第三章　线性方程组

张彪

天津师范大学

数学科学学院

zhang@tjnu.edu.cn

目录

《九章算术 · 方程》是世界上最早系统讨论联立方程问题的文献.

《九章算术 · 方程》，成于公元一世纪左右，西汉张苍、耿寿昌整理的算学书

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；
上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；
上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗.
问上、中、下禾实一秉各几何？

《九章算术 · 方程》是世界上最早系统讨论联立方程问题的文献.

《九章算术 · 方程》，成于公元一世纪左右，西汉张苍、耿寿昌整理的算学书

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；
上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；
上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗.
问上、中、下禾实一秉各几何？

解 我们设上禾、中禾、下禾一秉分别为 x, y, z 斗，则有

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

引例

在平面直角坐标系中，作一条抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过三个已知点 $(-3, 20), (1, 0), (2, 10)$，求抛物线方程.

引例

在平面直角坐标系中，作一条抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过三个已知点 $(-3, 20), (1, 0), (2, 10)$，求抛物线方程.

解 求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的方程也就是求 a, b, c 的值. 将三个已知点的坐标代入抛物线方程得到

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 20 & (1) \\ a + b + c = 0 & (2) \\ 4a + 2b + c = 10 & (3) \end{cases}$$

引例

在平面直角坐标系中，作一条抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过三个已知点 $(-3,20),(1,0),(2,10)$，求抛物线方程.

解 求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的方程也就是求 a,b,c 的值. 将三个已知点的坐标代入抛物线方程得到

$$\begin{cases} 9a-3b+c=20 & (1) \\ a+b+c=0 & (2) \\ 4a+2b+c=10 & (3) \end{cases}$$

用加减消去法消去 c

$$(1)\text{式} - (2)\text{式}: 8a-4b=20 \quad (4)$$

$$(3)\text{式} - (2)\text{式}: 3a+b=10 \quad (5)$$

再由 (4)、(5) 两式消去 b

$$\frac{1}{4} \times (4)\text{式} + (5)\text{式}: 5a=15 \quad (6)$$

由 (6) 解出 $a=3$. 代入 (5) 解出 $b=1$. 再将 $a=3, b=1$ 代入 (2) 解出 $c=-4$.

引例

在平面直角坐标系中，作一条抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过三个已知点 $(-3, 20), (1, 0), (2, 10)$，求抛物线方程.

经检验可知

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

是原方程组的解. 所求的抛物线方程为 $y = 3x^2 + x - 4$. $\square$

一般线性方程组的形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个未知量，s 为方程个数，s 与 n 未必相等.

- a_{ij} 称为线性方程组第 i 个方程中 x_j 的系数，b_i 称为常数项 $(i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, n)$.
- 线性方程组 (1) 的一个解是指由 n 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 组成的一个有序数组 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$，当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 代入后，(1) 的每个方程都成为恒等式.
- 线性方程组的解的全体称为它的解集合.
- 如果两个线性方程组有相同的解集合，就称它们是同解同解的.

在实际问题中，我们会遇到含有成千上万个未知量的线性方程组，

因此需要有统一的机械的方法来解线性方程组，以便可以编程序让计算机去求解.

解线性方程组的基本思路是消元，即在一部分方程中消去一些未知量.

下面我们通过例子来说明如何解线性方程组.

例 1.　解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

在实际问题中，我们会遇到含有成千上万个未知量的线性方程组，

因此需要有统一的机械的方法来解线性方程组，以便可以编程序让计算机去求解.

解线性方程组的基本思路是消元，即在一部分方程中消去一些未知量.

下面我们通过例子来说明如何解线性方程组.

例 1. 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

解 第一个目标是消 x_1，首先交换第一个和第三个方程，得到

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

然后, 将第一个方程的 -1 倍加入到第二个方程, 将第一个方程的 -3 倍加入到第三个方程, 得到

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -1 \\ 5x_2 + 8x_3 = -3 \end{cases}$$

第二个目标是消 x_2, 将第二个方程的 -5 倍加入到第三个方程, 得到

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -1 \\ -7x_3 = 2 \end{cases}$$

第三个方程乘以 $-\frac{1}{7}$, 得到

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_3 = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\
x_1 - 2x_2 - x_3 = 2
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\
3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\
x_2 + 3x_3 = -1 \\
5x_2 + 8x_3 = -3
\end{cases}
$$

$$
\rightarrow
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\
x_2 + 3x_3 = -1 \\
- 7x_3 = 2
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\
x_2 + 3x_3 = -1 \\
x_3 = -\dfrac{2}{7}
\end{cases}
$$

最后通过代入法解出方程组的唯一解

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{10}{7} \\
x_2 = -\dfrac{1}{7} \\
x_3 = -\dfrac{2}{7}
\end{cases}
$$

高斯消元法

用消元法解线性方程组的具体做法是:

对线性方程组反复施行以下三种变换, 从而达到简化线性方程组的目的.

1. 用一个非零数乘以一个方程
2. 把一个方程的某个倍数加到另一个方程上
3. 交换两个方程的位置

为了叙述方便, 称上述三个变换为线性方程组的初等变换.

命题

初等变换把一个线性方程组变为一个与它同解的线性方程组.

证明 只对第二种初等变换来证明. 设对线性方程组 (1) 进行第二种初等变换.

不妨设把第二个方程的 k 倍加到第一个方程, 得到新的线性方程组

$$\begin{cases} (a_{11}+ka_{21})x_1+(a_{12}+ka_{22})x_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})x_n=b_1+kb_2, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s. \end{cases} \tag{2}$$

现设 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是 (1) 的任意一个解.

因为 (1) 与 (2) 的后 $s-1$ 个方程是一样的, 所以 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 满足 (2) 的后 $s-1$ 个方程.

又 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 满足 (1) 的前两个方程

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1,$$
$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2.$$

把第二个等式的两边乘以 k, 再与第一个等式相加, 即得

$$(a_{11} + ka_{21})c_1 + (a_{12} + ka_{22})c_2 + \cdots + (a_{1n} + ka_{2n})c_n = b_1 + kb_2,$$

故 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 又满足 (2) 的第一个方程, 因而是 (2) 的一个解.

同理可证 (2) 的任意一个解也是 (1) 的解. 故 (1) 与 (2) 是同解的.

对于其它两种初等变换, 同理可验证结论成立. ∎

例 2. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 14x_3 = 8 \\ -x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

例 2. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 14x_3 = 8 \\ -x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

解 第一个目标是消 x_1，将第一个方程的 -2 倍加入到第二个方程，将第一个方程的 -3 倍加入到第三个方程，得到

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_2 + x_3 = 7 \\ -2x_2 + 2x_3 = 14 \\ -x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

第二个目标是消 x_2，将第二、四个方程乘以 -1，第三个方程乘以 $-\frac{1}{2}$，得到

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\
x_2 - x_3 = -7 \\
x_2 - x_3 = -7 \\
x_2 - x_3 = -7
\end{cases}
$$

将第二个方程的 -1 倍加入第三、四个方程, 得到:

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\
x_2 - x_3 = -7 \\
0 = 0 \\
0 = 0
\end{cases}
$$

此时, 第三、四个方程已经变成恒等式了, 是冗余的, 可以删去, 得到

$$\begin{cases} x_1 + & 3x_2 + & 4x_3 = & -2 \\ & x_2 - & x_3 = & 7 \end{cases}$$

此时，方程组已经化为"阶梯形"，可以使用代入法了，将第二个方程变形为 $x_2 = x_3 - 7$，再代入第一个方程，得到：

$$\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 19 \\ x_2 = x_3 - 7 \end{cases}$$

此时，容易发现，x_3 不受约束了，可以取任意值，即 自由未知量.

如果我们对 x_3 任取一个值 k，那么总可以对应算出 x_1 和 x_2 的解，于是方程组有无数个解，可以表示如下形式（其中，k 取任意实数）：

$$\begin{cases} x_1 = & -7k + 19 \\ x_2 = & k - 7 \\ x_3 = & k \end{cases}$$

例 3. 解线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\
3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8
\end{cases}
$$

例 3. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8 \end{cases}$$

解 第一个目标是消 x_1，将第一个方程的 -3 倍加入到第二个方程，将第一个方程的 -2 倍加入到第三个方程，得到：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ 5x_2 - 4x_3 - 7x_5 = 0 \\ 5x_2 - 4x_3 - 7x_5 = 4 \end{cases}$$

第二个目标是消 x_2，将第二个方程的 -1 倍加入第三个方程，得到：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ \quad\quad 5x_2 - 4x_3 \quad\quad - 7x_5 = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 = 4 \end{cases}$$

第三个方程是矛盾方程，因此此方程组无解.

对于线性方程组的一般形式, 首先检查 x_1 的系数 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{s1}$, 若它们全为 0 , 则对 x_1 无任何限制, x_1 可取任意值, 而线性方程组可看作 $x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组来解;

如果 x_1 的系数不全为零, 那么利用初等变换 3 , 可设 $a_{11} \neq 0$, 再利用初等变换 2 , 分别把第一个方程的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 个方程 $(i = 2, \cdots, s)$, 则线性方程组变成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{cases}$$

其中 $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}, b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1, i = 2, \cdots, s, j = 2, \cdots, n$.

此时解线性方程组的问题可归结为解线性方程组

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s \end{cases}$$

的问题.

再按上面的步骤进行讨论,$\cdots$, 最后就得到一个阶梯形线性方程组. 为论证方便（调换变量顺序），不妨设为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1(n-1)}x_{n-1} + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2(n-1)}x_{n-1} + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{r(n-1)}x_{n-1} + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0, \end{cases}$$

其中 $c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r$, 上式中的 “$0 = 0$” 可能出现也可能不出现, 可去掉.

现考虑上式解的情况.

- 如果有方程 $0 = d_{r+1}$, 而 $d_{r+1} \neq 0$, 此时不管 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 取什么值都不能使它成为等式. 故线性方程组无解.

