In [1]:

```
# 任意选一个你喜欢的整数，这能帮你得到稳定的结果
seed = 9999
```

欢迎来到线性回归项目

若项目中的题目有困难没完成也没关系，我们鼓励你带着问题提交项目，评审人会给予你诸多帮助。

所有选做题都可以不做，不影响项目通过。如果你做了，那么项目评审会帮你批改，也会因为选做部分做错而判定为不通过。

其中非代码题可以提交手写后扫描的 pdf 文件，或使用 Latex 在文档中直接回答。

1 矩阵运算

1.1 创建一个 4*4 的单位矩阵

In [2]:

```
# 这个项目设计来帮你熟悉 python list 和线性代数
# 你不能调用任何NumPy以及相关的科学计算库来完成作业


# 本项目要求矩阵统一使用二维列表表示，如下：
A = [[1,2,3],
     [2,3,3],
     [1,2,5]]

B = [[1,2,3,5],
     [2,3,3,5],
     [1,2,5,1]]

# 向量也用二维列表表示
C = [[1],
     [2],
     [3]]

#TODO 创建一个 4*4 单位矩阵
I = [[1,2,3,4],
     [5,6,7,8],
     [9,10,11,12],
     [13,14,15,16]]
```

1.2 返回矩阵的行数和列数

In [3]:

```
# TODO 返回矩阵的行数和列数
def shape(M):
    L = len(M)
    N = len(M[0])
    return L,N
```

In [4]:

```
# 运行以下代码测试你的 shape 函数
%run -i -e test.py LinearRegressionTestCase.test_shape
```

```
.
----------------------------------------------------------------------
Ran 1 test in 0.013s

OK
```

1.3 每个元素四舍五入到特定小数数位

In [5]:

```
# TODO 每个元素四舍五入到特定小数数位
# 直接修改参数矩阵，无返回值
def matxRound(M, decPts=4):
    for i in range(len(M)):
        for j in range(len(M[i])):
            M[i][j] = round(M[i][j], decPts)
```

In [6]:

```
# 运行以下代码测试你的 matxRound 函数
%run -i -e test.py LinearRegressionTestCase.test_matxRound
```

```
.
----------------------------------------------------------------------
Ran 1 test in 0.013s

OK
```

1.4 计算矩阵的转置

In [7]:

```
# TODO 计算矩阵的转置
def transpose(M):
    # 使用zip()矩阵转置
    M = zip(* M)
    M = list(M)
    for i in range(len(M)):
        M[i] = list(M[i])
    return M
```

In [8]:

```
# 运行以下代码测试你的 transpose 函数
%run -i -e test.py LinearRegressionTestCase.test_transpose
```

```
.
----------------------------------------------------------------------
Ran 1 test in 0.013s

OK
```

1.5 计算矩阵乘法 AB

In [9]:

```
# TODO 计算矩阵乘法 AB，如果无法相乘则raise ValueError
def matxMultiply(A, B):
    if len(A[0]) == len(B):
        # 请问我这个错在哪里了。
#         N = [0 for o in range(len(B[0]))]
#         M = [N for o in range(len(A))]
#         for i in range(len(A)):
#             for v in range(len(B[0])):
#                 for k in range(len(B)):
#                     M[i][v]  += A[i][k] * B[k][v]
#         return M
        MID = [[0] * len(B[0]) for i in range(len(A))]
        for i in range(len(A)):
            for j in range(len(B[0])):
                for k in range(len(B)):
                    MID[i][j] += A[i][k] * B[k][j]
        return MID
    else:
        raise ValueError
matxMultiply(B ,I)
```

Out[9]:

```
[[103, 114, 125, 136], [109, 122, 135, 148], [69, 78, 87, 96]]
```

In [10]:

```
# 运行以下代码测试你的 matxMultiply 函数
%run -i -e test.py LinearRegressionTestCase.test_matxMultiply
```

```
.
----------------------------------------------------------------------
Ran 1 test in 0.143s

OK
```

2 Gaussign Jordan 消元法

2.1 构造增广矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{22} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

返回 $Ab = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{22} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$

In [47]:

```
# TODO 构造增广矩阵，假设A，b行数相同
import copy
def augmentMatrix(A, b):
    if len(A) == len(b):
        Ab = copy.deepcopy(A)
        for i in range(len(Ab)):
            Ab[i].append(b[i][0])
    return Ab
```

