



普通高等教育“九五”国家级重点教材

SIGNALS & SYSTEMS

信号与系统

(第二版)

上册

郑君里 应启珩 杨为理



高等教育出版社

普通高等教育“九五”国家级重点教材

信号与系统

(第二版)

上 册

郑君里 应启珩 杨为理

高等教育出版社

内容提要

本书是1981年出版的《信号与系统》(高等教育出版社出版)的修订版。本版与第一版的结构层次大体相同，仍然是研究确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念和基本分析方法，从时间域到变换域、从连续到离散，从输入输出描述到状态空间描述，以通信和控制工程作为主要应用背景，注重实例分析。

与第一版相比较，全书内容作了较大幅度更新，以适应当代信息科学与技术发展的最新需要。上册共六章，包括绪论、连续时间系统的时域分析、傅里叶变换、拉普拉斯变换、滤波、调制与抽样、信号的矢量空间分析；下册也为六章，包括离散时间系统的时域分析、 z 变换、离散傅里叶变换、模拟与数字滤波器、反馈系统、状态变量分析。

本书是普通高等教育“九五”国家级重点教材，可作为高等院校工科或理科信号与系统类课程的教材，也可供科研与工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统上册/郑君里等著. —2 版. —北京：
高等教育出版社, 2000 (2001 重印)

普通高等教育“九五”国家级重点教材

ISBN 7-04-007981-X

I. 信… II. 郑… III. ①信号理论-高等学校 教
材②信号系统-高等学校-教材 IV. TN911. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 56379 号

信号与系统(第二版)上册

郑君里 应启瑜 杨为理

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009

电 话 010—64054588 传 真 010—64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16

版 次 1981 年 5 月第 1 版

印 张 26.75

2000 年 5 月第 2 版

字 数 490 000

印 次 2001 年 4 月第 3 次印刷

定 价 31.20 元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等
质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内容提要

本书是1981年出版的《信号与系统》(高等教育出版社出版)的修订版。本版与第一版的结构层次大体相同，仍然是研究确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念和基本分析方法，从时间域到变换域、从连续到离散、从输入输出描述到状态空间描述，以通信和控制工程作为主要应用背景，注重实例分析。

与第一版相比较，全书内容作了较大幅度更新，以适应当代信息科学与技术发展的最新需要。上册共六章，包括绪论、连续时间系统的时域分析、傅里叶变换、拉普拉斯变换、滤波、调制与抽样、信号的矢量空间分析；下册也为六章，包括离散时间系统的时域分析、 z 变换、离散傅里叶变换、模拟与数字滤波器、反馈系统、状态变量分析。

本书是普通高等教育“九五”国家级重点教材，可作为高等院校工科或理科信号与系统类型课程的教材，也可供科研与工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统上册/郑君里等著. —2 版. —北京：
高等教育出版社, 2000 (2001 重印)

普通高等教育“九五”国家级重点教材

ISBN 7-04-007981-X

I. 信… II. 郑… III. ①信号理论-高等学校-教材
②信号系统-高等学校-教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 56379 号

信号与系统(第二版)上册

郑君里 应启珩 杨为理

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009

电 话 010—64054588 传 真 010—64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16

版 次 1981 年 5 月第 1 版

印 张 26.75

2000 年 5 月第 2 版

字 数 490 000

印 次 2001 年 4 月第 3 次印刷

定 价 31.20 元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等
质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第二版前言

1978年撰写本书初稿至今已历经20年，注意到原书的大部分内容仍在有效使用，也由于工作繁忙，因而迟迟未作修订。

20年来，这一学科领域的理论与实践研究迅速发展，分析方法不断更新，技术应用范围日益扩展。然而，对国内、外许多院校的调查或相互交流表明，就本科生“信号与系统”课程而言，它的教学要求和基本内容却相对稳定。虽然在某些方面受到最新技术发展的冲击，但是尚未构成大幅度更新和重组课程体系的局面。与此相应，十多年来，本书第一版按需求统计而确定的重印册数逐年上升，实际用量供不应求。面对这一现实，我们结合教学实践，在广泛听取并研究教师与学生意见的基础上，逐步明确了编写本书第二版的追求目标，这就是在相对稳定中力求变革，在讲授传统内容的过程中充分体现时代气息，处理好经典理论的论述与最新技术引入的相互融合。以当代信息科学的观点理解、审视、组织和阐述传统内容。

本书(也即本课程)的教学目的、要求和体系层次与第一版大体相同，仍然是研究确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念和基本分析方法，从时间域到变换域，从连续到离散，从输入输出描述到状态空间描述，以通信和控制工程作为主要应用背景，注重实例分析。

在本课程中，连续时间信号与系统和离散时间信号与系统讲授顺序的争执已持续多年。实践表明，很难说某种顺序显示突出的先进性而代表改革方向，从国内、外大量教材情况来看，多种形式并存的局面将长期持续。本书第二版以实际应用为主要依据，兼顾离散与连续的选材，前面较多章、节按照先连续后离散的次序讲授，稍后几章则是连续与离散交叉并行研究。

当前，在国际流行的科技应用软件中，Matlab具有广泛影响。在信号处理技术领域中，这一软件的应用也占据重要地位。本课程的计算机练习应帮助学生尽早认识或熟悉Matlab的应用。与本书相配合，我们将这方面的内容编入了同时出版的另一本教材之中^①，建议将本课程与数字信号处理课程统一考虑，从这本教材中选取适当的题目，安排学生的计算机练习。

另一方面，由于计算机辅助设计的广泛应用，还需要认真考虑从传统的教

^① 应启珩主编《离散时间信号分析和处理》，清华大学出版社，2000年。

学内容中削弱或删除陈旧的部分。例如，SPICE 程序的普及促使我们不必要求学生掌握某些复杂电路(或复杂波形)求响应的解析方法，因而允许大力压缩拉氏变换的有关内容。

本课程的基本概念和方法并不十分复杂，教学效果成败的关键不在于学生认识和记忆了多少定义、定理的条文，而应注重正确引导学生运用数学工具分析典型的物理问题。所谓课程更新往往体现在应用领域的演变，而已经成熟的经典理论却仍然适用。第二版特别注重密切结合基本概念介绍通信、控制、信号处理方面的最新应用实例(在正文、例题、习题中都会出现)，这些实例讨论有助于激发学生的学习志趣和热情，推动学生灵活、深入地掌握基本概念。

第二版全书共 12 章，上、下册各 6 章。前 3 章包括绪论、连续系统的时域分析、傅里叶变换。各章的主题仍同第一版。第一章增加了信号波形的运算与系统模型的方框图。第二章对分配函数的性质和应用作了较详尽的补充。第三章着重讨论傅里叶变换的基本概念，而将一些较深入的问题移后到第五、六章。第四章是拉普拉斯变换及其应用，经重新组织，它涵盖了第一版四、五两章的主要内容，从而使这部分的篇幅有较大压缩。第五章傅里叶变换的应用是第三章的继续，结合滤波、调制和抽样三方面的概念增补了较多的应用讨论和实例分析。第六章是重新编写的，主题是信号的矢量空间分析。这里涉及的基本概念在许多后续课程中需要引用，而按照以往的习惯，很少见到哪种教材或哪门课程对此作系统的入门介绍。为改变这一状况，我们将正交、相关、帕塞瓦尔定理、柯西—施瓦茨不等式等概念和一些应用实例组织在一起，以统一的数学与物理方法讲授，使学生对信号理论的学习步入更深的层次，为学好后续课程打下基础。第七至九章的内容也与第一版大致相同，包括离散时间信号的时域分析、 z 变换、离散傅里叶变换及其快速算法。在第七章增补了反卷积(解卷积)的基本概念。第八章适当扩充了序列傅里叶变换性质的讨论，以便于和第九章的内容衔接。第九章增加了离散余弦变换和沃尔什变换的有关内容。第十章模拟与数字滤波器和第十一章线性反馈系统都是重新编写的。前者初步介绍模拟与数字滤波器的基本原理和设计方法；后者使本书在控制工程的应用背景方面适当加强，此外，将信号流图也移入此章。第十二章与第一版最后一章的内容一致，讨论状态空间分析，在此，注重拓宽应用实例的引入，给出了一些非电领域应用状态空间方法的例子。

全书篇幅较大，有利于授课教师灵活选材，也为学生自学开创了较好的条件。可以按照不同章节的选取与组合，构成深度和学时有区别的课程。从目前国内多数院校的需要来看，推荐以下两种组课方案供参考(下列数字为章号)：

1—2—3—4—5—7—8—¹²
9—10

第一种方案适用于在本课程之后继续学习数字信号处理而不设控制理论课程的

情况；第二种方案则适合于在本课程之后专门开设控制理论而不再学习数字信号处理的有关专业。即使按某些章目组织教学，对于每章内各节仍有较大的灵活选取余地，如第二章微分方程的经典分析、 δ 函数的深入讨论，第四章用拉氏变换解电路的各种练习以及第七章差分方程的时域求解等都可适当删减。在第二方案中，对于第十章建议只选讲数字滤波器的有关内容（包括逼近函数），删除模拟滤波器等部分。另一方面，有些章目虽未在上述方案中列入，也应介绍其中的要点或个别小节。在第一方案中，讲授状态变量分析之前需补充信号流图的概念，还可考虑简要介绍反馈的基本知识（都需要从第十一章选材）。此外，两种方案都可适当选择第六章的要点为学生初步建立信号矢量空间的概念。近年来，我校教学实践表明，以上两种方案都能在一学期内完成，讲课学时不超过 64。当然，授课教师可根据学生的能力以及培养计划的总体要求设计其他多种选材组课方案。一般讲，无论何种方案都不宜照本宣科授课，书中相当多的内容应当留给学生自学或组织讨论。我们相信，选用本书作为教材将有助于推动讲课、自学与课堂讨论的密切结合。第一版的实践表明，读者在学完信号与系统课程之后相当长的时间内仍然需要反复翻阅本书。

本书除用作高校教材之外，我们期望它对于科研和工程技术人员的在职自学与知识更新能产生一定的积极作用。

本书第二版由郑君里主编，第二章由应启珩执笔，第十章由应启珩、郑君里执笔，其余各章由郑君里执笔。杨为理与执笔者共同研讨并校阅了第三、五、七、八各章，张宇博士协助完成并校核了若干重要公式的推证。山秀明、刘序明、王文渊、叶大田、乐正友、郑方等分别校阅了各部分初稿或结合授课对修订工作提出建议。必须指出，多年来作者与各位同事和众多博士生的经常研讨，以及授课过程中与学生的密切交流，对本书写作有很多重要的启发和帮助。

全书承清华大学电子工程系陆大经教授审阅，提出许多指导性修改意见，保证了书稿质量的进一步提高，作者表示衷心感谢。

本书于 1997 年经国家教育委员会组织专家评审，确定为普通高等教育“九五”国家级重点教材立项选题。书稿经教育部“电路、信号系统和电磁场课程教学指导小组”审阅，同意作为国家级重点教材出版。

高等教育出版社各位编辑与作者的愉快合作为本书出版创造了十分有利的条件。从 1981 年至今，各兄弟院校的老师和同学们以多种方式与作者坦诚交换意见，并对本书修订工作给予很多关心与支持，在此一并深致谢意。

限于水平，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者指正。

作 者

1999 年 12 月

于清华大学电子工程系

第一版前言

近年来，作者为无线电电子学系开设“信号与系统”课程，同时编写了这方面的参考教材。现将该教材整理、扩充，编成本书。

本课程的任务在于研究信号与系统理论的基本概念和基本分析方法。初步认识如何建立信号与系统的数学模型，经适当的数学分析求解，对所得结果给以物理解释、赋予物理意义。由于本学科内容的迅速更新与发展，它所涉及的概念和方法将十分广泛，而且还在不断扩充。本书试图在规定的要求与范围之内，使选材适当充实、丰富。在用作教材时，可以灵活选取所需内容。

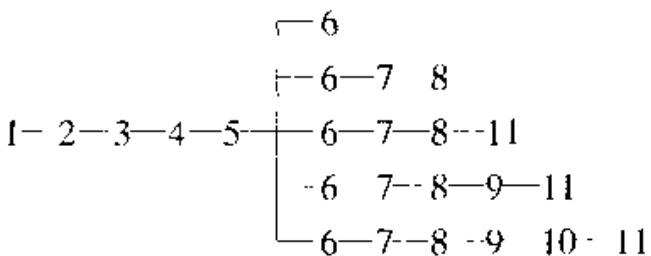
本书的范围限于确定性信号(非随机信号)经线性、时不变系统传输与处理的基本理论。从时间域到变换域，从连续到离散，从输入—输出描述到状态描述，力求以统一的观点阐明基本概念和方法。

为学习本课程，读者应有一定的数学基础和电路分析基础。书中涉及的数学内容主要包括微分方程、差分方程、级数、复变函数、线性代数等。除对差分方程作适当讲解之外，其他方面将直接引用有关结论。在运用这些数学工具时，注重解决工程问题，加强物理概念的解释。本课程与先修课“电路分析基础”联系密切，虽有某些重复，但分析问题的着眼点有所不同。在那里，从电路分析的角度研究问题，而本书则以系统的观点进行分析。

通过本课程的学习希望激发起学生对信号与系统学科方面的学习志趣和热情，使他们有信心也有能力逐步适应这一领域日新月异发展的需要。首先要适应几门重点后续课程的需要，这些课程是：电子线路(也可并行学习)、网络理论、通信系统、控制理论、数字信号处理，等等。

全书共包括十一章。一至六章讨论连续时间信号与系统，七至十章讨论离散时间信号与系统(第七章时域分析、第八章 z 变换与 z 域分析、第九章离散傅里叶变换及其快速算法、第十章沃尔什变换)，第十一章集中研究系统的状态变量分析(包括连续与离散，时域与变换域)。

本书篇幅稍大，涉及的问题比较广泛，直接用全书材料组成一门一学期的课程是不适当的。可以根据先修与后续课程的不同情况按以下几种方式(序号表示章号)选择所需部分，组成深度和学时有区别的课程：



在每章内还安排有一些加宽加深的内容，标有“*”号，舍去这些小节，不影响后续部分的学习。除内容选择方面有机动性之外，在讲授顺序上也可以作灵活调整。例如，绪论中的 1.5、1.6 节可移至第三章开始时讲授；又如，讨论傅氏变换与拉氏变换原理和应用的第三至六章，可改按 3—6—4—5 或 4—5—3—6 的顺序使用（这时要对第 6.1、6.3、6.8 或 4.2、4.13 等节作调整）。

配合基本理论与分析方法的学习，书中备有一定数量的例题和习题，可酌情选用，部分难度稍大或比较繁复的习题标有“*”号，不应作为对学生的一般要求。书末附有习题答案，仅供参考，在应用计算机方面，考虑到目前的实际情况，没有给出计算程序，但在某些基本原理的讲授中，已经注意到为这方面作一些准备（如卷积数值计算、拉普拉斯逆变换、快速傅里叶变换等）。

本书由郑君里同志主编，第三、八章由杨为理同志执笔，第十一章由应启珩同志执笔，其余各章由郑君里同志执笔，乐正友同志整理习题答案，张尊桥同志绘制插图。

常迥教授指导本书编写工作。冯重熙副教授对本书编写大纲的拟定提出宝贵意见。系负责同志以及通信、线路等教研组的有关同志对本书编写工作给予许多支持和帮助。

书稿承高等学校理科及工科基础课程教材编审委员会电路理论及信号分析小组委托南京工学院管致中教授、合肥工业大学芮坤生教授、北京工业学院李瀚荪副教授负责审阅，提出许多宝贵意见。作者在此表示衷心的感谢。

限于水平，书中难免有错误与不妥之处，恳请读者批评指正。

作 者
一九八一年元月
于清华大学无线电电子学系

责任编辑 刘激扬
封面设计 于文燕
责任绘图 尹 莉
版式设计 马静如
责任校对 马桂兰
责任印制 韩 刚

目 录

第一章 绪论	1
1.1 信号与系统	1
1.2 信号的描述、分类和典型示例	4
1.3 信号的运算	9
1.4 阶跃信号与冲激信号	13
1.5 信号的分解	23
1.6 系统模型及其分类	28
1.7 线性时不变系统	33
1.8 系统分析方法	35
习题	37
第二章 连续时间系统的时域分析	42
2.1 引言	42
2.2 微分方程式的建立与求解	42
2.3 起始点的跳变——从 0_- 到 0_+ 状态的转换	48
2.4 零输入响应和零状态响应	52
2.5 冲激响应与阶跃响应	58
2.6 卷积	61
2.7 卷积的性质	64
2.8 用算子符号表示微分方程	69
2.9 以“分配函数”的概念认识冲激函数 $\delta(t)$	72
习题	81
第三章 傅里叶变换	88
3.1 引言	88
3.2 周期信号的傅里叶级数分析	89
3.3 典型周期信号的傅里叶级数	101
3.4 傅里叶变换	109
3.5 典型非周期信号的傅里叶变换	113
3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换	119
3.7 傅里叶变换的基本性质	122
3.8 卷积特性(卷积定理)	138
3.9 周期信号的傅里叶变换	143

2 目录

3.10 抽样信号的傅里叶变换	150
3.11 抽样定理	157
习 题	160
第四章 拉普拉斯变换、连续时间系统的 s 域分析	173
4.1 引言	173
4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域	174
4.3 拉氏变换的基本性质	181
4.4 拉普拉斯逆变换	190
4.5 用拉普拉斯变换法分析电路、s 域元件模型	196
4.6 系统函数(网络函数) $H(s)$	203
4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性	208
4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性	217
4.9 二阶谐振系统的 s 平面分析	224
4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布	232
4.11 线性系统的稳定性	237
4.12 双边拉氏变换	242
4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系	246
习 题	250
第五章 傅里叶变换应用于通信系统——滤波、调制与抽样	265
5.1 引言	265
5.2 利用系统函数 $H(j\omega)$ 求响应	266
5.3 无失真传输	270
5.4 理想低通滤波器	274
5.5 系统的物理可实现性、佩利—维纳准则	280
5.6 利用希尔伯特变换研究系统函数的约束特性	283
5.7 调制与解调	285
5.8 带通滤波系统的运用	289
5.9 从抽样信号恢复连续时间信号	294
5.10 脉冲编码调制(PCM)	300
5.11 频分复用与时分复用	302
5.12 从综合业务数字网(ISDN)到信息高速公路	307
习 题	309
第六章 信号的矢量空间分析	316
6.1 引言	316
6.2 信号矢量空间的基本概念	317
6.3 信号的正交函数分解	324
6.4 完备正交函数集、帕塞瓦尔定理	330
6.5 沃尔什函数	333

6.6 相关	341
6.7 能量谱和功率谱	349
6.8 信号通过线性系统的自相关函数、能量谱和功率谱分析	353
6.9 匹配滤波器	358
6.10 测不准(不定度)原理及其证明	362
6.11 码分复用、码分多址(CDMA)通信	365
习 题	368
附录一 卷积表	373
附录二 常用周期信号的傅里叶级数表	374
附录三 常用信号的傅里叶变换表	378
习题答案	388
索引	404

第一章 絮 论

1.1 信号与系统

人们相互问讯、发布新闻、广播图像或传递数据，其目的都是要把某些消息借一定形式的信号传出去。信号是消息的表现形式，消息则是信号的具体内容。

很久以来，人们曾寻求各种方法，以实现信号的传输。我国古代利用烽火传送边疆警报。此后希腊人也以火炬的位置表示字母符号。这种光信号的传输构成最原始的光通信系统。利用击鼓鸣金可以报送时刻或传达命令，这是声信号的传输。以后又出现了信鸽、旗语、驿站等传送消息的方法。然而，这些方法无论在距离、速度或可靠性与有效性方面仍然没有得到明显的改善。19世纪初，人们开始研究如何利用电信号传送消息。1837年莫尔斯(F.B.Morse)发明了电报，他用点、划、空适当组合的代码表示字母和数字，这种代码称为莫尔斯电码。1876年贝尔(A.G.Bell)发明了电话，直接将声信号(语音)转变为电信号沿导线传送。19世纪末，人们又致力于研究用电磁波传送无线电信号。为实现这一理想，赫兹(H.Hertz)、波波夫(A.C.Попов)、马可尼(G.Marconi)等人分别作出贡献。开始时，传输距离仅数百米，1901年马可尼成功地实现了横渡大西洋的无线电通信。从此，传输电信号的通信方式得到广泛应用和迅速发展。如今，无线电信号的传输不仅能够飞越高山海洋，而且可以遍及全球并通向宇宙。例如，以卫星通信技术为基础构成的“全球定位系统”(Global Positioning System，缩写为GPS)可以利用无线电信号的传输，测定地球表面和周围空间任意目标的位置，其精度可达数十米之内。而个人通信技术的发展前景指出：无论任何人在任何时候和任何地方都能够和世界上其他人进行通信。人们利用手持通信机，以个人相应的电话号码呼叫或被呼叫，进行语音、图像、数据等各种信号的传输。

必须指出，现代通信系统的通信方式往往不是任意两点之间信号的直接传输，而是要利用某些集中转接设施组成复杂的信息网络，经所谓“交换”的功能以实现任意两点之间的信号传输。

信息网络技术的发展前景是实现所谓“全球通信网”，它意味着世界上所

有通信网将形成智能化的统一整体，即全球一网。这将克服信号传输距离、时间、语言等方面的各种障碍，与个人通信技术相结合构成无所不在的全球个人通信网。目前，迅速发展的综合业务数字网（Integrated Services Digital Network，缩写为 ISDN）、国际互联网络（Internet 或称因特网）以及其他各种信息网络技术已为上述目标的实现奠定了基础。

随着信号传输、信号交换理论与应用的发展，同时出现了所谓“信号处理”的新课题。什么是信号处理？这可以理解为对信号进行某种加工或变换。加工或变换的目的是：削弱信号中的多余内容；滤除混杂的噪声和干扰；或者是将信号转换成容易分析与识别的形式，便于估计和选择它的特征参量。20世纪80年代以来，由于高速数字计算机的运用，大大促进了信号处理研究的发展。而信号处理的应用已遍及许多科学技术领域。例如，从月球探测器发来的电视信号可能被淹没在噪声之中，但是，利用信号处理技术就可予以增强，在地球上得到清晰的图像。石油勘探、地震测量以及核试验监测中所得数据的分析都依赖于信号处理技术的应用。此外，在心电图、脑电图分析、语音识别与合成、图像数据压缩、工业生产自动控制（如化学过程控制）以及经济形势预测（如股票市场分析）等各种科学技术领域中都广泛采用信号处理技术。

信号传输、信号交换和信号处理相互密切联系（也可认为交换是属于传输的组成部分），又各自形成了相对独立的学科体系。它们共同的理论基础之一是研究信号的基本性能（进行信号分析），包括信号的描述、分解、变换、检测、特征提取以及为适应指定要求而进行信号设计。

“系统”是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。

在信息科学与技术领域中，常常利用通信系统、控制系统和计算机系统进行信号的传输、交换与处理。实际上，往往需要将多种系统共同组成一个综合性的复杂整体，例如宇宙航行系统。

通常，组成通信、控制和计算机系统的主要部件中包括大量的、多种类型的电路。电路也称电网络或网络。

信号、电路（网络）与系统之间有着十分密切的联系。离开了信号，电路与系统将失去意义。信号作为待传输消息的表现形式，可以看作运载消息的工具，而电路或系统则是为传送信号或对信号进行加工处理而构成的某种组合。研究系统所关心的问题是，对于给定信号形式与传输、处理的要求，系统能否与其相匹配，它应具有怎样的功能和特性；而研究电路问题的着眼点则在于，为实现系统功能与特性应具有怎样的结构和参数。有时认为系统是比电路更复杂、规模更大的组合体，然而，更确切地说，系统与电路二词的主要差异应体现在观察事物的着眼点或处理问题的角度方面。系统问题注意全局，而电路问

题则关心局部。例如，仅由一个电阻和一个电容组成的简单电路，在电路分析中，注意研究其各支路、回路的电流或电压；而从系统的观点来看，可以研究它如何构成具有微分或积分功能的运算器。

近年来，由于大规模集成化技术的发展以及各种复杂系统部件的直接采用，使系统、网络、电路以及器件这些名词的划分发生了困难，它们当中的许多问题互相渗透，需要统一分析、研究和处理。通常勿需严格区分各名词的差异。

目前，由于信息网络(包括通信网和计算机网)的广泛应用，在信息科学与技术领域中“网络”一词也泛指通信网或计算机网。

在本书中，系统、网络与电路等名词通用。一般情况下，网络指电路，仅在个别小节内涉及信息网络(通信网)。

在电路中传送的电信号一般指随时间变化的电压或电流，也可以是电容的电荷，线圈的磁通以及空间的电磁波等。电信号与非电信号容易相互转换。在许多实际系统中常利用各种传感器将其他物理量(如声波动、光强度、机械运动的位移或速度等)转变为电信号，以利传输与处理。根据需要可将转换后的电信号还原为原有的物理量。

广义讲，系统的概念不仅限于电路、通信和控制方面，它涉及的范围十分广泛，应当包括各种物理系统和非物理系统、人工系统以及自然系统。

通信系统、电力系统、机械系统可称为物理系统；政治结构、经济组织、生产管理等则属于非物理系统。计算机网、交通运输网、水利灌溉网以及交响乐队等是人工系统；而自然系统的例子小至原子核，大如太阳系，可以是无生命的，也可是有生命的(如动物的神经网络)。

随着科学技术的发展，人工系统之规模日益庞大，内部结构也越来越复杂。人们致力于研究将系统理论用于系统工程设计，以期使较复杂的系统最佳地满足预定的要求。以此为背景，出现了一门边缘技术科学，这就是系统工程学。

在系统或网络理论研究中，包括系统分析与系统综合(网络分析与网络综合)两个方面。在给定系统的条件下，研究系统对于输入激励信号所产生的输出响应，这是系统分析问题。系统综合则是按某种需要先提出对于给定激励的响应，而后根据此要求设计(综合)系统。分析与综合二者关系密切，但又有各自的体系和研究方法，一般讲，学习分析是学习综合的基础。

本书的讨论范围着重系统分析，不涉及系统工程学方面的问题。我们以通信系统和控制系统的根本问题为主要背景，研究信号经系统传输或处理的一般规律，着重基本概念和基本分析方法。

1.2 信号的描述、分类和典型示例

描述信号的基本方法是写出它的数学表达式，此表达式是时间的函数，绘出函数的图像称为信号的波形。为便于讨论，在本书中常常把信号与函数两名词通用。除了表达式与波形这两种直观的描述方法之外，随着问题的深入，需要用频谱分析、各种正交变换以及其他方式来描述和研究信号。

信号可从不同角度进行分类。

确定性信号与随机信号 若信号被表示为一确定的时间函数，对于指定的某一时刻，可确定一相应的函数值，这种信号称为确定性信号或规则信号。例如我们熟知的正弦信号。但是，实际传输的信号往往具有未可预知的不确定性，这种信号称为随机信号或不确定的信号。如果通信系统中传输的信号都是确定的时间函数，接收者就不可能由它得知任何新的消息，这样也就失去了通信的意义。此外，在信号传输过程中，不可避免地要受到各种干扰和噪声的影响，这些干扰和噪声都具有随机特性。对于随机信号，不能给出确切的时间函数，只可能知道它的统计特性，如在某时刻取某一数值的概率。确定性信号与随机信号有着密切的联系，在一定条件下，随机信号也会表现出某种确定性。例如乐音表现为某种周期性变化的波形，电码可描述为具有某种规律的脉冲波形等等。作为理论上的抽象，应该首先研究确定性信号，在此基础之上才能根据随机信号的统计规律进一步研究随机信号的特性。

周期信号与非周期信号 在规则信号之中又可分为周期信号与非周期信号。所谓周期信号就是依一定时间间隔周而复始，而且是无始无终的信号，它们的表示式可以写作

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{(任意整数)}$$

满足此关系式的最小 T 值称为信号的周期。只要给出此信号在任一周期内的变化过程，便可确知它在任一时刻的数值。非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。若令周期信号的周期 T 趋于无限大，则成为非周期信号。

具有相对较长周期的确定性信号可以构成所谓“伪随机信号”，从某一时段来看，这种信号似无规律，而经一定周期之后，波形严格重复。利用这一特点产生的伪随机码在通信系统中得到广泛应用。

近年来，随着混沌(chaos)理论研究的深入，人们对混沌信号产生了巨大兴趣。这里，不容易给出混沌信号的确切定义，通俗讲，可以认为它是一种貌似随机而遵循严格规律产生的信号，描述方法比较复杂，这种信号的特性体现了无序中蕴含着有序的哲学思想。

本书着重讨论确定性信号分析(包括各种周期性和非周期性信号)，仅在第

六章初步介绍一些随机信号的知识，第五章举例说明伪随机码的应用，书中不涉及混沌信号

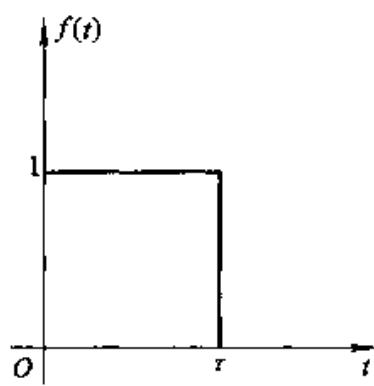


图 1-1 矩脉冲

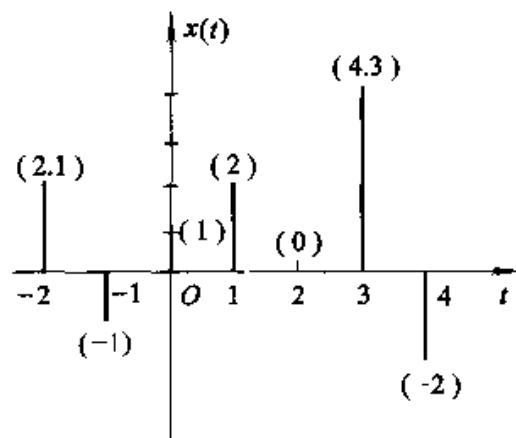


图 1-2 离散信号(抽样信号)

连续时间信号与离散时间信号 按照时间函数取值的连续性与离散性可将信号划分为连续时间信号与离散时间信号(简称连续信号与离散信号)。如果在所讨论的时间间隔内，除若干不连续点之外，对于任意时间值都可给出确定的函数值，此信号就称为连续信号。例如正弦波或图 1-1 所示矩形脉冲都是连续信号。连续信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的(只取某些规定值)。时间和幅值都为连续的信号又称为模拟信号。在实际应用中，模拟信号与连续信号两名词往往不予区分。与连续信号相对应的是离散信号。离散信号在时间上是离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其他时间没有定义，如图 1-2。此图对应的函数 $x(t)$ 只在 $t = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots$ 等离散时刻给出函数值 $2.1, -1, 1, 2, 0, 4.3, -2 \dots$ 给出函数值的离散时刻的间隔可以是均匀的(如图 1-2)，也可以是不均匀的，一般情况都采用均匀间隔。这时，自变量 t 简化为用整数序号 n 表示，函数符号写作 $x(n)$ ，仅当 n 为整数时 $x(n)$ 才有定义。离散时间信号也可认为是一组序列值的集合，以 $\{x(n)\}$ 表示。图 1-2 所示信号写作序列

$$x(n) = \begin{cases} 2.1 & (n = -2) \\ -1 & (n = -1) \\ 1 & (n = 0) \\ 2 & (n = 1) \\ 0 & (n = 2) \\ 4.3 & (n = 3) \\ -2 & (n = 4) \end{cases}$$

为简化表达方式，此信号也可写作

$$x(n) = \{2.1 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 4.3 \quad -2\} \quad (1-1)$$

数字 1 下面的箭头表示与 $n=0$ 相对应，左右两边依次给出 n 取负和正整数相应的 $x(n)$ 值。

如果离散时间信号的幅值是连续的，则又可取名为抽样信号，例如图

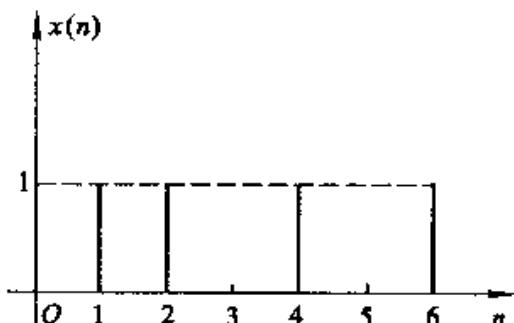


图 1-3 离散信号(数字信号) 自然界的实际信号可能是连续的，也可能是离散的时间信号。例如，声道产生的语音、乐器发出的乐音、连续测量的温度曲线都是连续时间信号，而银行发布利率、按固定时间间隔给出的股票市场指数、按年度或月份统计的人口数量或国民生产总值都是离散时间信号。数字计算机处理的是离散时间信号，当处理对象为连续信号时需要经抽样(采样)将它转换为离散时间信号。

本书前六章着重研究连续时间信号，在第一、三、五、六章结合连续时间信号适当引入一些离散时间信号的分析，第七至九章集中研究离散时间信号，以后几章将并行讨论这两类信号的分析和应用。

一维信号与多维信号 从数学表达式来看，信号可以表示为一个或多个变量的函数。语音信号可表示为声压随时间变化的函数，这是一维信号。而一张黑白图像每个点(像素)具有不同的光强度，任一点又是二维平面坐标中两个变量的函数，这是二维信号。实际上，还可能出现更多维数变量的信号。例如电磁波在三维空间传播，同时考虑时间变量而构成四维信号。在以后的讨论中，一般情况下只研究一维信号，且自变量为时间。个别情况下，自变量可能不是时间，例如，在气象观测中，温度、气压或风速将随高度而变化，此时自变量为高度。

除以上划分方式之外，还可将信号分为能量受限信号与功率受限信号(见第 6.6 节)，以及调制信号、载波信号和已调信号(见第 5.7 节)等等。在本书中将根据各章的需要陆续介绍。

下面给出一些典型的连续时间信号表达式和波形，今后经常遇到这些信号。

(一) 指数信号

指数信号的表示式为

$$f(t) = Ke^{at} \quad (1-2)$$

式中 a 是实数。若 $a > 0$ ，信号将随时间而增

1-2。另一种情况是离散信号的幅值也被限定为某些离散值，即时间与幅度取值都具有离散性，这种信号又称为数字信号，例如在图 1-3 中，各离散时刻的函数取值只能是“0”，“1”二者之一。此外，还可以有幅度为多个离散值的多电平数字信号。

自然界的实际信号可能是连续的，也

可能是离散的时间信号。例如，声道产生

的语音、乐器发出的乐音、连续测量的温

度曲线都是连续时间信号，而银行发

布利率、按固定时间间隔给出的股票市

场指数、按年度或月份统计的人口数

量或国民生产总值都是离散时间信号。

数字计算机处理的是离散时间信号，当

处理对象为连续信号时需要经抽样(采样)将它转换为离散时间信号。

本书前六章着重研究连续时间信号，在第一、三、五、六章结合连续时间信

号适当引入一些离散时间信号的分析，第七至九章集中研究离散时间信

号，以后几章将并行讨论这两类信

号的分析和应用。

一维信号与多维信号 从数学表达式来看，信号可以表示为一个或多个变

量的函数。语音信号可表示为声压随时间变化的函数，这是一维信号。而一

张黑白图像每个点(像素)具有不同的光强

度，任一点又是二维平面坐标中两个变

量的函数，这是二维信号。实际上，还

可能出现更多维数变量的信号。例如电

磁波在三维空间传播，同时考虑时间变

量而构成四维信号。在以后的讨

论中，一般情况下只研究一维信号，且自

变量为时间。个别情况下，自变量可能不

是时间，例如，在气象观测中，温度、气

压或风速将随高度而变化，此时自变量为高

度。

除以上划分方式之外，还可将信号分为能

量受限信号与功率受限信号(见第 6.6 节)

，以及调制信号、载波信号和已调信号(见第 5.7 节)等等。在本书中将

根据各章的需要陆续介绍。

下面给出一些典型的连续时间信号表

达式和波形，今后经常遇到这些信号。

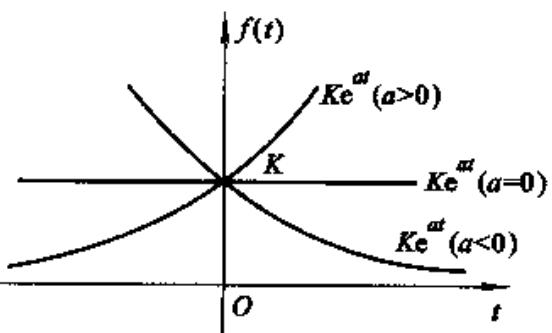
(一) 指数信号

指数信号的表示式为

$$f(t) = Ke^{at} \quad (1-2)$$

式中 a 是实数。若 $a > 0$ ，信号将随时间而增

1-4 指数信号



长,若 $a < 0$,信号则随时间衰减,在 $a = 0$ 的特殊情况下,信号不随时间而变化,成为直流信号。常数 K 表示指数信号在 $t = 0$ 点的初始值。指数信号的波形如图 1-4。

指数 a 的绝对值大小反映了信号增长或衰减的速率, $|a|$ 越大, 增长或衰减的速率越快。通常, 把 $|a|$ 的倒数称为指数信号的时间常数, 记作 τ , 即 $\tau = \frac{1}{|a|}$, τ 越大, 指数信号增长或衰减的速率越慢。

实际上, 较多遇到的是衰减指数信号, 例如图 1-5 的波形, 其表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-\frac{t}{\tau}} & (t \geq 0) \end{cases}$$

在 $t = 0$ 点, $f(0) = 1$, 在 $t = \tau$ 处,

$f(\tau) = \frac{1}{e} = 0.368$ 。也即, 经时间 τ , 信号衰减到原初始值的 36.8%。

指数信号的一个重要特性是它对时间的微分和积分仍然是指数形式。

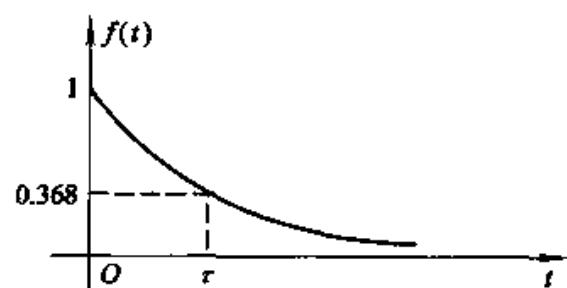


图 1-5 单边指数衰减信号

(二) 正弦信号

正弦信号和余弦信号二者仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$, 经常统称为正弦信号, 一般写作

$$f(t) = K \sin(\omega t + \theta) \quad (1-3)$$

式中 K 为振幅, ω 是角频率, θ 称为初相位。其波形如图 1-6 所示。

正弦信号是周期信号, 其周期 T 与角频率 ω 和频率 f 满足下列关系式

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

在信号与系统分析中, 有时要遇到衰减的正弦信号, 波形如图 1-7, 此正弦振荡的幅度按指数规律衰减, 其表示式为

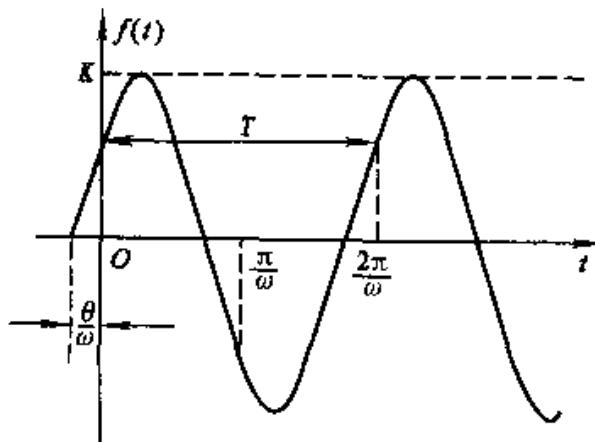


图 1-6 正弦信号

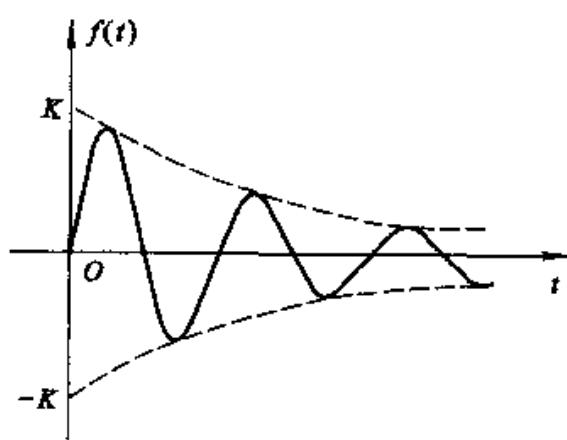


图 1-7 指数衰减的正弦信号

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ Ke^{-\alpha t} \sin(\omega t) & (t \geq 0) \end{cases} \quad (1-4)$$

正弦信号和余弦信号常借助复指数信号来表示。由欧拉公式可知：

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

所以有：

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (1-5)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (1-6)$$

这是今后经常要用到的两对关系式。

与指数信号的性质类似，正弦信号对时间的微分与积分仍为同频率的正弦信号。

(三) 复指数信号

如果指数信号的指数因子为一复数，则称之为复指数信号，其表示式为

$$f(t) = Ke^{st} \quad (1-7)$$

其中

$$s = \sigma + j\omega$$

σ 为复数 s 的实部， ω 是其虚部。借助欧拉公式将式(1-7)展开，可得

$$Ke^{st} = Ke^{(\sigma+j\omega)t} = Ke^{\sigma t} \cos(\omega t) + jKe^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (1-8)$$

此结果表明，一个复指数信号可分解为实、虚两部分。其中，实部包含余弦信号，虚部则为正弦信号。指数因子实部 σ 表征了正弦与余弦函数振幅随时间变化的情况。若 $\sigma > 0$ ，正弦、余弦信号是增幅振荡，若 $\sigma < 0$ ，正弦及余弦信号是衰减振荡。指数因子的虚部 ω 则表示正弦与余弦信号的角频率。两个特殊情况是：当 $\sigma = 0$ ，即 s 为虚数，则正弦、余弦信号是等幅振荡；而当 $\omega = 0$ ，即 s 为实数，则复指数信号成为一般的指数信号；最后，若 $\sigma = 0$ 且 $\omega = 0$ ，即 s 等于零，则复指数信号的实部和虚部都与时间无关，成为直流信号。

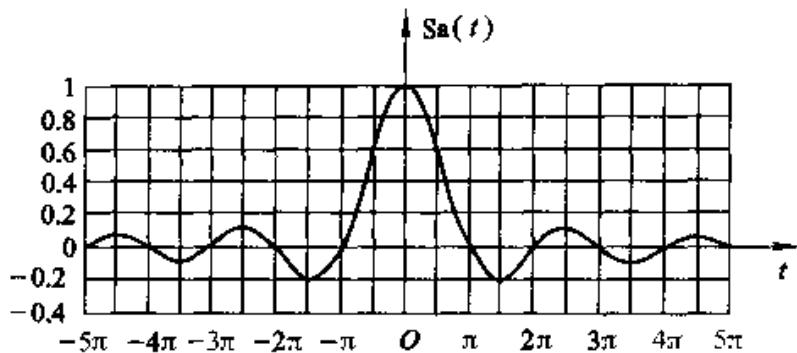
虽然实际上不能产生复指数信号，但是它概括了多种情况，可以利用复指数信号来描述各种基本信号，如直流信号、指数信号、正弦或余弦信号以及增长或衰减的正弦与余弦信号。利用复指数信号可使许多运算和分析得以简化。在信号分析理论中，复指数信号是一种非常重要的基本信号。

(四) Sa(t)信号(抽样信号)

Sa(t)函数即Sa(t)信号是指 $\sin t$ 与 t 之比构成的函数，它的定义如下

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1-9)$$

抽样函数的波形示于图 1-8。我们注意到，它是一个偶函数，在 t 的正、负两方向振幅都逐渐衰减，当 $t = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$ 时，函数值等于零。

图 1-8 $\text{Sa}(t)$ 函数

$\text{Sa}(t)$ 函数还具有以下性质：

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (1-10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi \quad (1-11)$$

与 $\text{Sa}(t)$ 函数类似的是 $\text{sinc}(t)$ 函数，它的表示式为

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (1-12)$$

有些书中将两种符号通用，即 $\text{Sa}(t)$ 也可用 $\text{sinc}(t)$ 表示。

(五) 钟形信号(高斯函数)

钟形信号(或称高斯函数)的定义是

$$f(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (1-13)$$

波形如图 1-9。令 $t = \frac{\tau}{2}$ 代入函数式求得

$$f\left(\frac{\tau}{2}\right) = E e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.78E$$

这表明，函数式中的参数 τ 是当 $f(t)$ 由最大值 E 下降为 $0.78E$ 时，所占据的时间宽度。

钟形信号在随机信号分析中占有重要地位，在本书中也将涉及。

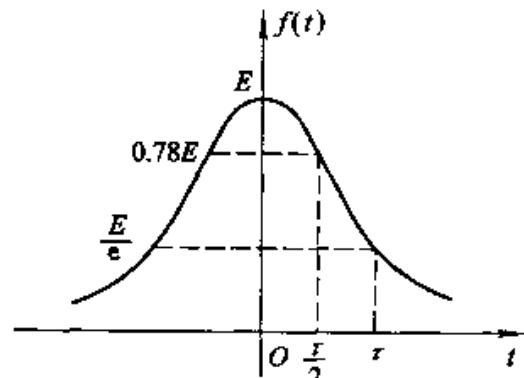


图 1-9 钟形信号

1.3 信号的运算

在信号的传输与处理过程中往往需要进行信号的运算，它包括信号的移位(时移或延时)、反褶、尺度倍乘(压缩与扩展)、微分、积分以及两信号的相加或相乘。某些物理器件可直接实现这些运算功能。我们需要熟悉在运算过程中表达式对应的波形变化，并初步了解这些运算的物理背景。

(一) 移位、反褶与尺度

若 $f(t)$ 表达式的自变量 t 更换为 $(t + t_0)$ (t_0 为正或负实数)，则 $f(t + t_0)$ 相当于 $f(t)$ 波形在 t 轴上的整体移动，当 $t_0 > 0$ 时 ($t_0 = t_1$) 波形左移，当 $t_0 < 0$ ($t_0 = -t_1$) 时 波形右移，如图 1-10 所示。

在雷达、声纳以及地震信号检测等问题中容易找到信号移位现象的实例。如果发射信号经同种介质传送到不同距离的接收机时，各接收信号相当于发射信号的移位，并具有不同的 t_0 值(同时有衰减)。在通信系统中，长距离传输电话信号时，可能听到回波，这是幅度衰减的话音延时信号。

信号反褶表示将 $f(t)$ 的自变量 t 更换为 $-t$ ，此时 $f(-t)$ 的波形相当于将 $f(t)$ 以 $t=0$ 为轴反褶过来，如图 1-11 所示。此运算也称为时间轴反转。

如果将信号 $f(t)$ 的自变量 t 乘以正实系

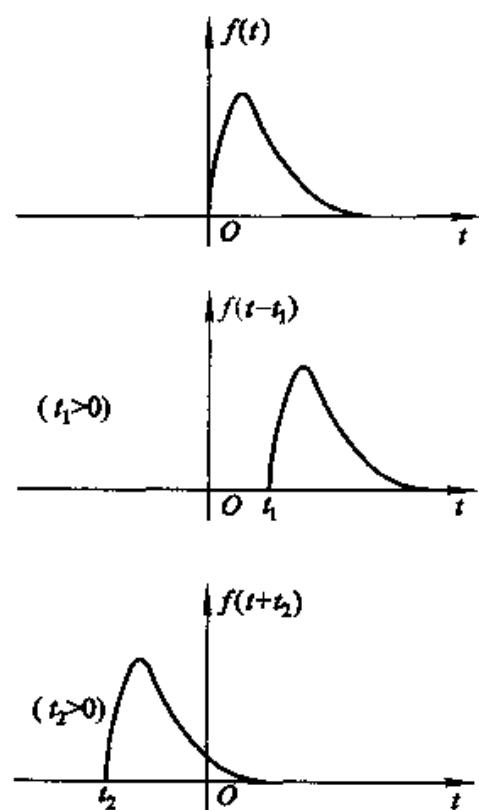


图 1-10 信号的移位

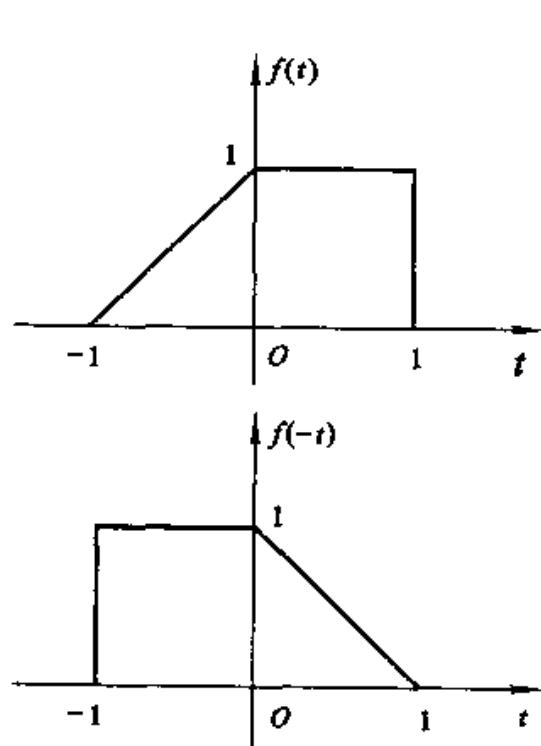


图 1-11 信号的反褶

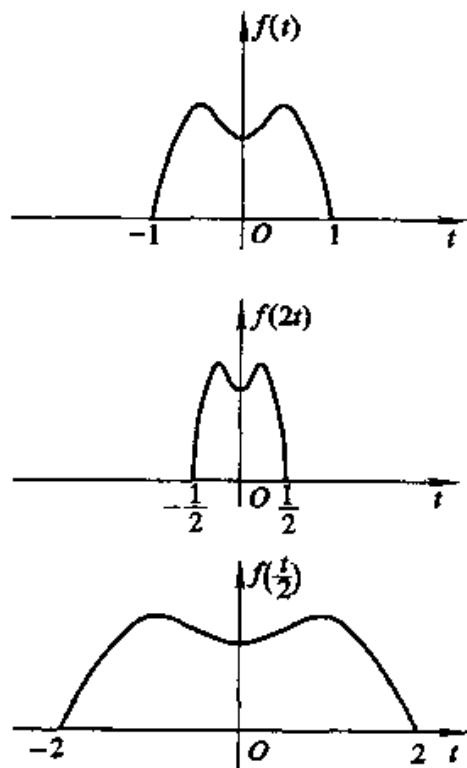


图 1-12 信号的尺度变换

数 a , 则信号波形 $f(at)$ 将是 $f(t)$ 波形的压缩 ($a > 1$) 或扩展 ($a < 1$)。这种运算称为时间轴的尺度倍乘或尺度变换, 也可简称尺度, 波形示例如图 1-12。

若 $f(t)$ 是已录制声音的磁带, 则 $f(-t)$ 表示将此磁带倒转播放产生的信号, 而 $f(2t)$ 是此磁带以二倍速度加快播放的结果, $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 则表示原磁带放音速度降至一半产生的信号。

综合以上三种情况, 若 $f(t)$ 的自变量 t 更换为 $(at + t_0)$ (其中 a, t_0 是给定的实数), 此时, $f(at + t_0)$ 相对于 $f(t)$ 可以是扩展 ($|a| < 1$) 或压缩 ($|a| > 1$), 也可能出现时间上的反褶 ($a < 0$) 或移位 ($t_0 \neq 0$), 而波形整体仍保持与 $f(t)$ 相似的形状, 下面给出例题。

例 1-1 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 1-13(a) 所示, 试画出 $f(-3t - 2)$ 的波形。

解 (1) 首先考虑移位的作用, 求得 $f(t - 2)$ 波形如图 1-13(b) 所示。

(2) 将 $f(t - 2)$ 作尺度倍乘, 求得 $f(3t - 2)$ 如图 1-13(c) 所示波形。

(3) 将 $f(3t - 2)$ 反褶, 给出 $f(-3t - 2)$ 波形如图 1-13(d)。

如果改变上述运算的顺序, 例如先求 $f(3t)$ 或先求 $f(-t)$ 最终也会得到相同的结果(见习题 1-4)。

(二) 微分和积分

信号 $f(t)$ 的微分运算是指 $f(t)$ 对 t 取导数, 即

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) \quad (1-14)$$

信号 $f(t)$ 的积分运算是指 $f(t)$ 在 $(-\infty, t)$ 区间内的定积分, 其表达式为

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (1-15)$$

图 1-14 和图 1-15 分别示出微分与积分运算的例子。由图 1-14 可见, 信号经微分后突出显示了它的变化部分。若 $f(t)$ 是一幅黑白图像信号, 那么, 经微分运算后将使其图形的边缘轮廓突出。在图 1-15 中

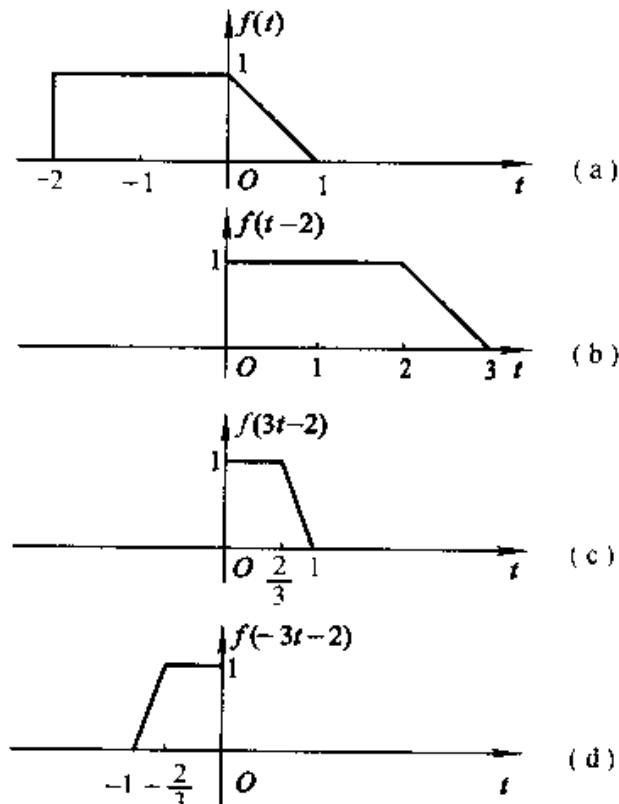


图 1-13 例 1-1 的波形

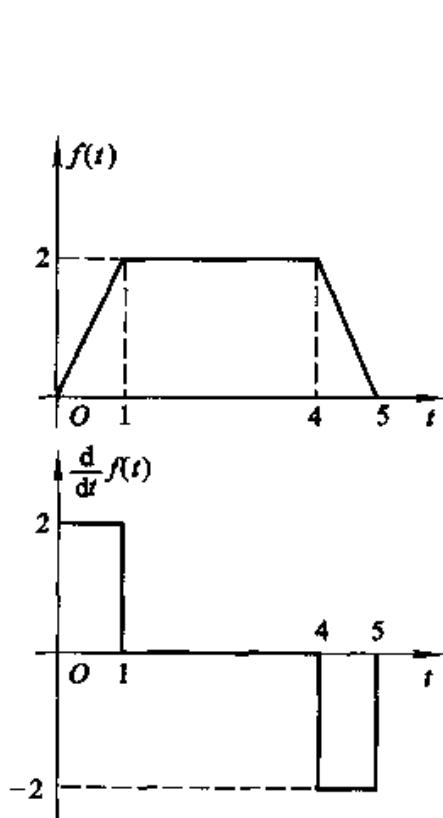


图 1-14 微分运算

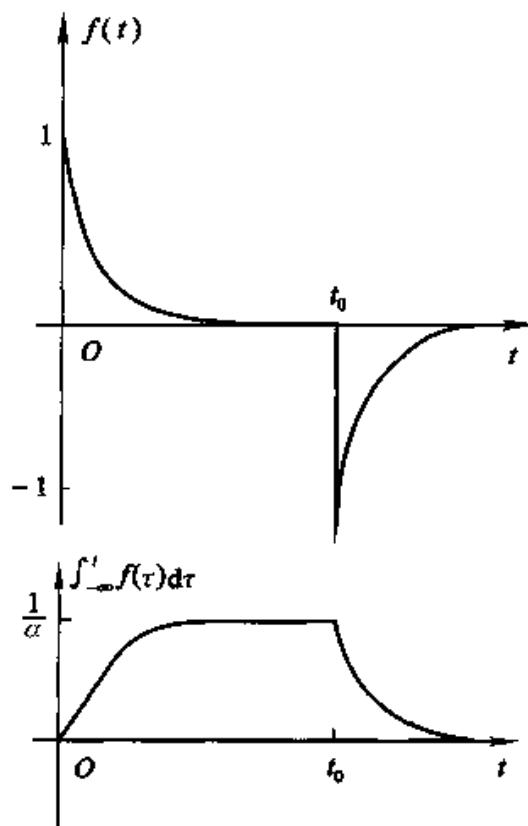


图 1-15 积分运算

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & (\text{当 } 0 < t < t_0) \\ e^{-at} - e^{-a(t-t_0)}, & (\text{当 } t_0 \leq t < \infty) \end{cases} \quad (1-16)$$

式中 $t_0 \gg \frac{1}{a}$ 。

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{a}(1 - e^{-at}), & (\text{当 } 0 < t < t_0) \\ \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) - \frac{1}{a}[1 - e^{-a(t-t_0)}], & (\text{当 } t_0 \leq t < \infty) \end{cases} \quad (1-17)$$

由波形可见，信号经积分运算后其效果与微分相反，信号的突变部分可变得平滑，利用这一作用可削弱信号中混入的毛刺(噪声)的影响。

(三) 两信号相加或相乘

下面给出这两种运算的例子。若 $f_1(t) = \sin(\Omega t)$, $f_2(t) = \sin(8\Omega t)$, 两信号相加和相乘的表达式分别为：

$$f_1(t) + f_2(t) = \sin(\Omega t) + \sin(8\Omega t) \quad (1-18)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = \sin(\Omega t) \cdot \sin(8\Omega t) \quad (1-19)$$

波形分别如图 1-16 和图 1-17。必须指出，在通信系统的调制、解调等过程中将经常遇到两信号相乘运算(见习题 1-6，详待第五章讨论)。

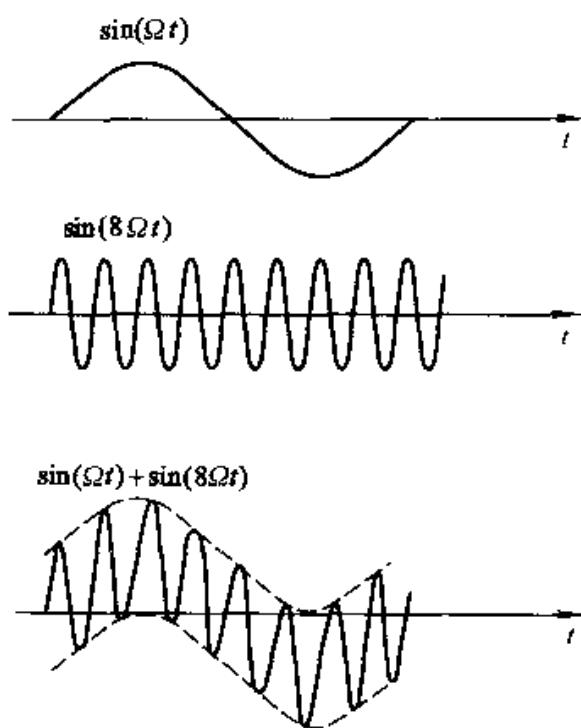


图 1-16 两信号相加

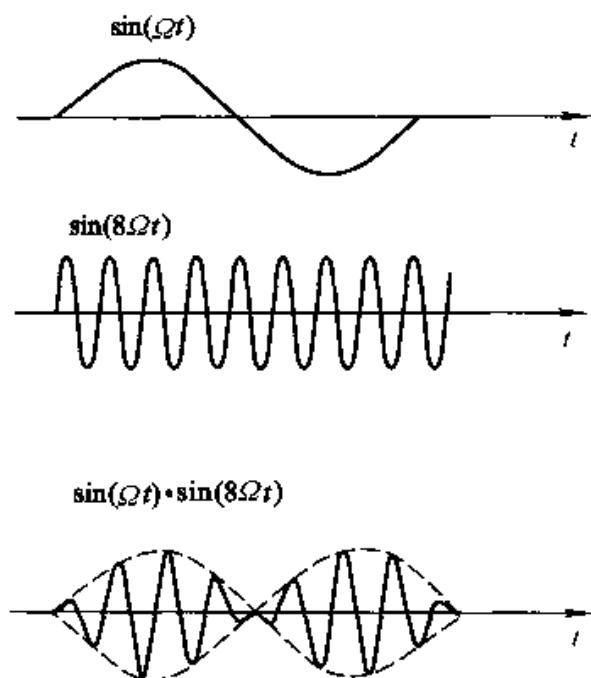


图 1-17 两信号相乘

1.4 阶跃信号与冲激信号

在信号与系统分析中，经常要遇到函数本身有不连续点(跳变点)或其导数与积分有不连续点的情况，这类函数统称为奇异函数或奇异信号。

通常，我们研究的典型信号都是一些抽象的数学模型，这些信号与实际信号可能有差距。然而，只要把实际信号按某种条件理想化，即可运用理想模型进行分析。本节将要介绍的奇异信号包括斜变、阶跃、冲激和冲激偶四种信号，其中，阶跃信号与冲激信号是两种最重要的理想信号模型。

(一) 单位斜变信号

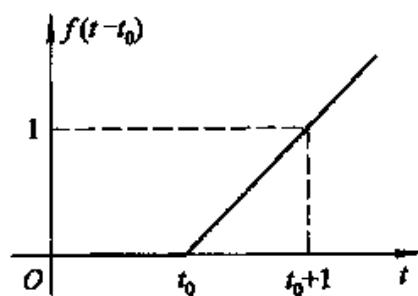
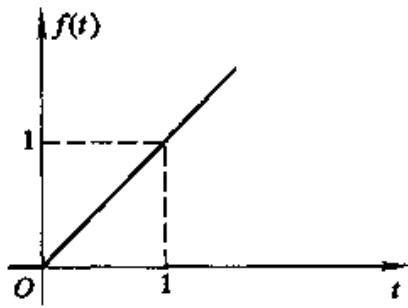
斜变信号也称斜坡信号或斜升信号。这是指从某一时刻开始随时间正比例增长的信号。如果增长的变化率是 1，就称作单位斜变信号，其波形如图 1-18，表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t \geq 0) \end{cases} \quad (1-20)$$

如果将起始点移至 t_0 ，则应写作

$$f(t - t_0) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ t - t_0 & (t \geq t_0) \end{cases} \quad (1-21)$$

其波形见图 1-19。

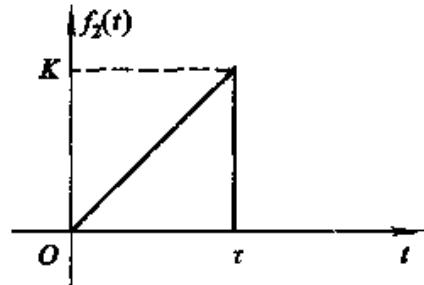
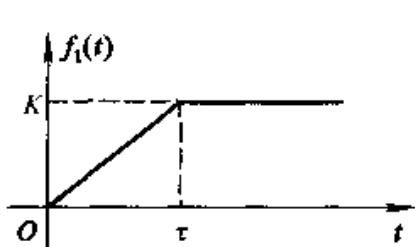


在实际应用中常遇到“截平的”斜变信号，在时间 τ 以后斜变波形被切平，如图 1-20 所示，其表示式为

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{K}{\tau} f(t) & (t < \tau) \\ K & (t \geq \tau) \end{cases} \quad (1-22)$$

图 1-21 所示三角形脉冲也可用斜变信号表示，写作

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{K}{\tau} f(t) & (t \leq \tau) \\ 0 & (t > \tau) \end{cases} \quad (1-23)$$



(二) 单位阶跃信号

单位阶跃信号的波形如图 1-22 (a)，通常以符号 $u(t)$ 表示

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases} \quad (1-24)$$

在跳变点 $t=0$ 处，函数值未定义，或在 $t=0$ 处规定函数值 $u(0)=\frac{1}{2}$ 。

单位阶跃函数的物理背景是，在 $t=0$ 时刻对某一电路接入单位电源（可以是直流电压源或直流电流源），并且无限持续下去。图 1-22 (b) 示出接入 1 V 直流电压源的情况，在接入端口处电压为阶跃信号 $u(t)$ 。

容易证明，单位斜变函数的导数等于单位阶跃函数。

$$\frac{df(t)}{dt} = u(t)$$

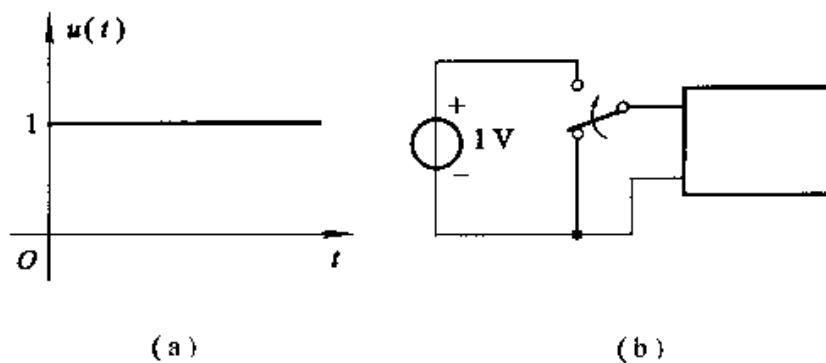


图 1-22 单位阶跃函数

如果接入电源的时间推迟到 $t = t_0$ 时刻 ($t_0 > 0$)，那么，可用一个“延时的单位阶跃函数”表示

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ 1 & (t > t_0) \end{cases} \quad (1-25)$$

波形如图 1-23。

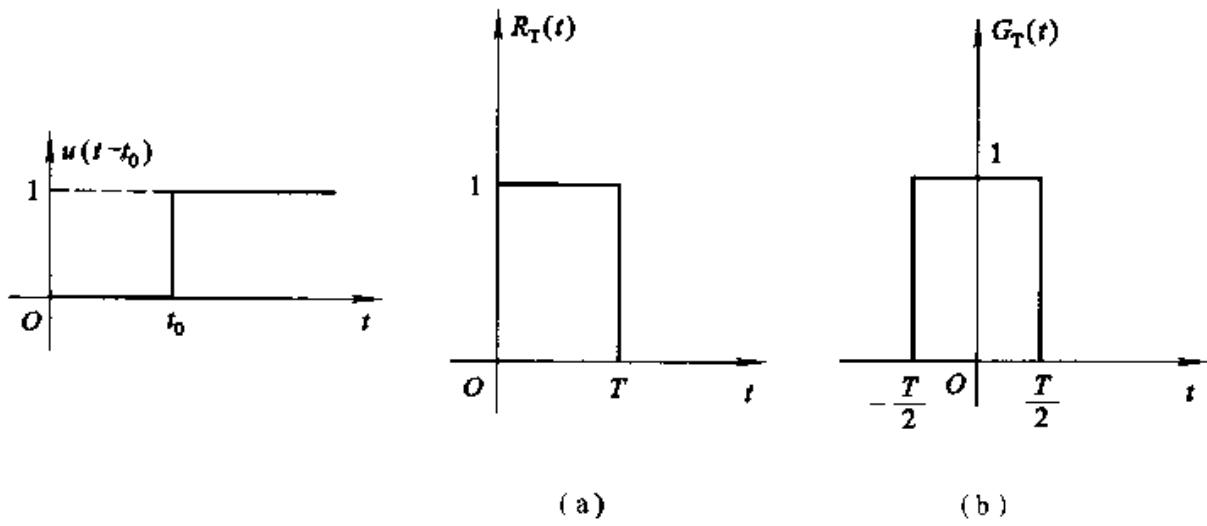
图 1-23 延时的单位
阶跃函数

图 1-24 矩形脉冲

为书写方便，常利用阶跃及其延时信号之差来表示矩形脉冲，其波形如图 1-24 (a) 或 (b)，对于图(a)信号以 $R_T(t)$ 表示

$$R_T(t) = u(t) - u(t - T)$$

下标 T 表示矩形脉冲出现在 0 到 T 时刻之间。如果矩形脉冲对于纵坐标左右对称，则以符号 $G_T(t)$ 表示 [图 1-24 (b)]

$$G_T(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad (1-26)$$

下标 T 表示其宽度。

阶跃信号鲜明地表现出信号的单边特性。即信号在某接入时刻 t_0 以前的幅度为零。利用阶跃信号的这一特性，可以较方便地以数学表示式描述各种信号的接入特性，例如，图 1-25 的波形可写作

$$f_1(t) = \sin t \cdot u(t) \quad (1-27)$$

而图 1-26 则表示为

$$f_2(t) = e^{-t} [u(t) - u(t - t_0)] \quad (1-28)$$

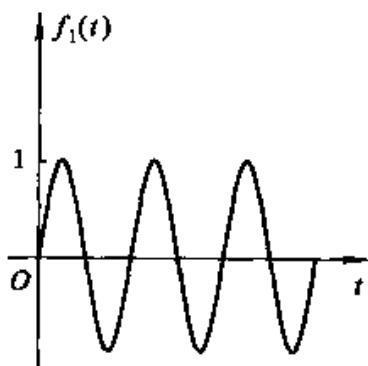


图 1-25 $\sin t \cdot u(t)$ 波形

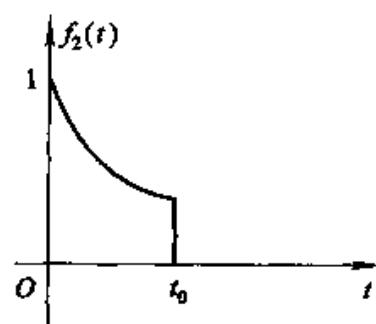


图 1-26 $e^{-t}[u(t) - u(t - t_0)]$ 波形

仿此，作为练习，读者可将前节描述图 1-15 波形的表达式改用阶跃信号表示（见习题 1-8）。

利用阶跃信号还可以表示“符号函数”。符号函数(signum)简写作 $\text{sgn}(t)$ ，其定义如下：

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases} \quad (1-29)$$

波形如图 1-27。与阶跃函数类似，对于符号函数在跳变点也可不予定义，或规定 $\text{sgn}(0) = 0$ 。显然，可以利用阶跃信号来表示符号函数

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad (1-30)$$

(三) 单位冲激信号

某些物理现象需要用一个时间极短，但取值极大的函数模型来描述，例如力学中瞬间作用的冲击力，电学中的雷击电闪，数字通信中的抽样脉冲……等等。“冲激函数”的概念就是以这类实际问题为背景而引出的。

冲激函数可由不同的方式来定义。首先分析矩形脉冲如何演变为冲激函数。图 1-28 示出宽为 τ ，高为 $\frac{1}{\tau}$ 的矩形脉冲，当保持矩形脉冲面积 $\tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1$ 不变，而使脉宽 τ 趋近于零时，脉冲幅度 $\frac{1}{\tau}$ 必趋于无穷大，此极限情况即为

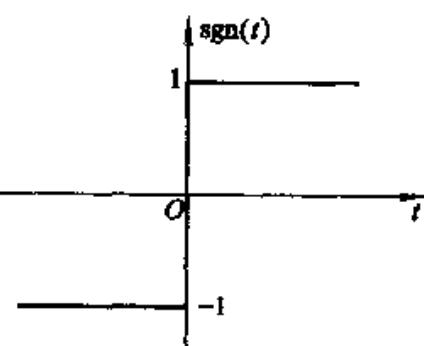


图 1-27 $\text{sgn}(t)$ 信号波形

单位冲激函数，常记作 $\delta(t)$ ，又称为“ δ 函数”。

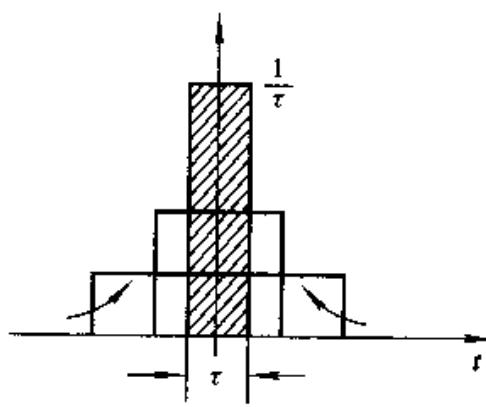


图 1-28 矩形脉冲演变为冲激函数

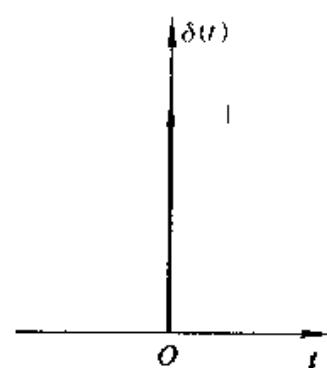


图 1-29 冲激函数 $\delta(t)$

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})] \quad (1-31)$$

冲激函数用箭头表示，如图 1-29。它示意表明， $\delta(t)$ 只在 $t = 0$ 点有一“冲激”，在 $t \neq 0$ 点以外各处，函数值都是零。

如果矩形脉冲的面积不是固定为 1，而是 E ，则表示一个冲激强度为 E 倍单位值的 δ 函数，即 $E\delta(t)$ （在用图形表示时，可将此强度 E 注于箭头旁）。

以上利用矩形脉冲系列的极限来定义冲激函数（这种极限不同于一般的极限概念，可称为广义极限）。为引出冲激函数，规则函数系列的选取不限于矩形，也可换用其他形式。例如，一组底宽为 2τ 、高为 $\frac{1}{\tau}$ 的三角形脉冲系列[如图 1-30 (a)]，若保持其面积等于 1，取 $\tau \rightarrow 0$ 的极限，同样可定义为冲激函数。此外，还可利用指数函数、钟形函数、抽样函数等等，这些函数系列分别如图 1-30 (b), (c), (d)。它们的表示式如下：

(1) 三角形脉冲

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{|t|}{\tau} \right) [u(t + \tau) - u(t - \tau)] \right\} \quad (1-32)$$

(2) 双边指数脉冲

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|t|}{\tau}} \right) \quad (1-33)$$

(3) 钟形脉冲

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\tau} e^{-\pi \left(\frac{t}{\tau} \right)^2} \right] \quad (1-34)$$

(4) $\text{Sa}(t)$ 信号(抽样信号)

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt) \right] \quad (1-35)$$

在式(1-35)中， k 越大，函数的振幅越大，且离开原点时函数振荡越快。

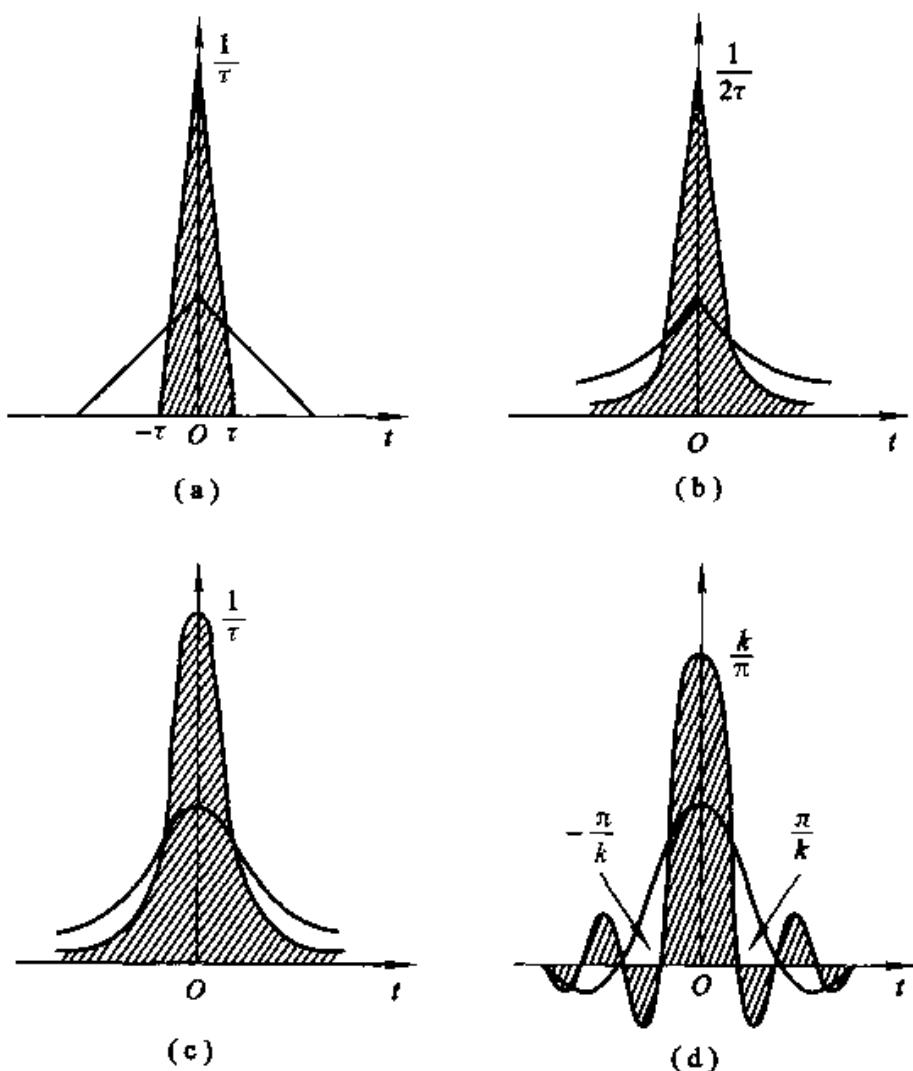


图 1-30 三角形脉冲、双边指数脉冲、钟形脉冲以及抽样函数演变为冲激函数

衰减越迅速。由式(1-11)可知, 曲线下的净面积保持 1。当 $k \rightarrow \infty$ 时, 得到冲激函数。

狄拉克(Dirac)给出 δ 函数的另一种定义方式

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (\text{当 } t \neq 0) \end{array} \right. \quad (1-36)$$

此定义与式(1-31)的定义相符合。有时, 也称 δ 函数为狄拉克函数。

仿此, 为描述在任一点 $t = t_0$ 处出现的冲激, 可有如下的 $\delta(t - t_0)$ 函数之定义

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \\ \delta(t - t_0) = 0 \quad (\text{当 } t \neq t_0) \end{array} \right. \quad (1-37)$$

此函数图形见图 1-31。

如果单位冲激信号 $\delta(t)$ 与一个在 $t = 0$ 点连续(且处处有界)的信号 $f(t)$ 相乘, 则其乘积仅在 $t = 0$ 处得到 $f(0)\delta(t)$, 其余各点之乘积均为零, 于是对于冲激函数有如下的性质

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(0)dt \\ &= f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \quad (1-38)\end{aligned}$$

类似地, 对于延迟 t_0 的单位冲激信号有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0)f(t_0)dt = f(t_0) \quad (1-39)$$

以上两式表明了冲激信号的抽样特性(或称“筛选”特性)。连续时间信号 $f(t)$ 与单位冲激信号 $\delta(t)$ 相乘并在 $-\infty$ 到 ∞ 时间内取积分, 可以得到 $f(t)$ 在 $t=0$ 点(抽样时刻)的函数值 $f(0)$, 也即“筛选”出 $f(0)$ 。若将单位冲激移到 t_0 时刻, 则抽样值取 $f(t_0)$ 。

除利用规则函数系列取极限或狄拉克的方法定义冲激函数之外, 也可利用式(1-38)来定义冲激函数, 这种定义方式以分配函数理论为基础, 将在第 2.9 节作初步介绍。

冲激函数还具有以下的性质

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (1-40)$$

也即, δ 函数是偶函数, 可利用下式证明

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t)f(t)dt &= \int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau)f(-\tau)d(-\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)f(0)d\tau = f(0)\end{aligned}$$

这里, 用到变量置换 $\tau = -t$ 。将所得结果与式(1-38)对照, 即可得出 $\delta(t)$ 与 $\delta(-t)$ 相等的结论。

冲激函数的积分等于阶跃函数, 因为由式(1-36)可知

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = 1 & (\text{当 } t > 0) \\ \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = 0 & (\text{当 } t < 0) \end{array} \right.$$

将这对式子与 $u(t)$ 的定义式(1-24)比较, 就可给出

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = u(t) \quad (1-41)$$

反过来, 阶跃函数的微分应等于冲激函数

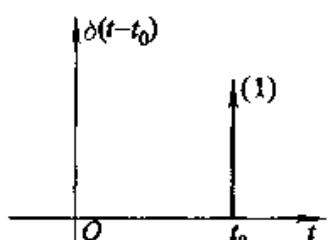


图 1-31 t_0 时刻出现的冲激 $\delta(t-t_0)$

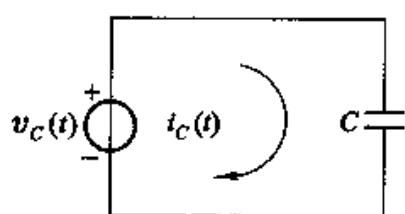


图 1-32 电压源接向电容元件

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t) \quad (1-42)$$

此结论也可作如下的解释：阶跃函数在除 $t=0$ 以外的各点都取固定值，其变化率都等于零。而在 $t=0$ 有不连续点，此跳变的微分对应在零点的冲激。

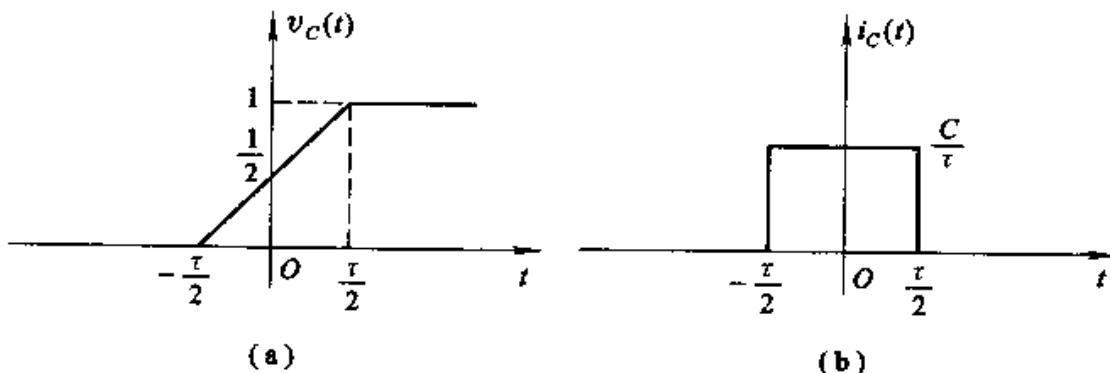
我们来考察一个电路问题，试从物理方面理解 δ 函数的意义。在图 1-32 中，电压源 $v_C(t)$ 接向电容元件 C ，假定 $v_C(t)$ 是斜变信号

$$v_C(t) = \begin{cases} 0 & \left(\text{当 } t < -\frac{\tau}{2} \right) \\ \frac{1}{\tau} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) & \left(\text{当 } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \right) \\ 1 & \left(\text{当 } t > \frac{\tau}{2} \right) \end{cases} \quad (1-43)$$

波形如图 1-33 (a)。电流 $i_C(t)$ 的表示式为

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{C}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (1-44)$$

此电流为矩形脉冲，波形如图 1-33 (b)。

图 1-33 $v_C(t)$ 与 $i_C(t)$ 波形

当我们逐渐减小 τ ，则 $i_C(t)$ 的脉冲宽度也随之减小，而其高度 $\frac{C}{\tau}$ 则相应加大，电流脉冲的面积 $\tau \cdot \frac{C}{\tau} = C$ 应保持不变。如果取 $\tau \rightarrow 0$ 的极限情况，则 $v_C(t)$ 成为阶跃信号，它的微分——电流 $i_C(t)$ 是冲激函数，写出表示式为

$$\begin{aligned} i_C(t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ C \frac{d}{dt} [v_C(t)] \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{C}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \right\} \\ &= C\delta(t) \end{aligned} \quad (1-45)$$

此变化过程的波形示意于图 1-34。

式(1-45)的结果表明，若要使电容两端在无限短时间内建立一定的电压，那么，在此无限短时间内必须提供足够的电荷，这就需要一个冲激电流。或者说，由于冲激电流的出现，允许电容两端电压跳变。

根据网络对偶理论，上述概念也可用于理想电感模型。设电感 L 的端电压为 $v_L(t)$ ，电流为 $i_L(t)$ ，因为有 $v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$ ，所以当 $i_L(t)$ 是阶跃函数时， $v_L(t)$ 为冲激电压函数。若要使电感在无限短时间内建立一定的电流，那么，在此无限短时间内必须提供足够的磁链，这就需要一个冲激电压。或者说，由于冲激电压的出现，允许电感电流跳变。

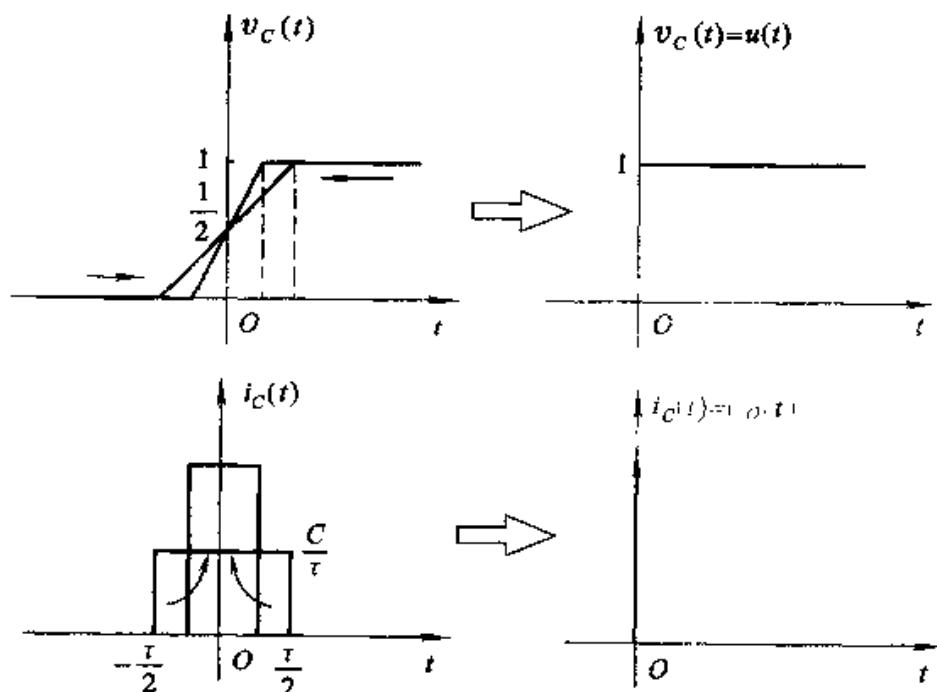


图 1-34 $t \rightarrow 0$ 时 $v_C(t)$ 与 $i_C(t)$ 的波形

(四) 冲激偶信号

冲激函数的微分(阶跃函数的二阶导数)将呈现正、负极性的一对冲激，称为冲激偶信号，以 $\delta'(t)$ 表示。可以利用规则函数系列取极限的概念引出 $\delta'(t)$ ，在此借助三角形脉冲系列，波形见图 1-35。三角形脉冲 $s(t)$ 其底宽为 2τ ，高度是 $\frac{1}{\tau}$ ，当 $\tau \rightarrow 0$ 时， $s(t)$ 成为单位冲激函数 $\delta(t)$ 。在图 1-35 左下端画出 $\frac{ds(t)}{dt}$ 波形，它是正、负极性的两个矩形脉冲，称为脉冲偶对，其宽度都为 τ ，高度分别为 $\pm \frac{1}{\tau^2}$ ，面积都是 $\frac{1}{\tau}$ 。随着 τ 减小，脉冲偶对宽度变窄，幅度增高，面积为 $\frac{1}{\tau}$ 。当 $\tau \rightarrow 0$ 时 $\frac{ds(t)}{dt}$ 是正、负极性的两个冲激函数，其强度

均为无限大，示于图 1-35 右下端，这就是冲激偶 $\delta'(t)$ 。

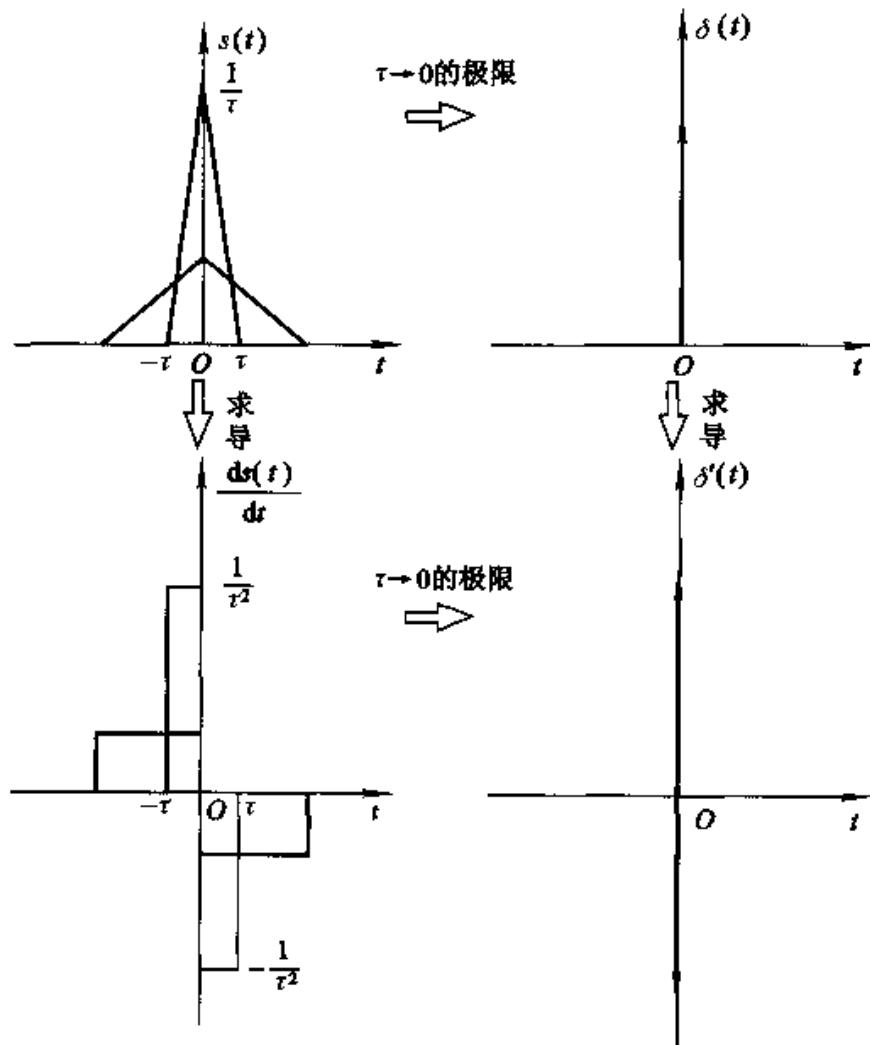


图 1-35 冲激偶的形成

冲激偶的一个重要性质是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0) \quad (1-46)$$

这里， $f'(t)$ 在 0 点连续， $f'(0)$ 为 $f(t)$ 导数在零点的取值。此关系式可由分部积分展开而得到证明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt &= f(t)\delta(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t) dt \\ &= -f'(0) \end{aligned}$$

对于延迟 t_0 的冲激偶 $\delta'(t-t_0)$ ，同样有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0) f(t) dt = -f'(t_0) \quad (1-47)$$

冲激偶信号的另一个性质是，它所包含的面积等于零，这是因为正、负两个冲激的面积相互抵消了。于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0 \quad (1-48)$$

至此介绍了斜变函数、阶跃函数、冲激函数以及冲激偶函数，可由依次求导的方法将它们引出。在下一章第2.9节还将继续讨论有关奇异函数，特别是冲激函数的一些深入问题。

1.5 信号的分解

为便于研究信号传输与信号处理的问题，往往将一些信号分解为比较简单的(基本的)信号分量之和，犹如在力学问题中将任一方向的力分解为几个分力一样。

信号可以从不同角度分解。

(一) 直流分量与交流分量

信号平均值即信号的直流分量。从原信号中去掉直流分量即得信号的交流分量。设原信号为 $f(t)$ ，分解为直流分量 f_D 与交流分量 $f_A(t)$ ，表示为

$$f(t) = f_D + f_A(t) \quad (1-49)$$

若此时间函数为电流信号，则在时间间隔 T 内流过单位电阻所产生的平均功率应等于

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f_D + f_A(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f_D^2 + 2f_D f_A(t) + f_A^2(t)] dt \\ &= f_D^2 + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_A^2(t) dt \end{aligned} \quad (1-50)$$

在推导过程中用到 $f_D f_A(t)$ 的积分等于零。由此式可见，一个信号的平均功率等于直流功率与交流功率之和。

(二) 偶分量与奇分量

偶分量的定义为

$$f_e(t) = f_e(-t) \quad (1-51)$$

奇分量的定义为

$$f_o(t) = -f_o(-t) \quad (1-52)$$

任何信号都可分解为偶分量与奇分量两部分之和。因为任何信号总可写成

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \\&= f_e(t) + f_o(t)\end{aligned}\quad (1-53)$$

显然，上式中第一部分是偶分量，第二部分是奇分量，也即：

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \quad (1-54)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \quad (1-55)$$

图 1-36 示出信号分解为偶分量与奇分量的二个实例。

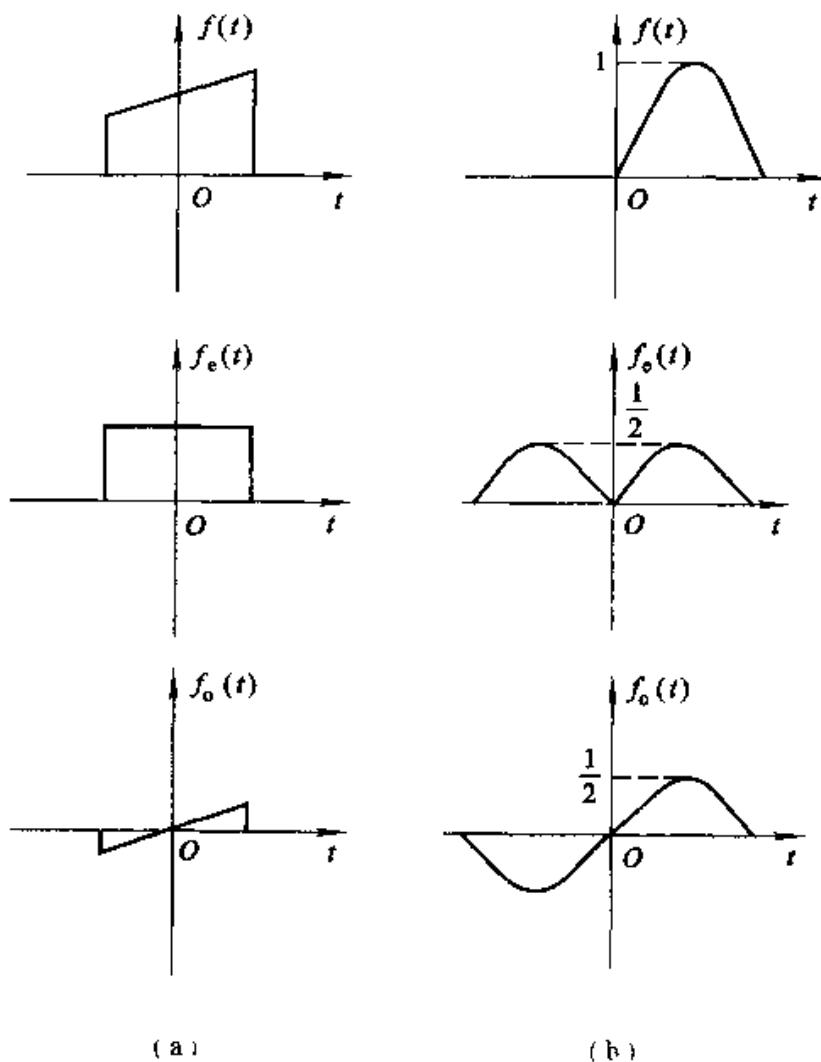


图 1-36 信号的偶分量与奇分量

用类似的方法可以证明：信号的平均功率等于它的偶分量功率与奇分量功率之和。

(三) 脉冲分量

一个信号可近似分解为许多脉冲分量之和。这里，又分为两种情况：一是分解为矩形窄脉冲分量，如图 1-37 (a)，窄脉冲组合的极限情况就是冲激信

号的叠加；另一种情况是分解为阶跃信号分量之叠加，见图 1-37 (b)。

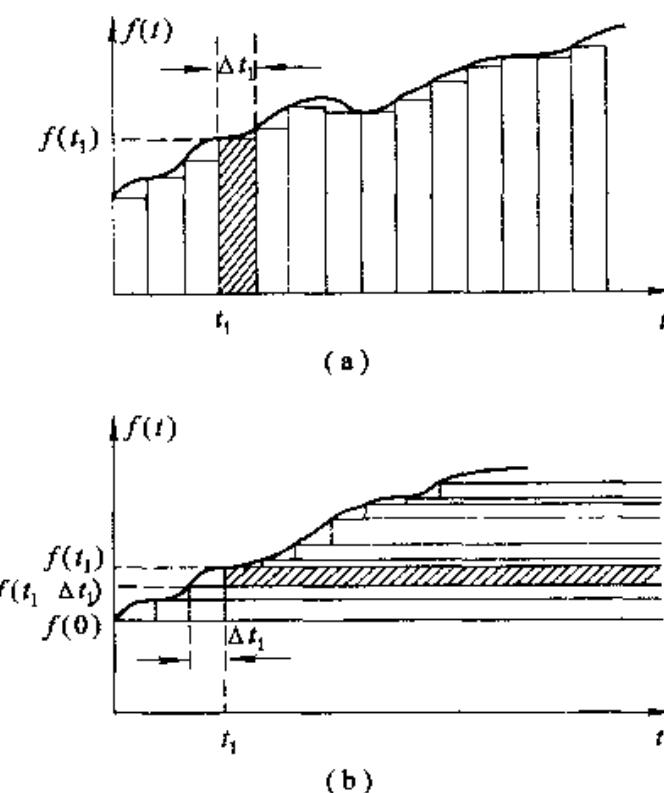


图 1-37 信号分解为脉冲分量之叠加

按图 1-37 (a) 的分解方式，将函数 $f(t)$ 近似写作窄脉冲信号的叠加，设在 t_1 时刻被分解之矩形脉冲高度为 $f(t_1)$ ，宽度为 Δt_1 [见图 1-37 (a)]，于是此窄脉冲的表示式就为

$$f(t_1)[u(t-t_1) - u(t-t_1-\Delta t_1)] \quad (1-56)$$

从 $t_1 = -\infty$ 到 ∞ 将许多这样的矩形脉冲单元叠加，即得 $f(t)$ 的近似表示式

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1)[u(t-t_1) - u(t-t_1-\Delta t_1)] \\ &= \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1) \frac{[u(t-t_1) - u(t-t_1-\Delta t_1)]}{\Delta t_1} \cdot \Delta t_1 \end{aligned} \quad (1-57)$$

取 $\Delta t_1 \rightarrow 0$ 的极限，可以得到

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1) \frac{[u(t-t_1) - u(t-t_1-\Delta t_1)]}{\Delta t_1} \cdot \Delta t_1 \\ &= \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f(t_1) \delta(t-t_1) \Delta t_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \delta(t-t_1) dt_1 \end{aligned} \quad (1-58)$$

若将此积分式中的变量 t_1 改以 t 表示，而将所观察时刻 t 以 t_0 表示，则式

(1-58)改写为

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t_0 - t) dt \quad (1-59)$$

注意到冲激函数是偶函数, $\delta(\tau) = \delta(-\tau)$, 将 $\delta(t_0 - t)$ 用 $\delta(t - t_0)$ 代换, 于是有

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt \quad (1-60)$$

此结果与前节式(1-39)完全一致。

与这种分解方式相对应, 还可按图 1-37 (b) 将函数 $f(t)$ 近似写作阶跃信号的叠加。不失一般, 为使以下推导简捷, 假定当 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$ 。由图可见, 当 $t = 0$ 时出现的第一个阶跃信号为 $f(0)u(t)$, 此后, 在任一时刻 t_1 所产生的分解阶跃信号为

$$[f(t_1) - f(t_1 - \Delta t_1)]u(t - t_1) \quad (1-61)$$

于是, $f(t)$ 可近似写作

$$\begin{aligned} f(t) &\approx f(0)u(t) + \sum_{t_1=\Delta t_1}^{\infty} [f(t_1) - f(t_1 - \Delta t_1)]u(t - t_1) \\ &= f(0)u(t) + \sum_{t_1=\Delta t_1}^{\infty} \frac{[f(t_1) - f(t_1 - \Delta t_1)]}{\Delta t_1} u(t - t_1) \Delta t_1 \end{aligned} \quad (1-62)$$

取 $\Delta t_1 \rightarrow 0$ 之极限, 可导出它的积分形式

$$f(t) = f(0)u(t) + \int_0^{\infty} \frac{df(t_1)}{dt_1} u(t - t_1) dt_1 \quad (1-63)$$

目前, 将信号分解为冲激信号叠加的方法应用很广, 在第二章将由此引出卷积积分的概念, 并进一步研究它的应用。将信号分解为阶跃信号叠加的方法已很少采用。

(四) 实部分量与虚部分量

对于瞬时值为复数的信号 $f(t)$ 可分解为实、虚两个部分之和

$$f(t) = f_r(t) + jf_i(t) \quad (1-64)$$

它的共轭复函数是

$$f^*(t) = f_r(t) - jf_i(t) \quad (1-65)$$

于是有实部和虚部的表示式:

$$f_r(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f^*(t)] \quad (1-66)$$

$$jf_i(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f^*(t)] \quad (1-67)$$

还可利用 $f(t)$ 与 $f^*(t)$ 来求 $|f(t)|^2$

$$\begin{aligned} |f(t)|^2 &= f(t)f^*(t) \\ &= f_r^2(t) + f_i^2(t) \end{aligned} \quad (1-68)$$

虽然实际产生的信号都为实信号，但在信号分析理论中，常借助复信号来研究某些实信号的问题，它可以建立某些有益的概念或简化运算。例如，复指数常用于表示正弦、余弦信号。近年来，在通信系统、网络理论、数字信号处理等方面，复信号的应用日益广泛。

(五) 正交函数分量

如果用正交函数集来表示一个信号，那么，组成信号的各分量就是相互正交的。例如，用各次谐波的正弦与余弦信号叠加表示一个矩形脉冲，各正弦、余弦信号就是此矩形脉冲信号的正交函数分量。

把信号分解为正交函数分量的研究方法在信号与系统理论中占有重要地位，这将是本书讨论的主要课题。第三章开始介绍傅里叶级数、傅里叶变换的理论和应用，第六章将集中研究正交函数分解的一般理论，并举出一些应用实例，下册许多章节将讨论离散时间信号的正交函数分解及其应用。

(六) 利用分形理论描述信号

分形(fractal)几何理论简称分形理论或分数维理论。这一理论的创始人B.B.Mandelbrot在20世纪80年代中期明确指出：分形是“其部分与整体有相似性的体系”，是一类“组成部分与整体相似的形态”。图1-38示出Sierpinski三角形集合的几何图形，读者容易看出图中依次演变的规律，每幅图形中的局部与整体具有明显的相似性。

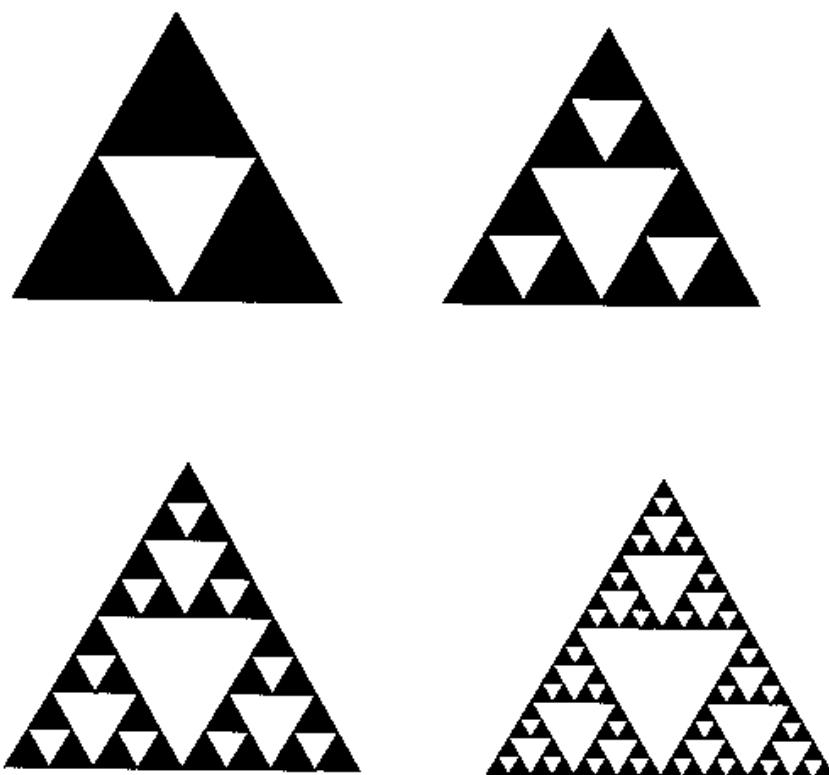


图1-38 Sierpinski三角形集合

分形是简单空间中出现的复杂几何体，它具有任意小尺度下的细节，或者说有精细的结构，它不能用传统的几何语言描述，不是满足某些约束下点集的轨迹，也不是某些简单方程的解集。分形集可以具有形态、功能、信息等方面自相似性，这种自相似性可以是严格确定的，也可以是统计意义上的。对于人们感兴趣的许多分形问题大多可由不复杂的方法定义，通过迭代、变换产生。

自然界中的许多事物都表现出局部与整体具有自相似性的分形特征，如云彩的边界、山地的轮廓、海岸线的分布、流体的湍流、粒子的布朗运动轨道以及生物的形态等等。正是由于这一原因，分形几何被称为更接近自然的数学。自然界的这种分形特征为我们利用分形理论进行科学与技术研究提供了客观依据。近年来，分形理论已广泛应用于生物学、化学、物理学、天文学、地球物理学、材料科学、经济学以及语言和情报学等领域。目前，在信号传输与信号处理领域应用分形技术的实例表现在以下几方面：图像数据压缩、语音合成、地震信号或石油探井信号分析、声纳或雷达信号检测、通信网业务流量描述等等。这些信号的共同特点都是有一定的自相似性，借助分形理论可提取信号特征，并利用一定的数学迭代方法大大简化信号的描述，或自动生成某些具有自相似特征的信号。

分形理论及其应用的研究方兴未艾，而人们已经注意到它显示的独特风格和进一步应用的潜力，因此，目前有关这一领域的研究内容相当丰富。读者可在以后的专门课程或研究工作中进一步学习它的原理，本书仅作此简介，不再讨论。

1.6 系统模型及其分类

科学的每一分支都有自己的一套“模型”理论，在模型的基础上可以运用数学工具进行研究。为便于对系统进行分析，同样需要建立系统的模型。所谓模型，是系统物理特性的数学抽象，以数学表达式或具有理想特性的符号组合图形来表征系统特性。

例如，由电阻器、电容器和线圈组合而成的串联回路，可抽象表示为图1-39那样的模型。一般情况下，可以认为 R 代表电阻器的阻值， C 代表电容器的容量， L 代表线圈的电感量。若激励信号是电压源 $e(t)$ ，欲求解电流 $i(t)$ ，由元件的理想特性与KVL可以建立如下的微分方程式

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{de}{dt} \quad (1-69)$$

这就是电阻器、电容器与线圈串联组合系统的数学模型。在电子技术中经常用到的理想特性元件模型还有互感器、回转器、各种受控源、运算放大器等，它

们的数学表示和符号图形在电路分析基础课程中都已述及，此处不再重复。

系统模型的建立是有一定条件的，对于同一物理系统，在不同条件之下，可以得到不同形式的数学模型。严格讲，只能得到近似的模型。例如，刚刚建立的图 1-39 与式(1-69)只是在工作频率较低，而且线圈、电容器损耗相对很小情况下的近似。如果考虑电路中的寄生参数，如分布电容、引线电感和损耗，而且工作频率较高，则系统模型要变得十分复杂，图 1-39 与式(1-69)就不能应用。工作频率更高时，无法再用集总参数模型来表示此系统，需采用分布参数模型。

从另一方面讲，对于不同的物理系统，经过抽象和近似，有可能得到形式上完全相同的数学模型。即使对于理想元件组成的系统，在不同电路结构情况下，其数学模型也有可能一致。例如，根据网络对偶理论可知，一个 G (电导)、 C (电容)、 L (电感) 组成的并联回路，在电流源激励下求其端电压的微分方程将与式(1-69)形式相同。此外，还能够找到对应的机械系统，其数学模型与这里的电路方程也完全相同(见第二章 2.2 节)。这表明，同一数学模型可以描述物理外貌截然不同的系统。

对于较复杂的系统，其数学模型可能是一个高阶微分方程，规定此微分方程的阶次就是系统的阶数，例如，图 1-39 的系统是二阶系统。也可以把这种高阶微分方程改以一阶联立方程组的形式给出，这是同一个系统模型的两种不同表现形式，前者称为输入-输出方程，后者称为状态方程，它们之间可以相互转换。

建立数学模型只是进行系统分析工作的第一步，为求得给定激励条件下系统的响应，还应当知道激励接入瞬时系统内部的能量储存情况。储能的来源可能是先前激励(或扰动)作用的后果，没有必要追究详细的历史演变过程，只需知道激励接入瞬时系统的状态。系统的起始状态由若干独立条件给出，独立条件的数目与系统的阶次相同，例如图 1-39 所示的电路，其数学模型是二阶微分方程，通常以起始时刻电容端电压与电感电流作为两个独立条件表征它的起始状态(详见第二章与第十一章)。

如果系统数学模型、起始状态以及输入激励信号都已确定，即可运用数学方法求解其响应。一般情况下可以对所得结果作出物理解释，赋予物理意义。综上所述，系统分析的过程，是从实际物理问题抽象为数学模型，经数学解析后再回到物理实际的过程。

除利用数学表达式描述系统模型之外，也可借助方框图(block diagram) 表示系统模型。每个方框图反映某种数学运算功能，给出该方框图输出与输入信

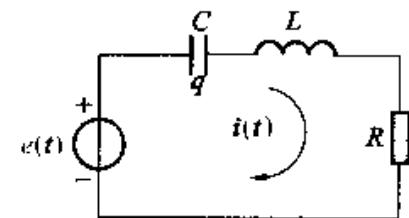


图 1-39 R 、 L 、 C 串联回路

号的约束条件，若干个方框图组成一个完整的系统。对于线性微分方程描述的系统，它的基本运算单元是相加、倍乘(标量乘法运算)和积分(或微分)。图 1-40(a)、(b)、(c) 分别示出这三种基本单元的方框图及其运算功能。

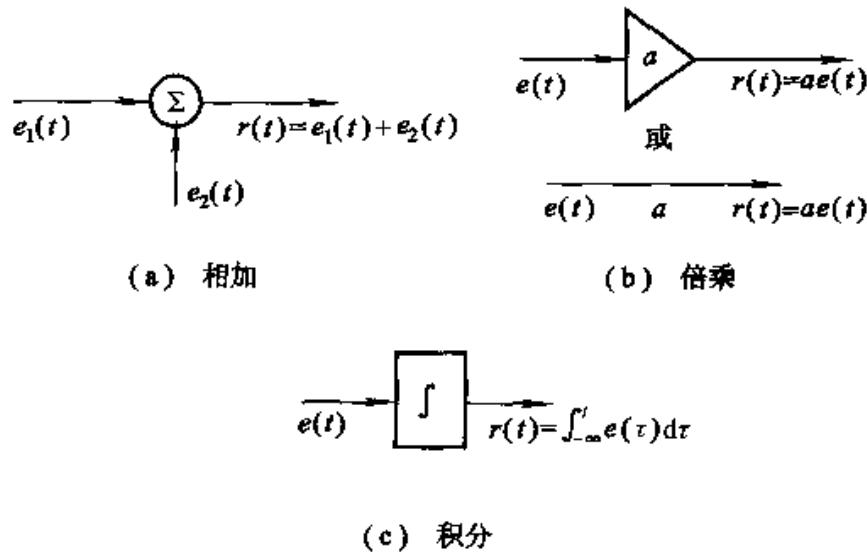


图 1-40 三种基本单元方框图

虽然也可不采用积分单元而用微分运算构成基本单元，但是在实际应用中考虑到抑制突发干扰(噪声)信号的影响，往往选用积分单元。

如果一阶微分方程的表达式分别为：

$$\frac{d}{dt}r(t) + a_0 r(t) = b_0 e(t) \quad (1-70)$$

$$\frac{d}{dt}r(t) + a_0 r(t) = b_1 \frac{d}{dt}e(t) \quad (1-71)$$

容易导出相应的方框图分别如图 1-41 和图 1-42 所示。两图中，输出端的相乘因子 b_0 或 b_1 也可写在输入端[即 $e(t)$ 乘因子后再相加]，其效果不变。

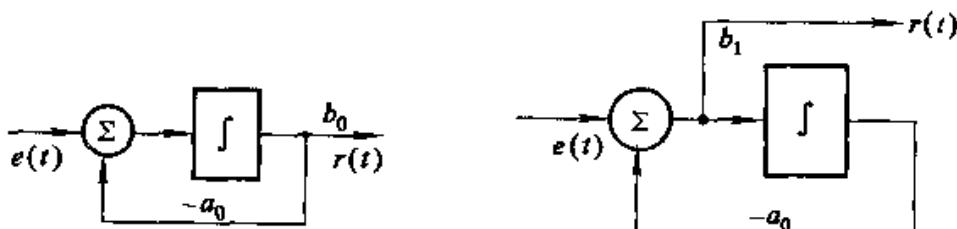


图 1-41 与式(1-70)对应的方框图 图 1-42 与式(1-71)对应的方框图

对于图 1-39 所示的电路，按照它的数学表达式(1-69)可以建立二阶系统的方框图模型，如图 1-43 所示，注意到图中有两个积分器。对于高阶系统，方框图中将包含更多的积分器。

如前文所述，不同的系统可以具有相同的数学模型，因而，它们也可具有

相同的方框图。例如，图 1-43 所示的二阶系统方框图也可表征某种机械系统或其他的物理系统以及非物理系统。

利用线性微分方程基本运算单元给出系统方框图的方法也称为系统仿真(或模拟, simulation), 在下册第十一章将继续研究这种方法。

对应不同的数学运算可以构作各种类型的方框图，并由若干方框图组成系统，今后将看到多种多样的方框图表达及其组合。

系统的分类错综复杂，主要考虑其数学模型的差异来划分不同的类型。

连续时间系统与离散时间系统 若系统的输入和输出都是连续时间信号，且其内部也未转换为离散时间信号，则称此系统为连续时间系统。若系统的输入和输出都是离散时间信号，则称此系统为离散时间系统。RLC 电路都是连续时间系统的例子；而数字计算机就是一个典型的离散时间系统。实际上，离散时间系统经常与连续时间系统组合运用，这种情况称为混合系统。

连续时间系统的数学模型是微分方程，而离散时间系统则用差分方程描述。

即时系统与动态系统 如果系统的输出信号只决定于同时刻的激励信号，与它过去的工作状态(历史)无关，则称此系统为即时系统(或无记忆系统)。例如，只由电阻元件组成的系统就是即时系统。如果系统的输出信号不仅取决于同时刻的激励信号，而且与它过去的工作状态有关，这种系统称为动态系统(或记忆系统)。凡是包含有记忆作用的元件(如电容、电感、磁芯等)或记忆电路(如寄存器)的系统都属此类。

即时系统可用代数方程描述，动态系统的数学模型则是微分方程或差分方程。在分析动态系统时，变量的选择又有两种方式，一种是选择输出变量与输入变量(响应与激励)，另一种是选择状态变量(如电容电压、电感电流等)。

集总参数系统与分布参数系统 只由集总参数元件组成的系统称为集总参数系统；含有分布参数元件的系统是分布参数系统(如传输线、波导等)。集总参数系统用常微分方程作为它的数学模型。而分布参数系统的数学模型是偏微分方程，这时描述系统的独立变量不仅是时间变量，还要考虑到空间位置。

线性系统与非线性系统 具有叠加性与均匀性(也称齐次性, homogeneity)的系统称为线性系统。所谓叠加性是指当几个激励信号同时作用于系统时，总的输出响应等于每个激励单独作用所产生的响应之和；而均匀性的含义是，当输入信号乘以某常数时，响应也倍乘相同的常数。不满足叠加性或均匀性的系统是非线性系统。

时变系统与时不变系统 如果系统的参数不随时间而变化，则称此系统为

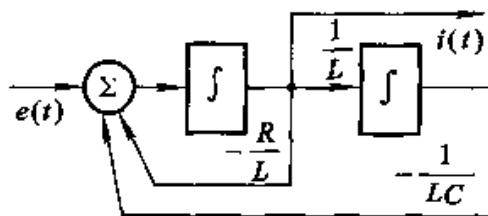


图 1-43 与式(1-69)对应的方框图

时不变系统(或非时变系统、定常系统)；如果系统的参量随时间改变，则称其为时变系统(或参变系统)。

综合以上两方面的情况，我们可能遇到线性时不变、线性时变、非线性时不变、非线性时变等系统。现以图 1-39 为例来说明这几种不同系统数学模型的差异。

若 L ， C ， R 都是线性、时不变元件，就可组成一个线性时不变系统，其数学模型如式(1-69)，是一个常系数线性微分方程。

若电容 C 受某种外加控制作用而改变其容量，也即 $C(t)$ 也是时间的函数，则方程式为变参线性微分方程，这是一个线性时变系统。若响应以电荷 $q(t)$ 表示，则微分方程写作

$$LC(t)\frac{d^2q}{dt^2} + RC(t)\frac{dq}{dt} + q = C(t)e(t) \quad (1-72)$$

如果 R 是非线性电阻，设其电压、电流之间关系为 $v = R i^2$ ，而 L ， C 仍保持线性、非参变，于是建立一非线性常系数微分方程

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + 2RCi\frac{di}{dt} + i = C\frac{de}{dt} \quad (1-73)$$

这是一个非线性时不变系统。

与此对应，也可以出现线性或非线性、常系数或变参差分方程，作为描述离散时间系统的数学模型。

可逆系统与不可逆系统 若系统在不同的激励信号作用下产生不同的响应，则称此系统为可逆系统。对于每个可逆系统都存在一个“逆系统”，当原系统与此逆系统级联组合后，输出信号与输入信号相同。

例如，输出 $r_1(t)$ 与输入 $e_1(t)$ 具有如下约束的系统是可逆的

$$r_1(t) = 5e_1(t) \quad (1-74)$$

此可逆系统的逆系统输出 $r_2(t)$ 与输入 $e_1(t)$ 满足如下关系

$$r_2(t) = \frac{1}{5}e_1(t) \quad (1-75)$$

不可逆系统的一个实例为

$$r_3(t) = e_3^2(t) \quad (1-76)$$

显然无法根据给定的输出 $r_3(t)$ 来决定输入 $e_3(t)$ 的正、负号，也即，不同的激励信号产生了相同的响应，因而它是不可逆的。

可逆系统的概念在信号传输与处理技术领域中得到广泛的应用。例如在通信系统中，为满足某些要求可将待传输信号进行特定的加工(如编码)，在接收信号之后仍要恢复原信号，此编码器应当是可逆的。这种特定加工的一个实例如在发送端为信号加密，在接收端需要正确解密。

除以上几种划分方式之外，还可按照系统的性质将它们划分为因果系统与非因果系统（下节），以及稳定系统与非稳定系统（4.11节和第十一章）等等，以后将根据各章节内容的需要陆续介绍。

1.7 线性时不变系统

本书着重讨论确定性输入信号作用下的集总参数线性时不变系统（线性时不变，linear time-invariant，缩写为 LTI），在以后的文字叙述中，一般简称 LTI 系统，包括连续时间系统与离散时间系统。

为便于全书讨论，这里将线性时不变系统的一些基本特性作如下说明。

（一）叠加性与均匀性

前节已给出文字定义，现用数学符号和方框图来说明。如果对于给定的系统， $e_1(t)$ 、 $r_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 、 $r_2(t)$ 分别代表两对激励与响应，则当激励是 $C_1e_1(t) + C_2e_2(t)$ (C_1, C_2 分别为常数) 时，系统的响应为 $C_1r_1(t) + C_2r_2(t)$ 。此特性示意于图 1-44。

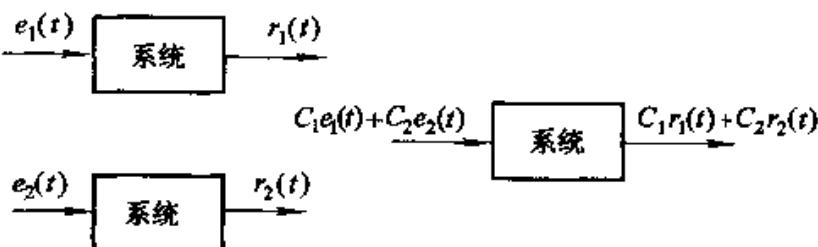


图 1-44 线性系统的叠加性与均匀性

由常系数线性微分方程描述的系统，如果起始状态为零，则系统满足叠加性与均匀性（齐次性）。若起始状态非零，必须将外加激励信号与起始状态的作用分别处理才能满足叠加性与均匀性，否则可能引起混淆，第 2.4 节将专门研究此问题。

（二）时不变特性

对于时不变系统，由于系统参数本身不随时间改变，因此，在同样起始状态下，系统响应与激励施加于系统的时刻无关。写成数学表达式，若激励为 $e(t)$ ，产生响应 $r(t)$ ，则当激励为 $e(t - t_0)$ 时，响应为 $r(t - t_0)$ 。此特性示于图 1-45，它表明当激励延迟一段时间 t_0 时，其输出响应也同样延迟 t_0 时间，波形形状不变。

（三）微分特性

对于 LTI 系统满足如下的微分特性：若系统在激励 $e(t)$ 作用下产生响应 $r(t)$ ，则当激励为 $\frac{de(t)}{dt}$ 时，响应为 $\frac{dr(t)}{dt}$ 。

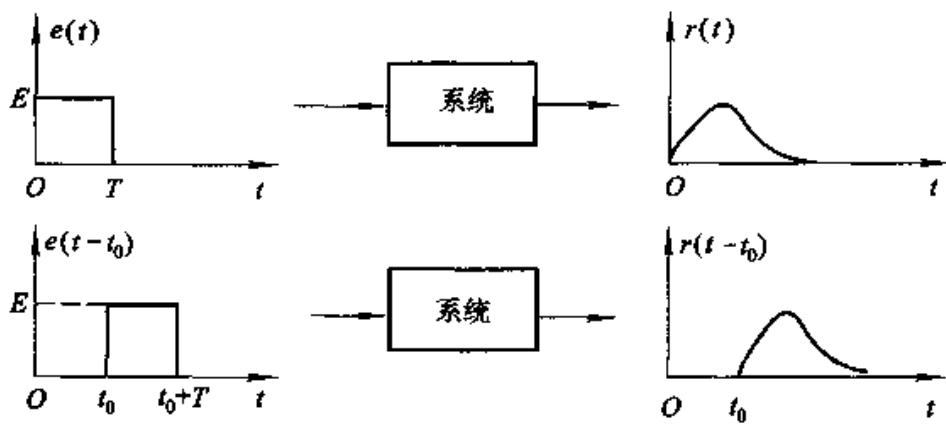


图 1-45 时不变特性

根据线性与时不变性容易证明此结论。首先由时不变特性可知，激励 $e(t)$ 对应输出 $r(t)$ ，则激励 $e(t - \Delta t)$ 产生响应 $r(t - \Delta t)$ 。再由叠加性与均匀性可知，若激励为 $\frac{e(t) - e(t - \Delta t)}{\Delta t}$ 则响应等于 $\frac{r(t) - r(t - \Delta t)}{\Delta t}$ ，取 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限，得到导数关系。若激励为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e(t) - e(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} e(t) \quad (1-77)$$

则响应为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t) - r(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} r(t) \quad (1-78)$$

这表明，当系统的输入由原激励信号改为其导数时，输出也由原响应函数变成其导数。显然，此结论可扩展至高阶导数与积分。图 1-46 示意表明这一结果。

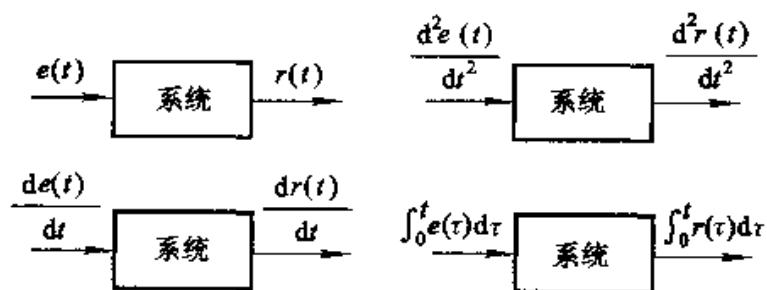


图 1-46 微分特性

(四) 因果性

因果系统是指系统在 t_0 时刻的响应只与 $t = t_0$ 和 $t < t_0$ 时刻的输入有关，否则，即为非因果系统。也就是说，激励是产生响应的原因，响应是激励引起的后果，这种特性称为因果性(causality)。

例如，系统模型若为

$$r_1(t) = e_1(t - 1) \quad (1-79)$$

则此系统是因果系统，如果

$$r_2(t) = e_2(t+1) \quad (1 \cdot 80)$$

则为非因果系统。

通常由电阻器、电感线圈、电容器构成的实际物理系统都是因果系统。而在信号处理技术领域中，待处理的时间信号已被记录并保存下来，可以利用后一时刻的输入来决定前一时刻的输出（例如信号的压缩、扩展、求统计平均值等），那么，将构成非因果系统。在语音信号处理、地球物理学、气象学、股票市场分析以及人口统计学等领域都可能遇到此类非因果系统。

如果信号的自变量不是时间（例如在图像处理的某些问题中），研究系统的因果性显得不很重要。

由常系数线性微分方程描述的系统若在 $t < t_0$ 时不存在任何激励，在 t_0 时刻起始状态为零，则系统具有因果性。

某些非因果系统的模型虽然不能直接由物理系统实现，然而它们的性能分析对于因果系统的研究具有重要的指导意义，第五章5.4节将讨论这方面的问题。

借“因果”这一名词，常把 $t=0$ 接入系统的信号（在 $t < 0$ 时函数值为零）称为因果信号（或有始信号）。对于因果系统，在因果信号的激励下，响应也为因果信号。

1.8 系统分析方法

在系统分析中，LTI系统的分析具有重要意义。这不仅是因为在实际应用中经常遇到LTI系统，而且，还有一些非线性系统或时变系统在限定范围与指定条件下，遵从线性时不变特性的规律；另一方面，LTI系统的分析方法已经形成了完整的、严密的体系，日趋完善和成熟。

为便于读者了解本书概貌，下面就系统分析方法作一概述，着重说明线性时不变系统的分析方法。

在建立系统模型方面，系统的数学描述方法可分为两大类型，一是输入—输出描述法，另一是状态变量描述法。

输入—输出描述法着眼于系统激励与响应之间的关系，并不关心系统内部变量的情况。对于在通信系统中大量遇到的单输入—单输出系统，应用这种方法较方便。

状态变量描述法不仅可以给出系统的响应，还可提供系统内部各变量的情况，也便于多输入—多输出系统的分析。在近代控制系统的理论研究中，广泛采用状态变量方法。

从系统数学模型的求解方法来讲，大体上可分为时间域方法与变换域方法

两大类型。

时间域方法直接分析时间变量的函数，研究系统的时间响应特性，或称时域特性。这种方法的主要优点是物理概念清楚。对于输入-输出描述的数学模型，可以利用经典法解常系数线性微分方程或差分方程，辅以算子符号方法可使分析过程适当简化；对于状态变量描述的数学模型，则需求解矩阵方程。在线性系统时域分析方法中，卷积方法最受重视，它的优点表现在许多方面，本书中将给出较多篇幅研究这种方法。借助计算机，利用数值方法求解微分方程也比较方便，如欧拉(Euler)法、龙格-库塔(Runge-Kutta)法等。此外，还有一些辅助性的分析工具如求解非线性微分方程的相平面法等等。在信号与系统研究的发展过程中，曾一度认为时域方法运算烦琐、不够方便，随着计算技术与各种算法工具的出现，时域分析又重新受到重视。

变换域方法将信号与系统模型的时间变量函数转换成相应变换域的某种变量函数。例如，傅里叶变换(FT)以频率为独立变量，以频域特性为主要研究对象；而拉普拉斯变换(LT)与 z 变换(ZT)则注重研究极点与零点分析，利用 s 域或 z 域的特性解释现象和说明问题。目前，在离散系统分析中，正交变换的内容日益丰富，如离散傅里叶变换(DFT)、离散沃尔什变换(DWT)……等等。为提高计算速度，人们对于快速算法产生了巨大兴趣，又出现了如快速傅里叶变换(FFT)等计算方法。变换域方法可以将时域分析中的微分、积分运算转化为代数运算，或将卷积积分变换为乘法。在解决实际问题时又有许多方便之处，如根据信号占有频带与系统通带间的适应关系来分析信号传输问题往往比时域法简便和直观。在信号处理问题中，经正交变换，将时间函数用一组变换系数(谱线)来表示，在允许一定误差的情况下，变换系数的数目可以很少，有利于判别信号中带有特征性的分量，也便于传输。

LTI 系统的研究，以叠加性、均匀性和时不变特性作为分析一切问题的基础。按照这一观点去考察问题，时间域方法与变换域方法并没有本质区别。这两种方法都是把激励信号分解为某种基本单元，在这些单元信号分别作用的条件下求得系统的响应，然后叠加。例如，在时域卷积方法中这种单元是冲激函数，在傅里叶变换中是正弦函数或指数函数，在拉普拉斯变换中则是复指数信号。因此，变换域方法不仅可以视为求解数学模型的有力工具，而且能够赋予明确的物理意义，基于这种物理解释，时间域方法与变换域方法得到了统一。

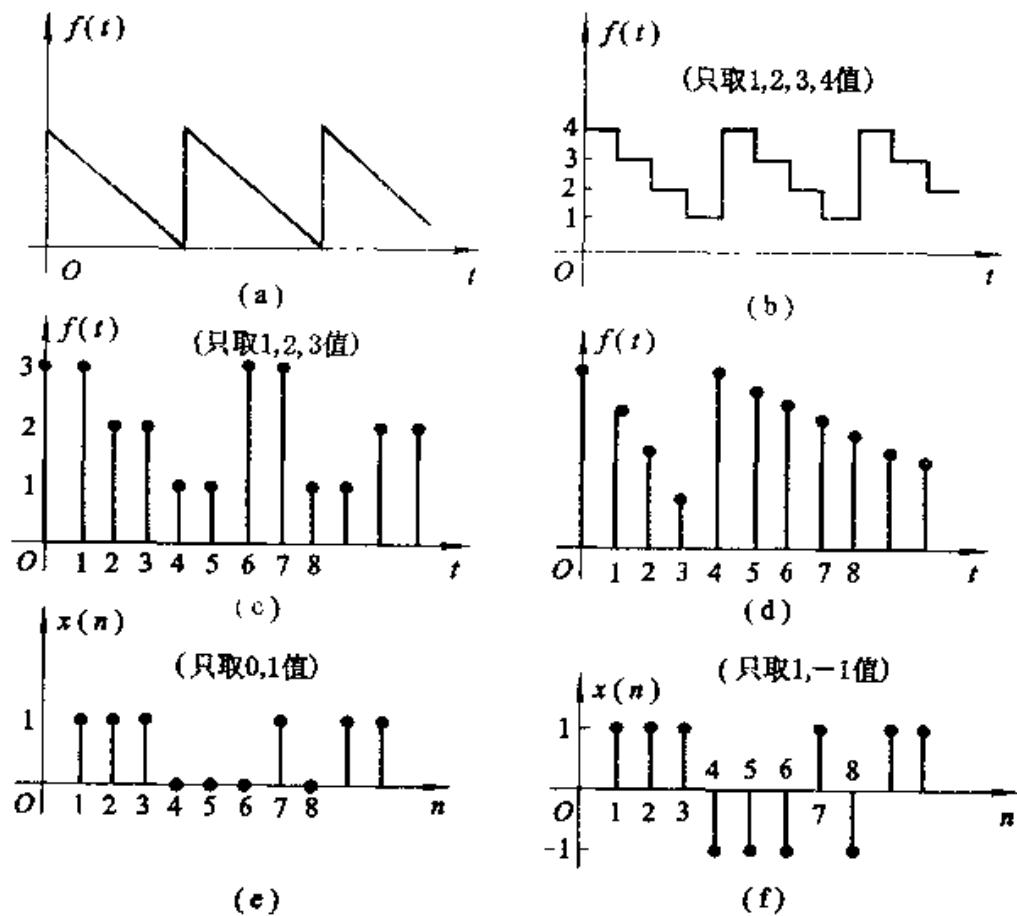
本书按照先输入-输出描述后状态变量描述，先连续后离散，先时间域后变换域的顺序，研究线性时不变系统的基本分析方法，结合通信系统与控制系统的一般问题，初步介绍这些方法在信号传输与处理方面的简单应用。

长期以来，人们对于非线性系统与时变系统的研究付出了足够的代价，虽然取得了不少进展，而目前仍有较多困难，还不能总结出系统、完整、具有普

遍意义的分析方法。近年来，在信号传输与处理研究领域中，人们利用人工神经网络、模糊集理论、遗传算法、混沌理论以及它们的相互结合解决线性时不变系统模型难以描述的许多实际问题，取得了令人满意的结果，这些方法显示了强大的生命力，它们的构成原理和处理问题的方法与本课程的基本内容有着本质的区别。随着本课程与后续课程的深入学习，读者将逐步认识到本书方法的局限性。科学发展日新月异，信号与系统领域的新的理论、新技术层出不穷，对于这一学科领域的学习将永无止境。

习 题

1-1 分别判断题图1-1所示各波形是连续时间信号还是离散时间信号，若是离散时间信号是否为数字信号？



题图 1-1

1-2 分别判断下列各函数式属于何种信号？(重复1-1题所问)

- (1) $e^{-\omega} \sin(\omega t)$;
- (2) $e^{-\omega t}$;
- (3) $\cos(n\pi)$;
- (4) $\sin(n\omega_0)$ (ω_0 为任意值);
- (5) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

以上各式中 n 为正整数。

1-3 分别求下列各周期信号的周期 T :

$$(1) \cos(10t) - \cos(30t);$$

$$(2) e^{j10t};$$

$$(3) [5\sin(8t)]^2;$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [u(t - nT) - u(t - nT - T)] (n \text{ 为正整数}).$$

1-4 对于例1-1所示信号, 由 $f(t)$ 求 $f(-3t-2)$, 但改变运算顺序, 先求 $f(3t)$ 或先求 $f(-t)$, 讨论所得结果是否与原例之结果一致。

1-5 已知 $f(t)$, 为求 $f(t_0 - at)$ 应按下列哪种运算求得正确结果(式中 t_0, a 都为正值)?

$$(1) f(-at) \text{ 左移 } t_0;$$

$$(2) f(at) \text{ 右移 } t_0;$$

$$(3) f(at) \text{ 左移 } \frac{t_0}{a};$$

$$(4) f(-at) \text{ 右移 } \frac{t_0}{a}.$$

1-6 绘出下列各信号的波形:

$$(1) [1 + \frac{1}{2}\sin(\Omega t)]\sin(8\Omega t);$$

$$(2) [1 + \sin(\Omega t)]\sin(8\Omega t).$$

1-7 绘出下列各信号的波形:

$$(1) [u(t) - u(t - T)]\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right);$$

$$(2) [u(t) - 2u(t - T) + u(t - 2T)]\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right).$$

1-8 试将描述图1-15波形的表达式(1-16)和(1-17)改用阶跃信号表示。

1-9 粗略绘出下列各函数式的波形图:

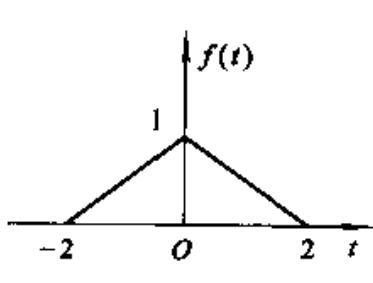
$$(1) f(t) = (2 - e^{-t})u(t);$$

$$(2) f(t) = (3e^{-t} + 6e^{-2t})u(t);$$

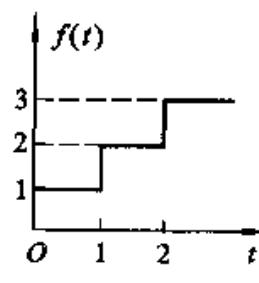
$$(3) f(t) = (5e^{-t} - 5e^{-3t})u(t);$$

$$(4) f(t) = e^{-t}\cos(10\pi t)[u(t-1) - u(t-2)].$$

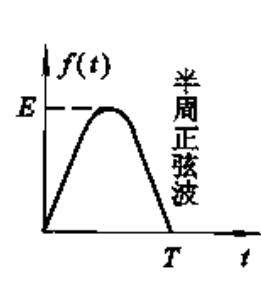
1-10 写出题图1-10(a)、(b)、(c)所示各波形的函数式。



(a)



(b)



(c)

题图 1-10

1-11 绘出下列各时间函数的波形图:

- (1) $t e^{-t} u(t)$;
- (2) $e^{-(t-1)}[u(t-1)-u(t-2)]$;
- (3) $[1 + \cos(\pi t)][u(t) - u(t-2)]$;
- (4) $u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$;
- (5) $\frac{\sin[a(t-t_0)]}{a(t-t_0)}$;
- (6) $\frac{d}{dt}[e^{-t} \sin t u(t)]$.

1-12 绘出下列各时间函数的波形图, 注意它们的区别:

- (1) $t[u(t) - u(t-1)]$;
- (2) $t \cdot u(t-1)$;
- (3) $t[u(t) - u(t-1)] + u(t-1)$;
- (4) $(t-1)u(t-1)$;
- (5) $-(t-1)[u(t) - u(t-1)]$;
- (6) $t[u(t-2) - u(t-3)]$;
- (7) $(t-2)[u(t-2) - u(t-3)]$.

1-13 绘出下列各时间函数的波形图, 注意它们的区别:

- (1) $f_1(t) = \sin(\omega t) \cdot u(t)$;
- (2) $f_2(t) = \sin[\omega(t-t_0)] \cdot u(t)$;
- (3) $f_3(t) = \sin(\omega t) \cdot u(t-t_0)$;
- (4) $f_4(t) = \sin[\omega(t-t_0)] \cdot u(t-t_0)$;

1-14 应用冲激信号的抽样特性, 求下列表示式的函数值:

- (1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) \delta(t) dt$;
- (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-t) \delta(t) dt$;
- (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) u\left(t-\frac{t_0}{2}\right) dt$;
- (4) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) u(t-2t_0) dt$;
- (5) $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-t} + t) \delta(t+2) dt$;
- (6) $\int_{-\infty}^{\infty} (t + \sin t) \delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt$;
- (7) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega t} [\delta(t) - \delta(t-t_0)] dt$.

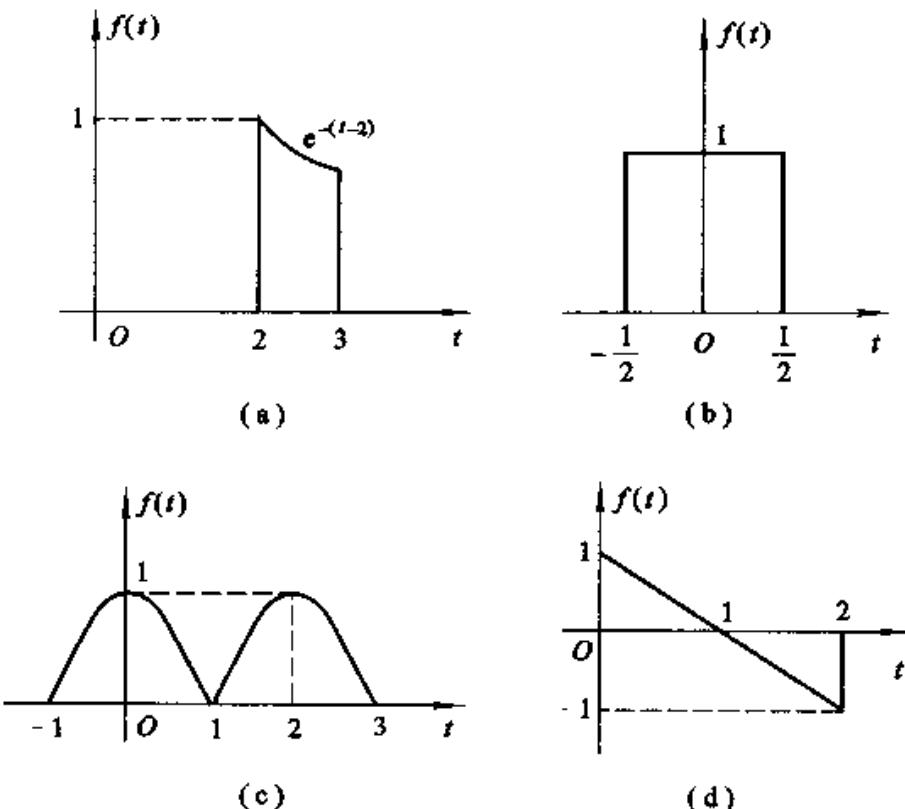
1-15 电容 C_1 与 C_2 串联, 以阶跃电压源 $v(t) = E u(t)$ 串联接入, 试分别写出回路中的电流 $i(t)$ 、每个电容两端电压 $v_{C1}(t)$ 、 $v_{C2}(t)$ 的表示式。

1-16 电感 L_1 与 L_2 并联, 以阶跃电流源 $i(t) = I u(t)$ 并联接入, 试分别写出电感两端电压 $v(t)$ 、每个电感支路电流 $i_{L1}(t)$ 、 $i_{L2}(t)$ 的表示式。

1-17 分别指出下列各波形的直流分量等于多少?

- (1) 全波整流 $f(t) = |\sin(\omega t)|$;
- (2) $f(t) = \sin^2(\omega t)$;
- (3) $f(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$;
- (4) 升余弦 $f(t) = K[1 + \cos(\omega t)]$ 。

1-18 粗略绘出题图1-18所示各波形的偶分量和奇分量。



题图 1·18

1-19 绘出下列系统的仿真框图:

- (1) $\frac{d}{dt}r(t) + a_0 r(t) = b_0 e(t) + b_1 \frac{d}{dt}e(t)$;
- (2) $\frac{d^2}{dt^2}r(t) + a_1 \frac{d}{dt}r(t) + a_0 r(t) = b_0 e(t) + b_1 \frac{d}{dt}e(t)$ 。

1-20 判断下列系统是否为线性的、时不变的、因果的?

- (1) $r(t) = \frac{de(t)}{dt}$;
- (2) $r(t) = e(t)u(t)$;
- (3) $r(t) = \sin[e(t)]u(t)$;
- (4) $r(t) = e(1-t)$;
- (5) $r(t) = e(2t)$;
- (6) $r(t) = e^2(t)$;
- (7) $r(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau)d\tau$;
- (8) $r(t) = \int_{-\infty}^{5t} e(\tau)d\tau$ 。

1-21 判断下列系统是否是可逆的。若可逆, 给出它的逆系统; 若不可逆, 指出使该系统产生相同输出的两个输入信号。

- (1) $r(t) = e(t-5)$;

- (2) $r(t) = \frac{d}{dt}e(t);$
 (3) $r(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau;$
 (4) $r(t) = e(2t).$

1-22 若输入信号为 $\cos(\omega_0 t)$, 为使输出信号中分别包含以下频率成分:

- (1) $\cos(2\omega_0 t);$
 (2) $\cos(3\omega_0 t);$
 (3) 直流。

请你分别设计相应的系统(尽可能简单)满足此要求, 给出系统输出与输入的约束关系式。讨论这三种要求有何共同性、相应的系统有何共同性。

1-23 有一线性时不变系统, 当激励 $e_1(t) = u(t)$ 时, 响应 $r_1(t) = e^{-at}u(t)$, 试求当激励 $e_2(t) = \delta(t)$ 时, 响应 $r_2(t)$ 的表示式。(假定起始时刻系统无储能。)

第二章 连续时间系统的时域分析

2.1 引言

连续时间系统处理连续时间信号，通常用微分方程来描述这类系统，也就是系统的输入与输出之间通过它们时间函数及其对时间 t 的各阶导数的线性组合联系起来。如果输入与输出只用一个高阶的微分方程相联系，而且不研究系统内部其他信号的变化，这种描述系统的方法称为输入—输出法或端口描述法。系统分析的任务是对给定的系统模型和输入信号求系统的输出响应。分析系统的方法很多，其中时域分析法不通过任何变换，直接求解系统的微分、积分方程，系统的分析与计算全部在时间变量领域内进行，这种方法直观，物理概念清楚，是学习各种变换域分析方法的基础。目前计算机技术的发展及各种算法软件的开发，使这一经典的方法重新得到广泛的关注和应用。

系统时域分析法包含两方面内容，一是微分方程的求解，另一是已知系统单位冲激响应，将冲激响应与输入激励信号进行卷积积分，求出系统输出响应。本章将对这两种方法进行阐述。在微分方程求解中，除去复习数学中经典解法外，着重说明解的物理意义。同时作为近代系统时域分析方法，将建立零输入响应和零状态响应两个重要的基本概念，它使线性系统分析在理论上更完善，为解决实际问题带来方便。虽然用卷积积分只能得到系统的零状态响应，但它的物理概念明确，运算过程方便，往往成为系统分析的基本方法，是近代计算分析系统的强有力工具。卷积积分也是时间域与变换域分析线性系统的一条纽带，通过它把变换域分析赋以清晰的物理概念。

本章还将说明微分方程的算子符号表示法，它使微分积分方程的表示及某些运算简化，同时也是从时域经典法向拉普拉斯变换法的一种过渡。

本章最后初步介绍“分配函数”概念，对奇异函数赋以数学上的严格定义，将对它的认识提到一个新的高度。

2.2 微分方程式的建立与求解

为建立线性系统的数学模型，需列出描述系统特性的微分方程表示式。为

此对给定的具体系统物理模型，要按照元件的约束特性及系统结构的约束特性来建立对应的微分方程。现举例说明微分方程的建立方法。

例 2-1 图2-1所示为RLC并联电路，求并联电路的端电压 $v(t)$ 与激励源 $i_s(t)$ 间的关系。

解 把 $v(t)$ 作为变量，根据元件的电压电流关系有：

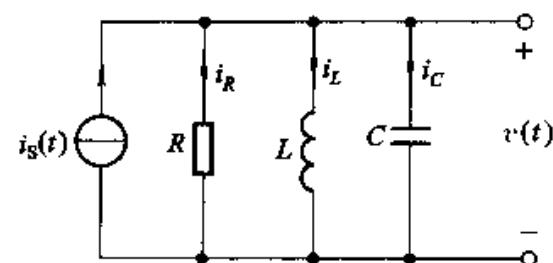


图2-1 RLC并联电路

$$\text{电阻: } i_R(t) = \frac{1}{R}v(t) \quad (2-1)$$

$$\text{电感: } i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (2-2)$$

$$\text{电容: } i_C(t) = C \frac{d}{dt}v(t) \quad (2-3)$$

对整个电路，根据基尔霍夫电流定律有

$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = i_s(t)$$

把式(2-1)、式(2-2)和式(2-3)代入上式并化简，有

$$C \frac{d^2}{dt^2}v(t) + \frac{1}{R} \frac{d}{dt}v(t) + \frac{1}{L}v(t) - \frac{1}{L}i_s(t) \quad (2-4)$$

例 2-2 图2-2所示为机械位移系统，质量为 m 的刚体一端由弹簧牵引，弹簧的另一端固定在壁上。刚体与地面间的摩擦系数为 f ，外加牵引力为 $F_s(t)$ ，求外加牵引力 $F_s(t)$ 与刚体运动速度 $v(t)$ 间的关系。

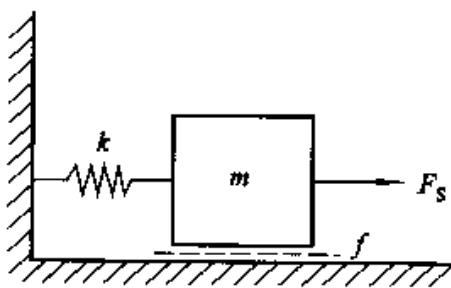


图2-2 机械位移系统

解 由机械系统元件特性：弹簧在弹性限度内，拉力 F_k 与位移 x 成正比， $x(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$ ，设刚度系数为 k ，有

$$F_k(t) = k \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (2-5)$$

刚体在光滑表面滑动，摩擦力 $F_f(t)$ 与速度 $v(t)$ 成正比

$$F_f(t) = f \cdot v(t) \quad (2-6)$$

其中 f 为摩擦系数。

运动物体的惯性力由牛顿第二定律决定

$$F_m(t) = m \frac{d}{dt}v(t) \quad (2-7)$$

整个系统力的平衡由达朗贝尔原理确定，因而有

$$m \frac{d}{dt}v(t) + f \cdot v(t) + k \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = F_s(t)$$

化简得

$$m \frac{d^2}{dt^2}v(t) + f \frac{d}{dt}v(t) + kv(t) = \frac{d}{dt}F_s(t) \quad (2-8)$$

上式即为图 2-2 所示机械位移系统的微分方程表示。

例 2-1 和例 2-2 是两个不同性质的系统，但对比式(2-4)和式(2-8)表明两者具有相同的数学模型。如果把机械位移系统中的机械量通过表 2-1 的类比，就可以得到机械系统的等效类比电路表示，把机械的问题用等效类比电路来描述，这就是机械系统的机电类比法，它是分析机械系统动态特性的方法之一。由于近代电路分析手段越来越多，功能越来越强，因而用机电类比法分析机械系统的动态特性又重新引起人们的关注。

表 2-1 机械量与电量的类比

机 械 量	电 量	对偶电 量
速度 v	电压 v	电流 i
力 F	电流 i	电压 v
功率 $v \cdot F$	功率 $v \cdot i$	功率 $i \cdot v$
摩擦系数 f	电导 G	电阻 R
摩擦力 $F_f = f \cdot v$	欧姆定律 $i = Gv$	欧姆定律： $v = i \cdot R$
弹性系数 k^{-1}	电感 L	电容 C
胡克定律： $F_k = k \int v(t) dt$	电磁感应定律 $i = \frac{1}{L} \int v(t) dt$	$v = \frac{1}{C} \int i(t) dt$
质量 m	电容 C	电感 L
$F = m \frac{d}{dt}v(t)$	$i_C = C \frac{d}{dt}v_C(t)$	$v_L = L \frac{d}{dt}i_L(t)$
达朗贝尔原理	基尔霍夫电流定律	
$\sum_{i=1}^N F_i = 0$	$\sum_{k=1}^N i_k = 0$	
$\sum_{k=1}^M v_k = 0$	基尔霍夫电压定律	
	$\sum_{k=1}^N v_k = 0$	

上面通过两个例子说明了系统微分方程的列写方法。如果组成系统的元件都是参数恒定的线性元件(且无储能)，则构成的系统是线性时不变系统，体现在方程形式上是一线性常系数常微分方程。

对于复杂系统，设激励信号为 $e(t)$ ，系统响应为 $r(t)$ ，则可以用一高阶的微分方程表示

$$C_0 \frac{d^n}{dt^n}r(t) + C_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t) + \cdots + C_{n-1} \frac{d}{dt}r(t) + C_n r(t)$$

$$= E_0 \frac{d^m}{dt^m} e(t) + E_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e(t) + \cdots + E_{m-1} \frac{d}{dt} e(t) + E_m e(t) \quad (2-9)$$

由时域经典解法可知, 方程式(2-9)的完全解由两部分组成: 齐次解与特解。齐次解满足式(2-9)中右端激励 $e(t)$ 及其各阶导数都为零的齐次方程, 即

$$C_0 \frac{d^n}{dt^n} r(t) + C_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r(t) + \cdots + C_{n-1} \frac{d}{dt} r(t) + C_n r(t) = 0 \quad (2-10)$$

齐次解的形式是形如 $Ae^{\alpha t}$ 函数的线性组合, 令 $r(t) = Ae^{\alpha t}$, 代入式(2-10)则有

$$C_0 A \alpha^n e^{\alpha t} + C_1 A \alpha^{n-1} e^{\alpha t} + \cdots + C_{n-1} A \alpha e^{\alpha t} + C_n A e^{\alpha t} = 0$$

化简得

$$C_0 \alpha^n + C_1 \alpha^{n-1} + \cdots + C_{n-1} \alpha + C_n = 0 \quad (2-11)$$

如果 α_k 是式(2-11)的根, 则 $r(t) = Ae^{\alpha_k t}$ 将满足式(2-10)。称式(2-11)为微分方程(2-9)的特征方程, 对应的 n 个根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 称为微分方程的特征根。

在特征根各不相同(无重根)的情况下, 微分方程的齐次解为

$$r_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + A_n e^{\alpha_n t} = \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t} \quad (2-12)$$

其中常数 A_1, A_2, \dots, A_n 由初始条件决定。

若特征方程(2-11)有重根, 例如 α_1 是方程(2-11)的 k 阶重根, 即

$$C_0 \alpha^n + C_1 \alpha^{n-1} + \cdots + C_{n-1} \alpha + C_n = C_0 (\alpha - \alpha_1)^k \prod_{i=2}^{n-k+1} (\alpha - \alpha_i) \quad (2-13)$$

则相应于 α_1 的重根部分将有 k 项, 形如

$$(A_1 t^{k-1} + A_2 t^{k-2} + \cdots + A_{k-1} t + A_k) e^{\alpha_1 t} = \left(\sum_{i=1}^k A_i t^{k-i} \right) e^{\alpha_1 t} \quad (2-14)$$

不难证明其中的每一项都满足式(2-10)的齐次方程。

例 2-3 求微分方程 $\frac{d^3}{dt^3} r(t) + 7 \frac{d^2}{dt^2} r(t) + 16 \frac{d}{dt} r(t) + 12 r(t) = e(t)$

的齐次解。

解 系统的特征方程为

$$\begin{aligned} \alpha^3 + 7\alpha^2 + 16\alpha + 12 &= 0 \\ (\alpha + 2)^2(\alpha + 3) &= 0 \end{aligned}$$

特征根: $\alpha_1 = -2$ (重根), $\alpha_2 = -3$

因而对应的齐次解为

$$r_h(t) = (A_1 t + A_2) e^{-2t} + A_3 e^{-3t}$$

微分方程特解 $r_p(t)$ 的函数形式与激励函数形式有关。将激励 $e(t)$ 代入方程式(2-9)的右端, 化简后右端函数式称为“自由项”。通常由观察自由项试选特解函数式, 代入方程后求得特解函数式中的待定系数, 即可给出特解 $r_p(t)$ 。

几种典型激励信号对应的特解函数式列于表 2-2，求解方程时可以参考。

表 2-2 与几种典型激励函数相应的特解

激励函数 $e(t)$	响应函数 $r(t)$ 的特解
E (常数)	B
t^p	$B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}$
e^{at}	$B e^{at}$
$\cos(\omega t)$	$B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$
$\sin(\omega t)$	
$t^p e^{at} \cos(\omega t)$	$(B_1 t^p + \cdots + B_p t + B_{p+1}) e^{at} \cos(\omega t)$
$t^p e^{at} \sin(\omega t)$	$+ (D_1 t^p + \cdots + D_p t + D_{p+1}) e^{at} \sin(\omega t)$

注：(1) 表中 B 、 D 是待定系数。

(2) 若 $e(t)$ 由几种激励函数组合，则特解也为其相应的组合。

(3) 若表中所列特解与齐次解重复，则应在特解中增加一项： t 倍乘表中特解。若这种重复形式有 k 次 (特征根为 k 重根)，则依次增加倍乘 t ， t^2 ， \dots ， t^k 诸项。例如 $e(t) = e^{\alpha t}$ ，而齐次解也是 $e^{\alpha t}$ (特征根 $\alpha = \alpha$)，则特解为 $B_0 t e^{\alpha t} + B_1 e^{\alpha t}$ 。若 α 是 k 重根，则特解为 $B_0 t^k e^{\alpha t} + B_1 t^{k-1} e^{\alpha t} + \cdots + B_k e^{\alpha t}$

例 2-4 给定微分方程式

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 2 \frac{dr(t)}{dt} + 3r(t) = \frac{de(t)}{dt} + e(t)$$

如果已知：(1) $e(t) = t^2$ ；(2) $e(t) = e^t$ ，分别求两种情况下此方程的特解。

解

(1) 将 $e(t) = t^2$ 代入方程右端，得到 $t^2 + 2t$ ，为使等式两端平衡，试选特解函数式

$$r_p(t) = B_1 t^2 + B_2 t + B_3$$

这里， B_1 ， B_2 ， B_3 为待定系数。将此式代入方程得到

$$3B_1 t^2 + (4B_1 + 3B_2)t + (2B_1 + 2B_2 + 3B_3) = t^2 + 2t$$

等式两端各对应幂次的系数应相等，于是有

$$\begin{cases} 3B_1 = 1 \\ 4B_1 + 3B_2 = 2 \\ 2B_1 + 2B_2 + 3B_3 = 0 \end{cases}$$

联解得到：

$$B_1 = \frac{1}{3}, \quad B_2 = \frac{2}{9}, \quad B_3 = -\frac{10}{27}$$

所以，特解为

$$r_p(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{10}{27}$$

(2) 当 $e(t) = e^t$ 时, 很明显, 可选 $r(t) = Be^t$ 。这里, B 是待定系数。代入方程后有:

$$Be^t + 2Be^t + 3Be^t = e^t + e^t$$

$$B = \frac{1}{3}$$

于是, 特解为 $\frac{1}{3}e^t$ 。

上面求出的齐次解 $r_h(t)$ 和特解 $r_p(t)$ 相加即得方程的完全解

$$r(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t} + r_p(t) \quad (2-15)$$

给定微分方程和激励信号 $e(t)$, 方程有惟一解还必须给出一组求解区间内的边界条件, 用以确定式(2-15)中的常数 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$)。对于 n 阶微分方程, 若 $e(t)$ 是 $t = 0$ 时刻加入, 则把求解区间定为 $0_+ \leq t < \infty$, 一组边界条件可以给定为在此区间内任一时刻 t_0 , 要求解满足 $r(t_0), \frac{d}{dt}r(t_0), \frac{d^2}{dt^2}r(t_0), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t_0)$ 的各值。通常取 $t_0 = 0_+$, 这样对应的 - 组条件就称为初始条件, 记为 $r^{(k)}(0_+)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$)。把 $r^{(k)}(0_+)$ 代入式(2-15), 有:

$$\left\{ \begin{array}{l} r(0_+) = A_1 + A_2 + \dots + A_n + r_p(0_+) \\ \frac{d}{dt}r(0_+) = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \dots + A_n\alpha_n + \frac{d}{dt}r_p(0_+) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(0_+) = A_1\alpha_1^{n-1} + A_2\alpha_2^{n-1} + \dots + A_n\alpha_n^{n-1} + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r_p(0_+) \end{array} \right. \quad (2-16)$$

由此可以求出要求的常数 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$)。用矩阵形式表示:

$$\left[\begin{array}{c} r(0_+) = r_p(0_+) \\ \frac{d}{dt}r(0_+) = \frac{d}{dt}r_p(0_+) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(0_+) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r_p(0_+) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & \vdots & 1 & | A_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \vdots & \alpha_n & | A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} & | A_n \end{array} \right] \quad (2-17)$$

其中由各 α_i 值构成的矩阵称为范德蒙德矩阵(Vandermonde Matrix)。由于 α_i 值各不相同, 因而它的逆矩阵存在, 这样就可以惟一地确定常数 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$)。

以上简单回顾了线性常系数微分方程的经典解法。从系统分析的角度, 称线性常系数微分方程描述的系统为时不变系统。式(2-9)中齐次解表示系统的自由响应。由式(2-11)表示系统特性的特征方程根 α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 称为系统的“固有频率”(或“自由频率”、“自然频率”), 它决定了系统自由响应的全部形式。完全解中的特解称为系统的强迫响应, 可见强迫响应只与激励函数的

形式有关。整个系统的完全响应是由系统自身特性决定的自由响应 $r_h(t)$ 和与外加激励信号 $e(t)$ 有关的强迫响应 $r_p(t)$ 两部分组成，即式(2-15)。

2.3 起始点的跳变——从 0_- 到 0_+ 状态的转换

在系统分析中，把响应区间确定为激励信号 $e(t)$ 加入之后系统状态变化区间。一般激励 $e(t)$ 都是从 $t=0$ 时刻加入，这样系统的响应区间定为 $0_+ \leq t < \infty$ 。如果系统在激励信号加入之前瞬间有一组状态，定为

$$r^{(k)}(0_-) = [r(0_-), \frac{d}{dt}r(0_-), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(0_-)] \quad (2-18)$$

这组状态被称为系统的起始状态(简称 0_- 状态)，它包含了为计算未来响应的全部“过去”信息。在激励信号 $e(t)$ 加入之后，由于受激励的影响，这组状态从 $t=0_-$ 到 $t=0_+$ 时刻可能发生变化。确定完全响应表示式(2-15)中常数 A_i ($i=1, 2, \dots, n$)是由响应区间内 $t=0_+$ 时刻的一组状态确定的：

$$r^{(k)}(0_+) = [r(0_+), \frac{d}{dt}r(0_+), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(0_+)] \quad (2-19)$$

所以称这组状态为初始条件(简称 0_+ 状态，也称“导出的起始状态”)。

可见用时域经典法求解系统响应时，为确定自由响应部分的常数 A_i ($i=1, 2, \dots, n$)，还必须根据系统的 0_- 状态和激励信号情况求出 0_+ 状态。对于一个具体的电网络，系统的 0_- 状态就是系统中储能元件的储能情况，因此在一般情况下，首先求出 $v_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ ，即电容上的起始电压和电感中的起始电流。当电路中没有冲激电流(或阶跃电压)强迫作用于电容以及没有冲激电压(或阶跃电流)强迫作用于电感，则换路期间电容两端的电压和流过电感中的电流不会发生突变，即 $v_C(0_-) = v_C(0_+)$, $i_L(0_-) = i_L(0_+)$ ，然后根据元件特性约束和网络拓扑约束求得 0_+ 时刻其他电流或电压值。下面通过具体例子，说明这种情况下电路响应的求解方法。

例 2-5 给定如图2-3所示电路， $t < 0$ 开关S处于1的位置而且已经达到稳态；当 $t = 0$ 时，S由1转向2。建立电流 $i(t)$ 的微分方程并求解 $i(t)$ 在 $t \geq 0_+$ 时的变化。

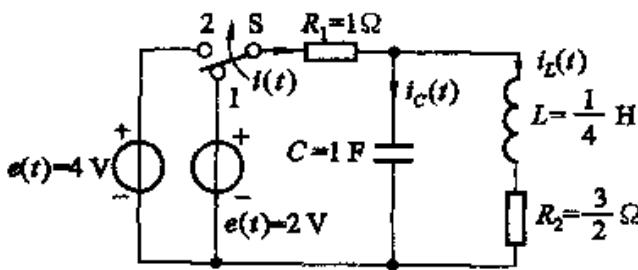


图 2-3 例 2-5 电路

解 (1) 列写电路的微分方程
根据电路形式，列回路方程：

$$R_1 i(t) + v_C(t) = e(t)$$

$$v_C(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) + i_L(t) R_2$$

列结点方程

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t) + i_L(t)$$

先消去变量 $v_C(t)$ 得：

$$\frac{d}{dt}i(t) = -\frac{1}{R_1C}i(t) + \frac{1}{R_1C}i_L(t) + \frac{1}{R_1}\frac{d}{dt}e(t)$$

$$\frac{d}{dt}i_L(t) = -\frac{R_1}{L}i(t) - \frac{R_2}{L}i_L(t) + \frac{1}{L}e(t)$$

再消去变量 $i_L(t)$ ，整理得

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}i(t) + \left(\frac{1}{R_1C} + \frac{R_2}{L}\right)\frac{d}{dt}i(t) + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_2}{R_1LC}\right)i(t) \\ &= \frac{1}{R_1}\frac{d^2}{dt^2}e(t) + \frac{R_2}{R_1L}\frac{d}{dt}e(t) + \frac{1}{R_1LC}e(t) \end{aligned}$$

把电路参数代入得

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t) + 7\frac{d}{dt}i(t) + 10i(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 6\frac{d}{dt}e(t) + 4e(t) \quad (2-20)$$

(2) 求系统的完全响应

齐次解：

系统的特征方程：

$$\alpha^2 + 7\alpha + 10 = 0$$

$$(\alpha + 2)(\alpha + 5) = 0$$

特征根：

$$\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -5$$

齐次解： $i_h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} \quad (t \geq 0_+)$

特解：由于 $t \geq 0_+$ 时 $e(t) = 4$ V

方程右端的自由项为 4×4 ，因此令特解 $i_p(t) = B$ ，代入方程(2-20)

$$10B = 4 \times 4$$

所以

$$B = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

要求系统的完全响应为

$$i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{8}{5} \quad (t \geq 0_+)$$

(3) 确定换路后的 $i(0_+)$ 和 $\frac{d}{dt}i(0_+)$

$$\text{换路前} \quad i(0_-) = i_L(0_-) = \frac{2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{5} \text{ A}$$

$$\frac{d}{dt}i(0_-) = 0$$

$$v_C(0_-) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} \text{ V} = \frac{6}{5} \text{ V}$$

换路后的 $i(0_+)$ 和 $\frac{d}{dt}i(0_+)$ ：

由于电容两端电压和电感中的电流不会发生突变，因而有：

$$i(0_+) = \frac{1}{R_1} [e(0_+) + v_C(0_+)] = \frac{1}{1} \left(4 - \frac{6}{5} \right) A = \frac{14}{5} A$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i(0_+) &= \frac{1}{R_1} \left[\frac{d}{dt} e(0_+) - \frac{d}{dt} v_C(0_+) \right] = \frac{1}{R_1} \left[\frac{d}{dt} e(0_+) - \frac{1}{C} (i(0_+) - i_L(0_+)) \right] \\ &= \frac{1}{1} \left[0 - \frac{1}{1} \left(\frac{14}{5} - \frac{4}{5} \right) \right] A/s = -2 A/s \end{aligned}$$

(4) 求 $i(t)$ 在 $t \geq 0_+$ 时的完全响应

由 $i(t)$ 的表示式

$$\begin{cases} i(0_+) = A_1 + A_2 + \frac{8}{5} = \frac{14}{5} \\ \frac{d}{dt} i(0_+) = -2A_1 - 5A_2 = -2 \end{cases}$$

求得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{4}{3} \\ A_2 = -\frac{2}{15} \end{cases}$$

要求的完全响应为

$$i(t) = \left(\frac{4}{3} e^{-2t} - \frac{2}{15} e^{-5t} + \frac{8}{5} \right) A \quad (t \geq 0_+)$$

当系统已经用微分方程表示时, 系统的 0_- 状态到 0_+ 状态有没有跳变决定于微分方程右端自由项是否包含 $\delta(t)$ 及其各阶导数。如果包含有 $\delta(t)$ 及其各阶导数, 说明相应的 0_- 到 0_+ 状态发生了跳变, 即 $r(0_+) \neq r(0_-)$ 或 $r'(0_+) \neq r'(0_-)$ 等等。这时为确定 $r(0_+)$ 、 $r'(0_+)$ 等 0_+ 状态值, 可以用冲激函数匹配法。它的原理是根据 $t=0$ 时刻微分方程左右两端的 $\delta(t)$ 及其各阶导数应该平衡相等。我们看一简单例子, 如果描述系统的微分方程为

$$\frac{d}{dt} r(t) + 3r(t) = 3\delta'(t) \quad (2-21)$$

给定 0_- 状态起始值为 $r(0_-)$, 确定它的 0_+ 状态 $r(0_+)$ 。

由给定的方程可以看出, 由于方程右端存在 $\delta'(t)$, 因而可以断定 $\frac{d}{dt} r(t)$ 必定含 $3\delta'(t)$, 由此推出 $r(t)$ 包含 $3\delta(t)$; 而方程右端没有 $\delta(t)$ 项, 因此 $\frac{d}{dt} r(t)$ 除含有 $3\delta'(t)$ 以外, 还必须包含 $-9\delta(t)$ 项, 以平衡 $3r(t)$ 产生的 $9\delta(t)$ 项。由于 $\frac{d}{dt} r(t)$ 含 $-9\delta(t)$, 得出 $r(t)$ 在 $t=0$ 时刻有 $-9\Delta u(t)$ 存在, 其中 $\Delta u(t)$ 表示 0_- 到 0_+ 相对单位跳变函数, 因而有: $r(0_+) - r(0_-) = -9$, 即 $r(0_+) = -9 + r(0_-)$ 。这就是冲激函数及其导数平衡匹配过程。

上述过程可以用数学方法描述。由式(2-21)表示的方程知, 方程右端含

$\delta'(t)$, 它一定是属于 $\frac{d}{dt}r(t)$, 因而可以设

$$\frac{d}{dt}r(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t) \quad (2-22)$$

积分一次

$$r(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \quad (2-23)$$

把式(2-22)和式(2-23)代入方程式(2-21)

$$[a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t)] + 3[a\delta(t) + b\Delta u(t)] = 3\delta'(t)$$

得出

$$\begin{cases} a = 3 \\ b + 3a = 0 \\ c + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \\ c = 9 \end{cases}$$

所以有

$$\begin{cases} b = -9 \\ c = 9 \end{cases}$$

要求的

$$r(0_+) - r(0_-) = b = -9$$

或

$$r(0_+) = -9 + r(0_-)$$

式(2-23)表明, 对式(2-21)表示的微分方程除去齐次解以外, 还含有 $3\delta(t)$ 项。冲激函数匹配法也是对微分方程右端含 $\delta(t)$ 或其各阶导数的方程求解方法。

例 2-6 用冲激函数匹配法求解例 2-5 中式(2-20)的完全响应 $r(t)$ 。

解 (1) 根据给定的 $e(t)$, 考虑到 $e(t)$ 在换路过程中的变化如图 2-4 所示, 即在 $t=0$ 时刻由 2 V 跳变到 4 V, 代入方程(2-20), 求得 $t \geq 0$ 时微分方程表示为

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}i(t) + 7 \frac{d}{dt}i(t) + 10i(t) \\ &= 2\delta'(t) + 12\delta(t) + 16u(t) \quad (2-24) \end{aligned}$$

(2) 已知 $i(0_-) = \frac{4}{5}$ A 和 $\frac{d}{dt}i(0_-) = 0$ A/s,

用冲激函数匹配法, 求 $i(0_+)$ 和 $\frac{d}{dt}i(0_+)$ 。

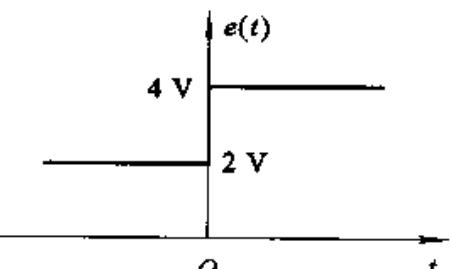


图 2-4 激励 $e(t)$ 从 0₋到 0₊的变化

由式(2-24), 方程右端的冲激函数项最高阶次是 $\delta'(t)$, 因而有

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}i(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t) \\ \frac{d}{dt}i(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \quad (0_- < t < 0_+) \\ i(t) = a\Delta u(t) \end{cases} \quad (2-25)$$

代入式(2-24)

$$[a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t)] + 7[a\delta(t) + b\Delta u(t)] + 10a\Delta u(t) = 2\delta'(t) + 12\delta(t) + 16\Delta u(t)$$

求得

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 7a = 12 \\ c + 7b + 10a = 16 \end{cases}$$

因而有

$$\begin{cases} i(0_+) - i(0_-) = a = 2 \\ \frac{d}{dt}i(0_+) - \frac{d}{dt}i(0_-) = b = -2 \\ \frac{d^2}{dt^2}i(0_+) - \frac{d^2}{dt^2}i(0_-) = c = 10 \end{cases}$$

要求的 0_+ 状态为

$$\begin{cases} i(0_+) = 2 + i(0_-) = \left(2 + \frac{4}{5}\right) A = \frac{14}{5} A \\ \frac{d}{dt}i(0_+) = -2 + \frac{d}{dt}i(0_-) = -2 A/s \end{cases}$$

其余求解步骤与例 2-5 相同，读者可自行完成。

至此可将求解微分方程的流程示于图 2-5。

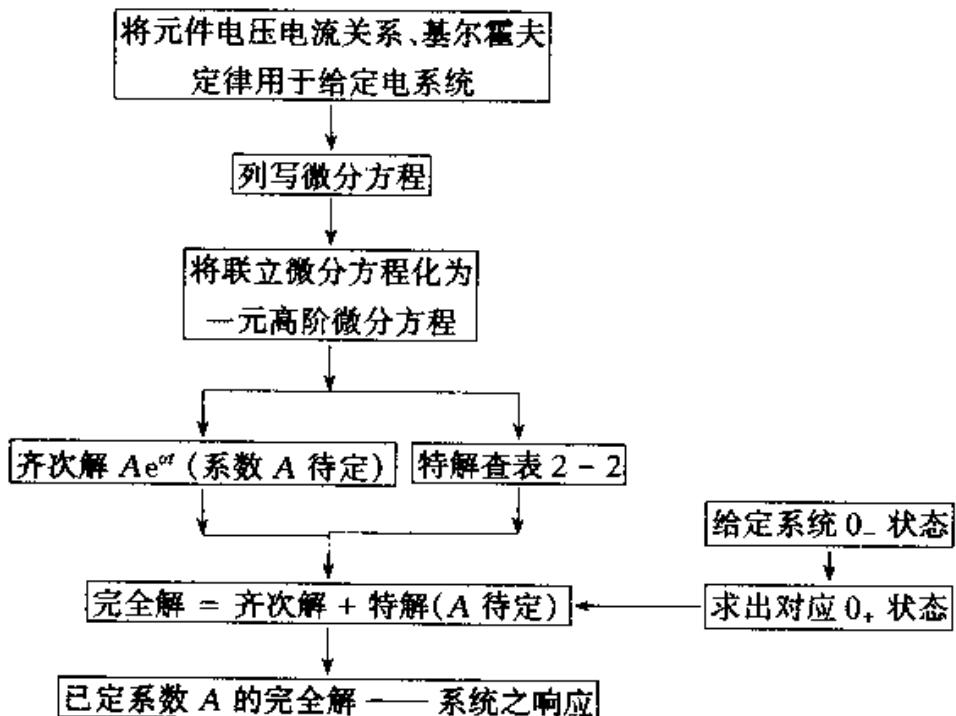


图 2-5 求解线性、常系数微分方程的流程图

2.4 零输入响应和零状态响应

由时域经典法求解系统完全响应是把响应分成自由响应和强迫响应。为确

定完全响应中的常数往往利用冲激函数匹配法，把给定的 0_- 状态转换成 0_+ 状态以便求解，系统响应这种分解只是一种形式。另一种广泛应用的重要分解是零输入响应和零状态响应，我们先考察一个实例。

例 2-7 设有如图2-6所示RC电路，电容两端有起始电压 $v_C(0_-)$ ，激励源为 $e(t)$ ，求 $t > 0$ 时系统响应——电容两端电压 $v_C(t)$ 。

解 不难求得描述系统的微分方程为

$$\frac{d}{dt}v_C(t) + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}e(t)$$

为求解此方程，将上列方程两端乘以 $e^{\frac{t}{RC}}$ ：

$$e^{\frac{t}{RC}} \frac{d}{dt}v_C(t) + \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}} v_C(t) = \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}} e(t)$$

或写作

$$\frac{d}{dt}[e^{\frac{t}{RC}} v_C(t)] = \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}} e(t)$$

两边求积分：

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[e^{\frac{\tau}{RC}} v_C(\tau)] d\tau = \int_0^t \frac{1}{RC}e^{\frac{\tau}{RC}} e(\tau) d\tau$$

$$e^{\frac{t}{RC}} v_C(t) - v_C(0_-) = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} e(\tau) d\tau$$

得

$$v_C(t) = e^{-\frac{t}{RC}} v_C(0_-) + \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} e(\tau) d\tau \quad (2-26)$$

式(2-26)表明，完全响应 $v_C(t)$ 中的第一项只和电容两端的起始储能 $v_C(0_-)$ 有关，与输入激励无关，被称为零输入响应。第二项与起始储能无关，只与输入激励有关，被称为零状态响应。

一般情况，设系统是线性时不变的，把输出响应分成由激励信号 $e(t)$ 引起的响应 $H[e(t)]$ ，和由系统起始状态 $\{x(0_-)\}$ 引起的响应 $H[\{x(0_-)\}]$ 两者的叠加。由此可以分别定义零输入响应和零状态响应，如图 2-7 所示(其中 $H[\cdot]$ 表示系统作用的结果)。

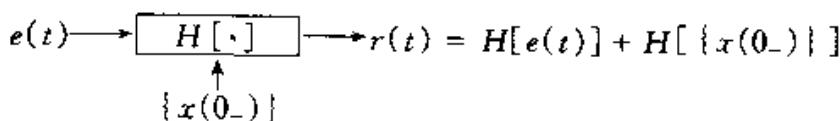


图 2-7 含起始状态系统方框图

零输入响应定义为：没有外加激励信号的作用，只有起始状态(起始时刻系统储能)所产生的响应，如图 2-7 中的 $H[\{x(0_-)\}]$ 项，并记为 $r_n(t)$ 。它是满足方程

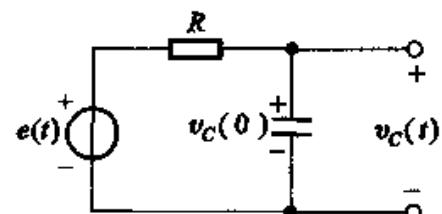


图 2-6 例 2-7 RC 电路

$$C_0 \frac{d^n}{dt^n} r_{zi}(t) + C_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r_{zi}(t) + \cdots + C_{n-1} \frac{d}{dt} r_{zi}(t) + C_n r_{zi}(t) = 0 \quad (2-27)$$

及起始状态 $r^{(k)}(0_-)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) 的解, 可见它是齐次解中的一部分

$$r_{zi}(t) = \sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t} \quad (2-28)$$

由于没有外界激励作用, 因而系统的状态不会发生变化, 亦即 $r^{(k)}(0_+) = r^{(k)}(0_-)$, 所以 $r_{zi}(t)$ 中的常数 A_{zik} 可以由 $r^{(k)}(0_-)$ 确定。

零状态响应定义为: 不考虑起始时刻系统储能的作用(起始状态等于零), 由系统的外加激励信号所产生的响应, 如图 2-7 中的 $H[e(t)]$ 项, 并记为 $r_{zs}(t)$ 。它满足方程

$$\begin{aligned} & C_0 \frac{d^n}{dt^n} r_{zs}(t) + C_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r_{zs}(t) + \cdots + C_{n-1} \frac{d}{dt} r_{zs}(t) + C_n r_{zs}(t) \\ &= E_0 \frac{d^m}{dt^m} e(t) + E_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e(t) + \cdots + E_{m-1} \frac{d}{dt} e(t) + E_m e(t) \end{aligned} \quad (2-29)$$

及起始状态 $r^{(k)}(0_-) = 0$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$), 其形式为

$$r_{zs}(t) = \sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{\alpha_k t} + B(t) \quad (2-30)$$

其中 $B(t)$ 是特解。可见零状态响应在激励信号作用下, 它的响应有自由响应的一部分及强迫响应 $B(t)$ 构成。

通过以上分析, 可以写出系统响应的表示式

$$\begin{aligned} r(t) &= \underbrace{\sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{\alpha_k t} + B(t)}_{\text{零状态响应}} \end{aligned} \quad (2-31)$$

例2-8 对例2-5 中的电路, 把 $t < 0$ 电路看作起始状态, 分别求 $t > 0$ 时 $i(t)$ 的零输入响应和零状态响应。

解 如果把 $t < 0$ 电路转换成电容和电感中的起始储能 $v_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$, 则可以画出如图 2-8 所示的带有起始储能的电路, 其中电容起始储能等效为电压源 $v_C(0_-) = \frac{6}{5}$ V, 电感中的起始电流等效为电流源 $i_L(0_-) = \frac{4}{5}$ A。系统的微分方程表示同式(2-20)。

1. 零输入响应: 此时令外加激励源 $e(t) = 0$, 系统在 $t \geq 0_+$ 时刻的等效电路如图 2-9 所示, 电路将在 $v_C(0_-) = \frac{6}{5}$ V 和 $i_L(0_-) = \frac{4}{5}$ A 的作用下工作。

根据图 2-9 系统满足微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}i_{zi}(t) + 7 \frac{d}{dt}i_{zi}(t) + 10i_{zi}(t) = 0$$

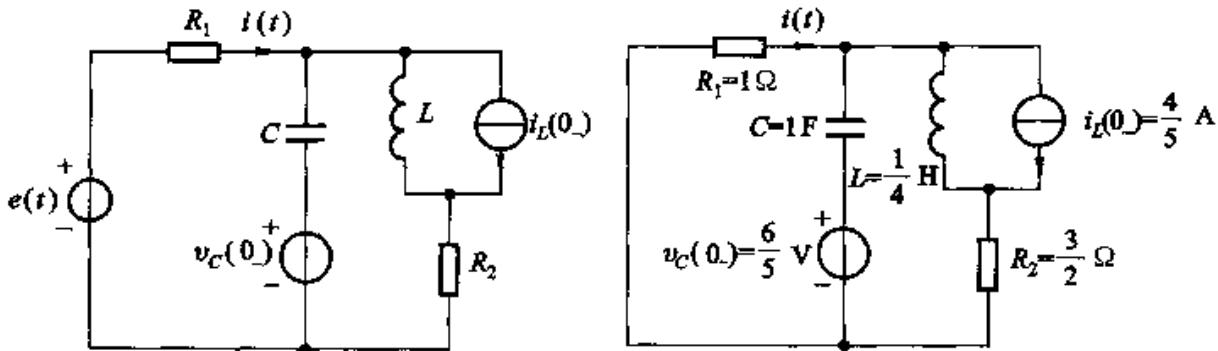


图 2-8 带有起始状态等效电路

图 2-9 零输入等效电路

和 $i_{zi}(0_+)$ 及 $\frac{d}{dt}i_{zi}(0_+)$ 的解。由于没有外加电源的作用整个电路是在电容上的储能 $v_C(0_-)$ 和电感中的储能 $i_L(0_-)$ 作用下工作，也就是能量释放过程，因此求解 $i_{zi}(0_+)$ 和 $\frac{d}{dt}i_{zi}(0_+)$ 是根据 $v_C(0_+) = v_C(0_-)$ 和 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 来求得的。为此画出电路在 $t = 0_+$ 时刻的初始值等效电路，如图 2-10 所示（注意电容相当于短路，电感相当于开路）。由图求得：

$$i_{zi}(0_+) = -\frac{1}{R_1}v_C(0_-) = -\frac{6}{5} \text{ A}$$

$$i_C(0_+) = C \frac{d}{dt}v_C(0_+) = C \frac{d}{dt}[-R_1 \cdot i_{zi}(0_+)] = i_{zi}(0_+) - i_L(0_+)$$

所以得

$$\frac{d}{dt}i_{zi}(0_+) = -\frac{1}{R_1 C}[i_{zi}(0_+) - i_L(0_+)] = 2 \text{ A/s}$$

零输入响应的形式

$$i_{zi}(t) = A_{zi1}e^{-2t} + A_{zi2}e^{-5t} \quad (t \geq 0_+)$$

用 $i_{zi}(0_+)$ 和 $\frac{d}{dt}i_{zi}(0_+)$ 代入求出常数

$$\begin{cases} A_{zi1} = -\frac{4}{3} \\ A_{zi2} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

要求的零输入响应

$$i_{zi}(t) = \left(-\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{-5t} \right) \text{ A} \quad (t > 0) \quad (2-32)$$

2. 零状态响应：此时对应的电路形式如图 2-11 所示。它满足微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}i_{zs}(t) + 7 \frac{d}{dt}i_{zs}(t) + 10i_{zs}(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 6 \frac{d}{dt}e(t) + 4e(t)$$

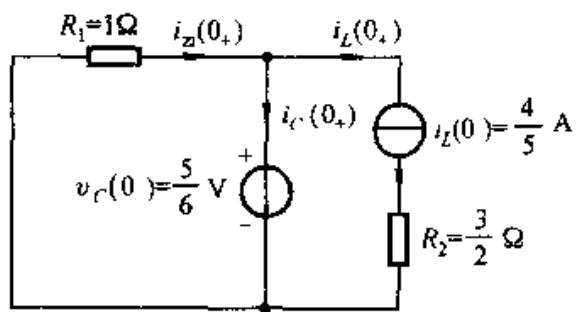


图 2-10 初始值等效电路

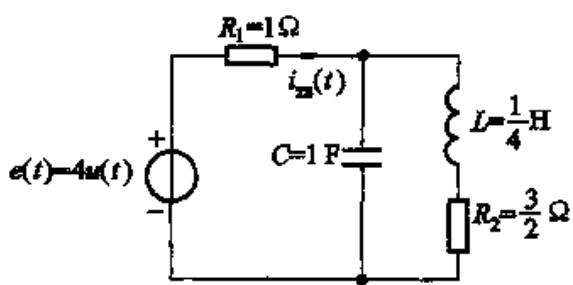


图 2-11 零状态等效电路

及起始状态 \$i_{zs}(0_-) = \frac{d}{dt}i_{zs}(0_-) = 0\$ 和 \$e(t) = 4u(t)\$ 的解。

由例 2-5 求得：

$$i_{zs}(t) = A_{zs1}e^{-2t} + A_{zs2}e^{-5t} + \frac{8}{5} \quad (t > 0) \quad (2-33)$$

其中 \$A_{zs1}\$ 和 \$A_{zs2}\$ 由 \$i_{zs}(0_+)\$ 和 \$\frac{d}{dt}i_{zs}(0_+)\$ 来确定。

把 \$e(t) = 4u(t)\$ 代入方程右端得自由项

$$\frac{d^2}{dt^2}e(t) + 6\frac{d}{dt}e(t) + 4e(t) = 4\delta'(t) + 24\delta(t) + 16$$

利用冲激函数匹配法，由于方程右端 \$\delta(t)\$ 导数的最高阶为 \$\delta'(t)\$，因而有

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}i_{zs}(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t) \\ \frac{d}{dt}i_{zs}(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \quad (0_- < t < 0_+) \\ i_{zs}(t) = a\Delta u(t) \end{cases}$$

代入原方程

$$\begin{aligned} [a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t)] + 7[a\delta(t) + b\Delta u(t)] + 10 \cdot a\Delta u(t) \\ = 4\delta'(t) + 24\delta(t) + 16\Delta u(t) \end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases} i_{zs}(0_+) - i_{zs}(0_-) = a = 4 \\ \frac{d}{dt}i_{zs}(0_+) - \frac{d}{dt}i_{zs}(0_-) = 24 - 7a = -4 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} i_{zs}(0_+) = 4 + i_{zs}(0_-) = 4 \\ \frac{d}{dt}i_{zs}(0_+) = -4 + \frac{d}{dt}i_{zs}(0_-) = -4 \end{cases}$$

代入式(2-33)求得

$$\begin{cases} A_{zs1} = \frac{8}{3} \\ A_{zs2} = -\frac{4}{15} \end{cases}$$

系统的零状态响应

$$i_{zs}(t) = \left(\frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{4}{15}e^{-5t} + \frac{8}{5} \right) A \quad (t > 0)$$

通过上面分析，系统响应的分解可以表示为

$$\begin{aligned} i(t) &= \underbrace{\frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\frac{8}{5}}_{\text{强迫响应}} \\ &= \underbrace{\left(-\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{-5t} \right)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\left(\frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{4}{15}e^{-5t} + \frac{8}{5} \right)}_{\text{零状态响应}} \\ &= \underbrace{\left(\frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} \right)}_{\text{瞬态响应}} + \underbrace{\frac{8}{5}}_{\text{稳态响应}} \quad (t > 0) \end{aligned} \quad (2-34)$$

对响应的另一种区分是瞬态响应和稳态响应。当 $t \rightarrow \infty$ 时，响应趋于零的那部分响应分量称为瞬态响应； $t \rightarrow 0$ 时，保留下来的那部分分量称为稳态响应。在式(2-34)标出了瞬态响应和稳态响应两个分量。瞬态响应和稳态响应在系统分析中也起到很重要的作用。

在建立了零输入响应和零状态响应的概念后，进一步说明系统的线性和时不变性问题。由图 2-7 可以看出，对外加激励信号 $e(t)$ 和它对应的响应 $r_{zs}(t) = H[e(t)]$ 的关系而言，若系统的起始状态为零， $\{x_i(0_-)\} = 0$ ，则用常系数线性微分方程描述的系统是线性的和时不变的。如果起始状态 $\{x_i(0_-)\} \neq 0$ ，由于响应中零输入分量的存在，导致系统响应对外加激励 $e(t)$ 不满足叠加性和均匀性，也不满足时不变性，因而是非线性时变系统。同时由于零输入分量存在，使响应的变化不可能只发生在激励变化之后，因而系统也是非因果的。这样可以说用常系数线性微分方程描述的系统只有在起始状态为零的条件下，系统才是线性时不变的，而且是因果的。

然而如例 2-8 中所表示的，把起始状态等效成系统的激励，如电压源 $v_C(0_-)$ 和电流源 $i_L(0_-)$ ，则对零输入响应 $r_{zi}(t)$ 而言也满足叠加性和均匀性，因而可以把常系数线性微分方程描述的系统的线性加以扩展：

- (1) 响应的可分解性：系统响应可以分解为零输入响应和零状态响应。
- (2) 零状态线性：当起始状态为零时，系统的零状态响应 $r_{zs}(t)$ 对于外加激励信号 $e(t)$ 呈现线性，称为零状态线性。
- (3) 零输入线性：当外加激励为零时，系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$ 对于各起始状态呈线性关系，称为零输入线性。

以上通过对微分方程直接求解说明了系统时域分析的基本概念和方法。在系统时域分析法中，求零状态响应的另一种方法是卷积积分，它有很多优点，

将在 2.6 节介绍。

2.5 冲激响应与阶跃响应

对于线性时不变系统，冲激响应 $h(t)$ 的性质可以表示系统的因果性和稳定性， $h(t)$ 的变换域表示更是分析线性时不变系统的重要手段，因而对冲激响应 $h(t)$ 的分析是系统分析中极为重要的问题。

冲激响应 $h(t)$ 定义为：系统在单位冲激信号 $\delta(t)$ 的激励下产生的零状态响应。同样，阶跃响应 $g(t)$ 定义为：系统在单位阶跃信号 $u(t)$ 的激励下产生的零状态响应。由于任意信号可以用冲激信号的组合表示，即

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2-35)$$

若把它作用到冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统，则系统的响应为

$$\begin{aligned} r(t) &= H[e(t)] = H\left[\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) H[\delta(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2-36)$$

这就是卷积积分。由于 $h(t)$ 是在零状态下定义的，因而式(2-36)表示的响应是系统的零状态响应 $r_{\text{so}}(t)$ 。关于卷积积分的计算及其性质将在 2.6、2.7 节介绍。

考虑到冲激信号 $\delta(t)$ 与单位阶跃信号 $u(t)$ 间存在微分与积分关系，因而对 LTI 系统， $h(t)$ 和 $g(t)$ 间也同样存在微分积分关系，即

$$\left\{ \begin{array}{l} h(t) = \frac{d}{dt} g(t) \\ g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \end{array} \right. \quad (2-37)$$

对于用线性常系数微分方程描述的系统，它的冲激响应 $h(t)$ 满足微分方程

$$\begin{aligned} C_0 \frac{d^n}{dt^n} h(t) + C_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} h(t) + \cdots + C_{n-1} \frac{d}{dt} h(t) + C_n h(t) \\ = E_0 \delta^{(m)}(t) + E_1 \delta^{(m-1)}(t) + \cdots + E_{m-1} \delta'(t) + E_m \delta(t) \end{aligned} \quad (2-38)$$

及起始状态 $h^{(k)}(0_-) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$)。由于 $\delta(t)$ 及其各阶导数在 $t \geq 0$ 时都等于零，因而式(2-38)右端在 $t \geq 0_+$ 的自由项恒等于零，这样冲激响应 $h(t)$ 形式与齐次解的形式相同，且在 $n > m$ 时 $h(t)$ 可以表示为

$$h(t) = \left(\sum_{k=1}^n A_k e^{at} \right) u(t) \quad (2-39)$$

若 $n \leq m$ ，则表达式还将含有 $\delta(t)$ 及其相应阶的导数 $\delta^{(m-n)}(t), \delta^{(m-n-1)}(t), \dots, \delta'(t)$ 等项。其中常数 A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 可以通过冲激函数匹配法，求出相应的 $h^{(k)}(0_+)$ 值，从而求得 A_k 各值。

例 2-9 对图2-3所示电路,求电流 $i(t)$ 对激励 $e(t)=\delta(t)$ 的冲激响应 $h(t)$ 。

解 由例2-5求得电路的微分方程表示

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t) + 7 \frac{d}{dt}i(t) + 10i(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 6 \frac{d}{dt}e(t) + 4e(t)$$

系统冲激响应 $h(t)$, 满足方程

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 7 \frac{d}{dt}h(t) + 10h(t) = \delta''(t) + 6\delta'(t) + 4\delta(t)$$

它的齐次解形式

$$h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} \quad (t \geq 0_+)$$

利用冲激函数匹配法求 $h(0_+)$ 和 $\frac{d}{dt}h(0_+)$; 由于方程右端自由项 $\delta(t)$ 的最高阶导数为 $\delta''(t)$, 所以设

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2}h(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + d\Delta u(t) \\ \frac{d}{dt}h(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t) \\ h(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \end{array} \right. \quad (0_- < t < 0_+)$$

代入方程

$$\begin{aligned} & [a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + d\Delta u(t)] + 7[a\delta'(t) + b\delta(t) \\ & + c\Delta u(t)] + 10[a\delta(t) + b\Delta u(t)] = \\ & \delta''(t) + 6\delta'(t) + 4\delta(t) \end{aligned}$$

得

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b + 7a = 6 \\ c + 7b + 10a = 4 \end{array} \right.$$

因而有

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h(0_+) = b + h(0_-) = -1 \\ \frac{d}{dt}h(0_+) = c + \frac{d}{dt}h(0_-) = 1 \end{array} \right.$$

代入 $h(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 = -1 \\ -2A_1 - 5A_2 = 1 \end{array} \right.$$

得

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{4}{3} \\ A_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

考虑到 $a=1$, 即 $h(t)$ 中有一项 $a\delta(t)$, 因而得出要求的冲激响应为

$$h(t) = \delta(t) + \left(-\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} \right)u(t)$$

系统的阶跃响应 $g(t)$ 满足方程

$$\begin{aligned} & C_0 \frac{d^n}{dt^n} g(t) + C_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} g(t) + \cdots + C_{n-1} \frac{d}{dt} g(t) + C_n g(t) \\ &= E_0 \frac{d^m}{dt^m} u(t) + E_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \cdots + E_{m-1} \frac{d}{dt} u(t) + E_m u(t) \quad (2-40) \end{aligned}$$

及起始状态 $g^{(k)}(0_-) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$)。可以看出方程右端的自由项含有 $\delta(t)$ 及其各阶导数, 同时还包含阶跃函数 $u(t)$, 因而阶跃响应表示式中, 除去含齐次解形式之外, 还应增加特解项。

例 2-10 对图2-3 所示电路, 求电流 $i(t)$ 对激励 $e(t) = u(t)$ 的阶跃响应 $g(t)$ 。

解 由例 2-5 求得电路的微分方程表示

$$\frac{d^2}{dt^2} i(t) + 7 \frac{d}{dt} i(t) + 10 i(t) = \frac{d^2}{dt^2} e(t) + 6 \frac{d}{dt} e(t) + 4 e(t)$$

系统的阶跃响应 $g(t)$ 满足方程

$$\frac{d^2}{dt^2} g(t) + 7 \frac{d}{dt} g(t) + 10 g(t) = \delta'(t) + 6 \delta(t) + 4 u(t)$$

及起始状态 $g(0_-) = g'(0_-) = 0$ 。其解的形式

$$g(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + B \quad (t \geq 0_+)$$

求特解 B , 对 $t \geq 0_+$ 代入方程

$$10 \cdot B = 4$$

得

$$B = \frac{2}{5}$$

利用冲激函数匹配法求常数 A_1 , A_2 。设

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} g(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t) \\ \frac{d}{dt} g(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \quad (0_- < t < 0_+) \\ g(t) = a\Delta u(t) \end{cases}$$

代入原方程

$$\begin{aligned} & [a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t)] + 7[a\delta(t) + b\Delta u(t)] + 10a\Delta u(t) \\ &= \delta'(t) + 6\delta(t) + 4\Delta u(t) \end{aligned}$$

得

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 7a = 6 \\ c + 7b + 10a = 4 \end{cases}$$

求出

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

因而有

$$\begin{cases} g(0_+) = a + g(0_-) = 1 \\ \frac{d}{dt}g(0_+) = b + \frac{d}{dt}g(0_-) = -1 \end{cases}$$

代入方程

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \frac{2}{5} = 1 \\ -2A_1 - 5A_2 = -1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{2}{3} \\ A_2 = -\frac{1}{15} \end{cases}$$

因而要求的系统阶跃响应

$$g(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{15}e^{-5t} + \frac{2}{5} \right) u(t)$$

所得的 $g(t)$ 也可以通过对 $h(t)$ 的积分得出。

上面介绍了时域法求系统的冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$ 。应该说明的是在学习拉普拉斯变换(第四章)后,用变换域方法求 $h(t)$ 及 $g(t)$ 简捷方便。这里用的方法比较直观,物理概念明确,也是以后学习变换域分析的基础。

2.6 卷 积

卷积方法最早的研究可追溯到 19 世纪初期的数学家欧拉(Euler)、泊松(Poisson)等人,以后许多科学家对此问题做了大量工作,其中,最值得记起的是杜阿美尔(Duhamel, 1833)。近代,随着信号与系统理论研究的深入及计算机技术发展,不仅卷积方法得到广泛的应用,反卷积的问题也越来越受重视。反卷积是卷积的逆运算。在现代地震勘探、超声诊断、光学成像、系统辨识及其他诸多信号处理领域中卷积和反卷积无处不在,而且许多都是有待深入开发研究的课题。本节将对卷积积分的运算方法做一说明,然后阐述卷积的性质及其应用。

式(2-36)表示了卷积积分的物理意义。卷积方法的原理就是将信号分解为冲激信号之和，借助系统的冲激响应 $h(t)$ ，求解系统对任意激励信号的零状态响应。

对于任意两个信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ ，两者做卷积运算定义为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (2-41)$$

做一变量代换不难证明

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2-42)$$

式中 $f_1(t) * f_2(t)$ 是两函数作卷积运算的简写符号，也可以写成 $f_1(t) \otimes f_2(t)$ 。这里的积分限取 $-\infty$ 和 ∞ ，这是由于对 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的作用时间范围没有加以限制。实际由于系统的因果性或激励信号存在时间的局限性，其积分限会有变化，这一点借助卷积的图形解释可以看得很清楚。可以说卷积积分中积分限的确定是非常关键的，务请在运算中注意。

用图解方法说明卷积运算可以把一些抽象的关系形象化，便于理解卷积的概念及方便运算。

设系统的激励信号为 $e(t)$ ，如图 2-12(a) 所示，冲激响应为 $h(t)$ ，如图 2-12(b) 所示，则系统的零状态响应为

$$r(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2-43)$$

分析式(2-43)可以看出，卷积积分变量是 τ 。 $h(t - \tau)$ 说明在 τ 的坐标系中 $h(\tau)$ 有反褶和位移的过程，如图 2-12(c) 和(d) 所示，然后两者重叠部分相乘做积分。这样对两信号做卷积积分运算需要五个步骤：

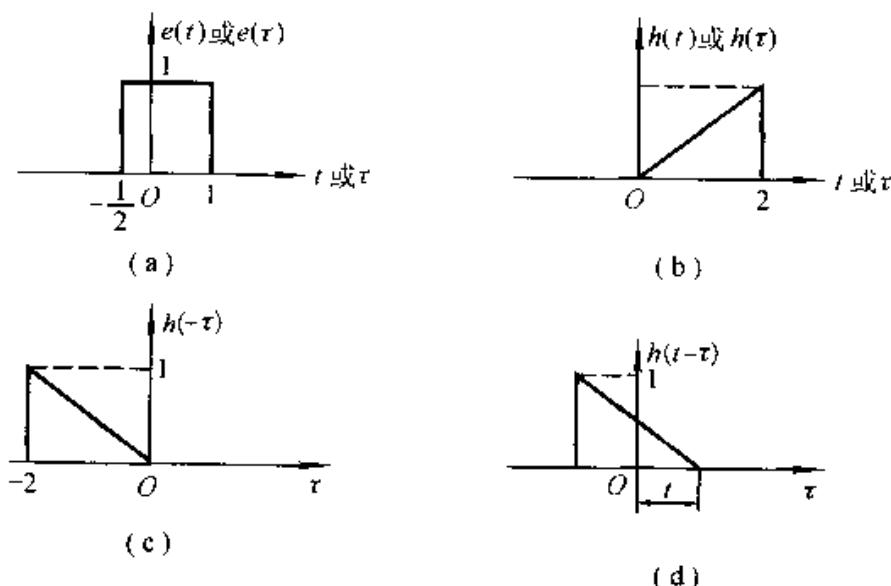


图 2-12 卷积的图形解释

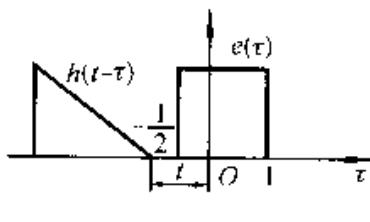
- (1) 改换图形中的横坐标, 由 t 改为 τ , τ 变成函数的自变量;
- (2) 把其中的一个信号反褶[如图 2-12 (c)] ;
- (3) 把反褶后的信号做位移, 移位量是 t , 这样 t 是一个参变量。在 τ 坐标系中, $t > 0$ 图形右移; $t < 0$ 图形左移[如图 2-12 (d)] ;
- (4) 两信号重叠部分相乘 $e(\tau)h(t-\tau)$;
- (5) 完成相乘后图形的积分。

按上述步骤完成的卷积积分结果如下:

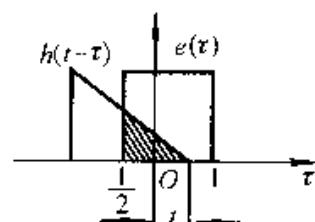
$$(1) -\infty < t \leq -\frac{1}{2}, \text{ 如图 2-13 (a)}$$

$$e(t) * h(t) = 0$$

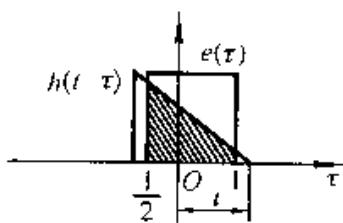
$$(2) -\frac{1}{2} \leq t \leq 1, \text{ 如图 2-13 (b)}$$



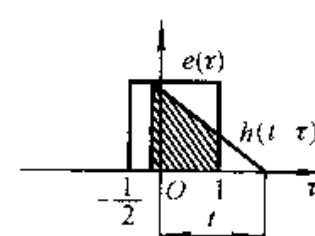
$$(a) -\infty < t \leq -\frac{1}{2}$$



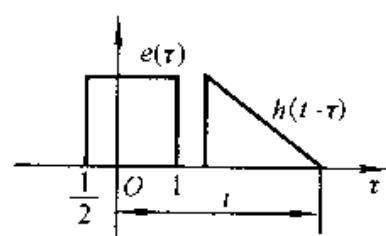
$$(b) -\frac{1}{2} \leq t \leq 1$$



$$(c) 1 \leq t \leq \frac{3}{2}$$



$$(d) \frac{3}{2} \leq t \leq 3$$



$$(e) 3 \leq t < \infty$$

图 2-13 卷积积分的求解过程

$$\begin{aligned} e(t) * h(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^t 1 \times \frac{1}{2}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

(3) $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$, 如图 2-13(c)

$$\begin{aligned} e(t) * h(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 1 \times \frac{1}{2}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{3}{4}t - \frac{3}{16} \end{aligned}$$

(4) $\frac{3}{2} \leq t \leq 3$, 如图 2-13(d)

$$\begin{aligned} e(t) * h(t) &= \int_{t-2}^3 1 \times \frac{1}{2}(t - \tau) d\tau \\ &= -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(5) $3 \leq t < \infty$, 如图 2-13(e)

$$e(t) * h(t) = 0$$

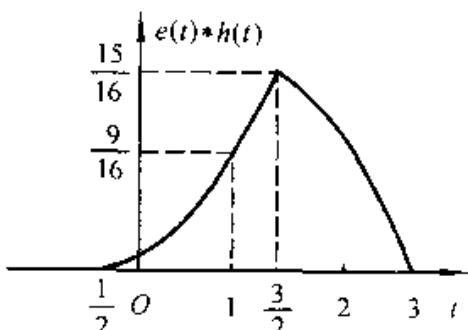


图 2-14 图 2-12 卷积积分结果

以上各图中的阴影面积,即为相乘积分的结果。最后,若以 t 为横坐标,将与 t 对应的积分值描成曲线,就是卷积积分 $e(t) * h(t)$ 函数图像。如图 2-14。

从以上图解分析可以看出,卷积中积分限的确定取决于两个图形交叠部分的范围。卷积结果所占有的时宽等于两个函数各自时宽的总和。

按式(2-42)也可以把 $e(t)$ 反褶位移计算,得到的结果相同,读者可自行完成。

2.7 卷积的性质

作为一种数学运算,卷积运算具有某些特殊性质,这些性质在信号与系统分析中有重要作用。利用这些性质还可以使卷积运算简化。

(一) 卷积代数

通常乘法运算中的某些代数定律也适用于卷积运算。

(1) 交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2-44)$$

把积分变量 τ 改换为 $(t - \lambda)$,即可证明此定律

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\lambda) f_1(t - \lambda) d\lambda = f_2(t) * f_1(t)$$

这意味着两函数在卷积积分中的次序是可以交换的。

(2) 分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (2-45)$$

分配律用于系统分析，相当于并联系统的冲激响应，等于组成并联系统的各子系统冲激响应之和，如图 2-15 所示。

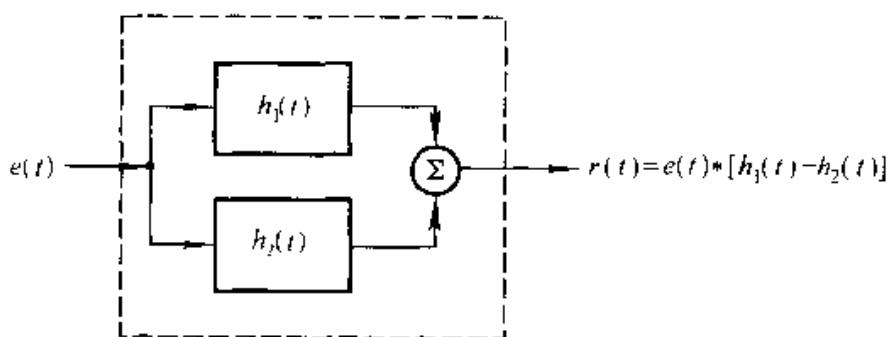


图 2-15 并联系统的 $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

(3) 结合律

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \quad (2-46)$$

这里包含两次卷积运算，是一个二重积分，只要改换积分次序即可证明此定律

$$\begin{aligned} [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\tau - \lambda) d\lambda \right] f_3(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau - \lambda) f_3(t - \tau) d\tau \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_3(t - \tau - \lambda) d\tau \right] d\lambda \\ &= f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \end{aligned}$$

结合律用于系统分析，相当于串联系统的冲激响应，等于组成串联系统的各子系统冲激响应的卷积，如图 2-16 所示。

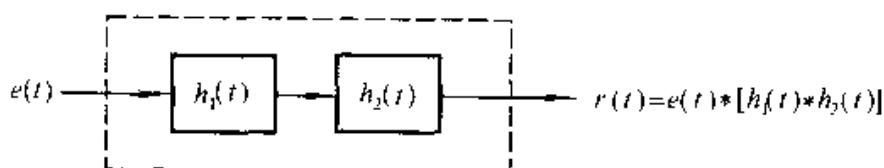


图 2-16 串联系统的 $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$

(二) 卷积的微分与积分

上述卷积代数定律与乘法运算的性质类似，但是卷积的微分或积分却与两函数相乘的微分或积分性质不同。

两个函数卷积后的导数等于其中一函数之导数与另一函数之卷积，其表示式为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] &= f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} \\ &= \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t)\end{aligned}\quad (2-47)$$

由卷积定义可证明此关系式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \frac{df_2(t - \tau)}{dt} d\tau \\ &= f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt}\end{aligned}\quad (2-48)$$

同样可以证得

$$\frac{d}{dt}[f_2(t) * f_1(t)] = f_2(t) * \frac{df_1(t)}{dt} \quad (2-49)$$

显然， $f_2(t) * f_1(t)$ 也即 $f_1(t) * f_2(t)$ ，故式(2-49)成立。

两函数卷积后的积分等于其中一函数之积分与另一函数之卷积。其表示式为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda &= f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \\ &= f_2(t) * \int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda\end{aligned}\quad (2-50)$$

证明如下

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\lambda - \tau) d\tau \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^t f_2(\lambda - \tau) d\lambda \right] d\tau \\ &= f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda\end{aligned}\quad (2-51)$$

借助卷积交换律同样可求得 $f_2(t)$ 与 $f_1(t)$ 之积分相卷积的形式，于是式(2-50)全部得到证明。

应用类似的推演可以导出卷积的高阶导数或多重积分之运算规律。

设 $s(t) = [f_1(t) * f_2(t)]$ ，则有

$$s^{(i)}(t) = f_1^{(i)}(t) * f_2^{(i-j)}(t) \quad (2-52)$$

此处，当 i, j 取正整数时为导数的阶次，取负整数时为重积分的次数。读者可自行证明。一个简单的例子是

$$\frac{df_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda = f_1(t) * f_2(t) \quad (2-53)$$

(三) 与冲激函数或阶跃函数的卷积

函数 $f(t)$ 与单位冲激函数 $\delta(t)$ 卷积的结果仍然是函数 $f(t)$ 本身。根据卷积定义以及冲激函数的特性[第 1.4 节式(1-39)]容易证明

$$\begin{aligned} f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau \\ &= f(t) \end{aligned} \quad (2-54)$$

这里用到 $\delta(x) = \delta(-x)$, 因此 $\delta(t - \tau) = \delta(\tau - t)$ 。

此结论对我们并不陌生, 在 1.5 节将信号分解为冲激函数之叠加时, 曾导出与此类似的式(1-60)。今后将要看到, 在信号与系统分析中, 此性质应用广泛。进一步有

$$\begin{aligned} f(t) * \delta(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau \\ &= f(t - t_0) \end{aligned} \quad (2-55)$$

这表明, 与 $\delta(t - t_0)$ 信号相卷积的结果, 相当于把函数本身延迟 t_0 。

利用卷积的微分、积分特性, 不难得到以下一系列结论。

对于冲激偶 $\delta'(t)$, 有

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t) \quad (2-56)$$

对于单位阶跃函数 $u(t)$, 可以求得

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \quad (2-57)$$

推广到一般情况可得:

$$f(t) * \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) \quad (2-58)$$

$$f(t) * \delta^{(k)}(t - t_0) = f^{(k)}(t - t_0) \quad (2-59)$$

式中 k 表示求导或取重积分的次数, 当 k 取正整数时表示导数阶次, k 取负整数时为重积分的次数, 例如 $\delta^{(-1)}(t)$ 即 $\delta(t)$ 之积分——单位阶跃 $u(t)$, $u(t)$ 与 $f(t)$ 之卷积得到 $f^{(-1)}(t)$, 即 $f(t)$ 的一次积分式, 这就是式(2-57)。

一些常用函数卷积积分的结果制成表格如附录一, 备需用时参考。

卷积的性质可以用来简化卷积运算, 以图 2-12 的两函数卷积运算为例, 利用式(2-53)关系, 可得

$$r(t) = e(t) * h(t) = \frac{d}{dt} e(t) * \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda$$

其中

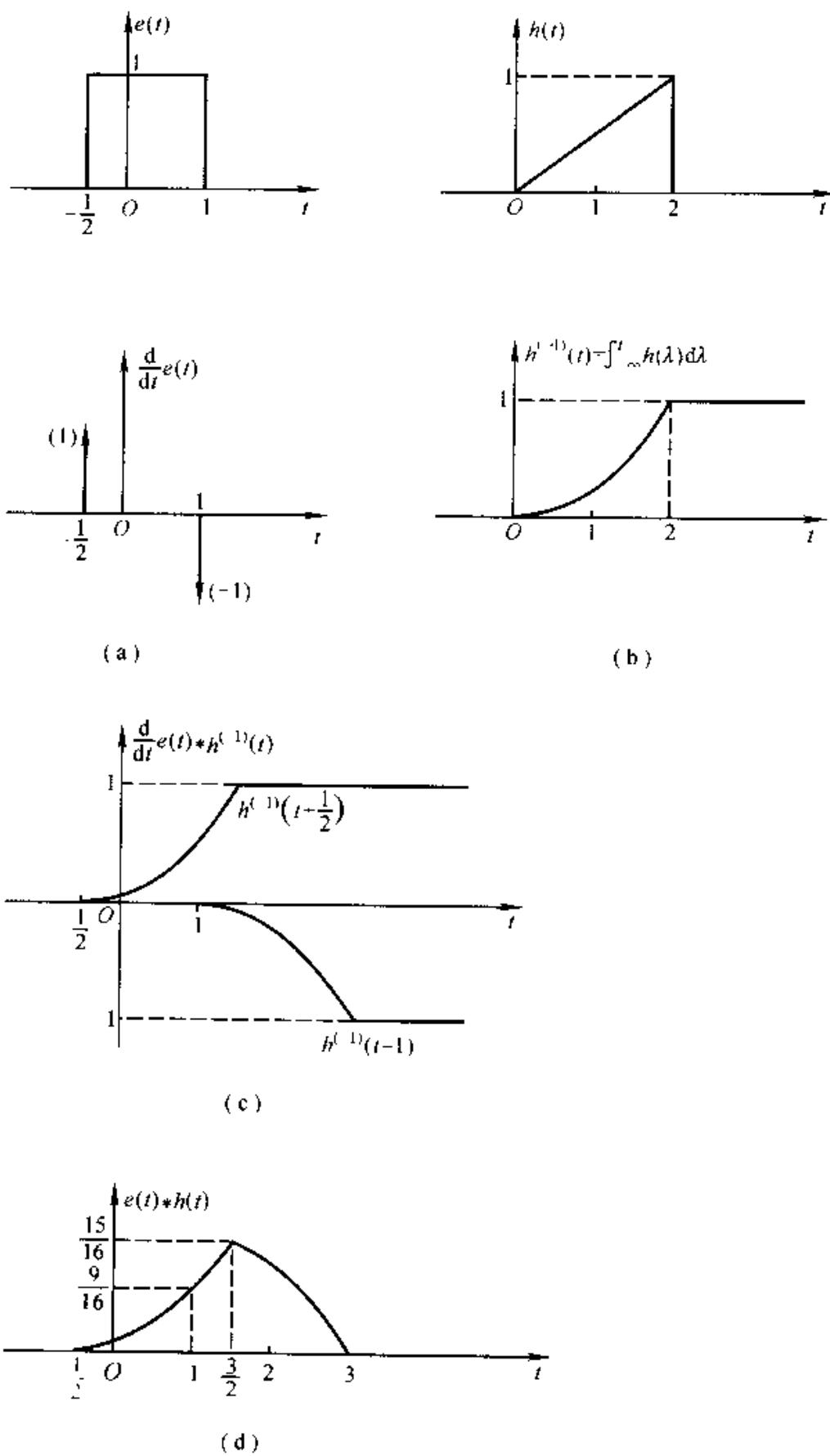


图 2-17 利用卷积性质简化卷积运算

$$\frac{d}{dt}e(t) = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta(t - 1)$$

其图形如图 2-17(a)所示(见上页)。

$$\begin{aligned} h^{(-1)}(t) &= \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t \frac{1}{2} \lambda [u(\lambda) - u(\lambda - 2)] d\lambda \\ &= \left(\int_0^t \frac{1}{2} \lambda d\lambda \right) u(t) - \left(\int_2^t \frac{1}{2} \lambda d\lambda \right) u(t-2) \\ &= \frac{1}{4} t^2 u(t) - \frac{1}{4} (t^2 - 4) u(t-2) \\ &= \frac{1}{4} t^2 [u(t) - u(t-2)] + u(t-2) \end{aligned}$$

其图形如图 2-17(b)所示。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e(t) * \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 [u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{3}{2}\right)] + u\left(t - \frac{3}{2}\right) \\ &\quad - \left[\frac{1}{4} (t-1)^2 [u(t-1) - u(t-3)] + u(t-3) \right] \\ &\quad \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 & -\frac{1}{2} \leq t < 1 \\ \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} (t-1)^2 & 1 \leq t < \frac{3}{2} \\ 1 - \frac{1}{4} (t-1)^2 & \frac{3}{2} \leq t < 3 \end{array} \right. \\ &= \left| \begin{array}{ll} \frac{3}{4} \left(t - \frac{1}{4} \right) & -\frac{1}{2} \leq t < 1 \\ \frac{3}{4} \left(t - \frac{1}{4} \right) & 1 \leq t < \frac{3}{2} \\ 1 - \frac{1}{4} (t-1)^2 & \frac{3}{2} \leq t < 3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

如图 2-17(c)和(d)所示。可以看出如果对某一信号微分后出现冲激信号，则卷积最终结果是另一个信号对应积分后平移叠加结果。需要注意的是常数信号 $f(t) = E$ ($-\infty < t < \infty$) 经微分变成零，这种情况需要特殊考虑。

卷积积分的工程近似计算是把信号按需要进行抽样离散化形成序列，积分运算用求和代替，因而问题化为两序列的卷积和，得出的结果再适当进行内插，求出最终结果。关于离散信号卷积和将在第七章讨论。

2.8 用算子符号表示微分方程

在连续系统时域分析法中，求解的是一个高阶微分方程或一组联立微分方程，如果把经常出现的微分或积分用下述算子符号表示

$$p = \frac{d}{dt} \quad (2-60)$$

$$\frac{1}{p} = \int_{-\infty}^t (\quad) d\tau \quad (2-61)$$

则高阶微分方程式(2-9)就可以表示为

$$C_0 p^n r(t) + C_1 p^{n-1} r(t) + \cdots + C_{n-1} p r(t) + C_n r(t)$$

$$= E_0 p^m e(t) + E_1 p^{m-1} e(t) + \cdots + E_{m-1} p e(t) + E_m e(t)$$

或简化为

$$(C_0 p^n + C_1 p^{n-1} + \cdots + C_{n-1} p + C_n) r(t) = (E_0 p^m + E_1 p^{m-1} + \cdots + E_{m-1} p + E_m) e(t) \quad (2-62)$$

若进一步令

$$\begin{cases} D(p) = C_0 p^n + C_1 p^{n-1} + \cdots + C_{n-1} p + C_n \\ N(p) = E_0 p^m + E_1 p^{m-1} + \cdots + E_{m-1} p + E_m \end{cases} \quad (2-63)$$

分别表示两个算子多项式，则式(2-62)可以简化为

$$D(p)[r(t)] = N(p)[e(t)] \quad (2-64)$$

这是高阶微分方程的算子符号表示。下面简略介绍算子表示有关的几个问题。

(一) 算子符号基本规则

式(2-63)表示的 $D(p)$ 和 $N(p)$ 算子多项式仅仅是一种运算符号，代数方程中的运算规则有的适用于算子多项式，有的不适用，这里提出两条基本规则：

其一：对算子多项式可以进行因式分解，但不能进行公因子相消。

例如

$$\begin{aligned} (p+3)(p+2)x &= \left(\frac{d}{dt} + 3\right)\left(\frac{d}{dt}x + 2x\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}x + 2x\right] + 3\left[\frac{d}{dt}x(t) + 2x\right] \\ &= \frac{d^2}{dt^2}x + 5\frac{d}{dt}x + 6x \\ &= (p^2 + 5p + 6)x \end{aligned}$$

因此有

$$(p+3)(p+2) = p^2 + 5p + 6$$

如果把这一结论推广到一般情况，则由算子符号 p 所组成的多项式可以像代数式那样做相乘或做因式分解。

若

$$\frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}y$$

两边积分后有

$$x = y + c$$

其中 c 为积分常数。由此可见，对于算子方程

$$px = py$$

其左右两端的算子符号因子不能消去。推广到一般情况：对算子符号 p 多项式的等式两端公共因子不能随意消去。

其二：算子的乘除顺序不可随意颠倒，即

$$p \frac{1}{p}x \neq \frac{1}{p}px \quad (2-65)$$

理由是

$$p \cdot \frac{1}{p}x = \frac{d}{dt} \cdot \int_{-\infty}^t x d\tau = x$$

而 $\frac{1}{p} \cdot px = \int_{-\infty}^t \left(\frac{d}{d\tau} x \right) d\tau = x(t) - x(-\infty) \neq x$

这表明“先乘后除”的算子运算(对应先微分后积分)不能相消;而“先除后乘”(先积分后微分)可以相消。

(二) 用算子符号建立微分方程

用算子符号表示微分方程不仅书写简便,而且在建立系统数学模型时很方便。电感、电容的等效算子符号分别为:

对电感 $v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) = L p i_L(t)$ (2-66)

其中 Lp 就是用算子符号表示的等效电感感抗值。

对电容

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{Cp} i_C(t)$$
 (2-67)

$\frac{1}{Cp}$ 就是用算子符号表示的等效电容容抗值。

现用算子符号来建立图 2-3 系统微分方程。首先画出包含用算子符号表示的电感和电容电路图,如图 2-18 所示,

列写电路的回路方程

$$\begin{cases} \left(R_1 + \frac{1}{Cp} \right) i(t) - \frac{1}{Cp} i_L(t) = e(t) \\ -\frac{1}{Cp} i(t) + \left(Lp + R_2 + \frac{1}{Cp} \right) i_L(t) = 0 \end{cases}$$

应用克拉默(Cramer)法则,解此方程

$$i(t) = \frac{\begin{vmatrix} e(t) & -\frac{1}{Cp} \\ 0 & Lp + R_2 + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{Cp} & -\frac{1}{Cp} \\ -\frac{1}{Cp} & Lp + R_2 + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix}}$$

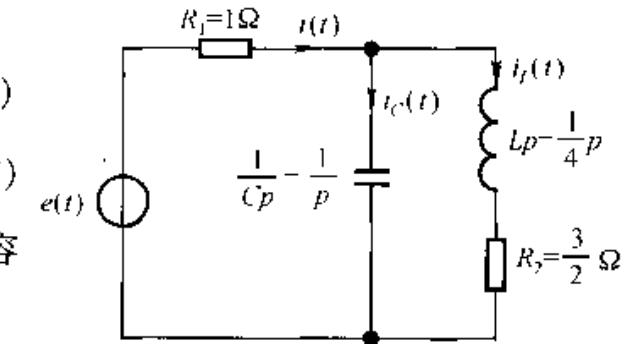


图 2-18 用算子符号表示的电路图

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(Lp + R_2 + \frac{1}{Cp} \right) e(t)}{\left(R_1 + \frac{1}{Cp} \right) \left(Lp + R_2 + \frac{1}{Cp} \right) - \left(\frac{1}{Cp} \right)^2} \\
 &= -\frac{\left(\frac{1}{R_1} p + \frac{R_2}{R_1 L} + \frac{1}{R_1 L C p} \right) e(t)}{p + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C} \right) + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_2}{R_1 LC} \right) \frac{1}{p}}
 \end{aligned}$$

为化解成微分方程表示，分子分母同乘以 p ，由于允许先积分后微分，因而可以消去 $\frac{1}{p}$ ，得

$$i(t) = \frac{\left(\frac{1}{R_1} p^2 + \frac{R_2}{R_1 L} p + \frac{1}{R_1 L C} \right)}{p^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C} \right) p + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_2}{R_1 LC} \right)} e(t)$$

系统的微分方程表示为

$$\left[p^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C} \right) p + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_2}{R_1 LC} \right) \right] i(t) = \left(\frac{1}{R_1} p^2 + \frac{R_2}{R_1 L} p + \frac{1}{R_1 L C} \right) e(t)$$

代入具体元件值有

$$\frac{d^2}{dt^2} i(t) + 7 \frac{d}{dt} i(t) + 10 i(t) = \frac{d^2}{dt^2} e(t) + 6 \frac{d}{dt} e(t) + 4 e(t)$$

从上面例子可以看出用算子符号法列写电路的微分方程是比较方便的，但是列写过程中一定要注意遵守算子运算的规则。

(三) 传输算子概念

用输入-输出法描述系统时，关心的是输入激励对输出响应的影响，它们之间的关系是通过微分方程形式相联系，即

$$D(p)r(t) = N(p)e(t)$$

把联系响应 $r(t)$ 与激励 $e(t)$ 之间关系表示成显式形式

$$r(t) = \frac{N(p)}{D(p)} e(t) \quad (2-68)$$

则 $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ 就定义为系统传输算子。此传输算子完整地建立了描述系统的数学模型，一些有用的系统特性可以通过对 $H(p)$ 分析而得出，这里不再赘述。

上面简单地介绍了微分方程的算子符号表示，在时域分析中，算子符号提供了简单易行的辅助分析手段，但本质上与经典法分析系统相同，而形式上又与以后用的拉普拉斯变换分析相似。

2.9 以“分配函数”的概念认识冲激函数 $\delta(t)$

在第一章，我们曾就冲激函数的物理概念及其三种形式的定义作了说明，

但是从数学上来说是不严格的。例如函数 $\delta(t)$ 与函数 $\delta(t) + \delta'(t)$ 都可以满足第一种定义方式。由于冲激函数及全部奇异函数在信号与系统分析中的重要作用，因而有必要对此作出严密正规的数学定义。

1950年，施瓦兹(L.Schwartz)建立的分配理论为解决这一困难奠定了基础。 $\delta(t)$ 函数的表现形式已经超出了“普通函数”的概念，但是以“分配函数”(distribution function)或称“广义函数”(generalized function)的概念来研究奇异函数，就可以给出严格的数学定义，而且其一系列有关的性质也有严格的数学证明。

为了说明“分配函数”的概念，研究图2-19表示的物理量测量过程。假定被测量是电压源 $v(t)$ ，经过测试仪表，在显示器上读出测量结果。在这里显示器给出的数据并非直接待测物理量本身，而是待测函数 $v(t)$ 与测试仪表特性二者综合的结果。假定把测量系统看成一个线性时不变系统，则在 t_0 时刻的响应(即显示读数)由下列卷积积分给出：

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)h(t_0 - t)dt \quad (2-69)$$

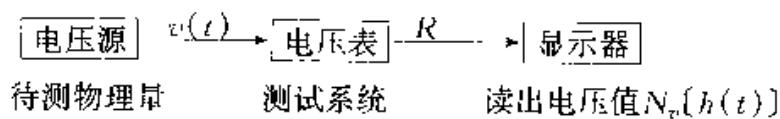


图2-19 物理量的测量过程

其中 $h(t)$ 是测量系统的冲激响应。电压 $v(t)$ 的存在是通过 $v(t)$ 对测量系统作用的结果，换言之，测量系统是“检测”电压 $v(t)$ 特性的手段，而显示器的读数是两者共同作用的结果，记显示器的数值为 $N_v[h(t)]$ ，则式(2-69)可以表示为

$$N_v[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)h(t_0 - t)dt$$

这种表示电压 $v(t)$ 的方法就是按“分配函数”来定义的，此处借助于测量仪器的冲激响应 $h(t)$ 来体现 $v(t)$ 的存在和性质，因此 $h(t)$ 被称为“检试函数”。下面给“分配函数”或“广义函数”下一定义。

一个“分配函数”(广义函数) $g(t)$ 的定义，是赋予检试函数 $\varphi(t)$ 为一个数 $N_g[\varphi(t)]$ 的过程。这个数值可以是 $t = t_0$ 时 $\varphi(t)$ 的值或它的导数值，也可以是在某一区间内 $\varphi(t)$ 所覆盖的面积，或其他与 $\varphi(t)$ 有关的数值。充当“检试函数”的 $\varphi(t)$ 要求是连续的，具有各阶连续导数，而且在 t 的一个有限区间内有值，即 $\varphi(t) \neq 0$ ， $a < t < b$ ，($-\infty < a, b < \infty$)，称 $\varphi(t)$ 是紧致的(compact support)。所赋的值用下列符号表示

$$N_g[\varphi(t)] = \langle g(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)dt \quad (2-70)$$

式(2-70)的符号采用了普通函数意义下的内积积分符号^①。若 $g(t)$ 和 $\varphi(t)$ 都是普通函数，则式(2-70)就表示两函数的内积运算。若 $g(t)$ 是广义函数，则 $g(t)$ 在普通函数概念下是没有意义的，此时式(2-70)只是作为赋值的符号而言，不能作为一般的积分运算看待。

用内积积分符号来表示“分配函数” $g(t)$ 所赋的数，其实是泛函的一种形式。对固定的 $\varphi(t)$ ，把 $g(t)$ 函数集中的每一个函数，通过式(2-70)规定的运算，映射成一个数集，这个数集被称为 $g(t)$ 的泛函数。式(2-70)的内积积分是最简单的线性连续泛函数。由于积分运算是线性运算，因而“分配函数”的赋值过程满足叠加性和均匀性。所谓连续性是指：若 $g(t)$ 是函数序列 $g_k(t)$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时的极限，即 $g(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(t)$ ，存在

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(t)] \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \varphi(t) dt \quad (2-71)$$

则这一泛函具有连续性。因而式(2-70)定义的“分配函数”是一种泛函的形式，而它的连续性正是把“分配函数”定义为某些普通函数极限的依据。

如果把冲激函数 $\delta(t)$ 理解为“分配函数”，则 $\delta(t)$ 指定给 $\varphi(t)$ 的数为 $\varphi(0)$

$$N_{\delta}[\varphi(t)] = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad (2-72)$$

也就是说，如果分配函数 $g(t)$ 按式(2-72)进行运算，对检试函数指定数为 $\varphi(0)$ ，则该分配函数就是 $\delta(t)$ 。这就是在广义函数意义下定义的冲激函数 $\delta(t)$ 。

例 2-11 试证明抽样信号的极限是冲激函数 $\delta(t)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(kt)}{\pi t} \right] = \delta(t) \quad (2-73)$$

解 利用式(2-71)把冲激函数 $\delta(t)$ 看成普通函数 $g_k(t) = \frac{\sin(kt)}{\pi t}$ 的极限过程，如果极限存在，且等于 $\varphi(0)$ ，则命题得证。

计算积分

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{\pi t} \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\sin(kt)}{\pi} \left(\frac{\varphi(t)}{t} \right) dt + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\sin(kt)}{\pi t} \varphi(t) dt \\ &\quad + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{\pi} \left[\frac{\varphi(t)}{t} \right] dt \end{aligned}$$

其中 ϵ 是任意的一个正数，这样分解的目的是把 $t=0$ 的区间单独考虑。

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\sin(kt)}{\pi} \left[\frac{\varphi(t)}{t} \right] dt = -\frac{\cos(kt)}{k\pi} \left[\frac{\varphi(t)}{t} \right] \Big|_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\cos(kt)}{k\pi} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\varphi(t)}{t} \right] \right\} dt$$

由于 $t \neq 0$ ， $\cos(kt)$ ， $\left[\frac{\varphi(t)}{t} \right]$ 及 $\frac{d}{dt} \left[\frac{\varphi(t)}{t} \right]$ 都是有限值，因而当 $k \rightarrow \infty$ 时，上

^① 内积的概念将在第六章 6.2 节简要介绍。

列积分值等于零

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\sin(kt)}{\pi t} \varphi(t) dt \right] = 0$$

同理有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{\pi t} \varphi(t) dt \right] = 0$$

这样有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{\pi t} \varphi(t) dt &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\sin(kt)}{\pi t} \varphi(t) dt \\ &\approx \varphi(0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\sin(kt)}{\pi t} dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(0) \int_{-k\epsilon}^{k\epsilon} \frac{\sin x}{\pi x} dx \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{\pi t} \varphi(t) dt \right] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\sin(kt)}{\pi t} \varphi(t) dt \right] dt \\ &= \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{\pi x} dx = \varphi(0) \end{aligned}$$

因而按式(2-72), 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(kt)}{\pi t} \right] = \delta(t)$$

以上讨论了把冲激函数 $\delta(t)$ 看作分配函数(广义函数), 从而给出了它的数学上严格定义。就时间变量 t 而言, $\delta(t)$ 可以当作时域连续信号处理, 因而它符合时域连续信号运算的某些规则。但也由于 $\delta(t)$ 是广义函数, 因此有的规则不一定适用。下面逐一说明。

(1) 相加运算

两个冲激函数 $\delta(t)$ 相加仍是冲激函数 $\delta(t)$, 它的强度等于原来冲激函数各自强度之和

$$a\delta(t) + b\delta(t) = (a + b)\delta(t) \quad (2-74)$$

(2) 相乘运算

两个冲激函数的乘法运算是不存在的。而冲激函数 $\delta(t)$ 与普通函数 $f(t)$ 相乘, 其结果仍为冲激函数, 而其强度为 $f(0)$ [若 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) [f(t) \varphi(t)] dt = f(0) \varphi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(0) \delta(t)] \cdot \varphi(t) dt \end{aligned}$$

所以有

$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t) \quad (2-75)$$

(3) 反褶运算

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (2-76)$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t) \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \varphi(-\xi) d\xi = \varphi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

所以

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

这一性质说明 $\delta(t)$ 是 t 的偶函数。

(4) 时间尺度变换

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (2-77)$$

证明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right) \frac{1}{a} d\xi \\ &= \frac{1}{a} \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \delta(t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

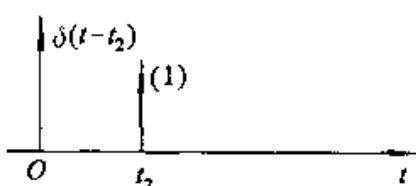
因而有

$$\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t)$$

考虑到 $\delta(t)$ 是 t 的偶函数，因而有式(2-77)。

(5) 时间位移运算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \varphi(\xi + t_0) d(\xi + t_0) = \varphi(t_0) \quad (2-78)$$



这说明位移的冲激函数 $\delta(t - t_0)$ 仍是冲激函数，它把检波函数 $\varphi(t)$ 的值指定为冲激函数 $\delta(t - t_0)$ 出现的时刻 $t = t_0$ 的抽样值。

同理有

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0) \quad (2-79)$$

即普通函数 $f(t)$ 与 $\delta(t - t_0)$ 相乘，仍为冲激函数 $\delta(t - t_0)$ ，而其强度为 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 时刻的函数值 [若 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续]，这就是冲激函数 $\delta(t)$ 的筛选特性。

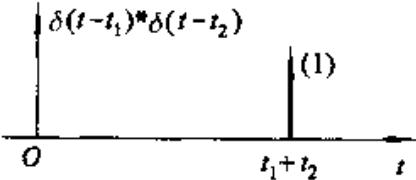
(6) 卷积运算

任意两个冲激函数相乘是没有定义的，但

卷积运算存在。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1) \delta(t - \tau - t_2) d\tau = \delta(t - t_1 - t_2) \quad (2-80)$$

证明



$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1) \delta(t - \tau - t_2) d\tau \right] \varphi(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - t_2) \varphi(t) dt \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1) \varphi(\tau + t_2) d\tau \\
&= \varphi(t_1 + t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1 - t_2) \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

因而有

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$$

当 $t_1 = t_2 = 0$ 时, 有

$$\delta(t) * \delta(t) = \delta(t) \quad (2-81)$$

普通函数 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 的卷积等于 $f(t)$ 本身

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (2-82)$$

同理有 $f(t)$ 与 $\delta(t - t_1)$ 卷积等于 $f(t)$ 的移位 $f(t - t_1)$

$$f(t) * \delta(t - t_1) = f(t - t_1) \quad (2-83)$$

式(2-82)和式(2-83)都是我们熟悉的, 读者不难用分配函数的概念加以证明。

(7) $\delta(t)$ 的复合函数 $\delta[f(t)]$ 的性质

$\delta[f(t)]$ 中的 $f(t)$ 是普通函数。若 $f(t) = 0$ 有 n 个互不相等的实根 t_1, t_2, \dots, t_n , 则有

$$\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i) \quad (2-84)$$

其中 $f'(t_i)$ 表示 $f(t)$ 在 $t = t_i$ 处的导数, 且 $f'(t_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

证明

把 $f(t)$ 在 $t = t_i$ 附近足够小的邻域内用泰勒级数展开, 注意到 $f(t_i) = 0$ 并忽略高次项, 则有

$$\begin{aligned}
f(t) &= f(t_i) + f'(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2} f''(t_i)(t - t_i)^2 + \dots \\
&\approx f'(t_i)(t - t_i)
\end{aligned}$$

因此由尺度变换可知在 $t = t_i$ 附近 $\delta[f(t)]$ 表示为

$$\delta[f(t)] = \delta[f'(t_i)(t - t_i)] = \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i)$$

若 $f'(t)$ 在 n 个单根 $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 处都不为零, 则有

$$\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i)$$

式(2-84)说明复合函数形式的 $\delta[f(t)]$ 可以化简为位于 $t = t_i$ 处一系列冲

激函数的叠加，每一冲激函数的强度等于 $\frac{1}{|f'(t_i)|}$ 。

例2-12 化简 $\delta(t^2 - a^2)$ 。

解 根据式(2-84)， $f(t) = t^2 - a^2$ ，有二个实根，分别位于 $t_1 = -a$ 和 $t_2 = a$ ，则有：

$$f'(t_1) = \left. \frac{d}{dt}(t^2 - a^2) \right|_{t=-a} = 2(-a)$$

$$f'(t_2) = \left. \frac{d}{dt}(t^2 - a^2) \right|_{t=a} = 2(a)$$

代入式(2-84)有

$$\delta[t^2 - a^2] = \frac{1}{2a} [\delta(t + a) + \delta(t - a)]$$

(8) 冲激函数 $\delta(t)$ 的积分是单位阶跃 $u(t)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \right] \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \left[\int_{\tau}^{\infty} \varphi(t) dt \right] d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

因而有

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (2-85)$$

如果从分配函数的角度看待 $u(t)$ ，则 $u(t)$ 是一广义函数，在此情况下，检试函数 $\varphi(t)$ 指定的值为 $\varphi(t)$ 在 $t = 0$ 到 $t = \infty$ 的积分，亦即 $\varphi(t)$ 在 $t \geq 0$ 以后的全部面积。

(9) 冲激函数 $\delta(t)$ 的微分是冲激偶 $\delta'(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} \delta(t) \right] \varphi(t) dt = \delta(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi'(t) dt = -\varphi'(0) \quad (2-86)$$

上式表明冲激偶 $\delta'(t)$ 作为分配函数，它赋予检试函数 $\varphi(t)$ 的值是 $\varphi(t)$ 在 $t = 0$ 处的导数取负值。

同理可以证明： $\delta(t)$ 的 k 阶导数 $\delta^{(k)}(t)$ 可以表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t) \varphi(t) dt = (-1)^k \varphi^{(k)}(0) \quad (2-87)$$

冲激偶 $\delta'(t)$ 作为时域连续信号，它也满足时域连续信号的各种运算规则，请读者自行逐条验证。这里只就以后经常用到的几种性质予以说明。

(1) 冲激偶 $\delta'(t)$ 是 t 的奇函数

$$\delta'(-t) = -\delta'(t) \quad (2-88)$$

这是因为任何偶函数的导数为奇函数，对分配函数此规律也符合，请读者证明。

(2) 普通函数 $f(t)$ 与冲激偶 $\delta'(t)$ 相乘

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t) \quad (2-89)$$

证明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\varphi(t)dt &= \delta(t)f(t)\varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)[f(t)\varphi(t)]'dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)[f(t)\varphi'(t) + f'(t)\varphi(t)]dt \\ &= -f(0)\varphi'(0) - f'(0)\varphi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)]\varphi(t)dt \end{aligned}$$

所以有

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

注意任何普通函数与冲激偶 $\delta'(t)$ 相乘是由两项组成的,切不可以写为 $f(t)\delta'(t)=-f(0)\delta'(t)$ 。

同理可以证明:

$$f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0) \quad (2-90)$$

(3) 冲激偶 $\delta'(t)$ 的时间尺度变换 $\delta'(at)$

$$\delta'(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a}\delta'(t) \quad (2-91)$$

证明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(at)\varphi(t)dt &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{a}\right)d\xi \\ &= \frac{1}{|a|} \left[\delta(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{a}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi)\frac{1}{a}\varphi'\left(\frac{\xi}{a}\right)d\xi \right] \\ &= \frac{1}{|a|} \cdot \left[-\frac{1}{a}\varphi'(0) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a}\delta'(t) \right] \cdot \varphi(t)dt \end{aligned}$$

因而有

$$\delta'(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a}\delta'(t)$$

同理有

$$\delta^{(k)}(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a^k}\delta^{(k)}(t) \quad (2-92)$$

显然,式(2-92)对 $k=0$ 也成立。若 $a=-1$,有

$$\delta^{(k)}(-t)=(-1)^k\delta^{(k)}(t) \quad (2-93)$$

上式可以看作式(2-92)的推广。

(4) 任何普通函数 $f(t)$ 与冲激偶 $\delta'(t)$ 的卷积等于 $f(t)$ 的导数

$$f(t)*\delta'(t)=\frac{d}{dt}f(t) \quad (2-94)$$

上式利用卷积的微分特性很容易证明。

以上利用“分配函数”(或“广义函数”)的概念对冲激函数及其导数给出了严格数学定义, 其中也引用了式(2-71)的概念, 即泛函连续性的概念。通常若

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(t) = g(t) \quad (2-95)$$

其中 $g_k(t)$ 是函数序列, $k \rightarrow \infty$ 时, 能使式(2-71)成立, 即 $k \rightarrow \infty$ 时 $g_k(t)$ 的作用和 $g(t)$ 的作用效果相同, 则称 $g(t)$ 是 $g_k(t)$ 的广义极限。例如 $\delta(t)$ 就是 $g_k(t) = \frac{\sin(kt)}{\pi t}$ 的广义极限。广义函数理论证明, 广义函数序列的极限肯定存在, 而且在同一函数集中; 而对普通函数序列, 其极限就未必存在。下面利用广义极限的概念, 讨论 $e^{j\omega t}$ 复指数信号的极限问题, 这是建立在下述黎曼-勒贝格定理基础上的性质, 在以后傅里叶分析中是非常有用的。

黎曼-勒贝格(Riemann-Lebesgue)定理: 若函数 $\varphi(t)$ 在 (a, b) 上是绝对可积的 ($-\infty < a, b < \infty$), 且 $\varphi(t)$ 的导数有限, 则

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \varphi(t) e^{-j\omega t} dt \right] = 0 \quad (2-96)$$

证明

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t) e^{-j\omega t} dt &= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \varphi(t) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \varphi'(t) dt \\ &= \frac{1}{j\omega} [\varphi(a) e^{-j\omega a} - \varphi(b) e^{-j\omega b} + \int_a^b e^{-j\omega t} \varphi'(t) dt] \end{aligned}$$

由于括号内各项都是有限值, 因而当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 式(2-96)成立。

式(2-96)可以看作广义函数 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{j\omega t}$ 对 $\varphi(t)$ 指定的值, 即:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \varphi(t) dt \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} [\lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{-j\omega t}] \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot \varphi(t) dt = 0 \end{aligned}$$

由于 $\varphi(t)$ 是任意的检试函数, 因而有

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{-j\omega t} = 0 \quad (2-97)$$

式(2-97)在普通函数的意义下是不成立的, 但是基于广义函数的概念, 当 $\omega \rightarrow \infty$ 它的极限为零, 所以这个极限必须理解为广义极限。和普通极限理解上的差别就在于, 式(2-97)并不是对任意的 t 时刻, 式(2-97)都存在, 它只是在广义函数式(2-71)的积分取极限时才正确。也就是 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{-j\omega t}$ 对 $\varphi(t)$ 的作用效果与 0 对 $\varphi(t)$ 的作用效果相同。

同样推论可以得

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{-j\omega t} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{j\omega t} = 0 \quad (2-98)$$

由欧拉公式得

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \cos(\omega t) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sin(\omega t) = 0 \end{cases} \quad (2-99)$$

把 ω 与 t 交换有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \cos(\omega t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sin(\omega t) = 0 \end{cases} \quad (2-100)$$

这些广义极限在傅里叶变换的计算中是非常有用的，它可以避免一些烦琐的证明。例如：

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cos(\omega t) dt \right] = 0 \\ F(\omega) &= \int_0^{\infty} \omega \sin(\omega t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_0^T \omega \sin(\omega t) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} [-\cos \omega t] \Big|_0^T \\ &= 1 - \lim_{T \rightarrow \infty} \cos(\omega T) = 1 \end{aligned}$$

更多的应用可以在傅里叶变换中找到。

习 题

- 2-1 对题图2-1所示电路图分别列写求电压 $v_o(t)$ 的微分方程表示。
- 2-2 题图2-2所示为理想火箭推动器模型。火箭质量为 m_1 ，荷载舱质量为 m_2 ，两者中间用刚度系数为 k 的弹簧相联结。火箭和荷载舱各自受到摩擦力的作用，摩擦系数分别为 f_1 和 f_2 。求火箭推进力 $e(t)$ 与荷载舱运动速度 $v_2(t)$ 之间的微分方程表示。
- 2-3 题图2-3是汽车底盘缓冲装置模型图，汽车底盘的高度 $z(t) = y(t) + y_0$ ，其中 y_0 是弹簧不受任何力时的位置。缓冲器等效为弹簧与减震器并联组成，刚度系数和阻尼系数分别为 k 和 f 。由于路面的凹凸不平(表示为 $x(t)$ 的起伏)通过缓冲器间接作用到汽车底盘，使汽车振动减弱。求汽车底盘的位移量 $y(t)$ 和路面不平度 $x(t)$ 之间的微分方程。
- 2-4 已知系统相应的齐次方程及其对应的0₊状态条件，求系统的零输入响应。

$$(1) \frac{d^2}{dt^2} r(t) + 2 \frac{d}{dt} r(t) + 2r(t) = 0$$

给定： $r(0_+) = 1$, $r'(0_+) = 2$;

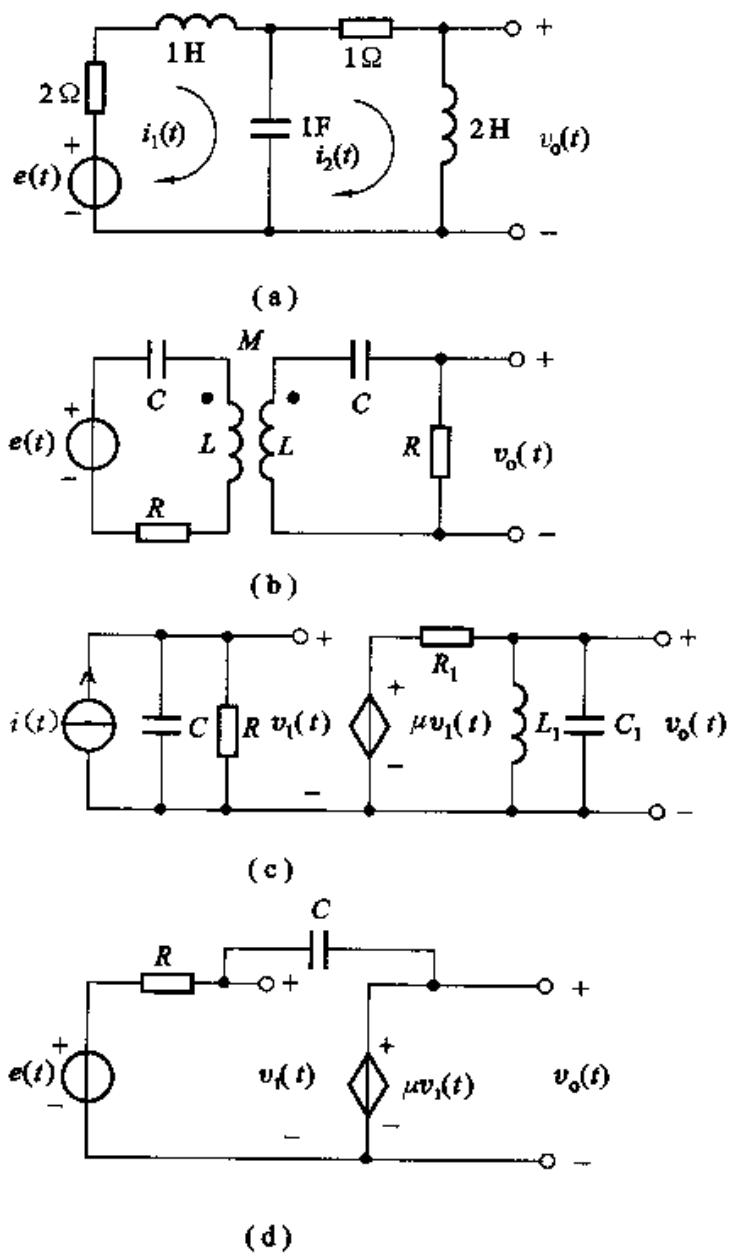
$$(2) \frac{d^2}{dt^2} r(t) + 2 \frac{d}{dt} r(t) + r(t) = 0$$

给定： $r(0_+) = 1$, $r'(0_+) = 2$;

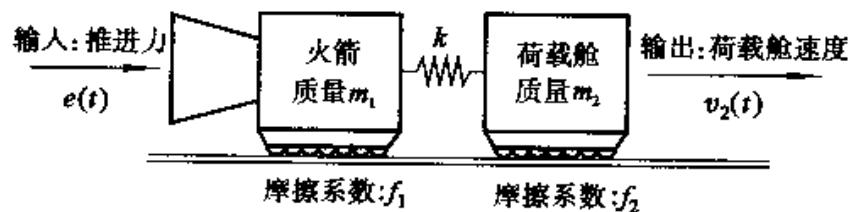
$$(3) \frac{d^3}{dt^3} r(t) + 2 \frac{d^2}{dt^2} r(t) + \frac{d}{dt} r(t) = 0$$

给定： $r(0_+) = r'(0_+) = 0$, $r''(0_+) = 1$ 。

- 2-5 给定系统微分方程、起始状态以及激励信号分别为以下三种情况：

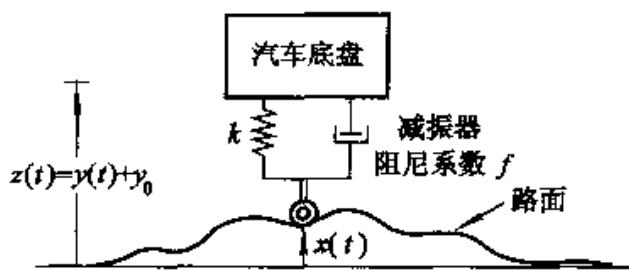


题图 2-1



题图 2-2

- (1) $\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = e(t), r(0+) = 0, e(t) = u(t)$
- (2) $\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = 3 \frac{d}{dt}e(t), r(0-) = 0, e(t) = u(t)$



题图 2-3

$$(3) 2 \frac{d^2}{dt^2} r(t) + 3 \frac{d}{dt} r(t) + 4r(t) = \frac{d}{dt} e(t), r(0_-) = 1, r'(0_-) = 1, e(t) = u(t)$$

试判断在起始点是否发生跳变，据此对(1)(2)分别写出其 $r(0_+)$ 值，对(3)写出 $r(0_+)$ 和 $r'(0_+)$ 值。

2-6 给定系统微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2} r(t) + 3 \frac{d}{dt} r(t) + 2r(t) = \frac{d}{dt} e(t) + 3e(t)$$

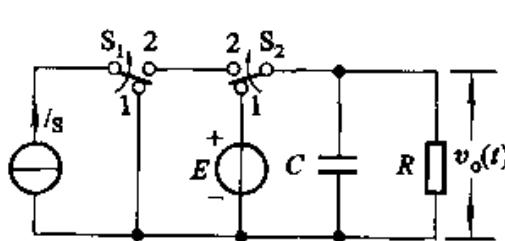
若激励信号和起始状态为以下二种情况：

$$(1) e(t) = u(t), r(0_-) = 1, r'(0_-) = 2$$

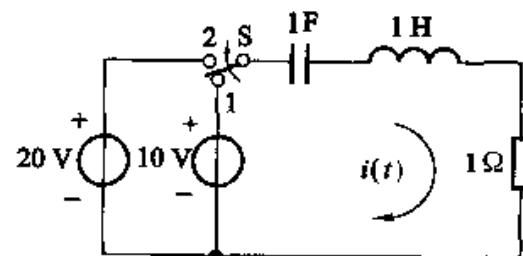
$$(2) e(t) = e^{-3t}u(t), r(0_-) = 1, r'(0_-) = 2$$

试分别求它们的完全响应，并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应各分量。

2-7 电路如题图2-7所示， $t=0$ 以前开关位于“1”，已进入稳态， $t=0$ 时刻， S_1 与 S_2 同时自“1”转至“2”，求输出电压 $v_o(t)$ 的完全响应，并指出其零输入、零状态、自由、强迫各响应分量(E 和 I_S 各为常量)。



题图 2-7



题图 2-8

2-8 题图2-8所示电路， $t < 0$ 时，开关位于“1”且已达到稳态， $t = 0$ 时刻，开关自“1”转至“2”。

(1) 试从物理概念判断 $i(0_-)$ 、 $i'(0_-)$ 和 $i(0_+)$ 、 $i'(0_+)$ ；

(2) 写出 $t \geq 0$ 时间内描述系统的微分方程表示，求 $i(t)$ 的完全响应；

(3) 写出一个方程式，可在 $-\infty < t < \infty$ 时间内描述系统。根据此式利用冲激函数匹配原理判断 0_- 时刻和 0_+ 时刻状态的变化，并与(1)的结果比较。

2-9 求下列微分方程描述的系统冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$

$$(1) \frac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = 2 \frac{d}{dt}e(t)$$

$$(2) \frac{d^2}{dt^2}r(t) + \frac{d}{dt}r(t) + r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + e(t)$$

$$(3) \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 3 \frac{d}{dt}e(t) + 3e(t)$$

2-10 一因果性的 LTI 系统，其输入、输出用下列微分-积分方程表示：

$$\frac{d}{dt}r(t) + 5r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)f(t-\tau)d\tau - e(t)$$

其中 $f(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$ ，求该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

2-11 设系统的微分方程表示为

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 5 \frac{d}{dt}r(t) + 6r(t) = e^{-t}u(t)$$

求使完全响应为 $r(t) = Ce^{-t}u(t)$ 时的系统起始状态 $r(0_+)$ 和 $r'(0_+)$ ，并确定常数 C 值。

2-12 有一系统对激励为 $e_1(t) = u(t)$ 时的完全响应为 $r_1(t) = 2e^{-t}u(t)$ ，对激励为 $e_2(t) = \delta(t)$ 时的完全响应为 $r_2(t) = \delta(t)$ 。

(1) 求该系统的零输入响应 $r_a(t)$ ；

(2) 系统的起始状态保持不变，求其对于激励为 $e_3(t) = e^{-t}u(t)$ 的完全响应 $r_3(t)$ 。

2-13 求下列各函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积 $f_1(t) * f_2(t)$

$$(1) f_1(t) = u(t), f_2(t) = e^{-at}u(t)$$

$$(2) f_1(t) = \delta(t), f_2(t) = \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$(3) f_1(t) = (1+t)[u(t) - u(t-1)], f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$$

$$(4) f_1(t) = \cos(\omega t), f_2(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

$$(5) f_1(t) = e^{-at}u(t), f_2(t) = \sin t u(t)$$

2-14 求下列两组卷积，并注意相互间的区别

$$(1) f(t) = u(t) - u(t-1)，求 s(t) = f(t) * f(t)$$

$$(2) f(t) = u(t-1) - u(t-2)，求 s(t) = f(t) * f(t)$$

2-15 已知 $f_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$, $f_2(t) = \delta(t+5) + \delta(t-5)$, $f_3(t) = \delta\left(t+\frac{1}{2}\right) + \delta\left(t-\frac{1}{2}\right)$ ，画出下列各卷积波形

$$(1) s_1(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$(2) s_2(t) = f_1(t) * f_2(t) * f_2(t)$$

$$(3) s_3(t) = \{[f_1(t) * f_2(t)][u(t+5) - u(t-5)]\} * f_2(t)$$

$$(4) s_4(t) = f_1(t) * f_3(t)$$

2-16 设 $r(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k)$ ，证明 $r(t) = Ae^{-t}$, $0 \leq t \leq 3$ ，并求出 A 值。

