组合数学

张 彪

天津师范大学

zhang@tjnu.edu.cn

1. 递推关系的建立
2. 常系数线性齐次递推关系的求解
3. 常系数线性非齐次递推关系的求解

在组合数学中, 许多计数问题依赖于一个整数参数 n, 这个参数 n 常常表示问题中某个基本集或多重集的大小、排列中的位置数、分拆对应的整数, 等等.

本章主要讨论涉及一个整数参数的某些计数问题的代数求解方法, 即

- 在建立递推关系的基础上, 或者导出一个显式公式, 或者
- 归为一个函数, 即生成函数, 利用其幂级数的系数给出计数问题的解.

- 递推关系几乎在所有的数学分支中都有重要作用, 对于组合数学更是如此.
- 这是因为每个组合问题都有它的组合结构, 而在许多情况下递推关系是刻画组合结构的最合适的工具.
- 如何建立递推关系, 已给的递推关系有何性质, 以及如何求解递推关系等, 是递推关系中的几个基本问题.
- 本章首先讨论递推关系的建立问题, 然后对一些常见的递推关系做比较深入的讨论, 并给出其解法.

1. 递推关系的建立
2. 常系数线性齐次递推关系的求解
3. 常系数线性非齐次递推关系的求解

递推关系的建立

递推关系是研究离散变量的变化规律的常用方法，是解决相关组合问题的强有力的工具.

定义

对数列 $\{a_n\}$，称 a_n 用 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ 中的若干个项表示的等式为作递推关系.

下面通过几个例子来看看如何建立递推关系，至于递推关系的求解，将在后面的几节中讨论.

在讨论集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的错排数 d_n 时，我们建立了关于 d_n 的递推关系

$$\begin{cases} d_n = (n-1)\left(d_{n-1}+d_{n-2}\right) \quad (n \geqslant 3), \\ d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

并由此推出了

$$\begin{cases} d_n = nd_{n-1} + (-1)^n \quad (n \geqslant 2), \\ d_1 = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

- 等式 (1.1) 给出了 n 元错排数 d_n 同 $n-1$ 元错排数及 $n-2$ 元错排数 d_{n-2} 之间的关系，这样，由初值 d_1 和 d_2 就可以计算出 d_3，由 d_2 和 d_3 又可以计算出 d_4，如此可以逐个计算出错排数序列 $d_1, d_2, d_3, \cdots$.
- 等式 (1.2) 给出了 n 元错排数 d_n 同 $n-1$ 元错排数 d_{n-1} 之间的关系，这样由初始值 d_1 就唯一地确定了错排数序列.

例 1 (十进制问题)

一个计算机系统把一个十进制数字串作为一个编码字，如果它包含偶数个 0，就是有效的.
设 a_n 是有效的 n 位编码字的个数，找出一个关于 a_n 的递推关系.

例 1 (十进制问题)

一个计算机系统把一个十进制数字串作为一个编码字，如果它包含偶数个 0，就是有效的.
设 a_n 是有效的 n 位编码字的个数，找出一个关于 a_n 的递推关系.

解 当 $n = 1$ 时，因为 0 到 9 中只有 0 是无效的，所以 $a_1 = 9$.

当有 $n-1$ 位的字符，可通过以下两种方法构造 n 位有效数字串：

1. 第一种：在一个 $n-1$ 位的有效数字串后面加上一个非 0 的数字，可得一个 n 位的有效数字串. 此时，构成 n 位有效数字串的方式有 $9a_{n-1}$ 种.
2. 第二种：在一个无效的 $n-1$ 位数字串后面加上一个 0，可得一个 n 位的有效数字串. 此时，$n-1$ 位数字串共有 10^{n-1} 个，其中有效数字串有 a_{n-1} 个，故无效数字串有 $10^{n-1} - a_{n-1}$ 个.

因此，由加法原则可知，当 $n > 1$ 时，有

$$a_n = 9a_{n-1} + \left(10^{n-1} - a_{n-1}\right) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$$

且 $a_1 = 9$.

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1},$$

$a_1 = 9.$

注意, 利用数列 $\{a_n\}$ 满足的递推关系并结合初值, 在某些情况下我们可以解出 a_n 的通项表达式, 称为该递推关系的解. 例如, 由上例中的递推关系可得

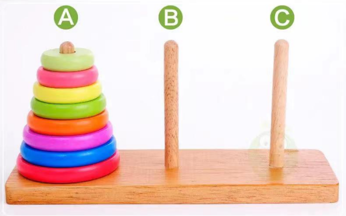
$$\begin{aligned}
a_n &= 8a_{n-1} + 10^{n-1} \\
&= 8(8a_{n-2} + 10^{n-2}) + 10^{n-1} \\
&= 8^2 a_{n-2} + 8 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} \\
&= \dots \\
&= 8^{n-1} a_1 + 8^{n-2} \cdot 10 + \cdots + 8 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} \\
&= 9 \cdot 8^{n-1} + 8^{n-2} \cdot 10 + \cdots + 8 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} \\
&= 8^n + \left(8^{n-1} + 8^{n-2} \cdot 10 + \cdots + 8 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1}\right) \\
&= 8^n + \frac{10^n - 8^n}{10 - 8} = \frac{1}{2}\left(8^n + 10^n\right).
\end{aligned}$$