- 若 d_{r+1} 是 0，而上式中去掉“$0=0$”的方程后，可分两种情况:

1. $r=n$. 此时阶梯形线性方程组为

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1(n-1)}x_{n-1} + c_{1n}x_n = d_1, \\
\qquad\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2(n-1)}x_{n-1} + c_{2n}x_n = d_2, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad c_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + c_{(n-1)n}x_n = d_{n-1}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n,
\end{cases}
$$

其中 $c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

由最后一个方程开始, $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ 的值就可以逐个地、唯一地确定出来了. 此时有唯一解.

2. $r < n$. 此时阶梯形线性方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + c_{1(r+1)}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + c_{2(r+1)}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + c_{r(r+1)}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \end{cases}$$

其中 $c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r$.

它可以改写成

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1(r+1)}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2(r+1)}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r = d_r - c_{r(r+1)}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases}$$

此时任意给定 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 一组值, 就可以唯一地确定出 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的值, 即求出一个解.

由上式可以把 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 通过 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 表示出来:

$$\begin{cases} x_1 = d_1' + l_{1(r+1)}x_{r+1} + \cdots + l_{1n}x_n, \\ \vdots \\ x_r = d_r' + l_{r(r+1)}x_{r+1} + \cdots + l_{rn}x_n. \end{cases}$$

这样一组表达式称为线性方程组的一般解, 而 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 称为一组自由未知量.

小结

- 线性方程组的解有三种可能：1. 有唯一解, 2. 有无数个解, 但是可以写出通解形式, 3. 无解

系数矩阵与增广矩阵

隐去线性方程组的未知量，可以将线性方程组用其增广矩阵表示.

在增广矩阵上进行高斯消元法会更加简洁.

回顾我们在绪论中所引用的《九章算术》中的方程组

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

不考虑常数项，仅使用系数可以排列成矩阵 A；既使用系数也使用常数项可以排列成矩阵 $\overline{A}$：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}$$

矩阵 A 叫方程组 (I) 的系数矩阵，矩阵 $\overline{A}$ 叫方程组 (I) 的 增广矩阵.

定义 (矩阵的初等行变换)

矩阵的 初等行变换 是指对矩阵实施如下三种变换:

1. 交换两行;
2. 用非零数乘以一行的所有元素;
3. 把矩阵的一行乘以某个倍数加入另一行.

注意

- 线性方程组的初等变换可以用增广矩阵的初等变换代替
- 为了书写方便, 我们用 r_i 表示矩阵的第 i 行
- 交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$
- 第 i 行乘以 k 记作 kr_i
- 第 i 行乘以 k 加入第 j 行记作 $kr_i + r_j$
- 变换前后的矩阵不用等号连接, 用箭头连接.

重做例 1. 对如下方程组的增广矩阵做初等行变换以解出该方程组:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

重做例 1. 对如下方程组的增广矩阵做初等行变换以解出该方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

解 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-5r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_3+r_2]{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{2r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$. 于是，方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{10}{7} \\ x_2 = -\frac{1}{7} \\ x_3 = -\frac{2}{7} \end{cases}$.

重做例 2. 对如下方程组的增广矩阵做初等行变换以解出该方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 14x_3 = 8 \\ -x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

重做例 2. 对如下方程组的增广矩阵做初等行变换以解出该方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 14x_3 = 8 \\ \quad\; - x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

解 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \\ 3 & 7 & 14 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

此时, 与矩阵对应的方程组为 $\begin{cases} x_1 \qquad + 7x_3 = 19 \\ \qquad x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$

则方程组的**一般解** 为 $\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 19 \\ x_2 = x_3 - 7 \end{cases}$ 其中 x_3 为自由未知量.

重做例 3. 对如下方程组的增广矩阵做初等行变换以解出该方程组:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8 \end{cases}$$

重做例 3. 对如下方程组的增广矩阵做初等行变换以解出该方程组:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8 \end{cases}$$

解 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1+r_3]{-3r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$

此时, 还原为方程组就会发现, 最后一个方程为 $0x_5 = 4$, 是矛盾方程, 无解.

矩阵 A 如果满足

- 元素全为 0 的行 (称为零行)，只可能存在于下方;
- 元素不全为 0 的行 (称为非零行)，从左数第一个不为 0 的元素 (称为主元) 的列指标随着行指标的增加而严格增加.

则称它为 阶梯形矩阵 ,

阶梯形矩阵具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & & & \bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & & & & & & \bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

其中 "$*$ " 表示可能不为 0 的数，"$\bullet$ " 表示一定不为 0 的数，即 "$\bullet$ " 处元素是主元.

矩阵 A 如果满足

- 矩阵 A 为阶梯形矩阵，且
- 每个非零行的主元都是 1，它所在的列的其他元素都是零.

称为 行简化阶梯形矩阵，

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

A 和 B 都是行阶梯形矩阵，但 A 也是简化行阶梯形矩阵，而 B 不是.

命题

任意一个矩阵经过一系列初等行变换总能化成

1. 一个阶梯形矩阵,
2. 进而能够化成一个行简化的阶梯形矩阵.

证明 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

目标: 通过初等行变换将 A 化为阶梯形矩阵.

考察第一列元素 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}$

- 若它们全为 0，则考察第二列
- 若不全为 0，用初等行变换使 $a_{11} \neq 0$

通过初等行变换，从第二行开始，每一行加上第一行的适当倍数，使得第一列除 a_{11} 外全为 0.

经过初等行变换后：

$$A \to J_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

关注右下角子矩阵：

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

归纳步骤

对 J_1 的右下角子矩阵重复上述过程：

- 每次处理（至少）减少一行一列
- 经过有限步后得到阶梯形矩阵

算法终止

由于矩阵大小有限，此过程必在有限步内结束.

化为行简化阶梯形

两个步骤

1. 将各行乘上相应的非零数，使每个主元变为 1
2. 利用初等行变换把每个主元所在列的其他元素变成 0

至此，得到行简化的阶梯形矩阵. ∎

由上述结论可推出

行列式推论

任一 n 阶行列式都可以利用行列式的性质化为一个上三角形行列式.

矩阵消元法：归纳总结

综上所述，解线性方程组的具体做法是：

- 写出线性方程组的增广矩阵，
- 对它做初等行变换化成简化行阶梯形矩阵，
- 从而可立即写出原线性方程组的解，

这种解线性方程组的方法称为矩阵消元法.

1. 无解：将增广矩阵化为行阶梯形后，如果存在一行其系数部分全为零而常数非零（矛盾行），那么该方程组无解，如例 3

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & c \end{array} \end{array} \xrightarrow{\text{多次初等行变换}} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & c \end{array} \end{array}$$

矩阵消元法：归纳总结

将增广矩阵化为行阶梯形后，如果不出现矛盾行，那么原方程组必定有解，或有唯一解，或有无穷多解.

2. 有唯一解： 将增广矩阵化为行阶梯形后没有出现矛盾行，继续化为行简化的阶梯形，如果非零行的个数与未知量个数相等，那么从常数列就能得到方程组的解，如例 1

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \\
\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & c \end{array}
\end{array}
\xrightarrow{\text{多次初等行变换}}
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right) \\
\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & c \end{array}
\end{array}
$$

矩阵消元法：归纳总结

3. 有无穷多解：将增广矩阵化为行简化的阶梯形后，如果没有出现前两种情况，那么该方程组有无穷多解，如例 2

$$
\begin{array}{cccc}
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 3 & 4 & -2 \\
2 & 5 & 9 & 3 \\
3 & 7 & 14 & 8 \\
0 & -1 & 1 & 7
\end{array}\right) \\
\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\
x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ c
\end{array}
\xrightarrow{\text{多次初等行变换}}
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 0 & 7 & 19 \\
0 & 1 & -1 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\
x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ c
\end{array}
$$

- 非零行的非零主元对应的未知量为 **基本未知量**
- 其余未知量为 **自由未知量**
- 在例 2 中，x_1 和 x_2 是基本未知量，x_3 是自由未知量
- 令所有自由未知量依次取任意常数 $k_1, k_2, \ldots$
- 由此解出基本未知量，这样就得到了方程组的 **一般解**(也称**通解**)

总结

线性方程组的解的情况有且只有三种可能性:

无解，有唯一解，有无穷多个解.

n 元线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵时，

- 如果相应的阶梯形方程组出现 “$0 = d$”（其中 d 是非零数）这种方程，那么原方程组无解;
- 否则，有解.
  - 如果阶梯形矩阵的非零行数 r 等于未知量的个数 n ，那么原方程组有唯一解;
  - 如果 $r < n$ ，那么原方程组有无穷多个解.

例. 求解如下方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3, \\ 3x_1 + 9x_2 + 14x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

例. 求解如下方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3, \\ 3x_1 + 9x_2 + 14x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

解 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 14 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

谁是基本未知量？自由未知量？

$$\begin{array}{cccc}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & 0 & -30 \\
0 & 0 & 1 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
x_1 & x_2 & x_3 & c
\end{array}
\end{array}$$

那么方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 30 \\ x_3 = 7 \end{cases}$$

其中 x_2 是自由未知量.

作业 (选做)

写一个计算机程序实现高斯消元法.

线性方程组的几何解释（三维空间 $\mathbb{R}^3$）

三个平面的空间位置关系决定了解的情况

基本思想

每个方程 $a_ix + b_iy + c_iz = d_i$ 在三维空间中定义一个平面.

方程组的解 $=$ 所有三个平面的公共交点.

情况一：唯一解

几何描述：

- 三个平面相交于唯一一个点.
- 每两个平面相交于一条直线，所有三条直线交于同一点.

现实类比：

房间的两面墙和地板在角落处相交.

情况二：无穷多解

几何描述：

- 三个平面相交于一条共同的直线.

现实类比：

一本书的所有页面沿着书脊这条线相交.

情况三：无解

几何描述：

- 没有三个平面的公共交点.
- 至少有一对平面平行但不重合.

