

信号与系统

SIGNALS & SYSTEMS

SECOND EDITION

第二版



ALAN V. OPPENHEIM

ALAN S. WILLSKY

WITH S. HAHID HAWAB

刘树棠 译

信号与系统
第二版
Oppenheim, Willsky, Hamid
著
刘树棠 译

西安交通大学出版社

Prentice Hall

制作信息和申明

图书名称：信号与系统（第二版）

Signals & Systems (Second Edition)

作者：Alan V. Oppenheim Alan S. Willsky with S. Hamid Nawab

译者：刘树棠 译

出版：西安交通大学出版社（Prentice Hall 国际出版公司授权）

制作版本：1.0

制作时间：2001 年 9 月 10 日

制作形式：pdf 文件

制作声明：

本电子文档及相关文档，只为本人私人阅读方便而制作，以及极小范围作教学交流使用，不供网路传播。如果不慎流传，并有人通过某些特殊途径偶然获取到本文档，为尊重知识产权，特此敬告：
版权读物，请勿在网路传播！

否则，凡有未经通知本人、未经同意许可，私自传播者，一概跟本人无关，自负其责，特此申明。

联系方式：BookFTP.bbs@bbs.nju.edu.cn or BookFTP@21cn.com

TN911

444130

A78

(2)

信号与系统

(第二版)

奥本海姆

ALAN V. OPPENHEIM

ALAN S. WILLSKY 威尔斯凯

WITH S. HAMID NAWAB 内韦因

刘树棠译

T911
A78
004



00444130

TN911
A78
004

✓

西安交通大学出版社
Prentice-Hall

D 106 32
内容简介

本书全面系统地论述了信号与系统分析的基本理论和方法。全书共 11 章, 内容包括: 信号与系统、线性时不变系统、周期信号的傅里叶级数表示, 连续和离散时间傅里叶变换, 信号与系统的时域和频域特性, 采样, 通信系统, 拉普拉斯和 z 变换以及线性反馈系统。每章都有足够数量的例题和大量精选的习题; 并将习题分列为 4 种栏目, 分属 3 种不同的层次, 便于使用。

本书是在第 1 版基础之上经重新组织, 重新改写并作补充而成, 除保留原书结构新颖, 选材得当, 论述严谨, 条理清楚等特色外, 在某些方面更有所加强, 恰似锦上添花, 堪称反映信号与系统分析当代水平的一部佳作。

本书可作为通信与电子系统类, 自动化类以及全部电类专业信号与系统课程的教材, 也可以供任何从事信息获取、转换、传输及处理工作的其它专业研究生, 教师和广大科技工作者参考。

Alan V. Oppenheim Alan S. Willsky with S. Hamid Nawab: Signals and Systems

Authorized translation from the English language edition published by Prentice-Hall.

Copyright © 1997 Prentice-Hall.

All rights reserved. For sale in Mainland China only.

本文中文简体字版由西安交通大学出版社和美国西蒙与舒斯特国际出版公司合作出版, 未经出版者书面许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封面贴有 Prentice-Hall 防伪标签, 无标签者不得销售。

版权所有, 翻印必究。

(陕)新登字 007 号

信号与系统 (第二版)

ALAN V. OPPENHEIM

ALAN S. WILLSKY

WITH S. HAMID NAWAB

刘树棠 译

责任编辑 白居宪

*

西安交通大学出版社出版发行

(西安市咸宁西路 28 号 邮政编号 710049 电话:(029)2668316)

西安交通大学印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 44.5 字数: 1075 千字

1998 年 3 月第 1 版 1999 年 11 月第 2 次印刷

印数: 6 001—9 000

ISBN 7-5605-0970-3/TN·53 定价: 58.00 元

陕版出图字: 25—1997—036 号

若发现本社图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题, 请去当地销售部门调换或与我社发行科联系调换。发行科电话:(029)2668357, 2667874

译者前言

美国 MIT(马省理工学院)著名教授 Alan V. Oppenheim 等所著“*Signals and Systems*”一书早已为我国广大读者所熟悉。它的第 1 版自 1983 年问世以来,在许多国家已产生了广泛的影响,获得很高的声誉。经过 14 年的普遍使用之后,1997 年又推出了第 2 版;这正是广大从事该方面教学的同仁们早已翘首以待所祈盼的了!相信该书第 2 版的出版,对目前我国各高校正在从事的面向 21 世纪课程体系和内容改革起到一定的借鉴作用。

诚如作者在第 2 版前言中所指出的,第 2 版是在该书第 1 版的基础之上,经过重新组织、重新改写,并作补充而成的;想必这是经过 14 年广泛使用之后,吸收考虑了各方面意见的结果。全书结构仍为 11 章,变动较大的是前 6 章。这就是:将原书第 1 章(绪论)抽出,另作新版的绪论处理;原书的第 4~6 章,重新组织为新版的第 3~6 章。在内容上则是将原书第 4、5 章的傅里叶级数表示部分单独抽出另立为新版的第 3 章,同时将原书的第 6 章(滤波)的内容拆开,分别融入有关章节中,并将信号与系统的时域和频域特性之间的关系这一重要概念另立一章(第 6 章)作专门论述。另外,还将第 1 版第 7 章(调制)和第 8 章(采样)的次序作了交换,并将章名“调制”改为“通信系统”。以上就是第 2 版所反映的“重新组织”的主要方面。由于在前 6 章中结构上有较大的变化,加之各章内容都有新的补充,因此全书重新改写也就是必然的了。全书在正文内容上,除了第 11 章外,都有不同程度的补充。个别地方也有删除(如原书第 10 章第 8 节“连续时间和离散时间系统之间的变换”,在第 2 版正文中被删除),但补充的内容仍多于删除的。第 2 版补充最多的当属正文中的例题和各章末的习题部分。全书例题由原来的 99 个增加到 195 个,而习题则由原来的 382 道题增加到现在的 668 道题。并且,将数量大、类型各异、难易差别悬殊的习题分成 4 种栏目:基本题(附答案)、基本题、深入题和扩充题;分属 3 种不同的层次。最后,第 2 版在符号上也作了相应的变化,不再在符号上区分连续域和离散域中的频率(除 7.4 节外),而仅以 $X(j\omega)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 和 $H(j\omega)$ 与 $H(e^{j\omega})$ 来区分两类信号与系统。

第 2 版作者为什么要作这样的重组和变化,读者可从该版前言中略见其详。有一点是肯定的,经重组、重写和补充的结果,总是要比第 1 版更趋于合理和完善,犹如锦上添花,更加便于教和学;但具体到每一处的变动,仍然有一个“仁者见仁,智者见智”的问题。

总的来说,第 2 版仍保留了第 1 版的基本特色(连续与离散并行,将基本理论和方法着重在通信、采样、连续时间信号的离散时间处理以及控制系统等方面的应用),涉及的主要内容和该书的适用范围均无大的变化。根据译者多年使用第 1 版所积累的经验,再结合第 2 版翻译过程所得到的体会来看,第 2 版至少在以下几个方面得到了进一步地加强。首先,部分内容的增删和调整是合适的。例如,将第 1 版中第 6 章(滤波)的内容不再另辟一章是明智的。这样做既紧密结合了有关内容,又避免了原书第 6 章内容的单薄;单边拉普拉斯和 z 变换都适当加强,解决了第 1 版该方面内容易教不易学的矛盾;在通信系统应用中,适当地增加了数字通信和码间干扰的基本概念,也是符合当前发展趋势的。第二,由于例题和习题的大量增加和分类,使该书在教与学两方面都更便于使用。例题的增加,一方面是紧密结合基本内容(概念与方法)的应用;另一方面也减缓了对某些较抽象概念理解上的梯度。因此,例题的增加使教材的可读性增强。习题的分类,是所有使用过第 1 版的教师和同学所期盼的。最后,作为核心

(主干)课程的教材,第2版的基础性得到进一步地加强。例如,信号与系统的时域和频域特性之间的关系单立一章是很有创见性的;在引入码间干扰概念中,从最一般的机理上阐述了为消除码间干扰而进行信道均衡的基本原理,而不只是就事论事。

译者曾在10多年前就建议过,“‘信号与系统’这门课的开设对象与涉及的内容,应该从传统的所谓无线电技术专业跨出去,部分电子学类专业、电机类专业、乃至部分机械、动力和力学类专业都应该在不同深度上开设这门课。”今天,我们高兴地看到,传统的无线电技术专业名称早已不复存在,清华大学早就在全部电类专业开设了这门课,西安交通大学也于两年前在全部电类各专业开设此课,并作为院定必修课。在目前进行的面向21世纪的教学改革中,加强素质培养,淡化专业,拓宽基础,提倡不同专业领域的交叉与渗透等已成了不可扭转的大趋势。深信该书第2版中译本的正式出版定会起到应有的作用。

第2版的篇幅比第1版增加了20%,其中正文部分和习题的篇幅几乎各增加了20%。除最后索引部分外,都按原著译出。考虑到英文索引的编制与中文有很大的不同,加之目录已十分详尽,再另编中文索引似无必要。为节省篇幅,征得出版社同意,将索引部分略去。原书共有标以图号的图567幅,均由计算机做成,原图清晰、美观,但图中坐标、符号等标注,均用正体字母给出,与正文中使用的斜体字母不一致,不符合我国出版规定。由于图量大,时间紧,重新描图或在原图上贴以斜体字母都难以确保质量,出版社经慎重研究,除图中英文说明贴以汉字外,其余均不作改动。以上两点,在此特作说明。

该书中译本由西安交通大学出版社与 Prentice-Hall, International Ltd. 联合出版发行。在中译本即将出版之际,应该特别提及西安交通大学出版社社长杨鸿森教授,没有他的远见卓识,富于开拓进取和始终不渝地支持,该书中译本是难以如此快地与中国读者见面的,译者对此表示诚挚地谢意。在该书的编辑过程中,始终得到了责任编辑白居宽副编审的大力支持和有效帮助,合作得十分和谐。西安交通大学人文学院副院长,英语系王监龙教授,常常在关键时刻指点迷津。西安交通大学电子与信息工程学院信息与通信工程系朱世华教授也给予过帮助。我的研究生崔吉青及王红光同学在译稿的准备过程中都做了不少有益的工作。译者谨对所有曾给予过支持和提供帮助的同志表示深深地谢意。最后应该特别提起的是,这是一部工作量极大的译作,没有我的老伴,西安交通大学信息与通信工程系孙满教授的支持、鼓励、帮助和忍耐精神是不可能完成的,感谢她在1997年那个令人难熬而又漫长的酷暑始终与我同行,做了大量的工作。

在本书的翻译过程中,已经发现原书有80多处错误,但其中绝大部分属录入和排版中的疏漏,因此在中译本中未给予标注。但也有少量错误,这些都在译文中以“译者注”标出。译者已将发现的各种错误汇集成立表格,分别用电子邮件和传真发给 Alan V. Oppenheim 教授,并得到他的积极响应。

由于全书篇幅太大,时间仓促,加之译者水平又有限,错误和不妥之外,当属难免,恳望读者批评指正。

刘树棠

1997年11月于西安交通大学

前　　言

本书是用于大学本科信号与系统课程教科书的第二版。虽然这类课程通常属于电气工程类的课程,但是,作为该课程核心的一些基本概念和方法,对于所有工程类的专业来说也都是很重要的。事实上,随着工程师们面临着需要对一些复杂的过程进行分析或综合的新挑战,信号与系统分析方法潜在的和实际的应用范围都一直在扩大着。为此感到,信号与系统方面的课程不仅是工程教学中一门最基本的课程,而且也能够成为工程类学生在大学教育阶段所修课程中最有得益而又引人入胜和最有用处的一门课。

关于信号与系统课程的处理和论述的基本宗旨和看法,第二版与第一版相同,但是在内容的组织和选取上有较大的变化,基本上属于重写和重新组织,并有较多的补充。这些变化的目的在于有助于教师讲授这门课和学生掌握这门课的内容。在第一版的前言中曾提到过,由于在信号与系统设计和实现手段上的持续不断地发展,对于学生来说,需要对连续时间和离散时间系统的分析与综合技术都很熟悉,这一点是日益显得更为重要。当我们来写第二版前言的时候,这样一个看法和指导原则甚至比以前更加确信无疑。这样,学习信号与系统的学生成不仅要在基于物理学定律的那些课程上应该具有坚实的基础,而且在使用计算机进行现象分析和系统及算法的实现上也必须具备扎实的基础。结果,在现在的工程类课表中就反映出一些混杂的课程,有些是涉及连续时间模型的,而另一些又主要是针对计算机应用和离散表示的。因此,在工程类学生的教育中以及在他们所选定的领域,为现在和将来的发展作准备上,以一种统一的方式,在信号与系统课中将离散时间和连续时间的概念揉合在一起显得日益重要。

正是本着这些目的,该书以并行的方式建立了连续时间和离散时间信号与系统的分析方法。这一途径在教学上也是十分可取的,它可以利用连续和离散时间方法之间的共同点来分享各自所获得的理性和感性认识;而两者之间的差异又可用来加深理解各自不同的独特性质。

在材料组织方面(无论是第一版还是第二版),我们还认为本书所论述的基本方法在某些重要方面的应用也应该作为基本的东西介绍给学生。这样做不仅是让学生了解到目前所学内容的某些应用方面和进一步研究的方向,而且还有助于加深对问题本身的理解。为此,就滤波、通信、采样、连续时间信号的离散时间处理,以及反馈等方面的内容都作了入门性介绍。事实上,第二版的主要变化之一就是将频域滤波概念更早地在傅里叶分析中就给以引入。其目的既是为了给出讨论傅里叶分析这一重要论题的初衷,又可以对这一论题加深理解。另外,为了帮助愿意继续在信号与系统分析方法和应用方面深入学习的学生,书末还附有最新的参考文献目录。

我们相信,要全面掌握这门课,没有一定数量且能应用这些基本方法的练习是不可能完成的。因此,在第二版中大大增加了各章例题的数量。同时,还将第一版所具有的最为珍贵的一点——各章末丰富多彩、类型各异的习题,作了进一步加强,使得习题的总数多达 600 多道,其中大多数习题都是新的。这样就为教师安排课外作业提供了更多的灵活性。另外,为了对学生和教师更好地使用这些习题,对这些习题的组织安排上作了一些变化。特别是把各章末的习题分成几种类型,其中每种类型的题都覆盖了全章的内容,但具有不同的目的。前两部分习题是着重于各章基本概念和方法的应用,其中的第一类标以“基本题(附答案)”,答案(不是题解)在书末给出。这些答案以一种简单而即时的方式给学生验证一下他们对内容的理解程度。

这部分题一般是适合于作为课外作业布置的。另外,为了给教师布置课外作业有某些灵活性,还提供了另一套不附给答案的基本题。

各章末标以“深入题(Advanced Problems)”的是第三种类型的题。这部分题是根据教材内容的基本原理和真正内涵进行深入钻研和进一步发挥的题。这些题往往涉及一些数学推导以及在各章中所提到的概念和方法的更深层次的应用。在某些章中还列了称之为“扩充题(Extension Problems)”这样一种类型的题,这类题要么是涉及本章内容的扩充,或者是其他方面的应用(例如一些更高级的电路或机械系统),而这些都是超出课程内容的。在习题方面总的变化都是希望给学生提供一些途径来加深理解各章的内容;同时也为教师布置课外作业提供更多的灵活性,并对不同要求的学生提供因材施教的余地。对于讲授本门课的教师可以通过出版社获得习题的题解。

第二版另一个突出的特点是为它提供了一本与之配套的书《Exploration in Signals and Systems Using MATLAB》(由 Buck, Daniel 和 Singer 编写)。这本书包括了课文中每个专题的计算机作业 MATLABTM。这本书无论对教师或是学生来说都应有很大的帮助。

使用本书的学生,假定已具有基本微积分学方面的基础,有进行复数运算的能力,以及在微分方程方面也有某些接触。有了这些基础以后,本书就自成体系了,尤其是不需要事先具备系统分析、卷积、傅里叶分析或拉普拉斯变换和 z 变换等方面的知识。在学习信号与系统课之前,大多数学生或许都上过适合于电气工程师们所要求的基本电路课,或者是针对机械工程师们所用的动力学原理这样的课;这些课都多少接触一些本书将要给予深入讨论的那些基本概念。在学习本书时,这些基础很显然对于学生深入理解本书内容都会有很大的帮助。

紧接着前言的是简短的绪论。它是要给读者概述一下有关对信号与系统课的出发点和看法,特别是我们对这一问题的观点和处置。第 1 章从介绍与信号和系统的数学表示有关的某些基本概念入手,特别是讨论了一个信号独立变量的某些变换(如时移和尺度变换),接着介绍了某些最重要的基本连续时间和离散时间信号,即实指数和复指数信号、连续时间和离散时间单位阶跃和单位冲激信号等。第 1 章还介绍了系统互联的方框图表示,并讨论了几个基本的系统性质,如因果性、线性和时不变性。第 2 章是在上述最后两个性质的基础上,再结合单位脉冲的移位性质来建立离散时间线性时不变(LTI)系统的卷积和表示,以及连续时间 LTI 系统的卷积积分表示。在这里,我们是采用从导出离散时间情况所得到的直观认识,来导出并理解在连续时间情况下所对应的结论的。然后把问题转到讨论由线性常系数微分及差分方程所表征的因果 LTI 系统上来。在初步讨论中复习了涉及解线性微分方程的一些基本方法(大多数学生对此都会有某些接触),并对线性差分方程的类似解法作了讨论。然而,第 2 章讨论这些问题的主要着眼点不是在求解的具体方法上,因为稍后将要讨论的利用变换法求解将更为方便。我们的意图是首先让学生对于这个极为重要的系统具有某些了解,因为在以后的各章中将会经常遇到这类系统。最后,第 2 章以简短讨论奇异函数(阶跃、冲激和冲激偶等等)及其在描述和分析连续时间 LTI 系统中的作用作为结束。在讨论中特别强调如何在卷积的意义下定义并解释这类信号,也就是说利用 LTI 系统对这些理想化信号的响应来理解这些奇异信号。

第 3 章到第 6 章完整地建立了连续和离散时间的傅里叶分析方法。这一部分在第二版中做了很大的重新组织和改写。尤其是如在前面已经指出的,把频域滤波的概念比较早地作了介绍,这是为了给傅里叶方法的讨论提供具体应用背景和初衷。正如在第一版中所提到的,在

第3章一开始就指出傅里叶分析在连续和离散时间信号与系统研究中所起的重要作用都是从强调并说明如下两个基本理由入手的：(1) 相当广泛的一类信号都可以表示成复指数信号的加权和或加权积分；(2) LTI系统对复指数输入信号的响应就是同一复指数信号乘以该系统的复数特征值。然而，与第一版不同是，第3章关注的焦点是放在连续时间和离散时间周期信号的傅里叶级数表示上。这样做的结果，我们就不仅介绍并研究了傅里叶表示的许多性质而勿需要求另外数学上的一般化以得到非周期性信号的傅里叶变换，而且还能够在更早的时候引入在滤波方面的应用。尤其是利用复指数是LTI系统的特征函数这一点，可以引入LTI系统频率响应，并利用它来讨论频率选择性滤波的概念，介绍理想滤波器以及由微分和差分方程描述的几个非理想滤波器的例子。以这种方式就可以用最少的数学准备给学生关于傅里叶表示的内涵，以及对为什么它是如此有用的一个概念得到较深入的理解。

第4章和第5章是建立在第3章讨论的基础之上的。首先在第4章研究了连续时间傅里叶变换，并以平行的方式在第5章研究了离散时间傅里叶变换。在这两章中都是采用将一个周期信号的周期任意趋大时求其傅里叶级数的极限来导出非周期信号的傅里叶变换表示的。这种观点强调了傅里叶级数和傅里叶变换之间的密切关系，这种关系将在后续的几节中作进一步地讨论。这样就能够把在第3章所得到的傅里叶级数的直观认识转移到更为一般的傅里叶变换上来。这两章都讨论了傅里叶变换的很多性质，并且特别强调了卷积性质和相乘性质。特别是卷积性质给频率选择性滤波这样的论题提供了另一个审视的角度，而相乘性质则是后续各章有关处理采样和调制的出发点。最后，第4和第5章的最后一节都是利用变换法来确定由微分和差分方程所描述的LTI系统的频率响应，并用几个例子来说明傅里叶变换是如何用来计算这样一些系统的响应的。为了补充这些讨论（以及后面拉普拉斯变换与z变换的讨论），再次将部分分式展开法的讨论作为附录放在书末。

在这两章中是以并行的方式来处理傅里叶分析的。具体地说，在第5章的讨论中可以利用许多在第4章对连续时间情况下所获得的概念和细节，直到第5章结束都强调了连续时间和离散时间傅里叶表示的完全对偶关系；同时，也用对比两者的不同点来加深对各自特殊性质的理解。

熟悉第一版的人会注意到，第二版中第4章和第5章的篇幅是大大地少于第一版中所对应的两章。这不仅仅是由于现在把傅里叶级数放在单独一章来讨论，而且还将几个内容移到了第6章。我们相信这样的安排有几个明显的好处。首先，在三个较短的章中讲授傅里叶分析的基本概念和结果，再与频率选择性滤波概念的引入结合在一起，应该有助于学生总结他们对这些内容掌握和理解的程度，建立有关对频域的某些直观认识及其潜在的应用价值。有了第3章到第5章的基础，就可以更详细地讨论几个重要的问题和应用。第6章比较深入地研究了LTI系统的时域和频域特性。例如介绍了频率响应的幅相特性及波特图表示，并讨论了频率响应中的相位特性对LTI系统输出时域特性上的影响。另外，还研究了理想和非理想滤波器的时域和频域特性，以及在两者之间如何求得折衷，而这一点在实际应用中是必须要给予重视的。我们还仔细地分析了一阶与二阶系统，以及它们在连续和离散时间复杂系统的综合和分析中作为基本构造单元所起的作用。最后，分别在连续时间和离散时间系统中讨论了几个较为复杂的滤波器例子。这些例子再与本章习题中所用的很多其它滤波方面的问题结合在一起，就能够给学生呈现出这样一个重要的领域是多么丰富多彩和饶有趣味。虽然在第6章所提出的问题在第一版中都提到了，但是我们相信在紧接着傅里叶分析基本建立之后将它们

重新组织到单独一章中,既可简化在第3章到第5章引入这一重要论题的麻烦,又可以把时域和频域这一重要论题在第6章以一种更为紧密的关系呈现出来。

根据大多数使用第一版教材用户的意見和偏爱,这一版在傅里叶变换讨论中所用的符号已作了一些修改,以便与大多数在连续时间和离散时间傅里叶变换中所用的符号取得更为一致。具体地说,在第3章一开始就将连续时间傅里叶变换记作 $X(j\omega)$,离散时间傅里叶变换记作 $X(e^{j\omega})$ 。但是,就符号选取而言,对傅里叶变换用什么符号表示并不存在唯一的最好选择。不过,我们以及我们的大多数同行都感到这一版所用的符号更为可取。

第7章采样问题的处理主要着重在采样定理及其含义上。然而,为了正确提出这一问题,采用了从讨论连续时间信号的样本来表示信号和利用内插来重建信号的一般概念入手。在利用频域方法导出采样定理以后,对欠采样(Undersampling)下的混叠现象既从频域又从时域的角度都作了直观的解释。采样的一种很重要应用是在连续时间信号的离散时间处理上,本章在这一问题上的阐述花了一定的篇幅。紧接着把问题转向离散时间信号的采样上来,并用在连续时间下讨论所采用的相同方式来建立离散时间采样的基本结果,以及这些基本结果在抽取和内插问题中的应用。连续时间和离散时间采样的其它各种应用仍将在习题中给出。

熟悉第一版的读者再次注意到这一版的另一个变化,这就是将采样与通信系统提出次序颠倒了一下。在第二版中将采样放在通信系统之前,一方面是由于能够借助于采样的直观性来提出并描述采样过程和样本重建过程;另一方面也是由于这样的安排便于在第8章中更容易地谈及通信系统的类型,因为它们是与采样密切相关的,或者是基本上依赖于利用要被传送信号的采样结果。

第8章讨论的通信系统包括一定深度地讨论了连续时间正弦幅度调制(AM)。这是从直接利用相乘性质来叙述正弦AM在频域中的效果入手的,并讨论了如何能把原始调制信号恢复出来的原理。接着,讨论了与正弦调制有关的几个问题和应用,其中包括频分多路复用和单边带调制。在习题中还涉及到更多的例子和应用。在第8章中还包括了其它几个论题。其中之一是脉冲串幅度调制和时分多路复用,这些是与第7章采样问题有直接联系的。的确,我们将这种联系弄得更加明显,并且通过介绍和简短地讨论脉冲幅度调制(PAM)和码间干扰,初步涉猎到数字通信这一重要领域。最后讨论了频率调制问题,这只是使读者对非线性调制问题有一个初步的接触。虽然FM系统的分析不像AM系统那样来得直接,但是对FM的初步讨论指出了如何能够利用频域的方法来获得对FM信号和系统特性的实质有足够的了解。通过这些讨论,以及在本章习题中所用到的很多其它调制和通信系统方面的问题,我们相信,学生能够对于通信领域的丰富内容以及信号与系统分析方法在其中所起的核心作用得出应有的评价。

第9和第10两章分别讨论拉普拉斯变换和z变换。虽然在这两章的最后一节也讨论了这两种变换的单边形式,及其在非零初始条件下求解微分和差分方程中的应用,但是大部分篇幅都是集中在双边变换上。其内容包括:拉普拉斯变换和z变换与傅里叶变换之间的关系;有理函数一类的变换及其用零极点的表示;变换的收敛域与被变换信号特性的关系;利用部分分式展开求反变换;根据零极图对系统函数和频率响应作几何求值以及变换的基本性质等等。另外,在每一章还分别利用这两种变换对LTI系统的系统函数的性质和应用进行了讨论,其中包括由微分和差分方程表征的系统及系统函数的确定;利用系统函数的代数关系来构成LTI系统的互联以及具有有理系统函数的系统,其级联型、并联型和直接型方框图表示的构成

等。

拉普拉斯变换和 z 变换工具是研究第 11 章反馈系统的基础。本章以反馈系统的几个重要应用及其性质入手,其中包括稳定一个不稳定的系统,设计跟踪系统和降低系统灵敏度等方面的应用。在随后的几节中,将利用前面各章所获得的方法来研究在连续时间和离散时间反馈系统中具有重要意义的三个问题。它们是:根轨迹分析法,奈奎斯特图和奈奎斯特准则,以及对数幅/相图和稳定的反馈系统相位和增益裕度的概念。

信号与系统这一学科的内容极为丰富,有各种可能的途径和方式来进行取材以形成该方面一门基本课程的内容。第二版和第一版一样,我们的意图就是要给教师在组织该方面课程教学时有很大的灵活性。为使该书对教师具有这样的灵活性和最大的可用性,我们对大多数在信号与系统方面的基本课程中的核心内容都作了全面而深入的讨论。为达到此目的,就有必要删去另外一些内容,譬如随机信号和状态空间方法的讨论,而这些内容有时也放在信号与系统方面的第一门课中。很多学校传统上是不把这些内容放在这类基础性质的课程中的,而宁可放在大学本科生的后续课程,或者是专门研究这些问题的课程中去作更深入的讨论。虽然本书没有包括状态空间内容的介绍,但是讲授此类课程的教师可以很容易地将它们吸收到有关微分和差分方程问题的讨论中去。特别是,在第 9 和第 10 章有关有理系统函数系统的方框图表示的讨论,以及具有非零初始条件下单边变换在解微分和差分方程上的应用的讨论中,都可以很自然地引进状态空间表示的内容。

适当深度地选用本书第 1 到第 5 章的有关内容(其中有些内容可根据教师本人的意见作些删除),再从余下的各章节中挑选一些专题就可以构成二、三年级程度的一学期课程的典型内容。例如,一种可能的作法是从第 6 到第 8 章选取几个基本问题,再带上拉普拉斯变换和 z 变换的内容,或许再加一点有关系统函数的概念在分析反馈系统中的应用等。还有其它的各种组成方式,其中包括把状态空间的简单介绍吸收进来,或者更多的侧重点是放在连续时间系统上,而把第 5 章和第 10 章以及第 3,7,8 和第 11 章中有关离散时间的内容均放在次要地位都是可能的。

除了上面提到的那些可能的剪裁方式以外,这本书还可用作两学期的线性系统课的基本教材。或者,在信号与系统方面第一门课中本书没有使用过的部分,再结合一些别的内容就可以形成一门后续课程的基本内容。例如本书的很多内容都是可以和诸如状态空间分析、控制系统、数字信号处理、通信系统及统计信号处理等方面的课程直接相衔接的。因此,一门后续课程就可以使用本书的某些内容,再结合某些补充材料来组成,以便作为一门或多门高年级课程的入门课。事实上,在 MIT 一直就是这样做的;并且已经证明,这类新的课程在我们的学生当中不仅仅成为一门受欢迎的课程,而且还是我们信号与系统类课程中关键的一部分。

和第一版一样,在我们写这本书的过程中一直有幸得到很多同事、学生和朋友们的帮助、建议和支持。构成本书核心部分的想法和观点一直是我们在讲授信号与系统课的亲身经历中和很多与我们共事的同事和学生们的影响下演变而成的。感谢 Ian T. Young 教授对本书第一版所作出的贡献,感谢并欢迎 Hamid Nawab 教授在第二版中例题和习题的重新组织、完善和扩充中所作的一切。对 John Buck, Michael Danial 和 Andrew Singer 也表示深深地谢意,他们为本教材写了配套的 MATLAB 教材。感谢 Jason Oppenheim 为本书提供了他的一张原始照片和 Vivian Berman 为封面设计的完成所提供的设想和帮助。同样如在致谢页中所列出的,对于许多学生和同事为第二版的出版在多个方面付出的巨大努力表示深深地谢意。

Ray Stata 先生和 **Analog Devices** 公司通过“电气工程杰出教授席位(**Distinguished Professor Chair in Electrical Engineering**)”基金对信号处理和本书所作出的慷慨而持续不断地支持表示最诚挚地感谢。感谢 **MIT** 所提供的支持，并为我们创造灵感提供了一个令人鼓舞的氛围。

来自 **Prentice-Hall** 特别是 **Marcia Horton, Tom Robbins, Don Fowley** 及其他的前任，**TKM Productions** 的 **Ralph Pescatore** 及 **Prentice-Hall** 的全体生产成员的鼓励、技术支持和热忱帮助一直是这本第二版得以付诸实现的关键。

Alan V. Oppenheim (A. V. 奥本海姆)

Alan S. Willsky (A. S. 威尔斯基)

Cambridge, Massachusetts (马省·剑桥)

致 谢

在第三版的出版过程中，非常荣幸地得到很多同事、学生和朋友们的帮助，费去了他们大量的宝贵时间，对此表示深深地谢意。他们是：

Jon Maira 和 **Ashok Papot** 帮助制了很多图和照片翻版。

Babak Ayazifar 和 **Austin Frakt** 帮助更新和重新编汇了参考文献。

Ramamurthy Mani 做了本书的题解并帮助制作了不少图。

Michael Daniel 协调、管理和操作了 **LaTeX** 文件，该文件存放于在第三版形成和修改过程中的各种原稿。

John Buck 全部阅读了第二版的原稿。

Robert Becker, Sally Bemus, Maggie Beucler, Ben Halpern, Jon Maira, Chirag Patel 和 **Jerry Weinstein** 为本书完成了各种 **LaTeX** 原稿。

以下各位帮助仔细校对了清样

Babak Ayazifar	Christina Lamarre
Richard Barron	Nicholas Laneman
Rebecca Bates	Li Lee
George Bevis	Sean Lindsay
Sarit Birzon	Jeffrey T. Ludwig
Nabil Bitar	Seth Pappas
Anne Findlay	Adrienne Prahler
Austin Frakt	Ryan Riddols
Siddhartha Gupta	Sekhar Tatikonda
Christoforos Hadjicostis	Shawn Verdout
Terrence Ho	Kathleen Wage
Mark Ibanez	Alex Wang
Seema Jaggi	Joseph Winograd
Patrick Kreidl	

绪 论

信号与系统概念出现在范围广泛的各种领域中,与这些概念有关的思想和方法在很多科学和技术领域起着重要的作用,例如在通信、航空与宇航、电路设计、声学、地震学、生物工程、能源产生与分配系统、化学过程控制及语音处理等方面。虽然在各个不同的领域中所出现的信号与系统的物理性质是很不相同的,但全都具有两个基本的共同点:即作为一个或几个独立变量函数的信号都包含了有关某些现象性质的信息;而系统总是对给定的信号作出响应而产生出另外的信号,或是产生某些所需要的特性。电路中作为时间函数的电压和电流就是信号的例子,而一个电路本身就是一个系统的例子,这时该电路就是对外加电压和电流作出响应。另一个例子就是当汽车驾驶员踏油门时,汽车的反应就是加速,这时系统就是这部汽车,油门板上的压力就是系统的输入,汽车的速度就是响应。自动诊断心电图的计算机程序也可以看作是一个系统,该系统的输入是数字化了的心电图数据,而输出就是参数估值如心跳率等等。一架照相机也是一个系统,该系统接受来自不同光源和物体反射回来的光信号而产生一幅照片。一个机器人手臂也是一个系统,它的动作就是控制输入的响应。

在出现的这些信号与系统的很多方面,存在有各种各样具有重要意义的问题。在某些情况下,对某个特定的系统关注地是如何详细地知道系统对各种不同输入的响应。例如某一电路的分析是为了对该电路对不同的电压和电流源给出定量的响应;而一个飞行器是既要对飞行员的各种命令,又要对不同的风力大小确定响应。

信号与系统分析的另一个问题不是分析已有的系统,而是把重点放在系统的设计上,所设计的系统要求以特定的方式来处理信号。出现这样问题的一个最普遍的场合是要设计一个系统以便增强或恢复以某种方式被污损了的信号。例如,当领航员与地面空中交通控制塔通讯时,通讯就可能受到驾驶舱内严重背景噪声的影响。在这种或很多其它类似情况下,有可能设计出一种系统用来保留所要求的信号(这时就是领航员的声音),而抑制掉(至少是近似地)不需要的信号,即噪音。在一般图像恢复和图像增晰的领域也能找到类似的目的。例如,由于摄像设备的限制、大气层的影响、以及在信号传回到地面过程中引起的误差等因素,来自大气深层空间或地球观测卫星所摄取的物景照片就会受到污损,因此照例总是要对从空间返回的图像信号进行处理以补偿某些被污损的部分。另外,有时需要对这些照片的某些特征予以增强,例如增强河床或断层的线条,以及增强那些在颜色上或黑白程度上有较明显差别的区域边界等。

除了增晰和恢复外,在许多应用中需要设计一个系统用来提取信号中某种特定的信息。从心电图中估计心率就是其中一个例子,经济形势预测则是另一种例子。例如,有一组以往经济上的数据(如一组股票市场的平均值),希望从分析这组数据来预测将来的趋势和其它一些特性,如周期性的变化,而这些变化可以用来对将来的走向作出预测。而在另外一些应用中,重点可能是放在具有某些特别性质的信号设计上。具体地说,在通信应用中,相当大的注意力是放在设计信号上以满足可靠传输所提出的限制和要求。例如经由大气层的远距通信就要求使用电磁波频谱中某一特别部分频率的信号。通信信号的设计还必须考虑在经由大气层传输引起的失真和由其他用户发射的其它信号的干扰同时存在的条件下可靠接收的问题。

信号与系统分析概念和方法的另一类重要应用是用来改变或控制某一已知系统的性能,

这或许是通过选择特定的输入信号,或者利用该系统与其它系统的组合来完成的。用于调节化学处理工厂的控制系统的设计就属于这类应用的例子。这种类型的工厂安装了各种传感器用来检测诸如温度、湿度、化学成分等这些物理信号,控制系统根据测得的这些传感器信号,调节像流速和温度这些量以控制正在进行中的化学过程。飞机自动驾驶仪的设计和计算机控制系统代表了另一类例子。在这种情况下,飞机控制系统利用测得的飞行速度、高度和航向等这些信号来调节油门大小、方向舵和副翼的位置等这样一些变量,以保证飞机沿着指定的航线平稳地飞行并增强对驾驶员命令的反应程度。在以上两个例子中,称之为反馈这样一个重要概念起了重要的作用,因为已测得的信号被回授并用来调节一个系统的响应特性。

以上所提到的只是信号与系统概念极为广泛应用的几个方面。这些概念的重要性不仅仅来自于它们存在于各种各样的现象和过程中,而且也由于这一整套概念、分析技术和方法论一直是并仍在继续不断地发展着用来解决涉及各种信号与系统方面的许多问题,它的发展历史可以追溯到很多个世纪以前。虽然大部分工作都是由某些具体应用促成的,但是,其中很多概念已在远比当初所预计的应用领域要大得多的范围内证明是头等重要的。例如,作为信号与系统频域分析的基础,本书拟将详细讨论的傅里叶分析方法,其发展可以追溯到从古代巴比伦人(**Babylonians**)对天文学的研究直到18,19世纪在数学物理学方面的研究。

上面提到的例子中,有些信号是随时间连续变化的,而另一些则仅仅在离散时间点上有值。例如,在电路分析和机械系统中遇到的信号都是随时间连续变化的;而另一方面,每天股票市场的收盘值(即每日停业前的值)就是一个在离散时间点上变化的信号。不像一个连续变量函数的曲线那样,每日收盘的股票值是在给定的离散时间点上的一串序列值。由于对这两类信号的描述以及对这些信号作出响应或处理的系统的描述,都有着明显的不同,这就自然导致了两种并行的信号与系统的分析范畴,其一就是以连续时间描述的现象和过程,另一个则是以离散时间描述的现象和过程。

有关连续时间信号与系统和离散时间信号与系统的概念和方法都有着悠久的历史,而且在概念上是戚戚相关的。然而在历史上由于两者在应用上各行其道,因此它们大部分的研究和发展在一定程度上都是独自进行的。连续时间信号与系统在物理学方面,以及近代电路理论和通信系统方面的应用有很深的渊源,而离散时间信号与系统方法却在数值分析、统计学,以及与经济学和人口统计学等数据分析应用有关的时间序列分析中有很深的根基。然而,在近几十年内,连续时间和离散时间信号与系统变得日益交织在一起,而在应用上也日益结合。造成这种变化的强大动力是来自于在系统实现和信号产生技术上取得的惊人进展。特别是高速数字计算机、集成电路和尖端高集成度器件制造技术等继续取得进展,使得考虑用时间样本(即转换为离散时间信号)来表示和处理连续时间信号具有越来越多的好处。作为一个例子,一架近代高性能飞机的计算机控制系统就是将传感器输出的量(如速度)数字化,以产生一组已采样测量值的序列,然后交由控制系统来处理的。

鉴于连续时间信号与系统和离散时间信号与系统之间的相互关系日益密切,以及与各自有关的一些概念和方法之间的紧密联系,因此,本书就选择了以并行的方式来讨论这两种类型的信号与系统。由于两者在很多概念上是类似的(但不是完全一样的),因此,并行地处理可以做到在概念和观点上两者互为分享,而又能更好地把注意力放在它们之间的类同点和不同点上。另外,从以后的讨论中可以明显看到,某些概念从一种系统引入要比从另一种系统来得容易接受;而一旦在一种系统中被理解之后,就很容易地把它们用到另一系统中去。再者,这种

并行处理也大大地方便了理解在连续时间和离散时间结合在一起应用时很多重要的实际问题,这指的就是连续时间信号的采样和用离散时间系统来处理连续时间信号这种情况。

正如到目前为止我们已经叙述过的,信号与系统是一个极为普遍的概念。在这样的普遍意义上,对于信号与系统的本质仅能作一些概括性的介绍,也只能在最基本的方面讨论它们的一些性质。另一方面,在处理信号与系统时,一种重要而基本的想法是精心地挑选一类子系统,它们都具有若干个特别的性质可资利用,并且可以深入地分析与表征这类信号与系统。本书的重点就是放在一种称之为线性时不变的系统上,由定义这类系统的线性和时不变性引出的一套概念和方法不仅在实践上具有重要意义,而且在理论上也是完整的。

正如在本绪论中已经强调过的,信号与系统分析已经有了一段很长的历史,并且从中产生出应用领域极为广泛的一套基本方法和基本理论。的确,面对着新问题、新的技术和新的机遇的挑战,信号与系统分析一直在不断地演变和发展着。我们完全可以期望,随着技术的进步,使日益增长着的复杂系统和信号处理技术的实现成为可能,而且一定会加速这一进程。将来,我们一定会看到信号与系统分析方法和概念能够应用到更为广泛的领域中去。为此,我们感到信号与系统分析这一论题代表了科学家和工程师都必须关注的一整套知识。我们认为,本书所精选的一组内容、这些内容的提出和组织、以及每章习题的考虑,都会最有效地帮助读者在信号与系统方面打下一个坚实的基础;对其在滤波、采样、通信和反馈系统分析等最重要和最基本的应用方面有所了解;以及对于形成和解决复杂问题中采用某一种最为有力和广泛适用的方法作出明智的选择。

目 录

译者前言

前言

致谢

绪论

第1章 信号与系统

1.0 引言	(1)
1.1 连续时间和离散时间信号	(1)
1.1.1 举例与数学表示	(1)
1.1.2 信号能量与功率	(4)
1.2 自变量的变换	(6)
1.2.1 自变量变换举例	(6)
1.2.2 周期信号	(9)
1.2.3 偶信号与奇信号	(10)
1.3 指数信号与正弦信号	(11)
1.3.1 连续时间复指数信号与正弦信号	(11)
1.3.2 离散时间复指数信号与正弦信号	(16)
1.3.3 离散时间复指数序列的周期性质	(19)
1.4 单位冲激与单位阶跃函数	(23)
1.4.1 离散时间单位脉冲和单位阶跃序列	(23)
1.4.2 连续时间单位阶跃和单位冲激函数	(24)
1.5 连续时间和离散时间系统	(28)
1.5.1 简单系统举例	(29)
1.5.2 系统的互联	(30)
1.6 基本系统性质	(32)
1.6.1 记忆系统与无记忆系统	(32)
1.6.2 可逆性与可逆系统	(33)
1.6.3 因果性	(35)
1.6.4 稳定性	(36)
1.6.5 时不变性	(37)
1.6.6 线性	(39)
1.7 小结	(42)
习 题	(42)

第2章 线性时不变系统

2.0 引言	(55)
2.1 离散时间 LTI 系统:卷积和	(55)
2.1.1 用脉冲表示离散时间信号	(55)
2.1.2 离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应及卷积和表示	(56)
2.2 连续时间 LTI 系统:卷积积分	(66)

2.2.1	用冲激表示连续时间信号	(66)
2.2.2	连续时间 LTI 系统的单位冲激响应及卷积积分表示	(69)
2.3	线性时不变系统的性质	(75)
2.3.1	交换律性质	(75)
2.3.2	分配律性质	(76)
2.3.3	结合律性质	(77)
2.3.4	有记忆和无记忆 LTI 系统	(78)
2.3.5	LTI 系统的可逆性	(79)
2.3.6	LTI 系统的因果性	(80)
2.3.7	LTI 系统的稳定性	(81)
2.3.8	LTI 系统的单位阶跃响应	(83)
2.4	用微分和差分方程描述的因果 LTI 系统	(83)
2.4.1	线性常系数微分方程	(84)
2.4.2	线性常系数差分方程	(87)
2.4.3	用微分和差分方程描述的一阶系统的方框图表示	(89)
2.5	奇异函数	(91)
2.5.1	作为理想化短脉冲的单位冲激	(91)
2.5.2	通过卷积定义单位冲激	(94)
2.5.3	单位冲激偶和其他的奇异函数	(95)
2.6	小结	(97)
	习题	(98)

第3章 周期信号的傅里叶级数表示

3.0	引言	(124)
3.1	历史回顾	(124)
3.2	LTI 系统对复指数信号的响应	(128)
3.3	连续时间周期信号的傅里叶级数表示	(130)
3.3.1	成谐波关系的复指数信号的线性组合	(130)
3.3.2	连续时间周期信号傅里叶级数表示的确定	(133)
3.4	傅里叶级数的收敛	(137)
3.5	连续时间傅里叶级数性质	(143)
3.5.1	线性	(143)
3.5.2	时移性质	(143)
3.5.3	时间反转	(144)
3.5.4	时域尺度变换	(144)
3.5.5	相乘	(144)
3.5.6	共轭及共轭对称性	(145)
3.5.7	连续时间周期信号的帕斯瓦尔定理	(145)
3.5.8	连续时间傅里叶级数性质列表	(146)
3.5.9	举例	(146)
3.6	离散时间周期信号的傅里叶级数表示	(150)
3.6.1	成谐波关系的复指数信号的线性组合	(150)
3.6.2	周期信号傅里叶级数表示的确定	(151)

3.7 离散时间傅里叶级数性质	(157)
3.7.1 相乘	(158)
3.7.2 一阶差分	(158)
3.7.3 离散时间周期信号的帕斯瓦尔定理	(158)
3.7.4 举例	(159)
3.8 傅里叶级数与 LTI 系统	(162)
3.9 滤波	(165)
3.9.1 频率成形滤波器	(165)
3.9.2 频率选择性滤波器	(169)
3.10 用微分方程描述的连续时间滤波器举例	(171)
3.10.1 简单 RC 低通滤波器	(171)
3.10.2 简单 RC 高通滤波器	(173)
3.11 用差分方程描述的离散时间滤波器举例	(174)
3.11.1 一阶递归离散时间滤波器	(175)
3.11.2 非递归离散时间滤波器	(176)
3.12 小结	(178)
习题	(179)

第 4 章 连续时间傅里叶变换

4.0 引言	(202)
4.1 非周期信号的表示:连续时间傅里叶变换	(202)
4.1.1 非周期信号傅里叶变换表示的导出	(202)
4.1.2 傅里叶变换的收敛	(206)
4.1.3 连续时间傅里叶变换举例	(207)
4.2 周期信号的傅里叶变换	(211)
4.3 连续时间傅里叶变换性质	(213)
4.3.1 线性	(214)
4.3.2 时移性质	(214)
4.3.3 共轭及共轭对称性	(215)
4.3.4 微分与积分	(217)
4.3.5 时间与频率的尺度变换	(218)
4.3.6 对偶性	(219)
4.3.7 帕斯瓦尔定理	(221)
4.4 卷积性质	(222)
4.4.1 举例	(224)
4.5 相乘性质	(228)
4.5.1 具有可变中心频率的频率选择性滤波	(231)
4.6 傅里叶变换性质和基本傅里叶变换对列表	(233)
4.7 由线性常系数微分方程表征的系统	(235)
4.8 小结	(237)
习题	(238)

第5章 离散时间傅里叶变换

5.0 引言	(254)
5.1 非周期信号的表示:离散时间傅里叶变换	(254)
5.1.1 离散时间傅里叶变换的导出	(254)
5.1.2 离散时间傅里叶变换举例	(257)
5.1.3 关于离散时间傅里叶变换的收敛问题	(260)
5.2 周期信号的傅里叶变换	(262)
5.3 离散时间傅里叶变换性质	(265)
5.3.1 离散时间傅里叶变换的周期性	(265)
5.3.2 线性	(265)
5.3.3 时移与频移性质	(265)
5.3.4 共轭与共轭对称性	(266)
5.3.5 差分与累加	(267)
5.3.6 时间反转	(267)
5.3.7 时域扩展	(268)
5.3.8 频域微分	(270)
5.3.9 帕斯瓦尔定理	(270)
5.4 卷积性质	(271)
5.4.1 举例	(272)
5.5 相乘性质	(275)
5.6 傅里叶变换性质和基本傅里叶变换对列表	(276)
5.7 对偶性	(279)
5.7.1 离散时间傅里叶级数的对偶性	(279)
5.7.2 离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶级数之间的对偶性	(281)
5.8 由线性常系数差分方程表征的系统	(282)
5.9 小结	(284)
习题	(285)

第6章 信号与系统的时域和频域特性

6.0 引言	(302)
6.1 傅里叶变换的模和相位表示	(302)
6.2 LTI系统频率响应的模和相位表示	(305)
6.2.1 线性与非线性相位	(306)
6.2.2 群时延	(307)
6.2.3 对数模和波特图	(312)
6.3 理想频率选择性滤波器的时域特性	(315)
6.4 非理想滤波器的时域和频域特性讨论	(319)
6.5 一阶与二阶连续时间系统	(321)
6.5.1 一阶连续时间系统	(322)
6.5.2 二阶连续时间系统	(324)
6.5.3 有理型频率响应的波特图	(329)
6.6 一阶与二阶离散时间系统	(332)
6.6.1 一阶离散时间系统	(332)

6.6.2 二阶离散时间系统	(336)
6.7 系统的时域分析与频域分析举例	(342)
6.7.1 汽车减震系统的分析	(342)
6.7.2 离散时间非递归滤波器举例	(344)
6.8 小结	(350)
习题	(350)

第7章 采样

7.0 引言	(371)
7.1 用信号样本表示连续时间信号:采样定理	(371)
7.1.1 冲激串采样	(372)
7.1.2 零阶保持采样	(375)
7.2 利用内插由样本重建信号	(376)
7.3 欠采样的效果:混叠现象	(380)
7.4 连续时间信号的离散时间处理	(385)
7.4.1 数字微分器	(390)
7.4.2 半采样间隔延时	(391)
7.5 离散时间信号采样	(393)
7.5.1 脉冲串采样	(393)
7.5.2 离散时间抽取与内插	(396)
7.6 小结	(401)
习题	(401)

第8章 通信系统

8.0 引言	(419)
8.1 复指数与正弦幅度调制	(420)
8.1.1 复指数载波的幅度调制	(420)
8.1.2 正弦载波的幅度调制	(421)
8.2 正弦AM的解调	(422)
8.2.1 同步解调	(422)
8.2.2 非同步解调	(425)
8.3 频分多路复用	(428)
8.4 单边带正弦幅度调制	(430)
8.5 用脉冲串作载波的幅度调制	(433)
8.5.1 脉冲串载波调制	(433)
8.5.2 时分多路复用	(435)
8.6 脉冲幅度调制	(436)
8.6.1 脉冲幅度已调信号	(436)
8.6.2 在PAM系统中的码间干扰	(438)
8.6.3 数字脉冲幅度和脉冲编码调制	(440)
8.7 正弦频率调制	(441)
8.7.1 窄带频率调制	(443)
8.7.2 宽带频率调制	(444)

8.7.3 周期方波调制信号	(446)
8.8 离散时间调制	(447)
8.8.1 离散时间正弦幅度调制	(447)
8.8.2 离散时间调制转换	(450)
8.9 小结	(452)
习题	(452)

第9章 拉普拉斯变换

9.0 引言	(471)
9.1 拉普拉斯变换	(471)
9.2 拉普拉斯变换收敛域	(477)
9.3 拉普拉斯反变换	(483)
9.4 由零极点图对傅里叶变换进行几何求值	(485)
9.4.1 一阶系统	(487)
9.4.2 二阶系统	(488)
9.4.3 全通系统	(490)
9.5 拉普拉斯变换的性质	(491)
9.5.1 线性	(491)
9.5.2 时移性质	(493)
9.5.3 s域平移	(493)
9.5.4 时域尺度变换	(494)
9.5.5 共轭	(495)
9.5.6 卷积性质	(495)
9.5.7 时域微分	(495)
9.5.8 s域微分	(496)
9.5.9 时域积分	(497)
9.5.10 初值与终值定理	(497)
9.5.11 性质列表	(498)
9.6 常用拉普拉斯变换对	(499)
9.7 用拉普拉斯变换分析和表征LTI系统	(500)
9.7.1 因果性	(500)
9.7.2 稳定性	(501)
9.7.3 由线性常系数微分方程表征的LTI系统	(504)
9.7.4 系统特性与系统函数的关系举例	(505)
9.7.5 巴特沃兹滤波器	(507)
9.8 系统函数的代数属性与方框图表示	(510)
9.8.1 LTI系统互联的系统函数	(510)
9.8.2 由微分方程和有理系统函数描述的因果LTI系统的方框图表示	(511)
9.9 单边拉普拉斯变换	(515)
9.9.1 单边拉普拉斯变换举例	(515)
9.9.2 单边拉普拉斯变换性质	(516)
9.9.3 利用单边拉普拉斯变换求解微分方程	(518)
9.10 小结	(519)

习 题	(519)
-----------	-------

第 10 章 Z 变换

10.0 引言	(534)
10.1 z 变换	(534)
10.2 z 变换的收敛域	(539)
10.3 z 反变换	(546)
10.4 由零极点图对傅里叶变换进行几何求值	(550)
10.4.1 一阶系统	(551)
10.4.2 二阶系统	(551)
10.5 z 变换的性质	(554)
10.5.1 线性	(554)
10.5.2 时移性质	(554)
10.5.3 z 域尺度变换	(555)
10.5.4 时间反转	(556)
10.5.5 时间扩展	(556)
10.5.6 共轭	(556)
10.5.7 卷积性质	(557)
10.5.8 z 域微分	(558)
10.5.9 初值定理	(559)
10.5.10 性质小结	(559)
10.6 几个常用 z 变换对	(560)
10.7 利用 z 变换分析与表征 LTI 系统	(561)
10.7.1 因果性	(561)
10.7.2 稳定性	(563)
10.7.3 由线性常系数差分方程表征的 LTI 系统	(564)
10.7.4 系统特性与系统函数的关系举例	(565)
10.8 系统函数的代数属性与方框图表示	(567)
10.8.1 LTI 系统互联的系统函数	(567)
10.8.2 由差分方程和有理系统函数描述的因果 LTI 系统的方框图表示	(568)
10.9 单边 z 变换	(572)
10.9.1 单边 z 变换和单边 z 反变换举例	(572)
10.9.2 单边 z 变换性质	(574)
10.9.3 利用单边 z 变换求解差分方程	(576)
10.10 小结	(577)
习 题	(577)

第 11 章 线性反馈系统

11.0 引言	(591)
11.1 线性反馈系统	(593)
11.2 反馈的某些应用及结果	(594)
11.2.1 逆系统设计	(594)
11.2.2 非理想元件的补偿	(595)

11.2.3 不稳定系统的稳定	(596)
11.2.4 采样数据反馈系统	(599)
11.2.5 跟踪系统	(600)
11.2.6 反馈引起的不稳定	(602)
11.3 线性反馈系统的根轨迹分析法	(604)
11.3.1 一个例子	(604)
11.3.2 闭环极点方程	(605)
11.3.3 根轨迹的端点; $K=0$ 和 $ K =+\infty$ 时的闭环极点	(606)
11.3.4 角判据	(607)
11.3.5 根轨迹的性质	(610)
11.4 奈奎斯特稳定性判据	(615)
11.4.1 圆线性质	(616)
11.4.2 连续时间 LTI 反馈系统的奈奎斯特判据	(618)
11.4.3 离散时间 LTI 反馈系统的奈奎斯特判据	(622)
11.5 增益和相位裕度	(624)
11.6 小结	(631)
习题	(631)
附录 部分分式展开	(661)
文献目录	(671)
第一部分 基本题答案	(680)

第1章 信号与系统

1.0 引言

在前面绪论中已经提到,信号与系统概念出现在极为广泛的各种领域中。然而,在本书中将会看到,其中存在着一种分析体系,也就是说一种描述信号与系统的语言和一整套分析它们的强有力的方法,而这种语言和方法都能很好地应用于这些领域中所要解决的问题。本章就是从引入信号与系统的数学描述及其表示入手来建立这样一种分析体系的。紧随其后的几章,凭借这个基础来建立和描述另一些概念和方法,而这些又会大大加强对信号与系统问题的理解,以及在分析和解决涉及多个方面的信号与系统问题的能力。

1.1 连续时间和离散时间信号

1.1.1 举例与数学表示

信号可以描述范围极为广泛的一类物理现象。虽然信号可以用许多方式来表示,但是在所有的情况下,信号所包含的信息总是寄寓在某种变化形式的波形之中。考虑一下图 1.1 这个简单电路,此时电压源 v_s 和电容器上的电压 v_c 的变化形式都是可以作为信号的例子。类似地,示于图 1.2 的外作用力 f 及所得到的汽车速度 v 随时间的变化也都是信号的例子。作为另一个例子,考虑一下人的声道系统,该系统根据在声压上的起伏变化而产生语音信号。图 1.3 示出某一段语音信号的录音波形,它是通过拾音器来感受到声压的变化,然后再转换为某种电信号。由图可见,不同的语音相应有不同的声压变化波形,并且声道系统产生的可懂语言就对应着一串特定的波形。另外,示于图 1.4 是一幅黑白照片,这时整个照片上各点的亮度变化波形才是重要的。

在数学上,信号可以表示为一个或者多个变量的函数。例如,一个语音信号就可以表示为声压随时间变化的函数;一张黑白照片就可以用亮度随二维空间变量变化的函数来表示。本书的讨论范围仅限于单一变量的函数,而且为了方便起见,以后在讨论中一般总是用时间来表示自变量,尽管在某些具体应用中自变量不一定是时间。例如,在地球物理学研究中,用于研究地球结构的一些物理量像密度、气隙度和电阻率等就是随地球深度变化的信号;在气象观察中,有关气压、温度和风速

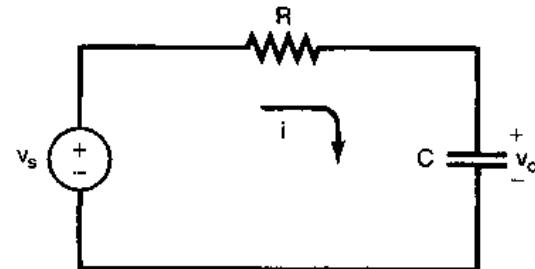


图 1.1 含有电压源 v_s 和电容器
电压 v_c 的简单电路

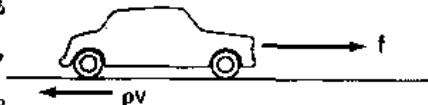


图 1.2 一部汽车。 f 表示来自发动机的外加力, ρv 表示正比于
汽车速度 v 的摩擦力

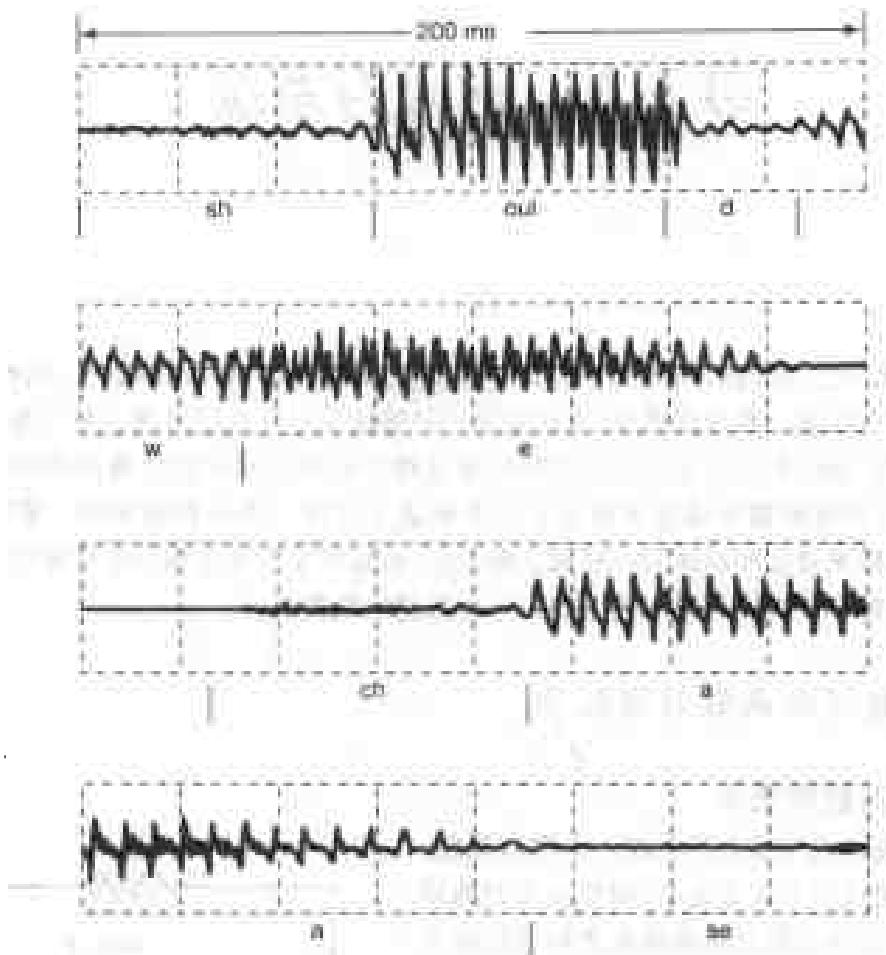


图 1.3 一个语音信号的波形 [摘引自“ Applications of Digital Signal Processing ”, A. V. Oppenheim, ed. (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1978), p. 121.] 该信号代表“ Should we chase ”这句话的声压随时间的变化波形。图的上部相应于字“ Should ”, 第二行是字“ we ”, 最下面两行是“ chase ”。(图中还大致标出了每个字中逐个音的起始和结束部位)



图 1.4 一幅黑白照片

随高度的变化也是很重要的一类信号。图 1.5 示出的是一个典型的年平均沿垂直方向风速随高度变化的分布图, 这种风速随高度的变化情况用于气象图的研究以及研究某些风的状况,

者可能会影响飞机接近机场和降落。

全书将考虑两种基本类型的信号：连续时间信号和离散时间信号。在前一种情况下，自变量是连续可变的，因此信号在自变量的连续值上都有定义；而后者是仅仅定义在离散时刻点上，也就是自变量仅取在一组离散值上。作为时间函数的语音信号和随高度变化的大气压都是连续时间信号的例子；如图 1.6 所示的每周道·琼斯 (Dow Jones) 股票市场指数就是离散时间信号的一个例子。在人口统计学的研究中还可以找到其它离散时间信号的例子，例如像平均预算、犯罪率或捕鱼量等都可以分别对家庭大小、总人口或捕鱼船的类型等离散变量列成表格形式。

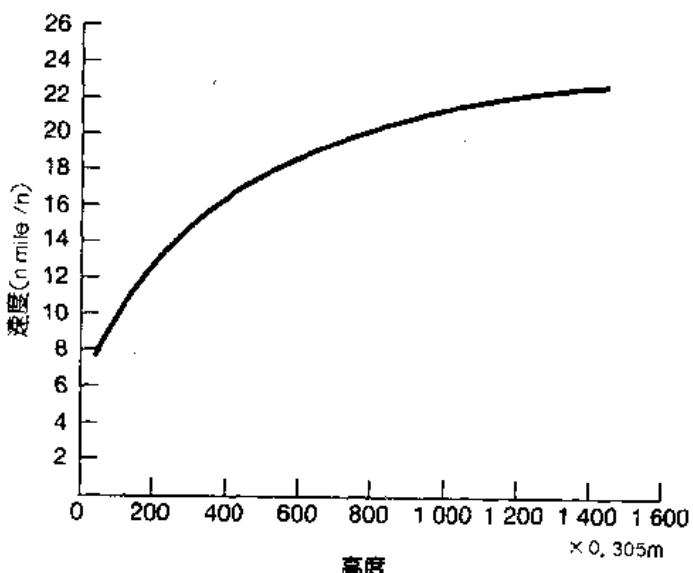


图 1.5 典型的年平均沿垂直方向风速分布图(摘引自 Crawford and Hubson, National Severe Storms Laboratory Report, ESSA ERLTM - NSSL 48, August 1970)

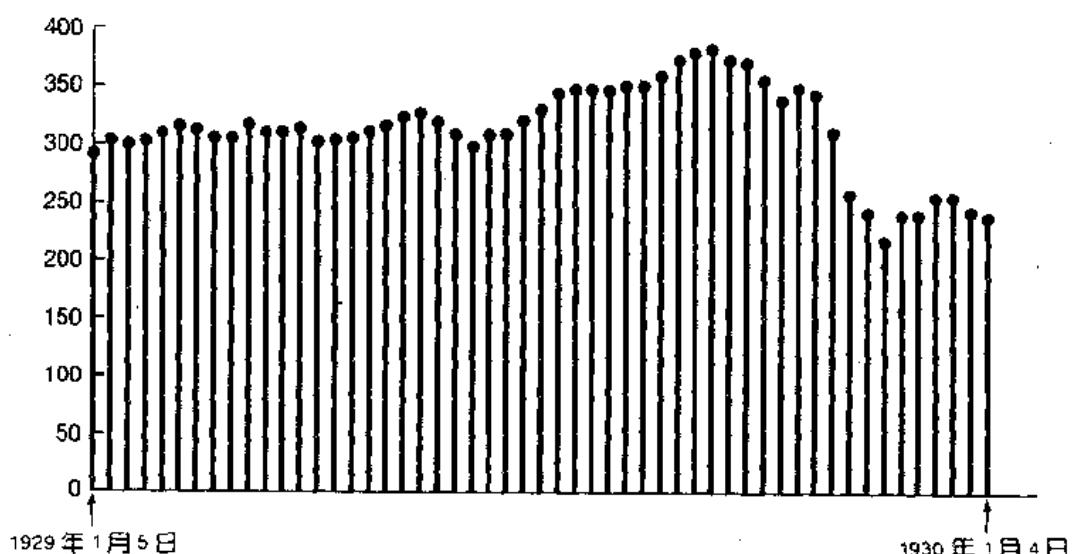


图 1.6 离散时间信号的例子：从 1929 年 1 月 5 日至 1930 年 1 月 4 日，每周道·琼斯股票市场指数的变化

为了区分这两类信号，我们用 t 表示连续时间变量，而用 n 表示离散时间变量。另外，连续时间信号用圆括号 (\cdot) 把自变量括在里面，而离散时间信号则用方括号 $[\cdot]$ 来表示。当用图的方法来表示信号是有利时，也常常这样做。图 1.7 就是给出一个连续时间信号 $x(t)$ 和一个离散时间信号 $x[n]$ 的例子。值得注意的是，离散时间信号 $x[n]$ 仅仅在自变量的整数值上有定义。把 $x[n]$ 用图来表示就是为了强调这一点，有时为了更加强调这一点，就干脆称 $x[n]$ 为离散时间序列。

当然，一个离散时间信号 $x[n]$ 可以表示一个其自变量变化本来就是离散的现象，例如在有关人口统计学中的一些数据就属于这类信号的例子。另一方面，有些很重要的离散时间

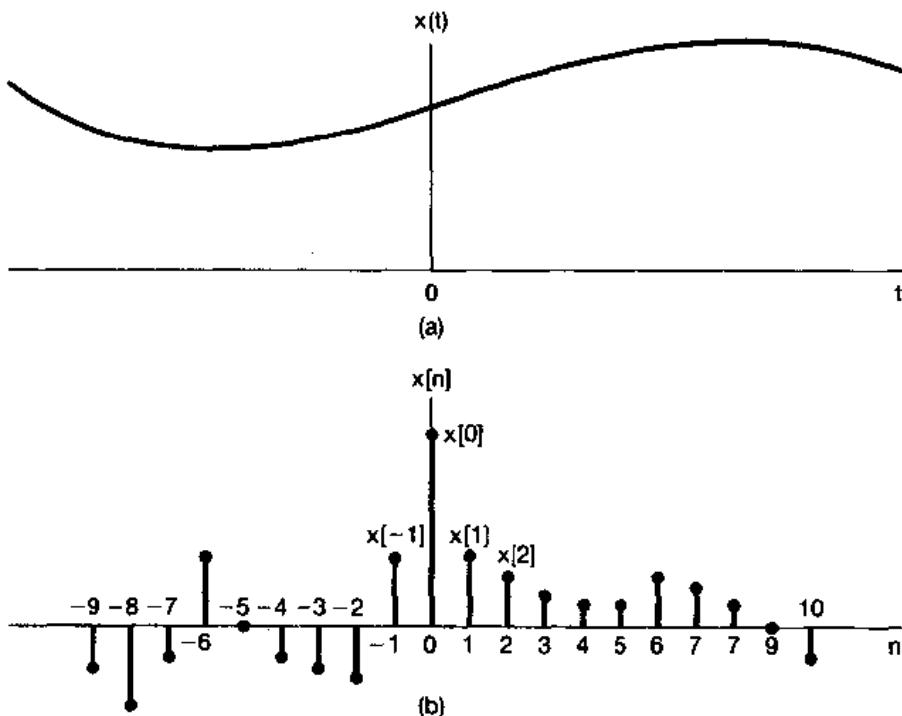


图 1.7 信号的图形表示:(a)连续时间信号;(b)离散时间信号

信号则是通过对连续时间信号的采样而得到的,这时该离散时间信号 $x[n]$ 则代表了一个自变量是连续变化的连续时间信号在相继的离散时刻点上的样本值。由于近代数字处理器在速度、计算能力及灵活性等方面进展,因此被用来实现许多这样的实际系统,其范围涉及从数字自动驾驶仪到一般的数字音频系统。这样的系统都要求利用代表连续时间信号经采样过的离散时间样本序列,这就是飞机的位置、速度和航向,或是音频系统的语音和音乐。同样,报纸以及本书中所用的照片实际上也都是由很多细小的点格所组成的,其中每一点就代表着相应于原照片上该点亮度的采样。无论这些离散时间信号来源是什么,信号 $x[n]$ 总是在 n 的整数值上有定义,因此像所谓一个数字语音信号的第 $3\frac{1}{2}$ 个样本,以及对某一家庭的 $2\frac{1}{2}$ 个家庭成员的平均预算等等都是毫无意义的。

本书大部分都采用分别地,但是并行地讨论离散时间信号和连续时间信号,以使我们能在一种信号类型中所获得的细节有助于对另一种信号类型的理解。到第 7 章再回到采样问题中来,这样我们就可以把连续时间信号和离散时间信号的概念结合起来,以披露这两种信号之间的关系。

1.1.2 信号能量与功率

从到目前为止所给出的例子可以看到,信号可以表示范围很广的一些现象。在很多(但不是全部)应用中,所考虑的信号是直接与在某一物理系统中具有功率和能量的一些物理量有关的。例如,若 $v(t)$ 和 $i(t)$ 分别是阻值为 R 的某一电阻上的电压和电流,那么其瞬时功率就是

$$p(t) = v(t) i(t) = \frac{1}{R} v^2(t) \quad (1.1)$$

在时间间隔 $t_1 \leq t \leq t_2$ 内消耗的总能量就是

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t) dt \quad (1.2)$$

其平均功率为

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t) dt \quad (1.3)$$

相类似,对于图 1.2 中的汽车,由于摩擦所耗散的瞬时功率是 $p(t) = bv^2(t)$,然后就可以按(1.2)式和(1.3)式来定义在其一段时间内的总能量和平均功率。

利用这些简单的实际例子作为楔子,就可以对任何连续时间信号 $x(t)$ 或离散时间信号 $x[n]$ 采用类似的功率和能量的术语。然而,不久将会看到,往往把信号看作具有复数值更为方便,这时在 $t_1 \leq t \leq t_2$ 内的总能量对于一个连续时间信号 $x(t)$ 来说就定义为

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (1.4)$$

这里 $|x|$ 记作 x (可能为复数)的模。其平均功率将(1.4)式用 $t_2 - t_1$ 除就可得到。相类似,在 $n_1 \leq n \leq n_2$ 内的离散时间信号 $x[n]$ 的总能量就是

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \quad (1.5)$$

将其除以 $n_2 - n_1 + 1$ 就得到在该区间内的平均功率。要牢记的是,这里所用的“功率”和“能量”与(1.4)式和(1.5)式中的量是否与真正的物理量相联系是无关的^①。尽管如此,我们仍发现采用这些术语在一般意义上是方便的。

再者,在很多系统中关心的是信号在一个无穷区间内(即 $-\infty < t < +\infty$ 或 $-\infty < n < +\infty$)的功率和能量,在这些情况下,将总能量定义成按(1.4)式和(1.5)式,将其区间趋于无穷的极限来考虑,在连续时间情况下就是

$$E_\infty \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

而在离散时间情况下就是

$$E_\infty \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad (1.7)$$

注意,对某些信号(1.6)式的积分,或(1.7)式的求和可能不收敛,譬如若 $x(t)$ 或 $x[n]$ 在全部时间内都为某一非零的常数值就是这样。这样的信号具有无限的能量,而 $E_\infty < \infty$ 的信号具有有限的能量。

关于在无限区间内的平均功率,可以类似的方式分别定义为

$$P_\infty \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.8)$$

和

$$P_\infty \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 \quad (1.9)$$

利用这些定义就可以区分三种重要的信号。其中之一是信号具有有限的总能量,即 $E_\infty < \infty$ 。这种信号的平均功率必须为零,因为在连续时间情况下,由(1.8)式可看出

^① 即便这样一个关系确实存在,(1.4)式和(1.5)式也可能具有错误的量纲或大小。例如比较一下(1.2)式和(1.4)式就可看出,若 $x(t)$ 代表其一电阻上的电压,那么(1.4)式就必须被该电阻值(如以欧姆计)来除,才能得出能量的单位。

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{2T} = 0 \quad (1.10)$$

信号在 $0 \leq t \leq 1$ 内其值为 1, 而在此以外均为 0 就是有限能量信号的另一个例子, 这时 $E_{\infty} = 1, P_{\infty} = 0$ 。

第二类信号是其平均功率 P_{∞} 有限的信号。根据刚才看到的, 如果 $P_{\infty} > 0$, 就必然有 $E_{\infty} = \infty$ 。这是很自然的, 因为如果单位时间内有某一个非零的平均能量(也就是非零功率), 那么在无限区间内积分或求和就必然得出无限大的能量值。例如, 常数信号 $x[n] = 4$ 就具有无限能量, 但是平均功率 $P_{\infty} = 16$ 。第三类信号就是 P_{∞} 和 E_{∞} 都不是有限的, 一个例子就是信号 $x(t) = t$ 。对于这三类信号的其它例子, 本章稍后部分及后续各章中都会碰到。

1.2 自变量的变换

信号与系统分析中一个重要的概念是关于信号的变换概念。例如, 在飞机控制系统中对应于驾驶员动作的信号, 经由电的和机械的系统变换为在飞机推力或飞机控制翼面(如舵或副翼)位置上的改变, 进而再经过该机体的动力学和运动学原理变换为在飞机速度和航向上的变化。同样, 在高保真度音频系统中, 代表录制在一盘磁带或密纹唱片上的音乐信号, 为了增强所要求的特性、除去录制噪音、或者平衡几种信号分量(如高音和低音)也作了变换。这一节只放在很有限的但是很重要的几种最基本的信号变换上, 这些变换只涉及自变量的简单变换, 也就是时间轴的变换。正如在这一节以及本章后续节中所看到的, 这些基本变换可以引入信号与系统的几个基本性质。在以后的各章中将会发现它们在定义和表征更为丰富和更加重要的一类系统中也起着重要的作用。

1.2.1 自变量变换举例

一种简单而很重要的信号自变量变换的例子是时移。在离散时间情况下的时移如图 1.8 所示, 这里有两个信号 $x[n]$ 和 $x[n - n_0]$, 它们在形状上是完全一样的, 但在位置上互相有一个移位。在连续时间情况遇到的时移就如图 1.9 所示, 这里 $x(t - t_0)$ 代表一个延时(t_0 为正)的 $x(t)$, 或是一个超前(t_0 为负)的 $x(t)$ 。这种形式关联的信号可以在声纳、地震信号处理以及雷达等应用中找到。配置在不同地点的几台接收机观察经由某一媒质(水、岩石、空气等)传来的同一台发射机发来的信号, 由于各个接收点与发射机的距离不等而造成传播时间上的差别就形成了信号间的不同时移。

时间轴的第二种基本变换是时间反转

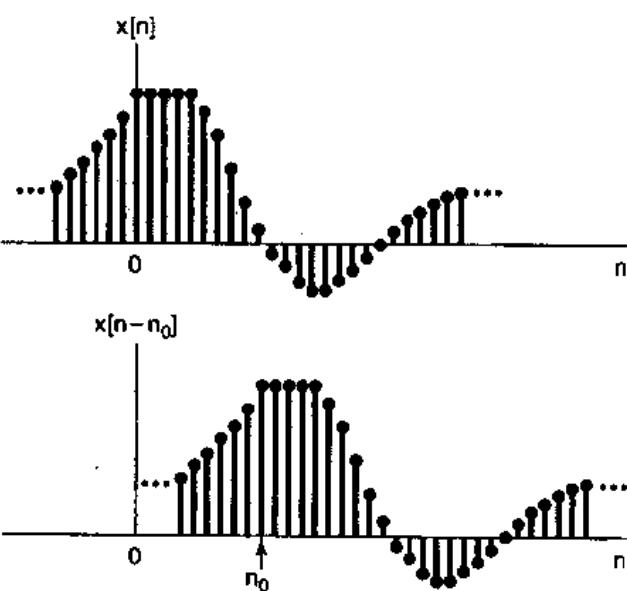


图 1.8 用时移关联的离散时间信号。图中 $n_0 > 0$, 所以 $x[n - n_0]$ 是 $x[n]$ 的延时(即 $x[n]$ 中的每一点在 $x[n - n_0]$ 中都稍后出现)

(time reversal)。例如在图 1.10 中, $x[-n]$ 就是将 $x[n]$ 以 $n=0$ 为轴反转而得到的。同样图 1.11 中, $x(-t)$ 也是从信号 $x(t)$ 以 $t=0$ 为轴反转而得的。这样, 如果 $x(t)$ 是代表一盘录制的声音磁带的话, 那么 $x(-t)$ 就代表同样一盘磁带倒过来放(即从末尾向前倒放)的结果。第三种基本变换是时间尺度变换(time scaling)。在图 1.12 中示出了 $x(t)$, $x(2t)$ 和 $x(t/2)$ 三个信号, 这三个信号是与自变量的线性尺度变换联系着的。倘若我们再一次把 $x(t)$ 想象为一盘录音磁带的话, 那么 $x(2t)$ 将是这盘磁带以两倍的速度放音的结果, 而 $x(t/2)$ 则代表原磁带将放音速度降低一半。

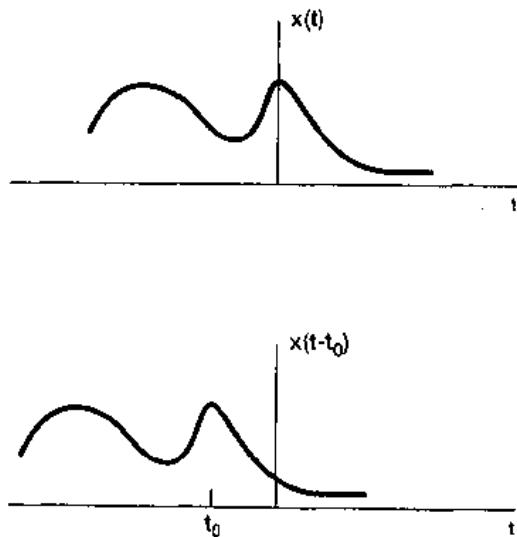


图 1.9 用时移关联的连续时间信号。图中 $t_0 < 0$, 所以 $x(t - t_0)$ 就是一个超前的 $x(t)$ (即在 $x(t)$ 中的每一点在 $x(t - t_0)$ 中都提前出现)

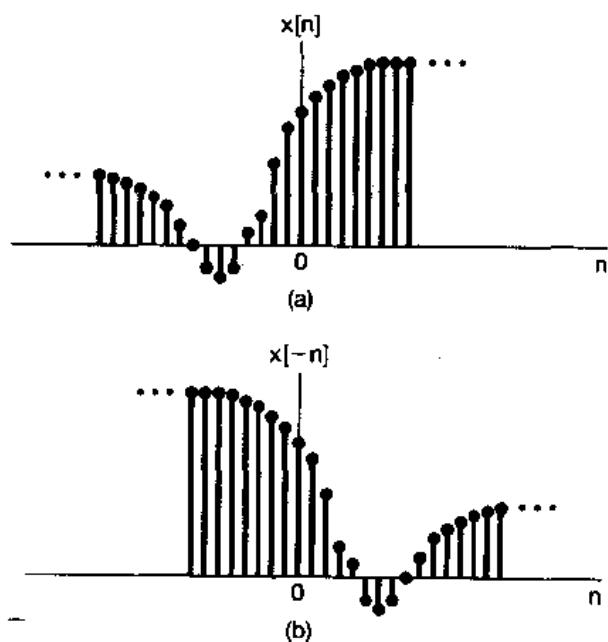


图 1.10 (a) 离散时间信号 $x[n]$;
(b) $x[n]$ 以 $n=0$ 为轴反转后的 $x[-n]$

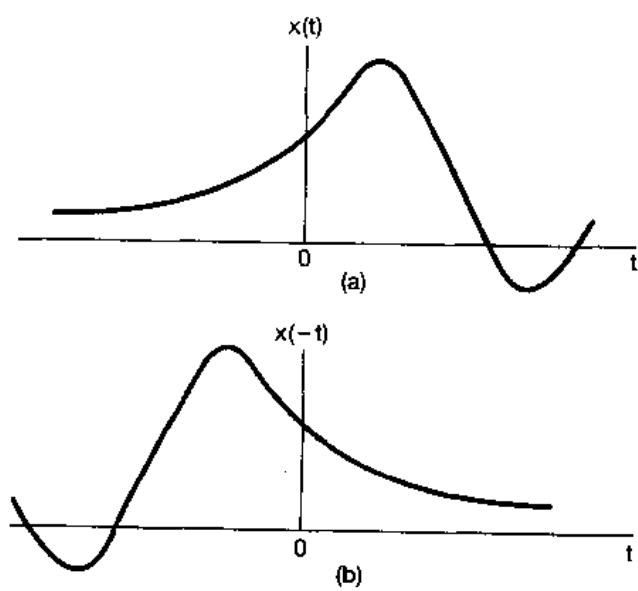


图 1.11 (a) 连续时间信号 $x(t)$;
(b) $x(t)$ 以 $t=0$ 为轴反转后的 $x(-t)$

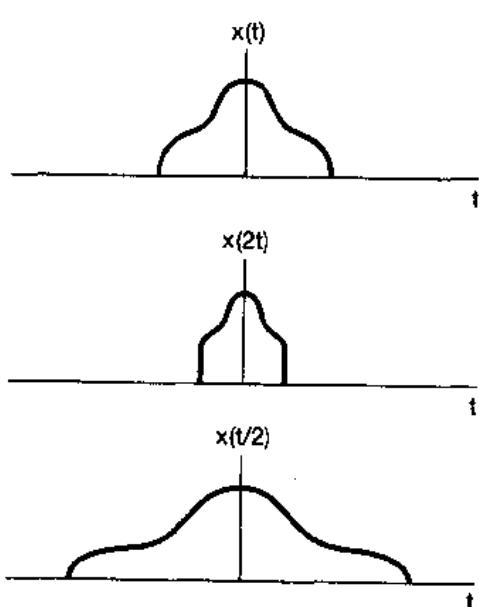


图 1.12 用时间尺度变换关联的连续时间信号

常常关注的是对某一个已知的信号 $x(t)$, 通过自变量变换以求得一个形式如 $x(\alpha t + \beta)$ 的信号, 这里 α 和 β 是一个给定的数。这样一种自变量变换所得到的信号除了有一个线性的扩展(若 $|\alpha| < 1$)或压缩($|\alpha| > 1$), 时间上的反转($\alpha < 0$)及移位($\beta \neq 0$)外, 仍旧保持有 $x(t)$ 的形状。现用下面的一组例子给予说明。

例 1.1 已知信号 $x(t)$ 如图 1.13(a) 所示, $x(t+1)$ 就是 $x(t)$ 沿 t 轴左移一个单位如图 1.13(b) 所示。具体地说, $x(t)$ 在 $t=t_0$ 取得的值, 在 $x(t+1)$ 中发生在 $t=t_0-1$, 例如 $x(t)$ 在 $t=1$ 的值在 $x(t+1)$ 中是在 $t=1-1=0$ 处得到。同样, 因为 $x(t)$ 在 $t < 0$ 为零, 所以 $x(t+1)$ 在 $t < -1$ 为零; 相类似, 因为 $x(t)$ 在 $t > 2$ 为零, 所以 $x(t+1)$ 在 $t > 1$ 为零。

现在考虑信号 $x(-t+1)$, 这可以在 $x(t+1)$ 中以 $-t$ 代替 t 来得到, 这就是说, $x(-t+1)$ 就是 $x(t+1)$ 的时间反转。因此 $x(-t+1)$ 可以在图上以 $t=0$ 为轴将 $x(t+1)$ 反转而得到, 如图 1.13(c) 所示

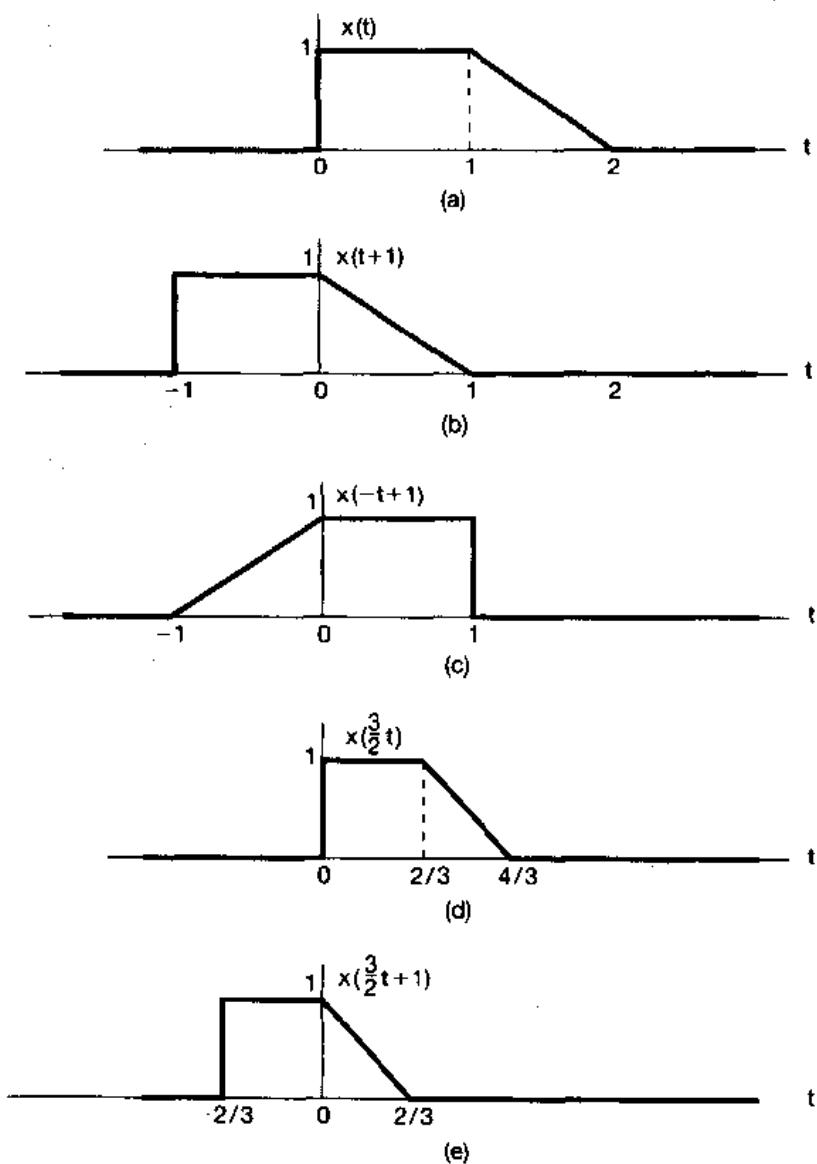


图 1.13 (a) 用于例 1.1~1.3 的连续时间信号 $x(t)$, 图示说明自变量变换;
 (b) 时移信号 $x(t+1)$; (c) 用时移和反转得到的 $x(-t+1)$;
 (d) 时间尺度变换信号 $x(\frac{3}{2}t)$; (e) 由时移和尺度变换得到的 $x(\frac{3}{2}t+1)$

例 1.2 已知信号 $x(t)$ 如图 1.13(a) 所示, 信号 $x(\frac{3}{2}t)$ 就相当于 $x(t)$ 以因子 $2/3$ 作线性时间压缩, 如图 1.13(d) 所示。具体一点就是 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 所取得的值, 在 $x(\frac{3}{2}t)$ 中是在 $t=\frac{2}{3}t_0$ 时刻得到。例如, $x(t)$ 在 $t=1$ 时的值, 在 $x(\frac{3}{2}t)$ 中是在 $t=\frac{2}{3}(1)=\frac{2}{3}$ 求得。同样, 因为 $x(t)$ 在 $t<0$ 为零, 所以有 $x(\frac{3}{2}t)$ 在 $t<0$ 也为零; 因为 $x(t)$ 在 $t>2$ 为零, 所以 $x(\frac{3}{2}t)$ 在 $t>\frac{4}{3}$ 时为零。

例 1.3 假设对于一个给定信号 $x(t)$, 想看看自变量变换的效果, 以求得一个形如 $x(\alpha t + \beta)$ 的信号, 这里 α, β 都是已知的某个数。为此, 一种有条不紊的途径是首先根据 β 的值将 $x(t)$ 延时或超前, 然后再根据 α 的值来对这个已经延时或超前的信号进行时间尺度变换和/或时间反转。如果 $|\alpha|<1$, 就将该已被延时或超前的信号进行线性扩展; 如果 $|\alpha|>1$, 就实行线性压缩, 而若 $\alpha<0$ 就再作时间反转。

为了说明这个办法, 看看 $x(\frac{3}{2}t+1)$ 是怎么由图 1.13(a) 的 $x(t)$ 求得的。因为 $\beta=1$, 所以首先将 $x(t)$ 超前 1(即左移 1), 如图 1.13(b) 所示。因为 $|\alpha|=3/2$, 所以就应将图 1.13(b) 已左移的信号线性压缩, 压缩因子是 $2/3$, 于是就得到如图 1.13(e) 所示的信号, 这就是 $x(\frac{3}{2}t+1)$ 。

自变量变换除了在表示一些物理现象(如声纳信号的时移、磁带的快放或倒放等)中的应用外, 它在信号与系统分析中是极为有用的。在 1.6 节和第 2 章都将应用自变量变换来引入和分析系统的性质。这些变换在定义和研究信号的某些重要性质上也是很重要的。

1.2.2 周期信号

在全书中都会常常遇到的一类重要信号就是周期信号。一个周期连续时间信号 $x(t)$ 具有这样的性质, 即存在一个正值的 T , 对全部 t 来说, 有

$$x(t) = x(t + T) \quad (1.11)$$

换句话说, 当一个周期信号时移 T 后其值不变。这时就说 $x(t)$ 是一个周期信号, 周期为 T 。周期的连续时间信号出现在各种场合。例如在习题 2.61 中所说明的具有能量储存系统的自然响应, 像无电阻损耗的理想 LC 电路和无摩擦损耗的理想机械系统的自然响应都是周期的; 而且事实上它们都是由一些基本的周期信号所组成的, 这些都将在 1.3 节讨论。

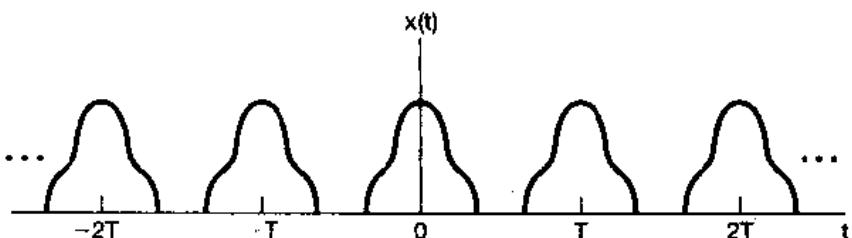


图 1.14 连续时间周期信号

图 1.14 给出了一个周期连续时间信号的例子。从该图或者从(1.11)式都能很快得出: 如果 $x(t)$ 是周期的, 周期为 T , 那么对全部 t 和任意整数 m 来说就有 $x(t) = x(t + mT)$, 由此 $x(t)$ 对于周期 $2T, 3T, 4T, \dots$ 等等都是周期的。对于使(1.11)式成立的最小正值 T 称为 $x(t)$ 的基波周期 T_0 。除了 $x(t)$ 为一个常数外, 基本周期的定义都成立; 在 $x(t)$ 为一常数的

情况下,基波周期无定义,因为这时对任意 T 来说 $x(t)$ 都是周期的(所以不存在最小的正值 T)。一个信号 $x(t)$ 不是周期的就称为非周期信号。

在离散时间下可类似地定义出周期信号,这就是:如果一个离散时间信号 $x[n]$ 时移一个 N 后其值不变,即对全部 n 值有

$$x[n] = x[n + N] \quad (1.12)$$

则 $x[n]$ 是周期的,周期为 N , N 为某一个正整数。若(1.12)式成立,那么 $x[n]$ 对于周期 $2N, 3N, 4N, \dots$ 也都是周期的,其中使(1.12)式成立的最小正值 N 就是它的基波周期 N_0 。图 1.15 示出一个基波周期 $N_0=3$ 的离散时间周期信号的例子。

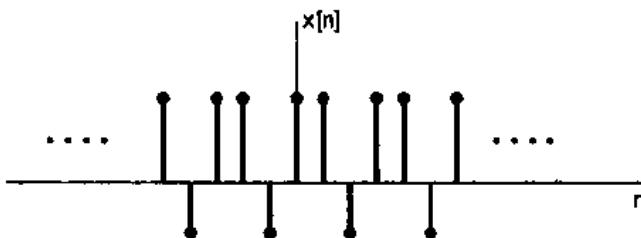


图 1.15 基波周期 $N_0=3$ 的离散时间周期信号

例 1.4 现在来解这么一个类型的问题,即要确定所给信号是否是周期性的。这里要确认的信号是

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{如果 } t < 0 \\ \sin(t) & \text{如果 } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

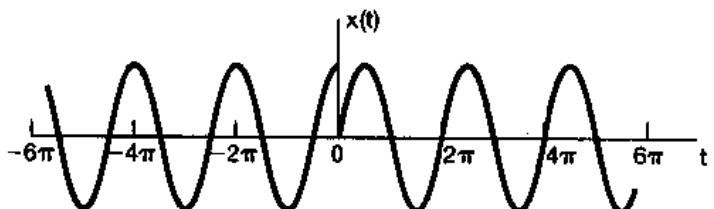


图 1.16 所讨论的信号 $x(t)$

由三角学可知 $\cos(t+2\pi)=\cos(t)$, $\sin(t+2\pi)=\sin(t)$, 因此分别对 $t>0$ 和 $t<0$ 考虑, $x(t)$ 在相距每 2π 上都确实重复无疑。然而,正如在图 1.16 所示出的, $x(t)$ 在原点有一个不连续点,而这样的不连续点并不在其它地方重现。因为一个周期信号在形状上的每一个特点都必须周期性地重现,所以可以得出 $x(t)$ 不是周期的。

1.2.3 偶信号与奇信号

信号的另一种有用的性质是在时间反转之下有关信号的对称性问题。如果一个信号 $x(t)$ 或 $x[n]$,以原点为轴反转后不变,就称其为偶信号。在连续时间下,一个偶信号就有

$$x(-t) = x(t) \quad (1.14)$$

而在离散时间下就有

$$x[-n] = x[n] \quad (1.15)$$

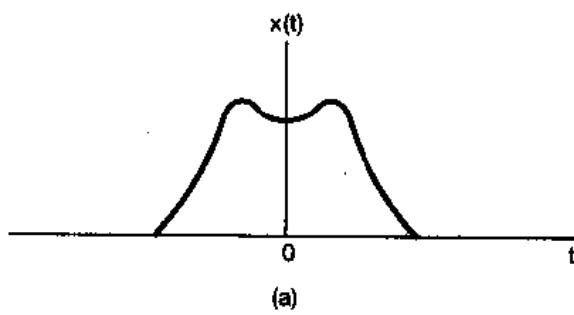
如果有

$$x(-t) = -x(t) \quad (1.16)$$

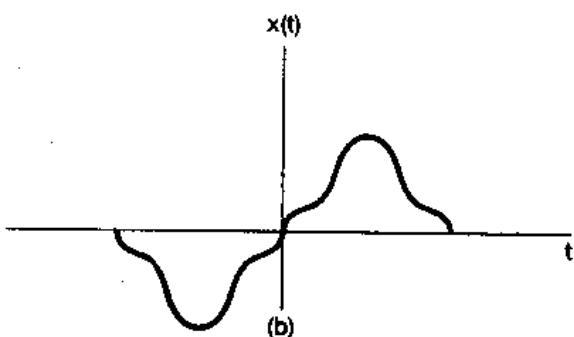
$$x[-n] = -x[n] \quad (1.17)$$

就称该信号为奇信号。一个奇信号在 $t=0$ 或 $n=0$ 必须为 0,因为(1.16)式和(1.17)式要求 $x(0) = -x(0)$ 和 $x[0] = -x[0]$ 。图 1.17 示出奇、偶连续时间信号的例子。

任何信号都能分解为两个信号之和,其中



(a)



(b)

图 1.17 (a)偶连续时间信号;
(b)奇连续时间信号

之一为偶信号,另一个为奇信号。为此考虑下列信号

$$\mathcal{E}_u\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (1.18)$$

$$\mathcal{O}_u\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (1.19)$$

$\mathcal{E}_u\{x(t)\}$, $\mathcal{O}_u\{x(t)\}$ 分别称为 $x(t)$ 的偶部和奇部。很简单地就可确认偶部是偶信号,而奇部是奇信号,且 $x(t)$ 就是两者之和。在离散时间下上述结论也完全成立。图 1.18 示出一个离散时间信号奇偶分解的例子。

1.3 指数信号与正弦信号

这一节和下一节要介绍几个基本的连续时间和离散时间信号。这样做不仅仅是因为这些信号经常出现,更重要的是它们可以用作基本的信号构造单元来构成其它许多信号。

1.3.1 连续时间复指数信号与正弦信号

连续时间复指数信号具有如下形式:

$$x(t) = Ce^{at} \quad (1.20)$$

式中 C 和 a 一般为复数。根据这些参数值的不同,复指数信号可有几种不同的特征。

实指数信号

如图 1.19 所示,若 C 和 a 都是实数(这时 $x(t)$ 就称为实指数信号),就有两种类型的特性。若 a 是正实数,那么 $x(t)$ 随 t 的增加而指数增长。这种类型的信号可以用来描述原子爆炸或复杂化学反应中的链锁反应等很多不同的物理过程。若 a 是负实数,则 $x(t)$ 随 t 的增加而指数衰减。这类信号也可用来描述诸如放射性衰变、RC 电路以及有阻尼的机械系统的响应等范围广泛的各种现象。特别是,如同在习题 2.61 和 2.62 中所指出的,图 1.1 电路和图 1.2 中的汽车,它们的自然响应都是指数衰减的。对于 $a=0$, $x(t)$ 就为一常数。

周期复指数和正弦信号

第二种重要的复指数信号是将 a 限制为纯虚数,特别是考虑如下信号:

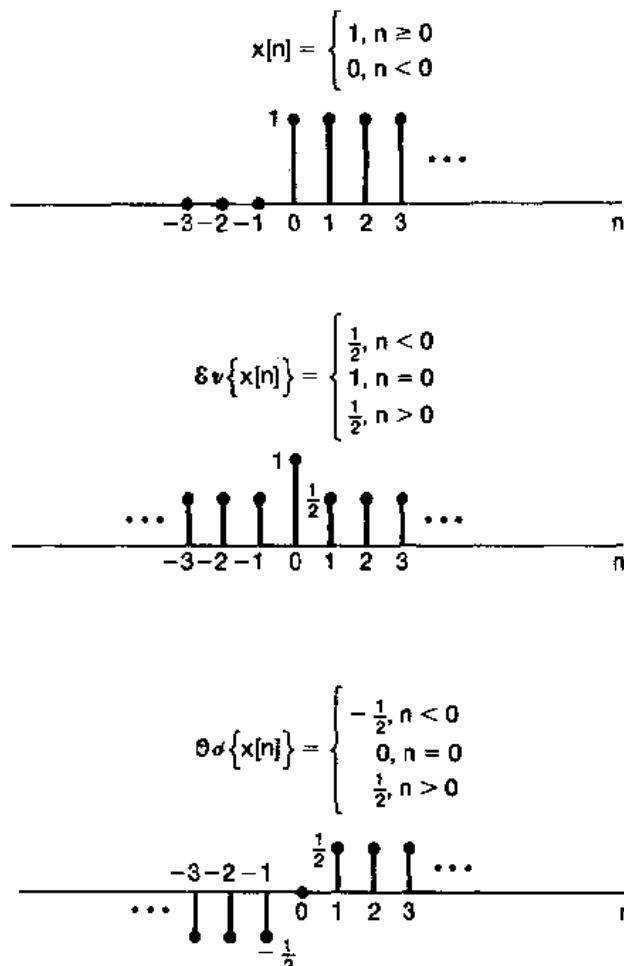


图 1.18 离散时间信号奇偶分解的例子

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (1.21)$$

该信号的一个重要性质是它是周期信号。为了证明这一点,可以根据(1.11)式,如果存在一个 T 而使下式成立:

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0(t+T)} \quad (1.22)$$

则 $x(t)$ 就是周期的。为此

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

必须有

$$e^{j\omega_0 T} = 1 \quad (1.23)$$

若 $\omega_0 = 0$, $x(t) = 1$, 这时对任何 T 值都是周期的; 若 $\omega_0 \neq 0$, 那么使(1.23)式成立的最小正 T 值, 即基波周期 T_0 应为

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} \quad (1.24)$$

可见 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{-j\omega_0 t}$ 都是具有同一基波周期的周期信号。

和周期复指数信号密切有关的一种信号是正弦信号

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1.25)$$

如图 1.20 所示。用秒作 t 的单位, 则 ϕ 的单位就是弧度, 而 ω_0 的单位就是 rad/s。一般又可写成 $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 的单位是周期数/秒, 即 Hz。和复指数信号一样, 正弦信号也是周期信号, 其基波周期 T_0 由(1.24)式确定。正弦和周期复指数信号也可以用来描述很多物理过程的特性, 尤其是储存能量的物理系统。例如在习题 2.61 指出的, LC 电路的自然响应是正弦的, 机械系统的简谐振动以及音乐中的单音声压振动都是正弦的。

利用欧拉(Euler)关系^①, 复指数信号可以用与其相同基波周期的正弦信号来表示, 即

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t \quad (1.26)$$

而(1.25)式的正弦信号也能用相同基波周期的复指数信号来表示, 即

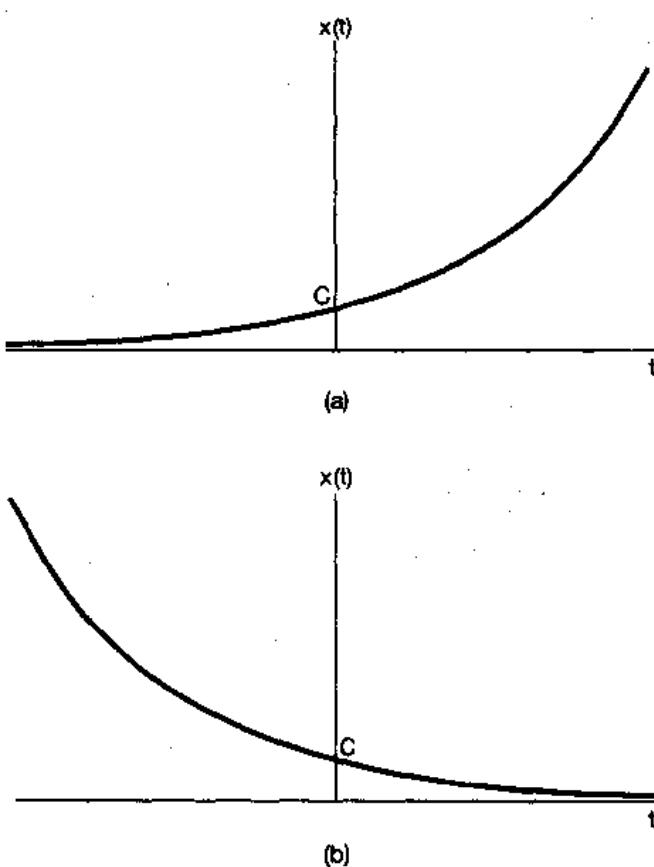


图 1.19 连续时间实指数信号 $x(t) = Ce^{\alpha t}$
(a) $\alpha > 0$; (b) $\alpha < 0$

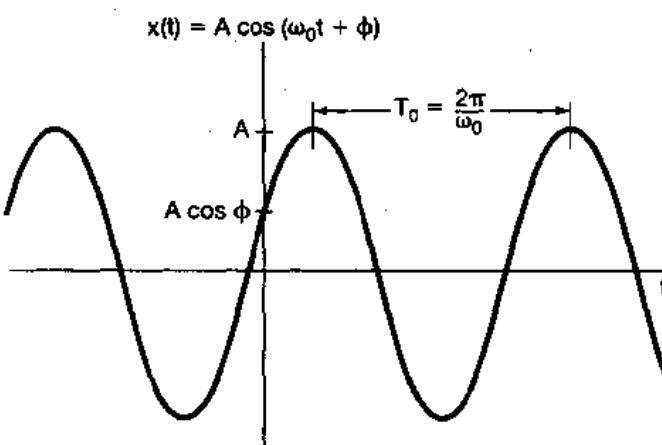


图 1.20 连续时间正弦信号

^① 欧拉关系和有关复数和指数运算的其他基本概念, 将在本章习题数学复习部分中考虑。

$$\begin{aligned}
 & A \cos(\omega_0 t + \phi) \\
 &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

注意,(1.27)式中的两个指数信号都有复数振幅,所以正弦信号还可以用复指数信号表示为如下形式:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \Re\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\} \tag{1.28}$$

这里若 c 是一个复数,则 $\Re\{c\}$ 记作它的实部。也用 $\Im\{c\}$ 记作 c 的虚部,这样就有

$$A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \Im\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\} \tag{1.29}$$

从(1.24)式可以看到,连续时间正弦信号或一个周期复指教信号其基波周期 T_0 是与 $|\omega_0|$ 成反比的(也称 ω_0 为基波频率)。由图 1.21 可以看出这意味着什么。如果 ω_0 减小,就减慢了 $x(t)$ 的振荡速率,因此周期增长;相反, ω_0 增加,振荡速率加快,周期缩短。现在考虑 $\omega_0 = 0$ 的情况,正如早先已经指出的,这时 $x(t)$ 为一常数,因此对于任意正值 T 它都是周期的,所以常数信号的基波周期无定义。另一方面,在这种情况下若定义一个常数信号的基波频率为零,也就是说振荡速率为零,这也不会引起什么混淆。

周期信号,尤其是(1.21)式的复指数信号和(1.25)式的正弦信号给出了具有无限能量但有有限平均功率的这类信号的例子。例如考虑一下(1.21)式的周期复指数信号,假设在一个周期内计算该信号的总能量和平均功率

$$\begin{aligned}
 E_{\text{period}} &= \int_0^{T_0} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt \\
 &= \int_0^{T_0} 1 \cdot dt = T_0
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

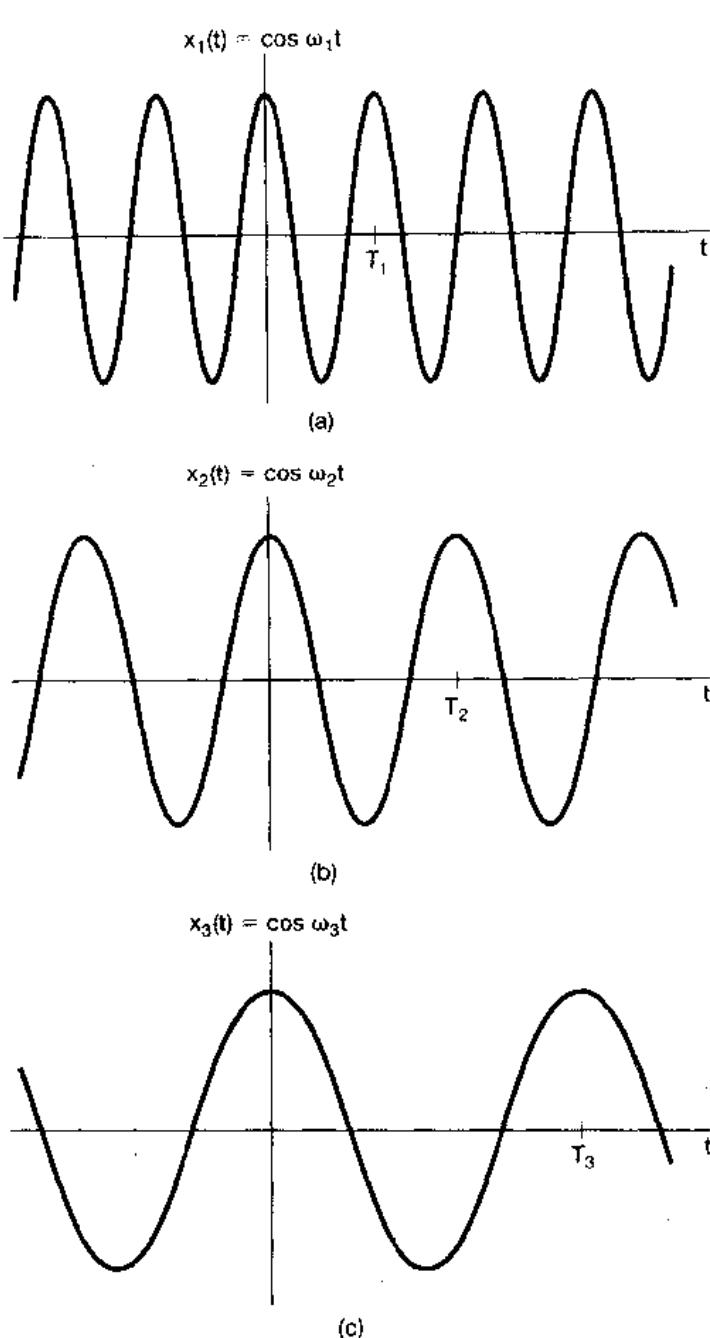


图 1.21 连续时间正弦信号基波频率和周期之间的关系,图中 $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$, 也即 $T_1 < T_2 < T_3$

$$P_{\text{period}} = \frac{1}{T_0} E_{\text{period}} = 1 \quad (1.31)$$

因为随着 t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$, 有无穷多个周期, 所以在整个全部时间内积分其总能量就是无限大。该信号的每个周期都完全是一样的, 因为在每个周期内信号的平均功率等于 1, 所以在多个周期上平均也总是得到 1 的平均功率。这就是说, 周期复指数信号具有有限平均功率等于

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = 1 \quad (1.32)$$

在习题 1.3 中还给出了另外几个有关计算周期和非周期信号能量和功率的例子。

周期复指数信号在讨论信号与系统的大部分问题中都起着十分重要的作用, 部分原因是由于对许多其它信号来说, 它们可用作极其有用的信号基本构造单元。同时, 一组成谐波关系的复指数信号也是很有用的; 也就是周期复指数信号的集合, 该集合内的全部信号都是周期的, 且有一个公共周期 T_0 。对一个复指数信号 $e^{j\omega t}$ 要成为具有周期为 T_0 的周期信号的必要条件是

$$e^{j\omega T_0} = 1 \quad (1.33)$$

这就意味着 ωT_0 是 2π 的倍数, 即

$$\omega T_0 = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.34)$$

由此, 若定义

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (1.35)$$

可以得出, 为满足(1.34)式, ω 必须是 ω_0 的整倍数。这就是说, 一个成谐波关系的复指数信号的集合就是一组其基波频率是某一正频率 ω_0 的整倍数的周期复指数信号, 即

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.36)$$

若 $k=0$, $\phi_k(t)$ 就是一个常数; 而对任何其它的 k 值, $\phi_k(t)$ 是周期的, 其基波频率为 $|k|\omega_0$, 基波周期为

$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|} \quad (1.37)$$

因为在任何长度为 T_0 的时间间隔内, 恰好通过了 $|k|$ 个基波周期, 所以第 k 次谐波 $\phi_k(t)$ 对 T_0 来说仍然是周期的。

这里用的术语“谐波”与在音乐中所用的意思是相同的, 即由声压振动得到的各种音调其频率都是某一基波频率的整倍数。例如, 小提琴上的一根弦的振动模式就能够当作一组成谐波关系的周期指数信号的加权和。在第 3 章将看到, 利用(1.36)式成谐波关系的信号作为基本构造单元可以构成各种各样的周期信号。

例 1.5 有时希望把两个复指数的和化成单一的复指数和单一的正弦函数的乘积来表示。例如我们要想画出下面信号的模

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t} \quad (1.38)$$

为此可以首先将(1.38)式右边的两个复指数进行因式分解, 其具体作法是将右边和式的两个指数中的频率求得它们的平均值, 然后作为公共因子提出来, 为此可得

$$x(t) = e^{j2.5t}(e^{-j0.5} + e^{j0.5t}) \quad (1.39)$$

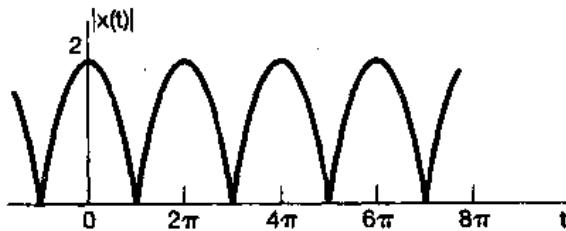
根据欧拉关系, 上式可写成

$$x(t) = 2e^{j2.5t} \cos(0.5t) \quad (1.40)$$

从上式中就可以直接得出 $x(t)$ 的模的表达式为

$$|x(t)| = 2|\cos(0.5t)| \quad (1.41)$$

在这里已经用到复指数 $e^{j2.5t}$ 的模总是 1 这一点。 $|x(t)|$ 就是一般的全波整流过的正弦波，如图 1.22 所示。



一般复指数信号

最一般情况下的复指数信号可以借助于已经讨论过的实指数信号和周期复指数信号来给予表示和说明。考虑某一复指数 Ce^{at} ，将 C 用极坐标， a 用直角坐标表示，分别有

$$C = |C| e^{j\theta}$$

和

$$a = r + j\omega_0$$

那么

$$Ce^{at} = |C| e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t} = |C| e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)} \quad (1.42)$$

利用欧拉关系，可以进一步展开为

$$Ce^{at} = |C| e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j |C| e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (1.43)$$

由此可见，若 $r=0$ ，则复指数信号其实部和虚部都是正弦型的；而对 $r>0$ ，其实部和虚部则是

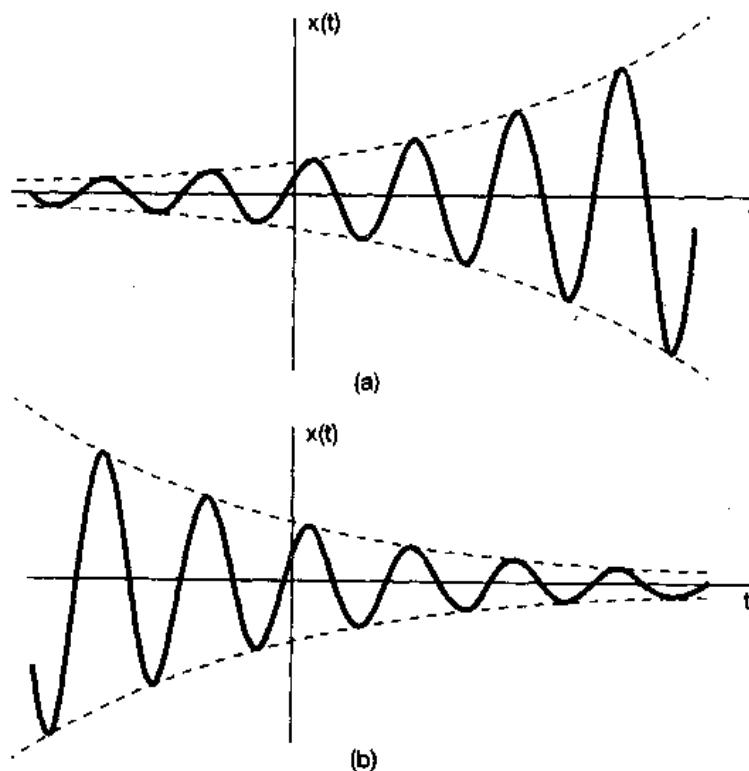


图 1.23 (a) 幅度增长的正弦信号 $x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$, $r > 0$;
 (b) 幅度衰减的正弦信号 $x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$, $r < 0$

一个振幅为指数增长的正弦信号，以及 $r<0$ 时为振幅成指数衰减的正弦信号。这两种情况

如图 1.23 所示,图中的虚线对应于函数 $\pm |C| e^{\alpha n}$ 。由(1.42)式知道 $|C| e^{\alpha n}$ 是复指数信号的振幅,可见 $|C| e^{\alpha n}$ 起着一种振荡变化的包络作用,也就是说每次振荡的峰值正好落在这两条虚线上。这样,包络线给我们提供了一个十分方便的工具,使得我们可以看出振荡幅度的变化趋势。

具有指数衰减振幅的正弦信号常称为阻尼正弦振荡,RLC 电路和包括有阻尼和恢复力在内的机械系统(例如汽车减震系统)的响应都是这样一个指数衰减振荡的例子。这样一类系统都具有这样的过程:随着在振荡衰减的过程中,由电阻、摩擦等阻力消耗掉能量。在习题 2.61 和 2.62 中还能见到这样的系统,以及它们有阻尼的正弦自然响应的例子。

1.3.2 离散时间复指数信号与正弦信号

与连续时间情况下一样,一种重要的离散时间信号是复指数信号或序列,定义为

$$x[n] = C \alpha^n \quad (1.44)$$

这里 C 和 α 一般均为复数。若令 $\alpha = e^{\beta}$, 则有另一种表示形式为

$$x[n] = C e^{\beta n} \quad (1.45)$$

虽然从形式上看,(1.45)式更加类似于连续时间复指数信号的表达式(1.20)式,但是在离散时间情况下,往往把离散时间复指数序列写成(1.44)式更为方便和实用些。

实指教信号

如果 C 和 α 都是实数,那么就会有如图 1.24 所示的几种特性。若 $|\alpha| > 1$, 信号随 n 指数增长; $|\alpha| < 1$, 则随 n 指数衰减。另外,若 α 是正的话,则 $C\alpha^n$ 的全部值都具有同一符号;而当 α 为负时,则 $x[n]$ 的值符号交替变化。同时也注意到若 $\alpha = 1$, $x[n]$ 就是一个常数;而当 $\alpha = -1$ 时, $x[n]$ 的值就在 $+C$ 和 $-C$ 之间交替改变。实离散时间指教序列可以用来描述诸如人口增长作为“代”的函数、投资总回收作日、月、或季度的函数等这样一些问题。

正弦信号

如果将(1.45)式中的 β 局限为纯虚数(即 $|\alpha| = 1$)的话,就可以得到另一个重要的复指教序列。具体地考虑如下序列:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \quad (1.46)$$

和连续时间情况一样,这个信号是与正弦信号密切相关的,即

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (1.47)$$

若取 n 无量纲的话,那么 ω_0 和 ϕ 的量纲都应是弧度。图 1.25 中示出了三个正弦序列的例子。

和前面作法一样,利用欧拉公式可以将复指教和正弦序列联系起来为

$$e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n \quad (1.48)$$

和

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \quad (1.49)$$

(1.46)式和(1.47)式的信号就是在离散时间信号中具有无限总能量,而有有限平均功率的例子。因为 $|e^{j\omega_0 n}| = 1$, (1.46)式中信号的每个样本在信号能量中的贡献都是 1。因此,在 $-\infty$

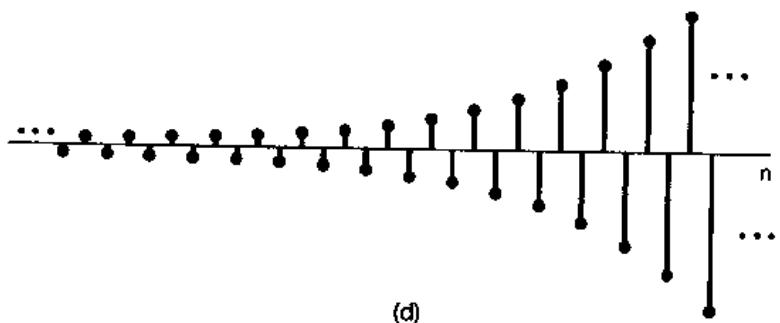
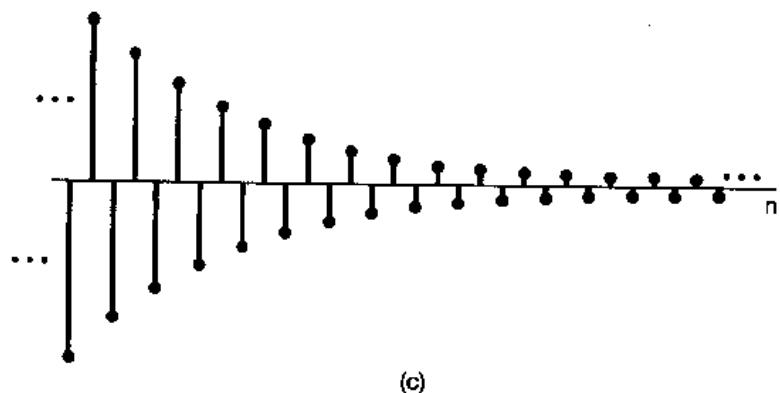
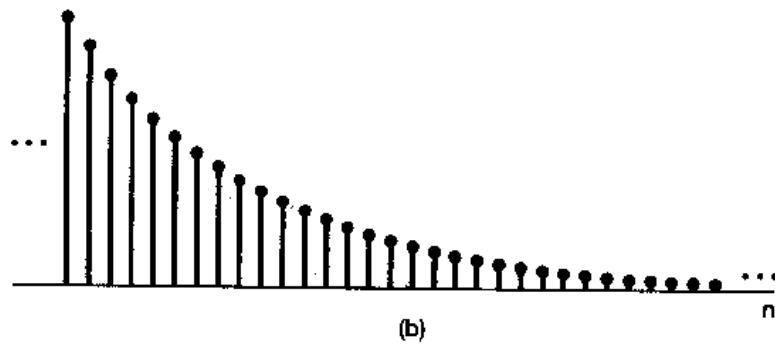
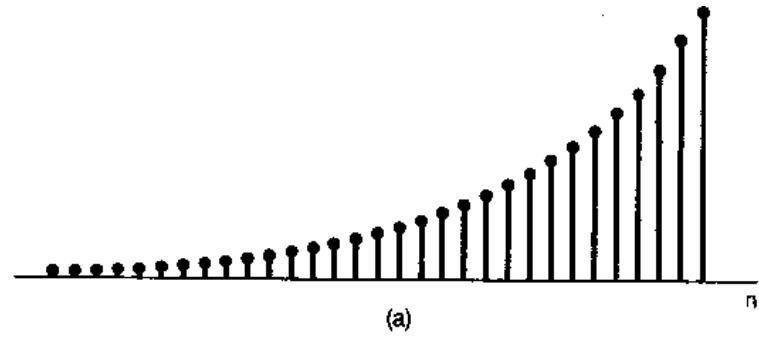


图 1.24 实指数信号 $x[n] = C \alpha^n$

(a) $\alpha > 1$; (b) $0 < \alpha < 1$; (c) $-1 < \alpha < 0$; (d) $\alpha < -1$

$< n < +\infty$ 内的总能量就是无穷大;而在每单位时刻点上的平均功率明显地等于 1。在习题 1.3 中将给出计算离散时间信号能量和功率的其它例子。

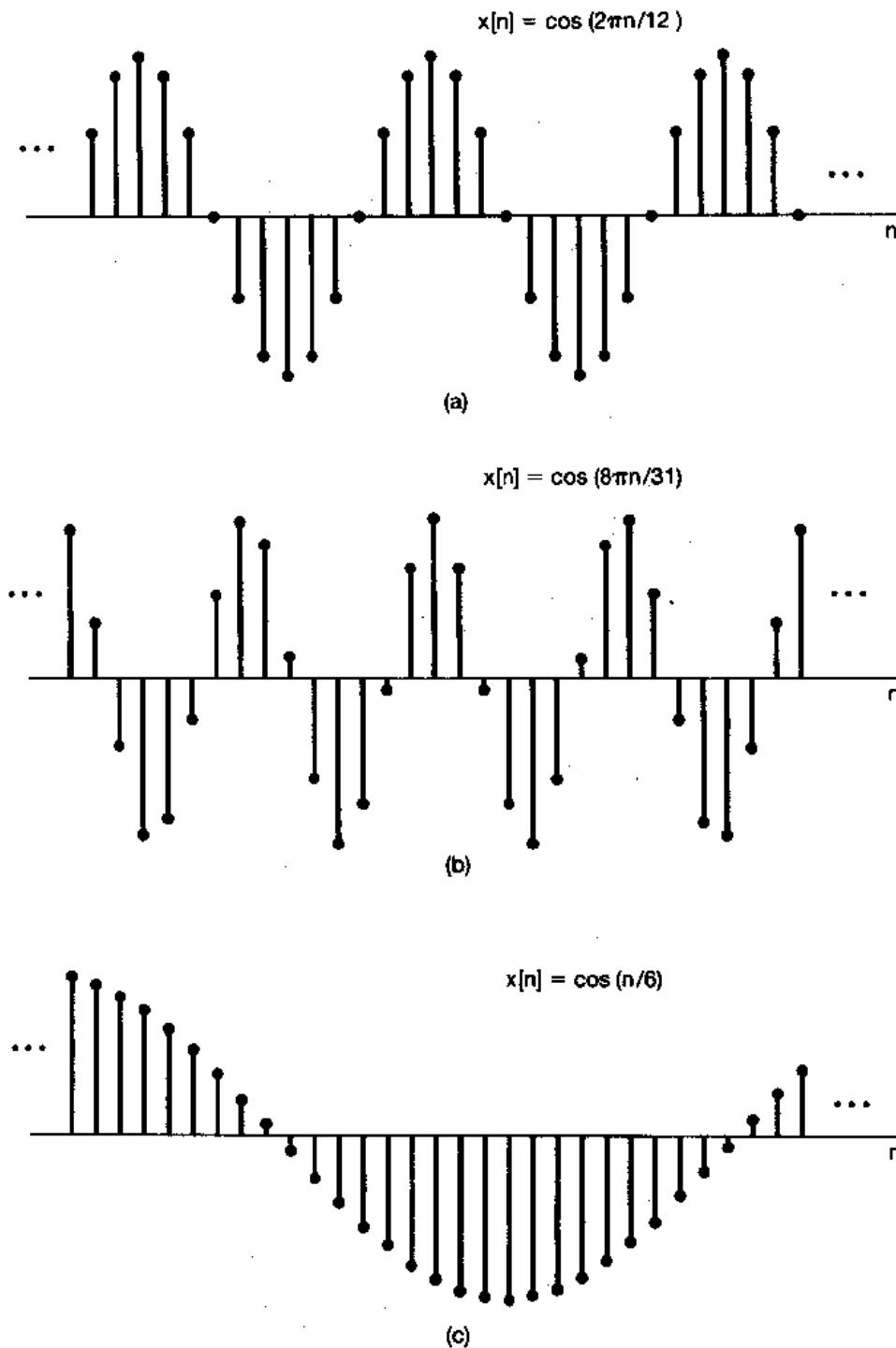


图 1.25 离散时间正弦信号

一般复指数信号

一般离散时间复指数信号可以用实指数和正弦信号来表示。将 C 和 α 均以极坐标形式给出, 即

$$C = |C| e^{j\theta}$$

和

$$\alpha = |\alpha| e^{j\omega_0}$$

则有

$$C\alpha^n = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j |C||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \theta) \quad (1.50)$$

于是, 对 $|\alpha|=1$, 复指数序列的实部和虚部都是正弦序列。对 $|\alpha|<1$, 其实部和虚部为正弦序列乘以一个按指数衰减的序列。对 $|\alpha|>1$, 则乘以一个按指数增长的序列。图 1.26 示出了这些信号的例子。

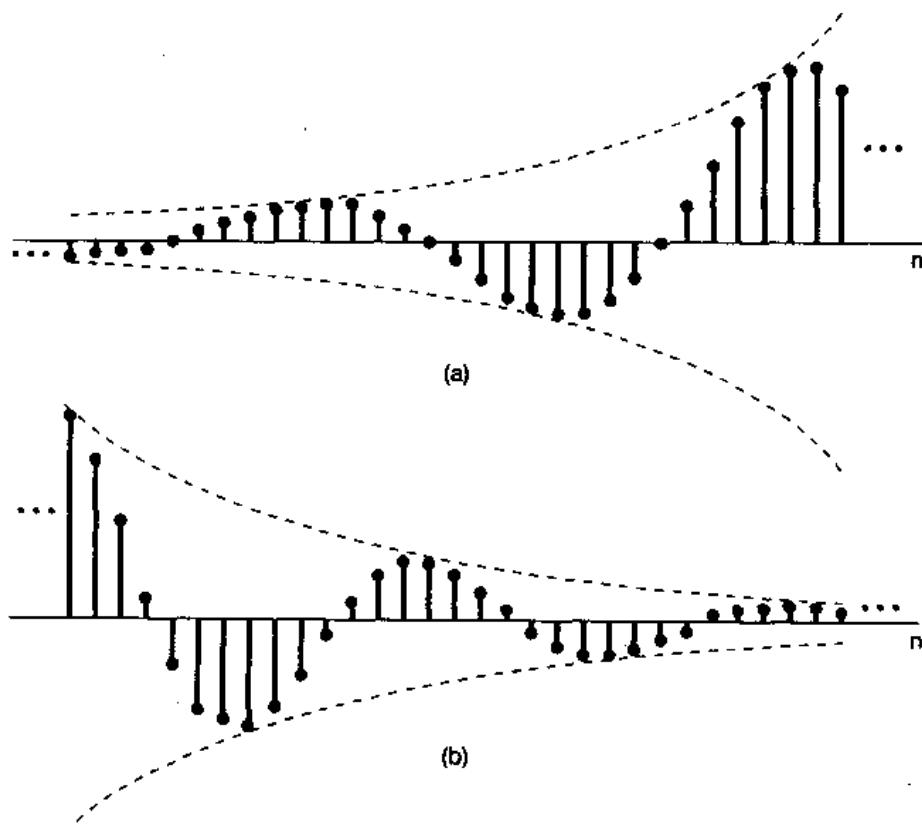


图 1.26 (a) 增长的离散时间正弦信号;(b) 衰减的离散时间正弦信号

1.3.3 离散时间复指数序列的周期性质

虽然在连续时间和离散时间信号之间有很多相似之处,但是也存在一些重要的差别。其中之一就是来看看离散时间指数信号 $e^{j\omega_0 n}$ 。在 1.3.1 节,与其对应的连续时间信号 $e^{j\omega_0 t}$ 具有以下两个性质:(1) ω_0 愈大,信号振荡的速率就愈高;(2) $e^{j\omega_0 t}$ 对任何 ω_0 值都是周期的。现在,将在这两点上来考察一下 $e^{j\omega_0 n}$,就会看到在这两个性质上,两者是肯定不一样的。

第一个性质的不同直接来自于离散时间和连续时间复指数信号之间另一个极为重要的不同之处。为此,研究一下频率为 $\omega_0+2\pi$ 的离散时间复指数信号:

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n} \quad (1.51)$$

从(1.51)式说明,离散时间复指数信号在频率 $\omega_0+2\pi$ 与频率 ω_0 时是完全一样的。这一点和连续时间复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 是完全不同的,在那里,不同的 ω_0 就对应着不同的信号;而在离散时

间情况下,具有频率为 ω_0 的复指数信号与 $\omega_0 \pm 2\pi, \omega_0 \pm 4\pi, \dots$ 等等这些频率的复指数信号则是一样的。因此,在考虑这种离散时间复指数信号时,仅仅需要在某一个 2π 间隔内选择 ω_0 就行了。虽然从(1.51)式来看,任何 2π 间隔都是可以的,但在大多数情况下总是利用 $0 \leq \omega_0 < 2\pi$, 或者 $-\pi \leq \omega_0 < \pi$ 这样一个区间。

由于(1.51)式指出的周期性质, $e^{j\omega_0 n}$ 就不具有随 ω_0 在数值上的增加而不断增加其振荡速率的特性。事实上如图 1.27 所示,而是随着 ω_0 从 0 开始增加,其振荡速率愈来愈快,直到 $\omega_0 = \pi$ 为止,然后若继续增加 ω_0 的话,其振荡速率就下降,直到 $\omega_0 = 2\pi$ 为止,这时又得到与 $\omega_0 = 0$ 时同样的结果(常数序列)。因此,离散时间复指数的低频部分(也就是慢变化)是 ω_0 在 $0, 2\pi$ 和任何其它 π 的偶数倍值附近;而高频部分(也就是相应于快变化)则是位于 $\omega_0 = \pm\pi$ 以及其它任何 π 的奇数倍值附近。值得特别注意的是,在 $\omega_0 = \pi$ 或任何其它 π 的奇数倍处有

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n \quad (1.52)$$

以至于信号在每一点上都改变符号,产生剧烈振荡[如图 1.27(e)所示]。

要讨论的第二个性质是关于离散时间复指数信号的周期性问题。为了使信号 $e^{j\omega_0 n}$ 是周期的,周期为 $N > 0$,就必须有

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \quad (1.53)$$

这就等效于要求

$$e^{j\omega_0 N} = 1 \quad (1.54)$$

为了使(1.54)式成立, $\omega_0 N$ 必须是 2π 的整数倍,也就是说必须有一个整数 m ,使下式满足

$$\omega_0 N = 2\pi m \quad (1.55)$$

或者

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad (1.56)$$

根据(1.56)式,若 $\omega_0/2\pi$ 为一有理数, $e^{j\omega_0 n}$ 就是周期的;否则就不是周期的。这一结论对离散时间正弦信号也是成立的。例如图 1.25(a)和(b)的信号就是周期的;而图 1.25(c)的信号不是周期的。

根据上面的讨论,我们来求离散时间复指数信号的基波周期和基波频率。基波周期和基波频率的定义和连续时间情况一样,即如果 $x[n]$ 是一个周期序列,基波周期为 N ,则它的基波频率就是 $2\pi/N$ 。这样,我们来考虑一个周期复指数信号 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$,其中 $\omega_0 \neq 0$ 。正如刚才所证明的,一定有若干对 m 和 $N(N > 0)$ 存在,满足(1.56)式,即 $\omega_0/2\pi = m/N$ 。在习题 1.35 中将证明,如果 N 和 m 没有公共因子,那么 $x[n]$ 的基波周期就是 N 。将这一点再与(1.56)式结合起来,可以求得周期信号 $e^{j\omega_0 n}$ 的基波频率就是

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m} \quad (1.57)$$

当然,基波周期也能写为

$$N = m \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right) \quad (1.58)$$

上面最后两个表示式(1.57)式和(1.58)式与连续时间情况下所对应的(1.24)式是不同的。在表 1.1 中,综合了 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 之间的一些不同点。当然,若 $\omega_0 = 0$,基波频率为 0,基波周期无定义,这与连续时间情况下是相同的。

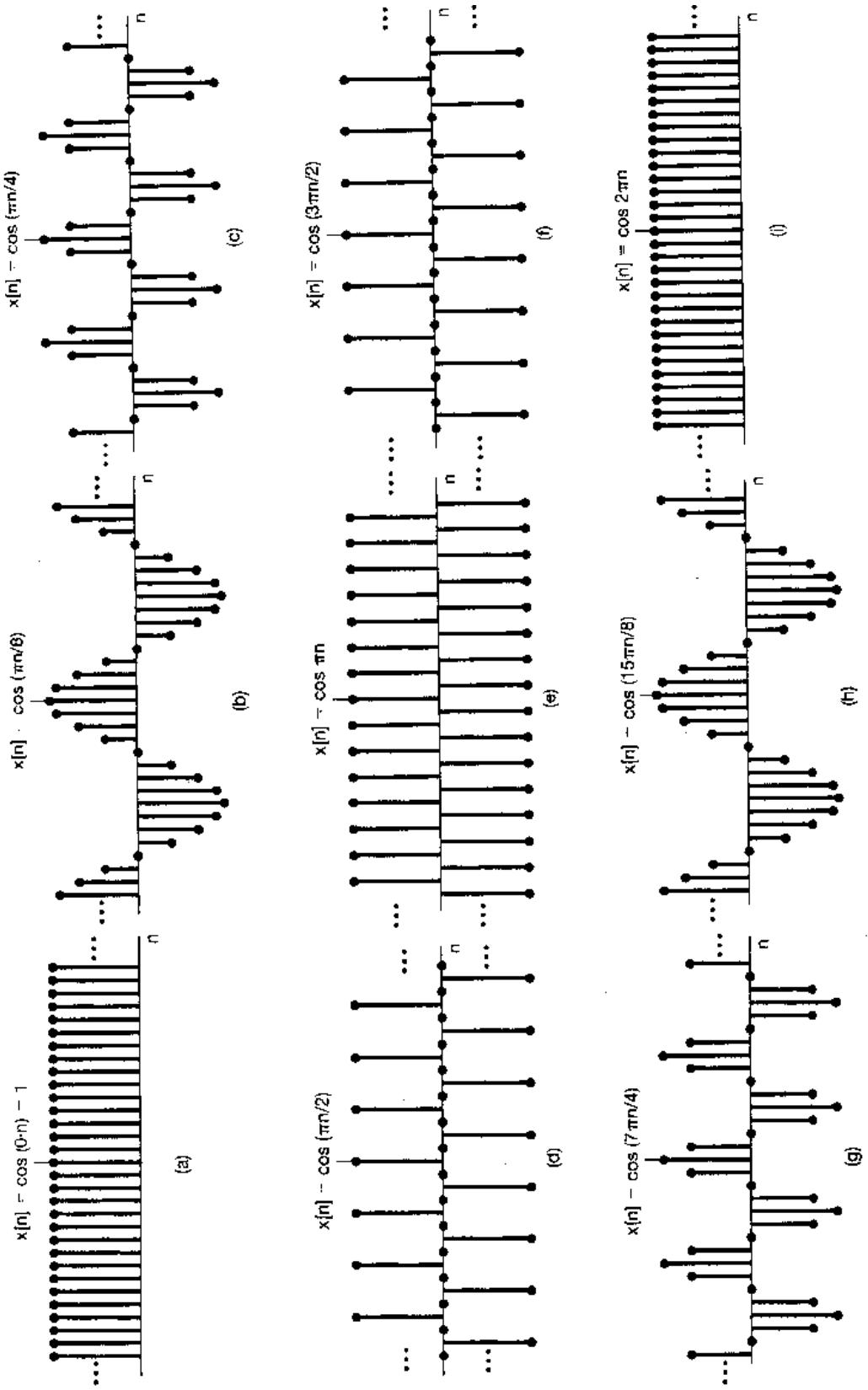


图 1.27 对应于几个不同频率时的离散时间正弦序列

表 1.1 信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的比较

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
ω_0 不同, 信号不同	频率相差 2π 的整倍数, 信号相同
对任何 ω_0 值都是周期的	仅当 $\omega_0 = 2\pi m/N$ 时才是周期的, 这里 $N (> 0)$ 和 m 均为整数
基波频率为 ω_0	基波频率 * ω_0/m
基波周期: $\omega_0 = 0$, 无定义 $\omega_0 \neq 0$, $2\pi/\omega_0$	基波周期: * $\omega_0 = 0$, 无定义 $\omega_0 \neq 0$, $m(\frac{2\pi}{\omega_0})$

* 这里假设 m 和 N 无任何公共因子。

为了对以上性质加深理解, 再来考察一下图 1.25 中的几个信号。首先, 图 1.25(a)中的序列 $x[n] = \cos(2\pi n/12)$ 可以看作是连续时间正弦信号 $x(t) = \cos(2\pi t/12)$ 在整数时刻点上的样本值。这时, $x(t)$ 是基波周期为 12 的周期信号, $x[n]$ 也是基波周期为 12 的周期序列。也就是说, $x[n]$ 的值每隔 12 个点都重复, 这与 $x(t)$ 的基波周期是完全同步的。

与此相反, 图 1.25(b)中的序列 $x[n] = \cos(8\pi n/31)$, 这可以当作是 $x(t) = \cos(8\pi t/31)$ 在整数时刻点上的样本值。这时, $x(t)$ 是基波周期为 $31/4$ 的周期信号; 另一方面, $x[n]$ 却是基波周期为 31 的周期序列。造成这种差别的原因是离散时间信号仅能在自变量的整数值上有定义所致。于是, 当 $x(t)$ 从 $t=0$ 开始完成一个整周期时, 在时刻 $t=31/4$ 上不能取得样本值。类似地, 在 $t=2(31/4)$ 或 $t=3(31/4)$ 上, 即当 $x(t)$ 走完两个或三个整周期时, 也不存在样本点。但是, 在 $x(t)$ 走完四个整周期, 即 $t=4(31/4)=31$, 才有整数的样本点, 可取得样本值。这一点从图 1.25(b)中就能看出, $x[n]$ 值的变化并不随着 $x(t)$ 每单个周期重复, 而是每隔 4 个周期, 即每隔 31 点才重复。

同样, 信号 $x[n] = \cos(n/6)$ 能看作是信号 $x(t) = \cos(t/6)$ 在整数时刻点上的样本值。这时, $x(t)$ 的值在整数时刻点永不重复, 因为这些样本点从来也不会落在 $x(t)$ 的周期 12π 及其倍数的点上, 因此 $x[n]$ 不是周期的。虽然人眼看起来好像是周期的, 其实这是由于人眼在样本点间进行内插, 看到了它的包络 $x(t)$ 的结果。在习题 1.36 中将进一步说明, 利用采样概念可对离散时间正弦序列的周期性求得更为深入的理解。

例 1.6 假设欲确定如下离散时间信号的基波周期

$$x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n} \quad (1.59)$$

(1.59)式右边第一个指数有一个基波周期是 3。虽然这个可以用(1.58)式来证明, 但是还有一个比较简单的方法可以得出这一答案。留心一下第一项相角的 $(2\pi/3)n$, 要使得该指数值开始重复, 这个相角就必须增加 2π 的倍数。于是立即可见, 若 n 递增一个 3, 这个相角就增加了一个 2π 。至于第二项, 要使其相角 $(3\pi/4)n$ 增加一个 2π , n 就必须递增 $8/3$; 而这是不可能的, 因为 n 只能是整数。相仿, 要相角增加 4π , n 就得递增 $16/3$, 仍然是一个非整数的增量。然而, 把相角增加 6π 要求 n 有 8 的增量, 这个 8 就是第二项的基波周期了。

现在, 为了使整个信号 $x[n]$ 重复, (1.59)式中的每一项都必须通过各自基波周期的整数倍。完成这个过程的 n 最小增量是 24。也就是说, 在 24 点的间隔内, (1.59)式右边第一项已经穿过了它的 8 个基波周期, 而第二项则穿过了它的 3 个基波周期, 而总的信号 $x[n]$ 穿过的只是一个基波周期。

和连续时间情况一样,考虑一组成谐波关系的周期离散时间复指数信号在离散时间信号与系统分析中也是有很大价值的。这就是一组具有公共周期 N 的周期复指数信号,由(1.56)式可知,这些信号的频率都是基波频率 $2\pi/N$ 的整倍数,即

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (1.60)$$

在连续时间情况下,这些成谐波关系的信号 $e^{jk(2\pi/T)t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 都是不相同的。然而,由于(1.51)式的原因,在离散时间情况下却不是这样。因为

$$\begin{aligned} \phi_{k+N}[n] &= e^{j(k+N)(2\pi/N)n} \\ &= e^{jk(2\pi/N)n} e^{j2\pi n} = \phi_k[n] \end{aligned} \quad (1.61)$$

这意味着,由(1.60)式所给出的一组信号中,仅有 N 个互不相同的周期复指数信号。例如,

$\phi_0[n] = 1$, $\phi_1[n] = e^{j2\pi n/N}$, $\phi_2[n] = e^{j4\pi n/N}$, \dots , $\phi_{N-1}[n] = e^{j2\pi(N-1)n/N}$ (1.62)
是全不相同的,而任何其它的 $\phi_k[n]$ 都将与上列中的一个相同(例如 $\phi_N[n] = \phi_0[n]$ 和 $\phi_{-1}[n] = \phi_{N-1}[n]$)。

1.4 单位冲激与单位阶跃函数

这一节要介绍另外两个基本信号,这就是在连续时间和离散时间情况下的单位冲激与单位阶跃函数,在信号与系统分析中它们都是非常重要的。在第 2 章将会看到如何利用单位冲激信号作为基本构成单元来构成和表示其它的信号。先讨论离散时间情况。

1.4.1 离散时间单位脉冲和单位阶跃序列

最简单的离散时间信号之一就是单位脉冲(或单位样本),定义为

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (1.63)$$

如图 1.28 所示。全书把 $\delta[n]$ 称为单位脉冲或者单位样本,两者都通用。

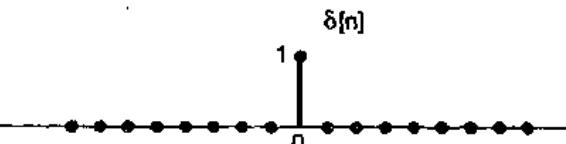


图 1.28 离散时间单位脉冲(样本)序列

第二个基本离散时间信号是离散时间单位阶跃 $u[n]$, 定义为

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

单位阶跃序列如图 1.29 所示。



图 1.29 离散时间单位阶跃序列

离散时间单位脉冲和单位阶跃之间存在着密切的关系。离散时间单位脉冲是离散时间单位阶跃的一次差分,即

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1] \quad (1.65)$$

相反, 离散时间阶跃是单位样本的求和函数(running sum), 即

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (1.66)$$

图 1.30 示出了(1.66)式的关系。因为单位样本仅在它的宗量为零时不为零, 所以(1.66)式的求和在 $n < 0$ 时为 0, 而在 $n \geq 0$ 时为 1。另外, 在(1.66)式中将求和变量从 m 改变为 $k = n - m$ 后, 离散时间单位阶跃也可用单位样本表示成

$$u[n] = \sum_{k=\infty}^0 \delta[n-k]$$

或者

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad (1.67)$$

图 1.31 示出(1.67)式的关系。这时, $\delta[n-k]$ 在 k 等于 n 时为非零, 所以(1.67)式对 $n < 0$ 为 0, 而对 $n \geq 0$ 为 1。

(1.67)式的一种解释是可以把它看作是一些延时脉冲的叠加, 也就是说将其看作是在 $n=0$ 发生的 $\delta[n]$, 在 $n=1$ 发生的 $\delta[n-1]$, 以及在 $n=2$ 发生的 $\delta[n-2]$ 等等的和。在第 2 章将对这种解释作更直接的应用。

单位脉冲序列可以用于一个信号在 $n=0$ 时的值的采样, 因为 $\delta[n]$ 仅在 $n=0$ 为非零值(等于 1), 所以有

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \quad (1.68)$$

更一般的情况是, 若考虑发生在 $n=n_0$ 处的单位脉冲 $\delta[n-n_0]$, 那么就有

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0] \quad (1.69)$$

单位脉冲的这种采样性质在第 2 章和第 7 章中将起到重要的作用。

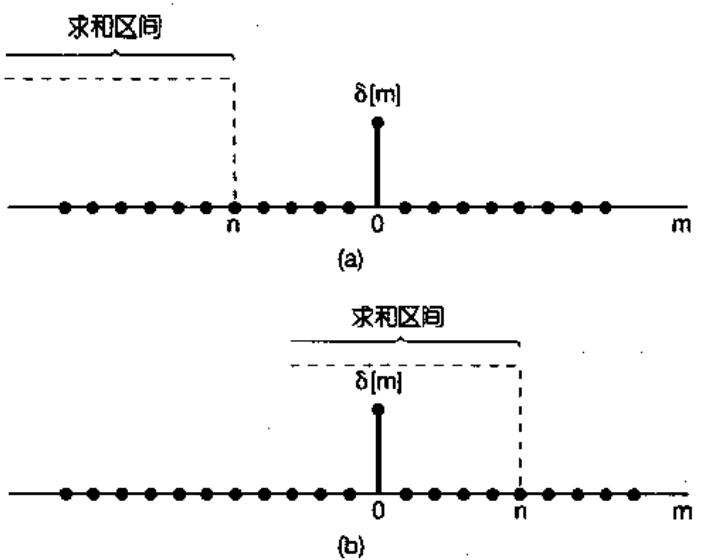


图 1.30 (1.66)式的求和:(a) $n < 0$; (b) $n \geq 0$

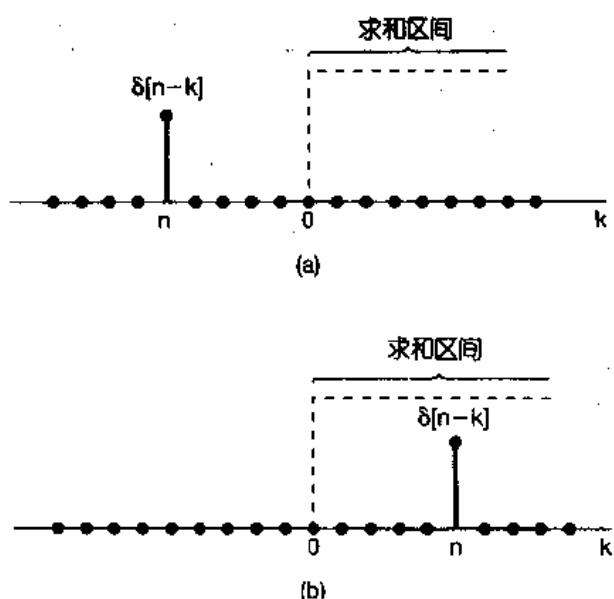


图 1.31 (1.67)式的关系:(a) $n < 0$; (b) $n \geq 0$

1.4.2 连续时间单位阶跃和单位冲激函数

与离散时间情况相类似, 连续时间单位阶跃函数 $u(t)$ 定义为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

如图 1.32 所示。值得注意的是，单位阶跃在 $t=0$ 这一点是不连续的。连续时间单位冲激函数 $\delta(t)$ 与单位阶跃的关系也和离散时间单位脉冲与单位阶跃函数之间的关系相类似，即连续时间单位阶跃是单位冲激的积分函数（running integral）

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (1.71)$$

这就使人联想到 $\delta(t)$ 和 $u(t)$ 之间还有一种类似于（1.65）式这样的关系存在。根据（1.71）式，连续时间单位冲激能够看作连续时间单位阶跃的一次微分

$$\delta(t) = \frac{d u(t)}{d t} \quad (1.72)$$

与离散时间情况相比，利用（1.72）式来表示单位冲激函数存在一些困难，这是因为 $u(t)$ 在 $t=0$ 是不连续的，因此正规来讲是不可微的。然而，可以考虑把（1.72）式解释成图 1.33 所示信号 $u_\Delta(t)$ 的一种近似，这里 $u_\Delta(t)$ 从 0 升到 1 是在一个较短的时间间隔 Δ 内完成的。很自然，瞬时变化的单位阶跃可以看作为 $u_\Delta(t)$ 的一种理想化的结果，因为 Δ 是这样的短暂以至于对任何实际问题来说无关紧要。正规地说， $u(t)$ 是当 $\Delta \rightarrow 0$ 时， $u_\Delta(t)$ 的极限。现在来考虑这一导数

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt} \quad (1.73)$$

如图 1.34 所示。

注意到 $\delta_\Delta(t)$ 是一个持续期为 Δ 的短脉冲，而且对任何 Δ 值，其面积都为 1。随着 $\Delta \rightarrow 0$ ， $\delta_\Delta(t)$ 变得愈来愈窄，愈来愈高，但始终保持单位面积。它的极限形式

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t) \quad (1.74)$$

就能看作 Δ 变成无穷小后，短脉冲 $\delta_\Delta(t)$ 的一种理想化的结果。事实上，因为 $\delta(t)$ 没有持续期，但有面积，因此就用图 1.35 的符号，用在 $t=0$ 处箭头指出脉冲的面积是集中在 $t=0$ ，用箭头旁边的高度“1”来表示该冲激的面积，称为冲激强度。更为一般地， $k\delta(t)$ 的面积就是 k ，因此有

$$\int_{-\infty}^t k\delta(\tau) d\tau = ku(t)$$

如图 1.36 所示，箭头的高度选为正比于冲激的面积。

和离散时间情况一样，（1.71）式的积分可以用图 1.37 来说

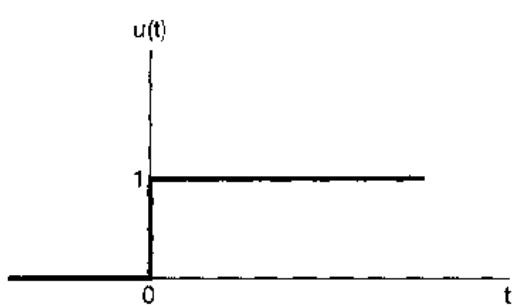


图 1.32 连续时间单位阶跃函数

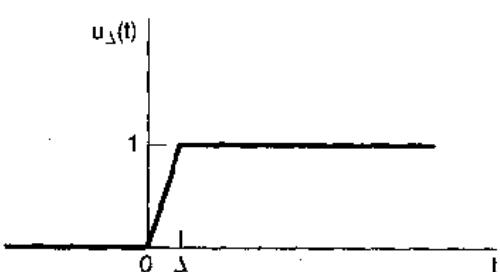


图 1.33 单位阶跃的连续近似 $u_\Delta(t)$

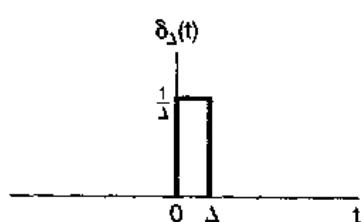


图 1.34 $u_\Delta(t)$ 的导数

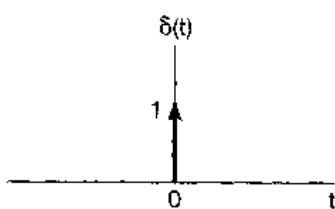


图 1.35 连续时间单位冲激

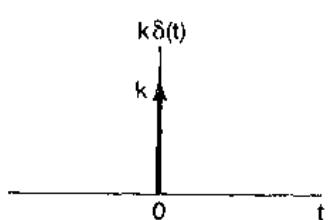


图 1.36 冲激强度为 k 的冲激 $k\delta(t)$

明。因为连续时间单位冲激 $\delta(\tau)$ 的面积是集中在 $\tau=0$ 的, 因此这个积分从 $-\infty$ 开始到 $t < 0$ 都是 0, $t > 0$ 时则为 1。与离散时间(1.67)式相类似, 若把(1.71)式的积分变量 τ 置换为 $\sigma = t - \tau$, 就可以将连续时间单位阶跃和单位冲激函数之间的关系表示成另一种形式, 即:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 \delta(t - \sigma) (-d\sigma)$$

或等效为

$$u(t) = \int_0^\infty \delta(t - \sigma) d\sigma \quad (1.75)$$

$u(t)$ 和 $\delta(t)$ 之间的关系可用图 1.38 来说明。图为在这种情况下 $\delta(t - \sigma)$ 的面积集中于 $\sigma = t$ 的点上, 因此, (1.75) 式的积分对于 $t < 0$ 是 0, 而在 $t > 0$ 是 1。这种把单位冲激特性在积分意义下给予的图解说明在第 2 章的讨论中极为有用。

和离散时间单位脉冲函数一样, 连续时间冲激函数也具有一个很重要的采样性质。尤其是, 有许多理由认为, 考虑一个冲激和一些常规连续时间函数 $x(t)$ 的乘积是很重要的。这个乘积是最容易按照(1.74)式 $\delta(t)$ 的定义来给予说明的, 具体来说, 考虑下式

$$x_1(t) = x(t) \delta_\Delta(t)$$

在图 1.39(a) 中已经画出了这两个时间函数 $x(t)$ 和 $\delta_\Delta(t)$, 图 1.39(b) 是乘积的非零部分经过放大的结果。虽然在 $0 \leq t \leq \Delta$ 以外, $x_1(t) = 0$ 。现在若 Δ 足够小, 以使得 $x(t)$ 在 Δ 内可以近似认为是一常数 $x(0)$, 则有

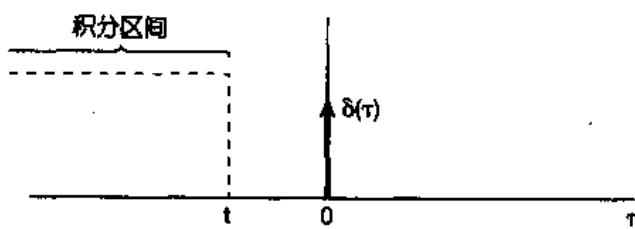
$$x(t) \delta_\Delta(t) \approx x(0) \delta_\Delta(t)$$

因为 $\delta(t)$ 是 $\Delta \rightarrow 0$ 时 $\delta_\Delta(t)$ 的极限, 所以有

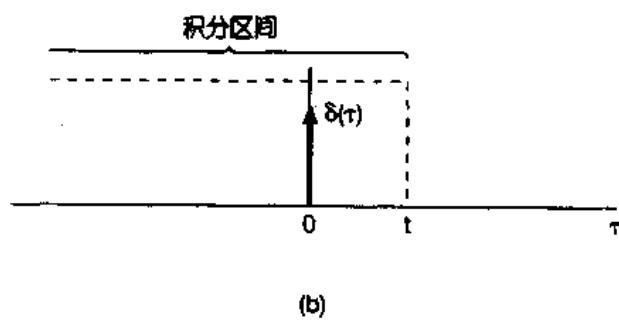
$$x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t) \quad (1.76)$$

同理, 对出现在任意一点(例如 t_0)的冲激应该有一个类似的表示式为

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

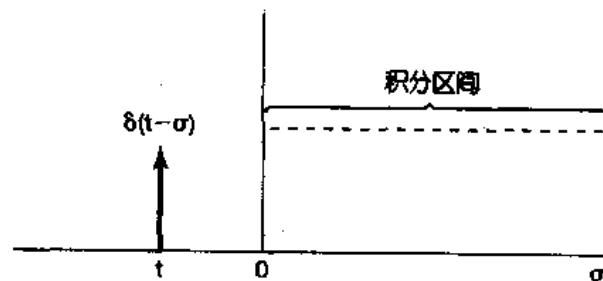


(a)

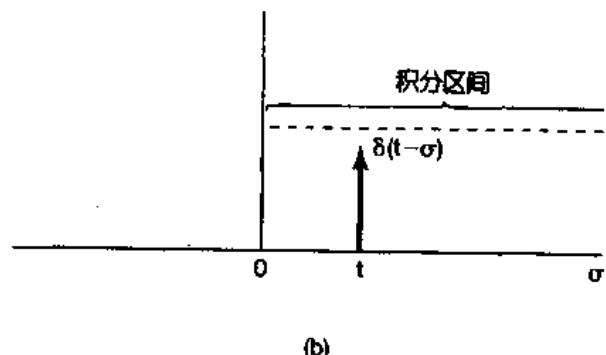


(b)

图 1.37 (1.71)式的积分:(a) $t < 0$; (b) $t > 0$



(a)



(b)

图 1.38 (1.75)式的积分:(a) $t < 0$; (b) $t > 0$

虽然在这一节有关单位冲激函数的讨论多少有些不太正规,但是却给出了这个信号的一些重要的直观形象;而这些在本书自始至终都是很有用的。正如我们已经说过的,单位冲激函数应该把它看成是一种理想化的东西。在 2.5 节将会更为详细地讨论和说明。任何真实的物理系统都会有惯性存在,因此不可能对输入作出瞬时的响应。这样,如果一个足够窄的脉冲是加到这样的系统上的话,该系统的响应不会受脉冲持续期或脉冲的形状细节有明显的影响,于是,所关注的脉冲的主要特性就是该脉冲一种总的综合效果,也就是它的面积。对于那些比其它系统响应快得多的系统,脉冲就必须具有更短的持续期,以达到脉冲形状的细节或者它的持续期不再起作用为止。对任何物理系统来说,总是可以找到一个“足够窄”的脉冲。这样,单位冲激就是这一概念的理想化结果,即对任何系统来说都是足够窄的那个脉冲。在第 2 章将会看到,一个系统对这个理想化脉冲的响应在信号与系统分析中起着关键的作用,并且在建立和理解这一作用的过程中,对它将会有更进一步的认识^①。

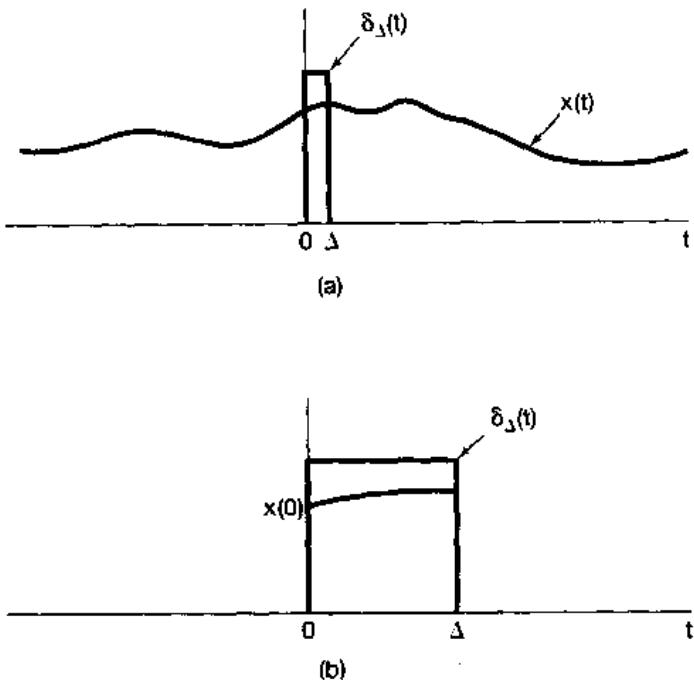


图 1.39 乘积 $x(t)\delta_A(t)$

(a) 两个相乘函数的图; (b) 乘积非零部分的放大

例 1.7 研究一下图 1.40(a)中的不连续信号 $x(t)$ 。由于连续时间单位冲激和单位阶跃之间的关系,可以很容易地算出并画出该信号的导数。具体一点就是 $x(t)$ 的导数除了在那些不连续点外明显地都是 0。在单位阶跃的情况下,由(1.72)式已得出,在不连续点的微分就引起一个单位冲激。另外,将(1.72)式两边都乘以任意数 k ,可见大小为 k 的阶跃的微分将在不连续点得到面积为 k 的冲激。这一规律对任何在不连续点跃变的信号都成立,就像图 1.40(a)那样的信号 $x(t)$ 。这样就能画出导数 $\dot{x}(t)$ 如图 1.40(b) 所示,这里冲激是位于 $x(t)$ 的每一个不连续点处,面积就是跃变的大小。例如在 $t=2$ 这一点, $x(t)$ 的跃变值是 -3,所以在 $\dot{x}(t)$ 的 $t=2$ 处的冲激就标以 -3。

作为一种结果的验证,可以证明能够从 $\dot{x}(t)$ 将 $x(t)$ 恢复出来。因为 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 在 $t \leq 0$ 都是 0,所以仅需要对 $t > 0$ 进行验证,

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(t) dt \quad (1.77)$$

如图 1.40(c)所示,对 $t < 1$, (1.77) 式右边的积分等于 0, 因为在这段积分区间内没有任何冲激。对于 $1 < t < 2$, 第一个冲激(位于 $t=1$)在该积分区间内, 所以(1.77)式的积分就等于 2(该冲激的面积)。

^① 单位冲激及其有关的函数(统称为奇异函数)已经在所谓广义函数(generalized functions)和分配理论(theory of distributions)这些数学领域中给予了详尽地研究。这一专题的更详细讨论可参阅“Distribution Theory and Transform Analysis”, A. H. Zemanian (New York: McGraw-Hill Book Company, 1965), “Generalised Functions” R. F. Hoskins (New York: Halsted Press, 1979), 或者更深一点的教科书“Fourier Analysis and Generalized Functions”, M. J. Lighthill (New York: Cambridge University Press, 1958)。本书第 2 章的 2.5 节关于奇异函数的讨论其基本精神与上述参考书中所阐述的数学理论是一致的, 我们只简单地对这一论题在数学上的一些概念作了介绍。

对于 $2 < t < 4$, 前两个冲激是在这个积分区间内, 积分就是累加了它们两个面积的和, 即 $2 - 3 = -1$ 。最后, 对于 $t > 4$, 全部三个冲激都在该积分区间内, 积分就等于这三个面积的和, 即 $2 - 3 + 2 = 1$ 。这个结果与图 1.40(a) 的 $x(t)$ 是完全一样的。

1.5 连续时间和离散时间系统

从广义的角度上来看, 具体的系统都是一些元件、器件或子系统的互联。从信号处理及通信到电机、各种机动车和化学处理工厂等这些方面来说, 一个系统可以看作是一个过程, 在其中输入信号被该系统所变换, 或者说系统以某种方式对信号作出响应。例如, 一个高保真度的音频信号录制系统对输入音频信号进行录制, 并重现原输入信号。如果该系统具有音调控制功能的话, 那么我们就可以通过音调控制来改变被录制信号的整体质量。类似地, 图 1.1 的电路也能看作是一个系统, 其输入电压是 $v_s(t)$, 输出电压是 $v_c(t)$; 而图 1.2 也能认为是输入为 $f(t)$, 输出为汽车速度 $v(t)$ 的这样一个系统。一个图象增强系统也就是变换一幅输入图象以使得输出图象具有某些所需要性质的系统, 如增强图象对比度等。

一个连续时间系统是这样的系统, 输入该系统的信号是连续时间信号, 系统产生的输出也是连续时间信号。这样的系统可用图 1.41(a)来表示, 图中 $x(t)$ 是输入, 而 $y(t)$ 是输出, 所以也常常用下面符号来表示连续时间系统的输入-输出关系为

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad (1.78)$$

同样, 一个离散时间系统就是将离散时间输入信号变换为离散时间输出信号, 可以用图 1.41(b)来表示, 也可以用下面符号来代表输入-输出关系

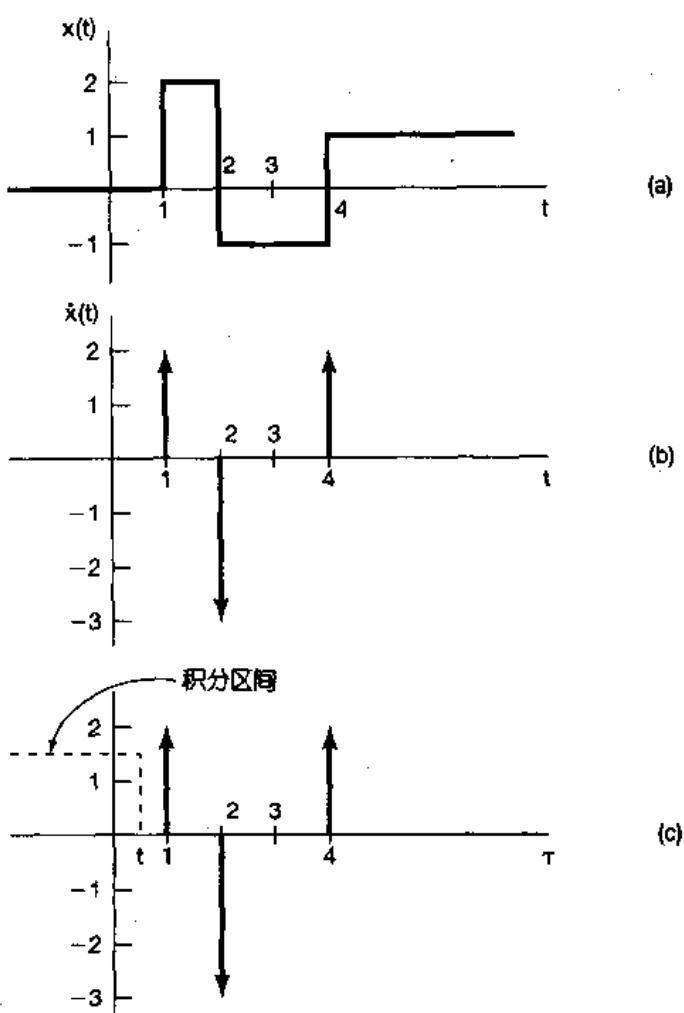


图 1.40 (a)在例 1.7 中分析的不连续信号 $x(t)$;
 (b)它的导数 $\dot{x}(t)$;
 (c)图示说明 t 在 0 和 1 之间, $x(t)$ 作为 $\dot{x}(t)$ 的积分的恢复过程

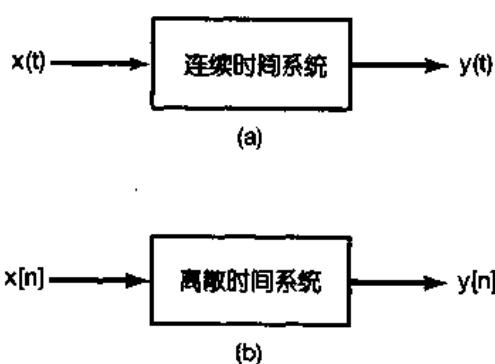


图 1.41 (a)连续时间系统;
 (b)离散时间系统

$$x[n] \rightarrow y[n] \quad (1.79)$$

本书大部分都将分别但是并行地讨论这两种系统。到第7章通过采样的概念再把这两种系统结合起来，并研究用离散时间系统来处理已被采样过的连续时间信号的若干细节问题。

1.5.1 简单系统举例

要建立分析和设计系统的一般方法的最重要根据之一就是：很多不同应用场合的系统都具有非常类似的数学描述形式。为了说明这一点，来看几个简单的例子。

例 1.8 考虑图 1.1 的 RC 电路。如果把 $v_s(t)$ 当作输入， $v_c(t)$ 看作输出的话，那么就可以用简单的电路分析方法来导出描述输出和输入之间关系的方程。这就是根据欧姆定律，流经电阻的电流 $i(t)$ 是正比于跨在该电阻上的电压降（比例常数为 $1/R$ ），即

$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R} \quad (1.80)$$

类似地，根据定律一个电容器的基本关系，可以将电流 $i(t)$ 与电容器上电压的变化率联系起来，即

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (1.81)$$

令(1.80)式和(1.81)式右边相等，就得出描述输入 $v_s(t)$ 和输出 $v_c(t)$ 之间关系的微分方程为

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_s(t) \quad (1.82)$$

例 1.9 考虑图 1.2，其中将力 $f(t)$ 当作输入，速度 $v(t)$ 作为输出。若令 m 记作汽车的质量， $\rho v^{\textcircled{1}}$ 为由于摩擦而产生的阻力，那么令加速度（也就是速度的时间导数）与净力被质量相除后相等，就得

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m} [f(t) - \rho v(t)] \quad (1.83)$$

也即

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m} v(t) = \frac{1}{m} f(t) \quad (1.84)$$

比较一下上面两个例子中的(1.82)式和 1.84)式，可以看到，对于这两个很不相同的物理系统，联系它们输入-输出关系的这两个方程却基本上是一样的，它们都是一阶线性微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (1.85)$$

的两个例子，其中 $x(t)$ 是输入， $y(t)$ 是输出， a 和 b 都是常数。这就是一个很简单的例子来阐明这一点，即需要建立分析由(1.85)式所代表的这样一类系统的方法，并且能够在更为广泛的应用中利用它们。

例 1.10 作为离散时间系统一个简单例子，考虑某一银行户头按月结余的一个简单模型。令 $y[n]$ 记作第 n 个月末的结余，假设 $y[n]$ 按月依下列方程变化

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n] \quad (1.86)$$

或者写为

^① 原书为 $m\rho v$ ，有误——译者注。

$$y[n] - 1.01y[n-1] = x[n] \quad (1.87)$$

式中 $x[n]$ 代表第 n 个月当中的净存款(也就是存款减去支取数),而 $1.01y[n-1]$ 则代表每月所增长的利息 1%。

例 1.11 作为第二个例子,考虑(1.84)式微分方程的一种简单数字仿真,其中将时间分解成长度为 Δ 的离散间隔,并且用一阶后向差分

$$\frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta}$$

来近似在 $t = n\Delta$ 的 $dv(t)/dt$ 。这时,若令 $y[n] = v(n\Delta)$, $f[n] = f(n\Delta)$,那么关联该采样信号 $f[n]$ 和 $v[n]$ 的离散时间模型就是

$$v[n] - \frac{m}{(m + \rho\Delta)} v[n-1] = \frac{\Delta}{(m + \rho\Delta)} f[n] \quad (1.88)$$

比较(1.87)式和(1.88)式可见,它们就是下列一阶线性差分方程的两个例子,即

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n] \quad (1.89)$$

如同以上例子所表明的,来自各种应用领域的系统,它们的数学描述往往具有惊人的共性;而且,正是由于这一点,为求在信号与系统分析中建立广为适用的方法提供了强大的动力。实现这一任务的关键是要鉴别出一类系统,这类系统应具备两个重要特性:(1) 属于这一类的系统都具有一些性质和结构,通过它们可对系统的行为作出透彻地了解,并能对系统的分析建立起有效的方法;(2) 很多实际上重要的系统都可以利用这一类系统准确地建模。本书大部分所集中研究的,并针对称之为线性时不变系统这样一个特殊类别的系统所建立的方法,就属于上面所提到的第一个特性方面的问题。在下一节,将介绍用于表征这类系统的这些性质,以及其它几个很重要的基本系统性质。

实际上,对任何系统分析技术来说要是具有实用价值的话,那么上面提到的第二个特性明显地就是重要的了。值得庆幸地是,范围广泛的实际系统(包括例 1.8 到例 1.10 的系统)都可以用本书集中讨论的这类系统来很好地建模。然而,至关重要的一点是,用于描述或分析一个实际系统的任何模型都是代表了那个系统的一种理想化的情况,由此所得出的任何分析结果都仅仅是模型本身的结果。例如,(1.80)式所表示的一个电阻器和(1.81)式所表示的一个电容器的简单线性模型都是理想化的。然而,在很多应用中这些理想化对真正的电阻器和电容器来说都是相当准确的,因此只要这些电压和电流保持在工作条件范围以内,就不致于使得该线性模型失效,那么使用这样的理想化所作的分析还是给出了许多有用的结果和结论。类似地,用一个线性化的阻力来表示摩擦力效果,如(1.83)式所表示的,也是在某个有限范围内的一种近似。虽然,在本书中并不强调这一问题,重要的是要牢记,工程实际中一个基本问题就是在利用所建立的方法中要识别出加在一个模型上的假设的适用范围,并保证基于这个模型的任何分析或设计都没有违反这些假设。

1.5.2 系统的互联

在全书中所使用的一个重要概念就是系统的互联。很多实际系统都可以当作是几个子系统互联构成的。一个例子就是音频系统,它涉及到一台无线电接收机,带有一个放大器的唱片放唱机或磁带机和一个或几个扬声器的互联。另一个例子是一架数控控制的飞机,它是由该机体(用它的运动方程和影响它的空气动力学的各种力所描述的)、各种传感器(用于检测飞机

的各种变量,如加速度、旋转速率及航向等)、数字自动驾驶仪(对测得的变量和来自驾驶员的命令输入,如所要求的航线、高度和速度等作出反应)和各种飞机调节器(对来自自动驾驶仪提供的输入作出反应,以利用飞机的控制翼面,如方向舵、尾翼、副翼等来改变作用在飞机上的空气动力)等的互联。根据将这样一个系统看作它的各组成部分的互联,就可以利用各组成部分的系统特性,以及它们是如何互联的情况来分析整个系统的工作情况和特性表现。另外,借助于一些较简单系统的互联来描述一个系统还可以用一种有用的方式来综合出由这些较为简单的基本构造单元所组成的复杂系统。

虽然可以构造出各式各样的系统互联,但是有几种基本的形式是经常遇到的。两个系统的串联或级联如图 1.42(a)所示,这样的图称之为方框图(block diagrams)。这里系统 1 的输出就是系统 2 的输入,而整个系统变换输入信号是首先由系统 1 处理,然后再由系统 2 处理。级联系统的一个例子就是一台无线电接收机,紧接着一个放大器。当然也可依此来定义三个或更多个系统的级联。

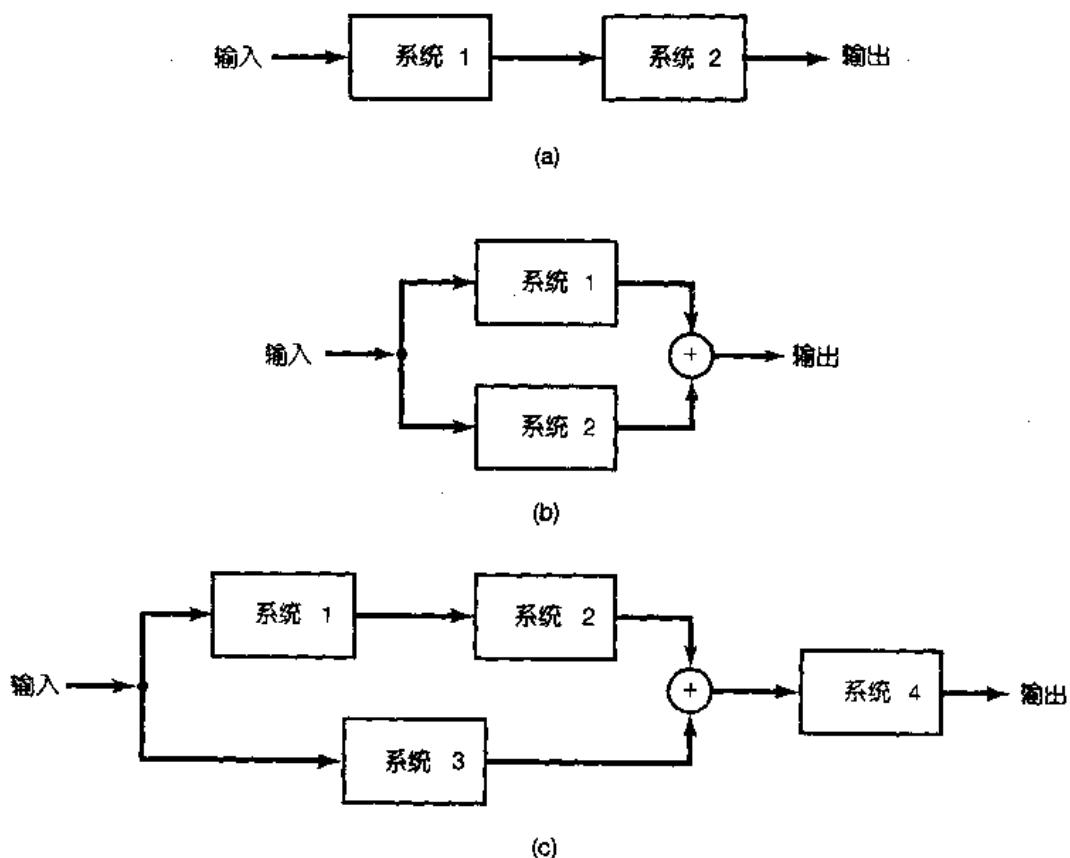


图 1.42 两个系统的互联:(a)级联;(b)并联;(c)级联/并联接

两个系统的并联如图 1.42(b)所示,此时,系统 1 和系统 2 具有相同的输入。在图中的符号“ \oplus ”记作相加,所以并联后的输出是系统 1 和 2 的输出之和。若干个拾音器共用一个放大器和扬声器系统的简单音频系统就是系统并联的一个例子。除了图 1.42(b)所示的简单并联外,也能定义两个系统以上的并联,并且还能将级联和并联回组合起来以得到更加复杂的互联。图 1.42(c)示出其中一个例子①。

① 有时也用符号 \otimes 在系统方框图表示中记作两个信号的相乘(例如图 4.26)。

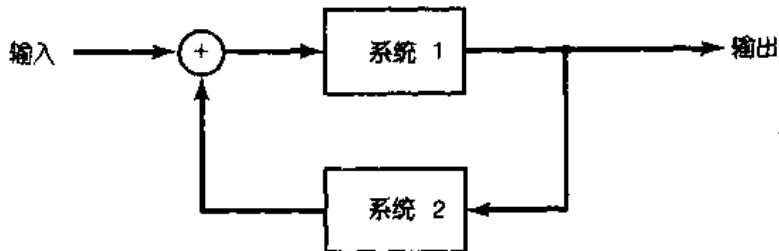


图 1.43 反馈联结

反馈联结是系统互联的另一种重要类型,图 1.43 是一个例子。这里系统 1 的输出是系统 2 的输入,而系统 2 的输出又反馈回来与外加的输入信号一起组成系统 1 的真正输入。反馈系统的应用极为广泛。例如汽车上的缓慢巡行控制系统检测汽车的速度并调节燃料量以保持车速在一个所要求的水平上。相类似,一架数字控制的飞机最为自然地认为是一个反馈系统,在其真正的和所要求的速度、航向或高度之差经过自动驾驶仪被反馈回来以便校正这些偏差。另外,把电路看成是含有反馈互联也是常常很有用的。作为一个例子,考虑一下图 1.44(a)的电路,这个电路可看成是两个电路元件的反馈互联,如图 1.44(b)所示。

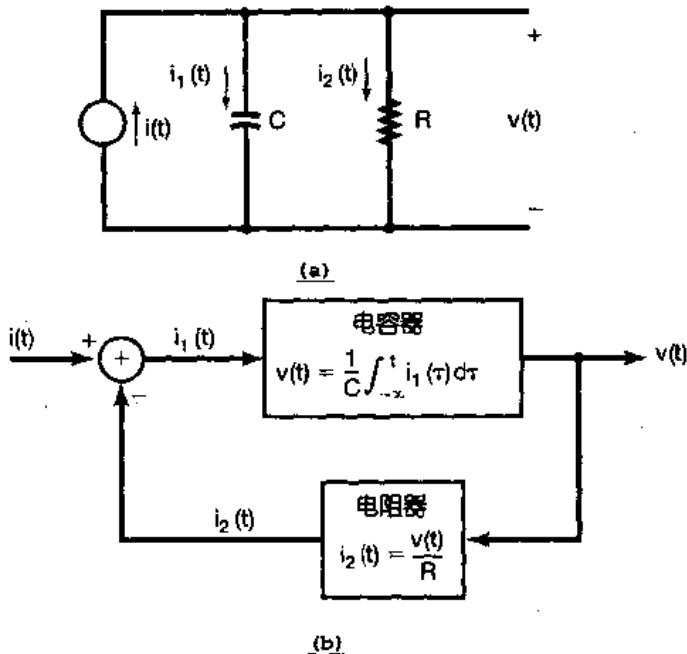


图 1.44 (a)简单电路;
(b)将电路画成两个电路元件反馈互联的方框图

1.6 基本系统性质

这一节将介绍并讨论连续时间和离散时间系统的几个基本性质。这些性质具有重要的物理意义,并且利用已经建立的信号与系统的语言又具有相当简单的数学表达式。

1.6.1 记忆系统与无记忆系统

如果对自变量的每一个值,一个系统的输出仅仅决定于该时刻的输入,这个系统就称为无记忆系统。例如,由下面关系式所表达的系统:

$$y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2 \quad (1.90)$$

就是一个无记忆系统。因为在任何特定时刻 n_0 的输出 $y[n_0]$ 仅仅决定于该时刻 n_0 的输入 $x[n_0]$,而与别的时刻值无关。一个电阻器也是一个无记忆系统,若把电流取作输入 $x(t)$,把电压当作输出 $y(t)$,则一个电阻器的输入-输出关系为

$$y(t) = Rx(t) \quad (1.91)$$

式中 R 是电阻器的电阻值。一种特别简单的无记忆系统是所谓恒等系统(identity system), 系统的输出就等于输入。这就是说, 对连续时间恒等系统而言, 其输入-输出关系就是

$$y(t) = x(t)$$

相应地在离散时间情况下就是

$$y[n] = x[n]$$

离散时间记忆系统的一个例子就是累加器或相加器

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (1.92)$$

第二个例子就是一个延迟单元

$$y[n] = x[n-1] \quad (1.93)$$

一个电容器是连续时间记忆系统的一个例子, 因为如果输入是取电流, 输出为电压的话, 那么就有

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (1.94)$$

这里 C 是电容值。

大致来说, 在一个系统中记忆的概念相当于该系统具有保留或存贮不是当前时刻输入信息的功能。例如, (1.93)式的单位延迟系统就必须保留或存贮输入的前一个值; 由(1.92)式所表示的累加器就必须“记住”或存贮过去输入的全部信息。特别是: 该累加器计算出全部输入的连续求和, 直到当前时刻为止, 因此该累加器在每一个瞬时都必须将当前的输入加到累计求和的前一个值上去。换句话说, 一个累加器的输入和输出之间的关系能够表达如下式:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] \quad (1.95)$$

或等效为

$$y[n] = y[n-1] + x[n] \quad (1.96)$$

在后面这种表示式中, 为了得到当前时刻 n 的输出, 累加器就必须记住以前输入值的连续求和, 而这个就是累加器输出的前一个值。

在许多实际系统中, 记忆是直接与能量的储存相联系的。例如, 由(1.94)式所表示的电容器输入-输出关系, 存储的能量是以电流的积分所表示的累计电荷量。因此在例 1.8 和图 1.1 中的这个简单 RC 电路就具有存储在电容器中的记忆功能。同样, 图 1.2 中的汽车也具有以储存动能形式的记忆功能。用计算机或数字微处理器实现的离散时间系统中, 记忆是直接与具有保留各时钟脉冲之间值的那些移位寄存器相联系的。

虽然一个系统具有记忆的概念, 一般总是使人想到存储过去的输入和输出值, 但是我们所给出的定义也会导致把具有当前的输出与输入和输出的将来值有关的系统也称之为记忆系统! 尽管, 与将来值有关的系统可能一看就知道是不寻常的, 但是事实上它们也形成了一类重要的系统, 我们将在 1.6.3 节作进一步讨论。

1.6.2 可逆性与可逆系统

一个系统如果在不同的输入下, 导致不同的输出, 就称该系统是可逆的。如果一个系统是可逆的, 那么就有一个逆系统存在, 当该逆系统与原系统级联后, 就会产生一个输出 $w[n]$ 等于第一个系统的输入 $x[n]$, 在离散时间下就如图 1.45(a)所示。由此, 图 1.45(a)的级联系统

就有一个总的输入-输出关系与恒等系统是一样的。

可逆连续时间系统的一个例子是

$$y(t) = 2x(t) \quad (1.97)$$

该可逆系统的逆系统是

$$w(t) = \frac{1}{2}y(t) \quad (1.98)$$

这个例子如图 1.45(b)所示。可逆系统的另一个例子是由(1.92)式所表示的累加器,该系统任意两个相邻的输出值之差就是最后的输入值,即 $y[n] - y[n-1] = x[n]$,因此,其逆系统就是

$$w[n] = y[n] - y[n-1] \quad (1.99)$$

如图 1.45(c)所示。

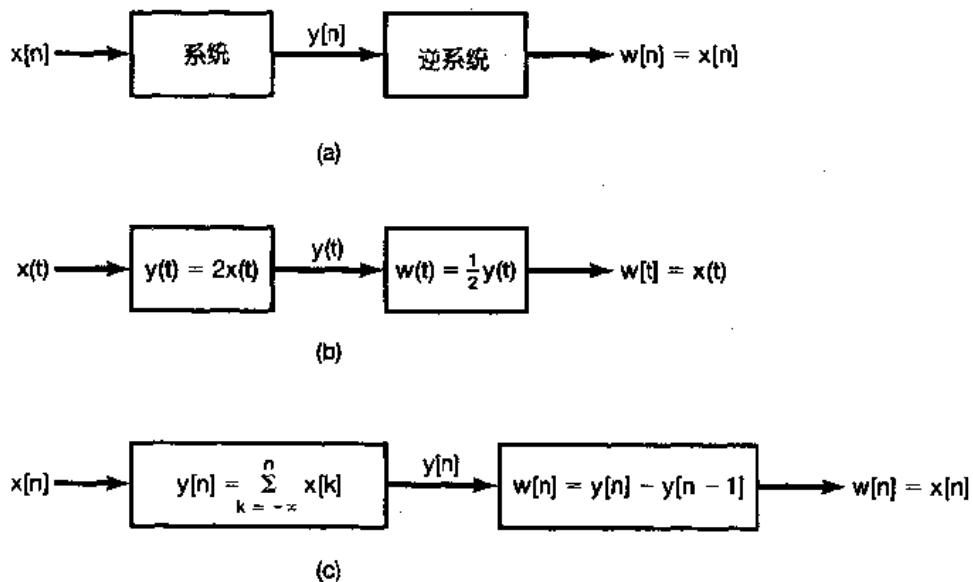


图 1.45 逆系统的概念:(a)一般的可逆系统;(b)由(1.97)式给出的可逆系统;
(c)由(1.92)式定义的逆系统

不可逆系统的例子,如

$$y[n] = 0 \quad (1.100)$$

即该系统对任何输入序列来说都产生零输出序列,以及

$$y(t) = x^2(t) \quad (1.101)$$

这时,我们无法根据输出来确定输入的正负号。

可逆性的概念在很多领域是一个重要的概念。一个例子就是在各种通信应用中所用到的编码系统,在这样的系统中,所欲传送的信号是首先加到称之为编码器的系统上作为它的输入。有许多理由要这样做,像想要给原始消息加密以提高安全性或保密通信,在信号中提供某些冗余度(例如附加上奇偶校验码),以使得发生在传输过程中的误差能被检测出来,以及可能还会被校正过来等等。对于无损失编码来说,编码器的输入必须要从输出中完全准确无误地恢复出来,这就是说,该编码器必须是可逆的。

1.6.3 因果性

如果一个系统在任何时刻的输出只决定于现在的输入以及过去的输入,该系统就称为因果系统。这样的系统往往也称之为不可预测的系统,因为系统的输出无法预测未来的输入值。因此,对一个因果系统若两个输入直到某一个时间 t_0 或 n_0 以前都是相同的话,那么在这同一时间以前相应的输出也一定相等。图 1.1 的 RC 电路是因果的,因为电容器上的电压仅对现在的和过去的源电压值作出反应。同样,一部汽车的运动是因果的,因为汽车运动无法预知驾驶员将来的行动。由(1.92)式到(1.94)式描述的系统也都是因果的,但是由

$$y[n] = x[n] - x[n+1] \quad (1.102)$$

和

$$y(t) = x(t+1)$$

定义的系统都是非因果的。所有的无记忆系统都是因果的,因为输出仅仅对当前的输入值作出响应。

虽然因果系统是很重要,但这并不说明所有具有实际意义的系统都是仅由因果系统构成的。例如,在独立变量不是时间的应用中(如图像处理),因果性往往不是一个根本性的限制。另外,在一些数据处理系统中,待处理的数据事先都已记录下来了,这些情况在语音处理、地球物理学及气象学中的信号都常常是这样,在这种情况下决不会一定要局限用因果系统来处理这些数据。作为另一个例子,在很多应用中(其中包括股票市场分析和人口统计学的研究),关注的是某个数据的慢变化趋势,但在这个总的变化趋势中也包含有一些高频起伏。在这种情况下,为了仅仅保留总的变化趋势通常所采用的办法是,在某一段时间间隔内对这些数据取平均以平滑掉这些高频起伏部分。一个非因果的平滑系统的例子就是

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k] \quad (1.104)$$

例 1.12 当检验一个系统的因果性时,重要的是要仔细看一下系统的输入-输出关系。为了说明其中涉及的若干问题,我们来检验两个特殊系统的因果性。

第一个系统定义为

$$y[n] = x[-n] \quad (1.105)$$

注意到,在某个正的时刻 n_0 的输出 $y[n_0]$ 仅仅决定于输入在时刻 $(-n_0)$ 的值 $x[-n_0]$, $(-n_0)$ 是负的,因此属于 n_0 的过去时刻,这时可能要得出所给系统是因果的结论。然而,我们应该总是要仔细地检验在全部时间上的输入-输出关系,对于 $n < 0$,如 $n = -4$,那么 $y[-4] = x[4]$,所以在这一时间上输出就与输入的将来值有关。因此,系统不是因果的。

在检验系统因果性时,另一点也是很重要的,这就是要把输入信号的影响仔细地从在系统定义中所用到的其它函数的影响区分开来。例如,考虑如下系统:

$$y(t) = x(t)\cos(t+1) \quad (1.106)$$

在这个系统中,任何时刻 t 的输出等于在同一时刻的输入再乘以一个随时间变化的数。具体来说,可将(1.106)式重写成

$$y(t) = x(t)g(t)$$

式中 $g(t)$ 是一个时变函数,即 $g(t) = \cos(t+1)$ 。因此,仅仅是输入 $x(t)$ 的当前值影响了输出 $y(t)$ 的当前值,可以得出该系统是因果的(事实上还是无记忆的)。

1.6.4 稳定性

稳定性是另一个重要的系统性质。直观上看，一个稳定系统在小的输入下的响应是不会发散的。例如，考虑一下示于图 1.46(a) 的这个单摆，其中 $x(t)$ 是外加力作为输入，输出是相对于垂直方向的角度偏移 $y(t)$ 。在这种情况下，重力施加一种恢复力总是企图要把单摆拉回到垂直位置，而由于阻力所引起的摩擦损耗又力图要使单摆摆动减慢下来，这样一来，如果加入一个小的力 $x(t)$ 的话，那么离开垂直方向的偏离也不会大。与此相比，再看看图 1.46(b) 中倒立摆的情况，此时重力的效果是施加一个力使得偏离垂直方向的角度增加，这样，一个小的外加力会导致一个大的垂直偏移，最后引起倒立摆塌倒，尽管这时由于摩擦也有阻力存在。

示于图 1.46(a) 的系统是稳定系统的一个例子，而图 1.46(b) 则是不稳定系统的例子。链锁反应的模型，在无限制供给食物并在没有任何食肉类动物存在的条件下所得出的生物种群的增长模型都是不稳定系统的例子，因为系统响应在小的输入下无界的增长。另一个不稳定系统的例子是示于(1.86)式的某个银行户头结余的模型，因为如果最初存了一笔款（即 $x[0]$ =一个正数），并且以后都不支取，由于计及复利的关系，那么存款将按月无界地增长。

稳定系统的例子也很多。实际系统的稳定性一般来说都是由于存在能量消耗的原因。例如，假设例 1.8 简单 RC 电路中都是正的元件值，电阻要消耗能量，这个电路就是一个稳定的系统；例 1.9 的系统由于通过摩擦要消耗能量，所以也是稳定的。

以上这些例子只是给出了一个有关稳定性概念的直观认识。正规一些，系统的稳定性可以这样来定义：一个稳定系统，若其输入是有界的（即输入的幅度不是无界增长的），则系统的输出也必须是有界的，因此不可能发散。这就是我们在全书中所使用的稳定性定义。例如，若在图 1.2 的汽车上施加一个恒定不变的力 $f(t)=F$ ，汽车最初是静止的。这时汽车的速度要增加，但不是无界的，因为摩擦引起的阻力也随速度而增加。事实上，速度将一直增加到摩擦力与外加力相等为止。所以由(1.84)式可见最终的速度 V 必须满足

$$\frac{\rho}{m}V = \frac{1}{m}F \quad (107)$$

也即

$$V = \frac{F}{\rho} \quad (108)$$

作为另一个例子，考虑一下由(1.104)式所定义的离散时间系统，假设输入 $x[n]$ 是有界的，其界为 B （对全部 n 来说），那么 $y[n]$ 的最大可能幅度也就是 B ，因为 $y[n]$ 是某一段输入值的平均。因此 $y[n]$ 是有界的，该系统就是稳定的。另一方面，我们再考虑一下由(1.92)式所表示的累加器，和(1.104)式的系统不一样，这个系统是要将所有的输入过去值相加，而不是只加一段有限值。因为这个和即使在 $x[n]$ 是有界之下也会继续不断地增加，所以系统是不稳定的。例如，若输入到该累加器是单位阶跃 $u[n]$ ，输出就是

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = (n+1)u[n]$$

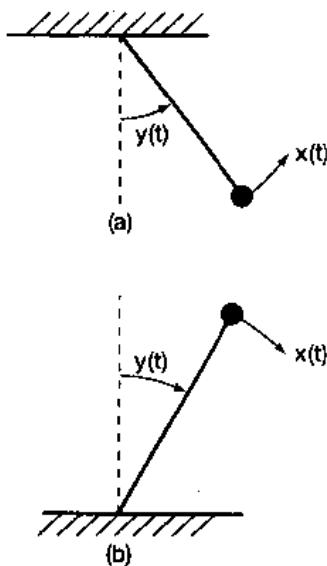


图 1.46 (a)稳定的单摆；
(b)不稳定的倒立摆

也即 $y[0]=1$, $y[1]=2$, $y[2]=3$ 一直下去, $y[n]$ 无界增长。

例 1.13 如果怀疑某一系统是不稳定的话,那么一种实用的办法是力图找一个特别的有界输入是否会导致一个无界的输出来确认它,若找到了这样一个例子就能够得出该系统是不稳定的。如果这样例子不存在或者找起来很困难,那么就必须用一种方法来检验它的稳定性,不过这时就不能再用某些特殊输入信号的例子。为了说明这种办法,检验一下以下两个系统的稳定性:

$$S_1: y(t) = tx(t) \quad (1.109)$$

和

$$S_2: y(t) = e^{x(t)} \quad (1.110)$$

在寻找一个特殊的反例来证明系统不是稳定的,可以试图用一个常数或阶跃输入这样的简单有界输入来试试。对于由(1.109)式表示的系统 S_1 ,当恒定输入 $x(t)=1$ 时, $y(t)=t$,这就是无界的,因为不管取什么样的常数为界, $|y(t)|$ 在某个 t 时都会超过这个界,因此得出: S_1 是不稳定的。

对于系统 S_2 或许可能是稳定的,我们就不可能找到一个有界的输入而产生一个无界的输出,所以就得按在所有有界输入下都产生有界输出的办法来确认它。令 B 为一任意正数,并令 $x(t)$ 是被 B 所界定的某任意信号,也就是说并没有对 $x(t)$ 作任何假设,只要对全部 t 都有

$$|x(t)| < B \quad (1.111)$$

或

$$-B < x(t) < B \quad (1.112)$$

即可。利用 S_2 的定义(1.110)式就能看出,若 $x(t)$ 满足(1.111)式,那么 $y(t)$ 就一定满足

$$e^{-B} < |y(t)| < e^B \quad (1.113)$$

于是得到:若 S_2 的任何输入是被某一任意正数 B 所界定的话,那么相应的输出就保证界定在 e^B ,所以 S_2 是稳定的。

到目前为止这一节所介绍的几个系统性质及概念都是非常重要的,并且还将在本书的稍后作详细的讨论。然而,还剩下有两个另外的性质,即时不变性和线性性质,在本书的后续各章中将起到特别重要的作用,在本节的余下部分将对这两个很重要的概念给予介绍并作初步讨论。

1.6.5 时不变性

从概念上来讲,若系统的特性行为不随时间而变,该系统就是时不变的。例如,如果图 1.1 的 RC 电路其 R 和 C 的值不随时间而变,它就是时不变的。我们会预期到:今天用这个电路做一个实验所取得的结果与明天来做同一个实验所取得的结果是相同的。另一方面,若 R 和 C 的值随时间变化或波动,那么实验的结果就会与什么时间做这个实验有关了。同样,如果图 1.2 中的摩擦系数 b 和汽车质量 m 是不变的,那么汽车的响应特性与何时驾驶它是无关的。另一方面,如果有一天给自动行李车装了很重的箱子,也就是增加了 m ,当然会预计到与在负荷不重时比较车子的特性行为会是很不一样的。

时不变性质可以很简单地用已经介绍过的信号与系统的语言来描述。这就是,如果在输入信号上有一个时移,而在输出信号中产生同样的时移,那么这个系统就是时不变的;也就是说,若 $y[n]$ 是一个离散时间时不变系统在输入为 $x[n]$ 时的输出,那么当输入为 $x[n - n_0]$ 时输出就为 $y[n - n_0]$ 。在连续时间情况下, $y(t)$ 是相应于输入为 $x(t)$ 时的输出,一个时不变

系统就一定有当输入为 $x(t - t_0)$ 时,输出为 $y(t - t_0)$ 的结果。

为了看看如何来判定一个系统是否是时不变的,以便对该性质有更深的了解,我们来讨论以下几个例子:

例 1.14 考虑一个连续时间系统,定义如下:

$$y(t) = \sin[x(t)] \quad (1.114)$$

为了确认这个系统是时不变的,就必须判定对于任何输入和任何时移 t_0 ,时不变性是否成立。为此,令 $x_1(t)$ 是系统的任一输入,并令

$$y_1(t) = \sin[x_1(t)] \quad (1.115)$$

是其相应的输出。然后,考虑将 $x_1(t)$ 时移作为第二个输入:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \quad (1.116)$$

对于这个输入的输出是

$$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)] \quad (1.117)$$

根据(1.115)式有

$$y_1(t - t_0) = \sin[x_1(t - t_0)] \quad (1.118)$$

比较一下(1.117)式和(1.118)式,就可以得到 $y_2(t) = y_1(t - t_0)$,因此这个系统是时不变的。

例 1.15 作为第二个例子,考虑如下离散时间系统:

$$y[n] = nx[n] \quad (1.119)$$

这是一个时变系统,采用上面例子那样的正规步骤就能证明它(见习题 1.28)。然而,当怀疑一个系统是时变的话,通常采用的办法是找一个反例,也就是根据直观认识,找一个输入信号让时不变的条件不成立。特别是这个例子的系统代表的是一个具有时变增益的系统。譬如,若已知当前的输入值是 1,不知道当前的时刻,就不能确定当前的输出是多少。

考虑输入信号 $x_1[n] = \delta[n]$,输出 $y_1[n]$ 就恒为 0(因为 $n\delta[n] = 0$),然而当输入 $x_2[n] = \delta[n - 1]$ 时,输出 $y_2[n] = n\delta[n - 1] = \delta[n - 1]$ 。因此,当 $x_2[n]$ 是 $x_1[n]$ 的时移时, $y_2[n]$ 并不是 $y_1[n]$ 的时移。

上面这个例子,由于系统有一个时变的增益,其结果就是一个时变的系统,而(1.97)式的系统有一个常数的增益,它就是时不变的,由(1.91)式到(1.104)式所给出的系统都是时不变系统的例子,下面再说明一个时变系统的例子。

例 1.16 考虑这个系统

$$y(t) = x(2t) \quad (1.120)$$

这个系统代表一个时间上的尺度变换,也就是说 $y(t)$ 是 $x(t)$ 的时间压缩(压缩因子是 2)。直观上看,任何在输入上的时移都会受到一个因子 2 的压缩,这样以来这个系统就不是时不变的。为了用一个反例来说明这一点,考虑输入 $x_1(t)$ 如图 1.47(a)所示,结果 $y_1(t)$ 就为图 1.47(b)所示。若将输入时移 2,即 $x_2(t) = x_1(t - 2)$,如图 1.47(c)所示,所得到的输出 $y_2(t) = x_2(2t)$ 就是图 1.47(d)。比较一下图 1.47(d)和(e),可见 $y_2(t) \neq y_1(t - 2)$,所以这个系统不是时不变的。(事实上, $y_2(t) = y_1(t - 1)$,由于系统所产生的时压缩,输出的时移仅有时不变时应该有一半大)。

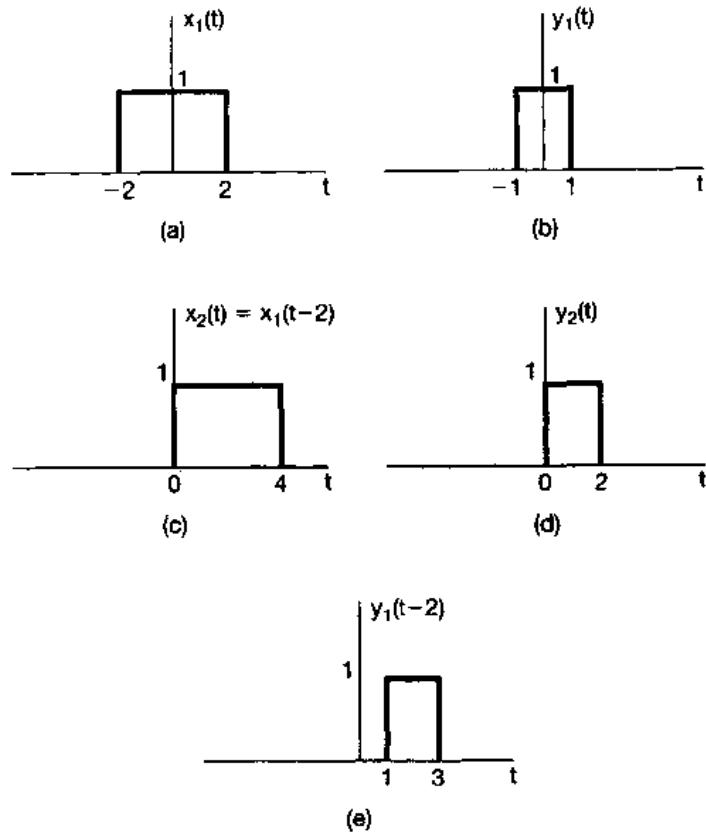


图 1.47 (a)例 1.16 中的系统输入 $x_1(t)$; (b)对应于 $x_1(t)$ 的输出 $y_1(t)$;
 (c)经移位的输入 $x_2(t) = x_1(t-2)$; (d)对应于 $x_2(t)$ 的输出 $y_2(t)$;
 (e)移位信号 $y_1(t-2)$ 注意: $y_2(t) \neq y_1(t-2)$, 说明该系统不是时不变的

1.6.6 线性

线性系统(连续时间或离散时间)具有一个很重要的性质就是叠加性质,即:如果某一个输入是由几个信号的加权和组成的话,那么输出也就是系统对这组信号中每一个的响应的加权和。更准确地说,令 $y_1(t)$ 是一个连续时间系统对 $x_1(t)$ 的响应,而 $y_2(t)$ 是对应于 $x_2(t)$ 的输出,那么一个线性系统就应该有:

1. $y_1(t) + y_2(t)$ 是对 $x_1(t) + x_2(t)$ 的响应;
2. $ay_1(t)$ 是对 $ax_1(t)$ 的响应,此处 a 为任意复常数。

上面的第一个性质称为可加性(additivity);而第二个则称之为比例性(scaling)或齐次性(homogeneity)。虽然以上都是用连续时间信号来对线性系统下的定义,对离散时间情况也同样适用。前面所举的(1.91)式到(1.100)式、(1.102)式到(1.104)式和(1.119)式所代表的系统都是线性的;而由(1.101)式和(1.114)式所定义的系统都是非线性的。应该注意的是一个系统可以是线性的,而不必是时不变的,像(1.119)式的系统就是一例;同样,系统是时不变的却不一定时线性的,如(1.101)式和(1.114)式所代表的系统就属于这一类。

把定义一个线性系统的两个性质结合在一起,可以简单地写成:

$$\text{连续时间: } ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t) \quad (1.121)$$

$$\text{离散时间: } ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n] \quad (1.122)$$

式中 a 和 b 是任何复常数。再者,从线性的定义中可直接证明出:如果 $x_k[n]$, $k=1,2,3,\dots$, 是某一个离散时间线性系统的一组输入,其相应的输出为 $y_k[n]$, $k=1,2,3,\dots$, 那么对由这一组输入的线性组合

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \dots \quad (1.123)$$

的响应就是

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \dots \quad (1.124)$$

这个很重要的事实就称为**叠加性质**,对连续时间和离散时间线性系统都成立。

对于线性系统来说,叠加性质的一个直接结果就是:在全部时间为零的输入,其输出也恒为零,即零输入产生零输出。例如,若有一个系统 $x[n] \rightarrow y[n]$,那么根据齐次性应有

$$0 = 0 \cdot x[n] \rightarrow 0 \cdot y[n] = 0 \quad (1.125)$$

下面这些例子用来说明如何根据线性的定义来检验一个系统的线性性质。

例 1.17 考虑一个系统 S,其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 的关系为

$$y(t) = tx(t)$$

为了判断 S 是否是线性的,我们来考虑如下两个任意输入 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

令 $x_3(t)$ 是 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性组合为

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

式中 a 和 b 都是任意常数。若 $x_3(t)$ 是 S 的输入,那么相应的输出可以表示为

$$\begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) = t(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

结论:S 是线性的。

例 1.18 利用前面例子的相同步骤来检验另一系统 S,其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 的关系为

$$y(t) = x^2(t)$$

定义 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 与上例一样,就有

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

和

$$\begin{aligned} x_3(t) \rightarrow y_3(t) &= x_3^2(t) \\ &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\ &= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \\ &= a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2ab y_1(t)y_2(t) \end{aligned}$$

很显然,一旦给定 $x_1(t)$, $x_2(t)$, a 和 b , $y_3(t)$ 就不是与 $ay_1(t) + by_2(t)$ 一样的了。例如,若 $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 0$, $a = 2$ 和 $b = 0$,那么 $y_3(t) = (2x_1(t))^2 = 4$, 而 $2y_1(t) = 2(x_1(t))^2 = 2$ 。结论就是系统 S 不是线性的。

例 1.19 在检验一个系统的线性时,重要的是要牢记:系统必须同时满足可加性和齐次性,而信号和任何比

例常数都可以是复数。为了强调这一重要性,考虑一下如下系统:

$$y[n] = \Re\{x[n]\} \quad (1.126)$$

如习题 1.29 所证明的,这个系统是可加的;然而它却不满足齐次性。现在来证明这一点。令

$$x_1[n] = r[n] + js[n] \quad (1.127)$$

是一个实部为 $r[n]$,虚部为 $s[n]$ 的任意复输入,相应的输出就应是

$$y_1[n] = r[n] \quad (1.128)$$

现在把 $x_1[n]$ 乘以一个复数 $a=j$,也即考虑输入为

$$\begin{aligned} x_2[n] &= jx_1[n] = j(r[n] + js[n]) \\ &= -s[n] + jr[n] \end{aligned} \quad (1.129)$$

对应于 $x_2[n]$ 的输出就是

$$y_2[n] = \Re\{x_2[n]\} = -s[n] \quad (1.130)$$

它并不等于 $ay_1[n]$ 为

$$ay_1[n] = jr[n] \quad (1.131)$$

因此,这个系统违反了齐次性,所以不是线性的。

例 1.20 考虑系统为

$$y[n] = 2x[n] + 3 \quad (1.132)$$

可以用几种方法证明这个系统不是线性的。譬如,这个系统不满足可加性。若 $x_1[n]=2, x_2[n]=-3$, 则

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3 = 7 \quad (1.133)$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3 = 9 \quad (1.134)$$

然而,对 $x_3[n]=x_1[n]+x_2[n]$ 的响应却是

$$y_3[n] = 2[x_1[n] + x_2[n]] + 3 = 13 \quad (1.135)$$

它不等于 $y_1[n] + y_2[n] = 16$ 。另外,因为若 $x[n]=0, y[n]=3$, 它也不满足“零输入/零输出”的性质。

对于这个例子的系统是一个非线性系统

似乎有些吃惊,因为(1.132)式明明是一个线性方程;另一方面,如图 1.48 所示,这个系统的输出可以表示为一个线性系统的输出与另一个等于该系统的零输入响应的信号之和。对于(1.132)式的系统,这个线性系统是

$$x[n] \rightarrow 2x[n]$$

而零输入响应为

$$y_0[n] = 3$$

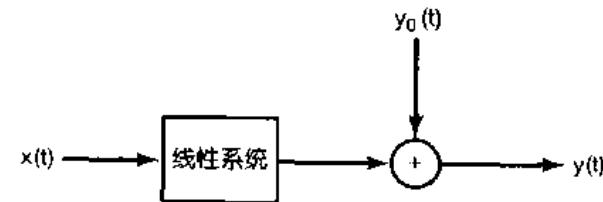


图 1.48 一种增量线性系统的结构。

图中 $y_0[n]$ 是系统的零输入响应

事实上,在连续时间和离散时间系统中存在着大量的这一类系统是能够由图 1.48 来表示的,也就是系统的总输出由一个线性系统的响应与一个零输入响应的叠加来组成。正如在习题 1.47 所指出的,这样的系统相应于一类增量线性系统(incrementally linear systems),即在连续或离散时间系统中,其响应对输入中的变化是线性的。换句话说,对增量线性系统而言,对任意两个输入的响应的差是两个输入差的线性函数(即可加的且齐次的)。例如,若 $x_1[n]$ 和

$x_2[n]$ 是由(1.132)式所表征的系统的两个输入,而 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 是其对应的输出,那么

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - \{2x_2[n] + 3\} = 2\{x_1[n] - x_2[n]\} \quad (1.136)$$

1.7 小 结

在这一章讨论了有关连续时间与离散时间信号及系统的一些基本概念,通过几个例子说明了信号与系统的直观形象,又介绍了在全书中将用到的信号与系统的数学表示。具体的就是介绍了信号的图解表示和数学表示,并用这些表示讨论了自变量的变换。我们还定义和研究了在连续时间和离散时间情况下的几个基本信号,这些包括复指数信号、正弦信号、单位冲激和单位阶跃函数等。另外,还研究了连续时间和离散时间信号的周期性概念。

在讨论有关系统的基本概念时,引入了方框图以便于讨论系统间的相互联结问题,并定义了几个重要的系统性质,其中包括因果性、稳定性、时不变性和线性等性质。

本书的大部分内容都是集中在具有线性时不变(LTI)系统上的,包括连续时间和离散时间。这类系统在系统分析和设计中起着特别重要的作用,这部分原因是由于实际中遇见的很多系统都可以成功地按照线性和时不变性来建模;另外,在后续的各章中将会看到,线性和时不变性可以使我们对该类系统的特性进行深入而详细地研究。

习 题

基本题:利用课文中解例题的方式,强调应用概念和方法的技巧。

深入题:深入研究和钻研课文内容的根本原理和实际内涵。

习题的第一部分属于基本的,答案在书末给出。接下来分别包括基本的和深入的两部分题。最后一部分数学复习,是在复数运算和代数的基本概念方面给出一些练习题作为复习。

基本题(附答案)

1.1 用直角坐标形式($x + jy$)表示下列复数: $\frac{1}{2}e^{j\pi}$, $\frac{1}{2}e^{-j\pi}$, $e^{j\pi/2}$, $e^{-j\pi/2}$, $e^{j5\pi/2}$, $\sqrt{2}e^{j\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{j9\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{-j9\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$ 。

1.2 用极坐标形式($r e^{j\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$)表示下列复数:5, -2, -3j, $\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1+j, $(1-j)^2$, $j(1-j)$, $(1+j)(1-j)$, $(\sqrt{2}+j\sqrt{2})/(1+j\sqrt{3})$ 。

1.3 对下列每一个信号求 P_∞ 和 E_∞ :

(a) $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ (b) $x_2(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$

(c) $x_3(t) = \cos(t)$ (d) $x_4[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

(e) $x_5[n] = e^{j(\pi/2n+\pi/8)}$ (f) $x_6[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n)$

1.4 设 $x[n] = 0$, $n < -2$, 和 $n > 4$, 对以下每个信号确定其值保证为零的 n 值。

(a) $x[n-3]$ (b) $x[n+4]$ (c) $x[-n]$ (d) $x[-n+2]$ (e) $x[-n-2]$

1.5 设 $x(t) = 0$, $t < 3$, 对以下每个信号确定其值保证为零的 t 值。

(a) $x(1-t)$ (b) $x(1-t) + x(2-t)$ (c) $x(1-t)x(2-t)$ (d) $x(3t)$ (e) $x(t/3)$

1.6 判断如下信号的周期性:

(a) $x_1(t) = 2e^{j(t+\pi/4)} u(t)$ (b) $x_2[n] = u[n] + u[-n]$

(c) $x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \delta[n-4k] - \delta[n-1-4k] \}$

1.7 对以下每个信号求信号的偶部保证为零的所有自变量值。

(a) $x_1[n] = u[n] - u[n-4]$ (b) $x_2(t) = \sin(\frac{1}{2}t)$

(c) $x_3[n] = (\frac{1}{2})^n u[n-3]$ (d) $x_4(t) = e^{-5t} u(t+2)$

1.8 将下列信号的实部表示成 $Ae^{-at}\cos(\omega t + \phi)$ 的形式, 这里 A, a, ω 和 ϕ 都是实数, 且 $A > 0$ 和 $-\pi < \phi \leq \pi$:

(a) $x_1(t) = -2$ (b) $x_2(t) = \sqrt{2}e^{j\pi/4}\cos(3t + 2\pi)$

(c) $x_3(t) = e^{-t}\sin(3t + \pi)$ (d) $x_4(t) = je^{(-2+j100)t}$

1.9 判断下列信号的周期性。若是周期的, 给出它的基波周期。

(a) $x_1(t) = je^{j10t}$ (b) $x_2(t) = e^{(-1+j)t}$ (c) $x_3[n] = e^{jn\pi}$

(d) $x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/3}$ (e) $x_5[n] = 3e^{j3/5(n+1/2)}$

1.10 求信号 $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$ 的基波周期。

1.11 求信号 $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$ 的基波周期。

1.12 考虑离散时间信号

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$$

试确定整数 M 和 n_0 的值, 以使得 $x[n]$ 可表示为

$$x[n] = u[Mn - n_0]$$

1.13 考虑连续时间信号

$$x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$$

试对

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

计算 E_{∞} 值。

1.14 考虑一个周期信号

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

周期为 $T=2$ 。这个信号的导数是“冲激串”(impulse train)

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$$

周期仍为 $T=2$ 。可以证明

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t-t_1) + A_2 g(t-t_2)$$

求 A_1, t_1, A_2 和 t_2 的值。

1.15 考虑一系统 S , 其输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$, 这个系统是经由系统 S_1 和 S_2 级联后得到的, S_1 和 S_2 的输入-输出关系为

$S_1: \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$

$S_2: \quad y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3]$

这里 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 都为输入信号。

(a) 求系统 S 的输入-输出关系。

(b) 若 S_1 和 S_2 的级联次序颠倒的话(也即 S_1 在后), 系统 S 的输入-输出关系改变吗?

1.16 考虑一离散时间系统, 其输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$, 系统的输入-输出关系为

$$y[n] = x[n]x[n-2]$$

- (a) 系统是无记忆的吗?
(b) 当输入为 $A\delta[n]$, A 为任意实数或复数, 求系统输出。
(c) 系统是可逆的吗?

1.17 考虑一连续时间系统, 其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 的关系为

$$y(t) = x(\sin(t))$$

- (a) 该系统是因果的吗?
(b) 该系统是线性的吗?

1.18 考虑一个离散时间系统其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 关系为

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$$

式中 n_0 为某一有限正整数。

- (a) 系统是线性的吗?
(b) 系统是时不变的吗?
(c) 若 $x[n]$ 为有界且界定为一有限整数 B (即对全部 n , $|x[n]| < B$), 可以证明 $y[n]$ 是被界定到某一有限数 C 。因此可以得出该系统是稳定的。请用 B 和 n_0 来表示 C 。

1.19 判定下列输入-输出关系的系统是否是线性、时不变性, 或两者俱有。

- (a) $y(t) = t^2 x(t-1)$ (b) $y[n] = x^2[n-2]$
(c) $y[n] = x[n+1] - x[n-1]$ (d) $y[n] = \theta u[x(t)]$

1.20 一连续时间线性系统 S , 其输入为 $x(t)$, 输出为 $y(t)$, 有下面输入-输出关系:

$$x(t) = e^{2t} \xrightarrow{s} y(t) = e^{3t}$$

$$x(t) = e^{-2t} \xrightarrow{s} y(t) = e^{-3t}$$

- (a) 若 $x_1(t) = \cos(2t)$, 求系统 S 的输出 $y_1(t)$ 。

- (b) 若 $x_2(t) = \cos(2(t-\frac{1}{2}))$, 求系统 S 的输出 $y_2(t)$ 。

基本题

1.21 一连续时间信号 $x(t)$ 如图 P 1.21 所

示, 请画出下列信号并给以标注。

- (a) $x(t-1)$ (b) $x(2-t)$
(c) $x(2t+1)$ (d) $x(4-t/2)$
(e) $[x(t) + x(-t)]u(t)$
(f) $x(t)[\delta(t+\frac{3}{2}) - \delta(t-\frac{3}{2})]$

1.22 一离散时间信号 $x[n]$ 如图 P 1.22 所

示, 请画出下列信号并给以标注。

- (a) $x[n-4]$ (b) $x[3-n]$
(c) $x[3n]$ (d) $x[3n+1]$
(e) $x[n]u[3-n]$
(f) $x[n-2]\delta[n-2]$
(g) $\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$
(h) $x[(n-1)^2]$

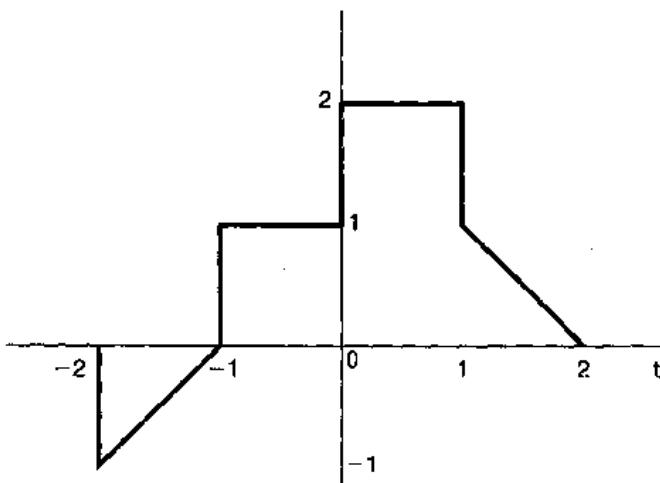


图 P 1.21

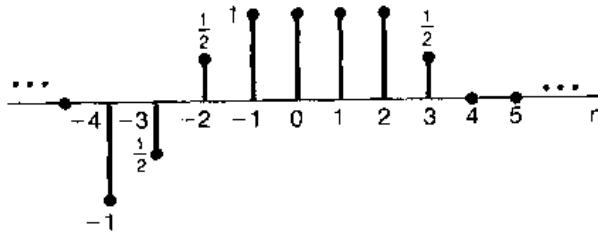


图 P 1.22

1.23 确定并画出图 P 1.23 信号的奇部和偶部，并给以标注。

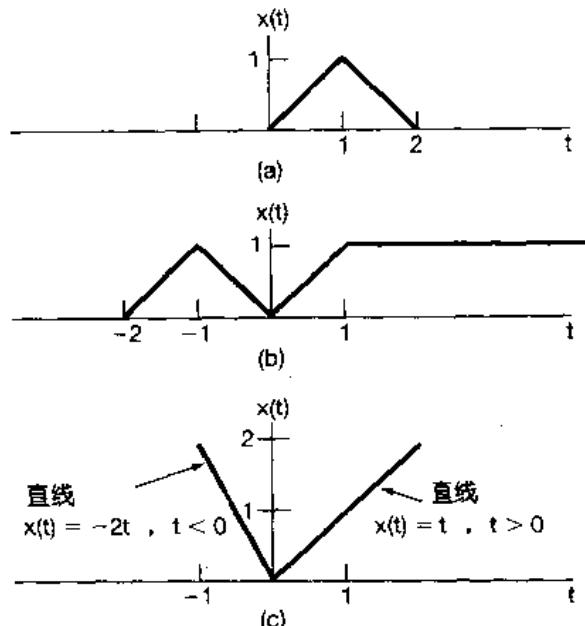


图 P 1.23

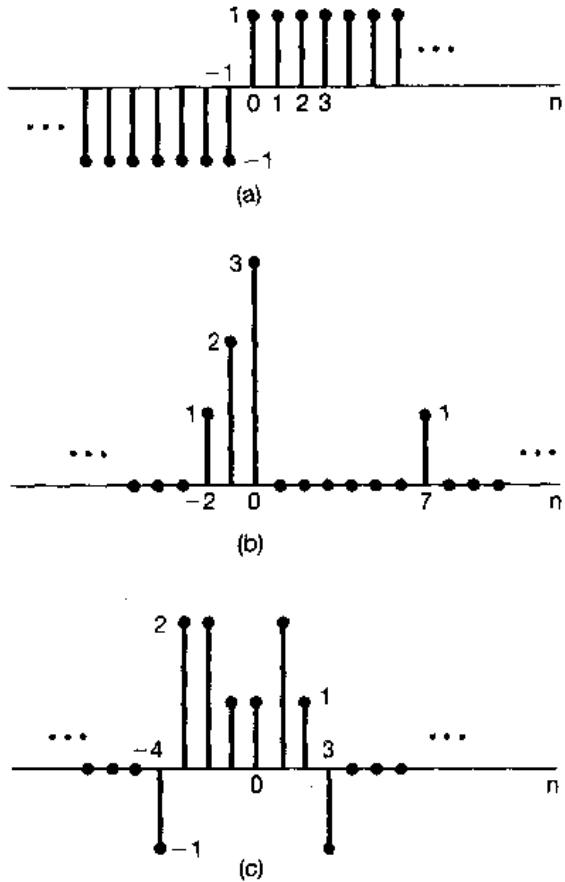


图 P 1.24

1.24 确定并画出图 P 1.24 信号的奇部和偶部，并给以标注。

1.25 判定下列连续时间信号的周期性；若是周期的，确定它的基波周期。

$$(a) x(t) = 3\cos(4t + \frac{\pi}{3})$$

$$(b) x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$$

$$(c) x(t) = [\cos(2t - \frac{\pi}{3})]^2$$

$$(d) x(t) = \mathcal{E}_v[\cos(4\pi t)u(t)]$$

$$(e) x(t) = \mathcal{E}_v[\sin(4\pi t)u(t)]$$

$$(f) x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}$$

1.26 判定下列离散时间信号的周期性；若是周期的，确定它的基波周期。

$$(a) x[n] = \sin(\frac{6\pi}{7}n + 1)$$

$$(b) x[n] = \cos(\frac{n}{8} - \pi)$$

$$(c) x[n] = \cos(\frac{\pi}{8}n^2)$$

$$(d) x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n) \cos(\frac{\pi}{4}n)$$

$$(e) x[n] = 2\cos(\frac{\pi}{4}n) + \sin(\frac{\pi}{8}n) - 2\cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6})$$

1.27 在这一章介绍了系统的几个一般性质，这就是一个系统可能是或不是：

- (1) 无记忆； (2) 时不变； (3) 线性； (4) 因果； (5) 稳定。

对以下连续时间系统确定哪些性质成立,哪些不成立,并陈述你的理由。下例中 $y(t)$ 和 $x(t)$ 分别都记作系统的输出和输入。

$$(a) y(t) = x(t-2) + x(2-t) \quad (b) y(t) = [\cos(3t)]x(t)$$

$$(c) y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau \quad (d) y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-2), & t \geq 0 \end{cases}$$

$$(e) y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases} \quad (f) y(t) = x(t/3)$$

$$(g) y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

1.28 对以下离散时间系统确定习题 1.27 中所列诸性质哪些成立,哪些不成立,并陈述你的理由。下例中 $y[n]$ 和 $x[n]$ 分别都记作系统的输出和输入。

$$(a) y[n] = x[-n] \quad (b) y[n] = x[n-2] - 2x[n-8]$$

$$(c) y[n] = nx[n] \quad (d) y[n] = \delta[n]x[n-1]$$

$$(e) y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n+1], & n \leq -1 \end{cases} \quad (f) y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$$

$$(g) g[n] = x[4n+1]$$

1.29 (a) 证明输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 的关系为 $y[n] = \mathcal{R}_0[x[n]]$ 的离散时间系统是可加的。若其关系变为 $y[n] = \mathcal{R}_0[e^{jn\pi/4}x[n]]$ 仍是可加的吗? (此题中不要假设 $x[n]$ 为实数)。

(b) 在正文中讨论到一个系统的线性性质等效为既具有可加性,又具有齐次性,试对下列系统确定它们的可加性和/或齐次性。对每一性质若成立请给出证明;若不成立请给出一个反例。

$$(i) y(t) = \frac{1}{x(t)} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]^2 \quad (ii) y[n] = \begin{cases} \frac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]}, & x[n-1] \neq 0 \\ 0, & x[n-1] = 0 \end{cases}$$

1.30 判定下列系统的可逆性。若是,求其逆系统;若不是,请找到两个输入信号,其输出是相同的。

$$(a) y(t) = x(t-4) \quad (b) y(t) = \cos[x(t)]$$

$$(c) y[n] = nx[n] \quad (d) y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$(e) y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases} \quad (f) y[n] = x[n]x[n-1]$$

$$(g) y[n] = x[1-n] \quad (h) y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$$

$$(i) y[n] = \sum_{k=-\infty}^n (\frac{1}{2})^{n-k} x[k] \quad (j) y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$(k) y[n] = \begin{cases} x[n+1], & n \geq 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases} \quad (l) y(t) = x(2t)$$

$$(m) y[n] = x[2n] \quad (n) y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶} \\ 0, & n \text{ 为奇} \end{cases}$$

1.31 在本题中将要说明线性时不变性质的最重要结果之一,即一旦知道了一个线性系统或线性时不变(LTI)系统对某单一输入的响应,或者对若干个输入的响应,就能直接计算出对许多其它输入信号的响应。本书剩下的绝大部分都是利用这一点来建立分析与综合 LTI 系统的一些结果和方法的。

(a) 考虑一个 LTI 系统,它对示于图 P 1.31(a)的信号 $x_1(t)$ 的响应 $y_1(t)$ 示于图 P 1.31(b)中,确定并画出该系统对示于图 P 1.31(c)的信号 $x_2(t)$ 的响应。

(b) 确定并画出上述(a)中的系统对示于图 P 1.31(d)的信号 $x_3(t)$ 的响应。

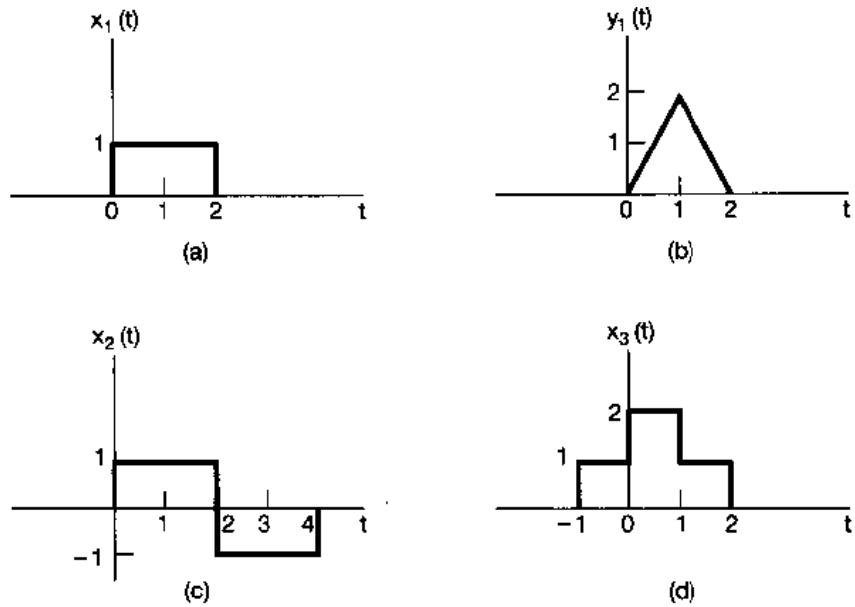


图 P 1.31

深入题

1.32 设 $x(t)$ 是一连续时间信号, 并令

$$y_1(t) = x(2t) \text{ 和 } y_2(t) = x(t/2)$$

信号 $y_1(t)$ 代表 $x(t)$ 的一种加速的形式, 即信号的持续期减了一半; 而 $y_2(t)$ 代表 $x(t)$ 的一种减慢的形式, 即信号的持续期加倍。考虑以下说法:

- (1) 若 $x(t)$ 是周期的, $y_1(t)$ 也是周期的。
- (2) 若 $y_1(t)$ 是周期的, $x(t)$ 也是周期的。
- (3) 若 $x(t)$ 是周期的, $y_2(t)$ 也是周期的。
- (4) 若 $y_2(t)$ 是周期的, $x(t)$ 也是周期的。

对于以上每一种说法判断是否对。若对, 确定这两个信号基波周期之间的关系; 若不对, 给出一个反例。

1.33 设 $x[n]$ 是一离散时间信号, 并令

$$y_1[n] = x[2n] \text{ 和 } y_2[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶} \\ 0, & n \text{ 为奇} \end{cases}$$

信号 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 分别代表 $x[n]$ 一种加速和减慢的形式。然而, 应该注意在离散时间下的加速和减慢与连续时间下相比有一些细微的差别。考虑以下说法:

- (1) 若 $x[n]$ 是周期的, $y_1[n]$ 也是周期的。
- (2) 若 $y_1[n]$ 是周期的, $x[n]$ 也是周期的。
- (3) 若 $x[n]$ 是周期的, $y_2[n]$ 也是周期的。
- (4) 若 $y_2[n]$ 是周期的, $x[n]$ 也是周期的。

对以上每一种说法判断是否对。若对, 确定这两个信号基波周期之间的关系; 若不对, 给出一个反例。

1.34 在本题中要研究奇、偶信号的几个性质

- (a) 证明, 若 $x[n]$ 是奇信号, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 0$$

- (b) 若 $x_1[n]$ 是一个奇信号, $x_2[n]$ 是一个偶信号, 证明 $x_1[n]x_2[n]$ 是一个奇信号。

- (c) $x[n]$ 为一任意信号, 其偶部和奇部分别记作

$$x_e[n] = \text{Ev}\{x[n]\}$$

和

$$x_o[n] = \text{Od}\{x[n]\}$$

证明

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$$

(d) 虽然以上(a)~(c)都针对离散时间信号说的, 相类似的性质对连续时间信号也成立, 为此证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t) dt$$

式中 $x_e(t)$ 和 $x_o(t)$ 分别为 $x(t)$ 的偶部和奇部。

1.35 考虑周期离散时间指数时间信号

$$x[n] = e^{j\omega(2\pi/N)n}$$

证明该信号的基波周期是

$$N_0 = N/\gcd(m, N)$$

式中 $\gcd(m, N)$ 是 m 和 N 的最大公约数(greatest common divisor), 也就是将 m 和 N 都能约成整数的最大整数, 例如

$$\gcd(2, 3) = 1, \quad \gcd(2, 4) = 2, \quad \gcd(8, 12) = 4$$

注意: 若 m, N 无公共因子, 则 $N_0 = N$ 。

1.36 设 $x(t)$ 是连续时间复指数信号

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

基波频率为 ω_0 , 基波周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 。将 $x(t)$ 取等间隔样本得到一个离散时间信号

$$x[n] = x(nT) = e^{j\omega_0 nT}$$

(a) 证明, 仅当 T/T_0 为一有理数, $x[n]$ 才是周期的; 也就是说, 仅当采样间隔的某一倍数是 $x(t)$ 周期的倍数时, $x[n]$ 才是周期的。

(b) 假设 $x[n]$ 是周期的, 也即有

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{q} \quad (\text{P1.36-1})$$

式中 p 和 q 都是整数。 $x[n]$ 的基波周期和基波频率是什么? 将基波频率表示成 $\omega_0 T$ 的分式。

(c) 还是假设 T/T_0 满足(P1.36-1), 确定需要多少个 $x(t)$ 的周期才能得到 $x[n]$ 的一个周期的样本。

1.37 在很多通信系统应用中一个重要的概念是两个信号之间的相关。在第 2 章的习题中还将更多的提到这一问题, 并给出一些实际应用。现在, 我们只求对相关函数及其有关性质作简单介绍。

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个信号, 相关函数定义为

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

函数 $\phi_{xx}(t)$ 通常称为信号 $x(t)$ 的自相关函数, 而 $\phi_{yy}(t)$ 则称为互相关函数。

(a) $\phi_{xy}(t)$ 和 $\phi_{yx}(t)$ 之间是什么关系?

(b) 求 $\phi_{xx}(t)$ 的奇部。

(c) 假设 $y(t) = x(t+T)$, 将 $\phi_{xy}(t)$ 和 $\phi_{yy}(t)$ 用 $\phi_{xx}(t)$ 来表示。

1.38 本题将讨论单位冲激函数的几个性质

(a) 证明

$$\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$$

提示: 考察 $\delta_\Delta(t)$ (见图 1.34)。

(b) 在 1.4 节将连续时间单位冲激定义成 $\delta_\Delta(t)$ 的极限, 现在根据考察 $\delta_\Delta(t)$ 的性质来定义 $\delta(t)$ 的几个性质。

例如, 因为信号

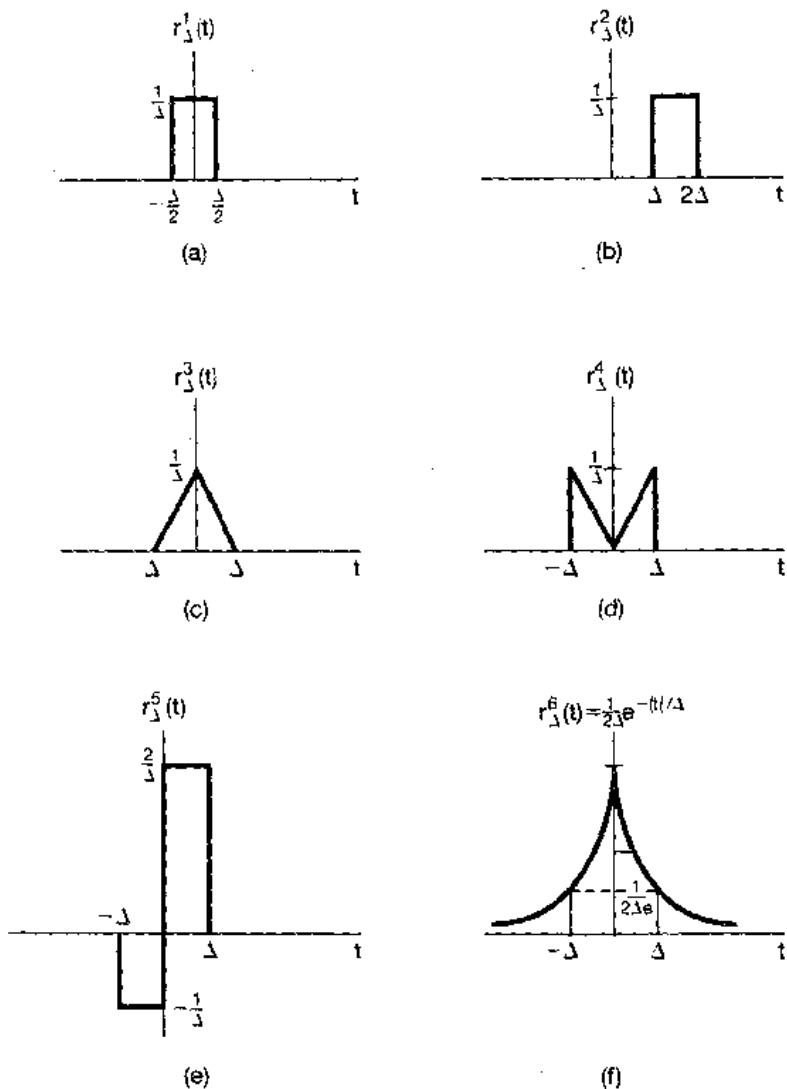


图 P1.38

$$u_\Delta(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\Delta(\tau) d\tau$$

收敛于单位阶跃

$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_\Delta(t) \quad (\text{P1.38-1})$$

于是就可通过如下方程

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

来解释 $\delta(t)$, 或者把 $\delta(t)$ 看成 $u(t)$ 的导数。

这种讨论方式是很重要的, 因为事实上我们是想通过它的性质而不是给出在每一 t 时的值来定义 $\delta(t)$ 的。在第 2 章将给出单位冲激行为的一种很简单的特性, 而这个特性在线性时不变系统的研究中是极其有用的。现在, 我们要集中说明, 在应用单位冲激中的重要概念是要明白它是如何表现的。为此, 考虑图 P1.38 中的 6 个信号, 要证明其中每一个随 $\Delta \rightarrow 0$, 在“表现都像一个冲激”。如果令

$$u_\Delta^i(t) = \int_{-\infty}^t r_\Delta^i(\tau) d\tau$$

那么

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} u_\Delta^i(t) = u(t)$$

在每一种情况下,画出信号 $u_\Delta^i(t)$, 并给以标注。注意

$$r_\Delta^2(0) = r_\Delta^4(0) = 0, \text{ 对全部 } \Delta$$

因此, 定义 $\delta(t)$ 或把 $\delta(t)$ 想作 $t \neq 0$ 时为零, $t = 0$ 时为无穷大是不够的, 而宁肯用一些性质来定义冲激, 譬如(P1.38-1)式那样的性质。在 2.5 节将对称之为奇异函数(singularity functions)的一类信号给予定义, 而这些信号都是与单位冲激有关的, 而且都是用它们的性质而不是它们的值来定义的。

- 1.39 $u(t), \delta(t)$ 以及其它的奇异函数在线性时不变系统的研究中所起的作用就在于一种物理现象理想化的作用。将会看到, 利用这些理想化会对这样的系统得到一种极其重要而又非常简单的表示。然而, 在应用奇异函数时要特别小心。尤其是必须记住它们的是理想化了的。因此, 每当利用它们来完成某一计算时, 都隐含着假设: 这个计算所代表的是对理想化了的信号特征的精确描述。为了说明这一点, 考虑下面式子:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (\text{P1.39-1})$$

这个式子是基于如下观察:

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t) \quad (\text{P1.39-2})$$

将这一关系取极限, 就可得到(P1.39-1)式所给出的理想化关系。然而, 更仔细地考查一下(P1.39-2)式的导出, 就会发现这个式子真正有意义只有在 $t = 0$ 时, $x(t)$ 是连续的才行; 否则, 对于小的 t 时, 就不会有 $x(t) \approx x(0)$ 。

为了使这一点更为清楚, 看看单位阶跃信号 $u(t)$ 。由(1.70)式, $t < 0, u(t) = 0$; $t > 0, u(t) = 1$, 但是在 $t = 0$, 它的值不确定。[注意, 对所有的 $\Delta, u_\Delta(0) = 0$, 而 $u_\Delta^1(0) = \frac{1}{2}$ (由习题 1.38(b) 所到)] 只要利用 $u(t)$ 所进行的计算不依赖于对 $u(0)$ 的特定选取, 那么 $u(0)$ 不确定这一点就不会带来特别的麻烦。例如, 若 $f(x)$ 是一个在 $t = 0$ 连续的信号, 那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

的值就与 $u(0)$ 的选择无关。另一方面, $u(0)$ 无定义这一点是有意义的, 它意味着涉及奇异函数的某些计算是没有定义的。考虑一下试图对乘积 $u(t)\delta(t)$ 定义一个值。为了看出这是不能定义的, 只需证明

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} [u_\Delta(t)\delta(t)] = 0$$

但是

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} [u_\Delta(t)\delta_\Delta(t)] = \frac{1}{2}\delta(t)$$

一般来说, 只要这些信号不包括位置重合的奇异点(不连续点、冲激或者在 2.5 节介绍的其它奇异点), 定义两个信号的乘积不会有任何困难。当这些奇异点的位置重合时, 乘积就没有定义。作为一个例子, 证明

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

与 $u(t)$ 是恒等的。也就是, 当 $t < 0$, 它为零; $t > 0$, 等于 1, 而在 $t = 0$ 无定义。

- 1.40 (a) 证明如果一个系统无论是可加的, 或是齐次的, 它都有这个性质, 即若输入恒为零, 那么输出也恒为零。
 (b) 确定一个系统(无论是连续时间或离散时间), 它既不可加, 又不齐次; 但当输入恒为零时, 它有零的输出。
 (c) 根据(a), 你能得出: 若一个线性系统的输入在连续时间下, 在 t_1 到 t_2 之间; 或者在离散时间下, 在 n_1 到 n_2 之间为零, 那么在同样的时间间隔内输出也必须为零的结论吗? 为什么?

- 1.41 考虑一系统 S, 其输入 $x[n]$ 与输出 $y[n]$ 的关系为

$$y[n] = x[n] + g[n] + g[n-1]$$

- (a) 若对所有的 $n, g[n] = 1$, 证明 S 是时不变的。
 (b) 若 $g[n] = n$, 证明 S 不是时不变的。
 (c) 若 $g[n] = 1 + (-1)^n$, 证明 S 是时不变的。

1.42 (a) 下列说法是对还是错? 说明理由。

两个线性时不变系统的级联还是一个线性时不变系统。

- (b) 下列说法是对还是错? 说明理由。

两个非线性系统的级联还是非线性的。

- (c) 考虑具有下列输入-输出关系的三个系统:

$$\text{系统 1: } y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶} \\ 0, & n \text{ 为奇} \end{cases}$$

$$\text{系统 2: } y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{4}x[n-2]$$

$$\text{系统 3: } y[n] = x[2n]$$

假设这三个系统按图 P1.42 级联, 求整个系统的输入-输出关系。它是线性的吗? 是时不变的吗?

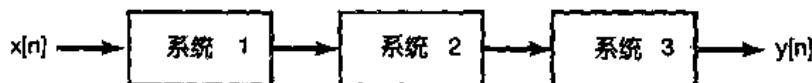


图 P1.42

1.43 (a) 有一时不变系统, 其输入为 $x(t)$, 输出为 $y(t)$, 证明: 若 $x(t)$ 是周期的, 周期为 T , 则 $y(t)$ 也是周期的, 周期为 T 。同时证明在离散时间下也有同样结论。

- (b) 给出一个时不变系统的例子, 在输入 $x(t)$ 为非周期时, 输出是周期的。

1.44 (a) 证明 对连续时间线性系统而言, 其因果性就等效于下面说法:

对任何 t_0 和任意输入 $x(t)$, 若 $t < t_0, x(t) = 0$, 则对应的输出 $y(t)$ 在 $t < t_0$ 也必定为零。

- (b) 找出一个非线性系统, 它满足上面的条件, 但不是因果的。

- (c) 找出一个非线性系统, 它是因果的但不满足上述条件。

- (d) 证明一个离散时间线性系统的可逆性就等效于下面说法:

对所有 n 都产生 $y[n] = 0$ 的唯一输入是在全部 n 下的 $x[n] = 0$

对连续时间线性系统类似的说法也成立。

- (e) 找出一个非线性系统, 它满足(d)中的条件, 但不是可逆的。

1.45 在习题 1.37 中介绍了相关函数的概念。在实践中往往重要的是要计算相关函数 $\phi_{hx}(t)$, 这里 $h(t)$ 是一个固定的已知函数, 而 $x(t)$ 可能是任何其它的信号。这种情况下, 要做的是设计一个系统 S, 其输入为 $x(t)$, 输出为 $\phi_{hx}(t)$ 。

- (a) S 是线性的吗? 是时不变的吗? 是因果的吗? 为什么?

- (b) 如果做的是 $\phi_{xt}(t)$ 而不是 $\phi_{hx}(t)$, (a) 中的答案有任何变化吗?

1.46 考虑图 P1.46 的反馈系统, 假设 $n < 0, y[n] = 0$

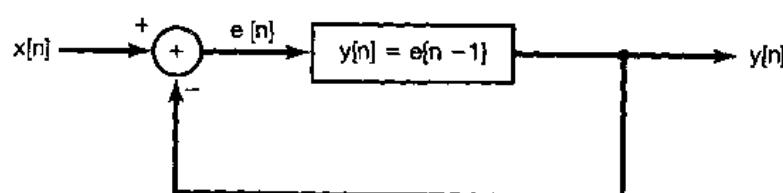


图 P1.46

- (a) 当 $x[n] = \delta[n]$ 时, 画出输出图形。
 (b) 当 $x[n] = u[n]$ 时, 画出输出图形。
- 1.47 (a) 设 S 为一增量线性系统, $x_1[n]$ 为任一输入信号, 当 $x_1[n]$ 输入到 S 时其相应输出为 $y_1[n]$ 。现在考虑图 P1.47(a) 的系统, 证明该系统是线性的。并且事实上 $x[n]$ 和 $y[n]$ 之间的总输入-输出关系与 $x_1[n]$ 的选取无关。
- (b) 利用(a)所得的结果, 证明 S 可以用图 1.48 来表示。
- (c) 下面哪个系统是增量线性的? 为什么? 如果某一系统是增量线性的, 请将线性系统 L 和零输入响应 $y_0[n]$ 或 $y_0(t)$ 鉴别出来, 表示成图 1.48 的形式。
- (I) $y[n] = n + x[n] + 2x[n+4]$
 (II) $y[n] = \begin{cases} n/2, & n \text{ 为偶} \\ (n-1)/2 + \sum_{k=-\infty}^{(n-1)/2} x[k], & n \text{ 为奇} \end{cases}$
 (III) $y[n] = \begin{cases} x[n] - x[n-1] + 3, & \text{若 } x[0] \geq 0 \\ x[n] - x[n-1] - 3, & \text{若 } x[0] < 0 \end{cases}$
 (IV) 示于图 P1.47(b) 的系统。
 (V) 示于图 P1.47(c) 的系统。
- (d) 假设一特定的增量线性系统有如图 1.48 的表示, L 记为线性系统, $y_0[n]$ 记为零输入响应。证明: 当仅当 L 是时不变系统和 $y_0[n]$ 是常数时, S 才是时不变的。

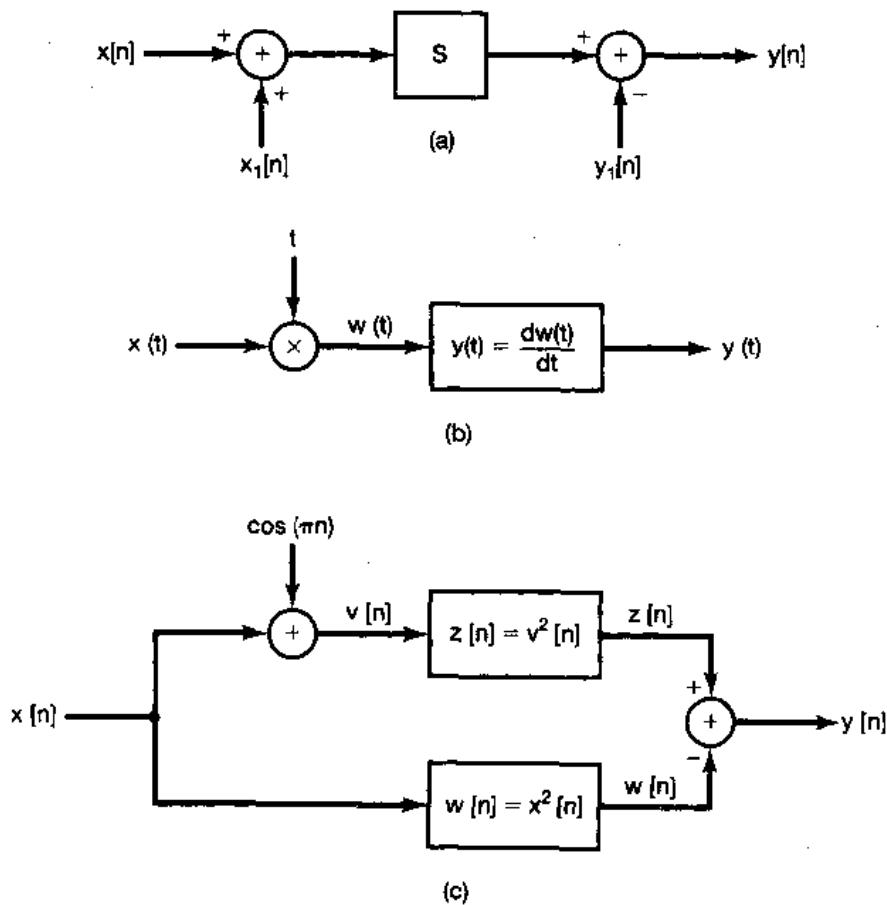


图 P1.47

数学复习

复数 z 可以用几种方法来表示。 z 的直角坐标形式为

$$z = x + jy$$

式中 $j = \sqrt{-1}$, x 和 y 都是实数, 且分别称为 z 的实部和虚部。正如早先已指出过的, 也常用下列符号来表示复数的实部和虚部:

$$x = \Re\{z\}, \quad y = \Im\{z\}$$

复数 z 也可以用极坐标形式表示为

$$z = r e^{j\theta}$$

式中 $r > 0$ 是 z 的模, θ 是 z 的相角或相位。它们也经常写成

$$r = |z|, \quad \theta = \angle z$$

这两种复数表示法之间的关系可以根据欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$$

来确定, 也可以将 z 图示在复平面上来确定, 如图 P1.48 所示。图中 $\Re\{z\}$ 是坐标轴的水平轴, $\Im\{z\}$ 是其垂直轴。对于这种图形表示来说, x 和 y 就是 z 的直角坐标, 而 r 和 θ 就是它的极坐标。

- 1.48** 设 z_0 是一个复数, 其极坐标是 (r_0, θ_0) , 直角坐标是 (x_0, y_0) 。求下列复数用 x_0 和 y_0 的直角坐标表示式, 当 $r_0 = 2$, $\theta_0 = \pi/4$ 和 $r_0 = 2$, $\theta_0 = \pi/2$ 时, 在复数平面上标出点 z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 和 z_5 , 并标出每一点的实部和虚部。

(a) $z_1 = r_0 e^{-j\theta_0}$	(b) $z_2 = r_0$
(c) $z_3 = r_0 e^{j(\theta_0 + \pi)}$	(d) $z_4 = r_0 e^{j(-\theta_0 + \pi)}$
(e) $z_5 = r_0 e^{j(\theta_0 + 2\pi)}$	

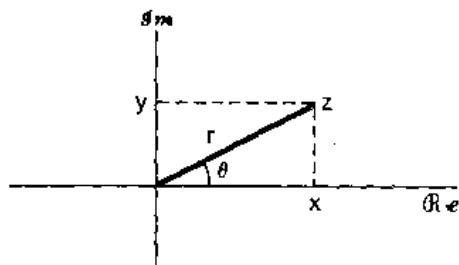


图 P1.48

- 1.49** 将下列复数用极坐标表示, 并在复平面上画出它们, 指出每个数的模和相角。

(a) $1 + j\sqrt{3}$	(b) -5	(c) $-5 - 5j$
(d) $3 + 4j$	(e) $(1 - j\sqrt{3})^3$	(f) $(1 + j)^5$
(g) $(\sqrt{3} + j^3)(1 - j)$	(h) $\frac{2 - j(6\sqrt{3})}{2 + j(6\sqrt{3})}$	(i) $\frac{1 + j\sqrt{3}}{\sqrt{3} + j}$
(j) $j(1 + j)e^{j\pi/6}$	(k) $(\sqrt{3} + j)2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$	(l) $\frac{e^{j\pi/3} - 1}{1 + j\sqrt{3}}$

- 1.50** (a) 利用欧拉公式或图 P1.48 求用 r 和 θ 对 x 和 y 的表示式。

- (b) 求用 x 和 y 对 r 和 θ 的表示式。

- (c) 若仅给出 r 和 $\tan\theta$, 能唯一确定 x 和 y 吗? 为什么?