汉诺塔问题：古印度神秘传说

大梵天创世时，圣庙中 3 根金刚石柱上，套着 64 个“大下小上”的金圆盘.
僧侣需按规则将圆盘移至第三根柱，预言完成时——世界将毁灭

例 2

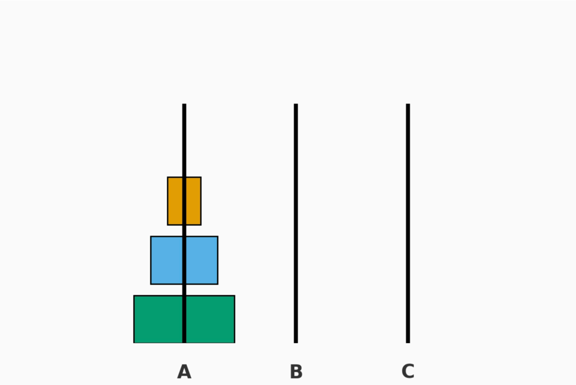
若仅用 *3* 个圆盘（简化版），如何在“每次移 *1* 个、大盘不压小盘”的规则下，将所有圆盘从第一根柱移到第三根柱？最少需要多少步？



名称由来：法国数学家的推广

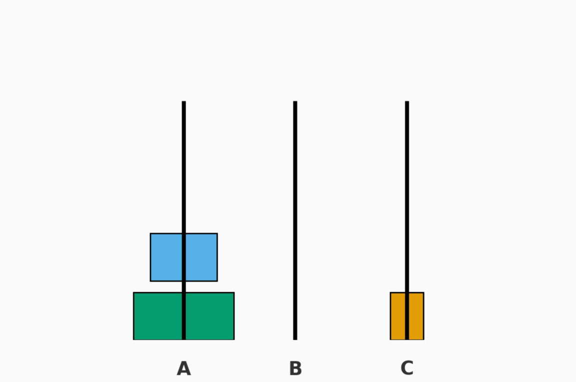
- 1883 年由法国数学家 爱德华 · 卢卡斯 命名
- “Hanoi”借用越南首都“河内”，增添异域神秘感
- 此前为民间流传，经其整理成为数学问题