2-17 已知某一 LTI 系统对输入激励 $e(t)$ 的零状态响应

$$r_{\infty}(t) = \int_{t-2}^{\infty} e^{t-\tau} e(\tau-1)d\tau$$

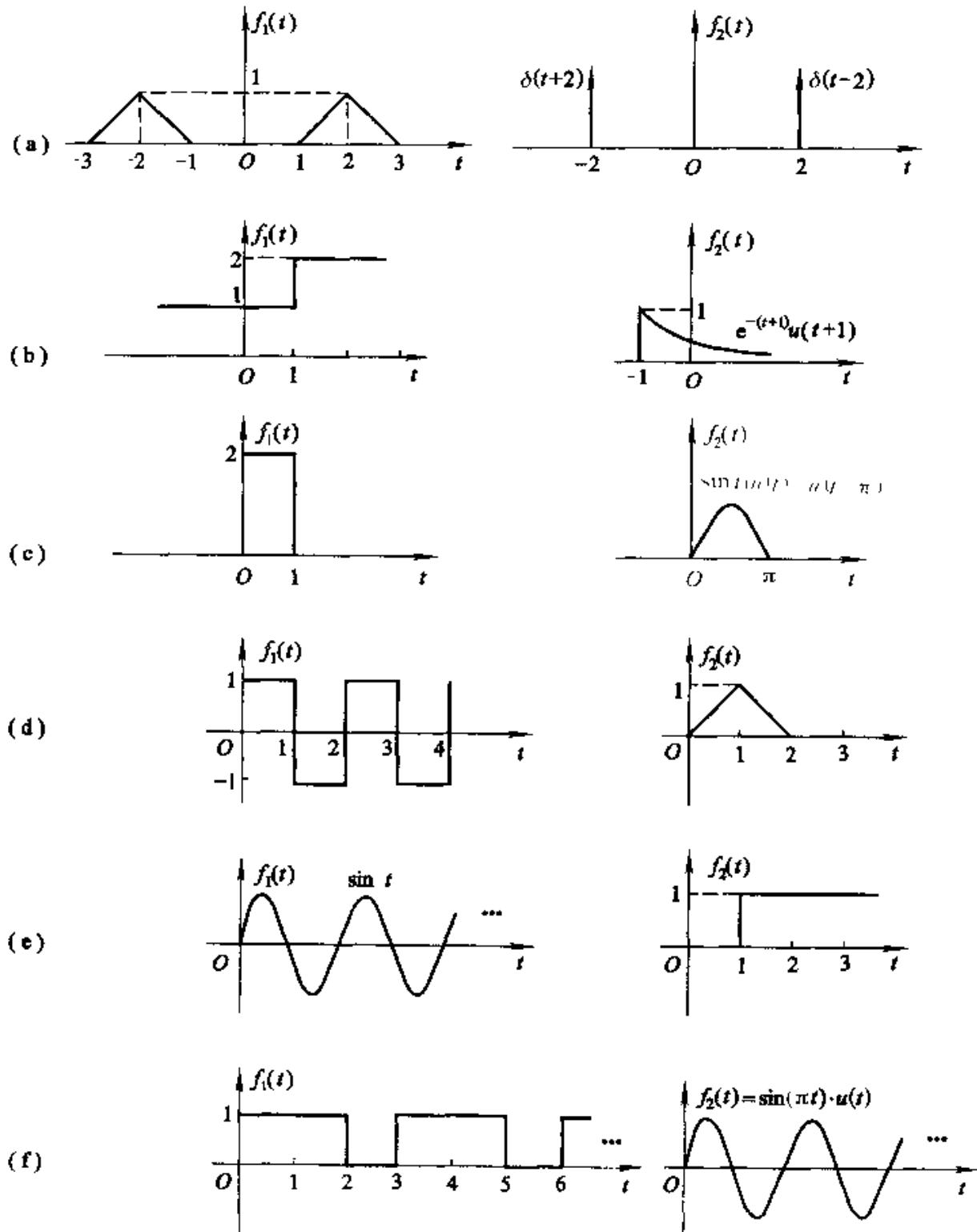
求该系统的单位冲激响应。

- 2-18 某LTI系统，输入信号 $e(t) = 2e^{-3t}u(t)$ ，在该输入下的响应为 $r(t)$ ，即 $r(t) = H[e(t)]$ ，又已知

$$H\left[\frac{d}{dt}e(t)\right] = -3r(t) + e^{-2t}u(t)$$

求该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

- 2-19 对题图2-19所示的各组函数，用图解的方法粗略画出 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 卷积的波形。



题图 2-19

并计算卷积积分 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

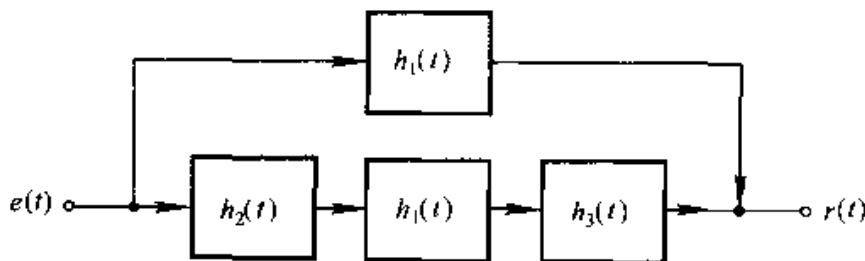
2-20 题图2-20所示系统是由几个“子系统”组成，各子系统的冲激响应分别为：

$$h_1(t) = u(t) \quad (\text{积分器})$$

$$h_2(t) = \delta(t-1) \quad (\text{单位延时})$$

$$h_3(t) = -\delta(t) \quad (\text{倒相器})$$

试求总的系统的冲激响应 $r(t)$ 。



题图 2-20

2-21 已知系统的冲激响应 $h(t) = e^{-2t}u(t)$

(1) 若激励信号为

$$e(t) = e^{-t}[u(t) - u(t-2)] + \beta\delta(t-2)$$

式中 β 为常数，试决定响应 $r(t)$ ；

(2) 若激励信号表示为

$$e(t) = x(t)[u(t) - u(t-2)] + \beta\delta(t-2)$$

式中 $x(t)$ 为任意 t 函数，若要求系统在 $t > 2$ 的响应为零，试确定 β 值应等于多少？

2-22 证明：

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$$

$$(2) \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{\tau}{\pi(t^2 + \tau^2)} \right] = \delta(t)$$

$$(3) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

2-23 化简下列两式：

$$(1) \delta\left(2t^2 - \frac{1}{2}\right);$$

$$(2) \delta(\sin t).$$

2-24 求 $f(t) = [u\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)] * [\cos t \cdot \delta(\sin t)]$ 并画出结果的波形。

2-25 证明： $t^2\delta''(t) = 2\delta(t)$

$$t^3\delta''(t) = 0$$

一般情况： $t^n\delta^{(n)}(t) = (-1)^n n! \delta(t)$

2-26 证明 $f(t)\delta''(t) = f(0)\delta''(t) - 2f'(0)\delta'(t) + f''(0)\delta(t)$ 。

2-27 试求下列各值, 设系统起始状态为零:

$$(1) \frac{A}{p+\alpha} \delta(t)$$

$$(2) \frac{A}{(p+\alpha)^2} \delta(t)$$

$$(3) \frac{A}{(p+\alpha)(p+\beta)} \delta(t)$$

2-28 设 $H(p)$ 是线性时不变系统的传输算子, 且系统起始状态为零, 试证明

$$[H(p)\delta(t)]e^{-\alpha t} = H(p+\alpha)\delta(t)$$

第三章 傅里叶变换

3.1 引 言

从本章开始由时域分析转入变换域分析，在变换域分析中，首先讨论傅里叶变换。傅里叶变换是在傅里叶级数正交函数展开的基础上发展而产生的，这方面的问题也称为傅里叶分析。

傅里叶分析的研究与应用至今已经历了一百余年。1822 年法国数学家傅里叶(J.Fourier, 1768—1830)在研究热传导理论时发表了“热的分析理论”著作，提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理，奠定了傅里叶级数的理论基础。其后，泊松(Poisson)、高斯(Gauss)等人把这一成果应用到电学中去。虽然，在电力工程中，伴随着电机制造、交流电的产生与传输等实际问题的需要，三角函数、指数函数以及傅里叶分析等数学工具早已得到广泛的应用。但是，在通信系统中普遍应用这些数学工具还经历了一段过程，因为当时要找到简便而实用的方法来产生、传输、分离和变换各种频率的正弦信号还有一定的困难。直到 19 世纪末，人们才制造出用于工程实际的电容器。进入 20 世纪以后，谐振电路、滤波器、正弦振荡器等一系列具体问题的解决为正弦函数与傅里叶分析的进一步应用开辟了广阔的前景。从此，人们逐渐认识到，在通信与控制系统的理论研究和实际应用之中，采用频率域(频域)的分析方法较之经典的时间域(时域)方法有许多突出的优点。当今，傅里叶分析方法已经成为信号分析与系统设计不可缺少的重要工具。

20 世纪 70 年代以来，随着计算机、数字集成电路技术的发展，人们对各种二值正交函数(如沃尔什函数)的研究产生了兴趣，它为通信、数字信号处理等技术领域的研究提供了多种途径和手段。虽然，人们认识到傅里叶分析决不是信息科学与技术领域中惟一的变换域方法，但也不得不承认，在此领域中，傅里叶分析始终有着极其广泛的应用，是研究其他变换方法的基础。而且由于计算机技术的普遍应用，在傅里叶分析方法中出现了所谓“快速傅里叶变换”(FFT)，它为这一数学工具赋予了新的生命力。目前，快速傅里叶变换的研究与应用已相当成熟，而且仍在不断更新与发展。

傅里叶分析方法不仅应用于电力工程、通信和控制领域之中，而且在力

学、光学、量子物理和各种线性系统分析等许多有关数学、物理和工程技术领域中得到广泛而普遍的应用。

本章从傅里叶级数正交函数展开问题开始讨论，引出傅里叶变换，建立信号频谱的概念。通过典型信号频谱以及傅里叶变换性质的研究，初步掌握傅里叶分析方法的应用。对于周期信号而言，在进行频谱分析时可以利用傅里叶级数，也可利用傅里叶变换，傅里叶级数相当于傅里叶变换的一种特殊表达形式。在3.9节专门研究周期信号的傅里叶变换。第3.9与3.10节将对比研究周期信号与抽样信号的傅里叶变换，这将有利于从连续时间信号分析逐步过渡到离散时间信号分析，为本书下册第九章（离散傅里叶变换）的研究作好准备。作为傅里叶变换的最重要应用之一，在最后一节介绍抽样定理，这一定理奠定了近代数字通信的理论基础，本章给出初步概念，在第五章将继续讨论有关它的实际应用。

3.2 周期信号的傅里叶级数分析

(一) 三角函数形式的傅里叶级数

由数学分析课程已知，按照傅里叶级数的定义，周期函数 $f(t)$ 可由三角函数的线性组合来表示，若 $f(t)$ 的周期为 T_1 ，角频率 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ ，频率 $f_1 = \frac{1}{T_1}$ ，傅里叶级数展开表达式为

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) + a_2 \cos(2\omega_1 t) \\ & + b_2 \sin(2\omega_1 t) + \cdots + a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) + \cdots \\ = & a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \end{aligned} \quad (3-1)$$

式中 n 为正整数，各次谐波成分的幅度值按以下各式计算：

直流分量

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt \quad (3-2)$$

余弦分量的幅度

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad (3-3)$$

正弦分量的幅度

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (3-4)$$

其中 $n = 1, 2, \dots$

为方便起见，通常积分区间 $t_0 \sim t_0 + T_1$ 取为 $0 \sim T_1$ 或 $-\frac{T_1}{2} \sim +\frac{T_1}{2}$ 。

三角函数集是一组完备的正交函数集，关于正交函数集的定义、性质以及进一步的应用将在第六章详细讨论。本章着重研究从傅里叶级数引出信号频谱以及傅里叶变换的概念。

必须指出，并非任意周期信号都能进行傅里叶级数展开。被展开的函数 $f(t)$ 需要满足如下的一组充分条件，这组条件称为“狄利克雷(Dirichlet)条件”：

- (1) 在一周期内，如果有间断点存在，则间断点的数目应是有限个；
- (2) 在一周期内，极大值和极小值的数目应是有限个；
- (3) 在一周期内，信号是绝对可积的，即 $\int_{t_0}^{t_0+T_1} |f(t)| dt$ 等于有限值 (T_1 为周期)。

通常我们遇到的周期性信号都能满足狄利克雷条件，因此，以后除非特殊需要，一般不再考虑这一条件。

若将式(3-1)中同频率项加以合并，可以写成另一种形式

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (3-5)$$

或

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

比较式(3-1)和(3-5)，可以看出傅里叶级数中各个量之间有如下关系

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= c_0 = d_0 \\ c_n &= d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ a_n &= c_n \cos \varphi_n = d_n \sin \theta_n \\ b_n &= -c_n \sin \varphi_n = d_n \cos \theta_n \\ \tan \theta_n &= \frac{a_n}{b_n} \\ \tan \varphi_n &= -\frac{b_n}{a_n} \\ (n &= 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

式(3-1)表明：任何周期信号只要满足狄利克雷条件就可以分解成直流分量及许多正弦、余弦分量。这些正弦、余弦分量的频率必定是基频 f_1 ($f_1 = 1/T_1$) 的整数倍。通常把频率为 f_1 的分量称为基波，频率为 $2f_1, 3f_1, \dots$ 等分量分别称为二次谐波、三次谐波……等。显然，直流分量的大小以及基波与各次谐波的幅度、相位取决于周期信号的波形。

从式(3-3)至式(3-6)可以看出，各分量的幅度 a_n, b_n, c_n 及相位 φ_n 都是

$n\omega_1$ 的函数。如果把 c_n 对 $n\omega_1$ 的关系绘成如图 3-1 那样的线图,便可清楚而直观地看出各频率分量的相对大小。这种图称为信号的幅度频谱或简称为幅度谱。图中每条线代表某一频率分量的幅度,称为谱线。连接各谱线顶点的曲线(如图 3-1 中虚线所示)称为包络线,它反映各分量的幅度变化情况。类似地,还可以画出各分量的相位 φ_n 对频率 $n\omega_1$ 的线图,这种图称为相位频谱或简称相位谱。幅度谱和相位谱的例子如图 3-1 所示。周期信号的频谱只会在 $0, \omega_1, 2\omega_1, \dots$ 等离散频率点上,这种频谱称为离散谱,它是周期信号频谱的主要特点。

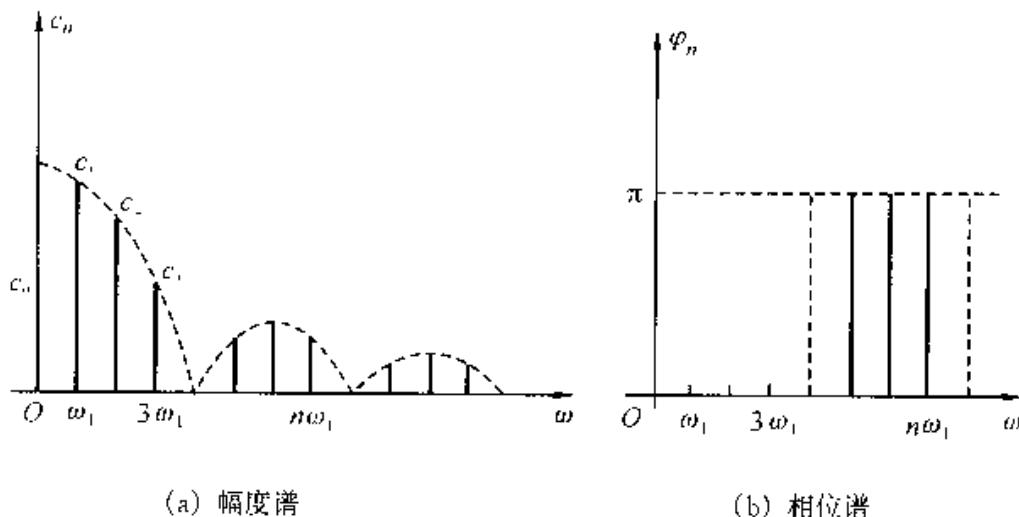


图 3-1 周期信号的频谱举例

(二) 指数形式的傅里叶级数

周期信号的傅里叶级数展开也可表示为指数形式,已知

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \quad (3-7)$$

根据欧拉公式:

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t})$$

$$\sin(n\omega_1 t) = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t})$$

把上式代入式(3-7),得到

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right) \quad (3-8)$$

令 $F(n\omega_1) = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3-9)$

考虑到 a_n 是 n 的偶函数、 b_n 是 n 的奇函数[见式(3-3)、(3-4)],由式(3-9)可知

$$F(-n\omega_1) = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

将上述结果代入式(3-8), 得到

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} + F(-n\omega_1)e^{-jn\omega_1 t}]$$

令 $F(0) = a_0$, 考虑到

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(-n\omega_1)e^{-jn\omega_1 t} = \sum_{n=1}^{\infty} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$$

得到 $f(t)$ 的指数形式傅里叶级数, 它是

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} \quad (3-10)$$

若将式(3-3)、(3-4)代入式(3-9), 就可以得到指数形式傅里叶级数的系数 $F(n\omega_1)$ (或简写作 F_n), 它等于

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-11)$$

其中 n 为从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整数。

从式(3-6)、(3-9)可以看出 F_n 与其他系数有如下关系:

$$\begin{aligned} F_0 &= c_0 = d_0 = a_0 \\ F_n &= |F_n|e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ F_{-n} &= |F_{-n}|e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \\ |F_n| &= |F_{-n}| = \frac{1}{2}|c_n| = \frac{1}{2}|d_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ |F_n| + |F_{-n}| &= c_n \\ F_n + F_{-n} &= a_n \\ b_n &= j(F_n - F_{-n}) \\ c_n^2 &= d_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = 4F_n F_{-n} \\ (n &= 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3-12)$$

同样可以画出指数形式表示的信号频谱。因为 F_n 一般是复函数, 所以称这种频谱为复数频谱。根据 $F_n = |F_n|e^{j\varphi_n}$, 可以画出复数幅度谱 $|F_n| \sim \omega$ 与复数相位谱 $\varphi_n \sim \omega$, 如图 3-2(a)、(b) 所示。然而当 F_n 为实数时, 可以用 F_n 的正负表示 φ_n 的 $0, \pi$, 因此经常把幅度谱与相位谱合画在一张图上, 如图 3-2(c) 所示。由上可知, 图中每条谱线长度 $|F_n| = \frac{1}{2}|c_n|$ 。由于在式(3-10)中不仅包括正频率项而且含有负频率项, 因此这种频谱相对于纵轴左右是对称的。

比较图 3-1 和图 3-2 可以看出这两种频谱表示方法实质上是一样的, 其

不同之处仅在于图 3-1 中每条谱线代表一个分量的幅度, 而图 3-2 中每个分量的幅度一分为二, 在正、负频率相对应的位置上各为一半, 所以, 只有把正、负频率上对应的这两条谱线矢量相加起来才代表一个分量的幅度。应该指出, 在复数频谱中出现的负频率是由于将 $\sin(n\omega_1 t)$, $\cos(n\omega_1 t)$ 写成指数形式时, 从数学的观点自然分成 $e^{jn\omega_1 t}$ 以及 $e^{-jn\omega_1 t}$ 两项, 因而引入了 $-j n \omega_1 t$ 项, 所以, 负频率的出现完全是数学运算的结果, 并没有任何物理意义, 只有把负频率项与相应的正频率项成对地合并起来, 才是实际的频谱函数。

下面利用傅里叶级数的有关结论研究周期信号的功率特性。为此, 把傅里叶级数表示式(3-1)或(3-10)的两边平方, 并在一个周期内进行积分, 再利用三角函数及复指数函数的正交性, 可以得到周期信号 $f(t)$ 的平均功率 P 与傅里叶系数有下列关系

$$\begin{aligned} P = \overline{f^2(t)} &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} f^2(t) dt \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) - c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \end{aligned} \quad (3-13)$$

此式表明, 周期信号的平均功率等于傅里叶级数展开各谐波分量有效值的平方和, 也即时域和频域的能量守恒。式(3-13)称为帕塞瓦尔定理(或方程), 在第六章还要讨论与此式有关的问题。

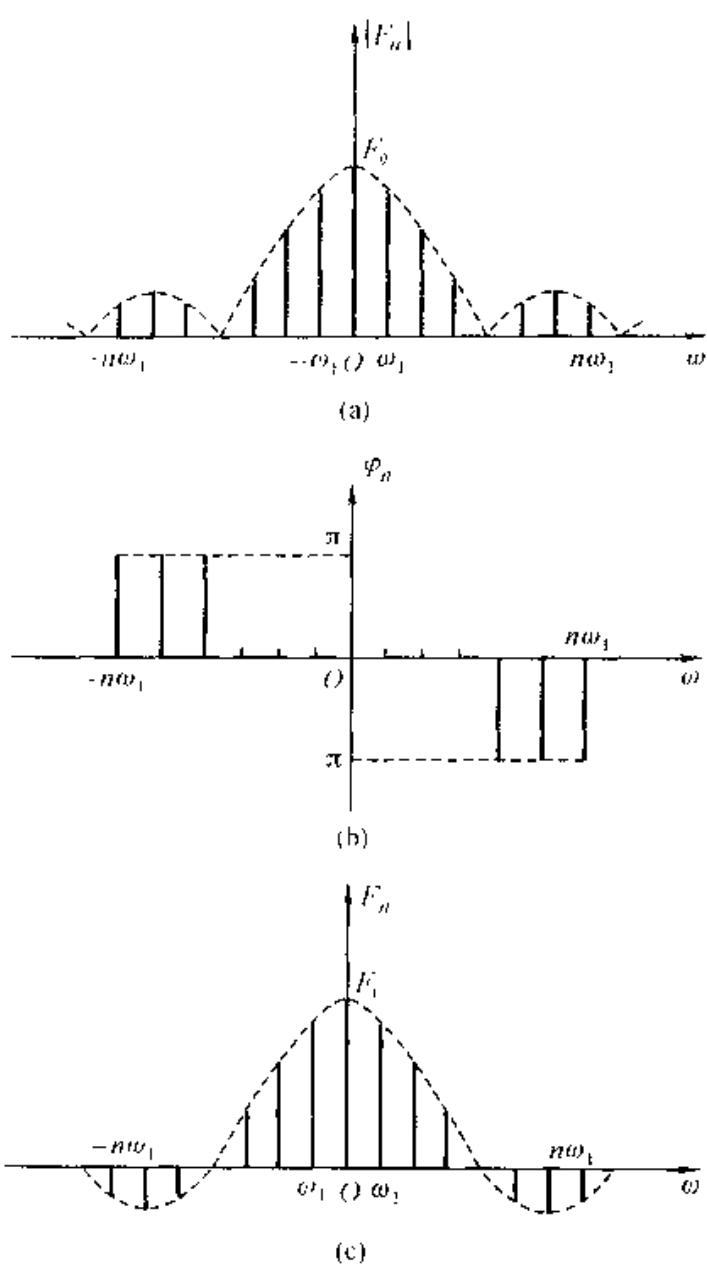


图 3-2 周期信号的复数频谱

(三) 函数的对称性与傅里叶系数的关系

在要求把已知信号 $f(t)$ 展为傅里叶级数的时候, 如果 $f(t)$ 是实函数而且它的波形满足某种对称性, 则在其傅里叶级数中有些项将不出现, 留下的各项系数的表示式也变得比较简单。波形的对称性有两类, 一类是对整周期对称, 例如偶函数和奇函数; 另一类是对半周期对称, 例如奇谐函数。前者决定级数中只可能含有余弦项或正弦项, 后者决定级数中只可能含有偶次或奇次项。

下面讨论几种对称条件:

(1) 偶函数

若信号波形相对于纵轴是对称的, 即满足

$$f(t) = f(-t)$$

此时 $f(t)$ 是偶函数, 图 3-3 给出示例。

这样, 式(3-3)、(3-4)中的 $f(t)\cos(n\omega_1 t)$ 为偶函数, 而 $f(t)\sin(n\omega_1 t)$ 为奇函数, 于是级数中的系数等于

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \\ b_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

由式(3-6)、(3-12)可以得到:

$$c_n = d_n = a_n = 2F_n$$

$$F_n = F_{-n} = \frac{a_n}{2}$$

$$\varphi_n = 0$$

$$\theta_n = -\frac{\pi}{2}$$

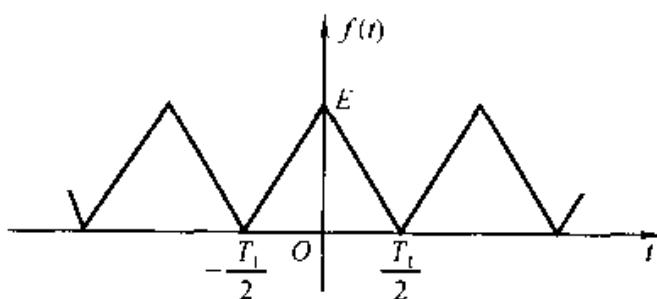


图 3-3 偶函数举例

所以, 偶函数的 F_n 为实数。在偶函数的傅里叶级数中不会含有正弦项, 只可能含有直流项和余弦项。

例如图 3-3 所示的周期三角信号是偶函数, 它的傅里叶级数如下式

$$f(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{25} \cos(5\omega_1 t) + \dots \right]$$

(2) 奇函数

若波形相对于纵坐标是反对称的，即满足

$$f(t) = -f(-t)$$

此时 $f(t)$ 是奇函数，图 3-4 给出示例。

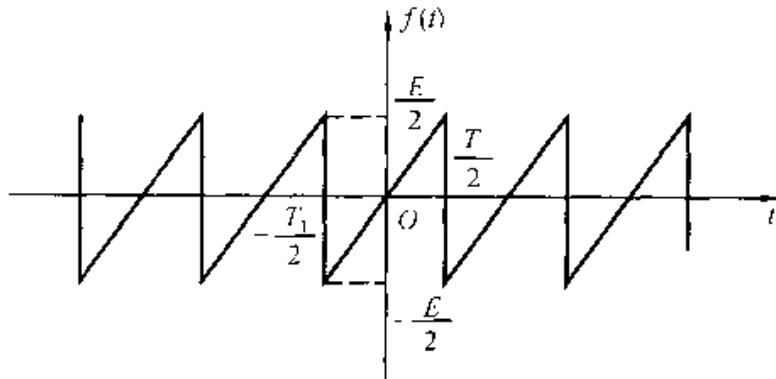


图 3-4 奇函数举例

由式(3-3)、(3-4)可以看出级数中的系数等于

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_n = 0 \\ b_n &= \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

由式(3-6)、(3-12)可以得到：

$$c_n = d_n = b_n = 2jF_n$$

$$F_n = -F_{-n} = -\frac{1}{2}jb_n$$

$$\varphi_n = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta_n = 0$$

所以，奇函数的 F_n 为虚数。在奇函数的傅里叶级数中不会含有余弦项，只可能包含正弦项。虽然在奇函数上加以直流成分，它不再是奇函数，但在它的级数中仍然不会含有余弦项。

例如图 3-4 所示的周期锯齿信号是奇函数，它的傅里叶级数如下式所示。显然，不包含余弦项，只含有正弦项。

$$f(t) = \frac{E}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) - \dots \right]$$

(3) 奇谐函数

若波形沿时间轴平移半个周期并相对于该轴上下反转，此时波形并不发生变化，即满足

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right)$$

这样的函数称为半波对称函数或称为奇谐函数，如图 3-5 (a) 所示。

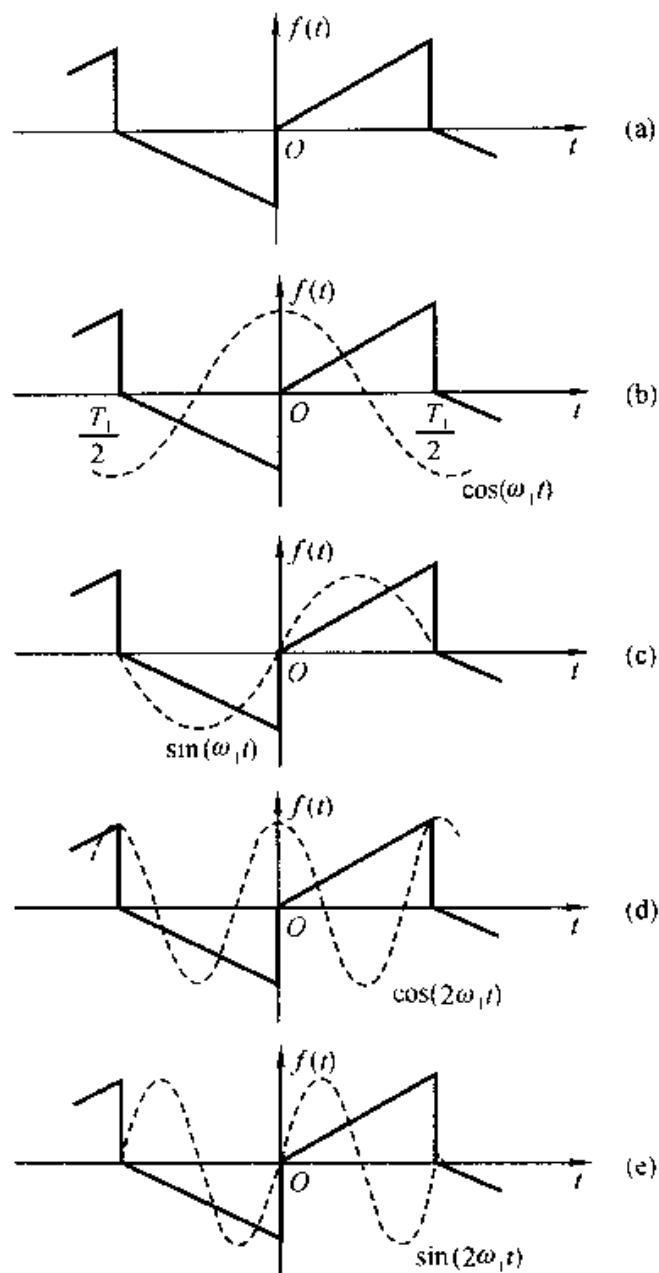


图 3-5 奇谐函数举例

由图 3-5(a)可以明显地看出, 直流分量 a_0 必然等于零。为了说明半波对称对傅里叶系数 a_n, b_n 的影响, 图 3-5(b), (c), (d), (e) 中用虚线分别画出了 $\cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t), \cos(2\omega_1 t)$ 及 $\sin(2\omega_1 t)$ 的波形, 而图中的实线表示半波对称函数 $f(t)$ 。从这几幅图可以定性地看出, 式(3-3)和式(3-4)中被积函数 $f(t)\cos(n\omega_1 t), f(t)\sin(n\omega_1 t)$ 的形状。显然 $f(t)\cos(\omega_1 t)$ 和 $f(t)\sin(\omega_1 t)$ 积分存在, 而 $f(t)\cos(2\omega_1 t)$ 和 $f(t)\sin(2\omega_1 t)$ 积分为零。这样可以得到:

$$a_1 = \frac{4}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(\omega_1 t) dt$$

$$b_1 = \frac{4}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(\omega_1 t) dt$$

$$a_2 = 0$$

$$b_2 = 0$$

依此类推，可以得到：

$$a_0 = 0$$

$$a_n = b_n = 0 \quad (n \text{ 为偶数})$$

$$a_n = \frac{4}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad (n \text{ 为奇数}) \quad (3-16)$$

$$b_n = \frac{4}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (n \text{ 为奇数})$$

可见，在半波对称周期函数的傅里叶级数中，只会含有基波和奇次谐波的正弦、余弦项，而不会包含偶次谐波项，这也是“奇谐函数”名称的来由。应该注意，不要把奇函数和奇谐函数相混淆，前者只可能包含正弦项，而后者只可能包含奇次谐波的正弦、余弦项。

为查阅方便，把上述几种函数的对称性与傅里叶系数的关系汇总列于表3-1。

由上可见，当波形满足某种对称关系时，在傅里叶级数中某些项将不出现，熟悉傅里叶级数这种性质后，可以对波形应包含哪些谐波成分迅速作出判断，以便简化傅里叶系数的计算。在允许的情况下，可以移动函数的坐标使波形具有某种对称性，以简化运算。

(四) 傅里叶有限级数与最小方均误差

一般来说，任意周期函数表示为傅里叶级数时需要无限多项才能完全逼近原函数。但在实际应用中，经常采用有限项级数来代替无限项级数。显然，选取有限项级数是一种近似的方法，所选项数愈多，有限项级数愈逼近原函数，也就是说，其方均误差愈小。

已知周期函数 $f(t)$ 的傅里叶级数为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

若取傅里叶级数的前 $(2N+1)$ 项来逼近周期函数 $f(t)$ ，则有限项傅里叶级数为

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{2N+1} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

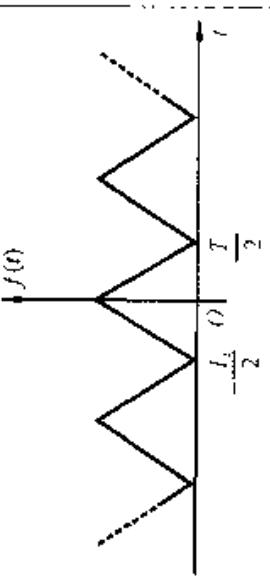
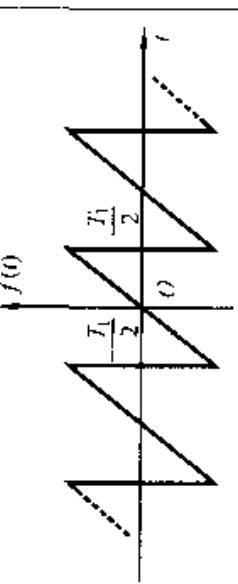
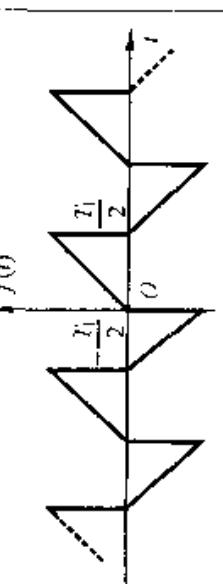
这样用 $S_N(t)$ 逼近 $f(t)$ 引起的误差函数为

$$\epsilon_N(t) = f(t) - S_N(t)$$

方均误差等于

$$E_N = \overline{\epsilon_N^2(t)} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} \epsilon_N^2(t) dt$$

表 3-1 函数的对称性与傅里叶系数的关系

函数 $f(t)$	波形举例	直流分量 a_0, F_0	余弦分量 $a_n (n \neq 0)$	正弦分量 b_n	复指数分量 F_n
偶函数 $f(t) = f(-t)$		$\frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt$ $(n = 1, 2, \dots)$	$\frac{4}{T_1} \int_{0}^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ $(n = 1, 2, \dots)$	0	$\frac{a_n}{2}$ (实数) ($n = 1, 2, \dots$)
奇函数 $f(t) = -f(-t)$		0	0	$\frac{4}{T_1} \int_{0}^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$ $(n = 1, 2, \dots)$	$-j \frac{b_n}{2}$ (虚数) ($n = 1, 2, \dots$)
奇谐函数 $f(t) = -f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right)$		0	$\frac{4}{T_1} \int_{0}^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$ $(n = 1, 3, \dots)$	$\frac{4}{T_1} \int_{0}^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$ $(n = 1, 3, \dots)$	$\frac{a_n - jb_n}{2}$ (复数) ($n = 1, 3, \dots$)

(其中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, f(t)$ 为实函数)

将 $f(t)$, $S_N(t)$ 所表示的级数代入上式，并利用式(3-13)经化简得到

$$E_N = \overline{\epsilon_N^2(t)} = \overline{f^2(t)} - \left[a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

下面以图 3-6(a)所示的对称方波为例，说明取不同的项数时有限级数对原函数的逼近情况，并计算由此引起的方均误差。这样可以比较直观地了解傅

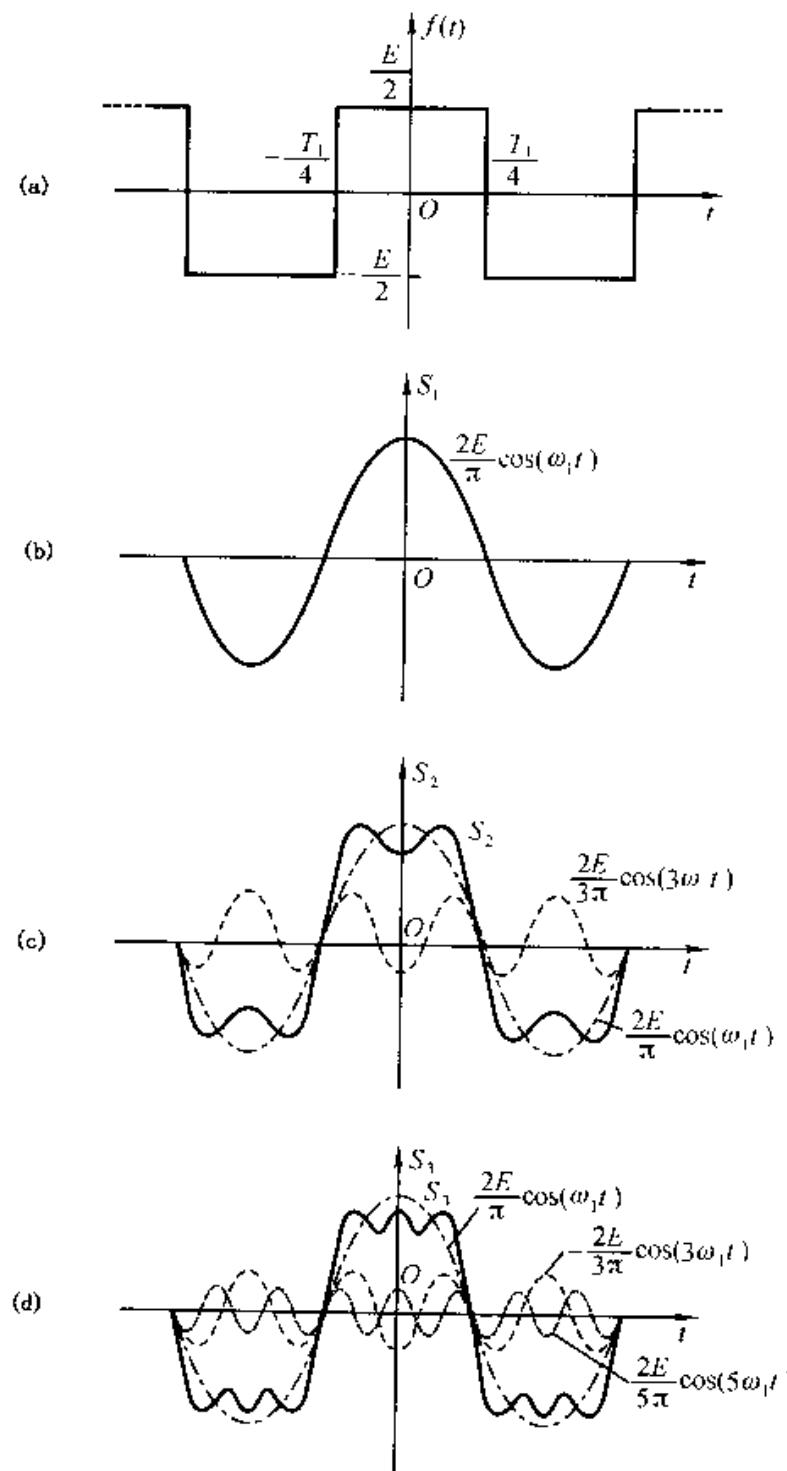


图 3-6 对称方波有限项傅里叶级数的波形

里叶级数的含义，并观察到级数中各种频率分量对波形的影响。

由图 3-6(a)可见， $f(t)$ 既是偶函数，又是奇谐函数。因此，在它的傅里叶级数中只可能含有奇次谐波的余弦项。由式(3-3)可得

$$a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

于是

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \left[\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_1 t) - \dots \right]$$

图 3-6 示出对称方波 $f(t)$ 的傅里叶级数在取有限项时的波形，其中(b)是只取基波分量一项时的波形，即 $S_1 = \frac{2E}{\pi} \cos(\omega_1 t)$ 的波形；(c)是取基波和三次谐波两项时的波形，即 $S_2 = \frac{2E}{\pi} \left[\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 t) \right]$ 的波形；(d)是取基波、三次和五次谐波这三项时的波形，即 $S_3 = \frac{2E}{\pi} \left[\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_1 t) \right]$ 的波形。

用有限级数 S_1 、 S_2 、 S_3 去逼近 $f(t)$ 所引起的方均误差分别为：

$$\begin{aligned} E_1 &= \overline{\epsilon_1^2} = \overline{f^2(t)} - \frac{1}{2} a_1^2 \\ &= \left(\frac{E}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{\pi}\right)^2 \\ &\approx 0.05E^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \overline{\epsilon_2^2} = \overline{f^2(t)} - \frac{1}{2} (a_1^2 + a_3^2) \\ &= \left(\frac{E}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{3\pi}\right)^2 \\ &\approx 0.02E^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \overline{\epsilon_3^2} = \overline{f^2(t)} - \frac{1}{2} (a_1^2 + a_3^2 + a_5^2) \\ &= \left(\frac{E}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{3\pi}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{5\pi}\right)^2 \\ &\approx 0.015E^2 \end{aligned}$$

从图 3-6 可以看出：(1)傅里叶级数所取项数 $n (= N)$ 愈多，相加后波形愈逼近原信号 $f(t)$ ，两者的方均误差愈小。显然，当 $N \rightarrow \infty$ ， S_N 波形必然等于 $f(t)$ ；(2)当信号 $f(t)$ 是脉冲信号时，其高频分量主要影响脉冲的跳变沿，而低频分量主要影响脉冲的顶部。所以， $f(t)$ 波形变化愈剧烈，所包含的高频分量愈丰富；变化愈缓慢，所包含的低频分量愈丰富；(3)当信号中任一频谱分量的幅度或相位发生相对变化时，输出波形一般要发生失真。

从图 3-6 还可以看出这样一种现象：当选取傅里叶有限级数的项数愈多，

在所合成的波形 S_N 中出现的峰起愈靠近 $f(t)$ 的不连续点。在第五章中将会证明, 当所选取的项数 N 很大时, 该峰起值趋于一个常数, 它大约等于总跳变值的 9%, 并从不连续点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去。这种现象通常称为吉布斯(Gibbs)现象。在图 3-7 中画出了矩形波和锯齿波所呈现的吉布斯现象。

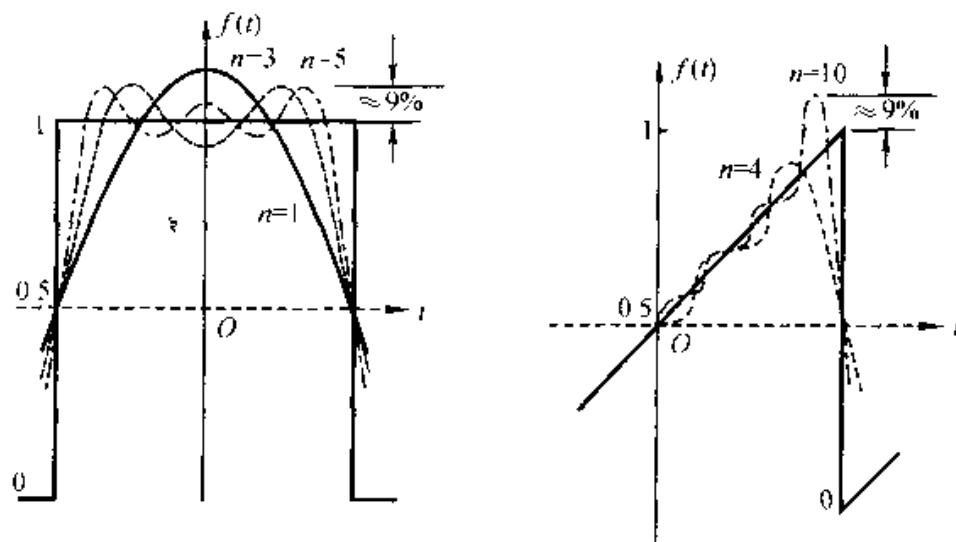


图 3-7 吉布斯现象

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

周期信号的频谱分析可利用傅里叶级数, 也可借助傅里叶变换。本节以傅里叶级数展开形式研究典型周期信号的频谱, 第 3.9 节利用傅里叶变换研究周期信号频谱。

(一) 周期矩形脉冲信号

设周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的脉冲宽度为 τ , 脉冲幅度为 E , 重复周期为 T_1 (显然, 角频率 $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1$), 如图 3-8 所示。

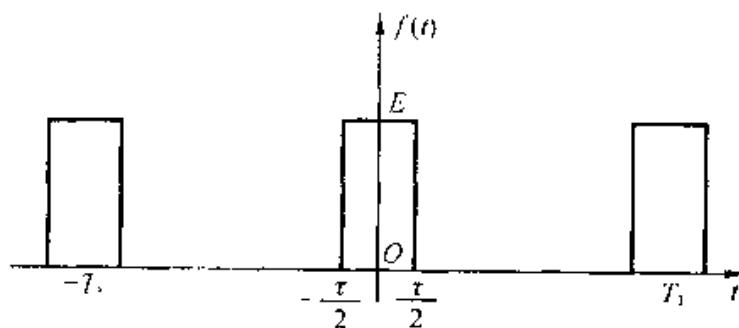


图 3-8 周期矩形信号的波形

此信号在一个周期内 ($-\frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2}$) 的表示式为

$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

利用式(3-1), 可以把周期矩形信号 $f(t)$ 展成三角形式傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

根据式(3-3)、(3-4)可以求出各系数, 其中直流分量

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} E dt = \frac{E\tau}{T_1} \quad (3-17)$$

余弦分量的幅度为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \\ &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} E \cos\left(n \frac{2\pi}{T_1} t\right) dt \\ &= \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) \end{aligned}$$

或写作

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) \\ &= \frac{E\tau\omega_1}{\pi} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \end{aligned} \quad (3-18)$$

其中 Sa 为抽样函数, 它等于

$$\text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)}{\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)}$$

由于 $f(t)$ 是偶函数, 由(3-4)式可知

$$b_n = 0$$

这样, 周期矩形信号的三角形式傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) \cos(n\omega_1 t) \quad (3-19)$$

或

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{E\tau\omega_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \cos(n\omega_1 t)$$

若将 $f(t)$ 展开指数形式的傅里叶级数, 由式(3-11)可得

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} E e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \\ &= \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t} \end{aligned}$$

对式(3-19)而言, 若给定 τ , T_1 (或 ω_1), E 就可以求出直流分量、基波与各次谐波分量的幅度, 它们等于:

$$\begin{aligned} c_n &= a_n = \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) \quad (n=1,2,\dots) \\ c_0 &= a_0 = \frac{E\tau}{T_1} \end{aligned}$$

图 3-9 (a) 和 (b) 分别示出幅度谱 $|c_n|$ 和相位谱 φ_n 的图形, 考虑到这里 c_n 是实数, 因此一般把幅度谱 c_n 、相位谱 φ_n 合画在一幅图上, 如图 3-9 (c) 所示, 同样, 也可画出复数频谱 F_n , 如图 3-9 (d) 所示。

从以上分析可以看出:

1. 周期矩形脉冲如同一般的周期信号那样, 它的频谱是离散的, 两谱线的间隔为 ω_1 ($= 2\pi/T_1$), 当脉冲重复周期愈大, 谱线愈靠近。

2. 直流分量、基波及各谐波分量的大小正比于脉幅 E 和脉宽 τ , 反比于周期 T_1 。各谱线的幅度按 $\text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)$ 包络线的规律而变化。譬如, $n=1$ 时, 基波幅度为 $\frac{2E}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\tau}{T_1}\right)$; $n=2$ 时, 二次谐波的幅度为 $\frac{E}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi\tau}{T_1}\right)$ 。当 $\omega = \frac{2m\pi}{\tau}$ ($m=1,2,\dots$) 时, 谱线的包络线经过零点。当 ω 位于 $0, 2.86 \frac{\pi}{\tau}$ ($\approx 3 \frac{\pi}{\tau}$), $4.92 \frac{\pi}{\tau}$ ($\approx 5 \frac{\pi}{\tau}$), \dots 时, 谱线的包络线为极值, 极值的大小分别为 $\frac{2E\tau}{T_1}$ 及 $\sim 0.217 \left(\frac{2E\tau}{T_1}\right)$, $0.128 \left(\frac{2E\tau}{T_1}\right)$, \dots , 如图 3-10 所示。

3. 周期矩形信号包含无穷多条谱线, 也就是说它可以分解成无穷多个频率分量, 但其主要能量集中在第一个零点以内, 实际上, 在允许一定失真的条件下, 可以要求一个通信系统只把 $\omega \leqslant \frac{2\pi}{\tau}$ 频率范围内的各个频谱分量传送过去, 而舍弃 $\omega > \frac{2\pi}{\tau}$ 的分量。这样, 常常把 $\omega = 0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$ 这段频率范围称为矩形信号的频带宽度, 记作 B , 于是

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

或

$$B_f = \frac{1}{\tau} \quad (3-20)$$

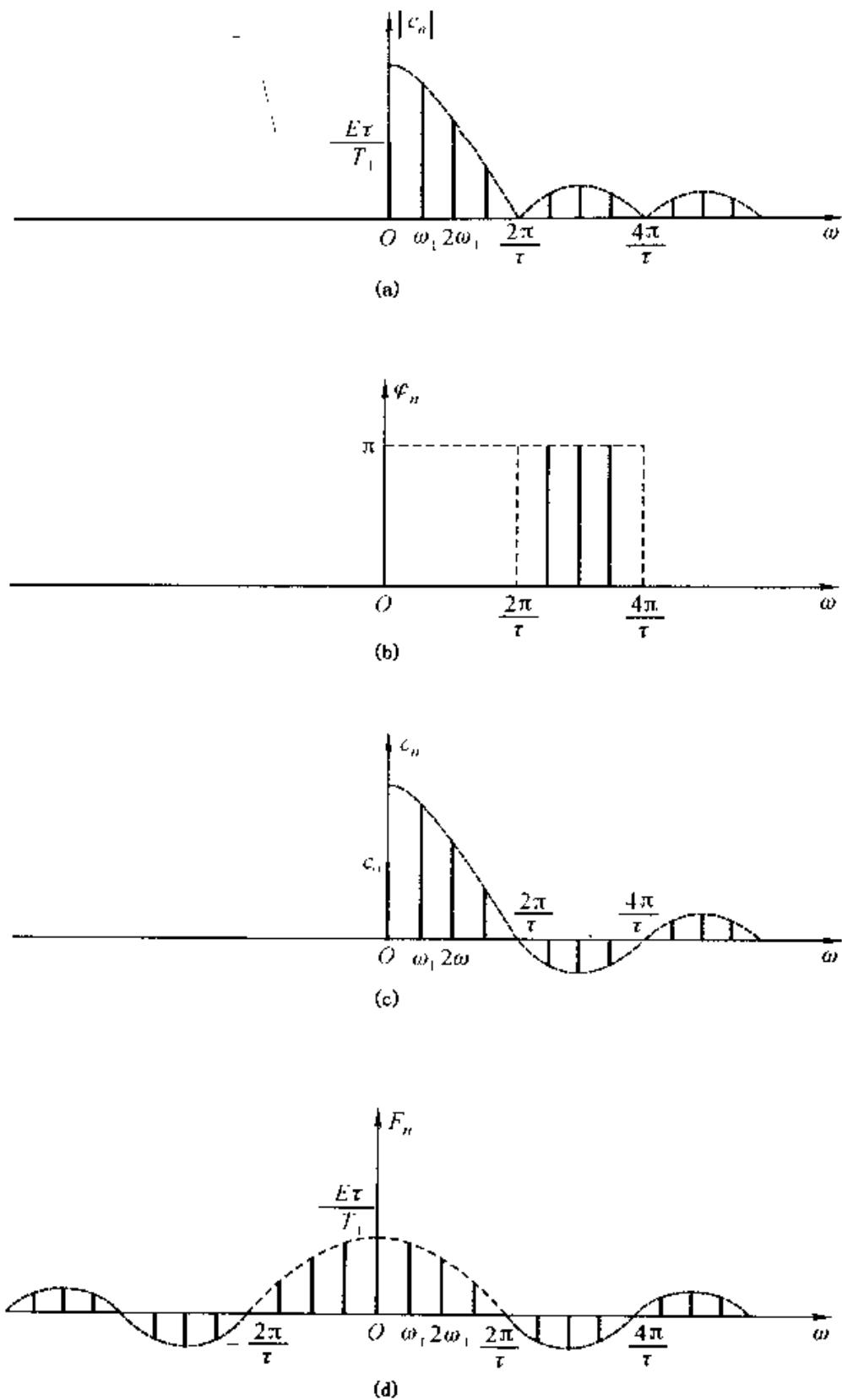


图 3-9 周期矩形信号的频谱

显然，频带宽度 B 只与脉宽 τ 有关，而且成反比关系。

为了说明在不同的脉宽 τ 和不同的周期 T_1 的情况下周期矩形信号频谱的变

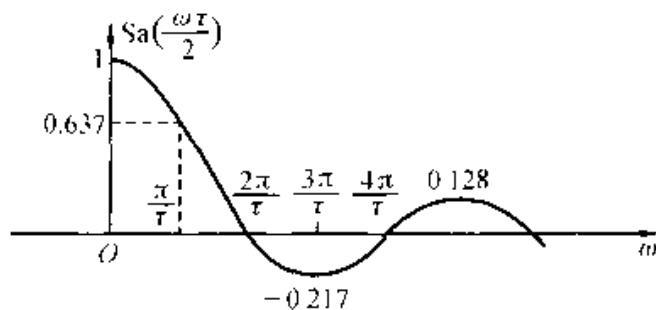
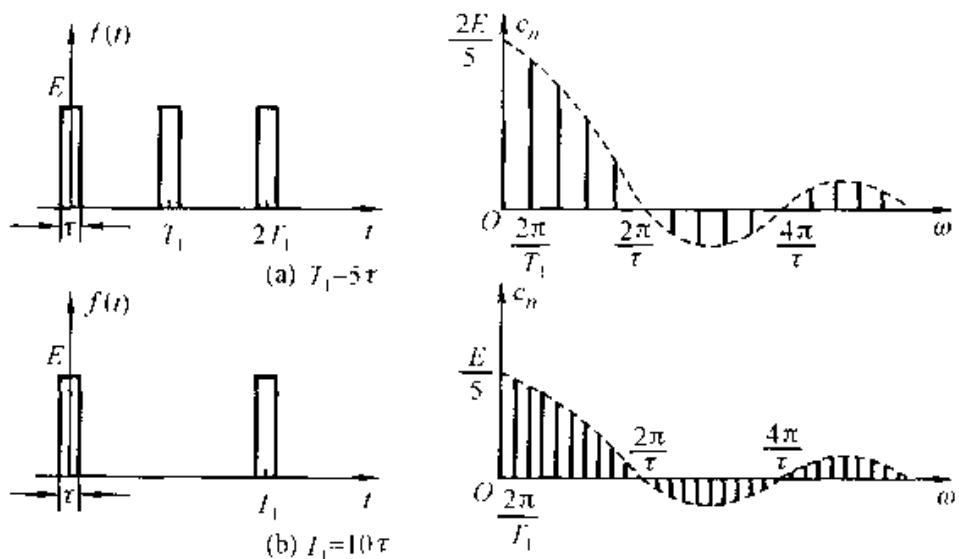


图 3-10 周期矩形信号归一化频谱包络线

化规律,图 3-11 画出了当 τ 保持不变,而 $T_1 = 5\tau$ 和 $T_1 = 10\tau$ 两种情况时的频谱;在图 3-12 画出了当 T_1 保持不变,而 $\tau = \frac{T_1}{5}$ 与 $\tau = \frac{T_1}{10}$ 两种情况时的频谱。

图 3-11 不同 T_1 值下周期矩形信号的频谱

上一节图 3-6 所讨论的对称方波信号是矩形信号的一种特殊情况,两者相比较,对称方波信号有两个特点:

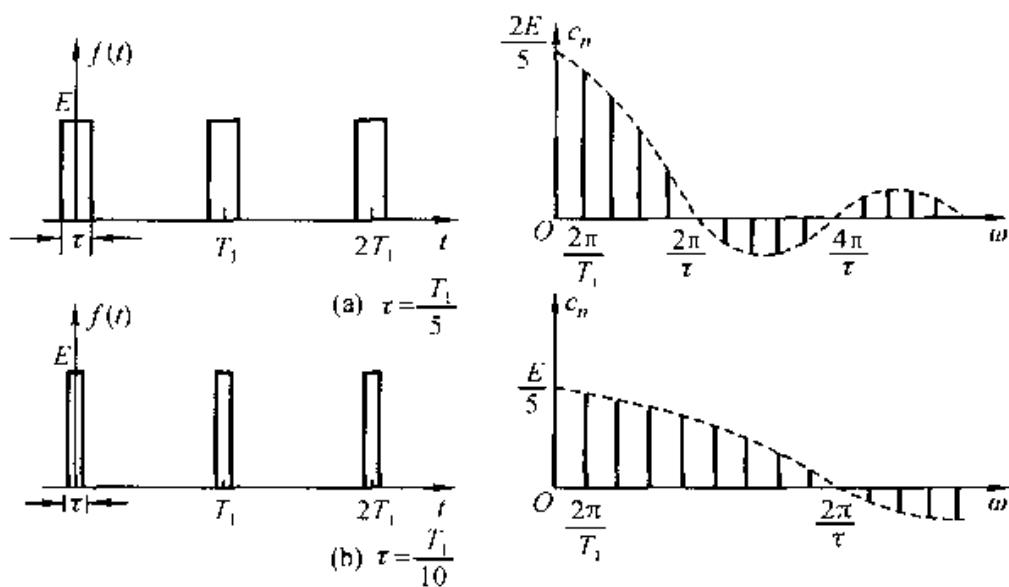
(1) 它是正负交替的信号,其直流分量(a_0)等于零

(2) 它的脉宽恰等于周期的一半,即 $\tau = \frac{T_1}{2}$

这样,由周期矩形信号的傅里叶级数式(3-19)可以直接得到对称方波的傅里叶级数,它是

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2E}{\pi} \left[\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_1 t) - \dots \right] \\ &= \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_1 t) \end{aligned} \quad (3-21)$$

或者写作

图 3-12 不同 τ 值下周期矩形信号的频谱

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 t + \pi) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_1 t) + \dots \right]$$

其波形与频谱如图 3-13 所示。

由于对称方波的偶次谐波恰恰落在频谱包络线的零值点，所以它的频谱只包含基波和奇次谐波。上一节已经指出，该信号既是偶函数，同时又是奇谐函数，因此在它的频谱中只会包含基波和奇次谐波的余弦分量。

由式(3-19)、(3-21)还可以看到，在周期矩形信号及对称方波信号的频谱中，谐波的幅度以 $\frac{1}{n}$ 规律收敛。

(二) 周期锯齿脉冲信号

周期锯齿脉冲信号如图 3-14 所示。显然它是奇函数，因而 $a_n = 0$ ，并由式(3-4)可以求出傅里叶级数的系数 b_n 。这样，便可得到周期锯齿脉冲信号的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega_1 t) + \dots \right] \\ &= \frac{E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin(n\omega_1 t) \end{aligned} \quad (3-22)$$

周期锯齿脉冲信号的频谱只包含正弦分量，谐波的幅度以 $\frac{1}{n}$ 的规律收敛。

(三) 周期三角脉冲信号

周期三角脉冲信号如图 3-15 所示。显然它是偶函数，因而 $b_n = 0$ ，由式(3-2)、(3-3)可以求出傅里叶级数的系数 a_0 ， a_n 。这样，便可得到该信号的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_1 t) + \dots \right]$$

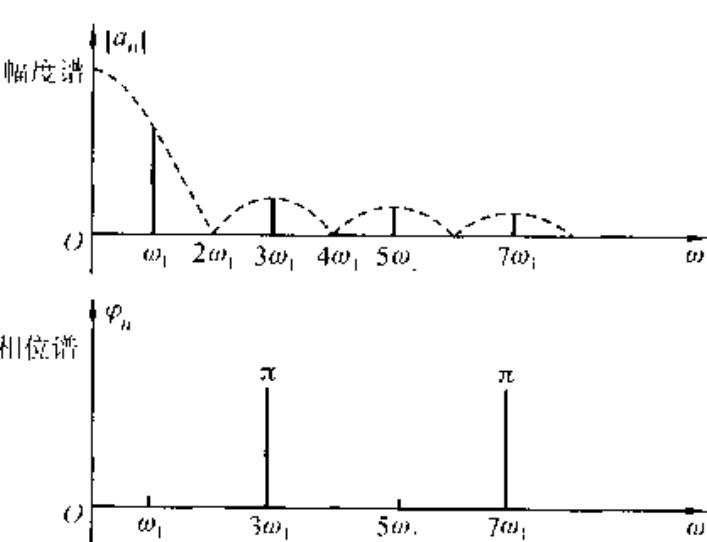
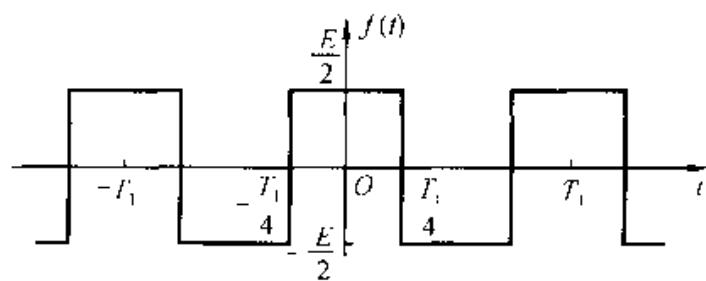


图 3·13 对称方波信号的波形及频谱

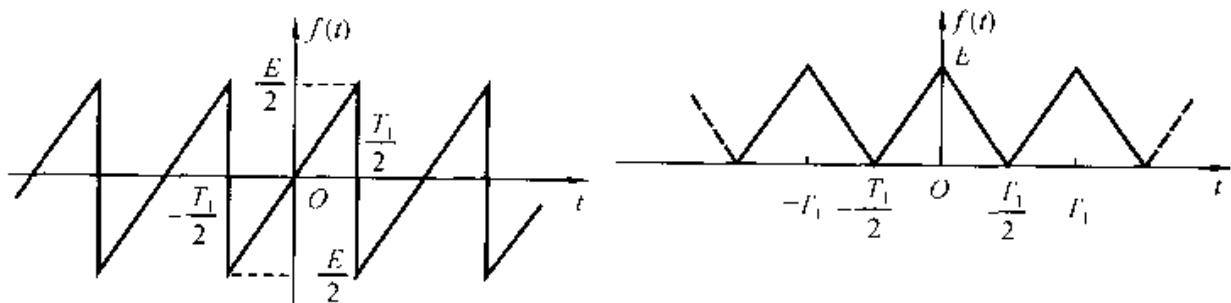


图 3·14 周期锯齿脉冲信号的波形

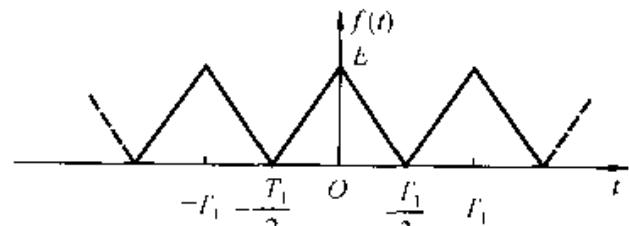


图 3·15 周期三角脉冲信号的波形

$$= \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_1 t) \quad (3-23)$$

周期三角脉冲的频谱只包含直流、基波及奇次谐波频率分量，谐波的幅度以 $\frac{1}{n^2}$ 的规律收敛。

(四) 周期半波余弦信号

周期半波余弦信号如图 3-16 所示。显然它是偶函数，因而 $b_n = 0$ ，由式 (3-2)、(3-3) 可以求出傅里叶级数的系数 a_0 ， a_n 。这样便可得到该信号的傅里叶级数

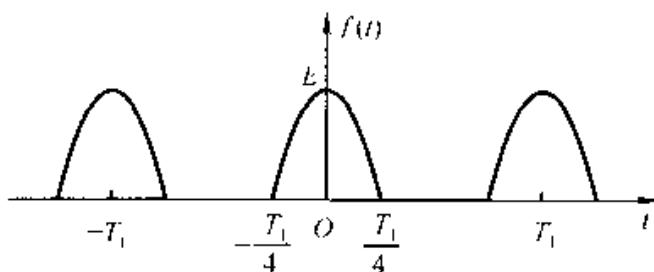


图 3-16 周期半波余弦信号的波形

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{4}{3\pi} \cos(2\omega_1 t) - \frac{4}{15\pi} \cos(4\omega_1 t) + \dots \right] \\ &= \frac{E}{\pi} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_1 t) \end{aligned} \quad (3-24)$$

其中

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

周期半波余弦信号的频谱只含有直流、基波和偶次谐波频率分量。谐波的幅度以 $\frac{1}{n^2}$ 规律收敛。

(五) 周期全波余弦信号

令余弦信号为

$$f_1(t) = E \cos(\omega_0 t)$$

其中

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

此时，全波余弦信号 $f(t)$ 为

$$f(t) = |f_1(t)| = E |\cos(\omega_0 t)|$$

由图 3-17 可见， $f(t)$ 的周期 T 是 $f_1(t)$ 的一半，即 $T_1 = T = \frac{T_0}{2}$ ，而频率 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2\omega_0$ 。因为 $f(t)$ 是偶函数，所以 $b_n = 0$ 。由式 (3-2)、(3-3) 可以求出傅里叶级数的系数 a_0 ， a_n 。这样便可得到周期全波余弦信号的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{3\pi} \cos(\omega_1 t) - \frac{4E}{15\pi} \cos(2\omega_1 t) + \frac{4E}{35\pi} \cos(3\omega_1 t) - \dots \quad (3-25)$$

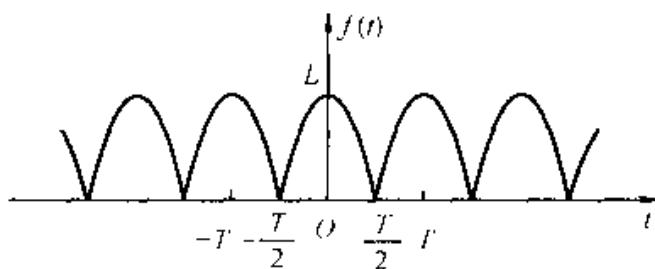


图 3-17 周期全波余弦信号的波形

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos(2\omega_0 t) - \frac{1}{15} \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{35} \cos(6\omega_0 t) - \dots \right] \\
 &= \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(4n^2-1)} \cos(2n\omega_0 t)
 \end{aligned} \quad (3-26)$$

可见,周期全波余弦信号的频谱包含直流分量及 ω_0 的基波和各次谐波分量,或者说,只包含直流分量及 ω_0 的偶次谐波分量。谐波的幅度以 $\frac{1}{n^2}$ 规律收敛。一些常用周期信号的傅里叶级数列于附录二的表格中。

3.4 傅里叶变换

在前两节已经讨论了周期信号的傅里叶级数,并得到了它的离散频谱。本节把上述傅里叶分析方法推广到非周期信号中去,导出傅里叶变换。

仍以周期矩形信号为例,由图 3-18 可见,当周期 T_1 无限增大时,则周期信号就转化为非周期性的单脉冲信号。所以可以把非周期信号看成是周期 T_1 趋于无限大的周期信号。上一节已经指出,当周期信号的周期 T_1 增大时,谱线的间隔 ω_1 ($= \frac{2\pi}{T_1}$) 变小,若周期 T_1 趋于无限大,则谱线的间隔趋于无限小,这样,离散频谱就变成连续频谱了。同时,由式(3-11)可知,由于周期 T_1 趋于无限大,谱线的长度 $F(n\omega_1)$ 趋于零。这就是说,按第 3.2 节所表示的频谱将化为乌有,失去应有的意义。但是,从物理概念上考虑,既然成为一个信号,必然含有一定的能量,无论信号怎样分解,其所含能量是不变的。所以不管周期增大到什么程度,频谱的分布依然存在。或者从数学角度看,在极限情况下,无限多的无穷小量之和,仍可等于一有限值,此有限值的大小取决于信号的能量。

基于上述原因,对非周期信号不能再采用第 3.2 节那种频谱的表示方法,而必须引入一个新的量——称为“频谱密度函数”。下面由周期信号的傅里叶级数推导出傅里叶变换,并说明频谱密度函数的意义。

设有一周期信号 $f(t)$ 及其复数频谱 $F(n\omega_1)$ 如图 3-18 所示,将 $f(t)$ 展成

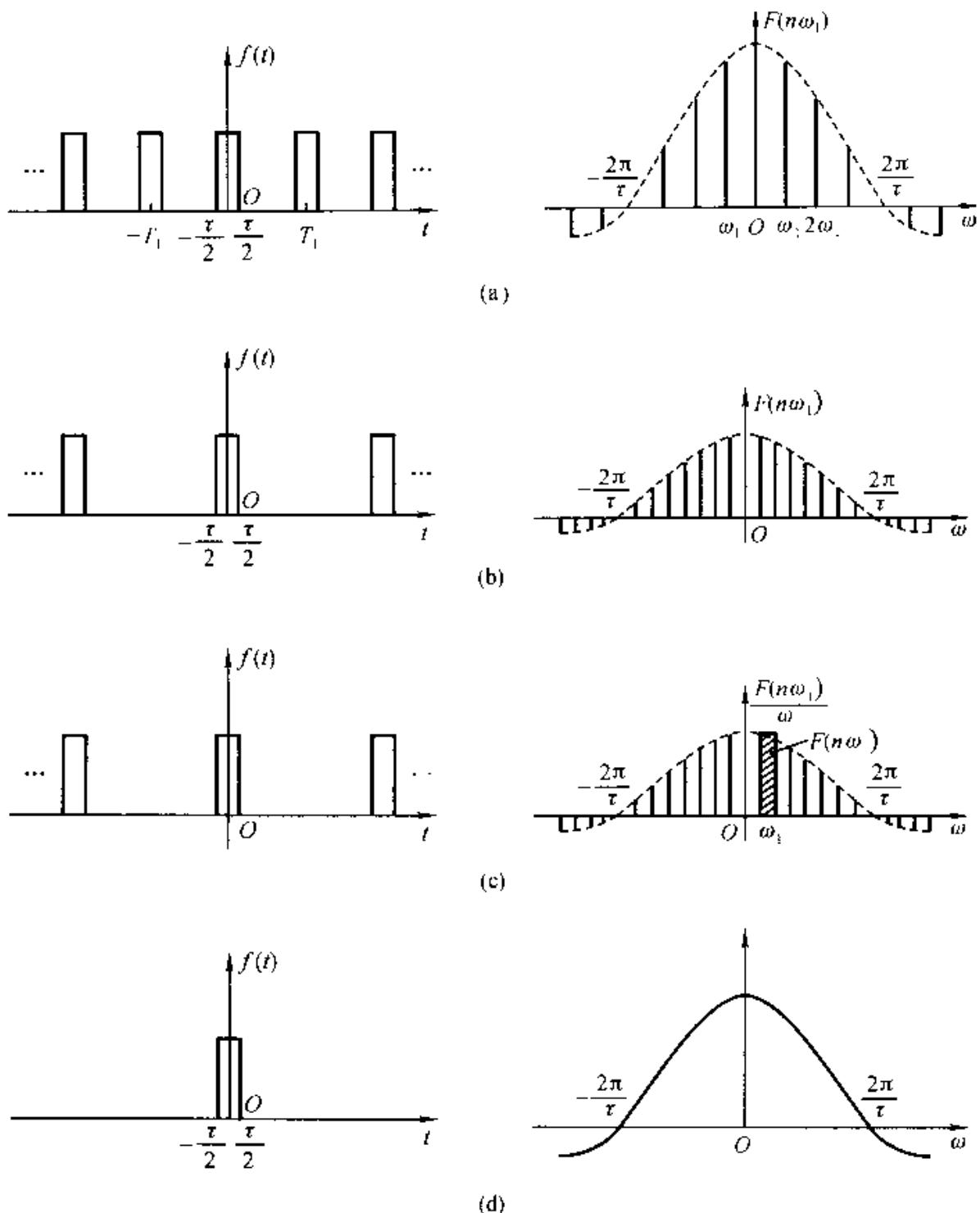


图 3-18 从周期信号的离散频谱到非周期信号的连续频谱

指数形式的傅里叶级数，它是

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

其频谱

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

两边乘以 T_1 , 得到

$$F(n\omega_1) T_1 = \frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1} = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-27)$$

对于非周期信号, 重复周期 $T_1 \rightarrow \infty$, 重复频率 $\omega_1 \rightarrow 0$, 谱线间隔 $\Delta(n\omega_1) \rightarrow d\omega$, 而离散频率 $n\omega_1$ 变成连续频率 ω 。在这种极限情况下, $F(n\omega_1) \rightarrow 0$, 但量 $2\pi \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$ 可望不趋于零, 而趋近于有限值, 且变成一个连续函数, 通常记作 $F(\omega)$ 或 $F(j\omega)$, 即

$$F(\omega) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1} = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} F(n\omega_1) T_1 \quad (3-28)$$

在此式中 $\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$ 表示单位频带的频谱值——即频谱密度的概念。因此 $F(\omega)$ 称为原函数 $f(t)$ 的频谱密度函数, 或简称为频谱函数。若以 $\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$ 的幅度为高, 以间隔 ω_1 为宽画一个小矩形 [如图 3-18(c) 所示], 则该小矩形的面积等于 $\omega = n\omega_1$ 频率处频谱值 $F(n\omega_1)$ 。

这样, 式(3-27)在非周期信号的情况下将变成

$$F(\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

即

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-29)$$

同样, 傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

考虑到谱线间隔 $\Delta(n\omega_1) = \omega_1$, 上式可改写为

$$f(t) = \sum_{n\omega_1=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} e^{jn\omega_1 t} \Delta(n\omega_1)$$

在前述极限的情况下, 上式中各量应作如下改变:

$$\begin{aligned} n\omega_1 &\rightarrow \omega \\ \Delta(n\omega_1) &\rightarrow d\omega \\ \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} &\rightarrow \frac{F(\omega)}{2\pi} \\ \sum_{n\omega_1=-\infty}^{\infty} &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

于是，傅里叶级数变成积分形式，它等于

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-30)$$

式(3-29)、(3-30)是用周期信号的傅里叶级数通过极限的方法导出的非周期信号频谱的表示式，称为傅里叶变换。通常式(3-29)称为傅里叶正变换，式(3-30)称为傅里叶逆变换。为书写方便，习惯上采用如下符号：

傅里叶正变换

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶逆变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

式中 $F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的频谱函数，它一般是复函数，可以写作

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

其中 $|F(\omega)|$ 是 $F(\omega)$ 的模，它代表信号中各频率分量的相对大小。 $\varphi(\omega)$ 是 $F(\omega)$ 的相位函数，它表示信号中各频率分量之间的相位关系。为了与周期信号的频谱相一致，在这里人们习惯上也把 $|F(\omega)| \sim \omega$ 与 $\varphi(\omega) \sim \omega$ 曲线分别称为非周期信号的幅度频谱与相位频谱。由图 3-18 可以看出，它们都是频率 ω 的连续函数，在形状上与相应的周期信号频谱包络线相同。

与周期信号相类似，也可以将式(3-30)改写为三角函数形式，即

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| [\cos(\omega t + \varphi(\omega))] d\omega \\ &\quad + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| [\sin(\omega t + \varphi(\omega))] d\omega \end{aligned}$$

若 $f(t)$ 是实函数，由式(3-29)可知 $|F(\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 分别是频率 ω 的偶函数与奇函数。这样，上式化简为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \end{aligned}$$

可见，非周期信号和周期信号一样，也可以分解成许多不同频率的正、余弦分量。所不同的是，由于非周期信号的周期趋于无限大，基波趋于无限小，于是它包含了从零到无限高的所有频率分量。同时，由于周期趋于无限大，因此，对任一能量有限的信号（如单脉冲信号），在各频率点的分量幅度 $\frac{|F(\omega)|}{\pi} d\omega$ 趋于无限小。所以频谱不能再用幅度表示，而改用密度函数来表示。

在上面的讨论中，利用周期信号取极限变成非周期信号的方法，由周期信号的傅里叶级数导出傅里叶变换，从离散谱演变为连续谱。在第 3.9 和 3.10 节将要看到，这一过程还可以反过来进行，亦即由非周期信号演变成周期信号，从连续谱引出离散谱。这表明周期信号与非周期信号，傅里叶级数与傅里叶变换，离散谱与连续谱，在一定条件下可以互相转化并统一起来。

必须指出，在前面推导傅里叶变换时并未遵循数学上的严格步骤。从理论上讲，傅里叶变换也应该满足一定的条件才能存在，这种条件类似于傅里叶级数的狄利克雷条件，不同之处仅仅在于时间范围由一个周期变成无限的区间。傅里叶变换存在的充分条件是在无限区间内满足绝对可积条件，即要求

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

必须指出，借助奇异函数（如冲激函数）的概念，可使许多不满足绝对可积条件的信号，如周期信号、阶跃信号、符号函数等存在傅里叶变换，在 3.5、3.6 和 3.9 节详细讨论这一问题。

3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

本节利用傅里叶变换求几种典型非周期信号的频谱。

(一) 单边指数信号

已知单边指数信号的表示式为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

其中 a 为正实数。

$$\begin{aligned} \text{因 } F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \end{aligned}$$

得

$$\left. \begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{a + j\omega} \\ |F(\omega)| &= \sqrt{\frac{1}{a^2 + \omega^2}} \\ \varphi(\omega) &= -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3-31)$$

单边指数信号的波形 $f(t)$ 、幅度谱 $|F(\omega)|$ 和相位谱 $\varphi(\omega)$ 如图 3-19 所示。

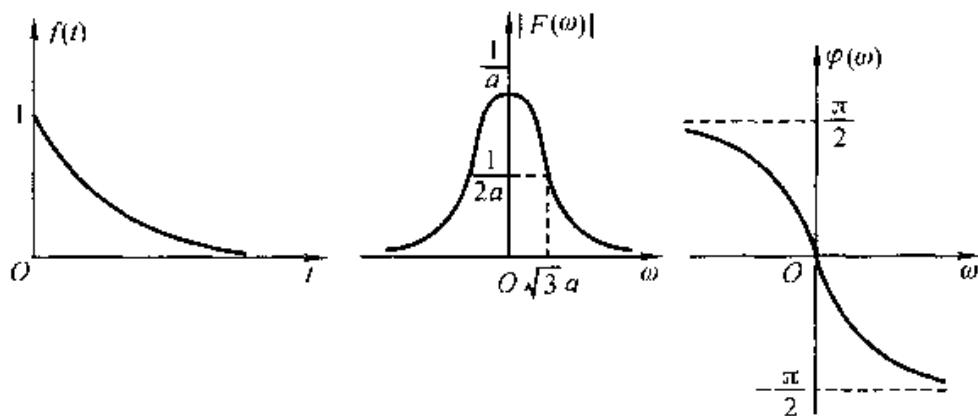


图 3-19 单边指数信号的波形及频谱

(二) 双边指数信号

已知双边指数信号的表示式为

$$f(t) = e^{-a|t|} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

其中 a 为正实数。

因 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt$

得

$$\left. \begin{aligned} F(\omega) &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\ |F(\omega)| &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\ \varphi(\omega) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-32)$$

双边指数信号的波形 $f(t)$ 、幅度谱 $|F(\omega)|$ 如图 3-20 所示。

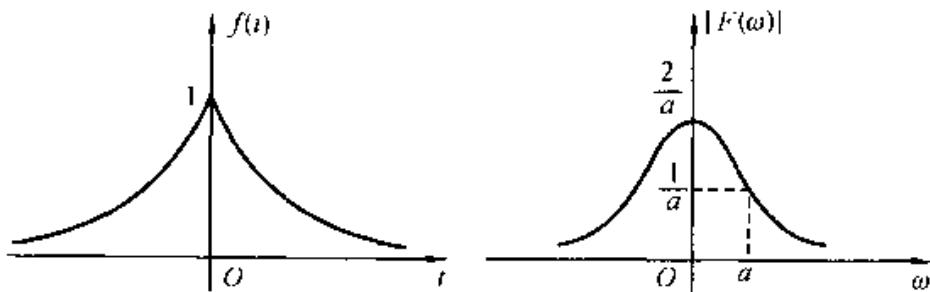


图 3-20 双边指数信号的波形及频谱

(三) 矩形脉冲信号

已知矩形脉冲信号的表示式为

$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

其中 E 为脉冲幅度， τ 为脉冲宽度。

因

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ &= E\tau \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \right] \end{aligned} \quad (3-33)$$

因为

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

所以

$$F(\omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

这样，矩形脉冲信号的幅度谱和相位谱分别为：

$$\begin{aligned} |F(\omega)| &= E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ \varphi(\omega) &= \begin{cases} 0 & \left[\frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau}\right] \\ \pi & \left[\frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{4(n+1)\pi}{\tau}\right] \end{cases} \\ &\quad (n=0,1,2,\dots) \end{aligned}$$

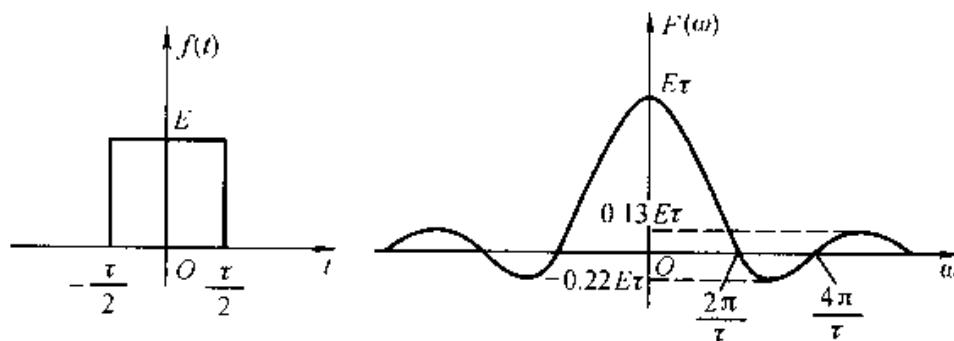
因为 $F(\omega)$ 在这里是实函数，通常用一条 $F(\omega)$ 曲线同时表示幅度谱 $|F(\omega)|$ 和相位谱 $\varphi(\omega)$ ，如图 3-21 所示。

图 3-21 矩形脉冲信号的波形及频谱

由上可见，虽然矩形脉冲信号在时域集中于有限的范围内，然而它的频谱却以 $\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 的规律变化，分布在无限宽的频率范围上，但是其主要的能量处于 $f = 0 \sim \frac{1}{\tau}$ 范围。因而，通常认为这种信号占有频率范围(频带) B 近似为 $\frac{1}{\tau}$ ，即

$$B \approx \frac{1}{\tau} \quad (3-34)$$

(四) 钟形脉冲信号

钟形脉冲亦即高斯脉冲，它的表示式为

$$f(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (3-35)$$

因

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} e^{-j\omega t} dt \\ &= E \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} [\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)] dt \\ &= 2E \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

积分后可得

$$F(\omega) = \sqrt{\pi} E \tau \cdot e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} \quad (3-36)$$

它是一个正实函数，所以钟形脉冲信号的相位谱为零。图 3-22 画出了该信号的波形和频谱。

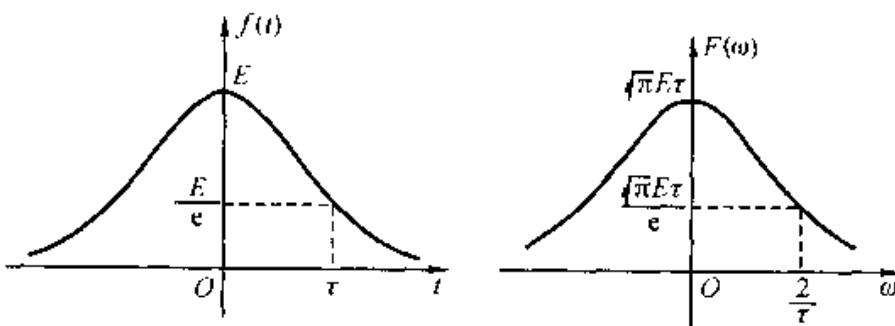


图 3-22 钟形脉冲信号的波形及频谱

钟形脉冲信号的波形和频谱具有相同的形状，均为钟形。

(五) 符号函数

符号函数(或称正负号函数)以符号 sgn 记，其表示式为

$$f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases} \quad (3-37)$$

显然，这种信号不满足绝对可积条件，但它却存在傅里叶变换。可以借助于符号函数与双边指数衰减函数相乘，先求得此乘积信号 $f_1(t)$ 的频谱，然后取极限，从而得出符号函数 $f(t)$ 的频谱。

下面先求乘积信号 $f_1(t)$ 的频谱 $F_1(\omega)$ 。

因为

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt$$

这样

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^0 (-e^{at}) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

其中 $a > 0$ 。

积分并化简，可得

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \\ |F_1(\omega)| &= \frac{2|\omega|}{a^2 + \omega^2} \\ \varphi_1(\omega) &= \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & (\omega < 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (\omega > 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (3-38)$$

其波形和幅度谱如图 3-23 所示。

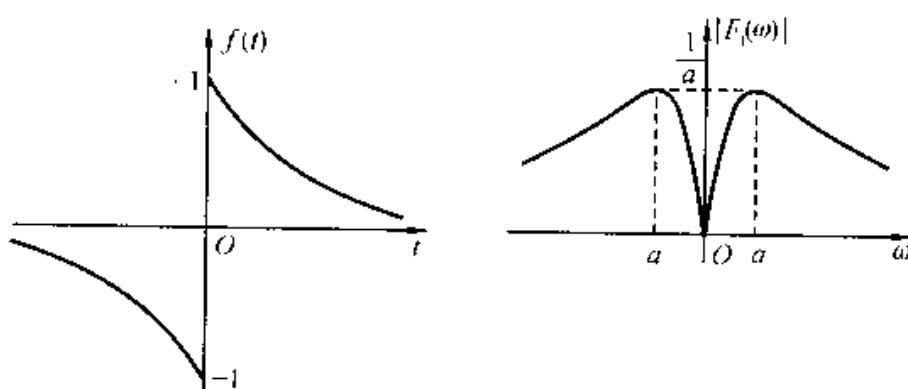


图 3-23 指数信号 $f_1(t)$ 的波形和频谱

符号函数 $\text{sgn}(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \lim_{a \rightarrow 0} F_1(\omega) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \right) \end{aligned}$$

所以

$$\left. \begin{aligned} F(\omega) &= \frac{2}{j\omega} \\ |F(\omega)| &= \frac{2}{|\omega|} \\ \varphi(\omega) &= \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (\omega > 0) \\ +\frac{\pi}{2} & (\omega < 0) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3-39)$$

其波形和频谱如图 3-24 所示。

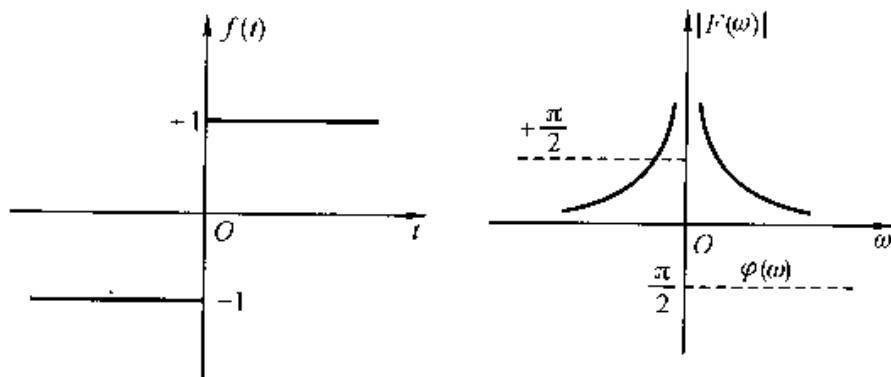


图 3-24 符号函数的波形和频谱

(六) 升余弦脉冲信号

升余弦脉冲信号的表示式为

$$f(t) = \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] \quad (0 \leq |t| \leq \tau) \quad (3-40)$$

其波形如图 3-25 所示。

因为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{E}{2} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt + \frac{E}{4} \int_{-\tau}^{\tau} e^{j\frac{\pi t}{\tau}} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &\quad + \frac{E}{4} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\frac{\pi t}{\tau}} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= E\tau \text{Sa}(\omega\tau) + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right] \\ &\quad + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right] \end{aligned}$$

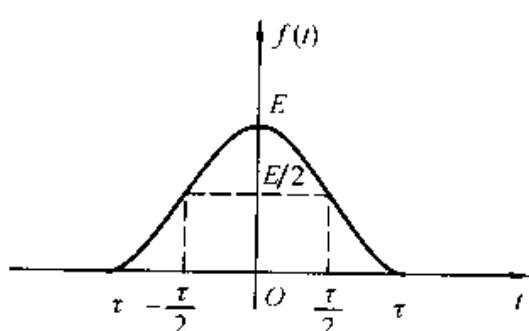


图 3-25 升余弦脉冲信号的波形

显然 $F(\omega)$ 是由三项构成，它们都是矩形脉冲的频谱，只是有两项沿频率

轴左、右平移了 $\omega = \frac{\pi}{\tau}$ 。把上式化简，则可以得到

$$F(\omega) = \frac{E \sin(\omega\tau)}{\omega \left[1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi} \right)^2 \right]} = \frac{E\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{\pi})}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi} \right)^2} \quad (3-41)$$

其频谱如图 3-26 所示。

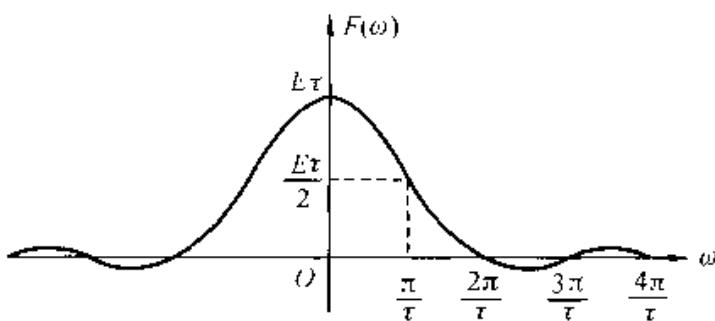


图 3-26 升余弦脉冲信号的频谱

由上可见，升余弦脉冲信号的频谱比矩形脉冲的频谱更加集中。对于半幅度宽度为 τ 的升余弦脉冲信号，它的绝大部分能量集中在 $\omega = 0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$ （即 $f = 0 \sim \frac{1}{\tau}$ ）范围内。

3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

通过前章讨论，我们已经认识到奇异函数在信号与系统的时域分析中所起的重要作用，这涉及到冲激响应、阶跃响应及卷积等许多基本概念。在变换域分析中，奇异函数仍然扮演着重要角色，要了解它们的种种巧妙应用，首先需要研究冲激函数与阶跃函数的傅里叶变换。

(一) 冲激函数的傅里叶变换

(1) 冲激函数的傅里叶变换

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 是

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

由冲激函数的抽样性质可知上式右边的积分是 1，所以

$$F(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad (3-42)$$

上述结果也可由矩形脉冲取极限得到，当脉宽 τ 逐渐变窄时，其频谱必然展宽。可以想像，若 $\tau \rightarrow 0$ ，而 $E\tau = 1$ ，这时矩形脉冲就变成了 $\delta(t)$ ，其相应频谱 $F(\omega)$ 必等于常数 1。

可见，单位冲激函数的频谱等于常数，也就是说，在整个频率范围内频谱

是均匀分布的。显然，在时域中变化异常剧烈的冲激函数包含幅度相等的所有频率分量。因此，这种频谱常称为“均匀谱”或“白色谱”，如图 3-27 所示。

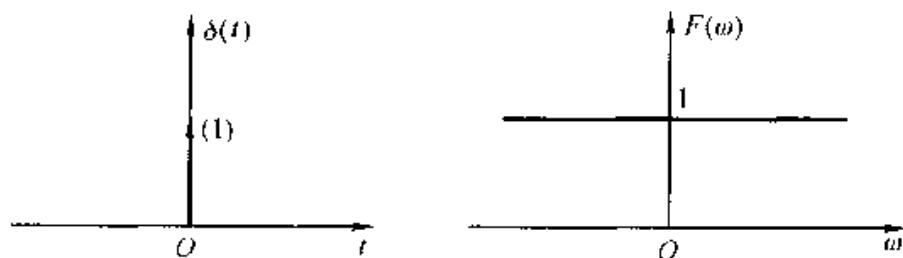


图 3-27 单位冲激函数的频谱

(2) 冲激函数的傅里叶逆变换

前文已述，冲激函数的频谱等于常数，反过来，怎样的函数其频谱为冲激函数呢？也就是需要求 $\delta(\omega)$ 的傅里叶逆变换。由逆变换定义容易求得

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \quad (3-43)$$

此结果表明，直流信号的傅里叶变换是冲激函数。

这一结果也可由宽度为 τ 的矩形脉冲取 $\tau \rightarrow \infty$ 的极限而求得，参看图 3-28 来推证此结论。

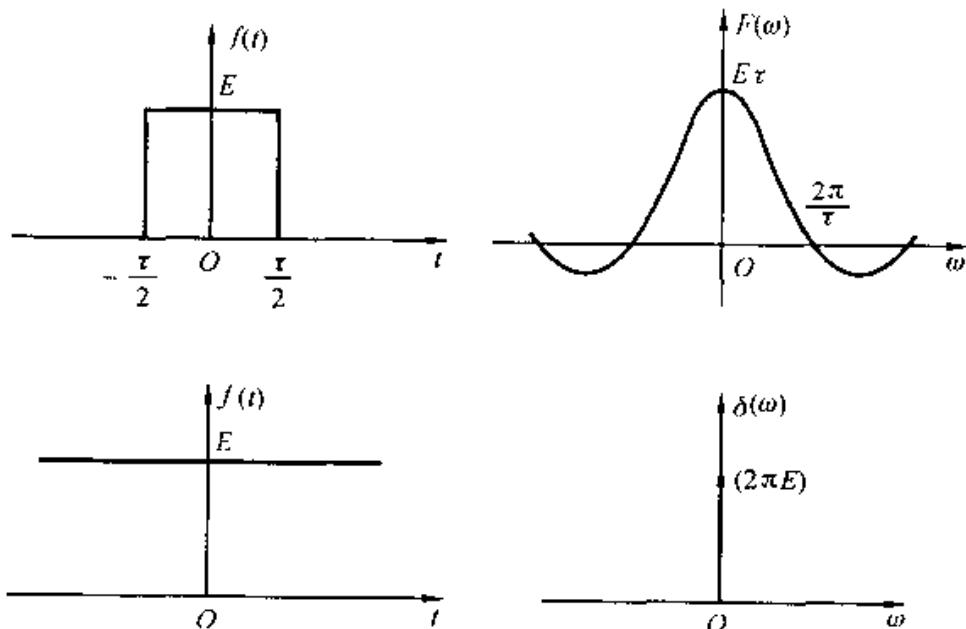


图 3-28 直流信号的频谱

当 $\tau \rightarrow \infty$ 时，矩形脉冲成为直流信号 E ，此时有

$$\mathcal{F}[E] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3-44)$$

由第一章冲激函数的定义可知

$$\delta(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(k\omega) \quad (3-45)$$

若令 $k = \frac{\tau}{2}$, 比较上两式则可以得到:

$$\begin{aligned}\tilde{r}(E) &= 2\pi E \delta(\omega) \\ \tilde{r}(1) &= 2\pi \delta(\omega)\end{aligned}\quad (3-46)$$

可见, 直流信号的傅里叶变换是位于 $\omega=0$ 的冲激函数

(二) 冲激偶的傅里叶变换

因为

$$\tilde{r}[\delta(t)] = 1$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

将上式两边求导

$$\frac{d}{dt} [\delta(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

得

$$\tilde{r}\left[\frac{d}{dt} \delta(t)\right] = j\omega \quad (3-47)$$

同理可得

$$\begin{aligned}\tilde{r}\left[\frac{d^n}{dt^n} \delta(t)\right] &= (j\omega)^n \\ \tilde{r}(t^n) &= 2\pi (j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} [\delta(\omega)]\end{aligned}\quad (3-48)$$

也可按傅里叶变换定义和冲激偶的性质直接求得式(3-47), 此时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) e^{-j\omega t} dt = \delta'(-j\omega) = j\omega$$

(三) 阶跃函数的傅里叶变换

从波形中容易看出阶跃函数 $u(t)$ 不满足绝对可积条件, 即便如此, 它仍存在傅里叶变换。

因为

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

两边进行傅里叶变换

$$\tilde{r}[u(t)] = \tilde{r}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \tilde{r}[\text{sgn}(t)]$$

由式(3-46)、(3-39)可得 $u(t)$ 的傅里叶变换为

$$\tilde{r}[u(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3-49)$$

单位阶跃函数 $u(t)$ 的频谱如图 3-29 所示。

可见, 单位阶跃函数 $u(t)$ 的频谱在 $\omega=0$ 点存在一个冲激函数, 因 $u(t)$

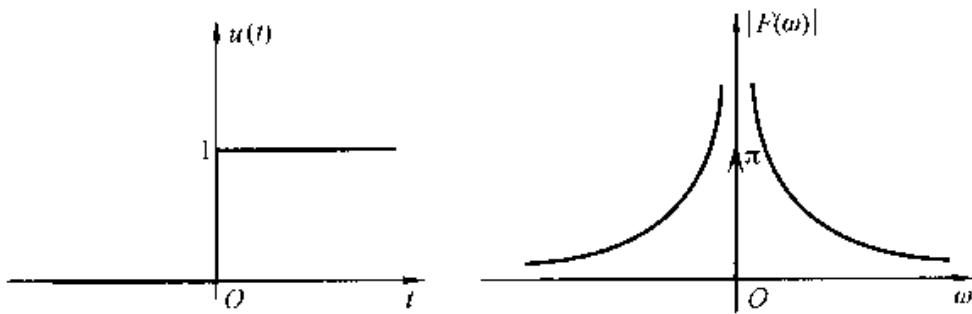


图 3-29 单位阶跃函数的波形和频谱

含有直流分量，这是在预料之中的。此外，由于 $u(t)$ 不是纯直流信号，它在 $t=0$ 点有跳变，因此在频谱中还出现其他频率分量。

这一结果也可由矩形脉冲 $u(t) - u(t-\tau)$ 取 $\tau \rightarrow \infty$ 的极限而求得，也即

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(t)] &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\mathcal{F}[u(t) - u(t-\tau)]] \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau/2} \right] \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) e^{-j\omega\tau/2} \right] \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega\tau} \right) \\ &= \frac{1}{j\omega} - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{\cos(\omega\tau)}{j\omega} - \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} \right]\end{aligned}$$

由第二章黎曼-勒贝格定理导出的式(2-100)可知

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \cos(\omega\tau) = 0$$

因而上式中取极限括号内的第一项为 0，此外，由冲激函数的定义可知

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\pi} \text{Sa}(\omega\tau) = \delta(\omega)$$

因而括号中的第二项等于 $\pi\delta(\omega)$ ，于是得到

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

与(3-49)式相同。

3.7 傅里叶变换的基本性质

式(3-29)和(3-30)表示的傅里叶变换建立了时间函数 $f(t)$ 与频谱函数 $F(\omega)$ 之间的对应关系。其中，一个函数确定之后，另一函数随之被惟一地确定。在信号分析的理论研究与实际设计工作中，经常需要了解当信号在时域进行某种运算后在频域发生何种变化，或者反过来，从频域的运算推测时域的变动。这时，可以利用式(3-29)与(3-30)求积分计算，也可以借助傅里叶变换

的基本性质给出结果。后一种方法计算过程比较简便，而且物理概念清楚。因此，熟悉傅里叶变换的一些基本性质成为信号分析研究工作中最重要的内容之一。本节和下节讨论这些基本性质。

(一) 对称性

若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ，则

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

证明

因为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

显然

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将变量 t 与 ω 互换，可以得到

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

所以

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \quad (3-50)$$

若 $f(t)$ 是偶函数，式(3-50)变成

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(\omega) \quad (3-51)$$

从式(3-50)看出，在一般情况下，若 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)$ ，为求得 $F(\omega)$ 之频谱可利用 $f(-\omega)$ 给出。当 $f(t)$ 为偶函数时，由式(3-51)可知，这种对称关系得到简化，即 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)$ ，那么形状为 $F(t)$ 的波形，其频谱必为 $f(\omega)$ 。显然，矩形脉冲的频谱为 Sa 函数，而 Sa 形脉冲的频谱必然为矩形函数。同样，直流信号的频谱为冲激函数，而冲激函数的频谱必然为常数，等等，如图 3-30 和 3-31 所示。

(二) 线性(叠加性)

若 $\mathcal{F}[f_i(t)] = F_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，则

$$\mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(\omega) \quad (3-52)$$

其中 a_i 为常数， n 为正整数。

由傅里叶变换的定义式很容易证明上述结论。显然傅里叶变换是一种线性运算，它满足叠加定理。所以，相加信号的频谱等于各个单独信号的频谱之和。

(三) 奇偶虚实性

为便于下面的讨论，我们把 $f(t)$ 的傅里叶变换式重写如下

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

在一般的情况下， $F(\omega)$ 是复函数，因而可以把它表示成模与相位或者实部与

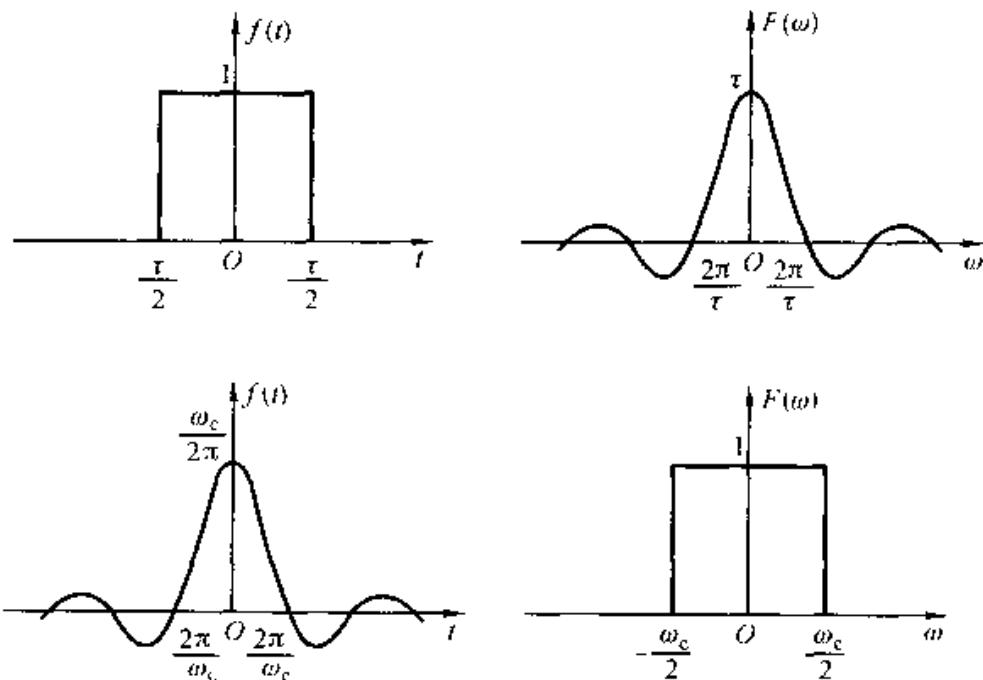


图 3-30 时间函数与频谱函数的对称性举例

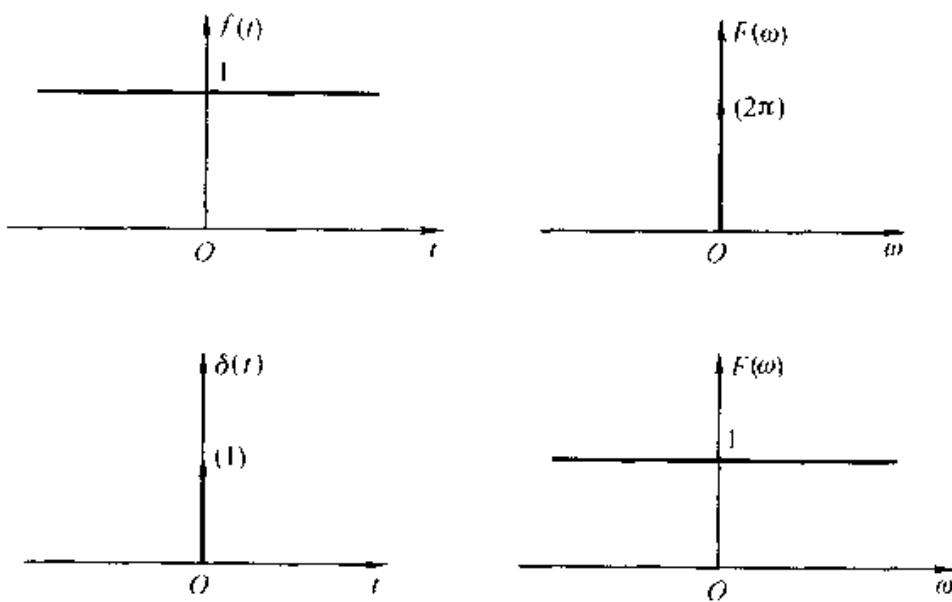


图 3-31 时间函数与频谱函数的对称性举例

虚部两部分，即

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

显然

$$\left. \begin{aligned} |F(\omega)| &= \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= \arctan \left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3-53)$$

下面讨论两种特定情况：

1. $f(t)$ 是实函数

因为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

在这种情况下，显然

$$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ X(\omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \right\} \quad (3-54)$$

$R(\omega)$ 为偶函数， $X(\omega)$ 为奇函数，即满足下列关系：

$$\begin{aligned} R(\omega) &= R(-\omega) \\ X(\omega) &= -X(-\omega) \\ F(-\omega) &= F^*(\omega) \end{aligned}$$

由于 $R(\omega)$ 是偶函数， $X(\omega)$ 是奇函数，利用式(3-53)可证得 $|F(\omega)|$ 是偶函数， $\varphi(\omega)$ 是奇函数。我们可以检查已求得的各种实函数的频谱都应满足这一结论，即实函数傅里叶变换的幅度谱和相位谱分别为偶、奇函数。这一特性在信号分析中得到广泛应用。

当 $f(t)$ 在积分区间内为实偶函数，上述结论可进一步简化，此时

$$f(t) = f(-t)$$

式(3-54)成为

$$X(\omega) = 0$$

此时

$$F(\omega) = R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

可见，若 $f(t)$ 是实偶函数， $F(\omega)$ 必为 ω 的实偶函数。

若 $f(t)$ 为实奇函数，即

$$f(-t) = -f(t)$$

那么，由式(3-54)求得

$$R(\omega) = 0$$

此时

$$F(\omega) - jX(\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

可见，若 $f(t)$ 是实奇函数，则 $F(\omega)$ 必为 ω 的虚奇函数。

2. $f(t)$ 是虚函数

令 $f(t) = jg(t)$ ，则：

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin(\omega t) dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos(\omega t) dt$$

在这种情况下, $R(\omega)$ 为奇函数, $X(\omega)$ 为偶函数, 即满足:

$$R(\omega) = -R(-\omega)$$

$$X(\omega) = X(-\omega)$$

而 $|F(\omega)|$ 仍为偶函数, $\varphi(\omega)$ 仍为奇函数。

此外, 无论 $f(t)$ 为实函数或复函数, 都具有以下性质

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{F}}[f(-t)] &= F(-\omega) \\ \bar{\mathcal{F}}[f^*(t)] &= F^*(-\omega) \\ \bar{\mathcal{F}}[f^*(-t)] &= F^*(\omega)\end{aligned}\quad (3-55)$$

证明过程留给读者作为练习。

例 3-1 已知

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & (t > 0) \\ -e^{at} & (t < 0) \end{cases}$$

式中 a 为正实数。求该奇函数的频谱。

解

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt\end{aligned}$$

显然, 此积分结果即式(3-38), 为便于讨论, 重复写在下面:

$$F(\omega) = \frac{2j\omega}{a^2 + \omega^2} \quad (3-56)$$

$$|F(\omega)| = \frac{2|\omega|}{a^2 + \omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (\omega > 0) \\ +\frac{\pi}{2} & (\omega < 0) \end{cases}$$

波形和幅度谱如图 3-32 所示。显然, 实奇函数的频谱必然是虚奇函数。

(四) 尺度变换特性

若 $\bar{\mathcal{F}}[f(t)] = F(\omega)$, 则

$$\bar{\mathcal{F}}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (a \text{ 为非零的实常数})$$

证明

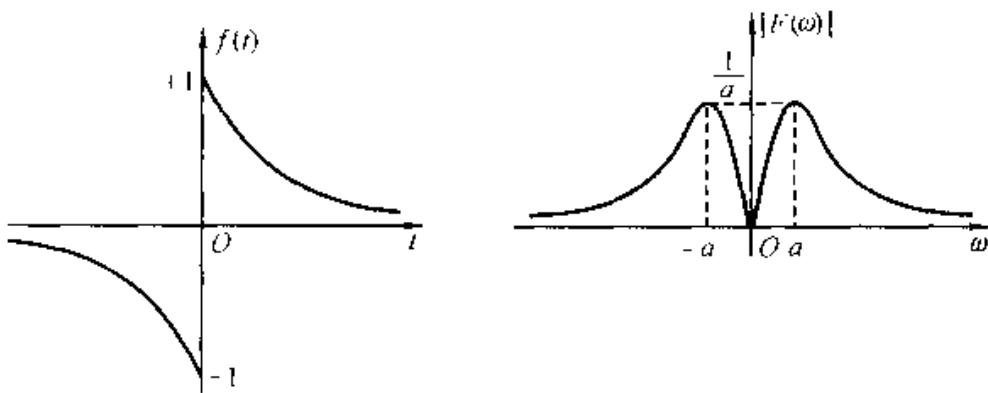


图 3-32 奇对称指数函数的波形和频谱

因为

$$\tilde{f}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

令

$$x = at$$

当 $a > 0$

$$\begin{aligned}\tilde{f}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

当 $a < 0$

$$\begin{aligned}\tilde{f}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx \\ &= -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

综合上述两种情况，便可得到尺度变换特性表示式为

$$\tilde{f}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (3-57)$$

对于 $a = -1$ 这种特殊情况，式(3-57)变成

$$\tilde{f}[f(-t)] = F(-\omega)$$

为了说明尺度变换特性，在图 3-33 中画出了矩形脉冲的几种情况。

由上可见，信号在时域中压缩($a > 1$)等效于在频域中扩展；反之，信号在时域中扩展($a < 1$)则等效于在频域中压缩。对于 $a = -1$ 的情况，它说明信号在时域中沿纵轴反褶等效于在频域中频谱也沿纵轴反褶。上述结论是不难理解的，因为信号的波形压缩 a 倍，信号随时间变化加快 a 倍，所以它所包含的频率分量增加 a 倍，也就是说频谱展宽 a 倍。根据能量守恒原理，各频率分量的大小必然减小 a 倍。

下面从另一角度来说明尺度变换特性。对任意形状的 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ [假设

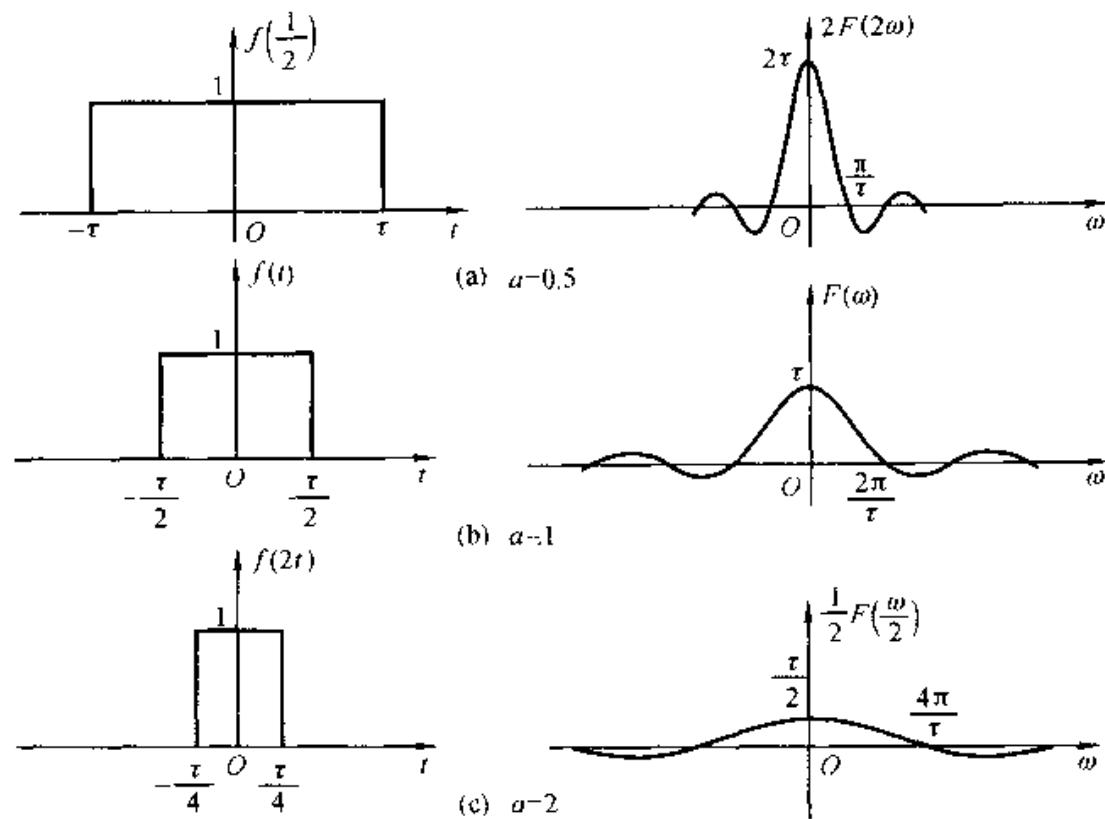


图 3-33 尺度变换特性的举例说明

$t \rightarrow \infty, \omega \rightarrow \infty$ 时, $f(t), F(\omega)$ 趋近于零], 因为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

所以

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (3-58)$$

同样, 因为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

所以

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \quad (3-59)$$

式(3-58)、(3-59)分别说明 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 所覆盖的面积等于 $F(\omega)$ 与 $2\pi f(t)$ 在零点的数值 $F(0)$ 与 $2\pi f(0)$ 。

如果 $f(0)$ 与 $F(0)$ 各自等于 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 曲线的最大值, 如图 3-34 所示。这时, 定义 τ 和 B 分别为 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 的等效宽度, 可写出以下关系式:

$$f(0)\tau = F(0)$$

$$F(0)B = 2\pi f(0)$$

由此求得

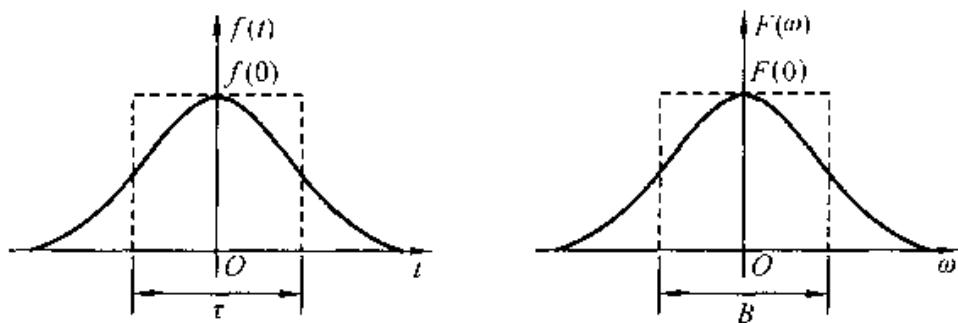


图 3-34 等效脉冲宽度与等效频带宽度

$$B = \frac{2\pi}{\tau} \quad (3-60)$$

从式(3-60)可以看出：信号的等效脉冲宽度与占有的等效带宽成反比，若要压缩信号的持续时间，则不得不以展宽频带作代价。所以在通信系统中，通信速度和占用频带宽度是一对矛盾。

(五) 时移特性

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ ，则

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

证明

因

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

令

$$x = t - t_0$$

那么

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x + t_0)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \cdot F(\omega) \quad (3-61)$$

同理可得

$$\mathcal{F}[f(t + t_0)] = e^{j\omega t_0} \cdot F(\omega)$$

从式(3-61)可以看出，信号 $f(t)$ 在时域中沿时间轴右移(延时) t_0 等效于在频域中频谱乘以因子 $e^{-j\omega t_0}$ ，也就是说信号右移后，其幅度谱不变，而相位谱产生附加变化($-\omega t_0$)。

不难证明：

$$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

$$\mathcal{F}[f(t_0 - at)] = \frac{1}{|a|} F\left(-\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

显然尺度变换特性和时移特性是上式的两种特殊情况，即 $t_0 = 0$ 和 $a = \pm 1$ 的情况。

例 3-2 求图3-35所示三脉冲信号的频谱。

解

令 $f_0(t)$ 表示矩形单脉冲信号，由式

(3-33) 知 $f_0(t)$ 的频谱函数 $F_0(\omega)$ 为

$$F_0(\omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

因为

$$f(t) = f_0(t) + f_0(t+T) + f_0(t-T)$$

由时移特性知 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 为

$$F(\omega) = F_0(\omega)(1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})$$

$$= E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)[1 + 2\cos(\omega T)]$$

其频谱如图3-36所示。

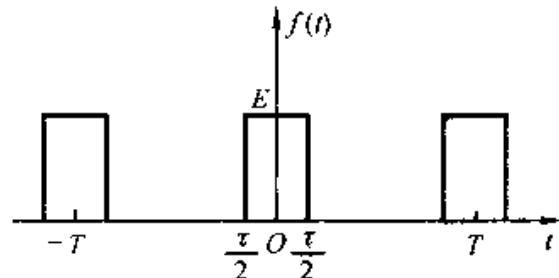


图 3-35 三脉冲信号的波形

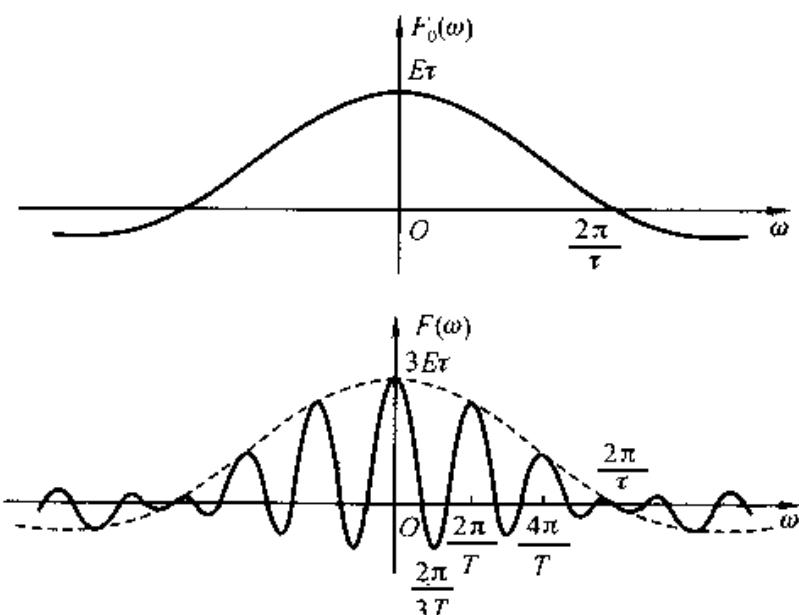


图 3-36 三脉冲信号的频谱

例 3-3 已知双 Sa 信号

$$f(t) = \frac{\omega_c}{\pi} [\text{Sa}(\omega_c t) - \text{Sa}(\omega_c(t-2\tau))]$$

试求其频谱。

解

令

$$f_0(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$$

因 $f_0(t)$ 为 Sa 波形, 其频谱 $F_0(\omega)$ 为矩形。 $f_0(t)$ 和 $f(t)$ 的波形如图 3-37 所示。

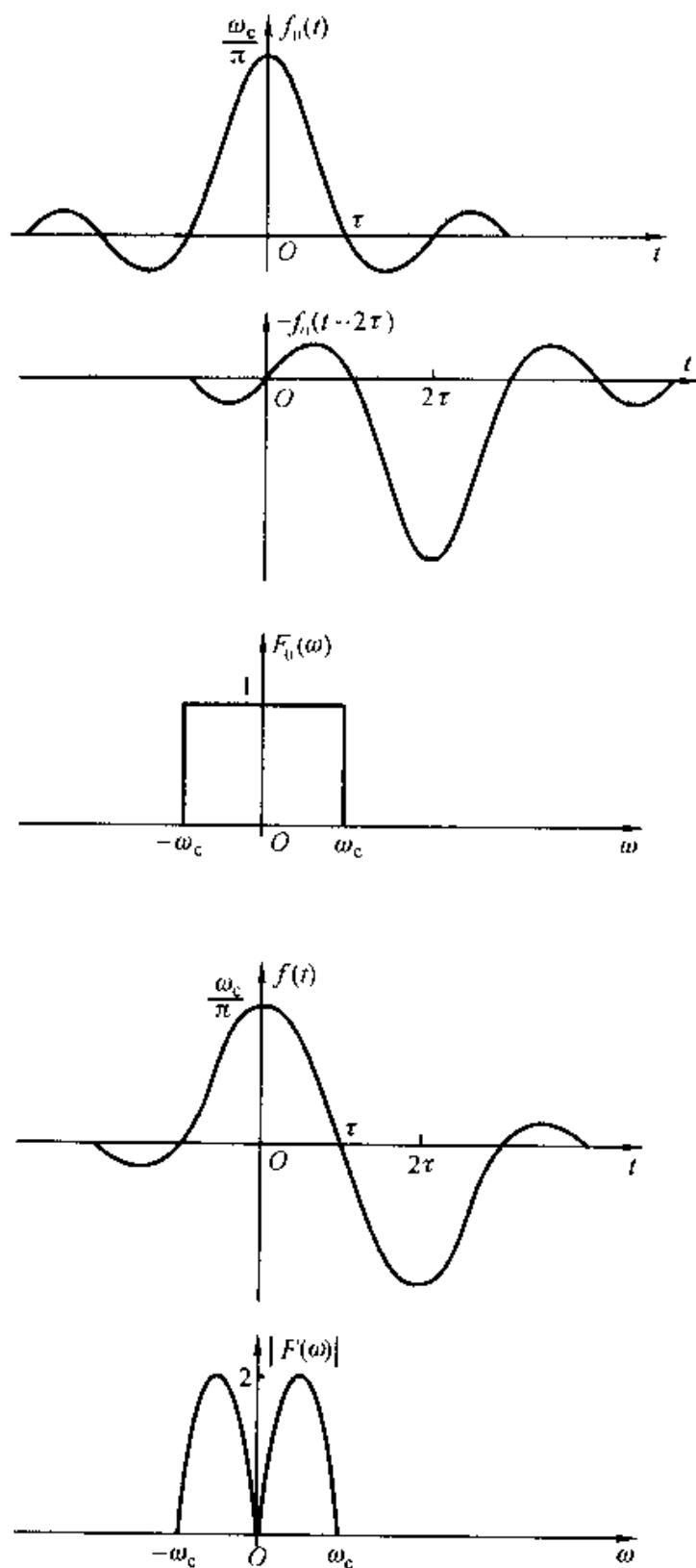


图 3-37 双 Sa 信号的波形和频谱

已知

$$\mathcal{F}[f_0(t)] = \begin{cases} 1 & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (|\omega| > \omega_c) \end{cases}$$

由时移特性得到

$$\mathcal{F}[f_0(t - 2\tau)] = \begin{cases} e^{-j2\omega\tau} & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (|\omega| > \omega_c) \end{cases}$$

因此 $f(t)$ 的频谱等于

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f_0(t)] - \mathcal{F}[f_0(t - 2\tau)] \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-j2\omega\tau} & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (|\omega| > \omega_c) \end{cases} \end{aligned} \quad (3-62)$$

从中可以得到幅度谱为

$$|F(\omega)| = \begin{cases} 2|\sin(\omega\tau)| & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (|\omega| > \omega_c) \end{cases} \quad (3-63)$$

在实际中往往选 $\tau = \frac{\pi}{\omega_c}$, 此时式(3-63)变成

$$|F(\omega)| = \begin{cases} 2 \left| \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_c}\right) \right| & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (|\omega| > \omega_c) \end{cases}$$

双 Sa 信号的波形和频谱如图 3-37 所示。

由图 3-37 可见, 虽然单 Sa 信号 $f_0(t)$ 的频谱最为集中(为矩形谱), 但是它含有直流分量, 使得它在实际传输过程中带来不便。而双 Sa 信号的频谱仍然限制在 $|\omega| < \omega_c$ 范围内, 却消去了直流分量。

(六) 频移特性

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

证明

因为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0) \quad (3-64)$$

同理

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}] = F(\omega + \omega_0)$$

其中 ω_0 为实常数。

可见,若时间信号 $f(t)$ 乘以 $e^{j\omega_0 t}$,等效于 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 沿频率轴右移 ω_0 ,或者说在频域中将频谱沿频率轴右移 ω_0 等效于在时域中信号乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$ 。

频谱搬移技术在通信系统中得到广泛应用,诸如调幅、同步解调、变频等过程都是在频谱搬移的基础上完成的。频谱搬移的实现原理是将信号 $f(t)$ 乘以所谓载频信号 $\cos(\omega_0 t)$ 或 $\sin(\omega_0 t)$ 。下面分析这种相乘作用引起的频谱搬移。

因为:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{j}{2} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

那么,可以导出:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)] &= \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \\ \mathcal{F}[f(t)\sin(\omega_0 t)] &= \frac{j}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]\end{aligned}\quad (3-65)$$

所以,若时间信号 $f(t)$ 乘以 $\cos(\omega_0 t)$ 或 $\sin(\omega_0 t)$,等效于 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 一分为二,沿频率轴向左和向右各平移 ω_0 。

例 3-4 已知矩形调幅信号

$$f(t) = G(t)\cos(\omega_0 t)$$

其中 $G(t)$ 为矩形脉冲,脉幅为 E ,脉宽为 τ ,如图 3-38 中虚线所示。试求其频谱函数。

解

由式(3-33)知矩形脉冲 $G(t)$ 的频谱 $G(\omega)$ 为

$$G(\omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

因为

$$f(t) = \frac{1}{2} G(t)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

根据频移特性,可得 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 为

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \frac{1}{2} G(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} G(\omega + \omega_0) \\ &= \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega - \omega_0\right) \frac{\tau}{2}\right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega + \omega_0\right) \frac{\tau}{2}\right]\end{aligned}\quad (3-66)$$

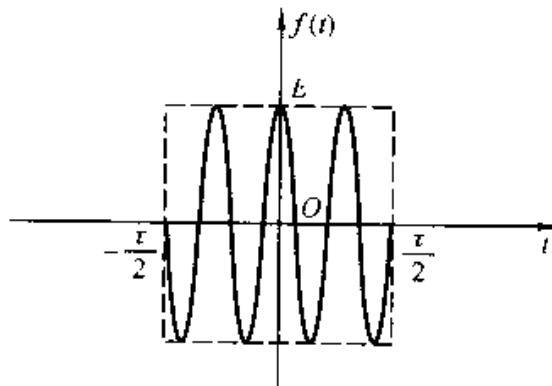


图 3-38 矩形调幅信号的波形

可见,调幅信号的频谱等于将包络线的频谱一分为二,各向左、右移载频

ω_0 。矩形调幅信号的频谱 $F(\omega)$ 如图 3-39 所示。

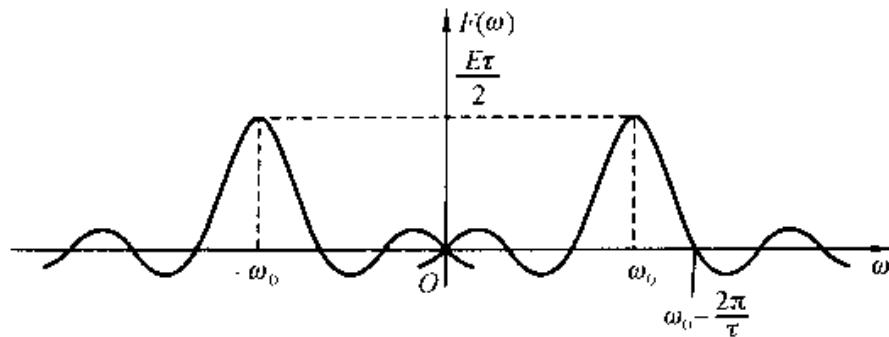


图 3-39 矩形调幅信号的频谱

例 3-5 已知 $f(t) = \cos(\omega_0 t)$, 利用频移定理求余弦信号的频谱。

解

已知直流信号的频谱是位于 $\omega = 0$ 点的冲激函数, 也即

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

利用频移定理, 根据式(3-65)容易求得

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (3-67)$$

可见, 周期余弦信号的傅里叶变换完全集中于 $\pm \omega_0$ 点, 是位于 $\pm \omega_0$ 点的冲激函数, 频谱中不包含任何其他成分。这与直观感觉一致。

在第 3.9 节将专门讨论周期信号的傅里叶变换, 包括余弦信号、正弦信号和一般的周期性信号。

(七) 微分特性

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则:

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega)$$

证明

因为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边对 t 求导数, 得

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega F(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

所以

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega) \quad (3-68)$$

同理，可推出

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega) \quad (3-69)$$

式(3-68)、(3-69)表示时域的微分特性，它说明在时域中 $f(t)$ 对 t 取 n 阶导数等效于在频域中 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 乘以 $(j\omega)^n$ 。

同理，可以导出频域的微分特性如下：

若 $\tilde{\mathcal{F}}[f(t)] = F(\omega)$ ，则

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{dF(\omega)}{d\omega}\right] = (-jt)f(t) \quad (3-70)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}\right] = (-jt)^n f(t) \quad (3-71)$$

对于时域微分定理，容易举出简单的应用例子。若已知单位阶跃信号 $u(t)$ 的傅里叶变换，可利用此定理求出 $\delta(t)$ 和 $\delta'(t)$ 的变换式：

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = j\omega \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = 1$$

$$\mathcal{F}[\delta'(t)] = j\omega$$

(八) 积分特性

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ ，则

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (3-72)$$

证明

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (3-73)$$

此处，将被积函数 $f(\tau)$ 乘以 $u(t-\tau)$ ，同时将积分上限 t 改写为 ∞ ，结果不变。交换积分次序，并引用延时阶跃信号的傅里叶变换关系式

$$\mathcal{F}[u(t-\tau)] = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega\tau}$$

则式(3-73)成为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \pi\delta(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega} d\tau \\ &= \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega} \end{aligned} \quad (3-74)$$

如果 $F(0)=0$ ，式(3-74)简化为

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} \quad (3-75)$$

例 3-6 已知三角脉冲信号

$$f(t) = \begin{cases} E \left(1 - \frac{2}{\tau} |t| \right) & \left(|t| < \frac{\tau}{2} \right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{\tau}{2} \right) \end{cases}$$

如图 3-40 所示，求其频谱 $F(\omega)$ 。

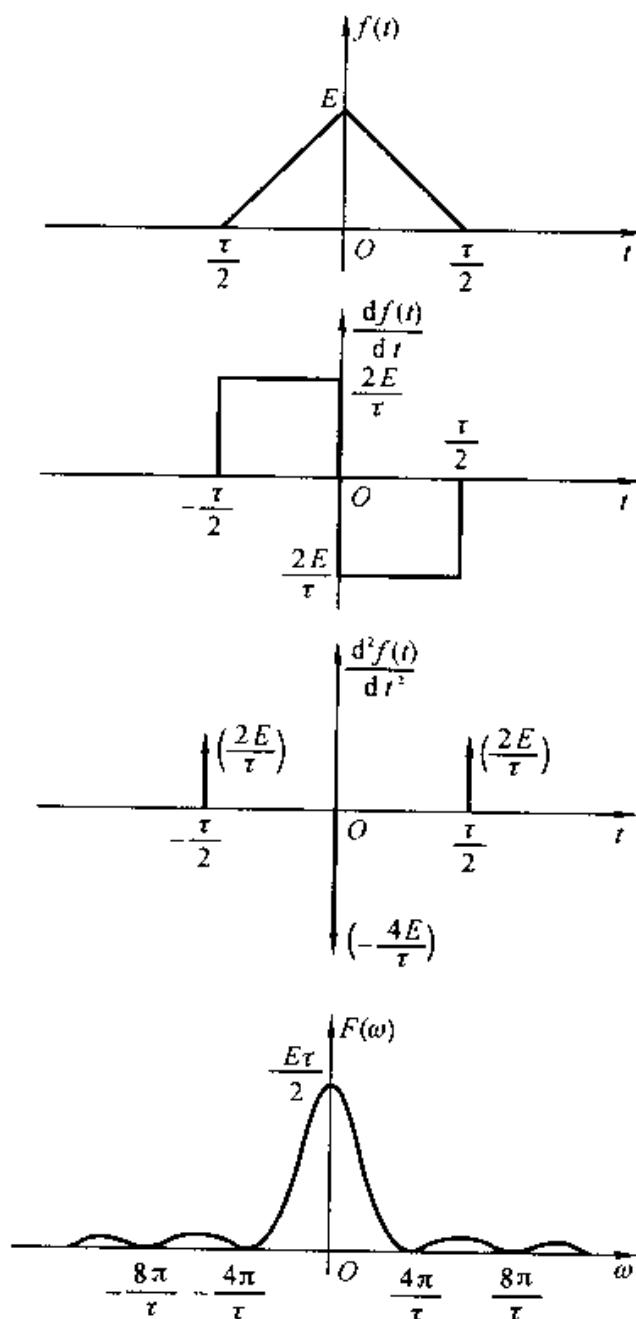


图 3-40 三角脉冲信号的波形和频谱

解 将 $f(t)$ 取一阶与二阶导数，得到

$$\frac{df(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{2E}{\tau} & \left(-\frac{\tau}{2} < t < 0 \right) \\ -\frac{2E}{\tau} & \left(0 < t < \frac{\tau}{2} \right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{\tau}{2} \right) \end{cases}$$

及

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = \frac{2E}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) \right] \quad (3-76)$$

它们的形状如图 3-40 所示。

以 $F(\omega)$, $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ 分别表示 $f(t)$ 及其一、二阶导数的傅里叶变换，先求得 $F_2(\omega)$ 如下

$$\begin{aligned} F_2(\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = \frac{2E}{\tau}(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - 2) \\ &= \frac{2E}{\tau} \left[2\cos\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) - 2 \right] = -\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \end{aligned}$$

利用积分定理容易求得：

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] \\ &= \left(\frac{1}{j\omega}\right) \left[-\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right] + \pi F_2(0)\delta(\omega) \\ F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] \\ &= \frac{1}{(j\omega)^2} \left[-\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right] + \pi F_1(0)\delta(\omega) \\ &= \frac{E\tau}{2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2} = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \end{aligned}$$

在以上两式中 $F_2(0)$ 和 $F_1(0)$ 都等于零。

例 3-7 求下列截平斜变信号的频谱(见图 3-41)

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{t}{t_0} & (0 \leq t \leq t_0) \\ 1 & (t > t_0) \end{cases} \quad (3-77)$$

解

利用积分特性求 $y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)$ 。把 $y(t)$ 看成脉幅为 $1/t_0$, 脉宽为 t_0

的矩形脉冲 $f(\tau)$ 的积分，即

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

由于

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & (\tau < 0) \\ 1/t_0 & (0 < \tau < t_0) \\ 0 & (\tau > t_0) \end{cases}$$

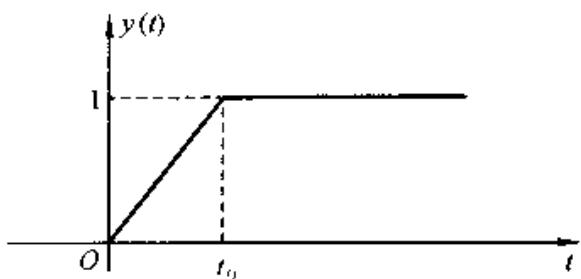


图 3-41 截平的斜变信号波形

根据矩形脉冲的频谱及时移特性，可得

$f(\tau)$ 的频谱 $F(\omega)$ 为

$$F(\omega) = \text{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) e^{-j\omega \frac{t_0}{2}}$$

注意到

$$F(0) = 1 \neq 0$$

求得

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \mathcal{F}[y(t)] \\ &= \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{2}} + \pi \delta(\omega) \end{aligned} \quad (3-78)$$

显然，当 $t_0 \rightarrow 0$ ， $y(t) \rightarrow u(t)$ ， $f(\tau) \rightarrow \delta(\tau)$ ，此时式(3-78)变成

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

与式(3-49)的结果完全相同。

此外，还可导出频域积分特性如下：

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ ，则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega) d\Omega\right] \\ = -\frac{f(t)}{jt} + \pi f(0) \delta(t) \end{aligned}$$

由于此特性应用较少，此处不再讨论。

到此为止介绍了傅里叶变换的八个基本性质，下一节和以后的章节还要讨论其他性质。

3.8 卷积特性(卷积定理)

这是在通信系统和信号处理研究领域中应用最广的傅里叶变换性质之一，

在以后各章节中将认识到这一点。

(一) 时域卷积定理

若给定两个时间函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$, 已知:

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$$

则

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

证明

根据第二章中卷积的定义, 已知

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau \quad (3-79)$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)F_2(\omega)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= F_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (3-80)$$

式(3-80)称为时域卷积定理, 它说明两个时间函数卷积的频谱等于各个时间函数频谱的乘积, 即在时域中两信号的卷积等效于在频域中频谱相乘。

(二) 频域卷积定理

类似于时域卷积定理, 由频域卷积定理可知, 若:

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$$

则

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (3-81)$$

其中

$$F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)du$$

证明方法同时域卷积定理, 读者可自行证明, 这里不再重复。

式(3-81)称为频域卷积定理, 它说明两时间函数频谱的卷积等效于两函数的乘积。或者说, 两时间函数乘积的频谱等于各个函数频谱的卷积乘以 $\frac{1}{2\pi}$ 。显然时域与频域卷积定理是对称的, 这由傅里叶变换的对称性所决定。

下面举例说明如何利用卷积定理求信号频谱。

例 3-8 已知

$$f(t) = \begin{cases} E \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) & \left(|t| \leq \frac{\tau}{2}\right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{\tau}{2}\right) \end{cases}$$

利用卷积定理求余弦脉冲的频谱。

解

把余弦脉冲 $f(t)$ 看作是矩形脉冲 $G(t)$ 与无穷长余弦函数 $\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)$ 的乘积，如图 3-42 所示，其表达式为

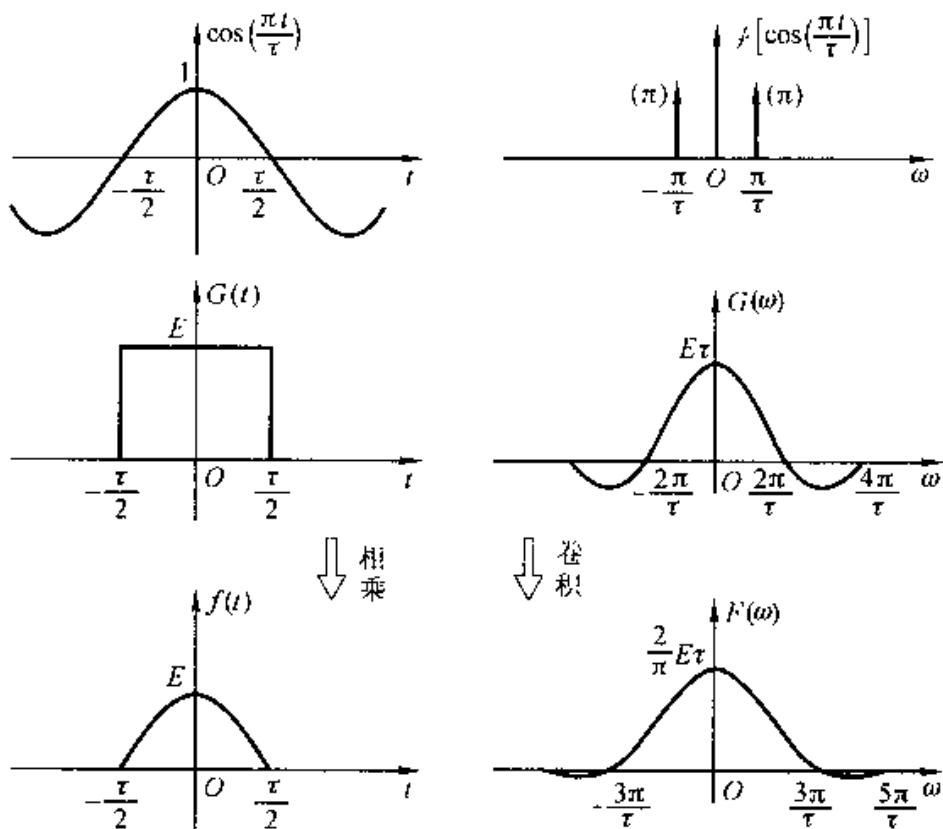


图 3-42 利用卷积定理求余弦脉冲的频谱

$$f(t) = G(t) \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)$$

由式(3-33)知矩形脉冲的频谱为

$$G(\omega) = \mathcal{F}[G(t)] = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

由式(3-65)知

$$\mathcal{F}\left[\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right] = \pi\delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)$$

根据频域卷积定理, 可以得到 $f(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}\left[G(t)\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) * \pi\left[\delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\right] \\ &= \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right] \end{aligned}$$

上式化简后得到余弦脉冲的频谱为

$$F(\omega) = \frac{2E\tau}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]} \quad (3-82)$$

如图 3-42 所示。

例 3-9 已知

$$f(t) = \begin{cases} E\left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) & \left(|t| \leq \frac{\tau}{2}\right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{\tau}{2}\right) \end{cases}$$

利用卷积定理求三角脉冲的频谱。

解

可以把图 3-43 所示的三角脉冲看成是两个同样的矩形脉冲的卷积, 而矩形脉冲的幅度、宽度可以由卷积的定义直接看出, 分别为 $\sqrt{\frac{2E}{\tau}}$ 及 $\frac{\tau}{2}$ 。根据时域卷积定理, 可以很简单地求出三角脉冲的频谱 $F(\omega)$ 。

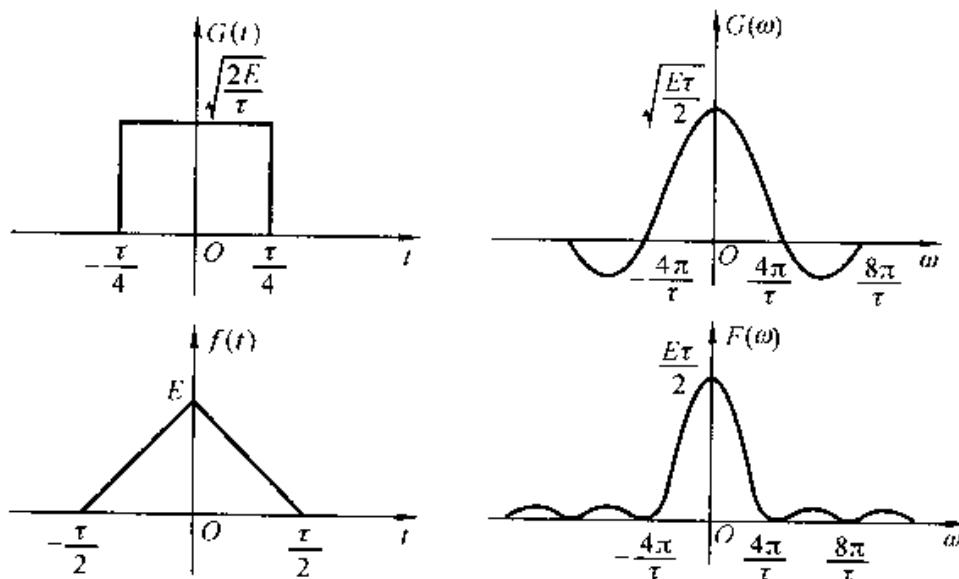


图 3-43 利用卷积定理求三角脉冲的频谱

因为：

$$\begin{aligned}
 f(t) &= G(t) * G(t) \\
 G(\omega) &= \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \cdot \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \\
 \text{所以 } F(\omega) &= \left[\sqrt{\frac{2E}{\tau}} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right]^2 \\
 &= \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)
 \end{aligned} \tag{3-83}$$

如图 3-43 所示。

频域卷积定理的典型应用实例是通信系统中的调制与解调，这将是第 5.7 节的主要内容。

最后，将本节与上节讨论的傅里叶变换基本性质列于表 3-2，表中最后的几个性质将在 3.10 节和 6.6 节讨论。

表 3-2 傅里叶变换的基本性质

性 质	时域 $f(t)$	频域 $F(\omega)$	时域频域 对应关系
1. 线性	$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^n a_i F_i(\omega)$	线性叠加
2. 对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	对称
3. 尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	压缩与扩展
	$f(-t)$	$F(-\omega)$	反褶
4. 时移	$f(t - t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$	时移与相移
	$f(at - t_0)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{\omega_0}{a}}$	
	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$	
5. 频移	$f(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$	调制与频移
	$f(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{j}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$	
6. 时域微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$j\omega F(\omega)$	
	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$	

续表

性 质	时域 $f(t)$	频域 $F(\omega)$	时域频域 对应关系
7. 频域微分	$-j\omega f(t)$	$\frac{dF(\omega)}{d\omega}$	时域微分 频域乘以 $j\omega$
	$(-j\omega)^n f(t)$	$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$	
8. 时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$	
9. 时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$	
10. 频域卷积	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$	乘积与卷积
11. 时域抽样	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - nT_s)$	$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_s}\right)$	
12. 频域抽样	$\frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{2\pi n}{\omega_s}\right)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) \delta(\omega - n\omega_s)$	抽样与重复
13. 相关	$R_{12}(\tau)$	$F_1(\omega) F_2^*(\omega)$	时域相关 频域乘积
	$R_{21}(\tau)$	$F_1^*(\omega) F_2(\omega)$	
14. 自相关	$R(\tau)$	$ F(\omega) ^2$	

3.9 周期信号的傅里叶变换

以上几节讨论了周期信号的傅里叶级数，以及非周期信号的傅里叶变换问题。在推导傅里叶变换时，令周期信号的周期趋近无穷大，这样，将周期信号变成非周期信号，将傅里叶级数演变成傅里叶变换，由周期信号的离散谱过渡成连续谱。现在研究周期信号傅里叶变换的特点以及它与傅里叶级数之间的联系，目的是力图把周期信号与非周期信号的分析方法统一起来，使傅里叶变换这一工具得到更广泛的应用，使我们对它的理解更加深入、全面。前已指出，虽然周期信号不满足绝对可积条件，但是在允许冲激函数存在并认为它是有意义的前提下，绝对可积条件就成为不必要的限制了，在这种意义上说周期信号的傅里叶变换是存在的。在3.7节频移定理的应用举例中（例3-5）已给出余弦信号的傅里叶变换。现在，仍借助频移定理导出指数、余弦、正弦信号的频谱函数，然后研究一般周期信号的傅里叶变换。

(一) 正弦、余弦信号的傅里叶变换

若 $\mathcal{F}[f_0(t)] = F_0(\omega)$

由频移特性[式(3-64)]知

$$\mathcal{F}[f_0(t)e^{j\omega_1 t}] = F_0(\omega - \omega_1) \quad (3-84)$$

在上式中, 令 $f_0(t) = 1$

由式(3-46)知 $f_0(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_0(\omega) = \mathcal{F}(1) = 2\pi\delta(\omega)$$

这样, 式(3-84)变成

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_1 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_1) \quad (3-85)$$

同理

$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_1 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_1) \quad (3-86)$$

由式(3-85)、(3-86)及欧拉公式, 可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] &= \pi[\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)] \\ \mathcal{F}[\sin(\omega_1 t)] &= j\pi[\delta(\omega + \omega_1) - \delta(\omega - \omega_1)] \end{aligned} \quad (t \text{ 为任意值}) \quad (3-87)$$

式(3-85)、(3-87)表示指数、余弦和正弦函数的傅里叶变换。这类信号的频谱只包含位于 $\pm \omega_1$ 处的冲激函数, 如图 3-44 所示。

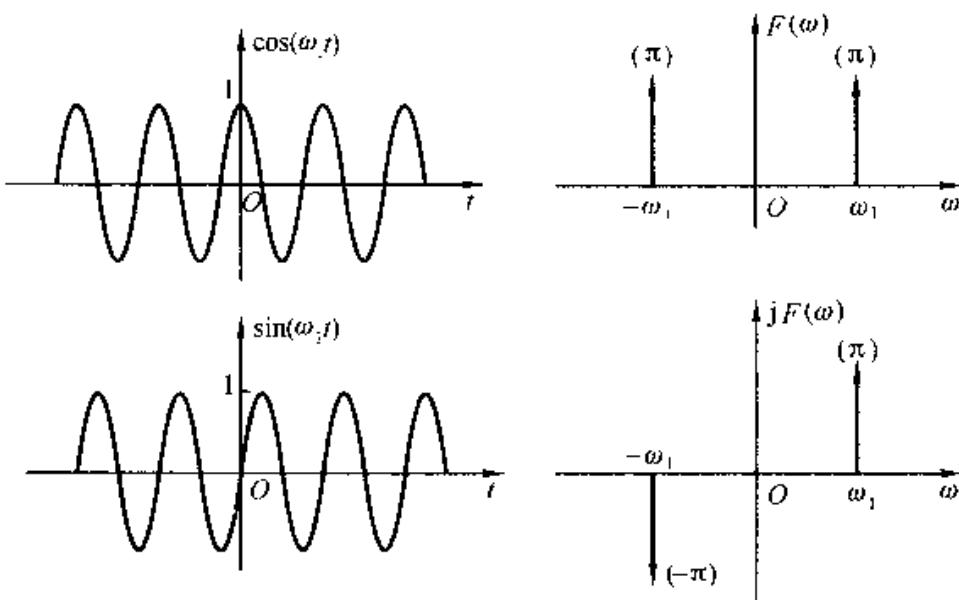


图 3-44 余弦和正弦信号的频谱

另外, 还可以用极限的方法求正弦信号 $\sin(\omega_1 t)$ 、余弦信号 $\cos(\omega_1 t)$ 及指数信号 $e^{j\omega_1 t}$ 的傅里叶变换。

先令 $f_0(t)$ 为有限长的余弦信号, 它只存在于 $-\frac{\tau}{2} \sim +\frac{\tau}{2}$ 的区间, 即把有限长的余弦信号看成矩形脉冲 $G(t)$ 与余弦信号 $\cos(\omega_1 t)$ 的乘积。

这样

$$f_0(t) = G(t) \cos(\omega_1 t)$$

因为

$$G(\omega) = \mathcal{F}[G(t)]$$

$$= \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据频移特性，可知 $f_0(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} F_0(\omega) &= \frac{1}{2} [G(\omega + \omega_1) + G(\omega - \omega_1)] \\ &= \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left[(\omega + \omega_1)\frac{\tau}{2}\right] + \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left[(\omega - \omega_1)\frac{\tau}{2}\right] \end{aligned}$$

如图 3-45 所示。

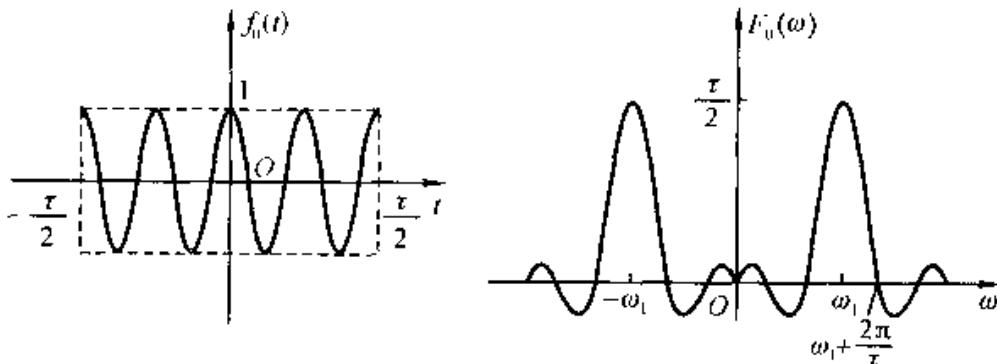


图 3-45 有限长余弦信号的频谱

显然，余弦信号 $\cos(\omega_1 t)$ 的傅里叶变换为 $\tau \rightarrow \infty$ 时 $F_0(\omega)$ 的极限，即

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} F_0(\omega) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left[(\omega + \omega_1)\frac{\tau}{2}\right] + \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left[(\omega - \omega_1)\frac{\tau}{2}\right] \right\} \end{aligned}$$

由式(1-35)

$$\delta(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(k\omega)$$

可知余弦信号的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] = \pi [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)]$$

同理可求得 $\sin(\omega_1 t)$, $e^{j\omega_1 t}$ 的频谱，结果与式(3-87)、(3-85)完全一致。

对上述结果可做如下解释，当有限长余弦信号 $f_0(t)$ 的宽度 τ 增大时，频谱 $F_0(\omega)$ 越来越集中到 $\pm \omega_1$ 的附近，当 $\tau \rightarrow \infty$ ，有限长余弦信号就变成无穷长余弦信号，此时频谱在 $\pm \omega_1$ 处成为无穷大，而在其他频率处均为零。也就是说， $F_0(\omega)$ 由抽样函数变成位于 $\pm \omega_1$ 的两个冲激函数。

(二) 一般周期信号的傅里叶变换

令周期信号 $f(t)$ 的周期为 T_1 ，角频率为 ω_1 ($= 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$)，可以将 $f(t)$

展成傅里叶级数，它是

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

将上式两边取傅里叶变换

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)] &= \mathcal{F} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_1 t}]\end{aligned}\quad (3-88)$$

由式(3-85)知

$$\mathcal{F}[e^{jn\omega_1 t}] = 2\pi\delta(\omega - n\omega_1)$$

把它代到式(3-88)，便可得到周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) \quad (3-89)$$

其中 F_n 是 $f(t)$ 的傅里叶级数的系数，已经知道它等于

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-90)$$

式(3-89)表明：周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换是由一些冲激函数组成，这些冲激位于信号的谐频($0, \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \dots$)处，每个冲激的强度等于 $f(t)$ 的傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。显然，周期信号的频谱是离散的，这一点与第 3.2 节的结论一致。然而，由于傅里叶变换是反映频谱密度的概念，因此周期信号的傅里叶变换不同于傅里叶级数，这里不是有限值，而是冲激函数，它表明在无穷小的频带范围内(即谐频点)取得了无限大的频谱值。

下面再来讨论周期性脉冲序列的傅里叶级数与单脉冲的傅里叶变换的关系。已知周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数是

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

其中，傅里叶系数

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-91)$$

从周期性脉冲序列 $f(t)$ 中截取一个周期，得到所谓单脉冲信号。它的傅里叶变换 $F_0(\omega)$ 等于

$$F_0(\omega) = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-92)$$

比较式(3-91)和式(3-92)，显然可以得到

$$F_n = \left. \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \right|_{\omega=n\omega_1} \quad (3-93)$$

或写作

$$F_n = \frac{1}{T_1} \left[\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j\omega_1 t} dt \right] \Big|_{\omega = n\omega_1}$$

式(3-93)表明：周期脉冲序列的傅里叶级数的系数 F_n 等于单脉冲的傅里叶变换 $F_0(\omega)$ 在 $n\omega_1$ 频率点的值乘以 $\frac{1}{T_1}$ 。利用单脉冲的傅里叶变换式可以很方便地求出周期性脉冲序列的傅里叶系数。

例3-10 若单位冲激函数的间隔为 T_1 ，用符号 $\delta_T(t)$ 表示周期单位冲激序列，即

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$$

如图 3-46 所示。求周期单位冲激序列的傅里叶级数与傅里叶变换。

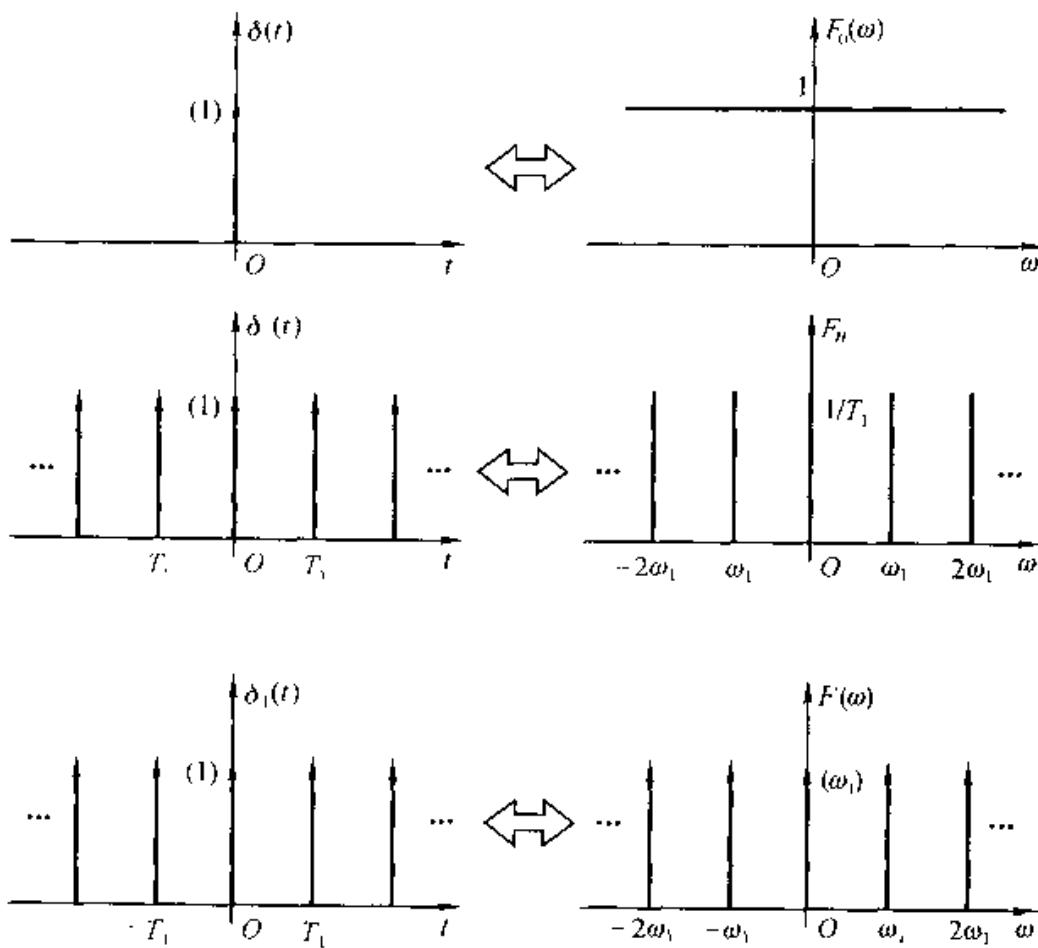


图 3-46 周期冲激序列的傅里叶级数系数与傅里叶变换

解 因为 $\delta_T(t)$ 是周期函数，所以可以把它展成傅里叶级数

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

其中：

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{2\pi}{T_1} \\ F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T_1}\end{aligned}$$

这样，得到

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_1 t} \quad (3-94)$$

可见，在周期单位冲激序列的傅里叶级数中只包含位于 $\omega = 0, \pm \omega_1, \pm 2\omega_1, \dots, \pm n\omega_1, \dots$ 的频率分量，每个频率分量的大小是相等的，均等于 $1/T_1$ 。

下面求 $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换。

由式(3-89)，知

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

因 $F_n = \frac{1}{T_1}$ ，所以， $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) \quad (3-95)$$

可见，在周期单位冲激序列的傅里叶变换中，同样，也只包含位于 $\omega = 0, \pm \omega_1, \pm 2\omega_1, \dots, \pm n\omega_1, \dots$ 频率处的冲激函数，其强度是相等的，均等于 ω_1 。如图 3-46 所示。

例3-11 已知周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的幅度为 E ，脉宽为 τ ，周期为 T_1 ，角频率为 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ 。如图 3-47 所示。求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数与傅里叶变换。

解

利用本节所给出的方法可以很方便地求出傅里叶级数与傅里叶变换。在此从熟悉的单脉冲入手，已知矩形脉冲 $f_0(t)$ 的傅里叶变换 $F_0(\omega)$ 等于

$$F_0(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

由式(3-93)可以求出周期矩形脉冲信号的傅里叶系数 F_n

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

这样， $f(t)$ 的傅里叶级数为

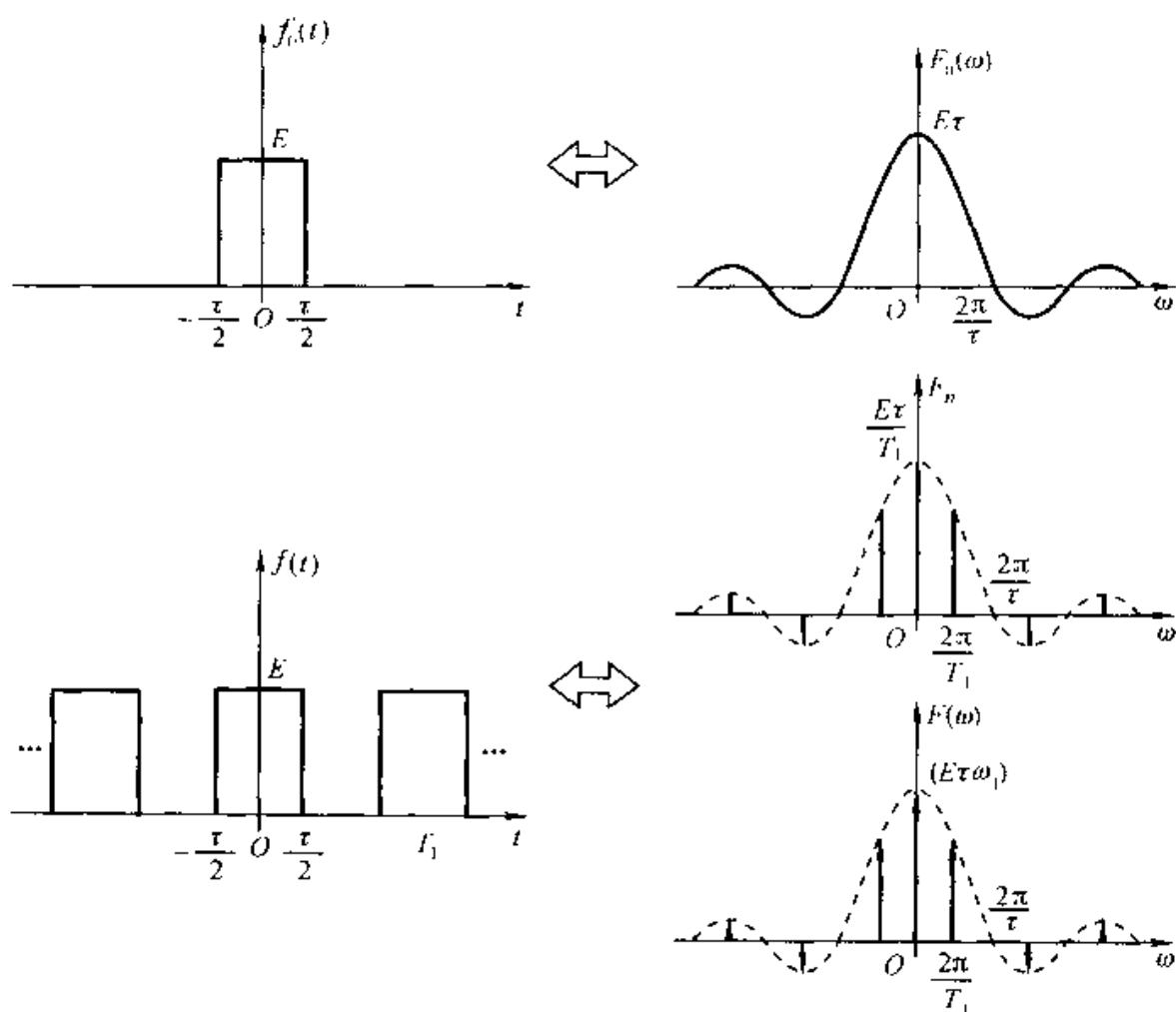


图 3-47 周期矩形脉冲信号的傅里叶级数系数与傅里叶变换

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t}$$

再由式(3-89)便可得到 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$, 它是

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) \\ &= E\tau\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1) \end{aligned}$$

如图 3-47 所示。

从此例也可以看出, 单脉冲的频谱是连续函数, 而周期信号的频谱是离散函数。对于 $F(\omega)$ 来说, 它包含间隔为 ω_1 的冲激序列, 其强度的包络线的形状与单脉冲频谱的形状相同。上述结论也可以由例 3-2 定性地看出来, 在图 3-36 已经画出了三脉冲信号的频谱, 显然, 当脉冲数目增多时, 频谱更加向 $n\omega_1$ ($\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$) 处聚集; 当脉冲数目为无限多时, 它将变成周期脉冲信号, 此时频谱在 $n\omega_1$ 处聚集成冲激函数。

3.10 抽样信号的傅里叶变换

所谓“抽样”就是利用抽样脉冲序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中“抽取”一系列的离散样值，这种离散信号通常称为“抽样信号”，以 $f_s(t)$ 表示，如图 3-48 所示。

必须指出，在信号分析与处理研究领域中，习惯上把 $\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$ 称为“抽样函数”，与这里所指的“抽样”或“抽样信号”具有完全不同的含义。此外，这里的抽样也称为“采样”或“取样”。

图 3-49 示出实现抽样的原理方框图。由图可见，连续信号经抽样作用变成抽样信号以后，往往需要再经量化、编码变成数字信号。这种数字信号经传输，然后进行上述过程的逆变换就可恢复出原连续信号。基于这种原理所构成的数字通信系统在很多性能上都要比模拟通信系统优越。随着数字技术与计算机的迅速发展，这种通信方式已经得到了广泛的应用。本节只研究信号经抽样后频谱的变化规律。量化和编码的概念将在第五章 5.10 节介绍。

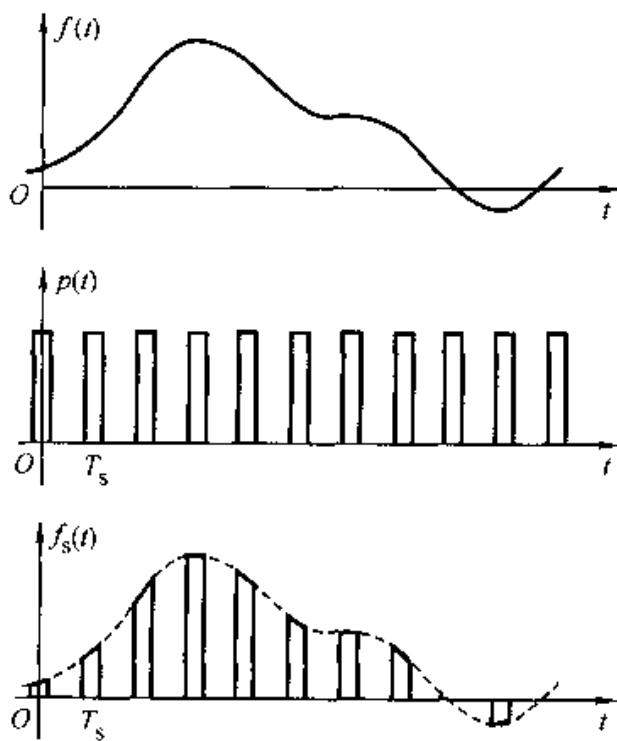


图 3-48 抽样信号的波形

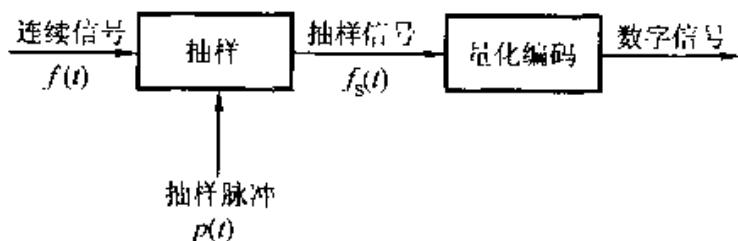


图 3-49 抽样过程方框图

摆在我面前的两个问题是：(1) 抽样信号 $f_s(t)$ 的傅里叶变换是什么样子？它和未经抽样的原连续信号 $f(t)$ 的傅里叶变换有什么联系？(2) 连续信号被抽样后，它是否保留了原信号 $f(t)$ 的全部信息，也即，在什么条件下，可从抽样信号 $f_s(t)$ 中无失真地恢复出原连续信号 $f(t)$ ？我们把第(2)个问题留待下节

专门研究，本节只解决第(1)个问题。与时域抽样相对应，在本节也要研究频域抽样——频谱函数在 ω 轴上被抽样脉冲抽取离散值的原理。通过本节与下节的讨论，将把傅里叶分析的方法从连续信号与系统推广到离散信号与系统，为本书第七~十二章的研究作一初步准备。

(一) 时域抽样

令连续信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ；

抽样脉冲序列 $p(t)$ 的傅里叶变换为 $P(\omega) = \mathcal{F}[p(t)]$ ；

抽样后信号 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为 $F_s(\omega) = \mathcal{F}[f_s(t)]$ 。

若采用均匀抽样，抽样周期为 T_s ，抽样频率为

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

在一般情况下，抽样过程是通过抽样脉冲序列 $p(t)$ 与连续信号 $f(t)$ 相乘来完成，即满足

$$f_s(t) = f(t)p(t) \quad (3-96)$$

因为 $p(t)$ 是周期信号，那么由式(3-89)可以知道 $p(t)$ 的傅里叶变换等于

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s) \quad (3-97)$$

其中

$$P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-j n \omega_s t} dt \quad (3-98)$$

它是 $p(t)$ 的傅里叶级数的系数。

根据频域卷积定理可知

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$$

将式(3-97)代入上式，化简后得到抽样信号 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_s) \quad (3-99)$$

式(3-99)表明：信号在时域被抽样后，它的频谱 $F_s(\omega)$ 是连续信号频谱 $F(\omega)$ 的形状以抽样频率 ω_s 为间隔周期地重复而得到，在重复的过程中幅度被 $p(t)$ 的傅里叶系数 P_n 所加权。因为 P_n 只是 n (而不是 ω) 的函数，所以 $F(\omega)$ 在重复过程中不会使形状发生变化。

式(3-99)中加权系数 P_n 取决于抽样脉冲序列的形状，下面讨论两种典型的情况：

(1) 矩形脉冲抽样

在这种情况下，抽样脉冲 $p(t)$ 是矩形，令它的脉冲幅度为 E ，脉宽为 τ ，抽样角频率为 ω_s (抽样间隔为 T_s)。由于 $f_s(t) = f(t)p(t)$ ，所以抽样信号

$f_s(t)$ 在抽样期间的脉冲顶部不是平的，而是随 $f(t)$ 而变化，如图 3-50 所示。这种抽样称为“自然抽样”。现在只讨论自然抽样的情况，在抽样期间脉冲为平顶的情况将在第 5.9 节讨论。对于自然抽样，由式(3-98)可求出

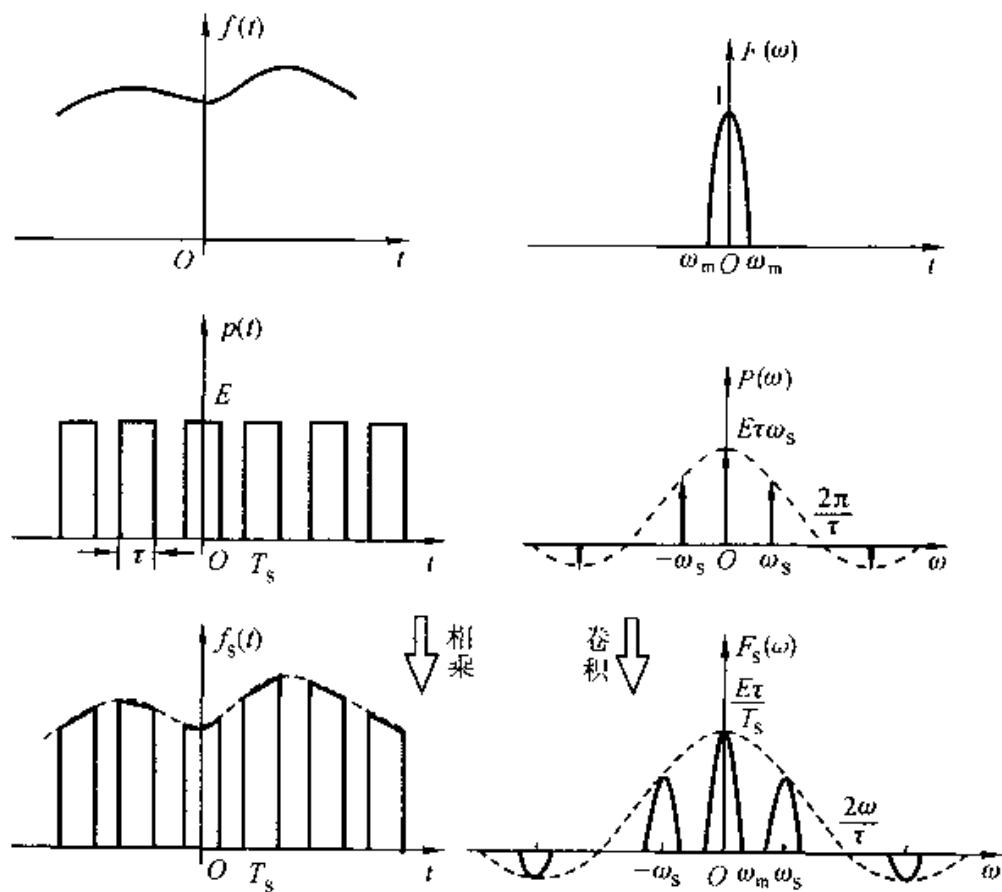


图 3-50 矩形抽样信号的频谱

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\omega_s t} dt \end{aligned}$$

积分后得到

$$P_n = \frac{E\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) \quad (3-100)$$

这个结果是早已熟悉的，若将它代到式(3-99)，便可得到矩形抽样信号的频谱为

$$F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s) \quad (3-101)$$

显然，在这种情况下， $F(\omega)$ 在以 ω_s 为周期的重复过程中幅度以 $\text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right)$ 的规律变化，如图 3-50 所示。

(2) 冲激抽样

若抽样脉冲 $p(t)$ 是冲激序列, 这种抽样则称为“冲激抽样”或“理想抽样”。

因为:

$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$$

所以, 在这种情况下抽样信号 $f_s(t)$ 是由一系列冲激函数构成, 每个冲激的间隔为 T_s , 而强度等于连续信号的抽样值 $f(nT_s)$, 如图 3-51 所示。

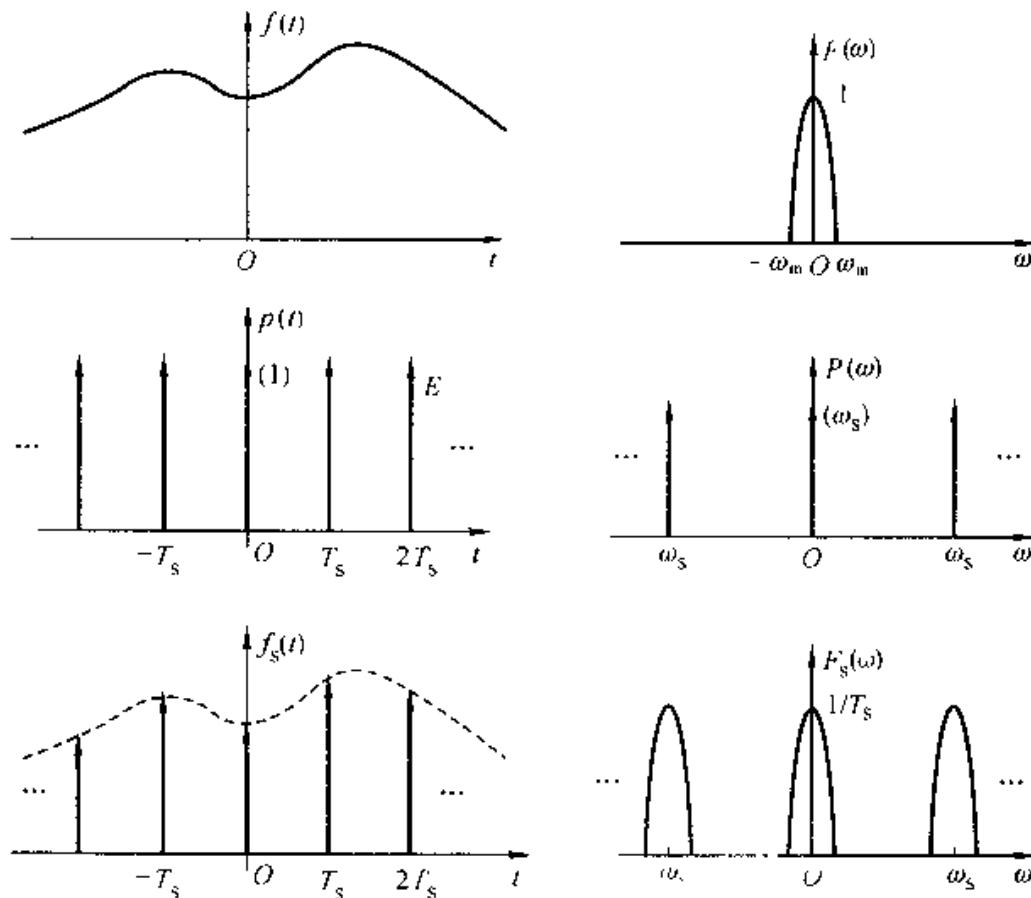


图 3-51 冲激抽样信号的频谱

由式(3-98)可以求出 $\delta_T(t)$ 的傅里叶系数

$$P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

$$= \frac{1}{T_s}$$

把它代入到式(3-99), 将得到冲激抽样信号的频谱为

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad (3-102)$$

式(3-102)表明：由于冲激序列的傅里叶系数 P_n 为常数，所以 $F(\omega)$ 是以 ω_s 为周期等幅地重复，如图 3-51 所示。

显然冲激抽样和矩形脉冲抽样是式(3-99)的两种特定情况，而前者又是后者的一种极限情况(脉宽 $\tau \rightarrow 0$)。在实际中通常采用矩形脉冲抽样，但是为了便于问题的分析，当脉宽 τ 相对较窄时，往往近似为冲激抽样。

(二) 频域抽样

已知连续频谱函数 $F(\omega)$ ，对应的时间函数为 $f(t)$ 。若 $F(\omega)$ 在频域中被间隔为 ω_1 的冲激序列 $\delta_\omega(\omega)$ 抽样，那么抽样后的频谱函数 $F_1(\omega)$ 所对应的时间函数 $f_1(t)$ 与 $f(t)$ 具有什么样的关系？

已知

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

若频域抽样过程满足

$$F_1(\omega) = F(\omega) \delta_\omega(\omega) \quad (3-103)$$

其中

$$\delta_\omega(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

由式(3-95)知

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)\right] &= \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) \\ &= \left(\omega_1 - \frac{2\pi}{T_1}\right) \end{aligned}$$

于是上式可写为逆变换形式

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\delta_\omega(\omega)] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)\right] \\ &= \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = \frac{1}{\omega_1} \delta_T(t) \end{aligned} \quad (3-104)$$

由式(3-103)、(3-104)，根据时域卷积定理，可知

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[\delta_\omega(\omega)]$$

即

$$f_1(t) = f(t) * \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$$

这样，便可得到 $F(\omega)$ 被抽样后 $F_1(\omega)$ 所对应的时间函数

$$f_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT_1) \quad (3-105)$$

式(3-105)表明：若 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 被间隔为 ω_1 的冲激序列在频域中抽样，则在时域中等效于 $f(t)$ 以 $T_1\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)$ 为周期而重复(如图 3-52 所示)。

也就是说，周期信号的频谱是离散的，显然与第3.2、3.9节的结论一致。

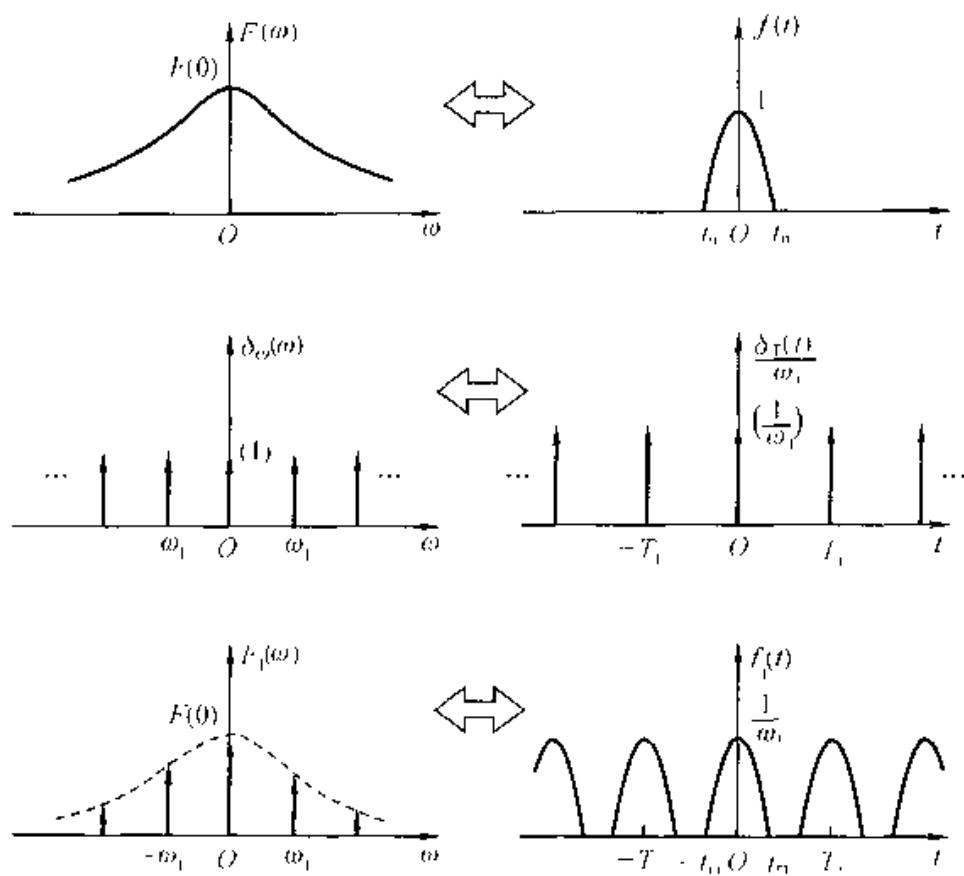


图 3-52 频谱抽样所对应的信号波形

通过上面时域与频域的抽样特性讨论，得到了傅里叶变换的又一条重要性质，即信号的时域与频域呈抽样（离散）与周期（重复）对应关系。表3-3给出了这一结论的要点。此性质也在表3-2中列出（第11、12项）。

表 3-3 周期信号和抽样信号的特性

时 域	频 域
周期信号 周期为 T_1	离散频谱 离散间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$
抽样信号（离散） 抽样间隔 $T_s = \frac{2\pi}{\omega_1}$	重复频谱（周期） 重复周期为 ω_1

例 3-12 大致画出图3-53所示周期矩形信号冲激抽样后信号的频谱。

已知周期性矩形脉冲为 $f_1(t)$ ，它的脉幅为 E ，脉宽为 τ ，周期为 T_1 ，其傅里叶变换以 $F_1(\omega)$ 表示。

若 $f_1(t)$ 被间隔为 T_s 的冲激序列所抽样，令抽样后的信号为 $f_s(t)$ ，其傅

里叶变换为 $F_s(\omega)$ 。

解 仍从单脉冲入手并利用傅里叶变换的抽样特性来解答本题。

如图 3-53 所示, 已知矩形单脉冲 $f_0(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_0(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

若 $f_0(t)$ 以 T_1 为周期进行重复便构成周期信号 $f_1(t)$, 即

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT_1)$$

根据频域抽样特性可知 $f_1(t)$ 的傅里叶变换 $F_1(\omega)$ 是由 $F_0(\omega)$ 经过间隔为 $\omega_1\left(=\frac{2\pi}{T_1}\right)$ 冲激抽样而得到。由式(3-103)、(3-105)知

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \omega_1 F_0(\omega) \delta_\omega(\omega) \\ &= \omega_1 E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) \\ &= \omega_1 E\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1) \end{aligned}$$

若 $f_1(t)$ 被间隔为 T_s 的冲激序列所抽样, 便构成周期矩形抽样信号 $f_s(t)$, 即

$$f_s(t) = f_1(t) \delta_T(t)$$

根据时域抽样特性可知 $f_s(t)$ 的傅里叶变换 $F_s(\omega)$ 是 $F_1(\omega)$ 以 $\omega_s\left(=\frac{2\pi}{T_s}\right)$ 为间隔重复而得到。由式(3-102)知

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_1(\omega - m\omega_s) \\ &= \frac{\omega_1 E\tau}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - m\omega_s - n\omega_1) \end{aligned}$$

如图 3-53 所示。

3.11 抽 样 定 理

本节讨论前节提出的第(2)个问题, 即如何从抽样信号中恢复原连续信号, 以及在什么条件下才可以无失真地完成这种恢复作用。

著名的“抽样定理”对此作出了明确而精辟的回答。抽样定理在通信系统、信息传输理论方面占有十分重要的地位, 许多近代通信方式(如数字通信系统)都以此定理作为理论基础。在第五章 5.9 和 5.10 节将初步介绍它的有关应用, 在这里只讨论抽样定理的内容以及借助此定理回答恢复连续信号的问题。

(一) 时域抽样定理

时域抽样定理说明：一个频谱受限的信号 $f(t)$ ，如果频谱只占据 $-\omega_m \sim +\omega_m$ 的范围，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值惟一地表示。而抽样间隔必须不大于 $\frac{1}{2f_m}$ （其中 $\omega_m = 2\pi f_m$ ），或者说，最低抽样频率为 $2f_m$ 。

参看图 3-54 来证明此定理。从上一节可以看出，假定信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 限制在 $-\omega_m \sim +\omega_m$ 范围内，若以间隔 T_s （或重复频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ ）对 $f(t)$ 进行抽样，抽样后信号 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(\omega)$ 是 $F(\omega)$ 以 ω_s 为周期重复。若抽样过程满足式(3-96)（如冲激抽样），则 $F(\omega)$ 频谱在重复过程中是不产生失真的。在此情况下，只有满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 条件， $F_s(\omega)$ 才不会产生频谱的混叠。这样，抽样信号 $f_s(t)$ 保留了原连续信号 $f(t)$ 的全部信息，完全可以用 $f_s(t)$ 惟一地表示 $f(t)$ ，或者说，完全可以由 $f_s(t)$ 恢复出 $f(t)$ 。图 3-54 画出了当抽样率 $\omega_s > 2\omega_m$ （不混叠时）及 $\omega_s < 2\omega_m$ （混叠时）两种情况下冲激抽样信号的频谱。

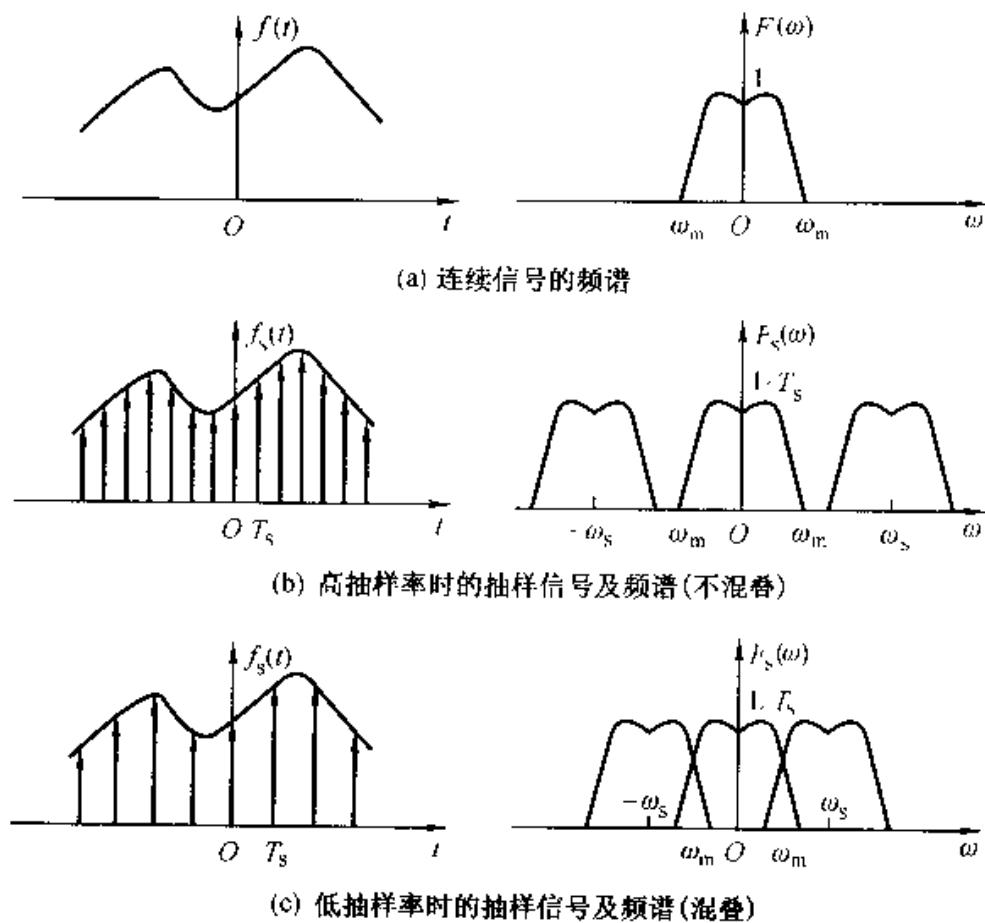


图 3-54 冲激抽样信号的频谱

对于抽样定理，可以从物理概念上做如下解释。由于一个频带受限的信号波形决不可能在很短的时间内产生独立的、实质的变化，它的最高变化速度受

最高频率分量 ω_m 的限制。因此为了保留这一频率分量的全部信息，一个周期的间隔内至少抽样两次，即必须满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 或 $f_s \geq 2f_m$ 。

通常把最低允许的抽样率 $f_s = 2f_m$ 称为“奈奎斯特(Nyquist)频率”，把最大允许的抽样间隔 $T_s = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}$ 称为“奈奎斯特间隔”。

从图 3-54 可以看出，在满足抽样定理的条件下，为了从频谱 $F_s(\omega)$ 中无失真地选出 $F(\omega)$ ，可以用如下的矩形函数 $H(\omega)$ 与 $F_s(\omega)$ 相乘，即

$$F(\omega) = F_s(\omega)H(\omega)$$

其中

$$H(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases}$$

学习第五章 5.4 节之后就会知道，实现 $F_s(\omega)$ 与 $H(\omega)$ 相乘的方法就是将抽样信号 $f_s(t)$ 施加于“理想低通滤波器”[此滤波器的传输函数为 $H(\omega)$]，这样，在滤波器的输出端可以得到频谱为 $F(\omega)$ 的连续信号 $f(t)$ 。这相当于从图 3-54 无混叠情况下的 $F_s(\omega)$ 频谱中只取出 $|\omega| < \omega_m$ 的成分，当然，这就恢复了 $F(\omega)$ ，也即恢复了 $f(t)$ 。

以上从频域解释了由抽样信号的频谱恢复连续信号频谱的原理，也可从时域直接说明由 $f_s(t)$ 经理想低通滤波器产生 $f(t)$ 的原理，这也是第五章 5.9 节的内容。

(二) 频域抽样定理

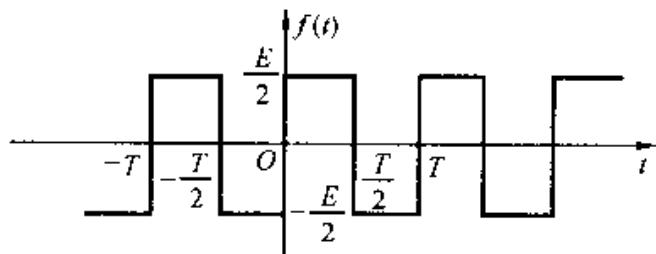
根据时域与频域的对称性，可以由时域抽样定理直接推论出频域抽样定理。频域抽样定理的内容是：若信号 $f(t)$ 是时间受限信号，它集中在 $-t_m \sim +t_m$ 的时间范围内，若在频域中以不大于 $\frac{1}{2t_m}$ 的频率间隔对 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 进行抽样，则抽样后的频谱 $F_1(\omega)$ 可以惟一地表示原信号。

从物理概念上不难理解，因为在频域中对 $F(\omega)$ 进行抽样，等效于 $f(t)$ 在时域中重复形成周期信号 $f_1(t)$ 。只要抽样间隔不大于 $\frac{1}{2t_m}$ ，则在时域中波形不会产生混叠，用矩形脉冲作选通信号从周期信号 $f_1(t)$ 中选出单个脉冲就可以无失真地恢复出原信号 $f(t)$ 。

本章从傅里叶级数引出了傅里叶变换的基本概念，初步介绍了傅里叶变换的性质。以此为基础，在本书第五、六章以及下册的许多章节里将进一步讨论傅里叶变换的各种应用。今后还要看到，作为信息科学研究领域中广泛应用的有力工具，傅里叶变换在很多后续课程以及研究工作中将不断地发挥至关重要的作用。

习 题

3-1 求题图3-1所示对称周期矩形信号的傅里叶级数(三角形式与指数形式)。

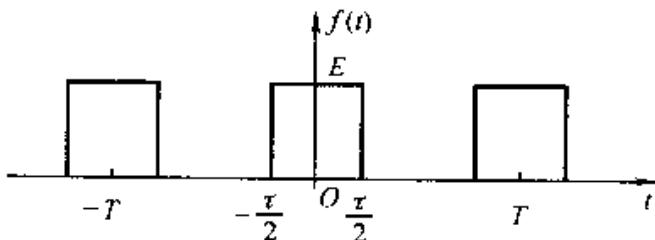


题图 3-1

3-2 周期矩形信号如题图3-2所示。

若:	重复频率	$f = 5 \text{ kHz}$
脉宽		$\tau = 20 \mu\text{s}$
幅度		$E = 10 \text{ V}$

求直流分量大小以及基波、二次和三次谐波的有效值。

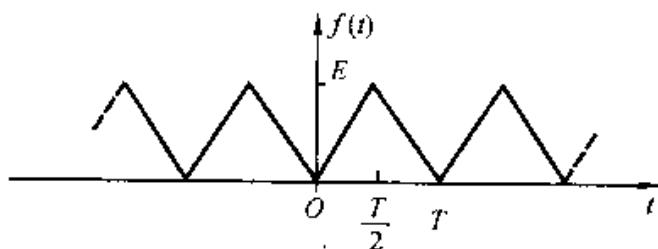


题图 3-2

3-3 若周期矩形信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 波形如题图 3-2 所示, $f_1(t)$ 的参数为 $\tau = 0.5 \mu\text{s}$, $T = 1 \mu\text{s}$, $E = 1 \text{ V}$; $f_2(t)$ 的参数为 $\tau = 1.5 \mu\text{s}$, $T = 3 \mu\text{s}$, $E = 3 \text{ V}$, 分别求:

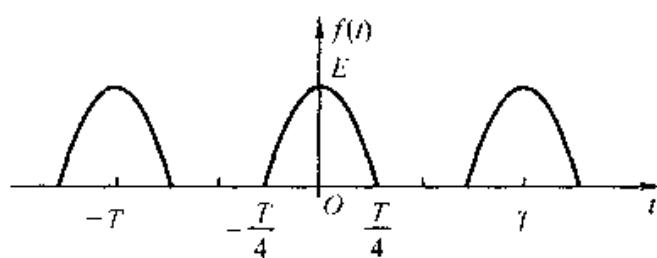
- (1) $f_1(t)$ 的谱线间隔和带宽(第一零点位置), 频率单位以 kHz 表示;
- (2) $f_2(t)$ 的谱线间隔和带宽;
- (3) $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的基波幅度之比;
- (4) $f_1(t)$ 基波与 $f_2(t)$ 三次谐波幅度之比。

3-4 求题图3-4所示周期三角信号的傅里叶级数并画出幅度谱。



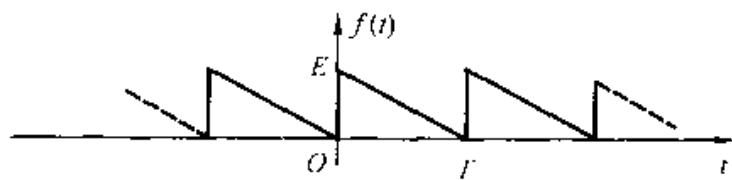
题图 3-4

3-5 求题图3-5所示半波余弦信号的傅里叶级数。若 $E = 10 \text{ V}$, $f = 10 \text{ kHz}$, 大致画出幅度谱。



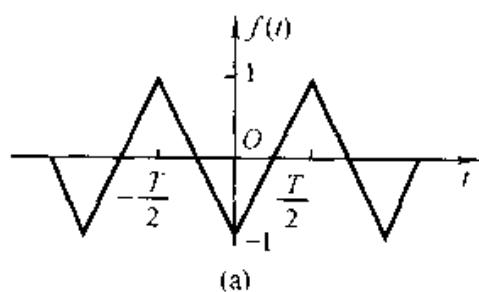
题图 3-5

3-6 求题图3-6所示周期锯齿信号的指数形式傅里叶级数，并大致画出频谱图。

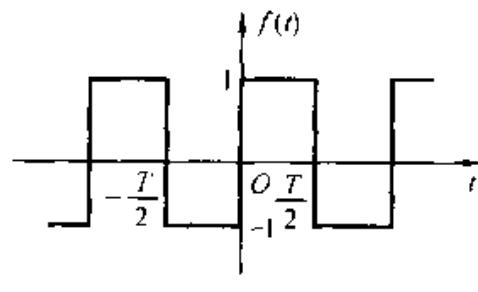


题图 3-6

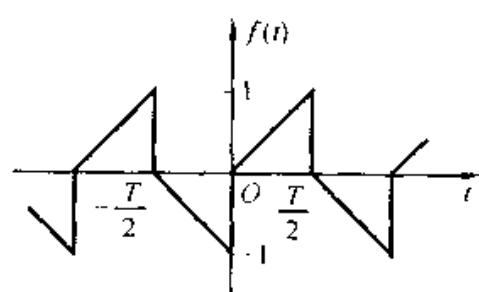
3-7 利用信号 $f(t)$ 的对称性，定性判断题图 3-7 中各周期信号的傅里叶级数中所含有



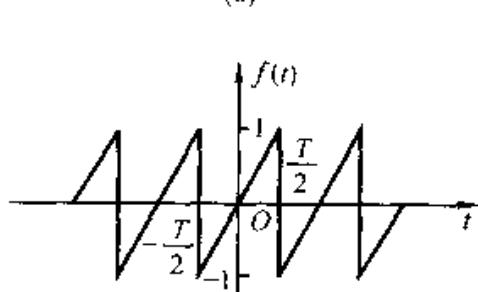
(a)



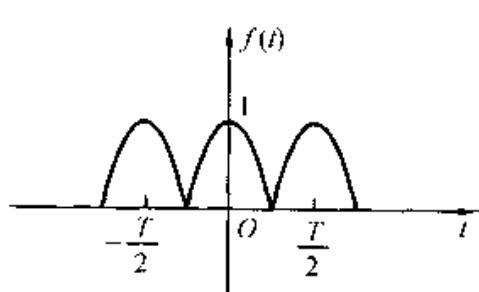
(b)



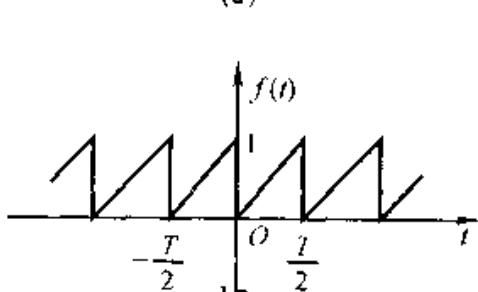
(c)



(d)



(e)

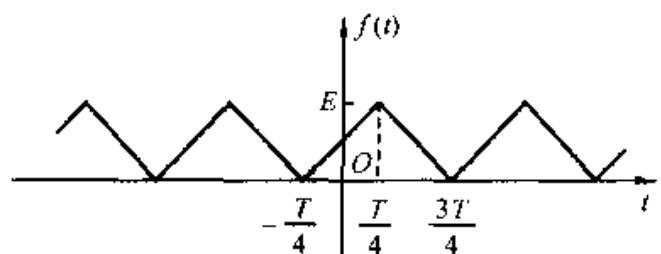


(f)

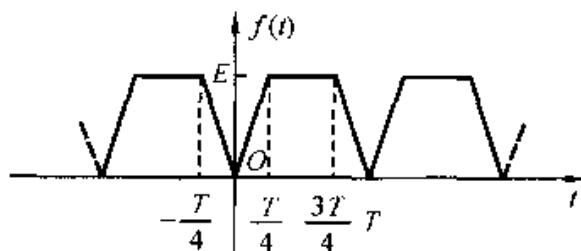
题图 3-7

的频率分量。

3-8 求题图3-8中两种周期信号的傅里叶级数。



(a)



(b)

题图 3-8

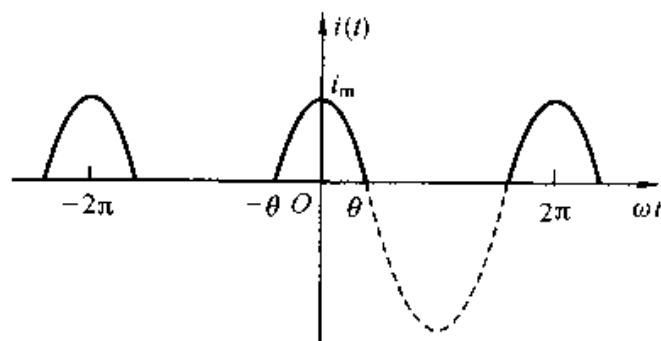
3-9 求题图3-9所示周期余弦切顶脉冲波的傅里叶级数，并求直流分量 I_0 以及基波和 k 次谐波的幅度 (I_1 和 I_k)。

(1) $\theta = \text{任意值}$;

(2) $\theta = 60^\circ$;

(3) $\theta = 90^\circ$.

[提示: $i(t) = i_m \frac{\cos(\omega_1 t) - \cos \theta}{1 - \cos \theta}$, ω_1 为 $i(t)$ 的重复角频率]



题图 3-9

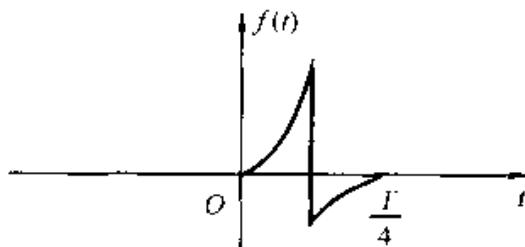
3-10 已知周期函数 $f(t)$ 前四分之一周期的波形如题图 3-10 所示。根据下列各种情况的要求画出 $f(t)$ 在一个周期 ($0 < t < T$) 的波形。

(1) $f(t)$ 是偶函数，只含有偶次谐波；

(2) $f(t)$ 是偶函数，只含有奇次谐波；

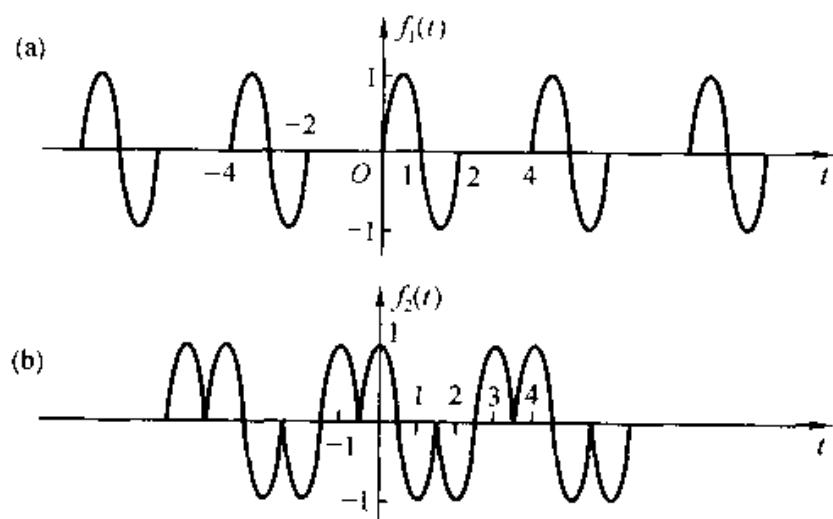
(3) $f(t)$ 是偶函数，含有偶次和奇次谐波；

- (4) $f(t)$ 是奇函数，只含有偶次谐波；
 (5) $f(t)$ 是奇函数，只含有奇次谐波；
 (6) $f(t)$ 是奇函数，含有偶次和奇次谐波。



题图 3-10

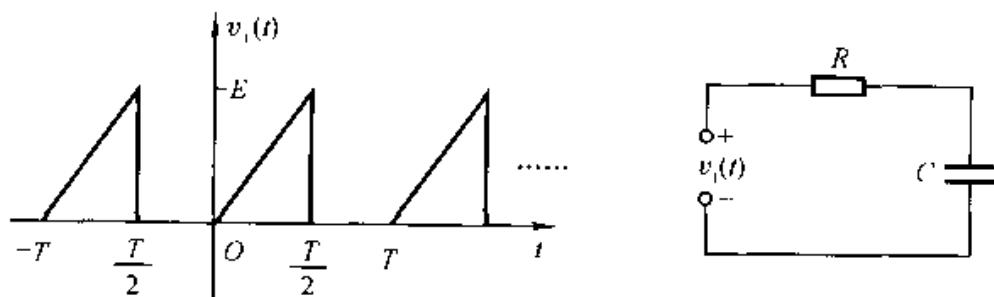
3-11 求题图3-11所示周期信号的傅里叶级数的系数，(a)题求 a_n , b_n ; (b)题求 F_n 。



题图 3-11

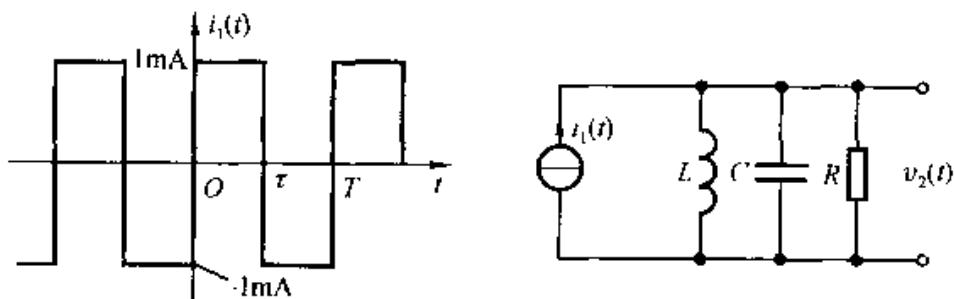
3-12 如题图3-12所示周期信号 $v_1(t)$ 加到RC低通滤波电路。已知 $v_1(t)$ 的重复频率 $f_1 = \frac{1}{T} = 1$ kHz, 电压幅度 $E = 1$ V, $R = 1$ k Ω , $C = 0.1$ μ F。分别求：

- (1) 稳态时电容两端电压之直流分量、基波和五次谐波之幅度；
 (2) 求上述各分量与 $v_1(t)$ 相应分量的比值，讨论此电路对各频率分量响应的特点。
 (提示：利用电路课所学正弦稳态交流电路的计算方法分别求各频率分量之响应。)



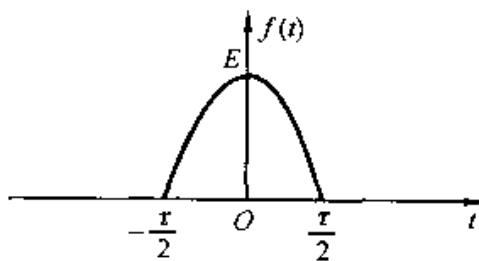
题图 3-12

- 3-13 学习电路课时已知, LC 谐振电路具有选择频率的作用, 当输入正弦信号频率与 LC 电路的谐振频率一致时, 将产生较强的输出响应, 而当输入信号频率适当偏离时, 输出响应相对值很弱, 几乎为零(相当于窄带通滤波器)。利用这一原理可从非正弦周期信号中选择所需的正弦频率成分。题图 3-13 所示 RLC 并联电路和电流源 $i_1(t)$ 都是理想模型。已知电路的谐振频率为 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 100 \text{ kHz}$, $R = 100 \text{ k}\Omega$, 谐振电路品质因数 Q 足够高(可滤除邻近频率成分)。 $i_1(t)$ 为周期矩形波, 幅度为 1 mA 。当 $i_1(t)$ 的参数(τ, T)为下列情况时, 粗略地画出输出电压 $v_2(t)$ 的波形, 并注明幅度值。
- (1) $\tau = 5 \mu\text{s}, T = 10 \mu\text{s};$
 - (2) $\tau = 10 \mu\text{s}, T = 20 \mu\text{s};$
 - (3) $\tau = 15 \mu\text{s}, T = 30 \mu\text{s}.$



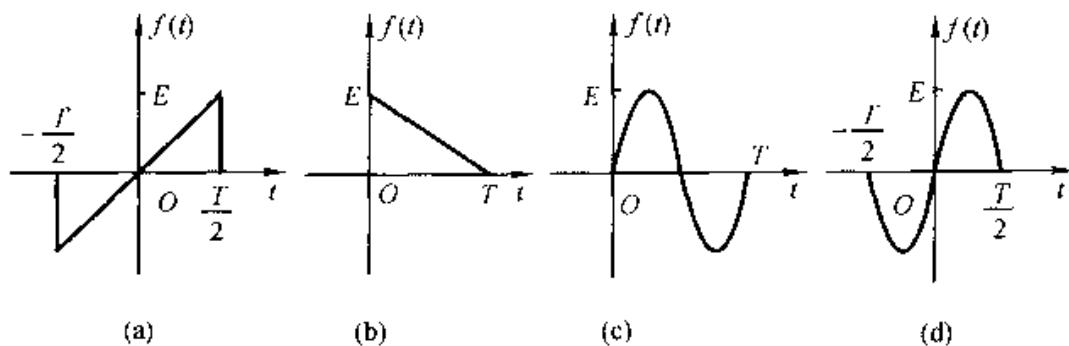
题图 3-13

- 3-14 若信号波形和电路结构仍如题图 3-13 所示, 波形参数为 $\tau = 5 \mu\text{s}, T = 10 \mu\text{s}.$
- (1) 适当设计电路参数, 能否分别从矩形波中选出以下频率分量的正弦信号:
50 kHz, 100 kHz, 150 kHz, 200 kHz, 300 kHz, 400 kHz?
 - (2) 对于那些不能选出的频率成分, 试分别利用其他电路(示意表明)获得所需频率分量的信号。(提示: 需用到电路、模拟电路、数字电路等课程的综合知识, 可行方案可能不只一种。)
- 3-15 求题图 3-15 所示半波余弦脉冲的傅里叶变换, 并画出频谱图。

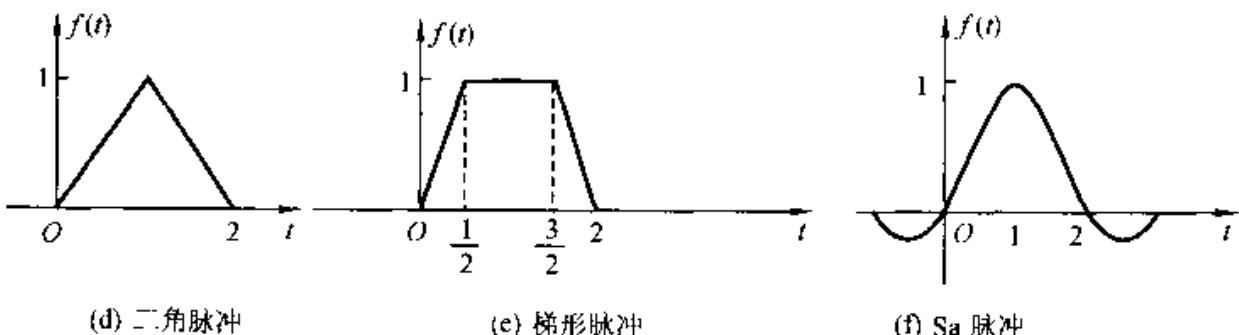
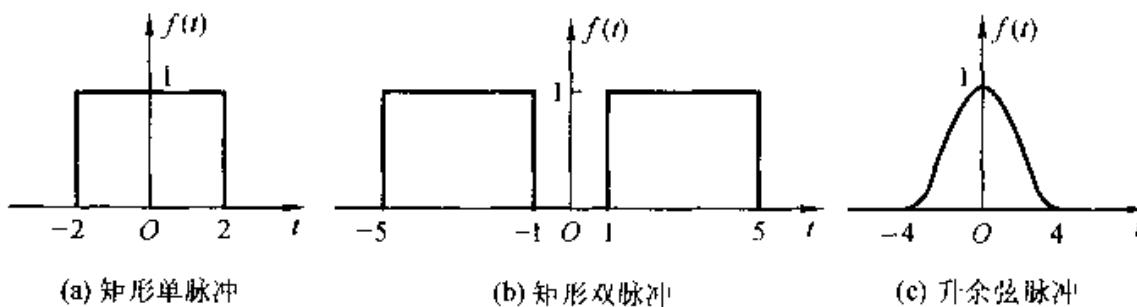


题图 3-15

- 3-16 求题图 3-16 所示锯齿脉冲与单周正弦脉冲的傅里叶变换。
- 3-17 题图 3-17 所示各波形的傅里叶变换可在本章正文或附录表中找到, 利用这些结果给出各波形频谱所占带宽 B_f (频谱图或频谱包络图的第一零点值), 注意图中的时间单位都为 $\mu\text{s}.$
- 3-18 “升余弦滚降信号”的波形如题图 3-18 (a) 所示, 它在 t_2 到 t_3 的时间范围内以升



题图 3-16



题图 3-17

余弦的函数规律滚降变化。

设 $t_3 - \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{2} - t_2 = t_0$, 升余弦脉冲信号的表示式可以写成

$$f(t) = \begin{cases} E & \left(|t| < \frac{\tau}{2} - t_0 \right) \\ \frac{E}{2} \left[1 + \cos \frac{\pi \left(t - \frac{\tau}{2} + t_0 \right)}{2t_0} \right] & \left(\frac{\tau}{2} - t_0 \leq |t| \leq \frac{\tau}{2} + t_0 \right) \end{cases}$$

或写作

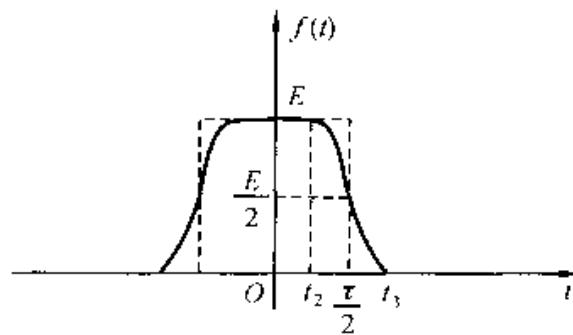
$$f(t) = \begin{cases} E & \left(|t| < \frac{\tau}{2} - t_0 \right) \\ \frac{E}{2} \left[1 - \sin \frac{\pi \left(t - \frac{\tau}{2} \right)}{k\tau} \right] & \left(\frac{\tau}{2} - t_0 \leq |t| \leq \frac{\tau}{2} + t_0 \right) \end{cases}$$

其中, 滚降系数

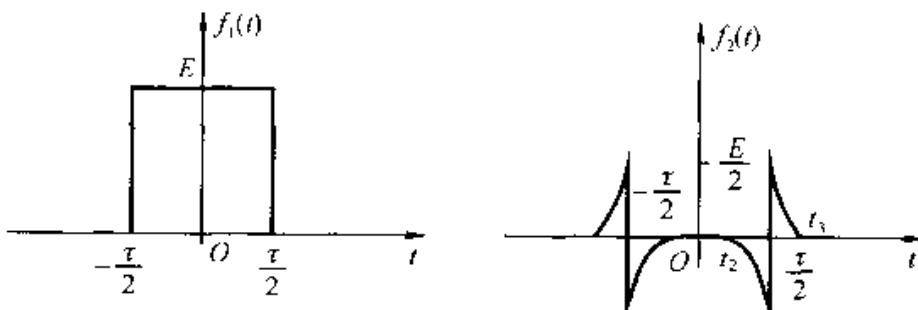
$$k = \frac{t_0}{\left(\frac{\tau}{2} \right)} = \frac{2t_0}{\tau}$$

求此信号的傅里叶变换式，并画频谱图。讨论 $k=0$ 和 $k=1$ 两种特殊情况的结果。

[提示：将 $f(t)$ 分解为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 之和，如题图 3-18(b)，分别求傅里叶变换再相加。]



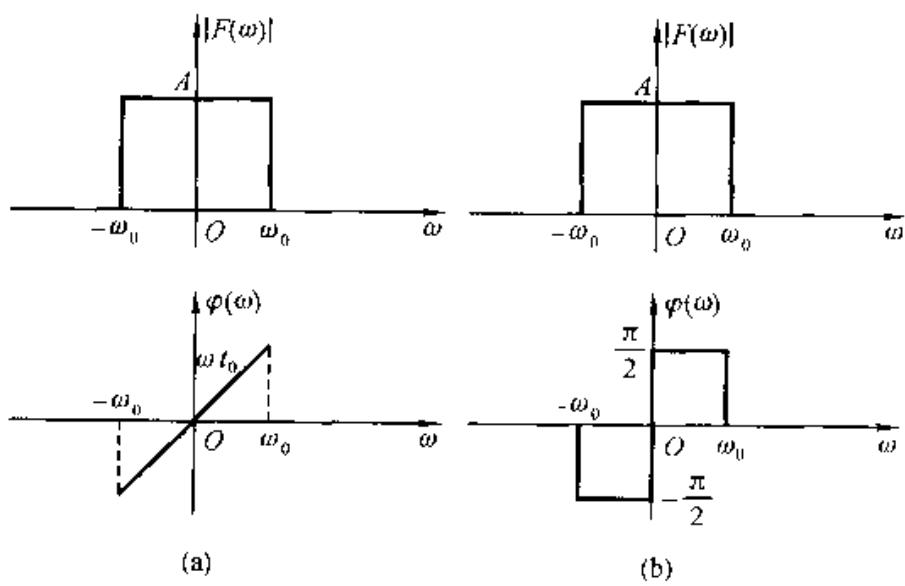
(a) 升余弦滚降信号的波形



(b) 升余弦滚降信号的分解

题图 3-18

3-19 求题图 3-19 所示 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换 $f(t)$ 。



题图 3-19

3-20 函数 $f(t)$ 可以表示成偶函数 $f_e(t)$ 与奇函数 $f_o(t)$ 之和，试证明：

(1) 若 $f(t)$ 是实函数, 且 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则

$$\mathcal{F}[f_r(t)] = \operatorname{Re}[F(\omega)]$$

$$\mathcal{F}[f_i(t)] = j\operatorname{Im}[F(\omega)]$$

(2) 若 $f(t)$ 是复函数, 可表示为

$$f(t) = f_r(t) + jf_i(t)$$

且

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$$

则

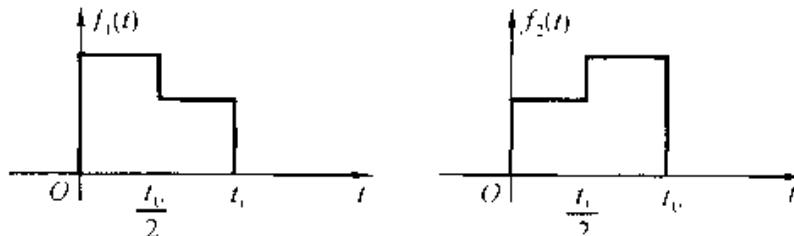
$$\mathcal{F}[f_r(t)] = \frac{1}{2} [F(\omega) + F^*(-\omega)]$$

$$\mathcal{F}[f_i(t)] = \frac{1}{2j} [F(\omega) - F^*(-\omega)]$$

其中

$$F^*(-\omega) = \mathcal{F}[f^*(t)]$$

3-21 对题图3-21所示波形, 若已知 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, 利用傅里叶变换的性质求 $f_1(t)$ 以 $\frac{t_0}{2}$ 为轴反褶后所得 $f_2(t)$ 的傅里叶变换。



题图 3-21

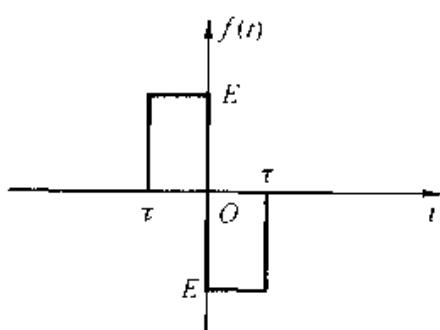
3-22 利用时域与频域的对称性, 求下列傅里叶变换的时间函数。

$$(1) F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

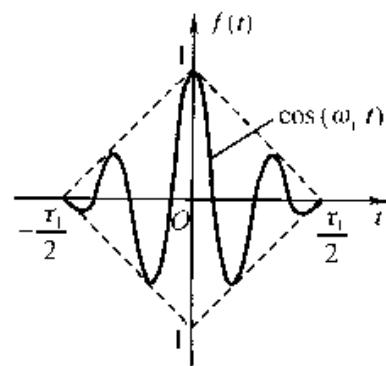
$$(2) F(\omega) = u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$$

$$(3) F(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega_0}{\pi} & (|\omega| \leq \omega_0) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

3-23 若已知矩形脉冲的傅里叶变换, 利用时移特性求题图3-23所示信号的傅里叶变换, 并大致画出幅度谱。



题图 3-23

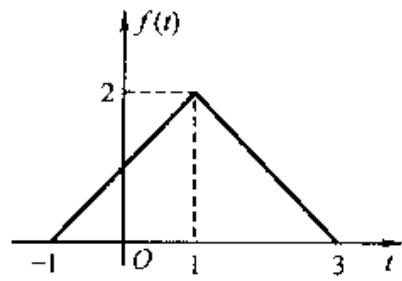


题图 3-24

3-24 求题图3-24所示三角形调幅信号的频谱。

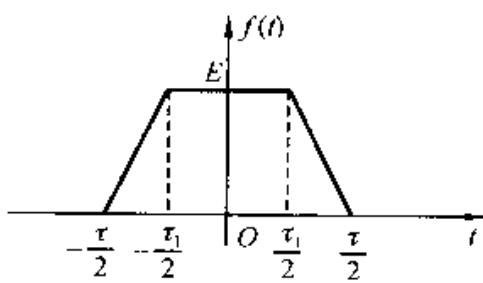
- 3-25 题图 3-25 所示信号 $f(t)$, 已知其傅里叶变换式 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$, 利用傅里叶变换的性质(不作积分运算), 求:

- (1) $\varphi(\omega)$;
- (2) $F(0)$;
- (3) $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$;
- (4) $\mathcal{F}^{-1}\{\operatorname{Re}[F(\omega)]\}$ 之图形。

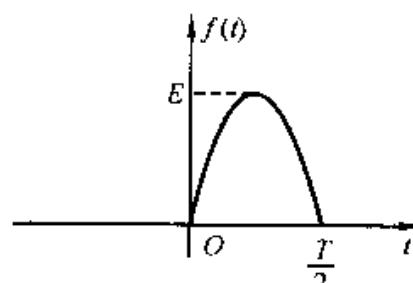


题图 3-25

- 3-26 利用微分定理求题图 3-26 所示梯形脉冲的傅里叶变换, 并大致画出 $\tau = 2\tau_1$ 情况下该脉冲的频谱图。



题图 3-26



题图 3-27

- 3-27 利用微分定理求题图 3-27 所示半波正弦脉冲 $f(t)$ 及其二阶导数 $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ 的频谱。

- 3-28 (1) 已知 $\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{a+j\omega}$, 求 $f(t) = te^{-at}u(t)$ 的傅里叶变换。

(2) 证明 $t u(t)$ 的傅里叶变换为 $j\pi\delta'(\omega) + \frac{1}{(j\omega)^2}$ 。

(提示: 利用频域微分定理。)

- 3-29 若已知 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 利用傅里叶变换的性质确定下列信号的傅里叶变换:

- | | |
|---------------------|----------------------------|
| (1) $tf(2t)$; | (2) $(t-2)f(t)$; |
| (3) $(t-2)f(-2t)$; | (4) $t \frac{df(t)}{dt}$; |
| (5) $f(1-t)$; | (6) $(1-t)f(1-t)$; |
| (7) $f(2t-5)$ 。 | |

- 3-30 试分别利用下列几种方法证明

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

(1) 利用符号函数 $[u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)]$;

(2) 利用矩形脉冲取极限($\tau \rightarrow \infty$);

(3) 利用积分定理 $[u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau]$;

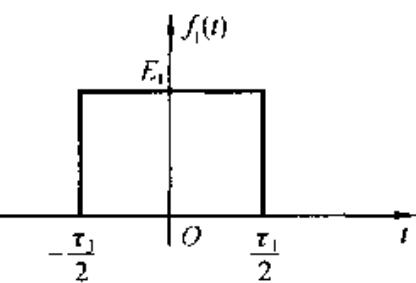
(4) 利用单边指数函数取极限 $[u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-at}, t \geq 0]$ 。

- 3-31 已知题图 3-31 中两矩形脉冲 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$, 且:

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = E_1 \tau_1 \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau_1}{2}\right)$$

$$\mathcal{F}[f_2(t)] = E_2 \tau_2 \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau_2}{2}\right)$$

- (1) 画出 $f_1(t) * f_2(t)$ 的图形;
(2) 求 $f_1(t) * f_2(t)$ 的频谱，并与题 3-26 所用的方法进行比较。



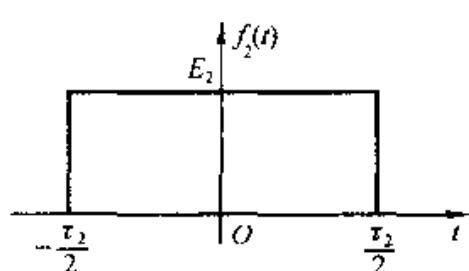
3-32 已知阶跃函数和正弦、余弦函数的傅里叶变换：

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

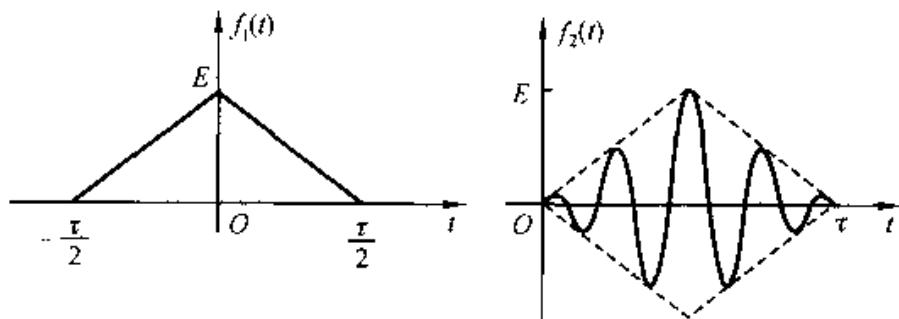
求单边正弦函数和单边余弦函数的傅里叶变换。



3-33 已知三角脉冲 $f_1(t)$ 的傅里叶变换为

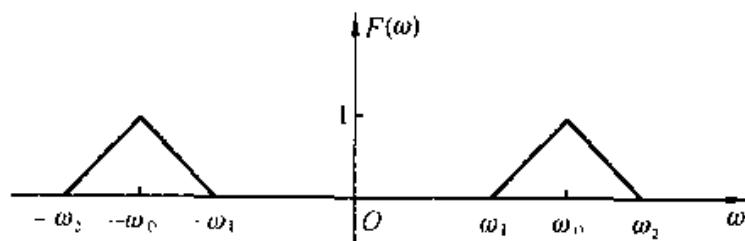
$$F_1(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

试利用有关定理求 $f_2(t) = f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cos(\omega_0 t)$ 的傅里叶变换 $F_2(\omega)$ 。 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的波形如题图 3-33 所示。



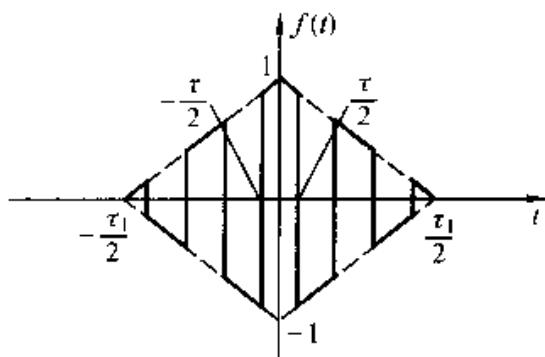
题图 3-33

3-34 若 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 如题图 3-34 所示，利用卷积定理粗略画出 $f(t)\cos(\omega_0 t)$ ， $f(t)e^{j\omega_0 t}$ ， $f(t)\cos(\omega_1 t)$ 的频谱(注明频谱的边界频率)。



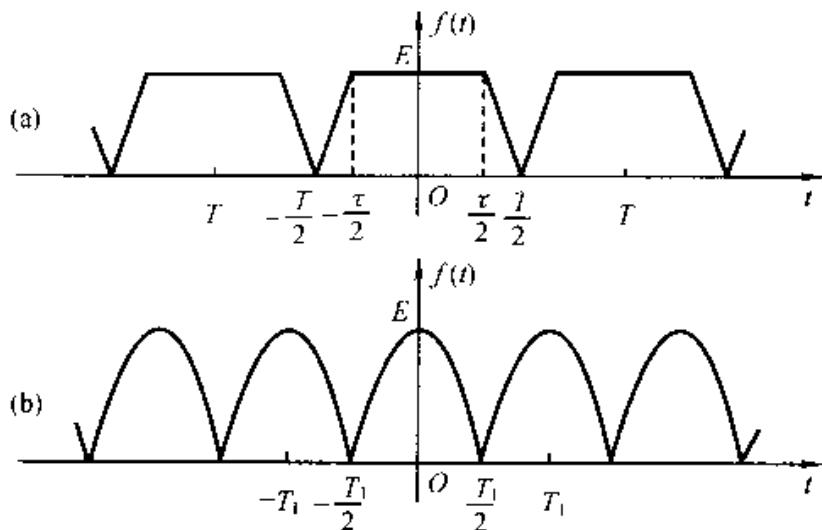
题图 3-34

3-35 求题图 3-35 所示信号的频谱(包络为三角脉冲，载波为对称方波)。并说明与题图 3-24 信号频谱的区别。



题图 3-35

- 3-36 已知单个梯形脉冲和单个余弦脉冲的傅里叶变换(见附录三), 求题图3-36所示周期梯形信号和周期全波余弦信号的傅里叶级数和傅里叶变换。并示意画出它们的频谱图。



题图 3-36

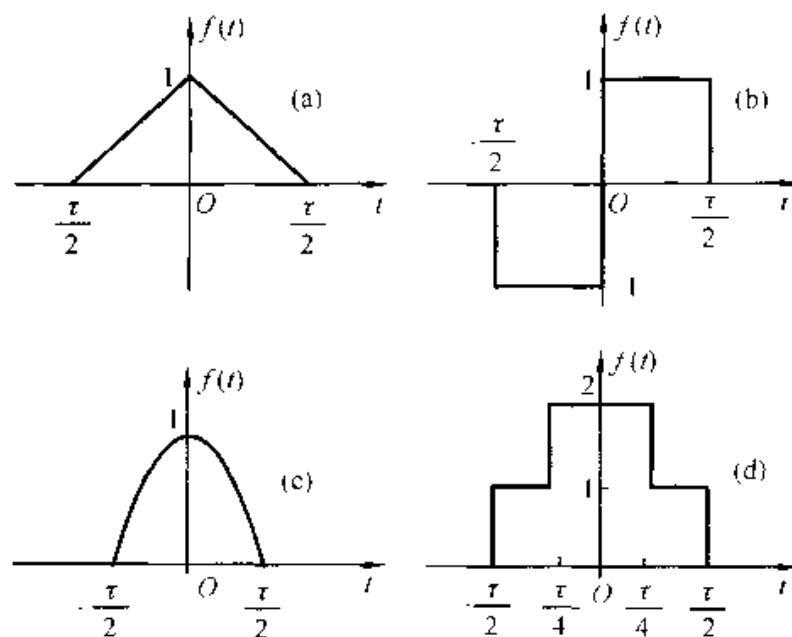
- 3-37 已知矩形脉冲和余弦脉冲信号的傅里叶变换(见附录三), 根据傅里叶变换的定义和性质, 利用三种以上的方法计算题图3-37所示各脉冲信号的傅里叶变换, 并比较三种方法。

- 3-38 已知三角形、升余弦脉冲的频谱(见附录三)。大致画出题图3-38中各脉冲被冲激抽样后信号的频谱(抽样间隔为 T_s , 令 $T_s = \frac{\tau}{8}$)。

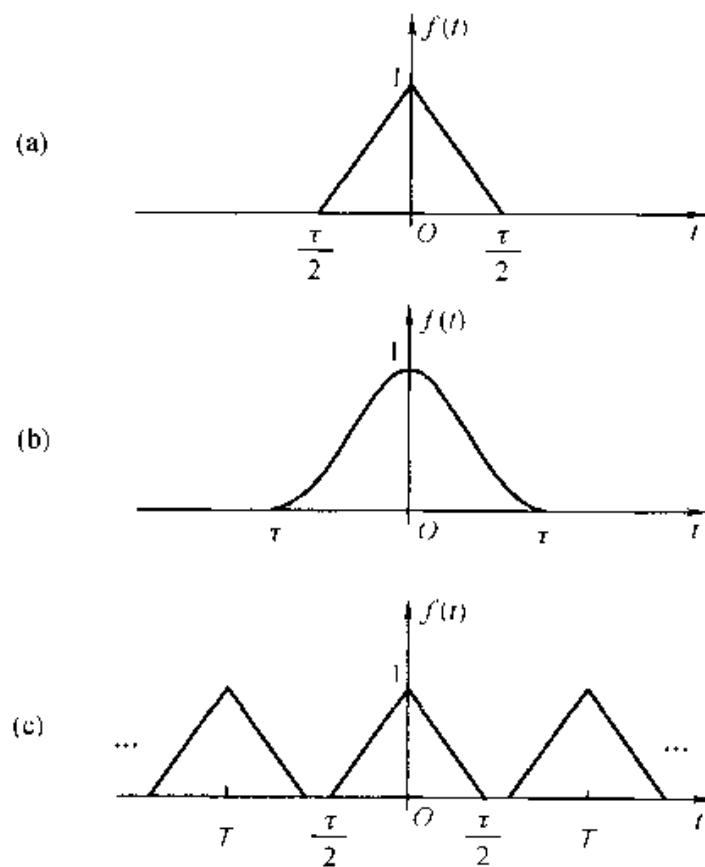
- 3-39 确定下列信号的最低抽样率与奈奎斯特间隔:

- (1) $\text{Sa}(100t)$;
- (2) $\text{Sa}^2(100t)$;
- (3) $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}(50t)$;
- (4) $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$.

- 3-40 若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, $p(t)$ 是周期信号, 基波频率为 ω_0 , $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j n \omega_0 t}$



题图 3-37



题图 3-38

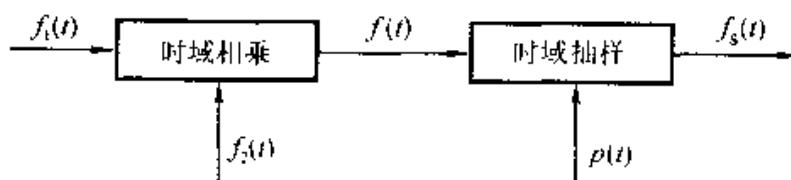
- (1) 令 $f_p(t) = f(t)p(t)$, 求相乘信号的傅里叶变换表达式 $F_p(\omega) = \hat{f}_c[f_p(t)]$;
- (2) 若 $F(\omega)$ 图形如题图 3-40 所示, 当 $p(t)$ 函数表达式为 $p(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ 或以下各小题时, 分别求 $F_p(\omega)$ 表达式并画出频谱图;
- (3) $p(t) = \cos t$;

- (4) $p(t) = \cos(2t)$;
 (5) $p(t) = (\sin t)[\sin(2t)]$;
 (6) $p(t) = \cos(2t) - \cos t$;
 (7) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \pi n)$;
 (8) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n)$;
 (9) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi n) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \pi n)$;

(10) $p(t)$ 是题图 3-2 所示周期矩形波，其参数为 $T = \pi$, $\tau = \frac{T}{3} = \frac{\pi}{3}$, $E = 1$ 。

3-41 系统如题图 3-41 所示, $f_1(t) = \text{Sa}(1000\pi t)$, $f_2(t) = \text{Sa}(2000\pi t)$, $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, $f(t) = f_1(t)f_2(t)$, $f_s(t) = f(t)p(t)$ 。

- (1) 为从 $f_s(t)$ 无失真恢复 $f(t)$, 求最大抽样间隔 T_{\max} ;
 (2) 当 $T = T_{\max}$ 时, 画出 $f_s(t)$ 的幅度谱 $|F_s(\omega)|$ 。



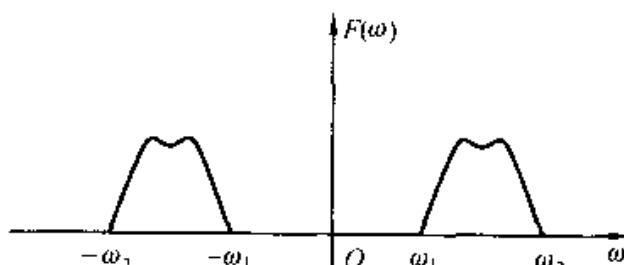
题图 3-41

3-42 若连续信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 是带状的 ($\omega_1 \sim \omega_2$), 如题图 3-42 所示。

- (1) 利用卷积定理说明当 $\omega_2 = 2\omega_1$ 时, 最低抽样率只要等于 ω_2 就可以使抽样信号不产生频谱混叠;
 (2) 证明带通抽样定理, 该定理要求最低抽样率 ω_s 满足下列关系

$$\omega_s = \frac{2\omega_2}{m}$$

其中 m 为不超过 $\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$ 的最大整数。



题图 3-42

第四章 拉普拉斯变换、连续时间系统的 s 域分析

4.1 引言

19世纪末，英国工程师赫维赛德(O. Heaviside, 1850—1925)发明了“运算法”(算子法)解决电工程计算中遇到的一些基本问题。他所进行的工作成为拉普拉斯变换方法的先驱。赫维赛德的方法很快地被许多人采用，但是由于缺乏严密的数学论证，曾经受到某些数学家的谴责。而赫维赛德以及另一些追随他的学者(例如卡尔逊、布罗姆维奇……等人)坚信这一方法的正确性，继续坚持不懈地深入研究。后来，人们终于在法国数学家拉普拉斯(P. S. Laplace, 1749—1825)的著作中为赫维赛德运算法找到了可靠的数学依据，重新给予严密的数学定义，为之取名拉普拉斯变换(简称拉氏变换)方法。从此，拉氏变换方法在电学、力学……等众多的工程与科学领域中得到广泛应用。尤其是在电路理论的研究中，在相当长的时期内，人们几乎无法把电路理论与拉普拉斯变换分开来讨论。

20世纪70年代以后，电子线路计算机辅助设计(CAD)技术迅速发展，利用CAD程序(例如SPICE程序)可以很方便地求解电路分析问题，因而，拉氏变换在这方面的应用相对减少。此外，离散系统、非线性系统、时变系统的研究与应用日益广泛，而拉氏变换方法在这些方面是无能为力的，于是，它长期占据的传统重要地位正在让给一些新的方法。然而，利用拉氏变换建立的系统函数及其零、极点分析的概念仍在发挥着重要作用，在连续、线性、时不变系统分析中，拉氏变换仍然是不可缺少的强有力工具。此外，还应注意与拉氏变换类似的概念和方法在离散时间系统的 z 变换(本书第八章)分析中得到应用。

运用拉氏变换方法，可以把线性时不变系统的时域模型简便地进行变换，经求解再还原为时间函数。从数学角度来看，拉氏变换方法是求解常系数线性微分方程的工具，它的优点表现在：

- (1) 求解的步骤得到简化，同时可以给出微分方程的特解和补解(齐次解)，而且初始条件自动地包含在变换式里。
- (2) 拉氏变换分别将“微分”与“积分”运算转换为“乘法”和“除法”运算。也即把积分微分方程转换为代数方程。这种变换与初等数学中的对数变

换很相似，在那里，乘、除法被转换为加、减法运算。当然，对数变换所处理的对象是“数”，而拉氏变换所处理的对象是函数。图4-1用运算流程方框图示意表明了对数变换与拉氏变换的比较。

(3) 指数函数、超越函数以及有不连续点的函数，经拉氏变换可转换为简单的初等函数。对于某些非周期性的具有不连续点的函数，用古典法求解比较烦琐，而用拉氏变换方法就很简便。

(4) 拉氏变换把时域中两函数的卷积运算转换为变换域中两函数的乘法运算，在此基础上建立了系统函数的概念，这一重要概念的应用为研究信号经线性系统传输问题提供了许多方便。

(5) 利用系统函数零点、极点分布可以简明、直观地表达系统性能的许多规律。系统的时域、频域特性集中地以其系统函数零、极点特征表现出来，从系统的观点看，对于输入-输出描述情况，往往不关心组成系统内部的结构和参数，只需从外部特性，从零、极点特性来考察和处理各种问题。

本章前4节给出拉氏变换的基本定义和性质，4.5、4.6节讨论拉氏变换在电路分析中的应用并导出系统函数 $H(s)$ 。4.7—4.11节研究 $H(s)$ 零、极点分布对系统性能的影响。以上各节限于单边拉氏变换，在4.12节专门研究双边拉氏变换的定义与应用。最后，4.13节对傅氏变换与拉氏变换进行了比较，讨论它们之间的区别与联系。

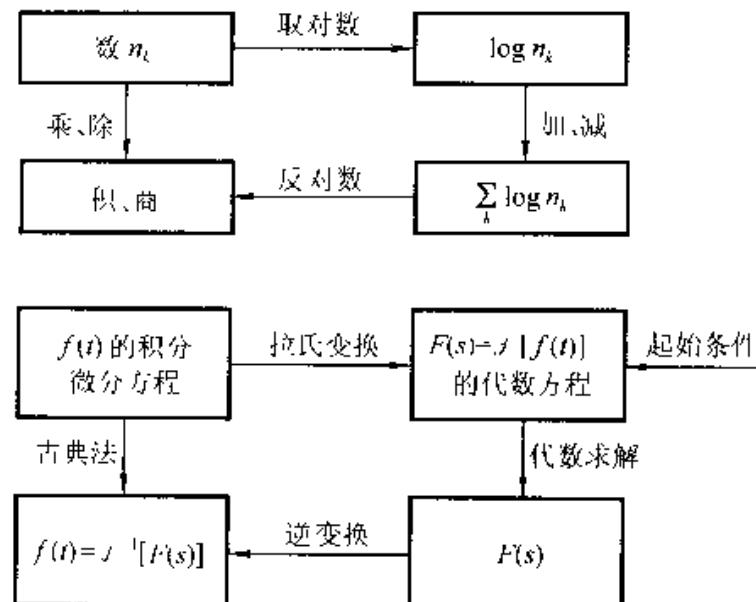


图4-1 拉氏变换与对数变换的比较

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

(一) 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

由前章已知，当函数 $f(t)$ 满足狄利克雷条件时，便可构成一对傅里叶变换式：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

考虑到在实际问题中遇到的总是因果信号，令信号起始时刻为零，于是在 $t < 0$ 的时间范围内 $f(t)$ 等于零，这样，正变换表示式之积分下限可从零开始

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4-1)$$

但 $F(\omega)$ 仍包含有 $-\omega$ 与 $+\omega$ 两部分分量，因此逆变换式的积分限不改变。

再从狄利克雷条件考虑，在此条件之中，绝对可积的要求限制了某些增长信号如 $e^{\alpha t}$ ($\alpha > 0$) 傅里叶变换的存在，而对于阶跃信号、周期信号虽未受此约束，但其变换式中出现冲激函数 $\delta(\omega)$ ，为使更多的函数存在变换，并简化某些变换形式或运算过程，引入一个衰减因子 $e^{-\sigma t}$ (σ 为任意实数) 使它与 $f(t)$ 相乘，于是 $e^{-\sigma t} f(t)$ 得以收敛，绝对可积条件就容易满足。按此原理，写出 $e^{-\sigma t} f(t)$ 的傅里叶变换

$$F_1(\omega) = \int_0^{\infty} [f(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \quad (4-2)$$

将式中 $(\sigma + j\omega)$ 用符号 s 代替，令

$$s = \sigma + j\omega$$

式(4-2)遂可写作

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4-3)$$

下面由傅里叶逆变换表示式求 $[f(t) e^{-\sigma t}]$ ，再寻找由 $F(s)$ 求 $f(t)$ 的一般表示式

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4-4)$$

等式两边各乘以 $e^{\sigma t}$ ，因为它不是 ω 的函数，可放到积分号内，于是得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad (4-5)$$

已知 $s = \sigma + j\omega$ ，所以 $ds = d\sigma + jd\omega$ ，若 σ 为选定之常量，则 $ds = jd\omega$ ，以此代入式(4-5)，并相应地改变积分上下限，得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (4-6)$$

式(4-3)和式(4-6)就是一对拉普拉斯变换式(或称拉氏变换对)。两式中的 $f(t)$ 称为“原函数”， $F(s)$ 称为“象函数”。已知 $f(t)$ 求 $F(s)$ 可由式(4-3)取得拉氏变换。反之，利用式(4-6)由 $F(s)$ 求 $f(t)$ 时称为逆拉氏变换(或拉氏逆变换)。常用记号 $\mathcal{L}[f(t)]$ 表示取拉氏变换，以记号 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 表示取拉氏逆变换。于是，式(4-3)和式(4-6)可分别写作：

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

拉氏变换与傅氏变换定义的表示式形式相似，以后将要讲到它们的性质也有许多相同之处。

拉普拉斯变换与傅里叶变换的基本差别在于：傅氏变换将时域函数 $f(t)$ 变换为频域函数 $F(\omega)$ ，或作相反变换，时域中的变量 t 和频域中的变量 ω 都是实数；而拉氏变换是将时间函数 $f(t)$ 变换为复变函数 $F(s)$ ，或作相反变换，这时，时域变量 t 虽是实数， $F(s)$ 的变量 s 却是复数，与 ω 相比较，变量 s 可称为“复频率”。傅里叶变换建立了时域和频域间的联系，而拉氏变换则建立了时域与复频域(s 域)间的联系。

在以上讨论中， e^{-st} 衰减因子的引入是一个关键问题。从数学观点看，这是将函数 $f(t)$ 乘以因子 e^{-st} 使之满足绝对可积条件；从物理意义看，是将频率 ω 变换为复频率 s ， ω 只能描述振荡的重复频率，而 s 不仅能给出重复频率，还可以表示振荡幅度的增长速率或衰减速率。

此外，还应指出，在引入衰减因子之前曾把正变换积分下限由 $-\infty$ 限制为 0，如果不作这一改变，则将出现形式为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ 的正变换定义。为区分以上二种情况，前者称为“单边拉氏变换”，后者称为“双边拉氏变换”。本章第 4.11 节之前仅讨论单边变换，第 4.12 节专门讨论双边变换。

(二) 从算子符号法的概念说明拉氏变换的定义

在第二章曾初步介绍用算子符号法解微分方程。采用这种方法可将函数 $f(t)$ 的微分运算表示为 $f(t)$ 与算子 p “相乘”的形式。现在设想为函数 $f(t)$ 建立某种变换关系，这种变换关系应具有如下特性：如果把 t 变量的函数 $f(t)$ 变换为 s 变量的函数 $F(s)$ ，那么， $\frac{df(t)}{dt}$ 的变换式应为 $sF(s)$ ，暂以“ \rightarrow ”表示变换，则有

$$\left. \begin{aligned} f(t) &\longrightarrow F(s) \\ \frac{df(t)}{dt} &\longrightarrow sF(s) \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

假定，此变换关系可通过下示积分运算来完成

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) h(t, s) dt \quad (4-8)$$

这表明，在所研究的时间范围 0 到 ∞ 之间，对变量 t 积分，即可得到变量 s 的函数。现在的问题是，如何选择一个合适的 $h(t, s)$ ，使它满足式(4-7)的要求，也即

$$sF(s) = \int_0^\infty f'(t)h(t,s)dt \quad (4-9)$$

利用分部积分展开得到

$$\int_0^\infty f'(t)h(t,s)dt = f(t)h(t,s) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)h'(t,s)dt \quad (4-10)$$

为确定式中第一项，应代入 t 的初值与终值，要保证 $f(t)h(t,s)$ 的积分收敛，规定 $t \rightarrow \infty$ 时此项等于零；此外，选择初值为最简单的形式代入，即 $f(0)=0$ ，至于 $f(0)$ 为其他任意值的情况，下面还要讨论。按上述条件求得：

$$\begin{aligned} sF(s) &= \int_0^\infty f'(t)h(t,s)dt = - \int_0^\infty f(t)h'(t,s)dt \\ &= s \int_0^\infty f(t)h(t,s)dt - - \int_0^\infty f(t)h'(t,s)dt \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} sh(t,s) &= -h'(t,s) = -\frac{dh(t,s)}{dt} \\ \frac{dh(t,s)}{h(t,s)} &= -s dt \\ \ln[h(t,s)] &= -st \\ h(t,s) &= e^{-st} \end{aligned} \quad (4-11)$$

将找到的 $h(t,s)$ 函数 e^{-st} 代入式(4-8)，写出

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

显然，这就是拉氏变换的定义式(4-3)。

下面考虑 $f(0) \neq 0$ 的情况，这时，由式(4-10)可写出 $f'(t)$ 的拉氏变换为

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty [-sf(t)e^{-st}]dt = -f(0) + sF(s) \quad (4-12)$$

此结果表明，当 $f(0) \neq 0$ 时， $\frac{df(t)}{dt}$ 的拉氏变换并非 $sF(s)$ ，而是 $sF(s) - f(0)$ 。

我们回忆起，在算子符号法中，由于未能表示出初始条件的作用，只好在运算过程中作出一些规定，限制某些因子相消。现在，这里的 s 虽与算子符号 p 处于类似的地位，然而，拉氏变换法可以把初始条件的作用计人，这就避免了算子法分析过程中的一些禁忌，便于把微分方程转换为代数方程，使求解过程简化。

(三) 拉氏变换的收敛

从以上讨论可知，当函数 $f(t)$ 乘以衰减因子 e^{-st} 以后，就有可能满足绝对可积条件。然而，是否一定满足，还要看 $f(t)$ 的性质与 s 值的相对关系而定。例如，为使 $f(t) = e^{at}$ 收敛，衰减因子 e^{-st} 中的 s 必须满足 $s > a$ ，否则， $e^{at}e^{-st}$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时仍不能收敛。

下面分析关于这一特性的一般规律。

函数 $f(t)$ 乘以因子 $e^{-\sigma t}$ 以后，取时间 $t \rightarrow \infty$ 的极限，若当 $\sigma > \sigma_0$ 时，该极限等于零，则函数 $f(t)e^{-\sigma t}$ 在 $\sigma > \sigma_0$ 的全部范围内是收敛的，其积分存在，可以进行拉普拉斯变换。这一关系可表示为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0) \quad (4-13)$$

σ_0 与函数 $f(t)$ 的性质有关，它指出了收敛条件。根据 σ_0 的数值，可将 s 平面划

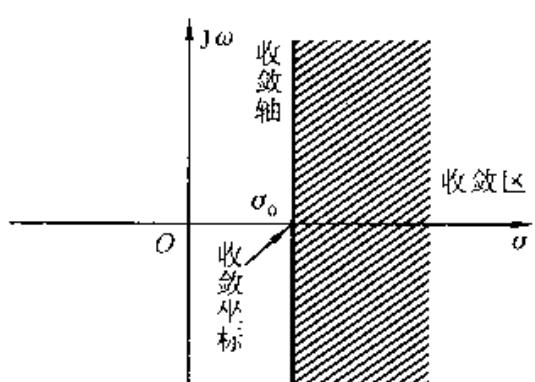


图 4-2 收敛区的划分

分为两个区域，如图 4-2 所示。通过 σ_0 的垂直线是收敛区（收敛域）的边界，称为收敛轴， σ_0 在 s 平面上称为收敛坐标。凡满足式(4-13)的函数称为“指数阶函数”。指数阶函数若具有发散特性可借助于指数函数的衰减压下去，使之成为收敛函数。

凡是有始有终，能量有限的信号，如单个脉冲信号，其收敛坐标落于 $-\infty$ ，全部 s 平面都属于收敛区。也即，有界的非周期信号的拉氏变换一定存在。

如果信号的幅度既不增长也不衰减而等于稳定值，则其收敛坐标落在原点， s 右半平面属于收敛区。也即，对任何周期信号只要稍加衰减就可收敛。不难证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > 0)$$

所以任何随时间成正比增长的信号，其收敛坐标落于原点。同样由于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > 0)$$

故与 t^n 成比例增长之函数，收敛坐标也落在原点。

如果函数按指数规律 $e^{\alpha t}$ 增长，前已述及，只有当 $\sigma > \alpha$ 时才满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \alpha)$$

所以收敛坐标为

$$\sigma_0 = \alpha$$

对于一些比指数函数增长得更快的函数，不能找到它们的收敛坐标，因而，不能进行拉氏变换。例如 e^{t^2} 或 $t e^{t^2}$ （定义域为 $0 \leq t \leq \infty$ ）就不是指数阶函数，但是，若把这种函数限定在有限时间范围之内，还是可以找到收敛坐标，进行拉氏变换的，如

$$f(t) = \begin{cases} e^{t^2} & (0 \leq t < T) \\ 0 & (t \leq 0, t \geq T) \end{cases}$$

它的拉氏变换存在。

以上研究了单边拉氏变换的收敛条件，在第 4.12 节将要看到，双边拉氏变换的收敛问题将比较复杂，收敛条件将受到更多限制。由于单边拉氏变换的收敛问题比较简单，一般情况下，求函数单边拉氏变换时不再加注其收敛范围。

(四) 一些常用函数的拉氏变换

下面按拉普拉斯变换的定义式(4-3)来推导几个常用函数的变换式。

(1) 阶跃函数

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \quad (4-14)$$

(2) 指数函数

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = -\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{a+s} \quad (\sigma > -a) \quad (4-15)$$

显然，令式(4-15)中的常数 a 等于零，也可得出式(4-14)的结果。

(3) t^n (n 是正整数)

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt$$

用分部积分法，得

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} dt = -\frac{t^n}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt$$

所以

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] \quad (4-16)$$

容易求得，当 $n=1$ 时

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad (4-17)$$

而 $n=2$ 时

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3} \quad (4-18)$$

依此类推，得

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (4-19)$$

必须注意到，我们所讨论的单边拉氏变换是从零点开始积分的，因此， $t < 0$ 区间的函数值与变换结果无关。例如，图 4-3 中三个函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 都具有相同的变换式

$$F(s) = \frac{1}{s+a} \quad (4-20)$$

当取式(4-20)的逆变换时，只能给出在 $t \geq 0$ 时间范围内的函数值

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at} \quad (t \geq 0) \quad (4-21)$$

以后将要看到，单边变换的这一特点，并未给它的应用带来不便，因为在系统分析问题中，往往也是只需求解 $t \geq 0$ 的系统响应，而 $t < 0$ 的情况由激励接入以前系统的状态所决定。

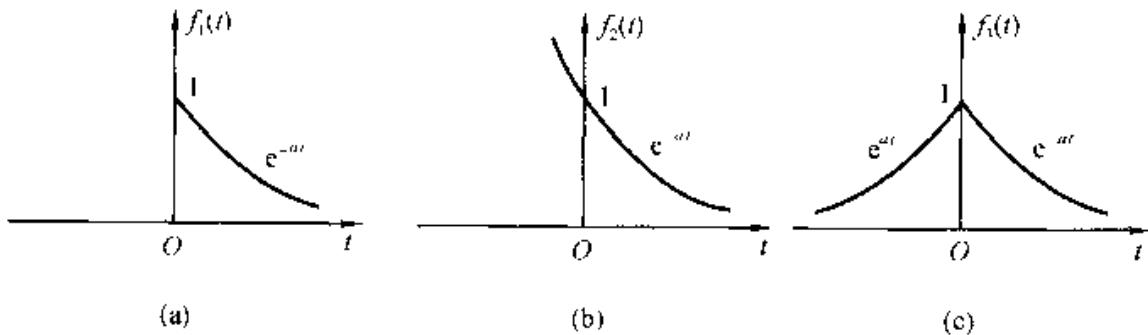


图 4-3 三个具有相同单边拉氏变换的函数

此外，从图 4-3 (a) 看到，此函数在 $t = 0$ 时产生了跳变，这样，初始条件 $f(0)$ 容易发生混淆，为使 $f(0)$ 有明确意义，我们仍以 $f(0_-)$ 与 $f(0_+)$ 分别表示 t 从左、右两端趋近于 0 时所得之 $f(0)$ 值，显然，对于图 4-3 (a)， $f(0_-) = 0$ ， $f(0_+) = 1$ 。当函数 $f(t)$ 在 0 点有跳变时，其导数 $\frac{df(t)}{dt}$ 将出现冲激函数项，为便于研究在 $t = 0$ 点发生的跳变现象，我们规定单边拉氏变换的定义式(4-3)积分下限从 0_- 开始

$$F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4-22)$$

这样定义的好处是把 $t = 0$ 处冲激函数的作用考虑在变换之中，当利用拉氏变换方法解微分方程时，可以直接引用已知的起始状态 $f(0_-)$ 而求得全部结果，无需专门计算由 0_- 至 0_+ 的跳变；否则，若取积分下限从 0_+ 开始，对于 t 从 0_- 至 0_+ 发生的变化还需另行处理（见例 4-13）。以上两种规定分别称为拉氏变换的 0_- 系统或拉氏变换的 0_+ 系统。本书中在一般情况下采用 0_- 系统，今后，未加标注之 $t = 0$ ，均指 $t = 0_-$ 。

(4) 冲激函数

由以上规定写出

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \quad (4-23)$$

如果冲激出现在 $t = t_0$ 时刻 ($t_0 > 0$)，有

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0} \quad (4-24)$$

将上述结果以及其他常用函数的拉氏变换(在下节继续导出)列于表 4-1。以后分析电路问题时会经常用到此表。

表 4-1 一些常用函数的拉氏变换

序号	$f(t)$ ($t > 0$)	$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$
1	冲激 $\delta(t)$	1
2	阶跃 $u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
4	t^n (n 是正整数)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
8	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
9	$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
10	$t^n e^{-\alpha t}$ (n 是正整数)	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
11	$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
12	$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
13	$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$
14	$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$

4.3 拉氏变换的基本性质

虽然,由拉氏变换的定义式(4-3)可以求得一些常用信号的拉氏变换,但是,在实际应用中常常不去作这一积分运算,而是利用拉氏变换的一些基本性质(或称“定理”)得出它们的变换式。这种方法在傅氏变换(第三章)的分析中曾

被采用，下面将要看到，对于拉氏变换，在掌握了一些性质之后，运用有关定理，可以很方便地求得表 4-1 中所列各变换式。

(一) 线性(叠加)

函数之和的拉氏变换等于各函数拉氏变换之和。当函数乘以常数 K 时，其变换式乘以相同的常数 K 。

这个性质的数学形式为

若 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$, K_1 , K_2 为常数时，则

$$\mathcal{L}[K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s) \quad (4-25)$$

证明

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] &= \int_0^\infty [K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty K_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty K_2 f_2(t) e^{-st} dt \\ &= K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s) \end{aligned} \quad (4-26)$$

例4-1 求 $f(t) = \sin(\omega t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 。

解 已知

$$f(t) = \sin(\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \frac{1}{s - j\omega}$$

$$\mathcal{L}[e^{-j\omega t}] = \frac{1}{s + j\omega}$$

所以由叠加性可知

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

用同样方法可求得

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(二) 原函数微分

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \quad (4-27)$$

其中 $f(0)$ 是 $f(t)$ 在 $t = 0$ 时的起始值。

本性质已在 4.2 节给出证明。此处需要指出，当 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处不连续时， $\frac{df(t)}{dt}$ 在 $t = 0$ 处有冲激 $\delta(t)$ 存在，按前节规定，式(4-27)取拉氏变换时，积分下限要从 0_- 开始，这时， $f(0)$ 应写作 $f(0_-)$ 。即

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0_-) \quad (4-28)$$

例4-2 已知流经电感的电流 $i_L(t)$ 的拉氏变换为 $\mathcal{L}[i_L(t)] = I_L(s)$, 求电感电压 $v_L(t)$ 的拉氏变换。

解 因为

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

所以 $V_L(s) = \mathcal{L}[v_L(t)] = \mathcal{L}\left[L \frac{di_L}{dt}\right] = sLI_L(s) - Li_L(0)$

这里 $i_L(0)$ 是电流 $i_L(t)$ 的起始值。如果 $i_L(0) = 0$, 得到

$$V_L(s) = sLI_L(s)$$

这个结论和正弦稳态分析中的相量法形式相似, 在那里, 电感的电压相量与电流相量的关系为

$$\dot{V}_L = j\omega L \dot{I}_L$$

在拉氏变换式中的“ s ”对应相量法中的“ $j\omega$ ”。拉氏变换把微分运算变为乘法。

上述对一阶导数的微分定理可推广到高阶导数。类似地, 对 $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ 的拉氏变换以分部积分展开得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] &= e^{-st} \frac{df(t)}{dt} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= -f'(0) + s [sF(s) - f(0)] \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned} \quad (4-29)$$

式中 $f'(0)$ 是 $\frac{df(t)}{dt}$ 在 0_- 时刻的取值。

重复以上过程, 可导出一般公式如下

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0) \quad (4-30)$$

式中 $f^{(r)}(0)$ 是 r 阶导数 $\frac{d^r f(t)}{dt^r}$ 在 0_- 时刻的取值。

(三) 原函数的积分

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s} \quad (4-31)$$

式中 $f^{(-1)}(0) = \int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau$ 是 $f(t)$ 积分式在 $t=0$ 的取值。与前类似, 考虑积分式在 $t=0$ 处可能有跳变, 取 0_- 值, 即 $f^{(-1)}(0_-)$ 。

证明

由于 $\mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) d\tau \right]$, 而其中第一项为常量, 即 $\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau = f^{(-1)}(0)$, 所以

$$\mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau \right] = \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$$

第二项可借助分部积分求得

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(\tau) d\tau \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} F(s) \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$$

例4-3 已知流经电容的电流 $i_C(t)$ 的拉氏变换为 $\mathcal{L}[i_C(t)] = I_C(s)$, 求电容电压 $v_C(t)$ 的变换式。

解 因为

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

所以

$$\begin{aligned} V_C(s) &= \mathcal{L} \left[\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{I_C(s)}{Cs} + \frac{i_C^{(-1)}(0)}{Cs} = \frac{I_C(s)}{Cs} + \frac{v_C(0)}{s} \end{aligned}$$

式中

$$i_C^{(-1)}(0) = \int_{-\infty}^0 i_C(\tau) d\tau$$

它的物理意义是电容两端的起始电荷量。而 $v_C(0)$ 是起始电压。

如果 $i_C^{(-1)}(0) = 0$ (电容初始无电荷), 得到

$$V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC}$$

把这个结果也和相量形式的运算规律相比较, 在那里, 电容的电压电流关系式为

$$\dot{V}_C = \frac{\dot{I}_C}{j\omega C}$$

仍有 “ s ” 与 “ $j\omega$ ” 相对应之规律。

下面说明如何用拉氏变换的方法求解微分方程。

例4-4 图4-4所示电路在 $t=0$ 时开关S闭合, 求输出信号 $v_C(t)$ 。

解

(1) 列写微分方程

$$Ri(t) + v_C(t) = Eu(t)$$

$$v_C(t)|_{t=0} = 0$$

将此式改写为只含有一个未知函数 $v_C(t)$ 的形式

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = Eu(t)$$

(2) 再将上式中各项取拉氏变换得到

$$RCsV_C(s) + V_C(s) = \frac{E}{s}$$

解此代数方程, 求得

$$V_C(s) = \frac{E}{s(1+RCs)} = \frac{E}{RCs \left(s + \frac{1}{RC} \right)}$$

(3) 求 $V_C(s)$ 的逆变换, 将 $V_C(s)$ 表示式分解为以下形式:

$$V_C(s) = E \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right]$$

$$v_C(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_C(s)] = E (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0)$$

(四) 延时(时域平移)

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s) \quad (4-32)$$

证明

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = \int_0^\infty [f(t-t_0)u(t-t_0)]e^{-st}dt = \int_{t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-st}dt$$

令

$$\tau = t - t_0$$

则有 $t = \tau + t_0$, 代入上式得

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}e^{-s\tau}d\tau = e^{-st_0}F(s)$$

此性质表明: 若波形延迟 t_0 , 则它的拉氏变换应乘以 e^{-st_0} 。例如延迟 t_0 时间的单位阶跃函数 $u(t-t_0)$, 其变换式为 $\frac{e^{-st_0}}{s}$ 。

例4-5 求图4-5(a)所示矩形脉冲的拉氏变换。矩形脉冲 $f(t)$ 的宽度为 t_0 , 幅度为 E , 它可以分解为阶跃信号 $Eu(t)$ 与延迟阶跃信号 $Eu(t-t_0)$ 之差, 如图4-5(b)与(c)所示。

解 已知

$$f(t) = Eu(t) - Eu(t-t_0)$$

$$\mathcal{L}[Eu(t)] = \frac{E}{s}$$

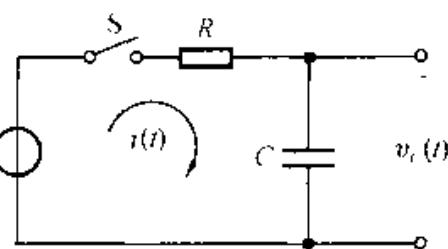


图 4-4 例 4-4 的电路

由延时定理

$$\mathcal{L}[Eu(t-t_0)] = e^{-st_0} \frac{E}{s}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[Eu(t) - Eu(t-t_0)] \\ &= \frac{E}{s}(1 - e^{-st_0})\end{aligned}$$

(五) s 域平移

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = F(s+a) \quad (4-33)$$

证明

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t} dt = F(s+a)$$

此性质表明, 时间函数乘以 e^{-at} , 相当于变换式在 s 域内平移 a 。

例4-6 求 $e^{-at} \sin(\omega t)$ 和 $e^{-at} \cos(\omega t)$ 的拉氏变换.