- 1.51** 利用欧拉公式, 导出下列关系:

(a) $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$	(b) $\sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$	(c) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$
(d) $(\sin\theta)(\sin\phi) = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta + \phi)$		(e) $\sin(\theta + \phi) = \sin\theta \cos\phi + \cos\theta \sin\phi$

- 1.52** 设 z 是一复变量, 即

$$z = x + jy = r e^{j\theta}$$

z 的复数共轭是

$$\dot{z} = x - jy = r e^{-j\theta}$$

试导出下列关系式, 其中 z, z_1 和 z_2 都是任意复数:

(a) $z\dot{z} = r^2$	(b) $\frac{z}{\dot{z}} = e^{j2\theta}$
----------------------	--

- (c) $z + \bar{z} = 2\Re{z}$ (d) $z - \bar{z} = 2j\Im{z}$
 (e) $(z_1 + z_2)^* = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (f) $(az_1 z_2)^* = a\bar{z}_1 \bar{z}_2$, a 为任一实数
 (g) $(\frac{z_1}{z_2})^* = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (h) $\Re{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{1}{2} [\frac{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{z_2 \bar{z}_2}]$

1.53 试导出下列关系式, 这里 z, z_1 和 z_2 都是任意复数:

- (a) $(e^z)^* = e^{\bar{z}}$ (b) $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\Re{z_1 z_2} = 2\Re{z_1 z_2}$
 (c) $|z| = |\bar{z}|$ (d) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
 (e) $\Re{z} \leq |z|, \Im{z} \leq |z|$ (f) $|z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2| \leq 2|z_1 z_2|$
 (g) $(|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

1.54 本题所提到这些关系式在全书的很多场合都会用到。

(a) 证明下面表示式成立

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \text{对任意复数 } |\alpha| \neq 1 \end{cases}$$

该式常称为有限项和公式

(b) 证明, 若 $|\alpha| < 1$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

该式常称无限项和公式

(c) 证明, 若 $|\alpha| > 1$, 则

$$\sum_{n=k}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

(d) 求

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n$$

假设 $|\alpha| < 1$

1.55 利用习题 1.54 的结果, 求下列各和式, 并将结果用直角坐标表示:

- (a) $\sum_{n=0}^9 e^{jn\pi/2}$ (b) $\sum_{n=-2}^7 e^{jn\pi/2}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{jn\pi/2}$
 (d) $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{jn\pi/2}$ (e) $\sum_{n=0}^9 \cos(\frac{\pi}{2} n)$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \cos(\frac{\pi}{2} n)$

1.56 求下列各积分值, 并将结果用直角坐标表示:

- (a) $\int_0^4 e^{j\pi t/2} dt$ (b) $\int_0^6 e^{j\pi t/2} dt$
 (c) $\int_2^8 e^{j\pi t/2} dt$ (d) $\int_0^{\infty} e^{-(1+j)t} dt$
 (e) $\int_0^{\infty} e^{-t} \cos(t) dt$ (f) $\int_0^{\infty} e^{-2t} \sin(3t) dt$

第2章 线性时不变系统

2.0 引言

在第1章1.6节介绍并讨论了几个系统的基本性质。其中两个性质——线性和时不变性——在信号与系统分析中是最主要的。其理由是：第一，很多物理过程都具有这两个性质，因此都能用LTI系统来表征；第二，可以对LTI系统进行详细的分析。这样既求得了对系统性质的深入理解，又提供了形成信号与系统分析核心的一整套强有力的方法。

本书的一个主要目的就是为了阐明这些性质和方法，并介绍这些方法的几个主要应用方面。在这一章就从导出并分析一种最基本而又极为有用 的 LTI 系统的表示方法入手，并引入其中一类重要的系统。

LTI系统之所以能够深入分析的主要原因之一在于该类系统具有1.6.6节所说的叠加性质。这样，如果能够将LTI系统的输入用一组基本信号的线性组合来表示，就可以根据该系统对这些基本信号的响应，然后利用叠加性质求得整个系统的输出。

正如将在以下各节看到的，无论在离散时间或连续时间情况下，单位冲激函数的重要特性之一就是一般信号都可以表示为延迟冲激的线性组合。这个事实，再与叠加性和时不变性结合起来，就能够用LTI的单位冲激响应来完全表征任何一个LTI系统的特性。这样一种表示——在离散时间情况下称为卷积和，在连续时间下称为卷积积分——在分析LTI系统时提供了极大的方便性。在建立了卷积和与卷积积分之后，再用这些特性来分析LTI系统的某些其它性质。然后讨论由线性常系数微分方程所描述的连续时间系统和由线性常系数差分方程所描述的离散时间系统，在后续各章中还会不时地回到分析这两种重要的系统上来。最后，将从另外一种角度来审视一下连续时间单位冲激函数，以及与其有关的其它几个信号，以期对这些理想化的信号提供另外一些认识，特别是在分析LTI系统方面的应用和理解上。

2.1 离散时间LTI系统：卷积和

2.1.1 用脉冲表示离散时间信号

如何把任何离散时间信号看成是由离散时间单位脉冲构成的关键是：要把一个离散时间信号当作一串单个的脉冲来想象。为了明了如何把这种直观认识变成一种数学表示式，让我们来看一下图2.1(a)的信号。在该图的其余部分画出了5个时间移位并加权了的单位脉冲序列，每个脉冲的大小与 $x[n]$ 所对应的时刻序列值相等，例如

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$
$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

因此, 图中这 5 个序列的和就等于在 $-2 \leq n \leq 2$ 区间内的 $x[n]$ 。若把这样的表示式扩大到包括更多的移位加权脉冲, 就可以得到一般的表示式为

$$\begin{aligned} x[n] = & \dots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] \\ & + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ & + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] \\ & + x[3]\delta[n-3] + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

在(2.1)式的右边, 对全部 n 值, 只有一项是非零的, 而非零项的大小就是 $x[n]$ 。上式写成更为紧凑的形式是

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (2.2)$$

这个式子相当于把任意一个序列表示成一串移位的单位脉冲序列 $\delta[n-k]$ 的线性组合, 而这个线性组合式中的权因子就是 $x[k]$ 。譬如说, 若是 $x[n]=u[n]$, 单位阶跃序列, 因为 $k<0$ 时, $u[k]=0$; 而 $k \geq 0$ 时, $u[k]=1$, 则(2.2)式变为

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

这与 1.4 节所得结果(1.67)式是完全一致的。

(2.2)式称为离散时间单位脉冲序列的筛选性质(sifting property))。因为序列 $\delta[n-k]$ 仅当 $k=n$ 时为非零, 所以在(2.2)式右边的和就把 $x[n]$ 序列作了筛选, 而仅保留下对应于 $k=n$ 时的值。下面将利用离散时间信号这种表示来建立一个离散时间 LTI 系统的卷积和表示。

2.1.2 离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应及卷积和表示

(2.1)式和(2.2)式筛选性质的重要性在于它把 $x[n]$ 表示成一组加权的基本函数的叠加, 这个极简单的基本函数就是移位单位脉冲 $\delta[n-k]$, 其中每一个在相应于 k 的单一时刻点上为非零, 其值为 1。一个线性系统对 $x[n]$ 的响应就是系统对这些移位脉冲中的每一个的响应加权后的叠加; 再者, 时不变性又意味着一个时不变系

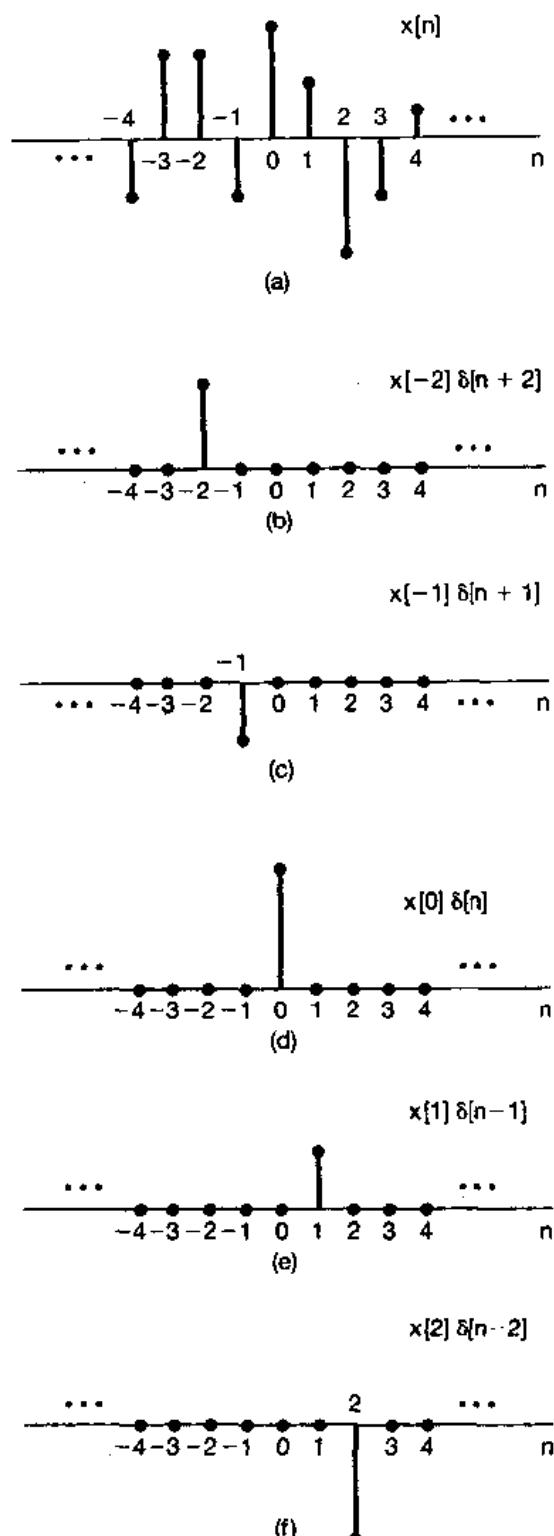


图 2.1 一个离散时间信号分解为一组加权的移位脉冲之和

统对移位单位脉冲的响应就是未被移位的单位脉冲响应的移位。将这两点结合在一起就可得到具有线性和时不变性的离散时间系统的卷积和表示。

更为具体明确些，现在来考虑某一线性（但可能为时变的）系统对任一输入 $x[n]$ 的响应。由(2.2)式可以将输入表示为一组移位单位脉冲的线性组合，令 $h_k[n]$ 记为该线性系统对移位单位脉冲 $\delta[n-k]$ 的响应，那么根据线性系统的叠加性质((1.123)式和(1.124)式)，该线性系统对输入 $x[n]$ 的响应 $y[n]$ 就是这些基本响应的加权线性组合。也就是说，若线性系统的输入 $x[n]$ 表示成(2.2)式，则输出 $y[n]$ 就可表示为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n] \quad (2.3)$$

由(2.3)式可知，如果已知一个线性系统对每一个移位单位脉冲序列的响应，则系统对任何输入的响应都可求出。图 2.2 给出了一个简单的例子来说明(2.3)式的意义。图 2.2(b) 分别示出该系统对 $\delta[n+1]$ 、 $\delta[n]$ 和 $\delta[n-1]$ 的响应是 $h_{-1}[n]$ 、 $h_0[n]$ 和 $h_1[n]$ 。因为 $x[n]$ 可以写成 $\delta[n+1]$ 、 $\delta[n]$ 和 $\delta[n-1]$ 的线性组合。所以根据叠加性质，对 $x[n]$ 的响应就可以表示成系统对这些单个的移位脉冲响应的线性组合。这些单个的移位并加权了的脉冲分别图示在图 2.2(c) 的左边，而其响应则示于该图的右边。图 2.2(d) 的左边就是真正的输入 $x[n]$ ，它是图 2.2(c) 左边各信号之和；该图的右边就是真正的输出 $y[n]$ ，它是图 2.2(c) 右边各分量的叠加。由此可见，一个线性系统在时刻 n 的响应就是在时间上每一点的输入值所产生的各个响应在该时刻 n 的叠加。

一般来说，在线性系统中，对于不同的 k 值，其响应 $h_k[n]$ 相互之间是不必要非有什么关系不可的。但是，若该线性系统也是时不变的，那么这些对时间移位的单位脉冲的响应也都全互相作了移位。具体说来，因为 $\delta[n-k]$ 是 $\delta[n]$ 的时间移位，响应 $h_k[n]$ 也就是 $h_0[n]$ 的一个时移，即

$$h_k[n] = h_0[n - k] \quad (2.4)$$

为了简化符号，现将 $h_0[n]$ 的下标除掉，而定义系统单位脉冲（样本）序列响应为

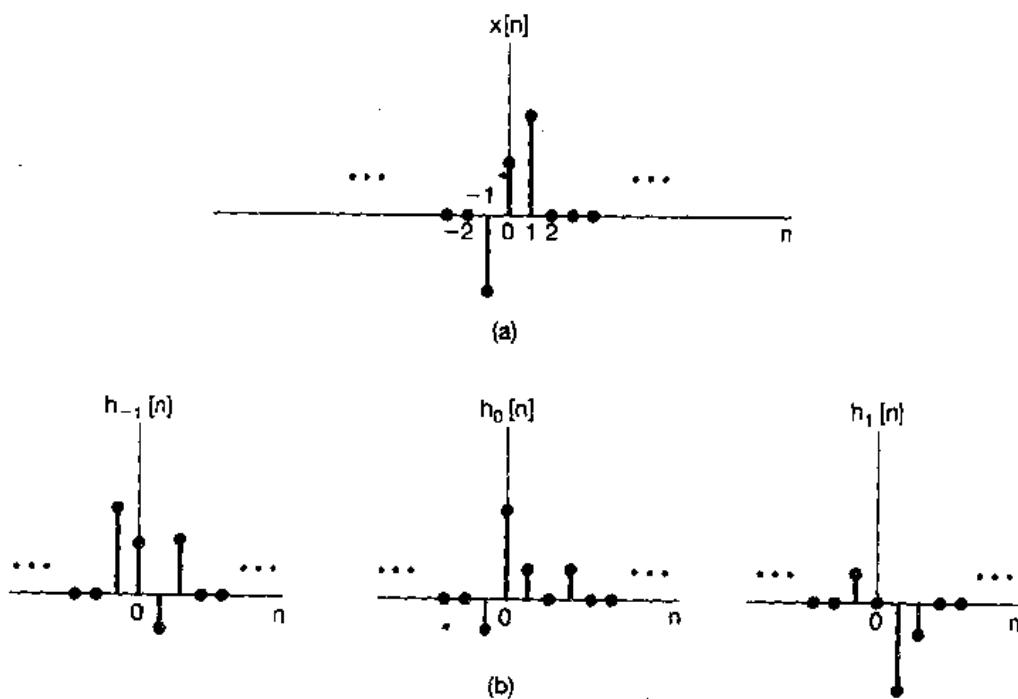


图 2.2 由(2.3)式表示的离散时间线性系统响应的图解表示

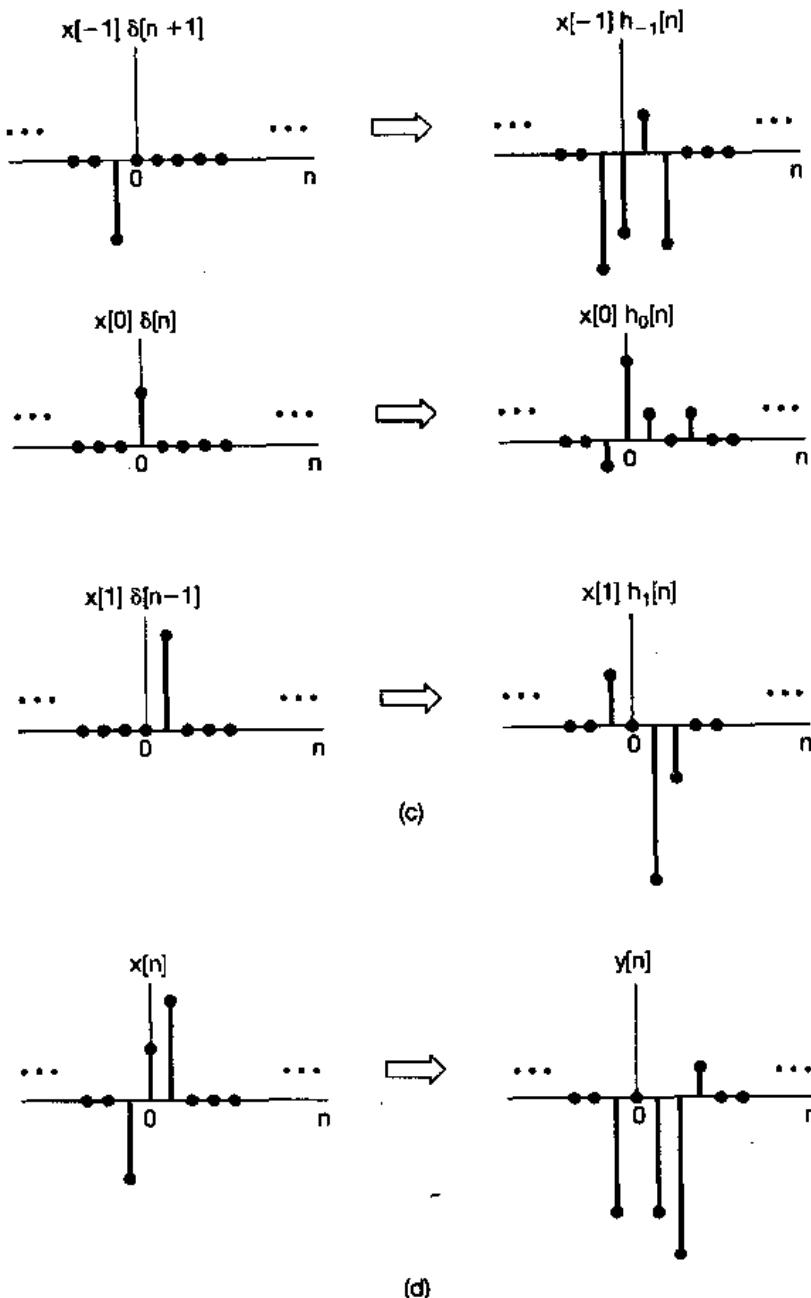


图 2.2(续)

$$h[n] = h_0[n] \quad (2.5)$$

也就是说, $h[n]$ 是 LTI 系统当输入为 $\delta[n]$ 时的输出。那么, 对 LTI 系统而言, (2.3)式就变成

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (2.6)$$

这个结果称为卷积和, 并且(2.6)式右边的运算称为 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的卷积, 并用符号记作

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (2.7)$$

(2.6)式意味着一个很重要的结果: 既然一个 LTI 系统对任意输入的响应可以用系统对单位脉冲的响应来表示, 那么 LTI 系统的单位脉冲响应就完全刻画了系统的特性。

(2.6)式和前面给出的(2.3)式的含意是类似的, 不过现在情况下是 LTI 系统, 由于在时刻 k 加入

的输入 $x[k]$ 引起的响应 $x[k]h[n-k]$ 就是 $h[n]$ 移位并经加权的结果。与前面一样，真正的输出是所有这些响应的叠加。

例 2.1 考虑一 LTI 系统，其单位脉冲响应为 $h[n]$ ，输入为 $x[n]$ ，如图 2.3(a) 所示。这时，因为仅在 $x[0]$ 和 $x[1]$ 为非零，(2.6) 式就简化为

$$\begin{aligned} y[n] &= x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] \\ &= 0.5h[n] + 2h[n-1] \end{aligned} \quad (2.8)$$

在求 $y[n]$ 中仅涉及到两个单位脉冲响应的移位和加权的结果，即 $0.5h[n]$ 和 $2h[n-1]$ 两个序列，它们分别示于图 2.3(b)。在每个 n 值上相加这两个序列就得到 $y[n]$ ，如图 2.3(c) 所示。

利用在每个单独输出样本上的叠加求和的结果，可以得出另一种有用的方法，即用卷积和来想象 $y[n]$ 的计算。现在具体考虑一下对某个特定的 n 值求 $y[n]$ 的问题。用图来展现这种计算的一种特别有用的方式是一开始就将信号 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 都看成 k 的函数，将它们相乘就得到序列 $g[k] = x[k]h[n-k]$ ，它可看作在每一个时刻 k ，输入 $x[k]$ 对输出在时刻 n 作出的贡献，这样就能得出如下结论：将全部 $g[k]$ 序列中的样本值相加就是在所选定的时刻 n 的输出值。由此，为了对 $y[n]$ 计算出全部 n 时的值，就需要对每个 n 值重复这一过程。所幸的是，对 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ ，将它们看作是 k 的函数，改变 n 值可以有一个非常简单的图解表示。下面的例子用来说明这一点，并利用前面提到的观点来求卷积和。

例 2.2 重新考虑例 2.1 中的卷积问题。序列 $x[k]$ 示于图 2.4(a)；而序列 $h[n-k]$ ，对某一固定 n 并将其看作为 k 的函数，对于几个不同的 n 值示于图 2.4(b)。在画这些序列时已经用了这一点，就是 $h[n-k]$ 是单位脉冲响应 $h[k]$ 的时间反转与移位。随着 k 的增加，宗量 $n-k$ 减小，这就说明了需要对 $h[k]$ 作一个时间反转。知道了这一点，为了画出信号 $h[n-k]$ ，仅仅需要确定对某个特定 k 值时， $h[n-k]$ 的值就够了，例如，在 $k=n$ 时，宗量 $k-n$ 等于 0。于是，如果画出了信号 $h[-k]$ 的话，只是将它右移 n ($n>0$)，或左移 n ($n<0$) 就得到了信号 $h[n-k]$ 。图 2.4(b) 画出了 $n<0$, $n=0, 1, 3$ 和 $n>3$ 时的结果。对任何具体的 n 值，画出了 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 之后，将这两个信号相乘并在全部 k 值上相加。对该例来说，对 $n<0$ ，由图 2.4 看出，因为 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 的非零值都不重合，所以 $x[k]h[n-k]=0$ ，结果就是 $n<0$, $y[n]=0$ 。对 $n=0$ ，因为序列 $x[k]$ 与序列 $h[n-k]$ 的乘积仅有一个非零样本，其值为 0.5，所以有

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k] = 0.5 \quad (2.9)$$

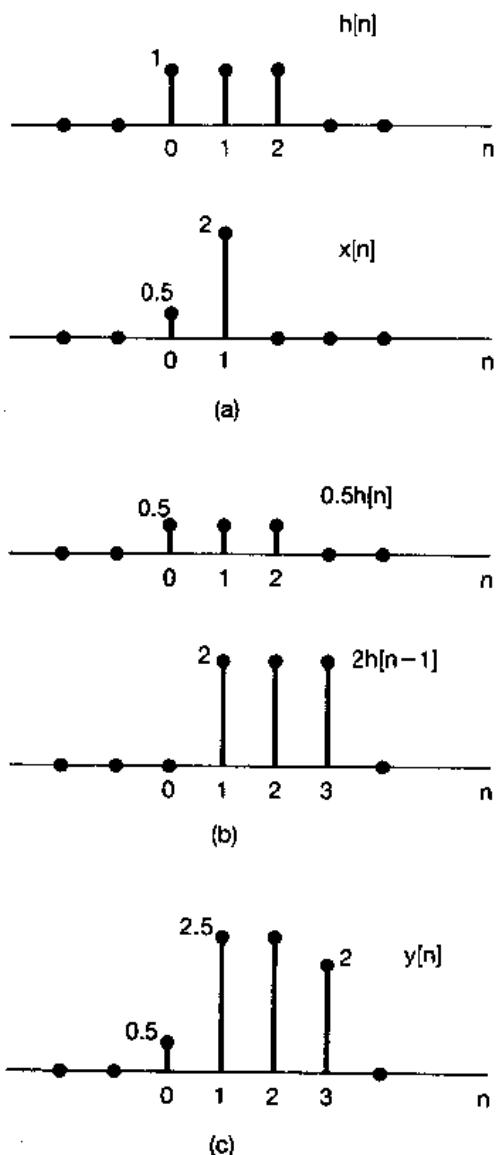


图 2.3 (a)LTI 系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 及其输入 $x[n]$ ；
 (b) 对 $x[0]=0.5$ 和 $x[1]=2$ 的响应；
 (c) 总的响应 $y[n]$ 就是 (b) 的和

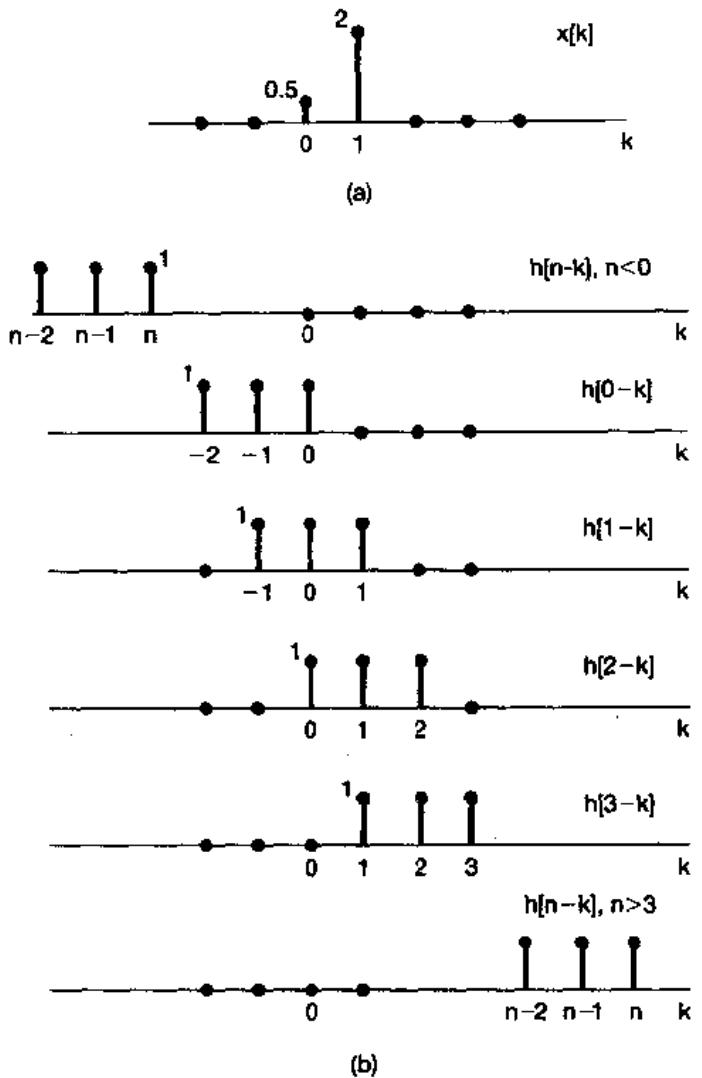


图 2.4 对于图 2.3 中信号 $h[n]$ 和 $x[n]$, (2.6) 式的说明: (a) 信号 $x[k]$; (b) 将 $h[n-k]$ 看作 n 固定, k 的函数, 对于几个 n 值 ($n < 0$; $n=0, 1, 3; n > 3$) 时的信号 $k[n-k]$, 这些信号都是由 $h[k]$ 的反转和移位来得出的。对每个 n 值的 $y[n]$ 是将图(a)中的 $x[k]$ 与图(b)中的 $h[n-k]$ 相乘, 然而在全部 k 值上将乘积相加后得出的。这个例子的计算在例 2.2 中已详细做过

序列 $x[k]$ 与序列 $h[1-k]$ 的乘积有两个非零样本, 相加之后得

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = 0.5 + 2.0 = 2.5 \quad (2.10)$$

类似地有

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = 0.5 + 2.0 = 2.5 \quad (2.11)$$

和

$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = 2.0 \quad (2.12)$$

最后, 对 $n > 3$, 乘积 $x[k]h[n-k]$ 在全部 k 上都是零, 由此可得 $n > 3$, $y[n]=0$ 。所得到的输出值与例 2.1 中得到的相同。

例 2.3 已知输入 $x[n]$ 和单位脉冲响应 $h[n]$ 为

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

$$h[n] = u[n]$$

其中 $0 < \alpha < 1$ 。图 2.5 中画出了这两个信号。为了帮助我们想象并计算这两个信号的卷积，在图 2.6 中已经画出了 $x[k]$ 和 $h[-k]$, $h[-1-k]$ 和 $h[1-k]$ (也就是在 $n=0, -1$, 和 $+1$ 时的 $h[n-k]$)，以及最后对任意正 n 和负 n 值时的 $h[n-k]$ 。由这个图可知，对于 $n < 0$, $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 的非零部分没有任何重合，所以对 $n < 0$ 而言, $x[k]h[n-k]$ 对全部 k 值都为零, 由(2.6)式 $n < 0, y[n] = 0$ 。对于 $n \geq 0$,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{其余 } k \text{ 值} \end{cases}$$

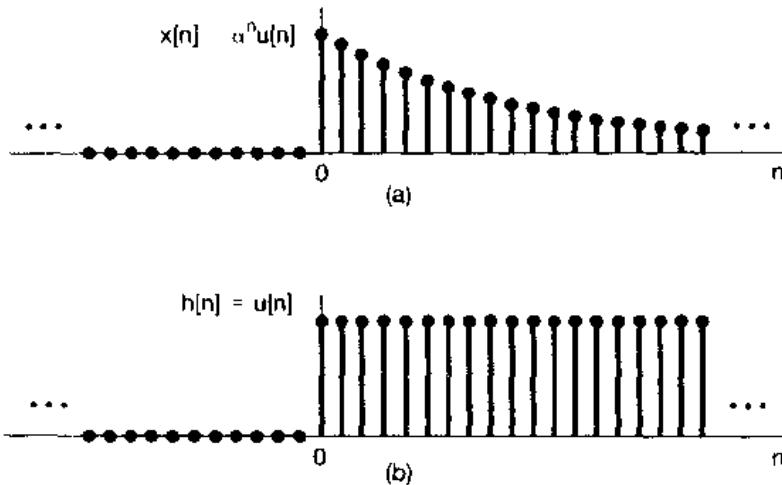


图 2.5 例 2.3 中的信号 $x[n]$ 和 $h[n]$

因此, 对于 $n \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k$$

利用习题 1.54 的结果, 就可写成

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \quad \text{对于 } n \geq 0 \quad (2.13)$$

于是, 对全部 n 就有

$$y[n] = \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n]$$

$y[n]$ 如图 2.7 所示。

卷积运算有时也用序列 $h[n-k]$ 沿着 $x[k]$ “滑动”来说明。例如, 对某一个 n 值, 比如 $n = n_0$, 已经求得了 $y[n]$, 这就是说已经画出了信号 $h[n_0-k]$, 将它与 $x[k]$ 相乘, 并对全部 k 值将乘积相加。现在欲求下一个 n 值, 即 $n = n_0 + 1$ 时的 $y[n]$ 。这时就需要画出信号 $h[(n_0+1)-k]$ 。然而, 这时只需要将信号 $h[n_0-k]$ 右移一点即可; 对于接踵而来的每一个 n 值, 继续这一过程, 把 $h[n-k]$ 一点一点地向右移, 再与 $x[k]$ 相乘, 并在全部 k 上相加全部乘积即可。

例 2.4 作为一个深入一点的例子, 考虑如下两个序列:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其余 } n \text{ 值} \end{cases}$$

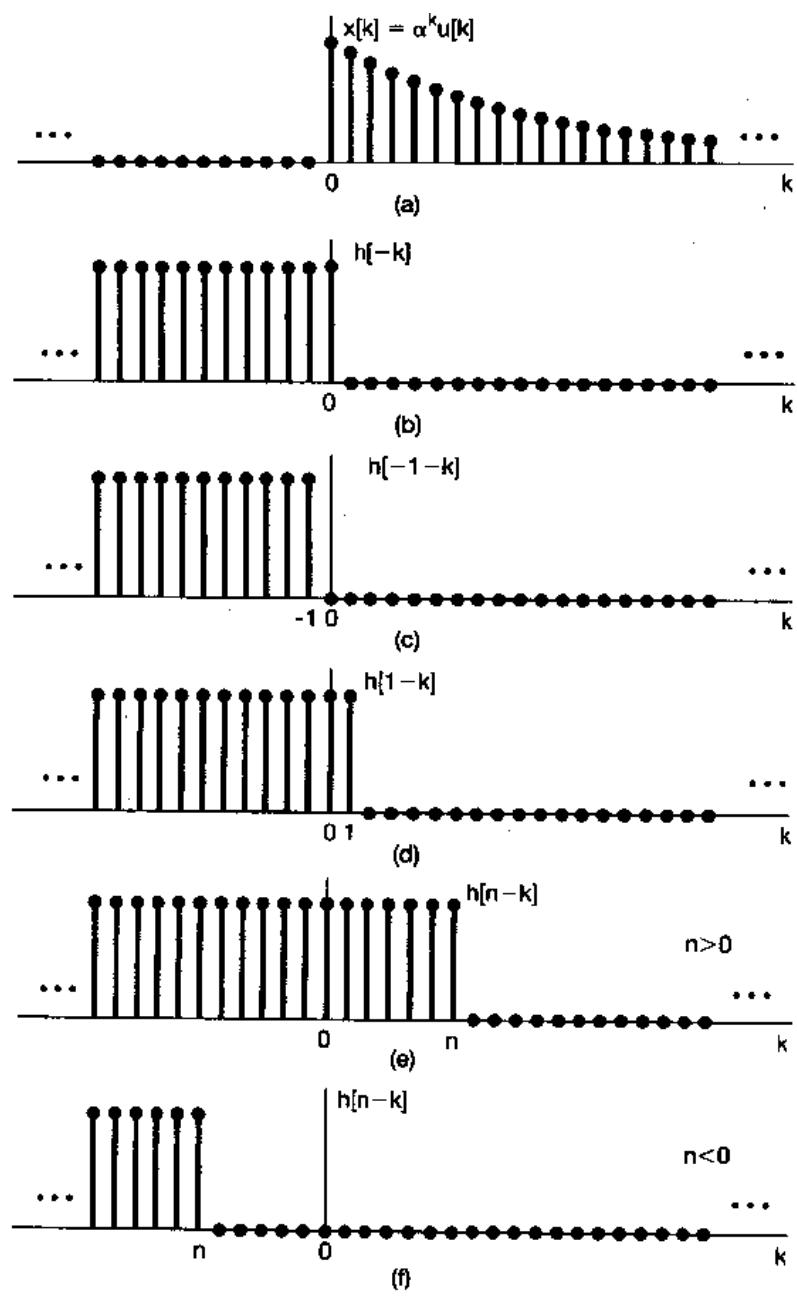


图 2.6 计算例 2.3 卷积和的图解说明

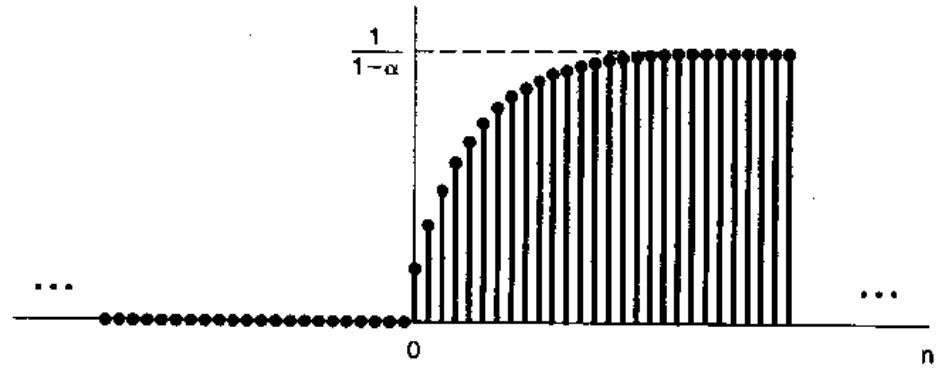


图 2.7 例 2.3 的输出

和

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{其余 } n \text{ 值} \end{cases}$$

对于某个正的 $\alpha > 1$ 的值,这两个信号如图 2.8 所示。

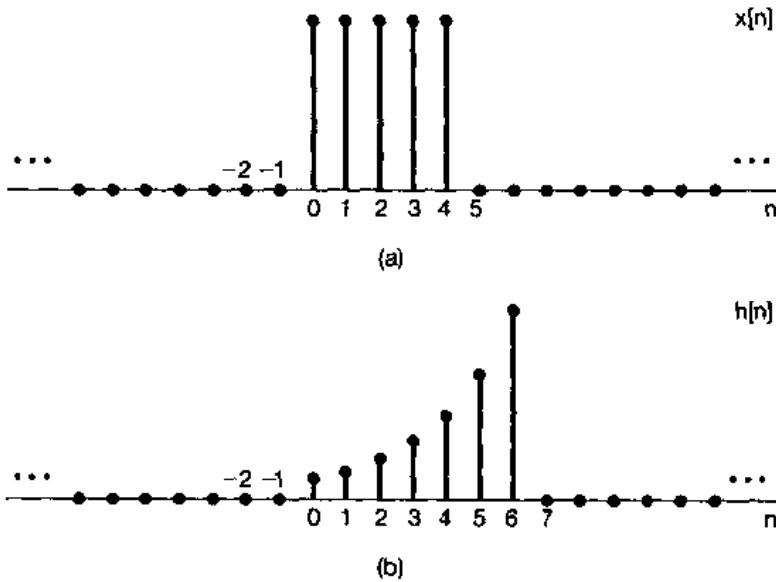


图 2.8 例 2.4 中待卷积的信号

为了计算这两个信号的卷积,对 n 分五个不同的区间来考虑比较方便,如图 2.9 所示。

区间 1, 对于 $n < 0$, 由于 $x[k]$ 与 $h[n-k]$ 的非零部分无任何重合, 故 $y[n] = 0$ 。

区间 2, 对于 $0 \leq n \leq 4$,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} a^{n-k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{其余 } k \text{ 值} \end{cases}$$

因此,在该区间内

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^{n-k} \quad (2.14)$$

利用有限项求和公式(2.13)式可以求出这个和。将(2.14)式中的求和变量由 k 置换成 $r = n - k$, 得

$$y[n] = \sum_{r=0}^n a^r = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

区间 3, 对于 $n > 4$, 但 $n-6 \leq 0$, 即 $4 < n \leq 6$, 这时

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} a^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{其余 } k \text{ 值} \end{cases}$$

则在该区间内

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 a^{n-k} \quad (2.15)$$

再次利用(2.13)式的求和公式来求(2.15)式,为此将(2.15)式中的 a^n 常数因子提出来后就得

$$y[n] = a^n \sum_{k=0}^4 (\alpha^{-1})^k = a^n \frac{1 - (\alpha^{-1})^5}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \quad (2.16)$$

区间 4, 对于 $n > 6$, 但 $n-6 \leq 4$, 即 $6 < n \leq 10$,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} a^{n-k}, & (n-6) \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{其余 } k \text{ 值} \end{cases}$$

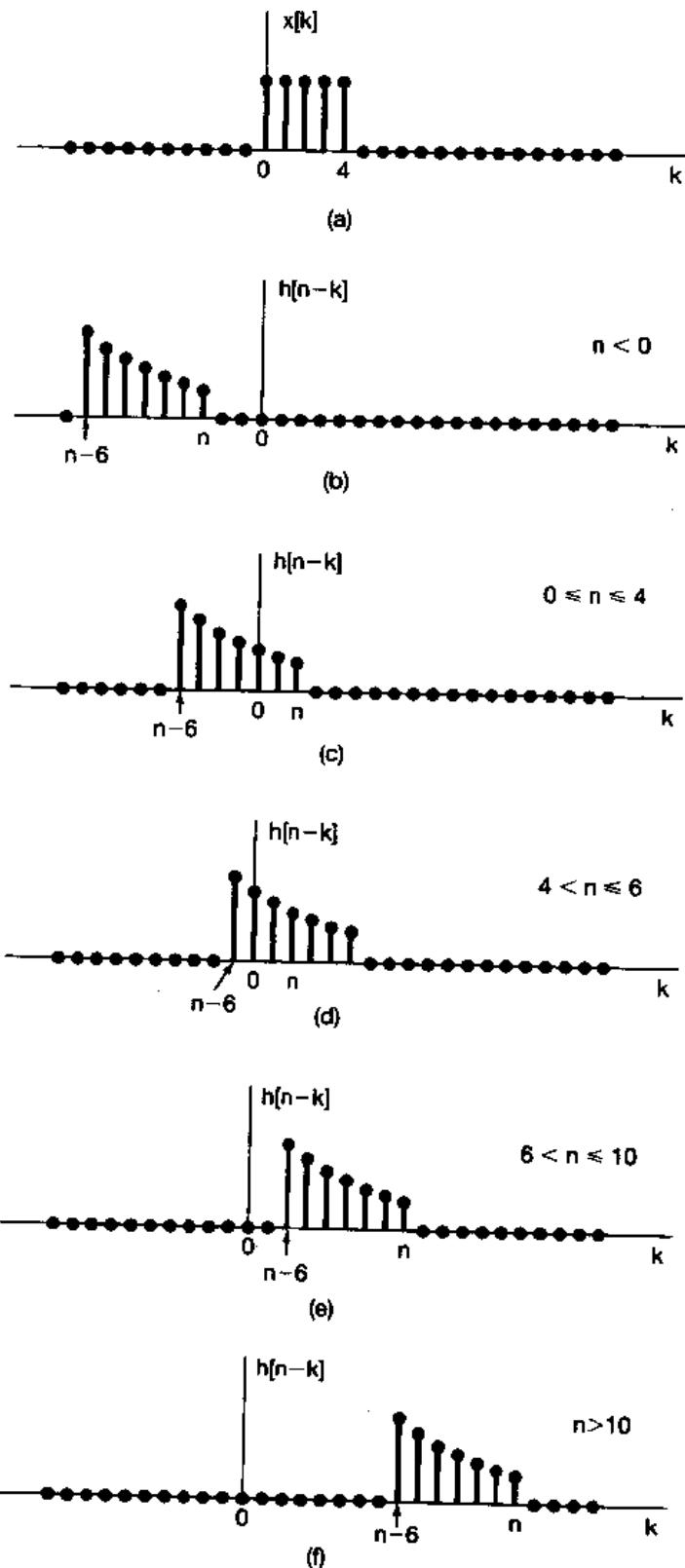


图 2.9 例 2.4 卷积的图解说明

所以

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k}$$

令 $r = k - n + 6$, 再利用(2.13)式来求这个和式, 可得

$$y[n] = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

区间 5, 对于 $n-6 > 4$, 即 $n > 10$, $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 的非零部分没有任何重合, 所以

$$y[n] = 0$$

综合以上所得, $y[n]$ 可归纳如下:

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}, & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}, & 6 < n \leq 10 \\ 0, & 10 < n \end{cases}$$

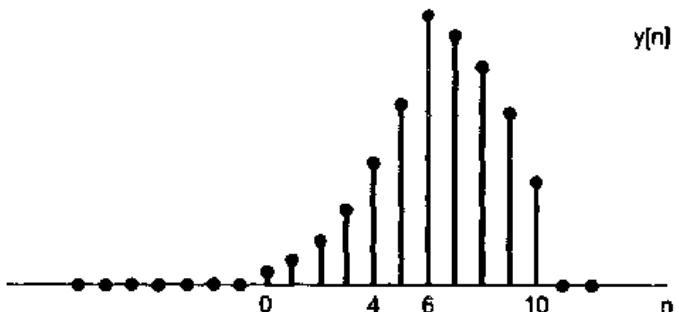


图 2.10 例 2.4 的卷积结果

整个 $y[n]$ 如图 2.10 所示。

例 2.5 一个 LTI 系统, 其输入 $x[n]$ 和单位脉冲响应 $h[n]$ 如下:

$$x[n] = 2^n u[-n] \quad (2.17)$$

$$h[n] = u[n] \quad (2.18)$$

序列 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 作为 k 的函数画在图 2.11(a) 中, 注意: $x[k]$ 对 $k > 0$ 是零, 而 $h[n-k]$ 对 $k > n$ 则是零。同时还能看到, 无论 n 为何值, 序列 $x[k]h[n-k]$ 沿 k 轴总是有非零的样本值。当 $n \geq 0$, $x[k]h[n-k]$ 在 $k \leq 0$ 区间内有非零的样本值, 于是对 $n \geq 0$ 就有

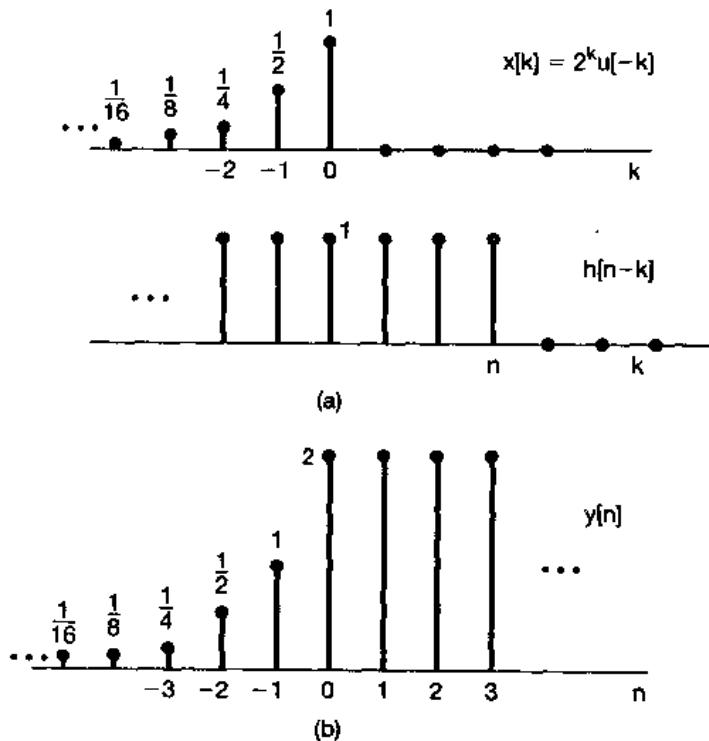


图 2.11 (a) 例 2.5 中的序列 $x[k]$ 和 $h[n-k]$; (b) 输出结果 $y[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^0 x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^0 2^k \quad (2.19)$$

(2.19)式是一个无穷项的和式,可以用无限项求和公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad 0 < |a| < 1 \quad (2.20)$$

将(2.19)式中的求和变量由 k 置换为 $r = -k$,可得

$$\sum_{k=-\infty}^0 2^k = \sum_{r=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^r = \frac{1}{1-(1/2)} = 2 \quad (2.21)$$

因此,对 $n \geq 0$, $y[n]$ 为一常数 2。

当 $n < 0$ 时,对于 $k \leq n$, $x[k]h[n-k]$ 有非零样本值,因此对 $n < 0$ 有

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n 2^k \quad (2.22)$$

以 $l = -k$ 和 $m = l + n$ 作变量置换,再次利用无限项求和公式(2.20)式来求(2.22)式,其结果是对 $n < 0$ 为

$$y[n] = \sum_{l=-n}^{\infty} (\frac{1}{2})^l = \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{m-n} = (\frac{1}{2})^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^m = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1} \quad (2.23)$$

整个 $y[n]$ 序列如图 2.11(b)所示。

以上这些例子都是说明用图解的方法来进行卷积和的计算是很有用的。另外,它除了给出计算一个 LTI 系统响应的一种有用方法外,卷积和还给出了 LTI 系统一种极其有用的表示,借此可以对 LTI 系统的性质作深入研究。在 2.3 节将讨论卷积的某些性质,并且还要研究在前面一章所介绍的某些系统性质,以便看看对 LTI 系统而言,这些系统性质是如何被表征的。

2.2 连续时间 LTI 系统:卷积积分

与上一节讨论并导出的结果相类似,这一节的目的也是要利用一个连续时间 LTI 系统的单位冲激响应来对系统给出完全的表征。在离散时间情况下,导出卷积和的关键是离散时间单位脉冲的筛选性质,这就是把一个信号作为一组加权并移位的单位脉冲函数叠加的数学表示式。这样一来,直观上看也就能把离散时间系统当作是对这一串单个脉冲的响应来看待。当然,在连续时间情况下没有一个离散的输入序列。然而,正如在 1.4.2 节所讨论的,如果把单位冲激看成是它的持续期短到对任何实际物理系统已毫无意义这样一个短脉冲理想化的结果,那么就能够利用这些持续期小到难以察觉的理想化脉冲,即冲激,来表示任何连续时间信号。下面将导出这种表示,并接着与 2.1 节相仿来建立连续时间 LTI 系统的卷积积分表示。

2.2.1 用冲激表示连续时间信号

为了建立与离散时间筛选性质(2.2)式对应的连续时间下的性质,先考虑用一串脉冲或者说阶梯信号 $\hat{x}(t)$ 来近似 $x(t)$,如图 2.12(a)所示。如同离散时间情况一样,对于近似式 $\hat{x}(t)$ 来说,可以用一串延时脉冲的线性组合来表示,如图 2.12(a)~(e)所表示的那样。若定义

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases} \quad (2.24)$$

由于 $\Delta \delta_{\Delta}(t)$ 为 1,则 $\hat{x}(t)$ 可表示成

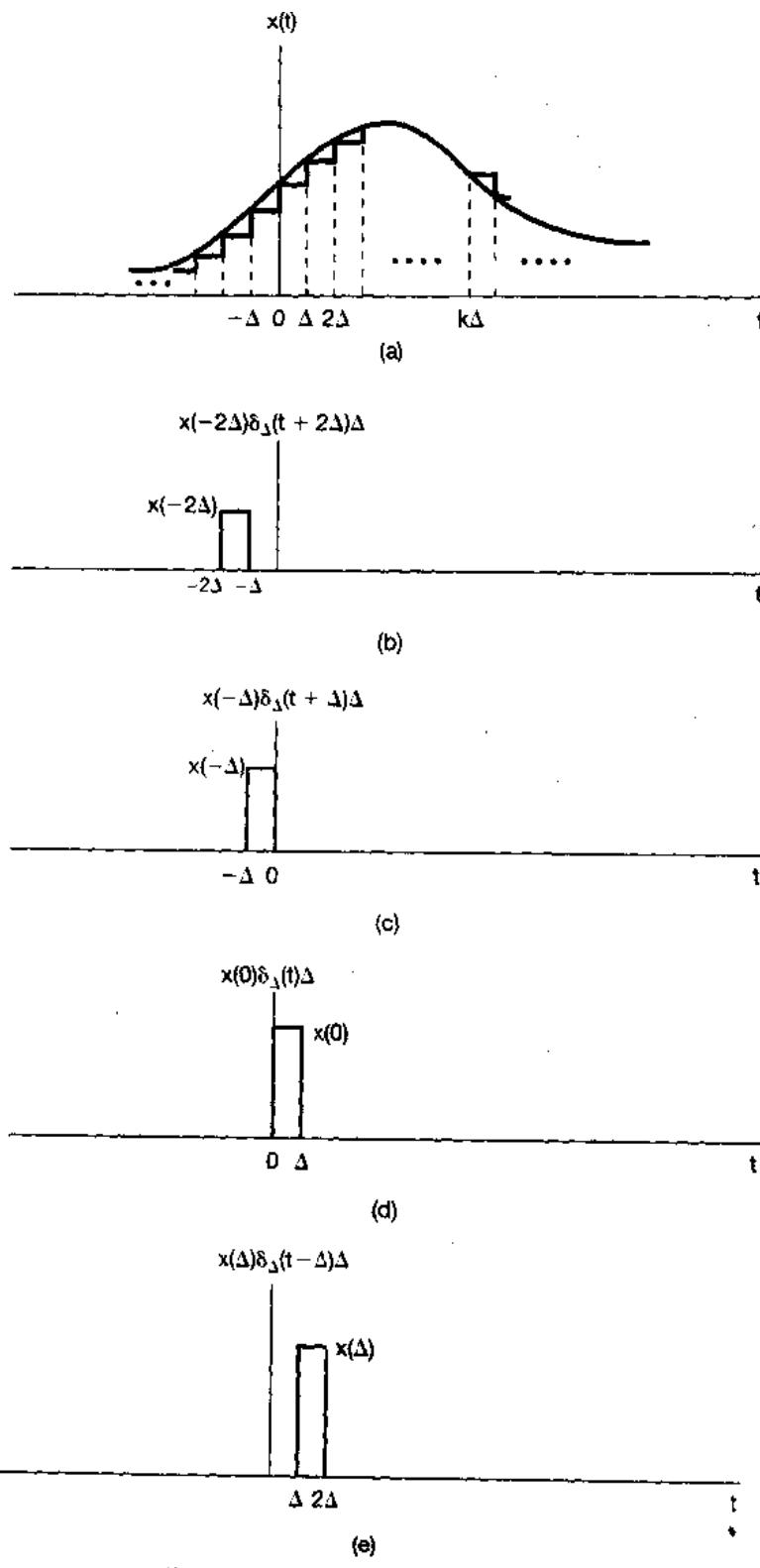


图 2.12 一个连续时间信号的阶梯形近似

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \quad (2.25)$$

从图 2.12 可以看到, 和离散时间情况下的(2.2)式一样, (2.25)式右边的和式中对任何 t 值来说, 只有

一项为非零。

随着 $\Delta \rightarrow 0$, $x(t)$ 将愈来愈近似 $x(t)$, 最后极限就是 $x(t)$, 因此

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_\Delta(t - k\Delta) \Delta \quad (2.26)$$

同时, 随着 $\Delta \rightarrow 0$, (2.26)式的求和趋近为一个积分。利用图 2.13 把(2.26)式用图解来表示可以看出这一变化过程。图中画出了 $x(\tau)$, $\delta_\Delta(t - \tau)$ 以及它们的乘积。当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 图中阴影部分的面积应趋近于 $x(\tau)\delta_\Delta(t - \tau)$ 下的面积。注意到图中阴影部分面积等于 $x(m\Delta)$, 其中 $t - \Delta < m\Delta < t$ 。再者, 在(2.26)式中, 对于该 t 来说, 仅有 $k = m$ 这一项是非零, 因此该式的右边部分也应等于 $x(m\Delta)$ 。于是, 从(2.26)式以及前面的讨论, $x(t)$ 就应为当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 位于 $x(\tau)\delta_\Delta(t - \tau)$ 下的面积。另外, 由(1.74)式已经知道, 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $\delta_\Delta(t)$ 的极限就是单位冲激函数 $\delta(t)$ 。所以得

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2.27)$$

和离散时间情况一样, (2.27)式为连续时间冲激函数的筛选性质。特别是若以 $x(t) = u(t)$ 为例, 则(2.27)式就变成

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau \quad (2.28)$$

(2.28)式与 1.4.2 节所得结果(1.75)式是完全一致的。

再次提出, (2.27)式应该看作在这种意义下的一种理想化结果。这就是从任何实际情况

来看, 对于“足够小”的 Δ 来说, (2.25)式的近似基本上就是准确的了。这样, (2.27)式就只是表示在 Δ 取为“难以觉察得到小”时(2.25)式的一种理想化结果。同时, 也应该注意到, 我们本来就能够利用在 1.4.2 节讨论过的单位冲激函数的性质来直接导出(2.27)式的。具体说就是如图 2.14(b)所示, 信号 $\delta(t - \tau)$ 是一个在 τ 的时间轴上, 发生在 $\tau = t$ (t 固定) 时的单位冲激函数。这样, 信号 $x(\tau)\delta(t - \tau)$ 还是看作 τ 的函数, 就等于 $x(t)\delta(t - \tau)$ [也就是一个发生在 $\tau = t$, 面积等于 $x(t)$ 值的冲激], 如图 2.14(c) 所示。那么, 这个信号从 $\tau = -\infty$ 到 $\tau = +\infty$ 的积分就应等于 $x(t)$, 也就是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

尽管这样的导出很直接, 但是我们采用的由(2.24)式到(2.27)式的推导强调了与离散时间情况的类似性; 特别是强调了(2.27)式是把信号 $x(t)$ 表示成一个加权的移位冲激函数的“和”(即积分)。

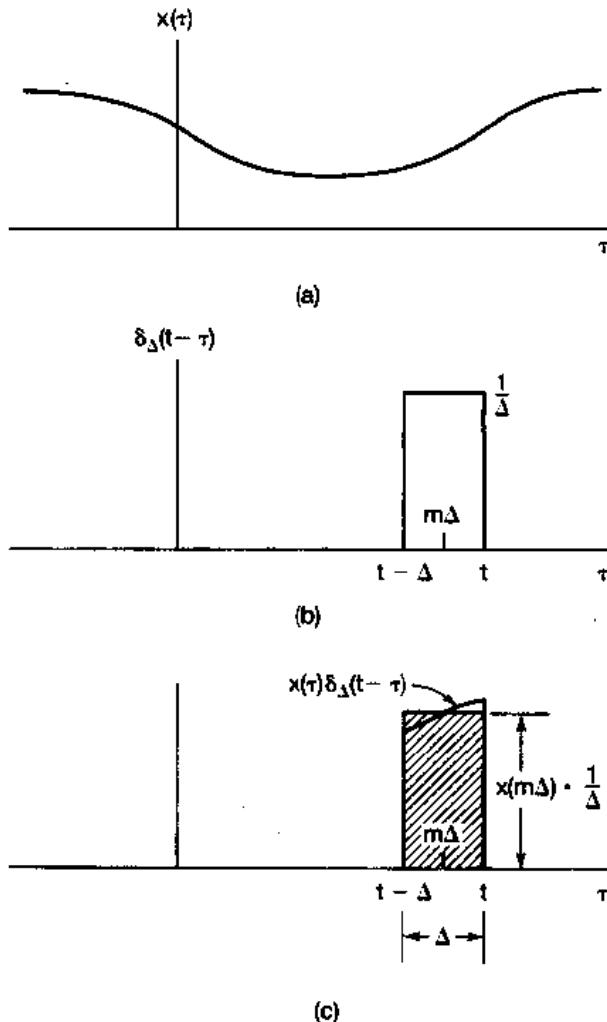


图 2.13 (2.26)式的图解表示

2.2.2 连续时间 LTI 系统的单位冲激响应及卷积积分表示

和离散时间情况一样, 上一节所得出的表示就是把任意一个连续时间信号看作加权和移位脉冲的叠加。尤其是(2.25)式的近似式代表了信号 $\hat{x}(t)$ 是基本脉冲信号 $\delta_\Delta(t)$ 的加权和移位的和。这样, 一个线性系统对该信号的响应 $\hat{y}(t)$ 就是系统对这些 $\delta_\Delta(t)$ 加权和移位脉冲响应的叠加。具体说, 令 $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ 记作一个 LTI 系统对输入 $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ 的响应, 那么由(2.25)式和叠加性质, 对连续时间线性系统而言, 就有

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta \quad (2.29)$$

(2.29)式与离散时间的(2.3)式是类似的, 我们也像图 2.2 一样, 用图 2.15 来解释(2.29)式。图 2.15(a)是输入 $x(t)$ 和它的近似值 $\hat{x}(t)$, 而图 2.15(b)~(d)则画出了在 $\hat{x}(t)$ 中三个加权脉冲及其响应。那么相应于 $\hat{x}(t)$ 的输出 $\hat{y}(t)$ 就应该是这些响应的叠加, 如图 2.15(e)所示。

接下来要考虑的就是当 Δ 变成无穷小, 即 $\Delta \rightarrow 0$ 时会产生什么结果。由于 $x(t)$ 表示成(2.26)式, 因此当 $\Delta \rightarrow 0$ 后 $\hat{x}(t)$ 愈逼近 $x(t)$,

事实上两者最终趋于一致, 其结果就是对 $\hat{x}(t)$ 的响应 $\hat{y}(t)$ 一定收敛于 $y(t)$, 即对真正输入 $x(t)$ 的响应, 如图 2.15(f)所示。此外, 正如早已提到的, 对于“足够小”的 Δ , 就考虑的系统而言, $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ 脉冲的持续期已没有任何意义, 系统对这个脉冲的响应实质上与在同一时刻单位冲激的响应是一样的。这就是说, 因为脉冲 $\delta_\Delta(t - k\Delta)$ 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时相当于一个移位的单位冲激, 所以对这个输入脉冲的响应 $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ 就成为在极限情况下的冲激响应。若令 $h_r(t)$ 表示系统在时间 t 对发生于时间 τ 的单位冲激 $\delta(\tau - t)$ 的响应, 那么

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta \quad (2.30)$$

随着 $\Delta \rightarrow 0$, 右边的求和就变成一个积分, 如图 2.16 所示。图中阴影部分的矩形代表(2.30)式右边和式中的一项, 而随着 $\Delta \rightarrow 0$, 这个和式就逼近于作为 τ 的函数的 $x(\tau)h_r(t)$ 下的面积, 因此得

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_r(t) d\tau \quad (2.31)$$

(2.31)式的意义和(2.29)式是完全类似的。因为在 2.2.1 节已经证明, 任何输入 $x(t)$ 都可以表示

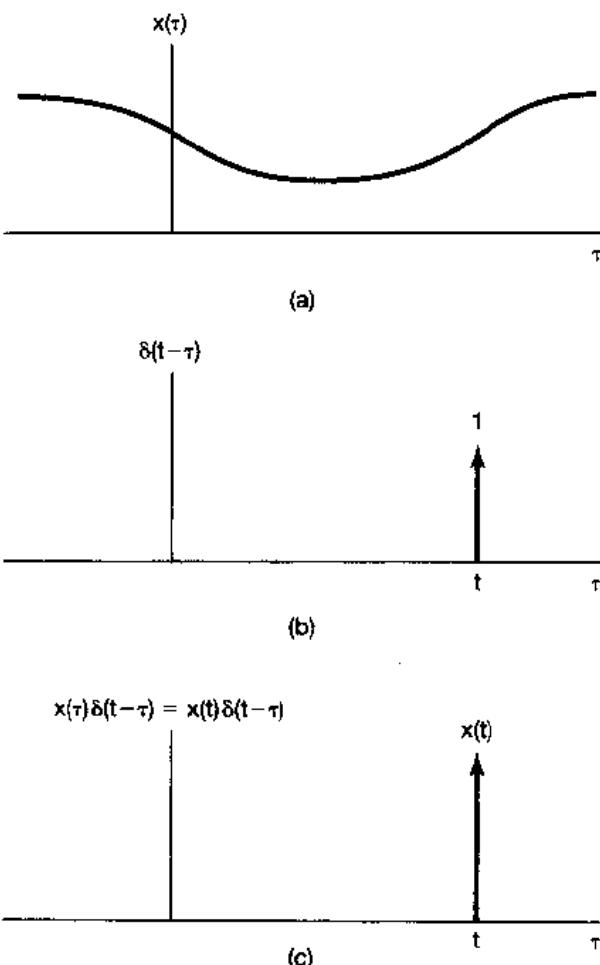


图 2.14 (a)任意信号 $x(\tau)$; (b) t 固定, 作为 τ 的函数的冲激 $\delta(t - \tau)$; (c) 该二信号的乘积

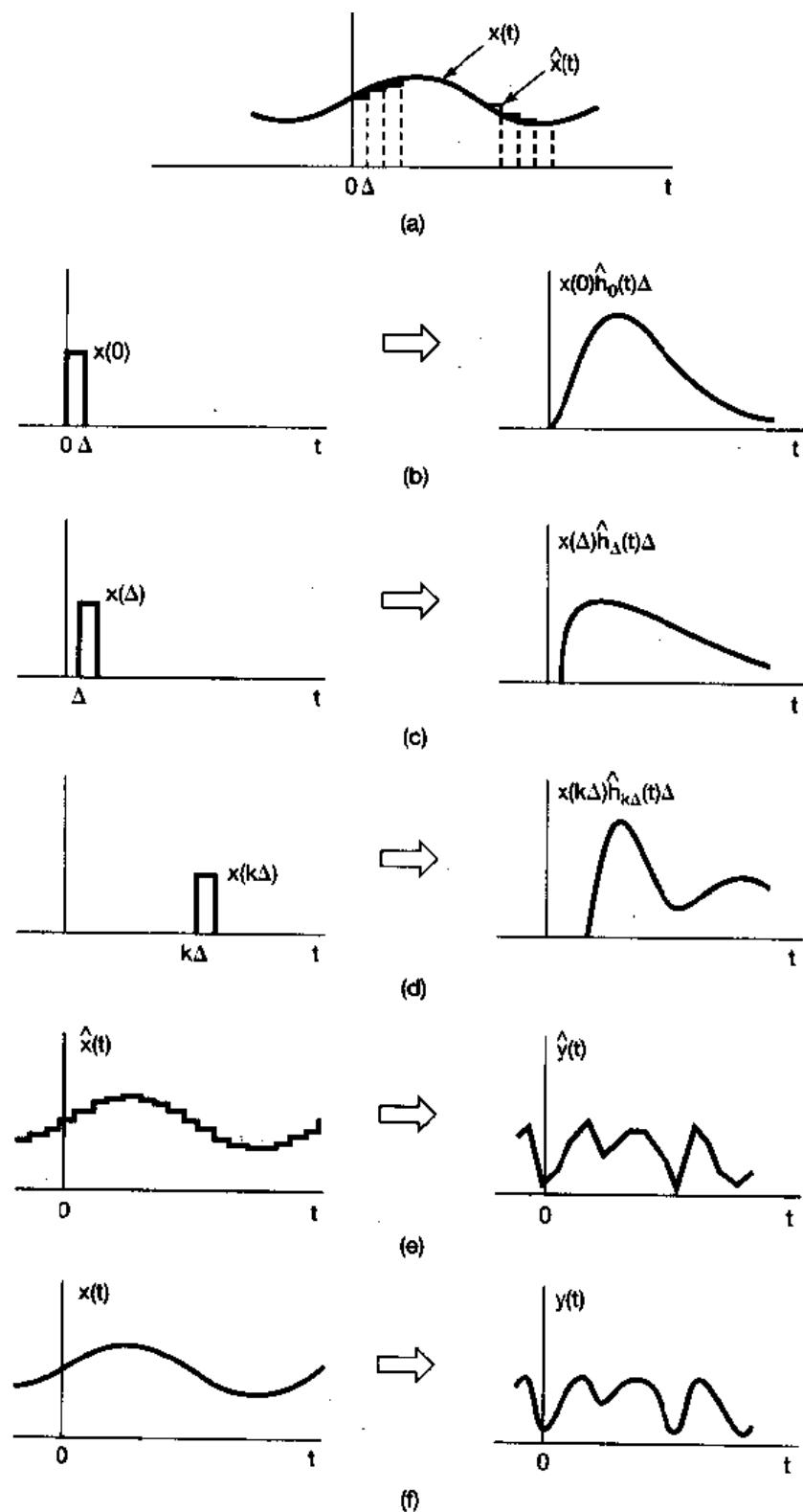


图 2.15 由(2.29)式和(2.30)式表示的连续时间线性系统响应的图解说明

为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

直观上就可以把这个式子看成 $x(t)$ 是一组加权移位的冲激函数之“和”，这里对冲激 $\delta(t-\tau)$ 的权是 $x(\tau)d\tau$ 。借助于这种解释之后，(2.31)式就是系统对这些加权移位冲激函数响应的叠加，因此，根据线性，对 $\delta(t-\tau)$ 的响应 $h_\tau(t)$ 的权也是就是 $x(\tau)d\tau$ 。

(2.31)式代表了连续时间情况下一个线性系统响应的一般形式，如果系统除了是线性的，而且还是时不变的，那么， $h_\tau(t) = h_0(t-\tau)$ 。这就是说，一个 LTI 系统对单位冲激 $\delta(t-\tau)$ 的响应，就是对 $\delta(t)$ 响应的时移。再次，为了符号上的方便，略去脚注，而定义单位冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = h_0(t) \quad (2.32)$$

也就是 $h(t)$ 是系统对 $\delta(t)$ 的响应。这时，(2.31)式变为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.33)$$

(2.33)式称为卷积积分或叠加积分。它是与离散时间情况下的(2.6)式卷积和相对应的，并且表明了一个连续时间 LTI 系统的特性可以用它的单位冲激响应来刻画。两个信号 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积，以后就表示成

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (2.34)$$

虽然在离散时间和连续时间下都用同一符号 $*$ 来表示卷积，不过一般根据上下文就能区分这两种情况。

可以看到，与在离散时间情况下相同，一个连续时间 LTI 系统是完全由它的冲激响应，即对单一的基本信号单位冲激 $\delta(t)$ 的响应来表征的，它的内涵在下一节研究连续时间和离散时间下卷积的几个性质和 LTI 系统的性质时将会用到。

求解卷积积分的步骤与求卷积和是十分相似的。由(2.33)式知道，在任意时刻 t 的输出 $y(t)$ 是输入的加权积分，对 $x(\tau)$ 其权是 $h(t-\tau)$ 。因此，为了求出对某一给定 t 时的这个积分值，首先需要得到 $h(t-\tau)$ 。 $h(t-\tau)$ 是 τ 的函数，其中 t 可看成是某一固定值，利用 $h(\tau)$ 的反转再加上平移($t > 0$ 就向右移 t ； $t < 0$ 就向左移 $|t|$)就可以求得 $h(t-\tau)$ 。然后将 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 相乘，将该乘积在 $\tau = -\infty$ 到 $\tau = +\infty$ 区间内积分就得到 $y(t)$ 。下面用几个例子来予以说明。

例 2.6 设某一 LTI 系统的输入为 $x(t)$ ，其单位冲激响应为 $h(t)$

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

$$h(t) = u(t)$$

图 2.17 分别画出了 $h(\tau)$ ， $x(\tau)$ 及对应于某一个 $t < 0$ 和 $t > 0$ 时的 $h(t-\tau)$ 。由图中可以看出，由于 $t < 0$ 时， $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的乘积为零，所以 $y(t)=0$ ；而对 $t > 0$ 有

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{其余 } \tau \text{ 值} \end{cases}$$

由该式可算出 $t > 0$ 时

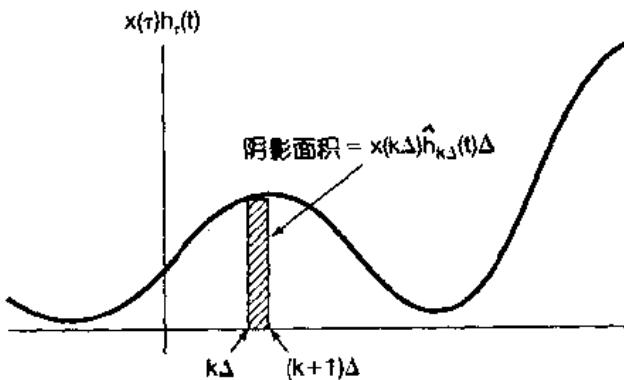


图 2.16 (2.30)式和(2.31)式的图解说明

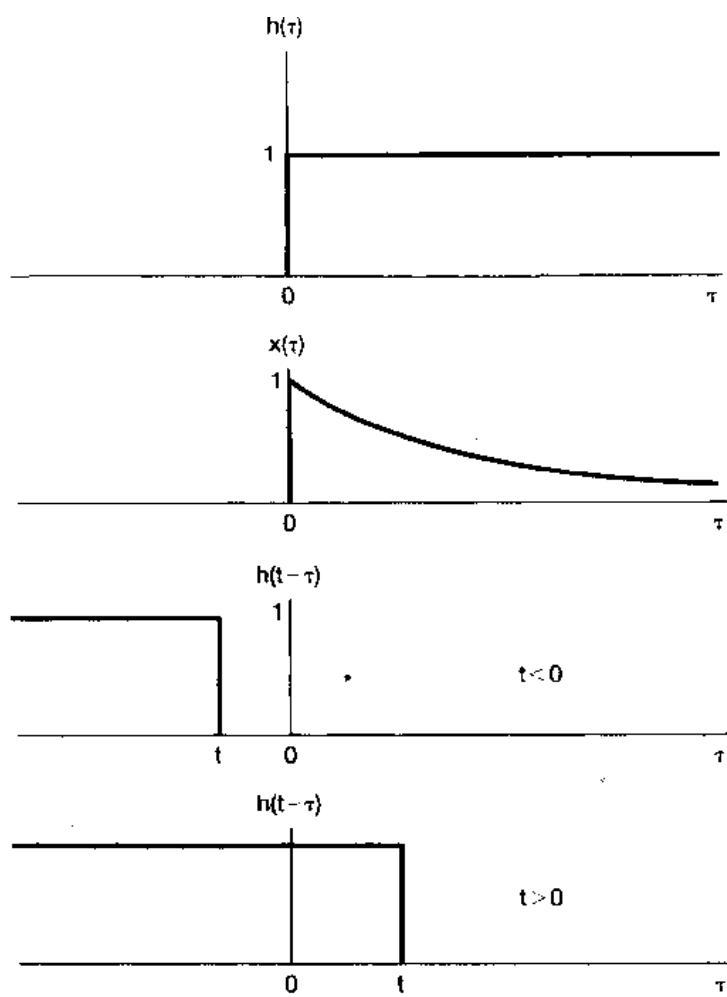


图 2.17 例 2.6 卷积积分的计算

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$

因此，对于全部 t , $y(t)$ 是

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$

如图 2.18 所示。

例 2.7 求以下两信号的卷积：

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{其余 } t \text{ 值} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{其余 } t \text{ 值} \end{cases}$$

在这种情况下，和例 2.4 一样，最为方便的是分别在几个不同的区间内求 $y(t)$ 。图 2.19 画出了 $x(\tau)$ 及在各个有关区间内的 $h(t-\tau)$ 。不难看出，在 $t < 0$ 和 $t > 3T$ 区间

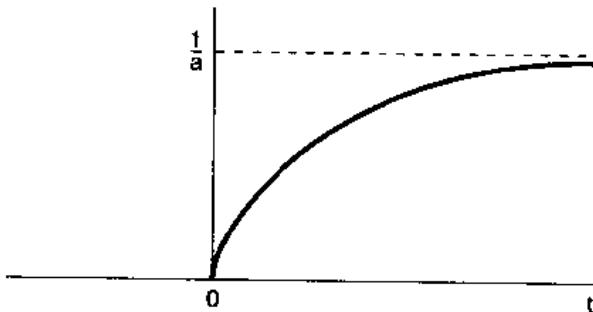


图 2.18 例 2.6 的系统响应

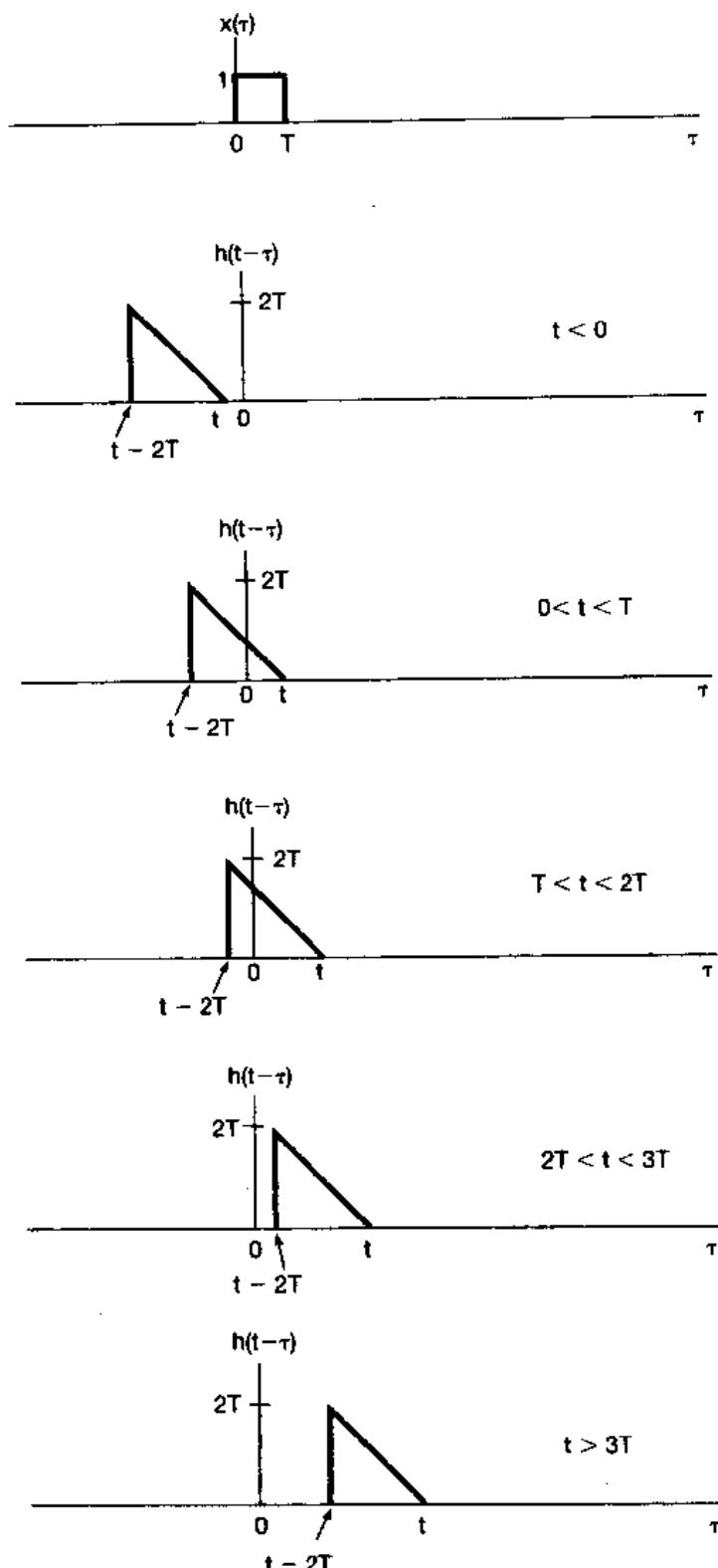
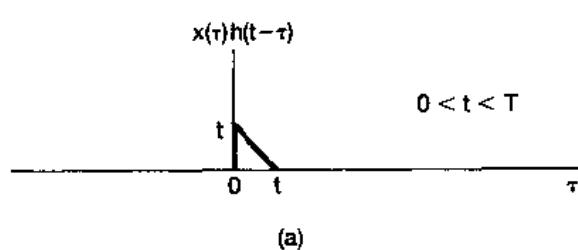
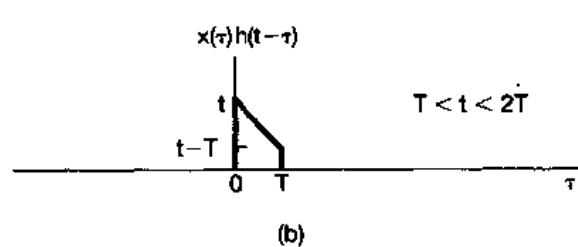


图 2.19 例 2.7 中信号 $x(\tau)$ 和不同 t 值时的 $h(t-\tau)$

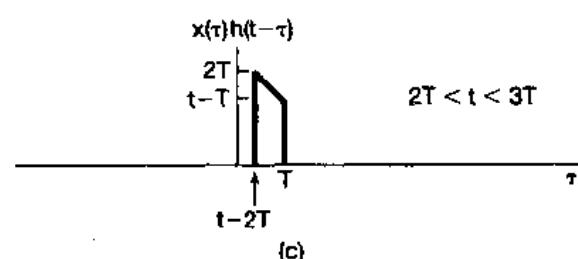
上, 对全部 τ 都有 $x(\tau)h(t-\tau)=0$, 所以 $y(t)=0$; 而在其它区间内, 乘积 $x(\tau)h(t-\tau)$ 示于图 2.20。根据图 2.20, 对该三个区间内的 $y(t)$, 这个积分值可用图解方法求出, 全部 $y(t)$ 为



(a)



(b)



(c)

图 2.20 例 2.7 中乘积 $x(\tau)h(t-\tau)$ 不为零的三个不同的 t 区间的 $x(\tau)h(t-\tau)$ (见图 2.19)

例 2.8 令 $y(t)$ 记作下列两信号的卷积:

$$x(t) = e^{2t}u(-t) \quad (2.35)$$

$$h(t) = u(t-3) \quad (2.36)$$

信号 $x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 作为 τ 的函数均画在图 2.22(a) 中。先观察一下，无论 t 为何值，这两个信号都有非零的重合区。当 $t-3 \leq 0$ ， $x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 的乘积在 $-\infty < \tau < t-3$ 是非零，其卷积积分为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)} \quad (2.37)$$

对于 $t-3 \geq 0$ ，在 $-\infty < \tau < 0$ 内，乘积 $x(\tau)h(t-\tau)$ 为非零，其卷积积分为

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} \quad (2.38)$$

其结果 $y(t)$ 如图 2.22(b) 所示。

以上这些例子以及在 2.1 节提到的例子都表明，图解方法在求卷积积分和卷积和中都有很大的用处。

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases}$$

$y(t)$ 如图 2.21 所示。

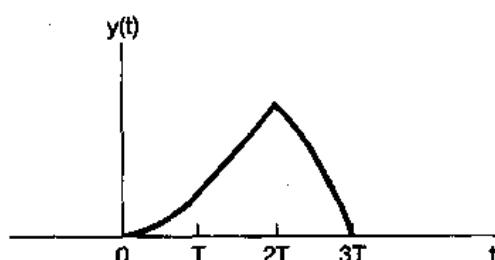


图 2.21 例 2.7 中信号 $y(t) = x(t) * h(t)$

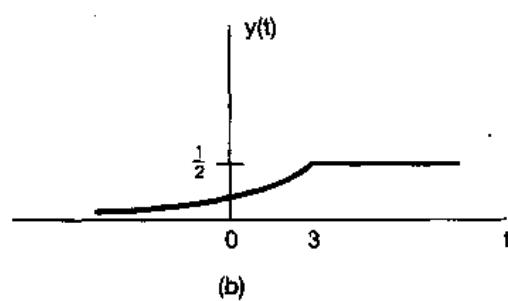
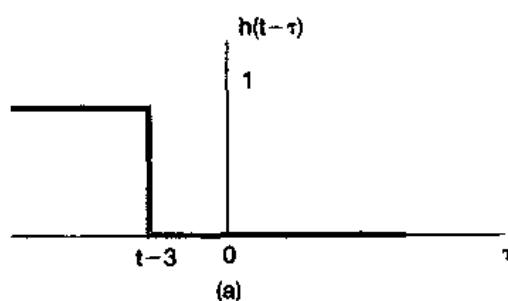
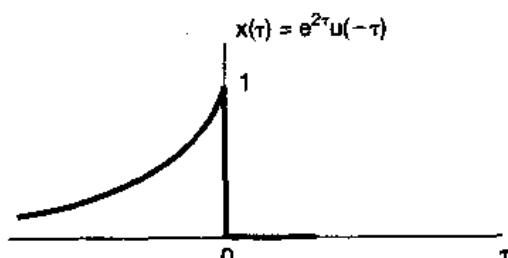


图 2.22 例 2.8 的卷积结果

2.3 线性时不变系统的性质

在前面两节我们得到了借助于连续时间和离散时间 LTI 系统的单位冲激响应来表示这些系统的重要结论。在离散时间情况下，这种表示是取卷积和的形式，而在连续时间情况下是卷积积分。为方便起见，现将两者重复如下：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n]*h[n] \quad (2.39)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t) \quad (2.40)$$

正如已经指出过的，这些表示的一种结果就是：一个 LTI 系统的特性可以完全由它的冲激响应来决定。要特别强调的是，一般来说这个结论仅对 LTI 系统成立。下面的例子将说明，一个非线性系统的单位冲激响应是不能完全表征系统的特性行为的。

例 2.9 考虑一离散时间系统其单位冲激响应为

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0,1 \\ 0, & \text{其余 } n \text{ 值} \end{cases} \quad (2.41)$$

如果该系统是 LTI 的，那么(2.41)式就可完全确定系统的输入-输出关系。尤其是，将(2.41)式代入(2.39)式的卷积和中去，就得出描述该 LTI 系统输入和输出之间的显式方程如下：

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \quad (2.42)$$

另一方面，却有许多非线性系统也具有由(2.41)式所表示的单位冲激响应，例如下面两个系统都有如(2.41)式所表示的单位冲激响应：

$$\begin{aligned} y[n] &= (x[n] + x[n-1])^2 \\ y[n] &= \max(x[n], x[n-1]) \end{aligned}$$

因此，如果系统是非线性的，它就不能被(2.41)式的单位冲激响应完全表征。

由 LTI 系统具有卷积和与卷积积分这种特别的表示形式入手，上面这个例子说明了这样一点，就是 LTI 系统具有一些其它系统不具备的性质。在本节的余下部分将研究这些性质中几个最基本和最重要的性质。

2.3.1 交换律性质

在连续时间和离散时间下，卷积运算的一个基本性质是：它满足交换律。这就是，在离散时间情况下有

$$x[n]*h[n] = h[n]*x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \quad (2.43)$$

在连续时间情况下

$$x(t)*h(t) = h(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (2.44)$$

这两个表示式通过变量置换可由(2.39)式和(2.40)式直接得到。例如在离散时间时，若令 $r = n - k$ 或等效为 $k = n - r$ ，则(2.39)式变为

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n] \quad (2.45)$$

利用这种变量置换, $x[n]$ 和 $h[n]$ 的作用就互换了。根据(2.45)式表明, 一个输入为 $x[n]$, 单位冲激响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统的输出与输入为 $h[n]$, 单位冲激响应为 $x[n]$ 的输出是完全一样的。例如, 在例 2.4 中本来就可以先将 $x[k]$ 反转和移位, 然后将 $x[n-k]$ 与 $h[k]$ 相乘, 最后对全部 k 将乘积相加来完成这个卷积和的计算。

(2.44)式也能依此来证明, 其内涵也是相同的, 即: 输入为 $x(t)$, 单位冲激响应为 $h(t)$ 的 LTI 系统的输出与输入为 $h(t)$ 和单位冲激响应为 $x(t)$ 的输出是完全一样的。因此, 在例 2.7 中也就可以将 $x(t)$ 作反转和移位, 再将 $x(t-\tau)$ 与 $h(\tau)$ 相乘, 最后将乘积在 $-\infty < \tau < +\infty$ 积分来完成这个卷积积分的计算。在有些情况下, 两种形式中的一种在计算卷积时可能比另一种要容易些[即在离散时间下的(2.39)式或(2.43)式, 连续时间下的(2.40)式或(2.44)式], 但是两者结果总是相同的。

2.3.2 分配律性质

卷积的另一个基本性质是: 它满足分配律。这就是卷积可以在相加项上进行分配, 即在离散时间情况下有

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \quad (2.46)$$

在连续时间下有

$$x(t) * [(h_1(t) + h_2(t))] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad (2.47)$$

这个性质也能直接给予证明。

分配律在系统互联中有一个很有用的解释。图 2.23(a)中示出两个连续时间 LTI 系统的并联, 图中方框内都给出了它们的单位冲激响应。这种方框图的表示法是特别方便的, 并且再次强调了一个 LTI 系统是完全由它的冲激响应来表征的这一事实。

这两个系统, 其单位冲激响应为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$, 具有相同的输入, 而输出相加。因为

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

和

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

整个图 2.23(a)的输出

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad (2.48)$$

这就相当于(2.47)式的右边。图 2.23(b)系统的输出为

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \quad (2.49)$$

这就相当于(2.47)式的左边。将(2.47)式应用于(2.49)

式, 再与(2.48)式的结果相比较, 可得: 图 2.23(a)和图 2.23(b)的系统是完全一样的。

对于离散时间情况也有相同的解释, 只要在图 2.23 中每个信号用相应的离散量代替即可(即 $x(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ 和 $y(t)$ 分别用 $x[n]$, $h_1[n]$, $h_2[n]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$ 和 $y[n]$ 代替)。总之, 由于卷积运算的分配律, LTI 系统的并联可以用一个单一的 LTI 系统来代替, 而该系统的单位冲激响应就是在并联联结中各个单位冲激响应的和。

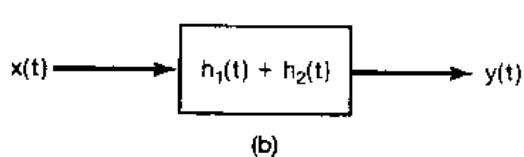
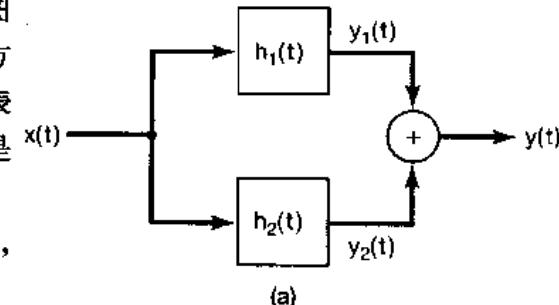


图 2.23 LTI 系统并联中卷积分配律的说明

同时,由于交换律和分配律,就有

$$[x_1[n] + x_2[n]] * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n] \quad (2.50)$$

和

$$[x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t) \quad (2.51)$$

这两个式子又说明: LTI 系统对两个输入和的响应一定等于系统对单个输入响应的和。

下面例子还说明,由于卷积的分配律,可以利用来将一个复杂的卷积分为几个较简单的卷积来作。

例 2.10 令 $y[n]$ 为下面两个序列的卷积:

$$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + 2^n u[-n] \quad (2.52)$$

$$h[n] = u[n] \quad (2.53)$$

注意,沿整个时间轴,序列 $x[n]$ 都是非零的,因此直接求这个卷积有些烦琐,可以用分配律性质把 $y[n]$ 表示为两个较为简单的卷积之和来解。若令 $x_1[n] =$

$(\frac{1}{2})^n u[n]$ 和 $x_2[n] = 2^n u[-n]$,那么

$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n]) * h[n] \quad (2.54)$$

根据卷积的分配律,可将(2.54)式重新写成

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] \quad (2.55)$$

式中

$$y_1[n] = x_1[n] * h[n] \quad (2.56)$$

和

$$y_2[n] = x_2[n] * h[n] \quad (2.57)$$

(2.56)式的卷积 $y_1[n]$ 由例 2.3 可得($\alpha=1/2$),而 $y_2[n]$ 则由例 2.5 求出。它们的和 $y[n]$ 如图 2.24 所示。

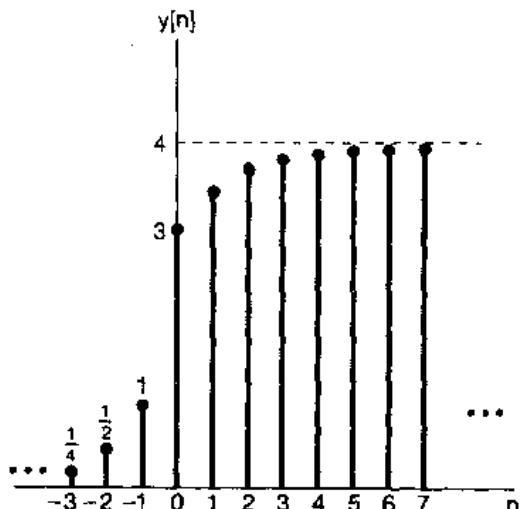


图 2.24 例 2.10 的 $y[n] = x[n] * h[n]$

2.3.3 结合律性质

卷积的另一个重要而有用的性质是它满足结合律。这就是在离散时间情况下有

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \quad (2.58)$$

和在连续时间情况下有

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \quad (2.59)$$

这个性质可以直接用求和与积分运算中得到证明,习题 2.43 给出了证明的例子。

作为结合律的一个结果就是对于下面表示式

$$y[n] = x_1[n] * h_1[n] * h_2[n] \quad (2.60)$$

和

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) \quad (2.61)$$

不存在任何含混不清的地方;也就是说,按照(2.58)式和(2.59)式,按什么顺序来卷积这些信号是没有关系的。

图 2.25(a)和图 2.25(b)以离散时间系统为例来解释结合律的意义。在图 2.25(a)中,

$$y[n] = w[n] * h_2[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

在图 2.25(b)中,

$$\begin{aligned}y[n] &= x[n] * h[n] \\&= x[n] * (h_1[n] * h_2[n])\end{aligned}$$

根据结合律, 图 2.25(a)两个系统的级联就等效于图 2.25(b)中的单一系统。这一结果可以一般化到任意多个 LTI 系统的级联, 并且对连续时间情况也有相同的意义和结论。

将交换律与结合律结合在一起, 可以发现 LTI 系统另一个十分重要的性质。根据图 2.25 (a)和(b)可以得出, 两个 LTI 系统级联后的冲激响应就是它们单个冲激响应的卷积。因为卷积是可以交换的, 所以能够用两种次序中的任一种来作 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 的卷积; 这样图 2.25(b)和(c)就是等效的了, 再根据结合律, 又依次等效到图 2.25(d)的系统。因此, 系统(a)和(d)是完全等效的, 但它们级联的次序却交换了。因此, 两个 LTI 系统级联后的单位冲激响应是与它们在级联中的次序无关的。事实上, 这个结论对任意多个 LTI 系统的级联都成立, 即: 只要关注的是整个系统的冲激响应, 它们的级联次序是无关紧要的。对于连续时间情况也有同样的结论。

值得特别强调的是, LTI 系统级联的特性, 其总系统响应与系统级联次序无关这一点对这样一类系统是很特别的。相比之下, 一般来说非线性系统的级联, 要想不改变总的响应, 其级联次序就不能改变。例如, 有两个无记忆系统, 一个是乘以 2, 而另一个是将输入平方, 那么先乘 2, 再平方, 就得

$$y[n] = 4x^2[n]$$

而若先平方, 再乘以 2, 就是

$$y[n] = 2x^2[n]$$

因此, 在级联中次序可以交换只是 LTI 系统的一种特性。事实上, 如习题 2.51 所证明的。一般而言既要求线性, 又要求时不变性, 才能使这一性质成立。

2.3.4 有记忆和无记忆 LTI 系统

在 1.6.1 节已经指出, 若一个系统在任何时刻的输出仅与同一时刻的输入值有关, 它就是无记忆的。由(2.39)式可见, 对一个离散时间 LTI 系统来说唯一能使这一点成立的就只有: 对 $n \neq 0$, $h[n] = 0$, 这时, 其单位冲激响应为

$$h[n] = K\delta[n] \quad (2.62)$$

式中 $K = h[0]$ 是一个常数, 卷积和就变为如下关系:

$$y[n] = Kx[n] \quad (2.63)$$

如果一个离散时间 LTI 系统, 它的单位脉冲响应 $h[n]$ 对于 $n \neq 0$ 不是全为零的话, 这个系统就是有

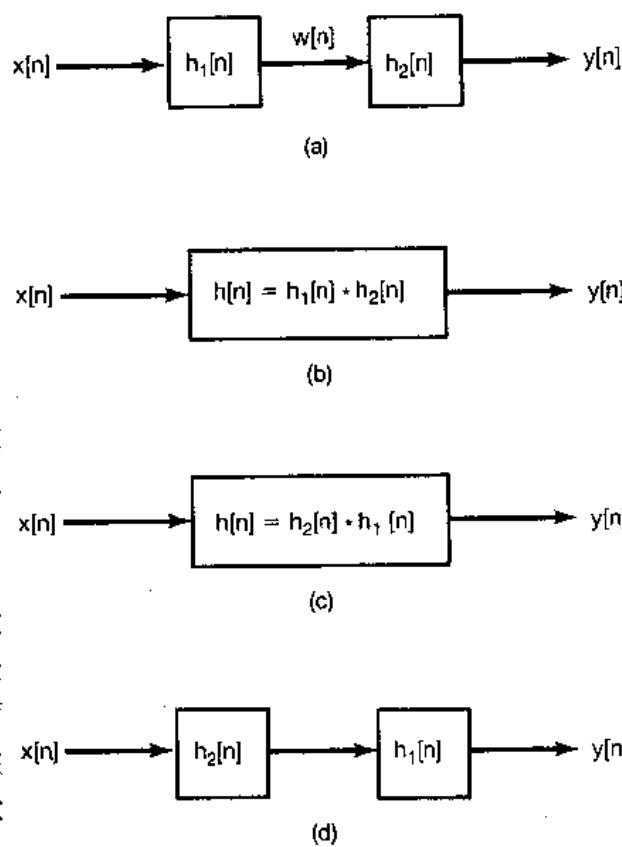


图 2.25 卷积的结合律性质及结合律与交换律性质对 LTI 系统级联的意义

记忆的。由(2.42)式所给出的系统就是一个有记忆的 LTI 系统的例子，这个系统单位脉冲响应由(2.41)式给出，它在 $n=1$ 时是不等于零的。

对于连续时间 LTI 系统，根据(2.40)式也能推出有关记忆和无记忆的类似性质。这就是若一个连续时间 LTI 系统的 $h(t)$ 在 $t \neq 0$ 时， $h(t)=0$ ，则该系统就是无记忆的；并且这样一个无记忆的 LTI 系统具有

$$y(t) = Kx(t) \quad (2.64)$$

其单位冲激响应为

$$h(t) = K\delta(t) \quad (2.65)$$

这里 K 为某一常数。

注意，若 $K=1$ ，那么这些系统就变成恒等系统，其输出等于输入，单位冲激响应等于单位冲激。这时，卷积和和卷积积分公式就意味着

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

和

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

这个式子就是离散时间和连续时间单位冲激函数的筛选性质，即：

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

2.3.5 LTI 系统的可逆性

考虑一下冲激响应为 $h(t)$ 的连续时间 LTI 系统，根据在 1.6.2 节的讨论，仅当存在一个逆系统，其与原系统级联后所产生的输出等于第一个系统的输入时，这个系统才是可逆的。再者，如果一个 LTI 系统是可逆的，那么它就有一个 LTI 的逆系统(见习题 2.50)。因此，就有图 2.26 这样的图，给定一个系统其冲激响应为 $h(t)$ ，逆系统的冲激响应是 $h_1(t)$ ，它的输出是 $w(t)=x(t)$ ，这样图 2.26(a) 的级联系统就与图 2.26(b) 的恒等系统一样。因为图 2.26(a) 的总冲激响应是 $h(t) * h_1(t)$ ，而 $h_1(t)$ 又必须满足它是逆系统冲激响应的条件，即

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t) \quad (2.66)$$

同样，在离散时间情况下，一个冲激响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统的逆系统的冲激响应 $h_1[n]$ 也必须满足

$$h(n) * h_1(n) = \delta(n) \quad (2.67)$$

下面两个例子用来说说明可逆性及其逆系统的构成。

例 2.11 考虑一个纯时移组成的 LTI 系统

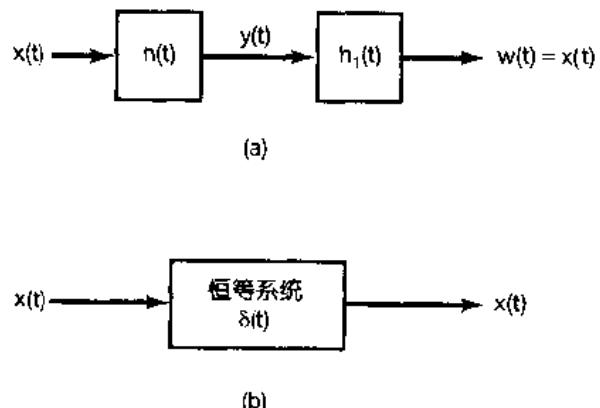


图 2.26 连续时间 LTI 系统的逆系统概念。如果 $h(t) * h_1(t) = \delta(t)$ ，冲激响应为 $h_1(t)$ 的系统就是冲激响应为 $h(t)$ 的系统的逆系统

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (2.68)$$

若 $t_0 > 0$, 系统是延时; 若 $t_0 < 0$, 是超前。例如, 若 $t_0 > 0$, 那么在 t 时刻的输出等于更早一些的时刻 $t - t_0$ 的输入值。若 $t_0 = 0$, (2.68)式就是恒等系统, 因此是无记忆的; 而对于其它的任何 t_0 值, 系统都是有记忆的, 因为系统与之响应的输入值不在当前时刻。

令输入为 $\delta(t)$ 可得(2.68)式系统的单位冲激响应

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad (2.69)$$

因此,

$$x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0) \quad (2.70)$$

即, 一个信号与一个移位冲激的卷积就是该信号的移位。

为了从输出中恢复输入, 也即其逆系统要做的就是将输出再往回移回来, 那么具有这种补偿时间移位的系统就是其逆系统, 即

$$h_1(t) = \delta(t + t_0)$$

那么

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

同样在离散时间情况下, 一个纯时移系统其单位脉冲响应为 $\delta[n - n_0]$, 这样任一信号与一个移位单位脉冲的卷积就是该信号的移位。另外, 具有单位脉冲响应为 $\delta[n - n_0]$ 的 LTI 系统的逆系统就是将输出朝相反方向再移位相同量的 LTI 系统, 即具有单位脉冲响应为 $\delta[n + n_0]$ 的 LTI 系统。

例 2.12 有一 LTI 系统, 其单位脉冲响应为

$$h[n] = u[n] \quad (2.71)$$

利用卷积和来计算该系统对任意输入的响应:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k] \quad (2.72)$$

因为, 对于 $n - k < 0$, $u[n - k] = 0$, 而在 $n - k \geq 0$, 它为 1, 所以(2.72)式变成

$$y[n] = \sum_{k=n}^{+\infty} x[k] \quad (2.73)$$

这就是最早在 1.6.1 节曾遇到过的系统, 它是一个相加器或累加器, 将直到当前时刻的全部输入值加起来。在 1.6.2 节已经知道, 该系统是可逆的, 其逆系统由(1.99)式给出为

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad (2.74)$$

这就是一次差分运算。令 $x[n] = \delta[n]$, 求得该逆系统的冲激响应是

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \quad (2.75)$$

检查一下就会发现, (2.71)式的 $h[n]$ 和(2.75)式的 $h_1[n]$ 的确是一对互为可逆的 LTI 系统的冲激响应, 只要证明(2.67)式成立就能得出这一结论, 由简单计算

$$\begin{aligned} h[n] * h_1[n] &= u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] \\ &= u[n] - u[n-1] \\ &= \delta[n] \end{aligned}$$

2.3.6 LTI 系统的因果性

在 1.6.3 节已经介绍过因因果性质, 即: 一个因果系统的输出只决定于现在和过去的输入值。现在利用 LTI 系统的卷积和与卷积积分, 可以把这一性质与 LTI 系统冲激响应的相应性质联系起来。对于一个离散时间 LTI 系统要是因果的, $y[n]$ 就必须与 $k > n$ 的 $x[k]$ 无关, 由(2.39)式可以看出, 为此

乘以 $x[n]$ 的所有系数 $h[n-k]$ 对于 $k > n$ 都必须为零，那么这就要求因果离散时间 LTI 系统的冲激响应满足下面条件：

$$h[n] = 0, n < 0 \quad (2.77)$$

根据(2.77)式，一个因果 LTI 系统的冲激响应在冲激出现之前必须为零，这就与因果性的直观概念相一致。更一般的情况如习题 1.44 所指出的，一个线性系统的因果性就等效于初始松弛(initial rest)的条件；也就是说，如果一个因果系统的输入在某个时刻点以前是 0，那么其输出在那个时刻以前也必须是 0。要强调的是，因果性和初始松弛条件的等效仅适合于线性系统。例如在 1.6.6 节所讨论的，系统 $y[n] = 2x[n] + 3$ 不是线性的，然而它却是因果的，并且还是无记忆的。但是，在 $x[n] = 0$ 时， $y[n] = 3 \neq 0$ ，所以它并不满足初始松弛的条件。

对于一个因果的离散时间 LTI 系统，(2.77)式的条件就意味着(2.39)式的卷积和变为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] \quad (2.78)$$

而另一种等效形式(2.43)就为

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (2.79)$$

同理，若

$$h(t) = 0, t < 0 \quad (2.80)$$

一个连续时间 LTI 系统就是因果的，这时卷积积分由下式给出：

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (2.81)$$

例 2.12 中的累加器($h[n] = u[n]$)及其逆系统($h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$)都满足(2.77)式，因此都是因果的。对于 $t_0 \geq 0$ 时冲激响应 $h(t) = \delta(t-t_0)$ 的纯时移系统是因果的(这时的时移是一个延时)，而在 $t_0 < 0$ 时就不是因果的(这时的时移是一个超前，说明输出可以预计将来的输入值)。

最后，虽然因果性只是系统的一个特性，但是一般也将 $n < 0$ 或 $t < 0$ 为零的信号称之为因果信号。这一术语是来自(2.77)式和(2.80)式：一个 LTI 系统的因果性就等效于它的冲激响应是一个因果信号。

2.3.7 LTI 系统的稳定性

在 1.6.4 节提到，如果一个系统对于每一个有界的输入，其输出都是有界的，就说该系统是稳定的。现在来看看，一个稳定的 LTI 系统，应该具备什么条件。设一输入 $x[n]$ 是有界的，其界为 B ，即

$$|x[n]| < B, \text{ 对所有的 } n \quad (2.82)$$

现在把这样一个有界的输入加到一个单位脉冲响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统上，则按卷积和公式，响应输出的绝对值为

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \right| \quad (2.83)$$

因为乘积和的绝对值总不大于绝对值乘积的和，所以

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[n-k]| \quad (2.84)$$

由于(2.82)式的条件，对于任何 n 和 k 都有 $|x[n-k]| < B$ ，那么再结合(2.84)式，这就意味着

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|, \text{ 对所有 } n \quad (2.85)$$

由(2.85)式可以得出, 如果单位脉冲响应是绝对可和的, 即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty \quad (2.86)$$

那么 $y[n]$ 就是有界的, 因此系统是稳定的。(2.86)式是保证一个离散时间 LTI 系统稳定性的充分条件; 事实上, 这个条件也是一个必要条件。因为如习题 2.49 所证明的, 若(2.68)式不满足, 就会有一些有界的输入而产生无界的输出。由此, 一个离散时间 LTI 系统的稳定性就完全等效于(2.86)式。

在连续时间情况下, 利用 LTI 系统的单位冲激响应可以得出有关稳定性的类似结果。这就是, 若对全部 t , 有 $|x(t)| < B$, 与(2.83)式~(2.85)式相似有

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau \\ &\leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

因此, 若单位冲激响应是绝对可积的, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (2.87)$$

则该系统是稳定的。与离散时间情况一样, 如果(2.87)式不满足, 总能找到一些有界的输入而产生无界的输出, 因此一个连续时间 LTI 系统的稳定性就完全等效于(2.87)式。下面两个例子就用(2.86)式和(2.87)式来检验系统的稳定性。

例 2.13 现考虑在连续时间和离散时间都是纯时移的系统。在离散时间下,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\delta[n - n_0]| = 1 \quad (2.88)$$

而在连续时间下,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(\tau - t_0)| d\tau = 1 \quad (2.89)$$

可以得出, 这两个系统都是稳定的。这点毫不奇怪, 因为一个在幅度上有界的信号, 这个信号经任意时移后仍是有限的。

现在再考虑例 2.12 中的累加器。在 1.6.4 节已经讨论过这是一个不稳定的系统, 因为如果将一个常数输入加到一个累加器上, 输出就会无界地增长; 由该系统的单位脉冲响应 $u[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \infty$$

不是绝对可和的这一点也能判断该系统是不稳定的。

同理, 现在来考虑积分器, 它就是连续时间情况下的累加器

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (2.90)$$

这是一个不稳定的系统, 其理由与累加器时完全一样, 即一个常数输入会引起一个无限增长的输出。令 $x(t) = \delta(t)$, 该积分器的单位冲激响应就为

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

以及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\tau)| d\tau = \int_0^{+\infty} d\tau = \infty$$

因为单位冲激响应不是绝对可积的，所以系统不是稳定的。

2.3.8 LTI 系统的单位阶跃响应

到现在为止可以看到，利用单位冲激响应来表示一个 LTI 系统，使我们对系统的性质可以得到非常简洁而清晰的表征；尤其是，由于 $h[n]$ 或 $h(t)$ 完全确定了一个 LTI 系统的特性，所以就有可能把像稳定性和因果性等这些系统性质与 $h[n]$ 或 $h(t)$ 的性质联系起来。

除了单位冲激响应外，单位阶跃响应 $s[n]$ 或 $s(t)$ 也常用来描述一个 LTI 系统的特性， $s[n]$ 或 $s(t)$ 是当 $x[n] = u[n]$ 或 $x(t) = u(t)$ 时的系统输出响应。由于单位阶跃响应还是有不少应用，值得把它与 $h[n]$ 或 $h(t)$ 的关系联系起来。根据卷积和的表示，一个离散时间 LTI 系统的阶跃响应就是单位阶跃序列与单位脉冲响应的卷积

$$s[n] = u[n] * h[n]$$

然而，根据卷积的交换律， $s[n] = h[n] * u[n]$ ，因此 $s[n]$ 可以看成是输入为 $h[n]$ ，系统的单位脉冲响应为 $u[n]$ 时的响应。由例 2.12， $u[n]$ 是一个累加器的单位脉冲响应，因此有

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad (2.91)$$

从(2.91)式和例 2.12，很显然 $h[n]$ 可以依据

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \quad (2.92)$$

从 $s[n]$ 中恢复出来。这就是一个离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应是其单位脉冲响应的求和函数[(2.91)式]。相反，一个离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应就是它的单位阶跃响应的一次差分[(2.92)式]。

同理，在连续时间情况下，单位冲激响应为 $h(t)$ 的一个 LTI 系统的单位阶跃响应是 $s(t) = u(t) * h(t)$ ，它也等于一个积分器[单位冲激响应为 $u(t)$]对输入为 $h(t)$ 的响应。这就是说，一个连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应是它的单位冲激响应的积分函数，即

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (2.93)$$

或者由(2.93)式，单位冲激响应是其单位阶跃响应的一阶导数^①，即

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t) \quad (2.94)$$

因此，在连续时间和离散时间情况下，由于一个 LTI 系统的单位阶跃响应可以从它的单位冲激响应中求出来，所以单位阶跃响应也能够用来刻画一个 LTI 系统。在习题 2.45 中，将利用单位阶跃响应导出 LTI 系统类似于卷积和与卷积积分的表示式。

2.4 用微分和差分方程描述的因果 LTI 系统

一类极为重要的连续时间系统是其输入、输出关系用线性常系数微分方程描述的系统。这种形式的方程可以用来描述范围广泛的系统和物理现象。例如，在第 1 章图 1.1 RC 电路的响应和图 1.2 中

^① 全书都采用(2.94)式的两种符号来表示一阶导数，高阶导数也将采用类似的符号。

汽车在受到加速输入和各种摩擦力之下的运动响应都能够通过线性常系数微分方程来描述，包括有恢复和阻尼力的力学系统，化学反应动力学，以及其他很多方面都有类似的微分方程出现。

相对应的，一类重要的离散时间系统是其输入、输出关系用线性常系数差分方程描述的系统。这种形式的方程可以用来描述许多不同过程的序列行为。例如在例 1.10 中就看到差分方程是如何用来描述一个银行存户余款的总数的；而例 1.11 则用来描述由微分方程表征的连续时间系统的数字仿真。差分方程也常常出现在专门用于对输入信号完成某种特定运算的离散时间系统上，例如像(1.99)式所表示的计算相继输入值之差的系统，以及由(1.104)式所代表的计算输入在某一区间内平均值的系统等都是由差分方程描述的。

全书将会经常考虑和研究由线性常系数微分方程和差分方程描述的系统。这一节只是对这类系统在涉及微分和差分方程解法上的一些基本概念作一介绍，并披露和剖析一下由这类方程所描述的系统的某些性质。在以后的各章中，将要研究其它的一些信号与系统的分析方法，这些方法在分析由这类方程所描述的系统能力上以及在理解它们的特性行为上都提供了强有力的工具。

2.4.1 线性常系数微分方程

为了介绍有关由线性常系数微分方程所表征的系统的一些重要概念。现在来考虑一个一阶微分方程，即

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (2.95)$$

式中 $y(t)$ 为系统的输出， $x(t)$ 是其输入。例如，若将(2.95)式与微分方程(1.84)式作一对比，就会发现：如果 $y(t)$ 认为是汽车的速度， $x(t)$ 当作外力 $f(t)$ ，而(1.84)式中的参数在单位上进行归一化，以使得 $b/m=2$ 和 $1/m=1$ ，那么(2.95)式就完全是该系统的响应方程。

像(2.95)式这样的微分方程，很重要的一点是：它们所给出的是该系统一种隐含的特性；也就是说，它们所描述的输入和输出的关系不是将系统输出作为输入函数的一种显式给出的。为了得到一个显式表示式，就必须要解这个微分方程。要求得一个解，就需要比单独由这个微分方程提供的信息更多的信息。譬如说，当汽车一直受到 $1m/s^2$ 的恒定加速持续了 $10s$ ，要确定 $10s$ 时的末速度，就同时需要知道正在行进中的汽车在这个间隔开始时是多快。同样道理，如果 $1V$ 的恒定电压源加在图 1.1 的 RC 上有 $10s$ 的时间，在不知道初始电容上的电压是多少时，也是不能确定第 $10s$ 时电容器上的电压是多少的。

一般来说，为了求解一个微分方程，必须给定一个或多个附加条件；一旦这些条件给定，原则上就能得到一个用输入表示输出的显式表达式。换句话说，类似(2.95)式的这样一个微分方程描述的只是系统输入和输出间的一种约束关系，但是为了完全表征系统就必须同时给出附加条件。对于附加条件的不同选择可以导致输入和输出间的不同关系。本书的绝大部分都是集中在将微分方程用于描述因果的 LTI 系统，而对这样一类系统，附加条件是取一种特殊而简单的形式。为了说明这一点，并披露微分方程解的某些基本性质，来看一下在一种特别的输入信号 $x(t)$ 时(2.95)式的解^①。

^① 因为我们已经假定读者熟悉有关线性常系数微分方程的求解方法，所以在这方面的讨论比较简略。为了复习起见，现推荐一本有关常微分方程求解方面的教科书，如“Ordinary Differential Equations (3rd ed.)”，G. Birkhoff and G. C. Rota (New York: John Wiley and Sons, 1978)，或者“Elementary Differential Equations (3rd ed.)”，W. E. Boyce and R. C. DiPrima (New York: John Wiley and Sons, 1977)。在电路理论方面也有很多教科书讨论微分方程的问题，如“Basic Circuit Theory”，L. O. Chua, C. A. Desoer and E. S. Kuh (New York: McGrawHill Book Company, 1987)。正如在正文中已经提到的，在下面有关章中将给出另外一种非常有用的方法来解线性微分方程，而对我们来说这种解法已经够用了。另外，在本章习题中有几个涉及求解微分方程方面的练习题。

例 2.14 现在考虑(2.95)式当输入信号为

$$x(t) = Ke^{3t}u(t) \quad (2.96)$$

时的解，式中 K 为某一实数。

(2.96)式的完全解由一个特解 $y_p(t)$ 和一个齐次解 $y_h(t)$ 组成，即

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad (2.97)$$

这里特解 $y_p(t)$ 满足(2.95)式，而 $y_h(t)$ 是以下齐次微分方程的一个解

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \quad (2.98)$$

对于像(2.96)式这样的指数输入信号，求特解的通用方法是找一个所谓的受迫响应(forced response)——一个与输入形式相同的信号。就(2.95)式而言，因为对 $t > 0$, $x(t) = Ke^{3t}$ ，就可以设想对 $t > 0$ ，一个解的形式为

$$y_p(t) = Ye^{3t} \quad (2.99)$$

式中 Y 是一个待定的数。将(2.96)式和(2.99)式代入(2.95)式，对 $t > 0$ 可得

$$3Ye^{3t} + 2Ye^{3t} = Ke^{3t} \quad (2.100)$$

在(2.100)式两边消去因子 e^{3t} ，就得到

$$3Y + 2Y = K \quad (2.101)$$

或者

$$Y = \frac{K}{5} \quad (2.102)$$

所以

$$y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}, t > 0 \quad (2.103)$$

为了求 $y_h(t)$ ，假定一个解的形式为

$$y_h(t) = Ae^{\lambda t} \quad (2.104)$$

将其代入(2.98)式后给出

$$Ase^{\lambda t} + 2Ae^{\lambda t} = Ae^{\lambda t}(s + 2) = 0 \quad (2.105)$$

根据这个方程，必须取 $s = -2$ ，那么 Ae^{-2t} 就是(2.98)式在选取任意 A 下的一个解。利用这一点和(2.103)式，对于 $t > 0$ ，(2.97)式微分方程的解就是

$$y(t) = Ae^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t}, t > 0 \quad (2.106)$$

正如早先已经指出的，(2.95)式微分方程本身并没有唯一确定对(2.96)式的输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ ，具体说就是(2.106)式中的常数 A 还未确定。为了要确定 A 的值，除微分方程(2.95)式外需要再给出一个附加条件。习题 2.34 已说明，不同的附加条件选取会导致不同的解 $y(t)$ ，结果就有不同的输入和输出之间的关系。已经说过，本书的绝大部分都是集中在用微分和差分方程来描述因果的 LTI 系统。所以在这种情况下附加条件要取初始松弛这种形式的条件。如同习题 1.44 所指出的，这就是：对于一个因果的 LTI 系统，若 $t < t_0$, $x(t) = 0$ ，那么 $t < t_0$, $y(t)$ 必须也等于 0。由(2.96)式可以看到，对这个例子就是： $t < 0$, $x(t) = 0$ ，初始松弛条件就意味着 $t < 0$, $y(t) = 0$ 。在(2.106)式中 $t = 0$ ，以 $y(0) = 0$ 代入，得

$$0 = A + \frac{K}{5}$$

或者

$$A = -\frac{K}{5}$$

据此，对 $t > 0$

$$y(t) = \frac{K}{5}[e^{3t} - e^{-2t}] \quad (2.107)$$

而对 $t < 0$, $y(t) = 0$ (由于初始松弛), 将两者结合在一起, 就得完全解为

$$y(t) = \frac{K}{5} [e^{3t} - e^{-2t}] u(t) \quad (2.108)$$

由例 2.14 关于线性常系数微分方程及其表示的系统可以说明很重要的几点。首先, 对某个输入 $x(t)$ 的响应一般都是由一个特解和一个齐次解(即输入置于零时该微分方程的解)所组成。该齐次解往往称为系统的自然响应。简单电路和力学系统的自然响应在习题 2.61 和习题 2.62 中说明。

在例 2.14 中还看到, 为了完全确定由(2.95)式的微分方程所描述的系统输入和输出之间的关系, 就必须给出附加条件。这一事实的内涵, 正如在习题 2.34 所说明的, 就是不同的附加条件的选取会导致不同的输入输出关系。在本例中已经说明, 对大部分情况, 对于由微分方程描述的系统都采用初始松弛的条件。在这个例子中, 由于 $t < 0$ 输入是 0, 所以初始松弛条件就意味着初始条件 $y(0) = 0$ 。如同在习题 2.33 所表明的, 在初始松弛条件下, 由(2.95)式所描述的系统就是 LTI 的, 而且是因果的^①。例如, 如果将(2.96)式的输入乘以 2, 所得出的输出也是(2.108)式输出的两倍。

值得强调的是, 初始松弛条件并不表明在某一固定时刻点上的零初始条件, 而是在时间上调整这一点, 以使得在输入变成非零之前, 响应一直为 0。因此, 若 $t \leq t_0$, $x(t) = 0$, 那么对于由(2.95)式描述的因果的 LTI 系统, 就是 $t \leq t_0$, $y(t) = 0$, 并且将用初始条件 $y(t_0) = 0$ 来求解 $t > t_0$ 时的输出。作为一个具体例子, 再次考虑图 1.1 的电路(同时也在例 1.8 中讨论过)。对于这个例子来说, 初始松弛等效于说: 直到把一个非零的电压源接入该电路为止, 电容器上的电压都是零。因此, 如果我们准备在今天中午开始用这个电路, 那么当我们在今天中午接入这个电压源时, 初始电容器电压是零; 同样, 如果明天中午开始用这个电路, 那么当明天中午接入这个电压源时, 初始电容器电压是零。

这个例子也给我们提供了某些直观认识, 就是为什么初始松弛条件会使得一个由线性常系数微分方程描述的系统成为时不变的。例如, 如果我们在这个电路上完成一个实验, 假定系数 R 和 C 不随时间而变化, 那么由初始松弛条件开始做, 我们就会预期, 不管这个实验是在今天做, 还是在明天做, 都会有相同的结果。也就是说, 如果我们在两天里做同样一个实验, 在每天的中午电路都是从初始松弛开始, 那么就会有相同的响应; 只是这两个响应互相有一个一天的时移罢了。

虽然, 我们用了一阶微分方程(2.95)式作为这些问题的讨论, 但是相同的概念可以直接推广到由高阶微分方程描述的系统中去。一个 N 阶线性常系数微分方程由如下方程给出:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (2.109)$$

阶次指的是出现在这个方程中输出 $y(t)$ 的最高阶导数。当 $N=0$ 时, (2.109)式就变为

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (2.110)$$

这时, $y(t)$ 就是输入 $x(t)$ 及其导数的显式函数。对于 $N \geq 1$, (2.109)式就是输出以隐含的形式用输入来给出的, 这时这个方程的分析就如在例 2.14 中一阶微分方程的讨论相同的步骤进行。 $y(t)$ 的解由两部分组成: (2.109)式的特解加上下面齐次微分方程的解

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \quad (2.111)$$

^① 事实上, 在习题 2.34 中也表明, 若(2.95)式的初始条件为非零, 其系统就属于增量线性的。也是很像图 1.48 那样, 整个系统可以看作单独由初始条件产生的响应(输入置 0)和由初始条件为 0 时对输入的响应两者的叠加(初始条件为 0 时对输入的响应也就是由(2.95)式描述的因果 LTI 系统的响应)。

这个方程的解称为该系统的自然响应。

和一阶的情况相同，微分方程(2.109)式不能完全用输入来表征输出，而需要给出附加条件以完全确定系统的输入输出关系。这些附加条件的不同选取，同样会产生不同的输入输出关系，但本书的绝大部分在处理由微分方程描述的系统时都用初始松弛的条件，即对于 $t \leq t_0$ ，若 $x(t)=0$ ，都假设 $t \leq t_0$ ， $y(t)=0$ 。因此，对 $t > t_0$ 的响应可以用初始条件

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0 \quad (2.112)$$

从(2.109)式的微分方程中计算出来。在初始松弛的条件下，由(2.109)式描述的系统是因果的，并且是 LTI 的。给出(2.112)式的初始条件，原则上输出 $y(t)$ 就能用例 2.14 那样的方式解出微分方程来确定，本章末有几道习题对此作进一步的说明。然而在第 4 章和第 9 章还将讨论某些方法，对于连续时间 LTI 系统分析来说，这些方法对微分方程的求解极为方便，特别是还对分析与表征由这类方程描述的系统性质提供了强有力的工具。

2.4.2 线性常系数差分方程

和(1.109)式相对应的离散时间方程就是 N 阶线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.113)$$

这类形式的方程可以完全按对微分方程的类似解法来求解(见习题 2.32)^①。具体地说， $y[n]$ 的解可以写成一个(2.113)式的特解和一个齐次方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0$$

解的和。对该齐次方程的解往往称为由(2.113)式所描述的系统的自然响应。

和连续时间一样，(2.113)式没有用输入来完全表征输出。为此，必须给出某些附加条件。附加条件虽然存在有很多可能的选择，都会导致不同的输入-输出关系；但在大多数情况下都用初始松弛的条件给出，即若 $n < n_0$ ， $x[n]=0$ ，那么， $n < n_0$ ， $y[n]=0$ 。在初始松弛条件下，由(2.113)式描述的系统就是 LTI，并且是因果的。

虽然全部这些性质可以直接沿着讨论微分方程的方式并行地予以建立，但是对于离散时间情况还提供了另一种途径。这来源于对(2.113)式的直接观察，(2.113)式可以重新写成如下形式：

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\} \quad (2.115)$$

(2.115)式就把 n 时刻的输出直接用以前的输入和输出值来表示；据此可立即看出需要附加条件。为了计算出 $y[n]$ ，就需要知道 $y[n-1], \dots, y[n-N]$ ，因此如果给出了全部 n 时的输入和一组附加条件如 $y[-N], y[-N+1], \dots, y[-1]$ ，那么(2.115)式就能够连续求得各 $y[n]$ 值。

(2.113)式或(2.115)式这样形式的方程称为递归方程(recursive equation)，因为它表明利用输入和以前的输出来求输出的过程是一个递归过程。在 $N=0$ 的特殊情况下，(2.115)式就演变成

^① 关于求解线性常系数差分方程的详细论述，可见“Finite Difference Equations” H. Levy and F. Lessman (New York: Macmillan, Inc., 1961)，或者“Finite Difference Equations and Simulations”(Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1968), F. B. Hildebrand. 在第 5 章将介绍另一种方法来求解差分方程，这一方法大大方便于由线性差分方程描述的线性时不变系统的分析。另外，建议读者去做一些在本章末习题中有关处理差分方程求解的题。

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k] \quad (2.116)$$

这就是在离散时间情况下与连续时间系统(2.110)式相对应的。现在, $y[n]$ 是以前的输入值和当前输入值的显函数。为此, (2.116)式称为**非递归方程**(nonrecursive equation), 因为没有递归地利用前面计算出来的输出值来计算当前的输出值。因此, 和(2.110)式给出的系统一样, 为了确定 $y[n]$ 勿需附加条件。另外, (2.116)式描述了一个 LTI 系统, 由直接计算, 这个系统的单位脉冲响应是

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases} \quad (2.117)$$

这就是说, (2.116)式本身就是卷积和的表示。注意到, 它的单位脉冲响应是有限长的; 也就是说, 仅仅在一个有限的时间间隔内是非零的。由于这个特点, 将由(2.116)式表征的系统往往称为**有限脉冲响应(FIR)系统**(finite impulse response)。

虽然对于 $N=0$ 的情况不要求附加条件, 但是这样的条件对于 $N \geq 1$ 的递归情况是需要的。为了说明这类方程的求解, 并对递归差分方程的性质和特性有所领悟, 看一看下面这个简单例子。

例 2.15 考虑如下差分方程:

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] \quad (2.118)$$

(2.118)式可以表示成

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1] \quad (2.119)$$

一眼就看出, 为了求得当前的输出值, 需要前一个输出值 $y[n-1]$ 。由此, 要开始进行递归就要求一个初始条件。

例如, 假设强加给初始松弛的条件, 并考虑输入为

$$x[n] = K\delta[n] \quad (2.120)$$

这时, 因为有 $n \leq -1$, $x[n]=0$, 初始松弛条件就意味着对于 $n \leq -1$, $y[n]=0$, 所以就有一个初始条件为 $y[-1]=0$ 。由这个初始条件出发, 对 $n \geq 0$ 的各个 $y[n]$ 值解出如下:

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2} y[-1] = K \quad (2.121)$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2} y[0] = \frac{1}{2} K \quad (2.122)$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2} y[1] = (\frac{1}{2})^2 K \quad (2.123)$$

⋮

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = (\frac{1}{2})^n K \quad (2.124)$$

因为初始松弛的条件, 由(2.118)式表征的系统就是 LTI 的, 它的输入-输出特性是完全由它的单位脉冲响应表征的。令 $K=1$ 。该系统的单位脉冲响应就是

$$h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] \quad (2.125)$$

应该注意, 例 2.15 的因果 LTI 系统其单位脉冲响应是无限长的。事实上, 如果(2.113)式中的 $N \geq 1$, 该差分方程就是递归的, 相应于这个方程的 LTI 系统再与初始松弛条件结合在一起都一定有无

限长的单位脉冲响应。这类系统通常就称为无限脉冲响应(IIR)系统(infinite impulse response)。

已经指出过，本书的大多数情况都是用递归差分方程来描述和分析线性、时不变和因果的系统，因此通常都作初始松弛的假设。在第5章和第10章还要研究分析离散时间系统的其它方法，这些方法对于线性常系数差分方程的求解以及分析由这类方程描述的系统性质提供了更为有用和有效的手段。

2.4.3 用微分和差分方程描述的一阶系统的方框图表示

由线性常系数差分和微分方程描述的系统一个重要的特点是：它们可以以很简单而且很自然的方式用若干基本运算的方框图互联来表示。这样做是很有意义的。其一是它给出一种形象化的表示，这有助于加深对这些系统的特性和性质的理解。另外，这种表示对于系统的仿真或实现有很大的价值。例如，在本节要介绍的连续时间系统的方框图表示就是早期模拟计算机对由微分方程描述的系统仿真的基础，并且还能够直接转换为一个程序，以便在数字计算机上对这类系统进行仿真。除此以外，离散时间差分方程的方框图表示还能对由差分方程描述的系统以数字硬件方式来实现提供一些简便而有效的方式。在这一节将用例1.8到例1.11的一阶因果系统的方框图构成为例来说明隐藏在这些方框图表示中的基本概念。在习题2.57到习题2.60以及第9和第10章将考虑其它一些更为复杂的微分和差分方程描述的系统方框图的实现问题。

我们由离散时间情况入手，就是由一阶差分方程

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n] \quad (2.126)$$

描述的因果系统开始。为了建立这个系统的方框图表示，注意到(2.126)式的求值要求三种基本运算：相加、乘以系数和延迟(体现 $y[n]$ 和 $y[n-1]$ 之间的关系)。因此，我们来定义三种基本网络单元，如图2.27所示。为了看出，这些基本单元是如何能够用来表示由(2.126)式描述的因果系统的，可以把这个方程重新写成一种直接计算输出 $y[n]$ 的递归算法形式：

$$y[n] = -ay[n-1] + bx[n] \quad (2.127)$$

这个算法可用图2.28形象化地表示出来。这就是一个反馈系统的例子，因为输出经由一个延迟并乘以一个系数回授回来，然后与 $bx[n]$ 相加。反馈的存在是(2.127)式递归性质的一个直接结果。

图2.28的方框图很清楚表明这个系统要求有记忆(存贮)，这样就必然需要初始条件。特别是，一个延迟就对应于一个记忆单元，因为它必须保留它的输入的前一个值。因此，这个记忆单元的初始值就可作为一个必要的初始条件提供给图2.28或(2.127)式表示的递归运算。当然，如果由(2.126)式描述的系统是初始松弛的，存贮在该记忆单元内的初始值就为零。

接下来考虑由一阶微分方程描述的因果连续时间系统：

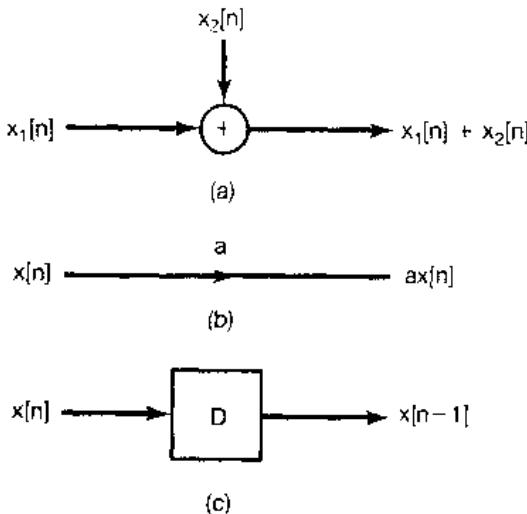


图2.27 用于由(2.126)式描述的因果系统方框图表示的基本单元：

(a)相加器；(b)乘以系数；(c)单位延迟

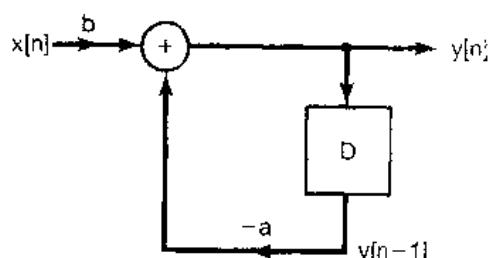


图2.28 由(2.126)式描述的因果离散时间系统的方框图表示

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \quad (2.128)$$

第一步就是对该系统确定一种方框图表示，先将方程改写为

$$y(t) = -\frac{1}{a} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a} x(t) \quad (2.129)$$

该方程的右边涉及三种基本运算：相加、乘以系数和微分。因此，如果定义三种基本网络如图 2.29 所示，那么就像离散时间系统所讨论的，可以把(2.129)式表示为这些基本运算单元的互联如图 2.30 的方框图表示。

虽然后一个图是由(2.128)式描述的因果系统的一种正确表示，但是它并不是最常用的或者直接导致实际实现的表示，这是因为微分器不仅实现上困难，并且对误差和噪声又极为灵敏。更为广泛应用的另一种实现是先将(2.128)式写成

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t) \quad (2.130)$$

然后从 $-\infty$ 到 t 积分。若假设由(2.130)式描述的系统是初始松弛的，那么 $dy(t)/dt$ 从 $-\infty$ 到 t 的积分就是 $y(t)$ (因为 $y(-\infty)$ 的值是零)，结果可得

$$y(t) = \int_{-\infty}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau \quad (2.131)$$

这种表示形式的系统就可以用图 2.29 中的相加器和系数相乘器，以及由图 2.31 定义的积分器来实现。图 2.32 就是利用这些基本单元对该系统的一种方框图表示。

因为积分器可以很方便地用运算放大器来实现，因此图 2.32 的表示就直接导致为模拟实现；确实如此，这种实现既是早期模拟计算机，又是当今模拟计算系统的基础。应该注意，在连续时间情况下，积分器就代表了该系统的记忆存储单元，若将(2.130)式的积分考虑为从某一有限点 t_0 开始，或许能更容易地看出这一点，这时

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau \quad (2.132)$$

(2.132)式清楚表明： $y(t)$ 的表征要求有一个初始条件，即 $y(t_0)$ 值，这个值就是积分器在 t_0 时刻存储的值。

尽管我们只是说明了最简单的一阶微分和差分方程的方框图构成，但是对高阶系统同样可以构成这样的方框图表示，这些都对系统的直观认识和各种可能的实现提供了有价值的启示。习题 2.58 和习题 2.60 将给出高阶系统方框图实现的例子。

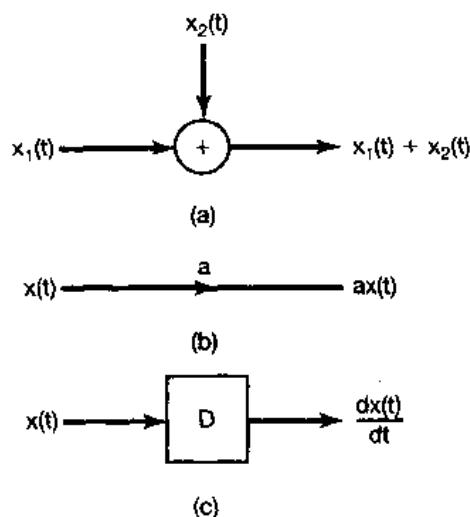


图 2.29 用于由(2.128)式描述的连续时间系统方框图表示中一组可能的基本单元：
(a) 相加器；(b) 乘以系数；(c) 微分器

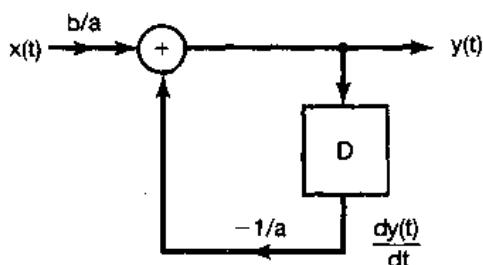


图 2.30 利用相加器、乘以系数和微分器的(2.128)式系统的方框图表示

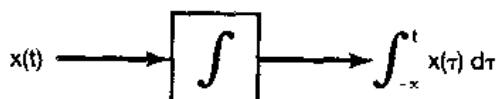


图 2.31 积分器的方框图表示

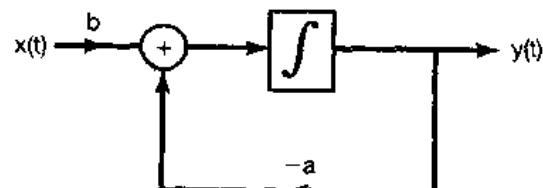


图 2.32 利用相加器、乘以系数和积分器的(2.131)式系统的方框图表示

2.5 奇异函数

这一节将从另一角度来审视连续时间单位冲激函数，以便对这一重要的理想化信号得到进一步的认识，并据此介绍一组与之相关的，称之为奇异函数的信号。特别是在 1.4.2 节曾提到，一个连续时间单位冲激可以看作是一个脉冲的理想化，它的持续期是“足够的短”，以致于它的形状和持续期已不具有任何实际意义；也就是说，就所关心的任何特定 LTI 系统的响应来说，在这个脉冲下的全部面积可以认为是瞬间就已经加上了的。这一节首先给出一个具体的例子来说明这是什么意思，然后利用寄寓在这个例子中的意义来说明单位冲激和其它奇异函数应用的关键在于：LTI 系统对这些理想化信号的响应是如何表征的；也就是说，本质上这些信号都是借助于它们与其它信号在卷积意义下的特性如何来定义的。

2.5.1 作为理想化短脉冲的单位冲激

根据(2.27)式的筛选性质，单位冲激 $\delta(t)$ 是恒等系统的单位冲激响应，即对任意信号 $x(t)$ 有

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \quad (2.133)$$

因此，如果取 $x(t) = \delta(t)$ ，就得

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t) \quad (2.134)$$

(2.134)式是单位冲激的一个基本性质，并且对于将单位冲激理解为一个理想化的脉冲时，它还有一个很有意义的隐含着的东西。例如，如 1.4.2 节所论及的，设想将 $\delta(t)$ 看作一个矩形脉冲的极限形式，令 $\delta_\Delta(t)$ 相应于图 1.34 所定义的矩形脉冲，并

设

$$r_\Delta(t) = \delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t) \quad (2.135)$$

那么 $r_\Delta(t)$ 就如图 2.33 所示。若将 $\delta(t)$ 解释为 $\delta_\Delta(t)$ 在 $\Delta \rightarrow 0$ 下的极限，那么由于(2.134)式， $r_\Delta(t)$ 在 $\Delta \rightarrow 0$ 时的极限也一定是一个单位冲激。同样，还能证明 $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ 或者 $r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ 等等在 $\Delta \rightarrow 0$ 时都是单位冲激！由此可见，如果将单位冲激定义为某信号的极限形式的话，那么事实上就存在着无限多个看起来很不相同的信号，但在极限之下其表现都像一个冲激。

上面一段中关键一句话是“其表现都像一个冲激”。正如已经指出过的，这里所指的意思是一个 LTI 系统对所有这些信号的响应本质上都是一样的，只要这个脉冲是“足够短”，也即 Δ 是“足够小”。下面这个例子用来阐明这一概念。

例 2.16 现在考虑由一阶微分方程描述的 LTI 系统

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (2.136)$$

它是初始松弛的。图 2.34 画出了对几个不同的 Δ 值，该系统对 $\delta_\Delta(t)$ ， $r_\Delta(t)$ ， $r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ 和 $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ 的响应。对于较大的 Δ ，这些信号的响应是明显不相同的。然而，对于足够小的 Δ 而言，这些响应实质上是无法区分的，以致于对所有这些信号都以相同的方式“表现”出来。另

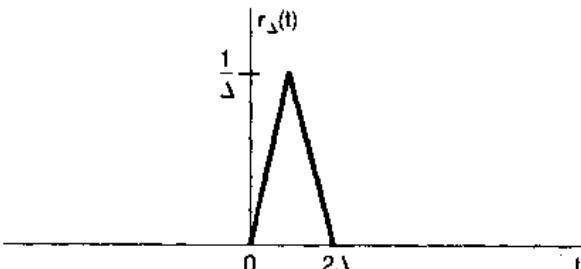


图 2.33 由(2.135)式定义的信号 $r_\Delta(t)$

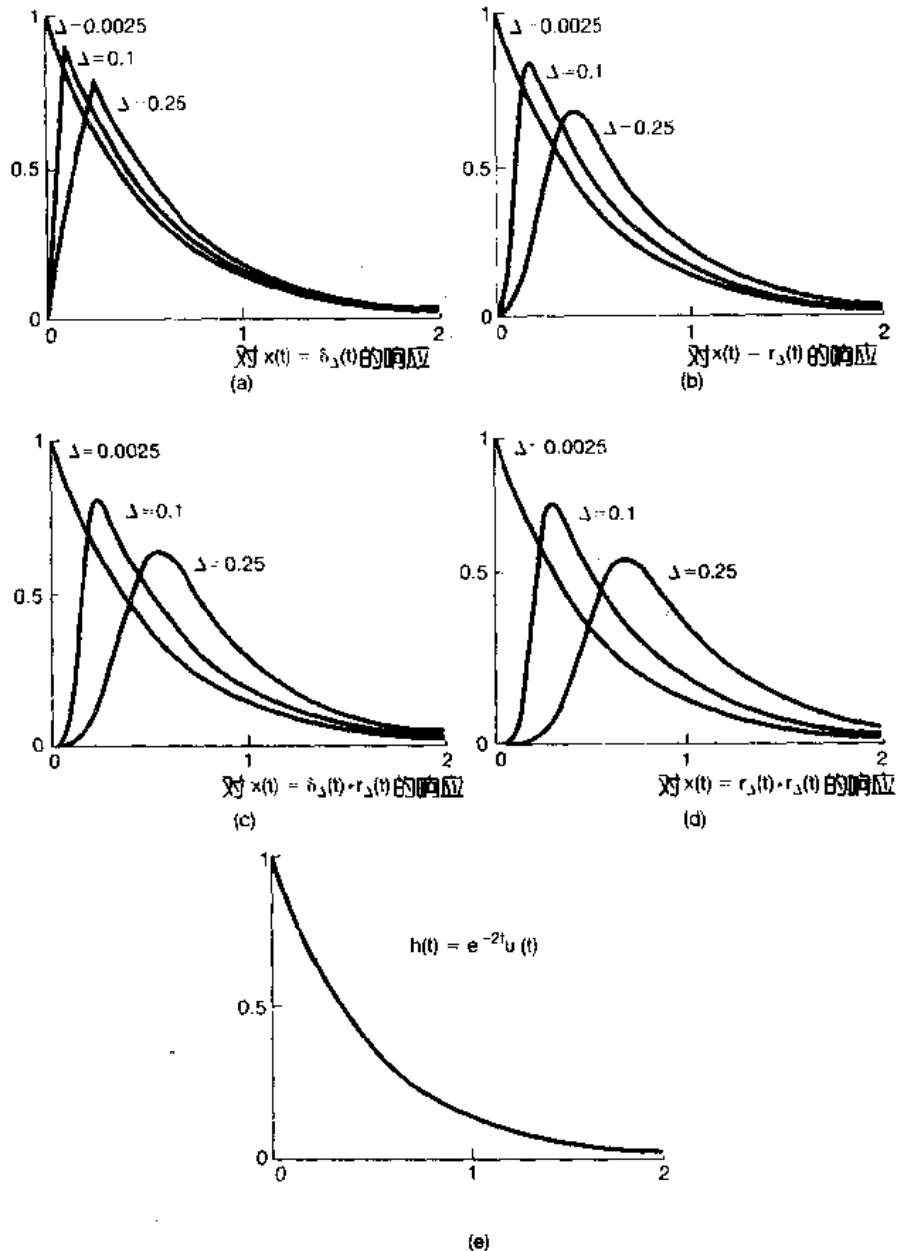


图 2.34 单位冲激作为一个持续期“足够短”的脉冲理想化的解释，只要关心的是 LTI 系统对这个脉冲的响应，这个脉冲就能认为是瞬间就已经加上的了：(a)由(2.136)式给出的因果 LTI 系统对 $\delta_{\Delta}(t)$ 的响应，其中 $\Delta=0.25, 0.1$ 和 0.0025 ；(b)同一系统在各相同 Δ 值时对 $r_{\Delta}(t)$ 的响应；(c)对 $\delta_{\Delta}(t) * r_{\Delta}(t)$ 的响应；(d)对 $r_{\Delta}(t) * r_{\Delta}(t)$ 的响应；(e)该系统的单位冲激响应 $h(t)=e^{-2t}u(t)$ 。

注意：在 $\Delta=0.25$ 时，对这些不同信号的响应之间有明显的差别；随 Δ 变得愈来愈小，这些差别消失，最终所有这些响应都收敛于图(e)的单位冲激响应。

外，正如该图所看到的，全部这些响应的极根形式就是 $e^{-2t}u(t)$ 。因为这些信号中的每一个随 $\Delta \rightarrow 0$ ，其极限都是单位冲激，所以就得出该系统的冲激响应是 $e^{-2t}u(t)$ ①。

要强调的重要一点是，我们所指的“ Δ 足够小”是与特定的 LTI 系统有关的。为此，在图 2.35 画

① 在第 4 和第 9 章将讨论用更为简单的方法来确定由线性常系数微分方程描述的因果 LTI 系统的单位冲激响应。

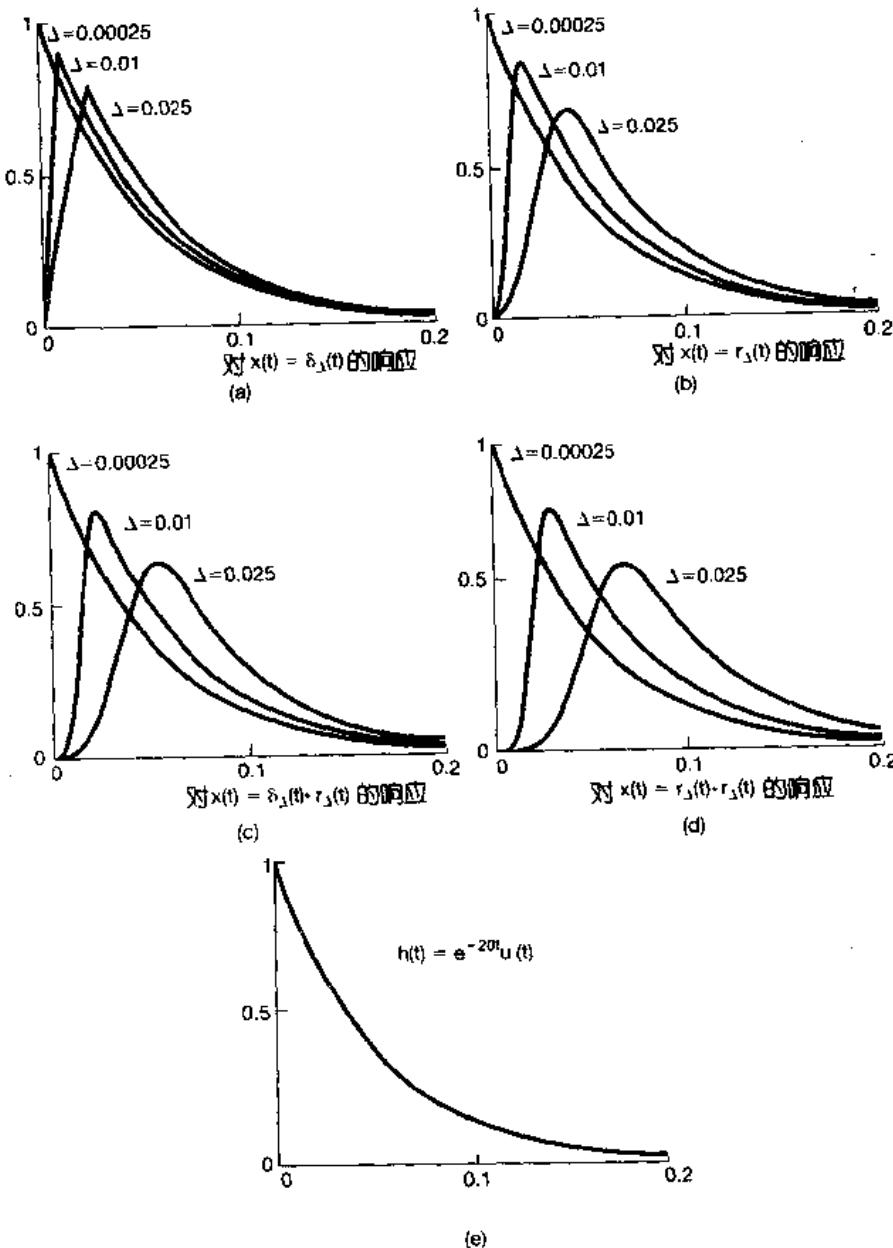


图 2.35 找一个“足够小”的 Δ 值取决于这些输入所作用的系统:(a)由(2.137)式给出的因果 LTI 系统对 $\delta_\Delta(t)$ 的响应, 其中 $\Delta=0.025, 0.01$ 和 0.00025 ; (b)对 $r_\Delta(t)$ 的响应; (c)对 $\delta_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ 的响应; (d)对 $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ 的响应; (e)该系统的单位冲激响应 $h(t)=e^{-20t}u(t)$ 。

将这些响应与图 2.34 的各响应作比较, 可见这时需要更加小的 Δ 值, 才能使这些脉冲的形状失去意义

出了对下面一阶微分方程所给出的因果 LTI 系统

$$\frac{dy(t)}{dt} + 20y(t) = x(t) \quad (2.137)$$

在不同的 Δ 下, 该系统对这些脉冲的响应。由图可见, 这时为了使得这些响应之间, 以及这些响应与该系统单位冲激响应 $h(t)=e^{-20t}u(t)$ 之间成为不可区分, 就需要更加小的 Δ 值。因此尽管对这两个系统而言, 所谓的“ Δ 足够小”是不同的, 但是对两者而言, 总能找到这些 Δ 足够小的

值。那么单位冲激就是对所有系统来说其持续期都足够小的那么一个短脉冲的理想化结果。

2.5.2 通过卷积定义单位冲激

如同在前面例子所说明的，对于足够小的 Δ ，信号 $\delta_\Delta(t)$, $r_\Delta(t)$, $r_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)$ 以及 $r_\Delta(t) * r_\Delta(t)$ 当它们作用于一个 LTI 系统时，其表现全像是冲激。事实上，还有很多其它的信号，对这一点也是对的。所以就想到应该将单位冲激借助于一个 LTI 系统对它的响应如何来考虑。虽然，通常一个函数或者信号总是用它在自变量每一点的值来定义的，但是单位冲激主要考虑的不是在每个 t 值它怎么样，而是在卷积的意义下它有何作为。因此从线性系统分析的观点，可以用另一种办法将单位冲激定义为这样的信号，即当它加到一个 LTI 系统上时，就产生了冲激响应。这就是，定义 $\delta(t)$ 为一个信号，其对任何 $x(t)$ 有

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \quad (2.138)$$

在这种意义下， $\delta_\Delta(t)$, $r_\Delta(t)$ 等等这些信号都对应一些短脉冲，持续期随 $\Delta \rightarrow 0$ 而逐渐消失，因为如果把这些信号代替 $\delta(t)$ 后，在极限之下，(2.138)式仍然成立，那么这些信号在极限之下的表现全像一个单位冲激。

根据(2.138)式的运算定义可以得到我们所需要的有关单位冲激的全部性质。例如，若令 $x(t)=1$ (对全部 t)，则

$$1 = x(t) = x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau$$

所以单位冲激的面积为 1。

有时也用另一种完全等效的 $\delta(t)$ 运算定义。为了求得这另一种形式，取任意信号 $g(t)$ ，将其反转得到 $g(-t)$ ，然后再与 $\delta(t)$ 作卷积。由(2.138)式，有

$$g(-t) = g(-t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - t) \delta(\tau) d\tau$$

对于 $t=0$ ，得

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \delta(\tau) d\tau \quad (2.139)$$

因此，由(2.138)式给出的 $\delta(t)$ 的运算定义就包含了(2.139)式；另一方面，(2.139)式也寓意着(2.138)式。为此，令 $x(t)$ 为一已知信号，固定某一 t ，定义

$$g(\tau) = x(t - \tau)$$

则由(2.139)式就有

$$x(t) = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) \delta(\tau) d\tau$$

这就是(2.138)式。因此，(2.139)式是单位冲激一个等效的运算定义；这就是：单位冲激是这样一种信号，当它与某一信号 $g(t)$ 相乘并在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 上积分，其结果就是 $g(0)$ 。

因为我们主要关心的是 LTI 系统，因此也即关心的是卷积。所以由(2.138)式给出的 $\delta(t)$ 的特性是大多数情况下乐意采用的。然而，在确定单位冲激的其它性质时，(2.139)式也是有用的。例如，考虑信号 $f(t)\delta(t)$ 。这里 $f(t)$ 是另一个信号，那么由(2.139)式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(\tau) \delta(\tau) d\tau = g(0) f(0) \quad (2.140)$$

另一方面，若考虑信号 $f(0)\delta(t)$ ，可见

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f(0) \delta(\tau) d\tau = g(0) f(0) \quad (2.141)$$

比较(2.140)式和(2.141)式发现这两个信号 $f(t)\delta(t)$ 和 $f(0)\delta(t)$ ，当它们与任一信号 $g(t)$ 相乘之后，再从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，它们的表现是完全一样的。结果，利用信号的这种运算定义，可得

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (2.142)$$

它就是曾在 1.4.2 节用另外方法导出的一个性质[见(1.76)式]。

2.5.3 单位冲激偶和其它的奇异函数

单位冲激是一类称之为奇异函数的一种，其中每一种都是借助于它在卷积运算下来定义的。考虑输出是输入导数的 LTI 系统，即

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.143)$$

这个系统的单位冲激响应是单位冲激的导数，称之为单位冲激偶(unit doublet) $u_1(t)$ 。根据 LTI 系统的卷积表示，对任何信号 $x(t)$ 应有

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) \quad (2.144)$$

和(2.138)式用作 $\delta(t)$ 的运算定义一样，要将(2.144)式取为 $u_1(t)$ 的运算定义。同理，也能依此定义 $\delta(t)$ 的二阶导数 $u_2(t)$ ，因为取输入二阶导数的 LTI 系统的冲激响应，即

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = x(t) * u_2(t) \quad (2.145)$$

由(2.144)式，可见

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = x(t) * u_1(t) * u_1(t) \quad (2.146)$$

因此，

$$u_2(t) = u_1(t) * u_1(t) \quad (2.147)$$

一般 $u_k(t)(k > 0)$ 就是 $\delta(t)$ 的 k 次导数，因此是一个取输入 k 次导数系统的单位冲激响应。因为该系统可以由 k 个微分器级联得到，所以就有

$$u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{k \uparrow} \quad (2.148)$$

和单位冲激一样，这些奇异函数中的每一个，其性质都能由它的运算定义导出。例如，若考虑常数信号 $x(t) = 1$ ，可得

$$0 = \frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) d\tau$$

所以单位冲激偶的面积为零。再者，若考虑信号 $g(-t)$ 与 $u_1(t)$ 卷积，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - t) u_1(\tau) d\tau = g(-t) * u_1(t) = \frac{dg(-t)}{dt} = -g'(-t)$$

对于 $t = 0$ ，得出

$$-g'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u_1(\tau) d\tau \quad (2.149)$$

用类似的道理可以导得 $u_1(t)$ 及高阶奇异函数的有关性质，在习题 2.69 中将研究它们的几

个性质。

和单位冲激一样，这些奇异函数中的每一个都可以与一些短脉冲相联系。例如，因为单位冲激偶就是单位冲激的导数，因此就可以将单位冲激偶认为是面积为 1 的短脉冲导数的理想化。考虑图 1.34 的短脉冲 $\delta_\Delta(t)$ ，随着 $\Delta \rightarrow 0$ ，这个脉冲的表现像一个冲激，那么可以期望它的导数随着 $\Delta \rightarrow 0$ ，其表现也该像一个冲激偶。如同在习题 2.72 所证明的， $d\delta_\Delta(t)/dt$ 就是如图 2.36 所画的那样：它由一个发生在 $t=0$ ，面积为 $+1/\Delta$ 的单位冲激，和紧随其后的发生在 $t=\Delta$ ，面积为 $-1/\Delta$ 的单位冲激所组成，即

$$\frac{d\delta_\Delta(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta} [\delta(t) - \delta(t-\Delta)] \quad (2.150)$$

这样，利用 $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$ [见(2.70)式]，求得

$$x(t) * \frac{d\delta_\Delta(t)}{dt} = \frac{x(t) - x(t-\Delta)}{\Delta} \cong \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.151)$$

随着 $\Delta \rightarrow 0$ ，式中的这个近似变得愈来愈准确。将(2.151)式与(2.144)式比较后可见， $d\delta_\Delta(t)/dt$ 随着 $\Delta \rightarrow 0$ ，其表现确实像一个单位冲激偶。

除了单位冲激各不同阶导数的这些奇异函数之外，还能定义代表单位冲激函数连续多次积分的一些信号。正如在例 2.13 中所看到的，单位阶跃是一个积分器的单位冲激响应：

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

因此，

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (2.152)$$

从而就有 $u(t)$ 的下面运算定义：

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (2.153)$$

同理，也能定义由两个积分器的级联所组成的系统，它的单位冲激响应记作 $u_{-2}(t)$ ，这就是一个积分器的单位冲激响应 $u(t)$ 与自己的卷积：

$$u_{-2}(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (2.154)$$

因为 $t < 0$, $u(t) = 0$; $t > 0$, $u(t) = 1$ ，所以

$$u_{-2}(t) = tu(t) \quad (2.155)$$

这个信号称为单位斜坡函数如图 2.37 所示。同时由(2.153)式和(2.154)式也能在卷积的形式下 $u_{-2}(t)$ 的特性得到一个运算定义：

$$\begin{aligned} x(t) * u_{-2}(t) &= x(t) * u(t) * u(t) \\ &= \left(\int_{-\infty}^t x(\sigma) d\sigma \right) * u(t) \quad (2.156) \\ &= \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^\tau x(\sigma) d\sigma \right) d\tau \end{aligned}$$

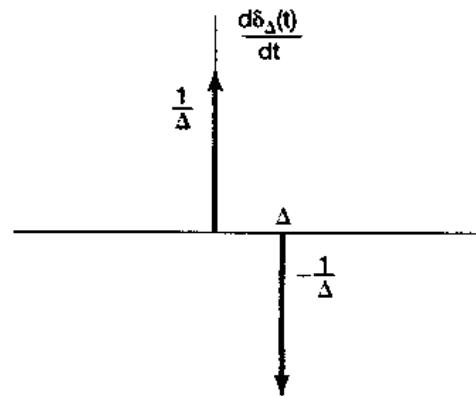


图 2.36 图 1.34 中短矩形脉冲 $\delta_\Delta(t)$ 的导数 $d\delta_\Delta(t)/dt$

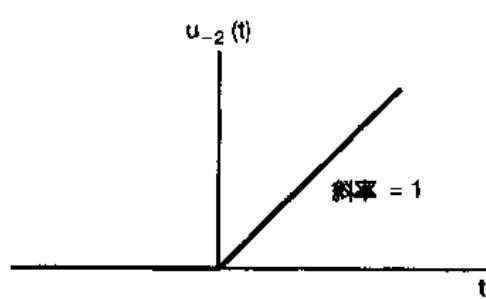


图 2.37 单位斜坡函数

以类似的方式可以将 $\delta(t)$ 的高阶积分定义为多个积分器级联的单位冲激响应:

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{k\text{个}} = \int_{-\infty}^t u_{-(k-1)}(\tau) d\tau \quad (2.157)$$

$x(t)$ 与 $u_{-3}(t)$, $u_{-4}(t)$, \cdots 的卷积就相应产生 $x(t)$ 的高阶积分。 (2.157) 式的积分也能直接像 (2.155) 式所做的那样求出来(见习题 2.73), 得到

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t) \quad (2.158)$$

因此, 不像 $\delta(t)$ 的各阶导数那样, 单位冲激的连续多次积分仍是在每个 t 值都有定义的函数 [(2.158) 式], 和它们在卷积定义下的特性一样。

对 $\delta(t)$ 和 $u(t)$ 有时也需要用另一种符号, 即

$$\delta(t) = u_0(t) \quad (2.159)$$

$$u(t) = u_{-1}(t) \quad (2.160)$$

利用这一符号, $u_k(t)$, $k > 0$, 就记为 k 个微分器级联的单位冲激响应, $u_0(t)$ 就是恒等系统的单位冲激响应, 而 $k < 0$, $u_k(t)$ 就是 $|k|$ 个积分器级联的单位冲激响应。再者, 因为微分器是积分器的逆系统。

$$u(t) * u_1(t) = \delta(t)$$

或者用另一种符号

$$u_{-1}(t) * u_1(t) = u_0(t) \quad (2.161)$$

由 (2.148) 式, (2.157) 式和 (2.161) 式可见, 更为一般的情况是对任何整数 k 和 r , 有

$$u_k(t) * u_r(t) = u_{k+r}(t) \quad (2.162)$$

若 k 和 r 都是正的, (2.162) 式就是 k 个微分器的级联, 再接着 r 个微分器, 产生的输出就是输入的 $(k+r)$ 次微分。相类似, 如果 k 和 r 都是负的, 那就是 $|k|$ 个积分器的级联, 再跟着另外的 $|r|$ 个积分器。若 k 是负, 而 r 为正, 则是 $|k|$ 个积分器的级联, 再跟着 r 个微分器, 整个系统就等效于: 若 $k+r < 0$, $|k+r|$ 个积分器级联; 若 $k+r > 0$, $k+r$ 个微分器的级联; 或者, 若 $k+r=0$, 就是一个恒等系统。因此, 利用在卷积意义下的特性来定义奇异函数, 就能够相对容易地对它们进行运算, 并直接用它们对 LTI 系统的意义来予以解释。因为, 这是本书主要关注的问题, 因此我们在本节所给出的有关奇异函数的运算定义对此目的已经是足够了^①。

2.6 小结

这一章研究了 LTI 系统(包括离散时间和连续时间系统)的一些很重要的表示。在离散时间情况下, 把离时间信号表示成一组移位的单位脉冲的加权和, 并据此导出了对离散时间 LTI 系统响应的卷积和表示。在连续时间情况下, 相类似地把连续时间信号表示成移位单位冲激函数的加权积分, 并据此导出了对连续时间 LTI 系统响应的卷积积分表示。这些表示方法是极为重要的, 因为这样就可以利用系统的单位冲激响应来计算系统对任何输入信号的响

^① 正如第 1 章中提到的, 关于奇异函数的问题一直在数学领域内进行了大量的研究, 在那里把奇异函数称为广义函数和分配理论。本节所采用的方法是沿袭在 1.4 节页注给出的参考文献的严格途径进行的。

应。此外，在2.3节卷积和与卷积积分还提供了一种分析LTI系统性质的方法。特别是这一方法把包括因果性和稳定性在内的LTI系统性质与单位冲激响应的对应性质联系起来。最后，在2.5节讨论了卷积意义下连续时间单位冲激函数及其有关的奇异函数的意义，这些讨论和阐述在LTI系统分析中是特别有用的。

一类重要的连续时间系统是由线性常系数微分方程描述的系统，在离散时间情况下对应的就由线性常系数差分方程描述的系统，它们都起着重要的作用。在2.4节分析了简单的微分和差分方程的例子，并讨论了由这类方程描述的系统的一些性质。尤其是，由线性常系数微分和差分方程描述的系统再与初始松弛的条件结合起来，它们就是因果的，并且是LTI的。在后续各章中将建立其它的方法，这些方法将大大方便于对这类系统的分析。

习 题

习题的第一部分属于基本题，答案在书末给出。其余三个部分分属基本题、深入题和扩充题。

扩充题 介绍一些超出课本内容的应用、概念或方法。

基本题(附答案)

- 2.1 设 $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$ 和 $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$ 计算并画出下列各卷积：
 (a) $y_1[n] = x[n] * h[n]$ (b) $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$
 (c) $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

2.2 考虑信号

$$h[n] = (\frac{1}{2})^{n-1} \{ u[n+3] - u[n-10] \}$$

将A和B用n来表示，以使下式成立：

$$h[n-k] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{n-k-1}, & A \leq k \leq B \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$$

2.3 已知输入 $x[n]$ 和单位脉冲响应为

$$x[n] = (\frac{1}{2})^{n-2} u[n-2] \quad h[n] = u[n+2]$$

求出并画出输出 $y[n] = x[n] * h[n]$

2.4 计算并画出 $y[n] = x[n] * h[n]$ ，这里

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 3 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases} \quad h[n] = \begin{cases} 1, & 4 \leq n \leq 15 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

2.5 设

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases} \quad \text{和} \quad h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

式中 $N \leq 9$ 是一个整数。已知 $y[n] = x[n] * h[n]$ 和

$$y[4] = 5, \quad y[14] = 0$$

试求 N 为多少。

2.6 计算并画出卷积 $y[n] = x[n] * h[n]$ ，这里

$$x[n] = (\frac{1}{3})^{-n} u[-n-1] \quad \text{和} \quad h[n] = u[n-1]$$

2.7 一个线性系统 S 有如下输入-输出关系

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

式中 $g[n] = u[n] - u[n-4]$ 。

- (a) 当 $x[n] = \delta[n-1]$ 时, 求 $y[n]$ (b) 当 $x[n] = \delta[n-2]$ 时, 求 $y[n]$
 (c) S 是 LTI 的吗? (d) 当 $x[n] = u[n]$ 时, 求 $y[n]$ 。

2.8 求出并概略画出下列两个信号的卷积:

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases}$$

$$h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

2.9 令

$$h(t) = e^{2t}u(-t+4) + e^{-2t}u(t-5)$$

确定 A 和 B , 使之有

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau < A \\ 0, & A < \tau < B \\ e^{2(t-\tau)}, & B < \tau \end{cases}$$

2.10 假设

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases}$$

和 $h(t) = x(t/\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ 。

- (a) 求出并画出 $y(t) = x(t) * h(t)$ 。
 (b) 若 $dy(t)/dt$ 仅含有三个不连续点, α 值为多少?

2.11 令

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5) \text{ 和 } h(t) = e^{-3t}u(t)$$

- (a) 求 $y(t) = x(t) * h(t)$ (b) 求 $g(t) = (dx(t)/dt) * h(t)$
 (c) $g(t)$ 与 $y(t)$ 是何关系?

2.12 令

$$y(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k)$$

证明: $y(t) = Ae^{-t}$, $0 \leq t \leq 3$, 并求出 A 值。

2.13 考虑一离散时间系统 S_1 , 其单位脉冲响应为

$$h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$$

- (a) 求整数 A 以满足 $h[n] - Ah[n-1] = \delta[n]$ 。
 (b) 利用(a)的结果, 求 S_1 的逆系统 S_2 (LTI) 的单位脉冲响应。

2.14 下面单位冲激响应中哪些对应于稳定 LTI 系统?

- (a) $h_1(t) = e^{-(1-2i)t}u(t)$ (b) $h_2(t) = e^{-t}\cos(2t)U(t)$

2.15 下面单位脉冲响应中哪些对应于稳定的 LTI 系统?

- (a) $h_1[n] = n \cos(\frac{\pi}{4}n)u[n]$ (b) $h_2[n] = 3^n u[-n+10]$

2.16 对下列各说法, 判断是对或是错:

- (a) 若 $n < N_1$, $x[n] = 0$ 和 $n < N_2$, $h[n] = 0$, 那么 $n < N_1 + N_2$, $x[n] * h[n] = 0$

- (b) 若 $y[n] = x[n] * h[n]$, 则 $y[n-1] = x[n-1] * h[n-1]$
(c) 若 $y(t) = x(t) * h(t)$, 则 $y(-t) = x(-t) * h(-t)$
(d) 若 $t > T_1$, $x(t) = 0$ 和 $t > T_2$, $h(t) = 0$, 则 $t > T_1 + T_2$, $x(t) * h(t) = 0$

2.17 考虑一 LTI 系统, 其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下面微分方程描述:

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t) \quad (\text{P2.17-1})$$

系统并满足初始松弛的条件。

- (a) 若 $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$, 求 $y(t)$?
(b) 注意到(P2.17-1)式对 $|x(t)|$ 与 $|y(t)|$ 的关系也满足, 若

$$x(t) = e^{-t}\cos(3t)u(t)$$

求该 LTI 系统的 $y(t)$ 。

2.18 考虑一因果 LTI 系统, 其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 由下面差分方程给出:

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

若 $x[n] = \delta[n-1]$, 求 $y[n]$ 。

2.19 考虑如图 P2.19 所示的两个系统 S_1 和 S_2 的级联:

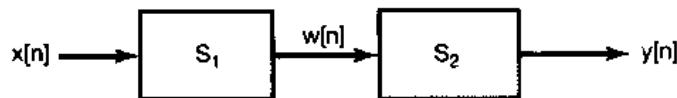


图 P2.19

S_1 : 因果 LTI, $w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n]$;

S_2 : 因果 LTI, $y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n]$ 。

$x[n]$ 与 $y[n]$ 的关系由下面差分方程给出:

$$y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n]$$

(a) 求 α 和 β 。

(b) 给出 S_1 和 S_2 级联后的单位脉冲响应。

2.20 求下列积分:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \cos(t) dt \quad (b) \int_0^5 \sin(2\pi t) \delta(t+3) dt$$

$$(c) \int_{-5}^5 u_1(1-\tau) \cos(2\pi\tau) d\tau$$

基本题

2.21 计算下列各对信号的卷积 $y[n] = x[n] * h[n]$:

$$(a) \begin{cases} x[n] = \alpha^n u[n] \\ h[n] = \beta^n u[n] \end{cases} \quad \alpha \neq \beta \quad (b) x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$$

$$(c) x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n-4], h[n] = 4^n u[2-n] \quad (d) x[n] \text{ 和 } h[n] \text{ 如图 P2.21 所示}$$



图 P2.21

2.22 对以下各对波形求单位冲激响应为 $h(t)$ 的 LTI 系统对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$, 并概略画出结果。

$$(a) x(t) = e^{-\alpha} u(t) \quad h(t) = e^{-\beta} u(t)$$

(分别在 $\alpha \neq \beta$ 和 $\alpha = \beta$ 下完成)

$$(b) x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5) \quad h(t) = e^{2t} u(1-t)$$

(c) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P2.22(a) 所示。

(d) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P2.22(b) 所示。

(e) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P2.22(c) 所示。

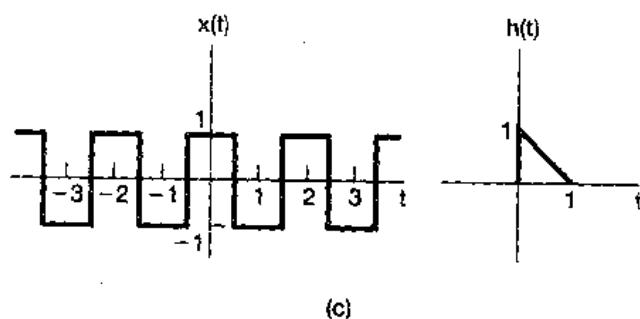
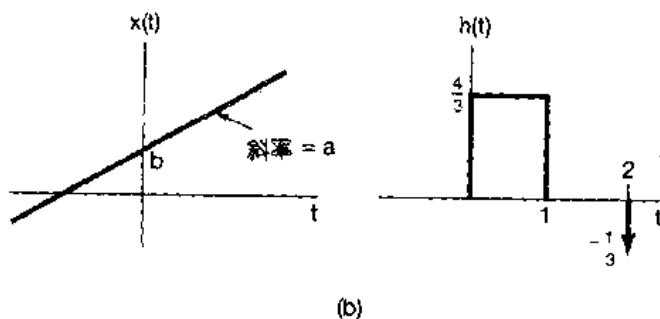
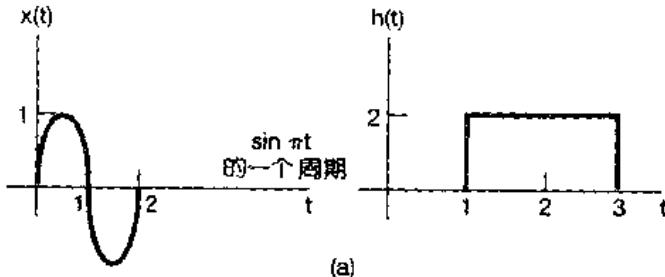


图 P2.22

2.23 设 $h(t)$ 是如图 P2.23(a)所示的三角脉冲, $x(t)$ 为图 P2.23(b)所示的单位冲激串, 即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

对下列 T 值, 求出并画出 $y(t) = x(t) * h(t)$:

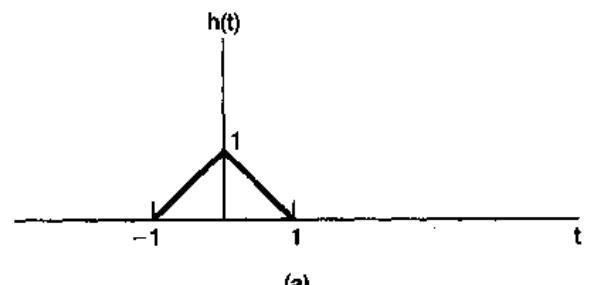
- (a) $T=4$ (b) $T=2$ (c) $T=3/2$ (d) $T=1$

2.24 考虑图 P2.24(a)中三个因果 LTI 系统的级联, 单位脉冲响应 $h_2[n]$ 为

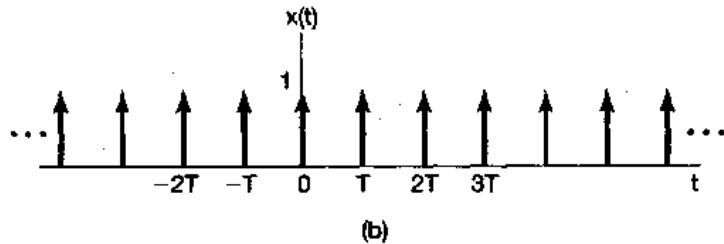
$$h_2[n] = u[n] - u[n-2]$$

整个系统的单位脉冲响应如图 P2.24(b)所示。

(a) 求 $h_1[n]$ 。

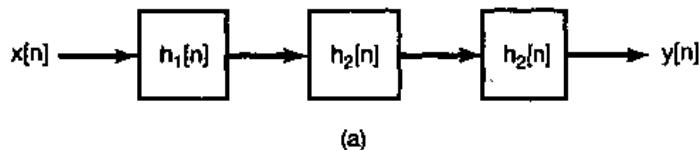


(a)

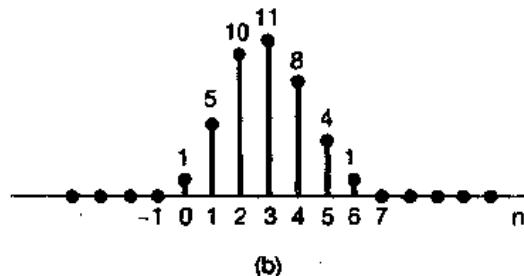


(b)

图 P2.23



(a)



(b)

图 P2.24

(b) 求整个系统对输入 $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ 的响应。

2.25 令信号

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

其中

$$x[n] = 3^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \text{ 和 } h_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$$

(a) 不利用卷积的分配律性质求 $y[n]$ 。

(b) 利用卷积的分配律性质求 $y[n]$ 。

2.26 求

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] * x_3[n]$$

其中 $x_1[n] = (0.5)^n u[n]$, $x_2[n] = u[n+3]$ 和 $x_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ 。

(a) 求卷积 $x_1[n] * x_2[n]$ 。

(b) 将(a)的结果与 $x_3[n]$ 卷积求 $y[n]$ 。

(c) 求卷积 $x_2[n] * x_3[n]$ 。

(d) 将(c)的结果与 $x_1[n]$ 卷积求 $y[n]$ 。

2.27 定义一个连续时间信号 $v(t)$ 下的面积为

$$A_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) dt$$

证明: 若 $y(t) = x(t) * h(t)$, 则

$$A_y = A_x A_h$$

2.28 下面均为离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应, 试判定每一系统是否是因果和/或稳定的。陈述理由。

(a) $h[n] = (-\frac{1}{5})^n u[n]$

(b) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

(c) $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$

(d) $h[n] = (5)^n u[3-n]$

(e) $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$

(f) $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$

(g) $h[n] = n(\frac{1}{3})^n u[n-1]$

2.29 下面均为连续时间 LTI 系统的单位冲激响应, 试判定每一系统是否是因果和/或稳定的。陈述理由。

(a) $h(t) = e^{-4t} u(t-2)$

(b) $h(t) = e^{-6t} u(3-t)$

(c) $h(t) = e^{-2t} u(t+50)$

(d) $h(t) = e^{2t} u(-1-t)$

(e) $h(t) = e^{-6|t|}$

(f) $h(t) = t e^{-t} u(t)$

(g) $h(t) = (2e^{-t} - e^{(t-100)/100}) u(t)$

2.30 考虑一阶差分方程

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

并设系统初始松弛(即: 若 $n < n_0$, $x[n] = 0$, 则 $n < n_0$, $y[n] = 0$), 求该系统的单位脉冲响应。可以将该方程重新按排成将 $y[n]$ 用 $y[n-1]$ 和 $x[n]$ 来表示求解, 这样依次得出 $y[0]$, $y[+1]$, $y[+2]$, …等。

2.31 考虑一初始松弛的 LTI 系统, 其差分方程为

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2]$$

利用递归过程求该系统对图 P2.31 所示输入 $x[n]$ 的响应。

2.32 考虑一差分方程

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (\text{P2.32-1})$$

设

$$x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n] \quad (\text{P2.32-2})$$

假定解 $y[n]$ 由(P2.32-1)的一个特解 $y_p[n]$ 和一个满足下列方程:

$$y_h[n] - \frac{1}{2}y_h[n-1] = 0$$

的齐次解 $y_h[n]$ 组成,

(a) 证明, 齐次解 $y_h[n]$ 为

$$y_h[n] = A(\frac{1}{2})^n$$

(b) 求得的特解 $y_p[n]$ 满足

$$y_p[n] - \frac{1}{2}y_p[n-1] = (\frac{1}{3})^n u[n]$$

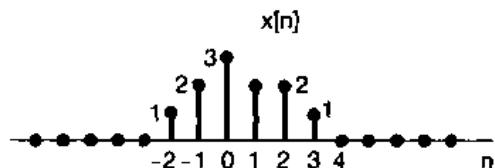


图 P2.31

假设 $y_p[n]$ 具有形式为 $B(\frac{1}{3})^n$, $n \geq 0$, 将其代入以上方程以确定 B 值。

(c) 假设由(P2.32-1)式给出的 LTI 系统初始松弛, 其输入为(P2.32-2)所示。因为 $n < 0$, $x[n] = 0$, 所以就有 $n < 0$, $y[n] = 0$ 。同时, 根据上面的(a)和(b), $y[n]$ 就为

$$y[n] = A(\frac{1}{2})^n + B(\frac{1}{3})^n, n \geq 0$$

为了求出未知常数 A , 必须在 $n \geq 0$ 给出某一个 $y[n]$ 的值。利用初始松弛条件和(P2.32-1)式及(P2.32-2)式确定 $y[0]$, 根据这个值确定 A 。这样计算的结果就得到差分方程(P2.32-1)式在初始松弛条件下, 当输入 $x[n]$ 由(P2.32-2)给出时的解。

2.33 考虑一系统其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 满足如下一阶微分方程:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (\text{P2.33-1})$$

同时系统也满足初始松弛条件。

(a) (i) 当输入 $x_1(t) = e^{3t}u(t)$ 时, 求系统输出 $y_1(t)$ 。

(ii) 当输入 $x_2(t) = e^{2t}u(t)$ 时, 求系统输出 $y_2(t)$ 。

(iii) 当输入 $x_3(t) = \alpha e^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$ 时, α 和 β 是实数, 求系统输出 $y_3(t)$ 。证明: $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ 。

(iv) 现在令 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为任意信号, 且

$$x_1(t) = 0, t < t_1$$

$$x_2(t) = 0, t < t_2$$

设 $y_1(t)$ 是系统对输入 $x_1(t)$ 的响应, $y_2(t)$ 是对 $x_2(t)$ 的响应, 以及 $y_3(t)$ 是对 $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ 的响应, 证明:

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

因此可得: 该系统是线性的。

(b) (i) 当 $x_1(t) = K e^{2t}u(t)$ 时, 求系统输出 $y_1(t)$ 。

(ii) 当 $x_2(t) = K e^{2(t-T)}u(t-T)$ 时, 求系统输出 $y_2(t)$ 。并证明: $y_2(t) = y_1(t-T)$ 。

(iii) 现在设 $x_1(t)$ 是任意信号, 且有 $t < t_0$, $x_1(t) = 0$, 令 $y_1(t)$ 是系统对输入为 $x_1(t)$ 时的输出, $y_2(t)$ 是系统对 $x_2(t) = x_1(t-T)$ 的输出, 证明:

$$y_2(t) = y_1(t-T)$$

因此可得: 该系统是时不变的。再与(a)所得结论联系起来, 所给系统是 LTI 的。因为系统满足初始松弛条件, 所以它也是因果的。

2.34 初始松弛的条件就相当于在输入信号所加入时刻的零附加条件相一致。本题要证明, 如果附加条件是非零, 或者它总是在某一固定时刻给出, 而不管输入信号何时加入, 那么相应的系统就不可能是 LTI 的。考虑一个系统, 其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 满足(P2.33-1)式的一阶微分方程。

(a) 给定附加条件 $y(1) = 1$, 用一个反例证明系统不是线性的。

(b) 给定附加条件 $y(1) = 1$, 用一个反例证明系统不是时不变的。

(c) 给定附加条件 $y(1) = 1$, 证明系统是增量线性的。

(d) 给定附加条件 $y(1) = 0$, 证明系统是线性的, 但不是时不变的。

(e) 给定附加条件 $y(0) + y(4) = 0$, 证明系统是线性的, 但不是时不变的。

2.35 在前一个题中看到, 在某一固定时刻应用附加条件, 而不计输入信号加入的时刻会导致相应系统不是时不变的。本题将研究固定时刻的附加条件在一个系统因果性上的影响。现考虑一个系统其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 满足(P2.33-1)式给出的一阶微分方程。假设与该微分方程有关的附加条件是 $y(0) = 0$ 。求系统对下列两个输入的系统输出:

(a) $x_1(t) = 0$, 对所有 t

(b) $x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & t \geq -1 \end{cases}$

凭直观观察, 若 $y_1(t)$ 是对输入 $x_1(t)$ 的输出, $y_2(t)$ 是对 $x_2(t)$ 的输出, 那么即使 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 在 $t < -1$ 时是完全一样的, 而 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 在 $t < -1$ 也是不同的。以这点作为证明的基础来得出所给系统不是因果的。

- 2.36 考虑一离散时间系统, 其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 的关系由下列差分方程给出:

$$y[n] = (\frac{1}{2})y[n-1] + x[n]$$

(a) 证明, 若该系统满足初始松弛的条件(即若 $n < n_0$, $x[n] = 0$, 则 $n < n_0$, $y[n] = 0$), 则它是线性和时不变的。

(b) 证明, 若系统不满足初始松弛条件, 但利用附加条件 $y[n] = 0$, 那么它不是因果的。

[提示: 利用类似于习题 2.35 的证明方法]

- 2.37 考虑一系统其输入和输出关系由(P2.33-1)式的一阶微分方程给出, 假定系统满足初始松弛条件[即, 若 $t > t_0$, $x(t) = 0$, 则 $t > t_0$, $y(t) = 0$]。证明: 该系统不是因果的。[提示: 对该系统考虑两个输入, $x_1(t) = 0$ 和 $x_2(t) = e^t(u(t) - u(t-1))$, 其输出分别为 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$, 然后证明: 对于 $t < 0$, $y_1(t) \neq y_2(t)$]。

- 2.38 对于由下列差分方程描述的因果 LTI 系统画出它们的方框图表示:

(a) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n]$ (b) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + x[n-1]$

- 2.39 对于由下列微分方程描述的因果 LTI 系统画出它们的方框图表示:

(a) $y(t) = -(\frac{1}{2})\frac{dy(t)}{dt} + 4x(t)$ (b) $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$

深入题

- 2.40 (a) 考虑一个 LTI 系统, 其输入和输出关系通过如下方程联系

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

求该系统的单位冲激响应?

(b) 当输入如图 P2.40 所示时, 求系统的响应。

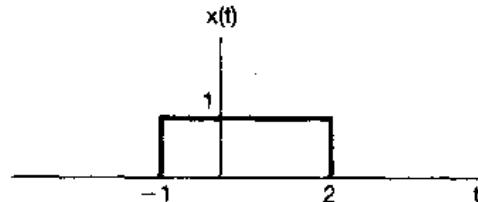


图 P2.40

- 2.41 有一信号

$$x[n] = a^n u[n]$$

(a) 画出 $g[n] = x[n] - ax[n-1]$

(b) 利用(a)的结果, 再与卷积性质结合起来, 求一个序列 $h[n]$, 使之满足

$$x[n] * h[n] = (\frac{1}{2})^n |u[n+2] - u[n-2]|$$

- 2.42 假定信号

$$x(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5) \text{ 和信号 } h(t) = e^{j\omega_0 t}$$

(a) 确定一个 ω_0 值, 保证 $y(0) = 0$, 这里 $y(t) = x(t) * h(t)$

(b) 你认为上述答案是唯一的吗?

- 2.43 卷积的一个重要性质是满足结合律, 本题将验证并说明这个性质。

(a) 证明

$$[x(t) * h(t)] * g(t) = x(t) * [h(t) * g(t)] \quad (\text{P2.43-1})$$

利用(P2.43-1)式两边都等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\sigma) g(t - \tau - \sigma) d\tau d\sigma$$

来证明。

(b) 考虑两个 LTI 系统，其单位脉冲响应 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 分别如图 2.43(a) 所示。这两个系统按图 2.43(b) 级联，令 $x[n] = u[n]$

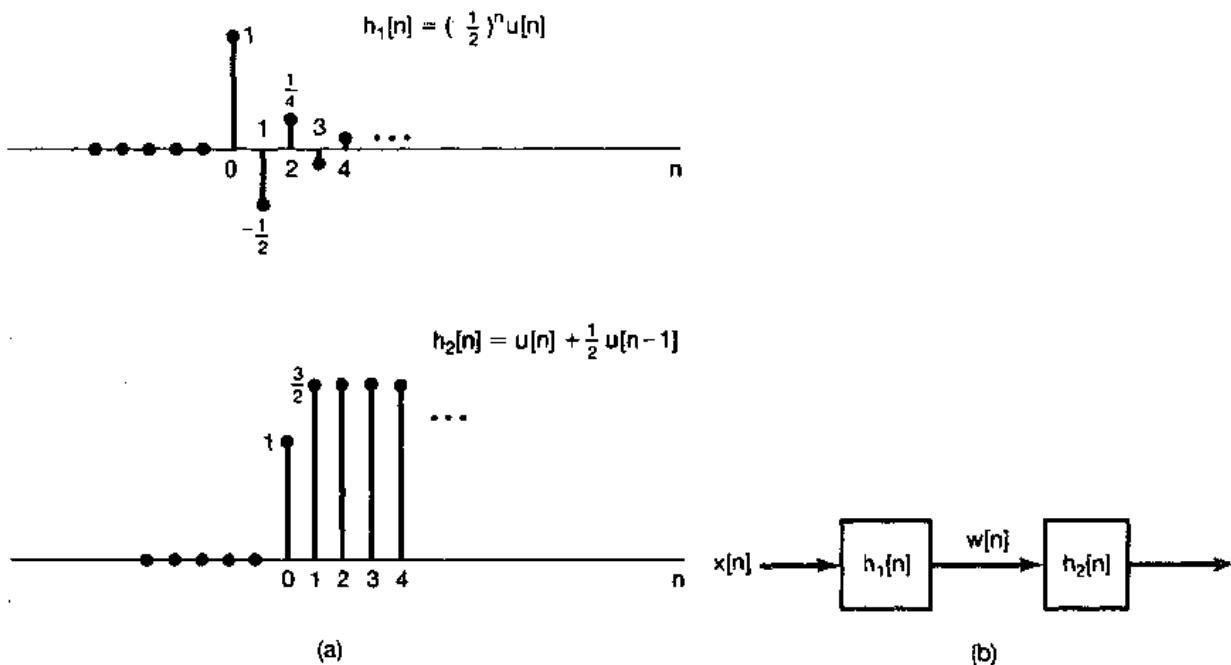


图 P2.43

(i) 先计算 $w[n] = x[n] * h_1[n]$ ，然后再计算 $y[n] = w[n] * h_2[n]$ ，也就是按 $y[n] = [x[n] * h_1[n]] * h_2[n]$ 来求 $y[n]$ 。

(ii) 先将 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 卷积，得出 $g[n] = h_1[n] * h_2[n]$ ，然后再将 $x[n]$ 与 $g[n]$ 卷积，求出 $y[n] = x[n] * [h_1[n] * h_2[n]]$ 。

(i) 和 (ii) 的结果应该相同，这就说明了离散时间卷积的结合律性质。

(c) 再次考虑图 P2.43(b) 两个 LTI 系统的级联，这时

$$h_1[n] = \sin 8n \text{ 和 } h_2[n] = a^n u[n], |a| < 1$$

输入是

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$$

求输出 $y[n]$ 。[提示：利用卷积性质的结合律和交换律将大大方便此题的求解]

2.44 (a) 若

$$x(t) = 0, |t| > T_1 \text{ 和 } h(t) = 0, |t| > T_2$$

则

$$x(t) * h(t) = 0, |t| > T_3$$

T_3 是某个正数。试用 T_1 和 T_2 来表示 T_3 。

(b) 一离散时间 LTI 系统输入为 $x[n]$ ，单位脉冲响应为 $h[n]$ 和输出为 $y[n]$ 。若已知 $h[n]$ 在 $N_0 \leq n \leq N_1$ 区间以外都是零，而已知 $x[n]$ 在 $N_2 \leq n \leq N_3$ 区间以外都是零，那么输出 $y[n]$ 除了在某一区间 $N_4 \leq n \leq N_5$ 内，其余地方也都是零。

(i) 利用 N_0, N_1, N_2 和 N_3 来求出 N_4 和 N_5 。

(ii) 若间隔 $N_0 \leq n \leq N_1$ 长度为 M_h ， $N_2 \leq n \leq N_3$ 长度为 M_x ，而 $N_4 \leq n \leq N_5$ 长度为 M_y ，试用

M_k 和 M_x 来表示 M_y 。

- (c) 考虑一离散时间 LTI 系统，它具有这么一个特点，即若对全部 $n \geq 10$, $x[n] = 0$, 则对所有的 $n \geq 15$ 都有 $y[n] = 0$ 。系统单位脉冲响应 $h[n]$ 必须满足什么条件才有此特性？

- (d) 有一个 LTI 系统其单位冲激响应如图 P2.44 所示。为了确定 $y(0)$, 必须要知道在什么一个区间上的 $x(t)$ ？

- 2.45 (a) 证明，若一个 LTI 系统对 $x(t)$ 的响应是输出 $y(t)$, 则该系统对

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

的响应是 $y'(t)$ 。做这道题有三种不同的方法：

(i) 直接由线性和时不变性，并根据

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$$

(ii) 通过将卷积积分取微分来解。

(iii) 利用图 P2.45 的系统来解。

- (b) 说明下列关系的正确性：

$$(i) y'(t) = x(t) * h'(t)$$

$$\begin{aligned} (ii) y(t) &= \left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) * h'(t) = \int_{-\infty}^t [x'(\tau) * h(\tau)] d\tau \\ &= x'(t) * \left(\int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

[提示：利用本题(a)中(iii)题的方框图和 $u_1(t) * u_{-1}(t) = \delta(t)$, 这些都很容易证明]

- (c) 一个 LTI 系统对输入 $x(t) = e^{-5t}u(t)$ 的响应为 $y(t) = \sin \omega_0 t$, 用本题的(a)的结果, 会有助于确定该系统的单位冲激响应。

- (d) 令 $s(t)$ 是一连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应, 利用(b)的结果, 推出对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau) * s(t - \tau) d\tau \quad (P2.45-1)$$

同时证明

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (P2.45-2)$$

- (e) 利用(P2.45-1)式求单位阶跃响应为

$$s(t) = (e^{-3t} - 2e^{-2t} + 1)u(t)$$

的 LTI 系统对输入 $x(t) = e^t u(t)$ 的响应。

- (f) 令 $s[n]$ 为一离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应, 在离散时间下与(P2.45-1)式和(P2.45-2)式对应的是什么?

- 2.46 考虑一个 LTI 系统 S 和一信号 $x(t) = 2e^{-3t}u(t-1)$, 若

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

和

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow -3y(t) + e^{-2t}u(t)$$

求系统 S 的单位冲激响应 $h(t)$ 。

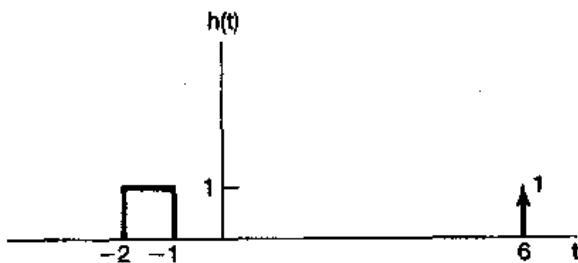


图 P2.44



图 P2.45

- 2.47 已知单位冲激响应为 $h_0(t)$ 的某一线性时不变系统，当输入为 $x_0(t)$ 时，输出为 $y_0(t)$ ， $y_0(t)$ 如图 P2.47 所示。现在给出下列一组输入和线性时不变系统的单位冲激响应：

输入 $x(t)$	单位冲激响应 $h(t)$
(a) $x(t) = 2x_0(t)$	$h(t) = h_0(t)$
(b) $x(t) = x_0(t) - x_0(t-2)$	$h(t) = h_0(t)$
(c) $x(t) = x_0(t-2)$	$h(t) = h_0(t+1)$
(d) $x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(t)$
(e) $x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(-t)$
(f) $x(t) = x'_0(t)$	$h(t) = h'_0(t)$

[这里 $x'_0(t)$ 和 $h'_0(t)$ 分别为 $x_0(t)$ 和 $h_0(t)$ 的一阶导数]。

在每一种情况下，判断当输入为 $x(t)$ ，系统的单位冲激响应为 $h(t)$ 时，有无足够的信息来确定输出 $y(t)$ 。如果有可能确定 $y(t)$ ，请准确地画出 $y(t)$ ，并在图上标明数值。

- 2.48 判断下面有关 LTI 系统的说法是对或是错，并陈述理由。

- (a) 若 $h(t)$ 是一个 LTI 系统的单位冲激响应，并且 $h(t)$ 是周期的且非零，则系统是不稳定的。
- (b) 一个因果的 LTI 系统的逆系统总是因果的。
- (c) 若 $|h[n]| \leq K$ (对每一个 n)， K 为某已知数，则以 $h[n]$ 作为单位脉冲响应的 LTI 系统是稳定的。
- (d) 若一离散时间 LTI 系统其单位脉冲响应 $h[n]$ 为有限长，则系统是稳定的。
- (e) 若一个 LTI 系统是因果的，它就是稳定的。
- (f) 一个非因果的 LTI 系统与一个因果的 LTI 系统级联，必定是非因果的。
- (g) 当且仅当一个连续时间 LTI 系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 是绝对可积的，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < \infty$$

则该系统就是稳定的。

- (h) 当且仅当一个离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 在 $n < 0$ 是零，该系统就是因果的。

- 2.49 在正文中已证明，若 $h[n]$ 是绝对可和的，即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

那么具有单位脉冲响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统就是稳定的。这意味着绝对可和是稳定性的充分条件。本题将证明它也是一个必要条件。现考虑一 LTI 系统，它的单位脉冲响应 $h[n]$ 不是绝对可和的，即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty$$

- (a) 假定这个系统的输入是

$$x[n] = \begin{cases} 0, & \text{若 } h[-n] = 0 \\ \frac{h[-n]}{|h[-n]|}, & \text{若 } h[-n] \neq 0 \end{cases}$$

这个输入信号代表了一个有界的输入吗？若是，什么是最小的 B ，使得

$$|x[n]| \leq B \quad \text{对全部 } n?$$

- (b) 对这一特选的输入求 $n=0$ 时的输出。这个结果能证明绝对可和是稳定性必要条件这一论点吗？
- (c) 用相同的方法证明：当且仅当单位冲激响应是绝对可积时，一个连续时间 LTI 系统就是稳定的。

- 2.50 图 P2.50 示出两个系统的级联，其中第一个系统 A 是 LTI 的，而第二个系统 B 是系统 A 的逆系统。设 $y_1(t)$ 是系统 A 对 $x_1(t)$ 的响应， $y_2(t)$ 是系统 A 对 $x_2(t)$ 的响应。

- (a) 若输入为 $ay_1(t) + by_2(t)$ ， a 和 b 都是常数，求系统 B 的响应。

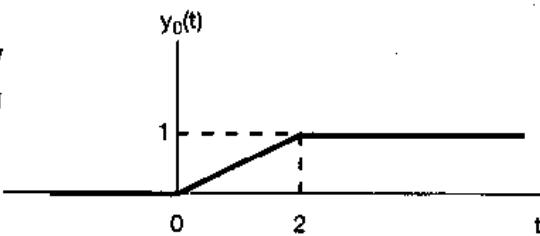


图 P2.47

- (b) 若输入为 $y_1(t - \tau)$, 求系统 B 的响应。
- 2.51 在正文已经看到, 两个 LTI 系统的级联其总的输入-输出关系与它们在级联中的次序没有关系。这一交换律性质都依赖于这两个系统的线性和时不变性。在本题中要说明这一点。



图 P2.50

(a) 考虑两个离散时间系统 A 和 B, 其中系统 A 是一个 LTI 系统, 其单位脉冲响应 $h[n] = (1/2)^n u[n]$, 系统 B 是线性的, 但是时变的。具体一点, 若 $w[n]$ 是系统 B 的输入, 其输出是

$$z[n] = nw[n]$$

用分别计算图 P2.51(a)和图 P2.51(b)两个级联系统的单位脉冲响应证明这两个系统不具备交换律性质。

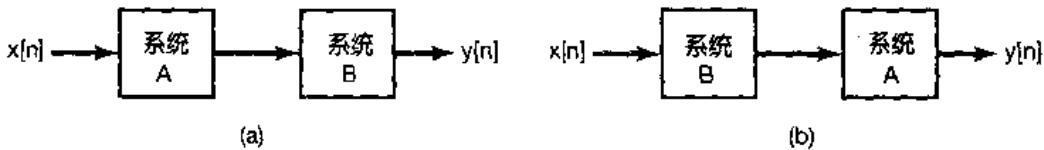


图 P2.51

(b) 将图 P2.51 的两个级联系统中的系统 B 代之以输入 $w[n]$ 和输出 $z[n]$ 满足下列关系的系统:

$$z[n] = w[n] + 2$$

重新按(a)要求计算。

- 2.52 考虑一离散时间 LTI 系统, 其单位脉冲响应为

$$h[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

式中 $|\alpha| < 1$ 。证明: 该系统的单位阶跃响应是

$$s[n] = [\frac{1}{(\alpha-1)^2} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\alpha^n + \frac{\alpha}{(\alpha-1)}(n+1)\alpha^n]u[n]$$

[提示: 利用下面等式

$$\sum_{k=0}^N (k+1)\alpha^k = \frac{d}{d\alpha} \sum_{k=0}^{N+1} \alpha^k$$

- 2.53 (a) 有齐次微分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \quad (\text{P2.53-1})$$

证明: 若 s_0 是方程

$$p(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k = 0 \quad (\text{P2.53-2})$$

的一个解, 则 $Ae^{s_0 t}$ 是(P2.53-1)式的一个解, 其中 A 是任意复常数。

- (b) (P2.53-2)式的多项式 $p(s)$ 可以根据方程的根 s_1, \dots, s_r 进行因式分解为

$$p(s) = a_N(s - s_1)^{\sigma_1}(s - s_2)^{\sigma_2} \cdots (s - s_r)^{\sigma_r}$$

式中 s_i 是(P2.53-2)式的互异根, 而 σ_i 是重根数(即在解中每个根出现的次数)。应该有

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_r = N$$

一般来说, 若 $\sigma_i > 1$, 那么不仅 $Ae^{s_i t}$ 是(P2.53-1)式的一个解。而且 $At^j e^{s_i t}$, 也是它的解, 只要 j 是大于或等于 0, 小于或等于 $\sigma_i - 1$ 的一个整数。为了说明这一点, 证明: 若 $\sigma_i = 2$, 那么 $At e^{s_i t}$ 就是(P2.53-1)式的一个解。

[提示:证明,若 s 是某任意复数,则

$$\sum_{k=0}^N \frac{d^k(Ate^s)}{dt^k} = Ap(s)te^s + A \frac{dp(s)}{ds}e^s]$$

因此,(P2.53-1)式最一般解是

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{\sigma_i-1} A_{ij} t^j e^{\sigma_i t}$$

式中 A_{ij} 是任意复常数。

(c)用给出的附加条件解下列齐次微分方程:

$$(i) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$$

$$(ii) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$$

$$(iii) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$(iv) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$$

$$(v) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -2$$

$$(vi) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$$

2.54 (a)考虑齐次差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \quad (\text{P2.54-1})$$

证明:若 z_0 是方程

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0 \quad (\text{P2.54-2})$$

的一个解,则 Az_0^n 就是(P2.54-1)式的一个解,其中 A 为任意常数。

(b)由于现在对仅有非负幂的 z 多项式操作起来比较方便,所以将(P2.54-2)式的两边各乘以 z^N ,可得

$$p(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k} = 0 \quad (\text{P2.54-2})$$

$p(z)$ 多项式可以因式分解为

$$p(z) = a_0(z - z_1)^{\sigma_1} \cdots (z - z_r)^{\sigma_r}$$

式中 z_1, \dots, z_r 为 $p[z]$ 的各互异根。

证明:若 $y[n] = nz_i^{n-1}$, 则

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \frac{dp(z)}{dz} z^{n-N} + (n-N)p(z)z^{n-N-1}$$

利用上面结果,证明:若 $\sigma_i = 2$,则 Az_i^n 和 Bnz_i^{n-1} 都是(P2.54-1)的解,式中 A 和 B 为任意复常数。更一般的情况是可以利用相同过程证明:若 $\sigma_i > 1$,则

$$A \frac{n!}{r!(n-r)!} z^{n-r}$$

是(P2.54-1)式的一个解, $r = 0, 1, \dots, \sigma_i - 1$ ①。

(c)用给出的附加条件解下列齐次差分方程:

① 此处用了阶乘的符号,即 $k! = k(k-1)(k-2)\cdots(2)(1)$,在这里 $0!$ 定义为1。

- (i) $y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0; y[0] = 1, y[-1] = -6$
- (ii) $y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = 0; y[0] = 1, y[1] = 0$
- (iii) $y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = 0; y[0] = 1, y[10] = 21$
- (iv) $y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = 0; y[0] = 0, y[-1] = 1$

2.55 在正文中讨论了一种解线性常系数差分方程的方法，而在习题 2.30 中又给了另一种解法。如果已作了初始松弛假设的话，由该差分方程描述的系统就是 LTI 和因果的，那么原则上就能利用这两种方法中的任何一种来确定系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 。在第 5 章还将讨论另一种方法，可以更为简洁地来确定 $h[n]$ 。本题还将介绍另一种方法，这种方法基本上表明， $h[n]$ 可以通过在适当的初始条件下解齐次方程来确定。

(a) 考虑系统初始松弛，并由下列方程描述：

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (\text{P2.55-1})$$

假设 $x[n] = \delta[n]$ ， $y[0]$ 是什么？对于 $n \geq 1$ ， $h[n]$ 满足什么样方程和怎样的附加条件？解出这个方程就求得 $h[n]$ 的一个闭式表达式。

(b) 接下来考虑该 LTI 系统，初始松弛且由下列差分方程描述：

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] \quad (\text{P2.55-2})$$

这个系统作为两个初始松弛的 LTI 系统的级联如图 P2.55(a) 所示。由于 LTI 系统的性质，可以颠倒级联中系统的次序，就得到另一种表示如图 P2.55(b) 所示。据此，利用(a)的结果来确定由 (P2.55-2) 式给出的系统单位脉冲响应。

(c) 再考虑一下(a)中的系统， $h[n]$ 记作它的单位脉冲响应。利用证明 (P2.55-3) 式满足差分方程 (P2.55-1) 式来证明对任意输入 $x[n]$ 的响应 $y[n]$ 事实上就是由下面卷积和给出

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[n-m]x[m] \quad (\text{P2.55-3})$$

(d) 考虑一个初始松弛并由下列差分方程描述的 LTI 系统：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = x[n] \quad (\text{P2.55-4})$$

假定 $a_0 \neq 0$ ，若 $x[n] = \delta[n]$ ， $y[0]$ 是什么？利用这个结果，列出齐次方程和系统单位脉冲响应必须满足的初始条件。

接下来考虑由差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (\text{P2.55-5})$$

描述的因果 LTI 系统。将这个系统的单位脉冲响应由 (P2.55-4) 式给出的 LTI 系统的单位脉冲响应来表示。

(e) 还有另一种方法来确定由 (P2.55-5) 式描述的 LTI 系统的单位脉冲响应。这就是：已知初始松弛，这种情况下即， $y[-N] = y[-N+1] = \dots = y[-1] = 0$ ，当 $x[n] = \delta[n]$ 时，用递归运算解 (P2.55-5) 式，求得 $y[0], \dots, y[M]$ 。对 $n \geq M$ ， $h[n]$ 满足什么方程？对这个方程合适的初始条件是什么？

(f) 利用(d)和(e)中所讨论的任一种方法，求由下列方程描述的因果 LTI 系统的单位脉冲响应：

- (i) $y[n] - y[n-2] = x[n]$
- (ii) $y[n] - y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$
- (iii) $y[n] - y[n-2] = 2x[n] - 3x[n-4]$

$$(iv) y[n] - (\sqrt{3}/2)y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

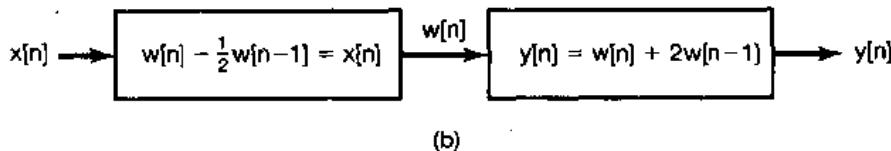
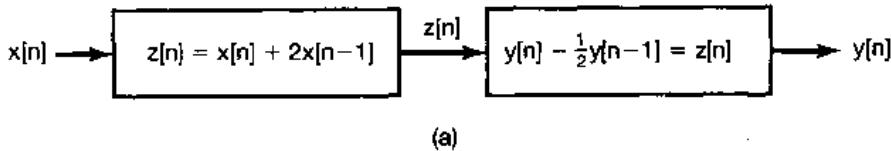


图 P2.55

2.56 本题和上题一样是对连续时间系统讨论一种求单位冲激响应的办法。将再次看到，对于一个具有初始松弛条件的，由线性常系数微分方程描述的 LTI 系统，求 $t > 0$ 时单位冲激响应 $h(t)$ 的问题，转变为解一个具有适当初始条件的齐次方程问题。

(a) 考虑初始松弛，并由下面微分方程描述的 LTI 系统：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (P2.56-1)$$

假设 $x(t) = \delta(t)$ 。为了在单位冲激加入以后立即确定 $y(t)$ 的值，可以考虑将(P2.56-1)式从 $t = 0^-$ 到 $t = 0^+$ （也就是从冲激“刚刚加入之前”到“刚刚加入之后”）积分，可得

$$y(0^+) - y(0^-) + 2 \int_{0^-}^{0^+} y(\tau) d\tau = \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad (P2.56-2)$$

因为系统初始松弛，以及 $t < 0$, $x(t) = 0$ ，所以 $y(0^-) = 0$ 。为了满足(P2.56-2)式，必须有 $y(0^+) = 1$ 。因为 $t > 0$, $x(t) = 0$ ，因此系统的单位冲激响应就是齐次微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

在初始条件 $y(0^+) = 1$ 下的解。解这个微分方程可以求得该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。证明

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

对任何输入 $x(t)$ 都满足(P2.56-1)，就可验证所得结果。

(b) 为了把前面的论据一般化，现考虑初始松弛，由下面微分方程描述的 LTI 系统

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t) \quad (P2.56-3)$$

设 $x(t) = \delta(t)$ 。因为 $t < 0$, $x(t) = 0$ ，所以初始松弛条件就意味着

$$y(0^-) = \frac{dy}{dt}(0^-) = \cdots = \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(0^-) = 0 \quad (P2.56-4)$$

将(P2.56-3)式两边从 $t = 0^-$ 到 $t = 0^+$ 积分，并应用(P2.56-4)式，采用类似于在(a)中所用的证明方式，可以证明所得方程满足

$$y(0^+) = \frac{dy}{dt}(0^+) = \cdots = \frac{d^{N-2}y}{dt^{N-2}}(0^+) = 0 \quad (P2.56-5a)$$

和

$$\frac{d^{N-2}y}{dt^{N-2}}(0^+) = \frac{1}{a^N} \quad (P2.56-5b)$$

这样，对于 $t > 0$ 的系统单位冲激响应就可以用(P2.56-5)式的初始条件，解下面的齐次方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

求出。

(c) 考虑由下面微分方程描述的因果 LTI 系统：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (\text{P2.56-6})$$

将该系统的单位冲激响应用(b)系统的单位冲激响应来表示。(提示：考察一下图 P2.56)



图 P2.56

(d) 应用在(b)和(c)中所说的步骤，求由下列微分方程描述的、初始松弛的 LTI 系统的单位冲激响应：

$$(i) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$(ii) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

(e) 利用(b)和(c)中所得的结果，推论：若在(P2.56-6)式中 $M \geq N$ ，那么单位冲激响应 $h(t)$ 一定在 $t = 0$ 处含有奇异函数项；也即， $h(t)$ 一定包含有形式为

$$\sum_{r=0}^{M-N} a_r u_r(t)$$

的项，式中 a_r 是常数，而 $u_r(t)$ 是在 2.5 节所定义的奇异函数。

(f) 求由下面微分方程所描述的因果 LTI 系统的单位冲激响应：

$$(i) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$(ii) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

2.57 考虑一因果 LTI 系统 S，其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 由下列差分方程给出：

$$y[n] = -ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1]$$

(a) 证明，系统 S 可以由 S_1 和 S_2 两个因果 LTI 系统的级联构成， S_1 和 S_2 的输入-输出关系分别为：

$$S_1: y_1[n] = b_0x_1[n] + b_1x_1[n-1]$$

$$S_2: y_2[n] = -ay_2[n-1] + x_2[n]$$

(b) 画出 S_1 的方框图表示。

(c) 画出 S_2 的方框图表示。

(d) 将 S 的方框图表示画成 S_1 的方框图表示紧跟着 S_2 的方框图表示的级联。

(e) 将 S 的方框图表示画成 S_2 的方框图表示紧跟着 S_1 的方框图表示的级联。

(f) 证明在(e)中得到的 S 方框图表示中两个单位延迟单元可以合并成一个单位延迟单元。这样所得的方框图称为 S 的直接 II 型实现；而在(d)和(e)中得到的方框图称为 S 的直接 I 型实现。

2.58 考虑一因果 LTI 系统 S，其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 由下面差分方程给出：

$$2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4]$$

(a) 证明，系统 S 可以由 S_1 和 S_2 两个因果 LTI 系统的级联构成， S_1 和 S_2 的输入-输出关系分别为：

$$S_1: 2y_1[n] = x_1[n] - 5x_1[n-4]$$

$$S_2: y_2[n] = \frac{1}{2}y_2[n-1] - \frac{1}{2}y_2[n-3] + x_2[n]$$

- (b) 画出 S_1 的方框图表示。
(c) 画出 S_2 的方框图表示。
(d) 将 S 的方框图表示画成 S_1 的方框图表示紧跟着 S_2 的方框图表示的级联。
(e) 将 S 的方框图表示画成 S_2 的方框图表示紧跟着 S_1 的方框图表示的级联。
(f) 证明在(e)中得到的 S 方框图表示中四个延迟单元可以合并成三个。这样所得到的方框图称为 S 的直接 II 型实现；而在(d)和(e)中得到的方框图称为 S 的直接 I 型实现。

2.59 考虑一因果 LTI 系统 S , 其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下面微分方程给出:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt}$$

(a) 证明

$$y(t) = A \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau + Bx(t) + C \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

并用常数 a_0, a_1, b_0 和 b_1 来表示常数 A, B 和 C 。

(b) 证明 S 可以认为是下面两个因果 LTI 系统的级联:

$$S_1: y_1(t) = Bx_1(t) + C \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$S_2: y_2(t) = A \int_{-\infty}^t y_2(\tau) d\tau + x_2(t)$$

(c) 画出 S_1 的方框图表示。

(d) 画出 S_2 的方框图表示。

(e) 将 S 的方框图表示画成 S_1 的方框图表示紧跟着 S_2 的方框图表示的级联。

(f) 将 S 的方框图表示画成 S_2 的方框图表示紧跟着 S_1 的方框图表示的级联。

(g) 证明在(l)中两个积分器可以合并成一个。这样所得到的方框图称为 S 的直接 II 型实现；而在(e)和(f)中所得到的方框图称为 S 的直接 I 型实现。

2.60 考虑一因果 LTI 系统 S , 其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下面微分方程给出:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

(a) 证明

$$\begin{aligned} y(t) &= A \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau + B \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^\tau y(\sigma) d\sigma \right) d\tau \\ &\quad + Cx(t) + D \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + E \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^\tau x(\sigma) d\sigma \right) d\tau \end{aligned}$$

并用常数 a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 和 b_2 来表示常数 A, B, C, D 和 E 。

(b) 证明, S 可以认为是下面两个因果 LTI 系统的级联:

$$S_1: y_1(t) = Cx_1(t) + D \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau + E \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^\tau x_1(\sigma) d\sigma \right) d\tau$$

$$S_2: y_2(t) = A \int_{-\infty}^t y_2(\tau) d\tau + B \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^\tau y_2(\sigma) d\sigma \right) d\tau + x_2(t)$$

(c) 画出 S_1 的方框图表示。

(d) 画出 S_2 的方框图表示。

(e) 将 S 的方框图表示画成 S_1 的方框图表示紧跟着 S_2 的方框图表示的级联。

(f) 将 S 的方框图表示画成 S_2 的方框图表示紧跟着 S_1 的方框图表示的级联。

(g) 证明在(f)中四个积分器可以合并成两个。这样所得到的方框图称为 S 的直接 II 型实现；而在(e)和(f)中所得到的方框图称为 S 的直接 I 型实现。

扩充题

2.61 (a)图 P2.61(a)中, $x(t)$ 是输入电压, 电容器上的电压 $y(t)$ 是该系统的输出。

(i)求联系 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的微分方程。

(ii)证明由(i)得出的微分方程的齐次解

具有形式为 $K_1 e^{j\omega_1 t} + K_2 e^{j\omega_2 t}$, 给出 $x(t)$ 和 ω_1 和 ω_2 值。

(iii)因为电压和电流都为实数, 证明: 系统的自然响应是正弦的。

(b)图 P2.6(b)中 $x(t)$ 是输入电压, 电容器上的电压 $y(t)$ 是系统的输出。

(i)求联系 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的微分方程。

(ii)证明该系统的自然响应具有形式为 $K e^{-at}$, 给出 a 值。

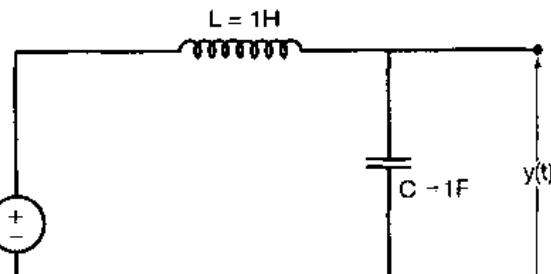
(c)图 P2.61(c)中 $x(t)$ 是输入电压, 电容器上的电压 $y(t)$ 是系统输出。

(i)求联系 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的微分方程。

(ii)证明由(i)得出的微分方程的齐次解具有形式为 $e^{-at} \{K_1 e^{j2t} + K_2 e^{-j2t}\}$, 给出 a 的值。

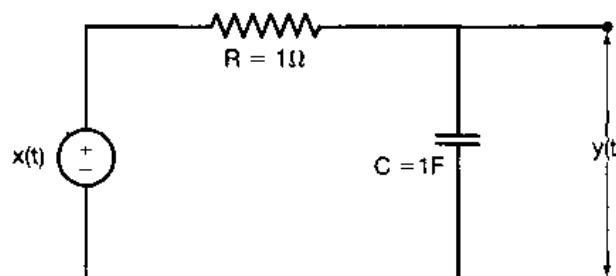
(iii)因为电压和电流都是实数, 证明: 该系统的自然响应为一衰减正弦振荡。

2.62 (a)图 P2.62(a)的力学系统, 作用于质量上



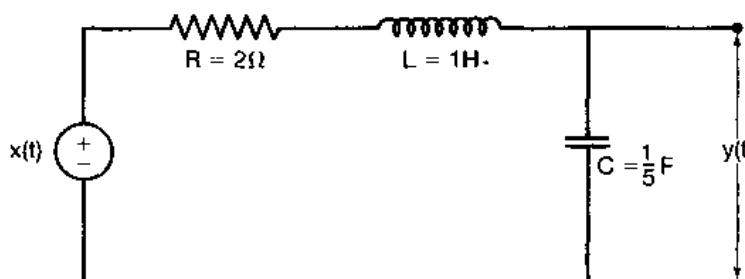
(a)

图 P2.61(a)



(b)

图 P2.61(b)



(c)

图 P2.61(c)

的力 $x(t)$ 代表输入, 而该质量的位移 $y(t)$ 代表输出。求关联 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的微分方程。证明, 该系统的自然响应是周期的。

(b)考虑图 P2.62(b), 其中外力 $x(t)$ 是输入, 速度是输出。小车的质量是 m , 而运动摩擦系数是 ρ 。证明, 该系统的自然响应随时间增加而衰减。

(c)图 P2.62(c)的力学系统, 作用于质量上的力 $x(t)$ 代表输入, 而该质量的位移 $y(t)$ 代表输出。

(i)求关联 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的微分方程。

(ii)证明由(i)得出的微分方程的齐次解具有形式为 $e^{-at} \{K_1 e^{j\mu t} + K_2 e^{-j\mu t}\}$, 给出 a 值。

(iii) 因为力和位移都是实数, 证明: 该系统的自然响应是一个衰减的正弦。

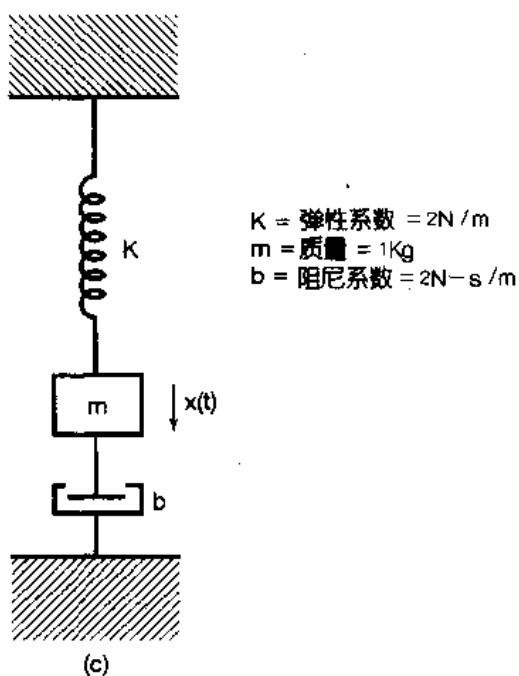
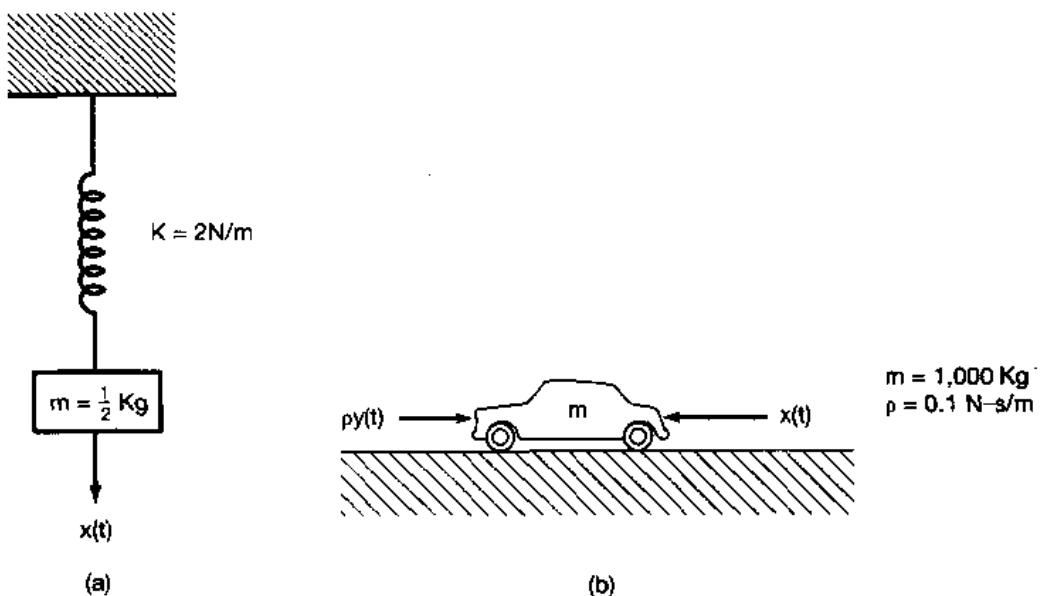


图 P2.62

2.63 以每月支付 D 美元的办法偿还一笔 100,000 美元的抵押货款。利息(按月复利)是按每年未偿还金额 12% 计息, 例如, 第一个月, 总的欠款等于

$$\$ 100,000 + \left(\frac{0.12}{12}\right) \$ 100,000 = \$ 101,000$$

现在的问题是要确定 D , 以使得在某一规定时间内, 贷款全部还清, 留下的余额为零。

(a) 为了拟定这个问题, 令 $y[n]$ 记作第 n 个月支付后余下的未付欠款。假设贷款是在第 0 月借的, 第 1 个月开始每月偿还。证明 $y[n]$ 满足下面差分方程:

$$y[n] - \gamma y[n-1] = -D \quad n \geq 1 \quad (\text{P2.63-1})$$

初始条件为

$$y[0] = \$100,000$$

式中 γ 是一个常数。求 γ 为多少。

(b) 解(a)中的差分方程, 求出 $n \geq 0$, $y[n]$ 。

[提示:(P2.63-1)式的特解是一个常数 Y , 求出 Y 的值, 并将 $n \geq 1$ 时的 $y[n]$ 表示成特解与齐次解的和。通过(P2.63-1)式直接计算 $y[1]$ 定出齐次解中的未知常数, 并与你的解比较]。

(c) 若该抵押贷款要在 30 年内(即每月支付 D 美元, 共付 360 个月)偿清, 求所需要的 D 值。

(d) 在 30 年内总共付给银行的金额是多少?

(e) 银行为什么要发放贷款?

- 2.64 逆系统的一个重要应用是用来希望消除某种类型的失真。其中一个很好的例子就是从声音信号中消除回音的问题。例如, 如果某一礼堂有明显的回音, 那么一个初始的声音冲激之后将会跟着一些衰减了的原声音冲激, 它们在空间间隔上都是有规律分布开的。因此, 对这一现象常常使用的模型是一个 LTI 系统, 该系统的冲激响应由一个冲激串组成, 即

$$h(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k \delta(t - kT) \quad (\text{P2.64-1})$$

式中, T 表示回波发生的间隔, h_k 表示由初始声音冲激产生的第 k 次回波的增益因子。

(a) 假定 $x(t)$ 代表原声音信号(比如由某一乐队发出的音乐), 而 $y(t) = x(t) * h(t)$ 是实际听到的, 未经回音消除处理的信号。为了消除由回音引入的失真, 假定用拾音器检测 $y(t)$, 并把获得的信号转换成电信号, 仍然用 $y(t)$ 表示这个信号, 因为它代表了与该声音信号等价的电信号, 并且经由声—电转换系统可从一处传至其它地方。

重要的是由(P2.64-1)式所给定冲激响应的系统是可逆的。因此, 可以找到一个 LTI 系统, 使它的冲激响应 $g(t)$ 满足

$$y(t) * g(t) = x(t)$$

于是按此方法处理电信号 $y(t)$, 然后再变换成声音信号, 就能消除令人烦恼的回音。

所要求的冲激响应 $g(t)$ 也是一个冲激串:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t - kT)$$

求各个 g_k 所必须满足的代数方程组, 并用 h_k 解出 g_0 , g_1 和 g_2 。

(b) 假设 $h_0 = 1$, $h_1 = 1/2$, 而当 $i \geq 2$ 时, 全部 $h_i = 0$, 这时, $g(t)$ 是什么?

(c) 回波产生器的一个很好的模型如图 P2.64 所示。

所以, 每一个回波都代表了被延迟 T 秒并乘以比例因子 α 后的被反馈回来的 $y(t)$ 。由于回波总是衰减了的, 所以 $0 < \alpha < 1$ 。

(i) 该系统的单位冲激响应是什么? (假定系统初始松弛, 即若 $t < 0$, $x(t) = 0$, 则 $t < 0$, $y(t) = 0$)。

(ii) 证明, 若 $0 < \alpha < 1$, 系统是稳定的; 若 $\alpha > 1$, 系统不稳定。

(iii) 这时 $g(t)$ 是什么? 用相加器, 系数相乘器和 T 秒延迟单元构成这个逆系统。

(d) 由于一直在考虑连续时间情况下的应用, 所以讨论就以连续时间系统来进行的。但是同样的一般概念在离散时间情况下也是成立的, 这就是, 单位脉冲响应为

$$h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta[n - kN]$$

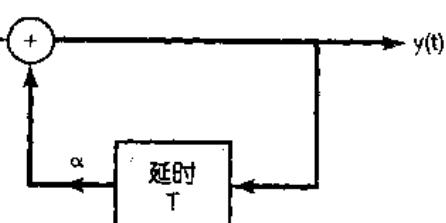


图 P2.64

的 LTI 系统是可逆的，而且有一个 LTI 系统作为它的逆系统，其单位脉冲响应是

$$g[n] = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta[n - kN]$$

不难验证， g_k 满足与(a)中同样的代数方程组。

现在考虑单位脉冲响应为

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$$

的离散时间 LTI 系统。该系统是不可逆的。试找出能够产生同样输出的两个输入。

- 2.65 在习题 1.45 中，介绍并研究了连续时间信号相关函数的某些基本性质。离散时间信号的相关函数基本上也具有与连续时间信号相关函数相同的性质，并且两者在很多应用中都是极为重要的(如在习题 2.66 和习题 2.67 中所讨论的)。本题将介绍离散时间相关函数，并研究它的几个性质。

令 $x[n]$ 和 $y[n]$ 是两个实数值的离散时间信号。 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的自相关函数 $\phi_{xx}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 分别定义如下：

$$\phi_{xx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m+n]x[m] \text{ 和 } \phi_{yy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m+n]y[m]$$

而互相关函数则由下式给出：

$$\phi_{xy}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m+n]y[m] \text{ 和 } \phi_{yx}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m+n]x[m]$$

和在连续时间相同，这些函数也具有某些对称特性。这就是 $\phi_{xx}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 是偶函数，而 $\phi_{xy}[n] = \phi_{yx}[-n]$ 。

(a) 对图 P2.65 所示信号 $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$ 和 $x_4[n]$ 计算自相关序列。

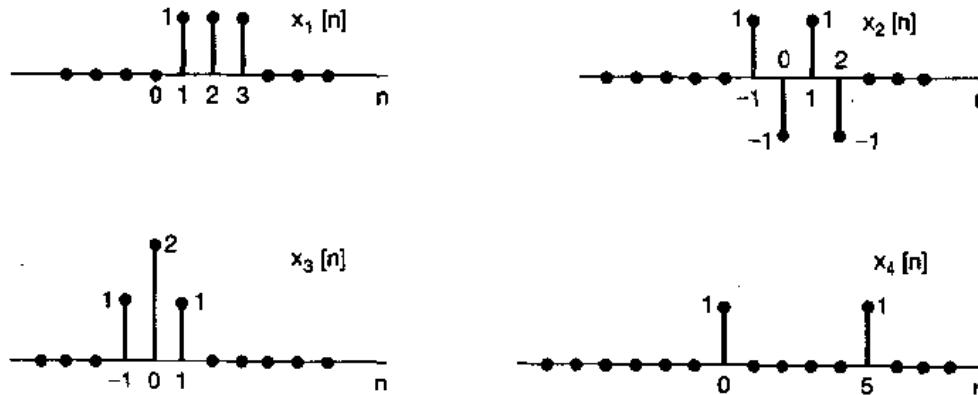


图 P2.65

(b) 对图 P2.65 所示的 $x_i[n]$, $i=1, 2, 3, 4$ 计算互相关序列

$$\phi_{x_i x_j}[n], i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4$$

(c) 设 $x[n]$ 是单位脉冲响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统的输入，相应的输出为 $y[n]$ 。求用 $\phi_{xx}[n]$ 和 $h[n]$ 表示 $\phi_{xy}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 表达式。说明怎样能够把 $\phi_{xy}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 看成是以 $\phi_{xx}[n]$ 作为输入时，LTI 系统的输出。(要通过明确地给出这两个系统的单位脉冲响应来做此题)。

(d) 设 $h[n] = x_1[n]$, $x_1[n]$ 示于图 P2.65 中，并设单位脉冲响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统，当输入 $x[n]$ 也等于 $x_1[n]$ 时的输出为 $y[n]$ 。利用(c)的结果，计算 $\phi_{xy}[n]$ 和 $\phi_{yy}[n]$ 。

- 2.66 设图 P2.66 中的 $h_1(t)$, $h_2(t)$ 和 $h_3(t)$ 是三个 LTI 系统的单位冲激响应。这三个信号称为沃尔什函数(Walsh functions)。由于沃尔什函数很容易用数字逻辑电路产生，而且与这些函数中的每一个相乘都可以用一种极性倒换开关的简单方式来实现，因此具有很大的实际意义。

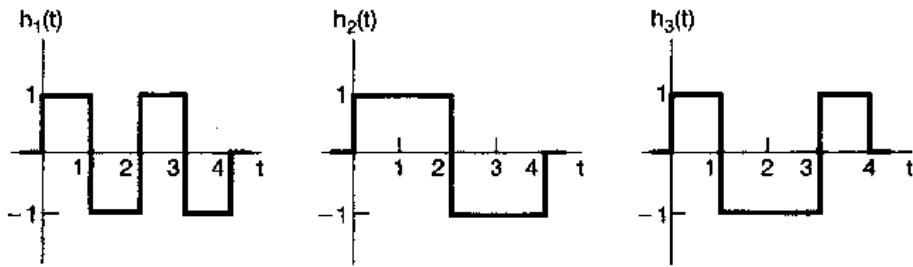


图 P2.66

(a) 确定并草拟出一个连续时间信号 $x_1(t)$, 使它具有如下性质:

- (i) $x_1(t)$ 是实信号
- (ii) $t < 0, x_1(t) = 0$ 。
- (iii) $t > 0, |x_1(t)| \leq 1$ 。
- (iv) $y_1(t) = x_1(t) * h(t)$ 在 $t = 4$ 时尽可能大。

(b) 对 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 重做(a), 并使 $y_2(t) = x_2(t) * h_2(t)$ 和 $y_3(t) = x_3(t) * h_3(t)$ 的值在 $t = 4$ 时尽可能大。

(c) 当 $i, j = 1, 2, 3$ 时, 在 $t = 4$ 处

$$y_{ij}(t) = x_i(t) * h_j(t), i \neq j$$

的值是什么?

具有单位冲激响应为 $h_i(t)$ 的系统, 对信号 $x_i(t)$ 来说称为匹配滤波器。这是因为, 为了产生最大的输出信号, 系统的单位冲激响应已对信号 $x_i(t)$ 进行了“调谐”。在下一个题中, 将把匹配滤波器的概念与连续时间信号相关函数的概念联系起来。

2.67 两个连续时间实信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数是

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)y(\tau)d\tau \quad (\text{P2.67-1})$$

令 $y(t) = x(t)$ 就可以得到一个信号 $x(t)$ 的自相关函数

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)x(\tau)d\tau$$

(a) 对图 P2.67(a) 中的 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别计算它们的自相关函数。

(b) 设 $x(t)$ 是一个已知信号, 并假定 $x(t)$ 为有限持续期, 即 $x(t) = 0$, 当 $t < 0$ 和 $t > T$ 。求一个 LTI 系统的单位冲激响应, 使该系统当输入为 $x(t)$ 时, 输出为 $\phi_{xx}(t - T)$ 。

(c) 在(b)中所确定的系统就是信号 $x(t)$ 的匹配滤波器。匹配滤波器的这个定义与习题 2.66 中介绍的定义是等同的, 关于这一点可由下面看出:

设 $x(t)$ 与(b)中相同, $y(t)$ 是一个具有实单位冲激响应 $h(t)$ 的 LTI 系统对 $x(t)$ 的响应。假设对于 $t < 0$ 和 $t > T$, $h(t) = 0$ 。证明, 在约束条件

$$\int_0^T h^2(t)dt = M, M \text{ 为某一固定正数} \quad (\text{P2.67-2})$$

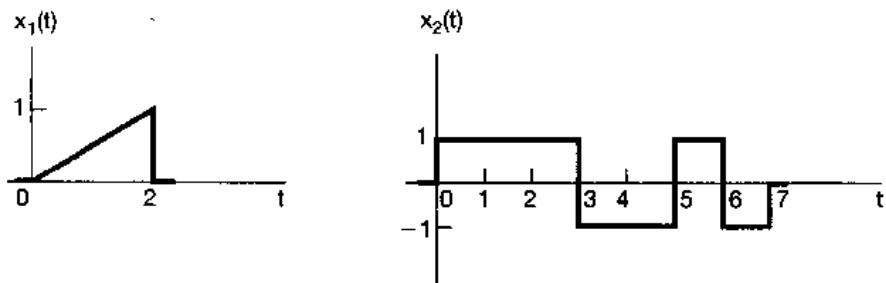
下, 使 $y(T)$ 为最大的 $h(t)$ 就是(b)中所确定的单位冲激响应乘以一个标量因子。

[提示: 对任意两个信号 $u(t)$ 和 $v(t)$, 许瓦兹(Schwartz)不等式表明

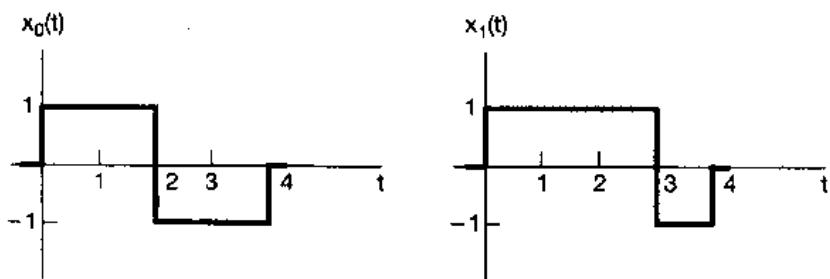
$$\int_b^a u(t)v(t)dt \leq [\int_a^b u^2(t)dt]^{1/2}[\int_a^b v^2(t)dt]^{1/2}$$

利用这一关系可求得 $y(T)$ 的界。]

(d) 由(P2.67-2)式给出的约束条件只是对单位冲激响应给出了一个尺度, 因为 M 的增加只不过改变(c)中提到的标量乘数。因此可以看出, 在(b)和(c)中特别选取的 $h(t)$ 就是为了产生最大输出而与信号 $x(t)$ 达到了匹配。正如将要指出的, 这在很多应用中是极为重要的性质。



(a)



(b)

图 P2.67

在通信问题中，人们往往都愿意发送信息含量尽可能少的那种信号。例如，如果某一复杂的消息编成一串二进制数的序列，就可想象一个系统，该系统是一个比特接着一个比特地发送这条信息。每一个比特都可以通过发送一种信号来传送，比如说：如果这个比特是0，就发信号 $x_0(t)$ ；如果是1就发不同的信号 $x_1(t)$ 。这时，接收这些信号的系统必须能够辨别出已经接收到的是 $x_0(t)$ ，还是 $x_1(t)$ 。直观看来，在接收装置中必须有两个系统，一个对 $x_0(t)$ “调谐”，另一个对 $x_1(t)$ “调谐”。这里所指的“调谐”就是对某信号“调谐”的系统在接收到该信号后，系统会产生一个大的输出。当一个特定信号被接收时，系统能产生一个大的输出的这种性质正是匹配滤波器所具有的。

实际上在信号发送和接收过程中，失真和干扰总是存在的。因此，就希望匹配滤波器对与其相匹配的输入信号的响应和其它被传送信号的响应之间有最大的差别。为了说明这一点，考虑图P2.67(b)中的两个信号 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 。设 L_0 表示对 $x_0(t)$ 匹配的滤波器， L_1 表示对 $x_1(t)$ 匹配的滤波器。

- (i) 分别概略画出 L_0 和 L_1 各自对 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ 的响应。
- (ii) 比较这些响应在 $t=4$ 时的值。在 L_0 对 $x_1(t)$ 的响应和 L_1 对 $x_0(t)$ 的响应在 $t=4$ 两者都为零时，如何改变 $x_0(t)$ 以使得接收机更容易区分开 $x_0(t)$ 和 $x_1(t)$ ？

2.68 匹配滤波器和相关函数起着重要作用的另一个应用是雷达系统。雷达的基本原理是向目标发送的电磁脉冲被目标反射而回到发送端，反射波的延时与目标距离成正比。在理想情况下，被接收的信号只不过是时移了的，并在大小上可能有些变化的原发送信号。

设 $p(t)$ 是发出的原脉冲，证明

$$\phi_{pp}(0) = \max_t \phi_{pp}(t)$$

也说是 $\phi_{pp}(0)$ 是从 $\phi_{pp}(t)$ 中取到的最大值。利用这一关系推论：若发送端接收到的回波为

$$x(t) = \alpha p(t - t_0)$$

式中 α 为一正的常数，那么

$$\phi_{xp}(t_0) = \max_t \phi_{xp}(t)$$

[提示: 利用许瓦兹不等式]。

因此, 简单的雷达测距系统工作方式就是基于利用一个对发送波形 $p(t)$ 匹配的匹配滤波器, 并记录下该系统的输出达到最大值时的时刻来完成的。

2.69 在 2.5 节, 曾将单位冲激偶用如下方程来表征:

$$x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) u_1(\tau) d\tau = x'(t) \quad (\text{P2.69-1})$$

式中 $x(t)$ 为任意信号。并据此导出了如下关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u_1(\tau) d\tau = -g'(0) \quad (\text{P2.69-2})$$

(a) 通过证明 (P2.69-2) 式就包含有 (P2.69-1) 式来证明 (P2.69-2) 式是 $u_1(t)$ 的一种等效表示。

[提示: 固定 t , 定义信号 $g(\tau) = x(t-\tau)$]。

因此看到, 单位冲激或单位冲激偶在卷积意义下的表现如何来表征, 和当它与任意信号 $g(t)$ 相乘之后在积分意义下的表现来表征是等价的。事实上, 正如 2.5 节所指出的, 这些运算定义的等效性对所有信号, 特别是对所有奇异函数都是成立的。

(b) 设 $f(t)$ 是一已知信号, 证明

$$f(t) u_1(t) = f(0) u_1(t) - f'(0) \delta(t)$$

(通过证明等式两边具有相同的运算定义来证明)。

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u_2(\tau) d\tau$ 的值是什么?

对 $f(t) u_2(t)$ 找一个类似于(b)中对 $f(t) u_1(t)$ 的表示式。

2.70 用类似于连续时间奇异函数的方法, 可以定义一组离散时间信号如下, 令

$$u_{-1}[n] = u[n] \quad u_0[n] = \delta[n] \quad \text{和} \quad u_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

并定义

$$u_k[n] = \underbrace{u_1[n] * u_1[n] * \cdots * u_1[n]}_{k \uparrow}, \quad k > 0$$

和

$$u_k[n] = \underbrace{u_{-1}[n] * u_{-1}[n] * \cdots * u_{-1}[n]}_{|k| \uparrow}, \quad k < 0$$

注意到

$$x[n] * \delta[n] = x[n] \quad x[n] * u[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]$$

和

$$x[n] * u_1[n] = x[n] - x[n-1]$$

(a) 什么是

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] u_1[m]?$$

(b) 证明

$$\begin{aligned} x[n] u_1[n] &= x[0] u_1[n] - [x[1] - x[0]] \delta[n-1] \\ &= x[1] u_1[n] - [x[1] - x[0]] \delta[n] \end{aligned}$$

(c) 简略画出信号 $u_2[n]$ 和 $u_3[n]$ 。

(d) 画出 $u_{-2}[n]$ 和 $u_{-3}[n]$

(e) 证明: 一般对 $k > 0$, 有

$$u_k[n] = \frac{(-1)^n k!}{n!(k-n)!} [u[n] - u[n-k-1]] \quad (\text{P2.70-1})$$

[提示: 用归纳法。由(c)很明显, 当 $k=2$ 和 3 时, $u_k[n]$ 满足 (P2.70-1) 式; 然后假定对 $u_k[n]$,

(P2.70-1)式成立,再用 $u_k[n]$ 写出 $u_{k+1}[n]$,并证明对 $u_{k+1}[n]$ 等式也是成立的]。

(f)证明:一般对 $k > 0$,有

$$u_{-k}[n] = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} u[n] \quad (\text{P2.70-2})$$

[提示:再次应用归纳法。注意

$$u_{-(k+1)}[n] - u_{-(k+1)}[n-1] = u_{-k}[n] \quad (\text{P2.70-3})$$

然后假定(P2.70-2)对 $u_{-k}[n]$ 成立,利用(P2.70-3)式证明它对 $u_{-(k+1)}[n]$ 也是正确的]。

2.71 这一章已经利用了使LTI系统分析大为简化的几个性质和概念。其中有两个性质在本题中要作比较深入一点的讨论。将要看到,在某些很特殊的情况下,应用这些性质时必须倍加细心,因为这些性质不是无条件成立的。

(a)卷积(无论对连续时间还是离散时间)的一个基本而重要的性质是结合律性质,即如果 $x(t)$, $h(t)$ 和 $g(t)$ 是三个信号,那么

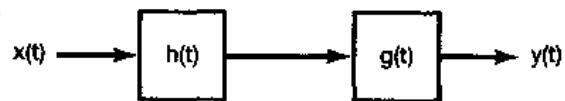
$$x(t) * [g(t) * h(t)] = [x(t) * g(t)] * h(t) = [x(t) * h(t)] * g(t) \quad (\text{P2.71-1})$$

只要这三个表示式都有确切的定义并且是有限的,这个关系一般都成立。因为现实中一般都属于这种情况,所以在应用时都勿需评注或作什么假定。然而,在某些情况下却不是这样。例如,考查一下图 P2.71 的系统,取 $h(t) = u_1(t)$, $g(t) = u(t)$,比较一下这个系统对输入

$$x(t) = 1, \quad \text{对全部 } t$$

的响应。

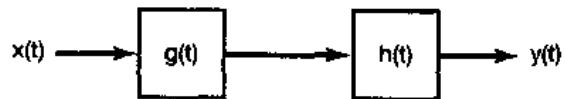
根据(P2.71-1)式所建议的三种不同方法,并根据图 P2.71 来做。



(i)先将两个冲激响应卷积,再把所得结果与 $x(t)$ 卷积。

(ii)先将 $x(t)$ 和 $u_1(t)$ 卷积,再把结果与 $u(t)$ 卷积。

(iii)先将 $x(t)$ 与 $u(t)$ 卷积,再把结果与 $u_1(t)$ 卷积。



(b)当

$$x(t) = e^{-t}$$

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

图 P2.71

$$g(t) = u_1(t) + \delta(t)$$

时,重做(a)。

(c)对

$$x[n] = (\frac{1}{2})^n \quad h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] \quad g[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

重做(a)

因此,一般来说,当且仅当(P2.71-1)式中三个表达式都有意义(即它们用LTI系统来解释有意义)时,卷积的结合律性质才成立。例如在(a)中先对一个常数微分,然后再积分是有意义的;而先对常数从 $t = -\infty$ 积分,然后再微分却没有什么意义了,因而只是在这种情况下结合律性质就破坏了。

与上述讨论密切相关的是逆系统的问题。现考虑单位冲激响应 $h(t) = u(t)$ 的LTI系统。如同在(a)中看到的,有一些输入(比如 $x(t) =$ 非零常数)使该系统对它们的输出为无穷大。因此,研究把这种输出取逆来恢复输入的问题就是毫无意义的了。然而,如果只限于讨论产生有限输出的输入,也即满足

$$\left| \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right| < \infty \quad (P2.71-2)$$

的那些输入的话，该系统仍是可逆的，并且单位冲激响应为 $u_1(t)$ 的 LTI 系统就是它的逆系统。

(d) 证明：冲激响应为 $u_1(t)$ 的 LTI 系统是不可逆的。

[提示：找出两个不同的输入，它们在所有时间上都产生零输出]。

然而，若将输入限于满足 (P2.71-2) 式的输入，证明：该系统是可逆的。

[提示：在习题 1.44 已证明，除 $x(t)=0$ 外，没有其它任何输入能在全部时间内产生零输出，这个 LTI 系统就是可逆的。能有两个都满足 (P2.71-2) 式的输入 $x(t)$ ，当它们与 $u_1(t)$ 卷积时所产生的响应都恒等于零吗？]

在本题中我们业已说明的可归纳如下：

(1) 如果 $x(t)$ 、 $h(t)$ 和 $g(t)$ 是三个信号，且 $x(t)*g(t)$ 、 $x(t)*h(t)$ 和 $h(t)*g(t)$ 全都有确切的定义，而且是有限值，则结合律，即 (P2.71-1) 式成立。

(2) 设 $h(t)$ 是一个 LTI 系统的单位冲激响应，并假设第二个系统的单位冲激响应 $g(t)$ 有如下性质：

$$h(t)*g(t) = \delta(t) \quad P2.71-3$$

那么由(1)，对所有输入 $x(t)$ ，当 $x(t)*h(t)$ 和 $x(t)*g(t)$ 都有确切定义且为有限值时，图 P2.71 所示系统的两种级联所起的作用都相当于恒等系统，因此这两个系统都可互相认为是另外一个系统的逆系统。例如，若 $h(t)=u(t)$ ， $g(t)=u_1(t)$ ，只要限定输入满足 (P2.71-2) 式，就可认为这两个系统互为逆系统。

因此可以看出，只要涉及的所有卷积都是有限的，那么 (P2.71-1) 式的结合律性质和由 (P2.71-3) 式给出的 LTI 逆系统的定义都是正确的。由于在任何实际问题中确实都是这种情况，一般在应用这些性质时都勿需加以评注或者限制。应该指出：尽管大多数讨论都是以连续时间信号和系统为例的，但是相同的结论在离散时间情况下也能得到[(c) 中就是一个例证]。

2.72 设 $\delta_\Delta(t)$ 为 $0 < t \leq \Delta$ 上，高为 $\frac{1}{\Delta}$ 的矩形脉冲，证明

$$\frac{d}{dt} \delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta} [\delta(t) - \delta(t - \Delta)]$$

2.73 用归纳法证明：

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t), \quad \text{对 } k = 1, 2, 3 \dots$$

第3章 周期信号的傅里叶级数表示

3.0 引言

通过第2章所建立的卷积和来表示、分析LTI系统是基于将信号表示成一组移位单位冲激的线性组合。在这一章及其后的两章，将讨论信号与LTI系统的另一种表示。和第2章一样，讨论的出发点仍是将信号表示成一组基本信号的线性组合，不过这时所用的基本信号是复指数，所得到的表示就是连续时间和离散时间傅里叶级数和傅里叶变换。将会看到，这些表示法也能够用来构成范围相当广泛而有用的一类信号。

这样就可以按照在第2章所做的那样来处理，这就是：根据叠加性质，LTI系统对任意一个由这些基本信号的线性组合而成的输入信号的响应就是系统对这些基本信号单个响应的线性组合。在第2章中，这些单个响应皆为单位脉冲（或冲激）响应的移位，这样就导出了卷积和或卷积积分。这一章将会发现，LTI系统对复指数信号的响应也具有一种特别简单的形式，这就提供了另一种非常方便的LTI系统表示法，以及另一种LTI系统的分析方法，从而对系统的性质求得更为深入的了解。

这一章集中讨论连续时间和离散时间周期信号的傅里叶级数表示，到第4章和第5章再把这种分析推广到非周期的有限能量信号的傅里叶变换表示中去。这两者合在一起就为分析、设计和理解信号与LTI系统提供了一种最有力和最重要的方法。这一章以及后面的各章还把相当大的注意力放在研究傅里叶方法的应用上。

为了对下面各章节要给予详细讨论的一些概念和问题有较深入地理解，下一节先对傅里叶分析方法做一简短的历史回顾。

3.1 历史回顾

傅里叶分析方法的建立有过一段漫长的历史，涉及到很多人的工作和许多不同物理现象的研究^①。利用“三角函数和”的概念（也即，成谐波关系的正弦和余弦函数或周期复指数函数的和）来描述周期性过程至少可以追溯到古代巴比伦人时代，当时他们利用这一想法来预测天体运动^②。这一问题的近代历史始于1748年欧拉在振动弦的研究工作中。图3.1画出了弦振动的前几个标准振荡模式。如果用 $f(t, x)$ 来表示弦在时间 t 和沿着弦的某一横向距离

^① 本文提到的有关历史材料取自以下文献：I. Grattan-Guinness, Joseph Fourier, 1768 - 1830 (Cambridge, MA: The MIT Press, 1972); G. F. Simmons, Differential Equations: With Applications and Historical Notes (New York: McGraw-Hill Book Company, 1972); C. Lanczos, Discourse on Fourier Series (London: Oliver and Boyd, 1966); R. E. Edwards, Fourier Series: A Modern Introduction (New York: Springer-Verlag, 2nd., 1970); and A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, and M. A. Lavrent'ev, Mathematics: Its Content, Methods, and Meaning, trans. S. H. Gould, Vol. II; trans. K. Hirsch, Vol. III (Cambridge, MA: The MIT Press, 1969)。在上述文献中，Grattan-Guinness的书中提供了有关傅里叶生平和贡献的最为全面的论述。在本章的另外几个地方引用了以上其余几种文献的材料。

^② H. Dym and H. P. McKean, Fourier Series and Integrals (New York: Academic Press, 1972)。该书及上面提到的Simmons的书也包括了关于振动弦问题的讨论及其在傅里叶分析发展过程中所起的作用。

x 处的垂直偏离，则对任意固定时刻 t 来说，所有这些振荡模式均为 x 的正弦函数，并成谐波关系。欧拉得出的结论是：如果在某一时刻振动弦的形状是这些标准振荡模的线性组合，那么在其后任何时刻，振动弦的形状也都是这些振荡模的线性组合。另外，欧拉还证明了在该线性组合中，其后面时间的加权系数可以直接从前面时间的加权系数中导得。与此同时，欧拉还完成了相同的计算形式，这一点将在下一节导出有关三角函数和的一个性质中看到，这些性质使三角函数和的概念在 LTI 系统分析中变得十分有用。具体地说就是：如果一个 LTI 系统的输入可以表示为周期复指数或正弦信号的线性组合，则输出也一定能表示成这种形式；并且输出线性组合中的加权系数是直接与输入中对应的系数有关的。

显然，除非很多有用信号都能用复指数的线性组合来表示，否则上面所讨论的性质就不会是特别有用的。在 18 世纪中期，这一点曾是激烈争论的主题。1753 年 D·伯努利 (D. Bernoulli) 曾经声称：一根弦的实际运动都可以用标准振荡模的线性组合来表示。但是，他并没有继续从数学上深入探求下去；同时，在当时他的想法也并未被广泛接受。事实上，欧拉本人后来也抛弃了三角级数的想法，并且在 1759 年 J. L. 拉格朗日 (J. L. Lagrange) 也曾强烈批评使用三角级数来研究振动弦运动的主张。他反对的论据是基于他自己的信念，即不可能用三角级数来表示一个具有间断点的函数。因为振动弦的波形是由拨动弦而引起（即把弦绷紧再松开），所以拉格朗日认为三角级数的应用范围非常有限。

正是在这种多少有些敌意和怀疑的处境下，J. B. J. 傅里叶 (Jean Baptiste Joseph Fourier，见图 3.2) 约于半个世纪后提出了他自己的想法。傅里叶 1768 年 3 月 21 日生于法国奥克斯雷

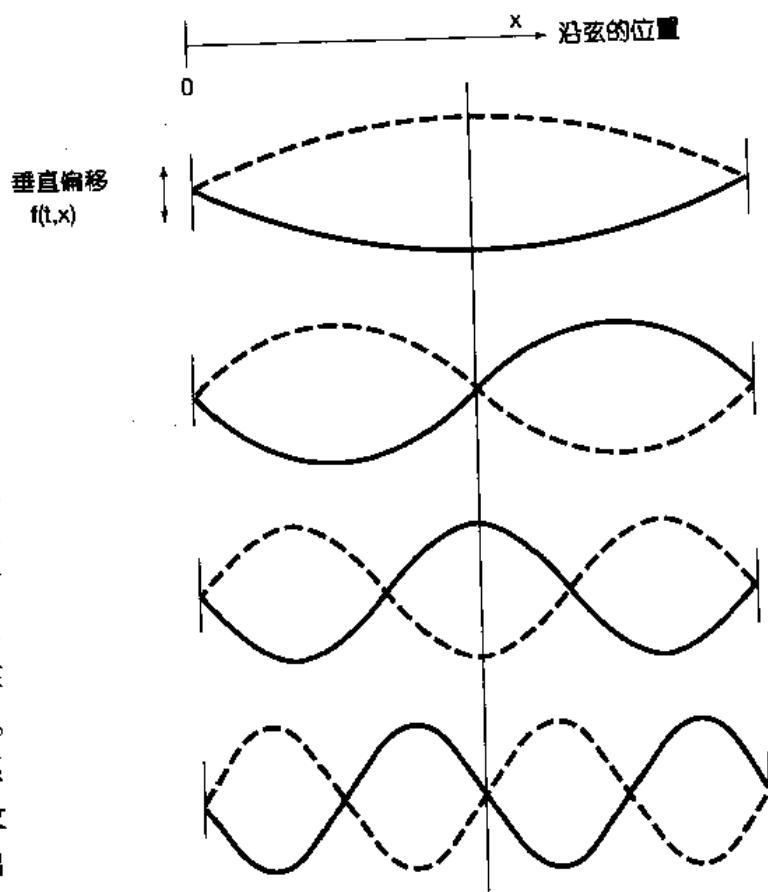


图 3.1 振动弦的标准振荡模（实线是在某一瞬时 t ，每一个振荡模的波形）



图 3.2 J. B. J. 傅里叶

(Allxerre)，到他加入这场有关三角级数论战的时候，他已有了相当的阅历。他当时进行研究所处的境遇使他的很多贡献(特别是以他的名字命名的级数和变换)更是令人难忘。他的重大发现虽然在他自己的有生之年没有得到完全的承认，但是，却已对数学这门学科的发展产生了深刻的影响，并在极为广泛的科学和工程领域内一直具有并仍然继续具有很大的价值。

除了他在数学方面的研究外，傅里叶还有一段活跃的政治生涯。事实上，就在法国大革命后的那些年代里，他的一些活动几乎导致他的垮台。因为曾经有两次，他都差一点走上了断头台。其后，傅里叶又成为 N. 波拿巴(Napoleon Bonaparte)的伙伴而跟随着他远征埃及(在此期间，傅里叶搜集了后来作为他的“埃及学”论文基础的有关资料)。在 1802 年被波拿巴任命为法国某一地区的行政长官，就在他任职行政长官的期间，傅里叶构思了关于三角级数的想法。

热的传播和扩散现象是导致傅里叶研究成果的实际物理背景。在当时数学物理学领域中大多数前人的研究已经涉及到理论力学和天体力学的背景下，这一问题本身就是十分有意义的一步。到了 1807 年，傅里叶已经完成了一项研究，他发现在表示一个物体的温度分布时，成谐波关系的正弦函数级数是非常有用的。另外，他还断言：“任何”周期信号都可以用这样的级数来表示！？虽然在这一问题上他的论述是很有意义的，但是，隐藏在这一问题后面的其它很多基本概念已经被其他科学家们所发现；同时，傅里叶的数学证明也不是很完善的。后来于 1829 年，P. L. 狄里赫利(P. L. Dirichlet)给出了若干精确的条件，在这些条件下，一个周期信号才可以用一个傅里叶级数表示^①。因此，傅里叶实际上并没有对傅里叶级数的数学理论做出什么贡献。然而，他确实洞察出这个级数表示法的潜在威力，并且在很大程度上正是由于他的工作和断言，才大大激励和推动了傅里叶级数问题的深入研究。另外，傅里叶在这一问题上的研究成果比他的任何先驱者都大大前进了一步，这指的是他还得出了关于非周期信号的表示——不是成谐波关系的正弦信号的加权和，而是不全成谐波关系的正弦信号的加权积分。这就是第 4 和第 5 章所关注的从傅里叶级数到傅里叶积分(或变换)的推广。和傅里叶级数一样，傅里叶变换仍然是分析 LTI 系统最强有力的工具之一。

当时指定了 4 位著名的数学家和科学家来评审 1807 年傅里叶的论文，其中 3 位即 S. F. 拉克劳克斯(S. F. Lacroix)、G. 孟济(G. Monge)和 P. S. 拉普拉斯(P. S. Laplace)赞成发表傅里叶的论文，而第四位 J. L. 拉格朗日仍然顽固地坚持他于 50 年前就已经提出过的关于拒绝接受三角级数的论点。由于拉格朗日的强烈反对，傅里叶的论文从未公开露面过。为了使他的研究成果能让法兰西研究院接受并发表，在经过了几次其它的尝试以后，傅里叶才把他的成果以另一种方式出现在“热的分析理论”这本书中^②。这本书出版于 1822 年，也即比他首次在法兰西研究院宣读他的研究成果时晚 15 年！

直到傅里叶的晚年，他才得到了某种应有的承认！但是，对他来说最有意义的称赞是他的研究成果已经在数学、科学和工程等如此众多的领域内产生的巨大影响。傅里叶级数和积分的分析在很多数学问题中都留下了它的足迹，积分理论、点集拓扑和特征函数展开等仅是

^① S. D. 泊松(S. D. Poisson)和 A. L. 柯西(A. L. Cauchy)早在 1829 年以前就得出了关于傅里叶级数的收敛条件，但是狄里赫利对前人的结果作了很有意义的推广。因此，通常都认为狄里赫利是第一个以严密的方式给出傅里叶级数收敛条件的人。

^② 见 J. B. J. Fourier. The Analytical Theory of Heat. trans. A. Freeman (New York: Dover, 1955).

这方面的几个例子^①。再者，除了最初在振动问题和传热问题的研究外，在科学和工程领域中有大量的其它问题，正弦信号(从而傅里叶级数和变换)在其中起着很重要的作用。例如，在描述行星运动和反映地球气候的周期性变化中，很自然地会出现正弦信号；交流电源产生的正弦电压和电流；以及我们将要看到的，傅里叶分析方法能够用来分析 LTI 系统的响应。

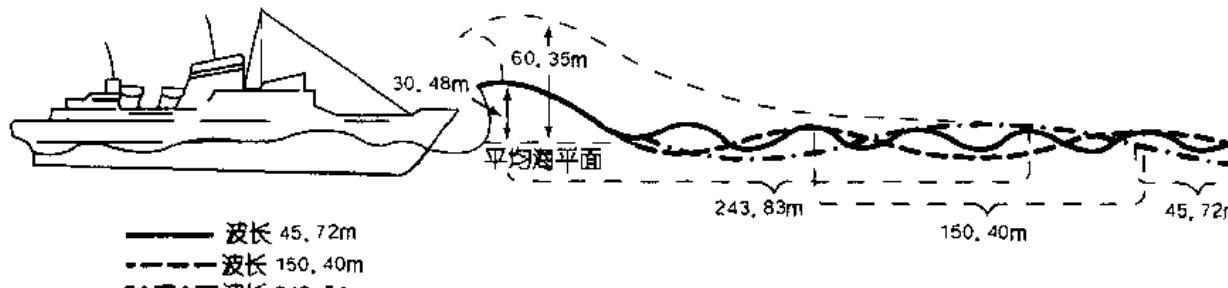


图 3.3 遭遇到三种波列叠加袭击的船只。这三种波各有不同的波长，当这些波处于互相增强的情况下，可以形成一个很大的波浪。在更为严峻的海浪下，可以形成由图中虚线指出的一个巨大的波浪。这种情况是否出现决定于这些分量的相对相位

比如一个电路对正弦输入的响应等。同时，如图 3.3 所示，海浪也是由不同波长的正弦波的线性组合所组成的；无线电台和电视台发射的信号都是正弦的；以及依据傅里叶分析可以给出任何文本的快速阅读等等。总之，正弦信号和傅里叶分析方法的应用范围远远超出以上所列举的这几个例子。

在前面一段中的许多应用，以及傅里叶和他的同伴们在数学物理学方面的最初研究都是集中在连续时间内的现象。与此同时，对于离散时间信号与系统的傅里叶分析方法却有着它们自己不同的历史根基，并且也有众多的应用领域。尤其是，离散时间概念和方法是数值分析这门学科的基础。用于处理离散点集以产生数值近似的有关内插、积分和微分等方面公式远在 17 世纪的牛顿时代就被研究过。另外，在已知一组天体观察数据序列下，预测某一天体运动的问题在 18 和 19 世纪曾吸引着包括高斯(Gauss)在内的许多著名科学家和数学家从事调和时间序列的研究，从而为大量的初始工作能在离散时间信号与系统下完成提供了第二个舞台。

在 20 世纪 60 年代中期，一种称之为快速傅里叶变换(FFT)的算法被引入。这一算法在 1965 年被库利(Cooley)和图基(Tukey)独立地发现，其实它也有相当长的历史。事实上，这一算法在高斯的手稿中已能找到^②。之所以使得它成为重要的近代发现是由于 FFT 证明是非常适合于高效的数字实现，并且它将计算变换所需要的时间减少了几个数量级。有了这一算法，在利用离散时间傅里叶级数和变换中许多有兴趣而过去认为不切实际的想法突然变得实际起来，并且使离散时间信号与系统分析技术的发展加速向前迈进。

由这样一个很长历史的发展所涌现出的，对于连续时间和离散时间信号与系统分析来说是一个强有力而严谨的分析体系，以及有着极为广泛的现存和潜在的应用范围。这一章和后续几章将建立这个体系中的一些基本方法，并研究其中某些重要的内涵。

^① 关于傅里叶的工作在数学方面的更多影响，可参阅 W. A. Coppel, J. B. Forier - On the Occasion of His Two Hundredth Birthday. American Mathematical Monthly, 76(1969), 468-83

^② M. T. Heideman, D. H. Johnson, and C. S. Burrus. Gauss and the History of the Fast Fourier Transform. The IEEE ASSP Magazine I(1984), PP. 14-21.