n=3 Hanoi 塔示意图



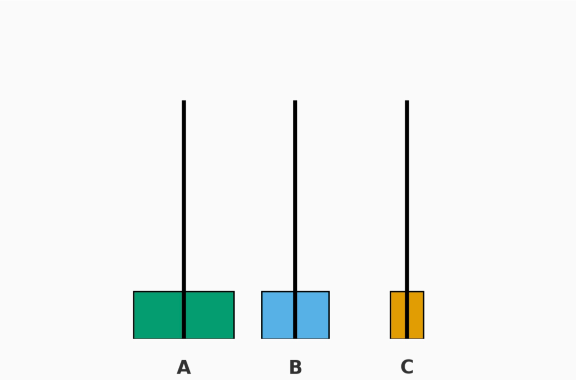
初态

n=3 Hanoi 塔示意图



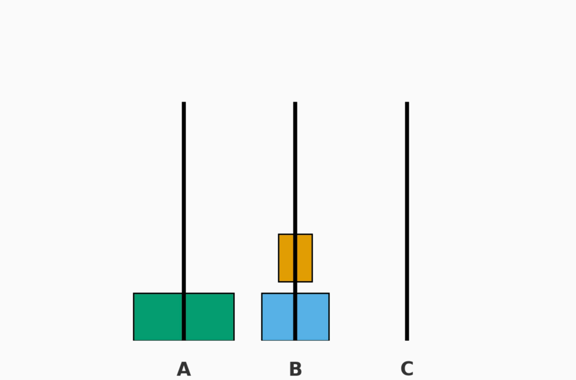
步骤一

n=3 Hanoi 塔示意图



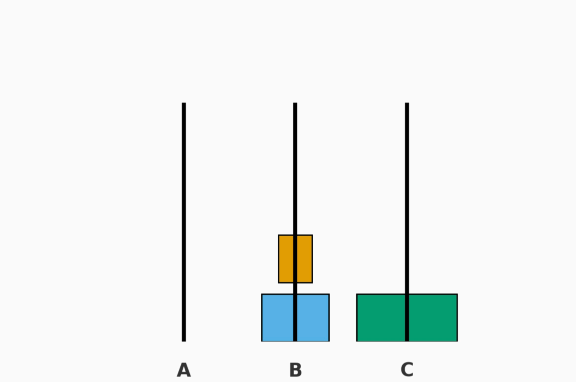
步骤二

n=3 Hanoi 塔示意图



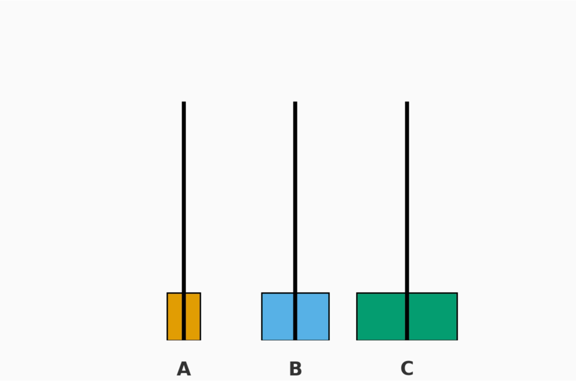
步骤三

n=3 Hanoi 塔示意图



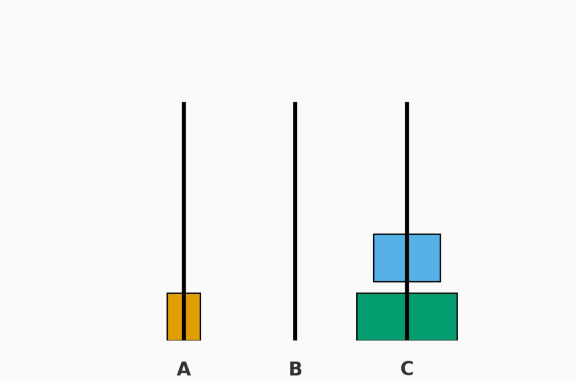
步骤四

n=3 Hanoi 塔示意图



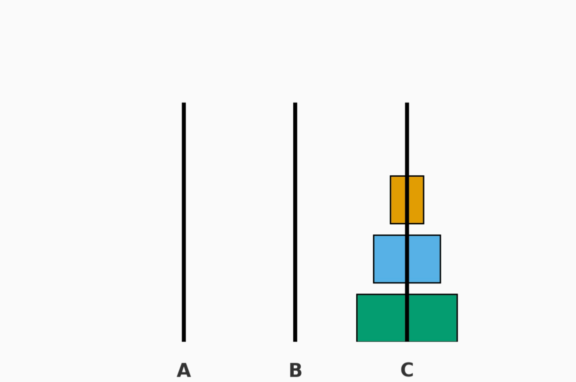
步骤五

n=3 Hanoi 塔示意图



步骤六

n=3 Hanoi 塔示意图



步骤七

解 记 H_n 为 n 个圆盘从 A 柱搬到 C 柱所需的最小次数. 整个搬动过程可以分成三个阶段:

(1) 将套在 A 柱上面的 $n-1$ 个圆盘从 A 柱按要求搬到 B 柱, 搬动次数为 H_{n-1};
(2) 把 A 柱上最下面的那个圆盘搬到 C 柱上, 搬动次数为 1 ;
(3) 把 B 柱上的 $n-1$ 个圆盘按要求搬到 C 柱上, 搬动次数为 H_{n-1}.

由加法原则知

$$H_n = 2H_{n-1} + 1,$$

又显然 $H_1 = 1$, 所以有如下带有初值的递推关系

$$\begin{cases} H_n = 2H_{n-1} + 1, \\ H_1 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_n = 2H_{n-1} + 1 \quad (n \geqslant 2), \\ H_1 = 1. \end{cases}$$

由此递推关系可得

$$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\ &= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 \\ &= 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &= \dots \\ &= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

例 3

在信道上传输由 A,B,C 三个字母组成的长为 n 的字符串，若其中出现连续的 AA 则信道无法传输.

令a_n 表示信道可以传输的长度为 n 的字符串个数，求 a_n 满足的递推关系.

例 3

在信道上传输由 A,B,C 三个字母组成的长为 n 的字符串，若其中出现连续的 AA 则信道无法传输.

令a_n 表示信道可以传输的长度为 n 的字符串个数，求 a_n 满足的递推关系.

解 长度为 $n(n \geq 2)$ 的可传输字符串分为四类：

1. 最右字符为 B;
2. 最右字符为 C;
3. 最右两个字符为 BA;
4. 最右两个字符为 CA.

前两类各有 a_{n-1} 个，后两类各有 a_{n-2} 个.

因此，当 $n \geq 3$ 时：

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

并且

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 8.$$

例 4

设 P 是平面上 n 个连通区域 $D_1, \ldots, D_n$ 的公共交界点，如图所示. 现用 k 种颜色对其着色，要求有公共边界的区域不能有相同的颜色. 令 a_n 表示不同的着色方案数，求它所满足的递推关系.

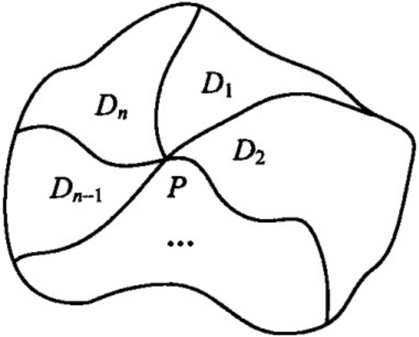


图: 区域着色

解 将所有满足要求的着色方案分成两类 $(n \geqslant 4)$：

1. D_1 与 D_{n-1} 同色. 此时, D_n 有 $k-1$ 种着色方案. 可将 D_1 与 D_{n-2} 看成相邻区域, $D_1, D_2, \cdots, D_{n-2}$ 的着色方案数为 a_{n-2}. 故此类着色方案数为 $(k-1)a_{n-2}$.
2. D_1 与 D_{n-1} 异色. 此时, D_n 有 $k-2$ 种着色方案. 此时, 可将 D_1 与 D_{n-1} 看成相邻的区域. 又 $D_1, D_2, \cdots, D_{n-1}$ 用 k 种颜色着色的方案数为 a_{n-1}, 故此类着色方案数为 $(k-2)a_{n-1}$.

容易求得 $a_2 = k(k-1), a_3 = k(k-1)(k-2)$, 从而有

$$\begin{cases} a_n = (k-1)a_{n-2} + (k-2)a_{n-1} \quad (n \geqslant 4), \\ a_2 = k(k-1), \quad a_3 = k(k-1)(k-2). \end{cases}$$

例 5

平面上 n 个圆相互交叠最多可将平面分成多少个区域?