现实类比：

三棱柱的三个侧面，或者楼梯的台阶面.

定理 1

在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases}$$

中，若 $s < n$，则它必有非零解.

证明 线性方程组在化成阶梯形线性方程组之后，方程的个数不会超出原线性方程组中方程的个数，即 $r \leq s < n$. 由 $r < n$ 得知，此线性方程组有无穷多解，从而有非零解.

线性方程组理论的思考

线性方程组的理论已经完整了吗？

线性方程组理论的思考

线性方程组的理论已经完整了吗？

- 通过消元法将线性方程组化为阶梯形后，剩下的有效方程个数是否**唯一确定**？
- 能否不进行具体的方程组变形，直接依据原方程组的**系数与常数项结构**，判断其是否有解？并在有解时进一步判断解是**唯一**还是**无穷多**？

数域 P 上一个 n 维**向量**是由该数域中 n 个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n), \tag{1}$$

a_i 称为向量的**分量**.

注: 1. $n = 2, 3$ 且数域 P 为实数域 $\mathbf{R}$ 时, 向量就是解析几何中的向量.

但与解析几何不同, 书写向量不要加**箭头**.

2. 一个 n 元线性方程组有解时, 其任一解也是一个 n 维向量.

3. 一个 n 维行向量可以看成一个 $1 \times n$ 矩阵, 一个 n 维列向量可以看成一个 $n \times 1$ 矩阵.

如果 n 维向量

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

的对应分量都相等, 即

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

就称这两个向量**相等**, 记作 $\boldsymbol{\alpha} = \beta$.

向量

$$\boldsymbol{\gamma}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

称为向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,,\quad \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

的**和**, 记为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\beta.$$

加法满足下面的运算规律.

交换律: $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha},\qquad (2)$

结合律: $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}.\qquad (3)$

- 分量全为零的向量 $(0, 0, \cdots 0)$ 称为零向量, 记为 $\mathbf{0}$;
- 向量 $(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的负向量, 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

$$\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}. \tag{5}$$

减法: $\boldsymbol{\alpha} - \beta = \boldsymbol{\alpha} + (-\beta)$.

设 k 为数域 P 中的数, 向量 $(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与数 k 的**数量乘积**, 记为 $k\boldsymbol{\alpha}$.

容易得到下面的运算规律:

$$k(\boldsymbol{\alpha} + \beta) = k\boldsymbol{\alpha} + k\beta, \tag{6}$$

$$(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}, \tag{7}$$

$$k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}, \tag{8}$$

$$1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}. \tag{9}$$

由此又可得出

$$0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

$$(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}, \tag{11}$$

$$k\,\mathbf{0} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

进而,

$k\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

向量空间

以数域 P 中的数作为分量的 n 维向量的全体，同时考虑到定义在它们上面的加法和数量乘法，称为数域 P 上的 n 维向量空间，记为 P^n.

任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$ 和任意 $k, \ell \in \mathbb{P}$，都有

(1) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$

(2) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$

(3) $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$

(4) $\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$

(5) $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$

(6) $k(\ell\boldsymbol{\alpha}) = (k\ell)\boldsymbol{\alpha}$

(7) $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$

(8) $(k + \ell)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + \ell\boldsymbol{\alpha}$

定义

如果存在数域 P 中的一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得

$$\alpha = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\beta}_s,$$

那么称向量 α 是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的一个线性组合，此时也称 α 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出.

例 1　在 $\mathbb{R}^3$ 中，$\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, -1)$ 能否由 $\boldsymbol{\beta}_1 = (3, 3, 1), \boldsymbol{\beta}_2 = (2, 1, 2)$ 线性表出?

定义

如果存在数域 P 中的一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得

$$\alpha = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\beta}_s,$$

那么称向量 α 是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的一个线性组合，此时也称 α 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出.

例 1　在 $\mathbb{R}^3$ 中，$\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, -1)$ 能否由 $\boldsymbol{\beta}_1 = (3, 3, 1), \boldsymbol{\beta}_2 = (2, 1, 2)$ 线性表出?

取 $k_1 = 1, k_2 = -1$，则 $\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2$. 故 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出.

例 2　$\boldsymbol{\alpha} = (1, -7, 9)$ 能否由 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, -2, 3), \boldsymbol{\beta}_2 = (2, 1, 0)$ 线性表出?

例 2 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-7,9)$ 能否由 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-2,3),\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,0)$ 线性表出?

解 设 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2$. 写成分量形式, 即线性方程组

$$\begin{cases} 1=k_1+2k_2, \\ -7=-2k_1+k_2, \\ 9=3k_1 \end{cases}$$

此线性方程组有解, 且解为 $k_1=3,k_2=-1$. 故 $\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$.

核心思想

一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 揭示了 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是否有通过加法和数量乘法两种运算建立起来的关系.

线性方程组的向量表示

利用向量的加法和数量乘法运算，数域 K 上的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases}$$

可以写成向量形式：

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

简化向量表示

记：

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

则线性方程组可表示为：

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$$

其中：

- $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是系数矩阵的列向量组
- $\boldsymbol{\beta}$ 是常数项组成的列向量

线性方程组有解的等价条件

线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$有解

$\Leftrightarrow K$ 中存在一组数$c_1, c_2, \ldots, c_n$，使得$c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}$ 可以由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出

核心结论

线性方程组是否有解 $\Leftrightarrow$ 常数项列向量能否由系数矩阵的列向量组线性表出

双向作用

理论 $\to$ 应用

为了从理论上研究线性方程组是否有解，可以去研究 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出

应用 $\to$ 理论

对于 P^s 中给定的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 和向量 β，为了判断 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表出，可以去判断线性方程组是否有解

线性方程组解的存在性 $\Leftrightarrow$ 向量线性表出

注: 1. $\boldsymbol{\alpha} = 1 \cdot \boldsymbol{\alpha}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由其自身线性表出.

从而对于任意的 $1 \le i \le s$, $\boldsymbol{\beta}_i$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出:

$$\boldsymbol{\beta}_i = 0\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{\beta}_{i-1} + 1\boldsymbol{\beta}_i + 0\boldsymbol{\beta}_{i+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\beta}_s.$$

2. 零向量可由任一向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出:

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_r.$$

3. 在 P^n 中, n 维单位向量组为

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \\ \qquad\qquad \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n = (0, 0, \cdots, 1). \end{array}\right. \tag{1}$$

任一 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 均可由 n 维单位向量组为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表出:

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

例

证明： 如果线性方程组（1）的增广矩阵的第 i 个行向量 γ_i（第 i 行构成的向量）可以由其余行向量线性表出：

$$\gamma_i = k_1\gamma_1 + \cdots + k_{i-1}\gamma_{i-1} + k_{i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + k_s\gamma_s,$$

那么把线性方程组（1）的第 i 个方程去掉以后得到的线性方程组 与线性方程组（1）同解.

例

证明：如果线性方程组（1）的增广矩阵的第 i 个行向量 γ_i（第 i 行构成的向量）可以由其余行向量线性表出：

$$\gamma_i = k_1\gamma_1 + \cdots + k_{i-1}\gamma_{i-1} + k_{i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + k_s\gamma_s,$$

那么把线性方程组（1）的第 i 个方程去掉以后得到的线性方程组 与线性方程组（1）同解.

证明 由已知条件得

$$\gamma_i - k_1\gamma_1 - \cdots - k_{i-1}\gamma_{i-1} - k_{i+1}\gamma_{i+1} - \cdots - k_s\gamma_s = 0,$$

因此把线性方程组（1）的第 1 个方程的 k_1 倍……第 s 个方程的 $-k_s$ 倍都加到第 i 个方程上，第 i 个方程变成 “$0 = 0$”，而其余方程不变.

这样得到的线性方程组与线性方程组（1）同解，从而把线性方程组（1）的第 i 个方程去掉以后得到的线性方程组 与线性方程组（1）同解. ∎

- 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 中每一个 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, t)$ 都可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$线性表出.
- 若两个向量组能相互线性表出，则称两个向量组等价.

例 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1)$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 1), \boldsymbol{\beta}_2 = (1, 3)$ 等价.

证明 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 可以由 2 维单位向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，而 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{3}{5}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{1}{5}\boldsymbol{\beta}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = -\frac{1}{5}\boldsymbol{\beta}_1 + \frac{2}{5}\boldsymbol{\beta}_2$,

向量组之间的等价有以下性质:

(1) 自反性: 每一个向量组都与它自身等价.

(2) 对称性: 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价，那么向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 也与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 等价.

(3) 传递性: 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_p$ 等价，那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_p$ 等价.

二、线性相关

线性相关的等价定义

- 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\,(s \geq 2)$ 中有一个向量可以由其余的向量线性表出，那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 称为线性相关.
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\,(s \geq 1)$ 称为线性相关，如果有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

例 1 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 2)$ 是否线性相关？

解 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 2)$ 线性相关，因为 $2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$.

一向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\,(s \geq 1)$ 不线性相关，即没有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

就称为线性无关；或者说，

定义

一向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 称为线性无关，如果由

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

可以推出

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0.$$

例 2　$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 0)$ 是否线性无关？

一向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \, (s \geq 1)$ 不线性相关，即没有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

就称为线性无关；或者说，

定义

一向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 称为线性无关，如果由

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

可以推出

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0.$$

例 2 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)$ 是否线性无关？

解 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)$ 线性无关：

若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$，则 $(k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$，故 $k_1 = k_2 = 0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

注:

1. 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

从而单个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关. 含零向量 $\mathbf{0}$ 的向量组必线性相关

2. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 成比例.

注:

1. 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

证明 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 则存在非零数 k, 使得 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 但 $k\neq 0$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

反之, 因为 $1\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$, 所以单个零向量线性相关. ∎

从而单个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关. 含零向量 $\mathbf{0}$ 的向量组必线性相关

2. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 成比例.