解 已知

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

由 s 域平移定理

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

同理, 因

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s + \frac{\omega}{2}}{s^2 + \frac{\omega^2}{4}}$$

故有

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos(\omega t)] = \frac{s + a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

(六) 尺度变换

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a>0) \quad (4-34)$$

证明

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(at)e^{-st} dt$$

令 $\tau = at$, 则上式变成

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(\tau)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau} d\left(\frac{\tau}{a}\right) = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(\tau)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

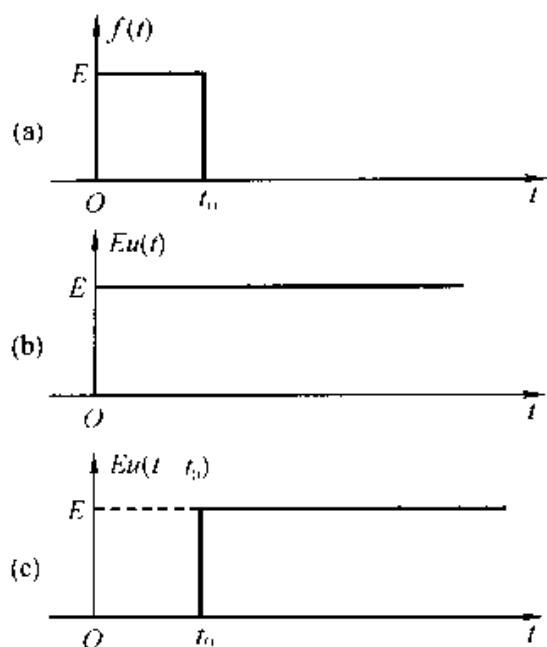


图 4-5 矩形脉冲分解为两个阶跃信号之差

例4-7 已知 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 若 $a > 0, b > 0$, 求 $\mathcal{L}[f(at - b)u(at - b)]$ 。

解 此问题既要用到尺度变换定理, 也要引用延时定理。

先由延时定理求得

$$\mathcal{L}[f(t - b)u(t - b)] = F(s)e^{-bs}$$

再借助尺度变换定理即可求出所需结果

$$\mathcal{L}[f(at - b)u(at - b)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}}$$

另一种作法是先引用尺度变换定理, 再借助延时定理。这时首先得到

$$\mathcal{L}[f(at)u(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

然后由延时定理求出

$$\mathcal{L}\left\{f\left[a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right]u\left[a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right]\right\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}}$$

也即

$$\mathcal{L}[f(at - b)u(at - b)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}}$$

两种方法结果一致。

(七) 初值

若函数 $f(t)$ 及其导数 $\frac{df(t)}{dt}$ 可以进行拉氏变换, $f(t)$ 的变换式为 $F(s)$, 则

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (4-35)$$

证明

由原函数微分定理可知

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0_+) &= \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] \\ &= \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= \int_0^0 \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= f(0_+) - f(0^-) + \int_{0^+}^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \end{aligned}$$

所以

$$sF(s) = f(0_+) + \int_{0^+}^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \quad (4-36)$$

当 $s \rightarrow \infty$ 时, 上式右端第二项的极限为

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_{0^+}^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \right] = \int_{0^+}^\infty \frac{df(t)}{dt} \left[\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} \right] dt = 0$$

因此，对式(4-36)取 $s \rightarrow \infty$ 的极限，有

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0_+)$$

式(4-35)得证。

若 $f(t)$ 包含冲激函数 $k\delta(t)$ ，则上述定理需作修改，此时 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = k + F_1(s)$ ，式中 $F_1(s)$ 为真分式，在导出式(4-36)时，等式右端还应包含 ks 项，初值定理应表示为

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - ks] \quad (4-37)$$

或

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s) \quad (4-38)$$

(八) 终值

若 $f(t)$ 及其导数 $\frac{df(t)}{dt}$ 可以进行拉氏变换， $f(t)$ 的变换式为 $F(s)$ ，而且 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 存在，则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4-39)$$

证明

利用式(4-36)，取 $s \rightarrow 0$ 之极限，有

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(0_+) + \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(0_+) + \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0_+)$$

于是得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

初值定理告诉我们，只要知道变换式 $F(s)$ ，就可直接求得 $f(0_+)$ 值；而借助终值定理，可从 $F(s)$ 来求 $t \rightarrow \infty$ 时的 $f(t)$ 值。

关于终值定理的应用条件限制还需作些说明， $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 是否存在，可从 s 域作出判断，也即：仅当 $sF(s)$ 在 s 平面的虚轴上及其右边都为解析时（原点除外），终值定理才可应用。例如 $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ 变换式分母的根在虚轴上 $\pm j\omega$ 处，不能应用此定理，显然 $\sin(\omega t)$ 振荡不止，当 $t \rightarrow \infty$ 时极限不存在。而 $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ 分母多项式的根是在右半平面实轴 a 点上，此定理也不能用。在第4.7节引入“零点”、“极点”的概念以后，这种关系的说明将更为方便。

当电路较为复杂时，初值与终值定理的方便之处将显得突出，因为它不需要作逆变换，即可直接求出原函数的初值和终值。对于某些反馈系统的研究，例如锁相环路系统的稳定性分析，就是这样。

假如以符号 s 与算子 $j\omega$ 相对照，关于上述两定理的物理概念可作如下解释： $s \rightarrow 0$ ($j\omega \rightarrow 0$)，相当于直流状态，因而得到电路稳定的终值 $f(\infty)$ ；而 $s \rightarrow \infty$

($j\omega \rightarrow \infty$), 相当于接入信号的突变(高频分量), 它可以给出相应的初值 $f(0_+)$ 。

(九) 卷积

此定理与第三章讲述的傅里叶变换卷积定理的形式类似。拉氏变换卷积定理指出

若 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$, 则有

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \quad (4-40)$$

可见, 两原函数卷积的拉氏变换等于两函数拉氏变换之乘积。对于单边变换, 考虑到 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 均为有始信号, 即 $f_1(t) = f_1(t)u(t)$, $f_2(t) = f_2(t)u(t)$, 由卷积定义写出

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(\tau)u(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt$$

交换积分次序并引入符号 $x = t - \tau$, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_0^\infty f_1(\tau) \left[\int_0^\infty f_2(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt \right] d\tau \\ &= \int_0^\infty f_1(\tau) \left[e^{-s\tau} \int_0^\infty f_2(x)u(x)e^{-sx}dx \right] d\tau \\ &= F_1(s)F_2(s) \end{aligned}$$

式(4-40)得证。此式为时域卷积定理, 同理可得 s 域卷积定理(也可称为时域相乘定理)

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} [F_1(s) * F_2(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F_1(p)F_2(s-p)dp \quad (4-41)$$

在第 4.6 节将进一步讨论卷积定理在电路分析中的应用, 并借助卷积定理建立系统函数的概念。

最后, 在表 4-2 中给出拉氏变换主要性质(定理)的有关结论。表中, 关于对 s 微分和对 s 积分两性质未曾证明, 留作练习。

表 4-2 拉氏变换性质(定理)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \quad \mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s), \quad \mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$$

序号	名称	结论
1	线性(叠加)	$\mathcal{L}[K_1f_1(t) + K_2f_2(t)] = K_1F_1(s) + K_2F_2(s)$
2	对 t 微分	$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0)$
3	对 t 积分	$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(n-1)}(0)}{s^n}$
4	延时(时域平移)	$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$

续表

序号	名称	结论
5	s 域平移	$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = F(s+a)$
6	尺度变换	$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
7	初值	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
8	终值	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
9	卷积	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
10	相乘	$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(p)F_2(s-p) dp = \mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)]$
11	对 s 微分	$\mathcal{L}[-tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
12	对 s 积分	$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s) ds$

4.4 拉普拉斯逆变换

由例 4-4 已经看到, 利用拉氏变换方法分析电路问题时, 最后需要求象函数的逆变换。由拉氏变换定义可知, 欲求 $F(s)$ 之逆变换可按定义式(4-6)进行复变函数积分(用留数定理)求得。实际上, 往往可借助一些代数运算将 $F(s)$ 表达式分解, 分解后各项 s 函数式的逆变换可从表 4-1 查出, 使求解过程大大简化, 无需进行积分运算。这种分解方法称为部分分式分解(或部分分式展开)。

(一) 部分分式分解

由第 4.3 节已经知道, 微分算子的变换式要出现 s , 而积分算子包含 $\frac{1}{s}$, 因此, 含有高阶导数的线性、常系数微分(或积分)方程式将转换成 s 的多项式, 或转换成两个 s 的多项式之比。它们称为 s 的有理分式。一般具有如下形式

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} \quad (4-42)$$

式中, 系数 a_i 和 b_i 都为实数, m 和 n 是正整数。

为便于分解, 将 $F(s)$ 的分母 $B(s)$ 写作以下形式

$$B(s) = b_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) \quad (4-43)$$

式中 p_1, p_2, \dots, p_n 为 $B(s) = 0$ 方程式的根, 也即, 当 s 等于任一根值时,

$B(s)$ 等于零, $F(s)$ 等于无限大。 p_1, p_2, \dots, p_n 称为 $F(s)$ 的“极点”。

同理, $A(s)$ 也可改写为

$$A(s) = a_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m) \quad (4-44)$$

式中 z_1, z_2, \dots, z_m 称为 $F(s)$ 的“零点”, 它们是 $A(s) = 0$ 方程式的根。

按照极点之不同特点, 部分分式分解方法有以下几种情况:

(1) 极点为实数, 无重根。

假定 p_1, p_2, \dots, p_n 均为实数, 且无重根, 例如, 考虑如下之变换式求其逆变换

$$F(s) = \frac{A(s)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \quad (4-45)$$

式中 p_1, p_2, p_3 是不相等的实数。先来分析 $m < n$ 的情况, 也即分母多项式的阶次高于分子多项式的阶次。这时, $F(s)$ 可分解为以下形式

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \frac{K_3}{s - p_3} \quad (4-46)$$

显然, 查表 4-1 可求得逆变换

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_1}{s - p_1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_2}{s - p_2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_3}{s - p_3}\right] \\ &= K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + K_3 e^{p_3 t} \end{aligned} \quad (4-47)$$

我们的任务是要找到各系数 K_1, K_2, K_3 之值。为求得 K_1 , 以 $(s - p_1)$ 乘式(4-46)两端

$$(s - p_1)F(s) = K_1 + \frac{(s - p_1)K_2}{s - p_2} + \frac{(s - p_1)K_3}{s - p_3} \quad (4-48)$$

令 $s = p_1$ 代入式(4-48)得到

$$K_1 = (s - p_1)F(s)|_{s=p_1} \quad (4-49)$$

同理可以求得对任意极点 p_i 所对应的系数 K_i

$$K_i = (s - p_i)F(s)|_{s=p_i} \quad (4-50)$$

例4-8 求下示函数的逆变换

$$F(s) = \frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$$

解 将 $F(s)$ 写成部分分式展开形式

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3}$$

分别求 K_1, K_2, K_3 :

$$K_1 = sF(s)|_{s=0} = \frac{10 \times 2 \times 5}{1 \times 3} = \frac{100}{3}$$

$$K_2 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{10(-1+2)(-1+5)}{(-1)(-1+3)} = -20$$

$$K_3 = (s+3)F(s)|_{s=-3} = \frac{10(-3+2)(-3+5)}{(-3)(-3+1)} = -\frac{10}{3}$$

$$F(s) = \frac{100}{3s} - \frac{20}{s+1} - \frac{10}{3(s+3)}$$

故

$$f(t) = \frac{100}{3} - 20e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

在以上讨论中，假定 $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ 表示式中 $A(s)$ 的阶次低于 $B(s)$ 的阶次，也即 $m < n$ ，如果不满足此条件，式(4-46)将不成立。对于 $m \geq n$ 的情况，可用长除法将分子中的高次项提出，余下的部分满足 $m < n$ ，仍按以上方法分析，下面给出实例。

例4-9 求下示函数的逆变换

$$F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$$

解

用分子除以分母(长除法)得到

$$F(s) = s+2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

现在式中最后一项满足 $m < n$ 的要求，可按前述部分分式展开方法分解得到：

$$F(s) = s+2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

这里， $\delta'(t)$ 是冲激函数 $\delta(t)$ 的导数。

(2) 包含共轭复数极点

这种情况仍可采用上述实数极点求分解系数的方法，当然，计算要麻烦些，但根据共轭复数的特点可以有一些取巧的方法。

例如，考虑下示函数的分解

$$F(s) = \frac{A(s)}{D(s)[(s+\alpha)^2 + \beta^2]} = \frac{A(s)}{D(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} \quad (4-51)$$

式中，共轭极点出现在 $-\alpha \pm j\beta$ 处； $D(s)$ 表示分母多项式中的其余部分，引入符号 $F_1(s) = \frac{A(s)}{D(s)}$ ，则式(4-47)改写为

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} = \frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_2}{s+\alpha+j\beta} + \dots \quad (4-52)$$

引用式(4-50)求得 K_1 ， K_2 ：

$$K_1 = (s+\alpha-j\beta)F(s)|_{s=-\alpha+j\beta} = \frac{F_1(-\alpha+j\beta)}{2j\beta} \quad (4-53)$$

$$K_2 = (s + \alpha + j\beta)F(s)|_{s=-\alpha-j\beta} = \frac{F_1(-\alpha-j\beta)}{-2j\beta} \quad (4-54)$$

不难看出, K_1 与 K_2 呈共轭关系, 假定

$$K_1 = A + jB \quad (4-55)$$

则

$$K_2 = A - jB = K_1^* \quad (4-56)$$

如果把(4-52)式中共轭复数极点有关部分的逆变换以 $f_C(t)$ 表示, 则

$$\begin{aligned} f_C(t) &= 2 \left[\frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_2}{s + \alpha + j\beta} \right] = e^{-\alpha t} (K_1 e^{j\beta t} + K_1^* e^{-j\beta t}) \\ &= 2e^{-\alpha t} [A \cos(\beta t) - B \sin(\beta t)] \end{aligned} \quad (4-57)$$

例4-10 求下示函数的逆变换

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)}$$

解

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2 + 3}{(s + 1 + j2)(s + 1 - j2)(s + 2)} \\ &= \frac{K_0}{s + 2} + \frac{K_1}{s + 1 - j2} + \frac{K_2}{s + 1 + j2} \end{aligned}$$

分别求系数 K_0 , K_1 , K_2 :

$$K_0 = (s + 2)F(s)|_{s=-2} = \frac{7}{5}$$

$$K_1 = \frac{s^2 + 3}{(s + 1 + j2)(s + 2)} \Big|_{s=-1+j2} = -\frac{1+j2}{5}$$

也即 $A = -\frac{1}{5}$, $B = \frac{2}{5}$, 借助式(4-57)得到 $F(s)$ 的逆变换式

$$f(t) = \frac{7}{5}e^{-2t} - 2e^{-t} \left[\frac{1}{5} \cos(2t) + \frac{2}{5} \sin(2t) \right] \quad (t \geq 0)$$

例4-11 求下示函数的逆变换

$$F(s) = \frac{s + \gamma}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

解 显然, 此函数式具有共轭复数极点, 不必用部分分式展开求系数的方法, 将 $F(s)$ 改写为

$$F(s) = \frac{s + \gamma}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha - \gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

对照表 4-1 容易得到

$$f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\beta t) - \frac{\alpha - \gamma}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \quad (t \geq 0)$$

(3) 有多重极点

考虑下示函数的分解

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s - p_1)^k D(s)} \quad (4-58)$$

式中在 $s = p_1$ 处，分母多项式 $B(s)$ 有 k 重根，也即 k 阶极点。将 $F(s)$ 写成展开式

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s - p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(s - p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{K_{1k}}{(s - p_1)} + \frac{E(s)}{D(s)} \quad (4-59)$$

这里， $\frac{E(s)}{D(s)}$ 表示展开式中与极点 p_1 无关的其余部分。为求出 K_{11} ，可借助式 (4-59)

$$K_{11} = (s - p_1)^k F(s)|_{s=p_1} \quad (4-60)$$

然而，要求得 K_{12} ， K_{13} ， \cdots ， K_{1k} 等系数，不能再采用类似求 K_{11} 的方法，因为这样做将导致分母中出现“0”值，而得不出结果。为解决这一矛盾，引入符号

$$F_1(s) = (s - p_1)^k F(s) \quad (4-61)$$

于是

$$F_1(s) = K_{11} + K_{12}(s - p_1) + \cdots + K_{1k}(s - p_1)^{k-1} + \frac{E(s)}{D(s)}(s - p_1)^k \quad (4-62)$$

对式(4-62)微分得到

$$\frac{d}{ds} F_1(s) = K_{12} + 2K_{13}(s - p_1) + \cdots + K_{1k}(k-1)(s - p_1)^{k-2} + \cdots \quad (4-63)$$

很明显，可以给出：

$$K_{12} = \left. \frac{d}{ds} F_1(s) \right|_{s=p_1} \quad (4-64)$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{ds^2} F_1(s) \right|_{s=p_1} \quad (4-65)$$

一般形式为

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \cdot \left. \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} F_1(s) \right|_{s=p_1} \quad (4-66)$$

其中

$$i = 1, 2, \dots, k$$

例4-12 求下示函数的逆变换

$$F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}$$

解 将 $F(s)$ 写成展开式

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s+1)^3} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)} + \frac{K_2}{s}$$

容易求得

$$K_2 = sF(s)|_{s=0} = -2$$

为求出与重根有关的各系数，令

$$F_1(s) = (s+1)^3 F(s) = \frac{s-2}{s}$$

引用式(4-60)和式(4-64)、(4-65)得到：

$$K_{11} = \left. \frac{s-2}{s} \right|_{s=-1} = 3$$

$$K_{12} = \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{s-2}{s} \right) \right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{13} = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s-2}{s} \right) \right|_{s=-1} = 2$$

于是有

$$F(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{s}$$

逆变换为

$$f(t) = \frac{3}{2} t^2 e^{-t} + 2t e^{-t} + 2e^{-t} - 2 \quad (t \geq 0)$$

(二) 用留数定理求逆变换

现在讨论如何从式(4-6)按复变函数积分求拉普拉斯逆变换。将该式重新写于此处

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (t \geq 0)$$

为求出此积分，可从积分限 $\sigma_1 - j\infty$ 到 $\sigma_1 + j\infty$ 补足一条积分路径以构成一闭合围线。现取积分路径是半径为无限大的圆弧，如图 4-6 所示。这样，就可以应用留数定理，式(4-6)积分式等于围线中被积函数 $F(s)e^{st}$ 所有极点的留数之和，可表示为

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{\text{极点}} [F(s)e^{st} \text{ 的留数}]$$

设在极点 $s = p_i$ 处的留数为 r_i ，并设 $F(s)e^{st}$ 在围线中共有 n 个极点，则

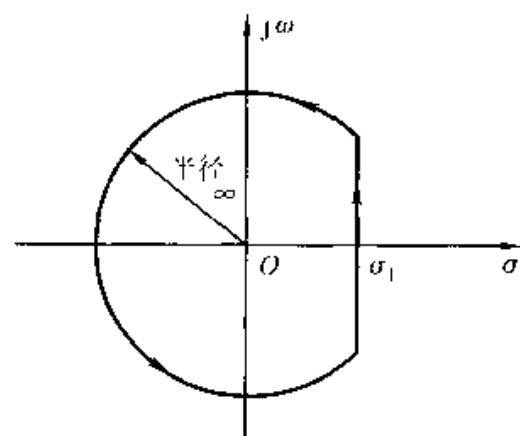


图 4-6 $F(s)$ 的围线积分途径

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n r_i \quad (4-67)$$

若 p_i 为一阶极点，则

$$r_i = [(s - p_i) F(s) e^{st}] \Big|_{s=p_i} \quad (4-68)$$

若 p_i 为 k 阶极点，则

$$r_i = \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s - p_i)^k F(s) e^{st} \right] \Big|_{s=p_i} \quad (4-69)$$

将以上结果与部分分式展开相比较，不难看出，两种方法所得结果是一样的。具体说，对一阶极点而言，部分分式的系数与留数的差别仅在于因子 e^{st} 的有无，经逆变换后的部分分式就与留数相同了。对高阶极点而言，由于留数公式中含有因子 e^{st} ，在取其导数时，所得不止一项，遂与部分分式展开法结果相同。

从以上分析可以看出，当 $F(s)$ 为有理分式时，可利用部分分式分解和查表的方法求得逆变换，无需引用留数定理。如果 $F(s)$ 表达式为有理分式与 e^{-st} 相乘时，可再借助延时定理得出逆变换。当 $F(s)$ 为无理函数时，需利用留数定理求逆变换，然而，这种情况在电路分析问题中几乎不会遇到。

4.5 用拉普拉斯变换法分析电路、s 域元件模型

首先研究例题，仿照例 4-4 的方法用拉氏变换分析电路，然后给出 s 域元件模型的概念和应用实例，使这种分析方法进一步简化。

例4-13 图4-7 所示电路，当 $t < 0$ 时，开关位于“1”端，电路的状态已经稳定， $t = 0$ 时开关从“1”端打到“2”端，分别求 $v_C(t)$ 与 $v_R(t)$ 波形。

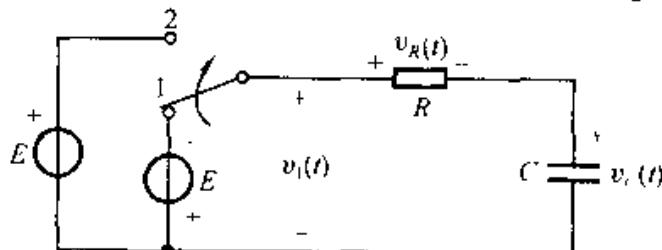


图 4-7 例 4-13 电路

解

首先求 $v_C(t)$ ，这里遵循与例 4-4 相同的步骤。

(1) 列写微分方程

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = E$$

由于 $t = 0_-$ 时，电容已充有电压 $-E$ ，从 0_- 到 0_+ ，电容电压没有变化。

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = -E$$

(2) 取拉氏变换

$$\begin{aligned} RC [sV_C(s) - v_C(0)] + V_C(s) &= \frac{E}{s} \\ V_C(s) &= \frac{\frac{E}{s} - RCE}{1 + RCs} = \frac{E \left(\frac{1}{RC} - s \right)}{s \left(s + \frac{1}{RC} \right)} \end{aligned}$$

(3) 求 $V_C(s)$ 之逆变换

$$V_C(s) = E \left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$

$$v_C(t) = E - 2Ee^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

画出波形如图 4-8 (a)。

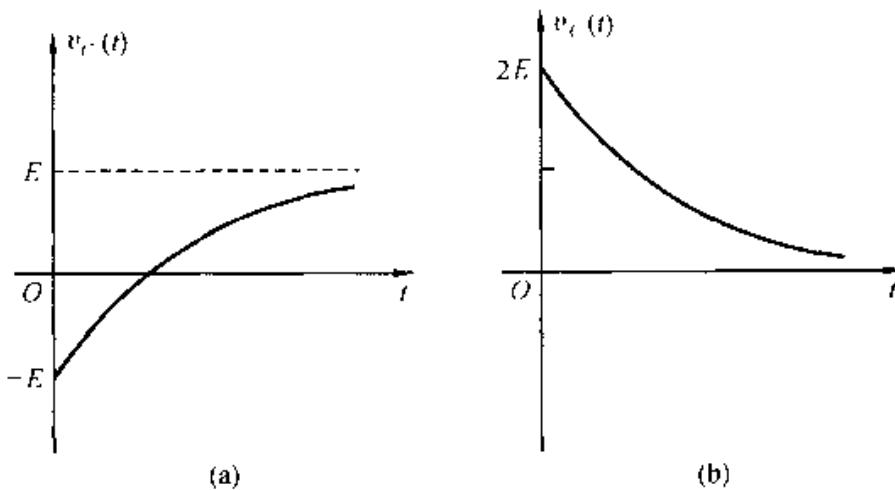


图 4-8 例 4-13 的波形

下面求 $v_R(t)$, 请注意, 这里遇到待求函数从 0_- 到 0_+ 发生跳变的情况。

$$(1) \frac{1}{RC} \int v_R(t) dt + v_R(t) = v_1(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{RC} v_R(t) + \frac{dv_R(t)}{dt} &= \frac{dv_1(t)}{dt} \\ v_R(0_-) &= 0, \quad v_R(0_+) = 2E \end{aligned}$$

按 0_- 条件进行分析, 这时有

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = 2E\delta(t)$$

$$(2) \frac{1}{RC} V_R(s) + sV_R(s) = 2E$$

$$V_R(s) = \frac{2E}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$(3) v_R(t) = 2Ee^{-\frac{t}{RC}} \cdot u(t)$$

画出波形如图 4-8 (b)。

如果按 0_+ 条件代入, 当取拉氏变换时, 在等式左端 $sV_R(s)$ 项之后应出现 $-2E$, 与此同时, 对 $v_1(t)$ 之求导也从 0_+ 计算, 于是有 $\frac{dv_1(t)}{dt} = 0$, 这时可得到同样结果。由于在一般电路分析问题中, 0_- 条件往往已给定, 选用 0_- 系统将使分析过程简化。

例4-14 图4-9所示电路起始状态为0, $t=0$ 时开关S闭合, 接入直流电源E, 求电流*i*(*t*)波形。

解

$$(1) L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = Eu(t)$$

$$i(0) = 0, \quad \frac{1}{C} \int i dt \Big|_{t=0} = 0$$

$$(2) LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = \frac{E}{s}$$

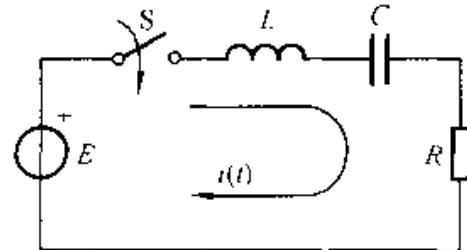


图4-9 例4-14的电路

$$I(s) = \frac{E}{s(Ls + R + \frac{1}{Cs})} = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

为进一步简化, 求 $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$ 方程的根 p_1, p_2 :

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

故

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} \\ &= \frac{E}{L} \cdot \left[\frac{1}{(p_1 - p_2)(s - p_1)} + \frac{1}{(p_2 - p_1)(s - p_2)} \right] \\ &= \frac{E}{L(p_1 - p_2)} \left(\frac{1}{s - p_1} - \frac{1}{s - p_2} \right) \end{aligned}$$

(3) 求逆变换

$$i(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

至此, 虽已得到*i*(*t*), 但式中 p_1, p_2 还需用 R, L, C 代入, 为讨论方便, 引用符号:

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

则:

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

由于所给 R, L, C 参数相对不同, p_1, p_2 式中根号项可能为实数或虚数, 以致 *i*(*t*) 波形也不一样, 还要分成以下四种情况说明:

第一种情况 $\alpha = 0$ (即 $R = 0$, 无损耗的 LC 回路)

$$p_1 = j\omega_0$$

$$p_2 = -j\omega_0$$

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{2j\omega_0} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$= E \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

这时, 阶跃信号对回路作用的结果产生不衰减的正弦振荡, 如图 4-10(a)的情况。

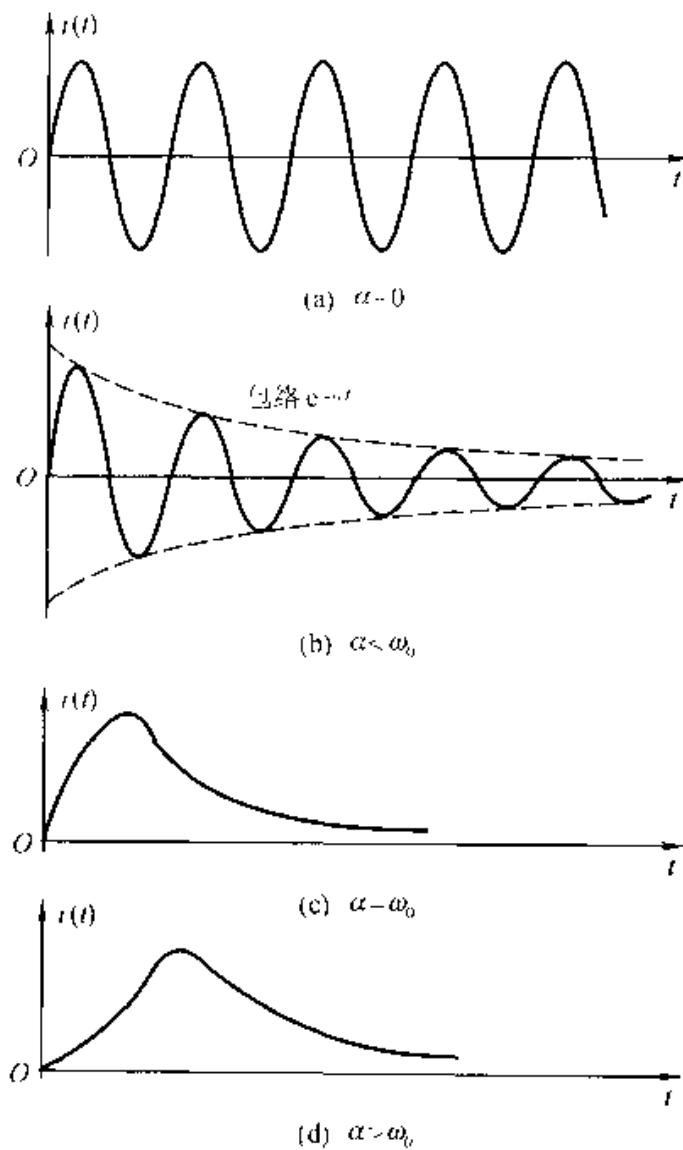


图 4-10 例 4-16 的波形

第二种情况 $\alpha < \omega_0$ (即 R 较小, 高 Q 的 LC 回路, $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$)

这时, 由于 $\alpha < \omega_0$, p_1 与 p_2 表示式中根号部分是虚数。再引入符号

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

所以:

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = j\omega_d$$

$$p_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$p_2 = -\alpha - j\omega_d$$

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{2j\omega_d} [e^{(-\alpha + j\omega_d)t} - e^{(-\alpha - j\omega_d)t}]$$

$$= \frac{E}{L\omega_d} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)$$

得到衰减振荡如图 4-10(b), R 越小, α 就越小, 衰减越慢, R 大则衰减快。

第三种情况 $\alpha = \omega_0$

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$p_1 = p_2 = -\alpha$$

这是有重根的情况, $I(s)$ 表示式为

$$I(s) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

于是可得

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot t e^{-\alpha t} = \frac{E}{L} \cdot t e^{-\frac{R}{2L}t}$$

这时, 由于 R 较大, 阻尼大而不能产生振荡, 是临界情况, 见图 4-10(c) 波形。

第四种情况 $\alpha > \omega_0$ (R 较大、低 Q , 不能振荡)

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} \cdot e^{-\alpha t} (e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t} - e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t}) \\ &= \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{-\alpha t} \cdot \sinh(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}t) \end{aligned}$$

这时 $i(t)$ 波形是双曲线函数, 如图 4-10(d)。

从以上各例可以看出, 用列写微分方程取拉氏变换的方法分析电路虽然比较方便, 但是当网络结构复杂时(支路和结点较多), 列写微分方程这一步就显得烦琐, 可考虑简化。模仿正弦稳态分析(交流电路)中相量法, 先对元件和支路进行变换, 再把变换后的 s 域电压与电流用 KVL 和 KCL 联系起来, 这样可使分析过程简化。为此, 给出 s 域元件模型。

R , L , C 元件的时域关系为:

$$v_R(t) = R i_R(t) \quad (4-70)$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (4-71)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \quad (4-72)$$

将以上三式分别进行拉氏变换, 得到:

$$V_R(s) = R I_R(s) \quad (4-73)$$

$$V_L(s) = s L I_L(s) - L i_L(0) \quad (4-74)$$

$$V_C(s) = \frac{1}{s C} I_C(s) + \frac{1}{s} v_C(0) \quad (4-75)$$

经过变换以后的方程式可以直接用来处理 s 域中 $V(s)$ 与 $I(s)$ 之间的关系, 对

每个关系式都可构成一个 s 域网络模型，如图 4-11 所示，元件符号是 s 域中广义欧姆定律的符号，也就是说，电阻符号表示下列关系

$$V_R(s) = RI_R(s) \quad (4-76)$$

而电感与电容的符号分别表示(不考虑起始条件)：

$$V_L(s) = sLI_L(s) \quad (4-77)$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) \quad (4-78)$$

式(4-74)和式(4-75)中起始状态引起的附加项，在图 4-11 中用串联的电压源来表示。这样做的实质是把 KVL 和 KCL 直接用于 s 域，就像把它用于时域以及用于相量运算一样。

然而，图 4-11 的模型并非唯一的，将式(4-73)至式(4-75)对电流求解，得到：

$$I_R(s) = \frac{1}{R}V_R(s) \quad (4-79)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL}V_L(s) + \frac{1}{s}i_L(0) \quad (4-80)$$

$$I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0) \quad (4-81)$$

与此对应的 s 域网络模型如图 4-12，在列写结点方程式时用图 4-12 的模型方便，而列写回路方程时则宜采用图 4-11。不难看出，把戴维宁定理与诺顿定理直接用于 s 域也是可以的，图 4-11 中的电压源变换为图 4-12 的电流源正好说明了这一点。

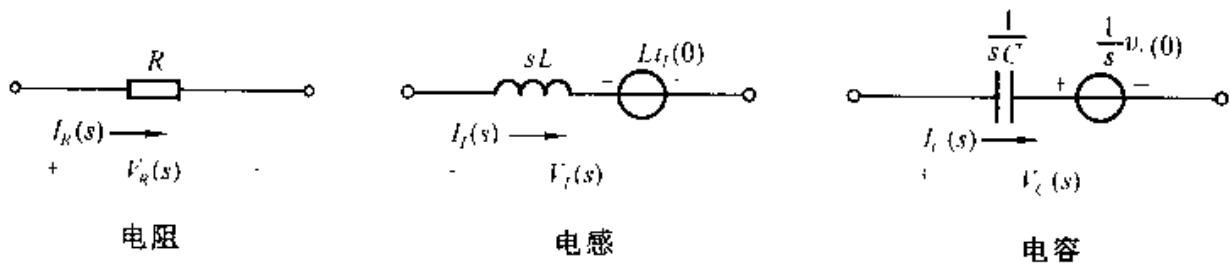


图 4-11 s 域元件模型(回路分析)

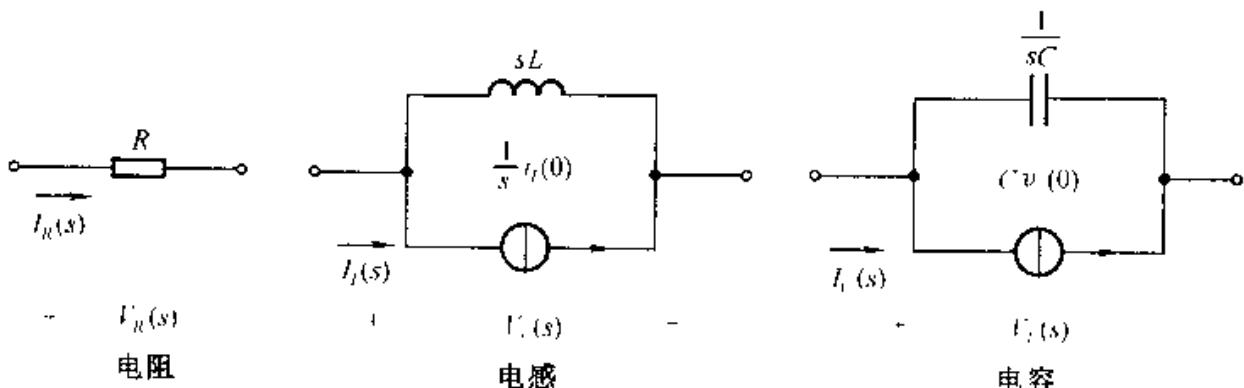


图 4-12 s 域元件模型(结点分析)

把网络中每个元件都用它的s域模型来代替，把信号源直接写作变换式，这样就得到全部网络的s域模型图，对此电路模型采用KVL和KCL分析即可找到所需求解的变换式，这时，所进行的数学运算是代数关系，它与电阻性网络的分析方法一样。

例4-15 用s域模型的方法求解图4-7(例4-13)电路的 $v_C(t)$ 。

解 画出s域网络模型如图4-13。

根据图4-13可以写出

$$\left(R + \frac{1}{sC}\right)I(s) = \frac{E}{s} + \frac{E}{s}$$

求出 $I(s)$

$$I(s) = \frac{2E}{s\left(R + \frac{1}{sC}\right)}$$

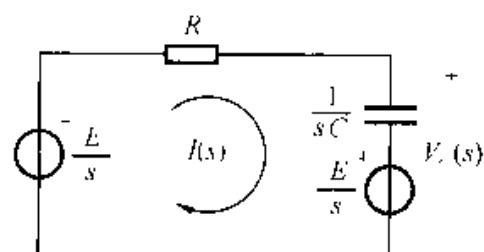


图4-13 例4-15的s域模型图

再求得 $V_C(s)$

$$\begin{aligned} V_C(s) &= \frac{I(s)}{sC} - \frac{E}{s} = \frac{2E}{s(sCR + 1)} - \frac{E}{s} \\ &= \frac{E\left(\frac{1}{RC} - s\right)}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \end{aligned}$$

至此，已看出与例4-13结果完全一致。

例4-16 图4-14所示电路， $t < 0$ 时开关S位于“1”端，电路的状态已经稳定， $t = 0$ 时S从“1”端接到“2”端，求 $i_L(t)$ 。

解 由题意求得电流起始值

$$i_L(0) = -\frac{E_1}{R_1}$$

画出s域模型如图4-15，这里，为便于求解，将 E_2 、 R_2 等效为电流源与电阻并联。

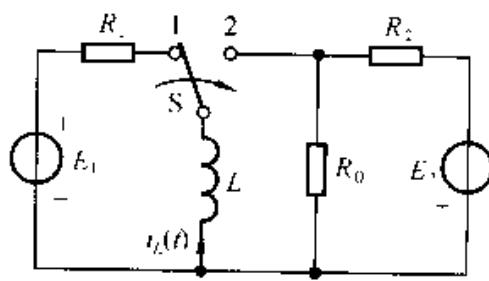


图4-14 例4-16的电路

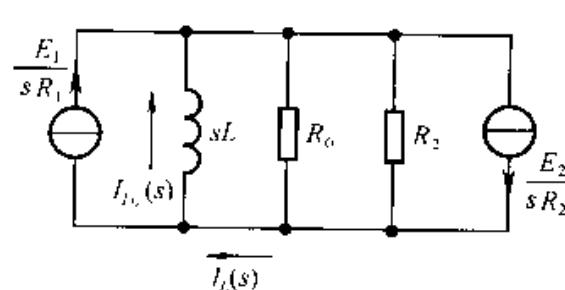


图4-15 例4-16的s域模型

假定流过 sL 的电流为 $I_{L0}(s)$ ，不难写出

$$\begin{aligned} I_{L0}(s) &= \frac{\frac{E_1}{sR_1} + \frac{E_2}{sR_2}}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL}} \times \frac{1}{sL} \\ &= \frac{\frac{1}{s} \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right)}{\frac{sL}{R_0} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{sL}} \end{aligned}$$

引用符号

$$\tau = \frac{L}{R_0 R_2}$$

则

$$\begin{aligned} I_{L0}(s) &= \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{s(s\tau + 1)} \\ &= \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right] \end{aligned}$$

由结点电流关系求得

$$\begin{aligned} I_L(s) &= I_{L0}(s) - \frac{E_1}{sR_1} \\ &\quad - \frac{E_2}{sR_2} - \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \end{aligned}$$

显然，逆变换为

$$i_L(t) = \frac{E_2}{R_2} \cdot \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

波形如图 4·16 所示。

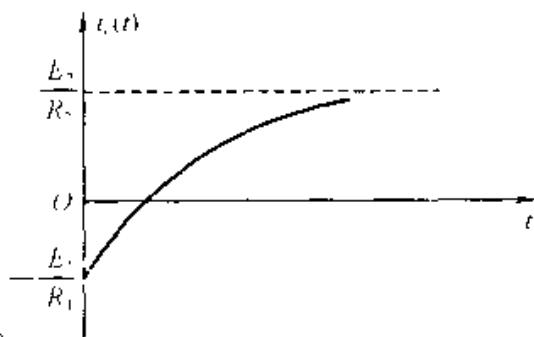


图 4·16 例 4·16 的波形

当所分析的网络具有较多结点或回路时， s 域模型的方法比列写微分方程再取变换的方法要明显简化。

4.6 系统函数(网络函数) $H(s)$

在起始条件为零的情况下， s 域元件模型可以得到简化，这时，描述动态元件(L, C)起始状态的电压源或电流源将不存在，各元件方程式都可写作以下的简单形式

$$V(s) = Z(s)I(s)$$

或

$$I(s) = Y(s)V(s)$$

式中 $Z(s)$ 称为 s 域阻抗， $Y(s)$ 是 s 域导纳。在此情况下，网络任意端口激励信号的变换式与任意端口响应信号的变换式之比仅由网络元件的阻抗、导纳特性

决定,可用“系统函数”或“网络函数”来描述这一特性。它的定义如下:

系统零状态响应的拉氏变换与激励的拉氏变换之比称为“系统函数”(或网络函数),以 $H(s)$ 表示。

例4-17 图4-17所示电路在 $t=0$ 时开关S闭合,接入信号源 $e(t)=V_m \sin(\omega t)$,电感起始电流等于零,求电流 $i(t)$ 。

解

假定输入信号的变换式写作

$$E(s) = \mathcal{L}[V_m \sin(\omega t)]$$

那么,可以将 $I(s)$ 表示为

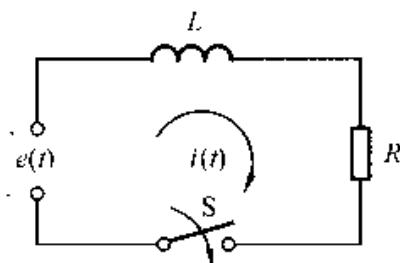


图4-17 例4-17的电路

$$I(s) = \frac{1}{Ls + R} \cdot E(s)$$

下一步需要求逆变换,用卷积定理找出 $I(s)$ 的原函数 $i(t)$,为此引用

$$\frac{1}{Ls + R} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

于是由卷积定理可知

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} * V_m \sin(\omega t) \\ &= \int_0^t V_m \sin(\omega \tau) \cdot \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{V_m}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t \sin(\omega \tau) e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau \\ &= \frac{V_m}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2} \left\{ e^{\frac{R}{L}\tau} \left[\frac{R}{L} \sin(\omega \tau) - \omega \cos(\omega \tau) \right] \right\} \Big|_0^t \\ &= \frac{V_m}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2} \left\{ e^{\frac{R}{L}t} \left[\frac{R}{L} \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) \right] + \omega \right\} \\ &= \frac{V_m}{\omega^2 L^2 + R^2} [(R \sin(\omega t) - \omega L \cos(\omega t)) + \omega L e^{-\frac{R}{L}t}] \\ &= \frac{V_m}{\omega^2 L^2 + R^2} [\omega L e^{-\frac{R}{L}t} + \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t - \varphi)] \end{aligned}$$

其中

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

波形如图4-18。

在本例中,系统函数 $H(s)$ 为

$$\frac{I(s)}{E(s)} = H(s) = \frac{1}{Ls + R} \quad (4-82)$$

在求解过程中借助了卷积定理，当然也可不用卷积，将 $I(s)$ 表达式展开

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{Ls + R} \cdot \frac{V_m \omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{V_m \omega}{L} \left| \frac{\frac{K_0}{s + \frac{R}{L}} + \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_2}{s + j\omega}}{s^2 + \omega^2} \right| \end{aligned}$$

其中：

$$K_0 = \left. \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right|_{s = -\frac{R}{L}} = \frac{1}{\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \left. \left(\frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right) \left(\frac{1}{s + j\omega} \right) \right|_{s = +j\omega} \\ &= \frac{1}{2\left[\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2\right]} \left(-1 - j\frac{R}{\omega L} \right) \end{aligned}$$

而 K_2 与 K_1 共轭，参照表4-1求逆变换即可得到 $i(t)$ ，与前面方法得到的结果相同。

下面进一步研究在上例求解过程中引用卷积的实质。一般情况下，若线性时不变系统的激励、零状态响应和冲激响应分别为 $e(t)$ ， $r(t)$ ， $h(t)$ ，它们的拉氏变换分别为 $E(s)$ ， $R(s)$ ， $H(s)$ ，由时域分析可知

$$r(t) = h(t) * e(t) \quad (4-83)$$

借助卷积定理可得

$$R(s) = H(s)E(s) \quad (4-84)$$

或

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} \quad (4-85)$$

而冲激响应 $h(t)$ 与系统函数 $H(s)$ 构成变换对，即

$$H(s) = \mathcal{J}[h(t)] \quad (4-86)$$

$h(t)$ 和 $H(s)$ 分别从时域和 s 域表征了系统的特性。

例4-17中的 $H(s)$ 是电流与电压之比，也即导纳。一般在网络分析中，由于激励与响应既可以是电压，也可能是电流，因此网络函数可以是阻抗(电压比电流)，或为导纳(电流比电压)，也可以是数值比(电流比电压或电压比电流)。此外，若激励与响应是同一端口，则网络函数称为“策动点函数”(或“驱动点函数”)，如图4-19中的 $V_i(s)$ 与 $I_i(s)$ ；若激励与响应不在同一端口，

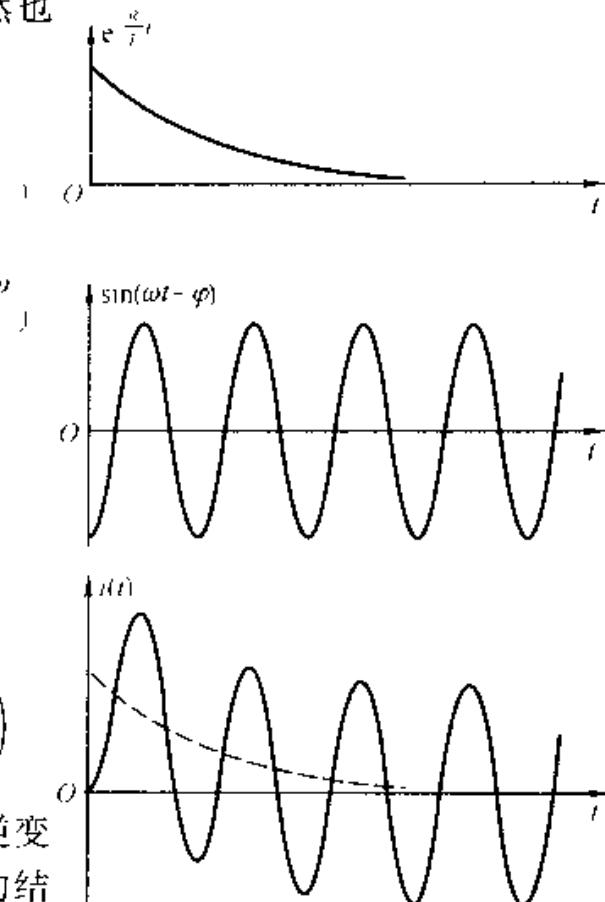


图4-18 例4-17的波形

就称为“转移函数”(或“传输函数”),如图 4-19 中的 $V_i(s)$ [或 $I_i(s)$]与 $V_j(s)$ [或 $I_j(s)$]。显然,策动点函数只可能是阻抗或导纳;而转移函数可以是阻抗、导纳或比值。例如式(4-82),它是策动点导纳函数。

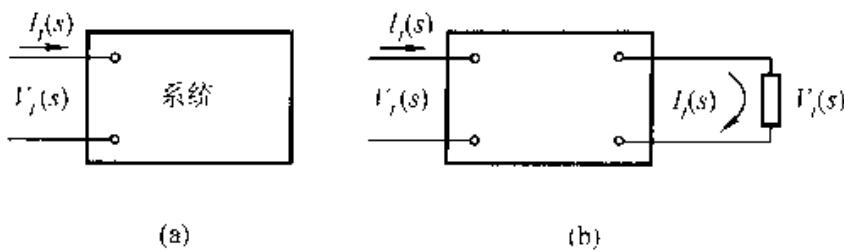


图 4-19 策动点函数与转移函数

将上述不同条件下网络函数的特定名称列于表 4-3。在一般的系统分析中,对于这些名称往往不加区分,统称为系统函数或转移函数。

表 4-3 网络函数的名称

激励与响应的位置	激 励	响 应	系统函数名称
在同一端口(策动点函数)	电流	电压	策动点阻抗
	电压	电流	策动点导纳
	电流	电压	转移阻抗
分别在各自的端口(转移函数)	电压	电流	转移导纳
	电压	电压	转移电压比(电压传输函数)
	电流	电流	转移电流比(电流传输函数)

当利用 $H(s)$ 求解网络响应时,首先需求出 $H(s)$,然后有两种解法,一种方法是取 $H(s)$ 逆变换得到 $h(t)$,由 $h(t)$ 与 $e(t)$ 之卷积求得 $r(t)$,另一种方法是将 $R(s) = H(s)E(s)$ 用部分分式法展开,逐项求出逆变换即得 $r(t)$ 。无论用哪种方法,求 $H(s)$ 是关键的一步。下面讨论在网络分析中求 $H(s)$ 的一般方法。

求 $H(s)$ 的方法是:将待求解之网络作出 s 域元件模型图,按照元件约束特性和拓扑约束(KCL, KVL)特性,写出响应函数 $R(s)$ 与激励函数 $E(s)$ 之比,此即 $H(s)$ 表示式。通常,这种方法具体表现为利用电路元件的串、并联简化或分压、分流等概念求解电路,必要时可借助戴维宁定理、诺顿定理、叠加定理以及 $Y-\Delta$ 转换等间接方法。列写网络的回路电压方程式或结点电流方程式,可以给出求 $H(s)$ 的一般表示式,现以回路方程为例说明这种方法,设待求解网络有 l 个回路,可列出 l 个方程式

$$\left. \begin{aligned} Z_{11}(s)I_1(s) + Z_{12}(s)I_2(s) + \cdots + Z_{1l}(s)I_l(s) &= V_1(s) \\ Z_{21}(s)I_1(s) + Z_{22}(s)I_2(s) + \cdots + Z_{2l}(s)I_l(s) &= V_2(s) \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ Z_{l1}(s)I_1(s) + Z_{l2}(s)I_2(s) + \cdots + Z_{ll}(s)I_l(s) &= V_l(s) \end{aligned} \right\} \quad (4-87)$$

式中包含 L 个电流 $I(s)$ 和 L 个电压 $V(s)$, 而 $Z(s)$ 为各回路的 s 域互阻抗或自阻抗, 写作矩阵形式为:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (4-88)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{V} \quad (4-89)$$

这里, \mathbf{V} 和 \mathbf{I} 分别为列向量, \mathbf{Z} 是方阵.

可以解出, 第 k 个回路电流 I_k 表示式为

$$I_k(s) = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} V_1(s) + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} V_2(s) + \cdots + \frac{\Delta_{kk}}{\Delta} V_L(s) \quad (4-90)$$

式中 Δ 为 \mathbf{Z} 方阵的行列式, 称为网络的回路分析行列式(或特征方程式), 而 Δ_{jk} 是行列式 Δ 中元素 Z_{jk} 的代数补式或称代数余子式[在 Δ 行列式中, 去掉第 j 行 k 列, 乘以 $(-1)^{j+k}$]. 注意, 对于互易网络, 因方阵 \mathbf{Z} 为对称矩阵, 因而 $\Delta_{jk} = \Delta_{kj}$.

如果在所研究之问题中, 仅 $V_j(s) \neq 0$, 其余 $V(s)$ 都等于零(其他回路没有激励信号接入), 则可求出

$$I_k(s) = \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} V_j(s) \quad (4-91)$$

即, 网络函数 $H(s)$ 为

$$Y_{kj}(s) = \frac{I_k(s)}{V_j(s)} = \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \quad (4-92)$$

当 $k \neq j$ 时, 此网络函数为转移导纳函数, 当 $k = j$ 时是策动点导纳函数。

类似地, 可由列写结点方程找到式(4-91)的对偶形式, 求转移阻抗或策动点阻抗。

以上结果表明, 网络行列式(特征方程) Δ 反映了 $H(s)$ 的特性, 实际上, 常常利用特征方程的根来描述系统的有关性能, 稍后几节将介绍利用特征方程的根进行系统分析的某些研究方法。

例 4-18 图 4-20 所示电路中电容均为 $1 F$, 电阻均为 1Ω , 试求电路的转移导纳函数 $Y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)}$.

解

在图 4-27 中标注各回路电流 $I_1(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$, 依此列写回路方程式如下

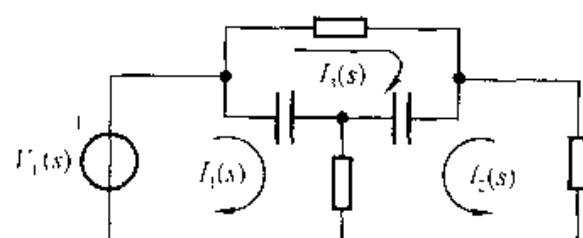


图 4-20 例 4-18 的电路

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{1}{s} + 1 \right) I_1(s) + I_2(s) - \frac{1}{s} I_3(s) = V_1(s) \\ & I_1(s) + \left(\frac{1}{s} + 2 \right) I_2(s) + \frac{1}{s} I_3(s) = 0 \\ & -\frac{1}{s} I_1(s) + \frac{1}{s} I_2(s) + \left(\frac{2}{s} + 1 \right) I_3(s) = 0 \end{aligned} \right\}$$

为求得 $Y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)}$, 分别写出

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{s} + 1 & 1 & -\frac{1}{s} \\ 1 & \frac{1}{s} + 2 & \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{2}{s} + 1 \end{vmatrix} = \frac{s^2 + 5s + 2}{s^2}$$

$$\Delta_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{2}{s} + 1 \end{vmatrix} = -\frac{s^2 + 2s + 1}{s^2}$$

于是得到

$$Y_{21}(s) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = -\frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 5s + 2}$$

需要指出, 系统函数 $H(s)$ 的形式与传输算子 $H(p)$ 类似, 但是它们之间存在着概念上的区别。 $H(p)$ 是一个算子, p 不是变量。而 $H(s)$ 是变量 s 的函数。在 $H(s)$ 中, 分子和分母的公共因子可以消去, 而在 $H(p)$ 表示式中则不准相消。只有当 $H(p)$ 的分母与分子没有公因子的条件下, $H(p)$ 与 $H(s)$ 的形式才完全对应相同。 $H(p)$ 即可用来说明零状态特性, 又可说明零输入特性。而 $H(s)$ 只能用来说明零状态特性。

4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

拉普拉斯变换将时域函数 $f(t)$ 变换为 s 域函数 $F(s)$; 反之, 拉普拉斯逆变换将 $F(s)$ 变换为相应的 $f(t)$ 。由于 $f(t)$ 与 $F(s)$ 之间存在一定的对应关系, 故可以从函数 $F(s)$ 的典型形式透视出 $f(t)$ 的内在性质。当 $F(s)$ 为有理函数时, 其分子多项式和分母多项式皆可分解为因子形式, 各项因子指明了 $F(s)$ 零点和极点的位置, 显然, 从这些零点与极点的分布情况, 便可确定原函数的性质。

(一) $H(s)$ 零、极点分布与 $h(t)$ 波形特征的对应

系统函数 $H(s)$ 零、极点的定义与一般象函数 $F(s)$ 零、极点定义相同(见第 4.4 节), 也即, $H(s)$ 分母多项式之根构成极点, 分子多项式的根是零点。还可按以下方式定义: 若 $\lim_{s \rightarrow p_1} H(s) = \infty$, 但 $[(s - p_1)H(s)]_{s=p_1}$ 等于有限值, 则 $s = p_1$ 处有一阶极点。若 $[(s - p_1)^K H(s)]_{s=p_1}$ 直到 $K = n$ 时才等于有限值, 则 $H(s)$ 在 $s = p_1$ 处有 n 阶极点。

$\frac{1}{H(s)}$ 的极点即 $H(s)$ 的零点，当 $\frac{1}{H(s)}$ 有 n 阶极点时，即 $H(s)$ 有 n 阶零点。

例如，若

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s[(s-1)^2 + 1]}{(s+1)^2(s^2+4)} \\ &= \frac{s(s-1+j1)(s-1-j1)}{(s+1)^2(s+j2)(s-j2)} \end{aligned} \quad (4-93)$$

那么，它的极点位于

$$\left\{ \begin{array}{l} s = -1 \quad (\text{二阶}) \\ s = -j2 \quad (\text{一阶}) \\ s = +j2 \quad (\text{一阶}) \end{array} \right.$$

而其零点位于

$$\left\{ \begin{array}{l} s = 0 \quad (\text{一阶}) \\ s = 1 + j1 \quad (\text{一阶}) \\ s = 1 - j1 \quad (\text{一阶}) \\ s = \infty \quad (\text{一阶}) \end{array} \right.$$

将此系统函数的零、极点图绘于图 4-21 中的 s 平面内，用符号圆圈“○”表示零点，“×”表示极点。在同一位置画两个相同的符号表示为二阶，例如 $s = -1$ 处有二阶极点。

由于系统函数 $H(s)$ 与冲激响应 $h(t)$ 是一对拉普拉斯变换式，因此，只要知道 $H(s)$ 在 s 平面上零、极点的分布情况，就可预言该系统在时域方面 $h(t)$ 波形的特性。

对于集总参数线性时不变系统，其系统函数 $H(s)$ 可表示为两个多项式之比，具有以下形式

$$H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (4-94)$$

其中， z_j 表示第 j 个零点的位置， p_i 表示第 i 个极点的位置。零点有 m 个，极点有 n 个。 K 是一个系数。

如果把 $H(s)$ 展开部分分式，那么， $H(s)$ 每个极点将决定一项对应的时间

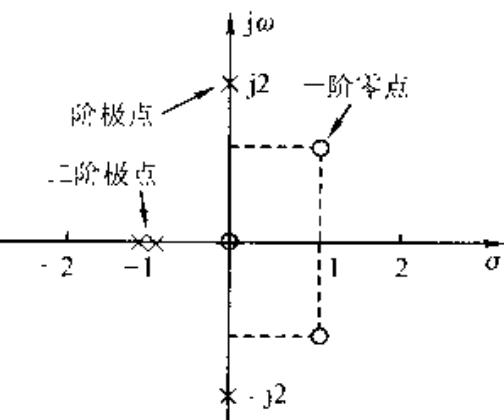


图 4-21 $H(s)$ 零、极点图示例

函数，具有一阶极点 p_1, p_2, \dots, p_n 的系统函数其冲激响应形式如下

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n H_i(s)\right] = \sum_{i=1}^n h_i(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \end{aligned} \quad (4-95)$$

这里， p_i 可以是实数，但一般情况下， p_i 以成对的共轭复数形式出现。各项相应的幅值由系数 K_i 决定，而 K_i 则与零点分布情况有关。

下面研究几种典型情况的极点分布与原函数波形的对应关系。

(1) 若极点位于 s 平面坐标原点， $H_i(s) = \frac{1}{s}$ ，那么，冲激响应就为阶跃函数， $h_i(t) = u(t)$ 。

(2) 若极点位于 s 平面的实轴上，则冲激响应具有指数函数形式。如 $H_i(s) = \frac{1}{s + a}$ ，则 $h_i(t) = e^{-at}$ ，此时，极点为负实数($p_i = -a < 0$)，冲激响应是指数衰减(单调减幅)形式；如果 $H_i(s) = \frac{1}{s - a}$ ，则 $h_i(t) = e^{at}$ ，这时，极点是正实数($p_i = a > 0$)，对应的冲激响应是指数增长(单调增幅)形式。

(3) 虚轴上的共轭极点给出等幅振荡。显然 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right] = \sin(\omega t)$ ，它的两个极点位于 $p_1 = +j\omega$ 和 $p_2 = -j\omega$ 。

(4) 落于 s 左半平面内的共轭极点对应于衰减振荡。例如

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}\right] = e^{-at} \sin(\omega t)$$

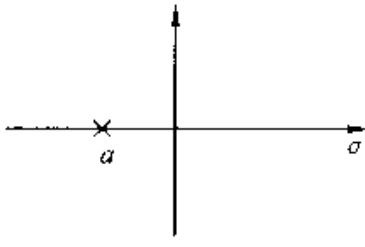
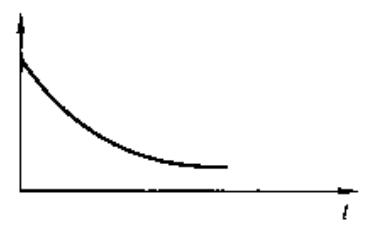
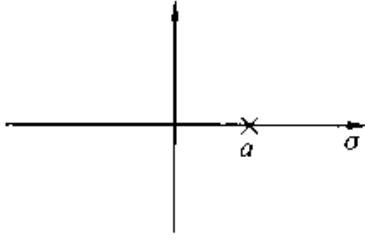
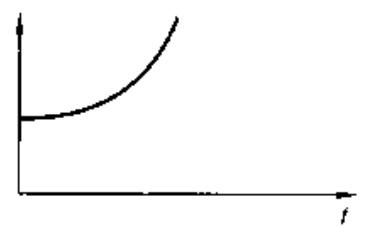
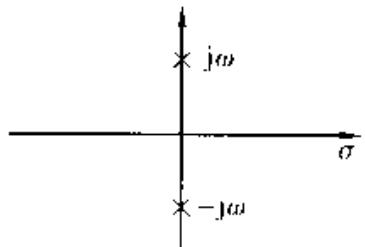
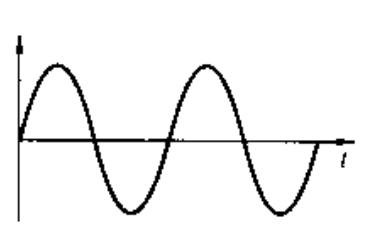
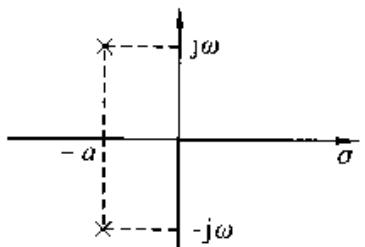
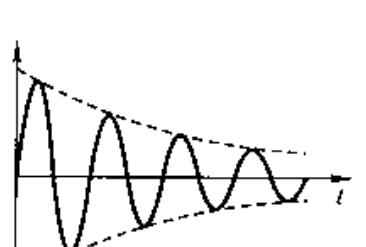
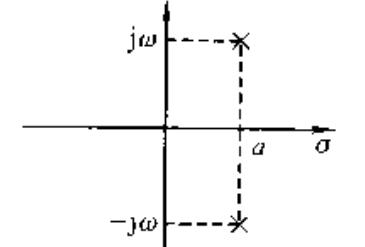
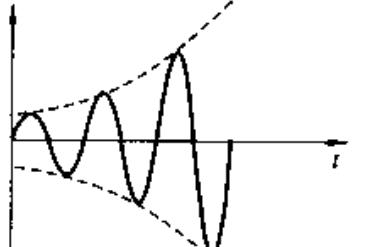
它的两个极点位于 $p_1 = -a + j\omega, p_2 = -a - j\omega$ ，这里 $-a < 0$ 。与此相反，落于 s 右半平面内的共轭极点对应于增幅振荡。例如 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}\right] = e^{at} \sin(\omega t)$ 的极点是 $p_1 = a + j\omega, p_2 = a - j\omega$ ，这里 $a > 0$ 。

将以上结果整理如表 4-4 所示。这里都是一阶极点的情况。

表 4-4 极点分布与原函数波形对应(一)

$H(s)$	s 平面上的零极点	t 平面上的波形	$h(t)(t \geq 0)$
$\frac{1}{s}$			$u(t)$

续表

$H(s)$	s 平面上的零极点	t 平面上的波形	$h(t)(t \geq 0)$
$\frac{1}{s - a}$			e^{-at}
$\frac{1}{s + a}$			e^{at}
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$			$\sin(\omega t)$
$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$			$e^{-at} \sin(\omega t)$
$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$			$e^{at} \sin(\omega t)$

若 $H(s)$ 具有多重极点, 那么, 部分分式展开式各项所对应的时间函数可能具有 t, t^2, t^3, \dots 与指数函数相乘的形式, t 的幂次由极点阶次决定。几种典型情况如下:

- (1) 位于 s 平面坐标原点的二阶或三阶极点分别给出时间函数为 t 或 $t^2/2$ 。
- (2) 实轴上的二阶极点给出 t 与指数函数的乘积。如

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = t e^{-at}$$

(3) 对于虚轴上的二阶共轭极点情况。如 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = t \sin(\omega t)$, 这是幅度按线性增长的正弦振荡。

将这里讨论的几种多阶极点分布与原函数的对应关系列于表 4-5。

表 4-5 极点分布与原函数波形对应(二)

$H(s)$	s 平面上的零极点	t 平面上的波形	$h(t)(t \geq 0)$
$\frac{1}{s^2}$			t
$\frac{1}{(s+a)^2}$			$t e^{-at}$
$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$			$t \sin(\omega t)$

由表 4-4 与表 4-5 可以看出, 若 $H(s)$ 极点落于左半平面, 则 $h(t)$ 波形为衰减形式; 若 $H(s)$ 极点落在右半平面, 则 $h(t)$ 增长; 落于虚轴上的一阶极点对

应的 $h(t)$ 成等幅振荡或阶跃；而虚轴上的二阶极点将使 $h(t)$ 呈增长形式。在系统理论研究中，按照 $h(t)$ 呈现衰减或增长的两种情况将系统划分为稳定系统与非稳定系统两大类型，显然，根据 $H(s)$ 极点出现于左半或右半平面即可判断系统是否稳定。在第 4.11 节和第十一章将详细研究系统的稳定性。

以上分析了 $H(s)$ 极点分布与时域函数的对应关系。至于 $H(s)$ 零点分布的情况则只影响到时域函数的幅度和相位； s 平面上零点变动对于 t 平面波形的形式没有影响。例如，图 4-22 所示 $H(s)$ 零、极点分布以及 $h(t)$ 波形，其表示式可以写作

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at} \cos(\omega t) \quad (4-96)$$

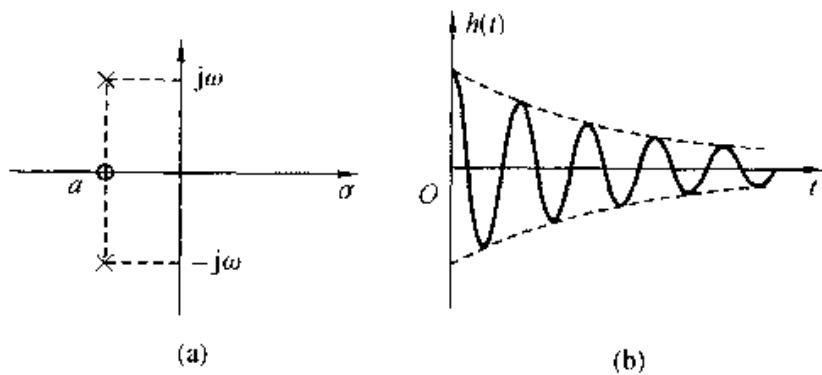


图 4-22 式(4-96)系统函数的 s 平面与 t 平面图形

假定保持极点不变，只移动零点 a 的位置，那么 $h(t)$ 波形将仍呈衰减振荡形式，振荡频率也不改变，只是幅度和相位有变化。譬如，将零点移至原点则有

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at} \left[\cos(\omega t) - \frac{a}{\omega} \sin(\omega t) \right] \quad (4-97)$$

请读者绘出波形进行比较。

(二) $H(s)$ 、 $E(s)$ 极点分布与自由响应、强迫响应特征的对应

第二章曾就系统时域特性讨论了完全响应中的自由分量、强迫分量概念。现从 s 域的观点，即从 $E(s)$ 与 $H(s)$ 的极点分布特性来研究这一问题。

在 s 域中，系统响应 $R(s)$ 与激励信号 $E(s)$ 、系统函数 $H(s)$ 之间满足

$$R(s) = H(s)E(s) \quad (4-84)$$

系统响应的时域特性

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] \quad (4-98)$$

显然， $R(s)$ 的零、极点由 $H(s)$ 与 $E(s)$ 的零、极点所决定。在式(4-84)中， $H(s)$ 和 $E(s)$ 可以分别写作以下形式：

$$H(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (4-99)$$

$$E(s) = \frac{\prod_{l=1}^u (s - z_l)}{\prod_{k=1}^v (s - p_k)} \quad (4-100)$$

式中, z_j 和 z_l 分别表示 $H(s)$ 和 $E(s)$ 的第 j 个或第 l 个零点, 零点数目为 m 个与 u 个; p_i 和 p_k 分别表示 $H(s)$ 和 $E(s)$ 的第 i 个或第 k 个极点, 极点数目为 n 个与 v 个。此外, 为讨论方便还假定了 $H(s)$ 与 $E(s)$ 两式前面的系数等于 1。

如果在 $R(s)$ 函数式中不含有多重极点, 而且, $H(s)$ 与 $E(s)$ 没有相同的极点, 那么, 将 $R(s)$ 用部分分式展开后即可得到

$$R(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} + \sum_{k=1}^v \frac{K_k}{s - p_k} \quad (4-101)$$

K_i 和 K_k 分别表示部分分式展开各项的系数。

不难看出, $R(s)$ 的极点来自两方面, 一是系统函数的极点 p_i , 另一是激励信号的极点 p_k 。取 $R(s)$ 逆变换, 写出响应函数的时域表示式为

$$r(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^v K_k e^{p_k t} \quad (4-102)$$

响应函数 $r(t)$ 由两部分组成, 前面一部分是由系统函数的极点所形成, 称为“自由响应”; 后一部分则由激励函数的极点所形成, 称为“强迫响应”。而自由响应中的极点 p_i 只由系统本身的特性所决定, 与激励函数的形式无关。然而, 系数 K_i 则与 $H(s)$ 和 $E(s)$ 都有关系, 同样, 系数 K_k 也不仅由 $E(s)$ 决定, 还与 $H(s)$ 有关。即, 自由响应时间函数的形式仅由 $H(s)$ 决定, 但它的幅度和相位却受 $H(s)$ 与 $E(s)$ 两方面的影响; 同样, 强迫响应时间函数的形式只取决于激励函数 $E(s)$, 而其幅度与相位却与 $E(s)$ 和 $H(s)$ 都有关系。另外, 对于有多重极点的情况可以得到与此类似的结果。

为便于表征系统特性, 定义系统行列式(特征方程)的根为系统的“固有频率”(或称“自由频率”、“自然频率”)。由前节式(4-92)可看出, 行列式 Δ 位于 $H(s)$ 之分母, 因而 $H(s)$ 的极点 p_i 都是系统的固有频率, 可以说, 自由响应的函数形式应由系统的固有频率决定。必须注意, 当把系统行列式作为分母写出 $H(s)$ 时, 有可能出现 $H(s)$ 的极点与零点因子相消的现象, 这时, 被消去的固有频率在 $H(s)$ 极点中将不再出现。这一现象再次说明, 系统函数 $H(s)$ 只能用于研究系统的零状态响应, $H(s)$ 包含了系统为零状态响应提供的全部信

息。但是，它不包含零输入响应的全部信息，这是因为当 $H(s)$ 的零、极点相消时，某些固有频率要丢失，而在零输入响应中要求表现出全部固有频率的作用（见习题 4-31）。

例4-19 电路如图4-23所示，输入信号 $v_1(t) = 10\cos(4t)u(t)$ ，求输出电压 $v_2(t)$ ，并指出 $v_2(t)$ 中的自由响应与强迫响应。

解

写出网络函数的表示式如下

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} \\ &= \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{s + 1} \end{aligned}$$

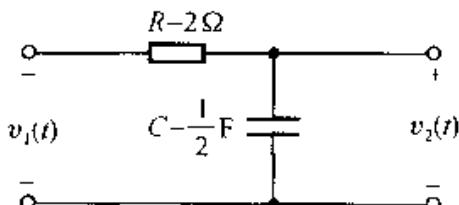


图 4-23 例 4-19 的电路

$v_1(t)$ 的变换式为

$$V_1(s) = \mathcal{L}[10\cos(4t)] = \frac{10s}{s^2 + 16}$$

输出信号的变换式为

$$V_2(s) = H(s)V_1(s) = \frac{10s}{(s^2 + 16)(s + 1)}$$

将 $V_2(s)$ 作部分分式展开得

$$V_2(s) = \frac{As + B}{s^2 + 16} + \frac{C}{s + 1}$$

分别求系数 A , B , C

$$C = (s + 1)V_2(s) \Big|_{s=-1} = \frac{10s}{s^2 + 16} \Big|_{s=-1} = -\frac{10}{17}$$

将所得 C 代回原式，经整理后得

$$\begin{aligned} 10s &= (As + B)(s + 1) - \frac{10}{17}(s^2 + 16) \\ &= As^2 + Bs + As + B - \frac{10}{17}s^2 - \frac{160}{17} \end{aligned}$$

取等式两端同样方次 s 系数相等得

$$\begin{cases} A - \frac{10}{17} = 0 \\ \frac{10}{17} + B = 10 \end{cases}$$

于是

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{10}{17} \\ B = \frac{160}{17} \end{array} \right.$$

所以

$$V_2(s) = \frac{\frac{10}{17}s + \frac{160}{17}}{s^2 + 16} = \frac{\frac{10}{17}}{s+4}$$

取逆变换得到

$$\begin{aligned} v_2(t) &= t^{-1} \left[\frac{\frac{10}{17}}{s+1} + \frac{\frac{10}{17}s}{s^2+16} + \frac{\frac{160}{17}}{s^2+16} \right] \\ &= -\frac{10}{17}e^{-t} + \frac{10}{17}\cos(4t) + \frac{40}{17}\sin(4t) \\ &= -\frac{10}{17}e^{-t} + \underbrace{\frac{10}{\sqrt{17}}\cos(4t - 76^\circ)}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\frac{40}{17}\sin(4t)}_{\text{强迫响应}} \end{aligned}$$

如果把正弦稳态分析中的相量法用于本题，所得结果将与这里的强迫响应函数一致，请读者验证。

与自由响应分量和强迫响应分量有着密切联系而且又容易发生混淆的另一对名词是：瞬态响应分量与稳态响应分量。

瞬态响应是指激励信号接入以后，完全响应中瞬时出现的有关成分，随着时间 t 增大，它将消失。由完全响应中减去瞬态响应分量即得稳态响应分量。

一般情况下，对于稳定系统， $H(s)$ 极点的实部都小于零，即 $\operatorname{Re}[p_i] < 0$ （极点在左半面），故自由响应函数呈衰减形式，在此情况下，自由响应就是瞬态响应。若 $E(s)$ 极点的实部大于或等于零，即 $\operatorname{Re}[p_k] \geq 0$ ，则强迫响应就是稳态响应，通常如正弦激励信号，它的 $\operatorname{Re}[p_k] = 0$ ，我们所说的正弦稳态响应即正弦信号作用下的强迫响应。典型的实例如刚刚给出的例 4-19 和前节的例 4-17。若激励是非正弦周期信号，仍属 $\operatorname{Re}[p_k] = 0$ 的情况，用拉氏变换求解电路的过程将相当烦琐（习题 4-34），然而极点特征与响应分量的对应规律仍然成立。此时，可借助电子线路 CAD 程序（如 SPICE）利用计算机求得详细结果。

下面一些情况在实际问题中很少遇到，但从 $H(s)$ 或 $E(s)$ 极点的不同类型来看还是有可能出现。

如果激励信号本身为衰减函数，即 $\operatorname{Re}[p_k] < 0$ ，例如 e^{-at} , $e^{-at}\sin(\omega t)$ 等，在时间 t 趋于无限大以后，强迫响应也等于零，这时，强迫响应与自由响应一起组成瞬态响应，而系统的稳态响应等于零。

当 $\operatorname{Re}[p_i] = 0$ 时，其自由响应就是无休止的等幅振荡（如无损 LC 谐振电

路), 于是, 自由响应也成为稳态响应, 这是一种特例(称为边界稳定系统)。

若 $\operatorname{Re}[p_i] > 0$, 则自由响应是增幅振荡, 这属于不稳定系统。

还有一种值得说明的情况, 这就是 $H(s)$ 的零点与 $E(s)$ 的极点相同(出现 $z_j = p_k$), 此时对应因子相消, 与 p_k 相应的稳态响应不复存在(习题 4·32)。

4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

所谓“频响特性”是指系统在正弦信号激励之下稳态响应随信号频率的变化情况。这包括幅度随频率的响应以及相位随频率的响应两个方面。

在电路分析课程中已经熟悉了正弦稳态分析, 在那里, 采用的方法是相量法。现在从系统函数的观点来考察系统的正弦稳态响应, 并借助零、极点分布图来研究频响特性。

设系统函数以 $H(s)$ 表示, 正弦激励源 $e(t)$ 的函数式写作

$$e(t) = E_m \sin(\omega_0 t) \quad (4-103)$$

其变换式为

$$E(s) = \frac{E_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad (4-104)$$

于是, 系统响应的变换式 $R(s)$ 可写作

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{E_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cdot H(s) \\ &= \frac{K_{-j\omega_0}}{s + j\omega_0} + \frac{K_{j\omega_0}}{s - j\omega_0} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n} \end{aligned} \quad (4-105)$$

式中, p_1, p_2, \dots, p_n 是 $H(s)$ 的极点, K_1, K_2, \dots, K_n 为部分分式分解各项的系数, 而:

$$\begin{aligned} K_{-j\omega_0} &= (s + j\omega_0)R(s)|_{s=-j\omega_0} \\ &= \frac{E_m \omega_0 H(-j\omega_0)}{-2j\omega_0} = \frac{E_m H_0 e^{-j\varphi_0}}{-2j} \\ K_{j\omega_0} &= (s - j\omega_0)R(s)|_{s=j\omega_0} \\ &= \frac{E_m \omega_0 H(j\omega_0)}{2j\omega_0} = \frac{E_m H_0 e^{j\varphi_0}}{2j} \end{aligned}$$

这里引用了符号:

$$H(j\omega_0) = H_0 e^{j\varphi_0}$$

$$H(-j\omega_0) = H_0 e^{-j\varphi_0}$$

至此可以求得

$$\frac{K_{-j\omega_0}}{s+j\omega_0} + \frac{K_{j\omega_0}}{s-j\omega_0} = \frac{E_m H_0}{2j} \left(-\frac{e^{-j\varphi_0}}{s+j\omega_0} + \frac{e^{j\varphi_0}}{s-j\omega_0} \right) \quad (4-106)$$

式(4-105)前两项的逆变换为

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}^{-1} \left[\frac{K_{-j\omega_0}}{s+j\omega_0} + \frac{K_{j\omega_0}}{s-j\omega_0} \right] \\ &= \frac{E_m H_0}{2j} [-e^{-j\varphi_0} e^{-j\omega_0 t} + e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}] \\ &= E_m H_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (4-107)$$

系统的完全响应是

$$\begin{aligned} r(t) &= \mathcal{L}^{-1}[R(s)] \\ &= E_m H_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t} \end{aligned} \quad (4-108)$$

对于稳定系统，其固有频率 p_1, p_2, \dots, p_n 的实部必小于零，式(4-108)中各指数项均为指数衰减函数，当 $t \rightarrow \infty$ ，它们都趋于零，所以稳态响应 $r_{ss}(t)$ 就是式中的第一项

$$r_{ss}(t) = E_m H_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4-109)$$

可见，在频率为 ω_0 的正弦激励信号作用之下，系统的稳态响应仍为同频率的正弦信号，但幅度乘以系数 H_0 ，相位移动 φ_0 ， H_0 和 φ_0 由系统函数在 $j\omega_0$ 处的取值所决定

$$H(s)|_{s=j\omega_0} = H(j\omega_0) = H_0 e^{j\varphi_0} \quad (4-110)$$

当正弦激励信号的频率 ω 改变时，将变量 ω 代入 $H(s)$ 之中，即可得到频率响应特性

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (4-111)$$

式中， $|H(j\omega)|$ 是幅频响应特性， φ 是相频响应特性(或相移特性)。为便于分析，常将式(4-111)的结果绘制频响曲线，这时横坐标是变量 ω ，纵坐标分别为 $|H(j\omega)|$ 或 φ 。

在通信、控制以及电力系统中，一种重要的组成部件是滤波网络，而滤波网络的研究需要从它的频响特性入手分析。

按照滤波网络幅频特性形式的不同，可以把它们划分为低通、高通、带通、带阻等几种类型，相应的 $|H(j\omega)|$ 曲线分别绘于图 4-24(a), (b), (c), (d)。图中，虚线表示理想的滤波特性，实线示例给出可能实现的某种实际特性。

低通滤波网络的幅频特性。当 $\omega < \omega_c$ 时， $|H(j\omega)|$ 取得相对较大的数值，网络允许信号通过，而在 $\omega > \omega_c$ 以后， $|H(j\omega)|$ 的数值相对减小，以致非常微弱，网络不允许信号通过，将这些频率的信号滤除。这里， ω_c 称为截止频率。 $\omega < \omega_c$ 的频率范围称为通带， $\omega > \omega_c$ 则称为阻带。对于高通滤波网络，其通带、阻带的范围则与低通的情况相反。带通滤波网络的通带范围是在 ω_{cl} 与

ω_{c2} 之间, 如图 4-24(c) 所示; 带阻滤波网络则与之相反。图 4-24 中用斜线(阴影部分)表示了各种滤波特性的通带范围

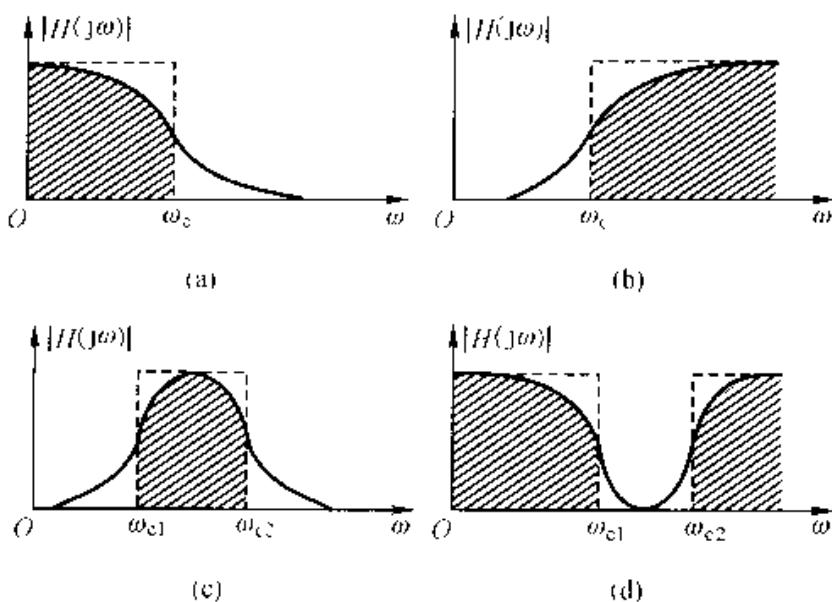


图 4-24 滤波网络频响特性示例

对于滤波网络的特性分析, 有时要从它的相频响应特性研究, 还可能从时域特性着手。广义讲, 滤波网络的作用及其类型应涉及到滤波、时延、均衡、形成等许多方面。

从本章开始将涉及与滤波器有关的问题(第五章和第十章将作进一步介绍), 包括理想化模型、实现和构成原理、性能分析以及各种类型的应用。而系统的频响特性分析是研究这些问题的基础。

根据系统函数 $H(s)$ 在 s 平面上的零、极点分布可以绘制频响特性曲线, 包括幅频特性 $|H(j\omega)|$ 曲线和相频特性 $\varphi(\omega)$ 曲线。下面介绍这种方法的原理。

假定, 系统函数 $H(s)$ 的表示式为

$$H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (4-112)$$

取 $s = j\omega$, 也即, 在 s 平面上, s 沿虚轴移动, 得到

$$H(j\omega) = \frac{K \prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)} \quad (4-113)$$

容易看出, 频率特性取决于零、极点的分布, 即取决于 z_j, p_i 的位置, 而式(4-113)中的 K 是系数, 对于频率特性的研究无关紧要。分母中任一因子 $(j\omega - p_i)$ 相

当于由极点 p_1 引向虚轴上某点 $j\omega$ 的一个矢量; 分子中任一因子 $(j\omega - z_j)$ 相当于由零点 z_j 引至虚轴上某点 $j\omega$ 的一个矢量。在图 4-25 示意画出由零点 z_1 和极点 p_1 与 $j\omega$ 点连接构成的两个矢量, 图中 N_1, M_1 分别表示矢量的模, ψ_1, θ_1 分别表示矢量的辐角。

对于任意零点 z_j 、极点 p_i , 相应的复数因子(矢量)都可表示为:

$$j\omega - z_j = N_j e^{j\psi_j} \quad (4-114)$$

$$j\omega - p_i = M_i e^{j\theta_i} \quad (4-115)$$

这里, N_j, M_i 分别表示两矢量的模, ψ_j, θ_i 则分别表示它们的辐角。

于是, 式(4-113)可以改写为

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= K \frac{N_1 e^{j\psi_1} N_2 e^{j\psi_2} \cdots N_m e^{j\psi_m}}{M_1 e^{j\theta_1} M_2 e^{j\theta_2} \cdots M_n e^{j\theta_n}} \\ &= K \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} e^{j[(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]} \\ &= |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned} \quad (4-116)$$

式中:

$$|H(j\omega)| = K \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} \quad (4-117)$$

$$\varphi(\omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \quad (4-118)$$

当 ω 沿虚轴移动时, 各复数因子(矢量)的模和辐角都随之改变, 于是得出幅频特性曲线和相频特性曲线。这种方法也称为 s 平面几何分析。

先讨论 $H(s)$ 极点位于 s 平面实轴的情况, 包括一阶与二阶系统。下一节专门研究极点为共轭复数的情况。

一阶系统只含有一个储能元件(或将几个同类储能元件简化等效为一个储能元件)。系统转移函数只有一个极点, 且位于实轴上。系统转移函数(电压比或电流比)的一般形式为 $K \frac{s - z_1}{s - p_1}$, 其中 z_1, p_1 分别为它的零点与极点, 如果零点位于原点, 则函数形式为 $K \frac{s}{s - p_1}$, 也可能除 $s = \infty$ 处有零点之外, 在 s 平面其他位置均无零点, 于是函数形式呈 $\frac{K}{s - p_1}$ 。现以简单的 RC 网络为例, 分析一阶低通、高通滤波网络。

例 4-20 研究图 4-26 所示 RC 高通滤波网络的频响特性

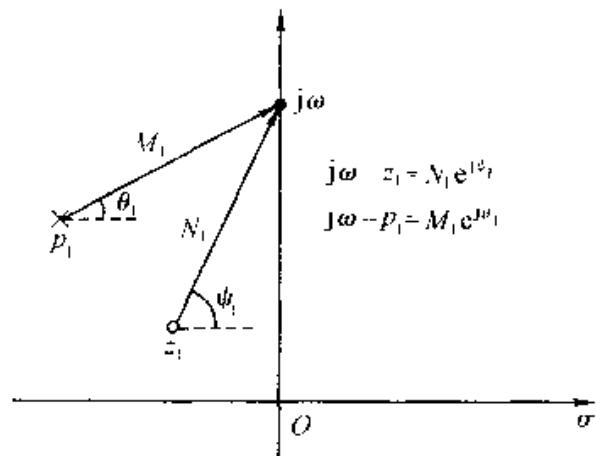


图 4-25 $(j\omega - z_1)$ 和 $(j\omega - p_1)$ 矢量

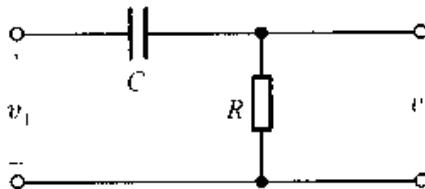


图 4-26 RC 高通滤波网络

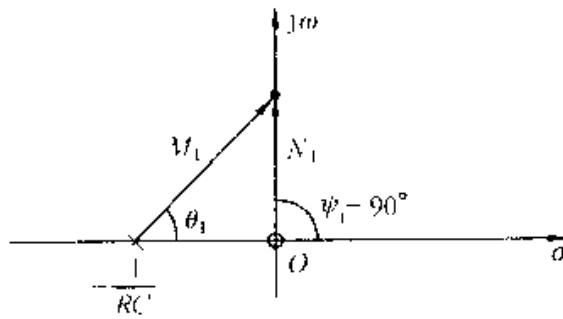


图 4-27 RC 高通滤波网络的 s 平面分析

$$H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}$$

解 写出网络转移函数表示式

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

它有一个零点在坐标原点，而极点位于 $-\frac{1}{RC}$ 处，也即 $z_1 = 0, p_1 = -\frac{1}{RC}$ ，零、极点在 s 平面分布如图 4-27。将 $H(s)$ 以矢量因子 $N_1 e^{j\psi_1}, M_1 e^{j\theta_1}$ 表示

$$H(j\omega) = \frac{N_1 e^{j\psi_1}}{M_1 e^{j\theta_1}} = \frac{V_2}{V_1} e^{j\varphi(\omega)}$$

式中：

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_1}{M_1}$$

$$\varphi = \psi_1 - \theta_1$$

现在分析当 ω 从 0 沿虚轴向 ∞ 增长时， $H(j\omega)$ 如何随之改变。当 $\omega = 0$ ， $N_1 = 0, M_1 = \frac{1}{RC}$ ，所以 $\frac{N_1}{M_1} = 0$ ，也即 $\frac{V_2}{V_1} = 0$ ；又因为 $\theta_1 = 0, \psi_1 = 90^\circ$ ，所以 $\varphi = 90^\circ$ 。当 $\omega = \frac{1}{RC}$ 时， $N_1 = \frac{1}{RC}, \theta_1 = 45^\circ$ ，所以 $\varphi = 45^\circ$ ，而且 $M_1 = \frac{\sqrt{2}}{RC}$ ，于是 $\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_1}{M_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，此点为高通滤波网络的截止频率点。最后，当 ω 趋于 ∞ 时， N_1/M_1 趋于 1，也即 $V_2/V_1 = 1, \theta_1 \rightarrow 90^\circ$ ，所以 $\varphi \rightarrow 0^\circ$ 。按照上述分析绘出幅频特性与相频特性曲线如图 4-28 所示。

例 4-21 研究图 4-29 所示 RC 低通滤波网络的频响特性

$$H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}$$

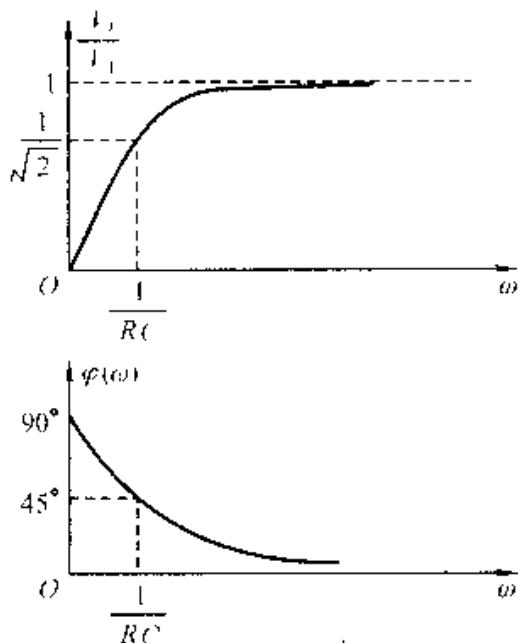


图 4-28 RC 高通滤波网络的频响特性

解 写出网络转移函数表示式

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

极点位于 $p_1 = -\frac{1}{RC}$ 处，在图 4-30 中已示出。 $H(j\omega)$ 表示式写作

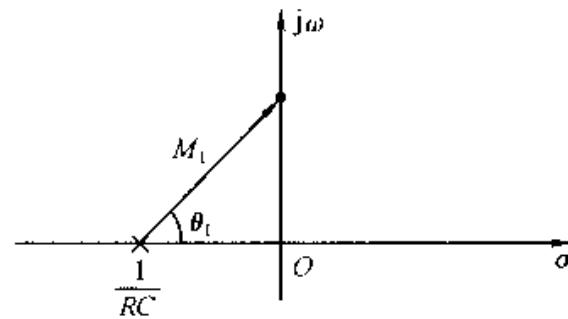
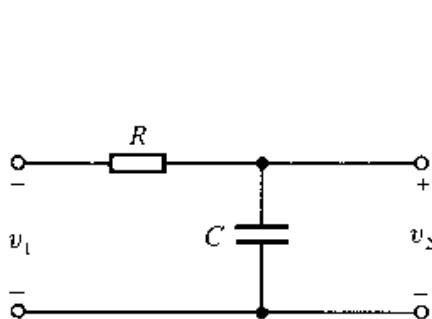


图 4-29 RC 低通滤波网络

图 4-30 RC 低通滤波网络的 s 平面分析

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC} \frac{1}{M_1 e^{j\theta_1}} = \frac{V_2}{V_1} e^{j\varphi(\omega)}$$

式中：

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{RC} \frac{1}{M_1}$$

$$\varphi = -\theta_1$$

仿照例 4-20 的分析，容易得出频响曲线如图 4-31 所示，这是一个低通网络，截止频率位于 $\omega = \frac{1}{RC}$ 处。

对于一阶系统，经常遇到的电路还有简单的 RL 电路以及含有多个电阻而仅含有一个储能元件的 RC ， RL 电路。对于它们都可采用类似的方法进行分析。只要系统函数的零、极点分布相同，就会具有一致的时域、频域特性。从系统的观点来看，要抓住系统特性的一般规律，必须从零、极点分布的观点入手研究。

由同一类型储能元件构成的二阶系统（如含有两个电容或两个电感），它们的两个极点都落在实轴上，即不出现共轭复数极点，是非谐振系统。系统转移函数（电压比或电流比）的一般形式为 $K \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$ ，式中 z_1, z_2 是两个零点， p_1, p_2 是两个极点。也可出现 $K \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}$ 或 $K \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)}$ 等形式。由

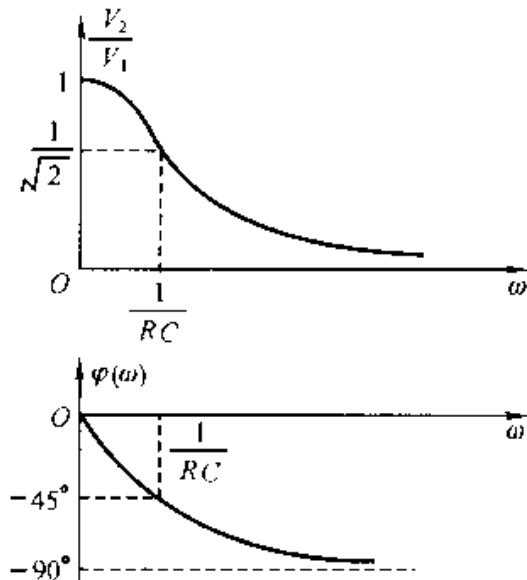


图 4-31 RC 低通滤波网络的频响特性

于零点数目以及零点、极点位置的不同,它们可以分别构成低通、高通、带通、带阻等滤波特性。就其 s 平面几何分析方法来看,与一阶系统的方法类似,不需建立新概念,读者可通过练习[习题 4-39(a),(b)]熟悉其性能,此处仅举一例。

例 4-22 由 s 平面几何研究图 4-32 所示二阶 RC 系统的频响特性

$$H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}。注意, 图中 kv_3 是受控电压源, 且 $R_1C_1 \ll R_2C_2$,$$

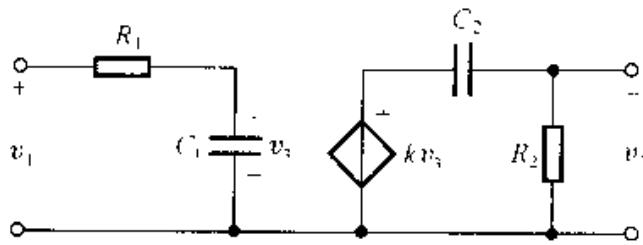


图 4-32 例 4-22 的电路

解

容易写出其转移函数为

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{k}{R_1C_1} \cdot \frac{s}{\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_2C_2}\right)}$$

它的极点位于 $p_1 = -\frac{1}{R_1C_1}$, $p_2 = -\frac{1}{R_2C_2}$, 只有一个零点在原点。将它们标于图 4-33 中, 这里注意到题意给定的条件 $R_1C_1 \ll R_2C_2$, 故 $-\frac{1}{R_2C_2}$ 靠近原点, 而 $-\frac{1}{R_1C_1}$ 则离开较远。以 $j\omega$ 代入

$H(s)$ 写作矢量因子形式

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{k}{R_1C_1} \cdot \frac{N_1 e^{j\psi_1}}{M_1 e^{j\theta_1} M_2 e^{j\theta_2}} \\ &= \frac{k}{R_1C_1} \cdot \frac{N_1}{M_1 M_2} e^{j(\varphi_1 - \theta_1 - \theta_2)} \\ &= \frac{V_2}{V_1} e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

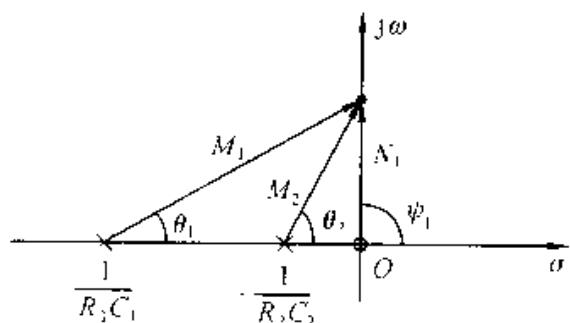


图 4-33 例 4-22 的零、极点分布

由图 4-33 看出, 当 ω 较低时, $M_1 \approx \frac{1}{R_1C_1}$, $\theta_1 \approx 0$, 几乎都不随频率而变, 这时, $M_2, \theta_2, N_1, \psi_1$ 的作用(即极点 p_2 与零点 z_1 的作用)与一阶 RC 高通系统相同, 构成如图 4-34 中 ω 低端的高通特性。当 ω 较高时, $M_2 \approx N_1$, $\theta_2 \approx \psi_1$, 也可近似认为它们不随 ω 而改变, 于是, M_1, θ_1 的作用(即极点 p_1 的作用)与一阶 RC 低通系统一致, 构成如图 4-34 中 ω 高端的低通特性。当 ω 位于中间频

率范围时, 同时满足 $M_1 \approx \frac{1}{R_1 C_1}$, $\theta_1 \approx 0$, $M_2 \approx N_1 = |\omega|$, $\theta_2 \approx \phi_1 = 90^\circ$, 那么 $H(j\omega)$ 可近似写作

$$H(j\omega) \Big|_{\left(\frac{1}{R_2 C_2} < \omega < \frac{1}{R_1 C_1}\right)} \approx \frac{k}{R_1 C_1} \cdot \frac{-j\omega}{\frac{1}{R_1 C_1} + j\omega} = k$$

这时的频响特性近于常数。

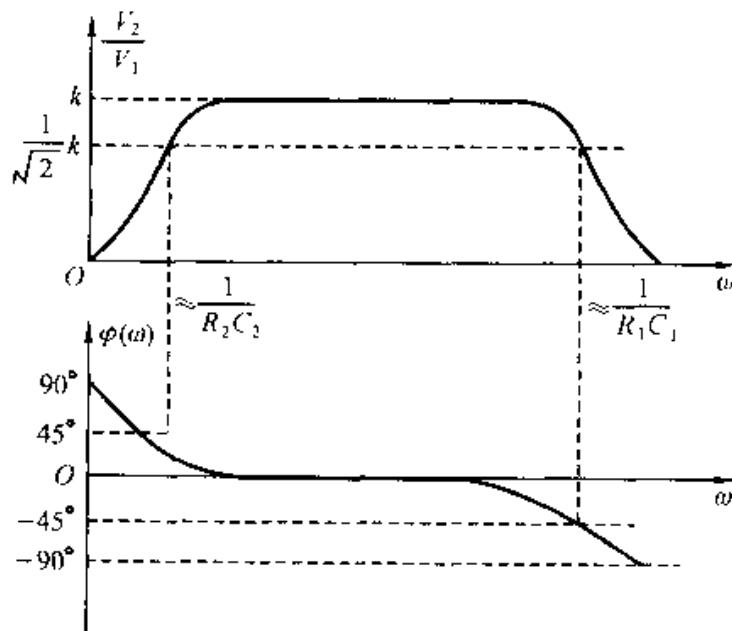


图 4-34 例 4-22 的频响曲线

从物理概念上讲, 在低频端, 主要是 $R_2 C_2$ 的高通特性起作用; 在高频端, 则是 $R_1 C_1$ 的低通特性起主要作用; 在中频段, C_1 相当于开路、 C_2 相当于短路, 它们都不起作用, 信号 v_1 经受控源的 k 倍相乘而送往输出端, 给出 v_2 。可见此系统相当于低通与高通级联构成的带通系统。

4.9 二阶谐振系统的 s 平面分析

含有电容、电感两类储能元件的二阶系统可以具有谐振特性, 在无线电技术中, 常利用它们的这一性能构成带通、带阻滤波网络。

图 4-35 (a) 和 (b) 给出两个谐振电路的基本模型: RLC 串联谐振电路与 GCL 并联谐振电路。由于它们相互之间具有对偶关系, 在此可只研究其中一种, 所得结论可借助对偶方法去解释另一电路。这里, 只讨论并联谐振电路。

我们的目的是要研究在激励信号——电流源 i_1 的作用下, 并联回路端电压 v_2 的频率特性。写出网络函数(此处即阻抗函数)的表示式为

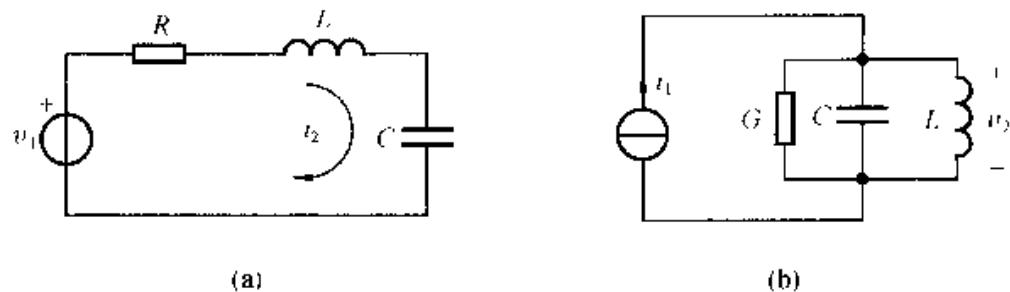


图 4-35 谐振电路模型

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{1}{G + sC + \frac{1}{sL}} \\ &= \frac{1}{C} \cdot \frac{s}{\left(s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} \right)} \\ &= \frac{1}{C} \cdot \frac{s}{(s - p_1)(s - p_2)} \end{aligned} \quad (4-119)$$

其中，极点位置是

$$p_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (4-120)$$

引用符

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \omega_d &:= \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-121)$$

得到

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \quad (4-122)$$

这几个参数的物理意义并不陌生。 ω_0 是谐振频率(下面将要讲到如何从 s 平面的几何关系解释谐振现象的产生条件)。 α 是衰减因数, α 愈大表示电路的能量损耗愈大。在实际应用中, 对于谐振电路损耗情况的另一种描述方法是引用品质因数 Q 作为参数, Q 的定义是

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} \quad (4-123)$$

Q 愈高表示电路的损耗愈小。显然， α 与 Q 之间的对应关系为

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \quad (4-124)$$

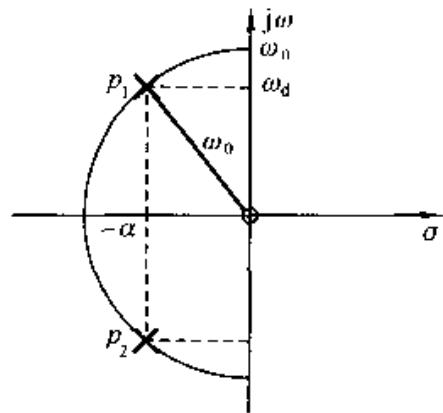
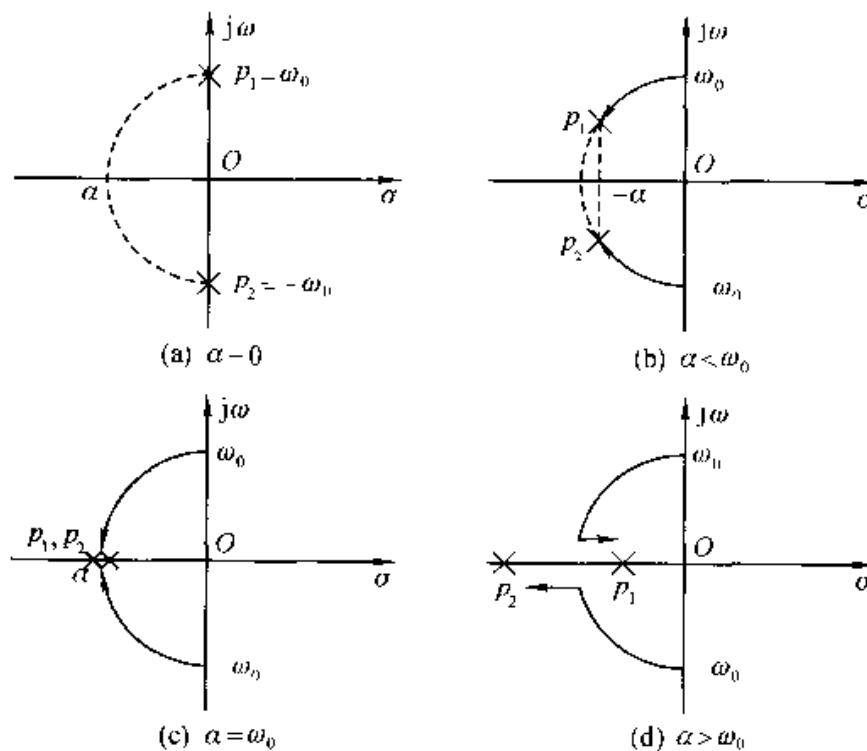
下面描绘在 s 平面上, $Z(s)$ 的零、极点分布。先从 $\alpha < \omega_0$ 的情况开始讨论, 这时电路损耗较小, 是实际应用中多见的情况。它的零、极点分布示于图

4-36。零点位于 s 平面坐标原点，一对共轭极点距虚轴为 α ，与实轴距 ω_d ，由式(4-121)得

$$\omega_0^2 = \omega_d^2 + \alpha^2 \quad (4-125)$$

在图 4-36 中， ω_d 和 α 分别作为直角三角形的两个直角边，从坐标原点到极点 p_1 (或 p_2)的连线就是此直角三角形的斜边，它的长度应等于 ω_0 。这表明在 $\alpha < \omega_0$ 的范围内，如果保持 ω_0 值不变，那么无论电路参数如何选取，共轭极点 p_1, p_2 总是落在以坐标原点为圆心，以 ω_0 为半径的左半圆弧上。

在没有损耗的情况下，即 $G = 0, \alpha = 0$ ，共轭极点将落在虚轴上，如图 4-37 (a)， $p_1 = j\omega_0, p_2 = -j\omega_0$ ，随着损耗增加，即 α 加大，两极点沿半圆向负实轴靠拢，见图 4-37 (b)。当 α 增长到 $\alpha = \omega_0$ 时，两极点位置重合，落在负实轴上，成为二阶极点，如图 4-37 (c)。继续增大 α ，这时将有 $\alpha > \omega_0$ ，重合的极点又分开为两个极点，沿负实轴向左、右两侧移动，如图 4-37 (d)，当 α 趋于无限大时，两极点位置则分别趋于零和负无限大。

图 4-36 $Z(s)$ 的零、极点分布图 4-37 并联谐振电路，极点分布随 α 改变的移动轨迹

现在让 ω 沿虚轴移动，观察 $Z(s)$ 函数分子、分母中各因子 $(j\omega - z_i)$ 与 $(j\omega - p_i)$ 在 s 平面相应矢量的变化规律，分析 $Z(s)$ 稳态频率响应特性。为此，

令 $Z(s)$ 中的变量 $s = j\omega$, 写出

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{1}{C} \frac{j\omega}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} \\ &= \frac{1}{C} \frac{N_1}{M_1 M_2} e^{j(\psi_1 - \theta_1 - \theta_2)} \\ &= |Z(j\omega)| e^{j\varphi} \end{aligned} \quad (4-126)$$

图 4-38 示出 $\alpha < \omega_0$ 条件下, ω 从 0 向 $+\infty$ 移动时, 相应的四幅 s 平面矢量图。

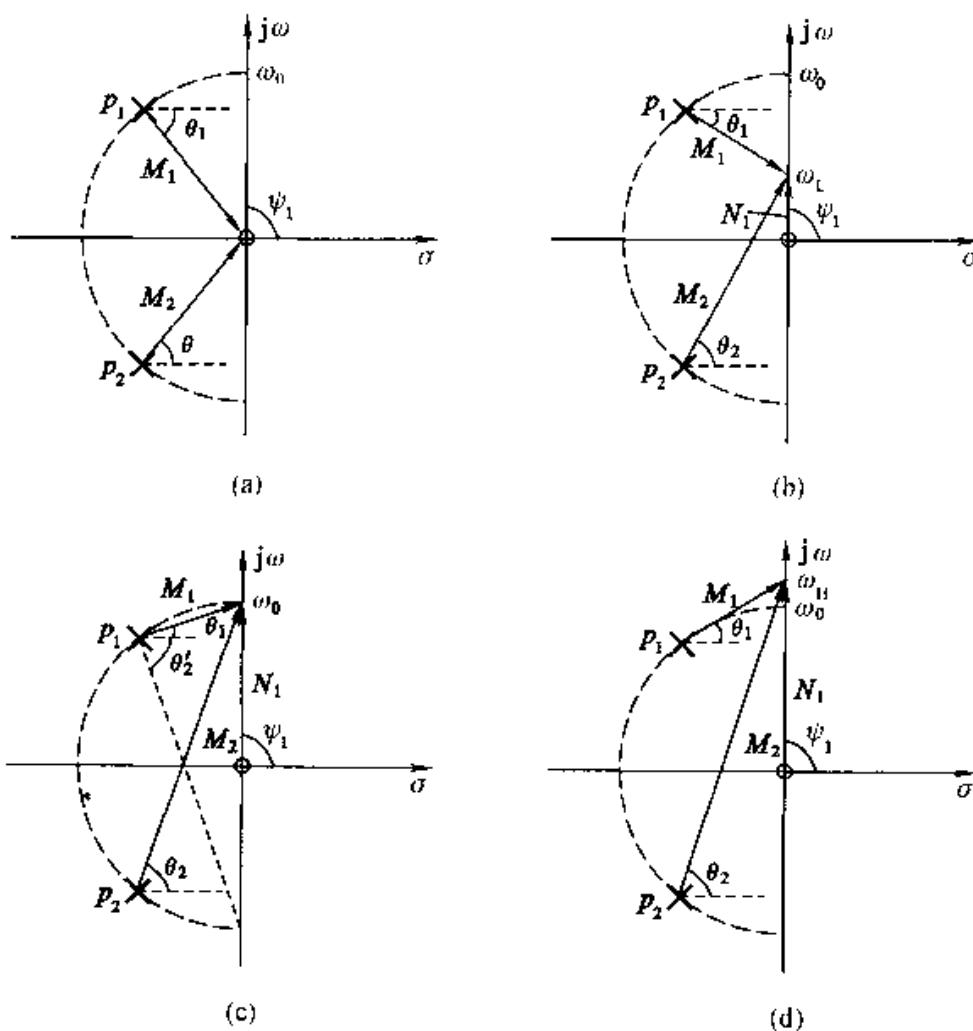


图 4-38 s 沿 $j\omega$ 轴移动时矢量因子变化图

当 $\omega=0$ 时, $N_1=0, M_1=M_2=\omega_0, \theta_1=-\theta_2, \psi_1=90^\circ$, 于是得到 $|Z(j\omega)|=0, \varphi=+90^\circ$ 。这是图 4-38(a) 的情况。随着 ω 增长, N_1 增加, θ_1 的绝对值减小, θ_2 加大, 于是频率特性的幅值 $|Z(j\omega)|$ 增加, 辐角 φ 从 90° 减小, 这种情况示于图 4-38(b), 此时, 频率值 ω 已移至 ω_L 点。 ω 继续沿虚轴上移至与圆弧交界 ω_0 点, 如图 4-38(c), 此时, 到达谐振点, 借助图中辅助虚线容易证明角 θ'_2 与 θ_2 相等, 而且 $\theta_1 + \theta'_2 = 90^\circ$, 所以 $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, 于是

$$\varphi = \psi_1 - \theta_1 - \theta_2$$

$$= 90^\circ + 90^\circ = 0^\circ \quad (4-127)$$

同时, $|Z(j\omega)|$ 取得最大值, 可由式(4-119)直接求得^①

$$|Z(j\omega_0)| = \frac{1}{G} \quad (4-128)$$

此后, 再增加 ω 则由于 M_1, M_2 显著增长, 而 N_1 变化平缓, 所以 $|Z(j\omega)|$ 逐渐减小, 最后 M_1, M_2, N_1 都趋于无限大, 所以 $|Z(j\omega)|$ 趋于零; 又因为 $\theta_1 + \theta_2$ 继续增大, 而且 $\theta_1 + \theta_2 > 90^\circ$, 所以 φ 角的负值加大, 当 $\theta_1 + \theta_2$ 趋向 180° 时, φ 趋于 -90° 。图 4-38(d)示出 ω 变动至 ω_H 点 ($\omega_H > \omega_0$) 的 s 平面矢量图。按上述过程描绘出谐振电路的幅度频率特性和相位频率特性曲线分别如图 4-39(a)和(b), 请注意图中各频率值与图 4-38 的对应。

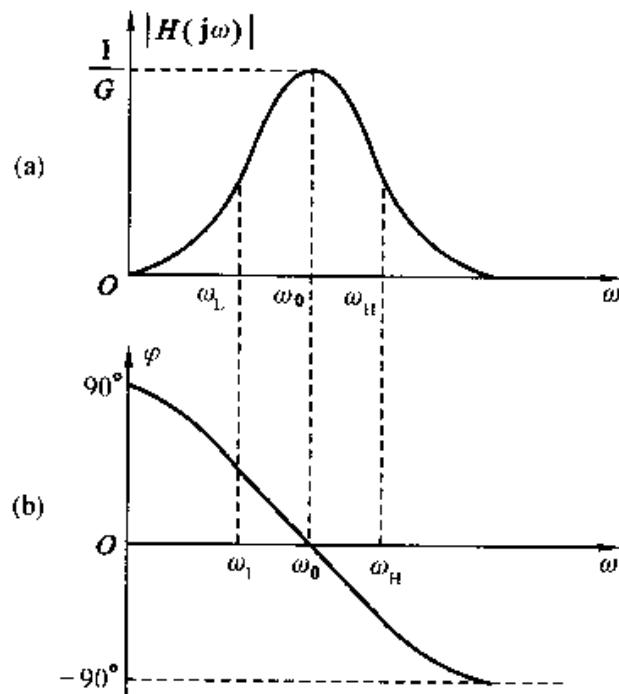


图 4-39 谐振电路频率特性

实际应用中较多遇到高 Q 情况, 例如, 若 $Q > 10$, 则 $\alpha < \frac{\omega_0}{20}$, 于是两共轭极点 p_1, p_2 将非常靠近虚轴, 如图 4-40 所示。研究这种高 Q 电路 ω 在 ω_0 附近变动的频率特性时, 可以取:

$$\begin{aligned} N_1 &\approx \omega_0, \quad \psi_1 = 90^\circ \\ M_2 &\approx 2\omega_0, \quad \theta_2 \approx 90^\circ \\ M_1 e^{j\theta_1} &= \alpha + j(\omega - \omega_d) \end{aligned} \quad (4-129)$$

^① 也可由直角三角形的几何关系求得, 此时 $M_1 M_2 = 2N_1\alpha$, $\frac{1}{C} \cdot \frac{N_1}{M_1 M_2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{G}$ 。

注意到这时 ω_d 几乎与 ω_0 重合 ($\omega_d \approx \omega_0$)，所以式(4-129)又近似为

$$M_1 e^{j\theta_1} \approx \alpha + j(\omega - \omega_0) \quad (4-130)$$

于是得到

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &\approx \frac{1}{C} \cdot \frac{\omega_0}{2\omega_0 [\alpha + j(\omega - \omega_0)]} \\ &= \frac{1}{2C\alpha} \left[\frac{1}{1 + j \frac{(\omega - \omega_0)}{\alpha}} \right] \\ &= \frac{1}{G} \cdot \left[\frac{1}{1 + j \frac{(\omega - \omega_0)}{\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (4-131)$$

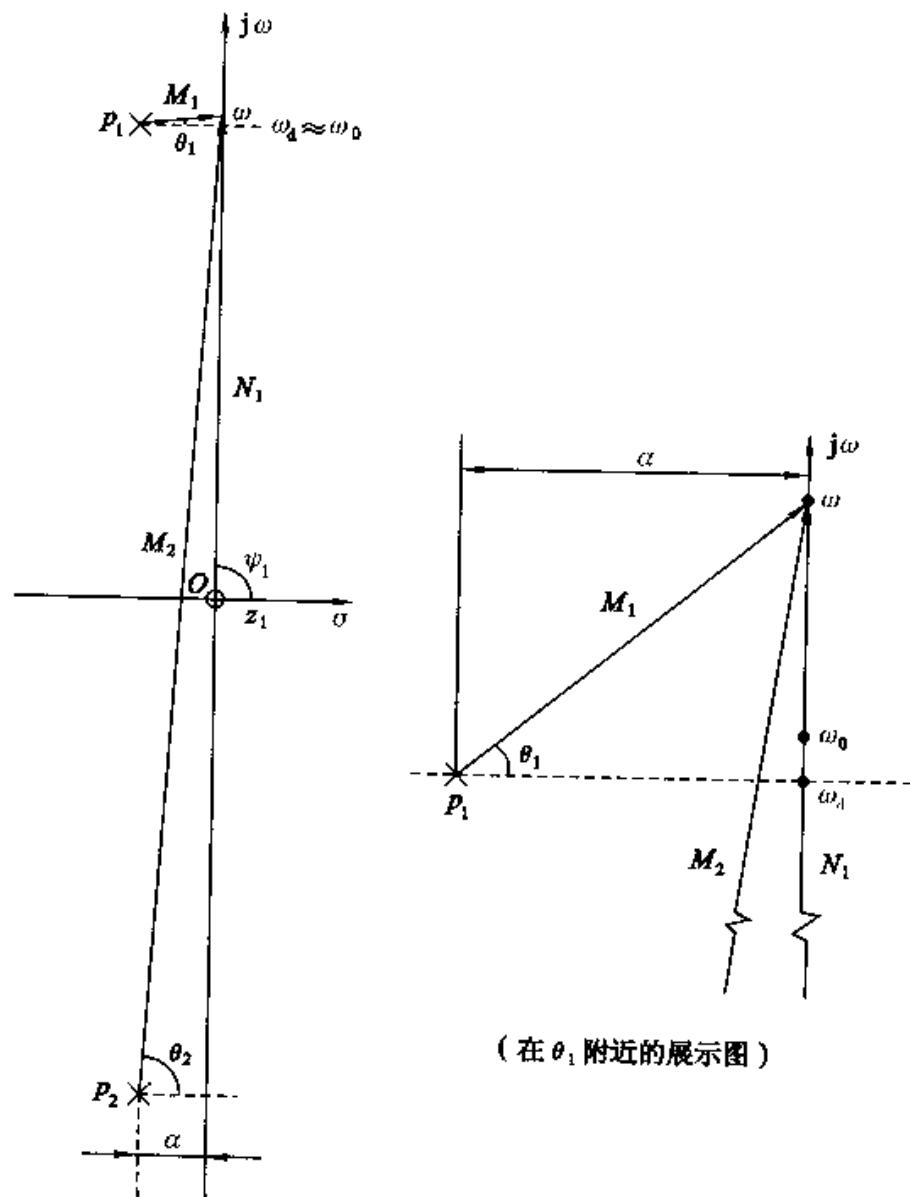


图 4-40 高 Q 并联谐振电路阻抗 s 平面分析

所以：

$$|Z(j\omega)| \approx \frac{1}{G \sqrt{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2}} \quad (4-132)$$

$$\varphi \approx -\arctan\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) \quad (4-133)$$

利用式(4-132)很容易求得高 Q 谐振电路幅频特性曲线各点数值。现在由它来求通带边界频率和通带宽度。在谐振点 $|Z(j\omega_0)| = \frac{1}{G}$, 通带边界频率 ω_1 (或 ω_2) 处应有

$$|Z(j\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{G} = |Z(j\omega_2)|$$

由式(4-132)看出，必须满足

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\alpha} = -1 \quad (4-134)$$

或

$$\frac{\omega_2 - \omega_0}{\alpha} = +1 \quad (4-135)$$

相应的还有：

$$\varphi_1 = +45^\circ$$

$$\varphi_2 = -45^\circ$$

由式(4-134)与式(4-135)分别解得：

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha \quad (4-136)$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \alpha \quad (4-137)$$

两频率之差，即通带宽度

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q} \quad (4-138)$$

将角频率改写为频率，用 B 表示通带宽度

$$B = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q} \quad (4-139)$$

上述并联谐振电路阻抗函数的特点是具有-一对靠近虚轴的共轭极点。下面再举出网络函数同时具有共轭极点和共轭零点的系统实例，求图 4-41 电路的阻抗函数频率特性。此电路有三个独立的电抗元件，阻抗函数 $Z(s)$ 零、极点的数目要比图 4-35 电路模型增多。此外，它是无损电路。

为分析频率特性，首先写出 $Z(s)$ 表示式

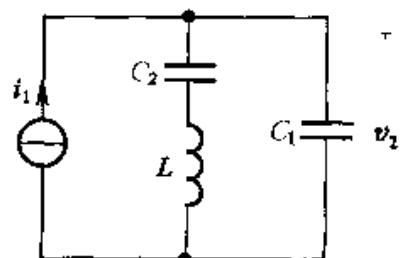


图 4-41 同时具有共轭极点
和共轭零点的谐振电路

$$\begin{aligned}
 Z(s) &= \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC_1} \left(sL + \frac{1}{sC_2} \right)}{\frac{1}{sC_1} + \left(sL + \frac{1}{sC_2} \right)} = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{\left(s^2 + \frac{1}{LC_2} \right)}{s \left(s^2 + \frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2} \right)} \\
 &= \frac{1}{C_1} \cdot \frac{s^2 + \omega_1^2}{s(s^2 + \omega_2^2)}
 \end{aligned} \quad (4-140)$$

这里：

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}$$

显然， ω_1 与 ω_2 之间应满足

$$\omega_1 < \omega_2$$

画出 $Z(s)$ 在 s 平面零、极点分布图如图 4-42。它有一对共轭极点 $\pm j\omega_2$ 和一对共轭零点 $\pm j\omega_1$ ，此外，在坐标原点也有一个极点。利用 $Z(j\omega)$ 表示式

$$Z(j\omega) = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{(j\omega + j\omega_1)(j\omega - j\omega_1)}{j\omega(j\omega + j\omega_2)(j\omega - j\omega_2)} = |Z(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (4-141)$$

将式中各复数因子（矢量）作图容易求得：当 $\omega = 0$ 和 $\omega = \omega_2$ 两极点处 $|Z(j\omega)|$ 为 ∞ ，而在 $\omega = \omega_1$ 零点处 $|Z(j\omega)| = 0$ 。相位变化则是在 $0 < \omega < \omega_1$ 范围内 $\varphi = -90^\circ$ ，当 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 时 $\varphi = +90^\circ$ ，而 $\omega > \omega_2$ 以后又有 $\varphi = -90^\circ$ 。所得结果画成曲线如图 4-43。

虽然，这是一个无损谐振电路，但有些结论也可延用于一些有损高 Q 电路，这些电路的零、极点虽未落于虚轴，却相当靠近虚轴。

一般情况下，可以认为，若网络函数有一对非常靠近 $j\omega$ 轴的极点

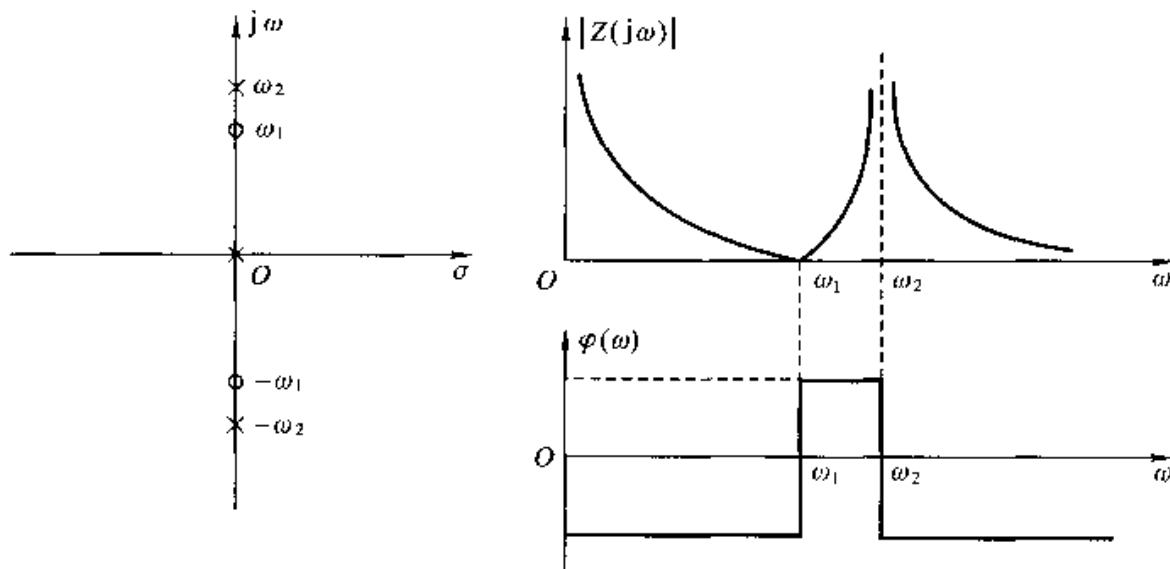


图 4-42 式(4-140)函数的 s 平面零、极点分布图

图 4-43 图 4-41 电路的频率特性

$$p = -\sigma_i \pm j\omega_i \quad (\sigma_i \ll \omega_i)$$

则在 $\omega = \omega_i$ 附近处，幅频响应特性出现峰点，相频响应迅速减小，如图 4-44 (a) 所示。又若网络函数有一对非常靠近 $j\omega$ 轴的零点

$$p = -\sigma_j \pm j\omega_j \quad (\sigma_j \ll \omega_j)$$

则在 $\omega = \omega_j$ 附近处，幅频响应特性下陷，相频响应特性迅速上升，如图 4-44 (b) 所示。

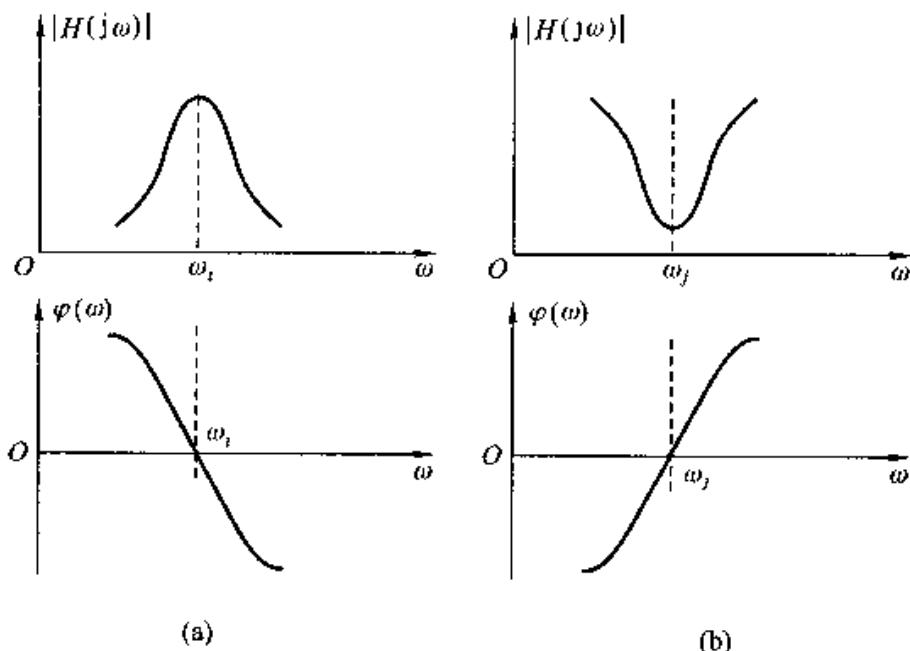


图 4-44 非常靠近 $j\omega$ 轴的极点与零点的作用

若零点与极点离开 $j\omega$ 轴很远（即它们的实部远大于虚部），那么，这些零点和极点对于幅频响应曲线和相频响应曲线的形状影响很小。它们的作用只是使总的振幅和相位的相对大小有所增减。

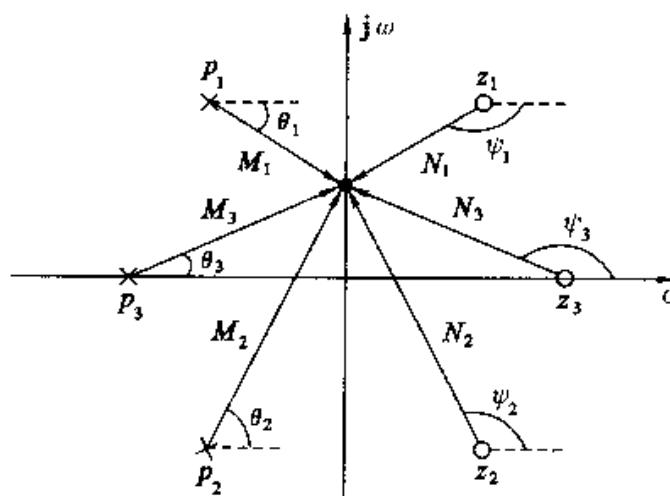
4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

如果一个系统函数的极点位于左半平面，零点位于右半平面，而且零点与极点对于 $j\omega$ 轴互为镜像，那么，这种系统函数称为全通函数，此系统则称全通系统或全通网络。所谓全通是指它的幅频特性为常数，对于全部频率的正弦信号都能按同样的幅度传输系数通过。

下面分析具有这种零、极点分布的系统为什么表现出“全通”特性。

图 4-45 举例示出全通网络 s 平面零、极点分布。在此图中零点 z_1, z_2, z_3 分别与极点 p_1, p_2, p_3 以 $j\omega$ 轴互为镜像关系。因此，相应的矢量长度对应相等，即：

$$M_1 = N_1$$

图 4-45 全通网络 s 平面零、极点分布图示例

$$M_2 = N_2$$

$$M_3 = N_3$$

网络频率特性的表示式为

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= K \frac{N_1 N_2 N_3}{M_1 M_2 M_3} e^{j[(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]} \\ &= K e^{j[(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]} \end{aligned} \quad (4-142)$$

显然, 由于 $N_1 N_2 N_3$ 与 $M_1 M_2 M_3$ 相消, 幅频特性等于常数 K , 即

$$|H(j\omega)| = K \quad (4-143)$$

因而具有全通特性。再看相频特性, 当 $\omega = 0$ 时, $\theta_1 = -\theta_2, \psi_1 = -\psi_2, \theta_3 = 0, \psi_3 = 180^\circ$, 所以 $\varphi = 180^\circ$; 当 ω 沿 $j\omega$ 轴向上移动时, θ_2, θ_3 增加, ψ_2, ψ_3 减小, 而且 θ_1 由负变正, ψ_1 更加变负, 于是 φ 下降; 而当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ, \psi_1 = -270^\circ, \psi_2 = \psi_3 = 90^\circ$, 因而 $\varphi = -360^\circ$; φ 角变化的全部过程是从 $+180^\circ$ 下降, 经零点、最终趋于 -360° 。此网络的幅频特性与相频特性曲线分别绘于图 4-46(a)和(b)。

从以上分析不难看出, 全通网络函数的幅频特性虽为常数, 而相频特性却不受什么约束, 因而, 全通网络可以保证不影响待传送信号的幅度频谱特性, 只改变信号的相位频谱特性, 在传输系统中常用来进行相位校正, 例如, 作相位均衡器或移相器。

例 4-23 图4-47 所示为格形网络, 参数间满足 $\frac{L}{C} = R^2$, 写出网络传输函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, 判别它是否为全通网络。

解

引用符号

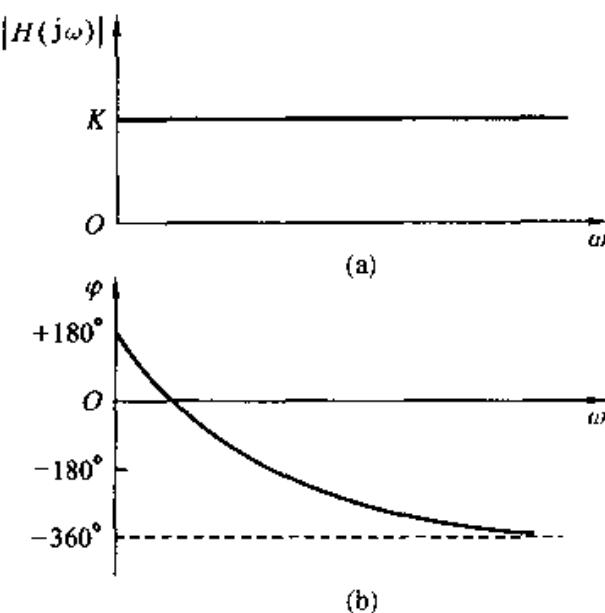


图 4-46 具有图 4-45 s 域特性的全通网络
幅频特性与相频特性

$$Z_1 = sL, \quad Z_2 = \frac{1}{sC}$$

于是有

$$Z_1 Z_2 = R^2$$

为写出 $H(s)$, 从 2-2' 端向左应用戴维宁定理,

求得内阻为 $\frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$, 等效电源为 $V_1(s) \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$,

如图 4-48。容易求得

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot \frac{R}{R + \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} \\ &= \frac{(Z_2 - Z_1)R}{(Z_2 + Z_1)R + 2Z_2 Z_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1 + 2\sqrt{Z_2 Z_1}} \\ &= \frac{\sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_1}}{\sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_1}} = \frac{R - Z_1}{R + Z_1} \end{aligned}$$

将 $Z_1 = sL$ 代入得到

$$H(s) = \frac{R - sL}{R + sL} = \frac{s - \frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}}$$

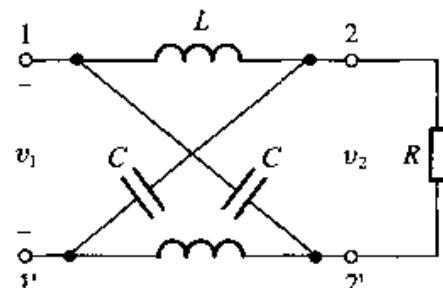


图 4-47 例 4-23 的格形网络

它的零、极点分布互为镜像, 如图 4-49, 因此是一个全通网络。将 s 以 $j\omega$ 置换, 求得转移函数频率特性

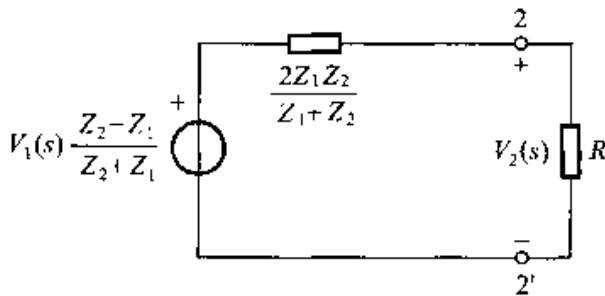


图 4-48 图 4-47 的等效电路

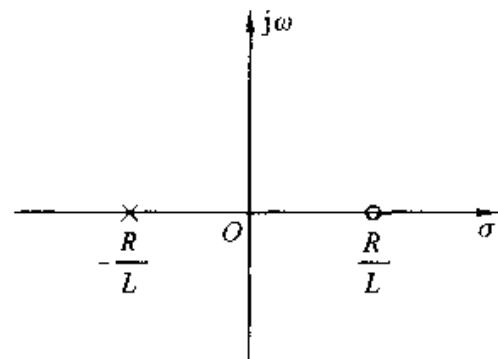


图 4-49 例 4-23 网络函数的零、极点分布

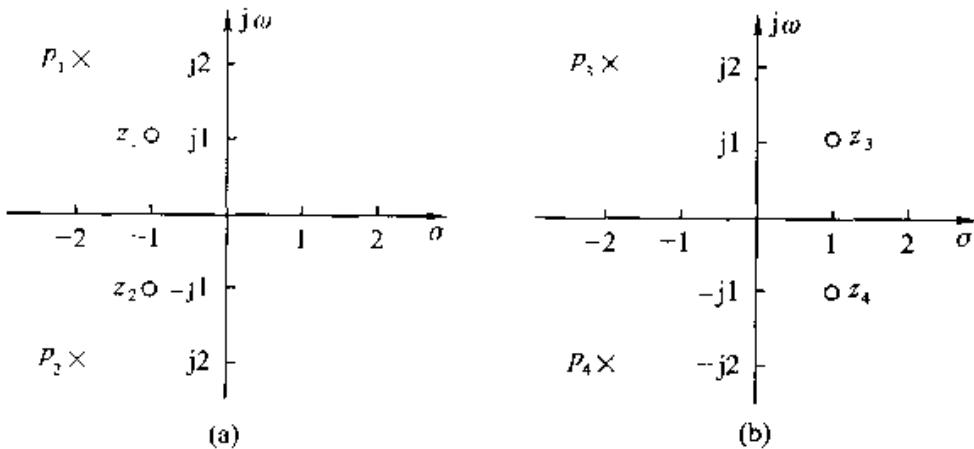
$$H(j\omega) = \frac{R - j\omega L}{R + j\omega L} = e^{j\varphi(\omega)}$$

其中

$$\varphi(\omega) = -2\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

在第 4.7 节曾讲到, 为使网络稳定, 必须限制网络函数的极点位于左半平面, 至于它的零点落于 s 平面右半或左半平面对于网络特性又有什么影响呢? 现来研究这方面的问题。

考察图 4-50(a) 和 (b) 的 s 平面零、极点分布可以看出, 它们有相同的极点 $p_{1,2} = p_{3,4} = -2 \pm j2$; 而二者的零点却以 $j\omega$ 轴成镜像关系, $z_{1,2} = -1 \pm j1$, $z_{3,4} = 1 \pm j1$ 。不难看出, 对于这两种分布情况, 它们的幅频响应特性是相同的, 这是由于, $H(j\omega)$ 函数的各复数因子构成的矢量长度都对应相等。再看相位情况, 对于零点位于右半平面的图形, 各矢量构成的辐角有较大的绝对值, 而零点位于左半平面者辐角的绝对值比前者小。作出图 4-50(a) 与 (b) 对应的相频响应曲线如图 4-51 所示。显然, 就相移的绝对值而言, 图 4-50(a) 具有较小的相移。

图 4-50 最小相移网络与非最小相移网络的 s 平面图

根据上述分析，引出以下定义。零点仅位于左半平面或 $j\omega$ 轴的网络函数称为“最小相移函数”，该网络称为“最小相移网络”。如果网络函数在右半平面有一个或多个零点，那么，就称为“非最小相移函数”，这类网络称为“非最小相移网络”。

非最小相移函数可以表示为最小相移函数与全通函数的乘积。也即，非最小相移网络可代之以最小相移网络与全通网络的级联。例如，图 4-52 (a) 的函数可表示为图 4-52 (b) 与 (c) 之乘积。下面推导有关的函数表示式。

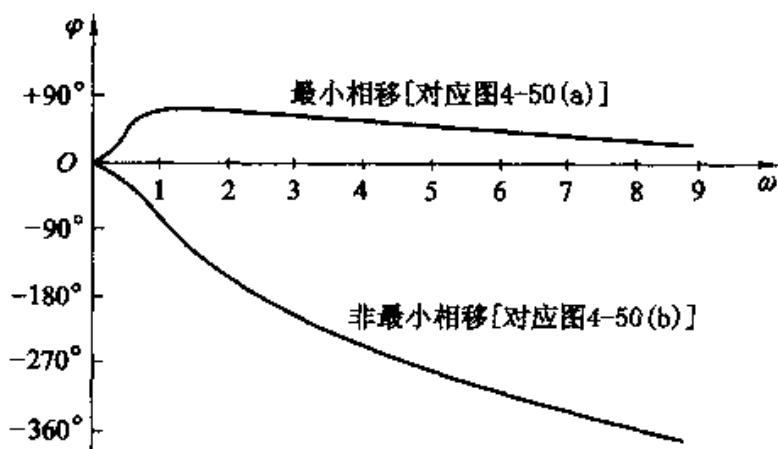


图 4-51 与图 4-50 对应的相移特性

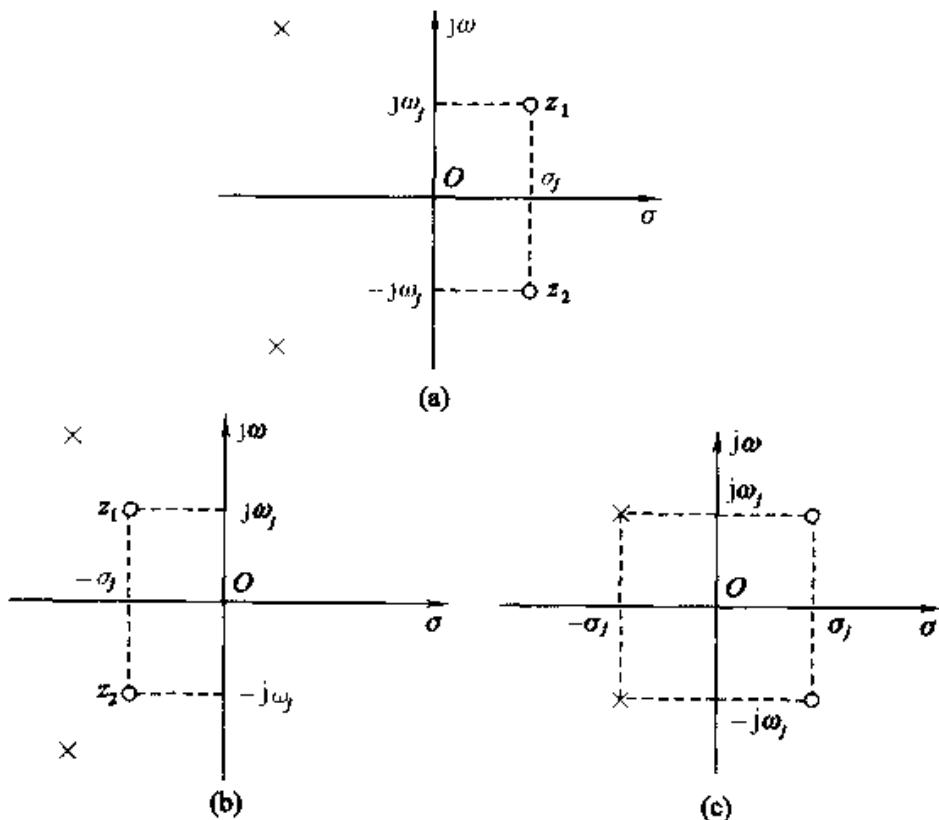


图 4-52 非最小相移函数表示为最小相移函数与全通函数的乘积

设非最小相移函数在右半平面的零点位于

$$z_{1,2} = \sigma_j \pm j\omega_j \quad (4-144)$$

它在网络函数 $H(s)$ 分子中的复数因子为

$$\begin{aligned} & [s - (\sigma_j + j\omega_j)] [s - (\sigma_j - j\omega_j)] \\ & = [(s - \sigma_j)^2 + \omega_j^2] \end{aligned} \quad (4-145)$$

于是 $H(s)$ 可写为

$$H(s) = H_{\min}(s)[(s - \sigma_j)^2 + \omega_j^2] \quad (4-146)$$

由于在 $H(s)$ 中提出了式(4-145)这一项, 余下的 $H_{\min}(s)$ 必然是最小相移函数, 再为式(4-146)提供左半平面零点的因子项 $[(s + \sigma_j)^2 + \omega_j^2]$ 最后得到

$$H(s) = \frac{H_{\min}(s)[(s + \sigma_j)^2 + \omega_j^2]}{(s + \sigma_j)^2 + \omega_j^2} \quad (4-147)$$

非最小相 移函数	最小相移函数	全通函数
-------------	--------	------

4.11 线性系统的稳定性

4.7 节到 4.10 节讨论了 $H(s)$ 零、极点分布与系统时域特性、频响特性的关系, 作为 $H(s)$ 零、极点分析的另一重要应用是借助它来研究线性系统的稳定性。

按照研究问题的不同类型和不同角度, 系统稳定性的定义有不同形式, 涉及的内容相当丰富, 本节只作初步的简单介绍, 在本书第十一、十二章以及后续课程(如控制理论)中将作进一步研究。

稳定性是系统自身的性质之一, 系统是否稳定与激励信号的情况无关。

系统的冲激响应 $h(t)$ 或系统函数 $H(s)$ 集中表征了系统的本性, 当然, 它们也反映了系统是否稳定。判断系统是否稳定, 可从时域或 s 域两方面进行。对于因果系统观察在时间 t 趋于无限大时, $h(t)$ 是增长、还是趋于有限值或者消失, 这样可以确定系统的稳定性。研究 $H(s)$ 在 s 平面上极点分布的位置, 也可很方便地给出有关稳定性的结论。从稳定性考虑, 因果系统可划分为稳定系统、不稳定系统、临界稳定(边界稳定)系统三种情况:

(1) 稳定系统: 如果 $H(s)$ 全部极点落于 s 左半平面(不包括虚轴), 则可以满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [h(t)] = 0 \quad (4-148)$$

系统是稳定的(参看表 4-4, 表 4-5)。

(2) 不稳定系统: 如果 $H(s)$ 的极点落于 s 右半平面, 或在虚轴上具有二阶以上的极点, 则在足够长时间以后, $h(t)$ 仍继续增长, 系统是不稳定的。

(3) 临界稳定系统: 如果 $H(s)$ 的极点落于 s 平面虚轴上, 且只有一阶,

则在足够长时间以后， $h(t)$ 趋于一个非零的数值或形成一个等幅振荡。这处于上述两种类型的临界情况。

稳定系统的另一种定义方式如下：若系统对任意的有界输入其零状态响应也是有界的，则称此系统为稳定系统。也可称为有界输入有界输出(BIBO)稳定系统。上述定义可由以下数学表达式说明

对所有的激励信号 $e(t)$

$$|e(t)| \leq M_e \quad (4-149)$$

其响应 $r(t)$ 满足

$$|r(t)| \leq M_r \quad (4-150)$$

则称该系统是稳定的。式中， M_e ， M_r 为有界正值。按此定义，对各种可能的 $e(t)$ ，逐个检验式(4-149)与式(4-150)来判断系统稳定性将过于繁琐，也是不现实的，为此导出稳定系统的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq M \quad (4-151)$$

式中 M 为有界正值。或者说，若冲激响应 $h(t)$ 绝对可积，则系统是稳定的。下面对此条件给出证明。

对任意有界输入 $e(t)$ ，系统的零状态响应为：

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e(t - \tau) d\tau \quad (4-152)$$

$$|r(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot |e(t - \tau)| d\tau \quad (4-153)$$

代入式(4-149)的条件得到

$$|r(t)| \leq M_e \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \quad (4-154)$$

如果 $h(t)$ 满足式(4-151)，也即 $h(t)$ 绝对可积则

$$|r(t)| \leq M_e \cdot M$$

取 $M_e M = M_r$ 这就是式(4-150)。至此，条件式(4-151)的充分性得到证明。下面研究它的必要性。

如果 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$ 无界，则至少有一个有界的 $e(t)$ 产生无界的 $r(t)$ 。试选具有如下特性的激励信号 $e(t)$

$$e(-t) = \text{sgn}[h(t)] = \begin{cases} -1, & \text{当 } h(t) < 0 \\ 0, & \text{当 } h(t) = 0 \\ 1, & \text{当 } h(t) > 0 \end{cases}$$

这表明 $e(-t)h(t) = |h(t)|$ ，响应 $r(t)$ 的表达式为：

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e(t - \tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} r(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e(-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

此式表明,若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$ 无界,则 $r(0)$ 也无界,即式(4-151)的必要性得证。

在以上分析中并未涉及系统的因果性,这表明无论因果稳定系统或非因果稳定系统都要满足式(4-151)的条件。对于因果系统,式(4-151)可改写为

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| dt \leq M \quad (4-155)$$

对于因果系统,从 BIBO 稳定性定义考虑与考察 $H(s)$ 极点分布来判断稳定性具有统一的结果,仅在类型划分方面略有差异。当 $H(s)$ 极点位于左半平面时, $h(t)$ 绝对可积,系统稳定,而当 $H(s)$ 极点位于右半平面或在虚轴具有二阶以上极点时, $h(t)$ 不满足绝对可积条件,系统不稳定。当 $H(s)$ 极点位于虚轴且只有一阶时称为临界稳定系统, $h(t)$ 处于不满足绝对可积的临界状况,从 BIBO 稳定性划分来看,由于未规定临界稳定类型,因而这种情况可属不稳定范围。

例 4-24 已知两因果系统的系统函数 $H_1(s) = \frac{1}{s}$, $H_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$, 激励信号分别为 $e_1(t) = u(t)$, $e_2(t) = \sin(\omega_0 t) u(t)$, 求两种情况的响应 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$, 并讨论系统稳定性。

解

容易求得激励信号的拉氏变换分别为 $\frac{1}{s}$ 和 $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$, 响应的拉氏变换分别为:

$$R_1(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$R_2(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{2s^2 + \omega_0^2}$$

对应时域表达式:

$$r_1(t) = tu(t)$$

$$r_2(t) = \frac{1}{2} t \sin(\omega_0 t) u(t)$$

在本例中,激励信号 $u(t)$ 和 $\sin(\omega_0 t) u(t)$ 都是有界信号,却都产生无界信号的输出,因而,从 BIBO 稳定性判据可知,两种情况都属不稳定系统。当然,也可检验 $h_1(t) = u(t)$ 和 $h_2(t) = \cos(\omega_0 t) u(t)$ 都未能满足绝对可积,于是得出同样结论。若从系统函数极点分布来看, $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 都具有虚轴上的一阶极点,属临界稳定类型。

对应电路分析的实际问题,通常不含受控源的 RLC 电路构成稳定系统。

不含受控源也不含电阻 R (无损耗), 只由 LC 元件构成的电路会出现 $H(s)$ 极点位于虚轴的情况, $v(t)$ 呈等幅振荡。从物理概念上讲, 上述两种情况都是无源网络, 它们不能对外部供给能量, 响应函数幅度是有限的, 属稳定或临界稳定系统。含受控源的反馈系统可出现稳定、临界稳定和不稳定几种情况, 实际上由于电子器件的非线性作用, 电路往往可从不稳定状态逐步调整至临界稳定状态, 利用此特点产生自激振荡。关于反馈系统的稳定性问题将在第十一章作详细研究, 此处仅举出两个简单例题。

例 4-25 假定图 4-53 所示放大器的输入阻抗等于无限大。输出信号 $V_o(s)$ 与差分输入信号 $V_1(s)$ 和 $V_2(s)$ 之间满足关系式 $V_o(s) = A [V_2(s) - V_1(s)]$, 试求:

$$(1) \text{ 系统函数 } H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)};$$

(2) 由 $H(s)$ 极点分布判断 A 满足怎样的条件时, 系统是稳定的?

解

$$\begin{aligned} \frac{V_2(s)}{V_1(s)} &= \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \\ V_o(s) &= A [V_2(s) - V_1(s)] \\ &= -\frac{1}{R + \frac{1}{sC}} A V_1(s) - A V_1(s) \\ H(s) &= \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{-\frac{A}{R + \frac{1}{sC}}}{1 - \frac{A}{R + \frac{1}{sC}}} \\ &= -\frac{\left(s + \frac{1}{RC}\right)A}{s + \frac{1-A}{RC}} \end{aligned}$$

为使此系统稳定, $H(s)$ 之极点应落于 s 平面之左半面, 故应有

$$\frac{1-A}{RC} > 0$$

即 $A < 1$ 系统稳定。若 $A \geq 1$ 则为临界稳定或不稳定系统。

例 4-26 图 4-54 所示线性反馈系统, 讨论当 K 从 0 增长时, 系统稳定性变化。

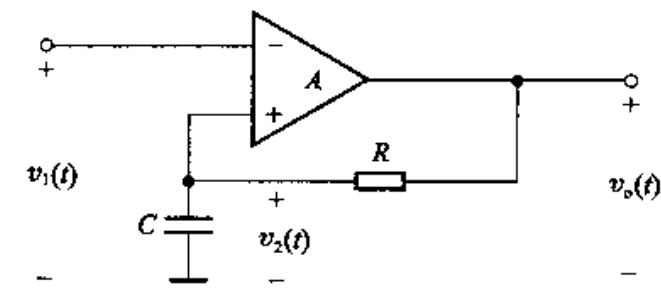


图 4-53 例 4-25 的电路

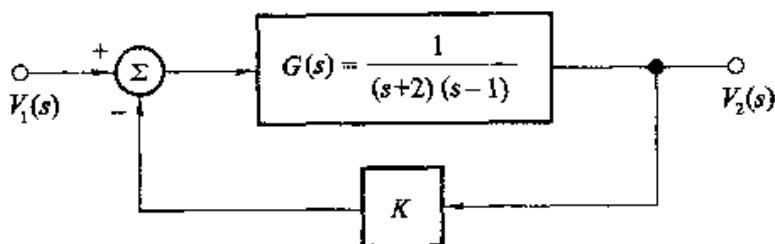


图 4-54 例 4-26 的电路

解

$$V_2(s) = [V_1(s) - KV_2(s)]G(s)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_2(s)}{V_1(s)} &= \frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{\frac{1}{(s-1)(s+2)}}{1 + \frac{K}{(s-1)(s+2)}} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+2)+K} = \frac{1}{s^2+s-2+K} \\ &= \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)} \end{aligned}$$

求得极点位置：

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - K}$$

$$K = 0, p_1 = -2, p_2 = +1$$

$$K = 2, p_1 = -1, p_2 = 0$$

$$K = \frac{9}{4}, p_1 = p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$K > \frac{9}{4}, \text{有共轭复根，在左半平面。}$$

因此， $K > 2$ 系统稳定， $K = 2$ 为临界稳定， $K < 2$ 系统不稳定。 K 增长时，极点在 s 平面之移动过程示意于图 4-55。

在线性时不变系统(包括连续与离散)分析中，系统函数方法占据重要地位。以上各节研究了利用 $H(s)$ 求解电路以及由 $H(s)$ 零、极点分布决定系统的时域、频域特性和稳定性等各类问题。在本书以后许多章节中还要看到系统函数的广泛应用，从多种角度理解和认识它的作用。然而，必须注意到应用这一概念的局限性：系统函数只能针对零状态响应描述系统的外特性，不能反映系统内部性能。在第十二章状态变量分析中将进一步说明这一问题。此外，对于相当多的工程实际问题，难以建立确切的系统函数模型，对高阶线性系统求出严格的系统函数过于烦琐，对于非线性系统、时变系统以及许多模糊现象则不能采用系统函数的方法。近年来，人工神经网络和模糊控制等方法的出现为解

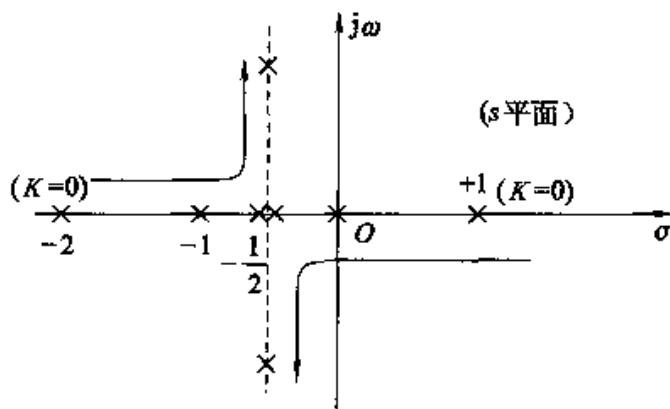


图 4-55 极点在 s 平面移动过程

决这类问题开辟了新的途径。这些新方法在构成原理和处理问题的出发点等方面与本章给出的系统函数方法有着重大区别，将在后续课程中看到。

4.12 双边拉氏变换

在导出单边拉氏变换式(4-3)时，曾将傅里叶积分的下限取 0 值，这样作的理由是注意到一般情况下的实际信号都是从 $t = 0$ 开始的；另一方面，这样作便于引入衰减因子 $e^{-\sigma t}$ ，否则，若将积分下限从 $-\infty$ 开始，在 $t < 0$ 范围内， $e^{-\sigma t}$ 成为增长因子，不但不起收敛作用，反而可能使积分发散。例如：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} t e^{-\sigma t} = -\infty \quad (\sigma > 0)$$

故积分式 $\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\sigma t} dt$ 不收敛。

但是，也有一些函数，当 σ 选在一定范围内，积分式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} dt \quad (4-156)$$

为有限值(见例 4-27)。这表明，按照式(4-156)求积分也可得到函数 $f(t)$ 的一种变换式，这就是双边拉氏变换(也称为指数变换或广义傅里叶变换)。为与单边变换符号 $F(s)$ 相区别，可以用 $F_B(s)$ 表示双边拉氏变换。

下面讨论双边拉氏变换的收敛问题。

例 4-27 设已知函数

$$f(t) = u(t) + e^t u(-t)$$

其波形如图 4-56(a)(见下页)。试确定 $f(t)$ 双边拉氏变换的收敛区。

解 (1) 讨论收敛区

取积分

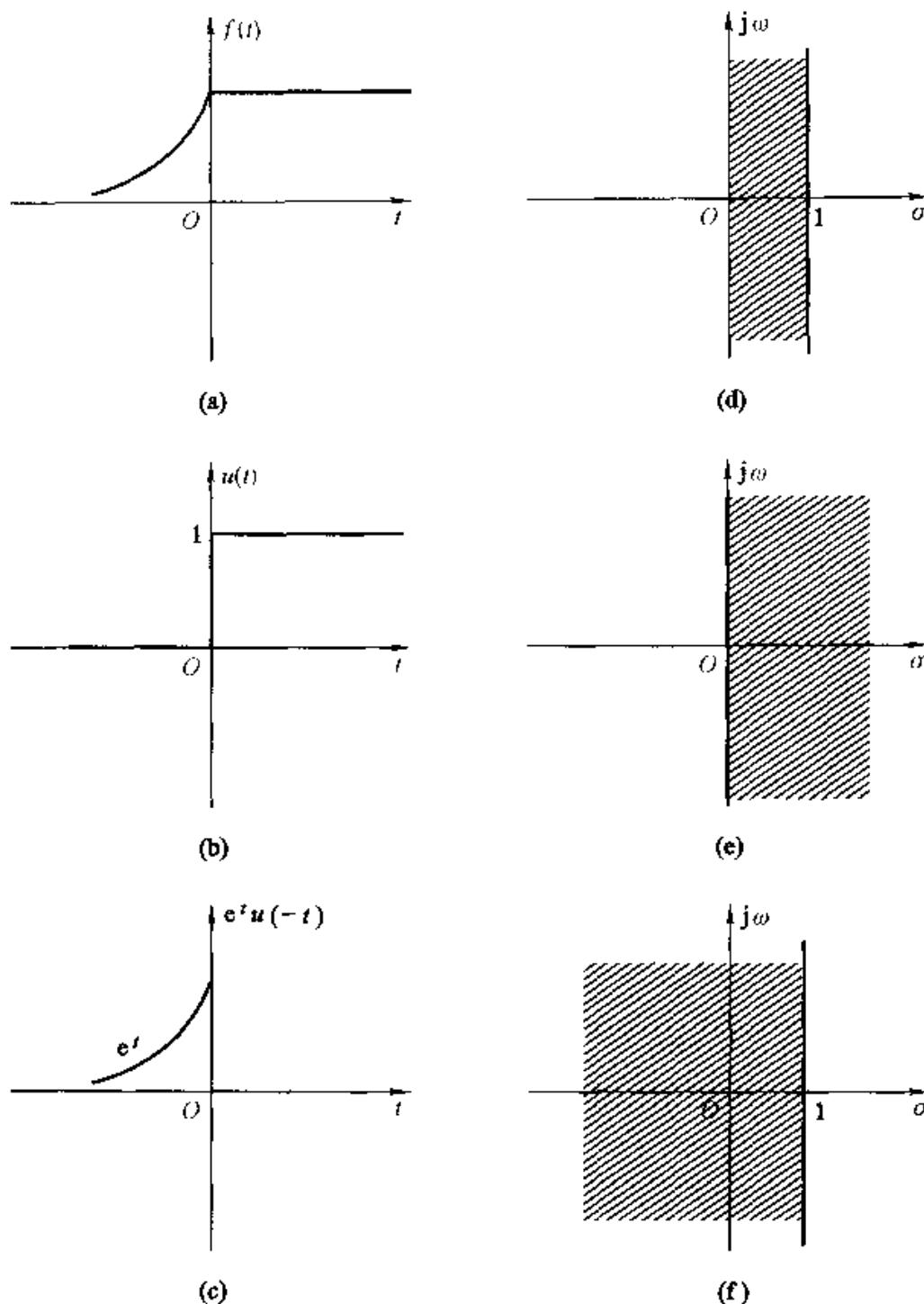


图 4-56 例 4-27 的波形与收敛区。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-\sigma)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} dt$$

此式右侧第一项积分当 $\sigma < 1$ 时是收敛的，第二项积分当 $\sigma > 0$ 时是收敛的。所以在 $0 < \sigma < 1$ 的范围内， $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足收敛条件，对其他 σ 值而言，双边拉氏变换是不存在的。在图 4-56 中将函数 $f(t)$ 分解为两部分，如图(b)和(c)，分别示出了它们相应的收敛区如图(d), (e), (f)。

(2) 求双边拉氏变换

$$\begin{aligned} F_B(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(1-s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \quad (0 < \sigma < 1) \end{aligned}$$

不难看出, 双边拉氏变换的问题可分解为两个类似单边拉氏变换的问题来处理。双边拉氏变换的收敛区一般讲有两个边界, 一个边界决定于 $t > 0$ 的函数, 是收敛区的左边界, 以 σ_1 表示; 另一个边界决定于 $t < 0$ 的函数, 是收敛区的右边界, 以 σ_2 表示。若 $\sigma_1 < \sigma_2$, 则 $t > 0$ 与 $t < 0$ 的两个函数有共同的收敛区, 双边拉氏变换存在; 如果 $\sigma_1 \geq \sigma_2$, 无共同收敛区, 双边拉氏变换就不存在。设有函数

$$f(t) = e^{at} u(t) + e^{bt} u(-t)$$

则其收敛边界为:

$$\sigma_1 = a, \sigma_2 = b$$

也即收敛区落于 $a < \sigma < b$ 的范围之内。如果 $b > a$, 则有收敛区, 双边拉氏变换存在; 若 $b \leq a$, 则无收敛区, 双边拉氏变换不存在。

从例 4-27 的结果还可以看出, 在给出某函数的双边拉氏变换式 $F_B(s)$ 时, 必须注明其收敛区, 如不注明收敛区, 在取其逆变换求 $f(t)$ 时将出现混淆。例如, 若已知双边拉氏变换为

$$F_B(s) = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s}$$

则对应三种不同可能的收敛区, 其逆变换将出现三种可能的函数:

若收敛区为 $0 < \sigma < 1$

$$f_1(t) = u(t) + e^t u(-t)$$

这就是图 4-56 (a) 和 (d) 给出的波形与收敛域。

若收敛区为 $\sigma > 1$

$$f_2(t) = (1 - e^t) u(t)$$

其波形与收敛域见图 4-57 (a)。

若收敛区为 $\sigma < 0$

$$f_3(t) = (e^t - 1) u(-t)$$

波形与收敛域见图 4-57 (b)。

这表明, 不同的函数在各不相同的收敛域条件之下可能得到同样的双边拉氏变换。

下面考虑用双边拉氏变换求解电路的一个实例。

例 4-28 图 4-58 示 RC 电路, $-\infty < t < 0$ 时, 开关 S 位于 “1” 端,

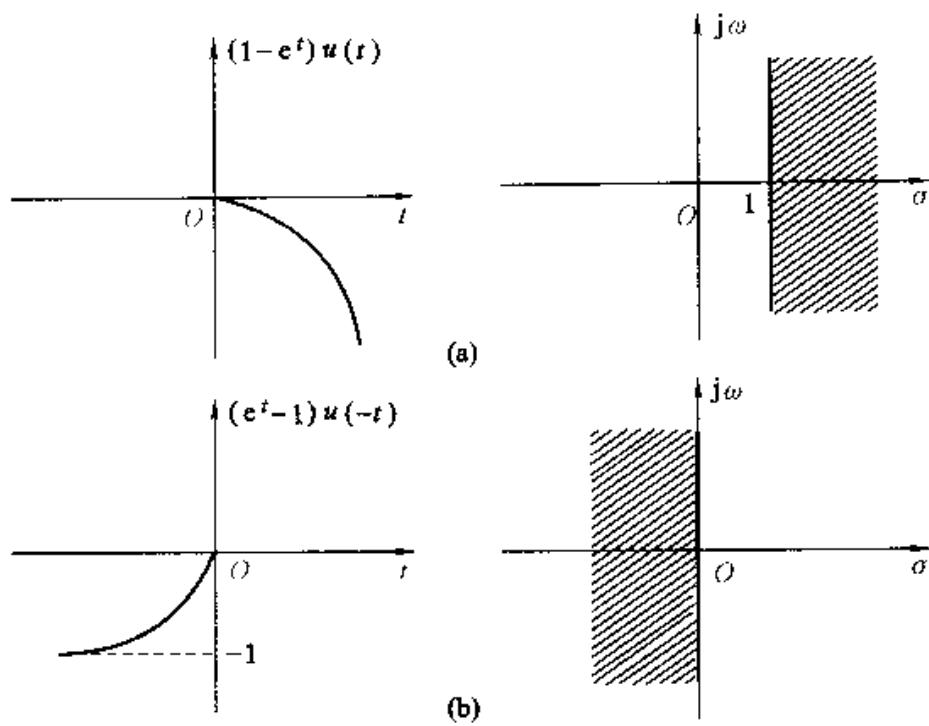


图 4-57 与例 4-27 具有同一变换式的其他二种收敛域和波形

当 $t=0$ 时, S 从 “1” 转至 “2” 端, 求 $v_C(t)$ 波形

解

很明显, 可将 $t < 0$ 时所加直流电源 E 的作用转换为电路中的起始状态, 利用单边拉氏变换求解。现在改用双边拉氏变换进行分析, 为此将图 4-58 电路改画为图 4-59(a), 其中激励信号 $e(t)$ 的波形如图 4-59(b) 所示, 其表示式为

$$e(t) = Eu(-t)$$

取其双边拉氏变换, 注明收敛域

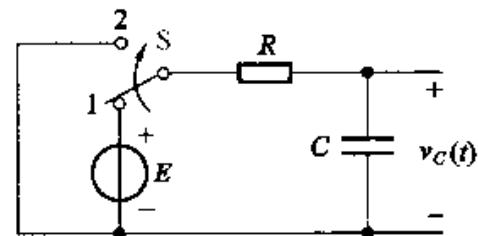


图 4-58 例 4-28 的电路

$$E(s) = \frac{E}{s} \quad (\sigma < 0)$$

借助网络函数关系, 容易写出 $v_C(t)$ 的双边拉氏变换表示式

$$\begin{aligned} V_C(s) &= E(s) \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \\ &= -\frac{E}{s} + \frac{E}{s + \frac{1}{RC}} \quad \left(-\frac{1}{RC} < \sigma < 0 \right) \end{aligned}$$

于是求得

$$v_C(t) = Eu(-t) + E e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) \quad \left(-\frac{1}{RC} < \sigma < 0 \right)$$

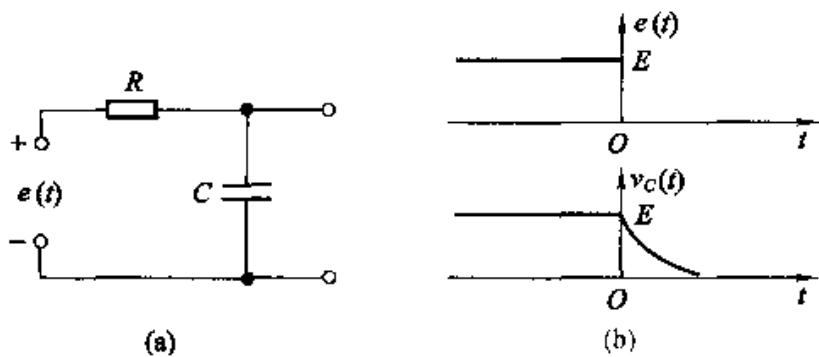


图 4-59 例 4-28 的等效电路与波形

画出波形如图 4-59 (b)。

必须注意，在以上分析过程的每一步都应写明变换式的收敛域，否则将导致错误的结果，例如，对于 $V_C(s)$ 表达式，如果将收敛域理解为 $-\frac{1}{RC} < \sigma$ ，则其逆变换成为

$$v_C(t) = -E u(t) + E e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

这是不确切的。

由于双边拉氏变换在收敛域方面必须考虑一些限制，因而使逆变换的求解比较麻烦，这是它的缺点。双边拉氏变换的优点在于：信号不必限制在 $t > 0$ 的范围内，在某些情况下，把所研究的问题从时间为 $-\infty$ 到 $+\infty$ 作统一考虑，可使概念更清楚；此外，双边拉氏变换与傅里叶变换的联系更紧密，为全面理解傅氏变换、拉氏变换以及第八章将要学习的 z 变换之间的区别和联系，有必要对双边拉氏变换的原理有所了解。

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

在本章一开始，从傅里叶变换的基本原理引出了拉普拉斯变换的概念。现在，作为这章结束，讨论从拉普拉斯变换求得傅里叶变换的方法。

读者可能会想到这样的问题：能否利用已知某信号的拉氏变换式以“ $j\omega$ ”置换“ s ”而求得其傅氏变换呢？欲对此作出回答，先来讨论傅里叶变换、双边拉普拉斯变换与单边拉普拉斯变换三者之间的关系。请参看图 4-60 的示意说明。双边拉氏变换的积分限是取 t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ ，而 $f(t)$ 所乘因子为复指数 e^{-st} ， $s = \sigma + j\omega$ ，它涉及全部 s 平面。如果不改变积分限，而是将复指数的 σ 取零值， $s = j\omega$ ，也即局限于 s 平面的虚轴，则得到傅里叶变换。双边拉氏变换为广义的傅里叶变换。如果不改变双边拉氏变换式中的复指数因子 e^{-st} ，仍取 $s = \sigma + j\omega$ ，但将积分限限制于 0 到 $+\infty$ 就得到单边拉氏变换。在取傅里叶变换时，若当 $t < 0$ 满足函数

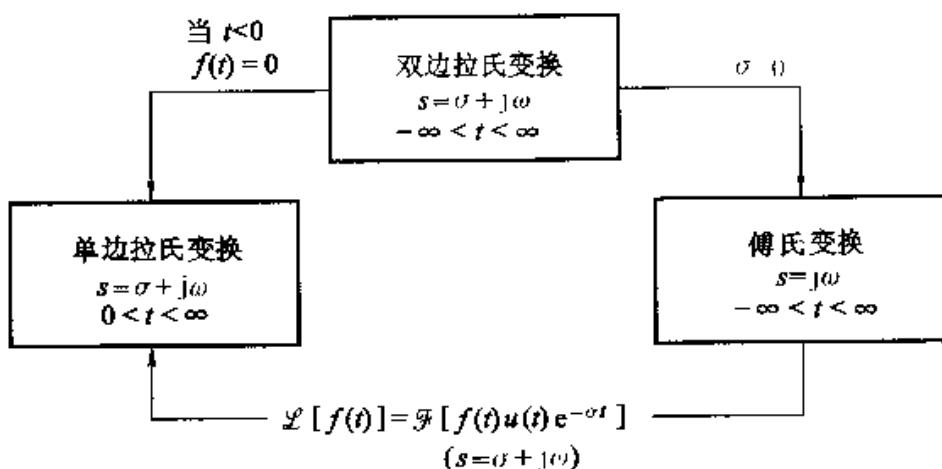


图 4-60 傅氏变换与拉氏变换的区别和联系

$f(t)=0$, 并将 $f(t)$ 乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 也就成为单边拉氏变换。

如果要从已知的单边拉氏变换求傅氏变换, 首先应判明函数 $f(t)$ 为有始信号, 即当 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$, 然后根据收敛边界的不同, 按以下三种情况分别对待:

(1) $\sigma_0 > 0$ (收敛边界落于 s 平面右半边)

这相应用于一些增长函数的情况, 例如

$$f(t) = e^{at}u(t)$$

其单边拉氏变换为

$$\mathcal{L}[e^{at}u(t)] = \frac{1}{s-a} \quad (\text{收敛域 } \sigma > a) \quad (4-157)$$

函数波形和 s 平面收敛域分别如图 4-61(a) 和 (b) 所示。对于这种情况, 依靠 $e^{-\sigma t}$ 因子使增长信号衰减下来得到拉氏变换。显然, 它的傅氏变换是不存在的, 因而不能盲目地由拉氏变换寻求其傅氏变换。

(2) $\sigma_0 < 0$ (收敛边界落于 s 平面左半边)

例如

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+a} \quad (\text{收敛域 } \sigma > -a) \quad (4-158)$$

图 4-62(a) 和 (b) 分别示出了 $f(t)$ 波形以及在 s 平面上的收敛域。

这种情况对应衰减函数, 它的傅氏变换存在。令其拉氏变换中的 $s = j\omega$ 就可求得它的傅氏变换。例如对于式(4-158):

$$\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{j\omega + a}$$

又如

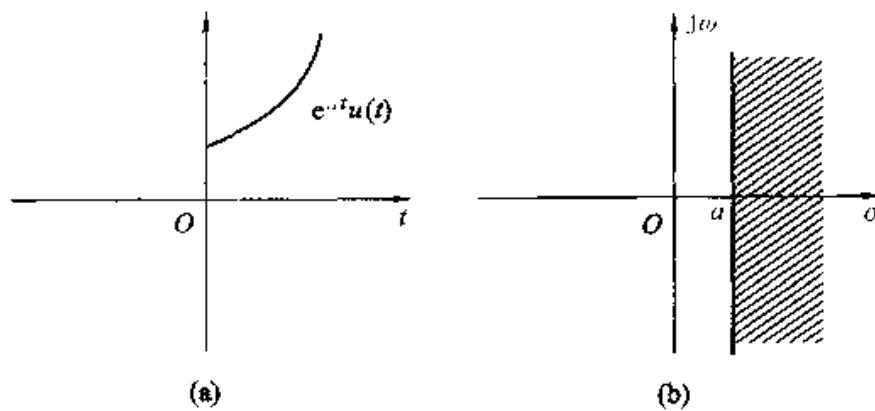


图 4-61 与式(4-157)相应的波形及其收敛域

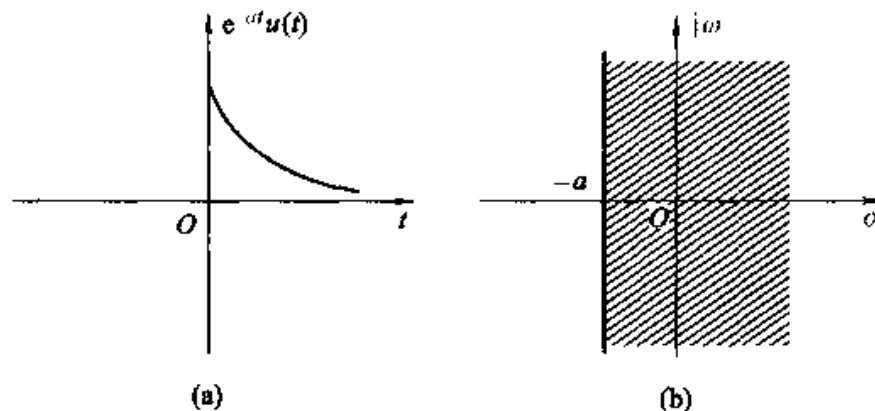


图 4-62 与式(4-158)相应的波形及其收敛域

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathcal{F}[e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\omega_0}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$$

(3) $\sigma_0=0$ (收敛边界位于虚轴)

在这种情况下，函数具有拉氏变换，而其傅氏变换也可以存在，但不能简单地将拉氏变换中的 s 代以 $j\omega$ 来求傅氏变换。在它的傅氏变换中将包括奇异函数项。例如，对于单位阶跃函数有：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)] &= \frac{1}{s} \quad (\sigma>0) \\ \mathcal{F}[u(t)] &= \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \end{aligned} \quad (4-159)$$

下面导出收敛边界位于虚轴时拉氏变换与傅氏变换联系的一般关系式，若 $f(t)$ 的拉氏变换式为

$$F(s) = F_a(s) + \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{s - j\omega_n} \quad (4-160)$$

式中 $F_a(s)$ 的极点位于 s 平面之左半, ω_n 为虚轴上的极点, 共有 N 个, K_n 为部分分式分解的系数。容易求得式(4-160)的逆变换为

$$f(t) = f_a(t) + \sum_{n=1}^N K_n e^{j\omega_n t} u(t) \quad (4-161)$$

式中 $f_a(t)$ 是对应 $F_a(s)$ 之逆变换。求式(4-161)的傅氏变换可得

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}[f(t)] = F_a(j\omega) + \mathcal{F}\left[\sum_{n=1}^N K_n e^{j\omega_n t} u(t)\right] \\ & = F_a(j\omega) + \sum_{n=1}^N K_n \left[\delta(\omega - \omega_n) + \frac{\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega_n}}{j(\omega - \omega_n)} \right] \\ & = F_a(j\omega) + \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{j(\omega - \omega_n)} + \sum_{n=1}^N K_n \pi \delta(\omega - \omega_n) \\ & = F(s) + \sum_{n=1}^N K_n \pi \delta(\omega - \omega_n) \end{aligned} \quad (4-162)$$

利用式(4-162)即可由 $F(s)$ 求得傅氏变换。式中包括两部分, 第一部分是将 $F(s)$ 中的 s 以 $j\omega$ 代入, 第二部分为一系列冲激函数之和。

例 4-29 求 $f(t) = \sin(\omega_0 t) u(t)$ 的傅氏变换和拉氏变换

解

由表 4-1 容易求出

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t) u(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

利用式(4-162)可求出

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t) u(t)] = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + j \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

如果 $F(s)$ 具有 $j\omega$ 轴上的多重极点, 对应的傅氏变换式还可能出现冲激函数的各阶导数项。例如, 若

$$F(s) = F_a(s) + \frac{K_0}{(s - j\omega_0)^k}$$

式中 $F_a(s)$ 的极点位于 s 平面左半, 在虚轴上有 k 重 ω_0 的极点, K_0 为系数。此时, 可求得

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(s) + \frac{K_0 \pi j^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(\omega - \omega_0) \quad (4-163)$$

式中 $\delta(\omega - \omega_0)$ 的上角为求 $(k-1)$ 阶导数。

例 4-30 求 $f(t) = tu(t)$ 的傅氏变换和拉氏变换。

解

由表 4-1 查到

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

利用式(4-163)求出

$$\mathcal{F}[f(t)] = -\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega)$$

此结果即本书最后附表二中第 25 号波形的傅氏变换式。

习 题

4-1 求下列函数的拉氏变换

- | | |
|---|--|
| (1) $1 + e^{-at}$ | (13) $te^{-(t-2)}u(t-1)$ |
| (2) $\sin t + 2\cos t$ | (14) $e^{-\frac{t}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right)$,
设已知 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ |
| (3) te^{-2t} | (15) $e^{-at}f\left(\frac{t}{a}\right)$,
设已知 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ |
| (4) $e^{-t}\sin(2t)$ | (16) $t\cos^3(3t)$ |
| (5) $(1+2t)e^{-t}$ | (17) $t^2\cos(2t)$ |
| (6) $[1 - \cos(\alpha t)]e^{-\beta t}$ | (18) $\frac{1}{t}(1 + e^{-at})$ |
| (7) $t^2 + 2t$ | (19) $\frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{t}$ |
| (8) $2\delta(t) - 3e^{-7t}$ | (20) $\frac{\sin(at)}{t}$ |
| (9) $e^{-at}\sinh(\beta t)$ | |
| (10) $\cos^2(\Omega t)$ | |
| (11) $\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ | |
| (12) $e^{-(t+\alpha)}\cos(\omega t)$ | |

4-2 求下列函数的拉氏变换，考虑能否借助于延时定理。

$$(1) f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \left(\text{当 } 0 < t < \frac{T}{2}\right) \\ 0 & (t \text{ 为其他值}) \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$(2) f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$$

4-3 求下列函数的拉氏变换，注意阶跃函数的跳变时间。

- (1) $f(t) = e^{-t}u(t-2)$
- (2) $f(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$
- (3) $f(t) = e^{-t}u(t-2)$
- (4) $f(t) = \sin(2t) \cdot u(t-1)$
- (5) $f(t) = (t-1)[u(t-1) - u(t-2)]$

4-4 求下列函数的拉普拉斯逆变换。

$$(1) \frac{1}{s+1} \quad (2) \frac{4}{2s+3}$$

(3) $\frac{4}{s(2s+3)}$

(12) $\frac{4s+5}{s^2+5s+6}$

(4) $\frac{1}{s(s^2+5)}$

(13) $\frac{100(s+50)}{(s^2+20s+200)}$

(5) $\frac{3}{(s+4)(s+2)}$

(14) $\frac{(s+3)}{(s+1)^3(s+2)}$

(6) $\frac{3s}{(s+4)(s+2)}$

(15) $\frac{A}{s^2+K^2}$

(7) $\frac{1}{s^2+1} + 1$

(16) $\frac{1}{(s^2+3)^2}$

(8) $\frac{1}{s^2-3s+2}$

(17) $\frac{s}{(s+a)[(s+a)^2+\beta^2]}$

(9) $\frac{1}{s(RCs+1)}$

(18) $\frac{s}{(s^2+\omega^2)[(s+a)^2+\beta^2]}$

(10) $\frac{1}{s(1+RCs)}$

(19) $\frac{e^{-s}}{4s(s^2+1)}$

(11) $\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)} \cdot \frac{1}{(RCs+1)}$

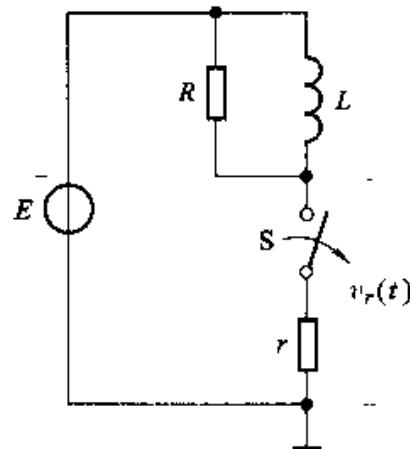
(20) $\ln\left(\frac{s}{s+9}\right)$

4-5 分别求下列函数的逆变换的初值与终值。

(1) $\frac{(s+6)}{(s+2)(s+5)}$

(2) $\frac{(s+3)}{(s+1)^2(s+2)}$

4-6 题图4-6所示电路, $t=0$ 以前, 开关S闭合, 已进入稳定状态; $t=0$ 时, 开关打开, 求 $v_r(t)$ 并讨论R对波形的影响。



题图 4-6

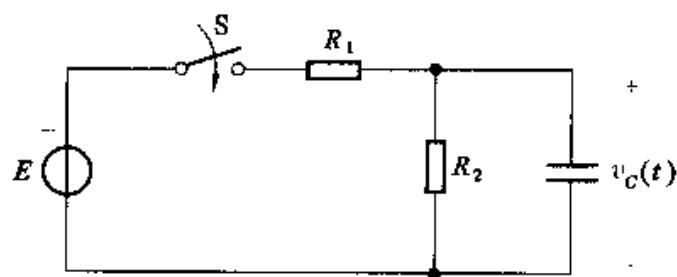
4-7 题图4-7所示电路, $t=0$ 时, 开关S闭合, 求 $v_C(t)$ 。

4-8 题图4-8所示RC分压器, $t=0$ 时, 开关S闭合, 接入直流电压E, 求 $v_2(t)$ 并讨论以下三种情况的结果。

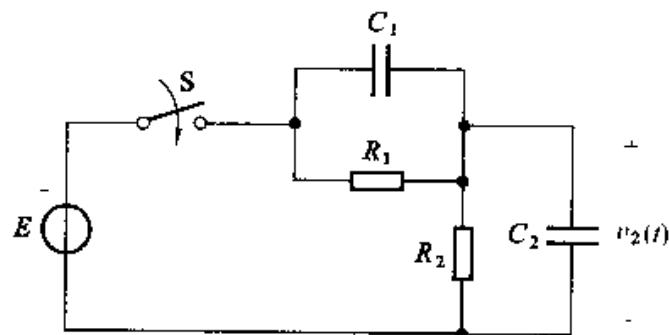
(1) $R_1C_1 = R_2C_2$;

(2) $R_1C_1 > R_2C_2$;

(3) $R_1C_1 < R_2C_2$.

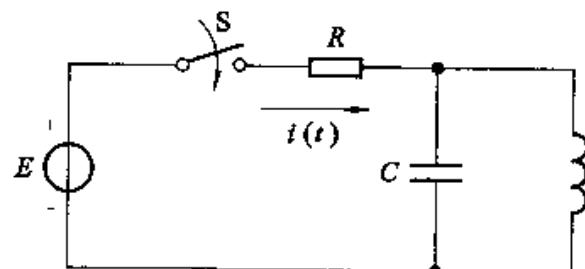


题图 4-7



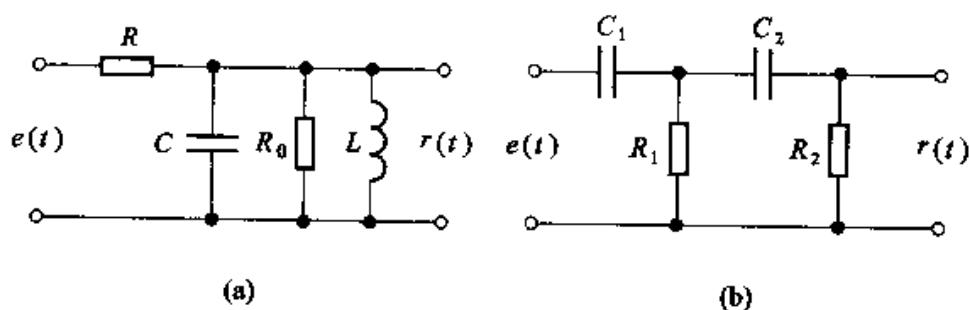
题图 4-8

4-9 题图4-9所示RLC电路 $t=0$ 时开关S闭合，求电流*i*(t)。($\text{已知} \frac{1}{2RC} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$)



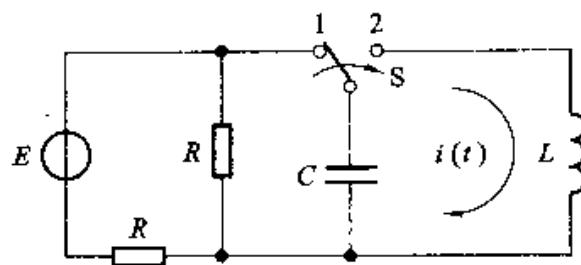
题图 4-9

4-10 求题图4-10所示电路的系统函数H(s)和冲激响应h(t)，设激励信号为电压e(t)，响应信号为电压r(t)。



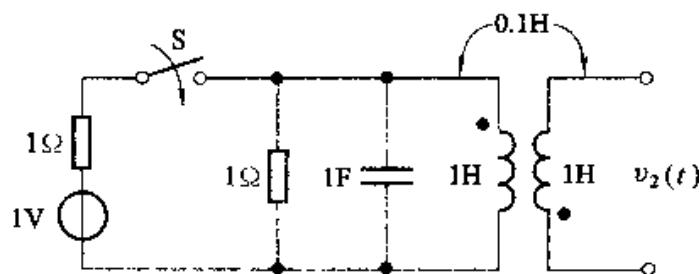
题图 4-10

4-11 电路如题图4-11所示， $t=0$ 以前开关位于“1”，电路已进入稳定状态。 $t=0$ 时开关从“1”倒向“2”，求电流*i*(t)的表示式。



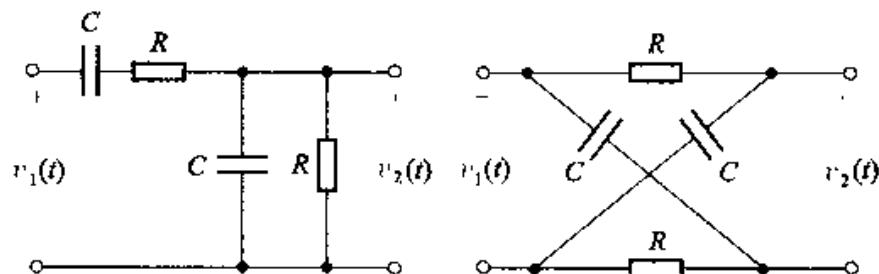
题图 4-11

- 4-12 电路如题图4-12所示, $t=0$ 以前电路元件无储能, $t=0$ 时开关闭合, 求电压 $v_2(t)$ 的表示式和波形



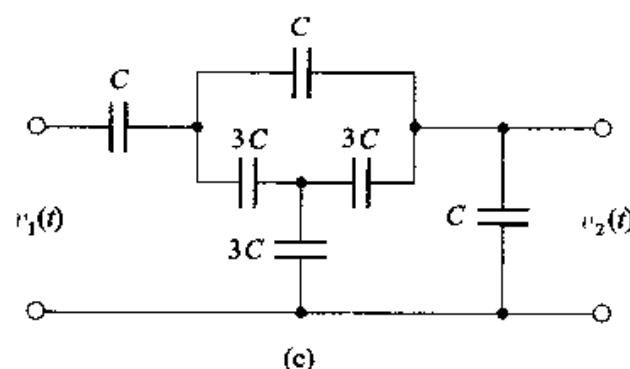
题图 4-12

- 4-13 分别写出题图4-13(a), (b), (c)所示电路的系统函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$



(a)

(b)

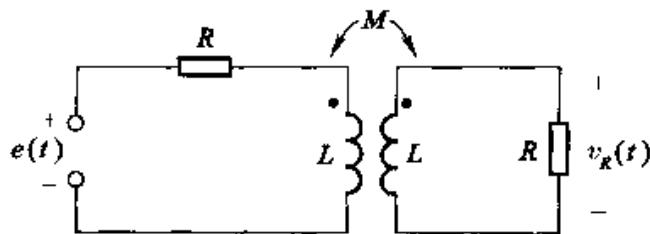


(c)

题图 4-13

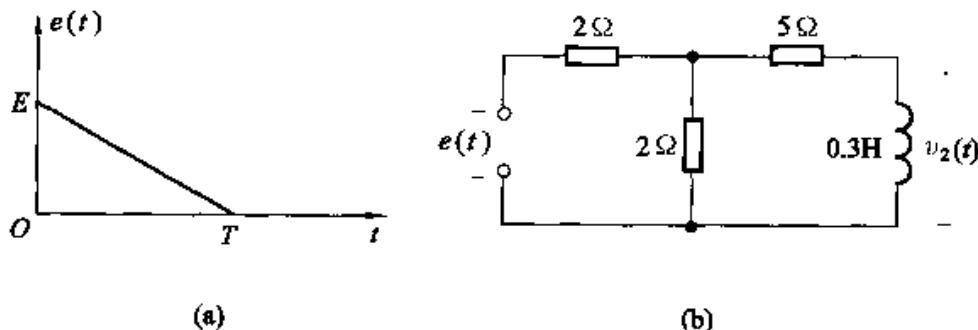
- 4-14 试求题图4-14所示互感电路的输出信号 $v_L(t)$ 。假设输入信号 $v_1(t)$ 分别为以下两种情况:

- (1) 冲激信号 $e(t) = \delta(t)$;
 (2) 阶跃信号 $e(t) = u(t)$.



题图 4-14

4-15 激励信号 $e(t)$ 波形如题图 4-15(a) 所示, 电路如题图 4-15(b) 所示, 起始时刻 L 中无储能, 求 $v_2(t)$ 的表示式和波形。

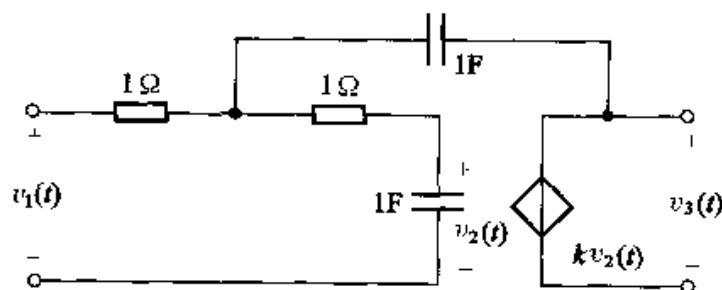


题图 4-15

4-16 电路如题图 4-16 所示, 注意图中 $k v_2(t)$ 是受控源, 试求

$$(1) \text{ 系统函数 } H(s) = \frac{V_3(s)}{V_1(s)};$$

(2) 若 $k=2$, 求冲激响应.

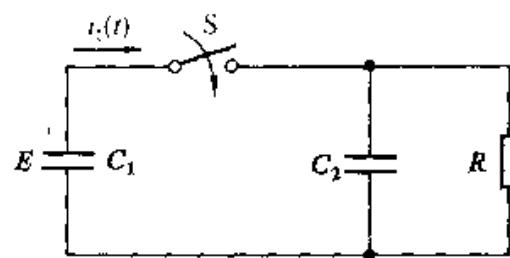


题图 4-16

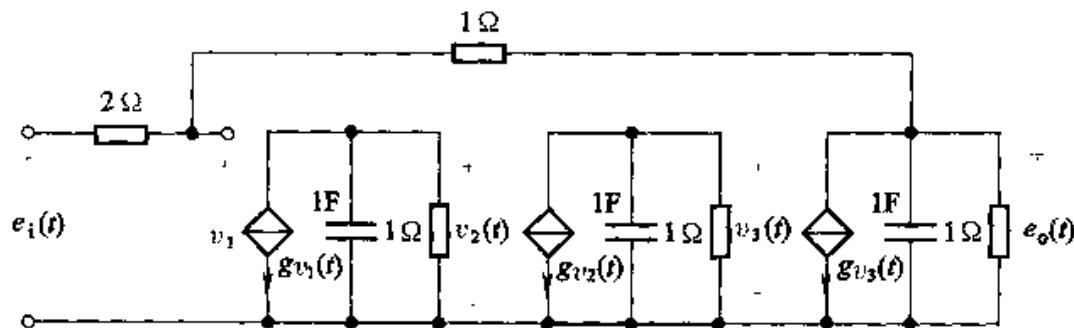
4-17 在题图 4-17 所示电路中, $C_1 = 1 \text{ F}$, $C_2 = 2 \text{ F}$, $R = 2 \Omega$, 起始条件 $v_{C1}(0_-) = E$, 方向如图示, $t=0$ 时升关闭合, 求:

- (1) 电流 $i_1(t)$;
 (2) 讨论 $t=0_-$ 与 $t=0_+$ 瞬间, 电容 C_2 两端电荷发生的变化。

4-18 题图 4-18 所示电路中有三个受控源, 求系统函数 $H(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$.



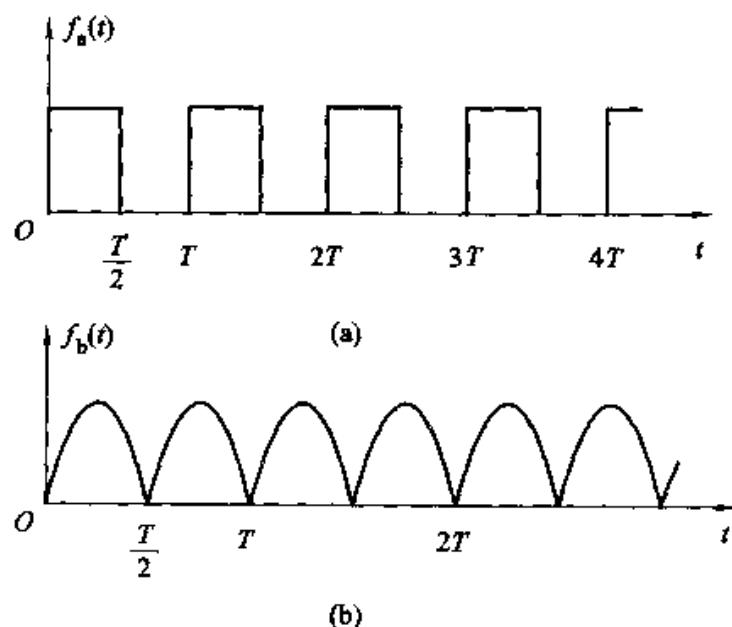
题图 4-17



题图 4-18

- 4-19 因果周期信号 $f(t) = f(t)u(t)$, 周期为 T , 若第一周期时间信号为 $f_1(t) = f(t)[u(t) - u(t - T)]$, 它的拉氏变换为 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, 求 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ 表达式。
 (提示: 可借助级数性质 $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ 化简.)

- 4-20 求题图 4-20 所示周期矩形脉冲和正弦全波整流脉冲的拉氏变换(利用上题结果).



题图 4-20

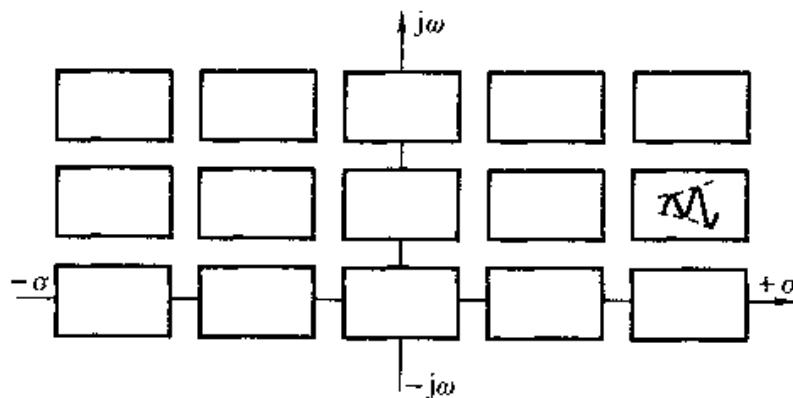
- 4-21 将连续信号 $f(t)$ 以时间间隔 T 进行冲激抽样得到 $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$, $\delta_T(t)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$, 求:

(1) 抽样信号的拉氏变换 $\mathcal{L}[f_s(t)]$;

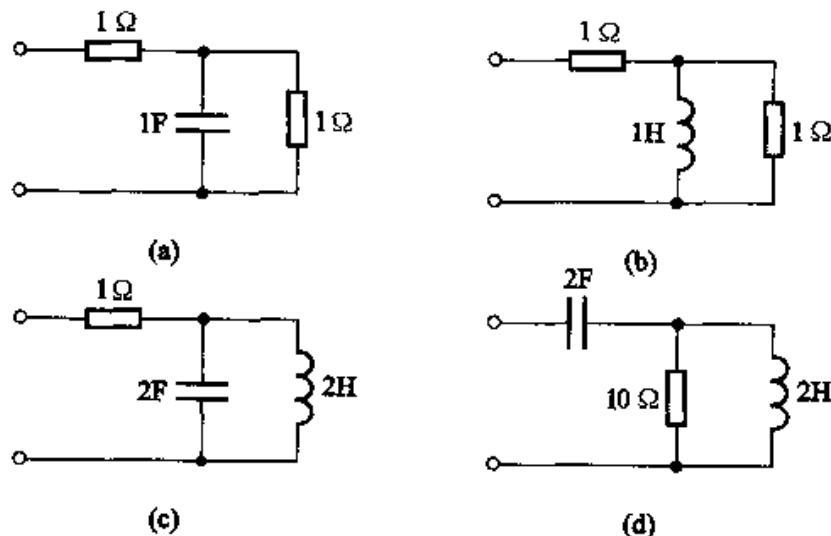
(2) 若 $f(t) = e^{-\omega t} u(t)$ 求 $\mathcal{L}[f_s(t)]$ 。

- 4-22 当 $F(s)$ 极点(-一阶)落于题图 4-22 所示 s 平面图中各方框所处位置时, 画出对应的 $f(t)$ 波形(填入方框中)。图中给出了示例, 此例极点实部为正, 波形是增长振荡。



题图 4-22

- 4-23 求题图 4-23 所示各网络的策动点阻抗函数, 在 s 平面示出其零、极点分布。若激励电压为冲激函数 $\delta(t)$, 求其响应电流的波形。

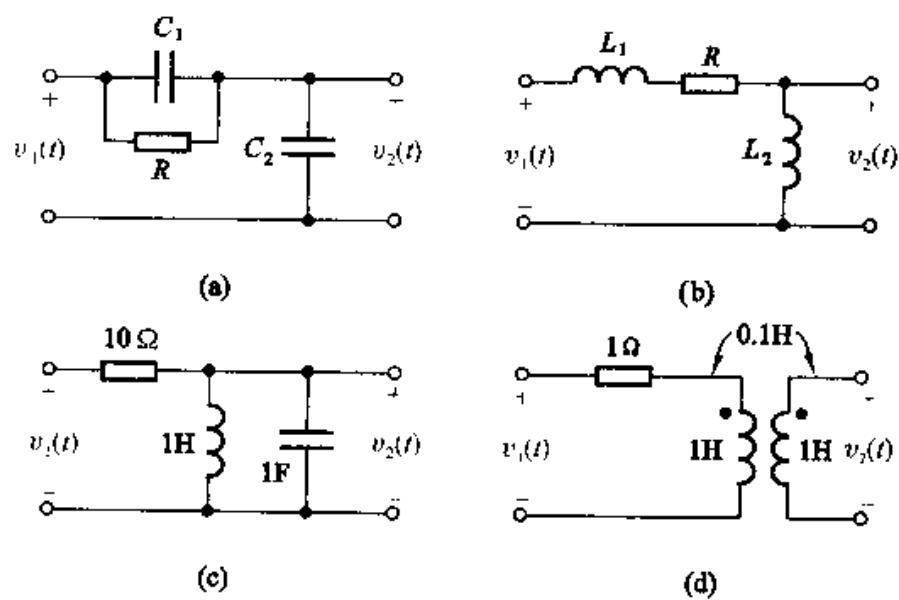


题图 4-23

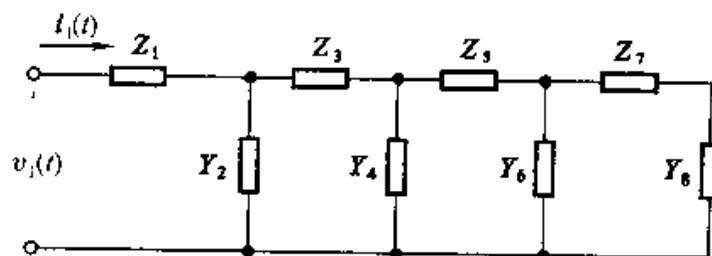
- 4-24 求题图 4-24 所示各网络的电压转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, 在 s 平面示出其零、极点分布, 若激励信号 $v_1(t)$ 为冲激函数 $\delta(t)$, 求响应 $v_2(t)$ 的波形。

- 4-25 写出题图 4-25 所示梯形网络的策动点阻抗函数 $Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}$, 图中串臂(横接)的符号 Z 表示其阻抗, 并臂(纵接)的符号 Y 表示其导纳。

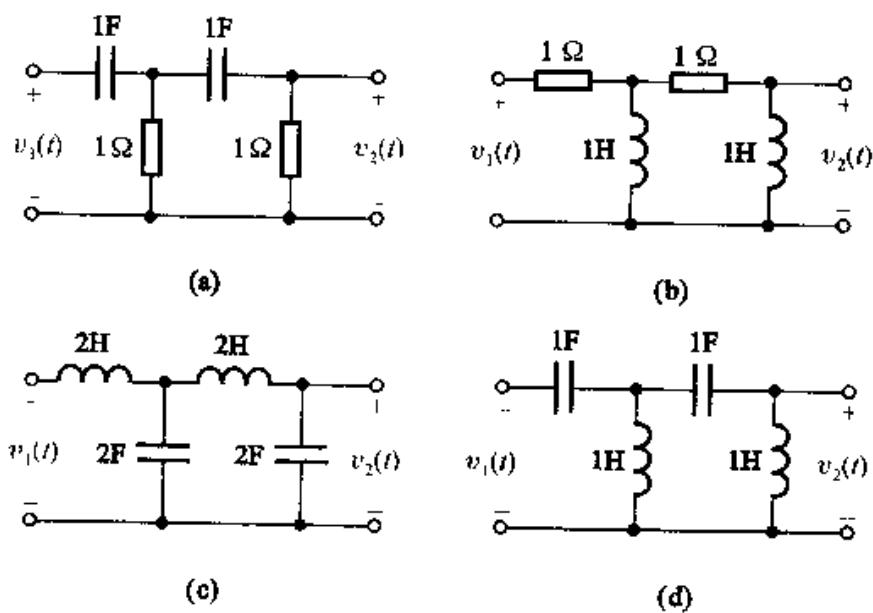
- 4-26 写出题图 4-26 所示各梯形网络的电压转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, 在 s 平面示出其零、极点分布。



题图 4-24



题图 4-25



题图 4-26

4-27 已知激励信号为 $e(t) = e^{-t}$, 零状态响应为 $r(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + 2e^{3t}$, 求此系统的冲激响应 $h(t)$ 。

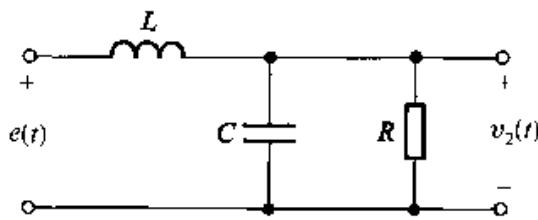
4-28 已知系统阶跃响应为 $g(t) = 1 - e^{-2t}$, 为使其响应为 $r(t) = 1 - e^{-2t} - te^{-2t}$, 求激励信号 $e(t)$ 。

4-29 题图4-29所示网络中, $L = 2 \text{ H}$, $C = 0.1 \text{ F}$, $R = 10 \Omega$ 。

(1) 写出电压转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{E(s)}$;

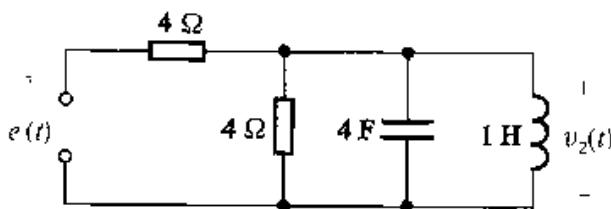
(2) 画出 s 平面零、极点分布;

(3) 求冲激响应、阶跃响应。



题图 4-29

4-30 若在题图4-30电路中, 接入 $e(t) = 40\sin t \cdot u(t)$, 求 $v_2(t)$, 指出其中的自由响应与强迫响应。

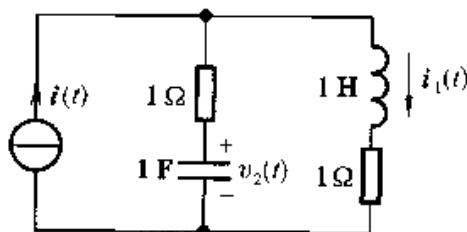


题图 4-30

4-31 如题图4-31所示电路

(1) 若初始无储能, 信号源为 $i(t)$, 为求 $i_1(t)$ (零状态响应), 列写转移函数 $H(s)$;

(2) 若初始状态以 $i_1(0)$, $v_2(0)$ 表示 (都不等于零), 但 $i(t) = 0$ (开路), 求 $i_1(t)$ (零输入响应)。



题图 4-31

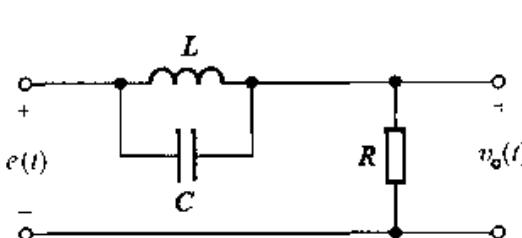
4-32 如题图4-32所示电路

(1) 写出电压转移函数 $H(s) = \frac{V_o(s)}{E(s)}$;

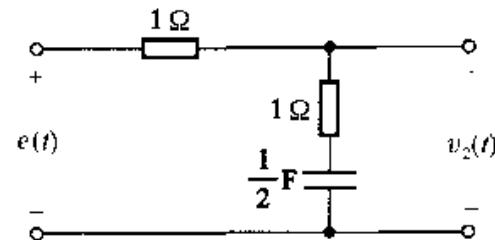
(2) 若激励信号 $e(t) = \cos(2t) \cdot u(t)$, 为使响应中不存在正弦稳态分量, 求 L, C 值;

(3) 若 $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, 按第(2)问条件, 求 $v_o(t)$ 。

4-33 题图4-33所示电路, 若激励信号 $e(t) = (3e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$, 求响应 $v_2(t)$ 并指出响应中的强迫分量、自由分量、瞬态分量与稳态分量。



题图 4-32



题图 4-33

- 4-34 若激励信号 $e(t)$ 如题图 4-34 (a) 所示周期矩形脉冲, $e(t)$ 施加于题图 4-34 (b) 电路, 研究响应 $v_o(t)$ 之特点。已求得 $v_o(t)$ 由瞬态响应 $v_{ot}(t)$ 和稳态响应 $v_{os}(t)$ 两部分组成, 其表达式分别为:

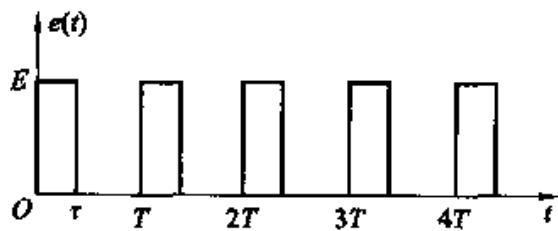
$$v_{ot}(t) = -\frac{E(1-e^{-at})}{1-e^{at}} \cdot e^{-at}$$

$$v_{os}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{osl}(t-nT) \left\{ u(t-nT) - u[t-(n+1)T] \right\}$$

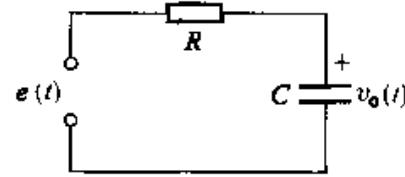
其中 $v_{osl}(t)$ 为 $v_{os}(t)$ 第一周期的信号

$$v_{osl}(t) = E \left[1 - \frac{1-e^{-a(T-\tau)}}{1-e^{-aT}} e^{-at} \right] u(t) - E \left[1 - e^{-a(t-\tau)} \right] u(t-\tau)$$

- (1) 画出 $v_o(t)$ 波形, 从物理概念讨论波形特点;
- (2) 试用拉氏变换方法求出上述结果;
- (3) 系统函数极点分布和激励信号极点分布对响应结果特点有何影响。



(a)



(b)

题图 4-34

- 4-35 已知网络函数的零、极点分布如题图 4-35 所示, 此外 $H(\infty) = 5$, 写出网络函数表示式 $H(s)$ 。

- 4-36 已知网络函数 $H(s)$ 的极点位于 $s = -3$ 处, 零点在 $s = -a$, 且 $H(\infty) = 1$ 。此网络的阶跃响应中, 包含一项为 $K_1 e^{-3t}$ 。若 a 从 0 变到 5, 讨论相应的 K_1 如何随之改变。

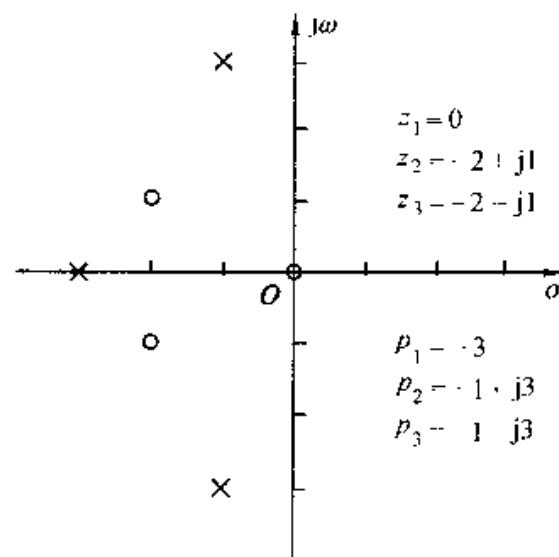
- 4-37 已知题图 4-37 (a) 所示网络的入端阻抗 $Z(s)$ 表示式为

$$Z(s) = \frac{K(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

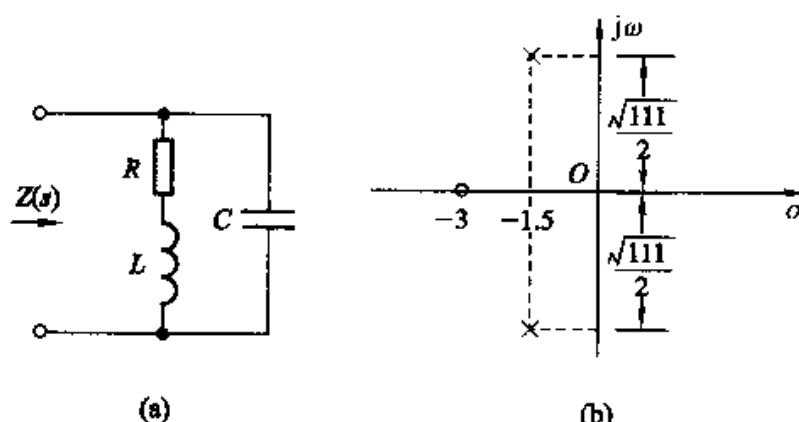
- (1) 写出以元件参数 R , L , C 表示的零、极点 z_1 , p_1 , p_2 的位置。

- (2) 若 $Z(s)$ 零、极点分布如题图 4-37 (b), 此外, $Z(j0) = 1$, 求 R , L , C 值。

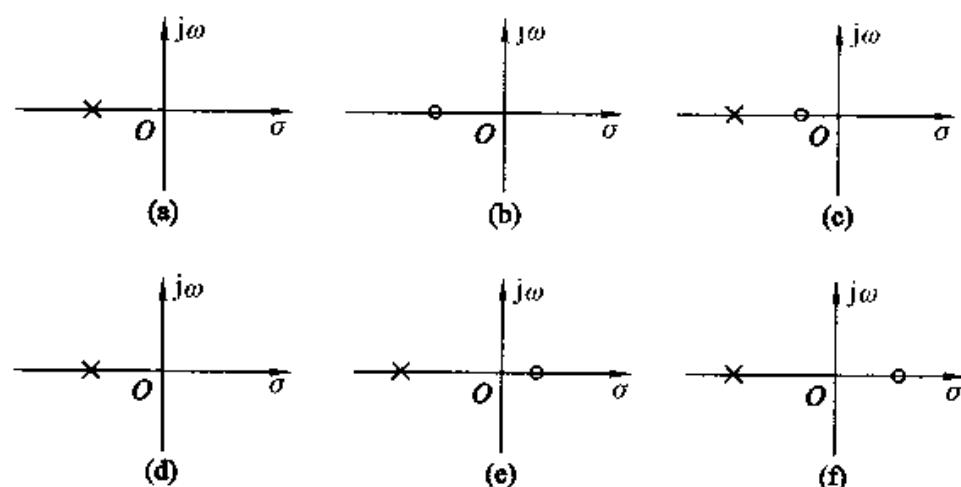
- 4-38 给定 $H(s)$ 的零、极点分布如题图 4-38 所示, 令 s 沿 $j\omega$ 轴移动, 由矢量因子的变化分析频响特性, 粗略绘出幅频与相频曲线。



题图 4-35

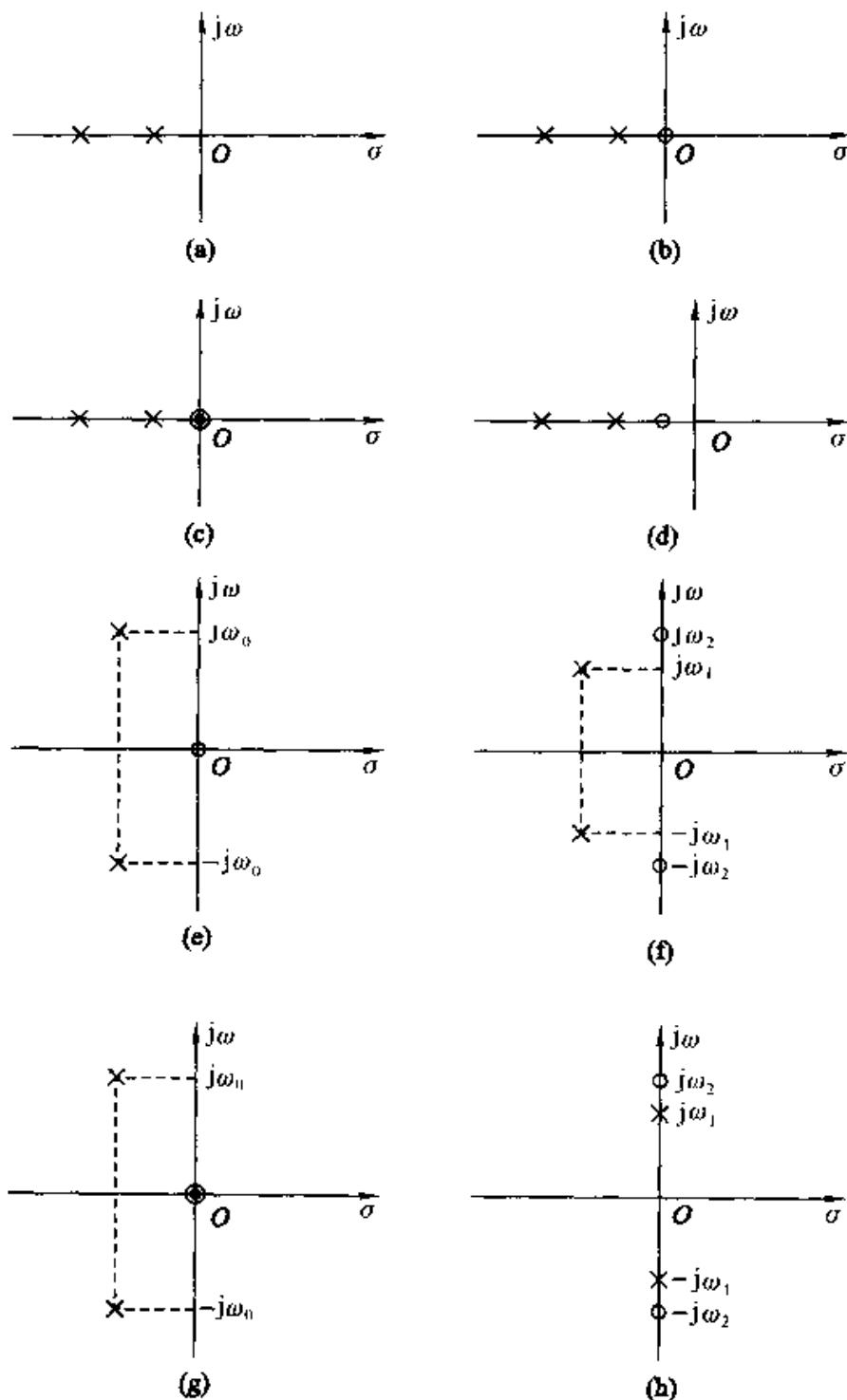


题图 4-37



题图 4-38

4-39 若 $H(s)$ 零、极点分布如题图 4-39 (p261) 所示, 试讨论它们分别是哪种滤波网络 (低通、高通、带通、带阻)。

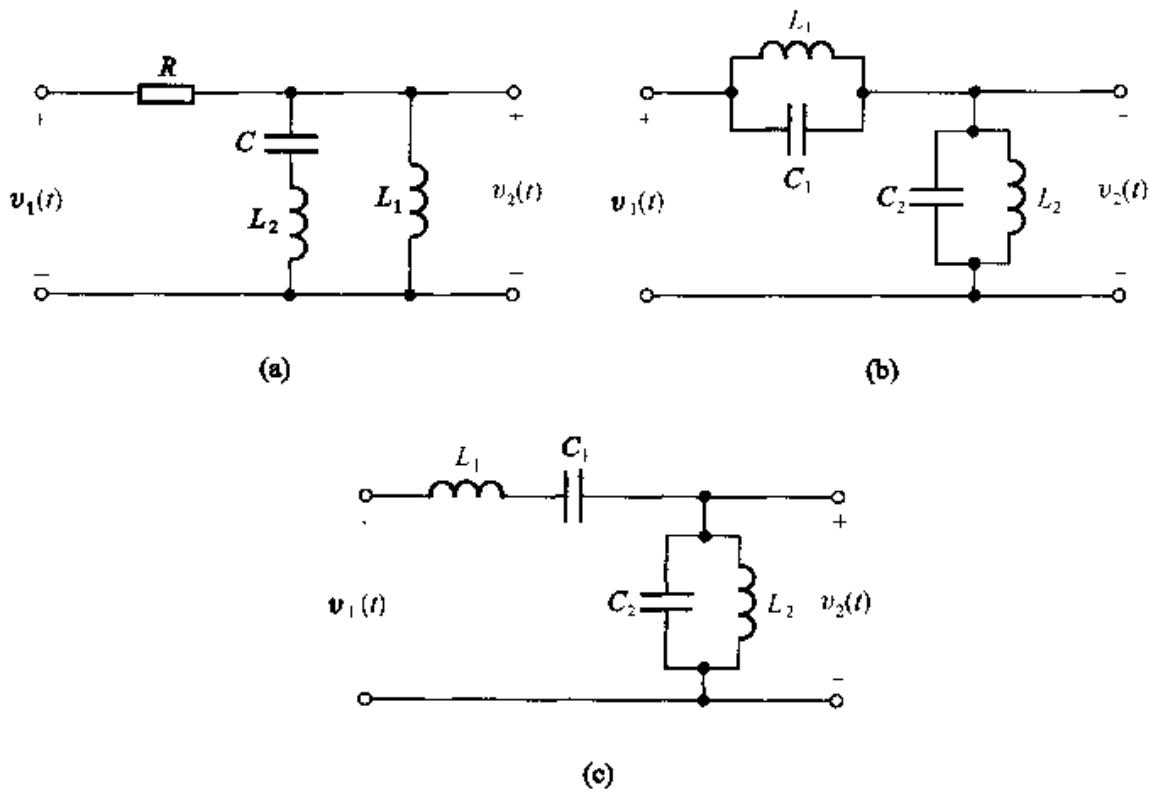


题图 4-39

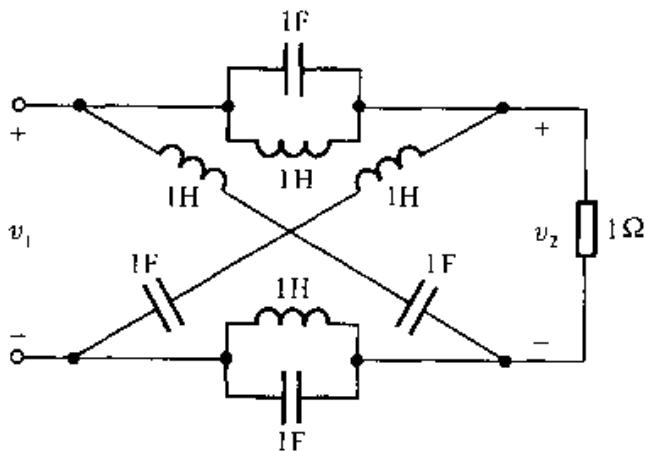
4-40 写出题图4-40 (p262)所示网络的电压转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, 讨论其幅频响应特性可能为何种类型。

4-41 题图4-41 (p262)所示格形网络, 写出它的电压转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, 画出 s 平面零、极点分布图, 讨论它是否为全通网络。

4-42 题图4-42 (p263)所示几幅 s 平面零、极点分布图, 分别指出它们是否最小相移网



题图 4-40

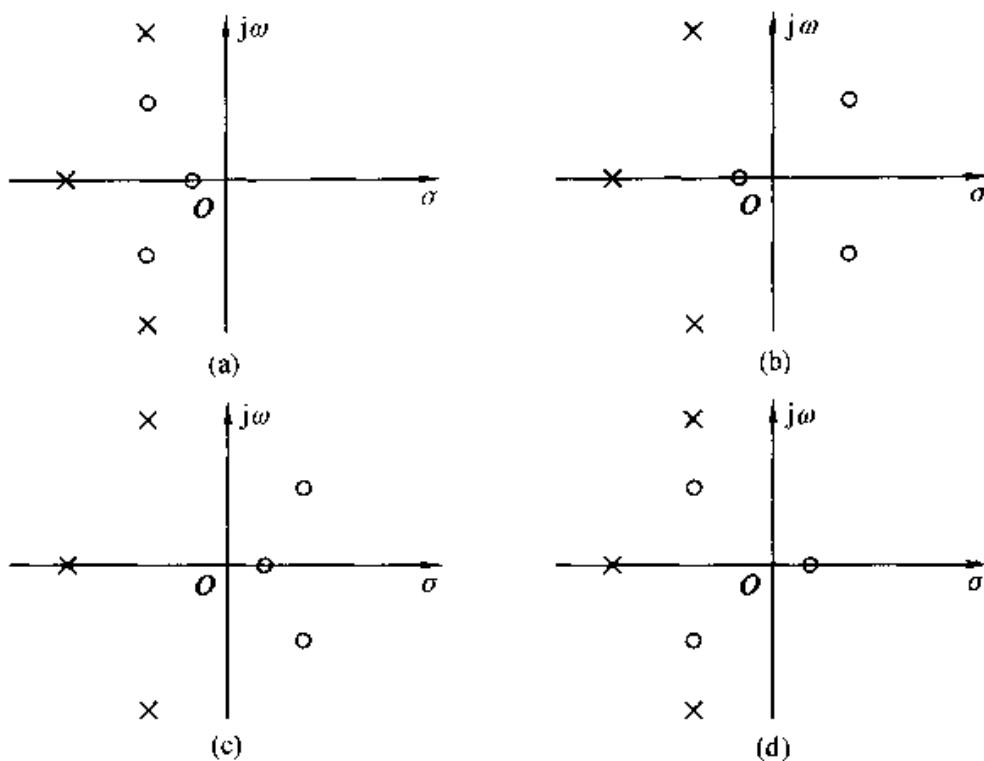


题图 4-41

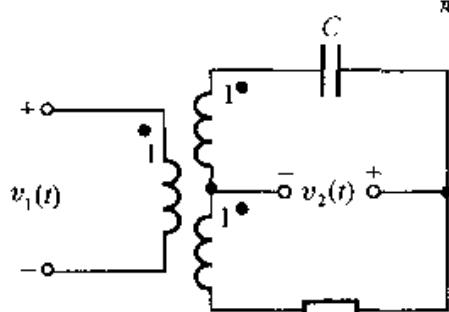
络函数。如果不是，应由零、极点如何分布的最小相移网络和全通网络来组合。

- 4-43 题图4-43所示电路，虚框中是1:1:1的理想变压器，激励信号为 $v_1(t)$ ，响应取 $v_2(t)$ ，写出电压转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ ，画出零、极点分布图，指出是否全通网络。

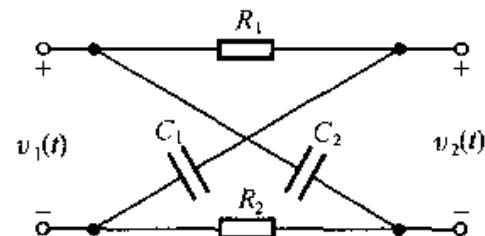
- 4-44 题图4-44所示格形网络，写出电压转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ 。设 $C_1R_1 < C_2R_2$ ，在 s 平面示出 $H(s)$ 零、极点分布，指出是否全通网络。在网络参数满足什么条件下才能构成全通网络。



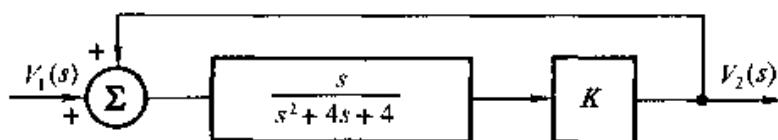
题图 4-42



题图 4-43



题图 4-44



题图 4-45

4-45 题图4-45所示反馈系统，回答下列各问：

$$(1) \text{写出 } H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)};$$

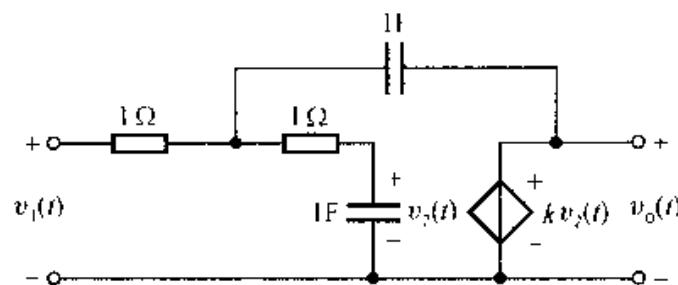
(2) K 满足什么条件时系统稳定？

(3) 在临界稳定条件下，求系统冲激响应 $h(t)$ 。

4-46 题图4-46所示反馈电路，其中 $Kv_2(t)$ 是受控源。

$$(1) \text{求电压转移函数 } H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)};$$

(2) K 满足什么条件时系统稳定？

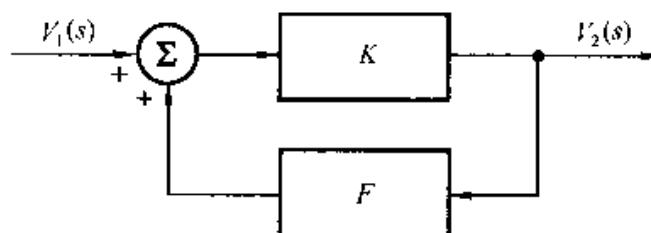


题图 4-46

4-47 题图4-47所示反馈系统，其中 $K = \frac{\beta Z(s)}{R_i}$ 。 β ， R_i 以及 F 都为常数

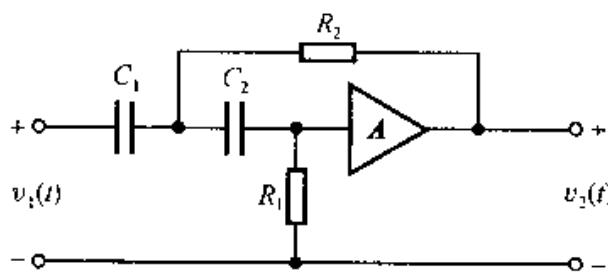
$$Z(s) = \frac{s}{C(s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC})}$$

写出系统函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ ，求极点的实部等于零的条件(产生自激振荡)。讨论系统出现稳定、不稳定以及临界稳定的条件，在 s 平面示意绘出这三种情况下极点分布图。

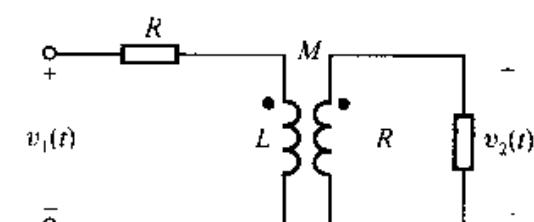


题图 4-47

4-48 电路如题图4-48所示，为保证稳定工作，求放大器放大系数 A 的变化范围。设放大器输入阻抗为无限大，输出阻抗等于零。



题图 4-48



题图 4-49

4-49 题图4-49示出互感电路；激励信号为 $v_1(t)$ ，响应为 $v_2(t)$

(1) 从物理概念说明此系统是否稳定？

(2) 写出系统转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ ；

(3) 求 $H(s)$ 极点，电路参数满足什么条件下才能使极点落在左半平面？此条件实际上是否能满足？

4-50 已知信号表示式为

$$f(t) = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)$$

式中 $a > 0$ ，试求 $f(t)$ 的双边拉氏变换，给出收敛域。

第五章 傅里叶变换应用于通信系统

——滤波、调制与抽样

5.1 引言

傅里叶变换应用于通信系统有着久远的历史和宽阔的范围，现代通信系统的发展处处伴随着傅里叶变换方法的精心运用。本章初步介绍这些应用中最主要的几个方面——滤波、调制和抽样。这是前两章基本内容的继续深入。

为了进一步研究系统的滤波特性，首先要引出傅里叶变换形式的系统函数。在第四章，利用拉氏变换形式的系统函数 $H(s)$ 使系统激励与响应的关系式由卷积简化为乘法运算：

$$\begin{aligned} r(t) &= h(t) * e(t) \\ R(s) &= H(s)E(s) \end{aligned}$$

这种转换关系同样可用于傅里叶变换。

设 $R(\omega), H(\omega), E(\omega)$ 分别表示 $r(t), h(t), e(t)$ 的傅里叶变换，即：

$$\mathcal{F}[r(t)] = R(\omega)$$

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(\omega)$$

$$\mathcal{F}[e(t)] = E(\omega)$$

引用傅里叶变换的时域卷积定理即可得出

$$R(\omega) = H(\omega)E(\omega) \quad (5-1)$$

这里， $H(\omega)$ 也称为系统函数，但以傅里叶变换形式给出。

如果把 $r(t), h(t), e(t)$ 的傅里叶变换改用符号 $R(j\omega), H(j\omega), E(j\omega)$ 表示，就可得到

$$R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega) \quad (5-2)$$

这里的系统函数写作 $H(j\omega)$ 。显然，式(5-1)与式(5-2)，只是函数变量表示形式不同。在式(5-1)，把“j”隐含于复函数 R, H, E 之中。为便于与拉氏变换联系，式(5-2)可作如下解释，对于稳定的(不包括临界稳定的)因果系统，将 $H(s)$ 表示式中的变量 s 以 $j\omega$ 取代，即可写出 $H(j\omega)$ 。

与拉普拉斯变换方法类似，利用式(5-2)给出的傅里叶分析方法同样可以解决求线性系统对激励信号的零状态响应问题。从物理概念来说，如果激励信号的频谱密度函数为 $E(j\omega)$ ，则响应的频谱密度函数便是 $H(j\omega)E(j\omega)$ 。系统改变了激励信号的频谱。系统的功能是对信号各频率分量进行加权，某些频率分量增强，而另一些分量则相对削弱或不变。而且，每个频率分量在传输过程中都产生各自的相位移。这种改变的规律完全由系统函数 $H(j\omega)$ 所决定， $H(j\omega)$ 是一个加权函数，把频谱密度为 $E(j\omega)$ 的信号改造为 $R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$ 的响应信号。实际上，对于任意激励信号的傅里叶分解可以看作无穷多项 $e^{j\omega t}$ 信号的叠加（或无穷多项正弦分量的叠加），把这些分量作用于系统所得的响应取和（逆变换的积分式），即可给出完整的响应信号。

这种观点同样可用于解释拉氏变换方法。在那里，信号被分解为复指数函数 e^{st} 的叠加。

概括讲，在线性时不变系统的分析中，无论时域、频域、复频域的方法都可按信号分解、求响应再叠加的原则来处理。

从 5.2 节到 5.6 节将利用 $H(j\omega)$ 建立信号经线性系统传输的一些重要概念，包括无失真传输条件、理想滤波器模型以及系统的物理可实现条件等。着重系统滤波特性的理论分析，关于滤波器设计的一些实际问题将在第十章讨论。

在 3.7 节，作为傅里叶变换的一个性质曾引出调制的概念，5.7 节将从组成通信系统的角度研究调制和解调的原理与实现。5.8 节研究带通系统的运用，包括调制信号经带通传输以及频率窗函数两方面的问题，后者具有重要的理论意义。以 3.11 节抽样定理为基础，5.9 节和 5.10 节研究抽样信号的传输与恢复，初步了解数字通信系统的原理与特点。调制和抽样理论最重要的贡献是运用这些理论构成了频分复用与时分复用通信系统。最后二节着重讨论时分复用和频分复用的原理，初步认识多路复用技术在现代通信系统中占有的重要地位；同时，我们将运用傅里叶变换的基本理论介绍有关综合业务数字网以及信息高速公路的初步知识。

5.2 利用系统函数 $H(j\omega)$ 求响应

在 4.8 节式(4-111)曾利用符号 $H(j\omega)$ 描述正弦稳态响应的频率特性，在那里 $\mathcal{F}[h(t)] = H(s)$ ， $H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)$ 。现在直接定义符号 $H(j\omega)$ 为系统冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换，即 $\mathcal{F}[h(t)] = H(j\omega)$ 。根据 4.13 节关于傅里叶变换与拉普拉斯变换的比较可知，当 $H(s)$ 在虚轴上及右半平面无极点时以上二种计算结果才相等，这时有

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

也即，对于 $H(s)$ 在虚轴上有极点的系统二者不等，下面给出这种情况的实例。

例5-1 对于图5-1所示电容模型，输入为电流源电流，输出为电容两端电压，求冲激响应 $h(t)$ 、系统函数 $H(s)$ 、 $H(j\omega)$ 。

解

令输入信号 $i(t) = \delta(t)$ ，求出 $v(t)$ 即 $h(t)$ ：

$$h(t) = v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} u(t)$$

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{sC}$$

$$H(j\omega) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{C} \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]$$

如果利用 $H(s)$ 求正弦稳态频响，则有

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega C}$$

显然，二种方法求得的结果并不相等。严格讲，这里宜选用二种符号，考虑到 $H(s)$ 在虚轴无极点的情况（稳定系统）更为普遍，在许多文献和著作中对以上二种情况都采用同一符号 $H(j\omega)$ 表示，本书遵从这一习惯。然而，在求解电路响应时需要针对具体问题考虑 $H(j\omega)$ 的确切含义。

下面的例子研究利用 $H(j\omega) = \mathcal{L}[h(t)]$ 求系统对非周期信号的响应。

例5-2 图5-2(a)所示 RC 低通网络，在输入端 1-1' 加入矩形脉冲 $v_1(t)$ 如图5-2(b)所示，利用傅里叶分析方法求 2-2' 端电压 $v_2(t)$ 。

解

利用 $H(s)$ 或从 $h(t)$ 容易求得

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

引用符号 $\alpha = \frac{1}{RC}$ 得到

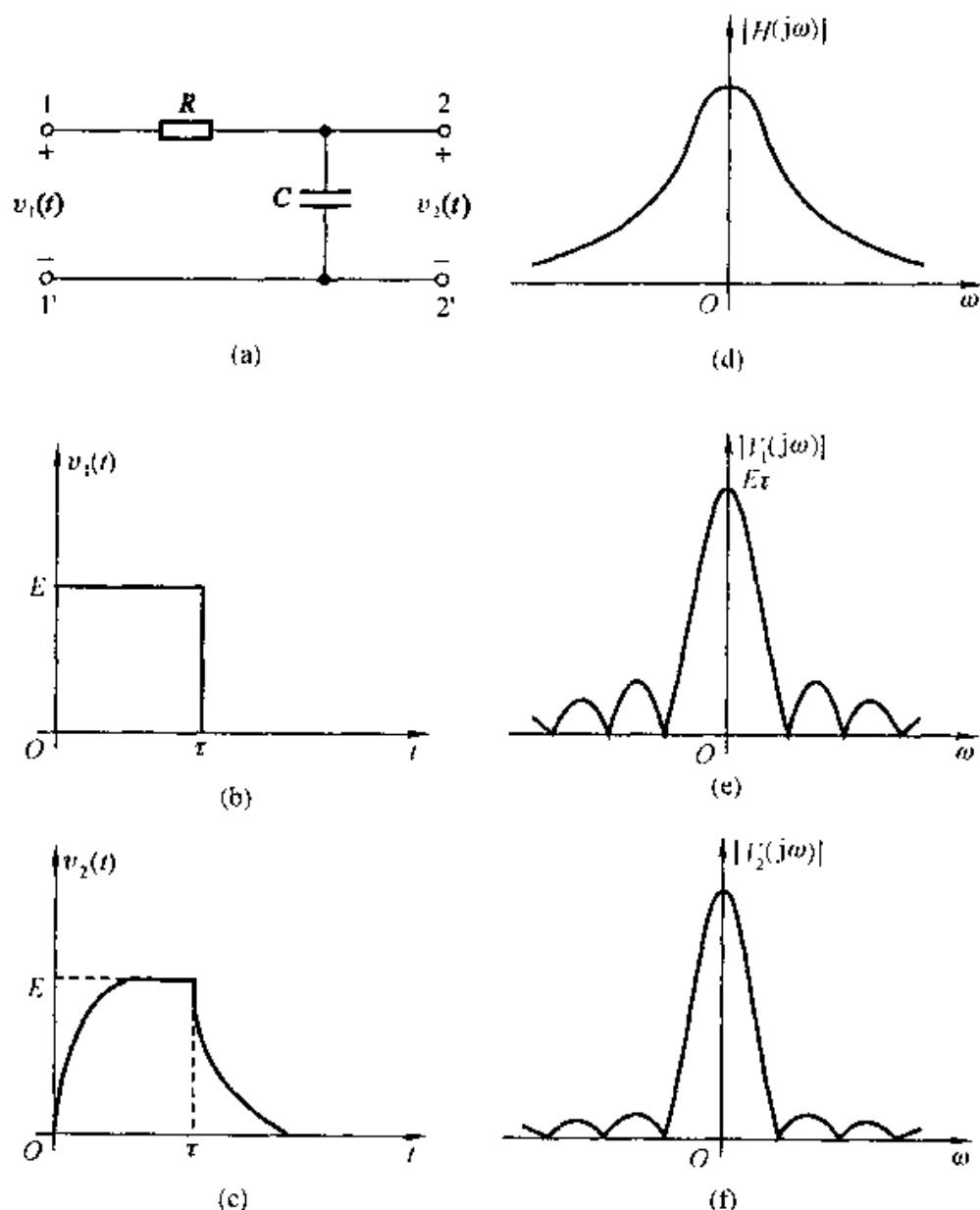
$$H(j\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$$

激励信号 $v_1(t)$ 的傅里叶变换式为

$$V_1(j\omega) = \frac{E}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) = E\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \quad (5-3)$$



图 5-1 例 5-1 的电路

图 5-2 矩形脉冲通过 RC 低通网络

引用式(5-2)求得响应 $v_2(t)$ 的傅里叶变换

$$\begin{aligned}
 V_2(j\omega) &= H(j\omega)V_1(j\omega) \\
 &= -\frac{\alpha}{\alpha + j\omega} \left[\frac{E\tau \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \right] e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \\
 &= |V_2(j\omega)| e^{j\varphi_2(\omega)}
 \end{aligned}$$

其中：

$$|V_2(j\omega)| = \frac{2\alpha E \left| \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|}{\omega \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \quad (5-4)$$

$$\varphi_2(\omega) = \begin{cases} -\left[\frac{\omega\tau}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\right] & \left[\frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau}\right] \\ -\left[\frac{\omega\tau}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\right] + \pi & \left[\frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+2)\pi}{\tau}\right] \end{cases} \quad (n=0, +1, +2, \dots) \quad (5-5)$$

利用式(5-4)与(5-5)可以分别描绘响应的幅度谱与相位谱。

为便于进行逆变换以求得 $v_2(t)$ 波形, 把 $V_2(j\omega)$ 表示式写作

$$\begin{aligned} V_2(j\omega) &= \frac{\alpha}{\alpha + j\omega} \cdot \frac{E}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) \\ &= E \left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\alpha + j\omega} \right) (1 - e^{-j\omega\tau}) \\ &= \frac{E}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) - \frac{E}{\alpha + j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) \end{aligned} \quad (5-6)$$

于是有

$$\begin{aligned} v_2(t) &= E[u(t) - u(t-\tau)] - E[e^{-\alpha t}u(t) - e^{-\alpha(t-\tau)}u(t-\tau)] \\ &= E(1 - e^{-\alpha t})u(t) - E[1 - e^{-\alpha(t-\tau)}]u(t-\tau) \end{aligned} \quad (5-7)$$

$v_2(t)$ 的波形如图 5-2(c) 所示。图 5-2(d), (e), (f) 则分别绘出了上述各傅里叶变换式的幅频特性曲线 $|H(j\omega)|$, $|V_1(j\omega)|$, $|V_2(j\omega)|$ 。由图可见, 输入信号频谱的高频分量比起低频分量受到较严重的衰减。输出信号的频谱密度函数为 $H(j\omega)$ 与 $V_1(j\omega)$ 的乘积, 于是幅度谱为 $|V_2(j\omega)| = |H(j\omega)V_1(j\omega)|$, 即式(5-4)。显然, 输出信号的波形与输入相比产生了失真, 这表现在输出波形上升和下降特性上。输入信号在 $t=0$ 时刻急剧上升, 在 $t=\tau$ 时刻急剧下降, 这种急速变化意味着有很高的频率分量。由于网络不允许高频分量通过, 输出电压不能迅速变化, 于是不再表现为矩形脉冲, 而是以指数规律逐渐上升和下降。如果减小滤波器的 RC 时间常数, 则此低通带宽增加, 允许更多的高频分量通过, 响应波形的上升、下降时间就要缩短。当然, 系统函数相位特性也要影响到响应波形的变化, 但在本例中, 主要是幅频特性的影响, 这里暂不讨论相位特性, 有关相位特性的说明将在第 5.3 节专门研究。

从以上分析可以看出, 利用傅里叶变换形式的系统函数 $H(j\omega)$ 从频谱改变的观点解释了激励与响应波形的差异, 物理概念比较清楚, 但求解过程不如拉普拉斯变换方法简便。傅里叶分析求逆变换的过程比较烦琐, 此外, 在正变换式中可能包含 $\delta(\omega)$ 项, 在运算过程中增加麻烦。因此, 在求解一般非周期信号作用于具体电路的响应时, 用 $H(s)$ 更方便, 很少利用 $H(j\omega)$ 。引出 $H(j\omega)$ 的重要意义在于研究信号传输的基本特性、建立滤波器的基本概念并理解频响特性的物理意义, 以下两节研究这方面的问题。这些理论内容在信号传输和滤波器设计等实际问题中具有十分重要的指导意义。

5.3 无失真传输

一般情况下，系统的响应波形与激励波形不相同，信号在传输过程中将产生失真。

线性系统引起的信号失真由两方面因素造成，一是系统对信号中各频率分量幅度产生不同程度的衰减，使响应各频率分量的相对幅度产生变化，引起幅度失真，这正如前节指出。另一是系统对各频率分量产生的相移不与频率成正比，使响应的各频率分量在时间轴上的相对位置产生变化，引起相位失真，这方面的问题前面未作研究，本节将结合实例讨论。

必须指出，线性系统的幅度失真与相位失真都不产生新的频率分量。而对于非线性系统则由于其非线性特性对于所传输信号产生非线性失真，非线性失真可能产生新的频率分量。现在只研究有关线性系统的幅度失真和相位失真问题。

在实际应用中，有时需要有意识地利用系统进行波形变换，这时必然产生失真。然而在某些情况下，则希望传输过程中使信号失真最小。现在研究无失真传输的条件。

所谓无失真是指响应信号与激励信号相比，只是大小与出现的时间不同，而无波形上的变化。设激励信号为 $e(t)$ ，响应信号为 $r(t)$ ，无失真传输的条件是

$$r(t) = K e(t - t_0) \quad (5-8)$$

式中 K 是一常数， t_0 为滞后时间。满足此条件时， $r(t)$ 波形是 $e(t)$ 波形经 t_0 时间的滞后，虽然，幅度方面有系数 K 倍的变化，但波形形状不变，举例示意于图 5-3。