例 5

平面上 n 个圆相互交叠最多可将平面分成多少个区域?

解 记所求为 h_n, 则 $h_1 = 2$. 将平面分成最多个区域的情形发生在每两个圆都相交的情形.

$n \geqslant 2$ 时, 先把 $n-1$ 个圆在平面上相互交叠, 将平面分成 h_{n-1} 个区域,

再考察将第 n 个圆加入的情形, 可得第 n 个圆与前 $n-1$ 个圆有 $2(n-1)$ 个交点,

这些交点把第 n 个圆分成 $2(n-1)$ 个圆弧, 每个圆弧把其所在的原有区域分成两个, 即比原来多出 1 个区域, 故共多出 $2(n-1)$ 个区域, 所以

$$h_n = h_{n-1} + 2(n-1).$$

例 5

平面上 n 个圆相互交叠最多可将平面分成多少个区域?

解 记所求为 h_n, 则 $h_1 = 2$. 将平面分成最多个区域的情形发生在每两个圆都相交的情形.

$n \geqslant 2$ 时, 先把 $n-1$ 个圆在平面上相互交叠, 将平面分成 h_{n-1} 个区域,

再考察将第 n 个圆加入的情形, 可得第 n 个圆与前 $n-1$ 个圆有 $2(n-1)$ 个交点,

这些交点把第 n 个圆分成 $2(n-1)$ 个圆弧, 每个圆弧把其所在的原有区域分成两个, 即比原来多出 1 个区域, 故共多出 $2(n-1)$ 个区域, 所以

$$h_n = h_{n-1} + 2(n-1).$$

因此, 当 $n \geq 2$ 时有

$$\begin{aligned} h_n &= h_{n-1} + 2(n-1) = h_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &= h_1 + 2(1) + \cdots + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n + 2. \end{aligned}$$

例 6

设 X 是一具有乘法运算的代数系统, 乘法不满足结合律, 用 xy 表示 x 对 y 之积. 如果

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X,$$

而且这 n 个元素依上面列出的顺序所能作出的一切可能的积彼此不同, 其个数记为 a_n.
求 a_n 满足的递推关系.

例 6

设 X 是一具有乘法运算的代数系统，乘法不满足结合律，用 xy 表示 x 对 y 之积. 如果

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X,$$

而且这 n 个元素依上面列出的顺序所能作出的一切可能的积彼此不同，其个数记为 a_n.
求 a_n 满足的递推关系.

$n = 3$ 时，乘积 $x_1x_2x_3$ 的加括号方式有 2 种:

$$(x_1x_2)x_3, \quad x_1(x_2x_3)$$

故 $a_3 = 2$.

例 6

设 X 是一具有乘法运算的代数系统，乘法不满足结合律，用 xy 表示 x 对 y 之积. 如果

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X,$$

而且这 n 个元素依上面列出的顺序所能作出的一切可能的积彼此不同，其个数记为 a_n. 求 a_n 满足的递推关系.

$n = 3$ 时，乘积 $x_1x_2x_3$ 的加括号方式有 2 种：

$$(x_1x_2)x_3, \quad x_1(x_2x_3)$$

故 $a_3 = 2$.

$n = 4$ 时，乘积 $x_1x_2x_3x_4$ 的加括号方式有 5 种：

1. $((x_1x_2)(x_3x_4))$
2. $((x_1(x_2x_3))x_4)$
3. $(((x_1x_2)x_3)x_4)$
4. $(x_1((x_2x_3)x_4))$
5. $(x_1(x_2(x_3x_4)))$

例 6

设 X 是一具有乘法运算的代数系统，乘法不满足结合律，用 xy 表示 x 对 y 之积. 如果

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in X,$$

而且这 n 个元素依上面列出的顺序所能作出的一切可能的积彼此不同，其个数记为 a_n.
求 a_n 满足的递推关系.

解 考虑一个由 n 个字母构成的乘积 $x_1x_2\cdots x_n$.

- 通过在式子中插入括号来规定乘法运算的先后顺序（字母本身顺序不变），a_n 即为计算这个乘积有多少种不同的运算顺序，也就是所有合法的加括号方案的数量.
- 最外层的两对括号形如

$$(x_1 \cdots x_r)(x_{r+1} \cdots x_n) \quad (1 \leqslant r \leqslant n-1).$$

- 当 $r=1$ 或 $n-1$ 时，通常简记为

$$x_1\left(x_2\cdots x_n\right)=\left(x_1\right)\left(x_2\cdots x_n\right),$$

$$\left(x_1\cdots x_{n-1}\right)x_n=\left(x_1\cdots x_{n-1}\right)\left(x_n\right).$$

- 在前一个括号中有 a_r 种加括号的方法，在后一个括号中又有 a_{n-r} 种加括号的方法，当 r 遍历 $1,2,\cdots,n-1$ 时，就得到

$$\begin{aligned} a_n =& a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots \\ &+a_{n-2}a_2+a_{n-1}a_1 \\ =& \sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{n-i} \quad (n>1). \end{aligned}$$