3.2 LTI 系统对复指数信号的响应

正如在 3.0 节已经指出的，在研究 LTI 系统时，将信号表示成基本信号的线性组合是很有利的，但这些基本信号应该具有以下两个性质：

1. 由这些基本信号能够构成相当广泛的一类有用信号；

2. LTI 系统对每一个基本信号的响应应该十分简单，以使得系统对任意输入信号的响应有一个很方便的表示式。

傅里叶分析的很多重要价值都来自于这一点，即连续和离散时间复指数信号集都具有上述两个性质，即连续时间的 e^s 和离散时间的 z^n 信号，其中 s 和 z 都是复数。在本章的后续各节和下面两章将详细研究第一个性质。这一节集中在第二个性质上，并且以此说明在 LTI 系统分析中为什么要应用傅里叶级数和傅里叶变换的缘由。

在研究 LTI 系统时，复指数信号的重要性在于这样一个事实，即：一个 LTI 系统对复指数信号的响应也是同样一个复指数信号，不同的只是在幅度上的变化；也就是说：

$$\text{连续时间: } e^s \rightarrow H(s)e^s \quad (3.1)$$

$$\text{离散时间: } z^n \rightarrow H(z)z^n \quad (3.2)$$

这里 $H(s)$ 或 $H(z)$ 是一个复振幅因子，一般来说是复变量 s 或 z 的函数。一个信号，若系统对该信号的输出响应仅是一个常数（可能是复数）乘以输入，则称该信号为系统的特征函数，而幅度因子称为系统的特征值。

为了证明复指数确实是 LTI 系统的特征函数，现考虑一个单位冲激响应为 $h(t)$ 的连续时间 LTI 系统。对任意输入 $x(t)$ ，可由卷积积分来确定输出，今若 $x(t) = e^s$ ，则有

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \quad (3.3)$$

$e^{s(t-\tau)}$ 可写为 $e^{st}e^{-s\tau}$ ，而 e^{st} 可以从积分号内移出来。这样 (3.3) 式变成

$$y(t) = e^s \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (3.4)$$

假定 (3.4) 式右边的积分收敛，于是系统对 e^s 的响应就为

$$y(t) = H(s)e^s \quad (3.5)$$

式中 $H(s)$ 是一个复常数，其值决定于 s ，并且它与系统单位冲激响应的关系为

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (3.6)$$

从而证明了复指数是 LTI 系统的特征函数；对某一给定的 s 值，常数 $H(s)$ 就是与特征函数 e^s 有关的特征值。

可以用完全并行的方式证明，复指数序列也是离散时间 LTI 系统的特征函数；这就是说，单位脉冲响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统，其输入序列为

$$x[n] = z^n \quad (3.7)$$

式中 z 为某一复数。由卷积和可以确定系统的输出为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \quad (3.8)$$

假定 (3.8) 式右边的求和收敛，可见若输入 $x[n]$ 是如 (3.7) 式给出的复指数，那么输出就是

同一复指数乘以一个常数。该常数决定于 z 的值, 即

$$y[n] = H(z)z^n \quad (3.9)$$

其中

$$H[z] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \quad (3.10)$$

结果和连续时间情况一样, 复指数是离散时间 LTI 系统的特征函数; 对于某一给定的 z 值, 常数 $H(z)$ 就是与特征函数 z^n 有关的特征值。

对于 LTI 系统分析来说, 把一个更为一般的信号借助于特征函数来分解的有效性可用一个例子来说明。令 $x(t)$ 是三个复指数信号的线性组合, 即

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t} \quad (3.11)$$

根据特征函数的性质, 系统对其中每一个分量的响应分别是

$$\begin{aligned} a_1 e^{s_1 t} &\rightarrow a_1 H(s_1) e^{s_1 t} \\ a_2 e^{s_2 t} &\rightarrow a_2 H(s_2) e^{s_2 t} \\ a_3 e^{s_3 t} &\rightarrow a_3 H(s_3) e^{s_3 t} \end{aligned}$$

再根据叠加性质, 和的响应就是响应的和, 因而

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t} \quad (3.12)$$

更一般地说, 在连续时间情况下, (3.5)式与叠加性质结合在一起就意味着: 将信号表示成复指数的线性组合就会导致一个 LTI 系统响应的方便表达式。具体地说, 若一个连续时间 LTI 系统的输入表示成复指数的线性组合, 即

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \quad (3.13)$$

那么输出就一定是

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t} \quad (3.14)$$

对于离散时间情况, 完全相类似地, 若一个离散时间 LTI 系统的输入表示成复指数的线性组合, 即

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \quad (3.15)$$

那么输出就一定是

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n \quad (3.16)$$

换句话说, 对于连续时间和离散时间来说, 如果一个 LTI 系统的输入能够表示成复指数的线性组合, 那么系统的输出也能够表示成相同复指数信号的线性组合; 并且在输出表示式中的每一个系数可以用输入中相应的系数 a_k 分别与特征函数 $e^{s_k t}$ 或 z_k^n 有关的系统特征值 $H(s_k)$ 或 $H(z_k)$ 相乘来求得。欧拉在振动弦问题的研究中发现的正是这一事实, 高斯及其他学者在时间序列分析中所用的也是这一点。这样促使着傅里叶及其后的其他人考虑这样一个问题: 究竟有多大范围的信号可以用复指数的线性组合来表示?! 在下面几节中将对周期信号来研究这个问题, 次序是先连续后离散。到第 4 和第 5 章再把这些表示式推广到非周期信号中去。一般来说, 在(3.1)式到(3.16)式中的 s 和 z 都可以是任意复数, 但傅里叶分析仅限于这些变量的特殊形式。在连续时间下仅涉及 s 的纯虚部值, 即 $s = j\omega$, 因此仅考虑 $e^{j\omega t}$ 形式

的复指数。类似地，在离散时间下局限于单位振幅的 z 值，即 $z = e^{j\omega}$ ，因此仅考虑 $e^{j\omega n}$ 形式的复指数。

例 3.1 作为(3.5)式和(3.6)式的一个解释，考虑输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 是一个延时为 3 的 LTI 系统，即

$$y(t) = x(t - 3) \quad (3.17)$$

若该系统的输入是复指数信号 $x(t) = e^{j2t}$ ，那么由(3.17)式有

$$y(t) = e^{j2(t-3)} = e^{-j6}e^{j2t} \quad (3.18)$$

正如我们能想到的，(3.18)式具有与(3.5)式相同的形式，因为 e^{j2t} 是一个特征函数，有关的特征值是 $H(j2) = e^{-j6}$ 。对这个例子可以直接来验证(3.6)式。根据(3.17)式，该系统的单位冲激响应是 $h(t) = \delta(t - 3)$ ，将其代入(3.6)式后可得

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - 3) e^{-\pi s} d\tau = e^{-3s}$$

所以 $H(j2) = e^{-j6}$ 。

以输入信号为 $x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$ 作为第二个例子，用以说明(3.11)式和(3.12)式。由(3.17)式， $y(t)$ 当然就为

$$y(t) = \cos(4(t - 3)) + \cos(7(t - 3)) \quad (3.19)$$

为了说明这也就是(3.12)式的结果，可以先用欧拉关系将 $x(t)$ 展开为

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j7t} + \frac{1}{2} e^{-j7t} \quad (3.20)$$

由(3.11)式和(3.12)式，有

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-j12} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{j12} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{-j21} e^{j7t} + \frac{1}{2} e^{j21} e^{-j7t}$$

或者

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} e^{j4(t-3)} + \frac{1}{2} e^{-j4(t-3)} + \frac{1}{2} e^{j7(t-3)} + \frac{1}{2} e^{-j7(t-3)} \\ &= \cos(4(t - 3)) + \cos(7(t - 3)) \end{aligned}$$

对于这个简单例子来说， $x(t)$ 中的每一个周期指数分量（如 $\frac{1}{2} e^{j4t}$ ）乘以相应的特征值（如 $H(j4) = e^{-j12}$ ），就是引起该输入分量延时 3。很显然，在这种情况下，凭直观观察就可以用(3.19)式来确定 $y(t)$ ，而勿需使用(3.11)式和(3.12)式。然而，将会看到寄寓在(3.11)式和(3.12)式中的一般特性不仅可以用来计算更为复杂的 LTI 系统响应，而且还提供了 LTI 系统分析和频域表示的基础。

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

3.3.1 成谐波关系的复指数信号的线性组合

正如在第一章所定义的，如果一个信号是周期的，那么对一切 t ，存在某个正值的 T ，有

$$x(t) = x(t + T) \quad \text{对全部 } t \quad (3.21)$$

$x(t)$ 的基波周期就是满足(3.21)式的最小非零正值 T ，而 $\omega_0 = 2\pi/T$ 称为基波频率。

在第 1 章中还介绍了两个基本周期信号，即正弦信号

$$x(t) = \cos \omega_0 t \quad (3.22)$$

和周期复指数信号

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (3.23)$$

这两个信号都是周期的，而且其基波频率为 ω_0 ，基波周期 $T = 2\pi/\omega_0$ 。与(3.23)式有关的成谐波关系的复指数信号集就是

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.24)$$

这些信号中的每一个都有一个基波频率，它是 ω_0 的倍数。因此每一个信号对周期 T 来说都是周期的（虽然，对 $|k| \geq 2$ 来说， $\phi_k(t)$ 的基波周期是 T 的约数）。于是，一个由成谐波关系的复指数线性组合形成的信号

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad (3.25)$$

对 T 来说也是周期的。在(3.25)式中， $k=0$ 这一项就是一个常数， $k=+1$ 和 $k=-1$ 这两项都有基波频率等于 ω_0 ，两者合在一起称之为基波分量或称一次谐波分量。 $k=+2$ 和 $k=-2$ 这两项也是周期的，其周期是基波分量周期 $1/2$ （或者说频率是基波频率的两倍），称为二次谐波分量。一般来说， $k=+N$ 和 $k=-N$ 的分量称为第 N 次谐波分量。

一个周期信号表示成(3.25)式的形式。就称为傅里叶级数表示。在研究这一表示法的性质以前，先来看一个例子。

例 3.2 有一周期信号 $x(t)$ 其基波频率为 2π ，写成(3.25)式的形式为

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t} \quad (3.26)$$

其中

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

将(3.26)式中具有同一基波频率的谐波分量合在一起，重新写成

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) \\ &\quad + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

再用欧拉关系， $x(t)$ 可写为

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t \quad (3.28)$$

图 3.4 中用图解的方法说明了 $x(t)$ 是如何由这些谐波分量构成的。

(3.28)式是实周期信号傅里叶级数另一种表示形式的例子。具体地说，若 $x(t)$ 是一个实信号，而且能表示成(3.25)式的形式，那么因为 $x^*(t) = x(t)$ ，所以就有

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

在该求和式中，以 $-k$ 代替 k ，则

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

将此式与(3.25)式比较，则要求 $a_k = a_{-k}^*$ ，或者

$$a_k^* = a_{-k} \quad (3.29)$$

注意到例 3.2 就属于这种情况，在那里 a_k 还是实数，且有 $a_k = a_{-k}$ 。

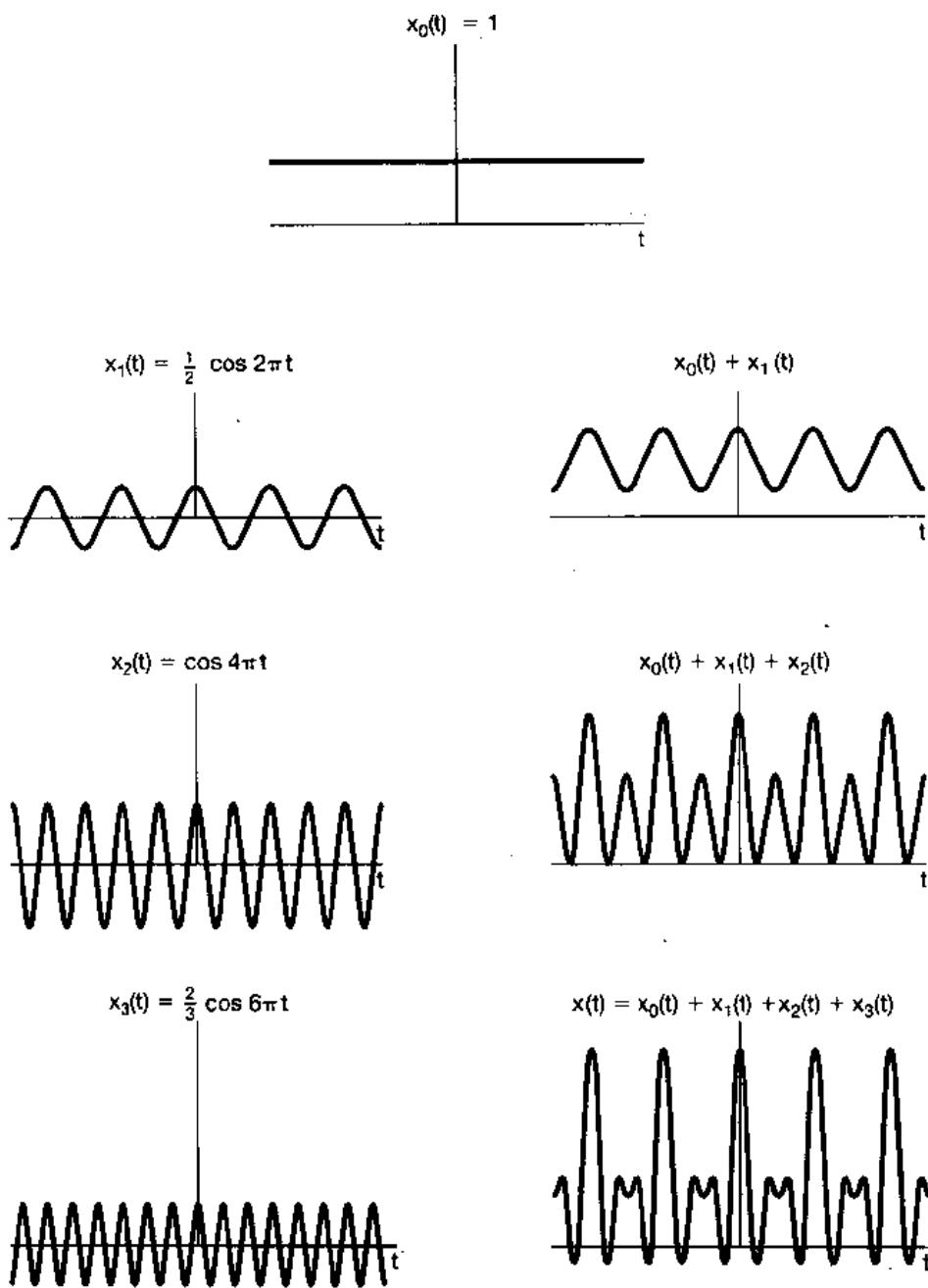


图 3.4 例 3.2 中的 $x(t)$ 作为成谐波关系的正弦信号的线性组合来构成的图解说明

为导出傅里叶级数的另一种形式，首先将(3.25)式的求和重新写成

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{j k \omega_0 t} + a_{-k} e^{-j k \omega_0 t}]$$

由(3.29)式，以 a_k^* 取代 a_{-k} ，上式变为

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{j k \omega_0 t} + a_k^* e^{-j k \omega_0 t}]$$

因为在括号内的两项互为共轭，于是

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re\{a_k e^{jk\omega_0 t}\} \quad (3.30)$$

若将 a_k 以极坐标形式给出

$$a_k = A_k e^{j\theta_k}$$

那么(3.30)式就可写成

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\}$$

这就是

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (3.31)$$

(3.31)式就是在连续时间情况下，对实周期信号常常见到的傅里叶级数的表示式。若将 a_k 以直角坐标形式表示，则可以得到另一种表示形式。令

$$a_k = B_k + jC_k$$

这里 B_k 和 C_k 都是实数。于是(3.30)式可改写为

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t] \quad (3.32)$$

在例 3.2 中，由于 a_k 全都是实数，所以 $a_k = A_k = B_k$ 。因此，(3.31)式和(3.32)式这两个表示式最后都变成如(3.28)式那样的形式。

由此可见，对实周期函数来说，按(3.25)式所给出的复指数形式的傅里叶级数，数学上就等效为(3.31)式和(3.32)式这两种形式之一，即都是三角函数的表示式。尽管(3.31)式和(3.32)式这两种形式是最普遍采用的傅里叶级数表示式^①，但是(3.25)式的复指数表示式对于我们要讨论的问题来说，却是特别方便的。所以今后将几乎毫无例外地采用这种傅里叶级数表示式。

(3.29)式的关系是与傅里叶级数有关的诸多性质之一。这些性质无论在计算上，或是对本质问题的了解上都是非常有用的。在 3.5 节将把大部分重要的性质集中在一起列出，其中几个性质的导出将在本章末习题中考虑。在 4.3 节将在傅里叶变换这样一个更为广泛的范围内讨论它的大部分性质。

3.3.2 连续时间周期信号傅里叶级数表示的确定

假设一个给定的周期信号能表示成(3.25)式的级数形式，这就需要一种办法来确定这些系数 a_k 。将(3.25)式两边各乘以 $e^{-jn\omega_0 t}$ ，可得

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} \quad (3.33)$$

将上式两边从 0 到 $T = 2\pi/\omega_0$ 对 t 积分，有

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

这里 T 是 $x(t)$ 的基波周期，以上就是在该周期内积分。将上式右边的积分和求和次序交换

^① 事实上，在傅里叶最初的工作中用的就是由(3.32)式给出的傅里叶级数的正弦-余弦形式。

后得

$$\int_0^T x(t) e^{-j n \omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right] \quad (3.34)$$

(3.34)式右边括号内的积分是很容易的,为此利用欧拉关系可得

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t) dt + j \int_0^T \sin((k-n)\omega_0 t) dt \quad (3.35)$$

对于 $k \neq n$, $\cos((k-n)\omega_0 t)$ 和 $\sin((k-n)\omega_0 t)$ 都是周期函数,其基波周期为 $(T/|k-n|)$ 。现在做的积分是在 T 区间内进行,而 T 又一定是它们的基波周期 $(T/|k-n|)$ 的整倍数。由于积分可以看作是被积函数在积分区间内所包括的面积,所以(3.35)式右边的两个积分对于 $k \neq n$ 来说,其值为 0; 而对 $k = n$, (3.35)式左边的被积函数是 1, 所以其积分值为 T 。综合上述得到

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

这样(3.34)式的右边就化为 $T a_n$ 。因此有

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \quad (3.36)$$

该式给出了确定系数的关系式。另外,在求(3.35)式时仅仅用到这一点,即积分是在一个 T 的间隔内进行,而该 T 又是 $\cos((k-n)\omega_0 t)$ 和 $\sin((k-n)\omega_0 t)$ 周期的整倍数。因此,如果在任意 T 的间隔做积分,结果一定是相同的;这就是说,若以 \int_T 表示在任何一个 T 间隔内的积分,则应该有

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

因此

$$a_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j n \omega_0 t} dt \quad (3.37)$$

上述过程可归纳如下:如果 $x(t)$ 有一个傅里叶级数表示式[即 $x(t)$ 能表示成一组成谐波关系的复指数信号的线性组合,如(3.25)式所示],那么傅里叶级数中的系数就由(3.37)式所确定。这一对关系式就定义为一个周期连续时间信号的傅里叶级数:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k \omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k (2\pi/T)t} \quad (3.38)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j k (2\pi/T)t} dt \quad (3.39)$$

式中分别给出了用基波频率 ω_0 和基波周期 T 所表示的傅里叶级数的等效表示式。(3.38)式称为综合公式,而(3.39)式则称为分析公式。系数 $\{a_k\}$ 往往称为 $x(t)$ 的傅里叶系数或称为 $x(t)$ 的频谱系数^①。这些复数系数是对信号 $x(t)$ 中的每一个谐波分量的大小作出的度量。系数 a_0 就是 $x(t)$ 中的直流或常数分量,由(3.39)式以 $k=0$ 代入可得

^① “频谱系数”这一术语是从光的分解中借用来的,光通过分光镜分解出一组谱线,这组谱线就是光在不同频率下的各个基本分量,每一条谱线的强度就是在整个光的能量中,该谱线频率所占有的分量。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (3.40)$$

这就是 $x(t)$ 在一个周期内的平均值。

(3.38)式和(3.39)式在 18 世纪中叶对欧拉和拉格朗日来说都是熟悉的；然而，他们俩人都放弃了这条分析途径，而没有去研究这样一个问题：究竟有多大一类的周期信号可以表示成这种形式？在下一节讨论这个问题之前，先举几个例子来说明傅里叶级数的展开。

例 3.3 考虑信号

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

其基波频率为 ω_0 。确定该信号 $x(t)$ 的傅里叶级数系数的一个方法是利用(3.39)式，但是在该例这样简单的情况下，只要将 $x(t)$ 直接展开成复指数的线性组合，就能凭直观确定傅里叶级数的系数，即将 $\sin \omega_0 t$ 表示成

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

将上式与(3.38)式比较可得

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2j}, & a_{-1} &= -\frac{1}{2j} \\ a_k &= 0, & k &\neq \pm 1 \text{ 或 } -1 \end{aligned}$$

例 3.4 令

$$x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$x(t)$ 的基波频率是 ω_0 。和例 3.3 一样，将 $x(t)$ 直接展开成复指数的形式有

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} [e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}]$$

将相应项归并后可得

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{j(\pi/4)}\right) e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j(\pi/4)}\right) e^{-j2\omega_0 t}$$

由此可得该例的傅里叶级数系数为

$$a_0 = 1, a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j, a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{2} e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j), a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j), a_k = 0, |k| > 2$$

在图 3.5 上用条线图表示出 a_k 的幅度和相位。

例 3.5 图 3.6 示出一周期性方波，在一个周期内定义如下：

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

这个信号是在本书中要经常遇到的。该信号的基波周期是 T ，基波频率就为 $\omega_0 = 2\pi/T$ 。

现在用(3.39)式来确定 $x(t)$ 的傅里叶级数系数。由于 $x(t)$ 对于 $t=0$ 是对称的，因此在一个周期内积分取积分区间为 $-T/2 \leq t < T/2$ 最为方便。

首先对 $k=0$ 有

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T} \quad (3.42)$$

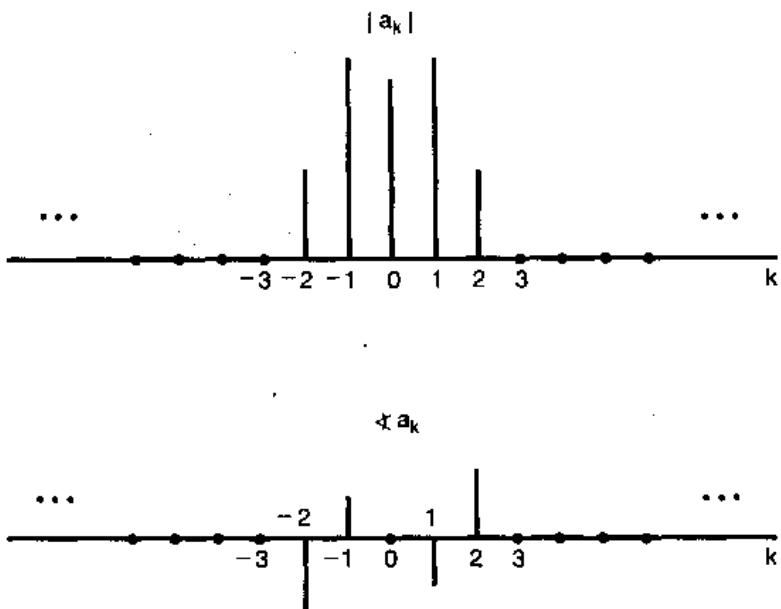


图 3.5 例 3.4 中信号的傅里叶系数的幅度和相位

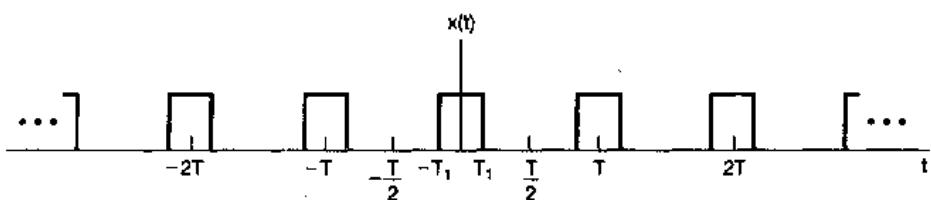


图 3.6 周期性方波

前面已经提到, a_0 代表 $x(t)$ 的平均值。在本例中它代表在一个周期内信号 $x(t)$ 为 1 时所占的比例。对 $k \neq 0$ 有

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

或重写为下式:

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T} \left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2} \right] \quad (3.43)$$

上式括号内就是 $\sin k\omega_0 T_1$, 系数 a_k 就能表示成

$$a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0 \quad (3.44)$$

在此用到 $\omega_0 T = 2\pi$ 这一关系。

在图 3.7 中, 画出了在某一固定的 T_1 和几个不同的 T 下傅里叶级数系数的条线图。对这个例子来说, 傅里叶系数是实数, 所以用一张图就能表示。当然, 在更一般的情况下, 它们是复数, 需要两张图来分别表示每个系数的实部和虚部, 或模与相位。当 $T = 4T_1$ 时, $x(t)$ 是一个一半为 0, 一半为 1 的方波, 这时 $\omega_0 T_1 = \pi/2$, 由(3.44)式

$$a_k = \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0 \quad (3.45)$$

而

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad (3.46)$$

根据(3.45)式, 当 k 为偶数(不为 0), $a_k=0$, 同时, $\sin(\pi k/2)$ 对 k 为奇数时, 相继在 ± 1 之间交替变化, 因此

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi}, \quad a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi}, \quad a_5 = a_{-5} = \frac{1}{5\pi}$$

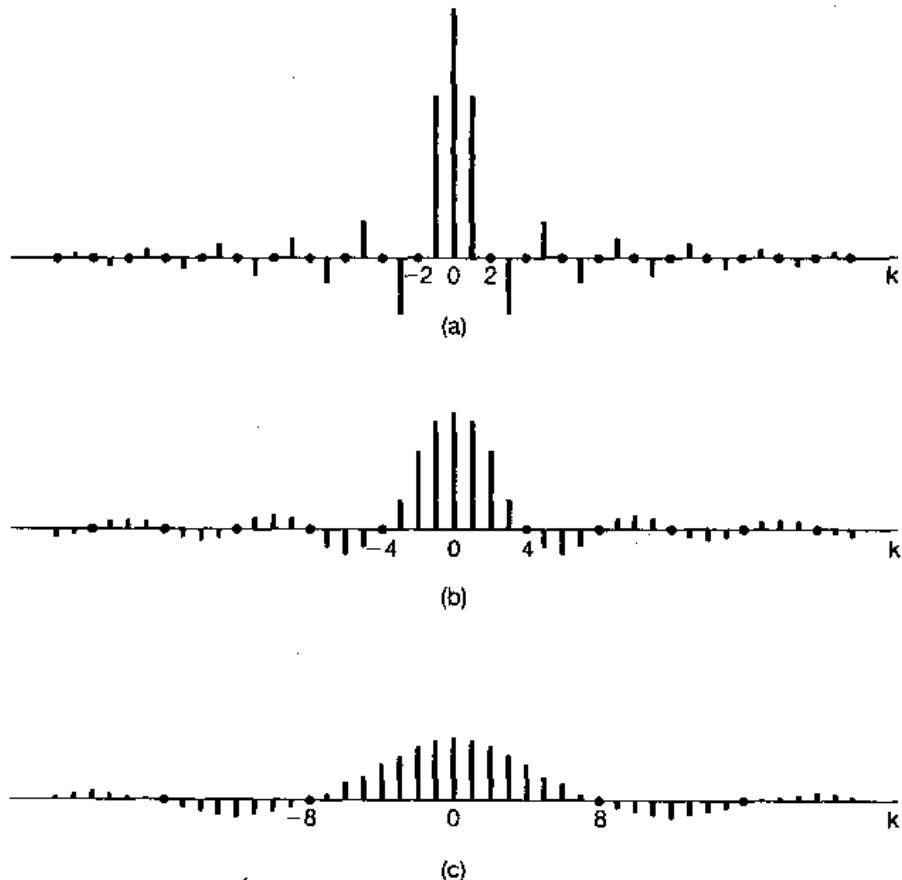


图 3.7 对于 T_1 固定和几个不同的 T 值时, 周期性方波傅里叶级数系数 Ta_k 的图:

(a) $T=4T_1$; (b) $T=8T_1$; (c) $T=16T_1$ 。

这些系数都是包络 $(2\sin\omega T_1)/\omega$ 的等间隔样本, 样本间隔为 $2\pi/T$, 随 T 的增加而减小

3.4 傅里叶级数的收敛

虽然欧拉和拉格朗日对例 3.3 和例 3.4 的结果一直是很满意的, 但是他们都反对例 3.5 的情况。因为例 3.5 中 $x(t)$ 是不连续的, 而每个谐波分量却都是连续的。另一方面, 傅里叶研究了同一个例子, 并且认为方波的傅里叶级数表示也是对的。事实上, 傅里叶坚持的是任何周期信号都能用傅里叶级数表示! 虽然这一点并不完全正确, 但傅里叶级数确能用于表示相当广泛的一类周期信号, 其中包括周期方波和其它本书将要涉及并在实际中很重要的一些周期信号。

为了对所给的周期方波例子有更进一步的理解, 并更为一般地看看傅里叶级数表示的有

效性问题，先来研究一个周期信号 $x(t)$ 用成谐波关系的有限项复指数信号的线性组合来近似的问题；也就是说，用下列有限项级数：

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.47)$$

来近似 $x(t)$ 的问题。令 $e_N(t)$ 为近似误差

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.48)$$

为了确定近似的程度，需要对近似误差的大小给出一种定量的度量。所采用的标准是在一个周期内误差的能量：

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2 dt \quad (3.49)$$

在习题 3.66 中已证明，要使误差能量最小，对(3.47)式各系数的特别选取是

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.50)$$

把(3.50)式和(3.39)式比较一下发现，这与确定傅里叶级数系数的表示式是一致的。由此得到：如果 $x(t)$ 能展开成傅里叶级数，那么当把这一无穷项级数在所要求的某一项处截断时，这就是仅用成谐波关系的有限项复指数来近似 $x(t)$ 的最佳近似。随着 N 的增加，附加上新的项， E_N 减小。事实上，如果 $x(t)$ 有一个傅里叶级数展开式的话，那么，随着 $N \rightarrow \infty$ ， E_N 的极限就是零。

现在再回到这样一个问题上来，即一个周期信号 $x(t)$ 什么时候才确实具有一个傅里叶级数的表示。当然，对任何周期信号，总是能用(3.39)式求得一组傅里叶系数。然而，在某些情况下(3.39)式的积分可能不收敛；也就是说对某些 a_k 求得的值可能是无穷大。再者，即使从(3.39)式求得的全部系数都是有限值，当把这些系数代入(3.38)式中时所得到的无限项级数也可能不收敛于原来的信号 $x(t)$ 。

所幸地是，对大部分周期性信号而言不存在任何收敛上的困难。例如，全部连续的周期信号都有一个傅里叶级数表示，使其近似误差能量 E_N 随着 N 趋于 ∞ 而趋于零。这一点对很多不连续信号也是对的。由于考虑包括像以上讨论的方波这样一些不连续信号是很有用的，因此值得对收敛问题作稍许详细一些的研究。有两类稍微有些不同的条件，如果一个周期信号满足这些条件，就能保证该信号能用傅里叶级数来表示。在讨论这些问题时，不打算给出完整的数学证明，更为严谨的讨论可以从很多有关傅里叶分析的教科书中找到①。

可以用傅里叶级数来表示的一类周期信号 $x(t)$ 是它在一个周期内能量有限的信号，即

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty \quad (3.51)$$

当这一条件满足时，就能保证由(3.39)式求得的诸系数 a_k 是有限值。进一步，若令 $x_N(t)$ 是对 $x(t)$ 的近似，而 $x_N(t)$ 是用 $|k| \leq N$ 时的这些系数得到的，即

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.52)$$

① 例如，可参阅 R. V. Churchill, Fourier Series and Boundary Value Problems, 3rd ed. (New York: McGraw-Hill Book Company, 1978); W. Kaplan, Operational Methods for Linear Systems, (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1962); 以及在 p. 124 中的页注②中所引的 Dym 和 McKean 的书。

那么就能保证近似误差中的能量 E_N [由(3.49)式定义]随着所增加的项数愈来愈多, 即 $N \rightarrow \infty$, 收敛于 0。这也就是说, 如果定义一个误差函数为

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.53)$$

那么就有

$$\int_T |e(t)|^2 dt = 0 \quad (3.54)$$

正如在本节末尾的一个例子中将看到的, (3.54)式并不意味着信号 $x(t)$ 和它的傅里叶级数表示

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.55)$$

在每一个 t 值上都相等, 而只表示两者没有任何能量上的差别。

当 $x(t)$ 在一个周期内具有有限能量就保证收敛, 这在实际中是很有用的。这时(3.54)式代表的是 $x(t)$ 和它的傅里叶级数表示之间没有能量上的差别。因为实际系统都是对信号能量作出响应, 从这个观点出发, $x(t)$ 和它的傅里叶级数表示就是不可区分的了。由于要研究的大多数周期信号在一个周期内的能量都是有限的, 因此它们都有傅里叶级数的表示。然后, 狄里赫利得到了另一组条件, 这组条件对于我们所关注的信号也基本上都能满足。这组条件除了在某些对 $x(t)$ 不连续的孤立的 t 值外, 保证 $x(t)$ 等于它的傅里叶级数表示; 而在那些 $x(t)$ 不连续的点上, (3.55)式的无穷级数收敛于不连续点两边值的平均值。

狄里赫利条件是:

条件 1 在任何周期内, $x(t)$ 必须绝对可积, 即

$$\int_T |x(t)| dt < \infty \quad (3.56)$$

与平方可积条件相同, 这一条件保证了每一系数 a_k 都是有限值, 因为

$$|a_k| \leq \frac{1}{T} \int_T |x(t) e^{jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)| dt$$

所以, 如果

$$\int_T |x(t)| dt < \infty \text{ 那么 } |a_k| < \infty$$

不满足狄里赫利第一条件的周期信号可以举例如下:

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1$$

也就是说, $x(t)$ 是周期的, 周期为 1。这个信号如图 3.8(a)所示。

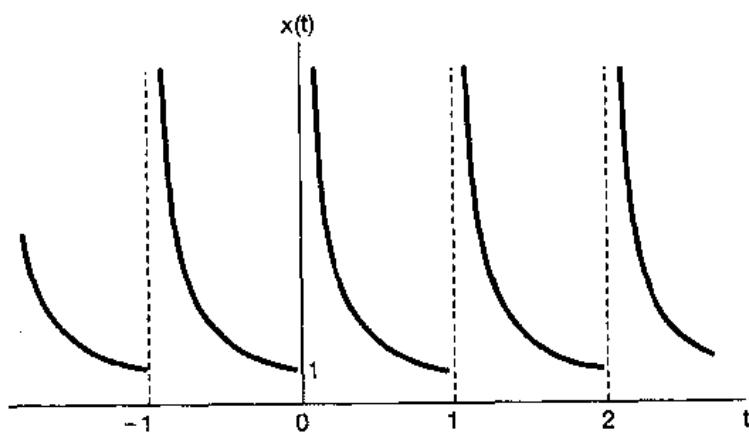
条件 2 在任意有限区间内, $x(t)$ 具有有限个起伏变化; 也就是说, 在任何单个周期内, $x(t)$ 的最大值和最小值的数目有限。

满足条件 1 而不满足条件 2 的一个函数是

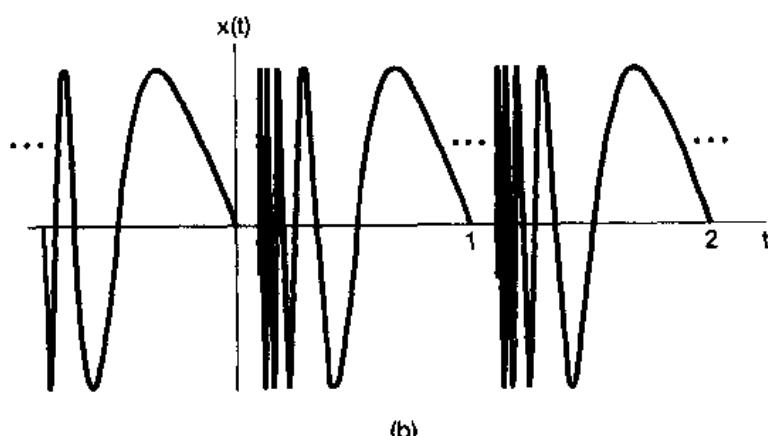
$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1 \quad (3.57)$$

如图 3.8(b)所示。对此函数, 其周期 $T=1$, 有

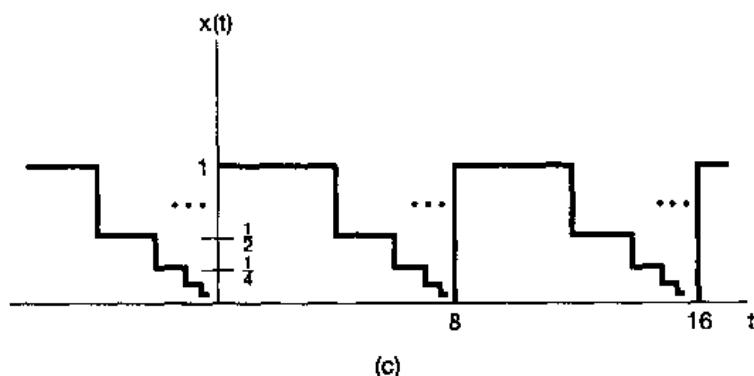
$$\int_0^1 |x(t)| dt < 1$$



(a)



(b)



(c)

图 3.8 不满足狄里赫利条件的信号：

(a) 信号 $x(t) = 1/t, 0 < t \leq 1$ 。周期为 1(该信号违反狄里赫利第一条件);

(b)由(3.57)式定义的周期信号, 它不满足第二条件;

(c)周期为 8 的一个周期信号, 它不满足第三条件[该信号 $x(t)$ 的值在区间 $0 \leq t < 8$ 内,

随着从 t 到 8 的距离减半, $x(t)$ 的值也减半, 即 $x(t) = 1, 0 \leq t < 4; x(t) = 1/2, 4 \leq t < 6; x(t) = 1/4, 6 \leq t < 7; x(t) = 1/8, 7 \leq t < 7.5, \dots$ 等等]

然而，它在一个周期内有无限多的最大点和最小点。

条件 3 在 $x(t)$ 的任何有限区间内，只有有限个不连续点，而且在这些不连续点上，函数是有限值。

不满足条件 3 的例子如图 3.8(c) 所示。这个信号 $x(t)$ 的周期 $T=8$ ，它是这样组成的：后一个阶梯的高度和宽度都是前一个阶梯的一半。可见 $x(t)$ 在一个周期内的面积不会超过 8，即满足条件 1。但是不连续点的数目却是无穷多个，从而不满足条件 3。

由图 3.8 给出的例子可知，一个不满足狄里赫利条件的信号，一般来说在自然界中都是属于比较反常的信号，结果在实际场合不会出现。因此，傅里叶级数的收敛问题对本书要讨论的问题不具有特别重要的意义。对于一个不存在任何间断点的周期信号而言，傅里叶级数收敛，并且在每一点上该级数都等于原来的信号 $x(t)$ 。对于在一个周期内存在有限数目不连续点的周期信号而言，除开那些孤立的不连续点外，其余所有点上傅里叶级数都等于原来的 $x(t)$ ；而在那些孤立的不连续点上，傅里叶级数收敛于不连续点处的值的平均值。在这种情况下，原来信号和它的傅里叶级数表示之间没有任何能量上的差别。因此，两者从所有实际目的来看可以认为是一样的；具体一些就是，因为两者只是在一些孤立点上有差异，所以两者在任意区间内的积分是一样的。为此，在卷积的意义下，两者的特性是一样的，因而从 LTI 系统分析的观点来看，两个信号完全是一致的。

为了进一步理解对一个具有不连续点的周期信号，其傅里叶级数是如何收敛的，让我们还是回到方波的例子。1898 年^①，美国物理学家米切尔森(Albert Michelson)做了一台谐波分析仪。该仪器可以计算任何一个周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数截断后的近似式(3.52)式，其中 N 可以算到 80。米切尔森用了很多函数来测试他的仪器，结果发现 $x_N(t)$ 都和 $x(t)$ 非常一致。然而当他测试方波信号时，他得到了一个重要的、令他吃惊的结果！于是他根据这一结果而怀疑起他的仪器是否有不完善的地方。他将这一问题写了一封信给著名的数学物理学家吉伯斯(Josiah Gibbs)，吉伯斯研究了这一结果，并于 1899 年发表了他的看法。

米切尔森所观察到的现象可以用图 3.9 来说明。图中，设 $x(t)$ 是一个对称方波 ($T = 4T_1$)，画出了几个 N 值时 $x_N(t)$ 的波形，并且在每一种情况下，都将部分和的结果套在原来的方波上，以便比较。因为方波满足狄里赫利条件，因此随着 $N \rightarrow \infty$ ， $x_N(t)$ 在不连续点的极限应该是不连续点处的平均值。这点从图 3.9 可以看到确实如此，因为对于任意的 N 来说， $x_N(t)$ 在不连续点都具有这个平均值。再者，对任何其它的 t ，例如 $t = t_1$ ，可以保证

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t_1) = x(t_1)$$

因此，方波的傅里叶级数表示式的平方误差，如(3.53)式和(3.54)式所示，其面积也是零。

对这个例子，米切尔森所观察到的有趣现象是在不连续点附近部分和 $x_N(t)$ 所呈现的起伏，而且这个起伏的峰值大小似乎不随 N 的增大而下降！吉伯斯证明：情况确实是这样，而且也应该是这样。若不连续点处的高度是 1，则部分和所呈现的峰值的最大值是 1.09，即有 9% 的超量。无论 N 取多大，这个超量不变。对这个现象必须给予正确地解释！如前所述，对任何一个给定的 t ，例如 $t = t_1$ 部分和将会收敛于 $x(t_1)$ 的真正值，而在不连续点处将收敛于不连续点两边信号值之和的一半。然而，当 t_1 取得愈接近不连续点时，为了把误差减小到低于某一给定值， N 就必须取得愈大。于是，随着 N 的增加，部分和的起伏就向不连续点处压

^① 用于这个例子的材料取自于 p.124 中的页注①中引用的 Lanczos 的著作。

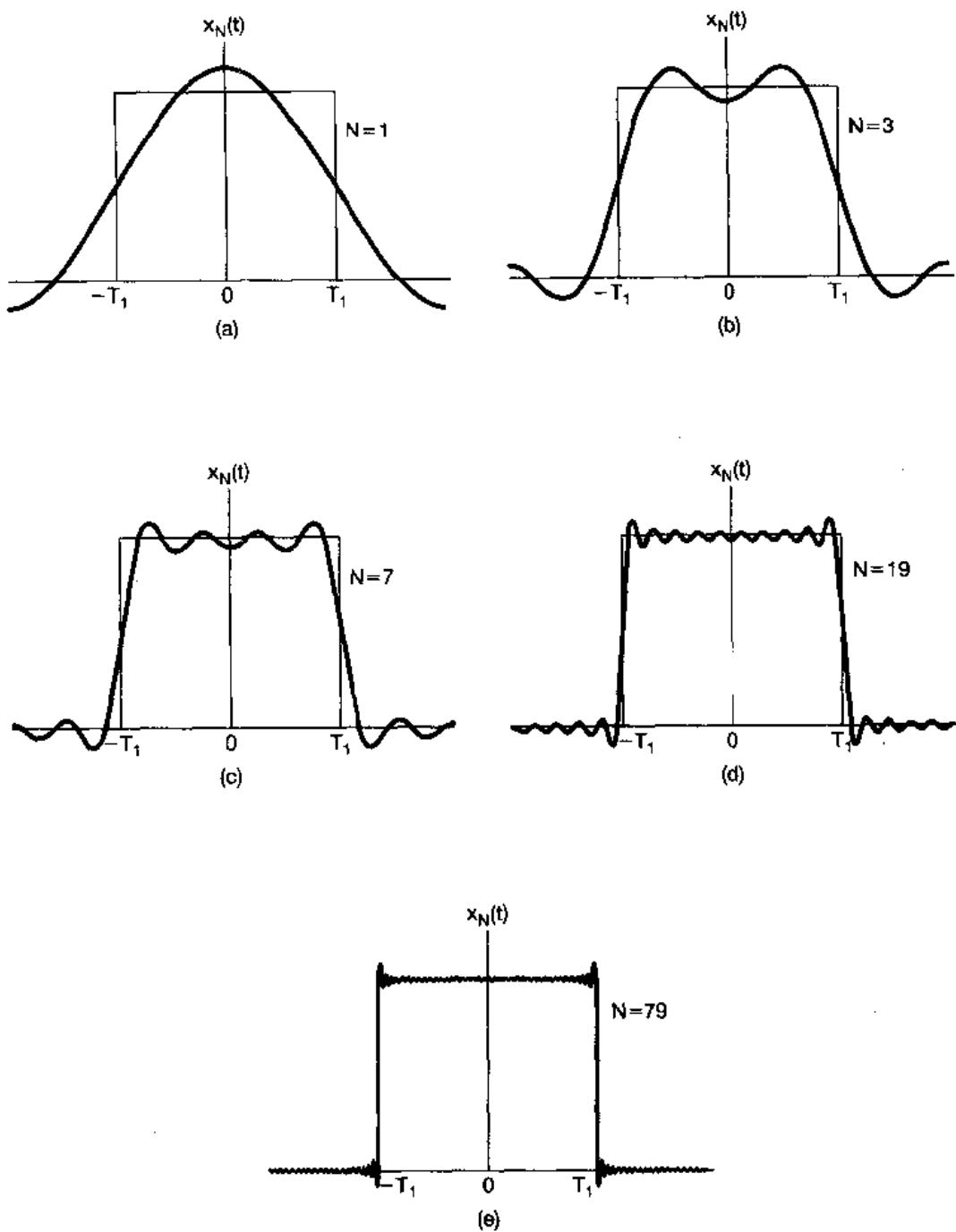


图 3.9 方波傅里叶级数表示的收敛:吉伯斯现象。图中对几个 N 值画出了有限项近似

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{j k \omega_0 t}$$

缩,但是对任何有限的 N 值,起伏的峰值大小保持不变,这就是吉伯斯现象。这个现象的含意是:一个不连续信号 $x(t)$ 的傅里叶级数的截断近似 $x_N(t)$,一般说来,在接近不连续点处将呈现高频起伏和超量,而且,若在实际情况下利用这样一个近似式的话,就应该选择足够大的 N ,以保证这些起伏拥有的总能量可以忽略。当然,在极限情况下,我们知道近似误差的能量是零,而且一个不连续信号(如方波)的傅里叶级数表示是收敛的。

3.5 连续时间傅里叶级数性质

前面曾提到过, 傅里叶级数表示具有一系列重要的性质, 这些性质对于这样的表示在概念上的深入理解是很有用的; 并且, 它们还有助于简化求取很多信号傅里叶级数的复杂性。在表 3.1 中综合列出了这些性质, 其中几个性质将放在本章末习题中去考虑。在第 4 章讨论傅里叶变换时将看到, 大部分性质都可以从对应的连续时间傅里叶变换的性质中推演出来。所以在这里只限于几个性质的讨论, 以此来说明这些性质是如何被导出、解释和应用的。

下面从表 3.1 中挑选出的几个性质的讨论都用一种简便的符号来表明一个周期信号和它的傅里叶级数之间的关系, 即假设 $x(t)$ 是一周期信号, 周期为 T , 基波频率 $\omega_0 = 2\pi/T$, 那么, 若 $x(t)$ 的傅里叶级数系数记作 a_k , 则用

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

来表示一个周期信号及其傅里叶级数系数的一对关系。

3.5.1 线性

令 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为两个周期信号, 周期为 T , 它们的傅里叶级数系数分别为 a_k 和 b_k , 即

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} b_k$$

因为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 具有相同的周期, 因此极易得出这两个信号的任意线性组合也一定是周期的, 且周期为 T 。再者, $x(t)$ 和 $y(t)$ 的线性组合 $z(t) = Ax(t) + By(t)$ 的傅里叶级数系数 c_k 由 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶级数系数的同一线性组合给出, 即

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} C_k = Aa_k + Bb_k \quad (3.58)$$

根据(3.39)式可以直接给予证明。同时可以看到, 线性性质很容易推广到具有相同周期 T 的任意多个信号的线性组合中去。

3.5.2 时移性质

当给一个周期信号 $x(t)$ 以某个时移时, 该信号的周期 T 保持不变, 所得到的信号 $y(t) = x(t - t_0)$ 的傅里叶级数系数 b_k 可以表示为

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-j k \omega_0 t} dt \quad (3.59)$$

令 $\tau = t - t_0$, 并注意到新的变量 τ 也是在某一 T 的间隔内变化的, 于是可得

$$\frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-j k \omega_0 (\tau + t_0)} d\tau = e^{-j k \omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-j k \omega_0 \tau} d\tau = e^{-j k \omega_0 t_0} a_k = e^{-j k (2\pi/T) t_0} a_k$$

式中 a_k 就是 $x(t)$ 的第 k 个傅里叶级数系数。也就是说, 若

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

那么

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{FS}} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k$$

这个性质的一个结果就是：当一个周期信号在时间上移位时，它的傅里叶级数系数的模保持不变，即 $|b_k| = |a_k|$ 。

3.5.3 时间反转

当一个周期信号 $x(t)$ 经过时间反转后，其周期 T 仍然保持不变，为了确定 $y(t) = x(-t)$ 的傅里叶级数系数，先看一下时间反转在综合公式(3.38)式所带来的影响：

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi t/T} \quad (3.61)$$

作变量置换 $k = -m$ 得

$$y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm2\pi t/T} \quad (3.62)$$

可见上式的右边就具有对 $x(-t)$ 的傅里叶级数展开形式，其傅里叶级数系数 b_k 就是

$$b_k = a_{-k} \quad (3.63)$$

这就是说，若

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

那么

$$x(-t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_{-k}$$

换句话说，施加于连续时间信号上的时间反转就产生其对应的傅里叶级数系数序列的时间反转。时间反转型质的一种结果是：若 $x(t)$ 为偶函数，即 $x(-t) = x(t)$ ，则其傅里叶级数系数也为偶，即 $a_{-k} = a_k$ ；若 $x(t)$ 为奇函数，即 $x(-t) = -x(t)$ ，则其傅里叶级数系数也为奇，即 $a_{-k} = -a_k$ 。

3.5.4 时域尺度变换

时域尺度变换是一种运算。一般来说，这种运算是会改变受到变换的信号周期的。如果 $x(t)$ 是周期的，周期为 T ，基波频率 $\omega_0 = 2\pi/T$ ，那么 $x(at)$ ， a 为一正实数，就是一个周期为 T/a 和基波频率为 $a\omega_0$ 的周期信号。因为时间尺度运算是直接加在 $x(t)$ 的每一次谐波分量上的，所以能很容易得出，对于这些谐波分量中每一个的傅里叶系数仍然是相同的。这就是说，若 $x(t)$ 具有(3.38)式的傅里叶级数表示，那么

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(a\omega_0)t}$$

就是 $x(at)$ 的傅里叶级数表示。要强调的是，虽然傅里叶系数没有改变，但由于基波频率变化了，傅里叶级数表示却改变了。

3.5.5 相乘

假设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个周期为 T 的周期信号，且有

$$x(t) \xrightarrow{\text{FS}} a_k$$

$$y(t) \xrightarrow{\text{FS}} b_k$$

因为乘积 $x(t)$ 和 $y(t)$ 也是周期的, 周期为 T , 就可以将它展开成傅里叶级数, 而其傅里叶级数系数 h_k 可以用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶系数来表示, 结果是

$$x(t)y(t) \xrightarrow{\text{FS}} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} \quad (3.64)$$

导出上面关系的一种办法(见习题 3.46)就是将 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶级数表示式乘开, 并注意到在这个乘积中的第 k 次谐波分量一定有一个系数就具有 $a_l b_{k-l}$ 这些项的和。可以看出, (3.64)式右边的和式可以看作是代表 $x(t)$ 的傅里叶系数序列与代表 $y(t)$ 的傅里叶系数序列的离散时间卷积。

3.5.6 共轭及共轭对称性

将一个周期信号 $x(t)$ 取它的复数共轭, 在它的傅里叶级数系数上就会有复数共轭并作时间倒置的结果, 即若

$$x(t) \xrightarrow{\text{F}} a_k$$

那么

$$x^*(t) \xrightarrow{\text{FS}} a_{-k}^* \quad (3.65)$$

将(3.38)式两边各取复数共轭, 并在求和中以 $-k$ 代替 k , 这个性质就很容易被证明。

对于 $x(t)$ 为实函数, 可以从这个性质导出一些很有用的结果。这时, 由(3.65)式可以看出, 由于 $x(t) = x^*(t)$, 傅里叶级数系数就一定是共轭对称的, 即

$$a_{-k} = a_k^* \quad (3.66)$$

这点在(3.29)式中就曾见到。这样, 对于实信号的傅里叶级数系数的模、相位、实部和虚部又依次意味着各种对称性质(均列于表 3.1 中)。例如, 若 $x(t)$ 为实信号, 由(3.66)式看出, a_0 就为实, 且有

$$|a_k| = |a_{-k}|$$

同时, 若 $x(t)$ 为实且为偶函数, 那么由 3.5.3 节, $a_k = a_{-k}$ 。然而, 根据(3.66)式又有 $a_k^* = a_{-k}$, 所以 $a_k = a_k^*$ 。这就是说, 若 $x(t)$ 为实且为偶函数, 那么它的傅里叶级数系数也为实且为偶函数。类似地有, 若 $x(t)$ 为实且为奇函数, 那么它的傅里叶级数系数为纯虚数且为奇函数。由此, 例如 $x(t)$ 为实且为奇函数, 则 $a_0 = 0$ 。傅里叶级数的对称性质将在习题 3.42 中作进一步讨论。

3.5.7 连续时间周期信号的帕斯瓦尔定理

正如在习题 3.46 中所证明的, 连续时间周期信号的帕斯瓦尔定理是

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \quad (3.67)$$

式中 a_k 是 $x(t)$ 的傅里叶级数系数, T 是该信号的周期。

(3.67)式的左边是周期信号 $x(t)$ 在一个周期内的平均功率(也就是单位时间内的能量),而同时有

$$\frac{1}{T} \int_T |a_k e^{j k \omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T |a_k|^2 dt = |a_k|^2 \quad (3.68)$$

所以 $|a_k|^2$ 就是 $x(t)$ 中第 k 次谐波的平均功率。于是, 帕斯瓦尔定理所说的就是: 一个周期信号的总平均功率就等于它的全部谐波分量的平均功率之和。

3.5.8 连续时间傅里叶级数性质列表

在表 3.1 中列出了连续时间傅里叶级数的全部重要性质。

表 3.1 连续时间傅里叶级数性质

性 质	节次	周期信号	傅里叶级数系数
线性	3.5.1	$x(t)$ 周期为 T , $y(t)$ 基本频率 $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
时移	3.5.2	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
频移	3.5.3	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-j k \omega_0 t_0} = a_k e^{-j k (2\pi/T) t_0}$
共轭	3.5.6	$x^*(t)$	a_{-k}^*
时间反转	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
时域尺度变换	3.5.4	$x(at)$, $a > 0$ (周期为 T/a)	a_k
周期卷积	3.5.5	$\int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$T a_k b_k$
相乘	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
微分		$\frac{dx(t)}{dt}$	$j k \omega_0 a_k = j k \frac{2\pi}{T} a_k$
积分		$\int_{-\infty}^t x(t) dt$ (仅当 $a_0 = 0$ 才为有限值且为 周期的)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right) a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right) a_k$
实信号的共轭 对称性	3.5.6	$x(t)$ 为实信号	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \overline{a}_k = -\overline{a}_{-k} \end{cases}$
实、偶信号	3.5.6	$x(t)$ 为实、偶信号	a_k 为实且偶
实、奇信号	3.5.6	$x(t)$ 为实、奇信号	a_k 纯虚且为奇
实信号的奇偶 分解		$\begin{cases} x_e(t) = \Re\{x(t)\} [x(t) \text{ 为实}] \\ x_o(t) = \Im\{x(t)\} [x(t) \text{ 为实}] \end{cases}$	$\Re\{a_k\}$ $j\Im\{a_k\}$
		周期信号的帕斯瓦尔定理	$\frac{1}{T} \int_T x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k ^2$

3.5.9 举例

在求取一个已知信号的傅里叶系数时, 可以利用列于表 3.1 中的这些傅里叶级数性质, 绕过一些繁杂的代数运算。下面用三个例子来说明这一点。最后一个例子用来说明, 如何用一个信号的性质来详细地表征该信号。

例 3.6 有一信号 $g(t)$, 基波周期是 4, 如图 3.10 所示。本可以用分析公式(3.39)式直接求 $g(t)$ 的傅里叶级数表示式, 现在利用 $g(t)$ 与例 3.5 中对称周期方波 $x(t)$ 的关系来求。由例 3.5 可见, $T = 4$, $T_1 = 1$ 而

$$g(t) = x(t - 1) - \frac{1}{2} \quad (3.69)$$

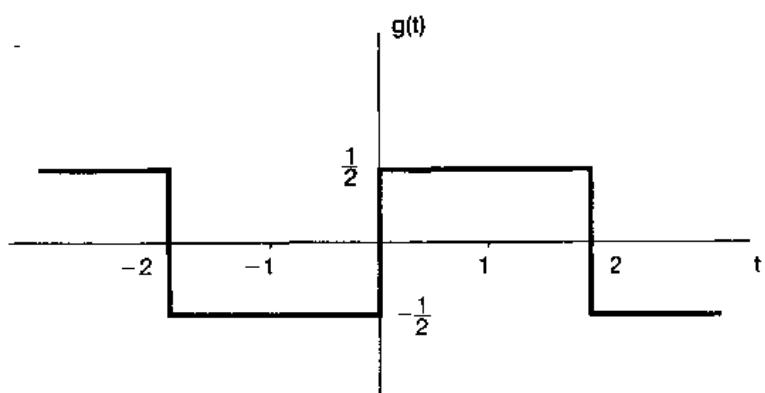


图 3.10 例 3.6 中的周期信号

根据表 3.1 中的时移性质,

若 $x(t)$ 的傅里叶系数记作 a_k , 那么 $x(t - 1)$ 的傅里叶系数 b_k 就是

$$b_k = a_k e^{-jk\pi/2} \quad (3.70)$$

在 $g(t)$ 中直流偏移(即(3.69)式右边的 $-\frac{1}{2}$ 这一项)的傅里叶系数 c_k 是

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

利用表 3.1 的线性性质, $g(t)$ 的傅里叶系数 d_k 可表示为

$$d_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ a_0 = \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

再将式中的 a_k 用(3.45)式和(3.46)式的表示式代入, 可得

$$d_k = \begin{cases} \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

例 3.7 考虑一周期为 $T = 4$ 的三角波信号 $x(t)$, 其基波频率 $\omega_0 = \pi/2$, 如图 3.11 所示。这个信号的导数就是例 3.6 中的 $g(t)$ 。将 $g(t)$ 的傅里叶系数记作 d_k , $x(t)$ 的傅里叶系数记作 e_k , 根据表 3.1 的微分性质, 有

$$d_k = jk(\pi/2)e_k$$

$$(3.73)$$

除去 $k = 0$ 外, 上式可用来用 d_k 表示 e_k , 这就是由(3.72)式

$$e_k = \frac{2d_k}{jk\pi} = \frac{2\sin(\pi k/2)}{j(k\pi)^2} e^{-jk\pi/2}, \quad k \neq 0 \quad (3.74)$$

对于 $k = 0$, e_0 可用在一个周期内 $x(t)$ 所包含的面积除以周期长度得到

$$e_0 = \frac{1}{2}$$

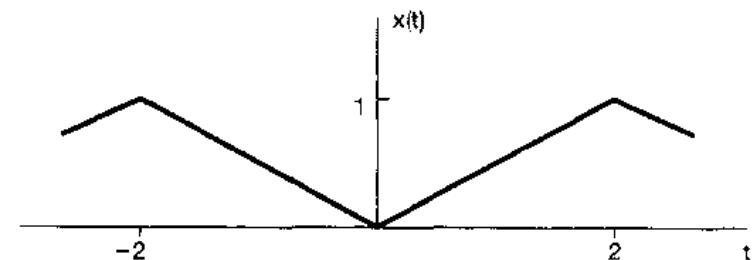


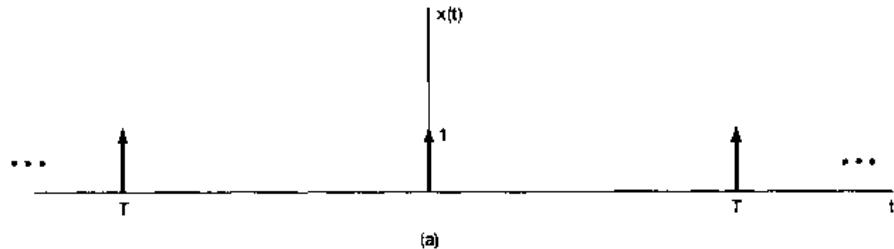
图 3.11 例 3.7 中的三角波信号

例 3.8 现在来考察一个周期冲激串的傅里叶级数表示的某些性质。在第 7 章讨论采样的专题时，这种信号以及其利用复指数的表示将起着重要的作用。周期为 T 的冲激串可表示如下式：

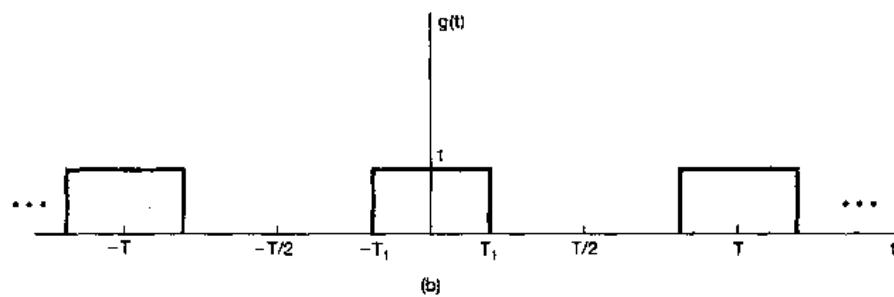
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (3.75)$$

如图 3.12(a) 所示。为了求傅里叶系数 a_k ，可用(3.39)式，并选取积分区间为 $-T/2 \leq t \leq T/2$ ，以避开在积分上下限处发生冲激。在该积分区间内， $x(t)$ 就与 $\delta(t)$ 一样，所以有

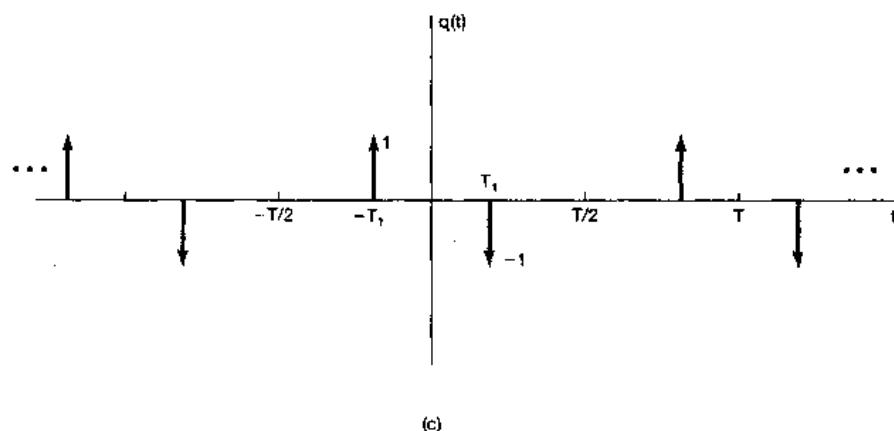
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jkn\pi/T} dt = \frac{1}{T} \quad (3.76)$$



(a)



(b)



(c)

图 3.12 (a) 周期冲激串；(b) 周期方波；(c) 图(b)中周期方波的导数

换句话说，该冲激串的全部傅里叶系数都是一样的；并且这些系数都是实数，对于 k 来说还是偶函数。这也正是意料之中的。因为根据表 3.1，任何实的且为偶的信号（就像现在的冲激串）其傅里叶系数本该就是实的和偶的。

冲激串与类似于例 3.6 中的方波信号 $g(t)$ 还有一种直接的关系。图 3.12(b) 重复画出了一种方波信号。 $g(t)$ 的导数就是如图 3.12(c) 所示的信号 $q(t)$ ，可以将 $q(t)$ 表示为两个经移位了的冲激串之差，即

$$q(t) = x(t + T_1) - x(t - T_1) \quad (3.77)$$

利用傅里叶级数性质，就可以计算出 $q(t)$ 和 $g(t)$ 的傅里叶级数系数，而勿需经由傅里叶级数分析公式去直接计算。首先，根据时移性质和线性性质，由(3.77)式， $q(t)$ 的傅里叶级数系数 b_k 可以用 $x(t)$ 的傅里叶系数 a_k 表示为

$$b_k = e^{jk\omega_0 T_1} a_k - e^{-jk\omega_0 T_1} a_k$$

式中 $\omega_0 = 2\pi/T$ 。利用(3.76)式，就有

$$b_k = \frac{1}{T} [e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}] = \frac{2j\sin(k\omega_0 T_1)}{T}$$

最后，因为 $q(t)$ 是 $g(t)$ 的导数，所以由表 3.1 的微分性质，直接写出

$$b_k = jk\omega_0 c_k \quad (3.78)$$

式中 c_k 是 $g(t)$ 的傅里叶级数系数。于是

$$c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2j\sin(k\omega_0 T_1)}{jk\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0 \quad (3.79)$$

式中用到 $\omega_0 T = 2\pi$ 。注意，(3.79)式对 $k \neq 0$ 成立，因为由(3.78)式，对 $k=0$ 不能解得 c_0 。然而， c_0 就是 $g(t)$ 在一个周期内的平均值，由图 3.12(b)凭直观就可求出为

$$c_0 = \frac{2T_1}{T} \quad (3.80)$$

(3.80)式和(3.79)式分别与在例 3.5 中导出的(3.42)式和(3.44)式是一样的。

下面的例子是用来说明表 3.1 中很多性质的应用。

例 3.9 假设关于某一信号 $x(t)$ 给出下列条件：

1. $x(t)$ 是一个实信号。
2. $x(t)$ 是周期的，周期为 $T=4$ ，它的傅里叶级数系数是 a_k 。
3. $a_k = 0, |k| > 1$
4. 傅里叶系数为 $b_k = e^{-jk\pi/2} a_{-k}$ 的信号是奇信号。
5. $\frac{1}{4} \int_{-4}^4 |x(t)|^2 dt = 1/2$

现在要证明，以上所给条件，除了一个正负号可供选择外，足以将信号 $x(t)$ 确定。根据条件 3， $x(t)$ 至多只有三个非零的傅里叶系数 a_k, a_0, a_1 和 a_{-1} 。然后，因为 $x(t)$ 的基波频率 $\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$ ，于是

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + a_{-1} e^{-j\pi t/2}$$

又由条件 1， $x(t)$ 为实信号，利用表 3.1 中的对称性质可得 a_0 为实数，且 $a_1 = a_{-1}^*$ 。这样就有

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + (a_1 e^{j\pi t/2})^* = a_0 + 2\Re[a_1 e^{j\pi t/2}] \quad (3.81)$$

现在来确定由条件 4 给出的具有傅里叶系数为 b_k 的信号。根据表 3.1 的时间反转性质， a_{-k} 就对应于信号 $x(-t)$ 。另外，时移性质又指出，第 k 次傅里叶系数乘以 $e^{-jk\pi/2} = e^{-jk\omega_0}$ 就相当于信号向右移 1（也即，以 $t+1$ 代替 t ）。这样就可得出，系数 b_k 对应于信号 $x(-(t+1)) = x(-t+1)$ ；又根据条件 4，它必须为奇信号。因为 $x(t)$ 为实， $x(-t+1)$ 也必须为实信号。根据表 3.1， $x(-t+1)$ 的傅里叶系数一定为纯虚数，而且为奇函数，于是 $b_0 = 0$ 和 $b_{-1} = -b_1$ 。由于时间反转和时移运算都不可能改变每个周期内的平均功率，所以条件 5 即使在 $x(t)$ 被 $x(-t+1)$ 替代后仍然成立，即

$$\frac{1}{4} \int_{-4}^4 |x(-t+1)|^2 dt = \frac{1}{2} \quad (3.82)$$

现在利用帕斯瓦尔定理可得

$$|b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = \frac{1}{2} \quad (3.83)$$

在(3.83)式中以 $b_1 = -b_{-1}$ 代入，可得 $|b_1| = 1/2$ 。因为已知 b_1 也为纯虚数，所以 b_1 一定为 $j/2$ ，或者 $-j/2$ 。

现在可以把加在 b_0 和 b_1 上的这些条件转移到加在 a_0 和 a_1 上的等效条件。首先。因为 $b_0 = 0$ ，由条件 4，就意味着 $a_0 = 0$ ； $k = 1$ 时，这一条件就意味着 $a_1 = e^{-j\pi/2} b_{-1} = -jb_{-1} = jb_1$ 。据此。若取 $b_1 = j/2$ ，那么 $a_1 = -1/2$ ，由(3.81)式， $x(t) = -\cos(\pi t/2)$ ；若取 $b_1 = -j/2$ ，那么 $a_1 = 1/2$ ， $x(t) = \cos(\pi t/2)$ 。

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

这一节我们来讨论离散时间周期信号的傅里叶级数表示。虽然这一讨论采用了与 3.3 节的讨论完全并行的方式进行，但是它们之间有一些很重要的差别。特别是，一个离散时间周期信号的傅里叶级数是有限项级数，而不是在连续时间周期信号情况下是一个无穷级数；其结果就是在离散时间情况下，就不存在曾在 3.4 节所讨论的数学上的收敛问题。

3.6.1 成谐波关系的复指数信号的线性组合

如同在第 1 章所定义的，一个离散时间信号 $x[n]$ ，若有

$$x[n] = x[n+N] \quad (3.84)$$

就是一个周期为 N 的周期信号。基波周期就是使(3.84)式成立的最小正整数 N ，而 $\omega_0 = 2\pi/N$ 就是基波频率。例如，复指数 $e^{j(2\pi/N)n}$ 是周期的，周期为 N ；再者，由下式给出的

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.85)$$

所有离散时间复指数信号的集合都是周期的，且周期为 N 。 $\phi_k[n]$ 中的全部信号，其基波频率都是 $2\pi/N$ 的倍数，因此它们之间是成谐波关系的。

在 1.3.3 节曾提到，由(3.85)式给出的信号集中只有 N 个信号是不相同的，这是由于离散时间复指数信号在频率上相差 2π 的整倍数都是一样的缘故；这就是 $\phi_0[n] = \phi_N[n]$ ， $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n]$ ，以及一般关系为

$$\phi_k[n] = \phi_{k+N}[n] \quad (3.86)$$

这就是说，当 k 变化一个 N 的整倍数时，就得到一个完全一样的序列。这一点与连续时间情况是不同的，在那里由(3.24)式定义的信号 $\phi_k(t)$ 全都是不相同的。

现在我们希望利用序列 $\phi_k[n]$ 的线性组合来表示更为一般的周期序列，这样一个线性组合就有如下形式：

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (3.87)$$

因为序列 $\phi_k[n]$ 只在 k 的 N 个相继值的区间上是不同的，因此，(3.87)式的求和仅仅需要包括 N 项。于是，(3.87)式的求和是当 k 在 N 个相继整数的区间上变化时，从任意 k 值开始对 k 进行的。为了指出这一点，特将求和限表示成 $k = \langle N \rangle$ ，即

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (3.88)$$

譬如说, k 既可以取 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, 也可以取 $k = 3, 4, \dots, N+2$ 等等, 无论怎样取法, 由于(3.86)式关系存在, (3.88)式右边的求和都是一样的。(3.88)式称为离散时间傅里叶级数, 而系数 a_k 则称为傅里叶级数系数。

3.6.2 周期信号傅里叶级数表示的确定

假设一个周期序列 $x[n]$, 其周期为 N 。现在想确定, $x[n]$ 是否能表示成(3.88)式的形式? 如果可以, 那么这些系数 a_k 是什么? 这个问题实质上就是要求得一组线性联立方程的解。如果对(3.88)式在 $x[n]$ 的一个周期内对 n 的 N 个连续的值进行求值, 则有

$$\begin{aligned} x[0] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \\ x[1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j2\pi k/N} \\ &\vdots \\ x[N-1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j2\pi k(N-1)/N} \end{aligned} \quad (3.89)$$

这样, (3.89)式就表示了当 k 在 N 个连续整数值变化时, 对应于 N 个未知系数 a_k 的 N 个线性方程组。可以证明, 这 N 个方程是线性独立的, 因此可以利用已知的 $x[n]$ 值求得系数 a_k 。在习题 3.32 中考虑的一个例子就是用(3.89)式解出这组联立方程来得到这些傅里叶级数的系数的。然而, 以下所用的是采用与连续时间情况下同样的方法, 有可能利用 $x[n]$ 来求得 a_k 的一个闭式表示式。

导出这一结果的基础是在习题 3.54 中所证明的如下事实:

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases} \quad (3.90)$$

(3.90)式所说明的是: 一个周期复指数序列的值在整个一个周期内求和, 除非该复指数是某一常数, 否则, 其和为零。

现在再来考虑(3.88)式的傅里叶级数表示式。在该式两边各乘以 $e^{-jr(2\pi/N)n}$, 然后在 N 项上求和, 得到

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \quad (3.91)$$

交换上式右边的求和次序得

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \quad (3.92)$$

根据(3.90)式的恒等关系, (3.92)式右边内层对 n 求和是零, 除非 $(k-r)$ 为零或 N 的整倍数。因此, 如果把 r 值的变化范围选成与外层求和 k 值的变化范围一样, 而在该范围内选择 r 值的话, 那么(3.92)式右边最内层的求和, 在 $k=r$ 时, 就等于 N ; 在 $k \neq r$ 时, 就等于 0。因此, (3.92)式右边就演变为 Na_r , 于是有

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} \quad (3.93)$$

这样, 就求得一个傅里叶级数系数的闭式表示式, 离散时间傅里叶级数对就为:

$$x[n] = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{j k \omega_0 n} = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{j k (2\pi/N) n} \quad (3.94)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n] e^{-j k (2\pi/N) n} \quad (3.95)$$

这两个公式对离散时间周期信号所起的作用，如同(3.38)式和(3.39)式对连续时间周期信号所起的作用是完全一样的，其中(3.94)式就是综合公式，而(3.95)式则是分析公式。和连续时间情况一样，离散时间傅里叶级数系数 a_k 往往也称为 $x[n]$ 的频谱系数。这些系数说明了 $x[n]$ 可分解成 N 个谐波关系的复指数信号之和。

再回到(3.88)式，我们看到若从 0 到 $N-1$ 范围内取 k ，则有

$$x[n] = a_0 \phi_0[n] + a_1 \phi_1[n] + \cdots + a_{N-1} \phi_{N-1}[n] \quad (3.96)$$

相类似地，若从 1 到 N 范围内取 k ，则有

$$x[n] = a_1 \phi_1[n] + a_2 \phi_2[n] + \cdots + a_N \phi_N[n] \quad (3.97)$$

由(3.86)式知道， $\phi_0[n] = \phi_N[n]$ ，因此只要把(3.96)式和(3.97)式作一比较，就可得出 $a_0 = a_N$ 。类似地，若 k 取任何一组 N 个相连的整数，利用(3.86)式，就一定有

$$a_k = a_{k+N} \quad (3.98)$$

这就是说，倘若我们考虑的 k 值多于 N 个的话，那么 a_k 的值必定以 N 为周期，周期性重复。详细地说明这一点是很重要的。特别是，因为只有 N 个不同的复指数（周期均为 N ），所以离散时间傅里叶级数表示式就是一个 N 项的有限级数。因此，如果我们在定义傅里叶级数(3.94)式的 N 个连续 k 值上，固定这 N 个连续 k 值的话，就一定能由(3.95)式求得 N 个傅里叶系数。另一方面，常常为了方便而要利用不同的一组 N 个 k 值，这样把(3.94)式看作是在任意 N 个顺序 k 值上求和是很有用的。由于这个缘故，有时把 a_k 也看作是定义在全部 k 值上的一个序列，而在傅里叶级数表示式中仅仅利用其中某 N 个连续序列值。此外，因为随着 k 值的变化，由(3.86)式， $\phi_k[n]$ 以周期 N 周期性重复，根据(3.98)式， a_k 值也必然以周期 N 周期性重复。现用下面的例子来说明这一点。

例 3.10 考虑信号为

$$x[n] = \sin \omega_0 n \quad (3.99)$$

该信号与例 3.3 中的连续时间信号 $x(t) = \sin \omega_0 t$ 是对应的。仅当 $2\pi/\omega_0$ 是一个整数，或整数的比时， $x[n]$ 才是周期的。当 $2\pi/\omega_0$ 是一个整数 N 的情况下，即

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$x[n]$ 是周期的，其基波周期为 N ，这时所得到的结果与在连续时间情况下完全类似。把信号展开为两个复指数信号之和，就得

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n} \quad (3.100)$$

将它与(3.94)式比较，可直接得到

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad (3.100)$$

其余系数均为 0。如同前面所说的，这些系数以 N 为周期重复，所以 $a_{N+1} = 1/2j$ ， $a_{N-1} = -1/2j$ 。对于这个例子在 $N=5$ 时，其傅里叶级数的系数图示在图 3.13 中。图中指出，这些系数是周期

性重复的。然而，在综合公式(3.94)式中仅仅用到其中一个周期内的系数。

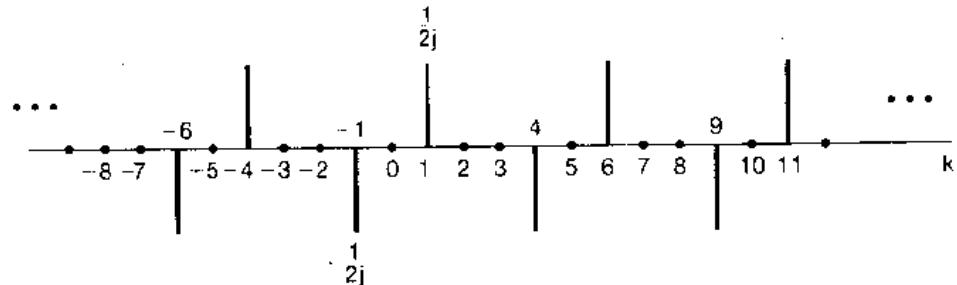


图 3.13 $x[n] = \sin(2\pi/5)n$ 的傅里叶系数

现在考虑当 $2\pi/\omega_0$ 为两个整数之比的情况，即当

$$\omega_0 = \frac{2\pi M}{N}$$

假定 M 和 N 没有公共因子， $x[n]$ 就有一个基波周期为 N 。再将 $x[n]$ 展开为两个复指数之和

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jM(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jM(2\pi/N)n}$$

由该式可以直接确定 $a_M = (1/2j)$, $a_{-M} = (-1/2j)$ ，而在一个长度为 N 的周期内，其余系数均为 0。以 $M=3$ 和 $N=5$ 为例的傅里叶系数示于图 3.14 中，图中再次表明这些系数的周期性。例如，对于 $N=5$, $a_2 = a_{-3}$ ，在该例中就等于 $(-1/2j)$ 。然而，应该注意到，在长度为 5 的任意周期内，仅有两个非零的傅里叶系数，因此在综合公式中仅有两个非零项。

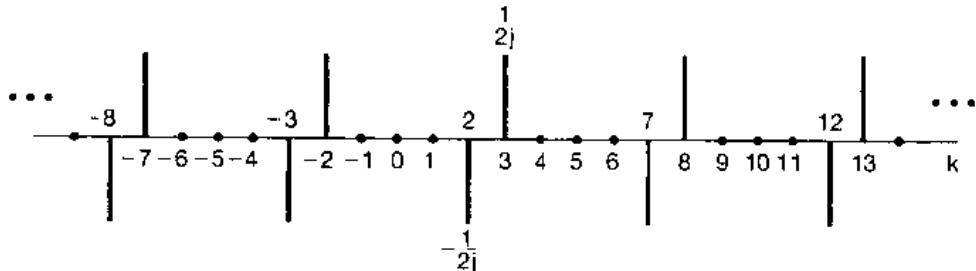


图 3.14 $x[n] = \sin 3(2\pi/5)n$ 的傅里叶系数

例 3.11 考虑如下信号：

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)n + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)n + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

这个信号是周期的，其周期为 N ，和例 3.10 一样，将 $x[n]$ 直接展开成复指数形式而得到

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{2j} [e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n}] + \frac{3}{2} [e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n}] \\ &\quad + \frac{1}{2} [e^{j(4\pi n/N + \pi/2)} + e^{-j(4\pi n/N + \pi/2)}] \end{aligned}$$

相应项归并后，可得

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right) e^{-j(2\pi/N)n} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/2}\right) e^{j2(2\pi/N)n} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/2}\right) e^{-j2(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

因此，该例的傅里叶级数系数为

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j, \quad a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{2}j, \quad a_{-2} = -\frac{1}{2}j$$

在综合公式(3.94)式求和间隔内其余的 k 值,

$a_k = 0$ 。再次指出, 这些傅里叶系数是周期的, 其周期为 N 。譬如说,

$$a_N = 1, \quad a_{3N-1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$$

及 $a_{2-N} = \frac{1}{2}j$ 等等。在图 3.15(a)中, 以 $N=10$ 为例, 画出了这些系数的实部和虚部, 而于图 3.15(b)中则是同一组系数的模和相位。

在这个例子中我们注意到对所有的 k 值, $a_{-k} = a_k^*$ 。事实上, 只要 $x[n]$ 是实序列, 这个关系总是成立的。这一性质是和我们在 3.3 节中对连续时间周期信号讨论的性质一致的; 并且和在连续时间情况下一样, 这一点就意味着, 对于一个实周期序列的离散时间傅里叶级数, 可有两种等效的表达形式。这些形式与连续时间傅里叶级数的两种表示式(3.31)式和(3.32)式是很类似的, 在习题 3.52 中将对此作讨论。但是, 从我们的讨论来说, 由(3.94)式和(3.95)式给出的傅里叶级数的指数表达式尤为方便, 今后将毫无例外地使用这一形式。

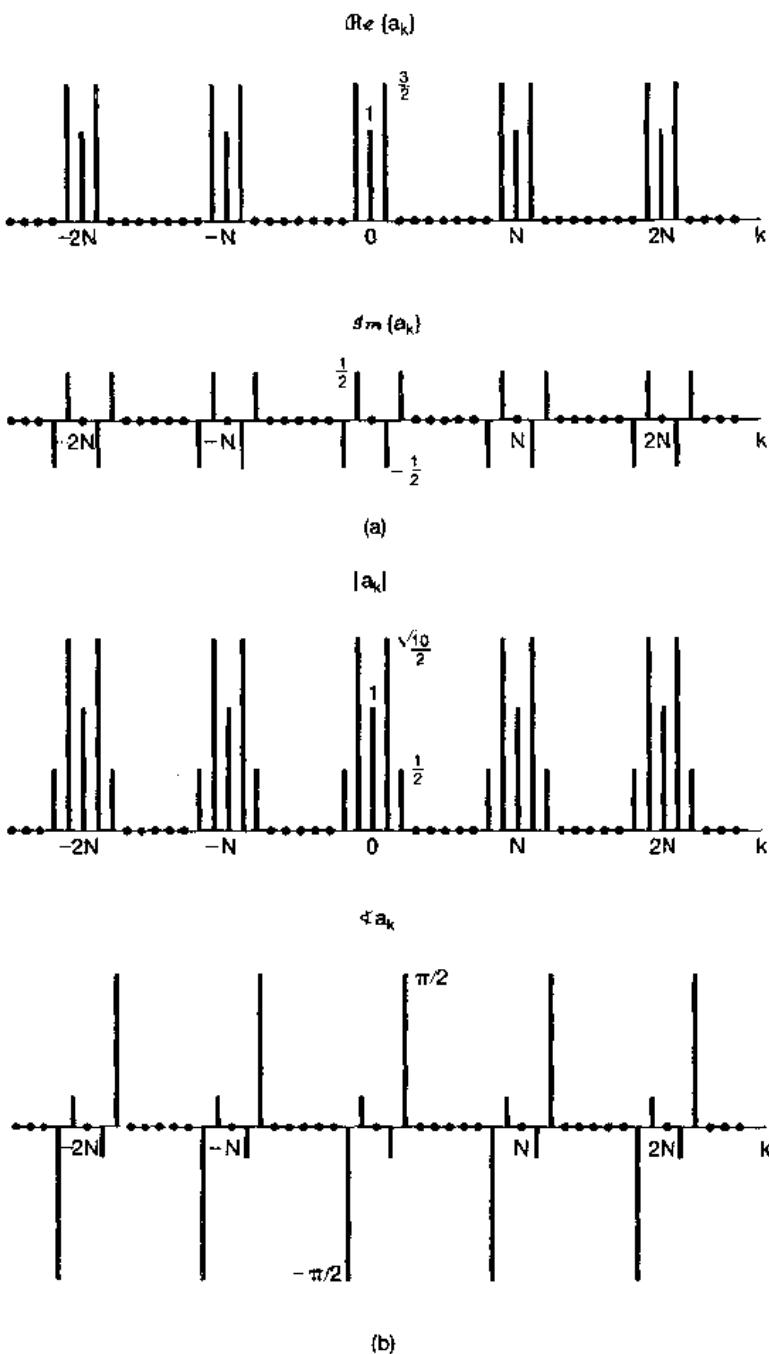


图 3.15 (a) 例 3.11 的傅里叶级数系数的实部和虚部;
(b) 同一系数的模和相位

例 3.12 在这个例子中, 考虑图

3.16 的离散时间周期方波序列, 可以利用(3.95)式求其傅里叶级数。由于在 $-N_1 \leq n \leq N_1$ 内。 $x[n] = 1$, 所以将(3.95)式的求和区间选在包括 $-N_1 \leq n \leq N_1$ 这一范围内是特别有利的。这时就可将(3.95)式表示为

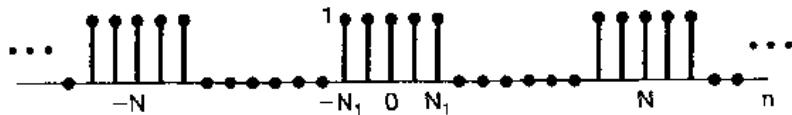


图 3.16 离散时间周期方波序列

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (3.102)$$

令 $m = n + N_1$, 可见(3.102)式就变为

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m} \quad (3.103)$$

(3.103)式的和是一个几何级数的前($2N_1 + 1$)项之和, 利用习题 1.54 所得的结果, 可以求出为

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left(\frac{1 - e^{-jk(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk(2\pi/2N)} - e^{-jk(2\pi/2N)}]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{aligned} \quad (3.104)$$

和

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \quad (3.105)$$

在图 3.17(a), (b) 和 (c) 中, 就 $2N_1 + 1 = 5$, 分别对 $N = 10, 20$ 和 40 三种情况下的 a_k 示于图中。

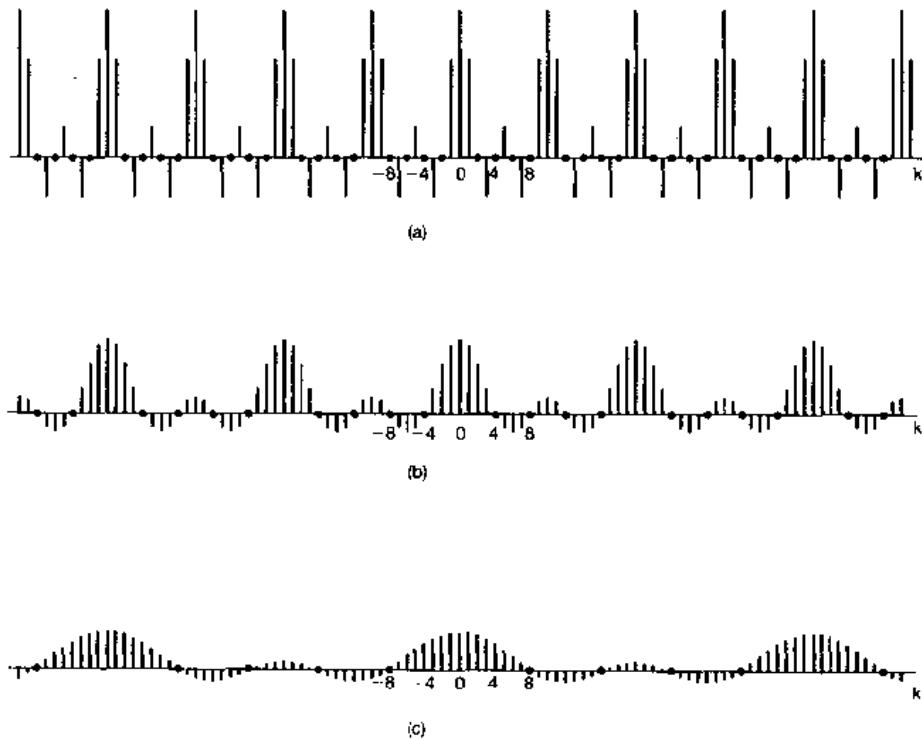


图 3.17 例 3.12 周期方波序列的傅里叶系数。图中 $|a_k|$ 是在 $2N_1 + 1 = 5$ 和分别对三种 N 值下画出的:
(a) $N = 10$; (b) $N = 20$; (c) $N = 40$

在 3.4 节讨论连续时间傅里叶级数的收敛问题时，我们曾以对称周期方波信号为例，并看到随着取的项数趋于无限多，(3.52)式中的有限项和是如何收敛于方波信号的。尤其是在不连续点处观察到吉伯斯现象，随着所考虑的项数的增加，部分和的起伏（见图 3.90）愈来愈向不连续点处压缩，但起伏峰值的大小与部分和中的项数无关而保持不变。现在来研究一个相类似的离散时间方波序列的部分和序列。为了方便起见，先假定周期 N 为奇数。用图 3.16 的例子，取 $N = 9, 2N_1 + 1 = 5$ ，并对几个不同的 M 值，在图 3.18 中对如下信号 $\hat{x}[n]$

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (3.106)$$

作图。

由图可见，对于 $M=4$ ，部分和 $\hat{x}[n] = x[n]$ 。可见，与连续时间情况相比，这里不存在任何收敛问题。也没有吉伯斯现象。事实上，一般来讲离散时间傅里叶级数不存在任何收敛问题。究其原因全依赖于这样一个事实：任何离散时间周期序列 $x[n]$ 完全是由有限个参数（即 N 个）来表征的，这就是在一个周期内的 N 个序列值。傅里叶级数分析公式(3.95)式只是把这 N 个参数变换为一组等效的 N 个傅里叶系数值；而综合公式(3.94)式则告诉我们如何利用一个有限项级数来恢复原来的序列值。因此，若 N 为奇数，而我们取 $M=(N-1)/2$ ，那么(3.106)式中的和就完全包括了 N 项，于是由综合公式就能得到 $\hat{x}[n] = x[n]$ 。类似地，若 N 为偶数，可以令

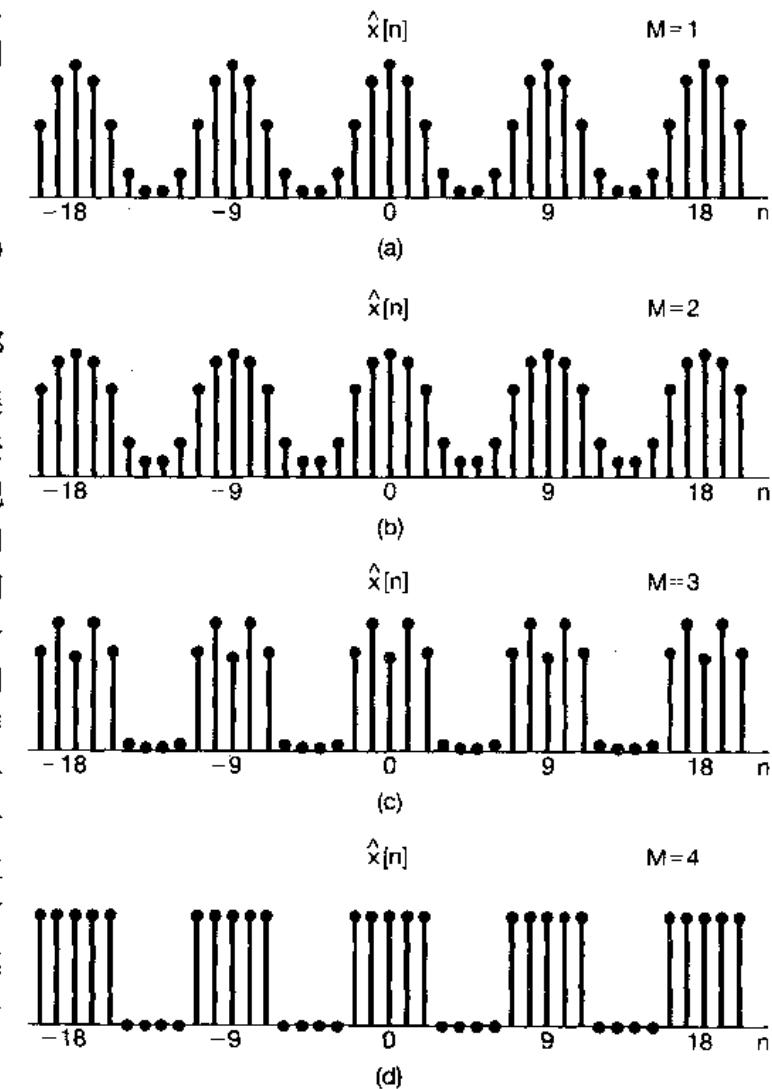


图 3.18 图 3.16 周期方波序列的部分和表示式(3.106)式和(3.107)式，在 $N=9$ 和 $2N_1+1=5$ ，对应于几个不同 M 值时的波形：
(a) $M=1$ ；(b) $M=2$ ；(c) $M=3$ ；(d) $M=4$ 。

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^{M} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (3.107)$$

那么，在 $M=N/2$ 时，这个和式仍由 N 项组成，由(3.94)式还是可以得出 $\hat{x}[n]=x[n]$ 的结论。

相比之下，一个连续时间周期信号在一个单一周期内有一个连续取值问题，这就要求用无限多个傅里叶系数来表示它。因此，(3.52)式中没有任何一个部分和可以得到真正的 $x(t)$ 值。这样，就像在3.4节所讨论的那样，随着项数趋于无穷多而考虑求极限的问题时，收敛问题就自然产生了。

3.7 离散时间傅里叶级数性质

离散时间和连续时间傅里叶级数性质之间存在着很大的相似性。将列于表3.2的离散时间傅里叶级数的性质与表3.1的性质作一对比就能很容易证实这一点。

表3.2 离散时间傅里叶级数性质

性 质	周期信号	傅里叶级数系数
线性	$x[n]$ 周期为 N , $y[n]$ 基本频率 $\omega_0 = 2\pi/N$	a_k 周期的, 周期为 N b_k
时移	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
频移	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
共轭	$e^{jM(2\pi/N)n}x[n]$	a_{k-M}
时间反转	$x^*[n]$	a_{-k}^*
时域尺度变换	$x[-n]$ $x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{若 } n \text{ 是 } m \text{ 的倍数} \\ 0, & \text{若 } n \text{ 不是 } m \text{ 的倍数} \end{cases}$ (周期的, 周期为 mN)	a_{-k} $\frac{1}{m}a_k$ (看做周期的) (周期为 mN)
周期卷积	$\sum_{r=(N)} x[r]y[n-r]$	$N a_k b_k$
相乘	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=(N)} a_l b_{k-l}$
一阶差分	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$
求和	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ (仅当 $a_0 = 0$ 才为有限) (值且为周期的)	$(\frac{1}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})})a_k$
实信号的共轭对称性	$x[n]$ 为实信号	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
实、偶信号	$x[n]$ 为实、偶信号	a_k 为实且偶
实、奇信号	$x[n]$ 为实、奇信号	a_k 纯虚且为奇
实信号的奇偶分解	$\begin{cases} x_e[n] = \Re\{x[n]\} [x[n] \text{ 为实}] \\ x_o[n] = \Im\{x[n]\} [x[n] \text{ 为实}] \end{cases}$	$\Re\{a_k\}$ $j\Im\{a_k\}$
	周期信号的帕斯瓦尔定理	
	$\frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] ^2 = \sum_{k=(N)} a_k ^2$	

这些性质的大部分的导出与对应的连续时间傅里叶级数性质的导出是很类似的，并且其中的几个将在本章末的习题中考虑。另外，在第5章将会看到，大部分性质都能够从离散时

间傅里叶变换相应的性质中推论出来。因此，在下面的各分节中将只限于讨论与连续时间情况相比有重要差别的几个性质。同时，还用一些例子来说明离散时间傅里叶级数性质在建立一些概念和简化求取很多周期序列的傅里叶级数的复杂性方面的一些用处。

和连续时间情况相同，将用一种简便的符号来表示一个周期信号和它的傅里叶级数系数之间的关系。若 $x[n]$ 是一个周期信号，周期为 N ，其傅里叶级数系数记作 a_k ，那么就写成

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

3.7.1 相乘

傅里叶级数表示的相乘性质就是体现出连续时间和离散时间之间差别的一个性质的例子。由表 3.1 知道，两个周期为 T 的连续时间信号的乘积还是一个周期为 T 的周期信号，它的傅里叶级数系数序列就是被乘的这两个信号的傅里叶级数系数序列的卷积。在离散时间情况下，假设

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

和

$$y[n] \xrightarrow{\mathcal{FS}} b_k$$

都是周期的，且周期为 N ，那么乘积 $x[n]y[n]$ 也是一个周期为 N 的周期序列。由习题 3.57 所证明的，它的傅里叶系数 d_k 为

$$x[n]y[n] \xrightarrow{\mathcal{FS}} d_k = \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-l} \quad (3.108)$$

除了求和变量现在要限制在 N 个连续的样本区间上外，(3.108)式就类似于卷积的定义。正如在习题 3.57 所指出的，求和可以在任何 l 的相继 N 个值上进行。我们把这种类型的运算称之为两个周期的傅里叶系数序列之间的周期卷积，而把求和变量从 $-\infty$ 到 ∞ 的这种卷积和的形式有时就称为非周期卷积，以区别于周期卷积。

3.7.2 一次差分

与连续时间傅里叶级数的微分性质相伴的是离散时间序列的一次差分运算，其定义为 $x[n] - x[n-1]$ 。若 $x[n]$ 是周期的，周期为 N ，那么 $y[n]$ 也是周期的，周期为 N 。因为将 $x[n]$ 移位，或者把 $x[n]$ 与另一个周期为 N 的周期信号作线性组合总是得到一个周期为 N 的周期信号。同样，若

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

则对应于 $x[n]$ 一次差分的傅里叶系数可表示成

$$x[n] - x[n-1] \xrightarrow{\mathcal{FS}} (1 - e^{-jk(2\pi/N)}) a_k \quad (3.109)$$

利用表 3.2 的时移和线性性质，这是很容易得到的。在求一次差分的傅里叶级数系数比求原序列的傅里叶系数来得容易时，常常使用这个性质（见习题 3.31）。

3.7.3 离散时间周期信号的帕斯瓦尔定理

由习题 3.57 已经指出，离散时间周期信号的帕斯瓦尔定理是

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 \quad (3.110)$$

式中 a_k 是 $x[n]$ 的傅里叶级数系数, N 是周期。和连续时间情况相同, 上式左边是 $x[n]$ 在一个周期内的平均功率, 而 $|a_k|^2$ 是 $x[n]$ 的第 k 次谐波的平均功率。据此, 帕斯瓦尔定理再一次表明: 一个周期信号的平均功率等于它的所有谐波分量的平均功率之和。当然, 在离散时间中只有 N 个不同的谐波分量。同时, 由于 a_k 也是周期的, 周期为 N , 所以(3.110)式右边的求和可以在任何 k 的 N 个相继值上进行。

3.7.4 举例

在这一小节将给出几个例子来说明如何利用离散时间傅里叶级数的性质来表征离散时间周期信号, 以及计算它们的傅里叶级数表示式。具体说来, 列于表 3.2 的这些性质可用于简化求取一个给定信号的傅里叶级数系数的过程。首先, 这涉及到把这个给定信号利用其它的信号来表示, 而这些信号的傅里叶级数系数是已经知道的, 或者是比较容易求得的, 然后利用表 3.2 就可以利用这些信号的傅里叶级数系数来表示给定信号的傅里叶级数系数。例 3.13 就是属于这种应用的例子。例 3.14 则是用来说明根据某些部分信息来确定一个序列。例 3.15 说明表 3.2 中周期卷积性质的应用。

例 3.13 现在来考虑求图 3.19(a) 的 $x[n]$ 的傅里叶级数系数问题。该序列有一个基波周期为 5。由图可看出 $x[n]$ 可以看成是由图 3.19(b) 的方波序列 $x_1[n]$ 与图 3.19(c) 的直流序列 $x_2[n]$ 之和。现将 $x_1[n]$ 的傅里叶级数系数记为 b_k , $x_2[n]$ 的傅里叶级数系数记作 c_k , 利用表 3.2 的线性性质可以得出

$$a_k = b_k + c_k \quad (3.111)$$

由例 3.12(相当于这里 $N_1=1$ 和 $N=5$), 相应于 $x_1[n]$ 的 b_k 可以表示为

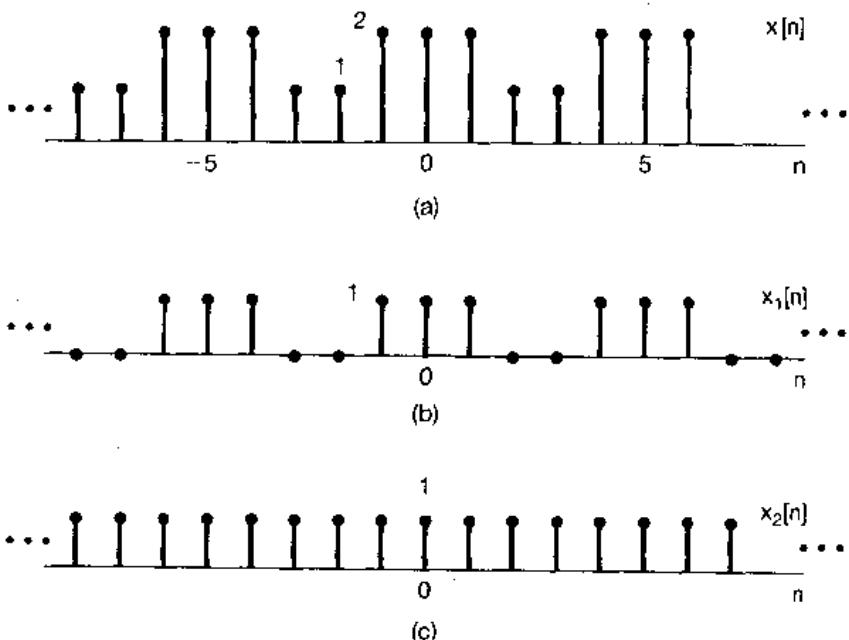


图 3.19 (a) 例 3.13 的周期序列 $x[n]$, 以及将其表示为
(b) 方波序列 $x_1[n]$ 和 (c) 直流序列 $x_2[n]$ 之和

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{3}{5}, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases} \quad (3.112)$$

序列 $x_2[n]$ 仅有一个直流值，它由零次傅里叶级数系数表示为

$$c_0 = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 x_2[n] = 1 \quad (3.113)$$

因为离散时间傅里叶级数系数是周期的，所以当 k 为 5 的整倍数时， $c_k = 1$ 。 $x_2[n]$ 其余的系数都必须为 0，因为 $x_2[n]$ 仅包含一个直流分量。将 b_k 和 c_k 的表示式代入(3.111)式就求得

$$a_k = \begin{cases} b_k = \frac{1}{5} \frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{8}{5}, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases} \quad (3.114)$$

例 3.14 关于某一序列 $x[n]$ 给出如下条件：

1. $x[n]$ 是周期的，周期 $N=6$

$$2. \sum_{n=0}^5 x[n] = 2$$

$$3. \sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = 1$$

4. 在满足上述三个条件的所有信号中， $x[n]$ 具有在每个周期内最小的功率。

试求 $x[n]$ 。将 $x[n]$ 的傅里叶级数系数记作 a_k ，根据条件 2，可以得出 $a_0 = 1/3$ 。注意到 $(-1)^n = e^{-jn(2\pi/6)3n}$ ，由条件 3，可得 $a_3 = 1/6$ 。根据帕斯瓦尔定理(见表 3.2)， $x[n]$ 的平均功率是

$$P = \sum_{k=0}^5 |a_k|^2 \quad (3.115)$$

因为每一个非零系数都在 P 中提供一个正的量，又因为 a_0 和 a_3 的值已经确定，所以要使 P 最小，就只有选 $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$ ，这样就得

$$\begin{aligned} x[n] &= a_0 + a_3 e^{j\pi n} \\ &= (1/3) + (1/6)(-1)^n \end{aligned} \quad (3.116)$$

如图 3.20 所示。

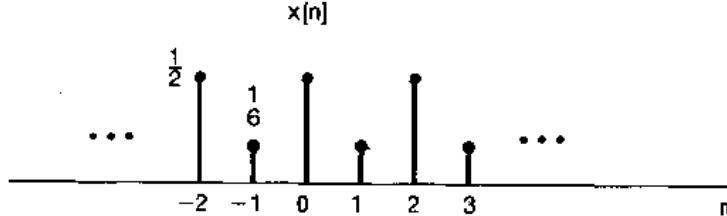


图 3.20 满足例 3.14 所给条件的序列 $x[n]$

例 3.15 这个例子在已知一个傅里叶级数系数代数表示式的情况下，要求确定一个周期序列，并画出它。在这个过程中也将用到离散时间傅里叶级数的周期卷积性质(见表 3.2)。如同该表所陈述的，以及在习题 3.58 中所证明的，若 $x[n]$ 和 $y[n]$ 都是周期为 N 的周期序列，则信号

$$w[n] = \sum_{r=(N)} x[r] y[n-r]$$

也是周期为 N 的周期序列。这里求和可以在任意 r 的 N 个相继值上进行；另外， $w[n]$ 的傅里叶级数系数等于 $N a_k b_k$ ， a_k 和 b_k 分别为 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的傅里叶系数。

现在假设已被告知，某一信号 $w[n]$ 是周期的，其基波周期 $N=7$ ，而且它的傅里叶级数系数为

$$c_k = \frac{\sin^2(3\pi k/7)}{7 \sin^2(\pi k/7)} \quad (3.117)$$

由此式可观察到 $c_k = 7d_k^2$, 其中 d_k 就是如例 3.12 中的方波 $x[n]$, 在 $N_1=1$ 和 $N=7$ 时的傅里叶级数系数序列。利用周期卷积性质, 可见

$$w[n] = \sum_{r=-3}^3 x[r]x[n-r] = \sum_{r=-3}^3 x[r]\hat{x}[n-r] \quad (3.118)$$

式中在最后的等式中已将求和区间选为 $-3 \leq r \leq 3$ 。除了求和必须限定在一个有限区间内这一点外, 对于求卷积的“先乘再加”的方法在这里也是适用的。事实上, 若定义另一信号 $\hat{x}[n]$, 它在 $-3 \leq n \leq 3$ 内就等于 $x[n]$, 而在这区间以外全是零, 就可将(3.118)式转换成一般的卷积, 由(3.118)式可得

$$w[n] = \sum_{r=-3}^3 \hat{x}[r]x[n-r] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \hat{x}[r]x[n-r]$$

也就是说, $w[n]$ 是 $\hat{x}[n]$ 和 $x[n]$ 的非周期卷积。

序列 $x[r]$, $\hat{x}[r]$ 和 $x[n-r]$ 分别图示于图 3.21(a)-(c) 中, 由该图可立即计算出 $w[n]$, 这就是 $w[0]=3$, $w[-1]=w[1]=2$, $w[-2]=w[2]=1$ 以及 $w[-3]=w[3]=0$ 。因为 $w[n]$ 是周期的, 周期为 7, 所以可以将 $w[n]$ 画出如图 3.21(d) 所示。

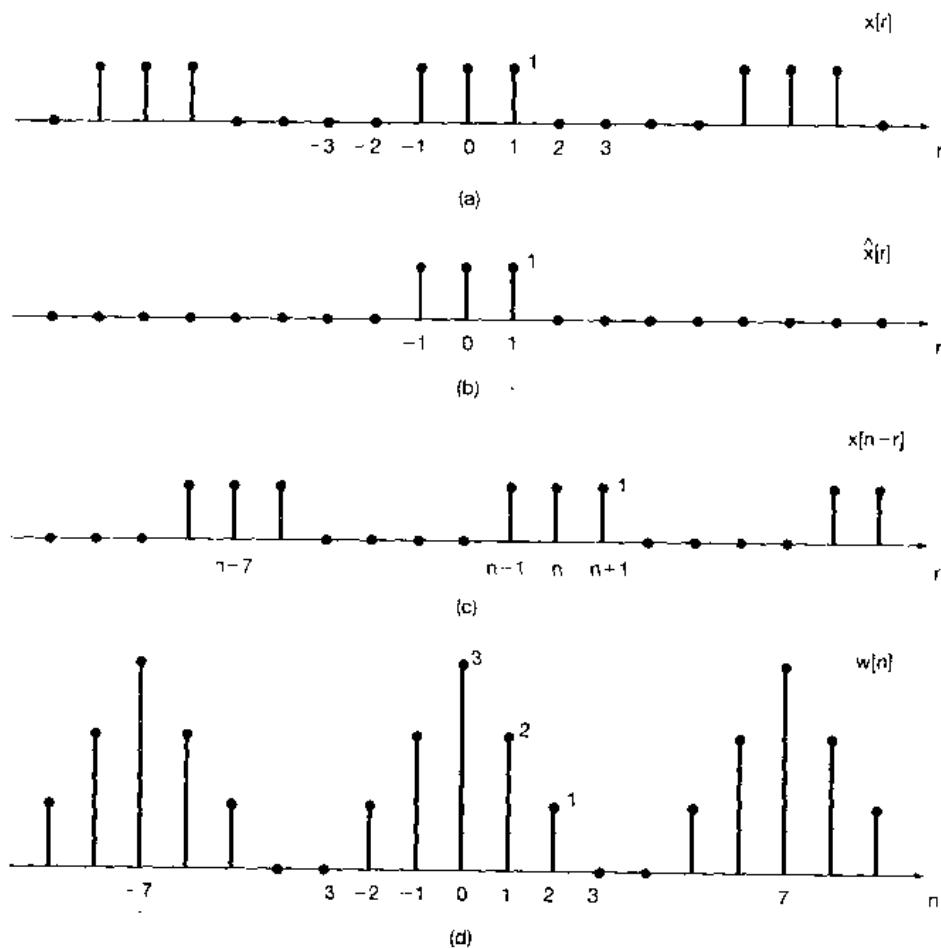


图 3.21 (a)例 3.15 中的方波序列 $x(r)$;

(b) 序列 $\hat{x}[r]$, 在 $-3 \leq r \leq 3$, $\hat{x}[n] = x[r]$, 其余 r , $\hat{x}[r] = 0$;

(c) 序列 $x[n-r]$;

(d) 序列 $w[n]$ 等于 $x[n]$ 与其本身的周期卷积, 也等于 $\hat{x}[n]$ 与 $x[n]$ 的非周期卷积

3.8 傅里叶级数与 LTI 系统

前面几节已经看出，傅里叶级数表示可以用来构造任何离散时间周期信号，以及在实际上具有重要意义的几乎所有连续时间周期信号。另外，在3.2节也看到，一个LTI系统对一组复指数信号的线性组合的响应具有特别简单的形式。这就是，在连续时间情况下，若 $x(t) = e^s$ 是一个连续时间 LTI 系统的输入，那么其输出就为 $y(t) = H(s)e^s$ ，其中， $H(s)$ 由(3.6)式

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (3.119)$$

给出，式中 $h(t)$ 是该 LTI 系统的单位冲激响应。

类似地，若 $x[n] = z^n$ 是一个离散时间 LTI 系统的输入，那么其输出就为 $y[n] = H(z)z^n$ ，其中， $H(z)$ 由(3.10)式

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k} \quad (3.120)$$

给出，式中 $h[n]$ 是该 LTI 系统的单位脉冲响应。

当 s 或 z 是一般复数时， $H(s)$ 和 $H(z)$ 就称为该系统的系统函数。对于连续时间信号与系统而言，这一章以及下一章都将注意力放在 $\Re\{s\} = 0$ 这一特殊情况，这样 $s = j\omega$ ， e^s 就具有 $e^{j\omega t}$ 的形式。这个输入是在频率 ω 上的一个复指数。具有 $s = j\omega$ 形式的系统函数（即 $H(j\omega)$ 看作 ω 的函数）就称为该系统的频率响应，它由下式给出：

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.121)$$

相类似地，对于离散时间信号与系统而言，本章以及第5章都将集中在 $|z| = 1$ 的 z 值上，这样 $z = e^{j\omega}$ ， z^n 就具有 $e^{jn\omega}$ 的形式。对 z 局限在 $z = e^{j\omega}$ 形式的系统函数 $H(z)$ 称为该系统的频率响应，它由下式给出：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-jn\omega} \quad (3.122)$$

利用系统的频率响应来表示一个 LTI 系统对 $e^{j\omega t}$ （连续时间）或 $e^{jn\omega t}$ （离散时间）这种形式的复指数信号的响应是特别简单的；再者，由于 LTI 系统具有叠加性质，因此一个 LTI 系统对复指数信号线性组合的响应也同样简单和容易表示。到第4和第5章，将会看到如何把这些概念与连续时间和离散时间傅里叶变换结合起来，以分析 LTI 系统对非周期信号的响应。这一章的余下部分，作为首次接触这些重要的概念和结果，将集中在周期信号方面来解释和理解这一概念。

首先考虑连续时间情况。令 $x(t)$ 为一周期信号，其傅里叶级数表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.123)$$

假定将该信号加入单位冲激响应为 $h(t)$ 的 LTI 系统作为它的输入，因为在(3.123)式中每一个复指数信号都是该系统的特征函数[在(3.13)式中以 $s_k = jk\omega_0$ 代入]，那么其输出就是

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(e^{jk\omega_0 t}) e^{jk\omega_0 t} \quad (3.124)$$

于是 $y(t)$ 也是周期的，且与 $x(t)$ 有相同的基波频率。再者，若 $\{a_k\}$ 是输入 $x(t)$ 的一组傅里叶级数系数，那么 $\{a_k H(jk\omega_0)\}$ 就是输出 $y(t)$ 的一组傅里叶级数系数；这就是说，LTI 系统的作用就是通过乘以相应频率点上的频率响应值来逐个地改变输入信号的每一个傅里叶系数。

例 3.16 假设在例 3.2 中讨论的周期信号 $x(t)$ 是某个 LTI 系统的输入信号，该系统的单位冲激响应是

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

为了计算输出 $y(t)$ 的傅里叶级数系数，就是首先求频率响应

$$H(j\omega) = \int_0^\infty e^{-\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = -\frac{1}{1+j\omega} e^{-j\omega\tau} \Big|_0^\infty = \frac{1}{1+j\omega} \quad (3.125)$$

利用(3.124)式和(3.125)式，考虑到本例中 $\omega_0 = 2\pi$ ，因此可得

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} b_k e^{jk2\pi t} \quad (3.126)$$

由于 $b_k = a_k H(jk2\pi)$ ，所以

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+j2\pi} \right), & b_{-1} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-j2\pi} \right) \\ b_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j4\pi} \right), & b_{-2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-j4\pi} \right) \\ b_3 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+j6\pi} \right), & b_{-3} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-j6\pi} \right) \end{aligned} \quad (3.127)$$

应该注意， $y(t)$ 一定是实值信号，因为 $y(t)$ 是 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积，而这两个都是实信号。检查一下(3.127)式，并注意到 $b_k^* = b_{-k}$ 就能证明这一点。因此， $y(t)$ 也能够表示成(3.31)式和(3.32)式两种形式，即

$$y(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^3 D_k \cos(2\pi kt + \theta_k) \quad (3.128)$$

或者

$$y(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^3 [E_k \cos(2\pi kt - F_k \sin 2\pi kt)] \quad (3.129)$$

式中

$$b_k = D_k e^{j\theta_k} = E_k + jF_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.130)$$

这些系数都能直接由(3.127)式求出，例如：

$$\begin{aligned} D_1 &= |b_1| = \frac{1}{4\sqrt{1+4\pi^2}}, & \theta_1 &= \angle b_1 = -\tan^{-1}(2\pi) \\ E_1 &= \Re\{b_1\} = \frac{1}{4(1+4\pi^2)}, & F_1 &= \Im\{b_1\} = -\frac{\pi}{2(1+4\pi^2)} \end{aligned}$$

在离散时间情况下，一个 LTI 系统输出与输入傅里叶级数系数之间的关系完全是与(3.123)式和(3.124)式相并列的。令 $x[n]$ 是一周期信号，其傅里叶级数表示为

$$x[n] = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

若将该信号加入单位脉冲响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统作为它的输入，那么按(3.16)式，以 $z_k = e^{jk(2\pi/N)}$ 代入，输出就是

$$y[n] = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{jk(2\pi/N)n} \quad (3.131)$$

于是 $y[n]$ 也是周期的，且与 $x[n]$ 有相同的周期， $y[n]$ 的第 k 个傅里叶系数就是输入的第 k 个傅里叶系数与该系统在对应频率点上的频率响应值 $H(e^{j2\pi k/N})$ 的乘积。

例 3.17 考虑一 LTI 系统，其单位脉冲响应 $h[n] = \alpha^n u[n]$ ， $-1 < \alpha < 1$ ，输入为

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad (3.132)$$

和例 3.10 相同， $x[n]$ 能写成傅里叶级数形式

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/N)n}$$

同时，由(3.122)式

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n \quad (3.133)$$

利用习题 1.54 的结果，该几何级数收敛为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (3.134)$$

利用(3.131)式，得到输出的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} H(e^{j2\pi/N}) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} H(e^{-j2\pi/N}) e^{-j(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/N}} \right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{j2\pi/N}} \right) e^{-j(2\pi/N)n} \end{aligned} \quad (3.135)$$

若将下式写成

$$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/N}} = r e^{j\theta}$$

那么(3.135)式就化简为

$$y[n] = r \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right) \quad (3.136)$$

例如，若 $N=4$ ，则

$$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/4}} = \frac{1}{1 + \alpha j} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} e^{j(-\tan^{-1}(\alpha))}$$

因此

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \cos\left(\frac{\pi n}{2} - \tan^{-1}(\alpha)\right)$$

应该提起注意，对于像(3.124)式和(3.131)式这样的表示式要是具有意义的话，(3.121)式和(3.122)式中的频率响应 $H(j\omega)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 必须是有明确定义，而且是有限的。在第 4 和第 5 章将会看到，如果考虑中的 LTI 系统是稳定的，就属于这种情况。例如，在例 3.16 中的 LTI 系统，它的冲激响应 $h(t) = e^{-t} u(t)$ 就是稳定的，该系统就有一个明确定义的频率响应如(3.125)式所给出。另一方面，冲激响应为 $h(t) = e^t u(t)$ 的 LTI 系统是不稳定的；这一点由(3.121)式的积分， $H(j\omega)$ 对任何 ω 值都发散而极易得到证实。相类似地，例 3.17 中的 LTI 系统，其单位脉冲响应 $h[n] = \alpha^n u[n]$ ，对于 $|\alpha| < 1$ 就是稳定的，而且有一个如(3.134)式所给出的频率响应；然而，若 $|\alpha| > 1$ ，该系统就是不稳定的，(3.133)式的求和将不收敛。

3.9 滤波

在各种不同的应用中，改变一个信号中各频率分量的相对大小，或者全部消除某些频率分量这样一类要求常常是颇为关注的，这样一种过程称为滤波。用于改变频谱形状的线性时不变系统往往称之为频率成形滤波器。专门设计成基本上无失真地通过某些频率，而显著地衰减掉或消除掉另一些频率的系统称为频率选择性滤波器。如同(3.124)式和(3.131)式已指出的，一个LTI系统输出的傅里叶级数系数就是输入的这些系数乘以该系统的频率响应。因此，滤波就能够通过恰当地选取系统的频率响应，利用LTI系统很方便地予以实现；并且频域的方法为检验这一重要的应用领域提供了理想的工具。在这一节以及下面两节将首先通过几个例子来看看滤波方面的问题。

3.9.1 频率成形滤波器

经常遇到频率成形滤波器的应用场合是在音响系统中。例如，在这类系统中一般都包含有LTI滤波器，以让听众可以改变声音中高低频分量的相对大小。这些滤波器就相当于LTI系统，而它们的频率响应能够通过操纵音调控制来改变。同时，在高保真度的音响系统中，为了补偿扬声器的频率响应特性，往往在前置放大器中还包括一个所谓均衡滤波器。这些级联的滤波器合在一起称为音响系统的均衡或均衡器电路。图3.22示出一个用于一组特殊音频扬声器系统的三级均衡器电路。在图中每一级频率响应的模都是以“对数-对数”坐标作图的，这就是模取 $20\log_{10}|H(j\omega)|$ ，单位为分贝或dB。频率轴以对数尺度标出，单位是赫兹Hz($\omega/2\pi$)。6.2.3节将会更加详细地讨论到，频率响应的模用这种对数展示的形式是很普遍，而且是很有用的。

将图3.22的三部分合在一起形成的均衡电路，其设计目的就是为了补偿扬声器和听音室的频率响应，并允许听音者能够控制整个的频率响应。特别是由于这三个系统是级联的，而每一个系统都将一个复指数的输入 $K e^{j\omega t}$ 乘以在那个频率上的该系统的频率响应，所以这三个系统级联后的总频率响应就是这三个频率响应的乘积。示于图3.22(a)和(b)的头两个滤波器共同组成系统的控制级，因为这两个滤波器的频率特性可以由听者来调节；而示于图3.22(c)的第三个滤波器是均衡级，它有如图所示的固定频率响应。图3.22(a)的滤波器是一个低频滤波器，它由一个双位开关来控制，可以给出图中指出的两种频率响应中的一种。在控制级中的第二个滤波器有两个连续可调的滑动开关，用以在图3.22(b)所指出的范围内改变频率响应。

常常会遇到的另一类频率成形滤波器是其输出为输入的导数，即 $y(t) = dx(t)/dt$ 。在 $x(t)$ 具有 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的情况下， $y(t)$ 也一定是 $y(t) = j\omega e^{j\omega t}$ ，由此其频率响应就为

$$H(j\omega) = j\omega \quad (3.137)$$

一个微分滤波器的频率响应如图3.23所示。因为 $H(j\omega)$ 一般为复数（在该例子尤为如此），所以在图上展示 $H(j\omega)$ 时，就把 $|H(j\omega)|$ 和 $\angle H(j\omega)$ 的图分别画出来。这个频率响应的形状就意味着：对复指数输入 $e^{j\omega t}$ 来说，较大的 ω 值将有较大的放大；其结果就是微分滤波器在增强信号中的快速变化部分或快速转变中是有用的。

微分滤波器经常应用的一种目的是在图像处理中用于边缘的增晰。一幅黑白图像可以认

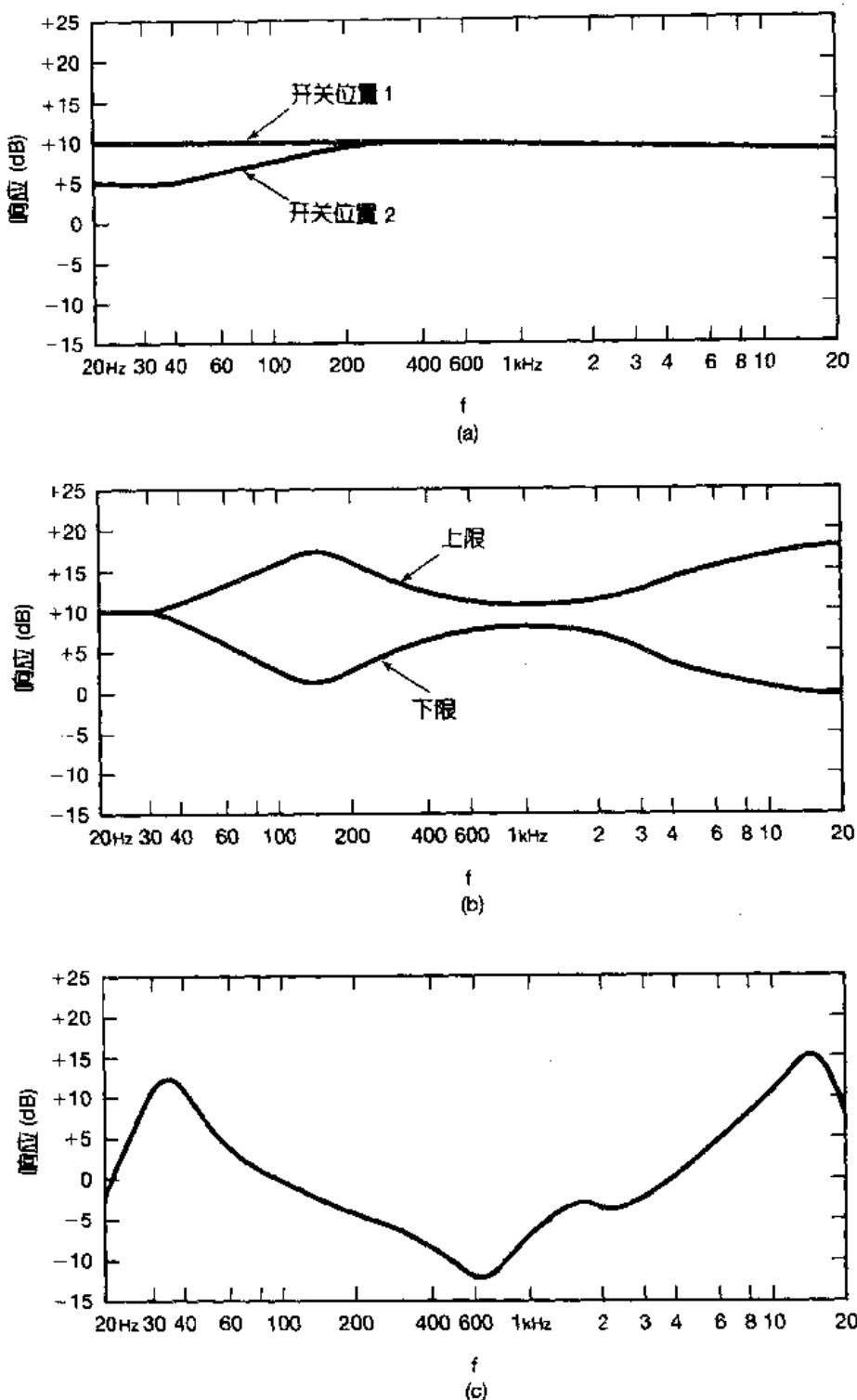


图 3.22 用于一组特殊音频扬声器系统中的均衡器电路频率响应的模特性，图中示出为 $20\log_{10} |H(j\omega)|$ ，单位 dB。

- (a) 用双位开关控制的低频滤波器；
- (b) 连续可调成形滤波器频率响应的上、下限特性范围；
- (c) 均衡器级的固定频率响应

为是一个二维的“连续时间”信号 $x(t_1, t_2)$ ，这里 t_1 和 t_2 分别是水平与垂直坐标，而 $x(t_1, t_2)$ 是图像的亮度。如果图像在水平和垂直方向周期重复的话，那么它就能用由复指数 $e^{j\omega_1 t_1}$ 与 $e^{j\omega_2 t_2}$ 乘积的和所构成的二维傅里叶级数来表示（见习题 3.70）， $e^{j\omega_1 t_1}$ 和 $e^{j\omega_2 t_2}$ 表示在两个坐标方向的每一方向上以可能不同的频率振荡，在某一个特定方向上亮度的慢变化用在那个方向较低的谐波分量来表示。例如，考虑在一幅图像沿垂直方向亮度急剧变化的某一边缘。因为沿着这条边缘亮度是不变或变化很缓慢的，在垂直方向这条边缘的频率分量就集中低频域；相反，因为跨过这条边缘在亮度上有一个陡峭的变化，在水平方向这条边缘的频率分量就集中在较高的频域。图 3.24 就是说明一个二维的等效微分器在图像上的效果①。图 3.24 (a) 是两

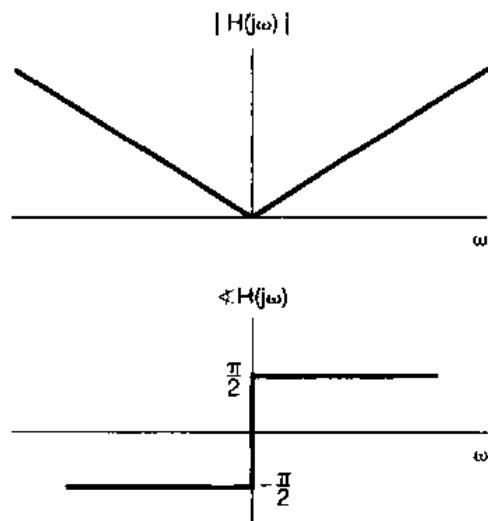


图 3.23 具有输出是输入导数特性的滤波器频率响应特性

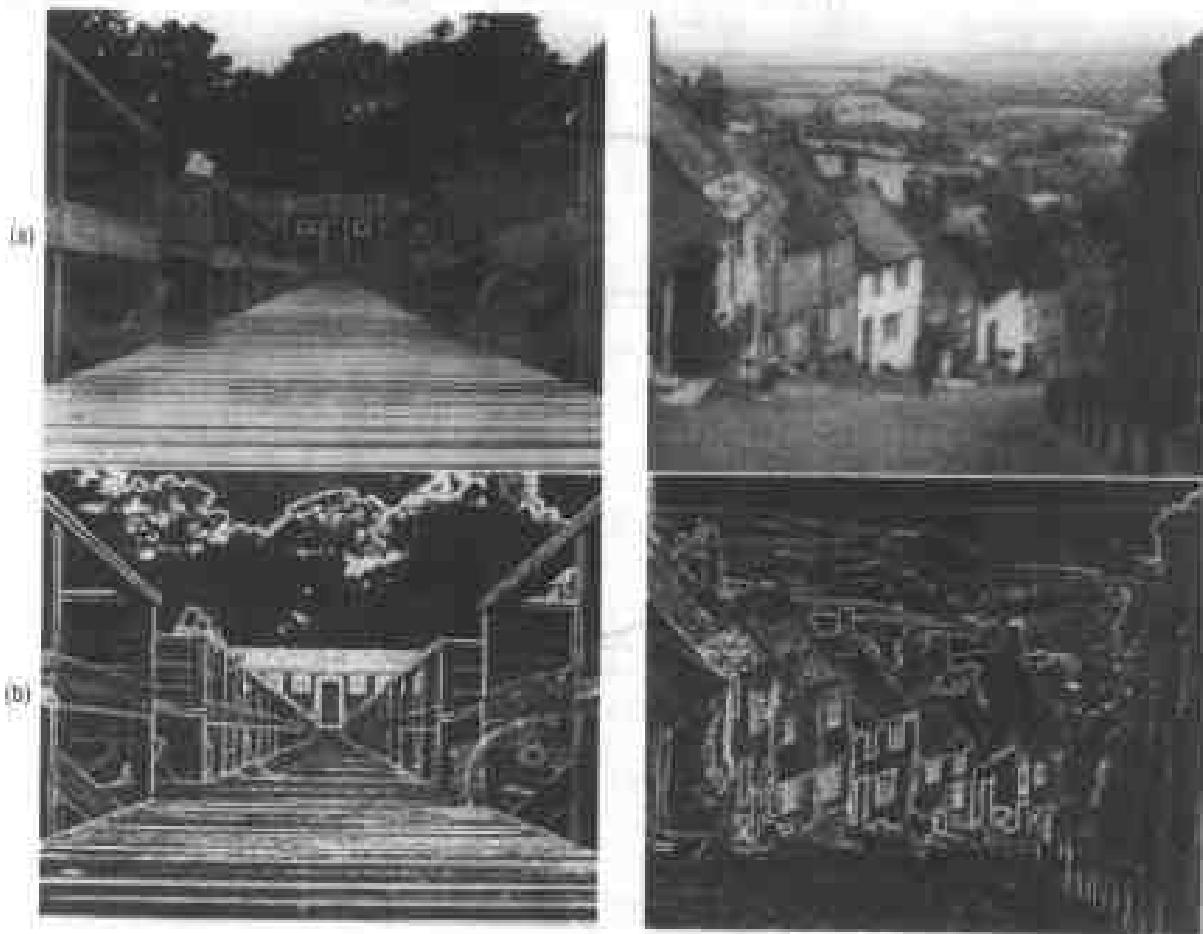


图 3.24 微分滤波器在一幅图像上的效果：

(a) 两幅原始图像；(b) 用微分滤波器处理该原始图像的结果

① 图 3.24(b) 中的每一幅图象是 3.24(a) 中所对应的图像的二维梯度的模，这里 $f(x, y)$ 的梯度定义为 $\left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$

幅原始图像，而图 3.24(b)则是用该滤波器处理的结果，因为在图像边缘处的导数比亮度随距离变化缓慢的区域要大，所以该滤波器的效果就使得边缘增晰。

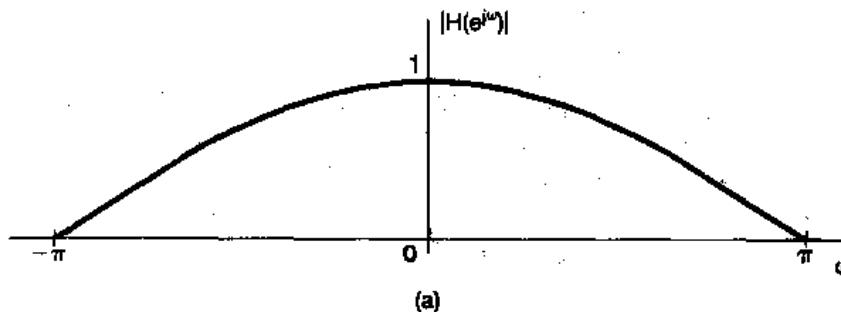
离散时间 LTI 系统也能找到一些很广泛的应用领域。其中很多都涉及到用通用或专用数字处理器实现的离散时间系统的应用以处理连续时间信号(在第 7 章将较深入地讨论这一论题)。另外，包括像人口统计学中的数据和股票市场平均值这样一些经济数据序列在内的时间序列信息的分析一般都涉及到离散时间滤波器的应用。往往长期变化(相应于低频)比之短期变化(相应于高频)具有不同的意义，分别分析这些分量是很有用的。将这些分量重新给予相对的加权一般就用离散时间滤波器来完成。

作为简单离散时间滤波器的一个例子，现考虑一个 LTI 系统，它是在输入值上连续取两点的平均：

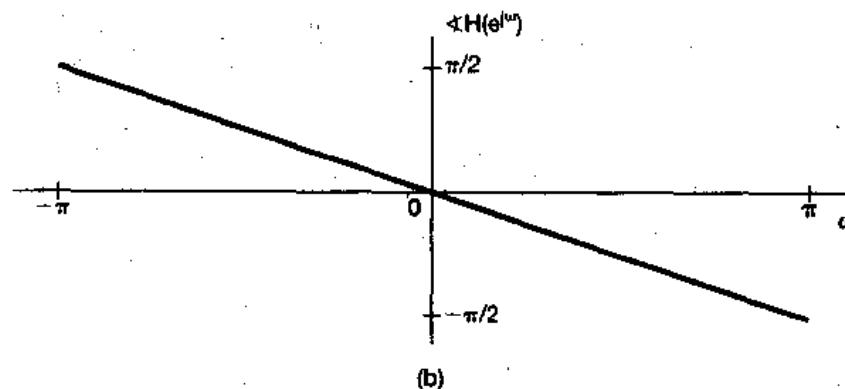
$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1]) \quad (3.138)$$

在这一情况下， $h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1])$ ，由(3.122)式可知该系统的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[1 + e^{-j\omega}] = e^{-j\omega/2} \cos(\omega/2) \quad (3.139)$$



(a)



(b)

图 3.25 (a) 离散时间 LTI 系统 $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1])$ 频率响应的模；(b) 相位

$H(e^{j\omega})$ 的模示于图 3.25(a)， $\angle H(e^{j\omega})$ 示于图 3.25(b)。在 1.33 节已讨论过，离散时间复指数的低频域发生在 $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 附近，而高频域在 $\omega = \pm \pi, 3\pi, \dots$ 附近。由于 $e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n}$ ，所以在离散时间情况下仅仅需要考虑 ω 的某一 2π 区间以覆盖整个不同的离散时间频率范围。这一结果就是任何离散时间频率响应 $H(e^{j\omega})$ 一定是周期的，周期为 2π 。其

实这一结果也能直接从(3.122)式推出来。

对于由(3.138)式和(3.139)式所定义的这个特殊滤波器，由图3.25(a)可见， $|H(e^{j\omega})|$ 在 $\omega=0$ 附近是比较大的，随着 $|\omega|$ 朝 π 方向增加而减小，这就表明了在高频域比在低频域有较多的衰减。譬如，若该系统的输入是常数，也就是具有零频率的复指数 $x[n]=Ke^{j0n}=K$ ，那么输出就一定是

$$y[n] = H(e^{j0})Ke^{j0\cdot n} = K = x[n]$$

另一方面，若输入是高频信号 $x[n]=Ke^{jn\pi}=K(-1)^n$ ，那么输出将是

$$y[n] = H(e^{j\pi})Ke^{jn\pi} = 0$$

因此，这个系统就将一个信号的长期不变值从它的高频起伏中区分开来。这就代表了频率选择性滤波的第一个例子，在下面的小节中还将更详细地关注这一问题。

3.9.2 频率选择性滤波器

频率选择性滤波器是一类专门用于完全地或近似地选取某些频带范围内的信号和除掉其它频带范围内信号的滤波器。频率选择性滤波器的应用极为广泛。例如，如果在一个音频录制系统中的噪音比录制的音乐或声音的频率要高的话，那么，就可以通过频率选择性滤波器将它滤除掉。频率选择性滤波器的另一类重要应用是在通信系统中。正如在第8章要详细讨论的，幅度调制(AM)系统的基础就是利用许多频率选择性滤波器把来自不同信源的各种待传送的信号，安排在彼此分开的频带内，然后组合起来一齐发送；而在收端，还是利用这类滤波器从这单一信道内提取出各路信号。用于划分信道的频率选择性滤波器和用于调节音质的频率成形滤波器(如图3.22的均衡器)是构成了任何家庭无线电和电视接收机的一个主要部分。

频率选择性不只是在应用中所关心的问题，而由于它的普遍意义已经导致了一组被广泛接受的术语用来描述频率选择性滤波器的特性。特别是，尽管应用的不同，被一个频率选择性滤波器所要通过的频率特性有很大的变化，但是几种基本类型的滤波器还是广泛地被采用，并且已经赋予了一些名称标明它们的功能。例如，一个低通滤波器就是通过低频(即在 $\omega=0$ 附近的频率)，而衰减或阻止较高频率的滤波器。一个高通滤波器就是通过高频而衰减或阻止低频的滤波器；带通滤波器就是通过某一频带范围，而衰减掉既高于又低于所要通过的这段频带的滤波器。在每一种情况下，截止频率都是用来定义那些边界频率的，以标明要通过的频率与要阻止的频率之间的边界，也就是在通带和阻带内频率的边界。

在定义和评价一个频率选择性滤波器的性能时会出现很多问题。在通带内这个滤波器在所通过的频率上效果究竟怎么样？在阻带内这个滤波器在衰减的频率上又衰减到什么程度？在靠近截止频率附近过渡带(也就是由通带内接近无失真到阻带内大的衰减这一过渡区)有多陡峭？其中的每一个问题都涉及到一个真实的频率选择性滤波器的特性与一个理想滤波器特性之间的比较。一个理想频率选择性滤波器是这样一种滤波器，它无失真地通过一组频率上的复指数信号，并全部阻止掉所有其它频率的信号。例如，一个截止频率为 ω_c 的连续时间理想低通滤波器就是一个LTI系统，它通过 ω 位于 $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$ 内的复指数信号 $e^{j\omega t}$ ，而阻止掉所有其它频率的信号。这就是，一个连续时间理想低通滤波器的频率响应是

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3.140)$$

如图 3.26 所示。

图 3.27(a)是一个截止频率为 ω_c 的理想连续时间高通滤波器的频率响应，而(c)则图示出一个下截止频率为 ω_{c1} ，上截止频率为 ω_{c2} 的理想连续时间带通滤波器的频率响应。可以注意到，每一种滤波器的特性对于 $\omega = 0$ 都是对称的，因此看起来对高通和带通滤波器好像有两个通带！这其实就是由于我们是采用了复指数信号 $e^{j\omega t}$ ，而不是采用正弦信号 $\sin \omega t$ 和 $\cos \omega t$ 的结果。因为 $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ 和 $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$ ，两个这样的复指数就组成了在同一频率 ω 的正弦信号。为此，通常在定义理想滤波器时都用在图 3.26 和图 3.27 中所见到的对称频率响应特性。

完全以相似的方式，可以定义出相应的一组理想离散时间频率选择性滤波器，其频率响应如图 3.28 所示。图 3.28(a)画的是一个理想离散时间低通滤波器特性，图 3.28(b)是一个理想高通滤波器，而图 3.28(c)则是一个理想带通滤波器。应该注意到，正如在前面所讨论过的，连续时间和离散时间理想滤波器的特性其差异在于：对离散时间滤波器来说，频率响应 $H(e^{j\omega})$ 一定是周期的，周期为 2π ，其低频靠近 π 的偶数倍附近，而高频在 π 的奇数倍左右。

将会发现在许多情况下，理想滤波器在很多应用中用于描述理想化系统的构成是很用的。然而，在实际上它们又是不可实现的，只能是近似地实现。再者，即便它们

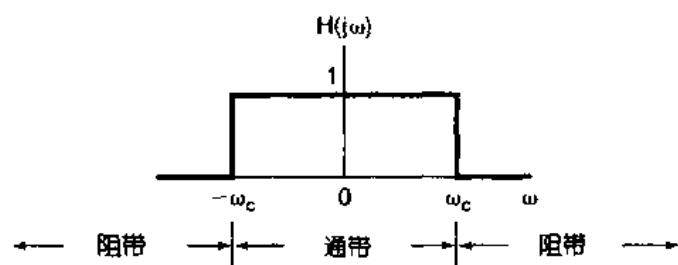


图 3.26 理想低通滤波器的频率响应

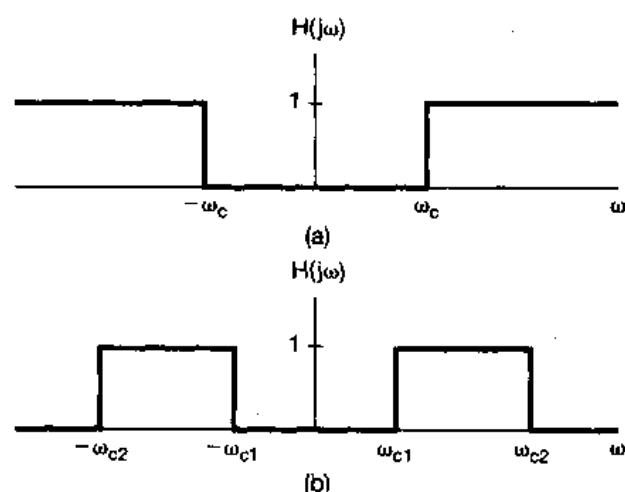


图 3.27 (a)理想高通滤波器的频率响应；
(b)理想带通滤波器的频率响应

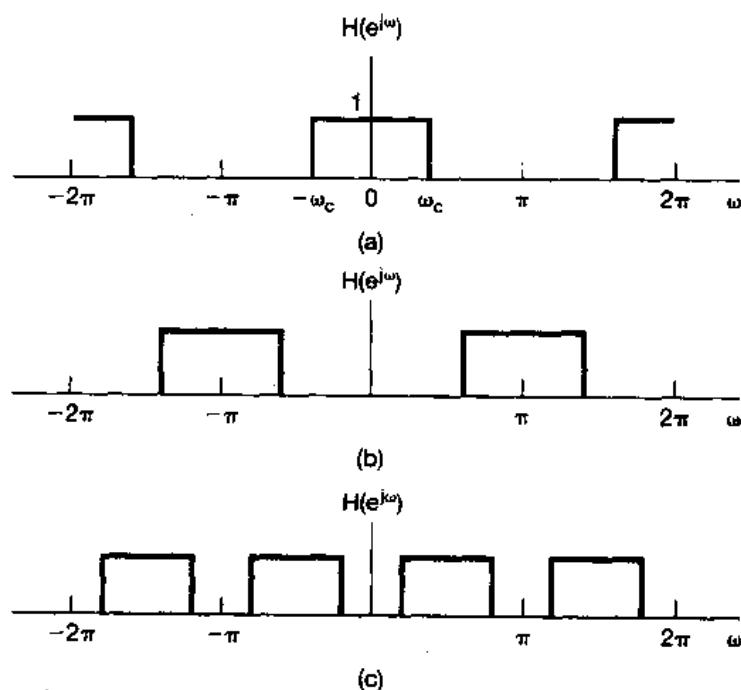


图 3.28 离散时间理想频率选择性滤波器：
(a) 低通；(b) 高通；(c) 带通

可以被实现，在一些特殊应用中可能还不希望有理想滤波器的某些特性；事实上，一个非理想的滤波器或许更为可取。

滤波包含着很多专题内容，其中包括设计与实现。尽管我们不会深入地去探究滤波器设计方法方面的一些细节问题，但是在本章的余下部分和下面各章都将见到连续时间和离散时间滤波器的几个例子，并且将建立有关形成这一重要工程学科的一些概念和方法。

3.10 用微分方程所描述的连续时间滤波器举例

在许多应用中，频率选择性滤波器是用线性常系数微分或差分方程所描述的 LTI 系统来实现的。这有许多理由，譬如，很多具有滤波作用的物理系统都是由微分或差分方程表征的。这方面一个很好的例子就是要在第 6 章研究的汽车减震系统，在某种程度上这个系统的设计就是为了滤掉由道路表面不平坦引起的高频颠簸和起伏。利用由微分或差分方程所描述的滤波器的第二个原因是它们能很方便地用模拟硬件或数字硬件来实现。另外，由微分或差分方程所描述的系统提供了一个极为广泛而灵活的设计空间，譬如，它可以得到一个很近似于理想的滤波器，或具有其它所要求特性的滤波器。在本节和下一节将研究几个例子，用以说明利用微分和差分方程来实现连续时间和离散时间频率选择性滤波器。在第 4 到第 6 章，还会见到这类滤波器的其它一些例子，并且一定会对使此类滤波器如此有用的一些性质得到更深入的理解。

3.10.1 简单 RC 低通滤波器

电路被广泛用作实现连续时间滤波功能。其中最简单的一个例子就是示于图 3.29 的一阶 RC 电路，图中电压源 $v_s(t)$ 是系统的输入。这个电路既能用来实现低通滤波，又能实现高通滤波，这取决于以什么作为输出信号。假定取电容器上的电压 $v_c(t)$ 作为输出，这时输出电压与输入电压就由下列线性常系数微分方程所关联：

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t) \quad (3.141)$$

假定系统为最初松弛的，由(3.141)式所描述的系统就是 LTI 的。为了确定频率响应 $H(j\omega)$ ，由定义在输入电压 $v_s(t) = e^{j\omega t}$ 时，输出电压一定是 $v_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ ，将这些代入(3.141)式，可得

$$RC \frac{d}{dt}[H(j\omega)e^{j\omega t}] + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \quad (3.142)$$

或者

$$RCj\omega H(j\omega)e^{j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \quad (3.143)$$

由此可直接得出

$$H(j\omega)e^{j\omega t} = \frac{1}{1 + RCj\omega}e^{j\omega t} \quad (3.144)$$

或

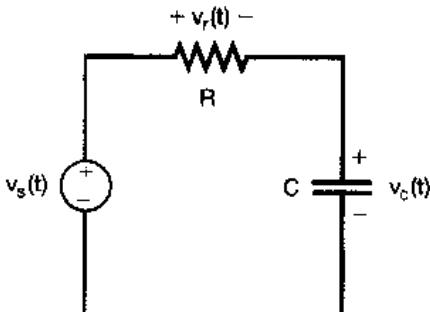


图 3.29 一阶 RC 滤波器

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega} \quad (3.145)$$

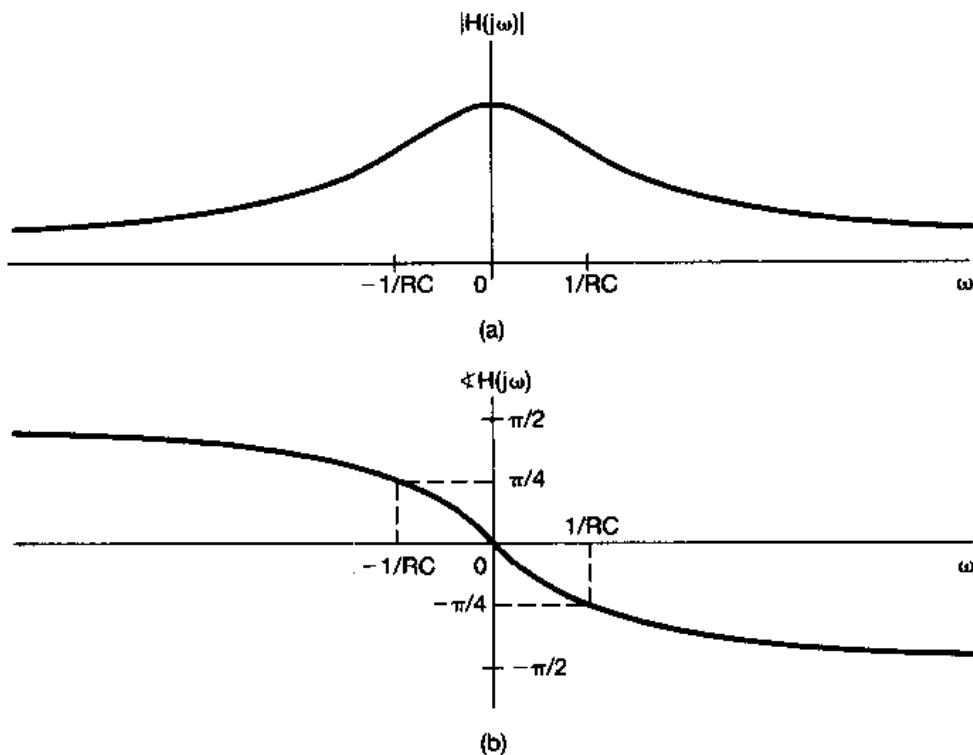


图 3.30 (a)和(b)分别是图 3.29 的 RC 电路以 $v_c(t)$ 作为输出时的频率响应的模和相位图

该例的频率响应 $H(j\omega)$ 的模和相位如图 3.30 所示。应该注意到，在频率 $\omega = 0$ 附近， $|H(j\omega)| \approx 1$ ；而在较大的 ω 值时(正值或负值)， $|H(j\omega)|$ 显著较小，事实上就是随 $|\omega|$ 的增加而平缓地减小。因此，这一简单的 RC 滤波器，在以 $v_c(t)$ 作输出的情况下就是一个非理想的低通滤波器。

为了在滤波器设计中涉及到的一些折衷和权衡等问题提供一个初步的接触，我们来简要考察一下该电路的时域特性，尤其是由(3.141)式描述的系统单位冲激响应是

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \quad (3.146)$$

它的单位阶跃响应是

$$x(t) = [1 - e^{-t/RC}] u(t) \quad (3.147)$$

两者都示于图 3.31 中，图中 $\tau = RC$ 。将图 3.30 和图 3.31 作一对比，可以看到一种基本的折衷。这就是：假如希望让滤波器仅仅通过很低的一些频率，那么由图 3.30(a)，这就意味着 $1/RC$ 必须要小，或者等效为 RC 要大，以使得那些不需要的频率有足够大的衰减；然而，由图 3.31(b)可知， RC 一旦变大，阶跃响应就得用较长的时间才能达到它的长期稳态值 1。这就是说，该系统对阶跃输入的响应是缓慢的。相反，如果希望有较快的阶跃响应，那么，就需要较小的 RC 值，这就意味着该滤波器将通过较高的频率。这种在频域和时域特性之间的折衷是 LTI 系统和滤波器的分析与设计中出现的典型问题。这就是在第 6 章将要详细讨论的一个主题。

3.10.2 简单 RC 高通滤波器

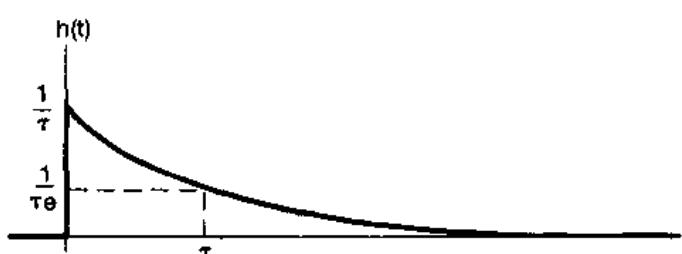
将 RC 电路的输出选为电阻两端的电压是又一种选择输出的方式。这时，关联输入和输出的微分方程是

$$RC \frac{dv_r(t)}{dt} + v_r(t) = RC \frac{dv_s(t)}{dt} \quad (3.148)$$

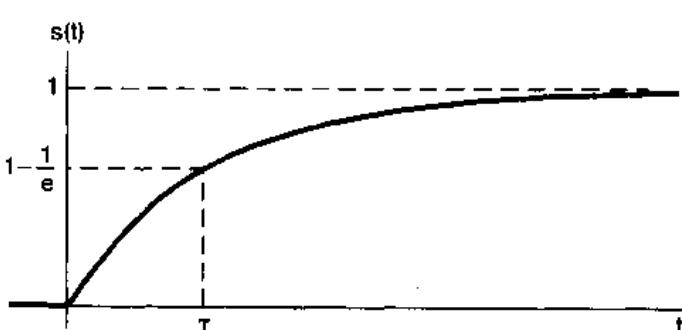
求这个系统的频率响应 $G(j\omega)$ 完全可以和前面讨论的情况一样，即：若 $v_s(t) = e^{j\omega t}$ ，那么一定有 $v_r(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$ ，将它们代入(3.148)式并稍许做一点代数演算，可得

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (3.149)$$

图 3.32 示出这个系统频率响应的模和相位。由图可见，该系统衰减掉较低的频率，而让较高的频率通过；也就是对于 $|\omega| \gg 1/RC$ 的频率有最小的衰减。这就是说，该系统是一个非理想的高通滤波器。

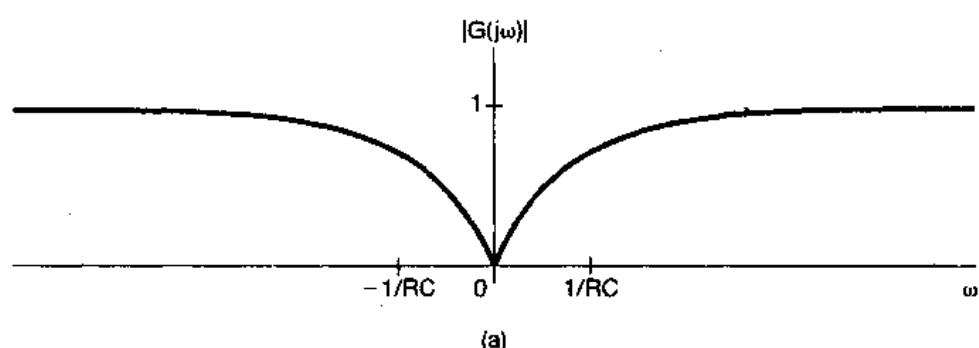


(a)

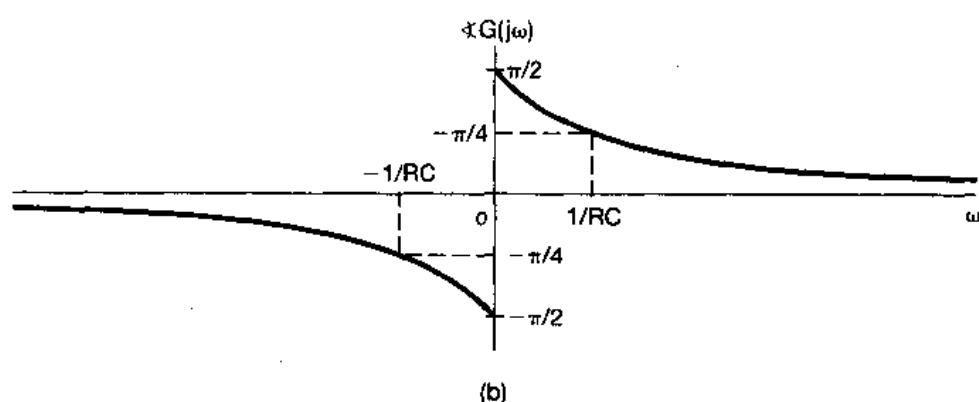


(b)

图 3.31 (a) $\tau = RC$ 的一阶 RC 低通滤波器的单位冲激响应；(b) 它的阶跃响应



(a)



(b)

图 3.32 (a) 和 (b) 分别是图 3.29 以 $v_r(t)$ 作为输出的 RC 电路频率响应的模和相位图

和低通滤波器时一样，电路参数既控制了该高通滤波器的频率响应，又控制了它的时间响应特性。譬如，考虑一下该滤波器的阶跃响应，由图 3.29 可见 $v_r(t) = v_s(t) - v_c(t)$ ，因此，若 $v_s(t) = u(t)$ ， $v_r(t)$ 就由(3.147)式给出。结果，该高通滤波器的阶跃响应是

$$v_r(t) = e^{-t/RC}u(t) \quad (3.150)$$

如图 3.33 所示。因为随着 RC 的增加，响应变得更为迟钝。也就是说，阶跃响应要用较长的时间才能达到它的长期稳态值 0。另外，由图 3.32 看出。增大 RC (即减小 $1/RC$)，在频率响应上的影响就是将通带朝着更低的频率方向扩展。

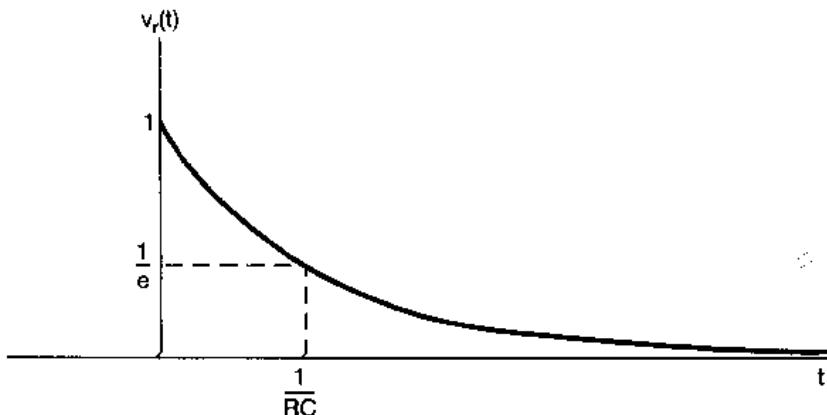


图 3.33 $\tau = RC$ 的一阶 RC 高通滤波器的阶跃响应

由本节的两个例子看到，一个简单 RC 电路，根据所选取的具体输出变量的不同，既能作为一个高通滤波器又能作为一个低通滤波器的粗略近似。在 3.7.1 节曾提到，利用一个质量和一个机械式减震器的简单机械系统也能用作由类似一阶微分方程所描述的低通或高通滤波器。由于它们过于简单，这些电的和机械的滤波器例子都没有一个从通带到阻带的陡峭过渡区；事实上，这里仅有一个参数(在电路的情况下就是 RC)，既要控制系统的频率响应，又要控制系统的时间响应特性，勉为其难而不可兼顾。设计更加复杂的滤波器，就需利用更多的能量存贮元件(在电的滤波器中就是电容和电感，在机械滤波器中就是弹簧和减震装置)，这样就得到由高阶微分方程所描述的滤波器。这样的滤波器在特性上能提供更多的灵活性，譬如陡峭的通带到阻带的过渡区，或者在时间响应和频率响应之间的折衷上有更多的控制等。

3.11 用差分方程描述的离散时间滤波器举例

与连续时间情况相同，由线性常系数差分方程描述的离散时间滤波器在实际中也具有很大的重要性。由于离散时间系统能有效地用专用或通用数字系统来实现，由差分方程描述的滤波器在实际中被广泛地采用。当我们来研究由差分方程所描述的离散时间滤波器时，就如同几乎在所有的信号与系统分析方面一样，它们与连续时间情况相比，既能发现很多的类似性，又能发现一些重要的差异。特别是，由差分方程描述的离散时间 LTI 系统可以是递归的，从而具有无限长单位脉冲响应(IIR 系统)；又能是非递归的，从而具有有限长单位脉冲响应(FIR 系统)。前者是与上节讨论的由微分方程描述的连续时间系统直接相对应的；而后者在

数字系统中也具有很大的实际意义。为完成一个特定的设计目标时，在实现的难易，滤波器的阶次或者复杂性等方面，这两类滤波器都各有明显的优点和缺点。这一节只限于递归和非递归滤波器的几个简单例子。在第 5 和第 6 章建立了另外的方法和深入了解之后，对这些系统的性质再给予更详细地分析和理解。

3.11.1 一阶递归离散时间滤波器

与 3.10 节讨论的一阶滤波器相对应的离散时间滤波器是由一阶差分方程所描述的 LTI 系统

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (3.151)$$

根据复指数信号的特征函数性质知道，若 $x[n] = e^{j\omega n}$ ，则 $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ ，这里 $H(e^{j\omega})$ 是该系统的频率响应。将这些代入(3.151)式，得

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - aH(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n} \quad (3.152)$$

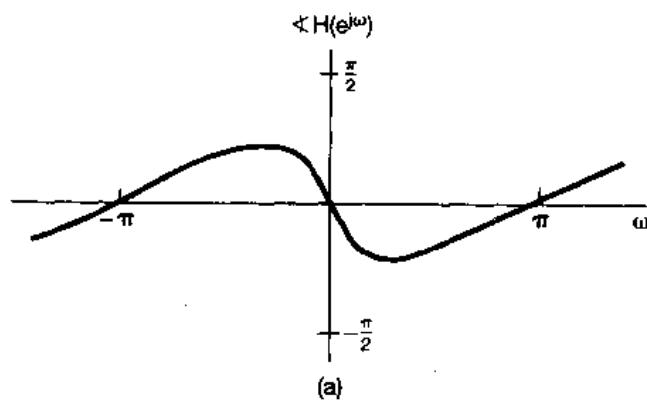
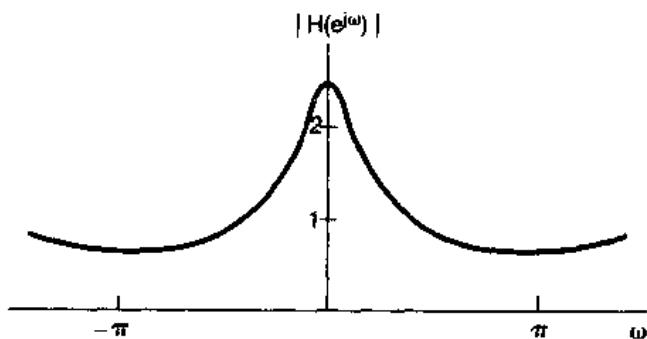
或者

$$[1 - a e^{-j\omega}]H(e^{j\omega})e^{j\omega n} = e^{j\omega n} \quad (3.153)$$

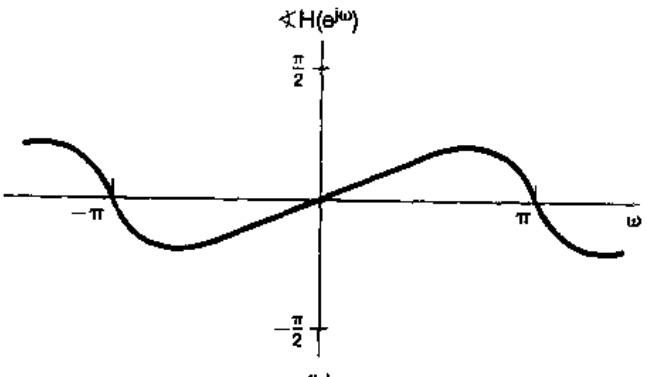
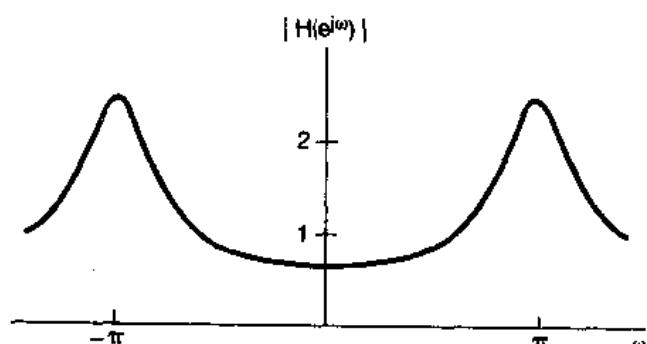
于是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (3.154)$$

对 $a = 0.6$ 和 $a = -0.6$ 时 $H(e^{j\omega})$ 的模和相位分别图示在图 3.34(a) 和 (b) 中。可以看到，对于正的 a ，(3.151) 式的差分方程表现为一个低通滤波器，其在 $\omega = 0$ 附近的低频域有最小的衰减，而随着 ω 朝 $\omega = \pi$ 增加，衰减加大。对于 a 为负值，该系统是一个高通滤波器，通过 $\omega = \pi$ 附近的频率，而衰减掉较低的频率。事实上，对于任何正的 $a < 1$ ，该系统都近似为一个低通滤波器；而对任何



(a)



(b)

图 3.34 (3.151) 式一阶递归离散时间滤波器的频率响应：
(a) $a = 0.6$; (b) $a = -0.6$

负的 $a > -1$, 该系统都近似为一个高通滤波器。这里 $|a|$ 控制了该滤波器通带的宽度, 随着 $|a|$ 的减小^①, 带宽愈宽。

与连续时间时的例子一样, 在时域和频域特性之间仍有一个折衷问题。由(3.151)式描述的系统其单位脉冲响应是

$$h[n] = a^n u[n] \quad (3.155)$$

阶跃响应 $s[n] = u[n] * h[n]$ 是

$$s[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u[n] \quad (3.156)$$

从上面两个式子中看到, $|a|$ 也是控制着单位脉冲响应和阶跃响应趋向它们长期稳态值的速度。较小的 $|a|$ 值, 就有较快的响应, 所以滤波器也就具有较宽的通带宽度^②。和微分方程一样, 高阶递归差分方程能够给出较陡峭的滤波器特性, 并且在时域和频域特性的均衡上也能提供更大的灵活性。

最后, 应该注意由(3.155)式可知, 用(3.151)式描述的系统在 $|a| \geq 1$ 时是不稳定的, 于是它对复指数的输入没有一个有限的响应。正如我们先前曾提到过的, 基于傅里叶方法和频域分析都是集中在对复指数具有有限响应的系统上, 所以, 像(3.151)式这样的例子都是限制在稳定系统的范畴内。

3.11.2 非递归离散时间滤波器

一个 FIR 非递归差分方程的一般形式是

$$y[n] = \sum_{k=-N}^M b_k x[n-k] \quad (3.157)$$

这就是输出 $y[n]$ 是 $x[n-M]$ 到 $x[n+N]$ 的 $(N+M+1)$ 个值的加权平均, 其加权系数为 b_k 。这种形式的系统可以用于满足很广泛的一些滤波要求, 其中包括频率选择性滤波器。

这类滤波器常用的一个例子是移动平均滤波器, 这时在任意 n 的输出 $y[n]$, 譬如 n_0 , 就是在 n_0 点附近 $x[n]$ 的平均。它的基本思想就是局部平均, 输入中的快速变化的高频分量被平均掉, 而低频变化部分得到保留, 这就相当于将原始序列作平滑或低通滤波。一个简单的两点移动平均曾在 3.9 节作过简要介绍[见(3.138)式]。稍许再复杂一点的例子是三点移动平均滤波器, 其形式为

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n-1] + x[n] + x[n+1]) \quad (3.158)$$

每一输出 $y[n]$ 是三个连续输入值的平均。这时

$$h[n] = \frac{1}{3}[\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]]$$

根据(3.122)式, 相应的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}[e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}] = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega) \quad (3.159)$$

$H(e^{j\omega})$ 的模如图 3.35 所示。可见, 虽然和一阶递归滤波器相同, 从通带到阻带, 没有一个陡

① 原文说, 随着 $|a|$ 的增加, 带宽愈宽, 似有误—译者注。

② 原文说, 在较小的 $|a|$ 值, 滤波器有较小的带宽, 似有误—译者注。

峭的过渡带,但该滤波器仍具有低通滤波器的一般特性。

在(3.158)式的三点移动平均滤波器中没有任何参数可供变化以调节有效截止频率,作为这类移动平均滤波器的一般化,可以考虑在 $N + M + 1$ 个相邻点上求平均,这就是利用如下形式的差分方程:

$$y[n] = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M x[n - k] \quad (3.160)$$

相应的单位脉冲响应就是一个矩形脉冲(即 $h[n] = 1/(N + M + 1), -N \leq n \leq M$; 其余 $n, h[n] = 0$)。该滤波器的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M e^{jk\omega} \quad (3.161)$$

(3.161)式的求和可用类似于例 3.12 的方法求得为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N + M + 1} e^{j\omega[(N-M)/2]} \frac{\sin[(\omega(M+N+1)/2)]}{\sin(\omega/2)} \quad (3.162)$$

利用调节平均窗口 $N + M + 1$ 的大小,就可改变截止频率。例如对于 $M + N + 1 = 33$ 和 65 时, $H(e^{j\omega})$ 的模分别如图 3.36(a)和(b)所示。

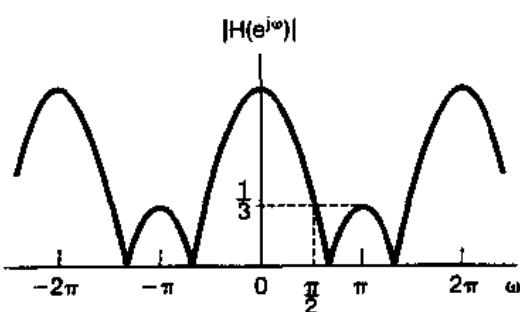
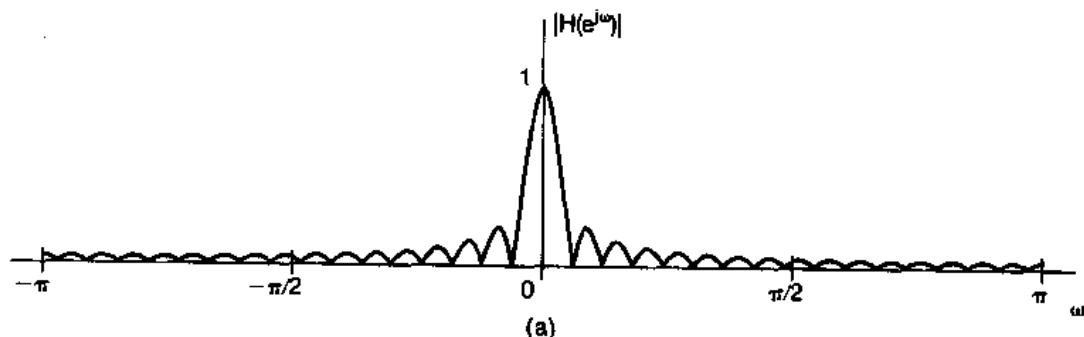
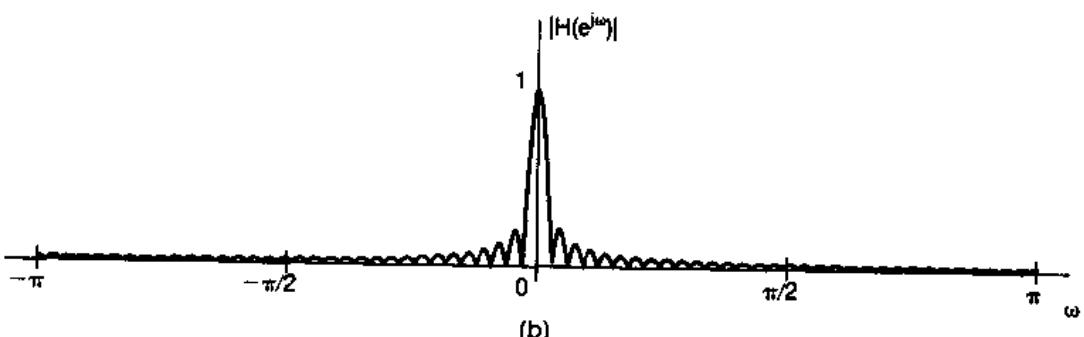


图 3.35 一个三点移动平均低通滤波器频率响应的模特性



(a)



(b)

图 3.36 (3.162)式低通移动平均滤波器频率响应的模特性:(a) $M = N = 16$; (b) $M = N = 32$

非递归滤波器也能用于实现高通滤波。为此，再用一个简单例子，考虑如下差分方程：

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2} \quad (3.163)$$

这个系统在输入信号近似不变时， $y[n]$ 的值就接近于0。对于从一个样本到另一个样本变化很大的输入信号来说，可以预期 $y[n]$ 会有较大的输出值。因此，由(3.163)式所描述的系统近似为一种高通过滤的作用：对慢变化的低频分量进行衰减；对于快变化的较高频率分量几乎无衰减地给予通过。为了更仔细地看出这一点，就需要看一下系统的频率响应。这时， $h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] - \delta[n-1])$ ，直接利用(3.122)式，可得

$$H(e^{j\omega}) \frac{1}{2}[1 - e^{-j\omega}] = j e^{j\omega/2} \sin(\omega/2) \quad (3.164)$$

图3.37中画出了 $H(e^{j\omega})$ 的模特性，指出该简单系统近似一个高通滤波器，尽管从通带到阻带的过渡非常的平缓。若考虑更为一般的非递归滤波器，就能够实现具有更为陡峭过渡区的各种低通，高通和其它频率选择性滤波器。

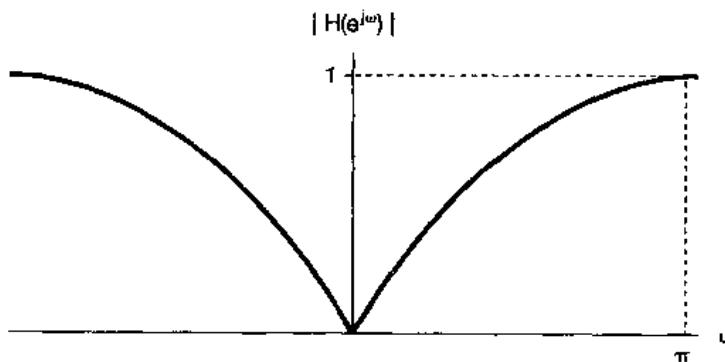


图3.37 一个简单高通滤波器的频率响应

因为任何FIR系统的单位脉冲响应都是有限长的(即，由(3.157)式， $h[n] = b_n, -N \leq n \leq M; h[n] = 0$ ，其余 n)，因此无论怎样选取 b_n ，它总是绝对可加的，所以全部这种类型的滤波器都是稳定的。同时，若 $N > 0$ ，由(3.157)式给出的系统就是非因果的，因为 $y[n]$ 要依赖于输入的未来值。在涉及到信号已被录制，而进行事后处理这样的应用中，因果性不是一个必要的限制，因此可以使用 $N > 0$ 的这些滤波器。在另一种情形下，涉及到很多实时处理，因果性就是必要的了，这时必须取 $N \leq 0$ 。

3.12 小结

本章对连续时间和离散时间系统引入并建立了傅里叶级数表示，而且利用这些表示对信号与系统分析方法中的一个重要应用领域——滤波，有了初步的涉及。在3.2节中已经提到过，利用傅里叶级数的主要原因就是由于复指数信号是LTI系统的特征函数的关系。由3.3节到3.7节已经看到，任何具有实际意义的周期信号都可以表示成一个傅里叶级数，也就是成谐波关系的复指数信号的加权和，并与被表示的信号具有相同的周期。另外还看到，傅里叶级数表示具有许多重要的性质，这些性质给出了信号的各种特征是如何反映到它们的傅里

叶级数系数中去的。

傅里叶级数最重要的性质之一是复指数特征函数性质的一个直接结果，这就是：若一个周期信号加到一个 LTI 系统上，那么输出也一定是周期的，且与输入信号的周期相同；并且，输出的每一个傅里叶系数就是对应的输入傅里叶系数乘以复指数，该复指数的值是相应于傅里叶系数的那个频率的函数。这一频率函数是该 LTI 系统的表征，称之为该系统的频率响应。考察系统的频率响应就能直接得出利用 LTI 系统对信号进行过滤的思想，这是一个具有很多应用的概念，其中几个本章已作了介绍。一个重要的应用是有关频率选择性滤波的概念，也就是利用 LTI 系统通过某些给定频带的频率，而阻止或显著衰减掉其余频率的概念。还介绍了理想频率选择性滤波器的概念，并给出了由线性常系数微分和差分方程描述的频率选择性滤波器的几个例子。

这一章的目的就是想在建立傅里叶分析方法以及在应用中利用这些方法作出正确评价这些方面做一个开头。在后续各章将继续这一议题，以建立连续时间和离散时间非周期信号的傅里叶变换表示，并不仅在滤波方面，而且在傅里叶方法其它的一些重要应用领域作较为深入地介绍。

习 题

习题的第一部分属于基本题，答案在书末给出。其余三个部分属基本题、深入题和扩充题。

基本题(附答案)

3.1 有一实值连续时间周期信号 $x(t)$ ，其基波周期 $T=8$ ， $x(t)$ 的非零傅里叶级数系数是

$$a_1 = a_{-1} = 2, \quad a_3 = a_{-3} = 4j$$

试将 $x(t)$ 表示成如下形式：

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

3.2 有一实值离散时间周期信号 $x[n]$ ，其基波周期 $N=5$ ， $x[n]$ 的非零傅里叶级数系数是

$$a_0 = 1, \quad a_2 = a_{-2} = e^{j\pi/4}, \quad a_4 = a_{-4} = 2e^{j\pi/3}$$

试将 $x[n]$ 表示成如下形式：

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n + \phi_k)$$

3.3 对下面连续时间周期信号

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

求基波频率 ω_0 和傅里叶级数系数 a_k ，以表示成

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

3.4 利用傅里叶级数分析式(3.39)式计算下列连续时间周期信号(基波频率 $\omega_0=\pi$)的系数 a_k

$$x(t) = \begin{cases} 1.5, & 0 \leq t < 1 \\ -1.5, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

3.5 设 $x_1(t)$ 是一连续时间周期信号，其基波频率为 ω_1 ，傅里叶系数为 a_k ，已知

$$x_2(t) = x_1(1-t) + x_1(t-1)$$

问 $x_2(t)$ 的基波频率 ω_2 与 ω_1 是什么关系？求 $x_2(t)$ 的傅里叶级数系数 b_k 与系数 a_k 之间的关系。可以

使用列于表 3.1 中的性质。

- 3.6 有三个连续时间周期信号，其傅里叶级数表示如下：

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t} \quad x_2(t) = \sum_{k=-100}^{100} \cos(k\pi) e^{jk\frac{2\pi}{50}t} \quad x_3(t) = \sum_{k=-100}^{100} j \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk\frac{2\pi}{50}t}$$

利用傅里叶级数性质帮助回答下列问题：

(a) 三个信号中哪些是实值的？

(b) 哪些又是偶函数？

- 3.7 假定周期信号 $x(t)$ 有基波周期为 T 和傅里叶系数为 a_k ，在各种情况下，都是比较容易地求得 $g(t) = dx(t)/dt$ 的傅里叶级数系数 b_k 的，而不用像直接去求 a_k 那样。现在已知

$$\int_T^{2T} x(t) dt = 2$$

试利用 b_k 和 T 求 a_k 的表示式。利用表 3.1 的性质帮助你求得这个表示式。

- 3.8 现对一信号 $x(t)$ 给出如下信息：

1. $x(t)$ 是实的且为奇函数。

2. $x(t)$ 是周期的，周期 $T=2$ ，傅里叶系数为 a_k 。

3. 对 $|k| > 1$, $a_k = 0$ 。

4. $\frac{1}{2} \int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$ 。

试确定两个不同的信号都满足这些条件。

- 3.9 利用分析式(3.95)式求下面周期信号在一个周期内的傅里叶级数系数值

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{4\delta[n - 4m] + 8\delta[n - 1 - 4m]\}$$

- 3.10 令 $x[n]$ 是一个实的且为奇周期信号，周期 $N=7$ ，傅里叶系数为 a_k ，已知

$$a_{15} = j \quad a_{16} = 2j \quad a_{17} = 3j$$

确定 a_1, a_{-1}, a_{-2} ，和 a_{-3} 的值。

- 3.11 现对一信号 $x[n]$ 给出如下信息：

1. $x[n]$ 是实、偶信号。

2. $x[n]$ 有周期 $N=10$ 和傅里叶系数 a_k 。

3. $a_{11}=5$

4. $\frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 |x[n]|^2 = 50$

证明： $x[n] = A \cos(Bn + C)$ ，并给出常数 A, B 和 C 的值。

- 3.12 序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 都有一个周期 $N=4$ ，对应的傅里叶系数是

$$x_1[n] \leftrightarrow a_k \quad x_2[n] \leftrightarrow b_k$$

其中

$$a_0 = a_3 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} a_2 = 1 \quad \text{和} \quad b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 1$$

利用表 3.1 的相乘性质，确定信号 $g[n] = x_1[n]x_2[n]$ 的傅里叶级数系数 c_k 。

- 3.13 考虑一连续时间 LTI 系统，其频率响应是

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

若输入至该系统的信号是一周期信号 $x(t)$ ，即

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4 \\ -1, & 4 \leq t < 8 \end{cases}$$

周期 $T=8$ ，求系统的输出 $y(t)$ 。

- 3.14 当一个频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 的 LTI 系统，其输入为如下冲激串时，

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k]$$

其输出为

$$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

求 $H(e^{jk\pi/2})$ 在 $k=0, 1, 2$ 和 3 时的值。

- 3.15 考虑一连续时间理想低通滤波器 S ，其频率响应是

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 100 \\ 0, & |\omega| > 100 \end{cases}$$

当该滤波器的输入是基波周期 $T=\pi/6$ 和傅里叶级数系数 a_k 的信号 $x(t)$ 时，发现有

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t) = x(t)$$

试问对于什么样的 k 值，才保证 $a_k=0$ ？

- 3.16 对于下列周期输入，求示于图 P3.16 的滤波器的输出：

$$(a) x_1[n] = (-1)^n$$

$$(b) x_2[n] = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(c) x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k} u[n-4k]$$

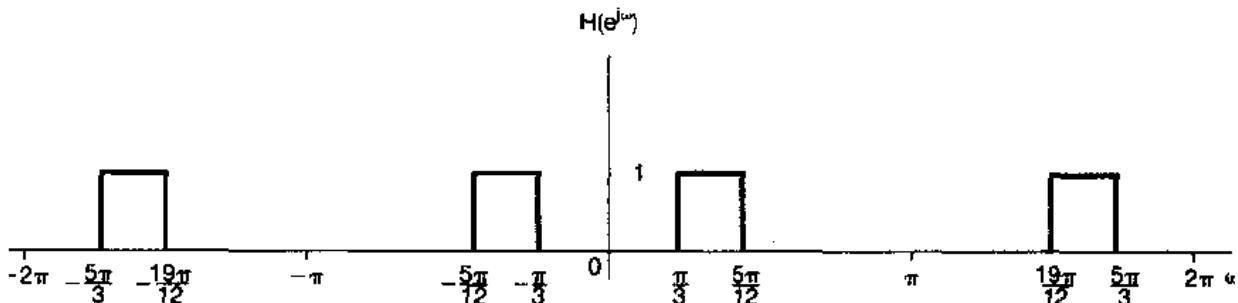


图 P3.16

- 3.17 有三个连续时间系统 S_1, S_2 和 S_3 ，它们对复指数输入 $e^{j\omega t}$ 的响应分别给出如下：

$$S_1: e^{j\omega t} \rightarrow te^{j\omega t} \quad S_2: e^{j\omega t} \rightarrow e^{j\omega(t-1)} \quad S_3: e^{j\omega t} \rightarrow \cos(5t)$$

对每一系统决定所给出的信息是否充分而能得出该系统肯定不是 LTI 的结论？

- 3.18 有三个离散时间系统 S_1, S_2 和 S_3 ，它们对复指数输入 $e^{jk\pi/2}e^{jn/2}$ 的响应分别给出如下：

$$S_1: e^{jk\pi/2} \rightarrow e^{jk\pi n/2} u[n] \quad S_2: e^{jk\pi/2} \rightarrow e^{j3kn/2} \quad S_3: e^{jk\pi/2} \rightarrow 2e^{j5kn/2}$$

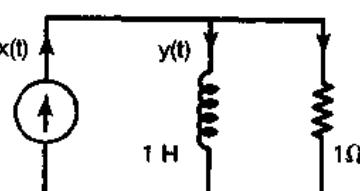
对每一系统决定所给出的信息是否充分而能得出该系统肯定不是 LTI 的结论？

- 3.19 由图 P3.19 所示的 RL 电路实现的因果 LTI 系统，电流源输出电流为输入 $x(t)$ ，系统的输出是流经电感线圈的电流 $y(t)$ 。

(a) 求关联 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的微分方程。

(b) 求系统对输入为 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的系统频率响应。

(c) 若 $x(t) = \cos(t)$ ，求输出 $y(t)$ 。



- 3.20 由图 P3.20 所示的 RLC 电路实现的因果 LIT 系统， $x(t)$ 为输入电压，跨于电容器上的电压取为该系统的输出 $y(t)$ 。

(a) 求关联 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的微分方程。

图 P3.19

(b) 求系统对输入为 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的系统频率响应。

(c) 若 $x(t) = \sin(t)$, 求输出 $y(t)$ 。

基本题

3.21 有一连续时间周期信号 $x(t)$ 是实值信号, 其基波周期 $T=8$, $x(t)$ 的非零傅里叶级数系数为

$$a_1 = a_{-1} = j \quad a_5 = a_{-5} = 2$$

试将 $x(t)$ 表示为如下形式:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

3.22 求下面信号的傅里叶级数表示:

(a) 示于图 P3.22(a)–(f) 的每一个 $x(t)$ 。

(b) $x(t)$ 的周期为 2, 且为

$$x(t) = e^{-t}, \quad -1 < t < 1$$

(c) $x(t)$ 的周期为 4, 且为

$$x(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

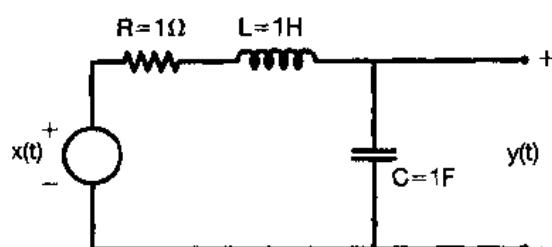
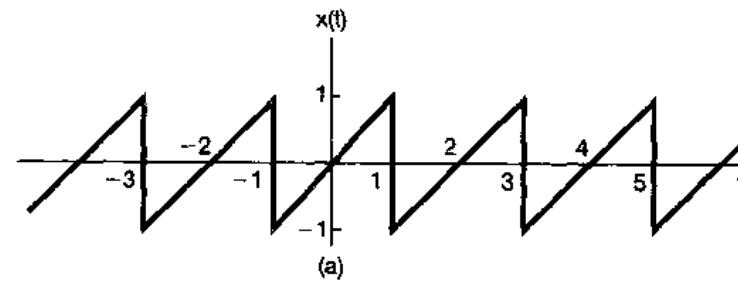
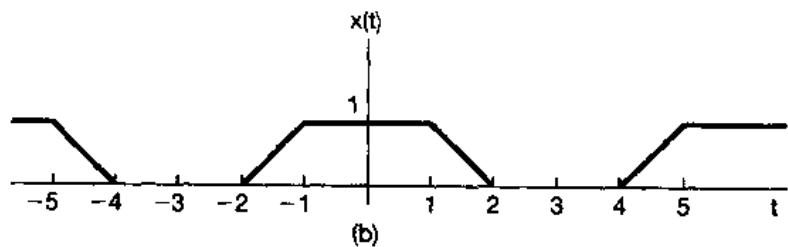


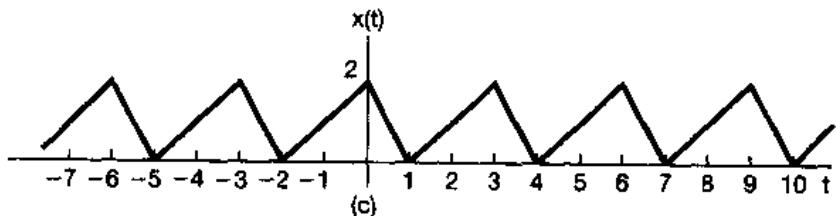
图 P3.20



(a)



(b)



(c)

图 P3.22

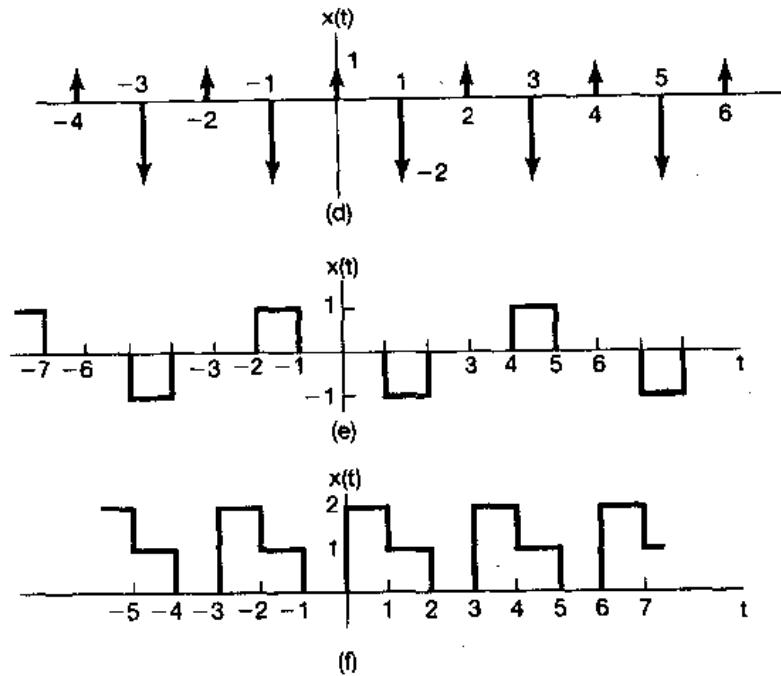


图 P3.22

3.23 给出下面周期为 4 的各连续时间信号的傅里叶级数系数, 求每一个 $x(t)$ 信号

$$(a) a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ (j)^k \frac{\sin k\pi/8}{k\pi}, & \text{其余 } k \end{cases}$$

$$(b) a_k = (-1)^k \frac{\sin k\pi/8}{2k\pi}$$

$$(c) a_k = \begin{cases} jk, & |k| < 3 \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$$

$$(d) a_k = \begin{cases} 1, & k \text{ 为偶} \\ 2, & k \text{ 为奇} \end{cases}$$

3.24

令

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

是一个基波周期 $T=2$ 的周期信号, 傅里叶系数为 a_k

(a) 求 a_0 。

(b) 求 $dx(t)/dt$ 的傅里叶级数表示。

(c) 利用(b)的结果和连续时间傅里叶级数的微分性质求 $x(t)$ 的傅里叶级数系数。

3.25 下面三个连续时间周期信号的基波周期 $T=1/2$

$$x(t) = \cos(4\pi t) \quad y(t) = \sin(4\pi t) \quad z(t) = x(t)y(t)$$

(a) 求 $x(t)$ 的傅里叶级数系数。

(b) 求 $y(t)$ 的傅里叶级数系数。

(c) 利用(a)和(b)的结果, 按照连续时间傅里叶级数的相乘性质, 求 $z(t) = x(t)y(t)$ 的傅里叶级数系数。

(d) 通过直接将 $z(t)$ 展开或三角函数的形式来求 $z(t)$ 的傅里叶级数系数, 并且与(c)的结果作比较。

3.26 设 $x(t)$ 是一周期信号, 其傅里叶级数系数是

$$a_k = \begin{cases} 2, & k=0 \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & \text{其余 } k \end{cases}$$

利用傅里叶级数性质回答下列问题：

- (a) $x(t)$ 是实的吗？
- (b) $x(t)$ 是偶的吗？
- (c) $dx(t)/dt$ 是偶的吗？

3.27 有一实值离散时间周期信号 $x[n]$, 基波周期 $N=5$, $x[n]$ 的非零傅里叶级数系数是

$$a_0 = 2 \quad a_2 = a_{-2}^* = 2e^{j\pi/6} \quad a_4 = a_{-4}^* = e^{j\frac{\pi}{3}}$$

试将 $x[n]$ 表示成如下形式

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n + \phi_k)$$

3.28 对下面每一离散时间周期信号求其傅里叶级数系数，并画出每一组系数 a_k 的模和相位。

- (a) 图 P3.28(a)–(c) 的每一个 $x[n]$ 。
- (b) $x[n] = \sin(2\pi n/3)\cos(\pi n/2)$
- (c) $x[n]$ 的周期为 4，且有

$$x[n] = 1 - \sin \frac{\pi n}{4}, \quad 0 \leq n \leq 3$$

- (d) $x[n]$ 的周期为 12，且有

$$x[n] = 1 - \sin \frac{\pi n}{4}, \quad 0 \leq n \leq 11$$

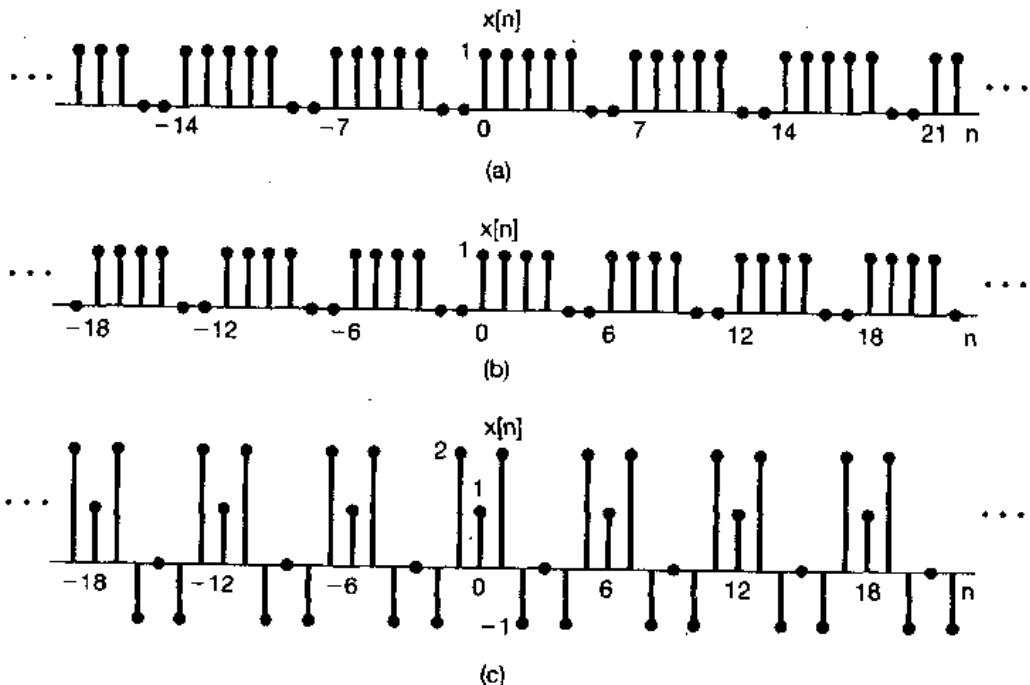


图 P3.28

3.29 下面每一种情况都给出了周期为 8 的某一信号的傅里叶级数系数，求各 $x[n]$ 。

- (a) $a_k = \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right)$,
- (b) $a_k = \begin{cases} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right), & 0 \leq k \leq 6 \\ 0, & k = 7 \end{cases}$
- (c) a_k 如图 P3.29(a) 所示,
- (d) a_k 如图 P2.29(b) 所示

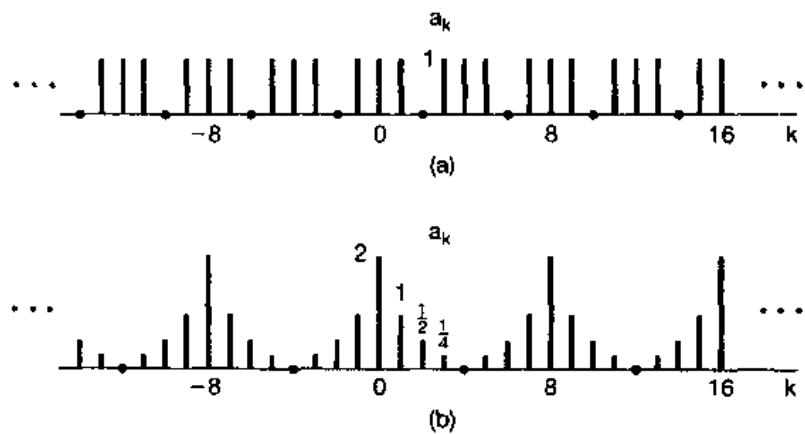


图 P3.29

3.30 考虑下面三个基波周期为 6 的离散时间信号：

$$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right) \quad y[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right) \quad z[n] = x[n]y[n]$$

- (a) 求 $x[n]$ 的傅里叶级数系数。
- (b) 求 $y[n]$ 的傅里叶级数系数。
- (c) 利用 (a) 和 (b) 的结果，并按照离散时间傅里叶级数的相乘性质，求 $z[n] = x[n]y[n]$ 的傅里叶级数系数。
- (d) 经由直接求 $z[n]$ 的傅里叶级数系数，并将结果与 (c) 作比较。

3.31 令

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 7 \\ 0, & 8 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

是一个基波周期 $N=10$ 的周期信号，傅里叶级数系数为 a_k ，同时令

$$g[n] = x[n] - x[n-1]$$

- (a) 证明 $g[n]$ 的基波周期也为 10。
- (b) 求 $g[n]$ 的傅里叶级数系数。
- (c) 利用 $g[n]$ 的傅里叶级数系数和表 3.2 的一次差分性质求 $a_k, k \neq 0$ 。

3.32 考虑图 P3.32 的信号 $x[n]$ ，它是周期的，周期 $N=4$ 。该信号的离散时间傅里叶级数表示式为

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 a_k e^{jk(2\pi/4)n} \quad (\text{P3.32-1})$$

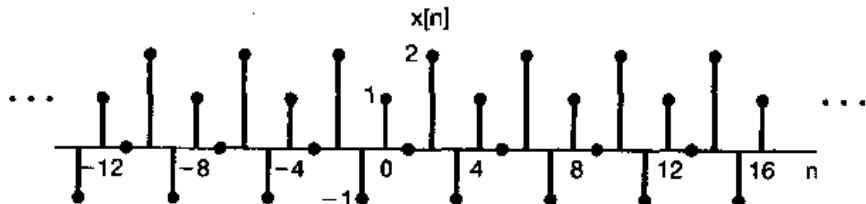


图 P3.32

在正文中曾提到，求这个傅里叶级数系数的一种办法就是将 (P3.32-1) 式当作含 4 个未知数 (a_0, a_1, a_2 和 a_3) 的 4 个线性方程组 ($n=0, 1, 2, 3$) 来对待。

- (a) 明确写出这 4 个方程，并用任何标准的方法直接解这 4 个联立方程组以求得该 4 个未知数（首先要将上面的复指数化简到最简单的形式）。

(b) 利用离散时间傅里叶级数分析公式

$$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk(2\pi/4)n}$$

直接计算 a_k , 并验证你的答案。

3.33 考虑一个因果的连续时间 LTI 系统, 其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下面微分方程所关联:

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t)$$

在下面两种输入下, 求输出 $y(t)$ 的傅里叶级数表示:

- (a) $x(t) = \cos 2\pi t$,
- (b) $x(t) = \sin 4\pi t + \cos(6\pi t + \pi/4)$

3.34 考虑一连续时间 LTI 系统, 其单位冲激响应为

$$h(t) = e^{-4|t|}$$

对下列各输入情况下, 求输出 $y(t)$ 的傅里叶级数表示:

- (a) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$
- (b) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t-n)$
- (c) $x(t)$ 如图 P3.34 所示的周期性方波

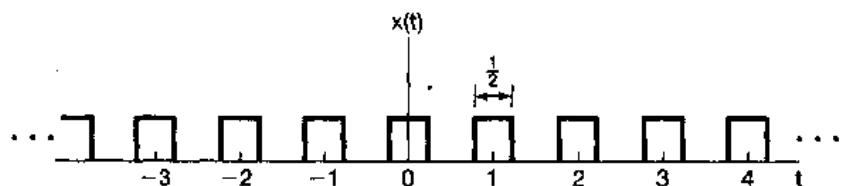


图 P3.34

3.35 考虑一连续时间 LTI 系统 S , 其频率响应是

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \geq 250 \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

当输入到该系统的信号 $x(t)$ 是一个基波周期 $T = \pi/7$, 傅里叶级数系数为 a_k 的信号时, 发现输出 $y(t) = x(t)$ 。问对于什么样的 k 值, 才有 $a_k = 0$?

3.36 考虑一因果离散时间 LTI 系统, 其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 由下面差分方程所关联:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$$

在下面两种输入下, 求输出 $y[n]$ 的傅里叶级数表示:

- (a) $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$
- (b) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

3.37 考虑一离散时间 LTI 系统, 其单位脉冲响应为

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

在下面两种输入下, 求输出 $y[n]$ 的傅里叶级数表示:

- (a) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$
- (b) $x[n]$ 是周期的, 周期为 6, 且有

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm 1 \\ 0, & n = \pm 2, \pm 3 \end{cases}$$

3.38 考虑一离散时间 LTI 系统，其单位脉冲响应为

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 2 \\ -1, & -2 \leq n \leq -1 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

已知系统的输入是

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 4k]$$

求输出 $y[n]$ 的傅里叶级数系数。

3.39 考虑一离散时间 LTI 系统 S ，其频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{8} \\ 0, & \frac{\pi}{8} < |\omega| < \pi \end{cases}$$

试证明：若该系统的输入 $x[n]$ 具有周期 $N=3$ ，则输出 $y[n]$ 在每个周期内仅有一个非零傅里叶级数系数。

深入题

3.40 令 $x(t)$ 是一周期信号，基波周期为 T ，傅里叶级数系数是 a_k ，利用 a_k 导出下列各信号的傅里叶级数系数：

- (a) $x(t - t_0) + x(t + t_0)$
- (b) $\mathcal{E}_n[x(t)]$
- (c) $\mathcal{R}_n[x(t)]$
- (d) $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$
- (e) $x(3t - 1)$ [先确定 $x(3t - 1)$ 的周期]

3.41 关于一个周期为 3 和傅里叶系数为 a_k 的连续时间周期信号给出下面信息：

- 1. $a_k = a_{k+2}$
- 2. $a_k = a_{-k}$
- 3. $\int_{-0.5}^{0.5} x(t) dt = 1$
- 4. $\int_{0.5}^{1.5} x(t) dt = 2$

试确定 $x(t)$ 。

3.42 令 $x(t)$ 是一个基波周期为 T 和傅里叶级数系数为 a_k 的实值信号。

- (a) 证明： $a_k = a_{-k}^*$ ，并且 a_0 一定为实数。
- (b) 证明：若 $x(t)$ 为偶函数，则它的傅里叶级数系数一定为实而且为偶。
- (c) 证明：若 $x(t)$ 为奇函数，则它的傅里叶级数系数是虚数且为奇函数， $a_0 = 0$ 。
- (d) 证明： $x(t)$ 偶部的傅里叶系数等于 $\mathcal{R}_n[a_k]$ 。
- (e) 证明： $x(t)$ 奇部的傅里叶系数等于 $j\mathcal{I}_n[a_k]$ 。

3.43 (a) 一个周期为 T 的连续时间周期信号 $x(t)$ ，若在其傅里叶级数表示式

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad (\text{P3.43-1})$$

中，对全部非零的偶整数 k ，有 $a_k = 0$ ，则称 $x(t)$ 是奇谐(odd-harmonic)的。

(i) 证明：若 $x(t)$ 是奇谐的，则有

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad (\text{P3.43-2})$$

(ii) 证明：若 $x(t)$ 满足(P3.43-2)式，则它是奇谐的。

(b) 假设 $x(t)$ 是一个周期为 2 的奇谐周期信号，且有

$$x(t) = t, 0 < t < 1$$

画出 $x(t)$ 并求出它的傅里叶级数系数。

(c) 类似地, 可以把在(P3.43-1)式中, 当 k 为奇数时 $a_k = 0$ 的函数定义为偶谐信号。试问, T 可能是这种信号的基波周期吗? 请陈述理由。

(d) 更一般的情况是证明: 若出现下面两种情况之一, 则 T 是(P3.43-1)式中 $x(t)$ 的基波周期:

(1) a_1 或 a_{-1} 为非零。

(2) 存在两个没有公共因子的整数 k 和 l , 使 a_k 和 a_l 都是非零。

3.44 假设关于信号 $x(t)$ 给出如下信息:

1. $x(t)$ 是实信号。

2. $x(t)$ 是周期的, 周期为 6, 傅里叶系数为 a_k 。

3. 对于 $k=0$ 和 $k>2$, 有 $a_k=0$ 。

4. $x(t) = -x(t-3)$

$$5. \frac{1}{6} \int_{-3}^3 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

6. a_1 是正实数。

证明: $x(t) = A \cos(Bt + C)$, 并求常数 A , B 和 C

3.45 设 $x(t)$ 是一实周期信号, 其正弦-余弦形式的傅里叶级数表示为

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t] \quad (P3.45-1)$$

(a) 求 $x(t)$ 的偶部和奇部的指数形式的傅里叶级数表示; 也就是利用(P3.45-1)式的系数求下面两式中的 α_k 和 β_k

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{x(t)\} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \\ \mathcal{O}\{x(t)\} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

(b) 在(a)中 α_k 和 α_{-k} 之间是什么关系? β_k 和 β_{-k} 之间是什么关系?

(c) 假设信号 $x(t)$ 和 $z(t)$ 如图 P3.45 所示, 它的正弦-余弦形式的级数表示式为

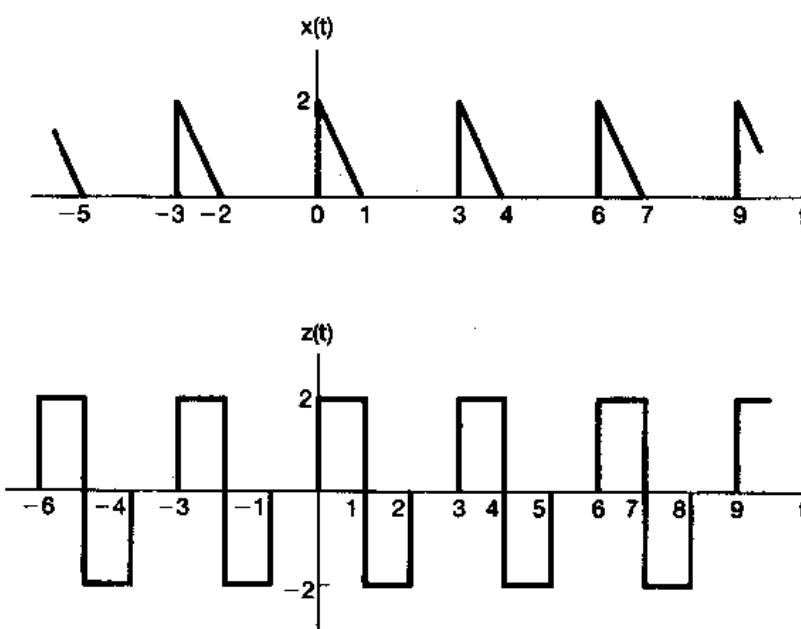


图 P3.45

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) - C_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) \right]$$

$$y(t) = d_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[E_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) - F_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) \right]$$

试画出信号

$$y(t) = 4(a_0 + d_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left[B_k + \frac{1}{2} E_k \right] \cos\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) + F_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{3}\right) \right]$$

- 3.46 在本题中，要导出连续时间傅里叶级数中两个重要性质：相乘性质和帕斯瓦尔定理。令 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个周期为 T_0 的连续时间周期信号，其傅里叶级数表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k \omega_0 t} \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{j k \omega_0 t} \quad (P3.46-1)$$

(a) 证明信号

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j k \omega_0 t}$$

的傅里叶级数系数由离散卷积

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}$$

给出。

(b) 利用(a)的结果，计算图 P3.46 中 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 的傅里叶级数系数。

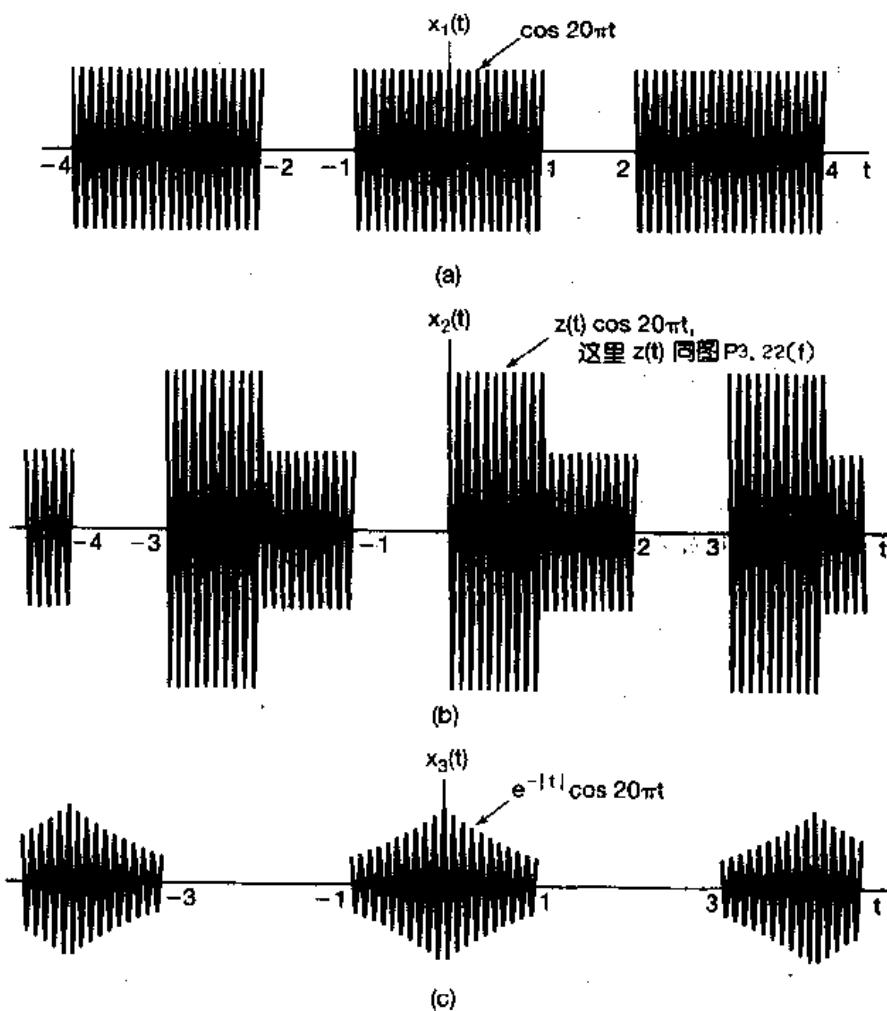


图 P3.46

(c) 假设(P3.46-1)式中的 $y(t)$ 等于 $x^*(t)$, 用 a_k 来表示 b_k , 并用(a)的结果证明周期信号的帕斯瓦尔定理, 即

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

3.47 考虑信号 $x(t)$

$$x(t) = \cos 2\pi t$$

因为 $x(t)$ 是周期的, 基波周期为1, 因此对任意正整数 N , 该信号也是周期的。若将 $x(t)$ 看成是周期为3的周期信号, $x(t)$ 的傅里叶级数系数是什么?

3.48 令 $x[n]$ 是一个周期为 N 的周期序列, 其傅里叶级数表示为

$$x[n] = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (\text{P3.48-1})$$

下列每个信号的傅里叶级数系数都能用(P3.48-1)式中的 a_k 来表示, 试导出如下信号的表示式:

- (a) $x[n - n_0]$
- (b) $x[n] - x[n - 1]$
- (c) $x[n] - x\left[n - \frac{N}{2}\right]$ (N 为偶数)
- (d) $x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right]$ (N 为偶数; 注意该信号是周期的, 周期为 $N/2$)。
- (e) $x[-n]$
- (f) $(-1)^n x[n]$ (N 为偶数)
- (g) $(-1)^n x[n]$ (N 为奇数; 注意该信号是周期的, 周期为 $2N$)
- (h) $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

3.49 令 $x[n]$ 是一个周期序列, 周期为 N , 其傅里叶级数表示为

$$x[n] = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (\text{P3.49-1})$$

(a) 设 N 为偶数, (P3.49-1)式中的 $x[n]$ 满足

$$x[n] = -x\left[n + \frac{N}{2}\right], \text{ 对全部 } n$$

证明: 对全部偶整数 k , $a_k = 0$ 。

(b) 设 N 可被4除尽, 证明: 若

$$x[n] = -x\left[n + \frac{N}{4}\right], \text{ 对全部 } n$$

则对每一个是4的倍数的 k 值, 有 $a_k = 0$ 。

(c) 更一般地是, 设 N 能被某一整数 M 除尽, 证明: 若

$$\sum_{r=0}^{(N/M)-1} x\left[n + r \frac{N}{M}\right] = 0, \text{ 对全部 } n$$

则对每一个是 M 的倍数的 k 值, 有 $a_k = 0$ 。

3.50 假设对一个周期为8, 傅里叶系数为 a_k 的周期信号给出如下信息:

1. $a_k = -a_{k-4}$
2. $x[2n+1] = (-1)^n$

试画 $x[n]$ 的一个周期内的波形。

3.51 令 $x[n]$ 是一个周期 $N=8$, 傅里叶系数有 $a_k = -a_{k-4}$ 的周期信号, 现产生一个周期 $N=8$ 的信号 $y[n]$ 为

$$y[n] = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right) x[n - 1]$$

将 $y[n]$ 的傅里叶系数记作 b_k , 试找一个函数 $f[k]$, 有

$$b_k = f[k]a_k$$

3.52 $x[n]$ 是一个周期为 N 的实周期信号，其复数傅里叶级数系数为 a_k ，设 a_k 用直角坐标表示为

$$a_k = b_k + j c_k$$

式中 b_k 和 c_k 都是实数。

(a) 证明: $a_{-k} = a_k^*$, b_k 和 b_{-k} 之间是何关系? c_k 和 c_{-k} 之间又是何关系?

(b) 设 N 是偶数, 证明 $a_{N/2}$ 是实数。

(c) 证明 $x[n]$ 也能表示成如下三角函数形式的傅里叶级数, 若 N 为奇数, 则有

$$x[n] = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - c_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

若 N 为偶数, 则有

$$x[n] = (a_0 + a_{N/2}(-1)^n) + 2 \sum_{k=1}^{(N-2)/2} b_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - c_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

(d) 证明: 若 a_k 的极坐标为 $A_k e^{j\theta_k}$, 那么 $x[n]$ 的傅里叶级数表示也能写成如下形式, 若 N 为奇数, 则有

$$x[n] = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N} + \theta_k\right)$$

若 N 为偶数, 则有

$$x[n] = (a_0 + a_{N/2}(-1)^n) + 2 \sum_{k=1}^{(N/2)-1} A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N} + \theta_k\right)$$

(e) 假设 $x[n]$ 和 $z[n]$ 如图 P3.52 所示, 它们都有一个正弦-余弦的级数表示式

$$x[n] = a_0 + 2 \sum_{k=1}^3 \left\{ b_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) - c_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) \right\}$$

$$z[n] = d_0 + 2 \sum_{k=1}^3 \left\{ d_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) - f_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) \right\}$$

试画下面信号 $y[n]$:

$$y[n] = a_0 - d_0 + 2 \sum_{k=1}^3 \left\{ d_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) + (f_k - c_k) \sin\left(\frac{2\pi kn}{7}\right) \right\}$$

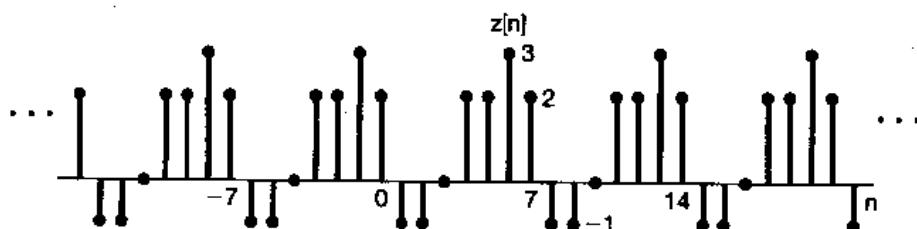
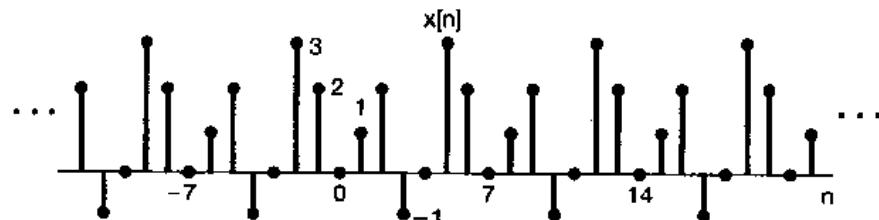


图 P3.52

3.53 设 $x[n]$ 是一个周期为 N 的实周期信号, 其傅里叶系数为 a_k 。

(a) 证明: 若 N 为偶数, 那么在 a_k 的一个周期内至少有两个傅里叶系数是实数。

(b) 证明: 若 N 为奇数, 那么在 a_k 的一个周期内至少有一个傅里叶系数是实数。

3.54 考虑下面函数:

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}$$

(a) 证明: 对于 $k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$, 有 $a[k] = N$ 。

(b) 证明: 只要 k 不是 N 的整倍数, $a[k] = 0$ 。[提示: 利用有限和公式)]

(c) 若

$$a[k] = \sum_{n=(N)} e^{j(2\pi/N)kn}$$

重复(a)和(b)。

3.55 设 $x[n]$ 是一个基波周期为 N 的周期信号, 其傅里叶级数系数为 a_k 。在本题中欲导出列于表 3.2 中的时域尺度变换性质

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right], & n = 0, \pm m, \pm 2m, \dots \\ 0 & \text{其余 } n \end{cases}$$

(a) 证明, $x_{(m)}[n]$ 的周期为 mN 。

(b) 证明, 若

$$x[n] = v[n] + w[n]$$

则

$$x_{(m)}[n] = v_{(m)}[n] + w_{(m)}[n]$$

(c) 假定对某整数 k_0 , $x[n] = e^{j2\pi k_0 n/N}$, 证明:

$$x_{(m)}[n] = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} e^{j2\pi(k_0+lN)n/(mN)}$$

这就是说, 在 $x[n]$ 中的一个复指数, 在 $x_{(m)}[n]$ 中就变成了 m 个复指数的线性组合。

(d) 利用(a),(b)和(c)的结果, 证明: 若 $x[n]$ 有傅里叶系数 a_k , 那么 $x_{(m)}[n]$ 一定有傅里叶系数 $\frac{1}{m}a_k$ 。

3.56 设 $x[n]$ 是周期为 N 的周期信号, 其傅里叶系数为 a_k 。

(a) 用 a_k 来表示 $|x[n]|^2$ 的傅里叶系数 b_k 。

(b) 若系数 a_k 为实数, 可以保证系数 b_k 也是实数吗?

3.57 (a) 设 $x[n]$ 为

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (\text{P3.57-1})$$

和 $y[n]$ 为

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

它们都是周期信号。证明,

$$x[n]y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

式中

$$c_k = \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^{N-1} a_{k-l} b_l$$

(b) 将(a)的结果一般化, 证明

$$c_k = \sum_{l=(N)} a_l b_{k-l} = \sum_{l=(N)} a_{k-l} b_l$$

(c) 利用(b)的结果, 求下列诸信号的傅里叶级数表示, 其中 $x[n]$ 由(P3.57-1)式给出:

- (i) $x[n]\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$
- (ii) $x[n]\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta[n-rN]$
- (iii) $x[n]\left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta\left[n-\frac{rN}{3}\right]\right)$ (假定 N 可被 3 整除)

(d) 求 $x[n]y[n]$ 的傅里叶级数表示, 其中

$$x[n] = \cos(\pi n/3)$$

和周期为 12 的

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq |n| \leq 6 \end{cases}$$

(e) 利用(b)的结果证明:

$$\sum_{n=-N}^N x[n]y[n] = N \sum_{l=-N}^N a_l b_{-l}$$

并从这个表示式导出离散时间周期信号的帕斯瓦尔定理。

3.58 $x[n]$ 和 $y[n]$ 是具有公共周期 N 的周期信号, 令

$$z[n] = \sum_{r=-N}^N x[r]y[n-r]$$

是它们的周期卷积。

(a) 证明: $z[n]$ 也是周期的, 周期为 N 。

(b) 证明: 若 a_k , b_k 和 c_k 分别是 $x[n]$, $y[n]$ 和 $z[n]$ 的傅里叶系数, 则

$$c_k = N a_k b_k$$

(c) 令 $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$

和

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

是两个周期都为 8 的周期信号, 求它们周期卷积的傅里叶级数表示。

(d) 对于下面两个周期也为 8 的周期信号重复(c)

$$x[n] = \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right), & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases} \quad y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad 0 \leq n \leq 7$$

3.59 (a) 假设 $x[n]$ 是周期为 N 的周期信号, 证明周期信号 $g(t)$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - kT)$$

的傅里叶级数系数也是周期的, 周期为 N 。

(b) 假设 $x(t)$ 是一个周期信号, 周期为 T ; 其傅里叶级数系数 a_k 的周期为 N , 证明: 一定存在一个周期序列 $g[n]$, 使得有

$$x[t] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\delta(t - kT/N)$$

(c) 一个连续周期信号能有周期的傅里叶系数吗?

3.60 考虑下面各对信号 $x[n]$ 和 $y[n]$ 。对每一对信号判断是否有一个离散时间 LTI 系统, 当该系统相应的输入是 $x[n]$ 时, 其输出是 $y[n]$ 。若这样的系统存在, 解释该系统是否是唯一的(即: 是否有一个以上的 LTI 系统具有所给定的输入-输出对), 并求出具有所要求特性的 LTI 系统的频率响应。如果对给出的一对 $x[n]$ 和 $y[n]$ 不存在这样的 LTI 系统, 请说明为什么?

- (a) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n$
- (b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$
- (c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, $y[n] = 4^n u[-n]$
- (d) $x[n] = e^{jn\pi/8}$, $y[n] = 2e^{jn\pi/8}$
- (e) $x[n] = e^{jn\pi/8} u[n]$, $y[n] = 2e^{jn\pi/8} u[n]$
- (f) $x[n] = j^n$, $y[n] = 2j^n(1-j)$
- (g) $x[n] = \cos(\pi n/3)$, $y[n] = \cos(\pi n/3) + \sqrt{3}\sin(\pi n/3)$
- (h) $x[n]$ 和 $y_1[n]$ 如图 P3.60 所示。
- (i) $x[n]$ 和 $y_2[n]$ 如图 P3.60 所示。

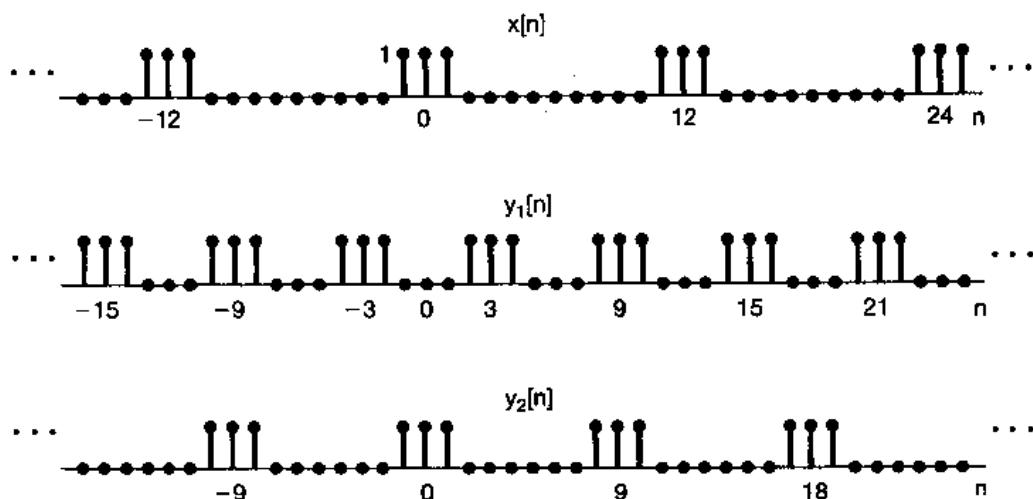


图 P3.60

- 3.61 正如已经看到的，由于周期性复指数函数是 LTI 系统的特征函数，因此在研究连续时间 LTI 系统时，傅里叶分析方法是很有价值的。在本题中，希望证实下列论述：尽管某些 LTI 系统可能有另外的特征函数，但复指数函数是唯一能够成为一切 LTI 系统特征函数的信号。
- (a) 单位冲激响应为 $h(t) = \delta(t)$ 的 LTI 系统的特征函数是什么？其相应的特征值是什么？
- (b) 考虑单位冲激响应 $h(t) = \delta(t-T)$ 的 LTI 系统，试找到一个信号，它不具有 $e^{\sigma t}$ 的形式，但却是该系统的特征函数，且特征值为 1。与此类似，找出两个特征函数，它们的特征值分别是 $1/2$ 和 2 ，但都不是复指数函数。[提示：能够找到满足这些要求的冲激串]。
- (c) 考虑一个稳定的 LTI 系统，其单位冲激响应 $h(t)$ 是实、偶函数，证明： $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 都是该系统的特征函数。
- (d) 考虑单位冲激响应 $h(t) = u(t)$ 的 LTI 系统，假如 $\phi(t)$ 是该系统的特征函数，其特征值为 λ 。找出 $\phi(t)$ 必须满足的微分方程，并解出这个微分方程。将此结果，连同(a)~(c)的结果一起就能证明本题一开始所作论述的正确性。
- 3.62 产生直流电源的一种办法是将交流信号进行全波整流。这就是说，将交流信号 $x(t)$ 通过一个具有 $y(t) = |x(t)|$ 的系统。
- (a) 若 $x(t) = \cos\omega t$ ，画出输入、输出波形。输入和输出的基波周期是什么？
- (b) 若 $x(t) = \cos\omega t$ ，求输出 $y(t)$ 傅里叶级数系数。
- (c) 输入信号中的直流分量是多少？输出信号中的直流分量是多大？
- 3.63 假设有一连续时间周期信号加到一个 LTI 系统上，该信号有傅里叶级数表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|} e^{jk(\pi/4)t}$$

式中 α 是位于 0 和 1 之间的实数，系统的频率响应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

为了使系统的输出至少有 $x(t)$ 在每个周期内 90% 的平均能量，问 W 必须有多宽？

- 3.64 在这一章已经看到，在研究 LTI 系统时，特征函数概念是一个极为重要而有用的方法。这对于线性时变系统来说同样也是正确的。具体说来，考虑一个输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ 的系统，如果有

$$\phi(t) \rightarrow \lambda\phi(t)$$

也即若 $x(t) = \phi(t)$ ，则 $y(t) = \lambda\phi(t)$ ，那么就说信号 $\phi(t)$ 是该系统的一个特征函数，这里复常数 λ 称为与 $\phi(t)$ 有关的特征值。

- (a) 假设能够把系统的输入 $x(t)$ 表示为特征函数 $\phi_k(t)$ 的线性组合，即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t)$$

而且每一个特征函数都有相应的特征值 λ_k 。

试用 $|c_k|$ 、 $\{\phi_k(t)\}$ 和 $\{\lambda_k\}$ 表示该系统的输出 $y(t)$ 。

- (b) 考虑由下列微分方程表征的系统

$$y(t) = t^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + t \frac{dx(t)}{dt}$$

这个系统是线性的吗？是时不变的吗？

- (c) 证明

$$\phi_k(t) = t^k$$

这一组函数是(b)中所述系统的特征函数。对每一个 $\phi_k(t)$ ，确定其相应的特征值 λ_k 。

- (d) 如果

$$x(t) = 10t^{-10} + 3t + \frac{1}{2}t^4 + \pi$$

求该系统的输出。

扩充题

- 3.65 设两个函数 $u(t)$ 和 $v(t)$ ，如果

$$\int_a^b u(t)v^*(t)dt = 0 \quad (\text{P3.65-1})$$

则称 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在区间 (a, b) 上是正交的。如果另外有

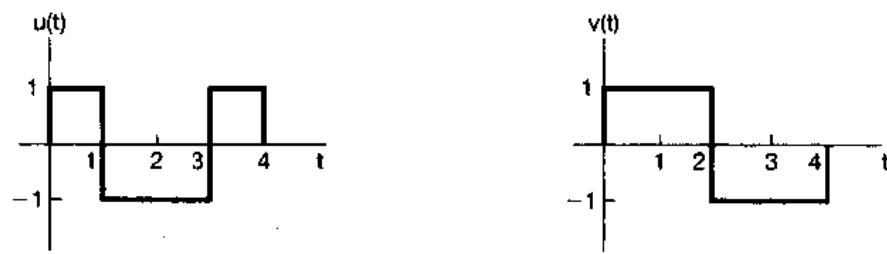
$$\int_a^b |u(t)|^2 dt = 1 = \int_a^b |v(t)|^2 dt$$

则说这两个函数是归一化的。因此称这两个函数为归一化正交。如果在一个函数集 $\{\phi_k(t)\}$ 中，每一对函数都是正交（或归一化正交）的，则称这个函数集为正交（或归一化正交）函数集。

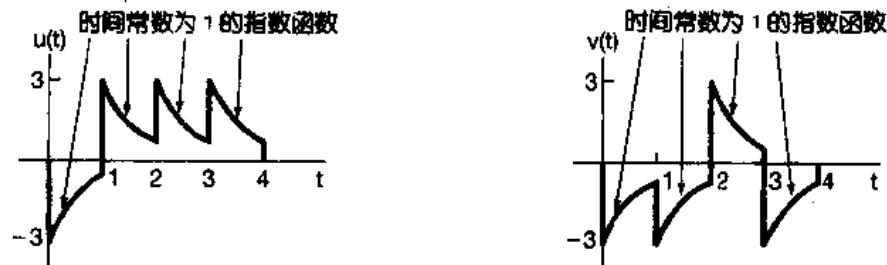
- (a) 考虑图 P3.65 所示的各对信号 $u(t)$ 和 $v(t)$ ，判定每一对信号是否在区间 $(0, 4)$ 上正交。
 (b) 函数 $\sin m\omega_0 t$ 和 $\sin n\omega_0 t$ 在区间 $(0, T)$ 上是正交的吗？这里 $T = 2\pi/\omega_0$ 。它们也是归一化正交吗？
 (c) 对函数 $\phi_m(t)$ 和 $\phi_n(t)$ ，重做(b)，这里

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} [\cos k\omega_0 t + \sin k\omega_0 t]$$

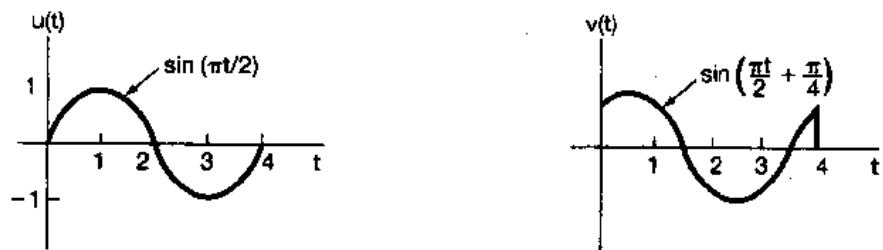
- (d) 证明函数集 $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ 在任何长度为 $T = 2\pi/\omega_0$ 的区间上都是正交的。它们也是归一化正交的吗？



(a)



(b)



(c)



(d)

图 P3.65

(e) 设 $x(t)$ 是一个任意信号, $x_o(t)$ 和 $x_e(t)$ 分别是 $x(t)$ 的奇部和偶部。证明对任何 T , $x_o(t)$ 和 $x_e(t)$ 在区间 $(-T, T)$ 上是正交的。

(f) 证明: 如果 $\{\phi_k(t)\}$ 是区间 (a, b) 上的正交信号集, 则信号集 $\{(1/\sqrt{A_k})\phi_k(t)\}$ 是归一化正交的, 其中

$$A_k = \int_a^b |\phi_k(t)|^2 dt$$

(g) 设 $\{\phi_k(t)\}$ 是区间 (a, b) 的归一化正交信号集, 考虑如下形式的信号

$$x(t) = \sum_i a_i \phi_i(t)$$

式中 a_k 为复常数。证明：

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt = \sum_i |a_i|^2$$

(h) 假设 $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$ 仅在时间区间 $0 \leq t \leq T$ 上是非零的，而且它们在此时间区间上是归一化正交的。令 L_i 记作一个 LIT 系统，其单位冲激响应为

$$h_i(t) = \phi_i(T-t) \quad (\text{P3.65-2})$$

证明：若将 $\phi_j(t)$ 加到该系统上，则当 $i=j$ 时，在时刻 T ，系统的输出为 1；当 $i \neq j$ 时，在时刻 T 系统的输出为 0。单位冲激响应由 (P3.65-2) 式给出的系统在习题 2.66 和习题 2.67 中称为信号 $\phi_i(t)$ 的匹配滤波器。

3.66 本题的目的在于要证明任何一个周期信号用傅里叶级数，或更一般的用任何一组正交函数的线性组合来表示在计算上是很有效的；并且，事实上，它对于得到信号的很好近似是非常有用的①。

令 $|\phi_i(t)|$, $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 是在区间 $a \leq t \leq b$ 上一组归一化正交函数， $x(t)$ 为已知信号。现研究 $x(t)$ 在区间 $a \leq t \leq b$ 上的近似：

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{i=-N}^{+N} a_i \phi_i(t) \quad (\text{P3.66-1})$$

式中 a_i 是常数(一般为复数)。为了度量 $x(t)$ 与级数近似 $\hat{x}_N(t)$ 之间的差别，定义误差 $e_N(t)$ 为

$$e_N(t) = x(t) - \hat{x}_N(t) \quad (\text{P3.66-2})$$

对于衡量近似的好坏，一种合理并广泛应用的准则是在所研究的区间上误差信号的能量；也就是在区间 $a \leq t \leq b$ 上，误差信号模平方的积分

$$E = \int_a^b |e_N(t)|^2 dt \quad (\text{P3.66-3})$$

(a) 证明，当选择

$$a_i = \int_a^b x(t) \phi_i^*(t) dt \quad (\text{P3.66-4})$$

时， E 达到最小值

[提示：利用 (P3.66-1) ~ (P3.66-3) 式，以 a_i , $\phi_i(t)$ 和 $x(t)$ 表示 E ，然后按照 $a_i = b_i + j c_i$ 把 a_i 表示成直角坐标形式，并证明 (P3.66-4) 式所给定的 a_i 满足下列各式：

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, N]$$

(b) 若

$$A_i = \int_a^b |\phi_i(t)|^2 dt$$

而且 $|\phi_i(t)|$ 是正交的，但不是归一化正交，问 (a) 的结果将作何变化？

(c) 设 $\phi_n(t) = e^{j n \omega_0 t}$ 并选任何一个长度为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 的区间，证明：使 E 最小的 a_i 由 (3.50) 式给出。

(d) 沃尔什函数 (Walsh functions) 集是一个经常用到的归一化正交函数集(见习题 2.66)，它的前 5 个函数 $\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_4(t)$ 如图 P3.66 所示。在此已对时间作了归一化，使得 $\phi_i(t)$ 在区间 $0 \leq t \leq 1$ 上为非零，而且在该区间上归一化正交。设 $x(t) = \sin \pi t$ ，求出形式为

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{i=0}^4 a_i \phi_i(t)$$

的 $x(t)$ 的近似式，使得

① 正交函数与归一化正交函数的定义见习题 3.65。

$$\int_0^1 |x(t) - \hat{x}_N(t)|^2 dt$$

达到最小。

(e) 证明：如果 a_i 依(P3.66-4)式选取，则(P3.66-1)式中 $\hat{x}_N(t)$ 和(P3.66-2)式中的 $e_N(t)$ 是正交的。(a)和(b)的结果是极其重要的。这些结果表明，在 $i \neq j$ 时，每个系数 a_i 对其它所有的 a_j 都是独立的。因而，如果给近似式增添更多的项[例如计算近似式 $\hat{x}_{N+1}(t)$]，那么先前已经确定的 $\phi_i(t)$, $i=1, \dots, N$ 的系数将不会改变。与此作为对比的是泰勒(Taylor)级数的多项式展开。 e^t 的无穷泰勒级数由式 $e^t = 1 + t + t^2/2! + \dots$ 给出，将要指出，当研究一个有限项多项式级数和(P3.66-3)式的误差准则时，就会得到一个完全不同的结果。

具体一点，令 $\phi_0(t) = 1$, $\phi_1(t) = t$, $\phi_2(t) = t^2$, 等等。

(f) 在区间 $0 \leq t \leq 1$ 上这些 $\phi_i(t)$ 是正交的吗？

(g) 考查 $x(t) = e^t$ 在区间 $0 \leq t \leq 1$ 上的近似式，其形式为

$$\hat{x}_0(t) = a_0 \phi_0(t)$$

求使误差信号在该区间内的能量为最小的 a_0 值。

(h) 现在希望用泰勒级数近似 e^t ，并只取两项，即 $\hat{x}_1(t) = a_0 + a_1 t$ ，求出 a_0 和 a_1 的最佳值。

[提示：用 a_0 和 a_1 计算 E ，然后解联立方程

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$

注意， a_0 的结果已经不同于(g)中的值了，因为在那里的级数只有一项。进而，随着增加级数的项数，那个系数以及所有其它系数都将不断变化。因此，可以看出应用正交函数展开的优点。]

3.67 在正文中曾提到，傅里叶分析最初是源于数学物理学问题中，特别是，傅里叶的工作受到他对热扩散问题研究的激励。在本题中将说明傅里叶级数是如何被引入这一研究课题的①。

现在考虑将地球表面正下方给定深度处的温度作为一个时间函数来测定它的温度问题，此处假定地球表面温度是一个已知的时间函数 $T(t)$ ，并且是周期为 1 的周期函数(时间的单位是以年计)。令 $T(x, t)$ 记作在 t 时间，位于地表下方 x 深度处的温度，这个函数服从热扩散方程

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{P3.67-1})$$

其附加条件为

$$T(0, t) = T(t)$$

(P3.67-2)

① 该题引自 A. Sommerfeld. Partial Differential Equations in Physics (New York: Academic Press, 1949). pp68-71。

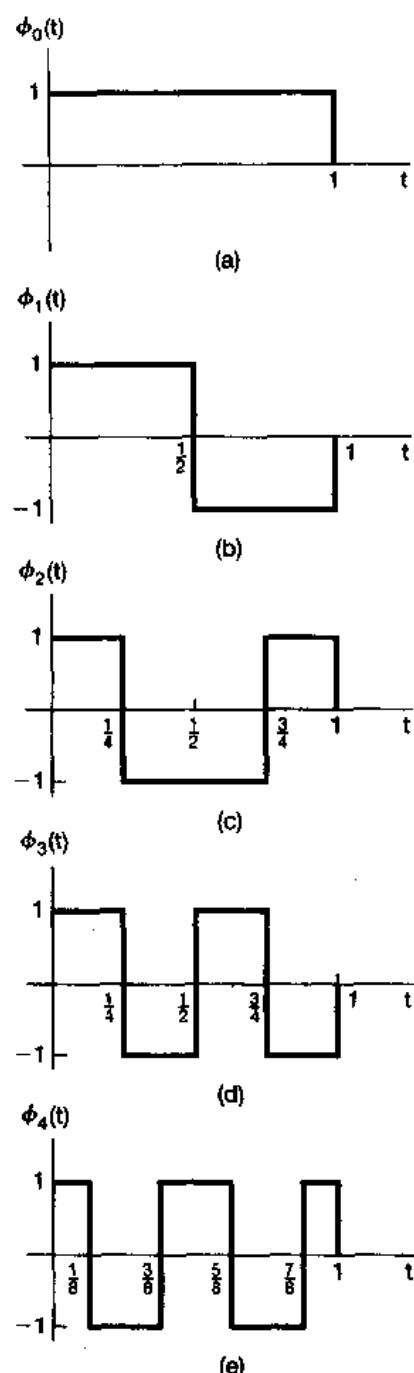


图 P3.66

式中 k 是地球的热扩散系数 ($k > 0$)。假设将 $T(t)$ 展开为傅里叶级数

$$T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn2\pi t} \quad (\text{P3.67-3})$$

类似地，在任意给定深度 x 处，将 $T(x, t)$ 对 t 展开为傅里叶级数

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(x) e^{jn2\pi t} \quad (\text{P3.67-4})$$

式中傅里叶系数 $b_n(x)$ 与深度 x 有关。

(a) 利用 (P3.67-1) 式～(P3.67-4) 式证明， $b_n(x)$ 满足下面微分方程

$$\frac{d^2 b_n(x)}{dx^2} = \frac{4\pi j n}{k^2} b_n(x) \quad (\text{P3.67-5a})$$

其附加条件为

$$b_n(0) = a_n \quad (\text{P3.67-5b})$$

因为 (P3.67-5a) 式是一个二阶方程，而要两个附加条件。基于物理原因，可以认为在地表下面很深的地方，由于地表温度的起伏所引起的温度变化应该消失，即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = \text{常数} \quad (\text{P3.67-5c})$$

(b) 证明 (P3.67-5) 式的解是

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n \exp[-\sqrt{2\pi|n|}(1+j)x/k], & n \geq 0 \\ a_n \exp[-\sqrt{2\pi|n|}(1-j)x/k], & n \leq 0 \end{cases}$$

(c) 因此，在深度为 x 处温度的波动就是地表温度的波动，只是幅度上有衰减，相位上有平移。为了更清楚地看出这一点，设

$$T(t) = a_0 + a_1 \sin 2\pi t$$

(因此 a_0 表示每年的平均温度)，试对

$$x = k \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$a_0=2$ 和 $a_1=1$ 的情况，画出一年内 $T(t)$ 和 $T(x, t)$ 的图形。注意，在此深度上，温度的波动不只是明显被衰减了，而且相位的平移使得在冬季最暖，夏季最冷。这就是为什么要构筑菜窖的道理！

3.68 考查图 P3.68 所示的封闭曲线。我们可以把这条曲线

看成是一个变长度旋转矢量的端点所走出来的轨迹。

令 $r(\theta)$ 记为该矢量的长度，它是角度 θ 的函数。这样， $r(\theta)$ 对 θ 而言就是周期的，周期为 2π ，从而有一个傅里叶级数表示，令 $|a_k|$ 记为 $r(\theta)$ 的傅里叶系数。

(a) 现在来研究矢量 $r(\theta)$ 如图上所示的在 x 轴上的投影 $x(\theta)$ ，用求 a_k 来表示的 $x(\theta)$ 的傅里叶系数。

(b) 考虑如下系数序列：

$$b_k = a_k e^{jk\pi/4}$$

在平面上概略画出与这组系数相对应的图形。

(c) 若

$$b_k = a_k \delta[k]$$

重做 (b)。

(d) 在平面上作图，要求 $r(\theta)$ 不是常数，但却有下面每一个性质；

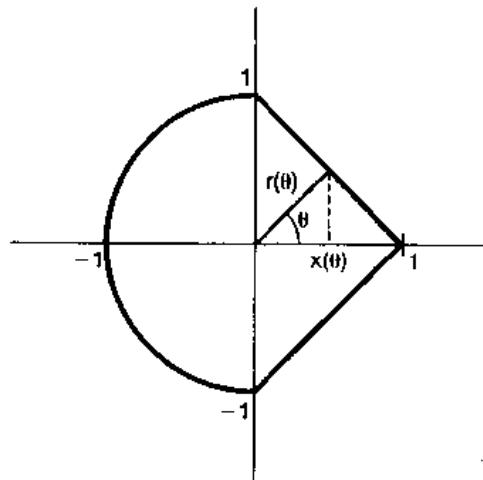


图 P3.68

(i) $r(\theta)$ 是偶函数。 (ii) $r(\theta)$ 的基波周期是 π 。 (c) $r(\theta)$ 的基波周期是 $\pi/2$ 。

- 3.69 在本题中，要考虑在离散时间下与习题 3.65 和习题 3.66 中所介绍的相对应的概念。和连续时间情况相类似，如果两个离散时间信号 $\phi_k[n]$ 和 $\phi_m[n]$ 满足

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_k[n] \phi_m^*[n] = \begin{cases} A_k, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (\text{P3.69-1})$$

则称 $\phi_k[n]$ 与 $\phi_m[n]$ 在区间 (N_1, N_2) 上是正交的。若常数 A_k 和 A_m 的值都是 1，则说这两个信号是归一化正交的。

(a) 考虑信号

$$\phi_k[n] = \delta[n - k], k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

证明这些信号在区间 $(-N, N)$ 上是归一化正交的。

(b) 证明信号

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

在长度为 N 的任何区间是正交的。

(c) 证明，若

$$x[n] = \sum_{i=1}^M a_i \phi_i[n]$$

式中 $\phi_i[n]$ 在区间 (N_1, N_2) 上是正交的，那么

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^M |a_i|^2 A_i$$

(d) 设 $\phi_i[n]$, $i=0, 1, \dots, M$ 是一组在区间 (N_1, N_2) 上正交的函数， $x[n]$ 是一个给定的信号。若希望用 $\phi_i[n]$ 的线性组合来近似 $x[n]$ ，即

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=0}^M a_i \phi_i[n]$$

其中 a_i 是常数系数。令

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$$

证明：欲使

$$E = \sum_{n=N_1}^{N_2} |e[n]|^2$$

为最小，则 a_i 应由下式给出

$$a_i = \frac{1}{A_i} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \phi_i^*[n] \quad (\text{P3.69-2})$$

[提示：和习题 3.66 相同，用 a_i , $\phi_i[n]$, A_i 和 $x[n]$ 来表示 E ；把 a_i 写成 $a_i = b_i + j c_i$ ，并证明：由 (P3.69-2) 或给出的 a_i 满足以下关系：

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0$$

注意，当 $\phi_i[n]$ 是(b)的形式时，应用这个结果就能得到(3.95)式的 a_k 。]

(e) 当 $\phi_i[n]$ 为(a)的形式时，应用(d)的结果，用 $x[n]$ 来确定系数 a_k 。

- 3.70 (a) 在本题中考虑具有两个独立变量的周期信号的二维傅里叶级数的定义。考虑一个信号 $x(t_1, t_2)$ ，它对所有的 t_1, t_2 都满足

$$x(t_1, t_2) = x(t_1 + T_1, t_2 + T_2)$$

这个信号是周期的，它在 t_1 方向具有周期 T_1 ，在 t_2 方向具有周期 T_2 。这样一个信号有如下的级数表示式

$$x(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} e^{j(n\omega_1 t_1 + m\omega_2 t_2)}$$

式中

$$\omega_1 = 2\pi/T_1, \quad \omega_2 = 2\pi/T_2$$

求用 $x(t_1, t_2)$ 表示 a_{nm} 的表示式。

(b) 对下列信号确定傅里叶级数系数 a_{nm}

(i) $\cos(2\pi t_1 + 2t_2)$ 。 (ii) 图 P3.70 所示信号。

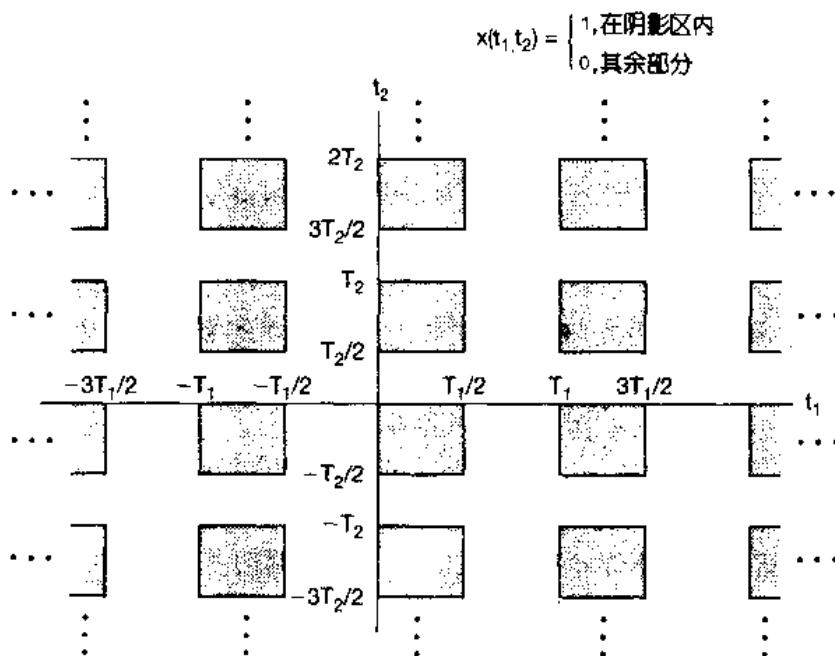


图 P3.70

3.71 考虑图 P3.71 的系统，速度 $v(t)$ 和输入力 $f(t)$ 的关系由下列微分方程给出

$$Bv(t) + K \int v(t) dt = f(t)$$

- (a) 假定输出是作用在弹簧上的压缩力 $f_s(t)$ ，试写出关于 $f_s(t)$ 和 $f(t)$ 的微分方程，求得该系统的频率响应，并确认该系统近似为一个低通滤波器。
- (b) 假定输出是作用在减震器上的压缩力 $f_d(t)$ ，试写出关于 $f_d(t)$ 和 $f(t)$ 的微分方程，求得该系统的频率响应，并确认该系统近似为一个高通滤波器。

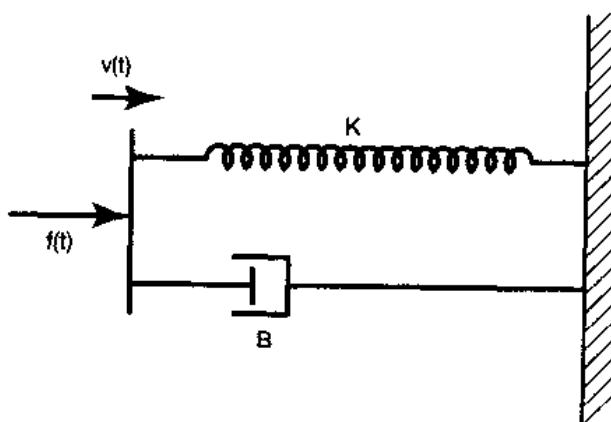


图 P3.71

第4章 连续时间傅里叶变换

4.0 引言

在第3章我们建立了周期信号作为复指数信号线性组合的表示；同时，也看到这一表示是如何用来描述LTI系统对这些信号的作用效果的。

在这一章以及下一章将把这些概念推广应用到非周期信号中去。将会看到，相当广泛的一类信号，其中包括全部有限能量的信号，也能够经由复指数信号的线性组合来表示。对周期信号而言，这些复指数基本信号构造单元全是成谐波关系的；而对非周期信号，它们则是在频率上无限小地靠近的。因此，作为线性组合表示所取的形式是一个积分，而不是求和。在这种表示中所得到的系数谱称为傅里叶变换；而利用这些系数将信号表示为复指数信号线性组合的综合积分式本身则称之为傅里叶反变换。

对连续时间非周期信号建立这种表示是傅里叶的最重要的贡献之一，现在我们来讨论傅里叶变换也是紧随着他最初研究所采用的途径进行的；特别是傅里叶所曾认为的，一个非周期信号能够看成是周期无限长的周期信号这一点。更加确切些就是，在一个周期信号的傅里叶级数表示中，当周期增加时，基波频率就减小，成谐波关系的各分量在频率上愈趋靠近。当周期变成无穷大时，这些频率分量就形成了一个连续域，从而傅里叶级数的求和也就变成了一个积分。在下一节将建立连续时间非周期信号的傅里叶变换表示^①，并且在以后的各节中将据此来讨论形成连续时间信号与系统频域法基础的连续时间傅里叶变换的很多重要性质。在第5章将并行地对离散时间信号进行讨论。

4.1 非周期信号的表示：连续时间傅里叶变换

4.1.1 非周期信号傅里叶变换表示的导出

为了对傅里叶变换表示的实质求得更深入地了解，我们还是先由在例3.5中所研究过的连续时间周期方波的傅里叶级数表示入手。即，在一个周期内

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

以周期T周期重复，如图4.1所示。

在例3.5中曾求出，该方波信号的傅里叶级数系数 a_k 是

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} \quad (4.1)$$

式中 $\omega_0 = 2\pi/T$ 。在图3.7中，已展示出对某个固定的 T_1 值和几个不同的T值时，这些系

^① 原文此处是“在下一节将建立连续时间非周期信号的傅里叶级数表示…”明显有误——译者注。

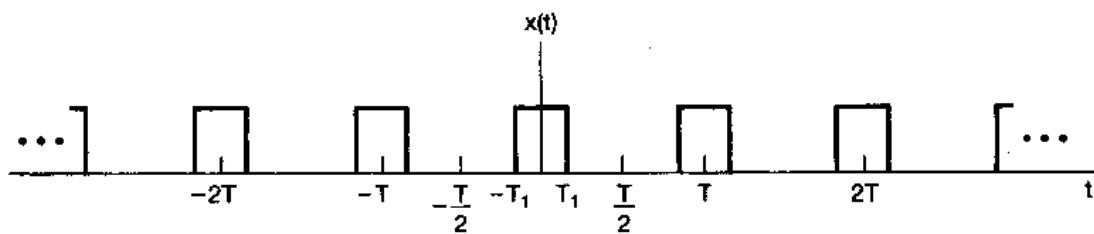


图 4.1 连续时间周期方波信号

数的条状图。

理解(4.1)式的另一种方式是把它当作一个包络函数的样本，即

$$Ta_k = \left. \frac{2\sin\omega T_1}{\omega} \right|_{\omega=k\omega_0} \quad (4.2)$$

这就是，若将 ω 看作一个连续变量，则函数 $(2\sin\omega T_1)/\omega$ 就代表 Ta_k 的包络，这些系数就是在此包络上等间隔取得的样本。而且，若 T_1 固定，则 Ta_k 的包络就与 T 无关。在图 4.2 中，再次表明了该周期方波的傅里叶级数系数，不过，这次是按(4.2)式作为 Ta_k 包络的样本给出

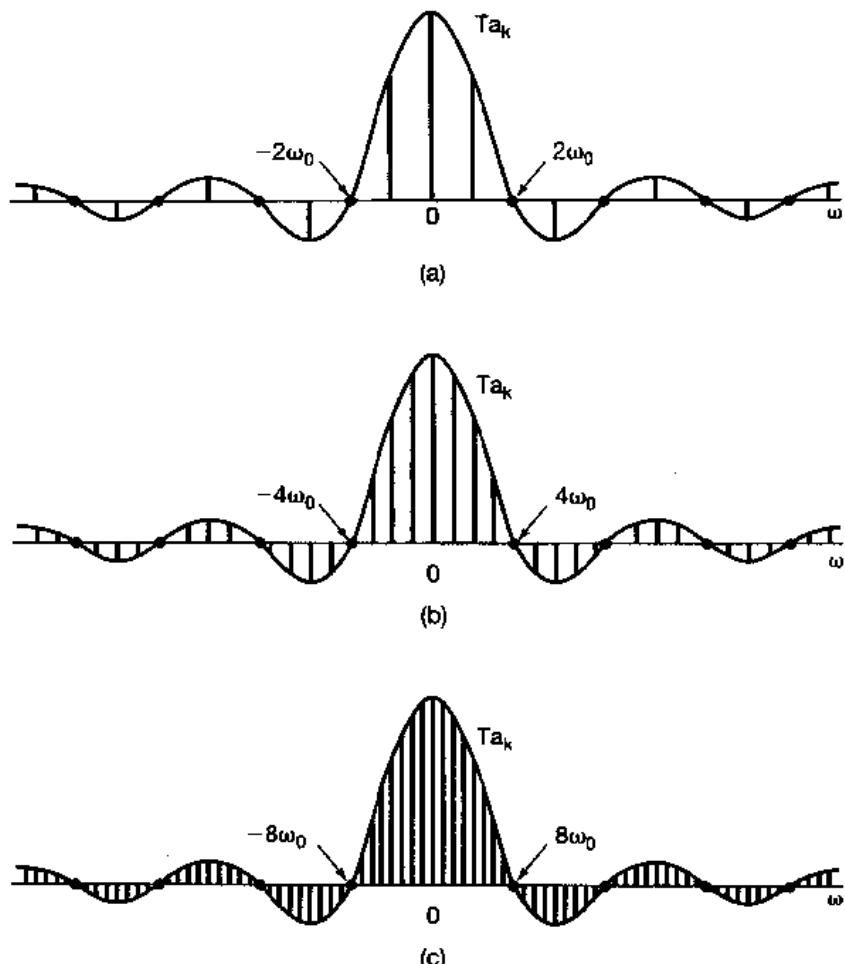


图 4.2 周期方波的傅里叶级数系数及其包络， T_1 固定：

(a) $T=4T_1$; (b) $T=8T_1$; (c) $T=16T_1$

的。从该图可以看到，随着 T 增加（或等效地，基波频率 $\omega_0 = 2\pi/T$ 减小），该包络就被以愈来愈密集的间隔采样。随着 T 变得任意大，原来的周期方波就趋近于一个矩形脉冲（也就是说，在时域所保留下的是一个非周期信号，它对应于原方波的一个周期）。与此同时，傅里叶系数（乘以 T 后）作为包络上的样本也变得愈来愈密集，这样从某种意义上说（稍后将说明），随着 $T \rightarrow \infty$ ，傅里叶系数就趋近于这个包络函数。

这个例子说明了对非周期信号建立傅里叶表示的基本思想。这就是在建立非周期信号的傅里叶变换时，可以把非周期信号当作一个周期信号在周期任意大时的极限来看待，并且研究这个周期信号傅里叶系数表示式的极限特性。现在，我们来考虑一个信号 $x(t)$ ，它具有有限持续期，即对某个 T_1 ，当 $|t| > T_1$ 时， $x(t) = 0$ ，如图 4.3(a) 所示。从这个非周期信号出发，可以构成一个周期信号 $\tilde{x}(t)$ ，使 $x(t)$ 就是 $\tilde{x}(t)$ 的一个周期，如图 4.3(b) 所示。当把 T 选得比较大时， $\tilde{x}(t)$ 就在一个更长的时段上与 $x(t)$ 相一致，并且随着 $T \rightarrow \infty$ ，对任意有限时间 t 值而言， $\tilde{x}(t)$ 就等于 $x(t)$ 。

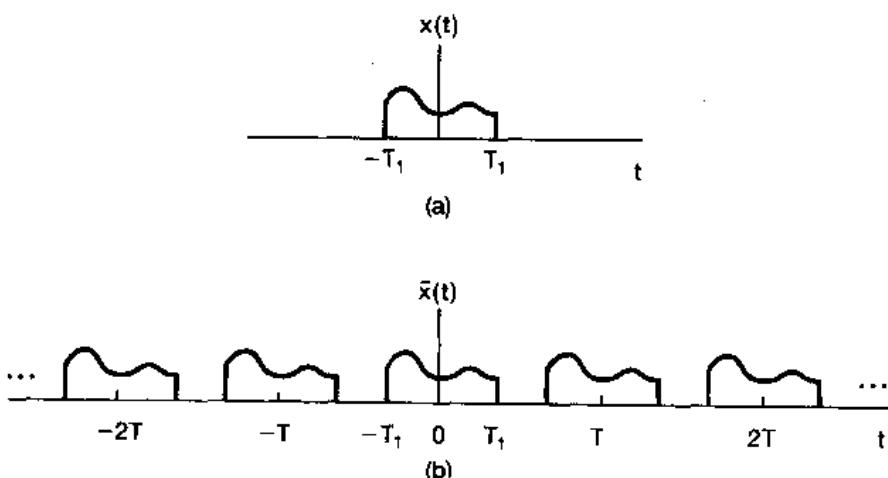


图 4.3 (a) 非周期信号 $x(t)$; (b) 由 $x(t)$ 为一个周期构成的周期信号 $\tilde{x}(t)$

现在来考察一下在这种情况下 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶系数表示式的变化。这里，为方便起见，将(3.38)式和(3.39)式重写如下，并将(3.39)式的积分区间取为 $-T/2 \leq t \leq T/2$ ，就有

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.3)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.4)$$

式中 $\omega_0 = 2\pi/T$ 。由于在 $|t| < T/2$ 内， $\tilde{x}(t) = x(t)$ ，而在其余地方 $x(t) = 0$ ，所以(4.4)式可以重新写成

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

因此，定义 $T a_k$ 的包络 $X(j\omega)$ 为

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.5)$$

这时，系数 a_k 可以写为

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) \quad (4.6)$$

将(4.6)式和式(4.3)式结合在一起, $\tilde{x}(t)$ 就可以用 $X(j\omega)$ 表示为

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

或者, 因为 $2\pi/T = \omega_0$, 又可表示为

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (4.7)$$

随着 $T \rightarrow \infty$, $\tilde{x}(t)$ 趋近于 $x(t)$, 结果(4.7)式的极限就变成 $x(t)$ 的表示式。再者, 当 $T \rightarrow \infty$ 时, 有 $\omega_0 \rightarrow 0$, (4.7)式的右边就过渡为一个积分。这一点可以利用图 4.4 给予说明。在(4.7)式右边和式中的每一项都是高度为 $X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$ (这里 t 被认为是固定的), 宽度为 ω_0 的一个矩形的面积。当 $\omega_0 \rightarrow 0$ 时, 求和收敛于 $X(j\omega) e^{j\omega t}$ 的积分, 因此利用 $T \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ 这一事实, 可见(4.7)式和(4.5)式就分别变成

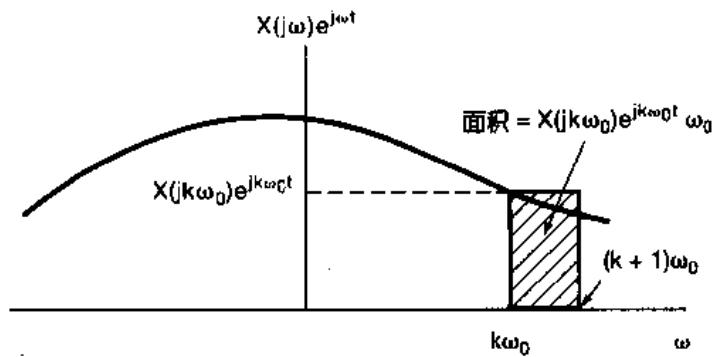


图 4.4 (4.7)式的图解说明

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.8)$$

和

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.9)$$

(4.8)式和(4.9)式称为傅里叶变换对。函数 $X(j\omega)$ 称为 $x(t)$ 的傅里叶变换或傅里叶积分, 而(4.8)式称为傅里叶反变换式。综合公式(4.8)对非周期信号所起的作用与(3.38)式对周期信号的作用相同, 因为两者都相当于把一个信号表示为一组复指数信号的线性组合。对周期信号来说, 这些复指数信号的幅度为 $\{a_k\}$, 由(3.39)式给出, 并且在成谐波关系的一组离散点 $k\omega_0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 上出现。对非周期信号而言, 这些复指数信号出现在连续频率上, 并且根据综合公式(4.8)式, 其“幅度”为 $X(j\omega) (d\omega/2\pi)$ 。与周期信号傅里叶级数系数所用的术语类似, 一个非周期信号 $x(t)$ 的变换 $X(j\omega)$ 通常称为 $x(t)$ 的频谱, 因为 $X(j\omega)$ 告诉我们将 $x(t)$ 表示为不同频率正弦信号的线性组合(就是积分)所需要的信息。

基于以上讨论, 或者等效地基于(4.9)式和(3.39)式的比较, 也可以注意到, 一个周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶系数 a_k 能够利用 $\tilde{x}(t)$ 的一个周期内的信号的傅里叶变换的等间隔样本来表示。这就是, 设 $\tilde{x}(t)$ 是一个周期为 T 的周期信号, 其傅里叶系数为 a_k ; 令 $x(t)$ 是一个有限持续期信号, 它等于在一个周期内的 $\tilde{x}(t)$, 譬如说是在这样一个周期内 $s \leq t \leq s + T$, s 为某一个任意值的 $\tilde{x}(t)$, 而在该周期外全为零。那么, 因为(3.39)式求 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶系数时可以在任何周期内做积分, 因此

$$a_k = \frac{1}{T} \int_s^{s+T} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_s^{s+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

由于 $x(t)$ 在 $s \leq t \leq s + T$ 以外为零, 所以又可写成

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

将上式与(4.9)式比较后可得

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} \quad (4.10)$$

这里, $X(j\omega)$ 就是 $x(t)$ 的傅里叶变换。(4.10)式说的是 $\hat{x}(t)$ 的傅里叶系数正比于一个周期内的 $\tilde{x}(t)$ 信号傅里叶变换的样本。这一点在实际中常常是有用的, 将在习题 4.37 中进一步阐明。

4.1.2 傅里叶变换的收敛

虽然在导出(4.8)式和(4.9)式的傅里叶变换对时, 假设 $x(t)$ 是任意的, 但具有有限持续期。事实上这一对变换关系对于相当广泛的一类无限持续期的信号仍然成立。我们对傅里叶变换所采用的推导过程, 本身似乎就暗示了 $x(t)$ 的傅里叶变换是否存在的条件应该和傅里叶级数收敛所要求的那一组条件一样。事实证明确实如此^①! 现在考虑按照(4.9)式求出的 $X(j\omega)$, 令 $\hat{x}(t)$ 表示利用 $X(j\omega)$ 按(4.8)式右边的积分得到的信号, 即

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

要想知道的是, 什么时候(4.8)式成立[也就是说, 什么时候 $\hat{x}(t)$ 才是原来信号 $x(t)$ 的真正表示?]. 若 $x(t)$ 能量有限, 也即 $x(t)$ 平方可积, 因而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (4.11)$$

那么就可以保证 $X(j\omega)$ 是有限的[即(4.9)式收敛]。现用 $e(t)$ 表示 $\hat{x}(t)$ 和 $x(t)$ 之间的误差[即, $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$], 那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt = 0 \quad (4.12)$$

(4.11)式和(4.12)式与周期信号的(3.51)式和(3.54)式是相对应的。因此, 和周期信号相类似, 如果 $x(t)$ 能量有限, 那么虽然 $x(t)$ 和它的傅里叶表示 $\hat{x}(t)$ 在个别点上或许有明显的不同, 但是在能量上没有任何差别。

也和周期信号一样, 有一组条件, 这组条件充分保证了 $\hat{x}(t)$ 除了那些不连续点外, 在任何其它的 t 上都等于 $x(t)$, 而在不连续点处 $\hat{x}(t)$ 等于 $x(t)$ 在不连续点两边值的平均值。这组条件也称为狄里赫利条件, 它们是:

1. $x(t)$ 绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.13)$$

2. 在任何有限区间内, $x(t)$ 只有有限个最大值和最小值。

^① 傅里叶变换及其性质和应用在数学上的严谨讨论, 可参见 R. Bracewell. The Fourier Transform and Its Applications. 2nd ed. (New York: McGraw-Hill Book Company, 1986); A. Papoulis. The Fourier Integral and Its Applications (New York: McGraw-Hill Book Company, 1977); E. C. Titchmarsh. Introduction to the Theory of Fourier Integrals (Oxford: Clarendon Press, 1948); 以及在第3章(p.124)页注②中所列的 Dym 和 McKean 的书。

3. 在任何有限区间内, $x(t)$ 有有限个不连续点, 并且在每个不连续点都必须是有限值。因此, 本身是连续的或者只有有限个不连续点的绝对可积信号都存在傅里叶变换。

尽管这两组条件都给出了一个信号存在傅里叶变换的充分条件, 但是下一节将会看到, 倘若在变换过程中可以使用冲激函数, 那么, 在一个无限区间内, 既不绝对可积, 又不具备平方可积的周期信号也可以认为具有傅里叶变换。这样, 就有可能把傅里叶级数和傅里叶变换纳入到一个统一的框架内。在以后的各章讨论中将会发现这样做是非常方便的。在下一节进一步讨论这一问题之前, 先举几个有关傅里叶变换的例子。

4.1.3 连续时间傅里叶变换举例

例 4.1 考虑信号

$$x(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0$$

由(4.9)式, 有

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^\infty \end{aligned}$$

也就是

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

这个傅里叶变换是复数, 要画出作为 ω 的函数, 就需要利用它的模和相位来表示 $X(j\omega)$

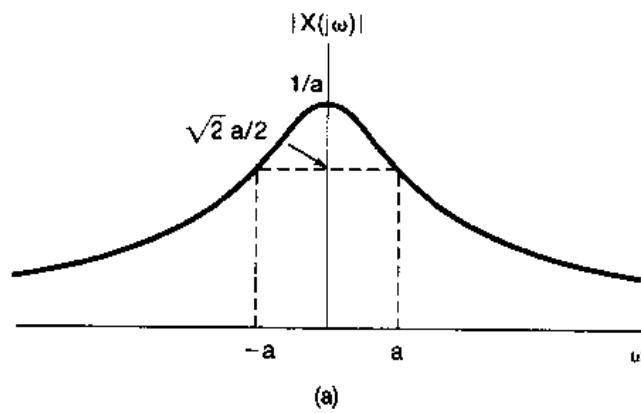
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

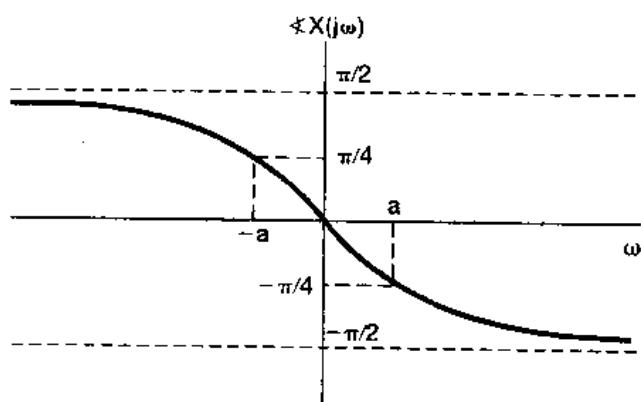
$|X(j\omega)|$ 和 $\angle X(j\omega)$ 如图 4.5 所示。

注意, 若 a 是复数而不是实数, 那么只要 $\Re\{a\} > 0$, $x(t)$ 就是绝对可积的, 并且在这种情况下 $X(j\omega)$ 具有同样的形式, 即

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad \Re\{a\} > 0$$



(a)



(b)

图 4.5 例 4.1 中信号 $x(t) = e^{-at} u(t), a > 0$ 的傅里叶变换

例 4.2 设 $x(t)$ 为

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

如图 4.6 所示。该信号的傅里叶变换是

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

这时, $X(j\omega)$ 是实数, 如图 4.7 所示。

例 4.3 现在求单位冲激函数的傅里叶变换

$$x(t) = \delta(t) \quad (4.14)$$

将上式代入(4.9)式, 得

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (4.15)$$

这就是说, 单位冲激函数的频谱在所有频率上都是相同的。

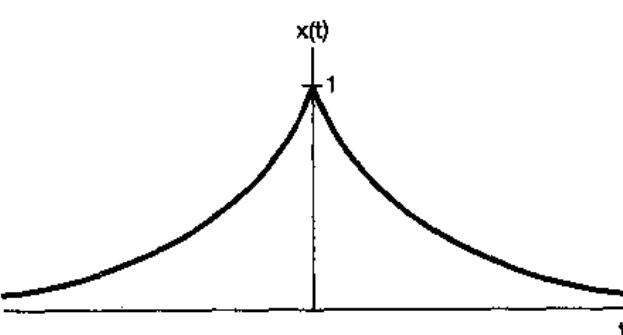


图 4.6 例 4.2 中的信号 $x(t) = e^{-|t|}$

例 4.4 考虑下面矩形脉冲信号

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad (4.16)$$

如图 4.8(a)所示。利用(4.9)式求得它的傅里叶变换为

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} \quad (4.17)$$

如图 4.8(b)所示。

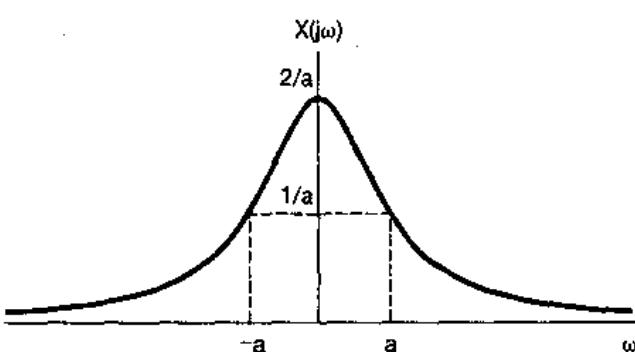


图 4.7 例 4.2 中考虑的并示于图 4.6 中的信号的傅里叶变换

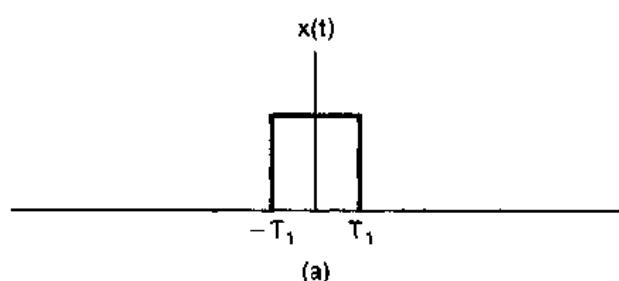
正如本节一开始所讨论的, 由(4.16)式给出的信号可以看作是一个周期方波信号当周期变得任意大时的极限形式。因此, 可以估计到, 这个信号综合公式的收敛将具有在例 3.5 中方波信号收敛中所观察到的类似现象。事实确实如此! 现在来考虑一下矩形脉冲信号傅里叶变换的反变换, 即

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

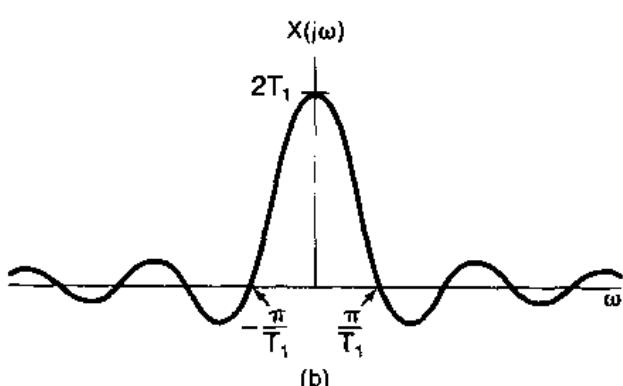
因为 $x(t)$ 是平方可积的, 所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt = 0$$

再者, 因为 $x(t)$ 满足狄里赫利条件, 因此除了 $t = \pm T_1$ 外, $\hat{x}(t) = x(t)$; 而在 $t = \pm T_1$ 时, $\hat{x}(t)$ 收敛于 $1/2$ (这就是 $x(t)$ 在不连续点两边的平均值)。另外, $\hat{x}(t)$ 收敛于 $x(t)$ 时呈现的吉伯斯现象, 也很像图



(a)



(b)

图 4.8 (a) 例 4.4 中的矩形脉冲信号;
(b) 它的傅里叶变换

3.9 中对周期方波所画的那样。具体说来，就是类似于有限项傅里叶级数的近似式(3.47)式那样，考虑下列在一个有限频率区间上的积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

随着 $W \rightarrow \infty$ ，这个信号除去不连续点外，均收敛于 $x(t)$ 。在接近不连续点处，这一信号呈现起伏，起伏的峰值大小不随 W 的增大而减小，但起伏会向不连续点压缩，而且起伏中的能量将收敛于零。

例 4.5 考虑一信号 $x(t)$ ，其傅里叶变换 $X(j\omega)$ 为

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad (4.18)$$

如图 4.9(a) 所示。利用综合公式(4.8)式可求得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} \quad (4.19)$$

如图 4.9(b) 所示。

将图 4.8 和图 4.9 相比较，或者将(4.16)式和(4.17)式与(4.18)式和(4.19)式相比较，可以发现一个很有意义的关系。在每种情况下，傅里叶变换对都是由形式为 $(\sin a\theta)/b\theta$ 的函数和一个矩形脉冲所组成，只是在例 4.4 中信号 $x(t)$ 是一个脉冲，而在例 4.5 中变换 $X(j\omega)$ 是一个脉冲。这种特殊关系，很显然是傅里叶变换具有对偶性的一个直接结果。关于这一点，将在本章 4.3.6 节给予详细讨论。

由(4.17)式和(4.19)式给出的函数形式在傅里叶分析及在 LTI 系统的研究中经常出现，并称之为 sinc 函数。sinc 函数通常所用的形式为

$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta} \quad (4.20)$$

如图 4.10 所示。由(4.17)式和(4.19)式表示的信号都能用 sinc 函数表示为

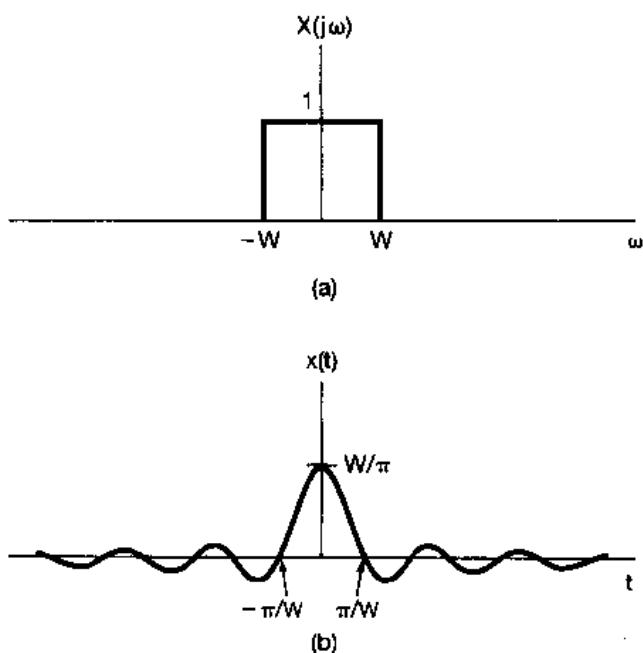


图 4.9 例 4.5 的傅里叶变换对：
(a) 例 4.5 的傅里叶变换；(b) 相应的时间函数

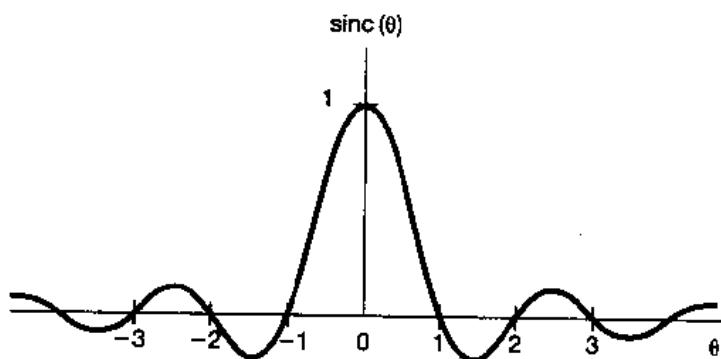


图 4.10 sinc 函数

$$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega} = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

最后,从图 4.9 的分析中还可以得到傅里叶变换的另一个性质,对应于几个不同的 W 值,在图 4.11 中重画了这几个图。从该图可以看到,当 W 增大时, $X(j\omega)$ 变宽,而 $x(t)$ 在 $t=0$ 处的主峰变得愈来愈高。该信号的第一个波瓣(就是信号在 $|t| < \pi/W$ 的部分)的宽度也变窄。事实上,在 $W \rightarrow \infty$ 的极限下,对所有的 ω , $X(j\omega) = 1$, 其结果,由例 4.3 可知,就是由(4.19)式给出的 $x(t)$, 随着 $W \rightarrow \infty$ 而收敛于一个冲激函数。由图 4.11 所描述的特性就是存在于时域和频域之间的一种相反关系的例子;并且,在图 4.8 中可以看到一种相类似的结果,即当 T_1 增加时, $x(t)$ 加宽,而 $X(j\omega)$ 变窄。在 4.3.5 节将以傅里叶变换的尺度性质来解释这一特性。