In [48]:

```
# 运行以下代码测试你的 augmentMatrix 函数
%run -i -e test.py LinearRegressionTestCase.test_augmentMatrix
```

```
.
----------------------------------------------------------------------
Ran 1 test in 0.035s

OK
```

2.2 初等行变换

- 交换两行
- 把某行乘以一个非零常数
- 把某行加上另一行的若干倍：

In [13]:

```
# TODO r1 <---> r2
# 直接修改参数矩阵，无返回值
def swapRows(M, r1, r2):
    M[r1], M[r2] = M[r2], M[r1]
```

In [14]:

```
# 运行以下代码测试你的 swapRows 函数
%run -i -e test.py LinearRegressionTestCase.test_swapRows
```

```
.
----------------------------------------------------------------------
Ran 1 test in 0.002s

OK
```

In [15]:

```
# TODO r1 <--- r1 * scale
# scale为0是非法输入，要求 raise ValueError
# 直接修改参数矩阵，无返回值
def scaleRow(M, r, scale):
    if scale != 0:
        for i in range(len(M[r])):
            M[r][i] =  M[r][i] * scale
    else:
        raise ValueError()
```

In [16]:

```
# 运行以下代码测试你的 scaleRow 函数
%run -i -e test.py LinearRegressionTestCase.test_scaleRow
```

```
.
----------------------------------------------------------------------
Ran 1 test in 0.004s

OK
```

In [17]:

```
# TODO r1 <--- r1 + r2*scale
# 直接修改参数矩阵，无返回值
def addScaledRow(M, r1, r2, scale):
    for i in range(len(M[r1])):
        M[r1][i] = M[r1][i] + M[r2][i] * scale
```

In [18]:

```
# 运行以下代码测试你的 addScaledRow 函数
%run -i -e test.py LinearRegressionTestCase.test_addScaledRow
```

```
.
----------------------------------------------------------------------
Ran 1 test in 0.002s

OK
```

2.3 Gaussian Jordan 消元法求解 Ax = b

2.3.1 算法

步骤1 检查A，b是否行数相同

步骤2 构造增广矩阵Ab

步骤3 逐列转换Ab为化简行阶梯形矩阵 中文维基链接 (https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%98%B6%E6%A2%AF%E5%BD%A2%E7%9F%A9%E9%98%B5#.E5.8C.9hans:.E8.A1.8C.3B_zh-hant:.E5.88.97.3B.7D-.E9.98.B6.E6.A2.AF.E5.BD.A2.E7.9F.A9.E9.98.B5)

```
对于Ab的每一列（最后一列除外）
    当前列为列c
    寻找列c中 对角线以及对角线以下所有元素（行 c~N）的绝对值的最大值
    如果绝对值最大值为0
        那么A为奇异矩阵，返回None (你可以在选做问题2.4中证明为什么这里A一定是奇异矩阵)
    否则
        使用第一个行变换，将绝对值最大值所在行交换到对角线元素所在行（行c）
        使用第二个行变换，将列c的对角线元素缩放为1
        多次使用第三个行变换，将列c的其他元素消为0
```

步骤4 返回Ab的最后一列

注： 我们并没有按照常规方法先把矩阵转化为行阶梯形矩阵，再转换为化简行阶梯形矩阵，而是一步到位。如果你熟悉常规方法的话，可以思考一下两者的等价性。

2.3.2 算法推演

为了充分了解Gaussian Jordan消元法的计算流程，请根据Gaussian Jordan消元法，分别手动推演矩阵A为***可逆矩阵***，矩阵A为***奇异矩阵***两种情况。

推演示例

$$Ab = \begin{bmatrix} -7 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -8 & 1 \\ -10 & -2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$--> \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & -\frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{16}{5} & -\frac{71}{10} & \frac{11}{10} \\ 0 & \frac{32}{5} & -\frac{73}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$--> \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{43}{64} & -\frac{7}{64} \\ 0 & 1 & -\frac{73}{64} & \frac{3}{64} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$--> \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{59}{688} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{43} \end{bmatrix}$$

推演有以下要求:

1. 展示每一列的消元结果, 比如3*3的矩阵, 需要写三步
2. 用分数来表示
3. 分数不能再约分
4. 我们已经给出了latex的语法,你只要把零改成你要的数字(或分数)即可
5. 检查你的答案, 可以用这个 (http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi?c=sys), 或者后面通过单元测试后的`gj_Solve`

你可以用python的 fractions (https://docs.python.org/2/library/fractions.html) 模块辅助你的约分

以下开始你的尝试吧!