- 初始值为

$$a_1=1,$$

利用递推关系计算序列值

递推关系:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \quad (n \geq 2)$$

初始值: $a_1 = 1$

利用递推关系计算序列值

递推关系:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \quad (n \geq 2)$$

初始值: $a_1 = 1$

- $n = 2$: $a_2 = a_1 a_1 = 1 \times 1 = 1$

利用递推关系计算序列值

递推关系:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \quad (n \geq 2)$$

初始值: $a_1 = 1$

- $n = 2$: $a_2 = a_1 a_1 = 1 \times 1 = 1$
- $n = 3$: $a_3 = a_1 a_2 + a_2 a_1 = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$

利用递推关系计算序列值

递推关系:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \quad (n \geq 2)$$

初始值: $a_1 = 1$

- $n = 2$: $a_2 = a_1 a_1 = 1 \times 1 = 1$
- $n = 3$: $a_3 = a_1 a_2 + a_2 a_1 = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$
- $n = 4$: $a_4 = a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1 = 1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 5$

利用递推关系计算序列值

递推关系:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \quad (n \geq 2)$$

初始值: $a_1 = 1$

- $n = 2$: $a_2 = a_1 a_1 = 1 \times 1 = 1$
- $n = 3$: $a_3 = a_1 a_2 + a_2 a_1 = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$
- $n = 4$: $a_4 = a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1 = 1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 5$
- $n = 5$: $a_5 = a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_2 + a_4 a_1 = 1 \times 5 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 5 \times 1 = 14$

利用递推关系计算序列值

递推关系：

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \quad (n \geq 2)$$

初始值：$a_1 = 1$

- $n = 2$： $a_2 = a_1 a_1 = 1 \times 1 = 1$
- $n = 3$： $a_3 = a_1 a_2 + a_2 a_1 = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$
- $n = 4$： $a_4 = a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1 = 1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 5$
- $n = 5$： $a_5 = a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_2 + a_4 a_1 = 1 \times 5 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 5 \times 1 = 14$
- $n = 6$： $a_6 = a_1 a_5 + a_2 a_4 + a_3 a_3 + a_4 a_2 + a_5 a_1 = 1 \times 14 + 1 \times 5 + 2 \times 2 + 5 \times 1 + 14 \times 1 = 42$

利用递推关系计算序列值

递推关系：

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \quad (n \geq 2)$$

初始值：$a_1 = 1$

- $n = 2$：$a_2 = a_1 a_1 = 1 \times 1 = 1$
- $n = 3$：$a_3 = a_1 a_2 + a_2 a_1 = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$
- $n = 4$：$a_4 = a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1 = 1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 5$
- $n = 5$：$a_5 = a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_2 + a_4 a_1 = 1 \times 5 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 5 \times 1 = 14$
- $n = 6$：$a_6 = a_1 a_5 + a_2 a_4 + a_3 a_3 + a_4 a_2 + a_5 a_1 = 1 \times 14 + 1 \times 5 + 2 \times 2 + 5 \times 1 + 14 \times 1 = 42$

计算结果：$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 5,\ a_5 = 14,\ a_6 = 42$

定义 1 (线性递推关系)

- 设 k 是给定的正整数. 若数列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ 的相邻 $k+1$ 项间满足关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n) \tag{1}$$

  $n \geqslant k$ 成立, 其中 $c_k \neq 0$, 则称该关系为 $\{a_n\}$ 的 k 阶线性递推关系.
- 若 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 都是常数, 则称之为 k 阶常系数线性递推关系.
- 若 $f(n) = 0$, 则称之为齐次的.

- 如果有一个数列代入递推关系 (1), 使得其对任何 $n \geqslant k$ 都成立, 则称这个数列是递推关系 (1) 的解.
- 常系数线性齐次递推关系的一般形式为

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad (n \geqslant k, c_k \neq 0)\,. \tag{2}$$

定义 2 (递推关系的特征方程)

- 方程
$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k = 0 \tag{3}$$
叫作递推关系 (2) 的 特征方程.
- 它的 k 个根 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ （可能有重根）叫作该递推关系的特征根, 其中, $r_i\ (i = 1, 2, \cdots, k)$ 是复数.

设 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是常数且 $c_k \neq 0$，考虑 k 阶常系数线性齐次递推关系:
$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad (n \geq k)$$
其对应的特征方程为: $x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k = 0$

定理 3

函数 $a_n = r^n$ （其中 $r \neq 0$）是递推关系(2)的一个解，当且仅当 r 是特征方程(3)的一个根.

如果特征方程有 k 个互不相同的根 $r_1, r_2, \cdots, r_k$，那么递推关系的通解为:
$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n \tag{4}$$
其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 为任意常数.

证明 首先，$a_n = r^n$ $(r \neq 0)$ 为式(2)的解，当且仅当

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$$

对所有的 $n > k$ 成立. 由 $r \neq 0$，消去 r^{n-k}，可得等价方程

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0.$$

因此，$a_n = r^n$ 是递推关系(2)的解，当且仅当 r 是特征方程(3)的根.

又由特征方程(3)有 k 个互不相同的根 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 可知，

$$a_n = r_1^n, r_2^n, \cdots, r_k^n$$

是递推关系(2)的 k 个不同的解. 因此，由递推关系的线性性和齐次性知，对任意的 k 个常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$，若

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

也是递推关系(2)的解.