证明 因为 k_1,k_2 不全为零, 从而 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2=-\frac{k_1}{k_2}\boldsymbol{\alpha}_1$. ∎

线性相关的几何意义

考虑向量组 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$

- 当 $n = 1$ 时，向量组 (I) 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是零向量
- 当 $n = 2$ 时，向量组 (I) 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 共线
- 当 $n = 3$ 时，向量组 (I) 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 共面

例 3 n 维单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关.

例 3 n 维单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关.

证明 若 $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n = \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned} & k_1(1,0,\cdots,0) + k_2(0,1,0,\cdots,0) + \cdots + k_n(0,0,\cdots,0,1) \\ =\ & (k_1, k_2, \cdots, k_n) = (0,0,\cdots,0). \end{aligned}$$

那么 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, 从而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关.

若部分相关，则整体相关

性质 1 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的某一部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 必定线性相关.

证明　因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，所以，存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}.$$

故

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r + 0\boldsymbol{\alpha}_{r+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

且 $k_1, k_2, \cdots, k_r, 0, \cdots, 0$ 不全为零. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. ∎

特别地，含零向量 $\mathbf{0}$ 的向量组必线性相关.

逆否命题：整体无关，则部分无关. 即

性质 1' 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 必定线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的任一部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

例 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, 3, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (4, -2, 5, 4), \boldsymbol{\alpha}_3 = (2, -1, 4, -1)$ 是否线性相关？

例 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-2,5,4),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,4,-1)$ 是否线性相关？

解 事实上，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关当且仅当向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

有非零解. 写成分量形式，可得齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+2x_3=0, \\ -x_1-2x_2-x_3=0, \\ 3x_1+5x_2+4x_3=0, \\ x_1+4x_2-x_3=0. \end{cases}$$

因为

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以原齐次线性方程组与

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

同解. 而上面的线性方程组移项后, 就得一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

其中 x_3 为一个自由未知量.

取 $x_3 = 1$, 可得一个解为 $(x_1, x_2, x_3) = (3, -1, -1)$, 即有 $3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 = 0$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

问：(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？若能，求其表示.

例 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix}$.

问：(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？若能，求其表示.

解 (1) 令 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&3\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&4\\0&0&5\end{pmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表示唯一，设

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

该方程组的增广矩阵为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

可见 $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_4 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$.

一般地，要判断向量组

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \\ \qquad\vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_s = (a_{s1}, a_{s2}, \cdots, a_{sn}) \end{cases} \tag{2}$$

是否线性相关，即要考察向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0} \tag{3}$$

是否有非零解．写成分量形式，即得齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{s1}x_s = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{s2}x_s = 0, \\ \qquad\vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{sn}x_s = 0. \end{cases} \tag{4}$$

故

性质 2 向量组 (2) 线性相关当且仅当齐次线性方程组 (4) 有非零解．

性质 3 若向量组 (2) 线性无关, 则在每个向量上再添加一个分量所得到的 $n+1$ 维的向量组

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{1(n+1)}), \\ \boldsymbol{\beta}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, a_{2(n+1)}), \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_s = (a_{s1}, a_{s2}, \cdots, a_{sn}, a_{s(n+1)}) \end{cases} \tag{5}$$

也线性无关.

证明 这是因为与向量组 (5) 对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{s1}x_s = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{s2}x_s = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{sn}x_s = 0, \\ a_{1(n+1)}x_1 + a_{2(n+1)}x_2 + \cdots + a_{s(n+1)}x_s = 0. \end{cases} \tag{6}$$

方程组 (6) 的解全为 (4) 的解. 故当 (4) 只有零解时, (6) 也只有零解. 从而向量组 (5) 线性无关. ∎

进而, 添加多个分量时结论也成立, 故线性无关向量组的 “延长向量组” 也是线性无关的.

定理 2

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 是两个向量组, 如果

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出,

(2) $r > s$,

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 必定线性相关.

定理 2

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是两个向量组，如果

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，

(2) $r > s$，

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 必定线性相关.

证明 由条件 (1) 可令

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{s} t_{ji}\boldsymbol{\beta}_j,\ \ i = 1,2,\cdots,r.$$

为证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，只要证明存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}.$$

作线性组合

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r = \sum_{i=1}^{r} x_i\left(\sum_{j=1}^{s} t_{ji}\boldsymbol{\beta}_j\right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} t_{ji}x_i\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r} t_{ji}x_i\right)\boldsymbol{\beta}_j.$$

由于条件 $r > s$, 那么齐次线性方程组

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1r}x_r = 0, \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2r}x_r = 0, \\ \vdots \\ t_{s1}x_1 + t_{s2}x_2 + \cdots + t_{sr}x_r = 0 \end{cases}$$

中未知量的个数 r 大于方程的个数 s.

由于条件 $r > s$, 那么齐次线性方程组

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1r}x_r = 0, \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2r}x_r = 0, \\ \vdots \\ t_{s1}x_1 + t_{s2}x_2 + \cdots + t_{sr}x_r = 0 \end{cases}$$

中未知量的个数 r 大于方程的个数 s.

由定理 1 得知它有非零解, 从而存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使得 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的系数全为零, 当然也使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关. ∎

推论 1 如果

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出, 且

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,

那么 $r \leq s$.

推论 2 任意 $n+1$ 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 必定线性相关.

推论 2 任意 $n+1$ 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 必定线性相关.

证明 因为任一 n 维向量都可由 n 维单位向量组 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 线性表出, 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 可由 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 线性表出, 且 $n+1 > n$. 由定理 2, 它必定线性相关. 从而任意多于 n 个的 n 维向量必定线性相关.

推论 3 两个线性无关的、等价的向量组必定含有相同个数的向量.

证明 因为线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出, 故由推论 1, $r \leq s$.

因为线性无关组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出, 由推论 1, $s \leq r$. 那么 $r = s$.

习题 3. 证明：如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \beta$ 线性相关, 则向量 β 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出.

习题 4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}),\ i = 1, 2, \cdots, n$. 证明：如果 $|a_{ij}| \neq 0$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

补充题 1. 假设向量 β 可以经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出, 证明: 表示法是唯一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

例 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性无关的向量, $\boldsymbol{\beta}_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j, i = 1, 2, \cdots, r$, 证明: 如果

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

那么 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关. (补充题 2)

例 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性无关的向量，$\boldsymbol{\beta}_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j, i = 1, 2, \cdots, r$，证明：如果

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

那么 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关. (补充题 2)

证明 设

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{\beta}_r = \mathbf{0}, \tag{2}$$

则

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\boldsymbol{\beta}_i = \sum_{i=1}^{r} x_i\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j\right) = \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{r} a_{ij}x_i\right)\boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关知

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}x_i = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, r)$$

即 x_i 满足

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = 0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = 0. \end{cases} \tag{3}$$

于是, 向量方程 (2) 的解一定是齐次线性方程组 (3) 的解.

若 (1) 式成立, 则关于 x_i 的齐次线性方程组 (3) 的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

因而齐次线性方程组 (3) 只有零解. 因此, 向量方程 (2) 也只有零解. 因此, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

三、极大线性无关组

定义 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足

(1) 部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 并且

(2) 任意的 $\boldsymbol{\alpha}_j$, 其中 $j\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}$(若有的话), 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_{i_1}\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关,

那么称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为一个极大线性无关组(简称" 极大无关组"),

例 在 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-2,5,4),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,4,-1)$ 中, 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 组成的部分组就是一个极大线性无关组.

注:

1. 一个向量组的极大线性无关组一般不是唯一的.
2. 一个线性无关的向量组的极大线性无关组是它自身.
3. 仅有零向量的向量组没有极大线性无关组.

性质 每一个含非零向量的向量组都有极大线性无关组.

性质 每一个含非零向量的向量组都有极大线性无关组.

证明 取向量组中一个非零向量 α_1.

- 若其余向量都可由它线性表出，则 α_1 就是一个极大线性无关组.
- 否则，原向量组中必定存在一个向量 α_2 不能由 α_1 线性表出，那么 α_1, α_2 线性无关.
  - 若其余向量都可由 α_1, α_2 线性表出，则 α_1, α_2 就是一个极大线性无关组.
  - 否则，存在 α_3 不能由 α_1, α_2 线性表出，从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

续行此法，有限步后必定可以得到原向量组的一个极大线性无关组. ∎

性质 每一个含非零向量的向量组都有极大线性无关组.

证明 取向量组中一个非零向量 α_1.

- 若其余向量都可由它线性表出，则 α_1 就是一个极大线性无关组.
- 否则，原向量组中必定存在一个向量 α_2 不能由 α_1 线性表出，那么 α_1, α_2 线性无关.
    - 若其余向量都可由 α_1, α_2 线性表出，则 α_1, α_2 就是一个极大线性无关组.
    - 否则，存在 α_3 不能由 α_1, α_2 线性表出，从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

续行此法，有限步后必定可以得到原向量组的一个极大线性无关组. ∎

习题 9. 证明：一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一个极大线性无关组.

习题 10. 设 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -1, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 6)$.

1) 证明：α_1, α_2 线性无关；

2) 把 α_1, α_2 扩充成一极大线性无关组.

(等价定义) 如果一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$

(1) 部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关,

(2) 任意的 $\boldsymbol{\alpha}_j$, 其中 $j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$(若有的话) 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出,

那么称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为一个极大线性无关组,

4. 一个向量组与其任意一个极大线性无关组等价.

(等价定义) 如果一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$

(1) 部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关,

(2) 任意的 $\boldsymbol{\alpha}_j$, 其中 $j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$(若有的话) 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出,

那么称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为一个极大线性无关组,

4. 一个向量组与其任意一个极大线性无关组等价.

证明 设向量组 (I) 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 而部分组 (II)$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是它的一个极大线性无关组. 显然 (II) 可由 (I) 线性表出. 考虑任意 $\boldsymbol{\alpha}_j$, 其中 $j \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$(若有的话), 由极大线性无关组的定义知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_j$ 线性相关. 又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 所以由习题 3 知 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出. 因此 (I) 可由 (II) 线性表出. 所以 (I) 与 (II) 等价. ∎

从而极大线性无关组是与原向量组等价的、线性无关的部分组.