In [22]:

```
# 不要修改这里!
from helper import *
A = generateMatrix(3,seed,singular=False)
b = np.ones(shape=(3,1),dtype=int) # it doesn't matter
Ab = augmentMatrix(A.tolist(),b.tolist()) # 请确保你的增广矩阵已经写好了
printInMatrixFormat(Ab,padding=3,truncating=0)
```

```
  7,  5,  3 ||  1
 -5, -4,  6 ||  1
  2, -2, -9 ||  1
```

请按照算法的步骤3，逐步推演***可逆矩阵***的变换。

在下面列出每一次循环体执行之后的增广矩阵。

要求：

1. 做分数运算
2. 使用`\frac{n}{m}`来渲染分数，如下：

   - $\frac{n}{m}$
   - $-\frac{a}{b}$

$$Ab = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{57}{7} & \frac{12}{7} \\ 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

$$--> \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 & 3 \\ 0 & 1 & -19 & -4 \\ 0 & 0 & -75 & -13 \end{bmatrix}$$

$$--> \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{43}{75} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{53}{75} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{75} \end{bmatrix}$$

In [43]:

```
# 不要修改这里！
A = generateMatrix(3,seed,singular=True)
b = np.ones(shape=(3,1),dtype=int)
Ab = augmentMatrix(A.tolist(),b.tolist()) # 请确保你的增广矩阵已经写好了
printInMatrixFormat(Ab,padding=3,truncating=0)
```

```
 -1,   6,  -8 ||   1
-10,  -5,   5 ||   1
 -9,   2,  -4 ||   1
```

请按照算法的步骤3，逐步推演***奇异矩阵***的变换。

在下面列出每一次循环体执行之后的增广矩阵。

要求：

1. 做分数运算
2. 使用`\frac{n}{m}`来渲染分数，如下：
    - $\frac{n}{m}$
    - $-\frac{a}{b}$

$$Ab = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 8 & -1 \\ 0 & -65 & 85 & -9 \\ 0 & -52 & 68 & -8 \end{bmatrix}$$

$$--> \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{13} & -\frac{11}{65} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{13} & \frac{9}{65} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{65} \end{bmatrix}$$

$$--> \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{13} & -\frac{11}{65} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{13} & \frac{9}{65} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\ldots$$

2.3.3 实现 Gaussian Jordan 消元法

In [194]:

```
# TODO 实现 Gaussain Jordan 方法求解 Ax = b

""" Gaussian Jordan 方法求解 Ax = b.
    参数
        A: 方阵
        b: 列向量
        decPts: 四舍五入位数，默认为4
        epsilon: 判读是否为0的阈值，默认 1.0e-16

    返回列向量 x 使得 Ax = b
    返回None，如果 A，b 高度不同
    返回None，如果 A 为奇异矩阵
"""
import numpy as np
def gj_Solve(A, b, decPts=4, epsilon = 1.0e-16):
    """
    A: 方阵
    b: 列向量
    decPts: 四舍五入位数，默认为4
    epsilon: 判读是否为0的阈值，默认 1.0e-16
    """
    # 判断，如果 A，b 高度不同，返回None。
#     print(len(A))
```

```
    if len(A) != len(b):
        return None
    # 构造增广矩阵
    Ab = augmentMatrix(A, b)
#     print(Ab)
    # 根据如果发现某一列对角线和对角线以下所有元素都为0，那么则断定这个矩阵为奇异矩阵。判断如果
 A 为奇异矩阵，返回None
    # 转置矩阵，便于数组运算
#     AbT = transpose(Ab)转置矩阵一直在变，需要写在循环中
    for index in range(len(A)):
        # 一列对角线和对角线以下所有元素
        AbT = transpose(Ab)
        col_objs = AbT[index][index:]
        abs_max = max(col_objs, key=abs)
        # 元素都为0，那么则断定这个矩阵为奇异矩阵,返回None
        if abs(abs_max) < epsilon :
            return None
        # 找到index列下绝对值最大的列
        max_col = col_objs.index(abs_max) + index
        # 将找到的最大值的列移动到对角线所在的列
        swapRows(Ab, index, max_col)
        # 缩放对角线列为1
        scaleRow(Ab, index, 1.0/abs_max)
        # 消元,将出index列除了对角线的元素其他所有元素消除
        for i in range(len(Ab)):
            #  Ab[i][index] 不能为0否则出问题
            if i != index and Ab[i][index] != 0:
                addScaledRow(Ab, i, index, -Ab[i][index])
    # 列向量 x
    result1 = []
    #REEF矩阵最后一列值为结果
    for rt in Ab:
        result1.append([rt[-1]])
    # 四舍五入结果
    matxRound(result1, decPts)
#     print(result)
#     GG=np.linalg.inv(A)
#     result = matxMultiply(GG, b)
#     matxRound(result, decPts)
    return result1
```

