e^x)^j (-1)^{k-j} \\&= \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k.\end{aligned}$$

□

相比之下, 尽管也有第一类 Stirling 数的递推关系, 但关于其生成函数的推导要更复杂, 为了求

Outline

两类 Stirling 数的联系

定理 4.1

由两类 *Stirling* 数, 定义 n 级矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} := (s(i, j))_{n \times n}$ 及 $B = (b_{ij})_{n \times n} := (S(i, j))_{n \times n}$. 则

$$AB = BA = I.$$

两类 Stirling 数的联系

定理 4.1

由两类 Stirling 数, 定义 n 级矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} := (s(i, j))_{n \times n}$ 及 $B = (b_{ij})_{n \times n} := (S(i, j))_{n \times n}$. 则

$$AB = BA = I.$$

证明.

考虑复数域上次数小于 $n + 1$ 且常数项为零的多项式关于加法和数量乘法构成的线性空间

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i \mid \lambda_i \in \mathbb{C} \right\},$$

$\{x, x^2, \dots, x^n\}$ 与 $\{(x)_1, (x)_2, \dots, (x)_n\}$ 是它的两组基. 记 $X = (x, x^2, \dots, x^n)'$,
 $Y = ((x)_1, (x)_2, \dots, (x)_n)'$, 则 $X = BY, Y = AX$. 即 A, B 恰好是这两组基之间的过渡矩阵. 固

$$AB = BA = I.$$



于是又立即有下面的推论.

推论 4.2

$$\sum_{l=1}^n s(i, l) S(l, j) = \delta(i, j),$$
$$\sum_{l=1}^n S(i, l) s(l, j) = \delta(i, j).$$

两类 Stirling 数的联系

定理 4.3

令 $A(x), B(x)$ 分别表示数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数. 则下列三个命题等价:

- (i) 对任意 $n \geq 0, b_n = \sum_{i=0}^n S(n, i)a_i$;
- (ii) 对任意 $n \geq 0, a_n = \sum_{i=0}^n s(n, i)b_i$;
- (iii) $B(x) = A(e^x - 1)$, 也即 $A(x) = B(\ln(1 + x))$.

两类 Stirling 数的联系

证明 若 (ii) 成立, 由推论 4.2 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^n S(n, j) a_j &= \sum_{j=0}^n S(n, j) \sum_{i=0}^j s(j, i) b_i \\&= \sum_{i=0}^n b_i \sum_{j=i}^n S(n, j) s(j, i) \\&= \sum_{i=0}^n b_i \sum_{j=1}^n S(n, j) s(j, i) \\&= \sum_{i=0}^n b_i \delta(n, i) \\&= b_n\end{aligned}$$

即 (i) 成立. 同理, 若 (i) 成立, 由推论 4.2 可得 (ii) 成立, 从而命题 (ii) 与 (i) 等价.

两类 Stirling 数的联系

若 (i) 成立, 由定义, 有

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n S(n, i) a_i \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{n \geq i} S(n, i) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{n \geq 0} S(n, i) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{(e^x - 1)^i}{i!} \\ &= A(e^x - 1) \end{aligned}$$

即 (iii) 成立. 易见推导过程可逆, 从而命题 (iii) 与 (i) 等价.

Outline

第一类 Stirling 数的指数型生成函数

推论 5.1

$\{s(n, k)\}_{n=1}^{\infty}$ 的指数型生成函数是

$$\frac{(\ln(1+x))^k}{k!}.$$

第一类 Stirling 数的指数型生成函数

推论 5.1

$\{s(n, k)\}_{n=1}^{\infty}$ 的指数型生成函数是

$$\frac{(\ln(1+x))^k}{k!}.$$

证明.

借助两类 Stirling 数的联系进行证明. 对于 $n \in \mathbb{N}$, 令 $b_n = \delta(n, k)$, $a_n = s(n, k)$, 则

$a_n = \sum_{i=0}^n s(n, i)b_i$. 令 $A(x), B(x)$ 分别表示数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数. 显然 $B(x) = \frac{x^k}{k!}$, 由定理 4.3 知 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的指数型生成函数为

$$A(x) = B(\ln(1+x)) = \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