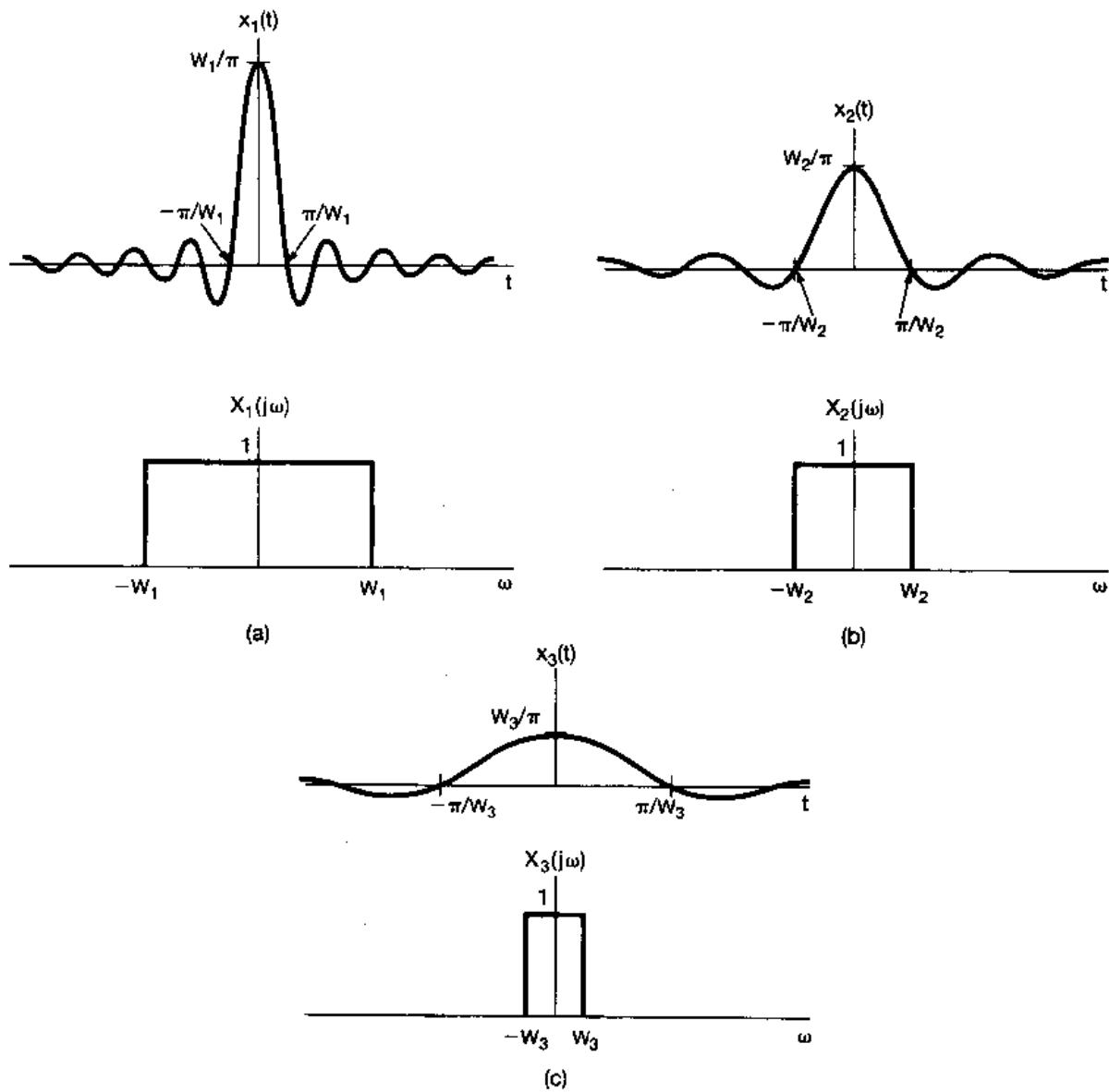


图 4.11 对于几个不同的 W 值, 图 4.9 的傅里叶变换对

4.2 周期信号的傅里叶变换

在上一节介绍了傅里叶变换表示，并给出了几个例子。虽然在那一节的注意力主要是集中在非周期信号上，其实对于周期信号也能够建立傅里叶变换表示。这样一来就可以在统一框架内考虑周期和非周期信号。事实上将会看到，可以直接由周期信号的傅里叶级数表示构造出一个周期信号的傅里叶变换；所得到的变换在频域是由一串冲激所组成，各冲激的面积正比于傅里叶级数系数。这是一个非常有用表示。

为了得到一般性的结果，考虑一个信号 $x(t)$ ，其傅里叶变换 $X(j\omega)$ 是一个面积为 2π ，出现在 $\omega = \omega_0$ 处的单独的一个冲激，即

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (4.21)$$

为了求出与 $X(j\omega)$ 相应的 $x(t)$ ，可以应用(4.8)式的反变换公式得到

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

将上面结果再加以推广，如果 $X(j\omega)$ 是在频率上等间隔的一组冲激函数的线性组合，即

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (4.22)$$

那么利用(4.8)式，可得

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.23)$$

可以看出，(4.23)式就是一个周期信号如(3.38)式所给出的傅里叶级数表示。因此，一个傅里叶级数系数为 $\{a_k\}$ 的周期信号的傅里叶变换，可以看成是出现在谐波关系的频率上的一串冲激函数，发生于第 k 次谐波频率 $k\omega_0$ 上的冲激函数的面积是第 k 个傅里叶级数系数 a_k 的 2π 倍。

例 4.6 再次考虑图 4.1 的方波信号，其傅里叶级数系数为

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k}$$

因此，该信号的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 是

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{\pi k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

如图 4.12 所示(图对应于 $T = 4T_1$ 画出)。

将该图与图 3.7(a)作比较，不同的仅仅是比例因子 2π ，以及用的是冲激函数而不是条线图。

例 4.7 设 $x(t)$ 为

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

该信号的傅里叶级数系数是

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2j} & a_{-1} &= -\frac{1}{2j} \\ a_k &= 0, \quad k \neq 1 \quad \text{或} \quad -1 \end{aligned}$$

因此，其傅里叶变换就如图 4.13(a)所示。类似地，对

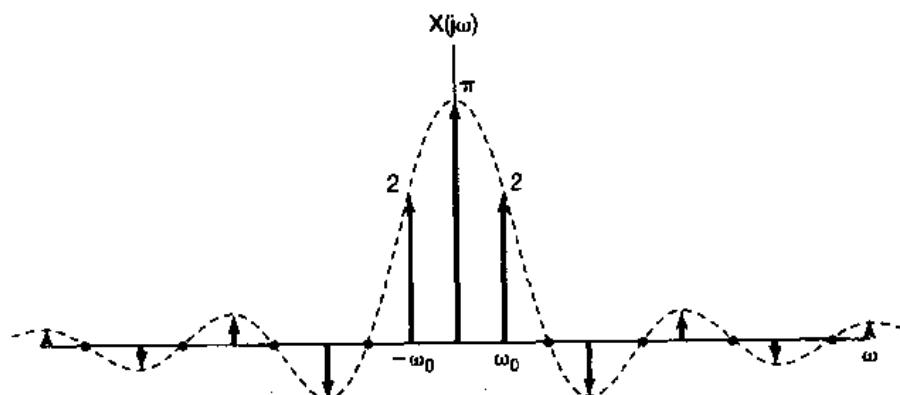
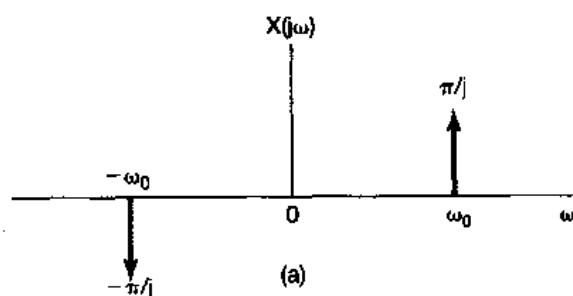
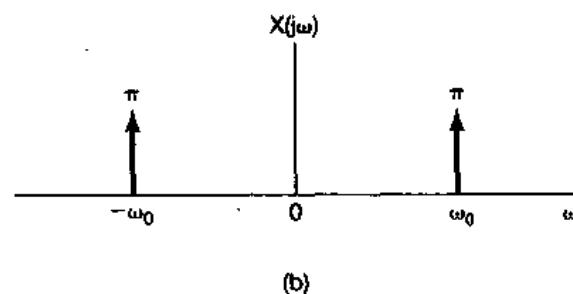


图 4.12 一对称周期方波的傅里叶变换



(a)



(b)

图 4.13 (a) $x(t) = \sin \omega_0 t$ 的傅里叶变换; (b) $x(t) = \cos \omega_0 t$ 的傅里叶变换

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

它的傅里叶级数系数是

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0, \quad k \neq 1 \quad \text{或} \quad -1$$

该信号的傅里叶变换如图 4.13(b)所示。这两个变换在第 8 章分析正弦调制系统时都是非常重要的。

例 4.8 在第 7 章采样系统的分析中一种极为有用的信号是周期为 T 的周期性冲激串

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

如图 4.14(a)所示。在例 3.8 中已求出该信号的傅里叶级数系数是

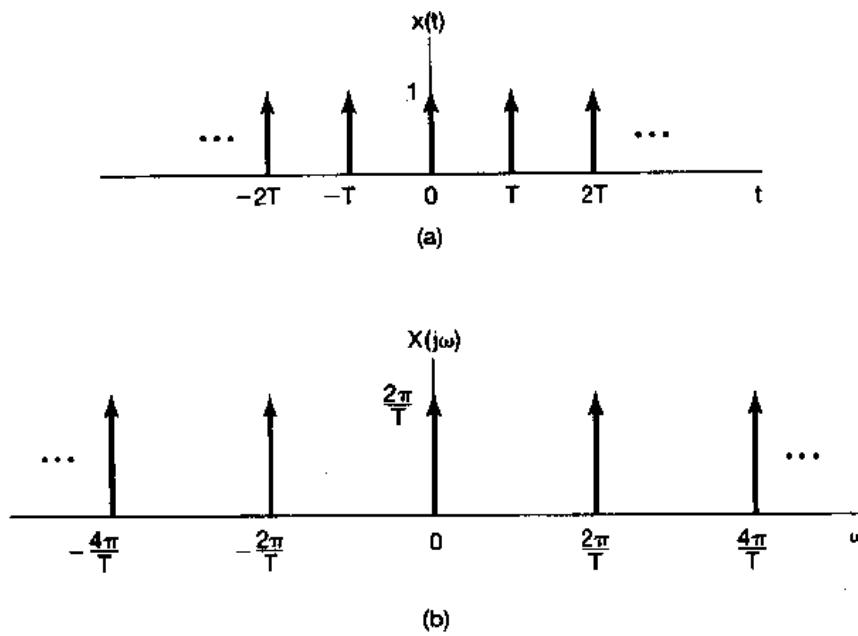


图 4.14 (a)周期冲激串; (b) 它的傅里叶变换

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

这就是说，周期冲激串的每一个傅里叶系数都有相同的值 $1/T$ 。将这个 a_k 值代入(4.22)式可得

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

由此可见，在时域周期为 T 的周期冲激串的傅里叶变换在频域是一个周期为 $2\pi/T$ 的周期冲激串，如图 4.14(b)所示。这里，再次看到了时域和频域之间相反关系的另一个例证：随着时域冲激之间间隔(也就是周期)的增大，在频域各冲激之间的间隔(即基波频率)就变小。

4.3 连续时间傅里叶变换性质

这一节以及后面两节将讨论傅里叶变换的几个重要性质。在 4.6 节表 4.1 详细地列出了这些性质。与周期信号的傅里叶级数表示的情况相同，这些性质对变换本身以及对一个信号的时域描述和频域描述之间的关系都将给出透彻的认识。另外，很多性质对简化傅里叶变换或反变换的求取也往往是很有用的。再者，正如上一节所指出的，由于一个周期信号的傅里叶级数和傅里叶变换表示之间存在着密切的关系，利用这一关系就能够把傅里叶变换的性质直接转移到对应的傅里叶级数性质中去，而傅里叶级数性质已在第 3 章单独讨论过(参见 3.5 节和表 3.1)。

为了方便起见，在本节的整个讨论中，都称时间函数和它们的傅里叶变换，并用一些简便的符号来代表信号与其变换之间的一对关系。在 4.1 节已经给出，一个信号 $x(t)$ 和它的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 是由下面傅里叶变换的综合和分析公式联系起来的

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.24)$$

和

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.25)$$

有时为了方便，将 $X(j\omega)$ 用 $\mathcal{F}\{x(t)\}$ ， $x(t)$ 用 $\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$ 来表示；也将 $x(t)$ 和 $X(j\omega)$ 这一对傅里叶变换用下列符号表示

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

例如，以例 4.1 为例就有

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + j\omega} &= \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} \\ e^{-at}u(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\} \end{aligned}$$

以及

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j\omega}$$

4.3.1 线性

若

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

和

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega)$$

则

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX(j\omega) + bY(j\omega) \quad (4.26)$$

将分析公式(4.25)式应用于 $ax(t) + by(t)$ 就可直接得出(4.26)式。线性性质很容易推广到任意个信号的线性组合中去。

4.3.2 时移性质

若

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

则

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \quad (4.27)$$

为了得到这一性质，可先考虑(4.24)式

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

在该式中以 $t - t_0$ 取代 t ，可得

$$x(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-j\omega t_0} X(j\omega)) e^{j\omega t} d\omega$$

这就是对 $x(t - t_0)$ 的综合公式，所以得

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

这个性质说明：信号在时间上移位，并不改变它的傅里叶变换的模；也就是说，若将 $X(j\omega)$ 用极坐标表示

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\arg X(j\omega)}$$

那么

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega_0 t_0} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j[\arg X(j\omega) - \omega_0 t_0]}$$

因此，信号在时间上的移位只是在它的变换中引入相移，即 $-\omega_0 t_0$ ，与频率 ω 成线性关系。

例 4.9 为了说明傅里叶变换线性和时移性质的用处，现考虑对图 4.15(a) 的信号 $x(t)$ 求其傅里叶变换。

首先看出， $x(t)$ 可以表示成如下的线性组合

$$x(t) = \frac{1}{2} x_1(t - 2.5) + x_2(t - 2.5)$$

这里信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是如图 4.15(b) 和 (c) 所表示的矩形脉冲。利用例 4.4 的结果，分别有

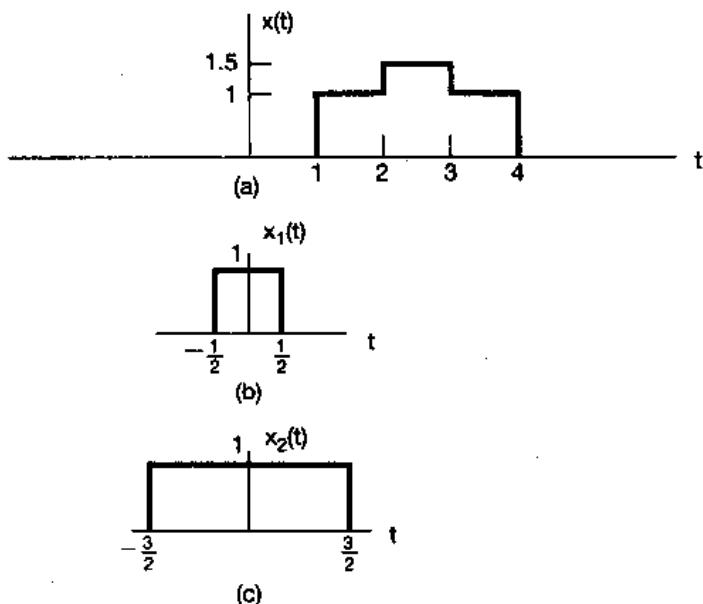
$$X_1(j\omega) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$$

$$\text{和 } X_2(j\omega) = \frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}$$

最后，利用傅里叶变换的线性和时移性质，可得

$$X(j\omega) = e^{-j\omega/2} \left\{ \frac{\sin(\omega/2) + 2\sin(3\omega/2)}{\omega} \right\}$$

图 4.15 将一个信号分解为两个简单信号的线性组合：
(a) 例 4.9 中的信号 $x(t)$ ；
(b) 和 (c) 是用来表示 $x(t)$ 的两个简单信号



4.3.3 共轭及共轭对称性

共轭性质是说，若

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

则

$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$

(4.28)

将(4.25)式取共轭就可得出这一性质，即

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt$$

以 $-\omega$ 代替 ω ，得

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.29)$$

(4.29)式的右边就是对 $x^*(t)$ 的傅里叶变换的分析公式，于是就得到(4.28)式的关系。

共轭性质就能证明，若 $x(t)$ 为实函数，那么 $X(j\omega)$ 就具有共轭对称性，即

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega) \quad [x(t) \text{ 为实}] \quad (4.30)$$

因为，若 $x(t)$ 为实数，就有 $x^*(t) = x(t)$ ，由(4.29)式

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(j\omega)$$

用 $-\omega$ 替换 ω 就可得出(4.30)式。

由例 4.1， $x(t) = e^{-at} u(t)$ ，于是

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

和

$$X(-j\omega) = \frac{1}{a - j\omega} = X^*(j\omega)$$

作为(4.30)式的一个结果，若将 $X(j\omega)$ 用直角坐标表示为

$$X(j\omega) = \Re\{X(j\omega)\} + j\Im\{X(j\omega)\}$$

那么若 $x(t)$ 为实函数，则有

$$\Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\}$$

和

$$\Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\}$$

这就是说，傅里叶变换的实部是频率的偶函数，而虚部则是频率的奇函数。类似地，若将 $X(j\omega)$ 用极坐标表示为

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$$

那么，根据(4.30)式就可得出： $|X(j\omega)|$ 是频率 ω 的偶函数， $\angle X(j\omega)$ 是频率 ω 的奇函数。因此，当欲计算或图示一个实值信号的傅里叶变换时，该变换的实部和虚部，或者模与相位只需给出正频率时的值就可以了；因为对负频率的值，可以利用上面导出的关系，直接从 $\omega > 0$ 时的值得出。

作为(4.30)式进一步的结果，若 $x(t)$ 为实且为偶函数，那么 $X(j\omega)$ 也一定为实、偶函数。为此，可以写出

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

或者用 $\tau = -t$ 替换，可得

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

因为 $x(-\tau) = x(\tau)$ ，所以有

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = X(j\omega)$$

因此， $X(j\omega)$ 是偶函数。再与(4.30)式相结合，这也要求 $X^*(j\omega) = X(j\omega)$ [即 $X(j\omega)$ 为实值函数]。在例 4.2 中的实、偶信号 $e^{-a|\tau|}$ 就表明了这个性质。同样可以证明，若 $x(t)$ 是时间的实值奇函数，而有 $x(t) = -x(-t)$ ，那么 $X(j\omega)$ 就是纯虚且为奇函数。

最后，在第 1 章曾讨论过，一个实函数 $x(t)$ 总是可以用一个偶函数 $x_e(t) = \Re\{x(t)\}$ 和

一个奇函数 $x_o(t) = \text{Im}\{x(t)\}$ 之和来表示，即

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

根据傅里叶变换的线性，有

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x_e(t)\} + \mathcal{F}\{x_o(t)\}$$

并且，根据上面的讨论， $\mathcal{F}\{x_e(t)\}$ 是一实函数， $\mathcal{F}\{x_o(t)\}$ 是一个纯虚数，于是可以得出，若 $x(t)$ 为实函数，则有：

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \\ \mathcal{E}_v\{x(t)\} &\xleftrightarrow{\mathcal{R}_v} \Re\{X(j\omega)\} \\ \text{Im}\{x(t)\} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Im\{X(j\omega)\} \end{aligned}$$

下面这个例子用来说明这些对称性质的一种应用。

例 4.10 重新考虑一下例 4.2 中的信号 $x(t) = e^{-|at|}$, $a > 0$ 的傅里叶变换求解问题，现在用傅里叶变换的对称性质来帮助求解。

由例 4.1，有

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j\omega}$$

注意到，若 $t > 0$ ，则 $x(t)$ 就等于 $e^{-at}u(t)$ ；而对 $t < 0$ ， $x(t)$ 取的是镜象值，即

$$x(t) = e^{-|at|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = 2\left[\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}\right] = 2\mathcal{E}_v\{e^{-at}u(t)\}$$

因为 $e^{-at}u(t)$ 是实值函数，由傅里叶变换的对称性质就可导得

$$\mathcal{E}_v\{e^{-at}u(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{R}_v} \left\{ \frac{1}{a + j\omega} \right\}$$

于是就有

$$X(j\omega) = 2\mathcal{R}_v\left\{ \frac{1}{a + j\omega} \right\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

这是与例 4.2 中的结果一致的。

4.3.4 微分与积分

令 $x(t)$ 的傅里叶变换是 $X(j\omega)$ ，将傅里叶变换综合公式(4.24)式两边对 t 进行微分，可得

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

因此有

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(j\omega)} \quad (4.31)$$

这是一个特别重要的性质，因为它将时域内的微分用频域内乘以 $j\omega$ 所代替。将会发现，在 4.7 节讨论利用傅里叶变换来分析由微分方程描述的 LTI 系统时，这一性质极其有用。

因为时域内的微分对应于频域内乘以 $j\omega$ ，这就使人或许可能得出，时域内的积分是否应该对应于频域内除以 $j\omega$ ？！的确是这样，但这只是事情的一部分，真正的关系应该是

$$\boxed{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)} \quad (4.32)$$

(4.32)式右边的冲激函数项反映了由积分所产生的直流或平均值。

下面用两个例子来说明(4.31)式和(4.32)式的应用。

例 4.11 求单位阶跃函数 $x(t) = u(t)$ 的傅里叶变换。利用(4.32)式，并已知

$$g(t) = \delta(t) \leftrightarrow G(j\omega) = 1$$

注意到

$$x(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

上式两边各取傅里叶变换，得

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

此处已经用到列于表 4.1 中的积分性质。因为 $G(j\omega) = 1$ ，所以可得

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (4.33)$$

还可以看到，应用(4.31)式的微分性质可以复原单位冲激函数的傅里叶变换，即

$$\delta(t) = \frac{d u(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = 1$$

式中最末的等式是由于 $\omega\delta(\omega) = 0$ 的结果。

例 4.12 现在要想求图 4.16(a)所示 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 。不直接对 $x(t)$ 应用傅里叶积分来求，而考虑如下信号

$$g(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

如图 4.16(a)所示， $g(t)$ 是一个矩形脉冲和两个冲激函数的和。这些分量信号的傅里叶变换可以用表 4.2 求出为

$$G(j\omega) = \left(\frac{2\sin\omega}{\omega} \right) - e^{j\omega} - e^{-j\omega}$$

注意， $G(0) = 0$ 。利用积分性质就有

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

由于 $G(0) = 0$ ，所以最后得出

$$X(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{j\omega^2} - \frac{2\cos\omega}{j\omega}$$

可见， $X(j\omega)$ 的表示式是纯虚且为奇函数，这是与 $x(t)$ 是实且为奇函数这一点相一致的。

4.3.5 时间与频率的尺度变换

若

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

则

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (4.34)$$

式中 a 是一个实常数。这个性质可以直接由傅里叶变换的定义得到，即

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

利用置换 $\tau = at$ ，可得

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases}$$

这就相当于(4.34)式。因此，除了一个 $1/|a|$ 的幅度因子外，信号在时间上有一个线性尺度因子 a 的变换，相当于它在频率上有一个线性因子 $1/a$ 的变换，反之亦然。若令 $a = -1$ ，则由(4.34)式就有

$$x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega) \quad (4.35)$$

也就是说，在时间上反转一个信号，它的傅里叶变换也反转。

(4.34)式一个最通俗的说明是当一盘磁带在录制时的速度和放音时的速度不同时，对其所含频率分量的影响。假设一盘已经录好的磁带，如果重放时，其放音速度比原磁带录制时的速度要高，这就相当于信号在时间上受到压缩(即 $a > 1$)，那么其频谱就应该扩展，因而听起来就会感到声音的频率变高了。反之，如果放音的速度比原来的慢(即 $0 < a < 1$)，那么听起来在频率上就感到减低了。例如，如果一只小铃的声音被录制在磁带上，放的时候把速度变慢，那么听起来就宛如声音深沉的大钟。

尺度变换性质又一次说明了时间和频率之间的相反关系。关于这一点，我们已经遇到好几次了。譬如，增加正弦信号的周期，其频率就下降，再如曾在例 4.5(见图 4.11)中所看到的，若考虑如下变换：

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

那么，随着 W 的增加， $X(j\omega)$ 的反变换就愈来愈窄，幅度愈来愈高，最终当 $W \rightarrow \infty$ 时，其反变换就趋近于一个冲激函数。最后，在例 4.8 中也看到，一个周期冲激串的傅里叶变换也是一个冲激串，其在频域中的频率间隔是反比于时域中冲激串的时间间隔的。

时域与频域之间的相反关系在信号与系统的各个方面都十分重要，其中包括滤波和滤波器设计，并且在本书的余下部分的许多地方还会看到它的重要性。另外，读者或许在科学和工程领域的各个方面已经熟悉了这一性质的含意，例如，物理学中的不确定性原理就是其中一例，另一个例子将在本章习题 4.49 中讨论。

4.3.6 对偶性

比较一下正变换和反变换的关系式(4.24)式和(4.25)式，可以看到，这两个式子在形式上是很相似的，但不是完全一样的。这一对称性就导致了傅里叶变换的一个性质称之为对偶性。当我们注意到在例 4.4 和例 4.5 中这一对傅里叶变换对之间存在的关系，在例 4.5 中就已经暗示了对偶性。在前一个例子中导出了如下一对傅里叶变换：

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow X_1(j\omega) = \frac{2\sin\omega T_1}{\omega} \quad (4.36)$$

而在后一个例子，又考虑了下面的变换对：

$$x_2(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \leftrightarrow X_2(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad (4.37)$$

这两个变换对及其之间的关系绘于图 4.17 中。

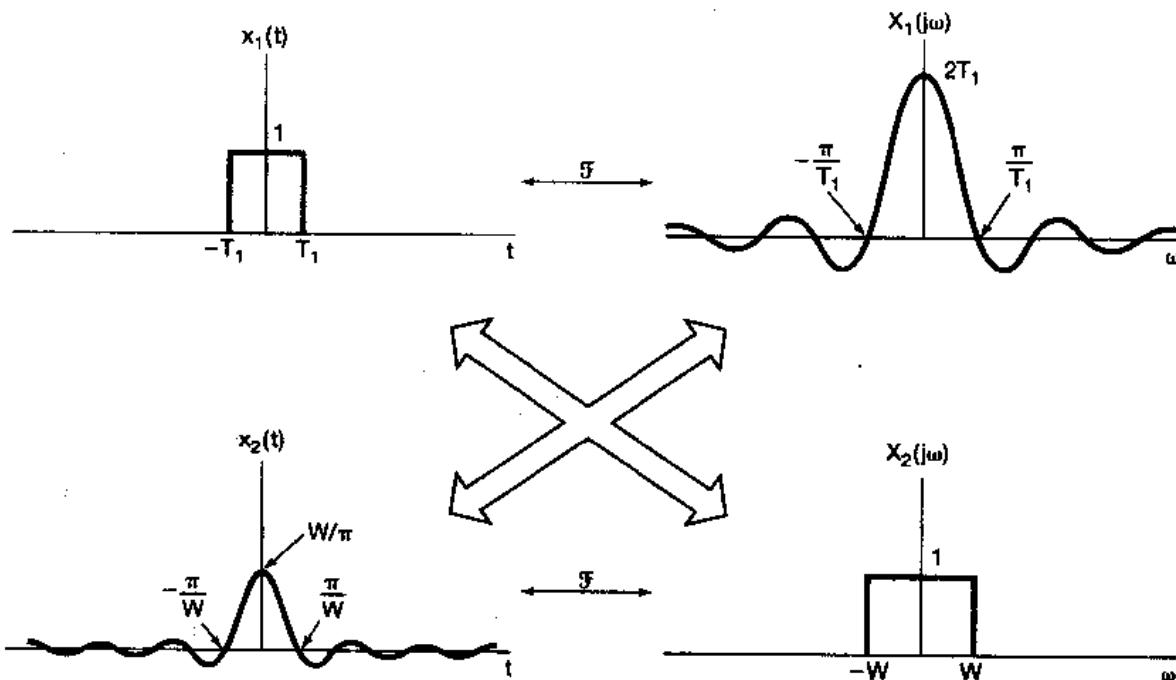


图 4.17 (4.36)式和(4.37)式两对傅里叶变换之间的关系

由这两个例子所呈现出的对称性可以推广到一般的傅里叶变换中去。明确一点说就是，由于(4.24)式和(4.25)式之间的对称性，对于任何变换对来说，在时间和频率变量交换之后都有一种对偶的关系。对于这一点最好还是用例子来说明。

例 4.13 考虑利用对偶性来求下面信号 $g(t)$ 的傅里叶变换 $G(j\omega)$

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

在例 4.2 中曾经遇到一个傅里叶变换对，其中作为 ω 的函数的傅里叶变换与该信号 $g(t)$ 有类似的函数形式。这就是，设某一信号 $x(t)$ ，它的傅里叶变换是

$$X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

那么，由例 4.2 就有

$$x(t) = e^{-2|t|} \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

对于这一变换对的综合公式是

$$e^{-2|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2} \right) e^{j\omega t} d\omega$$

将上式两边乘以 2π ，并将 t 以 $-t$ 置换，可得

$$2\pi e^{-2|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2} \right) e^{-j\omega t} d\omega$$

现在将变量 t 和 ω 的名称交换一下，得出

$$2\pi e^{-2|\omega|} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+t^2} \right) e^{-j\omega t} dt \quad (4.38)$$

(4.38)式的右边就是 $2/(1+t^2)$ 的傅里叶变换分析公式，因此最后得到

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{2}{1+t^2} \right\} = 2\pi e^{-2|\omega|}$$

对偶性也能用来确定或联想到傅里叶变换的其它性质。具体说来就是，如果一个时间函数有某些特性，而这些特性在其傅里叶变换中隐含着一些别的什么东西的话，那么与频率函数有关的同一特性也会在时域中隐含着对偶的东西。例如，在 4.3.4 节中曾见到，时域中的微分对应于在频域内乘以 $j\omega$ ，于是由前面的讨论，可以想到在时域中乘以 jt ，大概也会对应于频域的微分。为了确定这一对偶性质的确切形式，完全可以采用在 4.3.4 节所做的那样，将(4.25)式两边对 ω 微分，得到

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.39)$$

即

$$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \quad (4.40)$$

同样，对于(4.27)式和(4.32)式可导出它们的对偶性质为

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow X(j(\omega - \omega_0)) \quad (4.41)$$

和

$$-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} x(\eta)d\eta \quad (4.42)$$

4.3.7 帕斯瓦尔定理

若 $x(t)$ 和 $X(j\omega)$ 是一对傅里叶变换，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (4.43)$$

该式称为帕斯瓦尔定理。该式直接用傅里叶变换就能得出，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

改变一下积分次序，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right] d\omega$$

上式右边括号的这一项就是 $x(t)$ 的傅里叶变换，因此可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

(4.43)式的左边是信号 $x(t)$ 的总能量。帕斯瓦尔定理指出，这个总能量既可以按每单位时间内的能量($|x(t)|^2$)在整个时间内积分计算出来，也可以按每单位频率内的能量($|X(j\omega)|^2/2\pi$)在整个频率范围内积分而得到。因此， $|X(j\omega)|^2$ 常称为信号 $x(t)$ 的能谱密度(见习题 4.45)。应该注意，对于有限能量信号的帕斯瓦尔定理与周期信号的帕斯瓦尔定理

(3.67)式是直接对应的，在那里说的是一个周期信号的平均功率等于它的各次谐波分量的平均功率之和，而这些谐波分量的平均功率就等于傅里叶级数系数的模平方。

帕斯瓦尔定理和其他的傅里叶变换性质在直接从傅里叶变换来确定一个信号的某些时域特性时是很有用处的。下面的例子就是一个简单的说明。

例 4.14 对于图 4.18 中的每个傅里叶变换，希望能求得下

面时域表示式：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$D = \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0}$$

为了在频域中求 E ，可以用帕斯瓦尔定理，即

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (4.44)$$

对图 4.18(a)，其值是 $5/8$ ，对于图 4.18(b) 是 1。

为了在频域中求 D ，首先应该用微分性质

$$g(t) = \frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{FT} j\omega X(j\omega) = G(j\omega)$$

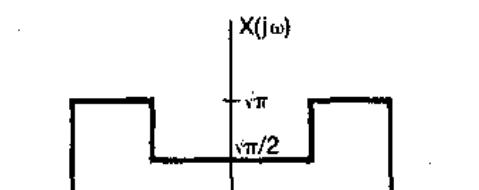
注意到

$$D = g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) d\omega \quad (4.45)$$

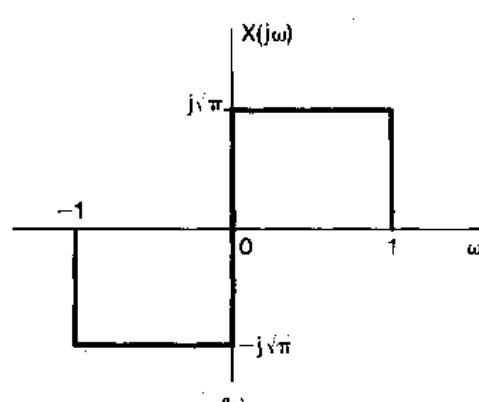
最后得到

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) d\omega \quad (4.46)$$

对图 4.18(a) 该值为零，对图 4.18(b)，其值为 $-\sqrt{\pi}$ 。



(a)



(b)

图 4.18 例 4.14 中要考虑的傅里叶变换

除了以上讨论到的这些性质外，傅里叶变换还有一些其它的性质。在下面两节将特别讨论另外两个性质，这两个性质在 LTI 系统研究和它们的应用中起着特别重要的作用。其中的第一个（在 4.4 节讨论）称为卷积性质，它是很多信号与系统应用中的核心，其中包括滤波。第二个称为相乘性质，将在 4.5 节讨论。相乘性质是第 7 章讨论采样和第 8 章讨论幅度调制的基础。4.6 节将把傅里叶变换的性质作一综合。

4.4 卷积性质

在第 3 章已经知道，如果一个周期信号用一个傅里叶级数来表示，也就是按(3.38)式作为成谐波关系的复指数信号的线性组合来表示，那么，一个 LTI 系统对这个输入的响应也能够用一个傅里叶级数来表示。因为复指数信号是 LTI 系统的特征函数，所以输出的傅里叶级数系数是输入的那些系数乘以对应谐波频率上的系统频率响应的值。

在这一节将把这一结论推广到非周期信号的情况。首先利用在第 3 章对周期信号所建立的直观认识为基础，以稍微欠正规的方式来导出这一性质。然后直接由卷积积分出发，以简短但是正规地方式来导出这一性质。

回想一下，我们是把作为 $x(t)$ 的一种表示式的傅里叶变换综合公式当作复指数信号的一种线性组合来理解的。重新回到(4.7)式， $x(t)$ 是作为一个和的极限来表示的，即

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (4.47)$$

在 3.2 节和 3.8 节都讨论过，单位冲激响应为 $h(t)$ 的线性系统对复指数信号 $e^{jk\omega_0 t}$ 的响应是 $H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$ ，这里

$$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.48)$$

按照(3.121)式的定义，可以把频率响应 $H(j\omega)$ 当作是该系统单位冲激响应的傅里叶变换。换句话说，单位冲激响应的傅里叶变换(在 $\omega = k\omega_0$ 上求值)就是 LTI 系统对于特征函数 $e^{jk\omega_0 t}$ 的复标尺因子。由叠加原理[(3.124)式]，就有

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

因此，根据(4.47)式，该线性系统对 $x(t)$ 的响应就为

$$y(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.49)$$

因为 $y(t)$ 和它的傅里叶变换是由下式联系在一起的：

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.50)$$

所以，根据(4.47)式，就可以将 $Y(j\omega)$ 认为是

$$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega) \quad (4.51)$$

作为比较正规的推导，可考虑如下卷积积分：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (4.52)$$

要求的 $Y(j\omega)$ 是

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \quad (4.53)$$

交换积分次序，并注意到 $x(\tau)$ 与 t 无关，则有

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \quad (4.54)$$

根据时移性质(4.27)式，上式方括号内就是 $e^{-j\omega\tau} H(j\omega)$ ，将其代入(4.54)式得

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} H(j\omega) d\tau = H(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.55)$$

上式右边的积分部分就是 $X(j\omega)$ ，所以

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$

也即

$$y(t) = h(t) * x(t) \Leftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) \quad (4.56)$$

(4.56)式在信号与系统分析中十分重要。如同该式所表达的，它将两个信号的卷积映射为它们傅里叶变换的乘积。单位冲激响应的傅里叶变换 $H(j\omega)$ 是按(3.121)式所定义的频率响应，它控制着在每一频率 ω 上输入傅里叶变换复振幅的变化。例如，在频率选择性滤波

中，可以要求在某一频率范围内 $H(j\omega) \approx 1$ ，以便让通带内的各频率分量几乎不受任何由于系统带来的衰减或变化；而在另一些频率范围内，可能要求 $H(j\omega) \approx 0$ ，以便将该范围内的各频率分量消除或显著衰减掉。

在 LTI 系统分析中，频率响应 $H(j\omega)$ 所起的作用与其反变换——单位冲激响应 $h(t)$ 所起的作用是同样的。一方面，因为 $h(t)$ 完全表征了一个 LTI 系统，因此 $H(j\omega)$ 也一定是这样；另外，LTI 系统的很多性质也能够很方便地借助于 $H(j\omega)$ 来反映。例如，在 2.3 节已经知道两个 LTI 系统级联后的冲激响应就是这些系统冲激响应的卷积，而且总的特性与级联次序无关。利用(4.56)式就可以用频率响应来描述这种系统的级联特性。如图 4.19 所表明的，由于两个 LTI 系统级联后的单位冲激响应是每个冲激响应的卷积，应用卷积性质就得出，两个 LTI 系统级联后的总频率响应就是这些单个频率响应的乘积，而且由此可明显看出，总的频率响应与级联次序无关。

正如在 4.1.2 节曾讨论过的，傅里叶变换的收敛是在几个条件之下才得以保证的，这样就不是对所有的 LTI 系统都能定义出频率响应的。然而，如果一个 LTI 系统是稳定的话，那么正如在 2.3.7 节和习题 2.49 中所介绍的，该系统的单位冲激响应就一定是绝对可积的，也就是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (4.57)$$

(4.57)式是三个狄里赫利条件之一，而这三个条件合在一起才保证 $h(t)$ 的傅里叶变换 $H(j\omega)$ 存在。因此，假设 $h(t)$ 也满足另外两个条件（因为所有物理上或实际上有意义的信号都是这样），那么一个稳定的 LTI 系统就有一个频率响应 $H(j\omega)$ 。

在利用傅里叶分析来研究 LTI 系统时，将只局限于系统的冲激响应有傅里叶变换的情况。为了应用变换法来研究不稳定的 LTI 系统，就得建立一种更为一般化的连续时间傅里叶变换，这就是拉普拉斯变换，将推迟到第 9 章讨论。在这之前都只讨论能够利用傅里叶变换来分析的很多问题和实际应用。

4.4.1 举例

为了进一步说明卷积性质及其应用，现举几个例子。

例 4.15 有一连续时间 LTI 系统，其单位冲激响应为

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad (4.58)$$

该系统的频率响应就是 $h(t)$ 的傅里叶变换为

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad (4.59)$$

因此，对于具有傅里叶变换 $X(j\omega)$ 的任何输入 $x(t)$ ，输出的傅里叶变换是

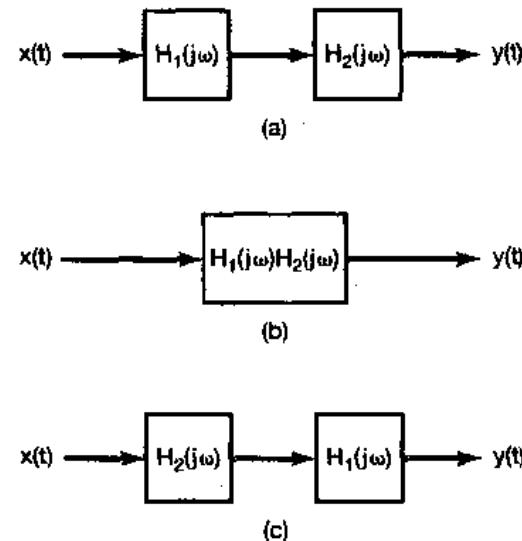


图 4.19 三种等效的 LTI 系统，其中每一方框代表一个 LTI 系统，其频率响应函数如图示

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

其实，这个结果与 4.3.2 节时移性质是一致的。单位冲激响应为 $\delta(t - t_0)$ 的系统对输入将产生一个时延 t_0 ，即

$$y(t) = x(t - t_0)$$

因此，由(4.27)式给出的时移性质也可得到(4.60)式。值得注意的是，无论是由 4.3.2 节的讨论，或是直接从(4.59)式来看，一个属于纯时移的系统的频率响应在所有频率上其模为 1（即 $|e^{-j\omega t_0}| = 1$ ），而相位则与 ω 成线性关系 $-\omega t_0$ 。

例 4.16 作为第二个例子，考查一个微分器，即一个 LTI 系统的输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下列关系给出：

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

根据 4.3.4 节的微分性质

$$Y(j\omega) = j\omega X(j\omega) \quad (4.61)$$

于是由(4.56)式，一个微分器的频率响应就是

$$H(j\omega) = j\omega \quad (4.62)$$

例 4.17 考虑一个积分器，即一个 LTI 系统由下列方程给出

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

这个系统的单位冲激响应是单位阶跃 $u(t)$ ，因此，根据例 4.11 和(4.33)式，该系统的频率响应是

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

然后，利用(4.56)式，就有

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(j\omega)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

这与(4.32)式的积分性质是一致的。

例 4.18 在 3.9.2 节已讨论过，频率选择性滤波可以用一个 LTI 系统来实现，该 LTI 系统的频率响应 $H(j\omega)$ 通过所需要的频率范围，而大大衰减掉在该范围以外的频率分量。例如，考虑在 3.9.2 节介绍过的理想低通滤波器，它的频率响应如图 4.20 所示。

并由下式给出：

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (4.63)$$

现在已经有了它的傅里叶变换表示，并且知道该理想滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 就是(4.63)式的反变换。利用例 4.5 的结果，就有

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad (4.64)$$

如图 4.21 所示。

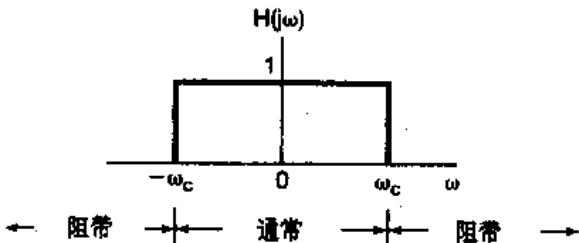


图 4.20 理想低通滤波器的频率响应

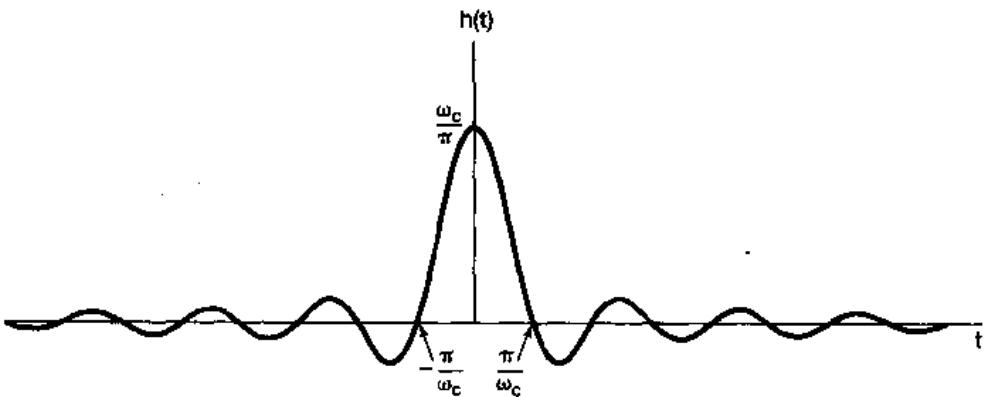


图 4.21 理想低通滤波器的单位冲激响应

由例 4.18 这个例子，已经能够开始看到在滤波器设计中所出现的一些问题，滤波器设计中涉及到时域和频域两方面的要求。尽管理想低通滤波器确实有非常完美的频率选择性，但是它的单位冲激响应的某些特性却可能是不希望的。首先注意到， $h(t)$ 在 $t < 0$ 时不是零，其结果就是理想低通滤波器不是因果的，因此，在要求因果系统的应用中，理想低通滤波器就不是一种选择。进而，如同将在第 6 章要讨论的，即使因果性不是一个主要的限制，理想滤波器也不是很容易近似实现的，倒是较为容易实现的非理想滤波器常常乐于接受。再者，在某些应用中(如将在 6.7.1 节讨论的汽车减震系统)，一个低通滤波器单位冲激响应中的起伏振荡特性可能是不希望有的。在这样一些应用中，像图 4.21 这样的理想低通滤波器的时域特性或许是不可接受的。这就意味着，需要在像理想频率选择性这样的频域特性与时域特性之间做一些折衷和权衡。

例如，考虑单位冲激响应为

$$h(t) = e^{-t}u(t) \quad (4.65)$$

的 LTI 系统，其频率响应是

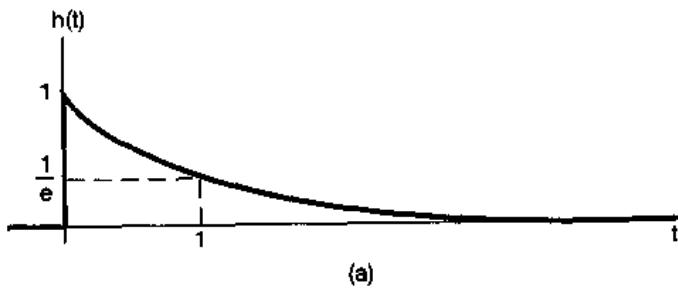
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} \quad (4.66)$$

将(3.145)和(4.66)式一比较就发现，这个系统能用 3.10 节讨论的简单 RC 电路来实现。系统的单位冲激响应和频率响应的模特性示于图 4.22 中。虽然这个系统没有理想低通滤波器那么好的频率选择性，但是，它是因果的，并且其冲激响应是单调衰减的，也就是说没有振荡。这种滤波器，或者相当于更高阶微分方程的稍许更为复杂一些的滤波器，由于它们的因果性，容易实现，以及在诸如频率选择性和时域振荡特性等这样一些设计考虑上能灵活地作出一些权衡等原因，相对于理想滤波器来说倒是常常被采纳的。这些问题将在第 6 章给予更详细地讨论。

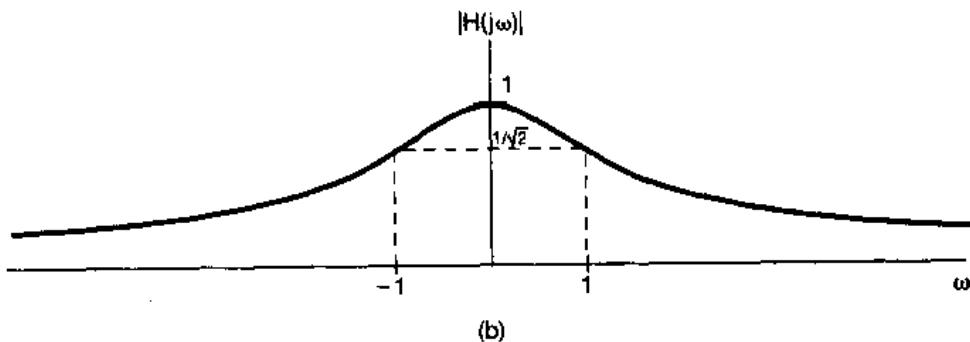
卷积性质在求卷积积分时是很有用的，也就是在计算 LTI 系统的响应中是很有用的。下面用例子来给予说明。

例 4.19 考虑一 LIT 系统对输入 $x(t)$ 的响应，系统的单位冲激响应为 $h(t)$ ，它们是

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$



(a)



(b)

图 4.22 (a)(4.65)式 LTI 系统的单位冲激响应; (b)该系统频率响应的模特性

$$x(t) = e^{-bt} u(t), \quad b > 0$$

不采用直接去计算 $y(t) = x(t) * h(t)$, 而是将问题先变换到频域。由例 4.1, $x(t)$ 和 $h(t)$ 的傅里叶变换是

$$X(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

和

$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

因此

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)(b + j\omega)} \quad (4.67)$$

为了求出 $y(t)$, 希望得到 $Y(j\omega)$ 的反变换。最简单地做法就是将 $Y(j\omega)$ 展开成部分分式。这样的展开式在求反变换时极为有用, 其一般的展开法在附录中已给出。对于这个例子, 假设 $b \neq a$, $Y(j\omega)$ 的部分分式展开为

$$Y(j\omega) = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{B}{b + j\omega} \quad (4.68)$$

式中 A 和 B 都是待定常数。求 A 和 B 的一种办法是将(4.67)式和(4.68)式两式的右边相等, 然后两边各乘以 $(a + j\omega)(b + j\omega)$, 解出 A 和 B 。在附录中给出了另一种更一般和更为有效的方法来求像(4.68)式这样的部分分式展开式中的系数。无论用哪种办法, 都求得

$$A = \frac{1}{b - a} = -B$$

因此

$$Y(j\omega) = \frac{1}{b - a} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{b + j\omega} \right] \quad (4.69)$$

(4.69)式中每一项的反变换都可凭直觉得到, 利用 4.3.1 节的线性性质, 有

$$Y(t) = \frac{1}{b-a} [e^{-at} u(t) - e^{-bt} u(t)]$$

当 $b=a$ 时, (4.69) 式的部分分式展开不成立。然而, 当 $b=a$ 时, (4.67) 式就变为

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

这就是可看作

$$\frac{1}{(a+j\omega)^2} = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a+j\omega} \right]$$

利用由(4.40)式给出的微分性质的对偶特性, 因此

$$\begin{aligned} e^{-at} u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a+j\omega} \\ te^{-at} u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a+j\omega} \right] = \frac{1}{(a+j\omega)^2} \end{aligned}$$

结果有

$$y(t) = te^{-at} u(t)$$

例 4.20 卷积性质应用的另一个例子是考虑求一个理想低通滤波器对具有 sinc 函数 $x(t)$ 的响应问题, 即

$$x(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\pi t}$$

当然, 该理想低通滤波器的冲激响应具有与 $x(t)$ 相类似的形式, 即

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

因此, 滤波器的输出 $y(t)$ 就是这两个 sinc 函数的卷积。现在来证明, 它还是一个 sinc 函数。导出这一结果的特别方便的方法是先看一下

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

式中

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_i \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

和

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

因此有

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

这里 ω_0 等于 ω_i 和 ω_c 中较小的一个。最后, $Y(j\omega)$ 的反变换为

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}, & \text{若 } \omega_c \leq \omega_i \\ \frac{\sin \omega_i t}{\pi t}, & \text{若 } \omega_i \leq \omega_c \end{cases}$$

即, 取决于 ω_c 和 ω_i 中哪一个较小, 输出要么等于 $x(t)$, 要么等于 $h(t)$ 。

4.5 相乘性质

卷积性质说的是时域内的卷积对应于频域内的相乘。由于时域和频域之间的对偶性, 可

以期望对此也一定有一个相应的对偶性质存在，即：时域内的相乘应该对应于频域内的卷积。具体说来，就是

$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)] \quad (4.70)$$

(4.70)式可以利用4.3.6节的对偶关系与卷积性质一起来证明，或者直接利用傅里叶变换关系，像推导卷积性质一样的步骤来得到。

一个信号被另一个信号去乘，可以理解为用一个信号去调制另一个信号的振幅，因此两个信号相乘往往也称之为幅度调制。为此，(4.70)式有时也称为调制性质。将会在第7章和第8章看到，这个性质有几个很重要的应用。为了说明(4.70)式以及今后将要讨论到的若干应用，先来举几个例子。

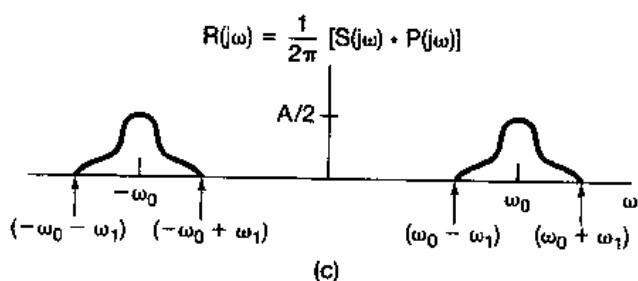
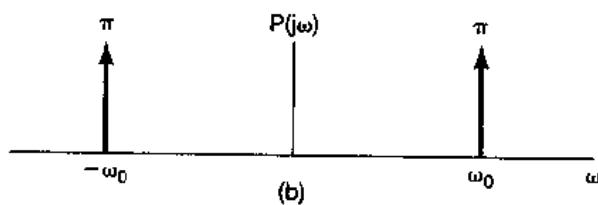
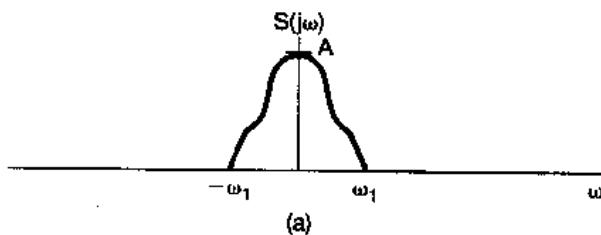


图 4.23 例 4.21 中相乘性质的应用：

(a)信号 $s(t)$ 的傅里叶变换；(b) $p(t) = \cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换；(c) $r(t) = s(t)p(t)$ 的傅里叶变换

例 4.21 设信号 $s(t)$ 的频谱 $S(j\omega)$ 如图 4.23(a)所示，同时考虑另一信号 $p(t)$ 。

$$p(t) = \cos\omega_0 t$$

那么

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

如图 4.23(b)所示。利用(4.70)式可以求得 $r(t) = s(t)p(t)$ 的频谱 $R(j\omega)$ 为

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2} S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\omega + \omega_0)) \quad (4.71)$$

如图 4.23(c)所示。这里已假定 $\omega_0 > \omega_1$, 所以 $R(j\omega)$ 中两个非零的部分互不重叠。很显然, $r(t)$ 的频谱是由 $S(j\omega)$ 移位并受到加权的两个部分所组成的。

由(4.71)式和图 4.23 可见, 当该信号 $s(t)$ 被一正弦信号相乘以后, 虽然信号中所包含的信息全都搬到较高的频率中去了, 但是在 $s(t)$ 中的全部信息却被原封不动地保留了下来! 这一点就构成了通信中正弦幅度调制系统的基础。在下一个例子中将明了如何从该幅度已调信号 $r(t)$ 中恢复出原始信号 $s(t)$ 。

例 4.22 现在考虑在例 4.21 中得到的信号 $r(t)$, 并令

$$g(t) = r(t)p(t)$$

这里 $p(t) = \cos\omega_0 t$ 。这时, $R(j\omega)$, $P(j\omega)$ 和 $G(j\omega)$ 均如图 4.24 所示。

由图 4.24(c)并根据傅里叶变换的线性性质, 可见 $g(t)$ 是 $(1/2)s(t)$ 与一个其频谱仅在较高的频率上(以 $\pm 2\omega_0$ 为中心附近)为非零的信号之和。假设将信号 $g(t)$ 作为一个输入加在一个频率响应 $H(j\omega)$ 只局限在低频域(如 $|\omega| < \omega_1$), 而在 $|\omega| > \omega_1$ 的高频域为零的频率选择性低通滤波器上, 那么系统的输出频谱就为 $H(j\omega)G(j\omega)$, 由于对 $H(j\omega)$ 给以如上的特殊选取, 它除了在幅度上有一个加权外, 就是 $S(j\omega)$ 。因此, 输出就是一个受到加权的 $s(t)$ 。到第 8 章, 当更详细地讨论幅度调制的原理后, 将会大大扩展这一概念。

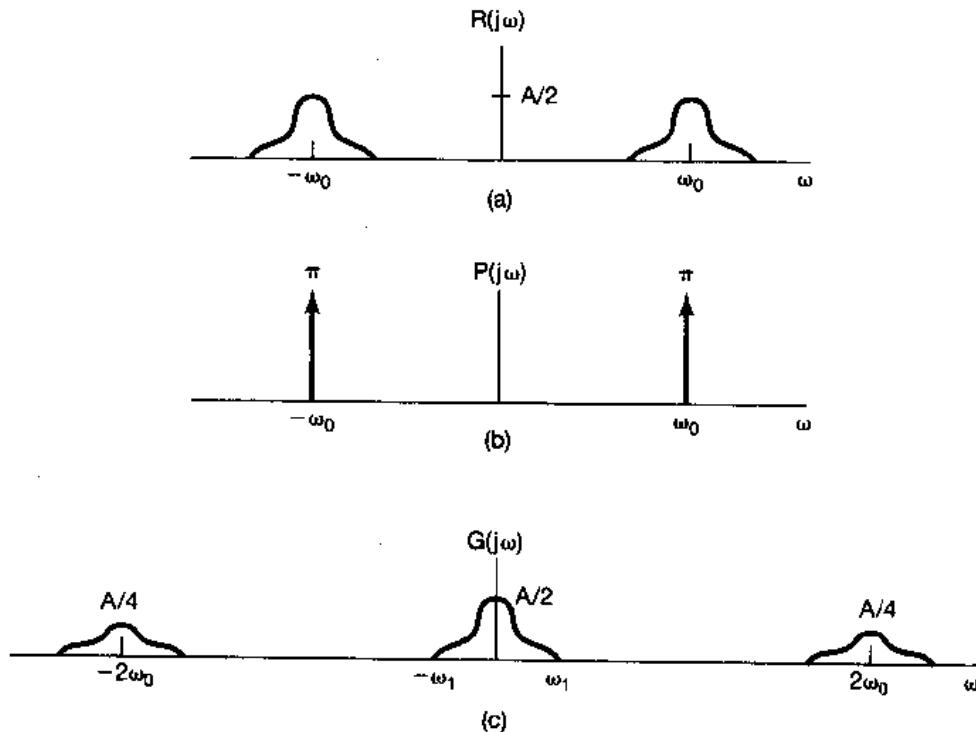


图 4.24 例 4.22 中考虑的各信号的频谱:(a) $R(j\omega)$; (b) $P(j\omega)$; (c) $G(j\omega)$

例 4.23 作为傅里叶变换相乘性质的另一个应用是用来求下面信号 $x(t)$ 的傅里叶变换

$$x(t) = \frac{\sin(t)\sin(t/2)}{\pi t^2}$$

这里的关键是要将 $x(t)$ 当作两个 sinc 函数的乘积：

$$x(t) = \pi \left(\frac{\sin(t)}{\pi t} \right) \left(\frac{\sin(t/2)}{\pi t} \right)$$

应用傅里叶变换的相乘性质，就得到

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(t)}{\pi t}\right\} * \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right\}$$

注意：每一个 sinc 函数的傅里叶变换都是一个矩形脉冲，把这两个脉冲卷积就得到 $X(j\omega)$ ，如图 4.25 所示。

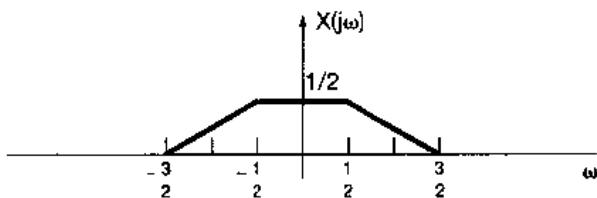


图 4.25 例 4.23 中 $x(t)$ 的傅里叶变换

4.5.1 具有可变中心频率的频率选择性滤波

正如在例 4.21 和例 4.22 中所想到的，并将更全面地在第 8 章要讨论的，相乘性质的一个重要应用是在通信系统中的幅度调制。另一个重要应用是在中心频率可调的频率选择性带通滤波器的实现上，其中心频率可以很简单地用一个调谐旋钮来调节。在由电阻器，运算放大器和电容器构成的频率选择性带通滤波器中，其中心频率决定于许多元件值，如要直接调节中心频率，全部元件都必须同时以一种正确的方式变化。这点一般说来是十分困难的，而且与仅制作一个固定特性的滤波器相比是相当麻烦的。另一种办法是利用一个固定特性的频率选择性滤波器，然后用恰当地移动信号频谱的办法来改变滤波器的中心频率，其中就要用到正弦幅度调制的原理。

例如，考虑一下示于图 4.26 的系统。这里，输入信号 $x(t)$ 被一个复指数信号 $e^{j\omega_c t}$ 相乘，所得信号然后通过一个截止频率为 ω_c 的低通滤波器，其输出再乘以 $e^{-j\omega_c t}$ 。信号 $x(t)$ ，

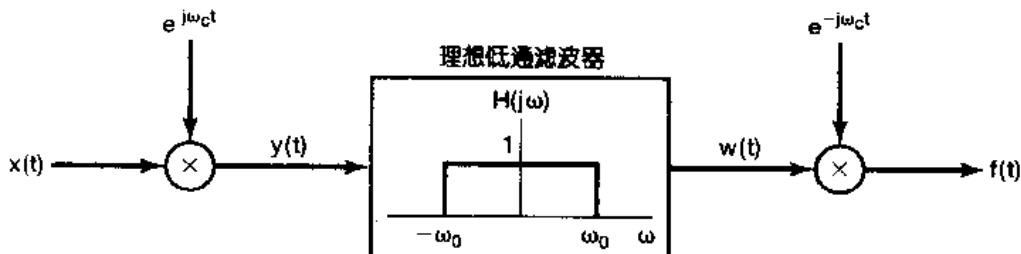


图 4.26 利用复指数载波的幅度调制实现带通滤波器

$y(t)$, $w(t)$ 和 $f(t)$ 的频谱如图 4.27 所示。无论从相乘性质或频移性质来看， $y(t) = e^{j\omega_c t}x(t)$ 的傅里叶变换都是

$$Y(j\omega) = \delta(\omega - \omega_c) * X(j\omega) = X(j(\omega - \omega_c))$$

这样 $Y(j\omega)$ 就等于 $X(j\omega)$ 向右移 ω_c ，在 $X(j\omega)$ 中靠近 $\omega = \omega_c$ 附近的频谱就移进该低通滤波器的通带内。同样， $f(t) = e^{j\omega_c t}w(t)$ 的傅里叶变换是

$$F(j\omega) = W(j(\omega + \omega_c))$$

$F(j\omega)$ 就是 $W(j\omega)$ 向左移 ω_c 。由图 4.26 可见，图 4.26 整个系统等效于一个中心频率为 $-\omega_c$ ，带宽为 $2\omega_0$ 的理想带通滤波器，如图 4.28 所示。随着复指数振荡器的频率 ω_c 的改变，该带通滤波器的中心频率也就改变了。

在图 4.26 的系统中，若 $x(t)$ 为实信号，而 $y(t)$, $w(t)$ 和 $f(t)$ 则全都是复信号。如果仅保留 $f(t)$ 中的实部，那么得到的频谱就如图 4.29 所示，而与其相应的等效带通滤波器就应有

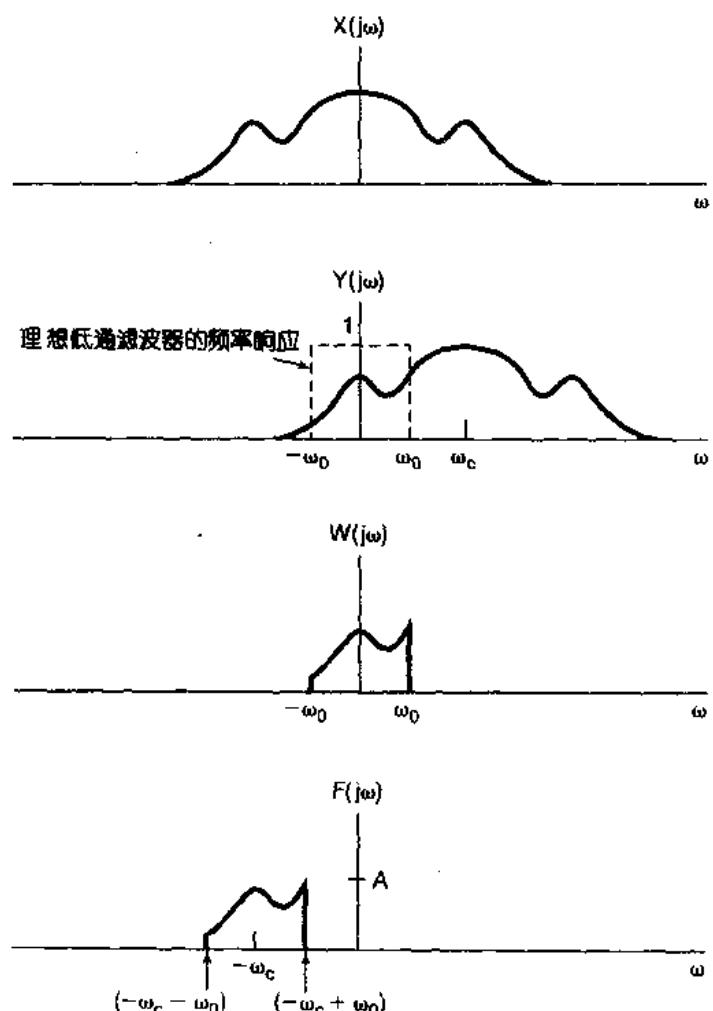


图 4.27 图 4.26 系统中各信号的频谱

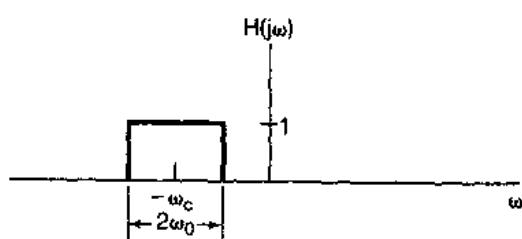


图 4.28 与图 4.26 等效的带通滤波器

分别以 ω_c 和 $-\omega_c$ 为中心的两个频带，如图 4.30 所示。在一定的条件下，利用正弦调制而不用复指
数调制来实现图 4.30 的系统也是可能的。这将在习题 4.46 中进一步说明。

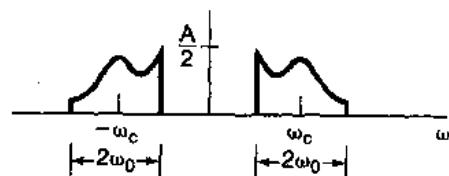


图 4.29 与图 4.26 有关的 $\mathcal{R}\{f(t)\}$ 的频谱

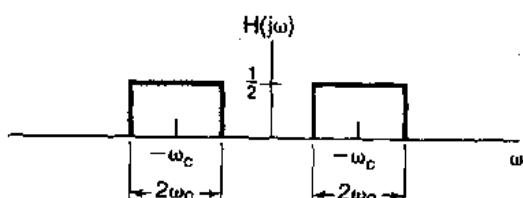


图 4.30 对应于图 4.29 中 $\mathcal{R}\{f(t)\}$ 的等效带通滤波器

4.6 傅里叶变换性质和基本傅里叶变换对列表

在前面几节以及在本章末的习题中已经研究过傅里叶变换若干重要性质，现将这些综合出来列于表 4.1 中。表上还给出了每个性质所在的章节号。

在表 4.2 中汇总了一些基本的而又重要的傅里叶变换对，这些变换对在用傅里叶分析这一工具研究信号与系统时是会反复遇到的。所列变换对除了最后一个外，都在前面各节作为例子讨论过。最后一个变换对将在习题 4.40 中考虑。另外，要注意在表 4.2 中有几个信号是周期的，这时还列出了相应的傅里叶级数系数。

表 4.1 傅里叶变换性质

节次	性质	非周期信号	傅里叶变换
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
4.3.1	线性	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
4.3.2	时移	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
4.3.6	频移	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.3.3	共轭	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	时间反转	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	时间与频率 尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	卷积	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
4.5	相乘	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)$
4.3.4	时域微分	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	积分	$\int_{-\infty}^t x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	频域微分	$jx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
4.3.3	实信号的共轭 对称性	$x(t)$ 为实信号	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \\ \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\} \\ X(j\omega) = X(-j\omega) \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{cases}$
4.3.3	实、偶信号的对称性 $x(t)$ 为实、偶信号		$X(j\omega)$ 为实且偶
4.3.3	实、奇信号的对称性 $x(t)$ 为实、奇信号		$X(j\omega)$ 纯虚且为奇
4.3.3	实信号的奇偶分解	$x_e(t) = \Re\{x(t)\}$ [$x(t)$ 为实] $x_o(t) = \Im\{x(t)\}$ [$x(t)$ 为实]	$\Re\{X(j\omega)\}$ $j\Im\{X(j\omega)\}$
4.3.7	非周期信号的帕斯瓦尔定理		$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$

表 4.2 基本傅里叶变换对

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数 (若为周期的)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0, \text{ 其余 } k$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0, \text{ 其余 } k$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0, \text{ 其余 } k$
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0$ (这是对任意 $T > 0$ 选择) 的傅里叶级数表示
周期方波		
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) =$ $\frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
和		
$x(t+T) = x(t)$		
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T} \quad \text{对全部 } k$
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$\frac{2 \sin \omega_0 T_1}{\omega}$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega_0 t_0}$	—
$e^{-at} u(t), \Re\{a\} > a$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$t e^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t),$ $\Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

在几种场合都曾经讨论过，一类特别重要而有用的连续时间 LTI 系统是其输入输出满足如下形式的线性常系数微分方程的系统

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (4.72)$$

在这一节将要讨论如何确定这样一个 LTI 系统的频率响应问题。全部讨论中都假定系统是稳定的，所以它的频率响应存在。

有两种密切联系的途径可以确定由(4.72)式的微分方程所描述的 LTI 系统的频率响应 $H(j\omega)$ 。其中第一个是依赖于复指数信号是 LTI 系统的特征函数这一事实，这个曾在 3.10 节分析几个简单的非理想滤波器中使用过。具体地说就是，若 $x(t) = e^{j\omega t}$ ，那么输出就一定是 $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ ，将这些代入(4.72)式的微分方程，并作一些代数运算，就能解出 $H(j\omega)$ 。这一节将用另一种方法来达到同样的结果，这就是应用傅里叶变换的微分性质(4.31)式。

现考虑一个由(4.72)式表征的 LTI 系统。根据卷积性质

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

或等效地为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (4.73)$$

其中 $X(j\omega)$ 、 $Y(j\omega)$ 和 $H(j\omega)$ 分别是输入 $x(t)$ 、输出 $y(t)$ 和系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换。现在，对(4.72)式两边取傅里叶变换，得

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \quad (4.74)$$

根据(4.26)式的线性性质，上式变为

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \quad (4.75)$$

并且由微分性质(4.31)式，可得

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

或者等效为

$$Y(j\omega) \left[\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \right] = X(j\omega) \left[\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k \right]$$

因此，由(4.73)式有

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \quad (4.76)$$

可以看出， $H(j\omega)$ 是一个有理函数，也就是两个 $(j\omega)$ 的多项式之比。其分子多项式的系数是与(4.72)式右边的系数相同的，分母多项式的系数就是(4.72)式左边的系数。因此，由

(4.72)式表征的 LTI 系统的频率响应(4.76)式可根据该式的系数直接写出来。

(4.72)式的微分方程一般统称为 N 阶微分方程，因为方程中涉及到直至输出 $y(t)$ 的第 N 阶导数。同时，(4.76)式 $H(j\omega)$ 的分母也是一个($j\omega$)的 N 阶多项式。

例 4.24 有一稳定的 LTI 系统，由如下微分方程表征：

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad (4.77)$$

其中 $a > 0$ 。由(4.76)式，频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (4.78)$$

将该式与例 4.1 的结果作比较，可见(4.78)式就是 $e^{-at}u(t)$ 的傅里叶变换。因此该系统的单位冲激响应就是

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

例 4.25 一稳定的 LTI 系统由下面微分方程所表征：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

由(4.76)式，频率响应是

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} \quad (4.79)$$

为了求出相应的单位冲激响应，要求 $H(j\omega)$ 的反变换，这就要用到在例 4.19 中所用的并在附录中详细讨论的部分分式展开[具体见例 A.1，其中详细地对(4.79)式的部分分式展开作了计算]。作为第一步，要将(4.79)式右边的分母因式分解为较低阶项的乘积：

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \quad (4.80)$$

然后，利用部分分式展开，求得

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 3}$$

这里每一项的反变换都能从例 4.24 中得出，其结果是

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

例 4.25 所采用的求反变换的过程，一般来说，对于变换式是两个($j\omega$)的多项式之比的情况是适用的。特别是，可以用(4.76)式来确定任何一个由线性常系数微分方程描述的 LTI 系统的频率响应 $H(j\omega)$ ，然后利用部分分式展开来计算单位冲激响应。由于部分分式展开的结果，就把频率响应 $H(j\omega)$ 变成这样一种形式，使得其中每一项的反变换都能够一目了然。另外，如果系统输入的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 也是两个($j\omega$)的多项式之比，那么 $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ 也一定是两个($j\omega$)的多项式之比。在这种情况下，就可以用同样的办法来解微分方程，也就是求对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 。下面用一个例子给予说明。

例 4.26 假设例 4.25 系统的输入是

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

那么应用(4.80)式，有

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \left[\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[\frac{1}{j\omega + 1} \right] = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)} \quad (4.81)$$

正如附录中所指出的，这种情况，其部分分式展开应为

$$Y(j\omega) = \frac{A_{11}}{j\omega + 1} + \frac{A_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{A_{21}}{j\omega + 3} \quad (4.82)$$

其中 A_{11} , A_{12} , A_{21} 均是待定常数。为了确定这些常数，可以应用附录中例 A.2 的部分分式展开法求得为

$$A_{11} = \frac{1}{4}, A_{12} = \frac{1}{2}, A_{21} = -\frac{1}{4}$$

于是得到

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 3} \quad (4.83)$$

(4.83)式中每一项的反变换都能直接得到，其中第一项和第三项与前两个例子的形式相同，而第二项的反变换可以从表 4.2 中得到，或者像例 4.19 那样，利用微分性质的对偶性质(4.40)式，对 $1/(j\omega + 1)$ 作频域微分求得。这样(4.83)式的反变换为

$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \right] u(t)$$

由以上这些例子可以看到，傅里叶变换方法如何把一个由微分方程表征的 LTI 系统的问题演变为直接的代数问题，将在本章末习题中用更多的例子来说明这一点。另外(见第 6 章)，在处理由微分方程描述的 LTI 系统中所具有的有理变换的代数结构大大方便于它们频域性质的分析，并且对这类重要系统在时域和频域特性上都能得到更为透彻的认识。

4.8 小 结

这一章我们建立了连续时间信号的傅里叶变换表示，并研究了许多很有用的性质。特别是在把一个非周期信号看作是周期变得任意大时一个周期信号的极限之后，由第 3 章所建立的周期信号的傅里叶级数表示导出了非周期信号的傅里叶变换表示。另外，周期信号本身也可以用傅里叶变换来表示，这个傅里叶变换是由发生在该周期信号各谐波频率上的冲激串所组成，并且每个冲激串的面积正比于各傅里叶系数。

傅里叶变换具有一系列重要性质，这些性质表达了不同的信号特性是如何反映到它们的变换中去的，并且在这一章推导并研究了其中的许多性质。在这些性质当中，有两个性质在研究信号与系统时具有特别重要的意义。第一个就是卷积性质。这个性质是复指数信号的特征函数性质的一个直接结果，并由此导致可以用系统的频率响应来表征一个 LTI 系统。这种表征是用频域的方法来分析 LTI 系统的基础，在后续各章中将继续给予讨论。具有极其重要内涵的傅里叶变换的第二个性质是相乘性质，它是频域分析方法研究采样和调制系统的基础。这些系统将在第 7 章和第 8 章讨论。

同时也看到，傅里叶分析方法特别适合于研究由线性常系数微分方程描述的 LTI 系统。这就是这种系统的频率响应能直接根据微分方程的系数来确定，并利用部分分式展开法，极易求出系统的单位冲激响应。在下面的各章中将会发现，这些系统频率响应的代数结构对于

深入分析它们的时域和频域特性极为方便。

习 题

习题的第一部分属于基本题，答案在书末给出。其余三个部分属基本题、深入题和扩充题。

基本题(附答案)

4.1 利用傅里叶变换分析式(4.9)式，求下列信号的傅里叶变换：

(a) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$ (b) $e^{-2|t-1|}$

概略画出每一个傅里叶变换的模特性并给以标注。

4.2 利用傅里叶变换分析式(4.9)式，求下列信号的傅里叶变换：

(a) $\delta(t+1) + \delta(t-1)$ (b) $\frac{d}{dt}\{u(-2-t) + u(t-2)\}$

概略画出每一个傅里叶变换的模特性并给以标注。

4.3 求下列各周期信号的傅里叶变换：

(a) $\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $1 + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$

4.4 利用傅里叶变换综合式(4.8)式，求下列反变换：

(a) $X_1(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi)$

(b) $X_2(j\omega) = \begin{cases} 2, & 0 \leq \omega \leq 2 \\ -2, & -2 \leq \omega < 0 \\ 0, & |\omega| > 2 \end{cases}$

4.5 利用傅里叶变换综合式(4.8)式，求 $X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)}$ 的反变换，其中

$$|X(j\omega)| = 2\{|u(\omega+3) - u(\omega-3)|\} \quad \angle X(j\omega) = -\frac{3}{2}\omega + \pi$$

用所得答案确定 $x(t)=0$ 时的 t 值。

4.6 已知 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$ ，试将下列各信号的傅里叶变换用 $X(j\omega)$ 来表示。列于表 4.1 中的各种时域变换性质对解此题是有用的。

(a) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$ (b) $x_2(t) = x(3t-6)$ (c) $x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$

4.7 对于下列各傅里叶变换，根据傅里叶变换性质(表 4.1)确定对应于时域信号是否是(i)实，虚，或都不是；(ii)偶、奇，或都不是。应不通过求出反变换来解此题。

(a) $X_1(j\omega) = u(\omega) - u(\omega-2)$ (b) $X_2(j\omega) = \cos(2\omega)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

(c) $X_3(j\omega) = A(\omega)e^{jB(\omega)}$, 式中 $A(\omega) = (\sin 2\omega)/\omega$ 和 $B(\omega) = 2\omega + \frac{\pi}{2}$

(d) $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \delta(\omega - \frac{k\pi}{4})$

4.8 考虑信号

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1, & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(a) 利用表 4.1 的微分和积分性质，及表 4.2 中的矩形脉冲傅里叶变换对，求 $X(j\omega)$ 的闭式表示式。

(b) $g(t) = x(t) - \frac{1}{2}$ 的傅里叶变换是什么?

4.9 考虑信号

$$x(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1 \\ (t+1)/2, & -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(a) 借助于表 4.1 和表 4.2, 求 $X(j\omega)$ 的闭式表示式。

(b) 取(a)中答案的实部, 证明它就是 $x(t)$ 的偶部的傅里叶变换。

(c) $x(t)$ 奇部的傅里叶变换是什么?

4.10 (a) 借助于表 4.1 和表 4.2, 求下列信号的傅里叶变换:

$$x(t) = t \left(\frac{\sin t}{\pi t} \right)^2$$

(b) 利用帕斯瓦尔定理和上面结果, 求

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \left(\frac{\sin t}{\pi t} \right)^4 dt$$

值为多少?

4.11 已知下列关系:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

和

$$g(t) = x(3t) * h(3t)$$

并已知 $x(t)$ 的傅里叶变换是 $X(j\omega)$, $h(t)$ 的傅里叶变换是 $H(j\omega)$, 利用傅里叶变换性质证明 $g(t)$ 为

$$g(t) = Ay(Bt)$$

求出 A 和 B 的值。

4.12 考虑下面傅里叶变换对:

$$e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1 + \omega^2}$$

(a) 利用恰当的傅里叶变换性质求 $te^{-|t|}$ 的傅里叶变换。

(b) 根据(a)的结果, 再结合对偶性质, 求

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

的傅里叶变换。

[提示: 见例 4.13]。

4.13 设 $x(t)$ 的傅里叶变换为

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$$

并令

$$h(t) = u(t) - u(t-2)$$

(a) $x(t)$ 是周期的吗?

(b) $x(t) * h(t)$ 是周期的吗?

(c) 两个非周期信号的卷积有可能是周期的吗?

4.14 考虑一信号 $x(t)$, 其傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 假设给出下列条件:

1. $x(t)$ 是实值且非负的。

2. $\mathcal{F}^{-1}\{(1+j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-2t}u(t)$, A 与 t 无关。

3. $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi$

求 $x(t)$ 的闭式表达式。

4.15 设 $x(t)$ 有傅里叶变换 $X(j\omega)$, 假设给出下列条件:

1. $x(t)$ 为实值信号。

2. $x(t) = 0, t \leq 0$

3. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = |t| e^{-|t|}$

求 $x(t)$ 的闭式表达式。

4.16 考虑信号

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{4})}{(k \frac{\pi}{4})} \delta(t - k \frac{\pi}{4})$$

(a) 求满足

$$x(t) = \left(\frac{\sin t}{\pi t} \right) g(t)$$

的 $g(t)$ 。

(b) 利用傅里叶变换的相乘性质, 证明 $X(j\omega)$ 是周期的, 给出一个周期内的 $X(j\omega)$ 。

4.17 试判断下面每一种说法是对, 或是错, 并给出理由。

(a) 一个奇的且为纯虚数的信号总是有一个奇的且为纯虚数的傅里叶变换。

(b) 一个奇的傅里叶变换与一个偶的傅里叶变换的卷积总是奇的。

4.18 有一系统其频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{(\sin^2(3\omega)) \cos \omega}{\omega^2}$$

求它的单位冲激响应。

4.19 有一因果 LTI 系统, 其频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

对于某一特定的输入 $x(t)$, 观察到该系统的输出是

$$y(t) = e^{-3t} u(t) - e^{-4t} u(t)$$

求 $x(t)$ 。

4.20 求习题 3.20 考虑的由 RLC 电路表示的该因果 LTI 系统的单位冲激响应。用求该电路频率响应的反变换来求。表 4.1 和表 4.2 都将有助于反变换的求取。

基本题

4.21 求下列每一信号的傅里叶变换:

(a) $[e^{-at} \cos \omega_0 t] u(t), a > 0$

(b) $e^{-3|t|} \sin 2t$

(c) $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT), |a| < 1$

(e) $[te^{-2t} \sin 4t] u(t)$

(f) $\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right] \left[\frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)} \right]$

(g) $x(t)$ 如图 P4.21(a) 所示

(h) $x(t)$ 如图 P4.21(b) 所示

(i) $x(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其余} \end{cases}$

(j) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|t-2n|}$

4.22 对下列每一个变换求对应的连续时间信号:

(a) $X(j\omega) = \frac{2\sin[3(\omega - 2\pi)]}{(\omega - 2\pi)}$

(b) $X(j\omega) = \cos(4\omega + \pi/3)$

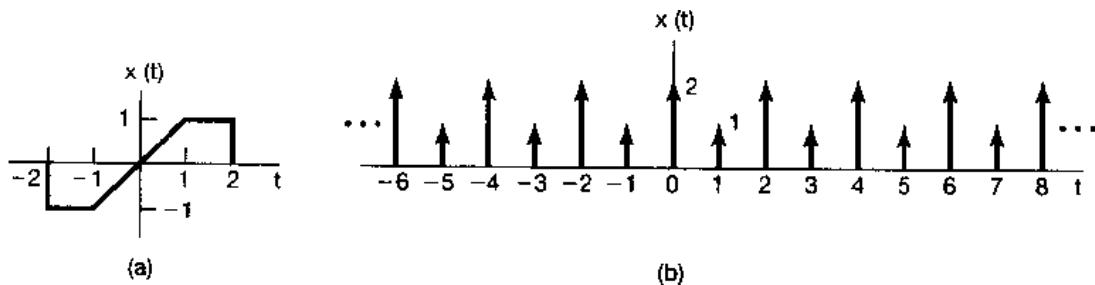


图 P4.21

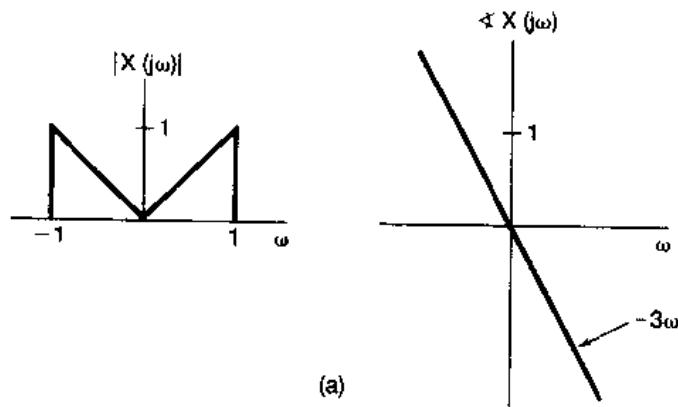
(a)
(b)

图 P4.22

(c) $X(j\omega)$ 的模和相位如图

P4.22(a)所示

$$(d) X(j\omega) = 2[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] + 3[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$$

(e) $X(j\omega)$ 如图 4.22(b) 所示4.23 考虑信号 $x_0(t)$ 为

$$x_0(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases}$$

求图 P4.23 所示每一个信号的傅里叶变换。解此题时，应该能够仅仅需要具体地求出 $x_0(t)$ 的变换，然后利用傅里叶变换性质来求其它的变换。

4.24 (a) 图 P4.24 中所示实信号有

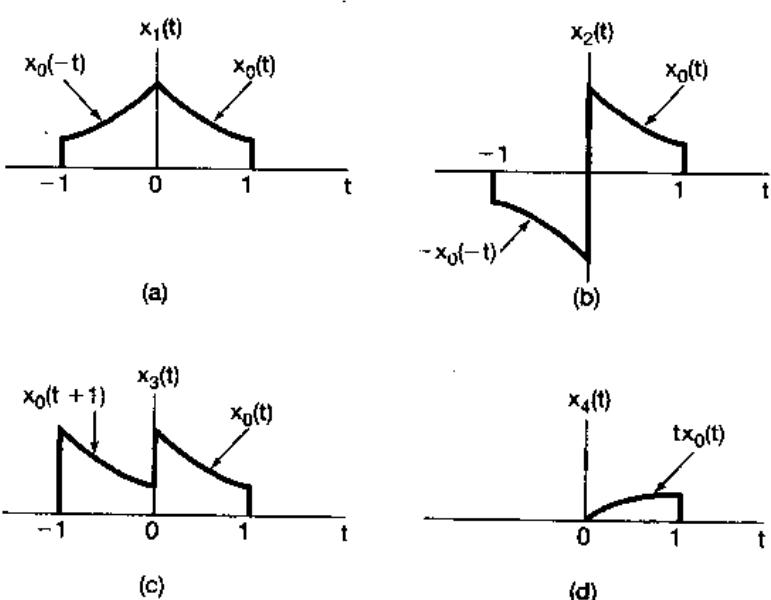


图 P4.23

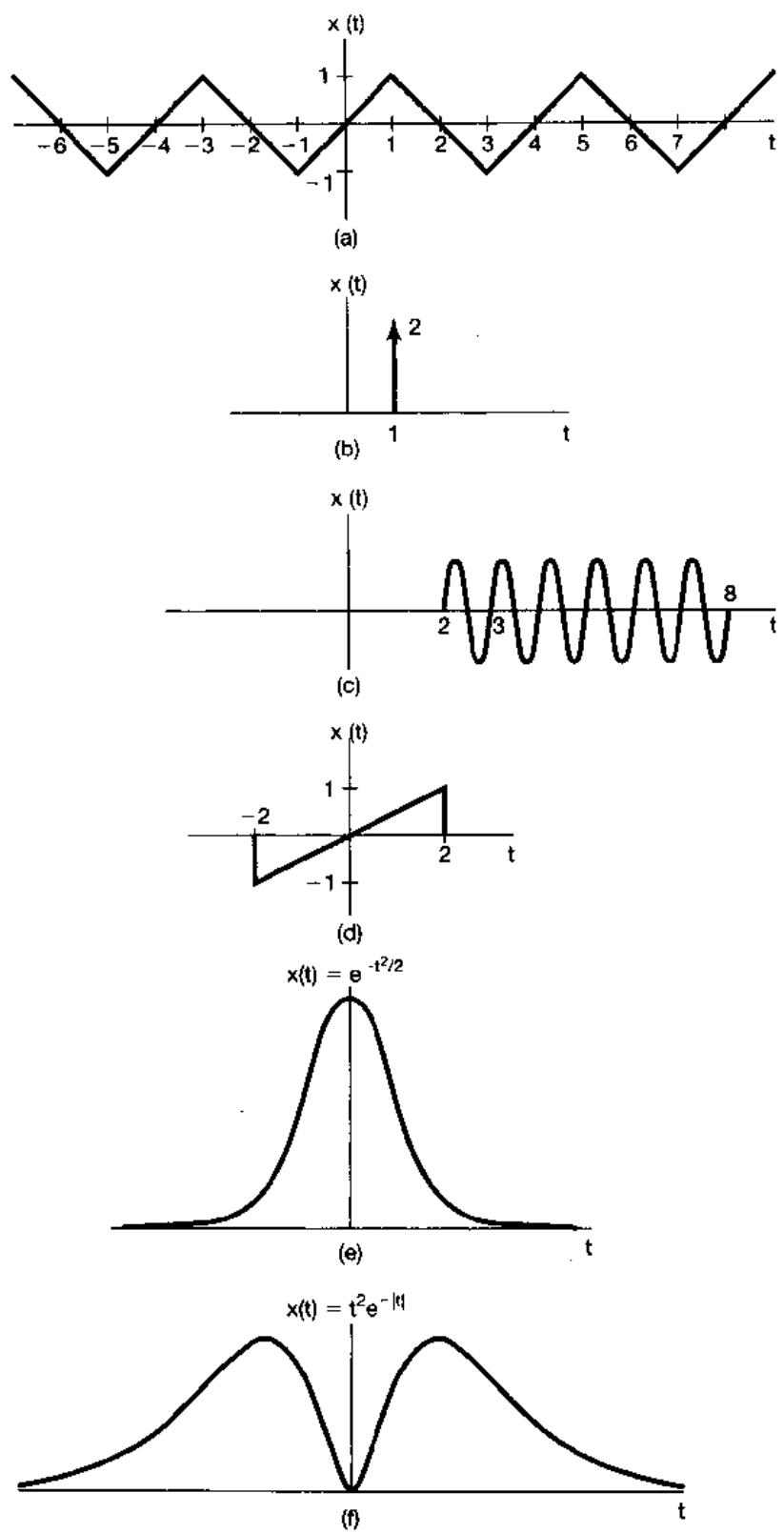


图 P4.24

哪些(如果有), 其傅里叶变换满足下列所有条件:

- (1) $\Re\{X(j\omega)\} = 0$
- (2) $\Im\{X(j\omega)\} = 0$

(3) 存在一个实数 a , 使 $e^{j\omega}X(j\omega)$ 为实函数

$$(4) \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega = 0$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega) d\omega = 0$$

(6) $X(j\omega)$ 是周期的。

(b) 构造一个信号, 它具有上述性质(1), (4)和(5), 但没有其余性质。

4.25 设 $X(j\omega)$ 为图 P4.25 信号 $x(t)$ 的傅里叶变换:

(a) 求 $\Re X(j\omega)$

(b) 求 $X(j0)$

$$(c) \text{求 } \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$$

$$(d) \text{计算 } \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$$

$$(e) \text{计算 } \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

(f) 画出 $\Re\{X(j\omega)\}$ 的反变换

注意: 不必具体算出 $X(j\omega)$ 而能完成以上全部计算。

4.26 (a) 利用卷积性质和反变换, 用计算 $X(j\omega)$ 和 $H(j\omega)$ 求下列各对信号 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积:

$$(1) x(t) = te^{-2t}u(t), h(t) = e^{-4t}u(t)$$

$$(2) x(t) = te^{-2t}u(t), h(t) = te^{-4t}u(t)$$

$$(3) x(t) = e^{-t}u(t), h(t) = e^t u(-t)$$

(b) 假设 $x(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$, $h(t)$ 如图 P4.26 所示, 对这一对

信号, 通过证明 $y(t) = x(t) * h(t)$ 的傅里叶变换等于 $H(j\omega)X(j\omega)$ 来验证卷积性质。

4.27 考虑信号

$$x(t) = u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-3)$$

和

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$$

式中 $T > 0$ 。令 a_k 记作 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶系数, $X(j\omega)$ 为 $x(t)$ 的傅里叶变换。

(a) 求 $X(j\omega)$ 的闭式表达式。

$$(b) \text{求傅里叶系数 } a_k \text{ 的表达式, 并验证 } a_k = \frac{1}{T} X\left(j \frac{2\pi k}{T}\right)$$

4.28 (a) 设 $x(t)$ 有傅里叶变换 $X(j\omega)$, 令 $p(t)$ 为基波频率 ω_0 的周期信号, 其傅里叶级数表示是

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j n \omega_0 t}$$

求

$$y(t) = x(t)p(t) \quad (\text{P4.28-1})$$

的傅里叶变换表示式。

(b) 设 $X(j\omega)$ 如图 P4.28(a) 所示, 对下列每一个 $p(t)$ 画出 (P4.28-1) 式 $y(t)$ 的频谱:

$$(1) p(t) = \cos(t/2)$$

$$(2) p(t) = \cos t$$

$$(3) p(t) = \cos 2t$$

$$(4) p(t) = (\sin t)(\sin 2t)$$

$$(5) p(t) = \cos 2t - \cos t$$

$$(6) p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \pi n)$$

$$(7) p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi n)$$

$$(8) p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 4\pi n)$$

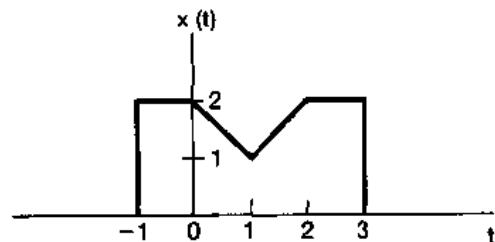


图 P4.25

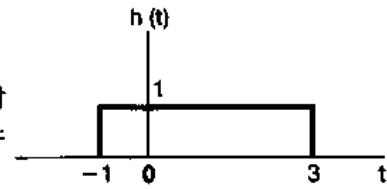


图 P4.26

$$(9) p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi n) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \pi n)$$

(10) $p(t)$ 为图 P4.28(b) 所示周期方波

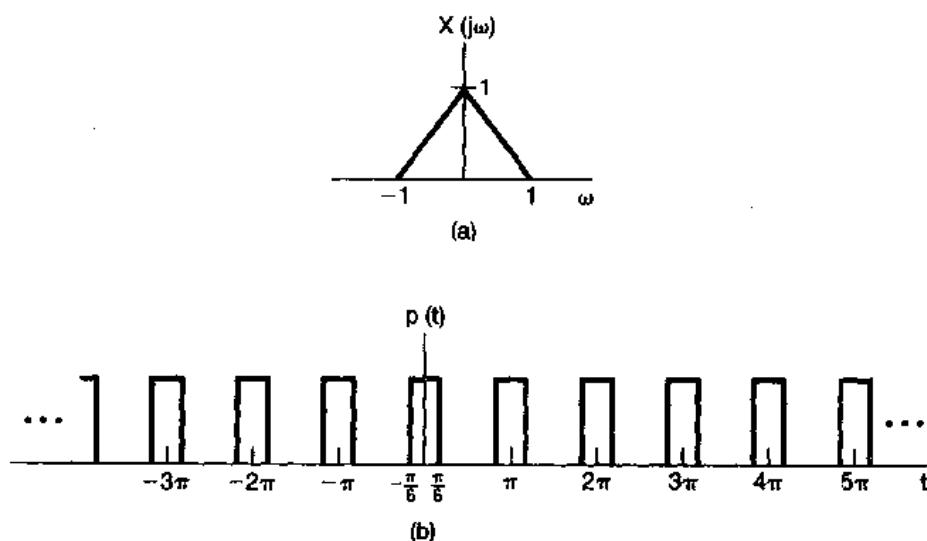


图 P4.28

4.29 一个实值连续时间函数 $x(t)$ 有傅里叶变换 $X(j\omega)$, 其模与相位如图 P4.29(a)所示。

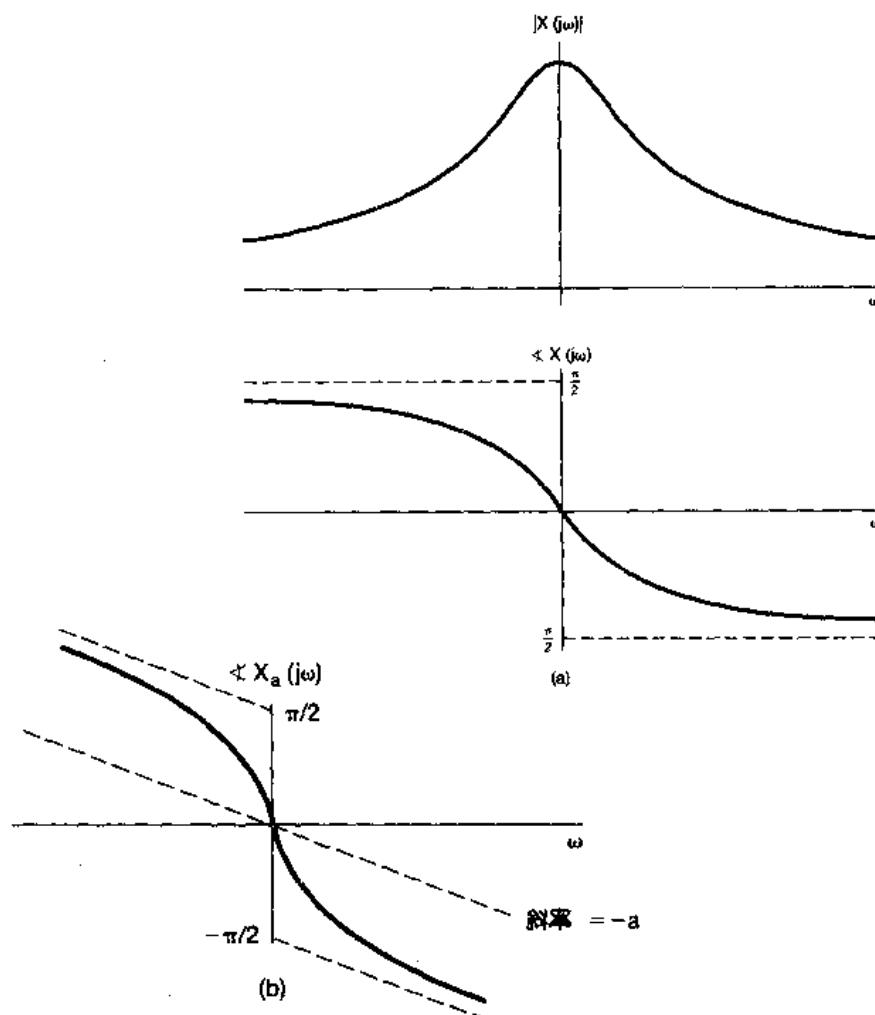


图 P4.29

函数 $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_c(t)$ 和 $x_d(t)$ 都有傅里叶变换，它们的模都与 $X(j\omega)$ 的模完全相同，但相位不同，分别如图 4.29(b)~(e) 所示。相位函数 $\angle x_a(j\omega)$ 和 $\angle x_b(j\omega)$ 是通过给 $X(j\omega)$ 附加一个线性相位而形成的；相位函数 $\angle X_c(j\omega)$ 是把 $X(j\omega)$ 关于 $\omega=0$ 反转得来的；而 $\angle X_d(j\omega)$ 则是把反转和附加线性相位结合在一起得到的。利用傅里叶变换性质，确定用 $x(t)$ 表示 $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_c(t)$ 和 $x_d(t)$ 的表示式。

- 4.30 假设 $g(t) = x(t)\cos t$, 而 $g(t)$ 的傅里叶变换是

$$G(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2 \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

(a) 求 $x(t)$

(b) 若有

$$g(t) = x_1(t)\cos\left(\frac{2}{3}t\right)$$

请标明 $x_1(t)$ 的傅里叶变换 $X_1(j\omega)$ 。

- 4.31 (a) 证明下面三个不同单位冲激响应的 LTI 系统：

$$h_1(t) = u(t)$$

$$h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t)$$

和

$$h_3(t) = 2te^{-t}u(t)$$

对输入为 $x(t) = \cos t$ 的响应全都一样。

- (b) 求另一个 LTI 系统的单位冲激响应，它对 $\cos t$ 的响应也相同。

这道题说明，对 $\cos t$ 的响应不能唯一用来标定一个 LTI 系统。

- 4.32 考虑一 LTI 系统 S ，其单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}$$

求系统 S 对下面每个输入信号的输出：

$$(a) x_1(t) = \cos(6t + \frac{\pi}{2}) \quad (b) x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \sin(3kt)$$

$$(c) x_3(t) = \frac{\sin(4(t+1))}{\pi(t+1)} \quad (d) x_4(t) = (\frac{\sin 2t}{\pi t})^2$$

- 4.33 一因果 LTI 系统的输入和输出，由下列微分方程表征：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

- (a) 求该系统的单位冲激响应。

- (b) 若 $x(t) = te^{-2t}u(t)$ ，该系统的响应是什么？

- (c) 对于由下列方程描述的因果 LTI 系统，重做(a)

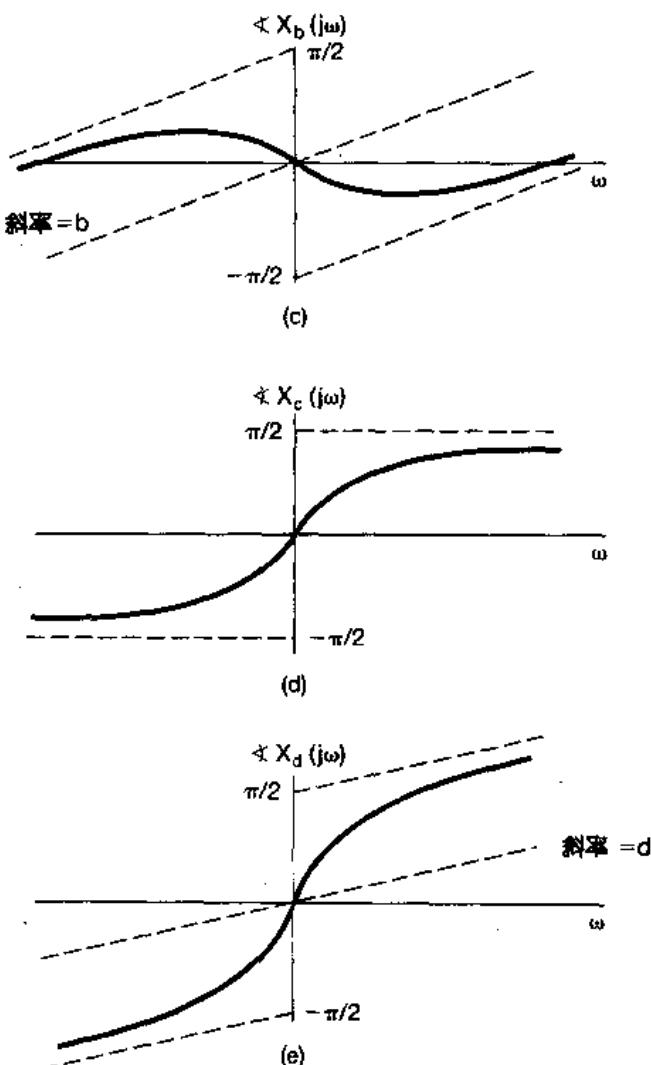


图 P4.29

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2x(t)$$

4.34 一个因果稳定的 LTI 系统 S, 有频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + 5j\omega}$$

(a) 写出关联系统 S 输入和输出的微分方程。

(b) 求该系统 S 的单位冲激响应 $h(t)$ 。

(c) 若输入 $x(t)$ 为

$$x(t) = e^{-4t}u(t) - te^{-4t}u(t)$$

求系统的输出。

4.35 在本题中给出有关相位非线性变化产生的影响的几个例子。

(a) 有一连续时间 LTI 系统, 其频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega}$$

式中 $a > 0$ 。问 $H(j\omega)$ 的模是什么? $\angle H(j\omega)$ 是什么? 该系统的单位冲激响应是什么?

(b) 若在(a)中, $a = 1$, 当输入为

$$\cos(t/\sqrt{3}) + \cos t + \cos\sqrt{3}t$$

求该系统输出。大致画出输入和输出。

4.36 考虑一 LTI 系统, 对输入 $x(t)$ 为

$$x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]u(t)$$

响应 $y(t)$ 是

$$y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]u(t)$$

(a) 求系统频率响应。

(b) 确定该系统的单位冲激响应。

(c) 求关联系统输入和输出的微分方程。

深入题

4.37 考虑示于图 P4.37 的信号 $x(t)$

(a) 求 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 。

(b) 大致画出信号

$$\hat{x}(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4k)$$

(c) 找另一个 $g(t)$, $g(t)$ 不同于 $x(t)$, 而有

$$\hat{x}(t) = g(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4k)$$

(d) 证明: 虽然 $G(j\omega)$ 不同于 $X(j\omega)$, 但是对全部整数 k 有

$$G\left(j\frac{\pi k}{2}\right) = X\left(j\frac{\pi k}{2}\right)$$

4.38 设 $x(t)$ 为任意信号, 其傅里叶变换为 $X(j\omega)$ 。傅里叶变换的频移性质可陈述为

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega - \omega_0))$$

(a) 对分析公式

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

施加频率偏移来证明频移性质。

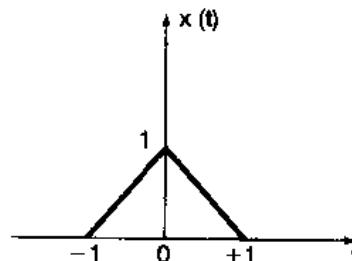


图 P4.37

(b) 利用 $e^{j\omega_0 t}$ 的傅里叶变换，再与傅里叶变换的相乘性质结合起来证明频移性质。

- 4.39 假设一信号 $x(t)$ 有傅里叶变换 $X(j\omega)$ ，现考虑另一信号 $g(t)$ ，它的形状与 $X(j\omega)$ 的形状完全相同，即

$$g(t) = X(jt)$$

(a) 证明： $g(t)$ 的傅里叶变换 $G(j\omega)$ 有与 $2\pi x(-t)$ 同样的形状，也即要证明

$$G(j\omega) = 2\pi x(-\omega)$$

(b) 利用

$$\mathcal{F}[\delta(t+B)] = e^{jB\omega}$$

再结合(a)中的结果，证明：

$$\mathcal{F}[e^{jB\omega}] = 2\pi\delta(\omega - B)$$

- 4.40 利用傅里叶变换性质，用归纳法证明：

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), a > 0$$

的傅里叶变换是

$$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$$

- 4.41 本题要导出连续时间傅里叶变换的相乘性质。令 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续时间信号，其傅里叶变换分别为 $X(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$ 。同时，令 $g(t)$ 是 $\frac{1}{2\pi} \{X(j\omega) * Y(j\omega)\}$ 的傅里叶反变换。

(a) 证明：

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j(\omega - \theta)) e^{j\omega t} d\omega \right] d\theta$$

(b) 证明：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j(\omega - \theta)) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\theta t} y(t)$$

(c) 将(a)和(b)中的结果结合起来得出

$$g(t) = x(t)y(t)$$

- 4.42 令

$$g_1(t) = \{[\cos(\omega_0 t)]x(t)\} * h(t) \quad \text{和} \quad g_2(t) = \{[\sin(\omega_0 t)]x(t)\} * h(t)$$

式中

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk100t}$$

是一个实值周期信号， $h(t)$ 是一个稳定的 LTI 系统的单位冲激响应。

(a) 给出某一 ω_0 值，并在 $H(j\omega)$ 上给予任何必要的限制以保证

$$g_1(t) = \Re\{a_5\} \quad \text{和} \quad g_2(t) = \Im\{a_5\}$$

(b) 给出 $h(t)$ 的一个例子以使得 $H(j\omega)$ 满足在(a)中所给定的限制。

- 4.43 令

$$g(t) = x(t) \cos^2 t * \frac{\sin t}{\pi t}$$

假定 $x(t)$ 是实信号，并且 $X(j\omega) = 0, |\omega| \geq 1$ 。证明存在一个 LTI 系统 S ，使之有

$$x(t) \xrightarrow{S} g(t)$$

- 4.44 一因果 LTI 系统的输入、输出关系由下列方程给出

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) z(t - \tau) d\tau - x(t)$$

式中 $z(t) = e^{-t} u(t) + 3\delta(t)$

(a) 求该系统的频率响应 $H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$ 。

(b) 求该系统的单位冲激响应。

4.45 在 4.3.7 节讨论连续时间信号的帕斯瓦尔定理时看到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

说的是在信号中的总能量可以在全部频率积分 $|X(j\omega)|^2$ 来求得。现在考虑一个实值信号 $x(t)$ 经由图 P4.45 的理想带通滤波器处理后得输出信号 $y(t)$, 试将 $y(t)$ 的能量用 $|X(j\omega)|^2$ 在频率上的积分来表示。对于足够小的 Δ , 以使得 $|X(j\omega)|$ 在宽度为 Δ 的频率区间内近似为一常数, 证明该带通滤波器输出 $y(t)$ 的能量近似地正比于 $\Delta|X(j\omega_0)|^2$ 。

基于上述结论, $\Delta|X(j\omega_0)|^2$ 正比于该信号在以 ω_0 为中心, 带宽为 Δ 内的能量。为此, $|X(j\omega)|^2$ 往往称为信号 $x(t)$ 的能量密度谱。

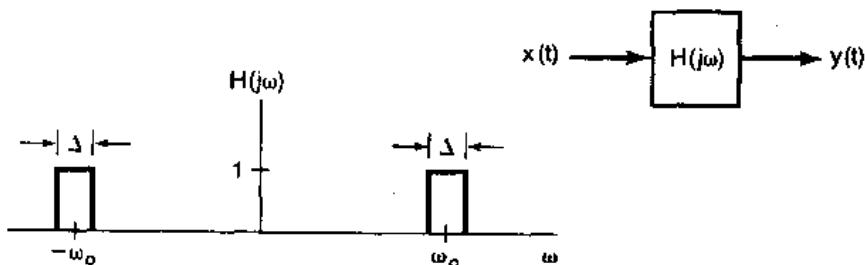


图 P4.45

4.46 在 4.5.1 节曾讨论过用复指数载波的幅度调制来实现一个带通滤波器, 对于图 4.26 这样的系统, 若仅保留 $f(t)$ 的实部, 其等效带通滤波器就如图 4.30 所示。

在图 P4.46 中示出利用正弦调制和低通滤波器实现一个带通滤波器的原理图。证明该系统的输出 $y(t)$ 与图 4.26 仅保留 $\Re\{f(t)\}$ 所得到的输出是一样的。

4.47 具有实的因果单位冲激响应 $h(t)$ 的连续时间 LTI 系统频率响应 $H(j\omega)$ 的一个重要性质是 $H(j\omega)$ 可完全由它的实部 $\Re\{H(j\omega)\}$ 来表征。这一特性通常称之为实部自满特性。本题所关心的是导出并研究这一特性的某些内涵。

(a) 通过研究信号 $h(t)$ 的偶部 $h_e(t)$ 来证明实部自满特性。 $h_e(t)$ 的傅里叶变换是什么? 指出如何能从 $h_e(t)$ 来得到 $h(t)$ 。

(b) 若一个因果系统频率响应的实部是

$$\Re\{H(j\omega)\} = \cos\omega$$

那么, $h(t)$ 是什么?

(c) 证明: 除了 $t=0$ 外, 对一切 t 值, 都能够从 $h(t)$ 的奇部 $h_o(t)$ 得到 $h(t)$ 。注意, 如果 $h(t)$ 在 $t=0$ 不包含任何奇异函数 [$\delta(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ 等等] 的话, 那么频率响应

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

将不因 $h(t)$ 在 $t=0$ 这一点置于任意有限值而改变。从而, 在这种情况下, 证明 $H(j\omega)$ 也完全由它的虚部来确定。

扩充题

4.48 现在考虑一个实且为因果单位冲激响应 $h(t)$ 的系统, 并假定 $h(t)$ 在 $t=0$ 没有任何奇异性。在习题 4.47 中已看到, 无论 $H(j\omega)$ 的实部或虚部都能完全确定 $H(j\omega)$ 。在本题将导出 $H(j\omega)$ 的实部 $H_R(j\omega)$ 和虚部 $H_I(j\omega)$ 之间的明确关系。

(a) 首先由于 $h(t)$ 是因果的, 因而可能除去 $t=0$ 以外, 有

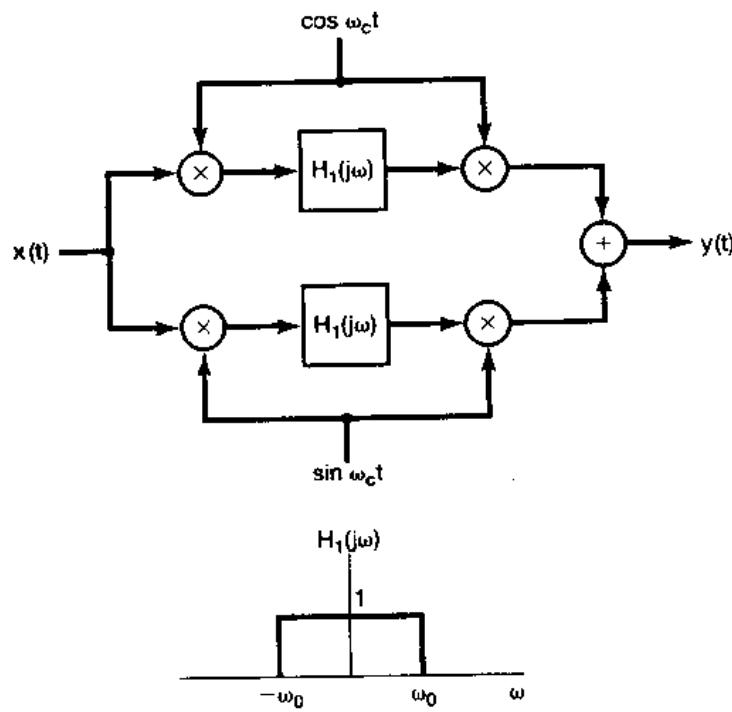


图 P4.46

$$h(t) = h(t)u(t) \quad (\text{P4.48-1})$$

现在,因为 $h(t)$ 在 $t=0$ 不包含任何奇异函数,所以(P4.48-1)式两边的傅里叶变换必是恒等。根据这一点再结合相乘性质。证明:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(j\eta)}{\omega - \eta} d\eta \quad (\text{P4.48-2})$$

利用(P4.48-2)式确定用 $H_L(j\omega)$ 来表示 $H_R(j\omega)$ 的表示式,以及用 $H_R(j\omega)$ 来表示 $H_L(j\omega)$ 的表示式。

$$(b) \quad y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (\text{P4.48-3})$$

这种运算称为希尔伯特变换(Hilbert transform)。刚才已经看到,对一个实、因果单位冲激响应 $h(t)$,其傅里叶变换的实部和虚部可以互相利用希尔伯特变换来确定。

现在考虑(P4.48-3)式,并认为 $y(t)$ 是一个 LTI 系统对输入 $x(t)$ 的输出。证明该系统的频率响应是

$$H(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases}$$

(c) 信号 $x(t) = \cos 3t$ 的希尔伯特变换是什么?

4.49 设 $H(j\omega)$ 是一个连续时间 LTI 系统的频率响应,并假定 $H(j\omega)$ 是实、偶函数且为正值。同时还假定

$$\max_{\omega} |H(j\omega)| = H(0)$$

(a) 证明:(i) 单位冲激响应 $h(t)$ 是实的。

$$(ii) \max_{\omega} |h(t)| = h(0)$$

[提示:若 $f(t, \omega)$ 是两个变量的复函数,则

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \omega) d\omega \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t, \omega)| d\omega.$$

(b) 在系统分析中,一个重要的概念是 LTI 系统的带宽。有几个不同的方式来定义带宽,但它们都与

这样一个定性的和直观的概念有关，即：频率响应为 $G(j\omega)$ 的系统，在 $G(j\omega)$ 为零或者小的那些 ω 值上能基本“阻止”形式为 $e^{j\omega t}$ 的信号，而在 $G(j\omega)$ 比较大的频带内则能够让这些复指数信号“通过”，这一频带的宽度就是带宽。这些概念在第 6 章将变得更为清楚。但是现在将研究带宽的一种特殊定义，这个定义对于具有上面所规定的 $H(j\omega)$ 特性的频率响应的系统是合适的。这就是，这种系统的带宽 B_W 的一种定义是，把高度为 $H(0)$ 的一个矩形的宽度作为带宽，该矩形的面积等于 $H(j\omega)$ 下的面积。这可以用图 P4.49(a) 说明。注意，由于 $H(0) = \max_{\omega} H(\omega)$ ，因此图中所指出的位于频带内的那些频率就是 $H(j\omega)$ 是最大的那些频率。在这个图中，当然，宽度的严格选取是有点任意性的，但是已经选择了一种定义，就能够在不同的系统之间进行比较，并准确作出与时间和频率之间一种很重要的关系。

频率响应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

的系统，其带宽为什么？

(c) 求出用 $H(j\omega)$ 表示带宽 B_W 的表达式。

(d) 设 $s(t)$ 代表(a)中所设定系统的阶跃响应。对一个系统的响应速率的重要度量是上升时间。和带宽一样，上升时间也是一个定性概念，从而可能导致许多数学上不同的定义，在此将使用其中的一种。直观上看，一个系统的上升时间是其阶跃响应从零上升到它的终值

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$$

有多快的一种度量。因而，上升时间越小，该系统的响应就越快。对于在本题中所考虑的系统，将上升时间 t_r 定义为

$$t_r = \frac{s(\infty)}{h(0)}$$

因为

$$s'(t) = h(t)$$

又因为有 $h(0) = \max_t h(t)$ 这一性质，所以可以把 t_r 看作这样一个时间，即：在保持 $s(t)$ 的最大变化率的情况下， $s(t)$ 由零上升到 $s(\infty)$

所需的时间，这就如图 P4.49(b) 所说明的。

求用 $H(j\omega)$ 表示 t_r 的表达式

(e) 将(c)和(d)的结果结合起来，证明：

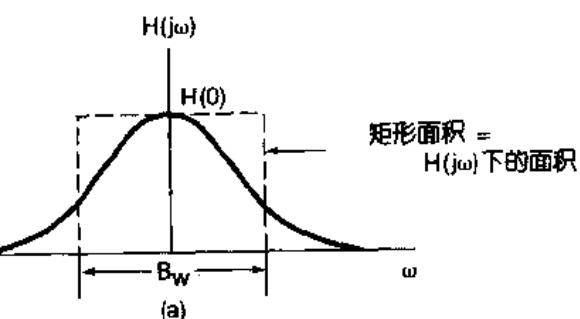


图 P4.49(a)

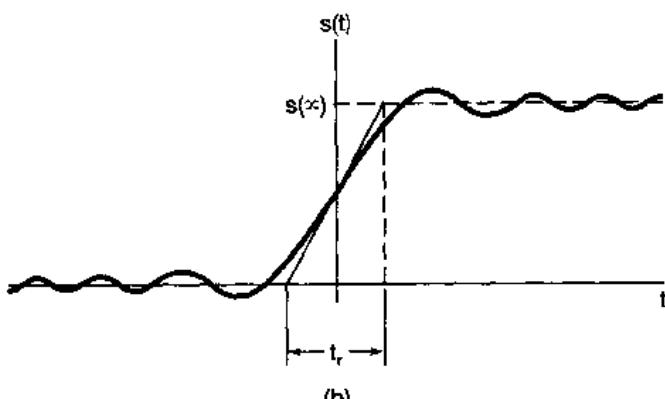


图 P4.49(b)

$$B_W t_r = 2\pi \quad (\text{P4.49-1})$$

因此，我们不能独立地既要求系统有一定的上升时间，又要求有一定的带宽。例如，如果要求一个快速响应的系统(t_r 小)，那么(P4.49-1)式就意味着该系统必须有较大的带宽。这是一个基本

的折衷关系，这一点在许多系统设计中是最为核心的问题。

- 4.50 在习题 1.45 和习题 2.67 中，曾定义并研究了相关函数的几个性质和用途。在本题中将考查这些函数在频域的性质。设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个实信号，那么 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数就定义为

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

同样，也可以定义 $\phi_{yx}(t)$ ， $\phi_{xx}(t)$ 和 $\phi_{yy}(t)$ [后两个分别称为 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的自相关函数]。设 $\Phi_{yx}(j\omega)$ ， $\Phi_{yx}(j\omega)$ ， $\Phi_{xx}(j\omega)$ 和 $\Phi_{yy}(j\omega)$ 分别代表 $\phi_{xy}(t)$ ， $\phi_{yx}(t)$ ， $\phi_{xx}(t)$ 和 $\phi_{yy}(t)$ 的傅里叶变换。

(a) $\Phi_{xy}(j\omega)$ 和 $\Phi_{yx}(j\omega)$ 之间的关系是什么？

(b) 求出用 $X(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$ 表示 $\Phi_{xy}(j\omega)$ 的表达式。

(c) 证明：对一切 ω ， $\Phi_{xx}(j\omega)$ 是实函数，而且是非负的。

(d) 现在假设 $x(t)$ 是一个 LTI 系统的输入， $y(t)$ 为输出，该系统的单位冲激响应为实数值，频率响应为 $H(j\omega)$ 。求出用 $\Phi_{xx}(j\omega)$ 和 $H(j\omega)$ 表示 $\Phi_{xy}(j\omega)$ 和 $\Phi_{yx}(j\omega)$ 的表达式。

(e) 设 $x(t)$ 如图 P4.50 所示，LTI 系统的单位冲激响应为 $h(t) = e^{-at}u(t)$ ， $a > 0$ ，利用(a)-(d)的结果计算 $\Phi_{xy}(j\omega)$ ， $\Phi_{yx}(j\omega)$ 和 $\Phi_{yy}(j\omega)$ 。

(f) 假设已知函数 $\phi(t)$ 的傅里叶变换为

$$\Phi(j\omega) = \frac{\omega^2 + 100}{\omega^2 + 25}$$

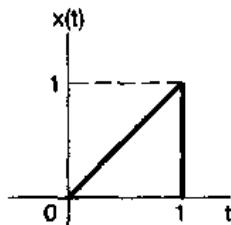


图 P4.50

求出两个因果、稳定 LTI 系统的单位冲激响应，它们的自相关函数都等于 $\phi(t)$ 。这两个系统中，哪一个具有稳定、因果的逆系统？

- 4.51 (a) 考虑两个 LTI 系统，其单位冲激响应分别为 $h(t)$ 和 $g(t)$ ，假设这两个系统是彼此互逆的，而且它们的频率响应分别记作 $H(j\omega)$ 和 $G(j\omega)$ 。试问 $H(j\omega)$ 和 $G(j\omega)$ 之间的关系是什么？

(b) 一个连续时间 LTI 系统，其频率响应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & 2 < |\omega| < 3 \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

(i) 对该系统能够找到一个输入 $x(t)$ ，使得输出如图 P4.50 所示吗？如果能，请找出这样的 $x(t)$ ；若不能，请说明理由。

(ii) 该系统是可逆的吗？请说明理由。

- (c) 考虑一个有回声问题的会场。正如在习题 2.64 中所讨论的，可以把会场的声学机理作为一个 LTI 系统来建立其模型，该系统的单位冲激响应由一冲激串所组成，其中第 k 个冲激就对应于第 k 次回声。假定在此特定情况下，单位冲激响应是

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} \delta(t - kT)$$

式中因子 e^{-kT} 表示第 k 次回声的衰减。

为了获得高质量的舞台录音效果，必须对录制设备所检测到的声音进行某些处理，以消除回声的影响。在习题 2.64 中，曾用卷积的方法设计这样一个处理器的例子（对某一个不同的声学模型）。在本题中，将用频域的方法来考虑这一问题。设 $G(j\omega)$ 代表要被用作处理检测到的声音信号的 LTI 系统的频率响应。试选取 $G(j\omega)$ ，使得回声完全被消除，而得到的信号是原来舞台声音的准确再现。

(d) 求单位冲激响应为

$$h(t) = 2\delta(t) + u_1(t)$$

系统的逆系统的微分方程。

(e) 一个初始松弛且由下列微分方程描述的 LTI 系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

该系统的逆系统也是初始松弛的，而且也可以用一个微分方程来描述。求出描述这个逆系统的微分方程，并求出原来系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和它的逆系统的单位冲激响应 $g(t)$ 。

- 4.52 在涉及性能不完善的测量装置的问题中，往往你会发现逆系统的应用。例如，考虑一个测量液体温度的装置，由于测量元件（如温度计中的水银）的响应特性，系统不能对温度的变化作出瞬时响应，因此通常将它作为一个 LTI 系统来建模是合理的。假定这个装置对温度的单位阶跃响应为

$$s(t) = (1 - e^{-t/2})u(t) \quad (\text{P4.52-1})$$

- (a) 设计一个补偿系统，当把测量装置的输出提供给该系统时，它产生的输出等于液体的瞬时温度。
 (b) 在把逆系统用作测量装置的补偿器时，常常发生的一个问题是：如果由于装置内微小而无规律的一些现象致使测量装置的实际输出包含有误差的话，就可能会发生很大的读数误差。由于在实际系统中，这种误差源总是存在的，因此就必须考虑它们。为了说明这一点，现研究一个测量装置，它的总输出可以用(P4.52-1)式所表示的测量装置的响应与干扰“噪声”信号 $n(t)$ 之和来模拟。这样一个模型示于图 P4.52(a) 中，图中也包括了(a) 中的逆系统，该系统以测量装置的总输出作为输入。假定 $n(t) = \sin \omega t$ ，那么 $n(t)$ 对逆系统的输出有什么影响？随着 ω 的增加，这个输出又如何变化？

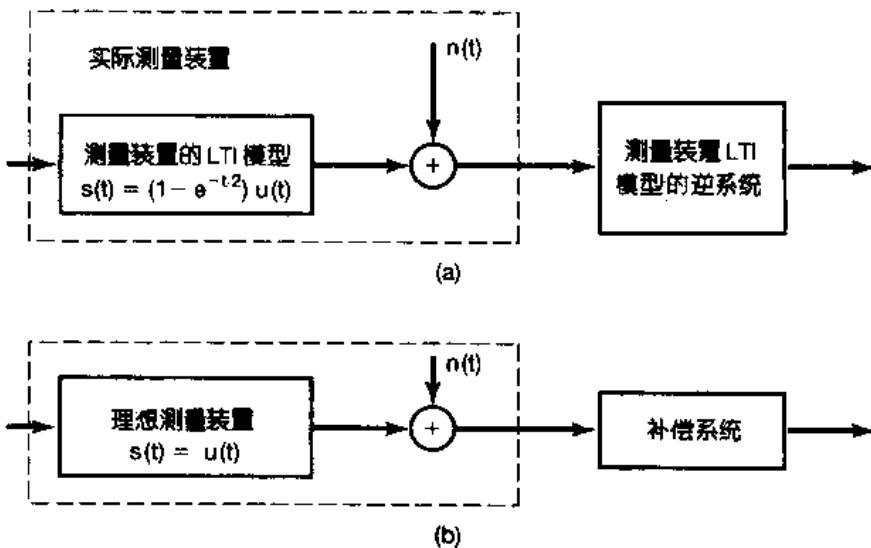


图 P4.52

- (c) 在(b)中所提出的问题在许多 LTI 系统分析应用中是一个很重要的问题。这就是面临着在系统的响应速度和系统抑制高频干扰的能力之间作出基本的折衷。在(b)中看到，这种折衷意味着如果试图提高测量装置的响应速度（利用一个逆系统），那么也就产生了一个把那些不需要的正弦信号也放大了的系统。为了进一步说明这一概念，考虑一个测量装置，它对被噪音污染了的温度变化作出瞬时响应。这个系统的响应可以用图 P4.52(b) 的模型来表示，即它的响应可以用理想化的测量装置的响应与污损信号 $n(t)$ 之和表示。假如我们希望设计一个补偿系统，该系统将减慢对实际温度变化的响应，并且也衰减噪音 $n(t)$ 。设这个补偿系统的单位冲激响应是

$$h(t) = a e^{-at} u(t)$$

选择 a ，使得图 P4.52(b) 的总系统在对噪音 $n(t) = \sin 6t$ 所产生的输出幅度不大于 $1/4$ 的条件下，对温度阶跃变化的响应尽可能快。

- 4.53 正如在正文中所提到的，傅里叶分析方法可推广到具有两个独立变量的信号。在某些应用（如图象处理）中，这些方法所起的重要作用，就像一维傅里叶变换在其它应用中所起的作用一样。在本题中将

介绍二维傅里叶变换的一些基本概念。

设 $x(t_1, t_2)$ 是两个独立变量 t_1 和 t_2 的信号，其二维傅里叶变换定义为

$$X(j\omega_1, j\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1, t_2) e^{-j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

(a) 证明这个二重积分可以按照两个逐次一维傅里叶变换来进行，即先对 t_1 而把 t_2 看作固定值，然后再对 t_2 作变换。

(b) 利用(a)的结果，求反变换式，即用 $X(j\omega_1, j\omega_2)$ 来表示 $x(t_1, t_2)$ 的表达式。

(c) 求下列信号的二维傅里叶变换：

$$(1) x(t_1, t_2) = e^{-t_1 + 2t_2} u(t_1 - 1) u(2 - t_2)$$

$$(2) x(t_1, t_2) = \begin{cases} e^{-|t_1| - |t_2|}, & \text{若 } -1 < t_1 \leq 1 \text{ 和 } -1 \leq t_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其余 } t_1, t_2 \end{cases}$$

$$(3) x(t_1, t_2) = \begin{cases} e^{-|t_1| - |t_2|}, & \text{若 } 0 \leq t_1 \leq 1 \text{ 或 } 0 \leq t_2 \leq 1 \text{ (或两者兼有)} \\ 0, & \text{其余 } t_1, t_2 \end{cases}$$

(4) $x(t_1, t_2)$ 如图 P4.53 所示。

$$(5) e^{-|t_1 + t_2| - |t_1 - t_2|}$$

(d) 已知信号 $x(t_1, t_2)$ 的二维傅里叶变换是

$$X(j\omega_1, j\omega_2) = \frac{2\pi}{4 + j\omega_1} \delta(\omega_2 - 2\omega_1)$$

求 $x(t_1, t_2)$ 。

(e) 设 $x(t_1, t_2)$ 和 $h(t_1, t_2)$ 是两个信号，其二维傅里叶变

换分别为 $X(j\omega_1, j\omega_2)$ 和 $H(j\omega_1, j\omega_2)$ 。用 $X(j\omega_1, j\omega_2)$

和 $H(j\omega_1, j\omega_2)$ 确定下列信号的变换：

$$(1) x(t_1 - T_1, t_2 - T_2)$$

$$(2) x(at_1, bt_2)$$

$$(3) y((t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau_1, \tau_2) h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

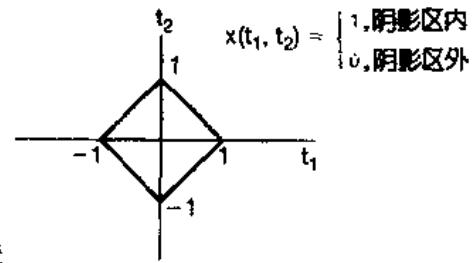


图 P4.53

第5章 离散时间傅里叶变换

5.0 引言

第4章我们研究了连续时间傅里叶变换，并研究了这种变换的许多特性，这些特性使傅里叶分析方法在分析和理解连续时间信号与系统的性质中具有很大的价值。这一章将介绍并研究离散时间傅里叶变换，这样就完整地建立了傅里叶分析方法。

在第3章讨论傅里叶级数时，曾看到在连续时间和离散时间信号分析中存在着很多相似的地方，并且在分析途径上也是并行的；然而，也有一些重大的差别。例如，在3.6节，离散时间周期信号的傅里叶级数表示是一个有限项级数；而连续时间周期信号则要求一个无穷项级数的表示。这一章将会看到，连续时间和离散时间傅里叶变换之间也存在着相应的差别。

这一章将基本上与第4章所采用的办法相同，即充分利用连续时间和离散时间傅里叶分析之间的类似性来展开讨论。这就是，首先为了建立离散时间非周期信号的傅里叶变换表示，而将周期信号的傅里叶级数表示进行推广，接着采用与第4章相平行地做法，分析离散时间傅里叶变换的性质和特点。这样做不仅加深了对连续时间和离散时间所共有的傅里叶分析基本概念的理解，而且还对比了它们之间的差别，以更加突出对它们各自独特性质的理解。

5.1 非周期信号的表示：离散时间傅里叶变换

5.1.1 离散时间傅里叶变换的导出

在4.1节[(4.2)式和图4.2]曾经看到，一个连续时间周期方波的傅里叶级数可以看作是一个包络函数的采样值，并且随着这个方波周期的增大，这些样本变得愈来愈密。这一性质就使人想到一个非周期信号 $x(t)$ 可以这样来表示，即：首先做一个周期信号 $\tilde{x}(t)$ ，使得 $\tilde{x}(t)$ 在一个周期内等于 $x(t)$ ，然后随着这个周期趋于无限大， $\tilde{x}(t)$ 就会在一个愈来愈大的时间间隔上等于 $x(t)$ ，这样对 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数表示也就收敛于 $x(t)$ 的傅里叶变换表示。在一节，对离散时间非周期序列，为了建立它的傅里叶变换表示，将采用与在连续时间情况下完全类似的步骤进行。

考虑某一序列 $x[n]$ ，它具有有限持续期；也就是说，对于某个整数 N_1 和 N_2 ，在 $-N_1 \leq n \leq N_2$ 以外， $x[n] = 0$ 。图5.1(a)示出这种类型的一个信号。由这个非周期信号可以构成一个周期序列 $\tilde{x}[n]$ ，使得对 $\tilde{x}[n]$ 来说 $x[n]$ 是它的一个周期，如图5.1(b)所示。随着所选周期 N 的增大， $\tilde{x}[n]$ 就在一个更长的时间间隔内与 $x[n]$ 一样，而当 $N \rightarrow \infty$ 时，对任意有限 n 值来说，有 $\tilde{x}[n] = x[n]$ 。

现在来考查一下 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数表示式。由(3.94)式和(3.95)式，有

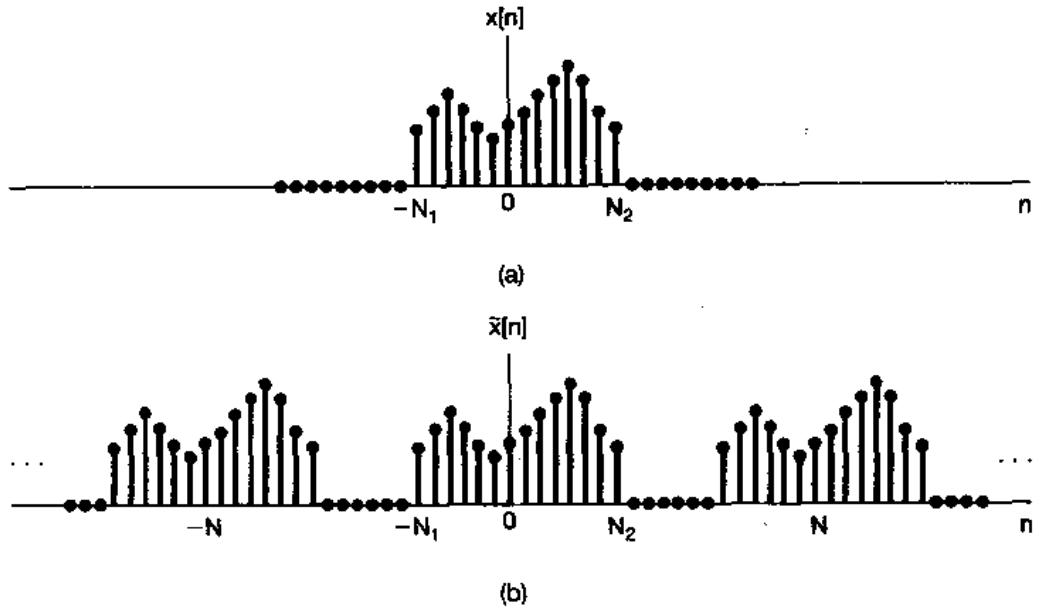


图 5.1 (a) 有限长序列 $x[n]$; (b) 由 $x[n]$ 构成的周期序列 $\tilde{x}[n]$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=(-N)} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.1)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=(-N)} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.2)$$

因为在包括 $-N_1 \leq n \leq N_2$ 区间的一个周期上 $x[n] = \tilde{x}[n]$, 因此在(5.2)式中, 求和区间就选在这个周期上, 这样在(5.2)式的求和中就可用 $x[n]$ 来代替 $\tilde{x}[n]$, 而得到

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (5.3)$$

上式中已经考虑到在 $-N_1 \leq n \leq N_2$ 以外, $x[n] = 0$ 这一点。现定义函数

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (5.4)$$

可见这些系数 a_k 是正比于 $X(e^{j\omega})$ 的各样本值, 即

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) \quad (5.5)$$

式中 $\omega_0 = 2\pi/N$ 用来记作在频域中的样本间隔。将(5.1)式和(5.5)式组合在一起后得

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=(-N)} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \quad (5.6)$$

因为 $\omega_0 = 2\pi/N$, 或 $1/N = \omega_0/2\pi$, 所以(5.6)式又可写成

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=(-N)} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \quad (5.7)$$

和(4.7)式相同, 随着 N 增加, ω_0 减小, 一旦 $N \rightarrow \infty$, (5.7)式就过渡为一个积分。为了更清楚地看到这点, 把 $X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ 画在图 5.2 中。根据(5.4)式, $X(e^{j\omega})$ 对 ω 来说是周期的, 周期为 2π ; 而 $e^{j\omega n}$ 对 ω 也是以 2π 为周期的。所以乘积 $X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ 也一定是周期的。如图中所指出的, 在(5.7)式求和中的每一项都代表了一个高为 $X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$, 宽为 ω_0 的矩形面积。当 $\omega_0 \rightarrow 0$ 时, 这个求和式就演变为一个积分。再说, 因为这个求和是在 N 个宽为 $\omega_0 = 2\pi/N$ 的

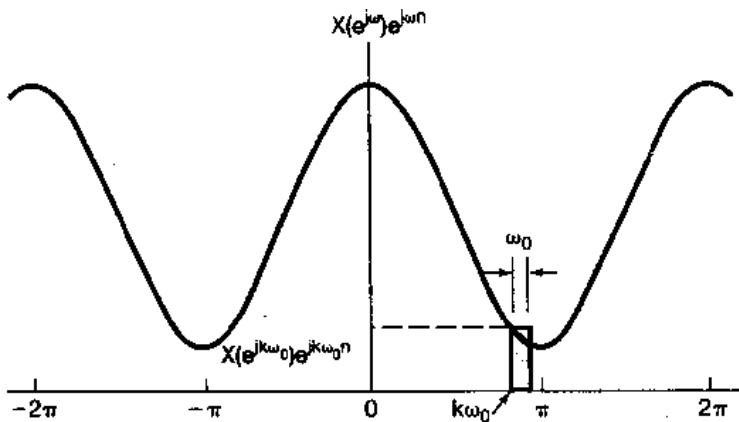


图 5.2 (5.7)式的图解说明

间隔内完成的，所以总的积分区间总是有一个 2π 的宽度。因此，随着 $N \rightarrow \infty$ ， $\tilde{x}[n] = x[n]$ ，(5.7)式就变成

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

其中，因为 $X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ 是周期的，周期为 2π ，因此积分区间可以取任何长度为 2π 的间隔。这样，就得到一对公式：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.8)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jn\omega} \quad (5.9)$$

(5.8)式和(5.9)式是(4.8)式和(4.9)式在离散时间情况下所对应的关系。 $X(e^{j\omega})$ 称为离散时间傅里叶变换，这一对式子就是离散时间傅里叶变换对。(5.8)式是综合公式，而(5.9)式则是分析公式。在推导这些公式的过程中表明一个非周期序列是如何能被看作复指数信号的线性组合的。事实上，综合公式本身就是把序列 $x[n]$ 作为一种复指数序列的线性组合来表示的，这些复指数序列在频率上是无限靠近的，它们的幅度是 $X(e^{j\omega})(d\omega/2\pi)$ 。为此，像在连续时间情况一样，傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 往往被称为 $x[n]$ 的频谱，因为它给出了这样的信息，就是 $x[n]$ 是怎样由这些不同频率的复指数序列组成的。

值得提及的是，与连续时间情况一样，上述离散时间傅里叶变换的推导过程给我们在离散时间傅里叶级数和离散时间傅里叶变换之间提供了一种重要的关系。这就是，一个周期信号 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶系数 a_k 可以用一个有限长序列 $x[n]$ 的傅里叶变换的等间隔样本来表示，这个 $x[n]$ 就等于在一个周期上的 $\tilde{x}[n]$ ，而在其余地方为零。这一点在实际的信号处理和傅里叶分析中极为重要，在习题 5.41 中将进一步给予讨论。

正如在推导过程中所表明的，离散时间傅里叶变换和连续时间情况相比具有许多类似之处。两者的主要差别在于离散时间变换 $X(e^{j\omega})$ 的周期性和在综合公式中的有限积分区间。这两者均来自这样一个事实（以前已经多次提到）：在频率上相差 2π 的离散时间复指数信号是完全一样的。在 3.6 节已看到，对周期离散时间信号而言，这就意味着傅里叶级数系数也是周期的，以及傅里叶级数表示式是一个有限项的和式。对非周期信号而言，这就意味着 $X(e^{j\omega})$ 也是周期的（周期为 2π ），以及综合公式只涉及到在一个频率区间内的积分，这个频率

区间就是产生不同复指数信号的那个间隔，即任何 2π 长度的间隔。在 1.3.3 节曾指出过 $e^{j\omega}$ 作为 ω 函数的周期性的进一步结果是： $\omega = 0$ 和 $\omega = 2\pi$ 都得出同一个信号。因此，位于这些频率值或任何 π 偶数倍的 ω 附近都是慢变化的，从而都相应于低频率的信号；而靠近 π 的奇数倍的 ω ，在离散时间情况下都相应于高的频率。因此，在图 5.3(a)中的信号[其傅里叶变换画在图 5.3(b)上]其变化比图 5.3(c)的信号[其变换如图 5.3(d)所示]要更慢一些。

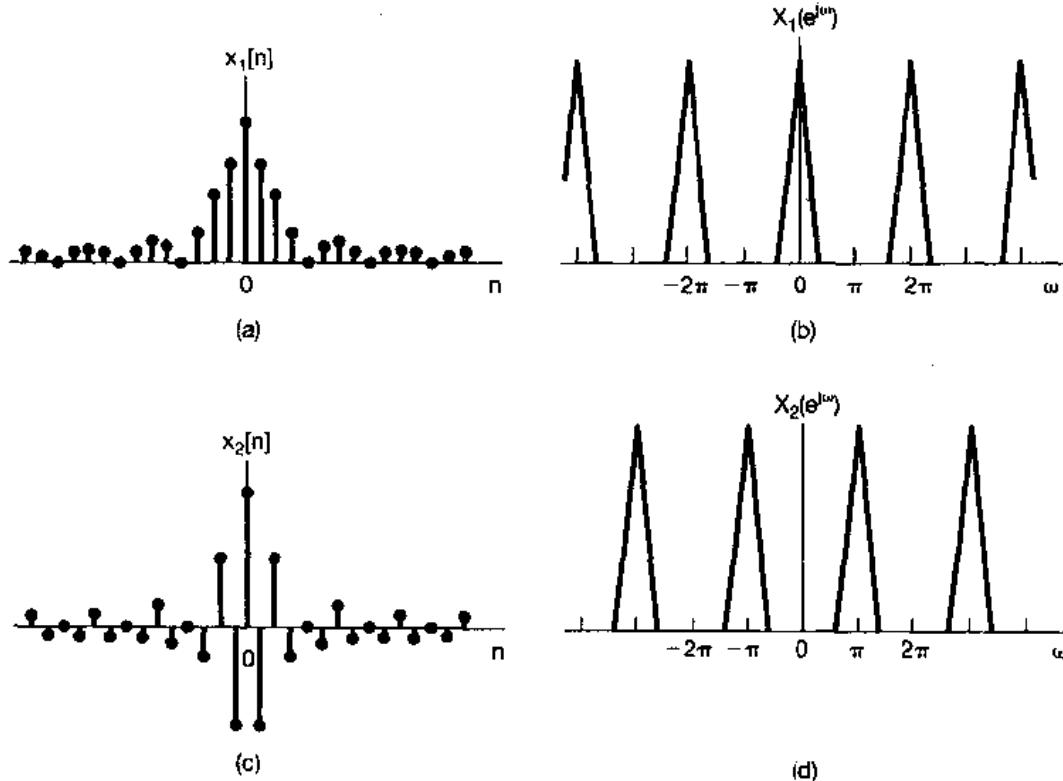


图 5.3 (a) 离散时间信号 $x_1[n]$; (b) $x_1[n]$ 的傅里叶变换 [注意: $X_1(e^{j\omega})$ 是集中在 $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 附近]; (c) 离散时间信号 $x_2[n]$; (d) $x_2[n]$ 的傅里叶变换 [注意: $X_2(e^{j\omega})$ 是集中在 $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ 附近]

5.1.2 离散时间傅里叶变换举例

为了说明离散时间傅里叶变换，考虑下面几个例子。

例 5.1 考虑信号

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

这时

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

图 5.4(a)示出了 $a > 0$ 时， $X(e^{j\omega})$ 的模和相位；图 5.4(b)示出 $a < 0$ 时的模和相位。应该注意，图中所有这些函数都是周期为 2π 的周期函数。

例 5.2 设

$$x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1$$

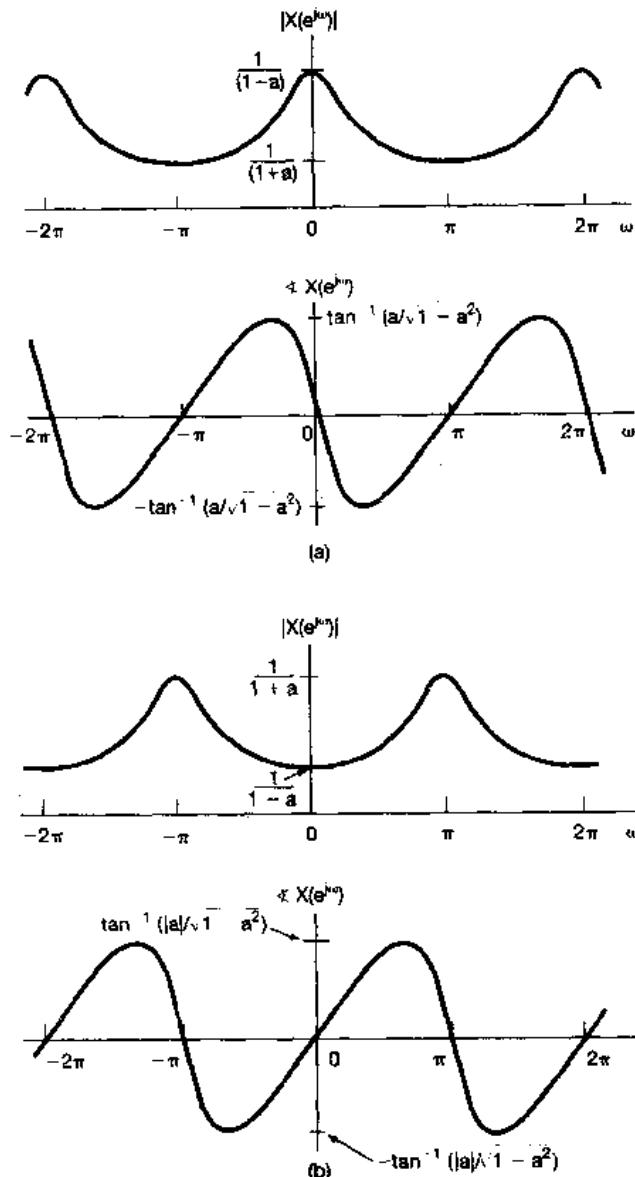


图 5.4 例 5.1 傅里叶变换的模和相位：(a) $a > 0$; (b) $a < 0$

该信号对于 $0 < a < 1$ 如图 5.5(a) 所示。它的傅里叶变换由(5.9)式可求出为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n}$$

在上式第二个求和式中，以 $m = -n$ 置换，可得

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^m$$

这两个求和式都是无穷几何级数，可以用闭式表示为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

在此情况下， $X(e^{j\omega})$ 是实函数，对于 $0 < a < 1$ ，如图 5.5(b) 所示。

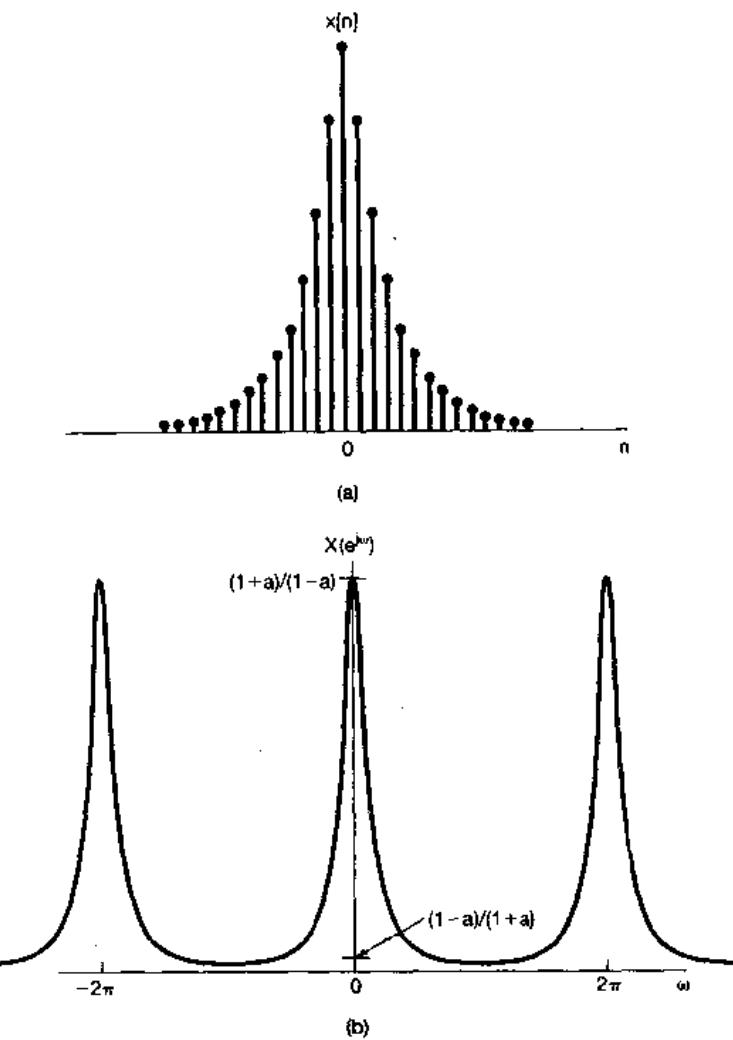


图 5.5 (a) 例 5.2 中的信号 $x[n] = a^{|n|}$; (b) 它的傅里叶变换 ($0 < a < 1$)

例 5.3 考虑下列矩形脉冲序列

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \quad (5.10)$$

图 5.6 (a) 示出 $N_1 = 2$ 的 $x[n]$, 这时

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jn\omega} \quad (5.11)$$

利用在例 3.12 中求 (3.104) 式时使用过的类似计算, 可得

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin \omega \left(N_1 + \frac{1}{2} \right)}{\sin(\omega/2)} \quad (5.12)$$

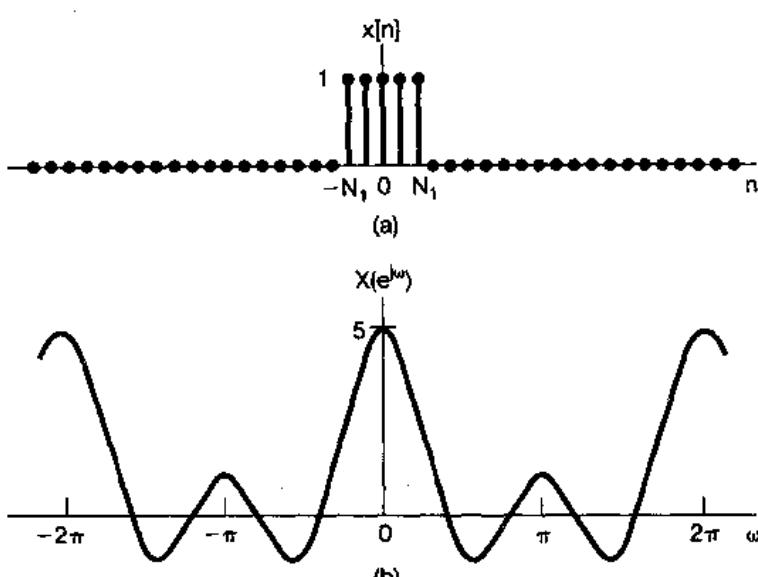


图 5.6 (a) 例 5.3 在 $N_1 = 2$ 时的矩形脉冲序列;

(b) 对应的傅里叶变换

对于 $N_1=2$ 的 $X(e^{j\omega})$ 如图 5.6(b) 所示。

(5.12) 式的函数是 sinc 函数在离散时间情况下所对应的形式(见例 4.4)。这两个函数之间最重要的差别就是(5.12)式的函数是周期的，周期为 2π ，而 sinc 函数是非周期的。

5.1.3 关于离散时间傅里叶变换的收敛问题

尽管以上讨论都是假设 $x[n]$ 是任意的，但属有限长情况下得到的结论，但是(5.8)式和(5.9)式对极为广泛的一类无限长序列(譬如例 5.1 和例 5.2 中的信号)也是成立的。在信号为无限长的情况下，还是必须要考虑分析公式(5.9)式中无穷项求和的收敛问题。保证这个和式收敛而对 $x[n]$ 所加的条件是与连续时间傅里叶变换的收敛条件直接相对应的^①。如果 $x[n]$ 是绝对可和的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad (5.13)$$

或者，如果这个序列的能量是有限的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad (5.14)$$

那么，(5.9)式就一定收敛。

与分析公式(5.9)式的情况相比，综合公式(5.8)式的积分是在一个有限的积分区间上进行的，因此一般不存在收敛问题。这一点与离散时间傅里叶级数综合公式(3.94)式的情况是非常相像的，在那里由于只涉及一个有限项和式，所以也就没有任何收敛问题存在。特别是，若用在频率范围为 $|\omega| \leq W$ 内的复指数信号的积分来近似一个非周期信号 $x[n]$ 的话，即

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.15)$$

那么，若 $W=\pi$ ，则有 $\hat{x}[n]=x[n]$ 。因此，就像图 3.18 那样，在求离散时间傅里叶变换综合公式时，看不到任何类似于吉伯斯现象的行为存在！这一点可用下例来说明。

例 5.4 令 $x[n]$ 是一单位脉冲序列

$$x[n] = \delta[n]$$

这时由分析公式(5.9)式极易求得

$$X(e^{j\omega}) = 1$$

这就是说，和连续时间情况一样，单位脉冲序列的傅里叶变换在所有频率上都是相等的。如果将(5.15)式用到这个例子中来，就得到

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n} \quad (5.16)$$

对于几个不同的 W 值， $\hat{x}[n]$ 图示于图 5.7 中。由图可见，当 W 增加时，近似式 $\hat{x}[n]$ 的振荡频率就增加，这一点很像在连续时间情况下所观察到的一样；但是，另一方面，与连续时间情况相反，这些振荡的幅度相对于 $\hat{x}[0]$ 的幅度来说，则随着 W 的增大而减小，直至 $W=\pi$ 时，这些振荡完全消失。

① 关于离散时间傅里叶变换收敛问题的讨论，请参阅 A. V. Oppenheim and R. W. Schafer. Discrete-Time Signal Processing (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1989)，以及 L. R. Rabiner and B. Gold. Theory and Application of Digital Signal Processing (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1975)。

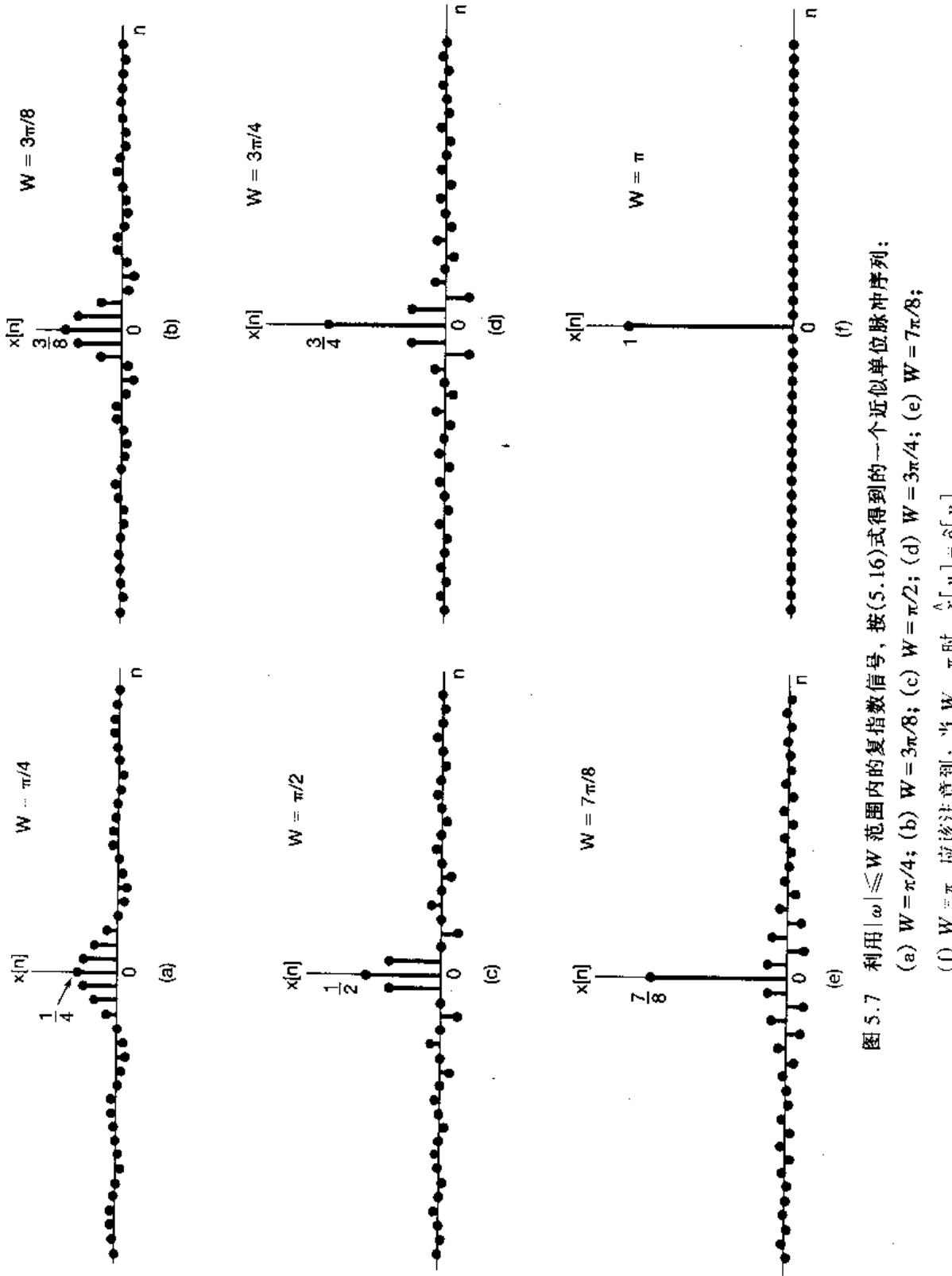


图 5.7 利用 $|\omega| \leq W$ 范围内的复指教信号, 按(5.16)式得到的一个近似单位脉冲序列:
(a) $W = \pi/4$; (b) $W = 3\pi/8$; (c) $W = \pi/2$; (d) $W = 3\pi/4$; (e) $W = 7\pi/8$;
(f) $W = \pi$, 应该注意到: “ $W = \pi$ 时, $\hat{x}[n] = \delta[n]$ ”

5.2 周期信号的傅里叶变换

和在连续时间情况下相同，利用把一个周期信号的变换表示成频域中的冲激串的办法，就可以把离散时间周期信号也归并到离散时间傅里叶变换的范畴中去。为了导出这种表示的形式，考虑如下信号：

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \quad (5.17)$$

在连续时间情况下，已经看到 $e^{j\omega_0 t}$ 的傅里叶变换就是在 $\omega = \omega_0$ 处的冲激。因此，可以期望对离散时间情况下的(5.17)式的变换，或许会有相同的结果。然而，离散时间傅里叶变换对 ω 来说必须是周期的，周期为 2π 。由此可以想到，(5.17)式 $x[n]$ 的傅里叶变换应该是在 ω_0 , $\omega_0 \pm 2\pi$, $\omega_0 \pm 4\pi$, … 等处的冲激。事实上， $x[n]$ 的傅里叶变换正是如下的冲激串

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) \quad (5.18)$$

如图 5.8 所示。为了验证该式，必须求出(5.18)式的反变换。现将(5.18)式代入综合公式

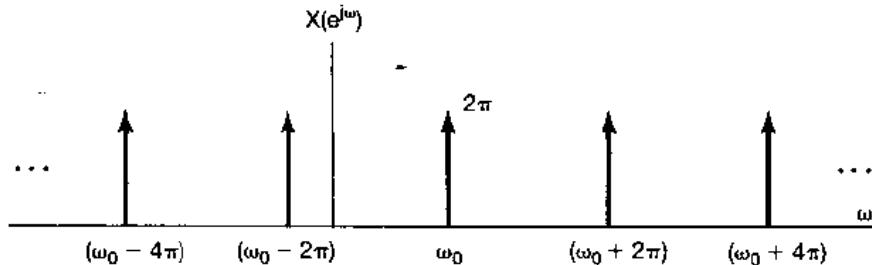


图 5.8 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换

(5.8)式可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) e^{j\omega n} d\omega$$

注意，在任意一个长度为 2π 的积分区间内，在(5.18)式的和式中真正包括的只有一个冲激，因此，如果所选的积分区间包含在 $\omega_0 + 2\pi r$ 处的冲激，那么

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = e^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} = e^{j\omega_0 n}$$

现在考虑一周期序列 $x[n]$ ，周期为 N ，其傅里叶级数为

$$x[n] = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (5.19)$$

这时，傅里叶变换就是

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (5.20)$$

这样，一个周期信号的傅里叶变换就能直接从它的傅里叶系数得到。

为了证明(5.20)式是对的，只要注意到(5.19)式的 $x[n]$ 是(5.17)式这类信号的线性组合，因此 $x[n]$ 的傅里叶变换也一定是(5.18)式这类变换形式的线性组合。特别是，如果选取(5.19)式的求和区间为 $k=0, 1, \dots, N-1$ ，而有

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j(2\pi/N)n} + a_2 e^{j2(2\pi/N)n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)(2\pi/N)n} \quad (5.21)$$

这样， $x[n]$ 就是如(5.17)式所示信号的线性组合，其中 $\omega_0 = 0, 2\pi/N, 4\pi/N, \dots, (N-1)2\pi/N$ 。所得到的傅里叶变换如图5.9所示。在图5.9(a)中示出(5.21)式右边第一项的傅里叶变换：常数序列 $a_0 = a_0 e^{j\omega n}$ 的傅里叶变换，按(5.18)式，就是 $\omega_0 = 0$ ，每个冲激的大小为 $2\pi a_0$ 的周期冲激串。再者，根据第4章的讨论知道，这些傅里叶系数 a_k 都是周期的，周期为 N ，所以有 $2\pi a_0 = 2\pi a_N = 2\pi a_{-N}$ 。图5.9(b)是(5.21)式中第二项的傅里叶变换，这里再次应用(5.18)式的结果，并且有 $2\pi a_1 = 2\pi a_{N+1} = 2\pi a_{-N+1}$ 。相类似，图5.9(c)是最后一项的傅里叶变换。最后，图5.9(d)就是整个 $X(e^{j\omega})$ 。应该注意，由于 a_k 的周期性， $X(e^{j\omega})$ 就能看作发生在基波频率 $2\pi/N$ 的整倍数频率上的一串冲激，位于 $\omega = 2\pi k/N$ 处的冲激面积是 $2\pi a_k$ 。这就是(5.20)式所表达的意思。

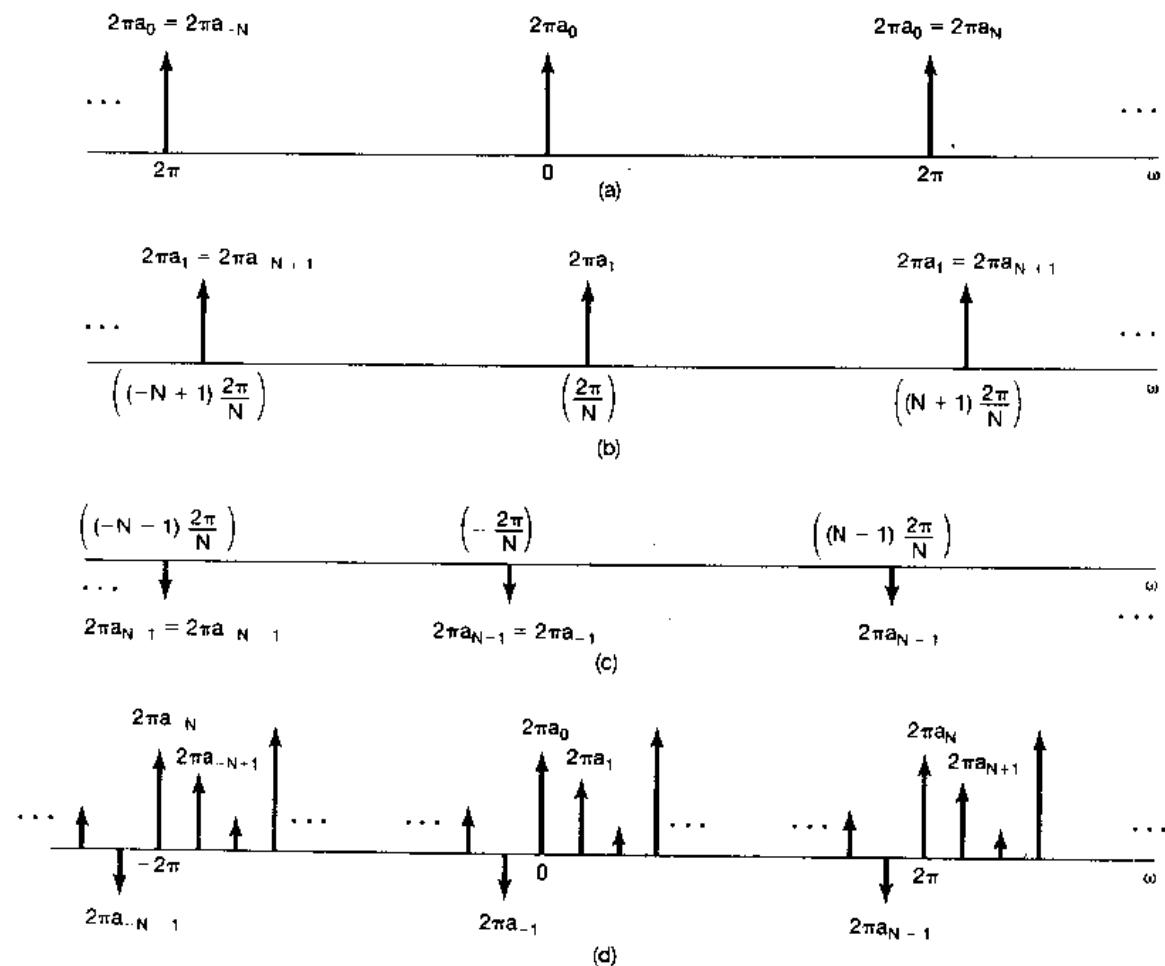


图5.9 一个离散时间周期信号的傅里叶变换：

- (a) (5.21)式右边第一项的傅里叶变换；
- (b) (5.21)式第二项的傅里叶变换；
- (c) (5.21)式最后一项的傅里叶变换；
- (d) (5.21)式 $x[n]$ 的傅里叶变换

例 5.5 考虑周期信号

$$x[n] = \cos\omega_0 n = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{5} \quad (5.22)$$

根据(5.18)式，可立即写出

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l) \quad (5.23)$$

也就是

$$X(e^{j\omega}) = \pi \delta(\omega - \frac{2\pi}{5}) + \pi \delta(\omega + \frac{2\pi}{5}), \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad (5.24)$$

$X(e^{j\omega})$ 以周期为 2π , 周期重复, 如图 5.10 所示。

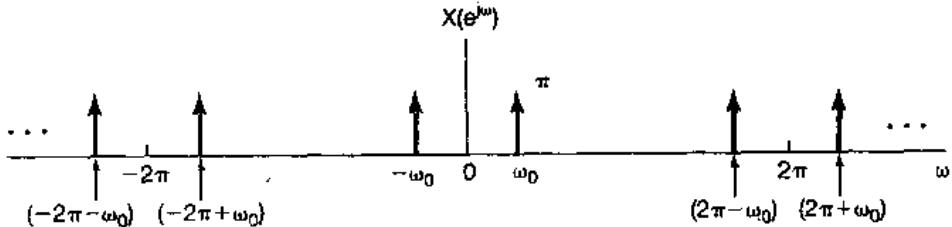


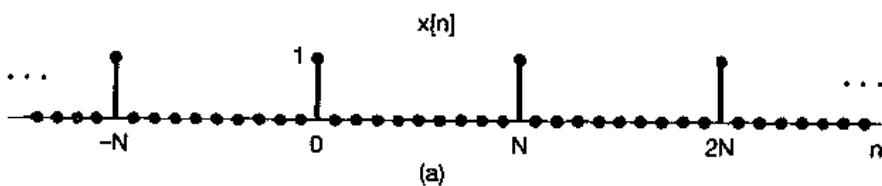
图 5.10 $x[n] = \cos \omega_0 n$ 的离散时间傅里叶变换

例 5.6 与例 4.8 的周期冲激串相对应的离散时间冲激串是序列为

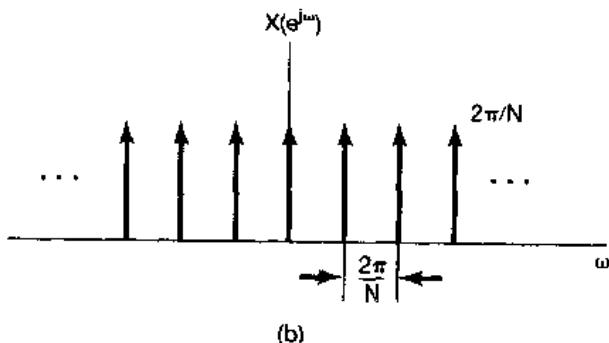
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \quad (5.25)$$

如图 5.11(a)所示。这个信号的傅里叶级数系数能由(3.95)式直接算出来为

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j k (2\pi/N)n}$$



(a)



(b)

图 5.11 (a) 离散时间周期冲激串; (b) (a) 的傅里叶变换

选取求和区间为 $0 \leq n \leq N-1$, 有

$$a_k = \frac{1}{N} \quad (5.26)$$

利用(5.26)和(5.20)式, 该信号的傅里叶变换就能表示为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (5.27)$$

如图 5.11(b)所示。

5.3 离散时间傅里叶变换性质

与连续时间傅里叶变换一样，离散时间傅里叶变换的各种性质也提供了对变换本质的进一步了解，同时往往在简化一个信号的正变换和反变换的求取上是很有用的。这一节及下面两节将考虑这些性质，并将这些性质简明扼要地综合于表 5.1 中。将表 5.1 和表 4.1 作一比较就会发现，连续时间和离散时傅里叶变换性质之间所呈现出的相似和差别。当某一性质在推导及陈述上基本上与连续时间情况下是一样的话，那么就从简。同时，由于傅里叶级数和傅里叶变换之间的紧密关系，因此就将傅里叶变换的很多性质直接移至离散时间傅里叶级数的相应性质中去。这些性质已经列于表 3.2 中，并在 3.7 节作过简要讨论。

在以下的讨论中，与 4.3 节一样，采用如下符号来表明一个信号及其傅里叶变换的一对关系，即

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{x[n]\} \\ x[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} \\ x[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

5.3.1 离散时间傅里叶变换的周期性

如同在 5.1 节所讨论的，离散时间傅里叶变换对 ω 来说总是周期的，其周期为 2π ，即

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega}) \quad (5.28)$$

这点与连续时间傅里叶变换是不同的，一般来说，后者不是周期的。

5.3.2 线性

若

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega})$$

和

$$x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega})$$

则

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (5.29)$$

5.3.3 时移与频移性质

若

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

则有

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (5.30)$$

和

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (5.31)$$

将 $x[n - n_0]$ 直接代入分析公式(5.9)式就可得到(5.30)式，而将 $X(e^{j(\omega - \omega_0)})$ 代入综合公式(5.8)式就可导出(5.31)式。

作为离散时间傅里叶变换周期性和频移性质的一个结果，就是在理想低通和理想高通离散时间滤波器之间存在的一种特别关系。

例 5.7 图 5.12(a)示出一个截止频率为 ω_c 的低通滤波器的频率响应 $H_{lp}(e^{j\omega})$ ，而图 5.12(b)则是将 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 频移半个周期(即 π)后的 $H_{hp}(e^{j(\omega - \pi)})$ 。因为在离散时间情况下，高频是集中在 π (或 π 的奇数倍)附近，所以图 5.12(b)所示特性就是一个截止频率为 $\pi - \omega_c$ 的理想高通滤波器，也即

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega - \pi)}) \quad (5.32)$$

由(3.122)式可知，并且在 5.4 节将再次讨论的，一个 LTI 系统的频率响应是该系统单位脉冲响应的傅里叶变换，于是，若 $h_{lp}[n]$ 和 $h_{hp}[n]$ 分别记作图 5.12(a)

和(b)的单位脉冲响应，那么(5.32)式和频移性质就意味着低通和高通滤波器有如下关系：

$$h_{hp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp}[n] \quad (5.33)$$

$$= (-1)^n h_{lp}[n] \quad (5.34)$$

5.3.4 共轭与共轭对称性

若

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

则

$$x^*[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{-j\omega}) \quad (5.35)$$

同时，若 $x[n]$ 是实值序列，那么其变换是共轭对称的，即

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad [x[n] \text{ 为实}] \quad (5.36)$$

据此可得， $\Re\{X(e^{j\omega})\}$ 是 ω 的偶函数，而 $\Im\{X(e^{j\omega})\}$ 是 ω 的奇函数。同理， $X(e^{j\omega})$ 的模是 ω 的偶函数，相角是 ω 的奇函数。另外进一步可得

$$\mathcal{E}_u\{X[n]\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \Re\{X(e^{j\omega})\}$$

和

$$\mathcal{O}d\{x[n]\} \leftrightarrow j\mathcal{A}m\{X(e^{j\omega})\}$$

这里, \mathcal{E}_v 和 $\mathcal{O}d$ 分别表示 $x[n]$ 的偶部和奇部。例如, 若 $x[n]$ 为实且为偶序列, 那么其傅里叶变换也是实且为偶函数。例 5.2 对序列 $x[n] = a^{|n|}$ 就说明了这种对称性。

5.3.5 差分与累加

离散时间情况下的累加就相当于连续时间情况下的积分。现在来讨论离散时间序列的累加及其逆运算——一次差分的傅里叶变换。设 $x[n]$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 那么根据线性和时移性质。一次差分信号 $x[n] - x[n-1]$ 的傅里叶变换对就是

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega}) \quad (5.37)$$

再考虑信号

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \quad (5.38)$$

因为 $y[n] - y[n-1] = x[n]$, 似乎可能得出 $y[n]$ 的变换应为 $x[n]$ 的变换被 $(1 - e^{-j\omega})$ 所除! 但是, 这只是对了一部分, 像(4.32)式所给出的连续时间积分性质一样, 除此以外, 还会涉及到更多的项, 其精确的关系是

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad (5.39)$$

式中右边的冲激串反映了累加过程中可能出现的直流或平均值。

例 5.8 现利用累加性质来导出单位阶跃 $x[n] = u[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。已知

$$g[n] = \delta[n] \leftrightarrow G(e^{j\omega}) = 1$$

由 1.4.1 节知道, 单位阶跃就是单位脉冲的累加, 即

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^n g[m]$$

上式两边取傅里叶变换, 并应用累加性质可得

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - e^{-j\omega})} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

5.3.6 时间反转

设信号 $x[n]$ 的频谱为 $X(e^{j\omega})$, 考虑一下 $y[n] = x[-n]$ 的变换 $Y(e^{j\omega})$ 。由(5.9)式

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{-jn\omega} \quad (5.40)$$

在(5.40)式中作 $m = -n$ 置换, 得

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{-j(-\omega)m} = X(e^{-j\omega}) \quad (5.41)$$

也即

$$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega}) \quad (5.42)$$

5.3.7 时域扩展

由于离散时间信号在时间上的离散性，因此时间和频率的尺度变换性质与在连续时间下相比都稍许有些不同。在 4.3.5 节曾导出连续时间下的性质为

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (5.43)$$

然而，如果试图要定义一个信号 $x[an]$ ，若 a 不是一个整数时就遇到了困难。因此就不能用 $a < 1$ 来减慢这个信号的变化；另一方面，就是令 a 是一个不同于 ± 1 的整数，比如说考虑 $x[2n]$ ，这也不只是使原信号的变化加速。因为 n 仅仅取整数值， $x[2n]$ 仅为由 $x[n]$ 中的偶次样本所组成。

然而，若令 k 是一个正整数，并且定义

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{当 } n \text{ 为 } k \text{ 的整倍数} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 不为 } k \text{ 的整倍数} \end{cases} \quad (5.44)$$

那么，则有一个与(5.43)式相伴行的结果。图 5.13 示出一个 $k=3$ 的例子，这时的 $x_{(k)}[n]$ 是在 $x[n]$ 的连续值之间插入 $(k-1)$ 个零值而得到的。直观上来看，可以把 $x_{(k)}[n]$ 看作是减慢了的 $x[n]$ 。因为，除非 n 是 k 的某一倍数，也即 $n=rk$ ，否则 $x_{(k)}[n]$ 都等于 0，所以 $x_{(k)}[n]$ 的傅里叶变换可由下式给出

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk] e^{-j\omega rk}$$

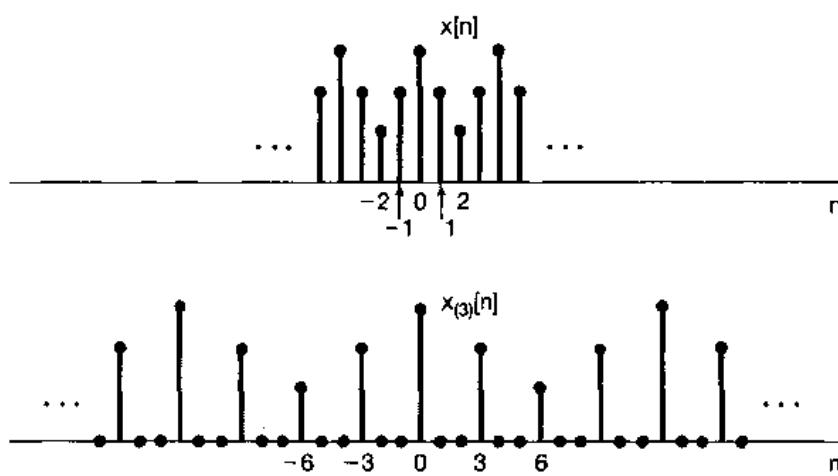


图 5.13 在序列 $x[n]$ 的每两个连续值之间插入两个零值而得到的序列 $x_{(3)}[n]$

再者，由于 $x_{(k)}[rk] = x[r]$ ，可求得

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega})$$

也即

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{jk\omega}) \quad (5.45)$$

应该注意到，当取 $k > 1$ 时，该信号在时间上被拉开了，从而在时间上就减慢了，而它的

傅里叶变换就受到压缩。例如，由于 $X(e^{j\omega})$ 是周期的，周期为 2π ，因而 $X(e^{j\omega})$ 也是周期的，其周期为 $2\pi/k$ 。图 5.14 示出一个矩形脉冲的例子来说明这一性质。

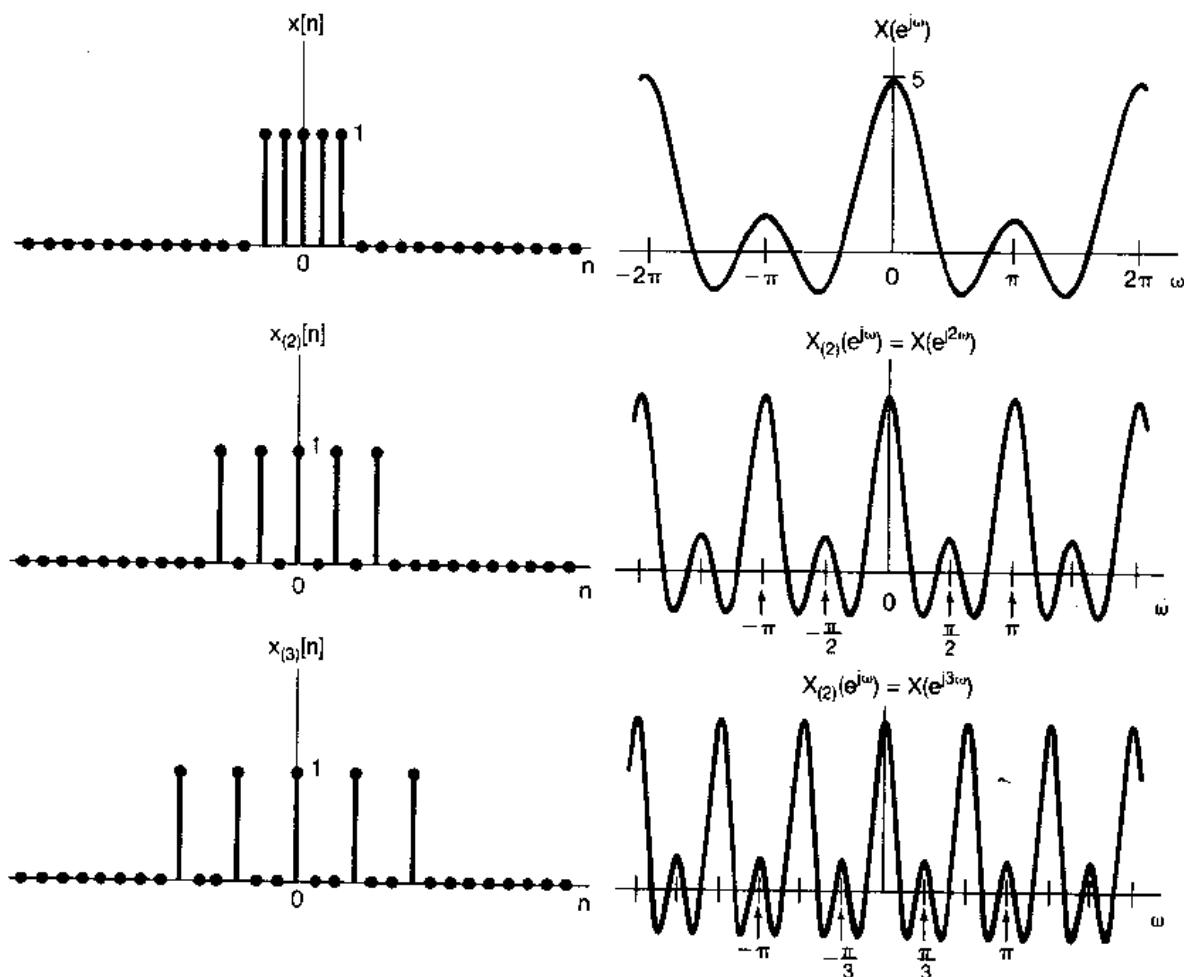


图 5.14 时域和频域之间的相反关系：当 k 增加时， $x_{(k)}[n]$ 在时域上拉开，而其变换则在频域上压缩

例 5.9 作为时域扩展性质在确定傅里叶变换应用中的一个例子，让我们来考虑一下示于图 5.15(a)中的序列。可以将这个序列与图 5.15(b)这一较为简单的序列联系起来，这就是

$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1]$$

其中

$$y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2], & \text{当 } n \text{ 为偶} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为奇} \end{cases}$$

而 $y_{(2)}[n-1]$ 则代表 $y_{(2)}[n]$ 右移一个单位。信号 $y_2[n]$ 和 $2y_{(2)}[n-1]$ 均分别示于图 5.15(c)和(d)。

接下来可以看到， $y[n] = g[n-2]$ ^①， $g[n]$ 就是曾在例 5.3 中讨论过的当 $N_1 = 2$ 时的矩形脉冲，并示于图 5.6(a)中。结果，根据例 5.3 和时移性质，有

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

① 原文为 $y[n] = x[n-2]$ ，有误——译者注。

利用时域扩展性质可得

$$y_{(2)}[n] \xrightarrow{F} e^{-j4\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

再根据线性和时移性质有

$$2y_{(2)}[n-1] \xrightarrow{F} 2e^{-j5\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

将以上两个结果合在一起，最后得

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega} (1 + 2e^{-j\omega}) \left(\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)} \right)$$

5.3.8 频域微分

$$\text{设 } x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

如果利用分析公式(5.9)式 $X(e^{j\omega})$ 的定义，并在两边对 ω 微分，可得

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n}$$

这个式子的右边就是 $-jnx[n]$ 的傅里叶变换，因此两边各乘以 j ，就得

$$nx[n] \xrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \quad (5.46)$$

这个性质的用途将在 5.4 节例 5.13 中说明。

5.3.9 帕斯瓦尔定理

若 $x[n]$ 和 $X(e^{j\omega})$ 是一对傅里叶变换，则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (5.47)$$

这个关系很类似于(4.43)式，并且推导过程也很类似。该(5.47)式左边的量就是在信号 $x[n]$ 中的总能量，帕斯瓦尔定理表明这个总能量可以在离散时间频率的 2π 区间上用积分每单位频率上的能量 $|X(e^{j\omega})|^2/2\pi$ 来获得。与连续时间情况相仿， $|X(e^{j\omega})|^2$ 称为信号 $x[n]$ 的能量密度谱。同时也注意到，(5.47)式是与周期信号的帕斯瓦尔定理(3.110)式相对应的，在那里说的是：在一个周期信号中的平均功率等于它的各次谐波分量的平均功率之和。

已知一个序列的傅里叶变换，就有可能根据傅里叶变换的性质来确定是否某一特殊的序列有某些不同的性质。现在用下面的例子来说明这一概念。

例 5.10 考虑序列 $x[n]$ ，其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在 $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 区间上示于图 5.16。现在要想确定在时域 $x[n]$ 是否是周期的，实信号，偶信号和/或有限能量的。

首先注意到，在时域上的周期性就意味着其傅里叶变换除了在各个基波频率的整倍数频率上可能出現冲激外，其余地方均为零。现在 $X(e^{j\omega})$ 不是这样，所以得出： $x[n]$ 不是周期的。

接下来，根据傅里叶变换的对称性知道，一个实值序列一定有一个傅里叶变换，其模是 ω 的偶函

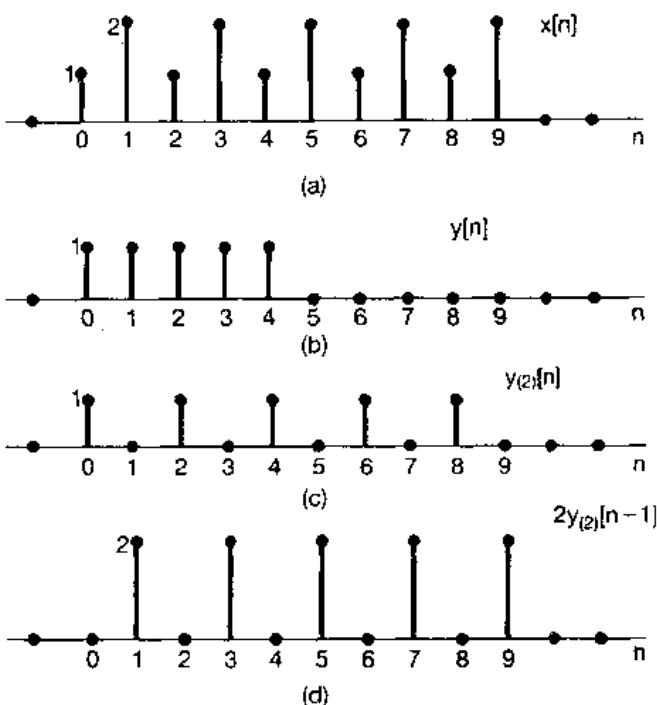


图 5.15 (a) 例 5.9 的信号 $x[n]$; (b) 信号 $y[n]$;
(c) 由 $y[n]$ 每两点之间插入一个零值所得
到的信号 $y_{(2)}[n]$;
(d) 信号 $2y_{(2)}[n-1]$

数，相位是 ω 的奇函数。对于给出的 $|X(e^{j\omega})|$ 和 $X(e^{j\omega})$ 来看是这样，因此 $x[n]$ 是实序列。

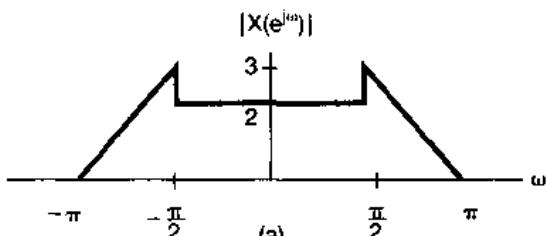
第三，若 $x[n]$ 是偶函数，那么根据实信号的对称性， $X(e^{j\omega})$ 必须为实且偶。然而，因为 $X(j\omega) = |X(e^{j\omega})|e^{-j2\omega}$ ， $X(e^{j\omega})$ 不是一个实值函数，因此 $x[n]$ 不是偶信号。

最后，为了检查是否为有限能量，可以用帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

由图 5.16 很显然，在 $-\pi$ 到 π 上积分 $|X(e^{j\omega})|^2$ 一定为一个有限量，所以 $x[n]$ 是有限能量的。

在下面的各节中将讨论另外的几个性质。其中头两个就是卷积和相乘性质，这个很类似于在 4.4 节和 4.5 节所讨论过的那些性质。第三个是对偶性质，将在 5.7 节讨论。这里所考虑的对偶性不仅仅是离散时间域中的对偶性，而且也考虑到存在于连续时间和离散时间域之间的对偶性。



(a)

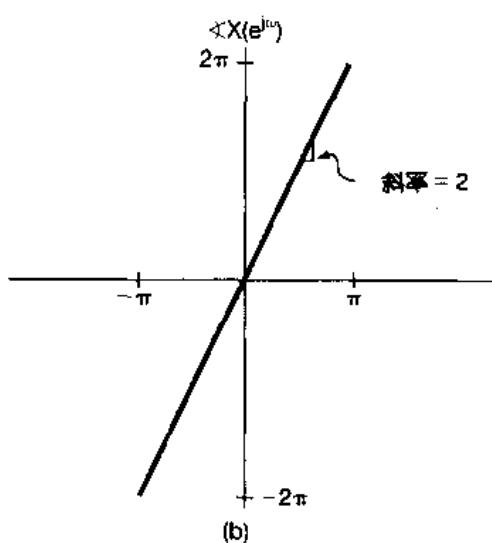


图 5.16 例 5.10 中傅里叶变换的模和相位

5.4 卷积性质

在 4.4 节曾经就连续时间傅里叶变换在处理卷积运算，以及涉及在连续时间 LTI 系统应用中的重要性作过讨论。在离散时间情况下也有完全相同的关系，并且这也就是离散时间傅里叶变换在表示和分析离散时间 LTI 系统中具有如此重要价值的主要原因之一。若 $x[n]$, $h[n]$ 和 $y[n]$ 分别为某一 LTI 系统的输入、单位脉冲响应和输出，而有

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

那么

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (5.48)$$

式中 $X(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 分别为 $x[n]$, $h[n]$ 和 $y[n]$ 的傅里叶变换。将(3.122)式与(5.9)式作一比较就可看出，一个离散时间 LTI 系统的频率响应，如同第一次在 3.8 节所定义的，就是该系统单位脉冲响应的傅里叶变换。

(5.48)式的导出可完全与 4.4 节的导出过程一样来进行。尤其是，与连续时间情况相同，对 $x[n]$ 的综合公式(5.8)式可以看作是将 $x[n]$ 分解成一组复指数信号的线性组合，其中每个复指数信号的振幅都是无限小，而且正比于 $X(e^{j\omega})$ ，并且每一个复指数信号都是系统的特征函数。在第 3 章正是应用这一点证明了，一个 LTI 系统对一个周期信号响应的傅里叶级数系数就是输入的傅里叶系数乘以该系统频率响应在相应谐波频率上的值。卷积性质(5.48)式代表了这一结果对于非周期输入和输出情况下的推广，不过所用的是傅里叶变换，而不是傅

里叶级数。

与连续时间情况一样，(5.48)式将两个信号的卷积转化为它们的傅里叶变换相乘这样简单的代数运算，这一点既方便于信号与系统的分析，又大大深化了一个LTI系统对施加于它的输入信号的响应这一问题的理解。特别是，从(5.48)式可见，频率响应 $H(e^{j\omega})$ 控制了输入的傅里叶变换在每一频率 ω 上复振幅的变化，因此，在频率选择性滤波中，就要求在相应于所需要的通带频率范围内 $H(e^{j\omega}) \approx 1$ ，而在需要消除或大大衰减的频带内 $H(e^{j\omega}) \approx 0$ 。

5.4.1 举例

为了说明卷积性质以及其它几个性质的应用，本节研究以下几个例子。

例 5.11 考虑一 LTI 系统，其单位脉冲响应为

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

它的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 就是

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] e^{-jn\omega} = e^{-jn\omega_0}$$

因此，对于傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ 的任意输入 $x[n]$ ，其输出的傅里叶变换是

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-jn\omega_0} X(e^{j\omega}) \quad (5.49)$$

对于这个例子， $y[n] = x[n - n_0]$ ，(5.49)式就与时移性质相一致。同时，频率响应 $H(e^{j\omega}) = e^{-jn\omega_0}$ ，它是一个纯时移系统，对所有频率其模为 1，而相移则与频率成线性关系，即 $-n\omega_0$ 。

例 5.12 考虑一下在 3.9.2 节介绍过的离散时间理想低通滤波器。该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 如图 5.17(a) 所示。因为一个 LTI 系统的单位脉冲响应和频率响应是一对傅里叶变换，所以就能利用傅里叶变换的综合公式(5.8)式由频率响应来确定该理想低通滤波器的单位脉冲响应。以 $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 作为积分区间，由图 5.17(a) 可见有

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \quad (5.50)$$

$h[n]$ 如图 5.17(b) 所示。

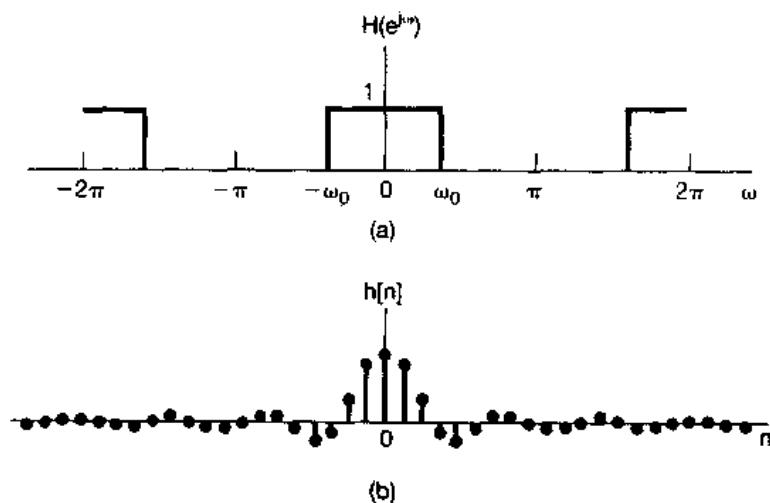


图 5.17 (a) 离散时间理想低通滤波器的频率响应；
(b) 该理想低通滤波器的单位脉冲响应

在图 5.17 中, 遇到了许多同样的问题, 这些问题曾在例 4.18 的连续时间理想低滤波器中出现过。首先, 因为 $h[n]$ 在 $n < 0$ 不为零, 因此该理想低通滤波器不是因果的。第二, 即便因果性不是一个重要的因素, 也还是有一些其它的原因而选择用非理想滤波器来实现频率选择性滤波, 这里面包括易于实现以及对时域特性的一些要求等等。特别是, 图 5.17(b)的理想低通滤波器的单位脉冲响应是振荡型的, 这一点在其些应用中是不希望有用。在这样一些情况下, 必须在频域要求(如频率选择性)和时域特性(如非振荡性)之间作出某一折衷。第 6 章将详细讨论这些问题及其有关的概念。

下面的例子用来说明, 卷积性质在卷积和的计算上也是很有用的。

例 5.13 考虑一 LTI 系统, 其单位脉冲响应为

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

这里 $|\alpha| < 1$ 。假设该系统的输入是

$$x[n] = \beta^n u[n]$$

$|\beta| < 1$ 。求 $h[n]$ 和 $x[n]$ 的傅里叶变换, 有

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (5.51)$$

和

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}} \quad (5.52)$$

这样就有

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})} \quad (5.53)$$

和例 4.19 相同, 求 $Y(e^{j\omega})$ 的反变换, 最容易的做法就是用部分分式将 $Y(e^{j\omega})$ 展开。 $Y(e^{j\omega})$ 是以 $e^{-j\omega}$ 的两个多项式之比, 总是愿意将它表示成比较简单的一些项之和, 这样用直观(或许再结合利用 5.3.8 节的频率微分性质)就能求得每一项的反变换。对于有理变换的一般代表运算步骤在附录中给予讨论。对于本例, 若 $\alpha \neq \beta$, $Y(e^{j\omega})$ 的部分分式展开就具有如下形式:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}} \quad (5.54)$$

将(5.53)式和(5.54)式的右边令其相等, 就得

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, \quad B = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

因此, 根据例 5.1 和线性性质, 凭直观就得(5.54)式的反变换为

$$y[n] = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \beta^n u[n] = \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{n+1} u[n] - \beta^{n+1} u[n]] \quad (5.55)$$

若 $\alpha = \beta$, (5.54)式的部分分式展开式就不成立, 然而, 这时

$$Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right)^2$$

这就能表示成

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{j}{\alpha} e^{j\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right) \quad (5.56)$$

和例 4.19 相同, 可以利用频域微分性质(5.46)式, 再结合傅里叶变换对

$$\alpha^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

得出

$$n\alpha^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right)$$

为了计及因子 $e^{j\omega}$, 可应用时移性质得到

$$(n+1)\alpha^{n+1} u[n+1] \xrightarrow{\mathcal{F}} j e^{j\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right)$$

最后再考虑到(5.56)式中的 $1/\alpha$ 因子, 可得

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n+1] \quad (5.57)$$

值得注意的是, 虽然上式的右边乘了一个起始于 $n = -1$ 的阶跃, 但是序列 $(n+1)\alpha^n u[n+1]$ 在 $n=0$ 以前仍然为零, 因为因子 $(n+1)$ 在 $n = -1$ 时为零。因此, 也能换成另一种形式将 $y[n]$ 表示为

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n] \quad (5.58)$$

下面例子用以说明, 卷积性质与其它傅里叶变换性质一起, 在分析系统互联中往往也是很有用的。

例 5.14 考虑图 5.18(a) 的系统, 其输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$ 。频率响应为 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 的 LTI 系统是一个截止频率为 $\pi/4$ 的理想低通滤波器, 通带内增益为 1。先考虑图 5.18(a) 中的上部路径。信号 $w_1[n]$ 的傅里叶变换可以将 $(-1)^n = e^{jn\pi}$ 而使得有 $w_1[n] = e^{jn\pi} x[n]$, 再利用频移性质而得到

$$W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$$

由卷积性质得出

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j(\omega-\pi)})$$

因为 $w_3[n] = e^{jn\pi} w_2[n]$, 再

次利用频移性质就得

$$\begin{aligned} W_3(e^{j\omega}) &= W_2(e^{j(\omega-\pi)}) \\ &\approx H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j(\omega-2\pi)}) \end{aligned}$$

因为离散时间傅里叶变换总是周期的, 周期为 2π

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega})$$

再在图 5.18(a) 的下部路径应用卷积性质, 可得

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

根据傅里叶变换的线性性质, 有

$$Y(e^{j\omega}) = W_3(e^{j\omega}) + W_4(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]X(e^{j\omega})$$

结果, 图 5.18(a) 整个系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$

如图 5.18(b) 所示。

如同在例 5.7 中所看到的, $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$ 是一个理想高通滤波器的频率响应。因此, 整个系统既

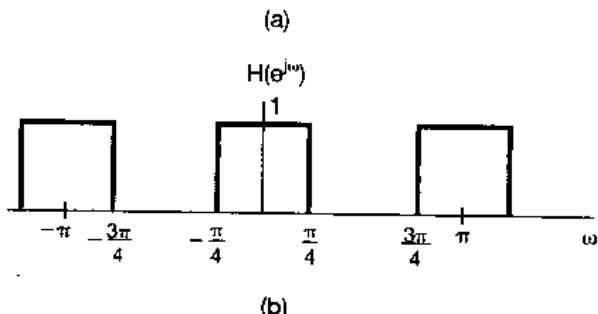
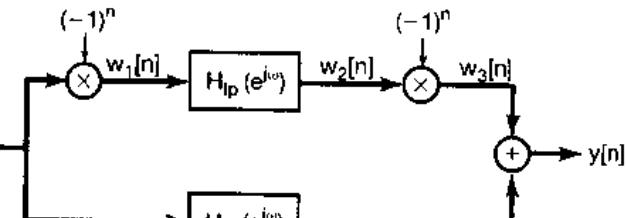


图 5.18 (a) 例 5.14 中的系统互联; (b) 该系统的总频率响应

通过低频，又通过高频，而阻止这两个频带之间的频率通过。也就是说，这是一个称之为具有理想带阻特性的滤波器，其阻带范围是 $\pi/4 < |\omega| < 3\pi/4$ 。

值得提及的是，和连续时间情况相同，不是每一个 LTI 系统都有一个频率响应。例如，单位脉冲响应 $h[n] = 2^n u[n]$ 的 LTI 系统，对正弦输入就不是一个有限的响应，这就反映出对 $h[n]$ 的傅里叶变换的分析公式是发散的。然而，若一个 LTI 系统是稳定的，那么由 2.3.7 节，它的单位脉冲响应就是绝对可和的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad (5.59)$$

因此，对稳定系统而言，频率响应总是收敛的。在利用傅里叶方法时，总是局限到单位脉冲响应的傅里叶变换存在的系统内。第 10 章将把傅里叶变换推广到 z 变换中去，在那里就可以对频率响应不收敛的 LTI 系统应用变换法。

5.5 相乘性质

在 4.5 节介绍了连续时间信号的相乘性质，并通过几个例子指出了它的某些应用。对于离散时间信号也有一个类似的性质，在应用中也起着同样的作用。这一节直接来导出这一结果，并给出一个例子来说明它的应用。到第 7 和第 8 章，将用相乘性质在采样和通信的范畴内进行讨论。

考虑 $y[n]$ 等于 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的乘积，它们的傅里叶变换分别是 $Y(e^{j\omega})$ ， $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ ，那么

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-jn\omega}$$

或者，因为

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n} d\theta \quad (5.60)$$

于是有

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n} d\theta \right\} e^{-jn\omega} \quad (5.61)$$

交换求和与积分次序，可得

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta \quad (5.62)$$

上式方括号内的和就是 $X_2(e^{j(\omega-\theta)})$ ，结果(5.62)式就变成

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (5.63)$$

(5.63)式就相当于 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 的周期卷积，并且在这个式子中的积分可以在任意 2π 长度的区间内进行。卷积的一般形式(积分区间从 $-\infty$ 到 $+\infty$)常称为非周期卷积，以与周期卷积相区分。周期卷积的机理最好通过例子来说明。

例 5.15 有一信号 $x[n]$ ，它为两个另外的信号的乘积，求其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ ，即

$$x[n] = x_1[n]x_2[n]$$

式中

$$x_1[n] = \frac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n}$$

和

$$x_2[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

根据(5.63)式的相乘性质知道, $X(e^{j\omega})$ 是 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 的周期卷积, 其中(5.63)式的积分可以在任意 2π 长度的区间内进行。现选取积分区间为 $-\pi < \theta \leq \pi$ ^①, 可得

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \quad (5.64)$$

(5.64)式类似于非周期卷积, 除了积分是限制在区间 $-\pi < \theta \leq \pi$ 这一点外。然而, 我们可以将这个式子转换成一般的卷积, 定义

$$\hat{X}_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}), & \text{对 } -\pi < \omega \leq \pi \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

然后, 在(5.64)式中用 $\hat{X}_1(e^{j\theta})$ 替代 $X_1(e^{j\theta})$, 并利用 $\hat{X}_1(e^{j\theta})$ 在 $|\theta| > \pi$ 为零, 就有

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \end{aligned}$$

因此, $X(e^{j\omega})$ 是矩形脉冲 $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ 和周期方波 $X_2(e^{j\omega})$ 的非周期卷积的 $1/2\pi$ 倍, $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 如图 5.19 所示。这一卷积的结果就是傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 如图 5.20 所示。

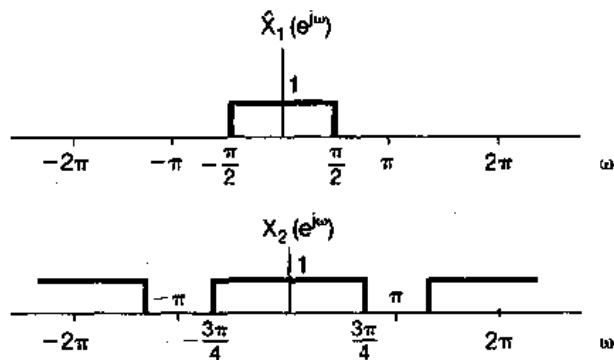


图 5.19 代表 $X_1(e^{j\omega})$ 一个周期的 $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 。 $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 的线性卷积就相当于 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 的周期卷积。

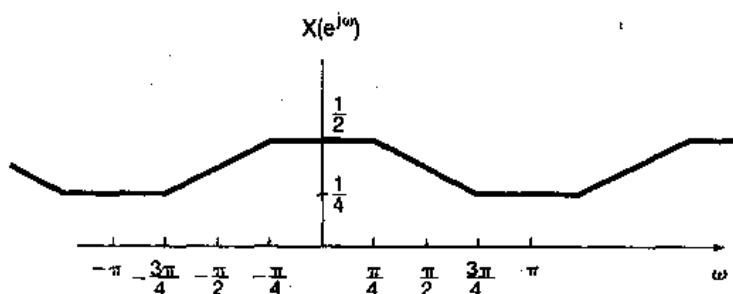


图 5.20 例 5.15 周期卷积的结果

5.6 傅里叶变换性质和基本傅里叶变换对列表

表 5.1 综合了离散时间傅里叶变换的若干重要性质, 并指出在正文中讨论它们的节次。

① 原文为 $-\pi < \theta < \pi$, 有误——译者注。

表 5.2 汇总了一些基本而最重要的离散时间傅里叶变换对，其中大多数在正文的例子中都曾导出过。

表 5.1 傅里叶变换性质

节次	性质	非周期信号	傅里叶变换
	$x[n]$		$X(e^{j\omega})$
	$y[n]$		$Y(e^{j\omega})$
5.3.2	线性 $ax[n] + by[n]$		$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
5.3.3	时移 $x[n - n_0]$		$e^{-jn_0}X(e^{j\omega})$
5.3.3	频移 $e^{j\omega_0 n}x[n]$		$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
5.3.4	共轭 $x^*[n]$		$X^*(e^{-j\omega})$
5.3.6	时间反转 $x[-n]$		$X(e^{-j\omega})$
5.3.7	时域扩展 $x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{若 } n \text{ 为 } k \text{ 的倍数} \\ 0, & \text{若 } n \text{ 不为 } k \text{ 的倍数} \end{cases}$		$X(e^{j\omega})$
5.4	卷积 $x[n] * y[n]$		$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
5.5	相乘 $x[n]y[n]$		$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
5.3.5	时域差分 $x[n] - x[n-1]$		$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
5.3.5	累加 $\sum_{k=-\infty}^n x[k]$		$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})$ $+ \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
5.3.8	频域微分 $nx[n]$		$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
5.3.4	实信号的共轭对称性 $x[n]$ 为实信号		$\Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\}$ $\Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\}$ $ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$
5.3.4	实、偶信号的对称性 $x[n]$ 为实、偶信号		$X(e^{j\omega})$ 实且为偶
5.3.4	实、奇信号的对称性 $x[n]$ 为实、奇信号		$X(e^{j\omega})$ 纯虚且为奇
5.3.4	实信号的奇偶分解 $x_e[n] = \Re\{x[n]\}$ $[x[n]$ 为实] $x_o[n] = \Im\{x[n]\}$ $[x[n]$ 为实]		$\Re\{X(e^{j\omega})\}$ $\Im\{X(e^{j\omega})\}$
5.3.9	非周期信号的帕斯瓦尔定理		$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

表 5.2 基本傅里叶变换对

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数(若为周期的)
$\sum_{k=-N}^N a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数 \Rightarrow 信号是非周期的
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) $	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数 \Rightarrow 信号是非周期的
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) $	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数 \Rightarrow 信号是非周期的
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$
周期方波 $x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n \leq N/2 \end{cases}$ 和 $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N \sin[2\pi k/2N]},$ $k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ 对全部 k
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—
$\frac{\sin W_n}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{W_n}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq W \\ 0, & W < \omega \leq \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ 周期的, 周期为 2π	—
$\delta[n]$	1	—

续表 5.2

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数(若为周期的)
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	e^{-jn_0}	—
$(n+1)a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^r u[n] < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—

5.7 对偶性

在讨论连续时间傅里叶变换中，已经观察到在分析公式(4.9)式和综合公式(4.8)式之间有某种对称性或对偶性存在，然而对离散时间傅里叶变换而言，分析公式(5.9)式和综合公式(5.8)式之间却不存在相应的对偶性。但是，在离散时间傅里叶级数公式(3.94)式和(3.95)式之间却存在一种对偶关系，这将在 5.7.1 节进行讨论。另外，在离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶级数之间也存在一种对偶关系，这一关系将在 5.7.2 节讨论。

5.7.1 离散时间傅里叶级数的对偶性

因为一个周期信号 $x[n]$ 的傅里叶级数系数 a_k 本身就是一个周期序列，我们就能将这个序列 a_k 展开成傅里叶级数。离散时间傅里叶级数的对偶性质意味着周期序列 a_k 的傅里叶级数系数是 $(1/N)x[-n]$ 的值(也就是说正比于原信号在时间反转后的值)。为了更仔细地看出这一点，现考虑两个周期均为 N 的周期序列，这两个序列通过下列和式联系起来

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=(N)} g[r] e^{-jr(2\pi/N)m} \quad (5.65)$$

如果令 $m = k$ 和 $r = n$ ，则(5.65)式就变成

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} g[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

将该式与(3.95)式比较可知，序列 $f[k]$ 就相当于信号 $g[n]$ 的傅里叶级数系数，也就是说，如果对一个周期离散时间信号和它的傅里叶级数系数采用在第 3 章所引入的符号

$$x[n] \xrightarrow{\text{FS}} a_k$$

那么，通过(5.65)式相联系的两个周期序列就满足

$$g[n] \xrightarrow{\text{FS}} f[k] \quad (5.66)$$

另一方面，若令 $m = n$ 和 $r = -k$ ，则(5.65)式就变为

$$f[n] = \sum_{k=(N)} \frac{1}{N} g[-k] e^{jk(2\pi/N)n}$$

将该式与(3.94)式比较可知， $(1/N)g[-k]$ 就相当于 $f[n]$ 的傅里叶级数的系数序列，即

$$f[n] \xleftrightarrow{\text{FS}} \frac{1}{N} g[-k] \quad (5.67)$$

和连续时间情况一样，这一对偶性意味着：离散时间傅里叶级数的每一个性质都有其对应的一个对偶关系存在。例如，参照表 3.2，如下一对性质就是对偶的：

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0} \quad (5.68)$$

和

$$e^{jm(2\pi/N)n} x[n] \xleftrightarrow{\text{FS}} a_{k-m} \quad (5.69)$$

同理，从该表上可以提取的另一对对偶关系如下：

$$\sum_{r=(N)} x[r] y[n-r] \xleftrightarrow{\text{FS}} N a_k b_k \quad (5.70)$$

和

$$x[n] y[n] \xleftrightarrow{\text{FS}} \sum_{l=(N)} a_l b_{k-l} \quad (5.71)$$

对于离散时间傅里叶级数的性质除了上述结果以外，对偶性还常常用以简化涉及求取傅里叶级数表示式的复杂计算上。这点将用如下例子给予说明。

例 5.16 考虑周期为 $N=9$ 的下面周期信号：

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin(5\pi n/9)}{\sin(\pi n/9)}, & k \neq 9 \text{ 的倍数} \\ \frac{5}{9}, & k = 9 \text{ 的倍数} \end{cases} \quad (5.72)$$

在第 3 章，曾求得一个矩形方波的傅里叶系数在形式上与(5.72)式很相像。由对偶性使人想到， $x[n]$ 的傅里叶系数也一定具有矩形方波的形式。为了更仔细地看出这点，令 $g[n]$ 是一个周期为 $N=9$ 的周期方波，而有

$$g[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & 2 < |n| \leq 4 \end{cases}$$

$g[n]$ 的傅里叶系数 b_k 可由例 3.12 确定为

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin(5\pi k/9)}{\sin(\pi k/9)}, & n \neq 9 \text{ 的倍数} \\ \frac{5}{9}, & n = 9 \text{ 的倍数} \end{cases} \quad (5.72)$$

对于 $g[n]$ 的傅里叶级数分析公式(3.95)式，现在可以写成

$$b_k = \frac{1}{9} \sum_{n=-2}^2 (1) e^{-jn\pi k/9}$$

将变量 k 和 n 的名称互换，并将 $x[n] = b_k$ ，求得

$$x[n] = \frac{1}{9} \sum_{k=-2}^2 (1) e^{-jn\pi k/9}$$

再在右边和式中令 $k' = -k$ ，得到

$$x[n] = \frac{1}{9} \sum_{k=-2}^2 e^{+jn\pi k'/9}$$

最后，将因子 $1/9$ 移至求和号里面，可见这个式子的右边就具有对 $x[n]$ 的综合公式(3.94)式的形式，据此得出 $x[n]$ 的傅里叶系数就是

$$a_k = \begin{cases} 1/9, & |k| \leq 2 \\ 0, & 2 < |k| \leq 4 \end{cases}$$

当然这是周期的，周期 $N=9$ 。

5.7.2 离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶级数之间的对偶性

除了离散时间傅里叶级数的对偶性以外，在离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶级数之间也存在着一种对偶关系。现在让我们将连续时间傅里叶级数公式(3.38)式和(3.39)式与离散时间傅里叶变换公式(5.8)式和(5.9)式作一比较。为方便起见，将这些公式重新写出如下：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.73)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (5.74)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (5.75)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (5.76)$$

可以注意到，(5.73)式和(5.76)式是很相像的，(5.74)式和(5.75)式也是很类似的。事实上，可以将(5.73)式和(5.74)式看作周期性频率响应 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶级数表示。特别是，因为 $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数，周期为 2π ，它就有一个用成谐波关系的周期指数函数的加权和的傅里叶级数表示，所有这些成谐波关系的周期指数函数都有一个公共周期为 2π 。这也就是说， $X(e^{j\omega})$ 能够表示成信号 $e^{j\omega n}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的加权和的傅里叶级数。由(5.74)式可见，在这个展开式中的第 n 次傅里叶系数（也即与 $e^{j\omega n}$ 相乘的系数）是 $x[-n]$ 。再者，因为 $X(e^{j\omega})$ 的周期是 2π ，所以(5.73)式也就能够看作是对傅里叶级数系数 $x[n]$ 的傅里叶级数的分析公式，也就是在(5.74)对 $X(e^{j\omega})$ 的表示式中与 $e^{-j\omega n}$ 相乘的系数。这一对偶关系的应用最好用一个例子来说明。

例 5.17 可以利用离散时间傅里叶变换综合公式和连续时间傅里叶级数分析公式之间的对偶性来求下面序列的离散时间傅里叶变换：

$$x[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

为了利用对偶性，首先就必须要确认一个周期 $T=2\pi$ 的连续时间信号 $g(t)$ ，其傅里叶系数 $a_k = x[k]$ 。由例 3.5 知道， $g(t)$ 是一个周期为 2π （或者等效为基波频率 $\omega_0=1$ ）的周期性方波为

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_1 \\ 0, & T_1 < |t| \leq \pi \end{cases}$$

那么， $g(t)$ 的傅里叶级数系数是

$$a_k = \frac{\sin(kT_1)}{k\pi}$$

这样，若取 $T_1=\pi/2$ ，就有 $a_k = x[k]$ 。这时， $g(t)$ 的分析公式是

$$\frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-jkt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1) e^{-jkt} dt$$

将 k 写为 n ， t 写为 ω ，则有

$$\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1) e^{-jnw} dw \quad (5.77)$$

在上式两边以 $-n$ 代换 n ，并注意到 sinc 函数是偶函数，得出

$$\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1)e^{j\omega n} d\omega$$

上式的右边具有对 $x[n]$ 的傅里叶变换综合公式的形式，这里

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

表 5.3 简要地综合了连续和离散时间信号的傅里叶级数和傅里叶变换表示式，同时也指出了每一种情况下的对偶关系。

表 5.3 傅里叶级数与傅里叶变换综合

	连续时间		离散时间	
	时域	频域	时域	频域
傅里叶级数	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ 连续时间，在时间上是周期的 \Downarrow	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ 离散频率，在频率上是非周期的 \nwarrow	$x[n] = \sum_{k=(N)} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ 离散时间，在时间上是周期的 \nwarrow	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$ 离散频率，在频率上是周期的 \leftarrow 对偶 \rightarrow
傅里叶变换	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt$ 连续时间，在时间上是非周期的 \leftarrow 对偶 \rightarrow	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ ① 连续频率，在频率上是非周期的	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ ① 离散时间，在时间上是非周期的	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ 连续频率，在频率上是周期的

5.8 由线性常系数差分方程表征的系统

对一个 LTI 系统而言，其输出 $y[n]$ 和输入 $x[n]$ 间的线性常系数差分方程一般具有如下形式：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (5.78)$$

由这样的差分方程所描述的系统是十分重要而有用的一类系统。这一节将利用离散时间傅里叶变换的几个性质导出由这样一个方程所描述的 LTI 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。所采用的方法是与 4.7 节讨论由线性常系数微分方程所描述的连续时间 LTI 系统时紧密并行的。

有两种方法来确定 $H(e^{j\omega})$ 。其中的第一种是曾在 3.11 节对几个简单的差分方程所说明的，这就是利用复指数是 LTI 系统特征函数这一事实来求。若 $x[n] = e^{j\omega n}$ 是一个 LTI 系统的输入，那么其输出就一定具有 $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ 这种形式。将这些表达式代入 (5.78) 式，并做一些代数运算就可以解出 $H(e^{j\omega})$ 。这一节，将采用第二种途径，利用离散时间傅里叶变换的卷积定理。

① 原文为 $X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} dt$, $x[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$, 有误——译者注。

积、线性和时移性质来求。设 $X(e^{j\omega})$ 、 $Y(e^{j\omega})$ 和 $H(e^{j\omega})$ 分别为输入 $X[n]$ 、输入 $y[n]$ 和单位脉冲响应 $h[n]$ 的傅里叶变换，那么离散时间傅里叶变换的卷积性质就意味着有

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (5.79)$$

在(5.78)式两边应用傅里叶变换，并利用线性和时移性质，就得

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

或者等效为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}} \quad (5.80)$$

将(5.80)式与(4.76)式作一比较可见，像在连续时间情况下一样， $H(e^{j\omega})$ 是两个多项式的比，但是在离散时间下，这些多项式的变量是 $e^{-j\omega}$ 。分子多项式的系数就是出现在(5.78)式右边的系数，而分母多项式的系数就是(5.78)式左边的系数。因此，由(5.78)式表征的 LTI 系统的频率响应就能够凭直观写出来。

(5.78)式的差分方程一般就称为 N 阶差分方程，因为它涉及输出 $y[n]$ 直到 N 步的延迟。同时(5.80)式 $H(e^{j\omega})$ 的分母也是以 $e^{-j\omega}$ 的 N 阶多项式。

例 5.18 考虑一因果 LTI 系统，其差分方程为

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (5.81)$$

其中 $|a| < 1$ 。由(5.80)式，该系统的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (5.82)$$

将(5.82)式与例 5.1 比较可知，它就是序列 $a^n u[n]$ 的傅里叶变换。因此，该系统的单位脉冲响应是

$$h[n] = a^n u[n] \quad (5.83)$$

例 5.19 考虑一因果 LTI 系统，其差分方程为

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n] \quad (5.84)$$

由(5.80)式，频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \quad (5.85)$$

为求单位脉冲响应，第一步是要将(5.85)式的分母因式分解为：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \quad (5.86)$$

$H(e^{j\omega})$ 就能按部分分式展开，如同附录中例 A.3 那样，展开的结果为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad (5.87)$$

式中每一项的反变换都可凭直观写出，其结果为

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (5.88)$$

在例 5.19 中所采用的步骤与在连续时间情况下所用的是相同的，这就是：在将 $H(e^{j\omega})$ 利用部分分式方法展开以后，就能凭直观求得每一项的反变换。这一方法可用于由线性常系数差分方程所描述的任何 LTI 系统的频率响应，以确定该系统的单位脉冲响应。同时，如同在下面这个例子所说明的，若这样的系统输入的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 也是一个以 $e^{-j\omega}$ 的多项式之比，那么 $Y(e^{j\omega})$ 也一定是 $e^{-j\omega}$ 的多项式之比。这时可用同样的办法求得系统对输入 $x[n]$ 的响应 $y[n]$ 。

例 5.20 考虑例 5.19 的 LTI 系统，并设系统输入为

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

利用(5.80)式和例 5.1 或例 5.18，可得

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left[\frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \right] \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right] \\ &= \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} \end{aligned} \quad (5.89)$$

如同在附录中给出的，这种情况下的部分分式展开式是

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B_{12}}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{B_{21}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (5.90)$$

式中常数 B_{11} 、 B_{12} 和 B_{21} 可用附录中给出的方法求出。这个特定的展开式在附录例 A.4 中详细地列出来了，所得到的值是

$$B_{11} = -4, B_{12} = -2, B_{21} = 8$$

这样

$$Y(e^{j\omega}) = -\frac{4}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (5.91)$$

上式第一和第三项与在例 5.19 中所遇到的形式相同，而第二项与在例 5.13 中所见过的一样。无论由这些例子，还是根据表 5.2，都能将(5.91)式中的每一项求反变换，而得出

$$y[n] = \left\{ -4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} u[n] \quad (5.92)$$

5.9 小结

这一章和第 4 章相并行地研究了离散时间信号的傅里叶变换，并考察了它的许多重要性质。贯穿整个这一章，已经看到连续时间和离散时间傅里叶分析之间有很多类似之处，同时也看到了某些重要的差别。例如，在离散时间情况下，傅里叶级数和傅里叶变换之间的关系是非常类似于在连续时间情况下两者之间的关系的。尤其是，由离散时间傅里叶级数表示导出非周期信号的离散时间傅里叶变换的过程与在连续时间情况下所对应的几乎是完全一样的。再者，连续时间傅里叶变换的很多性质都能在离散时间情况下找到相对应的性质。但另

一方面，与连续时间情况相比，一个非周期信号的离散时间傅里叶变换则总是周期的，且周期为 2π 。除了上述这些异同点之外，还讨论了连续时间和离散时间信号的傅里叶表示之间的对偶关系。

连续时间和离散时间傅里叶分析之间最重要的类同之处还在于它们在分析和表示信号以及在LTI系统中的应用。更具体一点，就是卷积性质提供了LTI系统频域分析的基础。我们已经看到了这一途径在第3到第5章滤波问题的讨论以及在研究由线性常系数微分及差分方程所描述的系统中的某些应用。并且，在第6章更详细地研究滤波和时域与频域的关系问题中，将会对此有更进一步的体会。另外，连续时间和离散时间中的相乘性质则是第7章研究采样和第8章讨论通信系统问题的基础。

习 题

习题的第一部分属于基本题，答案在书末给出。其余三个部分属于基本题、深入题和扩充题。

基本题(附答案)

5.1 利用傅里叶变换分析公式(5.9)式，计算下列傅里叶变换：

$$(a) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (b) \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}$$

概略画出每一傅里叶变换在一个周期内的模，并给以标注。

5.2 利用傅里叶变换分析公式(5.9)式，计算下列傅里叶变换：

$$(a) \delta[n-1] + \delta[n+1] \quad (b) \delta[n+2] - \delta[n-2]$$

概略画出每一傅里叶变换在一个周期内的模，并给以标注。

5.3 对于 $-\pi \leq \omega < \pi$ ，求下列周期信号的傅里叶变换：

$$(a) \sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right) \quad (b) 2 + \cos\left(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{8}\right)$$

5.4 利用傅里叶变换的综合公式(5.8)式求下列反变换：

$$(a) X_1(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{2\pi\delta(\omega - 2\pi k) + \pi\delta(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi k) + \pi\delta(\omega + \frac{\pi}{2} - 2\pi k)\}$$

$$(b) X_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2j, & 0 < \omega \leq \pi \\ -2j, & -\pi < \omega \leq 0 \end{cases}$$

5.5 利用傅里叶变换的综合公式(5.8)式，求 $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}$ 的反变换，其中

$$|X(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}, \quad \angle X(e^{j\omega}) = -\frac{3\omega}{2}$$

根据答案求 $x[n]=0$ 时的 n 值。

5.6 已知 $x[n]$ 有傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ ，用 $X(e^{j\omega})$ 表示下列信号的傅里叶变换。可以利用表5.1的傅里叶变换性质来做。

$$(a) x_1[n] = x[1-n] + x[-1-n] \quad (b) x_2[n] = \frac{x^*[n] + x[n]}{2}$$

$$(c) x_3[n] = (n-1)^2 x[n]$$

5.7 对于下面每一傅里叶变换，利用傅里叶变换性质(表5.1)，确定是否对应的时域信号是(i)实、虚信号，或均不是；(ii)偶、奇信号，或均不是。解本题时勿需求出任何反变换。

$$(a) X_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \sum_{k=1}^{10} (\sin k\omega) \quad (b) X_2(e^{j\omega}) = j \sin(\omega) \cos(5\omega)$$

(c) $X_3(e^{j\omega}) = A(\omega) + e^{jB(\omega)}$, 其中

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{8} \\ 0, & \frac{\pi}{8} < |\omega| \leq \pi \end{cases}; \quad B(\omega) = -\frac{3\omega}{2} + \pi$$

5.8 借助于表 5.1 和表 5.2, 当 $X(e^{j\omega})$ 为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \left[\frac{\sin \frac{3}{2}\omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \right] + 5\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

求 $x[n]$ 。

5.9 对某一特殊的 $x[n]$, 其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 已知下面四个条件

$$1. x[n] = 0, \quad n > 0$$

$$2. x[0] > 0$$

$$3. \Re\{X(e^{j\omega})\} = \sin\omega - \sin 2\omega$$

$$4. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(e^{j\omega})|^2 d\omega = 3$$

求 $x[n]$ 。

5.10 利用表 5.1 和表 5.2, 并结合

$$X(e^j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

确定

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

的数值。

5.11 考虑一信号 $g[n]$, 其傅里叶变换为 $G(e^{j\omega})$, 假设

$$g[n] = x_{(2)}[n]$$

这里信号 $x[n]$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ 。试确定某一实数 α , $0 < \alpha < 2\pi$, 并有 $G(e^{j\omega}) = G(e^{j(\omega-\alpha)})$ 。

5.12 设

$$y[n] = \left[\frac{\sin \frac{\pi}{4}n}{\pi n} \right]^2 * \left(\frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \right)$$

式中 * 记为卷积, 且 $|\omega_c| \leq \pi$ 。试对 ω_c 确定一个较严格的限制, 以保证

$$y[n] = \left[\frac{\sin \frac{\pi}{4}n}{\pi n} \right]^2$$

5.13 一单位脉冲响应 $h_1[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$ 的 LTI 系统与另一单位脉冲响应为 $h_2[n]$ 的因果 LTI 系统并联联结, 并联后的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}$$

求 $h_2[n]$ 。

5.14 假设一单位脉冲响应为 $h[n]$, 频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 的 LTI 系统 S, 具有下列条件:

$$1. (\frac{1}{4})^n u[n] \rightarrow g[n], \text{ 其中 } g[n] = 0, \quad n \geq 2 \text{ 和 } n < 0$$

$$2. H(e^{j\pi/2}) = 1$$

$$3. H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega-\pi)})$$

求 $h[n]$ 。

5.15 设 $Y(e^{j\omega})$ 的反变换是

$$y[n] = \left(\frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \right)^2$$

其中 $0 < \omega_c < \pi$ 。试确定 ω_c 的值，以保证

$$Y(e^{j\pi}) = \frac{1}{2}$$

5.16 有一信号的傅里叶变换是

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^3 \frac{(1/2)^k}{1 - \frac{1}{4} e^{-j(\omega-\pi/2)k}}$$

可以证明

$$x[n] = g[n]q[n]$$

其中 $g[n]$ 具有 $a^n u[n]$ 形式， $q[n]$ 是周期为 N 的周期信号。

(a) 求 a 的值。 (b) 求 N 的值。 (c) $x[n]$ 是实序列吗？

5.17 信号 $x[n] = (-1)^n$ 有一基波周期为 2，傅里叶级数系数为 a_k ，利用对偶性求基波周期为 2 的信号 $g[n] = a_n$ 的傅里叶级数系数 b_k 。

5.18 已知

$$a^{|n|} \leftrightarrow \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2}, |a| < 1$$

利用对偶性求下面周期 $T=1$ 的连续时间信号的傅里叶级数系数：

$$x(t) = \frac{1}{5 - 4 \cos(2\pi t)}$$

5.19 考虑一因果稳定的 LTI 系统 S，其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 通过下面二阶差分方程所关联：

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

(a) 求该系统 S 的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

(b) 求系统 S 的单位脉冲响应 $h[n]$ 。

5.20 有一因果稳定的 LTI 系统 S，具有下面性质

$$\left(\frac{4}{5} \right)^n u[n] \rightarrow n \left(\frac{4}{5} \right)^n u[n]$$

(a) 求该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

(b) 求该系统的差分方程。

基本题

5.21 计算下列信号的傅里叶变换：

(a) $x[n] = u[n-2] - u[n-6]$ (b) $x[n] = (\frac{1}{2})^{-n} u[-n-1]$

(c) $x[n] = (\frac{1}{3})^{|n|} u[-n-2]$ (d) $x[n] = 2^n \sin(\frac{\pi}{4}n) u[-n]$

(e) $x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|} \cos(\frac{\pi}{8}(n-1))$ (f) $x[n] = \begin{cases} n, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$

(g) $x[n] = \sin(\frac{\pi}{2}n) + \cos(n)$ (h) $x[n] = \sin(\frac{5\pi}{3}n) + \cos(\frac{7\pi}{3}n)$

(i) $x[n] = x[n-6]$ 和 $x[n] = u[n] - u[n-5]$ $0 \leq n \leq 5$

(j) $x[n] = (n-1)(\frac{1}{3})^{|n|}$ (k) $x[n] = \left(\frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n} \right) \cos(\frac{7\pi}{2}n)$

5.22 下列是各离散时间信号的傅里叶变换，求相应于每一变换的信号。

$$(a) X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{4} \leq |\omega| \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \frac{3\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi, \quad 0 \leq |\omega| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$(b) X(e^{j\omega}) = 1 + 3e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} - 4e^{-j3\omega} + e^{-j10\omega}$$

$$(c) X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$(d) X(e^{j\omega}) = \cos^2 \omega + \sin^2 3\omega$$

$$(e) X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(\omega - \frac{\pi}{2}k) \quad (f) X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}e^{-j\omega}}$$

$$(g) X(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

$$(h) X(e^{j\omega}) = \frac{1 - (\frac{1}{3})^6 e^{-j6\omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

5.23 设 $X(e^{j\omega})$ 是如图 P5.23 所示的 $x[n]$ 信号的傅里叶变换，不经求出 $X(e^{j\omega})$ 完成下列计算：

$$(a) \text{求 } X(e^0) \quad (b) \text{求 } X(e^{j\pi})$$

$$(c) \text{求 } \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (d) \text{求 } X(e^{j\pi})$$

$$(e) \text{求并画出傅里叶变换为 } \Re\{x(\omega)\} \text{ 的信号}$$

$$(f) \text{求}$$

$$(i) \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (ii) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$$

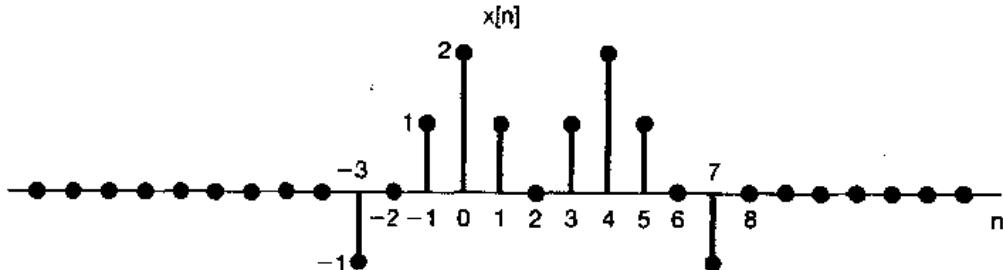


图 P5.23

5.24 试判定下列各信号，其傅里叶变换有哪一个(如果有)满足下面每一个条件：

$$1. \Re\{X(e^{j\omega})\} = 0$$

$$2. \Im\{X(e^{j\omega})\} = 0$$

$$3. \text{存在一个实数 } \alpha, \text{ 使得 } e^{j\omega}X(e^{j\omega}) \text{ 为实}$$

$$4. \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 0$$

$$5. X(e^{j\omega}) \text{ 周期的}$$

$$6. X(e^0) = 0$$

$$(a) x[n] \text{ 如图 P5.24(a) 所示}$$

$$(b) x[n] \text{ 如图 P5.24(b) 所示}$$

$$(c) x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$(d) x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$$

$$(e) x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+2]$$

$$(f) x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+3]$$

$$(g) x[n] \text{ 如图 P5.24(c) 所示}$$

$$(h) x[n] \text{ 如图 P5.24(d) 所示}$$

$$(i) x[n] = \delta[n-1] - \delta[n+1]$$

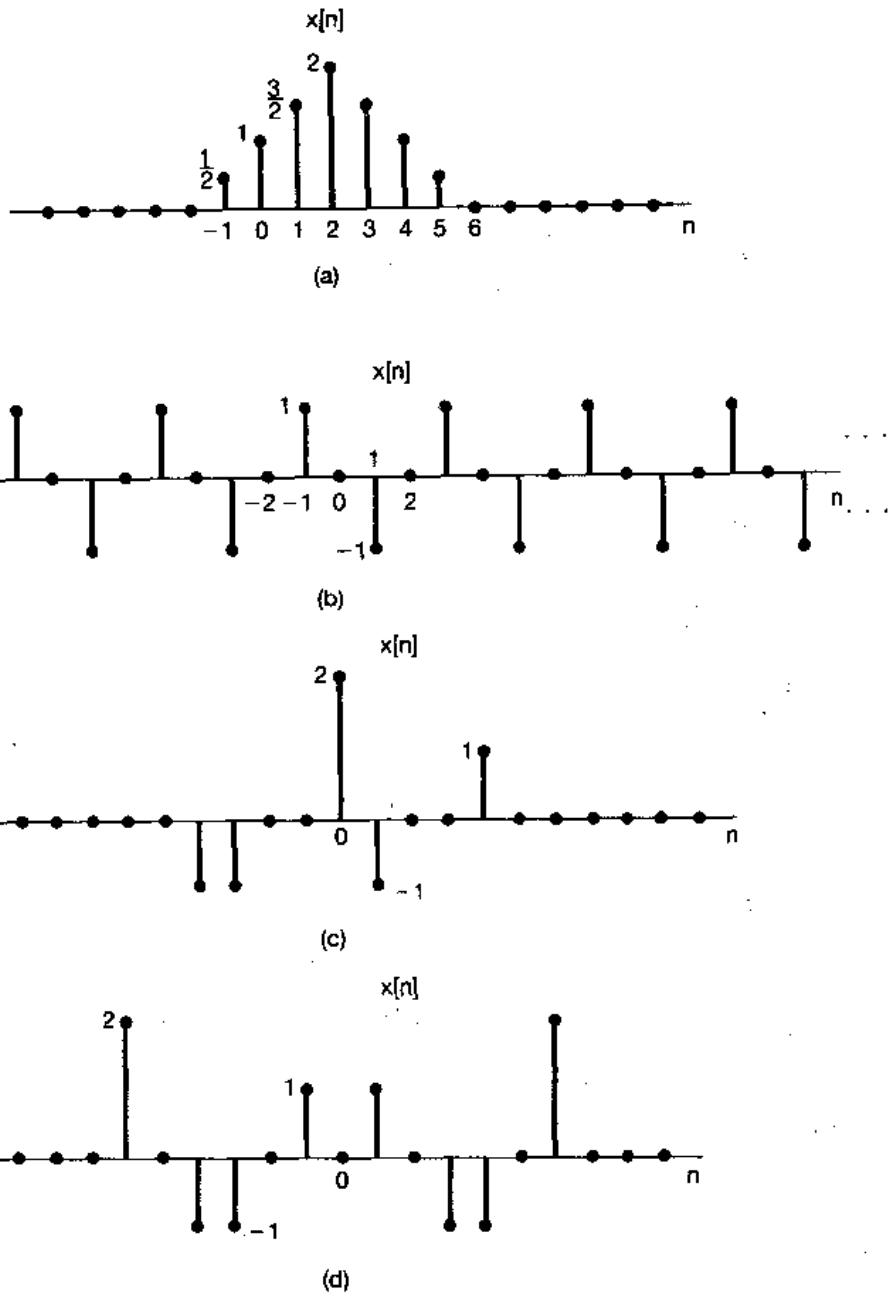


图 P5.24

5.25 考虑图 P5.25 的信号，设该信号的傅里叶变换用直角坐标写出为

$$X(e^{j\omega}) = A(\omega) + jB(\omega)$$

试画出对应于变换为

$$Y(e^{j\omega}) = [B(\omega) + A(\omega)e^{j\omega}]$$

的时间信号。

5.26 设 $x_1[n]$ 的傅里叶变换 $X_1(e^{j\omega})$ 如图 P5.26(a) 所示。

(a) 考虑信号 $x_2[n]$ ，其傅里叶变换 $X_2(e^{j\omega})$ 如图 P5.26(b) 所示，试用 $x_1[n]$ 来表示 $x_2[n]$ 。

[提示：首先用 $X_1(e^{j\omega})$ 来表示 $X_2(e^{j\omega})$ ，然后利用傅里叶变换性质。]

(b) $x_3[n]$ 的傅里叶变换 $X_3(e^{j\omega})$ 如图 P5.26(c) 所示，对 $x_3[n]$ 重做(a)。

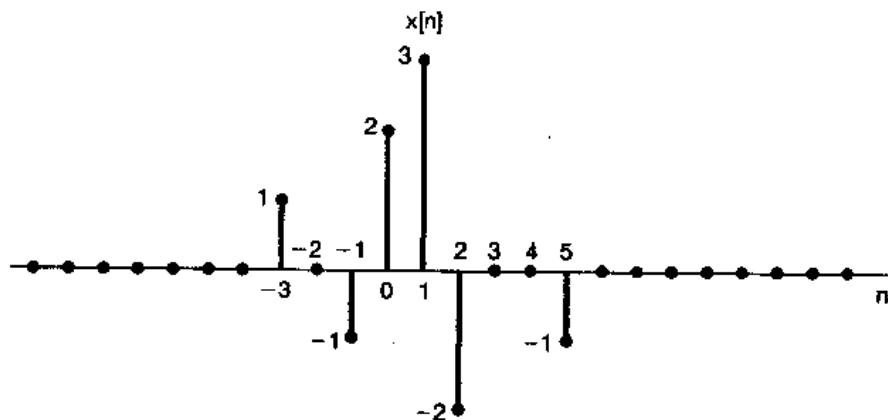
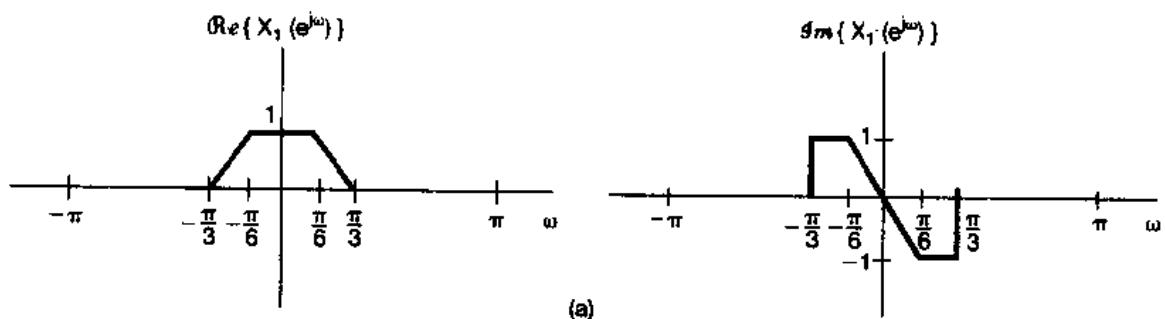


图 P5.25



(c) 设

$$\alpha = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx_1[n]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]}$$

这个 α 量是信号 $x_1[n]$ 的重心，通常称为 $x_1[n]$ 的延迟时间。求 α (做该题勿需首先明确地求出 $x_1[n]$)。

(d) 考虑信号

$$x_4[n] = x_1[n] * h[n],$$

其中

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/6)}{\pi n}$$

概略画出 $X_4(e^{j\omega})$ 。

5.27 (a) 设 $x[n]$ 有傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ ，如图 P5.27 所示。对于下列每一 $p[n]$ ，概略画出

$$w[n] = x[n]p[n]$$

的傅里叶变换。

$$(i) p[n] = \cos \pi n \quad (ii) p[n] = \cos(\pi n/2) \quad (iii) p[n] = \sin(\pi n/2)$$

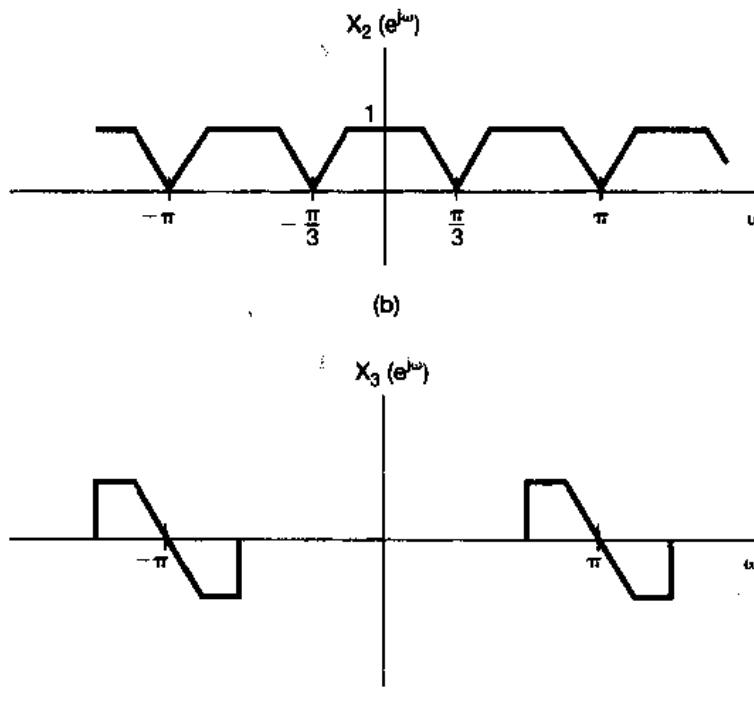


图 P5.26

$$(iv) p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 2k] \quad (v) p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k]$$

(b) 假设(a)中的信号 $w[n]$ 作为输入加到一个单位脉冲响应为

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

的 LTI 系统上去, 求对应于(a)中所选 $p[n]$ 的输出 $y[n]$ 。

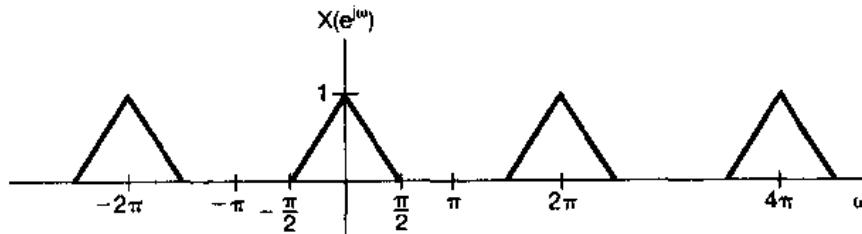


图 P5.27

5.28 已知信号 $x[n]$ 和 $g[n]$ 分别有傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 和 $G(e^{j\omega})$, 另外, $X(e^{j\omega})$ 和 $G(e^{j\omega})$ 之间的关系如下:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta}) G(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = 1 + e^{-j\omega} \quad (\text{P5.28-1})$$

(a) 若 $x[n] = (-1)^n$, 求 $g[n]$, 使其傅里叶变换 $G(e^{j\omega})$ 满足(P5.28-1)式。对于 $g[n]$ 还存在其它可能的解吗?

(b) 若 $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$, 重做(a)。

5.29 (a) 考虑一离散时间 LTI 系统, 其单位脉冲响应为

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

利用傅里叶变换求在下列各输入信号下的响应:

$$(i) x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] \quad (ii) x[n] = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (iii) x[n] = (-1)^n$$

(b) 假设

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right] u[n]$$

利用傅里叶变换求在下列各输入信号下的响应:

$$(i) x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (ii) x[n] = \cos(\pi n/2)$$

(c) 设 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = 3e^{j\omega} + 1 - e^{-j\omega} + 2e^{-j3\omega} \quad H(e^{j\omega}) = -e^{j\omega} + 2e^{-2j\omega} + e^{j4\omega}$$

求 $y[n] = x[n] * h[n]$ 。

5.30 在第 4 章曾指出过, 单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

的连续时间 LTI 系统在 LTI 系统分析中起着很重要的作用。同样正确的是单位脉冲响应为

$$h[n] = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right) = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

的离散时间 LTI 系统在 LTI 系统分析中也起着重要的作用。

(a) 求并画出单位脉冲响应为 $h[n]$ 的系统的频率响应。

(b) 考虑信号

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

假定该信号是具有下列单位脉冲响应的 LTI 系统的输入，求每种情况的输出。

$$(i) h[n] = \frac{\sin(\pi n/6)}{\pi n}$$

$$(ii) h[n] = \frac{\sin(\pi n/6)}{\pi n} + \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

$$(iii) h[n] = \frac{\sin(\pi n/6)\sin(\pi n/3)}{\pi^2 n^2}$$

$$(iv) h[n] = \frac{\sin(\pi n/6)\sin(\pi n/3)}{\pi n}$$

(c) 考虑单位脉冲响应为

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}$$

的 LTI 系统，求对下列各输入信号下的输出：

$$(i) x[n] = \text{图 P5.30 的方波}$$

$$(ii) x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-8k]$$

$$(iii) x[n] = (-1)^n \text{ 乘以图 P5.30 的方波}$$

$$(iv) x[n] = \delta[n+1] + \delta[n-1]$$

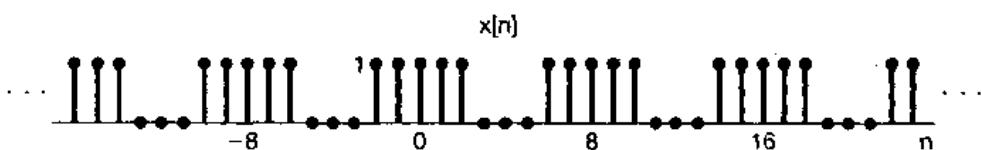


图 P5.30

5.31 有一单位脉冲响应为 $h[n]$ ，频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 的 LTI 系统，当 $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$ 时具有如下特性

$$\cos\omega_0 n \rightarrow \omega_0 \cos\omega_0 n$$

(a) 求 $H(e^{j\omega})$ 。 (b) 求 $h[n]$ 。

5.32 设 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 是因果 LTI 系统的单位脉冲响应，相应的频率响应是 $H_1(e^{j\omega})$ 和 $H_2(e^{j\omega})$ ，在这些条件下，下面的式子一般来说是对还是不对？陈述理由。

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega}) d\omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_2(e^{j\omega}) d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega}) d\omega$$

5.33 考虑一因果 LTI 系统，其差分方程为

$$y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$$

(a) 求该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

(b) 在下列输入时求系统响应：

$$(i) x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$(ii) x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$(iii) x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1] \quad (iv) x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1]$$

(c) 在输入具有下列傅里叶变换时，求系统响应：

$$(i) X(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

$$(ii) X(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}$$

$$(iii) X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega})(1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega})}$$

$$(iv) X(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega}$$

5.34 考虑一个由两个 LTI 系统级联组成的系统，这两个系统的频率响应为

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}} \quad \text{和} \quad H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}}$$

(a) 求描述整个系统的差分方程。

(b) 求整个系统的单位脉冲响应。

5.35 一因果 LTI 系统由如下差分方程所描述:

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n] + x[n-1]$$

其中 a 为实数, 且 $|a| < 1$ 。

(a) 找一个 b 值, 使该系统的频率响应满足

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \text{ 对全部 } \omega$$

因为对任何 ω 值的输入 $e^{j\omega n}$ 都不衰减, 所以这类系统称为全通系统。利用该 b 值解余下的问题。

(b) 粗略画出当 $a = 1/2$ 时 $H(e^{j\omega})$, $0 \leq \omega \leq \pi$ 。

(c) 粗略画出当 $a = -1/2$ 时 $H(e^{j\omega})$, $0 \leq \omega \leq \pi$ 。

(d) 当 $a = -\frac{1}{2}$, 系统的输入 $x[n]$ 为

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

求出并画出该系统的输出。由这个例子可见, 一个非线性相移对信号造成的影响是明显不同于一个线性相移所引起的信号的时移的。

5.36 (a) 设 $h[n]$ 和 $g[n]$ 是两个互逆的离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应, 并且都是稳定的。问这两个系统频率响应之间是什么关系?

(b) 考虑由下列各差分方程描述的因果 LTI 系统, 在每一种情况下, 求逆系统的单位脉冲响应和表征该逆系统的差分方程。

(i) $y[n] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$

(ii) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$

(iii) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$

(iv) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$

(v) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$

(vi) $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$

(c) 考虑由下列差分方程所描述的因果离散时间 LTI 系统

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2] \quad (\text{P5.36-1})$$

该系统的逆系统是什么? 证明: 逆系统是非因果的。试找出另一个因果 LTI 系统, 它是由 (P5.36-1) 式描述的系统的“逆再加延时”, 也即找一个因果 LTI 系统, 使得图 P5.36 中的输出 $w[n]$ 等于 $x[n-1]$ 。

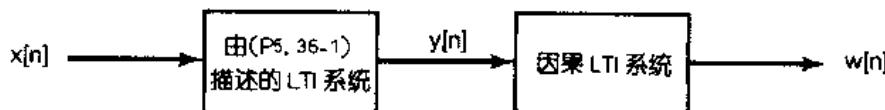


图 P5.36

深入题

5.37 设 $X(e^{j\omega})$ 是 $x[n]$ 的傅里叶变换。利用 $X(e^{j\omega})$ 导出下列信号傅里叶变换表示式(没有假设 $x[n]$ 是实序列)。

$$(a) \Re\{x[n]\} \quad (b) x^*[n] \quad (c) \Im\{x[n]\}$$

5.38 设 $X(e^{j\omega})$ 是一实信号 $x[n]$ 的傅里叶变换, 证明: $x[n]$ 可以写成

$$x[n] = \int_0^\pi [B(\omega)\cos\omega + C(\omega)\sin\omega] d\omega$$

(找出利用 $X(e^{j\omega})$ 来表示 $B(\omega)$ 和 $C(\omega)$ 的表示式)。

5.39 导出卷积性质

$$x[n] * h[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

5.40 $x[n]$ 和 $h[n]$ 是两个信号, 并令 $y[n] = x[n] * h[n]$ 。试对 $y[0]$ 写出两个表示式: 一个利用 $x[n]$ 和 $h[n]$ (直接用卷积和); 另一个用 $X(e^{j\omega})$ 和 $H(e^{j\omega})$ (用傅里叶变换的卷积性质)。然后, 选择一个恰当的 $h[n]$, 利用这两个表示式导出帕斯瓦尔定理, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

用类似的方式, 导出下面帕斯瓦尔定理的一般形式:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Z^*(e^{j\omega}) d\omega$$

5.41 令 $\tilde{x}[n]$ 是一个周期为 N 的周期信号, 另一有限长信号 $x[n]$ 通过下式与 $\tilde{x}[n]$ 关联:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

式子 n_0 为某整数。也就是说, $x[n]$ 等于一个周期上的 $\tilde{x}[n]$, 而在其余地方均为零。

(a) 若 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数系数为 a_k , $x[n]$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 证明:

$$a_k = \frac{1}{N}(e^{j2\pi k/N})$$

且与 n_0 的值无关。

(b) 考虑下面两个信号:

$$x[n] = u[n] - u[n-5] \quad \tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

这里 N 是一个正整数。令 a_k 记为 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶系数, $X(e^{j\omega})$ 记为 $x[n]$ 的傅里叶变换,

(i) 求 $X(e^{j\omega})$ 的闭式表示式。

(ii) 利用(i)的结果, 求傅里叶系数 a_k 的表示式。

5.42 本题将导出作为相乘性质的一种特殊情况的离散时间傅里叶变换的频移性质。令 $x[n]$ 是任意离散时间信号, 其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 并令

$$g[n] = e^{j\omega_0 n} x[n]$$

(a) 求出并画出下面信号的傅里叶变换:

$$p[n] = e^{j\omega_0 n}$$

(b) 傅里叶变换的相乘性质有

$$g[n] = p[n]x[n]$$

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} X(e^{j\theta})P((e^{j(\omega-\theta)})) d\theta$$

求出这个积分以证明

$$G(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

5.43 令 $x[n]$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 并令

$$g[n] = x[2n]$$

它的傅里叶变换是 $G(e^{j\omega})$ 。在本题中要导出 $G(e^{j\omega})$ 和 $X(e^{j\omega})$ 之间的关系。

(a) 设

$$v[n] = \frac{(e^{-j\omega n}x[n]) + x[n]}{2}$$

试用 $X(e^{j\omega})$ 表示 $v[n]$ 的傅里叶变换 $V(e^{j\omega})$ 。

(b) 注意到, 当 n 为奇数时, $v[n]=0$, 证明 $v[2n]$ 的傅里叶变换等于 $V(e^{\frac{j\omega}{2}})$ 。

(c) 证明

$$x[2n] = v[2n]$$

于是就有

$$G(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega/2})$$

现在利用(a)的结果, 用 $X(e^{j\omega})$ 来表示 $G(e^{j\omega})$ 。

5.44 (a) 令

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

是一个信号, $x_1[n]$ 的傅里叶变换记作 $X_1(e^{j\omega})$, 画出 $x_1[n]$ 和具有下列傅里叶变换的信号:

(i) $X_2(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})e^{j\omega}, |\omega| < \pi$

(ii) $X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})e^{-j3\omega/2}, |\omega| < \pi$

(b) 令

$$w(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{3T}\right) + \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$$

是一个连续时间信号。可以注意到, $x_1[n]$ 可以看作是 $w(t)$ 的等间隔采样的序列, 即

$$x_1[n] = w(nT)$$

证明

$$x_2[n] = w(nT - \alpha) \quad \text{和} \quad x_3[n] = w(nT - \beta)$$

并给出 α 和 β 的值。由此可以得出, $x_2[n]$ 和 $x_3[n]$ 也都是 $w(t)$ 的等间隔样本序列。

5.45 考虑一离散时间信号 $x[n]$, 其傅里叶变换如图 P5.45 所示。试画出下面连续时间信号, 并予以标注:

(a) $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j(2\pi/10)n}$

(b) $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{j(2\pi/10)n}$

(c) $x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Re\{x[n]\}e^{j(2\pi/8)n}$

(d) $x_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Re\{x[n]\}e^{j(2\pi/6)n}$

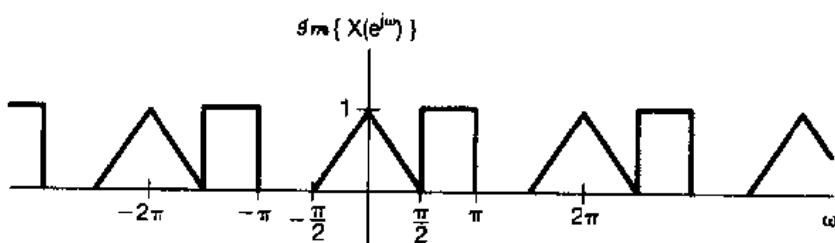
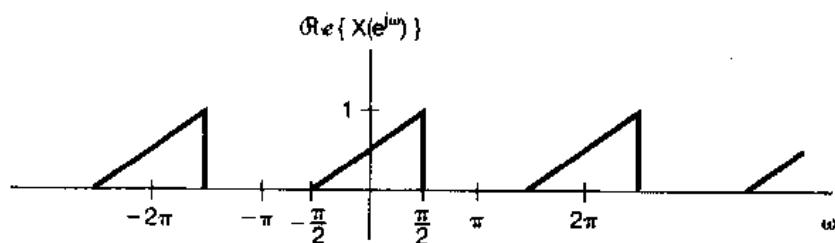


图 P5.45

5.46 在例 5.1 中已证明了, 对 $|\alpha| < 1$ 有

$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

(a) 利用傅里叶变换性质, 证明

$$(n+1)\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^2}$$

(b) 用归纳法证明

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^r}$$

的傅里叶反变换是

$$x[n] = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} \alpha^n u[n]$$

5.47 判定下列说法是对还是错, 并陈述理由。下列每一条陈述中, $x[n]$ 与 $X(e^{j\omega})$ 为一对傅里叶变换:

- (a) 若 $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-1)})$, 则 $x[n] = 0, |n| > 0$
- (b) 若 $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$, 则 $x[n] = 0, |n| > 0$
- (c) 若 $X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega/2})$, 则 $x[n] = 0, |n| > 0$
- (d) 若 $X(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$, 则 $x[n] = 0, |n| > 0$

5.48 已知一离散时间 LTI 的因果系统, 其输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$ 。该系统由下面一对差分方程所表征:

$$\begin{aligned} y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] + w[n] + \frac{1}{2}w[n-1] &= \frac{2}{3}x[n] \\ y[n] - \frac{5}{4}y[n-1] + 2w[n] - 2w[n-1] &= -\frac{5}{3}x[n] \end{aligned}$$

其中 $w[n]$ 是一个中间信号。

- (a) 求该系统的频率响应和单位脉冲响应。
- (b) 对该系统找出单一的关联 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的差分方程。

5.49 (a) 有一离散时间系统, 其输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$ 。它们的傅里叶变换由下式所关联:

$$Y(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) - \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

- (i) 该系统是线性的吗? 陈述理由。
- (ii) 该系统是时不变的吗? 陈述理由。
- (iii) 若 $x[n] = \delta[n]$, 问 $y[n]$ 是什么?

(b) 考虑一离散时间系统, 其输出的傅里叶变换 $Y(e^{j\omega})$ 与输入的变换 $X(e^{j\omega})$ 关系如下:

$$Y(e^{j\omega}) = \int_{\omega-\pi/4}^{\omega+\pi/4} X(e^{j\omega}) d\omega$$

找出用 $x[n]$ 来表示 $y[n]$ 的表示式。

5.50 (a) 假设想要设计一个离散时间 LTI 系统具有如下性质: 若输入是

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

那么, 输出就是

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(i) 求具有上述性质的离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应和频率响应。

(ii) 求表征该系统的差分方程。

- (b) 假定有一系统, 它对输入 $(n+2)(1/2)^n u(n)$ 的响应是 $(1/4)^n u[n]$ 。问: 若该系统的输出是 $\delta[n] - (-1/2)^n u[n]$, 输入该是什么?