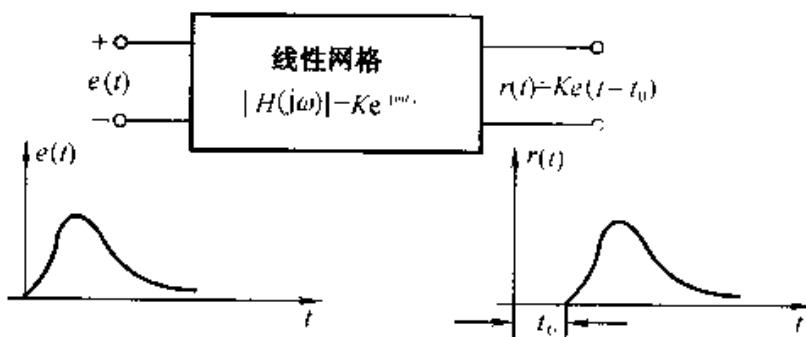


图 5-3 线性网络的无失真传输

下面讨论为满足式(5-8)，实现无失真传输，对系统函数 $H(j\omega)$ 应提出怎样的要求？

设 $r(t)$ 与 $e(t)$ 的傅里叶变换式分别为 $R(j\omega)$ 与 $E(j\omega)$ 。借助傅里叶变换的延时定理，从式(5-8)可以写出

$$R(j\omega) = K E(j\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (5-9)$$

此外还有

$$R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$$

所以，为满足无失真传输应有

$$H(j\omega) = K e^{-j\omega t_0} \quad (5-10)$$

式(5-10)就是对于系统的频率响应特性提出的无失真传输条件。欲使信号在通过线性系统时不产生任何失真，必须在信号的全部频带内，要求系统频率响应的幅度特性是一常数，相位特性是一通过原点的直线。如图 5-4 所示，图中幅度特性的常数为 K ，相位特性的斜率为 $-\omega t_0$ 。

式(5-10)或图 5-4 的要求可以从物理概念上得到直观的解释。由于系统函数的幅度 $|H(j\omega)|$ 为常数 K ，响应中各频率分量幅度的相对大小将与激励信号的情况一样，因而没有幅度失真。要保证没有相位失真，必须使响应中各频率分量与激励中各对应分量滞后同样的时间，这一要求反映到相位特性是一条通过原点的直线。下面举例说明。

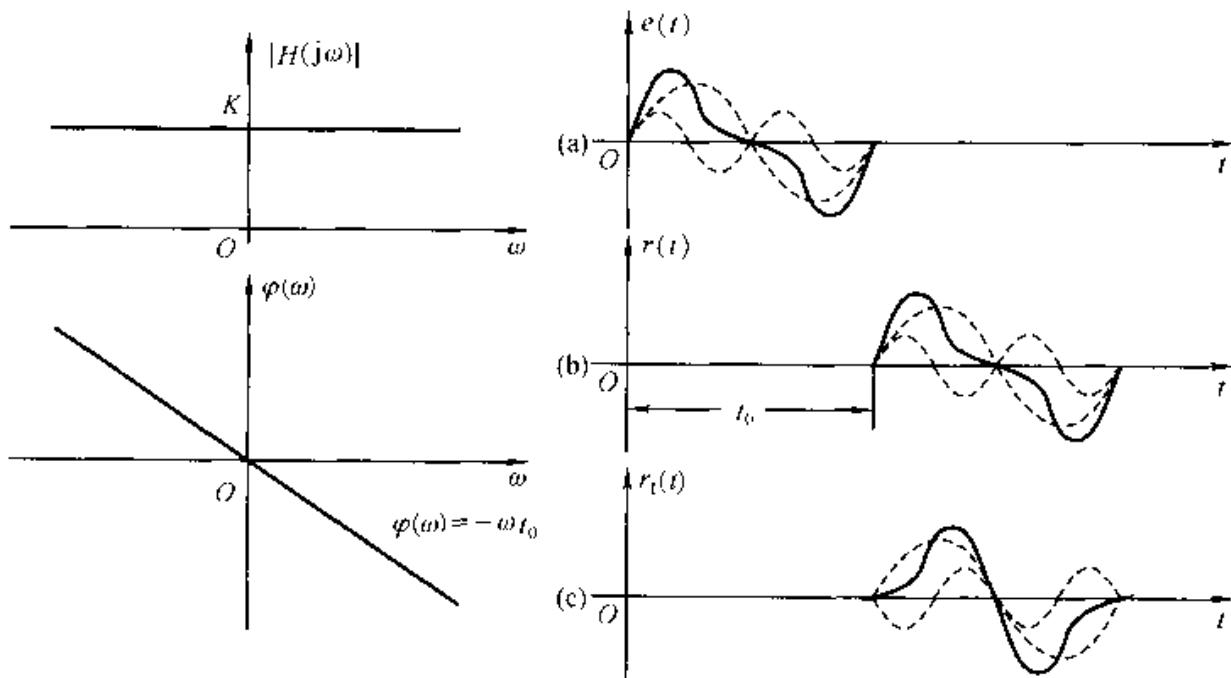


图 5-4 无失真传输系统的
幅度和相位特性

图 5-5 无失真传输与有相位失真传输波形比较

设激励信号 $e(t)$ 波形如图 5-5(a)所示。它由基波与二次谐波两个频率分量组成，表示式为

$$e(t) = E_1 \sin(\omega_1 t) + E_2 \sin(2\omega_1 t) \quad (5-11)$$

响应 $r(t)$ 的表示式为

$$\begin{aligned} r(t) &= KE_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + KE_2 \sin(2\omega_1 t - \varphi_2) \\ &= KE_1 \sin\left[\omega_1\left(t - \frac{\varphi_1}{\omega_1}\right)\right] + KE_2 \sin\left[2\omega_1\left(t - \frac{\varphi_2}{2\omega_1}\right)\right] \end{aligned} \quad (5-12)$$

为了使基波与二次谐波得到相同的延迟时间，以保证不产生相位失真，应有

$$\frac{\varphi_1}{\omega_1} = \frac{\varphi_2}{2\omega_1} = t_0 = \text{常数} \quad (5-13)$$

因此，各谐波分量的相移须满足以下关系

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\omega_1}{2\omega_1} \quad (5-14)$$

这个关系很容易推广到其他高次谐波频率，于是，可以得出结论：为使信号传输时不产生相位失真，信号通过线性系统时谐波的相移必须与其频率成正比，也即系统的相位特性应该是一条经过原点的直线，写作

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0 \quad (5-15)$$

这正是式(5-10)与图5-4所得到的结果。显然，信号通过系统的延迟时间 t_0 即为相位特性的斜率

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -t_0 \quad (5-16)$$

在图5-5(b)中画出了无失真传输的 $r(t)$ 波形。而图5-5(c)则是相位失真的情况，可以看到， $r_1(t)$ 与 $e(t)$ 或者 $r(t)$ 的波形是不一样的。

对于传输系统相移特性的另一种描述方法是以“群时延”(或称群延时)特性来表示。群时延 τ 的定义为

$$\tau = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (5-17)$$

也即，群时延定义为系统相频特性对频率的导数并取负号。在满足信号传输不产生相位失真的条件下，其群时延特性应为常数。

对于实际的传输系统 $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ 为负值，因而 τ 为正值，通常为简化表达与计算，在一些文献或著作中也定义 $\tau = |\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}|$ ，这时 τ 取正值。通常利用 $\Delta\varphi(\omega)$ 与 $\Delta\omega$ 之比(当 $\Delta\omega$ 足够小)近似计算或测量 τ 值。与直接用 $\varphi(\omega)$ 描述相位特性相比较，用群时延间接表达相位特性的好处是便于实际测量，而且有助于理解调幅波传输过程的波形变化，在5.8节将结合调幅波通过带通滤波器的失真特性说明引出群时延的意义。

式(5-10)说明了为满足无失真传输对于系统函数 $H(j\omega)$ 的要求，这是就频域方面提出的。如果用时域特性表示，即对式(5-8)作傅里叶逆变换，可以写出系统的冲激响应

$$h(t) = K\delta(t - t_0) \quad (5-18)$$

此结果表明：当信号通过线性系统时，为了不产生失真，冲激响应也应该是冲激函数，而时间延后 t_0 。这和本节一开始提出的直觉想法完全一致。

在实际应用中，与无失真传输这一要求相反的另一种情况是有意识地利用系统引起失真来形成某种特定波形，这时，系统传输函数 $H(j\omega)$ 则应根据所需具体

要求来设计。现在说明利用冲激信号作用于系统产生某种特定波形的方法。当希望得到 $r(t)$ 波形时, 若已知 $r(t)$ 的频谱为 $R(j\omega)$, 那么, 使系统函数满足

$$H(j\omega) = R(j\omega) \quad (5-19)$$

于是, 在系统输入端加入激励函数为冲激信号

$$e(t) = \delta(t)$$

输出端就得到响应 $H(j\omega)$ 也即 $R(j\omega)$, 它的逆变换就是所需的 $r(t)$ 。

例如, 当需要产生底宽为 τ 的升余弦脉冲时(如图 5-6)。它的表示式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \right] & \left(-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \right) \\ 0 & (t \text{ 为其他值}) \end{cases} \quad (5-20)$$

频谱函数的表示式为

$$R(j\omega) = \frac{E\tau}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2} \quad (5-21)$$

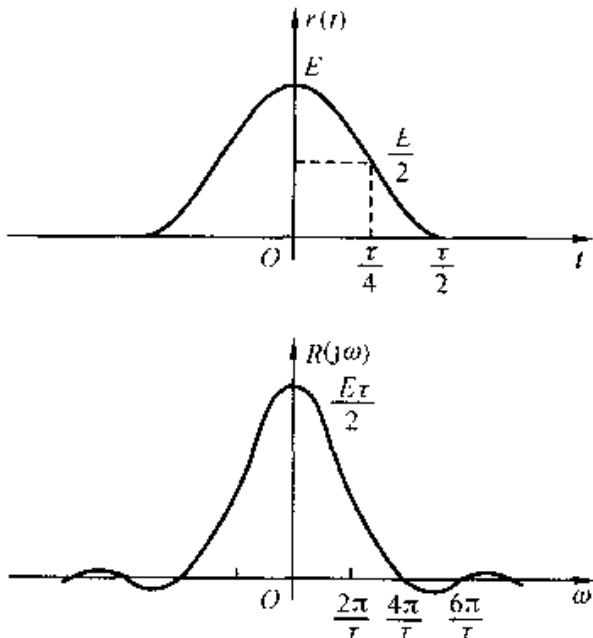


图 5-6 升余弦信号波形和频谱

频谱特性曲线示于图 5-6。

如果使系统函数 $H(j\omega)$ 等于升余弦信号的频谱函数

$$H(j\omega) = R(j\omega) = \frac{E\tau}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2} \quad (5-22)$$

于是, 在冲激信号 $\delta(t)$ 的作用下, 系统响应即为升余弦脉冲。在实际应用中, $\delta(t)$ 函数波形无法实现, 只要脉冲足够窄, 所得到输出信号基本上可近似为

升余弦函数。此外，实际实现的 $H(j\omega)$ 还应包含一定的相移 $\varphi(\omega)$ ，这意味着波形 $r(t)$ 在时间上滞后。

图 5-7 示意画出用上述方法产生升余弦脉冲的方框图。

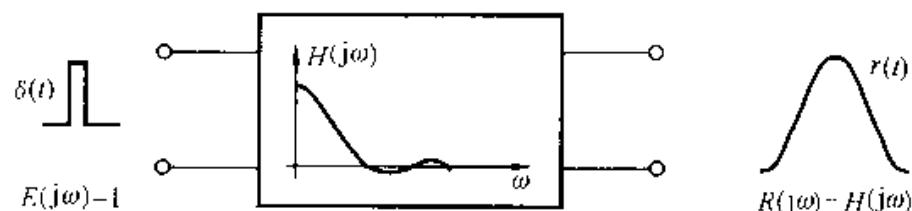


图 5-7 利用系统的冲激响应产生升余弦脉冲

5.4 理想低通滤波器

(一) 理想低通的频域特性和冲激响应

我们曾对信号特性理想化，并已经熟悉了诸如冲激函数、阶跃函数这样的

理想模型。这些模型的引入带来许多方便，使我们对一些物理现象的理解进一步深化。

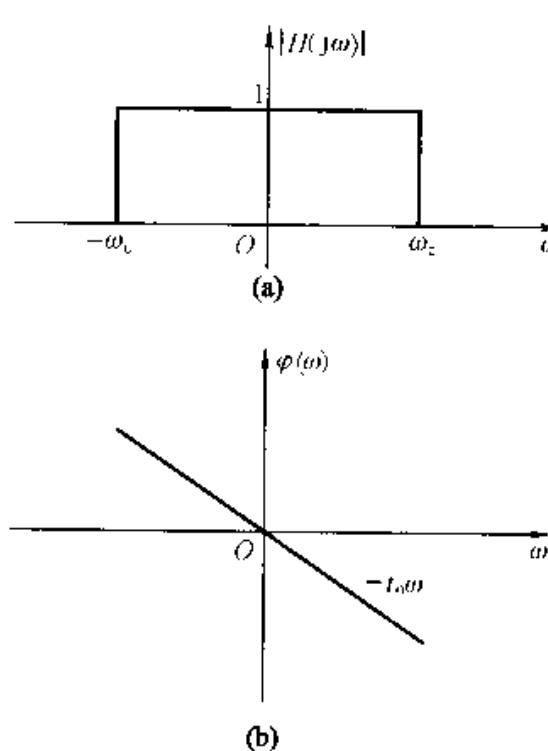


图 5-8 理想低通滤波器特性

在研究系统特性时同样需要建立一些理想化的系统模型。所谓“理想滤波器”就是将滤波网络的某些特性理想化而定义的滤波网络。理想滤波器可按不同的实际需要从不同角度给予定义。最常用到的是具有矩形幅度特性和线性相移特性的理想低通滤波器。这种低通滤波器将低于某一频率 ω_c 的所有信号予以传递，而无任何失真，将频率高于 ω_c 的信号完全衰减[图 5-8(a)]， ω_c 称为截止频率。相移特性是通过原点的直线，也满足无失真传输的要求[图 5-8(b)]。网络函数的表示式写作

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (5-23)$$

其中：

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1 & (-\omega_c < \omega < \omega_c) \\ 0 & (\omega \text{ 为其他值}) \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = -t_0 \omega$$

对 $H(j\omega)$ 进行傅里叶逆变换，不难求得网络的冲激响应

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)} \right|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)} \end{aligned} \quad (5-24)$$

波形如图 5-9 所示。这是一个峰值位于 t_0 时刻的 Sa 函数，或写作 $\frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa} [\omega_c(t-t_0)]$ 。

这里，自然会提出这样的问题：按照冲激响应的定义，激励信号 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时刻加入，然而，响应在 t 为负值时却已经出现，为什么网络可以预测激励函数？似乎它有着“未卜先知”的本领。这个问题的解答是：实际上不可能构成具有这种理想特性的网络。尽管在研究网络问题时理想低通滤波器是十分需要的，但是在实际电路中却不能实现。

然而，有关理想滤波器的研究并不因其无法实现而失去价值，实际滤波器的分析与设计往往需要理想滤波器的理论作指导。

滤波器在物理上可实现与不可实现的条件将在 5.5 节讨论。

(二) 理想低通的阶跃响应

在图 5-2 中已经看到，如果具有跃变不连续点的信号通过低通滤波器传输，则不连续点在输出将被圆滑，产生渐变。这是由于信号随时间的急剧改变意味着包含许多高频分量，而较平坦的信号则主要包含低频分量，低通滤波器滤除了一些高频分量。阶跃信号作用于理想低通滤波器时，同样在输出端要呈现逐渐上升的波形，不再像输入信号那样急剧上升。响应的上升时间取决于滤波器的截止频率。下面将要证明：上升时间和滤波器截止频率成反比。截止频率越低，在输出端信号上升越缓慢。

已知理想低通滤波器的网络函数为

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & (-\omega_c < \omega < \omega_c) \\ 0 & (\omega \text{ 为其他值}) \end{cases} \quad (5-25)$$

阶跃信号的傅里叶变换

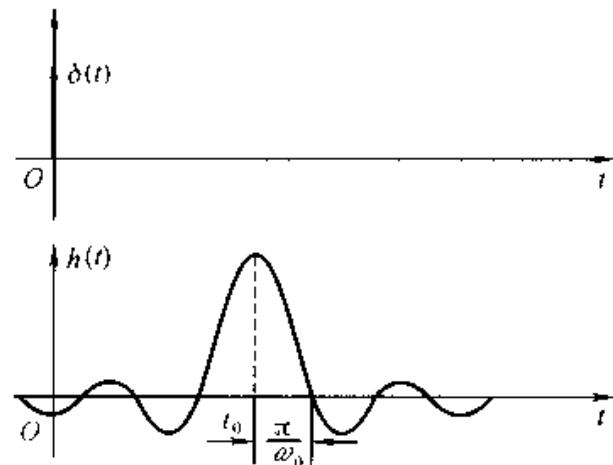


图 5-9 理想低通滤波器的冲激响应

$$E(j\omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (5-26)$$

于是

$$R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0} \quad (-\omega_c < \omega < \omega_c) \quad (5-27)$$

现在，可以利用卷积或直接取逆变换的方法求得阶跃响应，按逆变换定义写出

$$\begin{aligned} r(t) &= \mathcal{F}^{-1}[R(j\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos[\omega(t-t_0)]}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega} d\omega \end{aligned} \quad (5-28)$$

注意到式(5-28)中，前边一项积分的被积函数 $\frac{\cos[\omega(t-t_0)]}{\omega}$ 是 ω 的奇函数，所以积分为零，后边一项积分的被积函数是 ω 的偶函数，因而有

$$r(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \quad (5-29)$$

这里，引用了符号 x 置换被积分变量

$$x = \omega(t-t_0) \quad (5-30)$$

而函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的积分称为“正弦积分”，在一些数学书中已制成标准表格或曲线，以符号 $\text{Si}(y)$ 表示

$$\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \quad (5-31)$$

函数 $\frac{\sin x}{x}$ 与 $\text{Si}(y)$ 曲线同时画于图 5-10。可以看到 $\text{Si}(y)$ 是 y 的奇函数，随着 y 值增加， $\text{Si}(y)$ 从 0 增长，以后围绕 $\frac{\pi}{2}$ 起伏，起伏逐渐衰减而趋于 $\frac{\pi}{2}$ ，各极值点与 $\frac{\sin x}{x}$ 函数的零点对应，例如 $\text{Si}(y)$ 第一个峰点就在 $y=\pi$ 处出现。

引用以上有关的数学结论，响应 $r(t)$ 写作

$$r(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t-t_0)] \quad (5-32)$$

把单位阶跃激励 $u(t)$ 及其响应 $r(t)$ 分别示于图 5-11(a) 和 (b)。由图可见，理想低通滤波器的截止频率 ω_c 越低，输出 $r(t)$ 上升越缓慢。如果定义输出由最小值到最大值所需时间为上升时间 t_r ，则由图 5-11 可以得到

$$t_r = 2 \cdot \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{B} \quad (5-33)$$

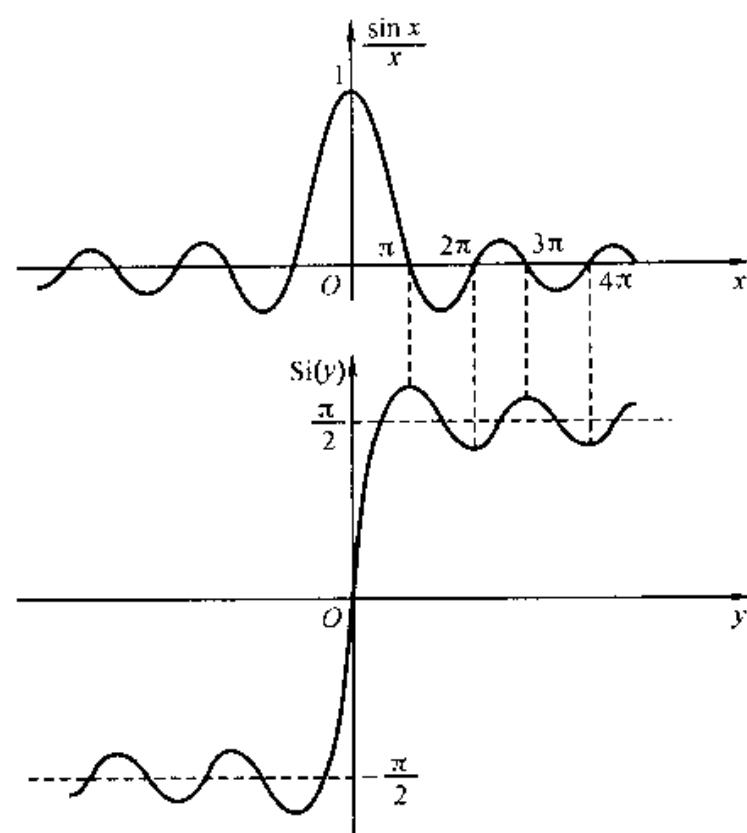
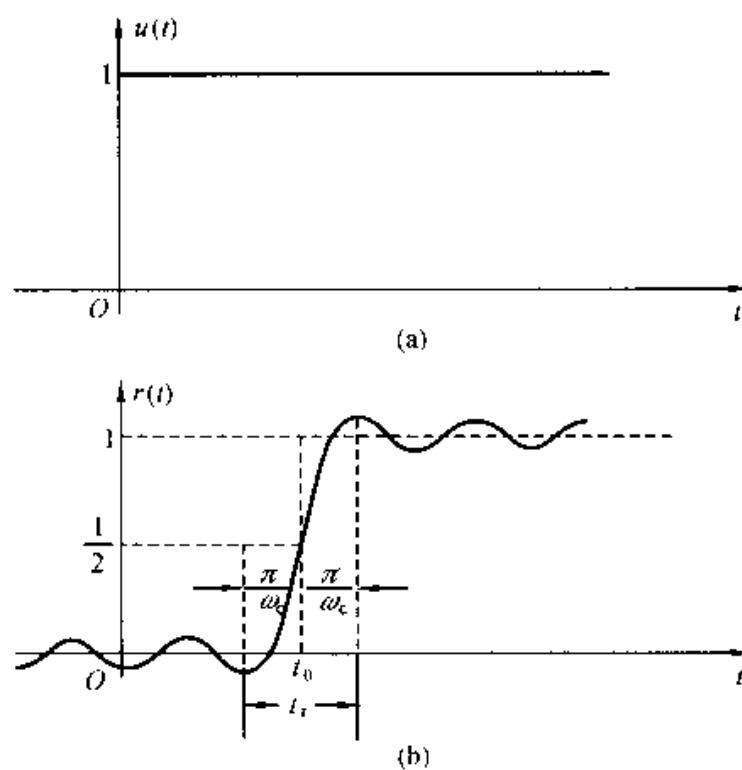
图 5-10 $\frac{\sin x}{x}$ 函数与 $\text{Si}(y)$ 函数

图 5-11 理想低通滤波器的阶跃响应

这里, $B = \frac{\omega_c}{2\pi}$, 是将角频率折合为频率的滤波器带宽(截止频率)。于是得到重要的结论: 阶跃响应的上升时间与系统的截止频率(带宽)成反比。

此结论对各种实际的滤波器同样具有指导意义。例如, 一个一阶 RC 低通滤波器的阶跃响应为指数上升波形, 上升时间与 RC 时间常数成正比, 但从频域特性来看, 此低通滤波器的带宽却与 RC 乘积值成反比, 这里, 阶跃响应上升时间与带宽成反比的现象和理想低通滤波器的分析是一致的。

一般讲, 滤波器阶跃响应上升时间与带宽不能同时减小, 对不同的滤波器二者之乘积取不同的常数值, 而且此常数值具有下限, 这将由著名的“测不准原理”所决定, 将在第六章 6.10 节研究这一问题。

(三) 理想低通对矩形脉冲的响应

利用上述结果, 很容易求得理想低通滤波器对于矩形脉冲的响应。设激励信号——矩形脉冲的表示式为

$$e_1(t) = u(t) - u(t - \tau) \quad (5-34)$$

波形如图 5-12(a)。应用叠加原理, 借助式(5-32)可求得网络对 $e_1(t)$ 的响应 $r_1(t)$

$$r_1(t) = \frac{1}{\pi} [\text{Si}[\omega_c(t - t_0)] - \text{Si}[\omega_c(t - t_0 - \tau)]] \quad (5-35)$$

此响应的波形示于图 5-12(b)。必须注意, 这里画出的是 $\frac{2\pi}{\omega_c} \ll \tau$ 的情形。如果 $\frac{2\pi}{\omega_c}$ 与 τ 接近或大于 τ , $r_1(t)$ 波形失真将更加严重, 有些像正弦波。这意味着

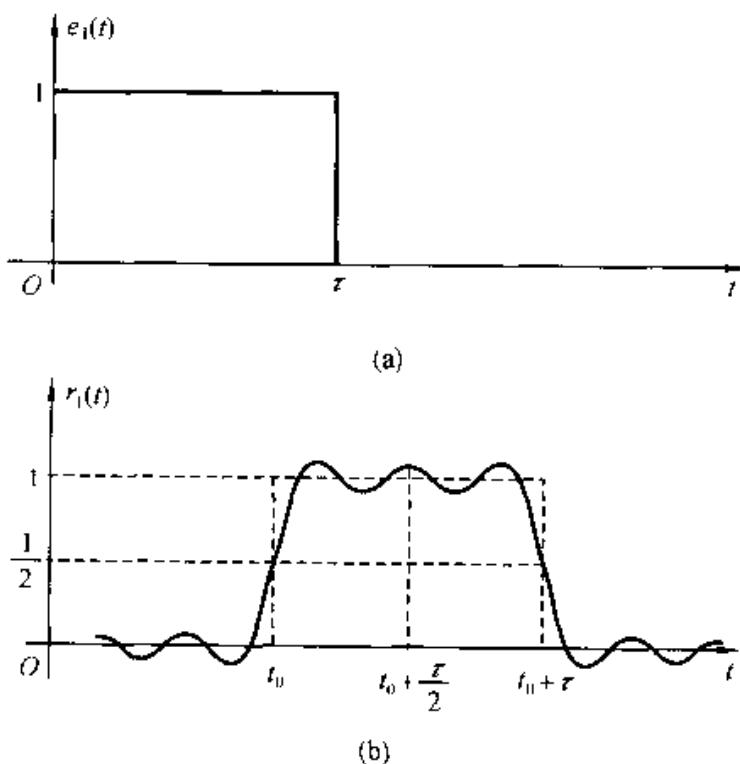


图 5-12 矩形脉冲通过理想低通滤波器

着，矩形脉冲经理想低通传输时，必须使脉宽 τ 与滤波器的截止频率相适应 ($\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_c}$)，才能得到大体上为矩形的响应脉冲，如果 τ 过窄(或 ω_c 过小)则响应波形上升与下降时间连在一起，完全丢失了激励信号的脉冲形象。

借助理想低通滤波器阶跃响应的有关结论，可以解释吉布斯现象。在第三章 3.2 节曾讲到，周期信号波形经傅里叶级数分解以后，取有限项级数相加可以逼近原信号，所谓吉布斯现象是指，对于具有不连续点(跳变点)的波形，所取级数项数越多，近似波形的方均误差虽可减少，但在跳变点处的峰起(上冲)值不能减小，此峰起随项数增多向跳变点靠近，而峰起值趋近于跳变值的 9%。

参看图 5-10 不难发现类似的现象。经计算 $S_i(y)$ 的第一个峰起值，可以知道在 $y=\pi$ 点， $S_i(\pi)=1.8514$ ，代入式(5-32)可求得相应的阶跃响应峰值

$$r(t)|_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1.8514}{\pi} \approx 1.0895 \quad (5-36)$$

也即，第一个峰起上冲约为跳变值的 8.95%，近似为 9%。如果增大理想低通滤波器的带宽 ω_c ，能够使阶跃响应的上升时间减小，但却不能改变 9% 上冲的强度。

显然，理想低通对于矩形脉冲的响应同样会出现此现象。图 5-13 (a) 所示

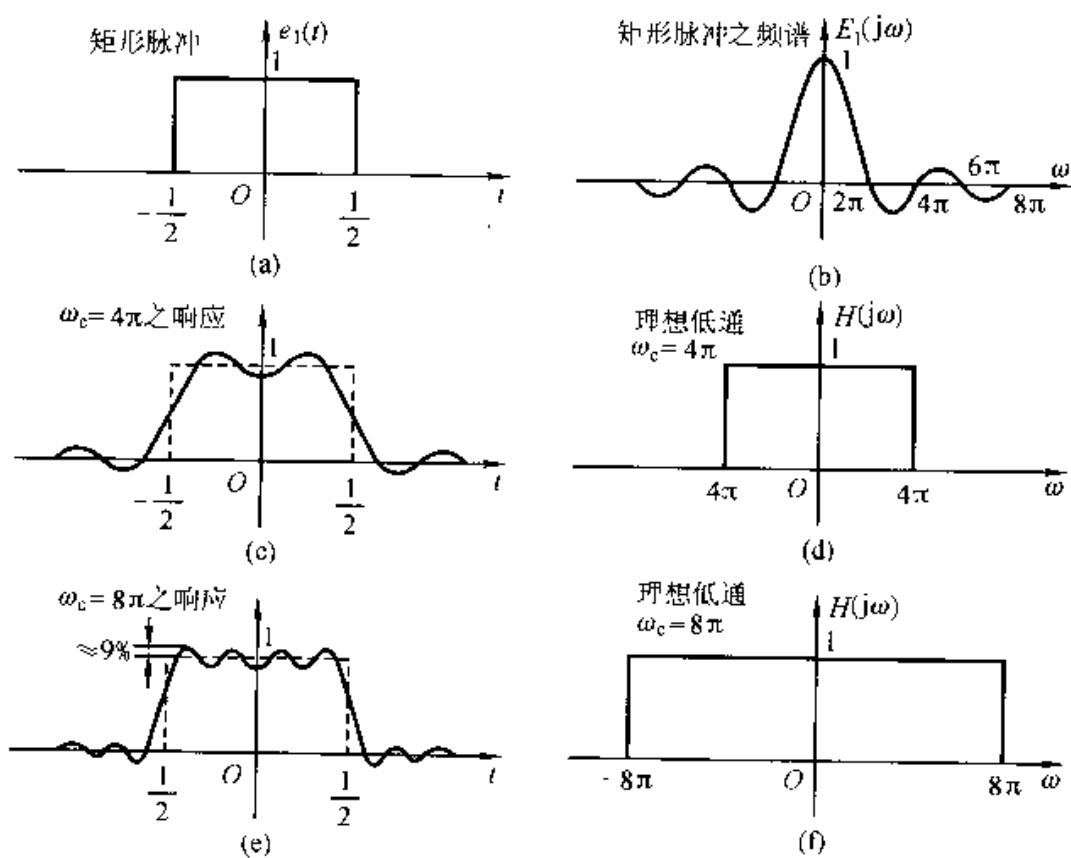


图 5-13 具有不同 ω_c 的理想低通对矩形脉冲之响应

示矩形脉冲的傅里叶变换如图 5-13 (b) 所示, 将此信号通过频域特性如图(d) 的理想低通, 其响应波形示于图(c), 当加大此低通网络之带宽 ω_c 如图(f) 时, 允许激励信号的更多高频成分通过网络, 于是, 响应波形改善, 见图(e), 但在跳变点的上冲逼近 9%。

对于周期性矩形脉冲, 其频谱分布虽变成离散型, 但是, 仍可利用上述原理解释吉布斯现象。

当把图 5-13 (a) 的矩形脉冲接到理想低通滤波器时, 从频域角度观察, 相当于利用图(d) 的矩形频率特性为图(b) 的频谱“开窗”, 在矩形“窗口”内只看到图(b) 的一部分频率分量, 这时, 可以把图(d) 所示的频率函数称为“窗函数”。利用矩形窗函数滤取信号频谱时, 在时域的不连续点要出现上冲。理论研究表明, 改用其他形式的“窗函数”有可能消除上冲, 例如选用升余弦类类型的窗函数。在 5.8 节和第十章还要介绍这方面的问题。

5.5 系统的物理可实现性、佩利—维纳准则

前文已述, 理想低通滤波器在物理上是不可实现的, 然而, 传输特性接近理想特性的网络却不难构成。下面举一实例。

一个简单的低通滤波器电路如图 5-14 所示。设元件参数间满足 $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ 。网络转移函数为

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} \\ &= \frac{\frac{1}{R} + j\omega C}{j\omega L + \frac{1}{R} + j\omega C} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C}}} + j\omega C}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}} \quad (5-37) \end{aligned}$$

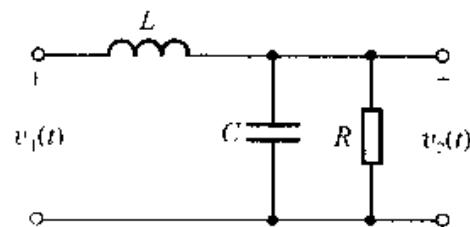


图 5-14 一个低通滤波

网络 $(R = \sqrt{\frac{L}{C}})$

注意到 $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, 并引入符号 $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 于是式(5-37)改写作

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (5-38)$$

其中:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left[\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right]$$

画出幅度特性与相移特性如图 5-15。

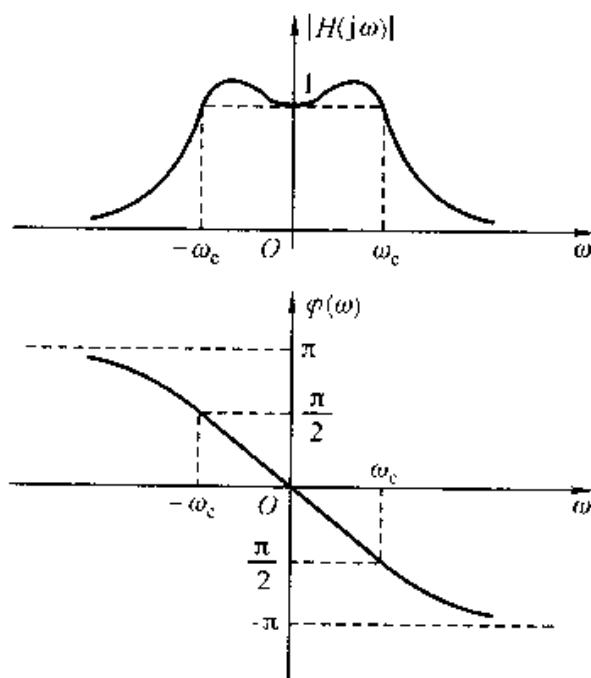


图 5-15 图 5-14 电路的幅度
特性与相移特性

为便于求得 $H(j\omega)$ 之逆变换，把式(5-38)写成以下形式

$$H(j\omega) = \frac{2\omega_c}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c}{\left(\frac{\omega_c}{2} + j\omega\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c\right)^2} \quad (5-39)$$

由此求得冲激响应

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{2\omega_c}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_c t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c t\right) \quad (5-40)$$

画出波形如图 5-16。

现在，可以看到图 5-14 电路的幅度特性、相移特性与理想低通滤波器有些相似，冲激响应也有相近之处，然而，区别仍很明显，在这里幅度特性不可能出现零值，冲激响应的起始时刻在 $t=0$ 处。

通过以上比较，读者会提出这样的问题：究竟怎样的系统数学模型可以在

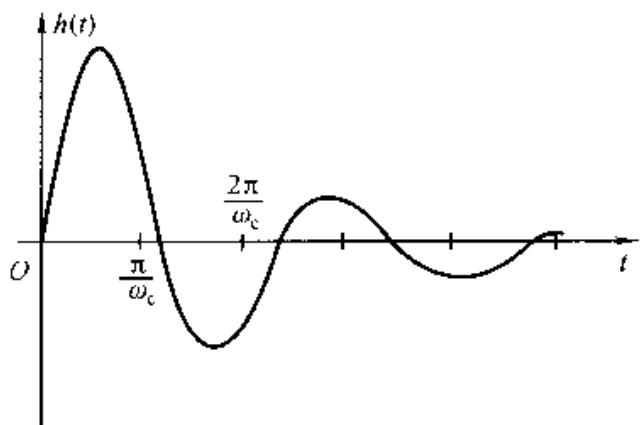


图 5-16 图 5-14 电路的冲激响应波形

物理上实现？怎样的情况又是不可实现的呢？我们希望找到区分可实现特性与不可实现特性的标准。

就时间域特性而言，一个物理可实现网络的冲激响应 $h(t)$ 在 $t < 0$ 时必须为零。或者说冲激响应 $h(t)$ 波形的出现必须是有起因的，不能在冲激作用之前就产生响应，有时把这一要求称为“因果条件”。

从频率特性来看，如果 $|H(j\omega)|$ 满足平方可积条件，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (5-41)$$

佩利(Paley)和维纳(Wiener)证明了对于幅度函数 $|H(j\omega)|$ 物理可实现的必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty \quad (5-42)$$

式(5-42)称为佩利-维纳准则。不满足此准则的幅度函数，该网络的冲激响应就是无起因的，即响应先于冲激激励出现。

如果系统函数幅度特性在某一限定的频带内为零，也即 $|H(j\omega)| = 0$ ，这时 $|\ln|H(j\omega)|| \rightarrow \infty$ ，于是，式(5-42)的积分不收敛，违反了佩利-维纳准则，系统是非因果的。对于物理可实现系统，可以允许 $|H(j\omega)|$ 特性在某些不连续的频率点上为零，但不允许在一个有限频带内为零。按此原理，理想低通、理想高通、理想带通(习题 5-10)、理想带阻等理想滤波器都是不可实现的。

下面研究具有高斯函数(钟形)幅度特性之网络函数的物理可实现性。这时有

$$|H(j\omega)| = e^{-\omega^2}$$

由第三章 3.5 节可知，频谱为钟形的时间信号也呈钟形，在 $t = -\infty$ 处已开始出现，因而，此系统是非因果性的，可用佩利-维纳准则来检验这一结论。由式(5-42)求出

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \ln \frac{|H(j\omega)|}{1 + \omega^2} \right| d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln(e^{-\omega^2})|}{1 + \omega^2} d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + \omega^2} \right) d\omega \\
 &= \lim_{B \rightarrow \infty} (\omega - \arctan \omega) \Big|_B = \lim_{B \rightarrow \infty} 2(B - \arctan B) \\
 &= 2 \left(\lim_{B \rightarrow \infty} B - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

显然，此积分不收敛，因而证实了前面作出的结论，幅度特性呈高斯函数的网络是不可实现的。

可以证明，对于有理多项式函数构成的幅度特性，能够满足式(5-42)的条件。这表明，佩利-维纳准则要求可实现的幅度特性其总的衰减不能过于迅速。在第十章将讨论以有理多项式构成之滤波网络函数。

总之，佩利-维纳准则既不允许网络特性在一频带内为零，也限制了幅度特性的衰减速度。

佩利-维纳准则只从幅度特性提出要求，而在相位特性方面却没有给出约束。假定，某一 $H(j\omega)$ 相应于一个因果系统，这时， $|H(j\omega)|$ 应满足式(5-42)，而冲激响应 $h(t)$ 在 $t > 0$ 才可出现。然而，若将此冲激响应波形沿 t 轴向左平移，使它进入 $t < 0$ 的时间范围，就构成了一个非因果系统。显然，这里两个系统的幅度特性是相同的，都符合式(5-42)的要求，但相位特性却不同。因此，可以说，佩利-维纳准则是系统物理可实现的必要条件，而不是充分条件。如果 $|H(j\omega)|$ 已被检验满足此准则，于是，就可找到适当的相位函数 $\varphi(\omega)$ 与 $|H(j\omega)|$ 一起构成一个物理可实现的系统函数。

5.6 利用希尔伯特变换研究系统函数的约束特性

由第 5.5 节的讨论可知，系统可实现性的实质是具有因果性。本节将要证明，由于因果性的限制，系统函数的实部与虚部或模与辐角之间将具备某种相互制约的特性，这种特性以希尔伯特(Hilbert)变换的形式表现出来。

对于因果系统，其冲激响应 $h(t)$ 在 $t < 0$ 时等于 0，仅在 $t > 0$ 时存在，因此

$$h(t) = h(t)u(t) \quad (5-43)$$

设 $h(t)$ 的傅里叶变换即系统函数 $H(\omega)$ 可分解为实部 $R(\omega)$ 和虚部 $jX(\omega)$ 之和

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = R(\omega) + jX(\omega) \quad (5-44)$$

对式(5-43)运用傅里叶变换的频域卷积定理得到

$$\mathcal{F}[h(t)] = \frac{1}{2\pi} \{ \mathcal{F}[h(t)] * \bar{\mathcal{F}}[u(t)] \} \quad (5-45)$$

于是有

$$\begin{aligned}
 R(\omega) + jX(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ [R(\omega) + jX(\omega)] * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ R(\omega) * \pi\delta(\omega) + X(\omega) * \frac{1}{j\omega} \right\} \\
 &\quad + \frac{j}{2\pi} \left\{ X(\omega) * \pi\delta(\omega) - R(\omega) * \frac{1}{\omega} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{R(\omega)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \right\} + j \left\{ \frac{X(\omega)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \right\}
 \end{aligned} \tag{5-46}$$

解得：

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \tag{5-47}$$

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \tag{5-48}$$

式(5-47)与式(5-48)称为希尔伯特变换对。它说明了具有因果性的系统函数 $H(j\omega)$ 的一个重要特性：实部 $R(\omega)$ 被已知的虚部 $X(\omega)$ 惟一地确定，反过来也一样。

从以上推证过程可以看出，傅氏变换实部与虚部构成希尔伯特变换对的特性，不只限于具有因果性的系统函数，对于任意因果函数，其傅氏变换的这种特性都是成立的。也即，若函数 $f(t)$ 满足

$$f(t) = f(t)u(t) \tag{5-49}$$

且 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \tag{5-50}$$

则 $R(\omega)$ 与 $X(\omega)$ 之间构成希尔伯特变换对 [满足式(5-47)与式(5-48)的互换关系]。

例5-3 已知系统冲激响应 $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ ，求系统函数，并验证其实部与虚部之间满足希尔伯特变换关系。

解 容易求得

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \bar{\mathcal{F}}[e^{-\alpha t}u(t)] \\
 &= \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \\
 &= R(\omega) + jX(\omega)
 \end{aligned}$$

其中：

$$R(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$X(\omega) = -\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

引用式(5-47), 由 $X(\omega)$ 来求 $R(\omega)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\lambda}{(\alpha^2 + \lambda^2)(\omega - \lambda)} d\lambda \\ &= -\frac{1}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\omega\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \lambda^2} - \frac{\omega}{\omega - \lambda} \right) d\lambda \\ &= -\frac{1}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \left[-\frac{\omega}{2} \ln(\alpha^2 + \lambda^2) + \alpha \arctan\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \omega \ln(\omega - \lambda) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= -\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = R(\omega) \end{aligned}$$

类似地, 利用式(5-48)也可由 $R(\omega)$ 来求 $X(\omega)$, 这时的积分计算关系为

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \lambda^2)(\omega - \lambda)} d\lambda = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

至此, 完成了本例要求的证明。

用类似的方法还可以研究可实现系统函数的模与相位函数之间的约束关系。若 $H(j\omega)$ 的模为 $|H(j\omega)|$, 相位以 $\varphi(\omega)$ 表示, 则:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (5-51)$$

$$\ln H(j\omega) = \ln |H(j\omega)| + j\varphi(\omega) \quad (5-52)$$

可以证明, 对于最小相移函数, $\ln |H(j\omega)|$ 与 $\varphi(\omega)$ 之间也存在一定的约束关系(构成一个变换对), 关于这一问题的研究, 详见有关参考书, 此处不再论证。这种约束关系表明, 对于可实现系统的系统函数, 若给定 $\ln |H(j\omega)|$, 则 $\varphi(\omega)$ 被惟一地确定, 它们构成一个最小相移函数。

本节利用希尔伯特变换论证了可实现系统 $H(j\omega)$ 的实部与虚部相互约束关系。希尔伯特变换作为一种数学工具在通信系统或数字信号处理系统中的应用相当广泛, 将在后续课程中看到那些应用实例。

5.7 调制与解调

在通信系统中, 信号从发射端传输到接收端, 为实现信号的传输, 往往需要进行调制和解调。

无线电通信系统是通过空间辐射方式传送信号的, 由电磁波理论可以知道, 天线尺寸为被辐射信号波长的十分之一或更大些, 信号才能有效地被辐射。对于语音信号来说, 相应的天线尺寸要在几十公里以上, 实际上不可能制造这样的天线。调制过程将信号频谱搬移到任何所需的较高频率范围, 这就容易以电磁波形式辐射出去。

从另一方面讲, 如果不进行调制而是把被传送的信号直接辐射出去, 那么各电台所发出的信号频率就会相同, 它们混在一起, 收信者将无法选择所要接收的信号。调制作用的实质是把各种信号的频谱搬移, 使它们互不重叠地占据

不同的频率范围，也即信号分别托附于不同频率的载波上，接收机就可以分离出所需频率的信号，不致互相干扰。此问题的解决为在一个信道中传输多对通话提供了依据，这就是利用调制原理实现“多路复用”。在简单的通信系统中，每个电台只允许有一对通话者使用，而“多路复用”技术可以用同一部电台将各路信号的频谱分别搬移到不同的频率区段，从而完成在一个信道内传送多路信号的“多路通信”。近代通信系统，无论是有线传输或无线电通信，都广泛采用多路复用技术。

下面应用傅里叶变换的某些性质说明搬移信号频谱的原理。设载波信号为 $\cos(\omega_0 t)$ ，它的傅里叶变换是

$$\tilde{r}[\cos(\omega_0 t)] = \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

若调制信号 $g(t)$ 的频谱为 $G(\omega)$ ，占据 $-\omega_m$ 至 ω_m 的有限频带，如图 5-17(b)，将 $g(t)$ 与 $\cos(\omega_0 t)$ 进行时域相乘[图 5-17(a)]即可得到已调信号 $f(t)$ ，根据卷积定理，容易求得已调信号的频谱 $F(\omega)$

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t)\cos(\omega_0 t) \\ \tilde{r}[f(t)] &= F(\omega) = \frac{1}{2\pi} G(\omega) * [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} [G(\omega + \omega_0) + G(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (5-53)$$

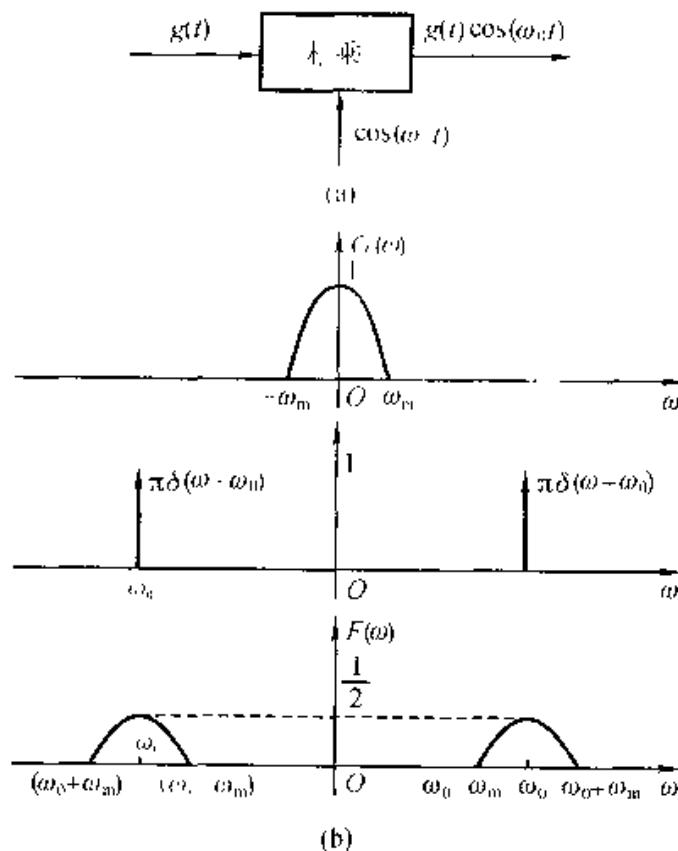
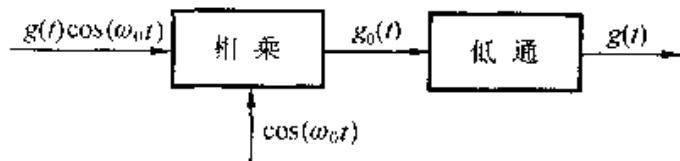


图 5-17 调制原理方框图及其频谱

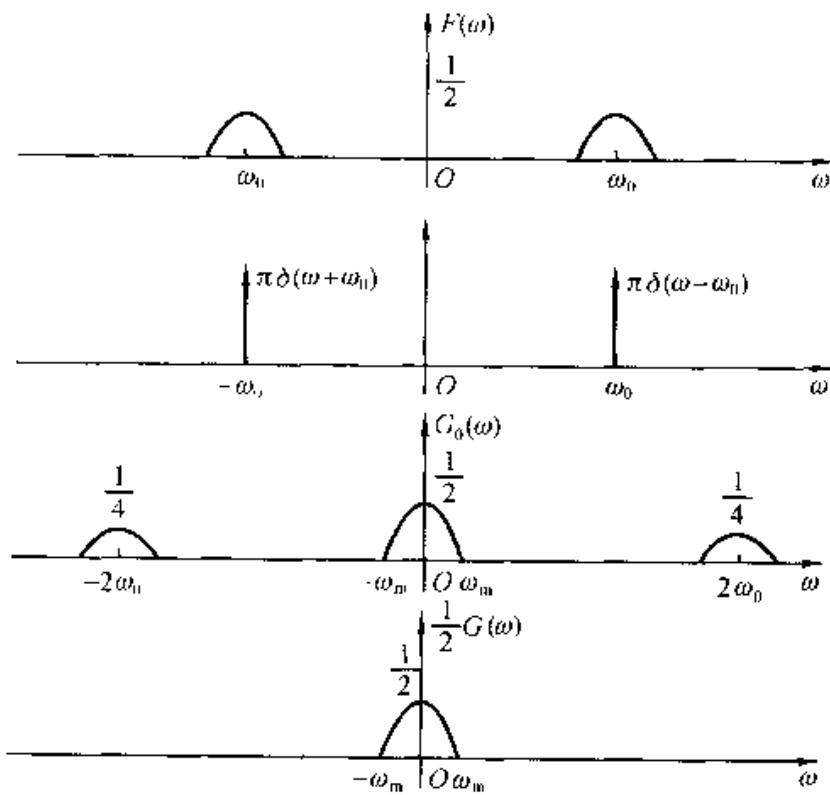
可见，信号的频谱被搬移到载频 ω_0 附近。在第三章 3.7 节曾利用频移定理得到同样结论。

由已调信号 $f(t)$ 恢复原始信号 $g(t)$ 的过程称为解调。图 5-18 (a) 示出实现解调的一种原理方框图，这里， $\cos(\omega_0 t)$ 信号是接收端的本地载波信号，它与发送端的载波同频同相。 $f(t)$ 与 $\cos(\omega_0 t)$ 相乘的结果使频谱 $F(\omega)$ 向左、右分别移动 $\pm \omega_0$ （并乘以系数 $\frac{1}{2}$ ），得到如图 5-18 (b) 所示的频谱 $G_0(\omega)$ ，此图形也可从时域的相乘关系得到解释：

$$\begin{aligned} g_0(t) &= [g(t)\cos(\omega_0 t)]\cos(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2}g(t)[1 + \cos(2\omega_0 t)] \\ &= \frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2}g(t)\cos(2\omega_0 t) \end{aligned} \quad (5-54)$$



(a)



(b)

图 5-18 同步解调原理方框图及其频谱

$$\mathcal{F}[g_0(t)] = G_0(\omega) = \frac{1}{2}G(\omega) + \frac{1}{4}[G(\omega + 2\omega_0) + G(\omega - 2\omega_0)] \quad (5-55)$$

再利用一个低通滤波器(带宽大于 ω_m , 小于 $2\omega_0 - \omega_m$), 滤除在频率为 $2\omega_0$ 附近的分量, 即可取出 $g(t)$, 完成解调, 详见图 5-18 (b)。

这种解调器称为乘积解调(或同步解调), 需要在接收端产生与发送端频率相同的本地载波, 这将使接收机复杂化。为了在接收端省去本地载波, 可采用如下方法: 在发射信号中加入一定强度的载波信号 $A \cos(\omega_0 t)$, 这时, 发送端的合成信号为 $[A + g(t)] \cos(\omega_0 t)$, 如果 A 足够大, 对于全部 t , 有 $A + g(t) > 0$, 于是, 已调信号的包络就是 $A + g(t)$ (见图 5-19)。这时, 利用简单的包络检波器(由二极管、电阻、电容组成)即可从图 5-19 相应的波形中提取包

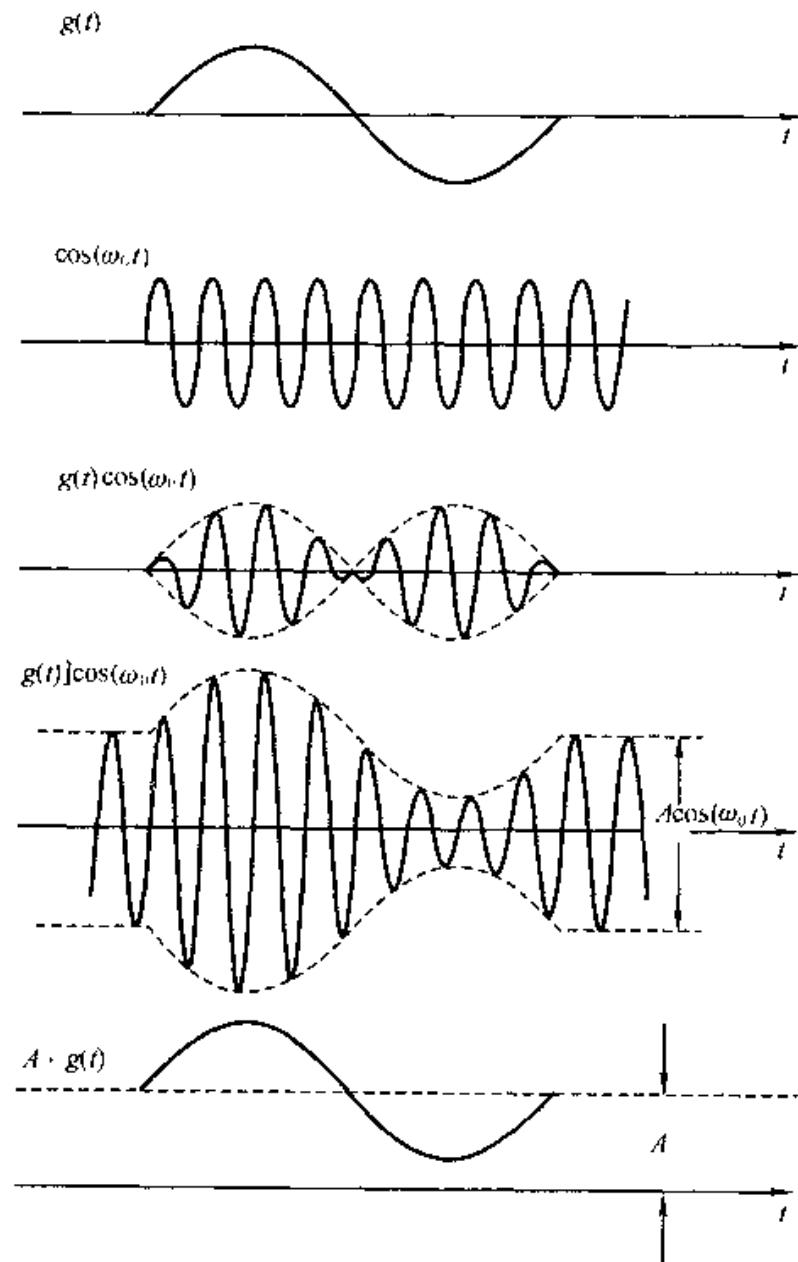


图 5-19 调幅、抑制载波调幅及其解调波形

络，恢复 $g(t)$ ，不需要本地载波。此方法常用于民用通信设备（例如广播接收机），在那里需要降低接收机的成本，但付出的代价是要使用价格昂贵的发射机，因为需提供足够强的信号 $A \cos(\omega_0 t)$ 之附加功率。显然，这是合算的，对于大批接收机只有一个发射机。由图 5-19 波形不难发现，在这种调制方法中，载波的振幅随信号 $g(t)$ 成比例地改变，因而称为“振幅调制”或“调幅”（AM）；前述不传送载波的方案则称为“抑制载波振幅调制”（AM-SC）。此外，还有“单边带调制”（SSB）（见习题 5-17）、“残留边带调制”（VSB）等等。

也可以控制载波的频率或相位，使它们随信号 $g(t)$ 成比例地变化，这两种调制方法分别称为“频率调制”或“调频”（FM）与“相位调制”或“调相”（PM）。它们的原理也是使 $g(t)$ 的频谱 $G(\omega)$ 搬移，但搬移以后的频谱不再与原始频谱相似。

调制理论的详细研究将是通信原理课程的主题，而各种调制电路的分析要在高频电路（通信电路）课程中学习。

5.8 带通滤波系统的运用

本节研究两个问题，首先讨论调制信号经带通滤波器传输的性能分析，这是通信系统中经常遇到的实际问题；第二部分研究一个理论问题，这就是用带通滤波构成频率窗函数以改善信号局部特性的分辨率，这是信号处理技术中一些新方法的重要理论基础。

（一）调幅信号作用于带通系统

为完成调幅信号的传输，往往要遇到调幅信号作用于带通滤波器而求其响应的问题，下面举例说明这种情况下响应信号的特点。

例 5-4 已知带通滤波器转移函数为

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{2s}{(s+1)^2 + 100^2}$$

激励信号为 $v_1(t) = (1 + \cos t) \cos(100t)$ ，求稳态响应 $v_2(t)$ 。

解

激励信号 $v_1(t)$ 表示式可展开写作

$$v_1(t) = \cos(100t) + \frac{1}{2} \cos(101t) + \frac{1}{2} \cos(99t)$$

显然，可以分别求此三个余弦信号的稳态响应，然后叠加。为此，由 $H(s)$ 写出频响特性

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{2j\omega}{(j\omega + 1)^2 + 100^2} \\
 &\approx \frac{2j\omega}{(\omega)^2 + 2j\omega + 100^2} \\
 &= \frac{2}{2 + j\frac{(\omega + 100)(\omega - 100)}{\omega}}
 \end{aligned}$$

考虑到所研究的频率范围仅在 $\omega = 100$ 附近, 取近似条件 $\omega + 100 \approx 2\omega$, 于是有

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{1 + j(\omega - 100)}$$

利用此式分别求系统对 $\cos(100t)$, $\frac{1}{2}\cos(101t)$, $\frac{1}{2}\cos(99t)$ 三个信号的响应, 为此写出:

$$\begin{aligned}
 H(j100) &= 1 \\
 H(j101) &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j45^\circ} \\
 H(j99) &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j45^\circ}
 \end{aligned}$$

于是写出响应 $v_2(t)$ 表示式为

$$\begin{aligned}
 v_2(t) &= \cos(100t) + \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(101t - 45^\circ) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(99t + 45^\circ) \right] \\
 &= \cos(100t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(100t) \cdot \cos(t - 45^\circ) \\
 &= \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t - 45^\circ) \right] \cos(100t)
 \end{aligned}$$

图 5-20(a)示出, 由于频响特性 $H(j\omega)$ 的影响使信号频谱产生的变化, 可以看到, 此带通系统幅频特性在通带内不是常数, 因而, 响应信号的两个边频分量 $\cos(99t)$ 与 $\cos(101t)$ 相对于载频分量 $\cos(100t)$ 有所削弱。此外, 它们还分别产生了 $\pm 45^\circ$ 的相移, 而载波点相移等于零。

图 5-20(b)是根据 $v_1(t)$, $v_2(t)$ 表示式画出的波形, 不难发现, 经此带通系统以后, 调幅波包络的相对强度减小(也即“调幅深度”减小), 而且包络产生时延, 延迟时间 τ 可由相移差值与频率差值之比求得 $\tau = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\omega} = \frac{\pi}{4}$ s (相应的周期是 2π s)。注意到此处的 τ 就是式(5-17)定义的群时延, 群时延描述了调幅信号包络波形的延时。

在本例中, 带通系统的实际背景可以是一个 LC 并联谐振电路, 它具有与本例 $H(j\omega)$ 类似的传输特性, 通带内 $|H(j\omega)|$ 不是常数, 相移特性也不是直线, 这可能引起包络波形的失真。由于本例中的调制信号仅仅是单一频率余弦

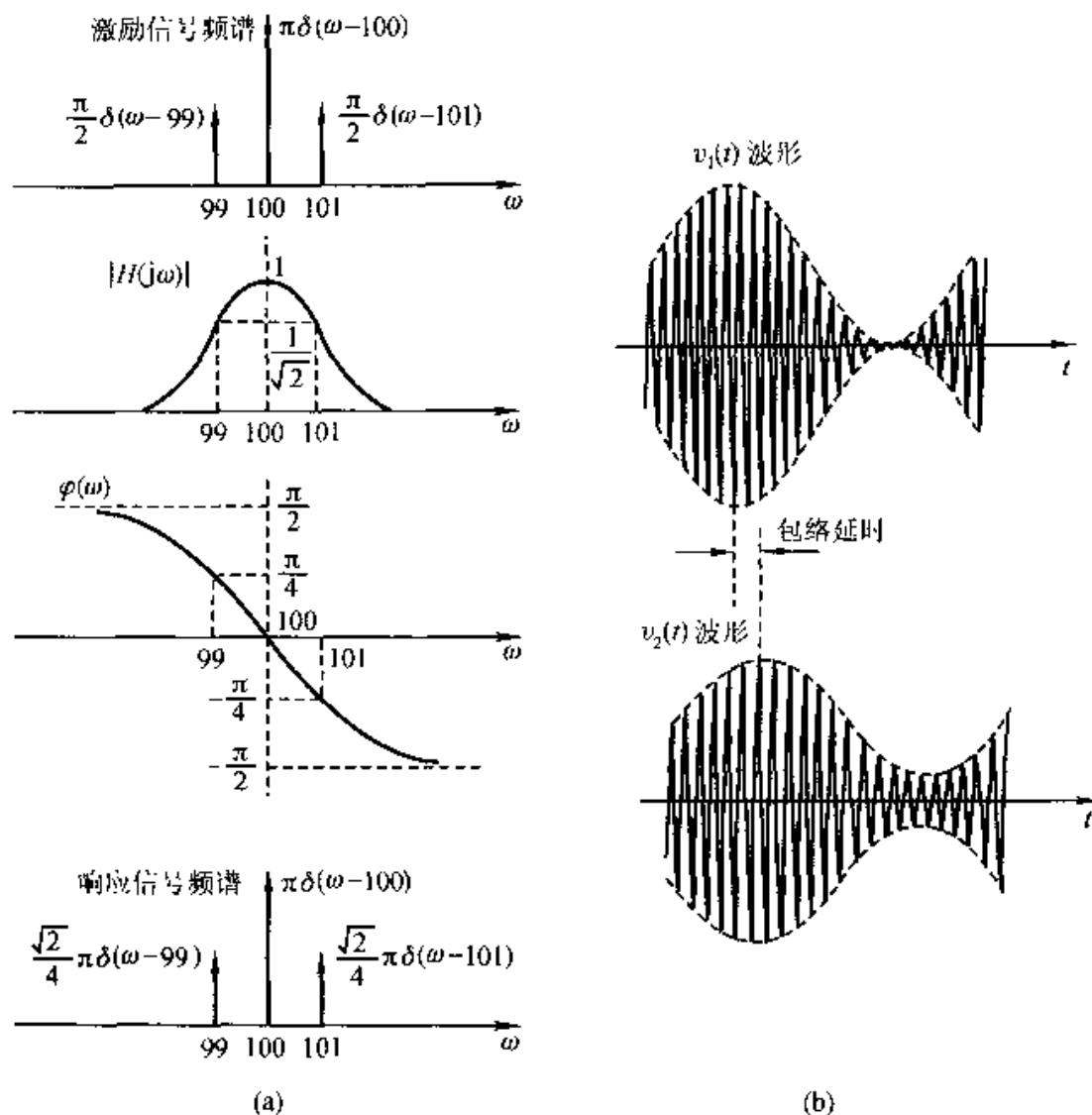


图 5-20 调幅信号通过带通滤波器

波 $\cos t$ (即调制信号频率等于 1)，未涉及包络波形失真的问题。如果调制信号具有多个频率分量，为保证传输波形的包络不失真，要求带通系统的幅频特性在通带内为常数，相频特性应为通过载频 ω_0 点的直线，这样的系统称为理想带通滤波器(见习题 5-10)。

在利用带通系统传输调幅波的过程中，只关心包络波形是否产生失真，并不注意载波相位如何变化，因为在接收端经解调后得到所需的包络信号，载波本身并未传递信息。通常，带通滤波器中心点 ω_0 与载波频率对应，其相频特性为零，以 ω_0 为中心取 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta\omega$ 之比计算群时延即包络时延，而载波时延等于零。

(二) 频率窗函数的运用

到此为止，在研究信号的傅里叶变换时总是认为对时间域或频率域都是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 范围内给出的完整结果，从正、逆傅里叶变换公式的积分限可以清

楚地看到这一点。然而，在许多实际问题中往往需要研究信号在某一时间间隔或某一频率间隔内的特性，或者说希望观察信号在时域或频域的局部性能。这时可利用“窗函数”对信号开窗。在时间域称为时域(时间)窗函数，在频率域称为频域(频率)窗函数。前面5.4节图5-13曾利用频域窗函数的概念说明理想低通截断信号频谱产生吉布斯现象的原理，实际上更需要带通滤波的概念对信号频谱开窗，而且希望这种带通的窗口有一定可调节功能，下面举一简单例子说明此类作用。

例5-5 若信号 $f(t)$ 通过某线性时不变系统产生输出信号为

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) w\left(\frac{\tau-t}{a}\right) d\tau$$

(1) 求此系统的系统函数 $H_a(\omega)$ ；

(2) 若 $w(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\sqrt{\pi \pi t}} \cos(3\pi t)$ ，求 $H_a(\omega)$ 表达式，并画出 $H_a(\omega) - \omega$ 图形；

(3) 说明此系统具有何种功能？

(4) 当参变量 a 改变时， $H_a(\omega) - \omega$ 图形变化有何规律？

解

(1) 由所给表达式，按卷积关系可求出系统的单位冲激响应为 $h_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} w\left(-\frac{t}{a}\right)$ 。若函数 $w(t)$ 之傅里叶变换为 $W(\omega)$ ，借助尺度变换特性可求得

$$\mathcal{F}[h_a(t)] = H_a(\omega) = \sqrt{a} W(-a\omega)$$

(2) 由 $w(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cos(3\pi t)$ 求出其傅里叶变换式

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \{ [u(\omega + \pi) - u(\omega - \pi)] * \pi [\delta(\omega + 3\pi) - \delta(\omega - 3\pi)] \} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \{ [u(\omega + 4\pi) - u(\omega + 2\pi)] + [u(\omega - 2\pi) - u(\omega - 4\pi)] \} \end{aligned}$$

或写作

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} & \text{当 } 2\pi \leq |\omega| \leq 4\pi \\ 0 & \text{为其他值} \end{cases}$$

画出 $W(\omega) - \omega$ 特性如图5-21(a)所示。

由此可求出：

$$h_a(t) = \frac{\sqrt{a} \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right) \cos\left(\frac{3\pi t}{a}\right)}{\sqrt{\pi \pi t}}$$

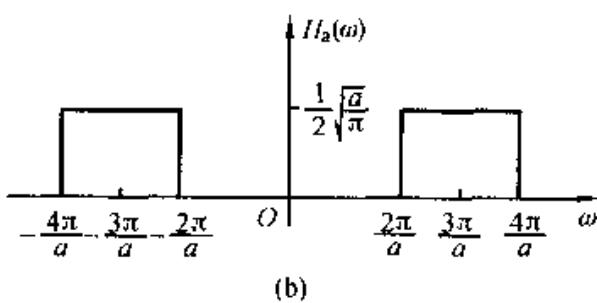
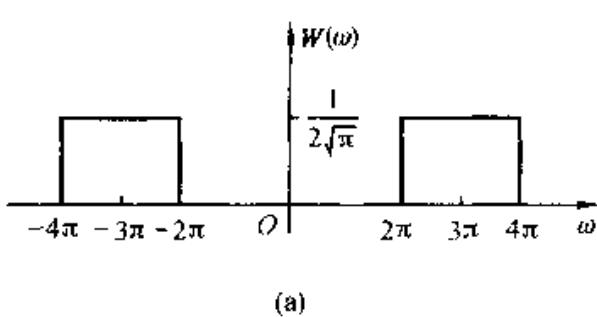


图 5-21 例 5-5 的频率特性

$$H_a(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi}} & \text{当 } \frac{2\pi}{a} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{a} \\ 0 & \text{当 } \omega \text{ 为其他值} \end{cases}$$

画出 $H_a(\omega) \sim \omega$ 特性如图 5-21 (b) 所示。

(3) 由 $H_a(\omega)$ 图形可见, 此系统功能是理想带通滤波, 中心频率 $\omega_0 = \frac{3\pi}{a}$, 带宽 $B_\omega = \frac{2\pi}{a}$ 。

(4) 当参变量 a 改变时, 可调节此带通滤波器的中心频率与带宽。增大 a 则中心频率降低、带宽变窄; 减小 a 则中心频率移至高端, 带宽加宽。但在变化过程中, 这一系列的带通滤波器之带宽与中心频率之比保持不变,

$$\text{即 } \frac{B_\omega}{\omega_0} = \frac{2}{3}.$$

由上例分析可以看出, 这里构作了一个性能可调整的频率窗函数, 从频域观察, $W(a\omega)$ 对 $f(t)$ 的频谱开窗, 改变 a 可调整开窗位置和窗口宽度, 当 a 较大时, 窗口位于频率较低处, 带宽的绝对数值也较小, 随着 a 的减小, 窗口向高频段移动, 且宽度的绝对数值增大。若从时域来看 $w\left(-\frac{t}{a}\right)$ 与 $f(t)$ 卷积, 当 a 较大时对应 w 函数较宽, 随着 a 的减小 w 函数变窄。这表明对应低频段检测带宽较窄而时间较长, 与此相反, 在高频段带宽加宽而时间较短。这种自动调整尺度和位置的功能可适应检测不同频段频谱成分特征的需要, 便于研究信号的局部性能。例如, 图像信号边缘轮廓的提取、生物医学工程中脑电图、心电图的特征检测以及地震信号识别等。

在第三章初步建立信号频谱的概念时, 严格区分了时域与频域表达式和分析方法, 而在上例讨论中, 利用 w 函数将信号的时域分析与频域分析结合起来, 可以获得更全面、完整的观察和分析。

频率窗函数或时间窗函数的概念在信号处理与通信领域中得到广泛应用。其中, 最具代表性、影响最深远的是小波(或称子波, wavelet)变换(参看习题 5-22)。此外, 在语音信号处理中的短时傅里叶变换(参看习题 5-23, 这是时间窗函数的例子)、子带编码, 在图像处理中的金字塔式压缩编码, 在计算机视觉技术中的多分辨率分析等等, 这些方法都是对频域或时域窗函数概念灵活运用的产物。

5.9 从抽样信号恢复连续时间信号

在前几节已经研究了傅里叶变换应用于通信系统的两个重要方面，这就是滤波与调制，本节开始讨论另一个方面——抽样。这是第三章 3.11 节的继续，在以后几节将看到，抽样定理是构成数字通信系统的理论依据。本节介绍从抽样信号恢复连续时间信号的几个基本问题。

(一) 从冲激抽样信号恢复连续时间信号的时域分析

利用图 3-54 曾说明冲激抽样信号的恢复原理，若带限信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$ ，经冲激序列抽样之后 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为 $F_s(\omega)$ ，在满足抽样定理的条件下 $F_s(\omega)$ 的图形是 $F(\omega)$ 的周期重复，而且不会产生混叠。利用理想低通滤波器取出 $F_s(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 两侧的频率分量即可恢复 $F(\omega)$ ，从而无失真地复原 $f(t)$ 。这种频域分析方法简捷直观，但是如何从时域角度解释这一过程尚需进一步分析。假定，理想低通滤波器的频域特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s & (\text{当 } |\omega| < \omega_c) \\ 0 & (\text{当 } |\omega| > \omega_c) \end{cases} \quad (5-56)$$

式中 ω_c 是滤波器的截止频率，为以下分析方便，取相位特性为零， T_s 是冲激抽样序列的周期。

滤波器冲激响应 $h(t)$ 表达式为

$$h(t) = T_s \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \quad (5-57)$$

若冲激序列抽样信号 $f_s(t)$ 为

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (5-58)$$

利用时域卷积关系可求得输出信号，即原连续时间信号 $f(t)$

$$\begin{aligned} f(t) &= f_s(t) * h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) * T_s \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \\ &= T_s \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)] \end{aligned} \quad (5-59)$$

参看图 5-22 说明上述结果，图中对照给出从时域和频域恢复 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 的过程。式(5-59)表明，连续信号 $f(t)$ 可展开成 Sa 函数的无穷级数，级数的系数等于抽样值 $f(nT_s)$ 。也可以说在抽样信号 $f_s(t)$ 的每个抽样值上画一个峰值为 $f(nT_s)$ 的 Sa 函数波形，由此合成的信号就是 $f(t)$ ，如图 5-22 左下端波形。按照线性系统的叠加性，当 $f_s(t)$ 通过理想低通滤波器时，抽样序

列的每个冲激信号产生一个响应，将这些响应叠加就可得出 $f(t)$ ，从而达到由 $f_s(t)$ 恢复 $f(t)$ 的目的。

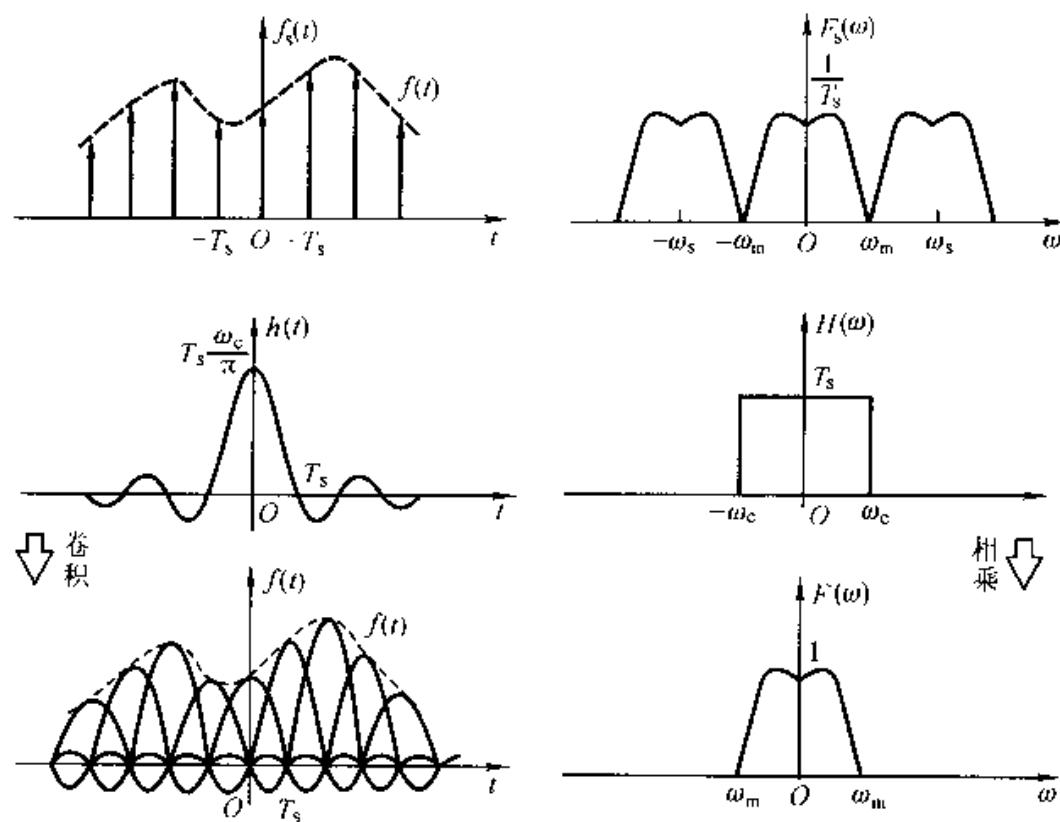


图 5-22 由抽样信号恢复连续信号的时域和频域解释

在图 5-22 中满足 $\omega_s = 2\omega_m$, $\omega_c = \omega_m$, 这里 ω_s 是冲激序列的重复角频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$, ω_m 是 $f(t)$ 带宽的角频率值, 此时刚好满足奈奎斯特间隔(抽样定理的边

界条件), $T_s = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{\pi}{\omega_c}$, 式(5-59)中的系数 $T_s \cdot \frac{\omega_c}{\pi} = 1$, 于是式(5-59)简化为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)] \quad (5-60)$$

此时, 抽样序列的各个冲激响应零点恰好落在抽样时刻上。就抽样点叠加的数值而言, 各冲激响应互相不产生“串扰”, 图 5-22 所示正是这种情况。当 $\omega_s > 2\omega_m$ 时, 只要选择 $\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$ 即可正确恢复 $f(t)$ 波形。当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时, 不满足抽样定理, $f_s(t)$ 的频谱出现混叠, 在时域图形中, 因 T_s 过大使冲激响应 Sa 函数的各波形在时间轴上相隔较远, 无论如何选择 ω_c 都不可能使叠加后的波形恢复 $f(t)$ 。

(二) 零阶抽样保持

在以上分析中, 假定抽样脉冲是冲激序列。然而, 在实际电路与系统中, 要产生和传输接近 δ 函数的时宽窄且幅度大的脉冲信号比较困难。为此, 在

数字通信系统中经常采用其他抽样方式，最常见的一种方式称为零阶抽样保持（或零阶保持抽样，也简称为抽样保持），图 5-23 和 5-24 分别示出产生这种抽样信号的框图和波形。应注意到，在这里并不是简单地将信号 $f(t)$ 与抽样信号 $p(t)$ 相乘。在抽样瞬间，脉冲序列 $p(t)$ 对 $f(t)$ 抽样，保持这一样本值直到下一个抽样瞬间为止，由此得到的输出信号 $f_{s0}(t)$ 具有阶梯形状。

实际的抽样保持电路有多种形式，图 5-25 示出在大规模集成电路芯片中可以采用的一种电路实例，图中，MOS 晶体管 M1 和 M2 作为开关运用，当窄脉冲 $p_1(t)$ （注意不是冲激序列）到来时，M1，M2 导通将 $f(t)$ 抽样值引到电容 C 两端，此后，电容两端电压即保持这一样本值到下一个抽样脉冲到来，依此重复即可由 $f(t)$ 产生 $f_{s0}(t)$ 波形。

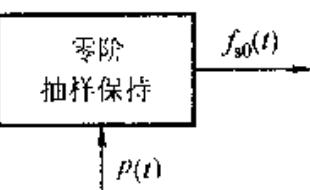


图 5-23 零阶抽样保持框图

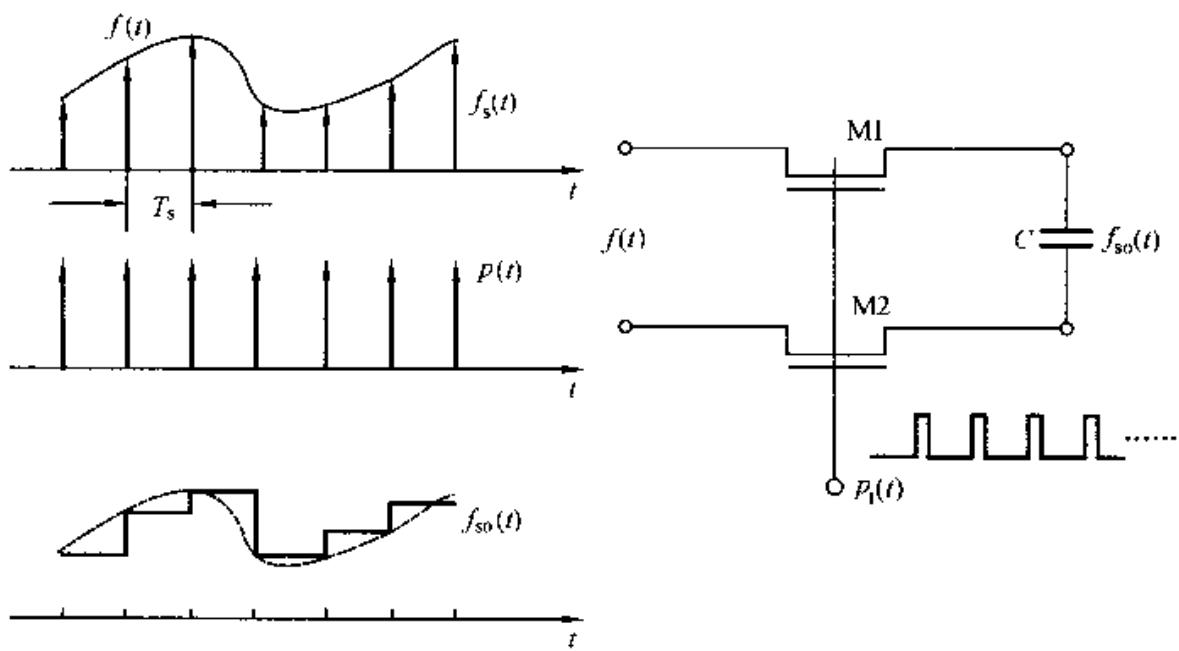


图 5-24 零阶抽样保持波形

图 5-25 抽样保持电路举例

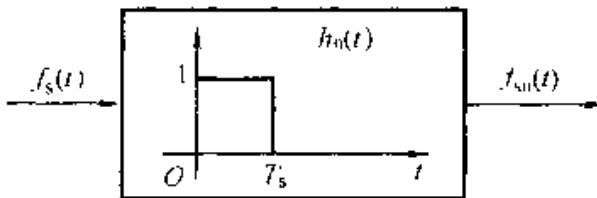
$f_{s0}(t)$ 经传输到收端后需要恢复 $f(t)$ 信号，为分析如何恢复，借助冲激序列抽样信号的时域与频域特性，假定：

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (5-61)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad (5-62)$$

式中 T_s 为抽样周期， $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ 是重复角频率， $F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的频谱。

为求得 $f_{s0}(t)$ 的频谱，构作一个线性时不变系统，它具有如下的冲激响应（参看图 5-26）

图 5-26 冲激响应为 $h_0(t)$ 的系统

$$h_0(t) = u(t) - u(t - T_s) \quad (5-63)$$

显然，令 $f_s(t)$ 通过此系统即可在输出端产生 $f_{s0}(t)$ 波形，因此可以给出

$$f_{s0}(t) = f_s(t) * h_0(t) \quad (5-64)$$

式中 $h_0(t)$ 的傅里叶变换式为

$$\tilde{F}[h_0(t)] = T_s \text{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \quad (5-65)$$

由频域关系式：

$$\begin{aligned} F_{s0}(\omega) &= \tilde{F}[f_{s0}(t)] \\ F_{s0}(\omega) &\approx F_s(\omega) \cdot \tilde{F}[h_0(t)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \text{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \end{aligned} \quad (5-66)$$

可以看出，零阶抽样保持信号 $f_{s0}(t)$ 的频谱的基本特征仍然是 $F(\omega)$ 频谱以 ω_s 周期重复，但是要乘上 $\text{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)$ 函数，此外还附加了延时因子项 $e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}$ 。当 $F(\omega)$ 频带受限且满足抽样定理时，为复原 $F(\omega)$ 频谱，在接收端不应利用理想低通滤波器，而是需要引入具有如下补偿特性的低通滤波器

$$H_{0r}(j\omega) = \begin{cases} \text{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) & \left(|\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}\right) \\ 0 & \left(|\omega| > \frac{\omega_s}{2}\right) \end{cases} \quad (5-67)$$

它的幅频特性 $|H_{0r}(j\omega)|$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$ 曲线如图 5-27 所示。当 $f_{s0}(t)$ 通过此补偿滤波器后，即可复原信号 $f(t)$ 。从频域解释，将 $F_{s0}(\omega)$ 与 $H_{0r}(j\omega)$ 相乘，得到 $F(\omega)$ 。注意到此处相频特性斜率为正，而实际的滤波器相频特性为负值。一般情况下，在通信系统中，只要求幅频特性尽可能满足补偿要求，而相频特性无需满足式(5-67)，当然，应具有线性相移特性。例如，若 $H_{0r}(j\omega)$ 为 $\frac{1}{\text{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)}$ 函数，则所恢复之 $f(t)$ 波形形状无失真，仅在时间轴上滞后 $T_s/2$ 。

实际上，也可认为 $f_{s0}(t)$ 波形是对 $f(t)$ 的近似表示，在要求不很严格的问题中，补偿滤波器的 $|H_{0r}(j\omega)|$ 曲线只要大致接近式(5-67)即可满足要求，甚至可以不加补偿。

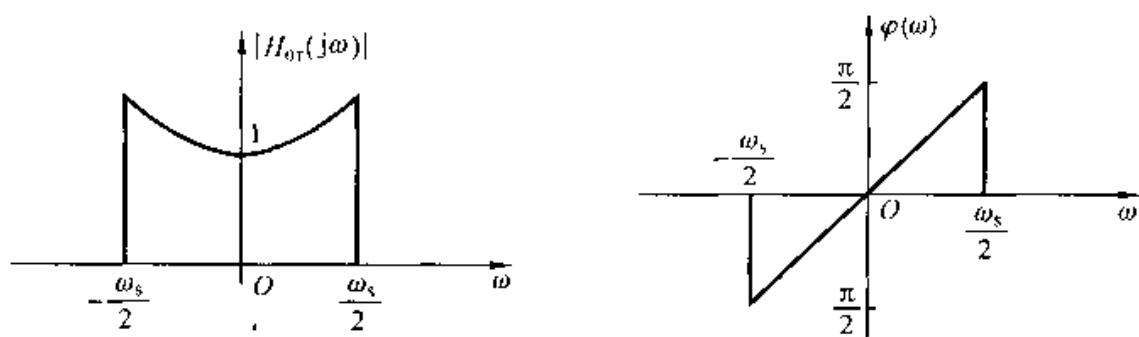


图 5-27 补偿低通特性

(三) 一阶抽样保持

如果将连续函数 $f(t)$ 各样本值用直线连接就可构成折线形状的波形如图 5-28 中的 $f_{sl}(t)$, 这种信号称为 $f(t)$ 的一阶抽样保持信号。

为了分析 $f_{sl}(t)$ 的频谱并导出由此恢复 $f(t)$ 的方法, 构作一个线性时不变系统, 它具有三角波形的冲激响应特性 $h_1(t)$, 如图 5-28 所示, 表达式如下

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_s} & (|t| < T_s) \\ 0 & (|t| \geq T_s) \end{cases} \quad (5-68)$$

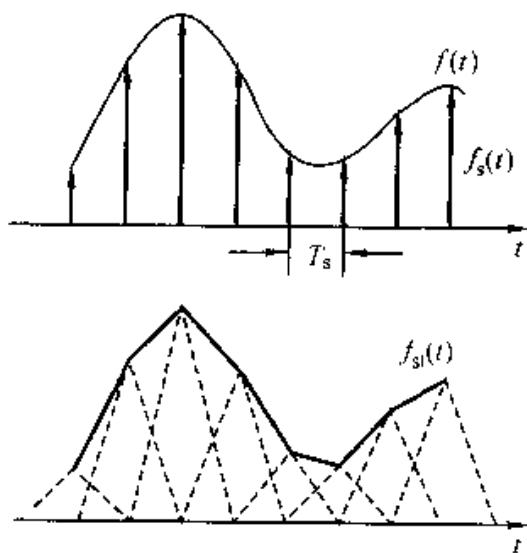
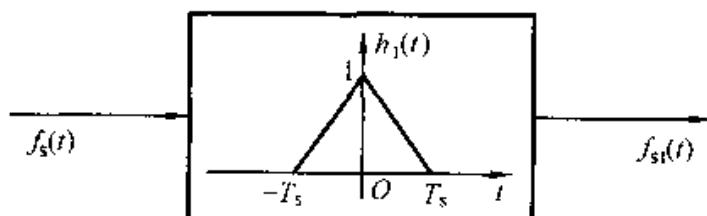


图 5-28 一阶抽样保持波形

当冲激抽样序列 $f_s(t)$ 通过此系统时，即可在输出端产生 $f_{sl}(t)$ 波形，如图 5-28，这里每个 δ 函数产生一个三角波形的响应如图 5-28 中的虚线，全部虚线叠加构成折线图形 $f_{sl}(t)$ 。不难求得 $h_1(t)$ 的频谱

$$\mathcal{F}[h_1(t)] = T_s \text{Sa}^2\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \quad (5-69)$$

由频域关系式：

$$\begin{aligned} F_{sl}(\omega) &= \mathcal{F}[f_{sl}(t)] \\ F_{sl}(\omega) &= F_s(\omega) \cdot \mathcal{F}[h_1(t)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \text{Sa}^2\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \end{aligned} \quad (5-70)$$

可以看出，一阶抽样保持信号 $f_{sl}(t)$ 的频谱基本特征仍然是 $F(\omega)$ 频谱以 ω_s 周期重复，倍乘函数为 $\text{Sa}^2\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)$ 。当 $F(\omega)$ 频带受限且满足抽样定理时，为重建 $F(\omega)$ 频谱，需要引入具有如下补偿特性的低通滤波器

$$H_{1r}(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Sa}^2\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)} & \left(|\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}\right) \\ 0 & \left(|\omega| > \frac{\omega_s}{2}\right) \end{cases} \quad (5-71)$$

在以上讨论中，没有考虑信号产生、传输、恢复过程中引入的延时， $F_{sl}(\omega)$ 相对于 $F_s(\omega)$ 未引入相移， $H_{1r}(j\omega)$ 的相移特性也为零，冲激响应为 $h_1(t)$ 的系统是非因果系统（三角波形在 $t < 0$ 时即出现）。这使以上分析过程的表达式得以简化。如果引入时延特性，在线性相移的条件下，最终仍可无失真重建 $f(t)$ ，只是在时间轴上相对于原信号有一定延时。

本节讨论了三种由抽样信号恢复原连续时间信号的方法，这类问题的本质可归结为由样本值重建某一函数。从样本重建信号的过程也称为“内插”。内插可以是近似的也可以是完全精确的。在图 5-22 中，由冲激抽样信号产生 Sa 函数实现内插，完成了 $f(t)$ 信号的精确恢复。这种重建过程也称带限内插。此时， $f(t)$ 的频带必须受限，且要满足抽样定理的要求。由于要产生接近冲激序列的信号和接近理想低通的系统都相当困难，因而这种方法在实际问题中很少采用。从内插的观点考虑，零阶抽样保持信号 $f_{s0}(t)$ 和一阶抽样保持信号 $f_{sl}(t)$ 都是对信号 $f(t)$ 的逼近，分别用阶梯信号和折线信号近似表示连续的函数曲线，后者也称为线性内插。这些近似比较粗糙，如果在样本点之间用高阶多项式或其他数学函数进行拟合，可以得到更为精确的逼近函数。

目前，在数字通信系统中广泛采用零阶抽样保持来产生和传输信号，在收端利用补偿滤波器（大致如图 5-27 特性）恢复连续时间信号。

5.10 脉冲编码调制(PCM)

利用脉冲序列对连续信号进行抽样产生的信号称为脉冲幅度调制(PAM)信号，这一过程的实质是把连续信号转换为脉冲序列，而每个脉冲的幅度与各抽样点信号的幅度成正比。在实际的数字通信系统中，除直接传送 PAM 信号之外，还有多种传输方式，其中目前应用最为广泛的一种调制方式称为脉冲编码调制(PCM)。在 PCM 通信系统中，把连续信号转换成数字(编码)信号进行传输或处理，在转换过程中需要利用 PAM 信号。

图 5-29 示出 PCM 通信系统的简化框图，在发送端主要由抽样、量化与编码三部分组成，其中，量化与编码共同完成模拟 - 数字转换(A/D 变换)功能。信源 $f(t)$ 经脉冲序列 $p(t)$ 抽样产生零阶抽样保持信号 $f_{s0}(t)$ ，它是 PAM 信号，具有离散时间连续幅度(如阶梯形信号)。量化的过程是将此信号转换成离散时间离散幅度的多电平数字信号。从数学角度理解，量化是把一个连续幅度值的无限数集合映射到一个离散幅度值的有限数集合。这里，规定一组量化电平，抽样值按最接近的一个电平取整数，图 5-30(a)(见下页)给出连续幅度值取为离散幅度值的数字实例。此例中，量化电平为 16 个(0 至 1.5 的 16 个数字)。这些数字经编码产生二进制的数字序列如图 5-30(b)，由于量化电平为 16，相应的编码脉冲位数取 4 ($2^4 = 16$)。编码后的 PCM 信号 $f_D(t)$ 经数字信道传输到达接收端。信号 $\hat{f}_D(t)$ 包括 $f_D(t)$ 与信道引入的噪声。为简化分析，假定 $\hat{f}_D(t)$ 即 $f_D(t)$ ，经数字 - 模拟转换(D/A 变换)后恢复 PAM 信号 $f_{s0}(t)$ ，再经 $\frac{1}{\text{Sa}(x)}$ 低通补偿滤波器(如图 5-27 特性)即可重建 $f(t)$ 。

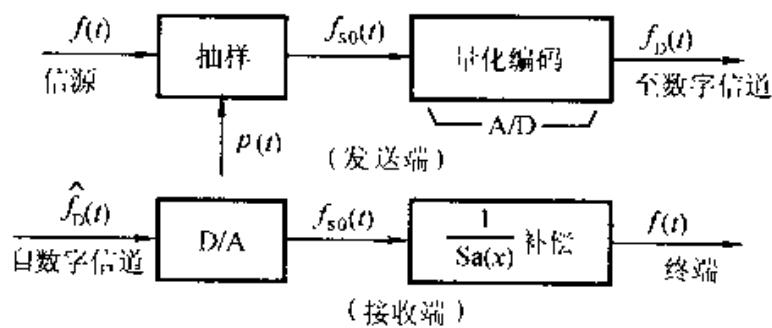


图 5-29 PCM 通信系统简化框图

早在 1926 年美国人 M. 雷尼就提出了脉冲编码调制的研究专利。此后，法国人 A. H. 热维斯进一步给出语音通信 PCM 电路的专利研究报告。1946 年美国贝尔实验室试制成功第一台 PCM 数字通信设备。人们对这种数字通信方式的研究兴趣与日俱增。20 世纪 70 年代后期，超大规模集成电路和计算机

技术的飞速发展推动了 PCM 通信系统的实用化，目前，PCM 在数字微波通信、光纤通信、卫星通信、程控交换以及遥测、遥控等各类通信系统中得到了广泛应用。PCM 技术已经成为现代通信系统中的基本问题之一。

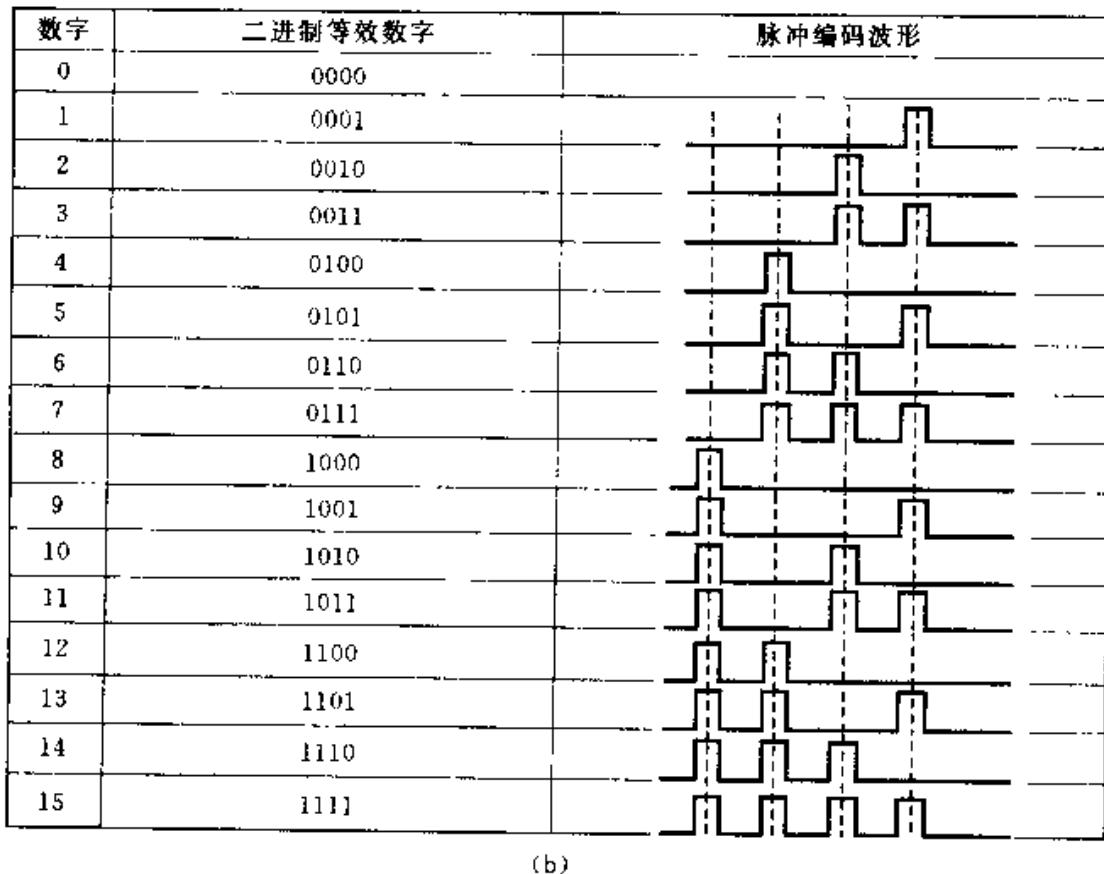
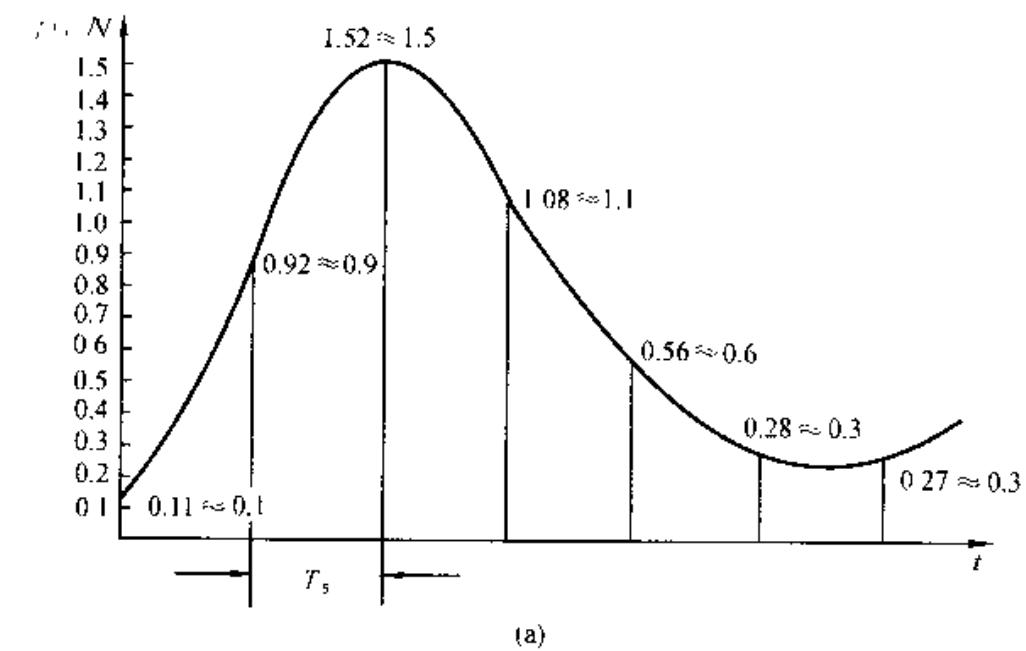


图 5-30 量化与编码原理示意图

在远距离通信系统中，需要在一定距离间隔上接入中继器(转发器)把信号放大，否则因传输损耗将使信号消失。在传输过程中引入的噪声也被放大。在

模拟通信系统中,当信号经多级中继器转发之后,噪声累积的影响可能造成严重的信号失真。当传输脉冲编码信号时,情况就大不相同。这时,中继器也作为再生器使用,在每个脉冲的持续期间判决脉冲的有无,根据判决的结果确定 1 码、0 码的存在,或产生一个新的脉冲,或不发脉冲。在此过程中弱噪声的影响已被消除,仅当噪声大到足以使判决发生错误时,才会影响此系统。这表明,在数字通信系统中,当数字信号经多级中继器转发之后,噪声不会累积。根据目前实际设备可达到的信噪比,合理设计中继器间距,不难把噪声影响压低到相当满意的水平。与直接传送模拟信号相比较,这是 PCM 通信系统的突出优点。

在模拟信号的量化与重建过程中也将引入误差,由此产生的噪声称为量化噪声。长期以来对量化噪声规律的研究已相当成熟,合理设计 A/D 和 D/A 变换器可将量化噪声限制在相当微弱的范围之内,保证 PCM 系统具有足够满意的传输质量。

PCM 的另一优点是当组合多种信源传输时具有很好的灵活性。无论语音信号、图像信号、数据信号经脉冲编码调制之后都可成为统一形式的二进制数码流,它们可以灵活地交织在一起通过同一系统进行传输。在下一节将要看到,利用时分多路复用设备容易实现这种灵活的组合。

脉冲编码信号便于实现各种数字信号处理功能,例如数字滤波、数据压缩等。也容易完成各种形式的加密和解密,在保密通信中已获得广泛应用。

与直接传送模拟信号相比较,将模拟信号转换为 PCM 信号传输时占用频带要明显加宽。例如,语音通信话路信号的频率范围大约在 300 Hz~3400 Hz,通常可认为每个话路带宽约 4 kHz。在进行抽样时取抽样频率为 8 kHz,以保证满足抽样定理的要求。每个抽样点若按 8 位脉冲编码传送一个话路的脉冲信号速率为 $8 \times 8 \text{ kHz} = 64 \text{ kb/s}$ 显然,它所占有的频带远大于直接传送一路语音(模拟)信号所需的频带。下一节将进一步研究脉冲编码信号传输速率与所占频带的关系。

利用频带压缩技术可使传输数字信号占据频带较宽的矛盾适当缓解,然而,这种技术只能在信号具有某些特征的范围内采用,且有可能引起通信质量下降。

5.11 频分复用与时分复用

将若干路信号以某种方式汇合,统一在同一信道中传输称为多路复用。在近代通信系统中普遍采用多路复用技术。本节介绍频分复用与时分复用的原理和特点,在 5.12 节给出以时分复用为基础演变而来的统计复用(标记复用)方法,6.11 节还要介绍码分复用。

频分复用的原理在 5.7 节已初步说明。这种设备在发送端将各路信号频谱搬移到各不相同的频率范围,使它们互不重叠,这样就可复用同一信道传输。

在接收端利用若干滤波器将各路信号分离，再经解调即可还原为各路原始信号，图 5-31 示出频分复用原理方框图。通常，相加信号 $f(t)$ 还要进行第二次调制，在接收端将此信号解调后再经带通滤波分路解调。

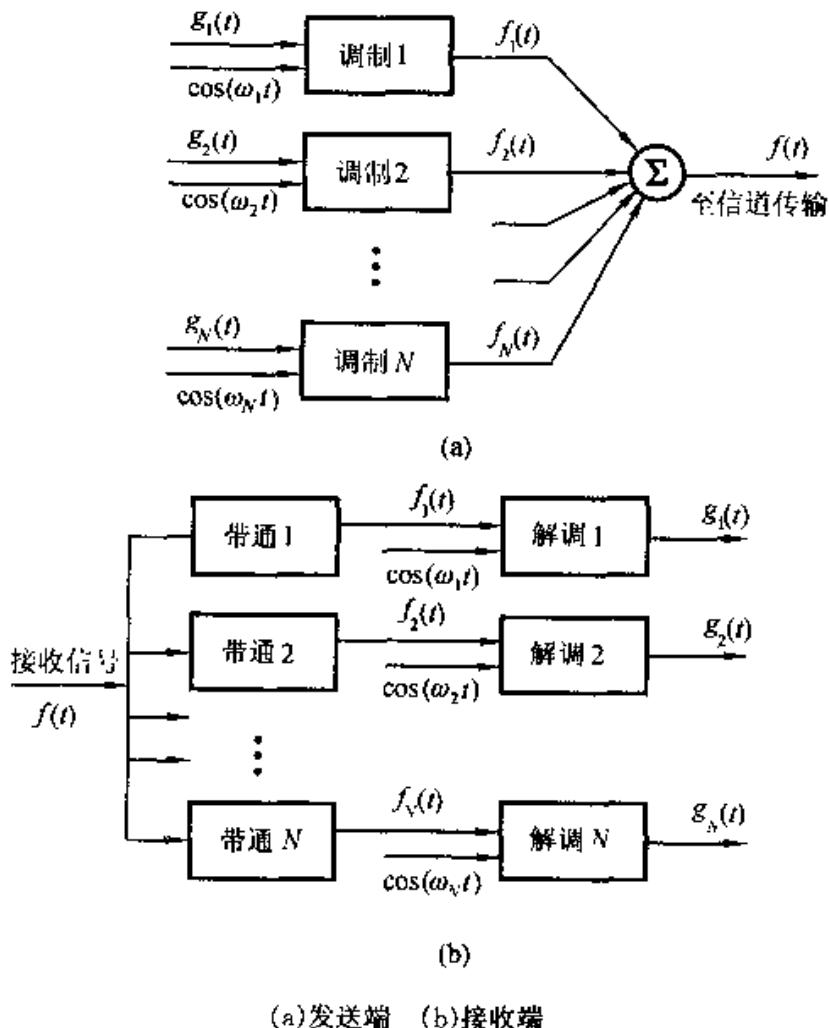


图 5-31 频分复用通信系统

时分复用的理论依据是抽样定理。在第三章已经证明，频带受限于 $-f_m \sim +f_m$ 的信号，可由间隔为 $\frac{1}{2f_m}$ 的抽样值惟一地确定。从这些瞬时抽样值可以正确恢复原始的连续信号。因此，允许只传送这些抽样值，信道仅在抽样瞬间被占用，其余的空闲时间可供传送第二路、第三路……等各路抽样信号使用。将各路信号的抽样值有序地排列起来就可实现时分复用，在接收端，这些抽样值由适当的同步检测器分离。当然，实际传送的信号并非冲激抽样，可以占有一段时间。图 5-32 示出两路抽样信号有序地排列经同一信道传输(时分复用)的波形。

对于频分复用系统，每个信号在所有时间里都存在于信道中并混杂在一起。但是，每一信号占据着有限的不同频率区间，此区间不被其他信号占用。在时分复用系统中，每一信号占据着不同的时间区间，此区间不被其他信号占用，但是所有信号的频谱可以具有同一频率区间的任何分量。从本质上讲，频

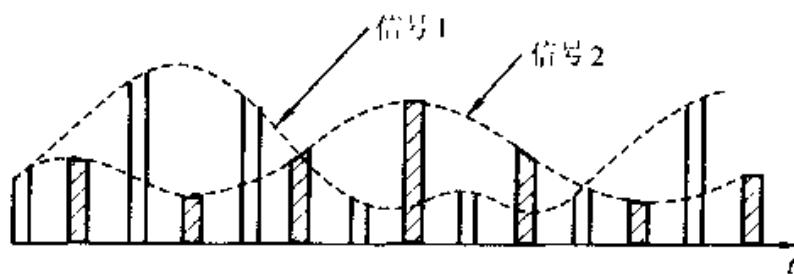


图 5-32 两路信号的时分复用

分复用信号保留了频谱的个性，而在时分复用信号中保留了波形的个性。由于信号完全由其时间域特性或完全由其频率域特性所规定，因此，在接收机里总是可以在相应的域内应用适当的技术将复用信号分离。

从电路实现来看，时分复用系统优于频分复用系统。在频分复用系统中各路信号需要产生不同的载波，各自占据不同的频带，因而需要设计不同的带通滤波器。而在时分复用系统中，产生与恢复各路信号的电路结构相同，而且以数字电路为主，比频分复用系统中的电路更容易实现超大规模集成，电路类型统一，设计、调试简单。

时分复用系统的另一优点体现在各路信号之间的干扰(串话)性能方面。在频分复用系统中，各种放大器的非线性产生谐波失真，出现多项频率倍乘成分，引起各路信号之间的串话。为减少这种干扰的影响，在设计与制作放大器时，对它们的非线性指标要求比传送单路信号时严格得多，有时难以实现。对于时分复用系统不存在这种困难。当然，由于设计不当相邻脉冲信号之间可能出现码间串扰，这一问题容易得到控制，使其影响很小，下面将说明防止码间串扰的方法。

实际的时分复用系统很少直接传输图 5-32 所示的离散时间连续幅度信号(如 PAM 信号)，而是传送脉冲编码调制(PCM)信号。因此，上节讨论的传输 PCM 信号具备的各种优点在时分复用系统中都得以体现。

在 PCM 系统中，由于对每个抽样点要进行多位编码，因而使脉冲信号传输速率增高、占用频带加宽，这是时分复用系统显示许多优点而付出的代价。有时，可利用频带压缩技术改善信号所占带宽。

码速与带宽的关系是各种数字通信系统设计中需要考虑的一个重要问题。合理设计码脉波形可使频带得到充分利用并且防止码间串扰。下面结合图 5-33 讨论几种典型波形的码速与带宽关系。若时钟信号(CP)周期为 T ，如图 5-33(a)，并假设待传输的数字信号是 01011010。当选择矩形脉冲传输时，脉冲宽度 τ 应满足 $\tau \leq T$ 。对于 $\tau < T$ 的情况如图 5-33(b)，这种码型称为归零码(regress zero，简写 RZ)， τ 的最大可能是 $\tau = T$ ，如图 5-33(c)，称为不归零码(NRZ)。通常，可粗略认为矩形脉冲信号的频率分量集中在频谱函数第一个零

点之内,也即频带宽度 $B = \frac{1}{\tau}$ (或角频率 $B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}$)。显然,为节省频带最好选用不归零码,令 $\tau = T$,此时 $B = \frac{1}{T}$ 。由时钟周期 T 可求得脉码传输速率 $f = \frac{1}{T}$ (单位为比特/秒,写作 bit/s 或 bps),可以看出,此时带宽与码速数值相等, $B = f = \frac{1}{T}$ (注意,带宽单位为 Hz)。在以上分析中,由于忽略了矩形波频谱第一零点以外的高频成分,所得结果存在误差。当按照 $\frac{1}{T}$ 的带宽传输矩形脉冲信号时,在收端波形要产生失真,它将畸变为具有上升、下降延迟的形状,而且可能出现拖尾振荡。当此失真较小时,在接收端对应抽样点不会产生误判,可正确恢复 1 码或 0 码。当失真较严重时,可能出现误判,引起各路信号之内的串扰。

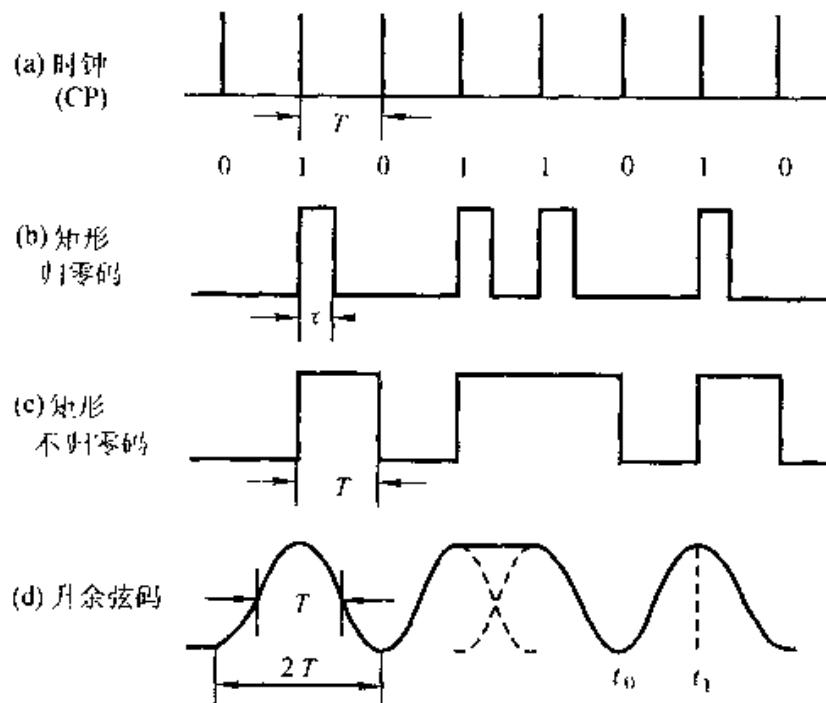


图 5-33 矩形码和升余弦码示例

为有效地解决这一问题,可不选用矩形码,而是选用主要频率成分集中于带宽之内,高频分量相对更小的波形,例如升余弦码。在 3.4 节式(3-40)和式(3-41)曾给出升余弦脉冲的表达式和频谱特性。此处,选升余弦脉冲信号底宽为 $2T$,如图 5-33(d)。其频谱函数第一个零点,也即带宽为 $\frac{1}{T}$,与图 5-33(b)矩形码所占带宽相同。然而,升余弦频谱在带宽以外的高频分量相对非常微弱,按 $\frac{1}{T}$ 带宽传输波形时基本上不会产生失真,有效地避免了码间串扰。在接收端对应抽样点如图 5-33(d)中的 t_1 或 t_0 可以正确恢复 1 码或 0 码。

利用 Sa 函数波形也可避免码间串扰。设 Sa 函数第一零点值为 T ,其波形主瓣底宽为 $2T$,那么在 T 的整数倍各时刻其函数值均为零,因而接收端以此处

为抽样判决点,保证不会出现误判。图 5-34 示例给出 10110 Sa 函数码型,图中,波形的某些部分有重叠,没有画出重叠相加的结果,但是,可以清楚地看出在各抽样点处不会产生串扰,例如,在时刻 t_1 为 1 码,在时刻 t_0 为 0 码,没有串扰。若脉码速率 $f = \frac{1}{T}$, 相应的单个 Sa 脉冲波形表达式为 $\text{Sa}\left(\frac{\pi}{T}t\right)$, 它的频谱函数为矩形, 所占带宽是 $B_\omega = \frac{\pi}{T}$, $B = \frac{1}{2T}$ 。可见, 在码速相同的条件下, Sa 脉冲所占带宽为前述二种波形(矩形、升余弦)带宽之半, 节省了频带, 这是 Sa 信号的另一优点。但是, Sa 函数的产生比较困难, 在实际电路中往往利用窄脉冲波形的叠加产生阶梯波, 近似形成 Sa 函数, 如图 5-35 所示(参看习题 5-26)。这时, 上述结论将出现误差, 然而占据频带减半、码间串扰很小的优点仍可适当体现。

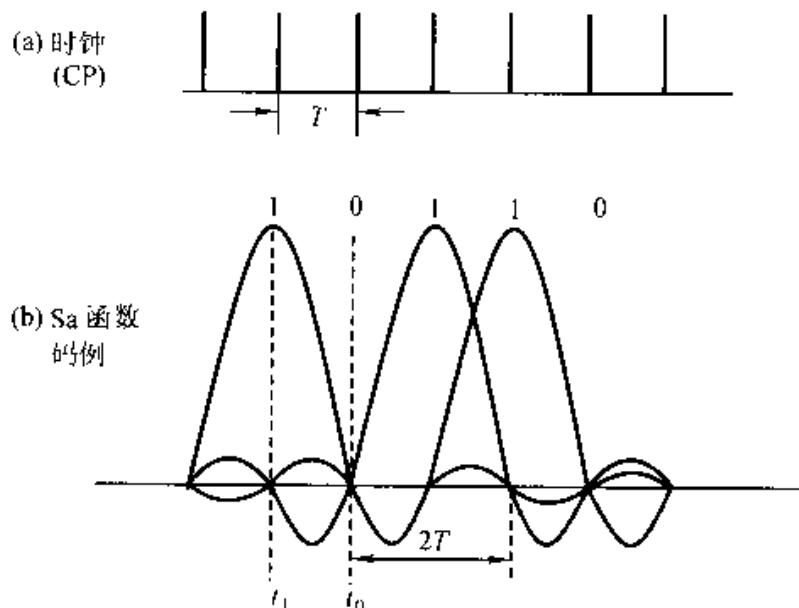


图 5-34 Sa 函数码型示例

对于时分复用通信系统, 国际上已建立起一些技术标准。按这些标准规定先把一定路数的电话语音复合成一个标准数据流, 称为基群。然后, 再把若干

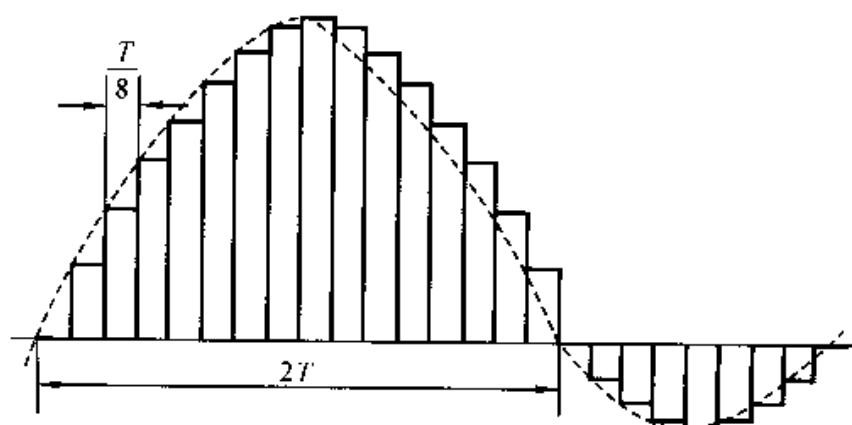


图 5-35 利用窄脉冲叠加近似形成 Sa 函数

组基群汇合成更高速的数字信号。我国和欧洲的基群标准是 30 路用户和同步、控制信号组合共 32 路。按前节给出的每路 PCM 信号速率为 64 kbit/s, 基群信号速率就是 $32 \times 64 \text{ kbit/s} = 2.048 \text{ Mbit/s}$ 。这是 PCM 通信系统基群的标准时钟速率。在实际应用中, 时分复用数据流的组成不只包含语音信号, 也可以是语音、数据、图像多种信源产生的数字信号码流之汇合。

5.12 从综合业务数字网 (ISDN) 到信息高速公路

综合业务数字网 (Integrated Services Digital Network, 简称 ISDN) 是一种数字化、智能化的综合性通信体制, 可以同时传送语音和非话音(数据、图文传真、电子信函、图像等)信号, 为用户提供综合的业务。

在各种通信业务中, 电话是最基本、用户最普遍的业务。20世纪 50 年代以前的电话网大都是模拟系统。60 年代以后, 出现了数字网或模拟与数字混合网, 但是用户至交换局之间几乎都是模拟电路。

电话以外的业务统称为非话业务。其中某些业务可以利用模拟电话网传送, 如用户电报、图文传真和低速数据, 但是这些信息通常不能与话音信息利用同一条电路传送。随着信息科学技术的发展, 用户迫切需要传送计算机数据、可视电话、可视图文、高清晰度电视(HDTV)等多种新型非话业务。为适应各种非话业务的需要, 可建立一些专用网, 如计算机局域网(LAN)、数据分组交换网等等。于是, 每提出一种新的通信业务, 就需要建设一种新的专用网。这将使投资大、建设周期长、电路利用率低、管理不便。显然, 这种旧的通信体制已不适应信息时代对信息要求急剧增长的新形势。人们很自然地提出新的设想: 用户只需一个通用的标准化接口就可与其他用户相互传送电话和非话信息。这种新型的系统就是 ISDN。实现这种新型通信体制的技术关键是通信网络数字化和业务综合化。ISDN 规定了若干标准化的通路。根据带宽之不同可划分为窄带(N-ISDN)和宽带(B-ISDN)两大类型。N-ISDN 一般可承载两路标准的 PCM 数字电话, 码率为 $2 \times 64 \text{ kbit/s}$, 另附一通路传送信令与控制信息, 码率为 16 kbit/s, 总计码率为 144 kbit/s。B-ISDN 的码率一般在 155 Mbit/s 以上, 可传送高清晰度电视等各种宽带信息。

为了在 ISDN 系统中有效地实现数字化和业务综合化, 需要建立一种新的复用与交换体制, 这种体制称为“异步传递方式”或“异步转移模式”(Asynchronous Transfer Mode, 简称 ATM)。所谓“异步”是相对于一般时分复用方式的“同步”而言, 在那里, 称为同步传递方式(STM)。在 STM 复用系统中, 每路信息都插入到固定重复频率的时隙之中, 如图 5-36 所示。图中, 某路信息将均匀地按 1, 2, 3, …部分每隔 125 μs(对应 8 kHz 频率)占用一个固

定时隙，余下的时间以同样周期重复方式提供给其他各路信息传输使用。在接收端以周期性同步方式分解恢复各路信息。在 ATM 系统中，将各种类型业务的数字信息分解成长度一定的数据块，并在各块之前装配具有特征标记码组构成的信头，从而形成一个信元(cell)。每个信元长 53 字节，其中信头占 5 个字节、用户信息占 48 个字节。图 5-36 示出 ATM 复用系统中将用户信息分解成块，然后装入信源的过程。此处，不同于 STM，对于 ATM，只要能获得空位时隙，信元即可装入，不要求信元插入的位置具有周期性。在交换或接收过程中根据信头的标记识别各路信息，完成分解与复原。

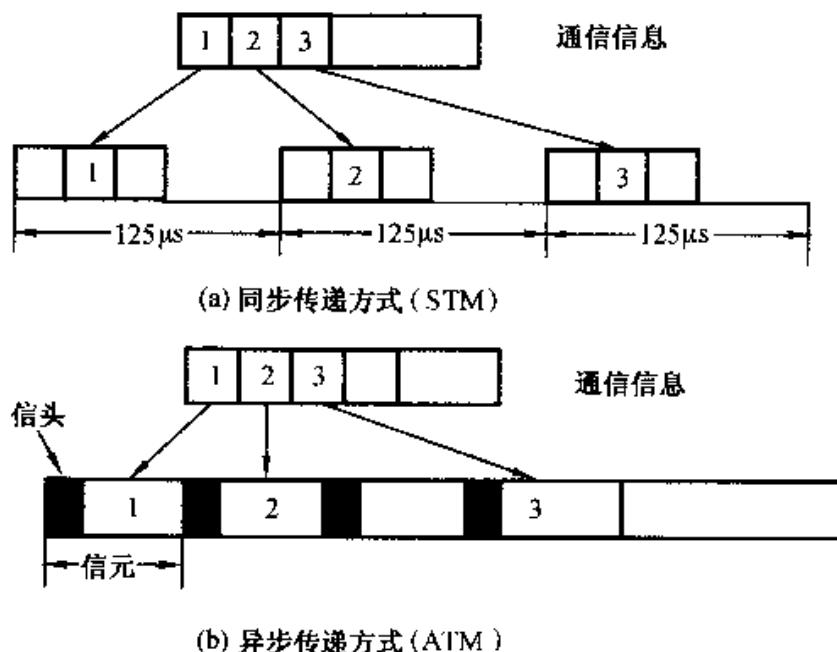


图 5-36 ATM 与 STM 的比较

在 STM 中，某路信息停止传输时，相应的时隙将被闲置，而在 ATM 中，空闲时隙将得到充分利用。ATM 可以动态分配传输带宽以适应不同速率的业务，也可同时适应连续型和突发型业务。利用信头标记可将被传送信息划分优先等级，保证实时性要求较强的业务及时传送。与 STM 相比较，ATM 的主要优点是在高速传输过程中具有很好的灵活性。针对上述构成原理和特点，ATM 复用方式也称为统计复用或标记复用。若从交换、传输、复用等方面综合考察，ATM 还具有很多优点，特别是在交换方面，详细、深入的分析将在后续课程中介绍。

为了实现 ISDN，特别是 B-ISDN，需要采用多种学科新技术的综合。ISDN 是当代通信、计算机、光电子学、微电子学等领域密切结合的产物。在光电子学方面，涉及到激光源产生、光交换、光纤网络等最新技术的全面应用。作为通信系统的传输媒介，光纤对于 ISDN 的实现起着相当重要的作用。与传统的各种无线、有线传输媒介相比较，光纤的主要优点是：频带宽也即传输速率高、远距离传输衰耗小、抗电磁干扰能力强因而误码率低，以及体积小、重

量轻等等。为说明宽带、高速的特点，这里举出数字估算实例。典型的光缆直径约在 1 cm 左右，含有几十根光纤，每根光纤的带宽在 GHz 以上量级。例如，对于含有 32 根光纤的光缆，若每根光纤带宽为 1 GHz，容易求出，此光缆可传送带宽为 64 kHz 的 PCM 数字电话路数为

$$32 \times 1 \times 10^9 / 64 \times 10^3 = 500 \times 10^3$$

即 50 万路数字电话。若普通电视信号每个频道带宽约为 8 MHz，那么，它可传送的电视频道数约为 4000 个。如果高清晰度电视(HDTV)信号的频带约为 150 MHz，那么，可传送的 HDTV 频道约在 200 个以上。这只是相当保守的估算，实际光缆容量尚有很大潜力，可以再高出几个数量级。

目前，N-ISDN 在许多国家和地区已投入商业使用，而 B-ISDN 的应用和推广尚待成熟。

以上介绍的 ISDN 技术是从通信网络的技术领域逐步发展起来的，与此同时，以计算机网络为基础而形成的 Internet(国际互联)网络迅速普及，按照协议规范借助多媒体技术，这种网络也可综合传送数据、语音、图像，在一定程度上实现了与 ISDN 类似的预期要求。据不完全统计，现在世界上 Internet 网络用户已达 1 亿以上，今后，用户数量将以更快的速度增长。虽然，要成为 Internet 网络的用户(或说“上网”)比较简便，然而，它传送信息的速度还不够高，提供的业务服务质量尚不够理想，且服务范围不够多样，保密与安全也未考虑周全，因此，还不是一种令人满意的信息网络。目前，对于 ISDN 和 Internet 的发展前景有不同的学术观点评价，争议很难统一。或许各种信息网络技术的相互渗透、密切结合将全面推动信息网络技术的迅速发展，人们热切期望所谓“信息高速公路”早日建设成功。

信息高速公路也称为“国家信息基础设施”(NII)或“全球信息基础设施”(GII)。对于这一名词目前还没有准确统一的定义，但是人们公认实现信息高速公路的大致目标是：用光纤网络连接各种通信系统、计算机数据库和电信服务设施，此网络可传输语音、数据、图像等各种类型的电信业务信息。为此，需要实现“光纤到户(或到楼)”，也即先把光纤铺设到马路边，再连接到用户终端。信息高速公路把政府机构、企业、大学、研究机构、医院、图书馆以及各种服务机构(如银行、邮局)直到每个家庭全部组网连通，相互之间高速传输信息。全世界将形成一种崭新的信息流通网络。信息高速公路的建设将加快整个社会经济、文化、教育的全面发展，它标志着人类历史正在从农业社会、工业社会步入信息社会。

习 题

5-1 已知系统函数 $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$ ，激励信号 $e(t) = e^{-3t}u(t)$ ，试利用傅里叶分析法求

响应 $r(t)$ 。

- 5-2 若系统函数 $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$, 激励为周期信号 $e(t) = \sin t + \sin(3t)$, 试求响应 $r(t)$, 画出 $e(t)$, $r(t)$ 波形, 讨论经传输是否引起失真。

- 5-3 无损 LC 谐振电路如题图 5-3 所示, 设 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

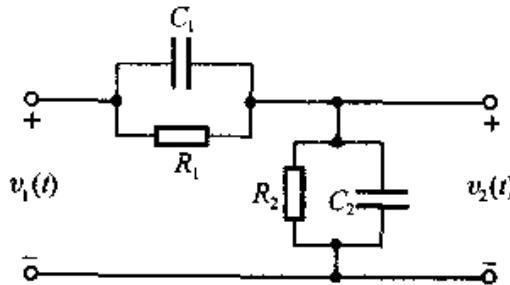
激励信号为电流源 $i(t)$, 响应为输出电压 $v(t)$, 若 $\mathcal{F}[i(t)] = I(j\omega)$, $\mathcal{F}[v(t)] = V(j\omega)$, 求:

$$(1) H(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{I(j\omega)}, h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)];$$

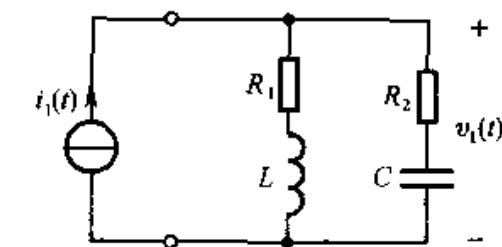
(2) 讨论本题结果与例 5-1 之结果有何共同特点?

- 5-4 电路如题图 5-4 所示, 写出电压转移函数

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}, \text{ 为得到无失真传输, 元件参数 } R_1, R_2, C_1, C_2 \text{ 应满足什么关系?}$$



题图 5-4



题图 5-5

- 5-5 电路如题图 5-5, 在电流源激励作用下, 得到输出电压。写出联系 $i_1(t)$ 与 $v_1(t)$ 的网络函数 $H(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}$, 要使 $v_1(t)$ 与 $i_1(t)$ 波形一样(无失真), 确定 R_1 和 R_2 (设给定 $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$)。传输过程有无时间延迟?

- 5-6 一个理想低通滤波器的网络函数如式(5-23), 幅度响应与相移响应特性如图 5-8。证明此滤波器对于 $\frac{\pi}{\omega_c} \delta(t)$ 和 $\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$ 的响应是一样的。

- 5-7 一个理想低通滤波器的系统函数仍如上题(5-6 题), 求此滤波器对于 $\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$ 信号的响应。假定 $\omega_0 < \omega_c$, ω_c 为滤波器截止频率。

- 5-8 已知系统冲激响应 $h(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} \right]$, 系统函数 $H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$, 试画出 $|H(j\omega)|$ 和 $\phi(\omega)$ 图形。

- 5-9 已知理想低通的系统函数表示式为

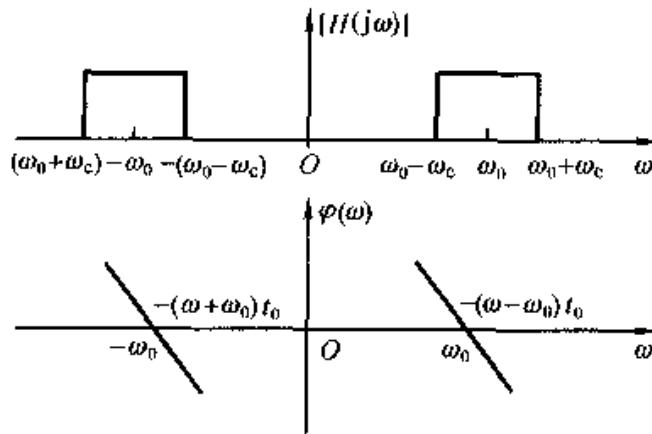
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \left(|\omega| < \frac{2\pi}{\tau} \right) \\ 0 & \left(|\omega| > \frac{2\pi}{\tau} \right) \end{cases}$$

而激励信号的傅氏变换式为

$$E(j\omega) = \tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

利用时域卷积定理求响应的时间函数表示式 $r(t)$ 。

- 5-10 一个理想带通滤波器的幅度特性与相移特性如题图5-10所示。求它的冲激响应，画响应波形，说明此滤波器是否是物理可实现的？



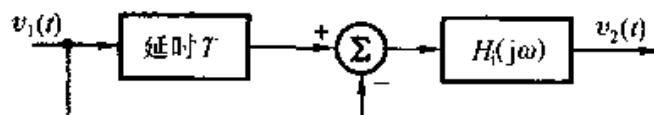
题图 5-10

- 5-11 题图5-11所示系统， $H_i(j\omega)$ 为理想低通特性

$$H_i(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| \leq 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

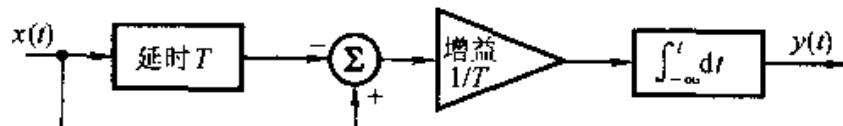
若：(1) $v_1(t)$ 为单位阶跃信号 $u(t)$ ，写出 $v_2(t)$ 表示式；

(2) $v_1(t) = \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}$ ，写出 $v_2(t)$ 表示式。



题图 5-11

- 5-12 写出题图5-12所示系统的系统函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 。以持续时间为 τ 的矩形脉冲作激励 $x(t)$ ，求 $\tau \gg T$ 、 $\tau \ll T$ 、 $\tau = T$ 三种情况下的输出信号 $y(t)$ （从时域直接求或以拉氏变换方法求，讨论所得结果）。



题图 5-12

- 5-13 某低通滤波器具有升余弦幅度传输特性，其相频特性为理想特性。若 $H(j\omega)$ 表示式为

$$H(j\omega) = H_i(j\omega) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\omega_c} \omega\right) \right]$$

其中 $H_i(j\omega)$ 为理想低通传输特性

$$H_i(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & (|\omega| < \omega_c) \\ 0 & (\omega \text{ 为其他值}) \end{cases}$$

试求此系统的冲激响应，并与理想低通滤波器之冲激响应相比较。

- 5-14 某低通滤波器具有非线性相移特性，而幅频响应为理想特性。若 $H(j\omega)$ 表示式为

$$H(j\omega) = H_i(j\omega)e^{-j\Delta\varphi(\omega)}$$

其中 $H_i(j\omega)$ 为理想低通传输特性（见上题）， $\Delta\varphi(\omega) \ll 1$ ，并可展开为

$$\Delta\varphi(\omega) = a_1 \sin\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\omega}{\omega_1}\right) + \cdots + a_m \sin\left(\frac{m\omega}{\omega_1}\right)$$

试求此系统的冲激响应，并与理想低通滤波器之冲激响应相比较。

- 5-15 试利用另一种方法证明因果系统的 $R(\omega)$ 与 $X(\omega)$ 被希尔伯特变换相互约束。

(1) 已知 $h(t) = h_e(t)u(t)$ ， $h_e(t)$ 和 $h_o(t)$ 分别为 $h(t)$ 的偶分量和奇分量， $h(t) = h_e(t) + h_o(t)$ ，证明：

$$\begin{aligned} h_e(t) &= h_o(t)\operatorname{sgn}(t) \\ h_o(t) &= h_e(t)\operatorname{sgn}(t) \end{aligned}$$

(2) 由傅氏变换的奇偶虚实关系已知

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= R(\omega) + jX(\omega) \\ \mathcal{F}[f_e(t)] &= R(\omega) \\ \mathcal{F}[f_o(t)] &= jX(\omega) \end{aligned}$$

利用上述关系证明 $R(\omega)$ 与 $X(\omega)$ 之间满足希尔伯特变换关系。

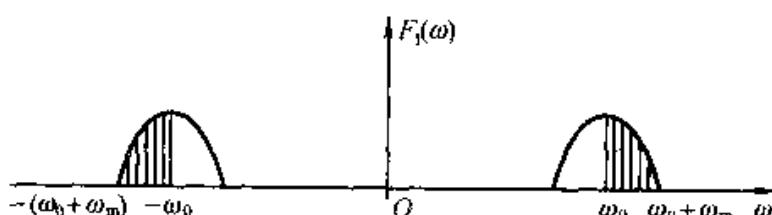
- 5-16 若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ ，令 $Z(\omega) = 2F(\omega)U(\omega)$ （只取单边的频谱）。试证明

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1}[Z(\omega)] = f(t) + \hat{f}(t)$$

其中

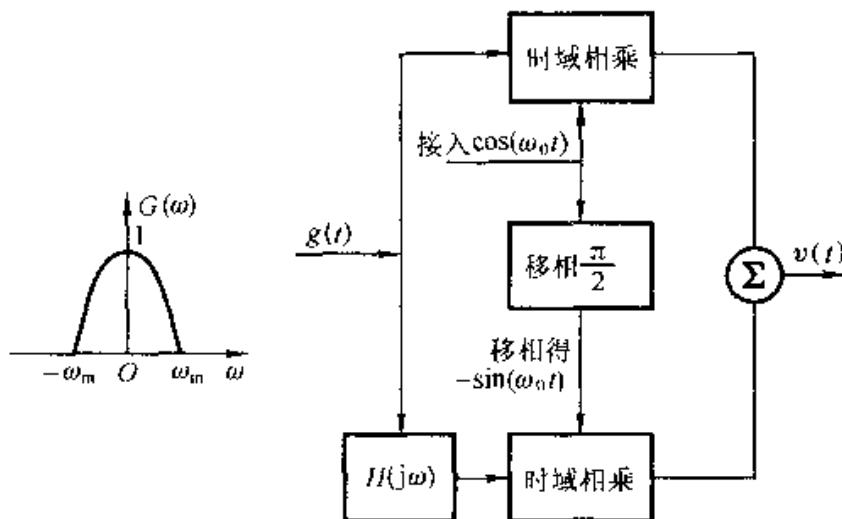
$$\hat{f}(t) = \frac{j}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \right]$$

- 5-17 对于图 5-18 所示抑制载波调幅信号的频谱，由于 $G(\omega)$ 的偶对称性，使 $F(\omega)$ 在 $-\omega_0$ 和 $+\omega_0$ 之左右对称，利用此特点，可以只发送频谱如题图 5-17 所示的信号，称为单边带信号，以节省频带。试证明在接收端用同步解调可以恢复原信号 $G(\omega)$ 。



题图 5-17

- 5-18 试证明题图 5-18 所示之系统可以产生单边带信号。图中，信号 $g(t)$ 之频谱 $G(\omega)$ 受限于 $-\omega_m \sim +\omega_m$ 之间， $\omega_0 \gg \omega_m$ ； $H(j\omega) = -j\operatorname{sgn}\omega$ 。设 $v(t)$ 之频谱为 $V(\omega)$ ，写出 $V(\omega)$ 表示式，并画出图形。



题图 5-18

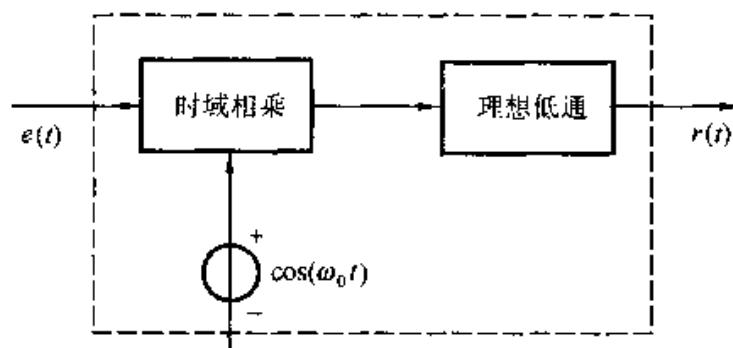
- 5-19 已知 $g(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$, $s(t) = \cos(\omega_0 t)$, 设 $\omega_0 \gg \omega_c$, 将它们相乘得到 $f(t) = g(t)s(t)$, 若 $f(t)$ 通过一个特性如题图 5-10 所示的理想带通滤波器, 求输出信号 $f_1(t)$ 之表示式。

- 5-20 在题图 5-20 所示系统中 $\cos(\omega_0 t)$ 是自激振荡器, 理想低通滤波器的转移函数为

$$H_i(j\omega) = [u(\omega + 2\Omega) - u(\omega - 2\Omega)]e^{-j\omega t_0}$$

且 $\omega_0 \gg \Omega$ 。

- (1) 求虚框所示系统的冲激响应 $h(t)$;
- (2) 若输入信号为 $e(t) = \left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} \right]^2 \cos(\omega_0 t)$, 求系统输出信号 $r(t)$;
- (3) 若输入信号为 $e(t) = \left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} \right]^2 \sin(\omega_0 t)$, 求系统输出信号 $r(t)$;
- (4) 虚框所示系统是否线性时不变系统?



题图 5-20

- 5-21 模拟电话话路的频带宽度为 300 Hz—3400 Hz, 若要利用此信道传送二进制的数据信号需要接入调制解调器(MODEM)以适应信道通带要求, 问 MODEM 在此完成了何种功能? 请你试想一种可能实现 MODEM 系统的方案, 画出简要的原理框图。(假定数据信号的速率为 1200 bit/s, 波形为不归零矩形脉冲)。
- 5-22 若 $x(t)$ 、 $\psi(t)$ 都为实函数, 连续函数小波变换的定义可简写为

$$WT_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

(1) 若 $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$, $\mathcal{F}[\phi(t)] = \Psi(\omega)$, 试证明以上定义式也可用下式给出

$$WT_x(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \Psi(-a\omega) e^{j\omega b} d\omega$$

(2) 讨论定义式中 a , b 参量的含义(参看例 5-5)。

5-23 在信号处理技术中应用的“短时傅里叶变换”有两种定义方式, 假定信号源为 $x(t)$, 时域窗函数为 $g(t)$, 第一种定义方式为

$$X_1(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$$

第二种定义方式为

$$X_2(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) g(t) e^{-j\omega t} dt$$

试从物理概念说明参变量 τ 的含义, 比较二种定义结果有何联系与区别。

5-24 若 $x(t) = \cos(\omega_m t)$, $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$, 分别画出以下情况 $x(t) \cdot \delta_T(t)$ 波形及其频谱 $\mathcal{F}[x(t)\delta_T(t)]$ 图形。讨论从 $x(t)\delta_T(t)$ 能否恢复 $x(t)$ 。注意比较(1)和(4)的结果。(建议画波形时保持 T 不变)

$$(1) \omega_m = \frac{\omega_s}{8} = \frac{\pi}{4T} \quad (2) \omega_m = \frac{\omega_s}{4} = \frac{\pi}{2T}$$

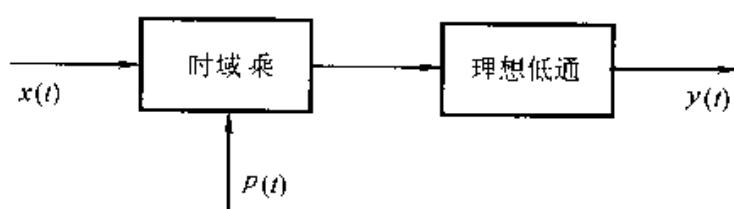
$$(3) \omega_m = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \quad (4) \omega_m = \frac{9}{8}\omega_s = \frac{9\pi}{4T}$$

5-25 题图 5-25 所示抽样系统 $x(t) = A + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - n(T + \Delta)]$, $T \gg \Delta$, 理想低通系统函数表达式为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |\omega| < \frac{1}{2(T + \Delta)} \\ 0, & \text{当 } \omega \text{ 为其他} \end{cases}$$

输出端可得到 $y(t) = kx(at)$, 其中 $a < 1$, k 为实系数。求:

- (1) 画 $\mathcal{F}[p(t)x(t)]$ 图形;
- (2) 为实现上述要求给出 Δ 取值范围;
- (3) 求 a , 求 k ;
- (4) 此系统在电子测量技术中可构成抽样(采样)示波器, 试说明此种示波器的功能特点。



题图 5-25

5-26 试设计一个系统使它可以产生图5-35所示的阶梯近似 Sa 函数波形(利用数字电路等课程知识)。近似函数宽度截取 $8T$ (中心向左右对称), 矩形窄脉冲宽度 $\frac{T}{8}$ 。每当一个“1”码到来时(由速率为 $\frac{2\pi}{T}$ 的窄脉冲控制)即出现 Sa 码波形(峰值延后 $4T$)。

- (1) 画出此系统逻辑框图和主要波形;
- (2) 考虑此系统是否容易实现;
- (3) 在得到上述信号之后, 若要去除波形中的小阶梯, 产生更接近连续 Sa 函数的波形需采取什么办法?

第六章 信号的矢量空间分析

6.1 引言

对于信号分析理论的进一步研究表明，信号表示式与多维矢量之间存在许多形式上的类似。借助信号与矢量之间的类比，不仅可以使一些抽象问题便于理解，而且使我们对于信号的性能、信号分析与处理研究中遇到的问题进入更深的层次。

从数学观点看，通常把赋予某种数学结构的集合称为“空间”。例如，能引入线性运算的矢量集合称为“线性(矢量)空间”；若再引入矢量的长度概念，也即“范数”的概念，则构成“线性赋范空间”；为了研究矢量之间的相互关系，需要借助“内积”运算，于是构成“内积空间”。

信号的能量具有与矢量长度类似的属性，表征信号能量的一些参数可与矢量的范数类比。而信号之间的相关性类似于矢量之间的夹角，可以利用矢量的内积运算来描述。内积空间中的正交性是引出傅里叶级数展开的理论基础，利用内积空间的概念可以给出信号的各种正交函数展开，不仅局限于三角级数。著名的帕塞瓦尔(Parseval)方程(定理)揭示了信号正交分解能量不变性的物理本质，而从矢量空间角度分析，这是矢量范数不变性(内积不变性)的体现。当今，在信号处理领域内正交变换得到了如此广泛的应用，正是因为这种变换具备上述物理背景和相应的数学本质。

6.2节给出利用矢量空间方法研究信号理论的基本概念，以此为基础展开信号正交函数分解的讨论，这里介绍的方法也可称为信号的广义傅里叶级数展开，它是第三章研究方法的推广，正交函数集具有丰富多彩的形式，不仅限于三角函数集。在矢量空间中，可以看到类似的现象，同一矢量可按不同的坐标系统进行分解。作为正交函数分解的典型实例，介绍了沃尔什(Walsh)正交函数集的原理和简单应用。在本书下册第八和第九章将要研究离散时间信号的正交变换，本章讲述的许多概念在那里要得到进一步的应用和广泛深入的理解。

相关函数和卷积的运算有着密切联系，类比学习两种运算方法有助于正确、灵活的理解基本概念。作为第三章信号频谱分析方法的继续，研究信号的相关函数、能量谱和功率谱，这些概念广泛应用于随机信号分析之中，初步学

习这些分析方法将十分有利于本课程与后续课程的密切配合。

“匹配滤波器”是相关函数概念应用于通信、雷达、声纳系统中的一个典型实例，在6.9节介绍构成这种滤波器的原理。6.10节利用本章的有关定理证明了“测不准原理”，这是5.4节的继续。近年来，在通信系统（特别是移动通信系统）中“码分复用”技术日益受到重视，本章介绍的相关、正交概念正是构成码分复用技术的理论基础，在6.11节给出码分复用的基本原理，这是第5.11节和5.12节各种复用方法讨论的延续。最后几节的内容或许能引导读者从抽象的数学推演中逐步感受到利用基本理论解决工程实际问题的乐趣，从而理解学习本课程的目的。

6.2 信号矢量空间的基本概念

(一) 线性空间

粗略讲，线性空间是指这样一种集合，其中任意两元素相加可构成此集合内的另一元素，任一元素与任一数相乘后得到此集合内的另一元素，这里的倍乘系数可以是实数也可是复数。下面举出最常见的线性空间实例：

(1) N 维实数空间 \mathbb{R}^N 与复数空间 \mathbb{C}^N

\mathbb{R}^N 空间的元素 x 由 N 个有次序的实数构成

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T & \quad x_i \in \mathbb{R} \\ i = 1, 2, \dots, N & \end{aligned} \quad (6-1)$$

与另一元素 $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ 相加以及和数 α 相乘的运算如通常的加法和乘法按如下定义：

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N)^T \quad (6-2)$$

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_N)^T \quad (6-3)$$

如果上述定义中的实数均改为复数，则构成 N 维复数空间 \mathbb{C}^N 。

(2) 连续时间信号空间 L

定义在全部复数（或实数）连续时间信号的集合构成线性空间，这时，各信号逐点相加或逐点倍乘系数 α 的运算表达式如下定义：

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (6-4)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (6-5)$$

注意到时间变量 t 为实数。

上述 N 维实数空间 \mathbb{R}^N 或复数空间 \mathbb{C}^N 都是有限维空间，而这里的连续时间信号空间 L 是无穷维空间。

(3) 离散时间信号空间 L

全部复数（或实数）离散时间信号（序列）的集合构成线性空间，此时，各信

号逐点相加或逐点倍乘系数 α 的运算表达式定义如下：

$$(x+y)(n) = x(n) + y(n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6-6)$$

$$\alpha x(n) = \alpha x(n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6-7)$$

注意到时间变量 n 为整数。

类似地，离散时间信号空间 l 也属无穷维空间。而 N 维的离散时间信号空间属有限维。

(二) 范数、赋范空间

在线性空间中，利用线性运算可以研究诸如线性相关、线性无关、基、维数等线性结构，但是还没有给出矢量长度的度量方法，为解决这一问题，需要研究“范数”。信号具有的能量与矢量空间的长度可以相类比，在给出范数的定义后，可以看到范数概念对于描述信号能量特性的作用。

线性空间中元素 x 的范数以符号 $\|x\|$ 表示，范数满足以下公理：

- (1) 正定性 $\|x\| \geq 0$, 当且仅当 $x=0$ 时 $\|x\|=0$;
- (2) 正齐性 对所有数量 α , 有 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- (3) 三角形不等式 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 。

下面举例给出各线性空间的范数

首先考察 \mathbb{R}^N 与 \mathbb{C}^N 空间的范数

令 p 为实数, $1 \leq p \leq \infty$, 在 \mathbb{R}^N 或 \mathbb{C}^N 空间元素 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的 p 阶范数定义为

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right]^{1/p} & \text{对于 } 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq i \leq N} |x_i| & \text{对于 } p = \infty \end{cases} \quad (6-8)$$

最常用的范数为 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, 和 $\|\cdot\|_\infty$, 例如, $x \in \mathbb{C}^2$ 若给定 $x = (1, j)$ 则其范数为:

$$\|x\|_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|x\|_\infty = \max(1, 1) = 1$$

在二维或三维实数矢量空间 (\mathbb{R}^2 或 \mathbb{R}^3) 之中, 二阶范数的物理意义是矢量的长度, $\|x\|_2$ 也称为欧氏(Euclidean)范数或欧氏距。

下面讨论连续时间信号空间 L 和离散时间信号空间 l 中的范数

在连续时间信号空间 L 中, 元素 x 的 p 阶范数 $\|x\|_p$ 定义如下

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt \right]^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup |x(t)|, & p = \infty \end{cases} \quad (6-9)$$

此处, 符号 \sup 表示信号的上确界(supremum)或称最小上界。对于定义在闭

区间内的信号, sup 表示其幅度值。

类似地可以得到在离散时间信号空间 \mathcal{L} 中, 元素 $x(n)$ 的 p 阶范数 $\|x\|_p$ 定义如下:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup|x(n)|, & p = \infty \end{cases} \quad (6-10)$$

下面给出信号的 1、2 和 ∞ 阶范数的表达式及其物理意义。

$$\|x\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \quad (6-11)$$

或

$$\|x\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \quad (6-12)$$

可见, 一阶范数表示信号作用的强度(大小)。

$$\|x\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \text{ 也即 } \|x\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (6-13)$$

或

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ 也即 } \|x\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (6-14)$$

二阶范数的平方表示信号的能量, 若 $x(t)$ 表示电压或电流, 它在单位电阻上产生的能量即为 $\|x\|_2^2$ 。

$$\|x\|_{\infty} = \sup|x(t)| \quad (6-15)$$

或

$$\|x\|_{\infty} = \sup|x(n)| \quad (6-16)$$

对于定义在闭区间上的 $x(t)$, $\|x\|_{\infty}$ 表示信号可测得的峰值, 也即信号的幅度。

图 6-1 举例给出信号 x 波形与信号作用强度、能量以及幅度的图解示意。

在信号分析与处理研究领域中, 除直接引用上述范数之外, 为便于描述信号的物理性能还经常引用以下参数, 它们分别是功率、方均根值和平均值:

若信号 x 之能量为无限大, 而其平均功率为确定值(例如周期信号), 于是可定义连续或离散时间信号的功率, 其表达式为在一段时间间隔内(从 $-\frac{T}{2}$ 到 $\frac{T}{2}$)的平均功率, 并取间隔 $T \rightarrow \infty$ 之极限, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \right] \quad (6-17)$$

或

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} |x(n)|^2 \right] \quad (6-18)$$

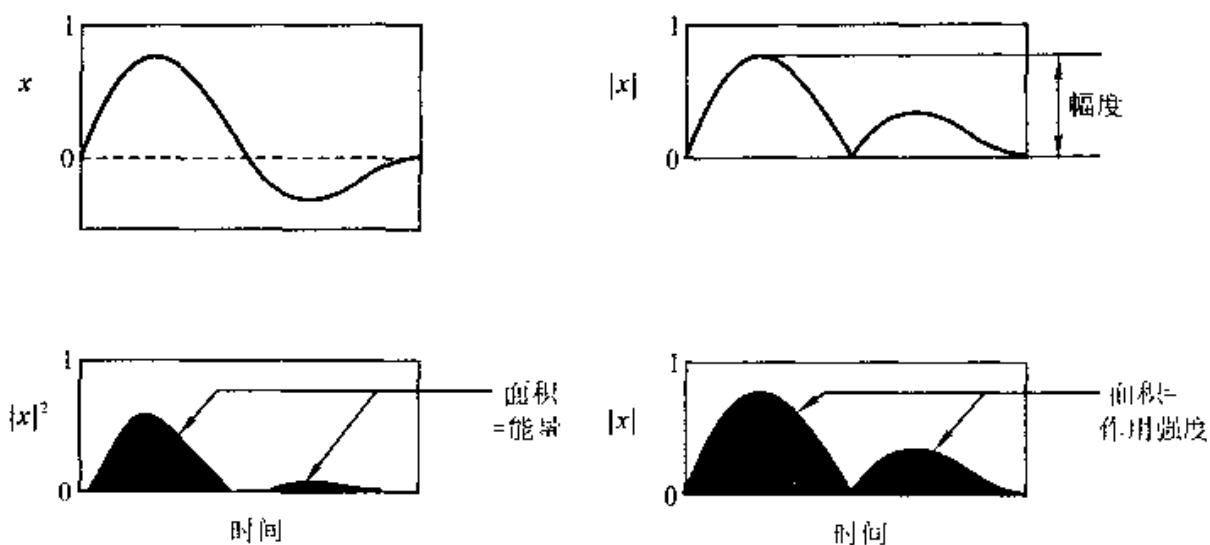


图 6-1 信号波形参数示例

信号功率的开方称为信号的方均根值，写作 rms (root mean square)。

信号的平均值(也即直流分量)表达式为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \right] \quad (6-19)$$

或

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} x(n) \right] \quad (6-20)$$

例如，幅度为 a 的正弦波，其平均值为 0，功率为 $\frac{1}{2}a^2$ ，方均根值是 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ (也称有效值)。又如图 6-2 所示的连续时间周期性方波，若幅度为 a ，其平均值为 $\frac{a}{2}$ ，功率为 $\frac{1}{2}a^2$ ，方均根值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 。

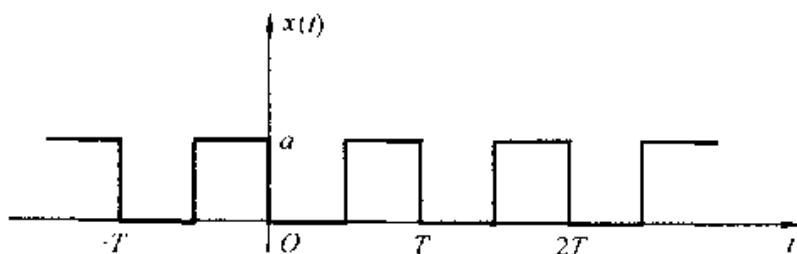


图 6-2 周期性方波

给出了范数的概念即可构成线性赋范空间，也称赋范空间。在信号分析理论研究中，若信号的能量受限，即 $\|x\|_2 < \infty$ ，于是可构成如下的赋范空间：

$$L_2 := \{x \in L \mid \|x\|_2 < \infty\} \quad (6-21)$$

或

$$l_2 := \{x \in l \mid \|x\|_2 < \infty\} \quad (6-22)$$

它们分别是能量受限的连续时间信号或离散时间信号的集合。类似地，对于幅度为有限值的连续时间信号或离散时间信号的集合，分别构成如下赋范空间：

$$L_\infty := \{x \in L \mid \|x\|_\infty < \infty\} \quad (6-23)$$

或

$$L_\infty := \{x \in L \mid \|x\|_\infty < \infty\} \quad (6-24)$$

对于信号作用强度为有限值的连续时间信号或离散时间信号的集合，分别构成赋范空间：

$$L_1 := \{x \in L \mid \|x\|_1 < \infty\} \quad (6-25)$$

或

$$L_1 := \{x \in L \mid \|x\|_1 < \infty\} \quad (6-26)$$

一般情况下，线性空间并未构成赋范空间，例如 L 和 L 空间都不是赋范空间，如果按范数存在三条公理的要求给予约束可分别定义各种形式的赋范空间如上述 L_2 , L_2 , L_∞ , L_∞ , L_1 , L_1 等。

(三) 内积、内积空间

上面讨论的范数是矢量长度概念的推广，是矢量自身的重要属性。这些概念对于研究若干矢量之间的相互关系仍然不够，为解决这一问题，需要引入内积的概念。由前文已知，范数与信号自身的能量、强度等特征相对应，而内积运算与若干信号之间的相互关系密切相连，在讨论信号之间的正交、相关等概念时将看到这一点。

为引入内积概念，首先考虑直角坐标平面(二维矢量空间)内两矢量相对位置的关系。

图 6-3 示出直角坐标平面中矢量 $x = (x_1, x_2)$ 和 $y = (y_1, y_2)$ ，它们与水平轴夹角分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 ，两矢量之间夹角($\phi_1 - \phi_2$)的余弦函数表达式为

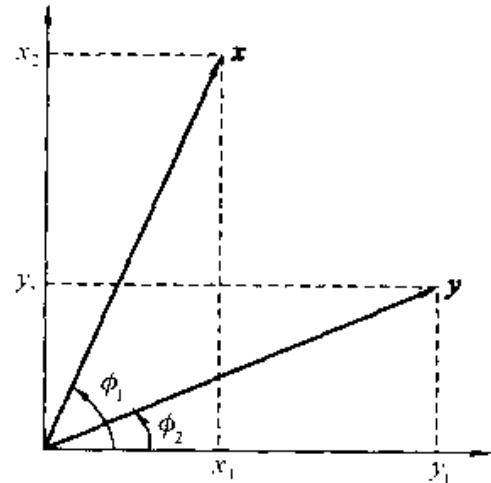


图 6-3 直角坐标平面中矢量 x 与 y

$$\begin{aligned} \cos(\phi_1 - \phi_2) &= \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) + \sin(\phi_1)\sin(\phi_2) \\ &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \\ &= \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (6-27)$$

式中分母为两矢量长度的乘积，分子 $x_1 y_1 + x_2 y_2$ 表示两矢量相应坐标值的标量乘积。利用范数符号，将矢量长度分别写作：

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6-28)$$

$$\|y\|_2 = (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6-29)$$

于是, 标量乘积 $x_1y_1 + x_2y_2$ 的表达式为

$$x_1y_1 + x_2y_2 = \|x\|_2 \|y\|_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (6-30)$$

这表明, 对于给定的矢量长度, 标量乘积式(6-30)反映了两矢量之间相对位置的“校准”情况。如果标量乘积为零, $\cos(\phi_1 - \phi_2) = 0$, 表示两矢量之夹角为 90° ; 而当 $\cos(\phi_1 - \phi_2) = 1$, 也即两矢量夹角为 0° 时, 标量乘积取得最大值, 即两矢量长度之乘积。

对于三维矢量空间, 若两矢量分别为 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $y = (y_1, y_2, y_3)$, 取标量乘积 $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ 也可得出与二维矢量空间类似的几何解释, 当此式为 0 时表示两矢量之夹角为 90° ; 而当两矢量重合(夹角为 0°)时, 此式取得最大值。

上述 $x_1y_1 + x_2y_2$ 和 $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ 两表达式分别对应二维和三维矢量空间的内积(也称点积)运算。

设 \mathbb{R} 为实线性空间。如果对于 \mathbb{R} 中任意两元素 x 和 y , 均有一实数与之对应, 此实数记为 $\langle x, y \rangle$, 它满足以下公理:

- (1) 自内积正定性 $\langle x, x \rangle \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时 $\langle x, x \rangle = 0$;
- (2) 交换律 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- (3) 齐性 $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, λ 为任意实数;
- (4) 分配律 $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $z \in \mathbb{R}$, 则 $\langle x, y \rangle$ 称为 x 和 y 的内积, \mathbb{R} 称为实内积空间(或欧几里德空间)。

例如, 对于 N 维实线性空间, 两元素 x 与 y 的内积定义如下

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i = x^T y \quad (6-31)$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ 和 $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ 这正是式(6-30)的推广。

设 \mathbb{C} 为复线性空间。如果对于 \mathbb{C} 中任意两元素 x 和 y , 均有一复数与之对应, 记为 $\langle x, y \rangle$, 它满足以下公理:

- (1) 自内积正定性 $\langle x, x \rangle$ 为非负实数, $\langle x, x \rangle > 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, $\langle x, x \rangle = 0$;
- (2) 共轭交换性 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$;
- (3) 齐性 $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, λ 为任意复数;
- (4) 分配律 $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $z \in \mathbb{C}$, 则称 $\langle x, y \rangle$ 为 x 与 y 的内积, \mathbb{C} 为复内积空间(或称酉空间)。

例如, 对于 N 维复线性空间, 两元素 x 与 y 的内积定义如下

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i^* \quad (6-32)$$

不难看出, 元素 x 与自身的内积运算必为正实数, 而且等于它的二阶范

数之平方，即 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|_2^2$ 。

上述内积概念可运用于信号矢量空间。

属于信号空间 L 内的两连续时间信号 x 和 y 之内积定义如下：

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)^* dt \quad (6-33)$$

属于信号空间 l 内的两离散时间信号 x 和 y 之内积定义如下：

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)y(n)^* \quad (6-34)$$

对于 L 空间或 l 空间，信号 x 与其自身的内积运算表达式分别为：

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (6-35)$$

或

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (6-36)$$

(四) 柯西-施瓦茨不等式

在研究内积特性时，一个很有用的公式称为柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式，其表达式为

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \quad (6-37)$$

对于二维矢量空间，利用式(6-30)容易得到：

$$\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2} = \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (6-38)$$

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2} \leq +1 \quad (6-39)$$

$$\frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \leq 1 \quad (6-40)$$

于是，式(6-37)得证。

对于一般情况，假定 α 为任意复数，由内积定义可知

$$\langle \mathbf{x} - \alpha \mathbf{y}, \mathbf{x} - \alpha \mathbf{y} \rangle \geq 0 \quad (6-41)$$

将此不等式左端展开

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} - \alpha \mathbf{y}, \mathbf{x} - \alpha \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle + \langle -\alpha \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle -\alpha \mathbf{y}, \alpha \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* - \alpha^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + |\alpha|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned} \quad (6-42)$$

在以上推导中引用了复内积空间的公理(包括分配律、共轭交换和齐性)，还用到以下约束关系

$$\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (6-43)$$

式(6-43)可由共轭交换与齐性推证得出(作为练习，请读者自己证明)。

令

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \quad (6-44)$$

代入式(6-42)后得到

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x} - \alpha \mathbf{y}, \mathbf{x} - \alpha \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^*}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \\ &\quad - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^*}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}.\end{aligned}\quad (6-45)$$

化简后代入式(6-41)得到

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \geq 0 \quad (6-46)$$

于是式(6-37)得证。

利用式(6-37)可以解释信号内积空间与信号能量受限的对应关系。对于 L^2 空间或 l^2 空间, 任意两元素之内积有可能为无穷大, 因此, L^2 空间或 l^2 空间都不能构成内积空间。而对于能量受限的信号空间 L_2 或 l_2 , 其二阶范数均为有限值, 由柯西-施瓦茨不等式可知, 内积为有限值, 所以 L_2 或 l_2 构成内积空间。

6.3 信号的正交函数分解

信号分解为正交函数分量的原理与矢量分解为正交矢量的概念类似。本节利用二维矢量空间较形象的概念引出正交函数和正交函数集的定义。

(一) 二维空间的正交矢量

考察两个矢量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} , 如图 6-4(a)所示。若由 \mathbf{x} 的端点做直线垂直于矢量 \mathbf{y} , 则被分割的部分 $c\mathbf{y}$ 称为矢量 \mathbf{x} 在 \mathbf{y} 上的投影或分量。如果将垂线也表示为矢量 \mathbf{v} , 则三个矢量 \mathbf{x} , $c\mathbf{y}$, \mathbf{v} 组成矢量三角形, 它们之间有下列关系

$$\mathbf{x} - c\mathbf{y} = \mathbf{v} \quad (6-47)$$

这表明, 若用矢量 $c\mathbf{y}$ 来近似地描述矢量 \mathbf{x} , 两者之间的误差是矢量 \mathbf{v} 。

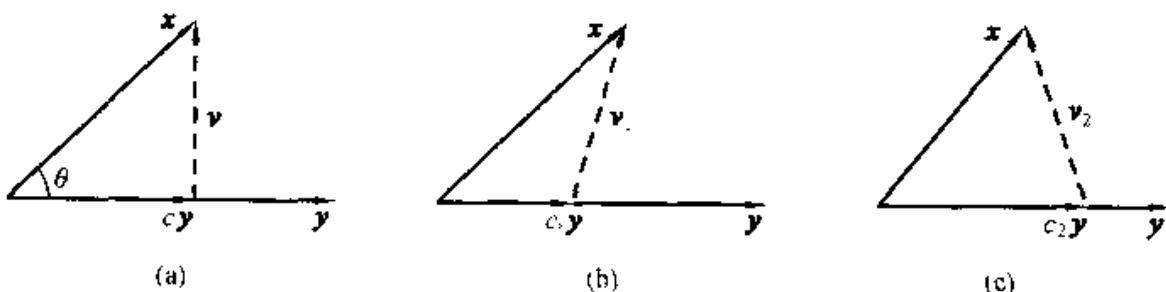


图 6-4 矢量 \mathbf{x} 在矢量 \mathbf{y} 上的分量

在图 6-4(b)和(c)分别示出 \mathbf{x} 在 \mathbf{y} 上的斜投影 $c_1\mathbf{y}$ 和 $c_2\mathbf{y}$, 显然, 这样的斜投影分量可有无穷多个。若用 $c_1\mathbf{y}$ 或 $c_2\mathbf{y}$ 去表示 \mathbf{x} , 其误差矢量 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 都要大于以垂直投影表示时的误差矢量 \mathbf{v} 。因此, 可得出以下结论, 若要用 \mathbf{y} 上的矢量近似描述另一矢量 \mathbf{x} , 为使误差最小, 应选取 \mathbf{x} 在 \mathbf{y} 上的垂直投影 $c\mathbf{y}$ 如图 6-4(a)所示。若矢量 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 的模(矢量长度)分别以 $\|\mathbf{x}\|_2$ 和 $\|\mathbf{y}\|_2$ 表示, 两矢量间夹角为 θ , 容易写出

$$\begin{aligned} c\|\mathbf{y}\|_2 &= \|\mathbf{x}\|_2 \cos \theta \\ &= \frac{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \cos \theta}{\|\mathbf{y}\|_2} \end{aligned} \quad (6-48)$$

利用式(6-48)关系可求得由内积描述的 c 表达式

$$c = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$$

系数 c 标志着矢量 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 相互接近的程度。当 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 完全重合时, $\theta = 0, c = 1$; 随着 θ 增大, c 减小; 当 $\theta = 90^\circ$ 时, $c = 0$ 。对于最后这种情况, 称 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 相互垂直的矢量为正交矢量, 这时, 矢量 \mathbf{x} 在矢量 \mathbf{y} 的方向没有分量(系数 c 等于零)。

根据上述原理, 可以将一个平面中的任意矢量在直角坐标中分解为两个正交矢量的组合。为便于研究矢量分解, 把相互正交的两个矢量组成一个二维的“正交矢量集”, 这样, 在此平面上的任意分量都可用二维正交矢量集的分量组合来代表。

将此概念推广, 对于一个三维空间中的矢量, 可以用一个三维的正交矢量集来表示它。在一般情况下, 不能用二维正交矢量集去表示三维空间的矢量, 如果这样做必将留有误差。或者说, 三维的空间矢量必须分解为三维正交矢量的组合。

上述正交矢量分解的概念, 可推广应用到 n 维信号矢量空间。

(二) 正交函数

假设, 要在区间($t_1 < t < t_2$)内用函数 $f_2(t)$ 近似表示 $f_1(t)$

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t) \quad (t_1 < t < t_2)$$

这里的系数怎样选择才能得到最佳的近似? 当然, 应选取 c_{12} 使实际函数与近似函数之间的误差在区间($t_1 < t < t_2$)内为最小。所谓误差最小不是指平均误差最小, 因为在平均误差很小或等于零的情况下, 也可能有较大的正误差与负误差在平均过程中相抵消, 以致不能正确反映两函数的近似程度。我们选择误差的方均值(或称均方值)最小, 这时, 可以认为已经得到了最好的近似。误差的方均值也称方均误差, 以符号 $\overline{\epsilon^2}$ 表示

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt \quad (6-49)$$

为求得使 $\overline{\epsilon^2}$ 最小之 c_{12} 值, 必须使

$$\frac{d \overline{\epsilon^2}}{dc_{12}} = 0$$

即

$$\frac{d}{dc_{12}} \left\{ \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt \right\} = 0 \quad (6-50)$$

交换微分与积分次序, 得到

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dc_{12}} f_1^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt + 2c_{12} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \right] = 0 \quad (6-51)$$

显然, 上式中第一项等于零, 于是求出

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \quad (6-52)$$

由式(6-52)可知: 函数 $f_1(t)$ 有 $f_2(t)$ 的分量, 此分量的系数(振幅)是 c_{12} 。如果 c_{12} 等于零, 则 $f_1(t)$ 不包含 $f_2(t)$ 的分量, 这种情况称为: $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内正交。由式(6-52)得出两个函数在区间 (t_1, t_2) 内正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0 \quad (6-53)$$

如果试图用与某函数互为正交的函数来作它的近似, 那么, c_{12} 的最佳值是零。这就是说, 与其用它的正交函数来近似, 不如用零函数 $f(t) = 0$ 来表示。

利用矢量空间内积运算的概念, 在区间 $(t_1 < t < t_2)$ 内式(6-52)可写作

$$c_{12} = \frac{\langle f_1(t), f_2(t) \rangle}{\langle f_2(t), f_2(t) \rangle} \quad (6-54)$$

显然, 在矢量空间内, 若两信号之内积为零则构成正交函数。

下面举出求 c_{12} 的实例。

例6-1 设矩形脉冲 $f(t)$ 有如下定义

$$f(t) = \begin{cases} +1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

波形如图 6-5, 试用正弦波 $\sin t$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 之内近似表示此函数, 使方均误差最小。

解 函数 $f(t)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内近似为

$$f(t) \approx c_{12} \sin t$$

为使方均误差最小, c_{12} 应满足

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^{2\pi} (-\sin t) dt \right] = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

所以

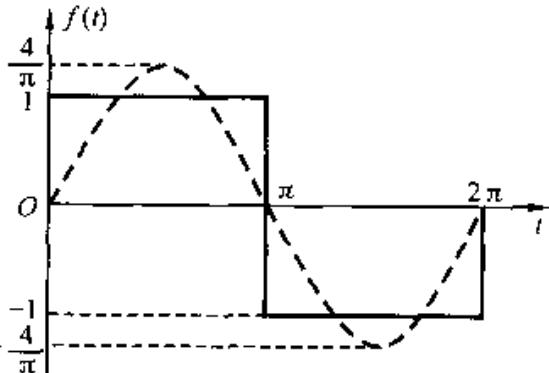


图 6-5 用正弦波近似表示矩形波

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin t$$

近似波形是振幅为 $\frac{4}{\pi}$ 的正弦波如图 6-5 中虚线所示。

例 6-2 试用正弦函数 $\sin t$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内来近似表示余弦函数 $\cos t$ 。

解 显然, 由于

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = 0$$

所以

$$c_{12} = 0$$

也即, 余弦信号 $\cos t$ 不包含正弦信号 $\sin t$ 分量。或者说 $\cos t$ 与 $\sin t$ 两函数正交。

(三) 正交函数集

假设有 n 个函数 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ 构成的一个函数集, 这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足如下的正交特性

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt &= 0 \quad (i \neq j) \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt &= K_i \end{aligned} \right\} \quad (6-55)$$

或

$$\begin{aligned} \langle g_i(t), g_j(t) \rangle &= 0 \quad (i \neq j) \\ \langle g_i(t), g_i(t) \rangle &= K_i \end{aligned} \quad (6-56)$$

则此函数集称为正交函数集。

令任一函数 $f(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内由这 n 个互相正交的函数线性组合所近似, 表示式为

$$\begin{aligned} f(t) &\approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_n g_n(t) \\ &= \sum_{r=1}^n c_r g_r(t) \end{aligned} \quad (6-57)$$

为满足最佳近似的要求, 可利用方均误差 $\bar{\epsilon}^2$ 最小的条件求系数 c_1, c_2, \dots, c_n 。方均误差表示式为

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)]^2 dt \quad (6-58)$$

对于第 i 个系数 c_i , 要使 $\bar{\epsilon}^2$ 最小应满足

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}^2}{\partial c_i} = 0$$

将 ϵ^2 表示式代入此式得到

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)]^2 dt \right\} = 0 \quad (6-59)$$

展开此被积函数，注意到由正交函数交叉相乘产生的所有各项都为零，而且，所有不包含 c_i 的各项对 c_i 求导也等于零。这样，就使式(6-59)中只剩下两项不为零，如下所示

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_{t_1}^{t_2} [-2c_i f(t)g_i(t) + c_i^2 g_i^2(t)] dt = 0 \quad (6-60)$$

变换微分与积分次序，得到

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_i(t)dt = c_i \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt \quad (6-61)$$

于是求出 c_i

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_i(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt} \\ &= \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t)g_i(t)dt \end{aligned} \quad (6-62)$$

这就是满足最小方均误差条件下，式(6-57)中各系数 c_i 的表示式。

当按式(6-62)选取 c_i 时，将 c_i 代回 ϵ^2 表示式可求得最佳近似条件下的方均误差

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt + \sum_{r=1}^n c_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)dt \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{r=1}^n c_r \int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t)dt \right] \end{aligned} \quad (6-63)$$

注意到 $\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)dt = K_r$, $\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t)dt = c_r K_r$ [利用式(6-62)取下标 $i=r$] 得到

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt + \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r - 2 \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r \right] \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r \right] \end{aligned} \quad (6-64)$$

利用式(6-64)可直接求得给定项数 n 条件下的最小方均误差。

如果对某一正交函数集 $K_r = 1$ ，也就是

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt = 1 \quad (6-65)$$

或

$$\langle g_i(t), g_i(t) \rangle = 1 \quad (6-66)$$

那么，称此函数集为“规格化正交函数集”（或“归一化正交函数集”）。

当把函数 $f(t)$ 近似为规格化正交函数线性组合时，求系数 c_i 与最小方均误差 $\bar{\epsilon}^2$ 的表示式简化为：

$$c_i = \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt \quad (6-67)$$

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{i=1}^n c_i^2 \right] \quad (6-68)$$

(四) 复变函数的正交特性

上述讨论，仅限于考虑实变量的实函数的正交特性。如果所讨论的函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是实变量 t 的复变函数，那么有关正交特性的描述如下：

若 $f_1(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内可以由 $c_{12}f_2(t)$ 来近似

$$f_1(t) \approx c_{12}f_2(t) \quad (6-69)$$

使方均误差幅度为最小的 c_{12} 之最佳值是

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t) dt} \quad (6-70)$$

式中 $f_2^*(t)$ 是 $f_2(t)$ 的复共轭函数。

两个复变函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内互相正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t) f_2(t) dt = 0 \quad (6-71)$$

或

$$\langle f_1(t), f_2(t) \rangle = 0 \quad (6-72)$$

如果在区间 (t_1, t_2) 内，复变函数集 $\{g_r(t)\}$ ($r = 1, 2, \dots, n$) 满足以下关系

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j^*(t) dt &= 0 \quad (i \neq j) \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_i^*(t) dt &= K_i \end{aligned} \right\} \quad (6-73)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \langle g_i(t), g_j(t) \rangle &= 0 \quad (i \neq j) \\ \langle g_i(t), g_i(t) \rangle &= K_i \end{aligned} \right\} \quad (6-74)$$

则此复变函数集为正交函数集。

6.4 完备正交函数集、帕塞瓦尔定理

由式(6-64)可以看到：如果增加 n ，用更多项的正交函数来近似表示 $f(t)$ ，那么，误差将变小。进一步考虑，当 n 趋于无限大时，级数取和 $\sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 K_r$ 能否收敛为 $\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt$ 呢？也就是说，方均误差 $\bar{\epsilon}^2$ 是否可以减小到零呢？为回答此问题，给出完备正交函数集的概念。

“完备正交函数集”有两种定义方式，分述如下。

如果用正交函数集 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 近似表示函数 $f(t)$

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^n c_r g_r(t) \quad (6-75)$$

方均误差为

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)]^2 dt \quad (6-76)$$

若令 n 趋于无限大， $\bar{\epsilon}^2$ 的极限等于零

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\epsilon}^2 = 0 \quad (6-77)$$

则此函数集称为完备正交函数集。

很明显， $\bar{\epsilon}^2 = 0$ 也就意味着 $f(t)$ 可以由无穷级数来表示

$$f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots + c_r g_r(t) + \dots \quad (6-78)$$

等式(6-78)右端的无穷级数收敛于 $f(t)$ 。也即，用级数表示 $f(t)$ 的式(6-78)不是近似式，而是等式。

另一种定义方法如下：

如果在正交函数集 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ 之外，不存在函数 $x(t)$

$$0 < \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt < \infty \quad (6-79)$$

满足等式

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_i(t) dt = 0 \quad (6-80)$$

(i 为任意正整数)

则此函数集称为完备正交函数集。

如果能找到一个函数 $x(t)$ ，使得式(6-80)成立——积分为零，即可说明， $x(t)$ 与函数集 $\{g_n(t)\}$ 的每个函数是正交的，因而它本身就应属于此函数集。显然，不包含 $x(t)$ ，此函数集就不完备。

注意到前节讨论矢量分析时曾指出，在三维空间的物理世界中，用三维正交矢量集可以无误差地表示任意矢量，而用二维的正交矢量集则不能。现在以完备正交的观点来说明此问题。在矢量分析中，对于三维空间，只有三维的正交矢量集是完备的正交矢量集，而二维的正交矢量集则不是完备正交矢量集。

从式(6-64)或式(6-68)可以看出，如果 $\epsilon^2 = 0$ ，应满足以下关系

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{i=1}^n c_i^2 K, \quad (6-81)$$

或

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{i=1}^n c_i^2 \quad (6-82)$$

式(6-82)与式(6-81)称为“帕塞瓦尔方程”。对于完备正交函数与规范化完备正交函数应满足帕塞瓦尔方程，这一约束规律称为帕塞瓦尔定理。

我们用帕塞瓦尔定理来说明完备正交的物理意义。帕塞瓦尔定理告诉我们，一信号(电压或电流)所含有的功率恒等于此信号在完备正交函数集中各分量功率之总和。与此情况相反，如果信号在正交函数集中各分量的功率总和不等于信号本身的功率，于是，式(6-81)的能量平衡关系就不成立，该正交函数集不完备。

从数学意义讲，帕塞瓦尔方程体现了矢量空间信号正交变换的范数不变性(内积不变性)。若将正交函数展开各系数写作矢量 $c = [c_1, c_2, \dots, c_r, \dots]$ ，式(6-82)可写作范数(内积)表达式：

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \langle c, c \rangle \quad (6-83)$$

对于某一函数，可以利用它在完备正交函数集中各分量的线性组合来表示，这种表示方法称为函数的广义傅里叶级数展开。三角函数集是应用最广的一种完备正交函数集，通常，可将一周期信号展开为各三角函数分量的叠加。然而，完备正交函数集有许多种，不仅限于三角函数集。同一被展开的函数可以用不同形式的正交函数来表示。在矢量分析中可以看到与此类似的现象，对于三维空间的同一矢量，可以按不同的三维坐标系统进行分解。对于同一信号，无论用何种形式的完备正交函数表示，都必须遵循帕塞瓦尔定理的规律，保持其能量不变或范数不变的物理与数学本质。

下面给出几种正交函数集的实例。

(一) 三角函数集

(二) 复指数函数集

在第三、五章已经详细研究了这两种正交函数集的性质及其应用，它们都是完备的。这两种函数集有着密切的联系，一种系数可由另一级数的系数求得。本章后面几节，还要进一步介绍它们的应用。

(三) 勒让德多项式

勒让德(Legendre)多项式的定义为

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (6-84)$$

由此写出：

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$P_3(t) = \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right)$$

...

等等。

一组勒让德多项式 $\{P_n(t)\}$ ($n=0,1,2,\dots$) 在区间 $(-1 < t < 1)$ 内构成一个完备正交函数集。

此外, 还有一些多项式也可构成正交函数集, 如雅可比(Jacobi)多项式, 切比雪夫(Chebyshev)多项式等等。

(四) 拉德马赫(Rademacher)函数集

假如被展开的函数 $f(t)$ 是矩形脉冲, 那么, 设想利用一组相互正交的矩形脉冲函数来表示 $f(t)$ 可能更方便。图 6-6 示出由一组矩形脉冲组成的正交函数集, 称为拉德马赫函数集, 图中只给出了前 4 个序号的函数波形。这组正交函数是不完备的。但是, 利用它可以表示其他的完备正交函数。

(五) 沃尔什(Walsh)函数集

沃尔什函数也是只取 $+1$ 和 -1 两个可能的数值, 波形也呈矩形脉冲。沃尔什函数集是完备的正交函数集。目前, 沃尔什函数集已有不少应用, 在信号传输与处理方面, 沃尔什变换是一种重要的正交变换方法。下一节将介绍沃尔什函数。

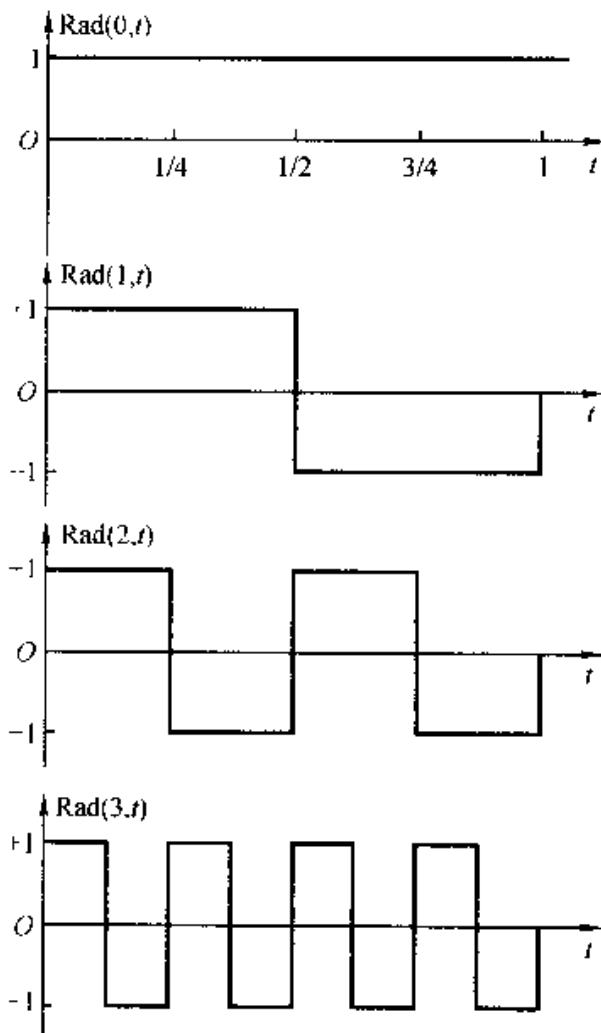


图 6-6 前 4 个拉德马赫函数波形

6.5 沃尔什函数

以正弦—余弦函数为基础的傅里叶变换方法是目前信号与系统分析中的主要工具，然而，在电信技术发展史上，非正弦信号的研究与应用也曾受到重视。19世纪传输电报信号就是利用矩形脉冲，由电键产生电流脉冲信号，用继电器放大和检测。当时，正弦—余弦函数以及傅里叶分析等数学基础虽已成熟，但是因为没有找到简便、实用的方法产生、传输和变换正弦信号，所以还不能将这些理论知识广泛应用于电信工程实际之中。从19世纪末到20世纪初，制作电感、电容以及滤波器、振荡器的问题逐步得到解决，于是在无线电技术中，正弦—余弦函数以及傅里叶变换方法才得到广泛应用和进一步发展。

20世纪60年代末至70年代初，数字技术与计算机科学迅速发展，利用开关元件产生和处理数字信号十分简便易行，不但体积小、重量轻，而且可靠性高。于是，人们对于使用非正弦信号的问题又重新重视起来，企图在这方面寻求新的工具和分析方法，以适应数字技术与计算机科学的新发展。

在各种非正弦函数的研究之中，沃尔什(Walsh)函数、哈尔(Haar)函数、拉德马赫(Rademacher)函数等等引起人们的注意。它们的主要特点是只取两个数值，这与数字逻辑电路只取两个状态的特点一致，同时，它们也具有一些与正弦—余弦函数类似的特性，如正交特性。

从历史发展来看，哈尔函数是1910年由匈牙利数学家哈尔(A. Haar)首先提出的，它是一组完备的正交函数。1923年美国数学家沃尔什(J. L. Walsh)提出沃尔什函数，这也是一组完备的正交函数集。几乎同时，约在1922年德国数学家拉德马赫(H. Rademacher)提出另一组只取两个数值的正交函数，称为拉德马赫函数，它是不完备的正交函数集，然而可以间接用来给出沃尔什函数的表示方法。以上几种非正弦的正交函数各有不同特点，相互之间有着密切联系，其中，以沃尔什函数应用较多。早在20世纪30年代左右，这几种函数的数学基础已经成熟，但是，它们的广泛应用直到70年代才得以实现。沃尔什函数被搁置了近50年，又得到了进一步的发展。

下面介绍沃尔什函数的定义、性质以及沃尔什级数的简单应用，在本书下册第九章将要介绍沃尔什变换。

(一) 定义

沃尔什函数可从不同的途径推导出来，每种方法都有它的特点，这里只介绍用三角函数定义的沃尔什函数表示方法，表达式如下

$$\text{Wal}(k, t) = \prod_{r=0}^{k-1} \text{sgn} [\cos(k, 2^r \pi t)] \quad (0 \leq t < 1) \quad (6-85)$$

式中, k —沃尔什函数编号, 为非负整数。

$$k \text{ 的二进制表示式为 } k = \sum_{r=0}^{p-1} k_r 2^r$$

k_r 为 0 或 1— k 的二进制表示式中各位二进数字的值。

p — k 的二进制表示式的位数

sgn 表示“符号函数”。

在式(6-85)中, 沃尔什函数 $\operatorname{Wal}(k, t)$ 定义于区间 $0 \leq t < 1$, 对于确定的沃尔什函数编号 k , $\operatorname{Wal}(k, t)$ 是变量 t 的函数。

按式(6-85)定义画出的前 8 个沃尔什函数波形如图 6-7 所示。

在定义区间 $0 \leq t < 1$ 之外, 将原波形周期性地重复, 就使定义延拓到整个 t 轴上。这样 $\operatorname{Wal}(k, t)$ 就是以 1 为周期的函数, 即

$$\operatorname{Wal}(k, t \pm 1) = \operatorname{Wal}(k, t) \quad (6-86)$$

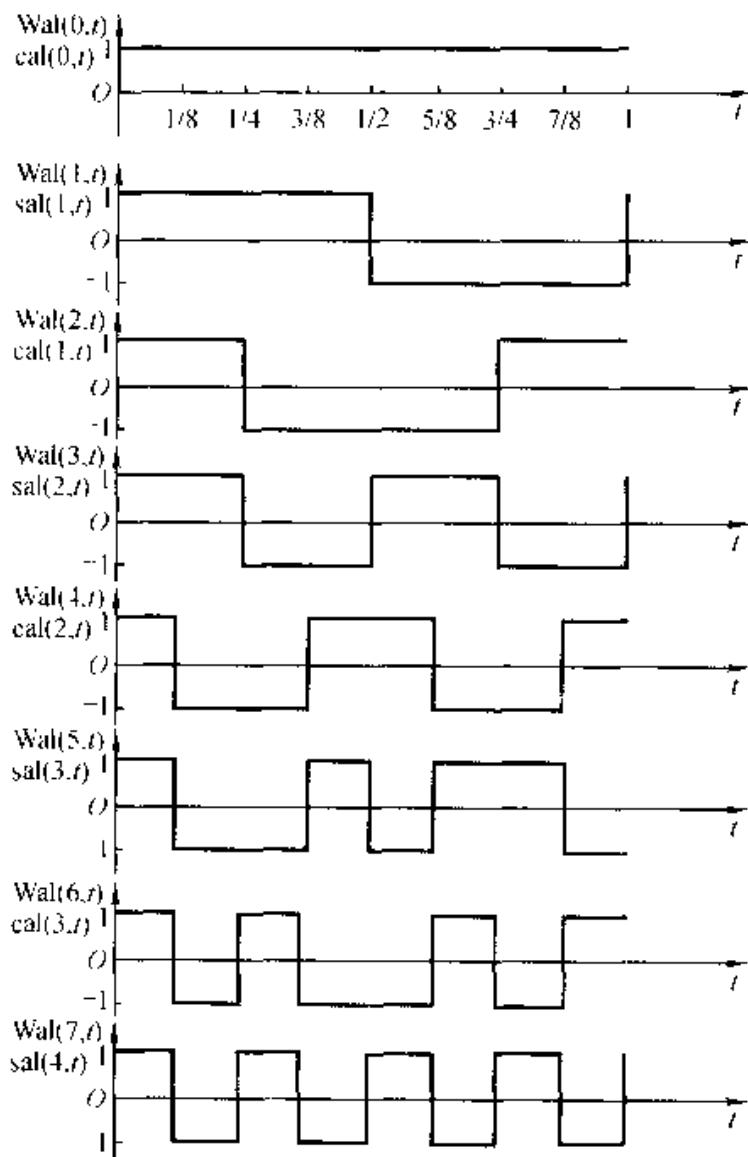


图 6-7 前 8 个沃尔什函数图像

例如, 为写出 $\text{Wal}(5, t)$ 的定义式, 首先需写出 $k = 5$ 时 k 的二进制表示式, 以便决定 k_r 。因为

$$5 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \quad (6-87)$$

所以知道:

$$k_2 = 1, k_1 = 0, k_0 = 1$$

而且可以看出, 5 的二进制表示式位数是 3 位, 所以 $p = 3$ 。

将以上数值代入式(6-85)得出

$$\begin{aligned} \text{Wal}(5, t) &= \prod_{r=0}^2 \text{sgn}[\cos(k_r 2^r \pi t)] \\ &= \text{sgn}[\cos(k_2 2^2 \pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(k_1 2^1 \pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(k_0 2^0 \pi t)] \\ &= \text{sgn}[\cos(4\pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(\pi t)] \end{aligned} \quad (6-88)$$

式(6-88)表明, 将 $\cos(4\pi t)$ 与 $\cos(\pi t)$ 分别取符号再相乘, 就可得到 $\text{Wal}(5, t)$ 。

下面, 以同样方法写出与图 6-7 对应的前 8 个沃尔什函数表示式:

$$\text{Wal}(0, t) = \text{sgn}[\cos(0t)] = 1$$

$$\text{Wal}(1, t) = \text{sgn}[\cos(\pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(0t)] = \text{sgn}[\cos(\pi t)]$$

$$\text{Wal}(2, t) = \text{sgn}[\cos(2\pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(0t)] = \text{sgn}[\cos(2\pi t)]$$

$$\text{Wal}(3, t) = \text{sgn}[\cos(2\pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(\pi t)] = \text{Wal}(2, t) \cdot \text{Wal}(1, t)$$

$$\text{Wal}(4, t) = \text{sgn}[\cos(4\pi t)]$$

$$\text{Wal}(5, t) = \text{sgn}[\cos(4\pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(\pi t)] = \text{Wal}(4, t) \cdot \text{Wal}(1, t)$$

$$\text{Wal}(6, t) = \text{sgn}[\cos(4\pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(2\pi t)] = \text{Wal}(4, t) \cdot \text{Wal}(2, t)$$

$$\text{Wal}(7, t) = \text{sgn}[\cos(4\pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(2\pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(\pi t)]$$

$$= \text{Wal}(4, t) \cdot \text{Wal}(2, t) \cdot \text{Wal}(1, t)$$

$$= \text{Wal}(6, t) \cdot \text{Wal}(1, t)$$

由式(6-85)还可看出, $\text{Wal}(k, t)$ 等于若干因子 $\text{sgn}[\cos(k_r 2^r \pi t)]$ 之连乘积。这些因子除 $\text{sgn}[\cos(\pi t)]$ 之外, 其他因子对于 $t = \frac{1}{2}$ 都是偶对称的。当 k 为奇数时, $k_0 = 1$, $\text{sgn}[\cos(\pi t)]$ 项存在; 而当 k 为偶数时, $k_0 = 0$, 连乘积中不包含 $\text{sgn}[\cos(\pi t)]$ 项。因此, 若 k 为奇数, 则 $\text{Wal}(k, t)$ 对于 $t = \frac{1}{2}$ 点是奇函数; 而 k 为偶数时, $\text{Wal}(k, t)$ 对于 $t = \frac{1}{2}$ 点是偶函数。

当按式(6-85)将 $\text{Wal}(k, t)$ 延拓到全部 t 轴时, 这种对称性对于 $t = 0$ 点依然成立。也即, 当 k 为奇数时, $\text{Wal}(k, t)$ 对原点是奇函数; 当 k 为偶数时, $\text{Wal}(k, t)$ 对原点是偶函数。这一性质类似于正弦函数和余弦函数。为便于和三角函数比较, 可将 $\text{Wal}(k, t)$ 再分为两类, 表示如下

$$\text{Wal}(k, t) = \begin{cases} \text{sal}(m, t) & (\text{当 } k = 2m - 1, m = 1, 2, 3, \dots) \\ \text{cal}(m, t) & (\text{当 } k = 2m, m = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

此处, sal 类似于 sin, 为奇函数; cal 则与 cos 类似, 是偶函数。在图 6-7 中也标注了这种名称。

对于三角函数, 我们曾用每秒内的周期数定义频率。对于沃尔什函数, 因为在时基 $0 \leq t < 1$ 之内不一定呈周期重复, 因此, 不能作简单的类比。但是, 可以用单位时间内波形过零的次数来进行比较。从三角函数来看, 如果将 $\sin(n2\pi t)$ 和 $\cos(n2\pi t)$ 在 $0 \leq t < 1$ 内的过零点次数除以 2, 即等于 n (也就是当基波频率等于 1 时的 n 次谐波频率)。同理, 对于沃尔什函数, 在单位时间内 (时基为 1), $\text{sal}(m, t)$ 和 $\text{cal}(m, t)$ 过零点数之半也等于 m 。这里, 将 m 称为“序率”(或“列率”, sequency)。序率的单位目前尚无统一规定, 可以记作 zps (zero per second, 每秒过零次数), 也有人建议以哈姆(Harm)为单位, 记作 Hm。

为便于与熟知的频域法相区别, 有时把根据沃尔什函数所诱导出来的分析方法称为“序域法”, 序域法的建立使系统分析中变换域方法的内容更加丰富。

需要指出, 上面讨论中把 $\text{Wal}(k, t)$ 当作时间变量的函数看待, 实际上, t 不一定代表时间, 这里仅仅是一个自变量的符号, 它也可作为其他变量。例如, 在处理图像信号时就可以用距离(位置)作变量。

(二) 性质

(1) 相乘关系

$$\text{Wal}(h, t) \cdot \text{Wal}(k, t) = \text{Wal}(h \oplus k, t) \quad (6-89)$$

式中 \oplus 为模 2 (不进位)加法运算, 例如

$$\begin{aligned} \text{Wal}(3, t) \cdot \text{Wal}(6, t) &= \text{Wal}(3 \oplus 6, t) = \text{Wal}(5, t) \\ (3)_{10\text{进}} &= (0 \ 1 \ 1)_{2\text{进}} \\ \oplus (6)_{10\text{进}} &= (1 \ 1 \ 0)_{2\text{进}} \\ \hline (5)_{10\text{进}} &= (1 \ 0 \ 1)_{2\text{进}} \end{aligned}$$

下面研究 h, k 为任意值时, 式(6-89)的正确性, 设:

$$\begin{aligned} h &= \sum_{r=0}^{e-1} h_r 2^r \\ k &= \sum_{r=0}^{f-1} k_r 2^r \end{aligned}$$

这里, h, k 都是二进制表示式, h_r 与 k_r 只取 0 或 1。根据沃尔什函数的定义式(6-85)可以看出: 当 h_r 与 k_r 相同时(都为 0 或都为 1), 式(6-89)左方对应的两个因子相乘等于 1

$$\text{sgn}[\cos(h_r 2^r \pi t)] \cdot \text{sgn}[\cos(k_r 2^r \pi t)] = 1$$

因此, 式(6-89)左方的乘积只由 $h_r \neq k_r$ 的符号函数乘积所决定, 这些乘积与 $\text{Wal}(h \oplus k, t)$ 的乘积因子一致, 所以式(6-89)的结论成立。

由此性质可得到以下推论:

$$[\text{Wal}(k, t)]^2 = 1 \quad (6-90)$$

$$\text{cal}(i, t) \cdot \text{cal}(j, t) = \text{cal}(i \oplus j, t) \quad (6-91)$$

$$\text{sal}(i, t) \cdot \text{sal}(j, t) = \text{cal}[(i-1) \oplus (j-1), t] \quad (6-92)$$

$$\text{sal}(i, t) \cdot \text{cal}(j, t) = \text{sal}\{[(i-1) \oplus j] + 1, t\} \quad (6-93)$$

证明过程请读者作练习(题 6-14)。

将上述结论与正弦—余弦函数的相乘定理作比较,可以看出有以下重要区别:正弦—余弦函数相乘给出正弦—余弦函数相加的表示式,从频谱变换的观点来看,经调制以后要得到两个新的频率分量;而沃尔什函数相乘则仅产生一个而不是两个沃尔什函数,也即只得到一个序率分量。由此可以推想,正弦—余弦调幅,得到双边带(上、下边带)信号;而沃尔什函数进行调幅则仅产生一个边带。

(2) 对称关系

$$\text{Wal}(2^q k, t) = \text{Wal}(k, 2^q t) \quad (6-94)$$

证明如下:

设

$$k = \sum_{r=0}^{p-1} k_r 2^r$$

则

$$\begin{aligned} 2^q k &= 2^q \sum_{r=0}^{p-1} k_r 2^r = \sum_{r=0}^{p-1} k_r 2^{r+q} \\ \text{Wal}(2^q k, t) &= \prod_{r=0}^{p-1} \text{sgn}[\cos(k_r 2^{r+q} \pi t)] \\ &= \prod_{r=0}^{p-1} \text{sgn}[\cos(k_r 2^r \pi (2^q t))] \\ &= \text{Wal}(k, 2^q t) \end{aligned} \quad (6-95)$$

此结果表明,有一沃尔什函数,当序数 k 增到 2^q 倍时,相当于序数保持不变,将时间变量增到 2^q 倍。

(3) 倒转关系

$\text{Wal}(k, t)$ 以 $t=0$ 为轴转动 180° ,也即用 $-t$ 代替 t ,则

$$\text{Wal}(k, -t) = (-1)^k \text{Wal}(k, t) \quad (6-96)$$

当 k 为偶数时, $\text{Wal}(k, -t) = \text{Wal}(k, t)$

当 k 为奇数时, $\text{Wal}(k, -t) = -\text{Wal}(k, t)$

显然,此性质可从沃尔什函数的奇、偶特性得出。

(4) 完备正交性

沃尔什函数系 $\{\text{Wal}(k, t), k = 0, 1, 2, \dots\}$ 在 $0 \leq t < 1$ 之内是一完备正交函数集,正交关系表示如下:

$$\int_0^T \text{Wal}(h, t) \cdot \text{Wal}(k, t) dt = \begin{cases} 0 & (\text{当 } h \neq k) \\ 1 & (\text{当 } h = k) \end{cases} \quad (6-97)$$

如果利用沃尔什函数集中各分量的线性组合来表示某一信号时，与傅里叶级数展开类似，也应满足帕塞瓦尔定理，下面讨论这一问题。

(三) 沃尔什级数及其应用

设 $x(t)$ 为周期性函数，周期为 T ，满足狄利克雷条件，于是可给出傅里叶级数展开式

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \quad (6-98)$$

式中：

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_1 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega_1 t) dt$$

与此相仿，应用沃尔什函数的正交展开式可以写成

$$x(t) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [c_m \text{cal}(m, t) + s_m \text{sal}(m, t)] \quad (6-99)$$

式中：

$$c_0 = \int_0^1 x(t) \text{cal}(0, t) dt = \int_0^1 x(t) dt$$

$$c_m = \int_0^1 x(t) \text{cal}(m, t) dt$$

$$s_m = \int_0^1 x(t) \text{sal}(m, t) dt$$

或合并为

$$a_k = \int_0^1 x(t) \text{Wal}(k, t) dt$$

式(6-99)称为沃尔什—傅里叶级数，简称为沃尔什级数。应用傅里叶级数，可将一个周期性信号分解为许多正弦—余弦信号之和。同理，应用沃尔什级数，可将一周期性信号分解为许多沃尔什函数之和。

必须指出，在应用式(6-98)展开傅里叶级数时， $x(t)$ 的周期为 T ；而应用式(6-99)展开沃尔什级数时， $x(t)$ 的周期应等于 1，如果它的周期不是 1 而是 T ，则应取 t/T 代换 t ，将时间归一化，即得相应的沃尔什—傅里叶级数展开式及系数公式。

沃尔什级数与傅里叶级数相似，都可以根据线性叠加原理进行复杂波形综合。一般而言，所取项数愈多，近似的程度愈好。

现在对函数 $x(t) = \sin(2\pi t)$ 进行沃尔什级数分解，将要看到用几个沃尔什函数逼近正弦波的情况。由式(6-99)可得

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(2\pi t) \\ &= c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [c_m \text{cal}(m, t) + s_m \text{sal}(m, t)] \end{aligned} \quad (6-100)$$

对此正弦函数容易求得 $c_0 = 0$, $c_m = 0$, 而 s_m 各项系数由以下积分式计算：

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^1 \sin(2\pi t) \text{sal}(1, t) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin(2\pi t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} = 0.64 \\ s_2 &= 0 \\ s_3 &= \int_0^1 \sin(2\pi t) \text{sal}(3, t) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{8}} \sin(2\pi t) dt - \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{3}{8}} \sin(2\pi t) dt \\ &\quad + \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{8}} \sin(2\pi t) dt \\ &\quad + \int_{\frac{5}{8}}^{\frac{7}{8}} \sin(2\pi t) dt - \int_{\frac{7}{8}}^1 \sin(2\pi t) dt \\ &= -0.27 \end{aligned}$$

用同样方法，依次得到：

$$\begin{aligned} s_4 &= 0 \\ s_5 &= -0.051 \\ s_6 &= 0 \\ s_7 &= -0.13 \\ &\dots \end{aligned}$$

将系数代回式(6-100)则

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(2\pi t) \\ &= 0.64 \text{sal}(1, t) - 0.27 \text{sal}(3, t) \\ &\quad - 0.051 \text{sal}(5, t) - 0.13 \text{sal}(7, t) + \dots \end{aligned}$$

将以上结果画出波形如图 6-8，可以看出，用序数 m 为 1, 3, 5, 7 的 sal 函数（也即序数 k 为 1, 3, 5, 9, 13 的 Wal 函数）综合所得的波形已相当接近正弦信号。如要得到更精确的近似，可再增加高序数的沃尔什函数分量。

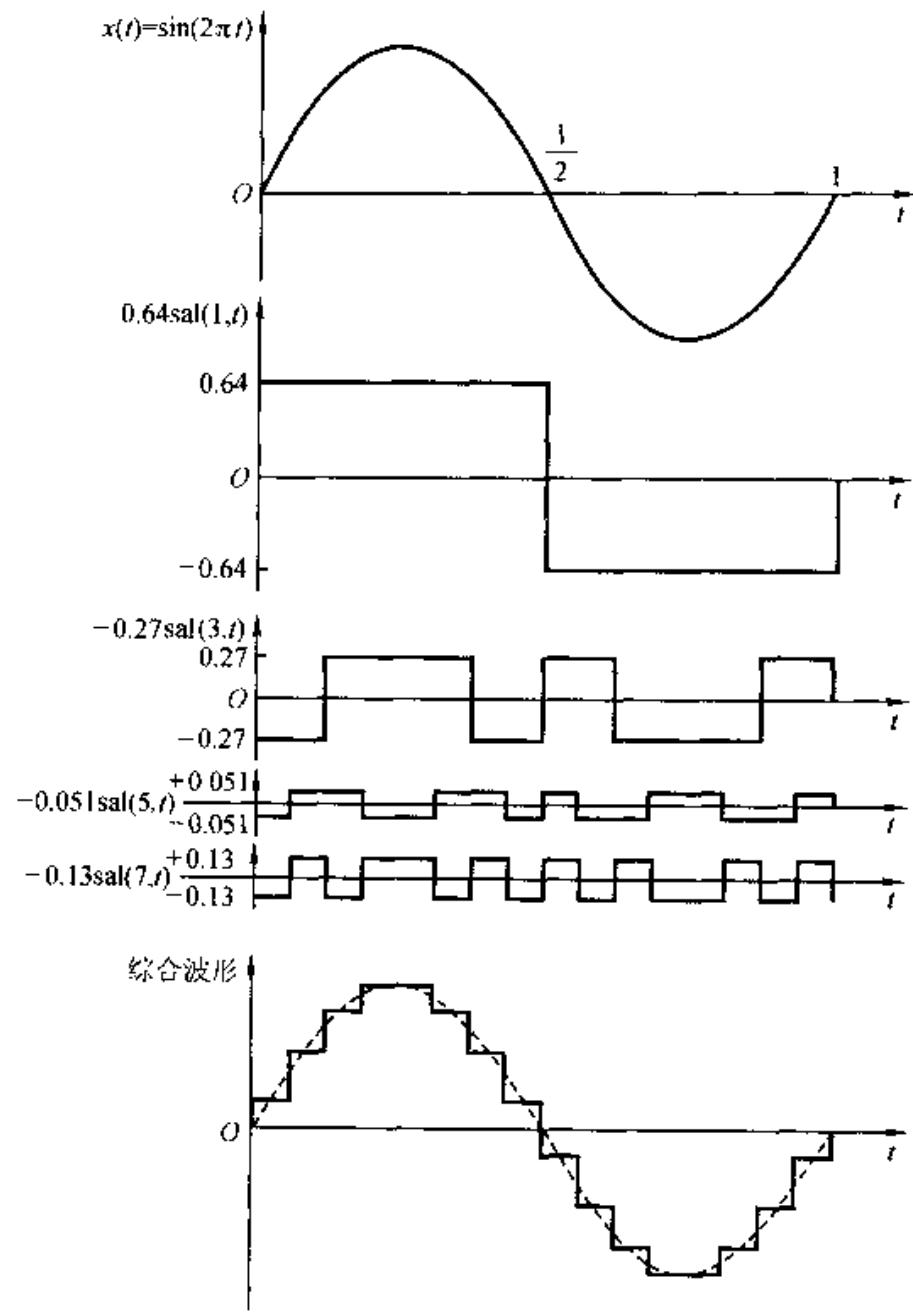


图 6-8 一正弦波的沃尔什函数逼近
当逼近项数趋于 ∞ 时，应满足帕塞瓦尔定理，此时有

$$\int_0^1 x^2(t) dt = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{Wal}(k, t) \right]^2 dt \quad (6-101)$$

$$\int_0^1 x^2(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad (6-102)$$

无论对沃尔什级数展开或傅里叶级数展开都满足帕塞瓦尔定理，保持能量守恒或范数不变性。

显然，同一函数，既可展开傅里叶级数，又可展开沃尔什级数。一般讲，原波形如果是平滑的连续波，用沃尔什函数逼近所需的分量数目要比用傅里叶

级数逼近的分量数目多，才能达到同样的近似效果。相反地，如果波形近于矩形波时，所需的沃尔什级数的项数可能要比傅里叶级数的项数少。

沃尔什级数的应用包括波形分析与波形综合两个方面。关于波形分析的一个实例是频谱分析仪，可以将波形分解为沃尔什级数，然后再对每个沃尔什分量计算其傅里叶系数，取全部计算之和即可得到待分解波形的各频谱分量。由于沃尔什函数的特点，便于集成化，这样做成的频谱仪体积小、重量轻，可以进一步降低成本。在波形综合方面，应用沃尔什函数可以合成正弦波或其他波形，电路不复杂，合成的正弦波谐波较小，而且具有确定的相位，可按需要给出正弦或余弦波形。采用这种方法的实例如电子乐器。此外，在 6.11 节还要看到利用沃尔什函数构成码分复用系统的应用实例。在下册第九章 9.8 节将讨论沃尔什变换。

6.6 相 关

通常相关的概念是从研究随机信号的统计特性而引入的。考虑本课程的研究范围，从确定性信号的相似性引出相关系数与相关函数的概念，为学习后续课程作好准备。

相关函数与卷积运算有着密切联系，我们将在对比中认识并正确运用这两种数学工具。

从数学本质来看，相关系数是信号矢量空间内积与范数特征的具体表现。从物理本质看，相关与信号能量特征有着密切联系，为便于研究，首先从信号能量特征给出能量信号与功率信号的定义。

(一) 能量信号与功率信号

信号 $f(t)$ 的归一化能量(或简称信号的能量)定义为信号电压(或电流)加到 1Ω 电阻上所消耗的能量，以 E 表示。这样

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (6-103)$$

若 $f(t)$ 为实函数，则

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (6-104)$$

通常把能量为有限值的信号称为能量有限信号或简称为能量信号。在实际应用中，一般的非周期信号属于能量有限信号。然而，对于像周期信号、阶跃函数、符号函数这类的信号，显然上式的积分是无穷大。在这种情况下，一般不再研究信号的能量而研究信号的平均功率。

信号的平均功率定义为信号电压(或电流)在 1Ω 电阻上所消耗的功率，

$f(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的平均功率表达式为

$$P = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)|^2 dt \quad (6-105)$$

在 6.2 节式(6-17)已经给出在整个时间轴 $[-\infty, \infty]$ 上的平均功率为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \right] \quad (6-106)$$

通常，所谓 $f(t)$ 的平均功率(或简称功率)即指此式。

如果信号的功率是有限值，则称这类信号是功率有限信号或简称为功率信号。图 6-9 举例示出这两类信号的波形，在图 6-9 (b) 中的 T 值表示从 $f(t)$ 截取的时间区间，当 $T \rightarrow \infty$ 时得到式(6-106)。有些信号既不属于能量有限信号也不属于功率有限信号，例如 $f(t) = e^t$ 。

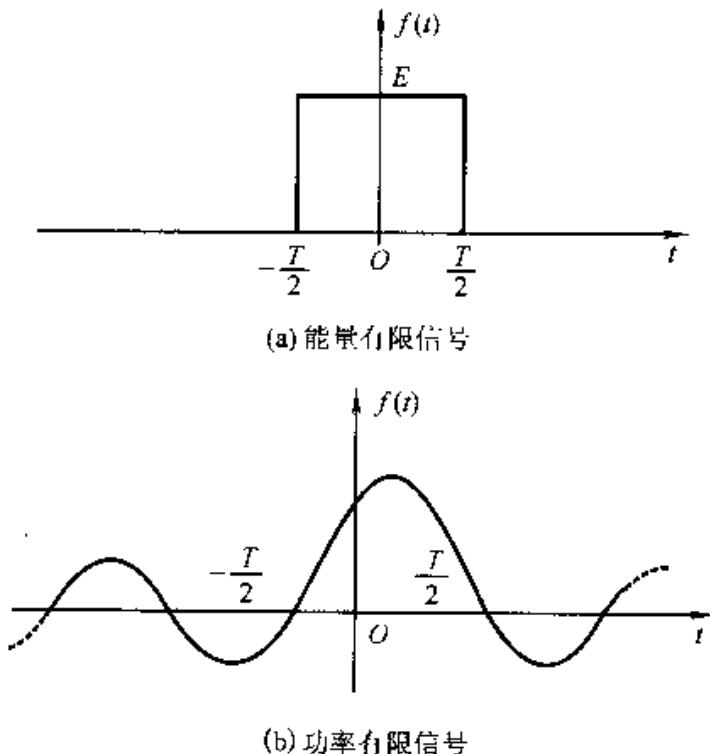


图 6-9 能量有限信号和功率有限信号

(二) 相关系数与相关函数

在信号分析问题中，有时要求比较两个信号波形是否相似，希望给出二者相似程度的统一描述。例如，对于图 6-10(a)中的两个波形，从直观上很难说明它们的相似程度，它们在任何瞬间的取值似乎都是彼此不相关的。图 6-10(b)则是一对完全相似的波形，它们或是形状完全一致，或是两变化规律相同而幅度呈某一倍数关系的波形。图 6-10(c)的两个波形极性相反，二者幅度呈负系数倍乘关系(如 -1)。对于这些不同组合的波形如何定量衡量它们之间的相关性，需要引出相关系数的概念。假定 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是能量有限的实信号，选择适当

的系数 c_{12} 使 $c_{12}f_2(t)$ 去逼近 $f_1(t)$, 利用方均误差(能量误差) $\bar{\epsilon}^2$ 来说明二者的相似程度, 这种方法与 6.3 节讨论正交函数时采用的方法类似。令

$$\bar{\epsilon}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) - c_{12}f_2(t)]^2 dt \quad (6-107)$$

选择 c_{12} 使误差 $\bar{\epsilon}^2$ 最小, 即要求

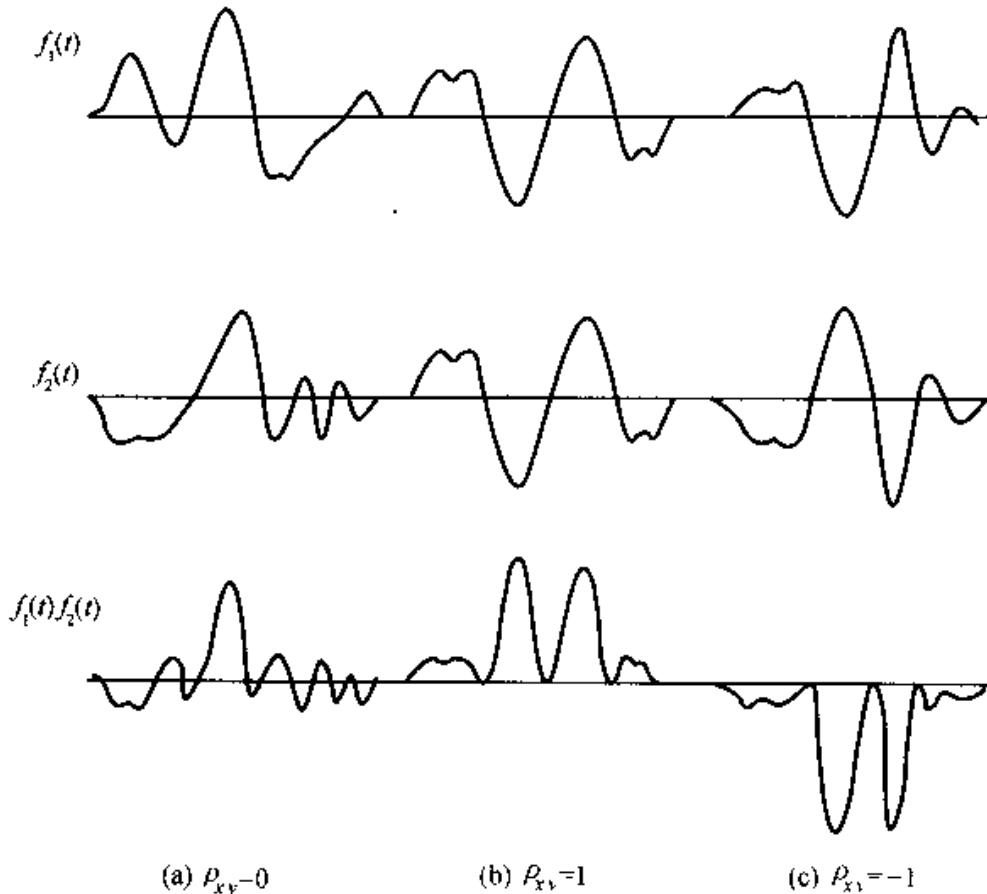


图 6-10 两个不相同、相同及相反波形

$$\frac{d\bar{\epsilon}^2}{dc_{12}} = 0$$

于是求得

$$c_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t)dt} \quad (6-108)$$

此时, 能量误差为

$$\bar{\epsilon}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_1(t) - f_2(t) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t)dt} \right]^2 dt \quad (6-109)$$

将被积函数展开并化简，得到

$$\epsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt - \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t) dt} \quad (6-110)$$

令相对能量误差为

$$\frac{\epsilon^2}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt} = 1 - \rho_{12}^2 \quad (6-111)$$

式中

$$\rho_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (6-112)$$

通常把 ρ_{12} 称为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的相关系数。不难发现借助柯西－施瓦茨不等式 (6-37) 可以求得

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt \right| \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6-113)$$

$$|\rho_{12}| \leq 1 \quad (6-114)$$

由式(6-112)、(6-113)可以看出，对于两个能量有限信号，相关系数 ρ_{12} 的大小由两信号的内积所决定。

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \frac{\langle f_1(t), f_2(t) \rangle}{[\langle f_1(t), f_1(t) \rangle \langle f_2(t), f_2(t) \rangle]^{1/2}} \\ &= \frac{\langle f_1(t), f_2(t) \rangle}{\|f_1(t)\|_2 \|f_2(t)\|_2} \end{aligned} \quad (6-115)$$

对于图 6-10 (b)、(c) 所示的两个相同或相反的波形，由于它们的形状完全一致，内积的绝对值最大， ρ_{12} 分别等于 +1 或 -1，此时 ϵ^2 等于零。一般情况下 ρ_{12} 取值在 -1 到 +1 之间。当 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 为正交函数时 $\rho_{12} = 0$ ，此时 ϵ^2 最大。相关系数 ρ_{12} 从信号之间能量误差的角度描述了它们的相关特性，利用矢量空间的内积运算给出了定量说明。

上面对两个固定信号波形的相关性进行了研究，然而经常会遇到更复杂的情况，信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 由于某种原因产生了时差，例如雷达站接收到两个不同距离目标的反射信号，这就需要专门研究两信号在时移过程中的相关性，为此需引出相关函数的概念。

如果 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 是能量有限信号且为实函数，它们之间的相关函数定义为

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt \quad (6-116)$$

$$\begin{aligned} R_{21}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (6-117)$$

显然, 相关函数 $R(\tau)$ 是两信号之间时差的函数, 注意式(6-116)和(6-117)中下标 1 与 2 的顺序不能互换, 一般情况下 $R_{12}(\tau) \neq R_{21}(\tau)$ 。不难证明

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau) \quad (6-118)$$

若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 是同一信号, 即 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, 此时相关函数无需加注下标, 以 $R(\tau)$ 表示, 称为自相关函数或自关函数

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t - \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) f(t) dt \end{aligned} \quad (6-119)$$

与自关函数相对照, 一般的两信号之间的相关函数也称为互相关函数或互关函数。显然, 对自关函数有如下性质

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad (6-120)$$

可见, 实函数的自相关函数是时移 τ 的偶函数。

若 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是功率有限信号, 式(6-116)与式(6-117)的定义失去意义, 此时相关函数的定义为:

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \right] \quad (6-121)$$

$$R_{21}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t) f_1(t - \tau) dt \right] \quad (6-122)$$

以及

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t - \tau) dt \right] \quad (6-123)$$

若 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为复函数且为能量有限信号, 相关函数的定义如下:

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t - \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2^*(t) f_1(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (6-124)$$

$$\begin{aligned} R_{21}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) f_1^*(t - \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(t) f_2(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (6-125)$$

以及

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t-\tau)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t+\tau)dt \end{aligned} \quad (6-126)$$

同时具有如下性质：

$$R_{12}(\tau) = R_{21}^*(-\tau) \quad (6-127)$$

$$R(\tau) = R^*(-\tau) \quad (6-128)$$

对于复函数的功率有限信号，可仿照式(6-121)至式(6-123)给出相关函数的定义：

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)f_2^*(t-\tau)dt \right] \quad (6-129)$$

$$R_{21}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t)f_1^*(t-\tau)dt \right] \quad (6-130)$$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)f^*(t-\tau)dt \right] \quad (6-131)$$

(三) 相关与卷积的比较

函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积表达式为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \quad (6-132)$$

为便于和相关函数表达式相比较，把式(6-116)中的变量 t 与 τ 互换，这样，实函数的互相关函数表达式可写作

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(\tau-t)d\tau \quad (6-133)$$

借助变量置换方法容易求得

$$R_{12}(t) = f_1(t) * f_2(-t) \quad (6-134)$$

可见，将 $f_2(t)$ 反褶(变量取负号)与 $f_1(t)$ 之卷积即得 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的相关函数 $R_{12}(t)$ 。

和卷积类似，也可利用图解方法说明相关函数的意义，在图 6-11 中同时画出了信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 求卷积和求相关函数的图解过程。这两种运算都包含移位、相乘和积分三个步骤，其差别在于卷积运算开始时需要对 $f_2(t)$ 进行反褶而相关运算不需要反褶。由图 6-11 和式(6-133)还可以看出，若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 为实偶函数时，则卷积与相关完全相同。

例 6-3 求周期余弦信号 $f(t) = E \cos(\omega_1 t)$ 的自相关函数。

解

对此功率有限信号，借助式(6-123)可求出

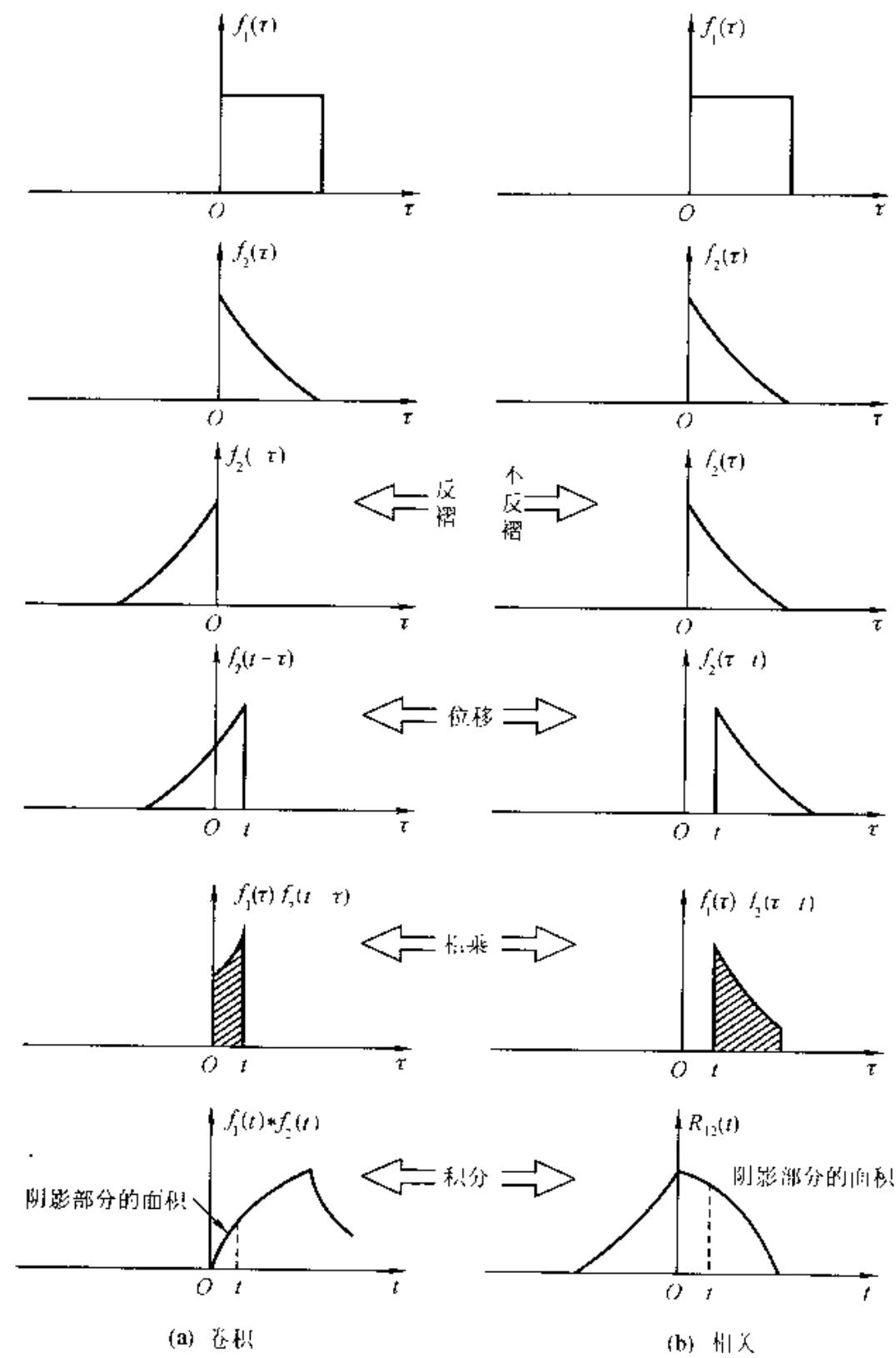


图 6-11 卷积和相关的比较

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t - \tau) dt \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_1 t) \cdot \cos[\omega_1(t - \tau)] dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_1 t) [\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_1 \tau) \\
 &\quad + \sin(\omega_1 t) \cdot \sin(\omega_1 \tau)] dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_1 \tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E^2}{T} \cos(\omega_1 \tau) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(\omega_1 t) dt \\
 &= \frac{E^2}{2} \cos(\omega_1 \tau)
 \end{aligned}$$

可见，周期信号的自相关函数仍为周期函数，而且周期相同，此外， $\tau = 0$ 点是自相关函数的一个最大值点，如图 6-12 所示。

(四) 相关定理

在第三章已经讨论了傅里叶变换的 12 个性质(见表 3-3)，这里，作为第 13 个性质介绍相关定理。

若已知：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f_1(t)] &= F_1(\omega) \\
 \mathcal{F}[f_2(t)] &= F_2(\omega)
 \end{aligned}$$

则

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega) \quad (6-135)$$

证明

由相关函数定义可知

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t - \tau) dt$$

取傅里叶变换

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[R_{12}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t - \tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2^*(t - \tau) e^{-j\omega t} d\tau \right] dt
 \end{aligned}$$

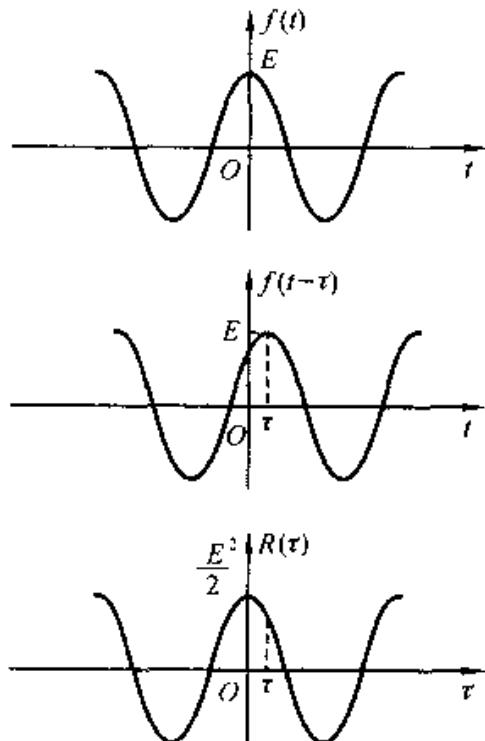


图 6-12 余弦信号的自相关函数

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) F_2^*(\omega) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega)$$

同理可得

$$\mathcal{F}[R_{21}(\tau)] = F_1^*(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (6-136)$$

若 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则自相关函数为

$$\mathcal{F}[R(\tau)] = |F(\omega)|^2 \quad (6-137)$$

可见, 两信号互相关函数的傅里叶变换等于其中第一个信号的变换与第二个信号变换取共轭二者之乘积, 这就是相关定理。若 $f_2(t)$ 是实偶函数, 由式 (6-135) 可知它的傅里叶变换 $F_2(\omega)$ 是实函数, 此时相关定理与卷积定理具有相同的结果。作为一种特定情况, 对于自相关函数, 它的傅里叶变换等于原信号幅度谱的平方。

6.7 能量谱和功率谱

在第 3.2、3.4 节已经研究了周期信号和非周期信号的频谱。频谱(幅度谱与相位谱)是在频域中描述信号特征的方法之一, 它反映了信号所含分量的幅度和相位随频率的分布情况。除此之外, 也可以用能量谱(简称能谱)或功率谱来描述信号。能谱和功率谱是表示信号的能量或功率密度在频域中随频率的变化情况, 它对研究信号的能量(或功率)的分布, 决定信号所占有的频带等问题有着重要的作用。特别对于随机信号, 无法用确定的时间函数表示, 也就不能用频谱来表示。在这种情况下, 往往用功率谱来描述它的频域特性。

(一) 能谱

因为能量有限信号 $f(t)$ 的自相关函数是

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t - \tau) dt$$

所以

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (6-138)$$

已知

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$$

由相关定理知:

$$\mathcal{F}[R(\tau)] = |F(\omega)|^2$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (6-139)$$

所以

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

这样得到下列关系

$$\begin{aligned} R(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(f)|^2 df \end{aligned} \quad (6-140)$$

若 $f(t)$ 为实函数, 式(6-140)可写成

$$\begin{aligned} R(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(f)|^2 df \end{aligned} \quad (6-141)$$

式(6-141)即为帕塞瓦尔方程, 它表明: 对能量有限信号, 时域内 $f^2(t)$ 曲线所覆盖的面积等于频域内 $|F_1(f)|^2$ 覆盖的面积, 且等于在原点的自相关函数值 $R(0)$ 。也就是说, 时域内信号的能量等于频域内信号的能量, 即信号经傅里叶变换, 其总能量保持不变, 这是符合能量守恒定律的。

因为信号能量 E 等于

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(f)|^2 df \quad (6-142)$$

所以 $|F(\omega)|^2$ 反映了信号的能量在频域的分布情况, 把 $|F(\omega)|^2$ 称为能量谱密度(简称能谱)。它表示单位带宽的能量, 通常把 $f(t)$ 的能谱记作 $\mathcal{E}(\omega)$ 。

这样

$$\mathcal{E}(\omega) = |F(\omega)|^2 \quad (6-143)$$

因为

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_1(f) df \quad (6-144)$$

所以, 信号的能量在数值上等于 $\mathcal{E}_1(f)$ 曲线下所覆盖的面积, $\mathcal{E}_1(f)$ 的单位是 J/H 。因为它是频率的实偶函数, 因此式(6-144)可写成

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \mathcal{E}_1(f) df$$

图 6-13 画出了矩形脉冲信号的能谱。

由式(6-139)、(6-143)知

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\omega) &= \mathcal{F}[R(\tau)] \\ R(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{E}(\omega)] \end{aligned} \quad (6-145)$$

所以, 能谱函数 $\mathcal{E}(\omega)$ 与自相关函

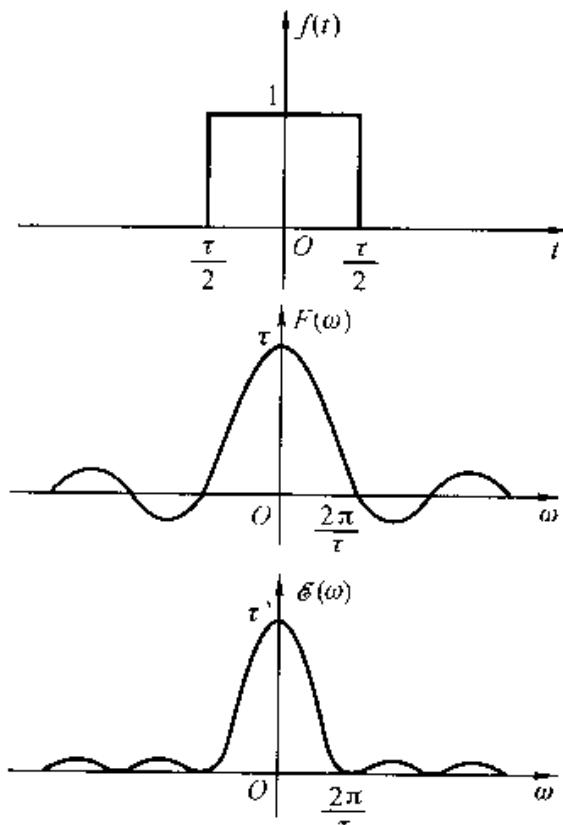


图 6-13 矩形脉冲信号的能谱

数 $R(\tau)$ 是一对傅里叶变换。

(二) 功率谱

若 $f(t)$ 是功率有限信号, 从 $f(t)$ 中截取 $|t| \leq \frac{T}{2}$ 的一段, 得到一个截尾函数 $f_T(t)$, 它可以表示为

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \left(|t| \leq \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{T}{2}\right) \end{cases} \quad (6-146)$$

如果 T 是有限值, 则 $f_T(t)$ 的能量也是有限的。如图 6-14 所示。

令 $\mathcal{F}[f_T(t)] = F_T(\omega)$

此时 $f_T(t)$ 的能量 E_T 可表示为

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega \quad (6-147)$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$$

所以 $f(t)$ 的平均功率为

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega \end{aligned} \quad (6-148)$$

当 T 增加时, $f_T(t)$ 的能量增加, $|F_T(\omega)|^2$ 也增加。当 $T \rightarrow \infty$ 时 $f_T(t) \rightarrow f(t)$, 此时量 $\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$ 可能趋近于一极限。假若此极限存在, 定义它是 $f(t)$ 的功率密度函数, 或简称功率谱, 记作 $\mathcal{P}(\omega)$ 。这样便得到 $f(t)$ 的功率谱为

$$\mathcal{P}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \quad (6-149)$$

将上式代入式(6-148), 则得到

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\omega) d\omega$$

由上式可见, 功率谱 $\mathcal{P}(\omega)$ 表示单位频带内信号功率随频率的变化情况, 也就是说它反映了信号功率在频域的分布状况。显然, 功率谱曲线 $\mathcal{P}(\omega)$ 所覆盖的面积在数值上等于信号的总功率。从式(6-149)还可以看出, $\mathcal{P}(\omega)$ 是频率 ω 的偶函数, 它保留了频谱 $F_T(\omega)$ 的幅度信息而丢掉了相位信息, 因此, 凡是具有同样幅度谱而相位谱不同的信号都有相同的功率谱。

下面讨论一个重要的关系——信号的功率谱函数与自相关函数的关系。

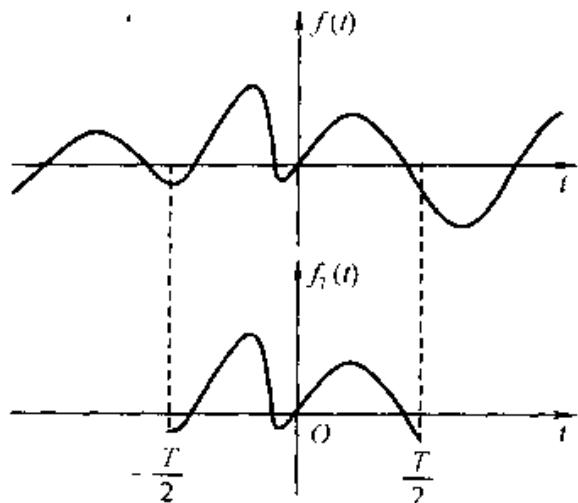


图 6-14 功率有限信号的截尾函数

注意到 $f(t)$ 的自相关函数是

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f^*(t - \tau) dt$$

利用相关定理，对式(6-139)两端乘以 $\frac{1}{T}$ 并取 $T \rightarrow \infty$ 之极限，可以得到

$$\left. \begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ \mathcal{P}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (6-150)$$

也可以简写成

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}(\omega) &= \mathcal{F}[R(\tau)] \\ R(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P}(\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (6-151)$$

可见功率有限信号的功率谱函数与自相关函数是一对傅里叶变换，式(6-150)称为维纳—欣钦(Wiener-Khintchine)关系。对 $R(\tau)$ ， $\mathcal{P}(\omega)$ 来说，有关傅里叶变换的性质在这里同样适用。在实际中，有些信号无法求它的傅里叶变换，但可用求自相关函数的方法，通过式(6-150)达到求功率谱的目的。

例 6-4 已知周期性余弦信号

$f(t) = E \cos(\omega_1 t)$ ，且由例 6-3 可知

$f(t)$ 的自相关函数为 $R(\tau) = \frac{E^2}{2} \cos(\omega_1 \tau)$ ，求 $f(t)$ 的功率谱。

解

由维纳—欣钦关系可求出功率谱为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{E^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] \end{aligned}$$

波形如图 6-15 所示。

为了进一步理解功率谱与自相关函数的概念，给出一种随机信号的例子。在各类噪声信号中白噪声是一种典型信号。白噪声对于所有的频率其功率谱密度都为常数，这一特征与白色光谱包含了所有可见光频率的概念类似，因而取名时借用了“白”字。按此定义可写出白噪声的功率谱密度表达式

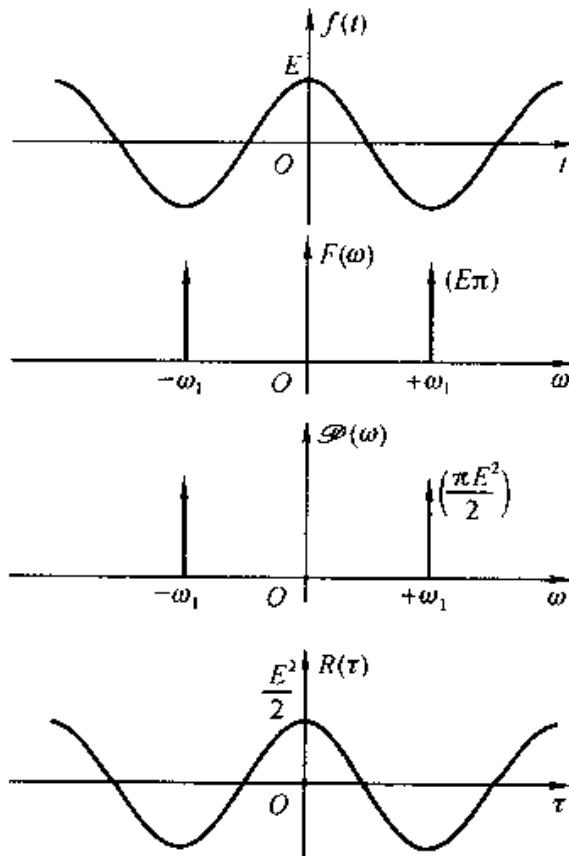


图 6-15 周期余弦信号的功率谱和自相关函数

$$\mathcal{P}_N(\omega) = N, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (6-152)$$

利用维纳-欣钦关系式，求 $\mathcal{P}_N(\omega)$ 的傅里叶逆变换可得自相关函数

$$R_N(\tau) = N\delta(\tau) \quad (6-153)$$

可见，白噪声信号的自相关函数为冲激信号，这表明白噪声信号在各时刻的取值杂乱无章，没有任何相关性，因而对于 $\tau \neq 0$ 的所有时刻 $R_N(\tau)$ 都取零值，仅在 $\tau = 0$ 时为强度等于 N 的冲激。

白噪声是一种理想化的模型，实际情况不可能存在。若将式(6-152)的谱密度从频率为 $-\infty$ 到 ∞ 取积分可得到无限大的功率，这在物理上是不能接受的。然而，只要噪声信号保持常数功率谱的带宽远大于线性系统的通频带，那么即可将此噪声视为白噪声，在下一节例 6-5 中将看到计算实例。实际上，由电阻中电子的随机热运动而产生的电阻热噪声其特征与白噪声的理想化模型相当接近，因而，通常认为电阻的热噪声即为白噪声信号。

6.8 信号通过线性系统的自相关函数、能量谱和功率谱分析

到目前为止，已经从时域、频域、 s 域就激励、响应与系统三者之间的联系进行了多方面的研究。在此基础之上，考察激励与响应能量特性的对应关系，也即从激励和响应的自相关函数、能量谱、功率谱所发生的变化来研究线性系统所表现的传输特性。

因为有：

$$r(t) = h(t) * e(t)$$

$$R(j\omega) = H(j\omega) \cdot E(j\omega)$$

若激励函数 $e(t)$ 为能量有限信号，并假定 $e(t)$ 与 $r(t)$ 的能谱函数分别为 $\mathcal{E}_e(\omega)$ 和 $\mathcal{E}_r(\omega)$ ，由式(6-143)知

$$\mathcal{E}_e(\omega) = |E(j\omega)|^2 \quad (6-154)$$

$$\mathcal{E}_r(\omega) = |R(j\omega)|^2 \quad (6-155)$$

显然

$$|R(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 |E(j\omega)|^2 \quad (6-156)$$

所以

$$\mathcal{E}_r(\omega) = |H(j\omega)|^2 \mathcal{E}_e(\omega) \quad (6-157)$$

这表明响应的能谱等于激励的能谱与 $|H(j\omega)|^2$ 的乘积。同样，对功率有限激励函数 $e(t)$ ，响应函数为 $r(t)$ ，按照前节的方法，将 $e(t)$ ， $r(t)$ 截取 $|t| \leq \frac{T}{2}$ 一段，分别以 $e_T(t)$ ， $r_T(t)$ 表示，其傅里叶变换为 $E_T(j\omega)$ 和 $R_T(j\omega)$ ，取 $T \rightarrow \infty$

之极限可给出下式

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_T(j\omega) = H(j\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} E_T(j\omega) \quad (6-158)$$

根据功率谱的定义, 激励信号的功率谱 $\mathcal{P}_e(\omega)$ 和响应的功率谱 $\mathcal{P}_r(\omega)$ 分别为:

$$\mathcal{P}_e(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |E_T(j\omega)|^2 \quad (6-159)$$

$$\mathcal{P}_r(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |R_T(j\omega)|^2 \quad (6-160)$$

由式(6-158)导出

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |R_T(j\omega)|^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |H(j\omega)|^2 \cdot |E_T(j\omega)|^2 \\ &= |H(j\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |E_T(j\omega)|^2 \end{aligned} \quad (6-161)$$

也即

$$\mathcal{P}_r(\omega) = |H(j\omega)|^2 \mathcal{P}_e(\omega) \quad (6-162)$$

可见响应的功率谱等于激励的功率谱与 $|H(j\omega)|^2$ 的乘积。

式(6-157)、(6-162)表明了线性系统的激励与响应能量谱或功率谱之间的关系。下面进一步研究系统特性对于激励信号自相关函数产生怎样的影响。令激励和响应的自相关函数分别为 $R_e(\tau)$ 和 $R_r(\tau)$ 。把式(6-93)、(6-94)改写为:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r(\omega) &= H(j\omega) H^*(j\omega) \mathcal{E}_e(\omega) \\ \mathcal{P}_r(\omega) &= H(j\omega) H^*(j\omega) \mathcal{P}_e(\omega) \end{aligned} \quad (6-163)$$

此外, 由 $H(j\omega)$ 定义可知:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[h(t)] &= H(j\omega) \\ \mathcal{F}[h^*(-t)] &= H^*(j\omega) \end{aligned}$$

考虑到能量谱或功率谱的傅里叶逆变换

为自相关函数, 因此根据卷积定理, 式(6-163)可以写成

$$R_r(\tau) = R_e(\tau) * h(t) * h^*(-t) \quad (6-164)$$

其中 $h(t) * h^*(-t) = R_h(\tau)$ 为系统冲激响应的自相关函数(这里, 将变量 t 改以 τ 表示), 因此得到

$$R_r(\tau) = R_e(\tau) * R_h(\tau) \quad (6-165)$$

将以上有关结论全部示意于图 6-16。

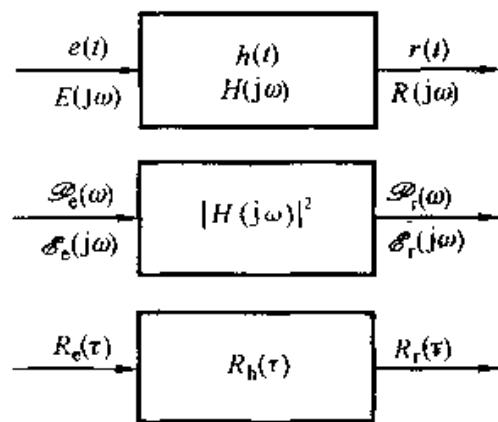


图 6-16 激励与响应的各种对应关系

例6-5 功率谱密度为 N 的白噪声通过图6-17所示RC低通网络，求输出的功率谱 $\mathcal{P}_r(\omega)$ 及自相关函数 $R_r(\tau)$ ，并求输出的平均功率 P_r 。

解 已知激励 $e(t)$ 的功率谱为

$$\mathcal{P}_e(\omega) = N$$

因为系统函数 $H(j\omega)$ 为

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

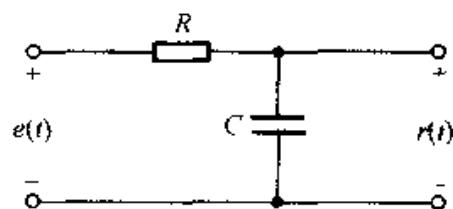


图 6-17 RC 低通网络

冲激响应

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] \\ &= \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC} t} u(t) \end{aligned}$$

所以，响应 $r(t)$ 的功率谱为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r(\omega) &= \mathcal{P}_e(\omega) |H(j\omega)|^2 \\ &= N \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \end{aligned}$$

如图 6-18 所示。

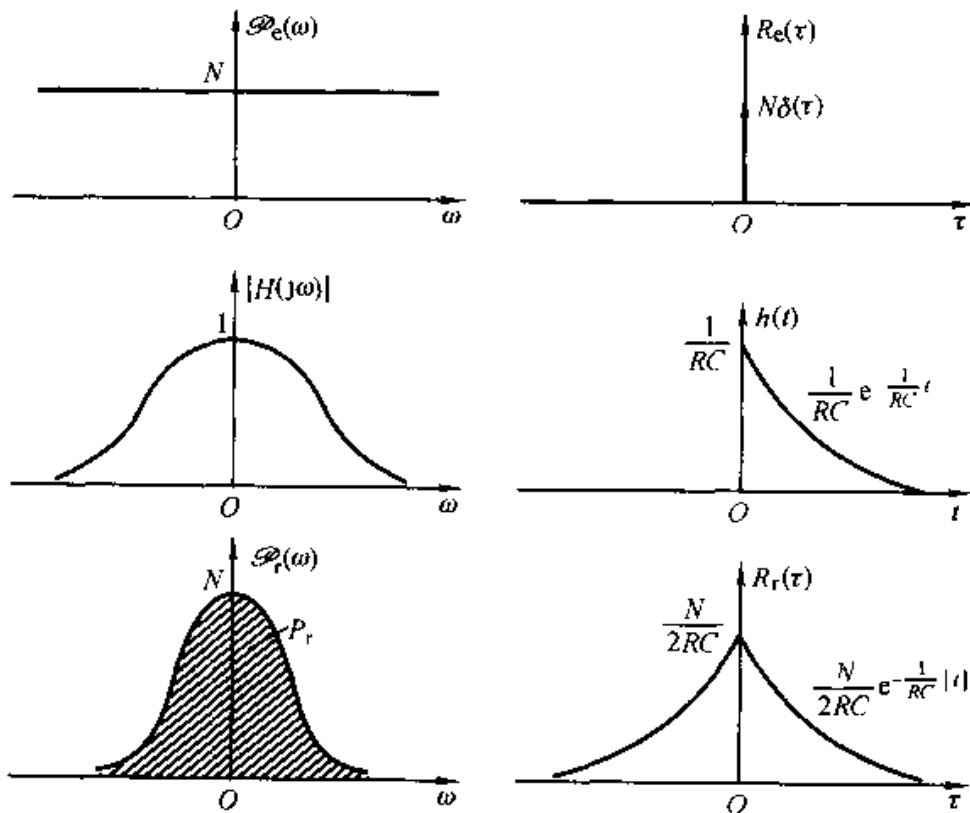


图 6-18 白噪声通过 RC 电路的功率谱和自相关函数

现在来求自相关函数。因为

$$R_e(\tau) = \mathcal{F}[\mathcal{P}_e(\omega)] = \mathcal{F}[N] = N\delta(\tau)$$

由式(6-164)知响应 $r(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned}
 R_r(\tau) &= R_e(\tau) * h(t) * h^*(-t) \\
 &= N\delta(\tau) * \frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}u(t) * \frac{1}{RC}e^{\frac{1}{RC}t}u(-t) \\
 &= \frac{N}{(RC)^2}e^{-\frac{1}{RC}|t|}u(t) * e^{\frac{1}{RC}|t|}u(-t) \\
 &= \frac{N}{2RC}e^{-\frac{1}{RC}|t|}
 \end{aligned}$$

或者根据 $\mathcal{P}_r(\omega)$ 的逆变换求 $R_r(\tau)$, 即

$$R_r(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P}_r(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1 + (\omega RC)^2}\right]$$

考虑到

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha|t|}] = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

同样可以求得

$$R_r(\tau) = \frac{N}{2RC}e^{-\frac{1}{RC}|t|}$$

这些结果也示于图 6-18。

最后求输出的平均功率 P_r ,

$$\begin{aligned}
 P_r &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_r(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{P}_r(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{N}{1 + (\omega RC)^2} d\omega \\
 &= \frac{N}{\pi RC} \arctan(R\omega C) \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{N}{2RC}
 \end{aligned}$$

例6-6 已知激励函数的功率谱为

$$\mathcal{P}_e(\omega) = \pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

它作用于 $R = 1 \Omega$, $C = 1 F$ 的 RC 低通网络(仍如图 6-17)。求输出的功率谱、平均功率。

解

因为

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

所以

$$\mathcal{P}_r(\omega) = \mathcal{P}_e(\omega) |H(j\omega)|^2$$

$$= \frac{\pi}{1 + \omega^2} [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

可参看图 6-19。

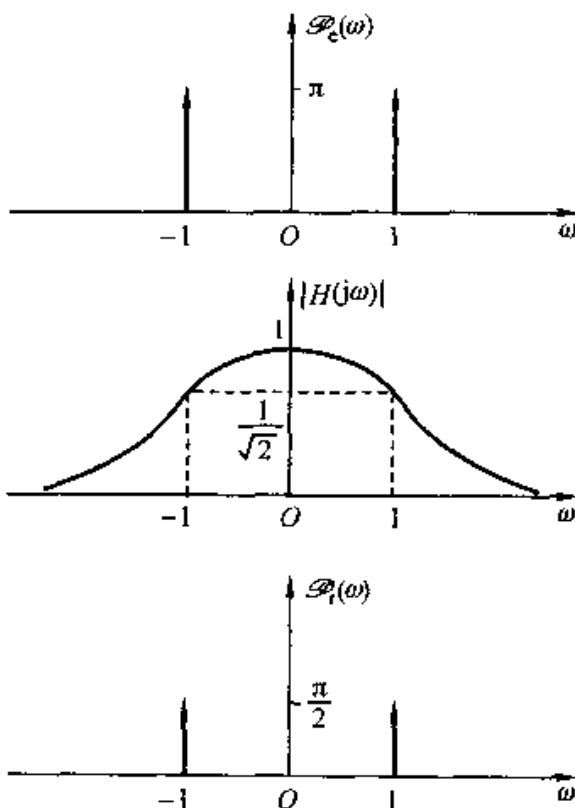


图 6-19 例 6-6 的功率谱

输出平均功率 P_r 为

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty P_r(\omega) d\omega \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1 + \omega^2} [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)] d\omega = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

至此已经从几个方面建立了线性系统激励与响应之间的关系式，这包括时域或频域、电压、电流或能量、功率。为便于对比和查用，把这些公式汇总列于表 6-1。

表 6-1 线性系统激励与响应之间的关系

函数形式	系 统 特 性	激 励 与 响 应 的 关 系
时间函数 电压或电流	$h(t)$	$r(t) = h(t) * e(t)$
频谱密度	$H(j\omega)$	$R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$
功率谱密度 $= H(j\omega)H^*(j\omega)$	$\mathcal{P}_e(\omega) = H(j\omega) ^2 \mathcal{P}_e(\omega)$	$\mathcal{P}_r(\omega) = H(j\omega) ^2 \mathcal{P}_r(\omega)$
自相关函数	$R_h(\tau) = h(\tau)h^*(-\tau)$	$R_r(\tau) = R_h(\tau) * R_e(\tau)$

6.9 匹配滤波器

在数字通信中，消息依靠一些标准符号的有无来传送，例如，二进制的编码信号，其中一个符号是某种标准的脉冲波形 $s(t)$ ，表示“1”码，另一个符号则由脉冲的空位(没有信号)来表示“0”码。典型的 $s(t)$ 波形如矩形脉冲、升余弦脉冲等等。在这个问题中，检测波形的完整复元并不重要，波形是早已知道的，我们感兴趣的是判别脉冲 $s(t)$ 的有无。设 $s(t)$ 的持续时间和空位的持续时间均为 T ，那么，接收机必须考察每个 T 内输入信号的内容，判别脉冲有无。在雷达系统中也有类似的情况，对于回波信号，我们关心它出现的时刻，而无需恢复它的全部波形。我们需要设计一种“最佳检测器”，它协助增强信号抵抗噪声的能力，保证在判别信号出现时具有最低的错误概率。

为此需要寻求这样一种滤波器，它使有用信号 $s(t)$ 增强，同时对噪声 $n(t)$ 具有抑制作用。当信号与噪声同时进入滤波器时，它使信号成分在某一瞬间出现峰值，而噪声成分受到抑制。如果在某段时刻内信号 $s(t)$ 存在，那么此滤波器的输出在相应的瞬间呈现强大的峰值，如果没有信号 $s(t)$ ，那么将不会出现峰值。这种装置使我们能以最低的错误概率判决脉冲 $s(t)$ 的有无，能完成此功能的滤波器称之为“匹配滤波器”。所谓匹配是指滤波器的性能与信号 $s(t)$ 的特性取得某种一致，使滤波器输出端的信号瞬时功率与噪声平均功率之比值为最大。在实际问题中，根据信号 $s(t)$ 的要求设计与其对应的匹配滤波器。此滤波器的作用在于增强信号分量而同时减弱噪声分量，以满足在某一瞬间使输出端信号幅度与噪声幅度之比增至最大。

考虑到直接描述噪声信号波形的困难，我们借助功率谱的概念，以信号幅度平方与噪声功率进行比较，设计此滤波器使信号平方与噪声功率之比达到最大值，由此求出建立匹配滤波器的约束条件。

设滤波器的输入信号为 $s(t) + n(t)$ ，其中 $s(t)$ 是有用信号脉冲， $n(t)$ 是信道噪声；滤波器的输出信号为 $s_o(t) + n_o(t)$ ，其中 $s_o(t)$ 是有用信号分量， $n_o(t)$ 是噪声分量，如图 6-20 所示。设滤波器的转移函数为 $H(j\omega)$ 。希望在某一时刻 $t = t_m$ (进行判决瞬间) 使信噪比为最大，取 $s_o^2(t_m)$ 与 $n_o^2(t_m)$ 之比以 ρ 表示

$$\rho = \frac{s_o^2(t_m)}{n_o^2(t_m)} \quad (6-166)$$

若 $s(t)$ 的傅里叶变换为 $S(j\omega) = \mathcal{F}[s(t)]$ ，则 $s_o(t)$ 可由下式给出

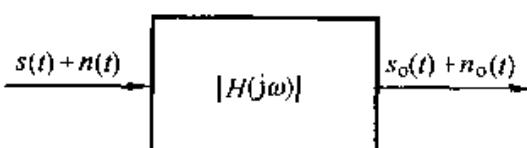


图 6-20 信号与噪声通过滤波器

$$\begin{aligned}s_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}[S(j\omega)H(j\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega\end{aligned}\quad (6-167)$$

在 t_m 时刻

$$s_o(t_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega t_m} d\omega \quad (6-168)$$

若 $n(t)$ 为白噪声, 其功率谱为常数 N , 输出噪声 $n_o(t)$ 的功率谱为 $|H(j\omega)|^2 \cdot N$, 由此求出 $\overline{n_o^2(t)}$

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (6-169)$$

因无法确定 $n_o^2(t)$, 以 $\overline{n_o^2(t)}$ 取代 $n_o^2(t)$, 得到

$$\overline{n_o^2(t_m)} = \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (6-170)$$

将式(6-168)与式(6-170)代入式(6-166)求出

$$\rho = \frac{s_o^2(t_m)}{\overline{n_o^2(t_m)}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega t_m} d\omega \right|^2}{2\pi N \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega} \quad (6-171)$$

注意到式中 $s_o(t)$ 是实数, 所以 $s_o^2(t) = |s_o(t)|^2$ 。

这里, 需要用到本章 6.2 节给出的重要公式——柯西-施瓦茨不等式(6-37), 借助此式可以给出

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega t_m} d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \quad (6-172)$$

式中的等号仅在满足以下条件时成立

$$H(j\omega) = k[S(j\omega)e^{j\omega t_m}]^* \quad (6-173)$$

式中 k 为任意常数。将式(6-172)代入式(6-171)得到

$$\rho = \frac{s_o^2(t_m)}{\overline{n_o^2(t_m)}} \leq \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \quad (6-174)$$

滤波器输出端信噪比的最大可能值为

$$\rho_{\max} = \frac{s_o^2(t_m)}{\overline{n_o^2(t_m)}} \Big|_{\max} = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \quad (6-175)$$

为取得此最大值, $H(j\omega)$ 与 $S(j\omega)$ 之间需满足不等式(6-172)中等号成立的条件, 也即式(6-173)的约束关系, 将此式改写为

$$H(j\omega) = kS(-j\omega)e^{-j\omega t_m} \quad (6-176)$$

至此求出匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)]$$

$$= \mathcal{F}^{-1}[kS(-j\omega)e^{-j\omega t_m}] \quad (6-177)$$

注意到 $S(-j\omega)$ 的傅里叶逆变换是 $s(-t)$, 而 $e^{-j\omega t_m}$ 项表示 t_m 的时移, 因此

$$h(t) = ks(t_m - t) \quad (6-178)$$

前文已述, 有用信号 $s(t)$ 的持续时间是受限的。设 $s(t)$ 在区间 $(0, T)$ 之外为零, 如图 6-21(a) 所示。 $s(t_m - t)$ 可由 $s(t)$ 沿垂直轴反褶并向右平移 t_m 得到, 图 6-21(b)(c)(d)(e) 分别示出 $s(-t)$ 以及 $s(t_m - t)$ 的三种情况, 即

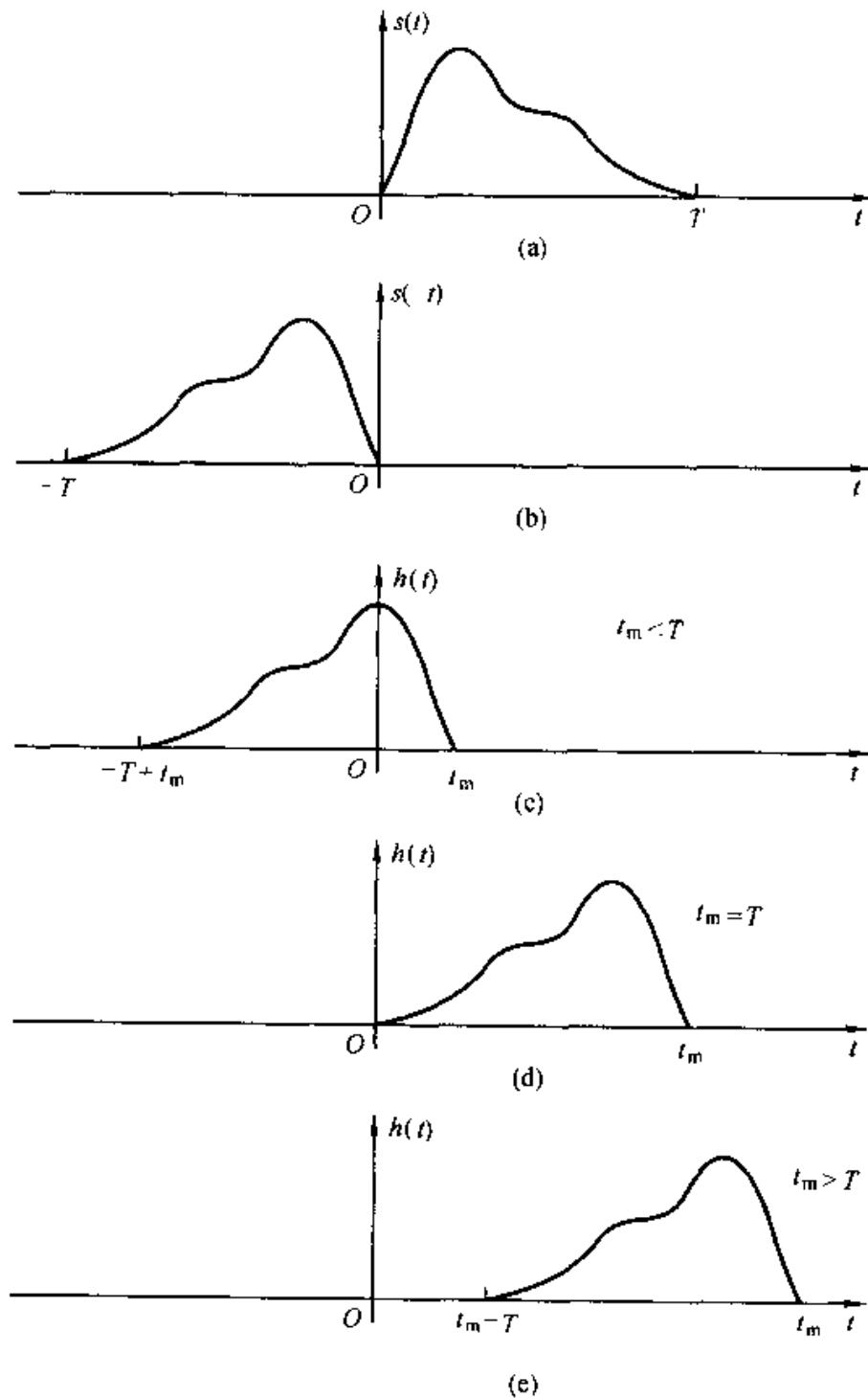


图 6-21 匹配滤波器信号波形

$t_m < T$, $t_m = T$ 和 $t_m > T$ 。注意到图 6-21 (c) 的波形具有非因果特性, 为使匹配滤波器可以物理实现, 应选取图 6-21 (d) 或 (e) 的 $h(t)$ 波形。我们希望观察时间 t_m 尽可能小, 以使判决迅速, 因而取 $t_m = T$ 比 $t_m > T$ 更合适。按此要求改写式(6-178)同时取系数 $k=1$

$$h(t) = s(T-t) \quad (6-179)$$

至此得出结论: 匹配滤波器的冲激响应是所需信号 $s(t)$ 对垂直轴镜像并向右平移 T 。这样的线性系统称为匹配滤波器或匹配接收机。从改善系统输出端信噪比的角度考虑, 匹配滤波器是线性系统的最佳滤波器。所谓“最佳”仅限于线性系统。

当输入端只加入有用信号 $s(t)$ 时, 匹配滤波器输出信号可由下式求出

$$\begin{aligned} s_o(t) &= s(t) * h(t) \\ &= s(t) * s(T-t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s(T-\tau)d\tau \\ &= R_{ss}(t-T) \end{aligned} \quad (6-180)$$

式中 $R_{ss}(t)$ 为 $s(t)$ 的自相关函数。可见, 匹配滤波器的功能相当于对 $s(t)$ 进行自相关运算, 在 $t=T$ 时刻取得自相关函数的峰值, 而噪声通过滤波器所完成的互相关运算相对于有用信号受到明显抑制。由于上述工作机理, 匹配滤波器也称为相关接收机。

将式(6-176)代入式(6-168)可求得在 $t=t_m=T$ 时刻输出信号的峰值 (取系数 $k=1$)

$$s_o(t_m) = s_o(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \quad (6-181)$$

也可利用式(6-180)求得

$$s_o(T) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \quad (6-182)$$

这一结果与帕塞瓦尔方程完全一致, 也即式(6-181)和式(6-182)都等于信号 $s(t)$ 的能量 E

$$\begin{aligned} s_o(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = E \end{aligned} \quad (6-183)$$

这表明, 匹配滤波器输出信号的最大值出现在 $t=T$ 时刻, 其大小等于信号 $s(t)$ 的能量 E 。最大值与 $s(t)$ 的波形形状无关, 仅与其能量有关。

例6-7 在测距系统中, 发送信号 $s(t)$, 以匹配滤波器接收回波信号, 利用滤波器输出信号峰值出现的时间折算目标距离。如果有两种可供选择的 $s(t)$ 信号, 分别如图 6-22 (a) 的 $s_1(t)$ 和 (b) 的 $s_2(t)$ 。求:

- (1) 分别画出 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 自相关函数波形 $R_{11}(t)$ 和 $R_{22}(t)$ 。
 (2) 为改善测距精度, 你认为应选用 $s_1(t)$ 或 $s_2(t)$ 两种脉冲的哪一种信号?