定理 3 一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量.

定理 3 一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量.

证明 因为极大线性无关组均与原向量组等价, 所以一个向量组的任意两个极大线性无关组等价. 由定理 2 的推论 3, 它们所含向量个数相等. ∎

定理 3 一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量.

证明 因为极大线性无关组均与原向量组等价，所以一个向量组的任意两个极大线性无关组等价. 由定理 2 的推论 3，它们所含向量个数相等. ∎

定义

向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的**秩**.

规定由全为 $\mathbf{0}$ 的向量构成的向量组的秩为 0.

例如在 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, -1, 3, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (4, -2, 5, 4), \boldsymbol{\alpha}_3 = (2, -1, 4, -1)$ 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2.

注：

1. 一个向量组线性无关当且仅当其秩等于其所含向量的个数.

2. 等价的向量组有相同的秩.

2. 等价的向量组有相同的秩.

证明 这是因为任意向量组均与其极大线性无关组等价，由等价的性质得知，等价的向量组的极大线性无关组也等价. 从而由定理 2 的推论 3 可得，等价的向量组的极大线性无关组所含向量的个数相等，所以它们的秩也相等.

3. 若一个向量组的秩为 r，则其任意含 $r+1$ 个向量的部分组线性相关. (定理 2)

2. 等价的向量组有相同的秩.

证明 这是因为任意向量组均与其极大线性无关组等价，由等价的性质得知，等价的向量组的极大线性无关组也等价. 从而由定理 2 的推论 3 可得，等价的向量组的极大线性无关组所含向量的个数相等，所以它们的秩也相等.

3. 若一个向量组的秩为 r，则其任意含 $r+1$ 个向量的部分组线性相关. (定理 2)

证明 极大线性无关组由 r 个向量组成. 由于任意含 $r+1$ 个向量的部分组可以由极大线性无关组线性表出，且 $r+1>r$，因此含 $r+1$ 个向量的部分组线性相关. ∎

习题 7 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r, 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组.

习题 8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 $r,\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的 r 个向量, 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量都可以经它们线性表出.
证明: $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组.

习题 12 如果向量组 (I) 可以经向量组 (II) 线性表出, 那么 (I) 的秩不超过 (II) 的秩.

习题 16 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 有相同的秩.
证明: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 等价.

现在把上面的概念与方程组的解的关系进行联系.

给定一个方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1, & (A_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2, & (A_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = d_s. & (A_s) \end{cases}$$

各个方程所对应的向量分别是

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, d_1),\ \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, d_2), \cdots, \alpha_s = (a_{s1}, a_{s2}, \cdots, a_{sn}, d_s).$$

设有另一方程

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = d, \qquad (B)$$

它对应的向量为 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n, d)$.

如果 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合, $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_s\alpha_s$.

$\Leftrightarrow (B) = l_1(A_1) + l_2(A_2) + \cdots + l_s(A_s)$, 即方程 (B) 是方程 $(A_1), (A_2), \cdots, (A_4)$ 的线性组合.

那么, 方程组 $(A_1), (A_2), \cdots, (A_s)$ 的解一定满足 (B).

进一步设方程组

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1, & (B_1) \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2, & (B_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \cdots + b_{rn}x_n = c_r, & (B_r) \end{cases}$$

它的方程所对应的向量为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$.

若 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 可经 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 则方程组 $(A_1), (A_2), \cdots, (A_s)$ 的解是方程组 $(B_1), (B_2), \cdots, (B_r)$ 的解.

再进一步, 当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 等价时, 两个方程组同解.

§4 矩阵的秩

定义

- 矩阵的行秩是矩阵的行向量组的秩,
- 矩阵的列秩是矩阵的列向量组的秩.

引例　矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的行秩和列秩分别是多少？

解　矩阵 A 的行向量组为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 3, 1), \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 2, -1, 4), \\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 0, 0, 5), \\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (0, 0, 0, 0). \end{cases}$$

可证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为其一个极大线性无关组：因为 $\boldsymbol{\alpha}_3 \neq 0$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不成比例，而 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是零向量，所以把 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 添加进去就是线性相关的了.

从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，即矩阵 A 的行秩为 3.

矩阵 A 的列向量组是

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,0,0), \\ \boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,0,0), \\ \boldsymbol{\beta}_3 = (3,-1,0,0), \\ \boldsymbol{\beta}_4 = (1,4,5,0). \end{cases}$$

同理可证 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\beta}_3 = \frac{7}{2}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2$, 所以将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 添加进去就线性相关了.

因此 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_4$ 是列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 的一个极大线性无关组, 故矩阵 A 的列秩也是 3 .

从而 A 的行秩等于 A 的列秩.

定义 在 $s \times n$ 矩阵 A 中任意选定 k 行和 k 列, 位于这些选定的行和列的交点上的 k 个元素按原来的次序所组成的 k 级行列式, 称为 A 的 k **阶子式**.

定义 矩阵 A 中最高阶非零子式的阶数称为矩阵 A 的**秩**, 记为 $r(A)$.
当 A 为零矩阵时称 A 的秩为零.

注: (1) $r(A) \geq r \Leftrightarrow A$ 有一个 r 级子式不等于零.

(2) $r(A) \leq r \Leftrightarrow A$ 中所有 $r+1$ 级子式全等于零.

(3) $r(A) = r \Leftrightarrow A$ 有一个 r 级子式不等于零, 且所有 $r+1$ 级子式全等于零.

引例 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩是多少？

在上一节中我们定义了向量组的秩.

如果我们把矩阵的每一行看成一个向量，那么矩阵就可以认为是由这些行向量组成的.

同样，如果把每一列看成一个向量，那么矩阵就可以认为是由这些列向量组成的.

- 矩阵的行秩是指矩阵的行向量组的秩，
- 矩阵的列秩是指矩阵的列向量组的秩，
- 矩阵的秩是指矩阵中最高阶非零子式的阶数.

定理 4

A 的秩 $=$ A 的列秩 $=$ A 的行秩.

引理 1 矩阵的初等行变换不改变它的行秩.

引理 1 矩阵的初等行变换不改变它的行秩.

证明 设矩阵 $A_{s\times n}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$.

- 互换矩阵 A 的 i,j 两行相当于把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 两个向量调换一下位置, 所得新向量组与原向量组等价.
- 把矩阵 A 的第 i 行乘以 $c\neq 0$, 所得新矩阵的行向量组为
$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,c\,\boldsymbol{\alpha}_i,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s.$$
因为 $\boldsymbol{\alpha}_i=\frac{1}{c}\,(c\,\boldsymbol{\alpha}_i)$, 所以新向量组与原向量组可以互相线性表出, 进而等价.
- 把矩阵 A 的第 j 行加上第 i 行的 k 倍后, 所得新矩阵的行向量组为
$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_j+k\boldsymbol{\alpha}_i,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s.$$
因为
$$\boldsymbol{\alpha}_j=(\boldsymbol{\alpha}_j+k\boldsymbol{\alpha}_i)+(-k)\,\boldsymbol{\alpha}_i,$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_j+k\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\alpha}_j+k\boldsymbol{\alpha}_i,$$
所以新向量组与原向量组可以互相线性表出, 进而等价.

因此, 矩阵 A 的行秩在初等行变换下保持不变. 命题得证. ∎

引理 2 矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性，从而不改变矩阵的列秩.

引理 2 矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性，从而不改变矩阵的列秩.

证明 设矩阵 A 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$.

若存在一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$，使得下式成立：

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{0},$$

相当于 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 为齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = 0, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = 0, \\ \quad \cdots \qquad\qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \cdots + a_{sn}k_n = 0. \end{cases}$$

的一个解.

对矩阵 A 做初等行变换对应着线性方程组的初等变换，变换后的方程组与原方程组同解.

设矩阵 A 经过初等行变换变成矩阵 B. 假定矩阵 B 的列向量组为 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

对于一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$, 使得下式成立:

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \ldots + k_n\boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{0},$$

当且仅当这组数对于

$$k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_n\gamma_n = \mathbf{0}$$

也成立. 因此, 矩阵 A 的列向量组的线性关系不随初等行变换改变, 即

A 的列向量组线性相关当且仅当 B 的列向量组线性相关.

同理, 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个部分组, $\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_k}$ 是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 中相应的部分组, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k} \text{ 线性相关当且仅当 } \boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_k} \text{ 线性相关},$$

即对应部分组的线性关系也相同.

令矩阵 A 的列秩为 r. 设 $\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 为列向量组的一个极大线性无关组, 则 $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_r}$ 线性无关, 且 $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_r}, \gamma_k$ (其中 $k \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$) 线性相关. 于是, $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_r}$ 是它的一个极大线性无关组. 从而 A 的列秩等于 B 的列秩. 因此, 矩阵的列秩在初等行变换下保持不变.

引理 3（行简化）阶梯形矩阵 J 的行秩等于列秩，且它们都等于阶梯形矩阵 J 中非零行的行数，并且主元（非零行第一个非零元）所在列构成列向量组的一个极大线性无关组.

证明 我们只对行简化阶梯形矩阵证明. 设 $s \times n$ 行简化阶梯形矩阵 J 有 $r(r \leq s)$ 个非零行，且非零行第一个非零元分别位于第 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ 列，于是 J 形如

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c_{1i_r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & c_{2i_r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & c_{ri_r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

令矩阵 J 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}$. 由于 r 维单位向量组线性无关，因此前 r 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 也线性无关.（为什么?）

引理 3 (行简化) 阶梯形矩阵 J 的行秩等于列秩, 且它们都等于阶梯形矩阵 J 中非零行的行数, 并且主元 (非零行第一个非零元) 所在列构成列向量组的一个极大线性无关组.