其次，证明式(4)是递推关系(2)的通解. 假设递推关系的初值为

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \cdots, a_{k-1} = b_{k-1},$$

则由式(4)，可得如下关于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = b_0, \\ \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \cdots + \alpha_k r_k = b_1, \\ \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \cdots + \alpha_k r_k^2 = b_2, \\ \vdots \\ \alpha_1 r_1^{k-1} + \alpha_2 r_2^{k-1} + \cdots + \alpha_k r_k^{k-1} = b_{k-1}. \end{cases}$$

这个方程组的系数行列式是范德蒙德行列式，其行列式值为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k} (r_j - r_i),$$

因此，由 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 互不相同可知，上述线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$. 于是，式 (4)是递推关系(2)的通解. 即，对于所有的非负整数 n，均有 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$. $\square$

例 7

已知

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 15$$

求 $\{a_n\}$ 的通项表达式.

解 此递推关系的特征方程为

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

因式分解得

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

所以其特征根为 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

因此，可设通解形式为 $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot 3^n$ 即 $a_n = c_1 + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot 3^n$

利用初始条件确定常数 c_1, c_2, c_3：

$$\begin{cases} n=0: & c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ n=1: & c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5 \\ n=2: & c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 15 \end{cases}$$

解上述方程组，得

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 2$$

因此，通项表达式为

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

例 8

求解 1 节例 2 中的递推关系

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, \\ a_1 = 3, \quad a_2 = 8. \end{cases}$$

解 先求这个递推关系的通解. 它的特征方程为 $x^2 - 2x - 2 = 0$.

解这个方程, 得 $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$. 所以，通解为

$$a_n = c_1 \left(1 + \sqrt{3}\right)^n + c_2 \left(1 - \sqrt{3}\right)^n.$$

代入初值来确定 c_1 和 c_2 ，得
$$\begin{cases} c_1 \left(1 + \sqrt{3}\right) + c_2 \left(1 - \sqrt{3}\right) = 3, \\ c_1 \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 + c_2 \left(1 - \sqrt{3}\right)^2 = 8. \end{cases}$$

解 先求这个递推关系的通解. 它的特征方程为 $x^2-2x-2=0$.

解这个方程, 得 $x_1=1+\sqrt{3}, \quad x_2=1-\sqrt{3}$. 所以，通解为

$$a_n=c_1\left(1+\sqrt{3}\right)^n+c_2\left(1-\sqrt{3}\right)^n.$$

代入初值来确定 c_1 和 c_2 ，得 （或递推对 $n\geqslant 2$ 恒成立 $\therefore a_2=2a_1+2a_0$ 解得 $a_0=1$）

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_1(1+\sqrt{3})+c_2(1-\sqrt{3})=3 \end{cases}$$

求解这个方程组

$$c_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad c_2=\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

因此, 所求的字符串个数为

$$a_n=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots).$$

如果特征方程有重根呢？

例 9

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 3. \end{cases}$$

如果特征方程有重根呢？

例 9

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 3. \end{cases}$$

解 递推关系的特征方程为 $x^2 - 4x + 4 = 0$. 其特征根为 $r_1 = r_2 = 2$.

因此, 2^n 是递推关系的解 (不考虑初值).

如果特征方程有重根呢？

例 9

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 3. \end{cases}$$

解 递推关系的特征方程为 $x^2 - 4x + 4 = 0$. 其特征根为 $r_1 = r_2 = 2$.

因此，2^n 是递推关系的解 (不考虑初值).

我们不妨试试 $n2^n$，把它代入递推关系，得

$$\begin{aligned} n2^n - 4(n-1)2^{n-1} + 4(n-2)2^{n-2} &= n2^n - (n-1)2^{n+1} + (n-2)2^n \\ &= 2^n\left(n - 2(n-1) + (n-2)\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

这说明 $n2^n$ 也是递推关系的解.

易知 $n2^n$ 与 2^n 线性无关.

所以原递推关系的通解为

$$c_1 2^n + c_2 n 2^n.$$

代入初值 $a_0 = 1, a_1 = 3$, 得

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ 2c_1 + 2c_2 = 3. \end{cases}$$

解这个方程组, 得

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

所以, 原递推关系的解为

$$a_n = 2^n + 2^{n-1} n.$$

定理 2.6

设递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \tag{6}$$

的特征方程 $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$（c_1, c_2 为实数，$c_2 \neq 0$）只有一个非零二重根 $x = r$，则 a_n 为递推关系 (6) 的通解当且仅当

$$a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$$

其中 α_1, α_2 为常数.

证明 首先，证明 $a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$ 是递推关系 (6) 的解.

由引理 2.3 可知，$a_n = r^n$ 为递推关系的解. 下面证明 $a_n = nr^n$ 也是递推关系的解.

由 $x = r$ 为特征方程 $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ 的二重根，得

$$x^2 - c_1 x - c_2 = (x - r)^2 = x^2 - 2rx + r^2,$$

故 $c_1 = 2r$，$c_2 = -r^2$. 于是:

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= 2r(n-1)r^{n-1} - r^2(n-2)r^{n-2} \\ &= 2(n-1)r^n - (n-2)r^n \\ &= nr^n = a_n \end{aligned}$$

因此 $a_n = nr^n$ 是解.

由递推关系的线性性和齐次性，对任意常数 α_1, α_2，$a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$ 是解.

其次，证明其为通解. 假设递推关系 (6) 的初值为 $a_0 = b_0$，$a_1 = b_1$，

则由 $a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$，可得如下关于 α_1, α_2 的线性方程组:

$$\begin{cases} \alpha_1 = b_0, \\ \alpha_1 r + \alpha_2 r = b_1 \end{cases}$$

该方程组的系数行列式不为零（因 $r \neq 0$)，故有唯一解 $\alpha_1 = b_0$，$\alpha_2 = \frac{b_1 - b_0 r}{r}$.