5.51 (a) 考虑一离散时间系统，其单位脉冲响应为

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

求一个关联该系统输入和输出的线性常系数差分方程。

(b) 图 P5.51 示出一个因果 LTI 系统的方框图实现：

(i) 求关联该系统 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的差分方程。

(ii) 该系统的频率响应是什么？

(iii) 求该系统的单位脉冲响应。

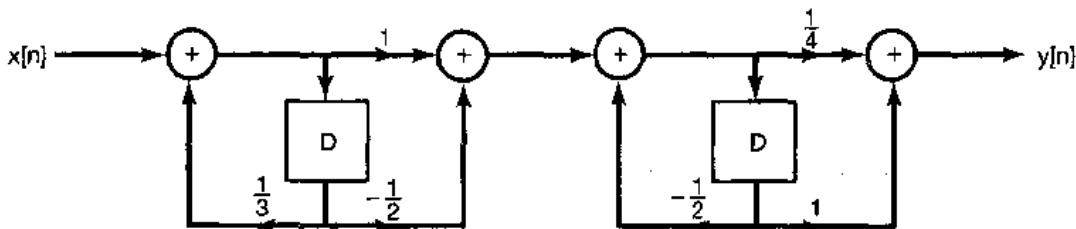


图 P5.51

5.52 (a) 设 $h[n]$ 是一个实的，因果离散时间 LTI 系统，证明该系统可由它的频率响应的实部完全表征。

[提示：证明 $h[n]$ 如何由 $\mathcal{E}_v\{h[n]\}$ 恢复， $\mathcal{E}_v\{h[n]\}$ 的傅里叶变换是什么？]

这就是与习题 4.47 中讨论的连续时间因果 LTI 系统的实部自满性质在离散时间下相对应的关系。

(b) 设 $h[n]$ 为实且因果，若

$$\Re\{H(e^{j\omega})\} = 1 + \alpha \cos 2\omega \quad (\alpha \text{ 为实数})$$

求 $h[n]$ 和 $H(e^{j\omega})$

(c) 证明： $h[n]$ 完全可由 $\mathcal{E}_v\{H(e^{j\omega})\}$ 和 $h[0]$ 恢复。

(d) 找出两个实的因果 LTI 系统，其频率响应的虚部都等于 $\sin \omega$ 。

扩充题

5.53 在信号与系统的分析与综合中，离散时间方法应用的急剧增加，其原因之一就是由于对离散时间序列实现傅里叶分析的高效算法的出现。这些方法的核心是一种与离散时间傅里叶分析关系紧密，而又非常适合于应用数字计算机或以数字硬件实现的技术，称之为有限长序列的离散傅里叶变换 (DFT)。

设 $x[n]$ 是一有限长信号，即存在某一整数 N_1 ，在 $0 \leq n \leq N_1 - 1$ 以外，有

$$x[n] = 0$$

另外，令 $x[n]$ 的傅里叶变换是 $X(e^{j\omega})$ 。现在可以构成一个周期信号 $\tilde{x}[n]$ ， $\tilde{x}[n]$ 在一个周期内等于 $x[n]$ 。也即，令 $N \geq N_1$ 是一个已知的整数，并令 $\tilde{x}[n]$ 的周期为 N ，使之有

$$\tilde{x}[n] = x[n], \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

$\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数系数为

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

选取求和区间，以便在该区间内有 $\tilde{x}[n] = x[n]$ ，于是可得

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (P5.53-1)$$

由 (P5.53-1) 式所定义的系数就构成了 $x[n]$ 的 DFT。 $x[n]$ 的 DFT 通常记作 $\tilde{X}[k]$ 。并定义为

$$\tilde{X}[k] = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{P5.53-2})$$

DFT 的重要性来自于几个原因。第一，原先的有限长信号可以从它的 DFT 恢复，这就是

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{P5.53-3})$$

因此，有限长信号既可以看成是由所给的有限个非零值所表征，也能看成是由它的有限个 DFT 值 $\tilde{X}[k]$ 来确定。DFT 的第二个重要特点是对于它的计算有一个称之为快速傅里叶变换(FFT)的极快的算法(见习题 5.54 对这一极为重要方法的介绍)。同时，由于它与离散时间傅里叶级数和变换之间的密切关系，DFT 本身就有一些傅里叶分析的重要特性。

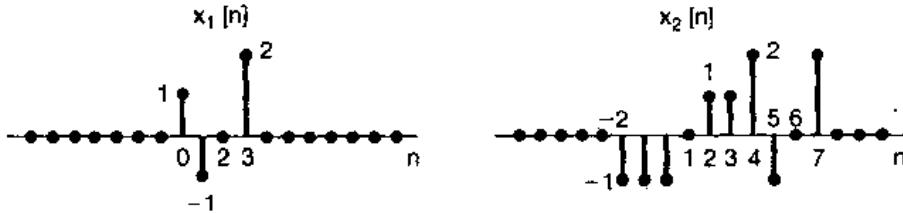


图 P5.53

(a) 假设 $N \geq N_1$ ，证明

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X(e^{j2\pi k/N})$$

式中 $\tilde{X}[k]$ 是 $x[n]$ 的 DFT。也就是说，DFT 就相当于 $X(e^{j\omega})$ 每隔 $2\pi/N$ 所取的样本值。(P5.53-3) 可以导致结论： $x[n]$ 能唯一地由 $X(e^{j\omega})$ 的这些样本值来表示。

(b) 现在考虑每隔 $2\pi/M$, $M < N_1$, 所取的 $X(e^{j\omega})$ 的样本值。取得这些样本值所对应的序列就不仅是一个长度为 N_1 的序列。为了说明这一点，现考虑两个信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ ，如图 P5.53 所示，证明：若取 $M=4$ ，则对所有的 k 值有

$$X_1(e^{j2\pi k/4}) = X_2(e^{j2\pi k/4})$$

5.54 正如在习题 5.53 所指出的，有许多实际上很重要的问题，都希望计算离散时间信号的 DFT。通常，这些信号的持续期很长，在这种情况下，使用高效的算法是非常重要的。使用计算机化的技术分析信号显著增长的原因之一就是出现了一种高效算法，这就是用来计算有限长序列 DFT 的所谓 FFT 算法。本题将讨论 FFT 的基本原理。

设 $x[n]$ 是一个在区间 $0 \leq n \leq N_1 - 1$ 以外为零的信号，对于 $N \geq N_1$ ， $x[n]$ 的 N 点 DFT 为

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{P5.54-1})$$

为了方便，将(P5.54-1)式改写为

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^k \quad (\text{P5.54-2})$$

式中

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

(a) 计算 $\tilde{X}[k]$ 的一个方法是直接计算(P5.54-2)式。对这种计算的复杂程度的一种有用度量是所需复数乘法的总数。证明，对 $k = 0, 1, \dots, N-1$ ，直接计算(P5.54-2)式所需要的复数乘法次数是 N^2 。假定 $x[n]$ 是复数，且所需要的 W_N^k 的值已经都预先计算出来，并存放在一张表格中。为简单起见，不计如下情况：对于某些 n 和 k 的值， W_N^k 等于 ± 1 或 $\pm j$ ，因而严格说来并不需要全部做复数乘法。

(b) 假设 N 是偶数。令 $f[n] = x[2n]$ 表示 $x[n]$ 的偶数下标样本，令 $g[n] = x[2n+1]$ 表示 $x[n]$ 的

奇数下标样本。

(i) 证明: $f[n]$ 和 $g[n]$ 在区间 $0 \leq n \leq (N/2)-1$ 以外是零。

(ii) 证明: $x[n]$ 的 N 点 DFT $\tilde{X}[k]$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n] W_{N/2}^n + \frac{1}{N} W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n] W_{N/2}^n \\ &= \frac{1}{2} \tilde{F}[k] + \frac{1}{2} W_N^k \tilde{G}[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1\end{aligned}\quad (\text{P5.54-3})$$

式中

$$\begin{aligned}\tilde{F}[k] &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n] W_{N/2}^n \\ \tilde{G}[k] &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n] W_{N/2}^n\end{aligned}$$

(iii) 证明: 对所有 k , 有

$$\tilde{F}\left[k + \frac{N}{2}\right] = \tilde{F}[k]$$

$$\tilde{G}\left[k + \frac{N}{2}\right] = \tilde{G}[k]$$

注意: $\tilde{F}[k], k = 0, 1, \dots, (N/2)-1$, 和 $\tilde{G}[k], k = 0, 1, \dots, (N/2)-1$ 分别是 $f[n]$ 和 $g[n]$ 的 $N/2$ 点 DFT。因此, (P5.54-3) 式表明, $x[n]$ 的长度为 N 点 DFT 可以用两个长度为 $N/2$ 的 DFT 来计算。

(iv) 当根据(P5.54-3)式, 通过先计算 $\tilde{F}[k]$ 和 $\tilde{G}[k]$ 来计算 $\tilde{X}[k], k = 0, 1, \dots, N-1$ 时, 确定所需要的复数乘法次数。[有关做乘法时的假定与(a)相同, 且不计入(P5.54-3)式中乘 $1/2$ 量的运算。]

(c) 若像 N 一样, $N/2$ 还是偶数, 则 $f[n]$ 和 $g[n]$ 都可以被分解为偶数下标和奇数下标的样本序列。因此, 它们的 DFT 可以利用与(P5.54-3)式中相同的步骤来计算。进而, 若 N 是 2 的整数幂, 就可以继续重复这一过程, 从而有效地节省计算时间。当 $N = 32, 256, 1024$ 和 4096 时, 用这个过程来做, 大约各需要多少次复数乘法? 试将此方法与(a)中的直接计算法作一比较。

5.55 本题将介绍“加窗”的概念, 它无论在 LTI 系统的设计, 还是在信号的频谱分析中都具有非常大的重要性。“加窗”就是把信号 $x[n]$ 乘上一个有限长的窗口信号 $w[n]$ 的一种运算, 也就是

$$p[n] = x[n]w[n]$$

注意, $p[n]$ 也是有限长的。

在频谱分析中, 加窗的重要性来自于: 在大量应用场合, 人们总是希望计算被测信号的傅里叶变换。由于在实际中, 我们只能在有限时间区间(即时窗)上测得信号 $x[n]$, 因而对频谱分析来说, 实际可利用的信号是

$$p[n] = \begin{cases} x[n], & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

其中 $-M \leq n \leq M$ 就是时窗。于是

$$p[n] = x[n]w[n]$$

这里 $w[n]$ 是矩形窗, 即

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases} \quad (\text{P5.55-1})$$

“加窗”在 LTI 系统设计中也起着重要的作用。具体地说, 由于种种原因[例如 FFT 算法的潜在应用; 见习题 P5.54], 需要设计一个具有有限长脉冲响应的系统, 以便达到某种要求的信号处理目的; 也

就是说，往往从所需要的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 开始，它的反变换 $h[n]$ 是一个无限长（或至少是非常长）的单位脉冲响应，而要求构成一个有限长单位脉冲响应 $g[n]$ ，使它的傅里叶变换 $G(e^{j\omega})$ 充分地逼近 $H(e^{j\omega})$ 。选择 $g[n]$ 的一般方法是找一个窗函数 $w[n]$ ，使 $h[n]w[n]$ 的傅里叶变换满足所需要的 $G(e^{j\omega})$ 的指标要求。

很明显，将一个信号加窗对所得到的频谱是会有影响的，本题将说明这种影响。

(a) 为了对加窗的效果加深理解，现用(P5.55-1)式所给的矩形窗对信号

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]$$

进行加窗。

- (i) $X(e^{j\omega})$ 是什么？
- (ii) 当 $M=1$ ，概略画出 $p[n]=x[n]w[n]$ 的变换。
- (iii) 当 $M=10$ ，重做(ii)。

(b) 考虑一信号 $x[n]$ ，其傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/4 \\ 0, & \pi/4 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

设 $p[n]=x[n]w[n]$ ，这里 $w[n]$ 是(P5.55-1)式的矩形窗。对 $M=4, 8$ 和 16 ，大致画出 $P(e^{j\omega})$ 。

(c) 应用矩形窗的一个问题是它在变换 $P(e^{j\omega})$ 中引入了起伏（这一点是与吉伯斯现象直接有关的）。由于这个原因，又研究了其它各种窗口信号，这些窗口信号不是陡峭变化的，也就是说，它们从 0 到 1 的变化要比矩形窗的陡峭变化平缓得多。这样做是为了利用进一步平滑 $X(e^{j\omega})$ ，从而增加一点失真作为代价来减小 $P(e^{j\omega})$ 中的起伏。

为了说明上面这一点，考虑(b)中所描述的信号 $x[n]$ ，并设 $p[n]=x[n]w[n]$ ，这里 $w[n]$ 是三角形窗或巴特利特(Bartlett)窗，即

$$w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{M+1}, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

对于 $M=4, 8$ 和 16 ，大致画出 $p[n]=x[n]w[n]$ 的傅里叶变换。

[提示：注意三角形信号可以作为矩形信号与它自身的卷积得到，这会导致 $W(e^{j\omega})$ 一个方便的表达式。]

(d) 设 $p[n]=x[n]w[n]$ ，这里 $w[n]$ 是一个升余弦信号，称之为海宁(Hanning)窗，即

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 + \cos(\pi n/M)], & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

对于 $M=4, 8$ 和 16 ，大致画出 $P(e^{j\omega})$ 。

5.56 设 $x[m, n]$ 是一个信号，它是两个独立的离散变量 m 和 n 的函数。和一维的情况，以及与在习题 4.53 中处理的连续时间情况相类似，可以定义 $x[m, n]$ 的二维傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[m, n] e^{-j(\omega_1 m + \omega_2 n)} \quad (\text{P5.56-1})$$

(a) 证明：(P5.56-1)式可以按照两个逐次的一维傅里叶变换来计算，即先对 m 变换，而认为 n 是固定的；然后再对 n 变换。利用这一结果，确定用 $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 表示 $x[m, n]$ 的表达式。

(b) 假设

$$x[m, n] = a[m]b[n]$$

其中 $a[m]$ 和 $b[n]$ 都是一个独立变量的函数。设 $A(e^{j\omega})$ 和 $B(e^{j\omega})$ 分别代表 $a[m]$ 和 $b[n]$ 的傅里叶变换，试用 $A(e^{j\omega})$ 和 $B(e^{j\omega})$ 来表示 $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 。

(c) 求下列信号的二维傅里叶变换:

$$(i) x[m, n] = \delta[m - 1]\delta[n + 4]$$

$$(ii) x[m, n] = (\frac{1}{2})^{n-m} u[n-2]u[-m]$$

$$(iii) x[m, n] = (\frac{1}{2})^n \cos(2\pi m/3) u[n]$$

$$(iv) x[m, n] = \begin{cases} 1, & -2 \leq m \leq 2 \text{ 和 } -4 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其它 } m \text{ 和 } n \end{cases}$$

$$(v) x[m, n] = \begin{cases} 1, & -2+n \leq m \leq 2+n \text{ 和 } -4 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其它 } m \text{ 和 } n \end{cases}$$

$$(vi) x[m, n] = \sin\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{2\pi m}{5}\right)$$

(d) 已知信号 $x[m, n]$ 的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \begin{cases} 1, & 0 < |\omega_1| \leq \pi/4 \text{ 和 } 0 < |\omega_2| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/4 < |\omega_1| < \pi \text{ 或 } \pi/2 < |\omega_2| < \pi \end{cases}$$

求 $x[m, n]$ 。

(e) 设 $x[m, n]$ 和 $h[m, n]$ 是两个信号, 它们的二维傅里叶变换分别为 $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 和 $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 。试用 $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 和 $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 表示下列信号的傅里叶变换式:

$$(i) x[m, n]e^{j\omega_1 m}e^{j\omega_2 n}$$

$$(ii) y[m, n] = \begin{cases} x[k, r], & \text{若 } m = 2k, n = 3r \\ 0, & \text{若 } m \text{ 不是 } 2 \text{ 的倍数, 或 } n \text{ 不是 } 3 \text{ 的倍数} \end{cases}$$

$$(iii) y[m, n] = x[m, n]h[m, n]$$

第6章 信号与系统的时域和频域特性

6.0 引言

对于一个 LTI 系统来说，除了通过卷积的时域特性外，利用系统频率响应的频域特性是另一种可供选择的表示方法。在 LTI 系统分析中，由于时域中的微分(差分)方程和卷积运算在频域都变成了代数运算，所以利用频域往往特别方便。再说像频率选择性滤波这样一些概念在频域是很容易而且很直接地被想像得到的。然而，在系统设计中，对频域和时域的要求一般都有一些考虑。例如，正如在例 4.18 和例 5.12 所作过的一些简单讨论，并将在本章要给予详细说明的，在一个频率选择性滤波器的单位冲激响应上所存在的显著振荡特性可能是不希望的，结果就可能想在一个滤波器的频率选择性上作些牺牲以满足在单位冲激响应上所要求的容限。在实际中，类似这样的情况是一个普遍规律，而不是一种个别的例外，因为在大量的应用中，对于一个系统既从频域，又从时域两方面提出了或限定了一定的特性要求，而往往这些又是互相矛盾的要求。所以在系统设计和分析中，将时域特性与频域特性联系起来并给以权衡考虑是很必要的。介绍这些方面的问题和关系就是本章的主题。

6.1 傅里叶变换的模和相位表示

正如我们在前几章讨论过的，一般来说，傅里叶变换是复数值的，并且可以用它的实部和虚部，或者用它的模和相位来表示。连续时间傅里叶变换 $X(j\omega)$ 的模-相表示是

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} \quad (6.1)$$

类似地，离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的模-相表示是

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})} \quad (6.2)$$

下面在叙述和说明有关模-相表示的几个问题上，大多数都集中在连续时间情况来看，但是那些基本要点对离散时间系统都是同样适用的。

从傅里叶变换综合公式(4.8)式本身就可以看作是信号 $x(t)$ 的一种分解，即把信号 $x(t)$ 分解成不同频率的复指数之“和”。事实上，如同在 4.3.7 节讨论过的， $|X(j\omega)|^2$ 可以看作是 $x(t)$ 的能谱密度；这就是说 $|X(j\omega)|^2 d\omega / 2\pi$ 可以认为是信号 $x(t)$ 中位于频率由 ω 到 $\omega + d\omega$ 之间这样一个无限小的频带内所占有的能量。因此，模 $|X(j\omega)|$ 所描述的是一个信号的基本频率含量，也即给出的是组成 $x(t)$ 的各复指数信号相对振幅的信息。例如，如果在频率为零附近一个很小的频带范围以外 $|X(j\omega)| = 0$ ，那么 $x(t)$ 所呈现的仅是相当低的频率振荡。

另一方面，相位角 $\angle X(j\omega)$ 不影响各个频率分量的大小，但是提供的是有关这些复指数信号的相对相位信息。由 $\angle X(j\omega)$ 所代表的相位关系对信号 $x(t)$ 的本质属性有显著的影响，因此一般包含了信号的大量信息。尤其是，依赖于什么样的相位函数，即使模函数保持不变

也能得出看上去很不相同的信号。例如，再来考虑一下图 3.3 所表明的例子。这时，一艘船只遭遇到三种波串叠加后的波浪袭击，其中每一种都可以模拟为一个正弦信号。在这些正弦波的幅度保持不变之下，根据它们的相对相位关系，它们和的大小可能很小或者很大。因此，对于这艘船只来说，相位的寓意就非常明显了。作为相位影响的另一个例子，考虑一下下面的信号

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t + \phi_1) + \cos(4\pi t + \phi_2) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t + \phi_3) \quad (6.3)$$

在图 3.4 中，曾示出过这个信号 $x(t)$ 在 $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ 时的情况。

在图 6.1 中，分别选择了另外几个不同的相位关系，画出了各个相位情况下的 $x(t)$ 。该图说明，由于不同的相对相位关系，所得到的信号是很不相同的。

一般来说， $X(j\omega)$ 的相位函数的变化会导致信号 $x(t)$ 时域特性的改变。在某些情况下，相位失真可能是重要的，而在另一些情况下，也可能不重要。例如，听觉系统一个众所周知的特性是对相位相对不灵敏，具体一点就是，如果某个元音信号的傅里叶变换受到一些失真，而使相位发生变化，但模没有改变，这样虽然在时域中的波形看起来可能会有很大的不同，但这一影响在感觉上是可以忽略的。尽管那些影响单个音调信号的轻微相位失真还没有导致对整个语音信号的可理解性，但是语言上严重的相位失真肯定就不是那样了。作为一个极端的例子，若 $x(t)$ 是录制在磁带上的一句话，那么 $x(-t)$ 就代表把这个句子倒过来放。根据表 4.1，假设 $x(t)$ 是实值信号，那么 $x(-t)$ 的频谱是

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-j\omega) = |X(j\omega)| e^{-j\angle X(j\omega)}$$

这就是说，一个倒过来放的句子其频谱的模函数与原句子的模函数是一样的，而相位函数则反相。显然，这样的相位变化对录制信号的可理解性会有很大的影响。

说明相位重要性及其影响的第二个例子是在研究图像信号中发现的。在第 3 章已简要介绍了一些，一幅黑白照片可以认为是一个具有两个独立变量的信号 $x(t_1, t_2)$ ，其中 t_1 表示

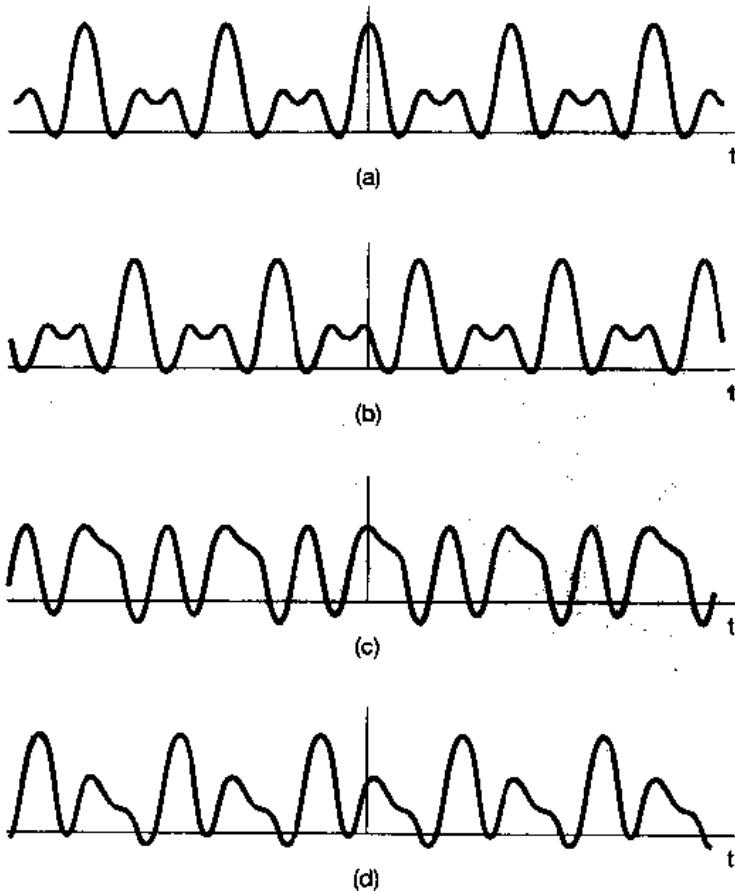


图 6.1 选择不同的 ϕ_1, ϕ_2 和 ϕ_3 ，由(6.3)式给出的信号 $x(t)$ ：

- (a) $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$;
- (b) $\phi_1 = 4 \text{ rad}, \phi_2 = 8 \text{ rad}, \phi_3 = 12 \text{ rad}$;
- (c) $\phi_1 = 6 \text{ rad}, \phi_2 = -2.7 \text{ rad}, \phi_3 = 0.93 \text{ rad}$;
- (d) $\phi_1 = 1.2 \text{ rad}, \phi_2 = 4.1 \text{ rad}, \phi_3 = -7.02 \text{ rad}$

照片上一个点的水平坐标, t_1 是它的垂直坐标, 而 $x(t_1, t_2)$ 代表在点 (t_1, t_2) 上图像的亮度。这幅图像的傅里叶变换 $X(j\omega_1, j\omega_2)$ 代表了将图像信号分解成形为 $e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2}$ 这样的复指数信号的组合, 这两个复指数信号体现了 $x(t_1, t_2)$ 在两个坐标方向的每一个方向上, 以不同的频率所呈现的空间变化。有关二维傅里叶分析的若干基本知识在习题 4.53 和习题 5.56 中均作过介绍。

看一幅图像最重要的信息是图像边缘和那些高对比度的区域。从直观上来看, 在一幅图像上最大和最小强度的地方就是这些不同频率的复指数信号发生同相位的地方。因此, 可以想到一幅图像的傅里叶变换的相位包含了图像中的大部分信息, 尤其是关于边缘方面的信息。为了证实这一点, 现将图 1.4 的照片重新印在图 6.2(a)中, 图 6.2(b)是图(a)照片的二维傅里叶变换的模, 图中水平坐标是 ω_1 , 垂直坐标是 ω_2 , 在图中 (ω_1, ω_2) 这一点的亮度正比于图(a)照片的傅里叶变换 $X(j\omega_1, j\omega_2)$ 的模 $|X(j\omega_1, j\omega_2)|$ 的大小。类似地, 图 6.2(c)画出的则是 $X(j\omega_1, j\omega_2)$ 的相位。现在取图 6.2(b)的模特性, 而把相位特性人为地全部置于零相位, 利用这组模-相特性求反变换而得到的结果就是图 6.2(d)。图 6.2(e)则正相反, 是保持

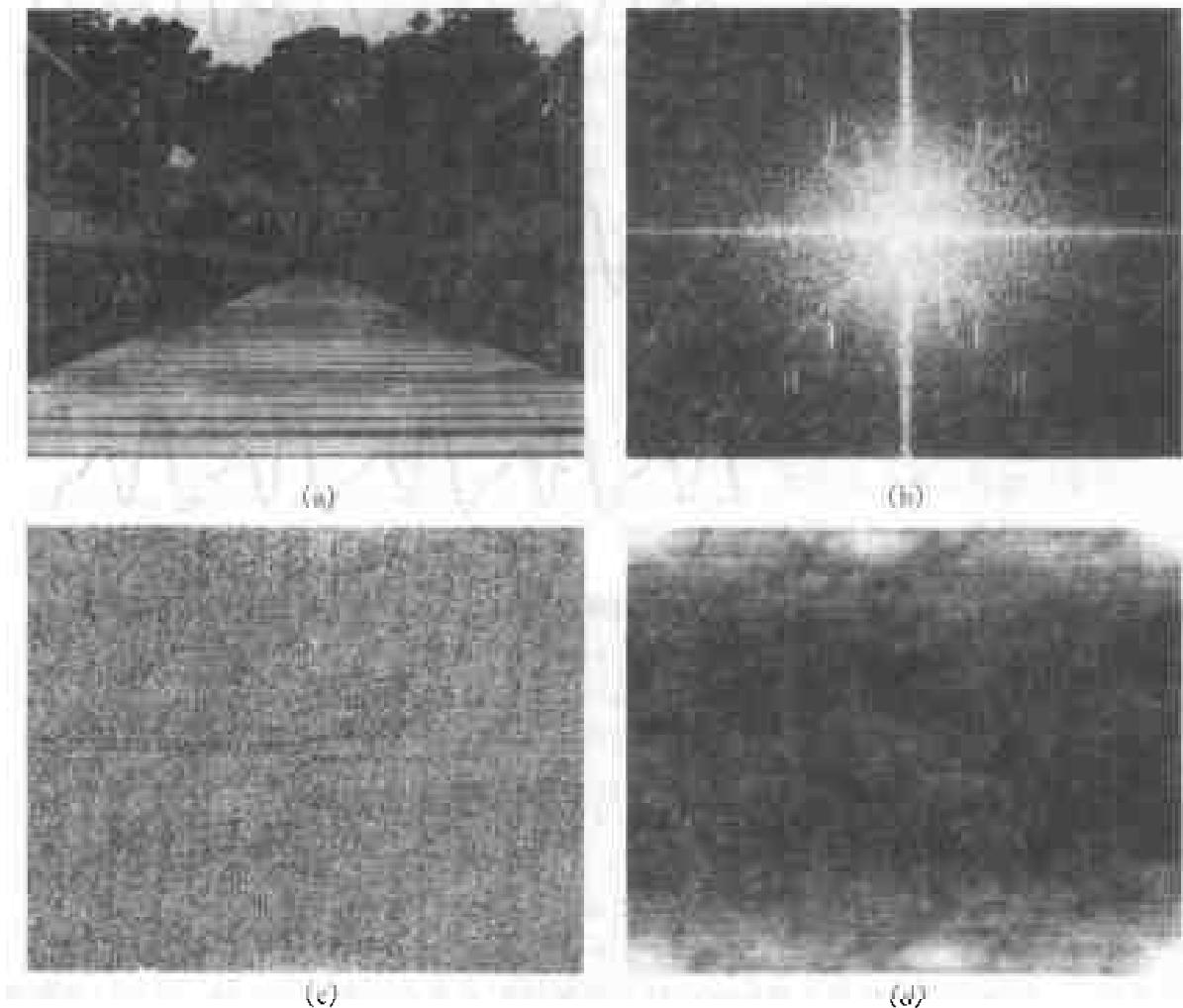


图 6.2 (a) 示于图 1.4 的照片; (b) 图(a)二维傅里叶变换的模;
 (c) 图(a)傅里叶变换的相位; (d) 傅里叶变换的模与(b)相同, 而相位为零的照片;
 (e) 傅里叶变换的模为 1, 相位与(c)相同的照片;
 (f) 相位与(c)相同, 模为图(g)照片的傅里叶变换的模所得的照片

原相位特性不变[即图 6.2(c)], 而置 $X(j\omega_1, j\omega_2)$ 的模全都为 1 时所得到的反变换结果。最后, 图 6.2(f)则是用 3(c)的相位特性, 而用另一幅完全不同的照片图 6.2(g)的傅里叶变换的模特性, 经反变换后所得到的一幅照片! 这几张图清楚地说明了相位在图像的表示中是多么的重要。

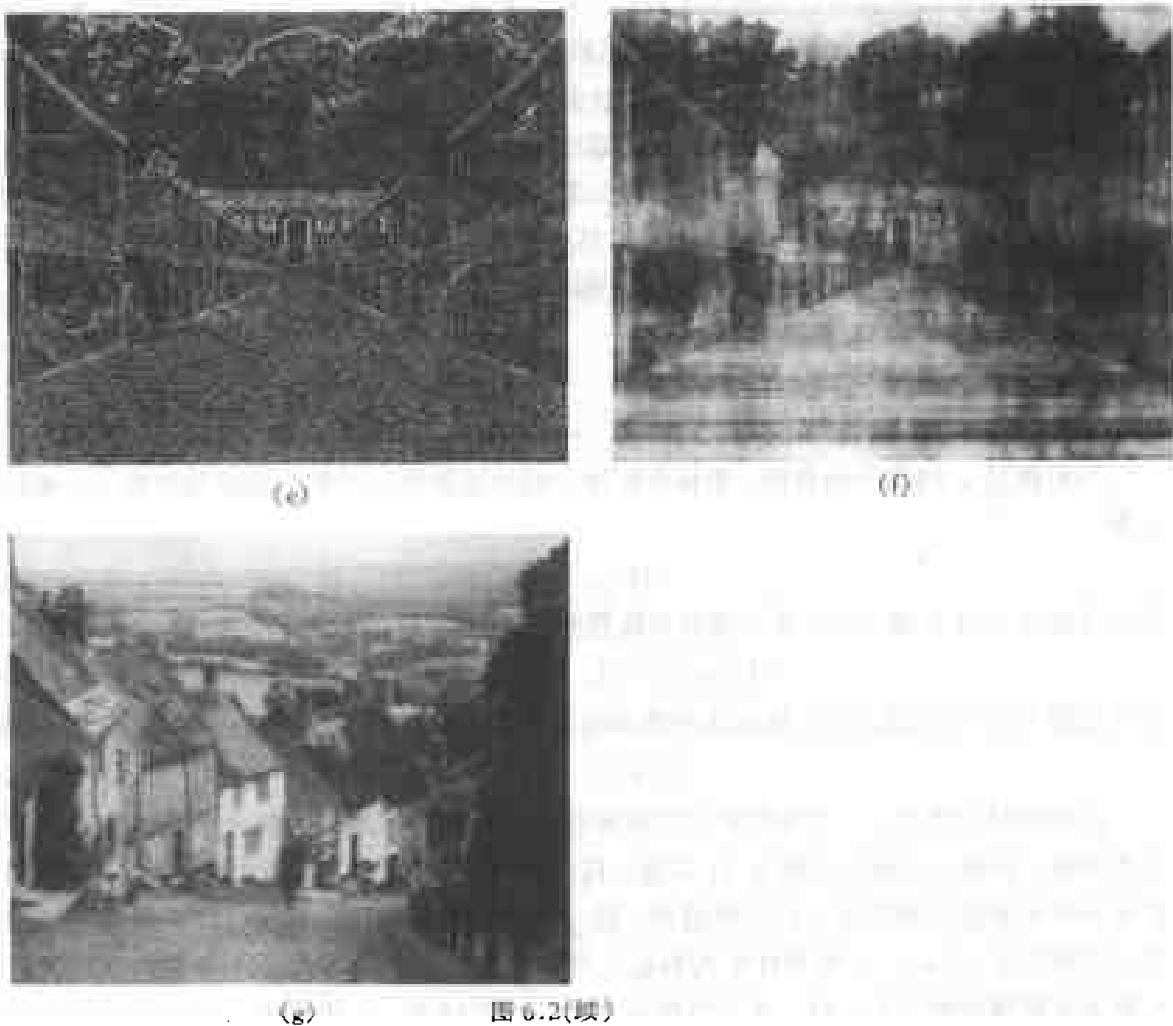


图 6.2(续)

6.2 LTI 系统频率响应的模和相位表示

根据连续时间傅里叶变换的卷积性质, 一个 LTI 系统的输入和输出的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$ 是由下面关系联系起来的:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

式中 $H(j\omega)$ 是系统的频率响应, 也即系统单位冲激响应的傅里叶变换。类似地, 在离散时间情况下, 一个频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 的 LTI 系统, 其输入和输出的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 的关系是

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (6.4)$$

因此, 一个 LTI 系统对输入的作用就是改变信号中每一频率分量的复振幅。利用模-相表示来看这个作用就能更详细地明了这个作用的性质, 这就是在连续时间情况下

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| |X(j\omega)| \quad (6.5)$$

和

$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega) \quad (6.6)$$

在离散时间情况下有完全类似的关系。从(6.5)式可见，一个 LTI 系统对输入傅里叶变换模特性上的作用就是将其乘以系统频率响应的模，为此， $|H(j\omega)|$ (或 $|H(e^{j\omega})|$)一般称为系统的增益。同时，由(6.6)式可见，由 LTI 系统将输入的相位 $\angle X(j\omega)$ 变化成在它基础上附加了一个相位 $\angle H(j\omega)$ ，因此 $\angle H(j\omega)$ 一般就称为系统的相移。系统的相移可以改变输入信号中各分量之间的相对相位关系，这样即使系统的增益对所有频率都为常数的情况下，也有可能在输入的时域特性上产生很大的变化。如果，系统对输入的改变是以一种有意义的方式进行的，那么这种在模和相位上的变化可能都是所希望的；否则，就是不希望有的。在后一种情况下，(6.5)式和(6.6)式的影响一般就称为幅度和相位失真。下面将给出几个概念和方法，以便更完整地了解这些影响。

6.2.1 线性与非线性相位

当相移是 ω 的线性函数时，相移在时域中的作用就有一个非常直接的解释。考虑频率响应为

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad (6.7)$$

的连续时间 LTI 系统，它有单位增益和线性相位，即

$$|H(j\omega)| = 1, \angle H(j\omega) = -\omega t_0 \quad (6.8)$$

如同在例 4.15 中所指出的，具有这种频率响应特性的系统所产生的输出就是输入的时移，即

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (6.9)$$

在离散时间情况下，当线性相位的斜率是一个整数时，其产生的效果与连续时间情况下是类似的。具体一点就是由例 5.11 知道，具有线性相位函数 $-\omega n_0$ 的频率响应 $e^{-j\omega n_0}$ 的 LTI 系统所产生的输出就是输入的简单移位，即 $y[n] = x[n - n_0]$ 。因此，具有整数斜率的线性相位就相当于 $x[n]$ 一个整数样本的移位。当相位特性的斜率不是一个整数时，其在时域中的效果就要稍微更复杂一些，这个留在第 7 章 7.5 节讨论。大致说来，这一效果是序列值包络的时移，但这些序列值本身可能要改变。

虽然线性相移对一个信号产生的变化是很简单而且很容易理解和想象的，但是如果输入信号受到的是一个 ω 的非线性函数的相移，那么在输入中各不同频率的复指数分量都将以某种方式移位，而在它们的相对相位上发生变化。当这些复指数再次叠加在一块时，就会得到一个看起来与输入信号有很大不同的信号。这一点将以连续时间情况为例，用图 6.3 给予说明。

在图 6.3(a)中画出了一个信号，该信号作为输入分别加到三个不同的系统上。图 6.3(b)表示的是当系统频率响应具有 $H_1(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$ 时的输出，它就等于输入延时 t_0 秒。图 6.3(c)展示的是系统的增益为 1，具有非线性相位特性的系统输出，也即

$$H_2(e^{j\omega}) = e^{j\angle H_2(j\omega)} \quad (6.10)$$

其中 $\angle H_2(j\omega)$ 是 ω 的非线性函数。图 6.3(d)是另一个具有非线性相移系统的输出，这时的频率响应的相移是 $\angle H_2(j\omega)$ 再附加一个线性相移项，即

$$H_3(j\omega) = H_2(j\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (6.11)$$

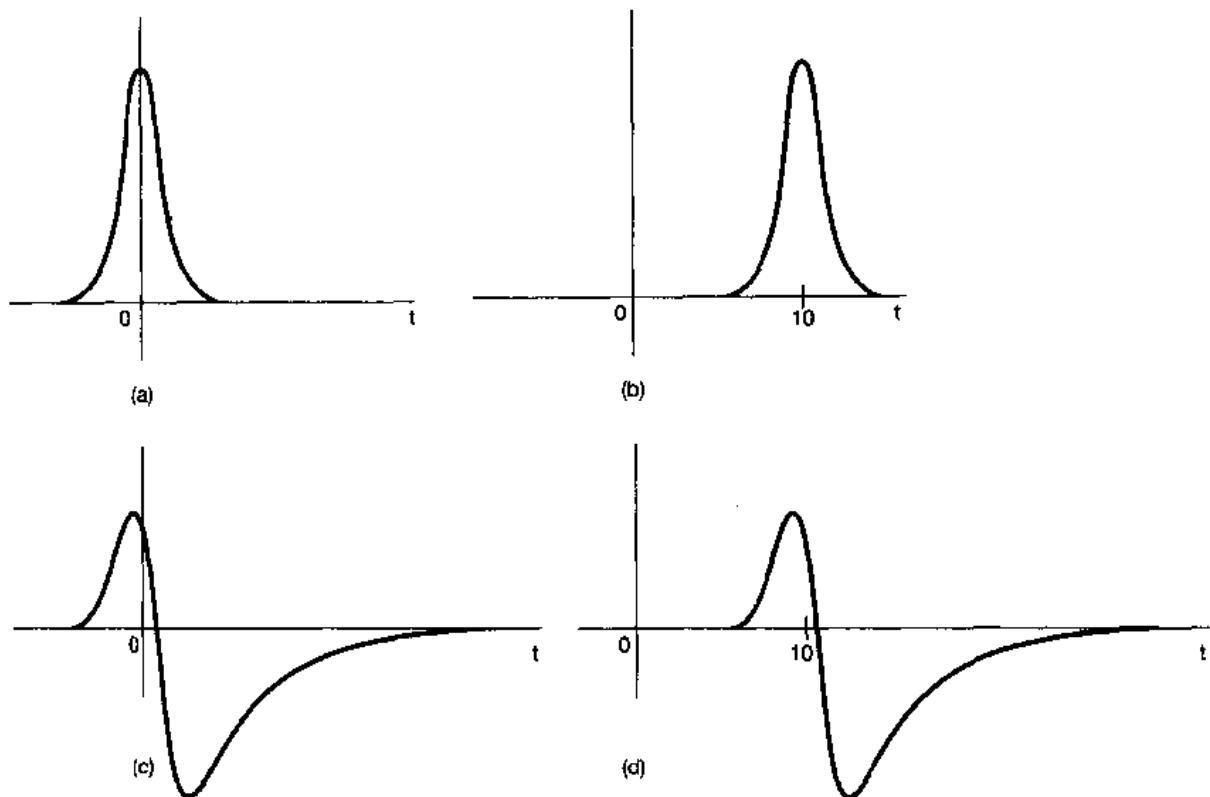


图 6.3 (a) 作为输入加到几个频率响应模为 1 的系统上的信号;
 (b) 具有线性相位的系统响应; (c) 具有非线性相位系统的响应;
 (d) 相位特性为(c) 系统的非线性相位外加一个线性相移项的系统响应

因此, 图 6.3(d)的输出也能看成是 $H_2(j\omega)$ 系统的输出再级联一个时移系统, 所以图 6.3(c) 和(d)的波形就是通过一个单一的时移联系起来的。

图 6.4 用以说明在离散时间情况下, 线性和非线性相移产生的影响。同样, 图 6.4(a)是分别加到三个不同的 LTI 系统的输入, 这三个系统增益都为 1(即 $|H(e^{j\omega})| = 1$)。图 6.4 其余部分都是相应的输出信号。图 6.4(b)是系统具有线性相位, 且斜率为 -5 的系统输出, 所以输出就等于输入延时 5。与图 6.4(c)和(d)有关的系统相移都是非线性的, 但是这两个相位函数之差是一个具有整数斜率的线性相移, 所以图 6.4(c)和(d)的信号就通过一个时移联系起来。

应该提及的是, 在图 6.3 和图 6.4 所举的例子中考虑的系统都全具有单位增益, 这样输入信号傅里叶变换的模通过这些系统时都没有改变。为此, 这样的系统一般称为全通系统。一个全通系统的特性是完全由它的相位特性决定的。当然, 一般的 LTI 系统 $H(j\omega)$ 或 $H(e^{j\omega})$ 既会在幅度上(通过增益 $|H(j\omega)|$ 或 $|H(e^{j\omega})|$), 也会在相位上(可能线性或不是线性的)给予影响。

6.2.2 群时延

如同在 6.2.1 节讨论过的, 具有线性相位特性的系统有一个特别简单的意义, 这就是时移。事实上, 根据(6.8)式和(6.9)式, 相位特性的斜率就是时移的大小。这就是, 在连续时间

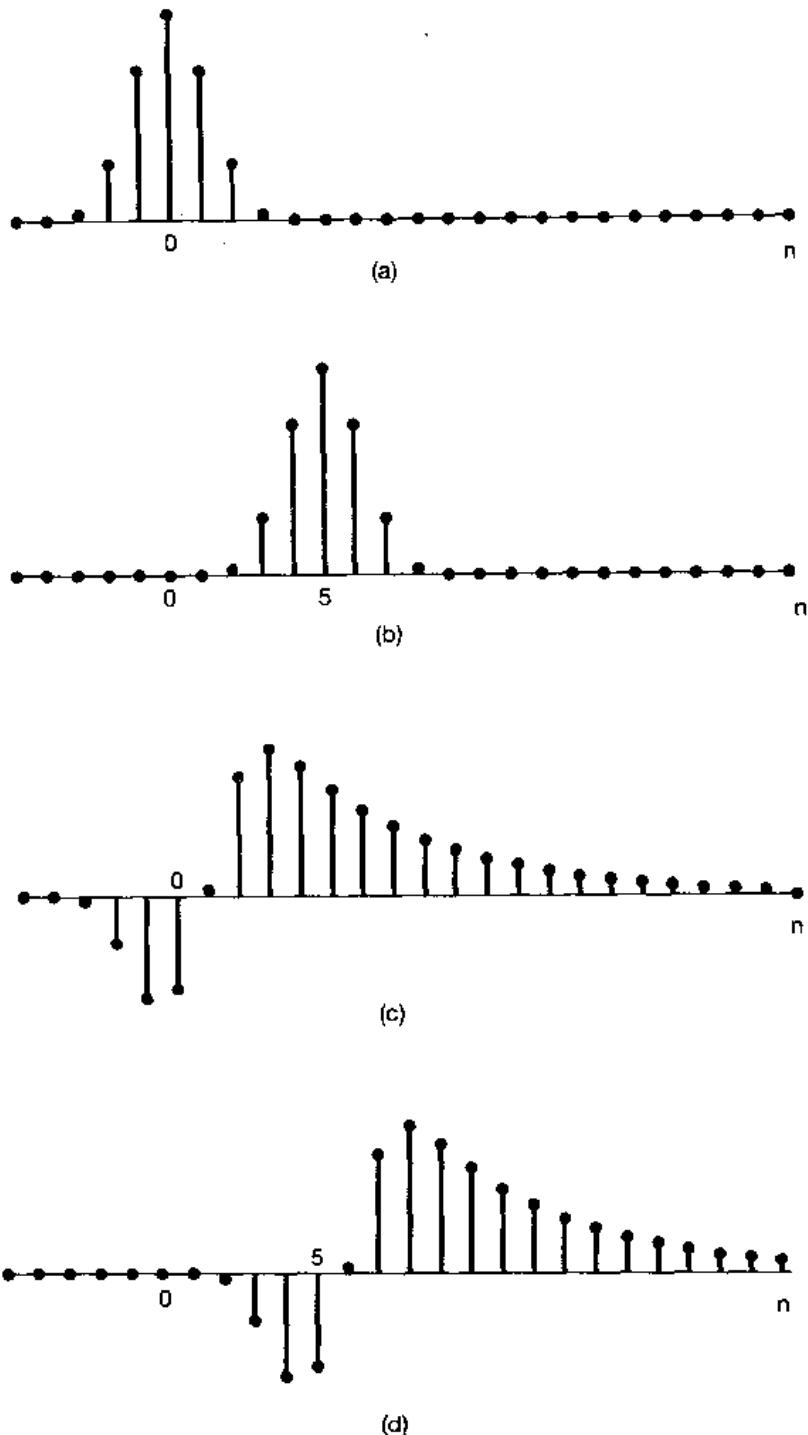


图 6.4 (a) 作为输入加到几个频率响应模为 1 的系统上的信号;
 (b) 斜率为 -5 的线性相位系统的响应; (c) 具有非线性相位系统的响应;
 (d) 相位特性为 (c) 系统的非线性相位外加一个具有整数斜率的线性相移项的系统响应

情况下, 若 $\angle H(j\omega) = -\omega t_0$, 那么系统给出的时移就是 $-t_0$, 或者等效地说延时 t_0 。类似地, 在离散时间情况下, $\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$ 就对应于一个 n_0 的延时。

时延的概念能够很自然地直接推广到包括非线性相位特性的情况。设想希望要检查一下

一个连续时间 LTI 系统的相位对于一个窄带输入信号所产生的效果，该窄带输入 $x(t)$ 的傅里叶变换在以 $\omega = \omega_0$ 为中心的一个很小的频率范围以外都是零或非常小。将这一频带取得很小，就可以将该系统的相位特性在这个频带内准确地用线性关系来近似，即

$$\angle H(j\omega) \approx -\phi - \omega\alpha \quad (6.12)$$

这样就有

$$Y(j\omega) = X(j\omega) + H(j\omega) + e^{-j\phi} e^{-j\omega\alpha} \quad (6.13)$$

因此，这个系统对于窄带输入信号傅里叶变换的近似效果就由如下部分组成：对应于 $|H(j\omega)|$ 的幅度成形部分，乘以一个总的恒定复数因子 $e^{-j\phi}$ 以及对应于延时 α 秒的线性相移项 $e^{-j\omega\alpha}$ 。这个时延称为在 $\omega = \omega_0$ 的群时延，因为它代表了以 $\omega = \omega_0$ 为中心一个很小的频带或很少的一组频率上所受到的有效公共延时。

在每个频率上的群时延就等于在那个频率上相位特性斜率的负值，即群时延定义为

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{\angle H(j\omega)\} \quad (6.14)$$

群时延的概念也可直接用到离散时间系统上去。下面的例子将说明非线性群时延对一个信号的影响。

例 6.1 考虑一个全通系统的单位冲激响应，该系统的群时延是频率的函数。对于本例所用系统的频率响应 $H(j\omega)$ 由三个因式的乘积构成

$$H(j\omega) = \prod_{i=1}^3 H_i(j\omega)$$

式中

$$H_i(j\omega) = \frac{1 + (j\omega/\omega_i)^2 - 2j\zeta_i(\omega/\omega_i)}{1 + (j\omega/\omega_i)^2 + 2j\zeta_i(\omega/\omega_i)} \quad (6.15)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 315 \text{ rad/s}, \zeta_1 = 0.066 \\ \omega_2 = 943 \text{ rad/s}, \zeta_2 = 0.033 \\ \omega_3 = 1888 \text{ rad/s}, \zeta_3 = 0.058 \end{cases}$$

常常将以弧度/秒(rad/s)计的频率 ω_i 用以赫芝(Hz)计的频率 f_i 来表示较为有利，即

$$\omega_i = 2\pi f_i$$

这样有

$$f_1 \approx 50 \text{ Hz}$$

$$f_2 \approx 150 \text{ Hz}$$

$$f_3 \approx 300 \text{ Hz}$$

因为每一 $H_i(j\omega)$ 的分子就是对应的分母的复数共轭，所以有 $|H_i(j\omega)| = 1$ ，这样就可以得出

$$|H(j\omega)| = 1$$

每一 $H_i(j\omega)$ 的相位由(6.15)式为

$$\angle H_i(j\omega) = -2\arctan \left[\frac{2\zeta_i(\omega/\omega_i)}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \right]$$

和

$$\angle H(j\omega) = \sum_{i=1}^3 \angle H_i(j\omega)$$

如果将 $\angle H(j\omega)$ 的值限制在 $-\pi$ 到 π 之间，就得到所谓主值相位函数(也就是将相位以 2π 取模

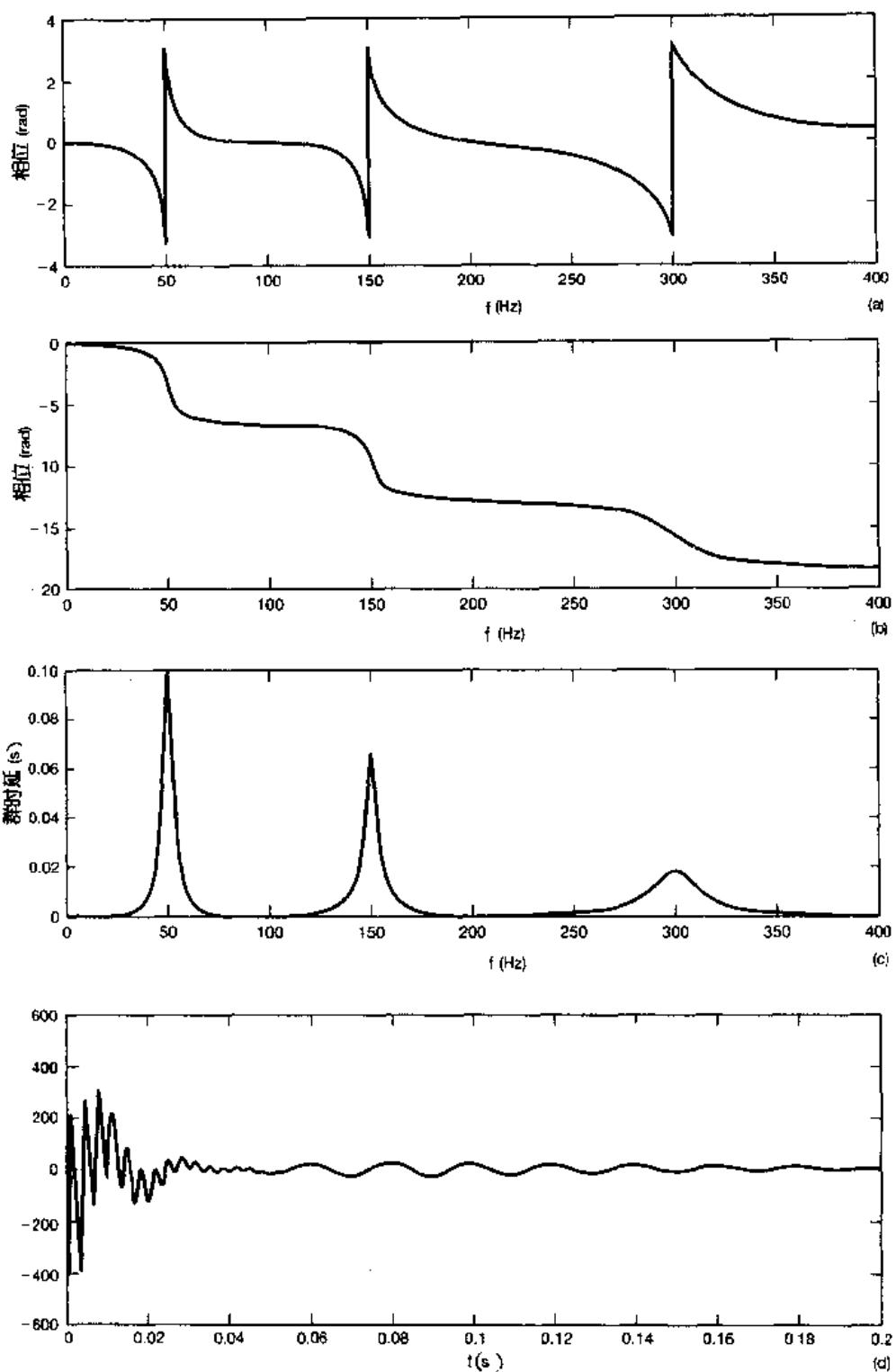


图 6.5 例 6.1 中全通系统的相位，群时延和单位冲激响应：

- (a) 主值相位；(b) 展开的相位特性；(c) 群时延；
- (d) 单位冲激响应。这些量都是对以 Hz 计的频率作出的

数)，如图 6.5(a)所示，图中画出的是相位对以 Hz 计的频率的图。要注意这个函数包括了在各个频率上的 2π 大小的几个不连续点，使得该相位函数在这些点上是不可微分的。然而，在任何频率上将这个相位值加上或减去任何 2π 的整倍数，原来的频率响应仍旧未变，因此在主值相位的各个

部分适当地加上或减去这样的 2π 整倍数值，就得到图6.5(b)那样展开的相位特性。作为频率函数的群时延现在就可计算为

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{\angle [H(j\omega)]\}$$

式中 $\angle H(j\omega)$ 代表对应于 $H(j\omega)$ 的展开后的相位特性。 $\tau(\omega)$ 如图6.5(c)所示。由图可以看出，在邻近50Hz频率其延时要比邻近150Hz或300Hz处的频率延时要大。这个非恒定群时延的效果也能够由该LTI系统的单位冲激响应(见图6.5(d))上定性地观察到。回想一下， $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ ，因此冲激函数频谱的每一频率分量在时间上是全部对准成以使得将各频率分量组合起来以可形成一个冲激；当然，这是在时间上高度集中了的。因此该全通系统具有非恒定群时延，所以在输入中的不同频率就被延时了不同的量。这个现象称之为弥散。在本例中，群时延在50Hz最大，其结果就可预期到单位冲激响应的后面部分就会在接近50Hz的较低频率上振荡。这点在图6.5(d)中显而易见。

例6.2 在评价交换式电信网的传输性能中，非恒定群时延在所考虑的诸因素中是很重要的一种。在涉及全部横跨美国大陆各地的一项调查中^①，AT & T/Bell System发表了各种类别长途电话的群时延特性。图6.6显示了其中两类的研究结果。特别是，图6.6(a)所图示的是每一类长途电话群时延的非恒定部分；也即对每一类来说，对所有频率都有一个公共的恒定时延(这就相当于时延特性的最小值)，将这部分从时延特性上减去，将所得到的差图示在图6.6(a)中。这样，图6.6(a)中的每一条曲线就代表在每一类里长途电话的各个频率分量所受到的附加时延(超过公共恒定时延的部

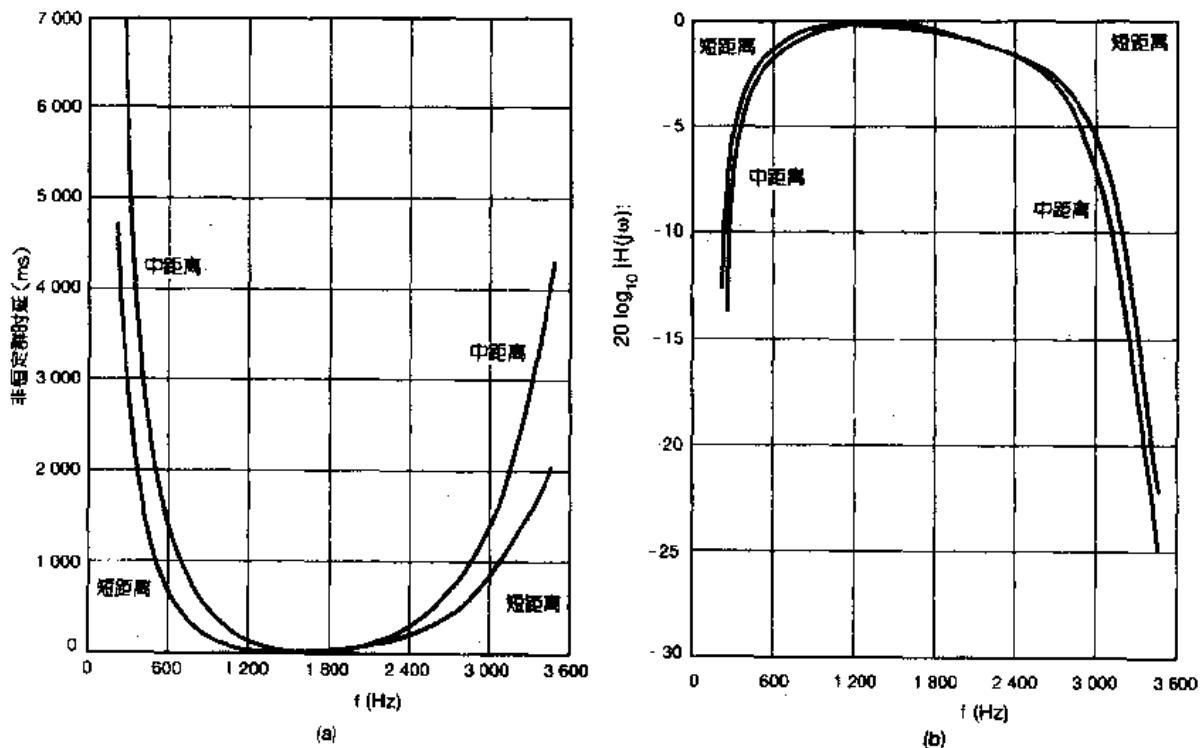


图6.6 (a) 群时延的非恒定部分；

(b) 在交换式电信网中短距离和中距离长途电话频率响应的模[引自 Duffy 和 Thatcher]。这些量都是对频率(Hz)画出的。另外，在实际中一般频率响应的模都用单位为分贝(dB)的对数标尺作图。这就是在图6.6(b)中，对应于短距离和中距离长途电话频率响应的模所画出 $20\log_{10}|H(j\omega)|$ 。对频率响应的模采用对数标尺的问题将在6.2.3节中详细讨论

^① 见 F. P. Duffy and T. W. Thatcher, Jr. Analog Transmission Performance on the Switched Telecommunications Network. Bell System Technical Journal, Vol. 50, no. 4, April, 1971.

分)。图中曲线分别为短距离($0 \sim 289.68\text{km}$)和中距离($289.68\text{km} \sim 1166.77\text{km}$ 直线)长途电话的结果。由图可见,群时延作为频率的函数在 1700Hz 最小,并在此点向两边移开都单调增加。

当把图 6.6(a)的群时延特性与 AT & T/Bell System 调查报告中所报道的频率响应的模特性图 6.6(b)结合起来,就可以得到示于图 6.7 中的单位冲激响应。图 6.7(a)对应于短距离类的单位冲激响应。该响应中的很低和很高频率分量都出现得比中间频率范围内的分量为早。这一点是与图 6.6(a)对应的群时延特性相符合的。图 6.7(b)说明的是对应于中距离类长途电话单位冲激响应的同一现象。

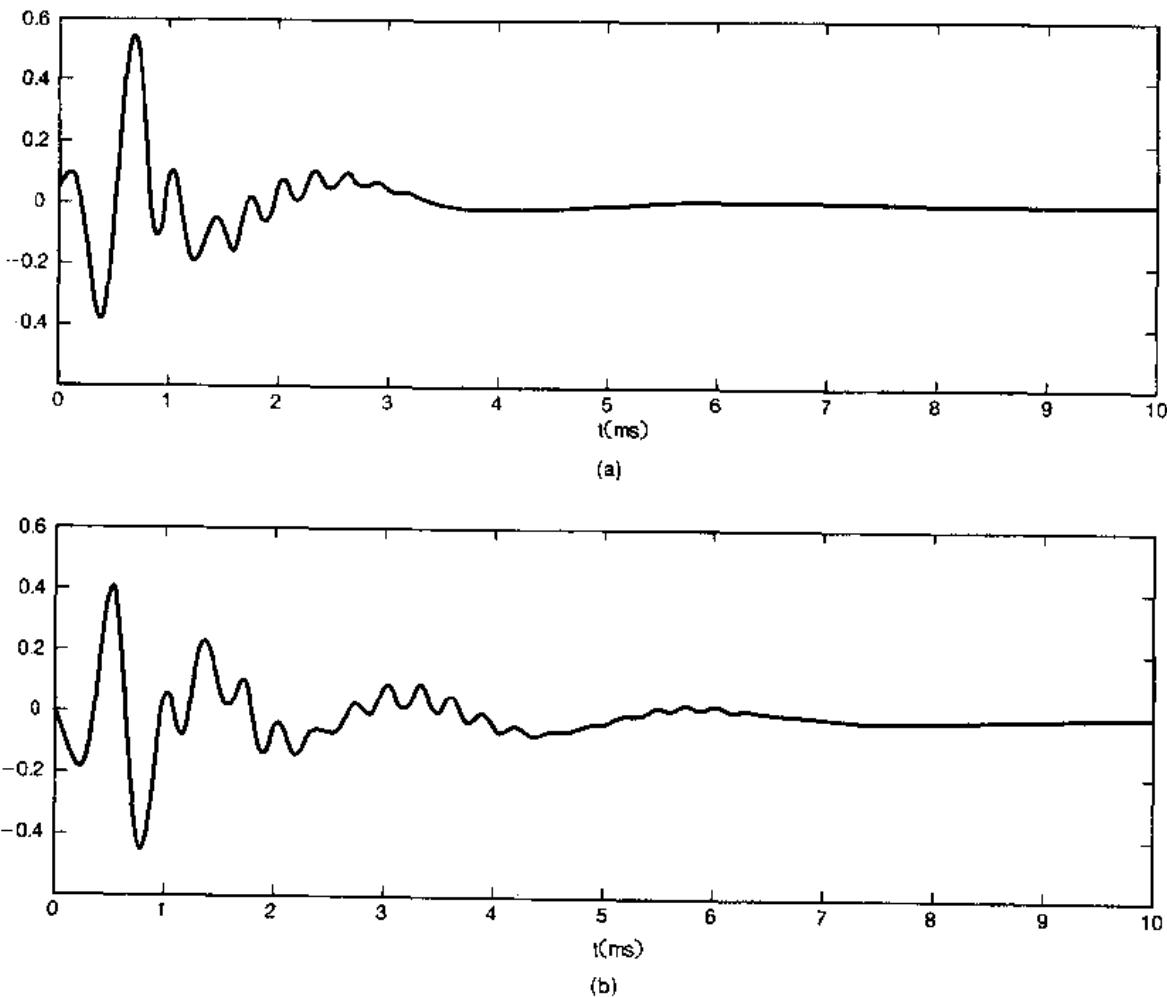


图 6.7 与图 6.6 的群时延和模特性有关的单位冲激响应:

(a) 对应于短距离类长途电话的单位冲激响应;

(b) 对应于中距离类长途电话的单位冲激响应

6.2.3 对数模和波特图

用极坐标形式来展现连续时间和离散时间傅里叶变换和系统频率响应时,对傅里叶变换的模往往采用对数尺度是很方便的。这样做的主要原因之一可以由(6.5)式和(6.6)式看出,这两个式子都将一个 LTI 系统输出的模和相位与输入和频率响应的模和相位联系在一起。可以注意到,相位关系是相加的,而模的关系则涉及 $|H(j\omega)|$ 和 $|X(j\omega)|$ 的相乘。因此,如果傅里叶变换的模是在一个对数幅度尺度上展示的话,那么(6.5)式就会有一个相加的关系,即

$$\log |Y(j\omega)| = \log |H(j\omega)| + \log |X(j\omega)| \quad (6.16)$$

在离散时间情况下也有完全一样的表示式。

因此，如果有一张输入的傅里叶变换和一个 LTI 系统频率响应的对数模和相位的图，那么输出的傅里叶变换就可以将两者对数模的图相加和它们的相位图相加来得到。同样，由于 LTI 系统级联的频率响应就是各个频率响应的乘积，因此，一个级联系统的总频率响应的对数模和它的相位图就可以分别将相应的各部分系统的图相加而求得。另外，在一个对数标尺上展现傅里叶变换的模还能在一个较宽的动态范围上将细节显示出来。例如，在线性标尺上，具有很大衰减的频率选择性滤波器阻带内的模特性细节一般是不明显的，而在一个对数标尺上它就非常明显。

一般所采用的对数标尺是以 $20\log_{10}$ 为单位的，称之为分贝^① (decibels，缩写为 dB)。因此，0dB 就对应于频率响应的模等于 1，20dB 就对应于 10 倍的增益，-20dB 相应于衰减 0.1，等等。另外，6dB 就近似地对应于 2 倍增益，记住这个值常是有用的。

对于连续时间系统，采用对数频率坐标也是很通常的，而且是有用的。 $20\log_{10}|H(j\omega)|$ 和 $\angle H(j\omega)$ 对 $\log_{10}(\omega)$ 作的图称之为波特图。图 6.8 是一个典型的波特图例子。应该注意，正如在 4.3.3 节中所讨论的，如果 $h(t)$ 是实函数，那么 $|H(j\omega)|$ 是 ω 的偶函数，而 $\angle H(j\omega)$

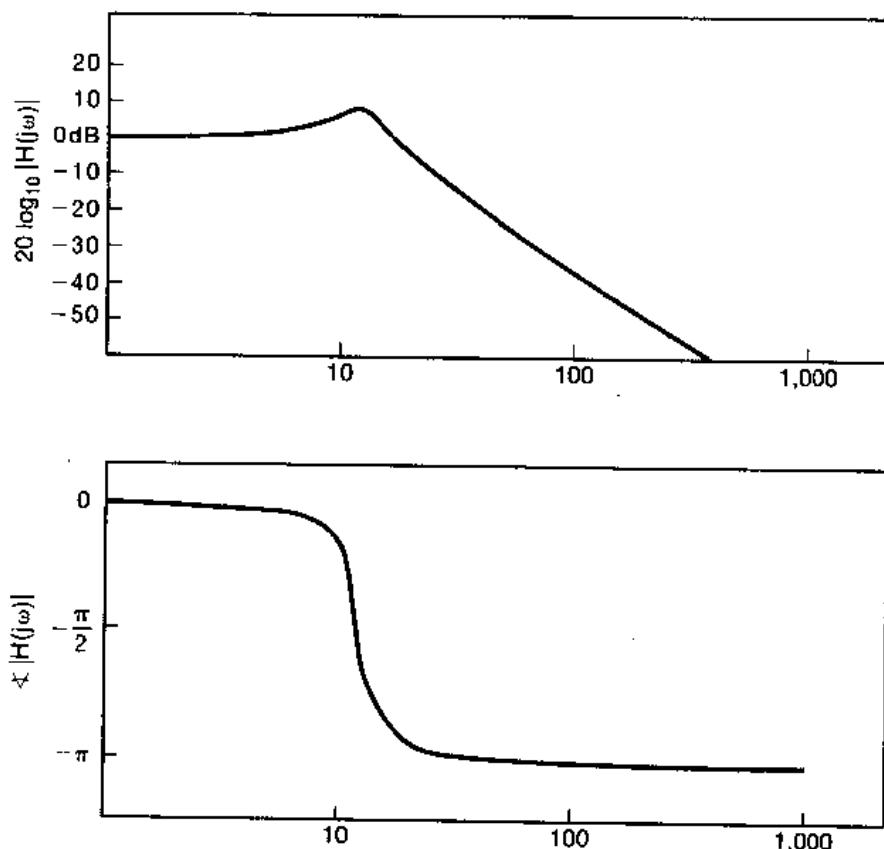


图 6.8 一个典型的波特图(注意， ω 是用对数坐标画出的)

^① 这一特殊单位选择和术语 decibels 的来源可以追溯到系统中功率比的定义。因为一个信号傅里叶变换的模平方可以看作是在一个信号中，每单位频率内的能量或功率，那么一个系统频率响应的模平方 $|H(j\omega)|^2$ 或 $|H(e^{j\omega})|^2$ 就可以认为是一个 LTI 系统输入和输出之间的功率比。为了纪念电话的发明人 Alexander Graham Bell，引入 bel 来表示功率比中 10 倍的因子，而 decibel 则用来表示在一个对数坐标上这个因子的十分之一（这样，每一个都具有 1dB 功率比的 10 个系统级联就会产生 1bel 的功率放大）。因此， $10\log_{10}|H(j\omega)|^2$ 就是频率响应为 $H(j\omega)$ 的功率放大的 decibels(分贝数)，这就等于 $20\log_{10}|H(j\omega)|$ 的模的放大倍数。

是 ω 的奇函数。由于这个原因，负 ω 部分的图就是多余的了，它可以立即由正 ω 部分的图来得到。因此，这就只需画出频率响应特性在 $\omega > 0$ 对 $\log_{10}(\omega)$ 的图就够了，就像该图所示的那样。

在连续时间情况下，应用对数频率坐标有几个优点。例如，它常常可以比线性频率坐标展示宽得多的频率范围。另外，在对数频率坐标上，一种特定的响应曲线的形状不会因频率的加权而改变（见习题 6.30）。再者，对于由微分方程描述的连续时间 LTI 系统来说，对数模对对数频率的近似图往往可通过利用渐近线很容易地作出。在 6.5 节，将对一阶和二阶连续时间系统建立简单的分段线性近似的波特图来说明这一点。

在离散时间情况下，傅里叶变换和频率响应的模常常也是用 dB 来表示的，其理由与在连续时间情况下相同。然而，在离散时间情况下对数频率坐标一般是不用的，因为这时要考虑的频率范围总是有限的，并且对微分方程所具有的优点（也即线性渐近线）对差分方程不适用。图 6.9 示出一个典型的离散时间频率响应的模和相位的作图表示。图中画出了 $\angle H(e^{j\omega})$ （弧度）和 $|H(e^{j\omega})|$ (dB, 即 $20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$) 作为 ω 的函数。注意，对实值的 $h[n]$ ，仅需画出 $0 \leq \omega \leq \pi$ 范围的 $H(e^{j\omega})$ ，因为在这种情况下，傅里叶变换的对称性质意味着利用 $|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$ 和 $\angle H(e^{-j\omega}) = -\angle H(e^{j\omega})$ 的关系，就能计算出 $-\pi \leq \omega \leq 0$ 范围内的 $H(e^{j\omega})$ 。再者，由于 $H(e^{j\omega})$ 的周期性，勿需考虑 $|\omega| > \pi$ 时的值。

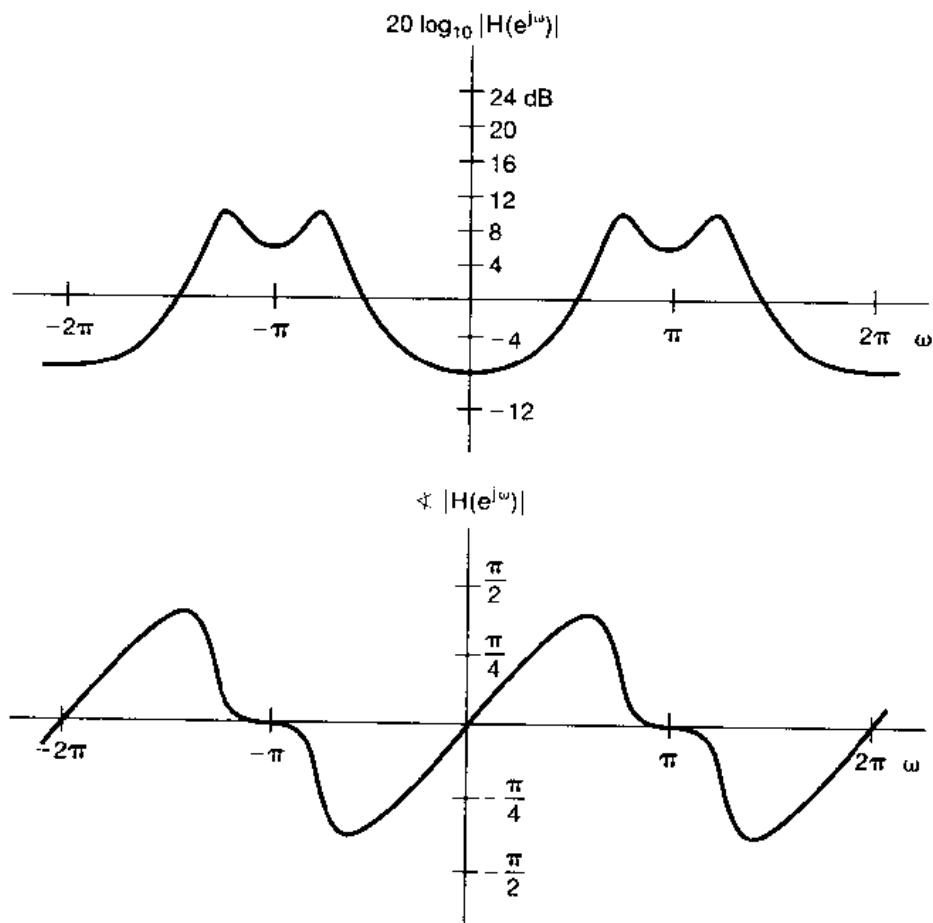


图 6.9 一个离散时间频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的模和相位的典型作图表示

正如在这一节曾强调过的，对数坐标往往是有用的而且是重要的。然而，也有许多情况应用线性坐标是方便的。例如，在讨论理想滤波器时，频率响应的模在某些频带上是一个非零常数，而在其它频带上则是零，这时线性坐标就更为合适。因此，对傅里叶变换模的表示，既介绍了线性的，又介绍了对数的作图表示，今后将根据使用方便而择其一。

6.3 理想频率选择性滤波器的时域特性

在第3章介绍了频率选择性滤波器，这就是具有这样频率响应的LTI系统，它几乎没有衰减或很小衰减地通过一个或几个频带范围的信号，而阻止或大大衰减掉在这些频带以外的频率分量。如同在第3、第4和第5章所讨论的，在频率选择性滤波的应用中，出现了几个重要的问题，并且这些问题都直接与频率选择性滤波器的特性有关。这一节，我们将从另一个角度来看一看这样的滤波器以及它们的性质。这里将把注意力集中放在低通滤波器上，对于其它类型的频率选择性滤波器，如高通或带通滤波器，非常类似的一些概念和结果也都成立。（见习题6.5, 6.6, 6.26和6.38）。

在第3章已提到，一个连续时间理想低通滤波器具有如下形式的频率响应：

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (6.17)$$

如图6.10(a)所示。同样，一个离散时间理想低通滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (6.18)$$

如图6.10(b)所示，它对 ω 是周期的。

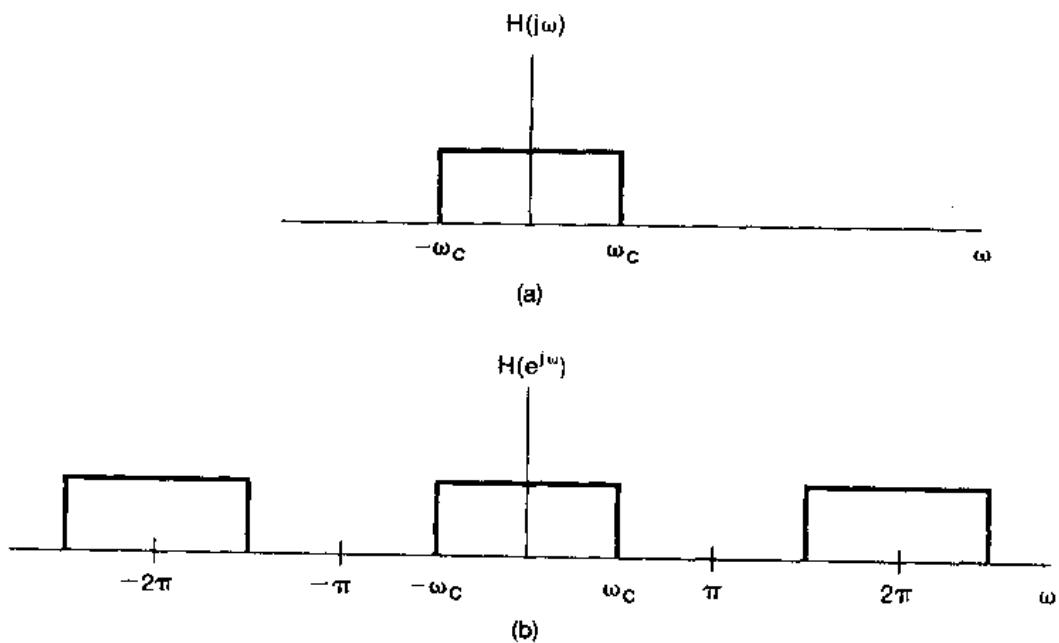


图6.10 (a) 一个连续时间理想低通滤波器的频率响应；
(b) 一个离散时间理想低通滤波器的频率响应

由(6.17)式和(6.18)式，或者从图6.10可以看到，理想低通滤波器具有极好的频率选择性。这就是，它们无衰减地通过低于截止频率 ω_c (包括 ω_c)的所有频率，而完全阻掉阻带(即高于 ω_c)内的所有频率。再者，这些滤波器具有零相位特性，所以它们不会引入相位失真。

在6.2节已经看到，即使信号频谱的模不被系统而改变，非线性相位特性也能导致一个信号的时域特性有很大的变化。因此一个模特性如(6.17)式或(6.18)式所示的滤波器，但具有非线性相位，在某些应用中还可能产生一些不希望有的效果。另一方面，在通带内具有线性相位的理想滤波器，如图6.11所示，相对于零相位特性的理想低通滤波器的响应来说，仅引入一个单一的时移。

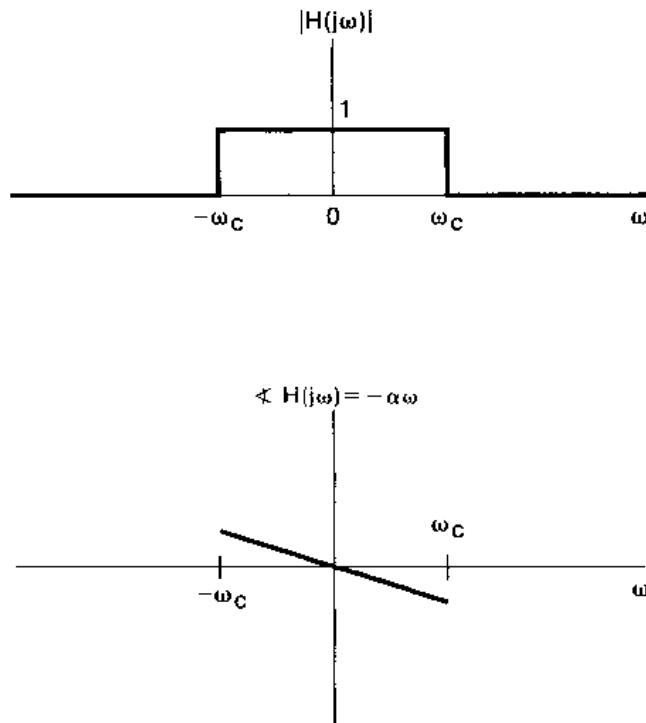


图6.11 具有线性相位特性的连续时间理想低通滤波器

在例4.18和例5.12中，曾求出过理想低通滤波器的单位冲激(脉冲)响应。对应于(6.17)式滤波器的单位冲激响应是

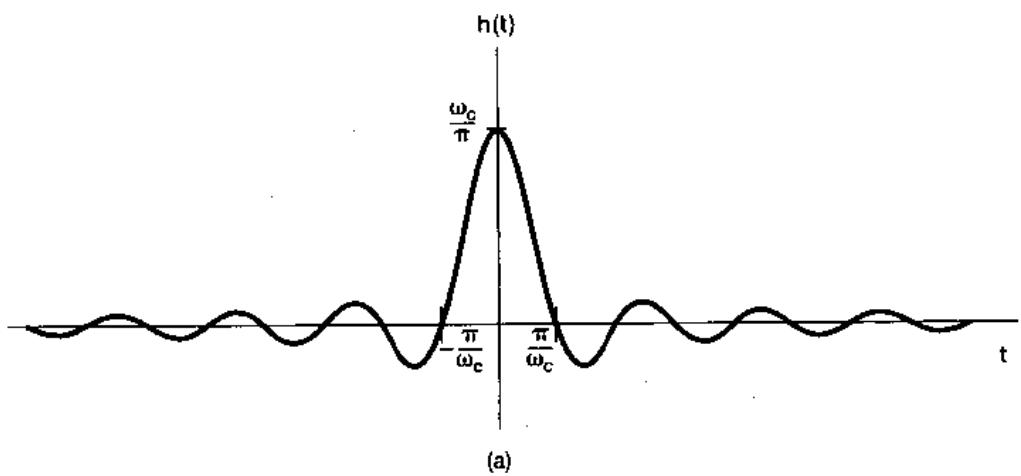
$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad (6.19)$$

如图6.12(a)所示。同样，与(6.18)式滤波器对应的单位脉冲响应是

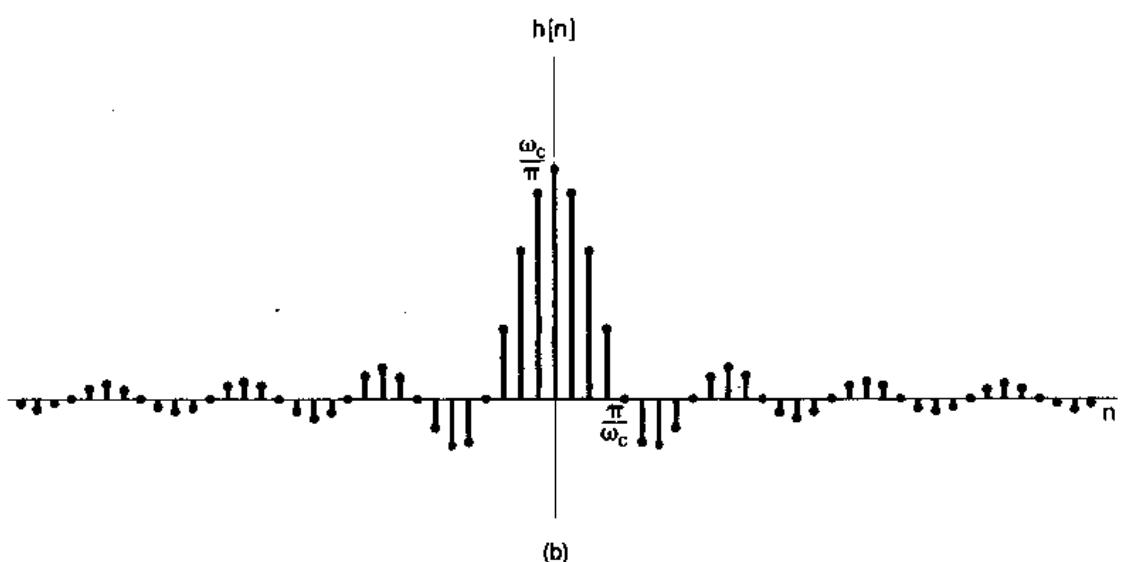
$$h[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \quad (6.20)$$

如图6.12(b)所示，这里 $\omega_c = \pi/4$ 。

如果(6.17)式和(6.18)式这两个理想频率响应中的任何一个再附加上线性相位特性的话，那么单位冲激响应就只是延时一个等于该相位特性斜率的负值的量，对于连续时间单位冲激响应的情况就如图6.13所示。应当注意，无论是在连续时间或是在离散时间情况下，滤波器的通带宽度都是正比于 ω_c 的，而单位冲激响应的主瓣宽度都是正比于 $1/\omega_c$ 的。当滤波器的带宽增加时，单位冲激响应就变得愈来愈窄；反之亦然，这个是与在第4和第5章讨论



(a)



(b)

图 6.12 (a) 图 6.10(a)的连续时间理想低通滤波器单位冲激响应;
 (b) 图 6.10(b)的离散时间理想低通滤波器在 $\omega_c = \pi/4$ 时单位脉冲响应

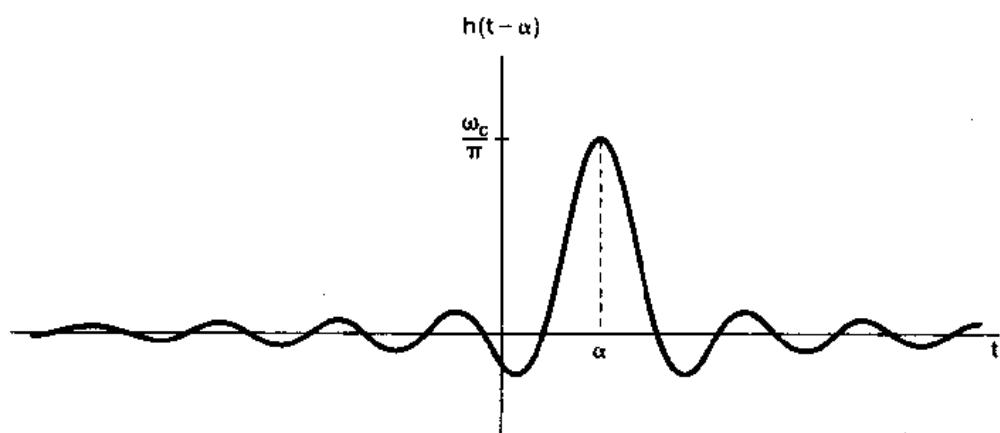


图 6.13 模和相位特性如图 6.11 所示的理想低通滤波器的单位冲激响应

过的时间和频率之间的相反关系一致的。

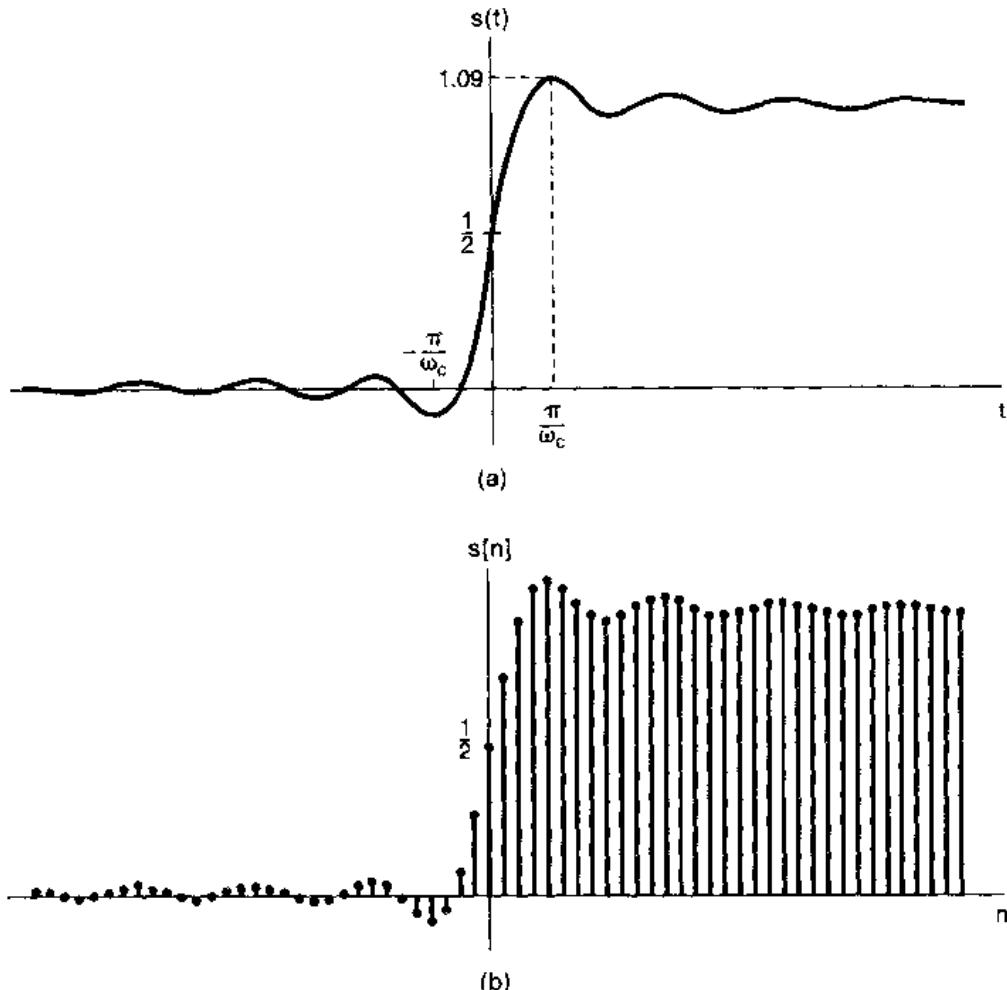


图 6.14 (a) 连续时间理想低通滤波器的阶跃响应;
(b) 离散时间理想低通滤波器的阶跃响应

连续时间和离散时间理想低通滤波器的单位阶跃响应 $s(t)$ 和 $s[n]$ 如图 6.14 所示。在两种情况下都可以看到，阶跃响应所表现出的几个特性可能都是不希望有的。特别是，对于这些滤波器其阶跃响应都有比它们最后稳态值大的超量，并且呈现出称之为振铃的振荡行为。另外，回忆一下，阶跃响应就是单位冲激响应的积分或求和，即

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$s[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m]$$

因为理想滤波器的单位冲激响应其主瓣是从 $-\pi/\omega_c$ 延伸到 $+\pi/\omega_c$ ，所以阶跃响应就在这个时间间隔内其值受到最显著的变化。这也就是说，阶跃响应的所谓上升时间也就反比于相关滤波器的带宽。这个上升时间也是该滤波器响应时间的一种大致度量。

6.4 非理想滤波器的时域和频域特性讨论

理想滤波器的特性在实际中不一定总是所要求的。例如，在许多滤波问题中，要进行分离的信号不总是位于完全分隔开的频带上。图 6.15 或许是一种典型的情况，这里两个信号的频谱稍微有些重叠。在这种情况下，或许愿意在两个信号的保真度上进行一些权衡，譬如说滤波器保留 $x_1(t)$ ，而对 $x_2(t)$ 中的频率分量给予衰减。当过滤具有重叠频谱的混合信号时，宁肯希望有一个从通带到阻带具有渐渐过渡特性的滤波器。

另一个原因就是考虑到理想低通滤波器的阶跃响应问题(图 6.14)。在连续时间和离散时间两种情况下，阶跃响应都渐渐地趋近一个等于阶跃值的恒定值。然而，在跳变点附近呈现过冲(超量)和振荡。在某些情况下，这种时域特性是不希望的。

退一步说，即使在某些情况下，需要一个理想的频率选择性滤波器特性，它们也是不可能实现的。譬如，根据(6.18)式和(6.19)式，以及图 6.12，很显然理想低通滤波器是非因果的，而当滤波必须实时来完成时，因果性就是一个必要的限制，因此就需要对理想特性进行一个因果的近似。在滤波器特性上再要作进一步考虑，作些折衷，就是有关实现它的难易程度方面的问题。一般来讲，若对一个理想频率选择特性愈逼近或实现地愈接近，那么其复杂程度和付出的代价就愈高，而不管该滤波器是用些什么基本元件构成的。例如在连续时间情况下像电阻器、电容器和运算放大器等，在离散时间情况下像寄存器、乘法器和加法器等等。在很多场合下，或许主要的倒不是要一个好的，精密的滤波特性，往往一个简单的滤波器就足够了。

基本上述原因，非理想滤波器具有很大的实际意义，而且它们的特性常常在频域和时域两方面都用几个参数来给予标定。首先，由于理想频率选择性滤波器的模特性是不能实现的，或者是不需要的，因此更可取的是在滤波器的通带和阻带特性上容许有某些灵活性，以及相对于理想滤波器的陡峭的过渡带来说，容许在通带和阻带之间有一个渐渐的过渡特性。例如，在低通滤波器情况下，通带内在单位增益上可以有某些偏离；阻带内在零增益上也可以有某些偏离；以及在通带边缘和阻带边缘之间容许有一个过渡带存在。因此，对一个连续时间低通滤波器的特性要求常常是提出要求滤波器频率响应的模限制在图 6.16 的非阴影区之内。在该图中，偏离单位增益的 $\pm \delta_1$ 就是可容许的通带偏离，而 δ_2 就是可容许的阻带偏离，分别称为通带起伏(或波纹)和阻带起伏(或波纹)。 ω_p 和 ω_s 分别称为通带边缘和阻带边缘。从 ω_p 到 ω_s 的频率范围就是从通带到阻带的过渡称之为过渡带。以上所讨论的概念和定义也适用于离散时间低通滤波器，以及其它连续时间和离散时间频率选择性滤波器。

在频域除了模特性的要求外，在某些情况下，相位特性的要求也是重要的。尤其是，一个在通带内线性或接近线性相位的特性往往是所希望的。

为了控制时域特性，一般都将指标要求放在一个滤波器的阶跃响应上。现用图 6.17 来给予说明。在阶跃响应中往往关心的一个量是上升时间 t_r 。也就是阶跃响应上升到它的终值所

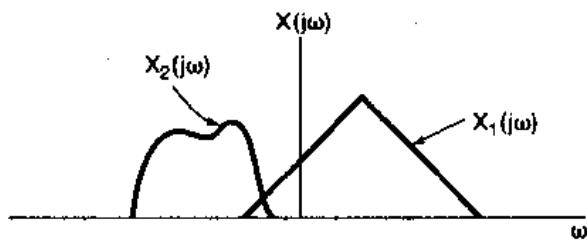


图 6.15 稍微有些重叠的两个频谱

需要的时间。另外，在阶跃响应上有无振荡也是重要的。如果这样的振荡存在，那么就由三个其它的量用来表征这些振荡的性质，它们是：超过阶跃响应终值的超量 Δ ，振荡频率 ω_r 和建立时间 t_s ， t_s 是代表阶跃响应位于偏离终值容许范围内所要求的时间。

对于非理想低通滤波器来说，可以看到在过渡带的宽度(频域特性)与阶跃响应的建立时间(时域特性)之间可能有一种折衷。下面这个例子用来说明这种折衷。

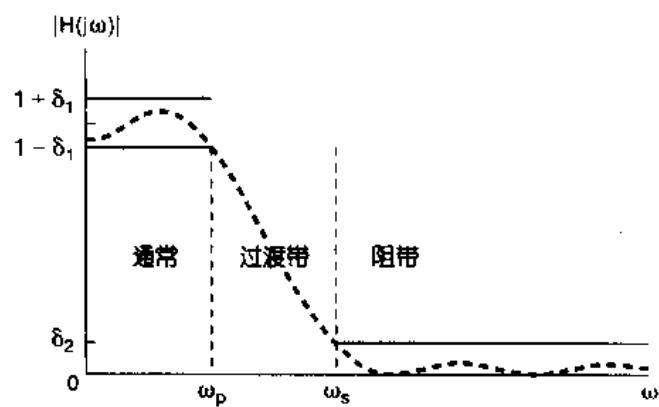


图 6.16 低通滤波器模特性的容限。可容许的通带波纹是 δ_1 ，阻带波纹是 δ_2 。图中虚线指出一种可能的频率响应模特性，它们位于所给容限之内

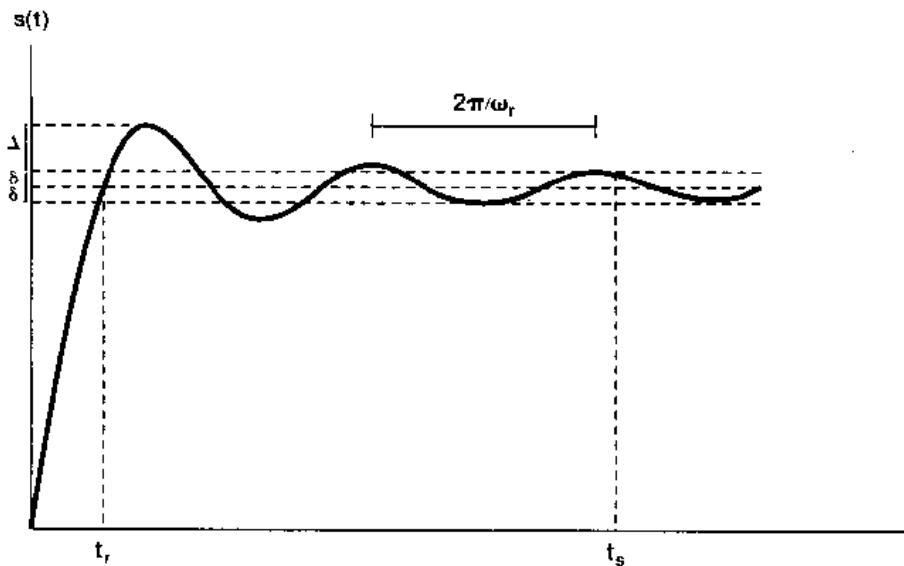


图 6.17 一个连续时间低通滤波器的阶跃响应，图中指出上升时间 t_r ，超量 Δ ，振荡频率 ω_r 和建立时间 t_s ， t_s 即阶跃响应位于其终值 $\pm \delta$ 内所需要的时间

例 6.3 现在来考虑两个具体的低通滤波器，它们都有一个截止频率为 500Hz。每一个滤波器都有一个五阶的有理频率响应和一个实值的单位冲激响应。这两个滤波器都属于特殊的型式，一个称之为巴特沃兹(Butterworth)滤波器，另一个是椭圆滤波器。这两类滤波器在实际中常常被采用。

这两个滤波器频率响应的模(对频率以 Hz 计作出)如图 6.18(a)所示。现以下述标准取每个滤波器的过渡带：以截止频率 500Hz 为中心，使频率响应的模既不在偏离 1 的 0.05 以内(通带波纹)，又不在偏离 0 的 0.05 以内(阻带波纹)所占的范围。由图 6.18(a)可见，巴特沃兹滤波器的过渡带宽于椭圆滤波器的过渡带。

椭圆滤波器所具有的较窄的过渡带所付出的代价可由图 6.18(b)看到，该图示出了这两个滤波器的阶跃响应。由图可见，椭圆滤波器阶跃响应中的振荡比巴特沃兹滤波器要显著的多，这就是椭圆滤波器阶跃响应的建立时间要更长一些。

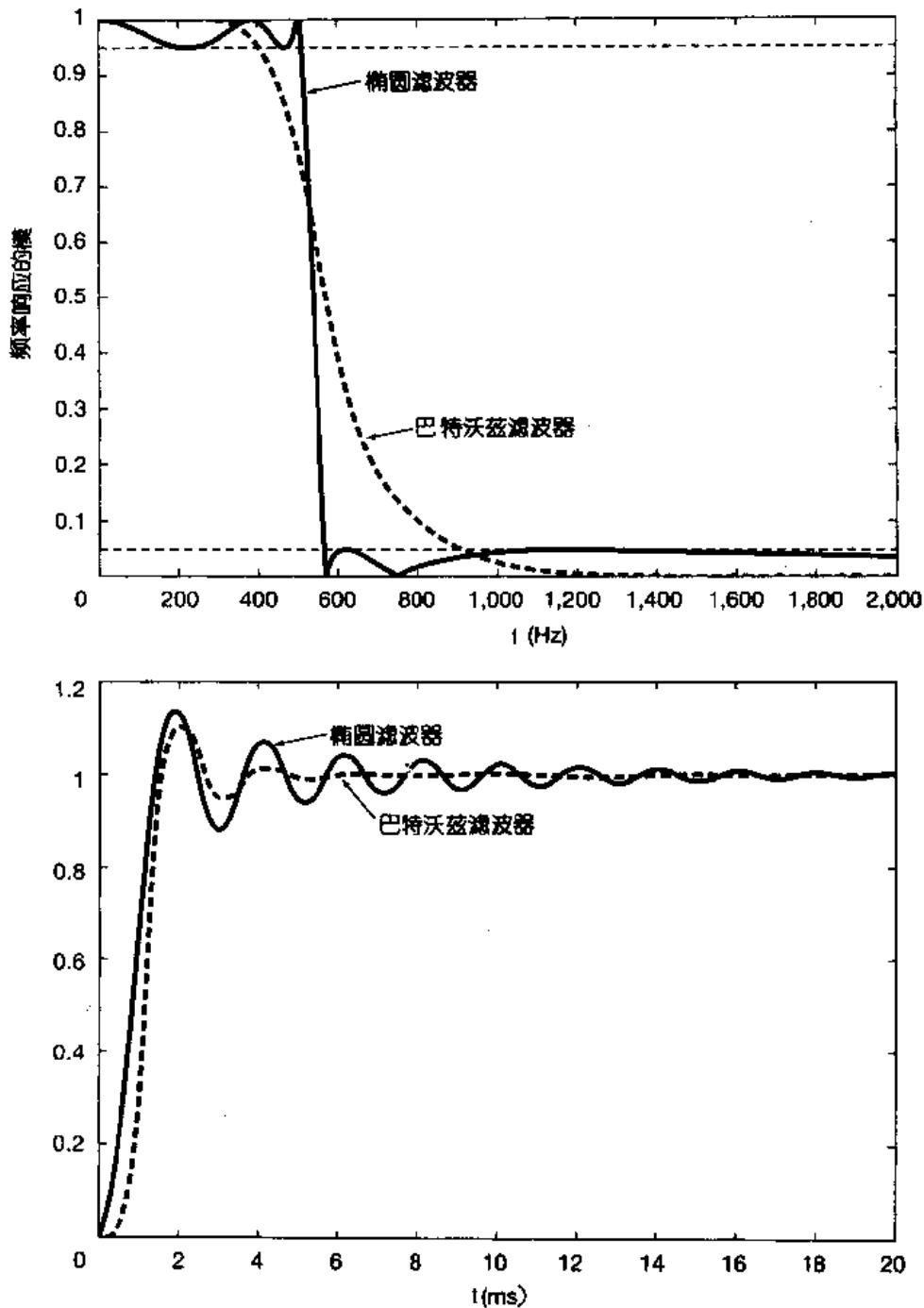


图 6.18 具有相同通带和阻带波纹, 相同截止频率的五阶巴特沃兹滤波器和五阶椭圆滤波器的例子:
 (a) 频率响应的模特性; (b) 阶跃响应

6.5 一阶与二阶连续时间系统

由线性常系数微分方程描述的 LTI 系统, 在实际中具有很大的重要性, 这是因为很多物理系统都可以用这样的方程来建模, 并且这类型式的系统往往又很容易实现。有很多实际理

由表明，高阶系统总是常常由一阶和二阶系统以级联或并联的型式来给予实现或表示的。因此，一阶和二阶系统的性质在分析、设计和理解高阶系统的时域和频域特性方面起着重要作用。这一节将详细讨论连续时间系统中这些低阶系统，第 6.6 节将讨论离散时间系统中这些低阶系统。

6.5.1 一阶连续时间系统

对于一个一阶系统，其微分方程往往表示成下列形式：

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (6.21)$$

其中 τ 是一个系数，它的意义下面就会清楚。相应的一阶系统的频率响应是

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \quad (6.22)$$

其单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \quad (6.23)$$

系统的阶跃响应为

$$s(t) = h(t) * u(t) = [1 - e^{-t/\tau}] u(t) \quad (6.24)$$

这些都分别绘于图 6.19(a) 和 (b) 中。参数 τ 称为系统的时间常数，它控制着一阶系统响应的快慢。例如，如图 6.19 所示，当 $t = \tau$ 时，冲激响应衰减到 $t = 0$ 时的 $1/e$ 倍，而阶跃响应则离终值 1 还有 $1/e$ 。因此，当 τ 减小时，冲激响应衰减得就更快，而阶跃响应上升的时间就更短；也就是说，阶跃响应，朝最终值就上升得更加陡峭了。注意，一阶系统的阶跃响应不会出现任何振荡。

图 6.20 画出了(6.22)式频率响应的波特图。在这张图上，可以说明使用对数频率坐标的一个优点，这就是没有多大困难就可以得到一阶系统一个很有用的近似波特图。为此，先检查一下频率响应的对数模特性，由(6.22)式可得

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = -10 \log_{10}[(\omega\tau)^2 + 1] \quad (6.25)$$

从该式可见，对于 $\omega\tau \ll 1$ ，对数模近似为零；而对于 $\omega\tau \gg 1$ ，对数模就近似为 $\log_{10}(\omega)$ 的线性函数。也就是说

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \approx 0, \quad \omega \ll 1/\tau \quad (6.26)$$

和

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \approx -20 \log_{10}(\omega\tau) = -20 \log_{10}(\omega) - 20 \log_{10}(\tau), \quad \omega \gg 1/\tau \quad (6.27)$$

换句话说，一阶系统其对数模特性在低频和高频域的渐近线都是直线。低频渐近线[由(6.26)

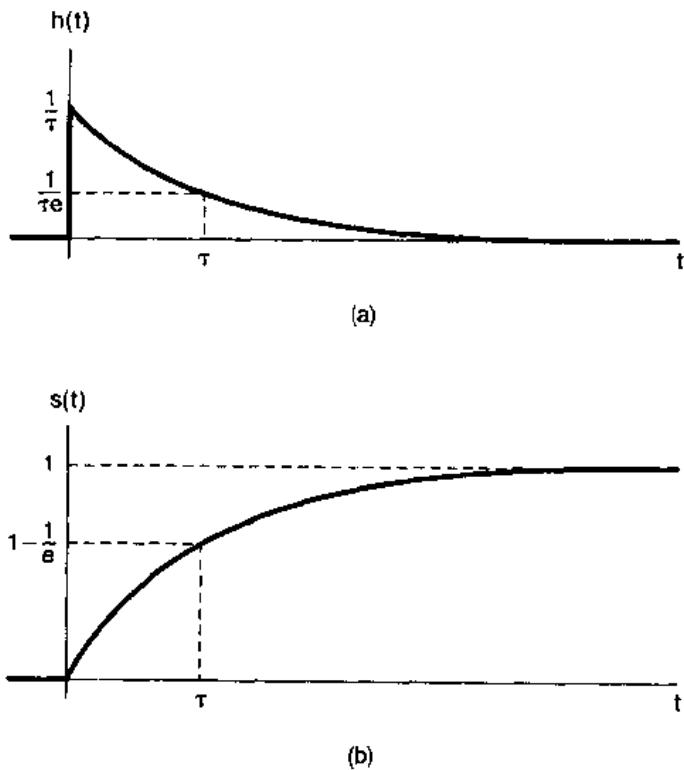


图 6.19 一阶连续时间系统：
(a) 单位冲激响应；(b) 阶跃响应

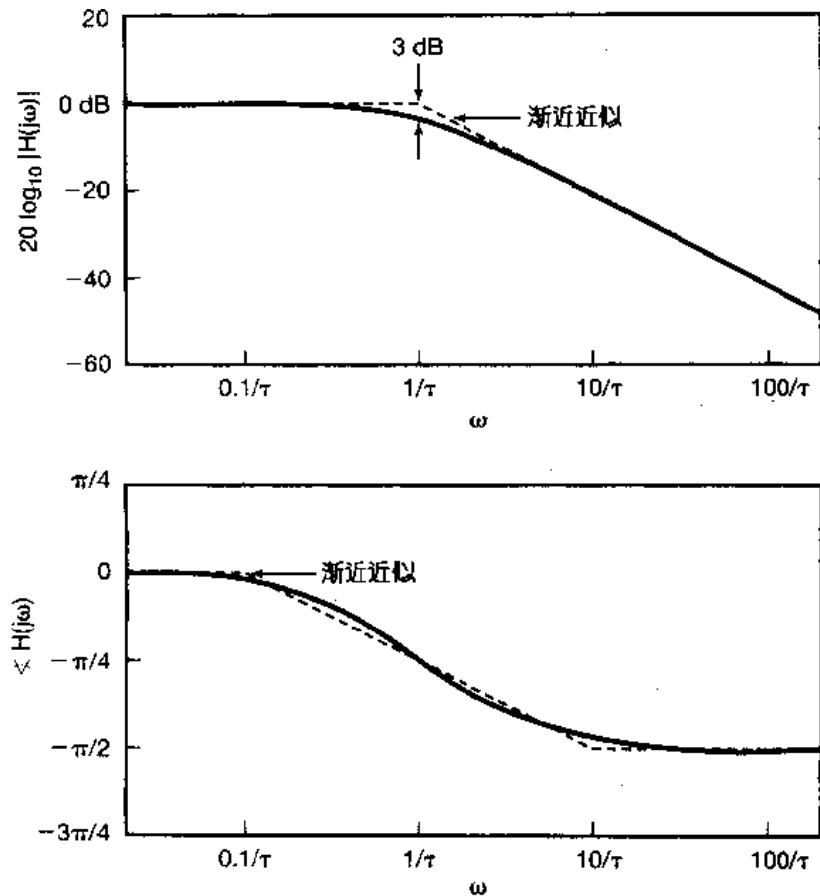


图 6.20 一个连续时间一阶系统的波特图

式给出]就是一条 0dB 线；而高频渐近线[由(6.27)式给出]相应于在 $|H(j\omega)|$ 上每隔 10 倍频程有 20dB 的衰减，有时这就称为“每 10 倍频程 20dB”渐近线。

注意到，由(6.26)式和(6.27)式所表示的这两条渐近线在 $\log_{10}(\omega) = -\log_{10}(\tau)$ 这一点，也即 $\omega = 1/\tau$ 这一点是相等的。由图来看，这就意味着两条渐近线应在 $\omega = 1/\tau$ 相交，这样就提供了对数模特性图的一种直线近似。这就是，对于 $\omega \ll 1/\tau$ ， $20 \log_{10} |H(j\omega)| = 0$ ；而对 $\omega \gg 1/\tau$ ，则由(6.27)式给出。在图 6.20 中用虚线画出了这一近似。由于在 $\omega = 1/\tau$ 这一点，近似特性的斜率发生变化，因此这一点往往就称为折转频率。同时，由(6.25)式可知，在 $\omega = 1/\tau$ 这一点，式中对数内的两项 $[(\omega\tau)^2 + 1]$ 相等，所以在这一点模的实际值为

$$20 \log_{10} \left| H\left(j\frac{1}{\tau}\right) \right| = -10 \log_{10}(2) \simeq -3 \text{dB} \quad (6.28)$$

由于这个原因， $\omega = 1/\tau$ 这一点有时又称为 3dB 点。从该图还可以看到，直线近似的波特图仅在折转频率附近有明显的误差。因此，如果希望得到更为准确一些的波特图，仅仅需要在折转频率附近对近似作一些修正就行了。

对 $\angle H(j\omega)$ 也能求得一个有用的直线近似式为

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= -\tan^{-1}(\omega\tau) \\ &\simeq \begin{cases} 0, & \omega \leqslant 0.1/\tau \\ -(\pi/4)[\log_{10}(\omega\tau) + 1], & 0.1/\tau \leqslant \omega \leqslant 10/\tau \\ -\pi/2 & \omega \geqslant 10/\tau \end{cases} \end{aligned} \quad (6.29)$$

可以注意到这条近似特性作为 $\log_{10}(\omega)$ 的函数，在

$$\frac{0.1}{\tau} \leq \omega \leq \frac{10}{\tau}$$

范围内是线性下降的(从 0 到 $-\pi/2$)，也就是说在折转频率上下各有一个 10 倍频程的范围内。同时，在 $\omega \ll 1/\tau$ 时， $\angle H(j\omega)$ 的准确渐近值是零，而当 $\omega \gg 1/\tau$ 时， $\angle H(j\omega)$ 的准确渐近值就是 $-\pi/2$ 。再者，在折转频率 $\omega = 1/\tau$ 处， $\angle H(j\omega)$ 的近似值与真正值是一致的，其值为

$$\angle H\left(j\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad (6.30)$$

这条渐近近似线也画在图 6.20 中，如果需要一张更为准确一点的 $\angle H(j\omega)$ 图的话，由图 6.20 可以看出，应该如何修正这条直线近似，以得到一条更为准确一点的 $\angle H(j\omega)$ 图。

从这个一阶系统，可以再一次看到时间和频率之间的相反关系。当 τ 减小时，就加速了系统的时间响应[也就是 $h(t)$ 变得更加向原点压缩，阶跃响应的上升时间就减小]；与此同时，折转频率升高[也就是 $|H(j\omega)| \approx 1$ 的频率范围更宽， $H(j\omega)$ 就变宽了]。这一点也可以将单位冲激响应乘以 τ 而从 $th(t)$ 和 $H(j\omega)$ 之间的关系中看出：

$$th(t) = e^{-t/\tau} u(t), \quad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

于是， $th(t)$ 是 $1/\tau$ 的函数，而 $H(j\omega)$ 是 $\omega\tau$ 的函数。因此从这一点可以看出，改变 τ ，本质上就是等效于在时间和频率上给予一个尺度的变化。

6.5.2 二阶连续时间系统

二阶系统的线性常系数微分方程的一般形式可表示为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t) \quad (6.31)$$

这种形式的方程可以在很多物理系统中见到，其中包括 RLC 电路以及如图 6.21 所示的力学系统，该力学系统由弹簧、质量 m 和粘性阻尼器或减震器所组成的。在图中，输入是外力 $x(t)$ ，输出是物体从某一平衡位置的位移 $y(t)$ 。该系统的运动方程是

$$m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - ky(t) - b \frac{dy(t)}{dt}$$

或者

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right) \frac{dy(t)}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right) y(t) = \frac{1}{m} x(t)$$

将上式与(6.31)式比较，可得该系统的

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.32)$$

和

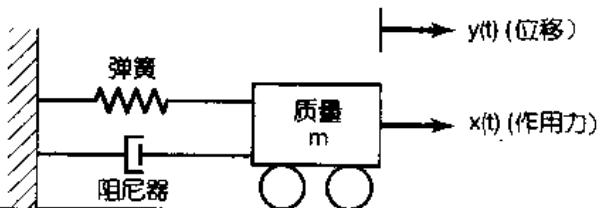


图 6.21 由弹簧、减震器，以及一个连接着它们的可移动质量和一个固定支撑组成的二阶系统

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

那么，除了在 $x(t)$ 上有一个常数因子 $1/k$ 外，该系统的运动方程就化为(6.31)式。

由(6.31)式所代表的二阶系统的频率响应是

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (6.33)$$

将 $H(j\omega)$ 的分母因式化后，得

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)}$$

式中

$$\begin{aligned} c_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ c_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (6.34)$$

若 $\zeta \neq 1$ ，则 $c_1 \neq c_2$ ，进行部分分式展开得到

$$H(j\omega) = \frac{M}{j\omega - c_1} - \frac{M}{j\omega - c_2} \quad (6.35)$$

其中

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (6.36)$$

由(6.35)式，系统的单位冲激响应为

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t) \quad (6.37)$$

如果 $\zeta = 1$ ，则 $c_1 = c_2 = -\omega_n$ ，这时有

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2} \quad (6.38)$$

由表 4.2，此时的单位冲激响应为

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t) \quad (6.39)$$

由(6.37)式和(6.39)式可注意到， $h(t)/\omega_n$ 是 $\omega_n t$ 的函数。另外，(6.33)式还可写成

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + 1}$$

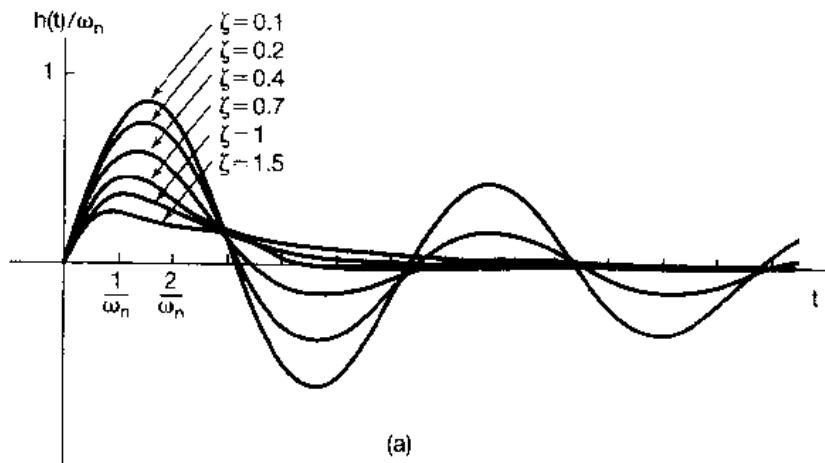
由这里可以看到，频率响应 $H(j\omega)$ 是 ω/ω_n 的函数，因此改变 ω_n 实质上就是与一个时间和频率的尺度变换一致的。

参数 ζ 称为阻尼系数， ω_n 称为无阻尼自然频率。这些术语的意义会随着对二阶系统单位冲激响应和阶跃响应研究的深入，而愈渐明确。首先由(6.35)式看出，当 $0 < \zeta < 1$ 时， c_1 和 c_2 都是复数，因此可以将(6.37)式的单位冲激响应写成

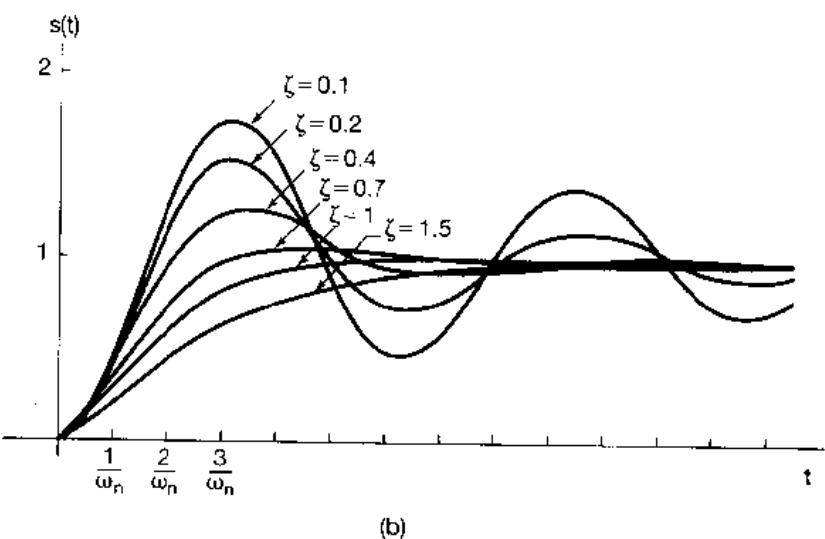
$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \{ \exp[j(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t] - \exp[-j(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t] \} u(t) \\ &= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t] u(t) \end{aligned} \quad (6.40)$$

因此，对于 $0 < \zeta < 1$ ，二阶系统的单位冲激响应就是一个衰减的振荡。这时系统称为欠

阻尼。如果 $\zeta > 1$, 则 c_1 和 c_2 都是实数, 并且是负的, 单位冲激响应就是两个衰减的指数之差, 这时系统称为过阻尼。当 $\zeta = 1$ 时, $c_1 = c_2$, 这时系统称为临界阻尼。二阶系统在不同 ζ 值下的单位冲激响应(乘以 $1/\omega_n$)如图 6.22(a)所示。



(a)



(b)

图 6.22 不同阻尼系数 ζ 下的二阶系统响应: (a) 单位冲激响应; (b) 阶跃响应

对于 $\zeta \neq 1$, 二阶系统的阶跃响应可由(6.37)式算出, 其表达式是

$$s(t) = h(t) * u(t) = \left\{ 1 + M \left[\frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2} \right] \right\} u(t) \quad (6.41)$$

对于 $\zeta = 1$, 利用(6.39)式可得

$$s(t) = [1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}] u(t) \quad (6.42)$$

在几个不同的 ζ 值下, 二阶系统的阶跃响应, 绘于图 6.22(b)。从该图可以看出, 在欠阻尼情况下, 阶跃响应既有超量(即阶跃响应超过它的终值), 又呈现出振荡。当 $\zeta = 1$ 时阶跃响应是在没有超量的情况下所能得到的最快的响应(也即最短的上升时间), 从而有最短的建立时间。随着 ζ 的增加(超过 1), 响应愈来愈慢, 这点可以从(6.34)式和(6.41)式看出。随着 ζ 的增加, c_1 的模越来越小, 而 c_2 的模则增大, 因此虽然与 $e^{c_1 t}$ 有关的时间常数($1/|c_1|$)减小, 但与 $e^{c_2 t}$ 有关的时间常数($1/|c_2|$)增大。结果, 在(6.41)式中涉及 $e^{c_1 t}$ 的这一项要用一个较长

的时间衰减到零，因此正是与该项有关的时间常数决定了阶跃响应的建立时间。于是，对于大的 ζ 值，阶跃响应就得用较长的时间才能建立起来。用弹簧-减震器这个力学系统的例子来说，当衰减系数 b 增大，使 ζ 超过临界值 1 时，该质量的运动变得愈来愈迟钝。

最后，正如已经说过的， ω_n 的值本质上只是控制响应 $h(t)$ 和 $s(t)$ 的时间尺度。譬如说，在欠阻尼情况下， ω_n 愈大，作为 t 的函数的单位冲激响应在时间上更为压缩，并且 $h(t)$ 和 $s(t)$ 中的振荡频率就更高。事实上，从(6.40)式中可以看到，在 $h(t)$ 和 $s(t)$ 中的振荡频率是 $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ，它就是随着 ω_n 增加而增加的。然而，应当注意，这个频率明显地与阻尼系数有关，而且不等于(而是小于) ω_n ；除非在 $\zeta=0$ 的无阻尼情况下，才等于 ω_n 。由于这个原因，传统上就把这个参数 ω_n 称为无阻尼自然频率。对于上述弹簧-减震器的例子来说，就是当减震器不存在时，该质量的振荡频率就等于 ω_n ；而加入减震器后，振荡频率下降。

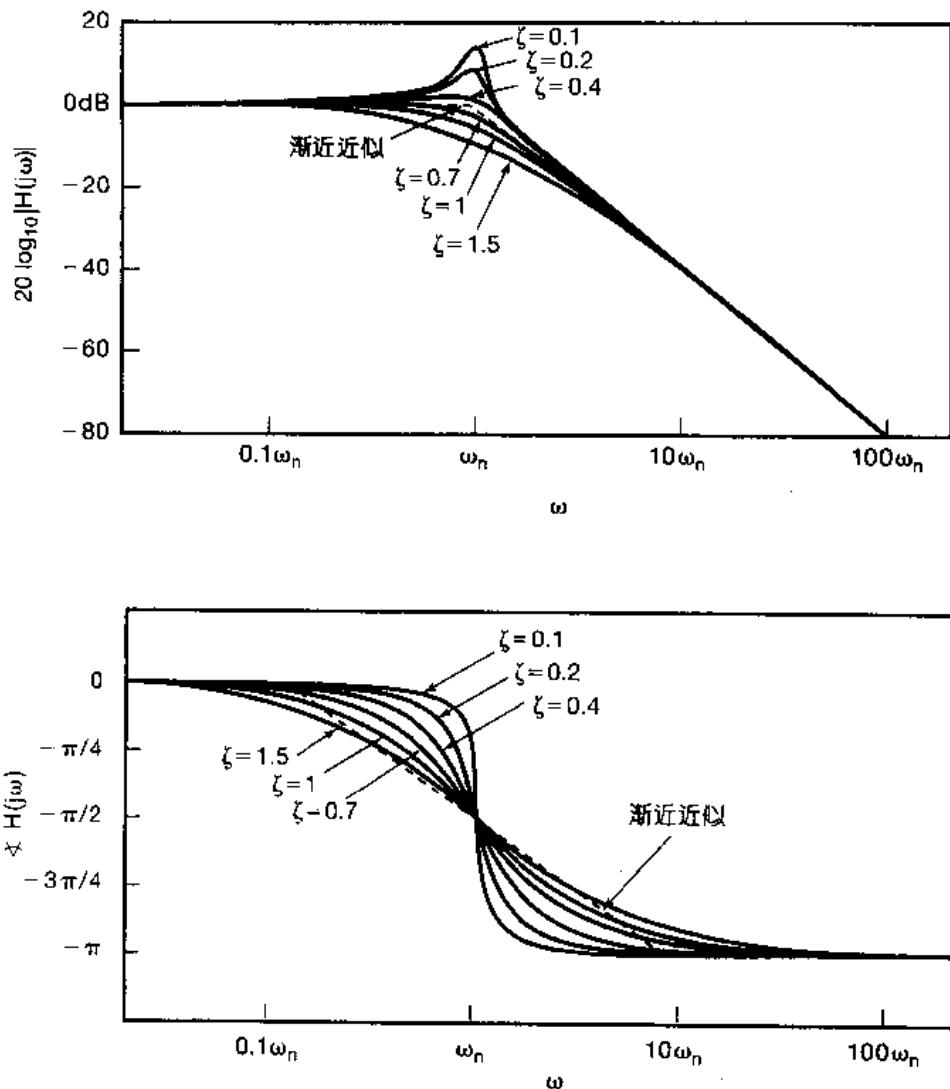


图 6.23 在几个不同阻尼系数 ζ 值下，二阶系统的波特图

在图 6.23 中画出了由(6.33)式给出的频率响应对于几个不同的 ζ 值下的波特图。和一阶系统中一样，对数频率坐标导致出对数模特性的高、低频率的线性渐近线。这就是由(6.33)式可得

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = -10\log_{10}\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\} \quad (6.43)$$

从这个表示式可以导出高、低频率两条线性渐近线为

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = \begin{cases} 0, & \text{对 } \omega \ll \omega_n \\ -40\log_{10}\omega + 40\log_{10}\omega_n, & \text{对 } \omega \gg \omega_n \end{cases} \quad (6.44)$$

因此，对数模特性的低频渐近线是0dB线，而高频渐近线则有一个每隔10倍频程-40dB的斜率；也就是说，当 ω 每增加10倍时， $|H(j\omega)|$ 就下降40dB。另外，两条渐近线在 $\omega = \omega_n$ 处相交。因此得出，对 $\omega \leq \omega_n$ ，可以利用(6.44)式给出的近似，对对数模特性求得一个直线渐近近似。为此， ω_n 称为二阶系统的折转频率。近似特性用虚线也画在图6.23中。

另外，也能求得 $\angle H(j\omega)$ 的一个直线近似， $\angle H(j\omega)$ 的准确表示式可由(6.33)式得到

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right) \quad (6.45)$$

对 $\angle H(j\omega)$ 的近似式是

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq 0.1\omega_n \\ -\frac{\pi}{2}\left[\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1\right], & 0.1\omega_n \leq \omega \leq 10\omega_n \\ -\pi, & \omega \geq 10\omega_n \end{cases} \quad (6.46)$$

它也画在图6.23中。注意，在折转频率 $\omega = \omega_n$ 上，近似值和真正值又相等，且为

$$\angle H(j\omega_n) = -\frac{\pi}{2}$$

对于二阶系统，其渐近线(6.44)式和(6.46)式与 ξ 无关，而 $|H(j\omega)|$ 和 $\angle H(j\omega)$ 的真正图形变化肯定是与 ξ 有关的，注意到这一点是很重要的。因为如果要想在一个渐近近似的特性上画出一个准确的图（特别是在折转频率附近），就必须考虑到这一点，才能把一张近似图修改得与真正的图更为一致。这个差别在 ξ 值小时最为明显；特别是，在这种情况下，真正的对数模特性在 $\omega = \omega_n$ 附近有一个峰值。事实上，利用(6.43)式通过直接计算可以证明，当 $\xi < \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ 时， $|H(j\omega)|$ 在

$$\omega_{\max} = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (6.47)$$

处有一个最大值，其值为

$$|H(j\omega_{\max})| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (6.48)$$

然而，对于 $\xi > 0.707$ ， $H(j\omega)$ 从 $\omega = 0$ 开始，随 ω 的增加而单调衰减。 $H(j\omega)$ 可能有一个峰值这一点在设计频率选择性滤波器和选频放大器中是非常重要的。在某些应用中，可能要想设计这样一种电路，使其频率响应的模在某一给定频率上有一个陡峭的尖峰，藉此可以在某一较窄的频率范围内，对一些正弦信号提供选频性放大。这种电路用品质因数 Q 来衡量峰值的尖锐程度。对于一个由(6.31)式描述的二阶电路， Q 通常取作

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

并且由图6.23和(6.48)式可见，这个定义有这样的性质：系统中阻尼愈小， $|H(j\omega)|$ 中的峰值就愈尖锐。

6.5.3 有理型频率响应的波特图

本节一开始曾指出过，一阶和二阶系统都能用作基本单元以构成更为复杂的，具有有理型频率响应的 LTI 系统。本节所给出的波特图基本上提供了为构成任何一个有理型频率响应的波特图所需要的全部信息。具体说来就是，这一节已经讨论了由(6.22)式和(6.33)式给出的频率响应的波特图；另外，对于具有如下频率响应形式：

$$H(j\omega) = 1 + j\omega\tau \quad (6.49)$$

和

$$H(j\omega) = 1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \quad (6.50)$$

的波特图就能很快得到。因为

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = -20\log_{10}\left|\frac{1}{H(j\omega)}\right| \quad \textcircled{1}$$

和

$$\angle H(j\omega) = -\angle\left(\frac{1}{H(j\omega)}\right)$$

同时，对于系统函数为恒定增益的系统

$$H(j\omega) = K$$

因为，若 $K > 0$, $K = |K|e^{j0}$ ；若 $K < 0$, $K = |K|e^{j\pi}$ ，所以

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log_{10}|K|$$

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} 0, & \text{若 } K > 0 \\ \pi, & \text{若 } K < 0 \end{cases}$$

因为一个有理型频率响应可以被因式分解成一个恒定增益和一阶、二阶项的乘积，所以它的波特图就能由乘积中每一项的波特图相加得到。下面两个例子将用来进一步说明波特图的构成。

例 6.4 求频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{2 \times 10^4}{(j\omega)^2 + 100j\omega + 10^4}$$

的波特图。首先注意到

$$H(j\omega) = 2\hat{H}(j\omega)$$

这里 $\hat{H}(j\omega)$ 就是由(6.33)式所给出的标准二阶频率响应的形式，于是有

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log_{10}2 + 20\log|\hat{H}(j\omega)|$$

将 $\hat{H}(j\omega)$ 与(6.33)式的频率响应作一比较，可得 $\omega_n = 100$, $\zeta = 1/2$ 。利用(6.44)式，现在就可以对 $20\log_{10}|\hat{H}(j\omega)|$ 标定渐近线：

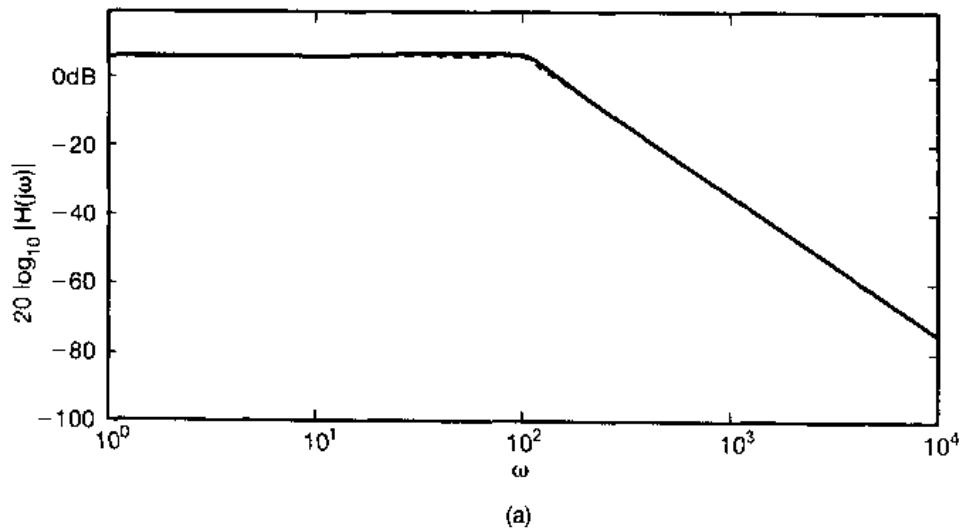
$$20\log_{10}|\hat{H}(j\omega)| \approx 0, \omega \ll 100$$

和

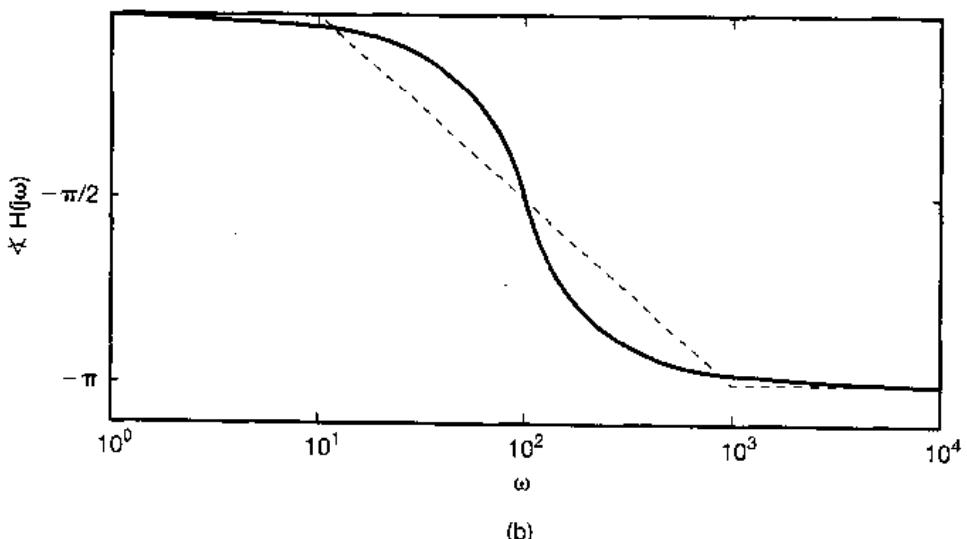
^① 原文为 $20\log_{10}\left|\frac{1}{H(j\omega)}\right|$ ，有误——译者注。

$$20\log_{10}|\hat{H}(j\omega)| \approx -40\log_{10}\omega + 80, \quad \omega \gg 100$$

$20\log_{10}|H(j\omega)|$ 除了由于另加 $20\log_{10}2$ (近似为 6dB)这一项而对所有频率有一个恒定偏置外，具有与 $\hat{H}(j\omega)$ 相同的渐近线。图 6.24(a) 中的虚线就代表了这一渐近线。图中的实线代表 $20\log_{10}|H(j\omega)|$ 由计算机产生的真正波特图。因为对 $\hat{H}(j\omega)$ 来说， ζ 的值小于 $\sqrt{2}/2$ ，所以真正的波特图在接近 $\omega = 100$ 的地方有一个微小的峰值。



(a)



(b)

图 6.24 例 6.4 的系统函数波特图：(a) 模；(b) 相位

为了得到 $\angle H(j\omega)$ 的图，可注意到

$$\angle H(j\omega) = \angle \hat{H}(j\omega)$$

而 $\angle \hat{H}(j\omega)$ 的渐近线按(6.46)式给出为

$$\angle \hat{H}(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq 10 \\ -(\pi/2)[\log_{10}(\omega/100) + 1], & 10 \leq \omega \leq 1000 \\ -\pi, & \omega \geq 1000 \end{cases}$$

在图 6.24(b)分别用虚线和实线画出了 $H(j\omega)$ 的渐近线和真实值。

例 6.5 考虑如下频率响应：

$$H(j\omega) = \frac{100(1+j\omega)}{(10+j\omega)(100+j\omega)}$$

为了获得 $H(j\omega)$ 的波特图，将 $H(j\omega)$ 重写成如下因式的形式：

$$H(j\omega) = \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{1+j\omega/10}\right)\left(\frac{1}{1+j\omega/100}\right)(1+j\omega)$$

这里，第一个因子是一个常数，接下来两个因式都有与(6.22)式给出的一阶频率响应相同的标准形式，而第四个因式是一阶标准形式的倒数。因此， $20\log_{10}|H(j\omega)|$ 的波特图就是相应于每个因式的波特图之和。另外，可以将每一个的渐近线相加以得到总的波特图的渐近线。这些渐近线和 $20\log_{10}|H(j\omega)|$ 的真正值都画在图 6.25(a)中。应该注意，常数因子 $1/10$ 在所有频率都是 -20 dB 的偏置。 $\omega=1$ 的折转频率对应于 $(1+j\omega)$ 这一因式，它由 $\omega=1$ 开始产生 20 dB/10 倍频程的上升，然后由于因式 $1/(1+j\omega/10)$ 而在折转频率 $\omega=10$ 处，被以 20 dB/10 倍频程的下降而抵消。最后，因式 $1/(1+j\omega/100)$ 提供了另一折转频率 $\omega=100$ ，随后就以 20 dB/10 倍频程的速率下降。

根据如上说明的每个因式的渐近线，再与图 6.25(b)的真实相位图一起，就可以对 $H(j\omega)$ 构成渐近

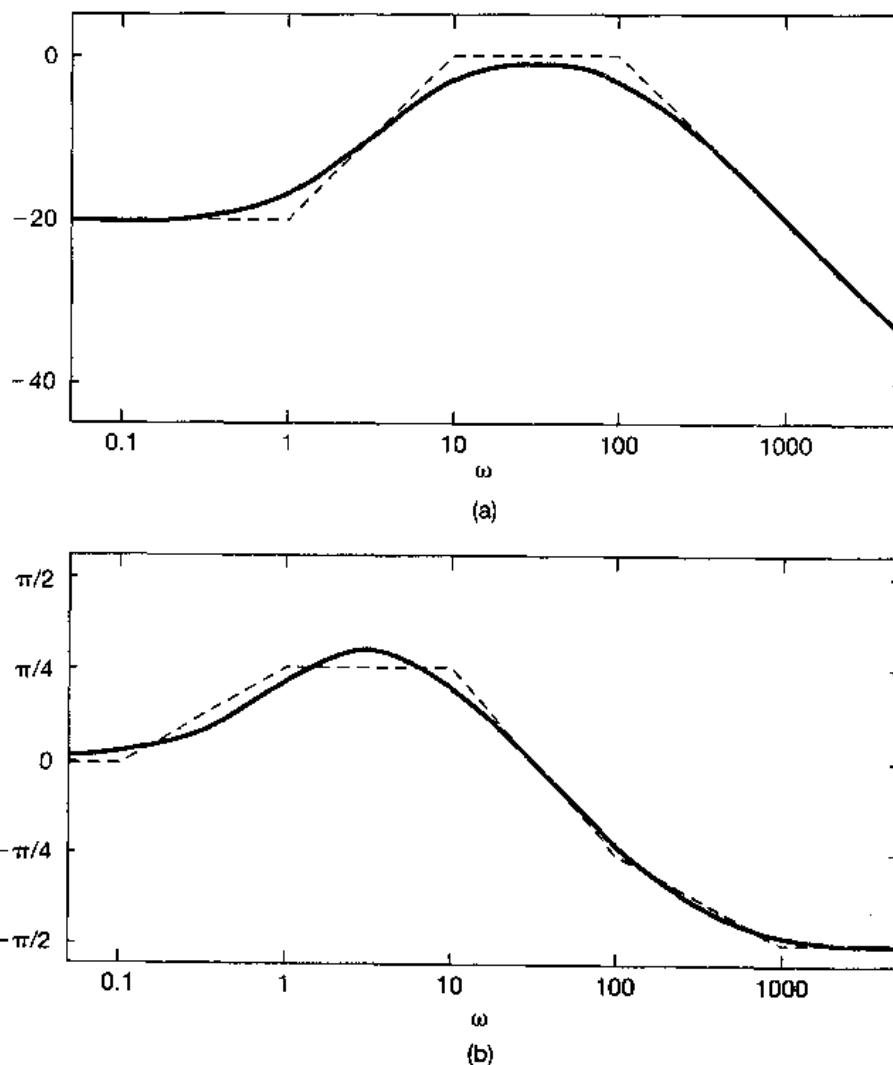


图 6.25 例 6.5 系统函数的波特图：(a) 模；(b) 相位

近似。特别是，常数因子 $1/10$ 对相位的贡献是 0，而因式 $(1+j\omega)$ 的贡献是：对 $\omega < 0.1$ 是 0，然后在 $\omega = 0.1$ 从零相位开始，随 $\log_{10}(\omega)$ 线性上升，本应在 $\omega = 10$ 时，升到一个 $\pi/2$ 值。然而，这一上升在 $\omega = 1$ 处被因式 $1/(1+j\omega/10)$ 的相位的渐近近似所抵消，该因式对相位的贡献是：从 $\omega = 1$ 到 $\omega = 100$ 的频率范围内线性减小 $\pi/2 \text{ rad}$ 。最后，因式 $1/(1+j\omega/100)$ 相位的渐近近似在 $\omega = 10$ 到 $\omega = 1000$ 的频率范围内提供了另一个 $\pi/2 \text{ rad}$ 的线性下降。

在本节一阶系统的讨论中，我们只关心 $\tau > 0$ 的值。事实上，如果 $\tau < 0$ ，很容易证明，由(6.21)式所描述的因果一阶系统的单位冲激响应不是绝对可积的，结果系统是不稳定的。同样，在分析(6.31)式的二阶因果系统中。都要求 ζ 和 ω_n^2 是正数，如果有哪一个不是正的话，所得到的单位冲激响应也不是绝对可积的。因此，这一节都只关心稳定的因果一阶和二阶系统，对它们可以定义出频率响应。

6.6 一阶与二阶离散时间系统

这一节将与上一节的讨论相伴行来研究一阶和二阶离散时间 LTI 系统的性质。和连续时间情况一样，具有频率响应为 $e^{-j\omega}$ 的两个多项式之比的任何系统（也就是由线性常系数差分方程描述的任何离散时间 LTI 系统）都能够写成一阶和二阶系统的乘积或和，这意味着这些基本系统在实现和分析更为复杂的系统时具有很大的价值。（例如见习题 6.45）。

6.6.1 一阶离散时间系统

考虑由如下差分方程描述的一阶因果 LTI 系统

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (6.51)$$

其中 $|a| < 1$ 。由例 5.18，该系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (6.52)$$

其单位脉冲响应为

$$h[n] = a^n u[n] \quad (6.53)$$

对于几个不同的 a 值，其 $h[n]$ 如图 6.26 所示。

同时，该系统的阶跃响应为

$$s[n] = h[n] * u[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n] \quad (6.54)$$

如图 6.27 所示。

这里参数 a 的模 $|a|$ 所起的作用很类似于连续时间一阶系统中时间常数 τ 的作用，这就是 $|a|$ 决定了一阶系统响应的速率。例如，由(6.53)式和(6.54)式以及图 6.26 和图 6.27 都可以看到， $h[n]$ 和 $s[n]$ 收敛于它们终值的速率就是 $|a|^n$ 收敛于 0 的速率，因此对于小的 $|a|$ 值，单位脉冲响应急剧衰减，而阶跃响应则很快地建立起来。当 $|a|$ 接近于 1 时，这些响应都是比较慢的。值得注意的是，和一阶连续时间系统不同，由(6.51)式所确定的一阶系统可以呈现出振荡的特性。这发生在当 $a < 0$ 的时候，在这种情况下，阶跃响应既呈现出超量，又呈现出振荡特性。

由(6.51)式描述的一阶系统频率响应的模和相位分别是

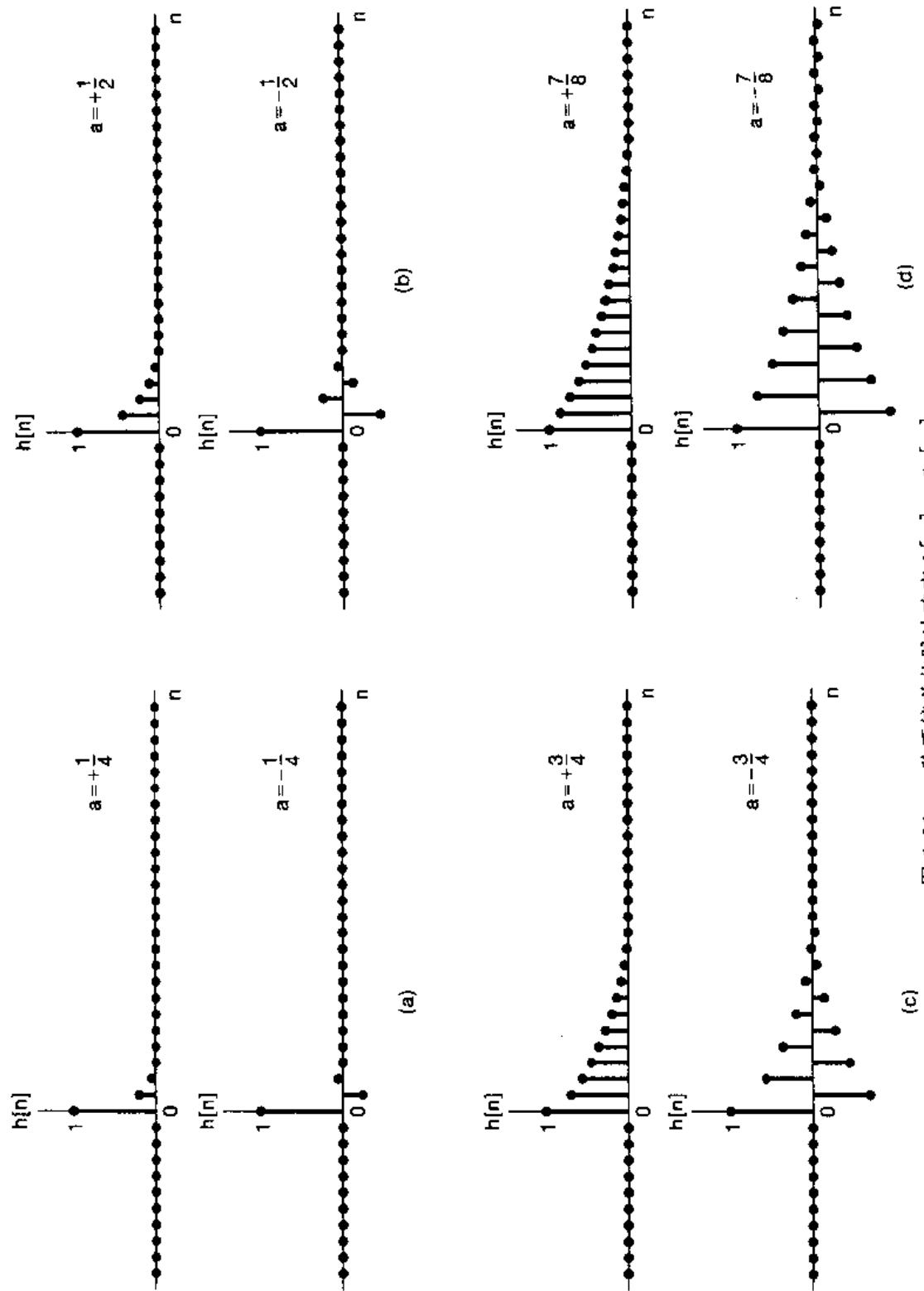


图 6.26 一阶系统单位脉冲响应 $h[n] = \alpha^n u[n]$;
 (a) $\alpha = +1/4$; (b) $\alpha = -1/2$; (c) $\alpha = +3/4$; (d) $\alpha = -7/8$

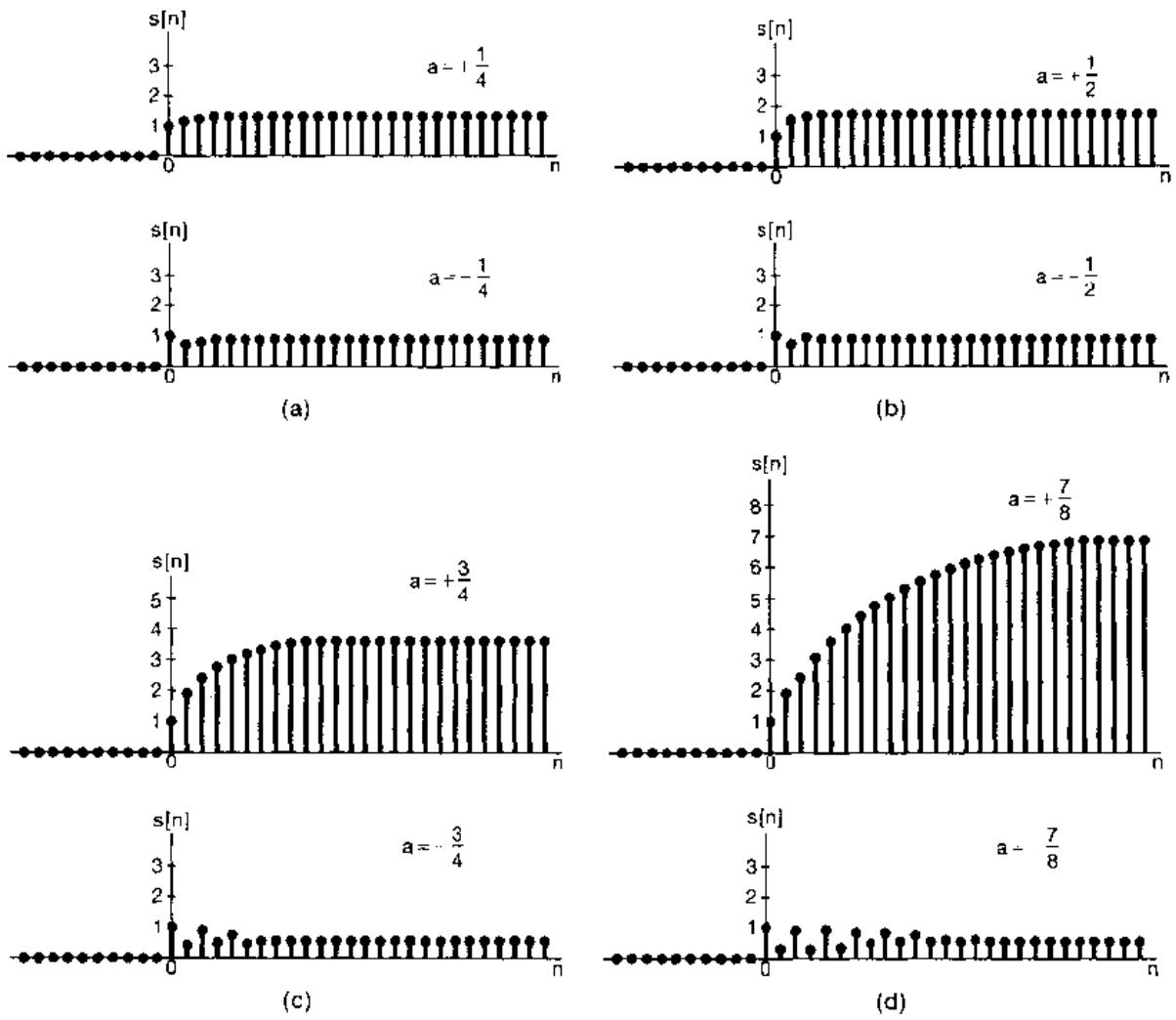


图 6.27 一阶系统的阶跃响应 $s[n]$:

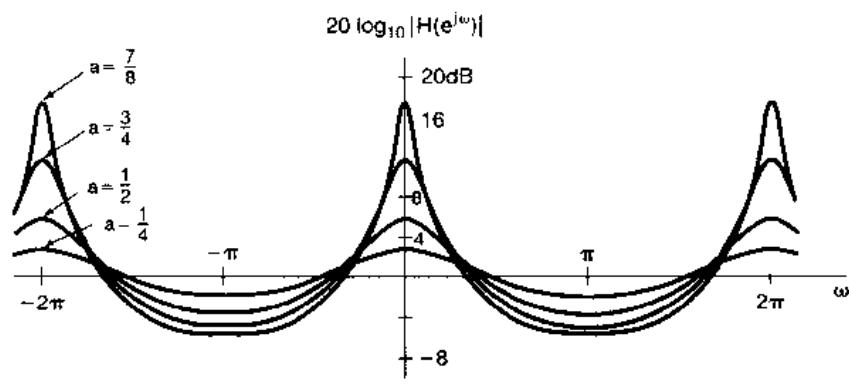
(a) $a = \pm 1/4$; (b) $a = \pm 1/2$; (c) $a = \pm 3/4$; (d) $a = \pm 7/8$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos \omega)^{1/2}} \quad (6.55)$$

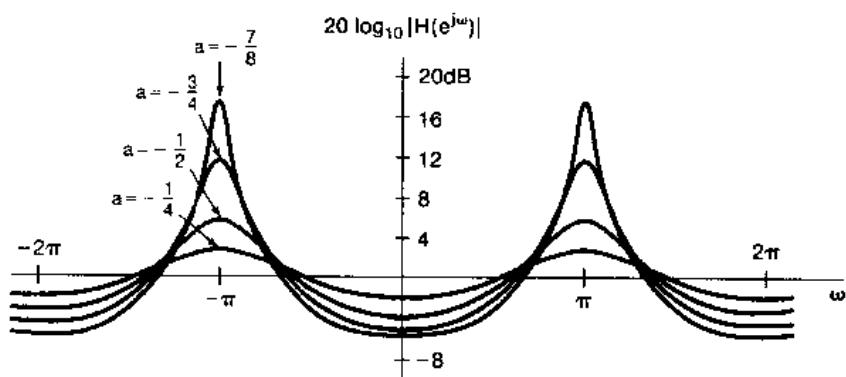
和

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\tan^{-1} \left[\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega} \right] \quad (6.56)$$

在图 6.28(a)中, 画出了在 $a > 0$ 的几个值时频率响应的对数模和相位特性; 图 6.28(b)是 $a < 0$ 时的情况。从这些图中可以看到, 在 $a > 0$ 时, 系统呈现出高频衰减的特性 [即 $|H(e^{j\omega})|$ 在 ω 接近 $\pm\pi$ 时的值比 ω 接近于 0 时的值小]; 而当 $a < 0$ 时, 系统对高频分量放大, 而对低频分量衰减。同时, 也注意到, 对于小的 $|a|$ 值, $|H(e^{j\omega})|$ 的最大值 $1/(1 + a)$ 和最小值 $1/(1 - a)$ 在数值上就逐渐靠近, 因此 $|H(e^{j\omega})|$ 的变化就相对地平坦。另一方面, 在 $|a|$ 接近于 1 时, 这两个值就相差很大, $|H(e^{j\omega})|$ 呈现出更为陡峭的峰值, 这就为在一个较窄的频带内提供了具有良好选择性的滤波和放大。



(a)



(b)

图 6.28 由(6.52)式确定的一阶系统频率响应的模和相位特性：

(a) $a > 0$ 时几个不同 a 值的图；(b) $a < 0$ 时几个不同 a 值的图

6.6.2 二阶离散时间系统

考虑一个二阶因果 LTI 系统, 其差分方程为

$$y[n] - 2r\cos\theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n] \quad (6.57)$$

式中 $0 < r < 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ 。该系统的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}} \quad (6.58)$$

$H(e^{j\omega})$ 的分母可以因式分解, 从而得

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{[1 - (re^{j\theta})e^{-j\omega}][1 - (re^{-j\theta})e^{-j\omega}]} \quad (6.59)$$

当 $\theta \neq 0$ 或 π 时, 这两个因式是不同的, 利用部分分式展开就可得

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - (re^{j\theta})e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - (re^{-j\theta})e^{-j\omega}} \quad (6.60)$$

式中

$$A = \frac{e^{j\theta}}{2j\sin\theta}, \quad B = \frac{e^{-j\theta}}{2j\sin\theta} \quad (6.61)$$

这时系统的单位脉冲响应是

$$\begin{aligned} h[n] &= [A(re^{j\theta})^n + B(re^{-j\theta})^n]u[n] \\ &= r^n \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} u[n] \end{aligned} \quad (6.62)$$

若 $\theta = 0$ 或 π , (6.58) 式分母的这两个因式相同。当 $\theta = 0$ 时,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - re^{-j\omega})^2} \quad (6.63)$$

和

$$h[n] = (n+1)r^n u[n] \quad (6.64)$$

当 $\theta = \pi$ 时

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 + re^{-j\omega})^2} \quad (6.65)$$

和

$$h[n] = (n+1)(-r)^n u[n] \quad (6.66)$$

图 6.29 示出了 r 和 θ 的值在某一范围内改变时二阶系统的单位脉冲响应。由该图及(6.62)式都可看到, $h[n]$ 的衰减速率受 r 的控制, 即 r 愈接近 1, $h[n]$ 衰减得愈慢; 而 θ 值决定振荡频率。例如 $\theta = 0$, 在 $h[n]$ 中就没有振荡, 而 $\theta = \pi$, 振荡就加剧。不同的 r 和 θ 值的影响也可以从(6.57)式的阶跃响应中看到。当 $\theta \neq 0$ 或 π 时,

$$s[n] = h[n] * u[n] = \left[A \left(\frac{1 - (re^{j\theta})^{n+1}}{1 - re^{j\theta}} \right) + B \left(\frac{1 - (re^{-j\theta})^{n+1}}{1 - re^{-j\theta}} \right) \right] u[n] \quad (6.67)$$

同时, 利用习题 2.52 的结果, 对 $\theta = 0$, 可以求得

$$s[n] = \left[\frac{1}{(r-1)^2} - \frac{r}{(r-1)^2} r^n + \frac{r}{r-1} (n+1) r^n \right] u[n] \quad (6.68)$$

而当 $\theta = \pi$ 时,

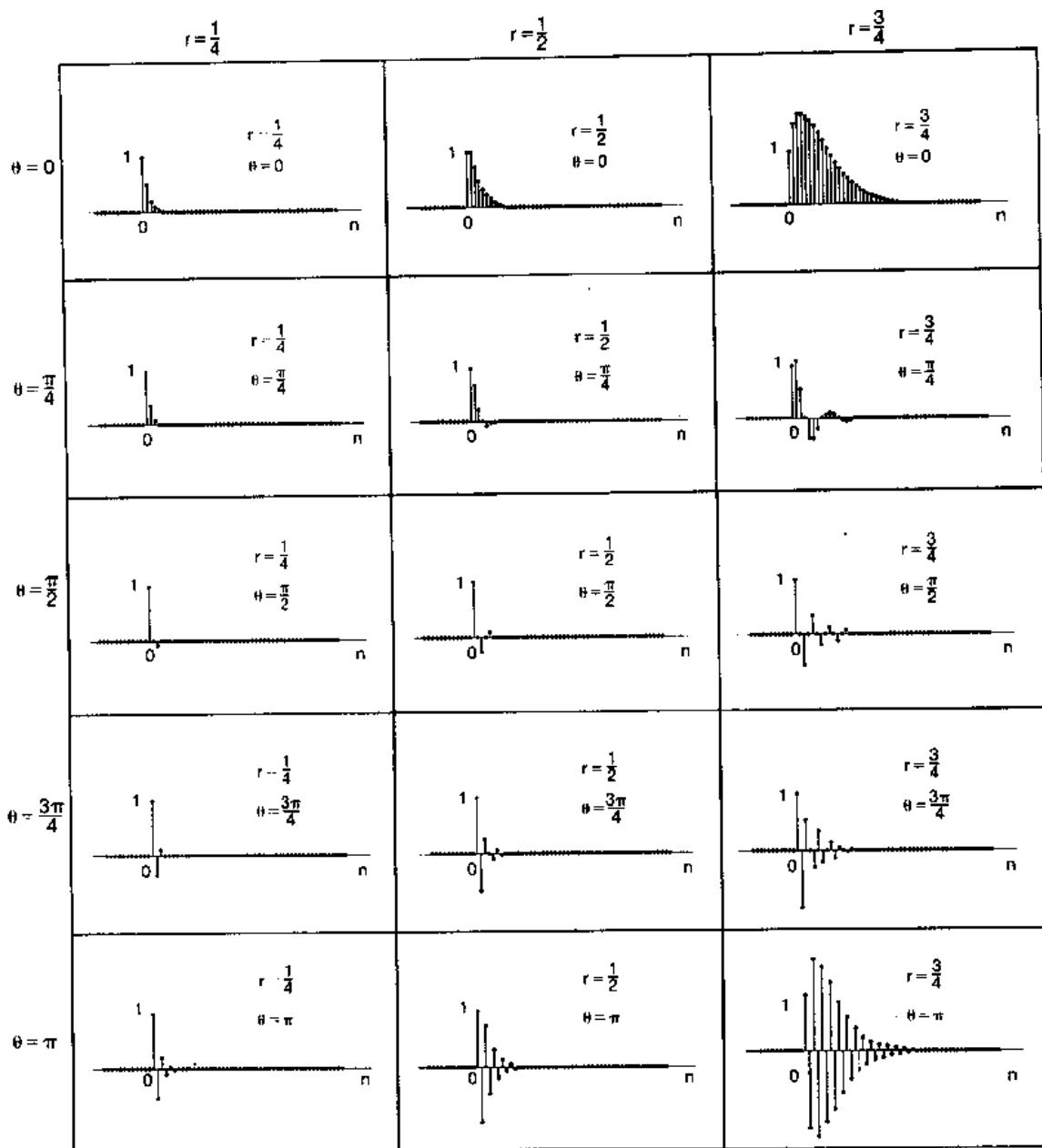


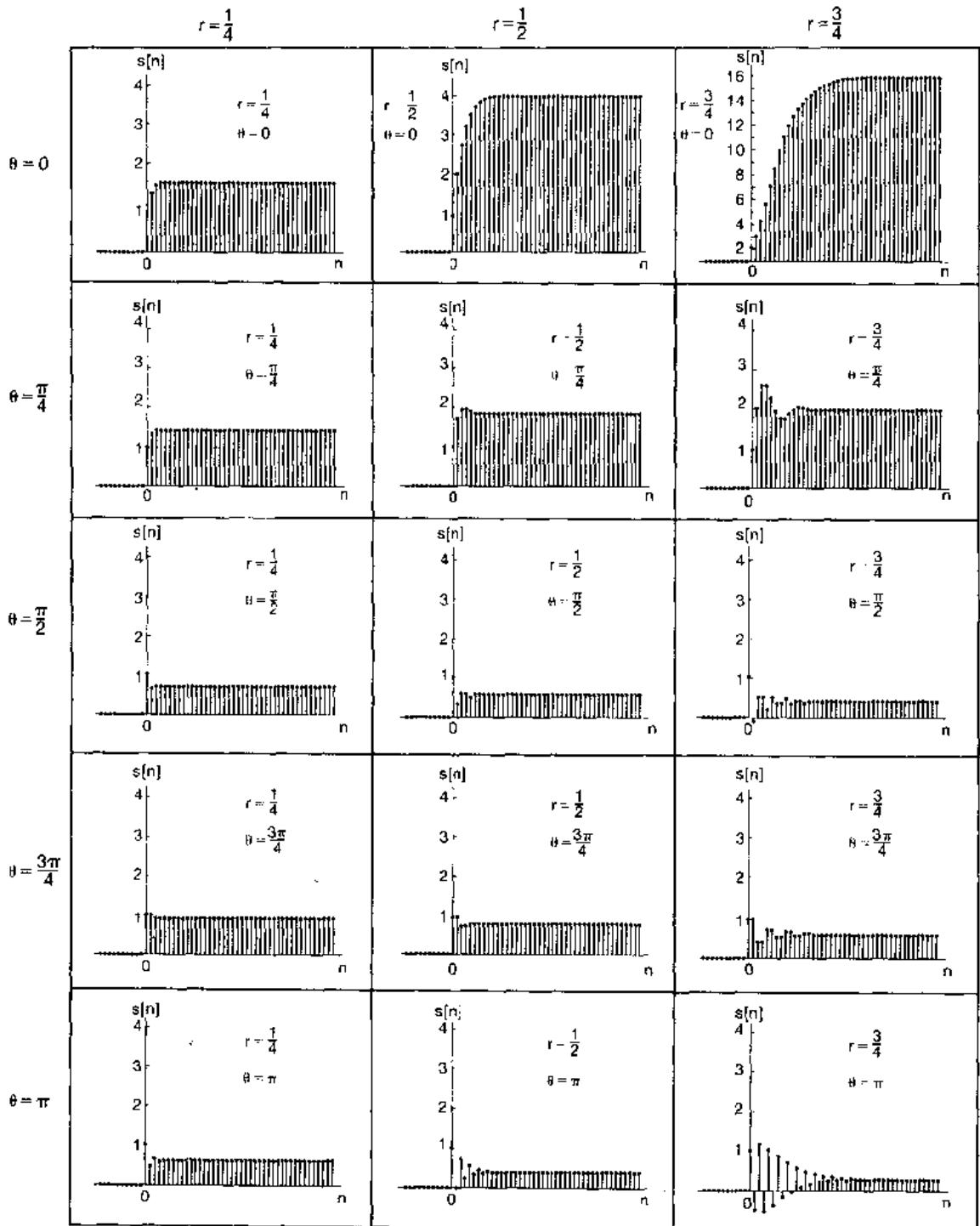
图 6.29 由(6.57)式表示的二阶系统对于一组不同的 r 和 θ 值时的单位脉冲响应

$$s[n] = \left[\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{r}{(r+1)^2}(-r)^n + \frac{r}{r+1}(n+1)(-r)^n \right] u[n] \quad (6.69)$$

对于一组 r 和 θ 值的阶跃响应图示在图 6.30 中。

由(6.57)式所给出的二阶系统就是相当于连续时间系统欠阻尼情况下的二阶系统，而在 $\theta=0$ 的特殊情况就是临界阻尼情况。这就是说，对于任何不等于 0 的 θ 值，单位脉冲响应都有一个衰减振荡的特性，阶跃响应则呈现超量和起伏。对于一组不同的 r 和 θ 值时，该系统的频率响应如图 6.31 所画，从该图可见，系统在某一频率范围内具有放大作用，并且 r 决定了在这一段频率范围内频率响应的尖锐程度。

正如我们刚才看到的，由(6.59)式定义的二阶系统具有复数系数因子(除非 $\theta=0$ 或 π)，



* 注意：图中，对于 $r = 3/4, \theta = 0$ 的图具有不同的坐标尺寸。

图 6.30 由(6.57)式表示的二阶系统对于一组不同的 r 和 θ 值时的阶跃响应

但是，二阶系统也可能具有实系数因子。今考虑如下的 $H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - d_1 e^{-j\omega})(1 - d_2 e^{-j\omega})} \quad (6.70)$$

式中 d_1 和 d_2 都是实数，且 $|d_1|, |d_2| < 1$ 。(6.70)式就是下列差分方程的频率响应

$$y[n] - (d_1 + d_2)y[n-1] + d_1d_2y[n-2] = x[n] \quad (6.71)$$

在该情况下，

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - d_1 e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - d_2 e^{-j\omega}} \quad (6.72)$$

其中

$$A = \frac{d_1}{d_1 - d_2}, \quad B = \frac{d_2}{d_2 - d_1} \quad (6.73)$$

由此

$$h[n] = [Ad_1^n + Bd_2^n]u[n] \quad (6.74)$$

这是两个衰减的实指数序列之和。同时，

$$s[n] = \left[A\left(\frac{1-d_1^{n+1}}{1-d_1}\right) + B\left(\frac{1-d_2^{n+1}}{1-d_2}\right) \right] u[n] \quad (6.75)$$

由(6.70)式所给出的频率响应相当于两个一阶系统的级联。因此，可以从对一阶系统的研究中演绎出该系统的大部分性质。例如，它的对数模及相位特性就可以通过把两个一阶系统的特性相加而得到。同时，如同在一阶系统中所看到的，如果 $|d_1|$ 和 $|d_2|$ 都小的话，系统响应就快；如果两者的大小有一个接近于1的话，系统就会有一个比较长的建立时间。再者，

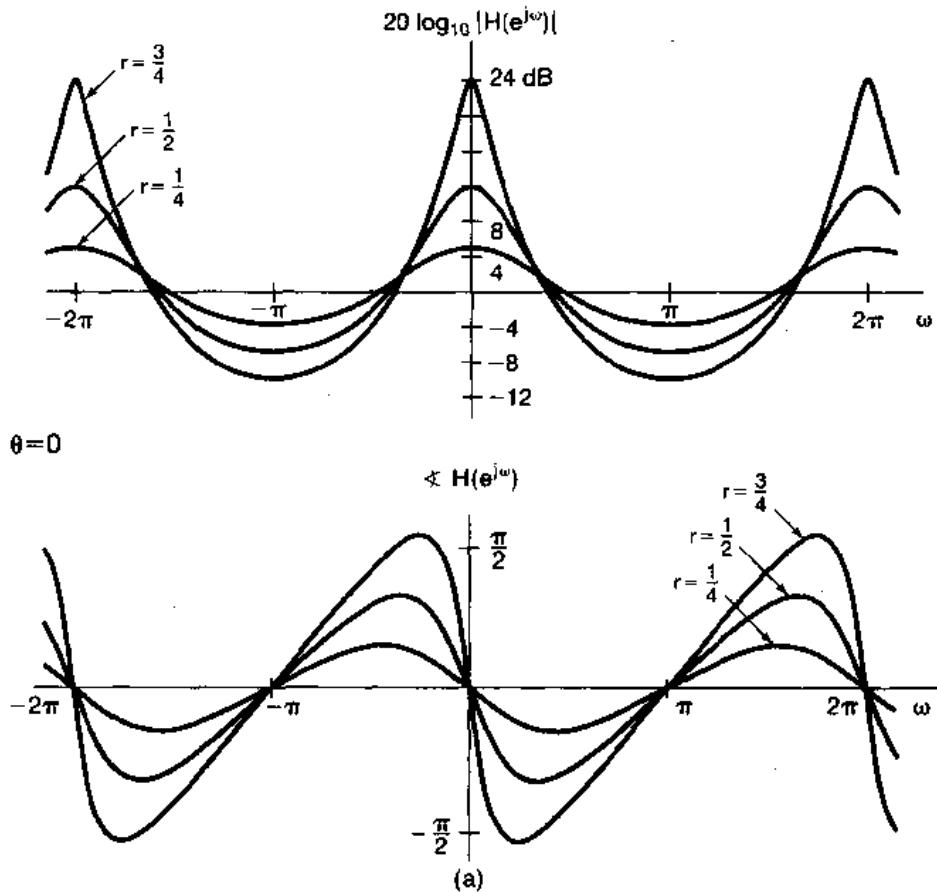


图 6.31 由(6.57)式所表示的二阶系统频率响应的模和相位特性：

- (a) $\theta = 0$;
 - (b) $\theta = \pi/4$;
 - (c) $\theta = \pi/2$;
 - (d) $\theta = 3\pi/4$;
 - (e) $\theta = \pi$ 。
- 每一个图都包括在 $r = 1/4, 1/2$ 和 $3/4$ 时的曲线

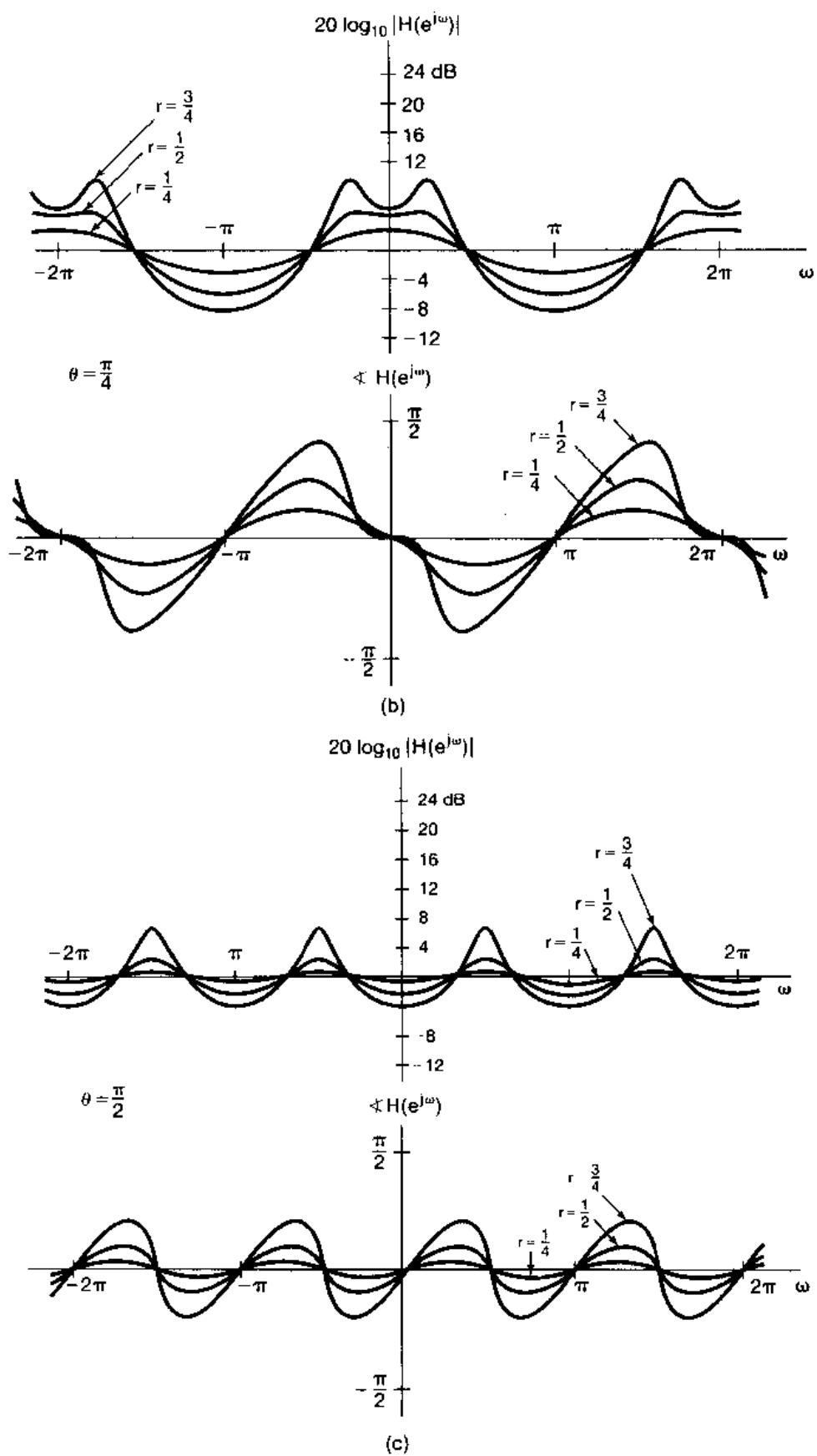


图 6.31(续)

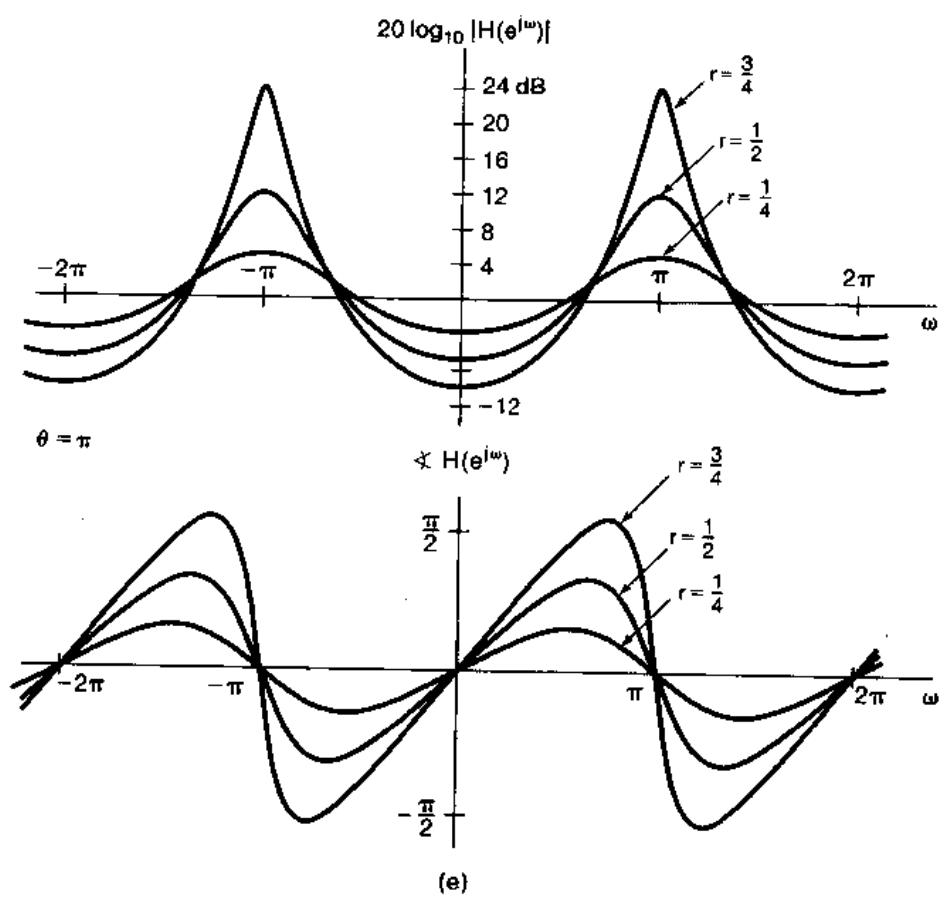
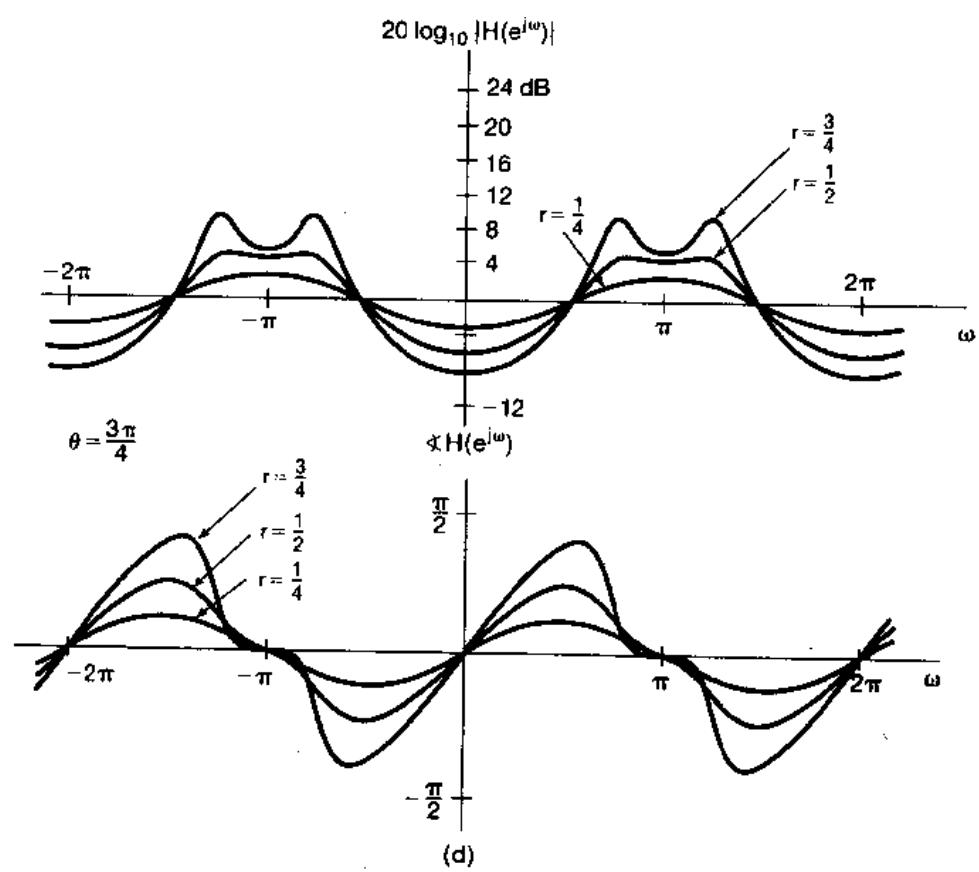


图 6.31(续)

如果 d_1, d_2 都是负的，响应就是振荡型的。最后，当 d_1, d_2 都是正数的情况，就相当于连续时间过阻尼的情况，因为这时单位脉冲响应和阶跃响应在建立过程中都没有振荡。

这一节仅关心那些稳定的因果一阶和二阶系统，也即频率响应是有定义的一阶和二阶系统。特别是。由(6.51)式定义的因果系统，在 $|a| \geq 1$ 时是不稳定的；同时，由(6.56)式定义的因果系统，在 $r \geq 1$ 时也是不稳定的，而由(6.71)式定义的因果系统，在 $|d_1|, |d_2|$ 中有一个超过 1 时也是不稳定的。

6.7 系统的时域分析与频域分析举例

贯穿这一章的都是说明从时域和频域两方面来观察系统的重要性，以及意识到在这两个域的特性之间进行某些权衡或折衷的意义。这一节将进一步来说明这些问题中的某些方面。6.7.1 节将用一个汽车减震系统为例来讨论在连续时间情况下这些折衷；6.7.2 节将讨论被称为移动平均或非递归系统这样一类重要的离散时间滤波器。

6.7.1 汽车减震系统的分析

我们已经得出的在连续时间系统中有关特性和折衷的几点可以用汽车减震系统作为一个低通滤波器来给予说明。图 6.32 示出一个简单的减震装置的原理图，它由一个弹簧和一个减震器（震动吸收器）所组成。路面可以看作两部分叠加的结果，一个代表路面不平度，因而在高度上有一些快速的小幅度的变化，这就对应着高频分量；另一部分是由于整个地形的变化，因而在高度上有一个缓慢的变化，这就对应着低频分量。汽车减震系统一般来说就是想要滤掉由于路面不平，从而在驾驶中引起的这些快速波动；也就是说该系统是作为一个低通滤波器来用的。

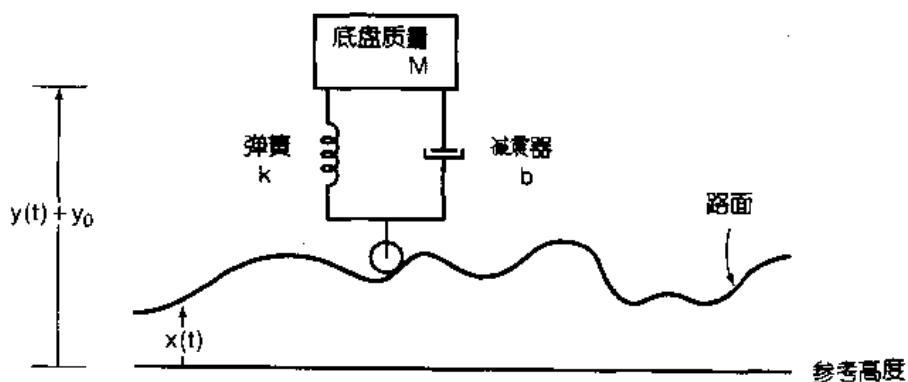


图 6.32 汽车减震系统原理图。 y_0 代表当汽车静止时汽车底盘和路面间的距离， $y(t) + y_0$ 是底盘在参考高度上的位置， $x(t)$ 是高于参考高度的路面高度

这个减震系统基本目的就是要提供一个平稳的驾驶，而且在要通过的和不让通过的频率之间没有一个明显的界限。因此，事实上宁取一个从通带到阻带具有渐变过渡特性的低通滤波器是合理的。另外，这个系统的时域特性是重要的，如果该减震系统的单位冲激响应或阶跃响应呈现振荡，那么在路面上一个大的冲撞（相当于冲激输入），或者是有一个凸缘（相当于阶跃输入），都会形成一个很不舒服的振荡响应。事实上，在减震系统的一般检验中都要引入

一个先将底盘猛压一下然后再释放的激励。如果减震系统在这种激励下的响应有振荡的话，说明系统中的减震器需要更换。

经济上的考虑和实现上的难易程度在汽车减震系统的设计上也起着很重要的作用。从乘客舒适的角度出发，已经完成了许多最理想的减震系统频率响应特性的研究。而在另一些情况下，经济上的因素可能不是一个主要问题，例如像火车客车车厢，这时就采用复杂而昂贵的减震系统。对汽车工业来说，成本是一个很重要的因素，因此多采用简单而成本低廉的减震系统。一个典型的汽车减震系统就只是由经过一个弹簧和一个减震器与轮子相连的底盘所组成。

在图 6.32 中， y_0 代表汽车在静止时，底盘与路面间的距离， $y(t) + y_0$ 是底盘在参考高度上的位置，而 $x(t)$ 是道路在参考高度上的高度。制约底盘运动的微分方程就是

$$M \frac{d^2y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = kx(t) + b \frac{dx(t)}{dt} \quad (6.76)$$

其中 M 是底盘的质量， k 和 b 是分别与弹簧和减震器有关的系数。于是系统的频率响应是

$$H(j\omega) = \frac{k + b j \omega}{(j\omega)^2 M + b(j\omega) + k}$$

或者

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (6.77)$$

这里

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{M}$$

和 6.5.2 节相同，参数 ω_n 称为无阻尼自然频率， ζ 称为阻尼系数。由(6.77)式给出的频率响应对数模的波特图可以用一阶和二阶系统的波特图来构成。在几个不同 ζ 值下的频率响应模的波特图如图 6.33 所示。图 6.34 是在几个不同 ζ 值下系统的阶跃响应特性。

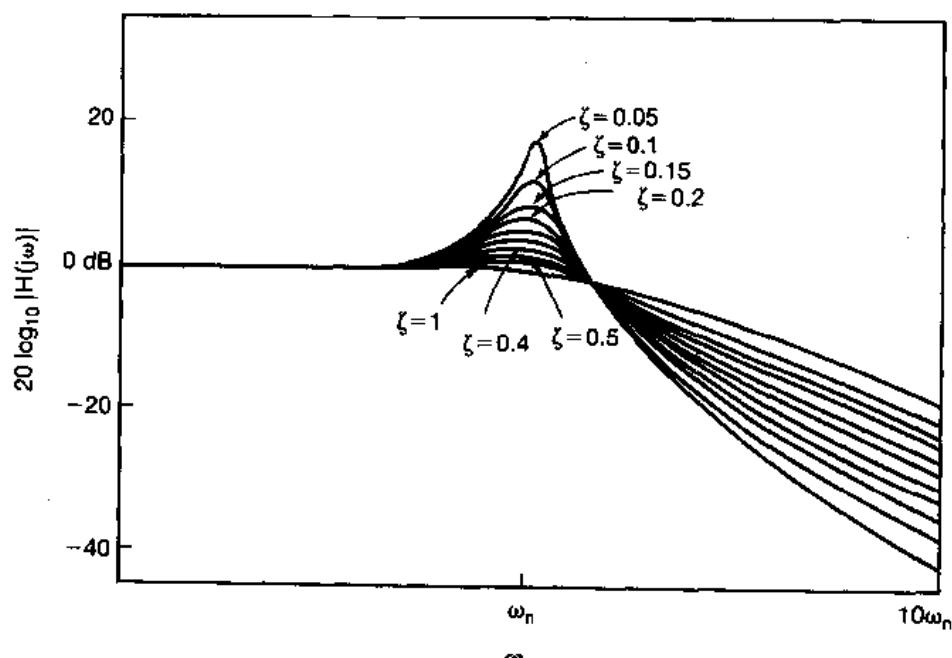


图 6.33 对应于几个不同的阻尼系数 ζ 值下，汽车减震系统频率响应模的波特图

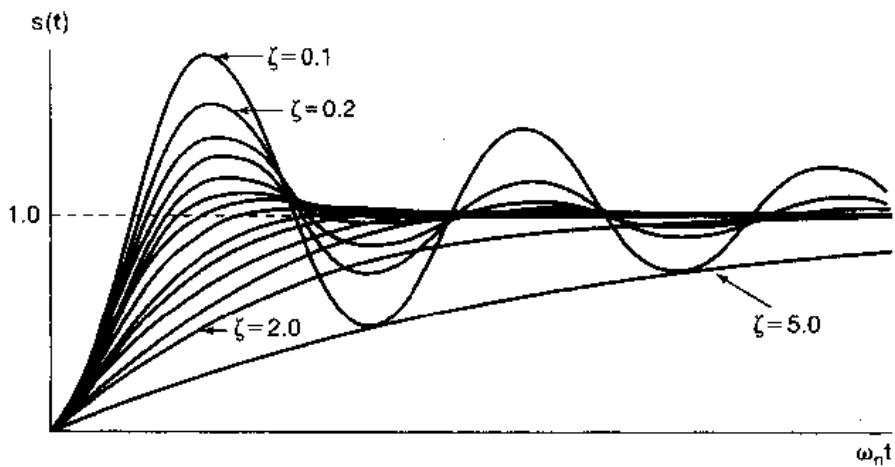


图 6.34 在各种不同阻尼系数($\zeta=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.5, 2.0, 5.0$)下汽车减震系统的阶跃响应

如同在 6.5.2 节所曾看到的，该滤波器的截止频率基本上是通过 ω_n 来控制的，或者等效地说，对于某一个底盘质量 M ，通过对弹簧系统 k 的适当选择来控制的。对某一个给定的 ω_n ，然后阻尼系数 ζ 是由与减震器有关的阻尼因子 b 来调整的。当自然频率 ω_n 减小时，减震系统就趋于滤掉较慢的路面变化，从而提供一个平滑的驾驶。另一方面，由图 6.34 可见，系统的上升时间却增加了，因此系统反应就更加迟钝一些。一方面要想保持小的 ω_n ，以改善低通滤波性能；另一方面又想有大的 ω_n ，以便有一个快的时间响应！自然，这都是互为矛盾的要求，从而说明了需要在时域和频域特性之间求得某种折衷。一般将具有低的 ω_n 值，从而上升时间长的这种减震系统称为“软”系统；而具有高的 ω_n 值，从而上升时间短的这种减震系统称为“硬”系统。从图 6.33 和图 6.34 也能看到，随着阻尼系数的减小，系统频率响应截止得就更陡峭一些，但在阶跃响应中的过冲和振荡就趋于增加。因此，系统在时域和频域之间还存在着这样一种折衷考虑。一般来讲，减震器的阻尼选为有一个快速的上升时间，但又避免过冲和振荡，这种选择就相当于曾在 6.5.2 节考虑过的， $\zeta=1.0$ 时的临界阻尼情况。

6.7.2 离散时间非递归滤波器举例

在 3.11 节曾介绍过由差分方程描述的两种基本类型的 LTI 滤波器，即递归或无限长脉冲响应(IIR)滤波器和非递归或有限长脉冲响应(FIR)滤波器。在实际中，这两类滤波器都十分重要，并各有优缺点。例如，用 6.6 节讨论的用一阶和二阶系统互联来实现的递归滤波器，实现灵活而且高效，并且它的特性可用改变每个一阶和二阶子系统的参数和数目来调整。另一方面，如在习题 6.64 中所证明的，不可能设计一个具有真正线性相位的因果递归滤波器；而线性相位这个性质如我们已经看到的，往往又是希望有的，因为在线性相位的情况下，相位在输出上的影响只是一个单一的时延。与此相对照，在本节将证明，非递归滤波器可以有一个真正的线性相位特性。然而，一般来讲这也是肯定的：对于同一特性要求的滤波器，当用一个非递归方程来实现时，与用递归差分方程相比，则要求一个阶次更高的方程，从而也就需要更多的系数和延时。因此，对 FIR 滤波器来说，时域和频域之间的主要权衡之一是在给出滤波器频域特性上要有更多的灵活性(例如其中包括实现高频率选择性的要求)，就需要用一个更长的单位脉冲响应的 FIR 滤波器。

最基本的非递归滤波器之一就是曾在 3.11.2 节介绍过的移动平均滤波器。对于这类滤波器，输出是输入在一个有限窗口内的平均：

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^{M} x[n-k] \quad (6.78)$$

对应的单位脉冲响应是一个短形脉冲，它的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N+M+1} e^{j\omega[(N-M)/2]} \frac{\sin[\omega(M+N+1)/2]}{\sin(\omega/2)} \quad (6.79)$$

图 6.35 示出在 $M+N+1=33$ 和 $M+N+1=65$ 时的对数模特性。这些频率响应的主瓣就

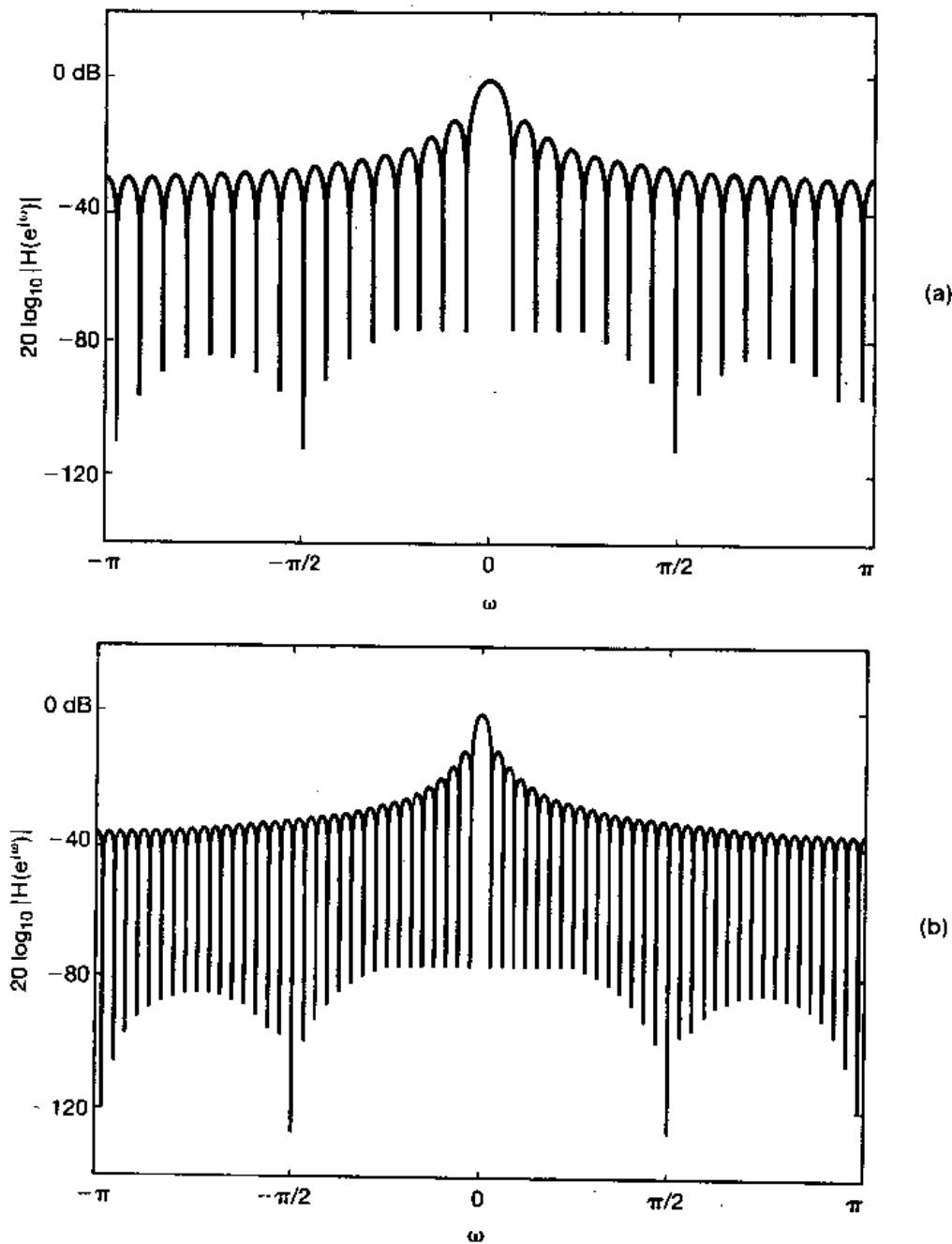


图 6.35 (a) $M+N+1=33$ 和(b) $M+N+1=65$ 时的由(6.78)式和(6.79)式所表示的移动平均滤波器的对数模特性

对应于该滤波器的有效带宽。可以注意到，当单位脉冲响应在长度上增加时，频率响应模特性的主瓣宽度随之减小。这就提供了在时域和频域之间作出折衷的另一个例子。这就是，为了有一个较窄的带宽，(6.78)式和(6.79)式的滤波器就必须有一个更长的单位脉冲响应。因为一个FIR滤波器的单位脉冲响应的长度直接影响着实现时的复杂性，这就意味着频率选择性和滤波器的复杂性之间有一个折衷。这是在滤波器设计中关心的主要问题之一。

在经济问题分析中，通常应用移动平均滤波器来衰减长期经济倾向中的短期波动。图6.36说明，(6.78)式的移动平均滤波器应用于D·琼斯股票市场每周指数(10年)的例子。图6.36(a)示出了10年的D·琼斯股票市场的指数。图6.36(b)是图(a)取51天(即M=N=25)的移动平均，而图6.36(c)则是取201天(即M=N=100)的移动平均。这两个移动平均都是有用的，51天的平均指出发生在一年期间内有循环性(即周期性)的趋势；而201天的平均主要是突出较长时间的变化趋势。

离散时间非递归滤波器的更一般形式是

$$y[n] = \sum_{k=-N}^M b_k x[n-k] \quad (6.80)$$

这样，这个滤波器的输出就可以认为是在(N+M+1)个相邻点上进行的加权平均，而由(6.78)式所表示的简单移动平均就相应将所有这些加权系数都置于同样的值1/(N+M+1)。然而，用其它的方法来选择这些系数，就能在调整滤波器的频率响应上有相当大的灵活性。

有很多方法来选择(6.80)式中的这些系数以满足滤波器的某些特性要求，譬如说在一个滤波器的给定长度内(即N+M+1固定)，尽可能地锐化过渡带。这些方法在一些教科书中都已详细讨论到^①。虽然在这里不讨论这一问题，但是值得强调的是，这些设计方法都强烈地依赖于本书所建立的基本概念和方法。为了说明这些系数的调整如何影响滤波器的响应，现考虑一个N=M=16的形如(6.80)式的滤波器，其系数选择成

$$b_k = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi k/33)}{\pi k}, & |k| \leq 32 \\ 0, & |k| > 32 \end{cases} \quad (6.81)$$

该滤波器的单位脉冲响应是

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi n/33)}{\pi n}, & |n| \leq 32 \\ 0, & |n| > 32 \end{cases} \quad (6.82)$$

将该式与(6.20)式相比较可知，(6.82)式的h[n]相当于把截止频率为 $\omega_c = 2\pi/33$ 的理想低通滤波器的单位脉冲响应在|n|>32时截断的结果。

一般来讲，系统 b_k 可以调整到使截止频率处于所要求的频率上。对于图6.37的例子来说，其截止频率选择得与N=M=16的图6.35的截止频率近似匹配。图6.37(a)是它的单位脉冲响应，而图6.37(b)则是以dB计的频率响应的对数模特性。与图6.35的频率响应相比较，可以看到两者有近似相等的滤波器的通带宽度，但是图6.37(b)有较陡峭的过渡带。图6.38(a)和(b)给出了这两种滤波器的模特性(在相同的线性坐标上)以供比较。从这两个例

^① 例如，可参阅 R. W. Hamming, Digital Filters (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1989); A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, Discrete-Time Signal Processing (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1989); 以及 L. R. Rabiner and B. Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing. (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1975)。

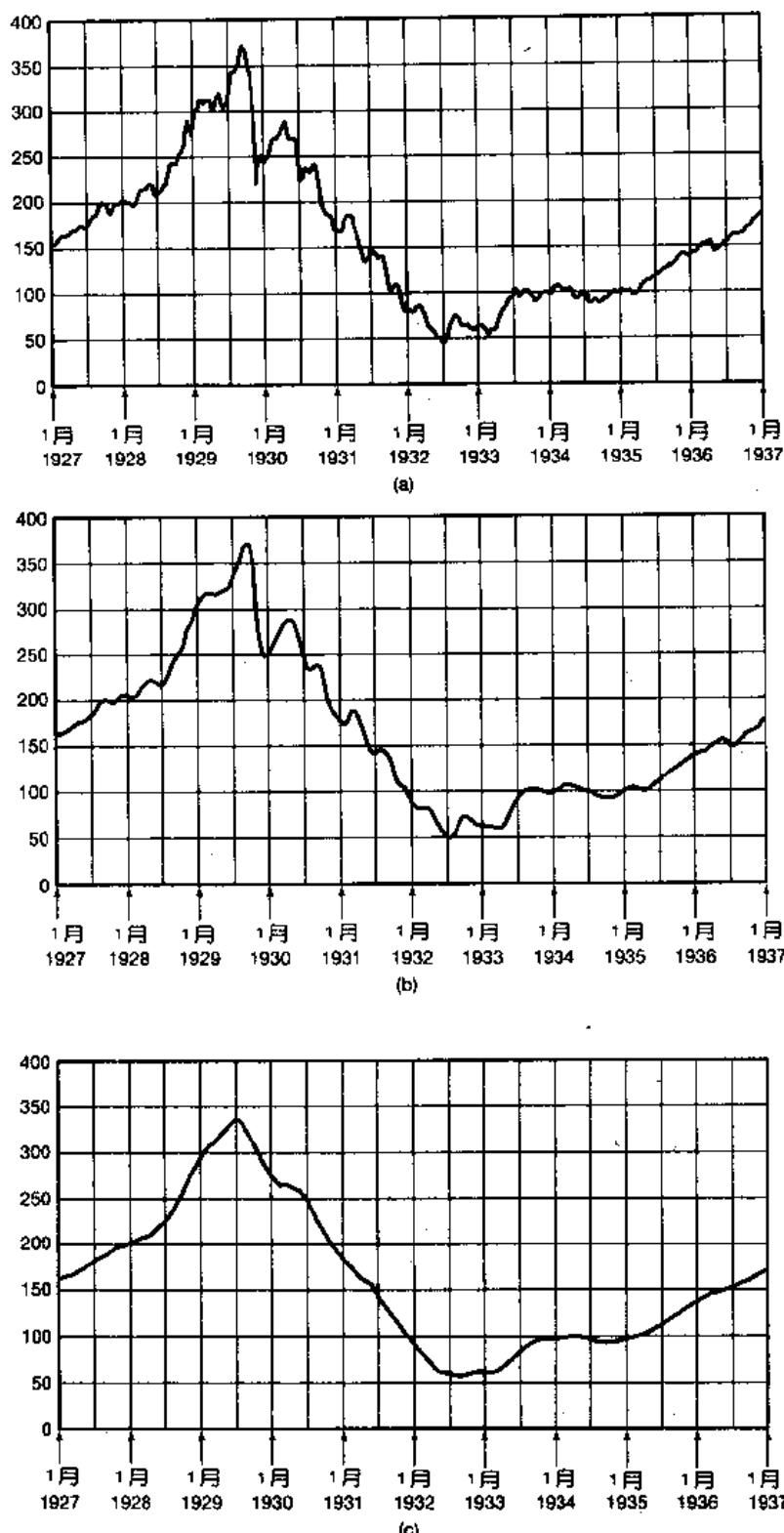


图 6.36 对 10 年内 D·琼斯每周股票市场指数利用移动平均滤波器进行低通滤波的效果：

(a) 每周指数；(b) 对(a)作 51 天的移动平均；(c) 对(a)作 201 天的移动平均。

图中每周股票市场指数和两个移动平均值都是离散时间序列，为了图示清楚起见，
三张图的序列值都用直线相连形成了一条连续曲线

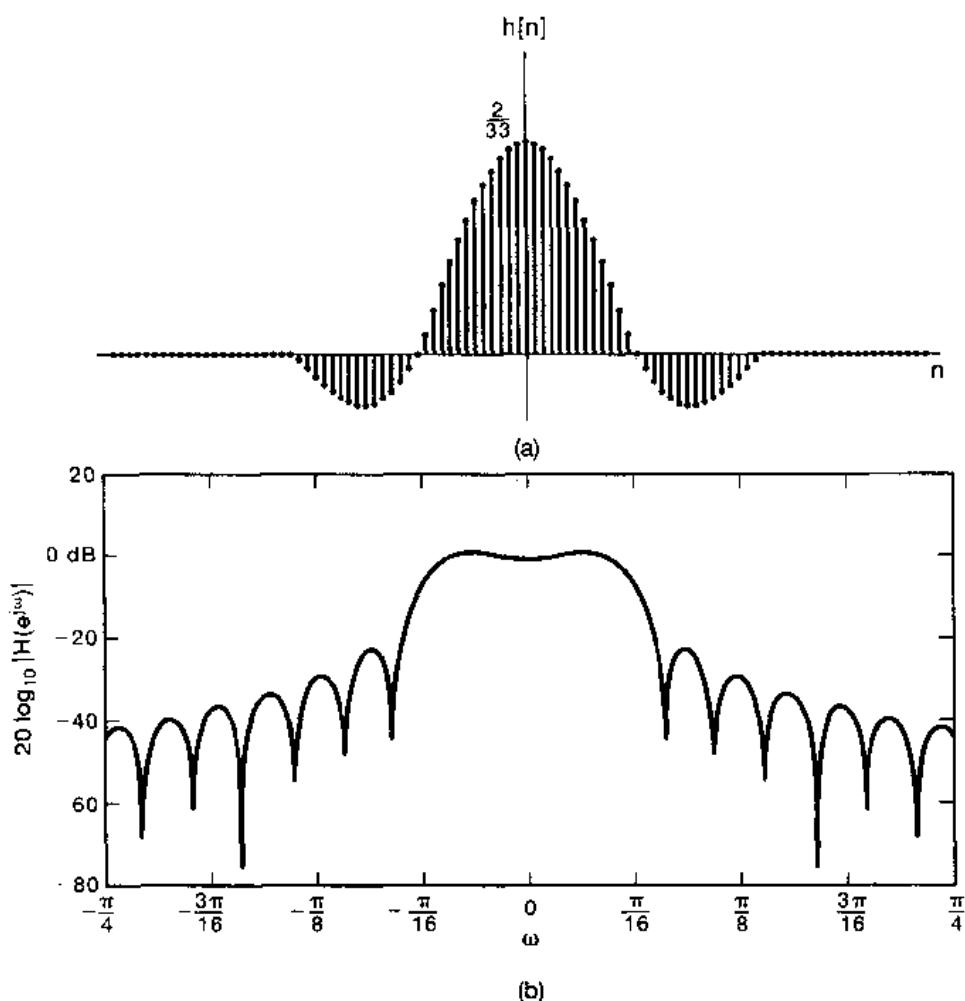


图 6.37 (a)由(6.82)式表示的非递归滤波器的单位脉冲响应；
 (b)该滤波器频率响应的对数模特性

子的比较应该看到，恰当地选择加权系数，可以使过渡带变得尖锐。图 6.39 是一个高阶低通滤波器的例子($N + M + 1 = 125$)，它的系数是通过一个称之为 Parks – McClellan 算法^① 的数值计算来确定的。这再一次说明时域和频域之间的折衷：如果增加滤波器的长度 $N + M + 1$ ，那么利用对(6.80)式中这些滤波器系统的明智选择，就可能实现更为尖锐的过渡带特性和更优越的频率选择性。

已经给出的这些例子有一个重要的性质：它们全都有零或线性相位特性。例如，由(6.79)式表示的移动平均滤波器的相位特性是 $\omega[(N - M)/2]$ 。同时，因为(6.82)式的单位脉冲响应是实的，且为偶序列，它的频率响应就具有零相位。根据实信号傅里叶变换的对称性质知道，任何具有实、偶单位脉冲响应的非递归滤波器都一定有一个实的且为偶函数的频率响应 $H(e^{j\omega})$ ，从而具有零相位。当然，这样的滤波器是非因果的，因为它的单位脉冲响应 $h[n]$ 在 $n < 0$ 不为零。然而，如果要求一个因果滤波器的话，那么在单位脉冲响应上作一些改变也能完成这一目的，这样就得出一个具有线性相位的系统。具体地说就是，因为 $h[n]$ 是

^① A. V. Oppenheim and R. W. Schafer. Discrete – Time Signal Processing (Englewood Cliffs, NJ: Prentice – Hall, Inc., 1989) 第 7 章。

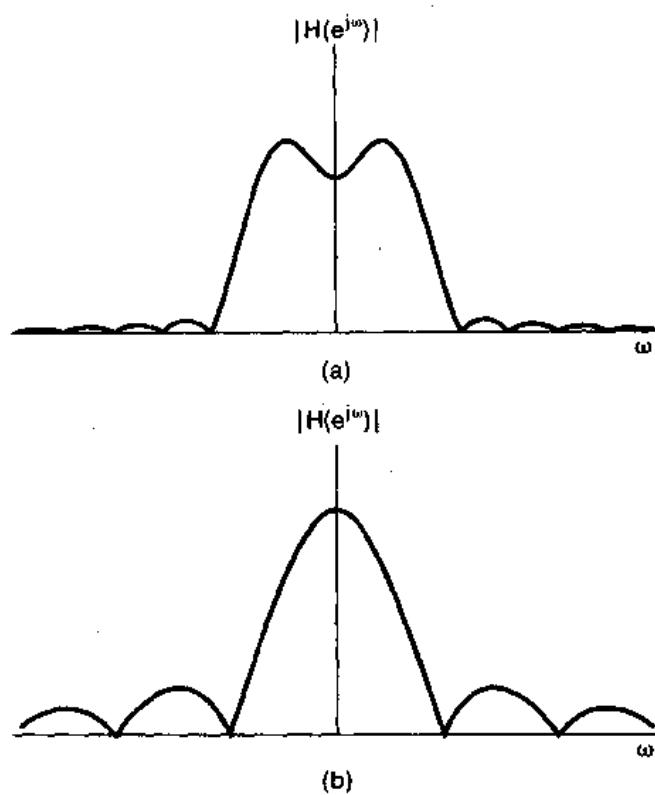


图 6.38 (a)图 6.37 和(b)图 6.35 两个频率响应(线性坐标)的比较

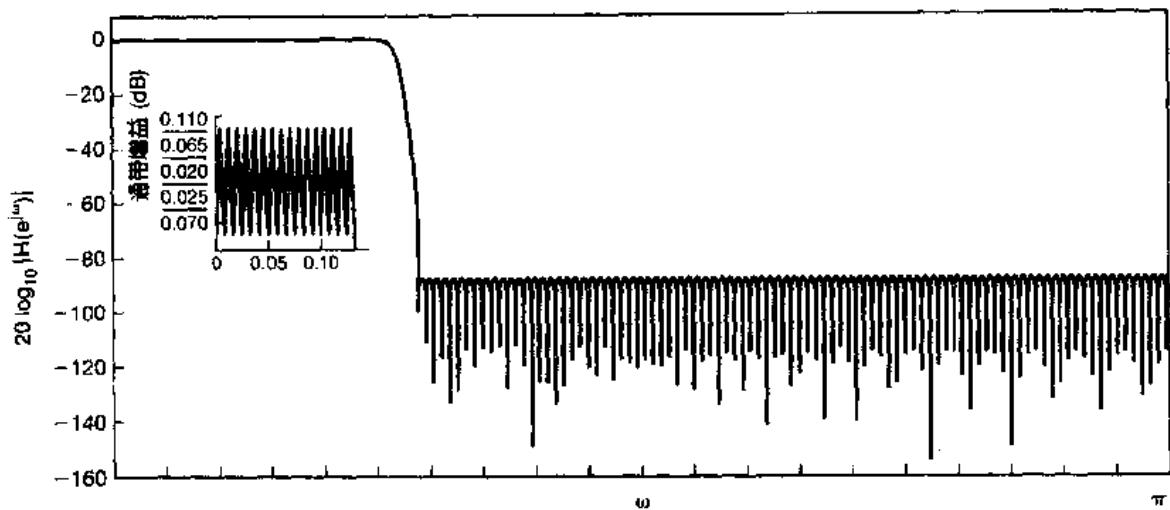


图 6.39 用 251 个系数设计的以获得最锐截止的低通非递归滤波器

一个 FIR 滤波器的单位脉冲响应，它在以原点为中心的某一范围外都为零(即对全部 $|n| > N$, $h[n] = 0$)，现在将 $h[n]$ 仅作 N 位延迟而得一个非递归的 LTI 系统，即

$$h_1[n] = h[n - N] \quad (6.83)$$

那么，在 $n < 0$, $h_1[n] = 0$ ，所以该 LTI 系统是因果的。另外，依据时移性质，该系统的频率响应就是

$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N} \quad (6.84)$$

因为 $H(e^{j\omega})$ 具有零相位，的确 $H_1(e^{j\omega})$ 具有线性相位。

小 结

这一章，我们依据在第 3 到第 5 章所建立的信号与系统的傅里叶分析基础，详细地研究了 LTI 系统的特性以及它们在信号上的作用。特别是，仔细地审视了信号与系统的模和相位特性，并且引入了 LTI 系统的对数模和波特图。同时，还讨论了相位及相位失真对于信号与系统的影响。这一研究让我们了解了线性相位特性所起的特别作用，这就是它对所有频率都给出了一个恒定的时延。这样就引入了与具有非线性相位特性的系统有关的非恒定群时延和弥散的概念。利用这些方法和概念，又从另一个角度审视了频率选择性滤波器以及所涉及到的时域和频域之间的折衷问题。我们既研究了理想的又研究了非理想的频率选择性滤波器的性质，并且看到，时域和频域的考虑、因果性的限制，以及实现方面的问题等等常常使得具有过渡带和在通带与阻带具有容限的非理想滤波器成为最优先的选择。

另外，还详细地研究了连续和离散时间一阶与二阶系统的时域和频域特性，特别注意到这些系统的响应时间和频域带宽之间的折衷。因为一阶和二阶系统是构成更为复杂的高阶 LTI 系统的基本构造单元，所以对这些基本系统所得出的细节在实际中是非常有用的。

最后，给出了几个 LTI 系统的例子以说明在本章所得出的一些结论。特别是，研究了一个简单的汽车减震系统的模型以提供一个关注时间响应与频率响应的具体例子，正是这些关注在实际中指导着系统设计。我们还讨论了几个离散时间非递归滤波器的例子，这其中涉及到从简单的移动平均滤波器到旨在用于增强频率选择性的高阶 FIR 滤波器。除此以外，还看到 FIR 滤波器能够设计成具有真正的线性相位。这些例子，先前所建立的傅里叶分析方法，以及这些方法所提供的概念和细节都说明了傅里叶分析方法在分析和设计 LTI 系统中具有很大的价值。

习 题

习题的第一部分属基本题，答案由书末给出。其余两部分分属基本题与深入题。

基本题(附答案)

6.1 考虑一频率响应为 $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$ 和实值单位冲激响应 $h(t)$ 的连续时间 LTI 系统。假设在该系统上施加一个输入 $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ ，所得到的输出可表示成如下形式：

$$y(t) = Ax(t - t_0)$$

这里 A 是一个非负的实数，代数一个幅度放大因子， t_0 是一个延时。

- (a) 用 $|H(j\omega_0)|$ 表示 A ； (b) 用 $\angle H(j\omega_0)$ 来表示 t_0 。

6.2 考虑一个频率响应为 $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}$ 和实值单位脉冲响应 $h[n]$ 的离散时间 LTI 系统。假设在该系统上施加一个输入 $x[n] = \sin(\omega_0 n + \phi_0)$ ，所得到的输出可表示成

$$y[n] = |H(e^{j\omega_0})|x[n - n_0]$$

假设 $\angle H(e^{j\omega_0})$ 和 ω_0 以一种特别的方式相关联，试求这个关系。

6.3 一因果和稳定的 LTI 系统具有如下频率响应：

$$H(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega}$$

(a) 证明: $|H(j\omega)| = A$, 并求出 A 的值。

(b) 对该系统的群时延 $\tau(\omega)$, 试判断下面哪种说法是对的。(注意: $\tau(\omega) = -d(\angle H(j\omega))/d\omega$, 式中 $\angle H(j\omega)$ 是表示成不包含任何不连续点的形式)。

1. $\tau(\omega) = 0, \omega > 0$
2. $\tau(\omega) > 0, \omega > 0$
3. $\tau(\omega) < 0, \omega > 0$

6.4 考虑一频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 和实值单位脉冲响应 $h[n]$ 的离散时间 LTI 系统, 该系统的群时延函数定义为

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega})$$

式中 $\angle H(e^{j\omega})$ 没有不连续点。假设, 对该系统有

$$|H(e^{j\pi/2})| = 2, \angle H(e^0) = 0, \text{ 和 } \tau(\frac{\pi}{2}) = 2$$

试求下面两种输入下系统的输出:

$$(a) \cos(\frac{\pi}{2}n) \quad (b) \sin(\frac{7\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$$

6.5 考虑一连续时间理想带通滤波器, 其频率响应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_c \leq |\omega| \leq 3\omega_c \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

(a) 若 $h(t)$ 是该滤波器的单位冲激响应, 确定一函数 $g(t)$, 使之有

$$h(t) = (\frac{\sin\omega_ct}{\pi t})g(t)$$

(b) 当 ω_c 增加时, 该滤波器的单位冲激响应是更加向原点集中呢, 还是不是?

6.6 考虑一离散时间理想高通滤波器, 其频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \pi - \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| < \pi - \omega_c \end{cases}$$

(a) 若 $h[n]$ 是该滤波器的单位脉冲响应, 确定一函数 $g[n]$, 使之有

$$h[n] = (\frac{\sin\omega_0 n}{\pi n})g[n]$$

(b) 当 ω_c 增加时, 该滤波器的单位脉冲响应是更加向原点集中呢, 还是不是?

6.7 一连续时间低通滤波器设计成通带频率为 1 000Hz, 阻带频率为 1 200Hz, 通带波纹为 0.1, 阻带波纹为 0.05。该低通滤波器的单位冲激响应记为 $h(t)$, 现在希望把该滤波器转换成具有如下单位冲激响应的带通滤波器:

$$g(t) = 2h(t)\cos(4 000\pi t)$$

假设对于 $|\omega| > 4 000\pi$, $|H(j\omega)|$ 可忽略, 请回答下列问题:

- (a) 若对该带通滤波器的通带波纹限制为 0.1, 与带通滤波器有关的两个通带频率是什么?
- (b) 若对该带通滤波器的阻带波纹限制为 0.05, 与带通滤波器有关的两个阻带频率是什么?

6.8 一因果非理想低通滤波器设计成具有频率响应为 $H(e^{j\omega})$, 关联该滤波器输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 的差分方程是

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b[k]x[n-k]$$

该滤波器也满足下列频率响应模特性的要求:

通带频率 = ω_p 通带波纹 = δ_p

阻带频率 = ω_s 阻带波纹 = δ_s

现在考虑某一 LTI 因果系统，其输入和输出的差分方程是

$$y[n] = \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M (-1)^k b_k x[n-k]$$

证明：该滤波器有一个波纹为 δ_p 的通带，并给出对应的通带位置。

- 6.9 考虑一连续时间因果稳定的 LTI 系统，其关联输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 的微分方程是

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2x(t)$$

问该滤波器阶跃响应 $s(t)$ 的终值 $s(\infty)$ 是什么？另外，求满足

$$s(t_0) = s(\infty)[1 - \frac{1}{e^2}]$$

的 t_0 值。

- 6.10 对下列一阶系统的频率响应，试给出模的波特图的直线近似：

(a) $40\left(\frac{j\omega + 0.1}{j\omega + 40}\right)$ (b) $0.04\left(\frac{j\omega + 50}{j\omega + 0.2}\right)$

- 6.11 对下列二阶系统的频率响应，试给出模的波特图的直线近似：

(a) $\frac{250}{(j\omega)^2 + 50.5j\omega + 25}$ (b) $0.02\left(\frac{j\omega + 50}{(j\omega)^2 + 0.2j\omega + 1}\right)$

- 6.12 有一连续时间 LTI 系统 S，其频率响应 $H(j\omega)$ 由两个频率响应分别为 $H_1(j\omega)$ 和 $H_2(j\omega)$ 的 LTI 系统级联而组成，图 6.12(a) 和图 6.12(b) 分别为 $H_1(j\omega)$ 和 $H_2(j\omega)$ 的模特性波特图的直线近似，请画出 $H_2(j\omega)$ 模的波特图。

- 6.13 一个二阶连续时间 LTI 系统 S 的模特性波特图的直线近似如图 P6.13 所示。S 既可由两个一阶系统 S_1 和 S_2 级联而构成，也可以由两个一阶系统 S_3 和 S_4 并联而构成。试判断下列说法是对，还是错？并陈述理由。

- (a) S_1 和 S_2 的频率响应可唯一确定。
(b) S_3 和 S_4 的频率响应可唯一确定。

- 6.14 一因果稳定的连续时间 LTI 系统 S 的模特性波特图的直线近似如图 P6.14 所示。请给出系统 S 的逆系统的频率响应。

- 6.15 对于因果和稳定的 LTI 系统，对下列各二阶微分方程确定其单位冲激响应是否是欠阻尼、过阻尼或临界阻尼的：

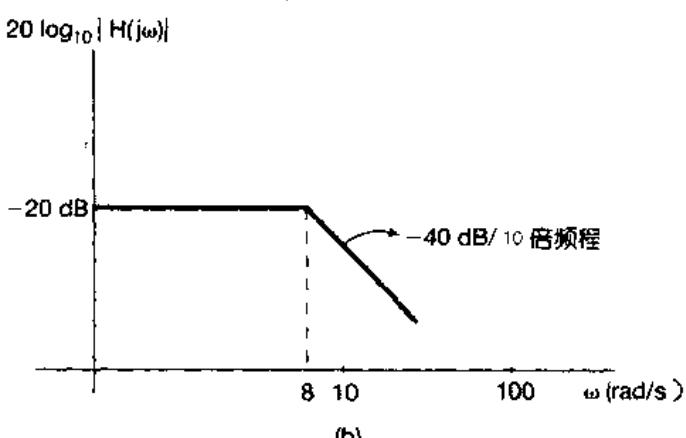
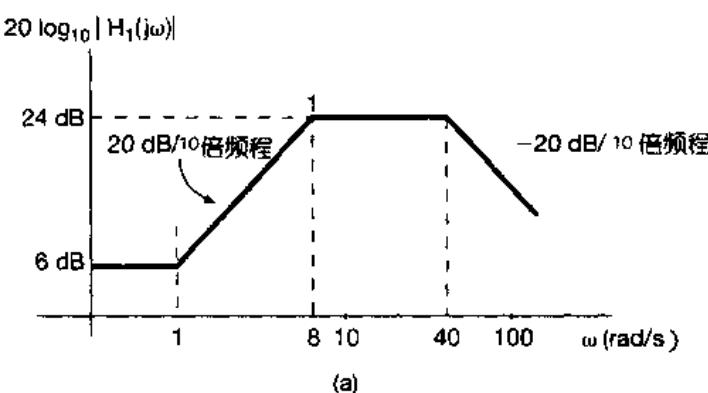


图 P6.12

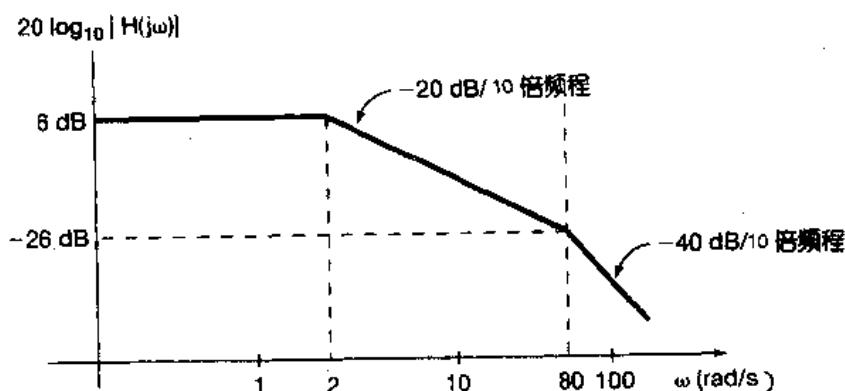


图 P6.13

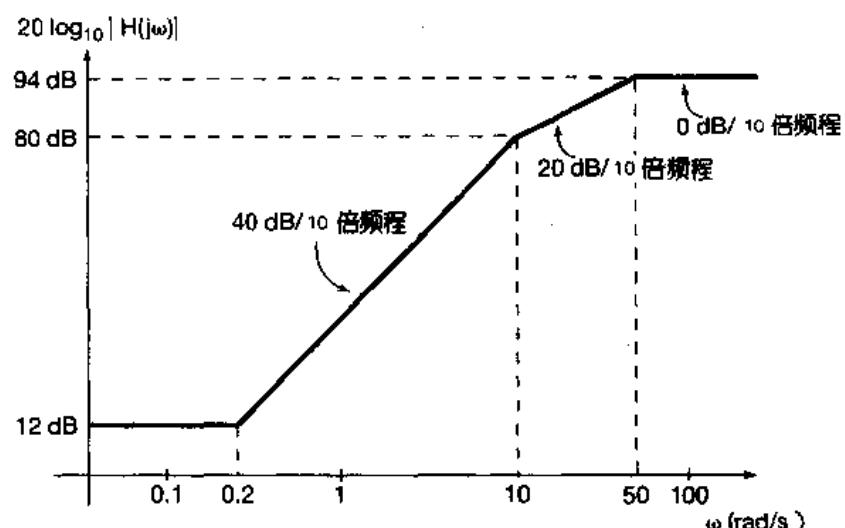


图 P6.14

$$(a) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t) \quad (b) 5 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 7x(t)$$

$$(c) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 20 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (d) 5 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 7x(t) + \frac{1}{3} \frac{dx(t)}{dt}$$

6.16 有一个一阶因果而稳定的离散时间 LTI 系统，它的阶跃响应有最大超量是其终值的 50%。若终值为 1，试求该滤波器的关联输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 的差分方程。

6.17 对下列因果稳定的 LTI 系统的每一个二阶差分方程，确定这个系统的阶跃响应是否是振荡型的：

$$(a) y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

$$(b) y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

6.18 考虑由图 P6.18 的 RC 电路实现的连续时间 LTI 系统，电压源 $x(t)$ 是系统的输入，横跨电容器上的电压 $y(t)$ 是系统的输出。该系统的阶跃响应有无可能具有振荡特性？

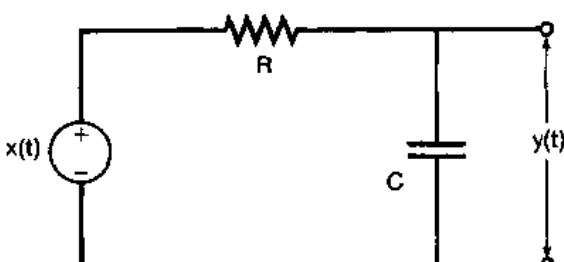


图 P6.18

- 6.19 考虑由图 P6.19 的 RLC 电路实现的 LTI 系统，电压源 $x(t)$ 是系统的输入，横跨电容器上的电压是系统的输出。 R , L 和 C 应具有什么样的关系，才会使该系统的阶跃响应不存在振荡？

- 6.20 考虑一非递归滤波器，其单位脉冲响应如图 P6.20 所示。对该滤波器作为频率函数的群时延是什么？

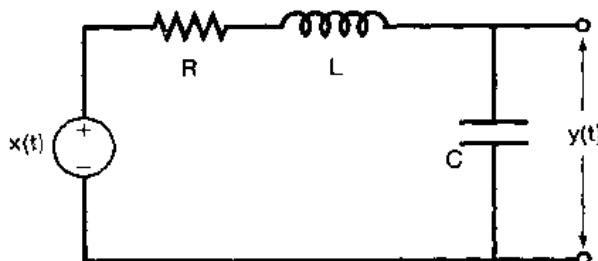


图 P6.19

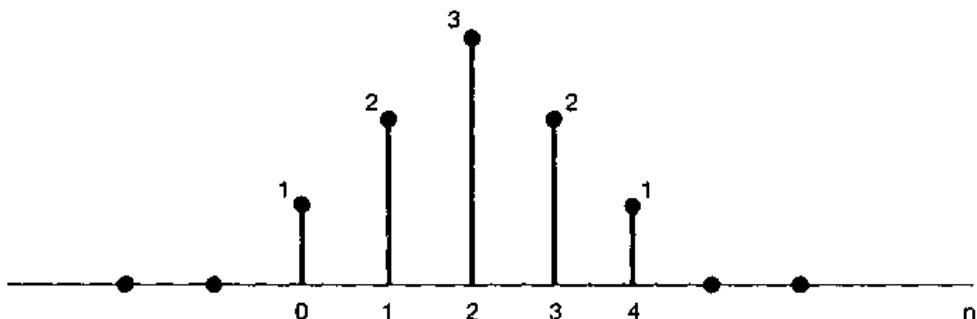


图 P6.20

基本题

- 6.21 有一因果 LTI 滤波器，其频率响应 $H(j\omega)$ 如图 P6.21 所示。对以下给定的输入，求经过滤波后的输出 $y(t)$ ：

(a) $x(t) = e^{jt}$ (b) $x(t) = (\sin \omega_0 t) u(t)$

(c) $X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)(6+j\omega)}$ (d) $X(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$

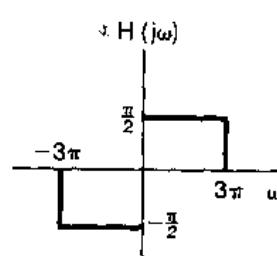
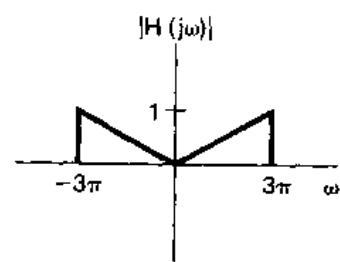
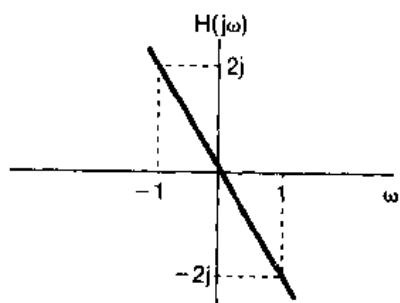


图 P6.21

- 6.22 一个称为低通微分器的连续时间滤波器的频率响应如图 P6.22(a) 所示，试对以下每个输入信号 $x(t)$ ，求输出信号 $y(t)$
- (a) $x(t) = \cos(2\pi t + \theta)$
 - (b) $x(t) = \cos(4\pi t + \theta)$
 - (c) $x(t)$ 是一个经半波整流后的正弦，如图 P6.22(b) 所示

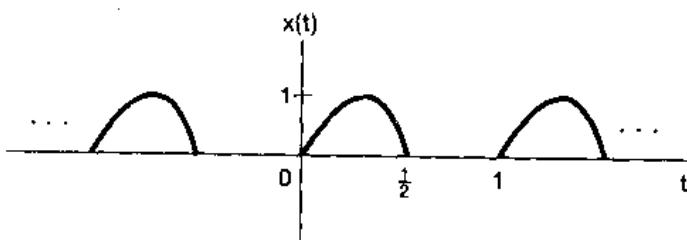


图 P6.22

$$x(t) = \begin{cases} \sin 2\pi t, & m \leq t \leq (m + \frac{1}{2}) \\ 0, & (m + \frac{1}{2}) \leq t \leq m, m \text{ 为任意整数} \end{cases}$$

6.23 示于图 P6.23 的是一个低通滤波器的 $|H(j\omega)|$ 。对于具有下列每一相位特性的滤波器，求并画出其单位冲激响应：

(a) $\angle H(j\omega) = 0$ (b) $\angle H(j\omega) = \omega T, T$ 为一常数

(c) $\angle H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$

6.24 考虑一连续时间低通滤波器，它的单位冲激响应 $h(t)$ 已知为实值，且其频率响应的模为

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 200\pi \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

(a) 当相应的群时延函数为下列所给出时，求并画出该滤波器的实值单位冲激响应 $h(t)$ ：

(i) $\tau(\omega) = 5$ (ii) $\tau(\omega) = \frac{5}{2}$ (iii) $\tau(\omega) = -\frac{5}{2}$

(b) 如果单位冲激响应 $h(t)$ 不是限定为实值，由 $|H(j\omega)|$ 和 $\tau(\omega)$ 可以唯一确定 $h(t)$ 吗？为什么？

6.25 利用在两个挑选的频率上计算群时延，证明下列每个频率响应都具有非线性相位：

(a) $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$ (b) $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)^2}$ (c) $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)}$

6.26 考虑一理想高通滤波器，其频率响应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| > \omega_c \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

(a) 求该滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 。

(b) 当 ω_c 增加时， $h(t)$ 是向原点更集中，还是不是？

(c) 求 $s(0)$ 和 $s(\infty)$ 。这里 $s(t)$ 是该滤波器的阶跃响应。

6.27 因果 LTI 系统的输出 $y(t)$ 与其输入 $x(t)$ 由下面微分方程联系：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

(a) 求频率响应

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

并画出它的波特图。

(b) 给出该系统作为频率函数的群时延。

(c) 若 $x(t) = e^{-t}u(t)$ ，求输出的傅里叶变换 $Y(j\omega)$ 。

(d) 利用部分分式展开法求在(c)的输入 $x(t)$ 时的输出 $y(t)$ 。

(e) 如果输入的傅里叶变换分别为

(i) $X(j\omega) = \frac{1+j\omega}{2+j\omega}$ (ii) $X(j\omega) = \frac{2+j\omega}{1+j\omega}$ (iii) $X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)(1+j\omega)}$

重做(c)和(d)

6.28 (a) 画出下列频率响应的波特图：

(i) $1 + (j\omega/10)$	(ii) $1 - (j\omega/10)$
(iii) $\frac{16}{(j\omega + 2)^4}$	(iv) $\frac{1 - (j\omega/10)}{1 + j\omega}$

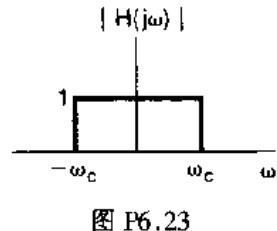


图 P6.23

$$\begin{array}{ll}
 \text{(v)} \frac{(j\omega/10) - 1}{1 + j\omega} & \text{(vi)} \frac{1 + (j\omega/10)}{1 + j\omega} \\
 \text{(vii)} \frac{1 - (j\omega/10)}{(j\omega)^2 + (j\omega) + 1} & \text{(viii)} \frac{10 + 5j\omega + 10(j\omega)^2}{1 + (j\omega/10)} \\
 \text{(ix)} 1 + j\omega + (j\omega)^2 & \text{(x)} 1 - j\omega + (j\omega)^2 \\
 \text{(xi)} \frac{(j\omega + 10)(10j\omega + 1)}{[(j\omega/100 + 1)][((j\omega)^2 + j\omega + 1)]}
 \end{array}$$

(b) 求出并画出频率响应为(a)中的(iv)和(vi)的系统单位冲激响应和阶跃响应。

由(iv)所给出的系统常称为非最小相位系统，而由(vi)所表征的系统称为是最小相位系统。对应于(iv)和(vi)的单位冲激响应分别称为非最小相位信号和最小相位信号。比较这两个系统的波特图可见，它们有相同的模特性；然而，系统(iv)的相位值要大于系统(vi)的相位值。

也能够注意到这两个系统在时域特性上的差异。例如，最小相位系统的单位冲激响应比非最小相位系统有更多的能量集中 $t=0$ 附近；另外，(iv)系统的阶跃响应的初始值和随 $t \rightarrow \infty$ 时的渐近值有相反的符号，而对于系统(vi)则不是这样。

最小相位和非最小相位系统的重要概念可以推广到比在这里讨论的简单一阶系统更为一般的 LTI 系统中去，而且对这些系统独特性质的描述可以比现在所做的更为详尽。

- 6.29 如果在一个特定频率 $\omega = \omega_0$ 处，有 $\angle H(j\omega_0) > 0$ ，则说该 LTI 系统在 $\omega = \omega_0$ 处有相位超前。这个术语来自于如下事实：若 $e^{j\omega_0 t}$ 是对该系统的输入，那么输出的相位将超过或导前于输入的相位。同样，若 $\angle H(j\omega_0) < 0$ ，则说该系统在此频率处有相位滞后。应当注意，频率响应为

$$\frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

的系统对所有 $\omega > 0$ 都有相位滞后，而频率响应为

$$1 + j\omega\tau$$

的系统，对所有 $\omega > 0$ 都有相位超前。

- (a) 作出下面两个系统的波特图，哪一个系统有相位超前，哪一个有相位滞后？另外，哪一个在某些频率上放大信号？

$$(i) \frac{1 + (j\omega/10)}{1 + 10j\omega}$$

$$(ii) \frac{1 + 10j\omega}{1 + (j\omega/10)}$$

- (b) 对下列三个频率响应，重做

(a)

$$(i) \frac{(1 + (j\omega/10))^2}{(1 + 10j\omega)^3}$$

$$(ii) \frac{1 + j\omega/10}{100(j\omega)^2 + 10j\omega + 1}$$

$$(iii) \frac{1 + 10j\omega}{0.01(j\omega)^2 + 0.2j\omega + 1}$$

- 6.30 设 $h(t)$ 有一个波特图如图

P6.30 所示，图中虚线代表直线近似。试画出 $10h(10t)$ 的波特图。

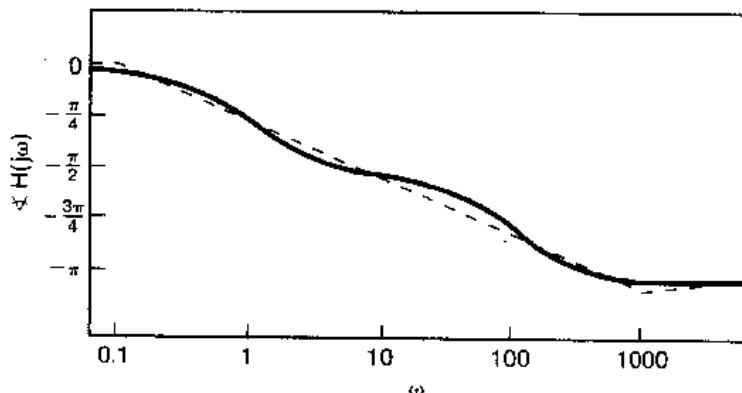
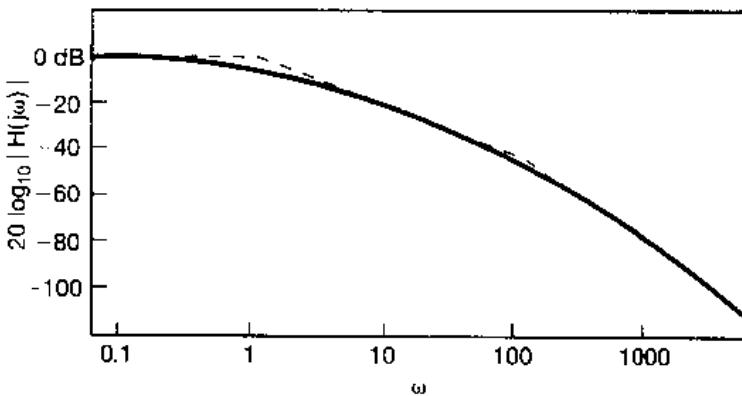


图 P6.30

6.31 一个积分器的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

式中在 $\omega=0$ 处的冲激是由于一个常数输入从 $t=-\infty$ 积分所产生的无限输出的结果。因此，若要避免输入为常数，或等效为只考虑 $\omega>0$ 的 $H(j\omega)$ ，可见

$$20\log|H(j\omega)| = -20\log(\omega) \quad \Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{-\pi}{2}$$

换句话说，一个积分器的波特图(如图 P6.31 所示)，是由两条直线的图组成的。这两个图反映出一个积分器的主要特征：对全部正频率均相移 -90° ，以及低频域的放大作用。

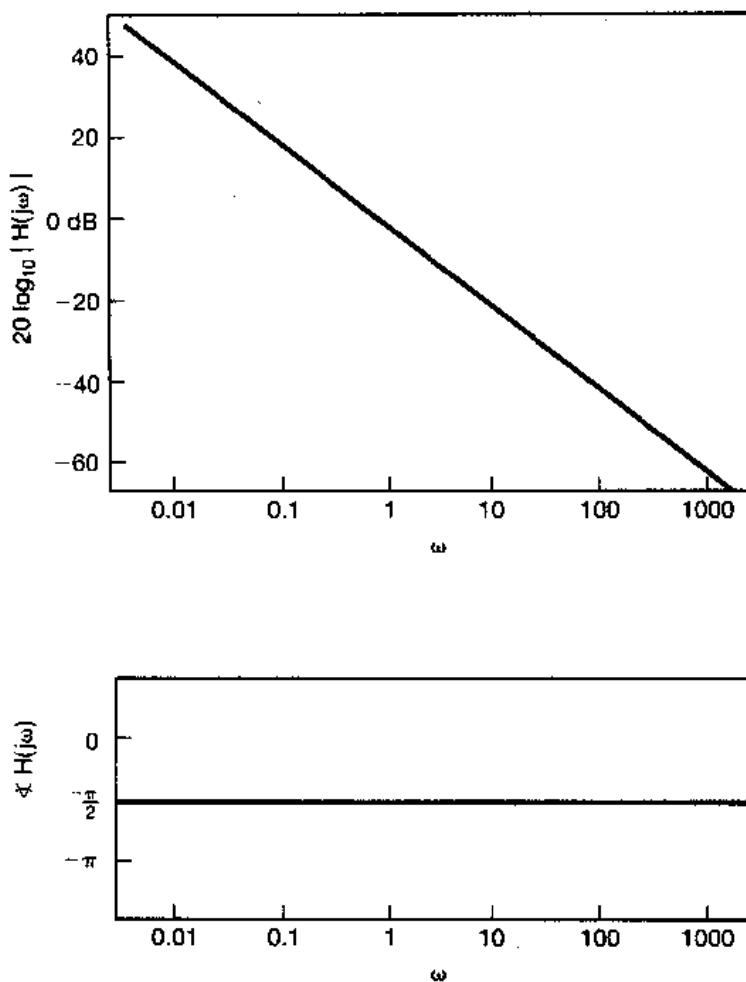


图 P6.31

(a)一部电机的有用而简单的模型是一个 LTI 系统，其输入为外加电压，而输出则可由电机轴的角度给出。该系统可想象为一个稳定的 LTI 系统(电压作为输入，轴的角度作为输出)和一个积分器的级联(代表角速度的积分)。往往用一个一阶系统的模型于级联中的第一部分。假设这个一阶系统的时间常数是 0.1s，就可以得到总的电机频率响应的形式为

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega/10)} + \pi\delta(\omega)$$

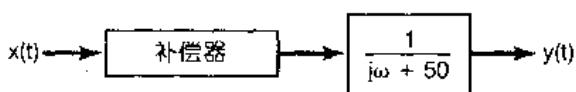
试画出 $\omega>0.001$ 的波特图。

(b)试画出一个微分器的波特图。

(c)对具有如下频率响应的系统画波特图：

$$(i) H(j\omega) = \frac{j\omega}{1 + j\omega/100} \quad (ii) H(j\omega) = \frac{j\omega}{(1 + j\omega)/10 + (j\omega)^2/100}$$

- 6.32 考虑图 P6.32 所示的系统。标有“补偿器”的匣子是一个连续时间 LTI 系统。



- (a) 假若要求选择补偿器的频率响应，使得整个级联系统的频率响应 $H(j\omega)$ 满足下列两个条件：

- (i) $H(j\omega)$ 的对数模在超过 $\omega = 1000$ 的频段有一个 $-40\text{dB}/10$ 倍频程的斜率。
- (ii) 对 $0 < \omega < 1000$ 的所有频率， $H(j\omega)$ 的对数模应在 $\pm 10\text{dB}$ 之间。

请设计一个合适的补偿器（也即确定一个满足上述要求的补偿器的频率响应），画出所得 $H(j\omega)$ 的波特图。

- (b) 如果对 $H(j\omega)$ 的对数模作如下要求，重做(a)：
- (i) 对 $0 < \omega < 10$ 应有 $+20\text{dB}/10$ 倍频程的斜率。
 - (ii) 对 $10 < \omega < 100$ 应在 $+10\text{dB}$ 和 $+30\text{dB}$ 之间。
 - (iii) 对 $100 < \omega < 1000$ ，应有 $-20\text{dB}/10$ 倍频程的斜率。
 - (iv) 对 $\omega > 1000$ ，应有 $-40\text{dB}/10$ 倍频程的斜率。

- 6.33 图 P6.33 所表示的系统通常用于从一个低通滤波器获得一个高通滤波器，反之亦然。

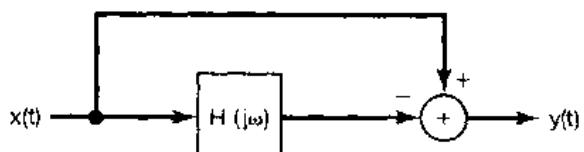


图 P6.33

- (a) 如果 $H(j\omega)$ 是一个截止频率为 ω_{lp} 的理想低通滤波器，试证明整个系统相当于一个理想高通滤波器。求它的截止频率并大致画出它的单位冲激响应。
- (b) 如果 $H(j\omega)$ 是一个截止频率为 ω_{hp} 的理想高通滤波器，试证明整个系统相当于一个理想低通滤波器，并求它的截止频率。
- (c) 如果把一个理想离散时间低通滤波器按图 P6.33 连接，那么所得到的系统是一个理想的离散时间高通滤波器吗？

- 6.34 在习题 6.33 中，研究了一个通常用于从低通滤波器获得高通滤波器的系统（反之亦然）。在本题中，我们进一步来利用这个系统，并特别研究当 $H(j\omega)$ 的相位没有适当选定时所存在的潜在困难。

- (a) 根据图 P6.33，首先假定 $H(j\omega)$ 是实函数，并且如图 P6.34 所示。此外，特别假定：
- $$1 - \delta_1 < H(j\omega) < 1 + \delta_1, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_1$$
- $$-\delta_2 < H(j\omega) < +\delta_2, \quad \omega_2 < \omega$$

对图 P6.33 的整个系统，确定并概略画出所得的频率响应。所得出的系统相当于一个高通滤波器的近似吗？

- (b) 现在假设图 P6.33 中的 $H(j\omega)$ 具有如下形式

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) e^{j\theta(\omega)} \quad (\text{P6.34-1})$$

式中 $H_1(j\omega)$ 与图 P6.34 相同，而 $\theta(\omega)$ 是未给定的相位特性。如果 $H(j\omega)$ 具有这种更为一般的形式，它仍相当于对一个低通滤波器的近似吗？

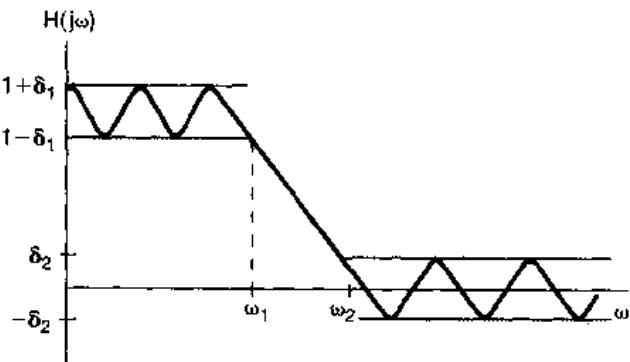


图 P6.34

- (c) 若对 $\theta(\omega)$ 不作任何假设, 试对图 P6.33 的整个系统频率响应的模确定并画出其容限。
(d) 如果图 P6.33 中的 $H(j\omega)$ 是一个对低通滤波器的近似, 而其相位特性未被规定, 那么图 P6.33 的整个系统必定相当于对一个高通滤波器的近似吗?

- 6.35 示于图 P6.35 的是一个离散时间微分器的频率响应 $H(e^{j\omega})$,
若输入 $x[n]$ 为

$$x[n] = \cos[\omega_0 n + \theta]$$

求作为 ω_0 函数的输出信号 $y[n]$ 。

- 6.36 考虑一离散时间低通滤波器, 已知它的单位脉冲响应 $h[n]$
为实值序列, 频率响应在 $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 内为

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

求出并画出该滤波器在下列所给出的群时延函数下的实值单
位脉冲响应:

$$(a) \tau(\omega) = 5 \quad (b) \tau(\omega) = \frac{5}{2} \quad (c) \tau(\omega) = -\frac{5}{2}$$

- 6.37 考虑一因果 LTI 系统, 其频率响应给出如下:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \frac{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

(a) 证明, $|H(e^{j\omega})|$ 对所有频率均为 1。

(b) 证明

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega - 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1 - \frac{1}{2}\cos\omega}\right)$$

(c) 证明该滤波器的群时延为

$$\tau(\omega) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos\omega}$$

并大致画出 $\tau(\omega)$ 。

(d) 当输入为 $\cos(\frac{\pi}{3}n)$ 时, 该滤波器的输出是什么?

- 6.38 考虑一理想带通滤波器, 其频率响应在 $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 内为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{2} - \omega_c \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{2} + \omega_c \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

求出并画出在下列 ω_c 时, 该滤波器的单位脉冲响应 $h[n]$:

$$(a) \omega_c = \frac{\pi}{5} \quad (b) \omega_c = \frac{\pi}{4} \quad (c) \omega_c = \frac{\pi}{3}$$

随着 ω_c 的增加, $h[n]$ 是向原点更集中了吗?

- 6.39 作出下列每个频率响应的对数模和相位特性图。

$$(a) 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} \quad (b) 1 + 2e^{-j\omega} \quad (c) 1 - 2e^{-j\omega}$$

$$(d) 1 + 2e^{-j2\omega} \quad (e) \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})^3} \quad (f) \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

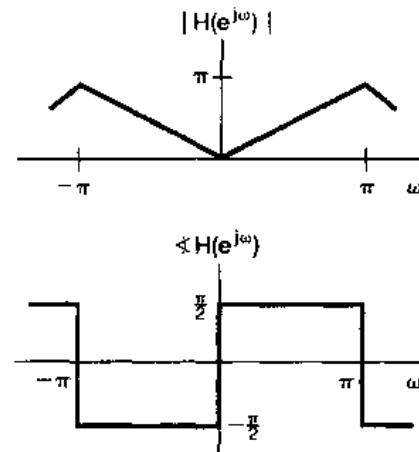


图 P6.35

$$(g) \frac{1+2e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$(h) \frac{1-2e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$(i) \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1-\frac{3}{4}e^{-j\omega})}$$

$$(j) \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1+\frac{3}{4}e^{-j\omega})}$$

$$(k) \frac{1+2e^{-2j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})^2}$$

- 6.40 考虑一理想离散时间低通滤波器，其单位脉冲响应为 $h[n]$ ，而与 $h[n]$ 相对应的频率响应如图 P6.40 所示。现在要得到一个新滤波器，其单位脉冲响应为 $h_1[n]$ ，对应的频率响应为 $H_1(e^{j\omega})$ ，而 $h_1[n]$ 为

$$h_1[n] = \begin{cases} h[n/2], & n \text{ 为偶} \\ 0, & n \text{ 为奇} \end{cases}$$

这就相当于在 $h[n]$ 的每一个序例值之间插入一个零值序列。求出并画出 $H_1(e^{j\omega})$ ，并说说这类理想滤波器属于哪一类（即低通、高通、带通、多通带等等）。

- 6.41 由下列差分方程描述的一因果 LTI 系统

$$y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

(a) 求该系统的单位脉冲响应。

(b) 画出该系统频率响应的对数模和相位特性。

- 6.42 (a) 考虑两个具有下面频率响应的 LTI 系统：

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad H_2(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

证明：这两个频率响应有相同的模函数[即 $|H_1(e^{j\omega})| = |H_2(e^{j\omega})|$]，但是 $H_2(e^{j\omega})$ 的群时延对 $\omega > 0$ 是大于 $H_1(e^{j\omega})$ 的群时延。

(b) 求出并画出这两个系统的单位冲激响应和阶跃响应。

(c) 证明：

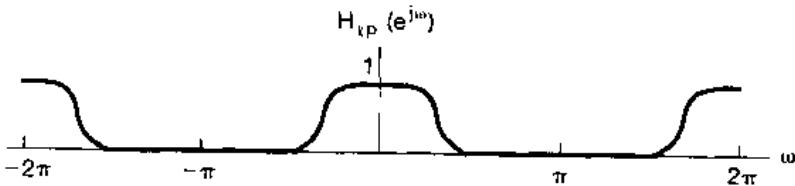
$$H_2(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})$$

式中 $G(e^{j\omega})$ 是一个全通系统[即 $|G(e^{j\omega})| = 1$ ，对一切 ω]。

- 6.43 当设计具有高通或带通特性的滤波器时，常常方便的是首先设计一个具有所需通带和阻带要求的低通滤波器，然后将这个原型低通滤波器变换到所要求的带通或高通滤波器。这样的变换称为由低通—高通或由高通—低通变换。用这种方式设计滤波器之所以方便是由于只需要对低通型特性的一类滤波器拟定一个滤波器设计算法。作为一个例子，考虑一单位脉冲响应为 $h_{lp}[n]$ ^① 和频率响应为 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 的离散时间低通滤波器，其 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 如图 P6.43 所示。假设该滤波器的单位脉冲响应 $h_{lp}[n]$ 用一个 $(-1)^n$ 的序列来调制，以得到 $h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$ 。

(a) 利用 $H_{lp}(e^{j\omega})$ ，求出并画出 $H_{hp}(e^{j\omega})$ 。证明：若 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 如图 P6.43 所示，则 $H_{hp}(e^{j\omega})$ 就对应于一个高通滤波器。

(b) 证明：一离散时间高通滤波器的单位脉冲响应被



^① 原文为 $h_{hp}[n]$ ，有误——译者注。

图 P6.43

$(-1)^n$ 所调制后，一定变换为一个低通滤波器。

6.44 按图 P6.44 实现一个离散时间系

统，图中系统 S 是一个单位脉冲响 $x[n] \rightarrow \times \rightarrow S \rightarrow \times \rightarrow y[n]$

应为 $h_{lp}[n]$ 的 LTI 系统。

(a) 证明：整个系统是时不变的。

(b) 若 $h_{lp}[n]$ 是一个低通滤波器，

由这个图实现了什么类型的滤

波器？

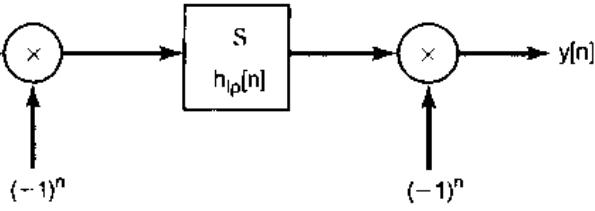


图 P6.44

6.45 考虑下面三个因果稳定的三阶 LTI

系统，利用在 6.6 节讨论的一阶和二阶系统的性质确定：每个三阶系统的单位脉冲响应是否有振荡。

(注：不用求出三阶系统频率响应的反变换而能够回答这一问题)。

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{9}{16}e^{-j2\omega})}$$

6.46 考虑一因果的非递归滤波器，其实值单位脉冲响应 $h[n]$ 对于 $n \geq N$ 为零。

(a) 假定 N 为奇数，证明：若 $h[n]$ 是关于 $(N-1)/2$ 对称(也即，若 $h[(N-1)/2+n] = h[(N-1)/2-n]$)，则

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j[(N-1)/2]\omega}$$

式中， $A(\omega)$ 是 ω 的实值函数。从而得出该滤波器具有线性相位。

(b) 给出一个因果、线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h[n]$ 的例子，使其有 $h[n] = 0$ ， $n \geq 5$ 和 $h[n] \neq 0$ ， $0 \leq n \leq 4$ 。

(c) 假定 N 为偶数，证明：若 $h[n]$ 是关于 $(N-1)/2$ 对称(也即，若 $h[(N/2)+n] = h[N/2-n-1]$)，则

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j[(N-1)/2]\omega}$$

式中， $A(\omega)$ 是 ω 的实值函数。

(d) 给出一个因果、线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h[n]$ 的例子，使其有 $h[n] = 0$ ， $n \geq 4$ 和 $h[n] \neq 0$ ， $0 \leq n \leq 3$ 。

6.47 称之为加权移动平均的一个三点对称移动平均具有如下形式：

$$y[n] = b\{ax[n-1] + x[n] + ax[n+1]\} \quad (P6.47-1)$$

(a) 求作为 a 和 b 的函数的，由(P6.47-1)式表示的三点移动平均的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

(b) 求让 $H(e^{j\omega})$ 在零频率有单位增益的加权系数 b 。

(c) 在许多时间序列分析问题中，在(P6.47-1)式的加权移动平均中系数 a 一般都选为 $1/2$ 。求出并画出所得滤波器的频率响应。

6.48 考虑一个 4 点移动平均的离散时间滤波器，其差分方程为

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + b_3x[n-3]$$

求出并画出下列每一种情况的频率响应的模特性：

(a) $b_0 = b_3 = 0$, $b_1 = b_2$ (b) $b_1 = b_2 = 0$, $b_0 = b_3$

(c) $b_0 = b_1 = b_2 = b_3$ (d) $b_0 = -b_1 = -b_2 = -b_3$

深入题

6.49 时间常数是一阶系统对输入的响应快慢的一种度量。度量一个系统响应速度的概念对高阶系统也是重要的，并在本题中研究这一概念对高阶系统的推广。

(a) 回想一下，单位冲激响应为

$$h(t) = ae^{-at}u(t), a > 0$$

的一阶系统的时间常数是 $1/a$ ，它是从 $t=0$ 到系统阶跃响应 $s(t)$ 达到其终值 [即: $s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$] 的 $1/e$ 时所需要的时间。利用与此定量关系相同的定义，找出为了确定由微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 9x(t) \quad (\text{P6.49-1})$$

所描述的因果 LTI 系统的时间常数所必须解的方程式。

(b) 正如从(a)中所能看到的，如果采用(a)中所给出的时间常数的精确定义，就能对一阶系统的时间常数给出一个简单的表示式。但对(P6.49-1)式的系统来说，其计算是明显地复杂化了。然而，这个系统可以看成是两个一阶系统的并联，因此通常认为该(P6.49-1)式的系统具有两个时间常数，它们分别对应于两个一阶因式。试问这个系统的两个时间常数是什么？

(c) 在(b)中所进行的讨论可以直接推广到单位冲激响应为衰减指数函数线性组合的所有系统。在这种类型的任何系统中，都可以找出系统的主时间常数，这些主时间常数就是各时间常数中最大的。它们代表了系统响应中的最慢部分，因此对于系统作为一个整体响应有多快，它们就有支配作用。(P6.49-1)式系统的主时间常数是什么？将这个时间常数代入(a)中所确定的方程式，尽管这个数不能恰好满足此方程，但是接近于满足。这表明它很接近于在(a)中所定义的时间常数。因此，在(b)和(c)中所提出的方法，对于深入了解 LTI 系统的响应速度是有价值的，而且又勿需进行过多的计算。

(d) 主时间常数这一概念的一个重要应用是在简化 LTI 系统的阶数上。这在涉及具有几个主时间常数和另一些很小时常数的复杂系统分析中，有很大的实际意义。为了简化待分析系统模型的复杂性，往往能够把系统的快变化部分简化掉。这就是，假如把一个复杂系统看作是一些一阶和二阶系统的并联连接，假若这些子系统中，具有单位冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $s(t)$ 的那一个是快速变化的，也就是说， $s(t)$ 达到它的终值 $s(\infty)$ 非常快，那么在此情况下，就可以用一个瞬时上升到同样终值的子系统来近似这个系统。这就是说，若 $\hat{s}(t)$ 是近似阶跃响应，则

$$\hat{s}(t) = s(\infty)u(t)$$

如图 P6.49 所示。注意，该近似系统的单位冲激响应因而是

$$\hat{h}(t) = s(\infty)\hat{s}(t)$$

这表明近似系统是无记忆的。

再次考虑由(P6.49-1)式所描述的因果 LTI 系统，并且特别地把它表示成在(b)中所确定的两个一阶系统的并联连接。用上面提出的方法，以无记忆系统来代替两个子系统中较快的一个。问：描述所得到的总系统的微分方程是什么？这个系统的频率响应是什么？对原系统和近似系统画出模 $|H(j\omega)|$ (不是 $\log|H(j\omega)|$) 和相位 $\angle H(j\omega)$ 。在什么频率范围内这两个频率响应近于相等？画出这两个系统的阶跃响应。在什么时间范围内，这

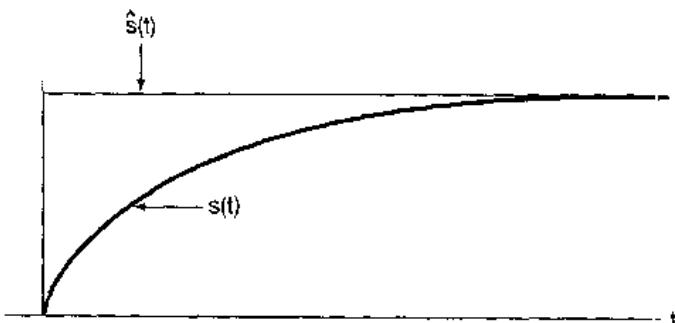


图 P6.49

两个阶跃响应近于相等？从这些曲线图中，将看到原系统与近似系统之间的某些相同与不同之处。这种近似的实用性取决于具体的应用场合。特别是，既要考虑不同的时间常数之间分散性究竟有多大，又要考虑输入信号的性质。正如从本题这一部分的答案中所看到的，近似系统的频率响应在低频域与原系统是基本相同的。这就是说，当系统的快变化部分与输入的波动快慢相比足够快时，近似系统就成为有用的了。

- 6.50 与频率选择性滤波器相联系的概念往往被用来分离两个互为相加的信号。如果两个信号的频谱不重叠，那么理想的频率选择性滤波器就是所希望的了。然而，当频谱重叠时，将滤波器设计成从通带到阻带逐渐过渡的形状往往更为可取。在本题将研究确定用来分离频谱重叠信号的滤波器频率响应的一种方法。设($x(t)$)代表一个复合连续时间信号，它由两个信号 $s(t) + w(t)$ 的和组成。如图 P6.50(a) 所指出的，欲想设计一个 LTI 滤波器，以便从 $x(t)$ 中将 $s(t)$ 恢复出来。该滤波器的频率响应 $H(j\omega)$ 要选择成在某种意义上， $y(t)$ 是对 $s(t)$ 的一个“好”的近似。
- 现在把在每个频率 ω 上， $y(t)$ 和 $s(t)$ 之间的误差的度量定义为

$$\epsilon(\omega) \triangleq |S(j\omega) - Y(j\omega)|^2$$

式中 $S(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$ 分别是 $s(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶变换。

(a) 用 $S(j\omega)$, $H(j\omega)$ 和 $W(j\omega)$ 来表示 $\epsilon(\omega)$ 。这里 $W(j\omega)$ 是 $w(t)$ 的傅里叶变换。

(b) 将 $H(j\omega)$ 限定为实函数，有 $H(j\omega) = H^*(j\omega)$ 。令 $\epsilon(\omega)$ 对 $H(j\omega)$ 的导数为零，求使误差 $\epsilon(\omega)$ 为最小的 $H(j\omega)$ 。

(c) 证明，若 $S(j\omega)$ 和 $W(j\omega)$ 的频谱不重叠，那么(b)中的结果就变为一个理想的频率选择性滤波器。

(d) 如果 $S(j\omega)$ 和 $W(j\omega)$ 如图 P6.50(b) 所示，由(b)中的结果，求出并画出 $H(j\omega)$ 。

- 6.51 一个理想带通滤波器是这样一种滤波器，它只在某一频率范围内通过信号，并且没有在幅度或相位上的改变。如图 P6.51(a) 所示，设通带是

$$\omega_0 - \frac{w}{2} \leq |\omega| \leq \omega_0 + \frac{w}{2}$$

(a) 该滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 是什么？

(b) 通过把一个一阶低通滤波器和一个一阶高通滤波器按照图 P6.51(b) 级联起来，可以近似一个理想带通滤波器。对这两个滤波器 $H_1(j\omega)$ 和 $H_2(j\omega)$ 中的每一个画出其波特图。

(c) 利用(b)的结果，确定整个带通滤波器的波特图。

- 6.52 在图 P.52(a) 中，给出了一个理想连续时

间微分器频率响应的模特性。一个非理想微分器的频率响应与图 P6.52(a) 的频率响应也应有某些近似。

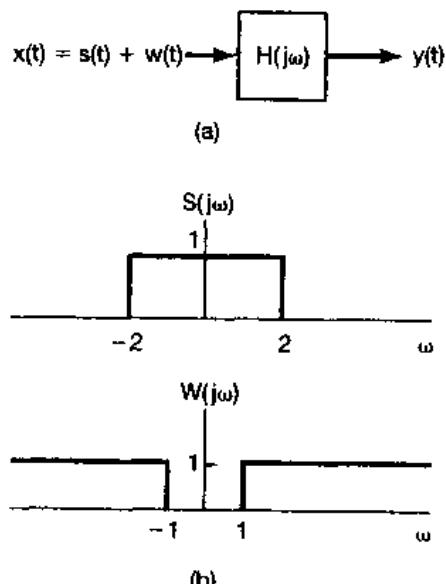
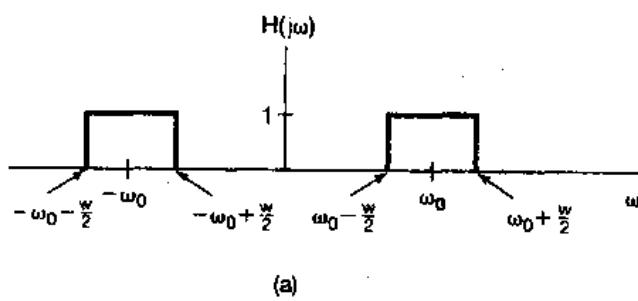


图 P6.50



(a)

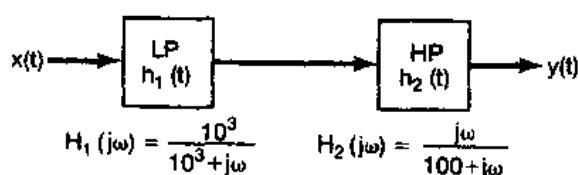


图 P6.51

(a) 考查一个频率响应为 $G(j\omega)$ 的非理想微分器，在所有频率上，该微分器的 $|G(j\omega)|$ 都被限制在理想微分器频率响应的模的 $\pm 10\%$ 以内，即

$$-0.1|H(j\omega)| \leq |G(j\omega)| - |H(j\omega)| \leq 0.1|H(j\omega)|$$

在 $|G(j\omega)|$ 关于 ω 的图上指明并画出为了满足这个指标， $|G(j\omega)|$ 必须被限定的区域。

(b) 由于图 P6.52(b) 中用了一个 T 秒的理想延时，因而有时用它来近似一个连续时间微分器。当 $T = 10^{-2}$ s 时，试确定一个频率范围，使得在此范围内，图 P6.52(b) 系统频率响应的模在理想微分器频率响应的模的 $\pm 10\%$ 以内。

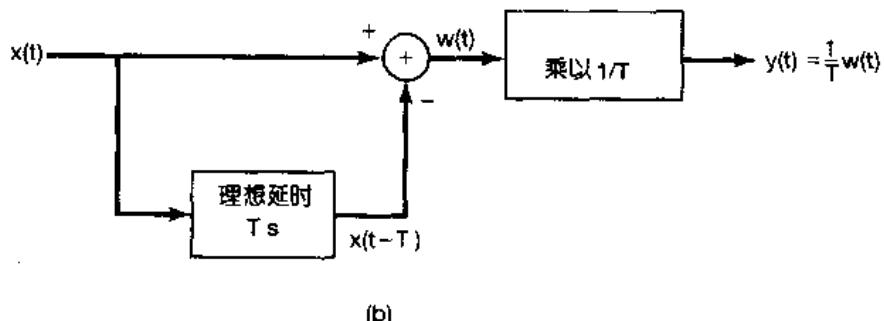
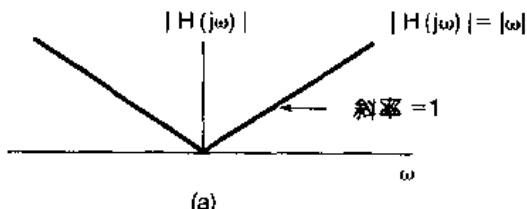


图 P6.52

6.53 在许多滤波应用中，往往不希望滤波器的阶跃响应超过它的终值。例如，在图像处理中，一个线性滤波器阶跃响应中的超量可以在陡峭的边界上产生闪烁，也就是在强度上的增加。然而，如果要求滤波器单位冲激响应对全部时间都是正值，就可能消除超量。

证明：如果一个连续时间 LTI 滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 总大于或等于零 [$h(t) \geq 0$]，那么该滤波器的阶跃响应就是一个单调非减的函数，因此一定没有超量。

6.54 假定利用某一特定的滤波器设计方法，设计了一个非理想的连续时间低通滤波器，它的频率响应为 $H_0(j\omega)$ ，单位冲激响应为 $h_0(t)$ ，阶跃响应为 $s_0(t)$ 。该滤波器的截止频率在 $\omega = 2\pi \times 10^2$ rad/s，阶跃响应上升时间为 $\tau_r = 10^{-2}$ s， τ_r 定义为阶跃响应从其终值的 10% 上升到终值的 90% 所需的时间。根据这个设计，通过利用频率的尺度变换，可以得到一个具有任意截止的频率 ω_c 的新滤波器，并且所得滤波器的频率响应 $H_{lp}(j\omega)$ 具有如下关系：

$$H_{lp}(j\omega) = H_0(j\omega)$$

其中 a 是一个适当的比例因子。

- (a) 确定比例因子 a ，以使 $H_{lp}(j\omega)$ 的截止频率为 ω_c 。
- (b) 利用 ω_c 和 $h_0(t)$ 确定新滤波器的单位冲激响应 $h_{lp}(t)$ 。
- (c) 利用 ω_c 和 $s_0(t)$ 确定新滤波器的单位冲激响应 $s_{lp}(t)$ 。
- (d) 作为截止频率 ω_c 的函数，确定并画出新滤波器的上升时间。

这个例子说明了时域特性和频域特性之间的一种折衷；特别是，随着截止频率的减小，上升时间就趋向增大。

6.55 一类称之为巴特沃兹滤波器的连续时间低通滤波器的频率响应的模平方为

$$|B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$$

将其通带边缘频率 ω_p 定义成 $|B(j\omega)|^2$ 大于它在 $\omega=0$ 处的值的一半，即

$$|B(j\omega)|^2 \geq \frac{1}{2} |B(j0)|^2, |\omega| < \omega_p$$

将阻带边缘频率 ω_s 定义成 $|B(j\omega)|^2$ 小于它在 $\omega=0$ 处的值的 10^{-2} ，即

$$|B(j\omega)|^2 \leq 10^{-2} |B(j0)|^2, |\omega| > \omega_s$$

ω_p 和 ω_s 之间的频率范围称为过渡带，比值 ω_s/ω_p 称为过渡比。

固定 ω_p ，并作合理近似的情况下，确定并画出巴特沃兹滤波器的过渡比作为 N 的函数。

- 6.56 在本题中将研究用于大多数现代盒式磁带走带机构中用以减少噪音的一种商业化的典型系统中所涉及的某些滤波问题。主要的噪音源是磁带放音过程中的高频咝咝声，这种噪声一部分是由磁带和放音头之间的摩擦引起的。现假定一旦放音时，噪音咝咝声就叠加在信号上，当以 dB 为单位计量时，具有图 P6.56(a) 所示的频谱，且在 100Hz 处，信号电平等于 0dB。信号的频谱 $S(j\omega)$ 如图 P6.55(b) 所示。
- 该系统有一个滤波器 $H_1(j\omega)$ ，在录音前，该波滤器适当改变信号 $s(t)$ 。放音时，咝咝声加到信号上。该系统的方框图如图 P6.56(c) 所示。

希望整个系统在频率范围 $50\text{Hz} < \omega/2\pi < 20\text{kHz}$ 内，具有 40dB 的信噪比。

(a) 确定滤波器 $H_1(j\omega)$ 的传输特性，画出 $H_1(j\omega)$ 的波特图。

(b) 如果要听的是信号 $p(t)$ ，并假定放音过程只是给信号叠加了咝咝声，你认为听到的将是什么声音？

(c) 滤波器 $H_2(j\omega)$ 的波特图和传输特性应该是什么样的，才能使信号 $\hat{s}(t)$ 听起来与 $s(t)$ 相近。

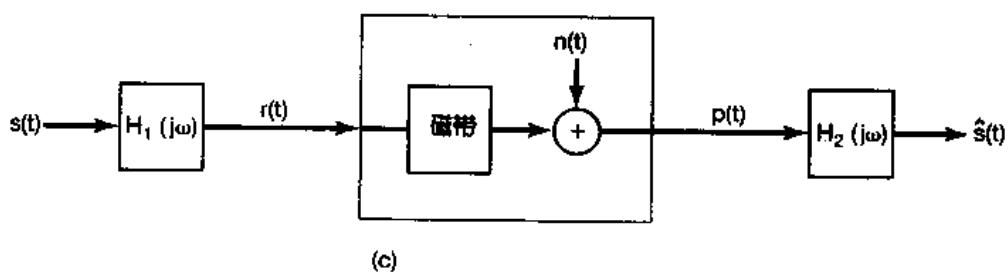
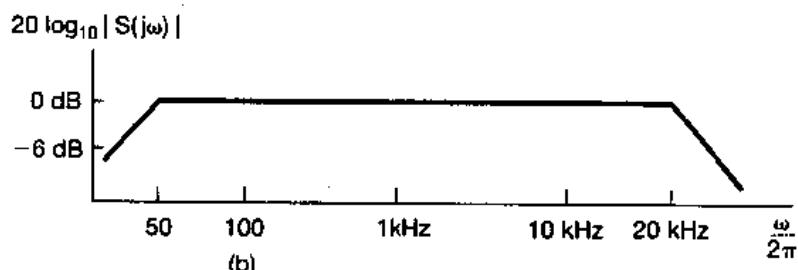
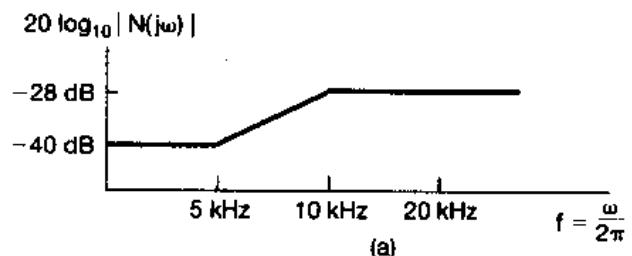


图 P6.56

6.57 证明：若一个离散时间 LTI 滤波器的单位脉冲响应 $h[n]$ 总是大于或等于零 ($h[n] \geq 0$)，那么该滤波器的阶跃响应就是单调非减小的，因此就一定没有超量。

6.58 无论是在模拟滤波器还是在数字滤波器设计中，通常都是逼近一个给定的模特性，而没有特别考虑相位问题，例如，低通和带通滤波器的标准设计方法就是只考虑模特性而导出的。

在许多滤波问题中，人们总是希望能有一个零相位或线性相位的特性。对于因果滤波器来说，具有零相位是不可能的。然而，在许多数字滤波器的应用场合，如果对信号的处理不一定要实时的话，那么就不必要使滤波器的单位脉冲响应在 $n < 0$ 时为零。

当被过滤的数据具有有限长，并且被存贮在磁盘或磁带上时，通常应用于数字滤波中的一种方法是把数据先按顺序，然后再颠倒过来通过同一个滤波器来进行处理的。

令 $h[n]$ 是一个具有任意相位特性的因果滤波器的单位脉冲响应。假定 $h[n]$ 为实序列，其傅里叶变换为 $H(e^{j\omega})$ 。设 $x[n]$ 是要过滤的数据。这一滤波运算按如下步骤进行：

(a) 方法 A：按图 P6.58(a) 所示步骤处理 $x[n]$ ，得到 $s[n]$ 。

(1) 确定从 $x[n]$ 到 $s[n]$ 的总的单位脉冲响应 $h_1[n]$ ，并证明它具有零相位特性。

(2) 确定 $|H_1(e^{j\omega})|$ ，并用 $|H(e^{j\omega})|$ 和 $\angle H(e^{j\omega})$ 来表示 $H_1(e^{j\omega})$ 。

(b) 方法 B：通过滤波器 $h[n]$ 处理 $x[n]$ 以得到 $g[n]$ [图 P6.58(b)]，并且让 $x[n]$ 倒置过来通过 $h[n]$ 以得到 $r[n]$ ，而输出 $y[n]$ 是 $g[n]$ 与 $r[-n]$ 之和。这一组复合运算可以用一个输入为 $x[n]$ ，输出为 $y[n]$ ，单位脉冲响应为 $h_2[n]$ 的滤波器来表示。

(1) 证明该复合滤波器 $h_2[n]$ 具有零相位特性。

(2) 确定 $|H_2(e^{j\omega})|$ ，并用 $|H(e^{j\omega})|$ 和 $\angle H(e^{j\omega})$ 来表示 $H_2(e^{j\omega})$ 。

(c) 假若已知一个有限长序列，现欲对它进行带通、零相位过滤；

再者，假定已知带通滤波器 $h[n]$ ，其频率响应由图 P6.58(c) 给出，它具有所需要的模特性，但相位是线性的。为了实现零

相位，既可以应用方法 A，也可以应用方法 B。确定并画出 $|H_1(e^{j\omega})|$ 和 $|H_2(e^{j\omega})|$ 。根据这些结果，应该用哪一种方法才能实现所要求的带通滤波？为什么？更一般地讲，若 $h[n]$ 具有所要求的模特性，但相位特性是非线性的，那么为了得到零相位特性，哪一种方法更为可取？

6.59 设 $h_d[n]$ 代表一个所需要理想的系统的单位脉冲响应，其频率响应为 $H_d(e^{j\omega})$ ，再设 $h[n]$ 代表一个长度为 N ，频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 的 FIR 系统的单位脉冲响应。在本题中，要证明对 $h_d[n]$ 施加一个长度为 N 个样本点的矩形窗将得到一个单位脉冲响应 $h[n]$ ，使得均方误差

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

为最小。

(a) 误差函数 $E(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})$ 可以表示为幂级数

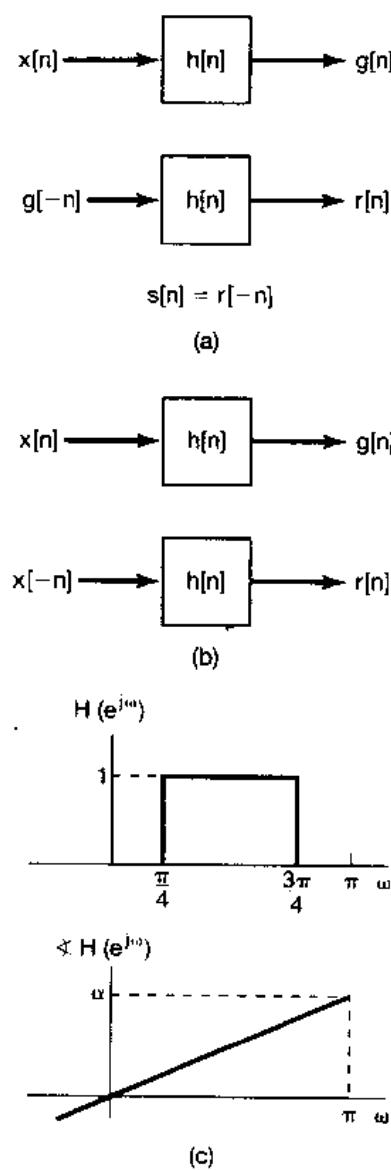


图 P6.58

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\omega}$$

求用 $h_d[n]$ 和 $h[n]$ 表示的系数 $e[n]$ 。

(b) 利用帕斯瓦尔定理, 用系数 $e[n]$ 表示均方误差 ϵ^2 。

(c) 证明: 对长度为 N 个样本点的单位脉冲响应 $h[n]$, 当

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

时, ϵ^2 为最小。也就是说, 对于一个固定的 N 值, 简单地截断就给出了对所需要的频率响应的最好均方近似。

- 6.60 在习题 6.50 中, 曾就一个连续时间滤波器用于从频谱有重叠的两个信号中恢复一个信号的问题进行了研究, 并就该滤波器频率响应的确定考虑了一个特定的准则, 现就离散时间情况, 对应于习题 6.50 的(b)部分所得结果, 建立相应的结论。

- 6.61 在许多场合, 都有某种模拟或数字滤波器模块可资利用, 例如一个基本的硬件单元或一个计算机子程序。重复使用这些模块或者把一些相同的模块组合起来, 就可实现通带或阻带特性有所改善的新的滤波器。在本题以及下一个习题中, 讨论这样做的两种方法。虽然讨论是对离散时间滤波器进行的, 但大部分都能直接用到连续时间滤波器中去。

考虑频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 的一个低通滤波器, 它的 $|H(e^{j\omega})|$ 位于图 P6.61 所示的容限之内, 即

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_1 \\ 0 &\leq |H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \quad \omega_2 \leq \omega \leq \pi \end{aligned}$$

现在由两个频率响应均为 $H(e^{j\omega})$ 的滤波器经级联后构成一个新的滤波器, 其频率响应记为 $G(e^{j\omega})$ 。

(a) 确定 $|G(e^{j\omega})|$ 的容限。

(b) 假定 $H(e^{j\omega})$ 是对一个低通滤波器的很好近似, 因此 $\delta_1 \ll 1$, $\delta_2 \ll 1$, 那么 $G(e^{j\omega})$ 的通带起伏比 $H(e^{j\omega})$ 的通带起伏是大还是小? $G(e^{j\omega})$ 的阻带起伏比 $H(e^{j\omega})$ 的是大还是小?