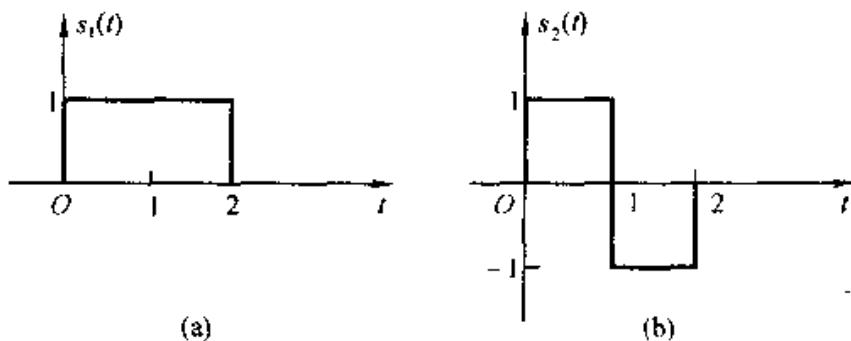


图 6-22 例 6-7 的波形

解

- (1) 由自相关函数定义可求得 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的自相关函数波形 $R_{11}(t)$ 和 $R_{22}(t)$ 分别如图 6-23(a) 和 (b)

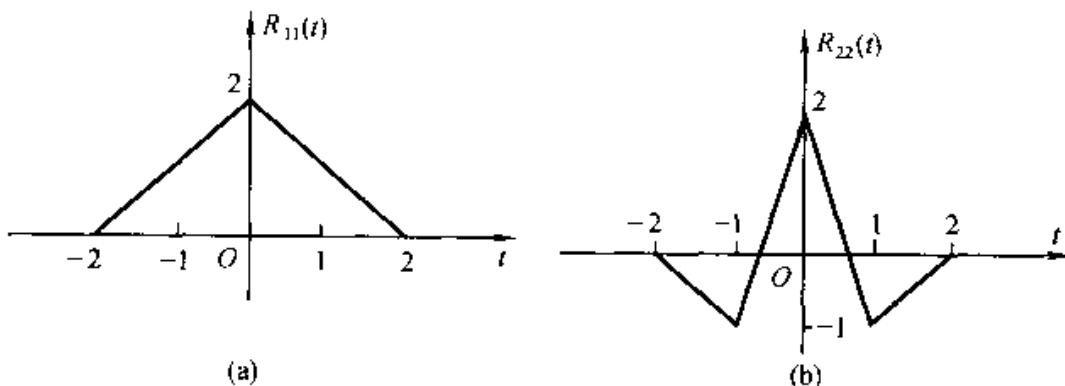


图 6-23 例 6-7 的波形

- (2) 考虑到匹配滤波器输出信号波形即 $s(t)$ 自相关函数波形的延迟, 为使峰值检测时间精确, 宜选用相关函数形状尖锐的波形, 因而选择 $s_2(t)$ 信号有利于改善测距精度。

6.10 测不准(不定度)原理及其证明

本节是第五章 5.4 节的继续, 在那里讨论了理想低通阶跃响应上升时间与系统带宽的约束关系, 现在引出“测不准原理”进一步说明这种约束的实质。为证明测不准原理所需的依据就是本章给出并反复运用的柯西-施瓦茨不等式和帕塞瓦尔定理(方程)。这些矢量空间属性相对应的物理概念仍然是能量受限或能量守恒。

由式(5-33)可以看出, 理想低通阶跃响应的上升时间 t_r 与带宽 B 之乘积

$t_r B = 1$, 这表明系统在时域的分辨能力与频域的分辨能力相互制约, 要减小 t_r 必须以加大 B 为代价, 反之, 若要减小 B 需牺牲 t_r 。现在的问题是能否找到一种系统使它的 t_r 与 B 之乘积无限减小, 使我们用很窄的带宽得到很短的响应时间, 也即在时域和频域两方面的分辨能力都尽可能得到改善。要回答这一问题需引用著名的“测不准原理”(也称不定度原理或不确定性原理, Uncertainty Principle)。该原理告诉我们, 对于实信号波形, 系统的阶跃响应上升时间与带宽之乘积受到限制, 这两个参量不可能同时达到任意小的数值。当然, 理想低通特性也符合这一规律。

为推证上述原理, 首先将系统阶跃响应 $g(t)$ 上升时间的计算转化为冲激响应 $h(t)$ 持续时间的计算, 因为 $g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$, 以理想低通特性为例, 由图 6-24 可以看出, 在 $h(t)$ 持续时间内由于积分值的增长, 恰好对应 $g(t)$ 的上升时间。在下面的推证中, 求阶跃响应上升时间与带宽乘积的问题也可用冲激响应持续时间与带宽的乘积来计算。

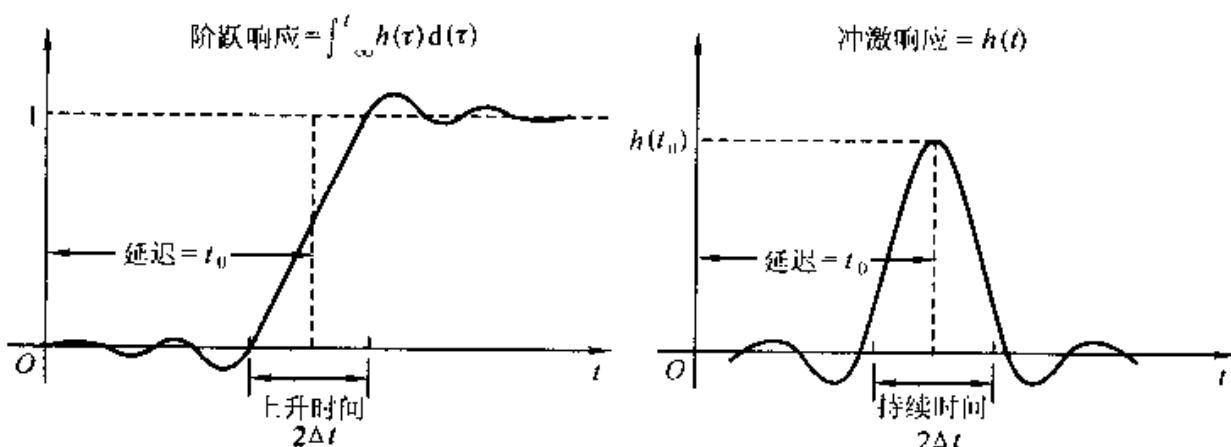


图 6-24 延迟时间、上升时间和持续时间

这里将要遇到的困难是各种时域波形与频谱图很难用统一的方式规定上升时间与带宽的定义标准。在实际电路分析中一种常用的定义方法是: 上升时间为阶跃响应由终值的 10% 到 90% 所经历的时间(或按其他百分比规定)。此方法使计算烦琐, 且难以反映波形的不同特点。在频域也存在类似的问题, 例如, 具有多次起伏型的频谱函数(如 Sa 函数), 通常按两个第一零点间的距离定义带宽, 这种方法相当粗糙, 且难以与其他类型的谱图统一要求。显然, 上述方法都不宜作为理论分析的统一定义标准。

从能量分布的观点给出上述定义是一种比较合理的方法。假定 $h(t)$ 的中心值位于 t_0 , 信号的能量主要集中于 $t_0 \pm \Delta t$ 的范围之内, 可以规定从 $t_0 - \Delta t$ 至 $t_0 + \Delta t$ 为持续时间。同理, 若 $H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$ 的中心值位于 ω_0 , 信号的能量主要集中于 $\omega_0 \pm \Delta\omega$ 的范围之内, 可以规定从 $\omega_0 - \Delta\omega$ 至 $\omega_0 + \Delta\omega$ 为带

宽。借助二阶矩的概念表达信号能量的分布，于是规定：

$$\Delta t = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 h^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6-184)$$

$$\Delta \omega = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |H(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6-185)$$

以上两式中，分子表示信号能量分布的方差，分母的作用是归一化。为简化以下推证，不失一般性，可令 $t_0 = 0$ 、 $\omega_0 = 0$ ，这时对应理想低通的冲激响应没有时延的情况。

$$\Delta t = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 h^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6-186)$$

$$\Delta \omega = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6-187)$$

由傅里叶变换的微分特性可得

$$\mathcal{F}[-jh'(t)] = \omega H(j\omega) \quad (6-188)$$

借助帕塞瓦尔定理可从能量守恒的观点将时域和频域表达式统一起来：

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (6-189)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |-jh'(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (6-190)$$

将式(6-189)与式(6-190)代入式(6-186)，并求 Δt 与 $\Delta \omega$ 之乘积

$$\Delta t \Delta \omega = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 h^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |h'(t)|^2 dt}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6-191)$$

利用柯西-施瓦茨不等式可求出上式下限

$$\begin{aligned} \Delta t \Delta \omega &\geq \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} th(t) h'(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right| \\ &= \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t dh^2(t)}{2 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{h^2(t)t \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt}{2 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt} \right| \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{6-192}$$

这里, 利用了以下关系: 当 $t \rightarrow \pm \infty$ 时 $th^2(t) \rightarrow 0$ 。可见 $\Delta t \Delta \omega$ 之下限为 $\frac{1}{2}$, 注意此处 Δt 和 $\Delta \omega$ 都是相对于中心值 t_0 和 ω_0 单边的增量值, 如果对持续时间和带宽都考虑双边差值此下限应为“2”, 若将角频率更换为频率值, 此下限对单边、双边情况分别为 $\frac{1}{4\pi}$ 或 $\frac{1}{\pi}$ 。

上述测不准原理也称为加博(Gabor)关系式。类似的规律在当代物理学、生物学中占有同样重要的地位。20世纪初, 物理科学进入微观世界的研究, 在观察和测量一些物理量时遇到一些不可逾越的限制。例如, 微观粒子的位置与动量、方位角与动量矩、时间与能量等各组成对量之间存在不定度关系。其中, 海森堡(Heisenberg)提出粒子位置与动量之乘积等于普朗克常数, 这就是著名的“测不准原理”。上述成对量之间, 其中一个量测量越精确, 另一个量的误差就越大。值得注意的现象是脊椎动物视觉系统的功能也具有类似的不确定性, 如果把动物的感觉系统理解为有机体对周围环境的观察与测量系统, 那么它也服从测不准原理。

6.11 码分复用、码分多址(CDMA)通信

在 5.11 和 5.12 节已经介绍了频分复用、时分复用以及统计复用(标记复用)技术在通信系统中的应用。本节简要说明码分复用技术的构成原理。所谓码分是指利用一组正交码序列来区分各路信号, 它们占用的频带和时间都可重叠。实现码分复用的理论依据是利用自相关函数抑制互相关函数的特性来选取正交信号码组中的所需信号, 因此, 码分复用也称为正交复用。

为说明它的基本原理, 首先给出一个两路正交复用模拟通信系统的例子。在图 6-25 中, 两路待传输信号 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 分别由相互正交的两路载波信号 $\cos(\omega_0 t)$ 与 $\sin(\omega_0 t)$ 调制, 然后相加并传送到接收端。在收端, 利用与发端对应的两路载波信号 $\cos(\omega_0 t)$ 和 $\sin(\omega_0 t)$ 对接收信号进行同步解调, 经相乘、低通滤波之后即可分离出信号 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 。下面利用时域关系式导出分离信号的结果。

在收端, 与 $\cos(\omega_0 t)$ 相应的一路解调系统相乘器之输出信号为

$$\begin{aligned}
 &[g_1(t)\cos(\omega_0 t) + g_2(t)\sin(\omega_0 t)]\cos(\omega_0 t) \\
 &= \frac{1}{2}g_1(t)[1 + \cos(2\omega_0 t)] + \frac{1}{2}g_2(t)\sin(2\omega_0 t)
 \end{aligned} \tag{6-193}$$

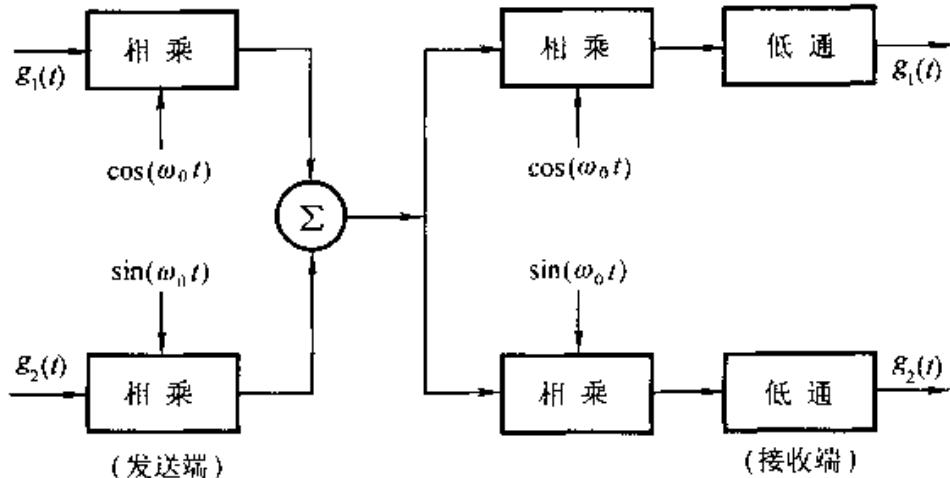


图 6-25 正交复用框图例

经低通滤波后滤除 $2\omega_0$ 附近的高频信号，只留下 $g_1(t)$ 信号输出。同理，与 $\sin(\omega_0 t)$ 相应的一路解调系统相乘器之输出信号为

$$\begin{aligned} & [g_1(t)\cos(\omega_0 t) + g_2(t)\sin(\omega_0 t)]\sin(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2}g_1(t)\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2}g_2(t)[1 - \cos(2\omega_0 t)] \end{aligned} \quad (6-194)$$

经低通滤波后滤除 $2\omega_0$ 附近的高频信号，只留下 $g_2(t)$ 信号输出。

如果利用信号的频域表达式(取以上各信号的傅里叶变换)也可导出同样的结果(习题 6-23)。

在上述复用合路与分路过程中，没有看到两路信号在占用频带和时间方面的区别，其工作原理完全不同于频分复用或时分复用。这里的同步解调过程从本质上讲是利用了相关运算，求相关系数的运算包含相乘和积分，而图 6-25 中的低通相当于实现积分功能。由于 $\cos(\omega_0 t)$ 和 $\sin(\omega_0 t)$ 相互正交，经上述运算后在输出端相互抑制，从而区分出各路信号。在彩色电视传输系统中，就是借助上述正交复用的原理完成了色差信号的合成与分离，在接收机中可以看到类似于图 6-25 右端的同步解调电路。

目前，码分复用技术的典型应用实例是移动通信系统中点对多点(多址)信号传输，这时，也称为码分多址通信，码分多址的英文缩写为 CDMA (Code Division Multiple Access)，通常称为 CDMA 通信系统。与图 6-25 的系统相比较，CDMA 系统的构成原理非常复杂，然而它的核心部分仍然是利用正交码组序列进行相关运算来区分信号，下面对此作简要介绍。

假设在移动通信系统的小区范围内有 k 个用户与基站同时通信，其中，第 k 个用户的发射机简化原理框图如图 6-26 所示。在此系统中，需要经过两次调制来实现发送功能。信号源 $a_k(t)$ 是二进制的数字序列码(例如，可以是矩形脉冲序列)，它与载波信号 $\cos(\omega_0 t)$ 相乘完成第一次调制，对于各用户此

载波频率 ω_0 完全相同。 $c_k(t)$ 称为地址码，在设计此系统时使各用户的地址码相互正交，每个 $c_k(t)$ 码与各自的用户相对应。通常， $c_k(t)$ 也是二进制数字序列，它的码位间隔周期 T_c 远小于信源码位间隔周期 T_Ω ，也即 $c_k(t)$ 信号的频带远大于信源 $a_k(t)$ 的频带。地址码码组具有如下的相关特性：

$$R_{k,i}(\tau) = \int_0^T c_k(t - \tau) c_i(t) dt \doteq T \quad (\text{当 } k = i, \text{ 且 } \tau = 0) \quad (6-195)$$

$$R_{k,i}(\tau) = \int_0^T c_k(t - \tau) c_i(t) dt \ll T \quad (\text{当 } k \neq i, \text{ 或 } \tau \neq 0) \quad (6-196)$$

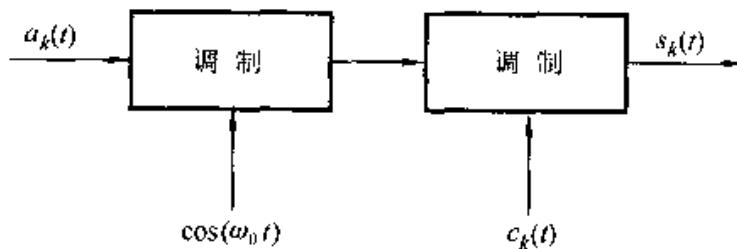


图 6-26 码分多址通信发送系统简化框图

$a_k(t)$ 与 $\cos(\omega_0 t)$ 相乘之后再与 $c_k(t)$ 相乘，完成第二次调制，发射信号 $s_k(t)$ 经无线信道传送到接收端。在接收端与发送端相对应需完成两次解调才可恢复信号 $a_k(t)$ 。接收机的简化原理框图如图 6-27 所示。接收信号 $r(t)$ 与本地地址码 $c_i(t - \tau_{i1})$ 进行相关运算完成第一次解调，由式(6-195)和式(6-196)可知，只有发送信号地址码与接收机本地地址码完全一致时才可获得足够强度的解调信号，所谓完全一致包括码型相同和码位对准。如果 $c_i(t)$ 与 $c_k(t)$ 相等即可保证码型相同，考虑到接收信号 $r(t)$ 与发射信号 $s(t)$ 之间要产生延时，因而在本地地址码中引入了 τ_{i1} 项，以保证码位对准。如果接收信号 $r(t)$ 携带的地址码与本地地址码不同($k \neq i$)或码位未对准($\tau \neq 0$)，相关运算的输出信号取较小值或趋近于零，这些干扰信号将受到抑制。最后，再与 $\cos[\omega_0(t - \tau_{i1})]$ 相乘即可恢复 $a_k(t)$ 信号。

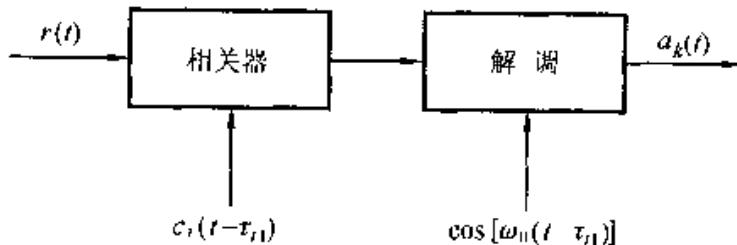


图 6-27 码分多址通信接收系统简化框图

从以上分析可以看出，设计 CDMA 系统的关键问题之一就是要选好一组相互正交的地址码，它们的自相关函数在零点具有尖锐的峰值，而互相关函数

取值很小。目前，可供选用的地址码组实例如 m 序列伪随机码或 Walsh 正交函数集码组等，类型很多。

m 序列是最大长度线性移位寄存器序列的简称，它由 m 级具有反馈逻辑的线性移位寄存器产生。 m 级移位寄存器可产生长度为 $(2^m - 1)$ 的码序列，增大 m 值可以给出更多的 m 序列码组。（关于 m 序列的详细原理可参看有关数字系统、逻辑设计或差错控制编码等方面的著作，此处不再讨论。）

本章 6.5 节介绍的 Walsh 正交函数集码组满足式(6-195)与式(6-196)的要求，适合用作 CDMA 系统的地址码序列。例如，在一些实际的 CDMA 移动通信系统中已经采用了 Walsh 函数码组提供 64 个地址码序列，利用它们的正交特性可以较好地实现码分复用。

上面介绍的 CDMA 系统属于扩频通信方式的一种，所谓扩频是扩展频谱的简称。若图 6-26 中的信源 $a_k(t)$ 码位间隔周期为 T_Ω ，可粗略认为信号带宽 $B_\Omega = \frac{1}{T_\Omega}$ ，地址码 $c_k(t)$ 的码位间隔周期为 T_c ，它的带宽大约是 $B_c = \frac{1}{T_c}$ 。通常， $T_c \ll T_\Omega$ ，因而 $B_c \gg B_\Omega$ ，由于利用地址码进行第二次调制的结果，使发送信号频谱的带宽较信号源带宽扩展许多倍，例如，取 $T_c = \frac{T_\Omega}{511}$ ，则 $B_c = 511B_\Omega$ 。令 $N = \frac{B_c}{B_\Omega}$ ，在扩频通信系统中称 N 为扩频处理增益。地址码也称为扩频码，经扩频码调制的发送信号称为扩频信号，接收机相关运算输出的信号称为解扩信号。

至此已经学习了频分复用、时分复用（包括统计复用或标记复用）和码分复用的基本原理。与前两种复用方法相比较，码分复用具有抗干扰性能好、复用系统容量灵活、保密性好、接收设备易于简化等许多优点，目前，在无线移动通信系统中具有很好的应用前景。

作为本章的结束，本节以码分复用为例进一步表明了信号正交特性和相关特性在当代通信系统应用中的重要地位，复习和巩固了正交与相关的基本概念，而码分复用技术的许多实际问题并未涉及，这些丰富而生动的内容有待后续课程专门讨论，或在研究工作中探讨。

习 题

- 6-1 试证明在区间 $(0, 2\pi)$ ，图 6-5 的矩形波与信号 $\cos t, \cos(2t), \dots, \cos(nt)$ 正交 (n 为整数)，也即此函数没有波形 $\cos(nt)$ 的分量。
- 6-2 试证明 $\cos t, \cos(2t), \dots, \cos(nt)$ (n 为整数) 是在区间 $(0, 2\pi)$ 中的正交函数集。
- 6-3 上题中的函数集是否是在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中的正交函数集。

6-4 1, x , x^2 , x^3 是否是区间(0,1)的正交函数集?

6-5 试证明 $\cos t, \cos(2t), \dots, \cos(nt)$ (n 为整数) 不是区间(0,2π)内的完备正交函数集。

6-6 将图6-5的矩形波用正弦函数的有限项级数来近似

$$f(t) \approx c_1 \sin t + c_2 \sin(2t) + \dots + c_n \sin(nt)$$

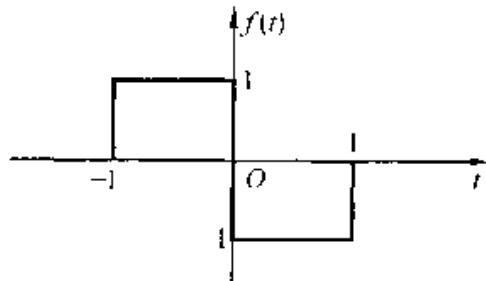
分别求 $n=1, 2, 3, 4$ 四种情况下的方均误差 $\overline{\epsilon^2}$ 。

6-7 试证明前四个勒让德多项式在(-1,1)内是正交函数集。它是否规格化?

6-8 一矩形波如题图6-8所示, 将此函数用勒让德傅里叶级数表示

$$f(t) = c_0 p_0(t) + c_1 p_1(t) + \dots + c_n p_n(t)$$

试求系数 c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 。



题图 6-8

6-9 用二次方程 $at^2 + bt + c$ 来近似表示函数 e^t , 区间在(-1,1), 使方均误差最小, 求系数 a, b 和 c 。

6-10 试讨论图6-6所示拉德马赫函数集是否为完备的正交函数集。

6-11 若信号 $f_1(t) = \cos(\omega t)$, $f_2(t) = \sin(\omega t)$, 试证明当两信号同时作用于单位电阻时所产生的能量等于 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分别作用时产生的能量之和。如果改为 $f_1(t) = \cos(\omega t)$, $f_2(t) = \cos(\omega t + 45^\circ)$, 上述结论是否成立?

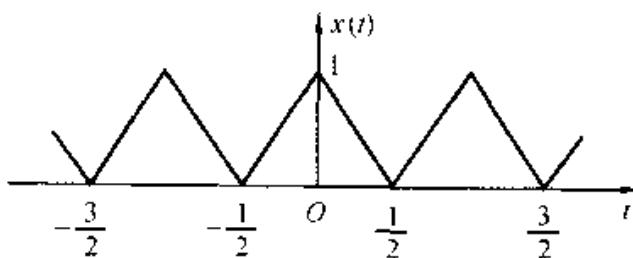
6-12 以三角函数形式的定义写出序号 k 从 7 至 15 的沃尔什函数表示式, 并画出它们的波形。

6-13 画出 $\text{sal}(6, t)$ 和 $\text{cal}(7, t)$ 的波形。

6-14 试证明: $\text{sal}(i, t)\text{sal}(j, t) = \text{cal}[(i-1) \oplus (j-1), t]$

$$\text{sal}(i, t)\text{cal}(j, t) = \text{sal}[(i-1) \oplus j] + 1, t \in \mathbb{C},$$

6-15 求题图6-15所示周期性三角波的沃尔什级数展开系数 c_0, c_1, c_2, c_3 和 s_1, s_2, s_3 各等于多少? 画出以上述结果综合逼近此三角波的图形。



题图 6-15

6-16 求下列信号的自相关函数:

$$(1) f(t) = e^{-at} u(t) (a > 0);$$

$$(2) f(t) = E \cos(\omega_0 t) u(t),$$

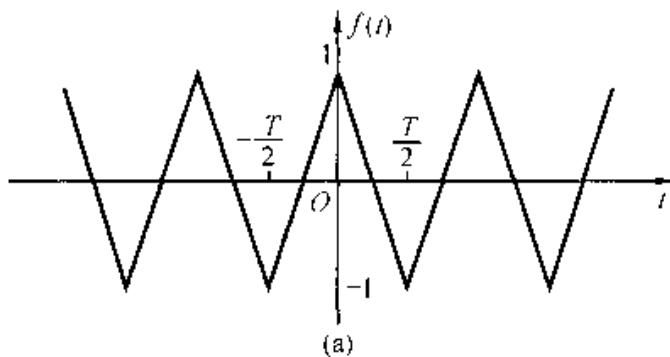
6-17 试确定下列信号的功率，并画出它们的功率谱：

- (1) $A \cos(2000\pi t) + B \sin(200\pi t);$
- (2) $[A + \sin(200\pi t)] \cos(2000\pi t);$
- (3) $A \cos(200\pi t) \cos(2000\pi t);$
- (4) $A \sin(200\pi t) \cos(2000\pi t);$
- (5) $A \sin(300\pi t) \cos(2000\pi t);$
- (6) $A \sin^2(200\pi t) \cos(2000\pi t);$

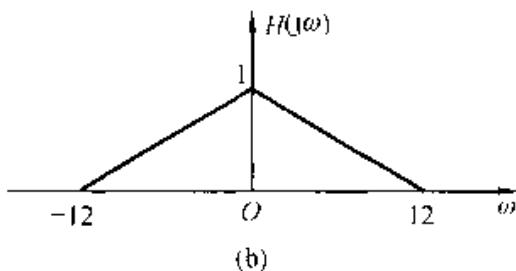
6-18 若信号 $f(t)$ 的功率谱为 $\varphi_f(\omega)$ ，试证明 $\frac{df(t)}{dt}$ 信号的功率谱为 $j\omega^2 \cdot \varphi_f(\omega)$ 。

6-19 信号 $e(t) = 2e^{-t} u(t)$ 通过截止频率 $\omega_c = 1$ 的理想低通滤波器，试求响应的能量谱密度，以图形示出。

6-20 题图 6-20(a) 所示周期信号 $f(t)$ 通过系统函数为 $H(j\omega)$ 之系统 [如题图 6-20(b)]，试求输出信号的功率谱和功率(方均值)。设 T 为以下二种情况：(1) $T = \frac{\pi}{3}$ ；(2) $T = \frac{\pi}{6}$ 。



(a)

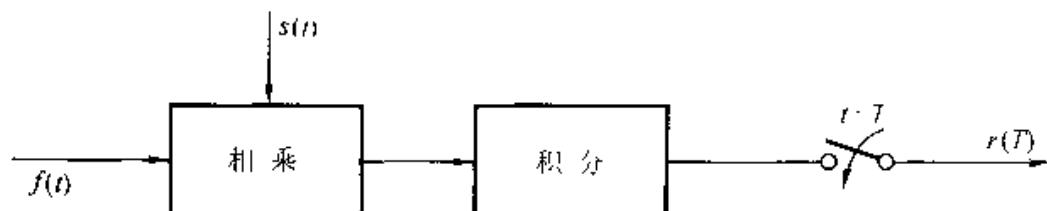


(b)

题图 6-20

6-21 若匹配滤波器输入信号为 $f(t)$ ，冲激响应为 $h(t) = s(T-t)$ ，求：

(1) 给出描述输出信号 $r(t)$ 的表达式：

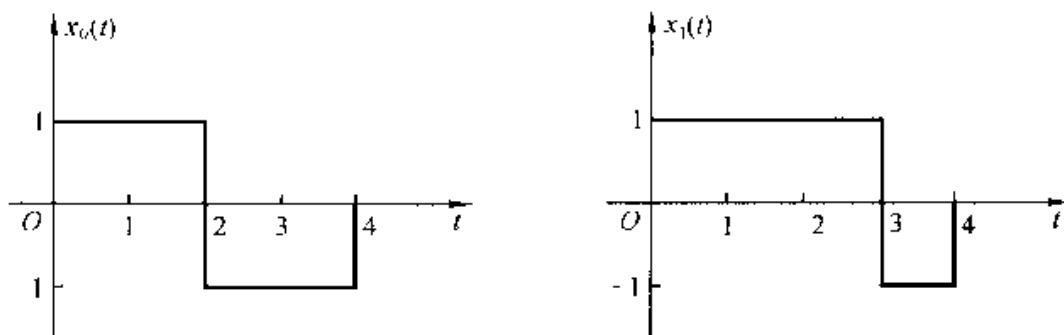


题图 6-21

(2) 求 $t = T$ 时刻的输出 $r(t) = r(T)$;

(3) 由以上结果证明, 可利用题图 6-21 的框图来实现匹配滤波器之功能。

6-22 题图 6-22 示出信号 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 波形, 若 M_0 表示对 $x_0(t)$ 的匹配滤波器, M_1 表示对 $x_1(t)$ 的匹配滤波器, 求:



题图 6-22

- (1) 分别画出 M_0 和 M_1 的冲激响应 $h_0(t)$ 和 $h_1(t)$ 的波形;
- (2) 分别粗略画出 M_0 对 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 的响应波形以及 M_1 对 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 的响应波形;
- (3) 比较这些响应在 $t = 4$ 时的值, 若保持 $x_1(t)$ 不变, 如何修改 $x_0(t)$ 使接收机更容易区分 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$, 也即使 M_0 对 $x_1(t)$ 的响应和 M_1 对 $x_0(t)$ 的响应在 $t = 4$ 时为零值。

6-23 利用信号的频域表达式(取各信号的傅里叶变换)分析图 6-25 系统码分复用的工作原理。

6-24 以图 6-7 所示 $k = 1, 2, 3$ 的三个 Walsh 函数作为 CDMA 系统的地址码, $c_1(t) = \text{Wal}(1, t)$, $c_2(t) = \text{Wal}(2, t)$, $c_3(t) = \text{Wal}(3, t)$ 。分别求它们的自相关函数 $R_{11}(\tau)$, $R_{22}(\tau)$, $R_{33}(\tau)$ 以及互相关函数 $R_{12}(\tau)$, $R_{21}(\tau)$, $R_{13}(\tau)$, $R_{31}(\tau)$, $R_{23}(\tau)$, $R_{32}(\tau)$ (粗略画图形即可)。由所得结果讨论此码组是否能用作地址码。

附录一

卷积表

序号	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t) * f_2(t)$
1	$f(t)$	$\delta(t)$	$f(t)$
2	$f(t)$	$u(t)$	$\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda$
3	$f(t)$	$\delta'(t)$	$f'(t)$
4	$u(t)$	$u(t)$	$t u(t)$
5	$u(t) - u(t - t_1)$	$u(t)$	$t u(t) - (t - t_1) u(t - t_1)$
6	$u(t) - u(t - t_1)$	$u(t) - u(t - t_2)$	$t u(t) - (t - t_1) u(t - t_1) - (t - t_2) u(t - t_2) + (t - t_1 - t_2) u(t - t_1 - t_2)$
7	$e^{\alpha t} u(t)$	$u(t)$	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{\alpha t}) u(t)$
8	$e^{\alpha t} u(t)$	$u(t) - u(t - t_1)$	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{\alpha t}) [u(t) - u(t - t_1)] + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t_1} - 1) e^{\alpha t} u(t - t_1)$
9	$e^{\alpha t} u(t)$	$e^{\alpha t} u(t)$	$t e^{\alpha t} u(t)$
10	$e^{\alpha_1 t} u(t)$	$e^{\alpha_2 t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) u(t) \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$
11	$e^{\alpha t} u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{\alpha^{n+1}} e^{\alpha t} u(t) - \sum_{j=0}^n \frac{n!}{\alpha^{j+1} (n-j)!} t^{n-j} u(t)$
12	$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m! n!}{(m+n+1)!} t^{m+n+1} u(t)$
13	$t^m e^{\alpha_1 t} u(t)$	$t^n e^{\alpha_2 t} u(t)$	$\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j m!}{j! (m-j)!} \frac{(n+j)!}{(\alpha_1 - \alpha_2)^{n+j+1}} t^{m-j} e^{\alpha_1 t} u(t)$ $+ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k! (n-k)!} \frac{(m+k)!}{(\alpha_2 - \alpha_1)^{m+k+1}} t^{n-k} e^{\alpha_2 t} u(t) \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$
14	$e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) u(t)$	$e^{\lambda t} u(t)$	$\left[\frac{\cos(\theta - \varphi)}{\sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + \beta^2}} e^{\lambda t} + \frac{e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta - \varphi)}{\sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + \beta^2}} \right] u(t)$ $\text{且 } \varphi = \arctan \left(\frac{-\beta}{\alpha + \lambda} \right)$

附录

常用周期信号的

信号名称	周期信号 波 形	$f(t)$	
		特 点	对称性
一般周期信号			冲激出现在
周期矩形信号		偶函数	$f'(t)$
周期对称方波信号		偶函数, 奇谐函数	$f''(t)$
		奇函数, 奇谐函数	$f'''(t)$
周期锯齿信号		奇函数	$f''''(t)$

傅里叶级数表

傅里叶级数 $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$, ($n=1, 2, \dots$)			特点	
a_0	a_n	b_n	包含的频率分量	谐波幅度收敛速率
$\frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt$	$\frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cdot \cos(n\omega_1 t) dt$	$\frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cdot \sin(n\omega_1 t) dt$	$n\omega_1$	
$\frac{E\tau}{T_1}$	$\frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)$ $= \frac{E\tau\omega_1}{\pi} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$	0	$0, n\omega_1$	$\frac{1}{n}$
0	$\frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	0	基波和奇次谐波的余弦分量	$\frac{1}{n}$
0	0	$\frac{2E}{n\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	基波和奇次谐波的正弦分量	$\frac{1}{n}$
0	0	$(-1)^{n+1} \cdot \frac{E}{n\pi}$	正弦分量	$\frac{1}{n}$

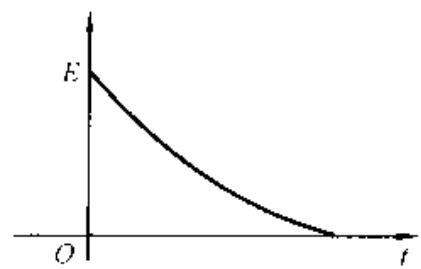
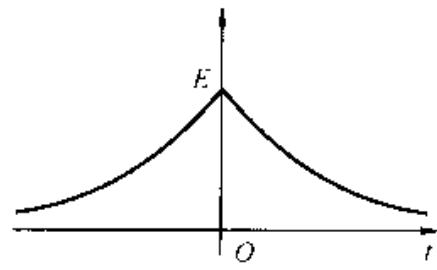
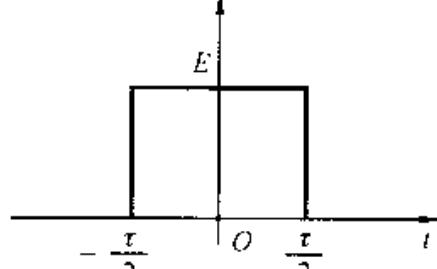
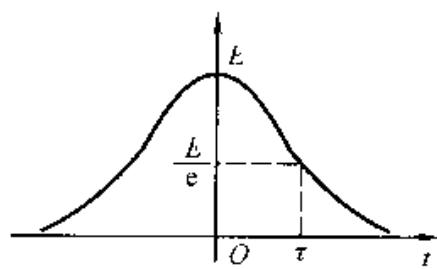
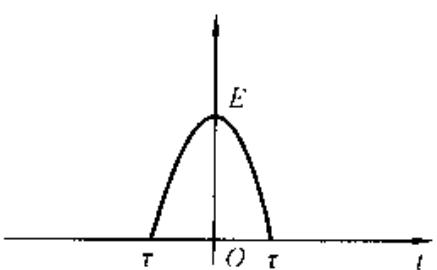
信号名称	周期信号 波 形	$f(t)$	特 点	
			对称性	冲激出现在
周期锯齿信号			去直流后为奇函数	$f'(t)$
周期半波余弦信号			偶函数, 去直流后为奇谐函数	$f''(t)$
周期全波余弦信号			奇函数, 奇谐函数	$f'''(t)$
周期三角信号				
周期锯齿信号				

续表

傅里叶级数 $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$, ($n = 1, 2, \dots$)			特 点	
a_0	a_n	b_n	包含的频率分量	谐波幅度收敛速率
$\frac{E}{2}$	0	$\frac{E}{n\pi}$	直流和正弦分量	$\frac{1}{n}$
$\frac{E}{2}$	$\frac{4E}{(n\pi)^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	0	直流和基波、奇次谐波的余弦分量	$\frac{1}{n^2}$
0	0	$\frac{4E}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	基波和奇次谐波的正弦分量	$\frac{1}{n^2}$
$\frac{E}{\pi}$	$\frac{2E}{(1-n^2)\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	0	直流和基波、偶次谐波的余弦分量	$\frac{1}{n^2}$
$\frac{2E}{\pi}$	$(-1)^{n+1} \frac{4E}{(4n^2-1)\pi}$	0	直流和基波以及各次谐波的余弦分量	$\frac{1}{n^2}$

附录

常用信号的

序号	信号名称	时间函数 $f(t)$	波形图
1	单边指数脉冲	$E e^{-\alpha t} u(t) \quad (\alpha > 0)$	
2	双边指数脉冲	$E e^{- \alpha t} \quad (\alpha > 0)$	
3	矩形脉冲	$\begin{cases} E & \left(t < \frac{\tau}{2} \right) \\ 0 & \left(t \geq \frac{\tau}{2} \right) \end{cases}$	
4	钟形脉冲	$E \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$	
5	余弦脉冲	$\begin{cases} E \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) & \left(t < \frac{\tau}{2} \right) \\ 0 & \left(t \geq \frac{\tau}{2} \right) \end{cases}$	

三

傅里叶变换表

频谱函数 $F(\omega)$ $ F(\omega) e^{j\phi(\omega)}$	频 谱 图
$\frac{E}{a + j\omega}$	
$\frac{2aE}{a^2 + \omega^2}$	
$E e^{-\omega\tau} \left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	
$\sqrt{\pi} E \tau \cdot e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$	
$\frac{2E\tau}{\pi} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2}$	

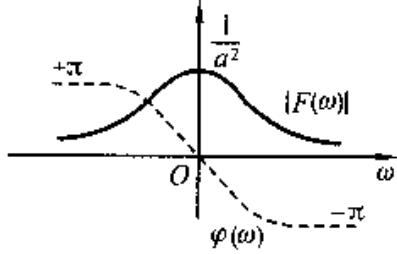
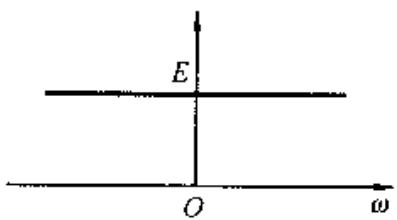
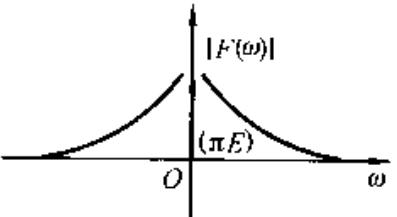
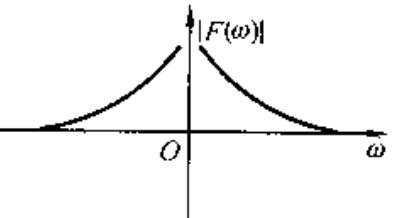
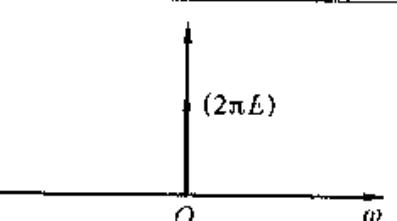
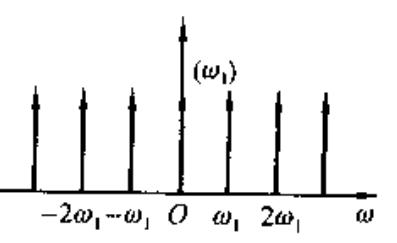
序号	信号名称	时间函数 $f(t)$	波形图
6	升余弦脉冲	$\begin{cases} \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right] & \left(t < \frac{\tau}{2} \right) \\ 0 & \left(t \geq \frac{\tau}{2} \right) \end{cases}$	
7	三角脉冲	$\begin{cases} E \left(1 - \frac{2 t }{\tau} \right) & \left(t < \frac{\tau}{2} \right) \\ 0 & \left(t \geq \frac{\tau}{2} \right) \end{cases}$	
8	锯齿脉冲	$\begin{cases} \frac{E}{a}(t+a) & (-a < t < 0) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$	
9	梯形脉冲	$\begin{cases} \frac{-2E}{\tau - \tau_1} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) & \left(-\frac{\tau}{2} < t < -\frac{\tau_1}{2} \right) \\ E & \left(-\frac{\tau_1}{2} < t < \frac{\tau_1}{2} \right) \\ \frac{2E}{\tau - \tau_1} \left(\frac{\tau}{2} - t \right) & \left(\frac{\tau_1}{2} < t < \frac{\tau}{2} \right) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$	
10	抽样脉冲	$S_a(\omega_c t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$	

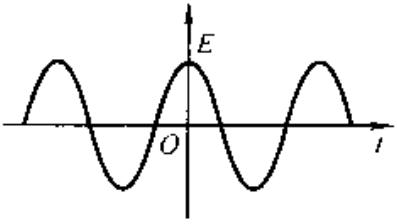
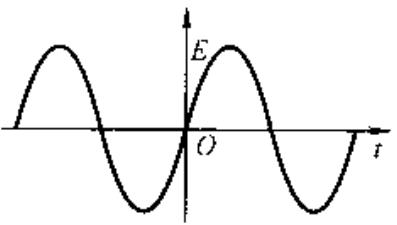
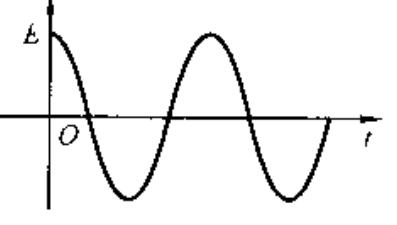
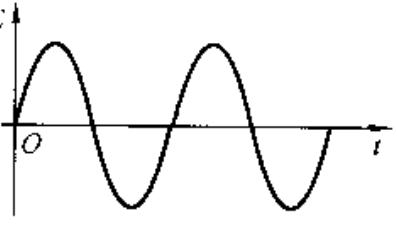
续表

频谱函数 $F(\omega) = F(\omega) e^{j\theta(\omega)}$	频 谱 图
$\frac{E\tau}{2} \cdot \frac{\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2}$	
$\frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) - \frac{8E}{\omega^2\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$	
$\frac{E}{\omega^2} (1 + j\omega a - e^{-j\omega a})$	
$\frac{8E}{(\tau - \tau_1)\omega^2} \sin\left[\frac{\omega(\tau + \tau_1)}{4}\right] \text{Sa}\left[\frac{\omega(\tau - \tau_1)}{4}\right]$	
$\begin{cases} \frac{\pi}{\omega_c} & (\omega < \omega_c) \\ 0 & (\omega > \omega_c) \end{cases}$	

序号	信号名称	时间函数 $f(t)$	波形图
11	指数脉冲	$t e^{-at} u(t) \quad (a > 0)$	
12	冲激函数	$E\delta(t)$	
13	阶跃函数	$E u(t)$	
14	符号函数	$E \text{sgn}(t)$	
15	直流信号	E	
16	冲激序列	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$	

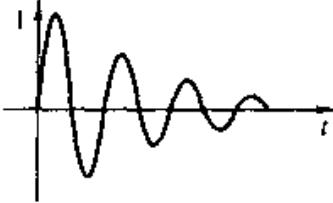
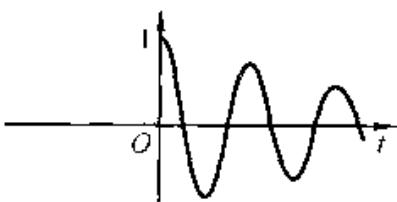
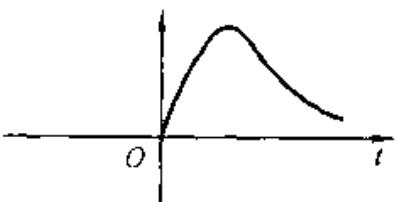
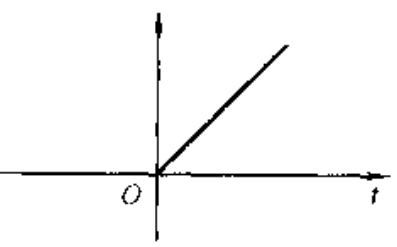
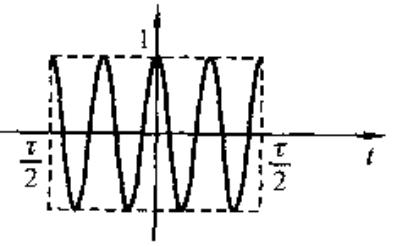
续表

频谱函数 $F(\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	频 谱 图
$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	
E	
$\frac{E}{j\omega} + \pi E \delta(\omega)$	
$\frac{2E}{j\omega}$	
2πEδ(ω)	
$\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$ $(\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1})$	

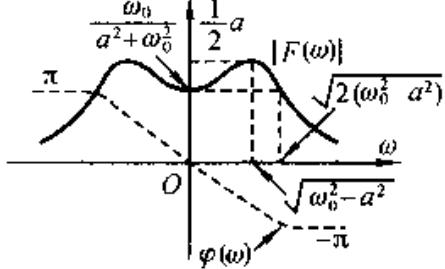
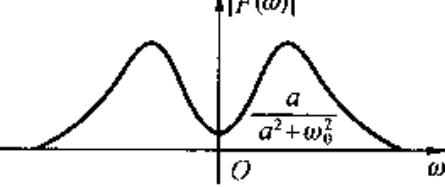
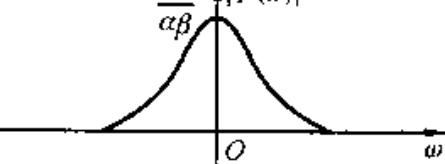
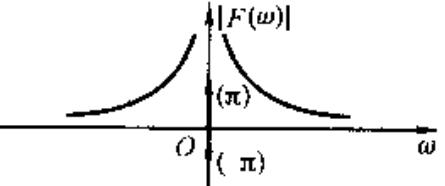
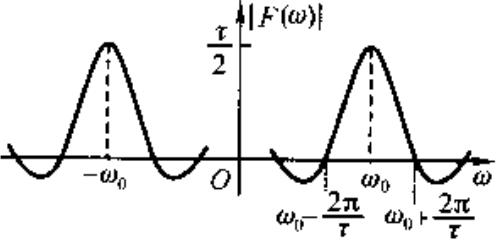
序号	信号名称	时间函数 $f(t)$	波形图
17	余弦信号	$E \cos(\omega_0 t)$	
18	正弦信号	$E \sin(\omega_0 t)$	
19	单边余弦信号	$E \cos(\omega_0 t) u(t)$	
20	单边正弦信号	$E \sin(\omega_0 t) u(t)$	
21	复指数信号	$E e^{j\omega_0 t}$	

续表

频谱函数 $F(\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	频 谱 图
$E\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	
$j\pi E[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	
$\frac{E\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{j\omega E}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
$\frac{E\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0 E}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
$2\pi E\delta(\omega - \omega_0)$	

序号	信号名称	时间函数 $f(t)$	波 形 图
22	单边减幅正弦信号	$e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t)$ ($a > 0$)	
23	单边减幅余弦信号	$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$ ($a > 0$)	
24	单边衰减信号	$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t)$ ($\alpha \neq \beta$)	
25	斜变信号	$t u(t)$	
26	矩形调幅信号	$[u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})] \cos(\omega_0 t)$	

续表

频谱函数 $F(\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	频 谱 图
$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$	
$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$	
$\frac{1}{(j\omega + \alpha)(j\omega + \beta)}$	
$j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$	
$\left[\text{Sa} \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2} + \text{Sa} \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right] \frac{\tau}{2}$	

习题答案

第一章

1-1 (a) 连续; (b) 连续;

(c) 离散、数字; (d) 离散;

(e) 离散、数字; (f) 离散、数字。

1-2 (1) 连续; (2) 离散;

(3) 离散、数字; (4) 离散; (5) 离散。

1-3 (1) $\frac{\pi}{5}$; (2) $\frac{\pi}{5}$;

(3) $\frac{\pi}{8}$; (4) $2T$ 。

1-5 正确答案为(4)。

1-8 $f(t) = e^{-at}u(t) - e^{-a(t-t_0)}u(t-t_0)$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) - \frac{1}{a}[1 - e^{-a(t-t_0)}]u(t-t_0)$$

1-10 (a) $1 - \frac{|t|}{2}[u(t+2) - u(t-2)]$;

(b) $u(t) + u(t-1) + u(t-2)$;

(c) $E \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)[u(t) - u(t-T)]$ 。

1-14 (1) $f(-t_0)$; (2) $f(t_0)$; (3) 1; (4) 0; (5) $e^{2t} - 2$; (6) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$; (7) $1 - e^{-j\omega t_0}$ 。

1-15 $i(t) = \frac{C_1 C_2 E}{C_1 + C_2} \delta(t)$

$$v_{C1}(t) = \frac{C_2 E}{C_1 + C_2} u(t) \quad v_{C2}(t) = \frac{C_1 E}{C_1 + C_2} u(t)$$

1-16 $v(t) = \frac{L_1 L_2 I}{L_1 + L_2} \delta(t)$

$$i_{L1}(t) = \frac{L_2 I}{L_1 + L_2} u(t) \quad i_{L2}(t) = \frac{L_1 I}{L_1 + L_2} u(t)$$

1-17 (1) $\frac{2}{\pi}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) 0; (4) K。

1-20 (1) 线性、时不变、因果;

(2) 线性、时变、因果;

(3) 非线性、时变、因果;

(4) 线性、时变、非因果;

(5) 线性、时变、非因果;

(6) 非线性、时不变、因果;

(7) 线性、时不变、因果;

(8) 线性、时变、非因果。

- 1-21 (1) 可逆, $e(t+5)$;
 (2) 不可逆, 当输入为任意常数时都使输出为零;
 (3) 可逆, $\frac{d}{dt}e(t)$;
 (4) 可逆, $e\left(\frac{t}{2}\right)$ 。

1-23 $r_2(t) = \delta(t) - \alpha e^{-\alpha t} u(t)$

第二章

- 2-1 (a) $2 \frac{d^3}{dt^3}v_o(t) + 5 \frac{d^2}{dt^2}v_o(t) + 5 \frac{d}{dt}v_o(t) + 3v_o(t) = 2 \frac{d}{dt}e(t)$
 (b) $(L^2 - M^2) \frac{d^4}{dt^4}v_o(t) + 2RL \frac{d^3}{dt^3}v_o(t) + \left(\frac{2L}{C} + R^2\right) \frac{d^2}{dt^2}v_o(t) + \frac{2R}{C} \frac{d}{dt}v_o(t)$
 $+ \frac{1}{C^2}v_o(t) = MR \frac{d^2}{dt^2}e(t)$
 (c) $CC_1 \frac{d^3}{dt^3}v_o(t) + \left(\frac{C_1}{R} + \frac{C}{R_1}\right) \frac{d^2}{dt^2}v_o(t) + \left(\frac{C}{L_1} + \frac{1}{R_1 R}\right) \frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{1}{R L_1}v_o(t)$
 $= \frac{\mu}{R_1} \frac{d}{dt}i(t)$
 (d) $(1-\mu)C \frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{1}{R}v_o(t) = \frac{\mu}{R}e(t)$
- 2-2 $\frac{d^3}{dt^3}v_2(t) + \frac{m_1 f_2 + m_2 f_1}{m_1 m_2} \frac{d^2}{dt^2}v_2(t) + \frac{(m_1 + m_2)k + f_1 f_2}{m_1 m_2} \frac{d}{dt}v_2(t) + \frac{(f_1 + f_2)k}{m_1 m_2} v_2(t)$
 $= \frac{k}{m_1 m_2} e(t)$
- 2-3 $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{f}{m} \frac{d}{dt}y(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{f}{m} \frac{d}{dt}x(t) + \frac{k}{m}x(t)$
- 2-4 (1) $e^{-t}(\cos t + 3\sin t)$
 (2) $(3t+1)e^{-t}$
 (3) $1-(t+1)e^{-t}$
- 2-5 (1) $r(0_+) = 0$
 (2) $r(0_+) = 3$
 (3) $r(0_+) = 1 \quad r'(0_+) = \frac{3}{2}$
- 2-6 (1) $\underbrace{4e^{-t} - 3e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} - 2e^{-t} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}}_{\text{零状态响应}}$
 (2) $\underbrace{4e^{-t} - 3e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{e^{-t} - e^{-2t}}_{\text{零状态响应}} \quad \text{强迫响应等于零}$
- 2-7 $v_o(t) = (Ee^{-\frac{t}{RC}} - RI_S e^{-\frac{t}{RC}} + RI_S)u(t)$
- 2-8 (1) $i(0_-) = i(0_+) = 0, \quad i'(0_-) = 0, \quad i'(0_+) = 10$
 (2) $\frac{d^2}{dt^2}i(t) + \frac{d}{dt}i(t) + i(t) = 0 \quad (t \geq 0_+)$
 $i(t) = \frac{20}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

$$(3) \frac{d^2}{dt^2}i(t) + \frac{d}{dt}i(t) + i(t) = \frac{d}{dt}e(t), \text{ 其中 } e(t) = 10 + 10u(t)$$

2-9 (1) $h(t) = 2\delta(t) - 6e^{-3t}u(t)$
 $g(t) = 2e^{-3t}u(t)$

$$(2) h(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] u(t)$$

$$g(t) = \left\{ e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] + 1 \right\} u(t)$$

$$(3) h(t) = e^{-2t}u(t) + \delta(t) + \delta'(t)$$

$$g(t) = \delta(t) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \right) u(t)$$

2-10 $h(t) = \left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{4}e^{-5t} \right) u(t)$

2-11 $r(0_+) = \frac{1}{2}, r'(0_+) = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$

2-12 (1) $r_a(t) = e^{-t}u(t)$
(2) $r_3(t) = (2-t)e^{-t}u(t)$

2-13 (1) $\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t)$
(2) $\cos(\omega t + 45^\circ)$

$$(3) \begin{cases} 0 & (t < 1, t > 3) \\ \frac{1}{2}(t^2 - 1) & (1 < t < 2) \\ -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{3}{2} & (2 < t < 3) \end{cases}$$

(4) $\cos[\omega(t+1)] - \cos[\omega(t-1)]$

$$(5) \frac{\alpha \sin t - \cos t + e^{-\alpha t}}{\alpha^2 + 1} u(t)$$

2-16 $A = \frac{1}{1 - e^{-3}}$

2-17 $h(t) = e^{t-1}u(3-t)$

2-18 $\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$

2-19 (b) $u(-t) + (2 - e^{-t})u(t)$

$$(c) \begin{cases} 2(1 - \cos t) & (0 < t < 1) \\ 2[\cos(t-1) - \cos t] & (1 < t < \pi) \\ 2[\cos(t-1) + 1] & (\pi < t < \pi + 1) \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & (0 < t < 1) \\ -2 + 4t - \frac{3}{2}t^2 & (1 < t < 2) \\ 2t^2 - 10t + 12 = 2\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} & (2 < t < 3) \end{cases}$$

对于 $n < t < n+1 \quad (n \geq 2)$

$$(-1)^n \left[2\left(t - \frac{2n+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \right]$$

(e) $1 - \cos(t-1)$ ($t > 1$)

(f) $\frac{1}{\pi} [1 - \cos(\pi t)] [u(t) - u(t-2)] * \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-3k)$

2-20 $u(t) - u(t-1)$

2-21 (1) $\begin{cases} e^{-t} - e^{-2t} & (0 < t < 2) \\ e^{-2t}(\beta e^4 + e^2 - 1) & (t > 2) \end{cases}$

(2) $\beta = -e^{-4} \int_0^2 e^{2\tau} x(\tau) d\tau$

2-23 (1) $\frac{1}{2} \left[\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \right]$

(2) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\pi)$

2-24 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \left[u\left(t + \frac{\pi}{2} - k\pi\right) - u\left(t - \frac{\pi}{2} - k\pi\right) \right]$

2-27 (1) $A e^{-\alpha t} u(t)$

(2) $A t e^{-\alpha t} u(t)$

(3) $\frac{A}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}) u(t)$

第三章

3-1 三角形式傅里叶级数的系数为:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \\ b_n &= \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, \dots) \\ \frac{2E}{n\pi} & (n = 1, 3, \dots) \end{cases} \end{aligned}$$

所以

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \dots \right] \quad \left(\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

指数形式傅里叶级数的系数为:

$$F_n = \begin{cases} 0 & (n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots) \\ -\frac{iE}{n\pi} & (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots) \end{cases}$$

所以

$$f(t) = -\frac{iE}{\pi} e^{i\omega_1 t} + \frac{iE}{\pi} e^{-i\omega_1 t} - \frac{iE}{3\pi} e^{i3\omega_1 t} + \frac{iE}{3\pi} e^{-i3\omega_1 t} - \dots$$

3-2 直流分量为 1 V, 基波、二次、三次谐波的有效值分别为

$$\frac{10\sqrt{2}}{\pi} \sin 18^\circ \approx 1.39, \quad \frac{5\sqrt{2}}{\pi} \sin 36^\circ \approx 1.32, \quad \frac{10\sqrt{2}}{3\pi} \sin 54^\circ \approx 1.21$$

3-3 (1) 1000 kHz, 2000 kHz

$$(2) \frac{1000}{3} \text{ kHz}, \frac{2000}{3} \text{ kHz}$$

$$(3) 1:3$$

$$(4) 1:1$$

$$3-4 \quad a_0 = \frac{E}{2}$$

$$b_n = 0$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=2,4,\dots) \\ -\frac{4E}{(n\pi)^2} & (n=1,3,\dots) \end{cases}$$

所以

$$f(t) = \frac{E}{2} - \frac{4E}{\pi^2} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_1 t) + \dots \right] \quad \left(\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$3-5 \quad a_0 = \frac{E}{\pi}$$

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2E}{T} \left[\frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2}}{(n+1)\omega_1} + \frac{\sin \frac{(n-1)\pi}{2}}{(n-1)\omega_1} \right] \quad \left(\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

即

$$a_n = \begin{cases} \frac{E}{2} & (n=1) \\ 0 & (n=3,5,\dots) \\ \frac{2E}{(1-n^2)\pi} \cos \frac{n\pi}{2} & (n=2,4,\dots) \end{cases}$$

所以

$$f(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{4}{3\pi} \cos(2\omega_1 t) - \frac{4}{15\pi} \cos(4\omega_1 t) + \dots \right]$$

$$3-6 \quad F_0 = \frac{E}{2}$$

$$F_n = -\frac{jE}{2n\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{所以 } f(t) = \frac{E}{2} - \frac{jE}{2\pi} e^{j\omega_1 t} + \frac{jE}{2\pi} e^{-j\omega_1 t} - \frac{jE}{4\pi} e^{j2\omega_1 t} + \frac{jE}{4\pi} e^{-j2\omega_1 t} - \dots$$

$$= \frac{E}{2} + \frac{E}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_1 t) + \dots \right]$$

3-7 (a) 只含有基波和奇次谐波的余弦分量

(b) 只含有基波和奇次谐波的正弦分量

(c) 只含有奇次谐波

(d) 只含有正弦分量

(e) 只含有直流和偶次谐波的余弦分量

(f) 只含有直流和偶次谐波的正弦分量

$$3-8 \quad (a) \quad a_0 = \frac{E}{2}, \quad a_n = 0,$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n=2,4,\dots) \\ \frac{4E}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} & (n=1,3,\dots) \end{cases}$$

所以

$$f(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left[\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega_1 t) + \dots \right]$$

$$(b) \quad a_0 = \frac{3E}{4}$$

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{-4E}{(n\pi)^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \quad (n=1,2,\dots)$$

$$\text{所以 } f(t) = \frac{3E}{4} - \frac{4E}{\pi^2} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{25} \cos(5\omega_1 t) + \dots \right] \quad (\omega_1 = \frac{2\pi}{T})$$

$$3-9 \quad (1) \quad I_0 = \frac{i_m (\sin \theta - \theta \cos \theta)}{\pi (1 - \cos \theta)}$$

$$I_1 = \frac{i_m (\theta - \sin \theta \cdot \cos \theta)}{\pi (1 - \cos \theta)}$$

$$I_k = \frac{2i_m [\sin(k\theta) \cos \theta - k \cos(k\theta) \cdot \sin \theta]}{\pi k (k^2 - 1)(1 - \cos \theta)}$$

$$(2) \quad I_0 \approx 0.22i_m \quad I_1 \approx 0.39i_m$$

$$I_k = \frac{2i_m \left(\sin \frac{k\pi}{3} - \sqrt{3}k \cos \frac{k\pi}{3} \right)}{\pi k (k^2 - 1)}$$

$$(3) \quad I_0 = \frac{i_m}{\pi} \quad I_1 = \frac{i_m}{2} \quad I_k = \frac{2i_m \cdot \cos \frac{k\pi}{2}}{\pi \cdot (1 - k^2)}$$

$$3-11 \quad (a) \quad a_0 = 0 \quad a_n = \frac{2}{\pi(4-n^2)} [1 - \cos(n\pi)], \text{ 即}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=2,4,\dots) \\ \frac{4}{\pi(4-n^2)} & (n=1,3,\dots) \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & (n=2) \\ 0 & (n \neq 2) \end{cases}$$

$$\text{所以 } f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{3} \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{5} \cos(3\omega_1 t) - \frac{1}{21} \cos(5\omega_1 t) - \dots \right] + \frac{1}{2} \sin(2\omega_1 t) \quad (\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2})$$

$$(b) \quad F_n = \frac{2}{\pi(n^2 - 4)} \sin \frac{n\pi}{2} [\cos(n\pi) - 1] \left(\sin \frac{n\pi}{4} + j \cos \frac{n\pi}{4} \right) \quad (\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2})$$

3-12 (1) 直流 0.25 V, 基波幅度 0.305 V, 五次谐波幅度 0.018 V;

(2) 比值分别为 1.0, 0.847, 0.303, 此 RC 积分电路是一个低通滤波器, 对高频分量衰减大, 对低频分量衰减少。

3-13 (1) 频率为 100 kHz, 幅度为 127 V 的正弦波;

(2) 近于 0;

(3) 频率为 100 kHz, 幅度为 42.4V 的正弦波。

3-14 可利用此电路直接选出以下频率成分的正弦信号: 100 kHz, 300 kHz。

$$3-15 \quad F(\omega) = \frac{jE}{2} \left[\text{Sa} \left(\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \text{Sa} \left(\frac{\omega T}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{2E \tau \cos \frac{\omega T}{2}}{\pi \left[1 - \left(\frac{\omega T}{\pi} \right)^2 \right]}$$

$$3-16 \quad (a) \quad j \frac{2E}{\omega} \left[\cos \left(\frac{\omega T}{2} \right) - \text{Sa} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right], \quad F(0) = 0$$

$$(b) \quad \frac{E}{\omega^2 T} (1 - j\omega T - e^{-j\omega T})$$

$$(c) \frac{E\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2} (1 - e^{-j\omega T}) = j \frac{2E\omega_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T}{2}}, \quad F(\omega_1) = \frac{ET}{2j} \quad \left(\omega_1 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$(d) j \frac{2E\omega_1 \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega^2 - \omega_1^2}, \quad F(\omega_1) = \frac{ET}{2j} \quad \left(\omega_1 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

3-17 (a) $\frac{1}{4}$; (b) $\frac{1}{4}$; (c) $\frac{1}{4}$; (d) 1; (e) $\frac{2}{3}$; (f) $\frac{1}{2}$ 。 (单位均为 MHz)

$$3-18 \quad F(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \left[\frac{\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{k\omega\tau}{\pi}\right)^2} \right]$$

$$3-19 \quad (a) \frac{A\omega_0}{\pi} \text{Sa}[\omega_0(t + t_0)] \quad (b) -\frac{2A}{\pi t} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$$

$$3-21 \quad F_1(-\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$3-22 \quad (1) \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \quad (2) \frac{\omega_0}{\pi} \text{Sa}(\omega_0 t) \quad (3) \left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)^2 \text{Sa}(\omega_0 t)$$

$$3-23 \quad 2jE\tau \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$3-24 \quad \frac{\tau_1}{4} \left\{ \text{Sa}^2\left[\frac{(\omega - \omega_0)\tau_1}{4}\right] + \text{Sa}^2\left[\frac{(\omega + \omega_0)\tau_1}{4}\right] \right\}$$

3-25 (1) $-\omega$; (2) 4; (3) 2π ; (4) 其图形为函数 $f(t)$ 之偶分量。

$$3-26 \quad \frac{8E}{\omega^2(\tau - \tau_1)} \sin \frac{\omega(\tau + \tau_1)}{4} \sin \frac{\omega(\tau - \tau_1)}{4}$$

$$3-27 \quad \frac{\omega_1 E}{\omega_1^2 - \omega^2} (1 + e^{-j\frac{\omega T}{2}}), \quad \frac{\omega_1 \omega^2 E}{\omega^2 - \omega_1^2} (1 + e^{-j\frac{\omega T}{2}}) \quad \left(\omega_1 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$3-28 \quad \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

$$3-29 \quad (1) \frac{1}{2} j \frac{dF\left(\frac{\omega}{2}\right)}{d\omega}$$

$$(2) j \frac{dF(\omega)}{d\omega} - 2F(\omega)$$

$$(3) -F\left(-\frac{\omega}{2}\right) + \frac{j}{2} \cdot \frac{dF\left(-\frac{\omega}{2}\right)}{d\omega}$$

$$(4) -F(\omega) - \omega \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

$$(5) F(-\omega) e^{-j\omega}$$

$$(6) -j \frac{dF(-\omega)}{d\omega} e^{-j\omega}$$

$$(7) \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

$$3-31 \quad \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = E_1 E_2 \tau_1 \tau_2 \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_1}{2}\right) \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_2}{2}\right)$$

$$3-32 \quad \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t) u(t)] = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t) u(t)] = j \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$3-33 \quad \frac{E\tau}{4} e^{-j\frac{\omega_0\tau}{2}} \left\{ \text{Sa}^2\left[\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{4}\right] e^{j\frac{\omega_0\tau}{2}} + \text{Sa}^2\left[\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{4}\right] e^{-j\frac{\omega_0\tau}{2}} \right\}$$

$$3-35 \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \text{Sa}^2 \left\{ \frac{[\omega - (2n-1)\frac{\pi}{T}]\tau_1}{4} \right\}$$

$$3-36 \quad (\text{a}) \text{ 傅里叶级数 } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\text{傅里叶变换 } F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$$

$$\text{其中 } F_n = \frac{2ET}{n^2\pi^2(T-\tau)} \sin \frac{n\pi(T+\tau)}{2T} \sin \frac{n\pi(T-\tau)}{2T}$$

$$(\text{b}) \text{ 傅里叶级数 } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\text{傅里叶变换 } F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$$

$$\text{其中 } F_n = (-1)^n \frac{2E}{\pi(1-4n^2)}$$

$$3-37 \quad (\text{a}) \frac{8}{\omega^2\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \frac{\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$(\text{b}) -\frac{4j}{\omega} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = -j \frac{\omega\tau^2}{4} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$(\text{c}) \frac{2\tau}{\pi} \frac{\cos \frac{\omega\tau}{2}}{\left[1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}$$

$$(\text{d}) \frac{2}{\omega} \left(\sin \frac{\omega\tau}{4} + \sin \frac{\omega\tau}{2} \right) = \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \left(1 + 2\cos \frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$3-39 \quad (1) \frac{100}{\pi}, \frac{\pi}{100}; \quad (2) \frac{200}{\pi}, \frac{\pi}{200};$$

$$(3) \frac{100}{\pi}, \frac{\pi}{100}; \quad (4) \frac{120}{\pi}, \frac{\pi}{120^\circ}$$

$$3-40 \quad (1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n F(\omega - n\omega_0);$$

$$(2) \frac{1}{2} [F\left(\omega - \frac{1}{2}\right) + F\left(\omega + \frac{1}{2}\right)];$$

$$(3) \frac{1}{2} [F(\omega - 1) + F(\omega + 1)];$$

$$(4) \frac{1}{2} [F(\omega - 2) + F(\omega + 2)];$$

$$(5) \frac{1}{4} [F(\omega - 1) + F(\omega + 1) - F(\omega - 3) - F(\omega + 3)];$$

$$(6) \frac{1}{2} [F(\omega - 2) + F(\omega + 2) - F(\omega - 1) - F(\omega + 1)];$$

$$(7) \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - 2n);$$

$$(8) \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n);$$

$$(9) \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - 2n) \right];$$

$$(10) \frac{1}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{n\pi/3} F(\omega - 2n).$$

$$3-41 (1) \frac{1}{3000};$$

(2) 梯形周期重复, 周期为 6000π , 幅度为 $\frac{3}{2}$.

第四章

$$4-1 (1) \frac{a}{s(s+\alpha)}$$

$$(2) \frac{2s+1}{s^2+1}$$

$$(3) \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$(4) \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$(5) \frac{s+3}{(s+1)^2}$$

$$(6) \frac{1}{s+\beta} - \frac{s+\beta}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$$

$$(7) \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}$$

$$(8) 2 - \frac{3}{s+7}$$

$$(9) \frac{\beta}{(s+\alpha)^2-\beta^2}$$

$$(10) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4\Omega^2} \right)$$

$$(11) \frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

$$(12) \frac{(s+1)e^{-\alpha}}{(s+1)^2+\omega^2}$$

$$(13) \frac{(s+2)e^{-(s-1)}}{(s+1)^2}$$

$$(14) aF(as+1)$$

$$(15) aF(as+a^2)$$

$$(16) \frac{1}{4} \left[\frac{3s^2-27}{(s^2+9)^2} + \frac{s^2-81}{(s^2+81)^2} \right]$$

$$(17) \frac{2s^3-24s}{(s^2+4)^3}$$

$$(18) -\ln\left(\frac{s}{s+\alpha}\right)$$

$$(19) \ln\left(\frac{s+5}{s+3}\right)$$

$$(20) \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{\alpha}$$

$$4-2 (1) \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-\frac{T}{2}s})$$

$$(2) \frac{\omega\cos\varphi+s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$$

$$4-3 (1) \frac{1}{s+1}e^{-2(s+1)}$$

$$(2) \frac{1}{s+1}e^{-2s}$$

$$(3) \frac{e^2}{s+1}$$

$$(4) \frac{2\cos 2+s\sin 2}{s^2+4}e^{-s}$$

$$(5) \frac{1}{s^2}[1-(1+s)e^{-s}]e^{-s}$$

$$4-4 (1) e^{-t}$$

$$(2) 2e^{-\frac{3}{2}t}$$

$$(3) \frac{4}{3}(1-e^{-\frac{3}{2}t})$$

$$(4) \frac{1}{5}[1-\cos(\sqrt{5}t)]$$

$$(5) \frac{3}{2}(e^{-2t}-e^{-4t})$$

$$(6) 6e^{-4t}-3e^{-2t}$$

$$(7) \sin t + \delta(t)$$

$$(8) e^{2t} - e^t$$

$$(9) 1-e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$(10) 1-2e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$(11) \frac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2} \left[e^{-\frac{t}{RC}} - \cos(\omega t) + \frac{1}{RC\omega} \sin(\omega t) \right]$$

$$(12) 7e^{-3t}-3e^{-2t}$$

$$(13) \frac{100}{199}(49e^{-t} + 150e^{-200t})$$

$$(14) e^{-t}(t^2 - t + 1) - e^{-2t}$$

$$(15) \frac{A}{K} \sin(Kt)$$

$$(16) \frac{1}{6} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t) - t \cos(\sqrt{3}t) \right]$$

$$(17) \frac{-\alpha}{(\alpha - \omega)^2 + \beta^2} \left\{ e^{-\alpha t} - \left[\cos(\beta t) + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2}{\alpha \beta} \sin(\beta t) \right] e^{-\alpha t} \right\}$$

$$(18) \frac{1}{(\beta^2 + \alpha^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\alpha)^2} \left\{ (\beta^2 + \alpha^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\omega\alpha \sin(\omega t) \right. \\ \left. + e^{-\alpha t} \left[(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2) \cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) \sin(\beta t) \right] \right\}$$

$$(19) \frac{1}{4} [1 - \cos(t - 1)] u(t - 1)$$

$$(20) \frac{1}{t} (e^{-9t} - 1)$$

4-5 (1) $f(0_+) = 1, f(\infty) = 0$

(2) $f(0_+) = 0, f(\infty) = 0$

4-6 $E\left(1 + \frac{R}{r} e^{-\frac{R}{L}t}\right) u(t)$

4-7 $\frac{R_2 E}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} C t}) u(t)$

4-8 $E\left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t}\right] u(t)$

4-9 设符号 $\alpha = \frac{1}{2RC}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$

$$i(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{2\alpha}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) \right] u(t)$$

4-10 (1) 设符号 $\alpha = \frac{R + R_0}{2RR_0C}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \text{ 且假设 } \alpha < \omega_0$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\alpha t} \left[\cos(\omega_d t) - \frac{\alpha}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] u(t)$$

(2) 设符号 $\alpha = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}, \beta = R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2$

$$p_1 = \frac{\alpha}{2} \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \frac{4}{\alpha}} \right), p_2 = \frac{\alpha}{2} \left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{4}{\alpha}} \right)$$

$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{p_2 - p_1} [(p_1 \alpha \beta + \alpha) e^{p_1 t} - (p_2 \alpha \beta + \alpha) e^{p_2 t}] u(t)$$

4-11 设 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, i(t) = \frac{E}{2L\omega_0} \sin(\omega_0 t) u(t)$

4-12 $-0.1t e^{-t} u(t)$

4-13 (a) $\frac{s}{RC \left(s^2 + \frac{3}{RC}s + \frac{1}{R^2 C^2} \right)}$

(b) $-\frac{s - \frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$

(c) $\frac{1}{6}$

4-14 (1) $\frac{R}{2} \left(\frac{1}{L-M} e^{-\frac{R}{L-M}t} - \frac{1}{L+M} e^{-\frac{R}{L+M}t} \right) u(t)$

(2) $\frac{1}{2} (e^{-\frac{R}{L+M}t} - e^{-\frac{R}{L-M}t}) u(t)$

4-15 $\frac{E}{2} e^{-20t} u(t) - \frac{E}{40T} \{ (1 - e^{-20t}) u(t) - [1 - e^{-20(t-T)}] u(t-T) \}$

4-16 (1) $H(s) = \frac{K}{s^2 + (3-K)s + 1}$

(2) 当 $K=2$ 时, $h(t) = \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$

4-17 $\frac{2E}{3} \left[\delta(t) + \frac{1}{12} e^{-\frac{t}{6}} u(t) \right]$

4-18 $H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1 - g^3}{3s^3 + 10s^2 + 11s + 4 + 2g^3}$

4-19 $\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$

4-20 (1) $\frac{1}{s(1 + e^{-\frac{sT}{2}})}$

(2) $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{sT}{2}}}{1 - e^{-\frac{sT}{2}}}$

4-21 (1) $\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nsT}$

(2) $\frac{1}{1 - e^{-(a+s)T}}$

4-23 (a) $H(s) = 1 + \frac{1}{s+1} \quad i(t) = \delta(t) - e^{-2t} u(t)$

(b) $H(s) = 2 - \frac{1}{s+1} \quad i(t) = \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{2}} u(t)$

(c) $H(s) = 1 + \frac{2s}{4s^2 + 1}$

$i(t) = \delta(t) + \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) \right] e^{-\frac{t}{4}} u(t)$

(d) $H(s) = \frac{10(s^2 + \frac{s}{20} + \frac{1}{4})}{s(s+5)}$

$i(t) = \frac{1}{10} \left\{ \delta(t) + \left[\frac{99}{20} \cos\left(\frac{\sqrt{399}}{40}t\right) - \frac{299}{20\sqrt{399}} \sin\left(\frac{\sqrt{399}}{40}t\right) \right] e^{-\frac{t}{40}} u(t) \right\}$

4-24 (a) $H(s) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{s + \frac{1}{C_1 R}}{s + \frac{1}{(C_1 + C_2)R}}$

$v_2(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \left[\delta(t) + \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)R} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}} u(t) \right]$

(b) $H(s) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{s}{s + \frac{R}{L_1 + L_2}}$

$v_2(t) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \left[\delta(t) - \frac{R}{L_1 + L_2} e^{-\frac{R}{L_1 + L_2}t} u(t) \right]$

$$(c) H(s) = \frac{s}{10s^2 + s + 10}$$

$$v_2(t) = \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{20}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) - \frac{1}{\sqrt{399}} \sin\left(\frac{\sqrt{399}}{20}t\right) \right] u(t)$$

$$(d) H(s) = \frac{0.1s}{s+1}$$

$$v_2(t) = 0.1 [\delta(t) - e^{-t} u(t)]$$

$$\begin{aligned} 4-25 \quad Z(s) = & Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6 + \frac{1}{Z_7 + \frac{1}{Y_8}}}}}}} \\ & \end{aligned}$$

$$4-26 \quad (a) \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1}$$

$$(b) \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1}$$

$$(c) \frac{1}{(4s^2 + 1)^2 + (4s^2 + 1)} - 1$$

$$(d) \frac{s^3}{(s^2 + 1)^2 + (s^2 + 1) - 1}$$

$$4-27 \quad \frac{3}{2} \delta(t) + (e^{-2t} + 8e^{3t}) u(t)$$

$$4-28 \quad \left(1 - \frac{1}{2} e^{-2t}\right) u(t)$$

$$4-29 \quad (1) \quad H(s) = \frac{5}{s^2 + s + 5} \quad (2) \text{ 极点 } p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{2}$$

$$(3) \quad h(t) = \frac{10}{\sqrt{19}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{19}}{2}t\right) u(t)$$

$$g(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{19}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{19}} \sin\left(\frac{\sqrt{19}}{2}t\right) \right] u(t)$$

$$4-30 \quad v_2(t) = \frac{5}{2} \left\{ -\frac{48}{37} \cos t + \frac{8}{37} \sin t + e^{-\frac{t}{16}} \left[\frac{48}{37} \cos\left(\frac{\sqrt{63}}{16}t\right) - \frac{80}{37\sqrt{63}} \sin\left(\frac{\sqrt{63}}{16}t\right) \right] \right\} u(t)$$

其中前两项为强迫响应，后两项为自由响应。

$$4-31 \quad (1) \quad H(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1}$$

$$(2) [v_2(0) - i_1(0)] t e^{-t} + i_1(0) e^{-t}$$

$$4-32 \quad (1) \quad H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

$$(2) \quad LC = \frac{1}{4} \quad (3) \quad (1-2t)e^{-2t} u(t)$$

4-33 $v_2(t) = 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$

自由 强迫

完全响应即瞬态响应，稳态响应为零。

4-35 $H(s) = \frac{5(s^3 + 4s^2 + 5s)}{s^3 + 5s^2 + 16s + 30}$

4-36 $K_1 = -\frac{\alpha - 3}{3}$

4-37 (1) $Z_1 = -\frac{R}{L}$ $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

(2) $R = 1 \Omega$ $L = \frac{1}{3} H$ $C = \frac{1}{10} F$

4-39 (a) 低通 (b) 带通 (c) 高通

(d) 带通 (e) 带通 (f) 带阻

(g) 高通 (h) 带通-带阻

4-40 (a) $H(s) = \frac{L_1 L_2 C s^3 + L_1 s}{L_1 L_2 C s^3 + R C (L_1 + L_2) s^2 + L_1 s + R}$

(b) $H(s) = \frac{L_1 L_2 C_1 s^2 + L_2}{L_1 L_2 (C_1 + C_2) s^2 + L_1 + L_2}$

(c) $H(s) = \frac{L_2 C_1 s^2}{L_1 L_2 C_1 C_2 s^4 + (L_1 C_1 + L_2 C_2 + L_2 C_1) s^2 + 1}$

4-41 $H(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1}$, 是全通。

4-42 (a) 是最小相移，其他都是非最小相移。

4-43 $H(s) = \frac{s - \frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$, 是全通。

4-44 $H(s) = -\frac{s^2 - \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}$

当 $R_1 C_1 = R_2 C_2$ 时构成全通。

4-45 (1) $H(s) = \frac{ks}{s^2 + (4 - k)s + 4}$

(2) $k \leq 4$

(3) $h(t) = 4\cos(2t)u(t)$

4-46 (1) $H(s) = \frac{k}{s^2 + (3 - k)s + 1}$

(2) $k \leq 3$, 稳定

4-47 $H(s) = \frac{K}{1 - KF} = \frac{\beta}{CR} \left[\frac{s}{s^2 + \left(\frac{G}{C} - \frac{\beta F}{R_1 C}\right)s + \frac{1}{LC}} \right]$

当 $G = \frac{\beta F}{R_1}$ 时极点之实部等于零

$$4-48 \quad H(s) = \frac{As^2}{s^2 + \left(\frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2} + \frac{1-A}{R_2C_1} \right)s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}},$$

$$\text{当满足 } A \leq 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2C_1}{R_1C_2}$$

$$4-49 \quad H(s) = \frac{RM}{L^2 - M^2} \frac{s}{\left(s + \frac{R}{L-M} \right) \left(s + \frac{R}{L+M} \right)}$$

$$4-50 \quad \frac{2a}{a^2 - s^2}, \text{ 收敛域 } -a < \sigma < a$$

第五章

$$5-1 \quad r(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

$$5-2 \quad r(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t - 45^\circ) + \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(3t - 72^\circ)$$

$$5-3 \quad H(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + j \frac{\pi\omega_0}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$h(t) = \omega_0 \sin(\omega_0 t) u(t)$$

$$5-4 \quad H(s) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1C_1}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2(C_1 + C_2)}}$$

$$\text{无失真条件 } R_1C_1 = R_2C_2$$

$$5-5 \quad H(s) = \frac{R_2s^2 + (1 + R_1R_2)s + R_1}{s^2 + (R_1 + R_2)s + 1}$$

$$\text{无失真条件 } R_1 = R_2 = 1 \Omega, \text{ 无延迟}$$

5-6 对两种信号的响应均为 $\text{Sa}[\omega_c(t - t_0)]$

$$5-7 \quad r(t) = \text{Sa}[\omega_0(t - t_0)]$$

$$5-9 \quad r(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \text{Si}\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right] - \text{Si}\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] \right\}$$

$$5-10 \quad h(t) = \frac{2\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)] \cos(\omega_0 t)$$

非因果，不能实现

$$5-11 \quad (1) \quad v_2(t) = \frac{1}{\pi} [\text{Si}(t - t_0 - T) - \text{Si}(t - t_0)]$$

$$(2) \quad v_2(t) = \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(t - t_0 - T)\right] - \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(t - t_0)\right]$$

$$5-12 \quad y(t) = \frac{1}{T} [tu(t) - (t - T)u(t - T) - (t - \tau)u(t - \tau) + (t - T - \tau)u(t - T - \tau)]$$

$$5-13 \quad h(t) = \frac{\omega_c}{2\pi} \left\{ \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)] + \frac{1}{2} \text{Sa}\left[\omega_c\left(t - t_0 + \frac{\pi}{\omega_c}\right)\right] + \frac{1}{2} \text{Sa}\left[\omega_c\left(t - t_0 - \frac{\pi}{\omega_c}\right)\right] \right\}$$

$$5-14 \quad h(t) = h_i(t) + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{2} \left[h_i\left(t - \frac{k}{\omega_1}\right) - h_i\left(t + \frac{k}{\omega_1}\right) \right]$$

$$\text{其中 } h_i(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)].$$

5-17 将 $F_1(\omega)$ 与本地载波信号之频谱(冲激函数)进行卷积(频域), 即可恢复含有 $G(\omega)$ 之频谱。再经低通滤波取出 $G(\omega)$

5-18 $V(\omega) = G(\omega + \omega_0)u(-\omega - \omega_0) + G(\omega - \omega_0)u(\omega - \omega_0)$

5-19 $\text{Sa}[\omega_c(t - t_0)]\cos(\omega_0 t)$

5-20 (1) $h(t) = \frac{\sin 2\Omega(t - t_0)}{\pi(t - t_0)}$;

(2) $r(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \Omega(t - t_0)}{\Omega(t - t_0)} \right]^2$;

(3) $r(t) = 0$;

(4) 是线性时变系统。

5-25 $\Delta < \frac{T}{4\pi}$, $a = \frac{\Delta}{T + \Delta}$, $k = \frac{1}{T + \Delta}$

第六章

6-3 不是。

6-4 不是。

6-6 当 $n=1$, $n=2$ 时 $\overline{\epsilon^2} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \approx 0.19$

当 $n=3$, $n=4$ 时 $\overline{\epsilon^2} = 1 - \frac{8}{\pi^2} - \frac{8}{(3\pi)^2} \approx 0.1$

6-8 $f(t) = -\frac{3}{2}P_1(t) + \frac{7}{8}P_3(t)$

6-9 $a = \frac{15}{4}(e - 7e^{-1})$ $b = 3e^{-1}$

$c = \frac{1}{4}(-3e + 33e^{-1})$

6-12 $\text{Wal}(7, t) = \text{sgn}[\cos(4\pi t)]\text{sgn}[\cos(2\pi t)]\text{sgn}[\cos(\pi t)]$

$\text{Wal}(8, t) = \text{sgn}[\cos(8\pi t)]$

$\text{Wal}(9, t) = \text{sgn}[\cos(8\pi t)]\text{sgn}[\cos(\pi t)]$

$\text{Wal}(10, t) = \text{sgn}[\cos(8\pi t)]\text{sgn}[\cos(2\pi t)]$

$\text{Wal}(11, t) = \text{sgn}[\cos(8\pi t)]\text{sgn}[\cos(2\pi t)]\text{sgn}[\cos(\pi t)]$

$\text{Wal}(12, t) = \text{sgn}[\cos(8\pi t)]\text{sgn}[\cos(4\pi t)]$

$\text{Wal}(13, t) = \text{sgn}[\cos(8\pi t)]\text{sgn}[\cos(4\pi t)]\text{sgn}[\cos(\pi t)]$

$\text{Wal}(14, t) = \text{sgn}[\cos(8\pi t)]\text{sgn}[\cos(4\pi t)]\text{sgn}[\cos(2\pi t)]$

$\text{Wal}(15, t) = \text{sgn}[\cos(8\pi t)]\text{sgn}[\cos(4\pi t)]\text{sgn}[\cos(2\pi t)]\text{sgn}[\cos(\pi t)]$

6-15 $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{8}$, $s_m = 0$

6-16 (1) $\frac{1}{2a}e^{-a|\tau|}$ (2) $\frac{E^2}{4}\cos(\omega_0 \tau)$

6-17 (1) $P = \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$

$\mathcal{P}(\omega) = \frac{\pi}{2} [A^2 \delta(\omega + 2000\pi) + A^2 \delta(\omega - 2000\pi) + B^2 \delta(\omega + 200\pi) + B^2 \delta(\omega - 200\pi)]$

$$(2) P = \frac{A^2}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega + 2000\pi) + \delta(\omega - 2000\pi)] \\ + \frac{\pi}{8} [\delta(\omega + 2200\pi) + \delta(\omega - 2200\pi) + \delta(\omega + 1800\pi) + \delta(\omega - 1800\pi)]$$

$$(3) P = \frac{A^2}{4}$$

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{\pi A^2}{8} [\delta(\omega + 2200\pi) + \delta(\omega - 2200\pi) + \delta(\omega + 1800\pi) + \delta(\omega - 1800\pi)]$$

$$(4) P = \frac{A^2}{4}$$

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{\pi A^2}{8} [\delta(\omega + 2200\pi) + \delta(\omega - 2200\pi) + \delta(\omega + 1800\pi) + \delta(\omega - 1800\pi)]$$

$$(5) P = \frac{A^2}{4}$$

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{\pi A^2}{8} [\delta(\omega + 2300\pi) + \delta(\omega - 2300\pi) + \delta(\omega + 1700\pi) + \delta(\omega - 1700\pi)]$$

$$(6) P = \frac{3A^2}{16}$$

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{\pi A^2}{8} [\delta(\omega + 2000\pi) + \delta(\omega - 2000\pi)] \\ + \frac{\pi A^2}{32} [\delta(\omega + 2400\pi) + \delta(\omega - 2400\pi) + \delta(\omega + 1600\pi) + \delta(\omega - 1600\pi)]$$

$$6-19 \quad \mathcal{E}_r(\omega) = \frac{4}{1+\omega^2} [u(\omega+1) - u(\omega-1)]$$

$$6-20 \quad (1) \quad \mathcal{P}_r(\omega) = \frac{8}{\pi^2} [\delta(\omega+6) + \delta(\omega-6)]$$

$$\overline{r^2(t)} = \frac{8}{\pi^2}$$

$$(2) \quad \mathcal{P}_r(\omega) = 0 \quad \overline{r^2(t)} = 0$$

$$6-21 \quad (1) \quad r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) s(x+T-t) dx$$

$$(2) \quad r(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) s(x) dx$$

6-22 M_0 对 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 的响应以及 M_1 对 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 的响应在 $t=4$ 时刻的值分别为 4, 2, 2, 4。

6-23 两路输出信号的频谱分别为

$$\frac{1}{2} G_1(\omega) + \frac{1}{4} [G_1(\omega + 2\omega_0) + G_1(\omega - 2\omega_0)] + \frac{j}{4} [G_2(\omega + 2\omega_0) - G_2(\omega - 2\omega_0)] \text{ 和}$$

$$\frac{1}{2} G_2(\omega) + \frac{j}{4} [G_1(\omega + 2\omega_0) - G_1(\omega - 2\omega_0)] - \frac{1}{4} [G_2(\omega + 2\omega_0) + G_2(\omega - 2\omega_0)]$$

经低通滤除 $2\omega_0$ 附近的信号可分别取出 $G_1(\omega)$ 或 $G_2(\omega)$ 成分，与时域分析结论相同。

索 引

二 画

人工神经网络 neural network 37, 241

三 画

上升时间 rise time 278, 363
已调信号 modulated signal 286, 287
子波(小波) wavelet 293, 313

四 画

方程 equation 29, 31
 代数～ algebraic～ 31
 微分～ differential～ 31, 42
 偏微分～ partial differential～ 31
 差分～ difference～ 31
方均值(均方值) mean-square value 325
方均误差(均方误差) mean-square error 99, 325
分解 decomposition 23
分量 component 23
 直流～ direct～ 23
 交流～ alternating～ 23
 正弦～ sine～ 89
 余弦～ cosine～ 89
 基波～ fundamental～ 90
 谐波～ harmonic～ 90
 偶～ even～ 23
 奇～ odd～ 23
 脉冲～ pulse～ 24
 实～ real～ 26
 虚～ imaginary～ 26
分形 fractal 27

内积 inner product	321
匹配滤波器 match filter	358
无失真传输 distortionless transmission	270
尺度(变换)特性 scaling property	76, 126, 186

五 画

电路 circuit	2
电压 voltage	206
~源 ~source	201
电流 current	206
~源 ~source	201
功率 power	319, 331
~谱 power spectrum	351, 353
平均~ average~	319, 342
正弦积分 sine integral	276
正交 orthogonal	324
~性 orthogonality	324
~函数 ~function	325
~分量 ~component	325
~函数集 set of ~ function	327
完备~函数集 complete set of ~ function	300
规格化~函数集 normalized set of ~ function	329
包络线 envelop	105, 290
对称性 symmetry	123
对偶性 duality	21, 29
齐次性(均匀性) homogeneity	33
齐次解 homogeneous solution	45
失真 distortion	270
幅度~ amplitude~	270
相位~ phase~	270
线性~ linear~	270
矢量空间 vector space	316, 317
白噪声 flat noise	352
可逆系统 invertible system	32
可实现性 realizability	280
系统的物理~ physical ~ of system	280
本地载波 local carrier	287

六 画

冲激 impulse	16
~函数 ~function	16, 72
~响应 ~response	58, 205
~偶 doublet	21, 78
因果性 causality	34
因果系统 causal system	35
收敛 convergence	177
~域 region of ~	178
~轴(坐标) axis (Abscissa) of ~	178
有效值 effective value	320
有理分式 rational fraction	190
多项式 polynomical	332
切比雪夫~ Chebyshev ~	332
勒让德~ Legendre ~	332
雅可比~ Jacobi ~	332
多路复用 multiplex	286, 302
频分~ frequency-division~(FDM)	302
时分~ time-division~(TDM)	303
码分~ code-division~(CDM)	366
吉布斯现象 Gibbs phenomenon	101, 279
共轭 conjugate	192, 210, 226
阶(次) order	29
同步解调 synchronous detection	288
网络 network	2, 3
滤波~ filter~	218
全通~ all-pass~	234
最小相移~ minimum-phase~	236
信息~ information~	1, 2, 3
全球定位系统(GPS) global positioning system	1
异步传递方式(ATM) asynchronous transfer mode	307
传输算子 transfer operator	72, 208

七 画

系统 system	2, 28
线性~ linear~	31, 57
非线性~ nonlinear~	31

时不变 ~ time-invariant ~	31, 58
时变 ~ time-varying ~	31
连续时间 ~ continuous-time ~	31, 42
离散时间 ~ discrete-time ~	31
集总参数 ~ lumped-parameter ~	31
分布参数 ~ distributed-parameter ~	31
即时 ~ instantaneous ~	31
动态 ~ dynamic ~	31
稳定 ~ stable ~	237
不稳定 ~ nonstable ~	237
临界稳定 ~ marginally stable ~	237
物理 ~ physical ~	3
非物理 ~ nonphysical ~	3
人工 ~ man-made ~	3
自然 ~ natural ~	3
~函数 ~ function	203, 266
间断点(不连续点) discontinuous point	101
杜阿美尔 Duhamel	61
状态 state	48
~变量方法 ~ variable method	35
初始 ~ initial ~	48
起始 ~ original ~	48
初始条件 initial condition	48
初值定理 initial value theorem	187
极点 pole	191, 208
围线积分 contour integral	195
均匀性(齐次性) homogeneity	33
狄利克雷条件 Dirichlet condition	90, 113
时域 time domain	42
时间常数 time constant	7, 278
时移特性 time-shifting property	76, 129, 185
希尔伯特变换 Hilbert transform	283

八 画

函数 function	4
奇 ~ odd ~	94
偶 ~ even ~	94
奇谐 ~ odd harmonic ~	95

奇异～ singularity～	13
抽样～ (Sa～)sampling (Sa)～	8
冲激～ impulse～	16, 72
单位冲激～ unit impulse～	16
狄拉克～ Dirac's～	18
δ ～ Delta～	17
阶跃～ step～	14
单位阶跃～ unit step～	14
指数阶～ ~of exponential order	178
转移～ transfer～	206, 207
策动点～ driving point～	205, 206
系统～ system～	203, 265
网络～ network～	204
原～ orginal～	175
象～ transform～	175
频谱～ spectrum～	111
频谱密度～ spectrum density～	111
全通～ all-pass～	232
最小相移～ minimum-phase～	237
符号(正负号)～ signum～	16
沃尔什～ Walsh～	333
拉德马赫～ Rademacher～	332
实～ real～	124
虚～ imaginary～	125
有理～ rational～	190
分配～ distribution～	73
广义～ generalized～	73
检试～ testing～	73
相关～ correlation～	344
抽样 sampling	150
～(频)率～ (frequency)rate	158
～间隔～ interval	158
时域～ time domain～	151
频域～ frequency domain～	154
冲激～ impulse～	153
抽样定理 sampling theorem	157
时域～ time domain～	158
频域～ frequency domain～	159

拉普拉斯变换 Laplace transform	174
单边 ~ single-sided ~	176
双边 ~ two-sided (bilateral) ~	176, 242
~的性质 properties of ~	181
拉普拉斯逆变换 inverse Laplace transform	190
卷积 convolution	58, 61, 347,
	189
~积分 ~ integral	58, 62
~的性质 properties of ~	64
卷积定理 convolution theorem	138, 189
时域 ~ time domain ~	139, 189
频域 ~ frequency domain ~	139, 189
留数 residue	190
~定理 ~ theorem	190, 195
奈奎斯特频率 Nyquist frequency	159
奈奎斯特间隔 Nyquist interval	159
周期 period	4
帕塞瓦尔方程 Parseval's equation	331
帕塞瓦尔定理 Parseval's theorem	331
佩利—维纳准则 Paley-Wiener criterion	280
终值定理 final theorem	188
变换域 transform domain	36, 88
~方法 ~ method	36
欧拉公式 Euler's formula	8
实部 real part	26, 123
实轴 real axis	210
码分多址(CDMA) code division multiple access	365

九 画

信号 signal	1, 4, 9, 23
周期 ~ periodic ~	4
非周期 ~ nonperiodic (aperiodic) ~	4
确定性 ~ determinate ~	4
随机 ~ random ~	4
连续(时间) ~ continuous (time) ~	5
离散(时间) ~ discrete (time) ~	5
数字 ~ digital ~	5
模拟 ~ analog ~	5

指数 ~ exponential ~	6
正弦 ~ sine ~	7
余弦 ~ cosine ~	7
复指数 ~ complex exponential ~	8
斜变 ~ ramp ~	13
矩形脉冲 ~ rectangular pulse ~	15, 101, 109
三角形脉冲 ~ triangular pulse ~	106
锯齿波 ~ sawtooth wave ~	106
高斯(钟形脉冲) ~ Gaussian ~	9, 116
升余弦 ~ raised cosine ~	118
升余弦滚降 ~ raised cosine roll-off	164
冲激 ~ impulse ~	16, 119, 180
单位冲激 ~ unit impulse ~	16, 119
阶跃 ~ step ~	14, 121, 179
单位阶跃 ~ unit step ~	14, 121
能量 ~ energy ~	341
功率 ~ power ~	341
信息高速公路 information super-highway	307, 309
测不准原理 uncertainty principle	362
柯西 - 施瓦茨不等式 Cauchy-Schwarz inequality	323
范数 norm	318
相关 correlation	341, 347
自 ~ autocorrelation	345
互 ~ crosscorrelation	345
系数 ~ coefficient	342
定理 ~ theorem	348
函数 ~ function	342
响应 response	29
零状态 ~ zero-state ~	52
零输入 ~ zero-input ~	52
稳态 ~ steady-state ~	57, 217
瞬态 ~ transient ~	57, 217
自由 ~ natural ~	47, 215
强迫 ~ forced ~	47, 215
冲激 ~ impulse ~	58
阶跃 ~ step ~	58
完全 ~ total ~	47
脉冲宽度 width of pulse	104

脉冲编码调制(PCM)	pulse code modulation	300
复频率	complex frequency	176
矩阵	matrix	208
范德蒙特~	Vandermonde~	47

十一画

消息	message	1
通信	communication	2, 285
通带	pass-band	230
通带宽度	width of pass-band	230
部分分式展开	partial fraction expansion	190
载波	carrier wave, carrier	286
调制	modulation	285
振幅~(调幅)	amplitude~ (AM)	289
抑制载波振幅~	suppressed carrier amplitude ~ (SC-AM)	289
单边带~	single side-band~ (SSB)	289, 312
特解	particular solution	45
特征根	characteristic root	45
特征方程	characteristic equation	45
诺顿定理	Norton's theorem	201

十二画

离散	discrete	5
~时间信号	~ time signal	5
~时间系统	~ time system	31
虚部	imaginary part	26, 124
虚轴	imaginary axis	210
基尔霍夫电压定律	Kirchhoff's voltage law (KVL)	201
基尔霍夫电流定律	Kirchhoff's current law (KCL)	201
维纳-欣钦关系	Wiener-Khintchine relation	352
混叠	aliasing	158
混沌	chaos	4
综合业务数字网(ISDN)	integrated services digital network	307
理想低通滤波器	ideal low-pass filter	274

十三画

傅里叶级数	Fourier series	89
三角~	trigonometric~	89

指数 ~ exponential ~	91
广义 ~ generalized ~	331
有限项 ~ finite term ~	97
傅里叶变换 Fourier transform	109
~的性质 properties of ~	122
离散 ~ discrete ~ (DFT)	36
快速 ~ fast ~ (FFT)	36
傅里叶分析 Fourier analysis	88
傅里叶系数 Fourier coefficient	94
量化 quantization	300
窗函数 window function	279, 291

十三 画

频率 frequency	7
角 ~ angular ~	7
固有(自然) ~ natural	47, 215
截止 ~ cut-off ~	218, 278
频率响应 frequency response	217
频谱 frequency spectrum, spectrum	90
离散 ~ discrete ~	91, 113
连续 ~ continuous ~	113
~密度 ~ density	109
周期信号的 ~ ~ of periodic signal	101
非周期信号的 ~ ~ of nonperiodic signal	112
幅度 ~ amplitude ~	91
相位 ~ phase ~	91
复数 ~ complex ~	92
能量 ~ energy ~	350
功率 ~ power ~	351, 353
频域 frequency domain	88, 176
~分析 ~ analysis	88
复 ~ complex ~	176
频移特性 frequency-shifting property	131
频带宽度 bandwidth	103
群时延 group delay	272, 290
零点 zero	191, 209
零极点图 zero-pole plot (diagram)	210
零输入线性 zero-input linearity	57

零状态线性 zero-state linearity	57
叠加性 superposition property	33
遗传算法 genetic algorithm	37

十四画以上

算子符号 operational notation	69
稳定 stabilization	237
~性 stability	237
~系统 stable system	238
激励 excitation	205
~函数 ~function	353
~信号 ~signal	29
戴维宁定理 Thevenin's theorem	201
模型 model	28
模拟 - 数字(A/D)转换 analog-to-digital conversion	300
模糊集理论 fuzzy set theory	37
黎曼 - 勒贝格定理 Riemann-Lebesgue theorem	80

普通高等教育“九五”国家级重点教材

信号与系统

(第二版)

下 册

郑君里 应启珩 杨为理

高等教育出版社

内容提要

本书是1981年出版《信号与系统》(高等教育出版社出版)的修订版。本版与第一版的结构层次大体相同，仍然是研究确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念和基本分析方法，从时间域到变换域，从连续到离散，从输入输出描述到状态空间描述，以通信和控制工程作为主要应用背景，注重实例分析。

与第一版相比较，全书内容作了较大幅度更新，以适应当代信息科学与技术发展的最新需要。上册共六章，包括绪论、连续系统时域分析、傅里叶变换、拉普拉斯变换、滤波、调制与抽样、信号的矢量空间分析；下册也为六章，包括离散系统时域分析、 z 变换、离散傅里叶变换、模拟与数字滤波器、反馈系统、状态变量分析。

本书是普通高等教育“九五”国家级重点教材，可作为高等学校工科或理科信号与系统类型课程的教材，也可供科研与工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统 下册/郑君里等著. —2 版. —北京: 高等教育出版社, 2000 (2001 重印)

普通高等教育“九五”国家级重点教材

ISBN 7-04·007983-6

I. 信… II. 郑… III. 信号系统—高等学校—教材
IV. TN911. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 17623 号

信号与系统(第二版)下册

郑君里 应启珩 杨为理

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16

版 次 1981 年 7 月第 1 版

印 张 25.75

2000 年 5 月第 2 版

字 数 480 000

印 次 2001 年 4 月第 3 次印刷

定 价 30.10 元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等
质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内容提要

本书是1981年出版《信号与系统》(高等教育出版社出版)的修订版。本版与第一版的结构层次大体相同，仍然是研究确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念和基本分析方法，从时间域到变换域，从连续到离散，从输入输出描述到状态空间描述，以通信和控制工程作为主要应用背景，注重实例分析。

与第一版相比较，全书内容作了较大幅度更新，以适应当代信息科学与技术发展的最新需要。上册共六章，包括绪论、连续系统时域分析、傅里叶变换、拉普拉斯变换、滤波、调制与抽样、信号的矢量空间分析；下册也为六章，包括离散系统时域分析、 z 变换、离散傅里叶变换、模拟与数字滤波器、反馈系统、状态变量分析。

本书是普通高等教育“九五”国家级重点教材，可作为高等学校工科或理科信号与系统类型课程的教材，也可供科研与工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统 下册/郑君里等著. —2 版. —北京: 高等教育出版社, 2000 (2001重印)

普通高等教育“九五”国家级重点教材

ISBN 7-04-007983-6

I. 信… II. 郑… III. 信号系统—高等学校—教材
IV. TN911. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 17623 号

信号与系统(第二版)下册

郑君里 应启珩 杨为理

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16

版 次 1981 年 7 月第 1 版

印 张 25.75

2000 年 5 月第 2 版

字 数 480 000

印 次 2001 年 4 月第 3 次印刷

定 价 30.10 元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等
质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

责任编辑 刘激扬
封面设计 于文燕
责任绘图 尹 莉
版式设计 马静如
责任校对 许月萍
责任印制 韩 刚



目 录

第七章 离散时间系统的时域分析	1
7.1 引言	1
7.2 离散时间信号——序列	3
7.3 离散时间系统的数学模型	9
7.4 常系数线性差分方程的求解	15
7.5 离散时间系统的单位样值(单位冲激)响应	27
7.6 卷积(卷积和)	31
7.7 解卷积(反卷积)	35
习题	36
第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析	43
8.1 引言	43
8.2 z 变换定义、典型序列的 z 变换	44
8.3 z 变换的收敛域	49
8.4 逆 z 变换	54
8.5 z 变换的基本性质	61
8.6 z 变换与拉普拉斯变换的关系	74
8.7 利用 z 变换解差分方程	79
8.8 离散系统的系统函数	82
8.9 序列的傅里叶变换(DTFT)	87
8.10 离散时间系统的频率响应特性	94
习题	103
第九章 离散傅里叶变换以及其他离散正交变换	110
9.1 引言	110
9.2 傅里叶变换的离散性与周期性	111
9.3 从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换	117
9.4 离散傅里叶变换的性质	123
9.5 离散傅里叶变换与 z 变换的关系	132
9.6 快速傅里叶变换(FFT)	135
9.7 离散傅里叶变换的应用	146
9.8 沃尔什变换及其应用举例	154

2 目 录

9.9 离散余弦变换(DCT)	163
习题	166
第十章 模拟与数字滤波器	171
10.1 引言	171
10.2 无源一端口模拟网络综合	173
10.3 无源二端口模拟网络综合	177
10.4 模拟滤波器的逼近	182
10.5 模拟滤波器的频率变换与元件变换	199
10.6 无限冲激响应(IIR)数字滤波器	209
10.7 有限冲激响应(FIR)数字滤波器	223
10.8 RC 有源滤波器	237
10.9 开关电容滤波器(SCF)	241
习题	251
第十一章 反馈系统	256
11.1 引言	256
11.2 反馈系统的基本特性及其应用	259
11.3 利用反馈系统产生自激振荡	266
11.4 根轨迹	270
11.5 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据	279
11.6 信号流图	286
习题	297
第十二章 系统的状态变量分析	305
12.1 引言	305
12.2 连续时间系统状态方程的建立	309
12.3 连续时间系统状态方程的求解	320
12.4 离散时间系统状态方程的建立	331
12.5 离散时间系统状态方程的求解	340
12.6 状态矢量的线性变换	346
12.7 系统的可控性与可观测性	354
习题	364
附录四 几何级数的求值公式表	372
附录五 序列的 z 变换表	375
习题答案	377
索引	397
参考书目	403

第七章 离散时间系统的时域分析

7.1 引言

离散时间系统的研究源远流长。17世纪发展起来的经典数值分析技术奠定了这方面的数学基础。20世纪40和50年代，抽样数据控制系统的研究取得了重大进展。60年代以后，计算机科学的进一步发展与应用标志着离散时间系统的理论研究和实践进入了一个新阶段。1965年，库利(J.W.Cooley)与图基(J.W.Tukey)在前人工作的基础上发表了计算傅里叶变换高效算法的文章，这种算法称为快速傅里叶变换，缩写为FFT。FFT算法的出现引起了人们的巨大兴趣，迅速地得到了广泛应用。与此同时，超大规模集成电路研制的进展使得体积小、重量轻、成本低的离散时间系统有可能实现。在信号与系统分析的研究中，人们开始以一种新的观点——数字信号处理的观点来认识和分析各种问题。

20世纪末期，数字信号处理技术迅速发展，应用日益广泛，例如在通信、雷达、控制、航空与航天、遥感、声纳、生物医学、地震学、核物理学、微电子学……等诸多领域已卓见成效。随着应用技术的发展，离散时间信号与系统自身的理论体系逐步形成，并日趋丰富和完善。

离散时间系统的分析方法在许多方面与连续时间系统的分析方法有着并行的相似性。我们熟知，对于连续时间系统，其数学模型是用微分方程描述的。与之相应，离散时间系统是由差分方程表示的。差分方程与微分方程的求解方法在相当大的程度上一一对应。在连续时间系统中，卷积方法的研究与应用有着极其重要的意义；与此类似，在离散时间系统的研究中，卷积和（简称卷积）的方法具有同样重要的地位。在连续时间系统中，广泛地应用变换域方法——拉普拉斯变换与傅里叶变换方法，并运用系统函数的概念来处理各种问题；在离散时间系统中也同样普遍地运用变换域方法和系统函数的概念，这里的变换域方法包括 z 变换、离散傅里叶变换以及其他多种离散正交变换（如沃尔什变换、离散余弦变换等等）。

在第三章曾讨论连续信号的抽样，这仅仅是给出离散时间信号的方式之一，作为离散时间信号源更为一般的例子如数字计算机系统的输出、输入信号

2 第七章 离散时间系统的时域分析

以及各种直接给出的时间序列。通常，这里产生的各种数据流不一定与连续信号有某种依从关系，因此，不能把离散时间信号狭隘地理解为连续信号的抽样或近似。

参照连续时间系统的某些方法学习离散时间系统理论的时候，必须注意它们之间存在着一些重要差异，这包括数学模型的建立与求解、系统性能分析以及系统实现原理等等。正是由于差异的存在，才使得离散时间系统有可能表现出某些独特的性能。

与连续时间系统相比较，离散时间系统具有下列优点：容易做到精度高、可靠性好，便于实现大规模集成，从而在重量和体积方面显示其优越性。一般的数字系统中都包括有存储器，存储器的合理运用可以使系统具有灵活的功能，这些功能在连续时间系统中往往难以实现。此外，对于连续时间系统，通常只注重一维变量的研究，而在离散时间系统中，二维或多维技术得到广泛应用。近年来，由于可编程器件制作技术日趋成熟，对于数字系统容易利用可编程技术，借助于软件控制，适应用户设计与修改系统的各种需求，大大改善了设备的灵活性与通用性，在连续系统中这是难以实现的。

离散时间系统具有如此显著的优点，因而，离散时间系统(主要是数字信号处理系统)的应用几乎涵盖了国民经济建设与科学技术的所有领域，数字化技术逐步渗透到人类工作与生活的每个角落。近年来，人们提出了“数字地球”、“数字化世界”以及“数字化生存”等概念，以数字化的观念认识我们生存的这颗星球，充分利用数字信息技术推动社会的进步与发展。有人认为：在今天的孩童眼中，以数字化技术形成的光盘和信息网络就好像成年人眼中的空气和水一样平常。数字化生存如同一条鸿沟横亘于两代人之间，年长者必须迎头赶上。数字化浪潮正在席卷全球，数字信号处理技术正在使人类生产和生活质量提高到前所未有的新境界。

另一方面，不能认为数字化技术将取代一切连续时间系统的应用。实际上，人类在自然界中遇到的待处理信号相当多的部分都是连续时间信号，借助离散时间系统对其进行处理时，需经 A/D、D/A 转换，转换部分及其前后往往不能避免连续时间系统的出现；此外，当工作频率较高时，直接采用数字集成电路尚有一些困难，有时，用连续时间系统处理或许比较简便。因此，模拟信号处理与传输系统仍在一定范围内发挥作用。

在许多通信与电子设备中，经常遇到连续时间系统与离散时间系统组合构成的“混合系统”。例如，“软件无线电”(software radio)是继模拟通信、数字通信之后的最新一代通信技术。它是充分数字化的无线电通信系统，其 A/D、D/A 转换器尽可能靠近天线，在射频端与终端最低限度保留了部分连续时间系统。因而可将此系统看作是一台带有天线的“超级”计算机。它充分发挥了

数字系统的优点，利用可编程技术选择多种功能和体制，在通用化、模块化、兼容性、灵活性诸方面使无线电通信设备的面貌焕然一新。软件无线电显示了当代数字化技术发展的最新特征，也说明了适当利用连续时间系统的必要性。实际上，在研究与开发新产品过程中，最佳地协调模拟与数字部件的组合已成为系统设计师的首要职责。

从本章到第九章介绍离散时间系统的基本概念和基本分析方法，仍然是从时间域到变换域。第十至十二章将连续与离散时间系统的某些问题交叉并行讨论，包括滤波器、反馈以及系统的状态空间分析。

7.2 离散时间信号——序列

在上册绪论中曾定义，表示离散信号的时间函数，只在某些离散瞬时给出函数值。因此，它是时间上不连续的“序列”。通常，给出函数值的离散时刻之间隔是均匀的。若此间隔为 T ，以 $x(nT)$ 表示此离散时间信号，这里， nT 是函数的宗量， n 取整数 ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。在离散信号传输与处理设备中，有时将信号寄放在存储器中，可以随时取用。离散时间信号的处理也可能是先记录、后分析(即所谓“非实时”的)，短时间存入的数据要在较长时间内才能完成分析。因此，考虑到这些因素，对于离散时间信号来说，往往不必以 nT 作为宗量，可以直接以 $x(n)$ 表示此序列。这里， n 表示各函数值在序列中出现的序号。也可以说，一个离散时间信号就是一组序列值的集合 $\{x(n)\}$ 。为书写简便，以 $x(n)$ 表示序列，不再加注外面的括号。 $x(n)$ 可写成一般闭式的表达式，也可逐个列出 $x(n)$ 值。通常，把对应某序号 n 的函数值称为在第 n 个样点的“样值”。

离散时间信号也常用图解(即波形)表示，线段的长短代表各序列值的大小，有时，可将它们的端点连接起来。例如，图 7-1 示出某序列 $x(n)$ 的波形。虽然在此图中横轴绘成一条连续的直线，但是必须认识到， $x(n)$ 仅对 n 的整数值才有定义，对于 n 的非整数值， $x(n)$ 没有意义。

与连续时间系统的研究类似，在离散系统分析中，经常

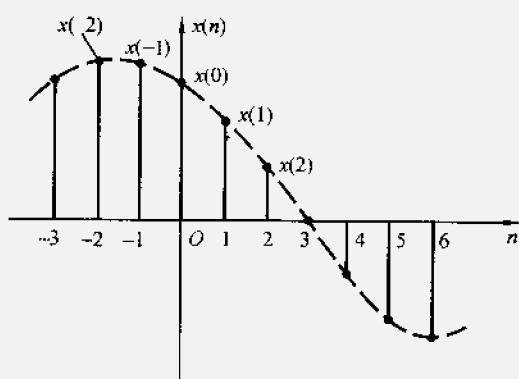


图 7-1 离散时间信号的图形

4 第七章 离散时间系统的时域分析

遇到离散时间信号的运算，包括两信号的相加、相乘以及序列自身的移位、反褶、尺度倍乘以及差分、累加等等。

序列 $x(n)$ 与 $y(n)$ 相加是指两序列同序号的数值逐项对应相加构成一个新序列 $z(n)$

$$z(n) = x(n) + y(n) \quad (7-1)$$

类似地，二者相乘表示同序号样值逐项对应相乘构成一个新的序列 $z(n)$

$$z(n) = x(n)y(n) \quad (7-2)$$

序列延时 $x(n-m)$ 是指原序列 $x(n)$ 逐项依次右移(后移) m 位后给出一个新序列

$$z(n) = x(n-m) \quad (7-3)$$

若向左移位(向前移位)，其表达式为

$$z(n) = x(n+m) \quad (7-4)$$

序列的反褶表示将自变量 n 更换为 $-n$ ，表达式为

$$z(n) = x(-n) \quad (7-5)$$

序列的尺度倍乘将波形压缩或扩展，若将自变量 n 乘以正整数 a ，构成 $x(an)$

为压缩，而 $x\left(\frac{n}{a}\right)$ 则为波形扩展。必须注意，这时要按规律去除某些点或补足相应的零值。因此，也称这种运算为序列的“重排”。

例 7-1 若 $x(n)$ 波形如图 7-2(a) 所示，求 $x(2n)$ 和 $x\left(\frac{n}{2}\right)$ 的波形。

解

$x(2n)$ 波形如图 7-2(b)，这时，对应 $x(n)$ 波形中 n 为奇数的各样值已不存在，只留下 n 为偶数的各样值，波形压缩。而 $x\left(\frac{n}{2}\right)$ 波形如图 7-2(c)，图中，对于 $x\left(\frac{n}{2}\right)$ 的 n 为奇数值各点应补入零值， n 为偶数值各点取得 $x(n)$ 波形中依次对应的样值，因而波形扩展。

与连续时间信号的微分、积分运算相对应，离散时间信号分析过程中往往需要进行差分和累加运算。差分运算是指相邻两样值相减，其中，前向差分以符号 $\Delta x(n)$ 表示

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (7-6)$$

而后向差分 $\nabla x(n)$ 表达式为

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \quad (7-7)$$

累加运算的结果表示为

$$z(n) = \sum_{K=-\infty}^n x(K) \quad (7-8)$$

注意对于给定的信号 $x(K)$ ，当指定 n 值后 $z(n)$ 为确定的数值。当然，这里已

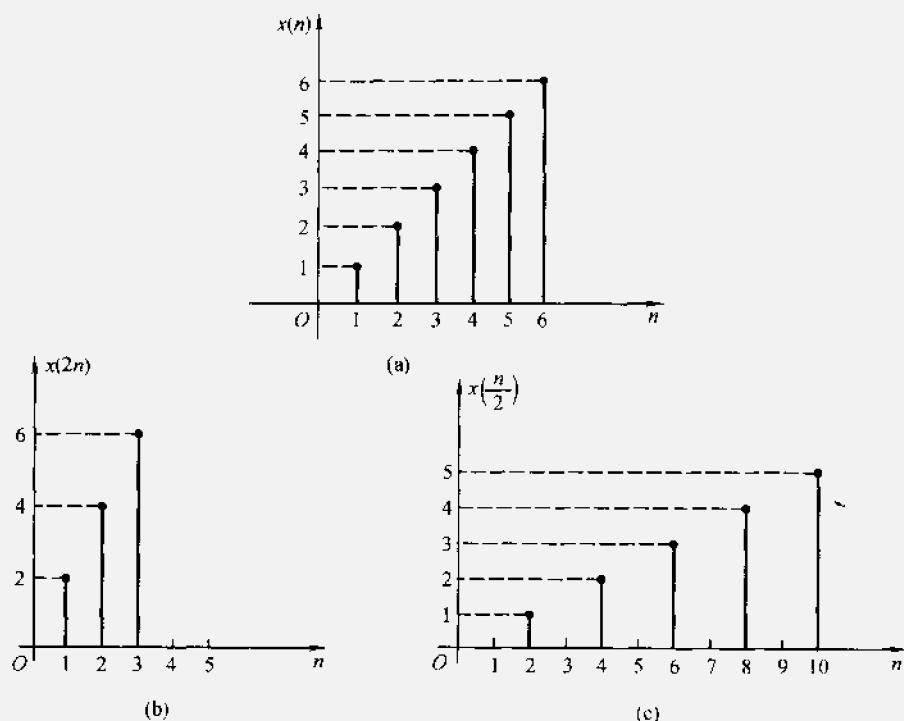


图 7-2 例 7-1 的波形

假定式中无限项取和是收敛的。

此外，有时需要论及序列的能量，序列 $x(n)$ 的能量定义为

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (7-9)$$

下面介绍一些常用的典型序列：

(1) 单位样值信号 (Unit Sample 或 Unit Impulse)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (7-10)$$

此序列只在 $n=0$ 处取单位值 1，其余样点上都为零，如图 7-3。也称为“单位取样”、“单位函数”、“单位脉冲”或“单位冲激”^①。它在离散时间系统中的作用，类似于连续时间系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$ 。但是，应注意它们之间的重要区别， $\delta(t)$ 可理解为在 $t=0$ 点脉宽趋于零，幅度为无限大的信

^① 为便于读者查阅参考书，把可能遇到的几种名称都已列上。

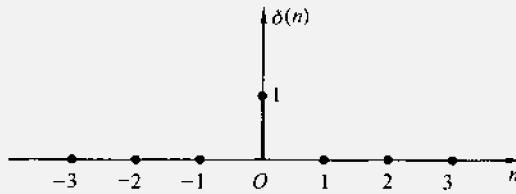


图 7-3 单位样值

号，或由分配函数定义；而 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 点取有限值，其值等于 1。

(2) 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1 & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases} \quad (7-11)$$

它的图形如图 7-4。类似于连续时间系统中的单位阶跃信号 $u(t)$ 。但应注意 $u(t)$ 在 $t=0$ 点发生跳变，往往不予定义（或定义为 $\frac{1}{2}$ ），而 $u(n)$ 在 $n=0$ 点明确规定为

$$u(0)=1$$

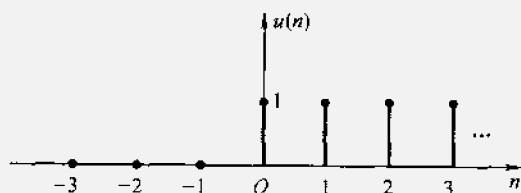


图 7-4 单位阶跃序列

(3) 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (n < 0, n \geq N) \end{cases} \quad (7-12)$$

它从 $n=0$ 开始，到 $n=N-1$ ，共有 N 个幅度为 1 的数值，其余各点皆为零（见图 7-5）。类似于连续时间系统中的矩形脉冲。显然，矩形序列取值为 1 的范围也可从 $n=m$ 到 $n=m+N-1$ 。这种序列可写作 $R_N(n-m)$ 。

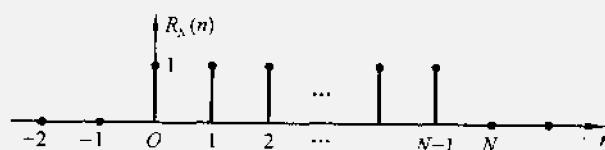


图 7-5 矩形序列

以上三种序列之间有如下关系：

$$u(n) = \sum_{K=0}^{\infty} \delta(n-K) \quad (7-13)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (7-14)$$

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad (7-15)$$

(4) 斜变序列

$$x(n) = nu(n) \quad (7-16)$$

见图 7-6。它与连续时间系统中的斜变函数 $f(t) = t$ 相像。类似地，还可以给出 $n^2 u(n), n^3 u(n), \dots, n^k u(n)$ 等序列。

(5) 指数序列

$$x(n) = a^n u(n) \quad (7-17)$$

当 $|a| > 1$ 时序列是发散的， $|a| < 1$ 时序列收敛， $a > 0$ 序列都取正值， $a < 0$ 序列在正、负摆动。

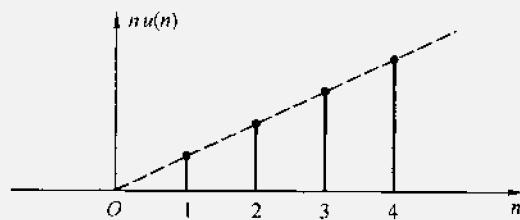


图 7-6 $nu(n)$ 序列

分别如图 7-7 (a)~(d) 所示。此外，还可能遇到 $a^{-n} u(n)$ 序列，其图形请读者练习画出。

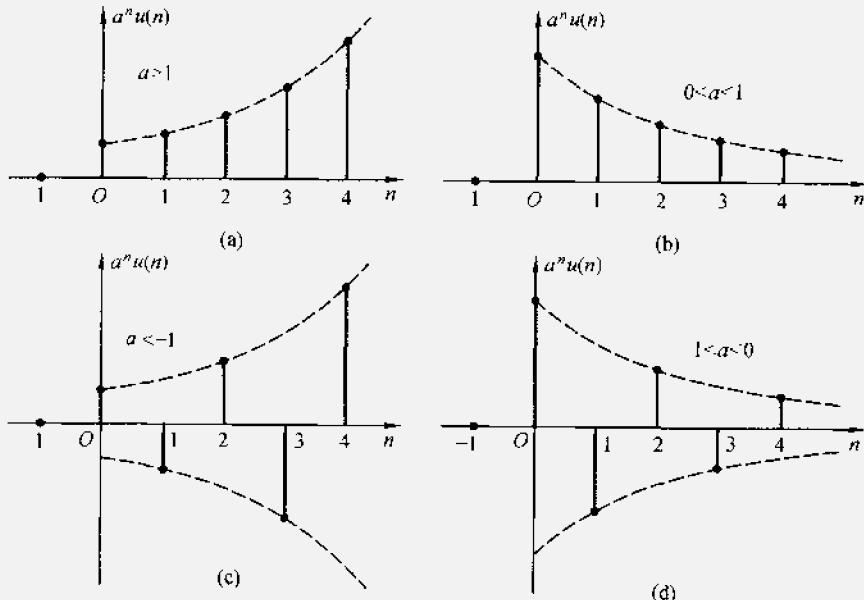


图 7-7 指数序列

(6) 正弦序列

$$x(n) = \sin(n\omega_0) \quad (7-18)$$

8 第七章 离散时间系统的时域分析

式中 ω_0 是正弦序列的频率, 它反映序列值依次周期性重复的速率。例如 $\omega_0 = \frac{2\pi}{10}$, 则序列值每 10 个重复一次正弦包络的数值。若 $\omega_0 = \frac{2\pi}{100}$, 则序列值每 100 个循环一次。图 7-8 示出 $\omega_0 = 0.1\pi$ 的情形, 每经 20 个序列其值循环。显然, 若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时, 正弦序列才具有周期 $\frac{2\pi}{\omega_0}$, 若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不是整数, 而为有理数, 则正弦序列还是周期性, 但其周期要大于 $\frac{2\pi}{\omega_0}$, 若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不是有理数, 则正弦序列就不是周期性的。无论正弦序列是否呈周期性, 都称 ω_0 为它的频率。

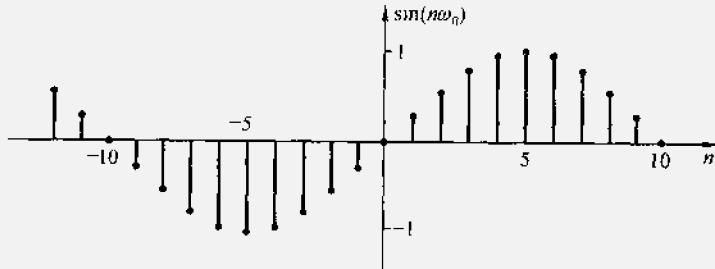


图 7-8 正弦序列 $\sin(n\omega_0)$ ($\omega_0 = 0.1\pi$)

对于连续信号中的正弦波抽样, 可得正弦序列。例如, 若连续信号为

$$f(t) = \sin(\Omega_0 t)$$

它的抽样值写作

$$x(n) = f(nT) = \sin(n\Omega_0 T)$$

因此有

$$\omega_0 = \Omega_0 T = \frac{\Omega_0}{f_s}$$

式中 T 是抽样间隔时间, f_s 是抽样频率 ($f_s = \frac{1}{T}$)。为区分 ω_0 与 Ω_0 , 称 ω_0 为离散域的频率(正弦序列频率), 而 Ω_0 为连续域的正弦频率。可以认为 ω_0 是 Ω_0 对于 f_s 取归一化之值 $\frac{\Omega_0}{f_s}$ 。

与正弦序列相对应, 还有余弦序列

$$x(n) = \cos(n\omega_0) \quad (7-19)$$

(7) 复指数序列

序列也可取复数值, 称为复序列, 它的每个序列值都可以是复数, 具有实部与虚部。

复指数序列是最常见的复序列

$$\begin{aligned} x(n) &= e^{j\omega_0 n} \\ &= \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n) \end{aligned} \quad (7-20)$$

复序列也可用极坐标表示

$$x(n) = |x(n)| e^{j\arg[x(n)]} \quad (7-21)$$

对于上述复指数序列：

$$\begin{aligned}|x(n)| &= 1 \\ \arg[x(n)] &= \omega_0 n\end{aligned}$$

最后简要讨论离散时间信号的分解。一种常用的分解方法是将任意序列表示为加权、延迟的单位样值信号之和

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m) \quad (7-22)$$

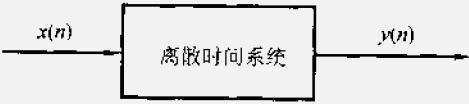
很明显，这是由于：

$$\begin{aligned}\delta(n-m) &= \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \\ x(m)\delta(n-m) &= \begin{cases} x(n) & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}\end{aligned}$$

因此，式(7-22)成立。在第7.6节将运用这一概念引入“卷积和”。

7.3 离散时间系统的数学模型

一个离散时间系统，其激励信号 $x(n)$ 是一个序列，响应 $y(n)$ 为另一序列，示意如图 7-9。显然，此系统功能是完成 $x(n)$ 转变为 $y(n)$ 的运算。



按离散时间系统的性能，可以划分为线性、非线性、时不变、时变等各种类型。目前，最常用的是“线性、时不变系统”。本书的讨论范围也限于此。

在绪论 1.7 节曾给出线性时不变系统的基本特性。这里，针对离散时间系统的特点再作一些说明。

线性离散时间系统应满足均匀性与叠加性。均匀性与叠加性的意义是：对于给定之系统，若 $x_1(n), y_1(n)$ 和 $x_2(n), y_2(n)$ 分别代表两对激励与响应，则当激励序列是 $c_1x_1(n) + c_2x_2(n)$ 时 (c_1, c_2 分别为常数)，系统的响应为 $c_1y_1(n) + c_2y_2(n)$ 。此特性示意于图 7-10。

对于时不变系统（或称移不变系统），在同样起始状态之下系统响应与激励施加于系统的时刻无关。若激励 $x(n)$ 产生响应 $y(n)$ ，则激励 $x(n-N)$ 产生响应 $y(n-N)$ 。此特性示于图 7-11，它表明，若激励位移 N ，响应也延迟 N 。

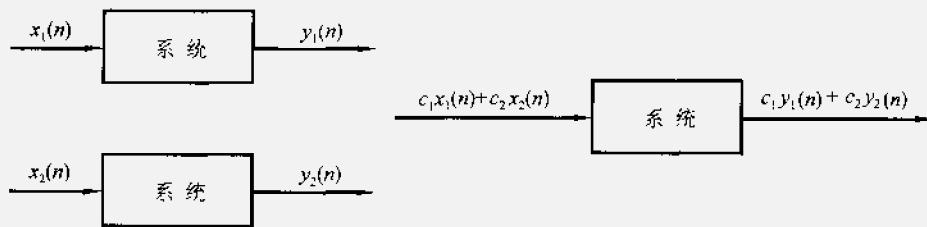


图 7-10 线性系统的均匀性与叠加性

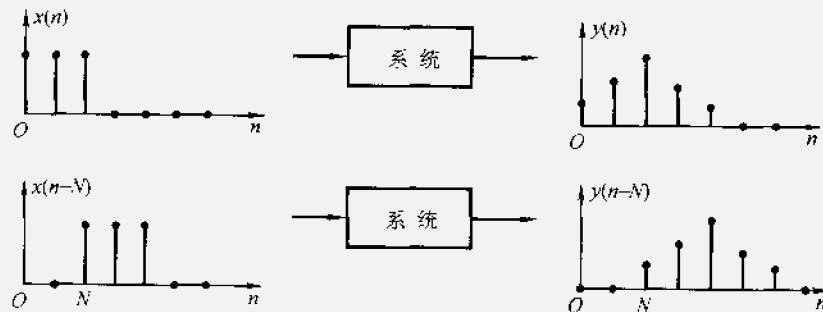


图 7-11 时不变系统特性

在连续时间系统中,信号是时间变量的连续函数,系统可用微分积分方程式来描述。对于离散时间系统,信号的变量 n 是离散的整型值,因此,系统的行为和性能需用差分方程式来表示。

微分积分方程由连续自变量的函数 $f(t)$ 及其各阶导数 $\frac{d}{dt}f(t), \frac{d^2}{dt^2}f(t), \dots$ 或积分等项线性叠加组成。在差分方程中,构成方程式的各项包含有离散变量的函数 $x(n)$,以及此序列之序数增加或减少的移位函数 $x(n+1), x(n+2), \dots, x(n-1), x(n-2), \dots$ 等。

在连续时间系统中,系统内部的数学运算关系可归结为微分(或积分)、乘系数、相加。与此对应,在离散时间系统中,基本运算关系是延时(移位)、乘系数、相加。在连续时间系统中,通常是利用 R, L, C 等基本电路元件组成网络,以完成所需的功能。但是对于离散时间系统,它的基本单元是延时(移位)元件、乘法器、相加器等。在时间域描述中,以符号 $\frac{1}{E}$ 表示单位延时($\frac{1}{E}$ 的意义将在第 7.4 节说明,也可用符号“ T ”或符号“ D ”表示单位延时)。以符号 \odot 表示两序列相加。以符号 \otimes 表示序列与系数相乘,为使逻辑图形简化,

也可以在信号传送线旁边(或在圆圈内)标注系数, 以示与此系数相乘, 这些规定如图 7-12 所示。下面以实例说明如何为一个离散时间系统建立描述该系统的数学模型——差分方程。

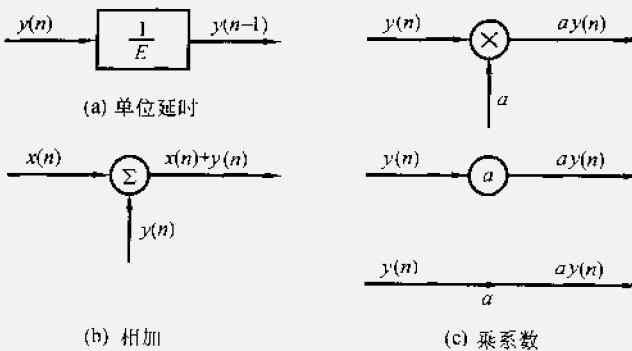


图 7-12 离散时间系统的基本单元符号

例 7-2 一个离散时间系统由延时、相加、乘系数等基本部件组合而成, 如图 7-13, 激励信号为 $x(n)$, 响应序列为 $y(n)$, 试写出描述系统工作的差分方程。

解

$y(n)$ 经单位延时得到 $y(n-1)$ 。围绕图 7-13 中的相加器可以写出

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

经整理后得到

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \quad (7-23)$$

这就是一个常系数线性差分方程式(difference equation), 或称递归关系式(recurrence relation)。一般情况下, 等式左端由未知序列 $y(n)$ 及其移位序列 $y(n-1)$ 构成, 等式右端是已知的激励函数 $x(n)$, 有时, 还可以包括 $x(n)$ 的延时函数, 如 $x(n-1)$ 。式中 a 是常数。由于此方程中的未知序列仅相差一个位移序数, 因此是一阶差分方程。如果给定 $x(n)$, 而且知道 $y(n)$ 的边界条件, 解此差分方程即可求得响应序列 $y(n)$ 。

如果方程式中还包括未知序列的移位项 $y(n-2), y(n-3), \dots, y(n-N)$ 等等, 就可构成 N 阶差分方程式。差分方程式的阶数等于未知序列变量序号的最高与最低值之差。

这里举出的差分方程, 各未知序列之序号自 n 以递减方式给出, 称为后向形式的(或向右移序的)差分方程。也可从 n 以递增方式给出, 即由 $y(n)$,

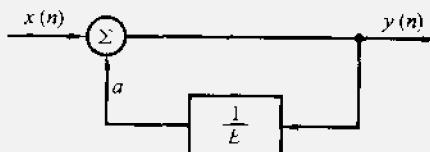


图 7-13 例 7-2 系统方框图

$y(n+1), y(n+2), \dots, y(n+N)$ 等项组成, 称为前向形式的(或向左移序的)差分方程。

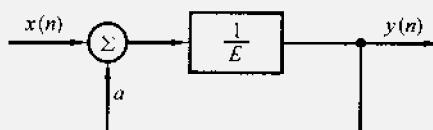
例 7-3 一个离散时间系统如图 7-14 所示, 写出描述系统工作的差分方程。

解

延时器的输入端应为序列 $y(n+1)$ 。

于是, 围绕相加器可以写出

$$y(n+1) = ay(n) + x(n) \quad (7-24)$$



或

$$y(n) = \frac{1}{a} [y(n+1) - x(n)]$$

图 7-14 例 7-3 系统方框图

这是一个一阶前向差分方程式。

比较图 7-13 与图 7-14 可以看出, 这两个系统并无本质差别, 仅输出信号的取出端有所不同, 图 7-13 的 $y(n)$ 取自延时器的输入端, 而图 7-14 的 $y(n)$ 从延时器输出端得到, 如果将同样的激励 $x(n)$ 分别作用于两个系统, 那么二者所得响应形式相同, 但后者较前者延时一位。通常, 对于因果系统用后向形式的差分方程比较方便, 在一般的数字滤波器描述中多用这种形式。而在状态变量分析中, 习惯上用前向形式的差分方程。

以上分析初步说明了离散时间系统数学模型的特点, 为了进一步认识差分方程中各变量之间的约束关系, 以图 7-13 的问题为例, 说明此系统在激励信号 $x(n)$ 作用下的工作过程, 并试用迭代方法找出差分方程的解答。

为了使序列 $x(n)$ 的数据流依次进入系统并完成运算, 系统内部设置有三个寄存器, 一个存放 $x(n)$, 第二个存放 $y(n)$, 另一个存放系数 a 。当 a 与 $y(n-1)$ 相乘之运算取得以后, 存放 $x(n)$ 的寄存器给出 $x(n)$ 的一个样值, 并与 $ay(n-1)$ 相加, 相加得到的 $y(n)$ 值再存入 $y(n)$ 寄存器中, 这样就完成了一次迭代, 为下一个输入样值的进入作好了准备。

每一个新的输入样值进入之前(也即每一次迭代开始之前), 系统的状态完全决定于 $y(n)$ 寄存器中的数值。假定在 $n=0$ 时刻, 输入 $x(n)$ 的样值 $x(0)$ 进入, 那么, $y(n)$ 寄存器的起始值为 $y(-1)$ 。

于是, 可以求得 $y(0)$

$$y(0) = ay(-1) + x(0)$$

把 $y(0)$ 作为下一次迭代的起始值依次给出:

$$y(1) = ay(0) + x(1)$$

$$y(2) = ay(1) + x(2)$$

...

由上述分析可知,可以用迭代的方法求解差分方程,例如对于例 7-2 的方程式(7-23),若已知 $x(n)=\delta(n)$, $y(-1)=0$,容易求得:

$$\begin{aligned}y(0) &= ay(-1)+1=1 \\y(1) &= ay(0)+0=a \\y(2) &= ay(1)+0=a^2 \\\dots \\y(n) &= ay(n-1)+0=a^n\end{aligned}$$

此范围限于 $n \geq 0$,因此,应将 $y(n)$ 写作

$$y(n)=a^n u(n)$$

用迭代法求解差分方程是一种原始的方法,不易直接给出一个闭式解答,关于差分方程的一般求解方法将在下一节(用时域法)以及下一章(用变换域法)详细讨论。在那里还将看到,在某些情况下,迭代的方法还是一种可取的方法。

由以上分析容易看出,差分方程与微分方程在形式上有相似之处。我们熟知,一阶常系数线性微分方程的表达式可以写作

$$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)+x(t) \quad (7-25)$$

为便于对比,将一阶前向差分方程式(7-24)抄录此处

$$y(n+1)=ay(n)+x(n)$$

比较这两个方程式可以看到,若 $y(n)$ 与 $y(t)$ 相当,则离散变量序号加 1 所得之序列 $y(n+1)$ 就与连续函数对变量 t 取一阶导数 $\frac{dy(t)}{dt}$ 相对应, $x(n)$ 与 $x(t)$ 分别表示各自的激励信号。它们不仅在形式上相似,而且在一定条件下可以互相转化。对于连续时间函数 $y(t)$,若在 $t=nT$ 各点取得样值 $y(nT)$,并假设时间间隔 T 足够小,于是 $y(t)$ 微分式可以近似表示为

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y[(n+1)T]-y(nT)}{T}$$

因此,微分方程式(7-25)可以写作

$$\frac{y(n+1)-y(n)}{T} \approx Ay(n)+x(n)$$

经整理后得

$$y(n+1) \approx (1+AT)y(n)+Tx(n) \quad (7-26)$$

式(7-26)与式(7-24)具有相同的形式。必须注意,微分方程近似写作差分方程的条件是样值间隔 T 要足够小, T 越小,近似程度越好。实际上,利用数字计算机来求解微分方程时(如欧拉法、龙格-库塔法),就是根据这一原理完成的。

下面举例说明，用差分方程近似处理微分方程的问题。

图 7-15 示出 RC 低通网络，描述此连续系统的数学模型为

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (7-27)$$

如果对激励信号 $x(t)$ 抽样，得到 $x(nT)$ ，简写作 $x(n)$ ，若抽样间隔 T 足够小，则系统的数学模型可近似表示为

$$\frac{RC}{T}[y(n+1) - y(n)] + y(n) \approx x(n)$$

经整理后得到

$$y(n+1) \approx \left(1 - \frac{T}{RC}\right)y(n) + \frac{T}{RC}x(n) \quad (7-28)$$

响应也是一个序列 $y(n)$ 。在图 7-15 中示出，若激励 $x(t)$ 是阶跃信号，响应 $y(t)$ 就是指数充电波形；若 $x(t)$ 经抽样为阶跃序列，则响应序列 $y(n)$ 端点的连线与 $y(t)$ 波形近似。在给定 T ， RC 的条件下，求解差分方程(7-28)即可证实这一直观的判断(学习 7.4 节以后，将在习题 7-26 解决这一问题)。

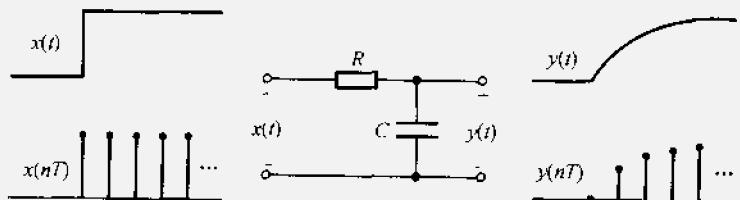


图 7-15 RC 低通网络

以上讨论的差分方程式，其离散变量都是时间，然而，差分方程是处理离散变量函数关系的一种数学工具，变量的选取因具体函数而异，并不限于时间。下面举例说明。

例 7-4 图 7-16 示出电阻梯形网络，其各支路电阻都为 R ，每个结点对地的电压为 $v(n)$ ， $n = 0, 1, 2, \dots, N$ 。已知两边界结点电压为 $v(0) = E$ ， $v(N) = 0$ 。试写出求第 n 个结点电压 $v(n)$ 的差分方程式。

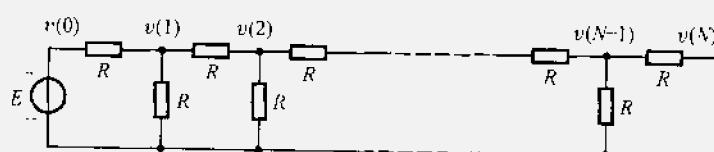


图 7-16 电阻梯形网络

解

对于任一结点 $n - 1$ ，运用 KCL 不难写出

$$\frac{v(n-1)}{R} = \frac{v(n) - v(n-1)}{R} + \frac{v(n-2) - v(n-1)}{R}$$

经整理后得出

$$v(n) - 3v(n-1) + v(n-2) = 0$$

这是一个二阶后向差分方程，借助两个边界条件，经求解即可得到 $v(n)$ 。

显然，本例中函数 $v(n)$ 的自变量 n 不表示时间，而是代表电路图中结点顺序的编号，即序号（只能取整数）。

差分方程的应用遍及许多科学领域，不仅限于电工程问题之中，下面举出在生物科学的群体增长中运用差分方程的实例。

例 7-5 假定每对兔子每月可以生育一对小兔，新生的小兔子要隔一个月才具有生育能力，若第一个月只有一对新生小兔，求第 n 个月兔子对的数目是多少？

解

令 $y(n)$ 表示在第 n 个月兔子对的数目。已知 $y(0)=0$, $y(1)=1$ ，显然，可以推知： $y(2)=1$, $y(3)=2$, $y(4)=3$, $y(5)=5$, …。

容易想到，在第 n 个月时，应有 $y(n-2)$ 对兔子具有生育能力，因而这批兔子要从 $y(n-2)$ 对变成 $2y(n-2)$ 对；此外，还有 $y(n-1)-y(n-2)$ 对兔子没有生育能力[它们是在第 $(n-1)$ 月新生的]，仍按原数目保留下来，于是可以写出

$$y(n) = 2y(n-2) + [y(n-1) - y(n-2)]$$

经整理化简得到

$$y(n) - y(n-1) - y(n-2) = 0$$

这是一个二阶差分方程式。

此方程还可写作如下形式

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) \quad (7-29)$$

很明显，此序列中，第 n 个样值 $y(n)$ 等于前两个样值 $y(n-1)$ 与 $y(n-2)$ 之和，这就是著名的费班纳西(Fibonacci)数列。当给定不同的初始值时，可以得到不同数列。例如，若 $y(0)=0$, $y(1)=1$ ，则数列 $y(n)$ 可写作

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$$

与微分方程的分类相对应，差分方程也可划分为线性的与非线性的，常系数的与参变系数的。一般情况下，线性、时不变离散时间系统需要由常系数线性差分方程描述。下一节研究常系数线性差分方程的求解方法。

7.4 常系数线性差分方程的求解

常系数线性差分方程的一般形式可表示为

$$\begin{aligned} & a_0y(n) + a_1y(n-1) + \cdots + a_{N-1}y(n-N+1) \\ & + a_Ny(n-N) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \cdots \\ & + b_{M-1}x(n-M+1) + b_Mx(n-M) \end{aligned} \quad (7-30)$$

式中 a 和 b 是常数, 已知函数 $x(n)$ 的位移阶次是 M , 未知函数 $y(n)$ 的位移阶次即表示此差分方程的阶次 N 。利用取和符号可将式(7-30)缩写为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (7-31)$$

求解常系数线性差分方程的方法一般有以下几种:

(1) 迭代法

包括手算逐次代入求解或利用计算机求解。这种方法概念清楚, 也比较简便, 但只能得到其数值解, 不能直接给出一个完整的解析式作为解答(也称闭式解答)。在前节中已对图 7-13 的问题给出了利用迭代法求解的示例。

(2) 时域经典法

与微分方程的时域经典法类似, 先分别求齐次解与特解, 然后代入边界条件求待定系数。这种方法便于从物理概念说明各响应分量之间的关系, 但求解过程比较麻烦, 在解决具体问题时不宜采用。

(3) 分别求零输入响应与零状态响应

可以利用求齐次解的方法得到零输入响应, 利用卷积和(简称卷积)的方法求零状态响应。与连续时间系统的情况类似, 卷积方法在离散时间系统分析中同样占有十分重要的地位。

此外, 在时域分析中也可辅以算子符号表示的方法。

(4) 变换域方法

类似于连续时间系统分析中的拉氏变换方法, 利用 z 变换方法解差分方程有许多优点, 这是实际应用中简便而有效的方法。

本章着重介绍时域中求齐次解的方法和卷积方法, 下一章详细研究 z 变换方法。在第十二章还要讨论离散时间系统状态方程的求解。

一般差分方程对应的齐次方程的形式为

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k y(n-k) = 0 \quad (7-32)$$

所谓差分方程的齐次解应满足式(7-32)。首先分析最简单的情况, 若一阶齐次差分方程的表示式为

$$y(n) - ay(n-1) = 0 \quad (7-33)$$

可以改写为

$$a = \frac{y(n)}{y(n-1)}$$

这里, $y(n)$ 与 $y(n-1)$ 之比为 a , 这意味着序列 $y(n)$ 是一个公比为 a 的几何级数, 有如下形式

$$y(n) = Ca^n$$

其中 C 是待定系数, 由边界条件决定。

一般情况下, 对于任意阶的差分方程, 它们的齐次解以形式为 Ca^n 的项组合而成。下面证实这一结论。

将 $y(n) = Ca^n$ 代入式(7-32)得到

$$\sum_{k=0}^N a_k Ca^{n-k} = 0 \quad (7-34)$$

消去常数 C , 并逐项除以 a^{n-N} , 将式(7-34)简化为

$$a_0 + a_1 \alpha^{N-1} + \cdots + a_{N-1} \alpha + a_N = 0 \quad (7-35)$$

如果 α_k 是式(7-35)的根, $y(n) = Ca_k^n$ 将满足式(7-32)。式(7-35)称为差分方程式(7-31)的特征方程, 特征方程的根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ 称为差分方程的特征根。

在特征根没有重根的情况下, 差分方程的齐次解为

$$C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n + \cdots + C_N \alpha_N^n \quad (7-36)$$

这里, C_1, C_2, \dots, C_N 是由边界条件决定的系数。现在举例说明求齐次解的过程。

例 7-6 上节例 7-5 对费班纳西数列建立的差分方程式为

$$y(n) - y(n-1) - y(n-2) = 0$$

已知 $y(1) = 1, y(2) = 1$ 。试求解方程。

解

它的特征方程为

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

求得特征根为:

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

于是写出齐次解为

$$y(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

将 $y(1) = 1, y(2) = 1$ 分别代入, 得到一组联立方程

$$\begin{cases} 1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ 1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \end{cases}$$

由此求得系数 C_1, C_2 分别为:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

最后, 写出 $y(n)$ 的解答

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

在有重根的情况下, 齐次解的形式将略有不同。假定 α_1 是特征方程的 K 重根, 那么, 在齐次解中, 相应于 α_1 的部分将有 K 项

$$C_1 n^{K-1} \alpha_1^n + C_2 n^{K-2} \alpha_1^n + \cdots + C_{K-1} n \alpha_1^n + C_K \alpha_1^n \quad (7-37)$$

显然, $C_K \alpha_1^n$ 这项满足式(7-32)。为证明 $C_{K-1} n \alpha_1^n$ 也满足式(7-32), 将 $y(n) = C_{K-1} n \alpha_1^n$ 代入式(7-32)右端得到

$$\begin{aligned} & a_0 C_{K-1} n \alpha_1^n + a_1 C_{K-1} (n-1) \alpha_1^{n-1} + \cdots \\ & + a_{N-1} C_{K-1} (n-N+1) \alpha_1^{n-N+1} + a_N C_{K-1} (n-N) \alpha_1^{n-N} \end{aligned} \quad (7-38)$$

也就是

$$\begin{aligned} & C_{K-1} \alpha_1 [a_0 n \alpha_1^{n-1} + a_1 (n-1) \alpha_1^{n-2} + \cdots \\ & + a_{N-1} (n-N+1) \alpha_1^{n-N} + a_N (n-N) \alpha_1^{n-N-1}] \end{aligned} \quad (7-39)$$

我们的目的是要证明式(7-39)等于零。因为已经知道 α_1 是式(7-35)的 K 重根, 当然, 也就是下示方程的重根

$$\alpha^{n-N} (a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + \cdots + a_{N-1} \alpha + a_N) = 0$$

或

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{N-1} \alpha^{n-N+1} + a_N \alpha^{n-N} = 0 \quad (7-40)$$

α_1 不仅满足式(7-40), 也满足它的导数式。因而有

$$\begin{aligned} & a_0 n \alpha^{n-1} + a_1 (n-1) \alpha^{n-2} + \cdots \\ & + a_{N-1} (n-N+1) \alpha^{n-N} + a_N (n-N) \alpha^{n-N-1} = 0 \end{aligned} \quad (7-41)$$

至此可以看出, 式(7-39)方括号内的式子应等于零, 因而, $C_{K-1} n \alpha_1^n$ 的确满足式(7-32)。同理可证, 其他各项 $C_1 n^{K-1} \alpha_1^n, C_2 n^{K-2} \alpha_1^n, \dots$ 也满足式(7-32)。

例 7-7 求差分方程

$$y(n) + 6y(n-1) + 12y(n-2) + 8y(n-3) = x(n)$$

的齐次解。

解 特征方程为

$$\alpha^3 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 8 = 0$$

即

$$(\alpha + 2)^3 = 0$$

可见, -2 是此方程的三重特征根, 于是求得齐次解为

$$(C_1 n^2 + C_2 n + C_3)(-2)^n$$

当特征根为共轭复数时, 齐次解的形式可以是等幅、增幅或衰减等形式的正弦(余弦)序列。

例 7-8 求下示差分方程的齐次解

$$y(n) - 2y(n-1) + 2y(n-2) - 2y(n-3) + y(n-4) = 0$$

已知边界条件 $y(1) = 1, y(2) = 0, y(3) = 1, y(5) = 1$ 。

解

特征方程为:

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 &= 0 \\ (\alpha - 1)^2(\alpha^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

特征根:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \quad (\text{重根})$$

$$\alpha_3 = j, \alpha_4 = -j \quad (\text{共轭复根})$$

于是可以写出

$$\begin{aligned} y(n) &= (C_1 n + C_2)(1)^n + C_3(j)^n + C_4(-j)^n \\ &= C_1 n + C_2 + C_3 e^{j\frac{n\pi}{2}} + C_4 e^{-j\frac{n\pi}{2}} \\ &= C_1 n + C_2 + P \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + Q \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

这里, C_1, C_2, P, Q 是待定系数, 注意 $P = C_3 + C_4, Q = j(C_3 - C_4)$ 。利用边界条件可以写出:

$$1 = y(1) = C_1 + C_2 + Q$$

$$0 = y(2) = 2C_1 + C_2 - P$$

$$1 = y(3) = 3C_1 + C_2 - Q$$

$$1 = y(5) = 5C_1 + C_2 + Q$$

由此方程组解得:

$$C_1 = 0, C_2 = 1$$

$$P = 1, Q = 0$$

最后, 得到差分方程的解

$$y(n) = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

在微分方程的研究中已经知道, 利用复平面图可以表明特征根的各种分布情况, 并给出对应的时域特性。与此类似, 对于差分方程也可用这种方法进行分

析,在学习 z 变换方法之后,将利用 z 域的复平面图进行这种研究(见第八章)。

下面讨论求特解的方法。为求得特解,首先将激励函数 $x(n)$ 代入方程式右端(也称自由项),观察自由项的函数形式来选择含有待定系数的特解函数式,将此特解函数代入方程后再求待定系数。现举出求解非齐次差分方程的例子。在此例中,包括求齐次解、求特解、最后得出完全响应

例 7-9 求下示差分方程的完全解

$$y(n) + 2y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$

其中激励函数 $x(n) = n^2$,且已知 $y(-1) = -1$ 。

解

(1) 首先,求得它的齐次解为 $C(-2)^n$

(2) 将激励信号 $x(n) = n^2$ 代入方程右端,得到自由项为 $n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$ 。根据此函数形式,选择具有 $D_1n + D_2$ 形式的特解,其中 D_1, D_2 为待定系数,以此作 $y(n)$ 代入方程给出:

$$D_1n + D_2 + 2[D_1(n-1) + D_2] = n^2 - (n-1)^2$$

$$3D_1n + 3D_2 - 2D_1 = 2n - 1$$

比较方程两端系数得到

$$\begin{cases} 3D_1 = 2 \\ 3D_2 - 2D_1 = -1 \end{cases}$$

解得:

$$D_1 = \frac{2}{3}, D_2 = \frac{1}{9}$$

完全解的表示式为

$$y(n) = C(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

(3) 代入边界条件 $y(-1) = -1$,求系数 C

$$-1 = C(-2)^{-1} - \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$$

解得

$$C = \frac{8}{9}$$

最后,写出完全响应的表示式为

$$y(n) = \frac{8}{9}(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

一般情况下,若激励函数代入方程式右端出现 n^k 形式的函数,则特解选 $D_0n^k + D_1n^{k-1} + \dots + D_k$;如果出现 a^n 形式的函数,且 a 不是此差分方程的特征根,则特解选 Da^n 。实际上,前者与微分方程的 t^n 形式相对应,后者则

与 e^t 形式对应。

在以上各例中曾利用给定的边界条件，如 $y(-1)$, $y(0)$ 或 $y(1)$ 来求得完全解中的系数 C_i 。在一般情况下，对于 N 阶差分方程，应给定 N 个边界条件，例如取 $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(N-1)$ 。利用这些条件，代入完全解的表示式，可以构成一组联立方程，求得 N 个系数 C_1 , C_2 , ..., C_N 。考虑没有重根的情况，此时方程的全解为

$$C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + \cdots + C_N\alpha_N^n + D(n) \quad (7-42)$$

式中 $D(n)$ 表示它的特解，其余各项之总和为齐次解。引用边界条件可建立如下方程组：

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + \cdots + C_N + D(0) \\ y(1) &= C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \cdots + C_N\alpha_N + D(1) \\ &\dots \\ y(N-1) &= C_1\alpha_1^{N-1} + C_2\alpha_2^{N-1} + \cdots + C_N\alpha_N^{N-1} + D(N-1) \end{aligned}$$

将此方程组写作矩阵形式

$$\left[\begin{array}{c} y(0) - D(0) \\ y(1) - D(1) \\ \vdots \\ y(N-1) - D(N-1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{N-1} & \alpha_2^{N-1} & \cdots & \alpha_N^{N-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{array} \right] \quad (7-43)$$

简写作

$$\mathbf{Y}(k) - \mathbf{D}(k) = \mathbf{V}\mathbf{C} \quad (7-44)$$

这里看到与连续时间系统微分方程对应的关系式，借助范德蒙特(Vandermonde)逆矩阵 \mathbf{V}^{-1} 即可求得系数 \mathbf{C} 的一般表示式为

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}^{-1}[\mathbf{Y}(k) - \mathbf{D}(k)] \quad (7-45)$$

与连续时间系统的情况相同，线性时不变离散时间系统的完全响应也可分解为自由响应分量与强迫响应分量，或零输入响应分量与零状态响应分量。

由式(7-42)可知，系统的完全响应(差分方程的完全解)可表示为自由响应分量与强迫响应分量(齐次解与特解)之和

$$\sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n + D(n)$$

其中 C_k 由式(7-45)以矩阵形式给出。

响应的边界条件 $y(k)$ 可分解为零输入响应的边界值 $y_n(k)$ 与零状态之边界值 $y_s(k)$ 两部分

$$y(k) = y_n(k) + y_s(k) \quad (7-46)$$

在零输入条件下有

$$\mathbf{D}(k) = 0$$

于是得到相应的系数 \mathbf{C}_{zi} 之矩阵表示

$$\mathbf{C}_{zi} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_a(k) \quad (7-47)$$

而在零状态条件下，系数 \mathbf{C}_{zs} 的矩阵表示式为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{zs} &= \mathbf{V}^{-1} [\mathbf{Y}_{zs}(k) - \mathbf{D}(k)] \\ &= \mathbf{V}^{-1} [\mathbf{Y}(k) - \mathbf{Y}_{zi}(k) - \mathbf{D}(k)] \end{aligned} \quad (7-48)$$

系数 \mathbf{C} 与 \mathbf{C}_a 、 \mathbf{C}_{zs} 之间满足

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{zi} + \mathbf{C}_{zs} \quad (7-49)$$

于是，完全响应由以下两部分组成：

$$\text{零输入响应} = \sum_{k=1}^N C_{zik} \alpha_k^n \quad (7-50)$$

$$\text{零状态响应} = \sum_{k=1}^N C_{zsk} \alpha_k^n + D(n) \quad (7-51)$$

如果把完全响应按自由响应与强迫响应去划分，则有：

$$\text{自由响应} = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n \quad (7-52)$$

$$\text{强迫响应} = D(n) \quad (7-53)$$

为便于比较，以上分析可写成如下表示式

$$\begin{aligned} y(n) &= \underbrace{\sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n}_{\text{自由响应}} + \underbrace{D(n)}_{\text{强迫响应}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^N C_{zik} \alpha_k^n}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N C_{zsk} \alpha_k^n}_{\text{零状态响应}} + D(n) \end{aligned} \quad (7-54)$$

其中

$$\sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n = \sum_{k=1}^N (C_{zik} + C_{zsk}) \alpha_k^n$$

以上所得结果与连续时间系统微分方程各响应分量的求解规律十分相似，读者可与 2.4 节的有关公式作比较。

还需指出，差分方程的边界条件不一定由 $y(0), y(1), y(2), \dots, y(N-1)$ 这一组数字给出。对于因果系统，常给定 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ 为边界条件。若激励信号在 $n=0$ 时接入系统，所谓零状态是指 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ 都等于零（ N 阶系统），而不是指 $y(0), y(1), \dots, y(N)$ 为零。如果已知 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ ，欲求 $y(0), y(1), \dots, y(N)$ ，可利用迭代法逐次导出。

例 7-10 已知系统的差分方程表达式为

$$y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$$

(1) 若边界条件 $y(-1)=0$, 求系统的完全响应;

(2) 若边界条件 $y(-1)=1$, 求系统的完全响应。

解

(1) 由于激励在 $n=0$ 接入, 且给定 $y(-1)=0$, 因此, 起始时系统处于零状态。由 $y(-1)$ 利用迭代法可求出 $y(0)=0.05$ 。

由特征方程求得齐次解为 $C(0.9)^n$, 而特解是 D , 完全解的形式应为

$$y(n) = C(0.9)^n + D$$

为确定系数 D , 将特解代入方程得到:

$$D(1-0.9)=0.05$$

$$D=0.5$$

再将 $y(0)$ 代入 $y(n)$ 表示式求系数 C :

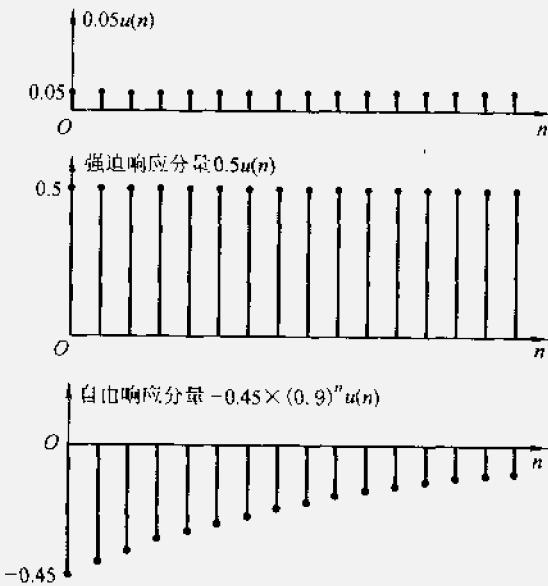
$$0.05 = y(0) = C + D$$

$$C = 0.05 - 0.5 = -0.45$$

最后, 写出完全响应为

$$y(n) = \underbrace{[-0.45 \times (0.9)^n + 0.5]}_{\text{自由响应}} u(n) + \underbrace{0.05}_{\text{强迫响应}}$$

波形如图 7-17 所示。



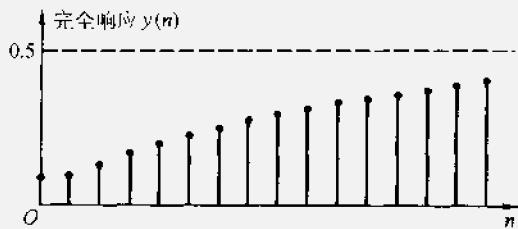


图 7-17 例 7-10 (1) 的响应波形

(2) 先求零状态响应, 令 $y(-1)=0$, 此即第(1)问之结果, 可以写出

$$\text{零状态响应} = 0.5 - 0.45 \times (0.9)^n$$

再求零输入响应, 令激励信号等于零, 差分方程表示式为

$$y(n) - 0.9y(n-1) = 0$$

容易写出

$$\text{零输入响应} = C_z \times (0.9)^n$$

以 $y(-1)=1$ 代入求得系数

$$C_z = 0.9$$

于是有

$$\text{零输入响应} = 0.9 \times (0.9)^n$$

将以上两部分结果叠加, 得到完全响应 $y(n)$ 表示式

$$\begin{aligned} y(n) &= 0.5 - 0.45 \times (0.9)^n + 0.9 \times (0.9)^n \\ &= \underbrace{0.45 \times (0.9)^n}_{\text{自由响应}} + \underbrace{0.5}_{\text{强迫响应}} + \underbrace{0.9 \times (0.9)^n}_{\text{零输入响应}} \end{aligned}$$

最后, 将 $y(n)$ 的图形绘于图 7

-18。

如果将上例与连续时间系统的有关问题相比较, 不难发现, 图 7-17 的结果类似于一个起始无储能的一阶低通网络之阶跃响应, 例如一阶 RC 电路中的电容从零值按指数规律充电。而图 7-18 则是起始有储能的这种一阶电路, 好像电容具有某一较高的起始电压值, 在较低幅度的阶

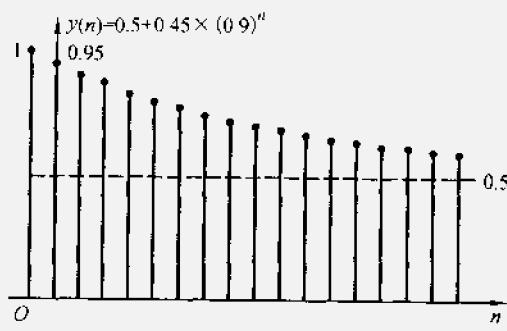


图 7-18 例 7-10 (2) 的响应波形

跃信号作用下，它将从起始值按指数规律放电至稳态值。

前文已述，差分方程不仅应用于信息、电子学科，在许多科学与技术领域中都得到广泛应用，如例 7-5 介绍了应用于生物学科的例子，下面再给出对于银行信贷业务的应用实例。

例 7-11 中国建设银行与北京市住房资金管理中心共同发布的等额均还个人购房贷款每月偿还金额计算公式为

$$R = P \cdot \frac{I(1+I)^N}{(1+I)^N - 1} \quad (7-55)$$

式中 P 为总贷款金额， I 为贷款月利率，还款期限是 N 个月，每月还款金额为 R 。所谓等额均还即贷款期限内每月以相等的偿还额 R 归还部分本金与利息， N 个月还清全部本息。请按照上述规定建立差分方程式，并导出式(7-55)。

解

(1) 设第 n 个月末欠款为 $y(n)$ ，可建立如下差分方程

$$y(n) = y(n-1) - R + Iy(n-1), n \geq 1$$

即

$$y(n) - (1+I)y(n-1) = -R, n \geq 1 \quad (7-56)$$

而第 0 个月欠款为

$$y(0) = P$$

(2) $y(n)$ 的齐次解为 $C(1+I)^n$ ，式中 C 为待定系数。 $y(n)$ 的特解为 D 。将特解代回式(7-56)可求出 D 的表达式：

$$D = (1+I)D - R$$

$$D = \frac{1}{I}R$$

(3) $y(n)$ 的完全解可写作

$$y(n) = C(1+I)^n + \frac{1}{I}R, n \geq 1 \quad (7-57)$$

令 $n=1$ ，求得

$$y(1) = C(1+I) + \frac{1}{I}R$$

另外，借助 $y(0)=P$ 经迭代求出

$$y(1) = (1+I)P - R$$

以上二式相等解出：

$$C(1+I) + \frac{1}{I}R = (1+I)P - R$$

$$C = P - \frac{1}{I}R$$

(4) 将系数 C 代回式(7-57)得到

$$y(n) = \left(P - \frac{1}{I}R \right) (1+I)^n + \frac{1}{I}R, n \geq 0$$

为满足 N 个月全部还清本息应有

$$y(N) = 0$$

即

$$\left(P - \frac{1}{I}R \right) (1+I)^N + \frac{1}{I}R = 0$$

至此, 可证得式(7-55)

$$R = P \cdot \frac{I(1+I)^N}{(1+I)^N - 1}$$

例如, 若贷款总金额 P 为 10 万元, 贷款期限 10 年 ($N = 120$), 年利率为 $5.13\% \left(I = \frac{1}{12} \times 5.13\% \right)$, 可求得每月还款金额 R 为 1067.02 元。

对于线性时不变系统, 可以借助算子符号、传输算子等概念来表示或求解系统的数学模型。在连续时间系统中, 以算子 p 表示微分运算。对于离散时间系统, 用算子符号“ E ”表示将序列超前一个单位时间的运算。 E 也称为移序算子, 利用移序算子可写出:

$$y(n+1) = E y(n) \quad (7-58)$$

$$y(n-1) = \frac{1}{E} y(n) \quad (7-59)$$

对于差分方程

$$y(n+1) - a y(n) = x(n)$$

可改写作

$$(E - a) y(n) = x(n) \quad (7-60)$$

而对于方程式

$$y(n) - a y(n-1) = x(n-1)$$

则可表示为

$$\left(1 - \frac{a}{E} \right) y(n) = \frac{1}{E} x(n) \quad (7-61)$$

对于以上二例, 可以引入传输算子 $H(E) = \frac{1}{E-a}$, 于是有

$$y(n) = \frac{1}{E-a} x(n) \quad (7-62)$$

再次提醒读者, 这不是一个代数方程, 而是一个运算方程。这些特性与连续系统中的情况类似。

由以上分析看出, 算子 $\frac{1}{E}$ 表示延迟单位时间的作用, 即 $y(n)$ 经 $\frac{1}{E}$ 运算

给出 $y(n-1)$, 这正是在 7.3 节规定以 $\frac{1}{E}$ 作延时元件符号标志的理由。

算子符号法是由时域分析转向变换域分析的一种过渡形式, 仅简要介绍至此。在第八章将详细研究用 z 变换解差分方程的方法。

7.5 离散时间系统的单位样值(单位冲激)响应

在连续线性系统中, 我们注意研究单位冲激 $\delta(t)$ 作用于系统引起的响应 $h(t)$, 对于离散线性系统, 我们来考察单位样值 $\delta(n)$ 作为激励而产生的系统零状态响应 $h(n)$ ——单位样值响应。这不仅是由于这种激励信号具有典型性, 而且也是为求卷积和作准备。

由于 $\delta(n)$ 信号只在 $n=0$ 时取值 $\delta(0)=1$, 在 n 为其他值时都为零, 因而, 利用这一特点可以较方便地以迭代法依次求出 $h(0), h(1), \dots, h(n)$ 。

例 7-12 已知离散时间系统的差分方程表达式

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

试求其单位样值响应 $h(n)$ 。

解

对于因果系统, 由于 $x(-1) = \delta(-1) = 0$, 故 $y(-1) = h(-1) = 0$, 以此起始条件代入差分方程可得

$$h(0) = \frac{1}{2}h(-1) + \delta(0) = 0 + 1 = 1$$

依次代入求得:

$$h(1) = \frac{1}{2}h(0) + \delta(1) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$h(2) = \frac{1}{2}h(1) + \delta(2) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

...

$$h(n) = \frac{1}{2}h(n-1) + \delta(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

此系统的单位样值响应是

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

用这种迭代方法求系统的单位样值响应还不能直接得到 $h(n)$ 的闭式。为了能够给出闭式解答, 可把单位样值 $\delta(n)$ 激励信号等效为起始条件, 这样就把问题转化为求解齐次方程, 由此得到 $h(n)$ 的闭式。下面的例子说明这种方

法。

例 7-13 系统差分方程式为

$$y(n) - 3y(n-1) + 3y(n-2) - y(n-3) = x(n)$$

求系统的单位样值响应。

解

(1) 求差分方程的齐次解(即系统的零输入响应)。写出特征方程

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0$$

解得特征根 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, 即 1 为三重根。于是可知, 齐次解的表示式为

$$C_1 n^2 + C_2 n + C_3$$

(2) 因为起始时系统是静止的, 容易推知 $h(-2) = h(-1) = 0, h(0) = \delta(0) = 1$ 。以 $h(0) = 1, h(-1) = 0, h(-2) = 0$ 作为边界条件建立一组方程式求系数 C

$$\begin{cases} 1 = C_3 \\ 0 = C_1 - C_2 + C_3 \\ 0 = 4C_1 - 2C_2 + C_3 \end{cases}$$

解得:

$$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{3}{2}, \quad C_3 = 1$$

(3) 最后写出, 系统的单位样值响应为

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

此例中单位样值的激励作用等效为一个起始条件 $h(0) = 1$, 因而, 求单位样值响应的问题转化为求系统的零输入响应, 很方便地得到 $h(n)$ 闭式解。

例 7-14 已知系统的差分方程模型

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n) - 3x(n-2)$$

求系统的单位样值响应。

解

(1) 求得齐次解为

$$C_1 3^n + C_2 2^n$$

(2) 假定差分方程式右端只有 $x(n)$ 项作用, 不考虑 $3x(n-2)$ 项作用, 求此时系统的单位样值响应 $h_1(n)$ 。

边界条件是 $h_1(0) = 1, h_1(-1) = 0$, 由此建立求系数 C 的方程组

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_2 \end{cases}$$

解得:

$$C_1 = 3, C_2 = -2$$

于是写出

$$h_1(n) = \begin{cases} 3^{n+1} - 2^{n+1} & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

(3) 只考虑 $-3x(n-2)$ 项作用引起的响应 $h_2(n)$ 。由线性时不变特性可知

$$\begin{aligned} h_2(n) &= -3h_1(n-2) \\ &= \begin{cases} -3(3^{n-1} - 2^{n-1}) & (n \geq 2) \\ 0 & (n < 2) \end{cases} \end{aligned}$$

(4) 将以上结果叠加，并在表示式中利用单位阶跃序列符号 $u(n)$ ，写出系统的单位样值响应

$$\begin{aligned} h(n) &= h_1(n) + h_2(n) \\ &= (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n) - 3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2) \\ &= (3^{n+1} - 2^{n+1})[\delta(n) + \delta(n-1) + u(n-2)] \\ &\quad - 3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2) \\ &= \delta(n) + 5\delta(n-1) + (3^{n+1} - 2^{n+1} - 3^n + 3 \times 2^{n-1})u(n-2) \\ &= \delta(n) + 5\delta(n-1) + (2 \times 3^n - 2^{n-1})u(n-2) \end{aligned}$$

在连续时间系统中曾利用系统函数求拉普拉斯逆变换的方法决定冲激响应 $h(t)$ ，与此类似，在离散时间系统中，也可利用系统函数求逆 z 变换来确定单位样值响应，一般情况下，这是一种较简便的方法，将在第八章详述。

由于单位样值响应 $h(n)$ 表征了系统自身的性能，因此，在时域分析中可以根据 $h(n)$ 来判断系统的某些重要特性，如因果性、稳定性，以此区分因果系统与非因果系统，稳定系统与非稳定系统。

所谓因果系统，就是输出变化不领先于输入变化的系统。响应 $y(n)$ 只取决于此时，以及此时以前之激励，即 $x(n), x(n-1), x(n-2), \dots$ 。如果 $y(n)$ 不仅取决于当前及过去的输入，而且还取决于未来的输入 $x(n+1), x(n+2), \dots$ ，那么，在时间上就违背了因果关系，因而是非因果系统，也即不可实现的系统。

离散线性时不变系统作为因果系统的充分必要条件是

$$h(n) = 0 \quad (\text{当 } n < 0) \quad (7-63)$$

或表示为

$$h(n) = h(n)u(n) \quad (7-64)$$

在离散时间系统的应用中，某些数据处理过程的自变量虽为时间，但是待处理的数据可以记录并保存起来。这时，不一定局限于用因果系统处理信号，可借助非因果系统。在语音处理、气象学、地球物理学、经济学、人口统计学等领域中会遇到这种情况。例如，对于股票市场，人们有时更加关注数据的变化趋势，然而在这个总的慢变化过程中包含着高频起伏。为了考察一段时期内的慢变化趋势，可以利用平滑系统滤除高频成分。一种非因果的平滑系统数学模型可表示为

$$y(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(n-k) \quad (7-65)$$

对于待处理的数据 $x(n)$ ，可在 n 点附近取 $\pm M$ 点的数据作平均计算，即取和后再除以 $(2M+1)$ ，由此获得平滑后的数据 $y(n)$ ，见图 7-19。显然，这是一个非因果系统。此外，若自变量不是时间（例如对某些图像处理信号），也可能遇到非因果系统。

在连续时间系统分析中（第四章 4.11 节）已经知道，稳定系统的定义为：若输入是有界的，输出必定也是有界的系统。对于离散时间系统，稳定系统的充分必要条件是单位样值（单位冲激）

响应绝对可积（或称绝对可和，在离散时间系统中指求和），即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M \quad (7-66)$$

式中 M 为有界正值。

既满足稳定条件又满足因果条件的系统是我们的主要研究对象，这种系统的单位样值响应 $h(n)$ 是单边的而且是有界的

$$\begin{cases} h(n) = h(n)u(n) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M \end{cases} \quad (7-67)$$

下面考虑一个简单的例子，若系统的单位样值响应 $h(n) = a^n u(n)$ ，则容易判断它是因果系统，因为当 $n < 0$ 时 $h(n) = 0$ 。稳定性的确定要与 a 的数值有关，若 $|a| < 1$ ，则几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$ 收敛为 $\frac{1}{1-a}$ ，系统是稳定的；若 $|a| > 1$ ，则该几何级数发散，系统是非稳定的。

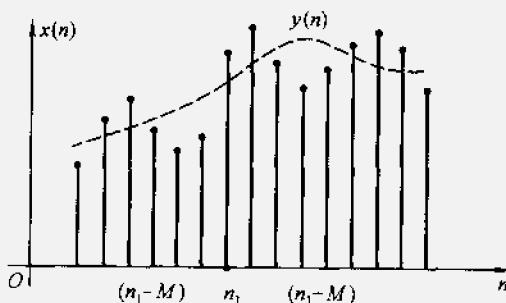


图 7-19 将 $x(n)$ 作平滑处理得到 $y(n)$

7.6 卷积(卷积和)

在连续时间系统中，可以利用卷积的方法求系统的零状态响应，这时，首先把激励信号分解为冲激函数序列，然后令每一个冲激函数单独作用于系统求其冲激响应，最后把这些响应叠加即可得到系统对此激励信号的零状态响应。这个叠加的过程表现为求卷积积分。在离散时间系统中，可以采用大体相同的方法进行分析，由于离散信号本身就是一个不连续的序列，因此，激励信号分解为脉冲序列的工作就很容易完成，对应每个样值激励，系统得到对此样值的响应，每一响应也是一个离散时间序列，把这些序列叠加即得零状态响应。因为离散量的叠加无需进行积分，因此，叠加过程表现为求“卷积和”。

由式(7-22)可知，离散时间系统的任意激励信号 $x(n)$ 可以表示为单位样值加权取和的形式

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

设系统对单位样值 $\delta(n)$ 的响应为 $h(n)$ ，由时不变特性可知，对于 $\delta(n-m)$ 的延时响应就是 $h(n-m)$ ；再由线性系统的均匀性可知，对于 $x(m)\delta(n-m)$ 序列的响应是 $x(m)h(n-m)$ ，最后根据叠加性得到系统对于 $\sum x(m)\delta(n-m)$ 序列总的响应为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (7-68)$$

式(7-68)称为“卷积和”(或仍称为卷积)。它表征了系统响应 $y(n)$ 与激励 $x(n)$ 和单位样值响应 $h(n)$ 之间的关系， $y(n)$ 是 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积，用简化符号记为

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (7-69)$$

对式(7-68)进行变量置换得到卷积的另一种表示式

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \\ &= h(n) * x(n) \end{aligned} \quad (7-70)$$

这表明，两序列进行卷积的次序是无关紧要的，可以互换。容易证明，卷积和的代数运算与连续系统中卷积的代数运算(2.7节)规律相似，都服从交换律、分配律、结合律。

在连续时间系统中， $\delta(t)$ 与 $f(t)$ 的卷积仍等于 $f(t)$ ，类似地，在离散时间系统中也有

$$\delta(n) * x(n) = x(n) \quad (7-71)$$

卷积和的图形解释可以把取卷积和的过程分解为反褶、平移、相乘、取和四个步骤，在下面的例子中可以看到。

例 7-15 某系统的单位样值响应是

$$h(n) = a^n u(n)$$

其中 $0 < a < 1$ 。若激励信号为

$$x(n) = u(n) - u(n-N)$$

试求响应 $y(n)$ 。

解 由式(7-68)可知

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [u(m) - u(m-N)]a^{n-m}u(n-m) \end{aligned}$$

图 7-20 中示出了 $x(n)$ 、 $h(n)$ 序列图形。为求卷积和，同时绘出 $x(m)$ 以及对应某几个 n 值的 $h(n-m)$ 。由图看出，在 $n < 0$ 的条件下， $h(n-m)$ 与 $x(m)$ 相乘，处处都为零值，因此当 $n < 0$ 时， $y(n) = 0$ 。而 $0 \leq n \leq N-1$ 时，从 $m=0$ 到 $m=n$ 的范围内 $h(n-m)$ 与 $x(m)$ 有交叠相乘而得的非零值，得到

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^n a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^n a^{-m} \\ &= a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} \quad (0 \leq n \leq N-1) \end{aligned}$$

对于 $N-1 \leq n$ ，交叠相乘的非零值从 $m=0$ 延伸到 $m=N-1$ ，因此

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^{N-1} a^{-m} \\ &= a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} \quad (N-1 \leq n) \end{aligned}$$

图 7-21 绘出了响应 $y(n)$ 。

例 7-16 已知 $x_1(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-2) + \delta(n-3)$, $x_2(n) = 3\delta(n) + \delta(n-1) + 5\delta(n-2)$, 求卷积 $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ 。

解

注意到本例给出的离散时间信号未能以闭式表示，为书写方便也可将它们写作序列

$$\{x_1(n)\} = \{2 \ 1 \ 4 \ 1\}$$



$$\{x_2(n)\} = \{3 \ 1 \ 5\}$$



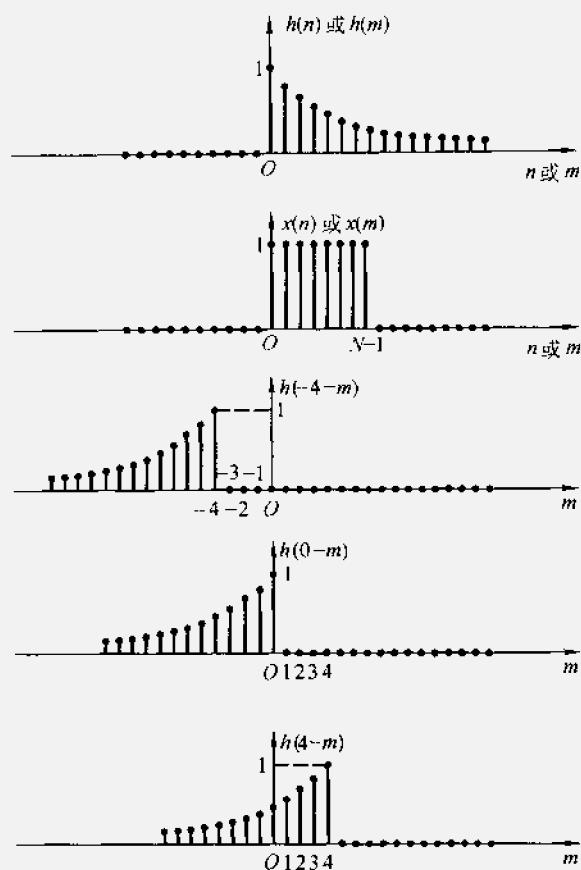
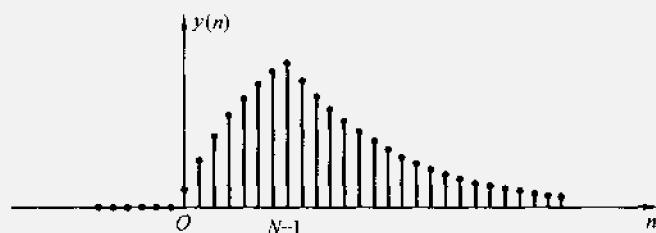


图 7-20 例 7-15 中计算卷积和有关的序列

图 7-21 例 7-15 中求得的卷积和 $y(n)$

利用一种“对位相乘求和”的方法可以较快地求出卷积结果。为此，将两序列样值以各自 n 的最高值按右端对齐，如下排列：

$$\begin{array}{r}
 x_1(n) : \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \\
 x_2(n) : \quad \quad \quad 3 \quad 1 \quad 5 \\
 \quad \quad \quad 10 \quad 5 \quad 20 \quad 5 \\
 \quad \quad \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \\
 \hline
 \quad \quad 6 \quad 3 \quad 12 \quad 3 \\
 y(n): \quad 6 \quad 5 \quad 23 \quad 12 \quad 21 \quad 5
 \end{array}$$

然后把逐个样值对应相乘但不要进位，最后把同一列上的乘积值按对位求和即可得到 $y(n)$

$$|y(n)| = \{6 \quad 5 \quad 23 \quad 12 \quad 21 \quad 5\}$$

↑

不难发现，这种方法实质上是将作图过程的反褶与移位两步骤以对位排列方式巧妙地取代，读者可自行对此例用作图法求解，将两种方法进行对比。显然，这里的“对位相乘求和”解法比较便捷。

以上两例着重说明了求卷积和的原理。表 7-1 中列出常用因果序列的卷积和，以备查用。此外，在实际应用中借助离散傅里叶变换中的快速傅里叶变换算法，利用计算机可以较简便地求得两序列之卷积和，将在第九章介绍这种方法。

表 7-1 卷积和

序号	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$
1	$\delta(n)$	$x(n)$	$x(n)$
2	a^n	$u(n)$	$\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$
3	$u(n)$	$u(n)$	$n+1$
4	a_1^n	a_2^n	$\frac{a_1^{n+1}-a_2^{n+1}}{a_1-a_2} \quad (a_1 \neq a_2)$
5	a^n	a^n	$(n+1)a^n$
6	a^n	n	$\frac{n}{1-a} + \frac{a(a^n-1)}{(1-a)^2}$
7	n	n	$\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$

续表

序号	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$
8	$a_1^n \cos(\omega_0 n + \theta)$	a_2^n	$\frac{a_1^{n+1} \cos[\omega_0(n+1) + \theta - \varphi] - a_2^{n+1} \cos(\theta - \varphi)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \omega_0}}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{a_1 \sin \omega_0}{a_1 \cos \omega_0 - a_2}\right)$

注：表中函数均为因果(有始)序列。当 $n < 0$ 时

$$x_1(n) = 0, x_2(n) = 0, x_1(n) * x_2(n) = 0$$

7.7 解卷积(反卷积)

解卷积(deconvolution)也称为反卷积、反演卷积或逆卷积。

计算卷积和的表达式为

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

在前面的讨论中，都是给定 $h(n)$ 和 $x(n)$ 求解 $y(n)$ ，而在许多信号处理的实际问题中需要作逆运算，即由给定的 $h(n)$ ， $y(n)$ 求 $x(n)$ 或由 $x(n)$ ， $y(n)$ 求 $h(n)$ 。这两类问题都称为解卷积。在控制工程领域中，又将从 $x(n)$ ， $y(n)$ 求 $h(n)$ 类型的问题称为“系统辨识”，也即由给定的输入、输出信号寻找系统模型。

在连续时间系统分析中，难以将积分运算写出简明的逆运算表达式，而对于离散时间系统的分析，不难给出求卷积逆运算的一般表达式。

由卷积定义写出

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)h(n-m)$$

将此式改写为矩阵运算形式

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(n) & h(n-1) & h(n-2) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} \quad (7-72)$$

借助此矩阵可逐次反求得 $x(n)$ 值：

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0)/h(0) \\ x(1) &= [y(1) - x(0)h(1)]/h(0) \\ x(2) &= [y(2) - x(0)h(2) - x(1)h(1)]/h(0) \\ &\dots \end{aligned}$$

依此规律递推，可以求得 $x(n)$ 的表达式为

$$x(n) = [y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} x(m)h(n-m)]/h(0) \quad (7-73)$$

此即给定 $y(n), h(n)$ 求 $x(n)$ 之计算式，式中需用到 $n-1$ 位之前的全部 x 值。利用计算机编程容易完成此解卷积运算。

同理可求得给定 $x(n), y(n)$ 求 $h(n)$ 的计算式

$$h(n) = [y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m)]/x(0) \quad (7-74)$$

在实际应用中，某些测量仪器近似具有线性系统特性，由它的系统函数 $h(n)$ 和测量输出信号 $y(n)$ 借助解卷积运算可求得待测信号即输入 $x(n)$ ，例如血压计传感器。对于地震信号处理、地质勘探或石油勘探等问题，往往是对待测目标发送信号 $x(n)$ ，测得反射回波 $y(n)$ ，由此计算被测地下层面的 $h(n)$ 以判断它的物理特性。图 7-22 示出雷达探测系统的简化框图，图中， $e(t)$ 和 $r(t)$ 分别为发送与接收信号， $h_T(t)$ 和 $h_R(t)$ 分别表示发、收天线的系统函数，若待测目标的系统函数为 $h(t)$ ，它们之间满足

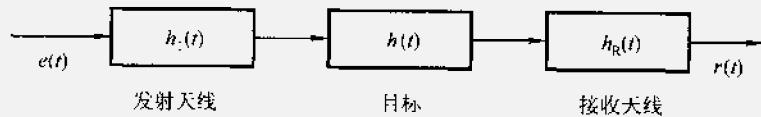


图 7-22 雷达探测系统简化框图

$$r(t) = e(t) * h_T(t) * h(t) * h_R(t) \quad (7-75)$$

显然，在给定 $e(t), r(t), h_T(t)$ 和 $h_R(t)$ 的条件下，求 $h(t)$ 也是一个解卷积问题，根据计算得到的 $h(t)$ 可表明目标的特征，以此方法识别不同类型的目标。当然，在进行上述解卷积运算时，需要将各时间信号离散化，如 $e(t), r(t), h(t)$ 分别改写为 $e(n), r(n), h(n)$ 。

目前，解卷积算法的研究已经成为信号处理领域的一个重要研究课题，人们期望得到快速、精确、实用的计算方法。除各种时域算法之外，也可利用变换域方法求解，在第八和第九章将对此作简要介绍。

习题

7-1 分别绘出以下各序列的图形。

$$(1) x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(2) x(n) = 2^n u(n)$$

$$(3) \quad x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(4) \quad x(n) = (-2)^n u(n)$$

$$(5) \quad x(n) = 2^{n-1} u(n-1)$$

$$(6) \quad x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n)$$

7-2 分别绘出以下各序列的图形。

$$(1) \quad x(n) = n u(n)$$

$$(2) \quad x(n) = -n u(-n)$$

$$(3) \quad x(n) = 2^{-n} u(n)$$

$$(4) \quad x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n} u(n)$$

$$(5) \quad x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)$$

$$(6) \quad x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n+1)$$

7-3 分别绘出以下各序列的图形。

$$(1) \quad x(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

$$(2) \quad x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{10} - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$(3) \quad x(n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

7-4 判断以下各序列是否周期性的，如果是周期性的，试确定其周期。

$$(1) \quad x(n) = A \cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right)$$

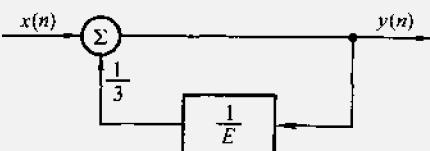
$$(2) \quad x(n) = e^{j(\frac{\pi}{8}-\pi)}$$

7-5 列出题图 7-5 所示系统的差分方程，已知边界条件 $y(-1)=0$ 。分别求以下输入序列时的输出 $y(n)$ ，并绘出其图形(用逐次迭代方法求)。

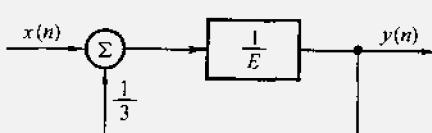
$$(1) \quad x(n) = \delta(n)$$

$$(2) \quad x(n) = u(n)$$

$$(3) \quad x(n) = u(n) - u(n-5)$$



题图 7-5



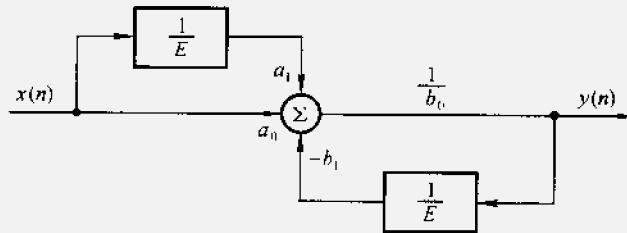
题图 7-6

7-6 列出题图 7-6 所示系统的差分方程，已知边界条件 $y(-1)=0$ 并限定当 $n < 0$ 时，全部 $y(n)=0$ ，若 $x(n)=\delta(n)$ ，求 $y(n)$ 。比较本题与 7-5 题相应的结果。

7-7 在题 7-5 中，若限定当 $n > 0$ 时，全部 $y(n)=0$ ，以 $y(1)=0$ 为边界条件，求

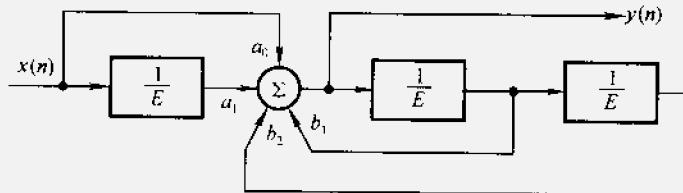
当 $x(n) = \delta(n)$ 时的响应 $y(n)$, 这时, 可以得到一个左边序列, 试解释为什么会出现这种结果。

7-8 列出题图 7-8 所示系统的差分方程, 指出其阶次。



题图 7-8

7-9 列出题图 7-9 所示系统的差分方程, 指出其阶次。



题图 7-9

7-10 已知描述系统的差分方程表示式为

$$y(n) = \sum_{r=0}^7 b_r x(n-r)$$

试绘出此离散系统的方框图。如果 $y(-1)=0, x(n)=\delta(n)$, 试求 $y(n)$, 指出此时 $y(n)$ 有何特点, 这种特点与系统的结构有何关系。

7-11 解差分方程。

$$(1) y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 0, y(0) = 1$$

$$(2) y(n) - 2y(n-1) = 0, y(0) = \frac{1}{2}$$

$$(3) y(n) + 3y(n-1) = 0, y(1) = 1$$

$$(4) y(n) + \frac{2}{3}y(n-1) = 0, y(0) = 1$$

7-12 解差分方程。

$$(1) y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0, y(-1) = 2, y(-2) = 1$$

$$(2) y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 0, y(0) = y(-1) = 1$$

$$(3) y(n) + y(n-2) = 0, y(0) = 1, y(1) = 2$$

7-13 解差分方程。

$$\begin{aligned}y(n) - 7y(n-1) + 16y(n-2) - 12y(n-3) &= 0, \\y(1) = -1, y(2) = -3, y(3) = -5\end{aligned}$$

7-14 解差分方程 $y(n) = -5y(n-1) + n$ 。已知边界条件 $y(-1) = 0$ 。

7-15 解差分方程 $y(n) + 2y(n-1) = n - 2$, 已知 $y(0) = 1$ 。

7-16 解差分方程 $y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 3^n$, 已知 $y(-1) = 0, y(0) = 0$ 。

7-17 解差分方程 $y(n) + y(n-2) = \sin n$, 已知 $y(-1) = 0, y(-2) = 0$ 。

7-18 解差分方程 $y(n) - y(n-1) = n$, 已知 $y(-1) = 0$ 。

(1) 用迭代法逐次求出数值解, 归纳一个闭式解答(对于 $n \geq 0$)。

(2) 分别求齐次解与特解, 讨论此题应如何假设特解函数式。

7-19 如果上题中方程式改为 $y(n) - y(n-1) = n^3$, 重复回答上题所问。

7-20 某系统的输入输出关系可由二阶常系数线性差分方程描述, 如果相应于输入为 $x(n) = u(n)$ 的响应为

$$y(n) = [2^n + 3(5^n) + 10]u(n)$$

(1) 若系统起始为静止的, 试决定此二阶差分方程。

(2) 若激励为 $x(n) = 2[u(n) - u(n-10)]$, 求响应 $y(n)$ 。

7-21 一个乒乓球从 H 米高度自由下落至地面, 每次弹跳起的最高值是前一次最高值的 $2/3$ 。若以 $y(n)$ 表示第 n 次跳起的最高值, 试列写描述此过程的差分方程。又若给定 $H = 2$ m, 解此差分方程。

7-22 如果在第 n 月初向银行存款 $x(n)$ 元, 月息为 a , 每月利息不取出, 试用差分方程写出第 n 月初的本利和 $y(n)$ 。设 $x(n) = 10$ 元, $a = 0.003$, $y(0) = 20$ 元, 求 $y(n)$, 若 $n = 12$, $y(12)$ 为多少?

7-23 把 $x(n)$ 升的液体 A 和 $[100 - x(n)]$ 升的液体 B 都倒入一容器中[限定 $x(n) \leq 100$ 升], 该容器内已有 900 升的 A 与 B 之混合液。均匀混合后, 再从容器倒出 100 升混合液。如此重复上述过程, 在第 n 个循环结束时, 若 A 在混合液中所占百分比为 $y(n)$, 试列出求 $y(n)$ 的差分方程。如果已知 $x(n) = 50$, $y(0) = 0$, 解 $y(n)$, 并指出其中的自由分量与强迫分量, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $y(n)$ 为多少? 再从直觉的概念解释此结果。

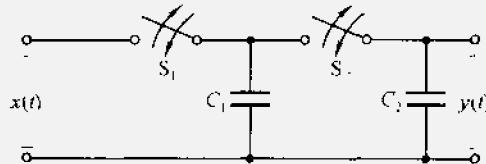
7-24 “开关电容”是在集成电路中用来替代电阻的一种基本单元。在题图 7-24 中, 开关 S_1, S_2 (在集成芯片内由两只 MOS 晶体管实现) 和电容 C_1 组成开关电容用以传送电荷, 它们相当于连续系统中的电阻, 再与另一电容 C_2 可构成离散系统中的二阶低通滤波器。

(1) 设 $t = nT$ 时刻输入与输出电压分别为 $x(t) = x(nT)$ 和 $y(t) = y(nT)$ 。

在 $t = nT$ 时 S_1 通、 S_2 断, $t = nT + \frac{T}{2}$ 时 S_1 断、 S_2 通, 利用电荷转移关系求 $y(nT + \frac{T}{2})$ 值。

(2) 重复上述动作, 当 $t = (n+1)T$ 时 S_1 通、 S_2 断, 当 $t = (n+1)T + \frac{T}{2}$ 时 S_1 断、 S_2 通, ……, 列写描述 $y(n)$ 与 $x(n)$ 关系的差分方程式(令 $T = 1$)。

(3) 若 $x(t) = u(t)$, 求系统的零状态响应 $y(n)$ 表达式, 并画 $y(t)$ 波形。



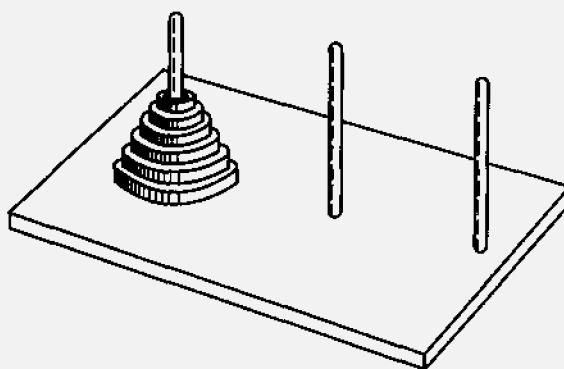
题图 7-24

7-25 对于例 7-4 的电阻梯形网络, 按所列方程式及给定之边界条件 $v(0)=E$, $v(N)=0$, 求解 $v(n)$ 表示式(注意: 答案中有系数 N)。如果 $N \rightarrow \infty$ (无限节的梯形网络), 试写出 $v(n)$ 的近似式。

7-26 对于图 7-15 所示的 RC 低通网络, 如果给定 $\frac{T}{RC}=0.1$, $x(n)=u(n)$, $y(-1)=0$, 求解差分方程式(7-28), 画出完全响应 $y(n)$ 图形, 描出 10 个样点。如果激励为阶跃信号 $x(t)=u(t)$, 解微分方程求 $y(t)$, 将 $y(t)$ 波形也画在 $y(n)$ 图形之同一坐标中以便比较。(注意, 横坐标可取为 $t'=n \cdot \frac{T}{RC}$)。

7-27 本题讨论一个饶有兴趣的“海诺塔”(Tower of Hanoi)问题。有若干个直径逐次增加的中心有孔之圆盘。起初, 它们都套在同一个木桩上(见题图 7-27), 尺寸最大的位于最下面, 随尺寸减小依次向上排列。现在, 将圆盘按下述规则转移到另外两个木桩上: (1)每次只准传递一个, (2)在传递过程中, 不允许有大盘子位于小盘子之上, (3)可以在三个木桩之间任意传递。为使 n 个盘子转移到另一木桩, 而保持其原始的上下相对位置不变, 需要传递 $y(n)$ 次, 列出求 $y(n)$ 的差分方程式, 并求解。

[提示: $y(0)=0$, $y(1)=1$, $y(2)=3$, $y(3)=7$, ...]



题图 7-27

7-28 以下各序列是系统的单位样值响应 $h(n)$, 试分别讨论各系统的因果性与稳定性。

(1) $\delta(n)$

(2) $\delta(n-5)$

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| (3) $\delta(n+4)$ | (4) $2u(n)$ |
| (5) $u(3-n)$ | (6) $2^n u(n)$ |
| (7) $3^n u(-n)$ | (8) $2^n [u(n) - u(n-5)]$ |
| (9) $0.5^n u(n)$ | (10) $0.5^n u(-n)$ |
| (11) $\frac{1}{n}u(n)$ | (12) $\frac{1}{n!}u(n)$ |

7-29 以下每个系统 $x(n)$ 表示激励, $y(n)$ 表示响应。判断每个激励与响应的关系是否线性的? 是否时不变的?

$$(1) \quad y(n) = 2x(n) + 3$$

$$(2) \quad y(n) = x(n) \sin\left(\frac{2\pi}{7}n + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$(3) \quad y(n) = [x(n)]^2$$

$$(4) \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$

7-30 对于线性时不变系统:

(1) 已知激励为单位阶跃信号之零状态响应(阶跃响应)是 $g(n)$, 试求冲激响应 $h(n)$;

(2) 已知冲激响应 $h(n)$, 试求阶跃响应 $g(n)$ 。
7-31 以下各序列中, $x(n)$ 是系统的激励函数, $h(n)$ 是线性时不变系统的单位样值响应, 分别求出 $g(n)$ 。画出 $g(n)$ 图形(用卷积方法)。

(1) $x(s)$, $b(s)$ 因题图 7-31(a)

(3) $\pi(z)$, $t(z)$ 因题图 7-31(b)

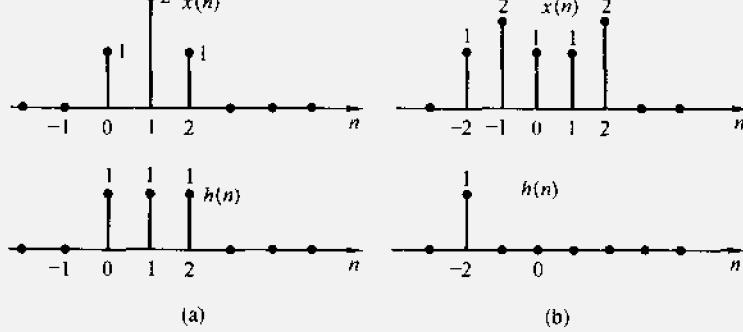
$$(3) \quad \pi(x) = \pi^{\alpha} x, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$k_1(x) = \beta'' v_1(x), \quad 0 \leq \beta \leq$$

$$(4) \quad \pi(n) = n(\pi)$$

$$k(-) = \mathfrak{d}(-)$$

$$n(n) = \sigma(n-2) - \sigma(n-3)$$



题图 7-31

7-32 已知线性时不变系统的单位样值响应 $h(n)$ 以及输入 $x(n)$, 求输出 $y(n)$, 并

绘图示出 $y(n)$ 。

- (1) $h(n) = x(n) = u(n) - u(n-4)$
- (2) $h(n) = 2^n [u(n) - u(n-4)]$, $x(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$
- (3) $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $x(n) = u(n) - u(n-5)$

7-33 如题图 7-33 所示的系统包括两个级联的线性时不变系统，它们的单位样值响应分别为 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 。已知 $h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-3)$, $h_2(n) = (0.8)^n u(n)$ 。令 $x(n) = u(n)$ 。

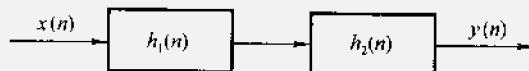
(1) 按下式求 $y(n)$

$$y(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n)$$

(2) 按下式求 $y(n)$

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

两种方法的结果应当是一样的(卷积结合律)。



题图 7-33

7-34 已知一线性时不变系统的单位样值响应 $h(n)$ ，除在 $N_0 \leq n \leq N_1$ 区间之外都为零。而输入 $x(n)$ 除在 $N_2 \leq n \leq N_3$ 区间之外均为零。这样，响应 $y(n)$ 除在 $N_4 \leq n \leq N_5$ 之外均被限制为零。试用 N_0 , N_1 , N_2 , N_3 来表示 N_4 与 N_5 。

7-35 某地质勘探测试设备给出的发射信号 $x(n) = \delta(n) + \frac{1}{2} \delta(n-1)$ ，接收回波信号 $y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ ，若地层反射特性的系统函数以 $h(n)$ 表示，则满足 $y(n) = h(n) * x(n)$ 。

- (1) 求 $h(n)$ ；
- (2) 以延时、相加、倍乘运算为基本单元，试画出系统方框图。

第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析

8.1 引言

很久以前，人们就已经认识了 z 变换方法的原理，其历史可以追溯至 18 世纪。早在 1730 年，英国数学家棣莫弗 (De Moivre 1667—1754) 将生成函数 (generating function) 的概念用于概率理论的研究，实质上，这种生成函数的形式与 z 变换相同。从 19 世纪的拉普拉斯 (P.S. Laplace) 至 20 世纪的沙尔 (H.L. Seal) 等人，在这方面继续作出贡献。然而，在那样一个较为局限的数学领域中， z 变换的概念没能得到充分运用与发展。20 世纪 50 年代与 60 年代，抽样数据控制系统和数字计算机的研究与实践，为 z 变换的应用开辟了广阔的天地，从此，在离散信号与系统的理论研究之中， z 变换成为一种重要的数学工具。它把离散系统的数学模型——差分方程转化为简单的代数方程，使其求解过程得以简化。因而， z 变换在离散系统中的地位与作用，类似于连续系统中的拉普拉斯变换。

从本节开始陆续讨论 z 变换的定义、性质以及它与拉氏变换、傅氏变换的联系。在此基础上研究离散时间系统的 z 域分析，给出离散系统的系统函数与频率响应的概念。必须指出，类似于连续系统的 s 域分析，在离散系统的 z 域分析中将看到，利用系统函数在 z 平面零、极点分布特性研究系统的时域特性、频域特性以及稳定性等方法也具有同样的重要意义。在第十章将介绍利用 z 变换构成数字滤波器的原理和初步设计方法。

在连续时间信号与系统分析中，从傅里叶变换引出拉普拉斯变换。而在本章中，对于离散时间信号与系统的研究，则是先介绍 z 变换，然后引出序列的傅里叶变换 (第 8.9 节) 以及离散傅里叶变换 (第九章)。无论对于连续或离散系统，这种学习 (讲授) 顺序都可以更换过来。

z 变换的定义可以借助抽样信号的拉氏变换引出，也可直接对离散时间信号给予 z 变换的定义。

首先来看抽样信号的拉氏变换。若连续因果信号 $x(t)$ 经均匀冲激抽样，则抽样信号 $x_s(t)$ 的表示式为

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_T(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

式中 T 为抽样间隔。如果对上式取拉氏变换，得到

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-st} dt$$

将积分与求和的次序对调，并利用冲激函数的抽样特性，便可得到抽样信号的拉氏变换

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT} \quad (8-1)$$

此时，如果引入一个新的复变量 z ，令

$$z = e^{sT}$$

或写为

$$s = \frac{1}{T} \ln z$$

则式(8-1)变成了复变量 z 的函数式 $X(z)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} \quad (8-2)$$

该式就是下面将要定义的离散信号 $x(nT)$ 的 z 变换表示式。通常令 $T=1$ ，则式(8-1)、(8-2)变成：

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ z &= e^s \end{aligned}$$

如果序列 $x(n)$ 各样值与抽样信号 $x(t) \delta_T(t)$ 各冲激函数的强度相对应，就可借助符号 $z = e^{sT}$ ，将抽样信号的拉氏变换移植来表示离散时间信号的 z 变换（在 8.6 节将要看到，这种对应在个别样点不能成立，而在一般情况下完全一致）。下一节在此基础上给出 z 变换的定义。

8.2 z 变换定义、典型序列的 z 变换

与拉氏变换的定义类似， z 变换也有单边和双边之分。序列 $x(n)$ 的单边 z 变换定义为

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(n)] \\ &= x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (8-3) \end{aligned}$$

其中符号 \mathcal{Z} 表示取 z 变换， z 是复变量。

对于一切 n 值都有定义的双边序列 $x(n)$, 也可以定义双边 z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(n)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \end{aligned} \quad (8-4)$$

显然, 如果 $x(n)$ 为因果序列, 则双边 z 变换与单边 z 变换是等同的。

式(8-3)、(8-4)表明, 序列的 z 变换是复变量 z^{-1} 的幂级数(亦称洛朗级数), 其系数是序列 $x(n)$ 值。在有些数学文献中, 也把 $X(z)$ 称为序列 $x(n)$ 的生成函数。在拉氏变换分析中着重讨论单边拉氏变换, 这是由于在连续时间系统中, 非因果信号的应用较少。对于离散时间系统, 非因果序列也有一定的应用范围, 因此, 将着重单边适当兼顾双边 z 变换分析。

z 变换的逆变换表达式和有关求解方法将在 8.4 节专门讨论。下面举例给出一些典型序列的 z 变换。

(一) 单位样值函数

单位样值函数 $\delta(n)$ 定义为

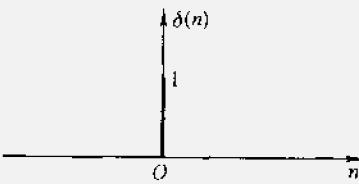
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

如图 8-1 所示。

取其 z 变换, 得到

$$\mathcal{Z}[\delta(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1 \quad (8-5)$$

可见, 与连续系统单位冲激函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换类似, 单位样值函数 $\delta(n)$ 的 z 变换等于 1。



(二) 单位阶跃序列

单位阶跃序列 $u(n)$ 定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1 & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

如图 8-2 所示。

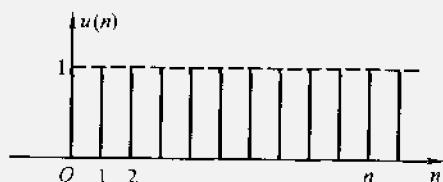


图 8-1 单位样值函数

图 8-2 单位阶跃序列

取其 z 变换得到

$$\mathcal{Z}[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

若 $|z| > 1$, 该几何级数收敛, 它等于

$$\mathcal{Z}[u(n)] = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (8-6)$$

(三) 斜变序列

斜变序列为

$$x(n) = nu(n)$$

如图 8-3 所示。

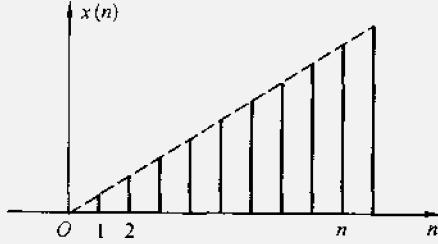


图 8-3 斜变序列

其 z 变换为

$$\mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

该 z 变换可以用下面方法间接求得。

由式(8-6), 已知

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (|z| > 1)$$

将上式两边分别对 z^{-1} 求导, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

两边各乘 z^{-1} , 便得到了斜变序列的 z 变换, 它等于

$$\mathcal{Z}[nu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z| > 1) \quad (8-7)$$

同样, 若式(8-7)两边再对 z^{-1} 取导数, 还可得到:

$$\mathcal{Z}[n^2 u(n)] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \quad (8-8)$$

$$\mathcal{Z}[n^3 u(n)] = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} \quad (8-9)$$

...