因此，$a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$ 是递推关系 (6) 的通解，

即对于所有非负整数 n，均有 $a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$.

引理

设 $r \neq 0$ 是递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \tag{5}$$

特征方程 $a_x = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k = 0$ 的 m $(m \geq 2)$ 重根，则

$$a_n = n^t r^n \quad (t = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

都是该递推关系的解.

定理 2.7

设 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 是递推关系 (2) 的全部不同的特征根，其重数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_t$ $(\sum_t m_t = k)$，那么递推关系 (2) 的通解为

$$a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_t,$$

其中

$$a_i = \left(\alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} n + \cdots + \alpha_{j_i} n^{m_i - 1}\right) \cdot x_i^n \quad (1 \leqslant i \leqslant t).$$

例 10

已知

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 6$$

求 $\{a_n\}$ 的通项表达式

例 10

已知

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 6$$

求 $\{a_n\}$ 的通项表达式

解 由特征方程 $x^2 - 6x + 9 = 0$ 的根为 $x = 3$，重数为 2，故可设

$$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n$$

利用初始条件确定常数 α_1, α_2：

$$\begin{cases} n = 0: & \alpha_1 = 1 \\ n = 1: & 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6 \end{cases}$$

解得 $\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = 1$. 因此，通项表达式为

$$a_n = 3^n + n \cdot 3^n.$$

例 11

已知

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = -1$$

求 $\{a_n\}$ 的通项表达式

例 11

已知

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = -1$$

求 $\{a_n\}$ 的通项表达式

解 递推关系的特征方程 $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ 有一个三重根 $x = -1$. 设

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

利用初始条件确定常数 $\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$:

$$\begin{cases} n = 0: & \alpha_{1,0} = 1 \\ n = 1: & -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2} = -2 \\ n = 2: & \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} = -1 \end{cases}$$

解得 $\alpha_{1,0} = 1$, $\alpha_{1,1} = 3$, $\alpha_{1,2} = -2$. 因此, 通项表达式为

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$$

例 12

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5a_{n-3} + 2a_{n-4}, \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2. \end{cases}$$

例 12

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5a_{n-3} + 2a_{n-4}, \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2. \end{cases}$$

解 该递推关系的特征方程为

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

其特征根为

$$x_1 = x_2 = x_3 = -1, \quad x_4 = 2.$$

由定理 2.2, 对应于 $x = -1$ 的解为

$$a_n^{(0)} = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n,$$

对应于 $x = 2$ 的解为

$$a_n^{(2)} = c_4 2^n.$$

因此通解为

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(2)}$$

代入初始值得

$$
\begin{cases}
c_1 + c_4 = 1, \\
-c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 = 0, \\
c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 1, \\
-c_1 - 3c_2 - 9c_3 + 8c_4 = 2,
\end{cases}
$$

解得

$$
c_1 = \frac{7}{9}, \quad c_2 = -\frac{1}{3}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{2}{9}.
$$

所以递推关系的解为

$$
a_n = (-1)^n \frac{7}{9} - (-1)^n \frac{1}{3} n + \frac{2}{9} \cdot 2^n.
$$

定义 4

设 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 是 k 个常数且 $c_k \neq 0$，$f(n)$ 是非负整数 n 为自变量的实函数，则递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n) \quad (n \geq k),$$

称为 k 阶常系数线性非齐次递推关系.

注：上述非齐次递推关系对应的齐次递推关系为

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

常系数线性非齐次递推关系的一般形式为

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n) \quad (n \geq k), \tag{6}$$

其中, $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 为常数, $c_k \neq 0, g(n) \neq 0$. 递推关系 (6) 对应的齐次递推关系为

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}. \tag{7}$$

定理 5

常系数线性非齐次递推关系(6)的通解为其解与相应的齐次递推关系(7)的通解之和.

证明 首先，设 $a_n = z_n$ 是递推关系(6)的一个解，$a_n = y_n$ 是对应齐次递推关系(7)的通解，即

$$\begin{cases} z_n = c_1 z_{n-1} + c_2 z_{n-2} + \cdots + c_k z_{n-k} + f(n) \quad (n \geq k), \\ y_n = c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + \cdots + c_k y_{n-k} \quad (n \geq k), \end{cases}$$

则有

$$z_n + y_n = c_1(z_{n-1} + y_{n-1}) + c_2(z_{n-2} + y_{n-2}) + \cdots + c_k(z_{n-k} + y_{n-k}) + f(n) \quad (n \geq k),$$

因此，$a_n = z_n + y_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ 是递推关系(6)的解.

其次，设 $a_n = z_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ 是递推关系(6)的任一个解，则

$$z_n = c_1 z_{n-1} + c_2 z_{n-2} + \cdots + c_k z_{n-k} + f(n) \quad (n \geq k).$$

于是

$$z_n - x_n = c_1(z_{n-1} - x_{n-1}) + c_2(z_{n-2} - x_{n-2}) + \cdots + c_k(z_{n-k} - x_{n-k}) \quad (n \geq k),$$

因此，$a_n = z_n - x_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ 是对应齐次递推关系(7)的一个解. 又因为 $a_n = y_n$ 是对应齐次递推关系(7)的通解，所以 $z_n - x_n$ 可用 y_n 表示，从而 z_n 可用 $y_n + x_n$ 表示出.