(c) 若将 N 个频率响应均为 $H(e^{j\omega})$ 的相同滤波器级联起来, 从而得到一个新的频率响应 $G(e^{j\omega})$, 并再次假定 $\delta_1 \ll 1$, $\delta_2 \ll 1$, 试决定 $|G(e^{j\omega})|$ 的近似容限。

- 6.62 在习题 6.61 中, 讨论了重复利用基本滤波器模块实现特性改善了的新滤波器的一种方法。现在来考虑另一种方法, 这个方法是由 J.W.Tukey 在 “Exploratory Data Analysis (Reading MA: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1976)”一书中提出来的。这种方法以方框图的形式示于图 P6.62(a)。

(a) 假设 $H(e^{j\omega})$ 是实函数, 而且具有通带起伏 $\pm \delta_1$, 和阻带起伏 $\pm \delta_2$ (即, $H(e^{j\omega})$ 位于图 P6.62(a) 所示的容限之内)。图 P6.62(a) 中整个系统的频率响应 $G(e^{j\omega})$ 位于图 P6.62(c) 所指出的容限内。试用 δ_1 和 δ_2 来确定 A 、 B 、 C 和 D 。

(b) 若 $\delta_1 \ll 1$, $\delta_2 \ll 1$, 与 $G(e^{j\omega})$ 有关的近似通带和阻带起伏是什么? 特别要指出: $G(e^{j\omega})$ 的通带起伏是比 $H(e^{j\omega})$ 的通带起伏大还是小? 同时也应指出: $G(e^{j\omega})$ 的阻带起伏是比 $H(e^{j\omega})$ 的阻带起伏大还是小?

(c) 在(a)和(b)中都假定 $H(e^{j\omega})$ 是实函数。现考虑 $H(e^{j\omega})$ 具有更一般的形式为

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)}$$

式中 $H_1(e^{j\omega})$ 是实函数, 且 $\theta(\omega)$ 是一个未给定的相位特性。如果 $|H(e^{j\omega})|$ 是对某个理想低通滤波器的一个合理近似, 问 $|G(e^{j\omega})|$ 必定是对某一理想低通滤波器的一个合理近似吗?

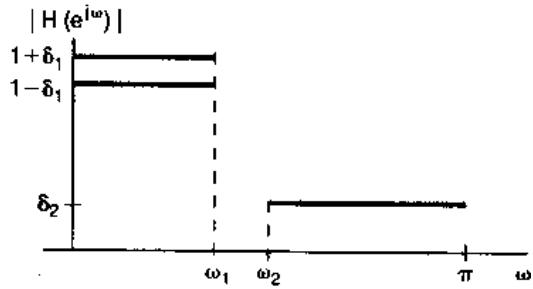
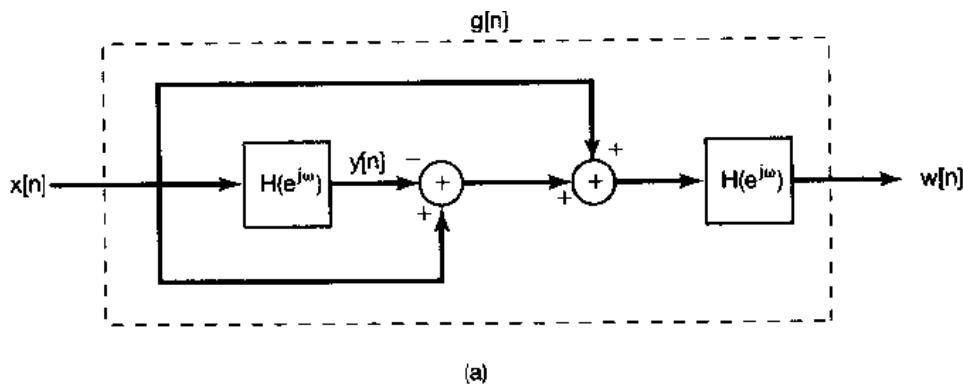
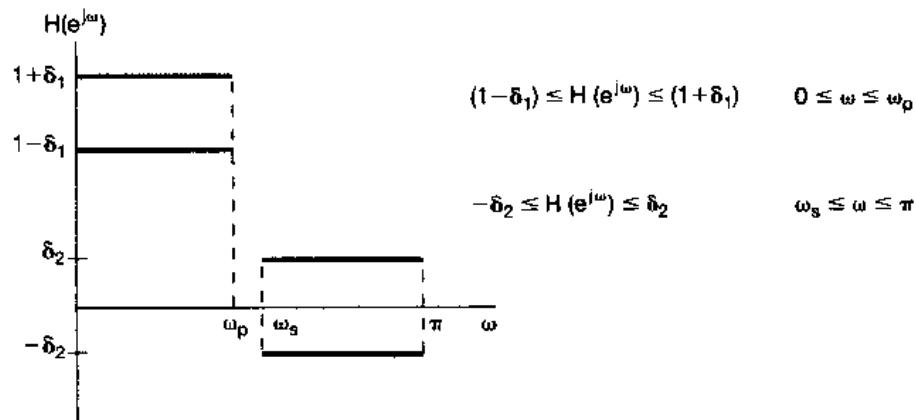


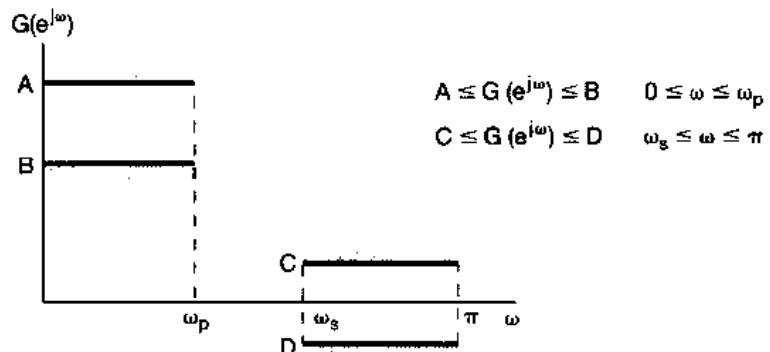
图 P6.61



(a)



(b)



(c)

图 P6.62

(d) 现在假定 $H(e^{j\omega})$ 是一个 FIR 线性相位低通滤波器，因此有

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})e^{jM\omega}$$

式中 $H_1(e^{j\omega})$ 是实函数，且 M 为整数。说明如何修改图 P6.62(a)的系统，使得整个系统可近似为一个低通滤波器。

- 6.63 在数字滤波器的设计中，往往选择一种具有最短长度而又有所给定模特性的滤波器；也就是说，单位脉冲响应(它是复频谱的傅里叶反变换)应该尽可能短。假定 $h[n]$ 是实序列，要证明：如果与频率响应 $H(e^{j\omega})$ 有关的相位 $\theta(\omega)$ 是零，则单位脉冲响应的长度就是最短的。设频率响应可表示为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

以 D 作为与单位脉冲响应 $h[n]$ 的长度有关的一种度量, 这里 D 为

$$D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 h^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nh[n])^2$$

(a) 利用傅里叶变换的微分性质和帕斯瓦尔定理, 用 $H(e^{j\omega})$ 表示 D 。

(b) 通过把 $H(e^{j\omega})$ 表示为它的模 $|H(e^{j\omega})|$ 和相位 $\theta(\omega)$, 利用(a)中的结果, 证明当相位 $\theta(\omega)=0$ 时, D 为最小。

- 6.64 对于一个因果的且具有真正线性相位的离散时间滤波器, 其单位脉冲响应必须是有限长的, 因此其差分方程也必然是非递归的。为了看一看这种说法所包含的深层意义, 现来考虑一种特殊的情况, 这种情况的线性相位其斜率为一整数, 因此假定频率响应具有如下形式

$$H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega})e^{-jM\omega}, -\pi < \omega < \pi \quad (\text{P6.64-1})$$

这里 $H_r(e^{j\omega})$ 是实且为偶函数。

令 $h[n]$ 记为频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的滤波器的单位脉冲响应, $h_r[n]$ 为频率响应 $H_r(e^{j\omega})$ 的滤波器的单位脉冲响应。

(a) 利用表 5.1 的相关性质, 证明:

- (1) $h_r[n] = h_r[-n]$ (即 $h_r[n]$ 关于 $n=0$ 对称)
(2) $h[n] = h_r[n-M]$

(b) 利用(a)中结果, 证明: 如果 $H(e^{j\omega})$ 具有(P6.64-1)式的形式, 则 $h[n]$ 关于 $n=M$ 对称, 也即

$$h[M+n] = h[M-n] \quad (\text{P6.64-2})$$

(c) 根据(b)的结果, (P6.64-1)式中的线性相位特性就一定有单位脉冲响应的对称性。证明: 若 $h[n]$ 是因果的, 并且具有(P6.64-2)式的对称性, 则

$$h[n] = 0, n < 0 \text{ 和 } n > 2M$$

(即: $h[n]$ 必定是有限长的)。

- 6.65 对离散时间巴特沃兹低通滤波器来说, 其频率响应的模平方为

$$|B(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan(\omega/2)}{\tan(\omega_c/2)}\right)^{2N}}$$

式中 ω_c 是截止频率(将它取为 $\pi/2$), N 是滤波器的阶数(将其定为 $N=1$), 因此有

$$|B(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \tan^2(\omega/2)}$$

- (a) 利用三角恒等式证明 $|B(e^{j\omega})|^2 = \cos^2(\omega/2)$
(b) 令 $B(e^{j\omega}) = \alpha \cos(\omega/2)$, 当 α 取什么复数值时, $|B(e^{j\omega})|^2$ 与(a)中的相同?
(c) 证明(b)中的 $B(e^{j\omega})$ 是与下面差分方程对应的传输函数

$$y[n] = \alpha x[n] + \beta x[n-\gamma]$$

确定 α , β 和 γ 。

- 6.66 在图 P6.66(a) 中, 给出一个离散时间系统, 它由 N 个单位脉冲响应为 $h_k[n]$, $k=0, 1, \dots, N-1$, 的 LTI 滤波器并联组合而成。对任何 k , $h_k[n]$ 由下面表达式与 $h_0[n]$ 相联系

$$h_k[n] = e^{j(2\pi k/N)} h_0[n]$$

(a) 如果 $h_0[n]$ 是一个理想的离散时间低通滤波器, 其频率响应 $H_0(e^{j\omega})$ 如图 P6.66(b) 所示, 试对 $-\pi < \omega \leqslant +\pi$ 范围内的 ω , 大致画出 $h_1[n]$ 和 $h_{N-1}[n]$ 的傅里叶变换。

(b) 利用 N 确定图 P6.66(b) 中的截止频率 ω_c ($0 < \omega_c \leqslant \pi$), 使得图 P6.66(a) 的系统是一个恒等系统。也就是说, 对所有的 n 和任何输入 $x[n]$, 都有 $y[n] = x[n]$ 。

(c) 假定 $h[n]$ 不再限定为理想低通滤波器, 而如果 $h[n]$ 代表图 P6.66(a) 整个系统的单位脉冲响应, 该系统的输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$, 那么 $h[n]$ 可以表示为如下形式:

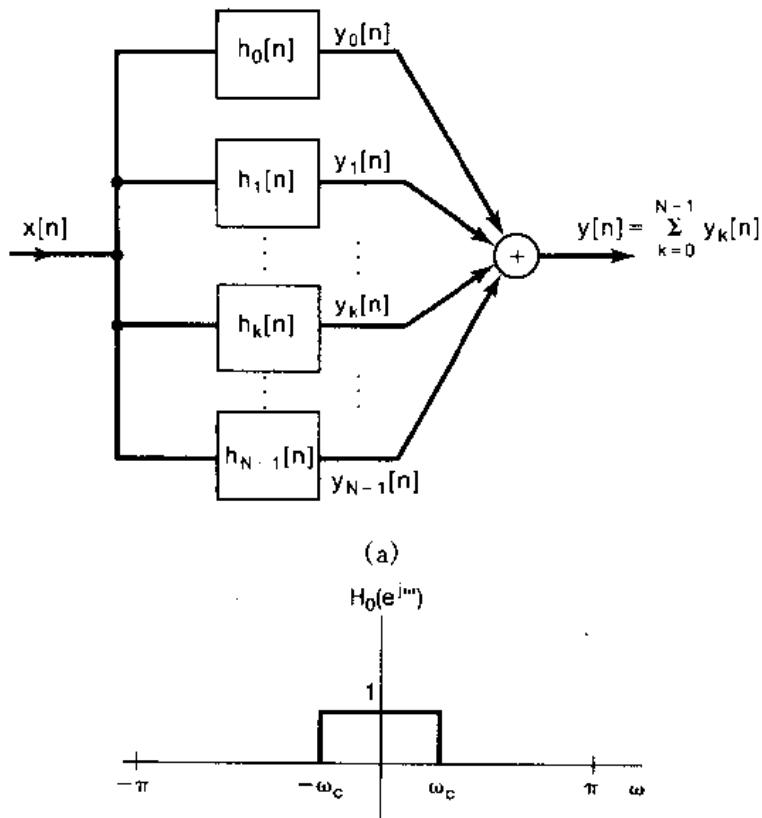


图 P6.66(b)

$$h[n] = r[n]h_0[n]$$

试确定并画出 $r[n]$ 。

- (d) 根据(c)的结果, 对 $h_0[n]$ 确定一个必要与充分条件, 以保证整个系统是一个恒等系统(即:对任何输入 $x[n]$, 输出 $y[n]$ 都一定等于 $x[n]$)。答案中不应包含任何和式。

第7章 采 样

7.0 引 言

在一定条件之下,一个连续时间信号完全可以用该信号在等时间间隔点上的值或样本来表示,并且可以用这些样本值把该信号全部恢复出来。这个稍微有点使人吃惊的性质来自于采样定理。这一定理是极为重要和有用的。譬如说,电影就是由一组按时序的单个画面(一帧)所组成的,其中每一帧都代表着连续变化景象中的一个瞬时画面(也就是时间样本),当以足够快的速度来看这些时序样本时,我们就会感觉到是原来连续活动景象的重现。又如印刷照片,一般是由很多很细小的网点所组成的,其中每一点就相当于空间连续图象的一个采样点,如果这些样点在空间距离上是足够靠近的话,那么这幅照片看起来在空间还是连续的。当然,借助于放大镜,这些样点的不连续性还是可以看得见的。

采样定理的重要性还在于它在连续时间信号和离散时间信号之间所起的桥梁作用。正如我们将在本章所看到的,在一定条件之下,一个连续时间信号可以由它的样本完全恢复出来,这一点就提供了用一个离散时间信号来表示一个连续时间信号的想法。在很多方面,离散时间信号的处理要更加灵活方便些,因此往往比处理连续时间信号更为可取。这主要是由于在过去的几十年中数字技术的急剧发展,而产生了大量价廉、轻便、可编程并易于再生产的离散时间系统可资利用的缘故。采样的概念使人们想到一种极富吸引力并广泛使用的方法,就是利用离散时间系统技术来实现连续时间系统并处理连续时间信号:可以利用采样先把一个连续时间信号进行变换为一个离散时间信号,再用一个离散时间系统将该离散时间信号处理以后,再把它变换回到连续时间中来。

在下面的讨论中,首先介绍并建立采样的概念和从样本值重建一个连续时间信号的过程。在讨论中,既要证明一个连续时间信号能真正由它的样本值恢复出来的条件,也要研究当这些条件不满足时所产生的后果。接着研究经由采样已经变换到离散时间信号的连续时间信号处理。最后讨论离散时间信号的采样,以及有关抽取和内插的概念。

7.1 用信号样本表示连续时间信号:采样定理

一般来讲,在没有任何附加条件或说明下,我们不能指望一个信号都能唯一地由一组等间隔的样本值来表征。例如,在图 7.1 中示出三个不同的连续时间信号,在 T 的整倍数时刻点上,它们全部有相同的值,即

$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$$

很明显,有无限多个信号都可以产生一组给定的样本值。然而,将会看到,如果一个信号是带限的(即它的傅里叶变换在某一有限频带范围以外均为零),并且它的样本取得足够密的话(相对于信号中的最高频率而言),那么这些样本值就能唯一地用来表征这一信号,并且能从

这些样本中把信号完全恢复出来。这一结果就是采样定理，它在信号与系统分析方法的实际应用中极为重要。

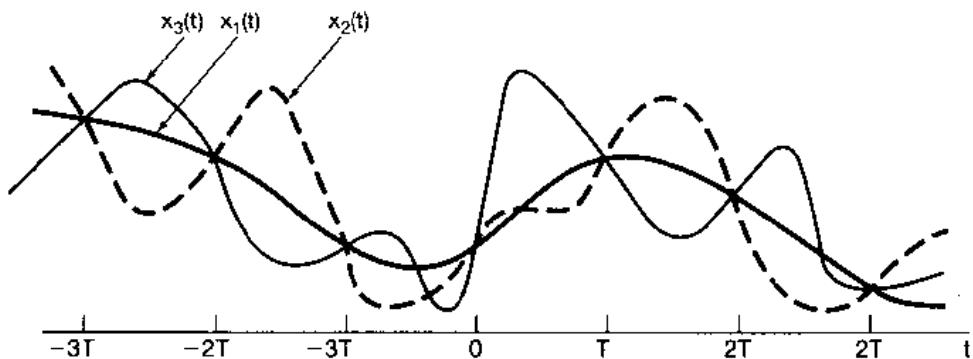


图 7.1 在 T 的整倍数时刻点上具有相同值的三个连续时间信号

7.1.1 冲激串采样

为了建立采样定理，我们需要一种方便的方式来表示一个连续时间信号在均匀间隔上的采样。为此，一种有用的办法就是通过用一个周期冲激串去乘待采样的连续时间信号 $x(t)$ 。这一方法称为冲激串采样，如图 7.2 所示。该周期冲激串 $p(t)$ 称作采样函数，周期 T 称为采样周期，而 $p(t)$ 的基波频率 $\omega_s = 2\pi/T$ 称为采样频率。

在时域中有

$$x_p(t) = x(t)p(t) \quad (7.1)$$

其中

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (7.2)$$

由在 1.4.2 节曾讨论过的单位冲激函数的采样性质可知， $x(t)$ 被一个单位冲激函数相乘以后就将冲激发生的这一点的信号值采出来，即 $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$ 。将此应用于(7.1)式，如图 7.2 所示，可见 $x_p(t)$ 本身就是一个冲激串，其冲激的幅度等于 $x(t)$ 在以 T 为间隔处的样本值，即

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (7.3)$$

由 4.5 节的相乘性质知道

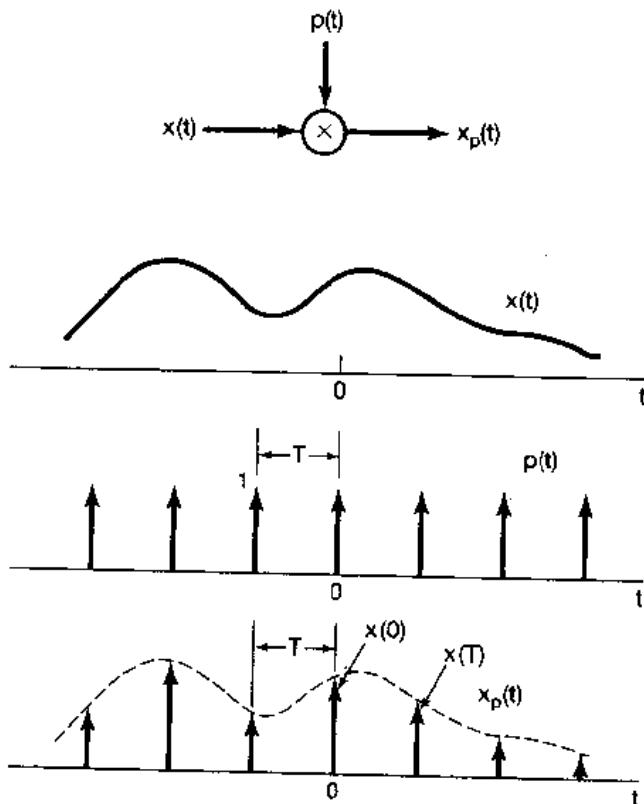


图 7.2 冲激串采样

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)] \quad (7.4)$$

并由例 4.8 有

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (7.5)$$

因为信号与一个单位冲激函数的卷积就是该信号的移位 [即 $X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = X(j(\omega - \omega_0))$]，于是有

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad (7.6)$$

这就是说， $X_p(j\omega)$ 是频率 ω 的周期函数，它由一组移位的 $X(j\omega)$ 的叠加所组成，但在幅度上标以 $1/T$ 的变化，如图 7.3 所示。在图 7.3(c) 中，由于 $\omega_M < (\omega_s - \omega_M)$ ，或者 $\omega_s > 2\omega_M$ ，因此在互相移位的这些 $X(j\omega)$ 之间，并无重叠现象出现；而在图 7.3(d) 中，由于 $\omega_s < 2\omega_M$ ，从而存在重叠。对于图 7.3(c) 这样的情况， $X(j\omega)$ 如实地在采样频率的整数倍频率上重现，因而，如果 $\omega_s > 2\omega_M$ ， $x(t)$ 就能够完全用一个低通滤波器从 $x_p(t)$ 中恢复出来。该低通滤波器的增益为 T ，截止频率大于 ω_M ，但小于 $\omega_s - \omega_M$ ，如图 7.4 所示。这一基本结果就称之为采样定理，可叙述如下^①：

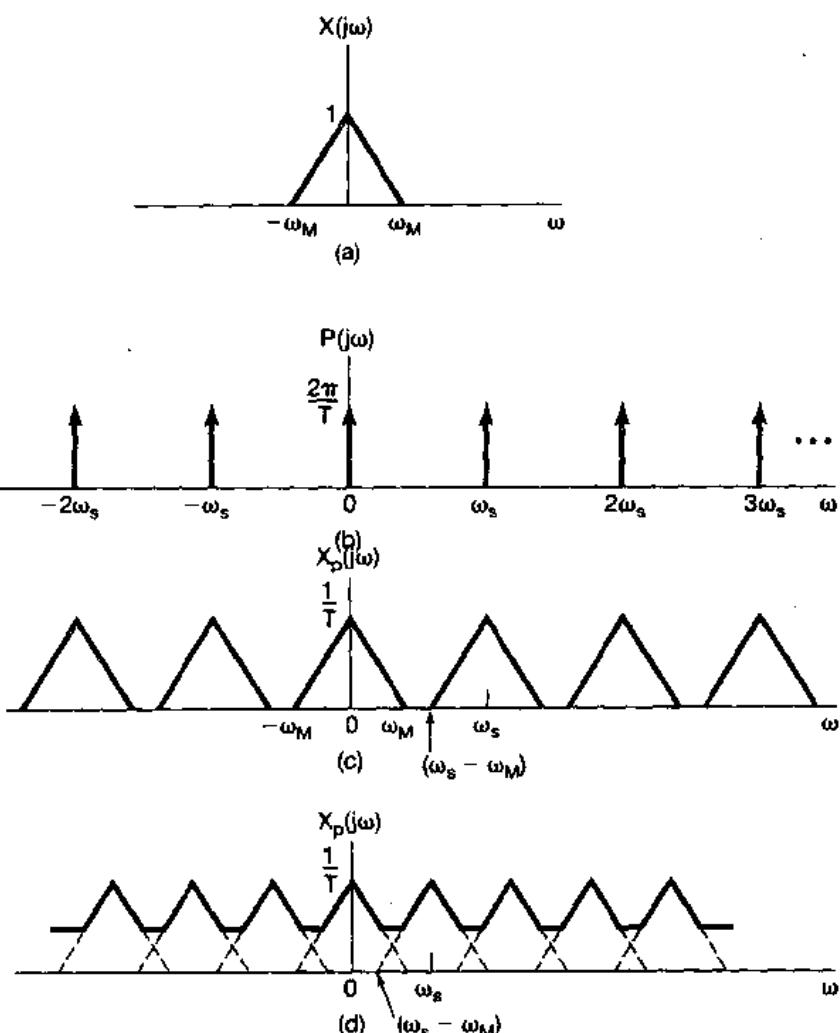


图 7.3 时域采样在频域中的效果：

- (a) 原始信号频谱；(b) 采样函数的频谱；
- (c) $\omega_s > 2\omega_M$ 时已采样信号的频谱；(d) $\omega_s < 2\omega_M$ 时已采样信号的频谱

^① 这一重要而著名的采样定理曾在数学文献中以各种不同的形式应用了很多年，关于这一点可见 J. M. Whittaker. Interpolatory Function Theory (New York: Stecher-Hafner Service Agency, 1964), chap. 4。直到 1949 年发表了山农 (Shannon) 的经典论文：Communication in the Presence of Noise (Proceedings of the IRE, January 1949, pp. 10–21) 以后，才明确地出现在通信理论的文献中。然而，H. Nyquist (1928) 和 D. Gabor (1946) 都指出过，根据傅里叶级数的应用，为表示一个持续期为 T 最高频率为 W 的时间函数，有 $2TW$ 个数就足够了。[H. Nyquist, Certain Topics in Telegraph Transmission Theory, AIEE Transactions, 1928, p. 617; D. Gabor, Theory of Communication, Journal of IEE 93, no. 26 (1946), p. 429]。

采样定理：

设 $x(t)$ 是某一个带限信号，在 $|\omega| > \omega_M$ 时， $X(j\omega) = 0$ 。如果 $\omega_s > 2\omega_M$ ，其中 $\omega_s = 2\pi/T$ ，那么 $x(t)$ 就唯一地由其样本 $x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 所确定。

已知这些样本值，我们能用如下办法重建 $x(t)$ ：产生一个周期冲激串，其冲激幅度就是这些依次而来的样本值；然后将该冲激串通过一个增益为 T ，截止频率大于 ω_M ，而小于 $(\omega_s - \omega_M)$ 的理想低通滤波器，该滤波器的输出就是 $x(t)$ 。

在采样定理之中，采样频率必须大于 $2\omega_M$ ，该频率 $2\omega_M$ 一般称为奈奎斯特率^①。

正如在第 6 章所讨论的，有各种不同的理由表明在实际中理想滤波器一般是不用的。在任何实际应用中，图 7.4 中的理想低通滤波器都用一个非理想滤波器 $H(j\omega)$ 所代替，该 $H(j\omega)$ 对于所关心的问题来说已足够准确地近似于所要求的频率特性（也即， $H(j\omega) \approx 1, |\omega| < \omega_M$ 和 $H(j\omega) \approx 0, |\omega| > \omega_s - \omega_M$ ）。显然，在这个低通滤波部分任何这样的近似都会带来图 7.4 中 $x(t)$ 与 $x_r(t)$ 之间的某些差异，或者说 $X(j\omega)$ 与 $X_r(j\omega)$ 之间的某些差异。这样，对于考虑到具体应用中所能接受的失真程度，非理想滤波器的具体选择就是很关键的了。为了方便，同时也是为了强调诸如采样定理这样一些基本原理，本章以及下一章都假定使用这些理想滤波器，但是要明白，在实际中就所讨论的问题来说，这样一个滤波器都必须被一个专门设计的，对理想特性足够近似的非理想滤波器所代替。

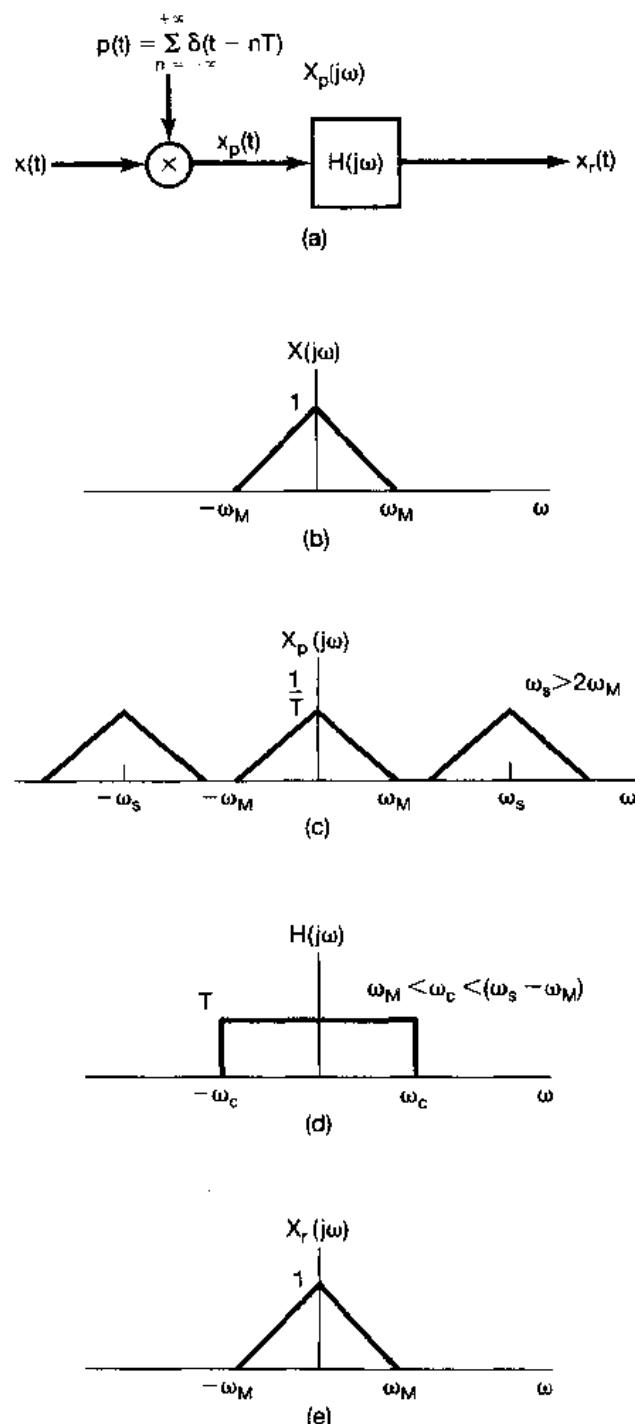


图 7.4 利用一个理想低通滤波器从信号的样本中完全恢复一个连续时间信号：

- (a) 采样与恢复系统；(b) $x(t)$ 的频谱；
- (c) $x_p(t)$ 的频谱；
- (d) 用于从 $X_p(j\omega)$ 恢复 $X(j\omega)$ 的理想低通滤波器；
- (e) $x_r(t)$ 的频谱

^① 对应于 1/2 奈奎斯特率的频率 ω_M 往往称为奈奎斯特频率。

7.1.2 零阶保持采样

最容易利用冲激串采样来说明的采样定理确立了这样一个事实,即一个带限信号唯一地可以用它的样本来代表。实际上,对于产生和传输窄而幅度大的脉冲(这就很近似于冲激)都是相当困难的,因此以所谓零阶保持的方式来产生采样信号往往更为方便些。在这样的系统中,在一个给定的瞬时对 $x(t)$ 采样,并保持这一样本值直到下一个样本被采到为止,如图 7.5 所示。由一个零阶保持系统的输出来重建 $x(t)$ 仍然可以用低通滤波的办法来实现。然而,



图 7.5 利用零阶保持采样

在这一情况下,所要求的滤波器特性不再是在通带内具有恒定的增益。为了求得所要求的滤波器特性,首先注意到这个零阶保持的输出 $x_0(t)$ 在原理上可以用冲激串采样,再紧跟一个 LTI 系统(该系统具有矩形的单位冲激响应)来得到,如图 7.6 所示。为了由 $x_0(t)$ 重建 $x(t)$,可以考虑用一个单位冲激响应为 $h_r(t)$,频率响应为 $H_r(j\omega)$ 的 LTI 系统来处理 $x_0(t)$ 。这个系统与图 7.6 的系统级联后如图 7.7 所示,在这里,我们希望给出一个 $H_r(j\omega)$,以使得 $r(t) = x(t)$ 。把图 7.7 的系统与图 7.4 的系统比较一下,可以看出,如果 $h_0(t)$ 与 $h_r(t)$ 级联后的特性是一个在图 7.4 中所用的理想低通滤波器 $H(j\omega)$ 的特性的话,那么 $r(t) = x(t)$ 。因为根据例 4.4 和 4.3.2 节的时移性质,有

$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega T/2} \left[\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega} \right] \quad (7.7)$$

这就要求

$$H_r(j\omega) = \frac{e^{j\omega T/2} H(j\omega)}{\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}} \quad (7.8)$$

例如,若 $H(j\omega)$ 的截止频率等于 $\omega_s/2$,则紧跟在一个零阶保持系统后面的重建滤波器的理想

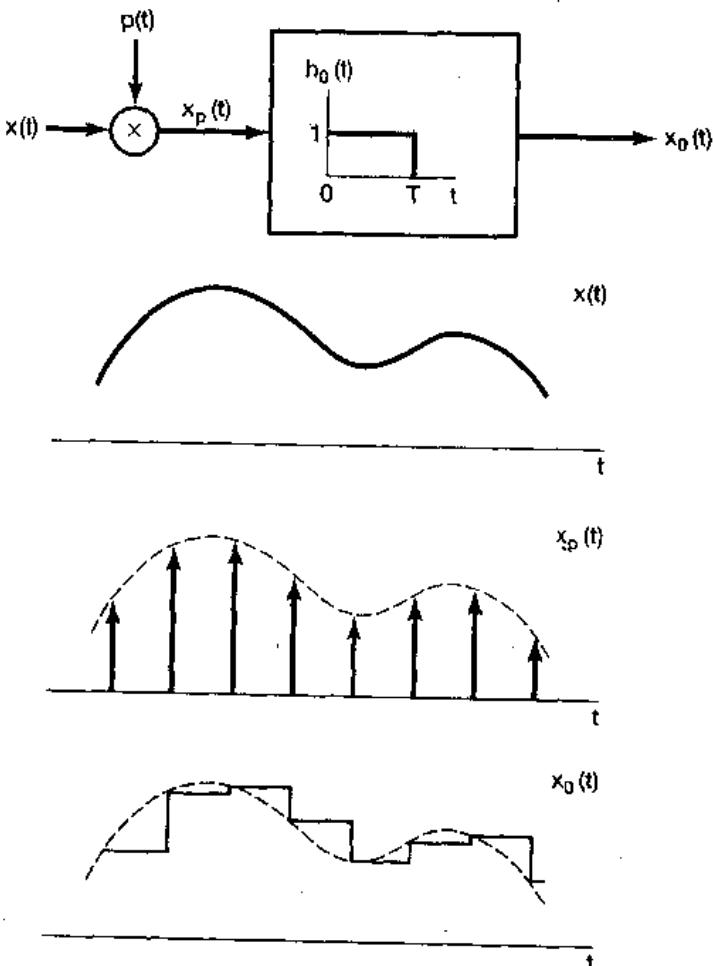


图 7.6 作为冲激串采样,再紧跟一个具有短形单位冲激响应的 LTI 系统的零阶保持

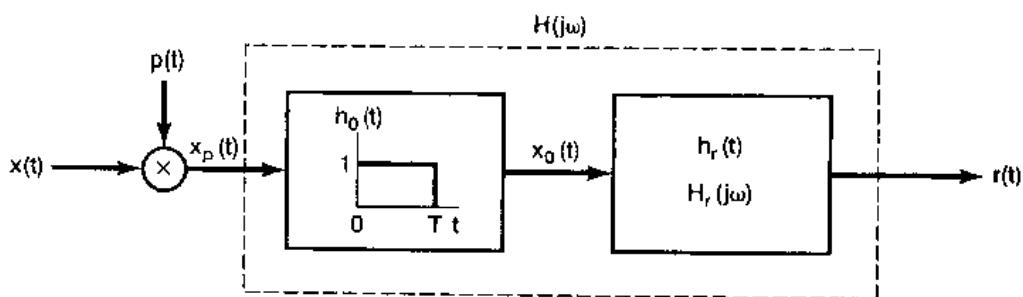


图 7.7 零阶保持(图 7.6)与一个重建滤波器的级联

模和相位特性就如图 7.8 所示。

再次提及, 实际上(7.8)式的频率响应也是不可能真正实现的, 因此也就必须对它作一个充分近似的设计。事实上, 在很多情况下, 零阶保持输出本身就被认为是一种对原始信号的充分近似, 而用不着附加任何低通滤波, 并且在实质上, 它就代表了一种可能的, 虽然肯定是很粗糙的, 样本值之间的内插。另一方面, 在某些应用中也可能希望在样本值之间做某些较平滑的内插。下一节, 将更为详细地把从信号的样本来重建信号看作一个内插的过程来研究内插的一般概念。

7.2 利用内插由样本重建信号

内插(也就是用一连续信号对一组样本值的拟合)是一个常用的由样本值来重建某一函数的过程, 这一重建结果既可以是近似的, 也可以是完全准确的。一种简单的内插过程就是在 7.1 节讨论过的零阶保持。另一种简单而有用的内插形式是线性内插, 就是将相邻的样本点用直线直接连起来, 如图 7.9 所示。在更为复杂的内插公式中, 样本点之间可以用高阶多项式或其它的数学函数来进行拟合。

在 7.1 节已经看到, 一个带限信号, 如果采样足够密的话, 那么信号就能完全被恢复。这就是说, 通过应用一个低通滤波器在样本点之间的真正内插就可以实现。当考虑图 7.4 中该低通滤波器在时域中的效果时, 把重建 $x_r(t)$ 作为一个内插过程就变得愈加清楚了。特别是, 输出 $x_r(t)$ 为

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t)$$

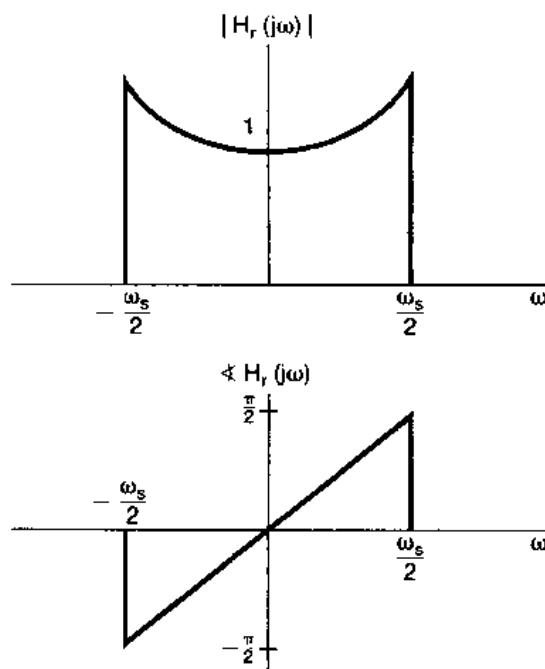


图 7.8 为零阶保持采样重建信号的重建滤波器的模和相位特性

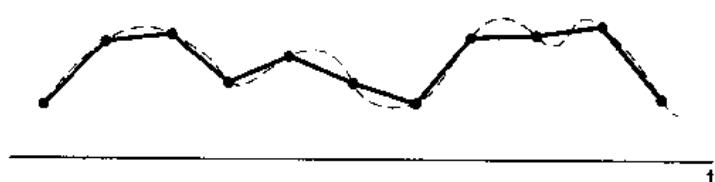


图 7.9 样本点之间的线性内插。
虚线代表原始信号, 实线就是线性内插

或者,以(7.3)式的 $x_p(t)$ 代入得

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h(t - nT) \quad (7.9)$$

(7.9)式体现了在样本点 $x(nT)$ 之间是如何拟合成一条连续曲线的,因此代表了一种内插公式。对于图 7.4 中的理想低通滤波器 $H(j\omega), h(t)$ 为

$$h(t) = \frac{\omega_c T \sin(\omega_c t)}{\pi \omega_c t} \quad (7.10)$$

所以有

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\omega_c T}{\pi} \frac{\sin(\omega_c(t - nT))}{\omega_c(t - nT)} \quad (7.11)$$

按照(7.11)式,在 $\omega_c = \omega_s/2$ 时的重建过程如图 7.10 所示。图 7.10(a)代表原始带限信号 $x(t)$,图 7.10(b)是样本冲激串 $x_p(t)$,图 7.10(c)则是由(7.11)式中每一项叠加的结果。

像在(7.11)式中那样,利用理想低通滤波器的单位冲激响应的内插通常称为带限内插。因为这种内插,只要 $x(t)$ 是带限的,而采样频率又满足采样定理中的条件,就实现了信号的真正重建。正如已经指出过的,在很多情况下,宁可采用准确性差一些,但稍微简单一些的滤波器,或者说比(7.10)式要简单一些的内插函数。例如,零阶保持就可以看作是在样本值之间进行内插的一种形式,在那里内插函数 $h(t)$ 就是如图 7.6 所示的单位冲激响应 $h_0(t)$ 。在这种意义下,若图 7.6 中的 $x_0(t)$ 是相应于对 $x(t)$ 的近似,那么系统 $h_0(t)$ 就代表对一个能实现真正内插的理想低通滤波器的近似。图 7.11 给出了零阶保持内插滤波器传输函数的模特性,图中把该模特性叠放在一个能实现真正内插的滤波器特性之上,以供比较。

由图 7.11 和图 7.6 都能看出,零阶保持是一种很粗糙的近似,尽管在某些情况下这已经是足够了。例如,如果在某一具体应用中,本身就有某种附加的低通滤波作用,那么就会有助于改善总的内插效果。这一点可以用图 7.12 所示的照片例子给予说明。图 7.12(a)示出的是照片经冲激采样的结果(即用空间上

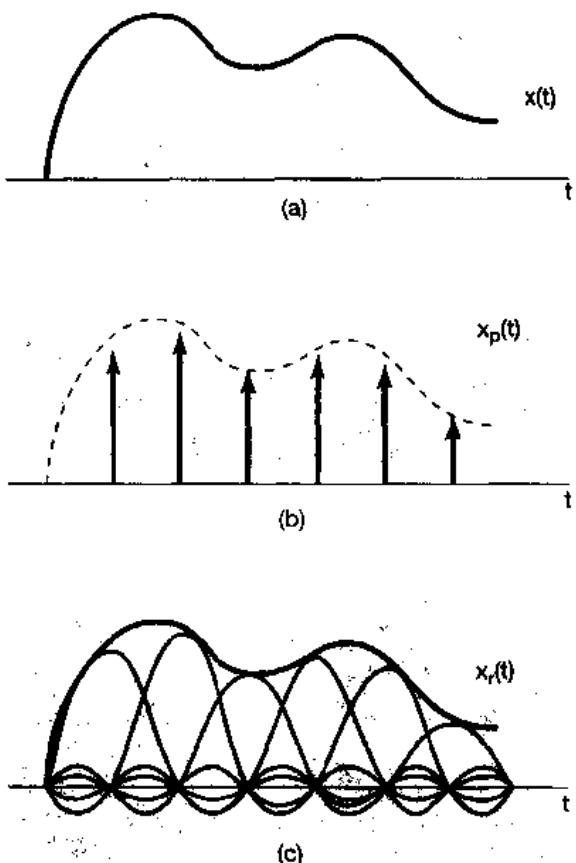


图 7.10 利用 sinc 函数的理想带限内插:

- (a) 带限信号 $x(t)$;
- (b) $x(t)$ 的样本冲激串
- (c) 用(7.11)式的 sinc 函数的叠加取代冲激串的理想带限内插

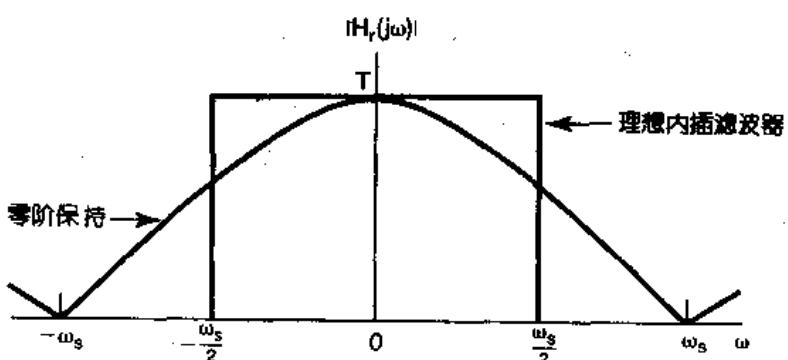


图 7.11 零阶保持和理想内插滤波器的传输函数

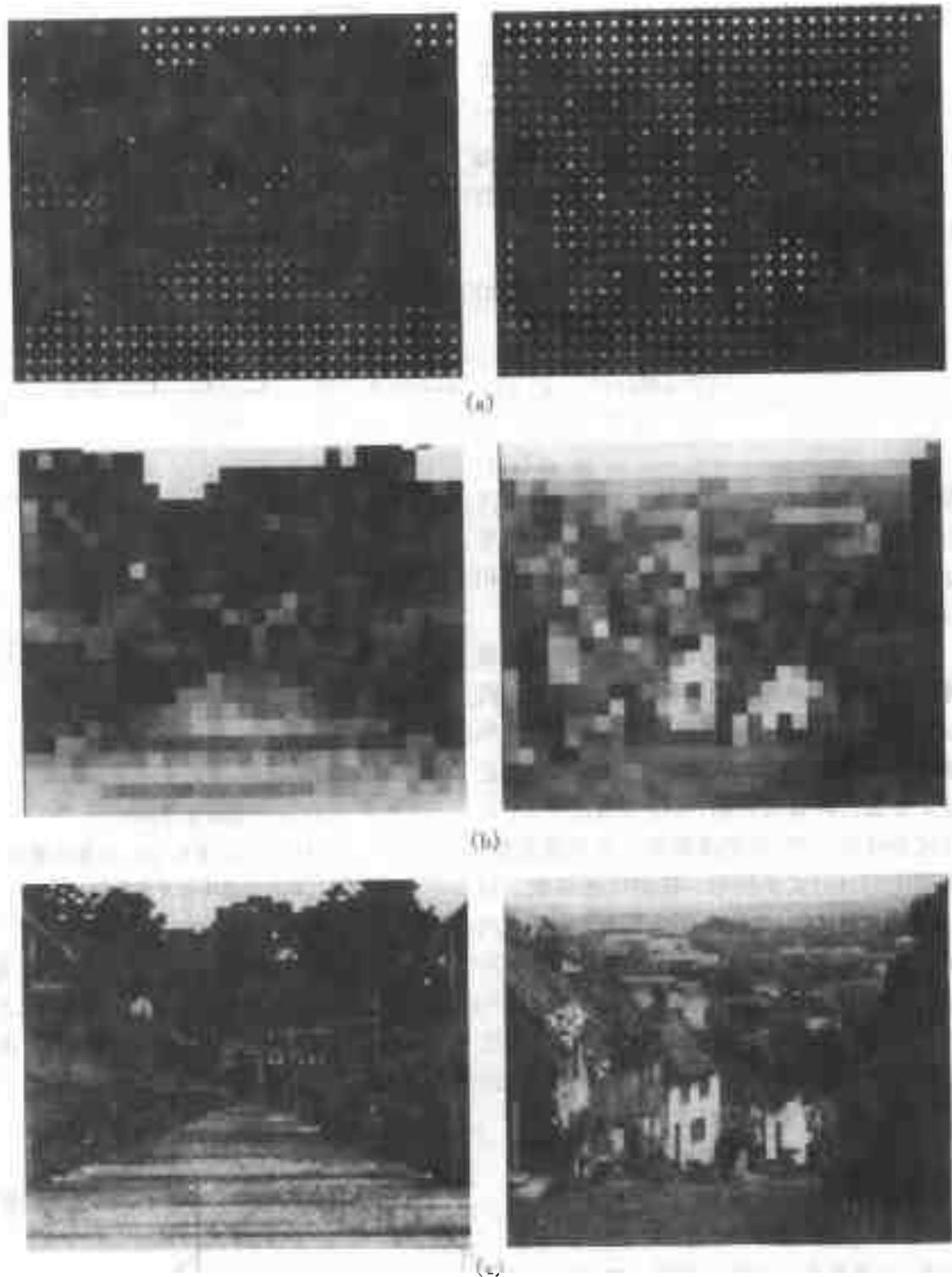


图 7.12 (a) 将图 6.2(a) 和(g) 的照片冲激串采样的结果;
 (b) 对图(a)施加零阶保持滤波。由于人的视觉系统具有固有的低通过滤作用, 其截止频率随距离而减小, 因此当从远距离观察时, 图 7.12(b) 中镶嵌的不连续处受到平滑;
 (c) 水平和垂直方向采样间隔都只是图 7.12(a) 和(b) 时的 $1/4$ ^①, 仍用零阶保持过滤的结果

^① 此处, 原文为 $1/3$ 与正文中 $1/4$ 有矛盾, 这里改 $1/4$ ——译者注。

很窄的脉冲来采样)。图 7.12(b)则是将图 7.12(a)的样本通过一个二维零阶保持系统的结果,图中具有明显的镶嵌效应。然而,由于人的视觉系统固有地具有某种低通滤波作用。因此,如果站在远处看,镶嵌上的不连续处受到平滑。例如图 7.12(c)仍旧采用零阶保持,但在每一个方向上采样间隔都是图 7.12(a)所用的采样间隔的 $1/4$,这时,虽然镶嵌效应仍然明显,但在正常观察下,好似加了一个很强的低通过滤一样。

如果由零阶保持所给出的粗糙内插不够满意,可以使用各种更为平滑的内插手段,其中的一些合起来统称为高阶保持。特别是,零阶保持产生如图 7.5 所示的输出信号是不连续的;而与此相比,如图 7.9 所示的线性内插产生的恢复信号是连续的。然而由于在各样本点上斜率的改变而导致导数是不连续的。线性内插(有时也称一阶保持)也能看作是一种如图 7.4 和(7.9)式形式的内插,不过 $h(t)$ 为一三角形特性,如图 7.13 所示。其传输函数 $H(j\omega)$ 也如图 7.13 所示,并且等于

$$H(j\omega) = \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2} \right]^2 \quad (7.12)$$

一阶保持系统的传输函数在图 7.13 中是叠放在理想内插滤波器传输函数的特性之上的,以供比较。图 7.14 相应于图 7.12(b)的同一张照片的样本在用一阶保持内插后的结果。与此相仿,也可以定义二阶或高阶保持系统,它们所产生的恢复信号具有更好

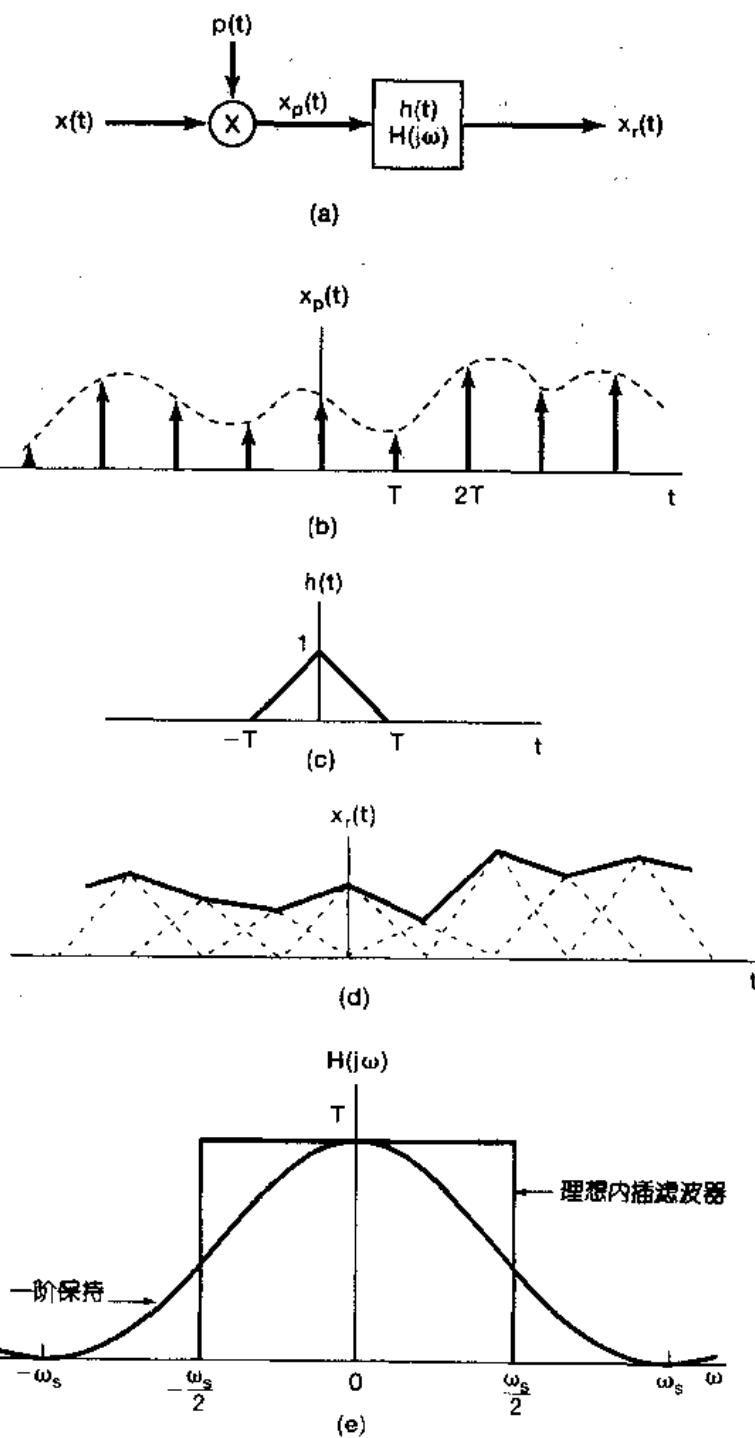


图 7.13 把线性内插(一阶保持)看作冲激串采样与三角形冲激响应特性卷积的结果:

- (a)采样与恢复系统;
- (b)冲激串采样;
- (c)一阶保持的单位冲激响应;
- (d)对已采样信号施加一阶保持;
- (e)理想内插和一阶保持传输函数的比较



图 7.14 在水平和垂直方向采样间隔都是图 7.12(a)和(b)所用的采样间隔的 $1/4$ 时的冲激串采样,再用一阶保持内插的结果

的平滑度。例如,二阶保持系统的输出在样本值间的内插可以给出连续的曲线,并有连续的一阶导数和不连续的二阶导数。

7.3 欠采样的效果:混叠现象

在前面的讨论中,都假定采样频率足够高,因而满足采样定理中的条件。正如在图 7.3 中所说明的,在 $\omega_s > 2\omega_M$ 下,采样信号的频谱是由 $x(t)$ 的频谱重复组成的,而这正是采样定理的基础。当 $\omega_s < 2\omega_M$ 时, $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 不再在 $X_p(j\omega)$ 中重复,因此利用低通滤波也不再能把 $x(t)$ 从采样信号中恢复出来。这时,在(7.6)式中的那些单个项发生重叠,这一现象称为混叠。本节将讨论它的影响和一些结果。

显然,如果图 7.4 这样的系统用于某一信号,这时 $\omega_s < 2\omega_M$,那么被重建的信号 $x_r(t)$ 不会再等于 $x(t)$ 。然而(见习题 7.25),原始信号 $x(t)$ 和利用带限内插得到的 $x_r(t)$ 在那些采样瞬时总是相等的,即对任意选取的 ω_s 都有

$$x_r(nT) = x(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.13)$$

若以 $x(t)$ 为一种比较简单的正弦信号的例子,更为详细地讨论当 $\omega_s < 2\omega_M$ 时的情况,就会对 $x(t)$ 和 $x_r(t)$ 之间的关系有一些深透的了解。于是设

$$x(t) = \cos\omega_0 t \quad (7.14)$$

这个信号的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 如图 7.15(a)所示。图中,为了讨论的方便,已经把在 ω_0 处的冲激与在 $-\omega_0$ 处的冲激画图时作了区别。现在来讨论 $X_p(j\omega)$,即已采样信号的频谱。在讨论中特别把注意力放在对一个固定的采样频率 ω_s 来说,当改变 ω_0 后对 $X_p(j\omega)$ 所产生的影响。在图 7.15(b)~(e)中,画出了几个 ω_0 值时的 $X_p(j\omega)$ 。同时用虚线框起来的是图 7.4 中, $\omega_c = \omega_s/2$ 的低通滤波器的通带。可以看到,在图(b)和(c)中,由于 $\omega_0 < \omega_s/2$,因此没有混叠现象发生,而在图(d)和(e)中,混叠现象就出现了。在这四种情况下,经过低通滤波后的输出 $x_r(t)$ 分别是:

$$(a) \omega_0 = \frac{\omega_s}{6}; \quad x_r(t) = \cos\omega_0 t = x(t)$$

- (b) $\omega_0 = \frac{2\omega_s}{6}$; $x_r(t) = \cos\omega_0 t = x(t)$
- (c) $\omega_0 = \frac{4\omega_s}{6}$; $x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t)$
- (d) $\omega_0 = \frac{5\omega_s}{6}$; $x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t)$

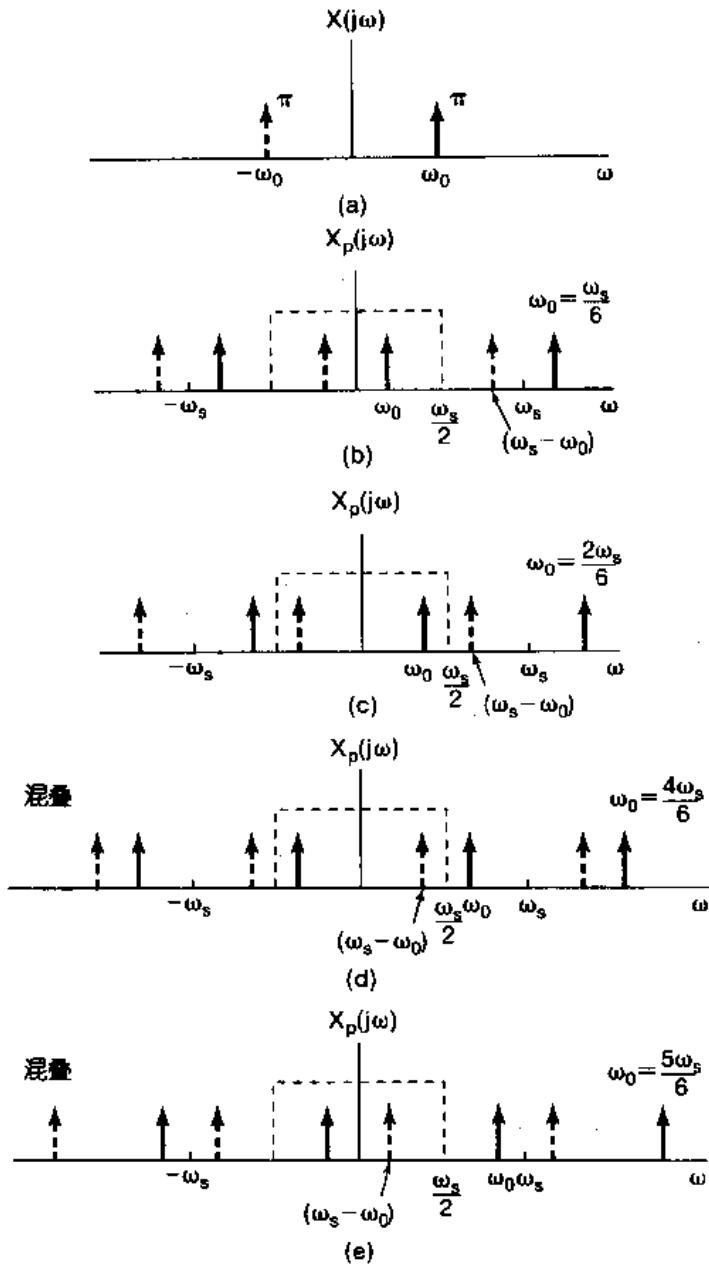


图 7.15 过采样和欠采样在频域中的效果：

(a) 原始正弦信号的频谱；(b), (c) $\omega_s > 2\omega_0$ 时已采样信号的频谱；在(d), (e) $\omega_s < 2\omega_0$ 时已采样信号的频谱。当从(b)到(d)增大 ω_0 时，用实线标出的冲激向右边移动，而用虚线标出的冲激则向左边移动。(d)和(e)中，这些冲激都移了足够大，以至于落在该理想低通滤波器通带内的那些部分就产生了变化。

当混叠现象发生时,原始频率 ω_0 就被混叠成一个较低的频率 ($\omega_s - \omega_0$)。对于 $\omega_s/2 < \omega_0 < \omega_s$, 随着 ω_0 相对于 ω_s 的增加, 输出频率 ($\omega_s - \omega_0$) 就下降, 当 $\omega_s = \omega_0$ 时, 被重建的信号就是一个常数。这一点是与如下事实相一致的: 即当每一个周期只采样一次时, 这些样本值都是相等的, 这与对一个直流信号 ($\omega_0 = 0$) 采样所得的结果无疑是一样的。在图 7.16 中, 就图 7.15 中四种情况的每一种中的信号 $x(t)$, $x_s(t)$ 的样本值, 以及重建信号 $x_r(t)$ 分别画了出来。从这些图中可以看到, 低通滤波器是如何在这些样本值之间进行内插的, 尤其是, 总是有一个频率小于 $\omega_s/2$ 的正弦信号与 $x(t)$ 的样本值相对应。

对上面例子作一点变化, 考虑信号

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (7.15)$$

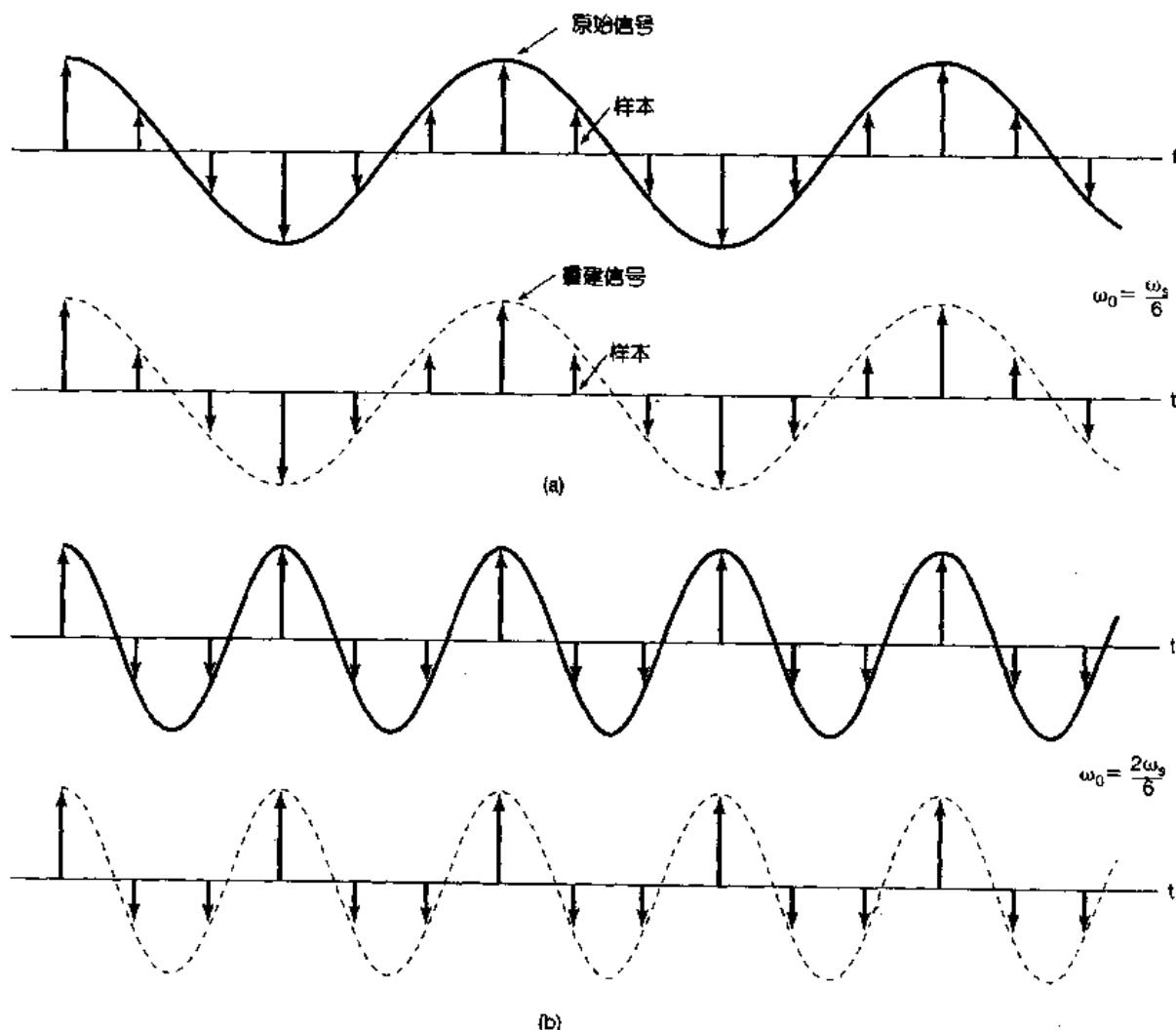


图 7.16 在一个正弦信号上混叠的效果。对应于四种不同的 ω_0 值, 画出了原始正弦信号(实线), 它的样本和重建信号(虚线):

(a) $\omega_0 = \omega_s/6$; (b) $\omega_0 = 2\omega_s/6$; (c) $\omega_0 = 4\omega_s/6$; (d) $\omega_0 = 5\omega_s/6$

在(a)和(b)中没有混叠发生, 而在(c)和(d)中则存在混叠

在这种情况下, $x(t)$ 的傅里叶变换基本上与图 7.15(a)是相同的, 只是现在用实线标出的冲激有一个幅度因子 $\pi e^{j\phi}$, 而用虚线标出的冲激其幅度因子有一个相反的相位, 即 $\pi e^{-j\phi}$ 。如果

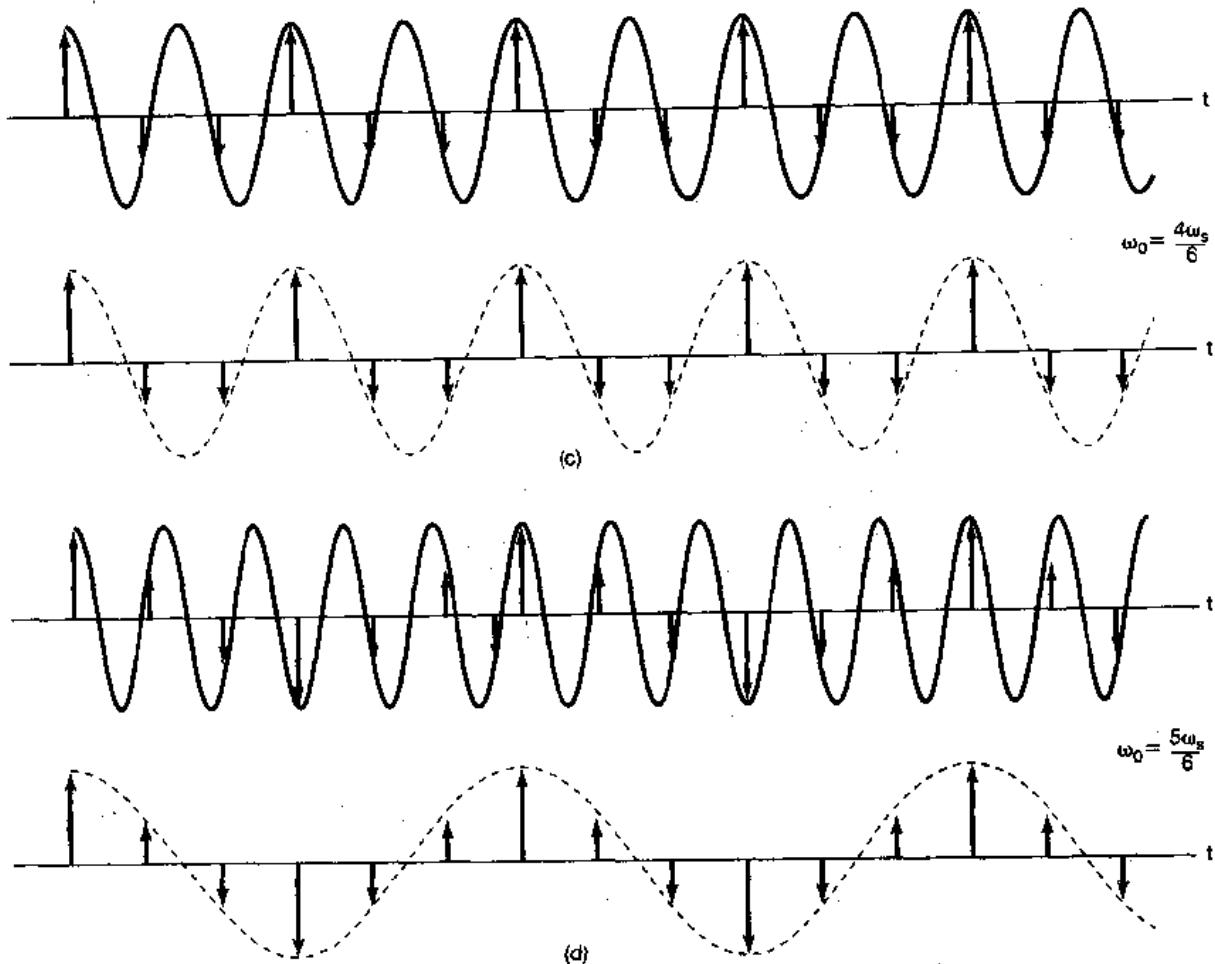


图 7.16(续)

现在考虑用图 7.15 同样的一组 ω_0 选择的值,那么所得到的 $\cos(\omega_0 t + \phi)$ 的已采样信号的频谱与该图也是一样的。只是所有的实线冲激都有 $\pi e^{j\phi}$ 的幅度因子,而所有的虚线冲激都有 $\pi e^{-j\phi}$ 的幅度因子。再者,在(b)和(c)情况下,采样定理中的条件满足,所以 $x_r(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) = x(t)$;而在(d)和(e)情况下,再次发生混叠。然而,现在可看到,出现在低通滤波器通带内的实线冲激和虚线冲激在位置上发生了颠倒,结果发现在这些情况下, $x_r(t) = \cos[(\omega_s - \omega_0)t - \phi]$ ^①,这里在相位中的符号上有一个改变,也即有一个相位倒置。

注意到这一点是很重要的:采样定理明确要求采样频率大于信号中最高频率的两倍,而不是大于或等于最高频率的两倍。下面这个例子用来说明用真正两倍于正弦信号的频率对它进行采样(即每一周期采两个样本)是不够的。

例 7.1 考虑下面正弦信号

$$x(t) = \cos\left(\frac{\omega_s}{2}t + \phi\right)$$

假定以二倍于该正弦信号的频率即 ω_s 对它进行冲激串采样。如在习题 7.39 所证明的,若这个已

① 原文为 $x(t)$,有误——译者注。

采样的冲激信号作为输入加到一个截止频率为 $\omega_s/2$ 的理想低通滤波器上,其所产生的输出是

$$x_r(t) = (\cos\phi)\cos\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)$$

结果可见, $x(t)$ 的完全恢复仅仅发生在相位 ϕ 是零的情况(或者 2π 整倍数的情况下),否则信号 $x_r(t)$ 不等于 $x(t)$ 。

作为一个极端的例子,考虑 $\phi = -\pi/2$ 的情况,这样有

$$x(t) = \sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)$$

这个信号如图 7.17 所示。可见该信号在采样周期 $2\pi/\omega_s$ 整倍数点上的值都是零。因此,在这个采样率下所产生的信号全是零;当这个零输入加到该理想低通滤波器上时,所得输出当然也都是零。

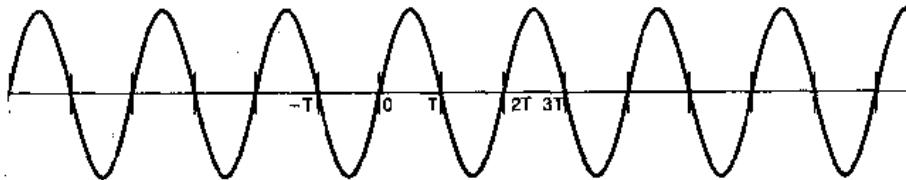


图 7.17 例 7.1 中的正弦信号

欠采样的效果(在此,较高频率被折转到较低的频率中去)就是频闪效应所基于的原理。例如,考虑一下图 7.18 的情况,在这里有一个圆盘,以恒定速度旋转,在圆盘上标一根径向直线。闪光灯就当作一个采样系统,因为它以某一周期率在一个极短的时间间隔内照亮圆盘。当闪光灯的闪烁频率比圆盘的旋转速度高得多的话,那么圆盘的旋转速度就会被正确地觉察到。当闪烁频率变得小于圆盘旋转速度的两倍时,这时圆盘的旋转速度看起来就比它真正的速度来得低。甚而,由于相位倒置的关系,圆盘还会出现在相反的方向上旋转!粗略地说,如果我们在接连不断的样本上跟踪圆盘上一根固定线的位置,那么当 $\omega_0 < \omega_s < 2\omega_0$ 时,采样就比每转一次要略微频繁一些,这

样每次采得的圆盘样本就将这根固定的线显示在好似它以逆时钟方向展现的位置上,而这是与圆盘本身以顺时针方向旋转相反的。若闪光灯只在圆盘转一周时闪烁一次(这就相当于 $\omega_s = \omega_0$),那时这根径线看起来好像静止不动似的,这就相当于圆盘的旋转频率及其谐波都被混叠到零频率上去了。一种类似的现象也在西部电影中观察到。电影中马车的轮子看起来旋转得比马车真正向前运动的速度要更慢一些,并且有时会看到以相反的方向在旋转。在这种情况下采样过程就相当于:活动图象就是一串单个的画面(或称一帧),帧频(通常每秒 18 到 24 帧)就相当于采样频率。

在上面讨论中,把频闪效应看作在欠采样下所产生混叠的一种应用的例子来说明是很有启发性的。在测量仪器中有一种取样示波器,它就是借助于采样原理把欲观察而又不便于显示出的很高频率混叠到一个更容易显示的低频率上来,这就是在欠采样情况下,混叠现象另一

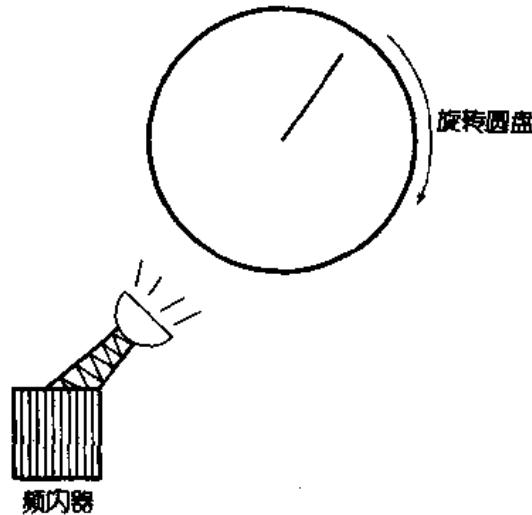


图 7.18 频闪效应

个有用的例子。关于取样示波器将在习题 7.38 中进行更为详细的讨论。

7.4 连续时间信号的离散时间处理

在很多应用中,首先把一个连续时间信号转换为一个离散时间信号,然后进行处理,处理完后再把它转换为连续时间信号。这种处理方式有一个显著的优点,这就是离散时间信号的处理可以借助于某一通用或专用计算机,借助于各种微处理器,或任何面向离散时间信号处理而专门设计的各种装置来实现。

广而言之,对连续时间信号的这种处理方法可以看作是如图 7.19 所示的三个环节的级联,其中 $x_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 都是连续时间信号,而 $x_d[n]$ 和 $y_d[n]$ 都是对应于 $x_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 的

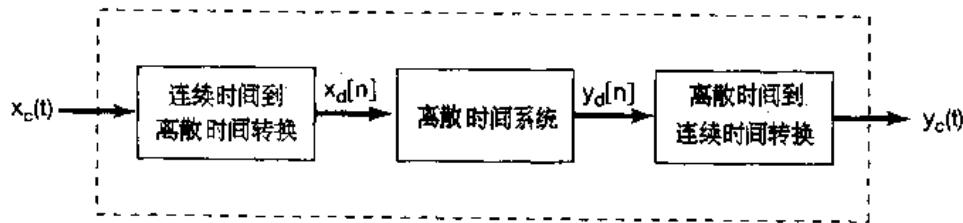


图 7.19 连续时间信号的离散时间处理

离散时间信号。当然,就图 7.19 的整个系统而言,仍是一个连续时间系统,因为系统的输入、输出都是连续时间信号。将一个连续时间信号转换为一个离散时间信号,以及从信号的离散时间表示重建连续时间信号所依据的理论基础,都是 7.1 节讨论的采样定理。通过这样一个周期采样的过程(其采样频率满足采样定理中的条件),连续时间信号 $x_c(t)$ 就可以完全用一串瞬时样本值 $x_c(nT)$ 来表示;也就是说,离散时间序列 $x_d[n]$ 以式

$$x_d[n] = x_c(nT) \quad (7.16)$$

与 $x_c(t)$ 相联系。将 $x_c(t)$ 变换到 $x_d[n]$ 相应于图 7.19 中的第一个系统,称之为连续时间到离散时间的转换,并缩写为 C/D。图 7.19 中的第三个系统是一个与上述相反的变换,即由离散时间到连续时间的转换,并缩写为 D/C。D/C 实现的是作为它的输入的各样本点之间的内插;这就是说,经 D/C 后产生一个连续时间信号 $y_c(t)$,该 $y_c(t)$ 与其输入的离散时间信号 $y_d[n]$ 以下式关联:

$$y_d[n] = y_c(nT)$$

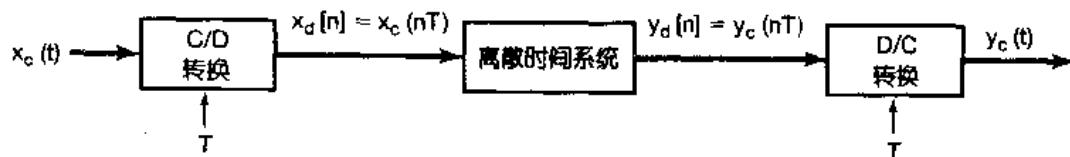


图 7.20 连续到离散时间转换和离散到连续时间转换的概念。 T 代表采样周期

这一概念在图 7.20 中表示得更为明显。在诸如数字计算机和其它数字系统中,离散时间信号是以数字的形式给出的,这时用于实现 C/D 转换的器件就称为模拟数字(A/D)转换器,而实现 D/C 转换的就称为数字模拟(D/A)转换器。

为了进一步明了连续时间信号 $x_c(t)$ 和它的离散时间表示 $x_d[n]$ 之间的关系,可以把从

连续时间到离散时间的变换表示成一个周期采样的过程,再紧跟着一个把冲激串映射为一个序列的环节,这样做是非常有益的。这两步都表示在图 7.21 中。图中的第一步代表一个采样过程,冲激串 $x_p(t)$ 就是一个冲激序列,各冲激的幅度与 $x_c(t)$ 的样本值相对应,而在时间间隔上等于采样周期 T 。然后,在从冲激串到离散时间序列的转换中,得到 $x_d[n]$;这就是以 $x_c(t)$ 的样本值为序列值的同一序列,但是其单位间隔是用新的自变量 n 。因此,实际上从样本的冲激串到样本的离散时间序列的转换可以认为是一个时间的归一化过程。图 7.21(b)和(c)明确地表示了由 $x_p(t)$ 到 $x_d[n]$ 的转换中这种时间的归一化过程。在这里, $x_p(t)$ 和 $x_d[n]$ 是分别以 $T = T_1$ 和 $T = 2T_1$ 的两种采样率表示出的。

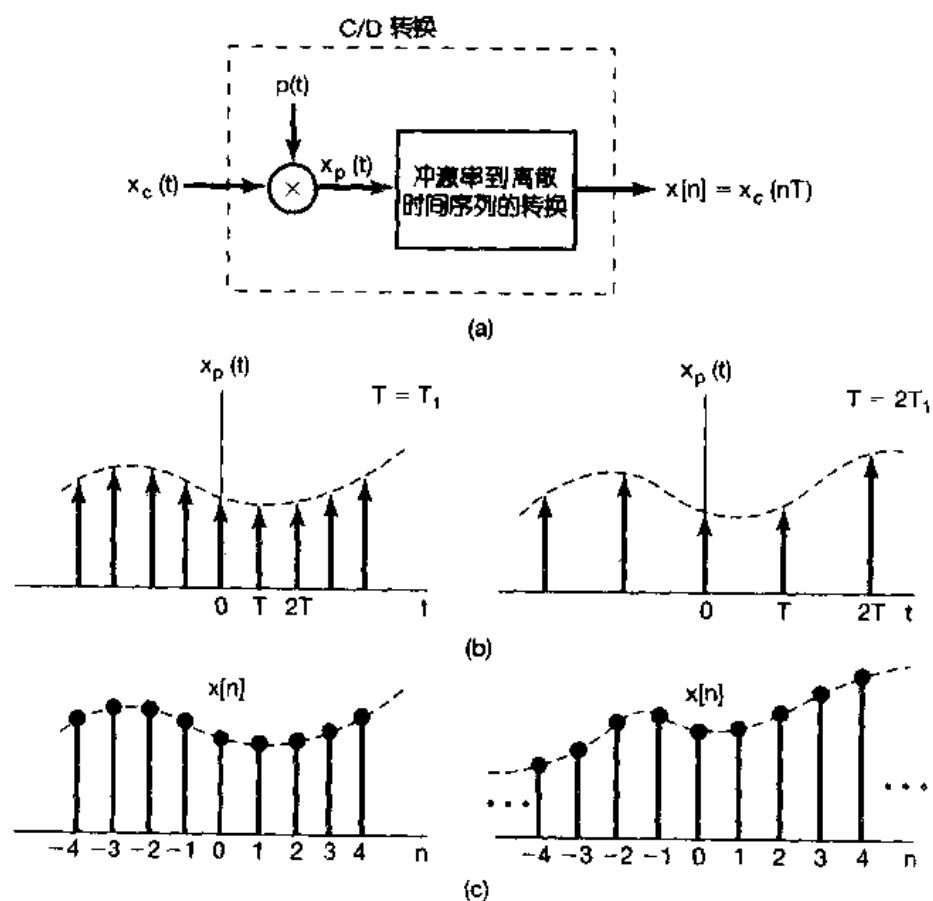


图 7.21 用一个周期冲激串采样,再跟着一个到离散时间序列的转换:

- (a)整个系统;
- (b)两种采样率的 $x_p(t)$,虚线包络代表 $x_c(t)$;
- (c)两种不同采样率的输出序列。

在频域来考察一下图 7.19 的处理过程也是很有启发意义的。由于我们面临着既要在连续时间又要在离散时间处理傅里叶变换,因此,仅在这一节将连续时间的频率变量用 ω 和在离散时间的频率变量用 Ω 来加以区分。例如, $x_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 的连续时间傅里叶变换分别用 $X_c(j\omega)$ 和 $Y_c(j\omega)$ 表示;而 $x_d[n]$ 和 $y_d[n]$ 的离散时间傅里叶变换分别用 $X_d(e^{j\Omega})$ 和 $Y_d(e^{j\Omega})$ 表示。

现在,将(7.3)式应用傅里叶变换,以便利用 $x_c(t)$ 的样本值来表示 $x_p(t)$ 的连续时间傅里叶变换 $X_p(j\omega)$ 。因为

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \quad (7.17)$$

又根据 $\delta(t - nT)$ 的傅里叶变换是 $e^{-j\omega nT}$, 所以得到

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j\omega nT} \quad (7.18)$$

现在考虑 $x_d[n]$ 的离散时间傅里叶变换, 即

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n} \quad (7.19)$$

或者, 利用(7.16)式有

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega n} \quad (7.20)$$

将(7.18)式和(7.20)式作一比较可见, $X_d(e^{j\Omega})$ 和 $X_p(j\omega)$ 是通过如下关系关联着:

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T) \quad (7.21)$$

另外, 回想一下(7.6)式和图 7.3 所说明的

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)) \quad (7.22)$$

因此得到

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k)/T) \quad (7.23)$$

图 7.22 中, 对应两种不同的采样率, 示出了 $X_c(j\omega)$, $X_p(j\omega)$ 和 $X_d(e^{j\Omega})$ 三者之间的关系。从该图中可以注意到, $X_d(e^{j\Omega})$ 就是 $X_p(j\omega)$ 的重复, 唯频率坐标有一个尺度变换。特别应注意 $X_d(e^{j\Omega})$ 是 Ω 的周期函数, 周期为 2π 。当然, 这种周期性是任何离散时间傅里叶变换都具有的特征。因此, $x_d[n]$ 和 $x_c(t)$ 之间的频谱关系是通过先把 $x_c(t)$ 的频谱 $X_c(j\omega)$ 按

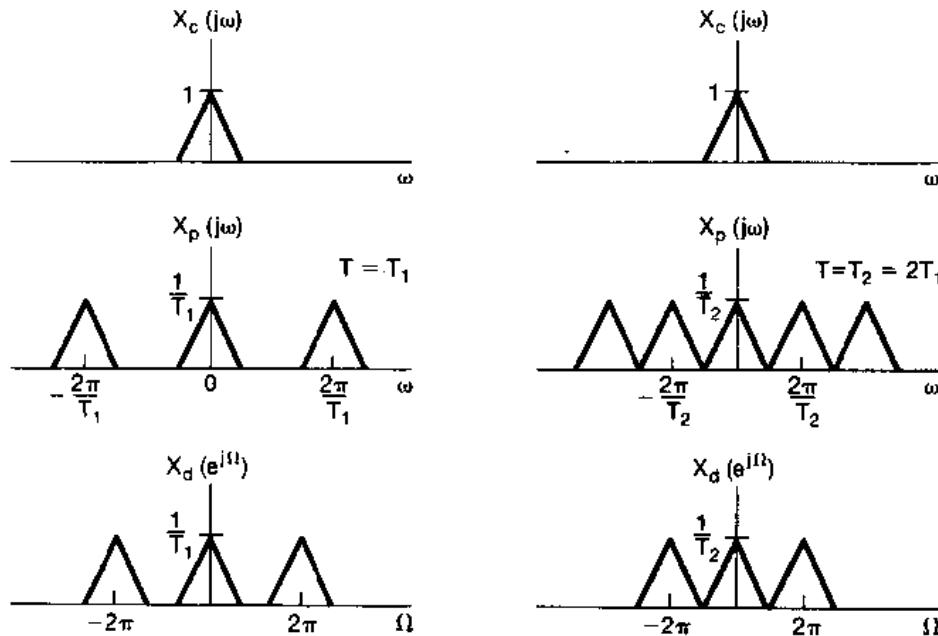


图 7.22 在两种不同采样率下, $X_c(j\omega)$, $X_p(j\omega)$ 和 $X_d(e^{j\Omega})$ 之间的关系

(7.22)式进行周期重复,然后再跟着一个按(7.21)式的线性频率尺度变换联系起来的。频谱的周期性重复是图7.21转换过程中第一步的结果,即冲激串采样;而按(7.21)式所作的线性频率尺度变换,可以不太正规地看成是由冲激串 $x_p(t)$ 转换到离散时间序列 $x_d[n]$ 时,所引入的时间归一化的结果。根据4.3.5节傅里叶变换的时域尺度变换性质,时间轴上有一个 $1/T$ 的变化,一定在频率轴上引入一个 T 倍的变化。因此, $\Omega = \omega T$ 的关系就与从 $x_p(t)$ 到 $x_d[n]$ 的转换过程中,时间轴上有一个 $1/T$ 的尺度变换,在概念上是完全一致的。

图7.19的系统中,经过离散时间系统处理以后,所得到的序列又转换为一个连续时间信号,这一过程就是图7.21中各步骤的逆过程。具体来说,就是可以由序列 $y_d[n]$ 产生一个连续时间冲激串 $y_p(t)$,而连续时间信号 $y_c(t)$ 的恢复就可以借助于图7.23低通滤波的办法来实现。

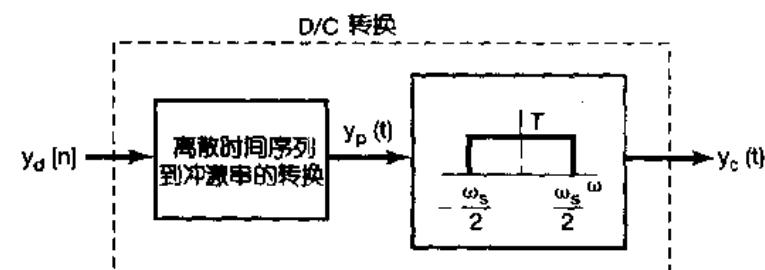


图7.23 一个离散时间序列到连续时间信号的转换

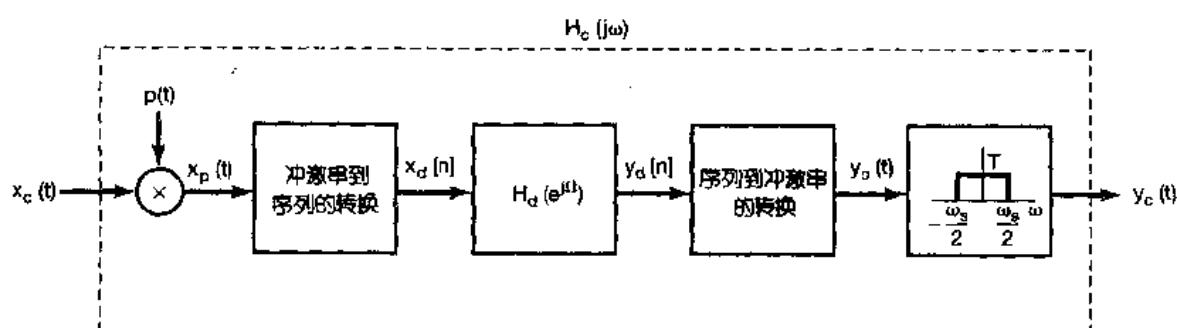


图7.24 利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的系统

现在,考虑将图7.19的整个系统用图7.24来表示。很清楚,如果图中的离散时间系统是一个恒等系统的话(即 $x_d[n] = y_d[n]$),而且假定满足采样定理中的条件,那么整个系统也一定是一个恒等系统。将图中离散时间系统的频率响应一般化为 $H_d(e^{j\Omega})$,这时用图7.25这样一个有代表性的例子来说明图7.24的整个系统特性,或许会得到最好的理解。该图的左边是某一具有代表性的频谱 $X_c(j\omega)$, $X_p(j\omega)$ 和 $X_d(e^{j\Omega})$,其中假定 $\omega_M < \omega_s/2$,所以没有混叠发生。相应于离散时间滤波器输出的谱 $Y_d(e^{j\Omega})$ 就是 $X_d(e^{j\Omega})$ 和 $H_d(e^{j\Omega})$ 的相乘,如图7.25(d)所示,图中是将 $X_d(e^{j\Omega})$ 和 $H_d(e^{j\Omega})$ 重合画在一起的。变换到 $Y_c(j\omega)$ 就相当于给以频率尺度的变换,然后进行低通滤波,所得到的频谱分别如图7.25(e)和(f)所示。因为 $Y_d(e^{j\Omega})$ 是两个互为重叠的频谱的乘积,如图7.25(d)所示,所以对两者都应施加频率尺度的变换和滤波。将图7.25(a)和(f)进行比较,显而易见

$$Y_c(j\omega) = X_c(j\omega)H_d(e^{j\omega T}) \quad (7.24)$$

这样,对于输入是充分带限的,并满足采样定理之下,图7.24的整个系统事实上就等效于一个频率响应为 $H_c(j\omega)$ 的连续时间系统,而 $H_c(j\omega)$ 与离散时间频率响应 $H_d(e^{j\Omega})$ 的关系为

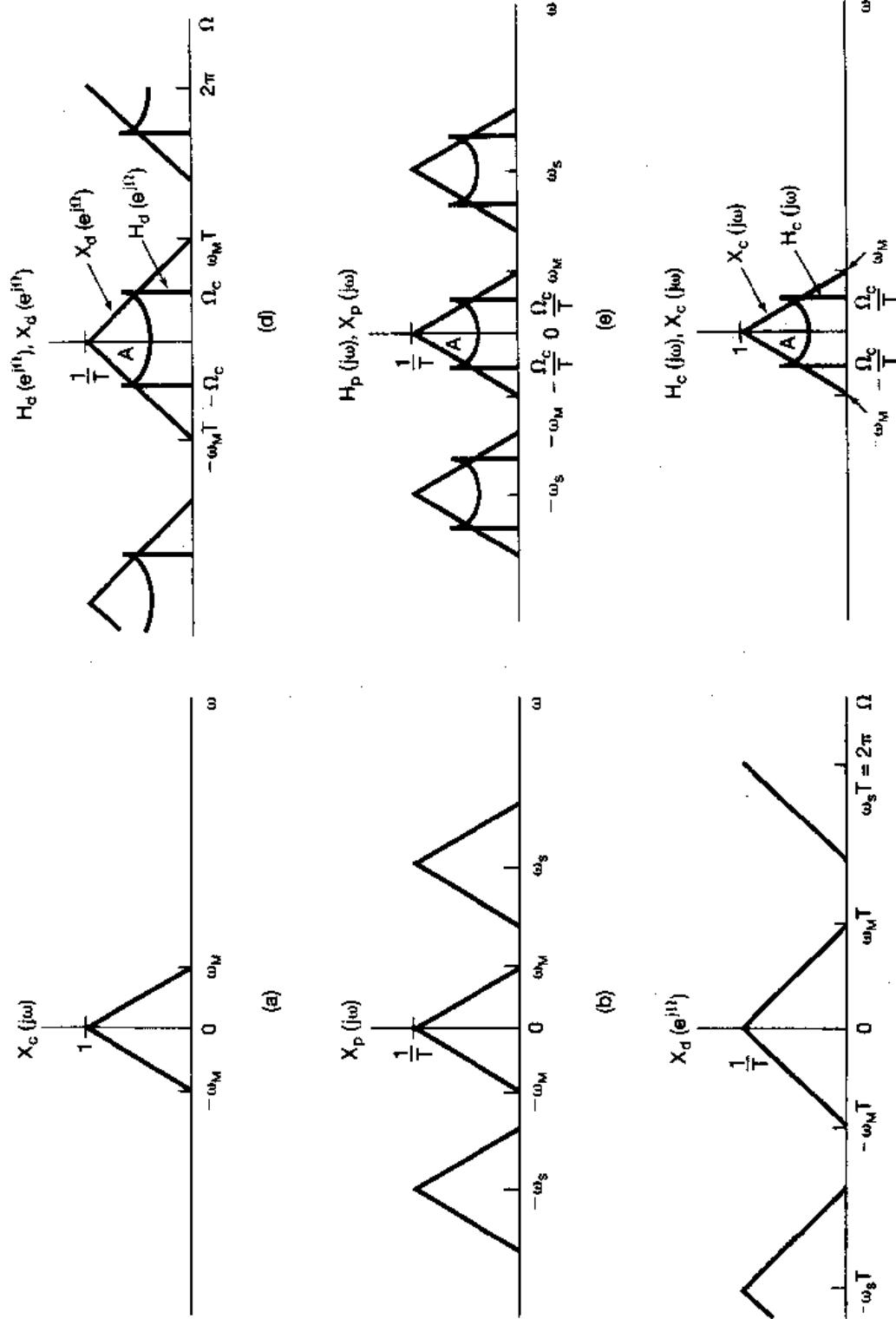


图 7.24 系统的频域说明：
 (a) 连续时间信号的频谱 $X_c(j\omega)$ ；(b) 冲激串采样以后的谱；
 (c) 离散时间序列 $x_d[n]$ 的谱；(d) $H_d(e^{j\Omega t})$ 和 $X_d(e^{j\Omega t})$ 相乘以后得到的 $Y_d(e^{j\Omega t})$ ；
 (e) $H_p(j\omega)$ 和 $X_p(j\omega)$ 相乘后得到的 $Y_c(j\omega)$ ；(f) $H_c(j\omega)$ 和 $X_c(j\omega)$ 相乘后得到的 $Y_p(j\omega)$

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, |\omega| > \omega_s/2 \end{cases} \quad (7.25)$$

这个等效的连续时间滤波器的频率响应就是该离散时间滤波器在一个周期内的特性，只是频率轴有一个线性尺度变化。离散时间频率响应和等效的连续时间频率响应之间的关系如图 7.26 所示。

由于被一个冲激串相乘不是一个时不变的环节，因此图 7.24 整个系统能等效为一个 LTI 系统多少有些使人吃惊！事实上，图 7.24 的整个系统不是对任意输入来讲都是时不变的。譬如说，如果 $x_c(t)$ 是一个窄的矩形脉冲，持续期小于 T ，那么 $x_c(t)$ 的时间移位就可能产生一个序列 $x[n]$ ，该 $x[n]$ 要么全部序列值为 0，要么有一个非零的序列值，这决定于矩形脉冲相对于采样冲激串来说，符合的程度如何。然而，如同我们在图 7.25 的频谱中所想到的，对于一个带限输入信号来说，若采样率足够高，从而避免了混叠发生，那么图 7.25 的系统就等效为一个连续时间 LTI 系统。对于这样的输入信号来说，图 7.24 和(7.25)式就提供了利用离散时间滤波器来对连续时间信号进行处理的基础。下面将以某些例子对此作进一步的说明。

7.4.1 数字微分器

现在来考虑一个连续时间带限微分器的离散时间实现。正如在 3.9.1 节所讨论的，连续时间微分滤波器的频率响应是

$$H_c(j\omega) = j\omega \quad (7.26)$$

截止频率为 ω_c 的带限微分器的频率响应就是

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} j\omega, |\omega| < \omega_c \\ 0, |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (7.27)$$

如图 7.27 所示。利用(7.25)式的关系，若 $\omega_s = 2\omega_c$ ，可知相应的离散时间的频率响应 $H_d(e^{j\Omega})$ 是

$$H_d(e^{j\Omega}) = j\left(\frac{\Omega}{T}\right) \quad |\Omega| < \pi \quad (7.28)$$

如图 7.28 所示。利用这一离散时间频率响应，在图 7.24 中只要在 $x_c(t)$ 的采样中没有混叠产生， $y_c(t)$ 就一定是 $x_c(t)$ 的导数。

例 7.2 利用考虑该数字微分器在连续时间 sinc 函数输入时的输出，可以很方便地确定在数字微分器的实

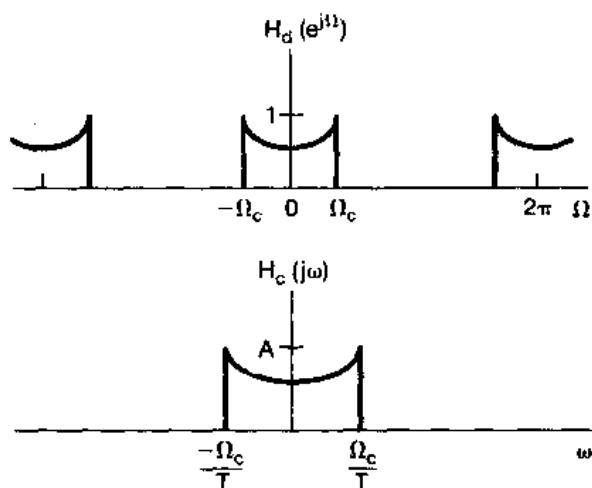


图 7.26 图 7.24 系统的离散时间频率响应及其等效的连续时间频率响应

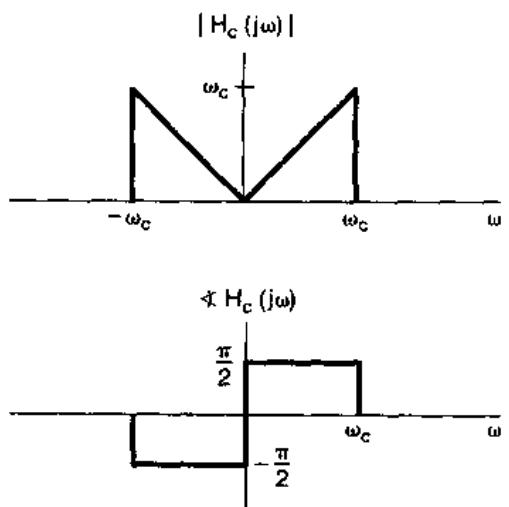


图 7.27 连续时间理想带限微分器的频率响应 $H_c(j\omega) = j\omega, |\omega| < \omega_c$

现中,该离散时间滤波器的单位脉冲响应 $h_d[n]$ 。参照图 7.24,令

$$x_c(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \quad (7.29)$$

其中 T 是采样周期。那么

$$X_c(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi T \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

它是充分带限的,以确保在采样频率 $\omega_s = 2\pi/T$ 时对 $x_c(t)$ 采样不会引起任何混叠。这样,数字微分器的输出就是

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}x_c(t) = \frac{\cos(\pi t/T)}{Tt} - \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t^2} \quad (7.30)$$

对于由(7.29)式给出的 $x_c(t)$, 相应于图 7.24 中的信号 $x_d[n]$ 可以表示为

$$x_d[n] = x_c(nT) = \frac{1}{T}\delta[n] \quad (7.31)$$

也即, $x_c(nT) = 0, n \neq 0$; 而

$$x_d[0] = x_c(0) = \frac{1}{T}$$

这个可以用罗比塔法则来证明。类似地,可以求出在图 7.24 中对应于(7.30)式 $y_c(t)$ 的 $y_d[n]$ 为

$$y_d[n] = y_c(nT) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{nT^2}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad (7.32)$$

上式,对于 $n \neq 0$,可以直接代入(7.30)式而得到证明;对于 $n = 0$,可利用罗比塔法则求证。

因此,当由(7.28)式给出的离散时间滤波器的输入是由(7.31)式表示的加权单位脉冲时,所得到的输出就由(7.32)式给出。那么就可以得出该滤波器的单位脉冲响应为

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{nT}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

7.4.2 半采样间隔延时

这一节要讨论利用图 7.19 的系统来实现一个连续时间信号的时间移位(延时)问题。于是,根据要求,当输入 $x_c(t)$ 是带限的,且采样率足够高以避免混叠的条件下,整个系统的输入输出是用下列关系联系起来的:

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta) \quad (7.33)$$

其中 Δ 代表延时时间。根据 4.3.2 节的时移性质有

$$Y_c(j\omega) = e^{-j\omega\Delta} X_c(j\omega)$$

根据(7.25)式,要被实现的等效连续时间系统必须是带限的,因此选取

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega\Delta}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases} \quad (7.34)$$

这里 ω_c 是该连续时间滤波器的截止频率。也就是说, $H_c(j\omega)$ 对于带限内的信号就相当于

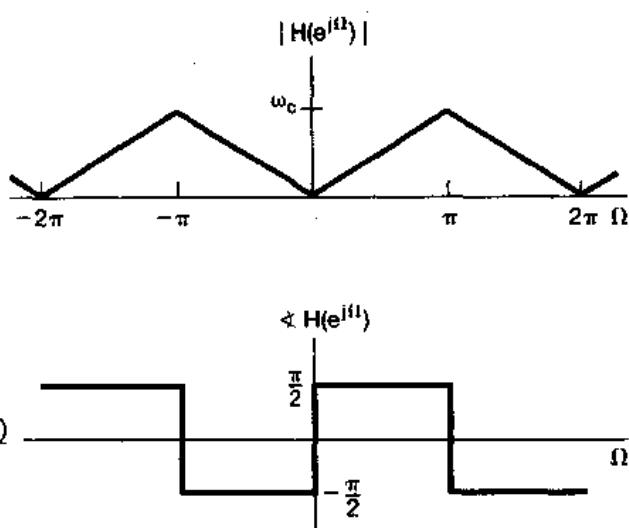


图 7.28 用于实现一个连续时间带限微分器的离散时间滤波器的频率响应

(7.33)式的一个时间移位,而对于比 ω_c 高 的频率则全部滤除。这个频率响应的模和相位特性如图 7.29(a)所示。若取采样频率 $\omega_s = 2\omega_c$, 则相应的离散时间频率响应 $H_d(e^{j\Omega})$ 是

$$H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega\Delta/T}, \quad |\Omega| < \pi \quad (7.35)$$

如图 7.29(b)所示。

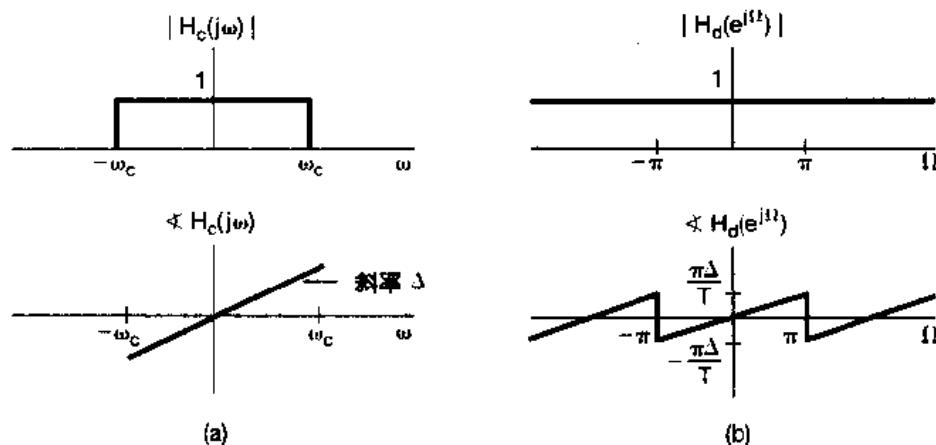


图 7.29 (a)连续时间延时系统频率响应的模和相位特性;
(b)相应的离散时间延时系统频率响应的模和相位特性

对于适当地带限输入来说,图 7.24 系统的输出,若其 $H_d(e^{j\Omega})$ 为(7.35)式,就是输入的延时,若 Δ/T 是一个整数,序列 $y_d[n]$ 就是 $x_d[n]$ 的延时,即

$$y_d[n] = x_d\left[n - \frac{\Delta}{T}\right] \quad (7.36)$$

若 Δ/T 不为一个整数,(7.36)式就没有任何意义,因为序列仅仅在整数 n 值上才有定义。然而,我们却能够利用带限内插来解释在这些情况下的 $x_d[n]$ 和 $y_d[n]$ 之间的关系。

信号 $x_c(t)$ 和 $x_d[n]$ 是通过采样和带限内插联系在一起的,
 $y_c(t)$ 和 $y_d[n]$ 之间也是一样。
若 $H_d(e^{j\Omega})$ 如(7.35)式所示,
那么 $y_d[n]$ 就等于序列 $x_d[n]$
带限内插后移位的样本。这就
如图 7.30 所示的那样,图中
 $(\Delta/T) = 1/2$ 。这种情况有时
就称为半采样间隔延时。

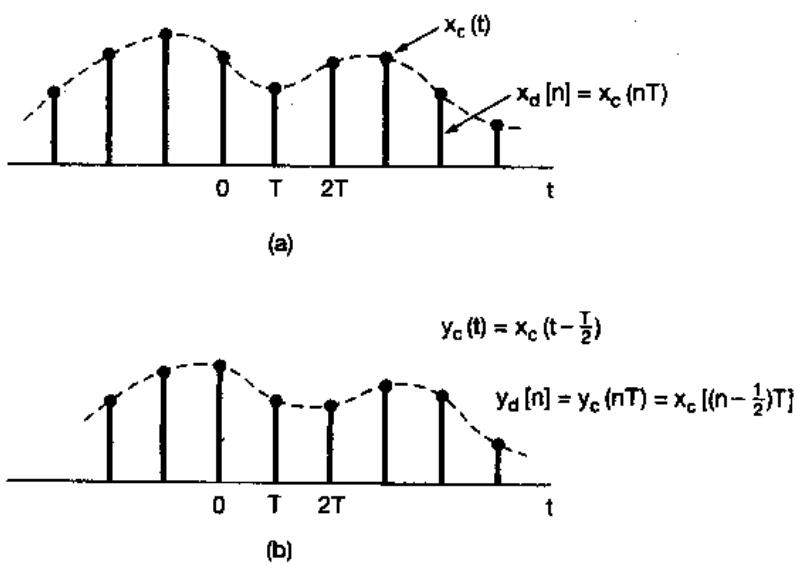


图 7.30 (a)连续时间信号 $x_c(t)$ 的样本序列;
(b)在(a)中延时半个采样间隔的序列

例 7.3 在例 7.2 中所采用的办法也可以用来确定半采样间隔延时系统中的离散时间滤波器的单位脉冲响应 $h_d[n]$ 。参照图 7.24,令

$$x_c(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \quad (7.37)$$

由例 7.2 可得

$$x_d[n] = x_c(nT) = \frac{1}{T} \delta[n]$$

同时,因为对于(7.37)式的输入不存在混叠,所以半采样间隔延时系统的输出就是

$$y_c(t) = x_c(t - T/2) = \frac{\sin(\pi(t - T/2)/T)}{\pi(t - T/2)}$$

以及在图 7.24 中的序列 $y_d[n]$ 就是

$$y_d[n] = y_c(nT) = \frac{\sin(\pi(n - \frac{1}{2}))}{T\pi(n - \frac{1}{2})}$$

从而可得

$$h[n] = \frac{\sin(\pi(n - \frac{1}{2}))}{\pi(n - \frac{1}{2})}$$

7.5 离散时间信号采样

到目前为止,在这一章已经讨论了连续时间信号的采样,而且为明了连续时间采样进行了必要的分析,以及它的若干应用。在这一节将会看到,对离散时间信号的采样也有一些十分类似的性质和结果,包括它的若干重要应用。

7.5.1 脉冲串采样

和利用图 7.2 的系统完成的连续时间采样相类似,离散时间信号的采样也能够表示成如图 7.31 所示的系统。这里,由采样过程形成的新序列 $x_p[n]$ 在采样周期 N 的整倍数点上就等于原来的序列 $x[n]$,而在采样点之间都是零,即

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & \text{若 } n = N \text{ 的整倍数} \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

(7.38)

和 7.1 节的连续时间采样相同,离散时间采样的频域效果可用 5.5 节的相乘性质得出。于是,由于

$$\begin{aligned} x_p[n] &= x[n]p[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN]\delta[n - kN] \end{aligned}$$

(7.39)

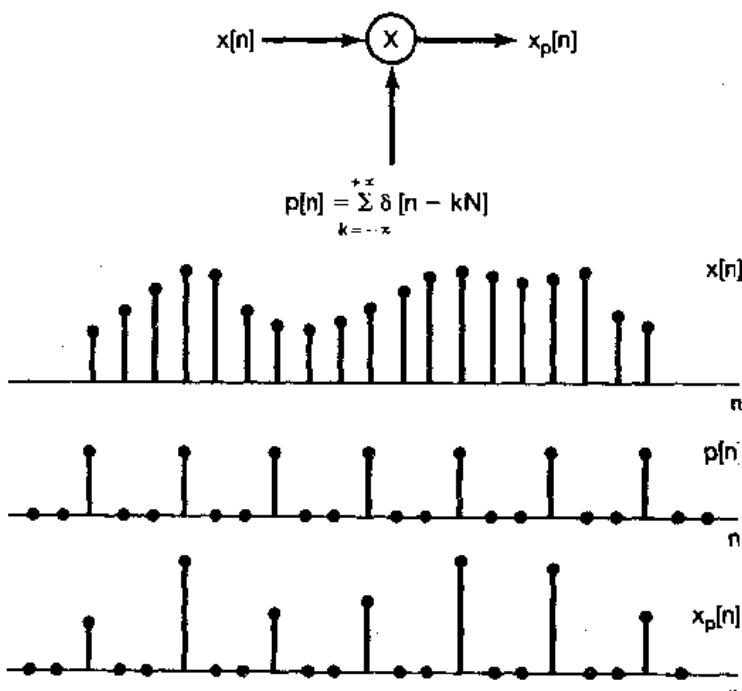


图 7.31 离散时间采样

在频域内就有

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (7.40)$$

由例 5.6, 采样序列 $p[n]$ 的傅里叶变换是

$$P(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (7.41)$$

式中采样频率 $\omega_s = 2\pi/N$ 。将(7.40)式和(7.41)式结合起来, 就得

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega-k\omega_s)}) \quad (7.42)$$

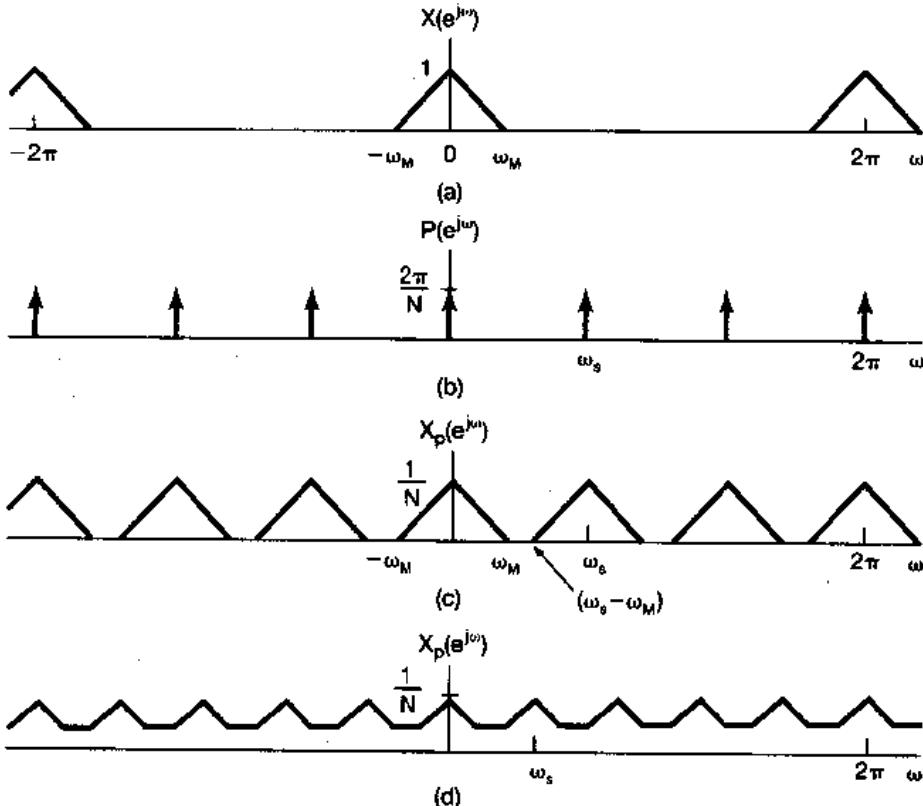


图 7.32 一个离散时间信号经脉冲串采样的频域效果:

- (a) 原始信号的频谱;
- (b) 采样序列的频谱;
- (c) 在 $\omega_s > 2\omega_M$ 时已采样信号的频谱;
- (d) 在 $\omega_s < 2\omega_M$ 时已采样信号的频谱, 这时发生了混叠

(7.42)式就是对应于连续时间采样中的(7.6)式, 并用图 7.32 给予说明。在图 7.32(c)中, 由于 $(\omega_s - \omega_M) > \omega_M$, 或者说 $\omega_s > 2\omega_M$, 因此没有频谱重叠[也就是说, 这些 $X(e^{j\omega})$ 重复的非零部分不重叠];而在图 7.32(d)中, 由于 $\omega_s < 2\omega_M$, 频域中的混叠就产生了。在没有任何混叠的情况下, $X(e^{j\omega})$ 如实地在 $\omega = 0$ 和 2π 的整数倍附近再现, 这样 $x[n]$ 就能利用增益为 N , 截止频率大于 ω_M 而小于 $\omega_s - \omega_M$ 的低通滤波器从 $x_p[n]$ 中恢复出来, 如图 7.33 所示。图中已经给出该低通滤波器的截止频率为 $\omega_s/2$ 。如果对图 7.33(a)的整个系统, 所加的输入序列是属于 $\omega_s < 2\omega_M$ 的话, 从而有混叠存在, 那么 $x_r[n]$ 就一定不再等于 $x[n]$ 。然而, 和连续时间采样相同, 这两个序列 $x[n]$ 和 $x_r[n]$ 在采样周期的整数倍点上总是相等的;这就是说, 与(7.13)式相对应的, 有

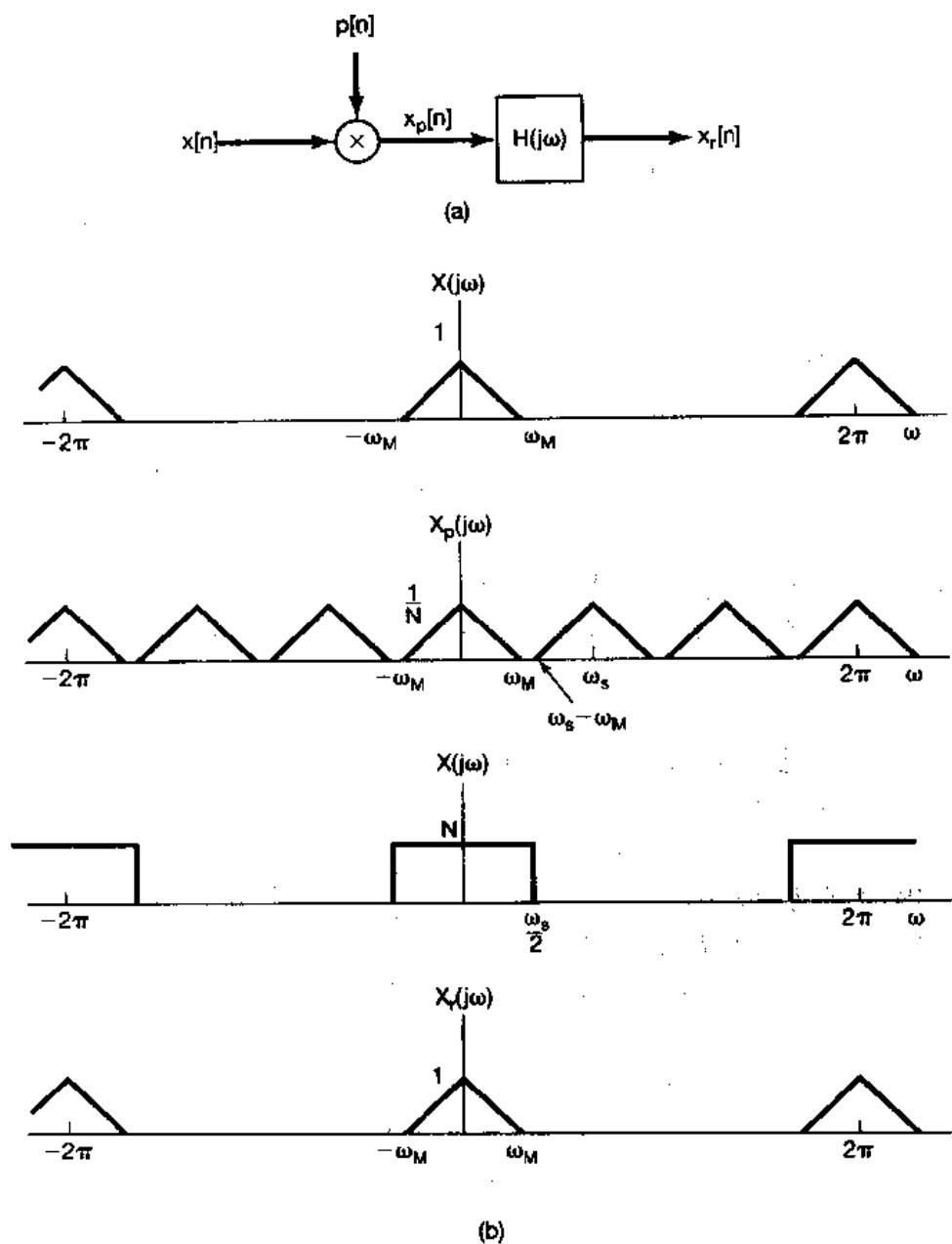


图 7.33 利用理想低通滤波器从样本中完全恢复一个离散时间信号：

- (a) 一个带限信号采样并从样本中恢复的方框图；(b)信号 $x[n]$ 的频谱；
- (c) $x_p[n]$ 的频谱；(d)截止频率为 $\omega_s/2$ 的理想低通滤波器的频率响应；
- (e) 重建信号 $x_r[n]$ 的频谱。由于此图是对应于 $\omega_s > 2\omega_M$ 画的，所以没有混叠， $x_r[n] = x[n]$

$$x_r[kN] = x[kN], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.43)$$

这一点与是否存在混叠无关(见习题 7.46)。

例 7.4 有一序列 $x[n]$ ，其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 具有如下特点：

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad 2\pi/9 \leq |\omega| \leq \pi$$

为了确定确保不发生混叠而能对 $x[n]$ 采样的最低采样率，就必须求出最大的 N ，以使得

$$\frac{2\pi}{N} \geq 2\left(\frac{2\pi}{9}\right) \Rightarrow N \leq 9/2$$

从而可得 $N_{max} = 4$, 对应的采样频率是 $2\pi/4 = \pi/2$ 。

通过对 $x_p[n]$ 利用一个低通滤波器来重建 $x[n]$ 的过程, 也能看作是在时域中类似于(7.11)式的一个内插公式。用 $h[n]$ 表示该低通滤波器的单位脉冲响应, 则有

$$h[n] = \frac{N\omega_c \sin \omega_c n}{\pi \omega_c n} \quad (7.44)$$

重建的序列 $x_r[n]$ 就是

$$x_r[n] = x_p[n] * h[n] \quad (7.45)$$

或者等效地写成

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \frac{N\omega_c \sin \omega_c (n - kN)}{\pi \omega_c (n - kN)} \quad (7.46)$$

(7.46)式代表一种理想的带限内插, 从而要求实现一个理想低通滤波器。在一般应用中, 往往在图 7.33 中使用一个适当近似的低通滤波器, 这时, 等效的内插公式具有如下形式:

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] h_r[n - kN] \quad (7.47)$$

其中 $h_r[n]$ 就是内插滤波器的单位脉冲响应。和连续时间内插一样, 在离散时间内插中, 也有零阶保持和一阶保持这样的内插近似, 其中几个具体例子可见习题 7.50。

7.5.2 离散时间抽取与内插

离散时间采样的原理在诸如滤波器设计和实现或在通信中都有很多重要应用。在许多这样的应用中, 直接按照图 7.31 的形式来表示、传输或存贮这个已采样的序列 $x_p[n]$ 是很不经济的, 因为该序列 $x_p[n]$ 在采样点之间明知都是零。因此, 往往将该序列用一个新序列 $x_b[n]$ 来代替, 而 $x_b[n]$ 就是用 $x_p[n]$ 中的每隔 N 点上的序列值所构成, 即

$$x_b[n] = x_p[nN] \quad (7.48)$$

或者, 因为 $x_p[n]$ 和 $x[n]$ 在 N 的整数倍上都是相等的, 可等效为

$$x_b[n] = x[nN] \quad (7.49)$$

一般就把提取每第 N 个点上的样本这样的过程称为抽取^①。 $x[n]$, $x_p[n]$ 和 $x_b[n]$ 之间的关系如图 7.34 所示。

为了确定抽取在频域中的效果, 希望能求得 $x_b[n]$ 的傅里叶变换 $X_b(e^{j\omega})$ 和 $X(e^{j\omega})$ 之间的关系。为此, 注意到

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_b[k] e^{-jk\omega} \quad (7.50)$$

或利用(7.48)式, 有

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_p[kN] e^{-jk\omega} \quad (7.51)$$

^① 抽取(decimation)通常说的是每隔 10 抽 1, 然而, 现在它已经成了通用的术语, 通指每隔 N (不一定为 10)取 1 的运算。

如果令 $n = kN$, 或者 $k = n/N$, 那么就能写成

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{n \text{ 为 } N \text{ 的整数倍}} x_p[n] e^{-j\omega n/N}$$

因为当 n 不为 N 的整数倍时, $x_p[n] = 0$, 所以上式也能写成

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{-j\omega n/N} \quad (7.52)$$

进而, (7.52) 式的右边就是 $x_p[n]$ 的傅里叶变换, 即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{-j\omega k/N} = X_p(e^{j\omega/N}) \quad (7.53)$$

由此, 由(7.52)式和(7.53)式可得

$$X_b(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega/N}) \quad (7.54)$$

这一关系如图 7.35 所示, 并从中可以看到, 已采样序列 $x_p[n]$ 和抽取序列 $x_b[n]$ 的频谱差别只在频率尺度上或归一化上。如果原来的频谱 $X(e^{j\omega})$ 被适当地带限, 以致于在 $X_p(e^{j\omega})$ 中不存在混叠, 那么就如图 7.35 所示, 抽取的效果就是将原来序列的频谱扩展到一个较宽的频带部分。

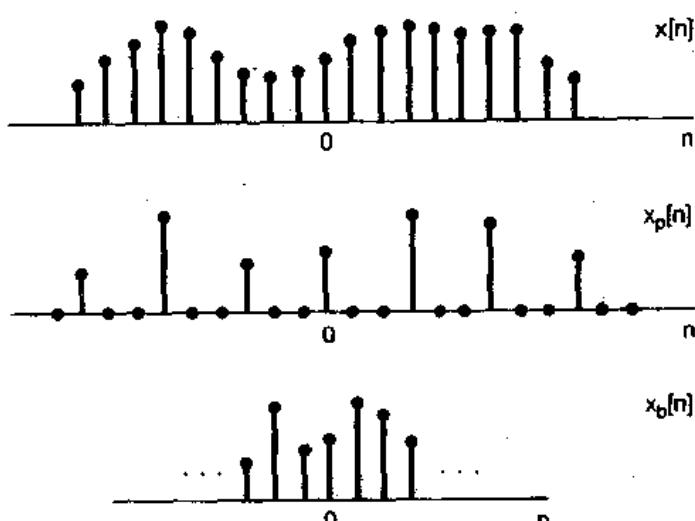


图 7.34 已采样序列 $x_p[n]$ 和抽取序列之间的关系

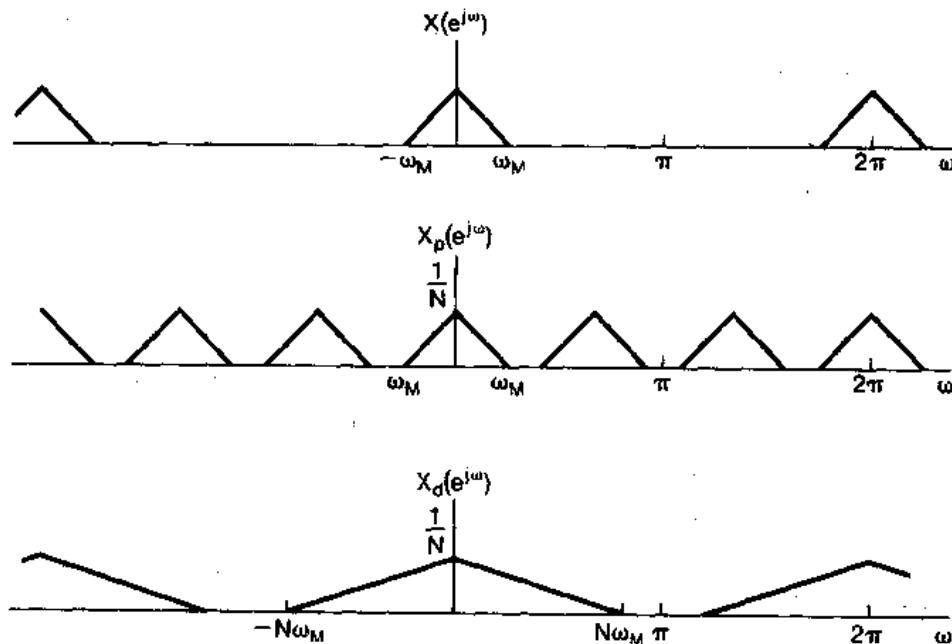


图 7.35 采样与抽取之间的关系在频域中的说明

如果这个原始序列 $x[n]$ 是经由连续时间信号采样而得到的话, 那么抽取过程就可以看成是在连续时间信号上将采样率减小 N 倍的结果。因此, 为了避免在抽取过程中产生混叠,

原序列 $x[n]$ 的 $X(e^{j\omega})$ 就不能占满整个频带。换句话说，如果序列能够被抽取而又不引入混叠，那么原来的连续时间信号是被过采样了的，从而原采样率可以减小而不会发生混叠。由于这一原因。因此抽取的过程往往就称减采样(downsampling)。

在某些应用中，序列是由对某一连续连续时间信号采样而得到的，原有采样率可能是在不发生混叠的前提下尽可能取低，而在经过另外的处理和滤波后，序列的带宽可能减小。这样的一个例子就如图 7.36 所示。因为图中离散时间滤波器的输出是带限的，从而就有可能进行减采样或抽取。

正如减采样在某些应用中是很用的一样，也存在着一些情况，需 $x_c(t)$ 要把一个序列转换到一个较高的等效采样上去，这种称为增采样(up-sampling)或内插的过程也是有用的。增采样基本上就是抽取或减采样的逆过程。正如在图 7.34 和图 7.35 中所表明的，在抽取中是先采样，然而仅保留采样瞬时的序列值。为了增采样，应将上述过程颠倒过来，例如参照图 7.34。考虑将序列 $x_b[n]$ 增采样以得到 $x[n]$ 的过程。由 $x_b[n]$ ，可形成序列 $x_p[n]$ ，这只需要在 $x_b[n]$ 的每一个序列值之间插入 $(N-1)$ 个幅度为零的序列值即可。然后就可以利用低通滤波从 $x_p[n]$ 中得到这个已被内插了的序列 $x[n]$ 。整个过程全部综合在图 7.37 中。

例 7.5 这个例子用来说说明如何将内插和抽取结合起来可以用于对一个序列减采样而又不会带来混叠。应该注意的是：一旦离散时间序列频谱在一个周期内的非零部分已经扩展到将 $-\pi$ 到 π 的整个频带内填满，就达到了最大可能的减采样。

考虑序列 $x[n]$ ，其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 如图 7.38(a)所示。如在例 7.4 中所讨论的，对这个序列在脉冲串采样时为不带来混叠能用的最低采样率是 $2\pi/4$ 。这就相当于对 $x[n]$ 每 4 个值采样一次。如果对该已采样序列以 4 抽取，就得到序列 $x_b[n]$ ，它的频谱如图 7.38(b)所示。很显然，这时对原有的频谱来说，仍然没有任何混叠。然而，在 $8\pi/9 \leq |\omega| \leq \pi$ 这段频带内频谱还是零，这就使人想到仍有进一步减采样的余地。

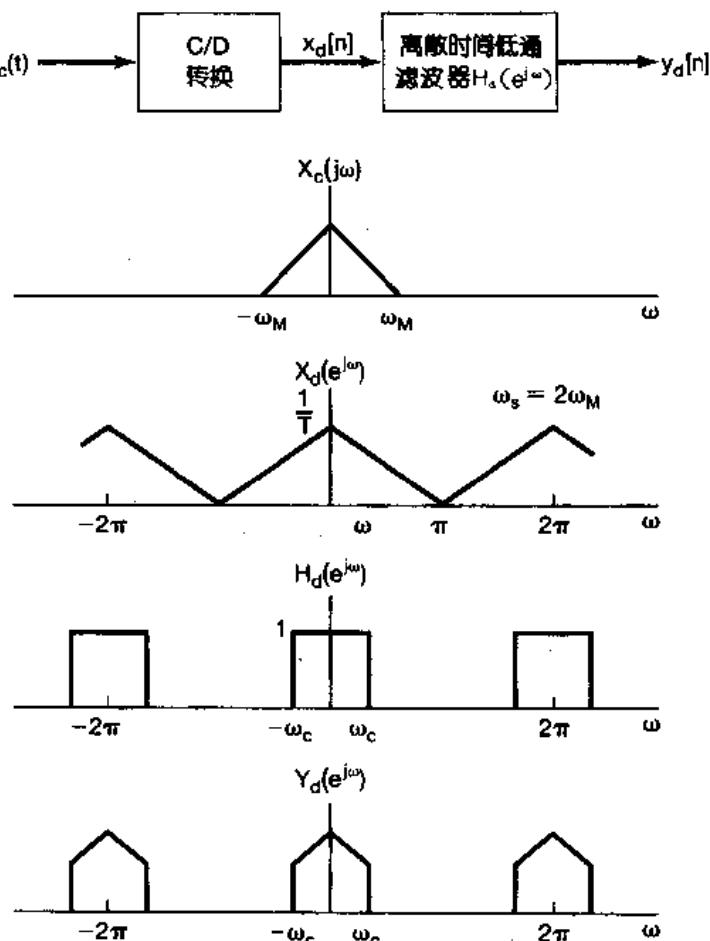


图 7.36 连续时间信号最初是在奈奎斯特率下进行的采样，
经过离散时间滤波以后，所得到的序列可以进一步
减采样。图中 $X_c(j\omega)$ 是 $x_c(t)$ 的连续时间傅里叶
变换， $X_d(e^{j\omega})$ 和 $Y_d(e^{j\omega})$ 分别是 $x_d[n]$ 和 $y_d[n]$ 的
离散时间傅里叶变换，而 $H_d(e^{j\omega})$ 是离散时间低通
滤波器的频率响应。

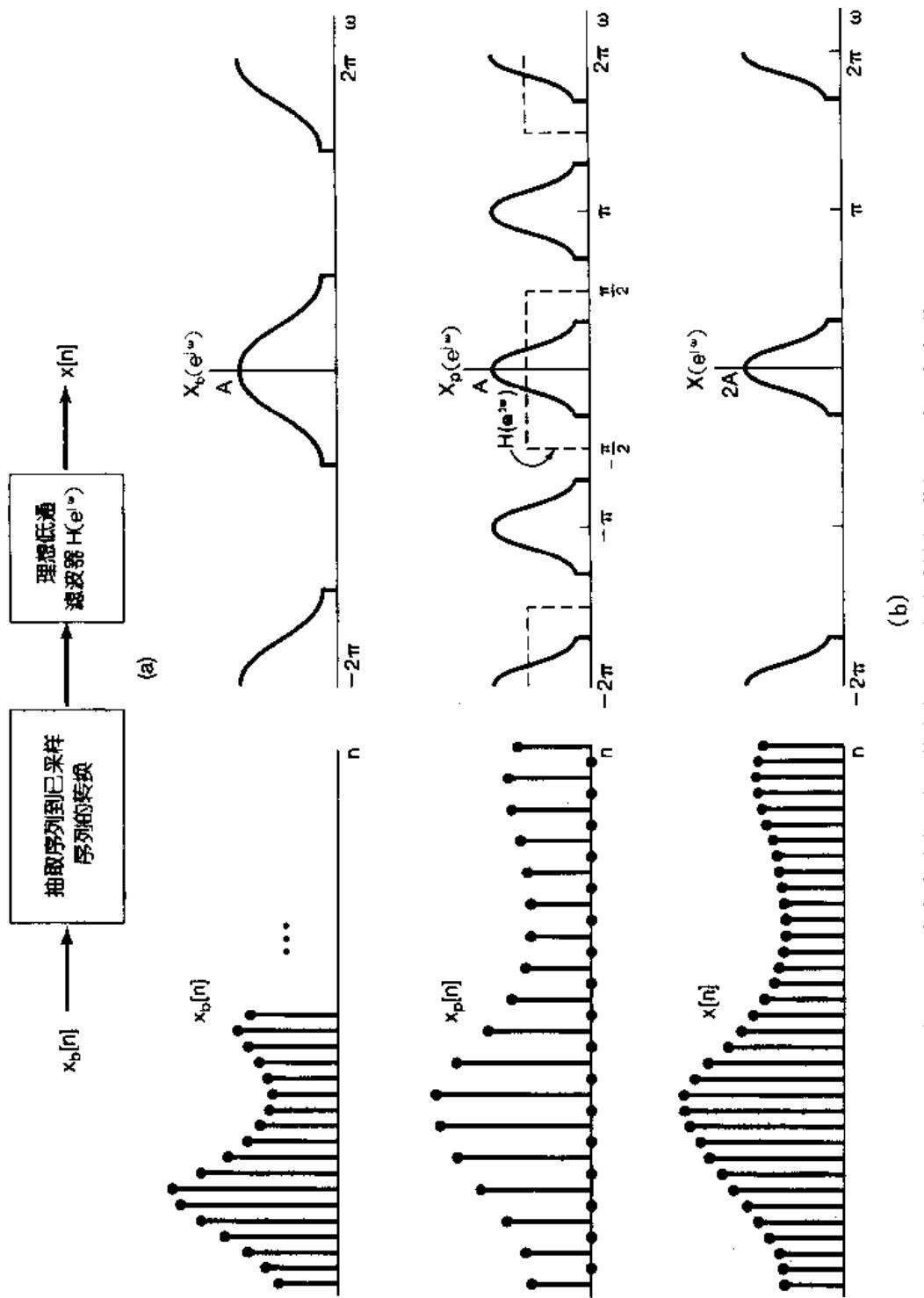


图 7.37 增采样:(a)整个系统方框图;(b)增采样(一倍)后的序列与频谱

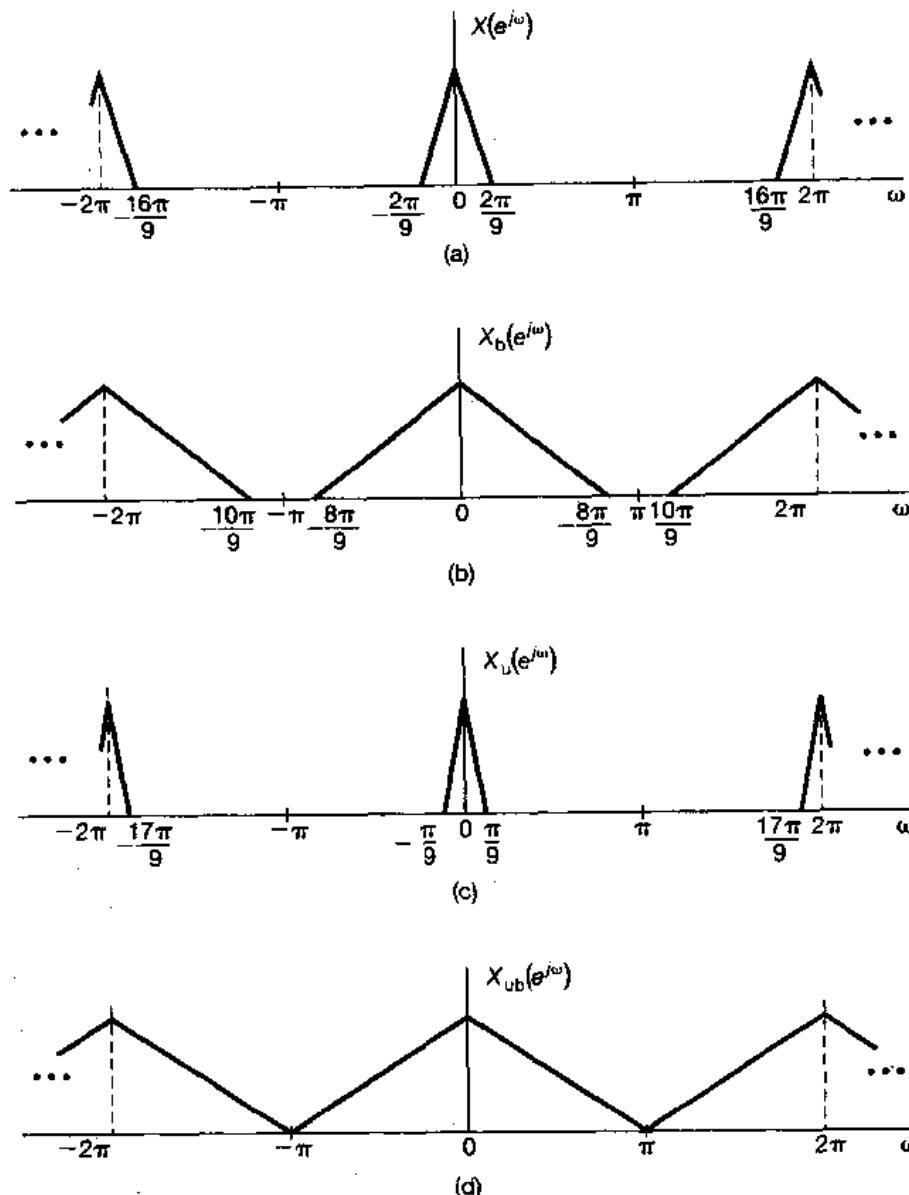


图 7.38 例 7.5 的有关频谱：

- (a) $x[n]$ 的频谱；(b) 减采样 4 后的频谱；
- (c) 将 $x[n]$ 增采样 2 后的频谱；(d) 将 $x[n]$ 增采样 2, 再减采样 9 的频谱

具体来说，考查一下图 7.38(a)可见，如果我们能够将频率标尺扩大 $9/2$ 倍，那么所得到的频谱的非零值就占满了整个 $-\pi$ 到 π 的频率范围。但是， $9/2$ 不是一个整数，因此无法单凭减采样来实现它，而必须先将 $x[n]$ 以 2 增采样，然后再以 9 减采样。当 $x[n]$ 以 2 增采样后所得到的序列 $x_u[n]$ 的频谱 $X_u(e^{j\omega})$ 如图 7.38(c)所示。当 $x_u[n]$ 再以 9 减采样所得到的序列 $x_{ub}[n]$ 的频谱 $X_{ub}(e^{j\omega})$ 就如图 7.38(d)所示。这样一个联合作用的结果就相当于将 $x[n]$ 以一个非整数值 $9/2$ 减采样。假设 $x[n]$ 代表一个连续时间信号 $x_c(t)$ 的无混叠样本，那么这个已内插和抽取的序列就代表了 $x_c(t)$ 的最大可能(无混叠)减采样。

7.6 小 结

本章研究了采样的概念,据此一个连续时间或离散时间信号可以用该信号的等间隔样本值序列来表示。信号能完全从这些样本序列中恢复出来的条件寄寓于采样定理中。该定理要求,为了完全恢复被采样的信号,信号必须是带限的,而且采样频率必须大于要被采样信号中最高频率的两倍。在这些条件下,原始信号的重建是通过理想低通滤波来完成的,这种理想的重建信号过程的时域解释一般就称为理想带限内插。在实际实现中,低通滤波器是近似理想的,时域内插就不再是完善的。在某些情形下,诸如像零阶保持或线性内插(一阶保持)等这些简单的内插过程就已足够。

如果一个信号是欠采样了的(即:采样频率小于采样定理中要求的频率),那么理想带限内插所重建的信号,就会是混叠失真了的原信号。在很多情况下,选取采样率以避免混叠出现是很重要的;然而,也有一些重要的例子,譬如频闪器,混叠现象又被加以利用。

采样有许多重要的应用。一个特别有意义的应用场合是利用采样的原理,采用离散时间系统来处理连续时间信号,这就可以通过利用微处理机、微处理器或任何面向离散时间信号处理的各种专用器件来完成。

对于连续时间信号和离散时间信号而言,采样的基本理论是类似的。在离散时间情况下,有一个与离散时间采样密切相关的概念称之为抽取,抽取序列是对原序列在相等的间隔上提取序列值得到的。采样与抽取之间的差别在于:对已采样序列来说,诸样本值之间是若干个零值,而对抽取序列来说,这些零值点被摒弃,从而在时间上对序列进行了压缩。抽取的逆过程是内插。抽取和内插的概念出现在很多重要的信号与系统的实际应用中,其中包括通信系统,数字音频,高分辨率电视,以及其它很多应用领域。

习 题

习题的第一部分属基本题,答案在书末给出。其余两部分分属基本题和深入题。

基本题(附答案)

- 7.1 已知一实值信号 $x(t)$,当采样频率 $\omega_s = 1000\pi$ 时, $x(t)$ 能用它的样本值唯一确定。问 $X(j\omega)$ 在什么 ω 值下保证为零?
- 7.2 一连续时间信号 $x(t)$ 从一个截止频率为 $\omega_c = 1000\pi$ 的理想低通滤波器的输出得到,如果对 $x(t)$ 完成冲激串采样,下列采样周期中的哪一些可能保证 $x(t)$ 在利用一个合适的低通滤波器后能从它的样本中得到恢复?
- (a) $T = 0.5 \times 10^{-3}$ (b) $T = 2 \times 10^{-3}$ (c) $T = 10^{-4}$
- 7.3 在采样定理中,采样频率必须要超过的那个频率称为奈奎斯特率。试确定下列各信号的奈奎斯特率:
- (a) $x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$
- (b) $x(t) = \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}$ (c) $x(t) = \left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)^2$
- 7.4 设 $x(t)$ 是一个奈奎斯特率为 ω_0 的信号,试确定下列各信号的奈奎斯特率:
- (a) $x(t) + x(t - 1)$ (b) $\frac{dx(t)}{dt}$ (c) $x^2(t)$ (d) $x(t)\cos\omega_0 t$

7.5 设 $x(t)$ 是一个奈奎斯特率为 ω_0 的信号, 同时设

$$y(t) = x(t)p(t-1)$$

式中

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), T < \frac{2\pi}{\omega_0}$$

当某一滤波器以 $y(t)$ 作输入, $x(t)$ 为其输出时, 请给出该滤波器频率响应的模和相位特性上的限制。

7.6 在图 P7.6 所示系统中, 有两个时间函

数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 相乘, 其乘积 $w(t)$

由一冲激串采样, $x_1(t)$ 带限于 ω_1 ,

$x_2(t)$ 带限于 ω_2 , 即

$$X_1(j\omega) = 0, |\omega| \geq \omega_1$$

$$X_2(j\omega) = 0, |\omega| \geq \omega_2$$

试求最大的采样间隔 T , 以使得 $w(t)$

通过利用某一理想低通滤波器能从

$w_p(t)$ 中恢复出来。

7.7 一信号 $x(t)$ 用一采样周期 T 经过一

个零阶保持的处理产生一个信号

$x_0(t)$, 设 $x_1(t)$ 是在 $x(t)$ 的样本上

经过一阶保持处理的结果, 即

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h_1(t-nT)$$

其中 $h_1(t)$ 是图 P7.7 所示的函数。请给出一个滤波器的频率响应, 该滤波器

当输入为 $x_0(t)$ 时, 产生的输出为 $x_1(t)$ 。

7.8 有一实值且为奇函数的周期信号 $x(t)$, 它的傅里叶级数表示为

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \sin(k\pi t)$$

令 $\hat{x}(t)$ 代表用采样周期 $T=0.2$ 的周期冲激串对 $x(t)$ 进行采样的结果。

(a) 混叠会发生吗?

(b) 若 $\hat{x}(t)$ 通过一个截止频率为 π/T 和通带增益为 T 的理想低通滤波器, 求输出信号 $g(t)$ 的傅里叶级数表示。

7.9 考虑信号 $x(t)$ 为

$$x(t) = \left(\frac{\sin 50\pi t}{\pi t} \right)^2$$

现在想用采样频率 $\omega_s = 150\pi$ 对 $x(t)$ 进行采样, 以得到一个信号 $g(t)$, 其傅里叶变换为 $G(j\omega)$ 。为确保

$$G(j\omega) = 75X(j\omega), |\omega| \leq \omega_0$$

求 ω_0 的最大值, 其中 $X(j\omega)$ 为 $x(t)$ 的傅里叶变换。

7.10 判断下面每一种说法是对, 还是错:

(a) 只要采样周期 $T < 2T_0$, 信号 $x(t) = u(t+T_0) - u(t-T_0)$ 的冲激串采样不会有混叠。

(b) 只要采样周期 $T < \pi/\omega_0$, 傅里叶变换为 $X(j\omega) = u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$ 的信号 $x(t)$ 的冲激串采样不会有混叠。

(c) 只要采样周期 $T < 2\pi/\omega_0$, 傅里叶变换为 $X(j\omega) = u(\omega) - u(\omega - \omega_0)$ 的信号 $x(t)$ 的冲激串采样不会有混叠。

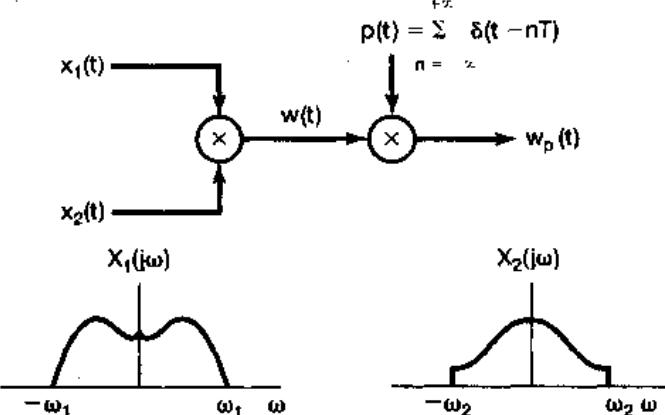


图 P7.6

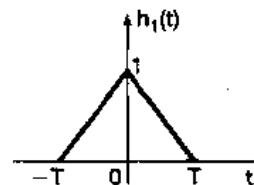


图 P7.7

- 7.11 设 $x_c(t)$ 是一连续时间信号, 它的傅里叶变换具有如下特点: $X_c(j\omega) = 0$, $|\omega| \geq 2000\pi$ 。某一离散时间信号经由

$$x_d[n] = x_c(n(0.5 \times 10^{-3}))$$

而得到。试对下列每一个有关 $x_d[n]$ 的傅里叶变换 $X_d(e^{j\omega})$ 所给限制, 确定在 $X_c(j\omega)$ 上的相应限制:

(a) $X_d(e^{j\omega})$ 为实函数; (b) 对所有 ω , $X_d(e^{j\omega})$ 的最大值是 1;

(c) $X_d(e^{j\omega}) = 0$ 对 $\frac{3\pi}{4} \leq |\omega| \leq \pi$; (d) $X_d(e^{j\omega}) = X_d(e^{j(\omega-\pi)})$

- 7.12 有一离散时间信号 $x_d[n]$, 其傅里叶变换 $X_d(e^{j\omega})$ 具有如下性质: $X_d(e^{j\omega}) = 0$, $3\pi/4 \leq |\omega| \leq \pi$ 。现该信号被转换为一连续时间信号为

$$x_c(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - nT)}{\pi(t - nT)}$$

式中 $T = 10^{-3}$ 。确定 $x_c(t)$ 的傅里叶变换 $X_c(j\omega)$ 保证为零的 ω 值。

- 7.13 参照图 7.24 所示的滤波方法, 假定所用的采样周期为 T , 输入 $x_c(t)$ 为带限, 而有 $X_c(j\omega) = 0$, $|\omega| \geq \pi/T$ 。若整个系统具有 $y_c(t) = x_c(t - 2T)$, 试求图 7.24 中离散时间滤波器的单位脉冲响应 $h[n]$ 。

- 7.14 假定在上题中有

$$y_c(t) = \frac{d}{dt} x_c\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

重做习题 7.13。

- 7.15 对 $x[n]$ 进行脉冲串采样, 得到

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[n - kN]$$

若 $X(e^{j\omega}) = 0$, $3\pi/7 \leq |\omega| \leq \pi$, 试确定当采样 $x[n]$ 时保证不发生混叠的最大采样间隔 N 。

- 7.16 关于 $x[n]$ 及其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 给出下列条件:

1. $x[n]$ 为实序列

2. $X(e^{j\omega}) \neq 0$, $0 < \omega < \pi$

3. $x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 2k] = \delta[n]$

求 $x[n]$ 。解题时注意到: $(\sin \frac{\pi}{2} n)/(\pi n)$ 满足其中的两个条件是有用的。

- 7.17 考虑一理想离散时间带阻滤波器, 其单位脉冲响应为 $h[n]$, 频率响应在 $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 内为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{4}, |\omega| \geq \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

求单位脉冲响应为 $h[2n]$ 的滤波器的频率响应。

- 7.18 假设截止频率为 $\pi/2$ 的一个理想离散时间低通滤波器的单位脉冲响应是用于内插(按图 7.37)以得到一个 2 倍的增采样序列, 问对应于这个增采样单位脉冲响应的频率响应是什么?

- 7.19 考虑图 P7.19 所示的系统, 输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$ 。

零值插入系统在每一序列 $x[n]$ 值之间插入两个零值点, 抽取系统定义为

$$y[n] = w[5n]$$

其中 $w[n]$ 是抽取系统的输入序列。若输入 $x[n]$ 为

$$x[n] = \frac{\sin \omega_1 n}{\pi n}$$

试确定下列 ω_1 值时的输出 $y[n]$:

$$(a) \omega_1 \leq \frac{3\pi}{5} \quad (b) \omega_1 > \frac{3\pi}{5}$$

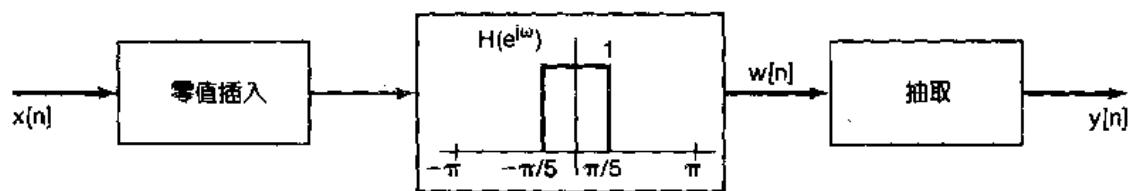


图 P7.19

7.20 有两个离散时间系统 S_A 和 S_B 提出来用于实现一个截止频率为 $\pi/4$ 的理想低通滤波器。系统 S_A 如图 P7.20(a) 所示, 系统 S_B 如图 P7.20(b) 所示。在这些图中, S_A 相应于一个零值插入系统, 它是在每一个输入样本之后插入一个零值点; 而 S_B 相应于一个抽取系统, 它是在其输入中每两个取一个。

- (a) S_A 相应于所要求的理想低通滤波器吗?
- (b) S_B 相应于所要求的理想低通滤波器吗?

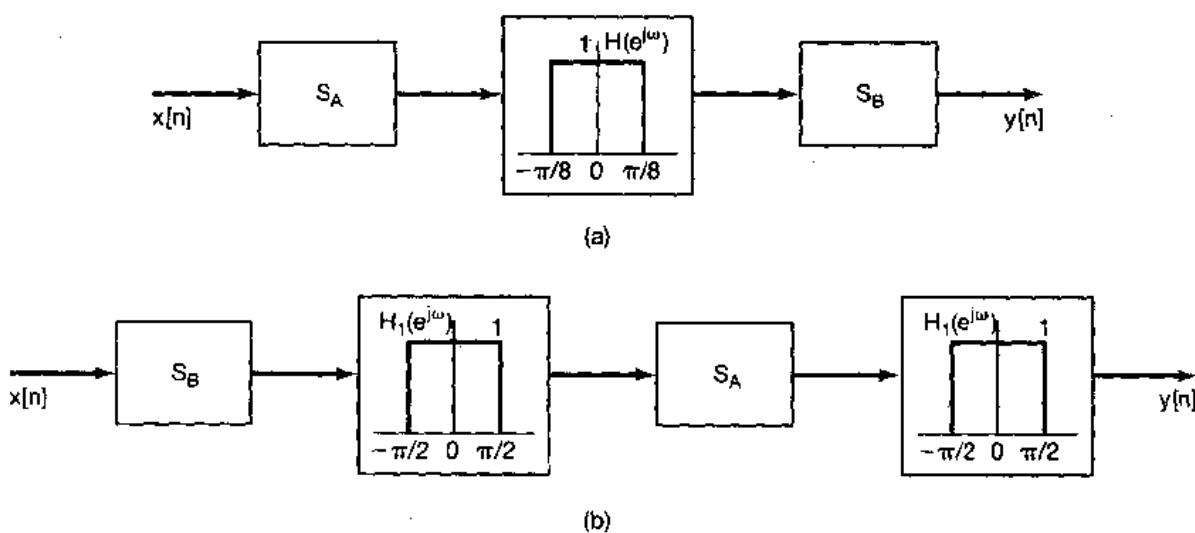


图 P7.20

基本题

7.21 一信号 $x(t)$, 其傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 对 $x(t)$ 进行冲激串采样, 产生 $x_p(t)$ 为

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

其中 $T = 10^{-4}$ 。关于 $x(t)$ 和 / 或 $X(j\omega)$ 所作的下列一组限制中的每一种, 采样定理(见 7.1 节)能保证 $x(t)$ 可完全从 $x_p(t)$ 中恢复吗?

- | | |
|---|--|
| (a) $X(j\omega) = 0, \omega > 5000\pi$ | (b) $X(j\omega) = 0, \omega > 15000\pi$ |
| (c) $\Re\{X(j\omega)\} = 0, \omega > 5000\pi$ | (d) $x(t)$ 为实, $X(j\omega) = 0, \omega > 5000\pi$ |
| (e) $x(t)$ 为实, $X(j\omega) = 0, \omega < -15000\pi$ | (f) $X(j\omega) * X(j\omega) = 0, \omega > 15000\pi$ |
| (g) $ X(j\omega) = 0, \omega > 5000\pi$ | |

7.22 信号 $y(t)$ 由两个均为带限的信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 卷积而成, 即

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

其中

$$X_1(j\omega) = 0, |\omega| > 1000\pi$$

$$X_2(j\omega) = 0, |\omega| > 2000\pi$$

现对 $y(t)$ 作冲激串采样, 以得到

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nT) \delta(t - nT)$$

请给出 $y(t)$ 保证能从 $y_p(t)$ 中恢复出来的采样周期 T 的范围

- 7.23 图 P7.23 是一个用交替符号冲激串来采样信号的系统。输入信号的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 如图中所示。

- (a) 对于 $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, 画出 $x_p(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶变换
- (b) 对于 $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, 确定一个能从 $x_p(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的系统
- (c) 对于 $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, 确定一个能从 $y(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的系统
- (d) 确定 $x(t)$ 既能从 $x_p(t)$ 又能从 $y(t)$ 恢复的最大 Δ 值(相对于 ω_M)。

- 7.24 图 P7.24 的是一个将输入信号乘以一个周期方波的系统, $s(t)$ 的周期是 T , 输入信号是带限的, 且为 $|X(j\omega)| = 0, |\omega| \geq \omega_M$ 。

- (a) 对于 $\Delta = T/3$, 利用 ω_M 确定 T 的最大值, 以使得在 $W(j\omega)$ 中 $X(j\omega)$ 的重复部分之间没有混叠。
- (b) 对于 $\Delta = T/4$, 利用 ω_M 确定 T 的最大值, 以使得在 $W(j\omega)$ 中 $X(j\omega)$ 的重复部分之间没有混叠。

- 7.25 图 P7.25 是一个采样器紧跟着一个用于从样本

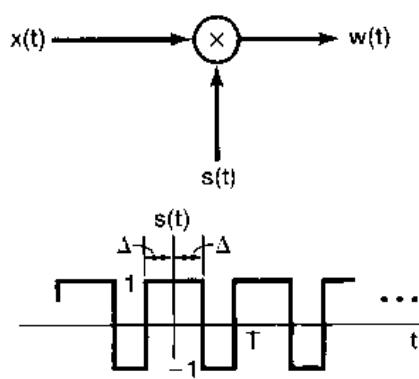


图 P7.24

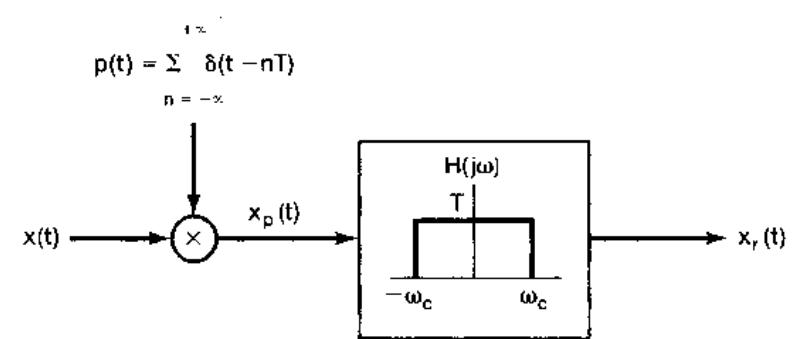


图 P7.25

$x_p(t)$ 中恢复出 $x(t)$ 的一个理想低通滤波器。根据采样定理知道, 若 $\omega_s = 2\pi/T$ 大于 $x(t)$ 中存在的最高频率的两倍, 而且 $\omega_c = \omega_s/2$, 那么重建信号 $x_r(t)$ 就一定等于 $x(t)$ 。如果在 $x(t)$ 的带宽上这个条件不满足, $x_r(t)$ 就一定不等于 $x(t)$ 。本题要证明, 如果 $\omega_c = \omega_s/2$, 那么无论选什么 T , $x_r(t)$ 和 $x(t)$ 在采样瞬时总是相等的, 即

$$x_r(kT) = x(kT), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

为了得到这结果, 考虑一下(7.11)式, 它将 $x_r(t)$ 用 $x(t)$ 的样本值表示成

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) T \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(t - nT)]}{\omega_c(t - nT)}$$

由于 $\omega_c = \omega_s/2$, 上式变为

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t - nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t - nT)} \quad (P7.25-1)$$

只要考虑到 $[\sin(\alpha)]/\alpha = 0$ 的 α 值, 勿需对 $x(t)$ 作任何限制, 由 (P7.25-1) 式证明: 对任意整数 k , 都有 $x_r(kT) = x(kT)$ 。

- 7.26 采样定理说的是, 一个信号必须要以大于它的带宽两倍的采样率来采样(或者等效为大于它的最高频率的两倍)。这就意味着, 如果有一个信号 $x(t)$ 其频谱如图 P7.26(a) 所示, 那么就必须用大于 $2\omega_2$ 的采样率对 $x(t)$ 进行采样。然而, 因为这个信号的大部分能量是集中在一个窄带范围内的, 因此似乎有理由可以期望能用一个比 2 倍于最高频率低的采样率来采样。能量集中于某一频带范围内的信号往往称为带通信号。有各种办法来对这样的信号进行采样, 这个一般统称为带通采样技术。

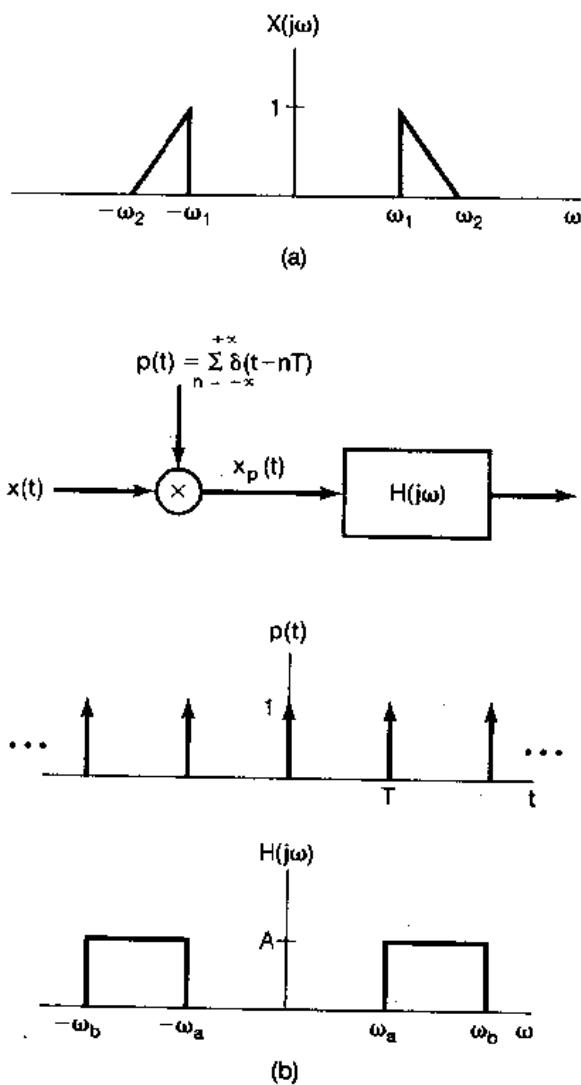


图 P7.26

为了研究有可能在一个小于总带宽的采样率下对一个带通信号进行采样, 考虑一下图 P7.26(b) 的系统。假定 $\omega_1 > \omega_2 - \omega_1$, 求能有 $x_r(t) = x(t)$ 的最大 T 值, 以及常数 A , ω_a 和 ω_b 的值。

- 7.27 在习题 7.26 中讨论了带通采样和恢复的一种方法。当 $x(t)$ 为实信号时可用另一种方法, 这种方法是由将 $x(t)$ 乘以一个复指数, 然后再对乘积采样所组成的。采样系统如图 P7.27(a) 所示。由于 $x(t)$

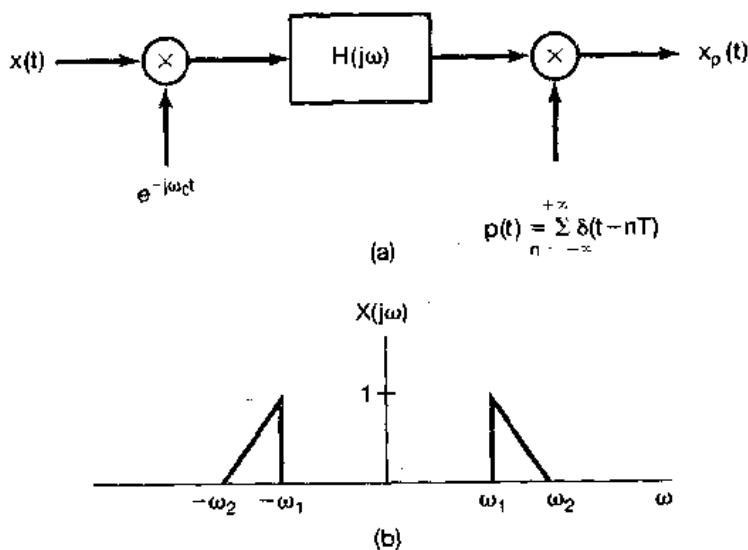


图 P7.27

为实函数,且 $X(j\omega)$ 仅在 $\omega_1 < |\omega| < \omega_2$ 为非零,频率 ω_0 选为 $\omega_0 = (1/2)(\omega_1 + \omega_2)$, 低通滤波器 $H_1(j\omega)$ 的截止频率为 $(1/2)(\omega_2 - \omega_1)$ 。

(a)若 $X(j\omega)$ 如图 P7.27(b)所示,画出 $X_p(j\omega)$ 。

(b)确定最大的采样周期 T ,以使得 $x(t)$ 可以从 $x_p(t)$ 恢复。

(c)确定一个从 $x_p(t)$ 恢复 $x(t)$ 的系统。

- 7.28 图 P7.28(a)示出一个系统,该系统将一个连续时间信号转换为一个离散时间信号。输入 $x(t)$ 是周期的,周期为 0.1s, $x(t)$ 的傅里叶级数系数是

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, \quad -\infty < k < +\infty$$

低通滤波器 $H(j\omega)$ 的频率响应如图 P7.28(b)所示,采样周期 $T = 5 \times 10^{-3}$ 。

(a)证明: $x[n]$ 是一个周期序列,并确定它的周期。

(b)确定 $x[n]$ 的傅里叶级数系数。

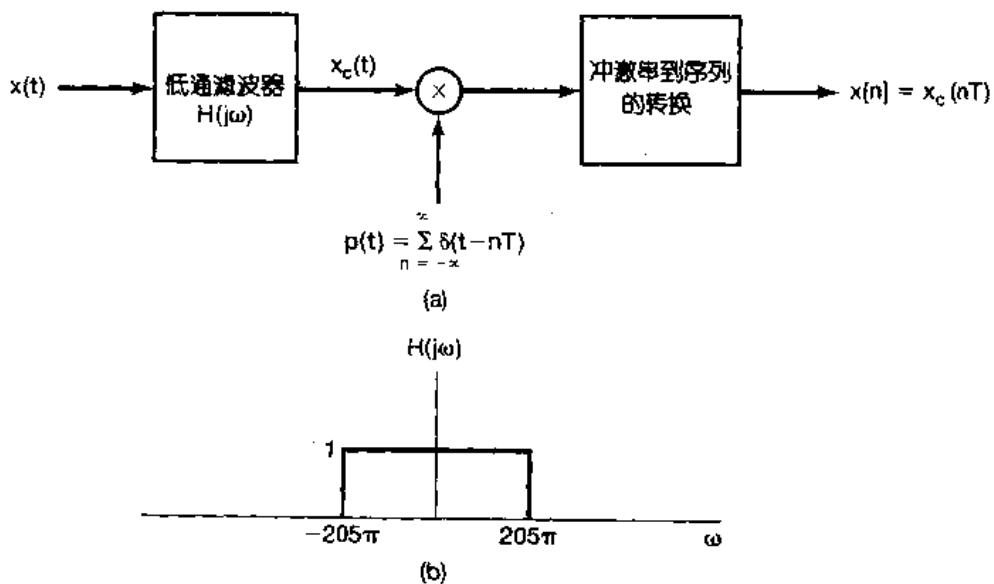


图 P7.28

- 7.29 图 P7.29(a)示出一个利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的系统。若 $X_c(j\omega)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 如图 P7.29(b)所示,以 $1/T = 20\text{kHz}$,画出 $X_p(j\omega), X(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega}), Y_p(j\omega)$ 和 $Y_c(j\omega)$ 。

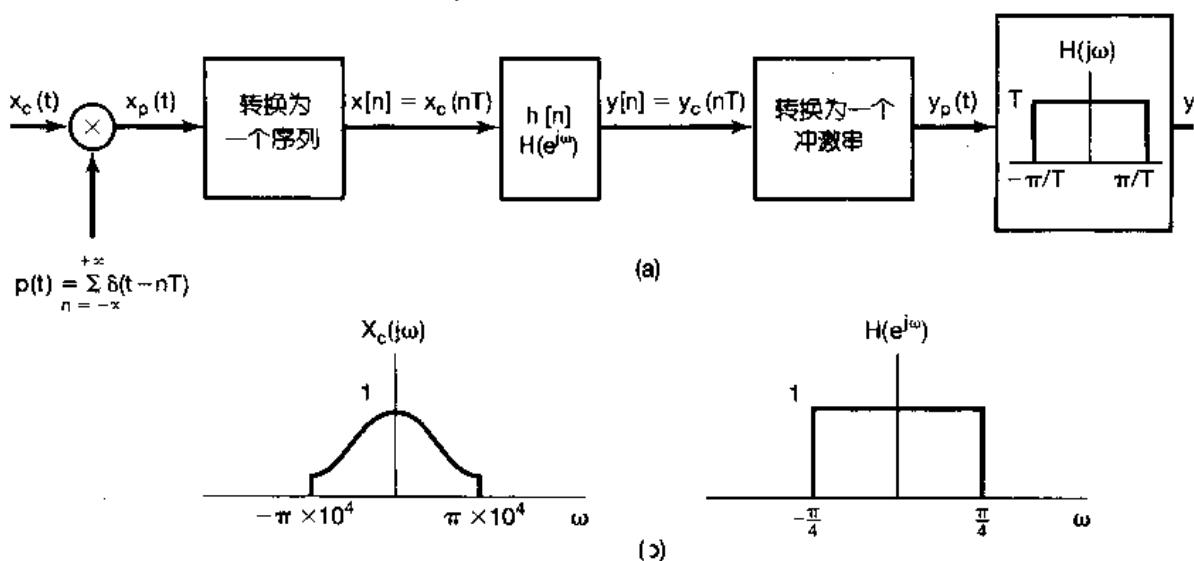


图 P7.29

- 7.30 图 P7.30 示出一个系统,它由一个连续时间 LTI 系统跟着一个采样器,转换为一个序列,再跟着一个离散时间 LTI 系统所组成。该连续时间 LTI 系统是因果的,且满足下面线性常系数微分方程:

$$\frac{dy_c(t)}{dt} + y_c(t) = x_c(t)$$

输入 $x_c(t)$ 是一个单位冲激函数 $\delta(t)$ 。

(a) 确定 $y_c(t)$ 。

(b) 确定频率响应 $H(e^{j\omega})$ 和单位脉冲响应 $h[n]$,使之有 $w[n] = \delta[n]$ 。

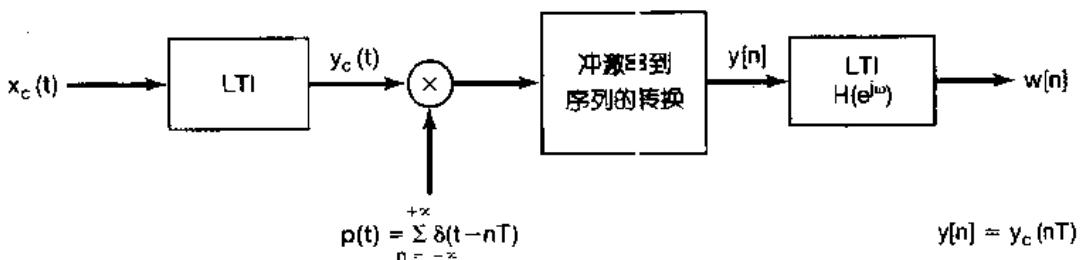


图 P7.30

- 7.31 图 P7.31 示出一个系统,该系统利用一数字滤波器 $h[n]$ 来处理连续时间信号,该数字滤波器是线性的,因果的,且满足下面差分方程:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

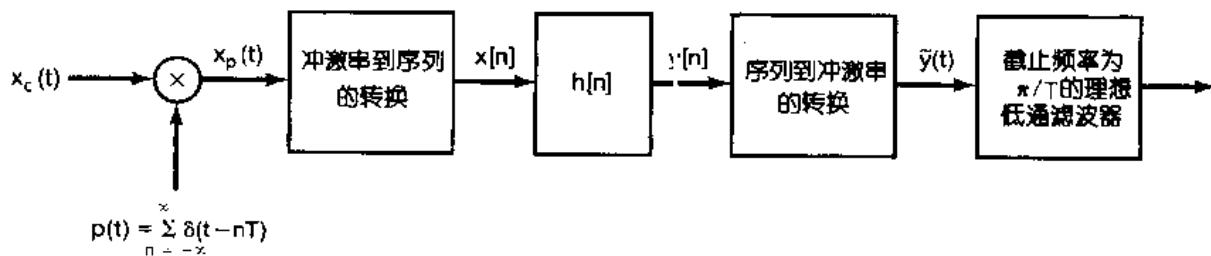


图 P7.31

对于带限输入的信号,即 $X_c(j\omega) = 0, |\omega| > \pi/T$, 图中的系统等效为一个连续时间 LTI 系统。

确定从输入 $x_c(t)$ 到输出 $y_c(t)$ 的整个系统的等效频率响应 $H_c(j\omega)$ 。

- 7.32 信号 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在 $(\pi/4) \leq |\omega| < \pi$ 为零, 另一信号

$$g[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 1 - 4k]$$

试给出一个低通滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$, 使之当该滤波器的输入为 $g[n]$ 时, 输出等于 $x[n]$ 。

- 7.33 傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ 的信号 $x[n]$ 具有如下性质:

$$(x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 3k]) * \left[\frac{\sin \frac{\pi}{3} n}{\frac{\pi}{3} n} \right] = x[n]$$

对于什么样的 ω 值, 可以保证 $X(e^{j\omega}) = 0$?

- 7.34 一个实值离散时间信号 $x[n]$, 其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在 $3\pi/14 \leq |\omega| \leq \pi$ 为零, 可首先利用增采样 L 倍。然而再减采样 M 倍的办法将 $X(e^{j\omega})$ 的非零部分占满到 $|\omega| < \pi$ 的区域, 试求 L 和 M 的值。

- 7.35 考虑一个离散时间序列 $x[n]$, 由 $x[n]$ 形成两个新序列 $x_p[n]$ 和 $x_d[n]$, 其中 $x_p[n]$ 是相应于以采样周期为 2 对 $x[n]$ 采样而得, 而 $x_d[n]$ 则是以 2 对 $x[n]$ 进行抽取而得, 即

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ 0, & n = \pm 1, \pm 3, \dots \end{cases} \quad \text{和} \quad x_d[n] = x[2n]$$

(a) 若 $x[n]$ 如图 P.35(a) 所示, 画出序列 $x_p[n]$ 和 $x_d[n]$ 。

(b) 若 $X(e^{j\omega})$ 如图 P.35(b) 所示, 画出 $X_p(e^{j\omega})$ 和 $X_d(e^{j\omega})$ 。

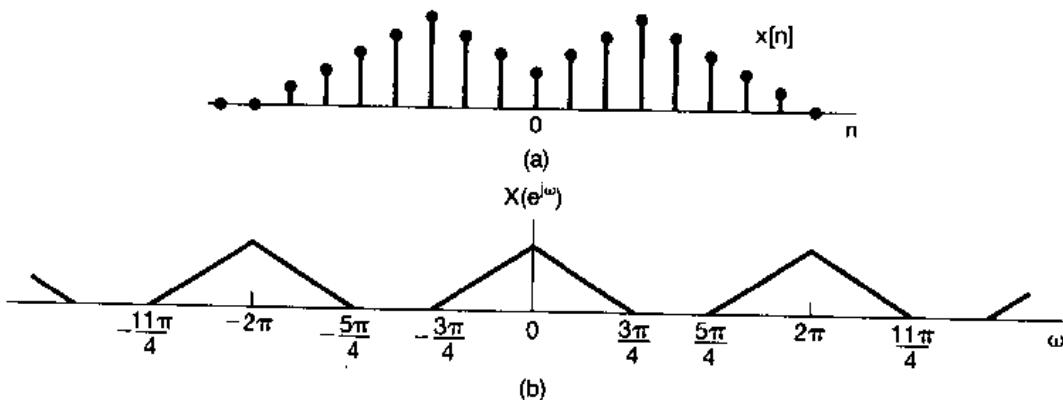


图 P7.35

深入题

- 7.36 设 $x(t)$ 为一带限信号, $X(j\omega) = 0, |\omega| \geq \pi/T$ 。

(a) 若 $x(t)$ 用采样周期 T 对其采样, 试确定一个内插函数 $g(t)$, 使之有

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) g(t - nT)$$

(b) 函数 $g(t)$ 是唯一的吗?

- 7.37 只要平均采样密度为每秒 $2(W/2\pi)$ 个样本, 那么一个带限于 $|\omega| < W$ 的信号就能够从非均匀间隔的样本中得到恢复。本题说明一个特殊的非均匀采样的例子。假设在图 P7.37(a) 中:

1. $x(t)$ 是带限的, $X(j\omega) = 0, |\omega| > W$ 。

2. $p(t)$ 是一个非均匀间隔的周期冲激串, 如图 P7.37(b) 所示。

3. $f(t)$ 是一个周期性波形, 其周期 $T = 2\pi/W$, 由于 $f(t)$ 与一个冲激串相乘, 因而只在 $t=0$ 和 $t=\Delta$

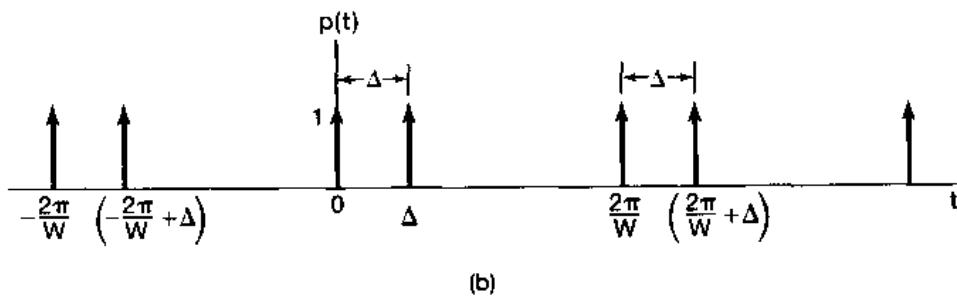
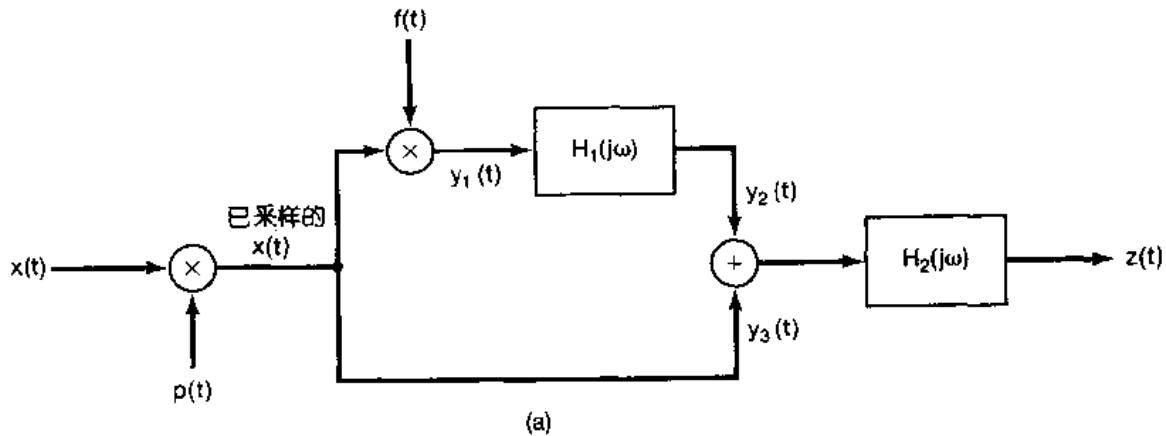


图 P7.37

的值 $f(0) = a$ 和 $f(\Delta) = b$ 才有意义。

4. $H_1(j\omega)$ 是一个 90° 的相移器, 即

$$H_1(j\omega) = \begin{cases} j, & \omega > 0 \\ -j, & \omega < 0 \end{cases}$$

5. $H_2(j\omega)$ 是一个理想低通滤波器为

$$H_2(j\omega) = \begin{cases} K, & 0 < \omega < W \\ K^*, & -W < \omega < 0 \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

其中 K 是一个常数(可能是复数)。

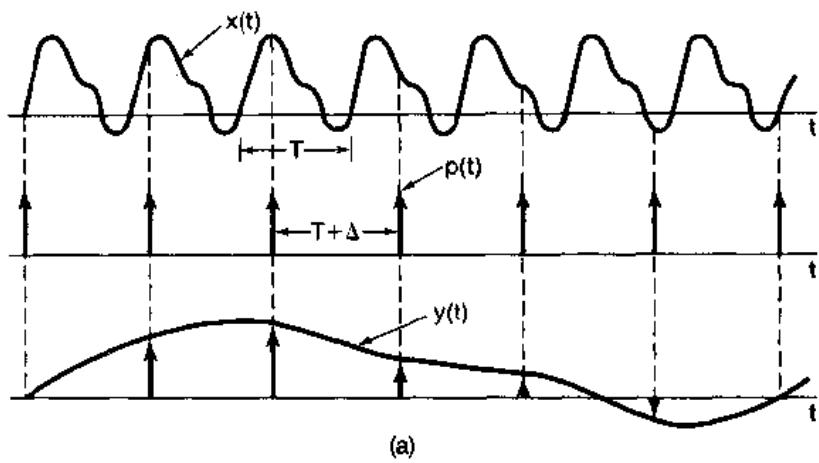
(a) 求 $p(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ 和 $y_3(t)$ 的傅里叶变换。

(b) 给出作为 Δ 函数的 a , b 和 K 值, 以使得对任何带限信号 $x(t)$ 和任何 Δ , $0 < \Delta < \pi/W$, 都有 $z(t) = x(t)$ 。

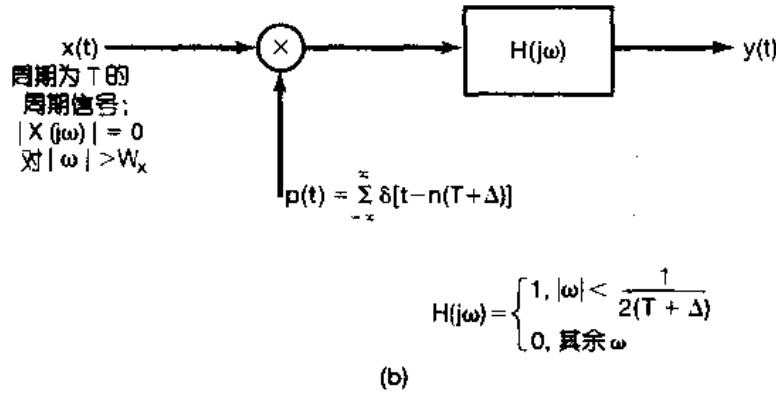
7.38 往往需要在示波器的屏幕上显示出具有极短时间的一些波形部分(例如, 千分之几的毫微秒量级), 由于最快的示波器的上升时间也要比这个时间长, 因此这种波形无法直接显示。然而, 如果这个波形是周期的, 那么可以采用一种称之为取样示波器的仪器来间接地得到所需要的结果。

图 P7.38(a) 的想法就是用来对快速变化的波形 $x(t)$ 进行采样, 采样时每个周期采一次, 但在相邻的下一个周期内, 采样依次推迟。增量 Δ 应该是根据 $x(t)$ 的带宽而适当选择的一个采样间隔。如果让所得到的冲激串通过一个合适的低通内插滤波器, 那么输出 $y(t)$ 将正比于减慢了的、或者在时间上被展宽了的原始快变化波形[即: $y(t)$ 正比于 $x(at)$, 其中 $a < 1$]。

若 $x(t) = A + B \cos[(2\pi/T)t + \theta]$, 求出 Δ 的取值范围, 使得图 P7.38(b) 中的 $y(t)$ 正比于 $x(at)$, $a < 1$; 同时, 用 T 和 Δ 确定 a 的值。



(a)



(b)

图 P7.38

7.39 信号 $x_p(t)$ 是对一个频率等于采样频率 ω_s 一半的正弦信号 $x(t)$ 进行冲激串采样得到的, 即

$$x(t) = \cos\left(\frac{\omega_s}{2}t + \phi\right) \quad \text{和} \quad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

式中 $T = 2\pi/\omega_s$ 。

(a) 求一个 $g(t)$, 使得有

$$x(t) = \cos(\phi)\cos\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) + g(t)$$

(b) 证明

$$g(nT) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(c) 利用前两部分的结果证明: 若 $x_p(t)$ 作为输入加到截止频率为 $\omega_s/2$ 的理想低通滤波器上, 其输出为

$$y(t) = \cos(\phi)\cos\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)$$

7.40 考查一个圆盘, 在该圆盘上画有一个正弦曲线的 4 个周期。圆盘以近似 15r/s 的速度旋转, 因此当通过一个窄缝看的时候, 正弦曲线具有 60Hz 的频率。整个装置如图 P7.40 所示。设 $v(t)$ 代表从窄缝看到的线的位置, 因而 $v(t)$ 有如下形式:

$$v(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = 120\pi$$

为了符号上的方便, 现将 $v(t)$ 归一化, 以便 $A=1$ 。在 60Hz 频率下, 人的眼睛是不可能跟踪 $v(t)$ 的变化的, 现假定这一效果可以通过把眼睛模型化为截止频率为 20Hz 的理想低通滤波器来代替。

对正弦曲线的采样可以用一个频闪灯照亮圆盘来完成, 因此光强度 $i(t)$ 可以用一个冲激串来表示, 即

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

式中 $1/T$ 是频闪频率(Hz)。所得到的已采样信号是乘积 $r(t) = v(t)i(t)$ 。令 $R(j\omega)$, $V(j\omega)$ 和 $I(j\omega)$ 分别记为 $r(t)$, $v(t)$ 和 $i(t)$ 的傅里叶变换。

(a)画出 $V(j\omega)$, 并明确指出参量 ϕ 和 ω_0 的影响。

(b)画出 $I(j\omega)$, 并指出 T 的影响。

(c)根据采样定理, 利用 ω_0 来表示存在一个最大的 T 值, 使得 $v(t)$ 能够利用一个低通滤波器从 $r(t)$ 中得到恢复。试确定这个 T 值和该低通滤波器的截止频率, 画出当 T 是微微小于这个最大 T 值时的 $R(j\omega)$ 。

如果采样周期 T 取得大于(c)中所确定的值, 将会发生频谱混叠。由于混叠的结果, 感觉看到的将是一个较低频率的正弦波。

(d)假定 $2\pi/T = \omega_0 + 20\pi$, 对 $|\omega| < 40\pi$, 画出 $R(j\omega)$ 。用 $v_a(t)$ 表示看到的线的视在位置, 如果假定眼睛表现为一个截止频率为 20Hz, 并具有单位增益的理想低通滤波器, 试将 $v_a(t)$ 表示成下面形式:

$$v_a(t) = A_a \cos(\omega_a t + \phi_a)$$

其中 A_a 是 $v_a(t)$ 的视在振幅, ω_a 是 $v_a(t)$ 的视在频率, ϕ_a 是它的视在相位。

(e)当 $2\pi/T = \omega_0 - 20\pi$ 时, 重做(d)。

- 7.41 在许多实际场合, 是在有回波的情况下记录信号的, 因而希望能通过适当的处理消除这些回波。例如, 图 P7.41(a)中说明了一个系统, 在该系统中接收机同时接收到信号 $x(t)$ 和一个回波, 该回波是用衰减并延迟了的 $x(t)$ 来表示的。于是, 接收机的输出是 $s(t) = x(t) + \alpha x(t - T_0)$, 其中 $\alpha < 1$ 。为了恢复 $x(t)$, 先将 $s(t)$ 变换成一个序列, 并用合适的数字滤波器 $h[n]$ 对接收机的输出进行处理, 如图 P7.41(b)所示。

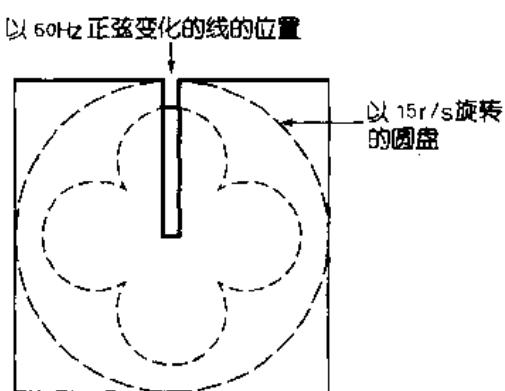


图 P7.40

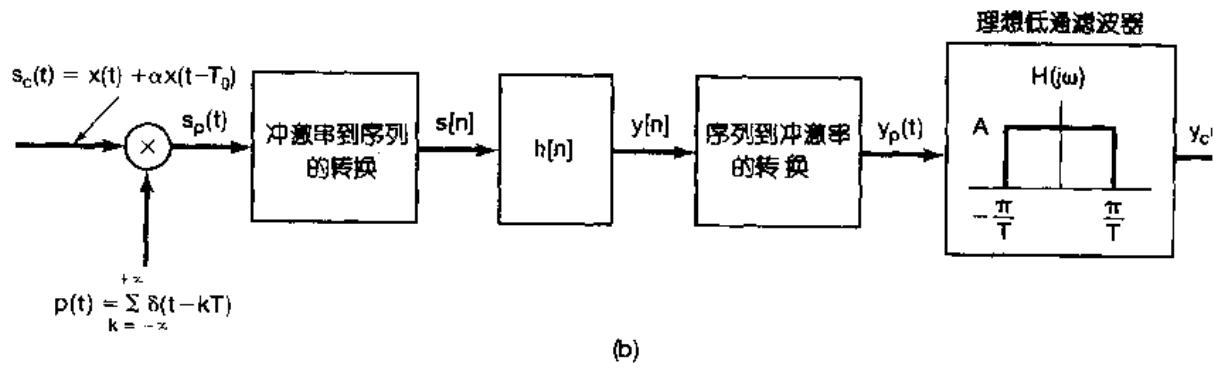
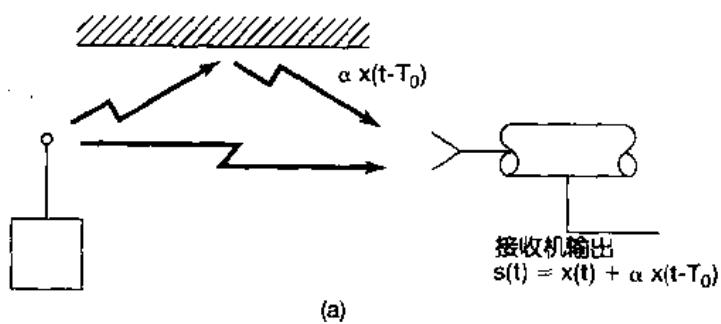


图 P7.41

假定 $x(t)$ 带限[即 $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$]，且 $\alpha < 1$ 。

(a) 若 $T_0 < \pi/\omega_M$ ，并取采样周期等于 T_0 (即 $T = T_0$)，确定数字滤波器 $h[n]$ 的差分方程，以便 $y_c(t)$

正比于 $x(t)$ 。

(b) 在(a)的假定条件下，确定该理想低通滤波器的增益 A ，以便 $y_c(t) = x(t)$ 。

(c) 现在假定 $\pi/\omega_M < T_0 < 2\pi/\omega_M$ ，试选择采样周期 T 、低通滤波器增益 A 和数字滤波器 $h[n]$ 的频率响应，使得 $y_c(t)$ 正比于 $x(t)$ 。

7.42 考虑一带限信号 $x_c(t)$ ，以高于奈奎斯特率对其采样，然后将相隔 T 秒的各样本按图 P7.42 转换为一个序列 $x[n]$ 。

试确定序列的能量 E_d 、原始信号的能量 E_c 和采样间隔 T 之间的关系。序列 $x[n]$ 的能量定义为

$$E_d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

而连续时间函数 $x_c(t)$ 的能量定义为

$$E_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_c(t)|^2 dt$$

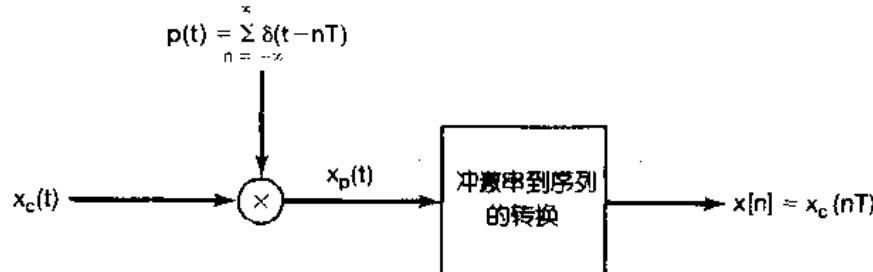


图 P7.42

7.43 图 P7.43(a)示出一个系统，该系统的输入和输出都是离散时间信号。离散时间输入 $x[n]$ 转换为一连续时间冲激串 $x_p(t)$ ，然后将 $x_p(t)$ 经过一个 LTI 系统过滤产生输出 $y_c(t)$ ，而 $y_c(t)$ 又被转换成离散

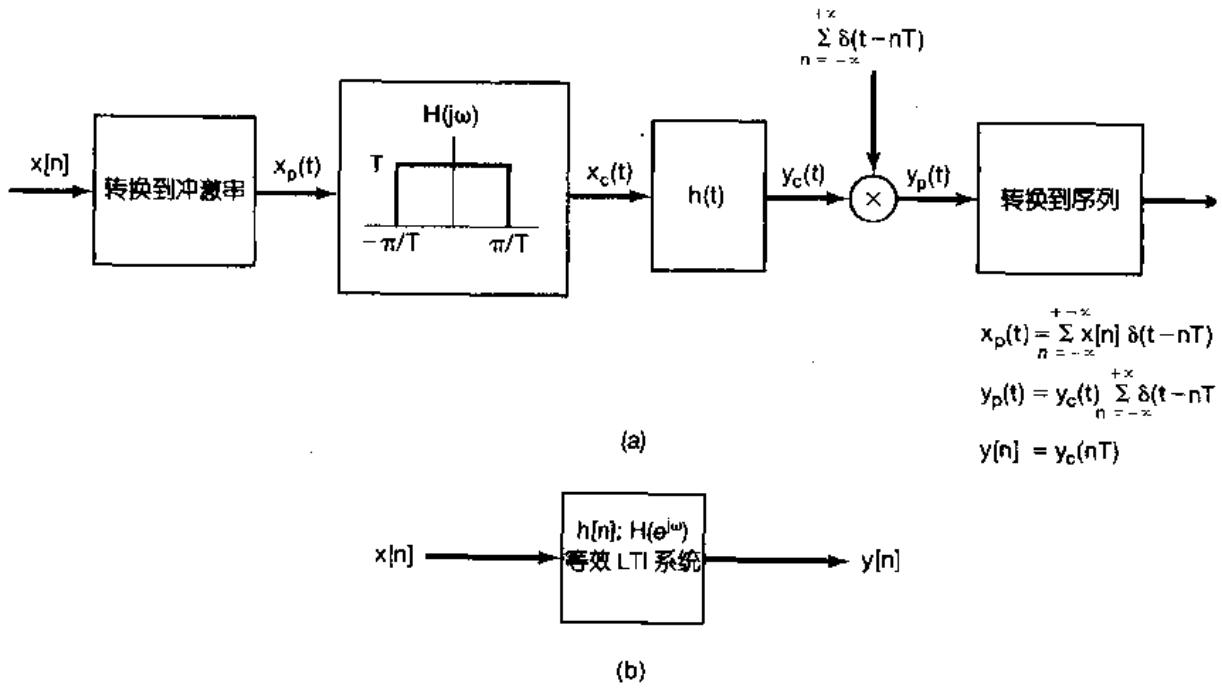


图 P7.43

时间信号 $y[n]$ 。其中输入为 $x_c(t)$, 输出为 $y_c(t)$ 的 LTI 系统是因果的, 且由下面线性常系数微分方程所表征:

$$\frac{d^2y_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t)$$

整个系统等效为一个因果的离散时间 LTI 系统, 如图 P7.43(b) 所示。

试确定该等效 LTI 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 和单位脉冲响应 $h[n]$ 。

- 7.44 设想要设计一个连续时间正弦信号发生器, 该发生器能对 $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ 内的任何频率都能产生正弦信号, 其中 ω_1, ω_2 是已知的正数。

设计准备这样来做: 现已经存贮了一个周期为 N 的离散时间余弦波; 也就是说已经存贮了 $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$, 其中

$$x[k] = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

每隔 T 秒输出一个被 $x[k]$ 的值加权了的冲激, 这是通过按周期方式取 $k=0, 1, \dots, N-1$ 来实现的, 即

$$y_p(kT) = x(k \bmod N)^{\odot}$$

或等效为

$$y_p(kT) = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \quad \text{和} \quad y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \delta(t - kT)$$

(a) 证明: 通过调整 T , 可以调节被采样的余弦信号的频率, 也就是证明

$$y_p(t) = (\cos \omega_0 t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

其中 $\omega_0 = 2\pi/NT$ 。试确定 T 的取值范围, 使得 $y_p(t)$ 能代表一个余弦信号的样本值, 而该余弦信号的频率在整个范围 $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ 内可调。

(b) 概略画出 $Y_p(j\omega)$ 。

产生连续时间正弦波的整个系统示于图 P7.44(a), 图中 $H(j\omega)$ 一个具有单位增益的理想低通滤波器, 即

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

参数 ω_c 是需要确定的, 使得 $y(t)$ 在所需要的频带内是一个连续时间余弦信号。

(c) 对在(a)中所确定范围内的任何 T 值, 确定最小的 N 值和 ω_c 的某个值, 使 $y(t)$ 在 $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ 范围内是一个余弦信号。

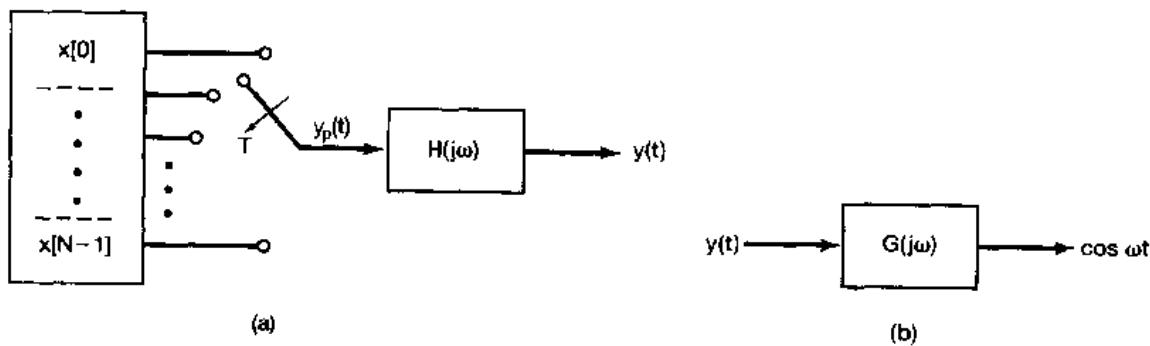


图 P7.44

^① 原文为 $y(kT)$, 似应为 $y_p(kT)$ —— 译者注。

(d) $y(t)$ 的振幅将随在 ω_1 和 ω_2 之间所选定的 ω 值而变化。因此,有必要设计一个系统 $G(j\omega)$, 该系统将信号进行归一化, 如图 P7.44(b) 所示。求此系统 $G(j\omega)$ 。

- 7.45 在图 P7.45 所示的系统中, 输入 $x_c(t)$ 是带限的, 有 $X_c(j\omega) = 0, |\omega| > 2\pi \times 10^4$ 。数字滤波器 $h[n]$ 的输入输出关系为

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (\text{P7.45-1})$$

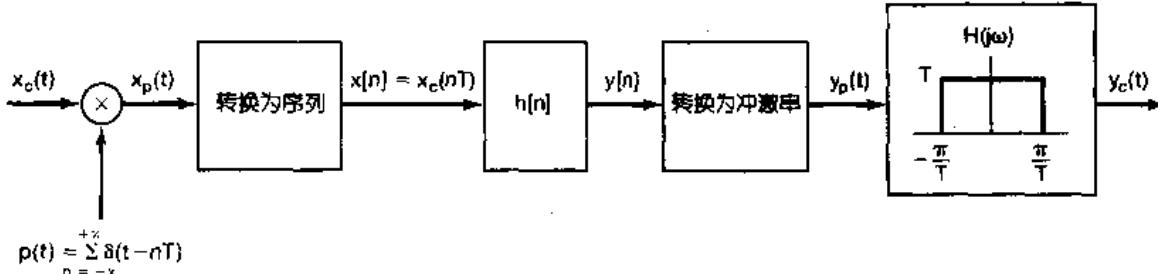


图 P7.45

(a) 若从 $x_c(t)$ 到 $x_p(t)$ 的变换中避免混叠发生, 所容许的最大 T 值是什么?

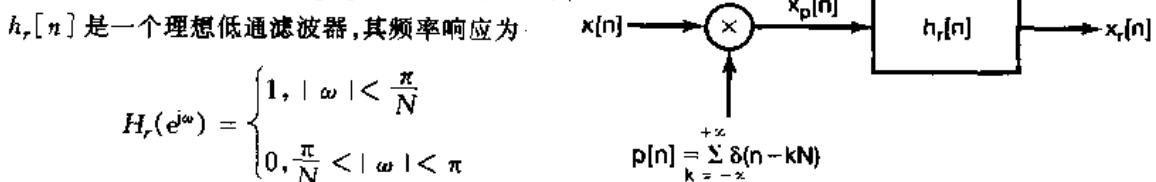
(b) 确定由(P7.45-1)式给出的离散时间 LTI 系统的单位脉冲响应。

(c) 确定是否有任何 T 值能使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t x_c(\tau) d\tau \quad (\text{P7.45-2})$$

若有, 求出最大的 T 值; 若没有, 请陈述理由, 并说明应该如何选择 T , 才能使等式(P7.45-2)式最接近成立。(这一部分要仔细想想, 很容易诱人错误的结论)。

- 7.46 图 P7.46 示出一个信号 $x[n]$ 的离散时间采样,



根据(7.46)式和(7.47)式, 该滤波器的输出可表示为

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] h_r[n - kN] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \frac{N\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(n - kN)}{\omega_c(n - kN)}$$

式中 $\omega_c = 2\pi/N$ 。证明: 无论序列 $x[n]$ 是在高于或低于奈奎斯特率下进行采样, 都有 $x_r[mN] = x[mN]$, m 为任意正或负的整数。

- 7.47 假设 $x[n]$ 的傅里叶变换在 $\pi/3 \leq |\omega| \leq \pi$ 内为零, 证明:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[3k] \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{3}(n-3k))}{\frac{\pi}{3}(n-3k)} \right]$$

- 7.48 若 $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n + \phi_0)$, $0 \leq \phi_0 < 2\pi$ 和 $g[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$, 为保证

$$g[n] * \left[\frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{\frac{\pi}{4} n} \right] = x[n]$$

必须对 ϕ_0 施加什么样的另外限制?

- 7.49 正如在 7.5 节所讨论，并于图 7.37 所说明的，用一个整数因子 N 内插或增采样的过程可以看成是两个运算的级联。第一个涉及系统 A ，相应于在 $x[n]$ 的每一个序列值之间插入 $(N-1)$ 个零值序列，而有

$$x_p[n] = \begin{cases} x_d\left[\frac{n}{N}\right], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

对于真正的带限内插来说， $H(e^{j\omega})$ 应是一个理想的低通滤波器。

(a) 确定系统 A 是否是线性的？

(b) 确定系统 A 是否是时不变的？

(c) 若 $X_d(e^{j\omega})$ 如图 P7.49 所示， $N=3$ ，画出 $X_p(e^{j\omega})$ 。

(d) $N=3$ ， $X_d(e^{j\omega})$ 如图 P7.49 所示，而 $H(e^{j\omega})$ 已适当选择成具有真正的带限内插，画出 $X(e^{j\omega})$ 。

- 7.50 在本题中考虑与在 7.2.1 节和 7.2 节讨论的连续时间零阶和一阶保持相对应的离散时间零阶保持和一阶保持问题。

设 $x[n]$ 为一序列，按图 7.31 所指出的对它进行离散时间采样。假定满足离散时间采样定理中的条件，即 $\omega_s > 2\omega_M$ ，这里 ω_s 是采样频率，并且有 $X(e^{j\omega}) = 0, \omega_M < |\omega| \leq \pi$ 。那么，原信号 $x[n]$ 就可用理想低通滤波器由 $x_p[n]$ 完全恢复，这如同在 7.5 节所讨论的相应于带限内插。

零阶保持代表一种近似内插，借此每个样本被重复（或保持） $N-1$ 次，图 P7.50(a) 示出 $N=3$ 的情况。

一阶保持则代表样本之间的线性内插，如同一图所示。

(a) 零阶保持 (ZOH)

可以表示成 (7.47) 式的内插，

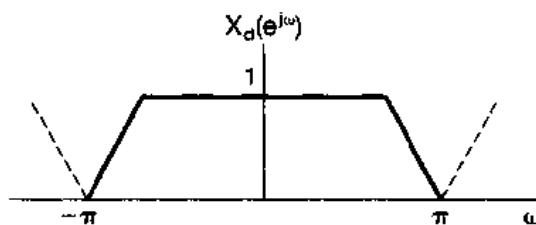
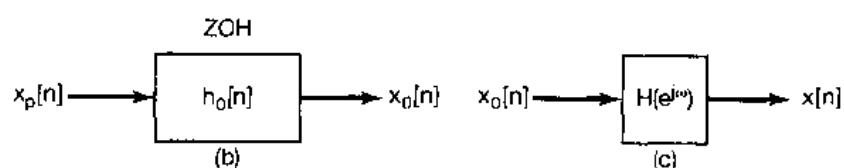
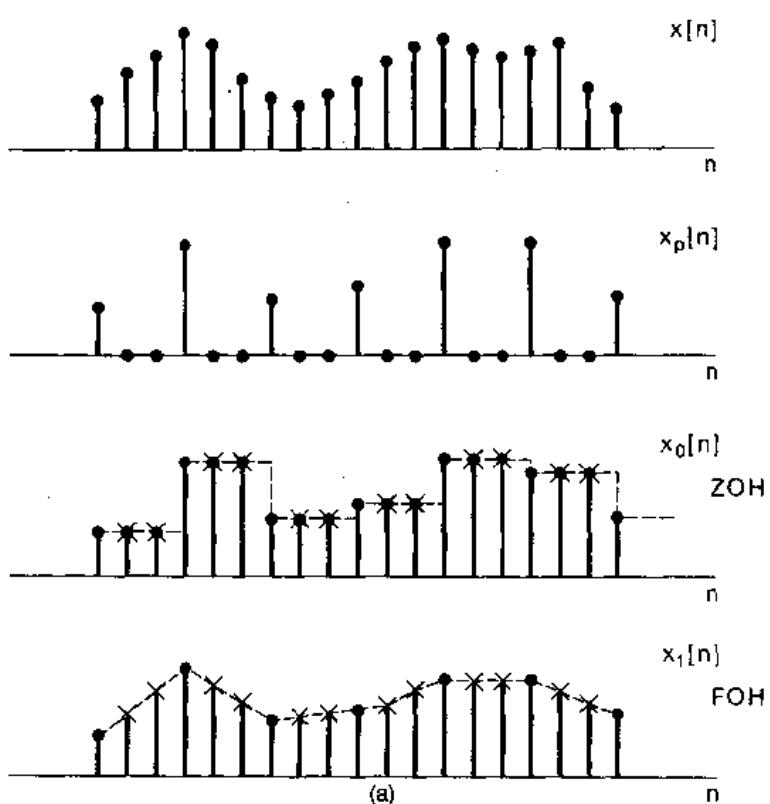
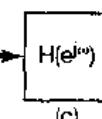


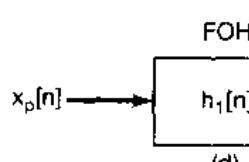
图 P7.49



(b)



(c)



(d)

图 P7.50

或等效地为图 P7.50(b)的系统。对采样周期为 N 的一般情况,试确定并画出 $h_0[n]$ 。

(b)如图 P7.50(c)所示,利用一个合适的 LTI 滤波器 $H(e^{j\omega})$,可以从 ZOH 序列 $x_0[n]$ 中完全恢复 $x[n]$ 。试确定并画出 $H(e^{j\omega})$ 。

(c)一阶保持(FOH)可以表示成(7.47)式的内插,或等效为图 P7.50(d)的系统。对采样周期为 N 的一般情况,试确定并画出 $h_1[n]$ 。

(d)利用一个合适的,频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 的 LTI 滤波器,可以从 FOH 序列 $x_1[n]$ 中完全恢复 $x[n]$ 。试确定并画出 $H(e^{j\omega})$ 。

7.51 正如在图 7.37 所示和 7.5.2 节所讨论的,以整数因子 N 内插或增采样的过程可以被看成是两种运算的级联。对于真正的带限内插,图 7.37 中的滤波器 $H(e^{j\omega})$ 是一个理想低通滤波器。但在任何实际应用中,就有必要实现一个近似的低通滤波器。在本题中要研究的是,在这些近似滤波器的设计上往往要施加一些有用的限制条件。

(a)假定 $H(e^{j\omega})$ 用一个零相位的 FIR 滤波器来近似,这个滤波器是用这样的约束条件来设计的:原始序列 $x_d[n]$ 的值得到真正的重现,即

$$x[n] = x_d \left[\frac{n}{L} \right], n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (\text{P7.51-1})$$

这就保证了即使在原始序列值之间的内插可能不是完善的,但原始序列值在内插中得到真正重现。为了保证对任何序列 $x_d[n]$, (P7.51-1) 式都严格成立,试确定对低通滤波器单位脉冲响应 $h[n]$ 的限制。

(b)现在假设内插是用一个长度为 N 的线性相位因果对称的 FIR 滤波器来进行,也即

$$h[n] = 0, n < 0, n > N - 1 \quad (\text{P7.51-2})$$

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega})e^{-j\omega} \quad (\text{P7.51-3})$$

其中 $H_R(e^{j\omega})$ 是实函数。这个滤波器按上述条件来设计:使原始序列值 $x_d[n]$ 得到真正重现,但有一个整数延迟 α ,这里 α 是 $H(e^{j\omega})$ 相位特性斜率的负值,也就是

$$x[n] = x_d \left[\frac{n - \alpha}{L} \right], n - \alpha = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (\text{P7.51-4})$$

确定这是否意味着对滤波器的长度 N 是奇数还是偶数施加了什么限制。

(c)再次假定内插是用线性相位因果对称的 FIR 滤波器来进行的,因而 $H(e^{j\omega})$ 具有

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega})e^{-j\beta\omega}$$

其中 $H_R(e^{j\omega})$ 是实函数。该滤波器按上述条件来设计:使原始序列值 $x_d[n]$ 得到真正重现,但具有一个延迟 M ,而 M 不一定就等于相位特性斜率的负值,即

$$x[n] = x_d \left[\frac{n - M}{L} \right], n - M = 0, \pm L, \pm 2L, \dots$$

确定这是否意味着对滤波器的长度 N 是奇数还是偶数施加了什么限制。

7.52 在本题中要建立与时域采样定理对偶的频域采样定理,借此一个时限信号可以由它的频域样本得到重建。为了得到这一结果,考虑一下图 P7.52 中的频域采样。

(a)证明

$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t)$$

其中 $\tilde{x}(t)$, $x(t)$ 和 $p(t)$ 分别是 $\tilde{X}(j\omega)$, $X(j\omega)$ 和 $P(j\omega)$ 的傅里叶反变换。

(b)假设 $x(t)$ 是时限的,即 $x(t) = 0$, $|t| \geq \frac{\pi}{\omega_0}$,证明:通过一个“低时窗”的运算, $x(t)$ 可从 $\tilde{x}(t)$ 中恢复。

即

$$x(t) = \tilde{x}(t)w(t)$$

$$X(j\omega) \xrightarrow{\times} \tilde{X}(j\omega) = X(j\omega)P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

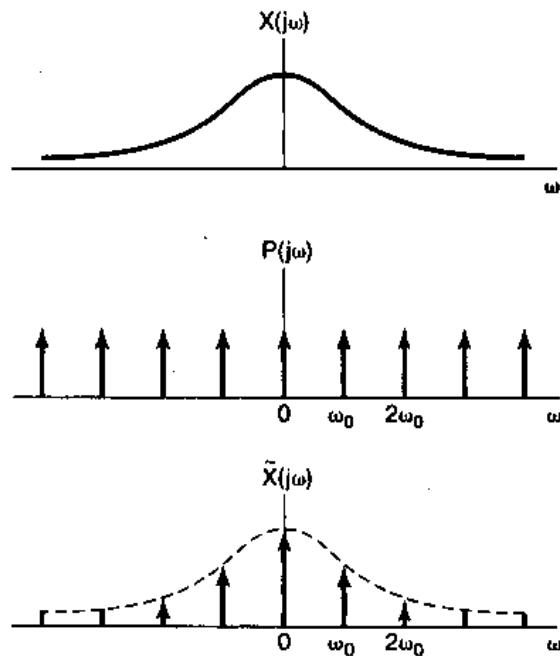


图 P7.52

其中

$$w(t) = \begin{cases} \omega_0, & |t| \leq \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

(c) 证明: 若 $x(t)$ 在 $|t| \geq \pi/\omega_0$ 不限制为零, $x(t)$ 就不能从 $\tilde{x}(t)$ 中恢复。

第8章 通信系统

8.0 引言

在当今社会中，通信系统在人、系统和计算机之间的信息传递上都起着至关重要的作用。一般而言，在所有通信系统中，源信息都要首先被某一发射装置或调制器所处理，以便将它变化到在通信信道上最适合传输的形式，而在接收端又通过适当的处理将信号给予恢复。有各种理由都要求作这样的处理。特别是，任何特定的通信信道都有一个与其相关的频率范围，在该范围内是最适合传输某一类信号的，而在该范围以外，通信将严重受阻，甚或不可能。例如，在大气层，音频范围(10Hz 到 20kHz)的信号传输将急剧衰减，而较高频率范围的信号将能传播到很远的距离。因此，要想在依靠通过大气层来进行传播的通信信道上传输像语言或音乐这样的音频信号，就必须首先在发射机中通过适当的处理把这些信号嵌入另一个较高频率的信号中去。

本书前面几章所建立的许多概念和方法在通信系统的分析和设计中都起着核心的作用。和各种重要应用密切有关的任何概念一样，有很多细节问题值得研究，并且如同在参考文献中所指出的，在这一方面已有了很多优秀的参考书。尽管全面而详细地分析通信系统已远远超出我们的讨论范围，但是利用前面几章的基础还是有可能介绍一些基本原理，以及在这些系统的分析和设计中所碰到的一些问题。

将某一个载有信息的信号嵌入另一个信号的过程一般称之为调制；而将这个载有信息的信号提取出来的过程称为解调。将会看到，调制技术不仅仅是能将信息嵌入到能有效传输的信号中去，而且还能把频谱重叠的多个信号通过一种称为复用的概念在同一信道上同时传输。

在实际中应用的有各种不同的调制方法，在这一章只讨论其中几个最重要的方法。有一大类调制方法是建立在幅度调制或 AM 概念的基础上的，在这里要被传输的信号用来调制另一个信号的振幅。幅度调制中最通常的形式是正弦幅度调制，这个将在 8.1 节到 8.4 节与频分多路复用的有关概念一起作比较详细的讨论。另外一类重要的 AM 系统涉及一个脉冲信号的幅度调制将在 8.5 节和 8.6 节与时分多路复用的概念一起讨论这类调制形式。在 8.7 节还要讨论一种不同形式的调制，即正弦频率调制，在这里，载有信息的信号是被用来改变正弦信号的频率的。

直到 8.7 节为止，所有的讨论都是集中在连续时间信号上，这是因为大多数的传输媒质（譬如大气层）都是最适合作为连续时间现象考虑的。尽管如此，对于离散时间信号不仅能够建立类似的调制技术，而且讨论这些信号的调制概念也有很大的实际意义，因此在 8.8 节将对在离散时间信号通信中所涉及的一些有关概念给予介绍。

8.1 复指数与正弦幅度调制

很多通信系统都是建立在正弦幅度调制的基础之上的，在这里一个复指数信号或正弦信号 $c(t)$ 的振幅被载有信息的信号 $x(t)$ 相乘（或调制）。信号 $x(t)$ 一般称为调制信号，而信号 $c(t)$ 称为载波信号，已调信号 $y(t)$ 就是这两个信号的乘积，即

$$y(t) = x(t)c(t)$$

正如在 8.0 节所讨论的，调制的一个重要目的就是要产生一个信号，该信号的频率范围是适合于在所用的通信信道上传输的。例如，在电话传输系统中，长距离传输往往是在微波或卫星中继通信系统中来完成的。单个的声音信号是在 200Hz 到 4kHz 的频率范围内，而微波中继则要求信号在 300MHz 到 300GHz 的范围内，卫星中继通信工作在从数百兆赫到 40GHz 的频率范围内。因此，要在这些信道上传输以声音信号表示的信息，就必须将其搬移到这些较高的频率范围中去。本节将看到，正弦幅度调制可用很简单的方式来完成这样的频率搬移。

8.1.1 复指数载波的幅度调制

正弦幅度调制有两种常用的形式，其一是载波信号 $c(t)$ 为如下复指数：

$$c(t) = e^{j(\omega_c t + \theta_c)} \quad (8.1)$$

第二种载波信号是正弦的

$$c(t) = \cos(\omega_c t + \theta_c) \quad (8.2)$$

在这两种情况下，频率 ω_c 都称为载波频率。先考虑复指数载波的情况。为了方便起见，选 $\theta_c = 0$ ，这样已调信号 $y(t)$ 就是

$$y(t) = x(t)e^{j\omega_c t} \quad (8.3)$$

根据相乘性质（4.5 节），并把 $x(t)$ 、 $y(t)$ 和 $c(t)$ 的傅里叶变换分别记作 $X(j\omega)$ 、 $Y(j\omega)$ 和 $C(j\omega)$ ，则有

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * C(j\omega) \quad (8.4)$$

对于 $c(t)$ 是一个由（8.1）式给出的复指数信号时，

$$C(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_c) \quad (8.5)$$

因此有

$$Y(j\omega) = X(j\omega - j\omega_c) \quad (8.6)$$

由此可见，已调输出 $y(t)$ 的频谱就是输入的谱，唯在频率轴上位移了一个等于载波频率 ω_c 的量。譬如说，若 $X(j\omega)$ 带限于最高频率为 ω_M （带宽为 $2\omega_M$ ），如图 8.1(a) 所示，那么输出的谱 $Y(j\omega)$ 就如图 8.1(c) 所示。

由（8.3）式很明显地看出， $x(t)$ 可以从已调信号 $y(t)$ 中恢复出来，这只要将 $y(t)$ 乘以复指数 $e^{-j\omega_c t}$ ，也即

$$x(t) = y(t)e^{-j\omega_c t} \quad (8.7)$$

在频域，这就等于把已调信号的频谱在频率轴上往回挪到调制信号原先所在的频谱位置上。从已调信号中恢复原始信号的过程称之为解调。这将在 8.2 节要作更多的讨论。

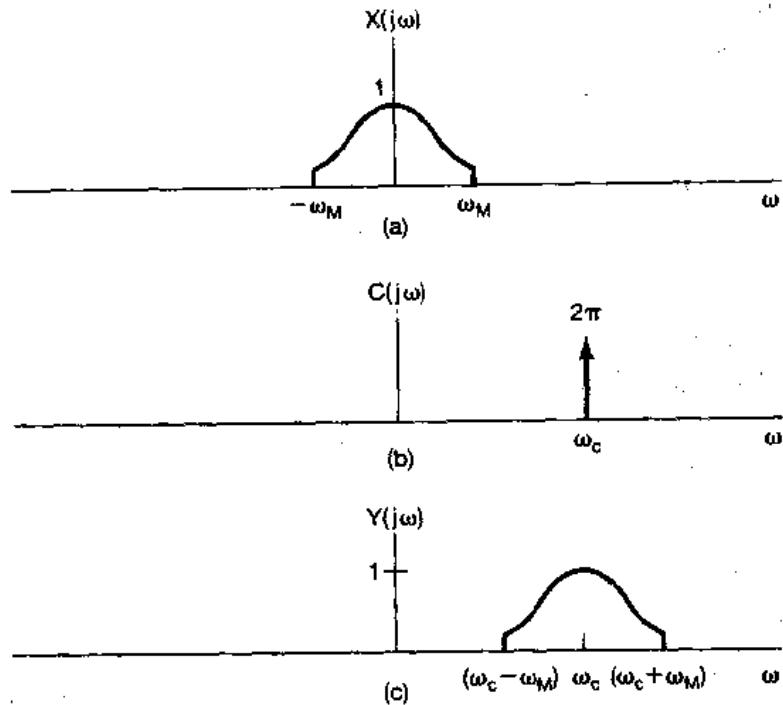


图 8.1 复指数载波的幅度调制在频域上的效果：

(a) 调制信号 $x(t)$ 的频谱；(b) 载波 $c(t) = e^{j\omega_c t}$ 的谱；(c) 幅度已调信号 $y(t) = x(t)e^{j\omega_c t}$ 的谱

因为 $e^{j\omega_c t}$ 是复指数信号，所以(8.3)式又可写成

$$y(t) = x(t)\cos\omega_c t + jx(t)\sin\omega_c t \quad (8.8)$$

在 $x(t)$ 为实信号时，可以用图 8.2 来实现(8.7)式或(8.8)式，这里要用两个单独的乘法器和两个相位相差 $\pi/2$ 的正弦载波信号。在 8.4 节将给出一个应用的例子来说明如像图 8.2 这样的系统，若用两个相位差 $\pi/2$ 的正弦载波将具有一些特别的好处。

8.1.2 正弦载波的幅度调制

在很多情况下，使用由(8.2)式那样的正弦载波往往更为简单一些，并且和复指数载波一样有效。事实上，使用正弦载波就相当于仅仅保留图 8.2 系统中输出的实部或虚部部分，这样的系统如图 8.3 所示。

用(8.2)式那样的正弦载波来进行幅度调制的效果也可以采用与前一小节相同的分析办法来进行。为方便起见再次选 $\theta_c = 0^\circ$ 。这一情况下，载波信号的频谱是

$$C(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \quad (8.9)$$

根据(8.4)式，就有

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}[X(j\omega - j\omega_c) + X(j\omega + j\omega_c)] \quad (8.10)$$

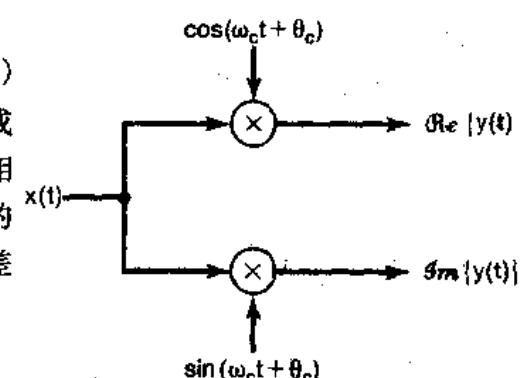


图 8.2 用复指数信号 $c(t) = e^{j(\omega_c t + \theta_c)}$ 作为载波的幅度调制的实现

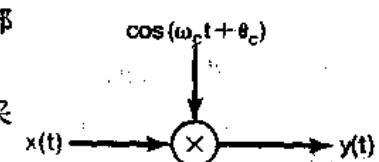


图 8.3 正弦载波的幅度调制

若 $X(j\omega)$ 如图 8.4(a) 所示，则 $y(t)$ 的频谱就如图 8.4(c) 所示。从图中可以注意到，以 $+\omega_c$ 和 $-\omega_c$ 为中心都有一个原始信号频谱形状的重复。结果只要 $\omega_M < \omega_c$ ， $x(t)$ 就能从 $y(t)$ 中恢复出来；否则，这两个重复的频谱将会有重叠。与复指数载波的情况相比，在那里原始信号频谱形状的重复仅仅在 ω_c 附近出现，因此，正如在 8.1.8 节所看到的，在以复指数为载波的幅度调制中，对任意选取的 ω_c ，总是可以按(8.7)式用乘以 $e^{-j\omega_c t}$ ，将频谱移回到它原来位置的办法，将 $x(t)$ 从 $y(t)$ 中恢复出来。另一方面，用正弦载波，如果 $\omega_c < \omega_M$ ，由图 8.4 可见， $X(j\omega)$ 的两个重复的频谱之间将会有重叠。例如在图 8.5 中， $\omega_c = \omega_M/2$ 时的 $Y(j\omega)$ 就是那样。很明显，这时 $x(t)$ 的频谱不再在 $Y(j\omega)$ 中重复原样，因此也就不再可能从 $y(t)$ 中将 $x(t)$ 恢复出来。

8.2 正弦 AM 的解调

在通信系统的接收端，载有信息的信号 $x(t)$ 是经由解调而得到恢复的。这一节研究正弦幅度调制的解调过程。其中有两种常用的解调方法，每一种都有各自的优点和缺点。在 8.2.1 节先讨论的第一种方法称之为同步解调，在那里发射机和接收机在相位上是同步的；8.2.2 节将介绍的另一种方法称为非同步解调。

8.2.1 同步解调

假设 $\omega_c > \omega_M$ ，将一个用正弦载波调制的已调信号进行解调就相对很直接了。具体说来，若

$$y(t) = x(t)\cos\omega_c t \quad (8.11)$$

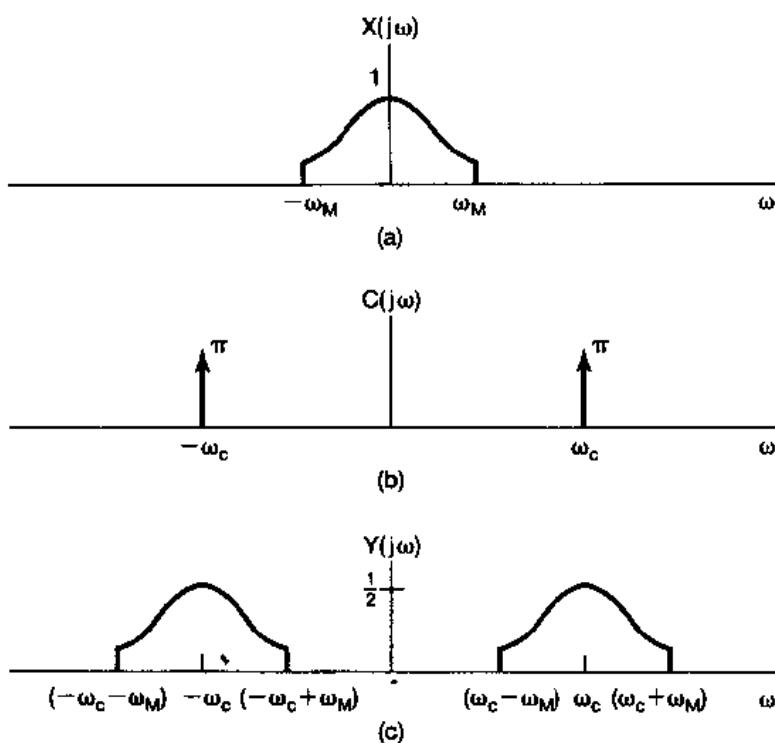


图 8.4 正弦载波幅度调制在频域中的效果
(a) 调制信号 $x(t)$ 的频谱；(b) 载波 $c(t) = \cos\omega_c t$ 的频谱；
(c) 幅度已调信号的频谱

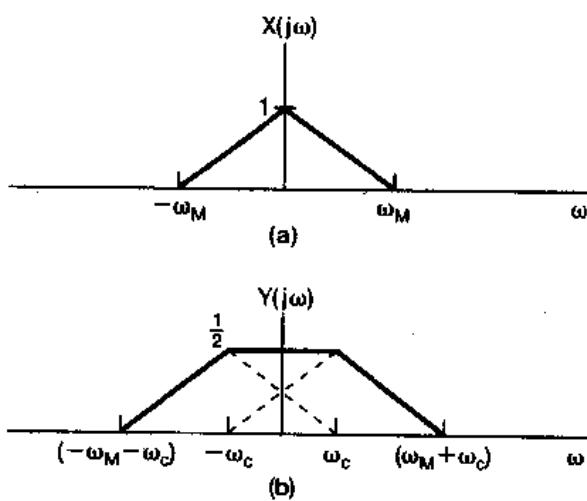


图 8.5 载波为 $\cos\omega_c t$ ，在 $\omega_c = \omega_M/2$ 时的正弦幅度调制
(a) 调制信号的频谱；(b) 已调信号的频谱

像在例 4.2.1 中所作的那样，原始信号可以通过用 $y(t)$ 来调制同样一个正弦载波并用一个低通滤波器把它恢复出来。为了说明这一点，考虑如下过程：

$$w(t) = y(t)\cos\omega_c t \quad (8.12)$$

图 8.6 中示出了 $y(t)$ 和 $w(t)$ 的频谱，并看到 $x(t)$ 可以用一个增益为 2，截止频率大于 ω_M ，而小于 $(2\omega_c - \omega_M)$ 的理想低通滤波器从 $w(t)$ 中恢复出来。该低通滤波器的频率响应在图 8.6(c) 中用虚线示出。

利用(8.12)式和一个低通滤波器来解调 $y(t)$ 的原理也可以从代数运算中看出。由(8.11)式和(8.12)式立即可得

$$w(t) = x(t)\cos^2\omega_c t$$

或者利用三角恒等式

$$\cos^2\omega_c t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega_c t$$

就可以将 $w(t)$ 重新写成

$$w(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos 2\omega_c t \quad (8.13)$$

于是， $w(t)$ 由两项之和组成：一个是原始信号的一半，另一个则是用原始信号的一半去调制一个 $2\omega_c$ 的正弦载波。这两项在图 8.6(c) 所示的频谱中都是显而易见的。对 $w(t)$ 应用低通滤波器就相当于保留(8.13)式中右边的第一项，而消除掉第二项。

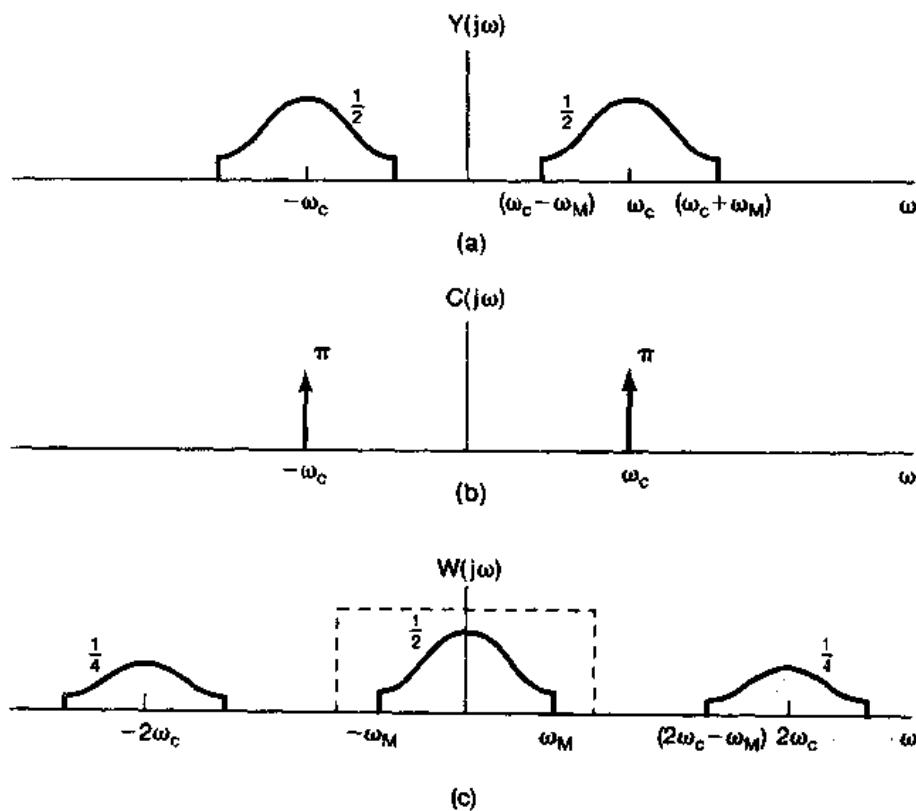


图 8.6 正弦载波的幅度已调信号的解调：

(a) 已调信号的频谱；(b) 载波信号的谱；(c) 已调信号乘以载波后的频谱

图中虚线指出用于提取已解调信号的低通滤波器的频率响应

利用复指数载波进行幅度调制和解调的整个系统示于图 8.7 中, 而利用正弦载波调制和解调的整个系统示于图 8.8 中。在这两张图上, 都指出了更为一般的情况, 即在复指数和正弦载波两种情况下, 都包括了载波相位 θ_c 。为了包括 θ_c , 以上分析相应会有些变化, 但也是很直接的, 并将在习题 8.21 中考虑。

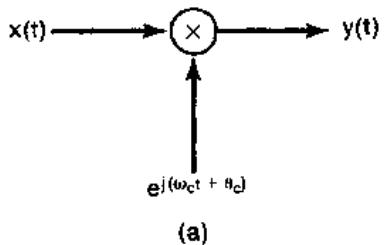
在图 8.7 和图 8.8 的系统中, 都假设解调器载波在相位上与调制器载波是同相的, 从而这一过程称为同步解调。然而, 以下分析如果调制器和解调器在相位上不同步的话, 考虑一下这两种系统的解调结果。在复指数载波的情况下, 用 θ_c 代表调制载波的相位, 用 ϕ_c 代表解调用载波的相位, 即

$$y(t) = e^{j(\omega_c t + \theta_c)} x(t) \quad (8.14)$$

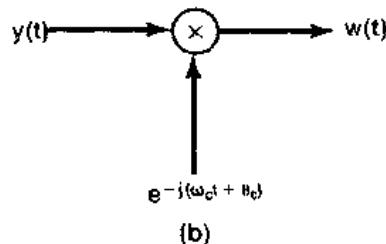
$$w(t) = e^{-j(\omega_c t + \theta_c)} y(t) \quad (8.15)$$

或者

$$w(t) = e^{j(\theta_c - \phi_c)} x(t) \quad (8.16)$$

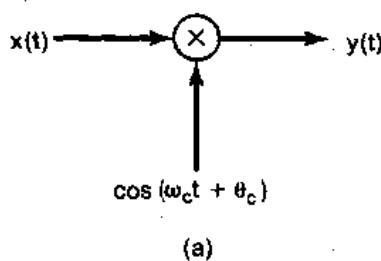


(a)

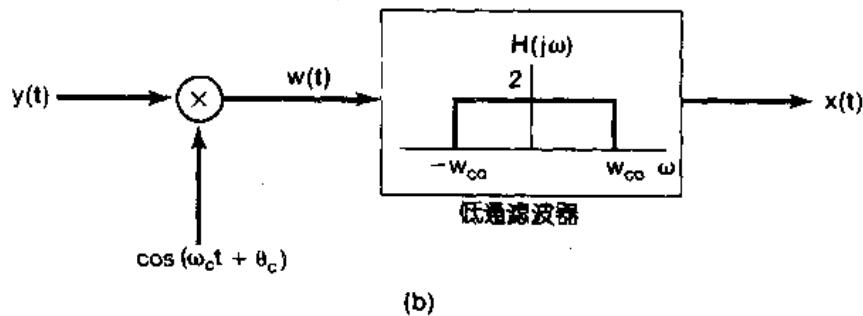


(b)

图 8.7 利用复指数载波的幅度调制和解调系统:
(a) 调制; (b) 解调



(a)



(b)

图 8.8 正弦载波的幅度调制与解调: (a) 调制系统; (b) 解调系统。

低通滤波器的截止频率 W_∞ 大于 ω_M 而小于 $(2\omega_c - \omega_M)$

因此, 如果 $\theta_c \neq \phi_c$, 那么 $w(t)$ 将有一个复振幅因子。对于 $x(t)$ 为正值的特殊情况, $x(t) = |w(t)|$, 因而 $x(t)$ 可以通过取已解调信号的绝对值而恢复出来。

对正弦载波而言, 还是设 θ_c 和 ϕ_c 分别为调制载波和解调载波的相位, 如图 8.9 所示。现在低通滤波器的输入 $w(t)$ 就是

$$w(t) = x(t) \cos(\omega_c t + \theta_c) \cos(\omega_c t + \phi_c) \quad (8.17)$$

或者利用三角恒等式

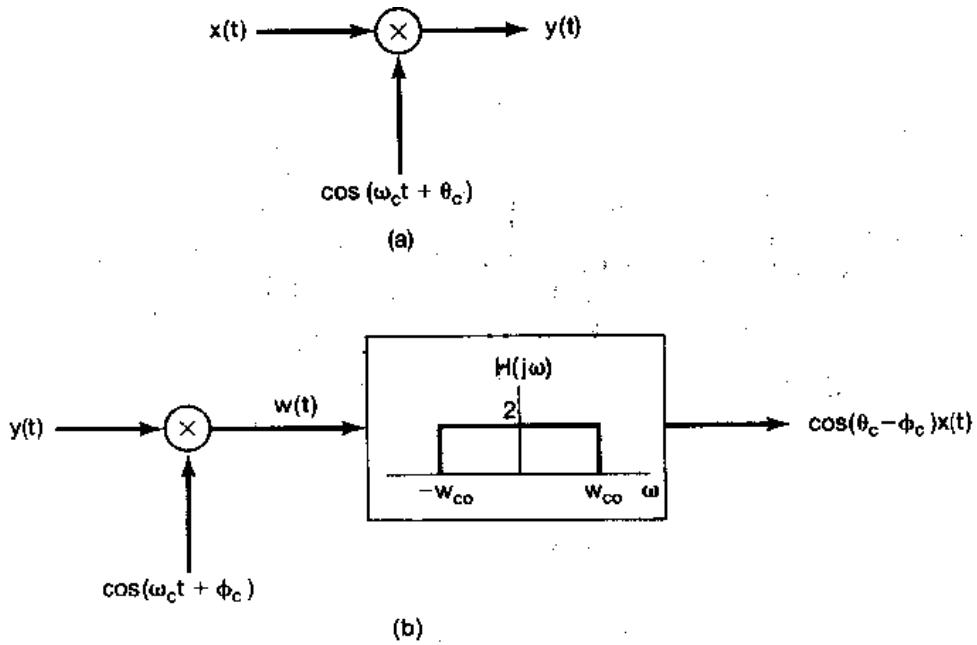


图 8.9 调制器和解调器中载波信号不同步时的正弦幅度调制和解调系统：

(a) 调制器；(b) 解调器

$$\cos(\omega_c t + \theta_c) \cos(\omega_c t + \phi_c) = \frac{1}{2} \cos(\theta_c - \phi_c) + \frac{1}{2} \cos(2\omega_c t + \theta_c + \phi_c) \quad (8.18)$$

可得

$$w(t) = \frac{1}{2} \cos(\theta_c - \phi_c) x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cos(2\omega_c t + \theta_c + \phi_c) \quad (8.19)$$

这样，低通滤波器的输出就是 $x(t)$ 乘以振幅因子 $\cos(\theta_c - \phi_c)$ 。如果调制器和解调器中的振荡器是同相位的，即 $\theta_c = \phi_c$ ，那么低通滤波器的输出就是 $x(t)$ 。另一方面，如果这些振荡器有 $\pi/2$ 的相位差，则输出就是零。一般来说，为了获得最大的输出信号，振荡器应该同相。更为重要的是，这两个振荡器之间的相位关系必须在全部时间内保持不变，以使振幅因子 $\cos(\theta_c - \phi_c)$ 不变。这就要求在调制器和解调器之间准确地同步，这一点往往是困难的，特别是在通信系统中，一般调制和解调总是被分隔在两个不同的地点。同步的需要和相应的影响不仅仅存在于调制器和解调器的相位之间，而且还存在于两者所用的载波频率之间。关于这两点将在习题 8.23 中详细讨论。

8.2.2 非同步解调

在很多应用正弦幅度调制的系统中，还有另一种称为非同步解调的方法也经常被采用。非同步解调避免了在调制器和解调器间需要同步的困难。特别是，假设 $x(t)$ 总是正的，而载波频率 ω_c 比调制信号的最高频率 ω_M 又高很多的情况下，已调信号 $y(t)$ 就会有如图 8.10 那样的一般形式。特别是连接 $y(t)$ 中峰值的一条平滑曲线，称之为 $y(t)$ 的包络线将表现为 $x(t)$ 的一个合理的近似。于是， $x(t)$ 就能够近似地通过一个系统而得到恢复，该系统可以跟踪着 $y(t)$ 的峰值以提取这一包络而将 $x(t)$ 恢复出来。这样的系统称为包络检波器。图 8.11(a) 是用作包络检波器的一个简单电路的例子，这种电路一般都跟着一个低通滤波器以

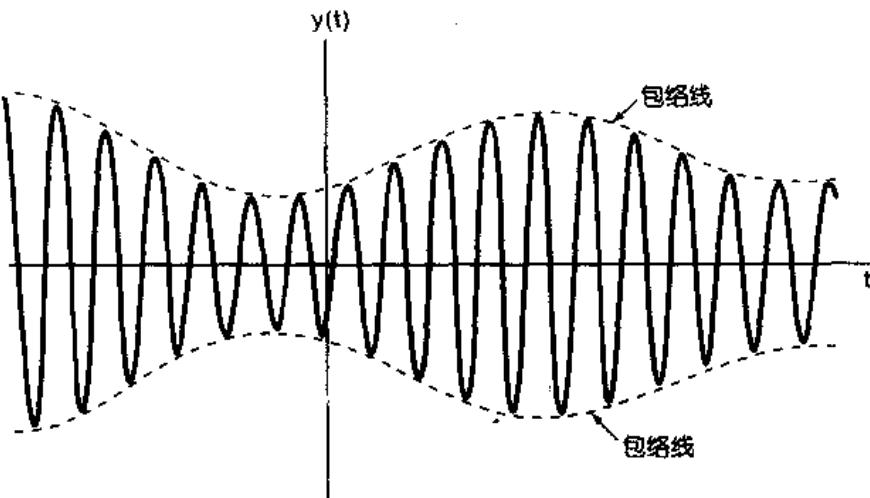


图 8.10 调制信号为正的幅度已调信号，图中虚线代表已调信号的包络

减小包络中载频的波动，这种波动在图 8.11(b)中是很明显的，并且一般都会在如图 8.11(a)所示的包络检波器的输出端存在。

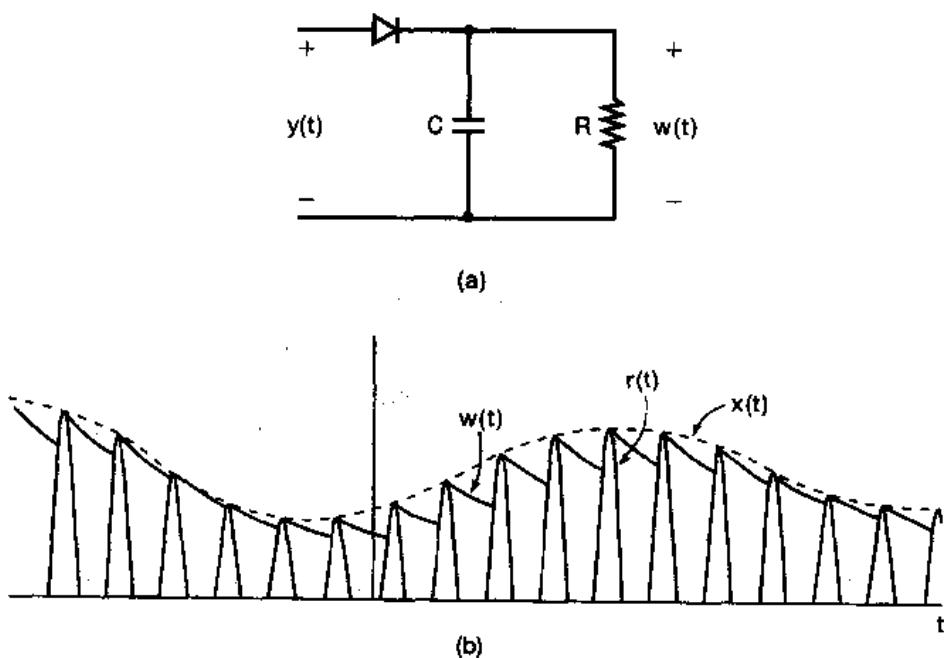


图 8.11 用包络检波解：

(a) 利用半波整流的包络检波器电路；(b) 与图(a)有关的波形： $r(t)$ 是半波整流信号， $x(t)$ 是真正的包络，而 $w(t)$ 是从图(a)中电路得到的包络。为了说明问题，图(b)中 $x(t)$ 和 $w(t)$ 之间的差别已经夸大了。在一个实际的非同步解调系统中， $w(t)$ 是非常接近于 $x(t)$ 的。

对于非同步解调需要两个基本假设：一是 $x(t)$ 总是正的；第二是 $x(t)$ 的变化比 ω_c 要慢得多，以使包络线容易被跟踪。这第二个条件是满足的，例如在射频信道上进行音频传输， $x(t)$ 的最高频率一般约为 $15\sim20\text{kHz}$ ，而 $\omega_c/2\pi$ 总在 $500\sim2000\text{ kHz}$ 范围内。第一个条件，

$x(t)$ 总是正的，也能够满足，这只要把一个适当的常数值加到 $x(t)$ 上，或者在调制器中做一些简单的变化，如图 8.12 所示，都能保证这一点。这样，包络检波器的输出就近似为 $x(t) + A$ ，从这里 $x(t)$ 是很容易获得的。

为了用包络检波器解调，就要求 A 足够大，以使 $x(t) + A$ 总是正的。现令 K 是 $x(t)$ 的最大幅度值，也即 $|x(t)| \leq K$ 。欲要 $x(t) + A$ 总是正的，就要求 $A > K$ 。一般 K/A 之比称为调制指数 m ；若以百分数表示，则称为调制百分数。图 8.13 示出当 $x(t)$ 为正弦变化的情况下，在两个不同的 m 值分别为 $m = 0.5$ (50% 调制) 和 $m = 1$ (100% 调制) 时，图 8.12 调制器的输出波形。

当分别利用同步解调和非同步解调时，与已调信号有关的频谱画在图 8.14 中，以供比较。特别注意到，对于图 8.12 那样的非同步解调系统，其调制器的输出有一个额外的分量 $A \cos \omega_c t$ ，这个分量在同步解调系统中是不存在的，也是不必要的。在图 8.14 中，这就是反映在图(c)中存在于 $+\omega_c$ 和 $-\omega_c$ 处的冲激。若调制信号的最大幅度 K 固定不变，则随着 A 的减小，存在于已调信号输出中载波分量的相对值就减小。因为在输出中的载波分量不含有任何信息，它的存在是不经济的。譬如对发射已调信号所要求的功率大小来说就是这样，因此从这种意义上来说，希望 K/A 之比，也即调制指数 m 尽可能大。但在另一方面，像图 8.11 那样的简单包络检波器，跟踪包络线以提取 $x(t)$ 的能力，则是随着调制指数 m 的下降而改善的。因此在调制器输出中，系统在功率利用上的效率和解调信号的质量之间存在着一个折衷考虑。

图 8.11 和图 8.12 的非同步调制/解调系统与图 8.8 的同步系统相比各有优点和缺点。同步系统要求有一个更为高档的解调器，因为解调器中的振荡器必须与调制器中的振荡器在相位和频率上保持同步；而在另一方面，非同步调制器则比同步调制器要求有更大的输出功率，因为包络检波器要能正常工作的话，包络线必须是正的，或者等效地说，在被发射的信号中必须要有载波分量存在。这种情况往往在像公共无线电广播这样的系统中是受欢迎的，因为它要求成批生产，为数众多而又价格适中的接收机(解调器)供大家收听；另外，在发射

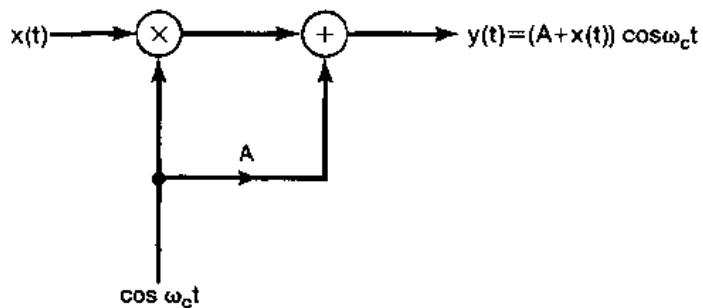


图 8.12 非同步调制/解调系统中的调制器

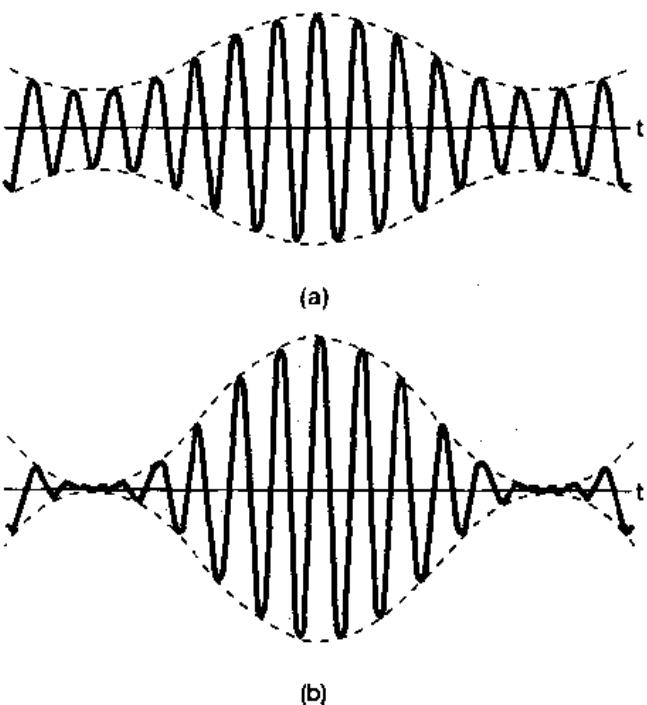


图 8.13 图 8.12 幅度调制系统的输出：
(a) 调制指数 $m = 0.5$ ；(b) 调制指数 $m = 1.0$

功率上付出的额外代价还可以在大量的廉价接收机上得到补偿。但是，在发射机的功率要求是非常宝贵的情况下，如在卫星通信系统中，花在一个更为高档的同步接收机上的代价就是很值得的了。

8.3 频分多路复用

用于传输信号的许多系统都可以提供一个比信号本身所要求的频带宽得多的带宽。例如：一个典型的微波中继系统其总带宽可达几千兆赫(GHz)，而这个带宽比单个声音信道要求的带宽要大得多。如果频谱互相重叠的单个声音信号，利用正弦幅度调制把它们的频谱在频率上进行搬移，使这些已调信号的频谱不再重叠，那么就能够在同一个宽带信道上同时传输这些信号。这就是频分多路复用(FDM)的概念。利用正弦载波的频分多路复用原理如图8.15所示。每一个欲传输的信号假设都是带限的，并且用不同的载波频率进行调制，然后把这些已调信号组合在同一个通信信道上同时被传输。每一个子信道和复合多路信号的频谱都示于图8.16中。通过这一复用过程，每一输入信号都安排在这个频带内的不同部分。为了在解复用过程中恢复每一信道，要求有两个基本步骤：先用带通滤波器来滤出某一特定信道的已调信号，然后紧跟着利用解调来恢复原始信号。譬如说，要恢复信道a，而又采用同步解调的话，就如图8.17所示。

电话通信是频分多路复用系统的一个重要应用场合，另一个重要应用场合就是在射频频带内，经由大气层的信号传输。在美国，用于传输信号的这些频率是从10kHz到257GHz，并受联邦通信委员会(Federal Communications Commission)控制来合理安排它的使用。图8.18示出的是当前的频段分配。由图可见，在1MHz附近的频率范围是安排给调幅(AM)广播波

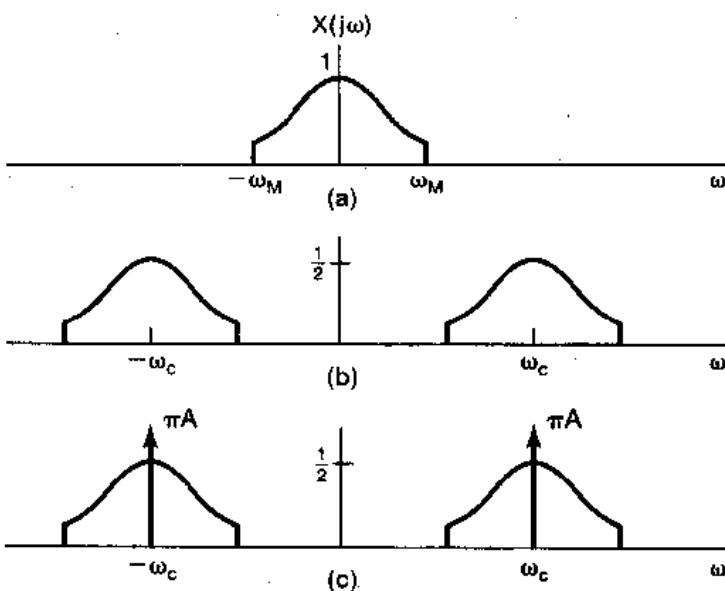


图 8.14 同步与非同步正弦幅度调制系统频谱比较：
(a) 调制信号的谱；
(b) 在同步系统中代表已调信号 $x(t)\cos\omega_ct$ 的谱；
(c) 在非同步系统中代表已调信号 $[x(t)+A]\cos\omega_ct$ 的谱

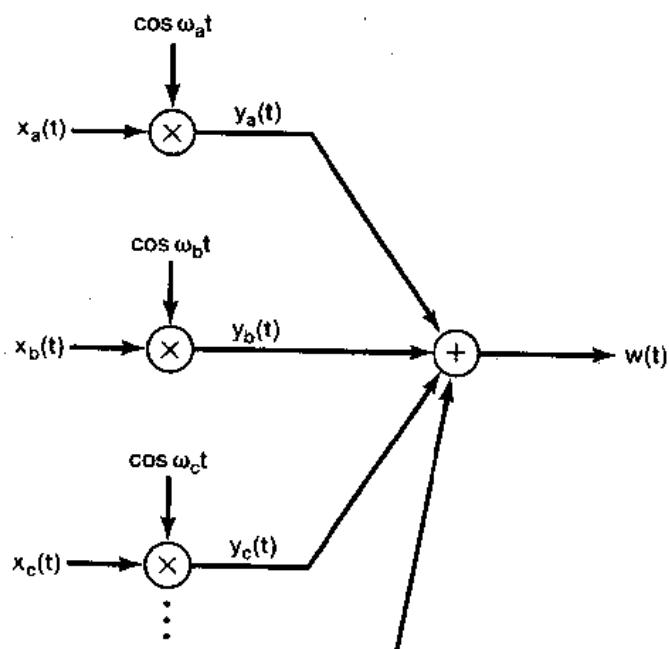


图 8.15 利用正弦幅度调制的频分多路复用

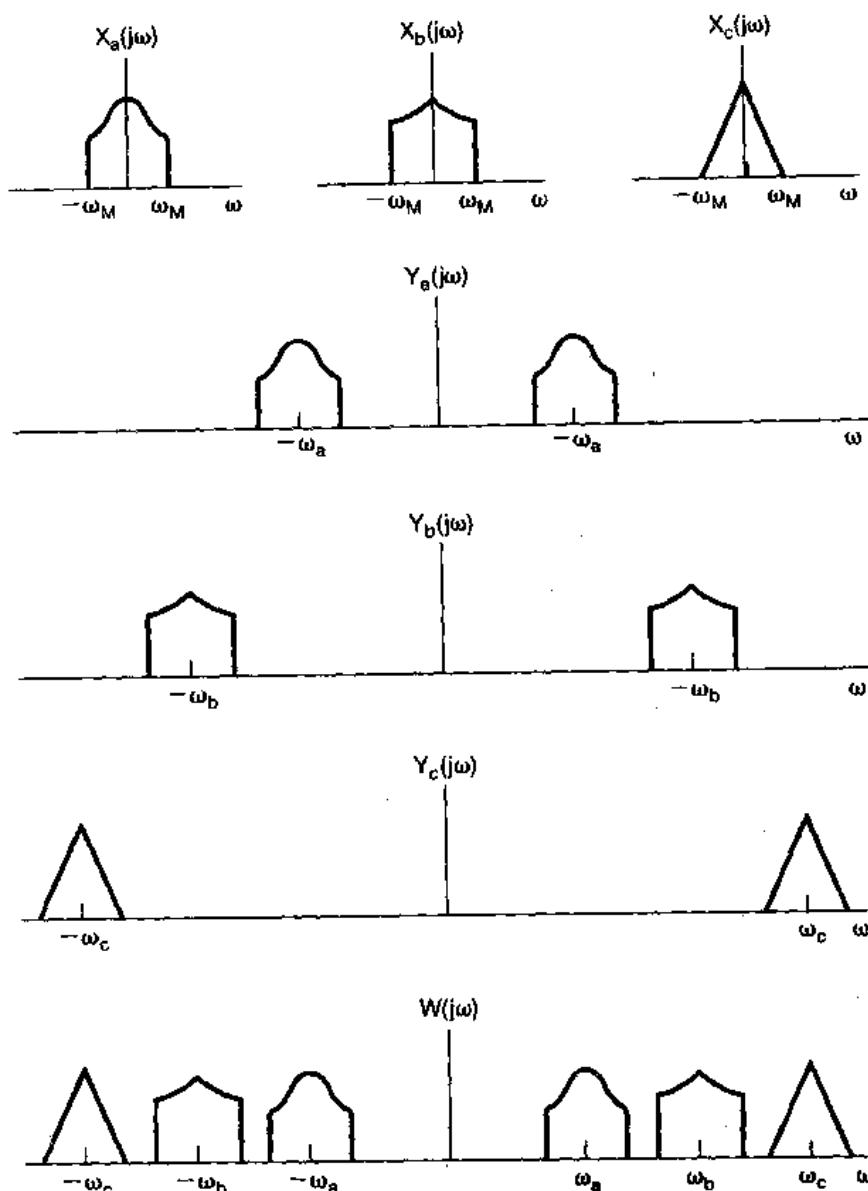


图 8.16 图 8.15 频分多路复用系统中的有关频谱

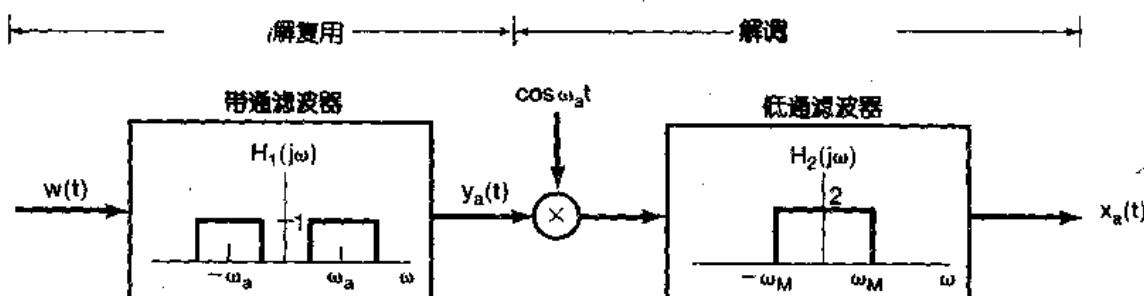


图 8.17 对某一路频分多路复用信号的解复用与解调

段(这里 AM 特指正弦幅度调制)的。每一个调幅无线电台都安排在 AM 波段某一个特定的频率范围内，这样，许多电台就可以利用频分多路复用同时广播。在接收机方面，原则上每一个电台都可以用图 8.17 那样的解复用和解调系统选出来。接收机面板上的调谐旋钮既控制

