

## 第一章 多项式 练习题

### 一. 填空

1. 数集  $\{0\}$  对四则运算中的哪几个是封闭的\_\_\_\_\_.
2. 多项式  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ , 则  $f(x)g(x)$  的  $k$  次项的系数为\_\_\_\_\_.
3.  $g(x) = x^2 - x + 2$  除  $f(x) = x^4 - 2x + 5$  所得商式  $q(x) =$ \_\_\_\_\_, 余式  $r(x) =$ \_\_\_\_\_.
4.  $x-3$  除  $2x^4 - x^2 - 9x$  的余式为\_\_\_\_\_.
5. 取多项式  $f(x)$ , 用  $x-1$  除余式为 3, 用  $x-3$  除余式为 5, 则用  $(x-1)(x-3)$  除余式为\_\_\_\_\_.
6.  $f(x), g(x)$  是非零多项式,  $d_1(x), d_2(x)$  是  $f(x), g(x)$  的两个最大公因式, 则  $d_1(x), d_2(x)$  的关系为\_\_\_\_\_.
7. 两个多项式互相整除的充要条件是\_\_\_\_\_.
8. 已知  $(x+1)^2 | ax^4 + bx^2 - 1$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.
9. 设  $g(x) = x^2 - x - 2$  除  $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$  的余式为  $2x + 1$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.
10. 多项式  $f(x)$  有重因式的充要条件是\_\_\_\_\_.
11. 多项式函数  $f(x) = x^3 - \frac{11}{2}x^2 + \frac{17}{2}x - 3$  的有理根为\_\_\_\_\_.
12. 以  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  为根的首一不可约有理系数多项式为\_\_\_\_\_.
13. 把有理系数多项式  $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 3$  写成一个有理数与一个本原多项式的乘积\_\_\_\_\_.
14. 多项式  $f(x) = [(4x-3)^{2018}x^2 - 3x + 1]^{2018} (7x^3 - 10x + 2)^{2017}$  的各项系数之和为\_\_\_\_\_, 常数项为\_\_\_\_\_.

### 二. 计算题

1. 设  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 4, g(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ .  
(1) 求  $(f(x), g(x))$ , (2) 求  $u(x), v(x)$ , 使得  $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ .
2. 设  $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ .  
(1) 求  $(f(x), g(x))$ , (2) 求  $u(x), v(x)$ , 使得  $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ .
3.  $f(x) = x^3 + tx^2 + x + u$  和  $g(x) = x^3 + (1+t)x^2 + 1$  的最大公因式是一个二次多项式, 求  $t, u$  的值.
4. 设  $f_1(x), f_2(x)$  是首 1 的次数  $\leq 3$  的互异多项式, 设  $x^4 + x^2 + 1 | f_1(x^3) + x^4 f_2(x^3)$ , 求  $(f_1(x), f_2(x))$ .
5.  $m, p, q$  适合什么条件时, 有  $(x^2 + mx + 1) | x^4 + px + q$ .
6. 如果  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$  能被  $x^2 - 1$  整除, 求  $a, b$ .
7. 如果  $f'(x) | f(x)$ , 求多项式  $f(x)$ .

8. 判断多项式  $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$  有无重因式.
9. 分别在有理数域、实数域和复数域上把  $x^4 + 1$  写成不可约多项式的乘积.
10. 求满足下列三个条件的一个二次多项式  $f(x)$ :
  - (a).  $x + 2$  整除  $f(x)$ , (b).  $x - 3$  除  $f(x)$  的余式为 10, (c).  $x + 1$  除  $f(x)$  的余式等于  $x - 1$  除  $f(x)$  的余式.
11. 求一个三次多项式  $f(x)$ , 使得  $f(x) + 1$  可被  $(x - 1)^2$  整除,  $f(x) - 1$  可被  $(x + 1)^2$  整除.
12. 设  $f(x) = x^2 - 4x + a$ , 若存在唯一的 3 次首一多项式  $g(x)$ , 使得  $f(x) \mid g(x)$ ,  $g(x) \mid f^2(x)$ , 求  $a$  与  $g(x)$ .

### 三. 证明题

1. 若  $P$  为一数域, 且  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in P$ , 证明  $\sqrt{2} \in P, \sqrt{6} \in P$ ; 问  $\sqrt{7}$  是否属于  $P$ ?
2. 证明: 设  $f(x)$  是数域  $P$  上的次数大于 0 的多项式, 证明  $f(x)$  是不可约多项式的充要条件是对任意的常数  $a \in P$ ,  $f(x + a)$  是不可约的.
3. 证明  $x \mid f^k(x)$  当且仅当  $x \mid f(x)$ .
4. 设  $f(x)$  是数域  $P$  上的不可约多项式, 证明  $f(x)$  在复数域  $\mathbf{C}$  上无重根.
5. 任取多项式  $f(x), g(x) \in P[x]$ , 证明  $(f(x), g(x)) = (f(x) + g(x), g(x))$
6. 证明: 若  $p(x)$  不可约,  $p(x) \mid f(x)g(x)$ , 且  $p(x) \nmid [f(x) + g(x)]$ , 则  $p(x) \mid f(x)$  且  $p(x) \mid g(x)$ .  
若  $p(x)$  可约, 上述结论是否成立? 为什么?
7. 设  $f, g$  非零, 若任给  $h(x)$ , 由  $f(x) \mid g(x)h(x)$ , 都可得  $f(x) \mid h(x)$ , 证明  $(f, g) = 1$ .
8. 设  $f, g$  非零, 若任给  $h(x)$ , 由  $f(x) \mid h(x)$ ,  $g(x) \mid h(x)$ , 都可得  $f(x)g(x) \mid h(x)$ , 证明  $(f, g) = 1$ .
9. 设一元多项式  $f(x), g(x), h(x)$ , 其中  $(f(x), h(x)) = 1$ , 且  $f(x)$  与  $g(x)$  被  $h(x)$  除所得余式相等,  
证明:  $(f(x)g(x), h(x)) = 1$ .
10. 证明:  $\sin x$  不是多项式.
11.  $f(x), g(x)$  是非零多项式, 证明存在自然数  $N$ , 当  $n_1, n_2 > N$  时有  $(f^{n_1}(x), g(x)) = (f^{n_2}(x), g(x))$ .
12. 设  $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$ , 证明存在  $p(x) \in F[x]$  使得  $f(x) \mid p(x)$ , 且  $g(x) \mid (p(x) + h(x))$  当且仅当  $(f(x), g(x)) \mid h(x)$ .
13. 证明: 任给非负整数  $n$ , 都有  $x^2 + x + 1 \mid (x^{n+2} + (x+1)^{2n+1})$ .
14. 证明:  $x^d - 1 \mid x^n - 1 \Leftrightarrow d \mid n$ , 其中  $d, n$  是正整数.
15. 证明:  $(x^n - 1, x^m - 1) = x^{(n, m)} - 1$ .