In [195]:

```
# 运行以下代码测试你的 gj_Solve 函数
%run -i -e test.py LinearRegressionTestCase.test_gj_Solve
```

```
.
----------------------------------------------------------------------
Ran 1 test in 6.317s

OK
```

(选做) 2.4 算法正确判断了奇异矩阵：

在算法的步骤3 中，如果发现某一列对角线和对角线以下所有元素都为0，那么则断定这个矩阵为奇异矩阵。

我们用正式的语言描述这个命题，并证明为真。

证明下面的命题：

如果方阵 A 可以被分为4个部分:

$A = \begin{bmatrix} I & X \\ Z & Y \end{bmatrix}$，其中 I 为单位矩阵，Z 为全0矩阵，Y 的第一列全0，

那么A为奇异矩阵。

提示：从多种角度都可以完成证明

- 考虑矩阵 Y 和 矩阵 A 的秩
- 考虑矩阵 Y 和 矩阵 A 的行列式
- 考虑矩阵 A 的某一列是其他列的线性组合

TODO 证明：

3 线性回归

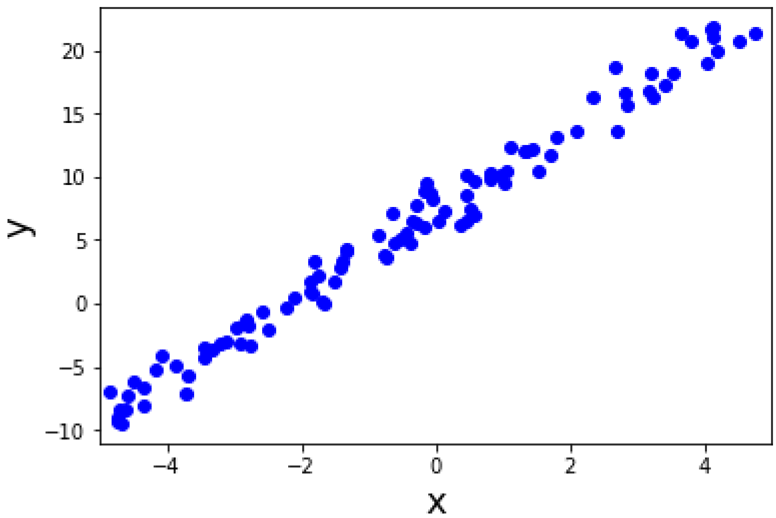
3.1 随机生成样本点

In [172]:

```
# 不要修改这里!
# 运行一次就够了!
from helper import *
from matplotlib import pyplot as plt
%matplotlib inline

X,Y = generatePoints(seed,num=100)
# print(X)


## 可视化
plt.xlim((-5,5))
plt.xlabel('x',fontsize=18)
plt.ylabel('y',fontsize=18)
plt.scatter(X,Y,c='b')
plt.show()
```



3.2 拟合一条直线

3.2.1 猜测一条直线

In [173]:

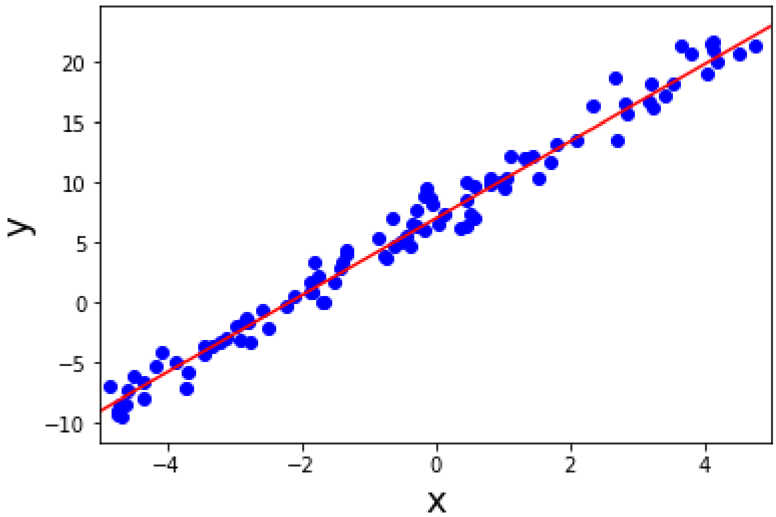
```
#TODO 请选择最适合的直线 y = mx + b
#??????????????????????这里有一段红色是什么意思
m1 = 3.2
b1 = 7

# 不要修改这里！
plt.xlim((-5,5))
x_vals = plt.axes().get_xlim()
y_vals = [m1*x+b1 for x in x_vals]
plt.plot(x_vals, y_vals, '-', color='r')

plt.xlabel('x',fontsize=18)
plt.ylabel('y',fontsize=18)
plt.scatter(X,Y,c='b')

plt.show()
```

```
c:\users\zb\appdata\local\programs\python\python36\lib\site-packages\matplotlib\cb
ook\deprecation.py:107: MatplotlibDeprecationWarning: Adding an axes using the sam
e arguments as a previous axes currently reuses the earlier instance.  In a future
version, a new instance will always be created and returned.  Meanwhile, this warn
ing can be suppressed, and the future behavior ensured, by passing a unique label
to each axes instance.
  warnings.warn(message, mplDeprecation, stacklevel=1)
```



3.2.2 计算平均平方误差 (MSE)

我们要编程计算所选直线的平均平方误差(MSE), 即数据集中每个点到直线的Y方向距离的平方的平均数，表达式如下：

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2$$

In [174]:

```
# TODO 实现以下函数并输出所选直线的MSE

def calculateMSE(X,Y,m,b):
    N = len(X)
    SUM = 0
    for n in range(N):
        SUM += (Y[n] - m * X[n] - b) ** 2
    SUM = SUM/N
    return SUM

print(calculateMSE(X,Y,m1,b1))
```

1.3947785197398173

3.2.3 调整参数 m, b 来获得最小的平方平均误差

你可以调整3.2.1中的参数 $m1, b1$ 让蓝点均匀覆盖在红线周围，然后微调 $m1, b1$ 让MSE最小。

3.3 (选做) 找到参数 m, b 使得平方平均误差最小

这一部分需要简单的微积分知识($(x^2)' = 2x$)。因为这是一个线性代数项目，所以设为选做。

刚刚我们手动调节参数，尝试找到最小的平方平均误差。下面我们要精确得求解 m, b 使得平方平均误差最小。

定义目标函数 E 为

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2$$

因为 $E = \frac{n}{2}MSE$, 所以 E 取到最小值时，MSE 也取到最小值。要找到 E 的最小值，即要找到 m, b 使得 E 相对于 m, E 相对于 b 的偏导数等于0.

因此我们要解下面的方程组。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial m} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial E}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

3.3.1 计算目标函数相对于参数的导数

首先我们计算两个式子左边的值

证明/计算:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \sum_{i=1}^{n} -x_i(y_i - mx_i - b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} -(y_i - mx_i - b)$$

TODO 证明:

3.3.2 实例推演

现在我们有了一个二元二次方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} -x_i(y_i - mx_i - b) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} -(y_i - mx_i - b) = 0 \end{cases}$$

为了加强理解，我们用一个实际例子演练。

我们要用三个点 $(1,1),(2,2),(3,2)$ 来拟合一条直线 y = m*x + b, 请写出

- 目标函数 E,
- 二元二次方程组,
- 并求解最优参数 m, b

TODO 写出目标函数，方程组和最优参数

定义目标函数 E 为

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(y_i - mx_i - b)^2$$

二元二次方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} -x_i(y_i - mx_i - b) = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} -(y_i - mx_i - b) = 0 \end{cases}$$