频率范围	符 号	用 途	传 播 方 式	信 道 特 点
30~300Hz	ELF (极低频)	长波、海底通信	兆米波	穿透导电大地与海水
0.3~3kHz	VF (音频)	数据终端、电话	铜导线	
3~30kHz	VLF (甚低频)	导航、电话、电报、频率和时间标准	地表面波	低损耗、小衰落、极稳定的相位与频率、大天线
30~300kHz	LF (低频)	工业通信(电力线)、航空与海上远距离导航、无线电航标	大多为地表面波	些微衰落、高大气噪声
0.3~3MHz	MF (中频)	移动通信, AM 广播, 业余、公用保险	地波与电离层反射(天空波)	衰落增加, 仍可靠
3~30MHz	HF (高频)	军事通信、飞行器、国际定点, 业余及民用波段、工业应用	电离层反射天空波(50~400km 电离层高度)	周期性和频率选择性衰落、多径效应
30~300MHz	VHF (甚高频)	FM 和 TV 广播, 地面通信(出租汽车、公共汽车、铁路)	天空波(电离层反射和对流层散射)	衰落、散射和多径效应
0.3~3GHz	UHF (特高频)	特高频 TV、空间遥测、雷达、军事	穿越地表至对流层散射与视距中继	
3~30GHz	SHF (超高频)	卫星与空间通信、公用载频(CC)、微波	视距电离层穿透	电离层穿透, 宇宙噪声, 高方向性
30~300GHz	EHF (极高频)	科研、政府机关、射天文	视距	水蒸汽和氧吸收
10^3 ~ 10^7 GHz	红外线, 可见光 紫外线	光通信	视距	

图 8.18 射频频谱的频率分配

了带通滤波器的中心频率, 又控制了解调振荡器的频率。事实上, 对民用公共广播来说, 都采用非同步调制和解调系统以简化接收机并降低它的成本。再者, 图 8.17 所示的解复用系统要求一个锐截止的, 中心频率可变的带通滤波器。实现一个可变频率选择性滤波器是困难的, 结果代替它的是一个固定频率的滤波器, 并采用一个中间调制级和滤波[在无线电接收机中称为中频(IF)级]。不用可变带通滤波器, 而利用调制来把信号的频谱搬到一个固定的带通滤波器内, 这一过程和 4.5.1 节讨论的过程是相类似的。这就是目前家用调幅无线电接收机所用的基本原理。关于这个问题的更多细节将在习题 8.36 中讨论。

如图 8.16 所说明的, 在图 8.15 那样的频分多路复用系统中, 每一个信号的频谱都在正和负的频率上重复, 因此已调信号就占据了原始信号两倍的带宽。这一点在频带的利用上是不经济的。下一节将讨论另外一种正弦幅度调制的形式, 它能更为有效的利用频带, 但是, 为此而付出的代价却是调制和解调系统都大大地复杂化了。

8.4 单边带正弦幅度调制

在 8.1 节讨论的正弦幅度调制系统, 原始信号 $x(t)$ 的总带宽是 $2\omega_M$, 既包括正的频率部

分，又包括负的频率部分，其中 ω_M 是 $x(t)$ 中的最高频率。利用复指数载波，这个频谱被搬到 ω_c 上去，虽然已调信号现在是复数的，但占有信号能量的总的频带宽度仍是 $2\omega_M$ 。利用正弦载波，信号的频谱转移到 $+\omega_c$ 和 $-\omega_c$ 上，因此要求二倍于前面的频带宽度。这意味着利用正弦载波，在已调信号中有多余度，利用一种称之为单边带调制技术，可以把这个多余度除掉。

图 8.19(a)示出了 $x(t)$ 的频谱，这里用不同的阴影线标出正负频率分量。图 8.19(b)是用正弦载波调制所得到的频谱，图中特别用上边带和下边带标出在 $+\omega_c$ 和 $-\omega_c$ 两边的频谱部分。比较一下图 8.19(a)和(b)可以看出，如果仅仅保留正、负频率的上边带部分的话， $X(j\omega)$ 可以被恢复出来；或者相仿，仅仅保留正、负频率的下边带部分的话，也可以将 $X(j\omega)$ 恢复出来。仅仅保留上边带所得到的频谱如图 8.19(c)所示，而图 8.19(d)则是仅仅保留下边带时的频谱。将 $x(t)$ 转换到相应于图 8.19(c)或(d)这样

的形式称为单边带调制，简称 SSB。与图 8.19(b)相比，上、下两个边带都保留的称为双边带调制，简称 DSB。

有几种方法可以获得单边带信号。其一是应用一个锐截止的带通或高通滤波器，滤掉图 8.19(b)中不需要的边带，如图 8.20 所示。第二种方法是采用移相技术来滤掉一个边带而保留另一个边带。图 8.21 就是一个用于保留下边带的这种系统。该图中的 $H(j\omega)$ 是一个称为“90°相移网络”，其频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

$x(t), y_1(t) = x(t)\cos\omega_c t, y_2(t) = x_p(t)\sin\omega_c t$ 和 $y(t)$ 的频谱都画在图 8.22 中。如在习题 8.28 中所讨论的，若要保留上边带的话， $H(j\omega)$ 的相位特性应该相反，而为

$$H(j\omega) = \begin{cases} j, & \omega > 0 \\ -j, & \omega < 0 \end{cases} \quad (8.21)$$

正如在习题 8.29 所讨论的，单边带系统的同步解调可以和双边带系统的同步解调采用一样

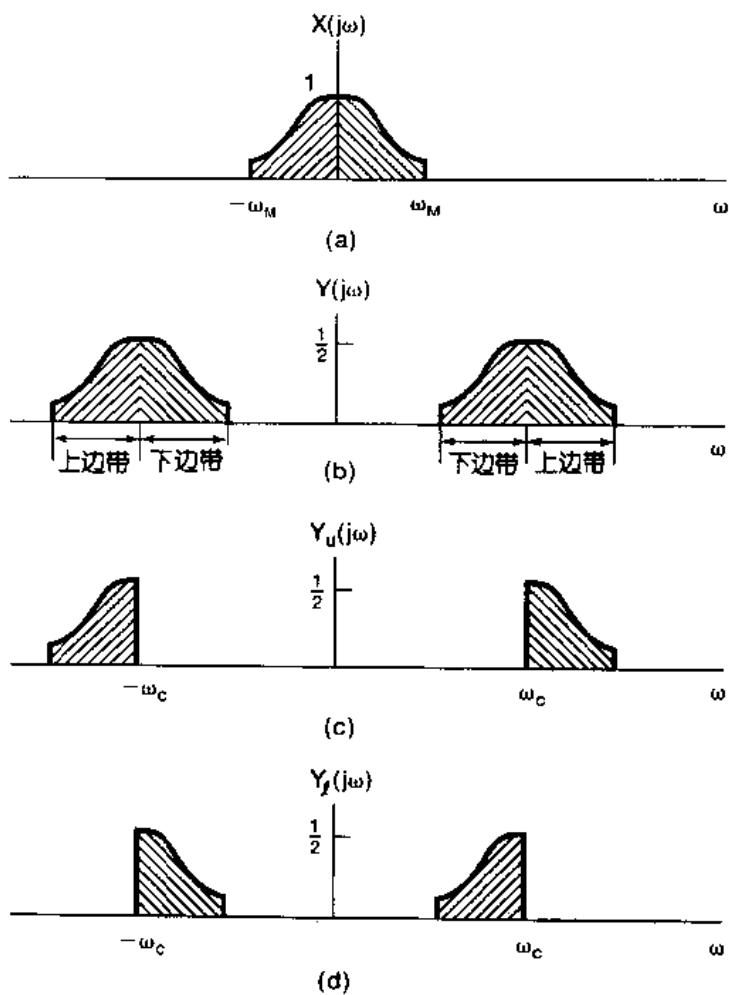


图 8.19 双边带与单边带调制：

- (a) 调制信号频谱；(b) 用正弦载波调制后的频谱；
- (c) 仅包含上边带的频谱；(d) 仅包含下边带的频谱

的方式来实现。为单边带系统频谱利用率的提高所付出的代价是增加了调制器的复杂性。

总之，从 8.1 节到 8.4 节已经见到几种复指数和正弦幅度调制。若利用 8.2.2 节讨论的非同步解调，就必须在调制信号上增加一个常数值以使它总为正，这就在已调输出中形成了载波分量信号的存在，则在传输时就要求更多的功率，但却使解调器比在一个同步系统中所要求的要简单得多。另外，在已调输出中仅保留上边带或下边带的话，频带和发射机功率的使用都更加经济有效，但要求一个更加高档的解调器。具有双边带并含有载波的正弦幅度调制，一般就缩为 AM - DSB / WC，意即“幅度调制双边带/载波存在”，而当载波抑制或不存在

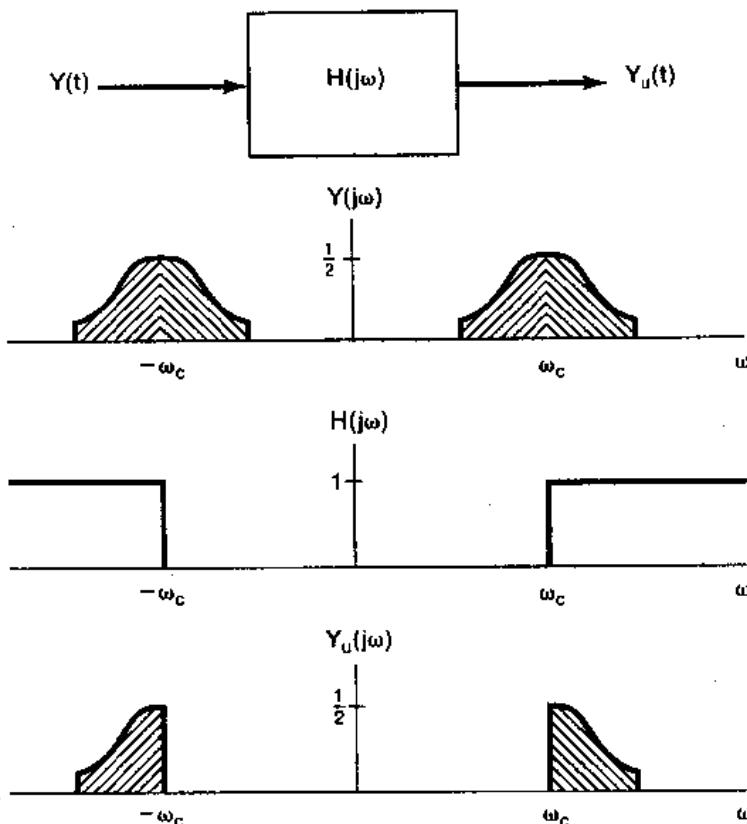


图 8.20 利用理想高通滤波器保留上边带的系统

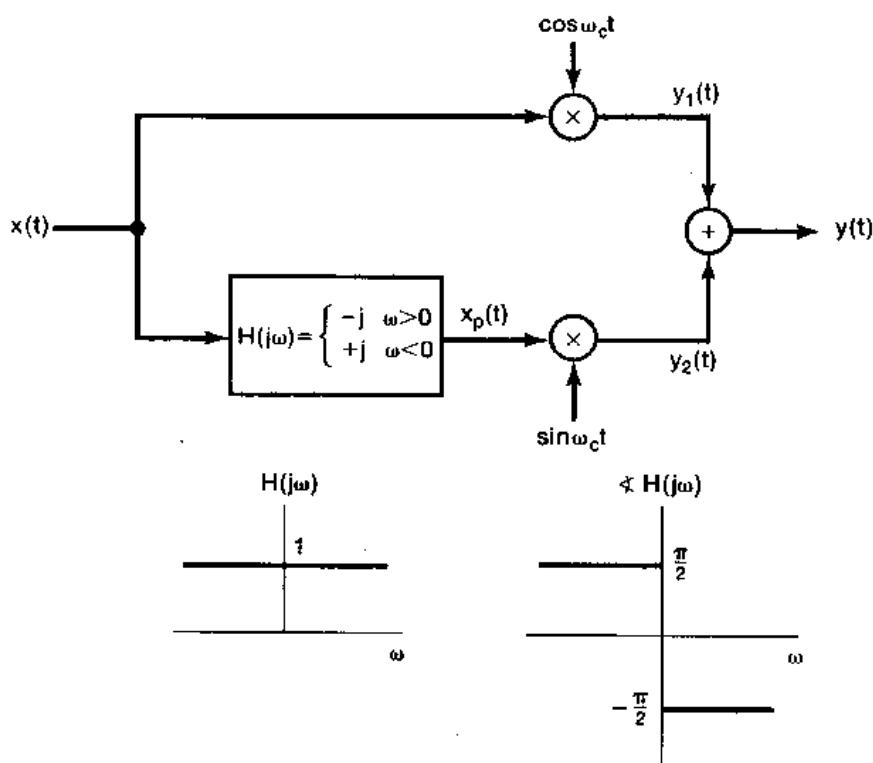


图 8.21 利用一个 90° 相移网络，仅保留下边带的单边带幅度调制系统

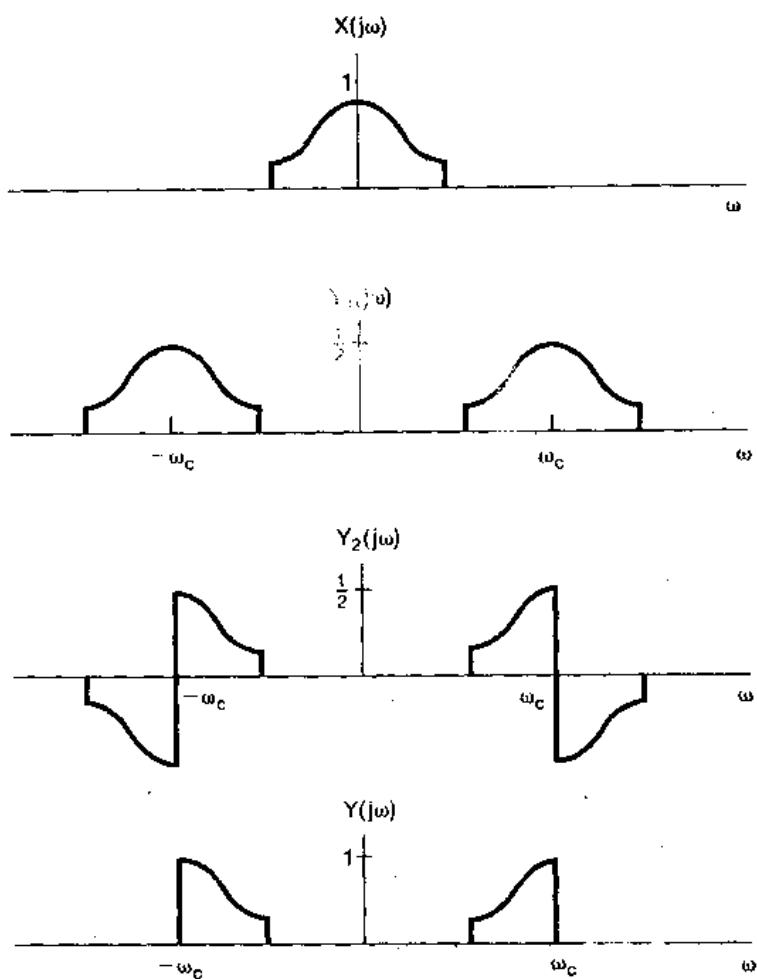


图 8.22 图 8.21 单边带系统的有关频谱

时，就缩写为 AM - DSB/SC，意即“幅度调制双边带/载波抑制”。相应的单边带系统就分别缩写为 AM - SSB/WC 和 AM - SSB/SC。

从 8.1 节到 8.4 节都是想对与正弦幅度调制有关的许多基本概念作一简单介绍，有关它们的很多细节和实现的进一步讨论，读者可参阅书末所列的有关文献。

8.5 用脉冲串作载波的幅度调制

8.5.1 脉冲串载波调制

在前面几节中，讨论的幅度调制是用正弦载波。另一类重要的幅度调制技术利用的载波信号是一个脉冲串，如图 8.23 所示。这种类型的幅度调制相当于等间隔地传输 $x(t)$ 的时隙样本。一般来说，不能期望任何一个信号都能从这样一组时隙样本中得到恢复。然而，从第 7 章采样概念的讨论使人能想到，如果 $x(t)$ 是带限的，并且脉冲重复频率足够高，这应该是可能的。

由图 8.23 可见

$$y(t) = x(t)c(t) \quad (8.22)$$

也就是说，已调信号 $y(t)$ 是 $x(t)$ 和载波 $c(t)$ 的乘积。若用 $Y(j\omega)$, $X(j\omega)$ 和 $C(j\omega)$ 分别代表

这些信号的傅里叶变换，那么，由相乘性质可得

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * C(j\omega) \quad (8.23)$$

因为 $c(t)$ 是周期的，周期为 T ，所以 $C(j\omega)$ 就是由在频域中相隔 $2\pi/T$ 的冲激所组成的。即

$$C(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_c) \quad (8.24)$$

其中 $\omega_c = 2\pi/T$ ，系数 a_k 就是 $c(t)$ 的傅里叶级数系数，由例 3.5，它们是

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_c \Delta/2)}{\pi k} \quad (8.25)$$

$c(t)$ 的频谱如图 8.24(b) 所示。若 $x(t)$ 的频谱如图 8.24(a) 所示的话，那么已调信号 $y(t)$ 所得到的谱就如图 8.24(c) 所示。由 (8.23) 式和 (8.24) 式可知， $Y(j\omega)$ 就是 $X(j\omega)$ 的加权和移位的各部分之和，

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(\omega - k\omega_c)) \quad (8.26)$$

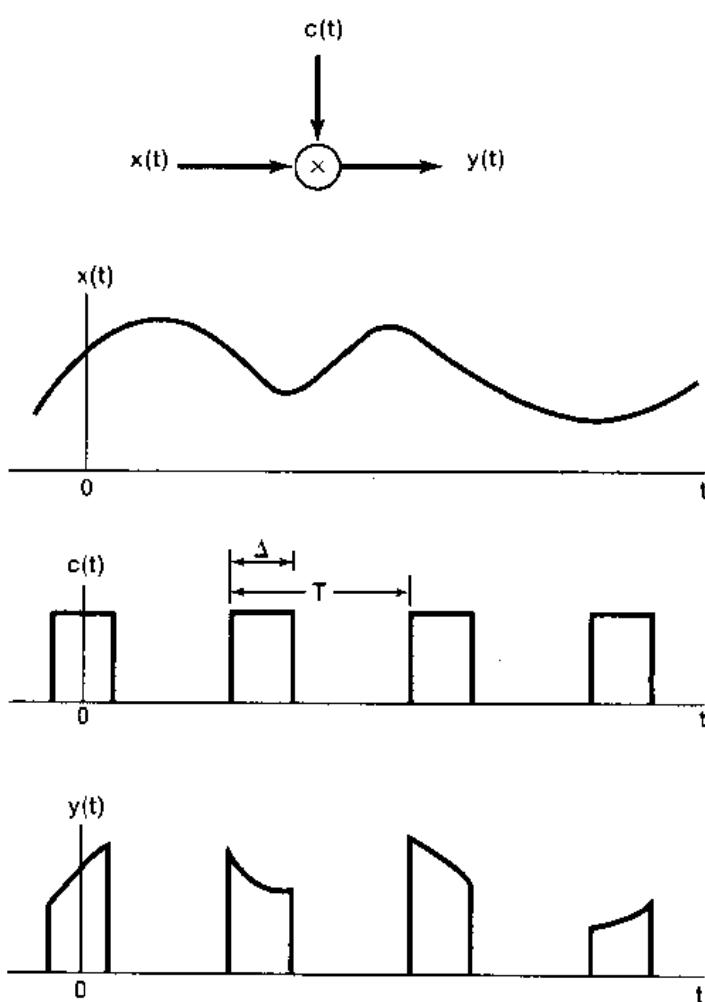


图 8.23 脉冲串幅度调制

比较一下 (8.26) 式和 (7.6) 式，以及比较一下图 8.24 和图 7.3(c) 可见， $y(t)$ 的频谱是非常类似于由周期冲激串采样所得到的频谱，唯一的差别在脉冲串的傅里叶系数值上。对于在第 7 章所用的周期冲激串来说，所有的傅里叶系数都是等于 $1/T$ ，而在图 8.23 中的脉冲串 $c(t)$ ，其傅里叶系数则由 (8.25) 式给出。这样，只要 $\omega_c > 2\omega_M$ ， $X(j\omega)$ 的周期重复并受 a_k 加权的各部分之间就不会互相重叠，这就相当于奈奎斯特采样定理中的条件。如果这一条件可以满足，那么就与冲激串采样相同， $x(t)$ 可以应用一个截止频率大于 ω_M ，小于 $\omega_c - \omega_M$ 的低通滤波器从 $y(t)$ 中恢复出来。

值得注意的是，上述结论对其它各种形状的脉冲载波波形也都成立，即：如果 $c(t)$ 是任意具有某傅里叶系数 a_k 的，由 (8.24) 式表示的傅里叶变换的周期信号，那么 $Y(j\omega)$ 就由 (8.26) 式给出。然后，只要 $\omega_c = 2\pi/T > 2\omega_M$ ，在 $Y(j\omega)$ 中各加权和移位的 $X(j\omega)$ 就不会重叠，在直流傅里叶系数 a_0 为非零的条件下，可以用低通滤波的方法将 $x(t)$ 恢复出来。如同在习题 8.11 中所指出的，如果 a_0 是零或者非常的小，那么利用一个带通滤波器选取 a_k 较大的那个 $X(j\omega)$ 的移位分量，就可以得到一个正弦 AM 的信号，唯有这时作为调制信号的 $x(t)$ 受到某一加权。利用 8.2 节的解调方法可以将 $x(t)$ 恢复。

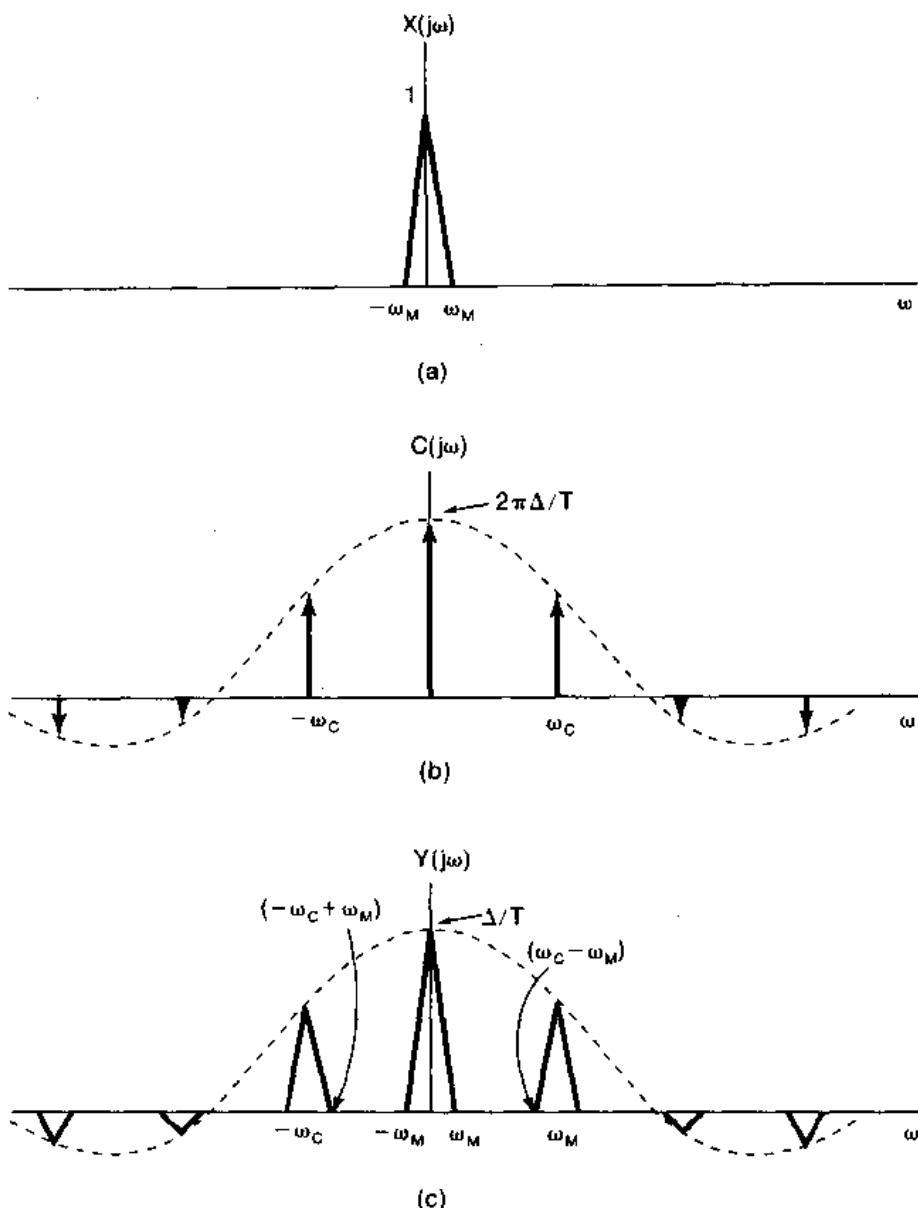
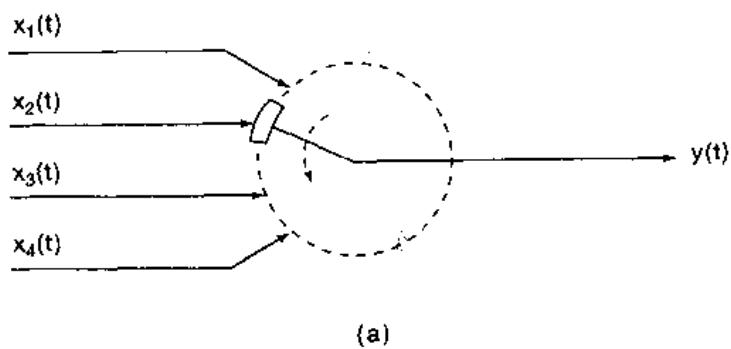


图 8.24 脉冲串幅度调制的有关频谱：

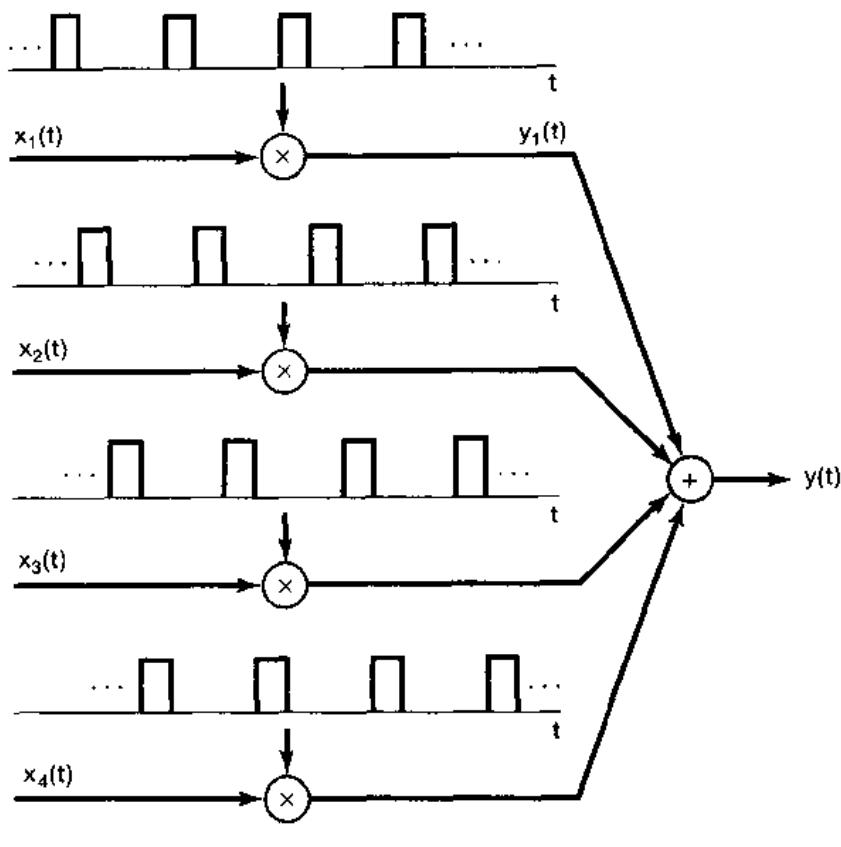
(a)带限信号 $x(t)$ 的频谱；(b)图 8.23 中中脉冲载波信号 $c(t)$ 的频谱；(c)已调脉冲串 $y(t)$ 的谱

8.5.2 时分多路复用

利用脉冲串载波的幅度调制常用于在某单一信道上传输几路信号。如图 8.23 所指出过的，已调信号 $y(t)$ 是仅当载波信号 $c(t)$ 为非零的时候才不为零的；而在这个 $c(t)$ 的间隔内，就能传输其它类似的已调信号。这一过程的两种等效表示可如图 8.25 所示。在一个单一的信道内，利用这种技术来实现多路信号的传输就是：每一路信号被安排在一组持续期为 Δ 的时隙内，该 Δ 时隙每隔 T 秒重复一次，并且它不会与安排给其它路信号的时隙相重合。 Δ/T 的比值愈小，在这个信道内能传输的信号路数就愈多。这一过程就称为时分多路复用(TDM)。在 8.3 节讨论的频分多路复用是为每一路信号指定不同的频率间隔，而时分多路复用则是为每一路信号指定不同的时间间隔。在图 8.25 中，对每一路信号从复合信号中解复用是通过时间控制门的办法来选择与每一路信号有关的特定时隙来完成的。



(a)



(b)

图 8.25 时分多路复用

8.6 脉冲幅度调制

8.6.1 脉冲幅度已调信号

在 8.5 节中讨论了一种调制系统，在该系统中是用一个连续时间信号 $x(t)$ 去调制一个周期脉冲串，这就相当于每隔 T 秒，传输 $x(t)$ 中一个 Δ 时隙的信号。无论是在上节的讨论中，或是在第 7 章采样的研究中都看到，从这些时隙信号中恢复 $x(t)$ 的能力并不取决于 Δ 的大小，而是与频率 $2\pi/T$ 有关的；为了保证 $x(t)$ 的重建是无混叠的，这个频率必须要超过奈奎斯特率。这就是说，原则上仅需要传输信号 $x(t)$ 的样本 $x(nT)$ 。

事实上，在现代通信系统中，要传输的是这些载有信息信号 $x(t)$ 的样本值，而不是那些时隙内的值。但是由于一些实际的问题，在一个通信信道上能传输的最大幅度有限制，这样传输 $x(t)$ 的冲激样本就不实际，而代之以样本 $x(nT)$ 去调制一脉冲序列的幅度，这样就形成了所谓脉冲幅度调制(PAM)系统。

利用矩形脉冲就相当于采样保持的办法，将持续期为 Δ 的，幅度正比于 $x(t)$ 的瞬时样本值的这些脉冲传输出去，图 8.26 示出了这种型式的单一 PAM 信道的波形图，图中虚线代表

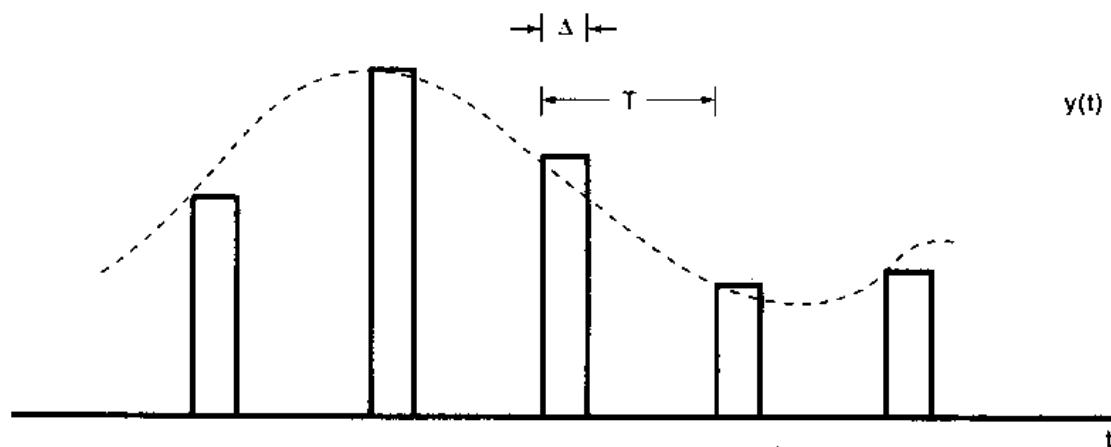


图 8.26 对一路 PAM 信道传输的波形，图中虚线代表信号 $x(t)$

表信号 $x(t)$ 。和 8.5 节的调制方法一样，PAM 信号也是能够时分多路复用的。这就如图 8.27 所示。图中画出了三路时分多路复用信道的传输波形，与各路有关的脉冲用阴影线加以

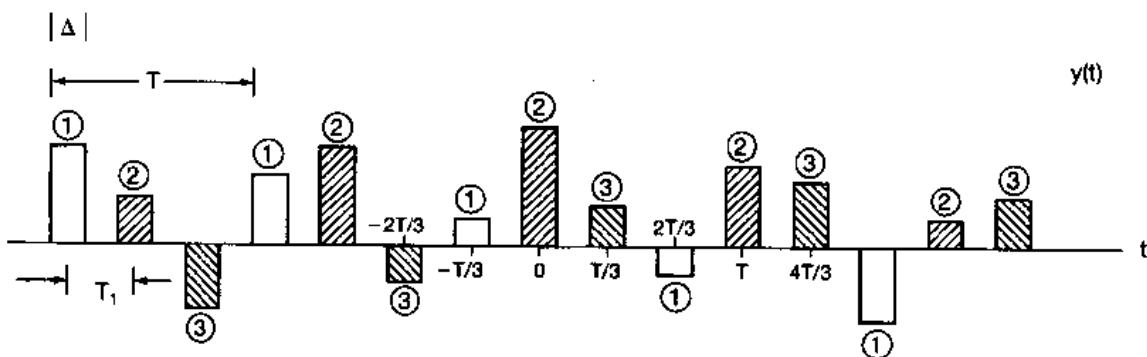


图 8.27 三路时分多路复用的 PAM 信道的传输波形。与每路有关的波形是用不同的阴影线来区分的，同时在每一路脉冲上还标出了信道号码。这里符号间的间隔是 $T_1 = T/3$

区分，并且在每路的脉冲上方还用信道号码标出。对某一给定的重复周期 T 来说，随着脉冲宽度的减小，在同一通信信道或媒质内就能传输更多的时分多路复用的信号。然而，当脉冲宽度减小时，一般就需要增大传输脉冲的幅度，以使得每一个脉冲在传输中有一定的能量。

除了在能量方面的考虑外，在设计一个 PAM 信号时，还有一些其它的因素要顾及到。特别是，我们知道，只要采样频率超过奈奎斯特率， $x(t)$ 都能完全由它的样本恢复出来，这样就能用这些样本去调制任何形状的一串脉冲的幅度！脉冲形状的选择受制于这样一些因素，譬如所用的通信媒质的频率选择性，码间干扰问题等，这个将在下面讨论。

8.6.2 在 PAM 系统中的码间干扰

在刚才所讨论的 TDM 脉冲幅度调制系统中，原则上接收机都能够凭借在一些适当的时间对时分多路复用的波形进行采样而将各路信道分隔开。例如。考虑图 8.27 的时分多路复用信号，它是由三个信号 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 的脉冲幅度调制所组成的，如果在每个脉冲的中间点上用适当的时间对 $y(t)$ 采样，那么就能将这三路信号的样本分隔开，即

$$\begin{aligned}y(t) &= Ax_1(t), t = 0, \pm 3T_1, \pm 6T_1, \dots \\y(t) &= Ax_2(t), t = T_1, T_1 \pm 3T_1, T_1 \pm 6T_1, \dots \\y(t) &= Ax_3(t), t = 2T_1, 2T_1 \pm 3T_1, T_1 \pm 6T_1, \dots\end{aligned}\quad (8.27)$$

其中 T_1 是码间间隔，这里等于 $T/3$ ，而 A 是一个适当的比例常数。换句话说，利用对已接收到的时分多路复用的 PAM 信号进行合适的采样，就能得出 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 的各样本值。

上面一段所说的方法都是假定传输的脉冲形状在通信信道上传播时都能保持得相当好。然而，在经由任何实际的信道传输时，这些脉冲由于加性噪声和过滤的影响都会有失真。加性噪声自然会在采样时刻引入幅度误差，而由于信道非理想的频率响应而带来的滤波会招致单个脉冲的变形，这就会引起已接收到的脉冲在时间上互相重合。这种干扰如图 8.28 所示，并称之为码间干扰。

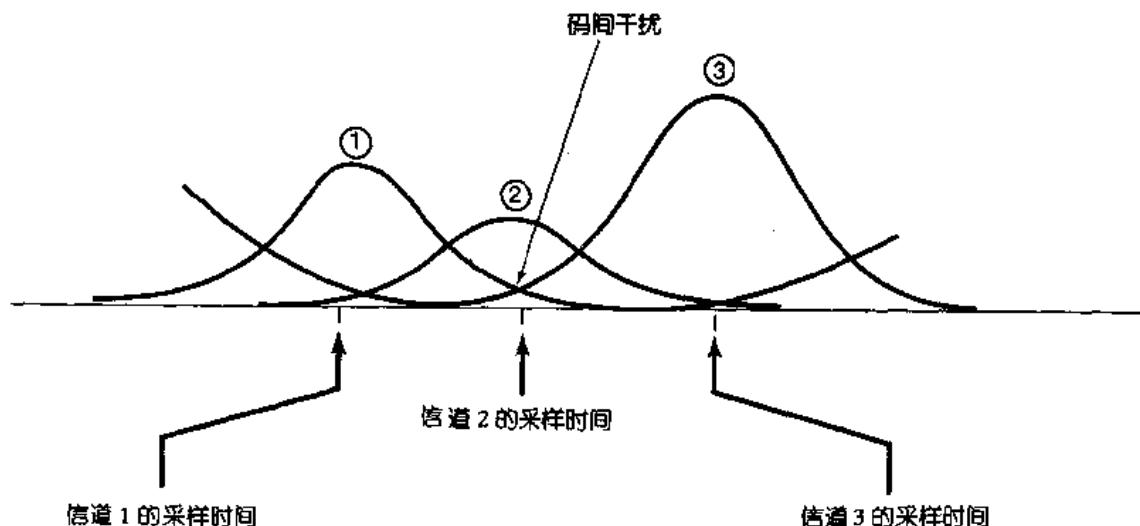


图 8.28 码间干扰

图 8.27 中这些理想化的脉冲形状受到破坏有可能是由于该信道带宽的限制产生的，或者就如 6.2.2 节讨论过的，由于非恒定群时延所引起的相位弥散而产生的(特别是见例 6.1)。如果码间干扰仅仅是由于信道的有限带宽的原因，那么可以利用一种脉冲形状 $p(t)$ ，它本身是带限的，因此不受(或很少受)信道有限带宽的影响，用这种方法来解决。尤其是，如果信道有一种频率响应 $H(j\omega)$ ，它在某一给定频带上是无失真的(也即，若 $H(j\omega)=1, |\omega| < W$)，而所用的脉冲又是带限于它的频带内(即，若 $P(j\omega)=0, |\omega| \geq W$)，那么每一路 PAM 信号一定会在无失真的条件下被接收。另一方面，利用这样一个脉冲以后，也就不会再有像图 8.27 那样互不重合的脉冲了。然而，即使使用一种带限的脉冲，在时域中的码间干扰仍然可以避免，这只要该脉冲形状在其它的采样时刻都限为具有过零特性，以使得(8.27)式继续成

立就可以。例如，考虑如下 sinc 脉冲：

$$p(t) = \frac{T_1 \sin(\pi t / T_1)}{\pi t}$$

及其频谱都如图 8.29 所示。因为该脉冲在符号间隔 T_1 的整数倍上都是零，如图 8.30 所示，所

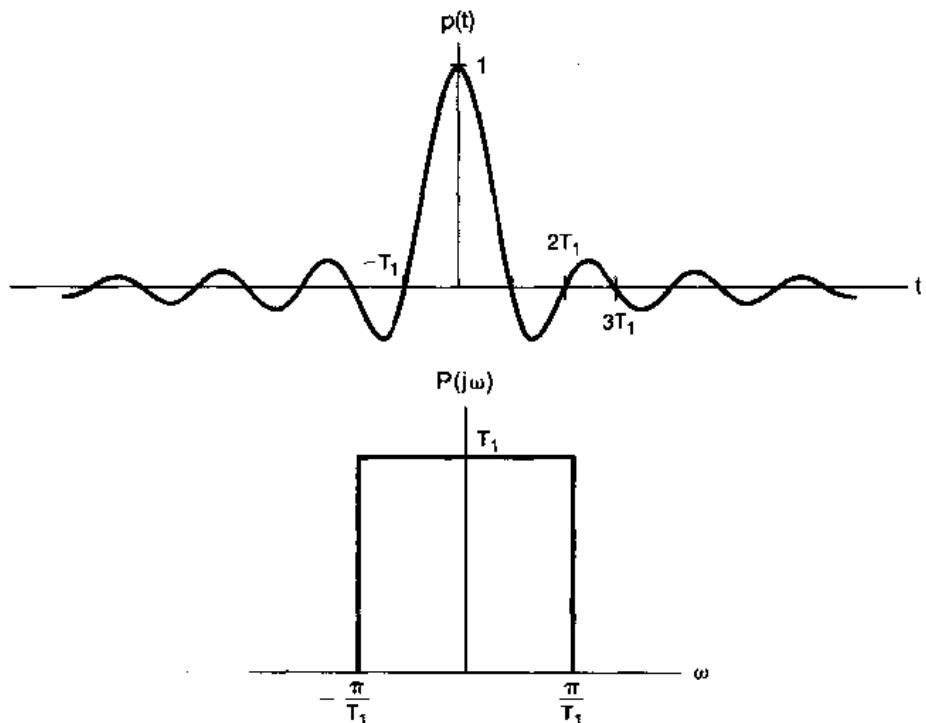


图 8.29 sinc 脉冲及其频谱

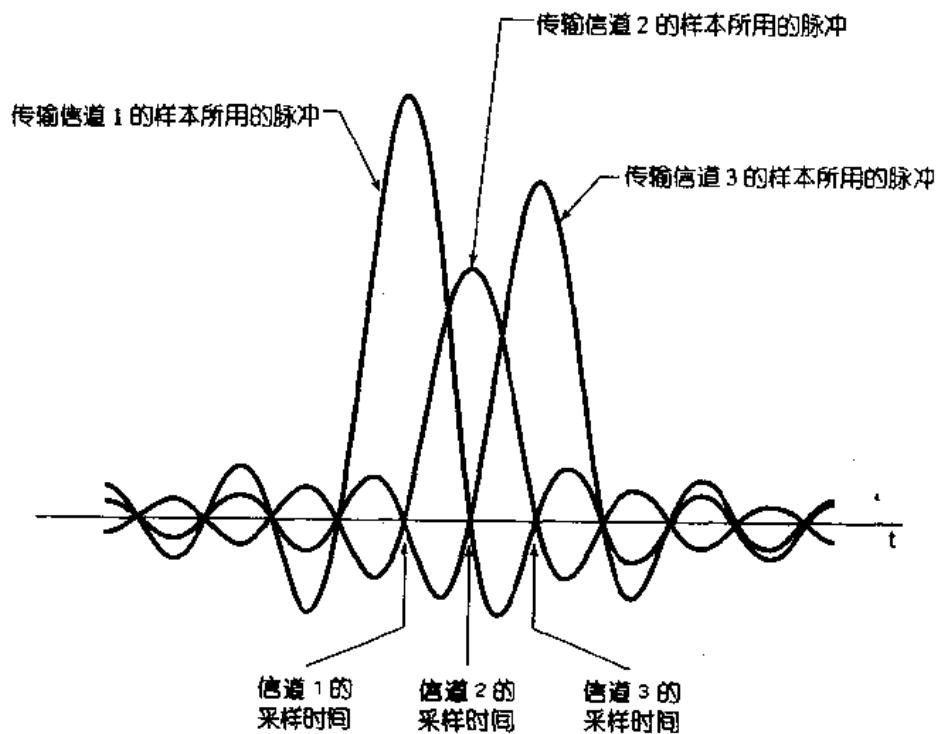


图 8.30 当利用具有准确选择的过零 sinc 脉冲时码间干扰不存在的情况

以在这些瞬时就不会有码间干扰。也就是说，如果在 $t = kT_1$ 对已接收信号采样，那么，来自其它所有脉冲(也即 $p(t - mT_1)$, $m \neq k$)对这个采样值的贡献都为零。当然，要避免从邻近脉冲来的干扰就一定要求在采样瞬间有高的精确度，以使得采样在邻近码的过零时刻发生。

sinc 脉冲仅是许多具有时域在 $\pm T_1, \pm 2T_1, \dots$ 等过零的带限脉冲之一。更一般情况，考虑一个脉冲 $p(t)$ ，其频谱具有如下形式：

$$P(j\omega) = \begin{cases} 1 + P_1(j\omega), & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_1} \\ P_1(j\omega), & \frac{\pi}{T_1} < |\omega| \leq \frac{2\pi}{T_1} \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases} \quad (8.28)$$

并且 $P_1(j\omega)$ 具有关于 π/T_1 奇对称，这样

$$P_1\left(-j\omega + j\frac{\pi}{T_1}\right) = -P_1\left(j\omega + j\frac{\pi}{T_1}\right), 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_1} \quad (8.29)$$

如图 8.31 所示。若 $P_1(j\omega) = 0$, $p(t)$ 就是 sinc 脉冲。如同在习题 8.42 所讨论，更一般的情况是，对任何满足(8.28)式和(8.29)式条件的 $P(j\omega)$, $p(t)$ 在 $\pm T_1, \pm 2T_1, \dots$ 都有过零特性。

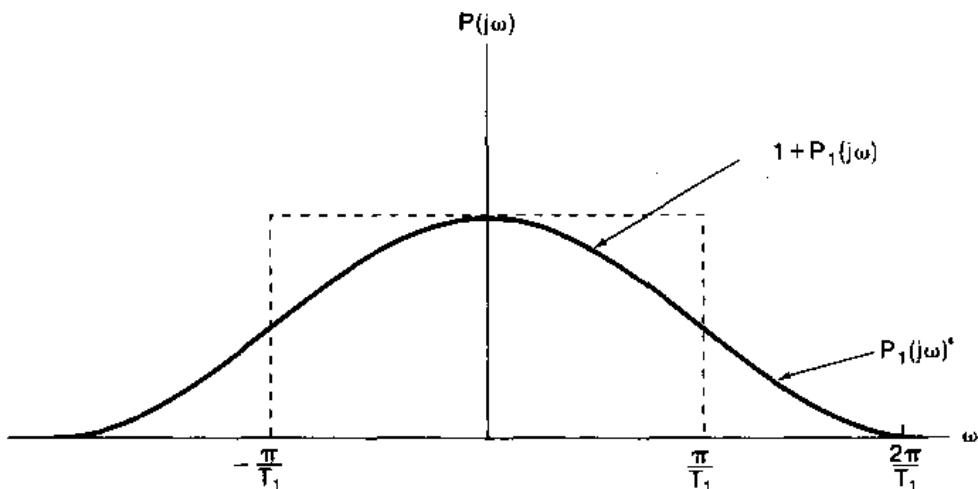


图 8.31 按(8.29)式所定义的关于 π/T 的奇对称

虽然满足(8.28)式和(8.29)式的信号可以克服有限信道带宽的问题，但是其它的信道失真也可能产生。这就要求选择不同的脉冲波形，或者在分离不同的 TDM 信号之前要对已接收到的信号作些附加的处理。特别是，如果 $|H(j\omega)|$ 在通带内不是恒定，就可能需要进行信道均衡，也就是对已接收到的信号进行滤波以校正非恒定的信道增益。同时，如果信道具有非线性相位特性，除非进行补偿处理，否则失真也会导致码间干扰。习题 8.43 和习题 8.44 将给出这些影响的例子。

8.6.3 数字脉冲幅度和脉冲编码调制

上一小节所讨论的 PAM 系统涉及到用一组离散的样本去调制一个脉冲序列。这组样本可以认为是一个离散时间信号 $x[n]$ ，并且在许多应用中，事实上 $x[n]$ 是被存储在某一数字系统中，或者是由某一数字系统所产生。在这样的情况下，一个数字系统的有限字长就意味着， $x[n]$ 仅能取到一个有限的量化值，这就造成了对这些已调脉冲来说只有有限个可能的幅度值。

事实上，在很多情况下，这种数字 PAM 的量化形式就演变为仅用几个（典型的是两个）幅度值的系统。这就是，如果 $x[n]$ 的每一个样本表示成一个二进制数（即一串有限个 0 和 1），那么具有两个可能值（一个值对应于 0，另一个值对应于 1）之一的脉冲就可以被置为这串二进制数中的每一个二进制位（或称比特）。更为一般的情况是，为了防止传输误差或者提供可靠的通信，代表 $x[n]$ 的这个二进制位的序列在传输之前首先可以变换或编码成另一个 0 和 1 的序列。例如，一个很简单的误差校正机理就是对 $x[n]$ 的每个样本传输一个附加的已调脉冲，它代表一种奇偶校验。这就是，若 $x[n]$ 的二进制表示中有奇数个 1，就将这个附加的比特置于 1；若有偶数个 1 就置于 0。然后，接收机就可以将这个已接收到奇偶校验位与另外已接收到的比特位进行对照以检测出它们的不一致性。更为复杂的编码和误差校正设计肯定都能使用，并且具有特殊要求的码型设计是通信系统设计中一个重要内容。由上讨论显而易见，一个由编码的 0 和 1 的序列所调制的 PAM 系统就称为脉冲编码调制（PCM）系统。

8.7 正弦频率调制

前面几节讨论了几种幅度调制系统，在那里调制信号用来改变一个正弦或脉冲载波的振幅。已经看到，这样的系统是可以用前面几章所建立的频域方法给予详细分析的。还有一类很重要的调制技术称之为频率调制（FM），其中，调制信号是用来控制一个正弦载波的频率的。这种类型的调制系统比起幅度调制系统来有很多优点。正如由图 8.10 所想到的，在正弦幅度调制下，载波包络线的峰值幅度是直接与调制信号 $x(t)$ 的大小有关的，而 $x(t)$ 可能有一个大的动态范围，也就是说有一个显著的变化；而在频率调制下，载波的包络是一个常数。这样，一个 FM 发射机总是可以工作在峰值功率状态。另外，在 FM 系统中，在传输信道中由于加性扰动或衰落所引起的幅度变化能在相当大的范围内在接收机中被消除掉。因此，在公共广播和其它一些场合，FM 的接收总是比 AM 质量要好。另一方面，将会看到，频率调制一般比正弦幅度调制要求更宽的信号带宽。

频率调制系统具有高度的非线性，因此分析起来不像前面讨论的正弦幅度调制系统那样来得直接。然而，前面各章所建立的分析方法也能使我们对频率调制系统的工作和性质得到一定了解。

现在我们从引入角调制的一般概念入手来分析频率调制问题，为此考虑一个以下式表示的正弦载波：

$$c(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_c) = A \cos \theta(t) \quad (8.30)$$

式中 $\theta(t) = \omega_c t + \theta_c$ ， ω_c 是载波的频率， θ_c 是载波的相位。一般来说，角调制就是用调制信号去改变或使相角 $\theta(t)$ 发生变化。改变相角 $\theta(t)$ 的一种方式就是利用调制信号 $x(t)$ 去改变相位 θ_c ，这样已调信号 $y(t)$ 就为

$$y(t) = A \cos[\omega_c t + \theta_c(t)] \quad (8.31)$$

式中 θ_c 现在是时间的函数，具体说来就是

$$\theta_c(t) = \theta_0 + k_p x(t) \quad (8.32)$$

如果 $x(t)$ 是常数， $y(t)$ 的相位也一定是常数，而且正比于 $x(t)$ 的大小。（8.31）式的角调制称为相位调制。角调制的另一种方式是用调制信号线性地变化相角的导数，即

$$y(t) = A \cos \theta(t) \quad (8.33)$$

其中

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_f x(t) \quad (8.34)$$

如果 $x(t)$ 为常数, $y(t)$ 就是正弦的, 其频率相对于载频 ω_c 的偏离量正比于 $x(t)$ 的大小。为此, (8.33)式和(8.34)式这样的角调制一般称为频率调制。

虽然相位调制和频率调制都是角调制的不同形式, 但是它们能很容易联系起来。由(8.31)式和(8.32)式, 对相位调制来说, 有

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_p \frac{dx(t)}{dt} \quad (8.35)$$

据此, 将(8.34)式和(8.35)式作一比较可得, 用 $x(t)$ 作相位调制就等于用 $x(t)$ 的导数 $dx(t)/dt$ 去作频率调制; 同样, 用 $x(t)$ 去作频率调制和用 $x(t)$ 的积分去作相位调制也完全是一样的。图 8.32(a)和(b)给出了有关相位调制和频率调制的示例说明。在这两种情况下, 调制信号都是 $x(t) = tu(t)$ (也就是在 $t > 0$ 时, 随时间线性增加)。图 8.32(c)用阶跃(即斜坡信号的导数)信号作为调制信号来进行频率调制的例子。图 8.32(a)和(c)之间的一致性应

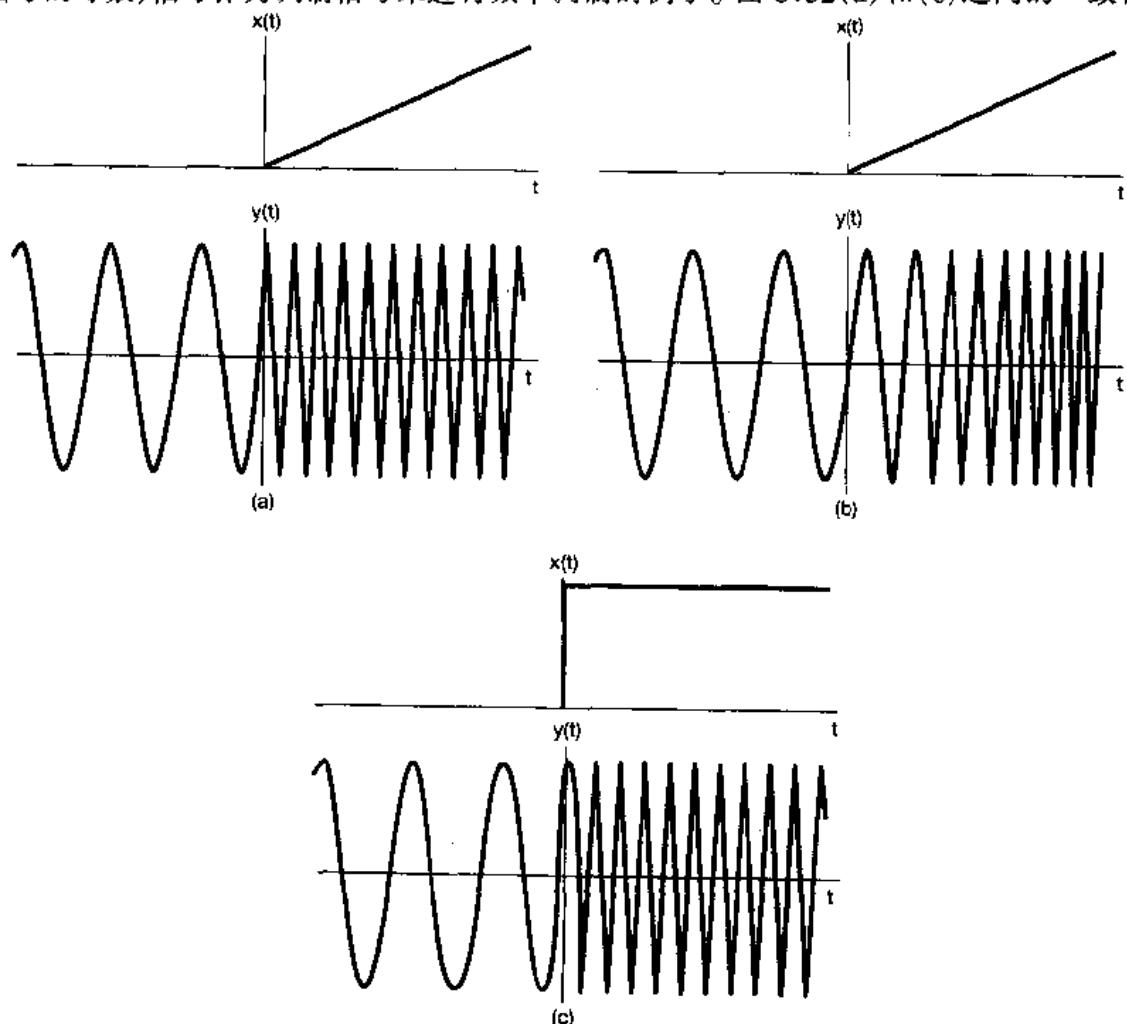


图 8.32 相位调制, 频率调制及其关系:

- (a) 用斜坡信号作调制信号的相位调制;
- (b) 用斜坡信号作调制信号的频率调制;
- (c) 用阶跃信号(斜坡信号的导数)作调制信号的频率调制

该是明显的。

用阶跃信号去进行频率调制就相当于正弦载波的频率在 $t=0$ 时刻，当 $x(t)$ 变化时从一个频率瞬时地变化到另一个频率，就很像一个正弦振荡器，当频率置定开关瞬时变化时所引起的频率突然改变一样。当频率调制是用一个斜坡信号来控制时，如图 8.32(b) 所示，频率是与时间成线性变化的。这一时变频率的概念往往最好用瞬时频率的概念来表示。对于具有如下形式的 $y(t)$ ：

$$y(t) = A \cos \theta(t) \quad (8.36)$$

该正弦波的瞬时频率 ω_i 定义为

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (8.37)$$

因此，对于 $y(t)$ 是真正的正弦波而言 [即 $\theta(t) = (\omega_c t + \theta_0)$]，瞬时频率就是 ω_c ，如我们所期望的一样。对于由(8.31)式和(8.32)式所表示的相位调制来说，瞬时频率就是 $[\omega_c + k_p(dx(t)/dt)]$ ，而对由(8.33)式和(8.34)式所表示的频率调制来说，瞬时频率就是 $[\omega_c + k_f x(t)]$ 。

因为频率调制和相位调制极易联系起来，所以下面的讨论只用频率调制来进行。为了对已调频信号的频谱是如何受调制信号 $x(t)$ 的影响有个本质的了解，考虑两种简单的情况，以说明调频的一些基本性质。

8.7.1 窄带频率调制

考虑一下 $x(t)$ 为正弦变化时的频率调制，

$$x(t) = A \cos \omega_m t \quad (8.38)$$

由(8.34)式和(8.37)式，瞬时频率 $\omega_i(t)$ 是

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f A \cos \omega_m t \quad (8.39)$$

$\omega_i(t)$ 就在 $\omega_c + k_f A$ 和 $\omega_c - k_f A$ 之间作正弦变化。若定义 $\Delta\omega$ 为

$$\Delta\omega = k_f A$$

就有

$$\omega_i(t) = \omega_c + \Delta\omega \cos \omega_m t$$

以及

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos[\omega_c t + \int x(t) dt] \\ &= \cos\left(\omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t + \theta_0\right) \end{aligned} \quad (8.40)$$

式中 θ_0 是一个积分常数。为了方便起见，选 $\theta_0 = 0$ ，则

$$y(t) = \cos\left[\omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t\right] \quad (8.41)$$

记 $\Delta\omega/\omega_m$ 为 m ，定义为频率调制的调制指数。根据调制指数 m 的大小，FM 系统的性质就会不一样，对于小的 m 系统称为窄带 FM。一般，可以将(8.41)式重写成

$$y(t) = \cos(\omega_c t + m \sin \omega_m t) \quad (8.42)$$

或者

$$y(t) = \cos \omega_c t \cos(m \sin \omega_m t) - \sin \omega_c t \sin(m \sin \omega_m t) \quad (8.43)$$

当 m 足够小时 ($\ll \pi/2$)，可作如下近似：

$$\cos(m \sin \omega_m t) \approx 1 \quad (8.44)$$

$$\sin(m \sin \omega_m t) \approx m \sin \omega_m t \quad (8.45)$$

这样，(8.42)式就变为

$$y(t) \approx \cos \omega_c t - m (\sin \omega_m t) (\sin \omega_c t) \quad (8.46)$$

根据这一近似式， $y(t)$ 的频谱如图 8.33 所示。可以注意到，这时 $y(t)$ 的频谱与 AM-DSB/WC 的频谱有些类似，频谱中既有载波，又有代表调制信号频谱的两个边带。然而，在 AM-DSB/WC 中，所引入的附加载波与已调载波是同相的。而由(8.46)式可见，在窄带 FM 之下，这个附加载波与已调的载波之间有一个 $\pi/2$ 的相位差。对应于 AM-DSB/WC 和 FM 的波形也是很不相同的。图 8.34(a)示出相应于(8.46)式的窄带 FM 的时间波形。为比较起见，图 8.34(b)示出了 AM-DSB/WC 信号

$$y_2(t) = \cos \omega_c t + m (\cos \omega_m t) (\cos \omega_c t) \quad (8.47)$$

的时间波形。

对于(8.46)式那样的窄带 FM 信号，其边带宽度就等于调制信号的宽度；特别是，虽然这个近似式是在 $m \ll \pi/2$ 条件下得到的，边带的宽度仍然与调制指数 m 无关(即，边带宽度仅决定于调制信号的带宽，而与它的大小无关)。即使不是正弦调制信号，而为更一般的调制信号的话，对窄带调频来说，上述结论也是成立的。

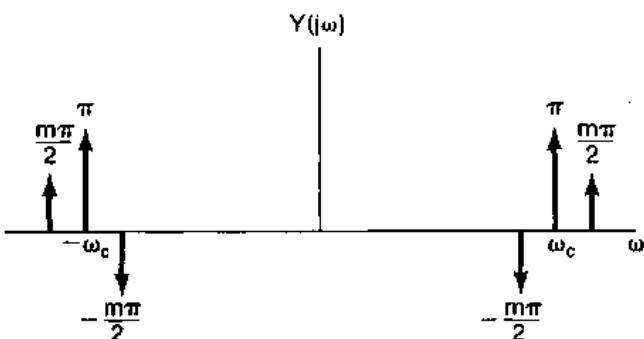
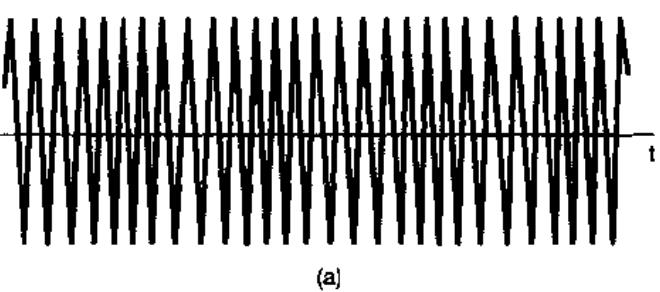


图 8.33 窄带 FM 的近似频谱



(a)



(b)

图 8.34 窄带 FM 与 AM-DSB/WC 比较：

(a)窄带 FM; (b)AM-DSB/WC

8.7.2 宽带频率调制

当 m 增大以后，近似式(8.46)式不再成立，这时 $y(t)$ 的频谱与调制信号 $x(t)$ 的幅度和频率都有关。由 $y(t)$ 的表示式(8.43)式可知， $\cos[m \sin \omega_m t]$ 和 $\sin[m \sin \omega_m t]$ 这两项都是基波频率为 ω_m 的周期信号。因此，这两个信号中的每一个的傅里叶变换都是一个冲激串，这些冲激串发生在 ω_m 的整数倍上，其大小正比于它们的傅里叶级数系数。这两个周期信号的傅里叶级数系数涉及到第一类贝塞尔函数。(8.43)式中的第一项相当于一个

$\cos\omega_c t$ 的正弦载波被一个周期信号 $\cos[m \sin\omega_m t]$ 进行幅度调制的结果；而第二项就相当于正弦载波 $\sin\omega_c t$ 被一个周期信号 $\sin[m \sin\omega_m t]$ 调幅的结果。我们知道，一个信号乘以某一载波，在频域内就有把原频谱搬移到载波频率 ω_c 两边的效果。图 8.35(a) 和(b) 分别画出了(8.43) 式中单独两项对于 $\omega > 0$ 时频谱的模，而图 8.35(c) 则是代表已调信号 $y(t)$ 的频谱的模。可

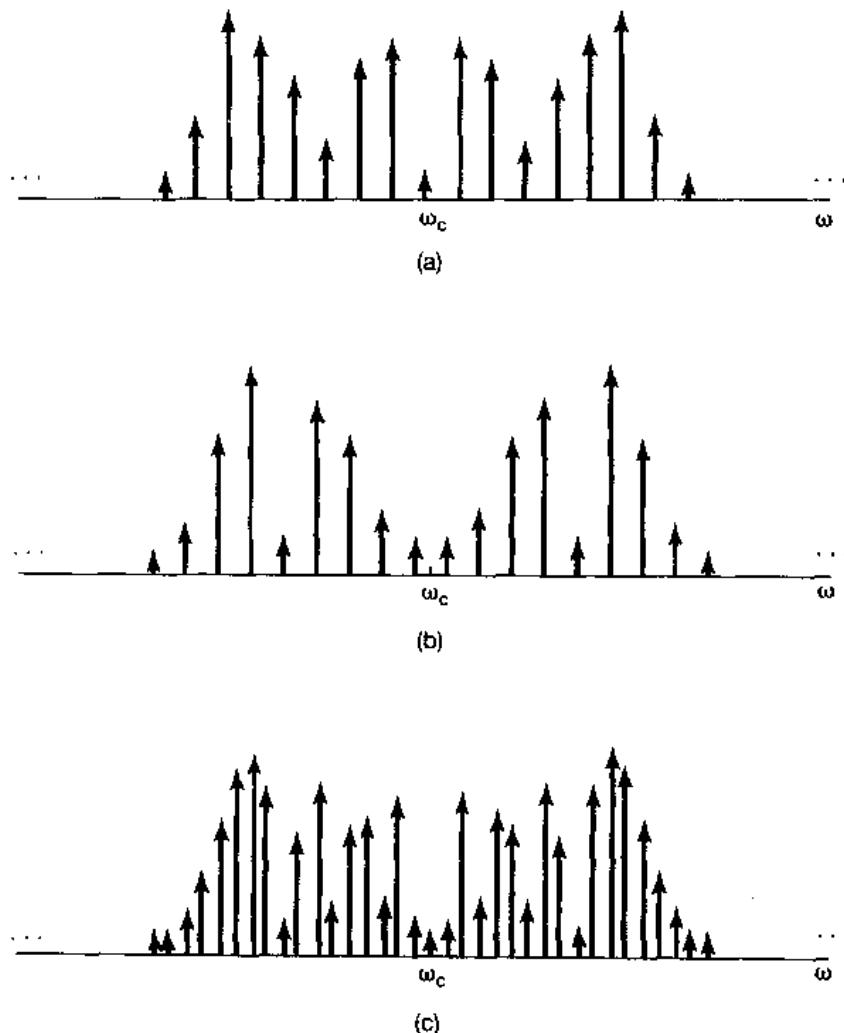


图 8.35 宽带频率调制($m = 12$)频谱的模：
 (a) $\cos\omega_c t \cos[m \sin\omega_m t]$ 频谱的模特性；(b) $\sin\omega_c t \sin[m \sin\omega_m t]$ 频谱的模特性；
 (c) $\cos[\omega_c t + m \sin\omega_m t]$ 频谱的模特性

见， $y(t)$ 的频谱是由在频率 $\pm \omega_c + n\omega_m$ ， $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的冲激所组成，并且严格说来，围绕 $\pm \omega_c$ ， $y(t)$ 的频谱不是带限的。然而，由于 $\cos[m \sin\omega_m t]$ 和 $\sin[m \sin\omega_m t]$ 的傅里叶级数系数，对于 $|n| > m$ 的 n 次谐波的幅度可以认为忽略不计，因此，在 $+\omega_c$ 和 $-\omega_c$ 两边每一边带的总有效宽度 B 还是限于 $2m\omega_m$ ，即

$$B \simeq 2m\omega_m \quad (8.48)$$

或者，因为 $m = k_f A / \omega_m = \Delta\omega / \omega_m$

$$B \simeq 2k_f A = 2\Delta\omega \quad (8.49)$$

将(8.39)式和(8.49)式作一比较可以得出，每一边带的有效带宽就等于在载波频率附近

瞬时频率的总偏移值。因此，对宽带 FM 来说，已调信号的带宽比调制信号的带宽要宽得多，因为假定 m 比较大。并且与窄带情况正好形成对照，在宽带 FM 中已调信号的带宽是正比于调制信号的幅度 A 和增益系数 k_f 的。

8.7.3 周期方波调制信号

用来理解频率调制性质的另一个例子是，当调制信号是一个周期方波的情况。在(8.39)式中，令 $k_f=1$ ，则有 $\Delta\omega=A$ ，并令 $x(t)$ 如图 8.36 所示。这时已调信号就如图 8.37 所示。当 $x(t)$ 为正时，瞬时频率就是 $\omega_c + \Delta\omega$ ；当 $x(t)$ 为负时，瞬时频率就是 $\omega_c - \Delta\omega$ 。因此 $y(t)$

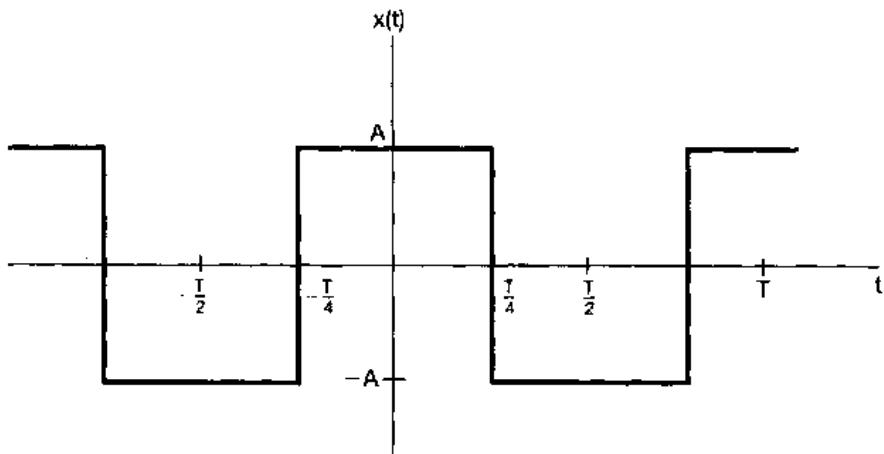


图 8.36 对称周期方波

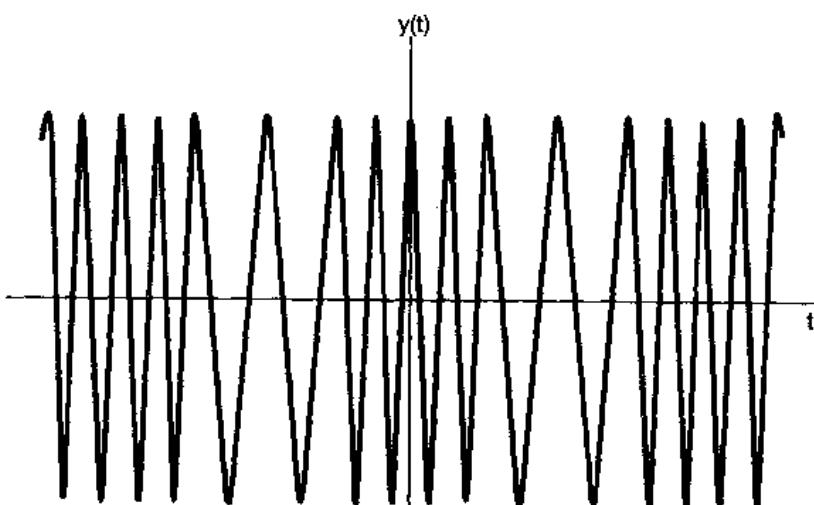


图 8.37 用周期方波作调制信号的频率调制

也可写成

$$y(t) = r(t)\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t] + r\left(t - \frac{T}{2}\right)\cos[(\omega_c - \Delta\omega)t] \quad (8.50)$$

其中 $r(t)$ 就是如图 8.38 所示的方波。因此，对于这样一个特别的调制信号来说，也能够把确定 FM 信号 $y(t)$ 的频谱问题，当作求(8.50)式中两个 AM 信号之和的频谱问题来做，具体就是

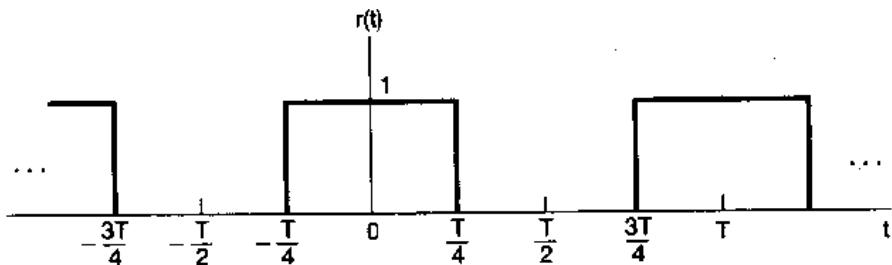


图 8.38 (8.50)式中的对称方波 $r(t)$

$$\begin{aligned} Y(j\omega) = & \frac{1}{2}[R(j\omega + j\omega_c + j\Delta\omega) + R(j\omega - j\omega_c - j\Delta\omega)] \\ & + \frac{1}{2}[R_T(j\omega + j\omega_c - j\Delta\omega) + R_T(j\omega - j\omega_c + j\Delta\omega)] \end{aligned} \quad (8.51)$$

式中 $R(j\omega)$ 是图 8.38 中周期方波 $r(t)$ 的傅里叶变换，而 $R_T(j\omega)$ 则是 $r(t - T/2)$ 的傅里叶变换。由例 4.6 可知，当 $T = 4T_1$ 时，有

$$R(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{2k+1} (-1)^k \delta\left[\omega - \frac{2\pi(2k+1)}{T}\right] + \pi\delta(\omega) \quad (8.52)$$

和

$$R_T(j\omega) = R(j\omega)e^{-j\omega T/2} \quad (8.53)$$

$Y(j\omega)$ 频谱的模特性如图 8.39 所示。和宽带 FM 一样，这个谱在以 $\omega_c \pm \Delta\omega$ 为中心，各自呈现了两个边带，这两个边带在 $\omega < (\omega_c - \Delta\omega)$ 和 $\omega > (\omega_c + \Delta\omega)$ 的区域都衰减了。

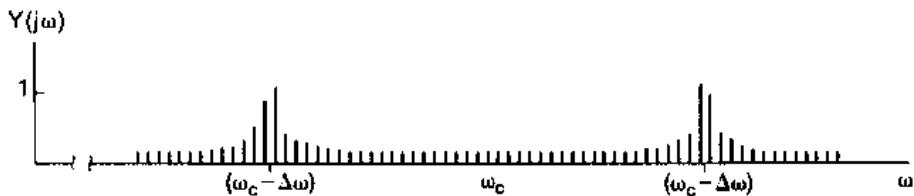


图 8.39 用一个周期方波调制信号时，频率调制对于 $\omega > 0$ 时频谱的模特性。图中每根垂直线都代表面积正比于这条线高度的冲激

FM 信号的解调系统典型的有两种类型，其一是通过微分将 FM 信号变换为 AM 信号，而第二种类型的解调系统则是直接跟踪已调信号的相位或频率。以上的讨论仅仅是频率调制的特性作了简短的介绍，通过这些讨论，再次看到，在前面几章所建立的基本方法是如何被用来分析这一类重要系统的，以及获得对这类重要系统本质的了解。

8.8 离散时间调制

8.8.1 离散时间正弦幅度调制

一个离散时间幅度调制系统如图 8.40 所示，其中 $c[n]$ 是载波， $x[n]$ 是调制信号。分析连续时间幅度调制的基础是傅里叶变换的相乘性质，这就是时域内相乘就导致频域内的卷积。正如在 5.5 节所讨论的，对离散时间也存在一个相应的性质可以用来分析离散时间幅度调制。现考虑

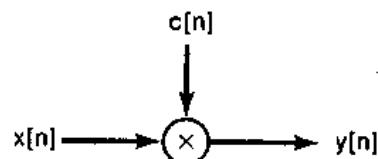


图 8.40 离散时间幅度调制

$$y[n] = x[n]c[n]$$

分别用 $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$ 和 $C(e^{j\omega})$ 来代表 $x[n]$, $y[n]$ 和 $c[n]$ 的傅里叶变换, 那么 $Y(e^{j\omega})$ 就正比于 $X(e^{j\omega})$ 和 $C(e^{j\omega})$ 的周期卷积, 即

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) C(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (8.54)$$

因为 $X(e^{j\omega})$ 和 $C(e^{j\omega})$ 都是周期的, 周期为 2π , 因此该积分就可以在任何一个 2π 的频率区间内完成。

首先考虑为复指数载波的正弦幅度调制

$$c[n] = e^{j\omega_c n} \quad (8.55)$$

在 5.2 节已经知道, $c[n]$ 的傅里叶变换是一个周期冲激串, 即

$$C(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_c + k2\pi) \quad (8.56)$$

$C(e^{j\omega})$ 如图 8.41(b) 所示。若 $X(e^{j\omega})$ 为图 8.41(a), 那么已调信号的频谱为如图 8.41(c) 所

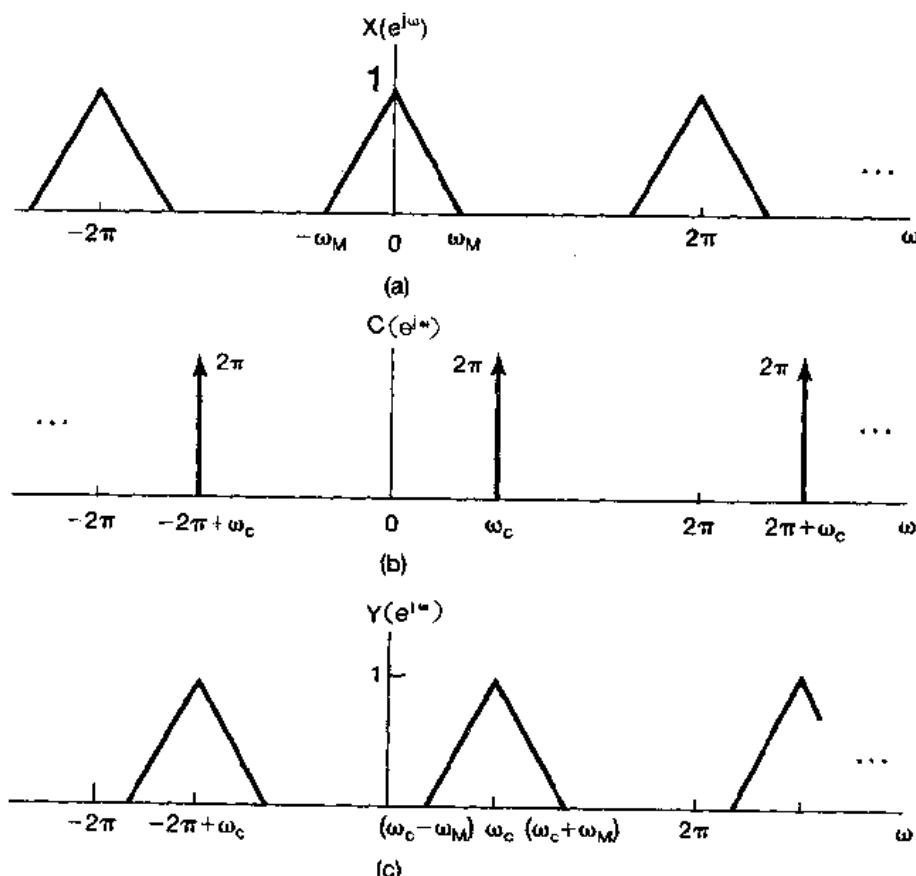


图 8.41 (a) $x[n]$ 的频谱; (b) $c[n] = e^{j\omega_c n}$ 的频谱; (c) $y[n] = x[n]c[n]$ 的频谱

示。特别是注意到, $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_c)})$, 这与图 8.1 是完全相对应的, 并且当 $x[n]$ 是实序列时, 已调信号也是复数的。将已调信号乘以 $e^{-j\omega_c n}$, 使频谱返回到频率轴上它原来的地方就实现了解调, 即

$$x[n] = y[n]e^{-j\omega_c n} \quad (8.57)$$

正如在习题 6.43 中所讨论的, 若 $\omega_c = \pi$, 那么 $c[n] = (-1)^n$, 这样在时域调制的结果就是逢

奇数 n , 将 $x[n]$ 改变代数符号; 而在频域则是将高低频分量相互交换。习题 6.44 就是采用这种调制方式, 利用一个低通滤波器来实现一个高通的过滤, 反之亦然。

除了复指数载波外, 还可以利用正弦载波。这时, $x[n]$ 是实序列的话, $y[n]$ 也一定是实序列。若 $c[n] = \cos\omega_c n$, 载波的频谱就由在 $\omega = \pm\omega_c + k2\pi$ 的周期重复的冲激对所组成, 这如图 8.42(b) 所示。若 $X(e^{j\omega})$ 为图 8.42(a), 那么, 已调信号的频谱就如图 8.42(c) 所示, 这

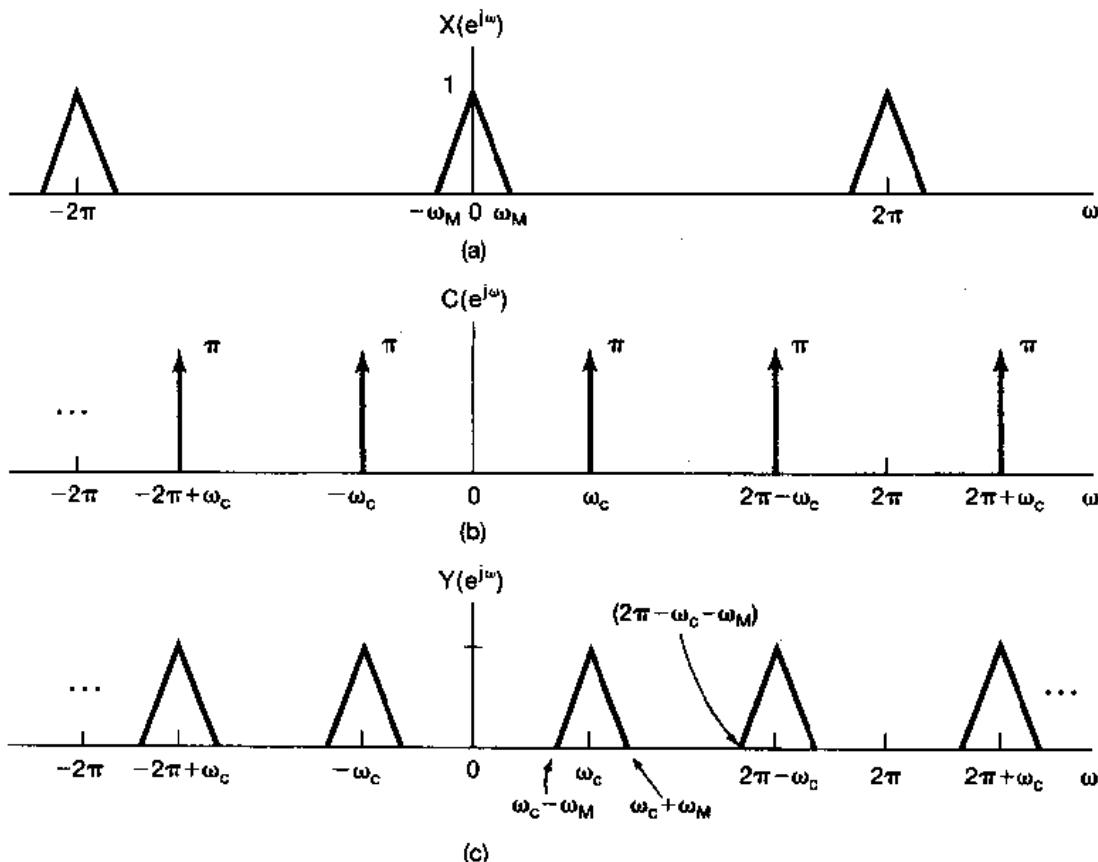


图 8.42 利用正弦载波的离散时间幅度调制的有关频谱:
 (a)带限信号 $x[n]$ 的频谱;(b)正弦载波信号 $c[n] = \cos\omega_c n$ 的频谱;
 (c)已调信号 $y[n] = x[n]c[n]$ 的频谱

就相当于 $X(e^{j\omega})$ 在 $\pm\omega_c + k2\pi$ 处重复。为使每一个重复的 $X(e^{j\omega})$ 不至重叠, 就要求

$$\omega_c > \omega_M \quad (8.58)$$

和

$$2\pi - \omega_c - \omega_M > \omega_c + \omega_M$$

或等效为

$$\omega_c < \pi - \omega_M \quad (8.59)$$

第一个条件与在 8.2 节讨论的连续时间正弦幅度调制的条件是一致的; 而第二个结果则是来自离散时间频谱固有的周期性质。把(8.58)式和(8.59)式合在一起, 正弦载波的幅度调制, ω_c 就必须受如下限制:

$$\omega_M < \omega_c < \pi - \omega_M \quad (8.60)$$

解调也可以采用与连续时间情况相类似的方式来实现。该系统如图 8.43 所示。将 $y[n]$ 乘以在调制器中利用的同一载波，结果就得到了原始信号频谱的若干重复，而其中之一是在以 $\omega = 0$ 为中心处出现的，利用低通滤波就可滤掉不需要的 $X(e^{j\omega})$ 重复部分，已解调的信号就可得到。

由前面的讨论应该明显看出，离散时间幅度调制的分析在处理上和连续时间幅度调制是很类似的，只有一些很少的差别。例如，如同在习题 8.47 中所讨论的，在同步调制与解调系统中，调制器和解调器中正弦载波之间在相位上和频率上的差异所带来的影响，在这两种系统中都是一样的。另外，和连续时间情况一样，在离散时间情况下也能应用离散时间正弦 AM 作为频分多路复用的基础。再者，也能够利用一个离散时间信号去调制一个脉冲串，导致离散时间信号的时分多路复用，这可参见习题 8.48。

离散时间多路复用系统的实现给出了一个极好的例子来说明一般情况下离散时间处理的灵活性，以及增采样（见 7.5.2 节）运算的重要性。考虑一具有 M 路序列的离散时间 FDM 系统，希望要构成频分多路复用。由于为 M 个信道，就要求每一路 $x_i[n]$ 是带限的，即

$$X_i(\omega) = 0, \frac{\pi}{M} < |\omega| < \pi \quad (8.61)$$

譬如说，如果原来的这些序列都相当于在奈奎斯特率下对连续时间信号采样而得到的，从而这些原有序列都占满了整个频带，那么在频分多路复用之前，首先就必须将它们变换到某个较高的采样率（即增采样）。这一概念在习题 8.33 中将作进一步讨论。

8.8.2 离散时间调制转换

广泛使用离散时间调制以及结合在第 7 章介绍的抽取、增采样和内插等运算的一个领域是数字通信系统。一般来说，在这样的系统中，连续时间信号均以由采样得到的离散时间信号的形式在通信信道上进行传输。这些连续时间信号往往是以时分多路复用或频分多路复用的信号方式组成的，然后将这些信号转换为离散时间序列，为了存储和远距离传输的需要，序列值均以数字表示。在某些系统中，由于在发送端或接收端所受的不同限制或要求，或者由于已经用不同的方式分别被复用起来的若干组信号现在要把它们重新复用在一起，这样就

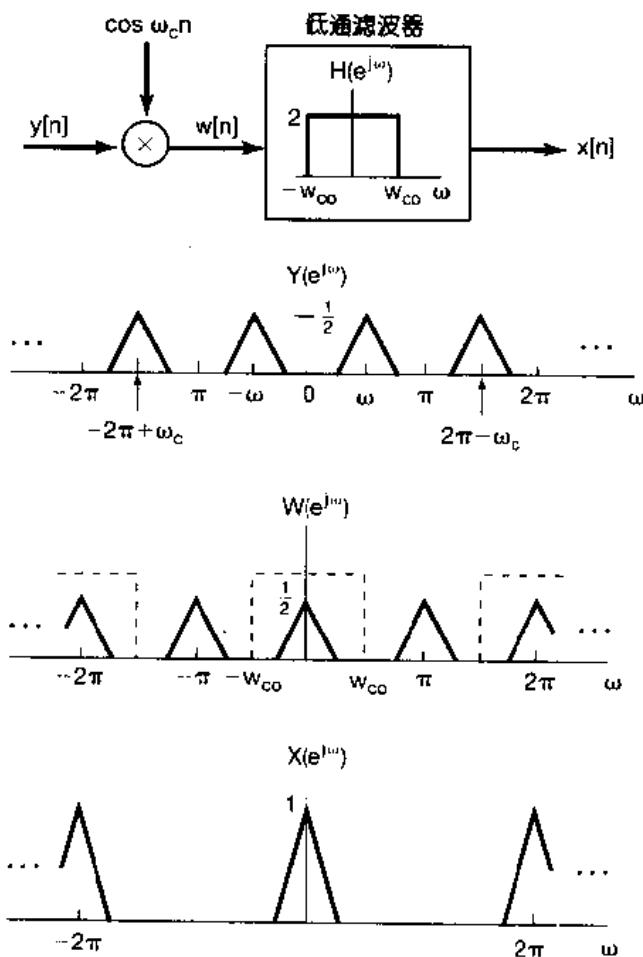


图 8.43 离散时间同步解调系统及其相关频谱

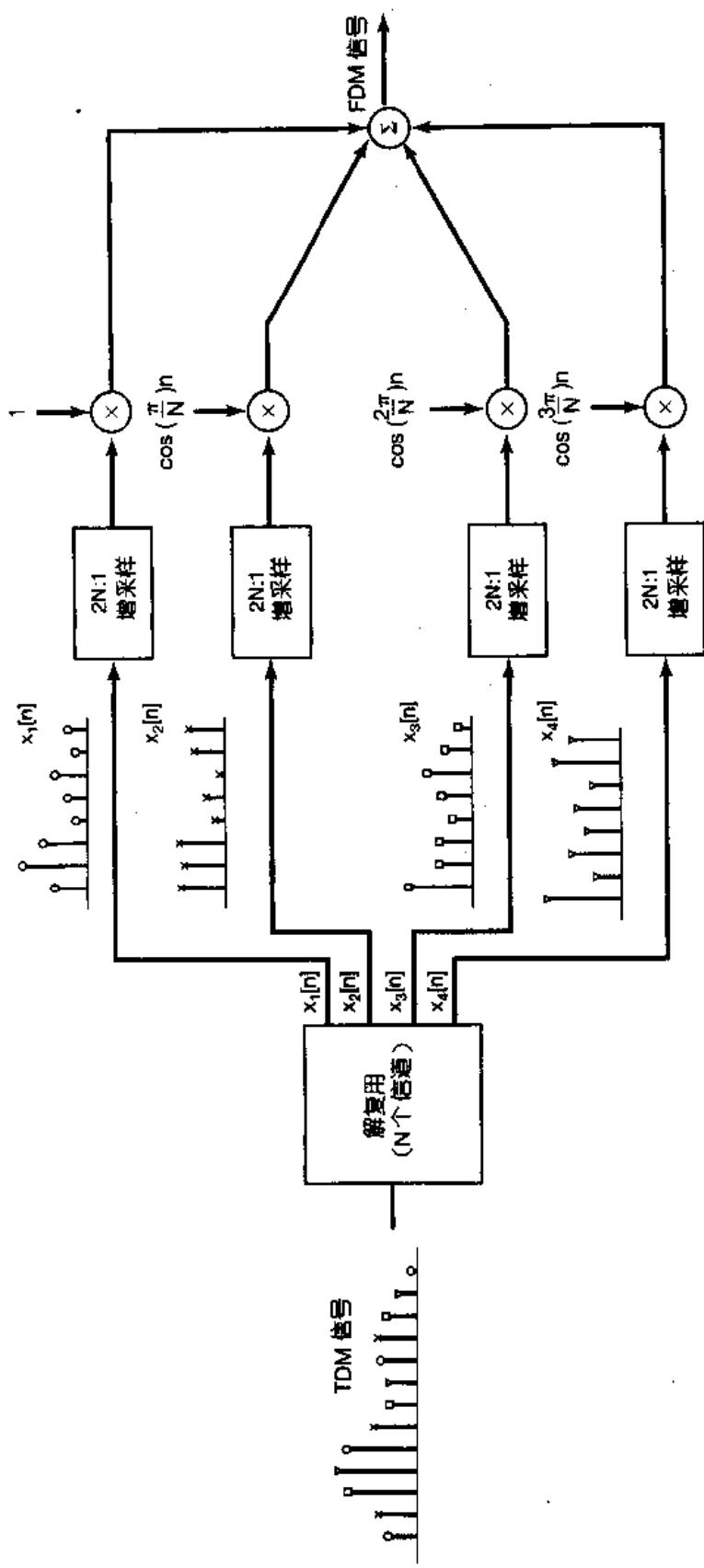


图 8.44 TDM 到 FDM 转换的方框图

要求把用 TDM 表示的信号序列转换到用 FDM 表示的信号序列，或者相反。这种从一种调制或复用方式转换到另一种的过程称为调制转换(transmodulation)或复用转换(transmultiplexing)。在数字通信系统方面，一种显而易见的实现复用转换的方式是首先通过解复用和解调把它转换回到连续时间信号上来，然后按要求再对信号进行调制和复用。然而，如果这个新的信号是要被再转换回到离散时间信号中来的话，那么很清楚对整个过程来说，更为有效办法是直接在离散时间域中完成。图 8.44 以方框图的形式表示出，在把一个离散时间 TDM 信号转换为离散时间 FDM 信号的过程中，所涉及到的各个环节。应该注意，在将 TDM 信号解复用以后，每一信道都必须增采样，以准备频分多路复用。

8.9 小 结

这一章讨论了与通信系统有关的一些基本概念，特别是调制的概念。在调制中一个希望传输的信号是用来调制某个称为载波的第二个信号，并详细地讨论了幅度调制的问题。幅度调制的性质是最容易通过傅里叶变换的相乘性质在频域得到解释的。用一个复指数或正弦载波的幅度调制，一般就是用来在频率上搬移一个信号的频谱，例如在通信系统中的应用就是用来将信号的频谱搬到一个适合于传输的频率范围内，并能够实现频分多路复用。还讨论了各种正弦幅度的调制，例如带有载波信号的非同步系统，单边带及双边带系统等。

我们还讨论了基于调制通信的几个其它形式。在这一点上，简短地介绍了频率和相位调制的概念。虽然这种调制类型的详细分析是更加困难一些，但是通过频域的分析，还是有可能获得一些实质性的了解。

我们还进一步比较详细地讨论了一个脉冲型信号的幅度调制，这就导致了时分多路复用和脉冲幅度调制的概念，在脉冲幅度调制中一个离散时间信号的连续样本是被用来调制一串脉冲的幅度。这样又反过来带入了对离散时间调制和数字通信问题的关注，并且在数字通信中，离散时间处理的灵活性对于更为高级的通信系统的设计与实现提供了方便，其中涉及到像脉冲编码调制和调制转换这样一些方面。

习 题

习题第一部分属于基本题，答案在书末给出。其余两部分分属基本题和深入题。

基本题(附答案)

8.1 设 $x(t)$ 为一信号，其中 $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ ，另一信号 $y(t)$ 有傅里叶变换 $Y(j\omega) = 2X(j\omega - \omega_c)$ ，试确定一信号 $m(t)$ ，使之有

$$x(t) = y(t)m(t)$$

8.2 设 $x(t)$ 为一实值信号，并有 $X(j\omega) = 0, |\omega| > 1000\pi$ ，设 $y(t) = e^{j\omega t}x(t)$ ，试回答下列问题：

(a) 对 ω_c 应施加什么限制，才能保证 $x(t)$ 可以从 $y(t)$ 中恢复出来？

(b) 对 ω_c 应施加什么限制，才能保证 $x(t)$ 可以从 $|y(t)|$ 中恢复出来？

8.3 设 $x(t)$ 是一实值信号，并有 $X(j\omega) = 0, |\omega| > 2000\pi$ ，现进行幅度调制以产生信号

$$g(t) = x(t)\sin(2000\pi t)$$

图 P8.3 给出一种解调方法，其中 $g(t)$ 是输入， $y(t)$ 是输出，理想低通滤波器截止频率为 2000π ，通

带增益为 2, 试确定 $y(t)$ 。

- 8.4 假设 $x(t)$ 为

$$x(t) = \sin 200\pi t + 2\sin 400\pi t$$

和 $g(t)$ 为

$$g(t) = x(t)\sin 400\pi t$$

若乘积 $g(t)(\sin 400\pi t)$ 通过一个截止频率为 400π , 通带增益为 2 的理想低通滤波器, 试确定该低通滤波器输出端所得到的信号。

- 8.5 假设想传输信号 $x(t)$

$$x(t) = \frac{\sin 1000\pi t}{\pi t}$$

利用产生如下信号的调制器:

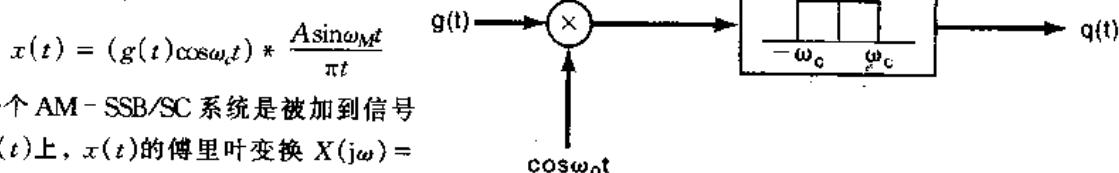
$$w(t) = (x(t) + A)\cos(10000\pi t)$$

试确定最大可容许的调制指数 m 的值, 以保证可用非同步解调从 $w(t)$ 中恢复 $x(t)$ 。解这个题目, 应该要假设 sinc 函数的一个旁瓣所取得的最大值发生在包围这个旁瓣的两个过零点之间一半的时刻。

- 8.6 假设 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$, 而信号 $g(t)$ 可用 $x(t)$ 表示成

$$g(t) = x(t)\cos\omega_c t - \left\{ x(t)\cos\omega_c t * \left(\frac{\sin\omega_c t}{\pi t} \right) \right\}$$

式中 * 记作卷积, 且 $\omega_c > \omega_M$ 。试确定常数 A 的值, 以使得



- 8.7 一个 AM-SSB/SC 系统是被加到信号 $x(t)$ 上, $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ 。在该系统中所用的载波频率 ω_c 大于 ω_M 。令 $g(t)$ 是该系统仅保留上边带时的输出, $q(t)$ 是该系统仅保留下边带时的输出。图 P8.7 的系统是用来将 $g(t)$ 转换成 $q(t)$ 的系统。请问图中的参数 ω_0 对于 ω_c 的关系如何? 通带增益 A 应该是多少?

- 8.8 考虑图 P8.8 所示的调制系统。输入信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$, 假设 $\omega_c > \omega_M$, 请回答下列问题:

- (a) 若 $x(t)$ 为实值信号, $y(t)$ 保证为实信号吗?
(b) $x(t)$ 可以从 $y(t)$ 中恢复吗?

- 8.9 有两个信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 它们的傅里叶变换对于 $|\omega| > \omega_c$ 都为零, 现要用频分多路复用将它们组

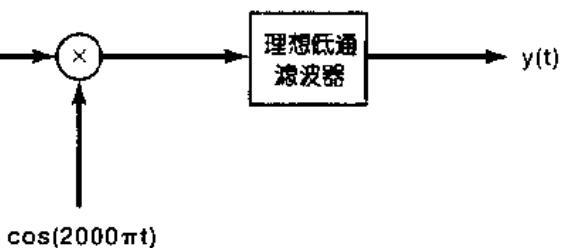


图 P8.3

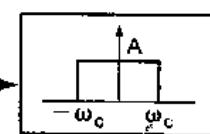


图 P8.7

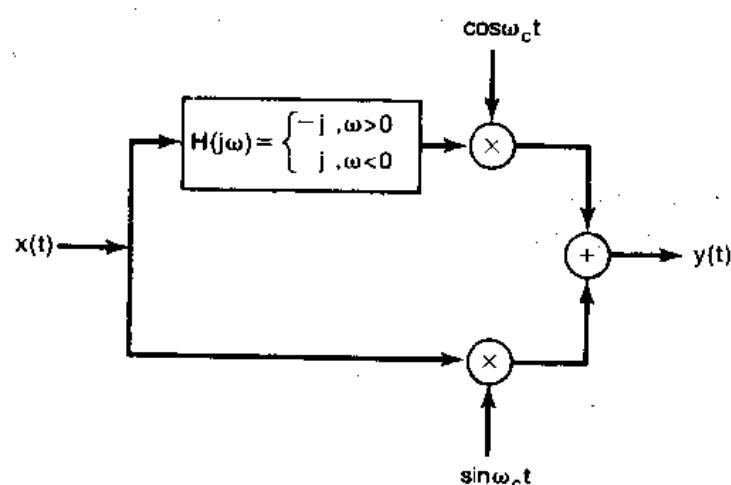


图 P8.8

合起来。对每个信号都用图 8.21 的 AM-SSB/SC 技术保留下边带，对 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 所用的载波频率分别是 ω_c 和 $2\omega_c$ 。然后将这两个已调信号加在一起以得到 FDM 信号 $y(t)$ 。

(a) 对于什么样的 ω 值， $Y(j\omega)$ 保证是零。

(b) 请给出 A 和 ω_0 的值，以使得

$$x_1(t) = \left[\left\{ y(t) * \frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} \right\} \cos \omega_0 t \right] * \frac{A \sin \omega_c t}{\pi t}$$

式中 * 记作卷积。

8.10 有一信号 $x(t)$ 被图 P8.10 所示的矩形脉冲串 $c(t)$ 相乘。请问：

(a) 在 $X(j\omega)$ 上应加什么限制，才能保证利用一个理想低通滤波器由乘积 $x(t)c(t)$ 中将 $x(t)$ 恢复出来？

(b) 给出为从 $x(t)c(t)$ 中恢复出 $x(t)$ 所需理想低通滤波器的截止频率 ω_c 和通带增益 A 。[假设 $X(j\omega)$ 满足(a)中确定的限制]。

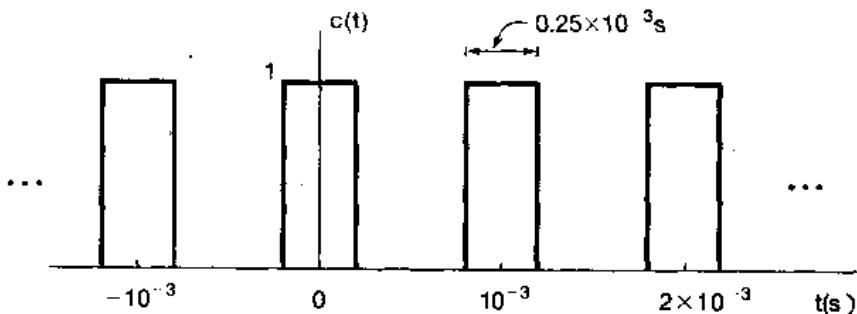


图 P8.10

8.11 设 $c(t)$ 为一实值周期信号

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_c t}$$

其中 $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ 。同时令 $x(t)$ 是一个 $X(j\omega) = 0$, $|\omega| \geq \omega_c/2$ 的信号，信号 $x(t)$ 被用来调制载波 $c(t)$ 以得到

$$y(t) = x(t)c(t)$$

(a) 请给出一个理想带通滤波器的通带和通带增益，以使得当输入为 $y(t)$ 时，该滤波器的输出是

$$g(t) = (a_1 e^{j\omega_c t} + a_1^* e^{-j\omega_c t})x(t)$$

(b) 若 $a_1 = |a_1| e^{j\angle a_1}$ ，证明：

$$g(t) = A \cos(\omega_c t + \phi)x(t)$$

并将 A 和 ϕ 分别用 $|a_1|$ 和 $\angle a_1$ 表示。

8.12 考虑有 10 个信号 $x_i(t)$, $i=1, 2, 3, \dots, 10$ 。假定每个 $x_i(t)$ 的傅里叶变换 $X_i(j\omega) = 0$, $|\omega| \geq 2000\pi$ ，全部这 10 个信号在每一个都乘以图 P8.12 的载波 $c(t)$ 以后要被时分多路复用。如果 $c(t)$ 的周期 T

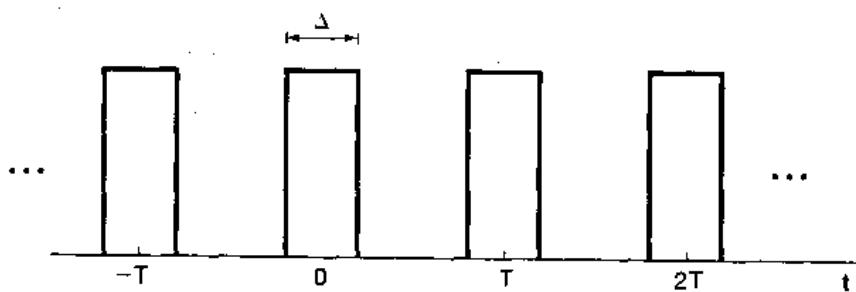


图 P8.12

已选成最大可容许的值，问这 10 个信号要能时分多路复用，最大的 Δ 值是什么？

- 8.13 在 PAM 中普遍采用的一类脉冲是具有升余弦频率响应的脉冲，其中之一的频率响应是

$$P(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\omega T_1}{2}\right), & 0 \leq |\omega| \leq \frac{2\pi}{T_1} \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

其中 T_1 为码间间隔。

- (a) 确定 $p(0)$ 。
- (b) 确定 $p(kT_1), k = \pm 1, \pm 2, \dots$

- 8.14 考虑频率已调信号 $y(t)$

$$y(t) = \cos(\omega_c t + m \cos \omega_m t)$$

式中 $\omega_c \gg \omega_m, m \ll \pi/2$ ，请给出 $\omega > 0, Y(j\omega)$ 的近似式。

- 8.15 对于在 $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ 范围内的什么样的 ω_0 值，载波为 $e^{j\omega_0 n}$ 的幅度调制等效于载波为 $\cos \omega_0 n$ 的幅度调制。

- 8.16 假设 $x[n]$ 是一个实值离散时间信号，其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 具有

$$X(e^{j\omega}) = 0, \frac{\pi}{8} \leq \omega \leq \pi$$

现用 $x[n]$ 去调制一个正弦载波 $c[n] = \sin(5\pi/2)n$ 以产生

$$y[n] = x[n]c[n]$$

试确定 ω 的值 ($0 \leq \omega \leq \pi$) 以保证 $Y(e^{j\omega})$ 是零。

- 8.17 考虑任意有限长序列 $x[n]$ ，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ ，现用插入零值样本的办法产生一个信号 $g[n]$

$$g[n] = x_{(4)}[n] = \begin{cases} x[n/4], & n = 0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

将 $g[n]$ 通过一个截止频率为 $\pi/4$ ，通带增益为 1 的理想低通滤波器产生一个信号 $q[n]$ 。最后得到

$$y[n] = q[n] \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

问对于什么样的 ω 值，可保证 $Y(e^{j\omega})$ 为零。

- 8.18 设 $x[n]$ 是一个实值序列，其傅里叶变换 $X(e^{j\omega}) = 0, \omega \geq \pi/4$ ，现在想要得到一个信号 $y[n]$ ，它的傅里叶变换在 $-\pi < \omega \leq \pi$ 内为

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} X(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})}), \frac{\pi}{2} < \omega \leq \frac{3\pi}{4} \\ X(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})}), -\frac{3\pi}{4} < \omega \leq -\frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

图 P8.18 的系统用于从 $x[n]$ 得到 $y[n]$ 。

试确定要使该系统正常工作，图中滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 必须满足什么限制。

- 8.19 考虑 10 路任意实值序列 $x_i[n], i = 1, 2, \dots, 10$ 。假设每一 $x_i[n]$ 都以因子 N 增采样，然后用载波频率 $\omega_i = i\pi/10$ 进行正弦幅度调制，现在再将这 10 路已调信号加在一起以构成 FDM 信号，为使每一路 $x_i[n]$ 都能从这个 FDM 信号中恢复，试确定 N 值。

- 8.20 设 $v_1[n]$ 和 $v_2[n]$ 都是两个通过采样(无混叠)连续时间信号而得来的序列，设

$$y[n] = \hat{v}_1[n] + \hat{v}_2[n-1]$$

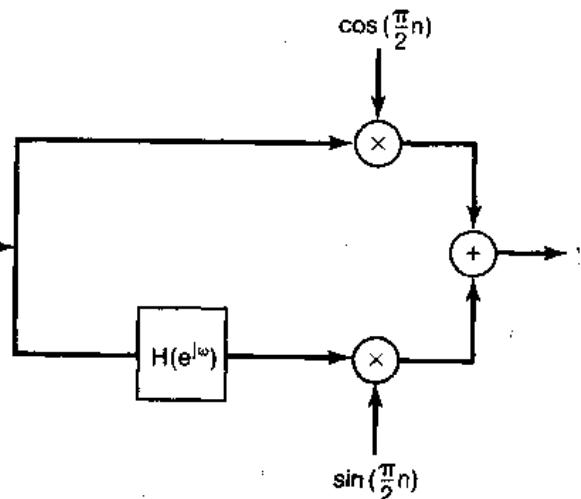


图 P8.18

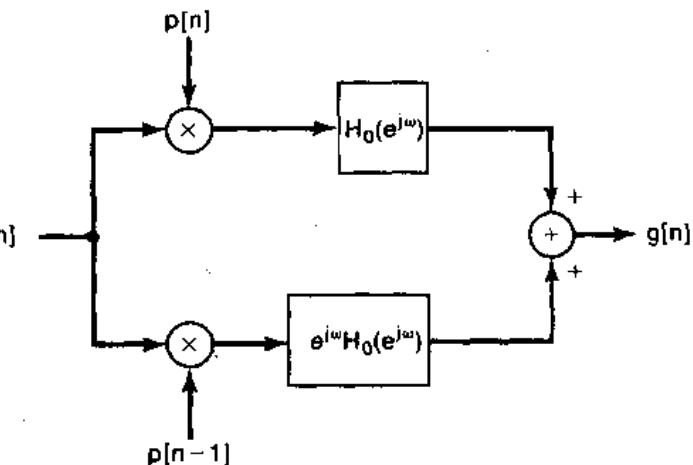
是一个 TDM 信号，式中 $v_i[n], i=1,2$ ，为

$$v_i[n] = \begin{cases} v_i \left[\frac{n}{2} \right], & n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

信号 $y[n]$ 被图 P8.20 的系统 S 所处理，得到信号 $g[n]$ 。对于在 S 中所用的这两个滤波器，有

$$H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \omega \leq \pi \end{cases}$$

试确定在系统 S 中所用的 $p[n]$ ，以使得 $g[n]$ 代表 $v_1[n]$ 和 $v_2[n]$ 的频分多路复用。



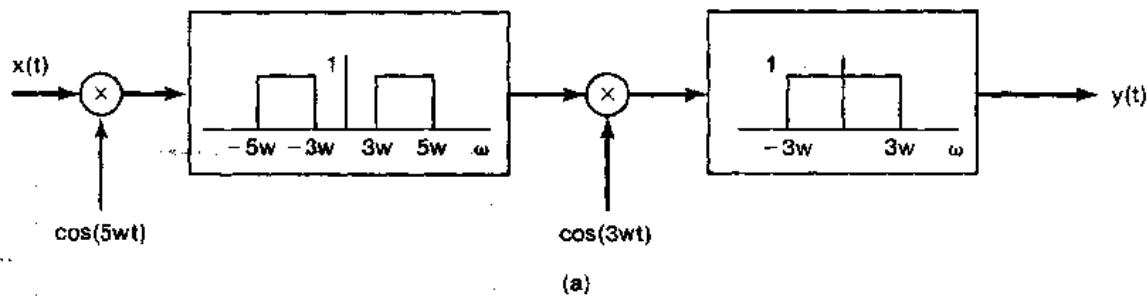
基本题

- 8.21 在 8.1 节和 8.2 节分析图 8.8 的正弦幅度调制和解调系统时都假设载波信号的相位 θ_c 是零。

(a) 对于在该图中任意相位 θ_c 的一般情况下，证明在解调系统中的信号可以表示成

$$w(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t + 2\theta_c)$$

(b) 若 $x(t)$ 的频谱在 $|\omega| \geq \omega_M$ 为零，试确定 W_m [图 8.8(b) 理想低通滤波器的截止频率]， ω_c (载波频率) 和 ω_M 三者之间的关系，以使得该低通滤波器的输出是正比于 $x(t)$ 。所得答案与载波相位 θ_c 有关吗？

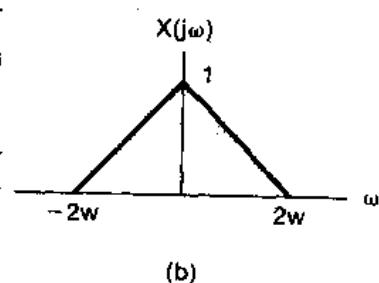


- 8.22 图 P8.22(a) 示出一个系统，其输入是 $x(t)$ ，输出是 $y(t)$ ，输入信号的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 如图 P8.22(b) 所示，请确定并画出 $y(t)$ 的频谱 $Y(j\omega)$ 。

- 8.23 在 8.2 节曾讨论过，在正弦幅度调制系统中调制器和解调器载波之间在相位上不同步所带来的影响，并指出，解调器的输出要受到一个相位差的余弦的衰减，尤其是当相位差为 $\pi/2$ 时，解调器输出为零。本题要说明，调制器和解调器之间频率上的同步也是重要的。

考虑图 8.8 的幅度调制和解调系统， $\theta_c = 0$ 而解调器载波在频率上有一个变化，而使得

$$w(t) = y(t)\cos\omega_d t$$



(b)

图 P8.22

其中

$$y(t) = x(t) \cos \omega_c t$$

将调制器和解调器之间的频率差记作 $\Delta\omega$ (即 $\omega_d - \omega_c = \Delta\omega$)。同时假设 $x(t)$ 是带限的, 而有 $X(j\omega) = 0, |\omega| \geq \omega_M$, 并假定解调器中低通滤波器的截止频率 W_∞ 满足下列不等式:

$$\omega_M + \Delta\omega < W_\infty < 2\omega_c + \Delta\omega - \omega_M$$

(a) 证明: 在解调器中低通滤波器的输出是正比于 $x(t) \cos(\Delta\omega t)$ 。

(b) 若 $x(t)$ 的频谱如图 P8.23 所示, 画出解调器输出的频谱。

8.24 图 P8.24 示出一个用于正弦幅度调制的系统,

其中 $x(t)$ 是带限的, 其最高频率为 ω_M , 即 $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ 。如图所指出的, 信号 $s(t)$ 是一个周期为 T 的周期冲激串, 不过对于 $t=0$ 有一个偏移 Δ 。系统 $H(j\omega)$ 是一个带通滤波器。

(a) 若 $\Delta=0, \omega_M=\pi/2T, \omega_t=\pi/T$ 和 $\omega_h=3\pi/T$,

证明: $y(t)$ 正比于 $x(t) \cos \omega_t t, \omega_t=2\pi/T$ 。

(b) 如果 ω_M, ω_t 和 ω_h 与(a)中给出的相同, 但 Δ 不一定为零, 证明: $y(t)$ 正比于 $x(t) \cos(\omega_t t + \theta_c)$, 并用 T 和 Δ 来确定 ω_c 和 θ_c 。

(c) 在 $y(t)$ 仍正比于 $x(t) \cos(\omega_c t + \theta_c)$ 的前提下, 确定与 T 有关的最大 ω_M 容许值。

8.25 在语音通信中, 为了保密, 最常用使用的一种系统是语音加密器。正如图 P8.25(a)所说明的, 该系统的输入是正常的语音信号 $x(t)$, 而输出是加密以后的 $y(t)$ 。信号 $y(t)$ 被发送出去, 然后在接收机中解密。

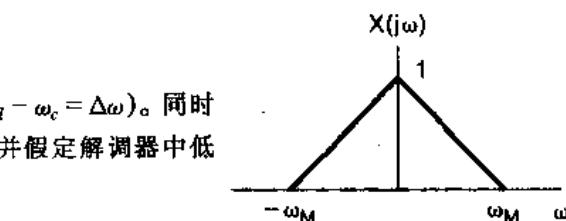


图 P8.23

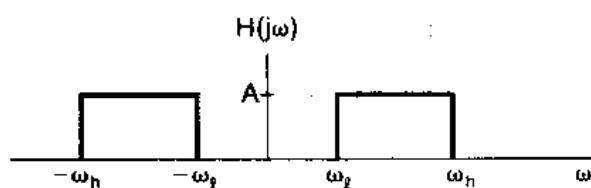
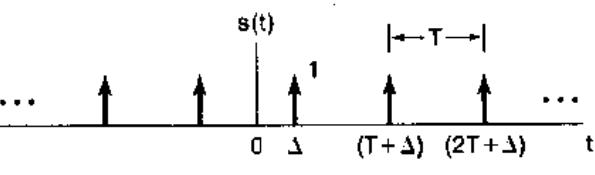
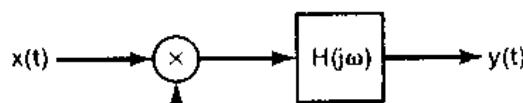
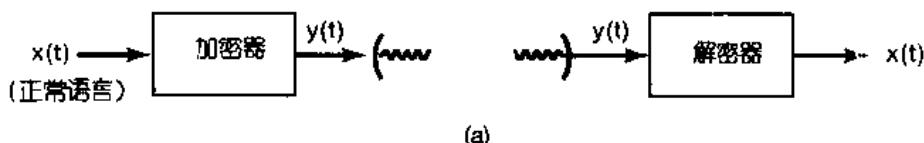
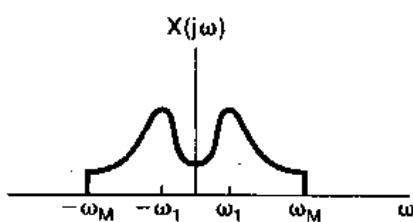


图 P8.24



(a)



(b)

图 P8.25

假定输入至加密器的所有输入都是实信号且带限于频率 ω_M , 即 $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ 。当给定任何一个这样的输入以后, 加密器就把这个输入信号的频谱变换到不同的频带内。另外, 输出信号也是实信号, 且带限于同一频带, 即 $Y(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ 。对该加密器来说, 其具体的变换算法是

$$Y(j\omega) = X(j(\omega - \omega_M)), \omega > 0 \quad Y(j\omega) = X(j(\omega + \omega_M)), \omega < 0$$

- (a) 若 $X(j\omega)$ 如图 P8.25(b) 所示, 画出加密后信号 $y(t)$ 的频谱。
 (b) 利用放大器、乘法器、相加器、振荡器以及你认为必要的无论什么类型的理想滤波器, 画出这样一个理想加密器的方框图。

(c) 再次利用放大器、乘法器、相加器、振荡器和各种理想滤波器, 画出相应的解密器的方框图。

- 8.26 在 8.22 节讨论过, $y(t) = [x(t) + A] \cos(\omega_c t + \theta_c)$ 这种形式的 AM 信号的非同步解调要用一个包络检波器。还有另外一种解调系统, 它也不要求相位同步, 但要求频率同步, 该系统如图 P8.26 方框图所示。两个低通滤波器截止频率都为 ω_c , 信号 $y(t) = [x(t) + A] \cos(\omega_c t + \theta_c)$, 其中 θ_c 为常数但大小未知。信号 $x(t)$ 为带限于 ω_M , 即 $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ 且 $\omega_M < \omega_c$ 。与利用包络检波器的要求相同, 对所有的 $t, x(t) + A > 0$ 。

证明: 图 P8.26 系统可用于从 $y(t)$ 中恢复出 $x(t)$ 而勿需知道调制器相位 θ_c 。

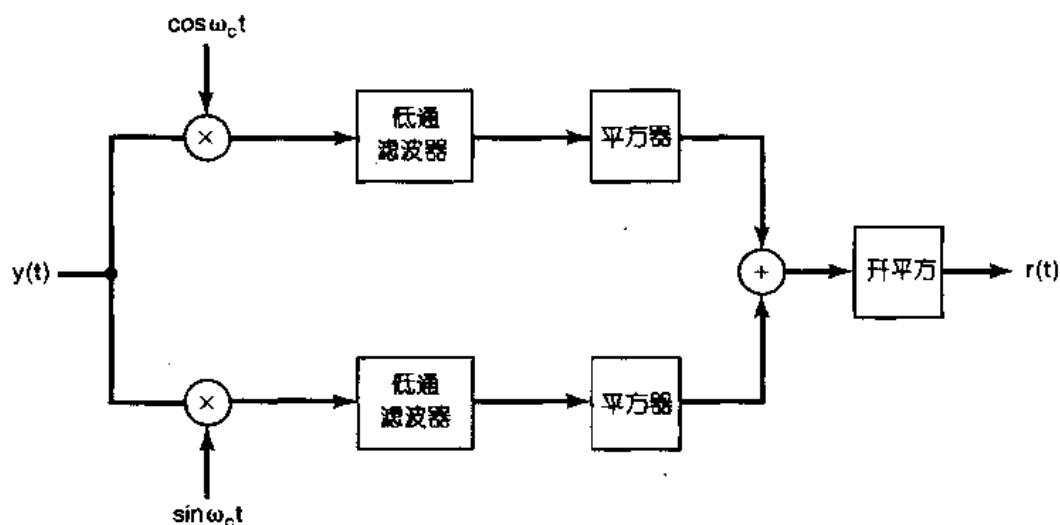


图 P8.26

- 8.27 在 8.2.2 节讨论过, 非同步调制一解调需要加入载波信号, 使得已调信号具有如下形式:

$$y(t) = [A + x(t)] \cos(\omega_c t + \theta_c) \quad (\text{P8.27-1})$$

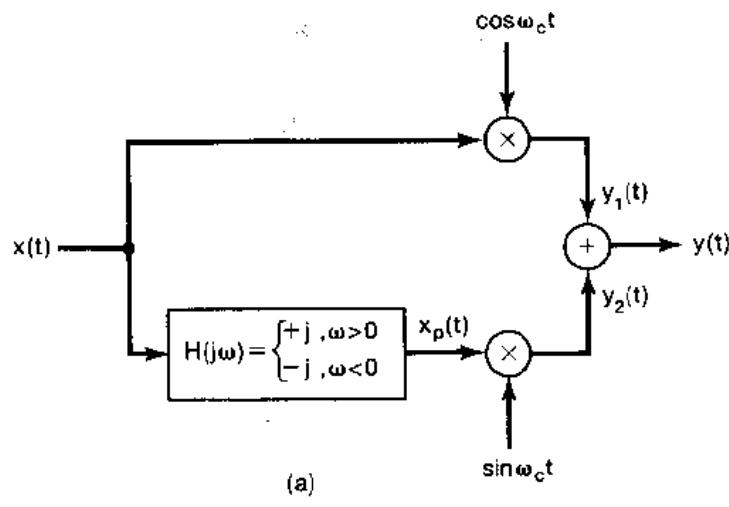
其中, 对所有 $t, [A + x(t)] > 0$ 。载波的存在意味着需要发射更大的功率, 也表明了这种系统的低效率。

- (a) 设 $x(t) = \cos \omega_M t, \omega_M < \omega_c$ 且 $[A + x(t)] > 0$ 。对一个周期为 T 的周期信号 $y(t)$, 其平均功率定义为 $P_y = (1/T) \int_T y^2(t) dt$ 。试对(P8.27-1)式的信号 $y(t)$ 确定并画出 P_y 。要将答案结果表示成调制指数 m 的函数; 调制指数定义为 $x(t)$ 的最大绝对值除以 A 。
- (b) 一个幅度已调信号的传输效率定义为该信号的边带功率与信号的总功率之比。如果 $x(t) = \cos \omega_M t, \omega_M < \omega_c$, 且 $[A + x(t)] > 0$, 作为调制指数 m 的函数, 确定并画出已调信号的效率。

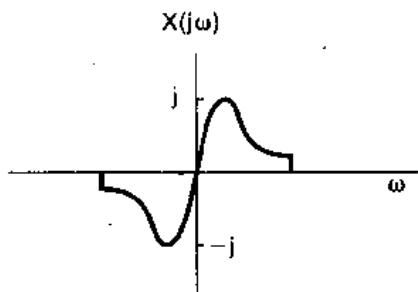
- 8.28 在 8.4 节讨论了利用 90° 相移网格来实现单边带调制, 并在图 8.21 和图 8.22 中具体画出了这个系统, 以及为保留下边带所要求的有关频谱。

图 P8.28(a) 示出一个为保留上边带所对应的系统。

- (a) 若 $X(j\omega)$ 与图 8.22 中相同, 试画出该系统的 $Y_1(j\omega), Y_2(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$, 并说明仅仅保留了上边带。
 (b) 若 $X(j\omega)$ 为纯虚数, 如图 P8.28(b) 所示, 试画该系统的 $Y_1(j\omega), Y_2(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$, 并说明这种情况下也是仅仅保留了上边带。



(a)



(b)

图 P8.28

8.29 单边带调制最常用在点对点的语音通信中。它有很多优点，其中包括功率利用率高，带宽节省，以及对于信道中的某些随机衰落不敏感等。在双边带载波抑制(DSB/SC)系统中，调制信号的频谱在发射频谱中全部出现在两个地方。单边带调制除掉了这一多余度，因此节省频带并提高了余下的要发射频谱部分内的信(号)噪(声)比。

图 P8.29(a)示出产生幅度调制的单边带信号的两个系统。该图上部的系统可以产生保留下边带的单边带信号，而下部则是用于产生保留下边带的单边带信号。

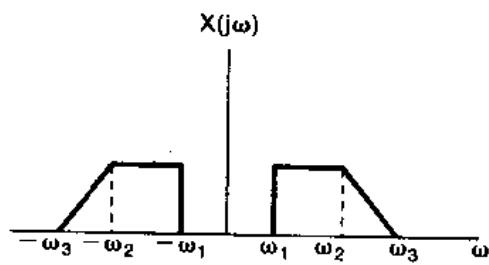
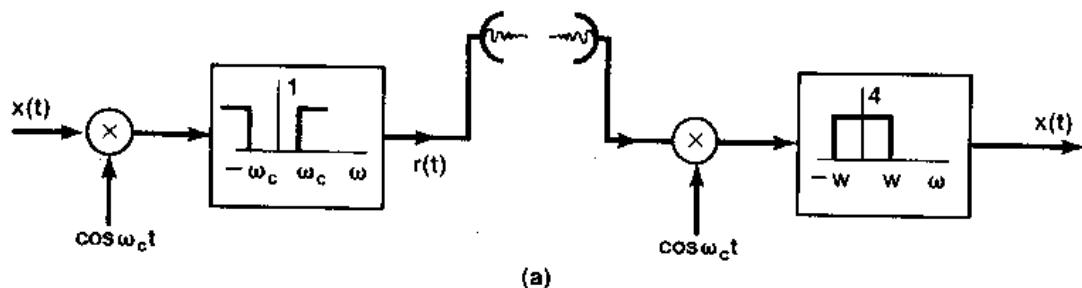
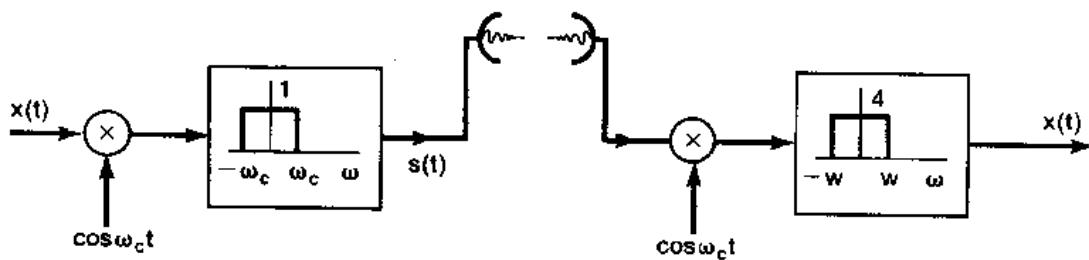
(a)若 $X(j\omega)$ 如图 P8.29(b)所示，确定并画出下边带已调信号的傅里叶变换 $S(j\omega)$ 和上边带已调信号的傅里叶变换 $R(j\omega)$ 。假定 $\omega_c > \omega_3$ 。

上边带调制方案在语音通信中是特别有用的，因为任何实际滤波器在截止频率 ω_c 附近都有一个有限的过渡带。由于语音信号在 $\omega=0$ 附近(即对 $|\omega| < \omega_1 = 2\pi \times 40\text{Hz}$)没有多少能量，因此，在这个区域可以容许很小的失真。

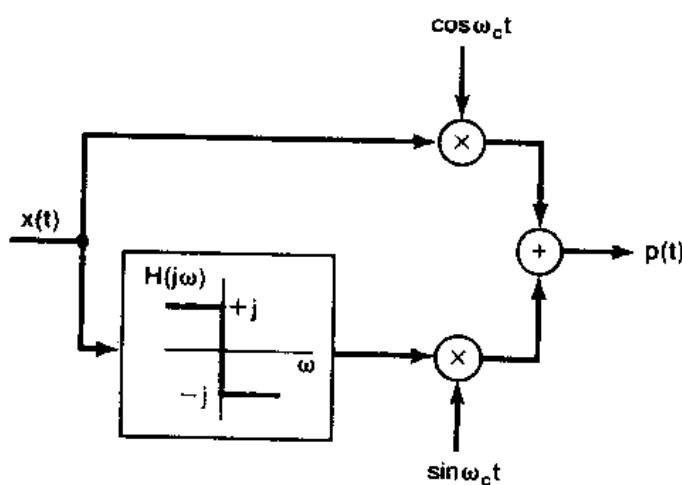
(b)产生单边带信号的另一种方法称为移相法，如图 P8.29(c)所示。证明，用这种方法产生的单边带信号是正比于由图 P8.29(a)的下边带调制方案所产生的信号[即 $p(t)$ 正比于 $s(t)$]。

(c)所有以上三个 AM-SSB 信号都可以用图 P8.29(a)右边所示的方案解调。证明，只要接收机和发射机中的振荡器相位相同，并且 $W = \omega_c$ ，那么无论接收到的信号是 $s(t)$, $r(t)$ 或是 $p(t)$ ，解调器的输出都是 $x(t)$ 。

当接收机中的振荡器与发射机中的振荡器不同相时所产生的失真(称为正交失真)在数据通信中最令人烦恼的。



(b)



(c)

图 P8.29

8.30 用一个脉冲串载波的幅度调制可以按图 P8.30(a)建模。该系统的输出是 $q(t)$ 。

(a) 设 $x(t)$ 是一带限信号[即, $X(j\omega) = 0, |\omega| \geq \pi/T$], 如图 P8.30(b)所示。确定并画出 $R(j\omega)$ 和 460

$Q(j\omega)$ 。

- (b) 求最大的 Δ 值，使得通过一个合适的滤波器后有 $w(t) = x(t)$ 。

- (c) 确定并画出使 $w(t) = x(t)$ 的补偿滤波器 $M(j\omega)$ 。

- 8.31 设 $x[n]$ 是一离散时间信号，其频谱为 $X(e^{j\omega})$ ，并设 $p(t)$ 是一个频谱为 $P(j\omega)$ 的连续时间脉冲函数。现形成信号 $y(t)$ 为

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] p(t - nT)$$

- (a) 用 $X(e^{j\omega})$ 和 $P(j\omega)$ 确定 $Y(j\omega)$ 。

- (b) 如果有

$$p(t) = \begin{cases} \cos 8\pi t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases}$$

试确定 $P(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$ 。

- 8.32 考虑离散时间信号 $x[n]$ ，其傅里叶变换如图 P8.32(a) 所示。该信号被一个正弦序列所调制，如图 P8.32(b) 所示。

- (a) 确定并画出 $y[n]$ 的傅里叶变换 $Y(e^{j\omega})$ 。

- (b) 图 P8.32(c) 是一个解调系统，对于什么样的 θ_c ， ω_{cp} 和 G 值，将有 $\hat{x}[n] = x[n]$ ？为保证可从 $y[n]$ 中恢复出 $x[n]$ ，有必要对 ω_c 和 ω_{cp} 施加任何限制吗？

- 8.33 现在考虑一组离散时间信号 $x_i[n], i=0,1,2,3$ ，的频分多路复用。另外，每一路 $x_i[n]$ 都可能占满了整个频带 ($-\pi < \omega < \pi$)，这些信号中的每一个增采样后的正弦调制既可以用双边带技术，也可以用单边带技术来实现。

- (a) 假设每一路信号 $x_i[n]$ 都经过适当地增采样，然后与 $\cos[i(\pi/4)n]$ 调制。为确保 FDM 的频谱不发生任何混叠，问对 $x_i[n]$ 最小的增采样量是多少？

- (b) 若每一路 $x_i[n]$ 的增采样因子局限于 4，如何利用单边带技术以保证 FDM 信号没有任何混叠？

提示：见习题 8.17。

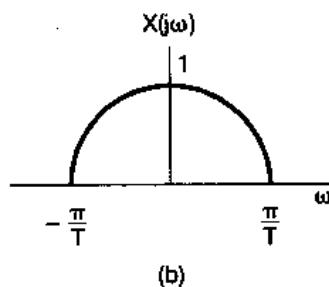
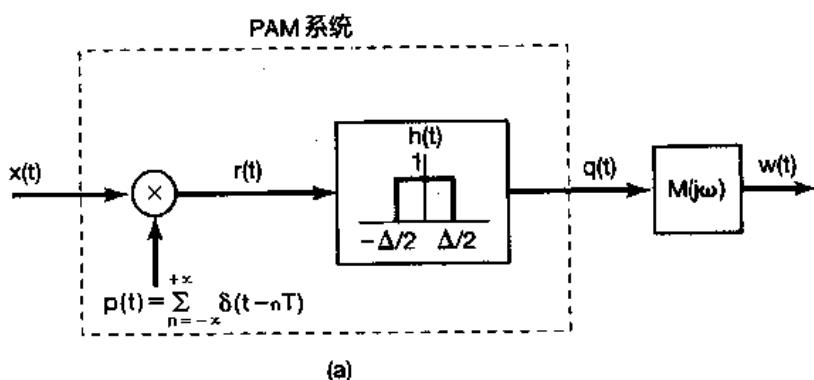


图 P8.30

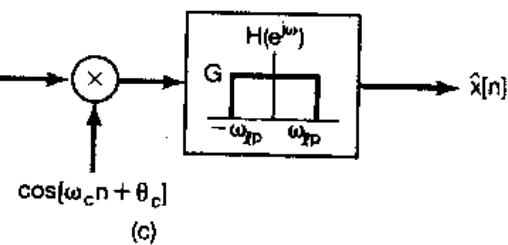
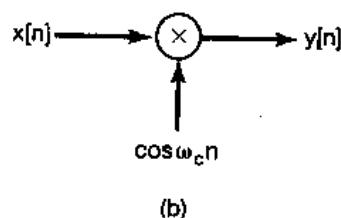
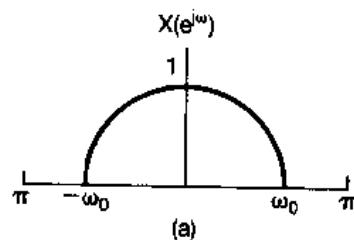


图 P8.32

深入题

8.34 在讨论幅度调制系统时, 调制和解调都是通过使用乘法器来完成的。由于乘法器的实现往往比较困难, 因而在许多实际系统中都用一种非线性单元。本题将要说明这一基本概念。

图 P8.34 示出这样一个用于幅度调制的非线性系统。该系统由以下两部分组成: 先将调制信号和载波相加再平方, 然后通过带通滤波获得幅度已调信号。

假设 $x(t)$ 带限, $X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ 。试确定带通滤波器的参数 A , ω_l 和 ω_h , 使得 $y(t)$ 就是用 $x(t)$ 进行幅度调制的结果 [即, $y(t) = x(t) \cos \omega_c t$]。如果有, 请给出对 ω_c 和 ω_M 必要的限制。

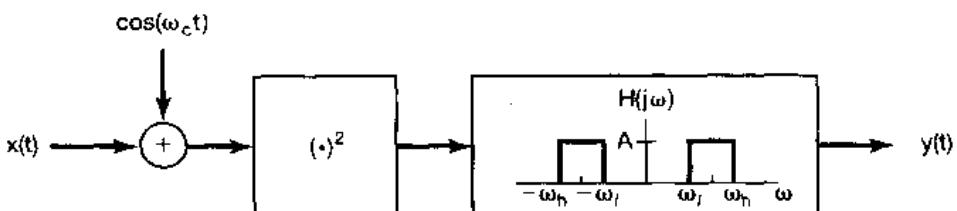


图 P8.34

8.35 本题所提出的这个调

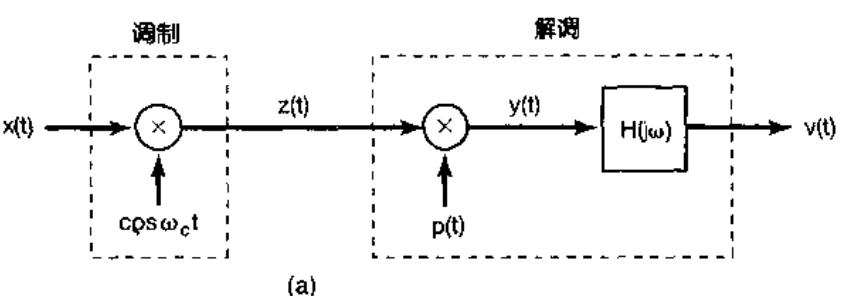
制一解调系统, 除了
在解调中用一个与
 $\cos \omega_c t$ 具有相同过零
点的方波外, 与正弦
幅度调制是类似的。
该系统如图 P8.35(a)

所示, 而 $\cos \omega_c t$ 与
 $p(t)$ 之间的关系如图
P8.35(b) 所示。设输入
信号 $x(t)$ 是带限于
最高频率 ω_M , 而
 $\omega_M < \omega_c$, 如图 P8.35(c)
所示。

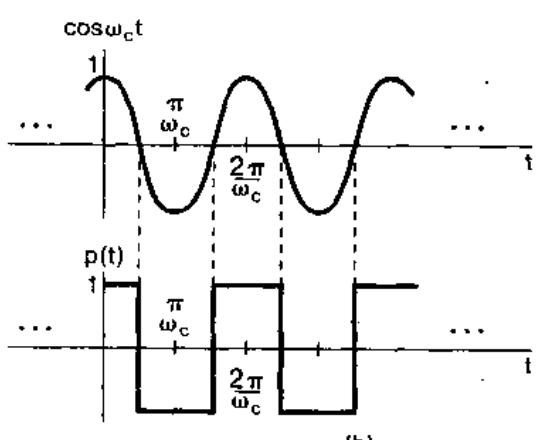
(a) 分别画出 $z(t)$,
 $p(t)$ 和 $y(t)$ 的傅
里叶变换 $Z(j\omega)$,
 $P(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$ 的
实部和虚部, 并加
以标注。

(b) 画出使 $v(t) = x(t)$
的滤波器 $H(j\omega)$,
并加以标注。

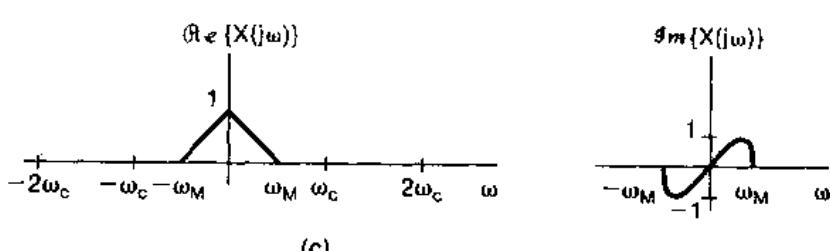
8.36 无线电与电视信号的
准确解复用——解调
通常是利用一种称为
超外差接收机的系统
来实现的, 这是等效于一种可变谐振滤波器。图 P8.36(a) 示出它的基本组成系统。



(a)

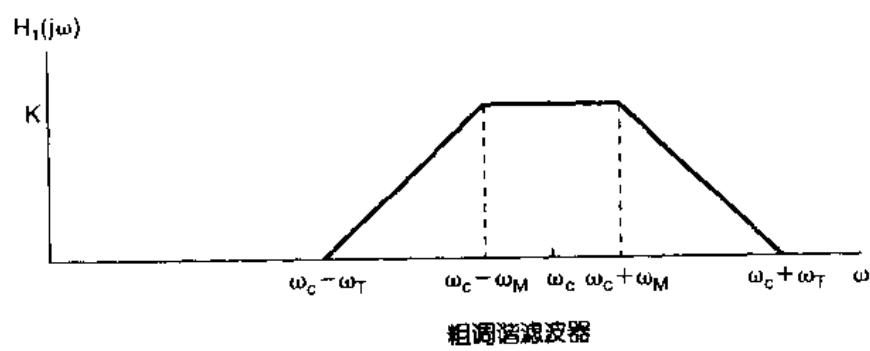
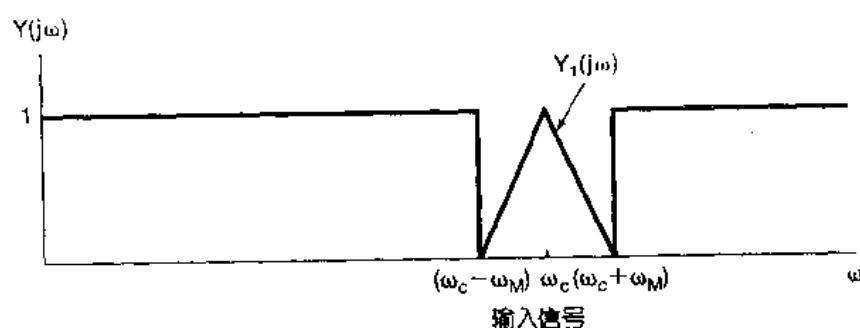
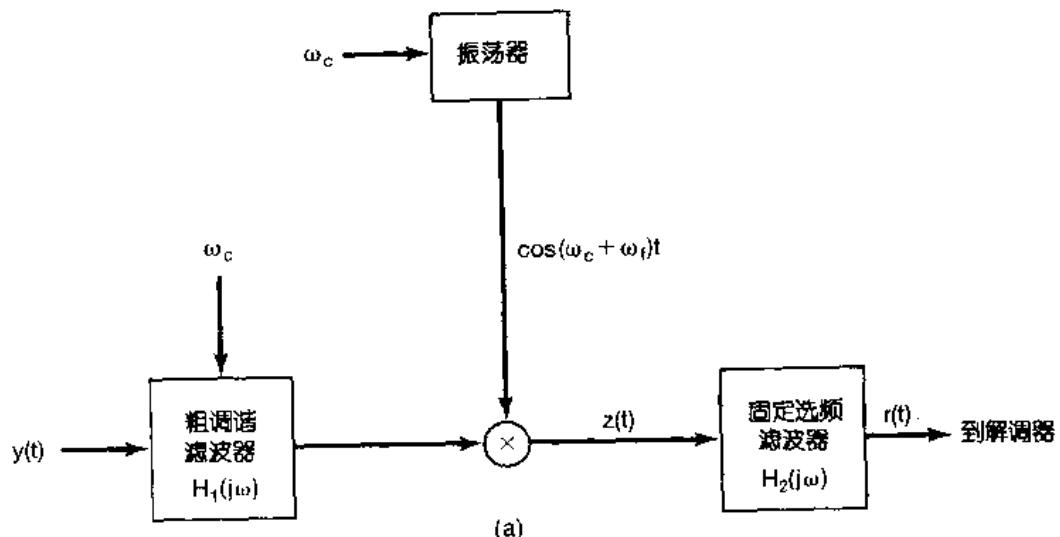


(b)

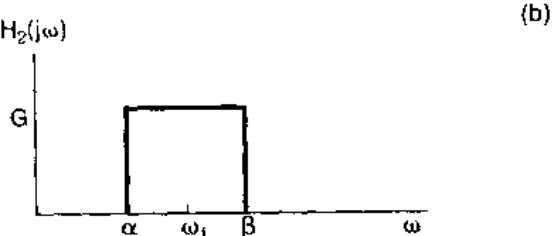


(c)

图 P8.35



(b) 粗调谐滤波器



(c)

图 P8.36

(a) 输入信号 $y(t)$ 由已经频分多路复用过的众多幅度已调信号叠加而成，所以每一路信号都占有一个不同频率的信道。现在来考虑一个这样的信道，它包括幅度已调信号 $y_1(t) = x_1(t) \cos \omega_c t$ ，其频谱 $Y_1(j\omega)$ 如图 P8.36(b) 所示。现在想要利用图 P8.36(a) 的系统对 $y_1(t)$ 先解复用，再解调以便

恢复调制信号 $x_1(t)$ 。粗调谐滤波器有一个示于图 P8.36(b)下部的频率响应 $H_1(j\omega)$ 。确定输入至固定选频滤波器 $H_2(j\omega)$ 的输入信号 $z(t)$ 的频谱 $Z(j\omega)$ ，并对 $\omega > 0$ 画出 $Z(j\omega)$ 和加以标注。

(b) 固定选频滤波器是一个以频率 ω_f 为中心的带通滤波器，如图 P8.36(c) 所示。希望该滤波器 $H_2(j\omega)$ 的输出是 $r(t) = x_1(t)\cos\omega_f t$ ，依据 ω_c 和 ω_M ，为了保证 $x_1(t)$ 的一个不失真的频谱集中于 $\omega = \omega_f$ 周围， ω_r 必须满足什么约束？

(c) 图 P8.36(c) 中， G ， a 和 β 必须等于什么，才能使 $r(t) = x_1(t)\cos\omega_f t$ ？

8.37 现在设想用下面方案来实现幅度调制：输入信号 $x(t)$ 与载波信号 $\cos\omega_c t$

相加，然后通过一个非线性器件，使输出 $z(t)$ 与输入 $x(t)$ 满足如下关系：

$$z(t) = e^{y(t)} - 1,$$

$$y(t) = x(t) + \cos\omega_c t$$

如图 P8.37(a) 所示。这样一种非线性关系可以通过二极管的电流-电压特性来实现。若分别以 $i(t)$ 和 $v(t)$ 代表二极管的电流和电压，则有

$$i(t) = I_0 e^{av(t)} - 1 (a \text{ 为实数})$$

为了研究这种非线性的效果，可以研究 $z(t)$ 的频谱，看它与 $X(j\omega)$ 和 ω_c 有何关系。为此，利用 e^y 的幂级数展开，即

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \dots$$

(a) 若 $x(t)$ 的频谱如图 P8.37(b) 所

示，且 $\omega_c = 100\omega_1$ ，利用 e^y 幂级数中的前 4 项，画出 $z(t)$ 的频谱 $Z(j\omega)$ ，并加以标注。

(b) 带通滤波器(BPF)具有图 P8.37(c) 所示的参数，试确定 α 和 β 的范围，使得 $r(t)$ 就是用 $x(t)$ 进行幅度调制的结果。

8.38 图 P8.38(a) 示出一种通信系统，该系统把一个带限信号 $x(t)$ 转换为周期性高频能量脉冲来发射。假定 $X(j\omega) = 0$, $|\omega| > \omega_M$ ，对调制信号 $m(t)$ 有两种可能的选择，分别用 $m_1(t)$ 和 $m_2(t)$ 来表示，其中 $m_1(t)$ 是周期性的正弦脉冲串，每个脉冲的持续期为 D ，如图 P8.38(b) 所示，也即

$$m_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kT)$$

其中 $p(t)$

$$p(t) = \begin{cases} \cos\omega_c t & |t| < (D/2) \\ 0, & |t| > (D/2) \end{cases}$$

$m_2(t)$ 是被周期性阻断或选通了的 $\cos\omega_c t$ ，即

$m_2(t) = g(t)\cos\omega_c t$, $g(t)$ 如图 P8.38(b) 所示。

假定参数 T , D , ω_c 和 ω_M 之间有下列关系：

$$D < T \quad \omega_c \gg \frac{2\pi}{D} \quad \frac{2\pi}{T} > 2\omega_M$$

同时假定对于 $x \gg 1$, $[\sin x]/x$ 可以忽略。

确定是否对某一选定的 ω_{lp} ，无论 $m_1(t)$ 或 $m_2(t)$ ，都将产生一个已解调信号 $x(t)$ 。对你认为肯定的

每一种情况，确定 ω_{lp} 可容许的范围。

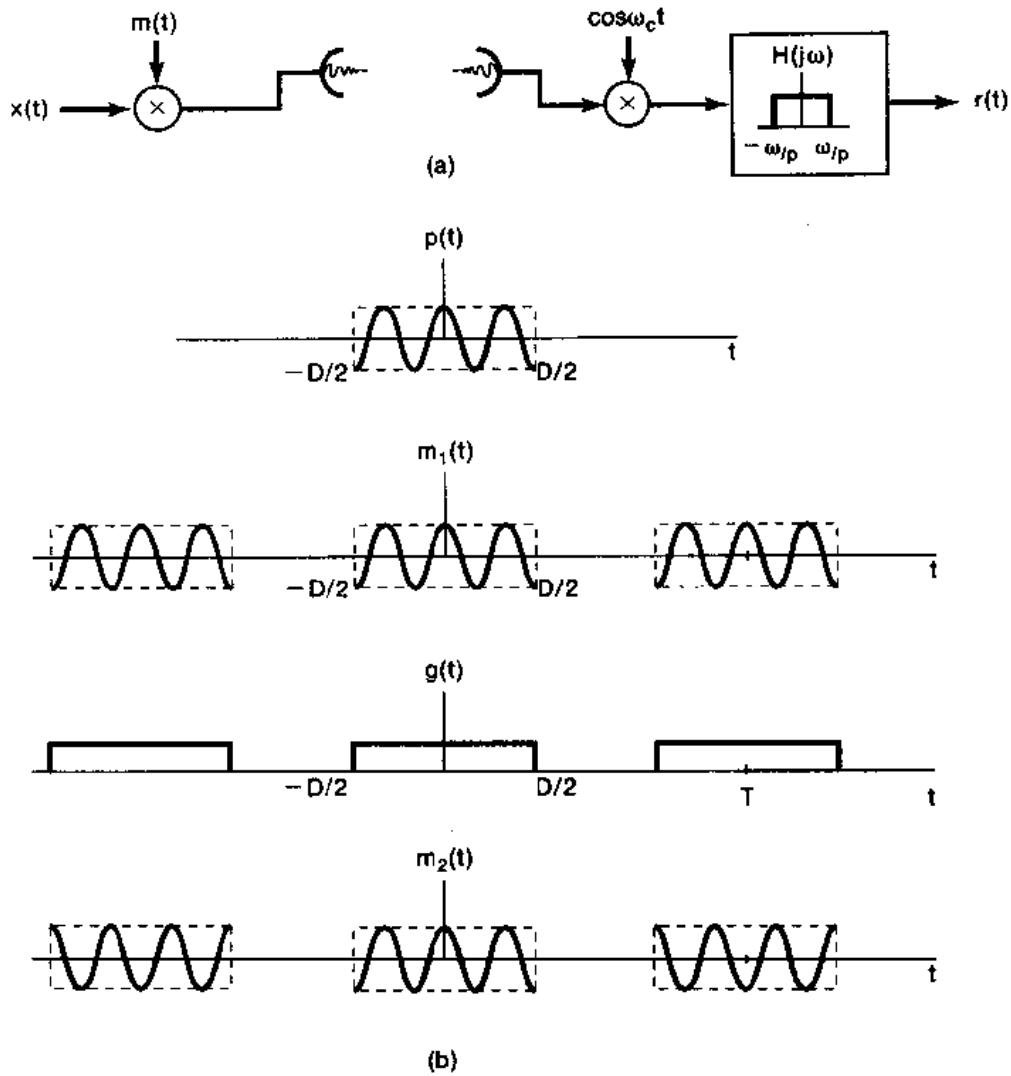


图 P8.38

- 8.39 设想希望传送两个可能的消息中的一个，即消息 m_0 或消息 m_1 。为此在长度为 T 的时间间隔内，发送两种频率之一的高频脉冲。注意， T 与传送哪一个消息是无关的。对消息 m_0 将送出 $\cos\omega_0 t$ ，而对消息 m_1 则送出 $\cos\omega_1 t$ 。于是，脉冲 $b(t)$ 看上去就如图 P8.39(a) 所示。这种通信系统称为移频键控 (FSK)。当高频脉冲 $b(t)$ 被收到时，就要判断它是代表消息 m_0 还是消息 m_1 。为此，按图 P8.39(b) 的方案去实现。

(a) 证明：当 $\cos\omega_0 t$ 和 $\cos\omega_1 t$ 满足关系

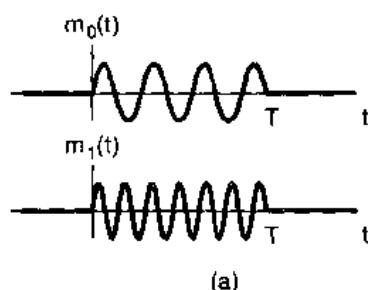
$$\int_0^T \cos\omega_0 t \cos\omega_1 t dt = 0$$

时，在图 P8.39(b) 中两条线路的绝对值之间差别最大。

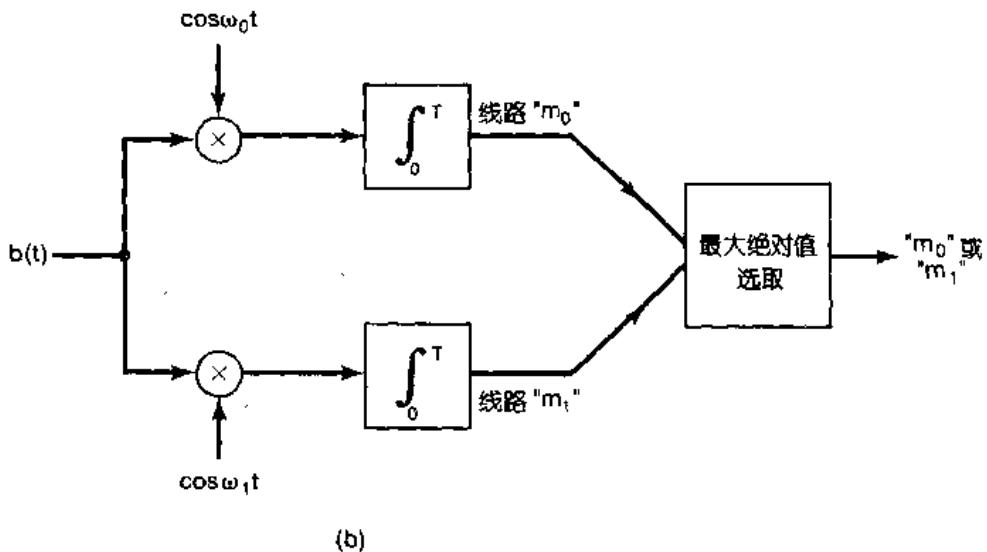
(b) 选择 ω_0 和 ω_1 ，使得没有一个长度为 T 的区间能满足

$$\int_0^T \cos\omega_0 t \cos\omega_1 t dt = 0$$

这可能吗？



(a)



(b)

图 P8.39

- 8.40 在 8.3 节曾讨论过利用正弦幅度调制实现频分多路复用，借以把几个信号搬移到不同的频带上，然后把它们加起来同时发送出去。在本题将研究另一种称为正交多路复用的概念。按此多路复用方法，如果两个载波信号的相位相差 90° ，那么这两个信号可以同时在同一频带内传送。该多路复用系统如图 P8.40(a) 所示，其解复用系统如图 P8.40(b) 所示。

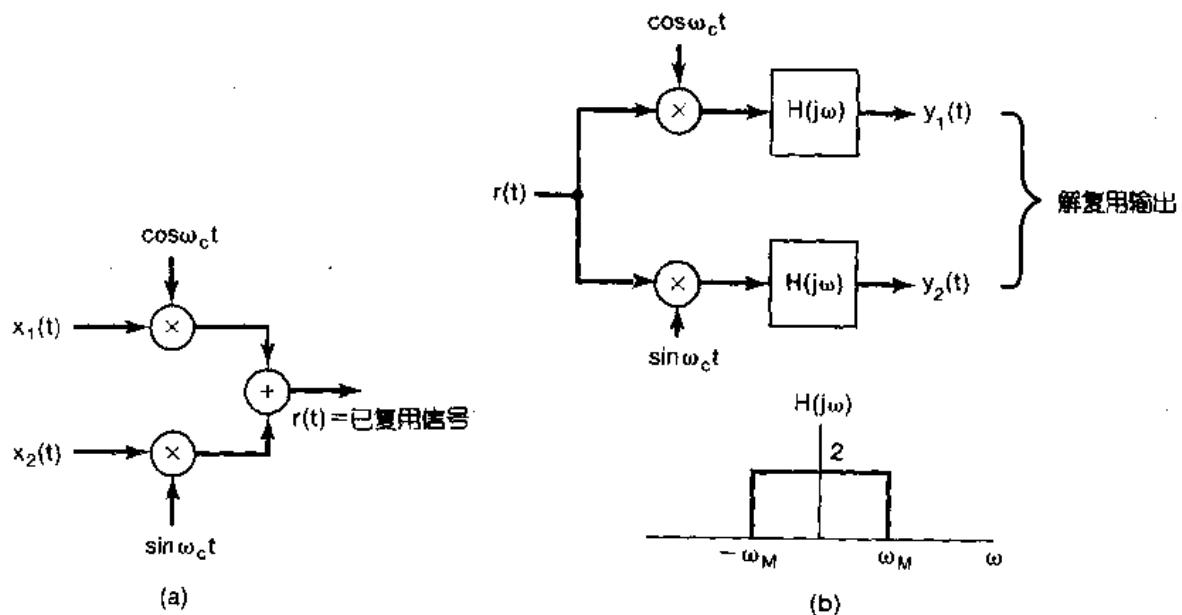


图 P8.40

假定 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是带限的，其最高频率为 ω_M 即有 $X_1(j\omega) = X_2(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$ 。假定载波频率 ω_c 大于 ω_M ，证明： $y_1(t) = x_1(t)$ 和 $y_2(t) = x_2(t)$ 。

- 8.41 在习题 8.40 中，介绍了正交多路复用的概念，借此将频率相同，但相位相差 90° 的两个载波信号分别由每个信号进行调制之后，再把两者加起来。与此相对应的离散时间多路复用器和解复用器示于图 P8.41 中。假定信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 都是带限于 ω_M 的，即

$$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = 0, \omega_M < \omega < 2\pi - \omega_M$$

(a) 确定 ω_c 的取值范围，使得 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 能够从 $r[n]$ 中恢复出来。

(b) 如果 ω_c 满足(a)中的条件，确定 $H(e^{j\omega})$ ，使得有

$$y_1[n] = x_1[n] \text{ 和 } y_2[n] = x_2[n]。$$

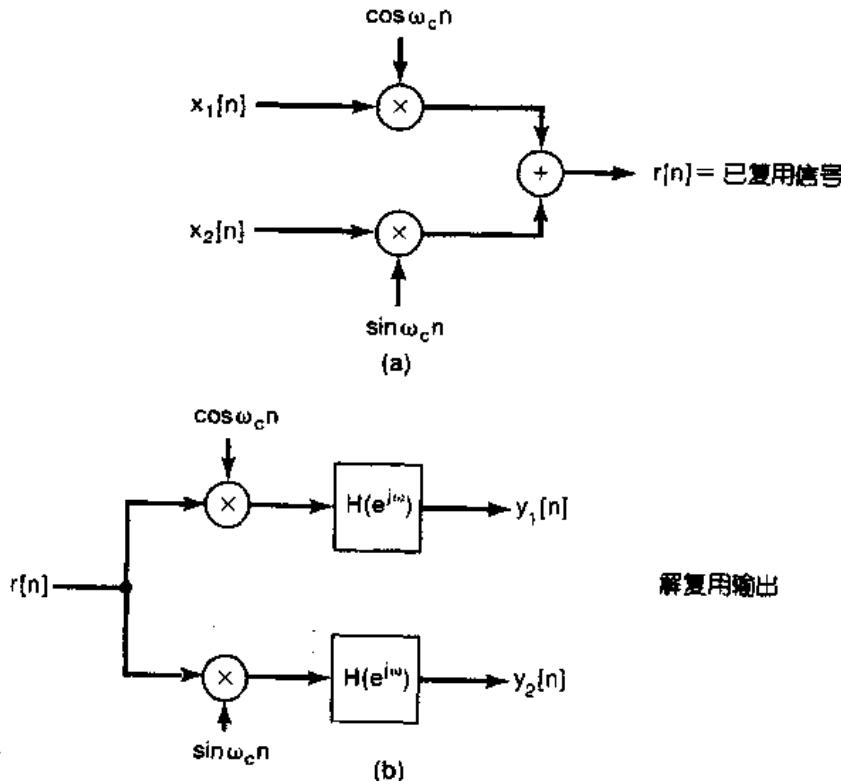


图 P8.41

- 8.42 为了避免码间干扰，在 PAM 中所使用的脉冲都是设计成在码间隔 T_1 的整数倍上其值为零。本题将建立一类这样的脉冲，它们在 $t = kT_1, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 都是零。

考虑一个脉冲 $p_1(t)$ ，它为实且为偶函数，傅里叶变换为 $P_1(j\omega)$ 。同时假定

$$P_1\left(-j\omega + j\frac{\pi}{T_1}\right) = -P_1\left(j\omega + j\frac{\pi}{T_1}\right), 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_1}$$

(a) 定义一个周期脉冲串 $\tilde{p}_1(t)$ ，其傅里叶变换为

$$\tilde{P}_1(j\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_1\left(j\omega - jm\frac{4\pi}{T_1}\right)$$

证明

$$\tilde{P}_1(j\omega) = -\tilde{P}_1\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T_1}\right)$$

(b) 利用(a)的结果，证明：对某些 T 有

$$\tilde{p}_1(t) = 0, t = kT, k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$$

(c) 利用上述结果, 证明

$$p_1(kT_1) = 0, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

(d) 证明: 具有傅里叶变换为 $P(j\omega)$

$$P(j\omega) = \begin{cases} 1 + P_1(j\omega), & |j\omega| \leq \frac{\pi}{T_1} \\ P_1(j\omega), & \frac{\pi}{T_1} \leq |j\omega| \leq \frac{2\pi}{T_1} \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

的脉冲 $p(t)$ 也有如下性质

$$p(kT_1) = 0, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

8.43 用于 PAM 通信某一信道的单位冲激响应为

$$h(t) = 10000e^{-1000t}u(t)$$

假定该信道的相位特性在信道的通带内近似为线性的。通过该信道后接收到的脉冲然后用一个单位冲激响应为 $g(t)$ 的 LTI 系统 S 来处理, 以补偿信道带宽内的不均匀增益。

(a) 证明: 若 $g(t)$ 具有傅里叶变换为

$$G(j\omega) = A + jB\omega$$

这里 A 和 B 都实系数, 那么 $g(t)$ 就能够补偿在该信道通带内的不均匀增益。试确定 A 和 B 的值。

(b) 现在建议由图 P8.43 所示系统来实现系统 S , 试确定在该系统中的增益因子 α 和 β 的值。

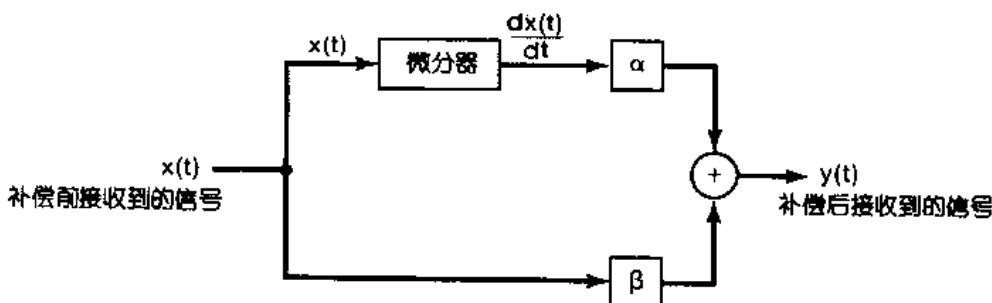


图 P8.43

8.44 本题要研究一种均衡方法, 该方法用于避免由于信道在其通带内的非线性相位, 而在 PAM 系统中所引起的码间干扰。

当一个具有在码间间隔 T_1 的整数倍点上具有过零点的脉冲通过具有非线性相位特性的信道时, 接收到的脉冲可能就不再具有在 T_1 的整数倍时刻上过零。因此, 为了避免码间干扰, 将已接收脉冲通过一个零均值均衡器(Zero-forcing equalizer), 强使该脉冲在 T_1 的整数倍点上过零。这种均衡器产生一个新的脉冲 $y(t)$, 它由加权和移位了的已接收脉冲 $x(t)$ 相加而成, 即

$$y(t) = \sum_{l=-N}^N a_l x(t - lT_1) \quad (\text{P8.44-1})$$

式中 a_l 全为实数, 并且选成使得有

$$y(kT_1) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm N \end{cases}$$

(a) 证明: 该均衡器是一个滤波器, 并确定它的冲激响应。

(b) 为了说明加权值 a_l 的选取, 现考虑一个例子。若 $x(0T_1) = 0, x(-T_1) = 0.2, x(T_1) = -0.2$ 和 $x(kT_1) = 0, |k| > 1$, 试求 a_0, a_1 和 a_{-1} 的值, 使得 $y(\pm T_1) = 0$ 。

8.45 利用窄带 FM 技术来传输一带限信号 $x(t)$, 也就是说, 按 8.7 节所定义的, 调制指数 $m \ll \pi/2$ 。在 $x(t)$ 被传送到调制器之前, 先作一个处理, 而有 $X(j\omega)|_{\omega=0} = 0$ 和 $|x(t)| < 1$ 。这个经归一化了的

$x(t)$ 现在用角调制去调制一个载波而形成 FM 信号

$$y(t) = \cos\left(\omega_c t + m \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right)$$

(a) 求瞬时频率 ω_i 。

(b) 利用(8.44)式和(8.45)式,窄带假设($m \ll \pi/2$),以及上面的归一化条件,证明

$$y(t) \approx \cos\omega_c t - \left(m \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right) \sin\omega_c t$$

(c) 在 $y(t)$ 的带宽, $x(t)$ 的带宽和载波频率 ω_c 之间有什么关系?

8.46 考虑复指数时间函数

$$s(t) = e^{j\theta(t)} \quad (\text{P8.46-1})$$

其中 $\theta(t) = \omega_0 t^2/2$ 。

因为瞬时频率 $\omega_i = d\theta/dt$ 也是时间的函数,所以信号 $s(t)$ 就可以当成一个 FM 信号。特别是,因为这个信号的瞬时频率是随时间线性地扫过频谱,因此,通常就称它为线性调频信号,或称“鸟声”信号。

(a) 求瞬时频率。

(b) 确定并画出“鸟声”信号傅里叶变换的模和相位特性。为了计算傅里叶变换积分,你会发现,将被积函数的复指数“完全平方”,并利用如下关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+j)$$

是有用的。

(c) 考虑图 P8.46 所示系统,

图中 $x(t)$ 是“鸟声”信号
如(P8.46-1)式所给出。

证明: $y(t) = X(j\omega_0 t)$,
 $X(j\omega)$ 是 $x(t)$ 的傅里叶
变换。

(注意: 图 P8.46 的系统
称为“鸟声”变换
算法,在实际中常
用于获取一个信
号的傅里叶变换)

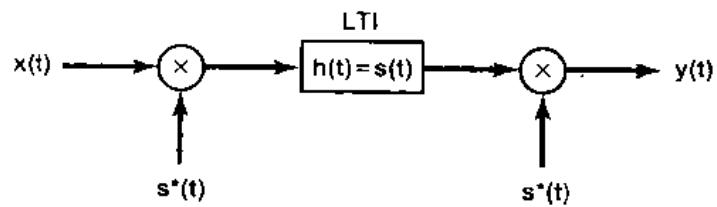
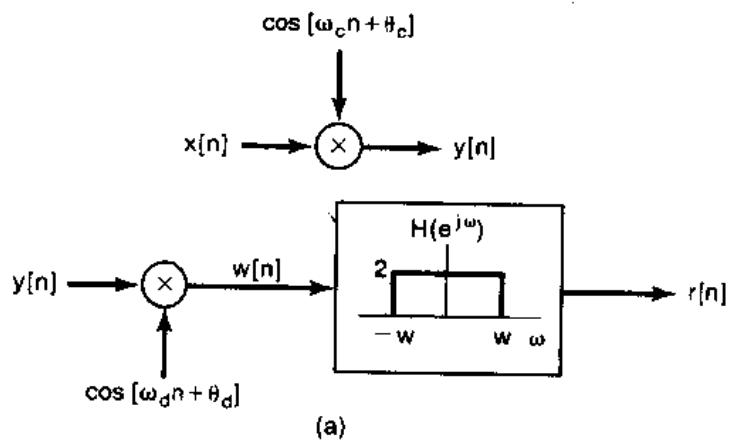
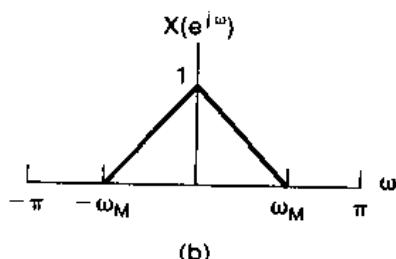


图 P8.46



(a)



(b)

图 P8.47

8.47 在 8.8 节讨论了正弦载波时
同步离散时间调制和解调系
统。本题要研究当相位和/
或频率失去同步时的影响。

图 P8.47 示出这个调制和解
调系统,图中都指出了调制器
和解调器载波之间的相位
差和频率差。设频率差 ω_d

$- \omega_c$ 记为 $\Delta\omega$, 相位差 $\theta_d - \theta_c$ 记为 $\Delta\theta$,

(a) 若 $x[n]$ 的频谱如图 P8.47(b)所示,并假定 $\Delta\omega = 0$, 试画出 $w[n]$ 的频谱。

(b) 若 $\Delta\omega = 0$, 证明可以通过选择 W , 使输出 $r[n]$ 为 $r[n] = x[n]\cos(\Delta\theta)$ 。特别是, 若 $\Delta\theta = \pi/2$, $r[n]$ 是什么?

(c) 当 $\Delta\theta = 0$, 且 $W = \omega_M + \Delta\omega$ 时, 证明输出 $r[n] = x[n]\cos[\Delta\omega n]$ (假定 $\Delta\omega$ 很小)。

8.48 在本题中要讨论用脉冲

串作载波的离散时间幅度调制的分析。要讨论的系统如图 P8.48(a)所示。

(a) 确定并画出图 P8.48

(a) 中周期方波信号 $p[n]$ 的离散时间傅里叶变换。

(b) 假设 $x[n]$ 的频谱如图 P8.48(b) 所示, 若 $\omega_M = \pi/2N$ 且图 P8.48(a) 中的 $M = 1$, 试画出 $y[n]$ 的傅里叶变换 $Y(e^{j\omega})$ 。

(c) 现在假设 $X(e^{j\omega})$ 已知是带限于 $X(e^{j\omega}) = 0, \omega_M < \omega < 2\pi - \omega_M$, 但其它的并未给出, 对于图 P8.48(a) 的系统, 确定: 为使 $x[n]$ 可以从 $y[n]$ 中恢复, 作为 N 的函数的最大可容许 ω_M 值, 并指出所得结果与 M 有关吗?

(d) 若 ω_M 和 N 满足(c) 中所确定的条件, 试用方框图形式表明一下如何从 $y[n]$ 中恢复出 $x[n]$ 。

8.49 在实际中, 要构成在很低频率上工作的放大器往往是很困难的。因此, 低频放大器一般都采用幅度调制原理, 将信号搬移到较高的频段。这样的放大器称为斩波器放大器, 图 P8.49 给出了它的方框图。

(a) 如果要使 $y(t)$ 正比于 $x(t)$ (即: 如果整个系统等效为一个放大器), 试用 T 来确定在 $x(t)$ 中容许存在的最高频率是多少?

(b) 若 $x(t)$ 为按(a) 中所确定的是带限的, 试用 A 和 T 确定图 P8.49 系统的增益。

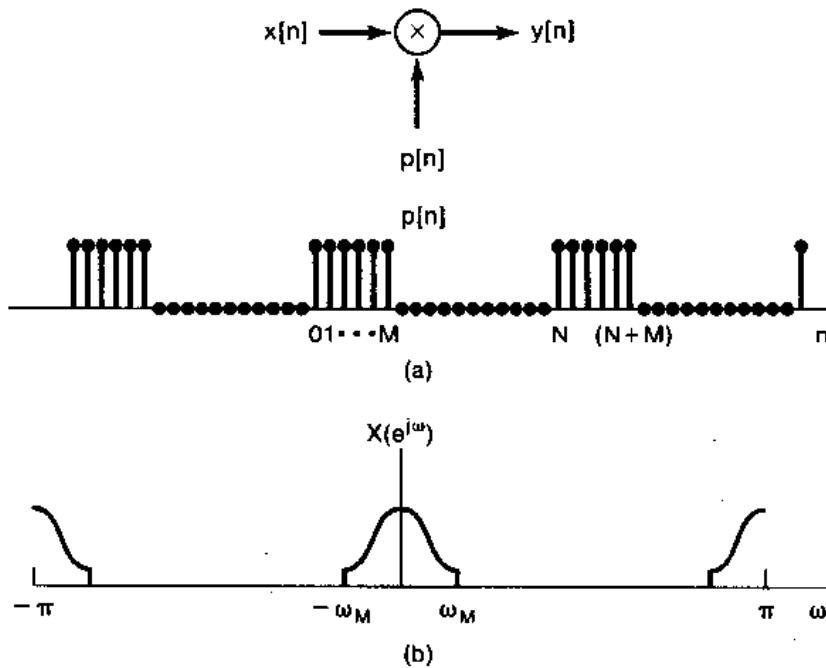


图 P8.48

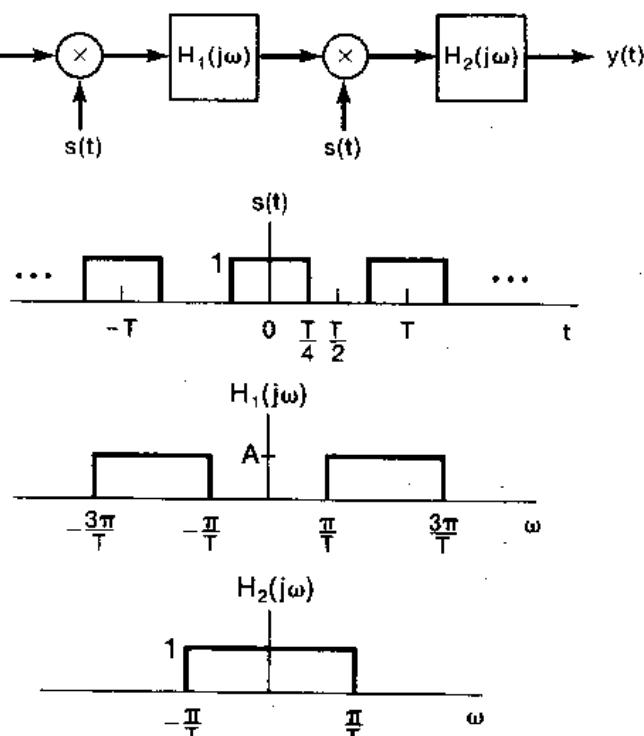


图 P8.49

第9章 拉普拉斯变换

9.0 引言

前面几章已经看到，傅里叶分析工具在研究涉及信号和 LTI 系统的很多问题中是极为有用的。这在很大程度上是由于相当广泛的一类信号都能用周期复指数信号的线性组合来表示，而复指数信号又是 LTI 系统的特征函数的缘故。连续时间傅里叶变换提供了将信号表示成形如 e^{st} , $s = j\omega$ 的复指数信号的线性组合；然而，由 3.2 节引入的特征函数性质及其它的很多结果对任意 s 值都是适用的，而并不是将它仅限于纯虚数的情况。这样的看法就导致了连续时间傅里叶变换的推广，称之为拉普拉斯变换，这就是本章要进行讨论的。下一章将建立对应的离散时间的推广，称之为 z 变换。

将会看到，拉普拉斯变换和 z 变换都有很多使傅里叶变换成为如此有用的一些性质。然而，这些变换不仅仅是对那些能用傅里叶变换进行分析的信号与系统提供了另一种分析工具和另一种分析的角度，而且在一些傅里叶变换不能应用的重要方面，它们也能够应用。例如：拉普拉斯变换和 z 变换能用于许多不稳定系统的分析，这样就在系统的稳定性或不稳定性的研究中起着重要的作用。这一事实再与拉普拉斯变换和 z 变换与傅里叶变换共有的代数性质组合在一起，就形成了一整套重要的系统分析工具，尤其是在第 11 章要讨论的反馈系统分析中更是如此。

9.1 拉普拉斯变换

在第 3 章已经知道，一个单位冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统，对 e^{st} 复指数输入信号的响应 $y(t)$ 是

$$y(t) = H(s)e^{st} \quad (9.1)$$

这里

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (9.2)$$

若 s 为虚数（即 $s = j\omega$ ），(9.2)式的积分就对应于 $h(t)$ 的傅里叶变换。对一般的复变量 s 来说，(9.2)式就称为单位冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。

一个信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换定义如下^①：

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (9.3)$$

^① 由(9.3)式定义的变换称为双边拉普拉斯变换，以区别于将在 9.9 节要讨论的单边拉普拉斯变换。(9.3)式的双边变换涉及从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分；而单边变换和(9.3)式有类似的形式，但积分限是从 0 到 $+\infty$ 。因为我们主要讨论的是双边变换，因此一般都略去“双边”二字，除在 9.9 节为了避免混淆而需要加上外。

应该特别注意到，这是一个自变量为 s 的函数，而 s 是在 e^{-st} 中指数的复变量。复变量 s 一般可写成 $s = \sigma + j\omega$ ，其中 σ 和 ω 分别是它的实部和虚部。为方便起见，常将拉普拉斯变换表示为算子 $\mathcal{L}\{x(t)\}$ 形式，而把 $x(t)$ 和 $X(s)$ 间的变换关系记为

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad (9.4)$$

当 $s = j\omega$ 时，(9.3)式就变成

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (9.5)$$

这就是 $x(t)$ 的傅里叶变换，即

$$X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (9.6)$$

当复变量 s 不为纯虚数时，拉普拉斯变换与傅里叶变换也有一个直接的关系。为了看出这一点，将(9.3)式 $X(s)$ 中的 s 表示成 $s = \sigma + j\omega$ ，则有

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \quad (9.7)$$

或者

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \quad (9.8)$$

我们可以把(9.8)式的右边看作 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。这就是说， $x(t)$ 的拉普拉斯变换可以看成是 $x(t)$ 在乘以一个实指数信号以后的傅里叶变换。这个实指数 $e^{-\sigma t}$ 在时间上可以是衰减的，或者是增长的，这决定于 σ 是正还是负。

为了说明拉普拉斯变换，以及它与傅里叶变换的关系，考虑下面的例子。

例 9.1 设信号 $x(t) = e^{-at} u(t)$ ，由例 4.1，它的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 在 $a > 0$ 时收敛，且为

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega + a}, \quad a > 0 \quad (9.9)$$

根据(9.3)式，其拉普拉斯变换为

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \quad (9.10)$$

或者，用 $s = \sigma + j\omega$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt \quad (9.11)$$

将(9.11)式与(9.9)式相比较，可以看出(9.11)式就是 $e^{-(\sigma+a)t} u(t)$ 的傅里叶变换，于是有

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega}, \quad \sigma + a > 0 \quad (9.12)$$

因为 $s = \sigma + j\omega$ 和 $\sigma = \Re\{s\}$ ，又可等效为

$$X(s) = \frac{1}{s + a}, \quad \Re\{s\} > -a \quad (9.13)$$

这就是

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s + a}, \quad \Re\{s\} > -a \quad (9.14)$$

例如，若 $a = 0$ ， $x(t)$ 就是单位阶跃函数，其拉普拉斯变换为 $X(s) = 1/s$ ， $\Re\{s\} > 0$ 。

从这个例子应该特别注意到，正如傅里叶变换不是对所有信号都收敛一样，拉普拉斯变

换也可能对某些 $\Re\{s\}$ 值收敛，而对另一些 $\Re\{s\}$ 则不收敛。在(9.13)式中，该拉普拉斯变换仅对 $\sigma = \Re\{s\} > -a$ 收敛，如果 a 为正值，那么， $X(s)$ 就能在 $\sigma = 0$ 求值，而得到

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (9.15)$$

如(9.6)式所指出的，对于 $\sigma = 0$ ，拉普拉斯变换就等于傅里叶变换，这只要将(9.9)式和(9.15)式比较一下就能看出。如果 a 是负的或为零，拉普拉斯变换仍然存在，但傅里叶变换却不存在。

例 9.2 为了与例 9.1 相比较，现考虑第二个例子。信号 $x(t)$ 为

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \quad (9.16)$$

那么

$$\begin{aligned} X(s) &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-st} u(-t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt \end{aligned} \quad (9.17)$$

或者

$$X(s) = \frac{1}{s + a} \quad (9.18)$$

对这个例子，为保证收敛，则要求 $\Re\{s + a\} < 0$ ，或者 $\Re\{s\} < -a$ ，这就是说

$$-e^{-at}u(-t) \xrightarrow{s} \frac{1}{s + a}, \quad \Re\{s\} < -a \quad (9.19)$$

比较一下(9.14)式和(9.19)式可见，对例 9.1 和例 9.2 中的两个信号，它们的拉普拉斯变换代数表示式都是一样的；然而，这个代数表示式能成立的 s 域却是大不相同的。这就说明，在给出一个信号的拉普拉斯变换时，代数表示式和该表示式能成立的变量 s 值的范围都应该给出。一般把使积分(9.3)式收敛的 s 值的范围称为拉普拉斯变换的收敛域，特简记作 ROC。也就是说，ROC 是由这样一些 $s = \sigma + j\omega$ 组成的，对这些 s 来说， $x(t)e^{-at}$ 的傅里叶变换收敛。随着我们深入讨论拉普拉斯变换的性质，关于 ROC 将有更多的话要说。

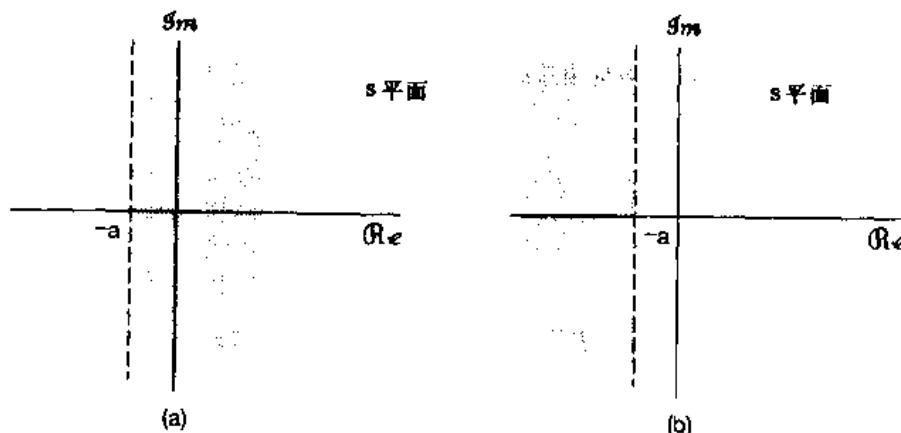


图 9.1 (a)例 9.1 的 ROC; (b)例 9.2 的 ROC

表示收敛域 ROC 的一个方便的办法是如图 9.1 所示。变量 s 是一个复数，在图 9.1 上展示出的复平面，一般就称为与这个复变量有关的 s 平面。沿水平轴是 $\Re\{s\}$ 轴，垂直轴是

$\Re\{s\}$ 轴，水平轴和垂直轴有时分别称为 σ 轴和 $j\omega$ 轴。图 9.1(a) 的阴影部分就是对应于例 9.1 的收敛域；而图 9.1(b) 的阴影部分指出了例 9.2 的收敛域。

例 9.3 本例考虑的信号是两个实指数信号的和，即

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \quad (9.20)$$

于是其拉普拉斯变换的代数表示式为

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} [3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)]e^{-st}dt \\ &= 3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}e^{-st}u(t)dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}e^{-st}u(t)dt \end{aligned} \quad (9.21)$$

(9.21) 式中的每个积分式都与(9.10)式的积分式具有相同的形式，这样就能利用例 9.1 的结果而得到

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} \quad (9.22)$$

为了确定它的 ROC，我们注意到，因为 $x(t)$ 是两个实指数信号的和，而由(9.21)式可知， $X(s)$ 是单独每一项的拉普拉斯变换之和。第一项是 $3e^{-2t}u(t)$ 的拉普拉斯变换，而第二项是 $-2e^{-t}u(t)$ 的拉普拉斯变换。由例 9.1 知道

$$\begin{aligned} e^{-t}u(t) &\xleftrightarrow{s} \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \\ e^{-2t}u(t) &\xleftrightarrow{s} \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2 \end{aligned}$$

于是，使这两项拉普拉斯变换都收敛的那些 $\Re\{s\}$ 值的集合就是 $\Re\{s\} > -1$ ，这样把(9.22)式右边这两项合起来，就得到

$$3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{s} \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.23)$$

例 9.4 本例要考虑实指数和复指数之和的信号为

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t) \quad (9.24)$$

利用欧拉关系，可写为

$$x(t) = \left[e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t} \right] u(t)$$

那么 $x(t)$ 的拉普拉斯变换就能表示成

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st}dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-3j)t}u(t)e^{-st}dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+3j)t}u(t)e^{-st}dt \end{aligned} \quad (9.25)$$

(9.25) 式中的每一个积分都代表了在例 9.1 中所遇到过的拉普拉斯变换，即

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{s} \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2 \quad (9.26)$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t) \xleftrightarrow{s} \frac{1}{s+(1-3j)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.27)$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \xleftrightarrow{s} \frac{1}{s+(1+3j)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.28)$$

为了使这三个拉普拉斯变换都同时收敛，必须有 $\Re\{s\} > -1$ ，因此， $x(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+(1-3j)} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+(1+3j)} \right), \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.29)$$

或者，合并为公共分母得

$$e^{-2t}u(t) + e^{-2t}(\cos 3t)u(t) \xleftrightarrow{s} \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.30)$$

以上 4 个例子的每一个，其拉普拉斯变换式都是有理的，也即都是复变量 s 的两个多项式之比，具有如下形式：

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (9.31)$$

其中 $N(s)$ 和 $D(s)$ 分别是分子多项式和分母多项式。正如在例 9.3 和例 9.4 中所见到的，只要 $x(t)$ 是实指数或复指数信号的线性组合， $X(s)$ 就一定是有理的。并且，在 9.7 节将会看到，当 LTI 系统是用线性常系数微分方程表征时，也会见到有理的变换。除去一个常数因子外，在一个有理拉普拉斯变换式中，分子与分母多项式都能够用它们的根来表示，据此，在 s 平面上标出 $N(s)$ 和 $D(s)$ 根的位置，并指出收敛域 ROC 就提供了一种描述拉普拉斯变换的方便而形象的表示。例如，如果用“ \times ”来表示(9.23)式中分母多项式每一个根的位置；用“ \circ ”来表示(9.23)式中分子多项式每一个根的位置，在图 9.2(a)中就展示了例 9.3 的拉普拉斯变换的 s 平面表示。图 9.2(b)则是例 9.4 的拉普拉斯变换式分子和分母多项式的根所对应的图。每一个例子的收敛域都在相应的图上用阴影区给出。

对于有理拉普拉斯变换来说，因为在分子多项式的那些根上 $X(s)=0$ ，故称为 $X(s)$ 的零点；而在分母多项式的那些根上， $X(s)$ 变成无界，故称分母多项式的根为 $X(s)$ 的极点。在有限 s 平面上， $X(s)$ 的零点和极点，除了一个常数因子外可以完全表征 $X(s)$ 的代数表示式。通

过在 s 平面上的极点和零点的 $X(s)$ 的表示就称为 $X(s)$ 的零极点图。然而，正如在例 9.1 和例 9.2 所看到的， $X(s)$ 的代数表示式本身并不能确认该拉普拉斯变换的 ROC。这也就是说，除了一个常数因子外，一个有理拉普拉斯变换的完全表征是由该变换的零极点图与它的 ROC

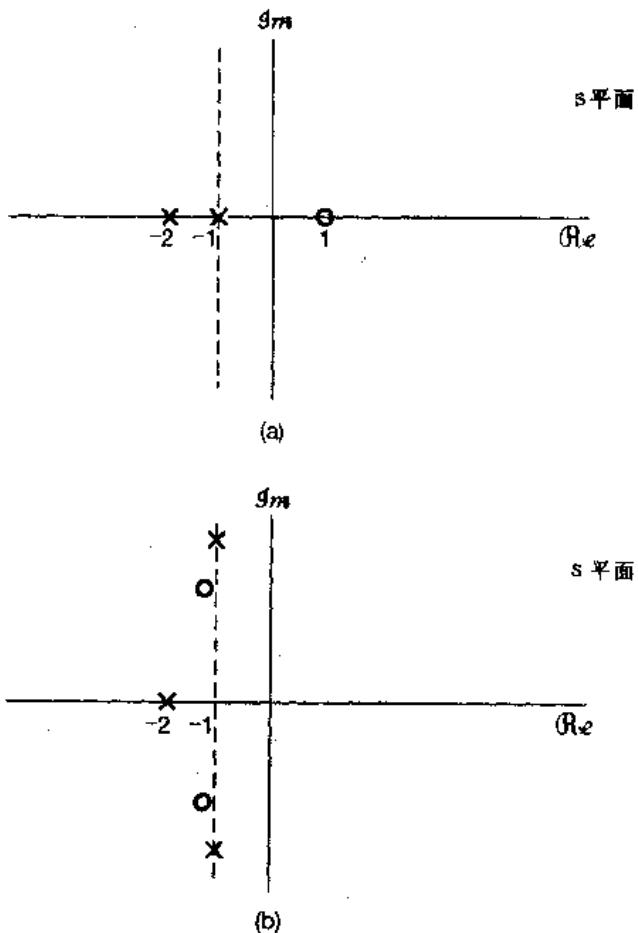


图 9.2 (a) 和 (b) 分别为例 9.3 和例 9.4 的拉普拉斯变换的 s 平面表示。图中每一个 \times 标出相应拉普拉斯变换的一个极点位置，也就是分母多项式一个根的位置。同理，每个 \circ 标出一个零点，即分子多项式一个根的位置。ROC 用阴影区指出

一起组成的(一般在 s 平面上, ROC 用阴影区表示, 如图 9.1 和图 9.2 所示)。

另外, 虽然不一定都需要给出一个有理变换 $X(s)$ 的代数表示式, 但是有时为了指明 $X(s)$ 在无限远点的极点或零点, 有了代数表示式倒是较为方便的。这就是, 如果分母多项式的阶次是高于分子多项式的阶次, 那么 $X(s)$ 将随 s 趋于无限大而变为零。相反, 若分子多项式的阶次是高于分母多项式的阶次, 那么 $X(s)$ 将随 s 趋于无限大而变成无界。这样一种特性就可以把它们看作在无限远处的零点或极点。例如, 在(9.23)式中的拉普拉斯变换其分母的阶为 2, 而分子的阶仅为 1, 所以在这个情况下, $X(s)$ 在无限远点有一个零点。同样, 在(9.30)式的拉普拉斯变换, 其分子的阶为 2, 而分母的阶是 3, 在无限远点也有一个零点。一般来说, 如果分母的阶次高出分子的阶次为 k 次, 则 $X(s)$ 一定在无限远点有 k 阶零点; 同理, 若分子的阶次超过分母的阶次为 k 次, $X(s)$ 在无限远点一定有 k 阶极点。

例 9.5 设信号 $x(t)$ 为

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t) \quad (9.32)$$

(9.32) 式中右边第二和第三项的拉普拉斯变换都可由例 9.1 求出, 而单位冲激函数的拉普拉斯变换可直接求出为

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \quad (9.33)$$

该结果对任何 s 值都成立。这就是说, $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$ 的 ROC 是整个 s 平面。利用这个结果。再与(9.32)式其余两项一起就得出

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2}, \quad \Re\{s\} > 2 \quad (9.34)$$

或者

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \Re\{s\} > 2 \quad (9.35)$$

式中这个 ROC 是对 $x(t)$ 的三项拉普拉斯变换都收敛的 s 值的集合。该例的零极点图及其 ROC 如图 9.3 所示。另外, 因为 $X(s)$ 的分子、分母同阶次, 所以 $X(s)$ 在无限远点既无极点, 也无零点。

在(9.6)式已经提到, 当 $s = j\omega$ 时, 拉普拉斯变换就是傅里叶变换。然而, 如果这个拉普拉斯变换的 ROC 不包括 $j\omega$ 轴 [即 $\Re\{s\} = 0$], 那么傅里叶变换就不收敛。正如从图 9.3 中所看到的, 事实上这就是例 9.5 的情况, 这是与在 $x(t)$ 中, $(1/3)e^{2t}u(t)$ 这一项没有傅里叶变换是一致的。同时, 从这个例子还看到, (9.35) 式中的两个零点出现在同一个 s 值上。一般都用零点或极点标记的重复次数来指出它们的阶数。在例 9.5 中有一个二阶零点在 $s = 1$, 和两个一阶极点分别在 $s = -1$ 和 $s = 2$ 。在这个例子中, ROC 位于最右边极点的右边。一般来说, 对于一个

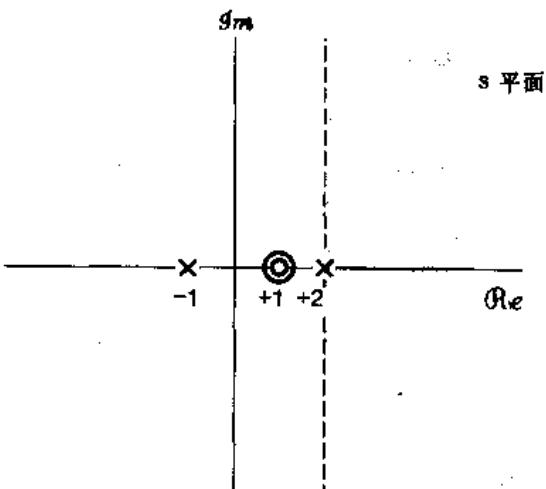


图 9.3 例 9.5 的零极点图和 ROC

有理拉普拉斯变换在极点位置和与一个给定的零极图有关的 ROC 之间存在一种紧密的关系，并且一些具体的限制都与 $x(t)$ 的时域性质密切有关。下一节将来说明这些限制和有关的性质。

9.2 拉普拉斯变换收敛域

从前面的讨论已经看到，拉普拉斯变换的全部特性不仅要求 $X(s)$ 的代数表示式，而且还应该伴随着收敛域的说明。这一点在例 9.1 和例 9.2 中体现得最为明显：两个很不相同的信号能够有完全相同的 $X(s)$ 代数表示式，因此它们的拉普拉斯变换只有靠收敛域才能区分。这一节将说明对各种信号在 ROC 上的某些具体限制。将会看到，理解了这些限制往往使我们仅仅从 $X(s)$ 的代数表示式和 $x(t)$ 在时域中某些一般特征就能明确地给出或构成收敛域 ROC。

性质 1： $X(s)$ 的 ROC 在 s 平面上由平行于 $j\omega$ 轴的带状区域所组成。

这一性质来自于这样一个事实： $X(s)$ 的 ROC 是由这样一些 $s = \sigma + j\omega$ 所组成，在那里 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换收敛，也就是说， $x(t)$ 的拉普拉斯变换的 ROC 是由这样一些 s 值组成的，对于这些 s 值， $x(t)e^{-\sigma t}$ 是绝对可积的^①，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (9.36)$$

因为这个条件只与 σ ，即 s 的实部有关，所以就得到性质 1。

性质 2：对有理拉普拉斯变换来说，ROC 内不包括任何极点。

这个性质，在到目前为止所研究的例子中都能很容易地看出。因为，在一个极点处， $X(s)$ 为无限大，(9.3) 式的积分显然在极点处不收敛，所以 ROC 内不能包括属于极点的 s 值。

性质 3：如果 $x(t)$ 是有限持续期，并且是绝对可积的，那么 ROC 就是整个 s 平面。

这个结果背后的直观性由图 9.4 和图 9.5 可以想到。这就是，一个有限持续期的信号具有这个性质，它在某一有限区间之外都是零，如图 9.4 所示。在图 9.5(a) 中画出了图 9.4 这样的 $x(t)$ 乘以一个衰减的指数函数，而在图 9.5(b) 则画出同一类型的信号乘以一个增长的

^① 对拉普拉斯变换及其数学性质的更完整和正规的讨论，其中包括收敛性，可参阅 E.D.Rainville, *The Laplace Transform: An Introduction* (New York: Macmillan, 1963) 和 R.V.Churchill and J.W.Brown, *Complex variables and applications* (5th ed.) (New York: McGraw-Hill, 1990)。注意，绝对可积条件就是在 4.1 节讨论傅里叶变换收敛时的狄里赫利条件之一。

指数函数。因为， $x(t)$ 为非零的区间是有限长的，所以指数加权永远不会无界，这样 $x(t)$ 的可积性不会由于这个指数加权而破坏就是合情合理的了。

性质 3 一个更加正规的证明如下：假设 $x(t)$ 是绝对可积的，所以有

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < \infty \quad (9.37)$$

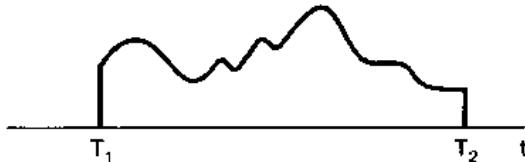


图 9.4 有限持续期信号

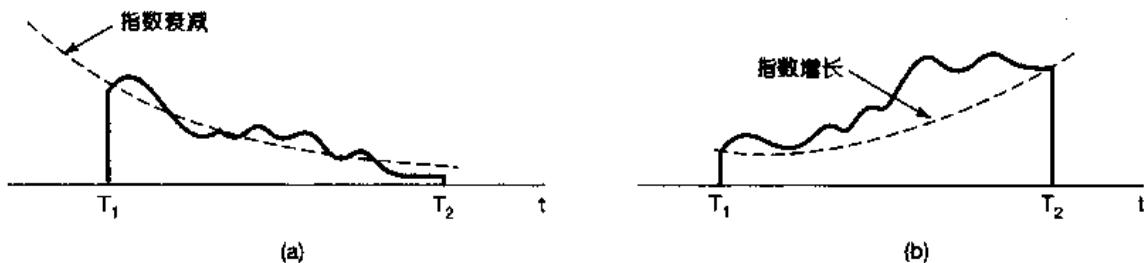


图 9.5 (a)有限持续期信号乘以衰减指数；(b)有限持续期信号乘以增长指数

对于在 ROC 内的 $s = \sigma + j\omega$ ，就要求 $x(t)e^{-\sigma t}$ 是绝对可积的，即

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (9.38)$$

(9.37)式表明当 $\Re\{s\} = \sigma = 0$ 时的 s 是在 ROC 内。对于 $\sigma > 0$ ， $e^{-\sigma t}$ 在 $x(t)$ 为非零的区间内的最大值是 $e^{-\sigma T_1}$ ，因此可以写成

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt \quad (9.39)$$

因为(9.39)式的右边是有界的，所以左边也就是有界的；因此对于 $\Re\{s\} > 0$ 的 s 平面必须也在 ROC 内。依类似的证明方法，若 $\sigma < 0$ ，那么

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt \quad (9.40)$$

$x(t)e^{-\sigma t}$ 也是绝对可积的。因此，ROC 包括整个 s 平面。

例 9.6 设 $x(t)$ 为

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases} \quad (9.41)$$

那么其傅里叶变换 $X(s)$

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}] \quad (9.42)$$

在这个例子中，因为 $x(t)$ 是有限长的，由性质 3，其 ROC 就是整个 s 平面。在(9.42)式中，形式上好像 $X(s)$ 有一个极点在 $s = -a$ ，而这个根据性质 3 与 ROC 由整个 s 平面所组成是不一致的。然而，事实上(9.42)式的代数表示式中在 $s = -a$ 都是分子和分母的零点！为了确定 $s = -a$ 处的 $X(s)$ 值，可以应用罗比塔法则而得

$$\lim_{s \rightarrow -a} X(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \left[\frac{\frac{d}{ds}(1 - e^{-(s+a)T})}{\frac{d}{ds}(s+a)} \right] = \lim_{s \rightarrow -a} T e^{-aT} e^{-sT}$$

所以

$$X(-a) = T \quad (9.43)$$

认识到在 $x(t)$ 为非零的区间上保证指型权函数是有界的这一点很重要，上面的讨论主要的就是依据这一事实： $x(t)$ 是有限持续期的。下面两个性质要讨论有关这一结果的一种变形，即 $x(t)$ 具有的有限范围仅仅在正时间或负时间方向上。

性质 4：如果 $x(t)$ 是右边信号，而且如果 $\Re\{s\} = \sigma_0$ 这条线位于 ROC 内，那么 $\Re\{s\} > \sigma_0$ 的全部 s 值都一定在 ROC 内。

若在某有限时间 T_1 之前， $x(t) = 0$ ，则称该信号为右边信号，如图 9.6 所示。对于这样一个信号，有可能不存在任何 s 值，使其拉普拉斯变换收敛。一个例子就是 $x(t) = e^{t^2} u(t)$ 。然而，假如拉普拉斯变换对某一 σ 值收敛，譬如说 σ_0 ，那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (9.44)$$

或者，因为 $x(t)$ 是右边信号，可等效为

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (9.45)$$

如果 $\sigma_1 > \sigma_0$ ，由于随 $t \rightarrow +\infty$, $e^{-\sigma_1 t}$ 衰减得比 $e^{-\sigma_0 t}$ 快，如图 9.7 所示，那么 $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 也就一定绝对可积。正规一些，可以说，由于 $\sigma_1 > \sigma_0$ ，而有

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt &= \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \end{aligned} \quad (9.46)$$

因为 T_1 是有限值，根据(9.45)式，在(9.46)式不等式的右边就是有限的，所以 $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 就是绝对可积的。

应该注意到，在以上的证明中明显地是依赖于这一事实： $x(t)$ 是右边信号。因而即使 $\sigma_1 > \sigma_0$ ，随着 $t \rightarrow -\infty$, $e^{-\sigma_1 t}$ 发散快于 $e^{-\sigma_0 t}$ ，但是由于 $t < T_1$ 时， $x(t) = 0$ ， $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 在负的时间轴方向也不能无界地增长。同时，在这种情况下，如果有某一点 s 是在 ROC 内，那么所有位于这个 s 点右边的点，也就是所有具有更大实部的点，都在 ROC

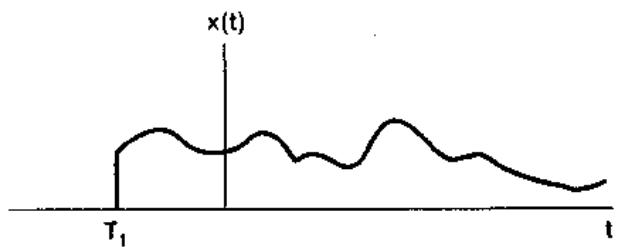


图 9.6 右边信号

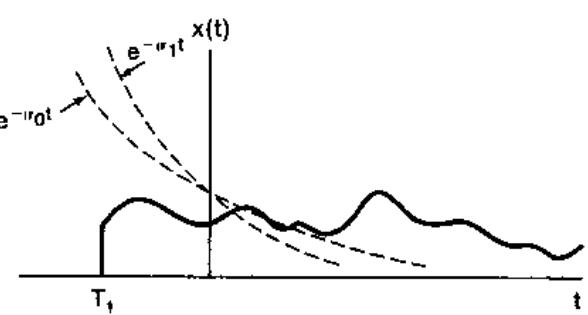


图 9.7 若 $x(t)$ 是右边信号，而 $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 是绝对可积的，那么 $x(t)e^{-\sigma_1 t}$, $\sigma_1 > \sigma_0$ 也一定绝对可积

内。为此，这时一般就说 ROC 是在右半平面。

性质 5：如果 $x(t)$ 是左边信号，而且如果 $\Re\{s\} = \sigma_0$ 这条线位于 ROC 内，那么 $\Re\{s\} < \sigma_0$ 的全部 s 值也一定在 ROC 内。

若在某一有限时间 T_2 以后， $x(t) = 0$ ，则称该信号为左边信号，如图 9.8 所示。这个性质的证明和直观性完全和性质 4 所做的相类似。同时，对于一个左边信号，如果有某一点 s 是在 ROC 内，那么所有位于这个 s 点左边的点也都在 ROC 内。因此一般就说 ROC 是在左半平面。

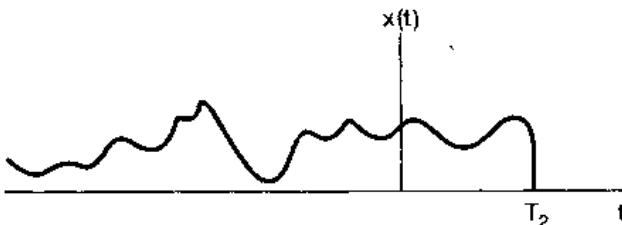


图 9.8 左边信号

性质 6：如果 $x(t)$ 是双边信号，而且如果 $\Re\{s\} = \sigma_0$ 这条线位于 ROC 内，那么 ROC 就一定是由 s 平面的一条带状区域所组成，直线 $\Re\{s\} = \sigma_0$ 位于带中。

一个双边信号就是对 $t > 0$ 和 $t < 0$ 都具有无限范围的信号，如果 9.9(a) 所示。对于这样一个信号，其收敛域 ROC 可以这样来求出：选取任一时间 T_0 ，然后将 $x(t)$ 分成右边信号

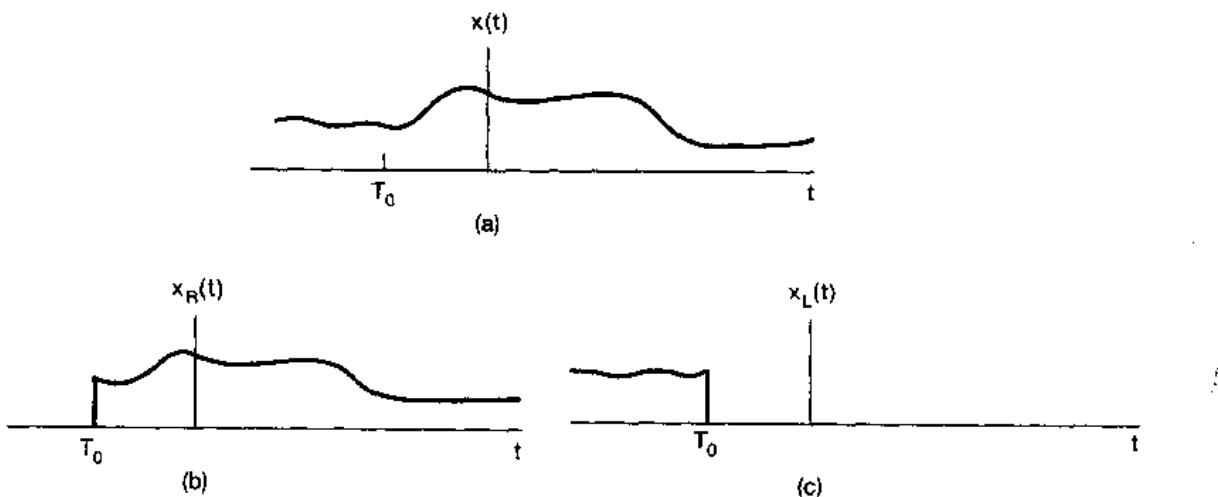


图 9.9 双边信号分成右边信号和左边信号之和：

- (a) 双边信号 $x(t)$ ；(b) $t < T_0$ 等于零，而 $t > T_0$ 等于 $x(t)$ 的右边信号；
- (c) $t > T_0$ 等于零，而 $t < T_0$ 等于 $x(t)$ 的左边信号

$x_R(t)$ 和左边信号 $x_L(t)$ 之和，如图 9.9(b) 和(c) 所示。 $x(t)$ 拉普拉斯变换的收敛域就是能使 $x_R(t)$ 和 $x_L(t)$ 两者的拉普拉斯变换都收敛的区域。根据性质 4， $\mathcal{L}\{x_R(t)\}$ 的收敛域 ROC 对某 σ_R 值，由 $\Re\{s\} > \sigma_R$ 的半平面组成；而根据性质 5， $\mathcal{L}\{x_L(t)\}$ 的 ROC 对某 σ_L 值，由 $\Re\{s\} < \sigma_L$

$\sigma < \sigma_L$ 的半平面组成。 $\mathcal{L}\{x(t)\}$ 的 ROC 就是这两个半平面的重叠部分，如图 9.10 所示。当然，这是假设 $\sigma_R < \sigma_L$ ，因而这两半平面有某些重合。如果不是这种情况，那么即使 $x_R(t)$ 和 $x_L(t)$ 的拉普拉斯变换存在， $x(t)$ 的拉普拉斯变换也不存在。

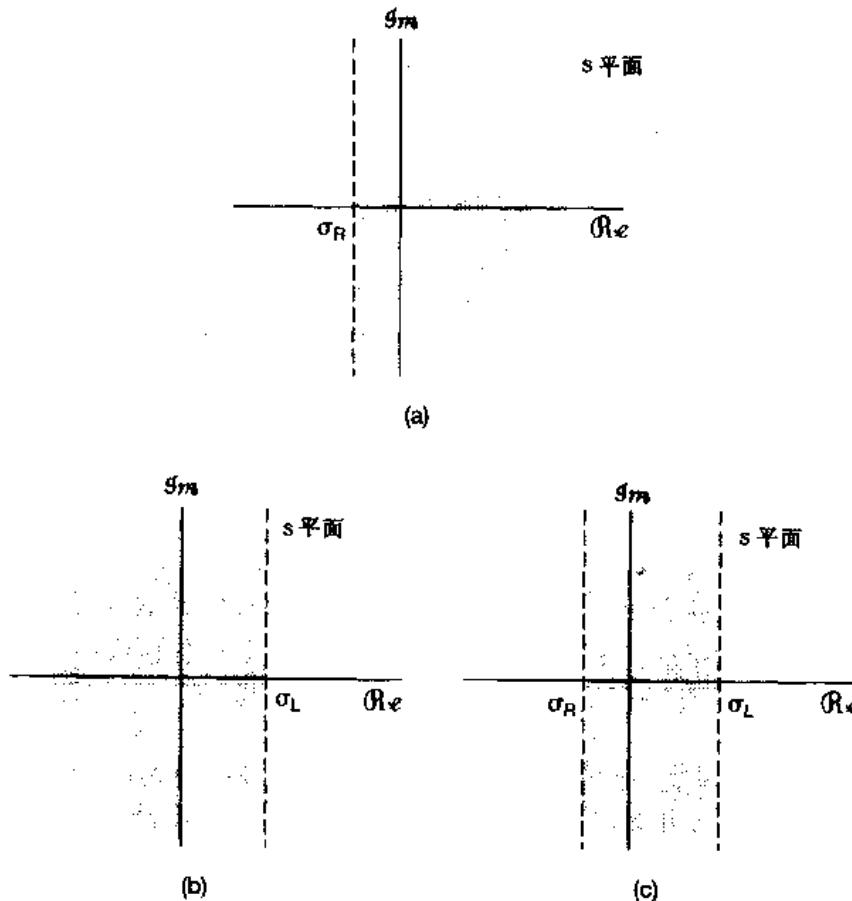


图 9.10 (a) 图 9.9 中 $x_R(t)$ 的 ROC; (b) 图 9.9 中 $x_L(t)$ 的 ROC;
(c) $x(t) = x_R(t) + x_L(t)$ 的 ROC, 这里假定(a)和(b)中的 ROC 有重叠

例 9.7 设 $x(t)$ 为

$$x(t) = e^{-bt} u(t) \quad (9.47)$$

对于 $b > 0$ 和 $b < 0$ 均如图 9.11 所示。因为这是一个双边信号，可将它分为右边信号和左边信号之和，即

$$x(t) = e^{-bt} u(t) + e^{+bt} u(-t) \quad (9.48)$$

由例 9.1 有

$$e^{-bt} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, \quad \Re\{s\} > -b \quad (9.49)$$

由例 9.2 有

$$e^{+bt} u(-t) \leftrightarrow \frac{-1}{s-b}, \quad \Re\{s\} < +b \quad (9.50)$$

虽然，(9.48)式中每一单独项的拉普拉斯变换都有一个收敛域，但如果 $b \leq 0$ ，就没有公共的收敛域，

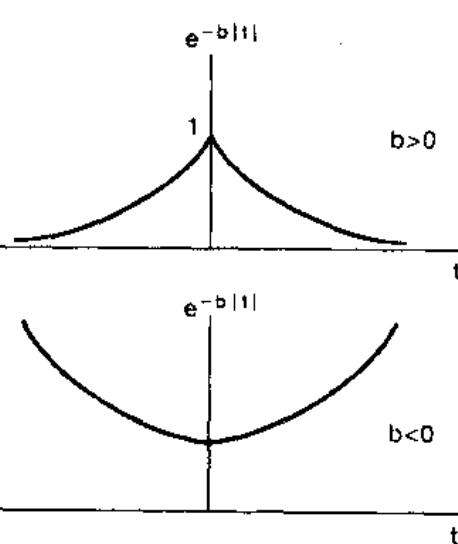


图 9.11 $b > 0$ 和 $b < 0$ 时的信号 $x(t) = e^{-bt} u(t)$

于是对这样一些 b 值, $x(t)$ 就没有拉普拉斯变换。如果 $b > 0$, $x(t)$ 的拉普拉斯变换是

$$e^{-bt} \leftrightarrow \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2 - b^2}, \quad -b < \Re\{s\} < +b \quad (9.51)$$

相应的零极点图如图 9.12 所示, 阴影区所指为 ROC。

一个信号要么没有拉普拉斯变换, 否则就一定属于由性质 3 到性质 6 这 4 类情况中的某一种。于是对具有某一拉普拉斯变换的信号而言, ROC 一定是整个 s 平面(有限长信号)、某一左半平面(左边信号)、某一右半平面(右边信号)、或者一条带状收敛域(双边信号)等这 4 种中的一种。在所有已经讨论过的例题中, 收敛域 ROC 都有一个另外的性质, 即: 收敛域在每一个方向上(也就是 $\Re\{s\}$ 增加和 $\Re\{s\}$ 减小)都是被极点所界定, 或者延伸到无限远。事实上, 对有理拉普拉斯变换来说, 这总是成立的:

性质 7: 如果 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 是有理的, 那么它的 ROC 是被极点所界定或延伸到无限远。另外, 在 ROC 内不包含 $X(s)$ 的任何极点。

对于这一性质的正规证明有些繁琐, 但它基本上是由于如下事实的一个结果: 一个具有有理拉普拉斯变换的信号均由指数信号的线性组合所构成, 并且根据例 9.1 和例 9.2, 在该线性组合中, 每一项变换的 ROC 一定有这一性质。作为性质 7 的一个结果, 再与性质 4 和性质 5 结合在一起就有

性质 8: 如果 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 是有理的, 若 $x(t)$ 是右边信号, 则其 ROC 在 s 平面上位于最右边极点的右边; 若 $x(t)$ 是左边信号, 则其 ROC 在 s 平面上位于最左边极点的左边。

为了说明不同的 ROC 如何与相同的零极点图相联系, 考虑下面这个例子。

例 9.8 设有一拉普拉斯变换代数表示式为

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (9.52)$$

其零极点图如图 9.13(a)所示。正如在图 9.13(b)~(d)所指出的, 能与这个代数表示式有关的存在着三种可能的 ROC, 对应着三种不同的信号。与图 9.13(b)零极点图有关的是右边信号。因为 ROC 包括 $j\omega$ 轴, 所以该信号的傅里叶变换收敛。图 9.13(c)对应于一个左边信号, 而图 9.13(d)则对应一个双边信号。后面这两个信号当中没有一个有傅里叶变换, 因为它们的 ROC 都不包括 $j\omega$ 轴。

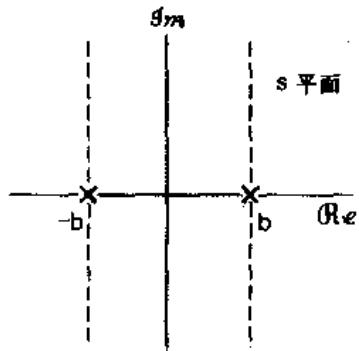


图 9.12 例 9.7 的零极点图
及其 ROC

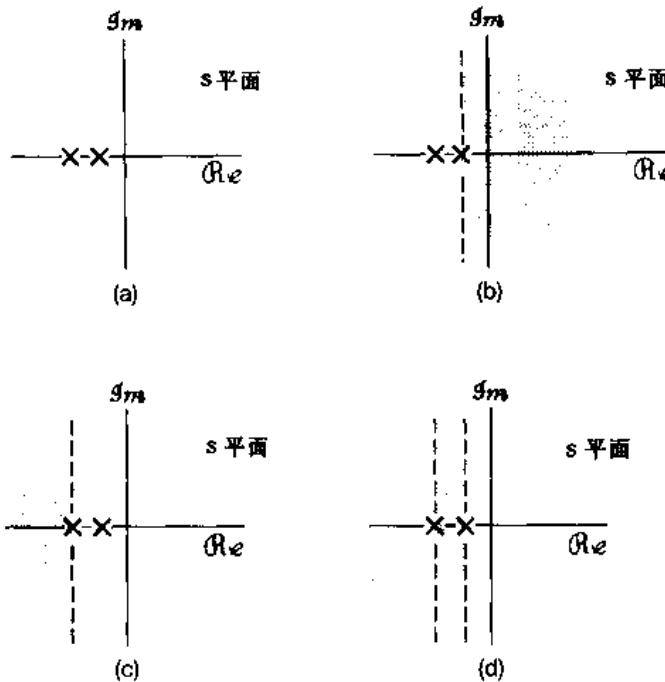


图 9.13 (a)例 9.8 的零极点图; (b)对应于右边信号的 ROC;
(c)对应于左边信号的 ROC; (d)对应于双边信号的 ROC

9.3 拉普拉斯反变换

在 9.1 节讨论了把一个信号的拉普拉斯变换看作是该信号经指数加权后的傅里叶变换;也就是说,将 s 表示成 $s = \sigma + j\omega$, 一个信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换是

$$X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt \quad (9.53)$$

式中的 $s = \sigma + j\omega$ 是在 ROC 中。可以利用(4.9)式的傅里叶反变换关系对(9.53)式求反变换为

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (9.54)$$

或者将两边各乘以 $e^{\sigma t}$, 可得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega \quad (9.55)$$

这就是说, 可以这样从拉普拉斯变换中来恢复 $x(t)$: 在 ROC 内, 将 σ 固定不变, 在 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化的这一组 $s = \sigma + j\omega$ 值上按(9.55)式求值。若将变量在(9.55)式中从 ω 改变为 s , 并利用 σ 是常数这一点, 可以将该式的意义更为突出, 并从 $X(s)$ 恢复 $x(t)$ 中获得更深刻的认识。因为 σ 为常数, 所以 $ds = jd\omega$, 可得拉普拉斯反变换的基本关系式为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

(9.56)

该式说明, $x(t)$ 可以用一个复指数信号的加权积分来表示。(9.56)式的积分路径是在 s 平面内对应于满足 $\Re\{s\} = \sigma$ 的全部 s 点的这条直线, 该直线平行于 $j\omega$ 轴。再者, 在 ROC 内可以

选取任何这样一根直线；也就是说，在 ROC 内可以选取任何 σ 值，而使 $X(\sigma + j\omega)$ 收敛。对于一般的 $X(s)$ 来说，这个积分的求值要求利用复平面的围线积分，在此不作讨论。然而，对于有理变换，求其拉普拉斯反变换用不着直接计算(9.56)式，而可以像在第 4 章求傅里叶反变换所做的那样，采用部分分式展开的办法来求。这一过程基本上就是把一个有理的代数表示式展开成低阶次项的线性组合。

例如，假设没有重阶极点，并假设分母多项式的阶高于分子多项式的阶，那么 $X(s)$ 就可以展开为如下形式：

$$X(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + a_i} \quad (9.57)$$

根据 $X(s)$ 的收敛域 ROC，在该式中每一项的 ROC 都能推演出来，然后由例 9.1 和例 9.2，每一项的拉普拉斯反变换都可被确定。在(9.57)式中每一项 $A_i/(s + a_i)$ 的反变换都有两种可能的选择，若 ROC 是位于极点 $s = -a_i$ 的右边，那么这一项的反变换就是 $A_i e^{-a_i t} u(t)$ ，是一个右边信号；若 ROC 是位于极点 $s = -a_i$ 的左边，那么这一项的反变换就是 $-A_i e^{-a_i t} u(-t)$ ，是一个左边信号。将(9.57)式中每一项的反变换相加，就得到 $X(s)$ 的反变换。详细过程最好通过几个例子来给出。

例 9.9 设有 $X(s)$ 为

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \Re\{s\} > -1 \quad (9.58)$$

为了求它的反变换，先对它进行部分分式展开为

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \end{aligned} \quad (9.59)$$

根据附录介绍的办法，将(9.59)式两边各乘以 $(s+1)(s+2)$ 。然后令两边同 s 方次的系数相等，可求出系数 A 和 B 。另一种方法是利用下列关系：

$$A = [(s+1)X(s)]|_{s=-1} = 1 \quad (9.60)$$

$$B = [(s+2)X(s)]|_{s=-2} = -1 \quad (9.61)$$

由此， $X(s)$ 的部分分式展开式为

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad (9.62)$$

由例 9.1 和例 9.2 可知，根据 ROC 是位于极点的左边还是右边，对于 $1/(s+a)$ 都有两种可能的反变换，因此就需要确定与(9.62)式中每个一次项有关的 ROC。这个可

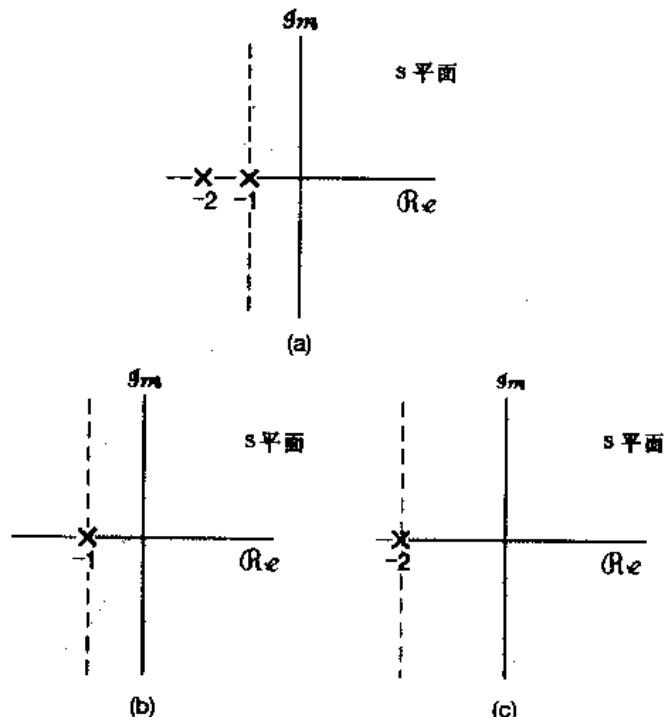


图 9.14 例 9.8 $X(s)$ 的部分分式展开式中每一项 ROC 的构成：

- (a) $X(s)$ 的零极图和 ROC；
- (b) 在 $s = -1$ 的极点及其 ROC；
- (c) 在 $s = -2$ 的极点及其 ROC

以参照 9.2 节所建立的 ROC 性质来完成。因为 $X(s)$ 的 ROC 是 $\Re\{s\} > -1$, 那么(9.62)式中的每一项的 ROC 都应包括 $\Re\{s\} > -1$ 。然后, 对于每一项来说, 其 ROC 就可以向左或向右(或向两边)延伸, 直到被一个极点所界定或至无限远为止, 这就如图 9.14 所示。图 9.14(a)是由(9.58)式给出的 $X(s)$ 的零极点图和 ROC, 而图 9.14(b)和(c)就是(9.62)式中每一项的零极点图及其 ROC。总的 ROC 在图中用阴影区表示。由图 9.14(c)所代表的这一项, 其 ROC 还可以向左延伸如图示, 直至被一个极点所界定。

因为 ROC 是位于这两个极点的右边, 所以如同在图 9.14(b)和(c)中所看到的, 这两个单独项中的每一项的 ROC 也就应在各自极点的右边, 结果根据前一节的性质 8 可知, 它们都对应于右边信号。由例 9.1, (9.62)式中每一项的反变换就是

$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.63)$$

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2 \quad (9.64)$$

由此可得

$$[e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.65)$$

例 9.10 现在假设 $X(s)$ 的代数表示式仍由(9.58)式给出, 但 ROC 是在 $\Re\{s\} < -2$ 的左半平面。 $X(s)$ 的部分分式展开仅与它的代数表示式有关, 所以(9.62)式仍然不变。然而, 由于这个新的 ROC 是位于两个极点的左边, 所以(9.62)式中每一项的 ROC 也都必须位于极点的左边。这就是说, 对应于极点 $s = -1$ 这一项的 ROC 是 $\Re\{s\} < -1$; 而对应于极点 $s = -2$ 这一项的 ROC 是 $\Re\{s\} < -2$ 。那么, 根据例 9.2 就有

$$-e^{-t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} < -1 \quad (9.66)$$

$$-e^{-2t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} < -2 \quad (9.67)$$

所以有

$$x(t) = [-e^{-t} + e^{-2t}]u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \Re\{s\} < -2 \quad (9.68)$$

例 9.11 最后, 假设(9.58)式的 $X(s)$, 其 ROC 是 $-2 < \Re\{s\} < -1$, 这时的 ROC 是在 $s = -1$ 极点的左边, 所以对应于这一项的就是如(9.66)式的左边信号; 而 ROC 是在 $s = -2$ 极点的右边, 所以这一项就对应于(9.64)式的右边信号。将两者合在一起求得

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad -2 < \Re\{s\} < -1 \quad (9.69)$$

正如在附录中所讨论的, 当 $X(s)$ 有重阶极点, 或者分母的阶不是高于分子的阶时, 部分分式展开式中除了在例 9.9 到例 9.11 中考虑的一次项外, 还应包括其它的项。到 9.5 节, 当讨论完拉普拉斯变换的性质以后, 还将讨论其它一些拉普拉斯变换对, 连同拉普拉斯变换的性质一起, 就能够将例 9.9 所给出的求反变换的方法推广到任意有理变换中去。

9.4 由零极点图对傅里叶变换进行几何求值

在 9.1 节已经看到, 一个信号的傅里叶变换就是拉普拉斯变换在 $j\omega$ 轴上的求值。这一节

将讨论由与一个有理拉普拉斯变换有关的零极点图来求傅里叶变换的一种求值方法，并且更一般地说，求拉普拉斯在任意 s 点上的值的几何求值法。为了建立这一方法，首先考虑只有一个单个零点的拉普拉斯变换[即， $X(s) = (s - a)$]在某一给定的 s ，如 $s = s_1$ 处求值。这个代数表示式 $s_1 - a$ 是两个复数的和，一个是 s_1 ，另一个是 $-a$ ；它们中的每一个都能在复平面内用一个向量来表示，如图 9.15 所示。然后，代表这个复数 $(s_1 - a)$ 的向量就是向量 s_1 和 $-a$ 之和；在图 9.15 中可以看出，这个向量就是从 $s = a$ 这个零点到点 s_1 的向量 $s_1 - a$ 。这样， $X(s_1)$ 的模就是这个向量的长度，而相位就是这个向量对于实轴的角度。如果 $X(s)$ 在 $s = a$ 是一个极点[即： $X(s) = 1/(s - a)$]，那么 $X(s)$ 的分母就是上面讨论的同一向量，这时 $X(s_1)$ 的模是该向量(从极点 $s = a$ 到 $s = s_1$ 点)长度的倒数，而相位则是该向量相对于实轴角度的负值。

一个更一般的有理拉普拉斯变换是由上述讨论的零点和极点项的乘积所组成，也就是说，一个有理的拉普拉斯变换可以因式分解成

$$X(s) = M \frac{\prod_{i=1}^R (s - \beta_i)}{\prod_{j=1}^P (s - \alpha_j)} \quad (9.70)$$

为了求取 $X(s)$ 在 $s = s_1$ 的值，乘积中的每一项都可用一个从零点或极点到 s_1 点的向量来表示。那么， $X(s_1)$ 的模就是各零点向量(从各个零点到 s_1 的向量)长度乘积的 M 倍被各极点向量(从各个极点到 s_1 的向量)长度的积相除，而复数 $X(s_1)$ 的相角则是这些零点向量相角的和减去这些极点向量相角的和。如果在(9.70)式中比例因子 M 是负的，则对应有一个附加相角 π 。如果 $X(s)$ 有多阶极点或零点(或均有)，即相应于某些 α_i 或/和 β_i 是相等的，那么这些多阶极点或零点向量的长度和相角在 $X(s_1)$ 中都应包括相应的倍数(等于极点或零点的阶)。

例 9.12 有一 $X(s)$ 为

$$X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}, \quad \Re\{s\} > -\frac{1}{2} \quad (9.71)$$

$X(s)|_{s=j\omega}$ 就是傅里叶变换，故该例的傅里叶变换就是

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{2}} \quad (9.72)$$

$X(s)$ 的零极点图如图 9.16 所示。为了用几何法确定傅里叶变换，在图中构造了一个极点向量。傅里叶变换在频率 ω 处的模，就是从极点到虚轴上 $j\omega$ 点向量长度的倒数，而傅里叶变换的相位就是该向量相角的负值。由图 9.16，从几何上可写出

$$|X(j\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + (1/2)^2} \quad (9.73)$$

和

$$\angle X(j\omega) = -\tan^{-1} 2\omega \quad (9.74)$$

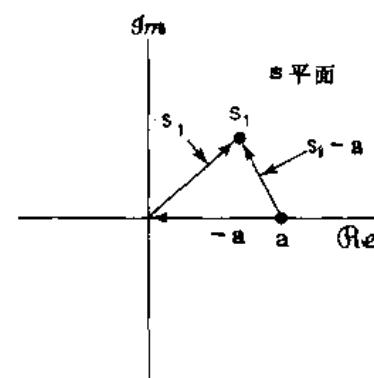


图 9.15 分别代表复数 s_1 ，
 $-a$ 和 $(s_1 - a)$ 的
向量 s_1 ， $-a$ 和 $s_1 - a$ 的复平面表示

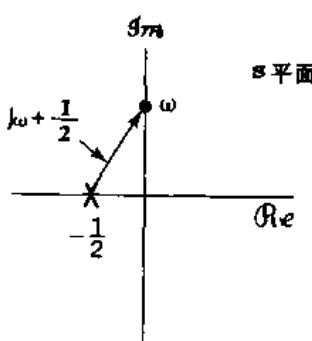


图 9.16 例 9.12 的零极点图。 $|X(j\omega)|$ 就是图示向量长度的倒数， $\angle X(j\omega)$ 是向量相角的负值

傅里叶变换几何确定的值往往在于用它来近似观察整体特性。例如，在图 9.16 中很快能看出，极点向量的长度随 ω 的增加而单调增加，因此傅里叶变换的模将随 ω 的增加而单调下降。由零极点图对傅里叶变换特性作出一般性结论的能力将考虑用一阶和二阶系统作为例子给予进一步的说明。

9.4.1 一阶系统

作为例 9.12 的一般化，现在来考虑曾在 6.5.1 节较详细讨论过的一阶系统。这类系统的单位冲激响应是

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \quad (9.75)$$

它的拉普拉斯变换就是

$$H(s) = \frac{1}{s\tau + 1}, \quad \Re\{s\} > -\frac{1}{\tau} \quad (9.76)$$

其零极点图如图 9.17 所示。从该图可以看到，极点向量的长度在 $\omega=0$ 最短，并随 ω ^① 增加而单调增加；同时，极点向量的相角随 ω 从 0 增加到 ∞ 而单调地从 0 增加到 $\pi/2$ 。

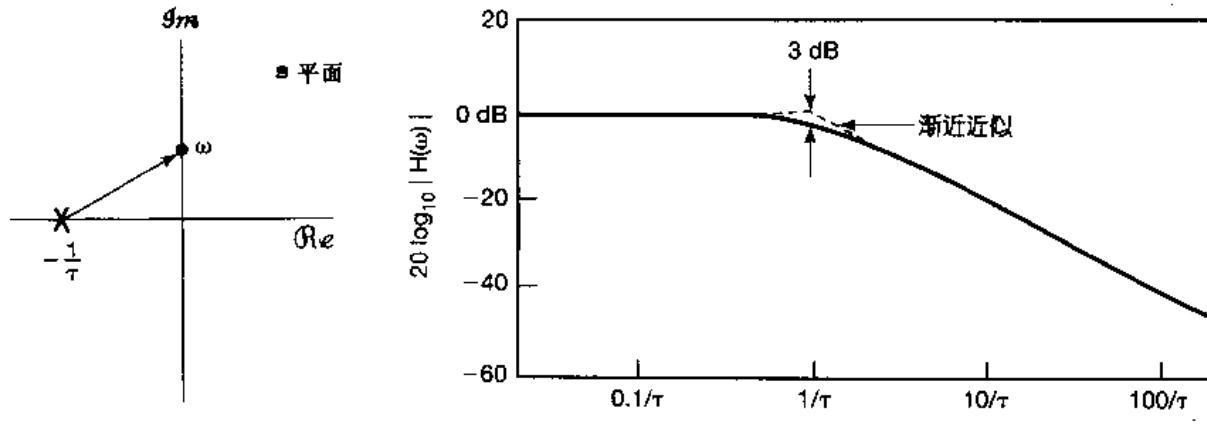


图 9.17 (9.76) 式一阶系统的零极点图

从极点向量随 ω 变化的规律来看，很明显其频率响应 $H(j\omega)$ 的模随 ω 增加而单调下降，而 $\angle H(j\omega)$ 则单调地从 0 下降到 $-\pi/2$ ，如图 9.18 该系统的波特图所示。同时也注意到，当 $\omega = 1/\tau$ 时，极点向量的实部和虚部相等，从而频率响应的模从它在 $\omega=0$ 时的最大值下降了

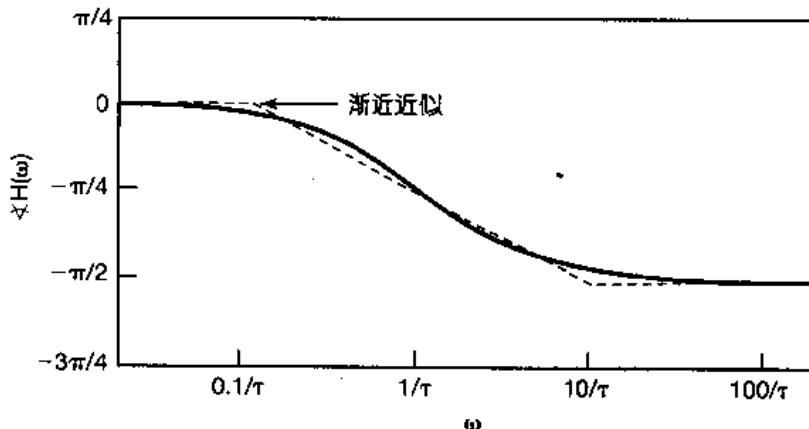


图 9.18 一阶系统的频率响应

① 原文为 ω_1 ，有误——译者注。

$1/\sqrt{2}$, 或近似下降 3dB; 而此时频率响应的相位是 $\pi/4$ 值。这是与 6.5.1 节讨论一阶系统所得结论相一致的，在那里就将 $\omega = 1/\tau$ 称之为 3dB 点或折转频率，也就是 $|H(j\omega)|$ 波特图的直线近似在斜率上有一个转折处的频率。在 6.5.1 节也看到，时间常数 τ 控制了一阶系统的响应速度，而现在看到，这样一个系统在 $s = -1/\tau$ 的极点是在负的实轴上，它到原点的距离就是该时间常数的倒数。

从图形的说明上也能看到，时间常数，或者等效地说 $H(s)$ 极点位置的变化是如何改变一阶系统的特性的。特别是，极点愈朝左半面移，系统的折转频率，或有效截止频率就增加；同时，由(9.75)式和图 6.19 都可看到，极点向左移动对应于时间常数的减小，结果单位冲激响应就衰减得更快，而阶跃响应则有一个更快的上升时间。极点位置的实部和系统响应速度之间的这一关系一般总是成立的，即远离 $j\omega$ 轴的那些极点，总是对应于单位冲激响应中那些快速响应项。

9.4.2 二阶系统

下面来讨论二阶系统，该系统也曾在 6.5.2 节较为详细地讨论过。对于这类系统的单位冲激响应和频率响应原先分别由(6.37)式和(6.33)式给出为

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t) \quad (9.77)$$

式中

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

以及

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (9.78)$$

单位冲激响应的拉普拉斯变换是

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - c_1)(s - c_2)} \quad (9.79)$$

若 $\zeta > 1$, c_1 和 c_2 都是实数，因此两个极点都位于实轴上，如图 9.19(a) 所示。 $\zeta > 1$ 的情况实质上就是如在 9.4.1 节讨论的两个一次项的乘积。因此在这种情况下， $|H(j\omega)|$ 随着 $|\omega|$ 的增加而单调下降，而 $\angle H(j\omega)$ 则由 $\omega = 0$ 时为 0 变到 $\omega \rightarrow \infty$ 时的一 π 。这点可从图 9.19(a) 得到证实，因为这两个极点中的每一个到点 $j\omega$ 的向量长度都随 ω 的增加而单调增加，而每个极点向量的相角则随 ω 从 0 到 ∞ 的增加相应地从 0 增加到 $\pi/2$ 。同时也注意到，随着 ζ 的增加，一个极点移向 $j\omega$ 轴（这就是在单位冲激响应中反映衰减较慢的一项）；而另一个极点则愈向左半面移（这就是在单位冲激响应中反映衰减较快的一项）。于是，在大的 ζ 值下，正是紧靠 $j\omega$ 轴的这一极点支配着系统的响应。同样，从图 9.19(b) 所示的在 $\zeta \gg 1$ 下的极点向量来考虑，在低的频率部分，紧靠 $j\omega$ 轴的极点向量的长度和相角随 ω 的变化，比远离 $j\omega$ 轴的极点向量要灵敏得多，所以在低频区域，频率响应特性主要地受紧靠 $j\omega$ 轴极点的影响。

若 $0 < \zeta < 1$, c_1 和 c_2 都是复数，所以零极点图如图 9.19(c) 所示。相应地，单位冲激响应

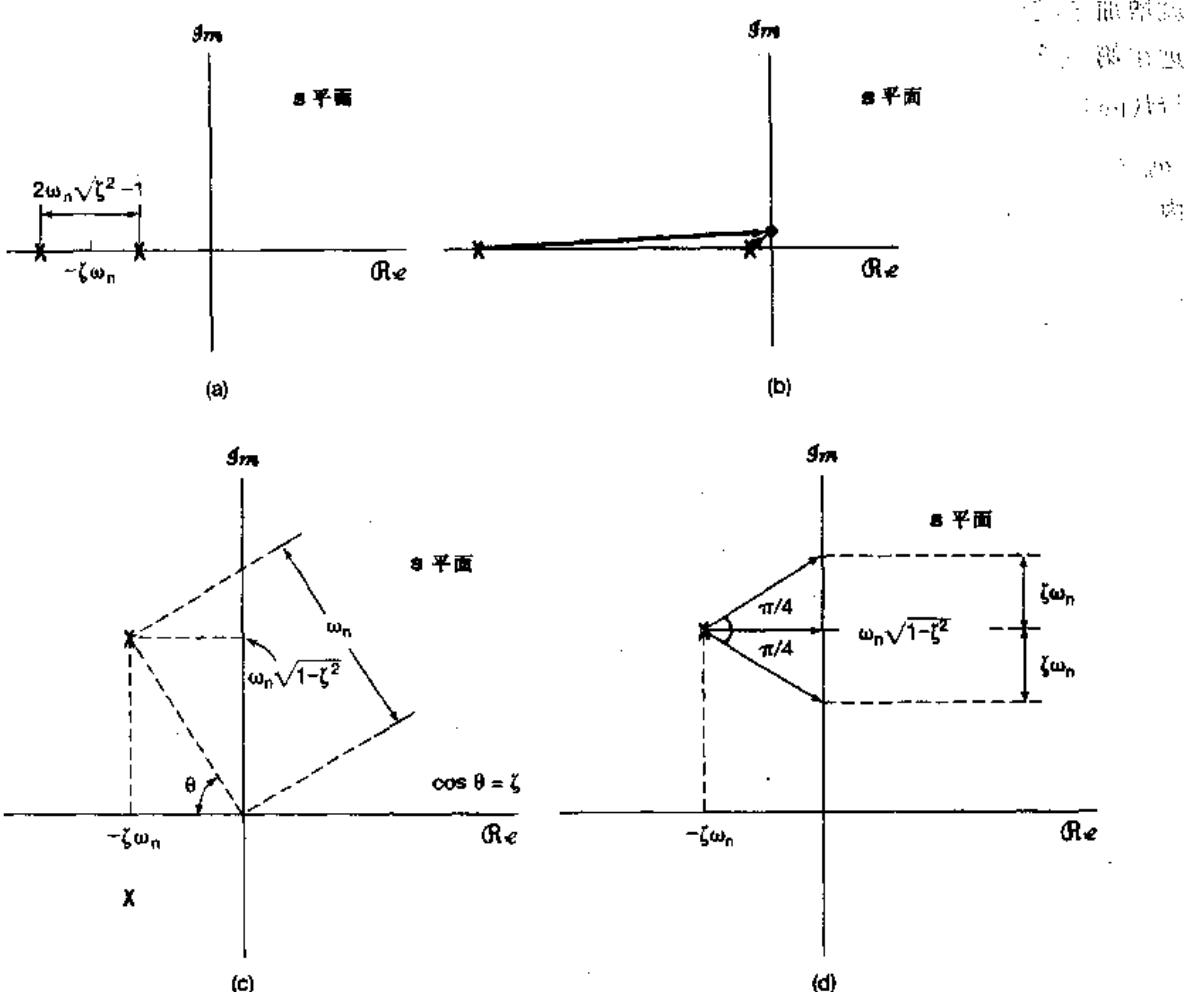


图 9.19 (a) $\zeta > 1$ 时二阶系统的零极点图; (b) $\zeta \gg 1$ 时的极点向量;
 (c) $0 < \zeta < 1$ 时二阶系统的零极点图;
 (d) $0 < \zeta < 1$ 时, $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 和 $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \pm \zeta \omega_n$ 的极点向量

和阶跃响应都有振荡的部分。应该注意到, 这两个极点是发生在复数共轭的位置上。事实上, 由 9.5.5 节的讨论可知, 对于一个实值信号而言, 复数极点(和零点)总是共轭成对地出现的。从这个图上, 特别是当 ζ 较小时, 这些极点是很靠近 $j\omega$ 轴的, 随着 ω 接近于 $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, 频率响应特性主要是由第二象限内的这个极点所决定的。尤其是, 在 $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 时, 这个极点向量的长度有一个最小值, 因此, 定性地可以预期到, 频率响应的模在该频率附近应有一个峰值。由于有其它极点的存在, 峰值不是真正出现在 $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 处, 而是在略比它小一点的频率上。图 9.20(a)对于 $\omega_n = 1$ 和几个不同的 ζ 值下, 仔细地画出了频率响应的模, 很明显, 在极点附近有一个所期望的特性。当然, 这与 6.5.2 节对二阶系统所作的分析是一致的。

因此, 对于 $0 < \zeta < 1$, 这个二阶系统是一个非理想的带通滤波器, 参数 ζ 控制着频率响应的尖锐程度和峰值的宽度。从图 9.19(d)的几何性质上也可看到, 当频率 ω 在 $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 上下各增减一个 $\zeta \omega_n$ 的值时, 第二象限极点向量的长度对于 $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 处的最小值来说

就增加了 $\sqrt{2}$ 倍，这样，对于小的 ζ 值来说，远在第三象限的极点，其影响可以忽略， $|H(j\omega)|$ 在频率范围

$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} - \zeta \omega_n < \omega < \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} + \zeta \omega_n$ 内就在其峰值 $1/\sqrt{2}$ 之内。若定义相对带宽 B 为这个频率间隔(即 $2\zeta\omega_n$)除以自然频率 ω_n ，则有

$$B = 2\zeta$$

因此， ζ 愈接近于零，频率响应的峰值就愈尖锐，峰值宽度就愈窄。另外， B 就是在6.5.2节定义的二阶系统品质因数 Q 值的倒数，因此随着品质因数的增加，相对带宽减小，滤波器的频率选择性就愈强。

对于 $\omega_n = 1$ 和几个不同的 ζ 值下，该二阶系统的相位特性如图9.20(b)所示。由图9.19(d)可以看到，第二象限极点向量的相角在频率 ω 由 $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} - \zeta \omega_n$ 变到 $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 再变到 $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} + \zeta \omega_n$ 的过程中，由 $-\pi/4$ 到0再到 $\pi/4$ 内变化。对于较小的 ζ 值，第三象限极点向量的相角在这个频率范围内的变化很小，其结果就是在这个频率间隔上， $\angle H(j\omega)$ 就有一个 $\pi/2$ 的急剧变化。这就是在图9.20(b)中所指出的。

ζ 固定而改变 ω_n ，在上面的讨论中仅改变了频率坐标的尺度，也就是说， $|H(j\omega)|$ 和 $\angle H(j\omega)$ 仅仅取决于 ω/ω_n 。从图9.19(c)中也能够很容易地确定，当保持 ω_n 不变而变化 ζ 时，这些极点和系统特性是如何随 ζ 而改变的。因为 $\cos\theta = \zeta$ ，所以这两个极点就沿着半径为 ω_n 的半圆移动。当 $\zeta = 0$ 时，这两个极点都在虚轴上，这就对应于在时域中单位冲激响应是无衰减的正弦振荡。随着 ζ 从0增加到1，这两个极点仍为复数，并移向左半面，而且从原点到这两个极点的向量长度保持为常数 ω_n 。随着极点的实部变得更负，有关的时间响应随 $t \rightarrow \infty$ 就衰减得更快。同时，如同已经看到的，随着 ζ 从0朝1增加的过程中，频率响应的相对带宽也随着增加，频率响应的尖锐程度渐渐降低，频率选择性变差。

9.4.3 全通系统

作为利用频率响应几何求值的最后一个例子，我们来考虑一个系统，其单位冲激响应的拉普拉斯变换有如图9.21(a)所示的零极点图。由该图可明显看出，沿着 $j\omega$ 轴的任何一点，

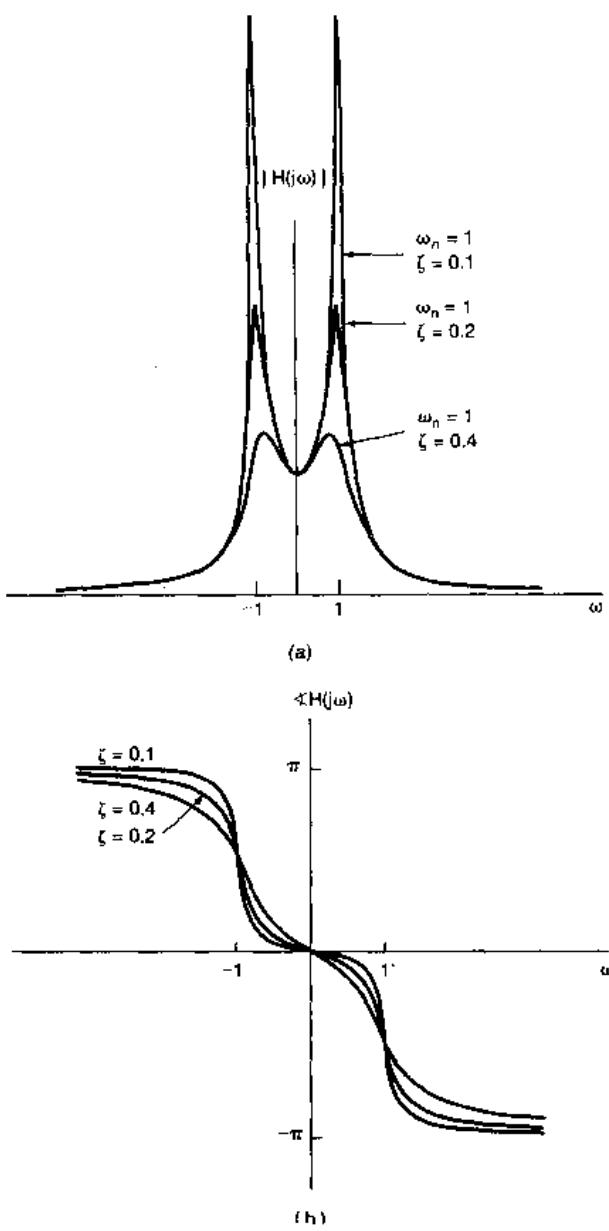


图9.20 $0 < \zeta < 1$ 时，二阶系统频率响应：
(a)模特性；(b)相位特性

其极点向量和零点向量的长度都是相等的，结果，频率响应的模是一个常数而与频率无关。这样的系统称为全通系统，因为它等增益(或等衰减)地通过所有频率。频率响应的相位是 $\theta_1 - \theta_2$ ，或者因为 $\theta_1 = \pi - \theta_2$ ，所以

$$\angle H(j\omega) = \pi - 2\theta_2 \quad (9.80)$$

由图 9.21(a)可知， $\theta_2 = \tan^{-1}(\omega/a)$ ，因此

$$\angle H(j\omega) = \pi - 2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (9.81)$$

$H(j\omega)$ 的模和相位特性均如图 9.21(b)所示。

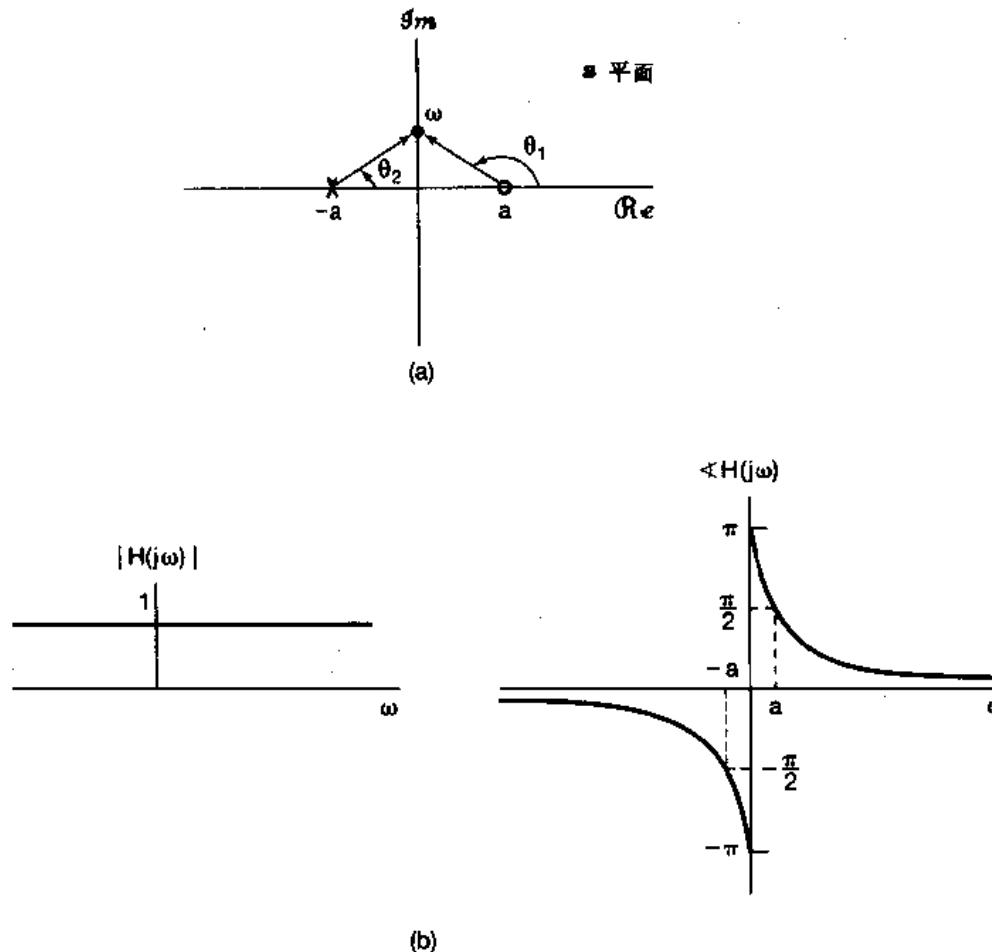


图 9.21 (a)全通系统的零极点图；(b)全通系统频率响应的模和相位特性

9.5 拉普拉斯变换的性质

在傅里叶变换的应用中，主要是依赖于在 4.3 节所获得的一组性质。这一节，将考虑相应的一组拉普拉斯变换的性质。很多结果的导出都和傅里叶变换中相应性质的导出相类似，因此将不作详细推导，有些将在本章末习题中留作作业(见习题 9.52 到 9.54)。

9.5.1 线性

若

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s), \text{ ROC 为 } R_1$$

和

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s), \text{ ROC 为 } R_2$$

则

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aX_1(s) + bX_2(s), \text{ ROC 包括 } R_1 \cap R_2 \quad (9.82)$$

正如所指出的， $X(s)$ 的收敛域至少是 R_1 和 R_2 的相交，这个交可以是空的；若是这样， $X(s)$ 就没有收敛域，也即， $x(t)$ 不存在拉普拉斯变换。例如，例 9.7 中(9.47)式的 $x(t)$ ，在 $b > 0$ 时， $X(s)$ 的 ROC 就是在和式中这两项 ROC 的交。若 $b < 0$ ，在 R_1 和 R_2 中没有公共的点，即这个交是空的，因此， $x(t)$ 就没有拉普拉斯变换。 $X(s)$ 的 ROC 也可能比这个“交”大。作为一个简单例子，如 $x_1(t) = x_2(t)$ ，且 $a = -b$ ，则在(9.82)式中 $x(t) = 0$ ，因此 $X(s) = 0$ ，这样 $X(s)$ 的 ROC 就是整个 s 平面。

与一些项的线性组合相联系的 ROC，总可以利用在 9.2 节所得到的关于 ROC 的性质来构成。具体说来就是，根据这些单项 ROC 的公共相交部分（假定各单项 ROC 有相交部分），就能找到一条线或一个带状区域是在这个线性组合的 ROC 当中，然后将其向右延伸($\Re\{s\}$ 增加)和向左延伸($\Re\{s\}$ 减小)，直到最近的极点(这个极点也可能在无限远)为止。

例 9.13 这个例子要说明一个由信号的线性组合构成的信号，其拉普拉斯变换的 ROC 有时可能会延伸到超过这些单项 ROC 的交。考虑信号

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad (9.83)$$

这里 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的拉普拉斯变换分别是

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.84)$$

$$\text{和} \quad X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.85)$$

$X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ 的零极点图，包括 ROC 如图 9.22(a) 和 (b) 所示。由(9.82)式

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad (9.86)$$

由此，在 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性组合中，在 $s = -1$ 的极点被 $s = -1$ 的零点所抵消。 $X(s) = X_1(s)$

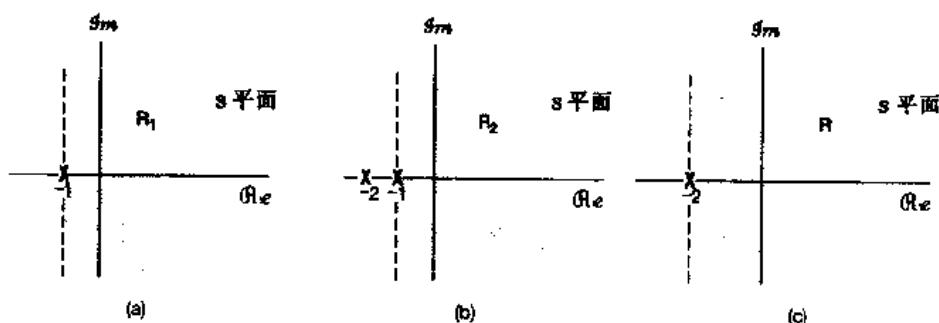


图 9.22 例 9.13 的零极点图和 ROC：(a) $X_1(s)$ ；(b) $X_2(s)$ ；
(c) $X_1(s) - X_2(s)$ 。 $X_1(s) - X_2(s)$ 的 ROC 包括 R_1 和 R_2 的交，这个交可以延伸到被极点 $s = -2$ 界定为止

$-X_2(s)$ 的零极点图如图 9.22(c) 所示。 $X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ 的 ROC 的交是 $\Re\{s\} > -1$ 。然而，因为 ROC 总是被一个极点或无根远点所界定，对这个例子来说， $X(s)$ 的 ROC 就能够再向左延伸，直至被 $s = -2$ 的极点所界定为止，这就是由于在 $s = -1$ 零极点抵消的结果。

9.5.2 时移性质

若

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad \text{ROC} = R$$

则

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-s_0 t} X(s), \quad \text{ROC} = R \quad (9.87)$$

9.5.3 s 域平移

若

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad \text{ROC} = R$$

则

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s - s_0), \quad \text{ROC} = R + \Re\{s_0\} \quad (9.88)$$

这就是说， $X(s - s_0)$ 的 ROC 是 $X(s)$ 的 ROC 平移一个 $\Re\{s_0\}$ 。于是，对于位于 R 中的任何一个 s 值， $s + \Re\{s_0\}$ 的值一定在 R_1 中，如图 9.23 所示。应该注意，如果 $X(s)$ 有一个极点或零点在 $s = a$ ，那么 $X(s - s_0)$ 就有一个极点或零点在 $s - s_0 = a$ ，也就是 $s = a + s_0$ 。

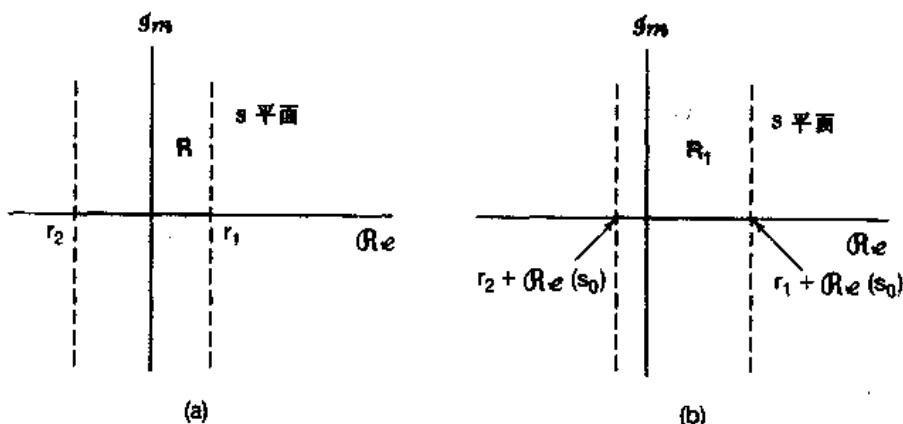


图 9.23 s 域平移在 ROC 上的影响：(a) $X(s)$ 的 ROC；(b) $X(s - s_0)$ 的 ROC

(9.88) 式一个重要的特殊情况是当 $s_0 = j\omega_0$ 时，也就是当一个信号 $x(t)$ 被用来调制一个周期复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 时，这时 (9.88) 式就变成

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s - j\omega_0), \quad \text{ROC} = R \quad (9.89)$$

(9.89) 式的右边可以看作是在 s 平面上平行于实轴的一个平移，这就是说，若 $x(t)$ 的拉普拉斯变换在 $s = a$ 有一个极点或零点，那么 $e^{j\omega_0 t} x(t)$ 就在 $s = a + j\omega_0$ 有一个极点或零点。

9.5.4 时域尺度变换

若

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC} = R$$

则

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{ROCR}_1 = \frac{R}{a} \quad (9.90)$$

这就是说，对于在 R 中任何 s 值[如图 9.24(a)所示]， s/a 的值一定位于 R_1 中，如图 9.24(b)所示，这里 $a > 1$ 。注意：对于 $a > 1$ ， $X(s)$ 的 ROC 要压缩一个 $1/a$ 的倍数，如图 9.24(b)所示；而对于 $0 < a < 1$ ，ROC 要扩展一个 $1/a$ 的倍数。另外，(9.90)式还意味着，若 a 为负，ROC 要受到一个倒置再加一个尺度变换。这就是如图 9.24(c)所示，该图是对应于 $0 > a > -1$ 的情况， $1/|a|X(s/a)$ 的 ROC 涉及到关于 $j\omega$ 轴的反转，再加上一个 $1/|a|$ 因子的 ROC 大小的变化。因此， $x(t)$ 的时间反转就形成 ROC 的反转，即

$$x(-t) \leftrightarrow X(-s), \quad \text{ROC} = -R \quad (9.91)$$

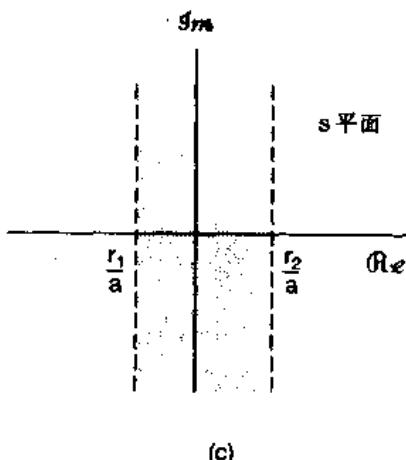
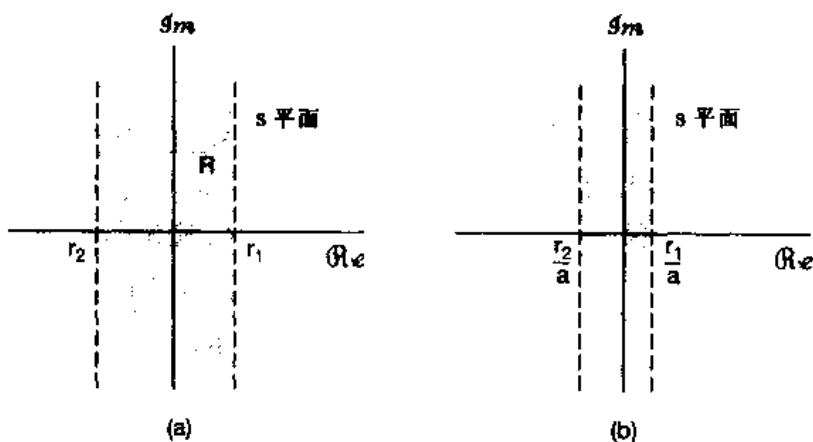


图 9.24 时域尺度变换在 ROC 上的影响：

- (a) $X(s)$ 的 ROC;
- (b) $a > 1$, $(1/|a|)X(s/a)$ 的 ROC;
- (c) $0 > a > -1$, $(1/|a|)X(s/a)$ 的 ROC

9.5.5 共轭

若

$$x(t) \xleftrightarrow{s} X(s), \quad \text{ROC} = R \quad (9.92)$$

则

$$x^*(t) \xleftrightarrow{s} X^*(s^*), \quad \text{ROC} = R \quad (9.93)$$

因此

$$X(s) = X^*(s^*), \quad \text{当 } x(t) \text{ 为实函数} \quad (9.94)$$

因此, 若 $x(t)$ 为实函数, 如果 $X(s)$ 有一个极点或零点在 $s = s_0$ (也就是如果 $X(s)$ 在 $s = s_0$ 无界或为零), 那么 $X(s)$ 也一定有一个复数共轭的 $s = s_0^*$ 的极点或零点。例如, 例 9.4 中的实信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 就有共轭成对极点 $s = 1 \pm 3j$ 和零点 $s = (-5 \pm j\sqrt{71})/2$ 。

9.5.6 卷积性质

若

$$x_1(t) \xleftrightarrow{s} X_1(s), \quad \text{ROC} = R_1$$

和

$$x_2(t) \xleftrightarrow{s} X_2(s), \quad \text{ROC} = R_2$$

那么

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{s} X_1(s)X_2(s), \quad \text{ROC 包括 } R_1 \cap R_2 \quad (9.95)$$