(四) 指数序列

单边指数序列的表示式为

$$x(n) = a^n u(n)$$

如图 8-4 所示。由式(8-4)可求出它的 z 变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[a^n u(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n\end{aligned}$$

显然,对此级数若满足 $|z| > |a|$, 则可收敛为

$$\mathcal{Z}[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - (az^{-1})} = \frac{z}{z - a} \quad (|z| > |a|) \quad (8-10)$$

若令 $a = e^b$, 当 $|z| > |e^b|$, 则

$$\mathcal{Z}[e^{bn} u(n)] = \frac{z}{z - e^b}$$

同样,若将式(8-10)两边对 z^{-1} 求导,可以推出:

$$\mathcal{Z}[na^n u(n)] = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{az}{(z - a)^2} \quad (8-11)$$

$$\mathcal{Z}[n^2 a^n u(n)] = \frac{az(z + a)}{(z - a)^3} \quad (8-12)$$

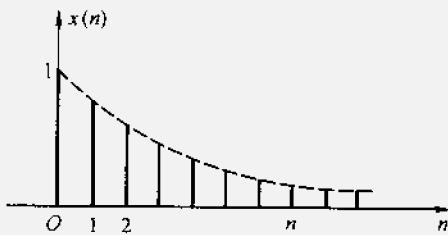


图 8-4 单边指数序列

(五) 正弦与余弦序列

单边余弦序列 $\cos(\omega_0 n)$ 如图 8-5 所示。

因

$$\mathcal{Z}[e^{bn} u(n)] = \frac{z}{z - e^b} \quad (|z| > |e^b|)$$

令 $b = j\omega_0$, 则当 $|z| > |e^{j\omega_0}| = 1$ 时, 得

$$\mathcal{Z}[e^{j\omega_0 n} u(n)] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$$

同样,令 $b = -j\omega_0$, 则得

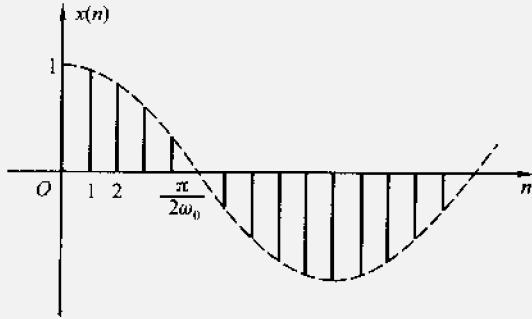


图 8-5 单边余弦序列

$$\mathcal{Z}[e^{-j\omega_0 n} u(n)] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}$$

将上两式相加，得

$$\mathcal{Z}[e^{j\omega_0 n} u(n)] + \mathcal{Z}[e^{-j\omega_0 n} u(n)] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}$$

由 z 变换的定义可知，两序列之和的 z 变换等于各序列 z 变换的和。这样，根据欧拉公式，从上式可以直接得到余弦序列的 z 变换，它是

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\cos(\omega_0 n) u(n)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) \\ &= \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}\end{aligned}\quad (8-13)$$

同理可得正弦序列的 z 变换

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\sin(\omega_0 n) u(n)] &= \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) \\ &= \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}\end{aligned}\quad (8-14)$$

以上二式的收敛域都为 $|z| > 1$ 。注意到 $\cos(\omega_0 n) u(n)$ 与 $\sin(\omega_0 n) u(n)$ 的 z 变换式分母相同。

在式(8-10)中，若令 $a = \beta e^{j\omega_0}$ ，则式(8-10)变为

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[a^n u(n)] &= \mathcal{Z}[\beta^n e^{jn\omega_0} u(n)] \\ &= \frac{1}{1 - \beta e^{j\omega_0} z^{-1}}\end{aligned}$$

同样 $\mathcal{Z}[\beta^n e^{-jn\omega_0} u(n)] = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega_0} z^{-1}}$

借助欧拉公式，由上两式可以得到

$$\mathcal{Z}[\beta^n \cos(n\omega_0) u(n)] = \frac{1 - \beta z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2\beta z^{-1} \cos \omega_0 + \beta^2 z^{-2}}$$

$$=\frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2} \quad (8-15)$$

及

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\beta^n \sin(n\omega_0) u(n)] &= \frac{\beta z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2\beta z^{-1} \cos \omega_0 + \beta^2 z^{-2}} \\ &= \frac{\beta z \sin \omega_0}{z^2 - 2\beta z \cos \omega_0 + \beta^2} \end{aligned} \quad (8-16)$$

上两式是单边指数衰减($\beta < 1$)及增幅($\beta > 1$)的余弦、正弦序列的 z 变换。其收敛域为 $|z| > |\beta|$ 。

一些典型序列的单边 z 变换列于附录五。

8.3 z 变换的收敛域

由上节求解各序列 z 变换的过程可以看到，只有当级数收敛时， z 变换才有意义。对于任意给定的有界序列 $x(n)$ ，使 z 变换定义式级数收敛之所有 z 值的集合，称为 z 变换 $X(z)$ 的收敛域(region of convergence, 简写为 ROC)。

与拉氏变换的情况类似，对于单边变换，序列与变换式惟一对应，同时也有惟一的收敛域。而在双边变换时，不同的序列在不同的收敛域条件下可能映射为同一个变换式。下面举例说明这种情况。

若两序列分别为：

$$\begin{aligned}x_1(n) &= a^n u(n) \\x_2(n) &= -a^n u(-n-1)\end{aligned}$$

容易求得它们的 z 变换分别为：

$$\begin{aligned}X_1(z) &= \mathcal{Z}[x_1(n)] \\&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|) \\X_2(z) &= \mathcal{Z}[x_2(n)] \\&= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n) z^{-n} \\&= -\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n + 1\end{aligned} \quad (8-17)$$

对 $X_2(z)$ 而言，只有当 $|z| < |a|$ 时级数才收敛，于是有

$$X_2(z) = \frac{z}{z-a} \quad (|z| < |a|) \quad (8-18)$$

上述结果说明，两个不同的序列由于收敛域不同，可能对应于相同的 z 变换。因此，为了单值地确定 z 变换所对应的序列，不仅要给出序列的 z 变换式，而且必须同时说明它的收敛域。在收敛域内， z 变换及它的导数是 z 的连续函

数，也就是说， z 变换函数是收敛域内每一点上的解析函数。

根据级数的理论，式(8-4)所示级数收敛的充分条件是满足绝对可和条件，即要求

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| z^{-n} < \infty \quad (8-19)$$

上式的左边构成正项级数，通常可以利用两种方法——比值判定法和根值判定法，判别正项级数的收敛性。所谓比值判定法就是说若有一个正项级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|, \text{令它的后项与前项比值的极限等于 } \rho, \text{ 即}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \quad (8-20)$$

则当 $\rho < 1$ 时级数收敛， $\rho > 1$ 时级数发散， $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散。所谓根值判定法，是令正项级数一般项 $|a_n|$ 的 n 次根的极限等于 ρ ，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \quad (8-21)$$

则当 $\rho < 1$ 时级数收敛， $\rho > 1$ 时级数发散， $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散。

下面利用上述判定法讨论几类序列的 z 变换收敛域问题。

(1) 有限长序列

这类序列只在有限的区间 ($n_1 \leq n \leq n_2$) 具有非零的有限值，此时 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

由于 n_1, n_2 是有限整数，因而上式是一个有限项级数。由该级数可以看出，当 $n_1 < 0, n_2 > 0$ 时，除 $z = \infty$ 及 $z = 0$ 外， $X(z)$ 在 z 平面上处处收敛，即收敛域为 $0 < |z| < \infty$ 。当 $n_1 < 0, n_2 \leq 0$ 时， $X(z)$ 的收敛域为 $|z| < \infty$ 。当 $n_1 \geq 0, n_2 > 0$ 时， $X(z)$ 的收敛域为 $|z| > 0$ 。所以有限长序列的 z 变换收敛域至少为 $0 < |z| < \infty$ ，且可能还包括 $z = 0$ 或 $z = \infty$ ，由序列 $x(n)$ 的形式所决定。

(2) 右边序列

这类序列是有始无终的序列，即当 $n < n_1$ 时 $x(n) = 0$ 。此时 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

由式(8-21)，若满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)|} < 1$$

即

$$|z| > \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(n)|} = R_{x1} \quad (8-22)$$

则该级数收敛。其中 R_{x1} 是级数的收敛半径。可见，右边序列的收敛域是半径为 R_{x1} 的圆外部分。如果 $n_1 \geq 0$ ，则收敛域包括 $z = \infty$ ，即 $|z| > R_{x1}$ ；如果 $n_1 < 0$ ，则收敛域不包括 $z = \infty$ ，即 $R_{x1} < |z| < \infty$ 。显然，当 $n_1 = 0$ 时，右边序列变成因果序列，也就是说，因果序列是右边序列的一种特殊情况，它的收敛域是 $|z| > R_{x1}$ 。

(3) 左边序列

这类序列是无始有终序列，即当 $n > n_2$ 时， $x(n) = 0$ 。此时 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

若令 $m = -n$ ，上式变为

$$X(z) = \sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m) z^m$$

如果将变量 m 再改为 n ，则

$$X(z) = \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n) z^n$$

根据式(8-21)，若满足

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)|} z^n < 1$$

$$\text{即 } |z| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}} = R_{x2} \quad (8-23)$$

则该级数收敛。可见，左边序列的收敛域是半径为 R_{x2} 的圆内部分。如果 $n_2 > 0$ ，则收敛域不包括 $z = 0$ ，即 $0 < |z| < R_{x2}$ 。如果 $n_2 \leq 0$ ，则收敛域包括 $z = 0$ ，即 $|z| < R_{x2}$ 。

(4) 双边序列

双边序列是从 $n = -\infty$ 延伸到 $n = +\infty$ 的序列，一般可写作

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n}$$

显然，可以把它看成右边序列和左边序列的 z 变换叠加。上式右边第一个级数是右边序列，其收敛域为 $|z| > R_{x1}$ ；第二个级数是左边序列，收敛域为 $|z| < R_{x2}$ 。如果 $R_{x2} > R_{x1}$ ，则 $X(z)$ 的收敛域是两个级数收敛域的重叠部分，即

$$R_{x1} < |z| < R_{x2}$$

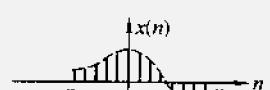
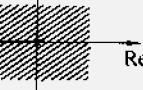
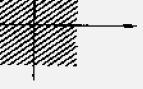
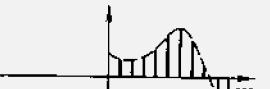
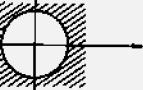
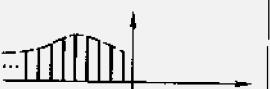
其中 $R_{x1} > 0$ ， $R_{x2} < \infty$ 。所以，双边序列的收敛域通常是环形。如果 $R_{x1} > R_{x2}$ ，则两个级数不存在公共收敛域，此时 $X(z)$ 不收敛。

上面讨论了各种序列的双边 z 变换的收敛域，显然，收敛域取决于序列

的形式。为便于对比，将上述几类序列的双边 z 变换收敛域列于表 8-1。

应当指出，任何序列的单边 z 变换收敛域和因果序列的收敛域类同，它们都是 $|z| > R_{c1}$ 。

表 8-1 序列的形式与双边 z 变换收敛域的关系

序 列 形 式	z 变 换 收 敛 域		
有限长序列 ① $n_1 < 0$ $n_2 > 0$			$\infty > z > 0$
			$ z > 0$
			$\infty > z $
右边序列 ① $n_1 < 0$ $n_2 = \infty$			$\infty > z > R_{c1}$
			$ z > R_{c1}$
因果序列 ① $n_1 = -\infty$ $n_2 > 0$			$R_{c2} > z > 0$
			$R_{c2} > z $
双边序列 $n_1 = -\infty$ $n_2 = \infty$			$R_{c2} > z > R_{c1}$

例 8-1 求序列 $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ 的 z 变换，并确定它的收敛域（其中 $b > a, b > 0, a > 0$ ）。

解

这是一个双边序列，假若求单边 z 变换，它等于：

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [a^n u(n) - b^n u(-n-1)] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \end{aligned}$$

如果 $|z| > a$ ，则上面的级数收敛，这样得到

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}$$

其零点位于 $z=0$ ，极点位于 $z=a$ ，收敛域为 $|z| > a$ 。

假若求序列的双边 z 变换，它等于

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^n u(n) - b^n u(-n-1)] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} z^n \end{aligned}$$

如果 $|z| > a, |z| < b$ ，则上面的级数收敛，得到

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{z-a} + 1 + \frac{b}{z-b} \\ &= \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \end{aligned}$$

显然，该序列的双边 z 变换的零点位于 $z=0$ 及 $z=\frac{a+b}{2}$ ，极点位于 $z=a$ 与 $z=b$ ，收敛域为 $b > |z| > a$ ，如图 8-6 所示。由该例可以看出，由于 $X(z)$ 在收敛域内是解析的，因此收敛域内不应该包含任何极点。通常，收敛域以极点为边界。对于多个极点的情况，右边序列之收敛域是从 $X(z)$ 最外面(最大值)有限极点向外延伸至 $z \rightarrow \infty$ (可能包括 ∞)；左边序列之收敛域是从 $X(z)$ 最里边(最小值)非零极点向内延伸至 $z=0$ (可能包括 $z=0$)。

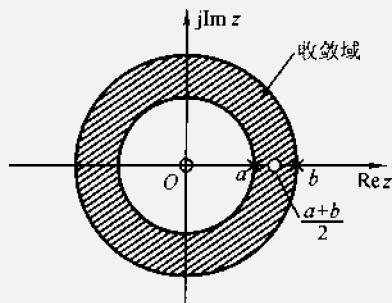


图 8-6 双边指数序列 $a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ 的 z 变换零极点与收敛域

8.4 逆 z 变换

若已知序列 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)]$$

则 $X(z)$ 的逆变换记作 $\mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$ ，并由以下围线积分给出

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \end{aligned} \quad (8-24)$$

C 是包围 $X(z) z^{n-1}$ 所有极点之逆时针闭合积分路线，通常选择 z 平面收敛域内以原点为中心的圆，如图 8-7 所示。

下面从 z 变换定义表达式导出逆变换式(8-24)。已知

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

对此式两端分别乘以 z^{m-1} ，然后沿围线 C 积分，得到

$$\oint_C z^{m-1} X(z) dz = \oint_C \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \right] z^{m-1} dz$$

将积分与求和的次序互换，上式变成

$$\oint_C X(z) z^{m-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \oint_C z^{m-n-1} dz \quad (8-25)$$

根据复变函数中的柯西定理，已知

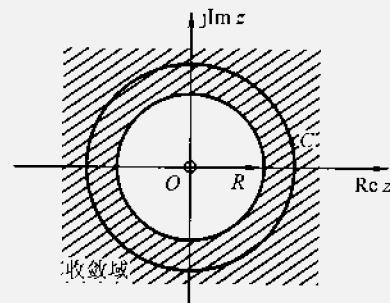


图 8-7 逆 z 变换积分围线的选择

$$\oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 2\pi j & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

这样，式(8-25)的右边只存在 $m=n$ 一项，其余均等于零。于是式(8-25)变成

$$\begin{aligned} \oint_C X(z) z^{n-1} dz &= 2\pi j x(n) \\ \text{即 } x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \end{aligned} \quad (8-26)$$

逆变换式(8-24)得证。

求逆变换的计算方法有三种：对式(8-24)作围线积分(也称留数法)，或仿照拉氏变换的方法将 $X(z)$ 函数式用部分分式展开，经查表求出逐项的逆变换再取和，此外，还可借助长除法将 $X(z)$ 展开幂级数得到 $x(n)$ 。显然，部分分式展开法比较简便，因此应用最多，对于另外两种方法仅作简要说明，下面分别介绍。

(一) 围线积分法(留数法)

由于围线 C 在 $X(z)$ 的收敛域内，且包围着坐标原点，而 $X(z)$ 又在 $|z|>R$ 的区域内收敛，因此 C 包围了 $X(z)$ 的奇点。通常 $X(z)z^{n-1}$ 是 z 的有理函数，其奇点都是孤立奇点(极点)。这样，借助于复变函数的留数定理，可以把式(8-26)的积分表示为围线 C 内所包含 $X(z)z^{n-1}$ 的各极点留数之和，即

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \\ &= \sum_m [X(z)z^{n-1} \text{ 在 } C \text{ 内极点的留数}] \end{aligned}$$

或简写为

$$x(n) = \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (8-27)$$

式中 Res 表示极点的留数， z_m 为 $X(z)z^{n-1}$ 的极点。

如果 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=z_m$ 处有 s 阶极点，此时它的留数由下式确定

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} = \frac{1}{(s-1)!} \left\{ \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} [(z-z_m)^s X(z)z^{n-1}] \right\}_{z=z_m} \quad (8-28)$$

若只含有一阶极点，即 $s=1$ ，此时式(8-28)可以简化为

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} = [(z-z_m)X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (8-29)$$

在利用式(8-27)~(8-29)的时候，应当注意收敛域内围线所包围的极点情况，特别要关注对于不同 n 值，在 $z=0$ 处的极点可能具有不同阶次。

例 8-2 求 $X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$, ($|z|>1$) 的逆变换。

解

由式(8-27)知 $X(z)$ 的逆变换为

$$x(n) = \sum_m \text{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \right]_{z=z_m}$$

当 $n \geq -1$ 时在 $z=0$ 点没有极点, 仅在 $z=1$ 和 $z=0.5$ 处有一阶极点, 可求得:

$$\text{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \right]_{z=1} = 2$$

$$\text{Res} \left[\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \right]_{z=0.5} = -(0.5)^n$$

由此写出

$$x(n) = [2 - (0.5)^n]u(n+1)$$

实际上, 当 $n = -1$ 时 $x(n) = 0$, 因此上式可简写为

$$x(n) = [2 - (0.5)^n]u(n)$$

当 $n < -1$ 时, 在 $z=0$ 处有极点存在, 不难求得与此点相应的留数和上面两极点处之留数总和值为零, 因此 $x(n)$ 都等于零。本题的答案就是上面求得的因果序列 $x(n)$, 这与收敛域条件 ($|z|>1$) 一致。

如果本题的 $X(z)$ 保持不变, 而收敛域改为 $|z|<0.5$, 积分围线应选在半径为 0.5 的圆之内。当 $n > -1$ 时, 围线积分等于零, 相应的 $u(n)$ 都为零; 而当 $n < -1$ 时, $z=0$ 处有极点存在, 求解围线积分后可得到 $u(n)$ 为左边序列, 此结果也与收敛条件 ($|z|<0.5$) 相符合。

另一种情况是收敛域为圆环 ($0.5 < |z| < 1$)。这时, 积分围线应选在半径为 0.5 至 1 的圆环之内, 所求得 $x(n)$ 是双边序列。

综上所述, 对于同一个 $X(z)$ 表达式, 当给定的收敛域不同时, 所选择之积分围线也不相同, 最后将得到不同的逆变换序列 $x(n)$ 。

(二) 幂级数展开法(长除法)

因为 $x(n)$ 的 z 变换定义为 z^{-1} 的幂级数

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

所以, 只要在给定的收敛域内把 $X(z)$ 展成幂级数, 级数的系数就是序列 $x(n)$ 。

在一般情况下, $X(z)$ 是有理函数, 令分子多项式为 $N(z)$, 分母多项式为 $D(z)$ 。如果 $X(z)$ 的收敛域是 $|z| > R_{x1}$, 则 $x(n)$ 必然是因果序列, 此时 $N(z), D(z)$ 按 z 的降幂(或 z^{-1} 的升幂)次序进行排列。如果收敛域是 $|z| <$

R_{x2} , 则 $x(n)$ 必然是左边序列, 此时 $N(z)$, $D(z)$ 按 z 的升幂(或 z^{-1} 的降幂)次序进行排列。然后利用长除法, 便可将 $X(z)$ 展成幂级数, 从而得到 $x(n)$ 。

例 8-3 求 $X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ 的逆变换 $x(n)$ (收敛域为 $|z| > 1$)。

解

由于 $X(z)$ 的收敛域是 $|z| > 1$, 因而 $x(n)$ 必然是因果序列。此时 $X(z)$ 按 z 的降幂排列成下列形式

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}$$

进行长除

$$\begin{array}{r} z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots \\ z^2 - 2z + 1 \overline{) z} \\ \underline{z - 2 + z^{-1}} \\ \hline 2 - z^{-1} \\ \underline{2 - 4z^{-1} + 2z^{-2}} \\ 3z^{-1} - 2z^{-2} \\ \underline{3z^{-1} - 6z^{-2} + 3z^{-3}} \\ 4z^{-2} - 3z^{-3} \\ \dots \end{array}$$

所以

$$\begin{aligned} X(z) &= z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} \end{aligned}$$

得到

$$x(n) = nu(n)$$

例 8-4 求收敛域分别为 $|z| > 1$ 和 $|z| < 1$ 两种情况下, $X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$ 的逆变换 $x(n)$ 。

解

对于收敛域 $|z| > 1$, $X(z)$ 相应的序列 $x(n)$ 是因果序列, 这时 $X(z)$ 写成

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

进行长除, 展成级数

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)z^{-n} \end{aligned}$$

得到

$$x(n) = (3n+1)u(n)$$

若收敛域为 $|z| < 1$, 则 $X(z)$ 相对应的序列 $x(n)$ 是左边序列。此时 $X(z)$ 写为

$$X(z) = \frac{2z^{-1} + 1}{z^{-2} - 2z^{-1} + 1}$$

进行长除, 展成级数

$$\begin{aligned} X(z) &= 2z + 5z^2 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (3n-1)z^n \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (3n+1)z^{-n} \end{aligned}$$

得到

$$x(n) = -(3n+1)u(-n-1)$$

(三) 部分分式展开法

序列的 z 变换通常是 z 的有理函数, 可表示为有理分式形式。类似于拉氏变换中部分分式展开法, 在这里, 也可以先将 $X(z)$ 展成一些简单而常见的部分分式之和, 然后分别求出各部分分式的逆变换, 把各逆变换相加即可得到 $x(n)$ 。

z 变换的基本形式为 $\frac{z}{z - z_m}$, 在利用 z 变换的部分分式展开法的时候, 通常先将 $\frac{X(z)}{z}$ 展开, 然后每个分式乘以 z , 这样对于一阶极点, $X(z)$ 便可展成 $\frac{z}{z - z_m}$ 形式。

下面先给出一个简单的例题, 然后讨论部分分式展开法的一般公式。

例 8-5 用部分分式展开法求解 $X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}$ 的逆变换 $x(n)$ ($|z| > 1$)。

解 本题与例 8-2 相同。

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

只包含一阶极点 $z_1 = 0.5$, $z_2 = 1$ 。得到以下展开式

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-0.5} + \frac{A_2}{z-1}$$

式中:

$$A_1 = \left[\frac{X(z)}{z} (z-0.5) \right]_{z=0.5} = -1$$

$$A_2 = \left[\frac{X(z)}{z} (z-1) \right]_{z=1} = 2$$

$X(z)$ 展为

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

因为 $|z| > 1$, 所以 $x(n)$ 是因果序列, 由 8.2 节导出的 z 变换关系式得到

$$x(n) = (2 - 0.5^n)u(n)$$

与例 8-2 的结果相同, 而求解过程比较简便。

一般情况下, $X(z)$ 表达式为

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_{r-1} z^{r-1} + b_r z^r}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k} \quad (8-30)$$

对于因果序列, 它的 z 变换收敛域为 $|z| > R$, 为保证在 $z = \infty$ 处收敛, 其分母多项式的阶次不低于分子多项式的阶次, 即满足 $k \geq r$ 。

如果 $X(z)$ 只含有一阶极点, 则 $\frac{X(z)}{z}$ 可以展为

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{m=0}^K \frac{A_m}{z - z_m}$$

即

$$X(z) = \sum_{m=0}^K \frac{A_m z}{z - z_m} \quad (8-31)$$

式中 z_m 是 $\frac{X(z)}{z}$ 的极点, A_m 是 z_m 的留数, 它等于

$$A_m = \text{Res} \left[\frac{X(z)}{z} \right]_{z=z_m} = \left[(z - z_m) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=z_m}$$

或者把式(8-31)表示成

$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^K \frac{A_m z}{z - z_m} \quad (8-32)$$

在这里, z_m 是 $X(z)$ 的极点, 而 A_0 是

$$A_0 = [X(z)]_{z=0} = \frac{b_0}{a_0}$$

如果 $X(z)$ 中含有高阶极点, 式(8-31)、(8-32)应当加以修正, 若 $X(z)$ 除含有 M 个一阶极点外, 在 $z = z_i$ 处还含有一个 s 阶极点, 此时 $X(z)$ 应展成

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{m=0}^M \frac{A_m z}{z - z_m} + \sum_{j=1}^s \frac{B_j z}{(z - z_i)^j} \\ &= A_0 + \sum_{m=1}^M \frac{A_m z}{z - z_m} + \sum_{j=1}^s \frac{B_j z}{(z - z_i)^j} \end{aligned}$$

式中 A_m 确定方法与前相同, 而 B_j 等于

$$B_j = \frac{1}{(s-j)!} \left[\frac{d^{s-j}}{dz^{s-j}} (z - z_i)^s \frac{X(z)}{z} \right]_{z=z_i}$$

在这种情况下, $X(z)$ 也可展为下列形式

$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^M \frac{A_m z}{z - z_m} + \sum_{j=1}^s \frac{C_j z^j}{(z - z_i)^j}$$

其中, 对于 $j=s$ 项系数

$$C_s = \left[\left(\frac{z - z_i}{z} \right)^s X(z) \right]_{z=z_i}$$

其他各 C_j 系数由待定系数法求出。

在这两种展开式中, 部分分式的基本形式是 $\frac{z}{(z - z_i)^j}$ 或 $\frac{z^j}{(z - z_i)^j}$ 。在表 8-2 至表 8-4 中给出了相应的逆变换。其中, 表 8-2 是 $|z| > a$ 对应右边序列的情况, 而表 8-3 是 $|z| < a$ 为左边序列。由表 8-2 利用延时定理容易导出补充表 8-4。作为练习, 读者还可由表 8-3 导出类似的补充表。在查表时应注意收敛域条件, 例如对于例 8-5 给定的收敛域 ($|z| > 1$) 可查得 $x(n) = 2u(n) - (0.5)^n u(n)$, 若此题 $X(z)$ 不改变, 而收敛域为 $|z| < 0.5$ 时, 则查得 $x(n) = [-2 + (0.5)^n] u(-n-1)$, 若收敛域为环形 $0.5 < |z| < 1$, 则 $x(n) = -(0.5)^n u(n) - 2u(-n-1)$ 。

表 8-2 逆 z 变换表(一)

z 变换 ($ z > a $)	序列
$\frac{z}{(z-1)}$	$u(n)$
$\frac{z}{(z-a)}$	$a^n u(n)$
$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$(n+1)a^n u(n)$
$\frac{z^3}{(z-a)^3}$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2!} a^n u(n)$
$\frac{z^4}{(z-a)^4}$	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} a^n u(n)$
$\frac{z^{n+1}}{(z-a)^{n+1}}$	$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!} a^n u(n)$

表 8-3 逆 z 变换表(二)

z 变换($ z < a $)	序 列
$\frac{z}{(z-a)}$	$-a^n u(-n-1)$
$\frac{z}{(z-a)^2}$	$-a^n u(-n-1)$
$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$-(n+1)a^n u(-n-1)$
$\frac{z^3}{(z-a)^3}$	$-\frac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(-n-1)$
$\frac{z^4}{(z-a)^4}$	$-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}a^n u(-n-1)$
$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$-\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}a^n u(-n-1)$

表 8-4 逆 z 变换表(三)

z 变换($ z > a $)	序 列
$\frac{z}{(z-1)^2}$	$nu(n)$
$\frac{az}{(z-a)^2}$	$na^n u(n)$
$\frac{z}{(z-1)^3}$	$\frac{n(n-1)}{2!}u(n)$
$\frac{z}{(z-1)^4}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u(n)$
$\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$	$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}u(n)$

8.5 z 变换的基本性质

(一) 线性

z 变换的线性表现在它的叠加性与均匀性，若：

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z) \quad (R_{y1} < |z| < R_{y2})$$

则

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[ax(n) + by(n)] &= aX(z) + bY(z) \\ &\quad (R_1 < |z| < R_2) \end{aligned} \tag{8-33}$$

其中 a, b 为任意常数。

相加后序列的 z 变换收敛域一般为两个收敛域的重叠部分，即 R_1 取 R_{x1} 与 R_{y1} 中较大者，而 R_2 取 R_{x2} 与 R_{y2} 中较小者，记作 $\max(R_{x1}, R_{y1}) < |z| < \min(R_{x2}, R_{y2})$ 。然而，如果在这些线性组合中某些零点与极点相抵消，则收敛域可能扩大。

例 8-6 求序列 $a^n u(n) - a^n u(n-1)$ 的 z 变换。

解 已知：

$$\begin{aligned} x(n) &= a^n u(n) \\ y(n) &= a^n u(n-1) \end{aligned}$$

由式(8-10)知

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

而

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \frac{a}{z-a} \quad (|z| > |a|) \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{Z}[a^n u(n) - a^n u(n-1)] = X(z) - Y(z) = 1$$

可见，线性叠加后序列的 z 变换收敛域可能扩大，在此例中由 $|z| > |a|$ 扩展到全 z 平面。

例 8-7 求下列双曲余弦和双曲正弦序列的 z 变换：

$$\begin{aligned} x(n) &= \cosh(n\omega_0) u(n) \\ x(n) &= \sinh(n\omega_0) u(n) \end{aligned}$$

解

仍由式(8-10)知

$$\mathcal{Z}[e^{n\omega_0} u(n)] = \frac{z}{z - e^{\omega_0}} \quad (|z| > |e^{\omega_0}|)$$

$$\mathcal{Z}[e^{-n\omega_0} u(n)] = \frac{z}{z - e^{-\omega_0}} \quad (|z| > |e^{-\omega_0}|)$$

根据 z 变换的线性特性和双曲函数的定义，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\cosh(n\omega_0) u(n)] &= \mathcal{Z}\left[\left(\frac{e^{n\omega_0} + e^{-n\omega_0}}{2}\right) u(n)\right] \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{Z}[e^{n\omega_0} u(n)] + \frac{1}{2} \mathcal{Z}[e^{-n\omega_0} u(n)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{z}{2(z - e^{\omega_0})} + \frac{z}{2(z - e^{-\omega_0})} \\ &= \frac{z(z - \cosh \omega_0)}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 + 1} \end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\sinh(n\omega_0)u(n)] &= \mathcal{Z}\left[\left(\frac{e^{n\omega_0} - e^{-n\omega_0}}{2}\right)u(n)\right] \\ &= \frac{z}{2(z - e^{\omega_0})} - \frac{z}{2(z - e^{-\omega_0})} \\ &= \frac{z \sinh \omega_0}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 + 1} \end{aligned}$$

上两 z 变换式的收敛域均为 $|z| > \max(|e^{\omega_0}|, |e^{-\omega_0}|)$, 若 ω_0 为正实数, 则为 $|z| > e^{\omega_0}$ 。

(二) 位移性

位移性表示序列位移后的 z 变换与原序列 z 变换的关系。在实际中可能遇到序列的左移(超前)或右移(延迟)两种不同情况, 所取的变换形式又可能有单边 z 变换与双边 z 变换, 它们的位移性基本相同, 但又各具不同的特点。下面分几种情况进行讨论。

(1) 双边 z 变换

若序列 $x(n)$ 的双边 z 变换为

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$$

则序列右移后, 它的双边 z 变换等于

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$$

证明

根据双边 z 变换的定义, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n-m)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)z^{-n} \\ &= z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \\ &= z^{-m}X(z) \end{aligned} \tag{8-34}$$

同样, 可得左移序列的双边 z 变换

$$\mathcal{Z}[x(n+m)] = z^mX(z) \tag{8-35}$$

式中 m 为任意正整数。由式(8-34), (8-35)可以看出, 序列位移只会使 z 变换在 $z=0$ 或 $z=\infty$ 处的零极点情况发生变化。如果 $x(n)$ 是双边序列, $X(z)$ 的收敛域为环形区域(即 $R_{x1} < |z| < R_{x2}$), 在这种情况下序列位移并不会使 z 变换收敛域发生变化。

(2) 单边 z 变换

若 $x(n)$ 是双边序列，其单边 z 变换为

$$\mathcal{Z}[x(n)u(n)] = X(z)$$

则序列左移后，它的单边 z 变换等于

$$\mathcal{Z}[x(n+m)u(n)] = z^m [X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}] \quad (8-36)$$

证明

根据单边 z 变换的定义，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n+m)u(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m)z^{-n} \\ &= z^m \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m)z^{-(n+m)} \\ &= z^m \sum_{k=m}^{\infty} x(k)z^{-k} \\ &= z^m \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right] \\ &= z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right] \end{aligned}$$

同样，可以得到右移序列的单边 z 变换

$$\mathcal{Z}[x(n-m)u(n)] = z^{-m} [X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}] \quad (8-37)$$

式中 m 为正整数。对于 $m=1, 2$ 的情况，式(8-36)、(8-37)可以写作：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n+1)u(n)] &= zX(z) - zx(0) \\ \mathcal{Z}[x(n+2)u(n)] &= z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) \\ \mathcal{Z}[x(n-1)u(n)] &= z^{-1}X(z) + x(-1) \\ \mathcal{Z}[x(n-2)u(n)] &= z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2) \end{aligned}$$

如果 $x(n)$ 是因果序列，则式(8-37)右边的 $\sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}$ 项都等于零。于是右移序列的单边 z 变换变为

$$\mathcal{Z}[x(n-m)u(n)] = z^{-m}X(z) \quad (8-38)$$

而左移序列的单边 z 变换仍为

$$\mathcal{Z}[x(n+m)u(n)] = z^m [X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}] \quad (8-39)$$

例 8-8 已知差分方程表示式

$$y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$$

边界条件 $y(-1)=0$ ，用 z 变换方法求系统响应 $y(n)$ 。（此题条件与前章例 7-

10 相同, 改用 z 变换法求解)

解

对方程式两端分别取 z 变换, 注意用到位移性定理。

$$Y(z) - 0.9z^{-1}Y(z) = \frac{0.05z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{0.05z^2}{(z-0.9)(z-1)}$$

为求得逆变换, 令

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z-0.9} + \frac{A_2}{z-1}$$

容易求得:

$$A_1 = \left(\frac{0.05z}{z-1} \right)_{z=0.9} = -0.45$$

$$A_2 = \left(\frac{0.05z}{z-0.9} \right)_{z=1} = 0.5$$

$$Y(z) = \frac{-0.45z}{z-0.9} + \frac{0.5z}{z-1}$$

$$y(n) = [-0.45 \times (0.9)^n + 0.5]u(n)$$

与例 7-10 的答案完全一致。

本例初步说明如何用 z 变换方法求解差分方程。这里, 只需利用 z 变换的两个性质, 即线性和位移性。用 z 变换求解差分方程的详细讨论将在 8.7 节给出。

(三) 序列线性加权(z 域微分)

若已知

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)]$$

则

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

证明

因为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

将上式两边对 z 求导数, 得

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (8-40)$$

交换求导与求和的次序, 上式变为

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \frac{d}{dz}(z^{-n})$$

$$= -z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} nx(n) z^{-n}$$

$$= -z^{-1} \mathcal{Z}[nx(n)]$$

所以

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (8-41)$$

可见序列线性加权(乘 n)等效于其 z 变换取导数且乘以 $(-z)$ 。

如果将 $nx(n)$ 再乘以 n , 利用式(8-41)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[n^2x(n)] &= \mathcal{Z}[n \cdot nx(n)] \\ &= -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[nx(n)] \\ &= -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} X(z) \right] \end{aligned}$$

即

$$\mathcal{Z}[n^2x(n)] = z^2 \frac{d^2X(z)}{dz^2} + z \frac{dX(z)}{dz} \quad (8-42)$$

用同样的方法, 可以得到

$$\mathcal{Z}[n^m x(n)] = \left[-z \frac{d}{dz} \right]^m X(z) \quad (8-43)$$

式中符号 $\left[-z \frac{d}{dz} \right]^m$ 表示

$$-z \frac{d}{dz} \left\{ -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} \left[\cdots \left(-z \frac{d}{dz} X(z) \right) \right] \right] \right\}$$

共求导 m 次。

例 8-9 若已知 $\mathcal{Z}[u(n)] = \frac{z}{z-1}$, 求斜变序列 $nu(n)$ 的 z 变换。

解

由式(8-41)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[nu(n)] &= -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[u(n)] \\ &= -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) \\ &= \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

显然与式(8-7)的结果完全一致。

(四) 序列指数加权(z 域尺度变换)

若已知

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

则

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad (R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2}) \\ (a \text{ 为非零常数})$$

证明

因为

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[a^n x(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad (8-44)$$

可见, $x(n)$ 乘以指数序列等效于 z 平面尺度展缩。同样可以得到下列关系:

$$\mathcal{Z}[a^{-n} x(n)] = X(az) \quad R_{x1} < |az| < R_{x2} \quad (8-45)$$

$$\mathcal{Z}[(-1)^n x(n)] = X(-z) \quad R_{x1} < |z| < R_{x2} \quad (8-46)$$

例如, 对于 $(-1)^n u(n)$ 若取单边 z 变换应有

$$\mathcal{Z}[(-1)^n u(n)] = \frac{z}{z+1}, |z| > 1$$

例 8-10 若已知 $\mathcal{Z}[\cos(n\omega_0) \cdot u(n)]$, 求序列 $\beta^n \cos(n\omega_0) \cdot u(n)$ 的 z 变换。

解

由式(8-13)已知

$$\mathcal{Z}[\cos(n\omega_0) \cdot u(n)] = \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad (|z| > 1)$$

根据式(8-44)可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\beta^n \cos(n\omega_0) \cdot u(n)] &= \frac{\frac{z}{\beta} \left(\frac{z}{\beta} - \cos \omega_0 \right)}{\left(\frac{z}{\beta} \right)^2 - 2 \frac{z}{\beta} \cos \omega_0 + 1} \\ &= \frac{1 - \beta z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2\beta z^{-1} \cos \omega_0 + \beta^2 z^{-2}} \end{aligned}$$

其收敛域为 $\left|\frac{z}{\beta}\right| > 1$, 即 $|z| > |\beta|$ 。显然, 该结果与式(8-15)完全一致。

(五) 初值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 已知

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ \text{则} \quad x(0) &= \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \end{aligned} \quad (8-47)$$

证明

因为

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} \\ &\quad + x(2)z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

当 $z \rightarrow \infty$, 在上式的级数中除了第一项 $x(0)$ 外, 其他各项都趋近于零, 所以

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0)$$

(六) 终值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 已知

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] \quad (8-48)$$

证明

$$\begin{aligned} \text{因为} \quad \mathcal{Z}[x(n+1) - x(n)] &= zX(z) - zx(0) - X(z) \\ &= (z-1)X(z) - zx(0) \end{aligned}$$

取极限得

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) &= x(0) + \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n} \\ &= x(0) + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] \\ &\quad + [x(3) - x(2)] + \dots \\ &= x(0) - x(0) + x(\infty) \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = x(\infty)$$

从推导中可以看出, 终值定理只有当 $n \rightarrow \infty$ 时 $x(n)$ 收敛才可应用, 也就是说要求 $X(z)$ 的极点必须处在单位圆内(在单位圆上只能位于 $z = +1$ 点且是一阶极点)。

以上两个定理的应用类似于拉氏变换, 如果已知序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$, 在不求逆变换的情况下, 可以利用这两个定理很方便地求出序列的初值 $x(0)$ 和终值 $x(\infty)$ 。

(七) 时域卷积定理

已知两序列 $x(n)$, $h(n)$, 其 z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(n)] \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2}) \\ H(z) &= \mathcal{Z}[h(n)] \quad (R_{h1} < |z| < R_{h2}) \end{aligned}$$

则

$$\mathcal{Z}[x(n) * h(n)] = X(z)H(z) \quad (8-49)$$

在一般情况下, 其收敛域是 $X(z)$ 与 $H(z)$ 收敛域的重叠部分, 即 $\max(R_{x1}, R_{h1}) < |z| < \min(R_{x2}, R_{h2})$ 。若位于某一 z 变换收敛域边缘上的极点被另一 z 变换的零点抵消, 则收敛域将会扩大。

证明

因为

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n) * h(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) * h(n)] z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m) z^{-(n-m)} z^{-m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} H(z) \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{Z}[x(n) * h(n)] = X(z)H(z)$$

或者写作

$$x(n) * h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)H(z)] \quad (8-50)$$

可见两序列在时域中的卷积等效于在 z 域中两序列 z 变换的乘积。若 $x(n)$ 与 $h(n)$ 分别为线性时不变离散系统的激励序列和单位样值响应, 那么在求系统的响应序列 $y(n)$ 时, 可以避免卷积运算, 而借助于式(8-50)通过 $X(z)H(z)$ 的逆变换求出 $y(n)$, 在很多情况下这样会更方便些。

例 8-11 求下列两单边指数序列的卷积:

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$h(n) = b^n u(n)$$

解

因为:

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

$$H(z) = \frac{z}{z-b} \quad (|z| > |b|)$$

由式(8-49)得

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)H(z) \\ &= \frac{z^2}{(z-a)(z-b)} \end{aligned}$$

显然, 其收敛域为 $|z| > |a|$ 与 $|z| > |b|$ 的重叠部分, 如图 8-8 所示。

把 $Y(z)$ 展成部分分式, 得

$$Y(z) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{az}{z-a} - \frac{bz}{z-b} \right)$$

其逆变换为

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] \\ &= \frac{1}{a-b} (a^{n+1} - b^{n+1}) u(n) \end{aligned}$$

例 8-12 求下列两序列的卷积:

$$\begin{aligned} x(n) &= u(n) \\ h(n) &= a^n u(n) - a^{n-1} u(n-1) \end{aligned}$$

解

已知

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

由位移性知

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-a} \cdot z^{-1} \\ &= \frac{z-1}{z-a} \quad (|z| > |a|) \end{aligned}$$

由式(8-49)得

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)H(z) \\ &= \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z-1}{z-a} = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|) \end{aligned}$$

其逆变换为

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ &= \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] \\ &= a^n u(n) \end{aligned}$$

显然, $X(z)$ 的极点 ($z=1$) 被 $H(z)$ 的零点抵消, 若 $|a| < 1$, $Y(z)$ 的收敛域比 $X(z)$ 与 $H(z)$ 的收敛域之重叠部分要大, 如图 8-9 所示。

图 8-9 $[a^n u(n) - a^{n-1} u(n-1)] * u(n)$ 的 z 变换收敛域

利用 z 变换的时域卷积定理容易计算

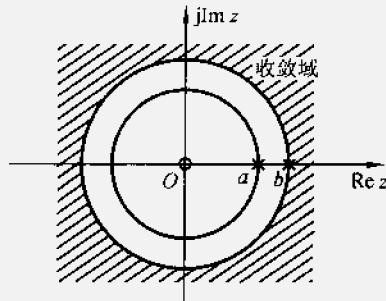
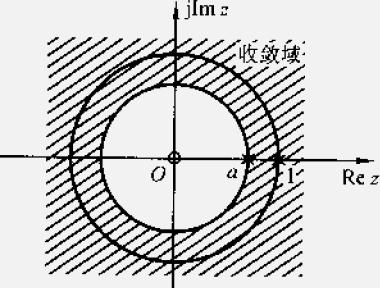


图 8-8 $a^n u(n) * b^n u(n)$ 的 z 变换收敛域



解卷积(在 7.7 节用时域方法求解)。由卷积表达式对应的 z 域关系式 $Y(z) = X(z)H(z)$ 可以看出, 若已知 $Y(z)$, $H(z)$ 求 $X(z)$ 或已知 $Y(z)$, $X(z)$ 求 $H(z)$, 都可利用 z 变换式相除的方法解得, 然后再取 $X(z)$ 或 $H(z)$ 之逆变换即可得到时域表达式 $x(n)$ 或 $h(n)$ 。虽然, 从理论上讲这是一种比较方便的计算解卷积方法, 然而在实际问题中却较少采用, 这是因为当两个 z 变换式相除求得另一 z 变换式时, 收敛域的分析将遇到麻烦。这时, 处于分母的 z 变换式不能有位于单位圆之外的零点(即满足最小相移函数之要求), 否则, 所得结果将出现单位圆外的极点, 对应时域不能保证当 $n \rightarrow \infty$ 时函数收敛。习题 8-20 介绍了在实际中应用的另一种解卷积计算方法。

(八) 序列相乘(z 域卷积定理)

已知两序列 $x(n)$, $h(n)$, 其 z 变换为:

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$\mathcal{Z}[h(n)] = H(z) \quad (R_{h1} < |z| < R_{h2})$$

则

$$\mathcal{Z}[x(n)h(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X\left(\frac{z}{v}\right) H(v) v^{-1} dv \quad (8-51)$$

或

$$\mathcal{Z}[x(n)h(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv \quad (8-52)$$

式中 C_1 , C_2 分别为 $X\left(\frac{z}{v}\right)$ 与 $H(v)$ 或 $X(v)$ 与 $H\left(\frac{z}{v}\right)$ 收敛域重叠部分内逆时针旋转的围线。而 $\mathcal{Z}[x(n)h(n)]$ 的收敛域一般为 $X(v)$ 与 $H\left(\frac{z}{v}\right)$ 或 $H(v)$ 与 $X\left(\frac{z}{v}\right)$ 的重叠部分, 即

$$R_{x1}R_{h1} < |z| < R_{x2}R_{h2}$$

证明

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n)h(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)h(n)] z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X(z) z^{n+1} dz \right] h(n) z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\oint_{C_2} X(v) v^n \frac{dv}{v} \right] h(n) z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} \left[X(v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv \end{aligned}$$

同样可以证明式(8-51)。

从前面证明过程可以看出, $X(v)$ 的收敛域与 $X(z)$ 相同, $H\left(\frac{z}{v}\right)$ 的收敛域与 $H(z)$ 相同, 即:

$$R_{x1} < |v| < R_{x2}$$

$$R_{h1} < \left| \frac{z}{v} \right| < R_{h2}$$

合并该两式, 得到 $\mathcal{Z}[x(n)h(n)]$ 的收敛域, 它至少为

$$R_{x1}R_{h1} < |z| < R_{x2}R_{h2}$$

为了看出式(8-52)类似于卷积, 假设围线是一个圆, 圆心在原点, 即令:

$$v = \rho e^{j\theta}$$

$$z = r e^{j\varphi}$$

代入式(8-52), 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n)h(n)] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X(\rho e^{j\theta}) H\left(\frac{r e^{j\varphi}}{\rho e^{j\theta}}\right) \frac{d(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_2} X(\rho e^{j\theta}) H\left[\frac{r}{\rho} e^{j(\varphi-\theta)}\right] d\theta \end{aligned}$$

由于 C_2 是圆, 故 θ 的积分限为 $-\pi \sim +\pi$, 这样上式变成

$$\mathcal{Z}[x(n)h(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\rho e^{j\theta}) H\left[\frac{r}{\rho} e^{j(\varphi-\theta)}\right] d\theta \quad (8-53)$$

所以可以把它看作以 θ 为变量的 $X(\rho e^{j\theta})$ 与 $H(\rho e^{j\theta})$ 之卷积。

在应用 z 域卷积公式(8-51)、(8-52)时, 通常可以利用留数定理, 这时应当注意围线 C 在收敛域内的正确选择。

例 8-13 利用 z 域卷积定理求 $na^n u(n)$ 序列的 z 变换 ($0 < a < 1$)。

解 若已知:

$$X(z) = \mathcal{Z}[nu(n)] = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z| > 1)$$

$$H(z) = \mathcal{Z}[a^n u(n)] = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

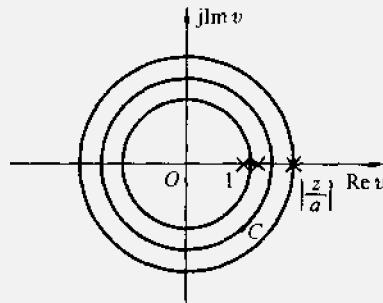
那么由 z 域卷积定理知

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[na^n u(n)] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{v}{(v-1)^2} \cdot \frac{\left(\frac{z}{v}\right)}{\left(\frac{z}{v}-a\right)} \cdot \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z}{(v-1)^2(z-av)} dv \end{aligned}$$

其收敛域为 $|v| > 1$ 与 $\left|\frac{z}{v}\right| > a$ 的重叠区域, 即要求 $1 < |v| < \left|\frac{z}{a}\right|$ 。因为 $|z| > 1$, $|a| < 1$, 所以围线 C 只包围一个二阶极点 $v=1$, 如图 8-10 所示。

这样

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[na^n u(n)] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z}{(v-1)^2(z-av)} dv \\ &= \text{Res} \left[\frac{z}{(v-1)^2(z-av)} \right]_{v=1} \\ &= \left[\frac{d}{dv} \left(\frac{z}{z-av} \right) \right]_{v=1} \\ &= \frac{az}{(z-a)^2} \quad (|z| > |a|) \end{aligned}$$



其结果与式(8-11)完全一致。

z 变换的一些主要性质(定理)列于表 8-5。

图 8-10 $\frac{z}{(v-1)^2(z-av)}$ 在 v 平面上的零极点分布

表 8-5 z 变换的主要性质(定理)

序号	序 列	z 变 换	收 敛 域
1	$x(n)$	$X(z)$	$R_{x1} < z < R_{x2}$
	$h(n)$	$H(z)$	$R_{h1} < z < R_{h2}$
2	$ax(n)+bh(n)$	$aX(z)+bH(z)$	$\max(R_{x1}, R_{h1}) < z < \min(R_{x2}, R_{h2})$
3	$\text{Re}[x(n)]$	$\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$	$R_{x1} < z < R_{x2}$
4	$\text{Im}[x(n)]$	$\frac{1}{2j} [X(z) - X^*(z^*)]$	$R_{x1} < z < R_{x2}$
5	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x1} < z < R_{x2}$
6	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$R_{x1} < z^{-1} < R_{x2}$
7	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$ a R_{x1} < z < a R_{x2}$
8	$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	$R_{x1} < z < R_{x2}$
9	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x1} < z < R_{x2}$
10	$x(n-m)$	$z^{-m} X(z)$	$R_{x1} < z < R_{x2}$
11	$x(n)*h(n)$	$X(z) \cdot H(z)$	$\max(R_{x1}, R_{h1}) < z < \min(R_{x2}, R_{h2})$
12	$x(n) \cdot h(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v}$	$R_{x1} \cdot R_{h1} < z < R_{x2} \cdot R_{h2}$
13	$\sum_{k=0}^n x(k)$	$\frac{z}{z-1} X(z)$	
14	$\frac{1}{n+a} x(n)$	$-z^n \int_0^z \frac{X(v)}{v^{a+1}} dv$	
15	$\frac{1}{n} x(n)$	$-\int_0^z X(v) v^{-1} dv$	

续表

序号	序 列	z 变 换	收 敛 域
16		$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	$x(n)$ 为因果序列 $ z > R_x$
17		$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (z - 1)X(z)$	$\begin{cases} x(n) \text{ 为因果序列, 且当 } z \geq 1 \text{ 时} \\ (z - 1)X(z) \text{ 收敛} \end{cases}$

8.6 z 变换与拉普拉斯变换的关系

至此本书已经讨论了三种变换域方法, 即傅里叶变换、拉普拉斯变换和 z 变换。这些变换并不是孤立的, 它们之间有着密切的联系, 在一定条件下可以互相转换。在第四章讨论过拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系, 现在研究 z 变换与拉普拉斯变换的关系。

(一) z 平面与 s 平面的映射关系

本章 8.1 节已经给出了复变量 z 与 s 有下列关系

$$z = e^{sT} \quad (8-54)$$

或

$$s = \frac{1}{T} \ln z$$

式中 T 是序列的时间间隔, 重复频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 。

为了说明 $s \sim z$ 的映射关系, 将 s 表示成直角坐标形式, 而把 z 表示成极坐标形式, 即:

$$\begin{aligned} s &= \sigma + j\omega \\ z &= r e^{j\theta} \end{aligned} \quad (8-55)$$

将式(8-55)代入式(8-54)

$$r e^{j\theta} = e^{(\sigma + j\omega)T}$$

于是, 得到:

$$r = e^{\sigma T} = e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \quad (8-56)$$

$$\theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s}$$

上式表明 $s \sim z$ 平面上有如下的映射关系:

- (1) s 平面上的虚轴 ($\sigma = 0, s = j\omega$) 映射到 z 平面上是单位圆, 其右半平面映射到 z 平面上是单位圆的圆外, 而左半平面映射到 z 平面上是单位圆的圆内。
- (2) s 平面上的实轴 ($\omega = 0, s = \sigma$) 映射到 z 平面上是正实轴, 平行于实轴的直

线(ω 为常数)映射到 z 平面上是始于原点的辐射线, 通过 $j\frac{k\omega_s}{2}$ ($k = \pm 1, \pm 3, \dots$) 而平行于实轴的直线映射到 z 平面上是负实轴。

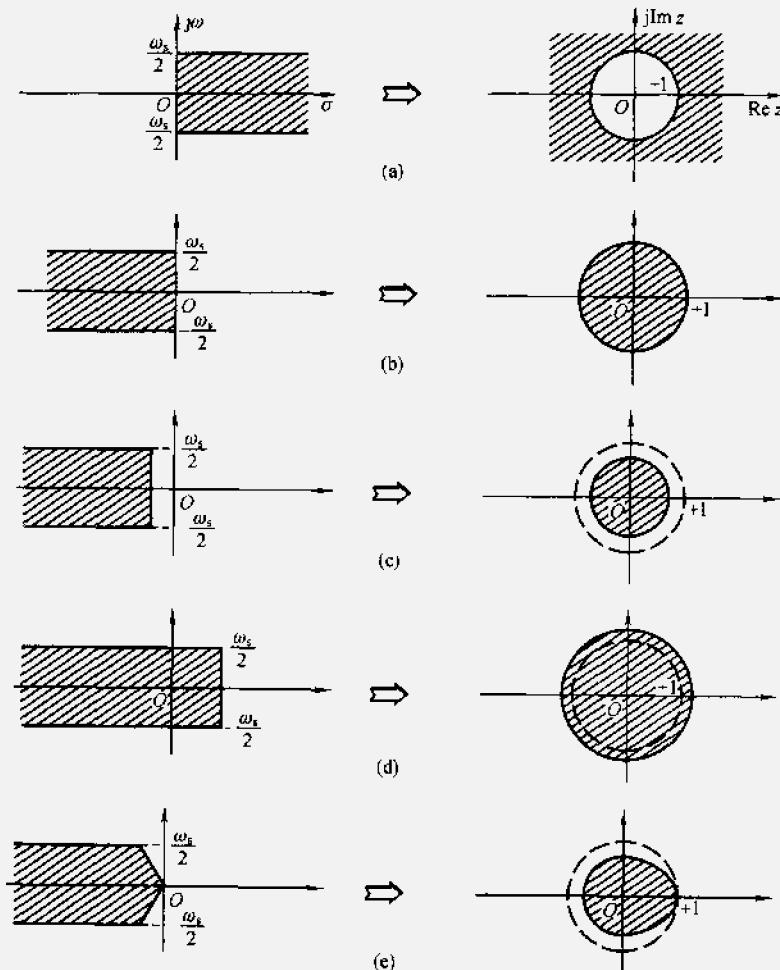
$s \sim z$ 平面的映射关系如表 8-6 所示。

表 8-6 z 平面与 s 平面的映射关系

s 平面 ($s = \sigma + j\omega$)		z 平面 ($z = re^{j\theta}$)	
虚轴 $(\sigma = 0)$ $(s = j\omega)$			单位圆 $(r = 1)$ $(\theta \text{ 任意})$
左半平面 $(\sigma < 0)$			单位圆内 $(r < 1)$ $(\theta \text{ 任意})$
右半平面 $(\sigma > 0)$			单位圆外 $(r > 1)$ $(\theta \text{ 任意})$
平行于虚轴的直线 $(\sigma \text{ 为常数})$			圆 $(\sigma > 0, r > 1)$ $(\sigma < 0, r < 1)$
实轴 $(\omega = 0)$ $(s = \sigma)$			正实轴 $(\theta = 0)$ $(r \text{ 任意})$
平行于实轴的直线 $(\omega \text{ 为常数})$			始于原点的辐射线 $(\theta \text{ 为常数})$ $(r \text{ 任意})$
通过 $\pm j\frac{k\omega_s}{2}$ 平行于实轴的直线 $(k = 1, 3, \dots)$			负实轴 $(\theta = \pi)$ $(r \text{ 任意})$

(3) 由于 $e^{j\theta}$ 是以 ω_s 为周期的周期函数，因此在 s 平面上沿虚轴移动对应于 z 平面上沿单位圆周期性旋转，每平移 ω_s ，则沿单位圆转一圈。所以 $z \sim s$ 映射并不是单值的。

图 8-11 (a)~(e) 说明上述映射关系。

图 8-11 z 平面与 s 平面的映射关系举例

在连续时间系统分析中，我们熟知利用系统函数 s 域零、极点分布特性研究系统性能的方法。掌握了上述 s 平面与 z 平面映射规律之后，容易利用类似的方法研究离散时间系统函数 z 平面特性与系统时域特性、频响特性以及稳定性之间的关系，这将是后面 8.8 和 8.10 节的研究主题。

(二) z 变换与拉氏变换表达式之对应

若连续时间信号 $x(t)$ 经均匀抽样构成序列 $x(n)$ ，且已知 $\mathcal{L}[x(t)] =$

$X(s)$, 下面讨论能否借助 $X(s)$ 写出 $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$ 。(注意此处 $X(s)$ 和 $X(z)$ 分别表示 $x(t)$ 和 $x(n)$ 的拉氏变换与 z 变换的表达式, 严格讲, 函数符号 X 应采用不同的字母, 考虑到已熟悉的符号, 都用 X 表示, 但函数形式不同。)

在以下分析中, 必须注意, 对于连续时间信号的突变点函数值与对应的序列样值有所区别。例如, 阶跃信号 $u(t)$ 在 $t=0$ 点定义为 $\frac{1}{2}$, 而阶跃序列 $u(n)$ 在 $n=0$ 点定义为 1。

若连续时间信号 $\hat{x}(t)$ 由 N 项指数信号相加组合而成

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) + \cdots + \hat{x}_N(t) \\ &= \sum_{i=1}^N \hat{x}_i(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{p_i t} u(t)\end{aligned}\quad (8-57)$$

容易求得, 它的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[\hat{x}(t)] = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - p_i} \quad (8-58)$$

若序列 $x(nT)$ 由 N 项指数序列相加组合而成

$$\begin{aligned}x(nT) &= x_1(nT) + x_2(nT) + \cdots + x_N(nT) \\ &= \sum_{i=1}^N x_i(nT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{p_i nT} u(nT)\end{aligned}\quad (8-59)$$

它的 z 变换为

$$\mathcal{Z}[x(nT)] = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}} \quad (8-60)$$

从式(8-57)与式(8-59)容易想到, $x(nT)$ 的样值等于 $\hat{x}(t)$ 在 $t=nT$ 各点之抽样值。然而在 $t=0$ (即 $n=0$) 点违反了这一规律。出现这一现象的原因是在此点波形发生跳变。具体讲对于式(8-57)和式(8-59)中各项, 也即任意 i 值有:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ \frac{A_i}{2}, & (t = 0) \\ A_i e^{p_i t}, & (t > 0) \end{cases} \quad (8-61)$$

$$x_i(nT) = \begin{cases} 0, & (n < 0) \\ A_i, & (n = 0) \\ A_i e^{p_i nT}, & (n > 0) \end{cases} \quad (8-62)$$

可以看出, 按抽样规律建立二者联系时必须在 0 点补足 $A_i/2$, 即

$$x_i(nT)u(n) = \begin{cases} \hat{x}_i(t)u(t)|_{t=nT} & (\text{当 } n \neq 0) \\ \dot{x}_i(t)u(t)|_{t=nT} + \frac{A_i}{2} & (\text{当 } n = 0) \end{cases} \quad (8-63)$$

在满足式(8-63)要求的条件下, 可以建立 $\mathcal{L}[\hat{x}(t)]$ 与 $\mathcal{Z}[x(nT)]$ 之对应, 当已知式(8-58)时, 引用 A_i 、 p_i 填入式(8-60)即可求得 $x(nT)$ 之 z 变换, 下面给出实例。

例 8-14 已知指数函数 $e^{-at}u(t)$ 的拉氏变换为 $\frac{1}{s+a}$, 求抽样序列 $e^{-anT}u(nT)$ 的 z 变换。

解 已知:

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a}$$

$X(s)$ 只有一个一阶极点 $s = -a$, 这样由式(8-60)可以直接求出 $e^{-anT}u(nT)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}}$$

例 8-15 已知正弦信号 $\sin(\omega_0 t)u(t)$ 的拉氏变换为 $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$, 求抽样序列 $\sin(\omega_0 nT)u(nT)$ 的 z 变换。

解 已知

$$x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$$

$$X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

显然 $X(s)$ 的极点位于 $s_1 = j\omega_0$, $s_2 = -j\omega_0$, 其留数分别为 $A_1 = \frac{-j}{2}$ 及 $A_2 = \frac{j}{2}$ 。于是, $X(s)$ 可以展成部分分式

$$X(s) = \frac{-\frac{j}{2}}{s - j\omega_0} + \frac{\frac{j}{2}}{s + j\omega_0}$$

由式(8-60)可以得到 $\sin(\omega_0 nT)u(nT)$ 的 z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{-\frac{j}{2}}{1 - z^{-1}e^{j\omega_0 T}} + \frac{\frac{j}{2}}{1 - z^{-1}e^{-j\omega_0 T}} \\ &= \frac{z^{-1}\sin(\omega_0 T)}{1 - 2z^{-1}\cos(\omega_0 T) + z^{-2}} \end{aligned}$$

显然, 上两例的结果与按定义求得的结果完全一致。

由于查表求 z 变换也很方便, 因此求简单的 z 变换时, 掌握这种对应规律并未显示明显优点。在第十章 10.6 节将要看到这种对应规律在借助模拟滤波器原理设计数字滤波器时会有用处。

表 8-7 列出了常用连续信号的拉氏变换 $X(s)$ 与抽样序列 z 变换的对应关系。

表 8-7 常用信号的拉氏变换与 z 变换

	$X(s)$	$x(t)$	$x(nT)$	$X(z)$
1	1	$\delta(t)$	$\delta(nT)$	1
2	$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$u(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1}{s^2}$	t	nT	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
4	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-anT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
5	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(nT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\sin(n\omega_0 T)$	$\frac{z \sin(\omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1}$
7	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\cos(n\omega_0 T)$	$\frac{z[z - \cos(\omega_0 T)]}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	nTe^{-anT}	$\frac{Tze^{-at}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)$	$e^{-anT} \sin(n\omega_0 T)$	$\frac{ze^{-aT} \sin(\omega_0 T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega_0 T) + e^{-2aT}}$
10	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$e^{-anT} \cos(n\omega_0 T)$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos(\omega_0 T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega_0 T) + e^{-2aT}}$

8.7 利用 z 变换解差分方程

在 8.5 节例 8-8 已经给出利用 z 变换解差分方程的简单实例, 本节给出一般规律。这种方法的原理是基于 z 变换的线性和位移性, 把差分方程转化为代数方程, 从而使求解过程简化。

线性时不变离散系统的差分方程一般形式是

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (8-64)$$

将等式两边取单边 z 变换, 并利用 z 变换的位移公式(8-37)可以得到

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} [Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}]$$

$$= \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} [X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}] \quad (8-65)$$

若激励 $x(n)=0$, 即系统处于零输入状态, 此时差分方程(8-64)成为齐次方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$$

而式(8-65)变成

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} [Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}] = 0$$

于是

$$Y(z) = \frac{-\sum_{k=0}^N [a_k z^{-k} \cdot \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (8-66)$$

对应的响应序列是上式的逆变换, 即

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$$

显然它是零输入响应, 该响应由系统的起始状态 $y(l) (-N \leq l \leq -1)$ 而产生的。

若系统的起始状态 $y(l)=0 (-N \leq l \leq -1)$, 即系统处于零起始状态, 此时式(8-65)变成

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} [X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}]$$

如果激励 $x(n)$ 为因果序列, 上式可以写成

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} X(z)$$

于是

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

令

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (8-67)$$

则

$$Y(z) = X(z) H(z)$$

此时对应的序列为

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)H(z)]$$

这样所得到的响应是系统的零状态响应，它完全是由激励 $x(n)$ 而产生的。这里所引入的 z 变换式 $H(z)$ 是由系统的特性所决定，它就是下节将要讨论的离散系统的“系统函数”。综合上述两种情况，可以看出，离散系统的总响应等于零输入响应与零状态响应之和。

例 8-16 一离散系统的差分方程为

$$y(n) - by(n-1) = x(n)$$

若激励 $x(n) = a^n u(n)$ ，起始值 $y(-1) = 0$ ，求响应 $y(n)$ 。

解 对差分方程两边取单边 z 变换，由位移公式(8-37)得到

$$Y(z) - bz^{-1}Y(z) - by(-1) = X(z)$$

因为 $y(-1) = 0$ ，所以

$$\begin{aligned} Y(z) - bz^{-1}Y(z) &= X(z) \\ Y(z) &= \frac{X(z)}{1 - bz^{-1}} \end{aligned}$$

已知 $x(n) = a^n u(n)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

于是

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$$

其极点位于 $z=a$ ，及 $z=b$ 。由式(8-31)可以将上式展成部分分式

$$Y(z) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{az}{z-a} - \frac{bz}{z-b} \right)$$

进行逆变换，得到响应

$$y(n) = \frac{1}{a-b} (a^{n+1} - b^{n+1}) u(n)$$

由于该系统处于零状态，所以系统的完全响应就是零状态响应。

例 8-17 对于上例的差分方程，若激励不变，但起始值不等于零，而是 $y(-1)=2$ ，求系统的响应 $y(n)$ 。

解 因为差分方程的 z 变换为

$$Y(z) - bz^{-1}Y(z) - by(-1) = X(z)$$

所以

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{X(z) + by(-1)}{1 - bz^{-1}} \\ &= \frac{X(z)}{1 - bz^{-1}} + \frac{by(-1)}{1 - bz^{-1}} \end{aligned}$$

已知 $X(z) = \frac{z}{z-a}$, $y(-1)=2$, 这样

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)} + \frac{2bz}{z-b}$$

展成部分分式

$$Y(z) = \frac{a}{a-bz} - \frac{b}{a-bz} - \frac{b}{z-b} + \frac{2bz}{z-b}$$

进行逆变换, 得到系统响应

$$y(n) = \frac{1}{a-b} (a^{n+1} - b^{n+1}) + 2b^{n+1} \quad (n \geq 0)$$

8.8 离散系统的系统函数

(一) 单位样值响应与系统函数

一个线性时不变离散系统在时域中可以用线性常系数差分方程来描述。上节中式(8-64)已经给出了这种差分方程的一般形式为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

若激励 $x(n)$ 是因果序列, 且系统处于零状态, 此时, 由上式的 z 变换得到

$$Y(z) \cdot \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \cdot \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

于是:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (8-68)$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$H(z)$ 称为离散系统的系统函数, 它表示系统的零状态响应与激励的 z 变换之比值。

式(8-68)的分子与分母多项式经因式分解可以改写为

$$H(z) = G \frac{\prod_{r=1}^M (1 - z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (8-69)$$

其中 z_r 是 $H(z)$ 的零点, p_k 是 $H(z)$ 的极点, 它们由差分方程的系数 a_k 与 b_r 决定。

由第七章已经知道, 系统的零状态响应也可以用激励与单位样值响应的卷

积表示，即

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

由时域卷积定理，得到

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

或

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)H(z)]$$

其中

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (8-70)$$

可见，系统函数 $H(z)$ 与单位样值响应 $h(n)$ 是一对 z 变换。我们既可以利用卷积求系统的零状态响应，又可以借助系统函数与激励变换式乘积之逆 z 变换求此响应。

例 8-18 求下列差分方程所描述的离散系统的系统函数和单位样值响应。

$$y(n) - ay(n-1) = bx(n)$$

解

将差分方程两边取 z 变换，并利用位移特性，得到：

$$\begin{aligned} Y(z) - az^{-1}Y(z) - ay(-1) &= bX(z) \\ Y(z)(1 - az^{-1}) &= bX(z) + ay(-1) \end{aligned} \quad (8-71)$$

如果系统处于零状态，即 $y(-1) = 0$ ，则由式(8-71)可得：

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} = \frac{bz}{z - a}$$

$$h(n) = ba^n u(n)$$

(二) 系统函数的零极点分布对系统特性的影响

(1) 由系统函数的零极点分布确定单位样值响应

与拉氏变换在连续系统中的作用类似，在离散系统中， z 变换建立了时间函数 $x(n)$ 与 z 域函数 $X(z)$ 之间一定的转换关系。因此，可以从 z 变换函数 $X(z)$ 的形式反映出时间函数 $x(n)$ 的内在性质。对于一个离散系统来说，如果它的系统函数 $H(z)$ 是有理函数，那么分子多项式和分母多项式都可分解为因子形式，它们的因子分别表示 $H(z)$ 的零点和极点的位置，如式(8-69)所示，即

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = G \frac{\prod_{r=1}^M (1 - z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}$$

由于系统函数 $H(z)$ 与单位样值响应 $h(n)$ 是一对 z 变换:

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(n)] \quad (8-72)$$

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] \quad (8-73)$$

所以, 完全可以从 $H(z)$ 的零极点的分布情况, 确定单位样值响应 $h(n)$ 的性质。

如果把 $H(z)$ 展成部分分式, 那么 $H(z)$ 每个极点将决定一项对应的时间序列。对于具有 M 阶极点 p_1, p_2, \dots, p_N 的系统函数, 若 $N > M$ 则 $h(n)$ 可表示为

$$\begin{aligned} h(n) &= \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left[G \frac{\prod_{r=1}^M (1 - z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}\right] \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{k=0}^N \frac{A_k z}{z - p_k}\right] \end{aligned} \quad (8-74)$$

式中 $p_0 = 0$ 。这样, 上式可表示成

$$\begin{aligned} h(n) &= \mathcal{Z}^{-1}\left[A_0 + \sum_{k=1}^N \frac{A_k z}{z - p_k}\right] \\ &= A_0 \delta(n) + \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u(n) \end{aligned} \quad (8-75)$$

这里, 极点 p_k 可以是实数, 但一般情况下, 它是以成对的共轭复数形式出现。由上式可见, 单位样值响应 $h(n)$ 的特性取决于 $H(z)$ 的极点, 其幅值由系数 A_k 决定, 而 A_k 与 $H(z)$ 的零点分布有关。与拉氏变换类似, $H(z)$ 的极点决定 $h(n)$ 的波形特征, 而零点只影响 $h(n)$ 的幅度与相位。

在 8.6 节已经讨论了 z 变换与拉氏变换之间的联系, 因此, 在这里完全可以借助 $z \sim s$ 平面的映射关系, 将 s 域零极点分析的结论直接用于 z 域分析之中。

利用已知的 $z \sim s$ 平面映射关系:

$$z = e^{sT}$$

$$z = r e^{j\theta}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\theta = \omega T$$

这样, 表 4-4、表 4-5 所表示的 $H(s)$ 的极点分布与 $h(t)$ 形状的关系, 可以直接对应为 $H(z)$ 的极点分布与 $h(n)$ 形状的关系。对于一阶极点的情况, 这种

关系示意于图 8-12。图中 \times 表示 $H(z)$ 的一阶单极点或共轭极点的位置。

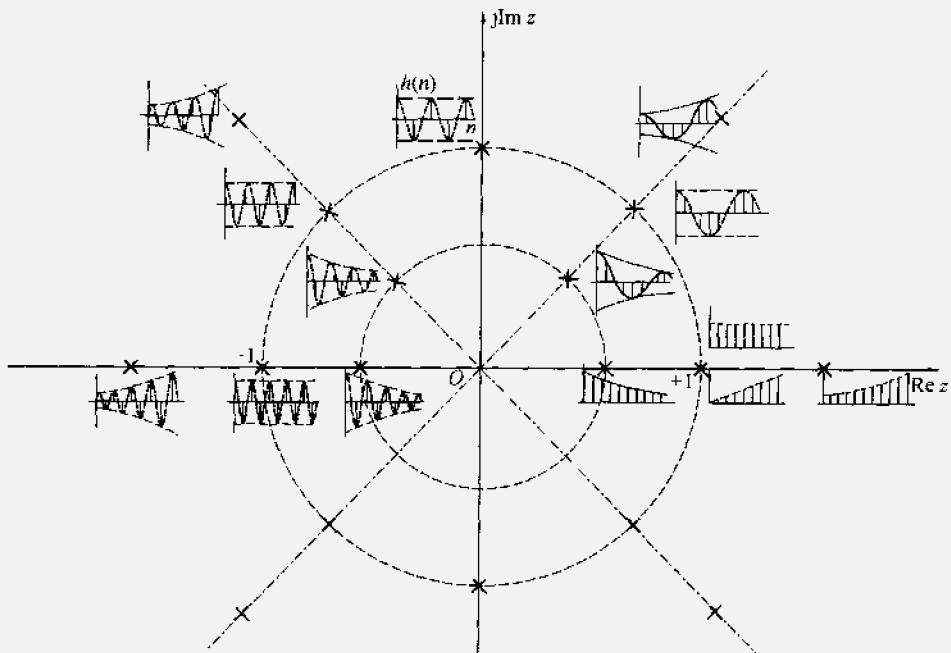


图 8-12 $H(z)$ 的极点位置与 $h(n)$ 形状的关系

(2) 离散时间系统的稳定性和因果性

在第七章 7.5 节已从时域特性研究了离散时间系统的稳定性和因果性，现在从 z 域特征考察系统的稳定与因果特性。

离散时间系统稳定的充分必要条件是单位样值响应 $h(n)$ 绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M \quad (8-76)$$

式中 M 为有限正值，式(8-76)也可写作

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (8-77)$$

由 z 变换定义和系统函数定义可知

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \quad (8-78)$$

当 $z=1$ (在 z 平面单位圆上)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \quad (8-79)$$

为使系统稳定应满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) < \infty \quad (8-80)$$

这表明，对于稳定系统 $H(z)$ 的收敛域应包含单位圆在内。

对于因果系统， $h(n) = h(n)u(n)$ 为因果序列，它的 z 变换之收敛域包含 ∞ 点，通常收敛域表示为某圆外区 $a < |z| \leq \infty$ 。

在实际问题中经常遇到的稳定因果系统应同时满足以上两方面的条件，也即

$$\begin{cases} a < |z| \leq \infty \\ |z| < 1 \end{cases} \quad (8-81)$$

这时，全部极点落在单位圆内。

例 8-19 表示某离散系统的差分方程为

$$y(n) + 0.2y(n-1) - 0.24y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

- (1) 求系统函数 $H(z)$ ；
- (2) 讨论此因果系统 $H(z)$ 的收敛域和稳定性；
- (3) 求单位样值响应 $h(n)$ ；
- (4) 当激励 $x(n)$ 为单位阶跃序列时，求零状态响应 $y(n)$ 。

解

- (1) 将差分方程两边取 z 变换，得

$$Y(z) + 0.2z^{-1}Y(z) - 0.24z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

于是

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} - 0.24z^{-2}}$$

也可写成

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

(2) $H(z)$ 的两个极点分别位于 0.4 和 -0.6，它们都在单位圆内，对此因果系统之收敛域为 $|z| > 0.6$ ，且包含 $z = \infty$ 点，是一个稳定的因果系统。

- (3) 将 $H(z)/z$ 展成部分分式，得到

$$H(z) = \frac{1.4z}{z-0.4} - \frac{0.4z}{z+0.6} \quad (|z| > 0.6)$$

取逆变换，得到单位样值响应

$$h(n) = [1.4(0.4)^n - 0.4(-0.6)^n]u(n)$$

- (4) 若激励

$$x(n) = u(n)$$

则

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

于是

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)(z-0.4)(z+0.6)}$$

将 $Y(z)$ 展成部分分式，得到

$$Y(z) = \frac{2.08z}{z-1} - \frac{0.93z}{z-0.4} - \frac{0.15z}{z+0.6} \quad (|z| > 1)$$

取逆变换后，得到 $y(n)$ 为

$$y(n) = [2.08 - 0.93(0.4)^n - 0.15(-0.6)^n]u(n)$$

8.9 序列的傅里叶变换(DTFT)

(一) 定义、收敛条件

与连续时间信号分析类似，对于离散时间信号的研究，傅里叶变换同样占有重要地位。本节讨论“序列的傅里叶变换”，给出定义和一些基本性质，为下节利用 $H(z)$ 研究离散系统频率响应特性作准备。在第九章将继续介绍有关离散时间信号傅里叶分析的其他重要问题。

可从 z 变换引出序列的傅里叶变换，也可直接给出定义。序列 $x(n)$ 的 z 变换为：

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz \end{aligned}$$

由 $s \sim z$ 平面的映射关系可知， s 平面上的虚轴 ($s = j\omega$) 对应于 z 平面上的单位圆 ($|z| = 1$ 或 $z = e^{j\omega}$)，如图 8-13 所示。这样，单位圆上的 z 变换就是序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ ，即

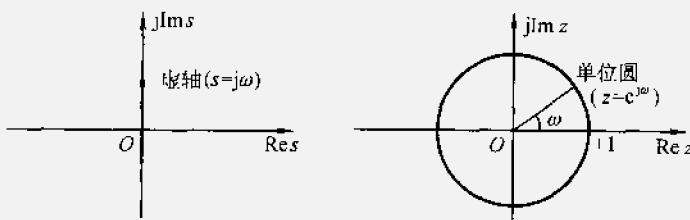


图 8-13 求频率响应时在 s , z 平面上取值轨迹

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \quad (8-82)$$

而逆变换

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} \cdot e^{-j\omega} d(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} \cdot e^{-j\omega} j e^{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \end{aligned} \quad (8-83)$$

序列的傅里叶变换也称为离散时间傅里叶变换(Discrete Time Fourier Transform, 缩写为 DTFT), 通常用以下符号分别表示对 $x(n)$ 取傅里叶正变换或逆变换:

$$\begin{aligned} \text{DTFT}[x(n)] &= X(e^{j\omega}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \end{aligned} \quad (8-84)$$

$$\begin{aligned} \text{IDTFT}[X(e^{j\omega})] &= x(n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned} \quad (8-85)$$

必须指出, 这里定义的离散时间傅里叶变换(即序列的傅里叶变换)不要与“离散傅里叶变换”相混淆, 后一名词将在第九章给出定义。

$X(e^{j\omega})$ 是 ω 的复函数, 可表示为

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \\ &= \text{Re}[X(e^{j\omega})] + j \text{Im}[X(e^{j\omega})] \end{aligned} \quad (8-86)$$

$X(e^{j\omega})$ 表示 $x(n)$ 的频域特性, 也称为 $x(n)$ 的频谱, $|X(e^{j\omega})|$ 为幅度谱, $\varphi(\omega)$ 为相位谱, 二者都是 ω 的连续函数。由于 $e^{j\omega}$ 是变量 ω 以 2π 为周期的周期性函数, 因此 $X(e^{j\omega})$ 也是以 2π 为周期的周期函数。下面将要看到, $x(n)$ 的频谱都是周期性的, 与第三章 3.10 节抽样信号的频谱相比较, 二者特性是一致的。

例 8-20 若 $x(n) = R_5(n) = u(n) - u(n-5)$, 求此序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

解

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \text{DTFT}[R_5(n)] \\ &= \sum_{n=0}^4 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega\frac{5}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \left(\frac{e^{j\omega\frac{5}{2}} - e^{-j\omega\frac{5}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}} \right) \\ &= e^{-j2\omega} \left[\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right] = |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

其中，幅频特性

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$$

而相频特性为

$$\varphi(\omega) = -j2\omega + \arg \left[\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right]$$

式中 $\arg[\cdot]$ 表示方括号内表达式引入的相移，此处，其值在不同 ω 区间分别为 $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$ 。图 8-14 画出了 $R_5(n)$ 及其幅频特性和相频特性。

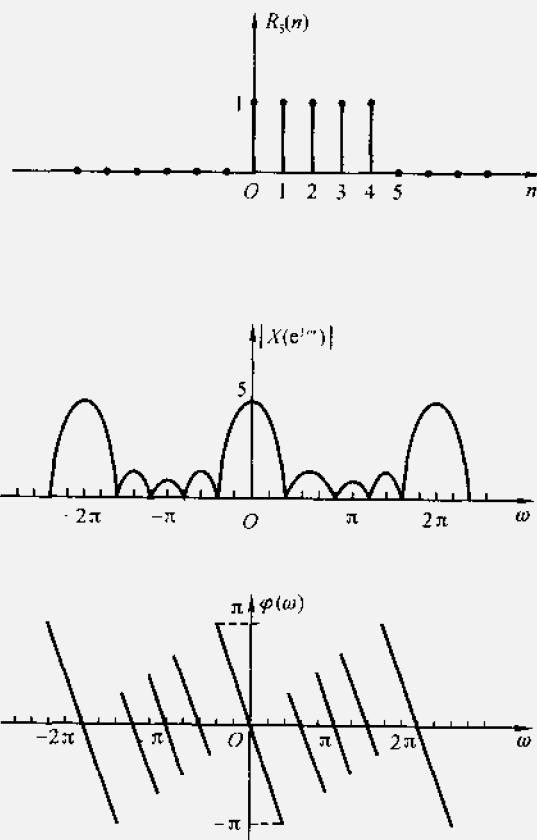


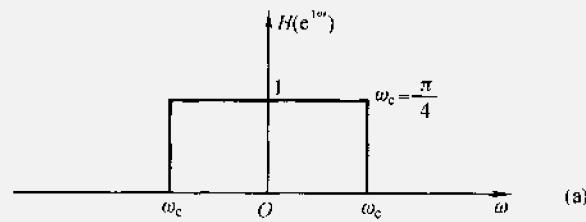
图 8-14 序列 $R_5(n)$ 的傅里叶变换

例 8-21 若离散时间系统的理想低通滤波器频率特性 $H(e^{j\omega})$ 如图 8-15 (a) 所示，求它的傅里叶逆变换 $h(n)$ (即单位样值响应)。

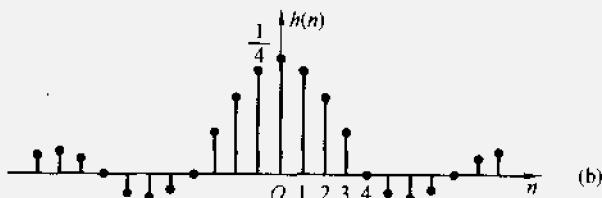
解

由式(8-85)求得

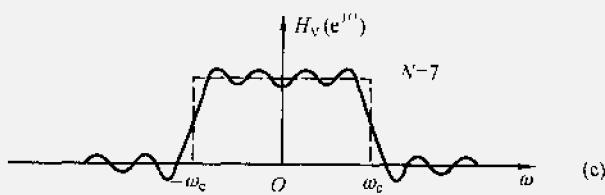
$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n} \end{aligned}$$



(a)



(b)



(c)

图 8-15 理想低通滤波器

图 8-15 (b)示出 $h(n)$ 波形。取 $h(n)$ 有限项按正变换式(8-84)求和, 例如 $N = 7$ (从 $-N$ 到 $+N$ 共 15 个样值)的结果 $H_N(e^{j\omega})$ 如图 8-15 (c)所示, 可以看到在 $\omega = \omega_c$ 不连续点处有上冲出现, 也存在 Gibbs 现象。

前已述及, 对于序列 $x(n)$ 而言, 单位圆上的 z 变换 $X(z)|_{z=e^{j\omega}}$ 就是序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 为此, 要保证序列的 z 变换存在, $X(z)$ 的收敛域必须包含单位圆, 此时有

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |e^{-jn\omega}| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \end{aligned} \quad (8-87)$$

这表明, 若 $x(n)$ 绝对可和, 则它的傅里叶变换存在。这时, 级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ 一致收敛于 ω 的一个连续函数 $X(e^{j\omega})$ 。一致收敛意味着任给 $\epsilon > 0$, 总能找到 N , 使

$$\left| X(e^{j\omega}) - \sum_{n=-N}^N x(n)e^{-j\omega n} \right| < \epsilon \quad (8-88)$$

式中 N 只与 ϵ 有关, 与 $(-\pi, \pi)$ 区间内 ω 值无关。

$x(n)$ 绝对可和只是傅里叶变换存在的充分条件。例 8-21 中 $h(n)$ 不满足绝对可和条件, 然而它是平方可和的, 即

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} < \infty \end{aligned} \quad (8-89)$$

这表明, $h(n)$ 是能量受限的, 级数

$$H_N(e^{j\omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left[\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \right] e^{-j\omega n} \quad (8-90)$$

不能一致收敛于 $H(e^{j\omega})$, 在不连续点 $\omega = \omega_c$ 处可以看到 Gibbs 现象。但是, 由于 $h(n)$ 平方可和, 式(8-90)按照均方误差为零的方式收敛于 $H(e^{j\omega})$, 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_N(e^{j\omega})|^2 d\omega \right] = 0 \quad (8-91)$$

以上讨论的均匀一致收敛和均方误差为零方式的收敛分别要求序列绝对可和或能量受限, 当序列满足绝对可和条件时一定满足能量受限, 而能量受限不能保证绝对可和。至此只讨论了序列傅里叶变换的充分条件, 如同连续时间信号的傅里叶变换一样, 序列傅里叶变换存在的充分必要条件至今尚未找到。

(二) 基本性质

由于序列的傅里叶变换是 z 变换在单位圆上的取值, 因而, 它的基本性质与 z 变换的基本性质有许多相同之处, 这里只给出结论, 略去证明。

(1) 线性

若

$$\begin{aligned} \text{DTFT}[x_1(n)] &= X_1(e^{j\omega}) \\ \text{DTFT}[x_2(n)] &= X_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

则

$$\text{DTFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (8-92)$$

式中 a, b 为任意常数

(2) 序列的位移

若

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

则

$$\text{DTFT}[x(n - n_0)] = e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega}) \quad (8-93)$$

时域位移对应频域的相移。

(3) 频域的位移

若

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

则

$$\text{DTFT}[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X[e^{j(\omega - \omega_0)}] \quad (8-94)$$

频域位移对应时域的调制。

(4) 序列的线性加权

若

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

则

$$\text{DTFT}[nx(n)] = j \left[\frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}) \right] \quad (8-95)$$

时域的线性加权对应频域微分。

(5) 序列的反褶

若

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

则

$$\text{DTFT}[x(-n)] = X(e^{-j\omega}) \quad (8-96)$$

时域反褶对应频域也反褶。

(6) 奇偶虚实性

若 $x(n)$ 为实序列, $\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$, 它的实部和虚部分别为 $\text{Re}[X(e^{j\omega})]$ 和 $\text{Im}[X(e^{j\omega})]$, 也可写作模与辐角形式

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

它们具有以下特性:

$$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})] \quad (8-97)$$

$$\text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})] \quad (8-98)$$

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad (8-99)$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) \quad (8-100)$$

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (8-101)$$

这表明复函数 $X(e^{j\omega})$ 的实部为偶函数, 虚部为奇函数; 模为偶函数, 辐角是奇函数。 $X(e^{j\omega})$ 与 $X(e^{-j\omega})$ 共轭。

$x(n)$ 的偶分量 $x_e(n)$ 和奇分量 $x_o(n)$ 表示式分别为:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \quad (8-102)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \quad (8-103)$$

它们的傅里叶变换分别为:

$$\text{DTFT}[x_e(n)] = \text{Re}[X(e^{j\omega})] \quad (8-104)$$

$$\text{DTFT}[x_o(n)] = j \text{Im}[X(e^{j\omega})] \quad (8-105)$$

以上特性与连续时间信号的情况一致。

(7) 时域卷积定理

若

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

$$\text{DTFT}[h(n)] = H(e^{j\omega})$$

则

$$\text{DTFT}[x(n) * h(n)] = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (8-106)$$

时域卷积对应频域相乘。

(8) 频域卷积定理

若

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$$

$$H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[h(n)]$$

则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} [X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H[e^{j(\omega-\theta)}]d\theta \\ &= \text{DTFT}[x(n)h(n)] \end{aligned} \quad (8-107)$$

时域相乘对应频域卷积。

(9) 帕塞瓦尔定理

若

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (8-108)$$

此定理也称为能量定理，序列的总能量等于其傅里叶变换模平方在一个周期内积分取平均，即时域总能量等于频域一周期内总能量。

本节介绍的“序列的傅里叶变换(DTFT)”将为下节研究离散系统频率特性作好准备。下一章将要介绍周期性序列的傅里叶级数和有限长序列的傅里叶变换，并引出“离散傅里叶变换(DFT)”的定义。必须注意，“序列的傅里叶变换(DTFT)”与“离散傅里叶变换(DFT)”具有完全不同的含义。由“离散傅里叶变换(DFT)”引出的“快速傅里叶变换(FFT)”是数字信号处理研究与应用中最有力的计算工具。

8.10 离散时间系统的频率响应特性

(一) 离散系统频响特性的意义

与连续系统中频率响应的地位和作用类似，在离散系统中经常需要对输入信号的频谱进行处理，因此，有必要研究离散系统在正弦序列作用下的稳态响应，并说明离散系统频率响应的意义。

对于稳定的因果离散系统，令单位样值响应为 $h(n)$ ，系统函数为 $H(z)$ 。如果输入是正弦序列

$$x(n) = A \sin(n\omega) \quad (n \geq 0)$$

其 z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{Az \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} \\ &= \frac{Az \sin \omega}{(z - e^{j\omega})(z - e^{-j\omega})} \end{aligned}$$

于是，系统响应的 z 变换 $Y(z)$ 可写作

$$Y(z) = \frac{Az \sin \omega}{(z - e^{j\omega})(z - e^{-j\omega})} \cdot H(z) \quad (8-109)$$

因为系统是稳定的， $H(z)$ 的极点均位于单位圆之内，它们不会与 $X(z)$ 的极点 $e^{j\omega}, e^{-j\omega}$ 相重合。这样， $Y(z)$ 可展成

$$Y(z) = \frac{az}{z - e^{j\omega}} + \frac{bz}{z - e^{-j\omega}} + \sum_{m=1}^M \frac{A_m z}{z - z_m} \quad (8-110)$$

式中 z_m 是 $\frac{H(z)}{z}$ 的极点。系数 a, b 可以由式(8-109)、(8-110)求出：

$$a = \left[\frac{Y(z)}{z} (z - e^{j\omega}) \right]_{z=e^{j\omega}} = A \frac{H(e^{j\omega})}{2j}$$

$$b = \left[\frac{Y(z)}{z} (z - e^{-j\omega}) \right]_{z=e^{j\omega}} = -A \frac{H(e^{-j\omega})}{2j}$$

注意到 $H(e^{j\omega})$ 与 $H(e^{-j\omega})$ 是复数共轭的，令：

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi} \\ H(e^{-j\omega}) &= |H(e^{j\omega})|e^{-j\varphi} \end{aligned}$$

代入式(8-110)，得到

$$Y(z) = \frac{A \cdot |H(e^{j\omega})|}{2j} \left(\frac{ze^{j\varphi}}{z - e^{j\omega}} - \frac{ze^{-j\varphi}}{z - e^{-j\omega}} \right) + \sum_{m=1}^M \frac{A_m z}{z - z_m}$$

显然， $Y(z)$ 的逆变换为

$$y(n) = \frac{A \cdot |H(e^{j\omega})|}{2j} [e^{j(n\omega + \varphi)} - e^{-j(n\omega + \varphi)}] + \sum_{m=1}^M A_m (z_m)^n \quad (8-111)$$

对于稳定系统，其 $H(z)$ 的极点全部位于单位圆内，即 $|z_m| < 1$ 。这样，当 $n \rightarrow \infty$ ，由 $H(z)$ 的极点所对应的各指数衰减序列都趋于零。所以稳态响应 $y_{ss}(n)$ 就是式(8-111)中的第 1 项，即

$$\begin{aligned} y_{ss}(n) &= \frac{A \cdot |H(e^{j\omega})|}{2j} [e^{j(n\omega + \varphi)} - e^{-j(n\omega + \varphi)}] \\ &= A |H(e^{j\omega})| \sin(n\omega + \varphi) \end{aligned} \quad (8-112)$$

由式(8-112)可以看出，若输入是正弦序列，则系统的稳态响应也是正弦序列，如果令：

$$x(n) = A \sin(n\omega - \theta_1)$$

$$y_{ss}(n) = B \sin(n\omega - \theta_2)$$

则

$$H(e^{j\omega}) = \frac{B}{A} e^{j[\cdot(\theta_2 - \theta_1)]}$$

即：

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{B}{A}$$

$$\varphi = -(\theta_2 - \theta_1)$$

其中 $H(e^{j\omega})$ 就是离散系统的频率响应，它表示输出序列的幅度和相位相对于输入序列的变化。显然 $H(e^{j\omega})$ 是正弦序列包络频率 ω 的连续函数。如图 8-16 所示。

通常 $H(e^{j\omega})$ 是复数，所以一般写成

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

式中 $|H(e^{j\omega})|$ 是离散系统的幅度响应， $\varphi(\omega)$ （或记作 φ ）是相位响应。由式(8-82)可知

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn\omega} \quad (8-113)$$

因此，离散系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 与单位样值响应 $h(n)$ 是一对傅里叶变换。

由式(8-113)可以看出，由于 $e^{j\omega}$ 是周期函数，因而离散系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 必然也是周期函数，其周期为序列的重复频率 ω_s ($= \frac{2\pi}{T}$ ，若令 $T=1$ ，则 $\omega_s = 2\pi$)，这是离散系统有别于连续系统的一个突出的特点。

应当指出，类似于模拟滤波器，离散系统(数字滤波器)按其频率特性也有低通、高通、带通、带阻、全通之分，由于频响特性 $H(e^{j\omega})$ 的周期

性，因此这些特性完全可以在 $-\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ 范围内得到区分，如图 8-17 所示。

(二) 频响特性的几何确定法

类似于连续系统，也可以用系统函数 $H(z)$ 在 z 平面上零极点分布，通过几何方法简便而直观地求出离散系统的频率响应。

若已知

$$H(z) = \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_r)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)}$$

则

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - z_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

令：

$$\begin{aligned} e^{j\omega} - z_r &= A_r e^{j\psi_r} \\ e^{j\omega} - p_k &= B_k e^{j\theta_k} \end{aligned}$$

于是幅度响应

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_{r=1}^M A_r}{\prod_{k=1}^N B_k} \quad (8-114)$$

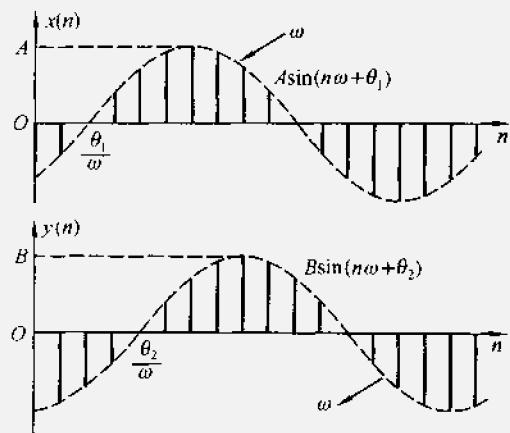


图 8-16 正弦输入与输出序列

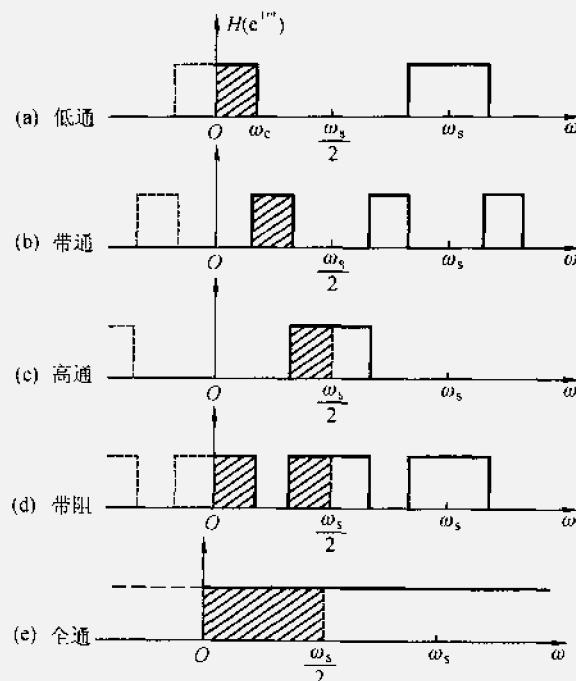
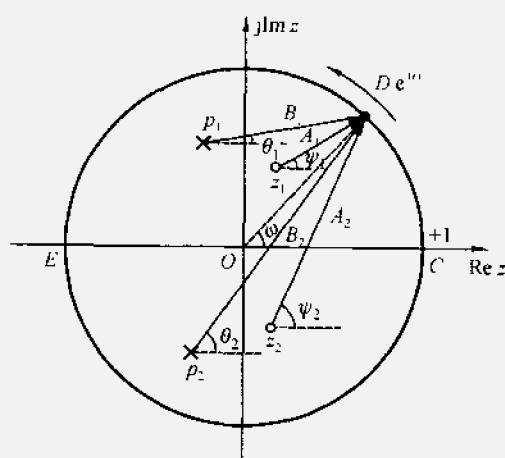


图 8-17 离散系统的各种频率响应

相位响应

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^M \psi_r - \sum_{k=1}^N \theta_k \quad (8-115)$$

显然，式中 A_r ， ψ_r 分别表示 z 平面上零点 z_r 到单位圆上某点 $e^{j\omega}$ 的矢量 ($e^{j\omega} - z_r$) 的长度与夹角， B_k ， θ_k 表示极点 p_k 到 $e^{j\omega}$ 的矢量 ($e^{j\omega} - p_k$) 的长度与夹角，如图 8-18 所示。如果单位圆上的点 D 不断移动，就可以得到全部的频率响应。图中 C 点对应于 $\omega = 0$ ， E 点对应于 $\omega = \omega_s/2$ 。由于离散系统频响是周期性的，因此只要 D 点转一周就可以了。利用这种方法可以比较方便地由 $H(z)$ 的零极点位置求出该系统的频率

图 8-18 频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的几何确定法

响应。可见频率响应的形状取决于 $H(z)$ 的零极点分布，也就是说，取决于离散系统的形式及差分方程各系数的大小。

不难看出，位于 $z=0$ 处的零点或极点对幅度响应不产生作用，因而在 $z=0$ 处加入或去除零极点，不会使幅度响应发生变化，而只会影响相位响应。此外，还可以看出，当 $e^{j\omega}$ 点旋转到某个极点 (p_i) 附近时，如果矢量的长度 B_i 最短，则频率响应在该点可能出现峰值。若极点 p_i 愈靠近单位圆， B_i 愈短，则频率响应在峰值附近愈尖锐。如果极点 p_i 落在单位圆上， $B_i=0$ ，则频率响应的峰值趋于无穷大。对于零点来说其作用与极点恰恰相反。

例 8-22 求图 8-19 (a) 所示一阶离散系统的频率响应。

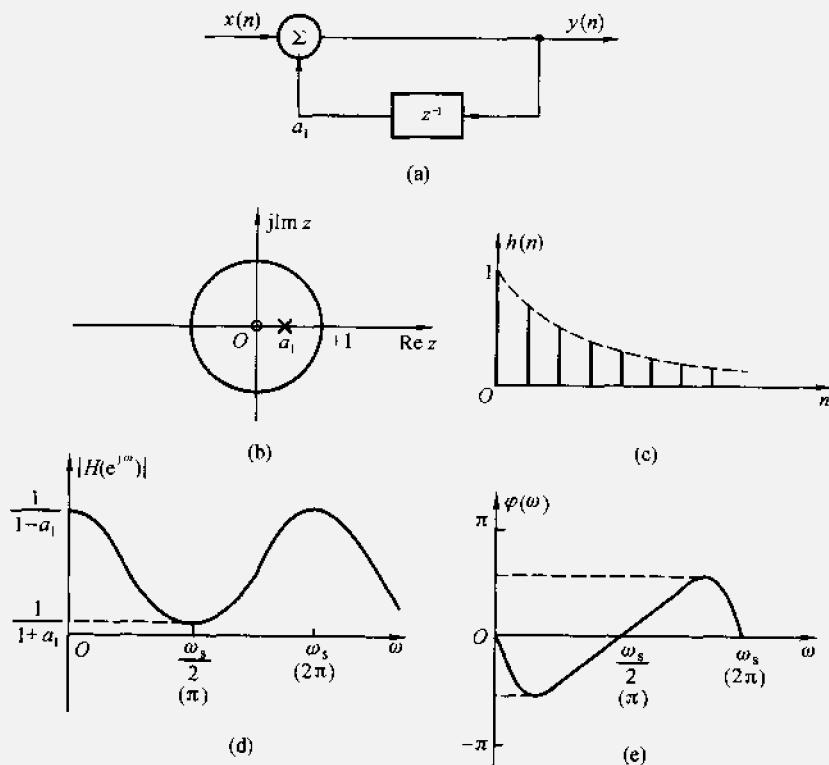


图 8-19 一阶离散系统的频率响应

解 该一阶系统的差分方程为

$$y(n) = a_1 y(n-1) + x(n) \quad (0 < a_1 < 1)$$

① 为适应变换域分析的需要，从本例开始，离散系统方框图中的单位延时器用符号“ z^{-1} ”表示，见图 8-19 (a)。

通常，系统为因果序列，其系统函数为

$$H(z) = \frac{z}{z - a_1} \quad (|z| > a_1)$$

单位样值响应为

$$h(n) = a_1^n u(n)$$

这样，该一阶系统的频率响应为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a_1} \\ &= \frac{1}{(1 - a_1 \cos \omega) + j a_1 \sin \omega} \end{aligned}$$

于是，幅度响应

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \omega}}$$

相位响应

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{a_1 \sin \omega}{1 - a_1 \cos \omega}\right)$$

$h(n), |H(e^{j\omega})|, \varphi(\omega)$ 的形状如图 8-19(c), (d), (e) 所示。显然为了保证该系统稳定，要求 $|a_1| < 1$ 。若 $0 < a_1 < 1$ ，则系统呈“低通”特性；若 $-1 < a_1 < 0$ ，则系统呈“高通”特性；若 $a_1 = 0$ 则呈“全通”特性。此例给出的一阶离散系统 ($0 < a_1 < 1$) 与 RC 或 RL 一阶模拟电路有“相仿”的特性。

例 8-23 求图 8-20(a) 所示二阶离散系统的频率响应。

解 该系统的差分方程为

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_1 x(n-1)$$

系统函数写作

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

若 a_1, a_2 为实系数，且 $a_1^2 + 4a_2 < 0$ ，则 $H(z)$ 含有一对共轭极点，令它们是

$$p_{1,2} = r e^{\pm j\theta}$$

对此因果系统， $H(z)$ 的收敛域应为 $|z| \geq r$ 。

容易求得 r, θ 与系数 a_1, a_2 的关系为

$$(1 - r e^{j\theta} z^{-1})(1 - r e^{-j\theta} z^{-1}) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}$$

得到：

$$r^2 = -a_2$$

$$2r \cos \theta = a_1$$

于是 $H(z)$ 可写成

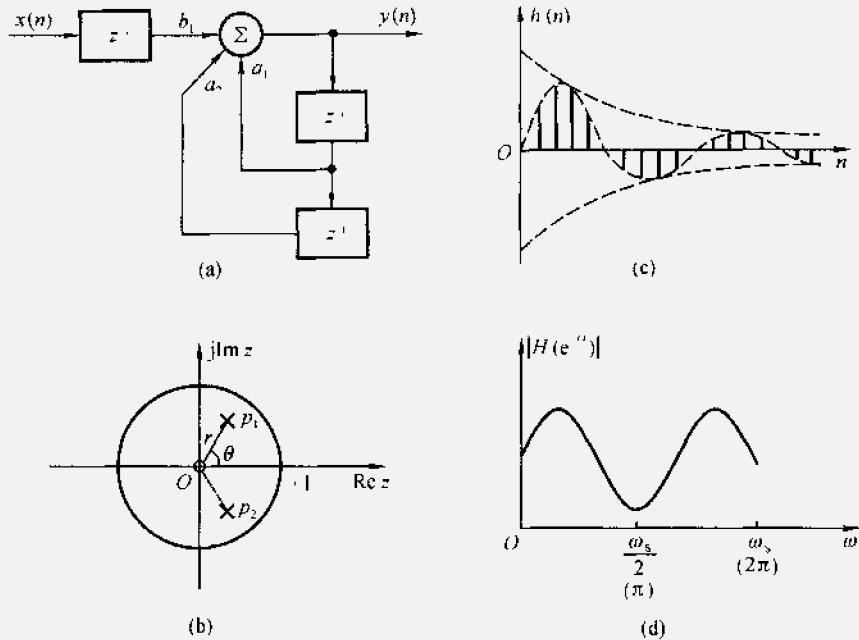


图 8-20 二阶离散系统的频率响应

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{(1 - r e^{j\theta} z^{-1})(1 - r e^{-j\theta} z^{-1})}$$

可见 $H(z)$ 除一对共轭极点外，还在 $z=0$ 点有一个零点，如图 8-20 (b) 所示。

若把 $H(z)$ 展成部分分式，得

$$H(z) = A \left(\frac{1}{1 - r e^{j\theta} z^{-1}} - \frac{1}{1 - r e^{-j\theta} z^{-1}} \right)$$

其中

$$A = \frac{b_1}{2jrsin\theta}$$

对 $H(z)$ 进行逆变换，得到单位样值响应为

$$\begin{aligned} h(n) &= A(r^n e^{jn\theta} - r^n e^{-jn\theta}) u(n) \\ &= 2jAr^n \sin(n\theta) \cdot u(n) = \frac{b_1 r^{n-1}}{\sin\theta} \cdot \sin(n\theta) u(n) \end{aligned}$$

如图 8-20 (c) 所示，若 $r < 1$ ，极点位于单位圆内， $h(n)$ 为衰减型，此系统是稳定的。

系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_1 e^{-j\omega}}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}}$$

根据 $H(z)$ 的零极点分布，通过几何方法可以大致估计出频率响应的形状，如图 8-20 (d) 所示。此例给出的二阶离散系统与 RLC 二阶模拟电路有“相仿”的特性。

例 8-24 求图 8-21 (a) 所示离散系统的频率响应。

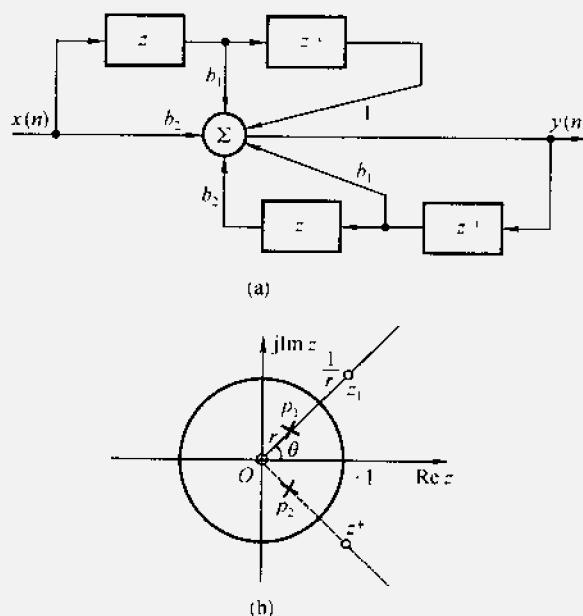


图 8-21 二阶全通离散系统

解 该系统的差分方程为

$$y(n) = x(n-2) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n) - b_2 y(n-2) - b_1 y(n-1)$$

系统函数为

$$H(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

若 b_1, b_2 为实系数，且 $b_1^2 - 4b_2 < 0$ ，则 $H(z)$ 具有一对共轭极点与一对共轭零点。这样 $H(z)$ 可表示成

$$H(z) = \frac{b_2(z - z_1)(z - z_1^*)}{(z - p_1)(z - p_1^*)}$$

令：

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

$$p_1 = r_2 e^{j\theta_2}$$

可以求出：

$$\begin{aligned}r_1^2 &= \frac{1}{b_2} \\r_2^2 &= b_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2b_2 r_1 \cos \theta_1 &= -b_1 \\2r_2 \cos \theta_2 &= -b_1\end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned}r_2 &= \frac{1}{r_1} = r = \sqrt{b_2} \\&\theta_1 = \theta_2 = \theta \\\cos \theta &= -\frac{b_1}{2\sqrt{b_2}}\end{aligned}$$

因此， $H(z)$ 的零极点位于：

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1}{r} e^{j\theta}, \quad z_1^* = \frac{1}{r} e^{-j\theta} \\p_1 &= r e^{j\theta}, \quad p_1^* = r e^{-j\theta}\end{aligned}$$

系统的频率响应是

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega}) &= \left[\frac{z^{-1} + b_1 + b_2 z}{b_2 z^{-1} + b_1 + z} \right]_{z=e^{j\omega}} \\&= \frac{e^{-j\omega} + b_1 + b_2 e^{j\omega}}{b_2 e^{-j\omega} + b_1 + e^{j\omega}} \\&= \frac{(b_1 + \cos \omega + b_2 \cos \omega) + j(b_2 \sin \omega - \sin \omega)}{(b_1 + \cos \omega + b_2 \cos \omega) - j(b_2 \sin \omega - \sin \omega)}\end{aligned}$$

显然：

$$\begin{aligned}|H(e^{j\omega})| &= 1 \\\varphi(\omega) &= 2 \arctan \left[\frac{(b_2 - 1) \sin \omega}{b_1 + (b_2 + 1) \cos \omega} \right]\end{aligned}$$

可见该系统是全通离散系统。不难看出，全通系统零、极点分布的特征是：零点与极点的模量互为倒数，辐角相等。利用 s 平面与 z 平面的映射规律也可借助连续系统全通函数零、极点分布特征导出上述结论。

以本节的内容作为理论基础，利用延时、倍乘、相加等基本运算单元可以构成数字滤波器，有关数字滤波器的基本原理和初步设计方法将在第十章讨论。

习 题

8-1 求下列序列的 z 变换 $X(z)$, 并标明收敛域, 绘出 $X(z)$ 的零极点图。

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(2) \left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

$$(3) \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u(n)$$

$$(4) \left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n)$$

$$(5) -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

$$(6) \delta(n+1)$$

$$(7) \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)]$$

$$(8) \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$(9) \delta(n) - \frac{1}{8} \delta(n-3)$$

8-2 求双边序列 $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ 的 z 变换, 并标明收敛域及绘出零极点图。

8-3 求下列序列的 z 变换, 并标明收敛域, 绘出零极点图。

$$(1) x(n) = Ar^n \cos(n\omega_0 + \phi) \cdot u(n) \quad (0 < r < 1)$$

$$(2) x(n) = R_N(n) = u(n) - u(n-N)$$

8-4 直接从下列 z 变换看出它们所对应的序列。

$$(1) X(z) = 1 \quad (|z| \leq \infty)$$

$$(2) X(z) = z^3 \quad (|z| < \infty)$$

$$(3) X(z) = z^{-1} \quad (0 < |z| \leq \infty)$$

$$(4) X(z) = -2z^{-2} + 2z + 1 \quad (0 < |z| < \infty)$$

$$(5) X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (|z| > a)$$

$$(6) X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (|z| < a)$$

8-5 求下列 $X(z)$ 的逆变换 $x(n)$ 。

$$(1) X(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} \quad (|z| > 0.5)$$

$$(2) X(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \quad \left(|z| > \frac{1}{2}\right)$$

$$(3) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad \left(|z| > \frac{1}{2}\right)$$

$$(4) X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a} \quad (|z| > \left| \frac{1}{a} \right|)$$

8-6 利用三种逆 z 变换方法求下列 $X(z)$ 的逆变换 $x(n)$ 。

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)} \quad (|z| > 2)$$

8-7 已知 $x(n)$ 的 z 变换为 $X(z)$, 试证明下列关系。

$$(1) \mathcal{Z}[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$(2) \mathcal{Z}[e^{-an} x(n)] = X(e^a z)$$

$$(3) \mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

$$(4) \mathcal{Z}[x^*(n)] = X^*(z^*)$$

(对于以上各式可为单边,也可为双边 z 变换)

8-8 已知 $x(n)$ 的双边 z 变换为 $X(z)$, 证明

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = X(z^{-1})$$

8-9 利用幂级数展开法求 $X(z) = e^z$, ($|z| < \infty$) 所对应的序列 $x(n)$ 。

8-10 求下列 $X(z)$ 的逆变换 $x(n)$ 。

$$(1) X(z) = \frac{10}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})} \quad (|z| > 0.5)$$

$$(2) X(z) = \frac{10z^2}{(z-1)(z+1)} \quad (|z| > 1)$$

$$(3) X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 2z^{-1}\cos\omega + z^{-2}} \quad (|z| > 1)$$

8-11 求下列 $X(z)$ 的逆变换 $x(n)$ 。

$$(1) X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - 6z^{-1})^2} \quad (|z| > 6)$$

$$(2) X(z) = \frac{z^{-2}}{1 + z^{-2}} \quad (|z| > 1)$$

8-12 画出 $X(z) = \frac{3z^{-1}}{2 - 5z^{-1} + 2z^{-2}}$ 的零极点图, 在下列三种收敛域下, 哪种情况对应左边序列, 右边序列, 双边序列? 并求各对应序列。

$$(1) |z| > 2$$

$$(2) |z| < 0.5$$

$$(3) 0.5 < |z| < 2$$

8-13 已知因果序列的 z 变换 $X(z)$, 求序列的初值 $x(0)$ 与终值 $x(\infty)$ 。

$$(1) X(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

$$(2) X(z) = \frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}$$

$$(3) X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

8-14 已知 $X(z) = \ln\left(1 + \frac{a}{z}\right)$, ($|z| > |a|$), 求对应的序列 $x(n)$ 。

[提示: 利用级数展开式 $\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{y^n}{n}, y < 1$]

8-15 证明表 8-3 中所列的和函数 z 变换公式, 即:

已知 $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$, 则

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n-1} x(k)\right] = \frac{z}{z-1} X(z)$$

8-16 试证明实序列的相关定理。

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(m-n)\right] = H(z)X\left(\frac{1}{z}\right)$$

其中: $H(z) = \mathcal{Z}[h(n)]$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)]$$

8-17 利用卷积定理求 $y(n) = x(n) * h(n)$, 已知

- (1) $x(n) = a^n u(n)$ $h(n) = b^n u(-n)$
- (2) $x(n) = a^n u(n)$ $h(n) = \delta(n-2)$
- (3) $x(n) = a^n u(n)$ $h(n) = u(n-1)$

8-18 利用 z 变换求例 7-15 中给出的两序列的卷积, 即求

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

其中: $h(n) = a^n u(n)$ ($0 < a < 1$)

$$x(n) = R_N(n) = u(n) - u(n-N)$$

8-19 已知下列 z 变换式 $X(z)$ 和 $Y(z)$, 利用 z 域卷积定理求 $x(n)$ 与 $y(n)$ 乘积的 z 变换。

$$(1) X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \quad (|z| > 0.5)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-2z} \quad (|z| < 0.5)$$

$$(2) X(z) = \frac{0.99}{(1-0.1z^{-1})(1-0.1z)} \quad (0.1 < |z| < 10)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-10z} \quad (|z| > 0.1)$$

$$(3) X(z) = \frac{z}{z-e^{-b}} \quad (|z| > e^{-b})$$

$$Y(z) = \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad (|z| > 1)$$

8-20 在 7.7 节曾介绍利用时域特性的解卷积方法, 实际问题中, 往往也利用变换域方法计算解卷积。本题研究一种称为“同态滤波”的解卷积算法原理。在此, 需要用到 z 变换性质和对数计算。设 $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$, 若要直接把相互卷积的信号 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 分开将遇到困难。但是, 对于两个相加的信号往往容易借助某种线性滤波方法使二者分离。题图 8-20 示出用同态滤波解卷积的原理框图, 其中各部分作用如下:

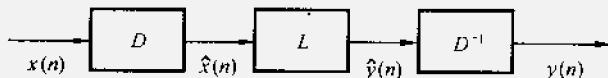
(1) D 运算表示将 $x(n)$ 取 z 变换、取对数和逆 z 变换, 得到包含 $x_1(n)$ 和

$x_2(n)$ 信息的相加形式。

(2) L 为线性滤波器，容易将两个相加项分离，取出所需信号。

(3) D^{-1} 相当于 D 的逆运算，也即取 z 变换、指数以及逆 z 变换，至此，可从 $x(n)$ 中按需要分离出 $x_1(n)$ 或 $x_2(n)$ ，完成解卷积运算。

试写出以上各步运算的表达式。



题图 8-20

8-21 用单边 z 变换解下列差分方程。

$$(1) \quad y(n+2) + y(n+1) + y(n) = u(n)$$

$$y(0)=1, y(1)=2$$

$$(2) \quad y(n) + 0.1y(n-1) - 0.02y(n-2) = 10u(n)$$

$$y(-1)=4, y(-2)=6$$

$$(3) \quad y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$$

$$y(-1)=0$$

$$(4) \quad y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$$

$$y(-1)=1$$

$$(5) \quad y(n) = -5y(n-1) + nu(n)$$

$$y(-1)=0$$

$$(6) \quad y(n) + 2y(n-1) = (n-2)u(n)$$

$$y(0)=1$$

8-22 用 z 变换求解习题 7-25 电阻梯形网络结点电压的差分方程

$$v(n+2) - 3v(n+1) + v(n) = 0$$

其中 $v(0)=E$

$v(N)=0$ (当 $N \rightarrow \infty$)

$n=0, 1, 2, \dots, N$

8-23 因果系统的系统函数 $H(z)$ 如下所示，试说明这些系统是否稳定。

$$(1) \quad \frac{z+2}{8z^2-2z-3}$$

$$(2) \quad \frac{8(1-z^{-1}-z^{-2})}{2+5z^{-1}+2z^{-2}}$$

$$(3) \quad \frac{2z-4}{2z^2+z-1}$$

$$(4) \quad \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

8-24 已知一阶因果离散系统的差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) = x(n)$$

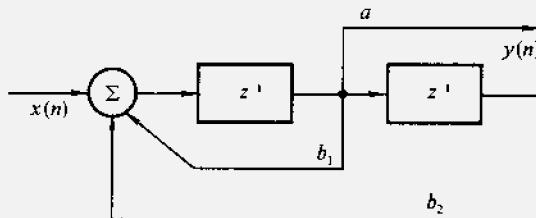
试求：

(1) 系统的单位样值响应 $h(n)$ ；

(2) 若 $x(n) = (n+n^2)u(n)$ ，求响应 $y(n)$ 。

8-25 写出题图 8-25 所示离散系统的差分方程，并求系统函数 $H(z)$ 及单位样值响

应 $h(n)$ 。



题图 8-25

8-26 由下列差分方程画出离散系统的结构图，并求系统函数 $H(z)$ 及单位样值响应 $h(n)$ 。

- (1) $3y(n) - 6y(n-1) = x(n)$
- (2) $y(n) = x(n) - 5x(n-1) + 8x(n-3)$
- (3) $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$
- (4) $y(n) - 3y(n-1) + 3y(n-2) - y(n-3) = x(n)$
- (5) $y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n) - 3x(n-2)$

8-27 求下列系统函数在 $10 < |z| \leq \infty$ 及 $0.5 < |z| < 10$ 两种收敛域情况下系统的单位样值响应，并说明系统的稳定性与因果性。

$$H(z) = \frac{9.5z}{(z-0.5)(10-z)}$$

8-28 在语音信号处理技术中，一种描述声道模型的系统函数具有如下形式

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}}$$

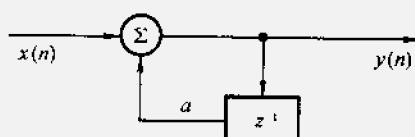
若取 $P=8$ ，试画出此声道模型的结构图。

8-29 对于下列差分方程所表示的离散系统

$$y(n) + y(n-1) = x(n)$$

- (1) 求系统函数 $H(z)$ 及单位样值响应 $h(n)$ ，并说明系统的稳定性。
- (2) 若系统起始状态为零，如果 $x(n) = 10u(n)$ ，求系统的响应。

8-30 对于题图 8-30 所示的一阶离散系统 ($0 < a < 1$)，求该系统在单位阶跃序列 $u(n)$ 或复指数序列 $e^{j\omega n}$ 激励下的响应、瞬态响应及稳态响应。



题图 8-30

8-31 用计算机对测量的随机数据 $x(n)$ 进行平均处理，当收到一个测量数据后，计

计算机就把这一次输入数据与前两次输入数据进行平均。试求这一运算过程的频率响应。

8-32 已知系统函数

$$H(z) = \frac{z}{z - k} \quad (k \text{ 为常数})$$

(1) 写出对应的差分方程;

(2) 画出该系统的结构图;

(3) 求系统的频率响应，并画出 $k=0, 0.5, 1$ 三种情况下系统的幅度响应和相位响应。

8-33 利用 z 平面零极点矢量作图方法大致画出下列系统函数所对应的系统幅度响应。

$$(1) H(z) = \frac{1}{z - 0.5}$$

$$(2) H(z) = \frac{z}{z - 0.5}$$

$$(3) H(z) = \frac{z + 0.5}{z}$$

8-34 已知横向数字滤波器的结构如题图 8-34 所示。试以 $M=8$ 为例

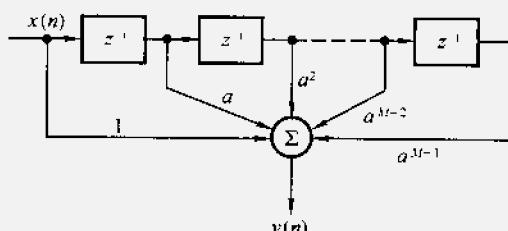
(1) 写出差分方程。

(2) 求系统函数 $H(z)$;

(3) 求单位样值响应 $h(n)$;

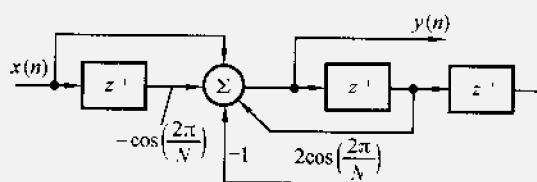
(4) 画出 $H(z)$ 的零极点图;

(5) 粗略画出系统的幅度响应。



题图 8-34

8-35 求题图 8-35 所示系统的差分方程、系统函数及单位样值响应，并大致画出系统函数 $H(z)$ 的零极点图及系统的幅度响应。



题图 8-35

8-36 已知离散系统差分方程表示式

$$y(n) - \frac{1}{3}y(n-1) = x(n)$$

- (1) 求系统函数和单位样值响应;
- (2) 若系统的零状态响应为 $y(n) = 3\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$, 求激励信号 $x(n)$;
- (3) 画系统函数的零、极点分布图;
- (4) 粗略画出幅频响应特性曲线;
- (5) 画系统的结构框图。

8-37 已知离散系统差分方程表示式

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

- (1) 求系统函数和单位样值响应;
- (2) 画系统函数的零、极点分布图;
- (3) 粗略画出幅频响应特性曲线;
- (4) 画系统的结构框图。

8-38 已知系统函数

$$H(z) = \frac{z^2 - (2a\cos\omega_0)z + a^2}{z^2 - (2a^{-1}\cos\omega_0)z + a^{-2}}, (a > 1)$$

- (1) 画出 $H(z)$ 在 z 平面的零、极点分布图;
- (2) 借助 $s-z$ 平面的映射规律, 利用 $H(s)$ 的零、极点分布特性说明此系统具有全通特性。

第九章 离散傅里叶变换以及其他离散正交变换

9.1 引言

在离散时间信号与系统研究的历史进程中，曾经面临一个重要问题，这就是如何把数字计算机的应用和信号分析与处理紧密地结合起来。“离散傅里叶变换(DFT)”正是在解决这一矛盾中形成的一种概念和计算方法。

在8.9节曾介绍序列的傅里叶变换(DTFT)，在8.10节已经看到离散时间系统的频域分析完全建立在DTFT概念的基础之上。但是，这种概念和方法未能解决利用数字计算机便捷地分析信号频谱的问题。本章将要研究的离散傅里叶变换(DFT)一词并非泛指对任意离散信号取傅里叶积分或傅里叶级数，而是指为适应利用计算机分析傅里叶变换规定的一种专门运算，将在9.3节给出定义。

对于连续时间信号，为了获取正、逆傅里叶变换，无论在时域或在频域，都需要对连续函数进行积分运算，而且其积分限都要包括从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 全部时间轴或频率轴的范围。对于离散时间信号，按DTFT的定义，其正变换为级数求和，逆变换仍为积分运算，它的求和范围仍然是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 。显然，要在数字计算机上完成这些变换，必须把计算范围从无限宽收缩到一个有限区间(注意，在时间域和频率域都应限制于有限范围)。与此同时，必须把连续函数改换为离散数据(注意，同样是在时间域和频率域两方面都应当是离散样值)。

从9.2~9.4节将要看到，这一问题的解决，首先是针对周期性离散信号进行的。为这种信号的傅里叶分析，定义了“离散傅里叶级数(DFS)”，这时，时域和频域的有关运算全部离散化，并限于规定的区间(时域的一个周期和频域的一个周期)。然后，借助离散傅里叶级数的概念，把有限长序列作为周期性离散信号的一个周期来处理，从而定义了“离散傅里叶变换(DFT)”。这样，就使有限长序列的傅里叶变换问题，在允许一定程度近似的条件下，同样得以利用数字计算机。

在给出DFT的定义和性质分析之后，将要讨论离散时间信号取DFT和 z 变换之间的关系，这将是9.5节的研究内容。

DFT定义的引出，仅为傅里叶分析使用计算机提供了理论依据，问题并

没有全部解决。因为直接按此方法计算还要遇到一些实际困难，这就是计算速度慢、设备重复。随着样点 N 数目的增加，此矛盾将十分尖锐，致使这种计算失去实际价值。于是，人们力图寻找一种快速而简便的算法，使 DFT 不仅在原理上讲得通，而且便于付诸实现。曾经有许多人致力于研究这种方法，1965 年，库利与图基(Cooley, J. W. 和 Tukey, J. W.)总结并发展了前人的研究成果，提出了一种快速、通用地进行 DFT 的计算方法，编出了使用这种方法的第一个程序。此算法取名“快速傅里叶变换(FFT)”，也称为“库利－图基算法”。

虽然 FFT 在理论方面没有什么新的贡献，然而，作为一种算法，它的出现引起了人们巨大的兴趣，得到了迅速发展，并广泛应用于各个技术领域。

FFT 把 DFT 的计算速度提高了大约 $\frac{N}{\log_2 N}$ 倍，随着 N 值的增长，其优越性更加显著。在发现 FFT 之前，DFT 的应用只能限于某些数据的事后处理，或某些系统的模拟研究，在速度与成本方面都赶不上相应的连续时间系统。FFT 的出现彻底改变了这种局面，信号的实时处理以及设备量的简化都得以实现，从此，离散时间系统的研究与应用在许多方面取代了传统的连续时间系统，20 世纪 70 年代初，国外市场就已开始出售 FFT 的专用硬件，现在 FFT 处理机已成为相当普通的计算机外围设备。在 9.6 和 9.7 节给出 FFT 的初步原理和应用举例。

FFT 的重要意义已经远远超出了傅里叶分析本身的应用。FFT 算法之所以快速，其根本原因在于利用了原始变换矩阵的多余性，此特性也适用于傅里叶变换以外的其他一些正交变换，例如，快速沃尔什变换、数论变换等等。在 FFT 的影响下，人们对于广义的快速正交变换进行了深入研究，使各种快速变换在数字信号处理中占据了重要地位。因此可以说 FFT 对数字信号处理技术的发展起了重大推动作用。

为使读者初步了解傅里叶变换以外的其他离散正交变换，在 9.8 和 9.9 节分别介绍离散沃尔什变换(DWT)和离散余弦变换(DCT)的简要概念。

9.2 傅里叶变换的离散性与周期性

在第三章曾经注意到，傅里叶变换的离散性和周期性在时域与变换域中表现出巧妙的对称关系，具体说，这就是：呈周期性的连续时间函数，其傅里叶变换为离散的非周期频率函数(傅里叶级数，离散频谱)；而非周期性的离散时间函数，其傅里叶变换为连续的周期性函数(抽样信号的频谱呈周期性)。考察这一问题发现，就傅里叶变换的离散性与周期性而论，可能出现四种类型的时

域和变换域组合，下面分别给出它们的表示式与图形。这里的分析与第三章密切衔接^①，仍沿用那里的一部分符号，但是，为了突出正、逆变换的对称形式，也便于后面讨论，逆变换中的变量不取角频率 ω ，而是取频率 f 。函数式用 $x(t)$ ，不用 $f(t)$ 。具体符号列写如下：

- t : 连续时间变量
- $x(t)$: 连续时间函数
- T_s : 抽样时间间隔
- T_1 : 函数 $x(t)$ 的周期
- n : $x(t)$ 的样点序号
- $x(nT_s)$: 离散时间函数
- f : 连续频率变量
- $X(f)$: $x(t)$ 的傅里叶变换
- f_1 : 抽样频率间隔
- f_s : 函数 $X(f)$ 的周期
- k : $X(f)$ 的样点序号
- $X(kf_1)$: 离散频率函数

N : 在 $0 \leq t < T_1$ 之内的抽样数，也等于 $0 \leq f < f_s$ 之内的抽样数。

下面将要给出的一些示意图形，着重说明各种组合的不同特点，并非对某一变换对作精确的描述。

(一) 连续时间与连续频率

这就是我们熟悉的非周期连续时间信号求频谱的情况，在第三章曾详细研究。

连续时间函数 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(f)$ 可以表示为

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (9-1)$$

逆变换

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (9-2)$$

这种时间函数及其变换函数的形式如图 9-1(a) 所示。这里的 $x(t)$ 或 $X(f)$ 都是连续的，也都是非周期性的。

(二) 连续时间与离散频率

当连续时间信号为周期函数时，其傅里叶变换具有离散特性，呈冲激序列。在这种情况下，表示信号频谱的另一种方法是写作傅里叶级数的形式。在

^① 参看 3.10 节的例 3-12。

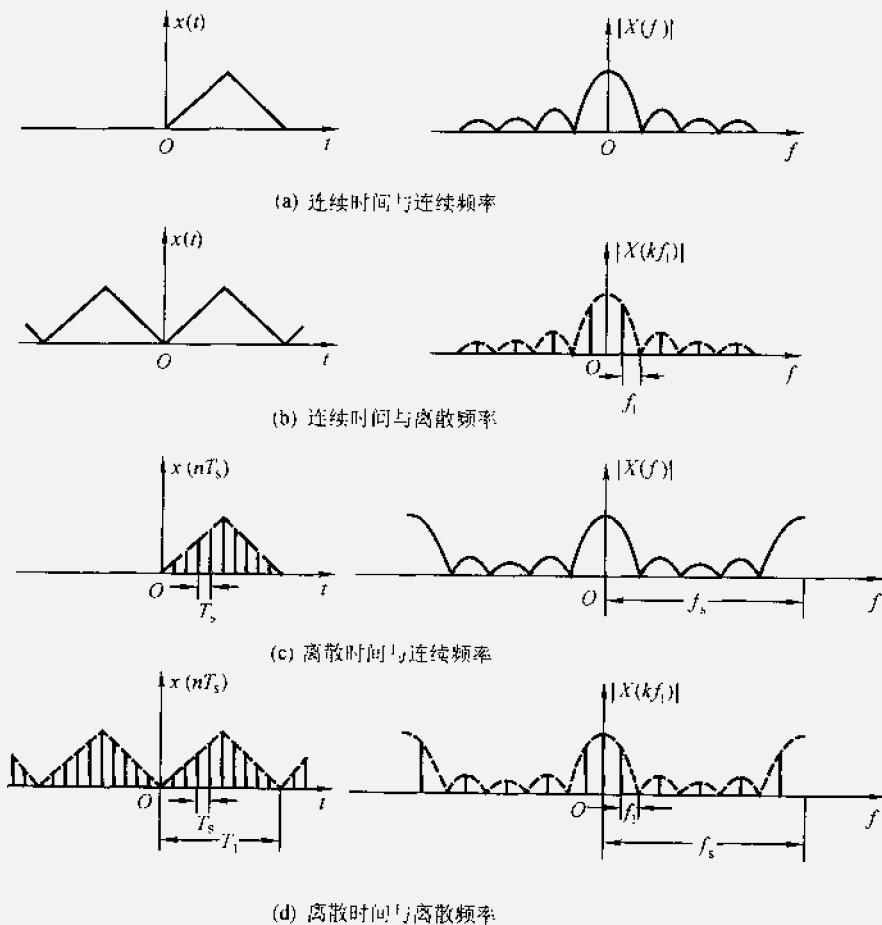


图 9-1 傅里叶变换的各种形式

3.9 节已经论述了这两种形式的统一性。为便于引出离散傅里叶变换，现在以级数形式写出。令 $x(t)$ 代表一周期为 T_1 的周期性连续时间函数，傅里叶级数的系数写作 $X(kf_1)$ 。这组变换对是：

$$X(kf_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) e^{-j2\pi kf_1 t} dt \quad (9-3)$$

和

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_1) e^{j2\pi kf_1 t} \quad (9-4)$$

注意，式(9-3)的积分限是取 $x(t)$ 的一个周期。 k 为谐波序号，而频率间隔 f_1 与时间周期 T_1 之间满足

$$f_1 = \frac{1}{T_1}$$

两函数的特性示于图 9-1 (b)，结论是：周期性的连续时间函数对应于非周期性的离散频率变换函数。

(三) 离散时间与连续频率

非周期性的离散时间函数 $x(nT_s)$ 的变换式呈周期性的连续函数，写作 $X(f)$ ，如图 9-1 (c) 所示。一般情况下，在 8.9 节给出的 DTFT 就是这种情况。此时，正变换为级数求和，逆变换是求积分，构成与式(9-3)和式(9-4)对称的函数式

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi n f T_s}, \quad (9-5)$$

和

$$x(nT_s) = \frac{1}{f_s} \int_{f_s} X(f) e^{j2\pi n f T_s} df \quad (9-6)$$

与前面类似，式(9-6)的积分限是取 $X(f)$ 的一个周期。 n 为离散时间函数的样点序号，而时间间隔 T_s 与频率特性的重复周期 f_s 之间满足

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

这种情况的特性与第(二)种情况呈对偶关系，这就是：非周期的离散时间函数对应于周期性的连续频率变换函数。

(四) 离散时间与离散频率

这是本节的主题，将从这种情况引出离散傅里叶级数与变换的概念。

图 9-1 (d) 所示周期性离散时间函数 $x(nT_s)$ 的傅里叶变换是周期性离散频率函数 $X(kf_1)$ ，也示于图 9-1 (d) 之中。可从上述非周期离散时间函数或周期连续时间函数两种情况中的任一种，经修改导出这里所需的变换对。例如，借助式(9-5)与(9-6)。现在，由于时间函数也呈周期性，故级数取和应限制在一个周期之内，序号 n 从 0 到 $N-1$ ，于是有

$$X(kf_1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j2\pi n k f_1 T_s} \quad (9-7)$$

注意，时间函数的周期性导致频率函数的离散性，故变量 f 代之以 kf_1 ，式(9-6)中的符号随之作如下演变：

$$\begin{aligned} df &\rightarrow f_1 = \frac{f_s}{N}, \quad f \rightarrow kf_1, \quad \int_{f_s} \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1}, \quad \text{于是得到} \\ x(nT_s) &= \frac{1}{f_s} \sum_{k=0}^{N-1} X(kf_1) e^{j2\pi n k f_1 T_s} \frac{f_s}{N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(kf_1) e^{j2\pi n k f_1 T_s} \end{aligned} \quad (9-8)$$

这里，离散时间函数的时间间隔 T_s 与频率函数的重复周期 f_s 之间满足 $f_s = \frac{1}{T_s}$ ，而离散频率函数的间隔 f_1 与时间函数周期 T_1 的关系是 $f_1 = \frac{1}{T_1}$ 。此外，在时域、频域各自的一个周期内分别有如下关系：

$$\frac{T_1}{T_s} = N \quad \text{或} \quad \frac{f_s}{f_1} = N \quad (9-9)$$

即每个周期有 N 个样点，容易求得：

$$T_1 f_1 = \frac{1}{N} \quad (9-10)$$

或

$$T_1 f_s = N \quad (9-11)$$

将式(9-10)代入式(9-7)与式(9-8)得到：

$$X(kf_1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad (9-12)$$

$$x(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(kf_1) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad (9-13)$$

式(9-12)与式(9-13)构成级数形式的变换对。它们是图 9-1(d)所示函数图形的数学描述。

类似地，以上述第(二)种情况为基础，即利用式(9-3)与式(9-4)，经修改也可得到如式(9-12)和式(9-13)这样的变换对，但 $1/N$ 将从式(9-13)移至式(9-12)。显然，此系数的变动是无关紧要的，它不会改变这一对变换函数图形的基本形状。

为了证实刚刚导出的变换对之合理性，把式(9-12)代入式(9-13)，如果能使等式左右两端相等，即可相信这一对关系式是正确的。

依此写出

$$x(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \right] e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad (9-14)$$

为了防止两次取和使宗量 n 引起混淆，引用符号 m ，式(9-14)改写为

$$\begin{aligned} x(mT_s) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \right] e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(m-n)} \end{aligned} \quad (9-15)$$

式中第二次取和有如下的几何级数形式^①

^① 见附录四：几何级数求和公式表。

$$\sum_{k=0}^{N-1} G^k = \begin{cases} \frac{1-G^N}{1-G} & (G \neq 1) \\ N & (G = 1) \end{cases} \quad (9-16)$$

这里

$$G = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(m-n)}$$

因为 $m - n$ 是整数, 所以有

$$G^N = 1$$

当 $m \neq n$ 时, 由于 $G^N = 1$ 而 $G \neq 1$, 于是得到

$$\sum_{k=0}^{N-1} G^k = 0$$

当 $m = n$ 时, $G^N = 1$, 且 $G = 1$, 可以得到

$$\sum_{k=0}^{N-1} G^k = N$$

因此, 在式(9-15)两次取和过程中, m 与 n 的各种组合仅在 $n = m$ 时取得 N 值, 其余各项均为零, 于是, 式(9-15)右端得到

$$\frac{1}{N} \cdot N \cdot x(nT_s) = x(nT_s) \quad (9-17)$$

显然, 等式左端的系数 m 与右端的 n 含义相同, 故两边都是 $x(nT_s)$, 至此, 变换对的正确性得到证实。

以上四种情况讨论的结果概括写于表 9-1。其中最后一种情况, 也即式(9-12)与式(9-13)组成的变换对, 正是离散傅里叶变换的雏形, 下面两节继续讨论。

表 9-1 傅里叶变换的四种组合形式

	时域 频域	连续	离散
时域 频域			
连续		$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$ $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$	$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi n f T_s}$ $x(nT_s) = \frac{1}{T_s} \int_{f_s}^{f_s} X(f) e^{j2\pi n f T_s} df$
时域 频域	都为非周期、连续		时域非周期、离散 频域周期、连续

续表

时域 频域	连续	离散
	$X(kf_1) = \frac{1}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} x(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt$	$X(kf_1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk}$
离散	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_1) e^{j2\pi k f_1 t}$ 时域周期、连续 频域非周期、离散	$x(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(kf_1) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$ 时域 频域都为周期、离散

9.3 从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换

在前节分析的基础上, 把离散傅里叶级数作为一种过渡形式, 由此引出离散傅里叶变换。下面就要看到, 离散傅里叶级数用于分析周期序列, 而离散傅里叶变换则是针对有限长序列。

为便于在以后讨论中区分周期序列和有限长序列, 用带有下标 p 的符号来表示周期性序列, 例如 $x_p(n), y_p(n)$ 等等。

若周期序列 $x_p(n)$ 的周期为 N, 那么

$$x_p(n) = x_p(n + rN) \quad (r \text{ 为任意整数})$$

周期序列不能进行双边 z 变换, 因为当 n 从 $-\infty$ 到 ∞ 变化, 序列周而复始, 永不衰减, 在 z 平面上任何地方也找不到一个衰减因子 $|z|$ 能使 $x_p(n)z^{-n}$ 绝对可和, 它在 z 平面上不存在收敛域, 故无 z 变换。这正如在连续时间系统中, 周期信号不存在双边拉氏变换。然而, 连续时间周期信号可以用傅里叶级数来表达, 与此相应, 周期序列也可用离散傅里叶级数来表示。定义如下的离散傅里叶级数变换对

$$\left\{ \begin{array}{l} X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \\ x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} \end{array} \right. \quad (9-18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \\ x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} \end{array} \right. \quad (9-19)$$

显然, 这就是前节的式(9-12)与式(9-13), 只是这里取时间变量的离散间隔 T_s , 以及频率变量的离散间隔 f_1 都等于 1, 使表达式简化。对于式(9-19)作如下解释: 式中 $e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$ 是周期序列的基频成分, $e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$ 就是 k 次谐波分量,

各次谐波的系数为 $X_p(k)$; 全部谐波成分中只有 N 个是独立的, 因为

$$e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(k+N)} = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad (9-20)$$

因此, 级数取和的项数是从 $k=0$ 到 $N-1$, 共 N 个独立谐波分量。而式(9-18)正是由 $x_p(n)$ 决定系数 $X_p(k)$ 的求和公式。由于时域、频域的双重周期性, 就使两个式子具有对称的形式, 都是 N 项级数取和再构成 N 个样点的序列。周期序列虽然是无穷长序列, 但是只要知道了一个周期的内容, 其余时刻的全部情况即可掌握。这意味着, 周期性无穷长序列实际上只有 N 个样值有信息, 式(9-18)与(9-19)都只取 N 个样点正说明了这种含义。因此, 周期序列与有限长序列有着本质的联系, 这正是由离散傅里叶级数向离散傅里叶变换过渡的关键所在。

为今后研究的方便, 引入符号 W_N

$$W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \quad (9-21)$$

如果在所讨论的问题中不涉及 N 的变动, 可省略下标, 简写作

$$W = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \quad (9-22)$$

此外, 用英文缩写字母 DFS [·] 表示取离散傅里叶级数的正变换(求系数), 以 IDFS [·] 表示取离散傅里叶级数的逆变换(求时间函数)。这样, 把离散傅里叶级数的变换对写作:

$$\text{DFS}[x_p(n)] = X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) W^{nk} \quad (9-23)$$

$$\text{IDFS}[X_p(k)] = x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) W^{-nk} \quad (9-24)$$

现在借助周期序列离散傅里叶级数的概念对有限长序列进行傅里叶分析。

设 $x(n)$ 为有限长序列, 它在 $n=0$ 到 $N-1$ 共 N 个样点上取某些数值, 其余各处皆为零

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (n \text{ 为其他值}) \end{cases} \quad (9-25)$$

为了引用周期序列的有关概念, 假定一个周期序列 $x_p(n)$, 它是以 N 为周期将有限长序列 $x(n)$ 延拓而成, 因此 $x(n)$ 与 $x_p(n)$ 之间的关系可表示为

$$x_p(n) = \sum_r x(n+rN) \quad (r \text{ 取整数}) \quad (9-26)$$

或

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (n \text{ 为其他值}) \end{cases} \quad (9-27)$$

图 9-2 表明了 $x(n)$ 与 $x_p(n)$ 的对应关系。

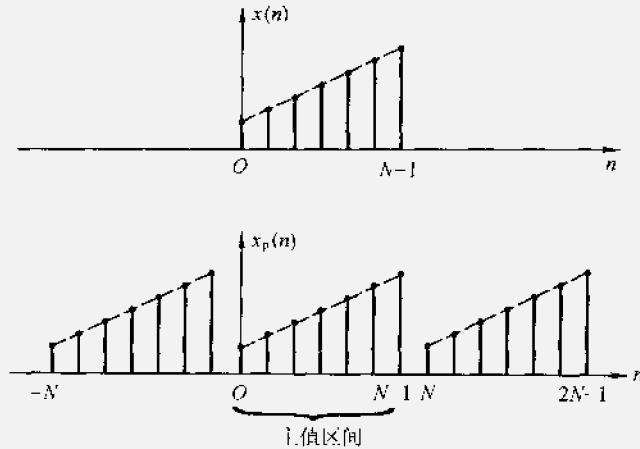


图 9-2 有限长序列的周期延拓

对于周期序列 $x_p(n)$, 定义它的第一个周期 $n=0$ 到 $N-1$ 的范围为“主值区间”。于是, $x(n)$ 与 $x_p(n)$ 的关系可以解释为: $x_p(n)$ 是 $x(n)$ 的周期延拓, $x(n)$ 是 $x_p(n)$ 的主值区间序列(简称主值序列)。

为书写简便, 将式(9-26)与式(9-27)改用以下符号表示:

$$x_p(n) = x((n))_N \quad (9-28)$$

$$x(n) = x_p(n) R_N(n) \quad (9-29)$$

这里, 式(9-29)中的 $R_N(n)$ 是矩形脉冲序列 $R_N(n) = u(n) - u(n-N)$, 将它与 $x_p(n)$ 相乘表示取 $x_p(n)$ 之主值序列, 得到 $x(n)$ 。而式(9-28)中的符号 $((n))_N$ 表示“ n 对 N 取模值”, 或称“余数运算表达式”。若

$$n = n_1 + rN \quad (0 \leq n_1 \leq N-1, r \text{ 为整数})$$

则:

$$((n))_N = (n_1)$$

$$x((n))_N = x(n_1)$$

它表明, 此运算符号要求将 n 被 N 除, 整数商为 r , 余数是 n_1 , 此 (n_1) 就是 $((n))_N$ 的解。显然, 对于周期序列有

$$x_p(rN + n_1) = x_p(n_1)$$

这里, $x_p(n_1)$ 是主值区间的样值, 因此:

$$x_p(n_1) = x(n_1)$$

$$x_p(n) = x((n))_N$$

例如,若 $x_p(n)$ 是周期 $N=5$ 的序列,对于 $n=19$,则有

$$x_p(19)=x_p(4)=x(4)$$

这是由于

$$19=3\times 5+4$$

故

$$((19))_5=(4)$$

由于 $x_p(n)$ 的变换式 $X_p(k)$ 也呈周期性,因此,也可为它确定主值区间($0\leq k\leq N-1$),其主值序列 $X(k)$ 相当于某一有限长序列。类似地,可以写出:

$$X(k)=X_p(k)R_N(k) \quad (9-30)$$

$$X_p(k)=X((k))_N \quad (9-31)$$

考察式(9-23)与式(9-24),容易看出,这两个公式的求和都只限于主值区间,因而这种变换方法可以引申到与主值序列相应的有限长序列。

现在给出有限长序列离散傅里叶变换的定义。设有限长序列 $x(n)$ 长度为 N (在 $0\leq n\leq N-1$ 范围内),它的离散傅里叶变换 $X(k)$ 仍然是一个长度为 N (在 $0\leq k\leq N-1$ 范围内)的频域有限长序列,正、逆变换的关系式为:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(k)=\text{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{-nk} \\ (0\leq k\leq N-1) \end{array} \right. \quad (9-32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(n)=\text{IDFT}[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-nk} \\ (0\leq n\leq N-1) \end{array} \right. \quad (9-33)$$

式中符号 DFT[·]表示取离散傅里叶正变换, IDFT[·]表示取离散傅里叶逆变换。

比较 DFT 变换对与 DFS 变换对的表示式不难发现,只要把 $x(n)$, $X(k)$ 分别理解为 $x_p(n)$, $X_p(k)$ 的主值序列,那么,两种变换对的表示式就完全相同。实际上,DFS 是按傅里叶分析严格定义的,而我们规定的 DFT 是一种“借用”的形式。由前节研究已知,有限长序列 $x(n)$ 是非周期性的,故其傅里叶变换应当是连续、周期性的频率函数;现在,人为地把 $x(n)$ 周期延拓构成 $x_p(n)$,使 $x(n)$ 充当其主值序列,于是 $x_p(n)$ 的变换式 $X_p(k)$ 就成为离散、周期性的频率函数,借用 $X_p(k)$ 的主值序列 $X(k)$ 定义为“离散傅里叶变换(DFT)”。这样作的目的正是为了使傅里叶分析可以利用数字计算机,在 9.6 到 9.7 节将讨论这方面的实现与应用问题。

式(9-32)与式(9-33)也可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^{1 \times 1} & W^{2 \times 1} & \cdots & W^{(N-1) \times 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W^0 & W^{1 \times (N-1)} & W^{2 \times (N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (9-34)$$

和

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^{-1 \times 1} & W^{-1 \times 2} & \cdots & W^{-1 \times (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W^0 & W^{-(N-1) \times 1} & W^{-(N-1) \times 2} & \cdots & W^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} \quad (9-35)$$

简写作：

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{W}^{nk} \mathbf{x}(n) \quad (9-36)$$

$$\mathbf{x}(n) = \frac{1}{N} \mathbf{W}^{-nk} \mathbf{X}(k) \quad (9-37)$$

此处， $\mathbf{X}(k)$ 与 $\mathbf{x}(n)$ 分别为 N 列的列矩阵，元素写作 $X(0) \cdots X(N-1)$ 以及 $x(0) \cdots x(N-1)$ 。而 \mathbf{W}^{nk} 与 \mathbf{W}^{-nk} (注意 $\mathbf{W} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$)分别为 $N \times N$ 方阵，其中各元素分别以 W^{nk} 或 W^{-nk} 表示，这两个方阵都是对称矩阵，即：

$$\mathbf{W}^{nk} = [\mathbf{W}^{nk}]^T \quad (9-38)$$

$$\mathbf{W}^{-nk} = [\mathbf{W}^{-nk}]^T \quad (9-39)$$

例 9-1 求矩形脉冲序列 $x(n) = R_N(n)$ 的 DFT。

解

由定义写出

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n) \mathbf{W}^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{W}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\frac{2\pi k}{N}})^n \\ &= \begin{cases} \frac{1 - (e^{-j\frac{2\pi k}{N}})^N}{1 - (e^{-j\frac{2\pi k}{N}})} & (\text{当 } e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \neq 1) \\ N & (\text{当 } e^{-j\frac{2\pi k}{N}} = 1) \end{cases} \end{aligned}$$

当 $k=0$ 时，对应 $e^{-j\frac{2\pi k}{N}}=1$ ，因此 $X(0)=N$ 。当 $k=1, 2, 3, \dots, N-1$ 时，则有 $e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \neq 1$ ，然而， $(e^{-j\frac{2\pi k}{N}})^N = e^{-j2\pi k} = 1$ ，故对应非零之 k 值 $X(k)$ 全部等于零，即

$$X(1) = X(2) = \cdots = X(N-1) = 0$$

此结果表明, 矩形脉冲序列的 DFT 仅在 $k=0$ 样点取得 N 值, 在其余 $(N-1)$ 个样点都是零。可以写作

$$X(k) = N\delta(k)$$

不难想到, 将 $R_N(n)$ 周期延拓(周期等于 N)成为无始无终幅度恒为单位值的序列, 取离散傅里叶级数即 $N\delta(k)$ 。这种现象犹如在连续时间系统分析中的直流信号其傅氏变换是冲激函数。

例 9-2 利用矩阵表示式求 $x(n)=R_4(n)$ 的 DFT。再由所得 $X(k)$ 经 IDFT 反求 $x(n)$, 验证结果之正确性。

解

由 $N=4$ 得到 $W=e^{-j\frac{2\pi}{4}}=-j$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

显然, 此结果与例 9-1 的一般结论相符合, 再求逆变换:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3} \\ W^0 & W^{-2} & W^{-4} & W^{-6} \\ W^0 & W^{-3} & W^{-6} & W^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

以图形表示本例之结果见图 9-3。

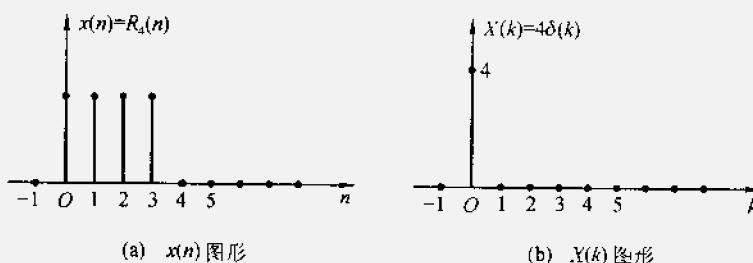


图 9-3 例 9-2 的图形表示

9.4 离散傅里叶变换的性质

(一) 线性

若

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$$

则

$$\text{DFT}[ax(n) + by(n)] = aX(k) + bY(k)$$

式中 a, b 为任意常数, 证明从略。

(二) 时移特性

为便于研究有限长序列的位移特性, 建立“圆周移位”的概念。

若有限长序列 $x(n)$ 位于 $0 \leq n \leq N-1$ 区间, 经时移 m 位, 序列 $x(n-m)$ 仍为有限长, 但其位置移至 $m \leq n \leq N+m-1$, 如图 9-4 所示。若将这两个序列分别取 DFT, 那么, 它们的级数取和范围出现差异, 前者从 0 到 $(N-1)$, 后者应改为从 m 到 $N+m-1$, 当时移位数不同时, DFT 取和范围要随之改变。这种现象给位移序列 DFT 之研究带来不便。为解决此矛盾, 把有限长序列的位移赋予一种新的解释: 先将 $x(n)$ 周期延拓构成 $x_p(n)$, 然后移 m 位得到 $x_p(n-m)$, 见图 9-5(a), 最后, 取 $x_p(n-m)$

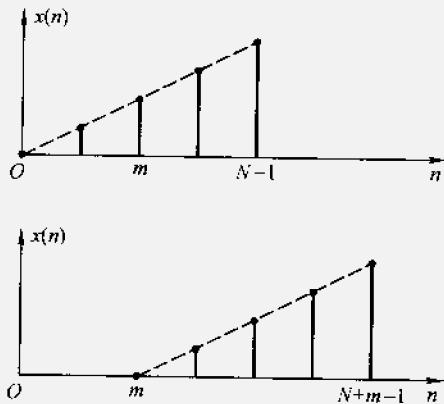


图 9-4 有限长序列的移位
之主值, 这样就得到了 $x(n)$ 的所谓圆周移位序列 $x_p(n-m)R_N(n)$ 。有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位序列一般写作

$$x((n-m))_N R_N(n)$$

图 9-5(b)示出, $N=5$ 的有限长序列 $x(n)$, 经圆周移位得到 $x((n-2))_5 R_5(n)$ 的情形。当序列 $x(n)$ 向右移 m 位时, 超出 $N-1$ 以外的 m 个样值又从左边依次填补了空位, 因此, 可以想象, 序列 $x(n)$ 排列在一个 N 等分的圆周上, N 个样点首尾相接, 圆周移 m 个单位表示 $x(n)$ 在圆周上旋转 m 位。圆周移位也可称为循环移位, 或简称圆移位。当有限长序列进行任意位数的圆移位时, 它们的 DFT 取值范围仍保持从 0 到 $N-1$ 不改变。

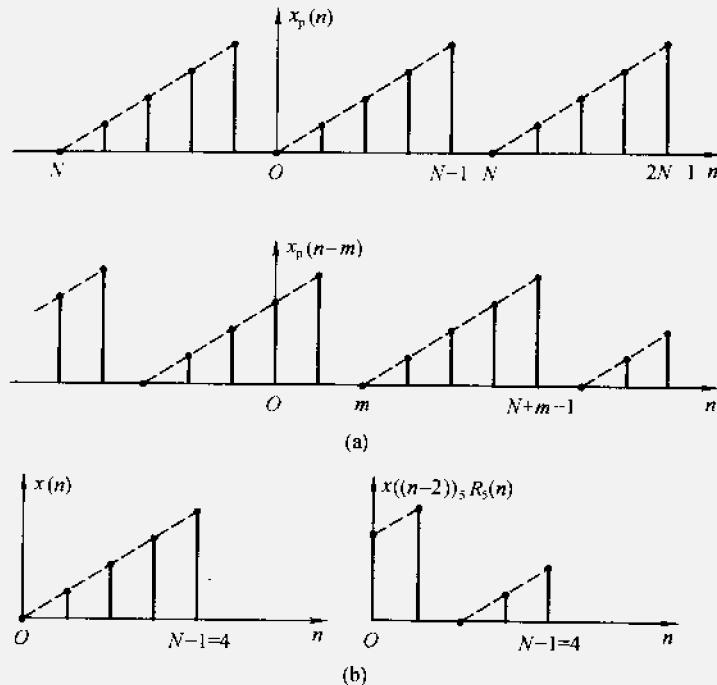


图 9-5 有限长序列的圆周移位

现在说明时移特性的定理内容：

若：

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x(n)] &= X(k) \\ y(n) &= x((n-m))_N R_N(n) \quad (\text{圆移 } m \text{ 位}) \end{aligned}$$

则

$$\text{DFT}[y(n)] = W^{mk} X(k) \quad (9-40)$$

这表明，时移 \$-m\$ 位，其 DFT 将出现相移因子 \$W^{mk}\$。证明如下：

$$\begin{aligned} \text{DFT}[y(n)] &= \text{DFT}[x((n-m))_N R_N(n)] \\ &= \text{DFT}[x_p(n-m) R_N(n)] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n-m) W^{nk} \end{aligned}$$

设 \$i = n - m\$，经换元得到

$$\begin{aligned} \text{DFT}[y(n)] &= \sum_{i=-m}^{N-m-1} x_p(i) W^{(i+m)k} \\ &= \left[\sum_{i=-m}^{N-m-1} x_p(i) W^{ik} \right] W^{mk} \end{aligned}$$

由于 $x_p(i)$ 和 W^{ik} 都是以 N 为周期的周期性函数, 因而, 式中方括号内求和范围可改从 $i=0$ 到 $i=N-1$, 显然, 这部分可简化为

$$\begin{aligned} \sum_{i=-m}^{N-m-1} x_p(i) W^{ik} &= \sum_{i=0}^{N-1} x_p(i) W^{ik} \\ &= \text{DFT}[x(n)] \\ &= X(k) \end{aligned}$$

于是可以写出

$$\text{DFT}[y(n)] = W^{-mk} X(k)$$

(三) 频移特性

若:

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x(n)] &= X(k) \\ Y(k) &= X((k-l))_N R_N(k) \end{aligned}$$

则

$$\text{IDFT}[Y(k)] = x(n) W^{-ln} \quad (9-41)$$

此定理表明, 若时间函数乘以指数项 W^{-ln} , 则离散傅里叶变换就向右圆移 m 单位。这可以看作调制信号的频谱搬移, 也称“调制定理”。本定理证明留给读者作习题(见题 9-13 与 9-14)。

(四) 时域圆周卷积(圆卷积)

若:

$$Y(k) = X(k) H(k)$$

则

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IDFT}[Y(k)] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h((n-m))_N R_N(n) \\ &\quad \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x((n-m))_N R_N(n) \end{aligned} \quad (9-42)$$

其中 $Y(k)$, $X(k)$, $H(k)$ 之 IDFT 分别等于 $y(n)$, $x(n)$, $h(n)$

证明

$$\begin{aligned} \text{IDFT}[Y(k)] &= \text{IDFT}[X(k)H(k)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) H(k) W^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W^{mk} \right] H(k) W^{-nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W^{mk} W^{-nk} \right] \end{aligned}$$

上式最后一行方括号部分相当于求 $H(k) W^{mk}$ 的 IDFT, 引用时移定理, 这部分可写作 $h((n-m))_N R_N(n)$, 于是得到

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h((n-m))_N R_N(n)$$

同理也可证明

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x((n-m))_N R_N(n)$$

此卷积过程只在 $0 \leq m \leq N-1$ 区间内进行, 若 $x(m)$ 保持不移动, 则 $h((n-m))_N$ 相当于 $h(-m)$ 的圆移位, 因而把这种卷积称作“圆周卷积”或“圆卷积”。显然, 此前介绍的卷积是作平移, 而非圆移, 称那种情况为“线卷积”, 以示与此处之圆卷积区分。圆卷积的符号以 \circledast 表示

$$\begin{aligned} x(n) \circledast h(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h((n-m))_N R_N(n) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x((n-m))_N R_N(n) \end{aligned} \quad (9-43)$$

圆卷积的图解分析可按照反褶、圆移、相乘、求和的步骤进行。下面举例说明。

例 9-3 图 9-6 示出两个有限长序列

$$x(n) = (n+1)R_4(n)$$

$$h(n) = (4-n)R_4(n)$$

试用作图方法求圆卷积 $y(n) = x(n) \circledast h(n)$ 。

解 将 $x(n), h(n)$ 变量置换, 分别写作 $x(m), h(m)$ 。

由 $h(m)$ 作出 $h((0-m))_4 R_4(m), h((1-m))_4 R_4(m), h((2-m))_4 R_4(m)$ 以及 $h((3-m))_4 R_4(m)$, 绘于图 9-6 之中。

依次将 $h((n-m))_4$ 与 $x(m)$ 相乘、求和得到:

$$y(0) = (1 \times 4) + (2 \times 1) + (3 \times 2) + (4 \times 3) = 24$$

$$y(1) = (1 \times 3) + (2 \times 4) + (3 \times 1) + (4 \times 2) = 22$$

$$y(2) = (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + (4 \times 1) = 24$$

$$y(3) = (1 \times 1) + (2 \times 2) + (3 \times 3) + (4 \times 4) = 30$$

最后写出

$$y(n) = 24\delta(n) + 22\delta(n-1) + 24\delta(n-2) + 30\delta(n-3)$$

建议利用本例题之结果, 分别求 $x(n), h(n)$ 和 $y(n)$ 的 DFT 得到 $X(k), H(k), Y(k)$, 验证圆卷积定理(习题 9-15)。

下面讨论有限长序列线卷积和圆卷积的区别与联系。

设有限长序列 $x(n), h(n)$ 的长度分别为 N 和 M , 它们的线卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$ 也应当是有限长序列。由定义知

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) \quad (9-44)$$

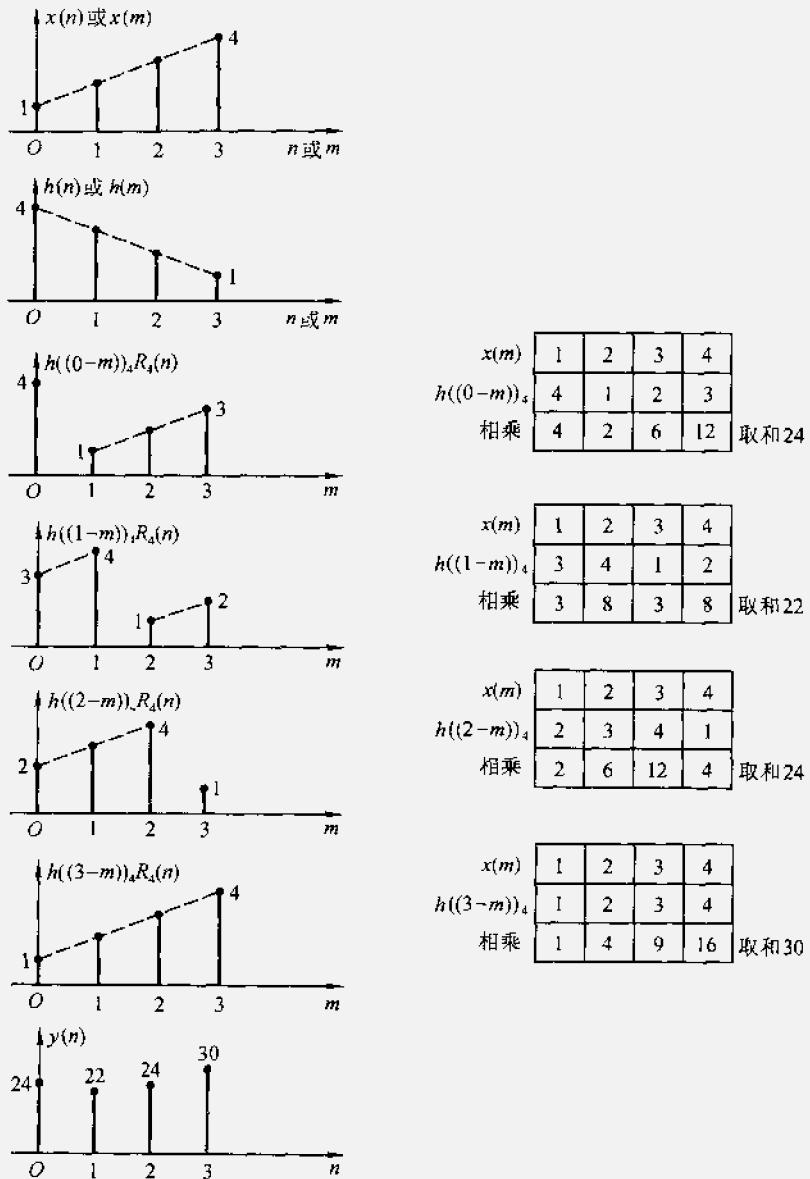


图 9-6 有限长序列圆卷积之图解(例 9-3)

已知 $x(m)$ 的非零值区间是

$$0 \leq m \leq N-1$$

从 $h(n-m)$ 看, 非零值区间位于

$$0 \leq n - m \leq M - 1$$

联解这两个不等式, 得到

$$0 \leq n \leq N + M - 2 \quad (9-45)$$

在式(9-45)区间之外不是 $x(m)$ 为零就是 $y(n-m)$ 等于零, 都将造成 $y(n)=0$ 。因此, $y(n)$ 是一个长度等于 $N + M - 1$ 的有限长序列。例如图 9-7(a) 中, $x(n)$ 是 $N=4$ 的矩形序列, $h(n)$ 是 $M=6$ 的矩形序列, 二者的线卷积 $y(n)$ 长度是 $N + M - 1 = 9$ 。

再看圆卷积。两个有限长序列进行圆卷积时, 必须规定它们的长度相等。经圆卷积后所得序列长度仍与原序列长相同。如果两序列长度不等, 可将较短的一个补一些零点, 构成两个等长序列再作圆卷积。图 9-7(b)示出这种情况, 此图中, $x(n)$, $y(n)$ 仍与图 9-7(a)相同。然而, 很明显, 圆卷积之结果与线卷积完全不同。出现这种差异的实质是: 线卷积过程中, 经反褶再向右平移的序列, 在左端将依次留出空位, 而圆卷积过程中, 经反褶作圆移的序列, 向右移去的样值又从左端循环出现, 这样就使两种情况下相乘、叠加而得之数值截然不同。

如果把序列 $x(n)$, $h(n)$ 都适当地补一些零值, 以扩展其长度, 那么, 在作圆卷积时, 向右移去的零值, 从左端出现仍取零值, 这样, 就与线卷积的情况相同, 两种卷积的结果有可能一致。补零扩展以后的长度 L 不应小于前面求得之线卷积序列长度 $M + N - 1$, 也即满足

$$L \geq N + M - 1 \quad (9-46)$$

的条件下, 圆卷积与线卷积结果一致。图 9-7(c)示出长度 $N=4$ 的序列 $x(n)$ 与长度 $M=6$ 的序列 $h(n)$ 都经补零扩展至 $L=4+6-1=9$, 再作圆卷积与线卷积之结果[图 9-7(a)]完全相同。

在图 9-7(d)中, $x(n)$, $h(n)$ 虽扩展至 $L=8$, 但因为 $L < N + M - 1$, 故圆卷积之结果与线卷积还是不一样。比较图 9-7(d)与图 9-7(a)不难发现, 将线卷积 $n=8$ 处之样值 1 移到 $n=0$ 与该处样值 1 相加, 就与图 9-7(d) 完全相同, 这可以看作一种混叠现象, 由于 L 不够长, 使线卷积之首尾交叠混淆成为图 9-7(d)或图 9-7(b)那样的圆卷积。当 $L \geq N + M - 1$ 时, 就可避免混叠, 圆卷积与线卷积一致。

一般情况下, 信号 $x(n)$ 通过单位样值响应为 $h(n)$ 的系统, 其输出是线卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。然而, 在卷积的计算方面, 圆卷积可借助快速傅里叶变换(FFT)技术(详见 9.6 与 9.7 节), 以较高的速度完成运算。因此, 对于有限长序列求线卷积的问题, 可以按上面的分析[满足式(9-46)], 把线卷积转化为圆卷积, 以便利用 FFT 技术, 提高计算速度。

(五) 频域圆卷积

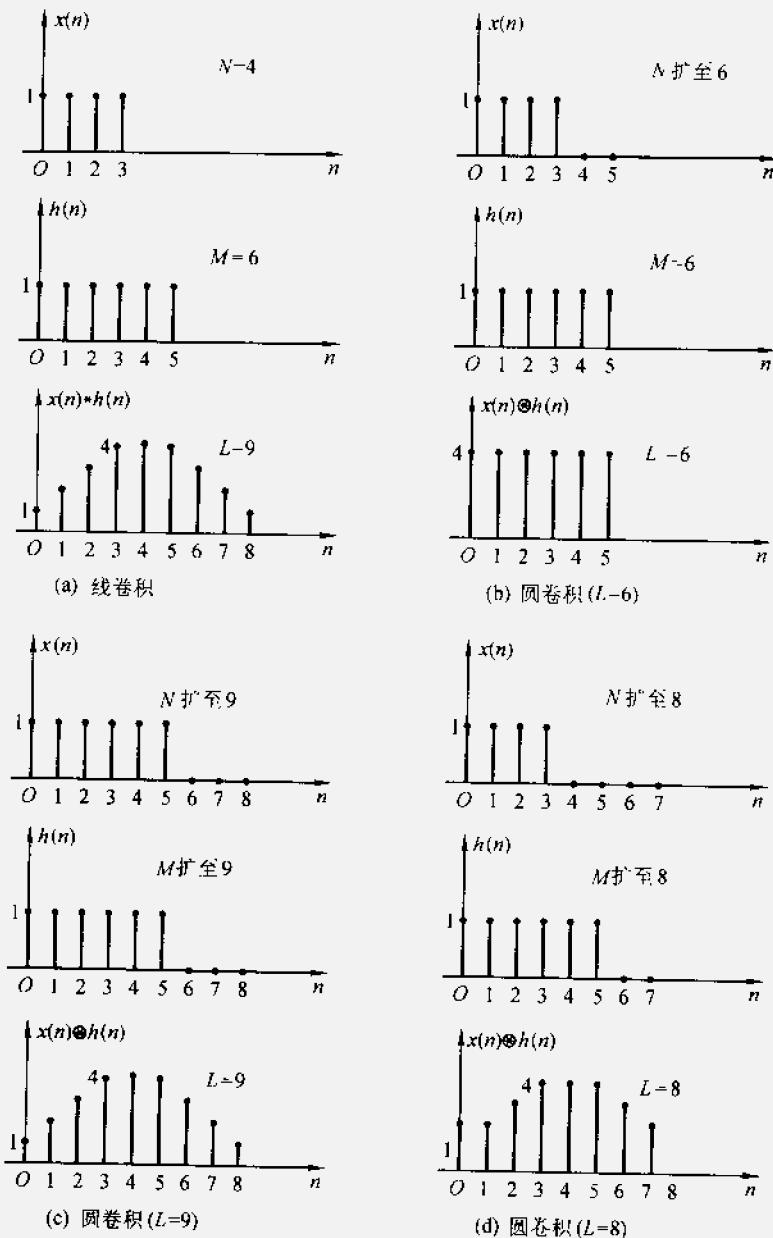


图 9-7 线卷积与圆卷积比较

若:

$$y(n) = x(n)h(n)$$

则

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) H((k-l))_N R_N(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} H(l) X((k-l))_N R_N(k) \end{aligned} \quad (9-47)$$

证明方法与时域圆卷积类似。

(六) 奇偶虚实性

设 $x(n)$ 为实序列, $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$, 令

$$X(k) = X_r(k) + jX_i(k) \quad (9-48)$$

这里, $X_r(k)$ 是 $X(k)$ 的实部, $X_i(k)$ 是它的虚部, 由 DFT 的定义写出

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right] - j \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right] \end{aligned} \quad (9-49)$$

式(9-48)与式(9-49)的实部、虚部对应相等, 于是有:

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (9-50)$$

$$X_i(k) = - \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \quad (9-51)$$

显然, 由于 $X_r(k)$ 和 $X_i(k)$ 分别由余弦和正弦函数构成, 前者应为 k 的偶函数, 后者为奇函数。必须指出, 这里所谓的偶函数和奇函数都应理解为将 $X(k)$ 周期延拓而具有周期重复性。如果认为 DFT 的定义仅限于 0 到 $N-1$ 范围, 那么它的奇、偶特性都应以 $\frac{N}{2}$ 为对称中心。在以下讨论中对奇、偶含义的理解都遵从此规律。

以上分析表明: 实数序列的离散傅里叶变换为复数, 其实部是偶函数, 虚部为奇函数。

如果 $x(n)$ 为纯虚序列, 它的 DFT 写作 $X(k)$, $X(k)$ 可分解为实部、虚部之和, 仍以式(9-48)表示。容易证明, $X_r(k)$ 是 k 的奇函数, 而 $X_i(k)$ 是 k 的偶函数(习题 9-19)。也即, 纯虚数序列的离散傅里叶变换为复数, 其实部是奇函数, 虚部为偶函数。

进一步的分析指出, 若实序列 $x(n)$ 为 n 的偶函数, 则经圆移位再引用式(9-51)可以证得, $X_i(k)=0$, 仅留下 $X_r(k)$, 且为 k 的偶函数。结论是: 实偶函数的 DFT 也为实偶函数。

同理可以证明: 实奇函数的 DFT 为虚奇函数。虚偶函数的 DFT 是虚偶函数。而虚奇函数的 DFT 为实奇函数。这些特性全部列于表 9-2 中(参看习题 9-20)。

表 9-2 DFT 的奇偶虚实特性

$x(n)$	$X(k)$	$x(n)$	$X(k)$
实函数	实部为偶、虚部为奇	虚函数	实部为奇、虚部为偶
实偶函数	实偶函数	虚偶函数	虚偶函数
实奇函数	虚奇函数	虚奇函数	实奇函数

表 9-2 中的第一条性质可由如下的表示式说明：

$$X_r(k) = X_r((-k))_N R_N(k) \quad (9-52)$$

$$X_i(k) = -X_i((-k))_N R_N(k) \quad (9-53)$$

也即，对于实数序列，其变换式的实部为 k 的偶函数，虚部为 k 的奇函数，由此可知， $X(k)$ 与 $X(-k)$ 呈共轭关系

$$X(k) = X^*((-k))_N R_N(k) \quad (9-54)$$

由于经重复延拓的 $X(k)$ 具有周期性，故 $X^*((-k))_N R_N(k) = X^*(N-k)$ ，因此，式(9-54)改写作

$$X(k) = X^*(N-k) \quad (9-55)$$

把共轭关系分别表示为模相等、辐角反号的规律：

$$|X(k)| = |X(N-k)| \quad (9-56)$$

$$\arg[X(k)] = -\arg[X(N-k)] \quad (9-57)$$

由式(9-55)至式(9-57)可知，实数序列离散傅里叶变换 $X(k)$ 在 0 至 N 范围内，对于 $N/2$ 点呈对称分布， $|X(k)|$ 是偶对称， $\arg[X(k)]$ 是奇对称[注意 $X(N) = X(0)$]。图 9-8 举例示出 $N=8$ 和 $N=7$ 两种情况 $|X(k)|$ 的分布图。如果将 $X(k)$ 分布在一个 N 等分的圆周上，那么，它就以 $k=0$ 为中心，左、右两半共轭对称。

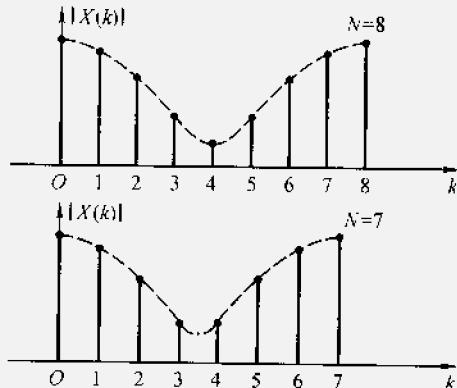
同理可证，对于纯虚序列有如下关系

图 9-8 实序列取 DFT 时，
 $|X(k)|$ 的对称分布示例

$$X(k) = -X^*(N-k) \quad (9-58)$$

* (七) 相关特性

与有限长序列的卷积运算类似，它的相关运算也可分为圆相关（循环相关）



与线相关两种形式。通常，可借助圆相关求线相关。

离散傅里叶变换的圆相关定理指出，当序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 进行互相关运算时，所得 $r_{12}(n)$ 之傅里叶变换 $\mathcal{R}_{12}(k)$ 等于 $X_1(k)$ 与 $X_2^*(k)$ 之乘积，这里 $X_1(k)$ 与 $X_2(k)$ 分别为 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 之 DFT，而 $X_2^*(k)$ 是 $X_2(k)$ 之共轭。

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((m-n))_N R_N(n) \\ \mathcal{R}_{12}(k) = X_1(k) X_2^*(k) \end{array} \right. \quad (9-59)$$

同理还有以下关系

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{21}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((m-n))_N R_N(n) \\ \mathcal{R}_{21}(k) = X_2(k) X_1^*(k) \end{array} \right. \quad (9-60)$$

离散相关特性的图形解释、相关定理的证明都与离散卷积有某些类似之处，读者可练习分析，并与卷积对比。此外，离散相关与连续时间信号的相关运算以及傅里叶变换的相关定理形式上也一一对应。

以上定理按互相关形式给出，如果 $x_1(n) = x_2(n)$ ，则构成自相关运算。利用自相关特性可进一步推出帕塞瓦尔定理。

(八) 帕塞瓦尔定理

若 $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$ ，则

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (9-61)$$

如果 $x(n)$ 为实序列，则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (9-62)$$

它的证明和物理解释都可仿照连续时间信号的有关分析给出。式(9-62)左端应与有限时间内信号的能量成正比，而右端从频域得到同样的结果，即在一个频域带限之内，功率谱之和与信号的能量成比例。

9.5 离散傅里叶变换与 z 变换的关系

(一) 有限长序列 z 变换的抽样

若有限长序列 $x(n)$ 的长度为 N ，其 z 变换表示式应写作

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

一般情况下，若有限长序列满足绝对可和条件，则其收敛域包括单位圆在内。在

z 平面，围绕如图 9-9 所示单位圆上的 N 个等间距点计算 z 变换，令 $z = e^{j(\frac{2\pi}{N})k}$

$$X(z) \Big|_{z=e^{j(\frac{2\pi}{N})k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \quad (9-63)$$

利用符号 $W = e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$ ，上式改写为

$$X(z) \Big|_{z=W^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{-nk} = \text{DFT}[x(n)] \quad (9-64)$$

显然，这里的结果表明，对于序列 $x(n)$ 的

z 变换，抽选 $z = e^{j(\frac{2\pi}{N})k}$ 这些特定点的样值，即可得到它的离散傅里叶变换。具体讲，在 z 平面上的单位圆上，取幅角为 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 的等间距第 k 个点，计算其 z 变换，就可得出 $\text{DFT}[x(n)]$ 的第 k 个样值 $X(k)$ 。因此，有限长序列的 DFT 可解释为它的 z 变换在单位圆上的均匀抽样。

这里必须提醒读者注意，习惯上用 $X(k)$ 和 $X(z)$ 分别表示序列 $x(n)$ 取 DFT 和 ZT。虽然，两种变换式都用符号 “ X ”，但两个函数的形式并不相同，不允许把变量 k 与 z 相互置换，即

$$X(k) \neq X(z) \Big|_{z=k}$$

而正确的表达式是令 $X(z)$ 式中的 $z = W^{-k} = e^{-j(\frac{2\pi}{N})k}$ ，即得 $X(k)$

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=W^{-k}} \quad (9-65)$$

(二) 以 $\text{DFT}[x(n)]$ 表示 $\mathcal{Z}[x(n)]$

由以上分析可知，对于长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ ，利用其 $\text{DFT}[x(n)]$ 的 N 个样值——也即从单位圆上取 $X(z)$ 的 N 个样值，就可以正确恢复序列 $x(n)$ 。显然，也可以从这 N 个样值正确恢复其 z 变换函数 $\mathcal{Z}[x(n)]$ 。下面导出由 $X(k)$ 确定 $X(z)$ 的表达式。

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad (9-66)$$

式中 $x(n)$ 可利用 IDFT 的形式来表示：

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk} \\ X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk} \right] z^{-n} \end{aligned} \quad (9-67)$$

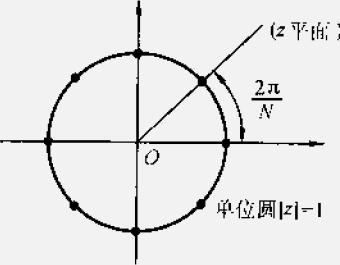


图 9-9 z 平面上单位圆上

N 个等间距点

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left(\sum_{n=0}^{N-1} W^{-nk} z^{-n} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left(\frac{1 - W^{-Nk} z^{-N}}{1 - W^{-k} z^{-1}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left(\frac{1}{N} \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - W^{-k} z^{-1}} \right)
\end{aligned} \tag{9-68}$$

注意，此处用到几何级数求和公式以及 W 的性质 $W^{-Nk} = 1$ 。

这就是由单位圆上的抽样点 $X(k)$ 确定 $X(z)$ 的表达式，也称“内插公式”，把式中方括号部分以符号 $\phi_k(z)$ 表示，称为“内插函数”。

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi_k(z) \tag{9-69}$$

$$\phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W^{-k} z^{-1}} \tag{9-70}$$

$\phi_k(z)$ 在单位圆的 N 等分点上（也即 N 个抽样点对应的位置）有 $N-1$ 处出现零点，这是因为，式(9-70)分子中 $1 - z^{-N} = 1 - e^{-j(\frac{2\pi}{N})Nk}$ 项等于零而形成，但在 $W^{-k} = e^{j(\frac{2\pi}{N})k}$ 处，分子分母都为零，此时利用洛必达法则可求得 $\phi_k(z) = 1$ ，于是再一次证实了前面已确定的关系式

$$X(z) \Big|_{z=e^{j(\frac{2\pi}{N})k}} = X(k).$$

(三) 以DFT[x{n}]表示的频响特性

将上面所得 $X(z)$ 内插表示式中的 z 限于单位圆周，令 $z = e^{j\omega}$ ，即得以 $X(k)$ 表示的频响特性：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi_k(e^{j\omega}) \tag{9-71}$$

$$\begin{aligned}
\phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}} \\
&= \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left[\frac{\omega - k \frac{2\pi}{N}}{2}\right]} e^{-j\left(\frac{N\omega}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{N}\right)}
\end{aligned} \tag{9-72}$$

为使上式简化，再引入符号

$$\phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \tag{9-73}$$

利用式(9-73)可将式(9-72)改写为^①

$$\phi_k(e^{j\omega}) = \psi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (9-74)$$

于是得出

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \psi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (9-75)$$

与式(9-69)的形式类似, 式(9-75)就是由单位圆上的抽样点 $X(k)$ 确定 $X(e^{j\omega})$ 的内插表示式。此处的内插函数 $\psi(\omega)$ 的幅度与相位特性示于图 9-10 (图中 $N=5$)。在 $\omega=0$ 点, $\psi(\omega)=1$, 而在 $\omega=k \frac{2\pi}{N}$ 处($k=1, 2, \dots, N-1$), $\psi(\omega)=0$ 。式(9-75)表明, $X(e^{j\omega})$ 是由 N 个 $\psi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$ 函数组合而成, 其中每个函数的加权值(系数)为 $X(k)$ 。显然, 每个抽样点相应的 $X(e^{j\omega})$ 就等于该点 $X(k)$ 值, 因为其余各抽样点的内插函数在这里都等于零。样点之间的 $X(e^{j\omega})$ 值则由各内插函数延伸叠加而构成。现在, 由频率抽样信号从频域恢复了原信号。

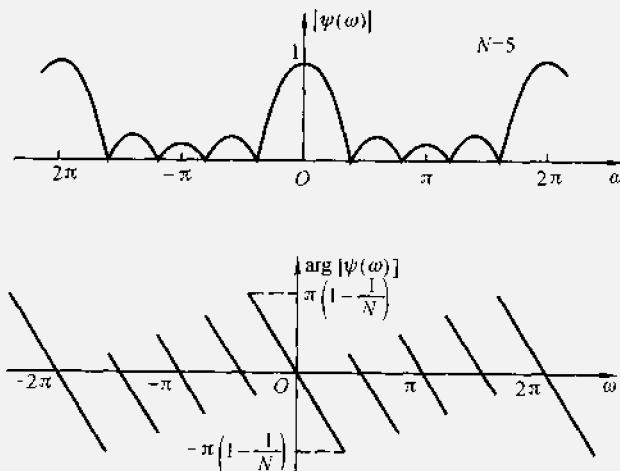


图 9-10 内插函数 $\psi(\omega)$ 之幅度特性与相位特性

9.6 快速傅里叶变换(FFT)

为了说明 DFT 快速算法构成之原理, 下面研究对 $x(n)$ 取 DFT 变换时,

^① 这里用到 $\sin(\alpha - k\pi) = \mp \sin \alpha$, $e^{jk\pi} = \mp 1$ (当 k 为奇数取负号, k 为偶数取正号)。

需要多大的计算工作量。

由 DFT 定义式(9-32)或由矩阵形式定义式(9-36)容易看出, 将 $x(n)$ 与 W^{nk} 两两相乘再取和即可得到 $X(k)$, 每计算一个 $X(k)$ 值需要进行 N 次复数相乘, 和 $N-1$ 次复数相加。对于 N 个 $X(k)$ 点, 应重复 N 次上述运算。因此, 要完成全部 DFT 运算共需 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$ 次复数加法。例如 $N=4$ 的情况, 为便于讨论, 写出它的矩阵表示式

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \quad (9-76)$$

显然, 为求得每个 $X(k)$ 值, 需要 $N=4$ 次复数乘法和 $N-1=3$ 次复数加法, 要得到 $N=4$ 个 $X(k)$ 值则需 $N^2=16$ 次复数乘法 $N(N-1)=12$ 次复数加法。

随着 N 值加大, 运算工作量将迅速增长, 例如 $N=10$ 需要 100 次复数相乘, 而当 $N=1\,024$ (即 $N=2^{10}$) 时, 就需要 1 048 576 即一百多万次复数乘法运算。按照这种规律, 如果在 N 较大的情况下, 要求对于信号进行实时处理, 所需的运算速度就难以实现。

为了改进算法, 减少运算工作量, 注意到在 $[W]$ 矩阵中的某些系数是非常简单的。例如, 对于 $W^0=1$ 和 $W^{\frac{N}{2}}=-1$, 实际上无需作乘法, 在 N 较大的情况下, 这一因素可使运算工作量略有减少, 考虑到系数 W^{nk} 的周期性与对称性, 合理安排重复出现的相乘运算, 将使计算工作量显著减少。现说明如下

(1) W^{nk} 的周期性

容易证明

$$W^{nk} = W^{((nk))_N} \quad (9-77)$$

符号 $((nk))_N$ 表示取 nk 除以 N 所得之余数, 也即 nk 的模 N 运算。例如, 对于 $N=4$, 可以有 $W^6=W^2$, $W^9=W^1$ 等等。

此特性的另一种表达方式为:

$$W^{n(N+k)} = W^{-nk} \quad (9-78)$$

$$W^{k(N+n)} = W^{-nk} \quad (9-79)$$

(2) W^{nk} 的对称性

因为 $W^{\frac{N}{2}}=-1$, 于是得到

$$W^{(nk+\frac{N}{2})} = -W^{nk} \quad (9-80)$$

仍以 $N=4$ 为例, 有 $W^3 = -W^1$ 和 $W^2 = -W^0$ 。

把以上两个特性用于 $N=4$ 的 $[W]$ 矩阵, 得到如下的简化结果

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix} \quad (9-81) \end{aligned}$$

很明显, 经利用周期性与对称性简化之后, 矩阵 $[W]$ 中, 若干数量的元素雷同, 揭示出 DFT 运算中的一个重要现象: $[W]$ 与 $[x(n)]$ 相乘过程中, 存在着不必要的重复计算。避免这种重复, 正是简化运算的关键。

(3) 把 N 点 DFT 运算分解为两组 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT 运算, 然后取和。

下面就来证明这样分解是正确的, 而且可以减少运算工作量。

对序列 $x(n)$ 取 N 点 DFT, 假定 N 是 2 的整数次方

$$N=2^M \quad (9-82)$$

其中 M 是正整数。把 $x(n)$ 的 DFT 运算按 n 为偶数和 n 为奇数分解为两部分 (下面将要遇到对不同 N 值取 DFT 运算, 为避免符号混淆, 把 W 加注长度下标 N , 写作 W_N)。

$$\begin{aligned} X(k) = \text{DFT}[x(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{\text{偶数 } n} x(n) W_N^{nk} + \sum_{\text{奇数 } n} x(n) W_N^{nk} \quad (9-83) \end{aligned}$$

以符号 $2r$ 表示偶数 n , $2r+1$ 表示奇数 n , r 的范围是 $0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$, 有

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) (W_N^2)^{rk} \quad (9-84) \end{aligned}$$

式中的 W_N^2 可转换为 $W_{\frac{N}{2}}$, 这是因为

$$W_N^2 = e^{-2j\left(\frac{2\pi}{N}\right)} = e^{-j\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = W_{\frac{N}{2}} \quad (9-85)$$

于是式(9-84)写作

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{\frac{rk}{2}} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{\frac{(r+1)k}{2}} \\ &= G(k) + W_N^k H(k) \end{aligned} \quad (9-86)$$

式中：

$$G(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{\frac{rk}{2}} \quad (9-87)$$

$$H(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{\frac{(r+1)k}{2}} \quad (9-88)$$

一个 N 点的 DFT 已被分解为两个 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT，但是，必须注意到， $G(k)$ 和 $H(k)$ 只有 $\frac{N}{2}$ 个点， $r=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$ ，而 $X(k)$ 却需要 N 个点， $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ ，如果以 $G(k), H(k)$ 表达全部 $X(k)$ ，应利用 $G(k)$ 与 $H(k)$ 的两个重复周期。由周期性可知：

$$G\left(k + \frac{N}{2}\right) = G(k) \quad (9-89)$$

$$H\left(k + \frac{N}{2}\right) = H(k) \quad (9-90)$$

对于式(9-86)中的加权系数 W_N 有

$$W_N^{\left(\frac{N}{2}+k\right)} = W_N^{\frac{N}{2}} \cdot W_N^k = -W_N^k \quad (9-91)$$

将式(9-89)、(9-90)、(9-91)三式代入式(9-86)就可得到由 $G(k), H(k)$ 决定 $X(k)$ 的全部关系式：

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k) \quad (9-92)$$

$$\begin{aligned} X\left(\frac{N}{2}+k\right) &= G\left(\frac{N}{2}+k\right) - W_N^k H\left(\frac{N}{2}+k\right) \\ &= G(k) - W_N^k H(k) \end{aligned} \quad (9-93)$$

其中 $k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$ ，式(9-92)与式(9-93)将分别给出 $X(k)$ 的前 $\frac{N}{2}$ 点与后 $\frac{N}{2}$ 点的数值，总共有 N 个值。

为便于理解，再以 $N=4$ 为例说明，此时

$$\left. \begin{aligned} X(0) &= G(0) + W_4^0 H(0) \\ X(1) &= G(1) + W_4^1 H(1) \\ X(2) &= G(0) - W_4^0 H(0) \\ X(3) &= G(1) - W_4^1 H(1) \end{aligned} \right\} \quad (9-94)$$

可用“流程图”来表达式(9-94)的运算，如图 9-11 右半部分所示，自左向右进行运算，两条线的汇合点表示两数值相加，线旁标注加权系数(复数 W)，表示与相应的数值作乘法运算。在这种流程图中，基本运算单元呈蝴蝶形，例如图 9-12(a)。初看上去，一个蝴蝶形流程运算包括两次复数乘法和两次复数加法，然而这里有重复，可简化。 $H(0)$ 与 W_4^0 相乘以及与 $-W_4^0$ 相乘，可以改成只与 W_4^0 相乘，再分别加、减，这样就使运算量减少至只有一次复数乘法和两次复数加(减)法。按此原理也可把图 9-12(a)的蝶形运算示如图 9-12(b)的“蝶形结”，此图的含义是：入端的 $H(0)$ 先与 W_4^0 相乘，再与入端的 $G(0)$ 分别作加、减，得到输出 $X(0)$ 与 $X(2)$ 。

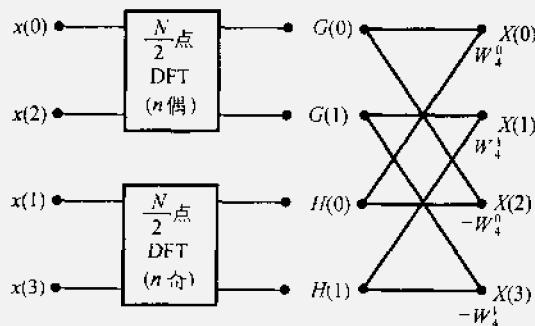


图 9-11 将 N 点 DFT 分解为两个 $\frac{N}{2}$ 点

DFT 的流程图 ($N = 4$)

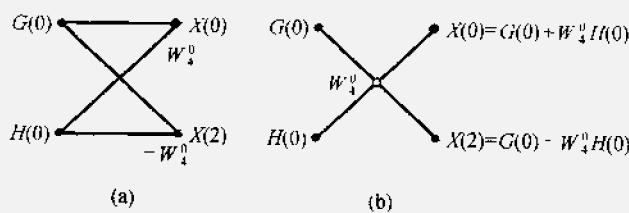


图 9-12 蝶形运算单元

现在，可以得出如下结论：由 $G(k)$ ， $H(k)$ 获得 $X(k)$ 的过程中，共包含 $\frac{N}{2}$ 个蝶形结运算，因此，共需 $\frac{N}{2}$ 次复数乘法和 N 次复数加减法(对于 $N = 4$ ，为 2 次乘、4 次加)。

再看图 9-11 的左半边，为了从 $x(n)$ 求出 $G(k)$ ， $H(k)$ ，按 n 的奇偶分别组合两个 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT 运算，利用式(9-87)和式(9-88)容易得到：

$$\left. \begin{array}{l} G(0) = x(0) + W_2^0 x(2) \\ G(1) = x(0) - W_2^0 x(2) \\ H(0) = x(1) + W_2^0 x(3) \\ H(1) = x(1) - W_2^0 x(3) \end{array} \right\} \quad (9-95)$$

按照同样原理，把这些运算也画成蝶形形，于是图 9-11 具体化为图 9-13（在此图中省略了加权系数 W_2 的下标，以 W 表示，下面继续用此简化符号）。

很明显，左半面的流程图，仍然由 $\frac{N}{2}$ 个蝶形结组成，因此，运算量还是 $\frac{N}{2}$ 次乘法， N 次加法。这样，为完成图

9-13 规定的全部运算，共需 $2 \times \frac{N}{2} = 4$ 次乘法和 $2 \times N = 8$ 次加法；而直接进行 $N=4$ 的 DFT 全部运算量为 $N^2=16$ 次乘法和 $N(N-1)=12$ 次加法。至此初步看到，经分组简化后构成的快速算法其运算工作量显著减少。

对于 $N=2^2=4$ 的情况，只进行了一次奇偶分解，把全部运算过程分

为两级（两组）蝶形流程图（即图 9-13 的左、右两半）。对于 $N=2^M$ 的任意情况，需要把这种奇偶分解逐级进行下去。当 $N=2^3=8$ 时，分组运算的方框图如图 9-14。按同样原理，把它画成蝶形流程图见图 9-15。这里，共分成三级蝶形运算，每组仍需乘法 $\frac{N}{2}$ 次，加减法 N 次。全部运算量是 $3 \times \frac{N}{2}=12$ 次乘， $3 \times N=24$ 次加减；而直接 DFT 的运算量是 $N^2=64$ 次乘， $N(N-1)=56$ 次加（在此图中，中间数据的符号改用 x_1, x_2 ，不再用 G, H ）。

当 $N=2^M$ 时，全部 DFT 运算可分解为 M 级蝶形流程图，其中每级都包含 $\frac{N}{2}$ 次乘、 N 次加减，快速算法的全部运算工作量为：

$$\text{复数乘法: } \frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2} \log_2 N \text{ 次}$$

$$\text{复数加法: } NM = N \log_2 N \text{ 次}$$

而原始的直接 DFT 方法需要：

$$\text{复数乘法: } N^2 \text{ 次}$$

$$\text{复数加法: } N(N-1) \text{ 次}$$

在表 9-3 和图 9-16 中给出了 FFT 算法与直接计算所需乘法工作量的比

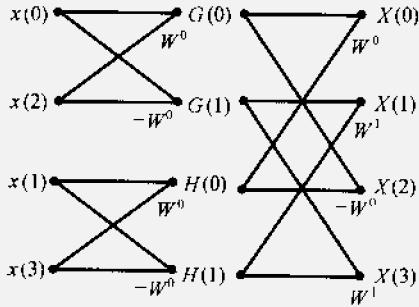
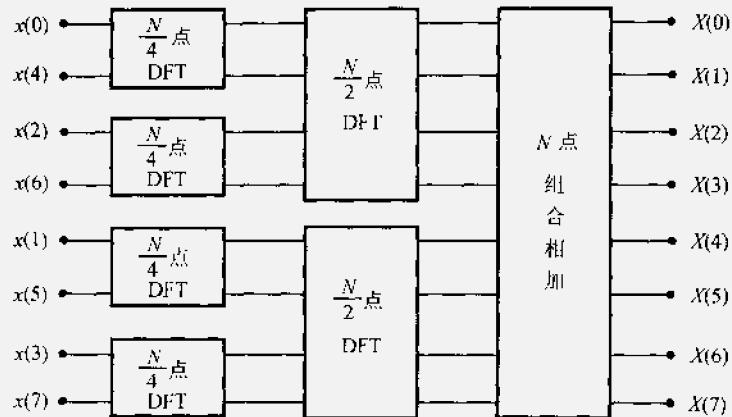
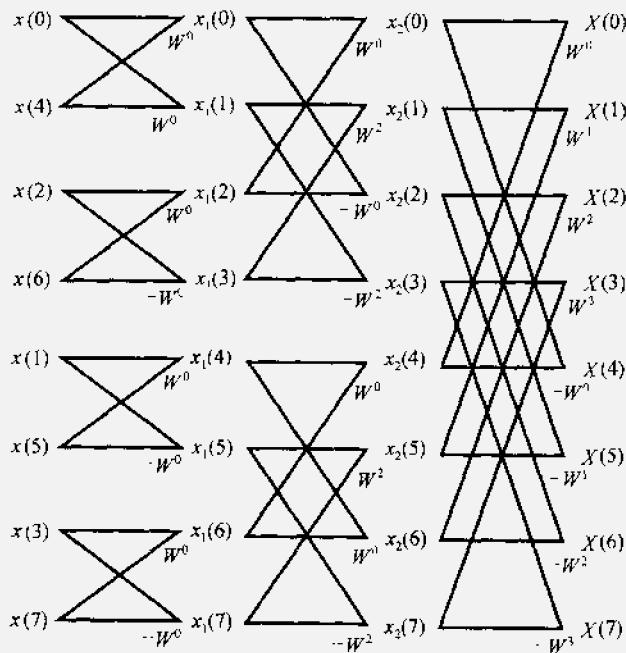


图 9-13 $N=4$ 的 FFT 流程图

图 9-14 把 $N=8$ 的 DFT 运算逐级分解为两个 $\frac{N}{2}$ 点、四个 $\frac{N}{4}$ 点的 DFT 运算图 9-15 $N=8$ 的 FFT 流程图

较。从这些具体数字看到，当 N 较高时，FFT 算法得到的改善相当可观：例如 $N=2^{11}=2\ 048$ 时，直接按 DFT 定义计算所需时间是用 FFT 算法的三百多倍。

表 9~3 直接 DFT 与 FFT 所需乘法次数的比较

M	N	直接 DFT(N^2)	$\text{FFT}\left(\frac{N}{2} \log_2 N\right)$	改善比值 $\left(\frac{2N}{\log_2 N}\right)$
1	2	4	1	4
2	4	16	4	4
3	8	64	12	5.3
4	16	256	32	8
5	32	1 024	80	12.8
6	64	4 096	192	21.3
7	128	16 384	448	36.6
8	256	65 536	1 024	64
9	512	262 144	2 304	113.8
10	1 024	1 048 576	5 120	204.8
11	2 048	4 194 304	11 264	372.4

最后讨论 FFT 算法流图中的某些具体考虑,主要是“码位顺序”与“即位运算”这两个问题。

在给出图 9~13 或图 9~15 时,输入序列 $x(n)$ 的排列不符合自然顺序,而是以 $x(0), x(2), x(1), x(3)$ [对于 $N = 4$] 以及 $x(0), x(4), x(2), x(6), x(1), x(5), x(3), x(7)$ [对于 $N=8$] 的次序进入计算机存储单元的。此现象是由于按 n 的奇、偶分组进行 DFT 运算而造成的,这种排列方式称为“码位倒读”的顺序。所谓倒读是指按二进制表示的数字首尾位置颠倒,重新按十进制读数。表 9~4 列出 $N=8$ 时两种排列顺序的互换规律,表

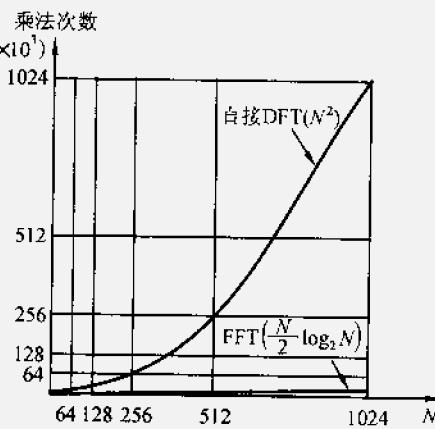


图 9~16 直接 DFT 与 FFT 算法所需乘法次数的比较

中,最左端是自然顺序的十进制数字,把它们表示为二进制以后,将码位倒置,例如 110 变成 011,再按十进制读出已倒置的数字,即得最右端的码位倒读顺序,也就是图 9~15 中的输入排列顺序。

表 9-4 自然顺序与码位倒读顺序($N=8$)

自然顺序	二进制表示	码位倒置	码位倒读顺序
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

能否把输入序列按自然顺序排列进行 FFT 运算呢？回答是可以的。图 9-17 示出 $N=4$ 的另一形式之流程图，不难发现，它所执行的运算内容和图 9-13 完全相同，区别仅在于，这里的输入序列改为自然顺序排列，而输出却变成了码位倒读顺序。

还可以构成输入、输出序列都按自然顺序(都不按码位倒读顺序)的 FFT 流程图，这种情况示于图 9-18。然而，此结构的缺陷是：不能实行“即位运算”，需要较多的存储器。

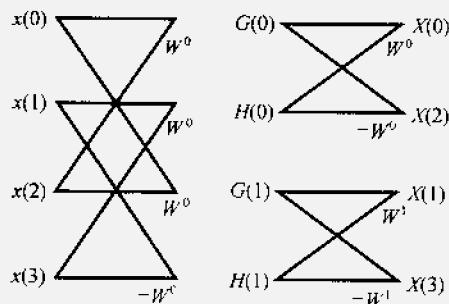


图 9-17 $N=4$ 的 FFT 流程图，输入序列
自然顺序、输出序列码位倒读顺序

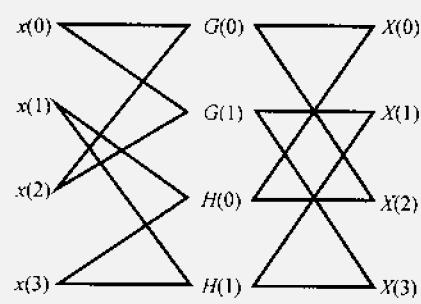


图 9-18 $N=4$ 的 FFT 流程图，
输入序列、输出序列都为自然顺序

什么是即位运算呢？这就是当数据输入到存储器之后，每级运算结果仍然储存在原有的同一组存储器之中，直到最后一级算完，中间无需增设其他存储设备。例如图 9-13 与图 9-17 都是符合即位运算的。对于图 9-13 左上端的

一个蝶形运算单元，由输入 $x(0)$ 与 $x(2)$ 求得 $G(0)$ 与 $G(1)$ 之后，数据 $x(0)$ ， $x(2)$ 即可清除，允许 $G(0)$ ， $G(1)$ 送入原存放数据 $x(0)$ ， $x(2)$ 的存储单元之中。求得 $H(0)$ 与 $H(1)$ 之后，也可送入原存放 $x(1)$ ， $x(3)$ 的位置。可见，在完成第一级运算过程中，只利用了原输入数据的存储器，即可获得顺序符合要求的中间数据，立即执行下一级运算。然而对于图 9-18，容易看出，第一级运算的蝴蝶形单元发生“歪斜”，不可能实现即位运算，需附加存储器供中间数据使用。

实际上，宁可在输入、输出端附加码位倒读的转换程序（也称变址处理），而不愿增多存储器。因此，一般采用图 9-13（图 9-15）或图 9-17 那样的具有即位运算能力的算法。在此二者之间也有差异，前者（参看图 9-15）加权系数 W 的指数按自然顺序排列，便于查找，而后者不具备这一特点（习题 9-28）。当 $N=2^M$ 时，输入序列码位倒读顺序、输出序列自然顺序之 FFT 流程图排列规律如下（参看图 9-15， $N=2^3$ 的例子）：

- (1) 全部计算分解为 M 级（也称 M 次迭代）。
- (2) 输入序列 $x(n)$ 按码位倒读顺序排列，输出序列 $X(k)$ 按自然顺序排列。
- (3) 每级（每次迭代）都包含 $\frac{N}{2}$ 个蝶形单元，但其几何图形各不相同。自左至右第 1 级的 $\frac{N}{2}$ 个蝶形单元分布为 $\frac{N}{2}$ 个“群”，第 2 级则分为 $\frac{N}{4}$ 个“群”，…，第 i 级分为 $\frac{N}{2^i}$ 个“群”，…，最末一级只有 $\frac{N}{2^M}$ 个也即一个“群”。
- (4) 每个蝶形单元都包含乘 W^{nk} 与 $-W^{nk}$ 的运算（简化为乘 W^{nk} 与加、减法各一次）。

(5) 同一级中各个“群”的系数 W 分布规律完全相同。

(6) 各级的 W 分布顺序自上而下按如下规律排列：

第 1 级： W_N^0

第 2 级： $W_N^0, W_N^{\frac{N}{4}}$

第 3 级： $W_N^0, W_N^{\frac{N}{8}}, W_N^{\frac{2N}{8}}, W_N^{\frac{3N}{8}}$
……

第 i 级： $W_N^0, W_N^{\frac{N}{2^i}}, W_N^{\frac{2N}{2^i}}, \dots, W_N^{(2^{i-1}-1)\frac{N}{2^i}}$
……

第 M 级： $W_N^0, W_N^1, W_N^2, W_N^3, \dots, W_N^{\frac{N}{2^M}}$

读者可按上述规律练习排列任意 $N=2^M$ (M 整数) 值的 FFT 流程图（习题

9-30)。

离散傅里叶变换快速算法的原理同样适用于求逆变换(以 IFFT 表示), 其差别仅在于, 取 IDFT 时, 加权系数改为 W^{-nk} (不是 W^{nk}), 而且运算结果都应乘以系数 $\frac{1}{N}$ 。

例 9-4 已知有限长序列

$$x(n) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 2 & (n=1) \\ -1 & (n=2) \\ 3 & (n=3) \end{cases}$$

按 FFT 运算流程求 $X(k)$, 再以所得 $X(k)$ 利用 IFFT 反求 $x(n)$ 。

解

(1) 画出求 DFT 的流程如图 9-19, 逐级计算得 $X(k)$:

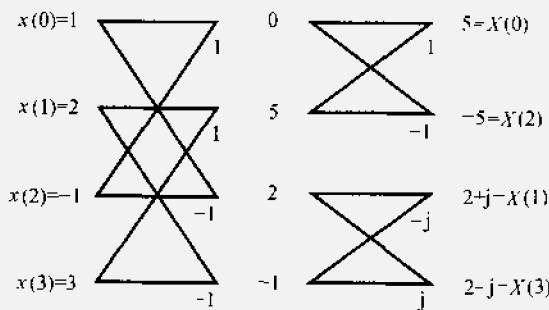


图 9-19 例 9-4 的 FFT 运算

(2) 画出求 IDFT 的流程如图 9-20, 逐级计算得 $x(n)$;

以上讨论的库利-图基 FFT 算法, 按输入序列在时域的奇偶顺序分组, 也称为按时域抽取的 FFT 算法; 与此对应的另一种办法是在频域按奇、偶顺序分组, 称为按频率抽取的 FFT 算法, 也称桑德-图基(Sande-Tukey)算法(习题 9-31 至 9-34)。

如果样点数目 N 不是 2 的整数幂次, 也可排出 FFT 算法程序, 称为任意因子的 FFT 运算。^①

从 FFT 算法诞生至今, 各种改进或派生的信号处理快速算法层出不穷。本书只介绍了关于 FFT 算法的初步概念。详细深入的分析可参看“数字信号

^① 见参考书: E. O. 布赖姆著, 柳群译, 快速傅里叶变换, 上海科技出版社, 1979

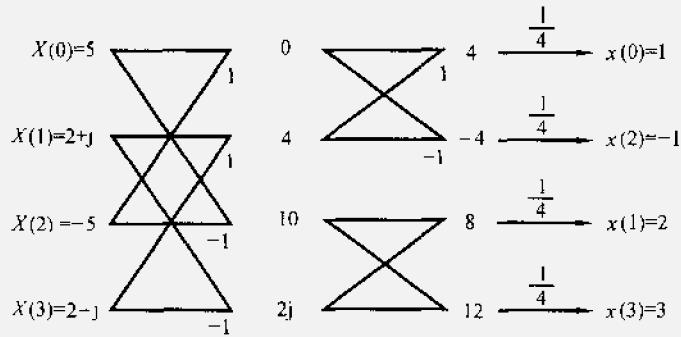


图 9-20 例 9-4 的 IFFT 运算

处理(或离散时间信号处理)”方面的教材以及有关文献^①。

9.7 离散傅里叶变换的应用

如今,DFT 的应用已遍及各个科学技术领域,可以列举丰富的实例来说明它的应用原理。限于本课程的范围,仅就其典型、普遍的问题作一粗浅介绍,即使论述得这样简短,读者也足以感受到这一方法在实际应用中的重大作用。

运用 DFT 方法,往往伴随着 FFT 算法的实施,于是,所谓“DFT 的应用”几乎与“FFT 的应用”成为同义语。

FFT 方法可直接用来处理离散信号的数据,也可用于对连续时间信号分析的逼近。

(一) 快速卷积

在 9.4(四)曾经讨论,若长度为 N_1 的序列 $x(n)$ 与长度为 N_2 的序列 $h(n)$ 作线卷积,得到

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (9-96)$$

$y(n)$ 也是一个有限长序列,其长度为 $N_1 + N_2 - 1$ 。由式(9-96)可知,在卷积运算过程中,每个 $x(n)$ 的样值都必须与每个 $h(n)$ 的样值相乘,因此,共需要 N_1N_2 次乘法运算,在 $N_1 = N_2 = N$ 的情况下,需 N^2 次乘法运算。

如果把求线卷积改为求圆卷积(两序列分别补零点加长至 $N_1 + N_2 - 1$),并借助 FFT 技术,有可能减少求卷积所需的运算工作量。

图 9-21 示出直接卷积与快速卷积两种方案的原理方框图。由图 9-21

^① 见本书最后附参考书目第[16][20]和[21]等。

(b) 可见, 快速卷积的过程中, 共需要两次 FFT, 一次 IFFT 计算, 相当于三次 FFT 的运算量。在一般的数字滤波器中, 由 $h(n)$ 求 $H(k)$ 这一步是预先设计好的, 数据已置于存储器之中, 故实际只需二个 FFT 的运算量, 如果假定 $N_1 = N_2 = N$, 经补零后点数为 $N_1 + N_2 - 1 \approx 2N$, 因而需要 $2 \times \left(\frac{2N}{2} \log_2 2N\right)$ 次复数乘法运算。此外为完成 $X(k)$ 与 $H(k)$ 两序列相乘, 还需要作 $2N$ 次复乘。全部复乘运算次数为

$$2(N \log_2 2N) + 2N = 2N(1 + \log_2 2N) \quad (9-97)$$

显然, 随着 N 值增大, 式(9-97)的数字要比 N^2 显著减少, 因此, 圆卷积的方案可以快速完成卷积运算。

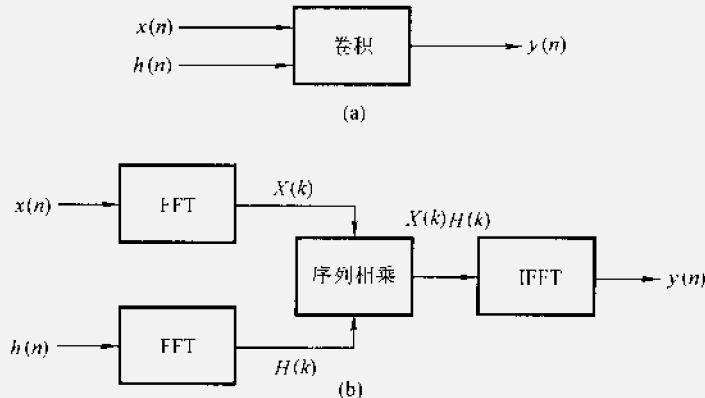


图 9-21 直接卷积与快速卷积原理方框图

以上分析是针对两序列长度接近或相等的情况。如果其中一个序列较短, 而另一序列很长, 那么在进行圆卷积时, 短序列需补零甚多, 于是圆卷积方案的相对运算量可能减少不多, 甚至增多。为克服这一困难, 可采用分段卷积(或称分段过滤)的方法。其基本原理是将较长的一个序列, 例如 $x(n)$ 分为许多小段, 每小段长度都与 $h(n)$ 接近, 将 $x(n)$ 的每个小段分别与 $h(n)$ 作卷积, 最后取和。这时, 仍有可能发挥快速卷积的优越性。此方案的具体实现不是唯一的, 这里介绍所谓“重叠相加法”。

假定 $h(n)$, $x(n)$ 均为因果序列。 $h(n)$ 的长度是 N , 示意于图 9-22(a)。 $x(n)$ 长度是 N_1 , $N_1 \gg N$, 现将 N_1 等分为若干小段, 每段长 M , 如图 9-22(b)。以 $x_i(n)$ 表示 $x(n)$ 序列的第 i 小段(i 为正整数, $0 \leq i \leq P-1$, $P = \frac{N_1}{M}$), 为完成各 $x_i(n)$ 与 $h(n)$ 之圆卷积, 应将 $x_i(n)$ 长度补足至 $N+M-1$, 在图 9-22(c) 中已用虚线示意补零。输入序列可表示为

$$x(n) = \sum_{i=0}^{P-1} x_i(n) \quad (9-98)$$

其中

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n) & [iM \leq n \leq (i+1)M-1] \\ 0 & [n \text{ 为其他值}] \end{cases}$$

相应地，输出序列也可分解为

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ &= \left[\sum_{i=0}^{P-1} x_i(n) \right] * h(n) \end{aligned} \quad (9-99)$$

利用卷积分配律可得

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{i=0}^{P-1} [x_i(n) * h(n)] \\ &= \sum_{i=0}^{P-1} y_i(n) \end{aligned} \quad (9-100)$$

这里

$$y_i(n) = x_i(n) * h(n) \quad (9-101)$$

由于 $y_i(n)$ 的长度为 $N + M - 1$ ，而 $x_i(n)$ 的有效长度只有 M ，故相邻两段的 $y_i(n)$ 必有 $N - 1$ 长度的重叠，见图 9-22 (d)。

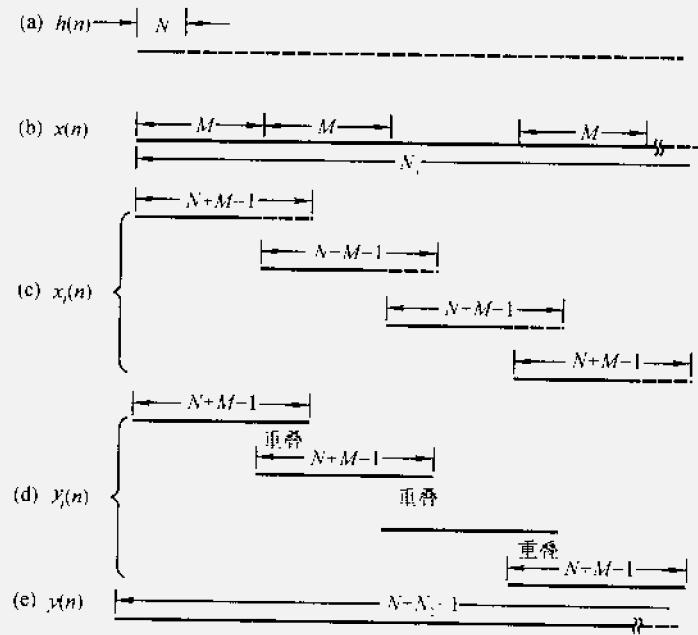


图 9-22 两序列长度相差很大时快速卷积的重叠相加法

按照上述原理，此方法的运算过程可分为两部分：首先求每个 $x_i(n)$ 与 $h(n)$ 的圆卷积，样点数为 $N + M - 1$ ，共需 P 次，求各 $y_i(n)$ ，其原理仍按图 9-21 (b)；然后将 $y_i(n)$ 取和（实际上是重叠部分相加），即得 $y(n)$ 。

有时， N_1 可能很长，以致趋于无限大，例如语音信号、地震波动信号、宇宙通信中产生的某些信号等，如果不采用分段卷积的方法将迟迟不能给出结果，而且，无法找到那样大的存储设备来满足 N_1 的需要。因此，即使在分段措施改善速度不显著的情况下，仍有可能采用这种方法。

借助 FFT 不仅可完成快速卷积运算，也可利用它进行解卷积运算，具体计算公式可仿照 z 变换解卷积方法求得（见 8.5 节），作为练习，读者可自行写出。

(二) 快速相关(功率谱计算)

与快速卷积的原理类似，相关（或自关）运算同样可借助 FFT 技术完成。图 9-23 示出直接相关与快速相关两种方案的原理方框图。

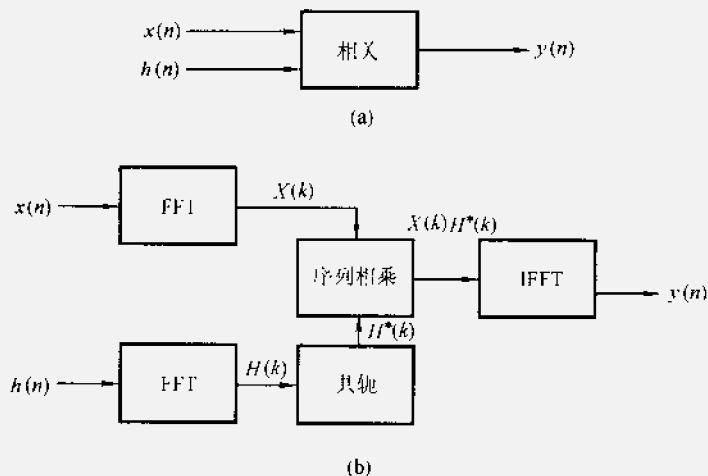


图 9-23 直接相关与快速相关原理方框图

相关运算的应用常见于雷达系统或声纳系统之中，在那里，以这种运算来确定隐藏在可加噪声中的信号时延。人们早已利用连续时间系统实现相关接收，随着 FFT 技术的发展，数字式相关处理器已被广泛采用，在许多方面其性能优于旧式的模拟相关器。

利用上述原理，也可求序列的功率谱，这时，在图 9-23 中 $x(n)$ 与 $h(n)$ 应是同一信号（省去一个 FFT 运算），这时， $y(n)$ 是自关函数， $Y(k)$ 就是 $x(n)$ 的功率谱。

(三) 对连续时间信号分析的逼近(信号频谱分析)

一般情况下 待研究的连续时间信号不具备离散性或周期性，也可能有无限长度。为使其适应 FFT 方法的需要，应对此波形进行抽样和截断，在此情况下，利用 FFT 计算之结果必然引入误差。下面按几种典型情况说明误差形成的原因。

(1) 时间有限信号

待分析的信号只出现在某一确定时间之内，也即它是时间受限的。这时，其傅里叶变换不可能是有限带宽的，因此，根据抽样定理可知，当时间函数进行抽样以后，频谱必然造成混叠(aliasing)。也即，无论怎样减小抽样间隔 T_s ，混叠虽有可能减弱，但总是不可避免。

(2) 频率有限信号

与前一种情况相反，若信号频谱限制于某一频率范围，则时间函数是无限的，图 9-24 示意绘出这种波形 $x(t)$ 及其频谱 $X(f)$ 的例子。为利用 FFT 对此信号进行分析，必须把时间函数截取一有限范围，此截断过程可理解为信号 $x(t)$ 与一矩形脉冲 $h(t)$ 相乘，后者称为窗函数，好像通过一个矩形窗口拍摄 $x(t)$ ，只能取出如 $x_1(t)$ 的图形。 $x_1(t)$ 的变换可看作是 $X(f)$ 与窗函数频谱 $H(f)$ 之卷积，如图 9-24 中的 $X_1(f)$ ，此结果表明，截断过程使频谱产生失真，它从原有的频率受限图形扩展开来，称为“泄漏”(leakage)。

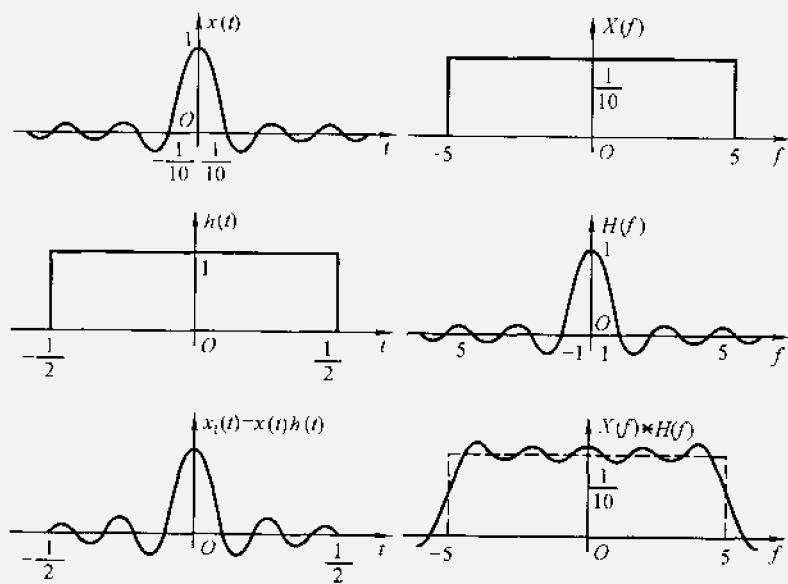


图 9-24 频率有限信号经截断后的频谱泄漏

对于时间无限的信号经截断引起的频谱泄漏是无法避免的。减少泄漏的方法是改善窗函数的形状，因为矩形窗在时域的突变导致频域拖尾严重，收敛很慢。为解决此矛盾，已经研究了各种形式的窗函数，例如升余弦形的窗函数[汉宁(Hanning)窗]、改进的升余弦窗[汉明(Hamming)窗]、二阶升余弦窗[布莱克曼(Blackman)窗]……等等，它们都在不同程度上压低了频谱的旁瓣，使泄漏现象减弱(详见10.7节FIR数字滤波器设计)。

泄漏与混叠有着密切联系，因为泄漏导致频谱扩展，从而引起混叠。

(3) 周期信号

对于频谱无限的周期信号，经抽样后也要产生混叠，这种情况与时间受限信号类似，显然，把时间受限信号作DFT处理时，实质上已进行了周期延拓并取其主值。

如果周期信号的频谱是有限的，正确选择抽样频率可避免混叠。

从DFT计算结果转至连续信号的频谱时，还有一个问题需要解决，这就是电平数值的相对变动。对于这种变动的转移关系，我们并不陌生，在第三章3.9节曾利用连续信号的频谱函数计算抽样信号的频谱，此时需倍乘系数 $\frac{1}{T_s}$ (T_s 为抽样时间间隔)。现在，对于DFT和IDFT的计算，若要应用于连续时间信号也有类似的转换关系，主要规律如下：

(1) 对一个时间有限连续信号进行傅里叶分析。按式(9-12)求DFT将计算结果乘以系数 T_s ，即可得到其近似频谱。

(2) 由频谱合成波形。如果已知某信号的频谱在正、负频率范围内共占据频带 f_s ，利用IDFT计算之结果乘以系数 f_s 即可获得其近似的时间波形。

(3) 用DFT来求一周期函数的傅里叶级数近似式。这时，因子 $\frac{1}{N}$ 最好是放置在正变换式中，而不是在逆变换式中，采取这一措施之后，无论正、逆DFT变换都可直接表示所需结果，无需再乘转换系数。

在许多实际问题中，变换电平的步骤往往无关紧要，只要求正、逆变换函数的相对值有正确结果。因此，在各种书刊文献中常根据作者习惯，以不同形式放置这些系数。

例9-5 利用DFT方法求图9-25(a)所示三角脉冲的频谱，它具有单位幅度，持续时间是2 ms，所求谱线间距(分辨力) $f_1 = 100$ Hz，最高频率范围限于 $f_b = 25$ kHz。

解

(1) 由 f_b 提出对抽样时间间隔 T_s 的要求：

$$T_s \leq \frac{1}{2f_b} = \frac{1}{2 \times 25 \times 10^3} \text{ s}$$

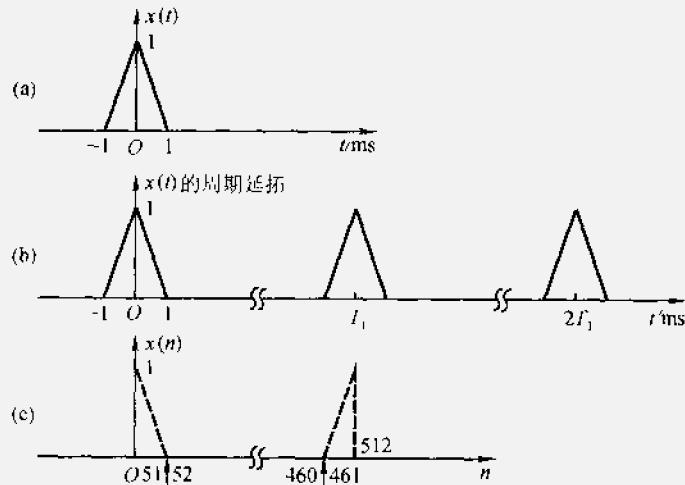


图 9-25 例 9-5 的三角形脉冲及其周期延拓和取主值序列

得

$$T_s \leq 20 \mu\text{s}$$

(2) 由 \$f_1\$ 决定时间函数的延拓周期(数据记录长度)

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{100} \text{ s} = 10 \text{ ms}$$

画出经周期延拓之波形如图 9-25 (b), 其上值区间示于图 9-25 (c)。

(3) 决定样点数目 \$N\$

$$N = \frac{T_1}{T_s}$$

$$N \geq \frac{10 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 500$$

取 \$N = 512 = 2^9\$, 则确定

$$T_s = T_1/N = 19.53125 \mu\text{s}$$

表 9-5 列出了借助 FFT 算法以及由连续函数积分求得之频谱数值比较。最后一列示出二者的差值。在图 9-26 中示出误差随频率起伏改变的曲线, 显然, 随频率增高, 起伏严重。图 9-27 是按照表 9-5 绘制的幅度谱曲线, 在此图中, 已很难表示出两种计算结果的差别。在一般情况下, 本例是一个很满意近似。

表 9-5 三角形脉冲频谱的计算

频率 f (单位为 Hz)	由 FFT 求得	$X(f)$	误差
0.00	1.000 06E - 03	1.000 00E - 03	6.103 52E - 08
100.00	9.675 93E - 04	9.675 31E - 04	6.143 32E - 08
200.00	8.752 03E - 04	8.751 50E - 04	6.250 92E - 08
300.00	7.369 04E - 04	7.368 40E - 04	6.394 13E - 08
400.00	5.728 52E - 04	5.727 87E - 04	6.529 26E - 08
500.00	4.053 51E - 04	4.052 85E - 04	6.613 62E - 08
600.00	2.546 38E - 04	2.545 72E - 04	6.618 47E - 08
700.00	1.354 03E - 04	1.353 38E - 04	6.538 70E - 08
800.00	5.476 02E - 05	5.469 63E - 05	6.396 12E - 08
900.00	1.200 72E - 05	1.194 48E - 05	6.234 53E - 08
1 000.00	6.107 19E - 08	1.177 57E - 32	6.107 19E - 08
1 100.00	8.056 72E - 06	7.996 13E - 06	6.059 85E - 08
1 200.00	2.437 06E - 05	2.430 95E - 05	6.114 50E - 08
1 300.00	3.930 26E - 05	3.924 00E - 05	6.259 65E - 08
1 400.00	4.682 26E - 05	4.675 81E - 05	6.451 28E - 08
1 500.00	4.509 79E - 05	4.503 16E - 05	6.625 43E - 08
1 600.00	3.586 64E - 05	3.579 92E - 05	6.719 30E - 08
1 700.00	2.301 35E - 05	2.294 66E - 05	6.693 99E - 08
1 800.00	1.086 97E - 05	1.080 42E - 05	6.550 73E - 08
1 900.00	2.743 48E - 06	2.680 14E - 05	6.333 90E - 08
2 000.00	6.118 26E - 08	1.177 57E - 32	6.118 26E - 08
2 100.00	2.253 79E - 06	2.193 95E - 06	5.983 76E - 08
2 200.00	7.292 43E - 06	7.232 56E - 06	5.986 25E - 08
2 300.00	1.259 74E - 05	1.253 60E - 05	6.134 67E - 08
2 400.00	1.597 46E - 05	1.591 07E - 05	6.384 21E - 08
2 500.00	1.627 79E - 05	1.621 14E - 05	6.649 15E - 08
2 600.00	1.362 54E - 05	1.355 71E - 05	6.832 26E - 08
2 700.00	9.165 39E - 06	9.096 79E - 06	6.860 75E - 08
2 800.00	4.532 16E - 06	4.465 00E - 06	6.715 50E - 08
2 900.00	1.214 87E - 06	1.150 45E - 06	6.441 90E - 08

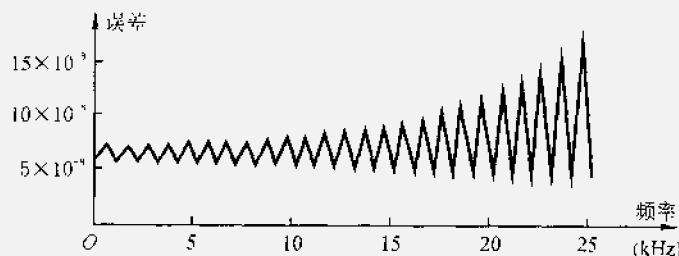


图 9-26 FFT 逼近三角脉冲频谱的误差

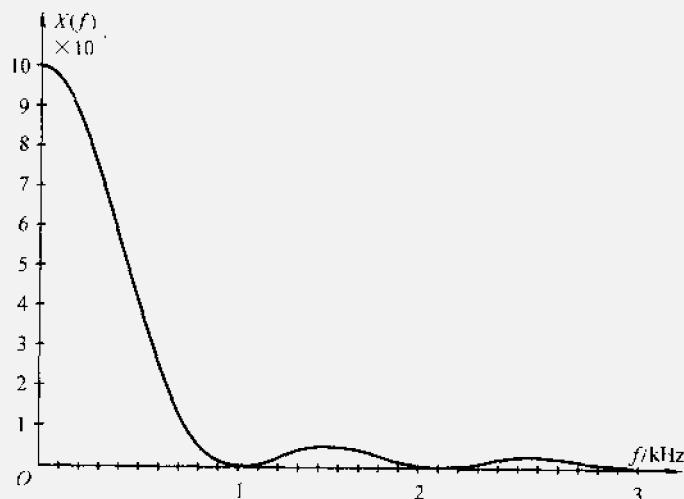


图 9-27 按表 9-5 绘制的三角脉冲幅度谱曲线

9.8 沃尔什变换及其应用举例

(一) 一维沃尔什变换

从第六章 6.5 节沃尔什级数展开式及其系数表示式可以得到如下的沃尔什变换对：

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \text{Wal}(k, t) \quad (0 \leq t < 1) \quad (9-102)$$

$$\alpha_k = \int_0^1 x(t) \text{Wal}(k, t) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (9-103)$$

在实际应用中，这种连续的(取积分)变换式不方便，为实现数字计算，可在 $0 \leq t < 1$ 的区间内，按等距离取 N 个离散点，在这些离散点取函数的抽样值，

这样，就把函数 $x(t)$ 展成只包含 N 个离散项的沃尔什级数。类似离散傅里叶变换的形式，可以得到离散沃尔什变换(以符号 DWT 表示)。

若 $x(t)$ 的样值为 $x(n)$, $\text{Wal}(k, t)$ 的抽样值以 W_{kn} 表示，其中 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ，则离散沃尔什变换的定义为

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{kn} \\ (k &= 0, 1, 2, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (9-104)$$

N 表示 DWT 的阶数， W_{kn} 是 $\text{Wal}(k, t)$ 的 N 个等间隔抽样值，它只取 +1 或 -1 两个数值，在 $0 \leq t < 1$ 区间内， t 的抽样点取在 $t = \frac{2n+1}{2N}$ 处(相应的抽样位置避开跳变点)。

离散沃尔什逆变换的定义为：

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_{kn} \\ (k &= 0, 1, 2, \dots, N-1) \\ (n &= 0, 1, 2, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (9-105)$$

式(9-104)与式(9-105)构成离散沃尔什变换对。关于系数 $\frac{1}{N}$ 的处理，可按以上定义，也可将它移至逆变换式中。

DWT 变换对式(9-104)与式(9-105)可以表示为如下的矩阵形式

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N} \mathbf{x} \mathbf{W}_N \quad (9-106)$$

式中， \mathbf{x} 与 \mathbf{X} 都是行向量^①：

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]$$

$$\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]$$

而 \mathbf{W}_N 是方阵

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} W_{00} & W_{01} & \cdots & W_{0,(N-1)} \\ W_{10} & W_{11} & \cdots & W_{1,(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{(N-1),0} & W_{(N-1),1} & \cdots & W_{(N-1),(N-1)} \end{bmatrix} \quad (9-107)$$

① 如果取行向量 \mathbf{x} 与 \mathbf{X} 的转置 \mathbf{x}^T 与 \mathbf{X}^T (都为列向量)，则变换对的矩阵表示式为 $\mathbf{X}^T = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{x}^T$ 和 $\mathbf{x}^T = \mathbf{W}_N \mathbf{X}^T$ 。也可将 \mathbf{x} 和 \mathbf{X} 直接规定为列向量，则有：

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{x} \quad \text{和} \quad \mathbf{x} = \mathbf{W}_N \mathbf{X}$$

可根据书写方便选用。

逆变换的矩阵形式为

$$\mathbf{x} = \mathbf{XW}_N \quad (9-108)$$

沃尔什矩阵具有正交特性，即

$$\frac{1}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_N = \mathbf{I} \quad (9-109)$$

式中 \mathbf{I} 为单位矩阵。利用这一性质，可以证明上述沃尔什变换及其逆变换关系的正确性，将正变换式(9-106)代入逆变换式(9-108)之中得到

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{N} \mathbf{xW}_N \mathbf{W}_N \\ &= \mathbf{xI} = \mathbf{x} \end{aligned} \quad (9-110)$$

可见，变换对的表示式正确。

例 9-6 求单位振幅正弦信号 $x(t) = \sin(2\pi t)$ ($0 \leq t < 1$) 的 8 阶 ($N = 8$) DWT。

解

对 $x(t)$ 在 8 个等间隔点上抽样，抽样点位于 $t = \frac{2n+1}{16}$ 处，即分别取 $\sin\left(\frac{2\pi}{16}\right), \sin\left(\frac{6\pi}{16}\right), \dots, \sin\left(\frac{30\pi}{16}\right)$ 之值。

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}(n)] &= [x(0), x(1), \dots, x(7)] \\ &= [0.38, 0.92, 0.92, 0.38, -0.38, -0.92, -0.92, -0.38] \end{aligned} \quad (9-111)$$

将式(9-111)和 8 阶沃尔什矩阵代入式(9-106)即可求得各变换系数，为书写方便，将 $\mathbf{x}(n)$ 以列矩阵形式写出

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.92 \\ 0.92 \\ 0.38 \\ -0.38 \\ -0.92 \\ -0.92 \\ -0.38 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.65 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.27 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9-112)$$

这里所得矩阵中的各变换系数分别表示抽样函数 $x(n)$ 的各沃尔什分量系数。若要由变换式反求原函数(作逆变换)可将式(9-112)代入(9-108), 同样也写作列矩阵形式, 于是有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.65 \\ 0 \\ 0 \\ -0.27 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.92 \\ 0.92 \\ 0.38 \\ -0.38 \\ -0.92 \\ -0.92 \\ -0.38 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可见, 经逆变换后, 能够正确复原 $x(t)$ 的离散抽样值。

沃尔什变换与傅里叶变换在形式上和性质上有许多相同之处。例如, 对于傅里叶变换满足帕塞瓦尔定理, 也即在时域和频域中, 同一信号能量守恒; 对于沃尔什变换也满足帕塞瓦尔定理, 在时域和序域中, 同一信号也是能量守恒, 此定理可写成以下形式

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (9-113)$$

沃尔什变换与傅里叶变换相比较, 重要区别在于: 沃尔什变换是实数变

换，而且沃尔什函数仅取 $+1, -1$ ，实际上只需实数加、减法运算，傅里叶变换是复数变换；沃尔什变换的另一特点是正变换与逆变换的计算规律相同，仅有因子 $\frac{1}{N}$ 的差别，因而使设备简化。

在傅里叶变换中，占有相当重要地位的卷积与相关定理，在沃尔什变换中却不存在直接的对应关系。为说明此特性，假定两个序列 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的沃尔什变换分别为 $X(k)$ 与 $Y(k)$ ，分析 $X(k)$ 与 $Y(k)$ 的乘积 $Z(k)$ 的逆变换 $z(m)$ 与 $x(n)$ 和 $y(n)$ 有什么联系：

$$\begin{aligned} Z(k) &= X(k)Y(k) \\ \text{IDWT}[Z(k)] &= z(m) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y(k)\text{Wal}(k,m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\text{Wal}(k,n) \cdot \text{Wal}(k,m) \end{aligned}$$

借助沃尔什函数相乘特性公式，并交换上式中的求和顺序得到

$$\begin{aligned} z(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\sum_{k=0}^{N-1} Y(k)\text{Wal}(k,m \oplus n) \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(m \oplus n) \end{aligned} \quad (9-114)$$

显然， $z(m)$ 并非 $x(n)$ 与 $y(n)$ 之卷积，而是含有变量模二和运算的求和表示式，如式(9-114)，这样的运算也称为“并矢卷积”(dyadic convolution)。

在卷积表示式中，对于递推的延时项按变量的算术相减给出，而在并矢卷积中，递推延时改为变量的模二和。

由于模二和运算对加、减来说是相同的，因此，并矢相关运算与并矢卷积运算形式一样。

在实际应用中，经常用到由沃尔什变换经重排序号构成的沃尔什-哈德马变换，它的优点是便于实现快速算法，详见有关参考书，此处不再讨论。^①

(二) 二维沃尔什变换及其在数据压缩方面的应用

在二维变换的研究中，待变换之信号是一个二元函数。例如一张平面图像，需要纵、横两个坐标的变量来确定样点的位置。

设二维离散信号 $x(n_1, n_2)$ ，其自变量 n_1, n_2 分别取有限长 N_1 和 N_2 ，于是，共有样点 $N_1 \times N_2$ 个。它的二维 DWT 定义如下式

$$X(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2) \cdot W(k_1, n_1) \cdot W(k_2, n_2)$$

^① 参考书：本书第一版，郑君里等，信号与系统，下册，第10章，高等教育出版社，1981。

$$\begin{aligned} & (k_1=0,1,2,\cdots,N_1-1) \\ & (k_2=0,1,2,\cdots,N_2-1) \end{aligned} \quad (9-115)$$

二维 DWT 的逆变换定义为

$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) = & \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} X(k_1, k_2) \cdot W(k_1, n_1) \cdot W(k_2, n_2) \\ & (n_1=0,1,2,\cdots,N_1-1) \\ & (n_2=0,1,2,\cdots,N_2-1) \end{aligned} \quad (9-116)$$

式(9-115)与式(9-116)构成二维 DWT 变换对。

在实际应用中，常取 $N_1 = N_2 = N$ ，并写成矩阵形式，这时，二维序列 $x(n_1, n_2)$ 可表示为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \cdots & x(0,N-1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \cdots & x(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(N-1,0) & x(N-1,1) & \cdots & x(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

变换矩阵 \mathbf{W}_N 仍如一维变换的形式[见式(9-107)]，二维 DWT 的矩阵表示式为

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N^2} \mathbf{W}_N \mathbf{x} \mathbf{W}_N \quad (9-117)$$

逆变换的表达式写作

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N \mathbf{X} \mathbf{W}_N \quad (9-118)$$

利用正交特性可以证明上述变换对的正确性。将正变换式(9-117)代入逆变换式(9-118)之中得到

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{W}_N \mathbf{X} \mathbf{W}_N \\ &= \mathbf{W}_N \frac{1}{N^2} \mathbf{W}_N \mathbf{x} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_N \\ &= \frac{1}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_N \mathbf{x} \frac{1}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_N \\ &= \mathbf{I} \mathbf{x} \mathbf{I} \\ &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

式中 \mathbf{I} 为单位矩阵，这里用到沃尔什矩阵的正交性质，即

$$\frac{1}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_N = \mathbf{I}$$

正交变换的重要应用之一是数据压缩。所谓数据压缩就是在允许的统计误差范围内，以较窄的频带(或较短的时间)传送同样信息量的数据。近年来，数据压缩技术已广泛应用于图像传输、雷达、通信、生物医学等许多领域。

如果某离散信号由 N 个样值组成，为了可靠而有效地进行信息传递，必

须在规定时间内完成 N 个数据的传输。当此信号取正交变换之后，虽然仍得到 N 个变换样值，然而，其分布特性却表现出某种能量集中，于是，允许删去某些样值不予传送，也不会引起明显的误差，这就达到了压缩数据的目的。下面举例说明，图像信号借助二维沃尔什变换进行数据压缩的原理。

设某平面图像经抽样后，二维序列的矩阵表示式为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-119)$$

对此信号取二维 DWT，得到

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{1}{16} \mathbf{W}_4 \mathbf{x} \mathbf{W}_4 \\ &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-120) \end{aligned}$$

由式(9-120)可以看出，对于式(9-119)所给二维数据，经变换后， \mathbf{X} 矩阵仅在左上部保留了--些元素，而其他大部分位置元素的取值是零。如果不传输抽样信号 \mathbf{x} ，而是传输它的变换矩阵，并且仅传输矩阵左上区的元素，这就有可能达到数据压缩的目的。至于左上部位的元素保留多少取决于容许的均方误差。

从物理概念上讲，正交变换方法实现数据压缩的依据是：利用了图像信号的统计特性，也即相邻抽样点之间有较强的相关性。原始数据分布愈均匀，经变换后数据愈集中于矩阵的左上角。正交变换使信号的能量集中特性得以显现。

为进一步阐明上述原理，考察 $N=2$ 的二维数据演算过程，再将所得结论推广至 $N=4$ 以及一般情况。

若平面图像抽样信号为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) \\ x(1,0) & x(1,1) \end{bmatrix} \quad (9-121)$$

取其二维 DWT，则

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) \\ x(1,0) & x(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x(0,0)+x(1,0) & x(0,1)+x(1,1) \\ x(0,0)-x(1,0) & x(0,1)-x(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9-122)$$

至此可以看到，变换式经第一次相乘之后，在所得乘积矩阵的下部元素出现两个差值： $x(0,0)-x(1,0)$ 和 $x(0,1)-x(1,1)$ 。如果图像在垂直方向相邻样点取值相同，即 $x(0,0)=x(1,0)$ 和 $x(0,1)=x(1,1)$ ，则乘积矩阵下边两个元素等于零，只留下上边的两个元素，这样就把变换系数向上推移了，此结果表示已提取了图像在垂直方向相关性所含信息，使能量向上集中。回到(9-122)式继续运算：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(0,0) & X(0,1) \\ X(1,0) & X(1,1) \end{bmatrix} \quad (9-123)$$

其中：

$$\begin{aligned} X(0,0) &= [x(0,0)+x(1,0)]+[x(0,1)+x(1,1)] \\ X(0,1) &= [x(0,0)+x(1,0)]-[x(0,1)+x(1,1)] \\ X(1,0) &= [x(0,0)-x(1,0)]+[x(0,1)-x(1,1)] \\ X(1,1) &= [x(0,0)-x(1,0)]-[x(0,1)-x(1,1)] \end{aligned}$$

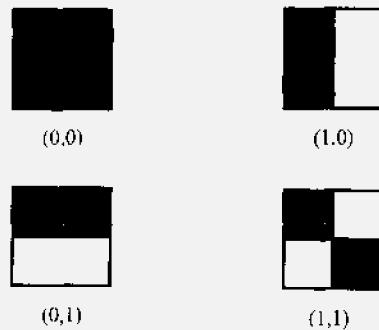
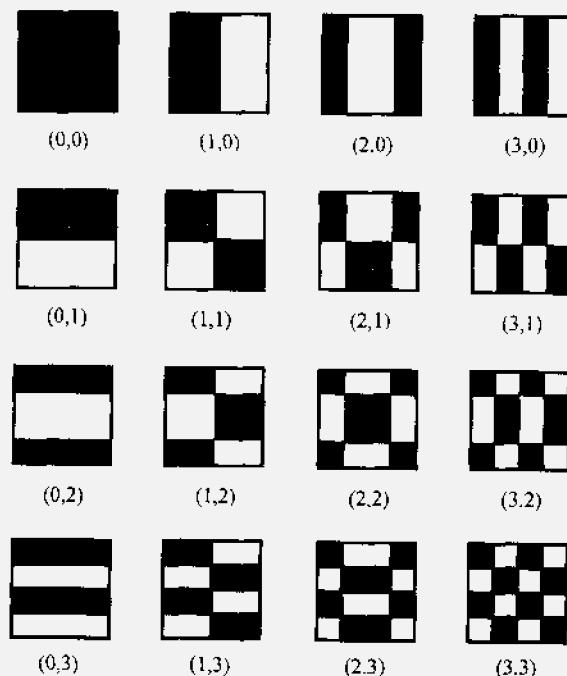
经两次相乘后，得到变换矩阵 \mathbf{X} ，各元素值为 $X(0,0), X(0,1), X(1,0), X(1,1)$ 。如果图像在水平方向相邻样点取值相等，即 $x(0,0)=x(0,1)$ 和 $x(1,0)=x(1,1)$ ，则矩阵右边元素 $X(0,1)$ 与 $X(1,1)$ 也要等于零，它表明已提取了水平方向相关性所含信息，使能量向左边集中。在同时满足 $x(0,0)=x(0,1)=x(1,0)=x(1,1)$ 的条件下，也即图像是完全均匀分布的，则变换矩阵 \mathbf{X} 的各元素中，只有 $X(0,0)$ 不为零，其他右边、下边的元素都等于零，这就把变换系数集中于左上角。从上述分析看出：正交变换的过程提取了原始数据的相关性所含信息，因而有可能进行数据压缩。

上述变换过程还可利用较为形象的“基础图”来解释， $N=2$ 的二维 DWT 基础图共有 $2 \times 2 = 4$ 张，如图 9-28 所示。图中，黑格子对应的样值为 +1，白格子对应的样值是 -1。每个基础图标注了相应的变换系数序号 (k_1, k_2) ，其中， k_1 表示图像水平方向样值变号次数， k_2 表示图像在垂直方向样值变号次数。每张基础图经相应的系数 $X(k_1, k_2)$ 加权，再相加就可得到原二

维离散数据构成之图形。很明显，对于完全均匀分布的平面图，只有加权系数 $X(0,0)$ 不为零，其余系数都是零。因而，只需图 9-28 左上角一张基础图经加权就可给出原图像。

按照同样原理，在图 9-29 中画出了 $N=4$ 的二维 DWT 基础图，共 $4 \times 4 = 16$ 张。现在可以利用此基础图解释前面讨论的式(9-119)之变换结果式(9-120)。取 $X(0,0)$ 与 $X(2,0)$ 对应的两张基础图分别

按系数 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 加权(其余 14 个系数都是零)，再叠加即可得到原图像。

图 9-28 $N=2$ 的二维 DWT 基础图图 9-29 $N=4$ 的二维 DWT 基础图

必须指出，利用一维变换同样可以进行数据压缩。一维变换与二维变换实质上完成相同的运算，二维数据可以重新排列成一维数据来处理。例如，式(9-121)所给的二维数据可改写作一维信号($N=4$)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0,0) \\ x(0,1) \\ x(1,0) \\ x(1,1) \end{bmatrix}$$

进行一维 DWT 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0,0) \\ x(0,1) \\ x(1,0) \\ x(1,1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x(0,0) + x(0,1) + x(1,0) + x(1,1) \\ x(0,0) + x(0,1) - x(1,0) - x(1,1) \\ x(0,0) - x(0,1) + x(1,0) + x(1,1) \\ x(0,0) - x(0,1) + x(1,0) - x(1,1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可以看到，这里所得的 4 个变换系数与式(9-123)所得 4 个变换系数一一对应，只是排列顺序不一致。

上面以沃尔什变换为例初步说明了二维正交变换的构成原理及其在数据压缩方面的应用例子。用类似的方法可将这些概念运用于其他各种正交变换，如离散傅里叶变换和下节将要介绍的离散余弦变换等等。

9.9 离散余弦变换(DCT)

在数字信号处理领域中，除了应用前面介绍的 DFT 和 DWT 之外，还有许多种离散正交变换被广泛采用，其中，离散余弦变换(DCT)日益受到重视，特别是在数字图像处理技术中，DCT 显示许多优点。

通常，以 $DCT[x(n)]$ 表示对离散时间序列 $x(n)$ 取一维离散余弦变换，为书写简短借助符号 $C(k)$ 表示 $DCT[x(n)]$ 。它的定义如下：

$$C(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (9-124)$$

$$C(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \left[\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \right] \quad (9-125)$$

逆变换 $IDCT[C(k)] = x(n)$ 定义如下：

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} C(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} C(k) \cos \left[\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \right] \quad (9-126)$$

以上各式中序号

$n=0, 1, 2, \dots, N-1$, 共 N 个

$k=0, 1, 2, \dots, N-1$, 也为 N 个

从定义表达式容易看出, DCT 与 DFT 的计算有着密切联系, 将余弦函数改写为复指数函数取实部的形式可导出如下关系:

$$\begin{aligned} C(k) &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \operatorname{Re}[e^{-j \frac{(2n+1)k\pi}{2N}}] \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{(2n+1)k\pi}{2N}} \right] \end{aligned} \quad (9-127)$$

如果把 $x(n)$ 作如下的时域延拓, 以 $x_e(n)$ 表示

$$x_e(n) = \begin{cases} x(n) & (n=0, 1, 2, \dots, N-1) \\ 0 & (n=N, N+1, \dots, 2N-1) \end{cases} \quad (9-128)$$

则 DCT 定义表达式可改写为:

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{2N-1} x_e(n) \\ C(k) &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{2N-1} x_e(n) \cos \left[\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{2N-1} x_e(n) e^{-j \frac{(2n+1)k\pi}{2N}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left[e^{-j \frac{k\pi}{2N}} \sum_{n=0}^{2N-1} x_e(n) e^{-j \frac{2kn\pi}{2N}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} [e^{-j \frac{k\pi}{2N}} X_e(k)] \end{aligned} \quad (9-129)$$

式中 $X_e(k)$ 为 $x_e(n)$ 的 $2N$ 点 DFT。可见, 为求得 DCT 正变换, 可以先求序列 $x_e(n)$ 的 $2N$ 点 DFT (也即 FFT), 然后再求得 $C(k)$, 这在实际问题中可按具体情况设计运算程序。

同理, 在作逆 DCT 变换时, 也可先在变换域把 $C(k)$ 作如下延拓, 以 $C_e(k)$ 表示

$$C_e(k) = \begin{cases} C(k) & (k=0, 1, 2, \dots, N-1) \\ 0 & (k=N, N+1, \dots, 2N-1) \end{cases} \quad (9-131)$$

于是, 可导出 IDCT 表达式的另一种形式

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} C_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{2N-1} C_e(k) \operatorname{Re}[e^{j \frac{(2n+1)k\pi}{2N}}] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \sqrt{\frac{2}{N}} \right) C_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{2N-1} [e^{j \frac{k\pi}{2N}} C_e(k)] e^{j \frac{2kn\pi}{2N}} \right\} \end{aligned} \quad (9-132)$$

这表明, 为求得 IDCT, 可先求 $[e^{j2\pi C_e(k)}]$ 的IDFT(也即IFFT), 然后再计算出 $x(n)$ 。

在数字图像信号处理的许多实际问题中, 经常应用二维离散余弦变换。对于 $N \times N$ 个样点的信号 $x(n_1, n_2)$ 二维 DCT 的表达式为

$$C(k_1, k_2) = \frac{2}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) \cos\left[\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N}\right] \cdot \cos\left[\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N}\right] \quad (9-133)$$

式中序号 k_1 和 k_2 都不等于零, 若 k_1 或 k_2 为零, 二维 DCT 表达式如下:

$$C(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) \quad (9-134)$$

$$C(0, k_2) = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) \cos\left[\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N}\right] \quad (9-135)$$

$$C(k_1, 0) = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) \cos\left[\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N}\right] \quad (9-136)$$

与此相应, 二维逆变换 IDCT 表达式为:

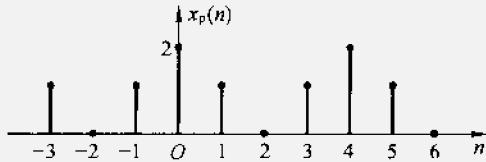
$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) = & \frac{1}{N} C(0,0) + \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{k_2=1}^{N-1} C(0, k_2) \cos\left[\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N}\right] \\ & + \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{k_1=1}^{N-1} C(k_1, 0) \cos\left[\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N}\right] \\ & + \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{k_1=1}^{N-1} \sum_{k_2=1}^{N-1} C(k_1, k_2) \cos\left[\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N}\right] \\ & \cdot \cos\left[\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N}\right] \end{aligned} \quad (9-137)$$

在以上讨论中, IDCT 的定义都以解析式给出, 实际运算时可采用矩阵形式, 得到比较简洁的表达式。

与 DFT 和 DWT 相比较, DCT 的变换特性可使信号经变换后更好地提取相关特性, 从而有利于实现数据压缩。由于 DCT 变换矩阵更容易体现图像信号和人类语音的相关特性, 因而被认为是一种“准最佳变换”(理论上的最佳变换难以完成实时运算, 在工程实践中无法采用)。从运算速度考虑, 由于 DWT 中省去了较多乘法运算, 因而 DWT 略优于 DCT。然而, 近年来在数字信号处理器硬件中, 可以做到使乘法指令与加法指令速度一致, 从而使 DWT 的优势不明显。综合考虑以上因素, DCT 已成为目前在数字图像或语音信号处理领域中应用相当广泛的一种离散正交变换。

习 题

9-1 题图 9-1 所示周期序列 $x_p(n)$, 周期 $N=4$, 求 $\text{DFS}[x_p(n)] = X_p(k)$ 。



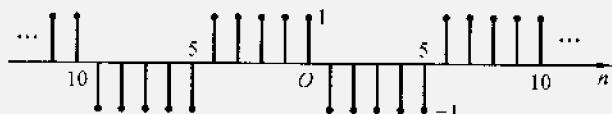
题图 9-1

9-2 若周期序列 $x_p(n)$ 为实数序列, 则 $\text{DFS}[x_p(n)] = X_p(k)$ 呈共轭对称性, 即 $X_p(k) = X_p^*(-k)$ 。试证明此特性。

9-3 若实数周期序列 $x_p(n)$ 是 n 的偶函数, 则 $X_p(k)$ 也是实数序列且为 k 的偶函数。试证明此特性。

9-4 周期性实序列 $x_p(n)$ 如题图 9-4 所示, 判断下述各论点是否正确:

- (1) $X_p(k) = X_p(k + 10)$;
- (2) $X_p(k) = X_p(-k)$;
- (3) $X_p(0) = 0$;
- (4) $X_p(k) e^{j(\frac{2\pi}{5})k}$, 对于所有的 k 此式为实数。



题图 9-4

9-5 如果 $x_p(n)$ 是一个周期为 N 的序列, 也是周期为 $2N$ 的序列, 令 $X_{p1}(k)$ 表示当周期为 N 时的 DFS 系数, $X_{p2}(k)$ 是当周期为 $2N$ 时的 DFS 系数。试以 $X_{p1}(k)$ 表示 $X_{p2}(k)$ 。

9-6 已知周期序列 $x_p(n)$ 如题图 9-1 所示, 取其主值序列构成一个有限长序列 $x(n) = x_p(n)R_N(n)$, 求 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 。

9-7 任意假设一个实周期序列 $x_p(n)$, 其周期为 N 。若 $x(n) = x_p(n)R_N(n)$, 绘出 $x((-n))_N$ 序列。

9-8 若已知有限长序列 $x(n)$ 如下式

$$x(n) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 2 & (n=1) \\ -1 & (n=2) \\ 3 & (n=3) \end{cases}$$

求DFT[$x(n)$] = $X(k)$, 再由所得结果求 IDFT[$X(k)$] = $x(n)$, 验证你的计算是正确的。建议写作矩阵形式。

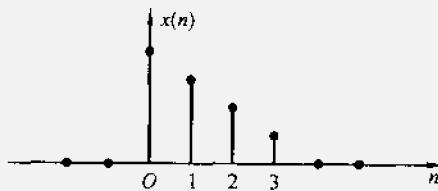
9-9 用闭式表达以下有限长序列的 DFT:

- (1) $x(n) = \delta(n);$
- (2) $x(n) = \delta(n - n_0) \quad (0 < n_0 < N);$
- (3) $x(n) = a^n R_N(n).$

9-10 用闭式表达以下有限长序列的 DFT:

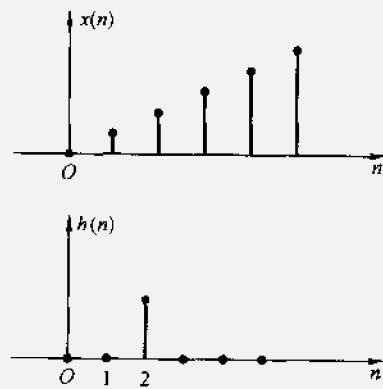
- (1) $x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n);$
- (2) $x(n) = \sin(\omega_0 n) R_N(n);$
- (3) $x(n) = \cos(\omega_0 n) R_N(n);$
- (4) 对于 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ 的特定条件, 重复以上各问。

9-11 一有限长序列 $x(n)$ 如题图 9-11 所示, 绘出 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 序列, 其中 $x_1(n) = x((n-2))_4 R_4(n)$, $x_2(n) = x((-n))_4 R_4(n)$ 。



题图 9-11

9-12 两个有限长序列 $x(n)$ 与 $h(n)$ 如题图 9-12 所示, 绘出长度为 6 的圆卷积。



题图 9-12

9-13 证明频移定理(式 9-41)。

9-14 已知有限长序列 $x(n)$, DFT[$x(n)$] = $X(k)$, 试利用频移定理求:

- (1) DFT[$x(n)\cos\left(\frac{2\pi ln}{N}\right)$];

$$(1) \text{DFT}\left[x(n)\sin\left(\frac{2\pi ln}{N}\right)\right]。$$

9-15 利用例 9-3 的结果, 分别求该例中的 $\text{DFT}[x(n)]$, $\text{DFT}[h(n)]$, $\text{DFT}[y(n)]$, 验证时域圆卷积定理。

9-16 证明频域圆卷积定理(式 9-47)。

9-17 题图 9-17 示出 $N=4$ 之有限长序列

$x(n)$, 试绘图解答:

- (1) $x(n)$ 与 $x(n)$ 之线卷积;
- (2) $x(n)$ 与 $x(n)$ 之 4 点圆卷积;
- (3) $x(n)$ 与 $x(n)$ 之 10 点圆卷积;
- (4) 欲使 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的圆卷积和线卷积相同, 求长度 L 之最小值。

9-18 已知两有限长序列:

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)R_N(n)$$

$$h(n) = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)R_N(n)$$

用直接卷积和 DFT 两种方法分别求:

- (1) $y(n) = x(n) \otimes h(n)$;
- (2) $y(n) = x(n) \circledast x(n)$;
- (3) $y(n) = h(n) \otimes h(n)$ (圆卷积长度仍取 N 点循环)。

9-19 若 $x(n)$ 为纯虚序列, $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$, 分解为实部与虚部写作 $X(k) = X_r(k) + jX_i(k)$, 试证明 $X_i(k)$ 是 k 的奇函数, $X_r(k)$ 是 k 的偶函数。

9-20 证明表 9-2 中除第 1 行以外的其余几条性质。

9-21 若已知实数有限长序列 $x_1(n), x_2(n)$, 其长度都为 N:

$$\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$\text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$$

$$x_1(n) + jx_2(n) = x(n)$$

$$\text{DFT}[x(n)] = X(k)$$

试证明下列关系式成立:

$$X_1(k) = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)]$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2j} [X(k) - X^*(N-k)]$$

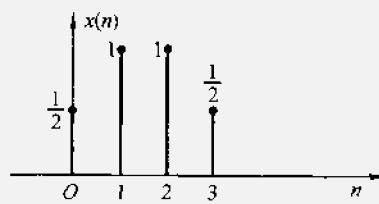
9-22 已知 $x(n) = R_N(n)$, 求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 利用所得到的结果验证帕塞瓦尔定理。

9-23 证明 DFT 的对称性质:

若 $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$ 则

$$\text{DFT}[X(n)] = N x((-k))_N R_N(n)$$

9-24 若 $x(n) = R_N(n)$ (矩形序列)



题图 9-17

- (1) 求 $\mathcal{X}[x(n)]$;
 (2) 求 DFT $[x(n)]$;
 (3) 求频响特性 $X(e^{j\omega})$, 作幅度特性曲线图。

9-25 设 $x(n)$ 为一有限长序列, 当 $n < 0$ 和 $n \geq N$ 时 $x(n) = 0$, 且 N 等于偶数。

已知 $DFT[x(n)] = X(k)$, 试利用 $X(k)$ 来表示以下各序列的 DFT:

$$(1) \quad x_1(n) = x(N-1-n);$$

$$(2) \quad x_2(n) = (-1)^n x(n);$$

$$(3) \quad x_3(n) = \begin{cases} x(n) & (0 \leq n \leq N-1) \\ x(n-N) & (N \leq n \leq 2N-1) \\ 0 & (n \text{ 为其他值}) \end{cases};$$

$$(4) \quad x_4(n) = \begin{cases} x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) & (0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1) \\ 0 & (n \text{ 为其他值}) \end{cases};$$

$$(5) \quad x_5(n) = \begin{cases} x(n) & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (N \leq n \leq 2N-1) \\ 0 & (n \text{ 为其他值}) \end{cases};$$

(DFT 有限长度取 $2N$, k 取偶数。)

$$(6) \quad x_6(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right) & (n \text{ 为偶数}) \\ 0 & (n \text{ 为奇数}) \end{cases};$$

(DFT 有限长度取 $2N$)

$$(7) \quad x_7(n) = x(2n) \quad (\text{DFT 有限长度取 } \frac{N}{2}).$$

9-26 库利-图基 FFT 算法也可解释为 $[W]$ 矩阵的分解简化, 例如 $N=4$ 可写出

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & -W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & -W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & -W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

试证明此矩阵表示式与式(9-76)一致。并指出此矩阵相乘的过程与前面哪一张 FFT 流程图相对应。

9-27 修改流程图 9-15, 仍要求 $N=8$, 但输入序列为自然顺序, 输出序列为码位倒读顺序。

9-28 同上题(9-27), 但输入、输出序列为自然顺序。这种算法有何缺陷。

9-29 画出 $N=16$ 的库利-图基 FFT 流程图, 输入序列表按码位倒读顺序排列, 输出为自然顺序排列。

9-30 推导按频率抽取 FFT 算法(桑德-图基算法)的表示式。先由定义写出 $X(k)$, 再将其中的 $x(n)$ 按前后两半分开(而不是奇、偶分开), 最后得到 $X(k)$ 按奇、偶分开的两部分:

$$X(k) = X(2r) + X(2r+1)$$

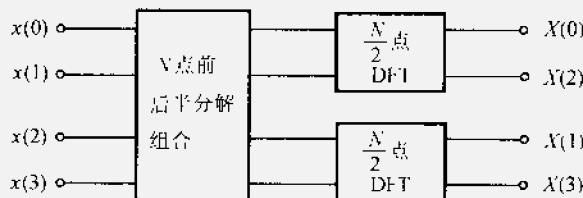
其中:

$$\begin{cases} X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} H(n) W_2^{nr} \\ X(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} G(n) W_2^{nr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ G(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] W_N^n \end{cases}$$

(其中 $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$)

9-31 $N=4$ 的桑德-图基算法方框图示如题图 9-31。试根据上题(9-30)导出的结果，将此方框图画为蝶形流程图。



题图 9-31

- 9-32** 将题 9-31 的结果修改为输出自然顺序、输入为码位倒读顺序的流程图。
- 9-33** 将题 9-31 的结果修改为输入、输出都按自然顺序排列的流程图。讨论(比较)以上三种桑德-图基 FFT 算法的优劣。
- 9-34** 有一 FFT 处理器，用来估算实数信号的频谱。要求指标：
- (1) 频率间的分辨力 $f_1 \leq 5 \text{ Hz}$;
 - (2) 信号的最高频率 $\leq 1.25 \text{ kHz}$;
 - (3) 点数 N 必须是 2 的整数次方。
- 试确定：
- (1) 记录长度 T_1 ;
 - (2) 抽样点间的时间间隔 T_s ;
 - (3) 一个记录过程的点数 N 。
- 9-35** 分别求下示二维数据的二维 DWT，并利用基础图分析、讨论所得变换数据之特点。

$$(1) \quad x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3) \quad x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- 9-36** 在 9.9 节给出了利用 DFT 计算 DCT 的方法，在该方法中，将 N 点的时间序列补零延拓至 $2N$ 点。另一种用 DFT 求 DCT 的方法是将 N 点序列延拓至 $4N$ 点(注意考虑如何补零)，试导出计算公式并说明这样做有何好处。

第十章 模拟与数字滤波器

10.1 引言

通过前面各章学习，已初步建立了对信号进行“滤波”的概念，并且认识到滤波器在信号传输与信号处理中的重要地位和作用。然而，这些讨论仅着重理想滤波器的模型、特性以及对简单系统进行频响特性分析，还没有涉及工程实际问题中有关滤波器的构成原理和设计方法。本章将在前几章的基础上进一步研究根据工程实际中提出的频响特性指标，如何确定满足要求的滤波器结构及其参数。

从系统的角度观察，下面将要讨论的滤波器都应当是可实现的线性时不变系统。如果利用模拟电路直接对模拟信号进行处理则构成“模拟滤波器”，它是一个连续时间系统。如果利用离散时间系统对数字信号(时域离散、幅度量化的信号)进行滤波则构成“数字滤波器”。

考虑到在本章中可能同时研究模拟与数字两种类型的滤波器，为避免符号混淆，以 $H_a(j\Omega)$ 表示模拟滤波器的系统函数，而以 $H(e^{j\omega})$ 或 $H_d(e^{j\omega})$ 表示数字滤波器的系统函数。

按照上述符号规律绘出模拟滤波器的方框图如图 10-1 所示，输入-输出信号的频域关系为 $R(j\Omega) = H_a(j\Omega) E(j\Omega)$ ，其中 $H_a(j\Omega) = |H_a(j\Omega)| e^{j\varphi_a(j\Omega)}$ 。

在实际应用中，往往借助数字滤波方法处理模拟信号，这时的原理框图如图 10-2 所示。图中，模拟信号 $x_a(t)$ 经限带滤波后再通过 A/D 变换完成抽样与量化，由此形成的数字信号经数字滤波器实现信号处理的要求，将处理后的数字信号经 D/A 变换和平滑滤波得到输出的模拟信号 $y_a(t)$ 。

与模拟滤波器相比较，数字滤波器在体积、重量、精度、稳定性、可靠性、存储功能、灵活性以及性能价格比等方面都显示明显的优点，而且，数字滤波器除利用硬件电路实现之外还可借助计算机以软件编程方式实现。正因为这些特点，在许多情况下，人们宁可利用图 10-2 的间接方式处理模拟信号，

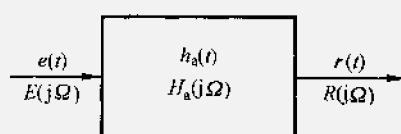


图 10-1 模拟滤波器示意图

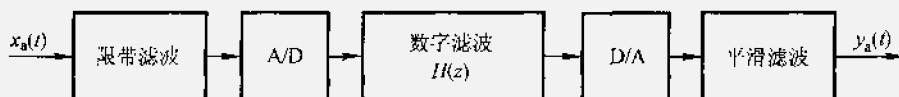


图 10-2 模拟信号的数字处理框图

而舍弃传统的模拟电路。随着数字技术的发展，模拟滤波器的应用领域已逐步减少，然而，在有些情况下模拟滤波器还有一定的应用场合（如工作频率在几十兆赫的中频通信电路），模拟与数字滤波器也可以混合应用（如图 10-2 中的带限滤波与平滑滤波还是模拟电路）。此外，数字滤波器的构成原理和设计方法往往要从模拟滤波器已经成熟的技术转换而来，因此，仍需适当学习模拟滤波器的基本概念。

按照从简单到复杂的认识规律，掌握滤波器设计原理的过程包括以下几个层次：

- (1) 从无源电路到有源电路；
- (2) 从一端口电路到二端口电路；
- (3) 从理想滤波器到实际可实现电路，在具体实现过程中利用“逼近”函数满足所需指标；
- (4) 从低通滤波到高通、带通和带阻滤波；
- (5) 从归一化参数值到实际参数值；
- (6) 从模拟滤波器到数字滤波器。

本章按照以上几个方面展开 10.2 节至 10.8 节的讨论，重点在 10.4、10.6 和 10.7 节。

除上述模拟与数字两大类型的滤波器之外，还有一种直接对离散时间信号（仅时间离散、未转换成数字信号）进行处理的滤波电路。其中，“开关电容滤波器”具有一定代表性，且近年来应用日趋广泛，10.9 节将介绍这种大规模集成电路滤波电路原理。

从 20 世纪初至今，在通信与电子系统中，滤波器的研究和应用历经了漫长、艰辛而曲折的道路。本书试图选择最需理解的基本知识和最具应用潜力的实现方法组成本章的内容，给出从滤波器原理到设计的初步概念，显然，许多具体、深入、丰富的内容还未涉及。此外，本章与前面许多章节有着密切联系，通过学习滤波器可对已学过的各章进行综合复习，初步体验如何把信号与系统的基本理论和方法付诸应用。

10.2 无源一端口模拟网络综合

如果给定系统的结构及其参数，求激励作用下系统的响应，这类问题称为系统分析，本书前面讨论的问题基本上属于系统分析问题。通常，无源模拟电路(由 R, L, C 和理想变压器组成)也称无源模拟网络，对此类系统的分析就称为无源模拟网络分析。

与网络分析问题相对应的是网络综合，这类问题是给出激励信号与响应，求满足此要求的具体网络结构及其参数，或者说给出网络的系统函数 $H_a(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$ ，求此网络。显然综合问题要比分析问题复杂和困难，而且得出的结果往往不是惟一的。

所谓一端口网络是指激励和响应在网络的同一端口上，它的系统函数称为策动点函数。如果网络是无源的，则策动点函数实际上是策动点阻抗函数： $Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$ 或策动点导纳函数： $Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$ 。这里不准备详尽讨论网络综合理论，仅就无源无损 LC 网络(图 10-3)举出综合方法的实例，为下一节滤波器(一端口网络)综合作准备。

对于 LC 一端口网络有两种综合方法，第一种称为福斯特(Foster)综合法，它的原理是对 $Z(s)$ 或 $Y(s)$ 表达式作部分分式展开，展开后的每一项对应非常简单的电路结构，经相加组合(对应串联或并联)即可实现所需网络结构(习题 10-7)。第二种称为考尔(Cauer)综合法，它的电路结构呈梯形网络，下面举例说明考尔综合法的实现原理。

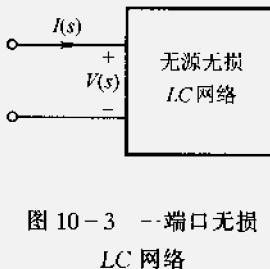


图 10-3 一端口无损
LC 网络

例 10-1 求图 10-4 所示网络的输入阻抗，其中串臂阻抗分别为 Z_1, Z_3, Z_5 ，并臂导纳为 Y_2, Y_4 ，负载电阻是 R_L 。

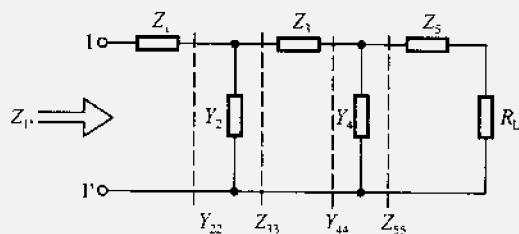


图 10-4 考尔梯形综合原理图

解 设各臂连接处向负载方向看去的阻抗或导纳如图 10-4 所标注的值，

可以写出：

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{55} = Z_5 + R_L \\ Y_{44} = Y_4 + \frac{1}{Z_{55}} \\ Z_{33} = Z_3 + \frac{1}{Y_{44}} \\ Y_{22} = Y_2 + \frac{1}{Z_{33}} \\ Z_{11} = Z_1 + \frac{1}{Y_{22}} \end{array} \right.$$

最后得到利用连分式表示的输入阻抗函数

$$Z_{11} = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + R_L}}}} \quad (10-1)$$

这一表示式就是考尔型一端口 LC 梯形网络实现的基础。

例 10-2 给定一端口网络输入阻抗 $Z(s)$ 为

$$Z(s) = \frac{3s^3 + 6s^2 + 6s + 3}{2s^2 + 4s + 3}$$

试将 $Z(s)$ 写作连分式形式，并综合为梯形结构。

解 将 $Z(s)$ 的分子多项式与分母多项式辗转相除

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}s \\ \hline 2s^2 + 4s + 3 \sqrt{3s^3 + 6s^2 + 6s + 3} \\ \frac{3s^2 + 6s^2 + \frac{9}{2}s}{\frac{3}{2}s + 3} \quad \frac{\frac{4}{3}s}{2s^2 + 4s + 3} \\ \frac{2s^2 + 4s + 3}{2s^2 + 4s} \quad \frac{\frac{1}{2}s + 1}{3} \quad \frac{\frac{3}{2}s + 3}{\frac{3}{2}s + 3} \\ \frac{2s^2 + 4s}{2s^2 + 4s} \quad \frac{0}{\frac{3}{2}s + 3} \end{array}$$

这样 $Z(s)$ 可表示为

$$Z(s) = \frac{3}{2}s + \frac{1}{\frac{4}{3}s + \frac{1}{\frac{1}{2}s + 1}}$$

实现此 $Z(s)$ 函数的梯形网络结构如图 10-5 所示。这种实现结构称为考尔 I 型结构，它适于网络极点是 $s = \infty$ 的情况，也就是分子多项式比分母多项式阶

次高的策动点函数。

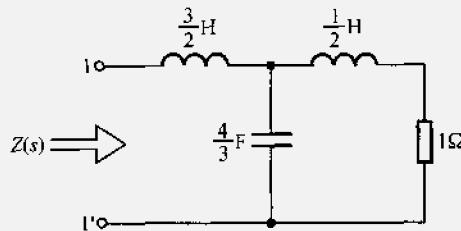


图 10-5 $Z(s)$ 的考尔 I 型实现

例 10-3 给定一端口网络导纳函数

$$Y(s) = \frac{33s^4 + 56s^2 + 12}{12s^5 + 38s^3 + 12s}$$

试将 $Y(s)$ 表示成连分形式，并综合为梯形结构。

解 本题与例 10-4 的区别在于分母是关于 s 的奇次多项式，而且 $s=0$ 是 $Y(s)$ 的极点，辗转相除时改用升幂排列，得到如下的 $Y(s)$ 表达式

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{2}{3s} + \frac{1}{\frac{3}{4s} + \frac{1}{\frac{2}{s} + \frac{1}{s}}}}$$

画出实现此 $Y(s)$ 函数的梯形结构如图 10-6 所示。这种实现称为考尔 II 型结构

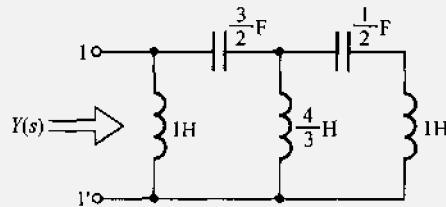


图 10-6 $Y(s)$ 的考尔 II 型实现

必须指出，并不是所有可实现的 $Z(s)$ 或 $Y(s)$ 都能用连分式表示，例如对于有互感的网络就没有对应的梯形结构实现。

在研究网络综合问题时必须注意到“可实现性”问题，也即对给定的 $H_a(s)$ ，并非都可实现相应的电路。下面首先从系统稳定性的要求考虑这一问题。

一般情况下系统函数表达式为：

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (10-2)$$

其中分子、分母多项式系数都为正实系数。如果系统是稳定的，则分母多项式 $A(s)$ 满足下列特性：

- (1) 所有零点(即系统函数极点)在 s 平面的左半开平面内；
- (2) 如果有零点在 $j\Omega$ 轴上，则是单阶的。

为叙述方便，把具备这两条件的 $A(s)$ 统称为霍尔维茨(Hurwitz)多项式。若必须区分二者，将具备特性(1)的 $A(s)$ 称为严格的霍尔维茨多项式，同时具备这两条件的正实系数多项式称为广义霍尔维茨多项式。如果系统是稳定的，它的必要条件是分母必须是霍尔维茨多项式。

对稳定系统 $H_a(s)$ 的另一限制是分子、分母多项式的阶次，当 $s \rightarrow \infty$ ，式(10-2)近似为

$$H_a(s)|_{s \rightarrow \infty} \approx \frac{b_m s^m}{a_n s^n} = \frac{b_m}{a_n} s^{m-n} \quad (10-3)$$

若 $m > n$ ，则 $s = \infty$ 是 $H_a(s)$ 的极点，其阶次是 $(m - n)$ ，由于 $j\Omega$ 轴延伸至无限远处， $s = \infty$ 这一点可以认为位于 $j\Omega$ 轴上，因而按稳定条件， $j\Omega$ 轴上的极点只能是单阶的，所以 $(m - n)$ 最多等于 1，亦即稳定系统的系统函数 $H_a(s)$ 分子的阶次比分母阶次最多只能高一次。同理由于 $s = 0$ 也在虚轴上，因此 $H_a(s)$ 分母的最低阶次与分子最低阶次之差也不能超过一次。

如果 $H_a(s)$ 是策动点阻抗或导纳函数，由于它们互为倒数，因此 $H_a(s)$ 的分子和分母多项式都必须是霍尔维茨多项式，而且阶数之差不能超过 1 次。因而策动点函数是两个霍尔维茨多项式之比的有理函数。

上面从系统稳定性角度对一般系统函数和策动点函数提出了满足稳定性的条件。对一端口无源网络的可实现性还应该有“无源性”要求，它体现在网络函数表示式上，对所有 Ω ，有 $\text{Re}[H_a(j\Omega)] \geq 0$ 。这是由于在正弦稳态情况，若输入电流有效值为 $|I|$ ，则送入网络的功率为 $P = |I|^2 \text{Re}[H_a(j\Omega)]$ ，无源网络自身并不产生功率，因而有 $P \geq 0$ ，也即 $\text{Re}[H_a(j\Omega)] \geq 0$ (等号适用于无损 LC 网络)。

以上讨论了一端口无源网络策动点函数的一些性质，了解这些性质对于正确认识网络函数的特点是有益的，但这还不是可实现的充分与必要条件。

1931 年布隆(Brune)给出了可实现策动点函数的充要条件(此处略去证明)：

$$\begin{cases} (1) \text{ 当 } s \text{ 为实数时 } (\Omega = 0), H_a(s) \text{ 是实数;} \\ (2) \text{ 若 } \text{Re}[s] \geq 0, \text{ 则 } \text{Re}[H_a(s)] \geq 0; \end{cases} \quad (10-4)$$

满足这两条件的函数称为“正实函数”。其中条件(1)(实部分)用视察法容易验证，只要 $H_a(s)$ 的系数是实系数；而条件(2)(正部分)检验比较困难，但它可以用下列变更的等效条件来检验：

- (1) $H_a(s)$ 的分母是霍尔维茨多项式；
 (2) $H_a(s)$ 在虚轴上的极点是单阶的，并且具有正实留数；
 (3) 对所有 Ω , 有 $\operatorname{Re}[H_a(j\Omega)] \geq 0$

用(10-5)条件来检验“正部分”，其方便之处是只要求对 $H_a(j\Omega)$ 在 $j\Omega$ 轴上进行检验，免去对右半平面的逐点检验。

条件(10-4)表示的正实函数还具有下列性质：

- (1) 若 $H_a(s)$ 是正实函数，则 $\frac{1}{H_a(s)}$ 也是一个正实函数；
 (2) 几个正实函数之和仍为正实函数(但两个正实函数之差不一定是正实函数)。

容易看出，电阻 R 、感抗 sL 和容抗 $\frac{1}{sC}$ 都是正实函数，因而由这些元件串、并联后得到的阻抗或导纳函数都是正实的，即无源线性网络 $H_a(s)$ 必定是正实函数。反之，正实函数才是无源线性网络的可实现网络函数。

10.3 无源二端口模拟网络综合

一般滤波器都是二端口网络。典型 LC 无损二端口网络如图 10-7 所示，其中 R_S 和 R_L 分别为信号源内阻和负载电阻，这种电路也称为达林顿(Darlington)电路结构(由 S. Darlington 于 1939 年提出)。达林顿电路可以是端接源电阻 R_S ，而负载电阻 $R_L = 0$ ；也可以是端接 R_L ，而 $R_S = 0$ ；一般情况如图 10-7 所示，我们仅局限于两端都接电阻的电路综合。

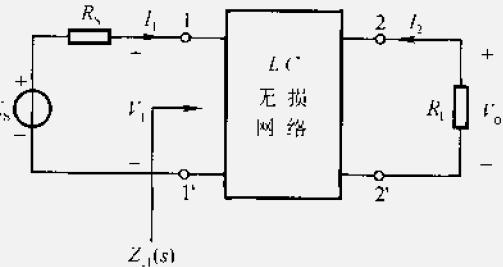


图 10-7 达林顿电路结构

早在 20 世纪 20 年代已经形成了 LC 滤波器的设计方法，该方法称为“影像参数法”，它的特点是方法简单，但各方面性能缺陷较大，目前已很少采用，本书不予讨论。

这里将要介绍的综合方法称为“插入衰减法”或“工作参数法”(也可简称“综合设计法”)。这种方法针对达林顿电路结构分两步完成设计工作：第一步按给定的频率响应特性寻求一种可实现的有理函数 $H_a(s)$ ，使它满足设计要求，这类问题称为“逼近”(approximation)。通常，频响特性的要求可借助频域容差图描述，标明所需滤波器与理想滤波器的容许误差。以低通为例，此种

容差图如图 10-8 所示。图中，通带内允许 $|H_a(j\Omega)|$ 与理想值偏差 δ_1 ；阻带衰减不为零，容许不超过 δ_2 ；在频率 Ω_p 与 Ω_s 之间为过渡带，由通带到阻带之间逐渐过渡。 $|H_a(j\Omega)|$ 曲线应落在此容许误差范围之内。第二步由选定的 $H_a(s)$ 实现二端口网络的电路结构和参数值(或简称二端口网络的综合)。本节只讨论第二个问题的原理，而将前一个问题，也即逼近理论和计算留在下节专门研究。

从下面的分析将要看到，二端口网络的综合原理是以一端口网络综合原理为基础的，或者说，要把达林顿电路结构的设计转化为一个一端口网络的实现问题。

对图 10-7 所示电路结构，滤波器插在负载电阻 R_L 和内阻为 R_S 的信源之间，因而工作时，其功率传输会由于滤波器的插入而产生衰减，这一衰减用工作传输函数 $K(j\Omega)$ 描述。若信号源的可用功率(即信号源能给出的最大功率)为

$$P_m = \frac{1}{2} \left(\frac{|E_S|^2}{4R_S} \right) \quad (10-6)$$

插入滤波器后，负载上实际得到的功率为

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_o|^2}{R_L} \quad (10-7)$$

将上述两者的比值定义为工作传输函数，表示为：

$$|K(j\Omega)|^2 = \frac{P_L}{P_m} = \frac{4R_S}{R_L} \left| \frac{V_o(j\Omega)}{E_S(j\Omega)} \right|^2 \quad (10-8)$$

其中把滤波器的系统函数定义为

$$H_a(j\Omega) = \frac{V_o(j\Omega)}{E_S(j\Omega)} \quad (10-9)$$

对于有损网络， $|K(j\Omega)|^2 < 1$ ，无损网络可以达到 1，因而 $|K(j\Omega)|^2 \leq 1$ 。

由于所讨论的电路是无源 LC 网络，因而系统总是稳定的，这样可以把 $K(j\Omega)$ 或 $H_a(j\Omega)$ 延拓为 $K(s)$ 或 $H_a(s)$ 。由式(10-8)可见， $K(s)$ 与 $H_a(s)$ 的零、极点分布规律相同，亦即这里定义的工作传输函数 $K(s)$ 将具有一般的网络函数性质。

由于工作传输函数 $K(j\Omega)$ 是频率的函数，反映了系统的频率特性，因而在频率特性阻带处将有极大的衰减，即大量的功率被反射回激励源，由此可以定

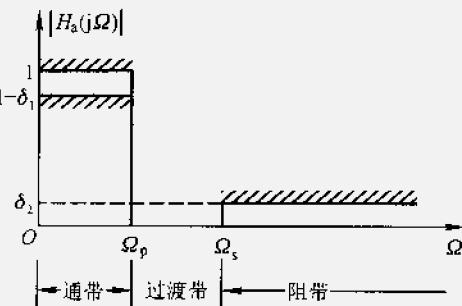


图 10-8 低通滤波器设计频域容差图

义一个反射系数 $\rho(j\Omega)$:

$$|\rho(j\Omega)|^2 = \frac{P_m - P_L}{P_m} = 1 - |K(j\Omega)|^2 \quad (10-10)$$

这是反射回激励源功率大小的衡量标准。

设图 10-7 所示电路端口 11' 的输入阻抗为 $Z_{11}(s)$, 则加到此端口的输入功率 P_1 在通带内等于负载 R_L 上得到的功率 P_L , 即

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Z_{11}(j\Omega)] |I_1(j\Omega)|^2 = P_L = \frac{|V_o(j\Omega)|^2}{2R_L} \\ &\quad \left| \frac{V_o(j\Omega)}{I_1(j\Omega)} \right|^2 = R_L \cdot \operatorname{Re}[Z_{11}(j\Omega)] \end{aligned} \quad (10-11)$$

由式(10-9)

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \left| \frac{V_o(j\Omega)}{E_s(j\Omega)} \right|^2 = \left| \frac{V_o(j\Omega)}{I_1(j\Omega)} \right|^2 \cdot \left| \frac{I_1(j\Omega)}{E_s(j\Omega)} \right|^2$$

考虑式(10-11), 及 $\frac{E_s(j\Omega)}{I_1(j\Omega)} = R_S + Z_{11}(j\Omega)$, 代入上式有

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{R_L \cdot \operatorname{Re}[Z_{11}(j\Omega)]}{|R_S + Z_{11}(j\Omega)|^2}$$

由式(10-10)和式(10-8)

$$\begin{aligned} |\rho(j\Omega)|^2 &= 1 - |K(j\Omega)|^2 = 1 - \frac{4R_S}{R_L} |H_a(j\Omega)|^2 \\ &= 1 - \frac{4R_S}{R_L} \frac{R_L \cdot \operatorname{Re}[Z_{11}(j\Omega)]}{|R_S + Z_{11}(j\Omega)|^2} \\ &= \frac{(R_S + \operatorname{Re}[Z_{11}(j\Omega)])^2 + (\operatorname{Im}[Z_{11}(j\Omega)])^2 - 4R_S \operatorname{Re}[Z_{11}(j\Omega)]}{|R_S + Z_{11}(j\Omega)|^2} \\ &= \frac{|Z_{11}(j\Omega) - R_S|^2}{|Z_{11}(j\Omega) + R_S|^2} \end{aligned}$$

对于实因果系统, 上式可以延拓为

$$\rho(j\Omega) \rho^*(j\Omega)|_{j\Omega=s} = \rho(j\Omega) \rho(-j\Omega)|_{j\Omega=-s} = \rho(s) \rho(-s)$$

因而有

$$\rho(s) \rho(-s) = 1 - \frac{4R_S}{R_L} H_a(s) H_a(-s) = \frac{Z_{11}(s) - R_S}{Z_{11}(s) + R_S} \frac{Z_{11}(-s) - R_S}{Z_{11}(-s) + R_S} \quad (10-12)$$

满足上式的反射系数 $\rho(s)$ 与 $Z_{11}(s)$ 的关系

$$\rho(s) = \pm \frac{Z_{11}(s) - R_S}{Z_{11}(s) + R_S} \quad (10-13)$$

解得

$$Z_{11}(s) = R_s \frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)} \quad (10-14)$$

通过上面演算把转移函数 $H_a(s)$ 的实现问题转化为式(10-14)表示的策动点阻抗函数 $Z_{11}(s)$ 的实现。由达林顿电路结构可以看出, $Z_{11}(s)$ 是无损 LC 滤波网络与负载电阻 R_L 共同组成的一端口输入阻抗, 它满足一端口策动点阻抗函数的正实性, 可以用一端口网络综合法实现它的具体电路。

例 10-4 给定由信号源到负载的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{k}{s^2 + 3s + 3}$$

若信源内阻 $R_s = 1 \Omega$, 端接负载电阻 R_L 分别为: (1) $R_L = 1 \Omega$; (2) $R_L = 2 \Omega$ 。试用无损 LC 二端口网络实现此系统。

解 由给定的 $H_a(s)$, 系统的传输零点位于 $s = \infty$ 处。在 $s = 0$ 时有

$$H_a(0) = \frac{k}{3} = \frac{R_L}{R_s + R_L}$$

(1) 当 $R_L = 1 \Omega$, 此时 $k = \frac{3}{2}$, 代入式(10-12)

$$\begin{aligned} \rho(s)\rho(-s) &= 1 - 4 \cdot \frac{\frac{3}{2}}{s^2 + 3s + 3} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{s^2 - 3s + 3} \\ &= \frac{s^4 - 3s^2}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 - 3s + 3)} \\ &= \frac{s(s + \sqrt{3})}{s^2 + 3s + 3} \cdot \frac{-s(-s + \sqrt{3})}{s^2 - 3s + 3} \end{aligned}$$

从 $\rho(s)\rho(-s)$ 零、极点分布可以看出, 为使所得结果满足最小相位函数的条件, 选择式中第一项作为 $\rho(s)$, 于是写出

$$\rho(s) = \frac{s(s + \sqrt{3})}{s^2 + 3s + 3}$$

按式(10-14)可实现的策动点阻抗函数有两个:

$$\begin{aligned} Z_{11}(s) &= \frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)} = \frac{2s^2 + (3 + \sqrt{3})s + 3}{(3 - \sqrt{3})s + 3} \\ Z'_{11}(s) &= \frac{1}{Z_{11}(s)} = \frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} = \frac{(3 - \sqrt{3})s + 3}{2s^2 + (3 + \sqrt{3})s + 3} \end{aligned}$$

对 $Z_{11}(s)$ 和 $Z'_{11}(s)$ 分别用考尔 I 型结构实现得:

$$\begin{aligned} Z_{11}(s) &= 1.577s + \frac{1}{0.423s + 1} \\ Z'_{11}(s) &= \frac{1}{Z_{11}(s)} = \frac{1}{1.577s + \frac{1}{0.423s + 1}} \end{aligned}$$

实现的电路图如图 10-9 所示。

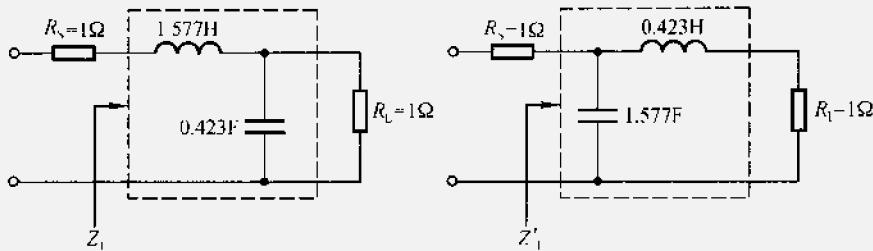


图 10-9 $R_L = 1 \Omega$ 时 $H_a(s)$ 的实现

(2) 当 $R_L = 2$, 此时 $k = 2$, 由式(10-12)得

$$\begin{aligned}\rho(s)\rho(-s) &= 1 - \frac{4}{2} \left(\frac{2}{s^2 + 3s + 3} \right) \cdot \left(\frac{2}{s^2 - 3s + 3} \right) \\ &= \frac{s^4 - 3s^2 + 1}{(s^2 + 3s + 3)(s^2 - 3s + 3)} \\ &= \left(\frac{s^2 + \sqrt{5}s + 1}{s^2 + 3s + 3} \right) \left(\frac{s^2 - \sqrt{5}s + 1}{s^2 - 3s + 3} \right)\end{aligned}$$