证明 我们只对行简化阶梯形矩阵证明. 设 $s \times n$ 行简化阶梯形矩阵 J 有 $r(r \leq s)$ 个非零行, 且非零行第一个非零元分别位于第 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ 列, 于是 J 形如

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c_{1i_r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & c_{2i_r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & c_{ri_r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

令矩阵 J 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}$. 由于 r 维单位向量组线性无关, 因此前 r 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 也线性无关. (为什么?) (线性无关向量组的 "延长向量组" 也线性无关)

由于 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}=\cdots=\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是矩阵 J 的行向量组的一个极大线性无关组.

所以矩阵 J 的行秩等于 r.

令矩阵 J 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$. 我们先考虑 J 前 r 行

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c_{1i_r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & c_{2i_r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & c_{ri_r+1} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix}$$

的列向量组.

r 维单位向量组是它的一个极大线性无关组. (为什么？)

由于 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1} = \cdots = \boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是矩阵 J 的行向量组的一个极大线性无关组.

所以矩阵 J 的行秩等于 r.

令矩阵 J 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$. 我们先考虑 J 前 r 行

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c_{1i_r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & c_{2i_r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & c_{ri_r+1} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix}$$

的列向量组.

r 维单位向量组是它的一个极大线性无关组. (为什么？)

(由于 r 维单位向量组线性无关, 且任意 $r+1$ 个 r 维向量线性相关, 因此 J 前 r 行构成的列向量组中其余的列向量可由 r 维单位向量组线性表出.)

又因为 J 的列向量组后 $n-r$ 个分量全为 0, 因而 $\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 是 J 的列向量组的一个极大线性无关组. 所以矩阵 J 的列秩等于 r.

回顾证明思路：

- 矩阵 A 的行秩在初等行变换下保持不变.
- 矩阵 A 的列秩在初等行变换下保持不变.
- 阶梯形矩阵 J 的行秩等于列秩，且它们都等于阶梯形矩阵 J 中非零行的行数.

对矩阵 A 做初等行变换，变为阶梯形矩阵 J.

由于阶梯形矩阵的行秩和列秩相等，再根据初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩，可知

任一非零矩阵的行秩等于列秩.

在上面的证明过程中看到, 阶梯形矩阵 J 有一个 r 阶子式不等于 0, 而所有 $r+1$ 阶子式都包含零行, 从而其值为 0. 对于一般的矩阵也有类似的结论:

引理 4 任一非零矩阵的行秩等于它的秩 (不为 0 的子式的最高阶数).

在上面的证明过程中看到, 阶梯形矩阵 J 有一个 r 阶子式不等于 0, 而所有 $r+1$ 阶子式都包含零行, 从而其值为 0. 对于一般的矩阵也有类似的结论:

引理 4 任一非零矩阵的行秩等于它的秩 (不为 0 的子式的最高阶数).

证明 设 $s \times n$ 矩阵 A 的行秩为 r, 则 A 有 r 个行向量线性无关. 设它们组成矩阵 A_1. 由于 $r\left(A_1\right)=r$, 因此 A_1 有 r 个列向量线性无关

在上面的证明过程中看到，阶梯形矩阵 J 有一个 r 阶子式不等于 0，而所有 $r+1$ 阶子式都包含零行，从而其值为 0. 对于一般的矩阵也有类似的结论：

引理 4 任一非零矩阵的行秩等于它的秩 (不为 0 的子式的最高阶数).

证明 设 $s \times n$ 矩阵 A 的行秩为 r，则 A 有 r 个行向量线性无关. 设它们组成矩阵 A_1. 由于 $r(A_1) = r$，因此 A_1 有 r 个列向量线性无关(不妨选引理 2 中的第 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ 列). 于是 A_1 的这 r 列构成的行列式不为 0，而这是 A 的一个 r 阶子式.

在上面的证明过程中看到, 阶梯形矩阵 J 有一个 r 阶子式不等于 0, 而所有 $r+1$ 阶子式都包含零行, 从而其值为 0. 对于一般的矩阵也有类似的结论:

引理 4 任一非零矩阵的行秩等于它的秩 (不为 0 的子式的最高阶数).

证明 设 $s \times n$ 矩阵 A 的行秩为 r, 则 A 有 r 个行向量线性无关. 设它们组成矩阵 A_1. 由于 $r(A_1) = r$, 因此 A_1 有 r 个列向量线性无关(不妨选引理 2 中的第 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ 列). 于是 A_1 的这 r 列构成的行列式不为 0, 而这是 A 的一个 r 阶子式.

任取 A 的第 $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$ 行和第 $l_1, l_2, \ldots, l_{r+1}$ 列, 得到一个 $r+1$ 阶子式.

由于 A 的行秩 (等于列秩) 为 r, 因此 A 的第 $l_1, l_2, \ldots, l_{r+1}$ 列线性相关.

由于 A 的 $r+1$ 阶子式的列向量组是 A 的第 $l_1, l_2, \cdots, l_{r+1}$ 列的缩短组, 因此它们也线性相关.

在上面的证明过程中看到, 阶梯形矩阵 J 有一个 r 阶子式不等于 0, 而所有 $r+1$ 阶子式都包含零行, 从而其值为 0. 对于一般的矩阵也有类似的结论:

引理 4 任一非零矩阵的行秩等于它的秩 (不为 0 的子式的最高阶数).

证明　设 $s \times n$ 矩阵 A 的行秩为 r, 则 A 有 r 个行向量线性无关. 设它们组成矩阵 A_1. 由于 $r(A_1) = r$, 因此 A_1 有 r 个列向量线性无关(不妨选引理 2 中的第 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ 列). 于是 A_1 的这 r 列构成的行列式不为 0, 而这是 A 的一个 r 阶子式.

任取 A 的第 $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$ 行和第 $l_1, l_2, \ldots, l_{r+1}$ 列, 得到一个 $r+1$ 阶子式.

由于 A 的行秩 (等于列秩) 为 r, 因此 A 的第 $l_1, l_2, \ldots, l_{r+1}$ 列线性相关.

由于 A 的 $r+1$ 阶子式的列向量组是 A 的第 $l_1, l_2, \cdots, l_{r+1}$ 列的缩短组, 因此它们也线性相关.

所以, A 的 $r+1$ 阶子式等于 0. (习题 4)

综上所述, A 的不等于 0 的子式的最高阶数为 r.

定理 4

A 的秩 $=$ A 的列秩 $=$ A 的行秩.

由此看出，矩阵的秩是一个非常深刻的概念，它可以从行向量组的秩、列向量组的的秩、不为 0 子式的最高阶数三个角度来刻画.

推论 1

矩阵的初等列变换和初等行变换皆不改变该矩阵的秩、列秩和行秩.

对矩阵 A 用初等变换化成阶梯形矩阵

$$B=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_{1i_i} & \cdots & b_{1i_2} & \cdots & b_{1i_r} & \cdots & b_{1n}\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_{2i_2} & \cdots & b_{2i_i} & \cdots & b_{2n}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{ri_r} & \cdots & b_{mn}\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 $b_{1i_1}, b_{2i_r}, \cdots, b_{ri_r} \neq 0$，每个 $b_{\ell i_\ell}(\ell = 1, 2, \cdots, r)$ 的左面及下面皆为零. 故 $r(A) = r(B) = r$.

推论 2

矩阵 A 的秩等于 A 在初等行变换下的阶梯形矩阵中非零行的数目.

推论 3

设矩阵 A 在初等行变换下的阶梯形是 (3) 中的矩阵 B, 则 A 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$, 列组成它的列向量组的一个极大线性无关组.

以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 作为列向量构造矩阵

$$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\text{行简化的阶梯形}) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n),$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的一个极大无关组在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 中对应的部分组即为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大无关组. 从而

$$\text{秩}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = \text{秩}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n).$$

- 向量组的秩和极大线性无关组的求法:
  以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 作为列向量构造矩阵
  $$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{阶梯形矩阵},$$
  向量组的秩等于阶梯形矩阵中非零行的个数, 且每个主元 (非零行第一个非零元素) 所在列对应的列向量构成向量组的一个极大线性无关组.
- 矩阵的秩的求法:
  对矩阵 A 做一系列初等行变换化为阶梯形矩阵 B, 从而
  $$\text{秩}(A) = \text{秩}(B) = \text{矩阵}B\text{中非零行的行数}.$$

例 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0), \boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,0,1), \boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1,3), \boldsymbol{\alpha}_4=(4,1,2,4)$ 的一个极大线性无关组与秩, 并把其余向量用极大线性无关组线性表出.

例 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,1,2,4)$ 的一个极大线性无关组与秩，并把其余向量用极大线性无关组线性表出.

解

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\1&0&1&2\\0&1&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&-2&0&-2\\0&1&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&-4&-4\\0&0&5&5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

例 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1,3),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,1,2,4)$ 的一个极大线性无关组与秩，并把其余向量用极大线性无关组线性表出.

解

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\1&0&1&2\\0&1&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&-2&0&-2\\0&1&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&-4&-4\\0&0&5&5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$. 故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的一个极大线性无关组.

所以，原向量组的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

推论 4

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则

- A 的列向量组 (行向量组) 线性相关 $\Leftrightarrow |A| = 0$;
- A 的列向量组 (行向量组) 线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

定理 5

- 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

  有非零解 $\Leftrightarrow$ 它的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  的行列式 $|A| = 0$;

- 方程组只有零解 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

现在给出线性方程组有解的判定条件. 设给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{1}$$

引入向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}. \tag{2}$$

线性方程组 (1) 可以改写成向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \beta. \tag{3}$$

现在给出线性方程组有解的判定条件. 设给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{1}$$

引入向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}. \tag{2}$$

线性方程组 (1) 可以改写成向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \beta. \tag{3}$$

线性方程组 (1) 有解 $\Leftrightarrow$ 向量方程 (3) 有解 $\Leftrightarrow$ β 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

定理 6 （Cramer 法则及其逆定理）

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

有唯一解 $\Leftrightarrow$ 它的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式 $|A| \neq 0$.