最优参数

3.3.3 将方程组写成矩阵形式

我们的二元二次方程组可以用更简洁的矩阵形式表达，将方程组写成矩阵形式更有利于我们使用 Gaussian Jordan 消元法求解。

请证明

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial m} \\ \frac{\partial E}{\partial b} \end{bmatrix} = X^T X h - X^T Y$$

其中向量 Y, 矩阵 X 和 向量 h 分别为 :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}$$

TODO 证明:

至此我们知道，通过求解方程 $X^T X h = X^T Y$ 来找到最优参数。这个方程十分重要，他有一个名字叫做 **Normal Equation**，也有直观的几何意义。你可以在 子空间投影 (http://open.163.com/movie/2010/11/J/U/M6V0BQC4M_M6V2AJLJU.html) 和 投影矩阵与最小二乘 (http://open.163.com/movie/2010/11/P/U/M6V0BQC4M_M6V2AOJPU.html) 看到更多关于这个方程的内容。

3.4 求解 $X^T X h = X^T Y$

在3.3 中，我们知道线性回归问题等价于求解 $X^T X h = X^T Y$ (如果你选择不做3.3，就勇敢的相信吧，哈哈)

In [206]:

```
# TODO 实现线性回归
# 等式的两边都有XT是为了构建非奇异矩阵
'''
参数：X, Y 存储着一一对应的横坐标与纵坐标的两个一维数组
返回：m，b 浮点数
'''
import numpy as np
def linearRegression(X,Y):
    # 不能直接用逆矩阵计算，不是所有矩阵都有逆矩阵,成为非奇异矩阵。才可以计算
    # 构建公式中的矩阵
    X = [[x, 1] for x in X]
    Y = [[y] for y in Y]
    XT = transpose(X)
    A = matxMultiply(XT, X)
    b = matxMultiply(XT, Y)
    # 返回X的逆矩阵
    X_1 = np.linalg.inv(A)
#     h = matxMultiply(X_1, b)
    h1 = gj_Solve(A, b)
#     print(h)
    return h1[0][0], h1[1][0]

m2,b2 = linearRegression(X,Y)
assert isinstance(m2,float),"m is not a float"
assert isinstance(b2,float),"b is not a float"
print(m2,b2)
```

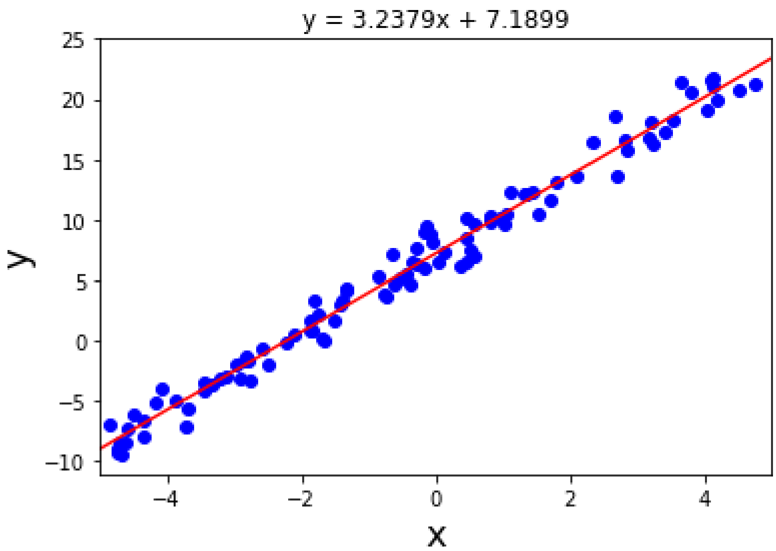
3.2379 7.1899

你求得的回归结果是什么？ 请使用运行以下代码将它画出来。

In [207]:

```
# 请不要修改下面的代码
x1,x2 = -5,5
y1,y2 = x1*m2+b2, x2*m2+b2

plt.xlim((-5,5))
plt.xlabel('x',fontsize=18)
plt.ylabel('y',fontsize=18)
plt.scatter(X,Y,c='b')
plt.plot((x1,x2),(y1,y2),'r')
plt.title('y = {m:.4f}x + {b:.4f}'.format(m=m2,b=b2))
plt.show()
```



你求得的回归结果对当前数据集的MSE是多少?

In [208]:

```
print(calculateMSE(X,Y,m2,b2))
```

1.3549197783872027