求得最小相位解

$$\rho(s) = \frac{s^2 + \sqrt{5}s + 1}{s^2 + 3s + 3}$$

按式(10-14)得:

$$Z_{11}(s) = \frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)} = \frac{2s^2 + (3 + \sqrt{5})s + 4}{(3 - \sqrt{5})s + 2}$$

$$Z'_{11}(s) = \frac{1}{Z_{11}(s)} = \frac{(3 - \sqrt{5})s + 2}{2s^2 + (3 + \sqrt{5})s + 4}$$

在这两种可能实现中, 只有 $Z_{11}(s)$ 是满足要求的, 而 $Z'_{11}(s)$ 不满足题给条件,

因为当 $s = 0$ 时, $Z_{11}(0) = 2$, $Z'_{11}(0) = \frac{1}{2}$ 。

对 $Z_{11}(s)$ 用连分式展开

$$Z_{11}(s) = 2.618s + \frac{1}{0.191s + \frac{1}{2}}$$

实现的电路如图 10-10 所示。

可见, 在利用这种方法综合时, 若 R_L 值有某种特定要求, 有可能只获得一个合理的 $Z_{11}(s)$ 值, 不能同时实现两类电路结构。此外, 若 $\rho(s)\rho(-s)$ 在 $j\Omega$ 轴上

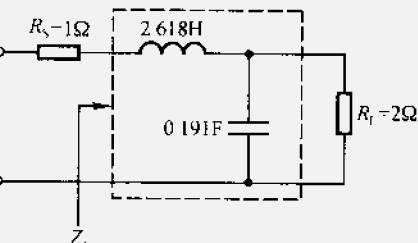


图 10-10 $R_L = 2 \Omega$ 时 $H_a(s)$ 的实现

零点不为偶阶重零点时，则无法从中分离出 $\rho(s)$ ，因而也不能完成综合实现。

参照系统函数 $H_a(s)$ 一般表达式(10-2)，可以看出，在上述讨论中选择的实例相当于 $H_a(s)$ 分子多项式 $m=0$ 的情况，即分子只有常系数项。此时， $H_a(s)$ 全部零点位于 $s=\infty$ 处，因此称为“全极点滤波器”，且频响具有低通特性。一般情况下，滤波器设计理论中只着重研究低通的综合，很少直接讨论高通、带通、带阻滤波器的综合（习题 10-9 是高通综合例子），而是借助“频率变换”与“元件变换”技术来实现低通以外各种滤波电路（见 10.5 节）。

10.4 模拟滤波器的逼近

本节讨论 10.3 节提出的二端口网络综合两步工作中的第一步，即“逼近”问题。并利用逼近方法和前节所述第二步的有关内容给出模拟滤波器设计的完整实例。

这里将要介绍的逼近原理虽然是针对模拟滤波器讲述的，然而，对于数字滤波器设计也需应用（在 10.6 节将要看到）。

前文已述，所谓逼近就是要按给定的频响特性选择适当的 $H_a(s)$ ，以满足容差要求。经过长期的研究与实践，人们已经选定了若干种典型的 $H_a(s)$ 函数，可以很好地适应不同特点频响特性的要求，因而在一般情况下并不需要滤波器设计者重新建立 $H_a(s)$ 函数式。

这些工作的理论分析在 20 世纪 30 年代末就已完成，然而，烦琐、冗长的数字计算使它难以付诸实用。到 50 年代，由于计算机技术的逐步成熟，求出了大量设计参数和图表，这种方法才得到广泛应用。设计者只要根据给定的容差要求，查索相应的图表，即可得到符合要求的滤波器电路结构及元件参数。在下面的讨论中读者将感受到这种方法的特色。

对于典型的可实现 $H_a(s)$ 函数，往往是先给定 $|H_a(j\Omega)|^2$ ，由此寻找 $H_a(s)$ ，下面先解决这一问题，然后分别介绍两种目前应用最广的典型 $H_a(s)$ 逼近函数。

(一) 给定频率特性模平方 $|H_a(j\Omega)|^2$ ，求系统函数 $H_a(s)$

待求的 $H_a(s)$ 应满足系统稳定性要求，而且希望 $h_a(t)=\mathcal{L}^{-1}[H_a(s)]$ 是 t 的实函数，这样 $H_a(j\Omega)$ 具有共轭对称性， $H_a(j\Omega)=H_a^*(-j\Omega)$ ，由此得

$$\begin{aligned} |H_a(j\Omega)|^2|_{j\Omega=s} &= H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega)|_{j\Omega=s} \\ &= H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega)|_{j\Omega=s} \\ &= H_a(s)H_a(-s) \end{aligned} \quad (10-15)$$

这表明 $H_a(s)$ 的零、极点分布对 $j\Omega$ 轴呈镜像对称分布，如图 10-11 所

示。考虑到 $H_a(s)$ 的分子、分母多项式都是 s 的实系数多项式，因此复数的零、极点必定呈共轭分布，即对实轴也呈对称分布。在这些零、极点中，有一半属于 $H_a(s)$ ，另一半则属于 $H_a(-s)$ 。如果要求系统稳定，则左半平面的极点属于 $H_a(s)$ 。在挑选零点时，若不加任何限制条件，则满足 $|H_a(j\Omega)|^2$ 解的 $H_a(s)$ 就是多个。如果限定 $H_a(s)$ 是最小相位的，则只能取所有左半平面的零、极点作为 $H_a(s)$ 的零、极点，这样 $H_a(s)$ 的解就是唯一的。

若 $H_a(s)H_a(-s)$ 有零点在 $j\Omega$ 轴上，则按正实性要求，在 $j\Omega$ 轴上的零点必须是偶阶重零点。在这种情况下，只要把 $j\Omega$ 轴上的零点阶数减半分配给 $H_a(s)$ 即可。

例 10-5 给定滤波特性的模平方

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{k^2(1-\Omega^2)^2}{(4+\Omega^2)(9+\Omega^2)}$$

求具有最小相位特性的系统函数 $H_a(s)$ 。

解 按式(10-15)代入 $\Omega = \frac{s}{j}$

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{k^2(1+s^2)^2}{(4-s^2)(9-s^2)} = \frac{k^2(s^2+1)^2}{(s+2)(-s+2)(s+3)(-s+3)}$$

上式在虚轴上有一对重零点，位于 $\pm j$ （二阶重零点），因而 $H_a(s)$ 可以作为可实现滤波器的系统函数，取左半平面的极点及 $j\Omega$ 轴上一对共轭零点，得 $H_a(s)$ 的最小相位解

$$H_a(s) = \frac{s^2+1}{(s+2)(s+3)}k = k \frac{s^2+1}{s^2+5s+6}$$

其中 k 可以根据实现时负载情况定出。

(二) 最平响应特性滤波器——巴特沃思(Butterworth)滤波器

巴特沃思滤波器是最基本的逼近函数形式之一。它的幅频特性模平方为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}} \right)^2 \quad (10-16)$$

式中 N 是滤波器的阶数； Ω_c 是滤波器的截止角频率，当 $\Omega = \Omega_c$ 时， $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{2}$ ，所以 Ω_c 是滤波器的电压 -3 dB 点或称半功率点。

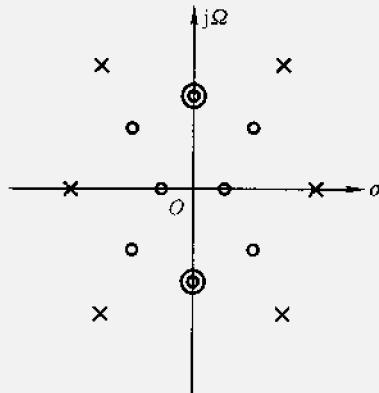


图 10-11 可实现
 $H_a(s)H_a(-s)$ 零、极点分布

不同阶次 N 的巴特沃思滤波特性如图 10-12 所示, 这一幅频特性具有下列特点:

(1) 最大平坦性: 可以证明: 在 $\Omega = 0$ 点, 它的前 $(2N - 1)$ 阶导数都等于零, 这表示巴特沃思滤波器在 $\Omega = 0$ 附近一段范围内是非常平直的, 它以原点的最大平坦性来逼近理想低通滤波器, “最平响应”即由此而得名。

(2) 通带、阻带下降的单调性。这种滤波器具有良好的相频特性。

(3) 3 dB 的不变性: 随着 N 的增加, 频带边缘下降越陡峭, 越接近理想特性。但不管 N 是多少, 幅频特性都通过 -3 dB 点。当 $\Omega > \Omega_c$ 时, 特性以 $20N$ dB/dec 速度下降。

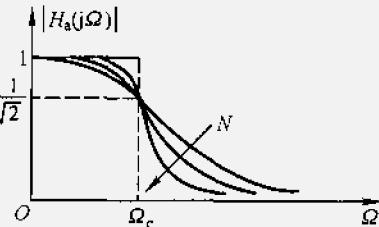


图 10-12 巴特沃思
滤波器幅频特性

现在根据式(10-16)求巴特沃思滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 。令 $\Omega = \frac{s}{j}$, 代入式(10-16)

$$|H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\frac{s}{j}} = H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N}}$$

对应的极点:

$$\begin{aligned} s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N} &= 0 \\ s_k &= j\Omega_c(-1)^{\frac{1}{2N}} = \Omega_c e^{j[\frac{1}{2N}(2k-1)\pi + \frac{\pi}{2}]} \quad (10-17) \\ k &= 1, 2, \dots, 2N \end{aligned}$$

s_k 即为 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点, 此极点分布有下列特点:

(1) $H_a(s)H_a(-s)$ 的 $2N$ 个极点以 $\frac{\pi}{N}$ 为间隔均匀分布在半径为 Ω_c 的圆周上, 这个圆称为巴特沃思圆。

(2) 所有极点以 $j\Omega$ 轴为对称轴成对称分布, $j\Omega$ 轴上没有极点。

(3) 当 N 为奇数时, 有两个极点分布在 $s = \pm \Omega_c$ 的实轴上; N 为偶数时, 实轴上没有极点。所有复数极点两两呈共轭对称分布。图 10-13 画出了 $N=3$ 和 $N=4$ 时的 $H_a(s)H_a(-s)$ 极点分布。全部零点位于 $s = \infty$ 处。

为得到稳定的 $H_a(s)$, 取全部左半平面的极点

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} \quad (10-18)$$

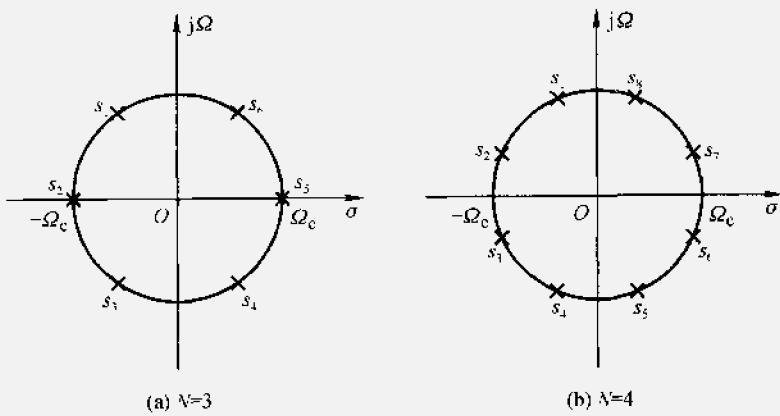


图 10-13 巴特沃思滤波器极点分布

当 N 为偶数时

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)(s - s_k^*)} = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N [s^2 - 2\Omega_c \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi + \frac{\pi}{2}\right)s + \Omega_c^2]} \quad (10-19)$$

N 为奇数时

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^2 \left[(s + \Omega_c)^2 - 2\Omega_c \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi + \frac{\pi}{2}\right)s + \Omega_c^2 \right]} \quad (10-20)$$

为使用方便把式(10-19)和式(10-20)对 Ω_c 进行归一化处理, 为此, 分子分

母各除以 Ω_c^N , 并令 $s' = \frac{s}{\Omega_c}$, s' 称为归一化复频率:

$$H_a(s') = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left[(s')^2 - 2\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi + \frac{\pi}{2}\right)s' + 1 \right]} \quad (N \text{ 为偶数}) \quad (10-21)$$

$$H_n(s') = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (s'+1) \left[(s')^2 - 2\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi + \frac{\pi}{2}\right)s' + 1 \right]} \quad (N \text{ 为奇数})$$

(10-22)

把式(10-21)和式(10-22)的分母多项式展开，并制成相应的表格如表10-1所示。这一多项式称为巴特沃思多项式，显然它是霍尔维茨多项式。

表 10-1 巴特沃思多项式表

N	$B_N(s') = a_N(s')^N + a_{N-1}(s')^{N-1} + \dots + a_1 s' + a_0$
1	$s' + 1$
2	$(s')^2 + \sqrt{2}s' + 1$
3	$(s')^3 + 2(s')^2 + 2s' + 1$
4	$(s')^4 + 2.6131(s')^3 + 3.4142(s')^2 + 2.6131s' + 1$
5	$(s')^5 + 3.2361(s')^4 + 5.2361(s')^3 + 5.2361(s')^2 + 3.2361s' + 1$
6	$(s')^6 + 3.8637(s')^5 + 7.4641(s')^4 + 9.1416(s')^3 + 7.4641(s')^2 + 3.8637s' + 1$
7	$(s')^7 + 4.4940(s')^6 + 10.0978(s')^5 + 14.5918(s')^4 + 14.5918(s')^3 + 10.0978(s')^2 + 4.4940s' + 1$

用归一化频率 $\Omega' = \frac{\Omega}{\Omega_c}$ 表示的频率特性称为原型滤波特性 (Ω' 即归一化复频率 s' 的虚部)。对式(10-16)所示的低通巴特沃思滤波特性用 Ω' 表示得到:

$$|H_a(j\Omega')| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega')^{2N}}} \quad (10-23)$$

称 $|H_a(j\Omega')|$ 为巴特沃思低通原型滤波器幅频特性。在低通原型滤波频率特性上, 截止频率 $\Omega'_c = 1$ 。

例 10-6 给定模拟滤波器技术指标(参看图 10-14):

通带内允许起伏: -1 dB $0 \leq \Omega \leq 2\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$

阻带衰减: $\leq -15 \text{ dB}$ $\Omega \geq 2\pi \times 2 \times 10^4 \text{ rad/s}$

求用巴特沃思滤波器实现时所需阶数 N 、截止角频率 Ω_c 和 $H_a(s)$ 表示式。

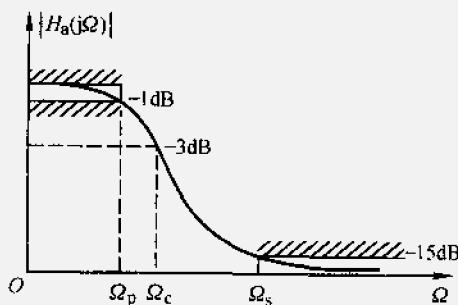


图 10-14 例 10-6 巴特沃思滤波器设计

解 (1)求阶数 N , 参看图 10-14, 由给定的条件写出 $|H_a(j\Omega)|$ 在 Ω_p 和 Ω_s 两特定点的方程式 (-1 dB 对应 $10^{-\frac{1}{20}}$, -15 dB 对应 $10^{-\frac{15}{20}}$), 由此联立方程求解 N 和 Ω_c :

$$\begin{cases} |H_a(j\Omega_p)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi \times 10^4}{\Omega_c}\right)^{2N}}} = 10^{-\frac{1}{20}} \\ |H_a(j\Omega_s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi \times 2 \times 10^4}{\Omega_c}\right)^{2N}}} = 10^{-\frac{15}{20}} \\ \lg\left(\frac{10^{\frac{15}{20}} - 1}{10^{\frac{1}{20}} - 1}\right) \\ N = \frac{2\lg\left(\frac{2\pi \times 2 \times 10^4}{2\pi \times 10^4}\right)}{2\lg\left(\frac{10^{\frac{15}{20}} - 1}{10^{\frac{1}{20}} - 1}\right)} = 3.443 \end{cases}$$

取整后得要求的阶数 $N=4$ 。

(2) 求 -3 dB 截止角频率 Ω_c , 以 $N=4$ 代入 $|H_a(j\Omega_s)|$ 表达式得到

$$\begin{aligned} |H_a(j\Omega_s)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi \times 2 \times 10^4}{\Omega_c}\right)^{2 \times 4}}} = 10^{-\frac{15}{20}} \\ \Omega_c &= \frac{2\pi \times 2 \times 10^4}{\sqrt[8]{\frac{15}{10^{\frac{15}{20}} - 1}}} \text{ rad/s} = 2\pi \times 1.304 \times 10^4 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

按 $N=4$ 设计的结果, 其通带实际特性优于给定之指标。

(3) 求滤波器系统函数 $H_a(s)$ 。由表 10-1 查到 $N=4$ 的巴特沃思多项式

$B_N(s')$, 即可写出 $H_a(s')$, 再经解归一化, 即令 $\frac{s}{\Omega_c} = s'$ 代入 $H_a(s')$ 后得到

$$H_a(s) = \frac{4.506 \times 10^{19}}{s^4 + 2.14 \times 10^5 s^3 + 2.292 \times 10^{10} s^2 + 1.437 \times 10^{15} s + 4.506 \times 10^{19}}$$

现在讨论电路实现。由于 N 阶巴特沃思滤波器分母多项式是霍尔维茨多项式, 并且 $H_a(s)$ 全部传输零点在 $s=\infty$ 处, 因而可以用图 10-7 所示达林顿电路结构实现。一般情况电路都是在匹配情况下工作, 所以取信源内阻 R_S 和负载电阻 R_L 相等。此时满足

$$H_a(j0) = \frac{R_L}{R_S + R_L} = \frac{1}{2}$$

根据式(10-12)有

$$\begin{aligned} \rho(s')\rho(-s') &= 1 - \frac{4R_S}{R_L} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{s'}{1}\right)^{2N}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{-s'}{j}\right)^{2N}}} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + (-1)^N (s')^{2N}} = \frac{(s')^N (-s')^N}{B_N(s') B_N(-s')} \end{aligned}$$

其中 $B_N(s')$ 是表 10-1 所列的巴特沃思多项式。

由上式得到归一化的反射系数

$$\rho(s') = \frac{(s')^N}{B_N(s')} \quad (10-24)$$

用达林顿电路实现时，策动点阻抗函数 $Z_{11}(s')$ 可表示为

$$Z_{11}(s') = R_S \frac{1 \pm \rho(s')}{1 \mp \rho(s')} = R_S \frac{B_N(s') \pm (s')^N}{B_N(s') \mp (s')^N} \quad (10-25)$$

上式表示具有巴特沃思滤波特性的电路有两种可能的综合形式：

$$Z_{11}(s') = R_S \frac{B_N(s') + (s')^N}{B_N(s') - (s')^N} \quad (10-26)$$

和

$$Z'_{11}(s') = R_S \frac{B_N(s') - (s')^N}{B_N(s') + (s')^N} \quad (10-27)$$

例 10-7 试求 $N=4$ 的巴特沃思滤波器的具体电路。

解 为简化计算，把策动点阻抗函数 $Z_{11}(s')$ 对信源内阻归一化，式(10-25)表示为

$$\frac{Z_{11}(s')}{R_S} = \frac{B_N(s') \pm (s')^N}{B_N(s') \mp (s')^N}$$

其中

$$B_N(s') = B_4(s') = (s')^4 + 2.613 1(s')^3 + 3.414 2(s')^2 + 2.613 1s' + 1$$

第一种实现：

$$\begin{aligned} \frac{Z_{11}(s')}{R_S} &= \frac{B_4(s') + (s')^4}{B_4(s') - (s')^4} \\ &= \frac{2(s')^4 + 2.613 1(s')^3 + 3.414 2(s')^2 + 2.613 1s' + 1}{2.613 1(s')^3 + 3.414 2(s')^2 + 2.613 1s' + 1} \end{aligned}$$

展开成连分式表示

$$\begin{aligned} \frac{Z_{11}(s')}{R_S} &= 0.765 4s' + \frac{1}{1.847 8s' + \frac{1}{1.847 8s' + \frac{1}{0.765 4s' + 1}}} \\ &= L'_1 s' + \frac{1}{C'_2 s' + \frac{1}{L'_3 s' + \frac{1}{C'_4 s' + 1}}} \end{aligned}$$

其中 L'_1, C'_2, L'_3, C'_4 为归一化电感、电容值，其实现电路如图 10-15 所示。此电路中的元件值都是对频率和内阻归一化的，称为“低通原型滤波器”。

第二种实现：

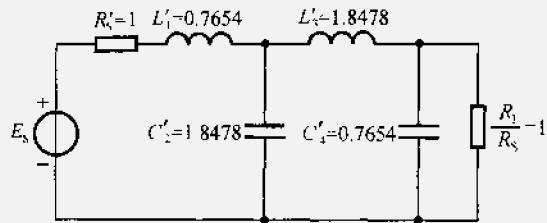


图 10-15 $N=4$ 阶巴特沃思低通原型
滤波器实现(T型实现)

$$\begin{aligned}\frac{Z_{11}(s')}{R_s} &= \frac{B_4(s') - (s')^4}{B_4(s') + (s')^4} \\ &= \frac{2.6131(s')^3 + 3.4142(s')^2 + 2.6131s' + 1}{2(s')^4 + 2.6131(s')^3 + 3.4142(s')^2 + 2.6131s' + 1}\end{aligned}$$

展开成连分式表示

$$\begin{aligned}\frac{Z_{11}(s')}{R_s} &= \frac{1}{0.7654s' + \frac{1}{1.8478s' + \frac{1}{1.8478s' + \frac{1}{0.7654s' + 1}}}} \\ &= \frac{1}{C_1's' + \frac{1}{L_2's' + \frac{1}{C_3's' + \frac{1}{L_4's' + 1}}}}\end{aligned}$$

实现的电路如图 10-16 所示。

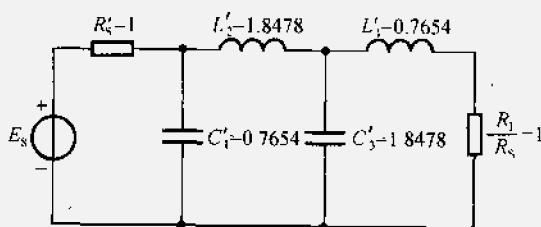


图 10-16 $N=4$ 阶巴特沃思低通原型
滤波器实现(H型实现)

按照本例综合方法，工程上已经把不同 N 对应的归一化低通元件值做成如表 10-2 所示的表格(同时参看图 10-17)，以备设计时查索。

在实际实现电路时，需要把原型滤波器的元件值去归一化。以例 10-7 第一种电路实现为例，先对 R_s 去归一化

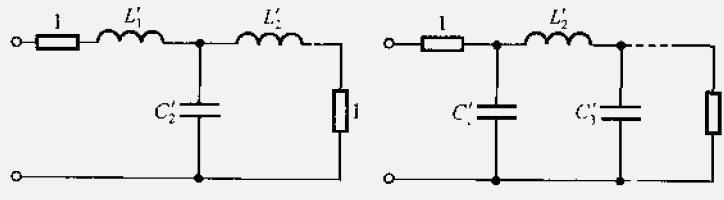
$$Z_{11}(s') = L'_1 R_S s' + \frac{1}{\frac{C'_2}{R_S} s' + \frac{1}{L'_3 R_S s' + \frac{1}{\frac{C'_4}{R_S} s' + \frac{1}{R_S}}}} \quad (10-28)$$

表 10-2 巴特沃思低通原型滤波器归一化元件值表

N	L'_1	C'_2	L'_3	C'_4	L'_5	C'_6	L'_7
1	2.000 0						
2	1.414 2	1.414 2					
3	1.000 0	2.000 0	1.000 0				
4	0.765 4	1.847 8	1.847 8	0.765 4			
5	0.618 0	1.618 0	2.000 0	1.618 0	0.618 0		
6	0.517 6	1.414 2	1.931 9	1.931 9	1.414 2	0.517 6	
7	0.445 0	1.247 0	1.801 9	2.000 0	1.801 9	1.247 0	0.445 0
N	C'_1	L'_2	C'_3	L'_4	C'_5	L'_6	C'_7

注: (1) 表中首行元件号对应电路图 10-17(a), 称为 T型结构实现。

(2) 表中末行元件号对应电路图 10-17(b), 称为 II型结构实现。



(a) T型实现

(b) II型实现

图 10-17 对应表 10-2 巴特沃思低通原型滤波器两种实现

再对频率去归一化, 用 $s' = \frac{s}{\Omega_c}$ 代入式(10-28)得

$$Z_{11}(s) = \frac{L'_1 R_S s}{\Omega_c} + \frac{1}{\frac{C'_2}{R_S \Omega_c} s + \frac{1}{L'_3 R_S s + \frac{1}{\Omega_c}}} \quad (10-29)$$

$$\frac{1}{\frac{C'_4}{R_S \Omega_c} s + \frac{1}{R_S}}$$

从式(10-29)可以得出去归一化实际电感、电容值可由下式求出

$$\begin{cases} L = \frac{R_S}{\Omega_c} L' \\ C = \frac{1}{\Omega_c R_S} C' \end{cases} \quad (10-30)$$

例 10-8 求例 10-6 设计的巴特沃思滤波器的具体实现电路, 设 $R_S = R_L = 600 \Omega$ 。

解 例 10-6 已经求得滤波器阶数 $N=4$, 且求得截止角频率 $\Omega_c = 2\pi \times 1.304 \times 10^4 \text{ rad/s}$, 由原型电路图 10-15 对各元件去归一化:

$$L_1 = \frac{R_s}{\Omega_c} L'_1 = \frac{600}{2\pi \times 1.304 \times 10^4} \times 0.7654 \text{ H} = 5.61 \text{ mH}$$

$$C_2 = \frac{1}{\Omega_c R_s} C'_2 = \frac{1}{2\pi \times 1.304 \times 10^4 \times 600} \times 1.8478 \text{ F} = 0.038 \mu\text{F}$$

$$L_3 = \frac{R_s}{\Omega_c} L'_3 = \frac{600}{2\pi \times 1.304 \times 10^4} \times 1.8478 \text{ H} = 13.53 \text{ mH}$$

$$C_4 = \frac{1}{\Omega_c R_s} C'_4 = \frac{1}{2\pi \times 1.304 \times 10^4 \times 600} \times 0.7654 \text{ F} = 0.016 \mu\text{F}$$

具体电路实现如图 10-18。

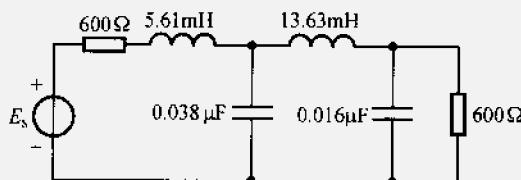


图 10-18 例 10-6 的具体实现电路

(三) 通带等波纹滤波器——切比雪夫(I型)滤波器

用巴特沃思滤波特性对理想低通滤波器逼近时, 在通带内误差分布是不均匀的, 靠近频带边缘误差最大。下面将要介绍的通带等波纹滤波器逼近原则是使通带内误差分布均匀。这种滤波器的幅频特性模平方为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_N^2(\frac{\Omega}{\Omega_c})}} \right]^2 \quad (10-31)$$

式中 ϵ 是决定通带内起伏大小的波纹参数, $T_N(x)$ 是第一类切比雪夫多项式, 定义为

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \arccos x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \operatorname{arcosh} x) & |x| > 1 \end{cases} \quad (10-32)$$

表 10-3 列出了对应不同阶次 N 时的切比雪夫多项式 $T_N(x)$ 。图 10-19 画出了 $T_1(x)-T_4(x)$ 多项式特性曲线, 从这组特性曲线可以看出: $|x| \leq 1$ 时, $T_N(x)$ 在 ± 1 之间波动; N 不论为何值都有 $T_N(1)=1$; 当 $x > 1$, $T_N(x)$ 单调上升。此外切比雪夫多项式满足下列递推公式

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), N=1,2,\dots \quad (10-33)$$

图 10-20(a)是按式(10-31)画出的切比雪夫等波纹滤波器的幅频特性, 图 10-20(b)是通带内起伏与 $T_N(\Omega')$ 的关系。

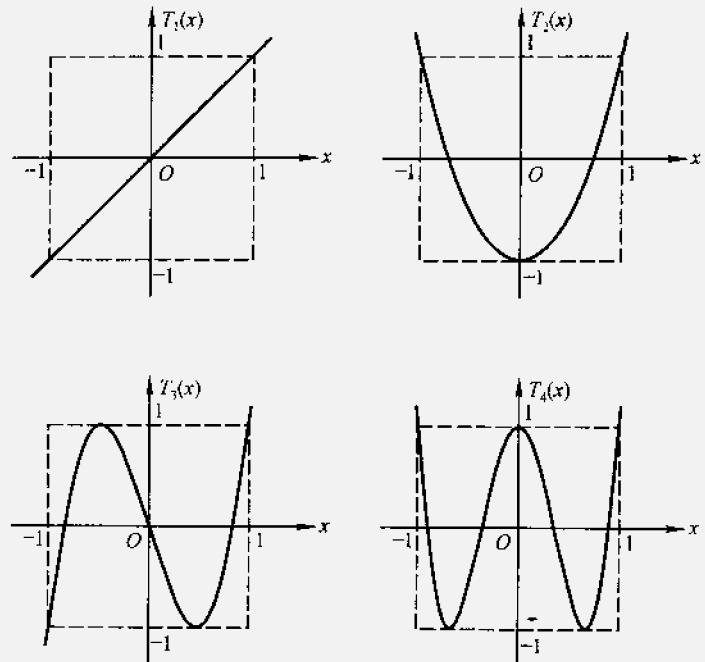
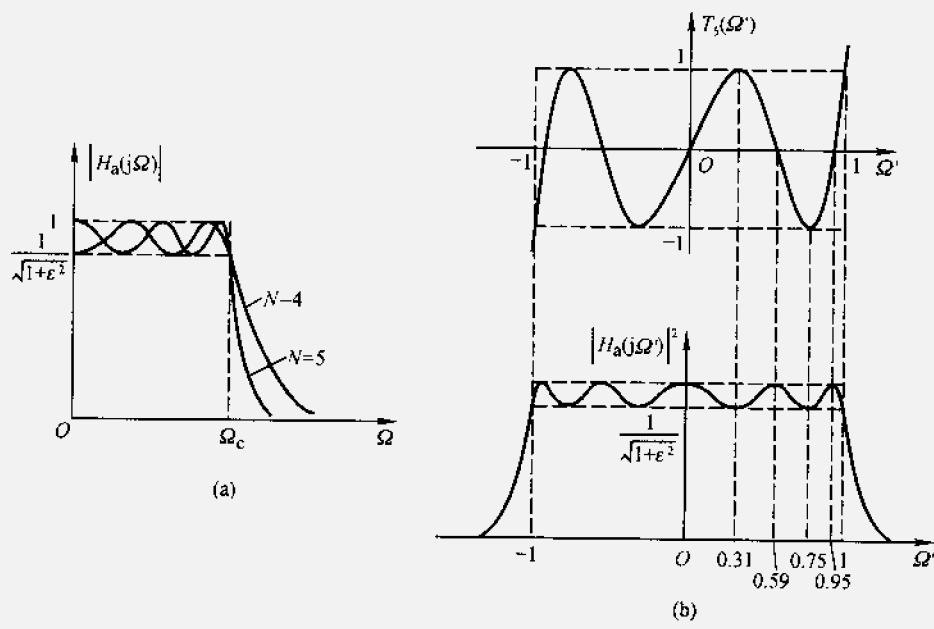
图 10-19 $T_1(x)$ ~ $T_4(x)$ 切比雪夫特性曲线图 10-20 切比雪夫滤波特性及通带内波纹与 $T_N(\Omega')$ 关系

表 10-3 $N=0 \sim 7$ 时切比雪夫多项式 $T_N(x)$

N	$T_N(x)$	N	$T_N(x)$
0	1	4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
1	x	5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
2	$2x^2 - 1$	6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$	7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

切比雪夫滤波器的滤波特性具有下列特点：

- (1) 所有曲线在 $\Omega = \Omega_c$ 时通过 $\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$ 点，因而把 Ω_c 定义为切比雪夫滤波器的截止角频率。
- (2) 在通带内 $\left| \frac{\Omega}{\Omega_c} \right| \leq 1$, $|H_a(j\Omega)|$ 在 1 和 $\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$ 之间变化；在通带外， $\left| \frac{\Omega}{\Omega_c} \right| > 1$, 特性呈单调下降，下降速度为 $20N$ dB/dec。
- (3) N 为奇数， $H_a(j0) = 1$; N 为偶数， $H_a(j0) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$ 。通带内误差分布是均匀的，实际上这种逼近称为最佳一致逼近。因此通带等波纹滤波器是在通带内以最大误差最小化对理想低通滤波器的最佳一致逼近。
- (4) 由于滤波器通带内有起伏，因而使通带内的相频特性也有相应的起伏波动，即相位是非线性的，这给信号传输时带来线性畸变，所以在要求群时延为常数时不宜采用这种滤波器。

通常称这种通带内具有等波纹特性，阻带为单调下降的滤波特性为切比雪夫 I 型；若通带特性为单调变化，阻带内呈等波纹变化则称切比雪夫 II 型；若通带和阻带都呈现等波纹变化则称为椭圆滤波器。这里只介绍切比雪夫 I 型滤波器，并简称为切比雪夫滤波器。

与巴特沃思滤波器类似，根据式(10-31)求切比雪夫滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 。将 $\Omega = \frac{s}{j}$ 代入式(10-31)

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)} \quad (10-34)$$

为求极点分布需求解方程：

$$1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right) = 0$$

或 $T_N\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right) = \pm j \frac{1}{\epsilon} \quad (10-35)$

考虑到 $\frac{s}{j\Omega_c}$ 是复变量，为解出切比雪夫多项式，设：

$$\begin{aligned}\frac{s}{j\Omega_c} &= \cos \theta = \cos(\alpha + j\beta) = \cos \alpha \cosh \beta - j \sin \alpha \sinh \beta \\ s &= \Omega_c \sin \alpha \sinh \beta + j \Omega_c \cos \alpha \cosh \beta = \sigma + j\Omega \quad (10-36)\end{aligned}$$

另把 $\frac{s}{j\Omega_c} = \cos \theta$ 代入式(10-32)^①, 并且令此式等于 $\pm j \frac{1}{\epsilon}$, 求解 α, β :

$$\begin{aligned}T_N\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right) &= \cos\left(N \arccos \frac{s}{j\Omega_c}\right) = \cos(N\theta) \\ &= \cos(N\alpha) \cosh(N\beta) - j \sin(N\alpha) \sinh(N\beta) = \pm j \frac{1}{\epsilon}\end{aligned}$$

得

$$\begin{cases} \cos(N\alpha) \cosh(N\beta) = 0 \\ \sin(N\alpha) \sinh(N\beta) = \pm \frac{1}{\epsilon} \end{cases} \quad (10-37)$$

解得满足上式的 α, β 为

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2k-1}{N} \times \frac{\pi}{2}, k = 1, 2, \dots, 2N \\ \beta = \pm \frac{1}{N} \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \end{cases} \quad (10-38)$$

把 α, β 值代回式(10-36), 求得极点值

$$\begin{aligned}s_k &= \sigma_k + j\Omega_k = -\Omega_c \sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \sinh\left(\frac{1}{N} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\epsilon}\right) \\ &\quad + j\Omega_c \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \cosh\left(\frac{1}{N} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\epsilon}\right) \\ &\quad k = 1, 2, \dots, 2N, \quad (10-39)\end{aligned}$$

s_k 就是切比雪夫滤波器 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点, 给定 N, Ω_c, ϵ 即可求得 $2N$ 个极点分布。由式(10-39)实部与虚部的正弦和余弦函数平方约束关系可以看出, 此极点分布满足

$$\frac{\sigma_k^2}{\Omega_c^2 \sinh^2\left(\frac{1}{N} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\epsilon}\right)} + \frac{\Omega_k^2}{\Omega_c^2 \cosh^2\left(\frac{1}{N} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\epsilon}\right)} = 1 \quad (10-40)$$

这是一个椭圆方程, 其短轴和长轴分别为

$$\begin{cases} a = \Omega_c \sinh\left(\frac{1}{N} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\epsilon}\right) \\ b = \Omega_c \cosh\left(\frac{1}{N} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\epsilon}\right) \end{cases} \quad (10-41)$$

图 10-21 画出了 $N=3$ 和 $N=4$ 时切比雪夫滤波器的极点分布。极点所

① 式(10-32)由两个式子组成, 代入其中任一式子都可得到以下结果。

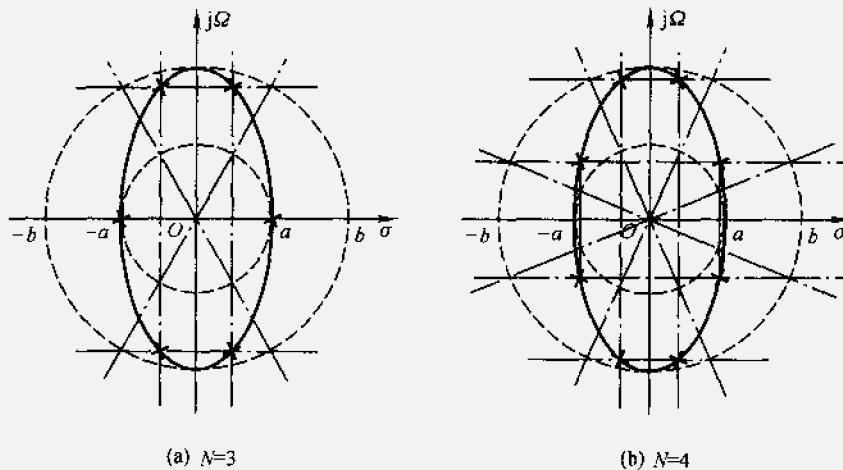


图 10-21 切比雪夫滤波器极点分布

在的椭圆可以和半径为 a 的圆和半径为 b 的圆联系起来，这两个圆分别称为巴特沃思小圆和巴特沃思大圆。 N 阶切比雪夫滤波器极点的纵坐标($j\Omega_k$)等于 N 阶巴特沃思大圆极点的纵坐标，而横坐标(σ_k)等于 N 阶巴特沃思小圆极点的横坐标。

取左半平面的极点

$$\begin{cases} \sigma_k = - \left[\Omega_c \sinh \left(\frac{1}{N} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\epsilon} \right) \right] \sin \left(\frac{2k-1}{2N} \pi \right) = -a \sin \left(\frac{2k-1}{2N} \pi \right) \\ \Omega_k = \left[\Omega_c \cosh \left(\frac{1}{N} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\epsilon} \right) \right] \cos \left(\frac{2k-1}{2N} \pi \right) = b \cos \left(\frac{2k-1}{2N} \pi \right) \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (10-42)$$

则切比雪夫滤波器的系统函数

$$H_a(s) = \frac{A}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} \quad (10-43)$$

其中 $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$ 。这里需要确定常数 A ，由式(10-31)

$$H_a(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{s}{j\Omega_c} \right)}} = \frac{A}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}$$

考虑到 $T_N \left(\frac{s}{j\Omega_c} \right)$ 是 $\left(\frac{s}{j\Omega_c} \right)$ 的多项式，最高阶次系数是 2^{N-1} ，因此常数 A 满足

$$A = \frac{\Omega_c^N}{\epsilon \cdot 2^{N-1}} \quad (10-44)$$

因此切比雪夫滤波器的系统函数表示为

$$H_a(s) = \frac{\frac{\Omega_c^N}{\epsilon \cdot 2^{N-1}}}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} \quad (10-45)$$

切比雪夫滤波器的截止角频率 Ω_c 不是像巴特沃思滤波器中所规定的(-3 dB)处角频率, 而是通带边缘的频率。若波纹参数满足 $\frac{1}{1+\epsilon^2} > 0.5$, 可以求得 -3 dB 处的角频率为

$$\Omega_{(-3 \text{ dB})} = \Omega_c \cosh \left(\frac{1}{N} \operatorname{arccosh} \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (10-46)$$

和巴特沃思滤波器一样, 若将式(10-45)表示的 $H_a(s)$ 对 Ω_c 归一化, 就得到切比雪夫 I 型低通原型滤波器的系统函数

$$H_a(s') = \frac{\frac{1}{\epsilon \cdot 2^{N-1}}}{\prod_{k=1}^N (s' - p_k)} = \frac{\frac{1}{\epsilon \cdot 2^{N-1}}}{(s')^N + a_{N-1} (s')^{N-1} + \dots + a_1 s' + a_0} \quad (10-47)$$

对不同的 N , 式(10-47)的分母多项式已制成如表 10-4 所示的表格, 供设计参考。由于波纹参数 ϵ 不同, 这种表格有很多种, 这里只列出通带起伏为 1 dB 时分母多项式与 N 的关系。

表 10-4 切比雪夫 I 型低通原型滤波器分母多项式
(1 dB 波纹, $\epsilon = 0.5088471$)

N	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1.965 2						
2	1.102 5	1.097 7					
3	0.491 3	1.238 4	0.988 3				
4	0.275 6	0.742 6	1.453 9	0.952 8			
5	0.122 8	0.580 5	0.974 4	1.688 8	0.936 8		
6	0.068 9	0.307 1	0.939 3	1.202 1	1.930 8	0.928 3	
7	0.030 7	0.213 7	0.548 6	1.357 5	1.428 8	2.176 1	0.923 1

例 10-9 设计并实现满足下列技术指标的切比雪夫 I 型低通滤波器:

通带允许起伏: -1 dB $0 \leq \Omega \leq 2\pi \times 10^4$ rad/s

阻带衰减: ≤ -15 dB $\Omega \geq 2\pi \times 2 \times 10^4$ rad/s

信源内阻和负载电阻相等: $R_S = R_L = 600 \Omega$

解 (1)求波纹起伏参数 ϵ :

$$|H_a(j\Omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} = 10^{-\frac{1}{20}}$$

解得

$$\epsilon = 0.50885$$

(2) 求阶数 N : 通带边缘角频率 $\Omega_c = 2\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$, 阻带边缘角频率 $\Omega_s = 2\pi \times 2 \times 10^4 \text{ rad/s}$, 按衰减要求有:

$$|H_a(j\Omega_s)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2} T_N^2 \left(\frac{2\pi \times 2 \times 10^4}{2\pi \times 10^4} \right)} = 10^{-\frac{15}{20}}$$

$$T_N(2) = \cosh(N \operatorname{arccosh} 2) = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{10^{10} - 1} = 10.8751$$

求得

$$N = \frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\epsilon} \sqrt{10^{10} - 1} \right)}{\operatorname{arccosh} 2} = 2.34$$

取 $N = 3$ 。

(3) 求 $H_a(s)$

按本题要求, 即 1 dB 波纹、 $N = 3$, 查表 10-4, 同时利用式(10-44)求得分子 A 值, 得出归一化的切比雪夫逼近函数 $H_a(s')$

$$H_a(s') = \frac{0.4913}{(s')^3 + 0.9883(s')^2 + 1.2384s' + 0.4913}$$

令 $\frac{s}{\Omega_c} = s'$ 代入去归一化求得

$$H_a(s) = \frac{1.2187 \times 10^{14}}{s^3 + 6.2104 \times 10^4 s^2 + 4.8893 \times 10^9 s + 1.2187 \times 10^{14}}$$

(4) 由 $H_a(s)$ 实现电路

这里的实现原理与巴特沃思滤波器相同, 将归一化系统函数 $H_a(s')$ 代入式(10-12)求反射系数 $\rho(s')$ 与 $\rho(-s')$ 之乘积。按给定条件, 在 $s=0$ 的低通情况下应有

$$H_a(0) = \frac{R_L}{R_L + R_S} = \frac{1}{2}$$

于是求得

$$\begin{aligned} \rho(s')\rho(-s') &= 1 - \frac{4R_S}{R_L} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 0.4913^2 \times \\ &\quad \{[(s')^3 + 0.9883(s')^2 + 1.2384s' + 0.4913] \times \\ &\quad [-(s')^3 + 0.9883(s')^2 - 1.2384s' + 0.4913]\}^{-1} \end{aligned}$$

$$\rho(s') = \frac{(s')^3 + 0.7500s'}{(s')^3 + 0.9883(s')^2 + 1.2384s' + 0.4913}$$

策动点阻抗函数的两种可能实现为:

$$\frac{Z_{11}(s')}{R_S} = \frac{1 + \rho(s')}{1 - \rho(s')} = \frac{2(s')^3 + 0.9883(s')^2 + 1.9884s' + 0.4913}{0.9883(s')^2 + 0.4884s' + 0.4913}$$

$$\frac{Z'_{11}(s')}{R_S} = \frac{1 - \rho(s')}{1 + \rho(s')} = \frac{0.9883(s')^2 + 0.4884s' + 0.4913}{2(s')^3 + 0.9883(s')^2 + 1.9884s' + 0.4913}$$

展开成连分式表示：

$$\frac{Z_{11}(s')}{R_S} = 2.0236s' + \frac{1}{0.9941s' + \frac{1}{2.0236s' + 1}}$$

$$-\frac{Z'_{11}(s')}{R_S} = \frac{1}{2.0236s' + \frac{1}{0.9941s' + \frac{1}{2.0236s' + 1}}}$$

对 $R_S = 600 \Omega$ 和 $\Omega_c = 2\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$ 去归一化得：

$$Z_{11}(s) = 2.0236R_S\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + \frac{1}{R_S\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + \frac{1}{2.0236R_S\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + R_S}}$$

$$= 19.32 \times 10^{-3}s + \frac{1}{0.026 \times 10^{-6}s + \frac{1}{19.32 \times 10^{-3}s + 600}}$$

$$Z'_{11}(s) = \frac{1}{R_S\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + \frac{1}{0.9941R_S\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + \frac{1}{2.0236\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + \frac{1}{R_S}}}}$$

$$= \frac{1}{0.054 \times 10^{-6}s + \frac{1}{9.49 \times 10^{-3}s + \frac{1}{0.054 \times 10^{-6}s + \frac{1}{600}}}}$$

实现的电路如图 10-22 (a) 和 (b)。

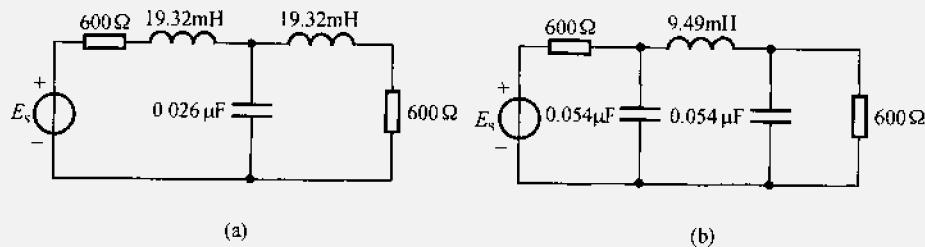


图 10-22 例 10-14 切比雪夫滤波器的两种实现

为设计方便对低通原型电路实现的元件值已制成如表 10-5 所示的表格(同时参看图 10-23), 表中是不同阶次 N , 在通带内起伏波纹为 1 dB 时两种实现的归一化元件值。当 $N = \text{偶数}$ 时, 在 $\Omega = 0$ 系统函数值为 $|H_a(j0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$, 因而用达林顿电路结构实现时 R_L 不再等于信源内阻 R_S , 表 10-5 中

$N = \text{偶数}$ 时, 归一化负载电阻选为 $\frac{R_L}{R_S} = 0.25$ 。

表 10-5 切比雪夫 I 型低通原型滤波器归一化元件值(1dB 波纹)

N	R_L/R_S	L'_1	C'_2	L'_3	C'_4	L'_5	C'_6	L'_7
1	1.00	1.0177						
2	0.25	3.7779	0.3001					
3	1.00	2.0236	0.9941	2.0236				
4	0.25	4.5699	0.5428	5.3680	0.3406			
5	1.00	2.1349	1.0911	3.0009	1.0911	2.1349		
6	0.25	4.7366	0.5716	6.0240	0.5764	5.5353	0.3486	
7	1.00	2.1666	1.1115	3.0936	1.1735	3.0936	1.1115	2.1666
N	R_L/R_S	C'_1	L'_2	C'_3	L'_4	C'_5	L'_6	C'_7

注: (1)表中首行元件号对应电路图 10-23(a), 并只适用于 $N = \text{奇数}$ 情况。

(2)表中末行元件号对应电路图 10-23(b), 对 $N = \text{奇数}$ 和 $N = \text{偶数}$ 均可实现。

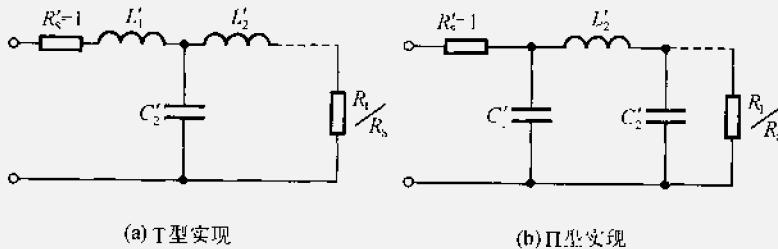


图 10-23 对应表 10-5 切比雪夫低通原型滤波器两种实现

以上讨论的两种逼近函数都是从满足设计者幅频特性要求给出的, 在工程应用中按此种要求建立的逼近函数还有切比雪夫 II 型(阻带内等波纹、通带内单调变化)和椭圆函数型(通带、阻带都为等波纹)等逼近方式。此外, 还可从相频特性的要求寻找逼近函数, 如逼近线性相位(最平群时延特性)的贝塞尔滤波器以及为补偿系统非线性相移而引出的各种均衡器等。限于篇幅, 本书不作介绍。

10.5 模拟滤波器的频率变换与元件变换

在工程实际中, 设计高通、带通、带阻滤波器的常用方法是借助对应的低通原型滤波器, 经频率变换和元件变换得到, 图 10-24 示意给出了设计流程。

下面将依次说明图中各步骤工作原理。

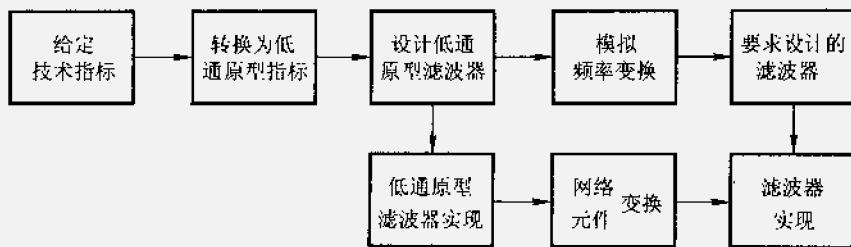


图 10-24 模拟滤波器设计流程图

(一) 低通到高通的变换

按图 10-24 流程, 为寻求相应的低通原型, 用高通滤波器截止角频率 Ω_c , 对 $H_a(j\Omega)$ 进行归一化, 得到归一化的高通系统函数 $H_a(j\lambda)$, 如图 10-25 所示, 归一化频率为 $\lambda = \frac{\Omega}{\Omega_r} = \frac{\Omega}{\Omega_s}$, 这里的 Ω_r 为参考角频率, 且选 $\Omega_r = \Omega_c$ 。因而

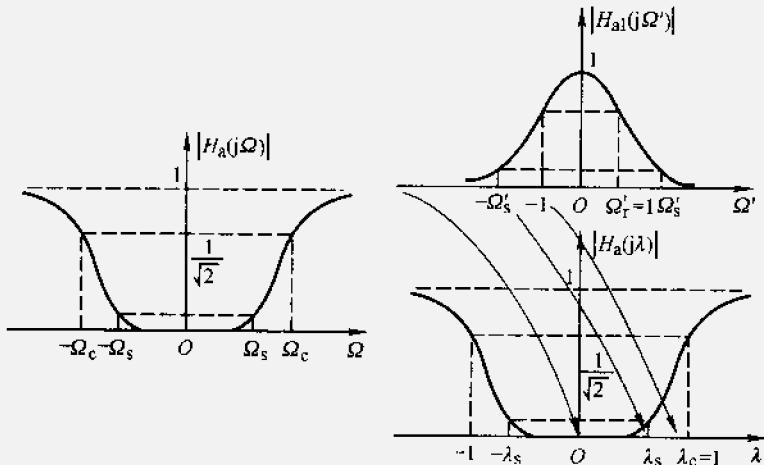


图 10-25 低通原型到高通的转换

在 λ 坐标中, $\lambda_r = \frac{\Omega_r}{\Omega_s} = 1$, 即截止角频率 $\lambda_c = \lambda_r = 1$ 。从图 10-25 可以看出低通到高通的转换, 对应频率特性呈现倒数关系, 因而取

$$\left(\frac{s}{\Omega_r}\right) = \frac{1}{s'} \quad (10-48)$$

当 s 为虚数时 ($s = j\Omega$), s' 也为虚数 ($s' = j\Omega'$), 即实频率仍变换为实频率, 满足: $j\lambda = \frac{1}{j\Omega'}$, 所以高通归一化频率 λ 与归一化低通频率 Ω' 关系为

$$\lambda \cdot \Omega' = -1 \quad (10-49)$$

表 10-6 列出了这一对应关系。

表 10-6 高通—低通归一化频率关系

归一化低通原型 Ω'	归一化高通频率 λ
0	$\pm\infty$
$\Omega'_r = 1$	$\lambda_r = -1$
Ω'_s	$-\frac{1}{\lambda_s}$
$\pm\infty$	0
$\pm\Omega'$	$\mp\frac{1}{\lambda}$

按式(10-49)就可以把高通滤波器技术指标转换为相应的低通原型滤波器技术指标。设计低通原型滤波器得到系统函数 $H_{al}(s')$, 按式(10-48)即可求得要求设计的高通滤波器系统函数 $H_a(s) = H_{al}\left(\frac{\Omega_r}{s}\right)$ 。至此已完成了图 10-24 上面一排的流程设计, 到达右上角的框图。可由此 $H_a(s)$ 按 10.3 节的方法实现高通滤波器, 然而这种方法并不方便。工程实际中往往按图 10-24 下面的流程实现电路, 借助低通原型电路经元件变换得到高通滤波器。此方法简便易行。下面给出这种方法的变换公式。

对于电感: 低通原型中的感抗 $L's'$ 经式(10-48)变换后得到

$$L's' = L'\left(\frac{\Omega_r}{s}\right) = \frac{1}{\frac{1}{L'\Omega_r}s} \quad (10-50)$$

可见, 原电感变换为电容, 对应的电容值为

$$C = \frac{1}{L'\Omega_r} \quad (10-51)$$

同理对于电容有

$$\frac{1}{C's'} = \frac{1}{C'\Omega_r} \cdot s \quad (10-52)$$

即原电容变换为电感, 对应的电感值

$$L = \frac{1}{C'\Omega_r} \quad (10-53)$$

通过式(10-51)和式(10-53)对低通原型电路中元件作相应变换即可实现要求的高通滤波器。

例 10-10 给定高通滤波器的技术指标(参看图 10-26)

通带内起伏: -1 dB , $2\pi \times 1.5 \times 10^4 \text{ rad/s} \leq \Omega < \infty$

阻带衰减: $\leq -15 \text{ dB}$, $0 \leq \Omega \leq 2\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$

用巴特沃思滤波形式实现，求该滤波器的 $H_a(s)$ 及其电路实现(设 $R_S = R_L = 600 \Omega$)。

解 (1)求高通滤波器的归一化各频率：

取参考频率 Ω_r 为3 dB处的截止角频率 Ω_c ，但技术指标中没有给出，因而作为未知参数待定，求得归一化各频率

$$\begin{cases} \lambda_p = \frac{\Omega_p}{\Omega_c} = \frac{1}{\Omega_c} (2\pi \times 1.5 \times 10^4) \\ \lambda_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_c} = \frac{1}{\Omega_c} (2\pi \times 10^4) \\ \lambda_r = \lambda_c = \frac{\Omega_c}{\Omega_c} = 1 \end{cases}$$

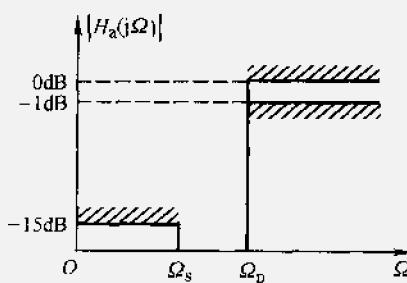


图 10-26 例 10-10 要求设计
高通滤波特性

(2) 求低通原型滤波器频率及对应指标

$$\begin{cases} \Omega'_p = -\frac{1}{\lambda_p} = -\frac{\Omega_c}{2\pi \times 1.5 \times 10^4} \\ \Omega'_s = -\frac{1}{\lambda_s} = -\frac{\Omega_c}{2\pi \times 10^4} \\ \Omega'_c = 1 \end{cases}$$

因而有：

$$|H_{al}(j\Omega'_p)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_c}{2\pi \times 1.5 \times 10^4}\right)^{2N}}} = 10^{-\frac{1}{20}}$$

$$|H_{al}(j\Omega'_s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_c}{2\pi \times 10^4}\right)^{2N}}} = 10^{-\frac{15}{20}}$$

(3) 求低通原型系统函数 $H_{al}(s')$

确定滤波器阶数 N ，由(2)得

$$N = \frac{\lg\left(\frac{10^{1.5}-1}{10^{0.1}-1}\right)}{2 \times \lg\left(\frac{2\pi \times 1.5 \times 10^4}{2\pi \times 10^4}\right)} = 5.888$$

取 $N=6$ 、查表 10-1 可得 $H_{al}(s')$ 表达式如下：

$$H_{al}(s') = \frac{1}{(s')^6 + 3.8637(s')^5 + 7.4641(s')^4 + 9.1416(s')^3 + 7.4641(s')^2 + 3.8637s' + 1}$$

(4) 求低通原型的电路实现

根据给定的 $H_{al}(s')$ 由表 10-2 的原型电路元件实现 T 型结构电路如图 10-27(a) 所示。

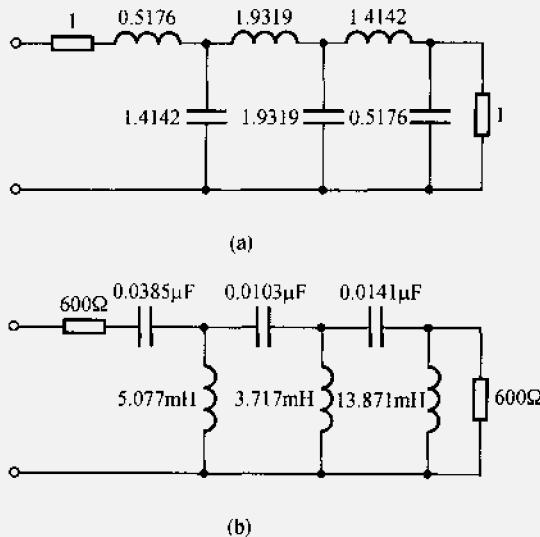


图 10-27 例 10-10 高通滤波器实现

(5) 求高通滤波器的 $H_a(s)$

通过低通原型来确定参考频率 $\Omega_r = \Omega_c$, 利用阻带频率 Ω'_s 有:

$$|H_{al}(j\Omega'_s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega'_s)^2}} = 10^{-\frac{15}{20}}$$

$$\Omega'_s = \sqrt[12]{10^{1.5} - 1} = 1.33$$

求得

$$\Omega_r = \Omega_c = \Omega_s \cdot \Omega'_s = 2\pi \times 1.33 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

用 $s' = \frac{\Omega_c}{s} = \frac{2\pi \times 1.33 \times 10^4}{s}$ 代入 $H_{al}(s')$ 式中得

$$H_a(s) = \frac{s^6}{s^6 + 3.23 \times 10^3 s^5 + 5.21 \times 10^{10} s^4 + 5.33 \times 10^{15} s^3 + 3.64 \times 10^{20} s^2 + 1.57 \times 10^{25} s + 3.41 \times 10^{29}}$$

(6) 高通滤波器电路实现

根据式(10-51)和式(10-53), 并同时考虑到对 R_S 去归一化, 求出所需高通电路的元件值:

$$C_1 = \frac{1}{R_S L_1 \Omega_c} = \frac{1}{600 \times 0.5176 \times 2\pi \times 1.33 \times 10^4} = 0.0385 \mu\text{F}$$

$$L_2 = \frac{R_S}{C_2 \Omega_c} = \frac{600}{1.4142 \times 2\pi \times 1.33 \times 10^4} = 5.0770 \text{ mH}$$

$$C_3 = \frac{1}{R_S L_3 \Omega_c} = \frac{1}{600 \times 1.9319 \times 2\pi \times 1.33 \times 10^4} = 0.0103 \mu F$$

$$L_4 = \frac{R_S}{C_4 \Omega_c} = \frac{600}{1.9319 \times 2\pi \times 1.33 \times 10^4} = 3.7165 mH$$

$$C_5 = \frac{1}{R_S L_5 \Omega_c} = \frac{1}{600 \times 1.4142 \times 2\pi \times 1.33 \times 10^4} = 0.0141 \mu F$$

$$L_6 = \frac{R_S}{C_6 \Omega_c} = \frac{600}{0.5176 \times 2\pi \times 1.33 \times 10^4} = 13.8716 mH$$

电路如图 10-27 (b) 所示。

(二) 低通到带通的变换

和低通到高通的变换类似,先把带通滤波器频率取归一化,参考频率一般取带通滤波器的频带宽度,如图 10-28 所示, $\Omega_r = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}$, 归一化后的带通滤波器系统函数为 $H_a(j\Omega)$ 。图 10-29 画出了低通原型与归一化带通滤波特性间的对应关系,表 10-7 列出了两者映射要求。满足此映射关系的 Ω' 和 λ 之间满足

$$\Omega' = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda} \quad (10-54)$$

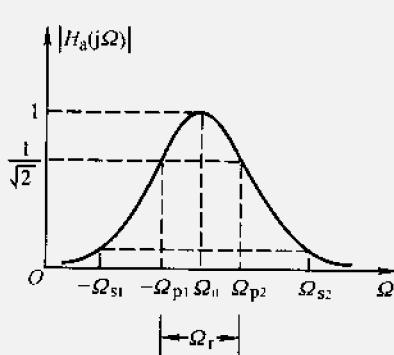


图 10-28 带通滤波特性

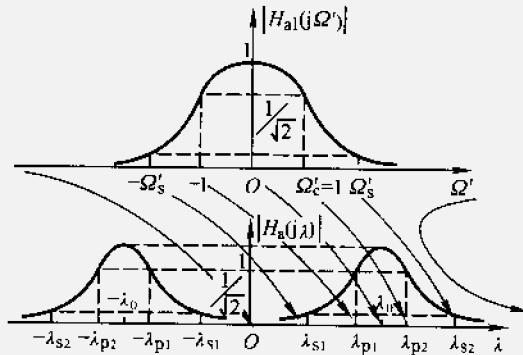


图 10-29 低通原型与归一化带通特性对应关系

表 10-7 低通原型 Ω' 与归一化带通频率 λ 关系

低通原型频率 Ω'	归一化带通频率 λ
0	$\pm \lambda_0$
$\Omega'_c = 1$	λ_{p2}
$\Omega'_c = -1$	λ_{p1}
Ω'_s	λ_{q2}
$-\Omega'_s$	λ_{q1}
∞	$\pm \infty$
$-\infty$	0

图 10-30 画出了此变换特性曲线。

由式(10-54)可求出带通滤波器的中心频率 λ_0 :

$$\begin{cases} \Omega'_c = \frac{\lambda_{p2}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_{p2}} = 1 \\ -\Omega'_c = \frac{\lambda_{p1}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_{p1}} = -1 \end{cases}$$

两式相加求得

$$\lambda_0 = \sqrt{\lambda_{p1}\lambda_{p2}} \quad (10-55)$$

这表明实际带通滤波器的中心频率是 Ω_{p1} 和 Ω_{p2} 的几何平均值

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}} \quad (10-56)$$

式(10-54)用来求低通原型的指标, 从而得出相应的低通原型系统函数 $H_{al}(s')$ 。利用式(10-54)也可求出复频率 s 和 s' 之间的关系

$$H_{al}(j\Omega') = H_{al}\left(j \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda}\right) = H_{al}\left[\frac{(j\lambda)^2 + \lambda_0^2}{j\lambda}\right]$$

因而有

$$s' = \frac{\left(\frac{s}{\Omega_r}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_r}\right)^2}{\left(\frac{s}{\Omega_r}\right)} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} \quad (10-57)$$

利用式(10-54)和式(10-57)就可以通过低通原型设计出要求的带通滤波器。

带通滤波器的电路实现同样可借助低通原型电路经元件变换来实现。对低通原型电路中的电感 L' , 由式(10-57)得

$$\begin{aligned} L's' &= L'\left(\frac{s^2 + \Omega_0^2}{s(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}\right) = L'\left(\frac{1}{\Omega_r}s + \frac{\Omega_0^2}{\Omega_r s}\right) \\ &= \left(\frac{L'}{\Omega_r}\right)s + \frac{1}{\left(\frac{\Omega_r}{L'\Omega_0^2}\right)s} = Ls + \frac{1}{Cs} \end{aligned} \quad (10-58)$$

即低通原型中的电感转换成电感 L 和电容 C 的串联, 其中电感和电容值分别为

$$\begin{cases} L = \frac{L'}{\Omega_r} \\ C = \frac{\Omega_r}{\Omega_0^2 L'} \end{cases} \quad (10-59)$$

对电容 C'

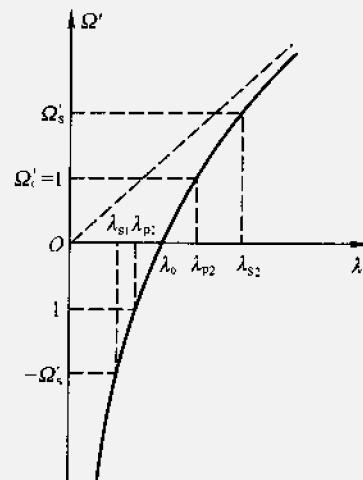


图 10-30 带通 Ω' 与 λ 变换特性

$$\begin{aligned} C's' &= C' \left(\frac{s^2 + \Omega_0^2}{s\Omega_r} \right) = \frac{C'}{\Omega_r} s + \frac{1}{\left(\frac{\Omega_r}{C'\Omega_0^2} \right)s} \\ &= Cs + \frac{1}{Ls} \end{aligned} \quad (10-60)$$

即低通原型中的电容转换成电容 C 和电感 L 的并联，其中电容和电感值分别为：

$$\begin{cases} C = \frac{C'}{\Omega_r} \\ L = \frac{\Omega_r}{\Omega_0^2 C'} \end{cases} \quad (10-61)$$

上述转换中，无论是 L' 转换成式(10-59)的 LC 串联，或是 C' 转换成式(10-61)的 LC 并联， L ， C 元件间都满足

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10-62)$$

即 LC 串联或并联电路总是谐振在带通滤波器的中心频率 Ω_0 。

例 10-11 给定带通滤波器技术指标(参看图 10-31)

$$\Omega_{p1} = 2\pi \times 1.5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{p2} = 2\pi \times 2.5 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{s1} = 2\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{s2} = 2\pi \times 3 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

允许通带起伏：-3 dB

阻带衰减： ≤ -15 dB

用巴特沃思滤波器实现，并设信源内阻 R_S 和负载电阻 R_L 相等， $R_S = R_L = 600 \Omega$ ，求滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 及其电路实现。

解 (1)求归一化带通滤波器频率：取通带宽度为参考频率； $\Omega_r = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} = 2\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$

$$\lambda_{p1} = \frac{\Omega_{p1}}{\Omega_r} = 1.5$$

$$\lambda_{p2} = \frac{\Omega_{p2}}{\Omega_r} = 2.5$$

$$\lambda_{s1} = 1$$

$$\lambda_{s2} = 3$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\lambda_{p1}\lambda_{p2}} = 1.9365$$

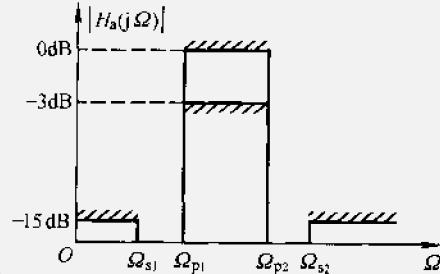


图 10-31 例 10-11 要求
设计带通滤波特性

(2) 求低通原型各归一化频率

$$\Omega'_{p1} = \frac{\lambda_{p1}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_{p1}} = \frac{1.5^2 - (1.9365)^2}{1.5} = -1$$

$$\Omega'_{p2} = \frac{\lambda_{p2}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_{p2}} = \frac{2.5^2 - (1.9365)^2}{2.5} = 1$$

$$\Omega'_{s1} = \frac{\lambda_{s1}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_{s1}} = \frac{1 - (1.9365)^2}{1} = -2.75$$

$$\Omega'_{s2} = \frac{\lambda_{s2}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_{s2}} = \frac{3^2 - (1.9365)^2}{3} = 1.75$$

变换后低通原型的阻带两边不对称，这是由于式(10-54)是非线性变换，随着

带通滤波器的相对带宽增加，即 $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{1}{\lambda_0}$ 数值增加，其不对称性越严重。

(3) 求低通原型系统函数、 $H_{al}(s')$

所需滤波器的阶数：由于 $|\Omega'_{s1}|$ 不等于 $|\Omega'_{s2}|$ ，为保证指标要求，取两者中较小的数值，即 $\Omega'_{s2} = 1.75$ ，则：

$$|H_{al}(j\Omega'_{s2})| = \frac{1}{\sqrt{1 + (1.75)^{2N}}} = 10^{-\frac{15}{20}}$$

$$N = \frac{\lg(10^{1.5} - 1)}{2\lg(1.75)} = 3.06$$

取 $N=4$ ，查表 10-1 得到

$$H_{al}(s') = \frac{1}{(s')^4 + 2.6131(s')^3 + 3.4142(s')^2 + 2.6131s' + 1}$$

(4) 求低通原型电路实现

对于 $N=4$ 已经求得原型电路 T 型结构实现如图 10-15 所示。

(5) 求带通滤波器的 $H_a(s)$

把 s' 与 s 复频率关系式(10-57)代入 $H_{al}(s')$ ，并整理得

$$H_a(s) = 1.558 \times 10^{19} s^4 (s^8 + 1.642 \times 10^5 s^7 + 7.272 \times 10^{10} s^6 \\ + 7.943 \times 10^{15} s^5 + 1.731 \times 10^{21} s^4 + 1.176 \times 10^{26} s^3 \\ + 1.595 \times 10^{31} s^2 + 5.334 \times 10^{35} s + 4.812 \times 10^{40})^{-1}$$

(6) 带通滤波器的电路实现

利用原型到带通的元件变换公式，对图 10-15 的低通原型电路进行变换，得到带通电路如图 10-32 所示。元件值如下：

$$L_1 = \frac{600}{2\pi \times 10^4} \times 0.7654 \text{ H} = 7.31 \text{ mH}$$

$$C_1 = \frac{2\pi \times 10^4}{(2\pi \times 1.9365 \times 10^4)^2 \times 0.7654 \times 600} \text{ F} = 0.009 \mu\text{F}$$

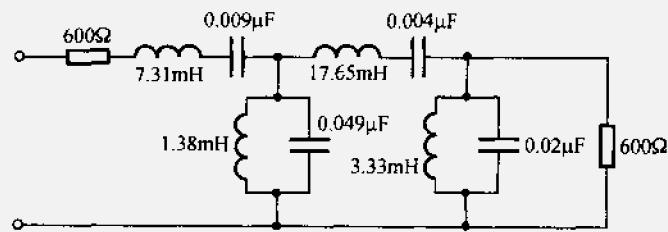


图 10-32 带通滤波器电路实现

$$L_2 = \frac{2\pi \times 10^4 \times 600}{(2\pi \times 1.9365 \times 10^4)^2 \times 1.8478} H = 1.38 \text{ mH}$$

$$C_2 = \frac{1.8478}{2\pi \times 10^4 \times 600} F = 0.049 \mu\text{F}$$

$$L_3 = \frac{600}{2\pi \times 10^4} \times 1.8478 H = 17.65 \text{ mH}$$

$$C_3 = \frac{2\pi \times 10^4}{(2\pi \times 1.9365 \times 10^4)^2 \times 1.8478 \times 600} F = 0.004 \mu\text{F}$$

$$L_4 = \frac{2\pi \times 10^4 \times 600}{(2\pi \times 1.9365 \times 10^4)^2 \times 0.7654} H = 3.33 \text{ mH}$$

$$C_4 = \frac{0.7654}{2\pi \times 10^4 \times 600} F = 0.02 \mu\text{F}$$

仿照上面讨论的原理还可导出利用低通原型设计带阻滤波器的计算公式，限于本书篇幅，略去推证和举例，只在下面给出结论。

表 10-8 示出低通原型与其他类型滤波器的频率变换和元件变换关系式，可供设计者查阅。

表 10-8 低通原型与其他类型滤波器频率与元件变换表

	低通原型	高通	带通	带阻
频率变换	Ω'	$\Omega' = -\frac{\Omega_t}{\Omega}$	$\Omega' = \frac{\left(\frac{\Omega}{\Omega_t}\right)^2 - \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_t}\right)^2}{\left(\frac{\Omega}{\Omega_t}\right)}$	$\Omega' = \frac{\left(\frac{\Omega}{\Omega_t}\right)}{\left(\frac{\Omega_0}{\Omega_t}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{\Omega_t}\right)^2}$
复频率变换	s'	$s' = \frac{\Omega_t}{s}$	$s' = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s\Omega_t}$	$s' = \frac{s\Omega_t}{s^2 + \Omega_0^2}$

续表

	低通原型	高通	带通	带阻
元件变换		$\frac{1}{\Omega_r R_s L'}$	$\frac{R_s L'}{\Omega_r} \frac{\Omega_r}{\Omega_0^2 R_s L'}$	
		$\frac{R_s}{C' \Omega_r}$	$\frac{\Omega_r R_s}{\Omega_0^2 C'} \frac{C'}{\Omega_r R_s}$	

这两节讲述的滤波器设计方法在通信与电子系统中得到广泛应用。然而，有时会遇到以下实际问题需要解决：一是电路结构上的悬空结点与地之间存在分布电容；二是电感元件可能较多；三是同类元件最大与最小值之比可能太大（元件值分布过宽），特别是对于相对带宽较窄的带通或带阻滤波器此问题较严重（习题 10-14）。为解决这些工程实际问题，有时，还需要在完成以上设计之后对网络整体结构进行等效变换。限于本书范围，不再讨论。

以上讨论的各种滤波器设计方法都具有一定的数字计算工作量，显然，用人工计算相当麻烦。近年来，各种应用软件的开发为简化滤波器设计带来很大方便。在实际工作中，用户可借助计算机完成烦琐的数据检索（查表）和数值计算。

10.6 无限冲激响应(IIR)数字滤波器

理想的数字滤波器频率特性如图 10-33 所示，这些频率特性都是以 2π 为周期的连续函数，而且当系统单位样值响应 $h(n)$ 为 n 的实函数时，幅频特性呈周期偶对称，相频特性呈周期奇对称。因此对数字滤波器频率特性只要给出 ω 在 0 到 π 间 $H(e^{j\omega})$ 的变化情况即可。图 10-34 给出了数字低通滤波频域设计的容差图，与模拟滤波器一样，设计数字滤波器的第一步仍然是寻求满足性能要求的系统函数 $H(z)$ ，因此这也是一逼近问题。

线性时不变离散系统的系统函数 $H(z)$ 是 z^{-1} 的有理函数，即

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^r}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (10-63)$$

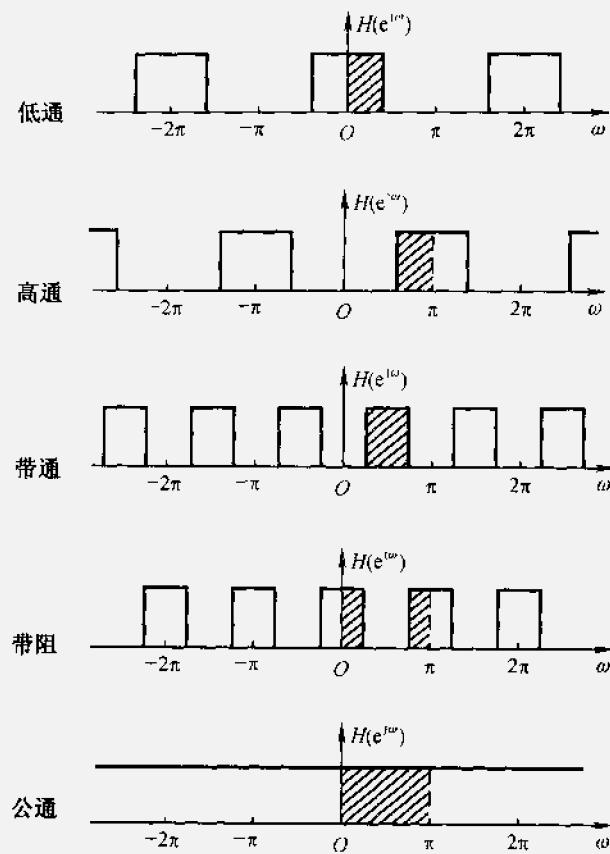


图 10-33 各类理想数字滤波器频率特性

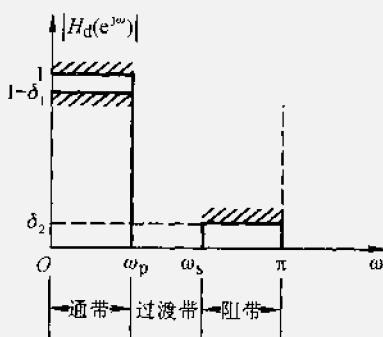


图 10-34 数字低通频域容差图

若 $a_k \neq 0$, 则对应的单位样值响应 $h(n)$ 是无限长的, 这种数字滤波器称为无限冲激响应(IIR)滤波器; 若 $a_k = 0 (k=1, 2, \dots, N)$, $H(z)$ 是 z^{-1} 的多项式, 其单位样值响应 $h(n)$ 是有限长的, 称为有限冲激响应(FIR)滤波器。本节先讨论 IIR 滤波器的设计。

IIR 滤波器的设计任务就是用式(10-63)所示有理函数逼近给定的幅频特性 $|H_d(e^{j\omega})|$, 亦即确定 M , N , $a_k (k=1, 2, \dots, N)$ 和 $b_r (r=0, 1, \dots, M)$ 各参数。设计方法有两种: 一种称为直接法设计, 这是一种计算机辅助设计, 有时也称为算法设计法; 另一种是间接设计法, 它的原理是借助模拟滤波器原型导出所需数字滤波器, 本书只讨论后者。由于模拟滤波器有简便的设计公式, 有大量的设计图表可资利用, 所以用成熟的模拟滤波器技术来设计数字滤波器是方便易行的。这种设计方法的流程如图 10-35 所示。

从流程图可以看出, 此方法实际上是 s 域与 z 域之间的映射转换。为使数字滤波器保持模拟滤波器的特性, 这种映射关系应满足下列条件:

(1) 为使模拟滤波器的频率特性 $H_a(j\Omega)$ 和数字滤波器的频率特性 $H(e^{j\omega})$ 有相互对应关系, 要求 s 域的虚轴 $j\Omega (-\infty < \Omega < \infty)$ 映射为 z 平面的单位圆 $z = e^{j\omega} (-\pi \leq \omega \leq \pi)$ 。

(2) s 域左半平面($\text{Re}[s] < 0$)映射到 z 平面的单位圆内部($|z| < 1$), 也就是稳定的模拟滤波器经映射后是稳定的数字滤波器。

下面先介绍两种常用方法的原理, 然后讨论结构实现。

(一) 冲激响应不变法(简称冲激不变法)

这种变换方法是把模拟滤波器的冲激响应 $h_a(t)$ 进行等间隔抽样, 其抽样值 $h_a(nT)$ 作为数字滤波器的单位样值响应 $h(n)$, 即

$$h(n) = h_a(nT) = h_a(t)|_{t=nT} \quad (10-64)$$

其中 T 为抽样间隔(还需注意, 若 $h_a(t)$ 在零点有跳变则 $h(n)$ 在 $n=0$ 点取此跳变值)。对 $h(n)$ 取 z 变换求得 $H(z) = \mathcal{Z}[h(n)]$ 作为该滤波器的系统函数。

设模拟滤波器的系统函数具有单极点, 表达式为

$$H_a(s) = \frac{\sum_{r=0}^M d_r s^r}{1 + \sum_{k=1}^N c_k s^k} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (10-65)$$

式中

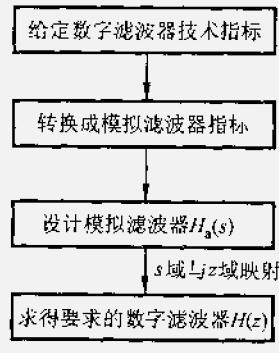


图 10-35 IIR 滤波器
间接法设计流程图

$$A_k = (s - s_k) H_a(s) \Big|_{s=s_k} \quad (10-66)$$

对式(10-65)取逆变换

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (10-67)$$

按式(10-64)规定, 对 $h_a(t)$ 抽样并取 z 变换:

$$h(n) = h_a(t) \Big|_{t=nT} = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(n) \quad (10-68)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} \right) z^{-n} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (10-69)$$

对比式(10-65)和(10-69)可见, 冲激不变法的原理就是把 $H_a(s)$ 部分分式展开式中的 $\frac{1}{s - s_k}$ 代之以 $\frac{1}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$ 即得 $H(z)$ [参看 8.6 节式(8-58)和(8-60)], 示意写作

$$\frac{1}{s - s_k} \Rightarrow \frac{1}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (10-70)$$

此结果表明, 极点 s_k 映射到 z 平面上是位于 $z = e^{s_k T}$ 处之极点, 若 s_k 在左半平面则 $e^{s_k T}$ 位于单位圆之内, 因而滤波器的稳定性可以保证。

上面只给出了 $h_a(t)$ 经抽样产生 $h(n)$ 之后 $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 的对应关系, 还没有建立 $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 之间的关系式, 下面给出推导过程。前面已经知道

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(t) \delta(t - nT) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_a(nT) e^{-nT} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \Big|_{z=e^{sT}} = H(z) \Big|_{z=e^{sT}} \end{aligned} \quad (10-71)$$

如果将冲激序列 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 用傅氏级数展开, 取抽样信号的拉氏变换并借助 s 域频移定理可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[h_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] &= \mathcal{L} \left[h_a(t) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T} k t} \right] \\ &= \frac{1}{T} \mathcal{L} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{j\frac{2\pi}{T} k t} \right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(s + j \frac{2\pi}{T} k \right) \end{aligned} \quad (10-72)$$

由以上二式结果得出

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(s + j \frac{2\pi}{T} k \right) \quad (10-73)$$

这表明, z 平面与 s 平面的映射呈多值对应关系。若 $s = \sigma + j\Omega$, $z = r e^{j\omega}$ 则 $r = e^{\sigma T}$, $\omega = \Omega T$ 。多值映射关系也可从下式看出

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j(\Omega + \frac{2\pi}{T} k)T} \quad (10-74)$$

当 σ 不变, Ω 以 $\frac{2\pi}{T}$ 整倍数改变时, 映射值不变, 也就是将 s 平面沿着 $j\Omega$ 轴分割成一条条宽为 $\frac{2\pi}{T}$ 的水平带, 每条带都按前面分析的关系映射成整个 z 平面, 如图 10-36。 s 平面与 z 平面间映射的多值性是冲激不变法的一个缺点。

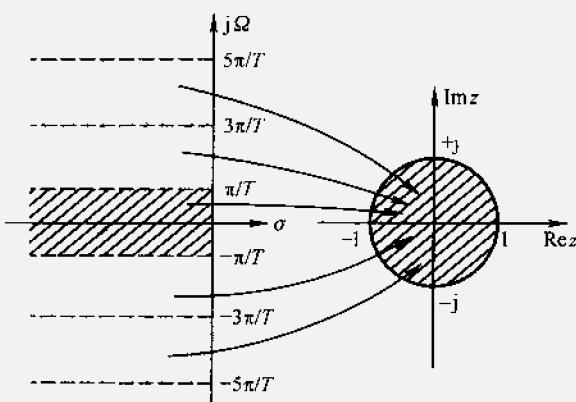


图 10-36 冲激不变法 s 平面与 z 平面映射关系

由于冲激不变法是对 $h_a(t)$ 抽样的结果, 因而就频率特性而言就有频谱混叠, 如图 10-37 所示。 s 平面的虚轴 $j\Omega$ 可以映射成 z 平面的单位圆, 而且 ω 与 Ω 呈线性关系。由式(10-73)得

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j \frac{\omega}{T} + j \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (10-75)$$

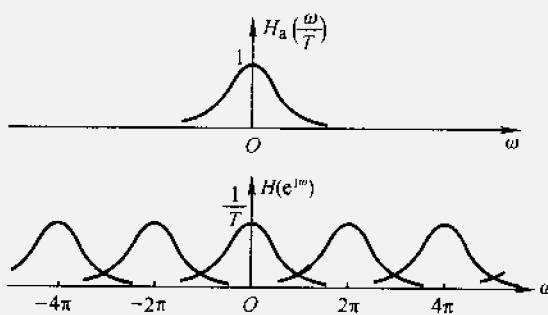


图 10-37 冲激不变法中的频谱混叠现象

综上所述, 对冲激不变法可得如下结论: 它可以把稳定的模拟滤波器变换成立稳的数字滤波器, 变换时频率间呈线性关系 $\omega = \Omega T$, 频率特性形状基本上与模拟滤波器相同(如果混叠不严重), 在时域两者冲激响应形状一致。由于混叠的结果, 使频率特性高端严重失真, 因而只适用于低通滤波器或限带

$\left(0 \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T}\right)$ 的高通或带通场合。再由式 (10-75) 可见, 数字滤波器的增益与 T 成反比, 过高的抽样率可以减小混叠, 而同时使滤波器增益过高, 为此有时 $h(n)$ 的设计值采用 $Th_a(nT)$, 以保持转换后数字滤波器增益不变。

例 10-12 给定通带内具有 3 dB 起伏(对应 $\epsilon = 0.9976$)、 $N=2$ 的二阶切比雪夫低通模拟滤波器系统函数^①

$$H_a(s) = \frac{0.5012}{s^2 + 0.6449s + 0.7079}$$

用冲激不变法求对应的数字滤波器系统函数 $H(z)$ 。

解 将 $H_a(s)$ 展开成部分分式形式

$$H_a(s) = \frac{-j0.3224}{s + 0.3224 + j0.7772} + \frac{-j0.3224}{s + 0.3224 - j0.7772}$$

用式(10-70)进行变换得

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{-j0.3224}{1 - e^{-(0.3224+j0.7772)T}z^{-1}} + \frac{-j0.3224}{1 - e^{-(0.3224-j0.7772)T}z^{-1}} \\ &= \frac{2e^{-0.3224T} \cdot 0.3224 \sin(0.7772T) \cdot z^{-1}}{1 - 2e^{-0.3224T} \cos(0.7772T)z^{-1} + e^{-0.6449T}z^{-2}} \end{aligned}$$

由于给定的是 $H_a(s)$, 因而变换到数字滤波器时与抽样间隔 T 有关, 图 10-38 分别画出了不同 T 时, 数字滤波器的对数幅频特性 $20\lg|H(e^{j\omega})|$ (为便于比较, 图中横坐标用 $\frac{\omega}{T} = \Omega'$ 进行标注)。当 $T=1$ s 时

$$H(z) = \frac{0.3276z^{-1}}{1 - 1.0328z^{-1} + 0.5247z^{-2}}$$

当 $T=0.1$ s 时

$$H(z) = \frac{0.0485z^{-1}}{1 - 1.9307z^{-1} + 0.9375z^{-2}}$$

从图 10-38 看出模拟与数字滤波器幅频特性主要差异在 $\omega = \pi$ 处, 因为对冲激不变法在此频率上有混叠, 提高抽样率可以减小混叠效应。

例 10-13 试用冲激不变法设计一数字低通滤波器。给定技术指标为:

通带允许起伏 -3 dB $0 \leq \omega \leq 0.318\pi$

阻带衰减 ≤ -15 dB $0.8\pi \leq \omega \leq \pi$

通带内具有等波纹特性, 求此数字滤波器 $H(z)$ 。

解 按图 10-35 流程图

^① 在 10.4 节表 10-4 曾给出各阶切比雪夫多项式的表达式, 但仅限于通带内起伏为 1 dB (对应 $\epsilon = 0.5088471$) 的情况, 当 ϵ 为其他值时, 此种表格可在各种有关滤波器设计的参考书中查到, 例如本书最后附参考书目[26]。

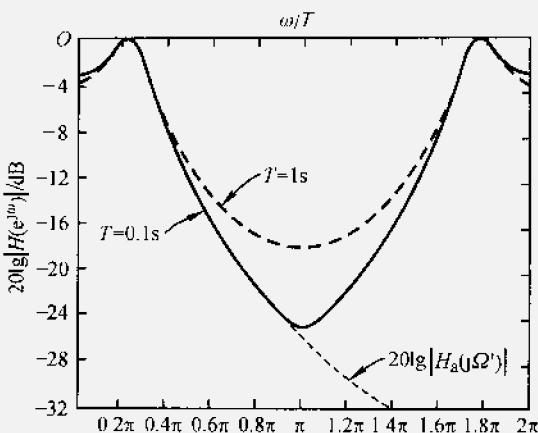


图 10-38 例 10-12 数字滤波器对数幅频特性

(1) 求模拟滤波器技术指标

由于要求用冲激不变法设计，因此模拟角频率 Ω 与数字角频率 ω 之间关系是 $\omega = \Omega T$ 。现给定 ω 指标，因而 T 可以任意选择，为方便计选 $T = 1$ ，则模拟滤波器指标：

$$\Omega_c = \frac{\omega_s}{T} = 0.318\pi \text{ rad/s}$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = 0.8\pi \text{ rad/s}$$

(2) 设计模拟滤波器，并求出 $H_a(s)$

要求通带内具有等波纹，所以用切比雪夫滤波特性

求波纹参数 ϵ ：

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = 10^{-\frac{3}{20}}$$

得

$$\epsilon = 0.99763$$

求滤波器的阶数 N ：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2} T_N^2 \left(\frac{0.8\pi}{0.318\pi} \right)} &= 10^{-\frac{15}{20}} \\ T_N \left(\frac{0.8\pi}{0.318\pi} \right) &= \frac{1}{0.99763} \sqrt{10^{10} - 1} = 5.5469 \end{aligned}$$

$$N = \frac{\operatorname{arcosh}(5.5469)}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{0.8\pi}{0.318\pi}\right)} = 1.5$$

取 $N = 2$ ，在冲激不变法设计中为减小高频端的混叠，通常让通带满足指标要

求,阻带指标留有余量。

至此可以看出,本例的条件(ϵ 值和N值)与前面例10~12完全相同,于是写出

$$H_a(s) = \frac{0.5012}{s^2 + 0.6449s + 0.7079}$$

(3) 用冲激不变法求 $H(z)$

由于(2)中的 $H_a(s)$ 就是例10~12中给的 $H_a(s)$,所以最终结果同例10~12,对应数字滤波器的对数幅频特性如图10-38中的虚线($T=1$ s)所示。混叠现象比较明显。

(二) 双线性变换法

上面讨论的冲激不变法,其s域与z域的映射关系具有多值性,在频域有混叠现象,因而只适用于低通或限带的高通、带通情况。这里将要讨论的双线性变换克服了混叠效应,使s域与z域的映射是单值对应关系,保持了滤波器的原有滤波特性。

双线性变换的目标是把s域 Ω 值从0到 $\pm\infty$ 的分布压缩至0到 $\pm\pi$ 之间,这样变换到z域就不会出现周期重复,即构成单值映射。下面利用微分方程表示为差分方程的关系导出双线性变换映射规律。

若模拟滤波器系统函数为

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (10-76)$$

考虑其中每个一阶微分方程对应的系统函数

$$H_k(s) = \frac{A_k}{s - s_k} \quad (10-77)$$

写作微分方程形式

$$\frac{dy(t)}{dt} - s_k y(t) = A_k r(t) \quad (10-78)$$

将 $y(t)$ 用 $y'(t)$ 的积分表示

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau + y(t_0)$$

令数值抽样步长为 T , $t = nT$, $t_0 = (n-1)T$,则

$$y(nT) = \int_{(n-1)T}^{nT} y'(\tau) d\tau + y[(n-1)T] \quad (10-79)$$

用梯形法逼近积分项,经整理上式得到

$$\frac{1}{T} [y(nT) - y[(n-1)T]] \approx \frac{1}{2} [y'(nT) + y'[(n-1)T]] \quad (10-80)$$

此式右端表示相邻两抽样点导数之平均值,而左端是两抽样点差值与步长之

比, 显然, 二者近似相等。

令式(10-78)中的 $t = nT$ 代入式(10-80)并取 z 变换得到

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{T}{2}s_k Y(z)(1 + z^{-1}) + \frac{T}{2}A_k X(z)(1 + z^{-1}) \quad (10-81)$$

整理此式, 取 $Y(z)$ 与 $X(z)$ 之比得到

$$H_k(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{A_k}{2}}{\frac{1 - z^{-1}}{T} - s_k} \quad (10-82)$$

对照式(10-77)与式(10-82)求出 s 与 z 对应关系

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (10-83)$$

按此规律, 将模拟滤波器 $H_a(s)$ 中的变量 s 用式(10-83)代入即可得到数字滤波器之系统函数 $H(z)$ 。解式(10-83)还可得到

$$z = \frac{1 + (sT/2)}{1 - (sT/2)} \quad (10-84)$$

式(10-83)和式(10-84)中的分子与分母都是变量的线性函数, 此即双线性变换名称之由来, 此变换为单值对应。通过式(10-84)可以得出 s 域与 z 域的映射关系: 设 $s = \sigma + j\Omega$, $z = re^{j\omega}$

$$\begin{aligned} re^{j\omega} &= \frac{1 + \frac{T}{2}(\sigma + j\Omega)}{1 - \frac{T}{2}(\sigma + j\Omega)} \\ &= \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{T}{2}\sigma\right)^2 + \left(\frac{\Omega T}{2}\right)^2}{\left(1 - \frac{T}{2}\sigma\right)^2 + \left(\frac{\Omega T}{2}\right)^2}} e^{\left\{ \arctan\left[\left(\frac{\Omega T}{2}\right)/\left(1 + \frac{T}{2}\sigma\right)\right] + \arctan\left[\left(\frac{\Omega T}{2}\right)/\left(1 - \frac{T}{2}\sigma\right)\right] \right\}} \end{aligned}$$

对 s 域的左半平面, $\sigma = \operatorname{Re}[s] < 0$, $r < 1$, 因而通过变换 s 的左半平面映射到 z 平面单位圆内, 也就是稳定的 $H_a(s)$ 可以变成稳定的 $H(z)$ 。

对 s 平面的虚轴 $s = j\Omega$, $\sigma = 0$ 有 $r = 1$, 且

$$\omega = 2\arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \quad (10-85)$$

或

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (10-86)$$

这表明, s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆, 而且 $\Omega = \pm\infty$ 映射为 $\omega = \pm\pi$, Ω 与 ω 呈单值映射, 可以避免混叠。但是式(10-85)或式(10-86)表明, 双线性变换是非线性变换, 如图 10-39 所示, 频率特性会引起失真。因此在利用双线性变换设计滤波器时, 为最终得到与设计要求一致的数字频率, 在指标

转换过程中必须作预畸变校正。对于要求线性相移的情况，必须考虑引入的相位畸变是否允许。

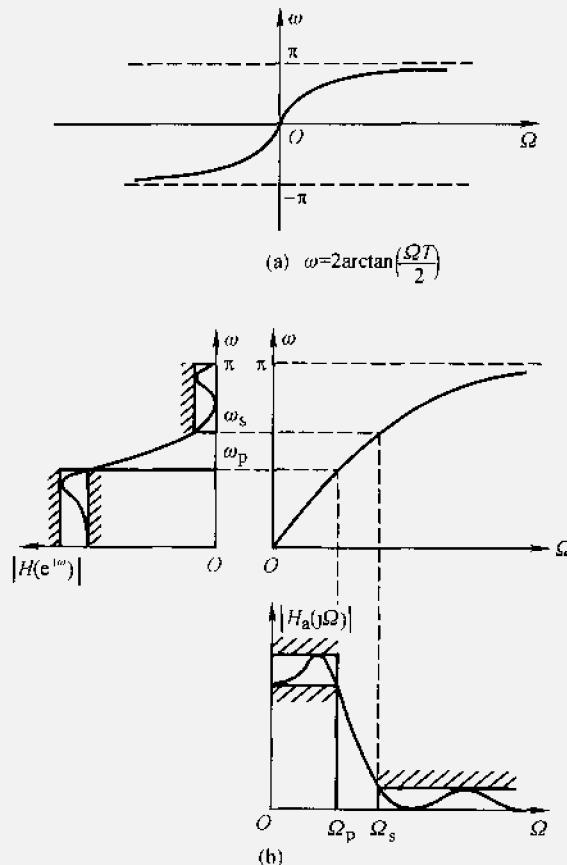


图 10-39 双线性变换频率变换关系

例 10-14 试用双线性变换法设计一数字低通滤波器。给定技术指标：

通带允许起伏 -3 dB $0 \leq \omega \leq 0.318\pi$

阻带衰减 $\leq -20 \text{ dB}$ $0.8\pi \leq \omega \leq \pi$

通带内具有等波纹特性，求此数字滤波器 $H(z)$ 。

解 按图 10-35 流程图求解。

(1) 求模拟滤波器技术指标

由于用双线性变换，因此求模拟滤波器的指标时用式(10-86)的频率预畸变：

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{1}{2} \times 0.318\pi\right) = 1.0926 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{1}{2} \times 0.8\pi\right) = 6.1554 \text{ rad/s}$$

为方便这里取 $T=1$ 。

(2) 设计模拟滤波器，并求出 $H_a(s)$ 。

由例 10-13 求得波纹参数 $\epsilon = 0.99763$ 。

求滤波器阶数 N

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{6.1554}{1.0926} \right)}} &= 10^{-\frac{20}{20}} \\ N &= \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{0.99763} \sqrt{10^{\frac{20}{10}} - 1}\right)}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{6.1554}{1.0926}\right)} = 1.24 \end{aligned}$$

取 $N=2$ ，由于是双线性变换，没有高频端混叠，因而让阻带满足指标要求，通带指标留有余量，以便减小信号通过滤波器时的失真。按照 $N=2$ 的条件重新求截止角频率 Ω_c ：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_2^2 \left(\frac{6.1554}{\Omega_c} \right)}} &= 10^{-\frac{20}{20}} \\ \Omega_c &= \frac{6.1554}{\cosh\left[\frac{1}{2} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{0.99763} \sqrt{10^2 - 1}\right)\right]} = 2.6278 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

解至此处可看到本例的条件与例 10-12 相同，即要求设计 $N=2$ 、通带内起伏为 3 dB 的切比雪夫逼近滤波器。归一化低通原型滤波器系统函数表达式仍同例 10-12。由于本例预畸变运算使这里的 Ω_c 不等于 1，因此需进行解归一化，求得

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{0.5012 \times (2.6278)^2}{s^2 + 0.6449s \times 2.6278 + 0.7079 \times (2.6278)^2} \\ &= \frac{3.4609}{s^2 + 1.6947s + 4.8886} \end{aligned}$$

(3) 用双线性变换求 $H(z)$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{3.4609}{\left[2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right]^2 + 1.6947\left[2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right] + 4.8886} \\ &= \frac{0.2819(1+z^{-1})^2}{1+0.1447z^{-1}+0.4479z^{-2}} \end{aligned}$$

图 10-40 画出了 $H(z)$ 的幅频、对数幅频和相频特性。由于用双线性变换，频率特性高端经非线性变换下降很快，阻带衰减性能比冲激不变法好。其次相频特性的非线性较为严重，原因是切比雪夫带内起伏及双线性变换的非线性两者引起的。

至此只讨论了低通数字滤波器的设计实例，对于其他类型的滤波器，可以先对低通原型模拟滤波器进行频率变换，给出高通、带通等类型的模拟滤波器，再利用双线性变换即可完成数字滤波器的设计。还有一种方法是先设计低通原型数字滤波器，然后经数字域的频率变换实现其他类型的数字滤波器。此外，还应指出，当利用数字滤波器处理模拟信号时（如图 10-2），由于 A/D、D/A 变换的作用，将引入数值误差（类似于 5.10 节指出的 PCM 信号将引入量化噪声），在数字滤波器设计中称为“有限字长效应”。如果对滤波器设计精度要求较严格，还需考虑如何减少此效应之影响。

限于篇幅，以上两方面的问题都不再介绍。

(三) IIR 数字滤波器的结构实现

数字滤波器的实现问题比模拟滤波器简单，对于 IIR 滤波器，用如式(10-63)表示的系统函数，在时域就是差分方程

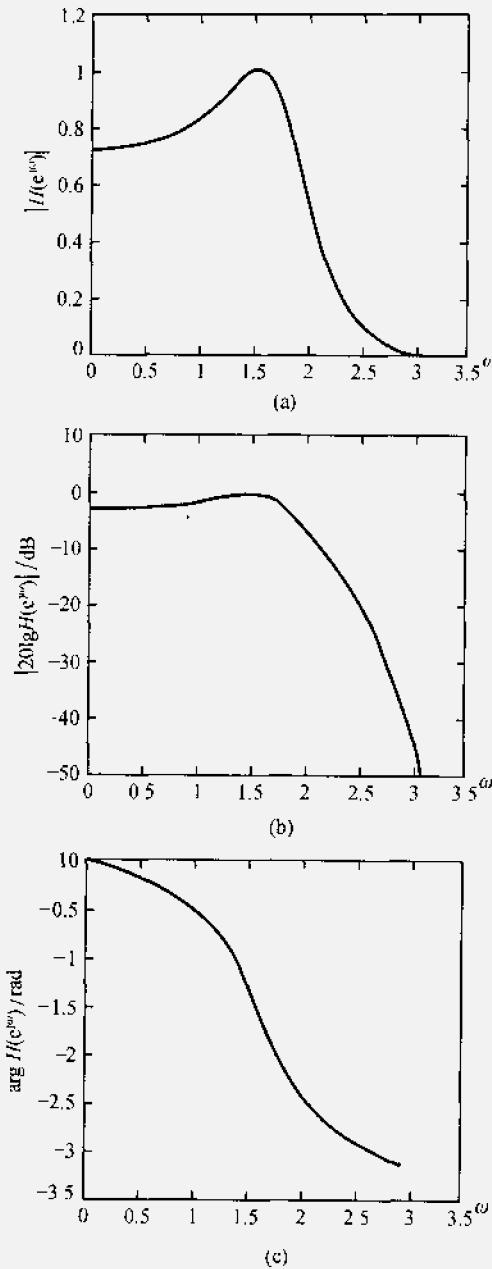


图 10-40 例 10-14 数字低通滤波器幅频、对数幅频、相频特性

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (10-87)$$

可见实现这一算法所用的基本运算部件是加法器、乘法器和延时单元。图 10-41 画出了实现式(10-87)差分方程的框图。从图中可以看出输入部分及其延时加权求和只与式(10-63)的分子有关，因而实际实现的是系统零点；第二部分是 $y(n)$ 延时反馈相加，实现的是式(10-63)的极点部分。如果把实现方式交换次序，即先实现极点部分，后实现零点部分，则其中的延时单元可以合并共用，构成如图 10-41(b)所示的框图结构形式。通常称第一种实现为直接形式 I，第二种实现为直接形式 II。后者的延时单元个数等于差分方程阶数，是延时单元最少的实现，有时也称为典范结构实现。根据差分方程和式(10-63)表示的系统函数得到的直接形式实现统称为递归型结构，主要优点是简单直观。对直接形式 II 延时单元最少，也是乘法次数比较少的一种。但缺点是在阶数比较高的情况下，要求系数精度高，调整特性不方便，每一系数的变化都将影响极(零)点的分布。

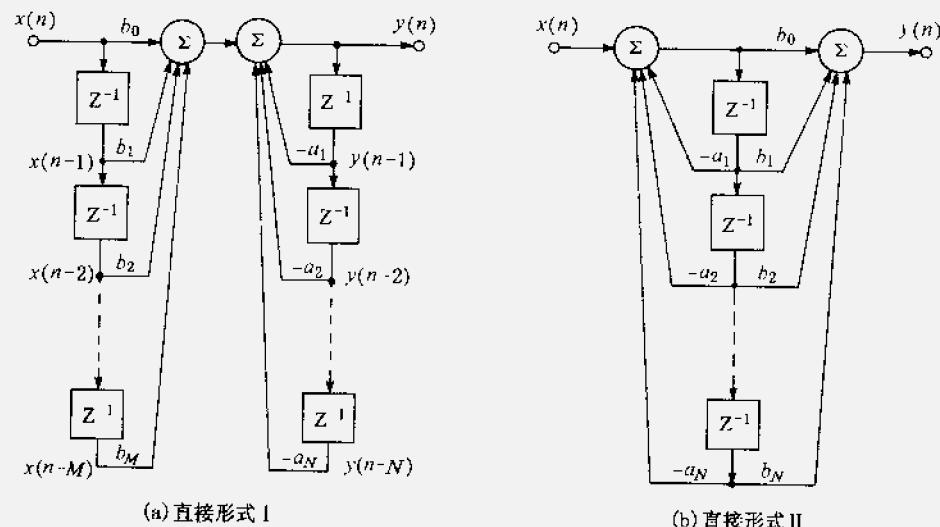


图 10-41 IIR 滤波器的直接型实现

如果对式(10-63)表示的系统进行因子分解

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 + g_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 + c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2})} \quad (10-88)$$

式中分子、分母都是实系数，二阶多项式表示具有共轭复根的情况。因此整个

系统可以看成递归的一阶子系统和递归的二阶子系统的级联形成，由此构成的系统实现称为级联型实现

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\cdots H_k(z) \quad (10-89)$$

其结构框图如图 10-42 所示。其中每一子系统是一阶或二阶的。级联系统也是属于最少延时单元实现，但乘法次数明显的比直接型要多。级联实现的优点是每个二阶或一阶子系统单独控制零、极点，因而便于调整，同时在系数量化时对系统性能影响小。调整各子系统前后排列次序对有限字长引起的量化效应是有影响的，通常可通过计算机仿真确定子系统的组合及排序。

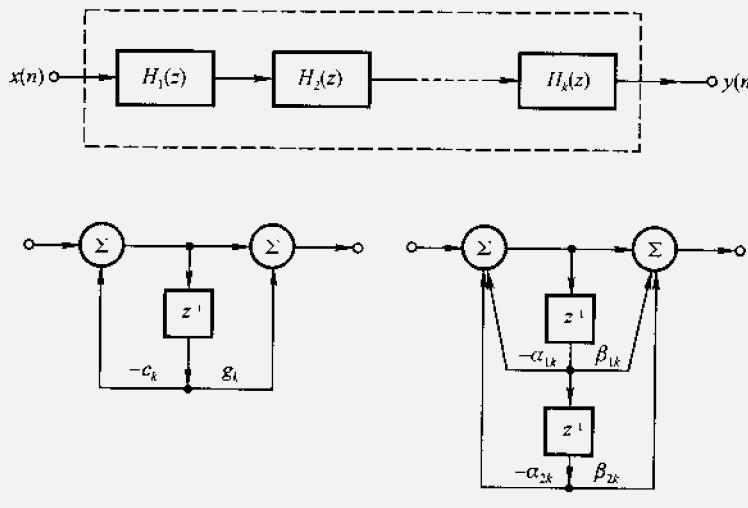


图 10-42 IIR 滤波器的级联型实现

对式(10-63)表示的系统函数作部分分式展开

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = G_0 + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 + c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}} \quad (10-90)$$

其中每一项都是一阶或二阶子系统。由此构成系统框图如图 10-43 所示，这种实现称为并联型实现。并联系统可看作对输入信号作并行滤波，因而运行速度高，而且没有运算误差的前后级积累影响，有限字长引起的量化效应小。由于是用部分分式展开，因此极点可单独调整，但缺点是零点无法控制，当需要准确控制滤波零点时，就不能应用并联型结构。

无限冲激响应滤波器结构实现除上面列举的几种形式外还有其他方式，主

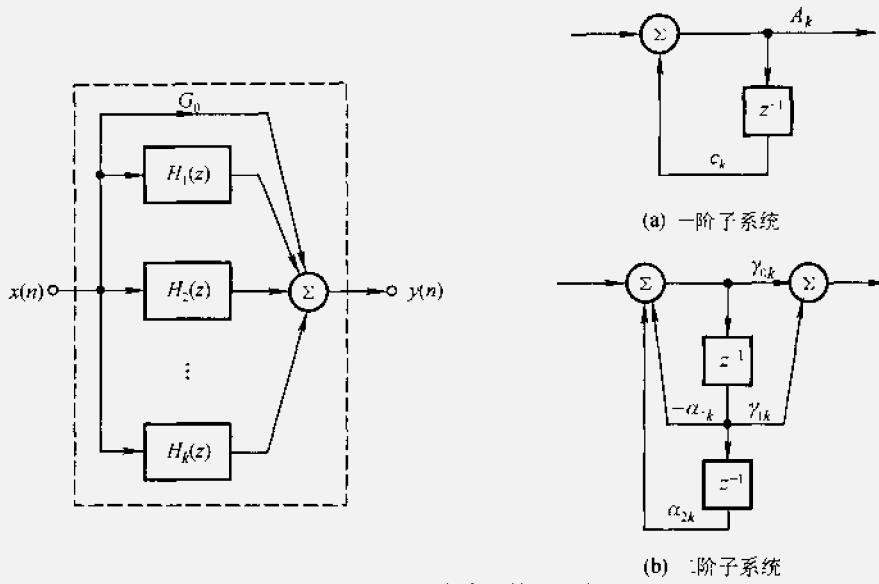


图 10-43 IIR 滤波器并联型实现

要考虑的出发点是存储单元和乘法器的数量、运行速度及有限字长效应等，其次还要考虑在不同应用场合适应不同算法的特殊结构。当学习了信号流图表示及其特性后(第十一章 11.6 节)，对数字滤波器的各种结构可以有更深入的理解。

10.7 有限冲激响应(FIR)数字滤波器

这种滤波器的设计工作也按两步进行。第一步是由给定的频响特性容差决定逼近函数，但逼近函数的确定与本章前面采用的方式完全不同，这里是从寻找适当的 $H(e^{j\omega})$ 出发，选择有限冲激响应 $h(n)$ ，以如下的形式给出 $H(z)$ 函数

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (10-91)$$

根据不同的逼近准则确定滤波器的节数 N ，并验证 $H(e^{j\omega})$ 是否符合要求；第二步仍是由 $H(z)$ 表达式实现系统结构。由式(10-91)可以看出，这种滤波器有 $(N-1)$ 个零点，且为有限值，全部极点位于 z 平面的原点，因此，系统是稳定的。另一方面，FIR 滤波器可以做到严格的线性相移，而 IIR 滤波器的相位特性呈现非线性，这是 FIR 滤波器最突出的优点。下面首先讨论 FIR 滤波器幅频与相频特性的特点，然后给出逼近与实现原理，最后全面比较 IIR 与 FIR 两种滤波器的优缺点。

若有限长的实序列 $h(n)$ 满足偶对称条件

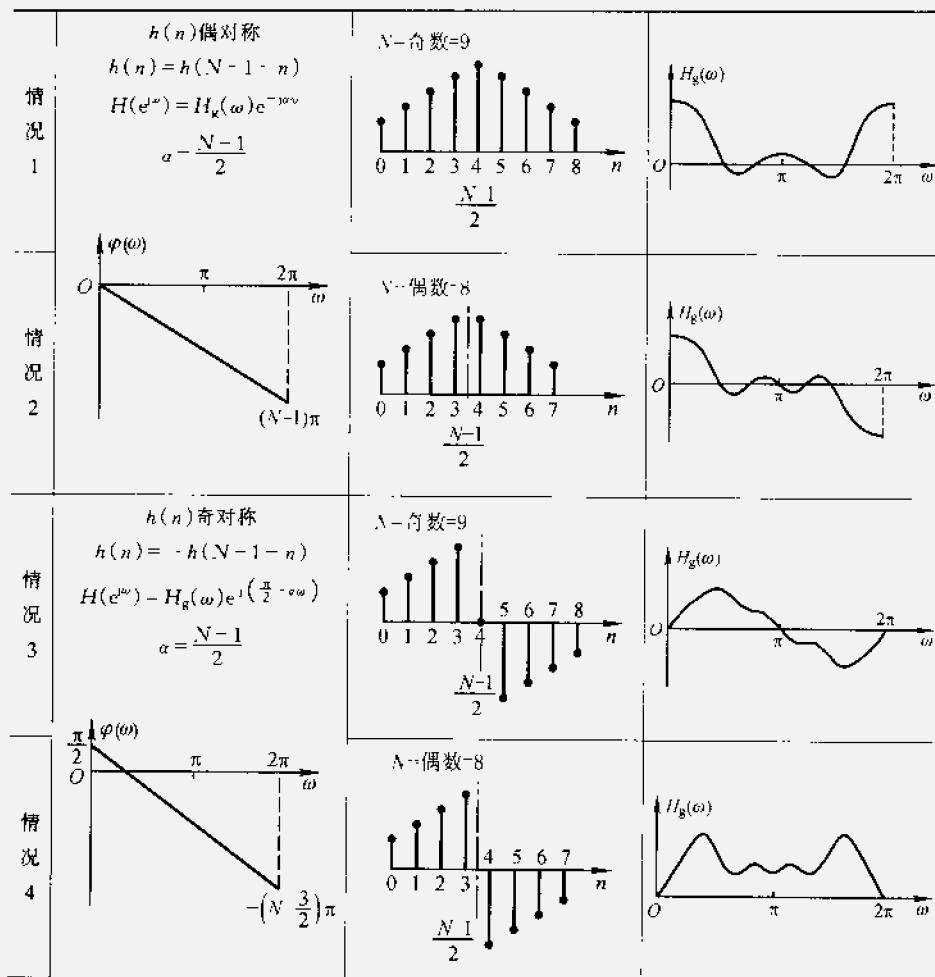
$$h(n) = h(N-1-n) \quad (10-92)$$

或奇对称条件

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad (10-93)$$

它们对应的频率特性具有线性相位。若再考虑到 N 为偶数和奇数时的不同情况，可以得到四种不同频域幅度响应。表 10-9 列出了四种不同的滤波特性，下面分别说明。

表 10-9 四种线性相位 FIR 滤波特性



情况 1: $h(n)$ 满足偶对称条件式(10-92)，且 $N = \text{奇数}$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n)z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

对上式第三项作变量代换, 令 $m = N - 1 - n$

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n) z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} h(N-1-m) z^{-(N-1-m)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} \\
 &= z^{-\frac{N-1}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n) [z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \\
 \end{aligned} \tag{10-94}$$

对应的频率特性, 令 $z = e^{j\omega}$

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n) [e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \\
 &= e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \\
 \end{aligned} \tag{10-95}$$

设 $m = \frac{N-1}{2} - n$, 且令

$$a(m) = \begin{cases} h\left(\frac{N-1}{2}\right) & m=0 \\ 2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right) & m=1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \end{cases} \tag{10-96}$$

则 $H(e^{j\omega})$ 可以写成

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} a(m) \cos(m\omega) = H_g(\omega) e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \tag{10-97}$$

这表明当 $h(n)$ 满足偶对称条件, FIR 滤波器具有线性相位, 而且相位常数

$\alpha = \frac{N-1}{2}$ 。频域幅度特性 $H_g(\omega) = \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} a(m) \cos(m\omega)$ 是 ω 的实函数, 且在 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 处具有偶对称特性, 如表 10-9 情况 1 所示。通常定义幅频特性 $|H(e^{j\omega})|$ 是 ω 的正实函数, 和这里定义的频域幅度特性 $H_g(\omega)$ 关系为 $H_g(\omega) = \pm |H(e^{j\omega})|$, $H_g(\omega)$ 值有正有负。

情况 2: $h(n)$ 具有偶对称条件, 且 $N = \text{偶数}$

与情况 1 的区别是没有 $h\left(\frac{N-1}{2}\right)$ 这一项, 而且式(10-95)频率特性简

化为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \right] \right\} \\ &= e^{-j\alpha\omega} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right] \end{aligned} \quad (10-98)$$

设 $m = \frac{N}{2} - n$, 且令

$$b(m) = 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \quad m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (10-99)$$

则 $H(e^{j\omega})$ 写成

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\alpha\omega} \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} b(m) \cos\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right] = H_g(\omega) e^{-j\alpha\omega} \quad (10-100)$$

这种情况相位常数 $\alpha = \frac{N-1}{2}$, 但已不是整数。频域幅度特性 $H_g(\omega) = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} b(m) \cos\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]$ 是 ω 的实函数, 在 $\omega = 0, 2\pi$ 处具有偶对称特性; 在 $\omega = \pi$ 处具有奇对称, 且 $\omega = \pi$ 时, $H_g(\pi) = 0$, 相当于 $H(z)$ 在 $z = -1$ 处有一零点, 因而具有这种特性的 FIR 滤波器无法实现高通和带阻特性。

情况 3: $h(n)$ 具有奇对称条件式(10-93), 且 $N = \text{奇数}$, 与情况 1 式(10-94)相似, 只不过此时 $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$, $h(n)$ 的前后部分相差一个负号, 所以有

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} - e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \right] \right\} \\ &= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \left\{ j \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right] \right\} \end{aligned} \quad (10-101)$$

设 $m = \frac{N-1}{2} - n$, 且令

$$c(m) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \quad m = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

则 $H(e^{j\omega}) = e^{-j\alpha\omega} \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} c(m) \sin(m\omega) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\omega\right)} \cdot H_g(\omega) \quad (10-102)$

这种情况, 系统的相频特性

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \alpha\omega \quad (10-103)$$

这表明 $\varphi(\omega)$ 有 $\frac{\pi}{2}$ 的起始相移, 信号所有频率分量经滤波器后都有固定的 90° 移

相,相当于宽带 90° 移相器。严格的说 $\varphi(\omega)$ 不具有线性相位特性,但是它满足群时延为常数的条件:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\varphi(\omega) = \alpha \quad (10-104)$$

所以仍然属于线性相位情况,而且相移常数 $\alpha = \frac{N-1}{2}$ 。频域幅度特性 $H_g(\omega)$

$= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} c(m) \sin(m\omega)$ 是 ω 的实函数,在 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 处具有奇对称,且在这些点 $H_g(\omega) = 0$,相当于 $H(z)$ 在 $z = \pm 1$ 处各有一个零点,因而具有这种特性的FIR滤波器无法实现低通、高通及带阻滤波特性。

情况4: $h(n)$ 具有奇对称条件式(10-93),且 $N =$ 偶数,把情况3的 $H(e^{j\omega})$ 求和上限改为 $\left(\frac{N}{2}-1\right)$:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \left\{ j \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] \right\} \quad (10-105)$$

设 $m = \frac{N}{2} - n$,且令

$$d(m) = 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \quad m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (10-106)$$

则

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\omega} j \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} d(m) \sin\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right] = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \omega\omega\right)} H_g(\omega) \quad (10-107)$$

和情况3一样,滤波器具有固定的 90° 相移,相位常数 $\alpha = \frac{N-1}{2}$ 。频域幅度特

性 $H_g(\omega) = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} d(m) \sin\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]$ 是 ω 的实函数,在 $\omega = 0, 2\pi$ 处具有奇对称; $H_g(0) = 0$,相当于 $H(z)$ 在 $z = 1$ 处是一个零点,因而这种滤波特性无法实现低通、带阻滤波器。

前面已证明 $h(n)$ 只要满足偶对称或奇对称条件,它的相频特性就是线性的,而且相移常数 $\alpha = \frac{N-1}{2}$ 。在 $h(n)$ 为奇对称情况,滤波器有固定的 90° 相移,这在微分器、希尔伯特变换器及信号正交处理中特别有用。表10-9中列出的四种频域幅度特性是设计滤波器的依据。线性相位FIR滤波器的设计任务就是在保证线性相位条件下,即 $\varphi(\omega) = -\alpha\omega$ 或 $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \alpha\omega$,设计 $H_g(\omega)$ 使其与要求的频域容差图在选定的逼近准则下具有最小误差。

FIR滤波器的设计有多种方法,本书只介绍“窗函数法”,下面说明这种方法

的原理。

如果要求设计的滤波器频率特性为 $H_d(e^{j\omega})$, 则它的单位样值响应为:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (10-108)$$

它有可能是无限长的而且是非因果的。为此要寻找一个因果的 $h(n)$, 在相应的误差准则下最佳逼近 $h_d(n)$ 。窗函数法设计的初衷是使设计的滤波器频率特性 $H(e^{j\omega})$ 与要求的频率特性 $H_d(e^{j\omega})$ 在频域均方误差最小的意义下进行逼近, 即

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \min \quad (10-109)$$

则有

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n) e^{-jn\omega} - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\omega} \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{N-1} (h_d(n) - h(n)) e^{-jn\omega} + \sum_{n=N}^{\infty} h_d(n) e^{-jn\omega} \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\sum_{m=0}^{N-1} (h_d(m) - h(m)) e^{-jm\omega} + \sum_{m=N}^{\infty} h_d(m) e^{-jm\omega} \right] \right\} d\omega = \min \end{aligned} \quad (10-110)$$

对上式化简, 可以证明只要将无限长的 $h_d(n)$ 截断取其有限项 $h(n)$ 即可使 ϵ^2 达到最小(习题 10-25)。若以 $R_N(n)$ 表示矩形序列, 则所需 $h(n)$ 表示为

$$h(n) = h_d(n) R_N(n) \quad (10-111)$$

式中 $R_N(n)$ 称为矩形窗函数。下面以逼近理想低通滤波器为例作进一步说明。

理想低通滤波器频率特性

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega) e^{-j\omega\alpha} = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (10-112)$$

其中 $H_d(\omega)$ 是频域幅度特性, α 是相移常数。对应的单位样值响应为

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n - \alpha)]}{\pi(n - \alpha)} \end{aligned} \quad (10-113)$$

按式(10-111)设计的长度为 N 的线性相位低通滤波器单位样值响应为:

$$h(n) = h_d(n) R_N(n) \quad (10-114)$$

其波形如图 10-44 所示, $h_d(n)$ 是无限长的、非因果的, $h(n)$ 是长度为 N 、具有偶对称的线性相位 FIR 滤波器单位样值响应。由于 $h(n)$ 是对 $h_d(n)$ 的截断, 所以频率特性是 $H_d(e^{j\omega})$ 对矩形序列 $R_N(n)$ 频率特性的卷积结果。 $R_N(n)$ 的傅里叶变换

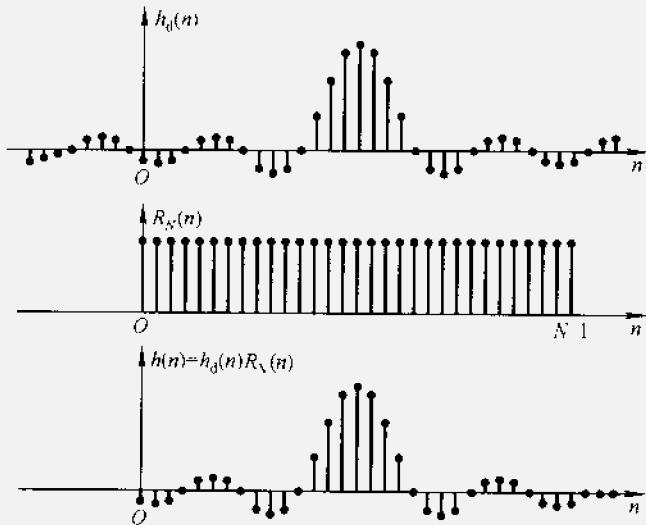


图 10-44 矩形窗对 $h_d(n)$ 的截断

$$R_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega} = e^{-j\frac{N}{2}\omega} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = R_V(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \quad (10-115)$$

其中 $R_N(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ 是矩形窗的频域幅度函数。这样, 设计的线性相位低通滤波器频率特性为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) e^{-j\alpha\theta} R_N(\omega - \theta) e^{-j(\omega - \theta)} d\theta \\ &= e^{-j\omega\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) R_N(\omega - \theta) d\theta = H_g(\omega) e^{-j\omega\alpha} \end{aligned} \quad (10-116)$$

其中频域幅度函数 $H_g(\omega)$ 是 $H_d(\omega)$ 与 $R_N(\omega)$ 卷积的结果

$$H_g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) R_N(\omega - \theta) d\theta \quad (10-117)$$

这一卷积过程及结果表示在图 10-45。

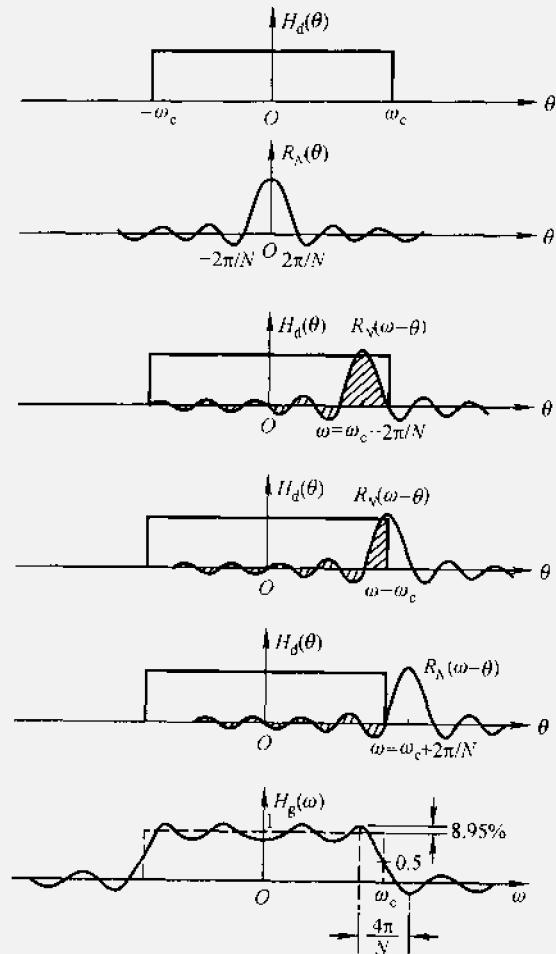


图 10-45 矩形加窗对理想低通频域幅度特性影响

比较加窗截断后的 $H_g(\omega)$ 特性与原来 $H_d(\omega)$ 特性可以得出：在 $\omega = \omega_c$ 附近形成过渡带，过渡带两边出现正、负肩峰，肩峰的间距为 $\frac{4\pi}{N}$ ，肩峰两侧再伸展为起伏的余振。必须注意，过渡带的间距并不等于两肩峰之间距，只是与 $\frac{4\pi}{N}$ 成正比，且小于此值。肩峰的增量值为 $8.95\% \approx 9\%$ ，这就是第三章 3.2 节和第五章 5.4 节曾指出的吉布斯现象。从理论上讲，应规定从 $H_g(\omega) = 1$ 到 $H_g(\omega) = 0$ 的范围为过渡带，而实际上允许此二值向中心 ω_c 点有微小偏移。经计算可求得当此允许偏移为 1.55 dB 时，过渡带的宽度为 $0.9\left(\frac{2\pi}{N}\right)$ （约为两

肩峰间距之半)。此外,进入阻带的负峰值将影响阻带的衰减特性。对此矩形窗,9%的负峰值相当于21 dB的阻带衰减,一般情况下,此数值远远不能满足阻带内衰减的要求。显然,矩形窗的逼近性能很不理想。为加大阻带衰减也即减小肩峰的影响,需采用其他形状的窗函数。通常,若窗函数时域波形两端平缓下降(而非突变,如三角形、升余弦形),则其频域特性旁瓣电平减小,从而增加阻带衰减,但其代价是增加了主瓣和过渡带的宽度。对于同一种窗函数,增加N值即可使过渡带减小。

常用的窗函数 $w(n)$ 有以下几种(时域宽度都取 $0 \leq n \leq N-1$)

(1) 矩形窗

$$w(n) = R_N(n) \quad (10-118)$$

(2) 三角窗(Bartlett窗)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & \left(0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}\right) \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \left(\frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1\right) \end{cases} \quad (10-119)$$

(3) 汉宁(Hanning)窗(升余弦窗)

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (10-120)$$

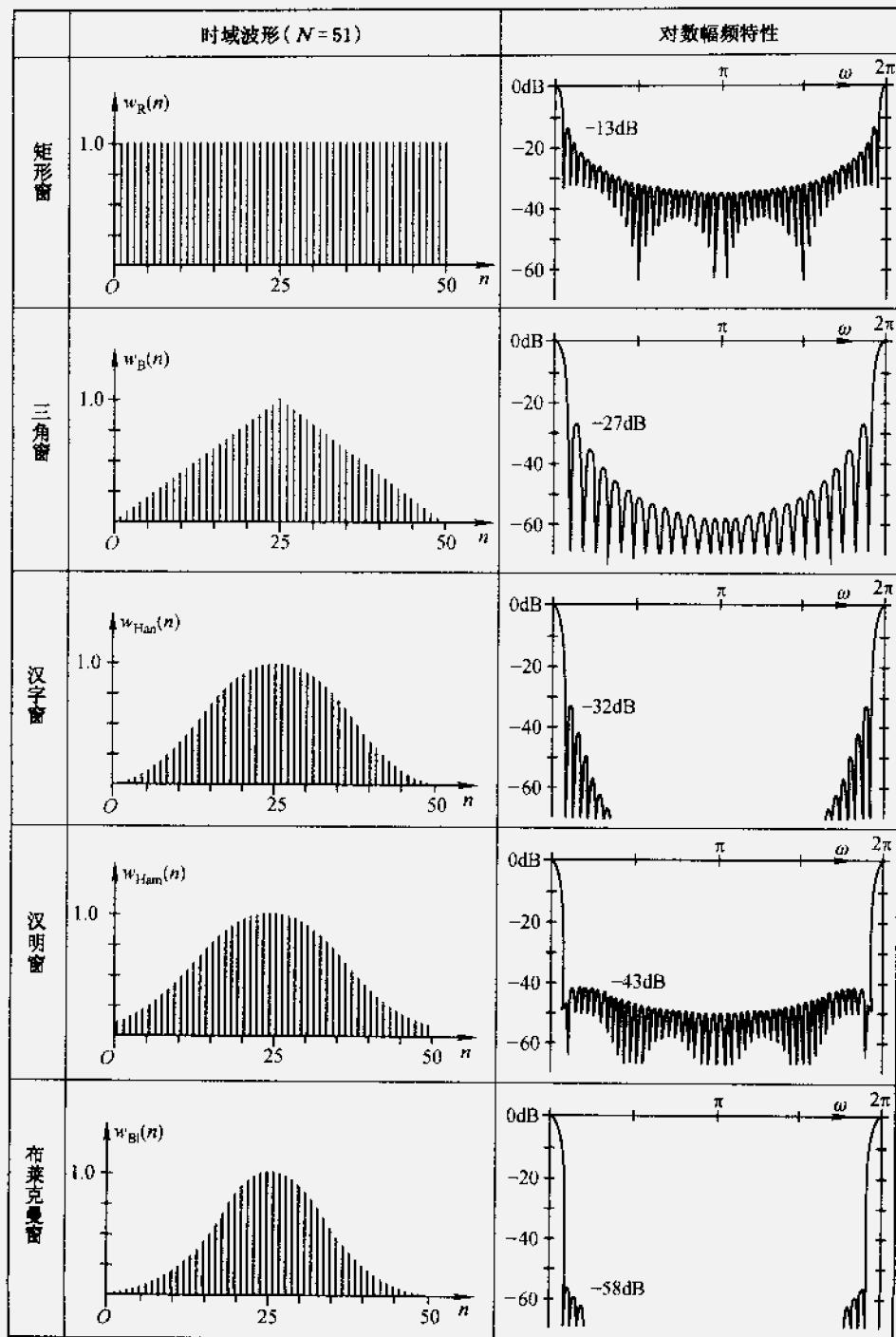
(4) 汉明(Hamming)窗(改进升余弦窗)

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (10-121)$$

(5) 布莱克曼(Blackman)窗(二阶升余弦窗)

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (10-122)$$

它们的时域波形和对数幅频特性如图10-46所示。表10-10列出了五种窗函数特性及加权后相应滤波器达到的指标,可供设计者参考。例如,若选用汉宁窗,最大旁瓣电平为-32 dB,最大阻带起伏随之改善为-44 dB,优于矩形窗,但是主瓣宽度为 $4\left(\frac{2\pi}{N}\right)$,过渡带宽 $3.3\left(\frac{2\pi}{N}\right)$,都比矩形窗加大了,对同样指标要求,所需N值加大。此外,还需指出,由于各种窗函数产生的频域肩峰不同,因而表中对它们的过渡带宽度定义也不一致。前文已述,过渡带的范围选在略小于 $H_g(\omega)=1$ 和略大于 $H_g(\omega)=0$ 的两点之间,对矩形窗此偏移为

图 10-46 五种窗函数时域波形($N=51$)及对数幅频特性

1.55 dB。对其他各种窗因肩峰已很小,此偏移值也更小。由于此项指标定义有较大灵活性,因而在各种参考书中此类表格数据可能不相同。然而,实践表明按表 10-10 数据设计引入的误差经反复修正可以得到满意的结果。

表 10-10 五种窗函数特性比较

窗函数	主瓣宽度 ($2\pi/N$)	最大旁瓣电平 (dB)	加权后相应滤波器指标	
			过渡带宽度($2\pi/N$)	最大阻带起伏(dB)
矩形窗	2	-13	0.9	-21
三角窗	4	-27	2.1	-25
汉宁窗	4	-32	3.1	-44
汉明窗	4	-43	3.3	-53
布莱克曼窗	6	-58	5.5	-74

除上列五种窗函数外,还有其他按不同要求设计的窗函数。例如适应性较强且比较灵活的凯泽(Kaiser)窗就是其中一种,它的表达式为:

$$w(n) = \frac{I_0\left[\beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{N-1}\right)^2}\right]}{I_0[\beta]} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (10-123)$$

其中 $I_0(x)$ 是第一类修正零阶贝塞尔函数,其幂级数展开式为

$$I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{m!} \right]^2 \quad (10-124)$$

这种窗函数是近似于给定旁瓣电平,使主瓣具有最大能量意义下的最佳窗函数。其中 β 是形状参数,用以调节主瓣宽度和旁瓣电平,一般 β 选为 $4 < \beta < 9$ 之间,此时旁瓣电平约在 -30 dB 和 -67 dB 之间。给定要求的过渡带宽度 $\Delta\omega$ 和阻带衰减 $A = -20\lg \delta_2$ dB,要求的滤波器阶数 N 和形状参数 β 可由下列近似公式求出:

$$\begin{cases} N = \frac{A - 7.95}{2.286\Delta\omega} \\ \beta = \begin{cases} 0.110 2(A - 8.7) & A \geq 50 \text{ dB} \\ 0.584 2(A - 21)^{0.4} + 0.078 86(A - 21) & 21 \text{ dB} < A < 50 \text{ dB} \\ 0 & A \leq 21 \text{ dB} \end{cases} \end{cases} \quad (10-125)$$

用窗函数法设计 FIR 滤波器的步骤

- (1) 给定 $H_d(e^{j\omega})$,求出相应的 $h_d(n)$;
- (2) 根据允许的过渡带宽度及阻带衰减要求选择窗函数形状及滤波器

长度 N ;

(3) 按所得窗函数求得 $h(n) = h_d(n)w(n)$;

(4) 计算 $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} [H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})]$, 检验各项指标。

有时给出的 $H_d(e^{j\omega})$ 比较复杂, 难以用式(10-108)计算出 $h_d(n)$, 这种情况可以对 $H_d(e^{j\omega})$ 进行频域抽样, $H_d(k) = H_d(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{M}k}$, 用 IDFT 计算出 $h'_d(n)$

$$h'_d(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_d(k) e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \quad (10-126)$$

由 DFT 性质知, $h'_d(n)$ 与 $h_d(n)$ 关系为

$$h'_d(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n+rM) \quad (10-127)$$

因此当 M 足够大时, 混叠影响不大, 因而有 $h'_d(n) \approx h_d(n)$ 。

窗函数法设计简单实用, 但缺点是过渡带及边界频率不易控制, 通常需要反复计算。

例 10-15 用窗函数法设计一线性相位数字低通滤波器。给定技术指标:

通带允许起伏 -1 dB $0 \leq \omega \leq 0.3\pi$ ($\omega_p = 0.3\pi$)

阻带衰减 ≤ -50 dB $0.5\pi \leq \omega \leq \pi$ ($\omega_s = 0.5\pi$)

解 用窗函数法设计, 边界频率不易准确控制, 近似取理想低通滤波器的截止频率为

$$\omega_c \approx \frac{1}{2}(\omega_p + \omega_s) = \frac{1}{2}(0.3\pi + 0.5\pi) = 0.4\pi$$

(1) 按式(10-113)求得

$$h_d(n) = \frac{\sin[0.4\pi(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

(2) 确定窗函数形状及滤波器长度 N

由于阻带衰减小于 -50 dB, 查表 10-10 选汉明窗, 计算滤波器长度:

$$N = 3.3 \times \frac{2\pi}{0.5\pi - 0.3\pi} = 33$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 16$$

(3) 设计的滤波器单位样值响应

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \frac{\sin[0.4\pi(n-16)]}{\pi(n-16)} \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{n\pi}{16}\right) \right]$$

(4) 求出设计的滤波器对数幅频特性如图 10-47 所示, 满足原指标要求。在 FIR 滤波器设计方法中, 除了窗函数法之外还有一些方法, 如频率抽

样法, 通、阻带最佳一致逼近的等波纹设计法等, 限于本书篇幅不再讨论。

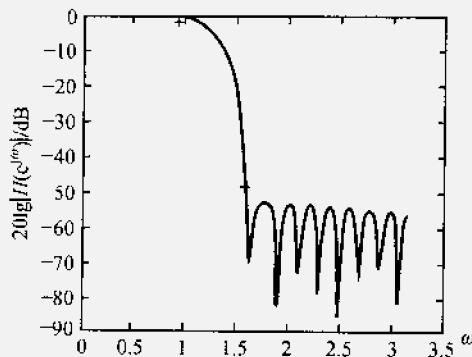


图 10-47 $N=33$ 汉明窗加权低通滤波特性

FIR 滤波器的实现比较简单, 由于 $H(z)$ 是一个 z^{-1} 的多项式, 它不存在分母多项式, 结构框图中没有反馈部分, 所以这种实现称为非递归结构。

根据式(10-91)实现的结构如图 10-48 所示, 这种结构称为 FIR 滤波器的直接型结构, 它直接实现下列差分方程运算:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) = h(n) * x(n) \quad (10-128)$$

因此又名卷积型结构或横向滤波器结构。所需乘法次数是 N , 加法次数是 $(N-1)$ 。

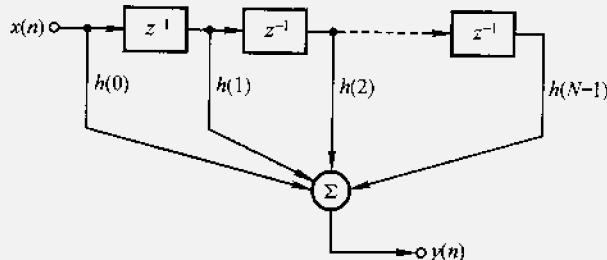


图 10-48 FIR 滤波器的直接型实现

如果 FIR 滤波器具有线性相位特性, 则按式(10-94)利用 $h(n)$ 的对称性可以画出如图 10-49 所示的结构, 它比图 10-48 所示直接型可节省一半乘法次数, 这种实现结构称为线性相位直接型结构。

与 IIR 滤波器相同, 当 FIR 滤波器需要准确实现零点时, 对 $H(z)$ 作因式分解, 还可以有级联型实现。

IIR 和 FIR 滤波器在数字信号处理领域中都占有重要地位。IIR 滤波器是用两个多项式之比的有理分式来逼近频率特性, 可用较少阶数得到很好的选频

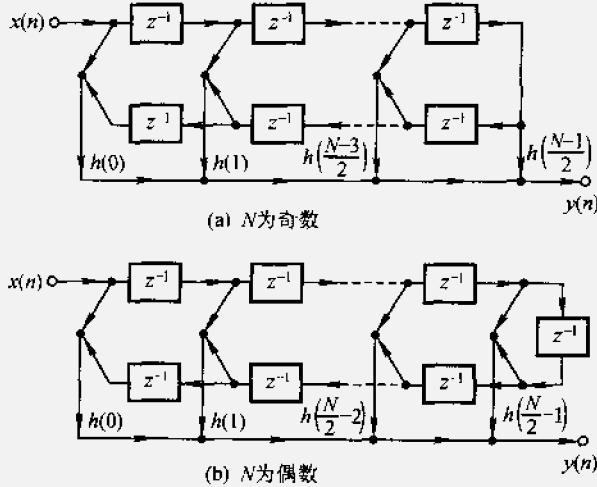


图 10-49 线性相位直接型结构

特性，但这是用相位特性的非线性作为代价的；IIR 滤波器可借助模拟滤波器进行设计，有闭合函数设计公式可循，有大量设计图表可以利用，因而计算准确，给设计带来方便，但对于特殊滤波特性或逼近某种特定相位特性的滤波器，只能通过计算机用算法设计法做；另外从实现来看，IIR 滤波器用递归结构，反馈支路的存在使系统对稳定性要求高，有限字长效应影响大，设计不当会引起振荡。对 FIR 滤波器，它是用 z^{-1} 的多项式来逼近要求的频率特性，没有可控制的极点，因此要达到与 IIR 滤波器相当的选频特性，需要的阶数很高，导致信号通过系统延时增加，使用的存储单元多，成本也相应提高，但是能做到严格的线性相移；从设计手段上，FIR 滤波器没有闭合形式设计公式，难以控制通带、阻带及边缘频率的准确性，设计时需要反复计算，然而，由于 $h(n)$ 为有限长序列，可借助 FFT 进行快速卷积运算，求得滤波器响应，反复计算并未引起很大麻烦；FIR 滤波器采用非递归结构，因此系统始终是稳定的，而且有限字长影响小，容易设计成满足特殊频率特性形状要求的滤波器。从上面的比较可以看出两者各有所长，在实际使用场合需要根据被处理信号的要求作出选择，对相位要求不敏感的场合（如语音通信等），可选 IIR 滤波器，而对波形上携带信息的传输系统（如图像信号处理、数据传输等），对系统相位特性要求较高，可考虑用 FIR 滤波器。

近年来，各种信号处理应用软件发展迅速，它们为数字滤波器设计者提供了许多方便，例如用 Matlab 软件或 SPW（信号处理系统）软件都可直接按用户所需技术指标参数求得滤波器的频响、冲激响应或作零、极点分析。在利用这些软件时，以上几节介绍的计算工作可全部或大部分由计算机协助自动

完成。

随着微电子技术的发展，数字信号处理技术向高速、实时方向迈进了一大步。为数字滤波器的实现已制成专用数字信号处理器(DSP)芯片。目前，通用可编程 DSP 已具有多总线、片内流水线操作、设置专用乘法累加器及特殊操作指令等特点，可以加快数据交换和乘法累加(MAC)的操作速度。如美国 TI 公司推出的 TMS320C6X 系列 DSP 芯片，具有 2000 MIPS(每秒执行 2×10^9 条指令)速度，用来看 8 阶 IIR 滤波器仅需 $0.15 \mu\text{s}$ ，做长度为 $N=24$ ，数据点为 64 的 FIR 滤波也只要 $3.9 \mu\text{s}$ 。这种芯片的成本正在下降，应用范围将日益扩大。

10.8 RC 有源滤波器

本节讨论模拟滤波器的问题。在工作频率较低的情况下，无源 LC 滤波器表现出明显的缺点，这时，电感元件体积、重量较大，而且电感 Q 值下降。为解决这一矛盾，从 20 世纪 50 年代起，人们致力于研究 RC 有源滤波器，此后它在低频场合得到广泛应用。近年来，随着大规模集成电路技术的发展，又出现了适用于低频段的新型滤波器(如下节将要介绍的开关电容滤波器)，使 RC 有源滤波器的应用范围有所减少。本节只对 RC 有源滤波器的原理作简要介绍。

RC 有源滤波器包含电阻、电容、运算放大器以及由此导出的电压控制电压源(VCVS)、回转器、积分器、比例放大器和加法器等无电感电路。其中常用的 VCVS 电路如图 10-50(a)和(b)所示。图(a)电路是正增益 VCVS，它的增益为

$$K = \frac{V_2}{V_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (10-129)$$

当 $R_2=0, R_1=\infty$ 时， $K=1$ ，即为电压跟随器。图(b)电路是负增益 VCVS，这是常用的比例放大器，它的增益为

$$K = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (10-130)$$

和无源滤波器的实现一样，有源滤波器的实现，就是综合下列系统函数

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (10-131)$$

当 $m \leq n$ 时， $H_a(s)$ 也可以表示为乘积形式

$$H_a(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdots H_K(s) \quad (10-132)$$

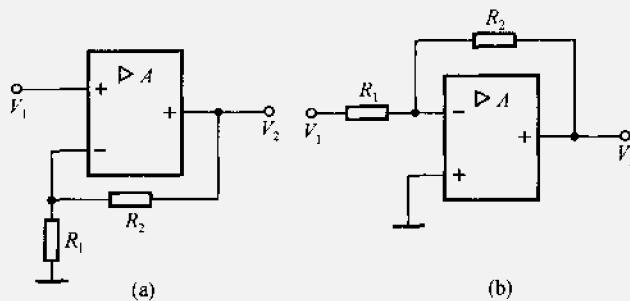


图 10-50 VCVS 电路

其中 $K \leq N$, 对于每一个 $j = 1, 2, \dots, K$, 子系统 $H_j(s)$ 可以是二阶节

$$H_j(s) = \frac{b_{j2}s^2 + b_{j1}s + b_{j0}}{s^2 + a_{j1}s + a_{j0}} \quad (10-133)$$

或是一阶节

$$H_j(s) = \frac{b_{j1}s + b_{j0}}{s + a_{j0}} \quad (10-134)$$

二阶子系统式(10-133)通常称为双二阶节, 因其分子、分母都是 s 的二次多项式。

RC 有源滤波器利用放大器的反馈, 可以使 $H_a(s)$ 产生共轭极点, 不仅可以靠近虚轴 $j\Omega$, 形成良好的选频特性, 甚至可以移到虚轴上形成振荡, 而无源 RC 电路的极点只可能在负实轴上。

RC 有源滤波器有多种实现方法。一种是直接法实现, 它是把式(10-131)的 $H_a(s)$ 完整地一步综合得到, 另一种实现方法是级联实现法, 它是把 $H_a(s)$ 分解成式(10-132)的乘积形式, 每一分解因子由如式(10-133)或式(10-134)的子系统组成。这里只介绍级联实现法。

1955 年首先由萨林(R.P.Sallen)和基(E.L.Key)提出用单级正反馈电路实现具有不同滤波特性的双二阶电路, 因此这种实现称为萨林-基实现。它由 RC 梯形电路与有源 VCVS 共同组成, 其一般结构如图 10-51(a)所示, 其中 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 是电阻或电容, r 和 $(K-1)r$ 用以调节所需的增益 K , 图 10-51(b)是其等效电路。

对图 10-51(b)列电路的结点方程

$$\begin{cases} V_a(Y_1 + Y_2 + Y_3) - Y_1 V_1 - Y_2 V_2 - Y_3 V_3 = 0 \\ V_3(Y_3 + Y_4) - Y_3 V_a = 0 \\ V_2 = KV_3 \end{cases}$$

解得

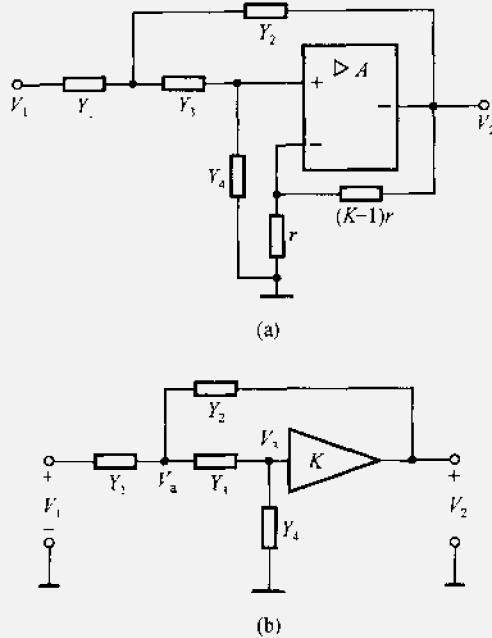


图 10-51 双二阶单级正反馈电路实现及其等效电路

$$H_a(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{KY_1Y_3}{Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3) + Y_3(Y_1 + Y_2) - KY_2Y_3} \quad (10-135)$$

用 $R-C$ 元件代入 Y_1-Y_4 , 就可以构造出具有不同滤波特性的双二阶 $H_a(s)$ 。

例 10-16 用单级正反馈电路实现低通巴特沃思滤波器, 要求截止角频率 $\Omega_c = 2\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$, 归一化阻值为 $R = 600 \Omega$, 系统直流增益为 2。

解 增益为 2 的低通原型二阶巴特沃思滤波器的系统函数

$$H_a(s') = \frac{2}{(s')^2 + \sqrt{2}s' + 1}$$

可以先实现一个归一化的双二阶单级正反馈电路, 然后对频率和阻抗去归一化, 即可得到具体电路。

取如图 10-52 所示的等效电路可实现低通滤波, 代入: $Y_1 = \frac{1}{R'_1}$, $Y_2 = \frac{1}{R'_2}$, $Y_3 = \frac{1}{C'_1}$, $Y_4 = s'C'_2$, 则

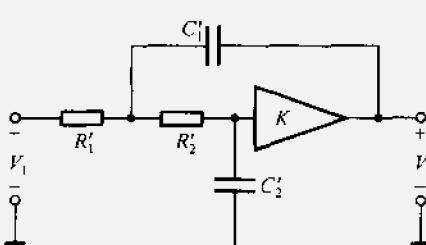


图 10-52 低通双二阶单级正反馈电路

$$H_a(s') = \frac{\frac{K}{R'_1 R'_2 C'_1 C'_2}}{(s')^2 + s' \left[\frac{1}{R'_1 C'_1} + \frac{1}{R'_2 C'_1} + \frac{1}{R'_2 C'_2} (1 - K) \right] + \frac{1}{R'_1 R'_2 C'_1 C'_2}}$$

按设计要求有

$$\begin{cases} \frac{1}{R'_1 R'_2 C'_1 C'_2} = 1 \\ \frac{1}{R'_1 C'_1} + \frac{1}{R'_2 C'_1} + \frac{1}{R'_2 C'_2} (1 - K) = \sqrt{2} \end{cases}$$

由两个方程求解五个未知数,解不是惟一的。为此可以选 $R'_1 = R'_2 = 1 \Omega$, $C'_1 = 1 F$, 则 $C'_2 = 1 F$, 由此要求的

$$K = 3 - \sqrt{2} = 1.586$$

为得到实际电路,电容和电阻对频率和阻抗去归一化有:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{\Omega_c R} C'_1 = \frac{1}{2\pi \times 10^4 \times 600} F = 0.0265 \mu F$$

$$R_1 = R_2 = R \cdot R'_1 = 600 \Omega$$

用以调整增益的电阻 r 和 $(K - 1)r$ 一般取值比较高,通常用几十千欧,设这里取 $r = 50 k\Omega$, 则 $(K - 1)r = 0.586 \times 50 k\Omega = 29.3 k\Omega$ 。由于电路总增益要求是 2, 所以还需增加一级放大器,其附加增益为: $\frac{2}{K} = \frac{2}{1.586} = 1.261$, 这级用正增益 VCVS 实现; $r = 50 k\Omega$, $(K - 1)r = 0.261 \times 50 k\Omega = 13.05 k\Omega$ 。最后实现电路如图 10-53 所示。

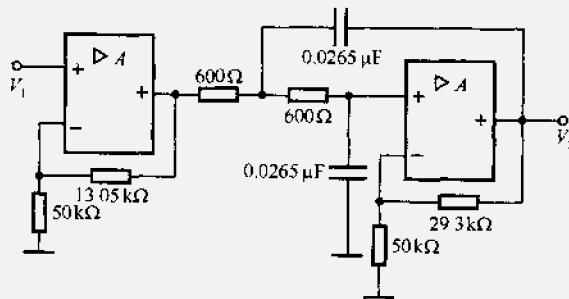


图 10-53 例 10-22 电路实现

按式(10-131)给出的双二阶单级正反馈有源滤波一般表示式,萨林-基实现的滤波器还可构成高通、带通、带阻等双二阶电路。由于这种电路的输出是从运算放大器直接引出,因而输出阻抗很低,可以直接和其他电路级联,不需要隔离放大。这类实现的主要缺点是当带宽很窄或 Q 值较高时,电路性能对元件参数改变而引起的变化非常敏感。

10.9 开关电容滤波器(SCF)

长期以来，音频模拟滤波器的小型化始终是各种通信设备发展中难以解决的重要问题。前节已述，在此频段，*LC* 滤波器最不可取，*RC* 有源滤波器虽然使电路体积减小，然而，在灵敏度、稳定性和精度方面还不能令人满意。人们曾经考虑，对照*RC* 有源滤波器的电路结构，将电阻、电容、运放集成于硅片之上，以进一步减小滤波器体积。然而，这种期望未能如愿，这是由于在硅片上制作电阻和电容元件时，参数精度和温度稳定性都较低，而且，电阻可能占用较大的硅片面积。因此，用单片实现*RC* 有源滤波器的问题未能圆满解决。

MOS 开关电容滤波器(MOS Switched Capacitor Filter, 简写作 MOS SCF)是一种适用于音频频段的模拟抽样信号处理网络，它由 MOS 电容、MOS 模拟开关以及 MOS 运算放大器组成。SCF 可以在面积不大的单块硅片上制作各种音频网络，准确性和温度稳定性都很高，便于廉价成批生产。早在 20 世纪 70 年代初，弗里德(Fried)已经提出开关电容滤波器的原理，但是由于具体实现的困难，未能及时得到广泛应用。70 年代末期，由于 MOS 工艺的进步，大规模集成电路技术迅速发展，SCF 的研究与应用引起人们的巨大兴趣，于是，单片集成 SCF 得以实现，随之有 SCF 商品出售。目前，它已广泛应用于各种通信与电子设备之中。

SCF 成功应用的典型实例是 PCM 通信系统中的话路滤波器。在 PCM 通信系统中，语音信号进入 PCM 编码器之前，必须经过一个 300~3 400 Hz 的滤波器，滤除语音中的高频分量，以防止 8 kHz 抽样过程中可能出现的混叠现象，这个滤波器也称为前置去混叠滤波器。PCM 解码器输出信号是阶梯波形，必须采用一个具有 $(x/\sin x)$ 补偿因子的 300~3 400 Hz 低通滤波器，才能恢复原语音信号(这里 $x = \pi f / 8000$, f 是以 Hz 为单位的频率变量。参看本书第五章 5.9 节)。目前，利用开关电容技术制成的单片集成 PCM 话路滤波器品种很多，一般采用 CMOS 工艺，功耗在几十毫瓦以下。通过下面的原理介绍将要看到，在使用 SCF 单片电路时除需外接直流电源外，还需要接入时钟信号。

开关电容技术除用作滤波器之外，还可用来构成正弦波自激振荡器、压控振荡器、低功耗动态放大器等多种电子线路。

(一) 开关电容传递电荷原理

“开关电容”是在集成电路中用来替代电阻的一种基本电路单元。它的一种结构如图 10-54 (a)所示(参看习题 7-24)。作为开关工作的 MOS 管 T_1 和

T_2 受时钟信号 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 的控制，电容 C 交替地接通至 $1 - 1'$ 和 $2 - 2'$ 端子，等效电路如图 10-54 (b) 所示。时钟 ϕ 与 $\bar{\phi}$ 反相，当 ϕ 为高电平时， T_1 导通、

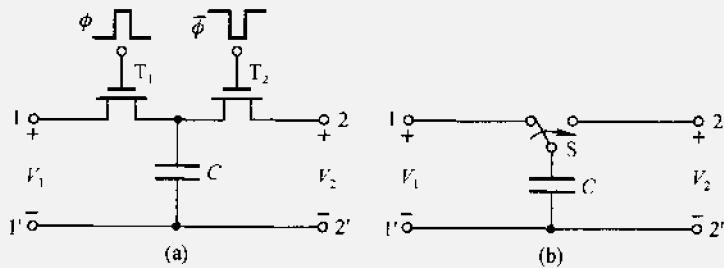


图 10-54 开关电容电路基本单元

T_2 截止， C 接至 $1 - 1'$ 端，得到充电电荷 $Q_1 = CV_1$ 。在 $\bar{\phi}$ 为高电平时， C 接至 $2 - 2'$ 端，电容两端电荷改变为 $Q_2 = CV_2$ 。因此在时钟周期 T_c 内，从 $1 - 1'$ 端向 $2 - 2'$ 端传输的电荷量为

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = C(V_1 - V_2) \quad (10-136)$$

由 $1 - 1'$ 端流向 $2 - 2'$ 端的平均电流为

$$I = \frac{\Delta Q}{T_c} = \frac{C}{T_c}(V_1 - V_2) \quad (10-137)$$

如果，时钟频率 $f_c = 1/T_c$ 比传输信号的工作频率高很多，那么，上述开关电容相当于在 $1 - 2$ 端之间的一个电阻 R ，此等效电阻值为

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{T_c}{C} = \frac{1}{f_c C} \quad (10-138)$$

式(10-138)表明，等效电阻值与时钟频率 f_c 和电容 C 成反比。

下面举例说明利用开关电容构成滤波器的基本原理。

图 10-55 (a) 示出一个 RC 低通滤波器，可以用图 10-54 (a) 所示的开关电容电路替换 R ，如图 10-55 (b) 所示。

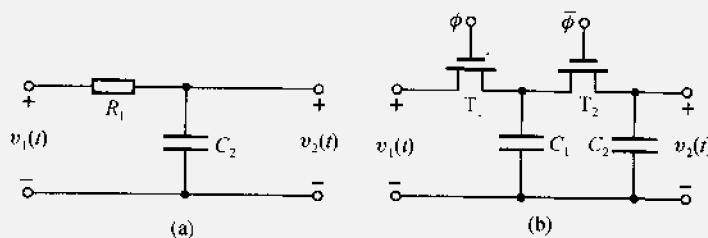


图 10-55 简单的开关电容滤波器

这时，电路的时间常数 τ 将由下式决定

$$\tau = RC = \frac{1}{f_c} \frac{C_2}{C_1} \quad (10-139)$$

式(10-139)表明，只利用 MOS 开关与电容即可构成简单的滤波器，不需要制作电阻，此外，网络的频率响应特性(取决于时间常数)由时钟频率与电容比值决定，与电容的绝对数值无关。以上两点结论具有重要的实际意义，避免制作电阻有利于减小芯片面积，而时钟频率(通常由石英晶体振荡器控制)和电容比值(注意是比值而不是绝对数值)容易保证足够的精度和稳定性。因此，开关电容概念的提出为实现高性能的音频单片集成滤波器找到了理想的途径。

从以上分析可以看出，开关电容网络是一个抽样数据系统。下面借助差分方程分析图 10-55 电路。

设抽样间隔(时钟周期)为 T_c ，当 $t = nT_c$ 时， ϕ 相时钟控制 T_1 管导通， $\bar{\phi}$ 相时钟控制 T_2 管断开。此时， C_1 端电荷量为 $Q_1 = C_1 v_1(n)$ ， C_2 端电荷量为 $Q_2 = C_2 v_2(n)$ ，当 $t = nT_c + \frac{T_c}{2}$ 时， T_1 断开、 T_2 导通，如此周期重复。设在 $t = (n+1)T_c$ 时输出端电荷量为 $(C_1 + C_2)v_2(n+1)$ ，不难列写电荷平衡方程式

$$(C_1 + C_2)v_2(n+1) = C_1 v_1(n) + C_2 v_2(n) \quad (10-140)$$

设激励信号 $v_1(t)$ 为单位阶跃，或令 $v_1(n)$ 为单位阶跃序列，对式(10-140)取 z 变换得到

$$(C_1 + C_2)V_2(z) - C_2V_2(z)z^{-1} = C_1V_1(z)z^{-1} \quad (10-141)$$

$$V_2(z) = \frac{C_1 z}{(z-1)[z(C_1 + C_2) - C_2]} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{C_2}{C_1 + C_2}} \quad (10-142)$$

求逆 z 变换得到

$$v_2(n) = \left[1 - \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)^n \right] u(n) \quad (10-143)$$

也即，当 $nT_c - \frac{T_c}{2} \leq t \leq nT_c + \frac{T_c}{2}$ 时

$$v_2(t) = 1 - \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)^n \quad (10-144)$$

画出阶跃响应波形如图 10-56 所示。

(二) 开关电容积分器

开关电容积分器是构成开关电容滤波器的基本单元。开关电容积分器和一般的连续时间积分器电路分别如图 10-57(a)和(b)所示。在图 10-57(a)中，

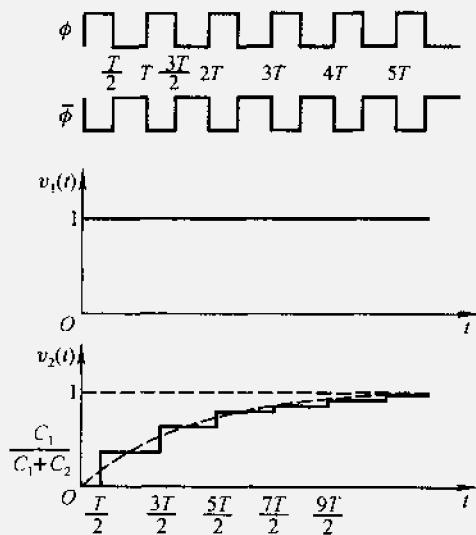


图 10-56 图 10-55 电路的波形

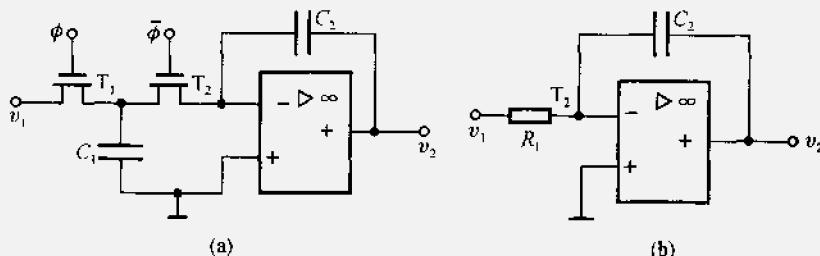


图 10-57 积分器电路

时钟 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 的控制规律仍如前所述。图 10-58 示出时钟信号波形，这里，偶相脉冲时隙(图中以符号 e 表示)MOS 开关 T_1 闭合，电容 C_1 对 $v_1(t)$ 抽样时刻发生在 $\cdots, (n-1)T_c, nT_c, (n+1)T_c, \cdots$ 。奇相脉冲时隙(图中以符号 o 表示)开关 T_2 闭合。考虑到运放负极性输入端为虚地，因而电容 C_1 在前一隙中储存的电荷将全部转移到 C_2 上，但极性相反，与电容 C_2 上原有电荷相叠加建立起 $v_2(t)$ 。如果 $v_2(t)$ 在偶相脉冲时隙抽样输出，则根据

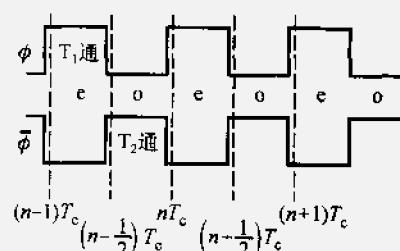


图 10-58 时钟信号波形

电荷守恒关系可列出差分方程如下

$$C_2 v_2(nT_c) = C_2 v_2[(n-1)T_c] - c_1 v_1[(n-1)T_c] \quad (10-145)$$

式(10-145)中右边第一项为前次输出取样时 C_2 上电荷保持值, 第二项是 $\left[n - \frac{1}{2}\right]T_c$ 时刻从 C_1 转移而来的电荷, 二者之代数和构成 nT_c 时刻 C_2 之总电荷。

若 $v_2(t)$ 在奇相脉冲时隙即 $\cdots \left(n - \frac{1}{2}\right)T_c, \left(n + \frac{1}{2}\right)T_c, \cdots$ 抽样输出, 则差分方程式为

$$C_2 v_2\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)T_c\right] = C_2 v_2\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)T_c\right] - C_1 v_1(nT_c) \quad (10-146)$$

对式(10-145)与式(10-146)分别取 z 变换, 可求得奇、偶时隙取样输出的转移函数。

$$C_2 V_2(z) = C_2 V_2(z) z^{-1} - C_1 V_1(z) z^{-1} \quad (10-147)$$

$$\frac{V_2^o(z)}{V_1^e(z)} = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{z-1} \quad (10-148)$$

和

$$C_2 V_2(z) Z^{\frac{1}{2}} = C_2 V_2(z) Z^{-\frac{1}{2}} - C_1 V_1(z) \quad (10-149)$$

$$\frac{V_2^o(z)}{V_1^o(z)} = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{Z^{\frac{1}{2}}}{Z-1} \quad (10-150)$$

式(10-148)与式(10-150)中上标“o”标明奇时隙、“e”标明偶时隙, 也即两式分别表示偶入偶出和偶入奇出条件下的转移函数。

令 $Z = e^{j\Omega T_c}$, 求频响特性

$$\begin{aligned} \frac{V_2^o(j\Omega)}{V_1^e(j\Omega)} &= -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{e^{j\Omega T_c} - 1} \\ &= -\frac{1}{j\Omega} \cdot \frac{\frac{\Omega T_c}{2}}{\frac{C_2}{f_c C_1} \sin\left(\frac{\Omega T_c}{2}\right)} e^{-\frac{j\Omega T_c}{2}} \end{aligned} \quad (10-151)$$

式中 $f_c = 1/T_c$ 。此式右侧第一项与图 10-57 (b) 所示的连续积分器频域转移函数相同, 积分时间常数为 $(C_2/f_c C_1)$; 第二项, 当 $\Omega T_c \rightarrow 0$ (也即 $\Omega \ll \Omega_c$) 时趋向于 1。即式(10-151)给出的转移函数当 $f \ll f_c$ 时, 近似等于连续积分器的转移函数。此外, 式中还存在线性相移项 $e^{-j\Omega T_c/2}$ 。

对于偶入奇出条件得到

$$\frac{V_2^o(j\Omega)}{V_1^e(j\Omega)} = -\frac{1}{j\Omega} \frac{\frac{\Omega T_c}{2}}{\frac{C_2}{f_c C_1} \sin\left(\frac{\Omega T_c}{2}\right)} \quad (10-152)$$

式(10-152)中已不存在线性相移项。可见，为消除开关电容积分器中附加的线性相移之影响，宜选用偶时隙抽样输入、奇时隙抽样输出的时序关系。

在滤波器的实际电路中，还经常用到有损积分器(有反馈电阻的积分器)。图 10-59 (a) 和 (b) 分别示出开关电容有损积分电路和一般的连续时间有损积分电路，二者的结构相互对应。为简化图形，这里将 MOS 开关管以单刀双掷开关表示。图 10-59 (a) 中的开关电容 S_1 、 C_0 和 S_2 、 C_2 分别取代了图 10-59 (b) 中的电阻 R_1 和 R_2 。当输入和输出信号都在偶时隙抽样时，满足电荷守恒关系的差分方程表达式为

$$C_1 v_o(nT_c) = C_1 v_o[(n-1)T_c] - C_0 v_i[(n-1)T_c] - C_2 v_o[(n-1)T_c] \quad (10-153)$$

式(10-153)中，右端第一项为前次输出抽样保持值，第二项是在 $\left(n-\frac{1}{2}\right)T_c$ 时刻从 C_0 转移到 C_1 上的全部电荷，第三项是从 C_2 转移到 C_1 上的全部电荷，三者代数和即为 nT_c 时刻 C_1 上的总电荷。对式(10-153)取 z 变换得到

$$C_1 V_o(z) = C_1 V_o(z) z^{-1} - C_0 V_i(z) z^{-1} - C_2 V_o(z) z^{-1} \quad (10-154)$$

由此求得转移函数

$$\frac{V_o(z)}{V_i(z)} = -\frac{C_0}{C_2} \left[\frac{1}{1 + \frac{C_1}{C_2}(z-1)} \right] \quad (10-155)$$

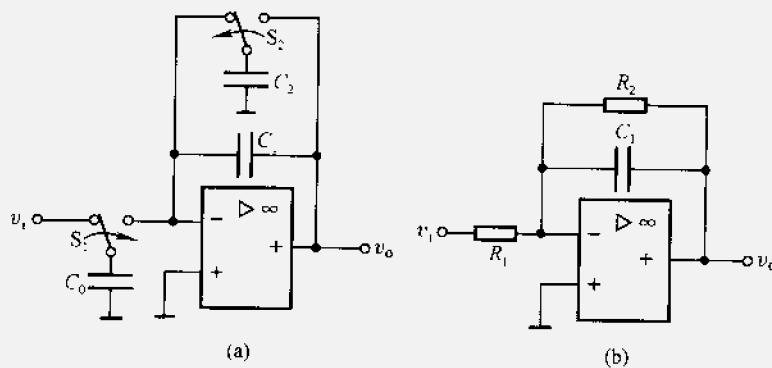


图 10-59 有损积分器电路

令 $z = e^{j\Omega T_c}$ 代入求频响特性

$$\frac{V_o(j\Omega)}{V_i(j\Omega)} = -\frac{C_0}{C_2} \left[\frac{1}{1 + j \cdot \frac{\Omega C_1}{C_2 f_c} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Omega T_c}{2}\right)}{\frac{\Omega T_c}{2}} e^{j\frac{\Omega T_c}{2}}} \right] \quad (10-156)$$

当 $f_c \gg f$ (即 $\Omega_c \gg \Omega$) 时, 式(10-156)近似表达式为

$$\frac{V_o(j\Omega)}{V_i(j\Omega)} = -\frac{C_0}{C_2} \cdot \frac{1}{(1 + j\Omega C_1/f_c C_2)} \quad (10-157)$$

而相应的图 10-59 (b) 电路转移函数是

$$\frac{V_o(j\Omega)}{V_i(j\Omega)} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{(1 + j\Omega R_2 C_1)} \quad (10-158)$$

在开关电容滤波器中, 另一种常用的基本单元是差动积分电路, 如图 10-60 (a) 所示。在此电路中, 用两组开关 S_1 、 S_2 与电容 C_0 取代了图 10-60 (b) 电路输入端的两只电阻和一个电容。在运放反相输入端的静电荷量正比于输入差动电压。它们的转移函数表达式可分别由以下两式求出

$$V_o = -\frac{f_c C_0}{j\Omega C_1} (V_1 - V_2) \quad (10-159)$$

$$V_o = -\frac{1}{j\Omega R C_1} (V_1 - V_2) \quad (10-160)$$

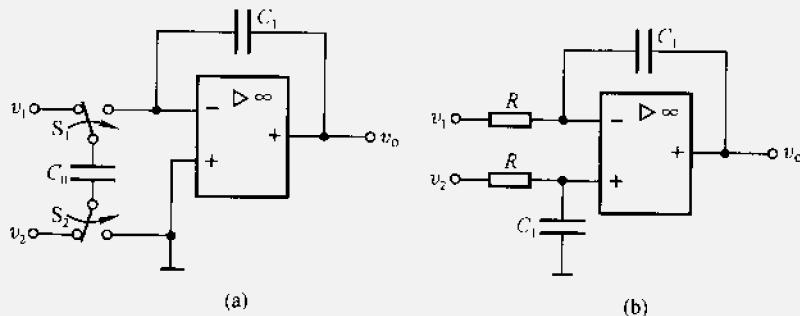


图 10-60 差动积分器电路

(三) 由无源模拟滤波器原型构成 SCF

开关电容滤波器的设计方法有许多种, 其中大多需要利用连续时间滤波器作为原型, 经转换构成 SCF。限于本书篇幅, 这里只介绍一种所谓“状态变量设计法”(也称为模拟框图等效法), 它的构成要点如下:

- (1) 利用 KVL、KCL 列写无源 LC 滤波器的电路方程式, 式中只包含求和、比例和积分运算。

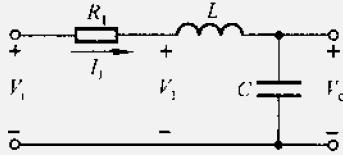
(2) 由于在开关电容滤波器中, 运放是作为 VCVS 形式的受控源工作, 因而, 在上述电路方程式中的电流必须由某一比例电阻 R_s 倍乘, 转换为相应的电压。比例电阻 R_s 的选取原则将在下面讨论。

(3) 由电路基本方程式画出以积分、求和运算构成的模拟等效框图(也称状态变量图)。

(4) 由模拟等效框图转换为开关电容滤波器电路结构。基本单元仍然是积分、比例、求和功能块。

(5) 由无源滤波器的 R , L , C 值以及时钟频率 f_c 和比例电阻 R_s 计算开关电容滤波器的电容比。

图 10-61 示出一个无源 R , L , C 二阶低通滤波器电路, 试由此导出相应的开关电容滤波器。



此电路的转移函数表达式为

$$\frac{V_o}{V_i} = H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s \frac{R_T}{L} + \frac{1}{LC}} \quad (10-161)$$

由图 10-61 列写电路方程式如下:

$$V_1 = V_i - R_T I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{sL} (V_1 - V_o)$$

$$V_o = \frac{1}{sC} I_1$$

为将电流变量 I_1 转换为电压变量 V'_1 , 引入比例电阻 R_s , 取 $I_1 = \frac{V'_1}{R_s}$, 于是得到

$$V_1 = V_i - \frac{R_T}{R_s} V'_1 \quad (10-162)$$

$$V'_1 = \frac{R_s}{sL} (V_1 - V_o) \quad (10-163)$$

$$V_o = \frac{1}{sCR_s} V'_1 \quad (10-164)$$

利用这组方程画出模拟等效方框图如图 10-62 所示。图中, 只包含积分、比例、求和运算功能, 积分器 II 是简单的反向积分器, 而积分器 I 是含有电阻反馈的有损差动积分器。将图 10-62 转换为相应的开关电容积分器如图 10-63。

对照以上两图中积分器 I 与积分器 II 的积分时间常数, 列出以下关系式:

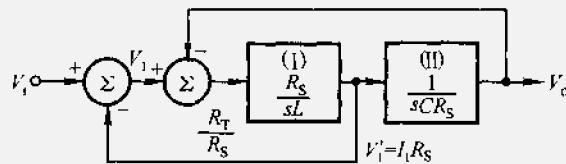


图 10-62 模拟等效框图

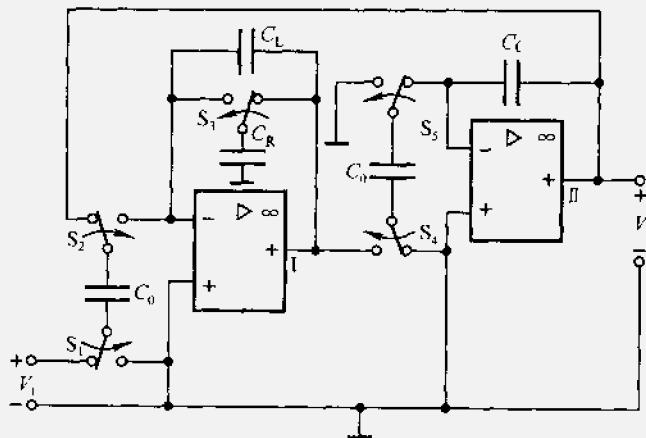


图 10-63 与图 10-62 相应的 SCF 电路

$$\frac{L}{R_s} = \frac{C_L}{f_c C_0} \quad (10-165)$$

$$CR_s = \frac{C_C}{f_c C_0} \quad (10-166)$$

令两图中积分器 I 反馈支路相乘系数相等得到

$$\frac{R_T}{R_s} = \frac{C_R}{C_0} \quad (10-167)$$

在以上各参量中, R_T , L , C 由模拟滤波器原型给定(图 10-61), f_c 是时钟频率, R_s 为任选常数, 待设计参量是 C_L 、 C_C 、 C_0 、 C_R 。在选择 R_s 时, 如果考虑尽量减小电容所占芯片面积, 取两组电容比相等

$$\frac{C_L}{C_0} = \frac{C_C}{C_0} \quad (10-168)$$

于是由式(10-165)和式(10-166)得到

$$R_s = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10-169)$$

在习题 10-30 中给出了按上述原则设计 SCF 参数的数字实例。这里, 只

介绍了利用状态变量法构成二阶 SCF 电路的原理，在实际的 SCF 芯片中，大多是高阶电路，其构成原理与二阶电路大体相同。

除上面介绍的状态变量法之外，在 SCF 电路设计方面还有许多方法，例如，从 s 域映射到 z 域的双线性变换法也是一种较为普遍的方法。此外，在设计过程中往往需要借助电路 CAD（计算机辅助设计）技术，详见有关参考书和文献^①。

在实际的 SCF 芯片电路中，为保证抽样过程及其恢复的顺利进行，选择时钟信号（抽样信号）频率 f_c 远大于传输信号频率，例如，对于 PCM 话路滤波器（工作频率为 300~3 400 Hz）， f_c 通常选 256 kHz。此外，为减少因抽样引入的混叠，在 SCF 之前还要接入抗混叠前置滤波器，滤除高于抽样频率之半的干扰信号。由于对它的精度、稳定性要求不高，可利用简单的 RC 有源滤波器实现。

在本章即将结束时，回顾这章的内容可概括示意如图 10-64。这张框图

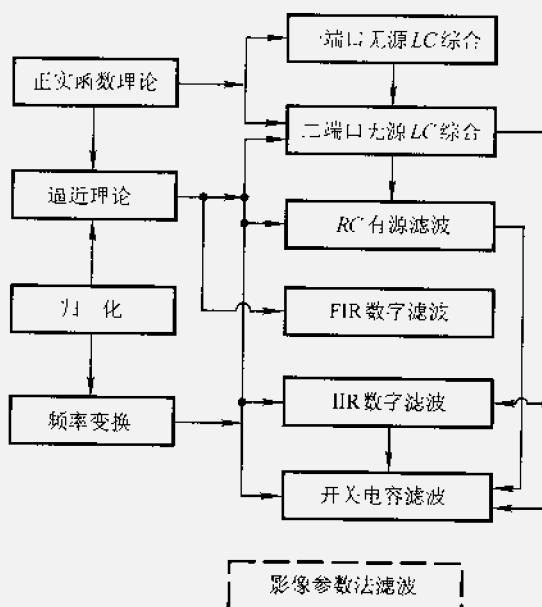


图 10-64 本章内容回顾

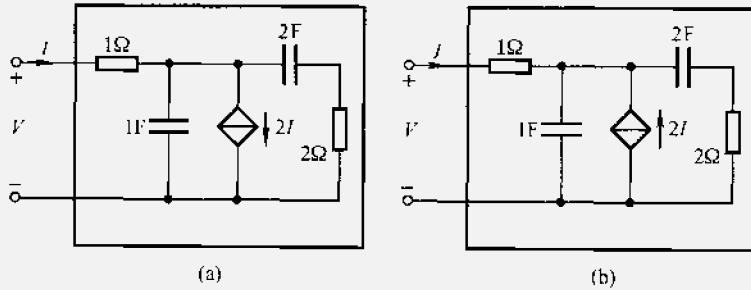
^① 见参考书：郑君里，白应奎，龚明甫，通信系统大规模集成电路，北京：人民邮电出版社，1988。

文献：李松银，郑君里，李梅，改进 KNOB 法实用化 SCF 设计程序，电子学报，1993.2，Vol.21.No.2

也表明了半个多世纪以来在通信与电子系统领域滤波器理论和应用的主要发展历程。正实函数和逼近理论为各种滤波器的形成奠定了理论基础，二端口无源LC综合(达林顿理论)也是滤波器发展史上的里程碑。而影像参数法基本上已无人问津。此外，利用各种固体器件直接制作的滤波器如石英晶体、陶瓷、面声波和电荷耦合器件(CCD)等滤波器具有不同的物理原理、特色和各自的应用范围，限于篇幅，此处从略。

习 题

10-1 题图 10-1 所示两个网络，哪个网络可以等效为一端口无源网络？



题图 10-1

10-2 (1) 为使 $F(s) = \frac{s+a}{s^2+bs+c}$ 是正实函数，确定 a, b, c 都应满足什么条件？

(2) 检验下列函数哪个是正实函数？

$$F_1(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2}; F_2(s) = \frac{s+1}{s^2+2}; F_3(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+1}.$$

10-3 判断函数的正实性： $F_1(s) = \frac{3s^2+5}{s(s^2+1)}$; $F_2(s) = \frac{s^2+s+2}{s^2+2}$ 。

10-4 本题证明 LC 无损一端口网络策动点阻抗函数 $Z(s)$ 或 [导纳函数 $Y(s)$] 的一些性质。

对一般多项式 $F(s)$ ，定义所有由 s 偶次方项构成的多项式称为 $F(s)$ 的偶部，记为 $F_e(s^2)$ ，所有由 s 奇次方项构成的多项式称为 $F(s)$ 的奇部，记为 $F_o(s) = sF_e^1(s^2)$ ，则 $F(s) = F_e(s^2) + F_o(s)$ 。

(1) 证明：若一端口 LC 网络是无损的，即 $\operatorname{Re}[Z(j\Omega)] = 0$ ，则 $Z(s)$ 一定是奇次多项式和偶次多项式的比值，即 $Z(s)$ 是 s 的奇函数。

(2) $Z(s)$ [或 $Y(s)$] 的零、极点只能是位于 $j\Omega$ 轴上的单阶零点或极点，且 $Z(s)$ 在极点处的留数是正实数。

(3) $Z(s)$ 是 s 的奇函数，因而 $Z(j\Omega)$ 是纯电抗(或电纳)且记为 $Z(j\Omega) = jX(\Omega)$ ，

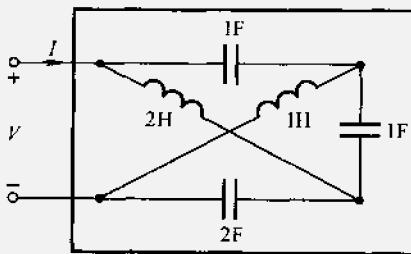
$X(\Omega)$ 是 Ω 的实函数, 证明 $\frac{d}{d\Omega}X(\Omega) > 0$, 即电抗函数的斜率永远为正。

(4) $Z(s)$ 在 $j\Omega$ 轴上的零、极点分布必须交替出现。

10-5 已知无损 LC 阻抗函数 $Z(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)(s^2 + 16)}$, 试分别用考尔 I 型、II 型实现。

10-6 (1) 求题图 10-6 所示网络的策动点阻抗函数 $Z(s)$;

(2) 试分别用考尔 I 型、II 型实现图示网络的 $Z(s)$ 。



题图 10-6

10-7 福斯特型一端口无源网络综合方法是将给定的策动点阻抗或导纳函数用部分

分式展开, 例如, 若 $Z(s) = \frac{s(s^2 + 2)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}$, 可展开为

$$Z(s) = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 3}$$

式中两项各对应一个并联谐振回路, 画出实现它的等效电路图, 注明图中 L , C 元件值。

10-8 已知系统函数 $H_a(s) = \frac{k}{s^2 + 3s + 1}$

用两端端接电阻的无损二端口网络实现, 信源内阻 $R_S = 1 \Omega$, 分别求负载电阻为: (1) $R_L = 1 \Omega$; (2) $R_L = 2 \Omega$; (3) $R_L = 0.5 \Omega$ 时的三种电路实现。

10-9 已知系统函数 $H_a(s) = \frac{ks^2}{s^2 + 3s + 1}$, 用两端端接电阻的无损二端口网络实现, 信源内阻 $R_S = 1 \Omega$, 求负载电阻为 $R_L = 1 \Omega$ 时的电路实现。

10-10 下列各函数是否为可实现系统的频率特性幅度模平方函数? 如果是, 请求出相应的最小相位函数; 如果不是, 请说明理由。

$$(1) |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{\Omega^4 + \Omega^2 + 1};$$

$$(2) |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1 + \Omega^4}{\Omega^4 - 3\Omega^2 + 2};$$

$$(3) |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{100 - \Omega^4}{\Omega^4 + 20\Omega^2 + 10}.$$

10-11 设计并实现满足下列技术指标的巴特沃思低通滤波器:

- 通带允许起伏: $-1 \text{ dB} \quad 0 \leq f \leq 10 \text{ kHz}$
 阻带衰减: $\leq -20 \text{ dB} \quad 20 \text{ kHz} \leq f < \infty$
 信源内阻 R_S 和负载电阻 R_L 相等, $R_S = R_L = 1 \text{ k}\Omega$ 。
- 10-12** 重复题 10-11, 用切比雪夫滤波器实现。
- 10-13** 设计并实现满足下列技术指标的巴特沃思高通滤波器:
 通带允许起伏: $-1 \text{ dB} \quad 1 \text{ MHz} \leq f < \infty$
 阻带衰减: $\leq -20 \text{ dB} \quad 0 \leq f \leq 500 \text{ kHz}$
 信源内阻和负载电阻相等: $R_S = R_L = 1 \text{ k}\Omega$ 。
- 10-14** 设计并实现满足下列技术指标的带通滤波器:
 通带内要求具有等波纹起伏特性, 允许起伏:
 $-1 \text{ dB} \quad 0.95 \text{ MHz} \leq f \leq 1.05 \text{ MHz}$
 阻带衰减: $\leq -40 \text{ dB} \quad 0 \leq f \leq 0.75 \text{ MHz}, 1.25 \text{ MHz} \leq f < \infty$
 信源内阻和负载电阻相等: $R_S = R_L = 150 \Omega$ 。
- 10-15** 试证明对巴特沃思和切比雪夫滤波器, 阻带($\Omega \gg \Omega_c$)衰减速度为 $20N \text{ dB/dec}$, 其中 N 为滤波器阶数。
- 10-16** 通带允许起伏为 1 dB 的切比雪夫滤波器
 (1) 求 $N=2$ 时低通原型滤波器系统函数 $H_a(s')$;
 (2) 若归一化负载电阻为 $R'_L = R_L/R_S = 0.25$, 求低通原型电路实现, 并说明实现电路时有何限制。
- 10-17** 通带允许起伏为 3 dB 的切比雪夫滤波器
 (1) 求 $N=2$ 时低通原型滤波器系统函数 $H_a(s')$;
 (2) 若归一化负载电阻为 $R'_L = 0.15$, 求低通原型电路实现。
- 10-18** 如图 10-2 所示模拟信号的数字处理系统, 已知限带滤波器和平滑滤波器的截止角频率都为 $\frac{\pi}{T} \text{ rad/s}$, 数字滤波器截止角频率为 $\frac{\pi}{8} \text{ rad}$, 三者都为理想低通滤波器, 问若(1)抽样频率为 10 kHz ; (2)抽样频率为 20 kHz 两种情况下等效模拟滤波器带宽是多少?
- 10-19** 用冲激不变法求相应的数字滤波器系统函数 $H(z)$:
 (1) $H_a(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$;
 (2) $H_a(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 4}$ 。
- 10-20** 试证明对 $H_a(s) = \frac{1}{s+a}$ ($a > 0$) 和 $H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + (\frac{2\pi}{T})^2}$ ($a > 0$) 分别用冲激不变法变换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$, 两者具有相同的 $H(z)$; 从物理概念上解释这一结果(其中 T 为抽样周期)。
- 10-21** (1) 用双线性变换法把 $H_a(s) = \frac{s}{s+a}$ ($a > 0$) 变换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$, 并求数字滤波器的单位样值响应 $h(n)$ 。(设 $T=2$)
 (2) 对(1)中给出的 $H_a(s)$ 能否用冲激不变法转换成数字滤波器 $H(z)$? 为

什么?

10-22 要求通过模拟滤波器设计数字低通滤波器, 给定指标: -3 dB 截止角频率

$\omega_c = \frac{\pi}{2}$, 通带内 $\omega_p = 0.4\pi$ 处起伏不超过 -1 dB, 阻带内 $\omega_s = 0.8\pi$ 处衰减不大于 -20 dB, 用巴特沃思滤波特性实现

(1) 用冲激不变法, 最少需要多少阶?

(2) 用双线性变换法, 最少需要多少阶?

10-23 给定如题图 10-23 所示的数字

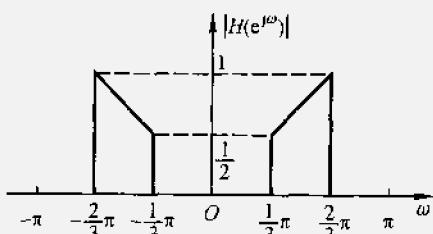
滤波器频率特性,

(1) 用冲激不变法, 试求原型模拟滤波器频率响应;

(2) 用双线性变换法得到, 试求原型模拟滤波器频率响应。

(本题可以用图解法, 画出原型模拟滤波器频率响应。)

10-24 数字带通滤波器可以通过双线



题图 10-23

性变换用模拟带通滤波器进行设计。设已经求得相应的模拟低通原型滤波器 $H_a(s')$, 则可以用模拟归一化复频率 s' 与 z 的映射关系 $s' = f(z)$ 直接得出要求的数字带通滤波器 $H(z)$ 。

(1) 证明: 从模拟低通原型到数字带通滤波器, s' 与 z 的映射关系为:

$$s' = A \frac{1 - 2Bz^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

模拟低通原型归一化模拟角频率 Ω' 与数字带通滤波器的数字角频率 ω 间的关系为:

$$\Omega' = A \frac{B - \cos \omega}{\sin \omega}$$

并求常数 A, B 与数字带通指标间的关系。

(2) 设计并实现数字巴特沃思型带通滤波器, 给定技术指标:

-3 dB 通带范围: $0.3\pi \leq \omega \leq 0.4\pi$

阻带衰减: ≤ -15 dB $0 \leq \omega \leq 0.2\pi, 0.5\pi \leq \omega \leq \pi$

求该滤波器的系统函数 $H(z)$, 并画出实现的结构框图。

10-25 完整推导证明窗函数法设计准则式(10-110)和式(10-111)。

10-26 试求汉宁窗函数的傅里叶变换, 并解释旁瓣电平降低的原因。

10-27 已知 FIR 滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{10}(1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4})$$

(1) 求 $H(e^{j\omega})$ 的表示式, 粗略画出频域幅度特性;

(2) 画出乘法次数最少的结构框图表示。

10-28 用矩形加窗设计一线性相位带通 FIR 滤波器,

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega_0\omega} & -\omega_c \leq \omega < \omega_0 \leq \omega_c \\ 0 & 0 \leq \omega < \omega_0 \quad \omega_c, \omega_0 + \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

- (1) 计算 N 为奇数时的 $h(n)$;
 (2) 计算 N 为偶数时的 $h(n)$ 。

10-29 用矩形窗设计一线性相位高通 FIR 滤波器,

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega_0\omega} & \pi - \omega_c \leq \omega \leq \pi \\ 0 & 0 \leq \omega < \pi - \omega_c \end{cases}$$

- (1) 计算 N 为奇数时的 $h(n)$;
 (2) 计算 N 为偶数时的 $h(n)$ 。

10-30 利用图 10-61 所示的模拟低通滤波器为原型, 设计一个如图 10-63 所示的二阶 SCF。给定电路参数为 $L = 0.1126 \text{ H}$, $C = 0.2247 \mu\text{F}$, $R_T = 1 \text{ k}\Omega$, 时钟频率 $f_c = 100 \text{ kHz}$ 。

- (1) 求三组电容比值 $\frac{C_C}{C_0}$, $\frac{C_L}{C_0}$, $\frac{C_R}{C_0}$;
 (2) 试选 $C_0 = 1 \text{ pF}$, 求 C_C , C_L , C_R 值。

第十一章 反馈系统

11.1 引言

本书前九章的注意力侧重于讨论信号性能分析以及信号通过线性时不变系统的基本求解方法(包括时域和变换域方法)，从第十章到十二章转向系统性能分析或系统设计初步原理。虽然，信号与系统的概念密不可分，然而这种注意力的不同将使讨论的目标和内容有所差异。另一方面，前十章的应用举例大多以通信工程为背景，而第十一和十二两章的应用背景则着重控制工程。

系统分析的基本方法是建立它的数学模型(如微分方程或差分方程)，然后按一些标准方法求解。然而在实际问题中只依赖这种办法往往使研究过程十分烦琐或不得要领。解决上述矛盾的方法之一是给出一些典型系统的模块及其响应特征，制成表格、手册或存放在数据库中备查，按实际问题的需要选择相应的模块，只要作简单的修改和计算即可付诸应用。第十章关于滤波器的讨论正是遵循这一原则进行的。另一类研究方法是将系统分解为若干基本单元，如果熟知各单元性能，将它们组合构成复杂系统时，分析过程将得以简化。这种方法曾在第一章 1.6 节和第七章 7.3 节给出初步概念，即利用基本的方框图组合建立系统模型。人类的认识过程往往需要中间体系作为媒介。求解一个庞大的问题所需计算量可能难以接受，而将此问题“拆”成若干简单问题然后相互连接起来就比较容易计算。而且前者难以给出物理概念，后一种作法容易理解性能特征的实质。系统分解与互联的研究方法也有助于从系统分析过渡到系统设计(综合)。

反馈系统的研究是利用分解与互联概念而获得成功的典型范例。首先考察连续时间信号与系统的反馈系统模型。在图 11-1 中，输入信号为 $X(s)$ ，输出信号为 $Y(s)$ ，正向通路的系统函数为 $A(s)$ ，反馈通路的系统函数为 $F(s)$ ，输入信号与反馈信号经加法器作相减运算得到 $E(s)$ ，有时称 $E(s)$ 为误差信号。按照上述要求写出以下约束方程式

$$Y(s) = E(s)A(s)$$
$$E(s) = X(s) - Y(s)F(s)$$

由此求得反馈系统的系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A(s)}{1 + F(s)A(s)} \quad (11-1)$$

第四章例4-25和例4-26曾建立与此类似的系统函数表达式。

注意到在图11-1中反馈信号与输入信号作相减运算，这种情况称为负反馈或非再生反馈。如果将二者作相加运算（即图11-1中加法器下面的符号改为正号），则称为正反馈或再生反馈。此时，式(11-1)中 $H(s)$ 表达式的分母项成为 $1 - F(s)A(s)$ 。在本章的讨论中着重研究负反馈。

为了比较引入与不引入反馈系统性能的区别，有时将图11-1中的反馈通路断开，这时称为开环系统。与此对照，闭合反馈通路后则称为闭环系统。

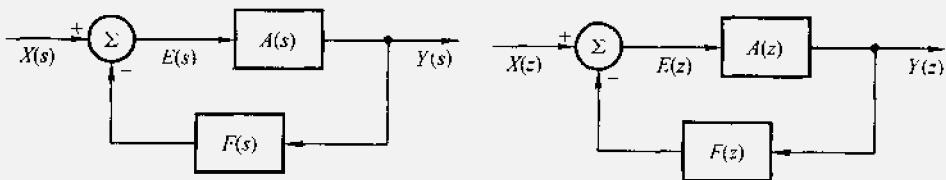


图11-1 连续时间信号反馈系统模型

图11-2 离散时间信号反馈系统模型

离散时间信号的反馈系统模型如图11-2所示。图中， $X(z)$ 为输入信号， $Y(z)$ 是输出信号，正向通路的系统函数为 $A(z)$ ，反馈通路系统函数是 $F(z)$ ，输入信号与反馈信号相减得到 $E(z)$ 。仿照式(11-1)容易写出反馈系统的系统函数 $H(z)$ 表达式

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(z)}{1 + F(z)A(z)} \quad (11-2)$$

由式(11-1)和式(11-2)可见，连续与离散反馈系统的数学模型具有相同的形式，以后的分析将要看到，它们的基本特性与应用也大体相同。

很久以前人们就意识到引用反馈可以获得许多益处，这是一种自然感觉的应用，它渗透在人们的日常生活和生产活动之中。很难说谁是反馈技术的发明者。近代反馈系统理论的形成大约是在20世纪30年代。美国贝尔电话实验室的布莱克(H.S.Black)及其合作者奈奎斯特(H.Nyquist)和波特(H.W.Bode)等人都曾为此理论的形成作出贡献。他们的工作主要是围绕改善电子线路放大器的性能而进行的。到20世纪40年代至50年代期间，反馈理论已经成为控制系统设计的一种基本方法而得到了更为广泛的应用。控制论的创始人维纳(N.Wiener)及其继承者把反馈视为控制论哲学体系的基础之一。反馈理论涉及与自动控制有关的一切事物，不仅限于工程技术，也包括社会系统与经济系统行为，以至人类或动物的生理过程与心理过程。

在模拟电子线路课程中已初步建立了反馈放大器的概念，利用反馈技术可

使放大器的许多性能得到改善，下一节将从系统函数零、极点分布的观点进一步讨论这类问题。

利用系统的输出去控制或调整系统自身的输入即可产生反馈效应。此时，提供了一个误差校正信号，它可以调节输出跟踪输入信号，从而削弱外界干扰或系统自身参数变动的影响。例如，在机电系统中，为了保持一台电机轴的位置处于某一恒定角度，可测量电机轴的实际位置与所要求位置之间的误差，然后利用此误差信号使轴在适当方向上调整。图 11-3 (a) 示意图出利用直流电机控制火炮位置系统的方框图。要使火炮能够命中目标，需要不断调整炮口位置跟踪目标，而目标的方位是任意改变的，无法预知。在图 11-3 (a) 反馈系统中，参考输入信号就是所需炮口位置的方位角 ϕ_0 。用电位器 I 把角度 ϕ_0 转换为电压 $A_1\phi_0$ ，而另一电位器 II 用来产生正比于实际炮位角度 $\phi(t)$ 的电压 $A_1\phi(t)$ 。把这两个电压进行比较即可产生误差信号 $A_1[\phi_0 - \phi(t)]$ ，经放大后

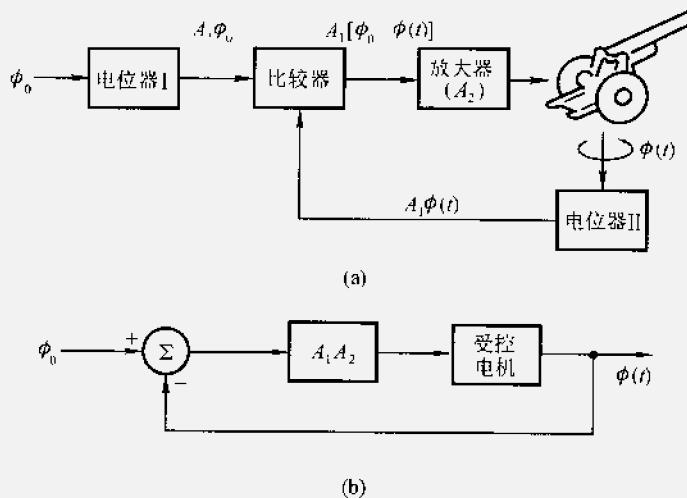


图 11-3 利用电机控制火炮位置的反馈系统

驱动电机调整轴的角度。图 11-3 (b) 示出此系统的简化等效方框图。不难想像，若断开反馈，利用 ϕ_0 作输入直接控制电机轴的位置，仍有可能使火炮调整到所需方位。然而将闭环系统与开环系统相比较，前者显示明显的优点。在闭环系统中，当电机轴处于正确位置时，任何偏离此位置的扰动都会被感受到，由此产生误差信号进行校正，使轴回到正确位置。对于开环系统则不具备这种抵抗扰动的能力。此外，在开环系统中，为了设计适当的输入，必须知道整个系统的精确性能；而在闭环系统中，并不要求对整个系统参数有过细的了解。

在工业自动控制过程中可以看到许多与上述跟踪系统原理类似的反馈系统

应用实例。在通信系统中，锁相环路和自动频率微调电路都是基于上述跟踪系统原理设计而成。

反馈的另一重要特性是适当引入反馈后可使一个不稳定系统进入稳定状态。图 11-4 示出研究“倒立摆”控制的模型图。图中，倒立摆由一根细棍及其顶端的重物构成。细棍的底部安装在一个小车上，小车可沿轨道移动。如果小车保持静止不动，细棍和重物就会倒下来，这是一个不稳定系统。为使此系统稳定，可不断地移动小车位置以保证倒立摆平衡于垂直状态。习题 11-11 将详细研究这一问题。与此类似的一个工程实例是控制火箭轨道的问题。火箭在空中飞行时，由于空气动力的变化和风的扰动将使火箭偏离正确轨道。这些力的变化和扰动都是不可能事先可知的，为此需要借助反馈。利用火箭推力方向的变化来校正扰动引起的轨道偏离。

在生物和人类控制运动的过程中也存在反馈。例如，人们用手去拿某件物体时，要依靠视觉来判断手和物体之间的差距，逐步接近物体。这是一个闭环反馈系统。如果没有视觉反馈(闭上眼睛)构成一个开环系统，则此控制过程的效果将明显变坏。此外，杂技演员用手或头部顶起一根长杆，演员凭视觉判断长杆可能倒下的方位，不停地移动手或头的位置，使长杆稳定于垂直状态。这种杂技表演与图 11-4 讲述的倒立摆工作原理完全相同。

下一节将初步介绍负反馈系统特性、基本分析方法以及典型应用实例。而 11.3 节则从另一角度研究反馈技术的应用，简要说明借助正反馈产生自激振荡的原理。考虑到稳定性分析是研究、设计反馈系统的基本问题，在 11.4 和 11.5 节给出这方面的基本知识，包括根轨迹和奈奎斯特判据。最后一节讲授信号流图，对于较复杂的线性反馈系统，利用信号流图方法可使分析工作大大简化。此外，掌握信号流图方法将为学习下…章系统状态空间分析打好基础。

必须指出，本章的内容只是关于反馈系统分析的引导介绍，全面、深入的研究将在控制理论等课程中学习。

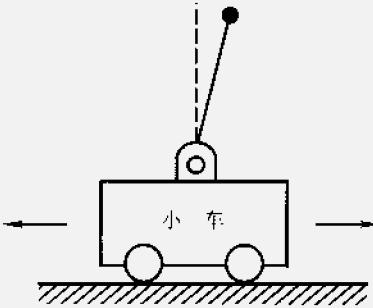


图 11-4 倒立摆控制模型

11.2 反馈系统的基本特性及其应用

参看图 11-1 和式(11-1)，引用描述负反馈系统的基本表达式

$$H(s) = \frac{A(s)}{1 + F(s)A(s)}$$

通常，在输入信号工作的频率范围之内，若环路增益 $F(s)A(s)$ 的模远大于 1，可得到以下近似关系式

$$H(s) \approx \frac{A(s)}{F(s)A(s)} = \frac{1}{F(s)}, (\text{当 } |F(s)A(s)| \gg 1) \quad (11-3)$$

由此近似式可给出表征反馈系统性能的重要结论。即当 $|F(s)A(s)| \gg 1$ 时，

- (1) 前馈通路系统函数 $A(s)$ 对整个系统函数 $H(s)$ 的影响可忽略不计；
- (2) 整个的系统函数 $H(s)$ 近似等于反馈通路系统函数 $F(s)$ 的倒数。

从以下的讨论将看到，反馈系统的许多特性及其应用都与以上两点结论密不可分。

对于离散时间信号与系统也可得出与此类似的结果。

(一) 改善系统的灵敏度

在电子线路组成的系统中，当某些部件参数发生变化时（如有源器件的老化、温度影响以及电源电压变动等引起），系统的外部特性将随之改变，利用反馈技术可以削弱部件参数不稳定对整个系统函数产生的影响。此处先说明一个实例，然后用灵敏度的概念解释这一现象。

例如，希望制作一个增益为 $A_1 = 10$ 的放大器，当环境发生改变之后，若其增益下降至 5，则此系统性能发生太大的偏差，使用者无法接受。然而，若适当配合前置放大器并引入反馈之后，可使这一矛盾大大缓解。

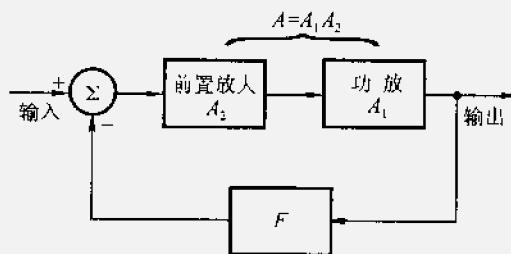


图 11-5 利用反馈技术改善系统的灵敏度

图 11-5 示出反馈系统框图，图中，末级功率放大器即原放大器 ($A_1 = 10$)，附加的前置放大器增益 $A_2 = 100$ ，反馈衰减器传输函数 $F = 0.099$ ，令 $A = A_1 A_2 = 1000$ ，可求得整个系统的增益为

$$H = \frac{1000}{1 + 0.099 \times 1000} = 10$$

满足所需求。当功率放大器的增益从 10 降至 5 时，不难求得整个系统增益改变为

$$H' = \frac{500}{1 + 0.099 \times 500} = 9.9 \approx 10$$

可见，系统总的增益变动极小，使用者完全可能接受。必须注意，这里的前置放大器工作在较低功耗下并且不受负载影响，反馈衰减器选用无源器件，它们的成本低廉、性能稳定。

出现上述现象是由前面式(11-3)给出的反馈基本特性所决定的，即总增益

$$H = \frac{A_1 A_2}{1 + FA_1 A_2} \approx \frac{1}{F}, (\text{当 } FA_1 A_2 \gg 1)$$

即在满足环路增益远大于1的条件下，总增益与正向通路参数无关，只取决于 F 。

波特给出灵敏度的定义如下

$$S = \frac{\text{整个系统增益相对变化}}{\text{指定元件增益相对变化}} = \frac{\Delta H}{\frac{\Delta A}{A}} \quad (11-4)$$

此即指定元件(一般为有源器件)引起的整个系统之灵敏度。灵敏度越低，系统性能的相对稳定性越好。在上例中，对于开环系统 $S=1$ ，而对闭环系统 $S = \frac{0.01}{0.5} = 0.02$ 。显然，引入反馈之后使灵敏度大为改善。一般情况下，由于 ΔH 较小，式(11-4)可粗略近似为

$$S = \frac{A \Delta H}{H \Delta A} \approx \frac{A}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial A} = \frac{1}{1 + FA} \quad (11-5)$$

这表明，反馈的效果是使系统的灵敏度降低到无反馈时的 $\frac{1}{1 + FA}$ 。

(二) 改善系统频响特性

利用反馈可以调整系统的动态特性。最常见到的此类应用如展宽放大器的频带，而付出的代价是适当降低放大器的增益。下面考察一个实例。在图11-6中，正向通路的系统函数为

$$A(s) = \frac{A\alpha}{s + \alpha}, \text{ 这是一个一阶系统。}$$

若 α 为实数且 $\alpha > 0$ ，则此低通滤波器在 S 平面实轴上 $-\alpha$ 处有一阶极点。它的直流增益为 A ，频带宽度

(增益下降至最大值 A 的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

也即 3 dB 点是 α 。为适当展宽频

带，构成闭环系统。反馈通路的传输函数为 $F = \beta$ ，整个系统的系统函数表达式为

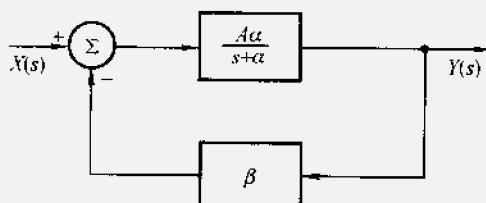


图11-6 利用反馈改善系统频响特性

$$H(s) = \frac{A(s)}{1 + FA(s)} = \frac{A\alpha}{s + (1 + \beta A)\alpha} \quad (11-6)$$

可见, $H(s)$ 的极点从 $-\alpha$ 移至 $-(1 + \beta A)\alpha$, 带宽从 α 扩展到 $\alpha(1 + \beta A)$; 而直流增益却从 A 降低到 $\frac{A}{1 + \beta A}$, 也即降至原增益的 $\frac{1}{1 + \beta A}$ 。而带宽与最大增益的乘积保持不变, 仍为 αA 。

在模拟电子线路的实际应用中, 运算放大器在开环状态下往往具有很高的增益和较窄的带宽。为调整参数以符合实用要求, 引入反馈(一般用电阻分压即可)使闭环带宽扩展, 与此同时增益下降, 二者乘积不变。

系统频域特性的调整完全可反映到时域特性。因此, 若从时域观察, 引入反馈可以减小系统阶跃响应的上升时间, 也即反馈使频带展宽等效于响应的时间常数下降。在机电系统中常常利用这一原理降低马达转速控制的惰性。

(三) 逆系统设计

在通信与控制系统中, 有时希望实现某已知系统的逆系统。若原系统之系统函数为 $H(s)$, 相应的逆系统的系统函数 $H_i(s) = 1/H(s)$ 。为满足这一要求, 一种方法是计算出 $H_i(s)$, 直接按此函数式设计、制作。另一种方法是利用原系统组成反馈系统, 也可产生同样的效果。此时, 反馈系统方框图如图 11-7 所示。

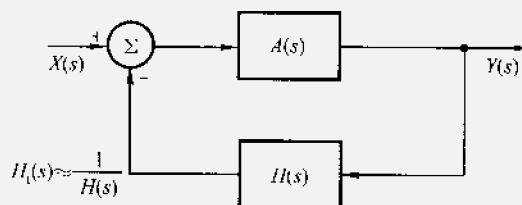


图 11-7 利用反馈构成逆系统

显然, 在满足 $A(s)H(s) \gg 1$ 的条件下, 闭环系统的系统函数 $H_i(s)$ 近似为

$$H_i(s) \approx \frac{1}{H(s)} \quad (11-7)$$

整个系统的系统函数 $H_i(s)$ 即为 $H(s)$ 的倒数, 实现了所需的逆系统。

在许多实际问题中, 当具有 $H(s)$ 系统函数的设施更容易制作时, 按图 11-7 的方法实现逆系统比较方便。另一种情况是 $H(s)$ 可能随环境不断改变或难以确定 $H(s)$ 的严格表达式时, 采用反馈方法实现逆系统更显得十分必要。

例 11-1 已知图 11-8 (a) 所示, RC 桥 T 网络的电压传输函数为

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(RCs)^2 + \frac{2}{\alpha}RCs + 1}{(RCs)^2 + \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha\right)RCs + 1} \quad (11-8)$$

式中 $\alpha \gg 1$, $H(s)$ 零、极点分布如图 11-8 (b), 幅频特性曲线如图 11-8 (c),

它具有带阻特性，试利用此电路与运算放大器组成一个带通滤波器。

解 由图 11-8 (b) 可见，桥 T 网络具有两个靠近虚轴的共轭零点和两个实轴上的极点，因而构成带阻滤波器。为实现带通特性应使零、极点位置互换，也即设计一个逆系统。仿照图 11-7 可给出所需逆系统如图 11-9 (a) 所示。图中，运放的增益 K 足够大，于是反馈系统的系统函数为

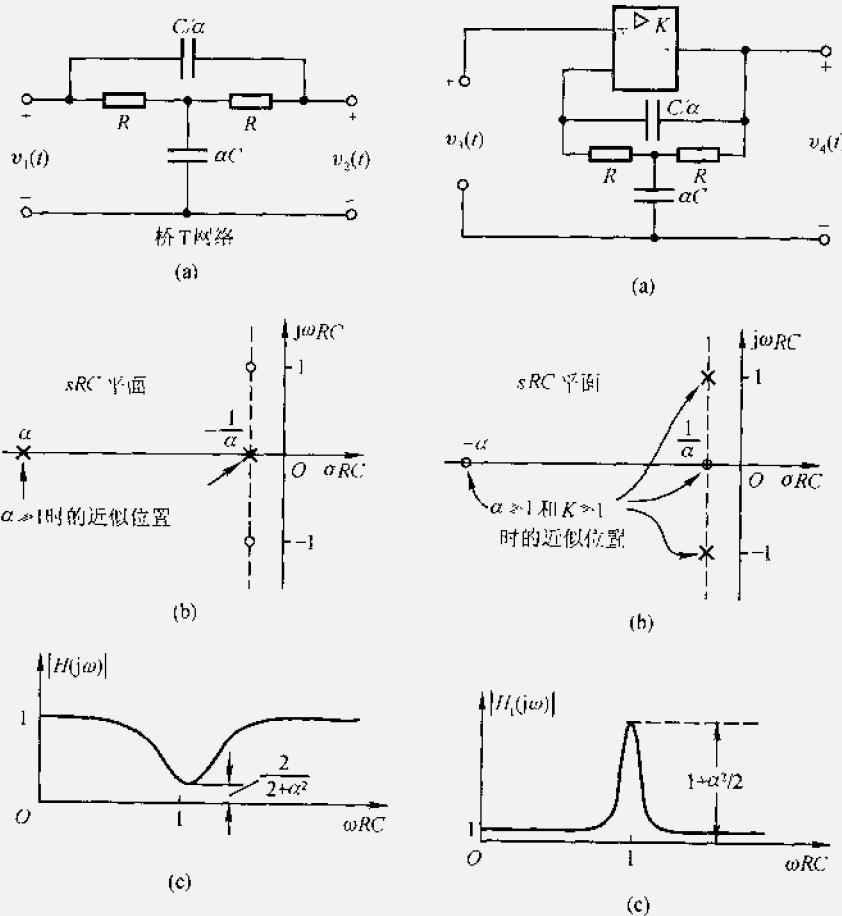


图 11-8 RC 桥 T 网络及其 s 域
和频域特性

图 11-9 利用桥 T 网络构成
的逆系统及其特性

$$\begin{aligned} H_i(s) &= \frac{V_4(s)}{V_3(s)} \approx \frac{1}{H(s)} \\ &= \frac{(RCs)^2 + \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha\right)RCs + 1}{(RCs)^2 + \frac{2}{\alpha}RCs + 1} \end{aligned} \quad (11-9)$$

$H_1(s)$ 的零、极点分布如图 11-9 (b) 所示，相应的频响特性如图 11-9 (c)，实现了带通滤波特性。

不难设想，如果利用电感与电容组成谐振电路，也可使其系统函数呈现靠近虚轴的共轭极点，从而直接实现带通特性。然而，当频率较低时，所需电感体积、重量太大，利用本例给出的反馈系统方案更为合理。

(四) 使不稳定系统成为稳定系统

前文已述，对于一个不稳定系统若适当引入负反馈可使其成为稳定系统。如倒立摆的动态平衡，火箭轨道控制以及生物繁殖的节制等等。

例 11-2 若系统函数 $A(s) = \frac{b}{s-a}$ ，当 $a > 0$ 时，此系统在右半平面有一阶极点，为不稳定系统，试引入负反馈使其稳定。

解 图 11-10 示出引入负反馈的闭环系统。取 $F(s)$ 为常数 k ，容易写出整个系统的系统函数为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{A(s)}{1 + F(s)A(s)} \\ &= \frac{b}{s - a + kb} \end{aligned} \quad (11-10)$$

只要选择 $k > \frac{a}{b}$ 即可使极点移到左半平面，保证系统稳定。

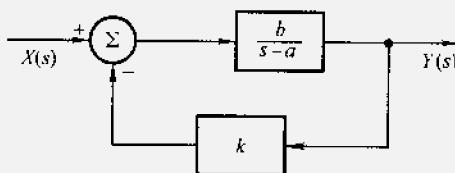


图 11-10 引入反馈改善系统的稳定性

在此反馈系统中，反馈通路系统函数 $F(s)$ 为常数，反馈信号按比例送回，因此称为比例控制反馈系统。如果 $F(s)$ 函数中含有 s 项，称为微分控制系统，含有 $1/s$ 项为积分控制系统，同时含有以上三项者称为比例-积分-微分控制系统，简写为 PID 系统(参看习题 11-12)。

下面讨论一个离散时间信号反馈系统的例子。为了说明利用反馈可以遏制某种动物总量的增长，我们来考察一个单种动物增殖的简化模型。

例 11-3 设 $y(n)$ 为第 n 代动物总量，假定在没有外界因素影响的条件下，自然繁殖将使每代总数加倍。另外， $e(n)$ 代表外界影响对总数引起的增减。考虑以上两方面建立差分方程表达式为 $y(n) = 2y(n-1) + e(n)$ ，这是一个无反馈系统。实际上，在生态环境中都存在一些阻止增长的因素，例如有限食物的限制、本类物种的“天敌”对它们的捕食以及人类的捕猎和其他节制因

素等等。可以认为这些因素是一种负反馈作用。假定 $y(n)$ 以 2β 倍的因子延迟反馈送至系统输入端，并以 $r(n)$ 表示，由此写出描述此反馈系统的时域模型为：

$$y(n) = 2y(n-1) + e(n) \quad (11-11)$$

$$r(n) = 2\beta y(n-1) \quad (11-12)$$

$$e(n) = x(n) - r(n) \quad (11-13)$$

式中 $x(n)$ 为此系统的激励信号，它表示该物种的迁移或自然灾害等因素产生的效果。

- (1) 由时域方程导出变换域(z 域)模型，画出反馈系统框图；
- (2) 讨论它的稳定性、稳定条件。

解 假定正向通路的系统函数为 $A(z)$ ，反馈通路的系统函数为 $F(z)$ ，由时域表达式容易导出：

$$A(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad (11-14)$$

$$F(z) = \frac{R(z)}{Y(z)} = 2\beta z^{-1} \quad (11-15)$$

画出反馈系统方框图如图 11-11。图中

$$X(z) - R(z) = E(z) \quad (11-16)$$

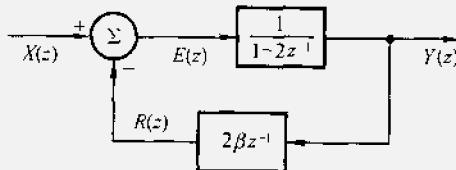


图 11-11 单种动物增殖的简化模型

求出闭环系统的系统函数 $H(z)$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(z)}{1 - F(z)A(z)} \\ &= \frac{1}{1 - 2(1 - \beta)z^{-1}} \end{aligned} \quad (11-17)$$

由 $A(z)$ 表达式可以看出，系统函数极点位于单位圆之外，它是不稳定系统，按此模型该物种将无休止增长。

当引入反馈之后，由 $H(z)$ 表达式可见，调节系数 β 可使系统进入稳定状态。为保证 $H(z)$ 的极点位于单位圆内的正实轴上，需满足

$$0 < 2(1 - \beta) < 1 \quad (11-18)$$

由此解得当 $\frac{1}{2} < \beta < 1$ 时可使系统稳定。

当 $\beta < \frac{1}{2}$ 时, 极点还是位于单位圆之外, 系统仍不稳定。当 $1 < \beta < \frac{3}{2}$ 时, 极点虽在单位圆内, 但是落于负实轴上, 此时, 系统的冲激响应呈正、负交替, 不能得到确切的物理解释。

容易想到, 由于 β 大于 1, 相当于把动物的总数经负反馈作用移去 100% 以上, 显然是不合理的。 $\beta > \frac{3}{2}$ 也为不稳定系统。图 11-12 (a) 和 (b) 分别示出 $\beta > 0$ 和 $\beta < 0$ 时随 β 变动 $H(z)$ 极点在 z 平面上的变动情况。

由于许多实际因素未能考虑周全, 因而上述模型是十分粗略的。然而, 这一简化模型有助于认识反馈阻止物种增殖或灭绝的作用。前文已述, 适当的 β 值可以使此系统从不稳定进入稳定状态, 约束它的无限繁殖。反过来, 如果出现自然灾害或由于“天敌”数目的增加而导致某一物种数量急剧减少, 人类就可以采取措施, 如限制捕猎以加速繁殖, 这相当于减小 β , 让系统解除稳定, 使其有一快速增长过程, 直至其总数再次达到正常值而进入稳定平衡状态。

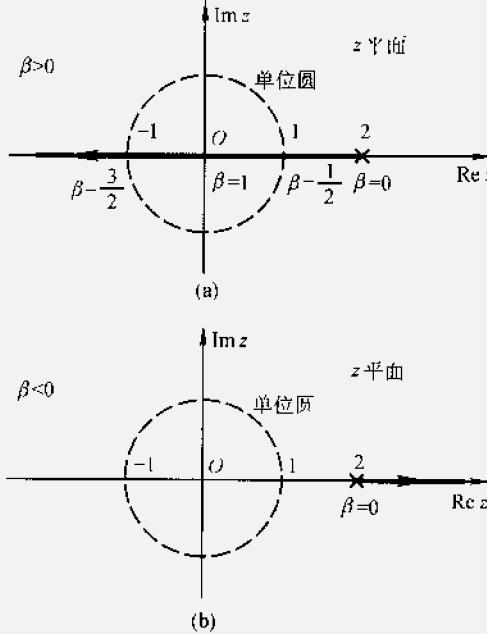


图 11-12 在例 11-3 中随 β 变动 $H(z)$
极点在 z 平面上的变动

11.3 利用反馈系统产生自激振荡

在人们广泛应用前节所述各种负反馈技术之前, 已经认识到利用正反馈产生自激振荡。大约在 20 世纪 20 年代至 30 年代, 陆续出现了多种按正反馈原理构成的正弦波自激振荡电路。实际上, 这些电路工作在临界稳定状态。前节讨论的各种反馈技术往往力求避免系统的不稳定, 而构成自激振荡电路的目的是希望它工作于临界稳定状态。在利用反馈系统时应根据不同需要从不同角度考虑系统的稳定性问题。

图 11-13 示出连续信号正反馈系统框图, 若此系统满足 $A(s)F(s)=1$, 则出现 $R(s)=E(s)$, 此时, 若 $X(s)=0$, 也即在没有任何输入信号的情况下仍

可自动维持输出。将反馈通路输出端直接联到正向通路的输入端,如图 11-13 中的虚线所示,电路将产生自激振荡。

对于产生振荡的条件 $A(s)F(s) = 1$,可以分解为模量与辐角两部分来说明,即振荡条件是 $A(s)F(s)$ 的模量等于 1 和辐角为 2π 。

有时,把图 11-13 改画为图 11-14 或 11-15,此时,振荡条件改写为 $A(s)F(s) = -1$ 或模量条件仍为 1 而辐角条件为 π 。

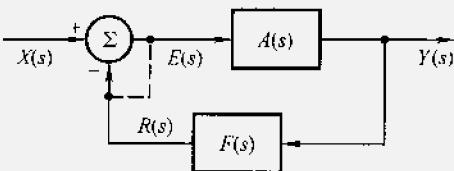


图 11-13 连续时间信号正反馈系统模型

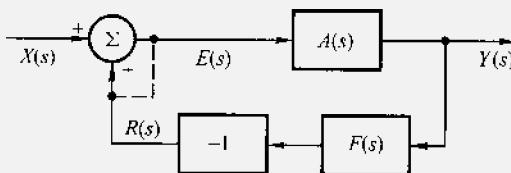


图 11-14 研究自激振荡的另一种反馈模型

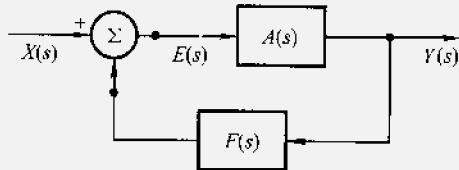


图 11-15 与图 11-14 等效的另一种表示方法

对于正弦波振荡器振荡条件应写作 $A(j\omega_0)F(j\omega_0) = 1$ 或 $A(j\omega_0)F(j\omega_0) = -1$,振荡频率即 ω_0 。

在第四章习题 4-47 曾分析类似于图 11-13 结构的自激振荡模型。此时,反馈系统的系统函数为 $H(s) = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)}$,它的极点是位于虚轴的一对共轭根,因而冲激响应是等幅正弦波。处于临界稳定状态。

实际的自激振荡电路大多包含工作于非线性状态下的电子器件。开机接入电源后由于非常微小的扰动借助正反馈作用产生增幅振荡,此时,环路增益大于 1。随着幅度增强,非线性器件使环路增益自动减小,最后平衡于等幅振荡状态,也即 $A(s)F(s) = 1$ 。

严格分析上述过程需要建立非线性微分方程并对其求解。这里只从反馈系统临界稳定状态的条件利用线性系统分析方法给出构成自激振荡电路的原理实

例,有关具体实现的问题和深入的数学分析将在电子线路和非线性系统理论等课程中学习。

例 11-4 图 11-16 示出利用阻容网络作反馈通路构成的 RC 正弦波自激振荡电路,含有受控源的方框部分用有源电子器件构成,接通图中虚线即可实现自激振荡电路。求为满足自激振荡条件相应的 K 值以及振荡频率 ω_0 。

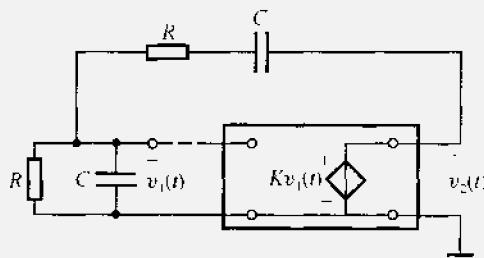


图 11-16 RC 正弦波自激振荡器

解

与图 11-13 相对应,此时:

$$A(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = K$$

$$F(s) = \frac{V_1(s)}{V_2(s)} = \frac{RCs}{(RCs)^2 + 3(RCs) + 1} \quad (11-19)$$

为保证 $A(s)F(s)=1$,应有:

$$KRCs = (RCs)^2 + 3(RCs) + 1 \quad (11-20)$$

$$RCs^2 + (3 - K)RCs + 1 = 0$$

当 $K=3$ 时,可求得 $s = \pm j \frac{1}{RC}$,即正弦振荡频率为 $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ 。实际上,在电路起振时 $K > 3$,由于电子器件的非线性作用,随着振幅增长而 K 减小,平衡于 $K=3$,呈等幅振荡。

例 11-5 图 11-17 示出在通信与电子系统中广泛应用的三点式正弦波自激振荡原理电路。图中,含受控源的方框部分用有源电子器件构成, A 为电压增益, R_o 为输出电阻。反馈网络由阻抗 $Z_1(s), Z_2(s), Z_3(s)$ 构成。

(1) 列写为满足自激振荡的方程式;

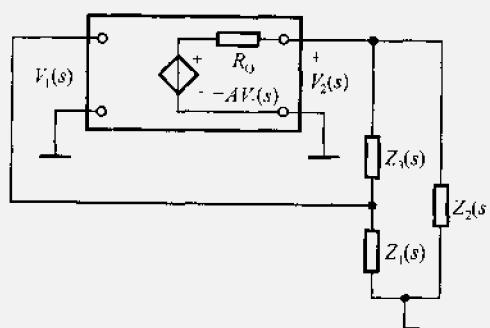


图 11-17 三点式正弦波自激振荡器

(2) 若反馈网络由纯电抗元件构成, 即 $Z_1(j\omega) = jX_1$, $Z_2(j\omega) = jX_2$, $Z_3(j\omega) = jX_3$, 为产生自激振荡, 求 X_1, X_2, X_3 的约束条件。

解

与图 11-13 相对应, 此时

$$A(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{-AZ(s)}{Z(s) + R_o} \quad (11-21)$$

其中:

$$Z(s) = \frac{Z_2(s)[Z_1(s) + Z_3(s)]}{Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)} \quad (11-22)$$

$$F(s) = \frac{V_1(s)}{V_2(s)} = \frac{Z_1(s)}{Z_3(s) + Z_1(s)} \quad (11-23)$$

为保证 $A(s)F(s)=1$, 应有

$$\frac{-AZ_1(s)Z_2(s)}{Z_2(s)[Z_1(s) + Z_3(s)] + R_o[Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)]} = 1$$

或

$$\begin{aligned} Z_2(s)[Z_1(s) + Z_3(s)] + AZ_1(s)Z_2(s) \\ + R_o[Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)] = 0 \end{aligned} \quad (11-24)$$

在各阻抗为纯电抗元件的条件下有

$$-X_2(X_1 + X_3) - AX_1X_2 + jR_o(X_1 + X_2 + X_3) = 0 \quad (11-25)$$

分别取式中虚部和实部为零得到

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \quad (11-26)$$

和

$$(X_1 + X_3) + AX_1 = 0 \quad (11-27)$$

也即

$$X_2 = AX_1 \quad (11-28)$$

由式(11-26)与式(11-28)可见, 为满足振荡条件要求电抗 X_1 与 X_2 同号, 而 X_3 与它们异号。例如, X_1 若为容抗则 X_2 必为容抗, X_3 应为感抗。假定构成这三部分电抗的元件分别为电容 C_1 , C_2 与电感 L , 可利用式(11-26)求得产生正弦波自激振荡的频率 ω_0 :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\omega_0 C_1} - \frac{1}{\omega_0 C_2} + \omega_0 L = 0 \\ \omega_0 = \sqrt{L \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right)} \end{aligned} \quad (11-29)$$

在实际的电子线路中, 三点线路的反馈网络由 LC 谐振回路或石英晶体构

成，利用后者有利于使自激振荡频率稳定。

对于一般的电子系统，可能由于设计或安装不当而产生设计者事先并不希望出现的自激振荡现象。最常见的实例如音响系统中扩音器的输出信号送到话筒输入端，构成反馈产生自激振荡，发出鸣叫声。此外，在通信系统硬件设备中，由于结构安装不合理也可能出现所谓“寄生振荡”，消除这种危害的方法是切断或削弱隐藏在系统中引起振荡的反馈因素，往往需要丰富的实际调试经验才能较好地解决这类问题。

正反馈作用不仅可以产生自激振荡，而且利用非线性正反馈系统经适当设计能够产生非常复杂的动态行为，研究内容很丰富，例如周期性振荡、间歇（周期循环与其他过程的交替）以及混沌（chaos，简略说，在确定性系统中将呈现非确定性行为）等现象。限于本书范围，有关非线性正反馈系统的理论和应用将留待后续课程或研究工作中学习。

在利用负反馈技术时，系统的稳定性是设计者必须考虑的重要问题。以下两节专门研究判别系统稳定性的两种方法。

11.4 根 轨 迹

由前面的讨论已经知道，反馈系统的性能取决于闭环系统函数特性。由系统函数极点、零点分布可以了解有关反馈系统性能的许多重要信息。如果反馈环路中有某个可调节的增益，随着此增益参数 K 的变化，闭环系统特征方程的根和极点位置将随之变化。特别是当研究系统的稳定性时，在 K 的改变过程中，系统可能从非稳定状态进入稳定状态或者反过来。在第四章例 4-26 和本章例 11-3 曾经注意到按照以上思路研究稳定性带来的方便。本节将给出这种方法的一般规律。也即考察闭环系统函数式中某参量变动时，特征方程的根（极点）在 s 平面内移动的轨迹（路径）。此方法称为根轨迹法，是由伊文思（W.R. Evans）于 1948 年首先提出的。按照根轨迹理论，可以导出一些基本的作图规则，借助这些规则较方便地绘制根轨迹图形，研究系统中某参量变化对极点分布的影响。从而避免了一些复杂的数学计算。这种方法在反馈系统的设计和校正中得到广泛应用。下面依次讨论根轨迹图形的基本特性和绘图规则。基本特性包括根轨迹上的点应满足之模量条件和辐角条件。

（一）根轨迹的模量条件和辐角条件

设反馈系统的闭环系统函数仍如式(11-1)，该系统的特征方程为

$$1 + A(s)F(s) = 0 \quad (11-30)$$

这里， $A(s)F(s)$ 在一般情况下是 s 的有理分式，可以写作

$$A(s)F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \quad (11-31)$$

式中 z_i , p_k 分别为开环系统函数 $A(s)F(s)$ 的零点与极点值。分子多项式 $N(s)$ 为 m 阶, 分母多项式 $D(s)$ 为 n 阶。系数 K 是分子与分母多项式最高幂次项系数之比, 称为根轨迹增益, 或称准开环增益。在根轨迹方法中最基本的作图形式就是研究当 K 值变化时, 特征方程的根 p_k 在 s 平面上描出的轨迹。

将式(11-31)代入式(11-30)得到

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} = 0 \quad (11-32)$$

将此式改写为

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} = -\frac{1}{K} = \frac{1}{|K|} e^{j r \pi} \quad (11-33)$$

若 $K > 0$, 则上式中 r 为奇数, 若 $K < 0$, 则 r 为偶数。将此式左端各矢量写作模与辐角形式, 仍利用第四章 4.8 节的符号, 得到

$$\frac{\prod_{i=1}^m N_i}{\prod_{k=1}^n M_k} e^{j(\sum_{i=1}^m \psi_i - \sum_{k=1}^n \theta_k)} = \frac{1}{|K|} e^{j r \pi} \quad (11-34)$$

式中 N_i 和 M_k 分别表示矢量 $(s - z_i)$ 和 $(s - p_k)$ 的模量, ψ_i 和 θ_k 分别表示两矢量的辐角。此等式两端的模量与辐角应分别对应相等, 由此得到

$$\frac{\prod_{k=1}^n |s - p_k|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|} = \frac{\prod_{k=1}^n M_k}{\prod_{i=1}^m N_i} = |K| \quad (11-35)$$

$$\sum_{i=1}^m \psi_i - \sum_{k=1}^n \theta_k = r\pi \quad \begin{cases} K > 0 \text{ 则 } r \text{ 为奇} \\ K < 0 \text{ 则 } r \text{ 为偶} \end{cases} \quad (11-36)$$

式(11-35)就是根轨迹的模量条件, 而式(11-36)为根轨迹的辐角条件。位于根轨迹上的各点 s 应满足此二条件。注意到当 K 在正值范围变化时, 式(11-36)的总辐角为 180° 的奇数倍, 当 K 在负值范围变化时, 总辐角是 180° 的偶数倍。在以下的讨论中, 一般情况下均指 K 为正值。

(二) 根轨迹作图规则

逐点改变 K 值求出相应极点的位置即可绘出根轨迹图。然而，这种方法只能在系统函数非常简单的情况下采用。当系统函数比较复杂时，这样做过于繁琐，难以体现根轨迹方法的优点。以前面给出的模量条件与辐角条件为基础可以导出根轨迹作图的若干规则。依据这些规则，即使系统函数复杂，也可较方便地绘制根轨迹图，下面逐条给出这些规则。

(1) 根轨迹具有 n 条分支

由式(11-31)可知，开环系统函数 $A(s)F(s)$ 表达式中，分子多项式为 m 阶，分母多项式为 n 阶。一般情况下 $n \geq m$ ，它共有 n 个极点，当 K 改变时，特征方程的极点数目不会改变，因此，根轨迹曲线共有 n 条分支。

(2) 根轨迹始于开环系统函数 $A(s)F(s)$ 的极点，止于 $A(s)F(s)$ 的零点。

利用特征方程式(11-32)容易证明此条规则

$$1 + A(s)F(s) = 1 + K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = 0 \quad (11-37)$$

或写作

$$K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m) + (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) = 0 \quad (11-38)$$

当 $K=0$ 时，特征方程为

$$(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) = 0 \quad (11-39)$$

显然，此方程的根 $s = p_1, p_2, \dots, p_n$ ，即开环系统函数的极点构成根轨迹曲线各分支的起始点(对应 $K=0$)。

式(11-37)也可写作

$$\frac{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}{K} + (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m) = 0 \quad (11-40)$$

当 $K \rightarrow \infty$ 时，此式成为

$$(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m) = 0 \quad (11-41)$$

此处，方程的根 $s = z_1, z_2, \dots, z_m$ ，即开环系统函数的零点构成根轨迹曲线各分支的终止点(对应 $K \rightarrow \infty$)。

对于 $m < n$ 的情况， $A(s)F(s)$ 有 $(n-m)$ 个零点在 ∞ 处，所以 n 支根轨迹中有 m 支分别终止于 z_1, z_2, \dots, z_m 各零点上，另有 $(n-m)$ 支则终止于 ∞ 。

(3) 根轨迹对 s 平面的实轴呈镜像对称

由于构成特征方程的多项式是 s 的实有理函数，所以特征方程的根或为实数，或为共轭复数，它们都对称于实轴。当 K 值变化时，虽然根的位置随之移动，但是上述对实轴呈镜像对称的特性不变。

(4) 若有一段实轴，在它右边的实轴上 $A(s)F(s)$ 的极点与零点总数是奇数，则此段实轴是根轨迹的一部分。

利用式(11-36)的辐角条件可证明本规则。图11-18示出某系统开环系统函数 $A(s)F(s)$ 的极点和零点。下面借助辐角条件检验实轴上某点 s_1 是否落于根轨迹上。由图11-18可见，凡成共轭对的极点或零点，每对提供的辐角和为 2π ，如图中 p_3, p_4 的辐角 θ_3 与 θ_4 之和。因此在计算总辐角时这些极点与零点不予考虑。对于实轴上的极点与零点，凡位于 s_1 点左边的，所提供的辐角都为零，如极点 p_2 的 θ_2 ；凡在 s_1 点右边的，提供角度都为 π ，如 p_1 的 θ_1 以及 z_1 和 z_2 的 ψ_1 和 ψ_2 。可见，只有当 s_1 点右边实轴上极点与零点之总数为奇数时，才能符合式(11-36)限定的辐角条件，矢量辐角代数和为 π 的奇数倍，因而 s_1 落于根轨迹上；反之，若极、零点总数为偶数时， s_1 点不属于根轨迹上的点。至此，第(4)条规则得证。

下面利用上述4条规则绘制一些根轨迹图的实例，然后再讨论其他规则。

例11-6 设反馈系统的开环系统函数为

$$A(s)F(s) = \frac{K}{s+3}$$

求系统的根轨迹。

解 此反馈系统的特征方程表达式为

$$1 + \frac{K}{s+3} = 0$$

由式(11-33)可知，落在根轨迹上的点应满足以下条件(模量与辐角条件)

$$\begin{aligned}|s+3| &= |K| \\ -\theta &= \pi\end{aligned}$$

式中 θ 为矢量 $(s+3)$ 的辐角， $K>0$ 。综合考虑模量与辐角条件可写出

$$s+3 = -K$$

开环极点位于 $p=-3$ ，根轨迹始于此点，对应 $K=0, s=-3$ ，随着 K 值增大，根轨迹在负实轴上向左移动，当 $K\rightarrow\infty$ 时，根轨迹趋于 $-\infty$ 。在此根轨迹右边的实轴上，开环极点与零点数目总和是奇数，符合规则(4)。作出

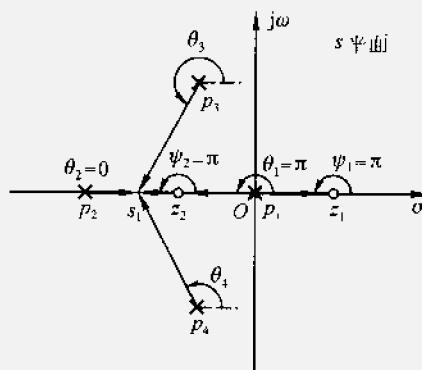


图11-18 检验实轴上的 s_1 点是否在根轨迹上

根轨迹图形如图 11-19。

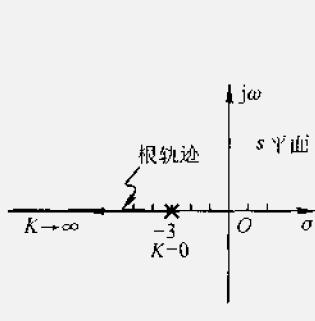


图 11-19 例 11-6 的根轨迹

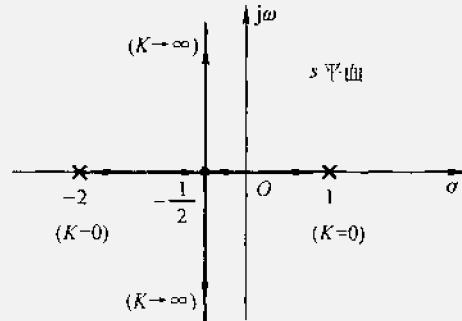


图 11-20 例 11-7 的根轨迹

例 11-7 对于第四章例 4-26(图 4-54)的反馈系统，按照本节的规则绘制根轨迹图。注意到该图中开环系统函数为

$$A(s)F(s) = \frac{K}{(s+2)(s-1)}$$

解 此反馈系统的特征方程表达式为

$$(s+2)(s-1) = -K$$

开环极点位于 $p_1 = -2$, $p_2 = +1$, 根轨迹有二条分支。二分支的起始点分别位于 $s = -2$ 和 $s = +1$ 与以上二极点对应, 终止点应与开环零点对应, 即趋于无穷大。当 K 从 0 增加时两个分支都在负实轴上移动, 在负实轴 $-2 < s < +1$ 的区间内符合规则(4)的规定, 根轨迹落于此区间(见图 11-20)。在 $s = -\frac{1}{2}$ 处特征方程出现重根, 两分支会合, 然后再上、下分开成共轭复根并趋向于 ∞ 。此外, 右边分支与虚轴的交点对应 $K = 2$ 。分支会合点以及根轨迹与虚轴交点的求解规律将在下面的规则(5)和(6)中导出。

(5) 两支根轨迹的交点可由以下方程求得

$$\frac{d}{ds}[A(s)F(s)] = 0 \quad (11-42)$$

所谓交点是指两支根轨迹在此会合然后由此分离的点。满足此条件的点是特征方程的重根。设重根位于 s_0 , 特征方程可写作 $(s - s_0)^2$, 对其求导得到

$$\frac{d}{ds}[1 + A(s)F(s)] = \frac{d}{ds}[A(s)F(s)] = 0 \quad (11-43)$$

也即

$$\frac{d}{ds}[(s - s_0)^2] = 2(s - s_0) = 0 \quad (11-44)$$

可见, 重根满足式(11-44)。利用式(11-44)即可求得 s_0 值。作为练习, 读

者可借助此规则验证例 11-7 会合点之值。

(6) 根轨迹与虚轴的交点可由 $s = j\omega$ 代入特征方程而求出, 由此写出

$$1 + A(j\omega)F(j\omega) = 0 \quad (11-45)$$

也即

$$D(j\omega) + N(j\omega) = 0 \quad (11-46)$$

令此方程中的实部与虚部分别为零, 即可解得 ω 值和 K 值, 此时的 K 是划分系统稳定与不稳定的临界值。读者可利用此规则计算例 11-7 中根轨迹与虚轴相交对应的 ω 和 K 值。

(7) 当 $K \rightarrow \infty$ 时, 根轨迹各分支趋向 $A(s)F(s)$ 的零点, 其中有 m 个分支趋于有限零点, 另有 $(n - m)$ 个分支各自沿“渐近线”趋向无穷远处的零点。

渐近线与实轴的交角为 $\frac{l\pi}{n-m}$, 其中 $l = 1, 3, 5, \dots$, 共 $(n - m)$ 个正奇数。

下面给出本规则之证明。当 s 值很大时, $A(s)F(s) \approx K \frac{s^m}{s^n}$ 。也即当 $s \rightarrow \infty$ 时特征方程为

$$s^{n-m} = -K = Ke^{j\frac{l\pi}{n-m}} \quad (l = 1, 3, 5, \dots) \quad (11-47)$$

方程的根为

$$s = (Ke^{j\frac{l\pi}{n-m}})^{\frac{1}{n-m}} = K^{\frac{1}{n-m}} e^{j\frac{l\pi}{n-m}} \quad (l = 1, 3, 5, \dots) \quad (11-48)$$

此式就代表根轨迹趋于 ∞ 处的零点位置, 这时根轨迹与渐近线重合, 渐近线与实轴的交角即式(11-48)的辐角 $\frac{l\pi}{n-m}$, 这里的 l 值只需要 $(n - m)$ 个连续的正奇数, 超过 $(n - m)$ 个的 l 值求得的角度必然是重复的。

(8) 渐近线会交于实轴上的一点, 此点称为渐近线重心, 其坐标为

$$\sigma_0 = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n - m} \quad (11-49)$$

为证明此规则, 将开环系统函数 $A(s)F(s)$ 写作

$$\begin{aligned} A(s)F(s) &= K \frac{s^m + d_{m-1}s^{m-1} + \dots + d_0}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_0} \\ &= \frac{K}{s^{n-m} + (c_{n-1} - d_{m-1})s^{n-m-1} + \dots} \end{aligned} \quad (11-50)$$

借助代数二项式定理

$$(s - \sigma_0)^{n-m} = s^{n-m} - (n - m)\sigma_0 s^{n-m-1} + \dots \quad (11-51)$$

当 s 很大时, 上式中低幂次项可忽略不计, 也即

$$(s - \sigma_0)^{n-m} \approx s^{n-m} - (n - m)\sigma_0 s^{n-m-1} \quad (11-52)$$

令

$$-\sigma_0 = \frac{c_{n-1} - d_{m-1}}{n-m} \quad (11-53)$$

同时将式(11-52)的近似关系用于式(11-50)得到

$$A(s)F(s) \approx \frac{K}{(s - \sigma_0)^{n-m}} \quad (11-54)$$

再将式(11-50)与前边式(11-31)对照, 可求得系数 c_{n-1} 与 d_{m-1} 分别和极点、零点具有如下关系:

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= -(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \\ d_{m-1} &= -(z_1 + z_2 + \cdots + z_m) \end{aligned}$$

最后求得式(11-49)

$$\sigma_0 = \frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n-m}$$

本规则得证。

当 $s \rightarrow \infty$ 时, 特征方程成为

$$1 + \frac{K}{(s - \sigma_0)^{n-m}} = 0 \quad (11-55)$$

由此导出:

$$\begin{aligned} (s - \sigma_0)^{n-m} &= -K = Ke^{jl\pi} \\ s - \sigma_0 &= Ke^{\frac{1}{n-m}l\pi} e^{j\frac{l\pi}{n-m}} \quad (l = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

或

$$s = \sigma_0 + Ke^{\frac{1}{n-m}l\pi} e^{j\frac{l\pi}{n-m}} \quad (11-56)$$

这就是根轨迹渐近线的直线方程式。 $(n-m)$ 条渐近线都通过重心点 σ_0 处, 并与实轴成交角 $\frac{l\pi}{n-m}$, $l = 1, 3, 5, \dots$, 每条渐近线对应一个 l 值而具有不同交角。

必须注意, 只有当 K 很大因而 s 也很大时, 根轨迹才与渐近线贴近, 而当 K 较小因而 s 也较小时, 根轨迹将与渐近线有明显偏离, 在下面的实例中将看到这些特点。

例 11-8 已知反馈系统结构如图 11-21 所示, 试绘制其根轨迹图。

解 此系统的开环系统函数为

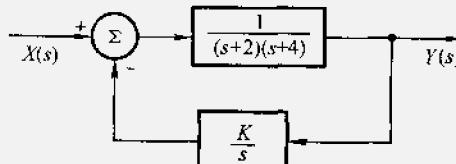


图 11-21 例 11-8 的方框图

$$A(s)F(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

可见, $A(s)F(s)$ 有三个极点, 位于 0、-2、-4, 没有有限零点。因此, 根轨迹有三支。当 K 由 0 增大时, 轨迹图形分别从 s 平面上的 0、-2、-4 三点开始, 当 $K \rightarrow \infty$ 时, 三支都终止于无穷远。

图 11-22 中已标注上述三个极点, 在实轴上 0 至 -2 和 -4 至 ∞ 两段右方都具有奇数个极、零点, 因此, 这两段实轴都是根轨迹的一部分。

渐近线的重心可借助式(11-49)求出, 图 11-22 例 11-8 的根轨迹在实轴上的坐标值为

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n - m} \\ &= \frac{-2 - 4}{3} = -2\end{aligned}$$

同时利用式(11-48)求得渐近线与实轴交角为

$$-\frac{l\pi}{n-m} = \frac{l\pi}{3}, (l=1,3,5)$$

算出交角分别为 $\frac{\pi}{3}$, π , $\frac{5\pi}{3}$

三个分支的交会点应满足式(11-42)条件, 即

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}[A(s)F(s)] &= \frac{d}{ds}\left[\frac{K}{s(s+2)(s+4)}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

导出方程

$$3s^2 + 12s + 8 = 0$$

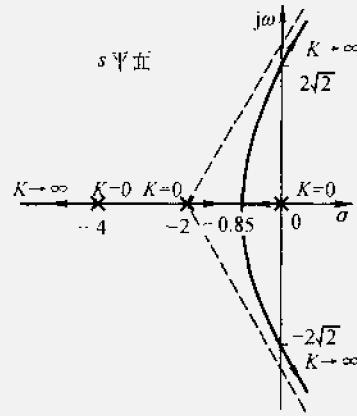
解出二个根 s_1 和 s_2 分别为 $-2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 和 $-2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。再将此值代回特征方程求出相应的 K 值, 对 s_1 点 $K = -3.08$, 显然, K 为负值是不合理的结果; 对 s_2 点 $K = 3.08$, K 为正值是合理的答案, 计算出 $s_2 = -0.85$, 此即分支交会点。

最后, 求根轨迹与虚轴的交点, 由式(11-45):

$$1 + A(j\omega)F(j\omega) = 0$$

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 8(j\omega) + K = 0$$

上式左端实部与虚部分别为零, 于是有



$$\begin{cases} K - 6\omega^2 = 0 \\ \omega^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\omega = \pm 2\sqrt{2}$$

$$K = 48$$

在虚轴上 $\omega = \pm 2\sqrt{2}$ 处为根轨迹与其交点，对应的 K 值为 48。

综合以上结果绘出根轨迹于图 11-22。

至此，我们只讨论了连续时间反馈系统的根轨迹问题，下面说明离散系统的情况。

从系统函数表达式的对照不难想到，离散时间反馈系统根轨迹作图方法与连续时间反馈系统类似。这时，图形将绘制于 z 平面，在判断系统稳定性时对连续系统以 s 平面虚轴为界，极点位于左右两半区分稳定与不稳定特性，而离散系统则以 z 平面单位圆为界按极点在圆内、圆外来判别是否稳定。

例 11-9 若离散时间反馈系统的结构如图 11-2，其中正向通路系统函数

$$A(z) = \frac{K}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}, \text{ 反馈通路系统函数 } F(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

试绘制其根轨迹图，并讨论 K 值对稳定性的影响 ($K > 0$)。

解 根据给定条件可求得开环系统函数

$$\begin{aligned} A(z)F(z) &= \frac{Kz^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{Kz}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \end{aligned}$$

式中有二个极点，因而根轨迹有二条分

支，分别起始于实轴上的 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$ 点，对

应 $K = 0$ ，见图 11-23。在这两个极点之间的实轴部分其右端之极、零点总数为奇数，因而根轨迹落于其区间。对 $A(z)F(z)$ 式求导，可得到两分支的交会点

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{Kz}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \right] = 0$$

由此解得两交会点位于 $z = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$ 处。

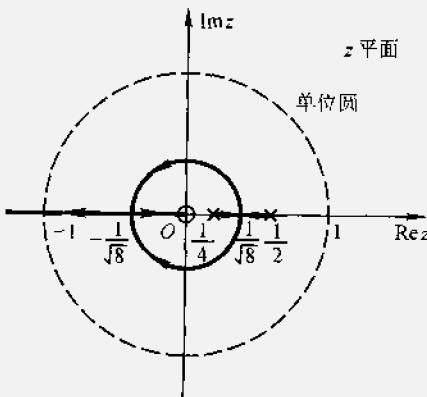


图 11-23 例 11-9 的根轨迹

对应 $K = \frac{3-\sqrt{8}}{4}$, 两分支在 $+\frac{1}{\sqrt{8}}$ 点交会后出现共轭对极点, 分别进入上、下两半平面呈圆形轨迹(参看习题11-18), 另一汇合点位于 $-\frac{1}{\sqrt{8}}$, 对应 $K = \frac{3+\sqrt{8}}{4}$, 此后再分开为实轴上的左、右两部分。一条轨迹终止于原点, 另一条终止于 $-\infty$ (对应 $K \rightarrow \infty$)。

当 K 值足够大时系统将进入不稳定状态, 分界点发生在根轨迹左边分支与单位圆相交之处, 当极点落于单位圆之外时, 系统不稳定。借助特征方程:

$$\begin{aligned} 1 + A(z)F(z) &= 0 \\ -Kz &= \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

令 $z = -1$, 代入解得分界点之 K 值为 $K = \frac{15}{8}$, 因此, 当 K 满足

$$0 < K < \frac{15}{8}$$

时, 系统稳定。

11.5 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

前节讨论的根轨迹方法给出了关于反馈系统闭环极点位置随系统中某参数 K 变化的详细情况。这种方法对于设计反馈系统和校正其性能, 特别是稳定性研究具有重要意义。然而, 绘制根轨迹图的依据是必须已知开环与闭环系统函数表达式, 且仅当此表达式为有理函数时此方法才适用。对于未能给出有理函数形式系统函数表达式的情况, 此方法将无能为力。

本节将要介绍研究反馈系统稳定性的另一种作图描述方法, 称为奈奎斯特稳定性判据。与根轨迹法相比较, 此方法具有如下特点: 无需求出极点的精确位置, 只是判断对应某 K 值系统是否稳定; 此外, 不一定需要给出系统函数表达式, 可以是实验测量数据, 也可用于非有理函数描述的反馈系统分析。

(一) 复轨迹图

奈奎斯特判据方法需要利用复轨迹图进行分析, 作为准备工作, 首先介绍这种图形的基本规律。

系统函数的模量(幅度)和辐角都是变量 s 的函数。给定一个 s 值即可求得对应 $H(s)$ 的一对模量与辐角值。在 s 平面上指定一点, 即可映射到 $H(s)$ 平面上的一点。在研究系统的频率特性时, 取 s 变量中的 $\sigma = 0$, 复变量在 s 平面上沿 $j\omega$ 轴移动, 映射到 $H(j\omega)$ 平面可得到一条曲线, 称为系统函数的复轨迹。

例如, 对于图11-24(a)所示RC电路, 转移电压比构成的系统函数表达式为:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1+s} \quad (11-57)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \quad (11-58)$$

$H(j\omega)$ 可分解为模量与辐角或实部与虚部

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \\ &= \operatorname{Re}[H(j\omega)] + j\operatorname{Im}[H(j\omega)] \end{aligned} \quad (11-59)$$

在图11-24(b)的 $H(j\omega)$ 平面中画出了式(11-58)对应 ω 从 $-\infty$ 至 $+\infty$ 变化时 $H(j\omega)$ 的复轨迹。

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} - j \frac{\omega}{1+\omega^2} \quad (11-60)$$

当 $\omega=0$ 时, 复轨迹相应的点位于 $(1+j0)$ 点, 当 $\omega=1$ 时, 位于 $(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2})$, 而当 $\omega\rightarrow\infty$ 时, 轨迹落于0点。容易求得, 此复轨迹上的点满足以下方程

$$\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)^2 = \frac{1}{1+\omega^2} \quad \text{图 11-24 复轨迹图示例}$$

或

$$\left(\frac{1}{1+\omega^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (11-61)$$

显然, 这是圆心位于 $\frac{1}{2}$ 处的圆, 半径为 $\frac{1}{2}$, 如图11-24(b)所示。由于 $|H(j\omega)|$ 为 ω 之偶函数, $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数, 轨迹图形以实轴镜像对称。

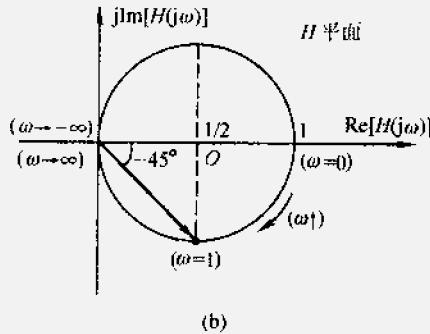
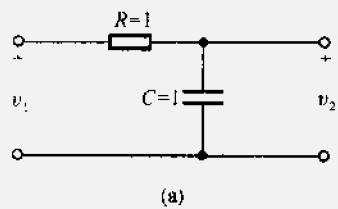
(二) 围线映射的基本特性

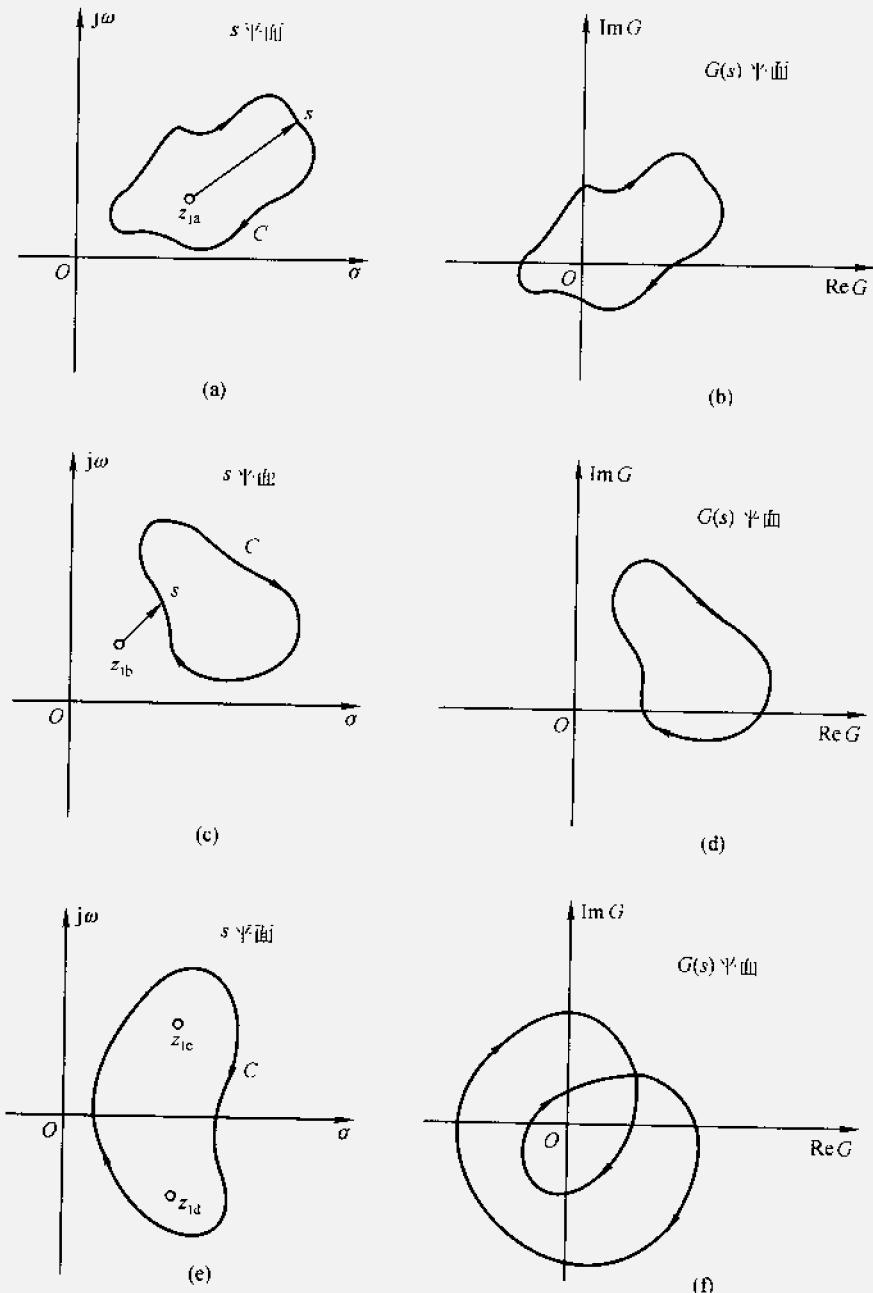
设反馈系统闭环特性表达式为

$$H(s) = \frac{A(s)}{1+A(s)F(s)}$$

以 $G(s)$ 表示 $H(s)$ 的分母写作

$$G(s) = 1 + A(s)F(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)}$$




 图 11-25 从 s 平面到 G 平面的围线映射

$$= \frac{D(s) + N(s)}{D(s)} \quad (11-62)$$

此处, $A(s)F(s)$ 的分母多项式 $D(s)$ 之幂次通常高于分子 $D(s)$ 之幂次, 因此 $D(s) + N(s)$ 与 $D(s)$ 之幂次相等, 式(11-62)可写作

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (11-63)$$

在 $D(s)$ 幂次高于 $N(s)$ 的情况下, $m = n$, 系数 $K_1 = 1$ 。

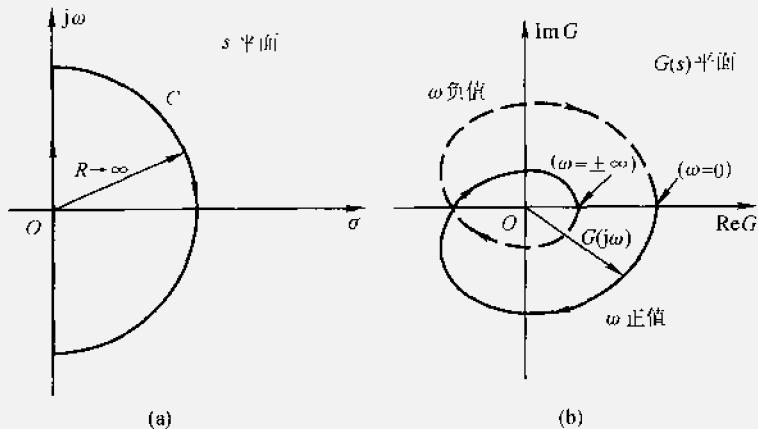
下面研究当因式 $(s - z_1), (s - z_2), \dots$ 以及 $(s - p_1), (s - p_2), \dots$ 随 s 变化而改变其辐角时, 对于函数 $G(s)$ 总辐角之影响。

若在 s 平面上, s 沿围线(闭合路径) C 变化, 围线内包含一个零点 z_{1a} , 因式 $(s - z_{1a})$ 可用由 z_{1a} 到 s 的矢量表示, 如图 11-25(见上页)(a)。当 s 沿围线 C 顺时针方向变化一周时, 矢量 $(s - z_{1a})$ 随之顺时针旋转一周, 从而使 $G(s)$ 的总辐角按负值增加 2π , 也即在 $G(s)$ 平面上映射的轨迹是包含原点的圆线, 变化方向也是顺时针, 如图 11-25(b)。若有零点 z_{1b} 在围线 C 之外, 而围线内没有零点时, 则当 s 沿围线 C 变化一周而引起的矢量 $(s - z_{1b})$ 辐角净变化等于零, 于是 $G(s)$ 总辐角变化也是零, 在 $G(s)$ 平面上映射的轨迹将不包含原点, 如图 11-25(c) 和(d) 所示。显然, 若在 s 平面上围线包含两个零点 z_{1c}, z_{1d} , 则 $G(s)$ 总辐角将按负值增加 4π , 在 $G(s)$ 平面上映射的围线将绕原点两周, 变化方向都是顺时针, 如图 11-25(e) 和(f)。在以上讨论中, 若把零点改换为极点可得类似结论。由于极点矢量因式位于 $G(s)$ 表达式分母之中, 当 s 沿围线顺时针变化一周时, 若围线包围一个极点, 则 $G(s)$ 总辐角按正值增加 2π , 也即 $G(s)$ 平面上映射之围线将逆时针围绕原点旋转一周。

(三) s 右半平面零、极点数目与 $G(j\omega)$ 平面复轨迹图特性的对应

现在考虑 s 平面上围线由 $j\omega$ 轴和右半平面中半径 $R \rightarrow \infty$ 的半圆组成的情况, 如图 11-26(a) 所示。此时围线包含了全部右半平面。当 s 沿 $j\omega$ 轴向 $-j\infty$ 变到 $+j\infty$ 时, 按照 $G(j\omega) = 1 + A(j\omega)F(j\omega)$ 可在 $G(j\omega)$ 平面上作出相应的复轨迹, 例如图 11-26(b) 所示。此复轨迹是 s 平面上 $j\omega$ 轴映射于 $G(j\omega)$ 平面上的曲线, 在系统稳定性分析中称之为奈奎斯特图。

由于 $G(s)$ 表达式分子与分母阶次相等, 因而当 $s \rightarrow \infty$ 时, $G(s)$ 趋于实常数, 也即当 $s = j\omega = \pm\infty$ (包括半径为 ∞ 之半圆) 时, 映射在 $G(s)$ 平面上为实轴上的一个点。当 $s = j\omega = 0$ 时, 由 $G(s)$ 表达式容易看出, 映射到 $G(s)$ 平面上也为实轴上的一个点。考虑到 $G(j\omega)$ 的模量 $|G(j\omega)|$ 和辐角 $\varphi(\omega)$ 分别为 ω 的偶、奇函数, 所以奈奎斯特图中, ω 从 0 到 ∞ 的轨迹曲线和 0 到 $-\infty$ 的轨迹曲线对实轴成镜像对称。根据以上特性绘出的奈奎斯特图对应 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 呈封闭曲线, 例如图 11-26(b) 所示。

图 11-26 s 平面上的 $j\omega$ 轴映射于 G 平面构成奈奎斯特图

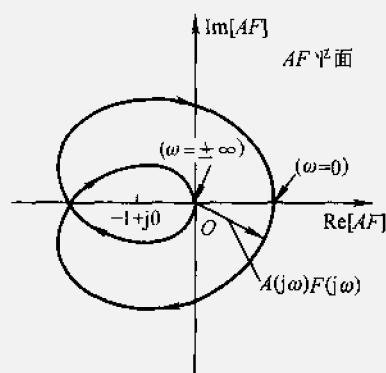
若右半 s 平面上有 $G(s)$ 的一个零点, 当 s 沿图 11-26(a) 所示围线顺时针变化一周时, $G(j\omega)$ 绘出的奈奎斯特图应当顺时针绕原点一次。若 s 右半平面内有 $G(s)$ 的一个极点, 则当 s 沿围线顺时针变化一周时, $G(j\omega)$ 的奈奎斯特图逆时针绕原点一次。在左半平面的零、极点不会产生这种使奈奎斯特图绕原点之作用。

(四) 由 $A(s)F(s)$ 平面奈奎斯特图判断系统稳定性

为简化实际问题的分析过程, 可以把上述 $G(s)$ 平面的奈奎斯特图移入 $A(s)F(s)$ 平面。由于 $A(s)F(s) = G(s) - 1$, 因此只需把 $G(s)$ 平面中的坐标原点右移到 $(+1 + j0)$ (也即曲线图形左移), 即可得到 $A(s)F(s)$ 平面的奈奎斯特图, 也即将图 11-26(b) 变成图 11-27。这时, 前面有关 $G(s)$ 平面上曲线围绕原点的陈述都应改为围绕 $(-1 + j0)$ 点的陈述。

综上所述, 可以得到一般情况下反馈系统奈奎斯特判据如下: 若 $G(s) = 1 + A(s)F(s)$ 在右半 s 平面上有 n_z 个零点和 n_p 个极点, 则当 ω 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时, 在 $A(j\omega)F(j\omega)$ 平面上的奈奎斯特图顺时针方向围绕 $-1 + j0$ 点 $(n_z - n_p)$ 次。若 $n_z < n_p$, 则按逆时针围绕 $(-1 + j0)$ 点 $(n_p - n_z)$ 次。

为判断系统是否稳定, 需要考察系统函数分母多项式 $G(s) = 1 + A(s)F(s)$ 在 s 右半平面是否有零点, 要利用上述奈奎斯特

图 11-27 AF 平面上的奈奎斯特图

图的方法,还需了解 $G(s)$ 在右半 s 平面的极点情况,事情比较麻烦。然而,在一般情况下,系统未接入反馈时,也即开环特性是稳定的,这时 $A(s)F(s)$ 没有极点在右半 s 平面,随之, $G(s)$ 也没有极点在右半平面,即 $n_p=0$ 。于是,上述判别规则得以简化,可以得到在开环特性稳定条件下的奈奎斯特判据如下:

当 ω 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 改变时,在 $A(j\omega)F(j\omega)$ 平面上的奈奎斯特图顺时针绕 $(-1+j0)$ 点之次数等于系统函数分母 $G(s)=1+A(s)F(s)$ 在 s 右半平面内的零点数[即系统函数 $H(s)$ 的极点数]。此奈奎斯特图若不包围 $(-1+j0)$ 点,则系统稳定,否则系统不稳定。

例如,在图 11-27 中,复轨迹曲线顺时针围绕 $(-1+j0)$ 点两次,因而,待判别的系统是不稳定的。

在实际问题中,由于在开环情况下容易测得 $A(j\omega)F(j\omega)$ 的正弦稳态频率响应曲线,因而可按此绘制奈奎斯特图,直接判断系统的稳定性,无需进行繁复的数学计算。

例 11-10 若开环系统函数表达式为

$$A(s)F(s) = \frac{K_0}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)^3}$$

利用奈奎斯特图分析 K 满足什么条件时系统稳定?