由此可知，对于一般的 $a_n = x_n + y_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ 是递推关系(6)的解，

□

对于一般的 $f(n), k$ 阶常系数线性非齐次递推关系 (6) 没有普遍的解法.

只有在某些简单的情况下, 可以用待定系数法求出非齐次递推关系的特解.

令 $P(x)$ 为齐次递推关系(6)的特征方程，下表对于几种 $g(n)$ 给出了特解的一般形式.

在 §5 节, 我们将用生成函数的方法证明下表中特解的正确性.

$f(n)$	特征多项式 $P(x)$	特解的一般形式
β^n	$P(\beta) \neq 0$	$a\beta^n$
	β 是 $P(x)=0$ 的 m 重根	$an^m\beta^n$
n^s	$P(1) \neq 0$	$b_s n^s + b_{s-1}n^{s-1} + \cdots + b_1 n + b_0$
	1 是 $P(x)=0$ 的 m 重根	$n^m\left(b_s n^s + b_{s-1}n^{s-1} + \cdots + b_1 n + b_0\right)$
$n^s\beta^n$	$P(\beta) \neq 0$	$\left(b_s n^s + b_{s-1}n^{s-1} + \cdots + b_1 n + b_0\right)\beta^n$
	β 是 $P(x)=0$ 的 m 重根	$n^m\left(b_s n^s + b_{s-1}n^{s-1} + \cdots + b_1 n + b_0\right)\beta^n$

例 1 (汉诺塔问题)

求解递推关系

$$\begin{cases} H_n = 2H_{n-1} + 1 \\ H_0 = 0 \end{cases}$$

例 1 (汉诺塔问题)

求解递推关系

$$\begin{cases} H_n = 2H_{n-1} + 1 \\ H_0 = 0 \end{cases}$$

解 令 $\beta = 1$，因为 1 不是特征方程 $x = 2$ 的根，所以该递推关系的非齐次特解为 α. 将其代入递推关系，可得 $\alpha = 2\alpha + 1$. 从而，特解为 $\alpha = -1$.

而由相应的齐次递推关系 $H_n = 2H_{n-1}$ 的特征方程为 $x = 2$ 可知，其解为 $c \cdot 2^n$.
因此，所求非齐次递推关系的通解为 $H_n = c2^n - 1$. 由初值 $H_0 = 0$，可得 $c = 1$. 故，$H_n = 2^n - 1$.

例 2

求解递推关系 $a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$，且 $a_0 = 1$.

例 2

求解递推关系 $a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$，且 $a_0 = 1$.

解 令 $\beta = 4$，因为 4 不是特征方程 $x = 2$ 的根，所以该递推关系的非齐次特解为 $4^{n-1}\alpha$. 将其代入递推关系，可得

$$4^{n-1}\alpha = 2 \cdot 4^{n-2}\alpha + 4^{n-1},$$

比较等式两边 4^{n-1} 的系数，可得 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$. 从而，$\alpha = 2$. 故，$2 \cdot 4^{n-1}$ 为特解.

而由相应的齐次递推关系 $a_n = 2a_{n-1}$ 的特征方程为 $x = 2$ 可知，其解为 $c \cdot 2^n$.

因此，所求非齐次递推关系的通解为 $a_n = c \cdot 2^n + 2 \cdot 4^{n-1}$. 由初值 $a_0 = 1$，可得 $2^0 c + 4^{0-1} \cdot 2 = 1$. 从而，$c = \frac{1}{2}$. 故，$a_n = \frac{1}{2}(2^n + 4^n)$.

例 3

求解非齐次线性递推关系

$$h_n = 6h_{n-1} - 9h_{n-2} + 2n, (n \geq 2),$$

初始条件为 $h_0 = 1, h_1 = 0$.

将非齐次递推关系齐次化

例 3

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}, \\ a_1 = 3, \quad a_2 = 10. \end{cases} \tag{1}$$

将非齐次递推关系齐次化

例 3

求解递推关系

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}, \\ a_1 = 3, \quad a_2 = 10. \end{cases} \tag{1}$$

解 由递推关系 (1) 可以得到

$$a_{n-1} = 2a_{n-2} + 4^{n-2}.$$

将上式乘以 -4 后再与式 (1) 相加，得

$$a_n - 4a_{n-1} = 2a_{n-1} - 8a_{n-2},$$

即

$$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}. \tag{2}$$

如此我们得到了二阶齐次递推关系 (2)，它需要两个初值才能确定解.

将 $a_1=3$ 代入递推关系 (1), 得

$$a_2=2a_1+4^{2-1}=2\times 3+4=10.$$

所以有

$$\begin{cases} a_n=6a_{n-1}-8a_{n-2}, \\ a_1=3, \quad a_2=10. \end{cases}$$

它的特征方程为

$$x^2-6x+8=0,$$

解得两个特征根为

$$x_1=2, \quad x_2=4.$$

于是, 通解为

$$a_n=A\cdot 2^n+B\cdot 4^n.$$

由初值 $a_1=3, a_2=10$, 得

$$\begin{cases} 2A+4B=3, \\ 4A+16B=10 \end{cases}$$

解得 $A=B=\frac{1}{2}$. 故

$$a_n=\frac{1}{2}\left(2^n+4^n\right).$$