定理 6（Cramer 法则及其逆定理）

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

有唯一解 $\Leftrightarrow$ 它的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式 $|A| \neq 0$.

线性方程组 (1) 有唯一解 $\Leftrightarrow \beta$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，且表示法唯一.

定理 7(线性方程组有解判定定理)

线性方程组 (1) $\Leftrightarrow$ 它的系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 有相同的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}.$$

线性方程组 (1) 有解 $\Leftrightarrow$ β 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

A 的秩等于 $\overline{A}$ 的秩 $\Leftrightarrow$ A 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\overline{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\beta$ 有相同的秩.

在消元法中也给出了一个有解判定定理，现在又有一个判定定理，两者是否一致呢？

在消元法中也给出了一个有解判定定理, 现在又有一个判定定理, 两者是否一致呢？

答案是一致的. 因为消元法的第一步, 是用初等行变换把增广矩阵化成阶梯形矩阵, 适当调整前 n 列的顺序可变为

$$\overline{B}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \overline{B}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $c_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,r, d_{r+1}\neq 0$. 在前一种情况下无解, 在后一种情况下有解.

在 $\overline{B}$ 中前 n 列构成的矩阵 B 就是系数矩阵 A 经过一系列行的初等变换得到的, 而 $\overline{B}$ 是 $\overline{A}$ 经过同样的一系列行的初等变换得到的. 从而 A 的秩等于 B 的秩, $\overline{A}$ 的秩等于 $\overline{B}$ 的秩. 故

$$\text{秩}(A)=\text{秩}(\overline{A}) \Leftrightarrow \text{秩}(B)=\text{秩}(\overline{B}) \Leftrightarrow \text{ 线性方程组}(1)\text{有解}.$$

推论 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

- 无解 $\Leftrightarrow$ 它的系数矩阵 A 小于增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩;
- 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 它的系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩都等于未知量的个数 n;
- 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ 它的系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩相等，且小于未知量的个数 n.

从而，齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解 $\Leftrightarrow$ 它的系数矩阵 A 的秩小于未知量的个数 n.

例 1 问线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} = 1 \end{cases}$$

是否有解?

例 1 问线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 \qquad = 1 \end{cases}$$

是否有解?

解 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$

秩$(\overline{A}) = 3$, 秩$(A) = 2$, 从而线性方程组无解.

例 2　问 λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解、没有解, 有无穷多解? 有解时并求解.

例 2 问 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解、没有解，有无穷多解？有解时并求解.

解 该线性方程组含有三个未知量、三个方程，首先用 Cramer 法则确定出有唯一解的情况.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-2).$$

(1) $\lambda \neq 2$ 且 $\lambda \neq -1$ 时，由克莱姆法则，线性方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{\lambda-1}{\lambda-2}, x_2 = \frac{1}{\lambda-2}, x_3 = \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}.$$

(2) $\lambda = 2$ 时, 线性方程组的增广矩阵为

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

此时秩 $(A) = 2$, 秩 $(\bar{A}) = 3$, 故线性方程组无解.

(3) $\lambda = -1$ 时,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

此时秩 $(A) =$ 秩 $(\bar{A}) = 1 < 3$, 线性方程组有无穷多解. 原方程组与 $x_1 x_2 x_3 = -1$ 同解, 其一般解为 $x_1 = -1 - x_2 - x_3$, 其中 x_2, x_3 为一组自由未知量.

例 3 问 λ 取何值时，下面的线性方程组有解?

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ \lambda^2 x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ \lambda^3 x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

例 3 问 λ 取何值时，下面的线性方程组有解？

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ \lambda^2 x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ \lambda^3 x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

解 增广矩阵的第 1 列依次与第 2,3,4 列交换（只能在前四列之间交换，以保证常数项在最后一列

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & -3 & 2 \\ \lambda^2 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ \lambda^3 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \lambda & 2 \\ -3 & 2 & 1 & \lambda^2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \lambda^3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \lambda & 2 \\ 0 & 8 & -8 & \lambda^2+3\lambda & 5 \\ 0 & 4 & -4 & \lambda^3+\lambda & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \lambda & 2 \\ 0 & 4 & -4 & \lambda^2+\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2\lambda^3+\lambda^2+\lambda & 3 \end{pmatrix}.$$

秩$(\overline{A}) = 3$. 当 $-2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda \neq 0$ 时，即 $\lambda \neq 0, 1, -\frac{1}{2}$ 时，秩$(A) = 3$，此时线性方程组有解.

其它情况下线性方程组无解.

例 4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, a+2, -3a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, -b-2, a+2b)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (1,3,-3)^{\mathrm{T}}$. 试讨论当 a, b 为何值时:

1. β 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出;
2. β 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表出, 并求出表示式;
3. β 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 但表示式不唯一, 并求出表示式.

例 4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^{\mathrm{T}}$.
试讨论当 a,b 为何值时:

1. $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出;
2. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表出, 并求出表示式;
3. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 但表示式不唯一, 并求出表示式.

解 记 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ (系数矩阵), $\overline{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$ (增广矩阵). 对 $\overline{A}$ 进行初等行变换:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & a+2 & -b-2 & 3\\ 0 & -3a & a+2b & -3\end{pmatrix}$$

第一步: 第二行减去第一行的 2 倍, 得

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix}$$

第二步: 第三行加上第二行的 3 倍, 得

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{\beta}$ **不能由** $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ **线性表出的情况**

当 $a = 0$ **时, 增广矩阵变为**

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

此时, $r(\overline{A}) = 2 > r(A) = 1$**, 线性方程组** $AX = \boldsymbol{\beta}$ **无解, 故** $\boldsymbol{\beta}$ **不能由** $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ **线性表出.**

情况 (2): 唯一线性表出

(2) $\boldsymbol{\beta}$ **可由** $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ **唯一地线性表出的情况**

当 $a \neq 0$ **且** $a \neq b$ **时，增广矩阵进一步化为行最简形：**

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - \dfrac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

此时， $r(\overline{A}) = r(A) = 3$**，线性方程组有唯一解**

$$x_1 = 1 - \frac{1}{a}, \quad x_2 = \frac{1}{a}, \quad x_3 = 0$$

因此， $\boldsymbol{\beta}$ **可由** $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ **唯一地线性表出，表示式为**

$$\boldsymbol{\beta} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2$$

(3) β 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出但表示式不唯一的情况.

当 $a \neq 0$ 且 $a = b$ 时, 增广矩阵化为

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - \dfrac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时, $r(\overline{A}) = r(A) = 2 < 3$, 线性方程组有无穷多解. 令自由变量 $x_3 = c\ (c \in F)$, 则

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{1}{a}, \\ x_2 = \dfrac{1}{a} + c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

因此, β 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 但表示式不唯一, 表示式为

$$\boldsymbol{\beta} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(\frac{1}{a} + c\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + c\boldsymbol{\alpha}_3 \quad (c \in F)$$

例 证明：方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

对任何 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都有解的充分必要条件是系数行列式 $|a_{ij}|_{nn} \neq 0$.

§6 线性方程组解的结构

前面解决了线性方程组有解的判定条件，现在讨论线性方程组解的结构.

解唯一的情况无需讨论，有多个解时，需要讨论解与解之间的关系问题.

本节所讨论的都是有解的线性方程组.

一、齐次线性方程组的解结构

先看齐次线性方程组的情况.

(一) 齐次线性方程组的性质

设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

是一个齐次线性方程组.

它的解集合具有下面的重要性质.

1. 齐次线性方程组的两个解的和还是该齐次线性方程组的解.

它的解集合具有下面的重要性质.

1. 齐次线性方程组的两个解的和还是该齐次线性方程组的解.

证明 设 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 与 $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$ 是齐次线性方程组 (1) 的两个解, 即将它们代入齐次线性方程组 (1) 中, 每个方程都成为恒等式:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = 0, \ \ i = 1, 2, \cdots, s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = 0, \ \ i = 1, 2, \cdots, s.$$

把两个解的和

$$(k_1 + l_1, k_2 + l_2, \cdots, k_n + l_n) \tag{2}$$

代入齐次线性方程组 (1), 得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k_j + l_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = 0, \ \ i = 1, 2, \cdots, s.$$

故 (2) 也是齐次线性方程组 (1) 的一个解.

进而, 齐次线性方程组任意多个解的和也是该齐次线性方程组的一个解.

2. 齐次线性方程组一个解的倍数仍为该齐次线性方程组的一个解.

2. 齐次线性方程组一个解的倍数仍为该齐次线性方程组的一个解.

证明 设 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是齐次线性方程组 (1) 的一个解, 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s,$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(ck_j) = c\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = c \cdot 0 = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s,$$

故 $(ck_1, ck_2, \cdots, ck_n)$ 也是齐次线性方程组 (1) 的一个解.

由此可得下面的结论.

3. 齐次线性方程组 (1) 的任意多个解的任意线性组合仍为 (1) 的解.

从而, 若已知齐次线性方程组的 l 个非零解, 则这 l 个解的所有的线性组合就构成了许多解.

那么反过来呢? 齐次线性方程组的全部解能否通过有限的几个非零解的线性组合表示出来呢? 回答是肯定的.

(二) 齐次线性方程组的解结构

先引入下面的概念.

定义 齐次线性方程组 (1) 的一组解向量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 称为 (1) 的一个**基础解系**, 如果它满足

(1) 齐次线性方程组 (1) 的任意一个解都能表示成 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 的线性组合,

(2) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性无关.

注:

1. 若齐次线性方程组 (1) 有基础解系, 则它必有非零解.

2. 齐次线性方程组 (1) 的任意两个基础解系是等价的, 从而含有相同个数的向量.

3. 任何一个线性无关的与某一个基础解系等价的向量组都是基础解系. (习题 24)

设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 (1) 的一个基础解系, 且线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 等价. 由定理 2 的推论 3 可得 $p = t$. 又由齐次线性方程组的解的性质 3 得知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 也是 (1) 的一个解向量组. 进而可得 (1) 的任一解都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表出, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 也是 (1) 的一个基础解系.