解 开环频响特性表达式为

$$A(j\omega)F(j\omega) = \frac{K_0}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3}$$

当 $\omega=0$ 时, $A(j0)F(j0)=K_0$, 奈奎斯特图位于图 11-28 中的 B 点,即 $\overline{OB}=K_0$ 即此点对应的模量,而辐角为 0。随着 ω 加大,曲线在实轴下边向左旋转;当 $\omega=\omega_c$ 时,构成辐角为 π ,轨迹落于负实轴 A 点;此后,继续增加 ω ,模量将逐步减小,曲线在实轴上方趋于原点,直至 $\omega=\infty$ 时轨迹终止于 O 点。按照对于实轴镜像的原理可绘出 ω 为负值的曲线如图 11-28 所示。

下面计算 A 点的位置,当 $\omega=\omega_c$ 时,由辐角特性可写出:

$$3\arctan \frac{\omega_c}{\omega_0} = \pi$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

将此值代入模量表达式

$$|A(j\omega)F(j\omega)| = \frac{K_0}{[1 + (\sqrt{3})^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{K_0}{8}$$

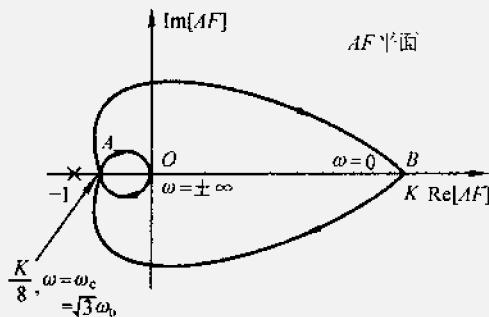


图 11-28 例 11-10 的奈奎斯特图

也即在图 11-28 中 $\overline{OA} = \frac{K_0}{8}$, 为使系统稳定, \overline{OA} 最大值不能超过 1, 这样才能保证奈奎斯特图不包围 $(-1 + j0)$ 点, 由此求得系统稳定之条件为 $\overline{OA} < 1$, 即

$$K_0 < 8$$

以上讨论了 $A(s)F(s)$ 没有位于 s 右半平面极点的情况, 也即 $n_p = 0$ 的情况。如果 n_p 不等于零, 为使 n_z 等于零(保证稳定), 奈奎斯特图应逆时针围绕 $(-1 + j0)$ 点 n_p 次。详见习题 11-21。

奈奎斯特稳定性判据也可应用于离散时间反馈系统。这时, 不同于连续系统时 s 变量沿 s 平面虚轴从 $-\infty$ 变到 $+\infty$, 而是 z 变量沿 z 平面单位圆从 $-\pi$ 变化到 $+\pi$ (或从 0 到 2π), 或者说不再研究 $s = j\omega$ 产生的映射, 而是更换为 $z = e^{j\omega}$ 对应的复轨迹描绘。奈奎斯特图的绘制也由 $A(j\omega)F(j\omega)$ 平面改换为 $A(e^{j\omega})F(e^{j\omega})$ 平面。与前述连续时间信号的奈奎斯特稳定性判据相对比, 在开环特性稳定的条件下, 离散时间信号的奈奎斯特判据陈述如下:

当 ω 由 0 变化到 2π 时, 在 $A(e^{j\omega})F(e^{j\omega})$ 平面上的奈奎斯特图顺时针方向围绕 $(-1 + j0)$ 点的次数等于 $G(z) = 1 + A(z)F(z)$ 在单位圆外的零点数, 也即 $H(z)$ 的极点数。此奈奎斯特图若不包围 $(-1 + j0)$ 点, 则系统稳定, 否则系统不稳定。

例 11-11 若离散时间信号反馈系统的结构如图 11-2 所示, 其中 $A(z) = \frac{z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$, $F(z) = K$, 且 $K > 0$ 。试利用奈奎斯特稳定性判据决定 K 满足什么条件时系统稳定?

解 由给定条件导出

$$A(z)F(z) = \frac{K}{z\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

当 ω 由 0 到 2π 改变时, 画出 $A(e^{j\omega})F(e^{j\omega})$ 复轨迹如图 11-29 所示。

当 $\omega=0$ 时, $A(e^0)F(e^0)=\frac{2}{3}K$, 奈奎斯特图位于 B_1 点, 即 $\overline{OB_1}=\frac{2}{3}K$ 为此点的模量, 辐角为 0。随着 ω 增大, 曲线在实轴上方向左旋转, 当轨迹与负实轴相交于 A 点时, $A(e^\omega)F(e^\omega)=-K$,

也即 $e^{j\omega}\left(e^{j\omega}+\frac{1}{2}\right)=-1$, 此时对应的 ω

值为 $\omega = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 0.58\pi$, $\overline{OA}=K$ 为其模量, 辐角为 π 。继续增加 ω , 曲线在实轴下方向右旋转, 当 $\omega=\pi$ 时, 曲线再次与正实轴交于 B_2 点, $\overline{OB_2}=2K$ 为其模量, 辐角为 2π 。 ω 从 π 到 2π 变化描绘的曲线与上述 0 至 π 的曲线对实轴呈镜像对称, 完整的奈奎斯特图形如图 11-

29 所示。由图可见, 若 A 点落于 $(-1+j0)$ 之左端, 曲线包围 $(-1+j0)$ 点, 系统将不稳定。为保证系统稳定, 需要满足 $\overline{OA} < 1$, 也即当 $0 < K < 1$ 时系统稳定。

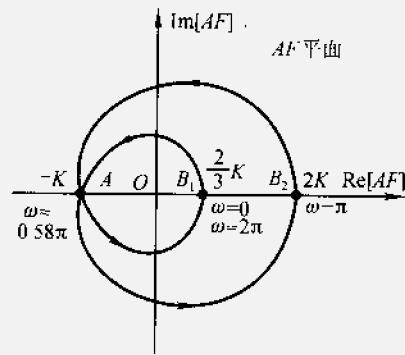


图 11-29 例 11-11 的奈奎斯特图

11.6 信号流图

(一) 概述

利用方框图(子系统)组合分析线性系统的方法可使求解过程简化。在 1.7 节已经利用一些基本运算单元, 包括相加、倍乘和积分构成连续系统的模型。这种方法也称为线性系统的仿真(simulation, 也称模拟)。在 7.3 节用类似的方法构成离散系统模型, 而基本运算单元由相加、倍乘、延时组成。在本章中, 我们已经熟悉组成反馈系统的方框图模型及其分析与计算。

为了进一步简化上述各种方框图(子系统)组合方法, 出现了线性系统的“信号流图”(signal flow graphs)表示与分析方法。这种方法由美国麻省理工学院的梅森(Mason)于 20 世纪 50 年代初首先提出。此后在反馈系统分析、线性方程组求解、线性系统模拟以及数字滤波器设计等方面得到广泛应用。与方框图方法相比较, 信号流图方法的主要优点是: 系统模型的表示简明清楚; 系统函数的计算过程明显简化。对于由多个反馈环路组成的复杂系统进行分析时, 信号流图方法的优点更为突出。此外, 借助信号流图研究系统状态空间分析也将显示许多优点, 这将在第十二章介绍。

系统的信号流图表示实际上是由一些点和支路来描述系统。如图 11-30

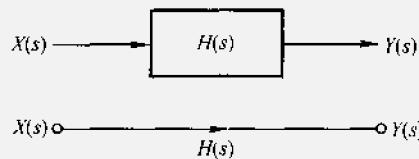
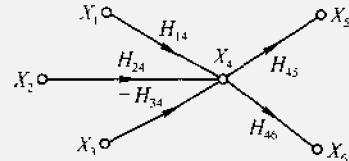


图 11-30 用信号流图表示框图

图 11-31 多输入多输出结点 X_4

所示的简单方框图，变成流图形式就是用一有始有终的线段表示：起始点标为 $X(s)$ ，终了点标为 $Y(s)$ ，这种点称为结点。结点是表示系统中变量或信号的点；线段表示信号传输的路径，称为支路；信号的传输方向用箭头表示，转移函数标注在箭头附近，所以每一条支路相当于乘法器。结点可以有很多信号输入，而且可以向不同方向输出，如图 11-31 所示，结点 X_4 有三个输入，二个输出。按流图构成原则有：

$$X_4 = H_{14}X_1 + H_{24}X_2 - H_{34}X_3 \quad (11-64)$$

$$X_5 = H_{45}X_4 \quad (11-65)$$

$$X_6 = H_{46}X_6 \quad (11-66)$$

类似这样的方程称为结点方程。作为练习，读者可将图 11-31 改画为对应的方框图，在该图中，除 H_{14} , H_{24} , $-H_{34}$, H_{45} , H_{46} 五个子系统方框图之外，还应包含一个相加器。

例 11-12 将图 11-32 所示的方框图改画为信号流图形式，并求系统的转移函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

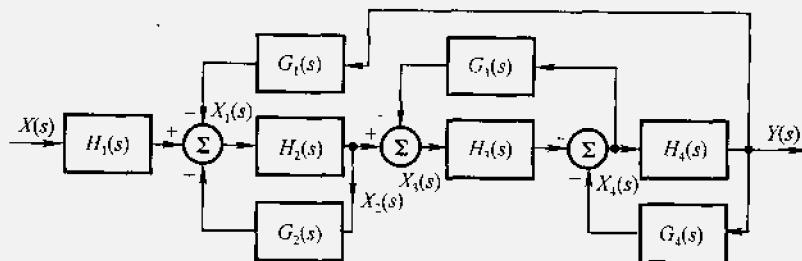


图 11-32 例 11-12 的系统

解 画出图 11-32 对应的信号流图如图 11-33 所示。显然，这种表达形式比方框图结构简明清楚。

为求得系统转移函数，列出线性联立方程组如下：

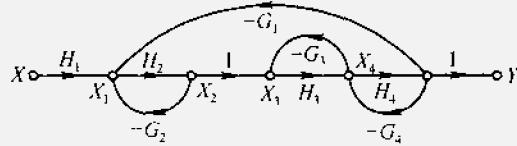


图 11-33 图 11-32 方框图的流图表示

$$\begin{cases} X_1(s) = H_1(s)X(s) - G_2(s)X_2(s) - G_1(s)Y(s) \\ X_2(s) = H_2(s)X_1(s) \\ X_3(s) = X_2(s) - G_3(s)X_4(s) \\ X_4(s) = H_3(s)X_3(s) - G_4(s)Y(s) \\ Y(s) = H_4(s)X_4(s) \end{cases} \quad (11-67)$$

对式(11-67)进行整理, 得到

$$\begin{cases} \frac{1}{H_1(s)}X_1(s) + \frac{G_2(s)}{H_1(s)}X_2(s) + \frac{G_1(s)}{H_1(s)}Y(s) = X(s) \\ -H_2(s)X_1(s) + X_2(s) = 0 \\ -X_2(s) + X_3(s) + G_3(s)X_4(s) = 0 \\ -H_3(s)X_3(s) + X_4(s) + G_4(s)Y(s) = 0 \\ -H_4(s)X_4(s) + Y(s) = 0 \end{cases} \quad (11-68)$$

解式(11-68)联立方程组, 可以得到系统的转移函数为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} \\ &= \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + H_2 G_2 + H_3 G_3 + H_4 G_4 + H_2 H_3 H_4 G_1 + H_2 G_2 H_3 G_3 + H_2 G_2 H_4 G_4} \end{aligned} \quad (11-69)$$

求解式(11-69)的过程中, 需要对行列式进行烦琐的计算, 此处略去。然而, 本节以下的内容将给出利用信号流图求转移函数的方法, 这种方法将使求解过程简化。

(二) 在流图中一些术语的定义

结点 表示系统中变量或信号的点。

转移函数 两个结点之间的增益称为转移函数。

支路 连接两个结点之间的定向线段, 支路的增益即为转移函数。

输入结点或源点 只有输出支路的结点, 它对应的是自变量(即输入信号)。

输出结点或阱点 只有输入支路的结点, 它对应的是因变量(即输出信号)。

混合结点 既有输入支路又有输出支路的结点。

通路 沿支路箭头方向通过各相连支路的途径(不允许有相反方向支路存在)。

开通路 通路与任一结点相交不多于一次。

闭通路 如果通路的终点就是通路的起点，并且与任何其他结点相交不多于一次。闭通路又称环路。

环路增益 环路中各支路转移函数的乘积。

不接触环路 两环路之间没有任何公共结点。

前向通路 从输入结点(源点)到输出结点(阱点)方向的通路上，通过任何结点不多于一次的全部路径。

前向通路增益 前向通路中，各支路转移函数的乘积。

(三) 信号流图的性质

在运用信号流图时必须遵循流图的以下性质：

(1) 支路表示了一个信号与另一信号的函数关系，如图11-30所示 $Y(s) = H(s)X(s)$ 的线性关系。信号只能沿着支路上的箭头方向通过。

(2) 结点可以把所有输入支路的信号叠加，并把总和信号传送到所有输出支路，如图11-31所示的结点 X_4 。

(3) 具有输入和输出支路的混合结点，通过增加一个具有单位传输的支路，可以把它变成输出结点来处理。如图11-34所示， X'_3 和 X''_3 实际上是一个结点，但分成两个结点以后， X'_3 是既有输入又有输出的混合结点，而 X''_3 是只有输出的输出结点。

(4) 给定系统，信号流图形式并不是惟一的。这是由于同一系统的方程可以表示成不同形式，因而可以画出不同的流图。图11-34 将一个结点分成两个结点

例 11-13 若系统的数学模型以如下的一阶微分方程描述，试画出它的信号流图(在第一章习题1-19曾练习画它的方框图)。

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (11-70)$$

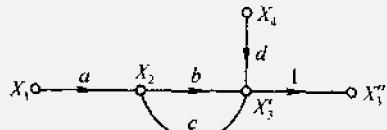
解 利用算子符号，以 p 表示微分， $\frac{1}{p}$ 表示积分，将给定的式(11-70)表示为

$$(p + a_0)y(t) = (b_1 p + b_0)x(t) \quad (11-71)$$

或

$$\left(1 + \frac{a_0}{p}\right)y(t) = \left(b_1 + \frac{b_0}{p}\right)x(t) \quad (11-72)$$

解得 $y(t)$ 为



$$y(t) = \frac{b_1}{1 + \frac{a_0}{p}} x(t) + \frac{\frac{b_0}{p}}{1 + \frac{a_0}{p}} x(t) \quad (11-73)$$

按此式可画出信号流图如图11-35(a)所示。图中，引入中间变量信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ ，它们之间的关系可用以下联立方程描述：

$$\begin{cases} x_1(t) = -a_0 x_2(t) + x(t) \\ x_2(t) = \frac{1}{p} x_1(t) \\ y(t) = b_1 x_1(t) + b_0 x_2(t) \end{cases} \quad (11-74)$$

利用式(11-74)可验证图11-35(a)的正确性。

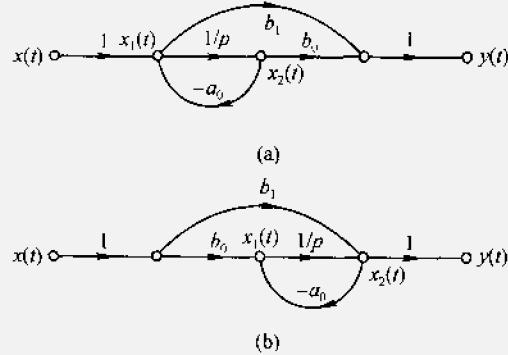


图 11-35 一阶微分方程的流图表示

对此系统还可以画出另一种形式的流图。为此，将式(11-70)改写为

$$y(t) = b_1 x(t) + \frac{1}{p} [b_0 x(t) - a_0 y(t)] \quad (11-75)$$

按此式画出的信号流图如图11-35(b)，此图可用如下联立方程描述：

$$\begin{cases} x_1(t) = -a_0 x_2(t) + b_0 x(t) \\ x_2(t) = \frac{1}{p} x_1(t) + b_1 x(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (11-76)$$

必须注意，在图11-35(a)和(b)中的 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 具有不同的定义，所代表的结点并不相同。

(5) 流图转置以后，其转移函数保持不变。所谓转置就是把流图中各支路的信号传输方向给以调转，同时把输入输出结点对换。

例如，将图11-35(a)按以上规定进行转置即可得到图11-35(b)，显然，转移函数没有变化，两者代表同一系统。

(四) 信号流图的代数运算

流图既是表示一组线性方程组，代表某一线性系统，因而和系统的方框图表示一样，可以按一些代数运算规则加以简化，这里列出常用的一些规则：

(1) 只有一个输入支路的结点值等于输入信号乘以支路增益。如图11-36(a)。

(2) 串联支路的总增益，等于所有各支路增益的乘积，因而串联支路可以简化合并为单一支路。如图11-36(b)。

(3) 通过并联相加可以把并联支路合并为单一支路。如图11-36(c)。

(4) 混合结点可以按图11-36(d)方式消掉。

(5) 环路可以按图11-36(e)方式消掉。

利用这些信号流图的代数运算，就可以把一复杂的流图加以简化，使之只剩下一个源点和一个阱点，从而确定系统的转移函数。

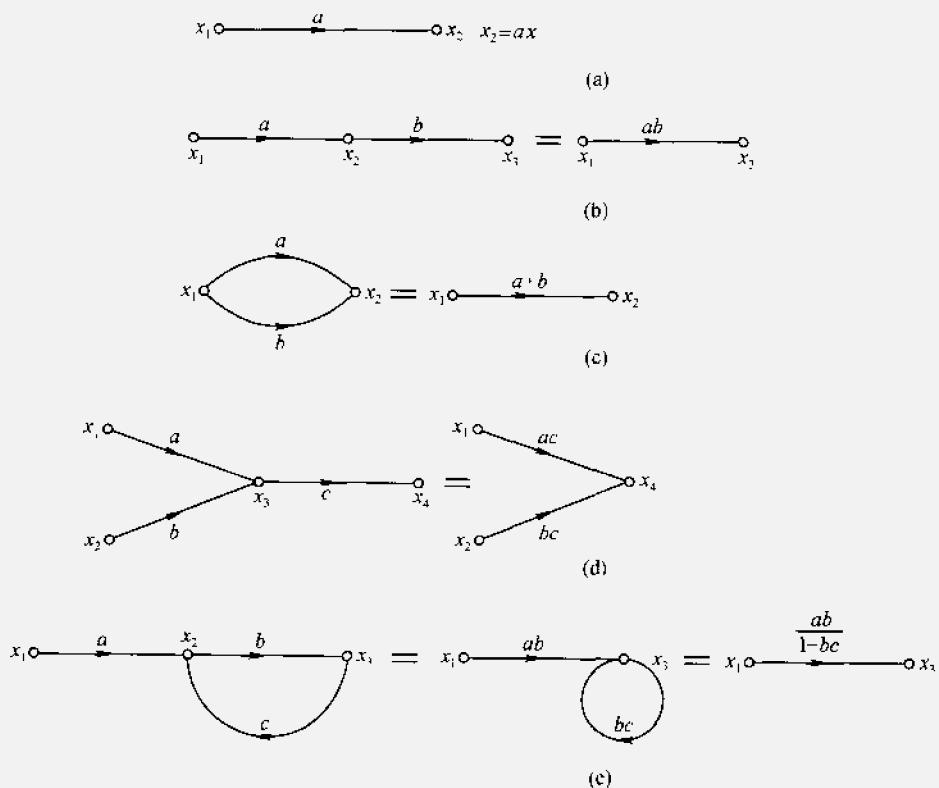


图 11-36 信号流图的代数运算规则

例 11-14 利用信号流图的代数运算规则重求图11-33系统的转移函数。

解 为了说明简化步骤，从左往右逐步消去各个结点。

(1) 消去 X_1 X_1 结点有三个输入信号，因而按规则(4)得到图11-37(a)。

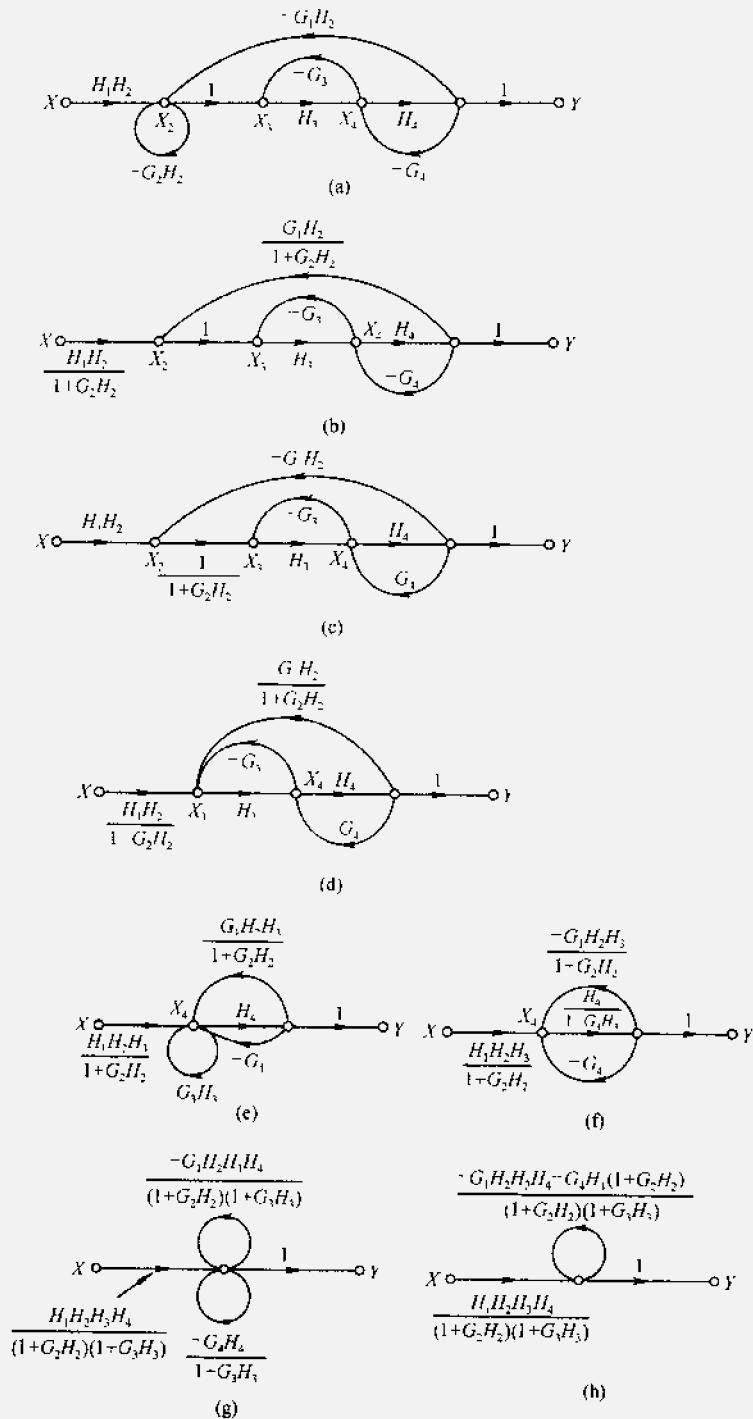


图 11-37 图 11-33 流图的简化步骤

(2) 消去 X_2 这个结点有二个输入信号和一个环路。先按规则(5)消去环路，可以有两种方法：一种方法是把所有输入支路增益除以 $(1 + G_2 H_2)$ ，如图11-37(b)所示；另一方法是把输出支路增益除以 $(1 + G_2 H_2)$ ，如图11-37(c)所示，这两种方法是等同的。然后利用规则(4)把 X_2 结点消去，如图11-37(d)所示。

(3) 消去 X_3 X_3 是有三个输入的混合结点，按规则(4)把 X_3 结点消去，如图11-37(e)所示。

(4) 消去 X_4 与(2)相同先消去环路，成图11-37(f)；然后按规则(4)消去 X_4 ，如图11-37(g)。

(5) 最后结点的消去 由图11-37(g)，它是一个输入支路和二个并联环路组成，按规则(3)，并联环路的增益相加，成图11-37(h)。最后按规则(5)消去环路得最终的转移函数为

$$\begin{aligned} H &= \frac{\frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{(1 + G_2 H_2)(1 + G_3 H_3)}}{1 + \frac{G_1 H_2 H_3 H_4 + G_4 H_4 + G_4 H_4 G_2 H_2}{(1 + G_2 H_2)(1 + G_3 H_3)}} \\ &= \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_4 H_4 + G_1 H_2 H_3 H_4 + G_2 H_2 G_3 H_3 + H_2 G_2 G_4 H_4} \end{aligned} \quad (11-77)$$

显然，得到与例11-12相同的结果。从求解过程来看，这里的方法虽然省去了烦琐的行列式计算，然而，简化过程仍然比较麻烦。下面介绍利用信号流图求转移函数的简便方法。

(五) 信号流图的梅森增益公式

利用梅森增益公式可以根据流图很方便地求得输入与输出间的转移函数。

梅森公式的形式为

$$H = \frac{1}{\Delta} \sum_k g_k \Delta_k \quad (11-78)$$

式中：

Δ ——称为流图的特征行列式。

$\Delta = 1 - (\text{所有不同环路的增益之和})$

+ (每两个互不接触环路增益乘积之和)

- (每三个互不接触环路增益乘积之和)

+ ...

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

k ——表示由源点到阱点之间第 k 条前向通路的标号。

g_k ——表示由源点到阱点之间第 k 条前向通路的增益。

Δ_k ——称为对于第 k 条前向通路特征行列式的余因子。它是除去与第 k 条前向通路相接触的环路外，余下的特征行列式。

这里不讨论此公式的证明^①，仅举出应用实例。

例 11-15 用梅森公式求图 11-33 所示系统的转移函数。

解 为方便计把图 11-33 重画在图 11-38。

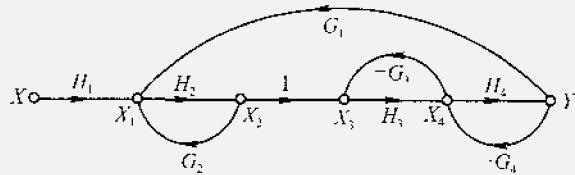


图 11-38 例 11-15 的系统流图

按式(11-33)的梅森公式先求出其有关参数。

求流图的特征行列式 Δ ：

$$\text{先求环路 } L_1 = (X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1) = -H_2 G_2$$

$$L_2 = (X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_3) = -H_3 G_3$$

$$L_3 = (X_4 \rightarrow Y \rightarrow X_4) = -H_4 G_4$$

$$L_4 = (X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow Y \rightarrow X_1) = -H_2 H_3 H_4 G_1$$

其中 L_1 和 L_2 、 L_3 是两两不接触环路，所以

$$\Delta = 1 + (H_2 G_2 + H_3 G_3 + H_4 G_4 + H_2 H_3 H_4 G_1)$$

$$+ (H_2 G_2 H_3 G_3 + H_2 G_2 H_4 G_4)$$

前向通路只有一条，所以：

$$g_1 = H_1 H_2 H_3 H_4$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 + 0 - \dots$$

按梅森公式，系统的转移函数为

$$H = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + (H_2 G_2 + H_3 G_3 + H_4 G_4 + H_2 H_3 H_4 G_1) + (H_2 G_2 H_3 G_3 + H_2 G_2 H_4 G_4)} \quad (11-79)$$

例 11-16 求图 11-39 流图的转移函数。

^① 见文献 S. J. Mason, *Feedback Theory: Further Properties of Signal Flow Graphs*, Proc. IRE 44, 920, 1956

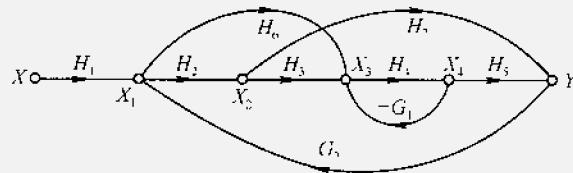


图 11-39 例 11-16 的系统流图

解 为了应用梅森公式，先求出有关参数。

(1) 求 Δ

a) 先求环路：

$$L_1 = (X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_3) = -H_4 G_1$$

$$L_2 = (X_2 \rightarrow Y \rightarrow X_1 \rightarrow X_2) = -H_7 G_2 H_2$$

$$L_3 = (X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow Y \rightarrow X_1) = -H_6 H_4 H_5 G_2$$

$$L_4 = (X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow Y \rightarrow X_1) = -H_2 H_3 H_4 H_5 G_2$$

b) 再求两两不接触的环路

$$L_1 \cdot L_2 = H_2 H_4 H_7 G_1 G_2$$

由此得出

$$\begin{aligned} \Delta = 1 &+ (H_4 G_1 + H_2 H_7 G_2 + H_4 H_5 H_6 G_2 + H_2 H_3 H_4 H_5 G_2) \\ &+ H_2 H_4 H_7 G_1 G_2 \end{aligned}$$

(2) 前向通路共有三条

第一条 $X \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow Y$

$$g_1 = H_1 H_2 H_3 H_4 H_5$$

没有与第一条通路不接触的环路，所以

$$\Delta_1 = 1$$

第二条 $X \rightarrow X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow Y$

$$g_2 = H_1 H_6 H_4 H_5$$

没有与第二条通路不接触的环路，所以

$$\Delta_2 = 1$$

第三条 $X \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow Y$

$$g_3 = H_1 H_2 H_7$$

与第三条通路不接触的环路是 L_1

$$\Delta_3 = 1 + H_4 G_1$$

最后得到系统的转移函数为

$$H = \frac{Y}{X}$$

$$= \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 + H_1 H_6 H_4 H_5 + H_1 H_2 H_7 (1 + H_4 G_1)}{1 + H_4 G_1 + H_2 H_7 G_2 + H_4 H_5 H_6 G_2 + H_2 H_3 H_4 H_5 G_2 + H_2 H_4 H_7 G_1 G_2} \quad (11-80)$$

例 11-17 根据梅森公式求用下列转移函数表示的系统流图。

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad m < n \quad (11-81)$$

解 对于连续系统通常用积分器来模拟，因而把式(11-81)改写为

$$H(s) = \frac{\frac{b_0}{s^{n-m}} + \frac{b_1}{s^{n-m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{s^{n-1}} + \frac{b_m}{s^n}}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{s^{n-1}} + \frac{a_n}{s^n}} \quad (11-82)$$

从流图的梅森公式来分析式(11-82)，则分母可看成是 n 个环路组成的特征行列式，而且它们是互相接触的；分子部分看成 $(m+1)$ 条前向通路构成的增益，并且没有不接触的环路。这样就可以画出图 11-40 的流图形式；根据流图转置的性质图 11-41 也同样满足式(11-82)的转移函数。

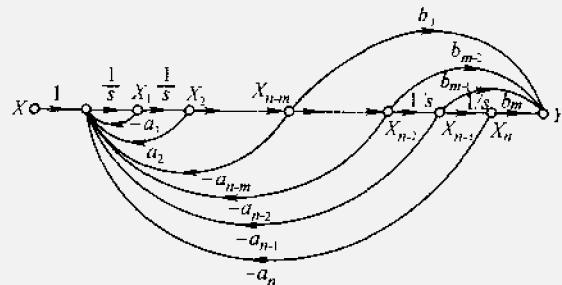


图 11-40 式(11-81)转移函数的流图表示

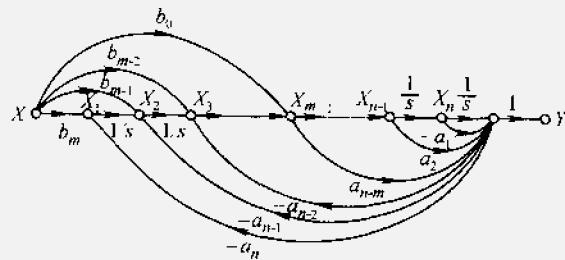


图 11-41 对图 11-40 表示的流图转置后的形式

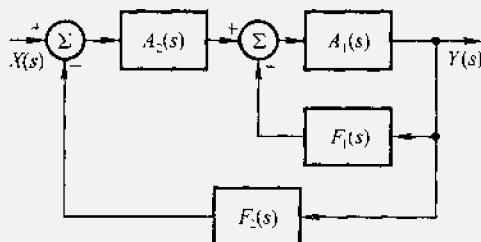
习题

11-1 若图 11-1 所示反馈系统中 $A(s) = \frac{1}{s+1}$, $F(s) = s - \beta$ (β 为实数), 为使系统稳定, 求 β 值范围。

11-2 若上题中 $A(s)$ 改为 $A(s) = \frac{1}{s-1}$, 其他条件不变, 重复所问。

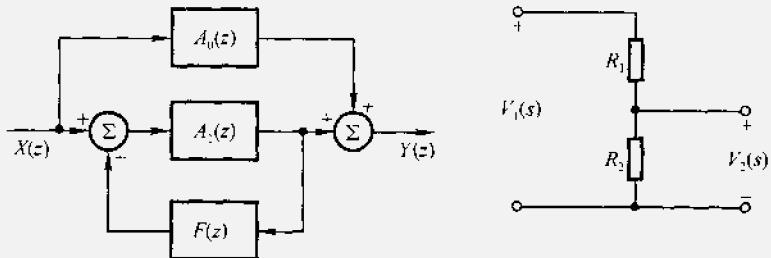
11-3 若图 11-2 所示反馈系统中 $A(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$, $F(z) = 1 - \beta z^{-1}$ (β 为实数), 为使系统稳定, 求 β 值范围。

11-4 试写出题图 11-4 所示互联系统的系统函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 的表达式。



题图 11-4

11-5 试写出题图 11-5 所示互联系统的系统函数 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 的表达式。



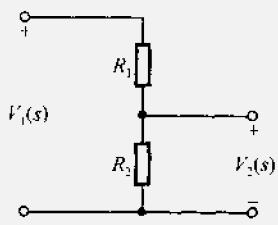
题图 11-5

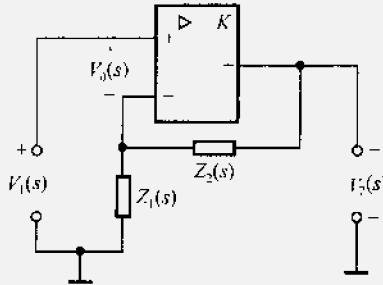
题图 11-6

11-6 电阻分压器如题图 11-6 所示, 此电路可以看作负反馈系统, 若以 $V_1(s)$ 作输入、 $V_2(s)$ 作输出, 画出与图 11-1 对应的反馈系统框图, 求 $A(s), F(s)$ 。

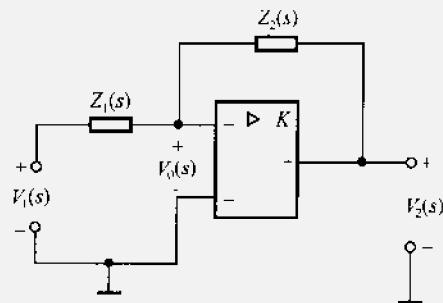
11-7 同相运算放大器电路如题图 11-7 所示, 若以 $V_1(s)$ 作输入、 $V_2(s)$ 作输出, 画出与图 11-1 对应的反馈系统框图, 求 $A(s), F(s)$ 。

11-8 反相运算放大器电路如题图 11-8 所示, 若以 $V_1(s)$ 作输入、 $V_2(s)$ 作输出, 画出与图 11-1 类似的反馈系统框图。(注意答案不是唯一的。)





题图 11-7

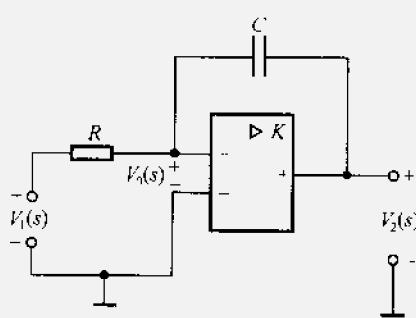


题图 11-8

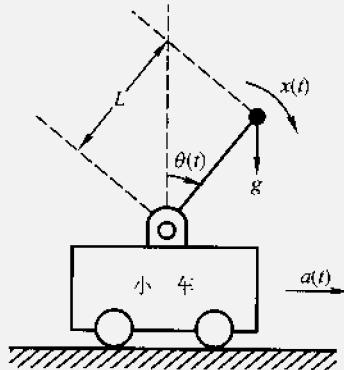
11-9 若在上题中 $K \gg 1$, 求证 $H(s)$ 可近似表示为 $H(s) \approx -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$

11-10 利用运算放大器构成的积分器电路如题图11-10所示。此电路是题图11-8

取 $Z_1(s) = R$, $Z_2(s) = \frac{1}{sC}$ 而得到的。利用该题结果证明这是一个近似的积分器电路, 给出近似条件(K, R, C 参数之条件)。



题图 11-10



题图 11-11

11-11 在11.1节曾介绍的倒立摆系统重绘于题图11-11。图中, 摆长为 L , 不计长杆质量, 末端小球质量为 m , $\theta(t)$ 是偏离垂线之角度, 重力加速度为 g , $a(t)$ 是小车加速度, $x(t)$ 表示扰动(如风吹)引起的角加速度。质量沿垂直于杆方向的加速度 $L \frac{d^2\theta}{dt^2}$ 应等于沿此方向施加之各种加速度之和, 包括重力加速度、小车加速度和扰动加速度, 按此要求建立的系统动态方程如下

$$L \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = g \sin[\theta(t)] - a(t) \cos[\theta(t)] + Lx(t)$$

此模型为非线性微分方程, 在摆处于垂直位置附近, 即 $\theta(t)$ 很小的情况下,

取如下近似: $\sin[\theta(t)] \approx \theta(t)$, $\cos[\theta(t)] \approx 1$, 得到如下简化的线性方程

$$L \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = g[\theta(t)] - a(t) + Lx(t)$$

(1) 设 $x(t)$ 为激励信号, $\theta(t)$ 是响应信号, 若小车不动, 即 $a(t) = 0$, 写出系统函数 $H(s) = \frac{\Theta(s)}{X(s)}$ 表达式, 并讨论系统之稳定性。

(2) 研究适当移动小车对稳定性的影响。假定随 $\theta(t)$ 之变化按比例反馈作用使小车产生加速度, 即 $a(t) = K\theta(t)$, K 为比例系数。画出引入反馈后的系统方框图, 并求此反馈系统的系统函数。讨论系统的稳定性(分为 $K < g$ 、 $K = g$ 和 $K > g$ 三种情况)。

(3) 改用比例-微分(PD)反馈控制, 即

$$a(t) = K_1\theta(t) + K_2 \frac{d\theta(t)}{dt}$$

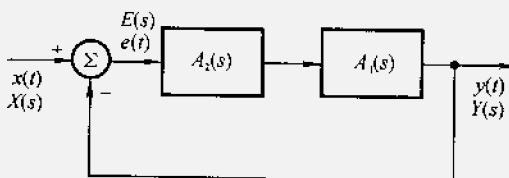
其中 K_1 和 K_2 都为正实系数。写出此反馈系统的系统函数, 讨论为使系统稳定, K_1 , K_2 应满足何种约束条件?

11-12 在题图 11-12 所示的跟踪系统中, $A_2(s)$ 作为补偿器用来改善 $A_1(s)$ 的性能。其作用是保证系统稳定, 并使误差信号 $e(t) = x(t) - y(t)$ 随时间增长而衰减到零。

(1) 若 $A_1(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$, α 为正实系数。选 $A_2(s) = K$ (比例控制, K 为实系数)。求为使系统稳定 K 值应满足何种条件。分别求 $x(t)$ 为单位冲激或单位阶跃时, 误差信号 $e(t)$ 的终值 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ 。(提示: 借助拉氏变换的终值定理。)

(2) 若 $A_1(s)$ 仍如(1)问, 而 $A_2(s)$ 改为比例积分(PI)控制 $A_2(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}$ 。为使系统稳定, 求实系数 K_1 、 K_2 的范围。求 $x(t)$ 为单位阶跃时误差信号 $e(t)$ 的终值。比较以上二种情况下系统的跟踪性能。

(3) 若 $A_1(s) = \frac{1}{(s - 1)^2}$, 试讨论若 $A_2(s)$ 为 PI 控制时系统不稳定, 而改用比例-积分-微分(PID)控制时 $A_2(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s$, 可使系统稳定。并讨论系统对阶跃信号作用的跟踪性能, 求 $e(t)$ 的终值。



题图 11-12

11-13 反馈系统的开环系统函数表达式如下, 分别画出其根轨迹图。

$$(1) A(s)F(s) = \frac{K}{s+2} \quad (K>0)$$

$$(2) A(s)F(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)} \quad (K>0)$$

11-14 反馈系统的开环系统函数表达式为

$$A(s)F(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+5)} \quad (K>0)$$

- (1) 求各条渐近线与实轴之交角;
- (2) 求各渐近线交点值;
- (3) 画出根轨迹。

11-15 反馈系统的开环系统函数表达式为

$$A(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)} \quad (K>0)$$

- (1) 画出根轨迹;
- (2) 为保证系统稳定求 K 值范围。

11-16 反馈系统的开环系统函数表达式为

$$A(s)F(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 4} \quad (K>0)$$

- (1) 画出根轨迹;
- (2) 求两分支的交点值;
- (3) 要使闭环系统的冲激响应不呈现振荡，求 K 值范围。

11-17 在 11.3 节中关于根轨迹作图规则都是针对 $K>0$ 条件给出的，讨论 $K<0$ 应如何修改相应的规则。分别绘制以下各种情况的根轨迹。

$$(1) A(s)F(s) = \frac{K}{s+2} \quad (K<0)$$

$$(2) A(s)F(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)} \quad (K<0)$$

$$(3) A(s)F(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 4} \quad (K<0)$$

11-18 在例 11-9 中根轨迹图形的一部分是以原点为圆心的圆，此特征方程的形式为 $z^2 - bz + c + Kz = 0$ ，其中 b, c, K 均为正实系数。试讨论在参数 b, c, K 之间满足何种约束的条件下此方程的根在 z 平面呈圆形，求圆的半径值。

11-19 若离散时间信号反馈系统的开环系统函数表达式为

$$A(z)F(z) = \frac{K\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)}{z(z - p_1)(z - p_2)}$$

$$\text{其中极点 } p_1 = \frac{7}{8}e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad p_2 = \frac{7}{8}e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad K>0.$$

- (1) 在 z 平面画根轨迹图;
- (2) 求为保证系统稳定的 K 值范围。

11-20 若反馈系统的开环系统函数表达式如下(都满足 $K>0$)，分别画出奈奎斯特图，并求为使系统稳定的 K 值范围。

$$(1) A(s)F(s) = \frac{K}{s+1};$$

$$(2) A(s)F(s) = \frac{K}{(s+1)^2};$$

$$(3) A(s)F(s) = \frac{K}{(s+1)^4};$$

$$(4) A(s)F(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + 2}.$$

11-21 反馈系统的开环系统函数表达式如下(都满足 $K > 0$)，分别画出奈奎斯特图，并求为使系统稳定的 K 值范围，注意本题中 $A(s)F(s)$ 在 s 右半平面内有极点(即 $n_p \neq 0$)。

$$(1) A(s)F(s) = \frac{K}{s-1}$$

$$(2) A(s)F(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 - 2s + 2}$$

11-22 如果给定的条件仍如题 11-20，但限定 K 为负值($K < 0$)，重复该题所问。

11-23 若反馈系统开环系统函数表达式为

$$A(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

(1) 画出奈奎斯特图；

(2) 求使系统稳定的 K 值范围。

注意到本题特点是 $A(s)F(s)$ 函数的分母包含 s 项，也即在 s 平面上 $\omega = 0$ 处有一极点，当 s 沿 $j\omega$ 轴变化时需要从右侧绕过此点，为此，设置一个半圆作为此段路径，如题图 11-23 所示。小半圆上的 s 值为 $s = re^{j\theta}$ ， r 为任意小的半径值， θ 为辐角。当 s 变化沿此路

径走过时， θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 。沿此半圆对应的 $A(s)F(s)$ 式当 $r \rightarrow 0$ 时近似为

$$\begin{aligned} A(s)F(s) &= \frac{K}{re^{j\theta}(re^{j\theta}+1)(re^{j\theta}+4)} \\ &\approx \frac{K}{4r} e^{-j\theta} \end{aligned}$$

对应 s 沿小半圆变化，映射到 $A(j\omega)F(j\omega)$

复轨迹图上为半径等于 $\frac{K}{4r}$ 的半圆。当 $r \rightarrow 0$

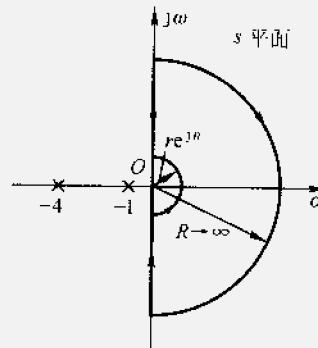
时，此半圆的半径趋于 ∞ 。此即 $\omega \rightarrow 0$

时的部分奈奎斯特图。请补足奈奎斯特图的其他部分图形，完成此题。

11-24 若离散时间信号反馈系统开环系统函数表达式如下(都满足 $K > 0$)，分别画出奈奎斯特图，并求使系统稳定的 K 值范围。

$$(1) A(z)F(z) = \frac{K}{z - \frac{1}{2}}$$

$$(2) A(z)F(z) = \frac{K}{z - 2}$$



题图 11-23

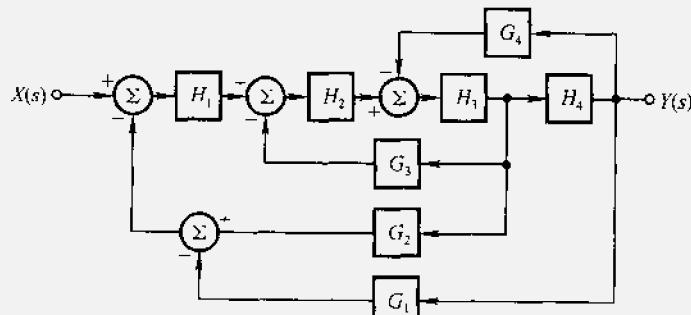
$$(3) A(z)F(z) = \frac{K}{\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{3}{2}\right)}$$

11-25 若反馈系统的奈奎斯特图刚好经过 $(-1+j0)$ 点，此闭环系统函数的极点分布和冲激响应各有何特点？分别讨论连续系统和离散系统两种情况。

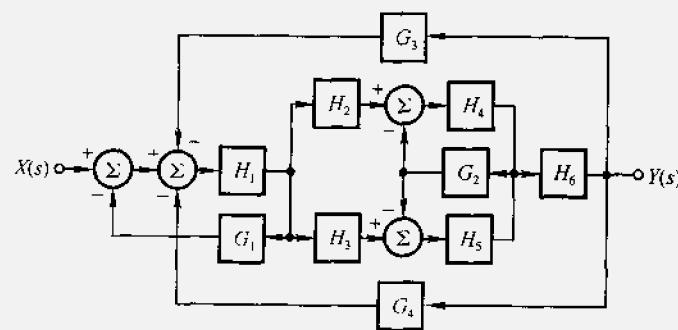
11-26 在反馈系统稳定性研究中，有时还应用“罗斯(Routh)判据(或准则)”，利用它可确定多项式的根是否都位于 s 左半平面。这里只说明对二、三阶多项式的判据。二阶多项式 $s^2 + \alpha s + \beta$ 的根都位于左半平面的充分必要条件是所有项的系数具有相同的符号；对三阶多项式 $s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma$ ，除上述系数同号条件外，还应满足 $\alpha\beta > \gamma$ 。根据上述说明，试判断下列各多项式的根是否都位于 s 左半平面：

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) $s^2 - 3s + 2$; | (2) $s^2 + 6s + 2$; |
| (3) $s^3 + s^2 - 4s + 30$; | (4) $s^3 + s^2 + 4s + 30$; |
| (5) $s^3 + 2s^2 + 3s + 5$; | (6) $s^3 + 2s^2 + 3s$ 。 |

11-27 分别画出题图 11-27(a)、(b)各方框图的流图，并求各转移函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 。



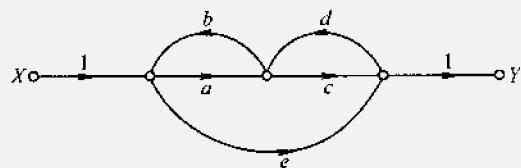
(a)



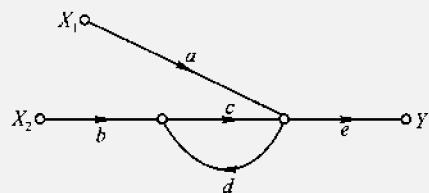
(b)

题图 11-27

11-28 分别求题图 11-28 (a)、(b) 流图所示系统的转移函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, $H_1(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)}$ 和 $H_2(s) = \frac{Y(s)}{X_2(s)}$



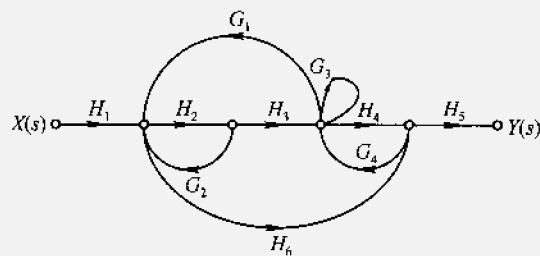
(a)



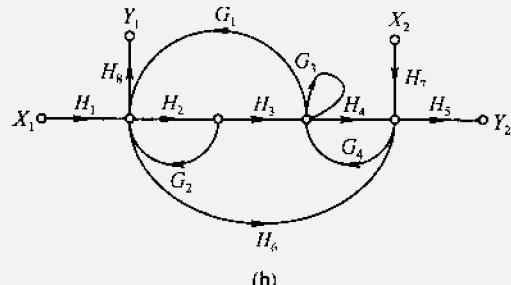
(b)

题图 11-28

11-29 分别求题图 11-29 (a)、(b) 流图所示系统的转移函数 $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, $H_{11}(s)$



(a)



(b)

题图 11-29

$$= \frac{Y_1(s)}{X_1(s)}, H_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{X_1(s)}, H_{12}(s) = \frac{Y_1(s)}{X_2(s)}, H_{22}(s) = \frac{Y_2(s)}{X_2(s)}$$

11-30 根据下面的源点与阱点间转移函数，画出系统的流图表示，在每一支路上标明相应的转移函数。

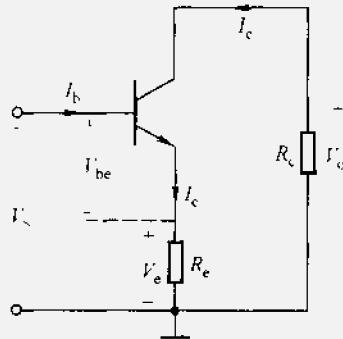
$$H = \frac{Y}{X} = \frac{ah(1 - cf - dg)}{(1 - be)(1 - dg) - fc}$$

11-31 题图 11-31 示出射极有负反馈电阻的单管放大器，各电压、电流之间满足以下约束方程：

$$V_o = -R_i I_c, \quad I_c = \beta I_b, \quad I_b = \frac{V_{be}}{r_{be}}, \quad V_{be} = V_s - V_v, \quad V_v = R_e I_e,$$

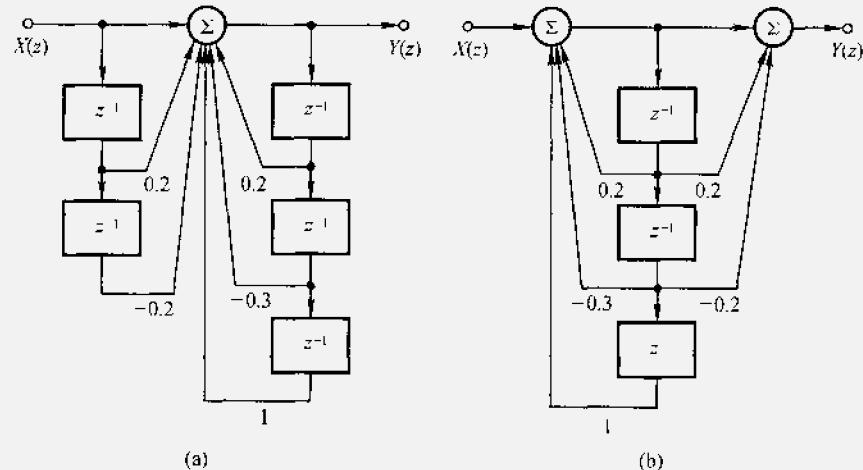
$$I_e = \frac{1 + \beta}{\beta} I_{ce}$$

画出此系统的信号流图，求转移函数 $\frac{V_o}{V_s}$ （即电压放大倍数）。



题图 11-31

11-32 题图 11-32 是数字滤波器的两种直接实现形式，利用信号流图证明两者具有相同的转移函数。（参看第十章图 10-41。）



题图 11-32

第十二章 系统的状态变量分析

12.1 引言

20世纪50年代，经典的线性系统理论已经发展成熟，并在各种工程技术领域中得到广泛应用。按照经典理论，线性系统的基本模型以系统函数(或称转移函数、传递函数)描述，分析过程中着重运用频率响应特性的概念。通过本书前面各章的学习，读者已经熟悉了这些方法。然而，经典的线性系统理论具有明显的局限性，这种理论未能全面揭示系统的内部特性，也不容易有效地处理多输入-多输出系统，仅在着眼于系统外特性并且研究单输入-单输出系统时，才能显示其优点。

随着科学技术的进一步发展，迫切需要突破经典线性系统理论的上述局限性。到20世纪50至60年代，宇宙航行技术蓬勃兴起，在此背景的推动下，线性系统理论逐步从经典阶段过渡到现代阶段。现代系统与控制理论形成的重要标志之一是卡尔曼(R.E.Kalman)把状态空间方法引入到这一领域。此方法的主要特点是利用描述系统内部特性的状态变量取代仅描述系统外部特性的系统函数，并且将这种描述十分便捷地运用于多输入-多输出系统。在状态空间理论的基础上，卡尔曼进一步提出了系统的“可观测性”与“可控制性”两个重要概念，完整地揭示了系统的内部特性，从而促使控制系统分析与设计的指导原则产生了根本性的变革。此外，状态空间方法也成功地用来描述非线性系统或时变系统，并且易于借助计算机求解。

首先，从一个简单实例给出状态变量的初步概念。图12-1示出串联谐振电路，如果只关心其激励 $e(t)$ 与电容两端电压 $v_C(t)$ 之间的关系，则该系统可以用如下微分方程描述

$$\frac{d^2}{dt^2}v_C(t) + 2\alpha \frac{d}{dt}v_C(t) + \omega_0^2 v_C(t) = \omega_0^2 e(t) \quad (12-1)$$

其中：

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

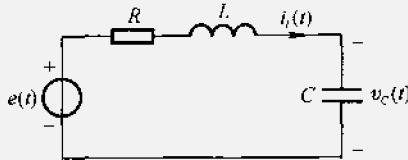


图 12-1 串联谐振电路

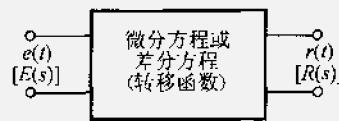


图 12-2 端口方法方框图

对于一般系统，一旦具体的物理设备用数学模型表示以后，就不再关心其内部变化情况，而只对其中输出的物理量 $r(t)$ 感兴趣，这时可以用图 12-2 所示的系统模型来研究各种激励信号 $e(t)$ 所引起的不同响应 $r(t)$ 。像这样研究系统的方法通常称为端口方法或输入-输出描述法。

对于图 12-1 电路，如果不仅希望了解电容上的电压 $v_C(t)$ ，而且希望知道在 $e(t)$ 的作用下，电感中电流 $i_L(t)$ 的变化情况，这时可以列出方程

$$Ri_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + v_C(t) = e(t) \quad (12-2)$$

及

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_L(t) dt$$

或

$$\frac{d}{dt} v_C(t) = \frac{1}{C} i_L(t) \quad (12-3)$$

上列两式可以写成

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i_L(t) = -\frac{R}{L} i_L(t) - \frac{1}{L} v_C(t) + \frac{1}{L} e(t) \\ \frac{d}{dt} v_C(t) = \frac{1}{C} i_L(t) \end{cases} \quad (12-4)$$

这是以 $i_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 作为变量的一阶微分联立方程组。对于图 12-1 所示的串联谐振电路只要知道 $i_L(t)$ 及 $v_C(t)$ 的初始情况及加入的 $e(t)$ 情况，即可完全确定电路的全部行为。这样描述系统的方法称为系统的状态变量或状态空间分析法，其中 $i_L(t)$ 及 $v_C(t)$ 即为串联谐振电路的状态变量。方程组 (12-4) 即为状态方程。

在状态空间分析方法中，将状态方程以矢量和矩阵形式表示，于是式 (12-4) 可写作

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{dv_C(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [e(t)] \quad (12-5)$$

实际上，电路的输出信号可能由多个状态变量以及输入信号的作用组合而成，于是还需要列写所谓“输出方程”。对于图 12-1 电路，若以 $r(t)$ 表示输出信号，输出方程的矩阵形式相当简单，可写作

$$r(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} \quad (12-6)$$

当系统的阶次较高因而状态变量数目较多或系统具有多输入 - 多输出信号时，描述系统的方程形式仍如式(12-5)和式(12-6)，只是矢量或矩阵的维数有所增加。

下面给出系统状态变量分析法中的几个名词定义。

状态 对于一个动态系统的状态是表示系统的一组最少变量（被称为状态变量），只要知道 $t = t_0$ 时这组变量和 $t \geq t_0$ 时的输入，那么就能完全确定系统在任何时间 $t \geq t_0$ 的行为。

状态变量 能够表示系统状态的那些变量称为状态变量。例如图 12-1 中的 $i_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 。

状态矢量 能够完全描述一个系统行为的 k 个状态变量，可以看作矢量 $\lambda(t)$ 的各个分量的坐标。例如图 12-1 中的状态变量 $i_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 可以看作二维矢量 $\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$ 的两个分量 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$ 的坐标。 $\lambda(t)$ 即为状态矢量。

状态空间 状态矢量 $\lambda(t)$ 所在的空间。

状态轨迹 在状态空间中状态矢量端点随时间变化而描出的路径称为状态轨迹。

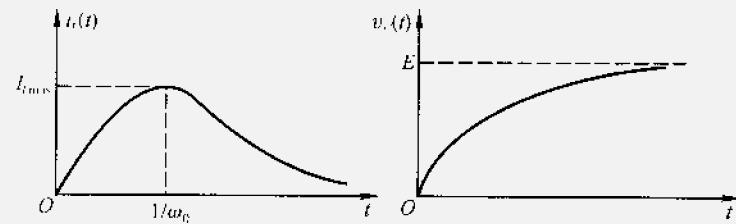
例如图 12-1 电路，取系统的起始状态为零，即 $i_L(0_-) = 0, v_C(0_-) = 0$ ，激励电压为 $e(t) = Eu(t)$ 。若选电路中的 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ，则可以解出 $i_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 为

$$\begin{cases} i_L(t) = \frac{E}{L}te^{-\omega_0 t} \\ v_C(t) = E[1 - e^{-\omega_0 t}(\omega_0 t + 1)] \end{cases}$$

其中

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

分别画出 $i_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 随时间变化的图形如图 12-3 所示。如果把它画在以 $i_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 为坐标的图中，以时间 t 作为参变量，给定某一时间 $t = t_0$ ，即

图 12-3 式(12-7)的 $i_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 与时间 t 的关系

有对应的一个点 $[i_L(t_0), v_C(t_0)]$, 这样即可画出状态矢量 $\lambda(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$ 在二维空间中矢量端点的轨迹图, 如图 12-4 所示。

如果一个系统需要 k 个状态变量来描述, 则状态矢量就是 k 维的矢量, 对应的状态空间就是 k 维空间。

状态变量分析法对离散系统也是同样适用的, 只不过在离散系统的情况改用一阶差分联立方程组来代替连续系统中的二阶微分联立方程组, 详细的分析将在后面给出。

用状态变量分析系统的优点在于:

(1) 便于研究系统内部的一些物理量在信号转换过程中的变化, 这些物理量可以用状态矢量的一个分量表现出来, 从而便于研究其变化规律。

(2) 系统的状态变量分析法与系统的复杂程度没有关系, 复杂系统和简单系统的数学模型形式相似, 都表示为一些状态变量的线性组合, 这种以矢量和矩阵表示的数学模型特别适用于描述多输入-多输出系统。

(3) 状态变量分析法也适用于非线性或时变系统, 因为一阶微分方程或差分方程是研究非线性和时变系统的有效办法。

(4) 状态方程的主要参数鲜明地表征了系统的关键性能。以系统状态变量参数为基础引出的系统可控制性和可观测性两个概念对于揭示系统内在特性具有重要意义, 在控制系统分析与设计(如最优控制和最优估计)中得到广泛应用。此外, 利用状态方程分析系统的稳定性也比较方便。

(5) 由于状态方程都是一阶微分方程或一阶差分方程, 因而便于采用数值解法, 为使用计算机分析系统提供了有效的途径。

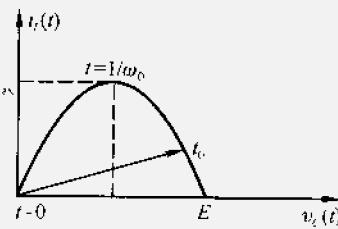


图 12-4 状态矢量
 $\lambda(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$ 在二维空间中
 矢量端点轨迹图

状态空间方法除应用于电网络分析问题之外，在各种控制理论与工程领域中得到非常广泛的应用，它已成为控制系统分析与设计中最重要、最有效的方法。这些领域包括工程控制理论、生物控制理论、经济控制理论以及社会控制理论等。具体的应用实例如宇宙航行系统、生态平衡与物种竞争、宏观经济动态模型、人口发展、治疗吸毒计划实施的人口动力学等等。

从下一节开始将依次研究连续与离散时间系统状态方程的建立与求解，包括时域方法和变换域方法，举出各方面的应用实例。在介绍状态矢量的线性变换原理之后，给出系统可控制性与可观测性的初步概念。必须指出，本书有关状态空间方法的讨论只是导引性的介绍，详细、深入的论述将在现代控制理论等课程中研究。

12.2 连续时间系统状态方程的建立

(一) 状态方程的一般形式和建立方法概述

一个动态连续系统的时域数学模型可利用信号的各阶导数来描述。作为连续系统的状态方程表现为状态变量的一阶微分联立方程组，即

$$\left. \begin{array}{l} \text{状态} \\ \text{方程} \\ \cdots \\ \text{输出} \\ \text{方程} \end{array} \right\} \begin{aligned} \frac{d}{dt}\lambda_1(t) &= f_1[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_k(t); e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t), t] \\ \frac{d}{dt}\lambda_2(t) &= f_2[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_k(t); e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t), t] \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}\lambda_k(t) &= f_k[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_k(t); e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t), t] \end{aligned} \quad (12-7)$$

$$\left. \begin{array}{l} r_1(t) = h_1[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_k(t); e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t), t] \\ r_2(t) = h_2[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_k(t); e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t), t] \\ \cdots \\ r_r(t) = h_r[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_k(t); e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t), t] \end{array} \right\} \quad (12-8)$$

其中 $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_k(t)$ 为系统的 k 个状态变量。

$e_1(t), e_2(t), \dots, e_m(t)$ 为系统的 m 个输入信号。

$r_1(t), r_2(t), \dots, r_r(t)$ 为系统的 r 个输出信号。

如果系统是线性时不变的，则状态方程和输出方程是状态变量和输入信号的线性组合，即：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\lambda_1(t) = a_{11}\lambda_1(t) + a_{12}\lambda_2(t) + \cdots + a_{1k}\lambda_k(t) \\ \quad + b_{11}e_1(t) + b_{12}e_2(t) + \cdots + b_{1m}e_m(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda_2(t) = a_{21}\lambda_1(t) + a_{22}\lambda_2(t) + \cdots + a_{2k}\lambda_k(t) \\ \quad + b_{21}e_1(t) + b_{22}e_2(t) + \cdots + b_{2m}e_m(t) \\ \cdots \end{array} \right. \quad (12-9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\lambda_k(t) = a_{k1}\lambda_1(t) + a_{k2}\lambda_2(t) + \cdots + a_{kk}\lambda_k(t) \\ \quad + b_{k1}e_1(t) + b_{k2}e_2(t) + \cdots + b_{km}e_m(t) \\ r_1(t) = c_{11}\lambda_1(t) + c_{12}\lambda_2(t) + \cdots + c_{1k}\lambda_k(t) \\ \quad + d_{11}e_1(t) + d_{12}e_2(t) + \cdots + d_{1m}e_m(t) \\ r_2(t) = c_{21}\lambda_1(t) + c_{22}\lambda_2(t) + \cdots + c_{2k}\lambda_k(t) \\ \quad + d_{21}e_1(t) + d_{22}e_2(t) + \cdots + d_{2m}e_m(t) \\ \cdots \end{array} \right. \quad (12-10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_r(t) = c_{r1}\lambda_1(t) + c_{r2}\lambda_2(t) + \cdots + c_{rk}\lambda_k(t) \\ \quad + d_{r1}e_1(t) + d_{r2}e_2(t) + \cdots + d_{rm}e_m(t) \end{array} \right.$$

如果用矢量矩阵形式可表示为

$$\text{状态方程} \quad \left[\frac{d}{dt}\lambda(t) \right]_{k \times 1} = \mathbf{A}_{k \times k} \lambda_{k \times 1}(t) + \mathbf{B}_{k \times m} e_{m \times 1}(t) \quad (12-11)$$

$$\text{输出方程} \quad [r(t)]_{r \times 1} = \mathbf{C}_{r \times k} \lambda_{k \times 1}(t) + \mathbf{D}_{r \times m} e_{m \times 1}(t) \quad (12-12)$$

其中

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_k(t) \end{bmatrix} \quad \left[\frac{d}{dt}\lambda(t) \right] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\lambda_1(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\lambda_k(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk} \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix} \\ r(t) &= \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_r(t) \end{bmatrix} & e(t) &= \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_m(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

与上列数学表达式相对应，可画出系统状态方程和输出方程分析的示意结构图，如图 12-5 所示。图中， $\frac{1}{p}$ 是积分环节，它的输入为 $\frac{d}{dt}\lambda(t)$ ，输出为 $\lambda(t)$ 。若 A, B, C, D 矩阵是 t 的函数，表明系统是线性时变的。对于线性时不变系统， A, B, C, D 的各元素都为常数，不随 t 改变。

观察状态方程式(12-11)和输出方程式(12-12)可以看出，被选择的状态变量具有这样的特性：每 - 状态变量的导数是所有状态变量和输入激励信号的函数；每一微分方程中只包含有一个状态变量对时间的导数；输出

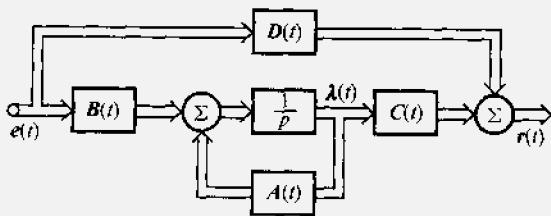


图 12-5 连续系统状态变量描述的结构图

出信号是状态变量和输入信号的函数。通常选择动态元件的输出作为状态变量，在连续系统中是选积分器的输出。

建立给定系统的状态方程的方法很多，这些方法大体上可划分为两大类型：直接法与间接法。其中，直接法主要应用于电路分析、电网络（如滤波器）的计算机辅助设计，而间接法则常见于控制系统研究。考虑到本书范围，在此着重研究后者。在本节第(二)部分，简要介绍用直接法建立电路状态方程的例子，然后讨论各种间接法，包括由输入输出方程建立状态方程、由系统框图（或信号流图）建立状态方程以及由系统函数或传输算子方程建立状态方程等方法。

(二) 由电路图直接建立状态方程

为建立电路的状态方程，先要选定状态变量，通常选电容两端电压和流经电感的电流为状态变量，有时也选电容电荷与电感磁链。

状态变量的个数即式(12-11)中的 k 等于系统的阶数。必须注意，所选

定的每个状态变量都应当是独立变量。图 12-6 示例给出几个电容互连的电路，我们来讨论此时独立变量的选取原则。其中，图 12-6 (a) 将电压源 V_S 接到相互串联电容的两端，这两个电容上的电压不独立，只能选择其中之一为状态变量。而图 12-6 (b) 中任一电容电压都受到其余两电容电压值的约束，若要选取电容电压为状态变量，它们之中只有两个是独立的。图 12-7 示出几个电感互连的电路，此时同样要注意它们的独立变量选取规律。按照电路对偶原理容易看出，图 12-7 (a) 由于电流源 I_S 的约束作用，只能选一个电感电流作独立的状态变量，而图 12-7 (b) 若要选取电感电流作状态变量，三个电流之中只有两个是独立的。

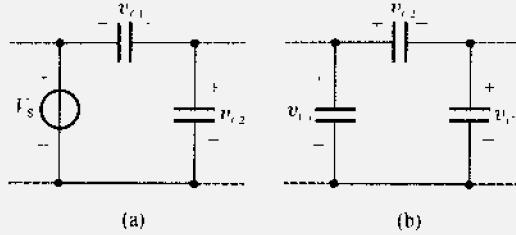


图 12-6 电容与电压源互连以及电容互连的回路

图 12-7 示出几个电感互连的电路，此时同样要注意它们的独立变量选取规律。按照电路对偶原理容易看出，图 12-7 (a) 由于电流源 I_S 的约束作用，只能选一个电感电流作独立的状态变量，而图 12-7 (b) 若要选取电感电流作状态变量，三个电流之中只有两个是独立的。

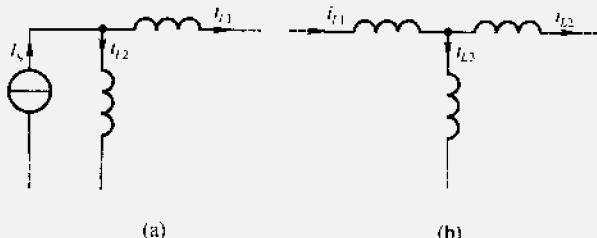


图 12-7 电感与电流源互连以及电感互连的结点

在选定状态变量之后，即可利用 KCL 和 KVL 列写电路方程，经化简消去一些不需要的变量，只留下状态变量和输入信号经整理给出状态方程。

例 12-1 给定图 12-8 的电路，列写电路的状态方程，若输出信号为电压 $r(t)$ ，列写输出方程。

解 选电感中电流和电容两端电压作为状态变量，则有：

$$\lambda_1(t) = i_1(t)$$

$$\lambda_2(t) = i_2(t)$$

$$\begin{aligned}\lambda_3(t) &= v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \\ &= \frac{1}{C} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt\end{aligned}$$

(12-13)

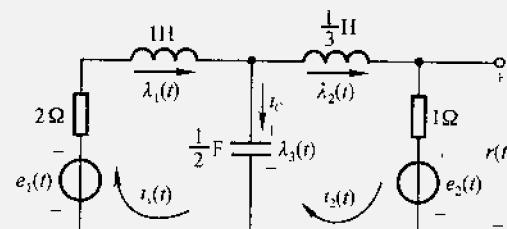


图 12-8 例 12-1 的电路

列写图 12-8 的回路方程

$$\begin{cases} 2i_1(t) + \frac{d}{dt}i_1(t) + 2 \int [i_1(t) - i_2(t)]dt = e_1(t) \\ i_2(t) + \frac{1}{3}\frac{d}{dt}i_2(t) + 2 \int [i_2(t) - i_1(t)]dt = -e_2(t) \end{cases} \quad (12-14)$$

把式(12-13)代入式(12-14), 省略状态变量函数中的符号 t , 经整理得到

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -2\lambda_1 - \lambda_3 + e_1(t) \\ \dot{\lambda}_2 &= -3\lambda_2 + 3\lambda_3 - 3e_2(t) \\ \dot{\lambda}_3 &= 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{aligned}$$

其中 $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$, 表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \quad (12-15)$$

容易写出输出电压 $r(t)$ 表达式为

$$r(t) = \lambda_2(t) + e_2(t) \quad (12-16)$$

表示成矩阵形式即输出方程为

$$r(t) = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + [0 \ 1] \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \quad (12-17)$$

对于比较简单的电路, 用上述直观的方法容易列写状态方程。当电路结构相对复杂时, 需要利用其他方法, 这些方法往往要借助计算机辅助设计(CAD)技术。在电路(或电路分析)课程与教材中对此有初步介绍, 详细、深入的研究可参看电路计算机辅助设计方面的教材或专著。

必须指出, 连续时间系统状态方程的建立不仅应用于电路分析或设计, 在许多科学与技术领域之中都已得到广泛应用, 下面举出一个在生态控制研究中利用状态方程的例子。

例 12-2 考虑一种描述生态控制的状态方程模型。

为了研究两种细菌生存竞争的规律可建立连续时间系统的状态方程。若两种细菌在 t 时刻的数量分别为 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$, 它们对时间的导数分别为 $\dot{\lambda}_1(t)$ 和 $\dot{\lambda}_2(t)$, 这反映了繁殖速率。设 α_{11} , α_{22} 表示两物种的自身繁殖系数, 而 α_{12} 和 α_{21} 为二者相互竞争系数。考虑人为加入一定的药物作用 $e(t)$, 且利用 β_1 和 β_2 表示药品杀伤系数。综合上述要求可建立两个联立的非线性微分方程

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \alpha_{11}\lambda_1 - \alpha_{12}\lambda_1\lambda_2 - \beta_1 e(t) \\ \dot{\lambda}_2 = \alpha_{22}\lambda_2 - \alpha_{21}\lambda_1\lambda_2 - \beta_2 e(t) \end{cases} \quad (12-18)$$

显然，这是一个非线性时不变的二阶状态方程。建立此方程可以帮助人们分析如何根据需要借助激励信号——药物来控制两种细菌的数量和繁殖速率。

下面讨论用间接法建立系统的状态方程

(三) 由系统的输入-输出方程或流图建立状态方程

假定某一物理系统可用如下微分方程表示

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k}r(t) + a_1 \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}r(t) + \cdots + a_{k-1} \frac{d}{dt}r(t) + a_k r(t) \\ = b_0 \frac{d^k}{dt^k}e(t) + b_1 \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}e(t) + \cdots + b_{k-1} \frac{d}{dt}e(t) + b_k e(t) \end{aligned} \quad (12-19)$$

表示成算子形式为

$$\begin{aligned} (p^k + a_1 p^{k-1} + \cdots + a_{k-1} p + a_k) r(t) \\ = (b_0 p^k + b_1 p^{k-1} + \cdots + b_{k-1} p + b_k) e(t) \end{aligned} \quad (12-20)$$

其传输算子为

$$H(p) = \frac{b_0 p^k + b_1 p^{k-1} + \cdots + b_{k-1} p + b_k}{p^k + a_1 p^{k-1} + \cdots + a_{k-1} p + a_k} \quad (12-21)$$

为便于选择状态变量，把式(12-21)表示成

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1/p + \cdots + b_{k-1}/p^{k-1} + b_k/p^k}{1 + a_1/p + \cdots + a_{k-1}/p^{k-1} + a_k/p^k} \quad (12-22)$$

这样当用积分器来实现该系统时，有图 12-9 的流图形式(参见例 11-17)。

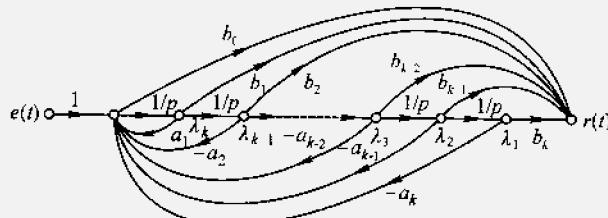


图 12-9 式(12-22)的流图表示

图 12-9 即是式(12-22)的流图表示，为列写状态方程，取每一积分器的输出作为状态变量，如图中所标的 $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_k(t)$ ，即：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = \lambda_3 \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_{k-1} = \lambda_k \\ \dot{\lambda}_k = -a_k \lambda_1 - a_{k-1} \lambda_2 - \cdots - a_2 \lambda_{k-1} - a_1 \lambda_k + e(t) \end{array} \right.$$

$$r(t) = b_k \lambda_1 + b_{k-1} \lambda_2 + \cdots + b_2 \lambda_{k-1} + b_1 \lambda_k + b_0 [-a_k \lambda_1 - a_{k-1} \lambda_2 - \cdots - a_2 \lambda_{k-1} - a_1 \lambda_k + e(t)]$$

$$\begin{aligned}
 &= (b_k - a_k b_0) \lambda_1 + (b_{k-1} - a_{k-1} b_0) \lambda_2 + \cdots + \\
 &\quad + (b_2 - a_2 b_0) \lambda_{k-1} + (b_1 - a_1 b_0) \lambda_k + b_0 e(t)
 \end{aligned} \tag{12-23}$$

方程(12-23)即为对应式(12-19)系统的状态方程和输出方程, 表示成矢量矩阵的形式

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_{k-1} \\ \dot{\lambda}_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \tag{12-24} \\
 r(t) &= [(b_k - a_k b_0), (b_{k-1} - a_{k-1} b_0), \cdots, (b_2 - a_2 b_0), (b_1 - a_1 b_0)] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \\ \lambda_k \end{bmatrix} + b_0 e(t)
 \end{aligned}$$

或简化表示成

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = A\lambda(t) + Be(t) \\ r(t) = C\lambda(t) + De(t) \end{cases} \tag{12-25}$$

对应的 A , B , C , D 矩阵分别为

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 C &= [(b_k - a_k b_0), (b_{k-1} - a_{k-1} b_0), \cdots, (b_2 - a_2 b_0), (b_1 - a_1 b_0)] \\
 D &= b_0
 \end{aligned} \tag{12-26}$$

式(12-24)是一般形式, 对应式(12-19)的不同输入情况, A , B 矩阵是相同的, C , D 矩阵有可能不同。

例如式(12-19)方程的右端只包含输入信号 $e(t)$, 而不包含其任何阶导数, 即

$$\frac{d^k}{dt^k} r(t) + a_1 \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} r(t) + \cdots + a_{k-1} \frac{d}{dt} r(t) + a_k r(t) = e(t) \tag{12-27}$$

此时, 由于 $b_k = 1$, 其他 b 系数都为 0, 因而:

$$C = [1, 0, \cdots, 0] \quad D = 0 \tag{12-28}$$

而矩阵 A , B 仍如式(12-26)。

如果式(12-19)方程的右端只包含输入信号的 m 阶及低于 m 阶导数

($m < k$), 即

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k}r(t) + a_1 \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}r(t) + \cdots + a_{k-1} \frac{d}{dt}r(t) + a_k r(t) \\ = b_{k-m} \frac{d^m}{dt^m}e(t) + b_{k-(m-1)} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t) + \cdots + b_{k-1} \frac{d}{dt}e(t) + b_k e(t) \quad (12-29) \end{aligned}$$

此时, 矩阵 A , B 仍不变, 而矩阵 C , D 分别为:

$$C = [b_k, b_{k-1}, \dots, b_{k-m}, 0, \dots, 0] \quad (12-30)$$

$$D = 0$$

按流图转置性质, 把式(12-19)对应的流图形式图 12-9 转换成图 12-10 的形式。

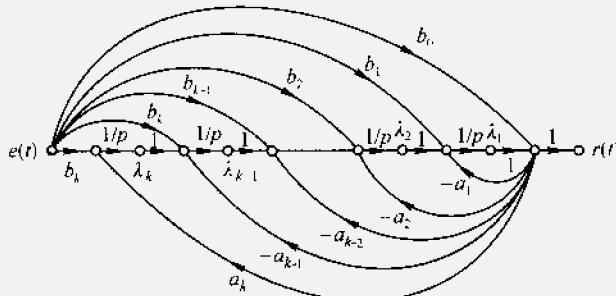


图 12-10 图 12-9 流图的转置形式

仍选积分器输出为状态变量, 如图 12-10 所标, 则有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_1 = -a_1 \lambda_1 + \lambda_2 + (b_1 - a_1 b_0)e(t) \\ \dot{\lambda}_2 = -a_2 \lambda_1 + \lambda_3 + (b_2 - a_2 b_0)e(t) \\ \dots \\ \dot{\lambda}_{k-1} = -a_{k-1} \lambda_1 + \lambda_k + (b_{k-1} - a_{k-1} b_0)e(t) \\ \dot{\lambda}_k = -a_k \lambda_1 + (b_k - a_k b_0)e(t) \\ r(t) = \lambda_0 + b_0 e(t) \end{array} \right. \quad (12-31)$$

或者表示成矢量形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}(t) = A\lambda(t) + Be(t) \\ r(t) = C\lambda(t) + De(t) \end{array} \right. \quad (12-32)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ \vdots \\ b_{k-1} - a_{k-1} b_0 \\ b_k - a_k b_0 \end{bmatrix} \quad (12-33)$$

$$\mathbf{C} = [1, 0, \dots, 0] \quad \mathbf{D} = b_0$$

由方程(12-24)和方程(12-31)可以看出同一系统流图形式不同, 状态变量的选择就可以不一样, 因而对于一个给定系统而言, 状态变量选择并非唯一的。

(四) 将传输算子表达式(或系统函数)分解 建立状态方程

将式(12-21)的分母分解因式, 可以对应构成并联或串联形式的流图结构, 这样又可构成不同形式的状态方程, 下面通过几个典型实例来介绍这种方法。

例 12-3 将下示 $H(p)$ 表达式分解, 用流图的并联结构形式建立状态方程

$$H(p) = \frac{p+4}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

解 把给定的 $H(p)$ 表达式作部分分式展开得到

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{p+4}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \frac{p+4}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\ &= \frac{3/2}{p+1} + \frac{-2}{p+2} + \frac{1/2}{p+3} \\ &= H_1(p) + H_2(p) + H_3(p) \end{aligned}$$

其中每一个传输算子的标准形式为

$$H_i(p) = \frac{\beta_i}{p + \alpha_i} \quad (12-34)$$

表示成流图即为图 12-11。

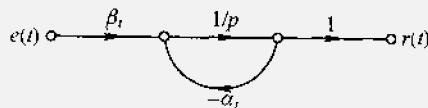


图 12-11 式(12-34)的流图表示

这样, $H(p)$ 的流图形式可表示为图 12-12。

仍取积分器的输出为状态变量, 则有:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 + \frac{3}{2}e(t) \\ \dot{\lambda}_2 = -2\lambda_2 - 2e(t) \\ \dot{\lambda}_3 = -3\lambda_3 + \frac{1}{2}e(t) \\ r(t) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \quad (12-35)$$

表示成矩阵形式:

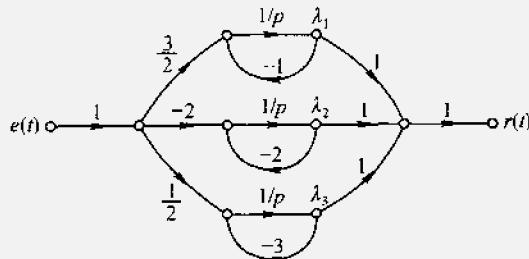


图 12-12 例 12-3 的流图形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e(t)$$

$$r(t) = [1, 1, 1] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (12-36)$$

从式(12-36)可以看出, 这种并联结构形式导致 A 矩阵是对角阵, A 矩阵为对角阵形式的状态方程在控制理论研究中具有重要意义。

例 12-4 把例 12-3 表示为串联结构形式的状态方程。

解 把例 12-3 $H(p)$ 表达式作因式分解:

$$H(p) = \left(\frac{1}{p+1}\right) \left(\frac{p+4}{p+2}\right) \left(\frac{1}{p+3}\right) \quad (12-37)$$

按图 12-11 画成流图形式 12-13。

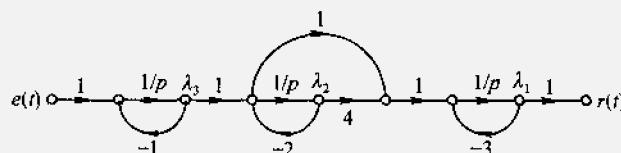


图 12-13 串联结构的流图形式

选积分器输出为状态变量

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -3\lambda_1 + 4\lambda_2 + (\lambda_3 - 2\lambda_2) = -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_2 = -2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 = -\lambda_3 + e(t) \end{cases}$$

$$r(t) = \lambda_1$$

或：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ r(t) &= [1, 0, 0] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12-38)$$

由式(12-38)可以看出， A 矩阵是三角阵，而对角元素为系统的特征根。

下面讨论在 $H(p)$ 表达式分母因子中出现重根的情况。

例 12-5 用并联结构形式表示下式为状态方程的形式

$$H(p) = \frac{(p+4)}{(p+1)^3(p+2)(p+3)} \quad (12-39)$$

解 用并联结构形式表示时，对式(12-39)用部分分式展开

$$H(p) = \frac{3/2}{(p+1)^3} + \frac{-7/4}{(p+1)^2} + \frac{15/8}{(p+1)} + \frac{-2}{(p+2)} + \frac{1/8}{(p+3)} \quad (12-40)$$

对应式(12-40)的流图结构形式如图 12-14 所示。

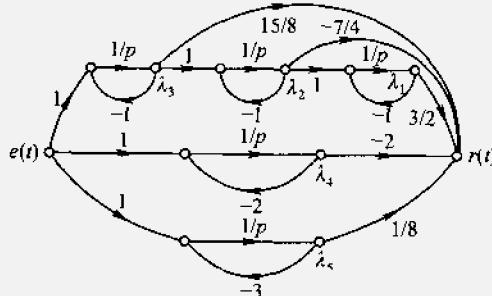


图 12-14 式(12-40)的流图形式

选积分器输出为状态变量：

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_2 + \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 = -\lambda_3 + e(t) \\ \dot{\lambda}_4 = -2\lambda_4 + e(t) \\ \dot{\lambda}_5 = -3\lambda_5 + e(t) \end{cases}$$

$$r(t) = \frac{3}{2}\lambda_1 - \frac{7}{4}\lambda_2 + \frac{15}{8}\lambda_3 + (-2)\lambda_4 + \frac{1}{8}\lambda_5 \quad (12-41)$$

表示成矩阵形式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ r(t) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{15}{8}, -2, \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} \quad (12-42) \end{aligned}$$

例 12-5 说明当系统传输算子用部分分式展开具有重根时，则 A 矩阵成为约当阵的形式。线性代数里已经证明任何矩阵都和一个约当阵相似（对角阵是约当阵的一种特殊情况），所以尽管状态变量选择不同，对同一系统而言不同形式的 A 矩阵都是相似的。12.6 节将进一步研究这一问题。

在本节中，由传输算子 $H(p)$ 建立状态方程的方法通常也适用于由系统函数 $H(s)$ 建立状态方程，此处不再重复说明。针对 $H(p)$ 讨论这一问题更具有普遍性。此外，在本章最后还应看到，当研究 $H(s)$ 与系统状态方程之间的关系时，必须考虑系统的可观性和可控性，否则不能全面描述系统性能，这将是 12.7 节研究的重要内容。

12.3 连续时间系统状态方程的求解

可以利用时域方法或变换域方法求解状态方程，一般情况下由解析式经人工计算求解时，变换域方法比较简便，而时域方法往往需要借助计算机求解。下面先给出用拉普拉斯变换法求解状态方程，然后介绍时域法，最后讨论由状态方程求系统函数的方法。

(一) 用拉普拉斯变换法求解状态方程

若给定方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \lambda(t) = A\lambda(t) + Be(t) \\ r(t) = C\lambda(t) + De(t) \end{cases} \quad (12-43)$$

两边取拉氏变换

$$\begin{aligned} s\mathbf{A}(s) - \lambda(0_-) &= \mathbf{A}\mathbf{A}(s) + \mathbf{B}\mathbf{E}(s) \\ \mathbf{R}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{A}(s) + \mathbf{D}\mathbf{E}(s) \end{aligned} \quad (12-44)$$

式中, $\lambda(0_-)$ 为起始条件

$$\lambda(0_-) = \begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_2(0_-) \\ \vdots \\ \lambda_k(0_-) \end{bmatrix}$$

整理得

$$\begin{cases} \mathbf{A}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\lambda(0_-) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{E}(s) \\ \mathbf{R}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\lambda(0_-) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{E}(s) \end{cases} \quad (12-45)$$

因而时域表示式为

$$\begin{cases} \lambda(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\lambda(0_-)] \\ \quad + \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}] * \mathcal{L}^{-1}\mathbf{E}(s) \\ \mathbf{r}(t) = \underbrace{\mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\lambda(0_-)]}_{\text{零输入解}} \\ \quad + \underbrace{\{\mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}] + \mathbf{D}\delta(t)\}}_{\text{零状态解}} * \mathcal{L}^{-1}\mathbf{E}(s) \end{cases} \quad (12-46)$$

由此结果可以看出, 在计算过程中最关键的一步是求 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, 下面举例说明。在时域求解方法中我们将进一步解释 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 取拉普拉斯逆变换的意义。

例 12-6 已建立状态方程和输出方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\lambda_1(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ r(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

起始条件为

$$\lambda_1(0_-) = 1, \lambda_2(0_-) = 2$$

用拉氏变换法求响应 $r(t)$ 。

解

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

由此求 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, 这时需借助伴随矩阵 adj

$$\begin{aligned}
 (sI - A)^{-1} &= \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} \\
 &= \frac{1}{(s-1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

将此结果代入式(12-45)可以得到零输入响应与零状态响应的拉氏变换式 $R_{zi}(s)$ 和 $R_{zs}(s)$ 分别为

$$\begin{aligned}
 R_{zi}(s) &= C(sI - A)^{-1} \lambda(0^-) \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{(s+3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{zs}(s) &= [C(sI - A)^{-1} B + D] E(s) \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} \\
 &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s} \right)
 \end{aligned}$$

合并以上二式并求拉氏逆变换得到响应的时域解

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \left[\frac{7}{4} e^{-3t} + \frac{1}{12} (e^{-3t} - 1) \right] u(t) \\
 &= \left(\frac{11}{6} e^{-3t} - \frac{1}{12} \right) u(t)
 \end{aligned}$$

(二) 用时域法求解状态方程(矢量微分方程求解)

在时域求解方法中需要用到“矩阵指数”，先给出矩阵指数 e^{At} 的定义和主要性质，它的定义为

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k
 \end{aligned} \tag{12-47}$$

式中 A 为 $k \times k$ 方阵， e^{At} 也是一个 $k \times k$ 方阵。它的主要性质有：

$$e^{At} e^{-At} = I \tag{12-48}$$

$$e^{At} = [e^{-At}]^{-1} \tag{12-49}$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A e^{At} = e^{At}A \quad (12-50)$$

从直观认识容易接受这些结论，严格的证明将在本节稍后给出。

下面对给定的状态方程进行时域求解，若已知

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = A\lambda(t) + Be(t) \quad (12-51)$$

并给定起始状态矢量

$$\lambda(0_-) = \begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_2(0_-) \\ \vdots \\ \lambda_k(0_-) \end{bmatrix} \quad (12-52)$$

对式(12-51)两边左乘 e^{-At} ，移项有

$$e^{-At}\frac{d}{dt}\lambda(t) - e^{-At}A\lambda(t) = e^{-At}Be(t) \quad (12-53)$$

化简得

$$\frac{d}{dt}e^{-At}\lambda(t) = e^{-At}Be(t) \quad (12-54)$$

两边取积分，并考虑式(12-51)的起始条件，有

$$e^{-At}\lambda(t) - \lambda(0_-) = \int_{0_-}^t e^{-A(\tau-t)}Be(\tau)d\tau \quad (12-55)$$

对式(12-55)两边左乘 e^{At} ，并考虑到

$$e^{At}e^{-At} = I \quad (12-56)$$

可得

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= e^{At}\lambda(0_-) + \int_{0_-}^t e^{A(t-\tau)}Be(\tau)d\tau \\ &= e^{At}\lambda(0_-) + e^{At}B * e(t) \end{aligned} \quad (12-57)$$

表示式(12-57)，即为方程(12-51)的一般解。将此结果代入输出方程得到 $r(t)$

$$\begin{aligned} r(t) &= C\lambda(t) + De(t) \\ &= Ce^{At}\lambda(0_-) + \int_{0_-}^t Ce^{A(t-\tau)}Be(\tau)d\tau + De(t) \\ &= \underbrace{Ce^{At}\lambda(0_-)}_{\text{零输入解}} + \underbrace{[Ce^{At}B + D\delta(t)] * e(t)}_{\text{零状态解}} \end{aligned} \quad (12-58)$$

将时域求解结果式(12-57)和式(12-58)与变换域求解结果式(12-46)相比较，不难发现 $(sI - A)^{-1}$ 就是 e^{At} 的拉氏变换，即

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (12-59)$$

无论状态方程的解或输出方程的解都由两部分相加组成，第一部分是零输入解，由 $\lambda(0)$ 引起，第二部分是零状态解，由激励信号 $e(t)$ 引起。两部分的变化规律都与矩阵 e^{At} 有关，因此可以说 e^{At} 反映了系统状态变化的本质。 e^{At} 称为“状态转移矩阵”(state transition matrix)，而它的拉氏变换 $(sI - A)^{-1}$ 称为“特征矩阵”(characteristic matrix)。

至此，时域解的表达式虽已给出，而计算工作并未结束，为求得最终结果必须先求出 e^{At} ，正如在变换域方法中先求 $(sI - A)^{-1}$ 一样。当然，也可以用变换域方法由 $(sI - A)^{-1}$ 取逆变换间接得到 e^{At} ，除了这种方法之外，还有几种从时域直接求 e^{At} 的方法：

(1) 计算机求解：将给定的 A 代入式(12-47)利用计算机求无穷级数之和，取有限项可得 e^{At} 近似解。

(2) 化对角阵计算法：若将 A 矩阵化为对角阵 \hat{A} (详见第12.6节讨论)，则 $e^{\hat{A}t}$ 也是对角阵，当 \hat{A} 的对角各元素为 a_i 时， $e^{\hat{A}t}$ 对应元素为 $e^{a_i t}$ ，即：

$$\hat{A} = \text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_k] \quad (12-60)$$

$$e^{\hat{A}t} = \text{diag}[e^{a_1 t}, e^{a_2 t}, \dots, e^{a_k t}] \quad (12-61)$$

此时，可求得 A 矩阵化为对角阵相应的矩阵指数 e^{At} ，适用于只对输出方程求解的情况。

(3) 化 e^{At} 为有限项之和求解，此处需利用凯莱-哈密顿定理(Cayley-Hamilton theorem)。

下面只介绍第(3)种方法，并给出计算实例。

虽然， e^{At} 的定义式(12-47)由无穷项相加构成，但是按凯莱-哈密顿定理可将它化为有限项之和。

该定理指出，对于 $k \times k$ 方阵 A 有如下特性：

$$A^j = b_0 I + b_1 A + b_2 A^2 + \dots + b_{k-1} A^{k-1}, \quad (j \geq k) \quad (12-62)$$

也即，对于 $j \geq k$ ，可利用 A^{k-1} 以下幂次的各项之和表示 A^j ，式中 b 为各项系数。

依此原理，将 e^{At} 无穷项之和的表示式中高于 k 次的各项全部化为 A^{k-1} 幂次的各项之和，经整理后即可将 e^{At} 化为有限项之和

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_{k-1} A^{k-1} \quad (12-63)$$

式中各系数 c 都是时间 t 的函数(在下面例题中将看到)，为书写简便省略了变量 t 。

按照凯莱-哈密顿定理，将矩阵 A 的特征值代入式(12-63)中的 A 之后，方程仍满足平衡，利用这一关系可求得式(12-63)中的系数 c ，最后解出

e^{At} 。具体计算步骤是先求矩阵 A 的特征值，然后将各特征值分别代入式(12-63)得到一组联立方程，即可求出系数 c_i 。下面分两种情况举例说明。

第一种情况： A 的特征值各不相同，分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ，代入式(12-63)有

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\alpha_1 t} = c_0 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_1^2 + \dots + c_{k-1} \alpha_1^{k-1} \\ e^{\alpha_2 t} = c_0 + c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_2^2 + \dots + c_{k-1} \alpha_2^{k-1} \\ \dots \\ e^{\alpha_k t} = c_0 + c_1 \alpha_k + c_2 \alpha_k^2 + \dots + c_{k-1} \alpha_k^{k-1} \end{array} \right. \quad (12-64)$$

解式(12-64)的联立方程求得 c_i ($i = 0, 1, \dots, k-1$)，代入式(12-63)即可得 e^{At} 的表示式。

例 12-7 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ，
求 e^{At} 。

解 列出 A 的特征方程

$$|\alpha I - A| = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & \alpha + 2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha + 2) = 0$$

其特征根为

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -2$$

代入式(12-64)有

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = c_0 + 0 \cdot c_1 \\ e^{-2t} = c_0 - 2c_1 \end{array} \right.$$

解得

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = 1 \\ c_1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \end{array} \right.$$

因而

$$\begin{aligned} e^{At} &= c_0 I + c_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12-66)$$

第二种情况：若 A 的特征根 α_1 具有 m 阶重根，则重根部分方程为

$$\left\{
 \begin{aligned}
 e^{\alpha_1 t} &= c_0 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_1^2 + \cdots + c_{k-1} \alpha_1^{k-1} \\
 \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha t} \Big|_{\alpha=\alpha_1} &= t e^{\alpha_1 t} = c_1 + 2c_2 \alpha_1 + \cdots + (k-1)c_{k-1} \alpha_1^{k-2} \\
 &\cdots \\
 \frac{d^m}{d\alpha^{m-1}} e^{\alpha t} \Big|_{\alpha=\alpha_1} &= t^{m-1} e^{\alpha_1 t} \\
 &= (m-1)! c_{m-1} + m! c_m \alpha_1 + \frac{(m+1)!}{2!} c_{m+1} \alpha_1^2 \\
 &\quad + \cdots + \frac{(k-1)!}{(k-m)!} c_{k-1} \alpha_1^{k-m}
 \end{aligned} \right. \quad (12-67)$$

其他非重根部分与式(12-64)相同处理，两者联立解得要求的系数。

例 12-8 已知

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (12-68)$$

求 $e^{\mathbf{At}}$

解 列出 \mathbf{A} 的特征方程

$$\begin{aligned}
 |\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \begin{bmatrix} \alpha - 1 & 1 \\ -1 & \alpha - 3 \end{bmatrix} \\
 &= (\alpha - 1)(\alpha - 3) + 1 = (\alpha - 2)^2 = 0
 \end{aligned}$$

特征根 $\alpha = 2$ 为二阶重根。

按式(12-67)有

$$\left\{
 \begin{aligned}
 e^{2t} &= c_0 + 2c_1 \\
 te^{2t} &= c_1
 \end{aligned} \right.$$

解得

$$\left\{
 \begin{aligned}
 c_0 &= e^{2t} - 2te^{2t} \\
 c_1 &= te^{2t}
 \end{aligned} \right.$$

所以

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}^{\mathbf{At}} &= c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{A} = (e^{2t} - 2te^{2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{2t} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e^{2t} - te^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (12-69)$$

$e^{\mathbf{At}}$ 的时域计算就讨论至此，现在转回去证明 $e^{\mathbf{At}}$ 的性质式(12-48)到式(12-50)。

在系统理论分析中，以矩阵指数形式给出的状态转移矩阵 $e^{\mathbf{At}}$ 也常用符号 $\Phi(t)$ 表示，即

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (12-70)$$

下面借助符号 $\Phi(t)$ 来推证性质

$$\text{性质1: } \Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) \quad (12-71)$$

证明

$$\begin{aligned}\Phi(t_1)\Phi(t_2) &= e^{At_1}e^{At_2} \\ &= \left(I + At_1 + \frac{1}{2!}A^2t_1^2 + \dots \right) \left(I + At_2 + \frac{1}{2!}A^2t_2^2 + \dots \right) \\ &= I + A(t_1 + t_2) + A^2\left(\frac{1}{2!}t_1^2 + t_1t_2 + \frac{1}{2!}t_2^2\right) \\ &\quad + A^3\left(\frac{t_1^3}{3!} + \frac{1}{2!}t_1^2t_2 + \frac{1}{2!}t_1t_2^2 + \frac{1}{3!}t_2^3\right) + \dots \\ &= I + A(t_1 + t_2) + A^2\frac{1}{2!}(t_1 + t_2)^2 + A^3\frac{1}{3!}(t_1 + t_2)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t_1 + t_2)^k}{k!} = e^{A(t_1 + t_2)} = \Phi(t_1 + t_2)\end{aligned}$$

推论 1 若 $t_1 = -t_2$, 则

$$\Phi(0) = I \quad (12-72)$$

即 e^{At} 为非奇异矩阵, 而且 $[\Phi(t)]^{-1} = \Phi(-t)$, 这样求 $[\Phi(t)]^{-1}$ 只要对时间 t 取负号即可。此结果也即:

$$\begin{aligned}e^{At}e^{-At} &= I \\ e^{At} &= [e^{-At}]^{-1}\end{aligned}$$

$$\text{推论 2 } [\Phi(t)]^n = \Phi(nt) \quad (12-73)$$

$$\begin{aligned}\text{性质 2: } [\Phi(t_2 - t_1)][\Phi(t_1 - t_0)] &= \Phi(t_2 - t_0) \\ &= [\Phi(t_1 - t_0)][\Phi(t_2 - t_1)]\end{aligned} \quad (12-74)$$

此处略去推论 2 和性质 2 的证明, 作为练习, 读者可自行证明。

$$\text{性质 3: } \frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A \quad (12-75)$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^kt^k\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left[I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \dots\right] \\ &= A + A^2t + \dots + \frac{1}{(k-1)!}A^kt^{k-1} + \dots \\ &= A\left[I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}t^{k-1}\right] \\ &= Ae^{At} = e^{At}A\end{aligned} \quad (12-76)$$

此结果就是式(12-50), 也即式(12-75)。

例 12-9 在图 12-15 电路中, $e(t) = u(t)$, 起始为零状态。试建立状态方程, 并用时域法求解。

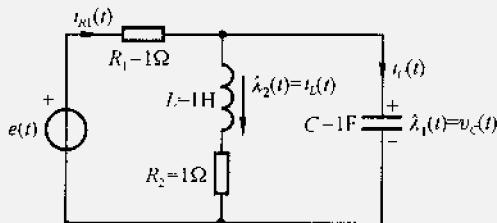


图 12-15 例 12-9 的电路

解 (1) 选电容的端电压 $v_C(t)$ 和电感中的电流 $i_L(t)$ 为状态变量, 即

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \\ \lambda_2(t) = i_L(t) \end{cases} \quad (12-77)$$

列电路方程

$$\begin{cases} i_{R_1} R_1 + v_C(t) = e(t) \\ i_{R_1} = i_L + i_C \\ L \frac{d}{dt} i_L(t) + i_L(t) R_2 = v_C(t) \end{cases} \quad (12-78)$$

由方程(12-78)及考虑(12-77)关系式, 代入整理得出状态方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \lambda_1(t) = -\lambda_1(t) - \lambda_2(t) + e(t) \\ \frac{d}{dt} \lambda_2(t) = \lambda_1(t) - \lambda_2(t) \end{cases} \quad (12-79)$$

由此得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 求状态转移矩阵 e^{At}

\mathbf{A} 矩阵的特征值

$$\begin{aligned} |\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \alpha + 1 & 1 \\ -1 & \alpha + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha + 1)^2 + 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0 \end{aligned}$$

求得特征值为

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 - j \\ \alpha_2 = -1 + j \end{cases}$$

根据式(12-64)求 c_0 和 c_1

$$\begin{cases} e^{-(1+j)t} = c_0 + c_1(-1-j) \\ e^{-(1-j)t} = c_0 + c_1(-1+j) \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} c_0 = e^{-t}(\sin t + \cos t) \\ c_1 = e^{-t}\sin t \end{cases}$$

因而

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix} \quad (12-80)$$

(3) 按式(12-57)求 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$

由于电路起始状态为零状态，因此 $\lambda(0_-) = 0$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} &= (e^{At}B) * u(t) \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau}\cos \tau & -e^{-\tau}\sin \tau \\ e^{-\tau}\sin \tau & e^{-\tau}\cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-\tau}\cos \tau d\tau \\ \int_0^t e^{-\tau}\sin \tau d\tau \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t) \end{bmatrix} \quad t > 0 \end{aligned}$$

由此得出：

电容两端电压响应为

$$v_C(t) = \lambda_1(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t)u(t) \quad (12-81)$$

电感中电流的响应为

$$i_L(t) = \lambda_2(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t)u(t)$$

这个系统也可以用拉氏变换求解，请读者自己试做。

(三) 由状态方程求系统函数 $H(s)$

当给定系统的状态方程时，可利用已知的 A , B , C , D 矩阵表示系统转移函数 $H(s)$ ，下面导出此关系式。

设给定状态方程

$$\begin{cases} \lambda(t) = A\lambda(t) + Be(t) \\ r(t) = C\lambda(t) + De(t) \end{cases} \quad (12-82)$$

其中 A, B, C, D 为常数阵。

考虑到系统转移函数是在零起始状态下得到的，因此对式(12-82)两边取拉氏变换有

$$\begin{cases} sA(s) = AA(s) + BE(s) \\ R(s) = CA(s) + DE(s) \end{cases} \quad (12-83)$$

由式(12-83)的第一式得到

$$A(s) = (sI - A)^{-1}BE(s)$$

代入式(12-83)的第二式，整理得

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (12-84)$$

其中

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

此外 $H(s)$ 的一般表示式为

$$H(s) = \frac{b_0 s^k + b_1 s^{k-1} + \dots + b_{k-1} s + b_k}{s^k + a_1 s^{k-1} + \dots + a_{k-1} s + a_k} \quad (12-85)$$

比较式(12-84)和(12-85)的分母可以看出 $|sI - A|$ 即为 $H(s)$ 分母的特征多项式，所以称 $(sI - A)^{-1}$ 为系统的特征矩阵。

将式(12-84)取逆变换即得系统的冲激响应 $h(t)$

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (12-86)$$

显然，此结果也可从式(12-58)的第二项(零状态解)令 $e(t) = \delta(t)$ 求得。

例 12-10 求图 12-16 所示系统的转移函数。

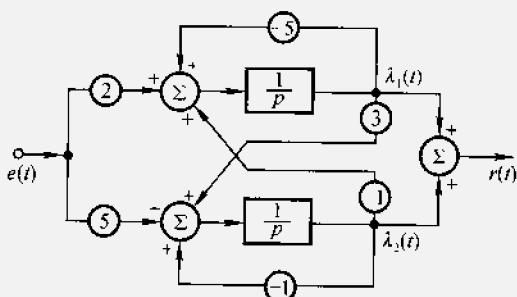


图 12-16 例 12-10 的系统

解 由图 12-16，设置状态变量 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$ ，则可以得出状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\lambda_1 = -5\lambda_1 - \lambda_2 + 2e(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda_2 = 3\lambda_1 - \lambda_2 + 5e(t) \\ r(t) = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

由此得到

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \ 1] & D &= 0 \end{aligned}$$

按式(12-84)先求特征矩阵

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+4)} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} H(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= [1, 1] \frac{1}{(s+2)(s+4)} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{7s+28}{(s+2)(s+4)} \end{aligned} \quad (12-87)$$

如果系统具有 r 个输出, m 个输入, 即

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{k \times 1}(t) = A_{k \times k} \lambda_{k \times 1}(t) + B_{k \times m} e_{m \times 1}(t) \\ r_{r \times 1}(t) = C_{r \times k} \lambda_{k \times 1}(t) + D_{r \times m} e_{m \times 1}(t) \end{cases} \quad (12-88)$$

则按上面推导得到系统转移函数阵为

$$\begin{aligned} H_{r \times m}(s) &= C_{r \times k} (sI - A)_{k \times k}^{-1} B_{k \times m} + D_{r \times m} \\ &= \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{r1}(s) & H_{r2}(s) & \cdots & H_{rm}(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12-89)$$

式(12-89)中每一元素的物理意义可用下式表示

$$H_{ij}(s) = \left. \frac{\text{第 } i \text{ 个输出 } R_i(s) \text{ 中对第 } j \text{ 个输入的响应}}{\text{第 } j \text{ 个输入 } E_j(s)} \right|_{\substack{\text{其他输入} \\ \text{量都为零}}} \quad (12-90)$$

12.4 离散时间系统状态方程的建立

(一) 状态方程的一般形式和建立方法概述

对于一个动态的时域离散系统, 它的数学模型是用各阶差分方程形式描述

的。作为离散系统的状态方程表现为一阶差分联立方程组的形式，即

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = f_1[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \dots, \lambda_k(n); \\ \quad \quad \quad x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n), n] \\ \lambda_2(n+1) = f_2[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \dots, \lambda_k(n); \\ \quad \quad \quad x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n), n] \\ \dots \end{cases} \quad (12-91)$$

$$\begin{cases} \lambda_k(n+1) = f_k[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \dots, \lambda_k(n); \\ \quad \quad \quad x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n), n] \\ y_1(n) = h_1[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \dots, \lambda_k(n); \\ \quad \quad \quad x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n), n] \\ y_2(n) = h_2[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \dots, \lambda_k(n); \\ \quad \quad \quad x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n), n] \\ \dots \\ y_r(n) = h_r[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \dots, \lambda_k(n); \\ \quad \quad \quad x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n), n] \end{cases} \quad (12-92)$$

其中： $\lambda_1(n), \lambda_2(n), \dots, \lambda_k(n)$ 为系统的状态变量；

$x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)$ 为系统的 m 个输入信号；

$y_1(n), y_2(n), \dots, y_r(n)$ 为系统的 r 个输出信号。

如果系统是线性时不变系统，则状态方程和输出方程是状态变量和输入信号的线性组合，即

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = a_{11}\lambda_1(n) + a_{12}\lambda_2(n) + \dots + a_{1k}\lambda_k(n) \\ \quad \quad \quad + b_{11}x_1(n) + b_{12}x_2(n) + \dots + b_{1m}x_m(n) \\ \lambda_2(n+1) = a_{21}\lambda_1(n) + a_{22}\lambda_2(n) + \dots + a_{2k}\lambda_k(n) \\ \quad \quad \quad + b_{21}x_1(n) + b_{22}x_2(n) + \dots + b_{2m}x_m(n) \\ \dots \end{cases} \quad (12-93)$$

$$\begin{cases} \lambda_k(n+1) = a_{k1}\lambda_1(n) + a_{k2}\lambda_2(n) + \dots + a_{kk}\lambda_k(n) \\ \quad \quad \quad + b_{k1}x_1(n) + b_{k2}x_2(n) + \dots + b_{km}x_m(n) \\ y_1(n) = c_{11}\lambda_1(n) + c_{12}\lambda_2(n) + \dots + c_{1k}\lambda_k(n) \\ \quad \quad \quad + d_{11}x_1(n) + d_{12}x_2(n) + \dots + d_{1m}x_m(n) \\ y_2(n) = c_{21}\lambda_1(n) + c_{22}\lambda_2(n) + \dots + c_{2k}\lambda_k(n) \\ \quad \quad \quad + d_{21}x_1(n) + d_{22}x_2(n) + \dots + d_{2m}x_m(n) \\ \dots \\ y_r(n) = c_{r1}\lambda_1(n) + c_{r2}\lambda_2(n) + \dots + c_{rk}\lambda_k(n) \\ \quad \quad \quad + d_{r1}x_1(n) + d_{r2}x_2(n) + \dots + d_{rm}x_m(n) \end{cases} \quad (12-94)$$

表示成矢量方程形式

$$\begin{cases} \text{状态方程} & \lambda_{k \times 1}(n+1) = A_{k \times k} \lambda_{k \times 1}(n) + B_{k \times m} x_{m \times 1}(n) \\ \text{输出方程} & Y_{r \times 1}(n) = C_{r \times k} \lambda_{k \times 1}(n) + D_{r \times m} x_{m \times 1}(n) \end{cases} \quad (12-95)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda(n) &= \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \\ \vdots \\ \lambda_k(n) \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix} \\ Y(n) &= \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ \vdots \\ y_r(n) \end{bmatrix} \quad X(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_m(n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

观察离散系统的状态方程可以看出：($n+1$)时刻的状态变量是 n 时刻状态变量和输入信号的函数。在离散系统中，动态元件是延时单元，因而状态变量常常取延时单元的输出。

与连续时间系统的分析类似，可以画出与图12-5类似的示意结构图，如图12-17所示。图中， $\frac{1}{E}$ 是延时单元，它的输入为 $\lambda(n+1)$ ，输出是 $\lambda(n)$ 。若 A, B, C, D 矩阵是 n 的函数，表明系统是线性时变的，对于线性时不变系统， A, B, C, D 各元素都为常数，不随 n 改变。

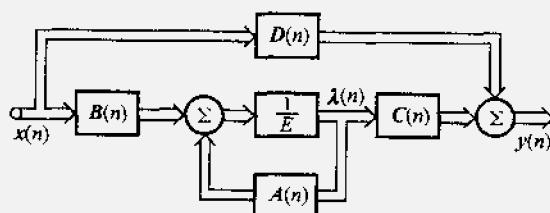


图12-17 离散系统状态变量描述的结构图

建立离散时间系统状态方程的方法也可划分为直接法与间接法两类。而在数字滤波器类型的电子系统中，不存在与连续系统 R , L , C 元件组合相对应的电路形式，离散系统的实际结构就是由流图或框图形式给出的，此时，建立状态方程的方法与连续系统中的间接法对应。但是，对于各种非电领域的实际问题仍需要直接按照研究对象的变化规律，建立状态方程。下面先讨论间接法，然后给出直接法的例子。

(二) 由系统的输入-输出差分方程建立状态方程

对于离散系统通常用下列 k 阶差分方程描述

$$\begin{aligned} & y(n) + a_1y(n-1) + a_2y(n-2) + \cdots + a_{k-1}y[n-(k-1)] \\ & \quad + a_ky(n-k) \\ & = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) + \cdots \\ & \quad + b_{k-1}x[n-(k-1)] + b_kx(n-k) \end{aligned} \quad (12-96)$$

如果表示成算子形式为

$$\begin{aligned} & (E^k + a_1E^{k-1} + a_2E^{k-2} + \cdots + a_{k-1}E + a_k)y(n) \\ & = (b_0E^k + b_1E^{k-1} + b_2E^{k-2} + \cdots + b_{k-1}E + b_k)x(n) \end{aligned} \quad (12-97)$$

传输算子为

$$H(E) = \frac{b_0E^k + b_1E^{k-1} + \cdots + b_{k-1}E + b_k}{E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_{k-1}E + a_k} \quad (12-98)$$

考虑到离散系统用延时单元来实现，因而把式(12-98)改写为式(12-99)的形式

$$H(E) = \frac{b_0 + \frac{b_1}{E} + \frac{b_2}{E^2} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{E^{k-1}} + \frac{b_k}{E^k}}{1 + \frac{a_1}{E} + \frac{a_2}{E^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{E^{k-1}} + \frac{a_k}{E^k}} \quad (12-99)$$

按式(12-99)可以画出其流图形式如图 12-18 所示。

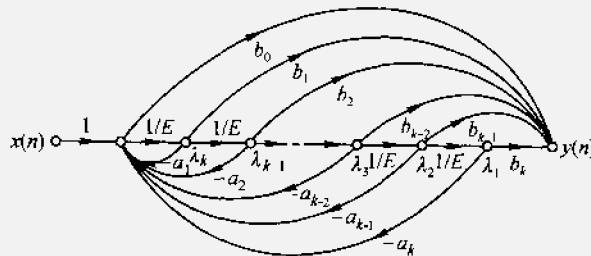


图 12-18 式(12-99)的流图表示

选延时单元输出作为状态变量，如图 12-18 中所标注的，则有

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = \lambda_2(n) \\ \lambda_2(n+1) = \lambda_3(n) \\ \cdots \\ \lambda_{k-1}(n+1) = \lambda_k(n) \\ \lambda_k(n+1) = -a_k\lambda_1(n) - a_{k-1}\lambda_2(n) - \cdots \\ \quad - a_2\lambda_{k-1}(n) - a_1\lambda_k(n) + x(n) \end{cases}$$

$$y(n) = b_k\lambda_1(n) + b_{k-1}\lambda_2(n) + \cdots + b_2\lambda_{k-1}(n) + b_1\lambda_k(n)$$

$$+ b_0[-a_k\lambda_1(n) - a_{k-1}\lambda_2(n) - \cdots - a_2\lambda_{k-1}(n)$$

$$- a_1\lambda_k(n) + x(n)]$$

$$= (b_k - a_kb_0)\lambda_1(n) + (b_{k-1} - a_{k-1}b_0)\lambda_2(n) + \cdots$$

$$+ (b_2 - a_2b_0)\lambda_{k-1}(n) + (b_1 - a_1b_0)\lambda_k(n) + b_0x(n)$$
(12-100)

表示成矢量方程形式为

$$\begin{cases} \lambda(n+1) = A\lambda(n) + Bx(n) \\ y(n) = C\lambda(n) + Dx(n) \end{cases}$$
(12-101)

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [(b_k - a_kb_0), (b_{k-1} - a_{k-1}b_0), \dots, (b_2 - a_2b_0), (b_1 - a_1b_0)]$$

$$D = b_0$$

由此可见，根据离散系统的传输算子来列写系统的状态方程其步骤和结果与连续系统完全一样，只不过用延时单元来代替连续系统中的积分器。所以对离散系统其他形式的状态变量选择可以如连续系统采用的方法一样来做。在12.2节第(四)部分讨论的将传输算子表达式(或系统函数)分解建立状态方程的方法同样适用于离散时间系统。而A矩阵为约当阵的形式为最普遍和最重要的状态方程形式，对同一系统而言，不同形式的A矩阵都是相似的。这些结论对于连续与离散系统具有同样的重要意义。

(三) 由给定系统的方框图或流图建立状态方程

给定离散系统的方框图或流图，很容易建立系统的状态方程，只要取延时单元的输出作为状态变量即可，这里列举有两个输入和两个输出的例子以作说明。

例 12-11 给定离散系统的方框图或流图如图 12-19 所示, 列出系统的状态方程。

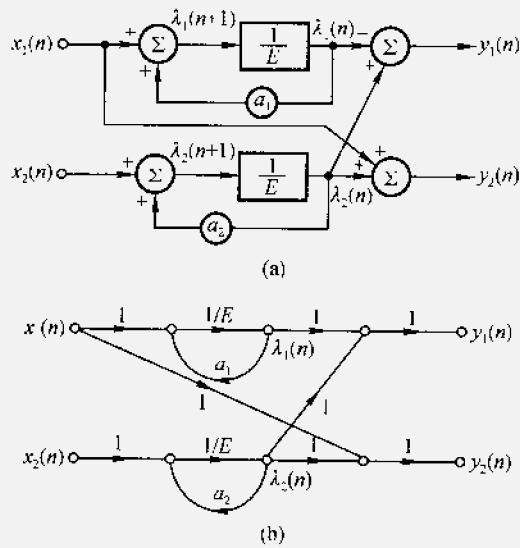


图 12-19 例 12-11 的系统

解 由方框图, 其中有两个延时单元, 因而可以设置两个状态变量, 分别为 $\lambda_1(n)$ 和 $\lambda_2(n)$, 这样即可写出状态方程与输出方程为:

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = a_1\lambda_1(n) + x_1(n) \\ \lambda_2(n+1) = a_2\lambda_2(n) + x_2(n) \\ y_1(n) = \lambda_1(n) + \lambda_2(n) \\ y_2(n) = \lambda_2(n) + x_1(n) \end{cases} \quad (12-102)$$

表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad (12-103)$$

本例中, 矩阵 A 为对角形式, 这就是无重根情况下的约当阵, 若对该系统导出其他形式的状态方程, 其 A 矩阵都应与此对角阵相似。

从以上有关连续系统和离散系统状态方程的分析可以看出, 作为状态方程与输出方程, 它们在形式上是相同的, 这就是由输入量、输出量、状态变量以及联系它们之间关系的 A , B , C , D 矩阵所构成, 即对连续系统状态方程和输出方程形式为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = A\lambda(t) + Be(t) \\ r(t) = C\lambda(t) + De(t) \end{cases} \quad (12-104)$$

对离散系统状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \lambda(n+1) = A\lambda(n) + Bx(n) \\ y(n) = C\lambda(n) + Dx(n) \end{cases} \quad (12-105)$$

(四) 由研究对象的运动规律直接建立状态方程

下面举出由研究对象的运动规律直接建立状态方程的实例。

例 12-12 某地区人口增长的简化动态模型

首先把待研究地区的人口按年龄段分为若干个组，以序号 i 表示第 i 组， $i=0, 1, 2, \dots, k-1$ ，共有 k 组。以 n 表示时间序号，时间周期按年计算。

设 $\lambda_i(n)$ 表示第 n 个时间周期内(n 年)第 i 组的人口数量， $\lambda_0(n)$ 和 $\lambda_{k-1}(n)$ 分别表示第 n 年的最小与最大年龄组人口数。

设 β_i 为存活系数，表示 $\lambda_{i+1}(n+1)$ 与 $\lambda_i(n)$ 之比，显然与人口存活情况有关，于是可建立如下关系式

$$\lambda_{i+1}(n+1) = \beta_i \lambda_i(n) \quad (12-106)$$

但是，对于最小年龄组上式不成立， $\lambda_0(n)$ 的数量变动取决于各年龄组生育的综合结果，设 α_i 为生育系数，可以建立如下方程

$$\begin{aligned} \lambda_0(n+1) &= \alpha_0 \lambda_0(n) + \alpha_1 \lambda_1(n) + \alpha_2 \lambda_2(n) \\ &\quad + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1}(n) \end{aligned} \quad (12-107)$$

综合上述分析，读者容易列出完整的状态方程式，此状态方程为 k 阶。

注意到在此方程式中没有激励信号，在给定起始条件后即可求解，结果中只包含零输入响应部分。为使上述分析付诸实际应用，需要根据该地区的历史状况和当前与未来的生态环境、社会环境以及生育习俗等多种因素正确选择 α, β 系数。利用此方程可以粗略预测该地区人口发展状况。人为调节相应的系数可以适当控制人口增长速度。

例 12-13 简单的宏观经济模型。

1971 年美国麻省理工学院(MIT)平杜克(R.S.Pindyck)在他的博士论文中提出了一种以状态方程描述的宏观经济模型，用来分析美国经济发展的动态特性，求解结果与实测参数比较接近。

这里简要介绍建立此模型的一些考虑，帮助我们初步认识如何从研究对象的变化规律建立状态方程。

下面给出一个简化的模型，共有六个状态变量，一个激励信号。

考虑以下四个经济变量

C : 货物及服务的消费支出

P : 货物及服务的价格水平

W : 工资水平

M : 货币供应

以 $n=0, 1, 2, \dots$ 整数序号表示时间变量, 时间间隔为一个季度(三个月), $n=0$ 为待研究时段的起点。

从经济学的各种规律和该地区或国家的实际状况可以给出描述以上四个变量相互关系的一组方程式如下:

$$C(n) = \alpha_1 C(n-1) + \alpha_2 P(n-1) + \alpha_3 W(n-1) + \alpha_4 W(n-2) \quad (12-108)$$

$$P(n) = \beta_1 P(n-1) + \beta_2 W(n-1) + \beta_3 W(n-2) + \beta_4 M(n-1) \quad (12-109)$$

$$W(n) = \gamma_1 P(n-3) + \gamma_2 C(n-1) \quad (12-110)$$

式中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_1$ 和 γ_2 都是常数参量, 假定它们不随 n 改变。

在式(12-109)中, 当前的价格水平 $P(n)$ 取决于前一季度的价格水平 $P(n-1)$ 和过去的工资水平 $W(n-1)$ 、 $W(n-2)$ 以及前一季度的总货币供应 $M(n-1)$, 这是因为游资愈多价格愈高。对于式(12-108)也可作类似的说明。而在式(12-110)中, 当前的工资水平 $W(n)$ 取决于九个月前的物价水平, 间隔时间较长是由于劳资协商调整工作需要一定的延时; 此外还受上一季度消费水平的影响。

选择 $C(n), P(n), W(n), W(n-1), P(n-1)$ 和 $P(n-2)$ 作为状态变量, 分别以 $\lambda_1(n)$ 至 $\lambda_6(n)$ 表示, 于是有

$$\lambda(n) = \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \\ \lambda_3(n) \\ \lambda_4(n) \\ \lambda_5(n) \\ \lambda_6(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(n) \\ P(n) \\ W(n) \\ W(n-1) \\ P(n-1) \\ P(n-2) \end{bmatrix} \quad (12-111)$$

而货币供应 $M(n)$ 由政府政策控制, 作为激励信号

$$X(n) = M(n)$$

至此, 可以写出状态方程如下

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \\ \lambda_3(n) \\ \lambda_4(n) \\ \lambda_5(n) \\ \lambda_6(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n-1) \\ \lambda_2(n-1) \\ \lambda_3(n-1) \\ \lambda_4(n-1) \\ \lambda_5(n-1) \\ \lambda_6(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(n-1)$$
(12-112)

也可写作状态方程的一般形式

$$\lambda(n) = A\lambda(n-1) + Bx(n-1) \quad (12-113)$$

由于此模型考虑的经济变量过于粗略，平杜克进一步给出了考虑较全面的模型，这时，除前述三个经济变量 C, P, W 之外，又引入了七个经济变量，共考虑十个变量的运动规律，增加的七个变量如下：

INR ：非住宅投资

IR ：住宅投资

IIN ：商业库存变动

R ：短期利率

RL ：长期利率

UR ：失业率

YD ：纳税后的可支配收入

此外，激励信号除货币供应 M 之外，又增加了两个信号，它们是：

G ：政府开支

TO ：附加税收

仿照前面的方法，列出全部十个经济变量和三个激励信号的相互约束方程，平杜克建立了一种由 28 个状态变量和三个激励信号控制组成的状态方程。同时，还建立了此系统的输出方程，输出信号是国民生产总值 GNP ， GNP 由四个状态变量和一个激励信号之和构成，表示式为

$$GNP = C + INR + IR + IIN + G \quad (12-114)$$

也即， GNP 由消费、非住宅与住宅投资、库存以及政府开支之和决定。

在本例分析中，所建立的状态方程都是线性时不变的，这与客观事物的实际规律尚有不少差距，因此，利用以上方法严格计算经济发展各变量的数据难以得到满意的预期结果，但是，作为定性分析，考察如何控制经济发展变化则具有一定的参考价值。

12.5 离散时间系统状态方程的求解

离散系统状态方程的求解和连续系统的求解方法类似，包括时域和变换域两种方法，下面分别介绍。

(一) 矢量差分方程的时域求解

离散系统的状态方程表示为

$$\lambda(n+1) = A\lambda(n) + Bx(n) \quad (12-115)$$

此式为一阶差分方程，可以应用迭代法求解。

设给定系统的起始状态为：在 $n=n_0$ ，有 $\lambda(n_0)$ ，则按式(12-115)有

$$\lambda(n_0+1) = A\lambda(n_0) + Bx(n_0)$$

以下用迭代法，求 $(n_0+2), (n_0+3), \dots, n$ 时刻的值：

$$\begin{aligned} \lambda(n_0+1) &= A\lambda(n_0) + Bx(n_0) \\ \lambda(n_0+2) &= A\lambda(n_0+1) + Bx(n_0+1) \\ &= A^2\lambda(n_0) + ABx(n_0) + Bx(n_0+1) \\ \lambda(n_0+3) &= A\lambda(n_0+2) + Bx(n_0+2) \\ &= A^3\lambda(n_0) + A^2Bx(n_0) + ABx(n_0+1) + Bx(n_0+2) \\ &\dots \end{aligned}$$

对于任意 n 值，当 $n > n_0$ 可归结为

$$\begin{aligned} \lambda(n) &= A\lambda(n-1) + Bx(n-1) \\ &= A^{n-n_0}\lambda(n_0) + A^{n-n_0-1}Bx(n_0) \\ &\quad + A^{n-n_0-2}Bx(n_0+1) + \dots + Bx(n-1) \\ &= A^{n-n_0}\lambda(n_0) + \sum_{i=n_0}^{n-1} A^{n-1-i}Bx(i) \end{aligned} \quad (12-116)$$

注意到在上式中，当 $n = n_0$ 时第二项不存在，此时的结果只由第一项决定，即 $\lambda(n_0)$ 本身，只有当 $n > n_0$ 时，式(12-116)才可给出完整的 $\lambda(n)$ 之结果。

如果起始时刻选 $n_0=0$ ，并将上述对 n 值的限制以阶跃信号的形式写入表达式，于是有

$$\lambda(n) = \underbrace{A^n\lambda(0)u(n)}_{\text{零输入解}} + \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i}Bx(i) \right] u(n-1)}_{\text{零状态解}} \quad (12-117)$$

还可解得输出为

$$y(n) = C\lambda(n) + Dx(n)$$

$$= \underbrace{\mathbf{C} \mathbf{A}^n \lambda(0) u(n)}_{\text{零输入解}} + \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1-i} \mathbf{B} x(i) \right] u(n-1) + \mathbf{D} x(n) u(n)}_{\text{零状态解}} \quad (12-118)$$

式(12-117)和连续系统状态方程的情况相似，它由两部分组成：一是起始状态经转移后在 n 时刻造成的分量；另一是对 $(n-1)$ 时刻以前的输入量的响应。它们分别称为零输入解和零状态解。其中 \mathbf{A}^n 称为离散系统的状态转移矩阵，它与连续系统中的 e^{At} 含义类似，也用符号 Φ 表示，写作 $\Phi(n)$

$$\Phi(n) = \mathbf{A}^n \quad (12-119)$$

它决定了系统的自由运动情况。

由式(12-118)可以看出，零状态解中，若令 $x(n) = \delta(n)$ ，则系统的单位脉冲响应为

$$h(n) = \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} u(n-1) + \mathbf{D} \delta(n) \quad (12-120)$$

可见，零状态解正是 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的卷积和。也即，式(12-118)的第二项也可写作 $h(n) * x(n)$ 。

(二) \mathbf{A}^n 的计算

与连续系统的情况类似，离散系统状态方程时域求解的关键步骤仍然是计算状态转移矩阵 $\Phi(n)$ ，即 \mathbf{A}^n 。

利用凯莱-哈密顿定理，为与前面符号统一，以“ j ”替换幂次“ n ”， j 为任意正整数，有

$$\mathbf{A}^j = c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}^2 + \cdots + c_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} \quad (j \geq k) \quad (12-121)$$

分别用 \mathbf{A} 的特征值代入式(12-121)，解联立方程式即可求出要求的系数 c_0, c_1, \dots, c_{k-1} 。

若 \mathbf{A} 的特征根为重根的情况，例如 α_1 为 \mathbf{A} 的 m 阶重根，则对重根部分计算为

$$\begin{cases} \alpha^j = c_0 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_1^2 + \cdots + c_{k-1} \alpha_1^{k-1} \\ \frac{d}{d\alpha} \alpha^j \Big|_{\alpha=\alpha_1} = j \alpha_1^{j-1} = c_1 + 2c_2 \alpha_1 + \cdots + (k-1)c_{k-1} \alpha_1^{k-2} \\ \frac{d^2}{d\alpha^2} \alpha^j \Big|_{\alpha=\alpha_1} = j(j-1) \alpha_1^{j-2} = 2c_2 + 3 \times 2c_3 \alpha_1 + \cdots \\ \quad + (k-1)(k-2)c_{k-1} \alpha_1^{k-3} \\ \dots \\ \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \alpha^j \Big|_{\alpha=\alpha_1} = \frac{j!}{[j-(m-1)]!} \alpha_1^{j-(m-1)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &= (m-1)! c_{m-1} + m! c_m \alpha_1 + \frac{(m+1)!}{2!} c_{m+1} \alpha_1^2 \\
 &\quad + \cdots + \frac{(k-1)!}{(k-m)!} c_{k-1} \alpha_1^{k-m}
 \end{aligned} \tag{12-122}$$

例 12-14 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, 求 \mathbf{A}^n 。

解 求 \mathbf{A} 的特征值

$$\begin{aligned}
 |\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \alpha - 1 & 1 \\ -1 & \alpha - 3 \end{vmatrix} \\
 &= (\alpha - 1)(\alpha - 3) + 1 = (\alpha - 2)^2 = 0
 \end{aligned}$$

因而 $\alpha = 2$ 为二阶重根, 按式(12-122)有

$$\begin{cases} 2^n = c_0 + 2c_1 \\ n2^{n-1} = c_1 \end{cases}$$

求得

$$\begin{cases} c_0 = 2^n(1-n) \\ c_1 = 2^{n-1} \cdot n \end{cases}$$

由此得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^n &= 2^n(1-n) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (2^{n-1} \cdot n) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= 2^n \begin{bmatrix} 1 - \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & 1 + \frac{n}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

下面讨论用 z 变换的求解方法, 然后再给出离散时间系统状态方程求解的计算实例。

(三) 离散系统状态方程的 z 变换解

和连续系统的拉氏变换方法类似, 离散系统的 z 变换方法也使状态方程的求解显得容易一些。

由离散系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \lambda(n+1) = A\lambda(n) + Bx(n) \\ y(n) = C\lambda(n) + Dx(n) \end{cases} \tag{12-123}$$

两边取 z 变换

$$\begin{cases} z\lambda(z) - z\lambda(0) = A\lambda(z) + BX(z) \\ Y(z) = C\lambda(z) + DX(z) \end{cases} \tag{12-124}$$

整理得到

$$\begin{cases} \mathbf{A}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \lambda(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}X(z) \\ Y(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \lambda(0) + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}X(z) + \mathbf{D}X(z) \end{cases} \quad (12-125)$$

取其逆变换即得时域表示式

$$\begin{cases} \lambda(n) = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z] \lambda(0) \\ \quad + \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}] * \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] \\ y(n) = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z] \lambda(0) \\ \quad + \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] * \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] \end{cases} \quad (12-126)$$

式(12-126)与式(12-117)和(12-118)相比较可以得出, 状态转移矩阵即为

$$\mathbf{A}^n = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z] = \mathcal{Z}^{-1}[(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1}] \quad (12-127)$$

或

$$\mathbf{A}^{n-1} u(n-1) = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (12-128)$$

注意式(12-128)虽与前面式(12-59)类似, 但形式上稍有不同。

例 12-15 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, 求 \mathbf{A}^n 。

解 按式(12-127)有

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A}]^{-1} = \mathcal{Z}^{-1} \left[\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}z^{-1} & 0 \\ -\frac{1}{4}z^{-1} & 1 - \frac{1}{4}z^{-1} \end{bmatrix} \right]^{-1} \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{4}z^{-1} & 0 \\ \frac{1}{4}z^{-1} & 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} & 0 \\ \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} & \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{bmatrix} \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

由式(12-125)的 $\mathbf{Y}(z)$ 中零状态分量可以得出系统的转移函数为

$$H(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (12-129)$$

如果对于多输入、多输出的情况，类似于式(12-89)有

$$\mathbf{H}_{k \times m}(z) = \mathbf{C}_{r \times k}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})_{k \times k}^{-1} \mathbf{B}_{k \times m} + \mathbf{D}_{r \times m} \quad (12-130)$$

转移函数阵中的每一元素的物理意义与式(12-90)中每一元素的物理意义相同。

(四) 用状态变量法分析离散系统举例

例 12-16 图 12-20 所示离散系统具有两个输入和一个输出，求系统对 $x_1(n) = \delta(n), x_2(n) = u(n)$ 的响应，设该系统起始是静止的。

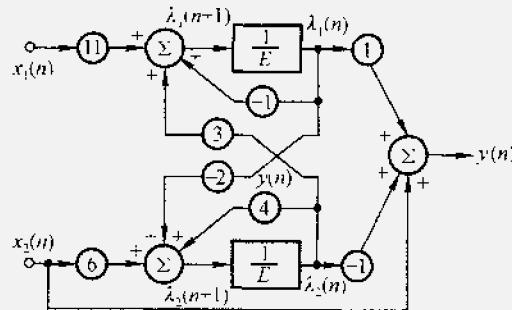


图 12-20 例 12-16 的系统

解 (1) 列写系统的状态方程和输出方程

取延时单元输出为状态变量，如图 12-20 所标的 $\lambda_1(n)$ 和 $\lambda_2(n)$ ，则：

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(n+1) = -\lambda_1(n) + 3\lambda_2(n) + 11x_1(n) \\ \lambda_2(n+1) = -2\lambda_1(n) + 4\lambda_2(n) + 6x_2(n) \\ y(n) = \lambda_1(n) - \lambda_2(n) + x_2(n) \end{array} \right. \quad (12-131)$$

由此得：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \ -1] \quad \mathbf{D} = [0, 1]$$

(2) 求状态转移矩阵 $\Phi(n) = \mathbf{A}^n$

\mathbf{A} 的特征值

$$\begin{aligned} a\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \alpha + 1 & -3 \\ 2 & \alpha - 4 \end{vmatrix} = (\alpha + 1)(\alpha - 4) + 6 \\ &= (\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0 \end{aligned}$$

求得特征值为

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

根据式(12-121)求 c_0, c_1

$$\begin{cases} 1^n = c_0 + 1 \times c_1 \\ 2^n = c_0 + 2c_1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c_0 = 2 - 2^n \\ c_1 = 2^n - 1 \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{A} = (2 - 2^n) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (2^n - 1) \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 - 2^{n+1} & 3 \cdot 2^n - 3 \\ -2 - 2^{n+1} & 3 \cdot 2^n - 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12-132)$$

因而有

$$\mathbf{A}^{n-1-i} = \begin{bmatrix} 3 - 2^{n-i} & 3 \cdot 2^{n-1-i} - 3 \\ -2 - 2^{n-i} & 3 \cdot 2^{n-1-i} - 2 \end{bmatrix} \quad (12-133)$$

(3) 按式(12-117)求 $\lambda_1(n)$ 和 $\lambda_2(n)$

$$\begin{aligned} \lambda(n) &= \left[\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-i} \mathbf{B} \mathbf{x}(i) \right] u(n-1) \\ &= \left[\sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 3 - 2^{n-i} & 3 \cdot 2^{n-1-i} - 3 \\ -2 - 2^{n-i} & 3 \cdot 2^{n-1-i} - 2 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(i) \\ u(i) \end{bmatrix} \right] u(n-1) \end{aligned}$$

经矩阵相乘并求卷积和得到

$$\lambda(n) = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2^n - 18 \cdot n + 15 \\ 7 \cdot 2^n - 12 \cdot n + 4 \end{bmatrix} u(n-1) \quad (12-134)$$

(4) 按式(12-118)求输出响应 $y(n)$

$$\begin{aligned} y(n) &= [1, -1] \begin{bmatrix} 7 \cdot 2^n - 18 \cdot n + 15 \\ 7 \cdot 2^n - 12 \cdot n + 4 \end{bmatrix} u(n-1) + [0, 1] \begin{bmatrix} \delta(n) \\ u(n) \end{bmatrix} \\ &= [(7 \cdot 2^n - 18 \cdot n + 15) - (7 \cdot 2^n - 12 \cdot n + 4)] u(n-1) + u(n) \\ &= \delta(n) + (12 - 6n) u(n-1) \end{aligned} \quad (12-135)$$

至此, 本题已求得全部结果, 下面改用 z 变换方法求解, 当然应当得到同样答案。

(5) 用 z 变换法先求 $\mathbf{A}(z)$, 由式(12-125)

$$\mathbf{A}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{X}(z)$$

$$= \frac{1}{(z+1)(z-4)+6} \begin{bmatrix} z-4 & 3 \\ -z & z+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} \left[\begin{array}{c} 11(z-4) + \frac{18z}{(z-1)} \\ -22 + \frac{6z(z+1)}{(z-1)} \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{c} \frac{33}{(z-1)} - \frac{22}{(z-2)} + \frac{36}{(z-2)} - \frac{18}{(z-1)^2} - \frac{36}{(z-1)} \\ \frac{22}{(z-1)} - \frac{22}{(z-2)} + \frac{36}{(z-2)} - \frac{12}{(z-1)^2} - \frac{30}{(z-1)} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

取逆变换后得到

$$\lambda(n) = \begin{bmatrix} 15u(n-1) + 7 \cdot 2^n u(n-1) - 18nu(n-1) \\ 4u(n-1) + 7 \cdot 2^n u(n-1) - 12nu(n-1) \end{bmatrix} \quad (12-136)$$

可见，与式(12-134)结果完全一致，还可求得 $y(n)$ 也有相同结果，此处略去。

12.6 状态矢量的线性变换

从状态变量的选择看出，同一系统可以选择不同的状态变量，但所选每种状态变量相互之间存在着变换关系。它可以看作同一系统在状态空间中取了不同的基底，而状态矢量用不同基底表示时具有不同的形式，因此，对同一系统而言，以各种形式表示的状态矢量之间存在着线性变换关系。这种线性变换，对于简化系统分析是很有用的。

(一) 在线性变换下状态方程的特性

按线性空间不同基底的变换关系，设一组状态变量 λ 与另一组状态变量 γ 之间有

$$\begin{cases} \gamma_1 = p_{11}\lambda_1 + p_{12}\lambda_2 + \cdots + p_{1k}\lambda_k \\ \gamma_2 = p_{21}\lambda_1 + p_{22}\lambda_2 + \cdots + p_{2k}\lambda_k \\ \cdots \\ \gamma_k = p_{k1}\lambda_1 + p_{k2}\lambda_2 + \cdots + p_{kk}\lambda_k \end{cases} \quad (12-137)$$

表示成矢量形式即为

$$\gamma = P\lambda \quad (12-138)$$

其中 γ 和 λ 为列矢量

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

式(12-137)说明状态矢量 λ 经过线性变换成为新的矢量 γ 。如果 \mathbf{P} 的逆 \mathbf{P}^{-1} 存在，则有

$$\lambda = \mathbf{P}^{-1}\gamma \quad (12-139)$$

λ 经线性变换变成 γ ，则原状态方程也作相应的改变。设原基底下状态方程表示为

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = A\lambda(t) + Be(t)$$

经(12-138)变换后

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{d}{dt}\gamma(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\gamma(t) + \mathbf{B}e(t)$$

或

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma(t) = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\gamma(t) + \mathbf{P}\mathbf{B}e(t) \\ \quad = \hat{\mathbf{A}}\gamma(t) + \hat{\mathbf{B}}e(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\lambda(t) + \mathbf{D}e(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\gamma(t) + \mathbf{D}e(t) \\ \quad = \hat{\mathbf{C}}\gamma(t) + \hat{\mathbf{D}}e(t) \end{cases} \quad (12-140)$$

因而在新的状态变量下，状态方程与输出方程中的系数矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$ ， $\hat{\mathbf{B}}$ ， $\hat{\mathbf{C}}$ ， $\hat{\mathbf{D}}$ 与原方程的 \mathbf{A} ， \mathbf{B} ， \mathbf{C} ， \mathbf{D} 之间满足如下关系

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} \\ \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} \\ \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \end{cases} \quad (12-141)$$

例 12-17 给定系统的状态方程为

$$\dot{\lambda}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \lambda(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e(t) \quad (12-142)$$

求在式(12-143)线性变换下的新的状态方程。

$$\begin{cases} \gamma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \quad (12-143)$$

解 给定的变换矩阵为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

由式(12-141)求出

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

这样在给定变换下新的状态方程为

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \gamma(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e(t) \quad (12-144)$$

由式(12-141)的 $\hat{\mathbf{A}}$ 可以看出, 实际上 $\hat{\mathbf{A}}$ 是 \mathbf{A} 的相似变换, 由于相似变换不改变 \mathbf{A} 的特征值, 因而作为表征系统特性的特征值不因状态变量的不同选择而改变。

(二) 系统转移函数阵在线性变换下是不变的

从本质上讲状态方程是描述系统的一种方法, 而系统转移函数是描述系统的另一种方法。当状态矢量用不同基底表示时, 并不影响系统的物理本质, 因此对同一系统不同状态变量的选择, 系统转移函数应是不变的, 现证明如下:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}(s) &= \hat{\mathbf{C}}(sI - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{CP}^{-1}(sI - \mathbf{PAP}^{-1})^{-1} \mathbf{PB} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}[(sI - \mathbf{PAP}^{-1})\mathbf{P}]^{-1} \mathbf{PB} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}[\mathbf{P}^{-1}(sI - \mathbf{PAP}^{-1})\mathbf{P}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}[s\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{PAP}^{-1}\mathbf{P}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{H}(s) \end{aligned} \quad (12-145)$$

上面以连续系统为例说明状态矢量线性变换的特性, 结论同样适用于离散系统。

(三) \mathbf{A} 矩阵的对角化

在线性变换中, 使 \mathbf{A} 矩阵对角化是很有用的变换。由图12-12和式(12-35)知, \mathbf{A} 矩阵的对角化, 说明系统变换为并联结构形式。这种结构形式使得每一状态变量之间互不影响, 因而可以独立研究系统参数对状态变量的影响。

在线性代数中已经分析了 \mathbf{A} 矩阵的对角化, 实际上就是以 \mathbf{A} 矩阵的特征矢量作为基底的变换。因而把 \mathbf{A} 矩阵对角化所需要的线性变换就是寻求 \mathbf{A} 矩阵的特征矢量, 以此构造变换阵 \mathbf{P} , 即可把状态变量相互之间分离开。

例 12-18 把图 12-21 所示系统的 A 矩阵对角化。

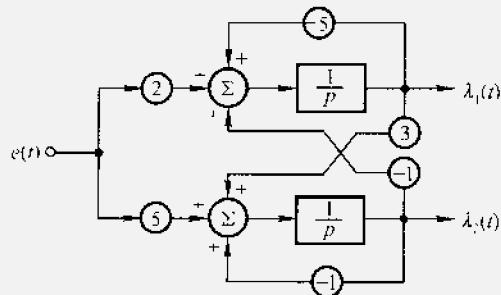


图 12-21 例 12-18 的系统

解 这个系统状态变量相互之间是有关系的，列出系统的状态方程为

$$\dot{\lambda}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \lambda(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} e(t) \quad (12-146)$$

把 A 矩阵对角化，即寻求 A 的特征矢量，为此先求 A 的特征值

$$\begin{aligned} \alpha I - A &= \begin{vmatrix} \alpha + 5 & 1 \\ -3 & \alpha + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha + 5)(\alpha + 1) + 3 = (\alpha + 2)(\alpha + 4) = 0 \end{aligned}$$

求得特征值为

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = -4 \end{cases}$$

按特征矢量 ξ 的定义 $A\xi = \alpha\xi$ ，即可由此求特征矢量 ξ

令属于 $\alpha_1 = -2$ 的特征矢量为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix} -5 + 2 & 1 \\ -3 & -1 + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = 0$$

或

$$\begin{cases} -3c_{11} - c_{21} = 0 \\ 3c_{11} + c_{21} = 0 \end{cases}$$

得

$$c_{21} = -3c_{11}$$

这里，属于 $\alpha = -2$ 的特征矢量是多解的，其中之一可表示为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

同样，令属于 $\alpha_2 = -4$ 的特征矢量为

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix} -5+4 & -1 \\ 3 & -1+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} = 0$$

或

$$\begin{cases} -c_{12} - c_{22} = 0 \\ 3c_{12} + 3c_{22} = 0 \end{cases}$$

得

$$c_{22} = -c_{12}$$

属于 $\alpha = -4$ 的一个特征矢量为

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

由此构成的变换阵^①

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

所以有

$$\begin{aligned} \hat{A} &= PAP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \\ \hat{B} &= PB = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 11/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此变换后的状态方程为

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \gamma(t) + \begin{bmatrix} -7/2 \\ 11/2 \end{bmatrix} e(t) \quad (12-147)$$

式(12-147)对应的结构图如图 12-22 所示，可见 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 互不影响。如果表示成联立方程的形式即为两个独立方程

^① 在线性代数中相似变换形如 $\hat{A} = C^{-1}AC$ ， \hat{A} 为对角阵，则 C 是由特征矢量构成的变换阵，而这里 $\hat{A} = PAP^{-1}$ ，因而 $P^{-1} = C$ 。

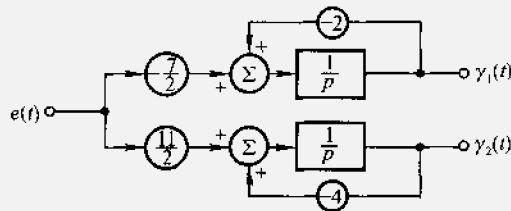


图 12-22 式(12-147)结构图

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma_1(t) = -2\gamma_1(t) - \frac{7}{2}e(t) \\ \frac{d}{dt}\gamma_2(t) = -4\gamma_2(t) + \frac{11}{2}e(t) \end{cases} \quad (12-148)$$

显然方程(12-148)的解为

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = \gamma_1(0_-)e^{-2t} - \frac{7}{2}e^{-2t} * e(t) \\ \gamma_2(t) = \gamma_2(0_-)e^{-4t} + \frac{11}{2}e^{-4t} * e(t) \end{cases} \quad (12-149)$$

其中初始条件 $\gamma_1(0_-)$ 和 $\gamma_2(0_-)$ 由下式求出

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(0_-) \\ \gamma_2(0_-) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_2(0_-) \end{bmatrix}$$

(四) 由状态方程判断系统的稳定性

用系统转移函数来描述系统时，系统的稳定性由转移函数的分母特征根位置来定出。如果给定为状态方程，则由 A 矩阵的对角化分析可知， A 矩阵对角化后其对角元素是 A 矩阵的特征值，而且从式(12-149)的解中可以看出：特征值决定了系统的自由运动情况。因此可以根据 A 矩阵的特征值来判断系统的稳定情况。

(1) 连续系统

判断连续系统是否稳定，只要定出 A 的特征值 $\text{Re}[\alpha_i]$ 是否小于零，即对稳定系统 $\text{Re}[\alpha_i] < 0$ 。这需要解方程

$$|\alpha I - A| = 0 \quad (12-150)$$

而从式(12-84)知，转移函数分母的特征多项式为 $|sI - A|$ ，令此多项式等于 0 给出

$$|sI - A| = 0 \quad (12-151)$$

方程(12-151)的根在 s 平面上的位置决定了系统的稳定情况，因而这与求解方程(12-150)的特征根来判定系统稳定与否两者是一致的。有时解方程(12-150)是很烦琐的，但只要知道它的根 $\text{Re}[\alpha_i] < 0$ ，即落在 s 平面的左半平面，

即可确定出系统的稳定情况。

例 12-19 求 K 在什么范围内图 12-23 系统是稳定的?

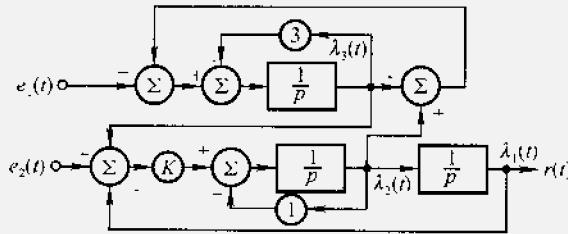


图 12-23 例 12-19 的系统

解 1) 列出系统的状态方程

$$\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_2(t)$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_2(t) = -K\lambda_1(t) - \lambda_2(t) - K\lambda_3(t) + Ke_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = -\lambda_2(t) - 4\lambda_3(t) + e_1(t) \end{cases} \quad (12-152)$$

或

$$\dot{\lambda}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -K & -1 & -K \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \lambda(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

2) 系统的特征多项式

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ K & s+1 & K \\ 0 & +1 & s+4 \end{vmatrix} = s^3 + 5s^2 + 4s + 4K = 0 \quad (12-153)$$

3) 利用罗斯-霍尔维兹准则(参看第十一章习题 11-26)可以知道, 为保证上列三次多项式的根都落于 s 左半平面, 必须满足

$$\begin{cases} 4K > 0 \\ 20 > 4K \end{cases}$$

解得

$$0 < K < 5 \quad (12-154)$$

即 K 值在此范围内系统稳定。

显然, 对于这类问题, 若状态方程的 A 矩阵以对角阵形式给出, 稳定性的分析将十分简单。由此可以看出 A 矩阵对角化具有重要意义。

(2) 离散系统

对于离散系统要求系统稳定, 则要求 A 矩阵的特征值 $|a_i| < 1$, 即系统的

特征根位于单位圆内 和连续系统相似， A 矩阵的特征值和离散系统转移函数特征多项式的根位置相同，所以它们的判定准则也相同。

例 12-20 给定图 12-24 系统，已知 $a = -1$, $-1 < b < 1$, 问此系统是否稳定？

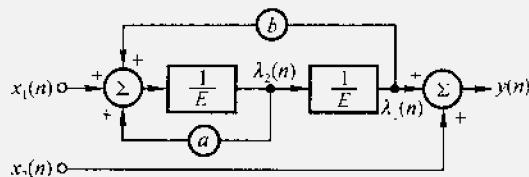


图 12-24 例 12-20 的系统

解 (1) 列出系统的状态方程

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = \lambda_2(n) \\ \lambda_2(n+1) = b\lambda_1(n) + a\lambda_2(n) + x_1(n) \end{cases} \quad (12-155)$$

或

$$\lambda(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \lambda(n) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

(2) 系统的特征多项式

$$\begin{aligned} D(z) = |zI - A| &= \begin{bmatrix} z & -1 \\ -b & z-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -b & z+1 \end{bmatrix} \\ &= z^2 + z - b = 0 \end{aligned} \quad (12-156)$$

系统的特征根为

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b} \quad (12-157)$$

(3) 判断 b 值范围

为了使系统稳定必须有 $|\alpha_{1,2}| < 1$ ，即特征根落在单位圆内。按给定的 b 值范围 $-1 < b < 1$ 可分为两种情况

第一种情况：当 $-1 < b < -\frac{1}{4}$ 时， α_1 和 α_2 为复根，为保证系统稳定，两根的模必须小于 1，即

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4b}\right)^2} < 1$$

解得 b 值为： $b < \frac{1}{2}$ ，可以满足上列不等式，因而在复根时，只要 $-1 < b < -\frac{1}{4}$ ，即可保证系统稳定。

第二种情况：当 $-\frac{1}{4} < b < 1$ 时， α_1 和 α_2 为实根，为保证系统稳定，必须有

$$\left| \frac{-1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b} \right| < 1 \quad \text{或} \quad -1 < \frac{-1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b} < 1$$

同时考虑给定 b 值之范围，解得稳定条件为

$$-\frac{1}{4} < b < 0$$

综上所述，在给定的 $-1 < b < 1$ 的范围内，只有满足

$$-1 < b < 0 \quad (12-158)$$

才可保证系统稳定。此时，特征根落于单位圆内。

12.7 系统的可控制性与可观测性

系统的可控制性(controllability)也称为能控制性，简称可控性或能控性。

系统的可观测性(observability)也称为能观测性，简称可观性或能观性。

用状态变量描述系统时，我们将着眼于系统内部各状态变量之变化。外部控制作用期望使系统的状态达到预期目标；通过对系统观测获取之信息可以知道系统的状态，此作用示意如图 12-25。为研究外部对系统控制与观测作用的性能，可从以下两方面来考虑：



图 12-25 对系统的控制与观测

(1) 控制作用是否必然可使系统在有限时间内，从起始状态指引到所要求状态，这就是可控制性问题。

(2) 是否可以做到，通过观测有限时间内的输出量，而识别出系统的起始状态。因为一旦能够根据输出量识别出起始状态，则任一状态也就惟一确定。这就是可观测性问题。

下面先讨论典型实例的可控与可观性，然后再给出严格的定义和性能判据方法。

(一) 从典型实例直观认识可控性与可观性

例 12-21 如果已知系统的状态方程和输出方程如下

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dt} \lambda(t) \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} [\lambda(t)] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ r(t) = [1 \ 1 \ 0] [\lambda(t)] \end{cases} \quad (12-159)$$

试讨论激励信号 $e(t)$ 对各状态变量的控制情况, 以及从输出信号 $r(t)$ 能够了解系统内部状态的情况。

解

可以画出系统的流图如图 12-26 所示。同时写出状态方程与输出方程的各参数矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [1 \ 1 \ 0] & \mathbf{D} &= 0 \end{aligned}$$

由图 12-26 和 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} 参数可以看出, 在本例中, 由于 \mathbf{A} 矩阵为对角阵形式,

各状态变量的作用相互独立, 因而可以逐个分析各 $\lambda_i(t)$ 的可控与可观性能。容易看出, $\lambda_2(t)$ 直接受 $e(t)$ 控制, 而且可从 $r(t)$ 观测到它的变化情况; 而 $\lambda_1(t)$ 不受 $e(t)$ 作用影响, 可从 $r(t)$ 了解到它的输出变化; $\lambda_3(t)$ 的情况则与此相反, 它受 $e(t)$ 的控制, 但不能从 $r(t)$ 观测到其输出。于是可以认为在此系统中 $\lambda_1(t)$ 是可观的, 但不可控; 而 $\lambda_3(t)$ 是可控的, 但不可观; 只有 $\lambda_2(t)$ 是既可控又可观的。

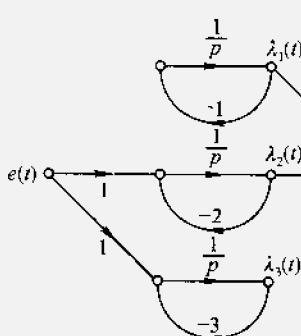


图 12-26 例 12-21 的流图

上述结论不仅可从图 12-26 看出, 也可借助 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} 矩阵参数识别, 即当 \mathbf{A} 为对角阵形式时, \mathbf{B} 中的 0 元素对应不可控因素, 而 \mathbf{C} 中的 0 元素对应不可观现象。这一重要规律将在稍后的第(四)部分进一步说明。

例 12-22 在图 12-27 的桥式电路中, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$, $C = 2 \text{ F}$, 激励信号为电压源 $e(t)$, 输出信号 $r(t)$ 取自 $1-1'$ 端。试建立此电路的状态方程, 并讨论它的可控与可观性能。

解

选定状态变量为流过电感 L 的电流 $i_L(t)$ 和电容 C 两端电压 $v_C(t)$ 。根据 KCL 和 KVL 可建立如下方程

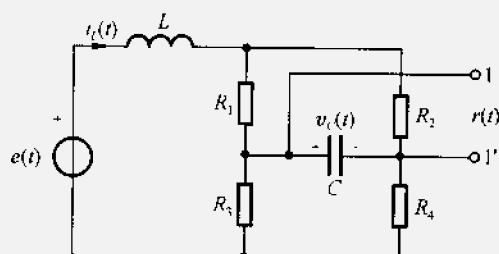


图 12-27 桥式电路

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{dv_C(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \quad (12-160)$$

$$[r(t)] = [0 \ 1] \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

对图 12-27 的电桥直观分析容易看出，在给定参数条件下 ($R_1 = R_2 = R_3 = R_4$) 电桥平衡，因此无论 $e(t)$ 如何改变都不能影响 $v_C(t)$ 的数值，也即 $v_C(t)$ 不可控。此外，无论电流 $i_L(t)$ 如何变化都无法从输出 $r(t)$ 观测有关它的任何信息，因此 $i_L(t)$ 是不可观的。这一结果也可从状态方程与输出方程表达式的参数中看出，因为 A 为对角阵，而相应的 B 和 C 中各有一个零值，刚好对应上述不可控与不可观现象的产生。

(二) 系统可控性定义、可控阵满秩判别法

所谓可控性被定义为：当系统用状态方程描述时，给定系统的任意初始状态，可以找到容许的输入量(即控制矢量)，在有限时间之内把系统的所有状态引向状态空间的原点(即零状态)，如果可以做到这一点，则称系统是完全可控的。如果只有对部分状态变量可以做到这一点，则称系统不完全可控制的。

在上述定义中，如果改成存在容许的输入量，能在有限时间之内把系统从状态空间的原点引向任意的预先指定的状态，这样的问题称为系统的可达性问题。对线性时不变系统可控性与可达性是等同的。

在前面两个实例的讨论中，实际上我们已经看到了可控性的一种判据方法，这就是检查与 A 对角阵对应的 B 矢量中是否含有零元素，稍后还要对此进行研究。现在从上述定义出发导出可控性的另一种判据方法，即“可控阵满秩判别法”。

设连续系统有 k 个状态变量，则可用状态方程

$$\dot{\lambda}_{k \times 1}(t) = A_{k \times k} \lambda_{k \times 1}(t) + B_{k \times 1} e(t)$$

表示，它的解为

$$\lambda(t) = e^{At} \lambda(0_-) + \int_{0_-}^t e^{A(t-\tau)} B e(\tau) d\tau \quad (12-161)$$

如果可以在有限时间间隔 $0 < t < t_1$ 之内通过输入控制量 $e(t)$ 的作用，把任意起始状态 $\lambda(0_-)$ 引向零状态，则只要方程

$$e^{At_1} \lambda(0_-) + \int_{0_-}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B e(\tau) d\tau = 0 \quad (12-162)$$

有解即可满足要求。实际上，这是在给定 $\lambda(0_-)$ 和 A ， B 的条件下寻找可以

控制系统达到零状态的 $e(t)$ 。为了导出判别规律，把式(12-162)改写为

$$\lambda(0_+) = - \int_{0_-}^{t_1} e^{-At} \mathbf{B} e(\tau) d\tau \quad (12-163)$$

考虑到凯莱-哈密顿定理， e^{-At} 可表示为

$$\begin{aligned} e^{-At} &= c_0(\tau) \mathbf{I} + c_1(\tau) \mathbf{A} + c_2(\tau) \mathbf{A}^2 + \cdots + c_{k-1}(\tau) \mathbf{A}^{k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i(\tau) \mathbf{A}^i \end{aligned} \quad (12-164)$$

代入式(12-163)

$$\begin{aligned} \lambda(0_+) &= - \int_{0_-}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} c_i(\tau) \mathbf{A}^i \right) \mathbf{B} e(\tau) d\tau \\ &= - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \int_{0_-}^{t_1} c_i(\tau) e(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (12-165)$$

令

$$w_i(t_1) = \int_{0_-}^{t_1} c_i(\tau) e(\tau) d\tau \quad (12-166)$$

则式(12-165)可以写成

$$\begin{aligned} \lambda(0_+) &= - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} w_i(t_1) \\ &= - (\mathbf{B} + \mathbf{AB} + \cdots + \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}) \begin{bmatrix} w_0(t_1) \\ w_1(t_1) \\ \vdots \\ w_{k-1}(t_1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12-167)$$

注意到 \mathbf{A} 为非奇异矩阵，若系统状态完全可控，也就是给定一组起始状态 $\lambda(0_+)$ ，满足方程(12-167)，则必须有

$$\mathbf{M} = (\mathbf{B} + \mathbf{AB} + \mathbf{A}^2 \mathbf{B} + \cdots + \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}) \quad (12-168)$$

满秩。这就是连续系统完全可控的充要条件。

\mathbf{M} 称为系统的可控性判别矩阵，简称可控阵，在给定系统状态方程时，只要 \mathbf{M} 阵满秩，系统即为完全可控系统。

例 12-23 给定下列两系统：

$$(a) \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \quad (12-169)$$

$$(b) \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \quad (12-170)$$

问这两系统是否都可控?

解 验证系统是否可控只要观察式(12-168)是否满秩。

对(a)系统有

$$\mathbf{M} = (\mathbf{B} + \mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\text{rank}(\mathbf{B} + \mathbf{AB}) = 1$, 因而系统(a)是不完全可控的。

对(b)系统有

$$\mathbf{M} = (\mathbf{B} + \mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以 $\text{rank}(\mathbf{B} + \mathbf{AB}) = 2$, 因而系统(b)是完全可控的。

对于离散时间系统, 可控性的判别方法与连续时间系统完全相同, 也即只要式(12-168) \mathbf{M} 矩阵满秩, 系统即为完全可控系统。此处略去证明, 给出计算例子。

例 12-24 给定离散系统用式(12-171)描述

$$\lambda(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \lambda(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} x(n) \quad (12-171)$$

问该系统能否通过 $x(n)$ 的控制作用在有限时间之内使系统由给定的起始状态引向零状态?

解

将给定 \mathbf{A} , \mathbf{B} 参数写入式(12-168)得到

$$\mathbf{M} = (\mathbf{B} + \mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (12-172)$$

显然, 此方阵是满秩的, 因而, 系统完全可控。可在有限时间之内将系统引向零状态。

(三) 系统可观性定义、可观阵满秩判别法

系统的可观测性就是根据系统的输出量来确定系统的所有起始状态。系统的可观测性被定义为: 如果系统用状态方程来描述, 在给定控制后, 能在有限时间间隔内($0 < t < t_1$)根据系统输出惟一地确定系统的所有起始状态, 则称系统完全可观; 若只能确定部分起始状态, 则称系统不完全可观。

下面从上述定义出发, 导出与可控阵满秩判别法相对照的“可观阵满秩判别法”。

若连续系统有 k 个状态变量, 则系统的输出 $r(t)$ 按式(12-58)可写作

$$r(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\lambda(0_-) + [\mathbf{Ce}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)] * e(t) \quad (12-173)$$

由于在讨论可观性问题时, 输入控制是给定的, 因而式(12-173)中第二项是可知的, 为了简化下面的推导, 不妨令 $e(t)=0$, 这样有

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} \lambda(0_-) \quad (12-174)$$

或按凯莱-哈密顿定理写成

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{C} (c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{A} + \cdots + c_{k-1} \mathbf{A}^{k-1}) \lambda(0_-) \quad (12-175)$$

式(12-175)表明, 输出量 $\mathbf{r}(t)$ 是系统所有起始状态 $\lambda_1(0_-), \lambda_2(0_-), \dots, \lambda_k(0_-)$ 的线性组合。式(12-175)也可以写成

$$\mathbf{r}(t) = [c_0, c_1, \dots, c_{k-1}] \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{CA} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \lambda(0_-) \quad (12-176)$$

因而要在 $0 < t < t_1$ 时间间隔内, 根据 $\mathbf{r}(t)$ 惟一确定 $\lambda(0_-)$ 必须使矩阵

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{CA} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \quad (12-177)$$

有 k 个线性无关列向量, 亦即只要方阵(12-177)满秩。这是连续系统可观性的充要条件。 \mathbf{N} 称为系统的可观性判别矩阵, 简称可观阵, 在给定系统时, 只要 \mathbf{N} 阵满秩, 系统即为完全可观系统。

例 12-25 讨论给定系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ \mathbf{r}(t) = [1, 0] \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (12-178)$$

的可观性。

解

将给定的 \mathbf{A}, \mathbf{C} 参数代入式(12-177)得到

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1, 0] \\ [1, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 $\text{rank } \mathbf{N} = 2$ 满秩, 因而, 给定系统是完全可观测的。

对于离散时间系统, 可观性的判别方法与连续时间系统完全相同, 也即只

要式(12-177) N 矩阵满秩, 系统即为完全可观系统。此处略去证明, 给出计算例子。

例 12-26 给定离散系统

$$\begin{cases} \lambda(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \lambda(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} x(n) \\ y(n) = [1, 0] \lambda(n) \end{cases} \quad (12-179)$$

系统是否完全可观?

解

在本例中

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1, 0] \\ [1, 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = 2$$

N 满秩, 因而给定之系统完全可观。

(四) 单输入、单输出系统可控与可观性的 A 矩阵约当规范型判据

利用 M 阵和 N 阵满秩的方法判别系统的可控与可观性并不直观, 它只说明系统是否可控或可观, 而哪些状态可控或可观, 哪些状态不能, 并未给出回答。实际上, 可控性是说明状态变量与输入量之间的联系, 可观性是说明状态变量与输出量之间的联系。因而, 如果对状态矢量进行相似变换, 把 A 矩阵对角化, 则各状态变量之间相互分离, 这样就很容易看出状态变量与输入量或输出量之间有无关联, 这就是构成可控性或可观性判据另一形式的依据。

在前面例 12-21 与例 12-22 分析中已经看到, 当 A 为对角阵时, B 与 C 中的零元素即对应系统的不可控与不可观部分。下面只给出单输入-单输出系统这种判据的结论, 不作证明。这些规律对连续与离散时间系统同样有效。

线性时不变系统可控性另一判据是: 设给定系统具有两两相异的特征值, 则其状态完全可控的充分必要条件是系统经非奇异变换后成为 A 对角化的形式, 在此形式中 B 不包含零元素。

而可观性的另一判据形式是: 设系统具有两两相异的特征值, 则其状态完全可观的充分必要条件是系统经非奇异变换后, 其状态方程的 A 对角化形式中, C 不包含零元素。

对于特征值具有重根的情况, A 矩阵将呈现约当规范型, 实际上在线性代数理论中已经知道, 对角阵只是约当阵的一种特例。在有重根情况下, 系统可控性与可观性利用 A 约当规范型的判据方法陈述如下: 若在 A 为约当规范

型中, \mathbf{B} 与每个约当块最后一行相应的那些行不含零元素, 则系统完全可控。若在 \mathbf{A} 为约当规范型中, \mathbf{C} 与每个约当块第一行相应的那些列不含零元素, 则系统完全可观。

下面通过一个实例来说明这种判别方法的应用。在第 12.2 节例 12-5 中, \mathbf{A} 矩阵具有约当规范形式, 见式(12-42)。首先考虑特征值 -2 和 -3 的情况, 它们是两个单根, 与其对应的 \mathbf{B} , \mathbf{C} 元素都未出现零值(分别为 1, 1 和 $-2, \frac{1}{8}$), 因而都是可控与可观的。而对于特征值 -1 为三重根, 与约当块最后一行(也即 \mathbf{A} 的第 3 行)相应的 \mathbf{B} 元素是 1, 因而可控; 与约当块第一行(也即 \mathbf{A} 的第一行, 对应变量 λ_1)相应的 \mathbf{C} 元素为 $\frac{3}{2}$, 因而可观。综上, 系统是完全可控和完全可观的。

然而, 如果把此例中 \mathbf{B} 元素第 3 行的“1”更换为“0”或将 \mathbf{C} 元素第一列的“ $\frac{3}{2}$ ”更换为“0”系统将出现不可控或不可观现象。对照图 12-14 可以清楚地看到, 在上述不同假设的 \mathbf{B} , \mathbf{C} 情况下, 系统的 $e(t)$ 与 $r(t)$ 和各变量 λ 的联系。例如当 \mathbf{C} 的第一列为 $\frac{3}{2}$ 时, 从 $r(t)$ 可观测到 λ_3 输出的变化, 系统完全可观, 若将此 $\frac{3}{2}$ 改为 0, 则 $r(t)$ 与 λ_3 无关, 变量 λ_3 不可观测。

通过以上讨论可以看出, 若给定系统的状态方程并非 \mathbf{A} 约当规范型(或 \mathbf{A} 对角阵), 可以借助 \mathbf{M} 阵与 \mathbf{N} 阵是否满秩的方法判别其可控与可观性; 也可将矩阵经相似变换转化为 $\hat{\mathbf{A}}$ 约当规范型(或 $\hat{\mathbf{A}}$ 对角阵), 然后利用上述方法检验 $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ 是否出现对应的零元素, 从而判别其可控与可观性。后一种方法具有更为直观的优点。

(五) 可控和可观性与系统转移函数之间的关系

上面分析了单输入-单输出系统的可控性与可观性概念, 而系统转移函数的描述方法在系统分析中也应用很广, 那么, 这两者之间有什么关系呢? 下面以连续时间系统的 $H(s)$ 为例进行分析, 所得结论同样适用于离散时间系统的 $H(z)$ 。

在式(12-84)已经得出转移函数可以表示为

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

而且证明了转移函数 $H(s)$ 在线性变换下保持不变, 即

$$H(s) = \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{s}\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{D}} \quad (12-180)$$

现设系统经非奇异变换而对角化, 则转移函数可以写成

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{B}} \\
 &= [\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_k] \begin{bmatrix} s - \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s - \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s - \alpha_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_k \end{bmatrix} \quad (12-181)
 \end{aligned}$$

这里暂且不考虑与输入信号直接相联系的 \mathbf{D} , 因为它不影响问题的性质。

把式(12-181)展开, 即得

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{\hat{c}_1 \hat{b}_1}{s - \alpha_1} + \frac{\hat{c}_2 \hat{b}_2}{s - \alpha_2} + \cdots + \frac{\hat{c}_k \hat{b}_k}{s - \alpha_k} \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{\hat{c}_i \hat{b}_i}{s - \alpha_i} \quad (12-182)
 \end{aligned}$$

上面已经分析了若系统不完全可控或不完全可观, 则 $\hat{\mathbf{B}}$ 或 $\hat{\mathbf{C}}$ 中包含有零元素。只要 \hat{b}_i 或 \hat{c}_i 两者之一为零, 就使式(12-182)中对应项消失, 也就是 $H(s)$ 原来有 k 个极点(即 $s = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$), 而现在 $H(s)$ 的极点减少了, 这就是说, $H(s)$ 的特征多项式 $|s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}|$ 有降阶现象。就 $H(s)$ 本身来说, 降阶的引起是由于分母中的极点被分子的零点相对消, 由此得出一条重要特性: 若系统不完全可控或不完全可观, 则在 s 域上表现为 $H(s)$ 必有零极点相消现象。这是系统转移函数的一条重要特性。

另外, 由式(12-182)可知, 零极点相消部分必定是不可控或不可观部分, 而留下的是可控或可观部分。因而用转移函数描述的系统只是反映了系统中可控和可观那部分运动规律, 而不能反映不可控和不可观那部分的运动规律, 这是系统转移函数的第二条重要特性。由此也可以得出这样的结论: 用转移函数描述系统是不全面的, 而用状态方程和输出方程来描述一个系统的运动更全面、更详尽。

例 12-27 给定线性时不变系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \lambda(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ r(t) = [1, -1, 0] \lambda(t) \end{cases} \quad (12-183)$$

- (1) 检查系统的可控性和可观性;
- (2) 求可控与可观的状态变量个数;
- (3) 求系统的输入-输出转移函数。

解 (1) 按系统可控性判据, 即式(12-168)的 M 是否满秩。为此求:

$$M = (B \mid AB \mid A^2B)$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

由于 M 中的第 2 行与第 3 行相加等于第一行, 因而

$$\text{rank } M = 2 \neq 3$$

即 M 不是满秩的, 故系统不完全可控。

检查可观性, 只要检验式(12-177)判据, 此时

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

此式的第 1 列乘以 (-1) 等于第 2 列, 因而

$$\text{rank } N = 2 \neq 3$$

即 N 也不是满秩的, 故系统不完全可观。

(2) 为求可控和可观状态变量个数可以对状态方程变换为对角化的规范形式。经求特征矢量得到对角化所需的变换矩阵为

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

系统对角化的方程表示为

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= PAP^{-1}\gamma(t) + PB\epsilon(t) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \gamma(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon(t) \\ r(t) &= CP^{-1}\gamma(t) = [1, 1, 0]\gamma(t) \end{aligned} \tag{12-184}$$

由式(12-184)可见, 对角化以后

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{C}} = [1, 1, 0]$$

$\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ 各包含一个零元素, 因而其中 $\gamma_2(t)$ 和 $\gamma_3(t)$ 两个状态变量可控; $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 两个状态变量可观, 画成结构图如图 12-28 所示。不难发现, 此图与图 12-26 结构完全相同。

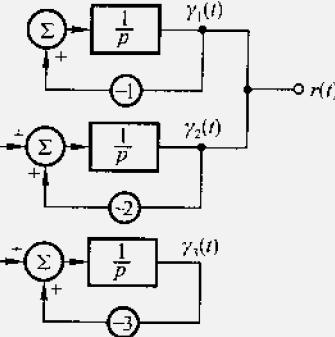


图 12-28 例 12-27 系统经对角化

变换后结构图

(3) 求系统的转移函数 $H(s)$

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}} \\
 &= [1, 1, 0] \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= [1, 1, 0] \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\
 &\begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+3) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+2} \tag{12-185}
 \end{aligned}$$

可见系统具有零极相消现象, 相消结果保留(-2)特征根。从图 12-28 明显地看出, 输入量只有通过 $\gamma_2(t)$ 影响到输出量 $r(t)$, 这说明用系统转移函数来描述一系统是不全面的。

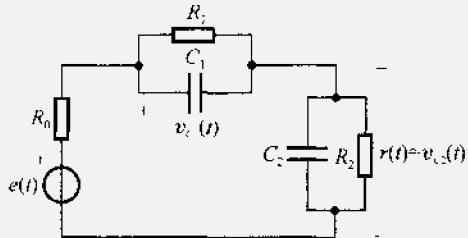
习题

12-1 如题图 12-1 所示电路, 输出量取 $r(t) = v_{C2}(t)$, 状态变量取 C_1 和 C_2 上的电压 $\lambda_1(t) = v_{C1}(t)$ 和 $\lambda_2(t) = v_{C2}(t)$, 且有 $C_1 = C_2 = 1 \text{ F}$, $R_0 = R_1 = R_2 = 1 \Omega$ 。列写系统的状态方程和输出方程。

12-2 已知系统的传输算子表达式为

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

试建立一个二阶状态方程, 使其 A 矩阵具有对角阵形式并画出系统的流图。



题图 12-1

12-3 给定系统微分方程表达式如下：

$$a \frac{d^3}{dt^3}y(t) + b \frac{d^2}{dt^2}y(t) + c \frac{d}{dt}y(t) + dy(t) = 0$$

选状态变量为： $\lambda_1(t) = ay(t)$

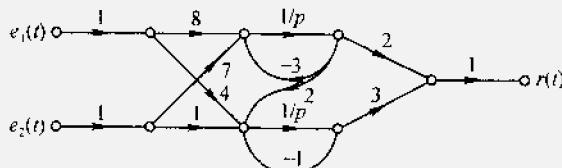
$$\lambda_2(t) = a \frac{d}{dt}y(t) + by(t)$$

$$\lambda_3(t) = a \frac{d^2}{dt^2}y(t) + b \frac{d}{dt}y(t) + cy(t)$$

输出量取 $r(t) = \frac{d}{dt}y(t)$

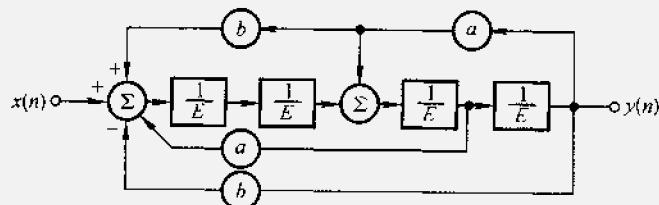
列写状态方程和输出方程。

12-4 给定系统流图如题图 12-4 所示，列写状态方程和输出方程。



题图 12-4

12-5 给定离散时间系统框图如题图 12-5 所示，列写状态方程和输出方程。



题图 12-5

12-6 (1) 给定系统用微分方程描述为

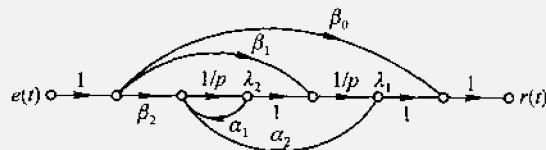
$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + a_1 \frac{d}{dt}r(t) + a_2 r(t) = b_0 \frac{d^2}{dt^2}e(t) + b_1 \frac{d}{dt}e(t) + b_2 e(t)$$

用题图 12-6 的流图形式模拟该系统, 列写对应于题图 12-6 形式的状态方程, 并求 a_1 , a_2 , β_0 , β_1 , β_2 与原方程系数之间关系。

(2) 给定系统用微分方程描述为

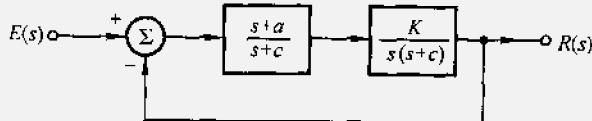
$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 4 \frac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 6 \frac{d}{dt}e(t) + 8e(t)$$

求对应于(1)问所示状态方程的各系数。

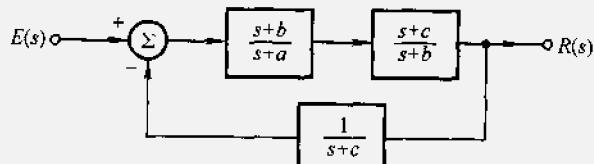


题图 12-6

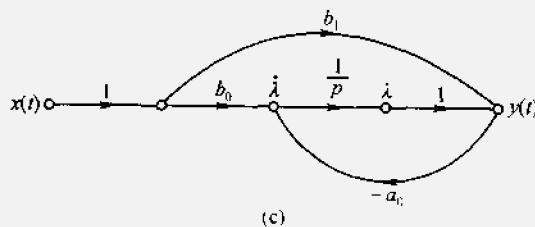
12-7 试将题图 12-7(a), (b) 分别改画为以一阶流图组合的形式, 一阶流图的结构如题图 12-7(c) 所示, 并列写系统的状态方程和输出方程。在图(c)中传输算子



(a)



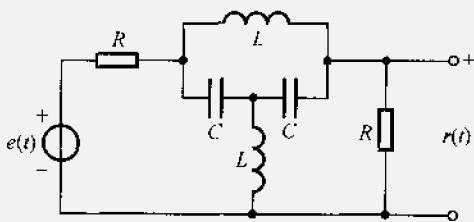
(b)



题图 12-7

为 $H(p) = \frac{b_1 + \frac{b_0}{p}}{1 + \frac{a_0}{p}}$ ，考虑图中结点 λ 之后增益为 1 的通路在本题中能否省去？

12-8 列写题图 12-8 所示网络的状态方程和输出方程表示。



题图 12-8

12-9 已知

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

请分别用两种方法计算 $\Phi(t) = e^{At}$ 。

12-10 给定系统的状态方程和初始条件为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_2(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

用两种方法求解该系统。

12-11 已知线性时不变系统的状态转移矩阵为：

$$(1) \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-at} & te^{-at} \\ 0 & e^{-at} \end{bmatrix};$$

$$(2) \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & (1+2t)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

求相应的 A 。

12-12 已知一线性时不变系统在零输入条件下有：

$$\text{当 } \lambda(0_-) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } \lambda(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix};$$

$$\text{当 } \lambda(0_-) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } \lambda(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix};$$

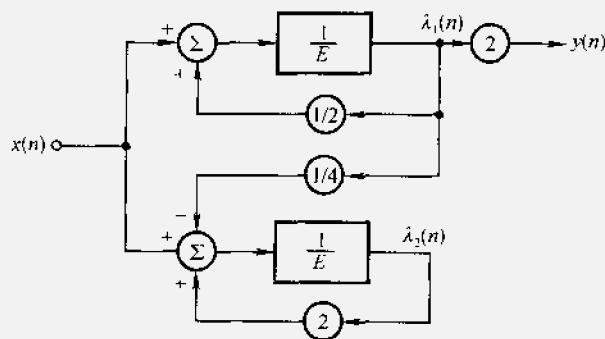
求：(1) 状态转移矩阵 $\Phi(t)$ ；

(2) 确定相应的 A 。

12-13 若每年从外地进入某城市的人口是上一年外地人口的 α 倍，而离开该市人口

是上一年该市人口的 β 倍，全国每年人口的自然增长率为 γ 倍 (α, β, γ 都以百分比表示)。试建立一个离散时间系统的状态方程，描述该城市和外地人口的动态发展规律。为了预测未来若干年后的人口数量，还需要知道哪些数据？

12-14 一离散系统如题图 12-14 所示



题图 12-14

- (1) 当输入 $x(n) = \delta(n)$ 时，求 $\lambda_1(n)$ 和 $\lambda_2(n)$ 及 $y(n) = h(n)$ ；
- (2) 列出系统的差分方程。

12-15 已知一离散系统的状态方程和输出方程表示为：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [1, 1] \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix}$$

给定当 $n \geq 0$ 时， $x(n) = 0$ 和 $y(n) = 8(-1)^n - 5(-2)^n$ ，求：

- (1) 常数 a, b ；
- (2) $\lambda_1(n)$ 和 $\lambda_2(n)$ 的闭式解。

12-16 已知一离散系统的状态方程和输出方程表示为：

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = \lambda_1(n) + \lambda_2(n) \\ \lambda_2(n+1) = -\lambda_1(n) - \lambda_2(n) \end{cases}$$

$$y(n) = \lambda_1(n)\lambda_2(n) + x(n)$$

- (1) 给定 $\lambda_1(0) = 2, \lambda_2(0) = 2$ ，求状态方程的零输入解；
- (2) 求系统的差分方程表示式；
- (3) 给定(1)的起始条件，且给定 $x(n) = 2^n, n \geq 0$ 。求输出响应 $y(n)$ ，并问(2)中差分方程的特解是什么？

12-17 (1) 证明：如果 AB 矩阵可交换时，即 $AB = BA$ ，则有 $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$ 。
 (2) 设矩阵 H_k 被定义为如下的 $k \times k$ 方阵

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

证明

$$\mathbf{e}^{\mathbf{H}t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 利用 $\mathbf{J} = a\mathbf{I} + \mathbf{H}_k$

证明

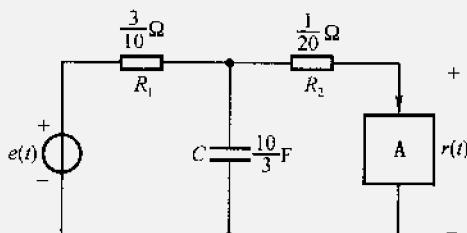
$$\mathbf{e}^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{bmatrix} e^{at}$$

(4) 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

求 $\mathbf{e}^{\mathbf{At}}$ 。

12-18 考虑题图 12-18 线路。如果 A 表示这样一种元件：它的端电流等于它两端电压的二阶导数。



题图 12-18

- (1) 选择状态变量，并列出该电路的状态方程和输出方程表示式。
- (2) 根据状态方程求网络的自由频率。

[提示：系统的特征根中有一个等于 $(-2)_s$]

(3) 求系统的微分方程表示式。

12-19 试证明对于式(12-26)状态方程的标准规范形矩阵 $A_{k \times k}$ ，如果它的特征值各不相同，则对角化转换矩阵

$$\hat{A} = PAP^{-1} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

12-20 已知两个系统有这样的关系

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = A\lambda(t) + Be(t) \\ r_1(t) = C\lambda(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = -A^T\gamma(t) + C^T e(t) \\ r_2(t) = B^T\gamma(t) \end{cases}$$

证明：如果系统起始是静止的，则这两个系统的输出冲激响应有下列关系

$$h_1(t) = h_2(-t)$$

12-21 给定线性时不变系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = A\lambda(t) + Be(t) \\ r(t) = C\lambda(t) \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0]$$

(1) 检查该系统的可控性和可观性；

(2) 求系统的转移函数。

12-22 判断习题 12-1 的可控性与可观性，并求系统函数。

12-23 已知线性时不变系统状态方程的参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$C = [-4 \ -3 \ 1 \ 1]$$

求：(1) 将参数矩阵化为 A 对角线形式；

(2) 判断系统可控性与可观性；

(3) 系统函数 $H(s)$ 。

12-24 考虑可控且可观的两个单输入-单输出系统 S_1 和 S_2 ，它们的状态方程和输出方程分别为

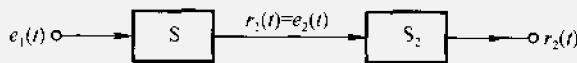
$$\begin{aligned} S_1: \dot{\lambda}_1(t) &= A\lambda_1(t) + B_1e_1(t) \\ r_1(t) &= C_1\lambda_1(t) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [2, 1]$$

$$\begin{aligned} S_2: \dot{\lambda}_2(t) &= A_2\lambda_2(t) + B_2e_2(t) \\ r_2(t) &= C_2\lambda_2(t) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } A_2 = -2, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = 1.$$

现在考虑串联系统如题图 12-24 所示



题图 12-24

(1) 求串联系统的状态方程和输出方程，令

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$$

(2) 检查串联系统的可控性和可观性；

(3) 求系统 S_1 和 S_2 各别的转移函数及串联系统的转移函数；串联系统转移函数有无零极点相消现象？(2)的结果说明什么？

12-25 已知线性时不变系统的状态方程和输出方程表示为

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{k \times 1}(t) &= A_{k \times k}\lambda_{k \times 1}(t) + B_{k \times 1}e(t) \\ r(t) &= C_{1 \times k}\lambda_{k \times 1} + D e(t) \end{aligned}$$

且有 $C\mathbf{B} = 0, \quad C\mathbf{A}\mathbf{B} = 0, \dots, \quad C\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} = 0$ 。

证明：(1) 该系统不可能同时完全可控和完全可观；

(2) 该系统的转移函数 $H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \text{常数}$ ，与 s 无关。

附录四 几何级数的求值公式表

序 号	公 式
1	$\sum_{n=0}^{n_2} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{n_2+1}}{1-a} & a \neq 1 \\ n_2 + 1 & a = 1 \end{cases}$
2	$\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \begin{cases} \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a} & a \neq 1 \\ n_2 - n_1 + 1 & a = 1 \end{cases}$
3	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad a < 1$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \quad a < 1$
5	$\sum_{n=n_1}^{\infty} a^n = \frac{a^{n_1}}{1-a} \quad a < 1$

注：对于公式 2 中， $n_1 \leq n_2$ ， $n_1 \neq n_2$ 可以是正数，也可以是负数。

下面证明表中的各公式

(一) 公式 1

$$\sum_{n=0}^{n_2} a^n = \frac{1-a^{n_2+1}}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

以 $(1-a)$ 乘等式两端，左端得到

$$(1+a+a^2+\cdots+a^{n_2})(1-a)$$

经逐项相乘展开，即可证明它与等式右端相等。

$$\sum_{n=0}^{n_2} a^n = n_2 + 1 \quad (a = 1)$$

很明显，级数由 $n_2 + 1$ 项组成，其中每项都是 1。

(二) 公式 2

利用上述结果容易构成

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n &= \sum_{n=0}^{n_2} a^n - \sum_{n=0}^{n_1-1} a^n \\&= \frac{1-a^{n_2+1}}{1-a} - \frac{1-a^{n_1}}{1-a} \\&= \frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a} \quad (a \neq 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n &= n_2 + 1 - n_1 \\&= n_2 - n_1 + 1 \quad (a = 1)\end{aligned}$$

(三) 公式 5

注意到, 若 $|a| < 1$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a^n &= 0 \\ \sum_{n=n_1}^{\infty} a^n &= \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \sum_{n_1}^{n_2} a^n \\&= \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{a^{n_1}}{1-a} - \frac{a^{n_2+1}}{1-a} \right] \\&= \frac{a^{n_1}}{1-a} \quad (|a| < 1, n_1 \geq 0)\end{aligned}$$

(四) 公式3与公式4

令公式5中的 n_1 分别等于0或1, 即可得到:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a^n &= \frac{1}{1-a} \quad (|a| < 1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} a^n &= \frac{a}{1-a} \quad (|a| < 1)\end{aligned}$$

(五) 在以上证明过程中, 假定 n_1 和 n_2 都是正数, 现可将结果推广至 n_1, n_2 为负数的一般情况

若 $n_1 < 0 \leq n_2$, 则有

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \sum_{n=n_1}^0 a^n + \sum_{n=0}^{n_2} a^n$$

以 $m = -n$ 置换等式右端第一项中的序数

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n &= \sum_{m=-1}^{-n_1} \left(\frac{1}{a} \right)^m + \sum_{n=0}^{n_2} a^n \\&= \frac{\left(\frac{1}{a} \right) - \left(\frac{1}{a} \right)^{-n_1+1}}{1 - \frac{1}{a}} + \frac{1 - a^{n_2+1}}{1-a}\end{aligned}$$

$$= \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

若 $n_1 < n_2 \leq 0$, 再次利用 $m = -n$ 置换, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_1}^{n_2} a^n &= \sum_{m=-n_2}^{n_1} \left(\frac{1}{a}\right)^m \\ &= \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{-n_2} - \left(\frac{1}{a}\right)^{-n_1+1}}{1 - \frac{1}{a}} \\ &= \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a} \quad (a \neq 1) \end{aligned}$$

最后, 对于 $a = 1$, 求上式 $a \rightarrow 1$ 的极限, 借助洛比达法则即可得到

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = n_2 - n_1 + 1 \quad (a = 1)$$

至此, 表中的公式全部得到证明。

附录五 序列的 z 变换表

序号	序列	单边 z 变换	收敛域
	$x(n)$	$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$	$ z > R$
1	$\delta(n)$	1	$ z \geq 0$
2	$\delta(n-m) (m>0)$	z^{-m}	$ z > 0$
3	$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
4	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
5	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$ z > 1$
6	n^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$ z > 1$
7	n^4	$\frac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(z-1)^5}$	$ z > 1$
8	n^5	$\frac{z(z^4+26z^3+66z^2+26z+1)}{(z-1)^6}$	$ z > 1$
9	a^n	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
10	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
11	n^2a^n	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$ z > a $
12	n^3a^n	$\frac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$	$ z > a $
13	n^4a^n	$\frac{az(z^3+11az^2+11a^2z+a^3)}{(z-a)^5}$	$ z > a $
14	n^5a^n	$\frac{az(z^4+26az^3+66a^2z^2+26a^3z+a^4)}{(z-a)^6}$	$ z > a $
15	$(n+1)a^n$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$ z > a $
16	$\frac{(n+1)\cdots(n+m)a^n}{m!} (m\geq 1)$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$ z > a $

376 附录五 序列的 z 变换表

续表

序号	序列	单边 z 变换	收敛域
17	e^{bn}	$\frac{z}{z - e^b}$	$ z > e^b $
18	$e^{n\omega_0}$	$\frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$	$ z > 1$
19	$\sin(n\omega_0)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
20	$\cos(n\omega_0)$	$\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
21	$\beta^n \sin(n\omega_0)$	$\frac{\beta z \sin \omega_0}{z^2 - 2\beta z \cos \omega_0 + \beta^2}$	$ z > \beta $
22	$\beta^n \cos(n\omega_0)$	$\frac{z(z - \beta \cos \omega_0)}{z^2 - 2\beta z \cos \omega_0 + \beta^2}$	$ z > \beta $
23	$\sin(n\omega_0 + \theta)$	$\frac{z[z \sin \theta + \sin(\omega_0 - \theta)]}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
24	$\cos(n\omega_0 + \theta)$	$\frac{z[z \cos \theta - \cos(\omega_0 - \theta)]}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
25	$n\alpha^n \sin(n\omega_0)$	$\frac{z(z - a)(z + a) \alpha \sin \omega_0}{(z^2 - 2az \cos \omega_0 + a^2)^2}$	
26	$n\alpha^n \cos(n\omega_0)$	$\frac{az[z^2 \cos \omega_0 - 2az + a^2 \cos \omega_0]}{(z^2 - 2az \cos \omega_0 + a^2)^2}$	
27	$\sinh(n\omega_0)$	$\frac{z \sinh \omega_0}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 + 1}$	
28	$\cosh(n\omega_0)$	$\frac{z(z - \cosh \omega_0)}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 + 1}$	
29	$\frac{a^n}{n!}$	$\frac{a}{e^z}$	
30	$\frac{1}{(2n)!}$	$\cosh(z^{-\frac{1}{2}})$	
31	$\frac{(\ln a)^n}{n!}$	$a^{1/z}$	
32	$\frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$	$\ln\left(\frac{z}{z - 1}\right)$	
33	$\frac{n(n+1)}{2!}$	$\frac{z}{(z - 1)^3}$	
34	$\frac{n(n+1)\cdots(n-m+1)}{m!}$	$\frac{z}{(z - 1)^{m+1}}$	

习题答案

第七章

7-4 (1) 周期序列, 周期为 14

(2) 非周期序列

7-5 (1) $3^{-n}u(n)$

$$(2) \frac{3-3^{-n}}{2}u(n)$$

$$(3) \frac{1}{2(3^n)} \{ (3^{n+1}-1)[u(n)-u(n-5)] + (3^5-1)u(n-5) \}$$
$$= \frac{3-3^{-n}}{2} [u(n)-u(n-5)] + \frac{121}{3^n}u(n-5)$$

$$7-6 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)$$

$$7-7 -3^{-n}u(-n+1)$$

$$7-8 b_0y(n) + b_1y(n-1) = a_0x(n) + a_1x(n-1)$$

$$7-9 y(n) - b_1y(n-1) - b_2y(n-2) = a_0x(n) + a_1x(n-1)$$

7-10 当 $0 \leq n \leq 7$ 时, $y(n) = b_r$ (下标 $r = n$);

当 $n < 0$, $n > 7$ 时, $y(n) = 0$

$$7-11 (1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (2) 2^{n-1}$$

$$(3) (-3)^{n-1} \quad (4) \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$7-12 (1) 4(-1)^n - 12(-2)^n$$

$$(2) (2n+1)(-1)^n$$

$$(3) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$7-13 3^n - (n+1)2^n$$

$$7-14 \frac{1}{36}[(-5)^{n+1} + 6n + 5]$$

$$7-15 \frac{13}{9}(-2)^n + \frac{1}{3}n - \frac{4}{9}$$

$$7-16 \left(-\frac{3}{4}n - \frac{9}{16}\right)(-1)^n + \frac{9}{16}(3^n)$$

$$7-17 y(n) = \frac{1}{2}\sin n + \frac{1}{2}(\tan 1)(\cos n) - \frac{1}{2}(\tan 1)\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2(1+\cos 2)} \left[\sin n + \sin(n+2) - \sin 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]$$

7-18 (1) $y(n) = \sum_{k=0}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2) 应假设特解函数式为 $D_2 n^2 + D_1 n$

7-19 $y(n) = \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{2}{4}n^3 + \frac{1}{4}n^2$
 $= \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2$

7-20 (1) $y(n) - 7y(n-1) + 10y(n-2)$
 $= 14x(n) - 85x(n-1) + 111x(n-2)$

(2) $y(n) = 2\{[2^n + 3(5)^n + 10]u(n) - [2^{n-10} + 3(5^{n-10}) + 10]u(n-10)\}$

7-21 $y(n) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

7-22 $y(n) - (1+a)y(n-1) = x(n)$
 $y(12) = 142.73$ 元

7-23 $1000y(n) - 900y(n-1) = x(n)$

$$y(n) = \underbrace{-0.5(0.9)^n}_{\text{自由}} + \underbrace{0.5}_{\text{强迫}} \quad y(\infty) = 0.5$$

7-24 (1) $y\left(nT + \frac{T}{2}\right) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}x(nT) + \frac{C_2}{C_1 + C_2}y(nT)$

$$(2) y(n+1) - \frac{C_2}{C_1 + C_2}y(n) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}x(n) \quad \text{或} \quad y(n) - \frac{C_2}{C_1 + C_2}y(n-1) \\ = \frac{C_1}{C_1 + C_2}x(n-1)$$

(3) $y(n) = \left[1 - \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)^n \right] u(n)$

7-25 $\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = E \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

7-26 $y(n) = (1 - 0.9^n)u(n)$

7-27 $y(n) = 2y(n-1) + 1, y(n) = 2^n - 1$

7-28 (1)、(2)、(8)、(9)、(12)因果、稳定。

(3)、(7)非因果、稳定。(4)、(6)、(11)因果、不稳定。

(5)、(10)非因果、不稳定。

7-29 (1) 非线性、时不变

(2) 线性、时变

(3) 非线性、时不变

(4) 线性、时不变

7-30 (1) $h(n) = g(n) - g(n-1)$

$$(2) g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n-k)$$

7-31 (1) $y(n) = \delta(n) + 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2) + 3\delta(n-3) + \delta(n-4)$

(2) $y(n) = \delta(n+4) + 2\delta(n+3) + \delta(n+2) + \delta(n+1) + 2\delta(n)$

(3) $y(n) = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} u(n)$

(4) $y(n) = \delta(n-2)$

7-32 (1) $y(n) = \delta(n) + \delta(n-6) + 2[\delta(n-1) + \delta(n-5)]$

$+ 3[\delta(n-2) + \delta(n-4)] + 4\delta(n-3)$

(2) $y(n) = 2^n [u(n) - u(n-4)] - 2^{n-2} [u(n-2) - u(n-6)]$

(3) $y(n) = \frac{1-0.5^{n+1}}{1-0.5} u(n) - \frac{1-0.5^{n-4}}{1-0.5} u(n-5)$

7-33 $y(n) = \frac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8} u(n) - \frac{1-0.8^{n-2}}{1-0.8} u(n-3)$

7-34 $N_4 = N_0 + N_2 \quad N_5 = N_1 + N_3$

7-35 $h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \text{ 为偶} \\ 0 & n \text{ 为奇} \end{cases}$

第八章

8-1 (1) $\frac{2z}{2z-1} \quad \left(|z| > \frac{1}{2}\right)$

(2) $\frac{4z}{4z+1} \quad \left(|z| > \frac{1}{4}\right)$

(3) $\frac{z}{z-3} \quad (|z| > 3)$

(4) $\frac{1}{1-3z} \quad \left(|z| < \frac{1}{3}\right)$

(5) $\frac{2z}{2z-1} \quad \left(|z| < \frac{1}{2}\right)$

(6) $z \quad (|z| < \infty)$

(7) $\frac{1 - \left(\frac{1}{2z}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2z}} \quad (|z| > 0)$

(8) $\frac{z(12z-5)}{(2z-1)(3z-1)} \quad \left(|z| > \frac{1}{2}\right)$

(9) $1 - \frac{1}{8} z^{-3} \quad (|z| > 0)$

8-2 $\frac{-1.5z}{(z-0.5)(z-2)} \quad (0.5 < |z| < 2)$

8-3 (1) $\frac{Az^2 \cos \phi - Arz \cos (\omega_0 - \phi)}{z^2 - 2rz \cos \omega_0 + r^2} \quad (|z| > r)$

(2) $\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad (|z| > 0)$

- 8-4** (1) $\delta(n)$
 (2) $\delta(n+3)$
 (3) $\delta(n-1)$
 (4) $\delta(n)+2\delta(n+1)-2\delta(n-2)$
 (5) $a^n u(n)$
 (6) $-a^n u(-n-1)$

- 8-5** (1) $(-0.5)^n u(n)$
 (2) $\left[4\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$
 (3) $(-0.5)^n u(n)$
 (4) $-a\delta(n) + \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n u(n)$

8-6 $10(2^n - 1)u(n)$

8-9 $\frac{u(-n)}{(-n)!}$

- 8-10** (1) $\left[20\left(\frac{1}{2}\right)^n - 10\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$
 (2) $5[1 + (-1)^n]u(n)$
 (3) $\left[\frac{\sin(n+1)\omega + \sin(n\omega)}{\sin \omega}\right]u(n)$

- 8-11** (1) $n6^{n-1}u(n)$
 (2) $\delta(n) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)u(n)$

- 8-12** (1) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2^n\right]u(n)$
 (2) $\left[2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(-n-1)$
 (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2^n u(-n-1)$

- 8-13** (1) $x(0)=1 \quad x(\infty) \text{ 不存在}$
 (2) $x(0)=1 \quad x(\infty)=0$
 (3) $x(0)=0 \quad x(\infty)=2$

8-14 $x(n) = (-1)^{n+1} - \frac{a^n}{n}u(n-1)$

- 8-17** (1) $\frac{b}{b-a}[a^n u(n) + b^n u(-n-1)]$
 (2) $a^{n-2}u(n-2)$
 (3) $\frac{1-a^n}{1-a}u(n)$

8-18 $\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n) - \frac{1-a^{n+1-N}}{1-a}u(n-N)$

8-19 (1) 1 ($|z| \geq 0$)

$$(2) \frac{1}{1-100z} \quad (|z|>0.01)$$

$$(3) \frac{e^{-b}z\sin\omega_0}{z^2-2e^{-b}z\cos\omega_0+e^{-2b}} \quad (|z|>e^{-b})$$

8-20 $x(n)=x_1(n)*x_2(n)$, 为得到 $x_2(n)$ 应有

D 运算: $X(z)=X_1(z)X_2(z)$

$$\ln[X(z)] = \ln[X_1(z)] + \ln[X_2(z)]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\ln[X(z)]\} = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n) = \hat{x}(n)$$

L 运算: 当 $\hat{x}(n)=\hat{x}_1(n)+\hat{x}_2(n)$ 时

可得到 $\hat{y}(n)=\hat{x}_2(n)$ 即滤除 $\hat{x}_1(n)$

D^{-1} 运算:

$$\mathcal{Z}[\hat{x}_2(n)] = \hat{X}_2(z) \text{ 或 } \mathcal{Z}[\hat{y}(n)] = \hat{Y}(z)$$

$$\exp[\hat{X}_2(z)] = X_2(z) \text{ 或 } \exp[\hat{Y}(z)] = Y(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[X_2(z)] = x_2(n) \text{ 或 } \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = y(n)$$

最后有 $y(n)=x_2(n)$

$$\mathbf{8-21} \quad (1) \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \quad (n \geq 0)$$

$$(2) \approx [9.26 + 0.66(-0.2)^n - 0.2(0.1)^n] \quad (n \geq 0)$$

$$(3) [0.5 - 0.45(0.9)^n] \quad (n \geq 0)$$

$$(4) [0.5 + 0.45(0.9)^n] \quad (n \geq 0)$$

$$(5) \left[\frac{n}{6} + \frac{5}{36} - \frac{5}{36}(-5)^n \right] \quad (n \geq 0)$$

$$(6) \frac{1}{9}[3n - 4 + 13(-2)^n] \quad (n \geq 0)$$

$$\mathbf{8-22} \quad \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n E, \quad (n=0,1,2,\dots,N)$$

8-23 (1) 稳定

(2) 不稳定

(3) 不稳定(边界稳定)

(4) 不稳定(边界不稳定)

8-24 (1) $h(n)=(-3)^n u(n)$

$$(2) y(n)=\frac{1}{32}[-9(-3)^n+8n^2+20n+9]u(n)$$

8-25 $y(n)=b_1y(n-1)+b_2y(n-2)+ar(n-1)$

$$H(z)=\frac{az^{-1}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$$

$$h(n) = \frac{a}{P_1 - P_2} (P_1^n - P_2^n) u(n)$$

$$\text{其中 } P_1, P_2 = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2}$$

8-26 (1) $H(z) = \frac{z}{3z-6}, h(n) = \frac{1}{3}(2^n)u(n)$

(2) $H(z) = 1 - 5z^{-1} + 8z^{-3}, h(n) = \delta(n) - 5\delta(n-1) + 8\delta(n-3)$

(3) $H(z) = \frac{z}{z-0.5}, h(n) = 0.5^n u(n)$

(4) $H(z) = \frac{z^3}{(z-1)^3}, h(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)u(n)$

(5) $H(z) = \frac{z^2-3}{z^2-5z+6}, h(n) = -\frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{2}(2)^n u(n) + 2(3)^n u(n)$

8-27 当 $10 < |z| \leq \infty$ 时, $h(n) = (0.5^n - 10^n)u(n)$, 系统是因果, 不稳定的。当 $0.5 < |z| < 10$ 时, $h(n) = 0.5^n u(n) + 10^n u(-n-1)$, 系统是非因果, 稳定的。

8-29 (1) $H(z) = \frac{z}{z+1}, h(n) = (-1)^n u(n)$

(2) $y(n) = 5[1 + (-1)^n]u(n)$

8-30 在 $u(n)$ 作用下, $y(n) = \frac{a}{a-1}a^n u(n) - \frac{1}{a-1}u(n)$

在 $e^{j\omega}u(n)$ 作用下, $y(n) = \frac{a}{a - e^{j\omega}}a^n u(n) - \frac{e^{j\omega}}{a - e^{j\omega}}e^{j\omega n}u(n)$

上两式右边的第一项为瞬态响应, 第二项为稳态响应。

8-31 $H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{3\omega}{2}} \cos \omega \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$

8-32 $y(n) - ky(n-1) = x(n)$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - k}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos \omega}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{k \sin \omega}{1 - k \cos \omega}\right)$$

8-34 (1) $y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} a^i x(n-i) \quad (M=8)$

(2) $H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} a^i z^{-i} = \frac{1 - (az^{-1})^M}{1 - az^{-1}}$

(3) $h(n) = a^n [u(n) - u(n-M)] = \sum_{i=0}^{M-1} a^i \delta(n-i)$

8-35 $y(n) = x(n) - \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)x(n-1) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)y(n-1) - y(n-2)$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{1 - 2z^{-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + z^{-2}}$$

$$h(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) u(n)$$

8-36 (1) $H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$ ($|z| > \frac{1}{3}$)

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

(2) $x(n) = (0.5)^n u(n-1)$

(3) 零点位于 $z=0$, 极点位于 $z=\frac{1}{3}$

(4) 呈低通特性, 最大值为 1.5, 最小值为 0.75。

8-37 (1) $H(z) = \frac{10}{3} \left(\frac{z}{z - \frac{1}{2}} \right) - \frac{7}{3} \left(\frac{z}{z - \frac{1}{4}} \right)$

$$\left(|z| > \frac{1}{2}\right)$$

$$h(n) = \left[\frac{10}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{7}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] u(n)$$

(2) 零点位于 $z=0$ 和 $-\frac{1}{3}$,

极点位于 $z=\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$ 。

(3) 呈低通特性, 最大值为 $\frac{32}{9}$, 最小值为 $\frac{16}{45}$ 。

8-38 (1) 零点位于 $a e^{j\omega_0}$ 和 $a e^{-j\omega_0}$ 都在单位圆之外, 极点位于 $a^{-1} e^{j\omega_0}$ 和 $a^{-1} e^{-j\omega_0}$ 都在单位圆之内。

(2) 由 $z = e^{iT}$ 或 $s = \frac{1}{T} \ln z$, 令 $T=1$, 可求得对应 s 平面的零点位于 $\ln a + j\omega_0$ 和 $\ln a - j\omega_0$, 而极点位于 $-\ln a + j\omega_0$ 和 $-\ln a - j\omega_0$ 为全通系统。

第九章

9-1 $X_p(k) = 2 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right) \right]$ 或 $X_p(0) = 4, X_p(1) = 2, X_p(2) = 0, X_p(3) = 2$

9-4 (1) 正确 (2) 不正确 (3) 正确

(4) 不正确 若改为“ $X_p(k) e^{-j(\frac{2\pi}{3})^k}$ ”则正确

9-5 $X_{p2}(k) = X_{p1}\left(\frac{k}{2}\right) (1 + e^{-jk})$

也即当 k 为奇 则 $X_{p2}(k) = 0$

当 k 为偶 则 $X_{p2}(k) = 2X_{p1}\left(\frac{k}{2}\right)$

9-6 与题 9-1 答案相同

9-8 $X(0) = 5, X(1) = 2 + j, X(2) = -5, X(3) = 2 - j$

9-9 (1) $X(k) = 1$

$$(2) X(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k}$$

$$(3) X(k) = \frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

(以上各式中 k 的范围限于 $0 \leq k \leq N-1$)

$$\text{(1)} X(k) = \frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j(\omega_0 + \frac{2\pi}{N})k}}$$

$$\text{(2)} X(k) = \frac{\sin(\omega_0 e^{-j\frac{2\pi}{N}k}) - \sin(\omega_0 N) + \sin(\omega_0 N - \omega_0) e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{1 - 2\cos(\omega_0 e^{-j\frac{2\pi}{N}k}) + e^{-j\frac{4\pi}{N}k}}$$

$$\text{(3)} X(k) = \frac{1 - \cos(\omega_0 e^{-j\frac{2\pi}{N}k}) - \cos(\omega_0 N) + \cos(\omega_0 N - \omega_0) e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{1 - 2\cos(\omega_0 e^{-j\frac{2\pi}{N}k}) + e^{-j\frac{4\pi}{N}k}}$$

(4) 对于第(1)问有 $X(k) = N\delta(k-1)$

$$\text{对于第(2)问有 } X(k) = \frac{N}{2j} [\delta(k-1) - \delta(k-N+1)]$$

$$\text{对于第(3)问有 } X(k) = \frac{N}{2} [\delta(k-1) + \delta(k-N+1)]$$

9-14 (1) $\frac{1}{2} [X((k-l))_N + X((k+l))_N] R_N(k)$

(2) $\frac{1}{2j} [X((k-l))_N - X((k+l))_N] R_N(k)$

9-15 $X(0) = 10, X(1) = -2 + 2j, X(2) = -2, X(3) = -2 - 2j$

$$H(0) = 10, H(1) = 2 - 2j, H(2) = 2, H(3) = 2 + 2j$$

$$Y(0) = 100, Y(1) = 8j, Y(2) = -4, Y(3) = -8j$$

9-17 (1) 设 $x(n) * x(n) = y_1(n)$

$$y_1(0) = \frac{1}{4}, y_1(1) = 1, y_1(2) = 2, y_1(3) = 2, y_1(4) = 2,$$

$$y_1(5) = 1, y_1(6) = \frac{1}{4}$$

(2) 设 $x(n) \otimes x(n) = y_2(n), N=4$

$$y_2(0) = 2 \frac{1}{4}, y_2(1) = 2, y_2(2) = 2 \frac{1}{4}, y_2(3) = 2 \frac{1}{2}$$

(3) 答案同(1)

(4) $L=7$

9-18 (1) $\frac{N}{2} \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$

(2) $\frac{N}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$

(3) $-\frac{N}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) R_N(n)$

9-22 $X(k) = N\delta(k)$

9-24 (1) $\mathcal{Z}[x(n)] = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

(2) DFT $[x(n)] = N\delta(k)$ (见题 9-22)

(3) $X(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{N}{2}\omega}$

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|$$

当 $\omega=0$ 时 $|X(e^{j\omega})|=N$

当 $\omega=\frac{2\pi}{N}k$ 时 $|X(e^{j\omega})|=0$

9-25 (1) $e^{\frac{2\pi}{N}k}X(-k)$

(2) $X\left(k + \frac{N}{2}\right)$

(3) $[1 + (-1)^k]X\left(\frac{k}{2}\right)$

(4) $X(2k)$

(5) $X\left(\frac{k}{2}\right)$

(6) $X(k)$

(7) $\frac{1}{2} [X(k) + X\left(k + \frac{N}{2}\right)]$

本题答案限于 $0 \leq k \leq N-1$, 也即以上各式中都省略了符号 $R_N(k)$

9-26 此矩阵相乘的过程与图 9-17 之 FFT 流程图对应。

9-34 由给定条件求得待选参数应满足以下条件:

$T_1 > 0.2$ s, $T_s \leq 0.4$ ms, $N \geq 500$

选 $N = 512$, $T_s = 0.4$ ms, $T_1 = 0.2048$ s

9-35 (1) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

9-36 适当考虑补零规律, 可省去复数乘法运算

第十章

10-1 (b)

10-2 (1) $a, b, c \geq 0, b \geq a$

(2) $F_1(s)$ 是正实函数。

10-3 $F_1(s)$ 不是正实函数; $F_2(s)$ 是正实函数。

10-5 考尔 I 型: $Z(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^5 + 20s^3 + 64s} = \frac{1}{s + \frac{1}{\frac{1}{10}s + \frac{1}{\frac{20}{9}s + \frac{1}{\frac{9}{70}s + \frac{1}{\frac{35}{9}s}}}}}$

考尔 II 型: $Z(s) = \frac{9 + 10s^2 + s^4}{64s + 20s^2 + s^5}$
 $= \frac{1}{7.11s} + \frac{1}{0.112s} + \frac{1}{1.718s} + \frac{1}{0.022s} + \frac{1}{3.61s}$

10-6 (1) $Z(s) = \frac{10s^4 + 8s^2 + 1}{4s^5 + 10s^3 + 4s}$

(2) 考尔 I 型: $Z(s) = \frac{1}{0.4s + \frac{1}{1.47s + \frac{1}{2.513s + \frac{1}{2.489s + \frac{1}{1.087s}}}}}$

考尔 II 型: $Z(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{1.375s} + \frac{1}{0.628s} + \frac{1}{0.762s} + \frac{1}{1.52s}$

10-7 第一个并联谐振回路元件值为 $L_1 = \frac{1}{2}$ H, $C_1 = 2$ F;

另一回路元件值为 $L_2 = \frac{1}{6}$ H, $C_2 = 2$ F。

10-8 (1) $\rho(s) = \frac{s(s + \sqrt{7})}{s^2 + 3s + 1}, Z_{11}(s) = \frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)} = 5.6458s + \frac{1}{0.3543s + 1}$

和 $Z'_{11}(s) = \frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} = \frac{1}{5.6458s + \frac{1}{0.3543s + 1}}$

(2) $\rho(s) = \frac{s^2 + 2.7689s + 0.3333}{s^2 + 3s + 1},$

$Z_{11}(s) = \frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)} = 8.6533s + \frac{1}{0.1743s + \frac{1}{2}}$

(3) $\rho(s) = \frac{s^2 + 2.7689s + 0.3333}{s^2 + 3s + 1},$

$$Z_{11}(s) = \frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} = \frac{1}{8.6533s + \frac{1}{0.1743s + 0.5}}$$

10-9 (1) $\rho(s) = \frac{\sqrt{7}\left(s + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)}{s^2 + 3s + 1}$, $Z_{11}(s) = \frac{1 + \rho(s)}{1 - \rho(s)} = \frac{1}{0.1771s} + \frac{1}{2.8229s + 1}$ 和 $Z'_U(s)$

$$= \frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} = \frac{1}{\frac{1}{0.1771s} + \frac{1}{2.8229s + 1}}$$

两者均为考尔Ⅱ型实现

10-10 (1) 是, $H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{3}s + 1}$; (2) 和 (3) 都不是。

10-11 $H_a(s) = 3.149 \times 10^{24} (s^5 + 2.568 \times 10^5 s^4 + 3.298 \times 10^{10} s^3 + 2.618 \times 10^{15} s^2 + 1.284 \times 10^{20} s + 3.149 \times 10^{24})^{-1}$

$$L_1 = 7.79 \text{ mH}, C_2 = 0.0204 \mu\text{F}, L_3 = 25.20 \text{ mH}, C_4 = 0.0204 \mu\text{F}, \\ L_5 = 7.79 \text{ mH}$$

10-12 $H_a(s) = \frac{1.219 \times 10^{14}}{s^3 + 6.210 \times 10^4 s^2 + 4.889 \times 10^9 s + 1.219 \times 10^{14}}$
 $L_1 = 32.2 \text{ mH}, C_2 = 0.016 \mu\text{F}, L_3 = 32.2 \text{ mH}$

10-13 $H_a(s) = s^5 (s^5 + 1.610 \times 10^7 s^4 + 1.296 \times 10^{14} s^3 + 6.444 \times 10^{20} s^2 + 1.981 \times 10^{27} s + 3.045 \times 10^{33})^{-1}$

$$C_1 = 325.3 \text{ pF}, L_2 = 124.3 \mu\text{H}, C_3 = 100.5 \text{ pF}, L_4 = 124.3 \mu\text{H}, \\ C_5 = 325.3 \text{ pF}$$

10-14 $H_a(s) = 1.2187 \times 10^{17} s^3 (s^6 + 6.210 \times 10^6 s^5 + 1.186 \times 10^{14} s^4 + 4.903 \times 10^{19} s^3 + 4.672 \times 10^{27} s^2 + 9.630 \times 10^{32} s + 6.107 \times 10^{40})^{-1}$

$$L_1 = 3.035 \text{ mH} \text{ 串联 } C_1 = 8.36 \text{ pF}, L_2 = 2.408 \mu\text{H} \text{ 并联 } C_2 = 0.011 \mu\text{F}, \\ L_3 = 3.035 \text{ mH} \text{ 串联 } C_3 = 8.36 \text{ pF}.$$

10-16 (1) $H_d(s) = \frac{0.9826}{s^2 + 1.0977s + 1.1025}$
(2) $R'_L = 0.25$ 用 II 型结构, 元件值参考表 10-5。

10-17 (1) $H_d(s) = \frac{0.5012}{s^2 + 0.6449s + 0.7079}$

(2) $R'_L = 0.15$, 用 II 型结构, $\rho(s) = \frac{s^2 + 0.2157s + 0.5233}{s^2 + 0.6449s + 0.7079}$
 $Z_{11}(s) = \frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} = \frac{1}{4.650s + \frac{1}{0.3486s + 0.15}}$

10-18 (1) $\Omega_c = 625 \text{ Hz}$ (2) $\Omega_c = 1250 \text{ Hz}$

10-19 (1) $H(z) = \frac{1 + e^{-T} (1 - 2e^{-T}) z^{-1}}{1 - e^{-T} (1 + e^{-T}) z^{-1} + e^{-2T} z^{-2}}$

(2) $H(z) = \frac{1 - e^{-T} \cos(\sqrt{3}T) z^{-1}}{1 - 2e^{-T} \cos(\sqrt{3}T) z^{-1} + e^{-2T} z^{-2}}$

10-21 $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 + a) - (1 - a)z^{-1}}, h(n) = \frac{1}{1 - a} \delta(n) - \frac{2a}{1 - a^2} \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right)^n u(n)$

10-22 (1) $N = 3$ (2) $N = 2$

10-24 (1) $A = \cot\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right), B = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right)}$

ω_{p2} 和 ω_{p1} 分别为带通滤波器上边界和下边界频率

(2) $H(z) = \frac{0.02(1 - 2z^{-2} + z^{-4})}{1 - 1.6368z^{-1} + 2.2376z^{-2} - 1.3071z^{-3} + 0.6414z^{-4}}$

10-26 $W_H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} W_R(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} W_R[e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N-1})}] - \frac{1}{4} W_R[e^{j(\omega + \frac{2\pi}{N-1})}]$

其中 $W_R(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{N-1}{2})} \cdot \frac{\sin(\frac{N}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$

10-28 $h(n) = \frac{2}{\pi(n-\alpha)} \sin[\omega_c(n-\alpha)] \cos[\omega_0(n-\alpha)], \alpha = \frac{N-1}{2}$

10-29 N 为奇数 $h(n) = (-1)^{n-\alpha} \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}, \alpha = \frac{N-1}{2}$

N 为偶数 $h(n) = (-1)^{\lceil n - (\frac{N-1}{2}) \rceil} \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}, \alpha = \frac{N-1}{2}$

10-30 (1) $\frac{C_C}{C_0} = \frac{C_L}{C_0} = 15.91, \frac{C_R}{C_0} = 1.414$

(2) $C_C = C_L = 15.91 \text{ pF}, C_R = 1.414 \text{ pF}$

第十一章

11-1 $\beta < 1$

11-2 $\beta < -1$

11-3 $-\frac{5}{2} < \beta < \frac{3}{2}$

11-4 $\frac{A_1(s)A_2(s)}{1 + A_1(s)F_1(s) + A_1(s)A_2(s)F_2(s)}$

11-5 $A_0(z) + \frac{A_1(z)}{1 + A_1(z)F(z)}$

11-6 $A(s) = \frac{R_2}{R_1}, F(s) = 1$

11-7 $A(s) = K, F(s) = \frac{z_1}{z_1 + z_2}$

11-8 第一种可能是 $A(s) = K$, $F(s) = \frac{z_1}{z_1 + z_2}$

且输入信号要经过子系统 $-\frac{z_2}{z_1 + z_2}$;

另一种可能是 $A(s) = \frac{Kz_2}{z_1 + z_2}$, $F(s) = \frac{z_1}{z_2}$

且输入信号要经过倍乘 -1 。

11-10 当 $K \gg 1$ 且 $(1+K)\omega RC \gg 1$ 时, 可较好地满足近似为积分器的条件

11-11 (1) $H(s) = \frac{1}{s^2 - \frac{g}{L}}$, 极点 $s_p = \pm \sqrt{\frac{g}{L}}$, 其中一极点位于右半平面, 系统不稳定。

(2) $H(s) = \frac{1}{s^2 - \frac{g}{L} + \frac{K}{L}}$, 极点 $s_p = \pm \sqrt{\frac{g-K}{L}}$ 。当 $K < g$ 有一极点在右半平面,

系统不稳定; 当 $K = g$ 在 $s=0$ 处有二阶极点, 系统不稳定; 当 $K > g$ 在 $j\omega$ 轴上有共轭极点, 系统处于边界稳定状态, 倒立摆以无阻尼方式来回摆动。

(3) $H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{K_2 s}{L} + \frac{K_1 - g}{L}}$, 极点位于

$$s_p = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4L(K_1 - g)}}{2L}$$

当 $K_2 > 0$ 和 $K_1 > g$ 时系统稳定。

11-12 (1) 当 $K > -1$ 时系统稳定; 当 $x(t) = \delta(t)$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0; \text{ 当 } x(t) = u(t) \text{ 时,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K+1}$$

(2) 当 $K_1 > -1$, $K_2 > 0$ 时系统稳定; 当 $x(t) = u(t)$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, 系统可跟踪阶跃信号, 而对第(1)问不能跟踪阶跃。

(3) 当 $K_3 > 2$, $K_2 > 0$, $K_1 > -1$, 且 $(K_3 - 2)(K_1 + 1) > K_2$ 时系统稳定(参看习题 11-26 的陈述); 当 $x(t) = u(t)$ 时 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。

11-14 (1) 与实轴交角为 $\frac{l\pi}{3}$, ($l=1, 3, 5$)

(2) 交点值为 $s = -3$

11-15 (2) $K > 20$ 系统不稳定。

11-16 (2) 交点值 $s = -4$

(3) $K > 6$

11-18 当 $(K-b)^2 < 4C$ 时呈圆形, 圆半径为 \sqrt{C} 。

11-19 (2) $K \approx 1.6$ 为边界值, $K < 1.6$ 稳定。

11-20 (1) 在满足 $K > 0$ 之条件下, 奈奎斯特图不可能包围 $-1+j0$ 点, 系统稳定

(2) 同(1)

(3) $K < 4$ 时系统稳定

(4) 同(1)

- 11-21** (1) 由于 $A(s)F(s)$ 在右半平面有一个极点, 可包围 $-1+j0$ 点, $K>1$ 稳定。
 (2) 由于 $A(s)F(s)$ 在右半平面有二个极点, 围线逆时针绕 $-1+j0$ 点二周, $K>2$ 稳定。

- 11-22** (1) $K>-1$ 稳定
 (2) $K>-1$ 稳定
 (3) $K>-1$ 稳定
 (4) $K>-2$ 稳定

- 11-23** $0<K<20$ 稳定

- 11-24** (1) $K<\frac{3}{2}$ 稳定

(2) 由于 $A(z)F(z)$ 在单位圆外有一个极点, 围线绕 $-1+j0$ 点一周, $1<|K|<3$ 时系统稳定

(3) $A(z)F(z)$ 在单位圆外有一个极点, 围线逆时针绕 $-1+j0$ 点一周, $\frac{3}{4}<|K|<\frac{7}{4}$ 时系统稳定。

- 11-25** 对连续系统极点位于虚轴, 对离散系统位于单位圆上, 冲激响应都为等幅振荡。

- 11-26** (1) 否, (2) 是, (3) 否, (4) 否, (5) 是, (6) 有 $-j\omega_0$ 极点位于 $s=0$ 处, 其他在左半。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad H(s) &= \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + H_2 H_3 G_3 + H_3 H_4 G_4 + H_1 H_2 H_3 G_2 - H_1 H_2 H_3 H_4 G_1} \\ \text{(b)} \quad H(s) &= H_1 H_6 (H_2 H_4 + H_3 H_5) / [1 + G_1 H_1 + G_2 (H_4 + H_5) \\ &\quad + G_3 H_1 H_6 (H_2 H_4 + H_3 H_5) + G_4 H_1 H_6 (H_2 H_4 \\ &\quad + H_3 H_5) + G_1 G_2 H_1 (H_4 + H_5)] \end{aligned}$$

$$\text{(a)} \quad H = \frac{ac+e}{1-ab-cd-edb}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{Y}{X_1} = \frac{ae}{1-cd}$$

$$\frac{Y}{X_2} = \frac{bce}{1-cd}$$

$$\text{(a)} \quad H(s) = H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 + H_1 H_6 H_5 (1 - G_3) / [1 - (H_2 G_2 + H_2 H_3 G_1 \\ + G_3 + H_4 G_4 + G_4 G_1 H_6) + H_2 G_2 H_4 G_4 + H_2 G_2 G_3]$$

$$\text{(b)} \quad \Delta = 1 - (H_2 G_2 + H_2 H_3 G_1 + G_3 + H_4 G_4 + G_4 G_1 H_6) \\ + H_2 G_2 H_4 G_4 + H_2 G_2 G_3$$

$$H_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{\Delta} [H_1 H_8 (1 - H_4 G_4 - G_3)]$$

$$H_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{\Delta} [H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 + H_1 H_6 H_5 (1 - G_3)]$$

$$H_{12}(s) = \frac{Y_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{\Delta} [H_7 G_4 G_1 H_8]$$

$$H_{22}(s) = \frac{Y_2(s)}{X_2(s)}$$

$$= \frac{1}{\Delta} [H_7 H_5 (1 - G_3 - H_2 G_2 - H_2 H_3 G_1 + G_2 H_2 G_3)]$$

11-31 $\frac{V_o}{V_s} = -\frac{R_e \beta}{r_{be} + (1+\beta)R_e}$

11-32 $H(z) = \frac{1 + 0.2z^{-1} - 0.2z^{-2}}{1 - 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2} + z^{-3}}$

第十二章

12-1

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 1] & D &= 0 \end{aligned}$$

12-2

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 1] \end{aligned}$$

12-3

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\frac{b}{a}\lambda_1(t) + \lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{c}{a}\lambda_1(t) + \lambda_3(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = -\frac{d}{a}\lambda_1(t) \end{cases}$$

$$r(t) = y(t) = -\frac{b}{a^2}\lambda_1(t) + \frac{1}{a}\lambda_2(t)$$

12-4

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -3\lambda_1(t) + 8e_1(t) + 7e_2(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = 2\lambda_1(t) - \lambda_2(t) + 4e_1(t) + e_2(t) \\ r(t) = 2\lambda_1(t) + 3\lambda_2(t) \end{cases}$$

12-5

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = \lambda_2(n) \\ \lambda_2(n+1) = a\lambda_1(n) + \lambda_3(n) \\ \lambda_3(n+1) = \lambda_4(n) \\ \lambda_4(n+1) = b(a-1)\lambda_1(n) - a\lambda_2(n) + x(n) \\ y(n) = \lambda_1(n) \end{cases}$$

12-6 (1) $a_1 = -a_1, a_2 = -a_2$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

(2) $a_1 = -4, a_2 = -3, \beta_0 = 1, \beta_1 = 2, \beta_2 = -3$

12-7 (a) 状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -c\lambda_1(t) + K\lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = \lambda_3(t) + e(t) - \lambda_1(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = (-a + c)\lambda_1(t) - c\lambda_3(t) + (a - c)e(t) \\ r(t) = \lambda_1(t) \end{cases}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为状态变量。

(b) 选择各一阶系统的状态变量分别以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 表示。状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -b\lambda_1(t) + (c - b)\lambda_2(t) + (b - c)\lambda_3(t) + (c - b)e(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = -a\lambda_2(t) + (a - b)\lambda_3(t) + (b - a)e(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) - (c + 1)\lambda_3(t) + e(t) \\ r(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) - \lambda_3(t) + e(t) \end{cases}$$

12-8 在题图 12-8 中取下列状态变量：接地电感中的电流 λ_1 (方向自上而下)，水平位置电感中的电流 λ_2 (方向自左而右)，电容电压 λ_3 和 λ_4 (方向左正右负)，建立如下状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\frac{R}{2L}\lambda_1(t) - \frac{1}{2L}\lambda_3(t) + \frac{1}{2L}\lambda_4(t) + \frac{1}{2L}e(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = \frac{1}{L}\lambda_3(t) + \frac{1}{L}\lambda_4(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = \frac{1}{2C}\lambda_1(t) - \frac{1}{C}\lambda_2(t) - \frac{1}{2RC}\lambda_3(t) - \frac{1}{2RC}\lambda_4(t) + \frac{1}{2RC}\varphi(t) \\ \dot{\lambda}_4(t) = -\frac{1}{2C}\lambda_1(t) - \frac{1}{C}\lambda_2(t) - \frac{1}{2RC}\lambda_3(t) - \frac{1}{2RC}\lambda_4(t) + \frac{1}{2RC}\varphi(t) \\ r(t) = -\frac{R}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{1}{2}\lambda_4 + \frac{1}{2}e(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = 10e^{2t} - 7e^{3t} \\ \lambda_2(t) = -5e^{2t} + 7e^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \\ (2) \quad \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

12-12 (1) $\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

12-13 设 λ_1 为该城市人口数, λ_2 为外地人口数, n 为年。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(n+1) = (1+\gamma)[(1-\beta)\lambda_1(n) + \alpha\lambda_2(n)] \\ \lambda_2(n+1) = (1+\gamma)[\beta\lambda_1(n) + (1-\alpha)\lambda_2(n)] \end{array} \right.$$

为预测未来人口数, 还需知道某起始年份的人口数 $\lambda_1(0)$ 和 $\lambda_2(0)$ 作为起始条件即可求解。

12-14

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) \\ \lambda_2(n) = \frac{1}{6} \left[7\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] u(n-1) \\ y(n) = h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-1) \end{array} \right.$$

$$(2) y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 2x(n-1)$$

12-15 (1) $a=3$ $b=-4$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(n) = 4(-1)^n - 2(-2)^n \\ \lambda_2(n) = 4(-1)^n - 3(-2)^n \end{array} \right.$$

12-16 (1) $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(n) = [1 + (-1)^n](\sqrt{2})^n \\ \lambda_2(n) = [(1-\sqrt{2}) + (-1)^n(1+\sqrt{2})](\sqrt{2})^n \end{array} \right.$

$$(2) y(n) - 4y(n-2) = x(n) - 4x(n-2)$$

$$(3) y(n) = 3 \cdot 2^n + 2(-2)^n$$

差分方程的特解等于 0

$$12-17 (4) e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & te^{a_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_2 t} & te^{a_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{a_2 t} \end{bmatrix}$$

12-18 (1) 选状态变量为: ① 元件 A 两端的电压为状态变量

$$v_A(t) = \lambda_1(t) = r(t)$$

$$\frac{d}{dt} v_A(t) = \frac{d}{dt} \lambda_1(t) = \lambda_2(t)$$

则元件 A 两端的电流为

$$i_A(t) = \frac{d^2}{dt^2} v_A(t) = \frac{d}{dt} \lambda_2(t)$$

② 取电容 C 上的电压为状态变量 $\lambda_3(t)$

这样选取的状态变量其对应的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = \lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = -20\lambda_1(t) + 20\lambda_3(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = 6\lambda_1(t) - 7\lambda_3(t) + e(t) \\ r(t) = \lambda_1(t) \end{cases}$$

(2) 特征根

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(-5 + j\sqrt{15}) \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}(-5 - j\sqrt{15}) \end{cases}$$

$$(3) \frac{d^3}{dt^3}r(t) + 7\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 20\frac{d}{dt}r(t) + 20r(t) = 20e(t)$$

12-19 证明 P^{-1} 的列向量应是 A 的各特征值所对应的特征向量, 即

$$A\xi_i = \alpha_i \xi_i$$

或

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \alpha_i \\ \alpha_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_i^{k-2} \\ \alpha_i^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_i^k \end{bmatrix}$$

展开左式:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_i^{k-1} \\ -a_k - a_{k-1}\alpha_i - \cdots - a_1\alpha_i^{k-1} \end{bmatrix}$$

由 A 的特征多项式得

$$\alpha_i^k + a_1\alpha_i^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\alpha_i + a_k = 0$$

$$\text{因而 } \alpha_i^k = -a_k - a_{k-1}\alpha_i - \cdots - a_1\alpha_i^{k-1}$$

代入展开式, 即证得左式等于右式。

$$12-20 \text{ 证明 } h_1(t) = \int_0^t C e^{At-\tau} B e(\tau) d\tau |_{e(\tau)=\delta(\tau)} = C e^{At} B$$

$$h_2(t) = \int_0^t B^T e^{-A^T(t-\tau)} C^T e(\tau) d\tau |_{e(\tau)=\delta(\tau)} = B^T e^{-A^T t} C^T$$

$$[h_2(t)]^T = h_2(t) = [\mathbf{B}^T e^{-A^T t} \mathbf{C}^T]^T = \mathbf{C} e^{-At} \mathbf{B} = h_1(-t)$$

12-21 (1) 系统可控,但不可观;

$$(2) H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$12-22 \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

因此,系统不完全可控,完全可观。

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$12-23 \quad (1) \quad \dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{C}} = [0 \ 0 \ 1 \ 1]$$

(2) 不完全可控, 不完全可观。

$$(3) H(s) = \frac{1}{s-4}$$

12-24 (1)

$$\dot{\lambda}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

$$r_2(t) = [0, 0 : 1] \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$$

(2) 该串联系统不可控, 但可观

$$(3) H_1(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

即串联后有零极相消现象。

12-25 证明: (1) 可控性检验矩阵

$$M = (\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \cdots : \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B})$$

可观性检验矩阵

$$N = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$NM = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} (B AB \cdots A^{k-1} B)$$

由给定条件得

$$\det NM = 0$$

或 $\det NM = \det N \det M = 0$ 即可证得。

(2) $H(s) = D$

索引

二 画

二维变换 two-dimensional transform	2, 158, 165
几何级数 geometric series	372
~的求值 evaluation of ~	

四 画

双边 z 变换 bilateral (two-sided) z transform	45
巴特沃思逼近 Butterworth approximation	183
切比雪夫逼近 Chebyshev approximation	191
开关电容滤波器(SCF) Switched-Capacitor Filter	241
开环系统 open-loop system	257
反馈系统 feedback system	256
无源一端口综合 passive one-port synthesis	173
无源二端口综合 passive two-port synthesis	177
双线性变换 bilinear transformation	216
比例-微分(PID)控制 proportional-plus-differential control	299
比例-积分(PI)控制 proportional-plus-integral control	299
比例-积分-微分(PID)控制 proportional-plus-integral-plus-differential control	264, 299
内插公式 interpolation formula	134
内插函数 interpolation function	134, 135
支路 branch	289

五 画

主值序列 principal value sequence	119
主值区间 principal value region	119

凯莱 - 哈密顿定理 Cayley-Hamilton theorem	324, 341
卡尔曼 Kalman	305
正实函数 positive real function	176
可观测性 observability	305, 354
可控制性 controllability	305, 354
功率谱 power spectrum	149
对角线矩阵 diagonal matrix	318
矢量微分方程 vector differential equation	322
矢量差分方程 vector difference equation	340
边界条件 boundary condition	21
边界稳定系统(临界稳定系统) marginal stable system	266, 267

六 画

因果系统 causal system	29
因果性 causality	29
自然顺序 natural order	143
齐次解 homogeneous solution	16
冲激不变法 impulse invariance	212
并矢(并元)卷积 dyadic convolution	158
并矢(并元)相关 dyadic correlation	158
约当矩阵 Jordan matrix	320
达林顿 Darlington	177
同态滤波 homomorphic filtering	106
闭环系统 closed-loop system	257
自激振荡 self-sustained oscillation	266
收敛域(ROC) region of convergence	49
有源滤波器(RC 有源滤波器) active filter	237
考尔 Cauer	174

七 画

库利 - 图基算法 Cooley-Tukey algorithm	111, 145
时移 shifting	123
时间有限信号 time-finite signal	150
快速傅里叶变换(FFT) fast Fourier transform	111, 135
均匀性(齐次性) homogeneity	9
围线积分法 contour integral method	55
极点 pole	55, 84, 85, 98

初值定理 initial value theorem	67
系统函数 system function	82
系统的仿真 simulation of system	286
沃尔什变换 Walsh transform	154
序列 sequence	3
单位样值~ unit sample~	5
(单位冲激~) (unit impulse~)	5
单位阶跃~ unit step~	6
矩形~ rectangular~	6
斜变~ ramp~	6
指数~ exponential~	7
正弦~ sinusoidal~	7
复指数~ complex exponential~	8
周期~ periodic~	117
有限长~ finite length~	117
序列的傅里叶变换(离散时间傅里叶变换 DTFT)	
discrete time Fourier transform	87
状态 state	307
~变量 ~ variable	307
~矢量 ~ vector	307
~空间 ~ space	307
~轨迹 ~ trajectory	307
~方程 ~ equation	309, 331
~转移矩阵 ~ transition matrix	324
即位运算 in-place computation	143

八 画

卷积 convolution	31
卷积和 convolution sum	31
迭代法 iteration method	16
码位倒读(比特倒置) bit-reversal	143
单边 z 变换 single (one) sided z transform	44
终值定理 final value theorem	68
留数 residue	55
软件无线电 software radio	2
奈奎斯特稳定性判据 Nyquist stability criterion	279
罗斯判据 Routh criterion	302

400 索引

帕塞瓦尔定理 Parseval theorem	132
泄漏 leakage	150
转移函数 transfer function	288
范德蒙德矩阵 Vandermonde matrix	21
非奇异矩阵 nonsingular matrix	357

九 画

相关 correlation	131, 149
相加器 summer	10
信号流图 signal-flow graph	286
矩阵的秩 rank of matrix	356
矩阵指数 matrix exponential	322
响应 response	
零输入～ zero-input～	16, 22
零状态～ zero-state～	16, 22
强迫～ forced～	22
自由～ natural～	22
瞬态～ transient～	107
稳态～ steady-state～	94, 95, 107
完全～ complete～	21
单位样值(冲激)～ unit sample (impulse)～	27
阶跃～ step～	41
费班纳西数列 Fibonacci sequence of numbers	15
逆系统 inverse system	262
结点 node	288
输入～(源点) source～	288
输出～(阱点) sink～	288
洛朗级数 Laurent series	45

十 画

样值 sample	3
差分方程 difference equation	11
特解 particular solution	21
特征方程 characteristic equation	17
特征根 characteristic root	17
特征矩阵 characteristic matrix	324
起始值 original value	12
海诺塔 tower of Hanoi	40

倒立摆 inverted pendulum	259
根轨迹 root-locus	270
积分器 integrator	243
流图转置 transpose of flow graph	290
圆周移位 circular shifting	123
圆卷积 circular convolution	125
部分分式展开法 partial fraction expansion method	58
通路 path	289
开～ open～	289
闭～ closed～	289
前向～ forward～	289

十一画

离散时间信号 discrete-time signal	3
离散傅里叶变换 (DFT) discrete Fourier transform	117, 120
离散傅里叶逆变换 (IDFT) inverse discrete Fourier transform	120
离散傅里叶级数 (DFS) discrete Fourier series	117
离散时间傅里叶变换(DTFT 序列的傅里叶变换)	88
discrete time Fourier transform	
离散沃尔什变换 (DWT)	155
discrete Walsh transform	
离散余弦变换 (DCT)	163
discrete cosine transform	
维纳 Wiener	257
混叠 aliasing	151
梅森公式 Mason formula	293
萨林-基 Sallen-Key	238

十二画

窗函数 window function	228, 231
棣美弗 Demoivre	43
幂级数 power series	56
～展开法 ～expansion method	
策动点函数 driving point function	173

十三画

叠加性 superposition property	9
零点 zero	83, 97

频率响应 frequency response	94
频率有限信号 frequency finite signal	150
频率变换 frequency transform	199
解卷积(反卷积) deconvolution	35
数字滤波器 digital filter	171, 209
递归式~ recursive~	221
非递归式~ nonrecursive~	235
有限冲激响应~ finite impulse response (FIR) ~	223
无限冲激响应~ infinite impulse response (IIR) ~	209
数字-模拟转换 Digital-to-Analog (D/A) conversion	2, 171
数字化世界 digitize world	2
数据压缩 data compression	158
输出方程 output equation	310
福斯特 Foster	173, 252

十 四 画

模拟-数字转换 Analog-to-Digital (A/D) conversion	2, 171
稳定性 stability	29
稳定系统 stable system	30
算子 operator	26
移序~ sequency shift operator	26
算子符号 operational notation	26
影像参数法 image parameter method	177

十 五 画

蝶形流程图 butterfly flow graph	139
蝶形计算 butterfly computation	139

参 考 书 目

- [1] 常迥. 无线电信号与线路原理(上册、中册). 北京: 高等教育出版社, 1965
- [2] 管致中, 夏恭恪. 信号与线性系统(第三版). 北京: 高等教育出版社, 1992
- [3] 吴大正, 杨林耀, 张永瑞. 信号与线性系统分析(第三版). 北京: 高等教育出版社, 1998
- [4] 朱钟霖. 信号与线性系统分析. 北京: 中国铁道出版社, 1993
- [5] 张谨, 赫慈辉. 信号与系统. 北京: 人民邮电出版社, 1987
- [6] 范坤生. 信号分析与处理. 北京: 高等教育出版社, 1993
- [7] 吴湘淇. 信号、系统与信号处理(上册、下册). 北京: 电子工业出版社, 1996
- [8] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky with S. H. Nawab. *Signals and Systems* (Second edition). Prentice-Hall, 1997
中译: 刘树棠译. 信号与系统. 西安: 西安交通大学出版社, 1998
- [9] W. McC. Siebert. *Circuits, Signals, and Systems*. The MIT Press McGraw-Hill Book Company, 1986
中译: 朱钟霖, 周宝珀译. 电路、信号与系统. 北京: 科学出版社, 1991
- [10] R. A. Gabel and R. A. Roberts. *Signals and Linear systems* (Third edition). John Wiley and Sons, Inc., 1987
- [11] C. D. McGillem and G. R. Cooper. *Continuous and Discrete Signal and System Analysis* (Third edition). Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1991
- [12] R. E. Ziemer, W. H. Tranter and D. R. Fannin. *Signals and Systems: Continuous and Discrete* (Fourth edition). Prentice-Hall, Inc., 1998
- [13] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Modern Signals and Systems*. Prentice-Hall, Inc., 1991
- [14] A. D. Poularikas and S. Seely. *Signals and Systems* (Second edition). PWS-KNET Publishing Company, 1991
- [15] L. B. Jackson. *Signals, Systems and Transforms*. Addison-Wesley Publishing Company, 1991
- [16] 应启瑜等. 离散时间信号分析和处理. 北京: 清华大学出版社, 2000
- [17] 柳重堪. 信号处理的数学方法. 南京: 东南大学出版社, 1992
- [18] H. Stark, F. B. Tuteur著, 郭庆勋等译. 现代电信理论与系统. (上册、下册), 北京: 人民教育出版社, 1982
- [19] M. Atans 等著, 宗孔德等译. 系统、网络与计算: 多变量法. 北京: 人民教育出版

- 社, 1979
- [20] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer 著, 黄建国, 刘树棠译. 离散时间信号处理. 北京: 科学出版社, 1998
- [21] S. J. Orfanidis. *Introduction to Signal Processing*. Prentice-Hall, Inc., 1996
- [22] A. Papoulis 著, 葛果行等译. 电路与系统——模拟与数字新讲法. 北京: 人民邮电出版社, 1983
- [23] A. Papoulis 著, 毛培法译. 信号分析. 北京: 科学出版社, 1981
- [24] 刘星桥. 电工电子用广义函数. 北京: 电子工业出版社, 1995
- [25] 邹谋炎. 反卷积和信号复原. 北京: 国防工业出版社, 2000
- [26] Harry Y-F, Lam 著, 冯一云, 应启珩等译. 模拟和数字滤波器设计与实现. 北京: 人民邮电出版社, 1985
- [27] 吴麒. 自动控制原理(上册、下册). 北京: 清华大学出版社, 1992
- [28] 戴忠达. 自动控制理论基础. 北京: 清华大学出版社, 1991
- [29] 郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 1990
- [30] C. Sidney Burrus, et al. *Computer-Based Exercises for Signal Processing using MATLAB*. Prentice-Hall, Inc., 1994
- [31] Virginia Stonick, Kevin Bradley. *Labs for Signals and Systems Using MATLAB*. PWS Publishing Company, 1996