4. 设齐次线性方程组 (1) 的系数矩阵的秩为 r. 证明方程组任意 $n-r$ 个线性无关的解都是它的一个基础解系. (习题 25)

那么齐次线性方程组 (1) 在什么时候才有基础解系呢？

定理 8 齐次线性方程组 (1) 只要有非零解，它就有基础解系，并且其基础解系所含解向量的个数等于 $n-r$，其中 r 表示系数矩阵的秩（而 $n-r$ 也是齐次线性方程组 (1) 的一般解中自由未知量的个数）.

证明 设齐次线性方程组 (1) 的系数矩阵的秩为 r，且不妨设左上角的 r 级子式不等于 0. 则齐次线性方程组 (1) 可以改写成

$$\begin{cases} x_1 = -a_{1(r+1)}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ x_2 = -a_{2(r+1)}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_r = -a_{r(r+1)}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{3}$$

若 $r=n$，则齐次线性方程组无自由未知量，(3) 的右端全为 0.

此时齐次线性方程组只有零解，从而无基础解系.

若 $r < n$, 把自由未知量的任意一组值 $(c_{r+1}, \cdots, c_n)$ 代入 (3), 就唯一地决定了线性方程组 (3) 的一个解, 也就求出了 (1) 的一个解.

即 (1) 的任意两个解, 只要自由未知量的值一样, 这两个解就完全一样.

特别地, 若在一个解中, 自由未知量的值全为 0, 那么此解必为零解.

在 (3) 中分别用 $n-r$ 组数

$$(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1) \tag{4}$$

来代替自由未知量 $(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n)$, 就得出线性方程组 (3) 的 $n-r$ 个解, 也就得出齐次线性方程组 (1) 的 $n-r$ 个解

$$\begin{cases} \eta_1 = (c_{11}, \cdots, c_{1r}, 1, 0, \cdots, 0), \\ \eta_2 = (c_{21}, \cdots, c_{2r}, 0, 1, \cdots, 0), \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \eta_{n-r} = (c_{(n-r)1}, \cdots, c_{(n-r)r}, 0, 0, \cdots, 1). \end{cases} \tag{5}$$

下证 (5) 就是一个基础解系.

首先证明 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关. 若存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$, 使得

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} = \mathbf{0},$$

即

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} = (*, \cdots, *, k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}) = (0, \cdots, 0, 0, 0, \cdots, 0),$$

则 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 故 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关.

再证齐次线性方程组 (1) 的任意一个解都可以由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性表出. 设

$$\eta = (c_1, \cdots, c_r, c_{r+1}, \cdots, c_n) \tag{6}$$

是齐次线性方程组 (1) 的一个解, 因为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 都是 (1) 的解, 故

$$c_{r+1}\eta_1 + c_{r+2}\eta_2 + \cdots + c_n\eta_{n-r} \tag{7}$$

也是 (1) 的一个解.

比较 (6) 与 (7) 的后 $n-r$ 个分量得知, 两者的自由未知量有相同的值, 从而这两个解完全一样, 即

$$\eta = c_{r+1}\eta_1 + c_{r+2}\eta_2 + \cdots + c_n\eta_{n-r}. \tag{8}$$

从而 (1) 的任意一个解都可以写成解向量组 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 的一个线性组合.

由定义, η_1, η_2, $\cdots$, η_{n-r} 就是齐次线性方程组 (1) 的一个基础解系. ■

例 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

例 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

解 先将其系数矩阵化成行简化的阶梯形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

那么原齐次线性方程组与

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$$

同解.

移项, 即得出其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = x_4, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 为一组自由未知量.

那么当 (x_3, x_4) 分别取 $(1,0),(0,1)$ 时, 得解

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

这就是齐次线性方程组的一个基础解系, 且其通解为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, 其中 k_1, k_2 为任意数.

二、一般线性方程组的解结构

将一般线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad \vdots \\
a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s
\end{cases} \tag{9}
$$

的常数项换成 0, 就得到齐次线性方程组 (1), 它称为线性方程组 (9) 的导出组.

两者之间有密切的联系.

1. 线性方程组 (9) 的两个解的差是它的导出组 (1) 的一个解.

1. 线性方程组 (9) 的两个解的差是它的导出组 (1) 的一个解.

证明 设 $(k_1, k_2, \cdots, k_n), (l_1, l_2, \cdots, l_n)$ 是 (9) 的两个解, 即有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = b_i, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = b_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, s,$$

这两个解的差为 $(k_1 - l_1, k_2 - l_2, \cdots, k_n - l_n)$.

显然有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k_j - l_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = b_i - b_i = 0, \ \ i = 1, 2, \cdots, s.$$

即 $(k_1 - l_1, k_2 - l_2, \cdots, k_n - l_n)$ 是导出组 (1) 的一个解.

2. 线性方程组 (9) 的一个解与它的导出组 (1) 的一个解的和还是线性方程组 (9) 的一个解.

2. 线性方程组 (9) 的一个解与它的导出组 (1) 的一个解的和还是线性方程组 (9) 的一个解.

证明 设 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是 (9) 的一个解, 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

又设 $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$ 是导出组 (1) 的一个解, 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

那么

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k_j + l_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = b_i + 0 = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, s,$$

即 $(k_1 + l_1, k_2 + l_2, \cdots, k_n + l_n)$ 是 (9) 的一个解.

定理 9

- 如果 γ_0 是线性方程组 (9) 的一个特解, 那么 (9) 的任意一个解 γ 都可以表示成
$$\gamma = \gamma_0 + \eta, \qquad (10)$$
其中 η 是导出组 (1) 的一个解.
- 因此, 对于线性方程组 (9) 的任意一个特解 γ_0, 当 η 取遍它的导出组的全部解时, (10) 就给出了线性方程组 (9) 的全部解 (也叫通解).

证明 设 γ 是 (9) 的任意一个解, 则 $\gamma = \gamma_0 + (\gamma - \gamma_0)$. 由于 $\gamma - \gamma_0$ 是导出组的一个解, 令 $\gamma - \gamma_0 = \eta$, 则线性方程组 (9) 的任意一个解均有 (10) 的形式.

当 η 取遍 (1) 的所有解时, (10) 就取遍了 (9) 的全部解. ■

注: 由此可知, 为了找出线性方程组 (9) 的全部解, 只要找出它的一个特解及其导出组的全部解就行了. 而其导出组是齐次线性方程组 (1), 它的解可以由其基础解系线性表出出来.

故若 γ_0 为 (9) 的一个特解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系, 那么 (9) 的任意一个解 γ 都可以表示成

推论 在线性方程组 (9) 有解的情况下，解唯一 $\Leftrightarrow$ 它的导出组只有零解.

证明 $\Leftarrow$ 若线性方程组 (9) 有两个不同的解，那么它们的差就是其导出组的一个非零解.

从而，若导出组只有零解，则线性方程组 (9) 有唯一解.

$\Rightarrow$ 若导出组有非零解，那么这个解与线性方程组 (9) 的一个解的和就是线性方程组 (9) 的另一个解，即线性方程组 (9) 的解不唯一. 从而，若线性方程组 (9) 有唯一解，则其导出组只有零解. ■

例 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

例 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

解 因为增广矩阵可以化简成下面的行简化的阶梯形矩阵

$$\bar{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以原线性方程组与

$$\begin{cases} x_1 - 8x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = -1, \end{cases}$$

同解, 其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -1 - 6x_3 + 5x_4, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 为一组自由未知量.

令自由未知量都取值为 0, 则得到原线性方程组的一个特解

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

导出组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4, \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 为一组自由未知量. 从而可以得出导出组的一个基础解系

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

那么原线性方程组的全部解 (也叫通解) 为

$$\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2,$$

其中 k_1, k_2 为任意数.

习题 26. 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是一线性方程组的解, 证明 $u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_{t+1}\eta_{t+1}$ (其中 $u_1 + u_2 + \cdots + u_{t+1} = 1$) 也是一个解.

补充题 9. 设 η_0 是某线性方程组的一个解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是它的导出方程组的一个基础解系, 令 $\gamma_1 = \eta_0, \gamma_2 = \eta_1 + \eta_0, \cdots, \gamma_{t+1} = \eta_t + \eta_0$. 证明: 线性方程组的任意一个解 γ, 都可以表示成 $\gamma = u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + \cdots + u_{t+1}\gamma_{t+1}$, 其中 $u_1 + u_2 + \cdots + u_{t+1} = 1$.

补充题 8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), i = 1, 2, \cdots, s$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 证明：如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解全是方程

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$$

的解, 那么 β 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

预习内容概览

两大核心模块

1. 矩阵、线性空间、线性变换
2. 群论基础

预习目标

掌握基本概念，为后续深入学习打下坚实基础

模块一：矩阵、线性空间、线性变换

矩阵基础

- 矩阵运算：加法、数乘、乘法
- 特殊矩阵：单位矩阵、零矩阵、对角矩阵
- 矩阵的秩与逆矩阵

线性空间

- 向量空间定义与子空间
- 基与维数
- 坐标表示

线性变换

- 定义与性质
- 矩阵表示

模块二：群论基础

群的基本概念

- 群的定义：封闭性、结合律、单位元、逆元
- 重要例子：整数加群、实数乘群、置换群
- 子群与循环群

群的进一步概念

- 陪集与 Lagrange 定理
- 正规子群与商群
- 群同态与同构

典型群

对称群、置换群、矩阵群

学习方法建议

有效预习策略

1. **循序渐进**：从具体例子理解抽象概念
2. **动手练习**：多做计算题和证明题
3. **联系实际**：思考概念的应用背景
4. **建立联系**：注意不同概念间的关联

学习重点

理解定义，掌握典型例子，完成基础练习

学习建议

每天坚持学习，做好笔记，及时复习

祝学习顺利！

寒假愉快！