因此, 和 9.5.1 节的线性性质一样, $X_1(s)X_2(s)$ 的 ROC 包括 $X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ ROC 的相交部分, 如果在乘积中有零极点相消的话, $X_1(s)X_2(s)$ 的 ROC 也可以比它们相交的部分大。例如, 若

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2 \quad (9.96)$$

和

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.97)$$

那么 $X_1(s)X_2(s) = 1$, 它的 ROC 就是整个 s 平面。

正如在第 4 章中所看到的, 傅里叶变换中的卷积性质在线性时不变系统的分析中起着很重要的作用。在 9.7 节和 9.8 节, 也将利用拉普拉斯变换的卷积性质来分析 LTI 系统, 更具体一些就是分析由线性常系数微分方程所表征的系统。

9.5.7 时域微分

若

$$x(t) \xleftrightarrow{s} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

则

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{s} sX(s), \quad \text{ROC 包括 } R \quad (9.98)$$

将(9.56)式的反变换式两边对 t 微分，就可得到这个性质，即设

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^s ds$$

那么就有

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^s ds \quad (9.99)$$

可见， $dx(t)/dt$ 就是 $sX(s)$ 的反变换。 $sX(s)$ 的 ROC 包括 $X(s)$ 的 ROC，如果 $X(s)$ 中有一个 $s=0$ 的一阶极点，被乘以 s 抵消的话，还可以比 $X(s)$ 的 ROC 大。例如，若 $x(t)=u(t)$ ，那么 $X(s)=1/s$ ，ROC 是 $\Re\{s\}>0$ ，而 $x(t)$ 的导数是一个单位冲激函数 $\delta(t)$ ，它的拉普拉斯变换是 1，而且 ROC 是整个 s 平面。

9.5.8 s 域微分

将(9.3)式的拉普拉斯变换两边对 s 微分，即

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

得到

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)x(t)e^{-st} dt$$

因此，若

$$x(t) \xrightarrow{s} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

则

$$-tx(t) \xrightarrow{s} \frac{dX(s)}{ds}, \quad \text{ROC} = R \quad (9.100)$$

下面两个例子用来说明这个性质的应用。

例 9.14 求下面 $x(t)$ 的拉普拉斯变换

$$x(t) = te^{-at}u(t) \quad (9.101)$$

因为

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{s} \frac{1}{s+a}, \quad \Re\{s\} > -a$$

因此由(9.100)式可得

$$te^{-at}u(t) \xrightarrow{s} -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \Re\{s\} > -a \quad (9.102)$$

事实上，反复利用(9.100)式，可得

$$\frac{t^2}{2} e^{-at}u(t) \xrightarrow{s} \frac{1}{(s+a)^3}, \quad \Re\{s\} > -a \quad (9.103)$$

或更一般形式为

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t) \xrightarrow{s} \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \Re\{s\} > -a \quad (9.104)$$

下一个例子要说明，当将部分分式展开用于求一个具有重阶极点有理函数的反变换时，这个特殊的拉普拉斯变换对是特别有用的。

例 9.15 考虑下面已知拉普拉斯变换 $X(s)$:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)}, \quad \Re\{s\} > -1$$

将附录中介绍的部分分式展开法应用于 $X(s)$ ，可写成

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{3}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.105)$$

因为 ROC 是在极点 $s = -1$ 和 $s = -2$ 的右边，所以每一项反变换都是一个右边信号，再应用 (9.14) 式和 (9.104) 式，可得反变换为

$$x(t) = [2te^{-t} - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$$

9.5.9 时域积分

若

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

则

$$\boxed{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} X(s), \quad \text{ROC 包括 } R \cap \{\Re\{s\} > 0\}} \quad (9.106)$$

这个性质是 9.5.7 节所述微分性质的逆性质，利用 9.5.6 节的卷积性质可以将它导出，即

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = u(t) * x(t) \quad (9.107)$$

由例 9.1，若 $a=0$ ，则有

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} > 0 \quad (9.108)$$

根据卷积性质有

$$u(t) * x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} X(s) \quad (9.109)$$

它的 ROC 应包括 $X(s)$ 的 ROC 和 (9.108) 式 $u(t)$ 拉普拉斯变换 ROC 的相交，这就是 (9.106) 式给出的 ROC 结果。

9.5.10 初值与终值定理

若 $t < 0$, $x(t) = 0$ ，并且在 $t = 0$ 时， $x(t)$ 不包含冲激或者高阶奇异函数，在这些特别限制下，就可以直接从拉普拉斯变换式中计算出初值 $x(0^+)$ [也就是 $x(t)$ 当 t 从正值方向趋于 0 时的值] 和终值，即 $t \rightarrow \infty$ 时的 $x(t)$ 值。

初值定理

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s) \quad (9.110)$$

终值定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s) \quad (9.111)$$

这些结果的导出留在习题 9.53 中考虑。

例 9.16 初值与终值定理在验证一个信号的拉普拉斯变换计算结果的正确性上是有用的。例如，考虑例 9.4 中的信号 $x(t)$ ，由(9.24)式可见 $x(0^+) = 2$ ，同时利用(9.29)式可求出

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12}{s^3 + 4s^2 + 14s + 20} = 2$$

这是与(9.110)式的初值定理一致的。

9.5.11 性质列表

表 9.1 综合了本节中所得到的全部性质，在 9.7 节将拉普拉斯变换用于线性时不变系统的分析和表征时，会用到很多这些性质。正如已在几个例子中所说明的，拉普拉斯变换及其 ROC 的各种性质，都能为一个信号和它的变换提供大量的信息，而这些无论是在表征信号上，还是校核一个计算的结果上都是有用的。在 9.7 节，9.8 节以及本章末的习题中，将给出应用这些性质的其它一些例子。

表 9.1 拉普拉斯变换性质

节次	性质	信号	拉普拉斯变换	ROC
		$x(t)$	$X(s)$	R
		$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
		$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
9.5.1	线性	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	至少 $R_1 \cap R_2$
9.5.2	时移	$x(t - t_0)$	$e^{-s_0 t} X(s)$	R
9.5.3	s 域平移	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	R 的平移 [即若 $(s - s_0)$ 在 R 中，则 s 就位于 ROC 中]
9.5.4	时域尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a (即若 s/a 在 R 中，则 s 就位于 ROC 中)
9.5.5	共轭	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
9.5.6	卷积	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	至少 $R_1 \cap R_2$
9.5.7	时域微分	$\frac{d}{dt} x(t)$	$sX(s)$	至少 R
9.5.8	s 域微分	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
9.5.9	时域积分	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	至少 $R \cap \{\operatorname{Re}\{s\} > 0\}$
9.5.10	初值和终值定理 若 $t < 0$, $x(t) = 0$ 且在 $t = 0$ 不包括任何冲激或高阶奇异函数，则			
	$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$			

9.6 常用拉普拉斯变换对

如同在 9.3 节所指出的，把 $X(s)$ 分解成较为简单的一些项的线性组合，拉普拉斯反变换往往很容易求得的，因为这些简单项的拉普拉斯变换可以直接写出来或者极易求得。表 9.2 列出了若干常用的拉普拉斯变换对。第 1 对直接由(9.3)式得到。第 2 和第 6 对，由例 9.1，分别以 $a=0$ 和 $a=\alpha$ 代入就可直接求出。利用微分性质于例 9.14 可得变换对 4。在变换对 4 的基础上，利用 9.5.3 的性质可得变换对 8。变换对 3, 5, 7 和 9 都是分别在变换对 2, 4, 6 和 8 的基础上，再结合 9.5.4 节的时域尺度变换性质，以 $a=-\alpha$ 代入而得出的。相类似地，变换对 10 到 16 都可以利用表 9.1 的有关性质，在前面那些变换对的基础上导得（见习题 9.55）。

表 9.2 基本函数的拉普拉斯变换

变换对	信号	变换	ROC
1	$\delta(t)$	1	全部 s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} > 0$
5	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} < 0$
6	$e^{-\alpha}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
7	$-e^{-\alpha}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re\{s\} < -\alpha$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	全部 s
11	$[\cos\omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
12	$[\sin\omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
13	$[e^{-\alpha}\cos\omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
14	$[e^{-\alpha}\sin\omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
15	$u_n(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	s^n	全部 s
16	$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{n \text{ 次}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} > 0$

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征 LTI 系统

拉普拉斯变换的重要应用之一是对于 LTI 系统的分析与表征。对于 LTI 系统，拉普拉斯变换的作用直接来自于卷积性质(9.5.6 节)，根据这一性质就可以得到，一个 LTI 系统输入和输出的拉普拉斯变换是通过乘以系统单位冲激响应的拉普拉斯变换联系起来的，即

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (9.112)$$

式中， $X(s)$ ， $Y(s)$ 和 $H(s)$ 分别是系统输入，输出和单位冲激响应的拉普拉斯变换。(9.112) 式是与傅里叶变换场合的(4.56)式相对应的。事实上，当 $s = j\omega$ 时，(9.112)式拉普拉斯变换中的每一项都变成相应的傅里叶变换，这样(9.112)式就完全相当于(4.56)式。另外，根据 3.2 节关于 LTI 系统对复指数信号响应的讨论，若一个 LTI 系统的输入是 $x(t) = e^t$ ，那么其输出就一定是 $H(s)e^s$ ；也就是说， e^s 是系统的一个特征函数，而其特征值就等于单位冲激响应的拉普拉斯变换。

当 $s = j\omega$ 时， $H(s)$ 就是这个 LTI 系统的频率响应。在拉普拉斯变换的范畴内，一般称 $H(s)$ 为系统函数或转移函数。LTI 系统的很多性质都与系统函数在 s 平面的特性密切有关。下面将用考查几个重要的系统性质和几类重要系统来说明这一点。

9.7.1 因果性

对于一个因果的 LTI 系统，其单位冲激响应在 $t < 0$ 时为零，因此是一个右边信号，这样根据 9.2 节的讨论，可见有

一个因果系统的系统函数的 ROC 是某个右半平面。

应该强调的是，相反的结论未必是成立的。这就如例 9.19 所说明的，一个是位于最右边极点的右边的 ROC 并不保证系统是因果的，它只是保证单位冲激响应是右边的。然而，如果 $H(s)$ 是有理的，那么，如同例 9.17 和 9.18 所表明的，可以只须看一下它的 ROC 是否是右半平面的，就能确定该系统是否是因果的，从而有

对于一个具有有理系统函数的系统来说，系统的因果性就等效于 ROC 位于最右边极点的右边的右半平面。

例 9.17 有一系统，其单位冲激响应为

$$h(t) = e^{-t}u(t) \quad (9.113)$$

因为 $t < 0, h(t) = 0$ ，所以该系统是因果的。同时它的系统函数由例 9.1 可得

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.114)$$

在这种情况下，系统函数是有理的，并且 ROC 是在最右边极点的右边，这就与具有有理系统函数的因果性等效于 ROC 位于最右边极点的右边的结论相一致。

例 9.18 有一系统，其单位冲激响应为

$$h(t) = e^{-|t|}$$

因为 $t < 0, h(t) \neq 0$, 所以该系统是非因果的。同时它的系统函数由例 9.7 有

$$H(s) = \frac{-2}{s^2 - 1}, \quad -1 < \Re\{s\} < +1$$

因此, $H(s)$ 是有理的, 但 ROC 不在最右边极点的右边, 这与系统的非因果性是一致的。

例 9.19 考虑下面系统函数:

$$H(s) = \frac{e^s}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.115)$$

对于该系统, 其 ROC 是位于最右边极点的右边, 因此单位冲激响应必须是右边的。为了确定它的单位冲激响应, 首先利用例 9.1 的结果

$$e^{-t} u(t) \xleftrightarrow{s} \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.116)$$

接下来, 根据 9.5.2 节的时移性质[(9.87)式], 在(9.115)式中的因子 e^s 可以认为是(9.116)式中时间函数的移位, 那么

$$e^{-(t+1)} u(t+1) \xleftrightarrow{s} \frac{e^s}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.117)$$

所以系统的单位冲激响应是

$$h(t) = e^{-(t+1)} u(t+1) \quad (9.118)$$

它在 $-1 < t < 0$ 不等于零, 所以系统不是因果的。这个例子可以作为一个提示: 因果性确实意味着 ROC 是位于最右边极点的右边, 但是相反的结论一般是不成立的, 除非系统函数是有理的。

可以用完全相类似的方式来处理有关反因果性的概念。如果系统的单位冲激响应在 $t > 0, h(t) = 0$, 就说该系统是反因果的。因为在这种情况下, $h(t)$ 是左边信号, 由 9.2 节知道, 系统函数 $H(s)$ 的 ROC 就必须是某个左半平面。同样, 一般来说其相反的结论是不成立的; 也就是说, 如果 $H(s)$ 的 ROC 是某个左半平面, 那么我们所知道的只是 $h(t)$ 是左边的。然而, 如果 $H(s)$ 是有理的, 那么 ROC 位于最左边极点的左边就等效于系统是反因果的。

9.7.2 稳定性

$H(s)$ 的 ROC 也可以与系统的稳定性联系起来。如同在 2.3.7 节曾提到的, 一个 LTI 系统的稳定性等效于它的单位冲激响应是绝对可积的, 这时单位冲激响应的傅里叶变换收敛。因为一个信号的傅里叶变换就等于拉普拉斯变换沿 $j\omega$ 轴求值, 所以就有

当且仅当系统函数 $H(s)$ 的 ROC 包括 $j\omega$ 轴[即: $\Re\{s\} = 0$]时, 一个 LTI 系统就是稳定的。

例 9.20 考虑一 LTI 系统, 其系统函数为

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} \quad (9.119)$$

因为没有给出 ROC，那么根据 9.2 节的讨论知道，存在着几种不同的 ROC，结果就会有几种不同的单位冲激响应与(9.119)式给出的 $H(s)$ 代数表示式相联系。然而，如果有关于系统的因果性或稳定性方面的信息，那么适当的 ROC 还是能被确定。例如，若系统已知是因果的，那么 ROC 一定为图 9.25(a)所示，这时的单位冲激响应就是

$$h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \right)u(t) \quad (9.120)$$

注意，这种 ROC 的选择并未包括 $j\omega$ 轴，因此对应的系统是不稳定的（只要看看 $h(t)$ 不是绝对可积的就能得出）。另一方面，若系统已知是稳定的，那么 ROC 就如图 9.25(b) 所示，相应的单位冲激响应是

$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

这是绝对可积的。最后，ROC 为图 9.25(c) 所示，这时的单位冲激响应为

$$h(t) = -\left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \right)u(-t)$$

系统是反因果的，而且是不稳定的。

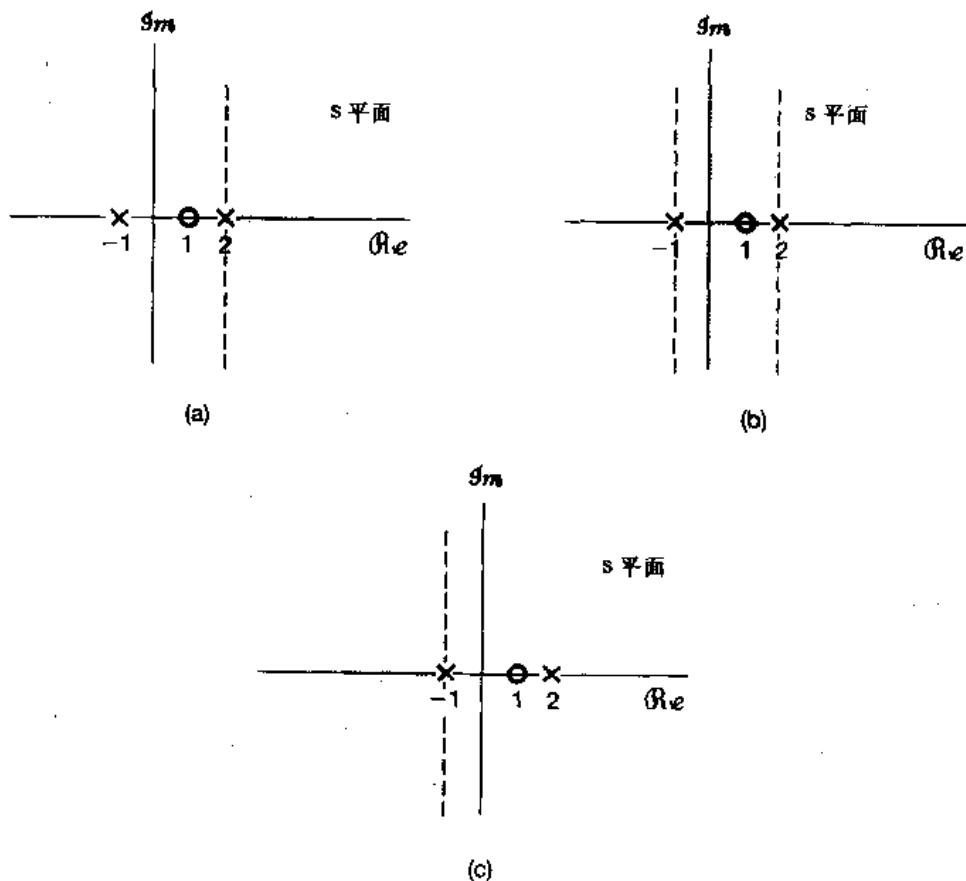


图 9.25 例 9.20 系统函数(极点为 $s = -1$ 和 $s = 2$, 零点在 $s = 1$)的几种可能 ROC;
 (a) 因果不稳定系统; (b) 非因果稳定系统; (c) 反因果不稳定系统

当然，一个系统是稳定的（或不稳定），而有一个非有理的系统函数，这完全是可能的。例如，(9.115)式的系统函数不是有理的，而它的单位冲激响应(9.118)式是绝对可积的，这就表明系统是稳定的。然而，对于具有有理系统函数的系统，其稳定性是很容易用系统的极

点来说明的。例如，对于图 9.25 的零极点图，稳定性就对应于 ROC 的选择要在两个极点之间，以使得 $j\omega$ 轴位于 ROC 内。

对于一种特别而重要的系统，稳定性可以很简单地用极点的位置来表征。具体一些就是，考虑一个因果 LTI 系统，具有有理系统函数 $H(s)$ ，因为系统是因果的，ROC 就在最右边极点的右边，因此，这个系统要是稳定的话（即，ROC 包括 $j\omega$ 轴）， $H(s)$ 的最右边的极点必须位于 $j\omega$ 轴的左边，即

当且仅当 $H(s)$ 的全部极点都位于 s 平面的左半平面时，也即全部极点都有负的实部时，一个具有有理系统函数 $H(s)$ 的因果系统才是稳定的。

例 9.21 再次考虑例 9.17 的因果系统，(9.113)式的单位冲激响应是绝对可积的，因此该系统是稳定的。

与此相一致的是，由(9.114)式给出的 $H(s)$ ，其极点在 $s = -1$ ，它在 s 平面的左半平面。与此相反，单位冲激响应为

$$h(t) = e^{2t}u(t)$$

的因果系统是不稳定的，因为 $h(t)$ 不是绝对可积的。同时，在这个情况下

$$H(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \Re\{s\} > 2$$

系统有一个极点在 $s = 2$ ，它位于 s 平面的右半平面。

例 9.22 考虑曾在 9.4.2 节和 6.5.2 节讨论过的因果二阶系统，单位冲激响应和系统函数分别是

$$h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t) \quad (9.121)$$

和

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{(s - c_1)(s - c_2)} \end{aligned} \quad (9.122)$$

式中

$$c_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (9.123)$$

$$c_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (9.124)$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (9.125)$$

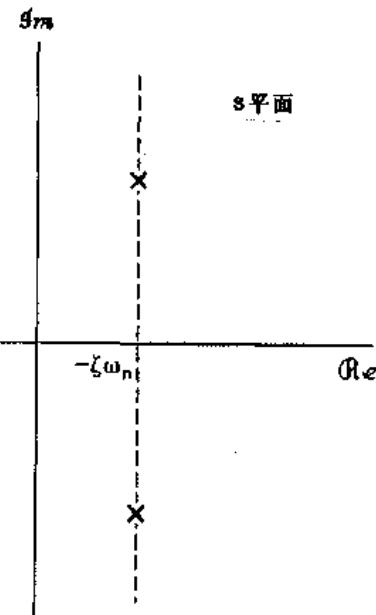


图 9.26 $\zeta < 0$ 时，一个因果二阶系统的极点位置和 ROC

在图 9.19 中，已经标出了对 $\zeta > 0$ 时的

极点位置。在图 9.26 中标明的是 $\zeta < 0$ 时的极点位置。从后面这个图以及(9.124)式和(9.125)式都很明显地看出，对于 $\zeta < 0$ ，两个极点都有正的实部，结果对于 $\zeta < 0$ ，这个因果的二阶系统不可能是稳定的。这个在(9.121)式中也是显然的，因为 $\Re\{c_1\} > 0$ 和 $\Re\{c_2\} > 0$ ，每一项都随 t 的增

加而指数增长，因此 $h(t)$ 不可能是绝对可积的。

9.7.3 由线性常系数微分方程表征的 LTI 系统

在 4.7 节已经讨论过利用傅里叶变换来得到一个由线性常系数微分方程表征的 LTI 系统的频率响应，而用不着首先解出单位冲激响应或时域解。用完全相类似的方式，拉普拉斯变换的性质也能用来直接求得一个由线性常系数微分方程所表征的系统的系统函数。在下面的例子中用来说说明这一过程。

例 9.23 考虑一 LTI 系统，其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 满足如下线性常系数微分方程：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t) \quad (9.126)$$

在(9.126)式两边应用拉普拉斯变换，并分别用 9.5.1 节的线性性质和 9.5.7 节的微分性质，可得代数方程

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \quad (9.127)$$

因为由(9.112)式，系统函数是

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

可得该系统的系统函数是

$$H(s) = \frac{1}{s+3} \quad (9.128)$$

这就给出了系统函数的代数表示式，但没有收敛域。事实上，正如在 2.4 节所讨论的，微分方程本身并不能完全表征这个 LTI 系统，可以有不同的单位冲激响应都与这个微分方程相吻合。如果，除了这个微分方程之外，还知道系统是因果的，那么 ROC 就可以推断出是在最右边极点的右边，在这个例子中就对应于 $\Re\{s\} > -3$ ；如果已知系统是反因果的，那么 ROC 就是 $\Re\{s\} < -3$ 。在因果的情况下，相应的单位冲激响应是

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \quad (9.129)$$

而在反因果的情况下则是

$$h(t) = -e^{-3t}u(-t) \quad (9.130)$$

在例 9.23 中由微分方程得到 $H(s)$ 的过程可以应用到更一般的情况。考虑如下形式的线性常系数微分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (9.131)$$

在上式两边进行拉普拉斯变换，并反复应用线性和微分性质，可得

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k s^k \right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^M b_k s^k \right) X(s) \quad (9.132)$$

或者

$$H(s) = \frac{\left\{ \sum_{k=0}^M b_k s^k \right\}}{\left\{ \sum_{k=0}^N a_k s^k \right\}} \quad (9.133)$$

因此，一个由微分方程表征的系统，其系统函数总是有理的，它的零点就是下列方程的解：

$$\sum_{k=0}^M b_k s^k = 0 \quad (9.134)$$

而它的极点就是如下方程的解：

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k = 0 \quad (9.135)$$

和前面的讨论一样，(9.133)式并没有包括 $H(s)$ 收敛域的说明，因为该线性常系数微分方程本身没有限制收敛域。然而，如果给出系统有关稳定性或因果性的附加说明，收敛域就可以被推演出来。例如，如果在系统上强加上初始松弛的条件，它就是因果的，那么 ROC 就一定是位于最右边极点的右边。

例 9.24 一个 RLC 电路，若其电容器上的电压和电感线圈中的电流最初都是零，就构成了一个可用线性常系数微分方程描述的 LTI 系统。现考虑图 9.27 的串联 RLC 电路，设跨于电压源的电压是输入信号 $x(t)$ ，跨于电容器上的电压是输出信号 $y(t)$ 。令在电阻、电感和电容器上的电压之和等于电源电压，就得

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t) \quad (9.136)$$

应用(9.133)式，可得

$$H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)} \quad (9.137)$$

正如在习题 9.64 中所指出，如果 R, L 和 C 的值全是正的，该系统函数的极点就全具有负的实部，因此该系统一定是稳定的。

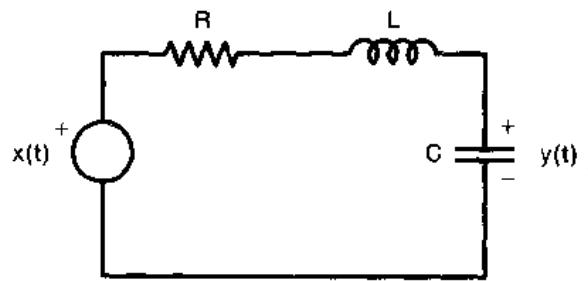


图 9.27 串联 RLC 电路

9.7.4 系统特性与系统函数的关系举例

已经看到，像因果性和稳定性这些系统性质都能直接与系统函数及其特性联系起来。事实上，已经给出的拉普拉斯变换的每一个性质都能以这种方式用于将系统特性与系统函数联系起来。这一节将用几个例子来说明这一点。

例 9.25 假设已知，若一个 LTI 系统的输入是

$$x(t) = e^{-3t} u(t)$$

那么其输出就是

$$y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}] u(t)$$

现在要证明，根据这些认识就能确定该系统的系统函数，并且由此还可立即推断出系统的其它性质。

将 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别取拉普拉斯变换得

$$X(s) = \frac{1}{s+3}, \quad \Re\{s\} > -3$$

和

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \Re\{s\} > -1$$

由(9.112)式可以得到

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

再者，还可以确定系统函数的 ROC。由 9.5.6 节的卷积性质知道， $Y(s)$ 的 ROC 至少必须包括 $X(s)$ 和 $H(s)$ 的 ROC 的相交部分。检查一下 $H(s)$ ROC 的三种可能情况（即：极点 $s = -2$ 的左边，极点 -2 和极点 -1 之间，以及极点 $s = -1$ 的右边），可见只有 $\Re\{s\} > -1$ 一种选择才能与 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 的 ROC 相符合。因为这个 ROC 就是 $H(s)$ 的最右边极点的右边，因此可得 $H(s)$ 是因果的。又因为 $H(s)$ 的两个极点都有负的实部，所以系统又是稳定的。再者，根据(9.131)式和(9.133)式之间的关系，还能给出下列微分方程，与初始松弛条件一起

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

来表征这个系统。

例 9.26 假定关于某个 LTI 系统已知下列信息：

1. 系统是因果的。
2. 系统函数是有理的，且仅有两个极点在 $s = -2$ 和 $s = 4$ 。
3. 若 $x(t) = 1$ ，则 $y(t) = 0$ 。
4. 单位冲激响应在 $t = 0^+$ 时的值是 4。

根据以上信息，要想确定该系统的系统函数。

根据 1 和 2 可知，系统是不稳定的（因为系统是因果的，而又有两个实部为正的极点在 $s = 4$ ），并且系统函数具有如下形式：

$$H(s) = \frac{p(s)}{(s+2)(s-4)} = \frac{p(s)}{s^2-2s-8}$$

式中 $p(s)$ 是一个 s 的多项式。由于对输入 $x(t) = 1 = e^{0 \cdot t}$ 的响应 $y(t)$ 必须等于 $H(0) \cdot e^{0 \cdot t} = H(0)$ ，因此由 3 可得 $p(0) = 0$ ，也就是说 $p(s)$ 必定有一个根在 $s = 0$ ，于是 $p(s)$ 就应具有

$$p(s) = sq(s)$$

式中 $q(s)$ 是另一个 s 多项式。

最后，根据 4 和 9.5.10 节中的初值定值，可知

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 q(s)}{s^2 - 2s - 8} = 4 \quad (9.138)$$

当 $s \rightarrow \infty$ 时， $sH(s)$ 的分子和分母中 s 的最高方次项起支配作用，从而在求(9.138)式中是仅仅起作用的项；再者，若分子的阶比分母的阶高，那么这个极限一定发散，因此对于这个极限要能得到一个有限的非零值，唯有在 $sH(s)$ 是分子分母同阶次的情况下有可能。现在已经知道分母阶次为 2，因此要使(9.138)式能成立， $q(s)$ 必须是一个常数，即 $q(s) = K$ 。这个常数可以按如下求出：

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{s^2 - 2s - 8} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{s^2} = K \quad (9.139)$$

令(9.138)式和(9.139)式相等，可见 $K = 4$ ，因此

$$H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}$$

例 9.27 考虑一个稳定而因果的系统，其单位冲激响应为 $h(t)$ ，系统函数为 $H(s)$ 。假定 $H(s)$ 是有理的，有一个极点在 $s = -2$ ，原点没有零点，其余的极点和零点位置都不知道。对于下列每一种说法判断：是否能肯定地说是对的，是否能肯定地说是错的，或者说由于条件不充分而无法确认它的真

实性：

(a) $\{h(t)e^{3t}\}$ 收敛。

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = 0$ 。

(c) $h(t)$ 是一个因果而稳定的单位冲激响应。

(d) $dh(t)/dt$ 在它的拉普拉斯变换中至少有一个极点。

(e) $h(t)$ 是有限持续期的。

(f) $H(s) = H(-s)$ 。

(g) $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 2$ 。

(a) 是错的。因为 $\{h(t)e^{3t}\}$ 相应于 $h(t)$ 的拉普拉斯变换在 $s = -3$ ^① 的值，如果这个值收敛，那就意味着 $s = -3$ 是在收敛域 ROC 内。但是一个因果而稳定的系统它的 ROC 总是在它的全部极点的右边，可是 $s = -3$ 不在极点 $s = -2$ 的右边。

(b) 也是错的。因为这等于说 $H(0) = 0$ ，可是已知 $H(s)$ 在原点没有零点。

(c) 的说法是对的。按表 9.1 所列的在 9.5.8 节得到的性质， $h(t)$ 的拉普拉斯变换与 $H(s)$ 有相同的 ROC，而 $H(s)$ 的 ROC 包括 $j\omega$ 轴，因此对应的系统是稳定的。同时，对于 $t < 0$, $h(t) = 0$ ，这意味着 $t < 0$ ，也有 $h(t) = 0$ ，因此由 $h(t)$ 代表的是一个因果系统的单位冲激响应。

(d) 也是对的。因为根据表 9.1, $dh(t)/dt$ 的拉普拉斯变换为 $sH(s)$ ，而乘一个 s 并没有消去在 $s = -2$ 的极点。

(e) 是错的。如果 $h(t)$ 是有限持续期的话，它的拉普拉斯变换的 ROC 就必须是整个 s 平面，然而 $H(s)$ 在 $s = -2$ 已经有极点。

(f) 也是错的。倘若这是对的，那么，因为 $H(s)$ 在 $s = -2$ 有一个极点，那就也必须在 $s = 2$ 有一个极点；而对于一个因果而稳定的系统，其全部极点都一定位于 s 平面的左半面，这是相矛盾的。

(g) 的说法的真假由给出的条件无法肯定。因为这种情况要求 $H(s)$ 分子分母同阶次，但是缺乏足够的条件来判断 $H(s)$ 是否属于这种情况。

9.7.5 巴特沃兹滤波器

在例 6.3 中曾简要介绍过称之为巴特沃兹滤波器一类广泛应用的 LTI 系统。这类滤波器有几个性质，其中包括这类滤波器中的每一种频率响应的模特性，在实际实现中颇具吸引力。作为拉普拉斯变换应用的进一步说明，这一节将用拉普拉斯变换技术从频率响应模特性的要求中来确定巴特沃兹滤波器的系统函数。

一个 N 阶低通巴特沃兹滤波器频率响应的模平方是

$$|B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}} \quad (9.140)$$

式中 N 是滤波器的阶。从(9.140)式要确定系统函数 $B(s)$ ，该系统函数可给出 $|B(j\omega)|^2$ 的特性。首先按定义

$$|B(j\omega)|^2 = B(j\omega)B^*(j\omega) \quad (9.141)$$

如果将该巴特沃兹滤波器的单位冲激响应限制为实值函数，那么由傅里叶变换的共轭对称性质，就有

① 原文为 $s = 3$ ，似有误——译者注。

$$B^*(j\omega) = B(-j\omega) \quad (9.142)$$

这样

$$B(j\omega)B(-j\omega) = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}} \quad (9.143)$$

注意到 $B(s)|_{s=j\omega} = B(j\omega)$, 由(9.143)式就有

$$B(s)B(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2N}} \quad (9.144)$$

这个分母多项式的根就是 $B(s)B(-s)$ 的极点, 这些极点应位于

$$s = (-1)^{1/2N}(j\omega_c) \quad (9.145)$$

(9.145)式对如下 $s = s_p$ 都满足

$$|s_p| = \omega_c \quad (9.146)$$

$$\angle s_p = \frac{\pi(2k+1)}{2N} + \frac{\pi}{2}, \quad k \text{ 为整数} \quad (9.147)$$

也即

$$s_p = \omega_c \exp\left(j\left[\frac{\pi(2k+1)}{2N} + \frac{\pi}{2}\right]\right) \quad (9.148)$$

在图 9.28 中画出 $N=1, 2, 3$ 和 6 时, $B(s)B(-s)$ 的极点位置。关于 $B(s)B(-s)$ 的极点, 一般可以给出如下几点判断:

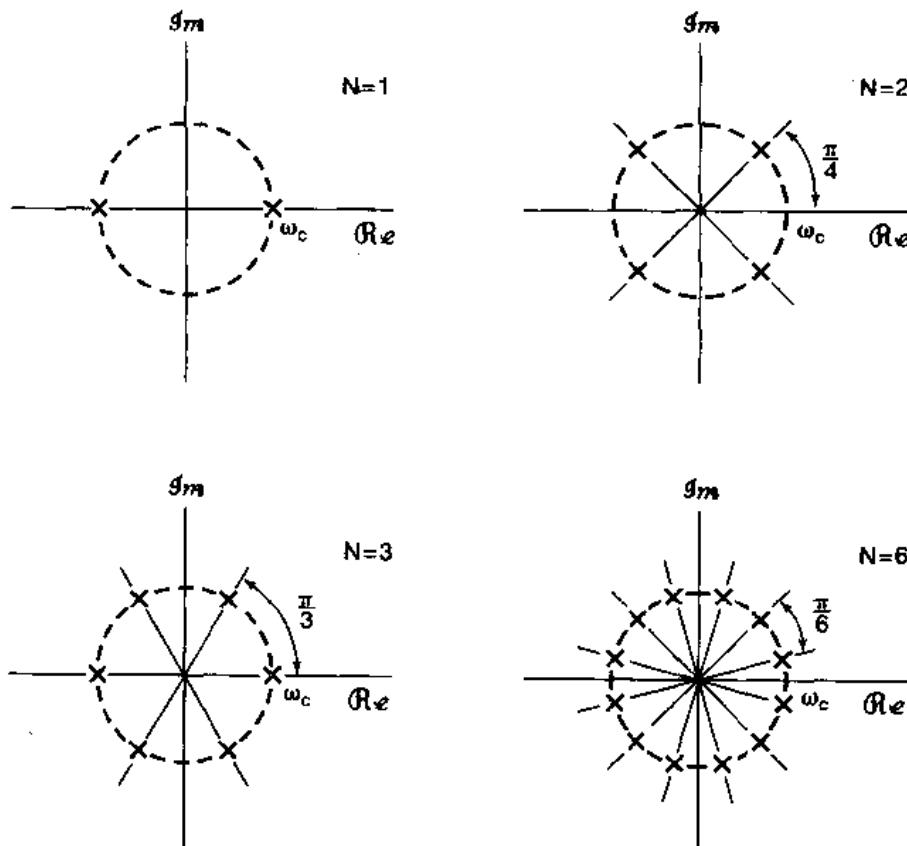


图 9.28 $N=1, 2, 3$ 和 6 时, $B(s)B(-s)$ 的极点位置

- 在 s 平面上，半径为 ω_c 的圆上，有 $2N$ 个极点在角度上成等分割配置。
- 极点永远不会位于 $j\omega$ 轴上，而且当 N 为奇数时，在 σ 轴上有极点， N 为偶数时则没有。
- 相邻极点之间的角度差是 π/N 弧度。

在已知 $B(s)B(-s)$ 极点的情况下，为了确定 $B(s)$ 的极点，可以观察到， $B(s)B(-s)$ 的极点总是成对出现的，即如果有一个极点是在 $s = s_p$ ，那么就也有一个极点在 $s = -s_p$ 。因此，为了构成 $B(s)$ 的极点，可以从每对极点当中选取一个。若将系统限为稳定和因果的，那么与 $B(s)$ 有关的极点就应该是位于该圆上沿左半面半圆上的极点。除了一个常数因子外，这些极点位置就给出了 $B(s)$ 的性质。然而，从(9.144)式看到 $B^2(s)|_{s=0} = 1$ ，或者等效地说，按(9.140)式，常数因子选择成使频率响应的模平方在 $\omega = 0$ 时为单位增益。

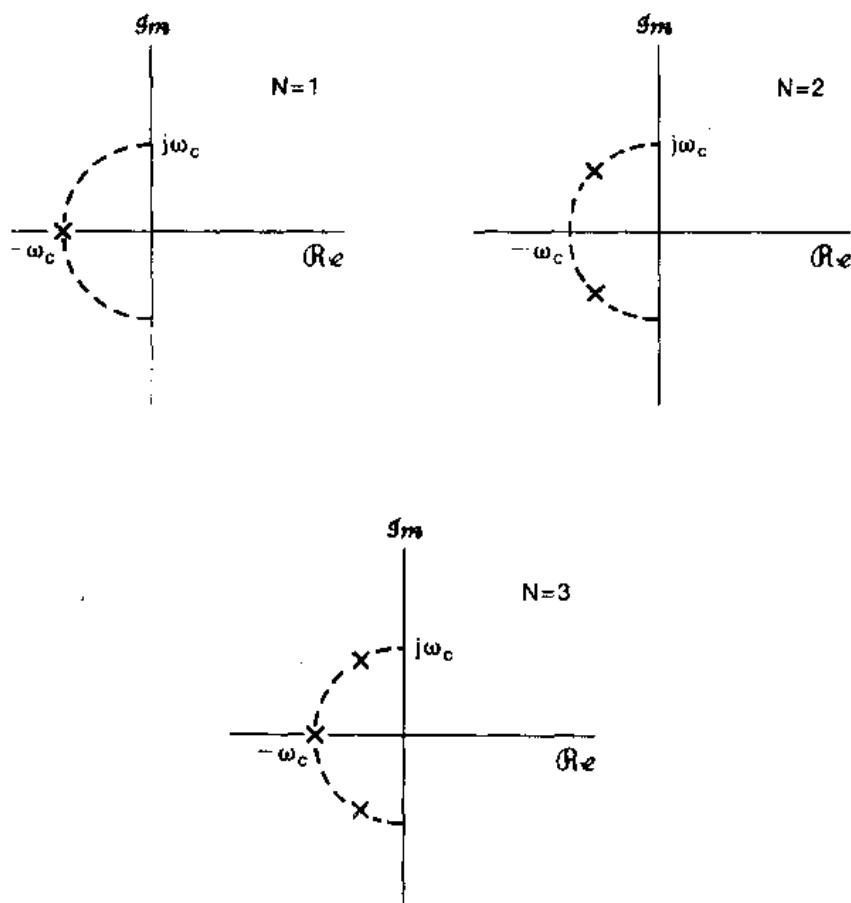


图 9.29 $N=1, 2$ 和 3 时， $B(s)$ 的极点位置

为了说明 $B(s)$ 的确定，现考虑 $N=1$, $N=2$ 和 $N=3$ 时的情况。根据(9.148)式已在图 9.28 中画出了 $B(s)B(-s)$ 的极点，对于所给三种 N 值的情况，在图 9.29 中指出了与 $B(s)$ 有关的极点。这些相应的转移函数就是

$$N=1: \quad B(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad (9.149)$$

$$N=2: \quad B(s) = \frac{\omega_c^2}{(s + \omega_c e^{j\pi/4})(s + \omega_c e^{-j\pi/4})} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2} \quad (9.150)$$

$$N=3: \quad B(s) = \frac{\omega_c^3}{(s + \omega_c)(s + \omega_c e^{j(\pi/3)})(s + \omega_c e^{-j(\pi/3)})} \\ = \frac{\omega_c^3}{(s^2 + \omega_c^2)(s^2 + \omega_c s + \omega_c^2)} = \frac{\omega_c^3}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3} \quad (9.151)$$

根据 9.7.3 节的讨论, 由 $B(s)$ 可以确定与其相关的线性常系数微分方程。对应以上三种 N 值, 相应的微分方程就是

$$N=1: \quad \frac{dy(t)}{dt} + \omega_c y(t) = \omega_c x(t) \quad (9.152)$$

$$N=2: \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\omega_c \frac{dy(t)}{dt} + \omega_c^2 y(t) = \omega_c^2 x(t) \quad (9.153)$$

$$N=3: \quad \frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\omega_c \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\omega_c^2 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_c^3 y(t) = \omega_c^3 x(t) \quad (9.154)$$

9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

利用拉普拉斯变换可以将微分、卷积、时移等这些时域中的运算用代数运算来代替。已经看到了这样做在分析 LTI 系统中的很多好处。在这一节将要看看系统函数代数属性的另一个重要应用, 即在分析 LTI 系统的互联, 以及用基本系统的构造单元的互联来综合出复杂系统中的应用。

9.8.1 LTI 系统互联的系统函数

考虑两个系统的并联, 如图 9.30

(a) 所示。总系统的单位冲激响应是

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (9.155)$$

由拉普拉斯变换的线性性质, 有

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad (9.156)$$

同理, 两个系统的级联, 如图 9.30(b) 所示, 其单位冲激响应为

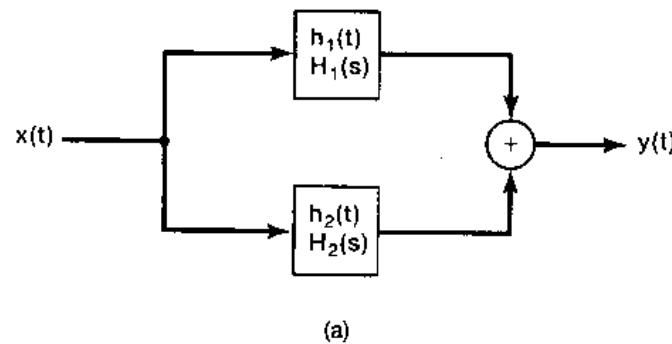
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (9.157)$$

和系统函数是

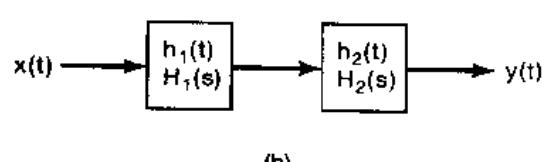
$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad (9.158)$$

通过代数运算利用拉普拉斯变换在表示线性系统的互联中可以扩展到远比图 9.30 这种简单的并联和级联更为复杂的互联中去。为此, 考虑一下图 9.31 所指出的两个系统的反馈互联。第 11 章

要详细讨论这类互联系统的设计、应用和分析。尽管在时域中分析这类系统不是特别简单, 但是确定由输入 $x(t)$ 到输出 $y(t)$ 的总系统函数还是一个直接的代数运算。具体地说, 由图



(a)



(b)

图 9.30 (a)两个 LTI 系统的并联;
(b)两个 LTI 系统的级联

9.31 有

$$Y(s) = H_1(s)E(s) \quad (9.159)$$

$$E(s) = X(s) - Z(s) \quad (9.160)$$

和

$$Z(s) = H_2(s)Y(s) \quad (9.161)$$

由此可得

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - H_2(s)Y(s)] \quad (9.162)$$

或者

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \quad (9.163)$$

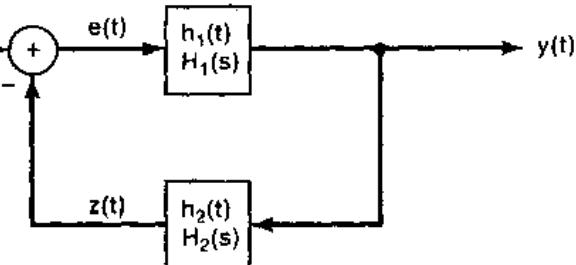


图 9.31 两个 LTI 系统的反馈互联

9.8.2 由微分方程和有理系统函数描述的因果 LTI 系统的方框图表示

在 2.4.3 节曾说明过，利用相加、乘以系数和积分这些基本运算，将由一阶微分方程描述的 LTI 系统用方框图来表示。这三种运算也能用来构造更高阶系统的方框图，本节将用几个例子来给予说明。

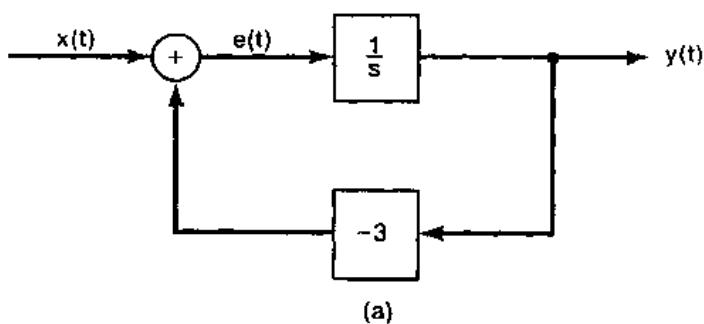
例 9.28 考虑一因果 LTI 系统，其系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

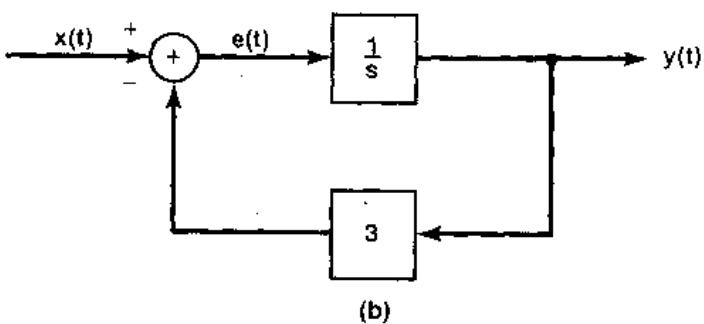
由 9.7.3 节知道，这个系统也能用下列微分方程来描述：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

具有初始松弛条件。在 2.4.3 节曾构造出一个方框图表示如图 2.32 所示。另一种等效的方框图（相当于图 2.32 中的 $a=3$ 和 $b=1$ ）如图 9.32(a) 所示。图中 $1/s$ 是一个单位冲激响应为 $u(t)$ 的系统的系统函数，也就是一个积分器的系统函数。在图 9.32(a) 的反馈回路中的系统函数 -3 就相当于乘以系数 -3 。这个方框图中所涉及的反馈回路很像上一小节所考虑，并画在图 9.31 的反馈回路，唯一的差别是输入到相加器中的这两个信号在图 9.32(a) 中是相



(a)



(b)

图 9.32 (a) 例 9.28 的因果 LTI 系统的方框图表示；
(b) 等效方框图表示

加, 而不是在图 9.31 中是相减。然而, 若在反馈回路中改变相乘系数的符号, 所得出的图 9.32(b)就与图 9.31 完全一样了。这样可用(9.163)式证明出

$$H(s) = \frac{1/s}{1 + 3/s} = \frac{1}{s + 3}$$

例 9.29 现在考虑一因果 LTI 系统, 其系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{s+2}{s+3} = \left(\frac{1}{s+3}\right)(s+2) \quad (9.164)$$

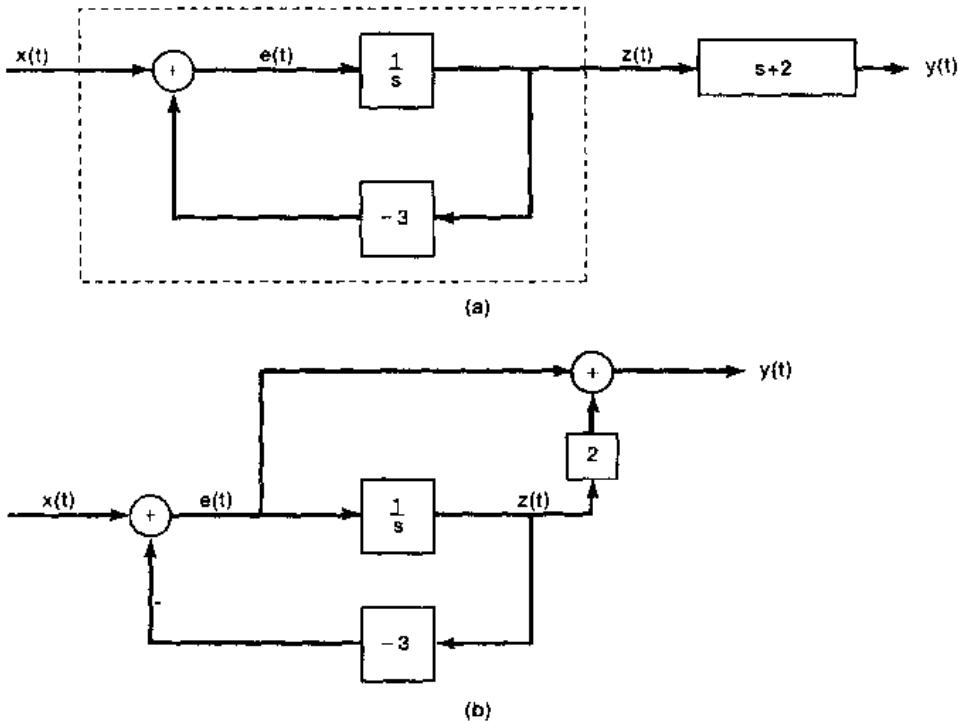


图 9.33 (a)例 9.29 的系统方框图表示; (b)等效方框图表示

由(9.164)式可以想到, 这个系统可以看成是一个系统函数为 $1/(s+3)$ 的系统与系统函数为 $(s+2)$ 的系统的级联结果。这就如图 9.33(a)所示, 图中已经用了图 9.32(a)的方框图来代表 $1/(s+3)$ 。

对于(9.164)式的系统, 还有可能得到另一种方框图表示。利用拉普拉斯变换的线性和微分性质可知, 图 9.33(a)中 $y(t)$ 和 $z(t)$ 是由下列方程关联起来的:

$$y(t) = \frac{dz(t)}{dt} + 2z(t)$$

然而, 输入至积分器的 $e(t)$ 就是输出 $z(t)$ 的导数, 所以

$$y(t) = e(t) + 2z(t)$$

这就直接导出另一种方框图表示, 如图 9.33(b)所示。注意, 因为

$$y(t) = \frac{dz(t)}{dt} + 2z(t)$$

方框图图 9.33(a)要求 $z(t)$ 的微分, 而与此对照, 图 9.33(b)并不涉及到任何信号的直接微分。

例 9.30 接下来考虑一因果二阶系统, 其系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad (9.165)$$

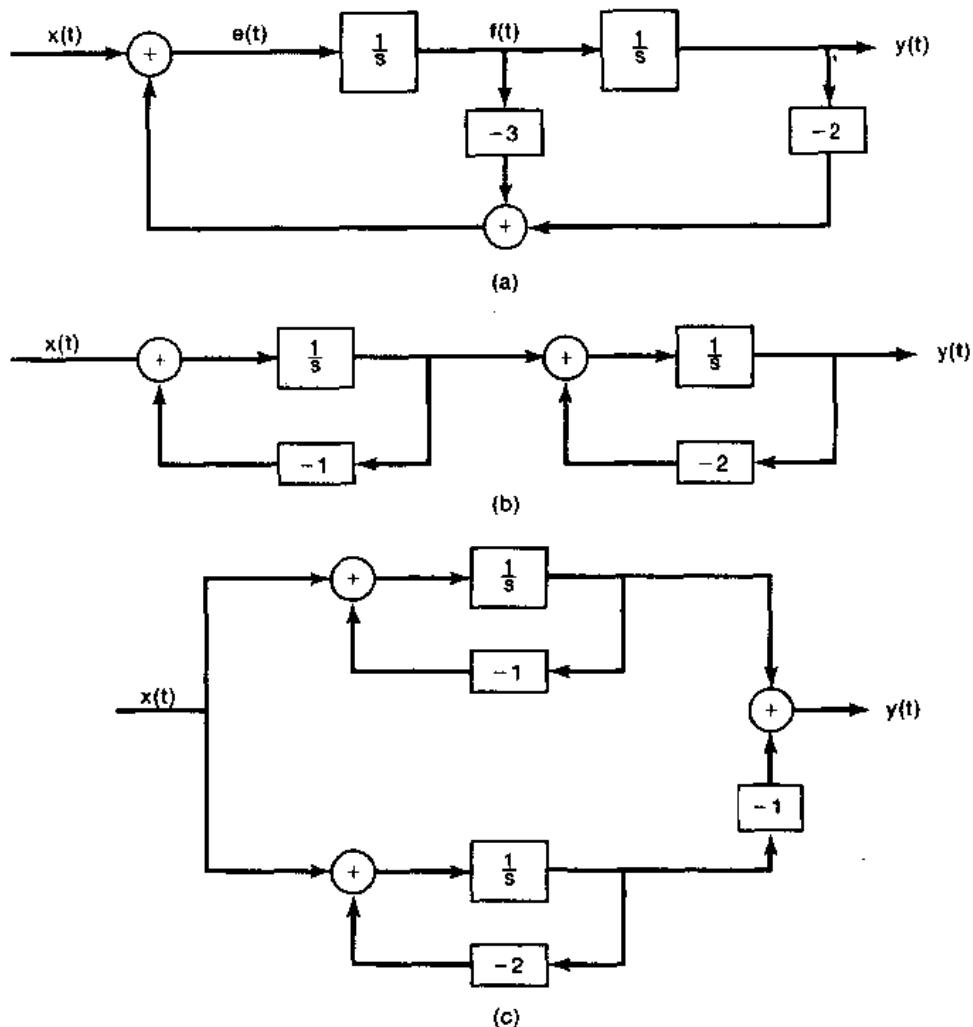


图 9.34 例 9.30 系统的方框图表示:(a)直接型; (b)级联型; (c)并联型

这个系统的输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 满足下面微分方程:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (9.166)$$

采用上面例子的类似想法, 可以得出这个系统的方框图表示如图 9.34(a)所示。因为, 积分器的输入就是积分器输出的导数, 所以方框图中各信号关联如下:

$$f(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$e(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

同时, 将(9.166)式重写成

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -3 \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) + x(t)$$

或者

$$e(t) = -3f(t) - 2y(t) + x(t)$$

这是与图 9.34(a)所代表的完全相同的。

因为在这个图上所出现的系数可以直接从系统函数中的系数, 或等效为微分方程中的系数确认出来, 所以称这种方框图为直接型表示。稍许对系统函数作些变化, 可以得到实际上很重要的其

它方框图表示。这就是，(9.165)式的 $H(s)$ 可重写成

$$H(s) = \left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

这就使人想到能将该系统表示成两个一阶系统的级联。这种级联型表示如图 9.34(b)所示。

另外，将 $H(s)$ 作部分分式展开，可得

$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

这就导致并联型表示，如图 9.34(c)所示。

例 9.31 作为最后一个例子，考虑如下系统函数：

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3as + 2} \quad (9.167)$$

再次利用系统函数的代数属性，可将 $H(s)$ 写成几种不同的形式，其中每一种都有一种方框图表示。特别是，能将 $H(s)$ 写成

$$H(s) = \left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2}\right)(2s^2 + 4s - 6)$$

这就是 $H(s)$ 可看成是图 9.34(a)的系统与系统函数为 $(2s^2 + 4s - 6)$ 的系统的级联。完全就像在例 9.29 中所做的那样，可以用“抽头”信号的办法把出现在第一个系统积分器输入端的信号抽出来，以提取这第二个系统所要求的导数。有关这一详细过程将在习题 9.36 中讨论，而对于所得的直接型方框图表示则如图 9.35 所示。再一次看到，在直接型表示中，方框图中所出现的系数可以凭直观直接由系统函数(9.167)式中的系数来确定。

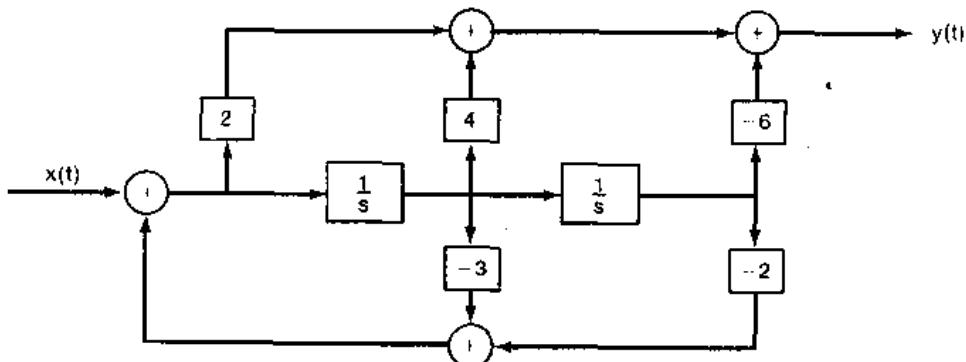


图 9.35 例 9.31 系统的直接型表示

另外，还能将 $H(s)$ 写成

$$H(s) = \left(\frac{2(s-1)}{s+2}\right)\left(\frac{s+3}{s+1}\right) \quad (9.168)$$

或者

$$H(s) = 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1} \quad (9.169)$$

其中的第一个是一种级联型表示，而第二个则是一种并联型表示。这些都将在习题 9.36 中讨论。

对于由微分方程和有理系统函数描述的因果 LTI 系统构造方框图表示的方法都可以用于高阶的系统。另外，往往在如何构成上有很大的灵活性。例如，若将(9.168)式中的分子颠倒一下次序，就可写成

$$H(s) = \left(\frac{s+3}{s+2}\right)\left(\frac{2(s-1)}{s+2}\right)$$

这又是一种不同的级联型表示。同样，正如在习题 9.38 中所说明的，一个四阶系统函数可以写成两个二阶系统函数的乘积，而其中每个二阶系统函数又有几种不同的表示方式（譬如，直接型、级联型或并联型）；并且还能写成低阶项的和，而每个低阶项又有几种不同的表示。这样一来，简单的低阶系统就可以作为基本的构造单元，用来实现更加复杂的高阶系统。

9.9 单边拉普拉斯变换

本章前面各节所讨论的拉普拉斯变换一般称为双边拉普拉斯变换。稍许有些不同的另一种拉普拉斯变换形式称为单边拉普拉斯变换，将在这一节给予介绍和讨论。单边拉普拉斯变换在分析具有非零初始条件的（也即系统最初不是松弛的），由线性常系数微分方程所描述的因果系统中也有很大的价值。

一个连续时间信号 $x(t)$ 的单边拉普拉斯变换 $\mathcal{X}(s)$ 定义为

$$\mathcal{X}(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (9.170)$$

这里，积分的下式取为 0^- ，以表明在积分区间内包括了集中于 $t=0$ 的任何冲激或高阶奇异函数。对于一个信号和它的单边拉普拉斯变换再次采用一个方便的简化符号为

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \quad (9.171)$$

将(9.170)式和(9.3)式比较一下就可发现，单边和双边拉普拉斯变换在定义上的不同在于积分的下限。双边拉普拉斯变换决定于 $t=-\infty$ 到 $t=+\infty$ 的整个信号，而单边拉普拉斯变换仅仅决定于 $t=0^-$ 到 ∞ 的信号。这样以来，在 $t < 0$ 时不同，而在 $t \geq 0$ 时相同的两个信号，将有不同的双边拉普拉斯变换，而有相同的单边拉普拉斯变换。同理，任何在 $t < 0$ 都为零的信号其双边和单边拉普拉斯变换相等。

因为 $x(t)$ 的单边拉普拉斯变换就是将信号 $x(t)$ ，在 $t < 0$ 时将它的值置于 0 时所求得的双边拉普拉斯变换，因此有关双边拉普拉斯变换中的很多细节、概念和结果都能直接适合于单边的情况。例如，利用 9.2 节对右边信号的性质 4，就可得出，(9.170)式的 ROC 总是位于某个右半平面。单边拉普拉斯反变换的求取也与双边变换是相同的，只是单边变换的 ROC 一定总是在右半面。

9.9.1 单边拉普拉斯变换举例

为了说明单边拉普拉斯变换，考虑下面这些例子：

例 9.32 考虑信号 $x(t)$

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \quad (9.172)$$

因为 $x(t)=0$, $t < 0$ ，所以 $x(t)$ 的单边和双边拉普拉斯变换是一致的。于是，由表 9.2 可得

$$\mathcal{X}(s) = \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \Re\{s\} > -a \quad (9.173)$$

例 9.33 考虑信号 $x(t)$

$$x(t) = e^{-a(t+1)} u(t+1) \quad (9.174)$$

这个信号的双边变换 $X(s)$ 可由例 9.1 和时移性质(9.5.2 节)求得为

$$X(s) = \frac{e^s}{s+a}, \quad \Re\{s\} > -a \quad (9.175)$$

与此对照的是，其单边变换是

$$\mathcal{R}(s) = \int_0^\infty e^{-a(t+1)} u(t+1) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-a} e^{-t(s+a)} dt = e^{-a} \frac{1}{s+a}, \quad \Re\{s\} > -a \quad (9.176)$$

因此，这个例子的单边和双边拉普拉斯变换是明显不同的。事实上，应该将 $\mathcal{R}(s)$ 看作不是 $x(t)$ ，而是 $x(t)u(t)$ 的双边变换，这就与先前关于单边变换就是置一个在 $t < 0^-$ 时为零的信号的双边变换这一结论一致了。

例 9.34 考虑下面信号 $x(t)$:

$$x(t) = \delta(t) + 2u_1(t) + e^t u(t) \quad (9.177)$$

因为 $x(t)=0, t < 0$ ，并且在积分区间内包括了在原点的奇异函数，所以 $x(t)$ 的单边变换与双边变换相同。根据表 9.2 的变换对 15， $u_n(t)$ 的双边变换是 s^n ，所以有

$$\mathcal{R}(s) = X(s) = 1 + 2s + \frac{1}{s-1} = \frac{s(2s-1)}{s-1}, \quad \Re\{s\} > 1 \quad (9.178)$$

例 9.35 考虑如下单边拉普拉斯变换：

$$\mathcal{R}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (9.179)$$

在例 9.9 中已经讨论过一个双边拉普拉斯变换的反变换问题，其代数表示式与(9.179)式完全一样，不过是对几种不同的 ROC 来做的。对于单边变换，ROC 一定位于 $\mathcal{R}(s)$ 的最右边极点的右边的右半面，也即在这个情况下 ROC 由全部 $\Re\{s\} > -1$ 的点 s 所组成。然后，就完全和例 9.9 一样，将这个单边变换求反变换而得

$$x(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t), \quad t > 0^- \quad (9.180)$$

这里要强调，单边拉普拉斯变换所提供的仅为 $t > 0^-$ 时，信号的有关信息。

例 9.36 考虑如下单边变换：

$$\mathcal{R}(s) = \frac{s^2 - 3}{s + 2} \quad (9.181)$$

因为 $\mathcal{R}(s)$ 分子的阶不是严格地小于分母的阶，所以可将 $\mathcal{R}(s)$ 展开为

$$\mathcal{R}(s) = A + Bs + \frac{C}{s+2} \quad (9.182)$$

令(9.181)式和(9.182)式相等，并通分约去分母可得

$$s^2 - 3 = (A + Bs)(s + 2) + C \quad (9.183)$$

令左右两边同 s 方次的系数相等，就有

$$\mathcal{R}(s) = -2 + s + \frac{1}{s+2} \quad (9.184)$$

其 ROC 为 $\Re\{s\} > -2$ 。将每一项求反变换可得

$$x(t) = -2\delta(t) + u_1(t) + e^{-2t}u(t), \quad t > 0^- \quad (9.185)$$

9.9.2 单边拉普拉斯变换性质

和双边拉普拉斯变换一样，单边拉普拉斯变换也有许多重要的性质，其中有一些与双边

变换是相同的，而另有几个则有明显的不同。表 9.3 综合了这些性质。要注意的是，对每个信号的单边拉普拉斯变换并没有另辟一列明确地指出它们的 ROC，这是由于任何单边拉普拉斯变换的 ROC 总是某一右半面的缘故。例如，一个有理单边拉普拉斯变换的 ROC 总是在最右边极点的右边。

表 9.3 单边拉普拉斯变换性质

性质	信号	单边拉普拉斯变换
	$x(t)$	$\mathcal{X}(s)$
	$x_1(t)$	$\mathcal{X}_1(s)$
	$x_2(t)$	$\mathcal{X}_2(s)$
线性	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\mathcal{X}_1(s) + b\mathcal{X}_2(s)$
s 域平移	$e^{s_0 t}x(t)$	$\mathcal{X}(s - s_0)$
时域尺度变换	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a}\mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
共轭	$x^*(t)$	$\mathcal{X}^*(s^*)$
卷积[假设 $t < 0$, $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 均为零]	$x_1(t) * x_2(t)$	$\mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s)$
时域微分	$\frac{d}{dt}x(t)$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
s 域微分	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}\mathcal{X}(s)$
时域积分	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}\mathcal{X}(s)$

初值和终值定理

若 $x(t)$ 在 $t = 0$ 不包含任何冲激或高阶奇异函数，则

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s)$$

将表 9.3 和表 9.1 作一对比可见，单边拉普拉斯变换的收敛域 ROC 总是在右半面，线性、s 域平移、时域尺度变换、共轭和 s 域微分等性质都与双边变换是一样的。9.5.10 节的初值与终值定理对单边拉普拉斯变换也成立^①。这些性质的推导也与双边变换情况相同。

单边变换的卷积性质也与双边变换情况十分类似。这个性质说的是，若

$$x_1(t) = x_2(t) = 0, \text{ 对全部 } t < 0 \quad (9.186)$$

则

$$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s) \quad (9.187)$$

因为在(9.186)式的条件下， $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的单边变换和双边变换是一样的，所以就可以立即由双边变换的卷积性质得出(9.187)式。因此，只要是输入在 $t < 0$ 为零时处理因果的 LTI 系统（对此，系统函数既是单位冲激响应的双边，又是单边的拉普拉斯变换），那么在这一章所建立并应用的系统分析方法和系统函数的代数属性勿需任何变化都适用于单边拉普拉斯变

① 事实上，初值与终值定理基本上应属单边变换的性质，因为它们仅适用于 $t < 0, x(t) = 0$ 的信号。

换。表 9.3 的积分性质就是一个例子，若 $x(t) = 0, t < 0$ ，则

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(s) \mathcal{U}(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(s) \quad (9.188)$$

作为第二种情况，考虑下面这个例子。

例 9.37 假设由下列微分方程描述的一个因果 LTI 系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (9.189)$$

具有初始松弛条件。利用(9.133)式，可求得该系统的系统函数是

$$\mathcal{H}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad (9.190)$$

设系统的输入是 $x(t) = \alpha u(t)$ 。这时，输出 $y(t)$ 的单边(和双边)拉普拉斯变换是

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(s) &= \mathcal{X}(s) \mathcal{H}(s) = \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{\alpha/2}{s} - \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\alpha/2}{s+2} \end{aligned} \quad (9.191)$$

将例 9.32 用到(9.191)式中的每一项，得到

$$y(t) = \alpha \left[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right] u(t) \quad (9.192)$$

重要的是要注意，单边拉普拉斯变换的卷积性质仅在(9.187)式中 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 两者在 $t < 0$ 都为零时才成立。这就是说，虽然 $x_1(t) * x_2(t)$ 的双边拉普拉斯变换总是等于 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的双边拉普拉斯变换的乘积，但是如果 $x_1(t)$ 或 $x_2(t)$ 中有一个在 $t < 0$ 时不为零，一般来说 $x_1(t) * x_2(t)$ 的单边拉普拉斯变换不等于各自单边拉普拉斯变化的乘积。(见习题 9.39)。

单边和双边变换的性质之间一个特别重要的差别是微分性质。考虑某一信号 $x(t)$ ，其单边拉普拉斯变换为 $\mathcal{L}(s)$ ，那么根据分部积分法可求得 $dx(t)/dt$ 的单边变换为

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt &= x(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= s \mathcal{L}(s) - x(0^-) \end{aligned} \quad (9.193)$$

同理，再次利用分部积分又可求得 $d^2x(t)/dt^2$ 的单边拉普拉斯变换，即

$$s^2 \mathcal{L}(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \quad (9.194)$$

式中 $x'(0^-)$ 为 $x(t)$ 的导数在 $t = 0^-$ 的值。显而易见，可以继续这一过程而得到高阶导数的单边拉普拉斯变换。

9.9.3 利用单边拉普拉斯变换求解微分方程

单边拉普拉斯变换的一个主要应用是在求解具有非零初始条件的线性常系数微分方程上，现用下面例子来说明它。

例 9.38 考虑由(9.189)式的微分方程表征的系统，其初始条件为

$$y(0^-) = \beta, \quad y'(0^-) = \gamma \quad (9.195)$$

设 $x(t) = \alpha u(t)$ 。那么在(9.189)式两边应用单边拉普拉斯变换，可得

$$s^2\mathcal{Y}(s) - \beta s - \gamma + 3s\mathcal{Y}(s) - 3\beta + 2\mathcal{Y}(s) = \frac{\alpha}{s} \quad (9.196)$$

或者

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)} + \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)} \quad (9.197)$$

式中 $\mathcal{Y}(s)$ 是 $y(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

参照例 9.37, 特别是(9.191)式可以看出, (9.197)式右边最后一项就是当(9.195)式的初始条件均为零 ($\beta = \gamma = 0$) 时系统响应的单边拉普拉斯变换。也就是说, 最后一项代表了由(9.189)式描述的因果 LTI 系统在初始松弛条件下的响应。这个响应常称作零状态响应, 也即当初始状态 [(9.195)式的一组初始条件] 为零时的响应。

对于(9.197)式右边的头两项也可作出类似的解释。这两项所代表的是当输入为零 ($a=0$) 时, 该系统响应的单边拉普拉斯变换。这个响应常称作零输入响应。注意, 零输入响应是初始条件值的线性函数(即, β 和 γ 的值加大一倍, 零输入响应也跟着加倍)。再者, (9.197)式对于具有非零初始条件的线性常系数微分方程的解说明了一个重要事实, 即总的响应就是零状态响应和零输入响应的叠加。零状态响应是将初始置于零所得到的响应, 也即一个由该微分方程定义的 LTI 系统在初始松弛条件下的响应。零输入响应则是输入为零, 系统对初始条件的响应。在习题 9.20, 9.40 和 9.66 中还能找到其它的例子。

最后, 对于任何 α, β 和 γ 值, 当然都能将 $\mathcal{Y}(s)$ 展开成部分分式, 而求反变换得出 $y(t)$ 。例如, 若 $\alpha=2, \beta=3$ 和 $\gamma=-5$, 那么(9.197)式部分分式展开的结果就是

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \quad (9.198)$$

对每一项应用例 9.32 的结果就有

$$y(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t), \quad t > 0 \quad (9.199)$$

9.10 小 结

这一章讨论并研究了拉普拉斯变换, 它可以看成是傅里叶变换的一种推广。在 LTI 系统的分析和研究中, 拉普拉斯变换是一种特别有用的分析工具。由于拉普拉斯变换具有的性质, LTI 系统, 其中包括由线性常系数微分方程表示的系统, 都能够利用代数运算在变换域中进行表征和分析。另外, 系统函数的代数属性为分析 LTI 系统的互联和由微分方程描述的 LTI 系统方框图表示的构成都提供了一个方便的工具。

对于具有有理拉普拉斯变换的信号与系统, 变换往往很方便地用在复平面内标出零点和极点的位置, 并指出它们的收敛域来表示。从零极点图上, 傅里叶变换, 除一个常数因子外, 可以用几何的方法求得。因果性, 稳定性以及其它的一些特征也很容易地从极点位置和有关收敛域的了解中得以识别。

本章主要关注的是双边拉普拉斯变换, 同时也介绍了略有不同的另一种拉普拉斯变换形式, 即单边拉普拉斯变换。单边拉普拉斯变换能够看作是在 $t=0^-$ 以前为零的信号的双边拉普拉斯变换。这种单边拉普拉斯变换在求解具有非零初始条件的线性常系数微分方程中是特别有用的。

习 题

习题的第一部分属基本题, 答案在书末给出。余下的三部分题分属基本题, 深入题和扩充题。

基本题(附答案)

9.1 对下列每个积分, 给出保证积分收敛的实参数 σ 值:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^\infty e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt & \text{(b)} \int_{-\infty}^0 e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \\ \text{(c)} \int_{-5}^5 e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt & \text{(d)} \int_{-\infty}^\infty e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \\ \text{(e)} \int_{-\infty}^\infty e^{-5|t|} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt & \text{(f)} \int_{-\infty}^0 e^{-5|t|} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \end{array}$$

9.2 考虑信号

$$x(t) = e^{-5t} u(t-1)$$

其拉普拉斯变换记为 $X(s)$

(a) 利用(9.3)式求 $X(s)$, 并给出它的 ROC。

(b) 确定有限数 A 和 t_0 , 以使 $g(t)$

$$g(t) = Ae^{-5t}u(-t-t_0)$$

的拉普拉斯变换 $G(s)$ 与 $X(s)$ 有相同的代数式。对应于 $G(s)$ 的 ROC 是什么?

9.3 考虑信号

$$x(t) = e^{-5t}u(t) + e^{-\beta t}u(t)$$

其拉普拉斯变换记为 $X(s)$ 。若 $X(s)$ 的 ROC 是 $\Re\{s\} > -3$, 应在 β 的实部和虚部上施加什么限制?

9.4 对于 $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} e^t \sin 2t, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

的拉普拉斯变换指出它的极点位置及其 ROC。

9.5 对下列每个信号拉普拉斯变换的代数表示式, 确定位于有限 s 平面上的零点个数和在无限远点的零点个数:

$$\text{(a)} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} \quad \text{(b)} \frac{s+1}{s^2-1} \quad \text{(c)} \frac{s^3-1}{s^2+s+1}$$

9.6 已知一个绝对可积的信号 $x(t)$ 有一个极点在 $s=2$, 试回答下列问题:

(a) $x(t)$ 可能是有限持续期的吗? (b) $x(t)$ 是左边的吗?

(c) $x(t)$ 是右边的吗? (d) $x(t)$ 是双边的吗?

9.7 有多少个信号, 它们的拉普拉斯变换在其收敛域内都有如下表示式的拉普拉斯变换:

$$\frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$$

9.8 设 $x(t)$ 是某一信号, 它有一个有理的拉普拉斯变换总共具有两个极点在 $s=-1$ 和 $s=-3$ 。若 $g(t)=e^{2t}x(t)$, 其傅里叶变换 $G(j\omega)$ 收敛, 请问 $x(t)$ 是否是左边的, 右边的, 或是双边的?

9.9 已知

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \quad \Re\{s\} > \Re\{-a\}$$

求

$$X(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+7s+12}, \quad \Re\{s\} > -3$$

的反变换。

9.10 根据相应的零极点图, 利用傅里叶变换模的几何求值方法, 确定下列每个拉普拉斯变换其相应的傅里叶变换的模特性是否近似为低通, 高通或带通:

$$\text{(a)} H_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad \text{(b)} H_2(s) = \frac{s}{s^2+s+1}, \quad \Re\{s\} > -\frac{1}{2}$$

$$(c) H_3(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 1}, \quad \Re\{s\} > -1$$

9.11 利用零极点图的几何求值方法，确定信号的拉普拉斯变换为

$$X(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1}, \quad \Re\{s\} > -\frac{1}{2}$$

的傅里叶变换的模特性。

9.12 关于信号 $x(t)$ ，假设已知下面三点：

1. $x(t) = 0, t < 0$
2. $x(k/80) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$
3. $x(1/160) = e^{-120}$

设 $X(s)$ 为 $x(t)$ 的拉普拉斯变换，确定下面哪种说法是与给出的有关 $x(t)$ 信息相一致的：

- (a) $X(s)$ 在有限 s 平面内仅有一个极点。
- (b) $X(s)$ 在有限 s 平面内仅有两个极点。
- (c) $X(s)$ 在有限 s 平面内多于两个极点

9.13 设 $g(t)$ 为

$$g(t) = x(t) + ax(-t)$$

式中

$$x(t) = \beta e^{-t} u(t)$$

$g(t)$ 的拉普拉斯变换是

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 1}, \quad -1 < \Re\{s\} < 1$$

试确定 a 和 β 的值？

9.14 关于信号 $x(t)$ 及其拉普拉斯变换 $X(s)$ 给出如下条件：

1. $x(t)$ 是实值的偶信号。
2. 在有限 s 平面内， $X(s)$ 有 4 个极点而没有零点。
3. $X(s)$ 有一个极点在 $s = (1/2)e^{j\pi/4}$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 4$

试确定 $X(s)$ 和它的 ROC。

9.15 有两个右边信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ ，满足下面微分方程：

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2y(t) + \delta(t)$$

和

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t)$$

试确定 $Y(s)$ 和 $X(s)$ 及其收敛域。

9.16 有一单位冲激响应为 $h(t)$ 的因果 LTI 系统 S，其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下面线性常系数微分方程所关联：

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1 + \alpha) \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \alpha(\alpha + 1) \frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2 y(t) = x(t)$$

(a) 若

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} + h(t)$$

$G(s)$ 有多少个极点？

(b) 对于实参数 α 为何值，才能保证系统 S 是稳定的？

- 9.17 有一因果 LTI 系统 S, 其方框图表示如图 P9.17 所示, 试确定描述该系统输入 $x(t)$ 到输出 $y(t)$ 的微分方程。

- 9.18 考虑在习题 3.20 所讨论的 RLC 电路所代表的因果 LTI 系统。

(a) 确定 $H(s)$ 并给出它的收敛域。答案应与系统是因果和稳定的条件一致。

(b) 利用 $H(s)$ 的零极点图和傅里叶变换模特性的几何求值法, 判断对应的傅里叶变换的模特性是否近似为一个低通, 高通或带通特性。

(c) 若将 R 的值改变为 $10^{-3}\Omega$, 试确定 $H(s)$ 并给出它的收敛域。

(d) 利用在(c)中所得 $H(s)$ 的零极点图和傅里叶变换模特性的几何求值法, 判断对应的傅里叶变换的模特性是否近似为一个低通, 高通或带通特性。

- 9.19 确定下列各信号的单边拉普拉斯变换, 并给出相应的收敛域:

$$(a) x(t) = e^{-2t}u(t+1) \quad (b) x(t) = \delta(t+1) + \delta(t) + e^{-2(t+3)}u(t+1)$$

$$(c) x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-4t}u(t)$$

- 9.20 考虑习题 3.19 的 RL 电路。

(a) 当输入电流 $x(t) = e^{-2t}u(t)$ 时, 确定该电路的零状态响应。

(b) 已知 $y(0^-) = 1$ 确定该电路在 $t > 0^-$ 时的零输入响应。

(c) 当输入电流 $x(t) = e^{-2t}u(t)$, 初始条件同(b)时, 确定电路的输出。

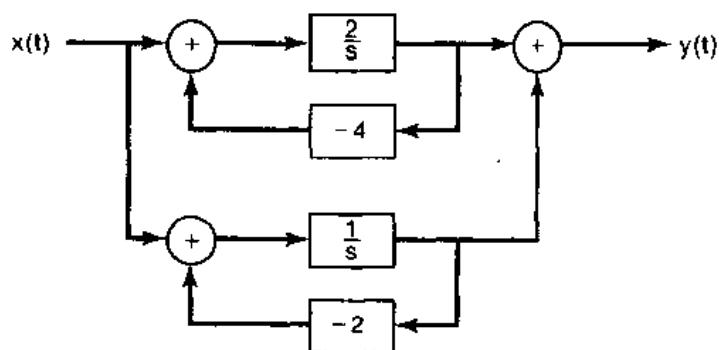


图 P9.17

基本题

- 9.21 确定下列时间函数的拉普拉斯变换, 收敛域及零极点图:

$$(a) x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t) \quad (b) x(t) = e^{-4t}u(t) + e^{-5t}(\sin 5t)u(t)$$

$$(c) x(t) = e^{2t}u(-t) + e^{3t}u(-t) \quad (d) x(t) = te^{-2|t|}$$

$$(e) x(t) = |t|e^{-2|t|} \quad (f) x(t) = |t|e^{2t}u(-t)$$

$$(g) x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases}$$

$$(h) x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$(i) x(t) = \delta(t) + u(t) \quad (j) x(t) = \delta(3t) + u(3t)$$

- 9.22 对下列每个拉普拉斯变换及其收敛域, 确定时间函数 $x(t)$:

$$(a) \frac{1}{s^2 + 9}, \quad \Re\{s\} > 0$$

$$(b) \frac{s}{s^2 + 9}, \quad \Re\{s\} < 0$$

$$(c) \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9}, \quad \Re\{s\} < -1$$

$$(d) \frac{s+2}{s^2 + 7s + 12}, \quad -4 < \Re\{s\} < -3$$

$$(e) \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6}, \quad -3 < \Re\{s\} < -2$$

$$(f) \frac{(s+1)^2}{s^2 - s + 1}, \quad \Re\{s\} > \frac{1}{2}$$

$$(g) \frac{s^2 - s + 1}{(s+1)^2}, \quad \Re\{s\} > -1$$

- 9.23 对于下面关于 $x(t)$ 的每一种说法, 和图 P9.23 中 4 个零极点图中的每一个, 确定在 ROC 上相应的限制:

1. $x(t)e^{-3t}$ 是绝对可积的。

2. $x(t) * (e^{-t}u(t))$ 是绝对可积的。

3. $x(t) = 0, t > 1$

4. $x(t) = 0, t < -1$

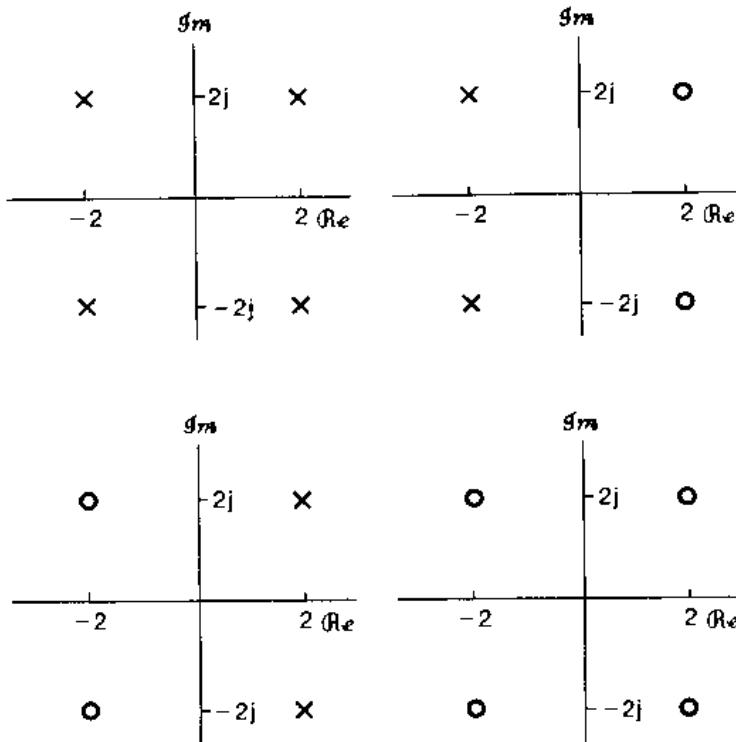


图 P9.23

9.24 整个这个题目都认为拉普拉斯变换的收敛域总是包括 $j\omega$ 轴。

- (a) 考虑一信号 $x(t)$, 其傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 而拉普拉斯变换为 $X(s) = s + 1/2$ 。画出 $X(s)$ 的零极点图。另外, 对某一给定的 ω 画出一个向量, 其长度代表 $|X(j\omega)|$, 而其对实轴的角度代表 $\angle X(j\omega)$ 。
 (b) 利用考查该零极点图和(a)中的向量图, 确定另一个不同的拉普拉斯变换 $X_1(s)$, 其对应的时间函数是 $x_1(t)$, 使之有

$$|X_1(j\omega)| = |X(j\omega)|$$

但

$$x_1(t) \neq x(t)$$

给出零极点图和代表 $X_1(j\omega)$ 的有关向量。

- (c) 对于(b)的答案, 再检查一下有关的向量图, 确定 $\angle X(j\omega)$ 和 $\angle X_1(j\omega)$ 之间的关系。

- (d) 确定某一拉普拉斯变换 $X_2(s)$, 以使有

$$\angle X_2(j\omega) = \angle X(j\omega)$$

但是 $x_2(t)$ 不是正比于 $x(t)$ 的。给出 $X_2(s)$ 的零极点图和代表 $X_2(j\omega)$ 的有关向量。

- (e) 对于(d)的答案, 确定 $|X_2(j\omega)|$ 和 $|X(j\omega)|$ 之间的关系。

- (f) 考虑一信号 $x(t)$, 其拉普拉斯变换为 $X(s)$, 零极点图如图 P9.24 所示。确定 $X_1(s)$, 以使得 $|X(j\omega)| = |X_1(j\omega)|$, 而且 $X_1(s)$ 的全部极点和零点都位于 s 平面的左半面 [即 $\Re\{s\} < 0$]。另外, 再确定 $X_2(s)$, 以使得 $\angle X(j\omega) = \angle X_2(j\omega)$, 而且 $X_2(s)$ 的全部极点和零点都位于 s 平面的左半面。

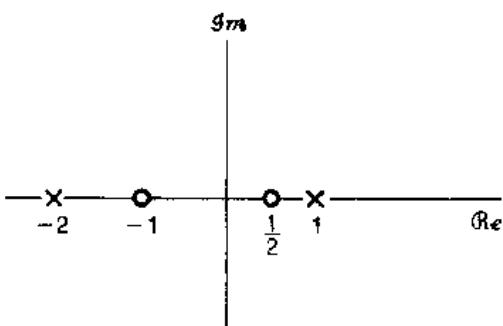


图 P9.24

9.25 利用 9.4 节所建立的傅里叶变换的几何确定法，对图 P9.25 中的每个零极点图画出有关傅里叶变换的模特性。

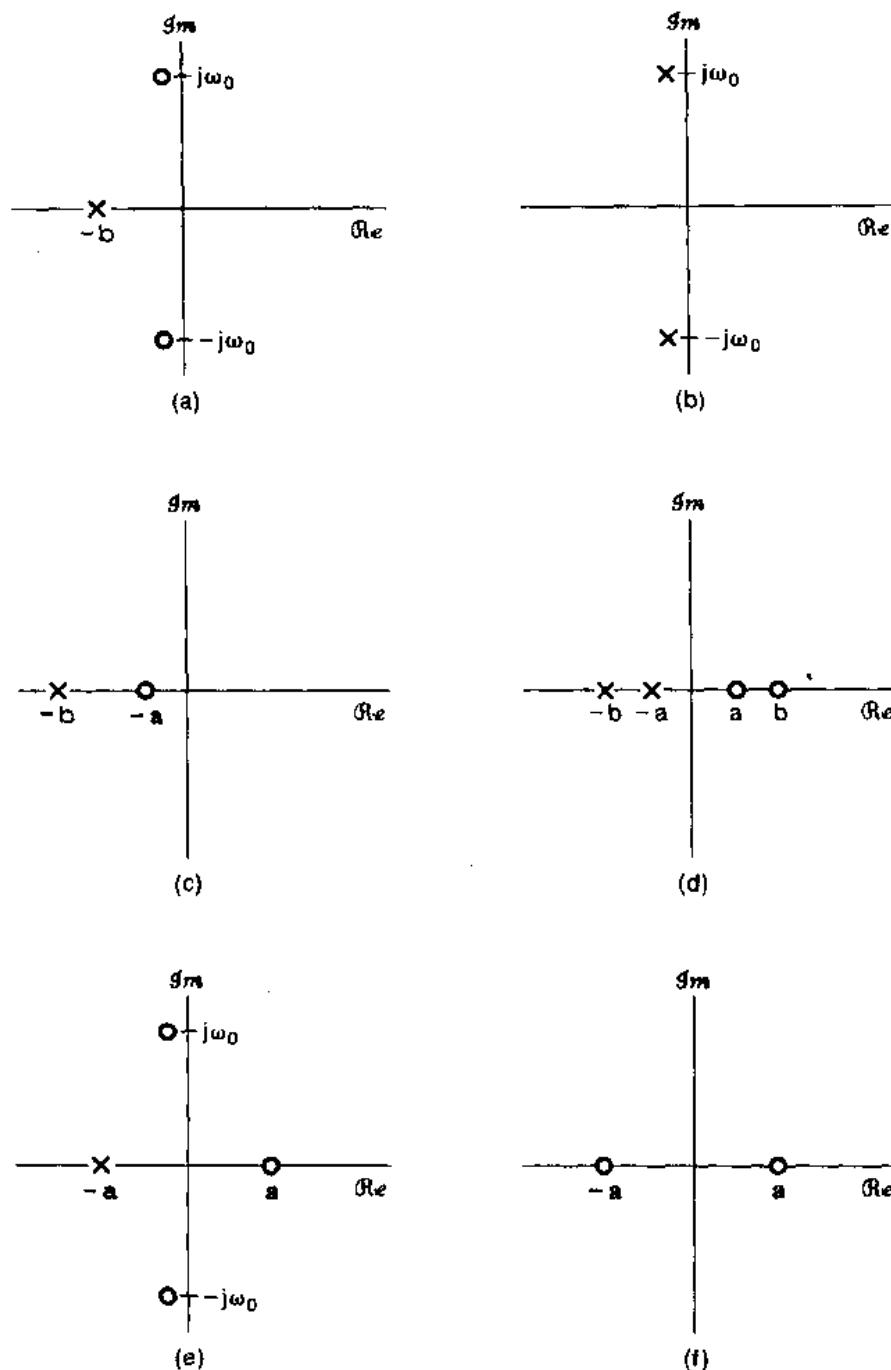


图 P9.25

9.26 考虑一信号 $y(t)$ ，它与两个信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的关系是

$$y(t) = x_1(t-2) * x_2(-t+3)$$

式中

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad \text{和} \quad x_2(t) = e^{-3t}u(t)$$

已知

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{s} \frac{1}{s+a}, \quad \Re\{s\} > a$$

利用拉普拉斯变换性质，确定 $y(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s)$ 。

- 9.27 关于一个拉普拉斯变换为 $X(s)$ 的实信号 $x(t)$ 给出下列 5 个条件：

1. $X(s)$ 只有两个极点。
2. $X(s)$ 在有限 s 平面上没有零点。
3. $X(s)$ 有一个极点在 $s = -1 + j$ 。
4. $e^{2t}x(t)$ 不是绝对可积的。
5. $X(0) = 8$ 。

试确定 $X(s)$ 并给出它的收敛域。

- 9.28 考虑有一 LTI 系统，其系统函数 $H(s)$ 的零极点图如图 P9.28 所示。

- (a) 指出与该零极点图有关的所有可能的 ROC。
- (b) 对于(a)中所标定的每个 ROC，给出有关的系统是否是稳定和/或因果的。

- 9.29 有一 LTI 系统，输入 $x(t) = e^{-t}u(t)$ ，单位冲激响应 $h(t) = e^{-2t}u(t)$ 。

- (a) 确定 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。
- (b) 利用卷积性质确定输出 $y(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s)$ 。
- (c) 由(b)所求得的 $y(t)$ 的拉普拉斯变换求 $y(t)$ 。
- (d) 将 $x(t)$ 和 $h(t)$ 直接卷积验证(c)的结果。

- 9.30 一个压力计可以用一个 LTI 系统来仿真，对于一个单位阶跃的输入，其响应为 $(1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$ 。现在某一输入 $x(t)$ 下，观察到的输出是 $(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ 。

对于这个已观察到的结果，确定该压力计的真正压力输入（作为时间的函数）。

- 9.31 有一连续时间 LTI 系统，其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下列微分方程所关联：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

设 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 分别是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的拉普拉斯变换， $H(s)$ 是系统单位冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。

- (a) 求 $H(s)$ 作为 s 的两个多项式之比，画出 $H(s)$ 的零极点图。

- (b) 对下列每一种情况求 $h(t)$ ：

- (i) 系统是稳定的。 (ii) 系统是因果的。 (iii) 系统既不稳定又不是因果的。

- 9.32 一个单位冲激响应为 $h(t)$ 的因果 LTI 系统有下列性质：

- (a) 当系统的输入为 $x(t) = e^{2t}$ ，对全部 t 时，输出对全部 t 是 $y(t) = (1/6)e^{2t}$ 。

- (b) 单位冲激响应 $h(t)$ 满足下列微分方程：

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = (e^{-4t})u(t) + bu(t)$$

这里 b 是一个未知常数。

确定该系统的系统函数 $H(s)$ ，以与上述性质相符。在答案中不应该有未知常数，也就是说该未知常数 b 不应该出现在答案中。

- 9.33 有一因果 LTI 系统的系统函数是

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2}$$

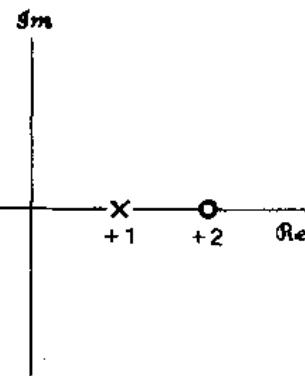


图 P9.28

当输入 $x(t)$ 为

$$x(t) = e^{-|t|}, \quad -\infty < t < \infty$$

求出并画出响应 $y(t)$ 。

- 9.34 假设关于一个单位冲激响应为 $h(t)$ 和有理系统函数为 $H(s)$ 的因果而稳定的 LTI 系统给出下列信息：

1. $H(1) = 0.2$
2. 当输入为 $u(t)$ 时，输出是绝对可积的。
3. 当输入为 $tu(t)$ 时，输出不是绝对可积的。
4. 信号 $d^2h(t)/dt^2 + 2dh(t)/dt + 2h(t)$ 是有限长的。
5. $H(s)$ 在无限远点只有一个零点。

确定 $H(s)$ 及其收敛域。

- 9.35 一个因果 LTI 系统的输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 是通过由图 P9.35 的方框图来表示的。

- (a) 求联系 $y(t)$ 和 $x(t)$ 的微分方程。

- (b) 该系统是稳定的吗？

- 9.36 本题要讨论输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ 和系统函数为

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$$

的因果 LTI 系统 S 的各种方框图表示的结构。为了导出 S 的直接型方框图表示，首先考虑一因果 LTI 系统 S_1 ，其输入与系统 S 的输入相同为 $x(t)$ ，但它的系统函数为 $H_1(s)$

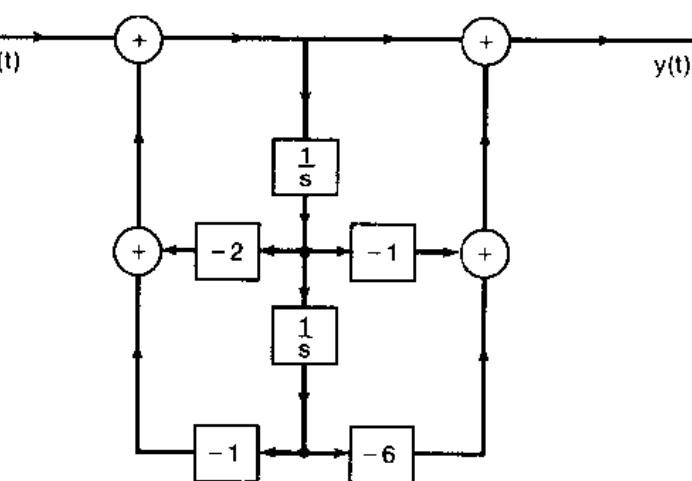


图 P9.35

若系统 S_1 的输出记为 $y_1(t)$ ，则 S_1 的直接型方框图表示就如图 P9.36 所示。图中信号 $e(t)$ 和 $f(t)$ 分别代表两个积分器的输入。

- (a) 将 $y(t)$ （系统 S 的输出）表示成 $y_1(t)$, $dy_1(t)/dt$ 和 $d^2y_1(t)/dt^2$ 的线性组合。
- (b) $dy_1(t)/dt$ 是如何与 $f(t)$ 相关联的？
- (c) $d^2y_1(t)/dt^2$ 是如何与 $e(t)$ 相关联的？
- (d) 将 $y(t)$ 表示成 $e(t)$, $f(t)$ 和 $y_1(t)$ 的线性组合。

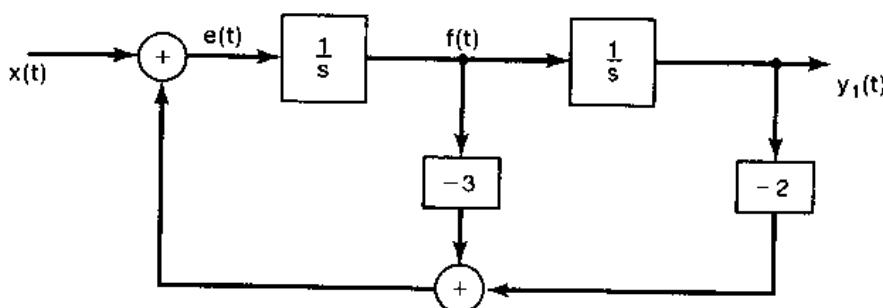


图 P9.36

(e) 利用前面部分的结果将 S_1 的直接型方框图表示推广, 形成 S 的方框图表示。

(f) 注意到

$$H(s) = \left(\frac{2(s-1)}{s+2}\right)\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

画出将 S 作为两个子系统级联的方框图表示。

(g) 注意到

$$H(s) = 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1}$$

画出将 S 作为三个子系统并联的方框图表示。

9.37 画出具有下列系统函数的因果 LTI 系统的直接型表示:

$$(a) H_1(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \quad (b) H_2(s) = \frac{s^2-5s+6}{s^2+7s+10} \quad (c) H_3(s) = \frac{s}{(s+2)^2}$$

9.38 有一四阶因果 LTI 系统 S , 其系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{(s^2-s+1)(s^2+2s+1)}$$

(a) 证明: 对于由四个一阶节级联组成的 S 的直接型表示中一定包含有不是纯实数的系数相乘。

(b) 画出将 S 作为两个二阶系统级联的方框图表示, 每一个二阶系统都用直接型表示。在所得到的方框图中不应该有非实数系数的相乘。

(c) 画出将 S 作为两个二阶系统并联的方框图表示, 每一个二阶系统都用直接型表示。在所得到的方框图中不应该有非实数系数的相乘。

9.39 设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad \text{和} \quad x_2(t) = e^{-3(t+1)}u(t+1)$$

(a) 对 $x_1(t)$ 求单边拉普拉斯变换 $\mathcal{R}_1(s)$ 和双边拉普拉斯变换 $X_1(s)$ 。

(b) 对 $x_2(t)$ 求单边拉普拉斯变换 $\mathcal{R}_2(s)$ 和双边拉普拉斯变换 $X_2(s)$ 。

(c) 取 $X_1(s)X_2(s)$ 的双边反变换求信号 $g(t) = x_1(t) * x_2(t)$ 。

(d) 证明 $\mathcal{R}_1(s)\mathcal{R}_2(s)$ 的单边反变换在 $t > 0^-$ 时不同于 $g(t)$ 。

9.40 考虑由下列微分方程表征的系统 S :

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

(a) 当输入 $x(t) = e^{-4t}u(t)$ 时, 求该系统的零状态响应。

(b) 已知

$$y(0^-) = 1, \quad \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} = -1, \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} \Big|_{t=0^-} = 1$$

求 $t > 0^-$ 系统的零输入响应。

(c) 当输入为 $x(t) = e^{-4t}u(t)$ 和初始条件同(b)所给出时, 求系统 S 的输出。

深入题

9.41 (a) 证明: 若 $x(t)$ 是偶函数 $x(t) = x(-t)$, 则 $X(s) = X(-s)$

(b) 证明: 若 $x(t)$ 是奇函数 $x(t) = -x(-t)$, 则 $X(s) = -X(-s)$

(c) 对于图 P9.41 所示的零极点图, 判断有无与一个偶时间函数相对应的零极点图? 若有, 对这些图指出要求的 ROC。

9.42 判断下列每种说法是真还是假。若是真, 为它构造一个有力的证据; 若为假, 给出一个反例。

(a) $t^2u(t)$ 的拉普拉斯变换在 s 平面的任何地方都不收敛。

(b) $e^{t^2}u(t)$ 的拉普拉斯变换在 s 平面的任何地方都不收敛。

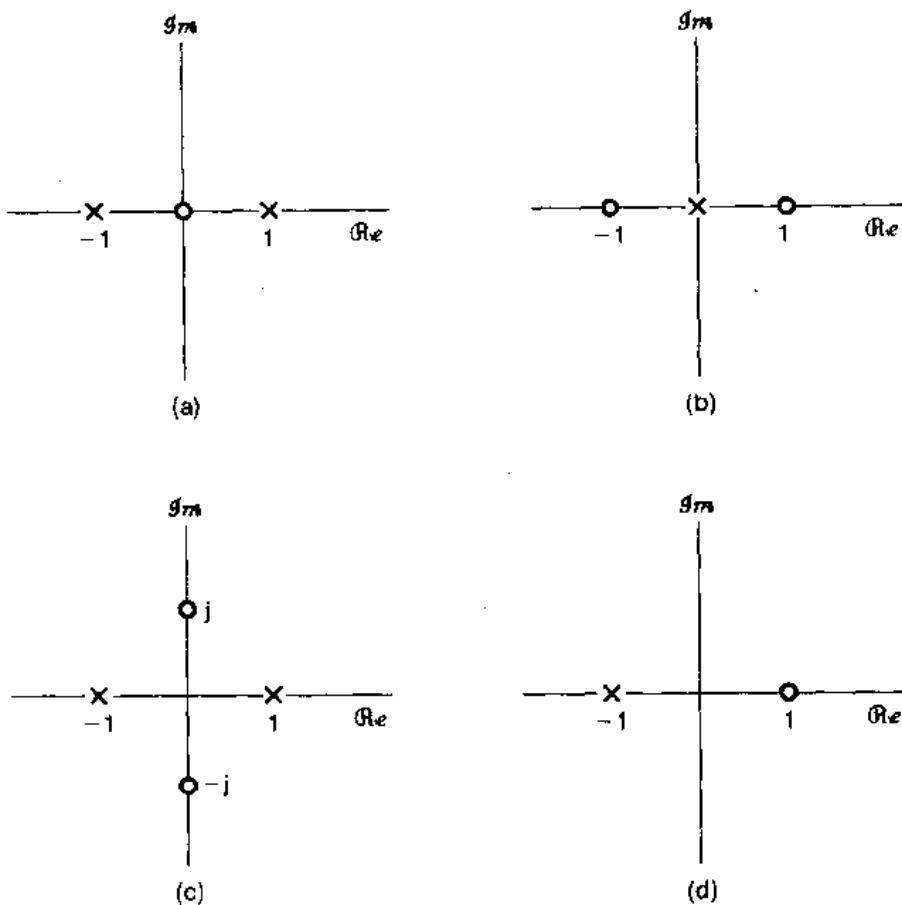


图 P9.41

(c) $e^{j\omega_0 t}$ 的拉普拉斯变换在 s 平面的任何地方都不收敛。

(d) $e^{j\omega_0 t}u(t)$ 的拉普拉斯变换在 s 平面的任何地方都不收敛。

(e) $|t|$ 的拉普拉斯变换在 s 平面的任何地方都不收敛。

9.43 设 $h(t)$ 是一个具有有理系统函数的因果而稳定的 LTI 系统的单位冲激响应

(a) 单位冲激响应为 $dh(t)/dt$ 的系统能保证是因果和稳定的吗？

(b) 单位冲激响应为 $\int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$ 的系统能保证是因果和不稳定的吗？

9.44 设 $x(t)$ 是如下的已采样信号：

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT} \delta(t - nT)$$

式中 $T > 0$ 。

(a) 求 $X(s)$ ，包括它的收敛域。

(b) 画出 $X(s)$ 的零极点图。

(c) 利用零极点图的几何解释，证明： $X(j\omega)$ 是周期的。

9.45 对于图 P9.45(a) 的 LTI 系统，已知下列情况：

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}$$

$$x(t) = 0, \quad t > 0$$

和

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t) \quad [\text{见图 P9.45(b)}]$$

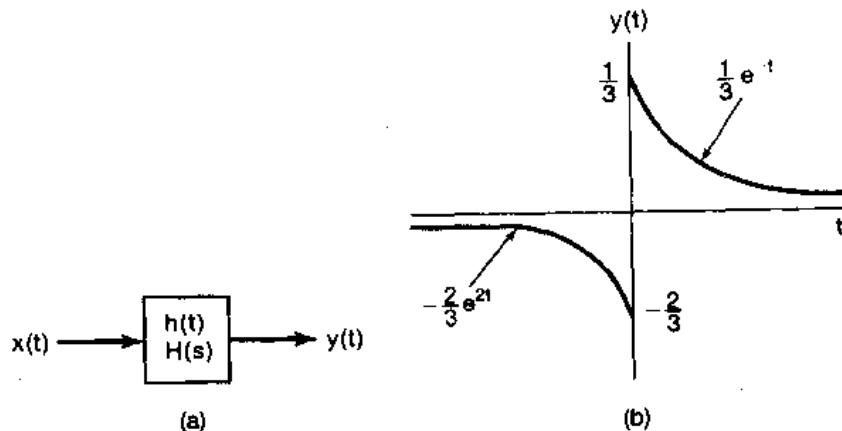


图 P9.45

(a) 求 $H(s)$ 和它的收敛域。

(b) 求 $h(t)$ 。

(c) 若输入为

$$x(t) = e^{3t}, \quad -\infty < t < +\infty$$

利用(a)中求得的系统函数 $H(s)$, 求输出 $y(t)$ 。

- 9.46 设 $H(s)$ 代表一因果稳定系统的系统函数, 该系统的输入是由三项之和组成的, 其中之一是一个冲激 $\delta(t)$, 而其余的则是 $e^{s_0 t}$ 的复指数形式, 这里 s_0 是一个复常数。系统的输出是

$$y(t) = -6e^{-t}u(t) + \frac{4}{34}e^{4t}\cos 3t + \frac{18}{34}e^{4t}\sin 3t + \delta(t)$$

求与这些条件相符的 $H(s)$ 。

- 9.47 设信号

$$y(t) = e^{-2t}u(t)$$

是系统函数为

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

的因果全通系统的输出。

(a) 求出并画出至少有两种可能的输入 $x(t)$ 都能产生 $y(t)$ 。

(b) 若已知

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

问输入 $x(t)$ 是什么?

(c) 如果已知存在某个稳定(但不一定因果)的系统, 它

若以 $y(t)$ 作输入, 则输出为 $x(t)$, 问这个输入 $x(t)$ 是什么? 求这个滤波器的单位冲激响应, 并用直接卷积证明它有所声称的性质[即 $y(t) * h(t) = x(t)$]。

- 9.48 一个 LTI 系统 $H(s)$ 的逆系统是定义成这样一个系统, 当它与 $H(s)$ 级联后所得到的总系统函数为 1, 或者说, 总的系统单位冲激响应是一个单位冲激函数。

(a) 若用 $H_1(s)$ 记为 $H(s)$ 逆系统的系统函数, 确定 $H(s)$ 和 $H_1(s)$ 之间一般的代数关系。

(b) 图 P9.48 示出一个稳定, 因果系统 $H(s)$ 的零极点图, 试确定它的逆系统的零极点图。

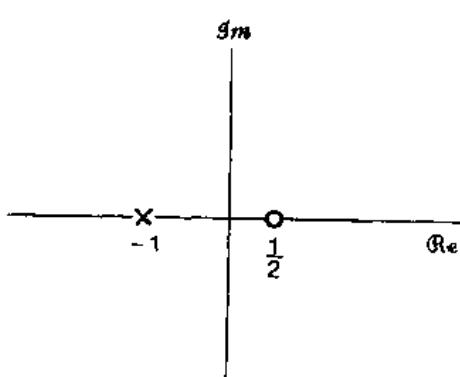


图 P9.48

9.49 一种称之为最小延时或最小相位系统有时是通过这一说法来定义的：这些系统是因果的且是稳定的，而它们的逆系统也是因果和稳定的。

基于上面的定义，试建立一个论据来说明：一个最小相位系统的系统函数，其全部极点和零点都必须位于 s 平面的左半面[即, $\Re\{s\} < 0$]。

9.50 判断关于 LTI 系统下列每一种说法是否是对的。若一种说法是对的，给出一个有力的证据；若不对，给出一个反例。

- (a) 一个稳定的连续时间系统其全部极点必须位于 s 平面的左平面[即, $\Re\{s\} < 0$]。
- (b) 若一个系统函数的极点数多于零点数，而这个系统是因果的，那么阶跃响应在 $t = 0$ 一定连续。
- (c) 若一个系统函数的极点数多于零点数，而这个系统不限定是因果的，那么阶跃响应在 $t = 0$ 可能不连续。
- (d) 一个稳定和因果的系统，其系统函数的全部极点和零点都必须在 s 平面的左半面。

9.51 有一稳定和因果的系统，其单位冲激响应 $h(t)$ 是实值函数，系统函数为 $H(s)$ 。已知 $H(s)$ 是有理的，它的极点之一在 $(-1+j)$ ，零点之一在 $(3+j)$ ，并且在无限远点只有两个零点。对于下面每种说法，判断是对，还是错，或者条件不充分而难以置评。

- (a) $h(t)e^{-3t}$ 是绝对可积的。
- (b) $H(s)$ 的 ROC 是 $\Re\{s\} > -1$
- (c) 关联系统 S 的输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 的微分方程可以仅用实系数的形式写出。
- (d) $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 1$
- (e) $H(s)$ 不少于 4 个极点。
- (f) 至少存在一个有限的 ω ，有 $H(j\omega) = 0$ 。
- (g) 若系统 S 的输入是 $e^{3t} \sin t$ ，输出就是 $e^{3t} \cos t$ 。

9.52 正如在 9.5 节所指出的，拉普拉斯变换的许多性质和推导都和对应的傅里叶变换的性质和推导相类似的。本题将要求导出几个拉普拉斯变换的性质。

细心注意一下在第 4 章对傅里叶变换有关性质的推导过程，导出下列每个拉普拉斯变换的性质，导出时必须包括有关收敛域的考虑。

- (a) 时移(9.5.2 节)。 (b) s 域平移(9.5.3 节)。
- (c) 时域尺度变换(9.5.4 节)。 (d) 卷积性质(9.5.6 节)。

9.53 正如在 9.5.10 节所提到的，初值定理说的是，对一个拉普拉斯变换为 $X(s)$ 的信号 $x(t)$ ，若 $x(t) = 0, t < 0$ ，那么 $x(t)$ 的初值[即, $x(0^+)$]可以由 $X(s)$ 通过关系

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

求得。首先注意到，因为 $x(t) = 0, t < 0$ ， $x(t) = x(t)u(t)$ 。接下来将 $x(t)$ 在 $t = 0^+$ 展开成泰勒级数，得到

$$x(t) = [x(0+) + x^{(1)}(0+)t + \cdots + x^{(n)}(0+) \frac{t^n}{n!} + \cdots]u(t) \quad (\text{P9.53-1})$$

式中 $x^{(n)}(0^+)$ 代表 $x(t)$ 的 n 阶导数在 $t = 0^+$ 的值。

- (a) 求(P9.53-1)式右边任意项 $x^{(n)}(0^+) (t^n/n!) u(t)$ 的拉普拉斯变换。(参考例 9.14 有助于求解)。
- (b) 由(a)的结果和(P9.53-1)式的展开式，证明 $X(s)$ 可以表示成

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(0^+) \frac{1}{s^{n+1}}$$

- (c) 证明由(b)的结果就可得出(9.110)式。

- (d) 利用首先求出 $x(t)$ ，对下列各个例子验证初值定理：

$$(1) X(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$(2) X(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

(e) 初值定理的一般形式是说：若 $x^{(n)}(0^+) = 0, n < N$, 那么 $x^{(N)}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{N+1} X(s)$ 。证明这个一般的形式也可由(b)的结果得到。

- 9.54 有一拉普拉斯变换为 $X(s)$ 的实值信号 $x(t)$ 。

(a) 在(9.56)式两边应用复数共轭，证明 $X(s) = X^*(s^*)$ 。

(b) 根据(a)的结果，证明：若 $X(s)$ 在 $s = s_0$ 有一个极点(零点)，那么在 $s = s_0^*$ 也必须有一个极点(零点)；也就是说，对于实值的 $x(t)$, $X(s)$ 的极点和零点必须共轭成对地出现，除非它们是在实轴上。

- 9.55 在 9.6 节表 9.2 中列出几个拉普拉斯变换对，并具体地指出从变换对 1 到 9 是如何从例 9.1 和例 9.14, 以及结合表 9.1 的各种性质来得到的。

利用表 9.1 的各个性质，证明变换对从 10~16 是如何根据表 9.2 的变换对从 1~9 来得到的。

- 9.56 对于某一具体的复数 s , 若变换的模是有限的，即若 $|X(s)| < \infty$, 就说这个拉普拉斯变换存在。

证明：变换 $X(s)$ 在 $s = s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ 存在一个充分条件是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

换句话说，证明 $x(t)$ 被 $e^{-\sigma_0 t}$ 指数加权后是绝对可积的。求证时，需要利用复函数 $f(t)$ 的下面结论：

$$|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt \quad (\text{P9.56-1})$$

如果不作严格证明，你能证明这是可能的吗？

- 9.57 一个信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 有 4 个极点，而零点个数未知；又知信号 $x(t)$ 在 $t=0$ 有一个冲激。试确定在什么样的有关信息下(如果有)，可以提供有关零点的个数及其它们的位置的情况。

- 9.58 设 $h(t)$ 是一个具有有理系统函数 $H(s)$ 的因果而稳定的 LTI 系统的单位冲激响应，证明： $g(t) = \mathcal{H}\{h(t)\}$ 也是一个因果稳定系统的单位冲激响应。

- 9.59 若 $\mathcal{R}(s)$ 是 $x(t)$ 的单边拉普拉斯变换，利用 $\mathcal{R}(s)$ 求下列各信号的单边拉普拉斯变换：

$$(a) x(t-1) \quad (b) x(t+1)$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \quad (d) \frac{d^3 x(t)}{dt^3}$$

扩充题

- 9.60 在长途电话通信中，由于被传输的信号在接收端被反射，有时候会遇到回波，回波又经线路被送回来，再次在发射端被反射，又返回到接收端。这样的过程可以用图 P9.60 所示的单位冲激响应系统来仿真，图中已假定只接收到一个回波。参数 T 相当于沿通信信道的单向传播时间。参数 α 代表在发射端与接收端之间在幅度上的衰减。

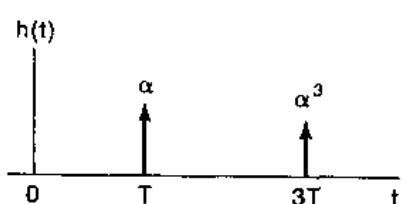


图 P9.60

(a) 求该系统的系统函数 $H(s)$ 及其 ROC。

(b) 从(a)的结果应该看到， $H(s)$ 已不是由两个多项式之比组成的。不过，用极点和零点来表示仍是有效的。这里和一般情况相同，零点就是使 $H(s)=0$ 的那些 s 值，而极点是使 $[1/H(s)] = 0$ 的那些 s 值。试对(a)中所确定的系统，确定它的零点，并说明它没有任何极点。

(c) 根据(b)的结果，画出 $H(s)$ 的零极点图。

(d) 通过考查在 s 平面内合适的向量，大致画出该系统频率响应的模特性。

- 9.61 一个信号 $x(t)$ 的自相关函数定义为

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt$$

- (a) 求当输入为 $x(t)$, 输出为 $\phi_{xx}(t)$ 的 LTI 系统[如图 P9.61(a)所示]的单位冲激响应 $h(t)$ (利用 $x(t)$ 来表示)。
- (b) 根据(a)的结果, 求: 利用 $X(s)$ 来表示的 $\phi_{xx}(\tau)$ 的拉普拉斯变换 $\Phi_{xx}(s)$; 另外将 $\phi_{xx}(\tau)$ 的傅里叶变换 $\Phi_{xx}(j\omega)$ 用 $X(j\omega)$ 来表示。
- (c) 如果 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 有如图 P9.61(b) 所示的零极点图和 ROC, 画出 $\Phi_{xx}(s)$ 的零极点图并指出 ROC。

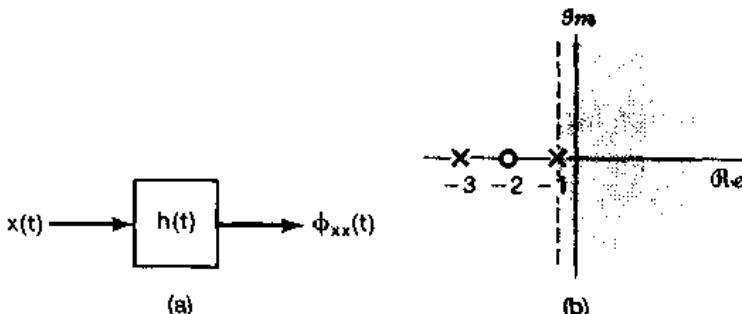


图 P9.61

9.62 在信号设计和分析的一些应用中, 会遇到这样一类信号

$$\phi_n(t) = e^{-t/2} L_n(t) u(t), n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{P9.62-1})$$

式中

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad (\text{P9.62-2})$$

- (a) 函数 $L_n(t)$ 称为 Laguerre 多项式。为了证明它们事实上具有多项式的形式, 试用显式确定出 $L_0(t)$, $L_1(t)$ 和 $L_2(t)$ 。
- (b) 利用表 9.1 的拉普拉斯变换性质和表 9.2 的拉普拉斯变换时, 求 $\phi_n(t)$ 的拉普拉斯变换 $\Phi_n(s)$ 。
- (c) 用一个单位冲激函数去激励图 P9.62 中的网络可以产生信号集 $\phi_n(t)$ 。求 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$, 使得沿此级联链路的单位冲激响应正是所指出的信号 $\phi_n(t)$ 。

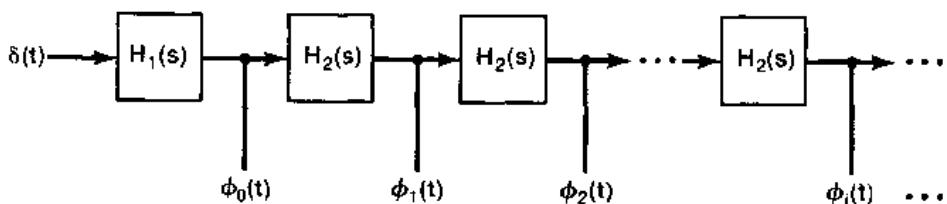


图 P9.62

9.63 在滤波器设计中, 将一个低通滤波器转换到一个高通滤波器, 或者相反, 往往是可能的, 而且也是方便的。现用 $H(s)$ 代表原滤波器的转移函数, 用 $G(s)$ 代表已被转换的滤波器的转移函数, 这样一种通常所用的转换是用 $1/s$ 来代替 s 来构成, 即

$$G(s) = H\left(\frac{1}{s}\right)$$

- (a) 若 $H(s) = 1/(s + \frac{1}{2})$, 画出 $|H(j\omega)|$ 和 $|G(j\omega)|$ 。
- (b) 确定与 $H(s)$ 和 $G(s)$ 有关的线性常系数微分方程。
- (c) 现在考虑一般的情况, 其中 $H(s)$ 是与下面一般形式的线性常系数微分方程相联系的转移函数:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (\text{P9.63-1})$$

不失一般性，假定上式两边的最高阶导数 N 相等，尽管在任何具体情况下，其中的某些系数可能是零。求 $H(s)$ 和 $G(s)$ 。

(d) 根据(c)的结果，利用(P9.63-1)中的系数，确定与 $G(s)$ 有关的线性常系数微分方程。

9.64 考虑图 9.27 所示的 RLC 电路，设输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ 。

(a) 证明：若 R ， L 和 C 全部是正的，则这个 LTI 系统是稳定的。

(b) R ， L 和 C 互相之间应该有怎样的关系，才能使该系统代表二阶巴特沃兹滤波器？

9.65 (a) 求图 P9.65 所示 RLC 电路关于 $v_i(t)$ 和 $v_o(t)$ 之间的微分方程。

(b) 假定 $v_i(t) = e^{-3t}u(t)$ ，利用单边拉普拉斯变换求 $t > 0$ 时的 $v_o(t)$ 。

9.66 考虑图 P9.66 所示 RL 电路。假设电流 $i(t)$ 在开关位于 A 时已到达稳态。在 $t = 0$ ，开关由 A 移至 B。

(a) 求 $t > 0^+$ 时， $i(t)$ 和 v_2 之间的微分方程。利用 v_1 为这个微分方程标出初始条件(即， $i(0^-)$ 的值)。

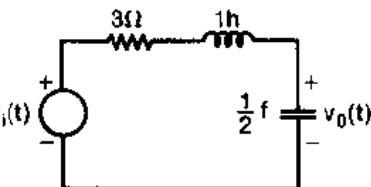
(b) 利用表 9.3 单边拉普拉斯变换的性质，求出并画出对于下列的 v_1 和 v_2 时的 $i(t)$ ：

(i) $v_1 = 0V$, $v_2 = 2V$

(ii) $v_1 = 4V$, $v_2 = 0V$

(iii) $v_1 = 4V$, $v_2 = 2V$

利用(i), (ii)和(iii)中的答案，证明： $i(t)$ 可以表示成电流的零状态响应和零输入响应之和。



$$v_o(0+) = 1$$

$$\left. \frac{dv_o(t)}{dt} \right|_{t=0+} = 2$$

图 P9.65

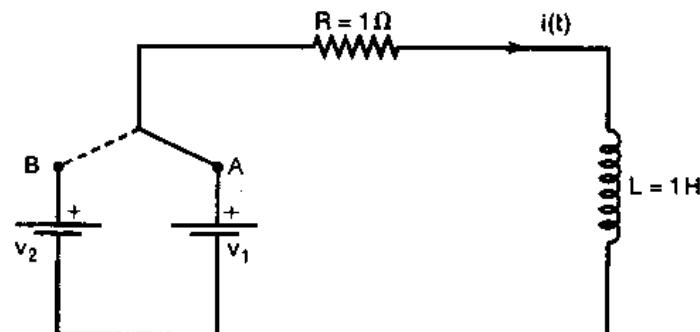


图 P9.66

第10章 Z变换

10.0 引言

在第9章讨论了拉普拉斯变换，在那里把它作为连续时间傅里叶变换的一种推广。作这种推广的部分原因是由于拉普拉斯变换比傅里叶变换有更广的适用范围；因为有不少信号，其傅里叶变换不存在，但却有拉普拉斯变换。譬如说，有可能对不稳定系统用拉普拉斯变换作变换域分析，这就为LTI系统的分析提供了另一种观点和手段。

在这一章讨论z变换时，将对离散时间情况下采用同一途径，这就是将z变换当作是在离散时间情况下与拉普拉斯变换相对应的。将会看到，在为什么要引入z变换，以及z变换的性质等方面都是与拉普拉斯变换十分相类似的。然而，正如连续时间和离散时间傅里叶变换之间的关系一样，在z变换和拉普拉斯变换之间也一定存在一些很重要的不同；而这些不同正是来自连续时间和离散时间信号与系统之间的基本差异。

10.1 z变换

由3.2节讨论可知，单位脉冲响应为 $h[n]$ 的离散时间线性时不变系统对复指数输入 z^n 的响应 $y[n]$ 为

$$y[n] = H(z)z^n \quad (10.1)$$

式中

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \quad (10.2)$$

若 $z = e^{j\omega}$ ，这里 ω 为实数（即， $|z|=1$ ），则(10.2)式的求和式就是 $h[n]$ 的离散时间傅里叶变换。在更为一般的情况下，当 $|z|$ 不限制为1的时候，(10.2)式就称为 $h[n]$ 的z变换。

一个离散时间信号 $x[n]$ 的z变换定义为①

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (10.3)$$

式中 z 是一个复变量。有时为了方便，也将 $x[n]$ 的z变换写为 $\mathcal{Z}[x[n]]$ ，而 $x[n]$ 和它的z变换之间的关系记作

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad (10.4)$$

在第9章，对于连续时间信号，讨论了拉普拉斯变换和傅里叶变换之间的几个重要关系。与此相仿，但不完全一样，z变换和离散时间傅里叶变换之间也存在有几个重要的关系。为了

① 按(10.3)式定义的z变换常称双边z变换，以区别于在10.9节要讨论的单边z变换。双边z变换的求和是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ ，而单边z变换也有类似于(10.3)式那样的形式，只是求和是从0到 $+\infty$ 。因为我们大部分情况关心的是双边z变换，所以就将(10.3)式所定义的 $X(z)$ 称为z变换，只有在10.9节避免混淆，才用“单边”和“双边”这个词。

说明这些关系，现将复变量 z 表示成极坐标形式

$$z = r e^{j\omega} \quad (10.5)$$

用 r 表示 z 的模，而用 ω 表示它的相角。利用 r 和 ω ，(10.3)式变成

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] (re^{j\omega})^{-n}$$

或等效为

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n]r^{-n}\} e^{-j\omega n} \quad (10.6)$$

由(10.6)式可见， $X(re^{j\omega})$ 就是序列 $x[n]$ 乘以实指数 r^{-n} 后的傅里叶变换，即

$$X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\} \quad (10.7)$$

指数加权 r^{-n} 可能随 n 增加而衰减，也可以随 n 增加而增长，这取决于 r 是大于 1 或是小于 1。特别注意到，若 $r=1$ ，或等效为 $|z|=1$ ，(10.3)式就变为傅里叶变换。这就是说

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \quad (10.8)$$

离散时间信号的 z 变换和傅里叶变换之间关系的讨论和在 9.1 节对连续时间信号的讨论是紧密并行着的，但具有一些重要的不同。在连续时间情况下，当变换变量的实部为零时，拉普拉斯变换就演变为傅里叶变换。利用复平面 s 来解释的话，这就意味着，在虚轴 $j\omega$ 上的拉普拉斯变换就是傅里叶变换。与此相对照地是，在 z 变换中是当变换变量 z 的模为 1 时，即 $z=e^{j\omega}$ ， z 变换就演变为傅里叶变换。于是，傅里叶变换就成为在复数 z 平面上，半径为 1 的圆上的 z 变换，如图 10.1 所示。在 z 平面上，这个圆称为单位圆。这个单位圆在 z 变换讨论中所起的作用就很类似于 s 平面上的虚轴在拉普拉斯变换讨论中所起的作用一样。

从(10.7)式可知，为了使 z 变换收敛，就要求 $x[n]r^{-n}$ 的傅里叶变换收敛。对于任何一个具体的序列 $x[n]$ 来说，可以想到对某些 r 值，其傅里叶变换收敛，而对另一些 r 值来说则不收敛。一般来说，对于某一序列的 z 变换，存在着某一个 z 值的范围，对该范围内的 z ， $X(z)$ 收敛。和拉氏变换一样，这样一些值的范围就称为收敛域(ROC)。如果 ROC 包括单位圆，则傅里叶变换也收敛。为了说明 z 变换及其有关的收敛域 ROC，现举下面几个例子。

例 10.1 有一序列 $x[n]=a^n u[n]$ ，由(10.3)式，它的 $X(z)$ 应为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$$

为使 $X(z)$ 收敛，就要求 $\sum_{n=0}^{\infty} |a^n z^{-1}| < \infty$ 。于是收敛域就是满足 $|az^{-1}| < 1$ 的 z 值范围，或者是 $|z| > |a|$ 的范围。这样就有

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, |z| > |a| \quad (10.9)$$

因此，这个信号的 z 变换对于任何 a 值都有定义，它的 ROC 按(10.9)式由 a 的模确定。例如，若 $a=1$ ， $x[n]$ 就是单位阶跃序列，其 z 变换为

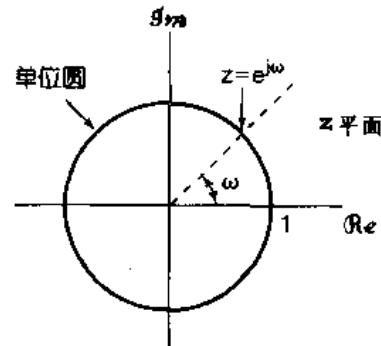


图 10.1 复数 z 平面。当变量 z 在单位圆上时， z 变换就变为傅里叶变换

$$X(z) = \frac{1}{1-z} \quad |z| > 1$$

可以看到，(10.9)式的 z 变换是一个有理函数。当然，和拉普拉斯变换一样， z 变换也能够用它的零点(分子多项式的根)和极点(分母多项式的根)来表示。对于这个例子，有一个零点在 $z=0$ 和一个极点在 $z=a$ ，对于 a 在0和1之间的某个值时，例10.1的零极点图和收敛域如图10.2所示。若 $|a|>1$ ，ROC就不包括单位圆；这一点是与下述事实一致的：对于 $|a|>1$ 的值， $a^n u[n]$ 的傅里叶变换不收敛。

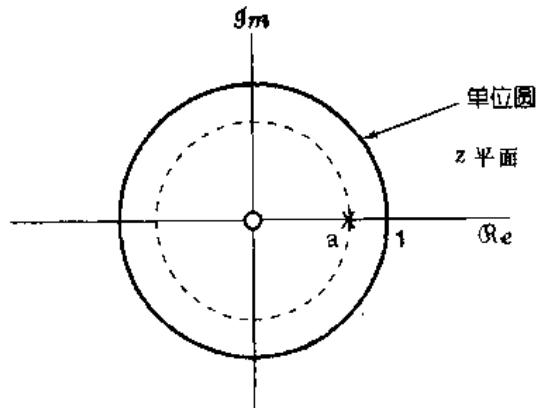


图 10.2 对于 $0 < a < 1$ 时，例 10.1 的零极点图和收敛域

例 10.2 设 $x[n] = -a^n u[-n-1]$ ，那么

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^0 a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \quad (10.10)$$

若 $|a^{-1}z| < 1$ ，或 $|z| < |a|$ ，(10.10)式的求和收敛为

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a| \quad (10.11)$$

当 a 的值位于0和1之间时，该例的零极点图和收敛域如图10.3所示。

将(10.9)式和(10.10)式及图10.2和图10.3作一比较，可以看到，在例10.1和例10.2中，两者的 $X(z)$ 代数表示式和零极点图都是一样的，不同的仅是 z 变换的收敛域。因此，和拉普拉斯变换一样， z 变换的表述既要求它的代数表示式，又要求相应的收敛域。另外，还可看到在这两个例子中，序列都是指数的，所得到的变换就是有理的。事实上，在下面的例子中将进一步阐明，只要 $x[n]$ 是实指数或复指数的线性组合， $X(z)$ 就一定是有理的。

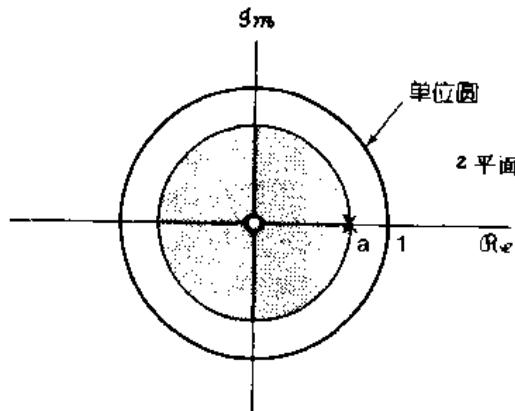


图 10.3 对于 $0 < a < 1$ 时，例 10.2 的零极点图和收敛域

例 10.3 设一信号是两个实指数序列之和

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (10.12)$$

那么， z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} = 7 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} \\ &= 7 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n - 6 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$= \frac{7}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (10.14)$$

$$= \frac{z(z - \frac{3}{2})}{(z - \frac{1}{3})(z - \frac{1}{2})} \quad (10.15)$$

为保证 $X(z)$ 收敛, (10.13) 式中的两个和式都必须收敛, 这就要求 $|(1/3)z^{-1}| < 1$ 和 $|(1/2)z^{-1}| < 1$, 或者等效为 $|z| > 1/3$ 和 $|z| > 1/2$ 。因此, 收敛域就是 $|z| > 1/2$ 。

这个例子的 z 变换也可以利用例 10.1 的结果来求得。根据 z 变换的定义(10.3)式可见, z 变换是一个线性变换。这就是说, 如果 $x[n]$ 是两项的和, 那么 $X(z)$ 就是单独每一项 z 变换的和, 并且当这两项 z 变换都收敛时, $X(z)$ 也一定收敛。由例 10.1 有

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (10.16)$$

和

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (10.17)$$

结果就得到

$$7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{7}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (10.18)$$

这就是前面已经得到的结果。图 10.4 分别画出了每一项 z 变换的零极点图和 ROC, 以及组合信号 z 变换的零极点图和 ROC。

例 10.4 考虑信号 $x[n]$ 为

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n] \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

这个信号的 z 变换是

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} \\ &= \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)^n \\ &= \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}} \end{aligned} \quad (10.19)$$

或等效为

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}z}{(z - \frac{1}{3}e^{j\pi/4})(z - \frac{1}{3}e^{-j\pi/4})} \quad (10.20)$$

为保证 $X(z)$ 收敛, (10.19) 式中的两个和式都必须收敛, 这就要求 $|(1/3)e^{j\pi/4}z^{-1}| < 1$ 和 $|(1/3)e^{-j\pi/4}z^{-1}| < 1$, 或等效为 $|z| > 1/3$ 。这个例子的零极点图和 ROC 如图 10.5 所示。

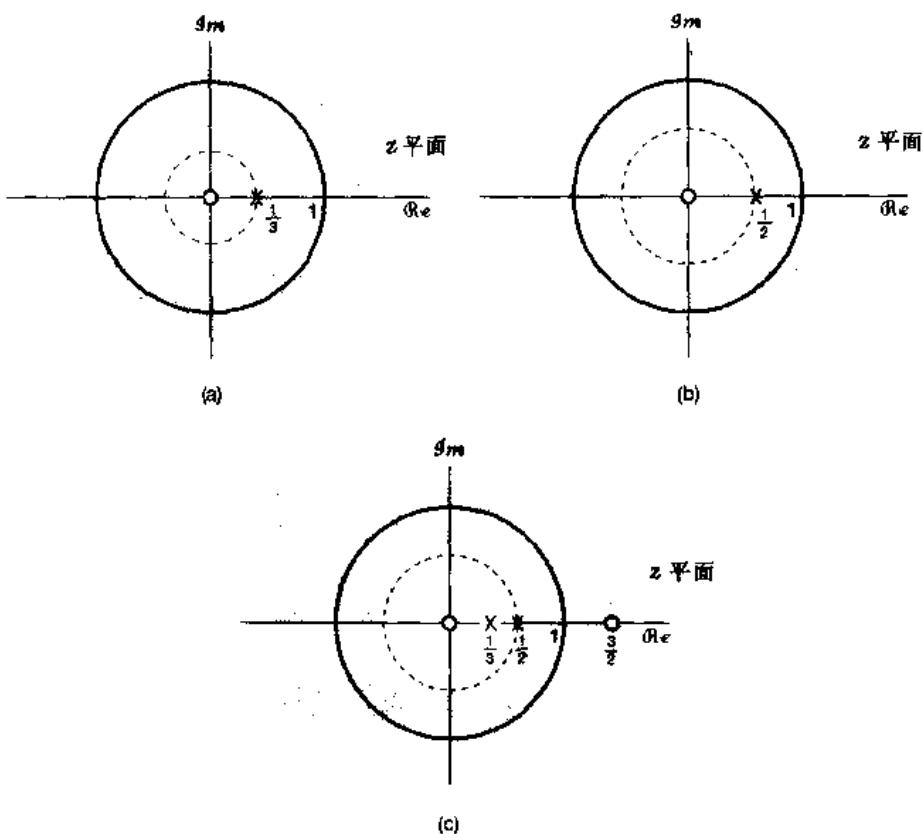


图 10.4 例 10.3 中每一项及其和的拉普拉斯变换的零极点图和收敛域：

$$(a) \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3}; \quad (b) \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}; \\ (c) \frac{7}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

在以上 4 个例子中，都将 z 变换既表示成 z 的多项式之比，又表示成 z^{-1} 的多项式之比。从 (10.3) 式这种 z 变换的定义形式中可以看到，对于那些在 $n < 0$ 为零的序列来讲， $X(z)$ 仅涉及到 z 的负幕，因此对这种信号，把 $X(z)$ 表示成 z^{-1} 的多项式是特别方便的。在以后的讨论中，只要合适，都采用这种表示形式。然而，关于极点和零点总是利用以 z 为多项式表示的分母与分子多项式的根。另外，将 $X(z)$ 写成以 z 多项式之比有时也是方便的，如在考察无限远点的零极点时就是这样，若分子的阶超过分母的阶，那么在无限远点就有极点；若分子的阶小于分母的阶，那么在无限远点就有零点。

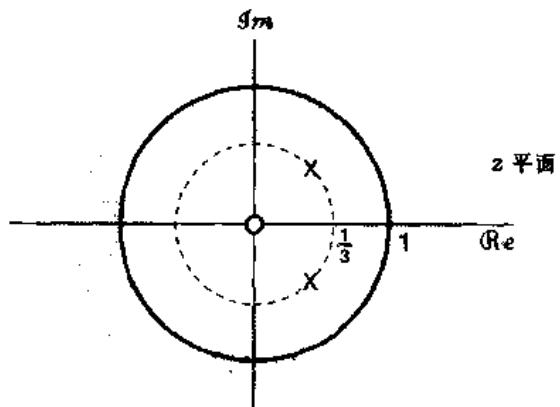


图 10.5 例 10.4 z 变换的零极点图和 ROC

10.2 z 变换的收敛域

在第 9 章看到，对于各种不同类型的信号，在拉普拉斯变换收敛域上都有一些特别的性质，而且理解了这些性质会对拉普拉斯变换有更进一步的理解。这一节将以类似的方式来说明 z 变换收敛域的几个性质。以下讨论的每一个性质和它的证明都是与 9.2 节讨论的每一个性质相并行的。

性质 1: $X(z)$ 的 ROC 是在 z 平面上以原点为中心的圆环。

这个性质如图 10.6 所示。这是由于 ROC 是由这样一些 $z = re^{j\omega}$ 值所组成，对于这些 z 值， $x[n]r^{-n}$ 的傅里叶变换收敛。这就是说， $x[n]$ 的 z 变换的 ROC 是由 $x[n]r^{-n}$ 绝对可和的那些 z 值组成的①

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty \quad (10.21)$$

因此，收敛域仅决定于 $r = |z|$ ，而与 ω 无关。结果，若某一具体的 z 值是在 ROC 内，那么位于同一圆上的全部 z 值（也即具有相同的模）也一定在 ROC 内。这本身就保证了 ROC 是由同心圆环所组成的。在讨论性质 6 中将会看到，事实上 ROC 必须仅由一个单一的圆环组成。在某些情况下，ROC 的内圆边界可以向内延伸到原点，而在另一些情况下，外圆边界可以向外延伸到无限远。

性质 2: ROC 内不包含任何极点。

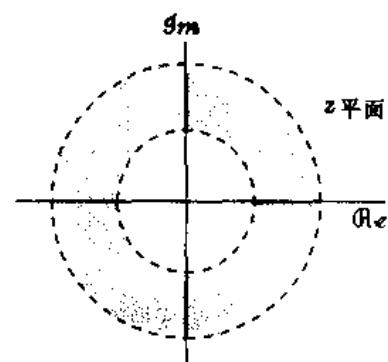


图 10.6 ROC 为 z 平面上一个圆环，在某些情况下，内圆边界可延伸到原点，这时 ROC 就是一个圆盘。在另一些情况下，外圆边界可延伸至无限远

和拉普拉斯变换一样，这一性质是由于在极点处， $X(z)$ 为无穷大，因此根据定义， z 变换不收敛。

性质 3: 如果 $x[n]$ 是有限长序列，那么 ROC 就是整个 z 平面，可能除去 $z = 0$ 和/或 $z = \infty$ 。

一个有限长序列仅有有限个非零值，例如从 $n = N_1$ 到 $n = N_2$ ，这里 N_1 和 N_2 都是有限

① 关于 z 变换数学性质的完整论述，可见 R. V. Churchill and J. W. Brown, Complex Variables and Applications (5th ed.) (New York: McGraw - Hill, 1990)，和 E. I. Jury. Theory and Application of the z - Transform Method (Malabar, FL: R. E. Krieger Pub. Co., 1982)

值, 于是 z 变换就是一个有限项的和, 即

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n} \quad (10.22)$$

对于 z 不等于零或无穷大, 和式中的每一项都是有限的, $X(z)$ 就一定收敛。如果 N_1 为负和 N_2 为正, 那么, $x[n]$ 对 $n < 0$ 和 $n > 0$ 都有非零值, (10.22) 式的和式中既包括 z 的正幂次项, 又包括 z 的负幂次项。当 $|z| \rightarrow 0$, 涉及到 z 的负幂次的那些项就要变成无界; 而当 $|z| \rightarrow \infty$, 涉及到 z 的正幂次的那些项就成为无界。因此, 在 N_1 为负, N_2 为正之下, ROC 不包括 $z=0$ 和 $z=\infty$ 。如果 N_1 为零或为正值, 那么(10.22)式中仅有 z 的负幂次项, 这时 ROC 就可以包括 $z=\infty$; 而如果 N_2 是零或者为负, (10.22)式中就仅有 z 的正幂次项, ROC 就可以包括 $z=0$ 。

例 10.5 考虑单位脉冲信号 $\delta[n]$ 的 z 变换, 按定义为

$$\delta[n] \xleftrightarrow{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \quad (10.23)$$

ROC 由整个 z 平面所组成, 包括 $z=0$ 和 $z=\infty$ 。另一方面, 考虑一个延时的单位脉冲 $\delta[n-1]$, 它的 z 变换为

$$\delta[n-1] \xleftrightarrow{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-1] z^{-n} = z^{-1} \quad (10.24)$$

这个 z 变换除 $z=0$ 外都有定义, 在 $z=0$ 是一个极点。因此, ROC 由整个 z 平面所组成, 其中包括 $z=\infty$, 但不包括 $z=0$ 。同理, 考虑一个超前的单位脉冲信号, 即 $\delta[n+1]$, 这时

$$\delta[n+1] \xleftrightarrow{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n+1] z^{-n} = z \quad (10.25)$$

这个变换对全部有限的 z 值都有定义, 因此 ROC 由整个有限 z 平面所组成(包括 $z=0$), 但在无限远点有一个极点。

性质 4: 如果 $x[n]$ 是一个右边序列, 并且 $|z|=r_0$ 的圆位于 ROC 内, 那么 $|z|>r_0$ 的全部有限 z 值都一定在这个 ROC 内。

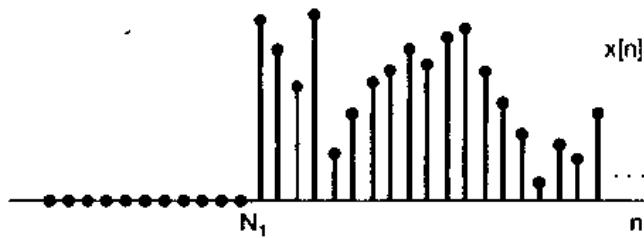
这个性质的证明和 9.2 节性质 4 的论述是相同的。一个右边序列就是在某一个 n 值,譬如说 N_1 以前是零。如果 $|z|=r_0$ 的圆位于 ROC 内, 那么 $x[n] r_0^{-n}$ 就是绝对可和的。现在考虑 $|z|=r_1 > r_0$, 这样 r_1^{-n} 随 n 的增加衰减得比 r_0^{-n} 还要快。正如图 10.7 所表示的, 对于 n 为正值时, 这个加快了衰减的指数将进一步使序列值衰减, 而对负的 n 值, 却不能使序列值成为无界, 因为 $x[n]$ 是右边序列, 尤其是对于 $n < N_1$, $x[n] z^{-n} = 0$ 。因此, $x[n] r_1^{-n}$ 就是绝对可和的。

对于右边序列, 一般情况(10.3)式可取如下形式:

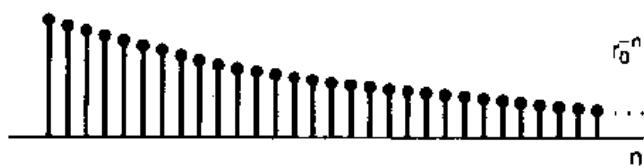
$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (10.26)$$

式中 N_1 是有限值, 可以正也可以负。如果 N_1 是负的, 那么, (10.26)式的和式中将包括 z

的正幂次项，这些项将随 $|z| \rightarrow \infty$ 而变成无界。因此，一般来说，右边序列的 ROC 不包括无穷远点。然而，对于因果序列，即 $n < 0$ ，序列值为零的序列， N_1 一定为非负，因此 ROC 一定包括 $z = \infty$ 。



性质 5：如果 $x[n]$ 是一个左边序列，而且 $|z| = r_0$ 的圆位于 ROC 内，那么，满足 $0 < |z| < r_0$ 的全部 z 值都一定在这个 ROC 内。



这个性质与拉普拉斯变换相应的性质也是并行的，并且它的证明和直观性与性质 4 是类似的。一般说来，根据(10.3)式，一个左边序列的 z 变换将有如下形式：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n] z^{-n} \quad (10.27)$$

这里 N_2 可正可负。如果 N_2 为正的值，那么(10.27)式中将包括 z 的负幂次项，这些项将随 $|z| \rightarrow 0$ 而变成无界。因此一般左边序列的 z 变换，其 ROC 不包括 $z = 0$ ，然而，如果 $N_2 \leq 0$ (也即对全部 $n > 0$ ， $x[n] = 0$)，ROC 一定包括 $z = 0$ 。

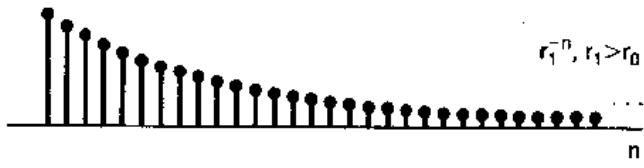


图 10.7 由于 $r_1 > r_0$ 时， $x[n]r_1^{-n}$ 当 n 增加时衰减得比 $x[n]r_0^{-n}$ 快，又因为 $n < N_1$ ， $x[n] = 0$ ，这就意味着：若 $x[n]r_0^{-n}$ 是绝对可和的，则 $x[n]r_1^{-n}$ 一定绝对可和

性质 6：如果 $x[n]$ 是双边序列，而且 $|z| = r_0$ 的圆位于 ROC 内，那么该 ROC 一定是由包括 $|z| = r_0$ 的圆环所组成。

和 9.2 节的性质 6 一样，双边序列的 ROC 可以把 $x[n]$ 表示成一个右边序列和一个左边序列之和来确定。对于右边分量的 ROC 在内部被一个圆所界定，而向外延伸到(或可能包括)无限远点；对于左边分量的 ROC 向外被一个圆所界定，而向内延伸到(或可能包括)原点。整个序列的 ROC 就是这两部分 ROC 的相交。如图 10.8 所示。重叠部分(假定有)就是在 z 平面上的一个圆环。

下面将用几个例子来说明上面几个性质，这些例子与例 9.6 和例 9.7 是并列的。

例 10.6. 有一序列 $x[n]$ 为

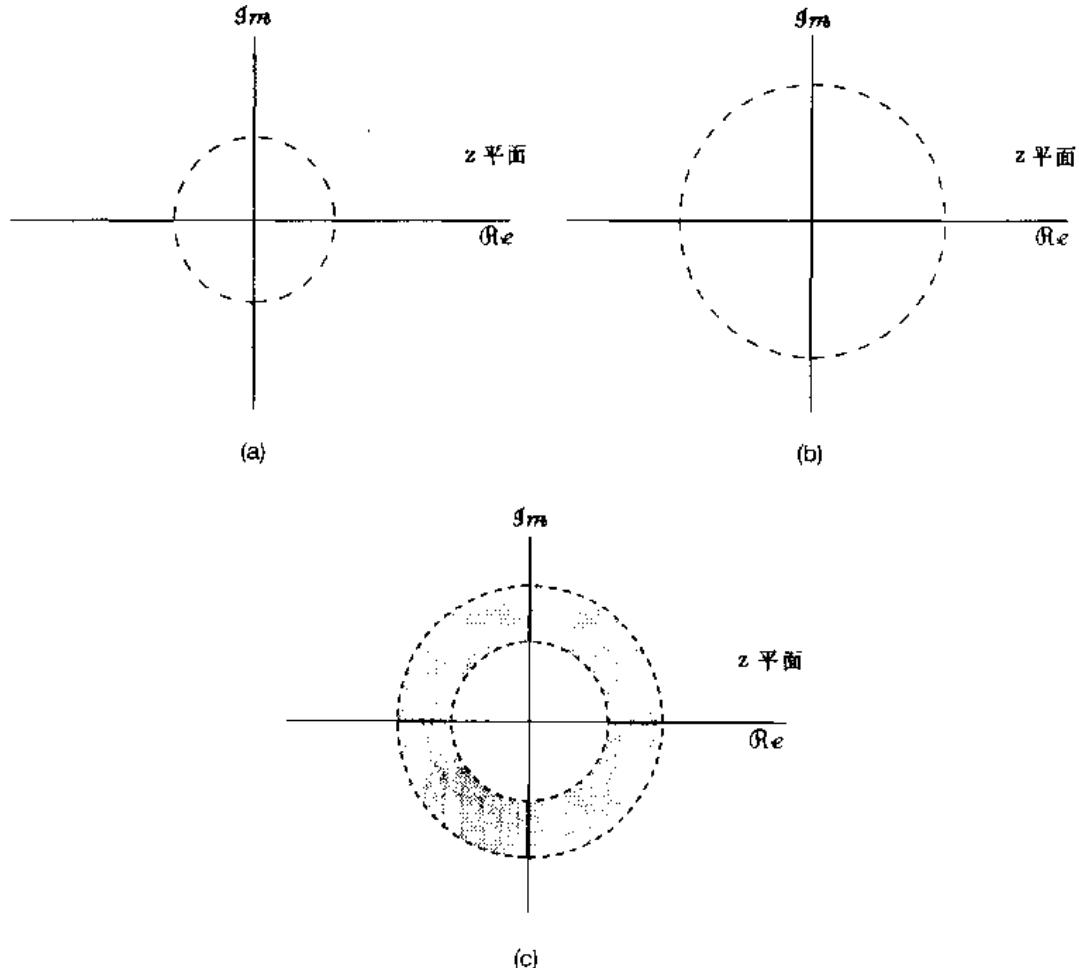


图 10.8 (a) 右边序列的 ROC; (b) 左边序列的 ROC;
 (c) 在(a)与(b)中 ROC 的相交部分, 它就是由该右边序列和左边序列之和构成的双边序列的 ROC

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases} \quad a > 0$$

那么它的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \quad (10.28)$$

因为 $x[n]$ 有限长的, 由性质 3 立即可得 ROC 包括整个 z 平面, 可能除去原点和/或无限远点。事实上, 由性质 3 的讨论知道, 因为 $n < 0$, $x[n] = 0$, 所以 ROC 将延伸至无限远。然而, 因为 $x[n]$ 从某些正的 n 值起是非零值, 所以 ROC 不包括原点。由(10.28)式也很明显, 因为在 $z=0$ 有一个($N-1$)阶的极点。分子多项式的 N 个根是

$$z_k = a e^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10.29)$$

在 $k=0$ 的根抵消掉在 $z=a$ 的极点。因此, 除原点外就没有任何极点。余下的零点是在

$$z_k = a e^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (10.30)$$

它的零极点图如图 10.9 所示。

例 10.7 设 $x[n]$ 为

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0 \quad (10.31)$$

该双边序列在 $b < 1$ 和 $b > 1$ 时, 如图 10.10 所示。这个序列的 z 变换可以将它表示成一个右边序列和一个左边序列之和来求得。这就是

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1] \quad (10.32)$$

由例 10.1 有

$$b^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b \quad (10.33)$$

由例 10.2 有

$$b^{-n} u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{-1}{1 - b^{-1} z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b} \quad (10.34)$$

在图 10.11(a)~(d) 中, 给出了在 $b > 1$ 和 $0 < b < 1$ 时, 由(10.31)式和(10.34)式表示的零极点图和 ROC。对于 $b > 1$, 没有任何公共的 ROC, 因此由(10.31)式表示的

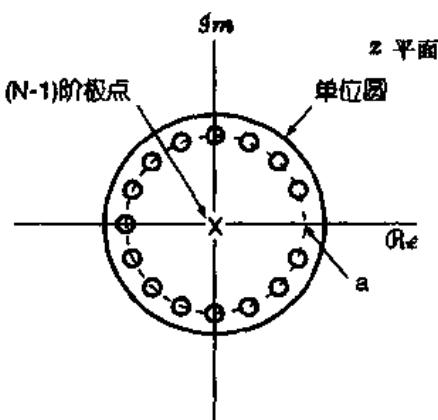
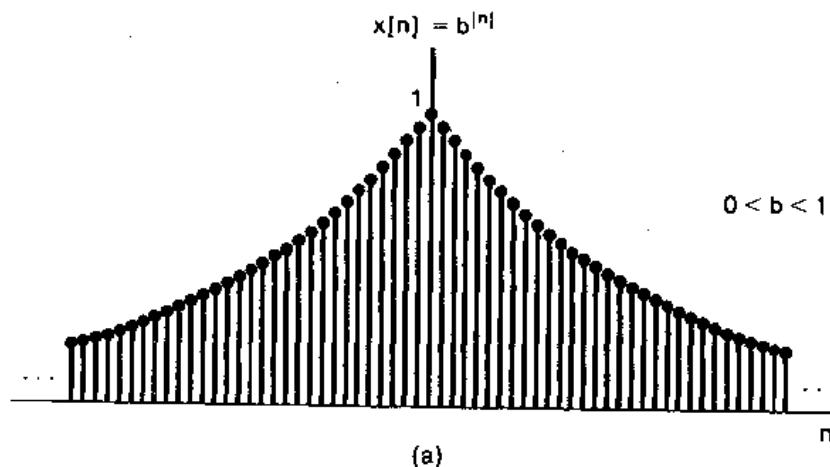
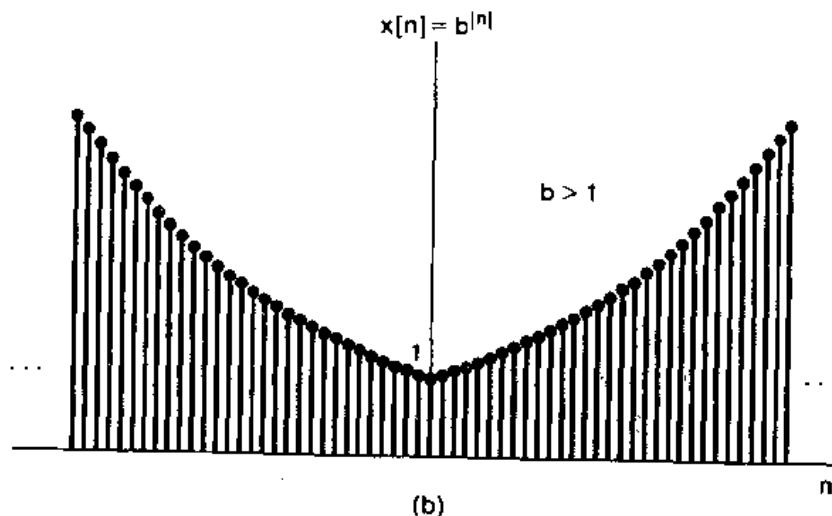


图 10.9 当 $N=16$ 和 $0 < a < 1$ 时, 例 10.6 的零极点图。这个例子的收敛域除 $z=0$ 外, 由全部 z 值所组成



(a)



(b)

图 10.10 对于 $0 < b < 1$ 和 $b > 1$ 时的序列 $x[n] = b^{|n|}$:
(a) $b = 0.95$; (b) $b = 1.05$

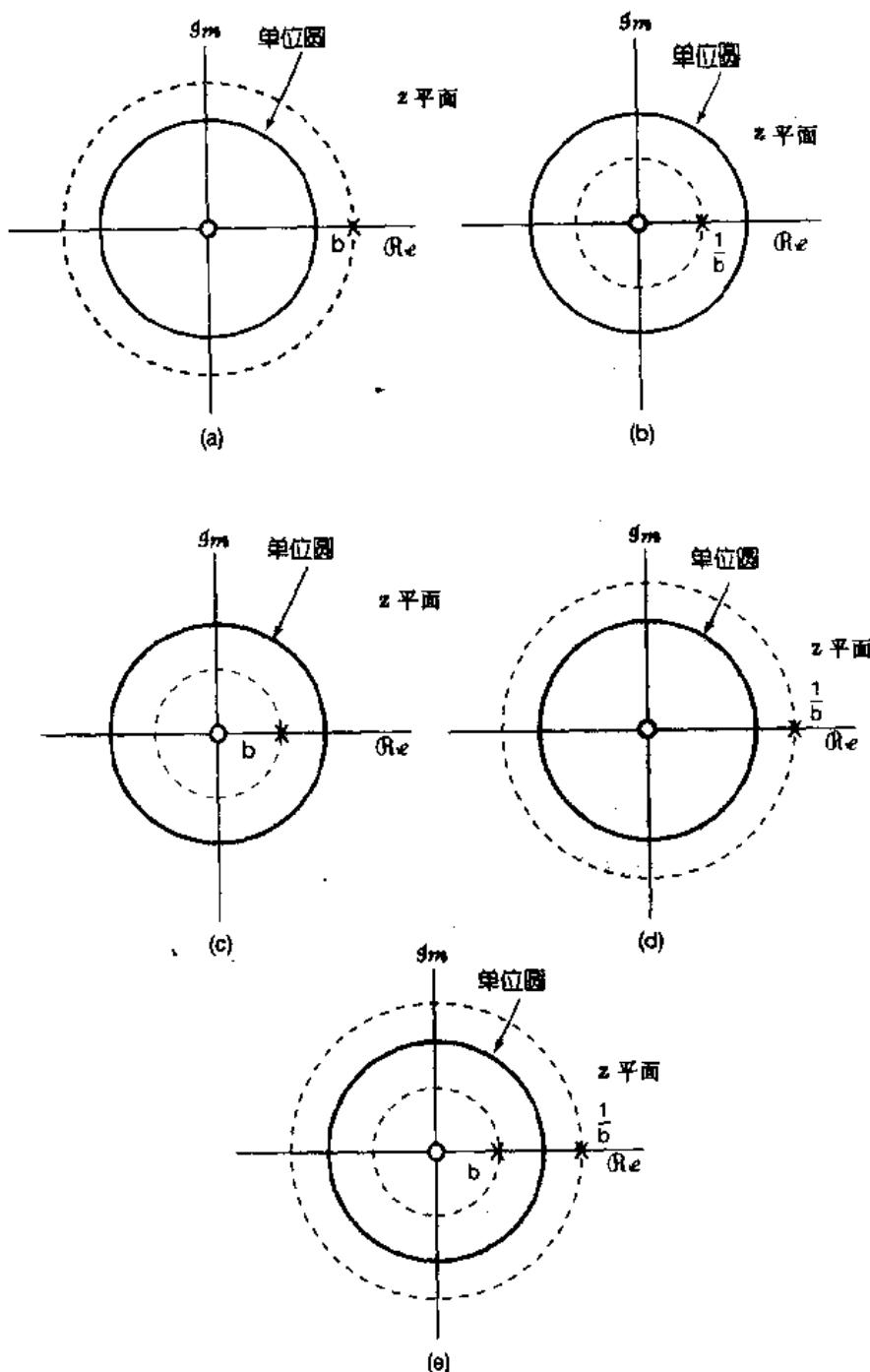


图 10.11 例 10.7 的零极点图和 ROC:

- (a) $b > 1$ 时的(10.33)式; (b) $b > 1$ 时的(10.34)式; (c) $0 < b < 1$ 时的(10.33)式;
 (d) $0 < b < 1$ 时的(10.34)式; (e) $0 < b < 1$ 时的(10.36)式的零极点图和 ROC。对于
 $b > 1$, (10.31)式 $x[n]$ 的 z 变换对任何 z 都不收敛

序列没有 z 变换, 尽管其右边和左边序列都有单独的 z 变换。对于 $b < 1$, (10.33)式和(10.34)式的 ROC 有重叠, 因此合成序列的 z 变换是

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} + \frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad b < |z| < \frac{1}{b} \quad (10.35)$$

或者等效为

$$X(z) = \frac{b^2 - 1}{b} \frac{z}{(z - b)(z - b^{-1})}, \quad b < |z| < \frac{1}{b} \quad (10.36)$$

对应的零极点图和 ROC 如图 10.11(e)所示。

在第 9 章拉普拉斯变换的讨论中，曾提到，对一个有理的拉普拉斯变换来说，ROC 总是被极点或无限远点所界定。在前面几个例子中可以看到，这一点对于 z 变换来说也是成立的，并且事实上这总是对的，从而有

性质 7：如果 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 是有理的，那么它的 ROC 就被极点所界定，或者延伸至无限远。

将性质 7 与性质 4 和性质 5 结合在一起，就有

性质 8：如果 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 是有理的，而且若 $x[n]$ 是右边序列，那么，ROC 就位于 z 平面上最外层极点的外边；也就是半径等于 $X(z)$ 极点中最大模值的圆的外边。而且，若 $x[n]$ 是因果序列（即 $x[n]$ 为 $n < 0$ 等于 0 的右边序列），那么，ROC 也包括 $z = \infty$ 。

因此，对于具有有理变换的右边序列，它的全部极点比在 ROC 中的任何一点都更加靠近原点。

性质 9：如果 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 是有理的，而且若 $x[n]$ 是左边序列，那么，ROC 就位于 z 平面上最里层的非零极点的里边；也就是半径等于 $X(z)$ 中除去 $z = 0$ 的极点中最小模值的圆的里边，并且向内延伸到可能包括 $z = 0$ 。特别是，若 $x[n]$ 是反因果序列（即 $x[n]$ 为 $n > 0$ 等于 0 的左边序列），那么，ROC 也包括 $z = 0$ 。

因此，对于左边序列，除了可能在 $z = 0$ 的极点外， $X(z)$ 的极点都比 ROC 中任何一点更加远离原点。

对于一个给定的零极点图，或等效为一个给定的有理 $X(z)$ 的代数表示式，存在着有限的几个不同的 ROC 是与上述性质相符合的。为了说明不同的 ROC 是如何与同一零极点图相联系的，现给出下面这个例子。这个例子与例 9.8 是并列的。

例 10.8 有一 z 变换 $X(z)$ 为

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \quad (10.37)$$

现在来讨论一下与该 $X(z)$ 有关的所有可能的 ROC。 $X(z)$ 的零极点图如图 10.12(a) 所示。根据本节的讨论，有三种可能的 ROC 都能与这个 z 变换的代数表示式相联系，这些收敛域 ROC 都分别在图 10.12(b)~(d) 中指出。三种 ROC 中的每一个都对应于不同的序列，其中图 10.12(b) 的 ROC 对应的是一个右边序列，而图 10.12(c) 则对应于一个左边序列。图 10.12(d) 是一个双边序列 z 变换的 ROC。三种情况中唯有(d)才包括单位圆，因此只有与(d)对应的序列才有傅里叶变换。

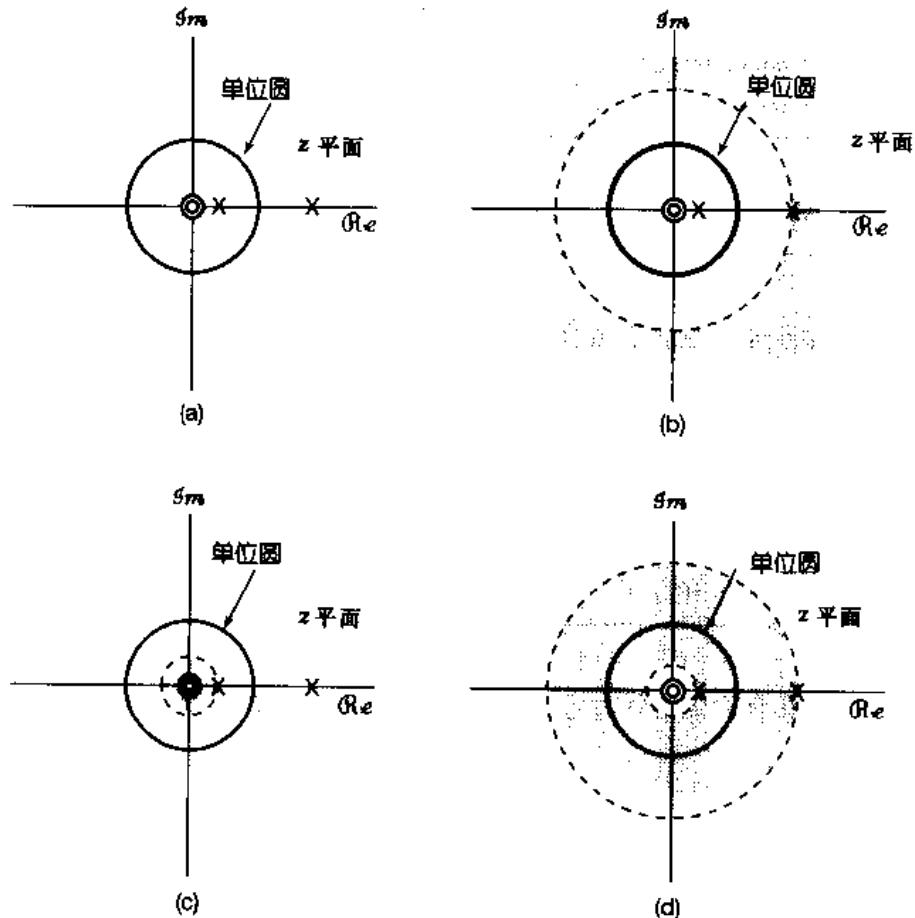


图 10.12 与例 10.8 的 z 变换的表示式有关的三种可能 ROC：(a) $X(z)$ 的零极点图；(b) 若 $x[n]$ 是右边序列时的零极点图和 ROC；(c) 若 $x[n]$ 是左边序列时的零极点图和 ROC；(d) 若 $x[n]$ 是双边序列时的零极点图和 ROC。在每种情况下，原点的零点都是二阶零点

10.3 z 反变换

这一节来讨论从已知 z 变换求得一个序列的几种方法。首先，考虑用 z 变换来表示一个序列的数学关系。在 10.1 节曾把 z 变换看作是一个由指数加权后的序列的傅里叶变换，根据这种解释就可以得到这一关系。按(10.7)式的表示

$$X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\} \quad (10.38)$$

其中的 r 值是位于 ROC 内的 $z=re^{j\omega}$ 的模。对(10.38)式两边进行傅里叶反变换，得

$$x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$$

或者

$$x[n] = r^n \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\} \quad (10.39)$$

利用(5.8)式的傅里叶反变换表示式，可得

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

或者，将 r^n 的指数因子移进积分号内，与 $e^{j\omega n}$ 项归并成 $(re^{j\omega})^n$ ，则得

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega}) (re^{j\omega})^n d\omega \quad (10.40)$$

这就是说，将 z 变换沿着在 ROC 内 $z = re^{j\omega}$, r 固定而 ω 在一个 2π 区间内变化的闭合围线上求值，就能够将 $x[n]$ 恢复出来。现在将积分变量从 ω 改变为 z 。由于 $z = re^{j\omega}$, r 固定, $dz = jre^{j\omega} d\omega = jz d\omega$, 或者 $d\omega = (1/j)z^{-1} dz$ 。这样，(10.40)式在 ω 的 2π 区间的积分，利用 z 以后，就对应于以变量 z 在环绕 $|z| = r$ 的圆上一周的积分。因此，在 z 平面内的积分，(10.40)式就可重写为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint |X(z)| z^{n-1} dz \quad (10.41)$$

式中 \oint 记为在半径为 r ，以原点为中心的封闭圆上沿逆时钟方向环绕一周的积分。 r 的值可选为使 $X(z)$ 收敛的任何值；也就是使 $|z| = r$ 的积分围线位于 ROC 内的任何值。(10.41)式就是 z 反变换的正规数学表示式，并且它与拉普拉斯反变换式(9.56)式是对应的。和(9.56)式一样，(10.41)式反变换的求值要利用复平面的围线积分。然而，还有另外几个方法可以从 z 变换求得与其对应的序列。和拉普拉斯变换一样，其中特别有用的是对于一个有理的 z 变换，可以首先将它进行部分分式展开，然后逐项求其反变换。现用下例给予具体说明。

例 10.9 有一 z 变换 $X(z)$ 为

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (10.42)$$

有两个极点，一个在 $z = 1/3$ ，另一个在 $z = 1/4$ ，而 ROC 位于最外边极点的外边。也就是 ROC 是由所有的模都大于最大的极点模值(即，在 $z = \frac{1}{3}$ 的极点)的点所组成。根据 10.2 节性质 4 可知，反变换是一个右边序列。由附录所述， $X(z)$ 可按部分分式方法展开。对于这个例子，以 z^{-1} 多项式表示的部分分式展开式为

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (10.43)$$

因此， $x[n]$ 为两项之和，其中一项的 z 变换是 $1/[1 - (1/4)z^{-1}]$ 而另一项是 $2/[1 - (1/3)z^{-1}]$ 。为了确定每一项的反变换，必须要为每一项标出 ROC。由于 $X(z)$ 的 ROC 是位于最外层极点的外边，所以在(10.43)式中每一项的 ROC 都必须位于自己极点的外边；也就是每一项的 ROC 由所有其模都大于相应极点的模值的点所组成。于是

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad (10.44)$$

其中

$$x_1[n] \stackrel{?}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4} \quad (10.45)$$

$$x_2[n] \leftrightarrow \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (10.46)$$

由例 10.1 可以确定这两个序列是

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (10.47)$$

和

$$x_2[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (10.48)$$

因此可得

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (10.49)$$

例 10.10 现在考虑和(10.42)式相同的 $X(z)$ 的代数表示式, 但 $X(z)$ 的 ROC 是 $1/4 < |z| < 1/3$ 。(10.43)式的部分分式展开式仍然有效, 但与每一项有关的 ROC 将改变。因为 $X(z)$ 的 ROC 是在 $z=1/4$ 的极点的外边, 那么在(10.43)式中对应于这一项的 ROC 也就在这个极点的外边, 并且, 由模值都大于 $1/4$ 的全部点所组成, 这就如同在前面例子中所做的那样。然而, 又因为在该例子中 $X(z)$ 的 ROC 是位于 $z=1/3$ 的极点的里边; 也就是说, 因为在 ROC 内的点其模值都小于 $1/3$, 那么对应于这一项的 ROC 也必须位于这个极点的里边。这样, 对于(10.44)式每一分量的 z 变换对就是

$$x_1[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4} \quad (10.50)$$

和

$$x_2[n] \leftrightarrow \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{3} \quad (10.51)$$

信号 $x_1[n]$ 仍旧与(10.47)式相同, 而从例 10.2 可得

$$x_2[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \quad (10.52)$$

这样

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \quad (10.53)$$

例 10.11 最后, 考虑 $X(z)$ 仍如(10.42)式表示, 但 ROC 是 $|z| < 1/4$ 。这时, ROC 是在两个极点的里边; 也即在 ROC 内的点其模值比极点 $z=1/3$ 或 $z=1/4$ 的模值都小, 因此, 在(10.41)式的部分分式展开式中的每一项的 ROC 也必须位于相应极点的里边。结果, $x_1[n]$ 的 z 变换对为

$$x_1[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{4} \quad (10.54)$$

而 $x_2[n]$ 的 z 变换对仍由(10.51)式给出。将例 10.2 的结果用到(10.54)式, 可得

$$x_2[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

这样

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

前面这些例子说明了利用部分分式展开的方法来确定 z 变换的基本步骤。和拉普拉斯变

换对应的方法一样，这个方法依赖于将 z 变换表示成一组较简单项的线性组合，而对每一简单项的反变换都能凭直观求得。特别是，假定 $X(z)$ 的部分分式展开式具有如下形式：

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}} \quad (10.55)$$

$X(z)$ 的反变换就等于(10.55)式中每一项反变换之和。若 $X(z)$ 的 ROC 是位于极点 $z = a_i$ 的外边，那么与(10.55)式中相应项的反变换就是 $A_i a_i^n u[n]$ ；另一方面，若 $X(z)$ 的 ROC 是位于极点 $z = a_i$ 的里面，那么对应于这一项的反变换就是 $-A_i a_i^n u[-n-1]$ 。一般来说，在 $X(z)$ 的部分分式展开式中，可以包括除了在(10.55)式中的一次项以外的其它项。在 10.6 节将列出几个其它的 z 变换对，利用这些变换对，再与将在 10.5 节所讨论的 z 变换性质一起，就能将上述例子中所建立的求反变换方法推广到任意有理 z 变换中去。

确定 z 反变换的另一种十分有用的方法是建立在 $X(z)$ 的幂级数展开的基础之上的。这个方法直接来自 z 变换的定义(10.3)式，因为由这个定义可看到，实际上 z 变换就是涉及 z 的正幂和负幂的一个幂级数，这个幂级数的系数就是序列值 $x[n]$ 。为了说明一个幂级数的展开式如何能用来得到 z 反变换的，现考虑如下三个例子。

例 10.12 有一 z 变换为

$$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}, \quad 0 < |z| < \infty \quad (10.56)$$

根据(10.3)式 z 变换的幂级数定义，凭直观就能确定 $X(z)$ 的反变换为

$$x[n] = \begin{cases} 4, & n = -2 \\ 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

也即

$$x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1] \quad (10.57)$$

比较(10.56)式和(10.57)式可以看出，不同的 z 的幂在序列中用作不同的占位符号；也即，若应用如下变换对：

$$\delta[n+n_0] \xrightarrow{\leftrightarrow} z^{n_0},$$

就能立即由(10.56)式过渡到(10.57)式，反之亦然。

例 10.13 考虑一个 z 变换 $X(z)$ 为

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

该式可用长除法将其展开成幂级数

$$\begin{array}{r} 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \\ 1 - az^{-1} \overline{) 1} \\ \underline{az^{-1}} \\ az^{-1} \\ \underline{a^2 z^{-2}} \end{array}$$

或者写为

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \quad (10.58)$$

因为 $|z| > |a|$, 或 $|az^{-1}| < 1$, 所以(10.18)式的级数收敛。将该式与(10.3)式的 z 变换定义作一比较可见: $n < 0$, $x[n] = 0$; $x[0] = 1$; $x[1] = a$; $x[z] = a^2$, ..., $x[n] = a^n u[n]$, 这是与例 10.1 一致的。

如果 $X(z)$ 的 ROC 是 $|z| < |a|$, 或者等效为 $|az^{-1}| > 1$, 那么, 以(10.58)式对 $1/(1 - az^{-1})$ 的幂级数展开式就不收敛。然而, 利用再一次长除可以得到一个收敛的幂级数为

$$\begin{array}{c} -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots \\ \hline -az^{-1} + 1 \end{array}$$

$$\frac{1 - a^{-1}z}{a^{-1}z}$$

或者

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots \quad (10.59)$$

在这种情况下, $n \geq 0$, $x[n] = 0$; 和 $x[-1] = -a^{-1}$; $x[-2] = -a^{-2}$, ..., 也就是 $x[n] = -a^n u[-n-1]$ 。这个结果与例 10.2 是一致的。

用幂级数展开法来求 z 反变换对非有理的 z 变换式特别有用, 现用下面例子来说明。

例 10.14 考虑如下 z 变换 $X(z)$

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a| \quad (10.60)$$

由于 $|z| > |a|$, 或等效为 $|az^{-1}| < 1$, 可将(10.60)式展开为泰勒级数

$$\log(1 + v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n}, \quad |v| < 1 \quad (10.61)$$

将上式用于(10.60)式就有

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n} \quad (10.62)$$

据此, 就可确认出

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases} \quad (10.63)$$

或等效为

$$x[n] = \frac{(-a)^n}{n} u[n-1]$$

在习题 10.63 中将考虑收敛域为 $|z| < |a|$ 的一个例子。

10.4 由零极点图对傅里叶变换进行几何求值

在 10.1 节曾提到, 只要 z 变换的 ROC 包括单位圆, 而使傅里叶变换收敛, 那么对于 $|z| = 1$ (在 z 平面上对应于单位圆的围线), z 变换就变为傅里叶变换。同样, 在第 9 章也看到, 连续时间信号在 s 平面上 $j\omega$ 轴上的拉普拉斯变换就变成傅里叶变换。在 9.4 节还讨论了从拉普拉斯变换的零极点图可以用几何的方法对傅里叶变换进行求值。在离散时间情况下, 利用 z 平面内零极点向量也能对傅里叶变换进行几何求值。然而, 因为在这种情况下, 有理函数是在 $|z| = 1$ 的单位圆上进行求值, 所以应该考虑从极点和零点到这一单位圆上的向量, 而不是

到虚轴上的向量。为了说明这一方法，今考虑曾在 6.6 节讨论过的一阶和二阶系统。

10.4.1 一阶系统

一阶因果离散时间系统的单位脉冲响应具有如下一般形式：

$$h[n] = a^n u[n] \quad (10.64)$$

由例 10.1，它的 z 变换是

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a| \quad (10.65)$$

若 $|a| < 1$, ROC 包括单位圆，结果， $h[n]$ 的傅里叶变换收敛并等于 $H(z)$, $z = e^{j\omega}$ 。因此，一阶系统的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad (10.66)$$

图 10.13(a)画出了由(10.61)式表示的 $H(z)$ 的零极点图，其中包括从极点($z = a$)和零点($z = 0$)到单位圆的向量。利用这个图， $H(z)$ 的几何求值可以用在 9.4 节讨论的同一方法来完成。如果希望要求(10.65)式的频率响应，就需以 $z = e^{j\omega}$ 来完成对各 z 值的求值。频率响应在频率 ω 处的模就是向量 v_1 的长度与向量 v_2 的长度之比，如图 10.13(a)所示。频率响应的相位是向量 v_1 相对于实轴的角度减去向量 v_2 相对于实轴的角度。此外，从在原点的零点到单位圆的向量 v_1 有一个不变的长度且为 1，因此对 $H(e^{j\omega})$ 的模特性没有任何影响。而该零点对 $H(e^{j\omega})$ 相位的贡献则是该零点向量相对于实轴的角度，可以由图看到它就等于 ω 。对于 $0 < a < 1$ ，该极点向量在 $\omega = 0$ 处其长度为最小，然后随 ω 从 0 增加到 π 单调增加，因此频率响应的模在 $\omega = 0$ 一定为最大，然后随 ω 从 0 到 π 增加而单调下降。该极点向量的角度开始时为 0，然后随 ω 从 0 增加到 π 而单调增加。对于两个不同的 a 值，所得到的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的模和相位特性分别如图 10.13(b)和(c)所示。

在离散时间一阶系统中，参数 a 的大小所起的作用就类似于 9.4.1 节连续时间一阶系统中时间常数 τ 的作用。在图 10.13 中首先注意到， $H(e^{j\omega})$ 在 $\omega = 0$ 峰值的大小随着 $|a|$ 朝向 0 减小而减小。另外，如同在 6.6.1 节所讨论的，以及在图 6.26 和图 6.27 所说明的，当 $|a|$ 减小时，单位脉冲响应衰减得更陡峭了，而阶跃响应建立得更快了。如果不是一个极点，而有多个极点的话，那么与每个极点有关的响应速度与该极点到原点的距离有关，最靠近原点的那些极点在单位脉冲响应中提供了最快的衰减项。这将在下面的二阶系统中作进一步的说明。

10.4.2 二阶系统

接下来考虑在 6.6.2 节讨论的一类二阶系统，它的单位脉冲响应和频率响应分别由(6.64)和(6.60)式给出，这里重复如下：

$$h[n] = r^n \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} u[n] \quad (10.67)$$

和

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}} \quad (10.68)$$

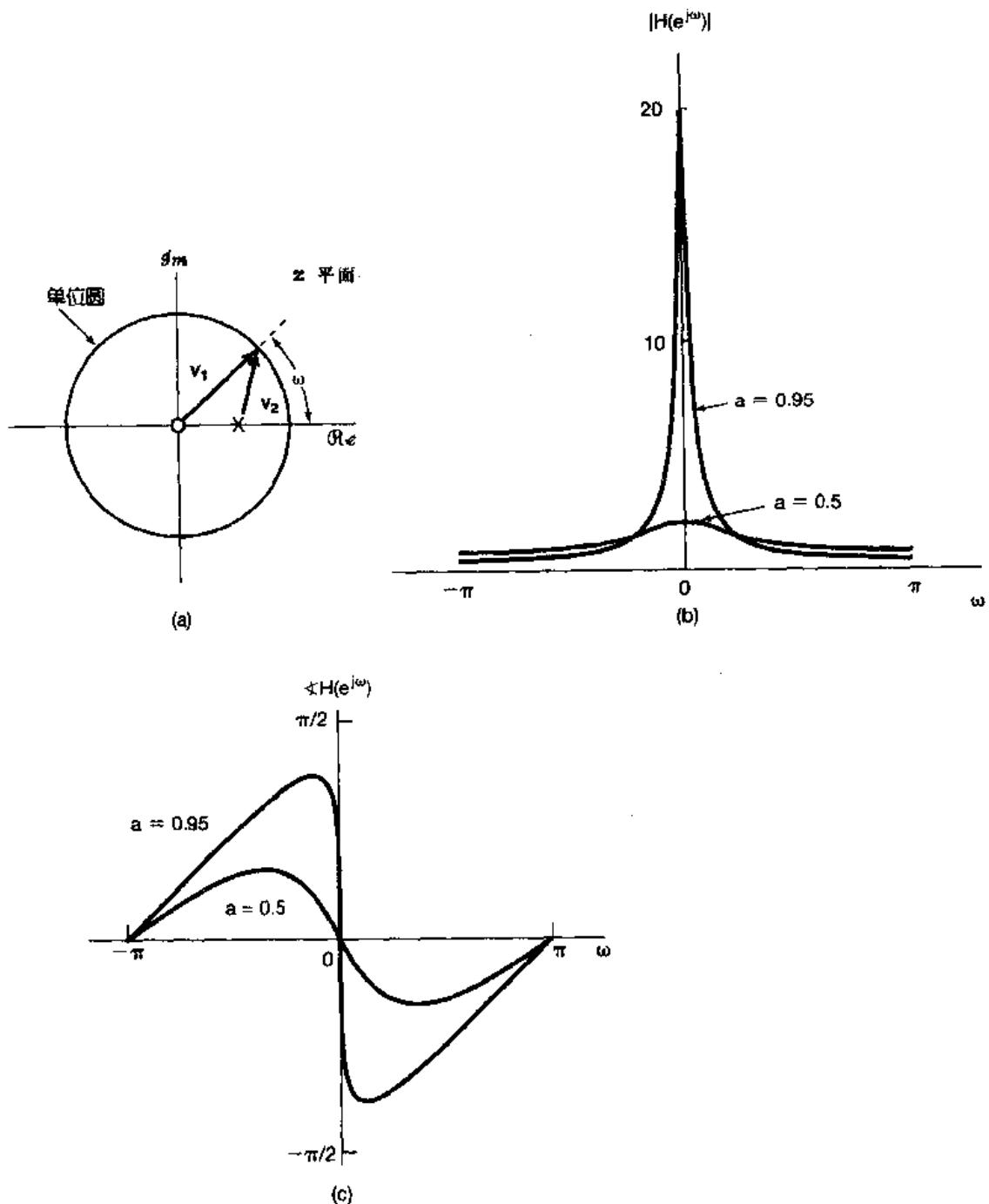


图 10.13 (a) 对于 a 位于 0 和 1 之间的某个值, 一阶系统频率响应几何求值的极点和零点向量;
 (b) $a=0.95$ 和 $a=0.5$ 时的频率响应模特性;
 (c) $a=0.95$ 和 $a=0.5$ 时的频率响应的相位特性

式中 $0 < r < 1$ 和 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。因为 $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$, 所以就能从(10.68)式推出系统函数, 它就相当于系统单位脉冲响应的 z 变换为

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (10.69)$$

$H(z)$ 的极点位于

$$z_1 = re^{j\theta}, \quad z_2 = re^{-j\theta} \quad (10.70)$$

并且在 $z=0$ 有二阶零点。 $H(z)$ 的零极点图以及当 $0 < \theta < \pi/2$ 时的零极点向量都示于图 10.14(a) 中。这时，频率响应的模等于向量 v_1 模的平方（因为在原点是二阶零点）除以向量 v_2 和 v_3 模的乘积。由于向量 v_1 的长度对所有 ω 值都是 1，所以频率响应的模就等于两个极点向量 v_2 和 v_3 长度乘积的倒数。另外，频率响应的相位等于向量 v_1 相对于实轴的角度的两倍减去向量 v_2 和 v_3 的角度之和。在图 10.14(b) 中展示了 $r=0.95$ 和 $r=0.75$ 时频率响应的模特性，而在图 10.14(c) 中，对同样两个 r 值时，所展示出的是 $H(e^{j\omega})$ 的相位特性。在图中

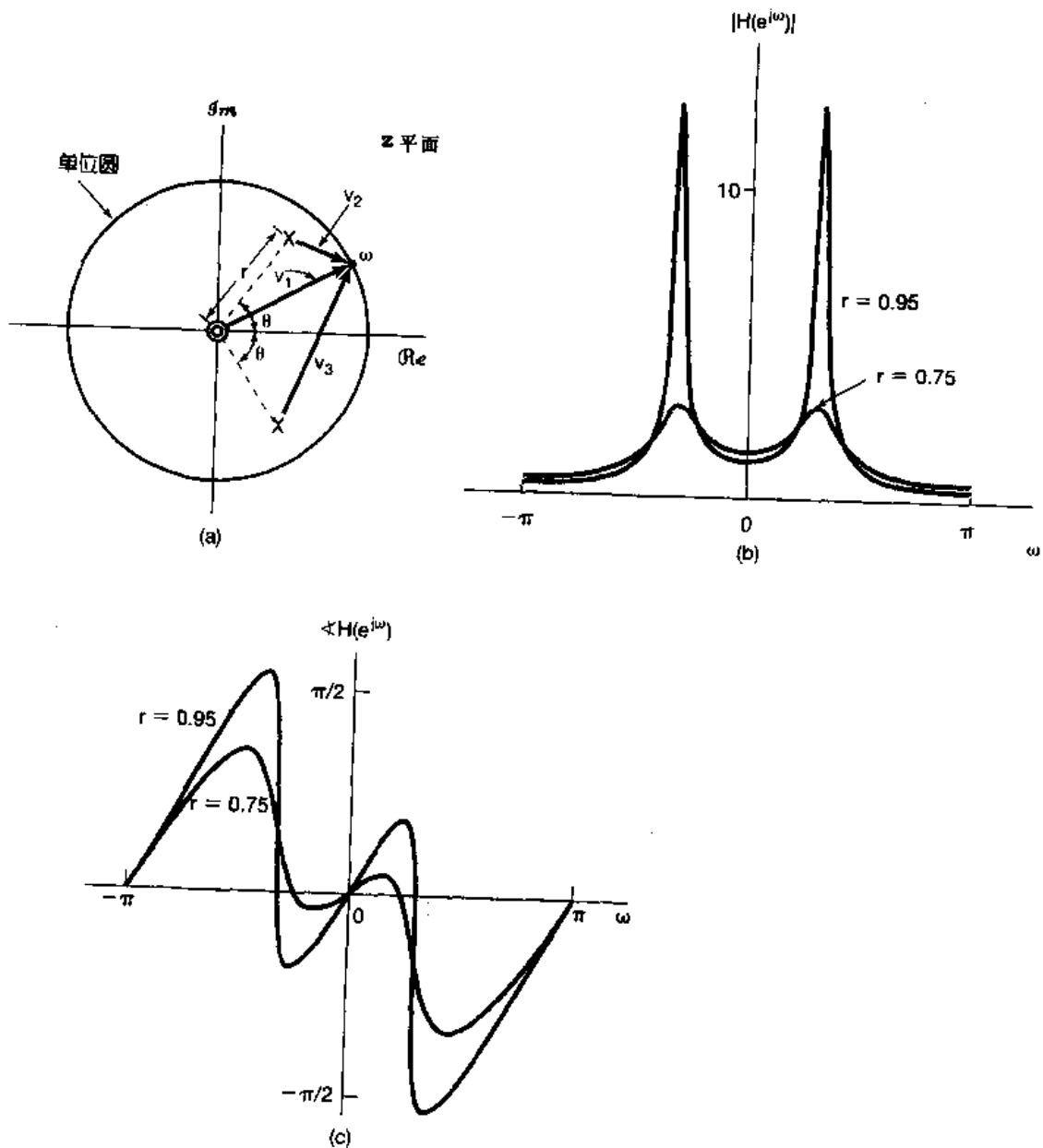


图 10.14 (a) 用于二阶系统频率响应几何求值中的零点向量 v_1 和极点向量 v_2 和 v_3 ;
 (b) 对于 $r=0.95$ 和 $r=0.75$ 时，对应于极点向量长度乘积的倒数的频率响应模特性；
 (c) $r=0.95$ 和 $r=0.75$ 时频率响应的相位特性

特别注意到，随着 ω 沿单位圆从 $\omega=0$ 向 $\omega=\pi$ 移动，向量 v_2 的长度起初是减小，然后增加，在极点位置 $\omega=\theta$ 附近有一个最小值。这就与当向量 v_2 的长度比较小时，频率响应的模特性在 ω 接近 θ 附近出现峰值是一致的。根据极点向量的性质，很明显，随着 r 向 1 接近，极点向量的最小长度也减小，因此频率响应的峰值将随着 r 的增加而变得更为尖锐。另外，对于 r 接近于 1，向量 v_2 的角度对于 ω 在 θ 附近改变时变化剧烈。从单位脉冲响应[(10.67)式和图 6.29]或阶跃响应[(6.67)式和图 6.30]中可以看到，就像在一阶系统那样，随着极点向原点移近，这就相应于 r 减小，单位脉冲响应衰减得更为迅速，而阶跃响应则建立得更快。

10.5 z 变换的性质

和已经讨论过的其它变换一样，z 变换也具有许多性质，这些性质在离散时间信号与系统的研究中成为很有价值的工具。这一节将把这些性质作一综述。由于这些性质的推导都与其它变换相类似，所以很多推导都留给读者作为练习(见习题 10.43 和 10.51~10.54)。

10.5.1 线性

若

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) \quad \text{ROC} = R_1$$

和

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z) \quad \text{ROC} = R_2$$

则

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z) \quad \text{ROC 包括 } R_1 \cap R_2 \quad (10.71)$$

如同所指出的，线性组合的 ROC 至少是 R_1 和 R_2 相重合的部分。对于具有有理 z 变换的序列，如果 $aX_1(z) + bX_2(z)$ 的极点是由 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 的全部极点所构成(也就是说，没有零极点相消)，那么收敛域就一定是各单个收敛域的重叠部分。如果线性组合是这样来构成的，使某些零点的引入抵消掉某些极点，那么收敛域可以增大。属于这种情况的一个简单例子是，当 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 都是无限长序列时，但线性组合以后成为有限长序列了。在这个情况下，线性组合后的序列的 z 变换，其收敛域就是整个 z 平面，可能除去原点和/或无限远点。例如，序列 $a^n u[n]$ 和序列 $a^n u[n-1]$ 都有一个 z 变换的收敛域为 $|z| > |a|$ ，但是它们之差的序列 $(a^n u[n] - a^n u[n-1]) = \delta[n]$ 的 z 变换却有一个收敛域是整个 z 平面。

10.5.2 时移性质

若

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad \text{ROC} = R$$

则

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z) \quad \text{ROC} = R, \text{ 原点或无限远点可能加上或除掉} \quad (10.72)$$

由于乘以 z^{-n_0} , 因此, 若 $n_0 > 0$, z^{-n_0} 将会在 $z = 0$ 引入极点, 而这些极点可以抵消 $X(z)$ 在 $z = 0$ 的零点。因此, 虽然 $z = 0$ 可以不是 $X(z)$ 的一个极点, 但却可以是 $z^{-n_0}X(z)$ 的一个极点。在这种情况下, $z^{-n_0}X(z)$ 的 ROC 等于 $X(z)$ 的 ROC, 但原点要除去。类似地, 若 $n_0 < 0$, z^{-n_0} 将在 $z = 0$ 引入零点, 它可以抵消 $X(z)$ 在 $z = 0$ 的极点。这样当 $z = 0$ 不是 $X(z)$ 的一个极点时, 却可以是 $z^{-n_0}X(z)$ 的一个零点。在这种情况下, $z = \infty$ 是 $z^{-n_0}X(z)$ 的一个极点, 因此 $z^{-n_0}X(z)$ 的 ROC 等于 $X(z)$ 的 ROC, 但 $z = \infty$ 要除去。

10.5..1 z 域尺度变换

若

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad \text{ROC} = R$$

则

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad \text{ROC} = |z_0| R \quad (10.73)$$

这里 $|z_0|R$ 是代表域 R 的一种尺度变化。这就是说, 若 z 是在 $X(z)$ 的 ROC 内的一点, 那么点 $|z_0|z$ 就在 $X(z/z_0)$ 的 ROC 内。同样, 若 $X(z)$ 有一个极点(或零点)在 $z = a$, 那么 $X(z/z_0)$ 就有一个极点(或零点)在 $z = z_0a$ 。

(10.73)式的一个重要的特例是当 $z_0 = e^{j\omega_0}$ 时, 这时 $|z_0|R = R$, 并且

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{z} X(e^{-j\omega_0} z) \quad (10.74)$$

(10.74)式的左边相当于乘以复指数序列, 而右边可以看作在 z 平面内的旋转, 也就是说, 全部零极点的位置在 z 平面内旋转一个 ω_0 的角度, 如图 10.15 所示。这一过程可以这样来看,

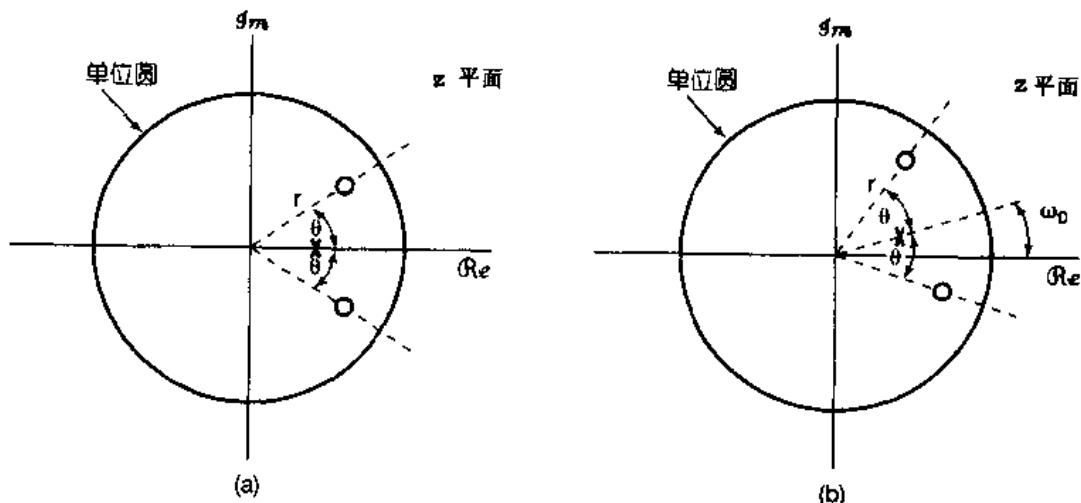


图 10.15 时域乘以复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 在零极点图上的效果:
(a)信号 $x[n]$ 的 z 变换的零极点图;(b) $x[n]e^{j\omega_0 n}$ 的 z 变换的零极点图

如果 $X(z)$ 中有一个因式 $(1 - az^{-1})$, 那么, $X(e^{-j\omega_0} z)$ 中就将有一个因式为 $(1 - ae^{j\omega_0} z^{-1})$, 于是 $X(z)$ 在 $z = a$ 的一个极点或零点就变成 $X(e^{-j\omega_0} z)$ 中在 $z = ae^{j\omega_0}$ 的一个极点或零点。这样, z 变换在单位圆上的特性也将移动一个角度 ω_0 。这一点与在 5.3.3 节的频移性质是一致的, 在那里时域内乘以复指数是与傅里叶变换的频移相对应的。另外, 在 $z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$ 的一般情况下, (10.73)式所

代表的极点和零点的位置变化除了有一个 ω_0 旋转外，在大小上还要有 r_0 倍的变化。

10.5.4 时间反转

若

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad \text{ROC} = R$$

则

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{ROC} = \frac{1}{R} \quad (10.75)$$

这就是说，若 z_0 是在 $x[n]$ 的 z 变换 ROC 内，那么 $1/z_0$ 就在 $x[-n]$ 的 z 变换的 ROC 内。

10.5.5 时间扩展

在 5.3.7 节中已讨论到，连续时间的时域尺度变换的概念不能直接推广到离散时间中去，因为离散时间变量是仅仅定义在整数值上。然而，离散时间时间扩展的概念（即在离散时间序列 $x[n]$ 的各个值之间插入若干零值）还是可以被定义，并且在离散时间信号与系统分析中起着重要的作用。这就是在 5.3.7 节所介绍的 $x_{(k)}[n]$ ，其定义为

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ 是 } k \text{ 的整倍数} \\ 0, & n \text{ 不是 } k \text{ 的整倍数} \end{cases} \quad (10.76)$$

它在原有序列 $x[n]$ 的各连续值之间插入 $(k-1)$ 个零值序列，在这种情况下，若

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad \text{ROC} = R$$

则

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{z} X(z^k), \quad \text{ROC} = R^{1/k} \quad (10.77)$$

这就是说，若 z 是位于 $X(z)$ 的 ROC 内，那么 $z^{1/k}$ 就在 $X(z^k)$ 的 ROC 内；同时，若 $X(z)$ 有一个极点（或零点）在 $z=a$ ，那么， $X(z^k)$ 就有一个极点（或零点）在 $z=a^{1/k}$ 。

这一结果的解释由 z 变换的幂级数形式可直接得出，由这个幂级数可见， z^{-n} 项的系数就等于序列在时刻 n 的值。也就是，由于

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

立即可得

$$X(z^k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] (z^k)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-kn} \quad (10.78)$$

仔细检查一下 (10.78) 式的右边可见，仅仅能出现的是具有 z^{-kn} 的那些项；换句话说， z^{-m} 项的系数；若 m 不是 k 的整倍数，则为 0，而若 m 是 k 的整倍数，则等于 $x[m/k]$ 。因此，(10.78) 式的反变换就是 $x_{(k)}[n]$ 。

10.5.6 共轭

若

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad \text{ROC} = R \quad (10.79)$$

则

$$x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*) \quad \text{ROC} = R \quad (10.80)$$

结果, 若 $x[n]$ 是实序列, 就可由(10.80)式得到

$$X(z) = X^*(z^*)$$

因此, 若 $X(z)$ 有一个 $z = z_0$ 的极点(或零点), 那么就一定有一个与 z_0 共轭成对的 $z = z_0^*$ 的极点(或零点)。例如, 在例 10.4 中实序列 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 就有一对共轭成对的极点 $z = (1/3)e^{\pm j\pi/4}$ 。

10.5.7 卷积性质

若

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) \quad \text{ROC} = R_1$$

和

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z) \quad \text{ROC} = R_2$$

则

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)X_2(z) \quad \text{ROC 包括 } R_1 \cap R_2 \quad (10.81)$$

和拉普斯变换的卷积性质一样, $X_1(z)X_2(z)$ 的 ROC 包括 R_1 和 R_2 的相交部分, 如果在乘积中发生零极点相消, 则 ROC 可以扩大。 z 变换的卷积性质可以用不同的方法导出来。一种正视的推导在习题 10.56 中讨论。另一种方法也能把它导出来, 这很类似于在 4.4 节对连接时间傅里叶变换的卷积性质所做的那样, 它是依赖于把傅里叶变换看成是一个复指数信号通过一个 LTI 系统后, 在该复指数信号的振幅上所给予的变化。

对于 z 变换, 还有一种关于卷积性质的解释。根据(10.3)式的定义, 将 z 变换看成是一个 z^{-1} 的级数, 其中 z^{-n} 的系数就是序列值 $x[n]$ 。这样在实质上, (10.81)式的卷积性质说的是: 当两个多项式或幂级数 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 相乘时, 代表该乘积的多项式的系数就是在多项式 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 中的系数的卷积。(见习题 10.57)。

例 10.15 有一 LTI 系统, 有

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad (10.82)$$

式中

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

注意到

$$\delta[n] - \delta[n-1] \xleftrightarrow{z} 1 - z^{-1} \quad (10.83)$$

其 ROC 等于整个 z 平面, 但不包括原点。同时, (10.83)式的 z 变换在 $z=1$ 有一个零点, 根据(10.81)式可见, 若

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad \text{ROC} = R$$

那么

$$y[n] \xleftrightarrow{z} (1 - z^{-1})X(z) \quad (10.84)$$

其 ROC 等于 R , 但可能会除去 $z=0$ 和/或增加 $z=1$ 。

注意到这个系统有

$$y[n] = [\delta[n] - \delta[n-1]] * x[n] = x[n] - x[n-1]$$

这就是说, $y[n]$ 是序列 $x[n]$ 的一次差分。因为一次差分运算一般都认为就相当于在离散时间情况下的“微分”, 因此, (10.83)式也就可以认为是在 9.5.7 节讨论的拉普拉斯变换微分性质在 z 变换中所对应的性质。

例 10.16 现在考虑一次差分的逆运算, 即累加器或求和器。 $w[n]$ 是 $x[n]$ 的连续求和, 即

$$w[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = u[n] * x[n] \quad (10.85)$$

那么, 利用(10.81)式, 再结合例 10.1 中单位阶跃的 z 变换, 就有

$$w[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) \quad (10.86)$$

其 ROC 至少包括 R 与 $|z| > 1$ 的相交部分。(10.86)式就是在 9.5.9 节得到的拉普拉斯变换积分性质在 z 变换中所对应的性质。

10.5.8 z 域微分

若

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad \text{ROC} = R$$

则

$n x[n] \xleftrightarrow{z} z \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{ROC} = R$

(10.87)

这个性质只要将(10.3)式的 z 变换式两边对 z 进行微分就可直接得出。作为应用该性质的一个例子, 利用它对例 10.14 考虑的 z 变换求反变换。

例 10.17 若 $X(z)$ 为

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a| \quad (10.88)$$

则有

$$n x[n] \xleftrightarrow{z} z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (10.89)$$

这样, 利用微分就把这个非有理的 z 变换转换为一个有理函数的表示式。(10.89)式右边部分的反变换可以用例 10.1 以及在 10.5.2 节所得的时移性质(10.72)式来求得。由例 10.1 和线性性质, 有

$$a(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (10.90)$$

将上式与时移性质结合一起, 就得

$$a(-a)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

因此有

$$x[n] = \frac{(-a)^n}{n} u[n-1] \quad (10.91)$$

例 10.18 作为应用 z 域微分性质的另一个例子, 考虑求下列 z 变换的反变换:

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a| \quad (10.92)$$

由例 10.1, 有

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (10.93)$$

所以有

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a| \quad (10.94)$$

10.5.9 初值定理

若 $n < 0$, $x[n] = 0$, 则

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (10.95)$$

这个性质只要考虑在 z 变换表示式每一项的极限, 利用 $n < 0$, $x[n] = 0$ 的条件就可以得出。由于这个限制,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

当 $z \rightarrow \infty$ 时, 对于 $n > 0$, $z^{-n} \rightarrow 0$, 而当 $n = 0$ 时, $z^{-n} = 1$, 于是得到(10.95)式。

对于一个因果序列, 初值定理的一个直接结果就是: 如果 $x[0]$ 是有限值的话, 那么 $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ 就是有限值。结果, 将 $X(z)$ 表示成两个多项式之比的话, 分子多项式的阶次不能大于分母多项式的阶次; 或者说, 零点的个数不能多于极点的个数。

例 10.19 初始定理也能够用于检验一个信号 z 变换计算中的正确性。例如, 考虑例 10.13 的信号 $x[n]$, 由(10.12)式知道 $x[0] = 1$, 同时, 由(10.14)式

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = 1$$

这就与初始定理一致。

10.5.10 性质小结

表 10.1 综合列出以上所讨论的 z 变换性质。

表 10.1 z 变换性质

节次	性质	信号	z 变换	ROC
10.5.1	线性	$x[n]$	$X(z)$	R
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
10.5.2	时移	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R (除了可能增加或除去原点或 ∞ 点)
10.5.3	z 域尺度变换	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\omega_0} z)$	R
		$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$

续表 10.1

节次	性质	信号	z 变换	ROC
		$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	R 的比例伸缩(即, $ a R$ 在 R 中 z 的这些 $\{ a z \}$ 点的集合)
10.5.4	时间反转	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R^{-1} (即, R^{-1} 在 R 中的 z 的这些 z^{-1} 点的集合)
10.5.5	时间扩展	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n=rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ 对某整数 r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (即, 在 R 中的 z 的这些 $z^{1/k}$ 点的集合)
10.5.6	共轭	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
10.5.7	卷积	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	至少是 R_1 和 R_2 的相交
10.5.7	一次差分	$x[n] - x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	至少是 R 和 $ z >0$ 的相交
10.5.7	累加	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	至少是 R 和 $ z >1$ 的相交
10.5.8	z 域微分	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R
10.5.9		初值定理 若 $n<0$, $x[n]=0$, 则 $x[0]=\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$		

10.6 几个常用 z 变换对

与拉普拉斯反变换一样, z 反变换往往也能够很容易地把 $X(z)$ 表示成若干简单项的线性组合来求得。表 10.2 中列出了几个常用的 z 变换对。其中每一对都可以从前面举出的例子, 再结合 z 变换的性质而导得。例如变换对 2 和 5 直接由例 10.1 得出; 变换对 7 则来自例 10.18。有了这些, 再结合分别由 10.5.4 节和 10.5.2 节建立的时间反转和时移性质, 就可以导出变换对 3, 6 和 8。变换对 9 和 10 可以利用变换对 2, 再结合分别由 10.5.1 节和 10.5.3 节建立的线性和 z 域尺度变换性质而得到。

表 10.2 几个常用 z 变换对

信 号	变 换	ROC
1. $\delta[n]$	1	全部 z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z >1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z <1$

续表 10.2

信 号	变 换	ROC
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	全部 z , 除去 0(若 $m>0$)或 ∞ (若 $m<0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
6. $-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
7. $n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
8. $-n\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos\omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos\omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z >1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos\omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z >1$
11. $[r^n \cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r \cos\omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos\omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z >r$
12. $[r^n \sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r \sin\omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos\omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z >r$

10.7 利用 z 变换分析与表征 LTI 系统

在离散时间 LTI 系统的分析和表示中, z 变换有其特别重要的作用。根据 10.5.7 节的卷积性质

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (10.96)$$

式中 $X(z)$, $Y(z)$ 和 $H(z)$ 分别是系统输入、输出和单位脉冲响应的 z 变换。 $H(z)$ 称为系统的系统函数或转移函数。只要单位圆是在 $H(z)$ 的 ROC 内, 将 $H(z)$ 在单位圆上求值(即 $z = e^{j\omega}$), $H(z)$ 就变成系统的频率响应。另外, 从 3.2 节的讨论知道, 若一个 LTI 系统的输入是复指数信号 $x[n] = z^n$, 那么输出一定是 $H(z)z^n$; 这就是说, z^n 是系统的特征函数, 其特征值由 $H(z)$ 给出, 而 $H(z)$ 就是单位脉冲响应的 z 变换。

一个系统的很多性质都能够直接与系统函数的零极点和收敛域的性质相联系, 在这一节将以考察几个重要的系统性质和一类重要的系统来说明这些关系。

10.7.1 因果性

一个因果 LTI 系统其单位脉冲响应 $h[n]$ 是对于 $n < 0$, $h[n] = 0$, 因此是一个右边序列。由 10.2 节的性质 4 知道 $H(z)$ 的 ROC 是位于 z 平面上某一个圆的外边。对于某些系统, 譬如若 $h[n] = \delta[n]$, 而有 $H(z) = 1$, 则 ROC 可以延伸至所有地方, 并可能包括原点。同

时,一般说来,对于一个右边序列,它的 ROC 可以或者不可以包括无限远点。例如,若 $h[n] = \delta[n+1]$,那么 $H(z) = z$,它在无限远点有一个极点。然而,正如在 10.2 节性质 8 所看到的,对于一个因果序列,这个幂级数中,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

不包含任何 z 的正幂次项,因此 ROC 包括无限远点。综合上述,就得出如下属性:

一个离散时间 LTI 系统当且仅当它的系统函数的 ROC 是在某一个圆的外边,且包括无限远点,该系统就是因果的。

如果 $H(z)$ 是有理的,那么由 10.2 节的性质 8,该系统要是因果的,其 ROC 必须位于最外层极点的外边,且无限远点必须在 ROC 内;等效地说,随 $z \rightarrow \infty$ 时, $H(z)$ 的极限必须是有限的。正如在 10.5.9 节所讨论的,这就等效于,当 $H(z)$ 的分子和分母都是表示成 z 的多项式时,其分子的阶次不会大于分母的阶次。即:

一个具有有理系统函数 $H(z)$ 的 LTI 系统要是因果的,当且仅当:(a) ROC 位于最外层极点外边某一个圆的外面;和(b)若 $H(z)$ 表示成 z 的多项式之比,其分子的阶次不能大于分母的阶次。

例 10.20 考虑一系统的系统函数,其代数表示式为

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$$

甚至用不着知道它的 ROC,就能得出该系统不是因果的,因为 $H(z)$ 分子的阶次高于分母的阶次。

例 10.21 考虑一系统,其系统函数是

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2 \quad (10.97)$$

因为该系统函数的 ROC 是在最外层极点外边的某一个圆的外边,就能知道它的单位脉冲响应是右边序列。为了确定是否是因果的,那就仅需要用因果性所要求的其它条件来检验就可以了,这就是当 $H(z)$ 是表示成 z 的两个多项式之比时, $H(z)$ 分子的阶次不能大于分母的阶次。对于这个例子,

$$H(z) = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} \quad (10.98)$$

$H(z)$ 的分子分母都是阶次为 2,因此可得该系统是因果的。计算出 $H(z)$ 的反变换可以证实这一点。利用表 10.2 的变换对 5,可求得该系统的单位脉冲响应为

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + 2^n \right] u[n] \quad (10.99)$$

因为 $n < 0, h[n] = 0$, 就能证实系统是因果的。

10.7.2 稳定性

在 2.3.7 节曾讨论过, 一个离散时间 LTI 系统的稳定性就等效于它的单位脉冲响应是绝对可和的。在这种情况下, $h[n]$ 的傅里叶变换收敛, 结果就是 $H(z)$ 的 ROC 必须包括单位圆。综合上述, 可得如下结果:

一个 LTI 系统当且仅当它的系统函数 $H(z)$ 的 ROC 包括单位圆, $|z| = 1$ 时, 该系统就是稳定的。

例 10.22 再次考虑(10.97)式的系统函数, 因为与其有关的 ROC 是在 $|z| > 2$, 它不包括单位圆, 所以系统不是稳定的。这点也能从它的单位脉冲响应(10.99)式不是绝对可和的所看出。然而, 如果考虑一个系统其系统函数和(10.97)式有相同的代数表示式, 但 ROC 是位于 $1/2 < |z| < 2$, 那么 ROC 包括单位圆, 这样对应的系统是非因果的, 但是稳定的。在这种情况下, 利用表 10.2 中的变换对 5 和 6, 可求得相应的单位脉冲响应是

$$h[n] = \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] - 2^n u[-n-1] \quad (10.100)$$

它是绝对可和的。

对于第三种可供选择的 ROC 是 $|z| < 1/2$, 这时系统既不是因果的[因为 ROC 不是在最外层极点的外边], 又不是稳定的(因为 ROC 不包括单位圆)。这也能从它的单位脉冲响应中看出, 利用表 10.2 中变换对 6, 可求得为

$$h(n) = - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + 2^n \right] u[-n-1]$$

正如在例 10.22 中所表示的, 一个系统是稳定的但不是因果的, 这是完全可能的。然而, 如果仅集中在因果系统上, 那么系统的稳定性就能很容易由检查极点的位置来验证。对于一个具有有理系统函数的因果系统而言, ROC 位于最外层极点的外边。对于这个包括单位圆的 ROC, 系统的全部极点都必须位于单位圆内, 即:

一个具有有理系统函数的因果 LTI 系统, 当且仅当 $H(z)$ 的全部极点都位于单位圆内时, 也即全部极点其模均小于 1 时, 系统就是稳定的。

例 10.23 考虑一因果系统, 其系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

它有一个极点在 $z = a$ 。对于这个系统要是稳定的, 极点就必须位于单位圆内, 即必须 $|a| < 1$ 。这是与对应的单位脉冲响应 $h[n] = a^n u[n]$ 绝对可和的条件相一致的。

例 10.24 由(10.69)式给出的二阶系统的系统函数具有复数极点, 即

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r\cos\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}} \quad (10.101)$$

其极点位于 $z_1 = re^{j\theta}$ 和 $z_2 = re^{-j\theta}$ 。假定系统为因果, 可知 ROC 位于最外层极点的外边(即 $|z| > |r|$)。对于 $r > 1$ 和 $r < 1$ 时, 这个系统的零极点图和 ROC 均如图 10.16 所示。对于 $r < 1$, 极点位于单位圆内, ROC 包括单位圆, 因此系统是稳定的。对于 $r > 1$, 极点在单位圆外, ROC 不包括单位圆, 系统是不稳定的。

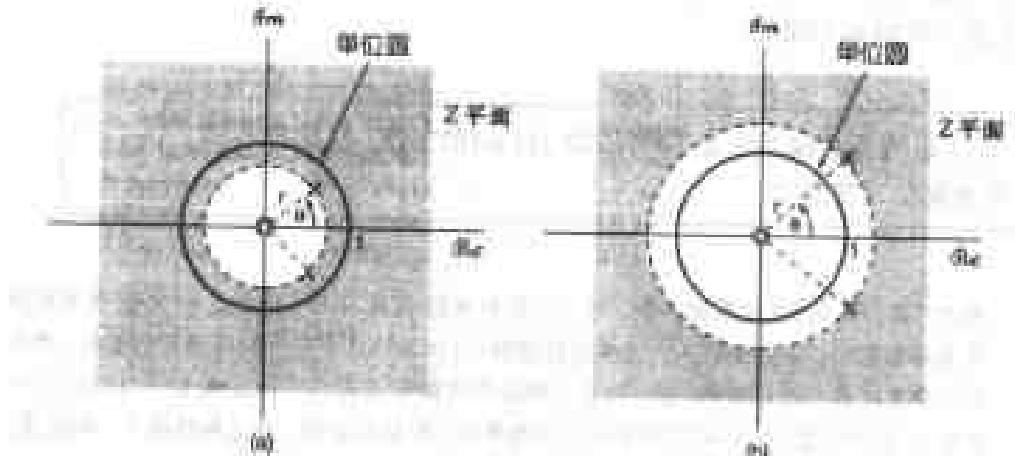


图 10.16 具有复数极点的二阶系统的零极点图; (a) $r < 1$; (b) $r > 1$

10.7.3 由线性常系数差分方程表征的 LTI 系统

对于由线性常系数差分方程表征的系统, z 变换的这些性质对于求得系统的系统函数, 频率响应, 或时域响应等都提供了一个特别方便的方法。现用一个例子来说明。

例 10.25 考虑一 LTI 系统, 其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足如下线性常系数差分方程:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] \quad (10.102)$$

在(10.102)式两边应用 z 变换, 并利用 10.5.1 节的线性性质和 10.5.2 节的时移性质, 可得

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

或者

$$Y(z) = X(z) \left[\frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right] \quad (10.103)$$

由(10.96)式, 那么

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (10.104)$$

该式给出了 $H(z)$ 的代数表示式, 但没有收敛域。事实上有两种不同的单位脉冲响应都与(10.102)式这个差分方程相符, 一个是右边的, 另一个是左边的。相应地, 就有两种不同的 ROC 选择: 一是 $|z| > 1/2$, 这是与假设 $h[n]$ 为右边的有关 ROC; 另一个 $|z| < 1/2$, 它就与假设 $h[n]$ 是左边的相联系。

首先考虑 ROC 选为 $|z| > 1/2$ 。将 $H(z)$ 写成

$$H(z) = \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

利用表 10.2 中的变换对 5, 再结合线性和时移性质, 就能求得相应的单位脉冲响应为

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

对于另一种 ROC 的选择, 即 $|z| < 1/2$, 能利用表 10.2 中的变换对 6, 再结合线性和时移性质, 求得

$$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$$

这种情况, 该系统是反因果的 ($n > 0, h[n] = 0$), 且是不稳定的。

对于一般的 N 阶差分方程, 可以用类似于例 10.25 的方法进行, 即对方程两边进行 z 变换, 并利用线性和时移性质。现考虑一个 LTI 系统, 其输入、输出满足如下线性常系数差分方程:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (10.105)$$

在(10.105)式两边取 z 变换, 并利用线性和时移性质可得

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

或者

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

这样就有

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (10.106)$$

从这里特别注意到, 一个满足线性常系数差分方程的系统, 其系统函数总是有理的。另外, 与前面所举的例子以及与拉普拉斯变换有关讨论相一致的是差分方程本身也没有提供关于与代数表示式 $H(z)$ 有关的 ROC 的信息。因此, 诸如像因果性、稳定性等这些附加的限制应该用来作为标定收敛域的条件。例如, 如果知道系统是因果的, 那么 ROC 就一定位于最外层极点的外边; 如果系统是稳定的, ROC 就必定包括单位圆。

10.7.4 系统特性与系统函数的关系举例

正如在前面几节所说明的, 离散时间 LTI 系统的很多性质都能直接与系统函数和它的特性有关。这一节将给出另外几个例子来表明 z 变换是如何用于系统分析的。

例 10.26 假设关于一个 LTI 系统给出下列信息:

- 若系统的输入是 $x_1[n] = (1/6)^n u[n]$, 那么输出是

$$y_1[n] = \left[a\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$$

式中 a 为实数。

2. 若 $x_2[n] = (-1)^n$, 那么输出是 $y_2[n] = \frac{7}{4}(-1)^n$ 。现在要说明, 从这两条信息中就能确定该系统的系统函数 $H(z)$, 包括 a 的值, 同时也能立即推出该系统的几个性质。

由第一条信息, 所给出的这些信号的 z 变换是

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{6} \quad (10.107)$$

$$Y_1(z) = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{(a+10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (10.108)$$

由(10.96)式可得系统函数的代数表示式为

$$H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{[(a+10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}][1 - \frac{1}{6}z^{-1}]}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad (10.109)$$

此外, 对于 $x_2[n] = (-1)^n$ 的响应必须等于 $(-1)^n$ 乘以系统函数 $H(z)$ 在 $z = -1$ 的值, 因此根据第二条信息, 有

$$\frac{7}{4} = H(-1) = \frac{[(a+10) + 5 + \frac{a}{3}]\left[\frac{7}{6}\right]}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)} \quad (10.110)$$

解出(10.110)式, 求得 $a = -9$, 所以

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - \frac{1}{6}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad (10.111)$$

或者

$$H(z) = \frac{1 - \frac{13}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \quad (10.112)$$

或者最后写为

$$H(z) = \frac{z^2 - \frac{13}{6}z + \frac{1}{3}}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} \quad (10.113)$$

由卷积性质知道, $Y_1(z)$ 的 ROC 必须至少包括 $X_1(z)$ 和 $H(z)$ 的 ROC 的相交部分, 对 $H(z)$ 检查一下三种可能的 ROC (即, $|z| < 1/3$, $1/3 < |z| < 1/2$ 和 $|z| > 1/2$), 可以发现, 只有 $|z| > 1/2$, 才能与 $X_1(z)$ 和 $Y_1(z)$ 的 ROC 相符。

因为该系统的 ROC 包括单位圆, 系统是稳定的。此外, 由(10.113)式将 $H(z)$ 表示成以 z 的多项式之比可见, 其分子的阶次不超过分母的阶次, 由此可得, 该系统是因果的。同时利用(10.112)式和(10.106)式, 可以写出在初始松弛条件下表征该系统的差分方程为

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - \frac{13}{6}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2]$$

例 10.27 已知一单位脉冲响应为 $h[n]$, 有理系统函数为 $H(z)$ 的稳定而因果的系统, 假设已经知道

$H(z)$ 有一个极点在 $z=1/2$, 并在单位圆的某个地方有一个零点, 其余极点和零点的真正数量和位置均不知道。试对下面每一种说法作出判断, 能否肯定地说是对, 还是错, 或者由于条件不充分而难以置评:

- (a) $\sum (1/2)^n h[n]$ 收敛。
- (b) 对某一 ω 有 $H(e^{j\omega}) = 0$
- (c) $h[n]$ 为有限长。
- (d) $h[n]$ 是实序列。
- (e) $g[n] = n[h[n] * h[n]]$ 是一个稳定系统的单位脉冲响应。

(a) 是对的。因为 $\sum (1/2)^n h[n]$ 相应于 $h[n]$ 的 z 变换在 $z=2$ 的值, 因此它的收敛就等于点 $z=2$ 在 ROC 内。因为该系统是稳定和因果的, $H(z)$ 的全部极点都必须位于单位圆内, 因此 ROC 就该包括所有位于单位圆外的点, 当然也包括 $z=2$ 。

(b) 是对的, 因为有一个零点在单位圆上。

(c) 是错的, 因为有限长序列的 ROC 必须包括整个 z 平面, 可能除去 $z=0$ 和/或 $z=\infty$, 而这是与在 $z=1/2$ 有一个极点相矛盾的。

(d) 的说法要求 $H(z) = H^*(z^*)$, 这就意味着, 若在一个非实数的地方 $z = z_0$ 有一个极点(或零点), 那么就必定在 $z = z_0^*$ 还有一个极点(或零点)。所给出的信息太少, 而不足以证实该说法是否属实。

(e) 是对的。因为系统是因果的, $n < 0$, $h[n] = 0$, 这样, $h[n] * h[n] = 0$, $n < 0$; 也就是说, 以 $h[n] * h[n]$ 作为单位脉冲响应的系统是因果的, 那么同一结论对于 $g[n] = n[h[n] * h[n]]$ 也是对的。此外, 由 10.5.7 节的卷积性质知道, 对于单位脉冲响应为 $h[n] * h[n]$ 的系统函数 $H^2(z)$, 再由 10.5.8 节的微分性质, 对于 $g[n]$ 的系统函数就是

$$G(z) = -z \frac{d}{dz} H^2(z) = -2zH(z) \left[\frac{d}{dz} H(z) \right] \quad (10.114)$$

由(10.114)式可以得出, $G(z)$ 的极点与 $H(z)$ 的极点有相同的位置, 可能的例外是原点。因此, 因为 $H(z)$ 的全部极点在单位圆内, 所以 $G(z)$ 也必须是这样, $g[n]$ 就是一个因果而稳定的单位脉冲响应。

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

和连续时间的拉普拉斯变换一样, 离散时间中的 z 变换也能将时域中诸如卷积和时移等这些运算用代数运算来代替。这一点已经在 10.7.3 节中应用过了, 在那里将一个 LTI 系统的差分方程描述用一个代数方程的描述来代替。将系统描述转换到代数方程的 z 变换的这种作用在分析 LTI 系统的互联, 以及用基本系统的构造单元的互联来综合出其它的系统中也是很有帮助的。

10.8.1 LTI 系统互联的系统函数

对于分析像级联、并联和反馈互联这些离散时间方框图的系统函数方面的代数问题和 9.8.1 节对应的连续时间系统是完全一样的。例如, 两个离散时间 LTI 系统级联后的系统函数是各自系统函数的乘积。同时, 考虑如图 10.17 所示的两个系统的反馈互联问题, 涉及到的也是要确定整个系统的差分方程或单位脉冲响应这样一些在时域中的关系。然而, 由于系

统和序列都是用它们的 z 变换来表示的，分析中仅涉及到代数方程。对于图 10.17 互联系统的具体方程完全可采用与(9.159)式到(9.163)式相平行的步骤，得出该反馈互联后总的系统函数为

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

(10.115)

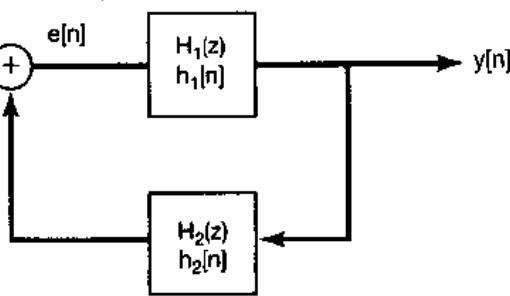


图 10.17 两个系统的反馈互联

10.8.2 由差分方程和有理系统函数描述的因果 LTI 系统的方框图表示

和在 9.8.2 节一样，可以用三种基本运算，即相加，乘以系数和单位延时的方框图来表示由差分方程描述的因果 LTI 系统。在 2.4.3 节曾对一阶差分方程描述过这样的方框图。现在首先再回到那个例子，这次是用系统函数的代数属性，然后再考虑其它稍许复杂一些的例子来说明构成方框图表示中的一些基本概念。

例 10.28 考虑一因果 LTI 系统，其系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

(10.116)

利用 10.7.3 节的结果，可求得该系统的差分方程为

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$$

并具有初始松弛条件。在 2.4.3 节曾对这种形式的一阶系统构造出一种方框图表示，图 10.18(a)示出一种等效的方框图表示（相当于图 2.28 中的 $a = -1/4$ 和 $b = 1$ ），这里 z^{-1} 是单位延时的系统函数。也就是说，由时移性质，这个系统的输入和输出是由

$$w[n] = y[n-1]$$

所表示的。图 10.18(a)的方框图中包括一个反馈回路，它很像在上一节考虑的系统并画在图 10.17 中。事实上，只需作很少的变化，就能得到图 10.18(b)所示的等效方框图，这就与图 10.17 所示的完全一样了，其中 $H_1(z) = 1$ 和 $H_2(z) = (-1/4)z^{-1}$ 。应用(10.115)式就能证实图 10.18 的系统函数是由(10.116)式给出的。

例 10.29 假设现在考虑一因果 LTI 系统，其系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right] (1 - 2z^{-1}) \quad (10.117)$$

按(10.117)式所建议的，可以将系统看作系统函数为 $1/[1 - (1/4)z^{-1}]$ 和另一系统函数为 $(1 - 2z^{-1})$ 的系统级联。在图 10.19(a)中指出了这种级联实现，图中已经用了图 10.18(a)的方框图来表示 $1/[1 - (1/4)z^{-1}]$ ，并且用一个单位延时，一个加法器和一个系统相乘器来表示 $(1 - 2z^{-1})$ 。根据时移性质，具有系统函数为 $(1 - 2z^{-1})$ 的系统，其输入 $v[n]$ 和输出 $y[n]$ 是由下列差分方程相联系的

$$y[n] = v[n] - 2v[n - 1]$$

尽管图 10.19(a)的方框图确实是(10.117)式系统的一个正确表示，但是这个方框图不够经济。为了看出这一点，可以注意到在图 10.19(a)中这两个单位延时单元的输入都是 $v[n]$ ，因此它们的输出都是相同的，即

$$w[n] = s[n] = v[n - 1]$$

这样就不必要保留两个延时单元，而只需用它们中的一个作为给两个系统相乘器提供输入信号就可以了。这个结果就是图 10.19(b)的方框图表示。因为每个单位延时单元都要求一个存贮寄存器来保留它的输入中的前一个值，所以图 10.19(b)比图 10.19(a)的表示要求较少的存贮器。

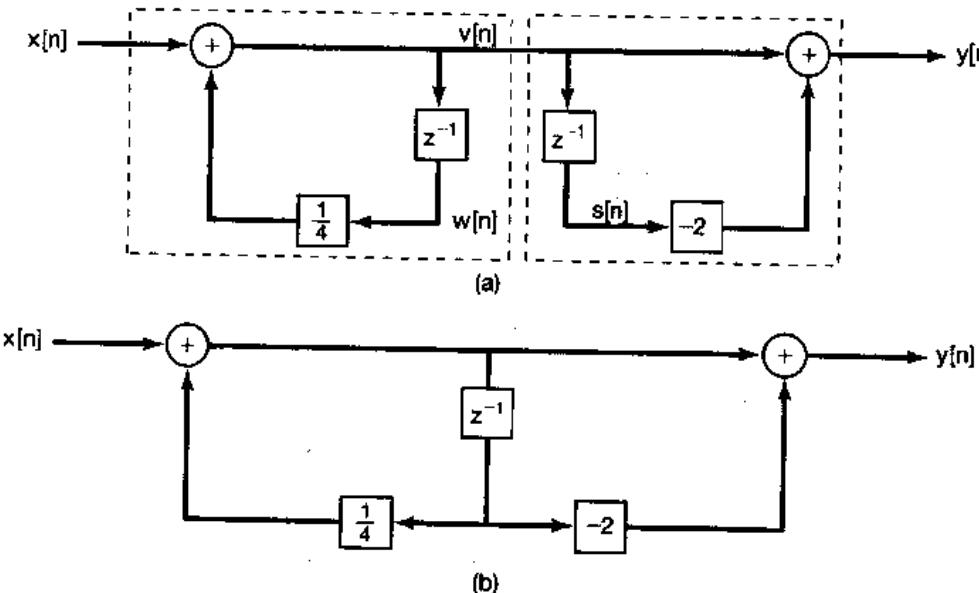


图 10.19 (a)例 10.29 系统的方框图表示；(b) 只用一个单位延时单元的等效方框图表示

例 10.30 有一个二阶系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} \quad (10.118)$$

它的差分方程为

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n - 1] - \frac{1}{8}y[n - 2] = x[n] \quad (10.119)$$

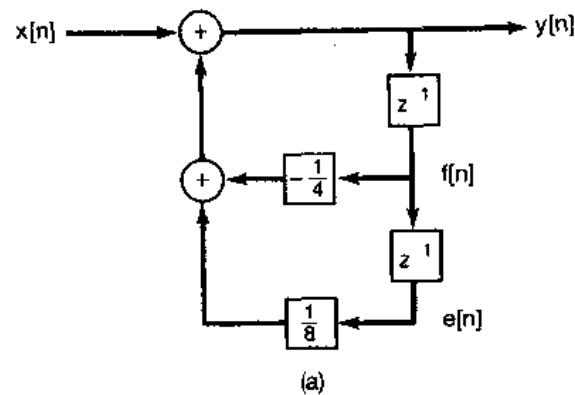
利用和例 10.28 相同的思路，可得该系统的方框图表示如图 10.20(a)所示。因为在图中系统函数为 z^{-1} 的两个方框都是单位延时，因此有

$$f[n] = y[n - 1]$$

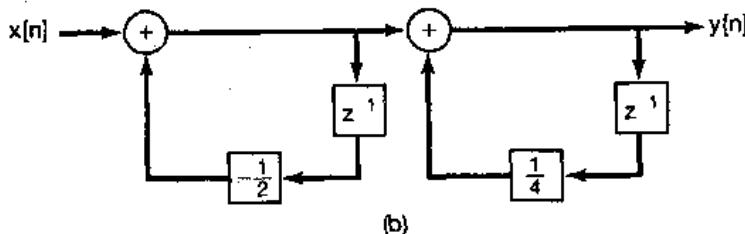
$$e[n] = f[n - 1] = y[n - 2]$$

这样(10.119)式可重写成

$$y[n] = -\frac{1}{4}y[n - 1] + \frac{1}{8}y[n - 2] + x[n]$$



(a)



(b)

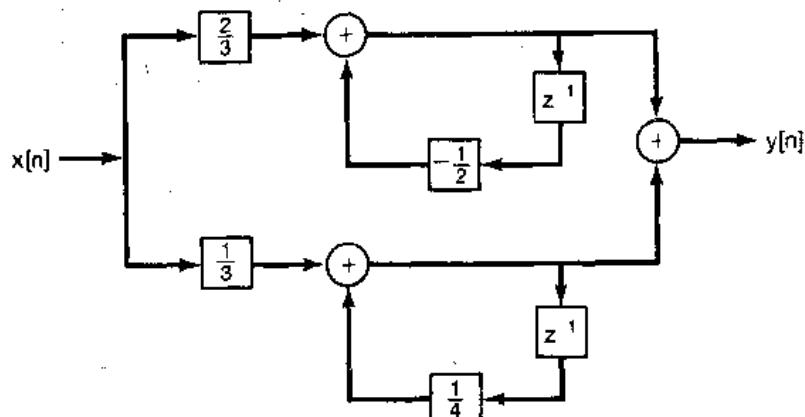


图 10.20 例 10.30 的系统方框图表示：

(a) 直接型; (b) 级联型; (c) 并联型

或者

$$y[n] = -\frac{1}{4}f[n] + \frac{1}{8}e[n] + x[n]$$

这就和图中的表示完全一样了。

图 10.20(a)的方框图一般称为直接型表示，因为出现在方框图中的系数可以直接根据出现在差分方程，或系统函数中的系数来确定。另外，和连续时间系统一样，对系统函数略作一点代数运算，就能得到级联型方框图和并联型方框图。具体说来就是将(10.118)式重写成

$$H(z) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right) \quad (10.120)$$

按该式的级联型表示如图 10.26(b)所示，图中系统是用(10.120)式中代表两个因式的系统级联来表示的。

同样，将(10.118)式作部分分式展开，可得

$$H(z) = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

这就可以导致图 10.20(c)的并联型表示。

例 10.31 最后，考虑的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} \quad (10.121)$$

将它写成

$$H(z) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} \right) \left(1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \right) \quad (10.122)$$

该式就代表了用图 10.20(a)的系统与系统函数为 $(1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2})$ 的系统的级联表示。然而，和在例 10.29 一样，为实现在(10.122)式第一项所需要的这些单位延时单元也产生了在计算第二个系统输出时所要求的延时信号，这个结果就是图 10.21 所示的直接型方框图，有关它的一些构成细节将在习题 10.38 中讨论。在直接型表示中的这些系数可以直接由(10.121)式的系统函数中的系数来确定。

$H(z)$ 也能写成如下形式

$$H(z) = \left[\frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right] \left[\frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right] \quad (10.123)$$

和

$$H(z) = 4 + \frac{5/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{14/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (10.124)$$

由(10.123)式可以想到一种级联型表示，而(10.124)式可以导致一种并联型表示，这些都将在习题 10.38 中考虑。

在前面几个例子中所用到的有关构造方框图表示的一些概念都能够直接用到高阶系统中去，在习题 10.39 中将考虑几个例子。和连续时间情况相同，在具体进行时一般都有很大的灵活性。例如，在(10.123)式的乘积表示中，分子和分母的因式如何配对；对每一个因式以什么样的方式来实现；以及这些因式的级联次序等等都有很大的选择余地。尽管所有这些变化都会导致同一个系统的表示，但是实际上在这些不同方框图的性能上还是有差别的。具体

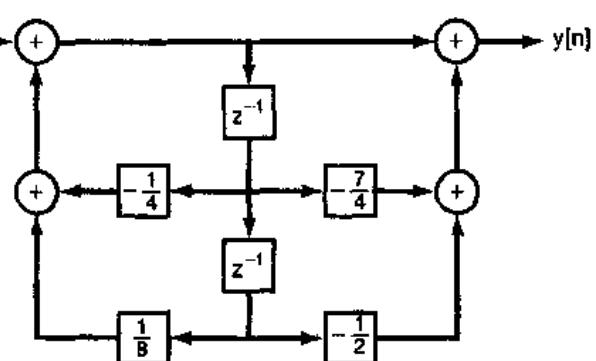


图 10.21 例 10.31 系统的直接型表示

一点说，一个系统的每一种方框图表示，对于系统实现来说都能直接转换为一个计算机算法，然而，由于计算机的有限字长要对方框图中的这些系数进行量化，又由于在算法运算过程中会有数值上的舍入，因此每一种方框图表示所引进的算法仅仅是对原系统特性的一种近似。然而，每种近似中的误差或多或少是不同的。由于这些差别，因此借助于对量化效应的准确度和灵敏度，以对各种不同的方框图表示作出相对的评价，在这一方面已经作了极大的努力。有关这一专题的讨论，读者可查阅书末参考文献中有关数字信号处理方面的参考书。

10.9 单边 z 变换

到目前为止，本章所考虑的 z 变换一般都称为双边 z 变换。和拉普拉斯变换一样，也有另一种形式称之为单边 z 变换。单边 z 变换在分析由线性常系数差分方程描述的，具有初始条件（也即系统不是初始松弛的）的因果系统时是特别有用的。这一节将采用与 9.9 节讨论单边拉普拉斯变换相同的方式来讨论单边 z 变换，并说明它的有关性质和应用。

一个序列 $x[n]$ 的单边 z 变换定义为

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (10.125)$$

和前一章相同，对于一个信号和它的单边 z 变换采用一种方便的简化符号记为

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{X}} \mathcal{X}(z) = \mathcal{X}[x[n]] \quad (10.126)$$

单边 z 变换与双边变换的差别在于，求和仅在 n 的非负值上进行，而不管 $n < 0$ 时， $x[n]$ 是否为零。因此， $x[n]$ 的单边 z 变换就能看作是 $x[n]u[n]$ （即 $x[n]$ 乘以单位阶跃）的双边变换。特别是，对任何序列，若 $n < 0$ 时，本身就为零，那么该序列的单边和双边 z 变换就是一致的。根据在 10.2 节有关收敛域的讨论也可看到，因为 $x[n]u[n]$ 总是一个右边序列， $\mathcal{X}(z)$ 的收敛域就总是位于某一个圆的外边。

由于双边和单边 z 变换之间的紧密联系，因此单边变换的计算和双边变换也相差不多，只是要考虑在变换求和中的极限是对 $n \geq 0$ 进行的。同理，单边 z 反变换的计算也基本上与双边变换相同，只要考虑到对单边变换而言，其 ROC 总是位于某一个圆的外边。

10.9.1 单边 z 变换和单边 z 反变换举例

例 10.32 考虑信号 $x[n]$ 为

$$x[n] = a^n u[n] \quad (10.127)$$

因为 $n < 0$ ， $x[n] = 0$ ，所以该例的单边和双边变换相等为

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (10.128)$$

例 10.33 设 $x[n]$ 为

$$x[n] = a^{n+1} u[n+1] \quad (10.129)$$

这种情况下，单边和双边 z 变换是不等的，因为 $x[-1] = 1 \neq 0$ 。它的双边变换由例 10.1 和 10.5.2 节中的时移性质可求得为

$$X(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (10.130)$$

与此对比，它的单边 z 变换为

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}z^{-n}$$

或者

$$\mathcal{X}(z) = \frac{a}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (10.131)$$

例 10.34 考虑下面单边 z 变换 $\mathcal{X}(z)$:

$$\mathcal{X}(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad (10.132)$$

在例 10.9 中，曾对几个不同的 ROC，讨论过与(10.132)式相同的双边 z 变换 $X(z)$ 的反变换问题。在单边变换的情况下，ROC 必须是位于半径等于 $\mathcal{X}(z)$ 极点最大模值的圆的外边，该例就是 $|z| > 1/3$ ，然后就与例 10.9 完全一样地求单边反变换，得到

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n], \quad n \geq 0 \quad (10.133)$$

在(10.133)式中已经强调了这样一点，即单边 z 反变换所给出的仅为 $n \geq 0$ 时， $x[n]$ 的有关情况。

在 10.3 节所介绍的求反变换的另一种方法，即从 z 变换的幂级数展开式中的系数来求反变换的方法也能够用于单边变换的情况。不过，在单边情况下必须满足的一种限制是，根据(10.125)式的定义，对变换的幂级数展开式中不能包括 z 的正幂次项。例如，在例 10.13 中对下面双边变换

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (10.134)$$

进行长除可有两种方式，分别对应于 $X(z)$ 的两种可能的 ROC。其中只有一种，也即对应于 $|z| > |a|$ 的 ROC，才会有一个无 z 的正幂次项的级数展开式，即

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \quad (10.135)$$

而这个才是(10.134)式的展开代表一个单边变换的唯一选择。

应该注意， $\mathcal{X}(z)$ 的幂级数展开式中没有 z 的正幂次项的要求就意味着：不是每一个 z 的函数都能是一个单边的 z 变换。特别是，若考虑将 z 的一个有理函数写成以 z (而不是以 z^{-1}) 的多项式之比的话，即

$$\frac{p(z)}{q(z)} \quad (10.136)$$

那么，对这个 z 的有理函数要能成为一个单边变换(适当地选择 ROC 为某一个圆的外边)，其分子的阶次必须不能大于分母的阶次。

例 10.35 说明前面结论的一个简单例子是由(10.130)式给出的有理函数，现在将它写成 z 的多项式之比为：

$$\frac{z^2}{z-a} \quad (10.137)$$

有两种可能的双边变换都能与这个函数有关，即它们对应于两种可能的 ROC， $|z| < |a|$ 和 $|z| > |a|$ 。选择 $|z| > |a|$ 就对应于一个右边序列，但是，它不是一个对所有 $n < 0$ 都为零的序列，因为它的反变换由(10.129)式给出，对于 $n = -1$ ，并不为零。

更一般地说，若将(10.136)式与一个其 ROC 是位于半径为 $q(z)$ 的根的最大模值的圆的外边的双边 z 变换相联系的话，那么其反变换肯定是右边的；然而，要使它对所有 $n < 0$ 都为零，就必须也是($p(z)$ 的阶) $\leq (q(z) \text{ 的阶})$ 。

10.9.2 单边 z 变换性质

单边 z 变换有许多重要性质，其中有一些是与双边变换对应的性质相同的，而另有几个是明显不同的。表 10.3 综合列出了这些性质。在表中可以注意到，并没有包括这么一列，明确指出每一信号的单边 z 变换的 ROC。这是因为任何单边 z 变换的 ROC 总是位于某一个圆的外边；譬如，对于一个有理单边 z 变换的 ROC 总是位于最外层极点的外边。

表 10.3 单边 z 变换性质

性 质	信 号	单边 z 变换
—	$x[n]$	$\mathcal{R}(z)$
—	$x_1[n]$	$\mathcal{R}_1(z)$
—	$x_2[n]$	$\mathcal{R}_2(z)$
线性	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$a\mathcal{R}_1(z) + b\mathcal{R}_2(z)$
时间延迟	$x[n-1]$	$z^{-1}\mathcal{R}(z) + x[-1]$
时间超前	$x[n+1]$	$z\mathcal{R}(z) - zx[0]$
z 域尺度变换	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$\mathcal{R}(e^{-j\omega_0}z)$
	$z_0^n x[n]$	$\mathcal{R}(z/z_0)$
	$a^n x[n]$	$\mathcal{R}(a^{-1}z)$
时间扩展	$x_k[n] = \begin{cases} x[m], & n = mk \\ 0, & n \neq mk \text{ 对任意 } m \end{cases}$	$\mathcal{R}(z^k)$
共轭	$x^*[n]$	$\mathcal{R}^*(z^*)$
卷积(假设 $n < 0$ $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 均为零)	$x_1[n] * x_2[n]$	$\mathcal{R}_1(z)\mathcal{R}_2(z)$
一次差分	$x(n) - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})\mathcal{R}(z) - x[-1]$
累加	$\sum_{k=0}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}\mathcal{R}(z)$
z 域微分	$nx[n]$	$-z \frac{d\mathcal{R}(z)}{dz}$

初值定理
 $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{R}(z)$

将这张表与双边 z 变换对应的表 10.1 作一对比，就会对单边变换的性质有更深入的理解。特别是有几个性质，即线性、 z 域尺度变换、时间扩展、共轭和 z 域微分等与它们的双边变换相应的性质都是一样的。至于在 10.5.9 节所提到的初值定理，这本来就是一个单边变换的性质，因为它要求 $n < 0$, $x[n] = 0$ 。有一个双边变换的性质，即在 10.5.4 节所得出的时间反转性质，很明显地在单边变换情况下找不到对应的东西，而剩下的这些性质在双边和单边变换之间有一些重要的差异。

首先来考察一下在卷积性质上的差别。表 10.3 说的是，若 $x_1[n] = x_2[n] = 0$, 对于全部 $n < 0$, 则有

$$x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{X}_1(z) \mathcal{X}_2(z) \quad (10.138)$$

因为在这个情况下，对这两个信号的双边和单边变换都是相同的，所以(10.138)式由双边变换的卷积性质就能得出。因此，只要考虑的是因果 LTI 系统（这时，系统函数既是单位脉冲响应的双边 z 变换，又是它的单边 z 变换），其输入是对 $n < 0$ 均为零，那么在这一章所建立并应用的系统分析和系统函数的代数属性都能毫无变化的应用到单边变换中去。这种应用的一个例子是表 10.3 中的累加或求和性质。若 $n < 0$, $x[n] = 0$, 那么

$$\sum_{k=0}^n x[k] = x[n] * u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{X}(z) \mathcal{U}(z) = \mathcal{X}(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (10.139)$$

作为第二个例子，考虑下面这个例子。

例 10.36 考虑由下列差分方程描述的因果 LTI 系统：

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n] \quad (10.140)$$

结合初始松弛的条件，其系统函数为

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (10.141)$$

假定系统的输入是 $x[n] = \alpha u[n]$, 这是 α 是某个给定的常数。这时，系统输出 $y[n]$ 的单边（和双边） z 变换是

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{H}(z) \mathcal{X}(z) = \frac{\alpha}{(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{(3/4)\alpha}{1 + 3z^{-1}} + \frac{(1/4)\alpha}{1 - z^{-1}} \quad (10.142)$$

将例 10.32 用到(10.142)式中的每一项就得

$$y[n] = \alpha \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} \right) (-3)^n \right] u[n] \quad (10.143)$$

这里值得注意的一点是，单边 z 变换的卷积性质仅仅适用于在(10.138)式中信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 在 $n < 0$ 时都一概是零的情况。尽管对双边变换来讲这点一般都是对的，即 $x_1[n] * x_2[n]$ 的双边变换等于 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 双边变换的乘积，但是，如果 $x_1[n]$ 或 $x_2[n]$ 中有一个在 $n < 0$ 时不是零，那么 $x_1[n] * x_2[n]$ 的单边变换并不等于 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 单边变换的乘积。这一点将在习题 10.41 中作进一步地讨论。

单边 z 变换最重要的应用是在分析因果系统，特别是由线性常系统差分方程描述的，可能具有非零初始条件的因果系统的分析中。在 10.7 节曾看到，双边变换（特别是双边 z 变换中的时移性质）是如何用来分析和计算假定初始松弛条件下，由这样的差分方程表征的 LTI 系统的求解的。现在要看到，单边变换中的时移性质（不同于双边变换的时移性质）对具有初

始条件的系统也起着类似的作用。

为了建立单边变换的时移性质，考虑下列信号：

$$y[n] = x[n-1] \quad (10.144)$$

那么

$$\mathcal{Y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-(n+1)}$$

或者

$$\mathcal{Y}(z) = x[-1] + z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (10.145)$$

这样有

$$\mathcal{Y}(z) = x[-1] + z^{-1}\mathcal{X}(z) \quad (10.146)$$

重复应用(10.146)式， $w[n]$

$$w[n] = y[n-1] = x[n-2] \quad (10.147)$$

的单边变换就是

$$\mathcal{W}(z) = x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\mathcal{X}(z) \quad (10.148)$$

继续这个迭代过程，就能确定对任意正整数 m 的 $x[n-m]$ 的单边 z 变换。

(10.146)式有时称为时延性质，因为在(10.144)式中的 $y[n]$ 就是延迟了的 $x[n]$ 。单边变换也有一个时间超前的性质，它将超前了的 $x[n]$ 的变换与 $\mathcal{X}(z)$ 联系起来，这就如习题 10.60 所指出的是

$$x[n+1] \xleftrightarrow{z} z\mathcal{X}(z) - zx[0] \quad (10.149)$$

10.9.3 利用单边 z 变换求解差分方程

下面例子说明利用单边 z 变换和时延性质来解具有非零初始条件的线性常系数差分方程。

例 10.37 再次考虑(10.140)式的差分方程，其输入 $x[n] = \alpha u[n]$ ，初始条件为

$$y[-1] = \beta \quad (10.150)$$

在(10.140)式两边作单边 z 变换，并利用线性和时延性质可得

$$\mathcal{Y}(z) + 3\beta + 3z^{-1}\mathcal{Y}(z) = \frac{\alpha}{1-z^{-1}} \quad (10.151)$$

对 $\mathcal{Y}(z)$ 求解得

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{3\beta}{1+3z^{-1}} + \frac{\alpha}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})} \quad (10.152)$$

对照例 10.36，特别是(10.142)式可见，(10.152)式右边的第二项等于当(10.150)式的初始条件为零($\beta=0$)时系统响应的单边 z 变换；也就是说，这一项代表由(10.140)式描述的因果 LTI 系统在初始松弛条件下的响应。与连续时间情况相同，这个响应往往称为零状态响应，即当初始条件或初始状态为零时的响应。

(10.152)式右边第一项可看作是零输入响应的单边 z 变换，也即当输入为零($\alpha=0$)时，系统的响应。零输入响应是初始条件 β 值的线性函数。此外，(10.152)式表明，一个具有非零初始状态的线性常系数差分方程的解是零状态响应和零输入响应的叠加。将初始条件置于零所得到的零状态响应，就对应于由该差分方程所定义的因果 LTI 系统在初始松弛条件下的响应。零输入

响应是在输入为零的条件下，单独对初始条件的响应。习题 10.20 和习题 10.42 还给出了其它几个例子来说明单边 z 变换在解非零初始条件下差分方程上的应用。

最后，对于任意 α 和 β 值，都能将(10.152)式中的 $\mathcal{Y}(z)$ 展开成部分分式，然后求反变换而得到 $y[n]$ 。例如，若 $\alpha = 8$ 和 $\beta = 1$ ，则

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{3}{1+3z^{-1}} + \frac{2}{1-z^{-1}} \quad (10.153)$$

应用例 10.32 的单边变换对到上式中每一项，得

$$y[n] = [3(-3)^n + 2]u[n] \quad n \geq 0 \quad (10.154)$$

10.10 小结

这一章讨论了离散时间信号与系统的 z 变换。整个讨论都是和连续时间信号的拉普拉斯变换紧密并行的，但在讨论过程中给出了它们之间某些重要的不同。例如，拉普拉斯变换在 s 平面上演变为虚轴 $j\omega$ 上的傅里叶变换，而 z 变换则是在 z 平面上的单位圆上成为傅里叶变换；对拉普拉斯变换来说，ROC 由一条带状，或该带状在一个方向上延伸到无限远的半平面所组成，而 z 变换的 ROC 则是由一个圆环，或者圆环向外延伸到无限远，或向内延伸到原点所组成。和拉普拉斯变换一样，一个序列的时域特性诸如右边序列，左边序列和双边序列等，和一个 LTI 系统的因果性或稳定性等都能与收敛域的性质联系起来。尤其是对有理的 z 变换来说，这些时域特性都能与相对于收敛域的极点位置联系起来。

由于 z 变换的性质，LTI 系统，其中包括由线性常系数差分方程所描述的系统，都能够凭借代数运算在变换域进行分析。系统函数的代数属性对于 LTI 系统互联的分析，以及对于由差分方程描述的 LTI 系统构造方框图的表示都是一个很有用的工具。

本章大部分关注的都是双边 z 变换。然而，和拉普拉斯变换一样，也介绍了 z 变换的第二种形式，称之为单边 z 变换。单边 z 变换可以看作是一个信号在 $n < 0$ 时已经置于零后，该信号的双边 z 变换，单边 z 变换在分析非零初始条件下，由线性常系数差分方程描述的系统时是特别有用的。

习 题

习题的第一部分属于基本题，答案由书末给出，余下的三部分题分别属于基本题，深入题和扩充题。

基本题(附答案)

10.1 试对下列和式，为保证收敛确定在 $r = |z|$ 上的限制：

- | | |
|--|--|
| (a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n+1} z^{-n}$ | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{-n+1} z^n$ |
| (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1+(-1)^n}{2} \right\} z^{-n}$ | (d) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{ n } \cos(\frac{\pi}{4} n) z^{-n}$ |

10.2 设信号 $x[n]$ 为

$$x[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n-3]$$

利用(10.3)式求该信号的 z 变换，并标出对应的收敛域。

10.3 设信号 $x[n]$ 为

$$x[n] = (-1)^n u[n] + \alpha^n u[-n - n_0]$$

已知它的 z 变换 ROC 是

$$1 < |z| < 2$$

试确定在复数 α 和整数 n_0 上的限制。

10.4 考虑下面信号：

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

对 $X(z)$ 确定它的极点和 ROC。

10.5 对下列信号 z 变换的每个代数表示式，确定在有限 z 平面内的零点个数和在无限远点的零点个数。

$$(a) \frac{z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \quad (b) \frac{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}{(1 - 3z^{-1})(1 - 4z^{-1})} \quad (c) \frac{z^{-2}(1 - z^{-1})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

10.6 设 $x[n]$ 是一个绝对可和的信号，其有理 z 变换为 $X(z)$ 。若已知 $X(z)$ 在 $z=1/2$ 有一个极点， $x[n]$ 能够是

- (a) 有限长信号吗？ (b) 左边信号吗？ (c) 右边信号吗？ (d) 双边信号吗？

10.7 假设 $x[n]$ 的 z 变换代数表示式是

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-2})(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2})}$$

$X(z)$ 可能有多少不同的收敛域？

10.8 设 $x[n]$ 的有理 z 变换 $X(z)$ 含有一个极点在 $z=1/2$ ，已知

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n x[n]$$

是绝对可和的，而

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^n x[n]$$

不是绝对可和的。试确定 $x[n]$ 是否是左边，右边或双边的。

10.9 已知

$$\alpha^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|$$

利用部分分式展开求下面 $X(z)$ 的反变换：

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}, \quad |z| > 2$$

10.10 有一信号 $x[n]$ 的 z 变换的代数表示式为

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

(a) 假定 ROC 是 $|z| > 1/3$ ，利用长除法求 $x[0]$ ， $x[1]$ 和 $x[2]$ 的值。

(b) 假定 ROC 是 $|z| < 1/3$ ，利用长除法求 $x[0]$ ， $x[-1]$ 和 $x[-2]$ 的值。

10.11 求下面 $X(z)$ 的反变换：

$$X(z) = \frac{1}{1024} \left[\frac{1024 - z^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right], \quad |z| > 0$$

10.12 根据由零极点图对傅里叶变换的几何解释, 确定下列每个 z 变换其对应的是否都有一个近似的低通, 带通或高通特性:

$$(a) X(z) = \frac{z^{-1}}{1 + \frac{8}{9}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{8}{9}$$

$$(b) X(z) = \frac{1 + \frac{8}{9}z^{-1}}{1 - \frac{16}{9}z^{-1} + \frac{64}{81}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{8}{9}$$

$$(c) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{64}{81}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{8}{9}$$

10.13 有一矩形序列

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

设

$$g[n] = x[n] - x[n-1]$$

(a) 求信号 $g[n]$, 并直接计算它的 z 变换。

(b) 注意到

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^n g[k]$$

利用表 10.1 求 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$ 。

10.14 考虑三角形序列 $g[n]$

$$g[n] = \begin{cases} n-1, & 2 \leq n \leq 7 \\ 13-n, & 8 \leq n \leq 12 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

(a) 求 n_0 的值, 使之有

$$g[n] = x[n] * x[n - n_0]$$

这里 $x[n]$ 是习题 10.13 中考虑的矩形序列。

(b) 利用卷积和时移性质, 再结合在习题 10.13 中求得的 $X(z)$, 求 $G(z)$ 。证实所得结果满足初值定理。

10.15 设 $y[n]$ 为

$$y[n] = \left(\frac{1}{9}\right)^n u[n]$$

试确定两个不同的信号, 其每一个都有一个 z 变换为 $X(z)$, 且满足下列条件:

1. $[X(z) + X(-z)]/2 = Y(z^2)$ 2. 在 z 平面上, $X(z)$ 仅有一个极点和一个零点。

10.16 考虑稳定 LTI 系统的下列系统函数, 不用求反变换, 试判断是否是因果的系统。

$$(a) \frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$(b) \frac{z - \frac{1}{2}}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{3}{16}}$$

$$(c) \frac{z + 1}{z + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3}}$$

10.17 关于一个单位脉冲响应为 $h[n]$, z 变换为 $H(z)$ 的 LTI 系统 S, 已知下列 5 个事实:

1. $h[n]$ 是实序列。

2. $h[n]$ 是右边序列。

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} H(z) = 1$

4. $H(z)$ 有两个零点

5. $H(z)$ 的极点中有一个位于 $|z| = 3/4$ 圆上的一个非实数位置。

试回答下列两个问题:

(a) S 是因果的吗? (b) S 是稳定的吗?

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}, x[n] \text{ 是绝对可和的。}$$

(b) 长除法

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, x[n] \text{ 为右边序列。}$$

(c) 部分分式展开法

$$X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}, x[n] \text{ 是绝对可和的。}$$

10.25 有一右边序列 $x[n]$, 其 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (\text{P10.25-1})$$

(a) 将(P10.25-1)式表示成 z^{-1} 的多项式之比, 再作部分分式展开, 由展开式求 $x[n]$ 。

(b) 将(P10.25-1)式重写成 z 的多项式之比, 再作部分分式展开, 由展开式求 $x[n]$, 并说明所得得到的序列与(a)所得的是一样的。

10.26 有一左边序列 $x[n]$, 其 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

(a) 将 $X(z)$ 写成 z 的多项式之比。

(b) 利用部分分式展开, 将 $X(z)$ 表示成若干项的和, 其中每一项都代表(a)中答案的一个极点。

(c) 求 $x[n]$ 。

10.27 一个右边序列 $x[n]$ 的 z 变换为

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}$$

求 $n < 0$ 时的 $x[n]$ 。

10.28 (a) 求序列

$$x[n] = \delta[n] - 0.95\delta[n-6]$$

的 z 变换。

(b) 画出(a)中 z 变换的零极点图。

(c) 利用考虑极点向量和零点向量沿单位圆横穿一周时的特性, 近似画出 $x[n]$ 傅里叶变换的模特性。

10.29 利用 10.4 节讨论的频率响应的几何求值法, 对图 P10.29 的每个零极点图大致画出有关傅里叶变换的模特性。

10.30 有一信号 $y[n]$, 它与另两个信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的关系是

$$y[n] = x_1[n+3] * x_2[-n+1]$$

其中

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

已知

$$a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

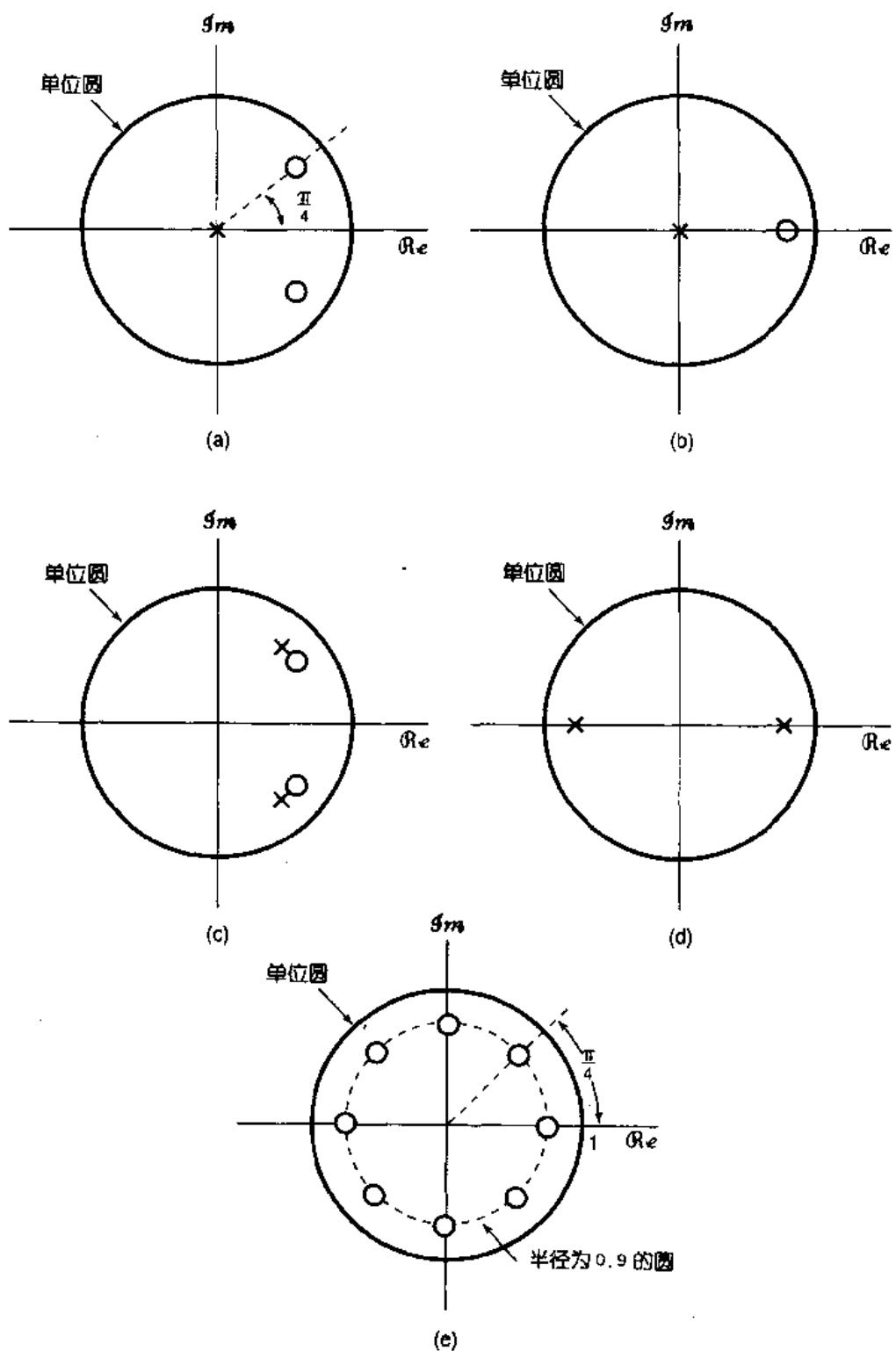


图 P10.29

利用 z 变换性质求 $y[n]$ 的 z 变换 $Y(z)$ 。

10.31 关于 z 变换为 $X(z)$ 的一个离散时间信号 $x[n]$ 给出下面 5 条事实：

1. $x[n]$ 是实且为右边序列。
2. $X(z)$ 只有两个极点。

3. $X(z)$ 在原点有二阶零点。

4. $X(z)$ 有一个极点在 $z = \frac{1}{2} e^{j\pi/3}$

5. $X(1) = 8/3$ 。

试求 $X(z)$ 并给出它的收敛域。

10.32 考虑一 LTI 系统，其单位脉冲响应为

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

和输入为

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

(a) 用 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的离散卷积求输出 $y[n]$ 。

(b) 用计算 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 z 变换的乘积求反变换，再求 $y[n]$ 。

10.33 (a) 求由差分方程

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

表示的因果 LTI 系统的系统函数

(b) 若 $x[n]$ 为

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

用 z 变换求 $y[n]$ 。

10.34 有一因果 LTI 系统，其差分方程为

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

(a) 求该系统的系统函数，画出 $H(z)$ 的零极点图，指出收敛域。

(b) 求系统的单位脉冲响应。

(c) 你应该能发现该系统是不稳定的，求一个满足该差分方程的稳定(非因果)单位脉冲响应。

10.35 考虑一 LTI 系统，其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足下列差分方程：

$$y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

系统可以是也可以不是稳定的或因果的。

利用考虑与上述差分方程相联系的零极点图，求三种可能的系统单位脉冲响应，并证明其中每一个都满足该差分方程。

10.36 考虑一离散时间 LTI 系统，其输入 $x[n]$ 和输入 $y[n]$ 的差分方程为

$$y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

该系统是稳定的，求单位脉冲响应。

10.37 一个因果 LTI 系统的输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 由图 P10.37 的方框图表示。

(a) 求 $y[n]$ 和 $x[n]$ 之间的差分方程。

(b) 该系统是稳定的吗？

10.38 考虑一因果 LTI 系统 S ，其输入为 $x[n]$ ，系统函数表示为

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

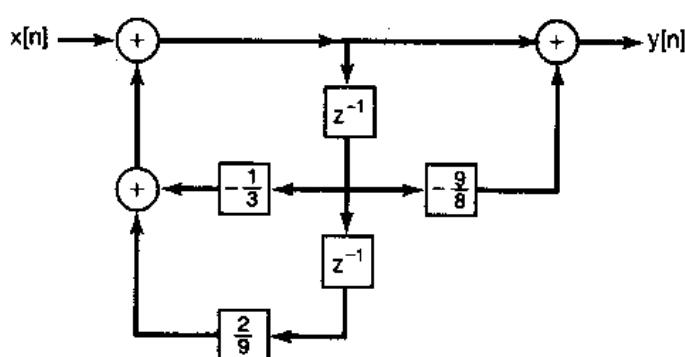


图 P10.37

其中

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

和

$$H_2(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$$

将 $H_1(z)$ 的方框图与 $H_2(z)$ 的方框图级联就得到 $H(z)$ 的方框图，如图 P10.38 所示。图中还标出了各中间信号 $e_1[n]$, $e_2[n]$, $f_1[n]$ 和 $f_2[n]$ 。

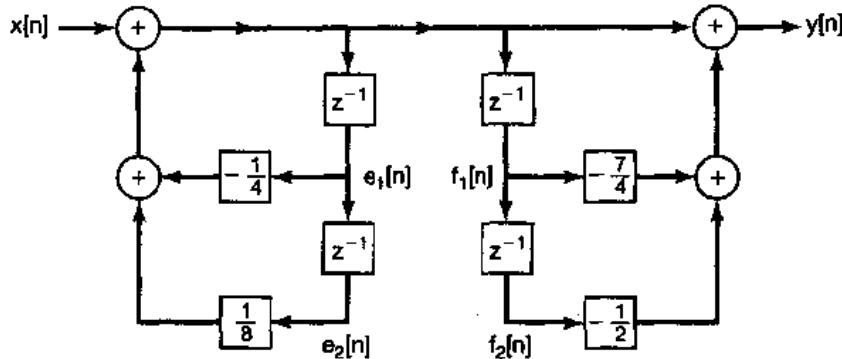


图 P10.38

- (a) $e_1[n]$ 与 $f_1[n]$ 是什么关系？
- (b) $e_2[n]$ 与 $f_2[n]$ 是什么关系？
- (c) 利用上面两部分的结果，构造一个仅含两个延时单元的直接型方框图。
- (d) 依据

$$H(z) = \left(\frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \left(\frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right)$$

画出系统 S 的级联型方框图表示。

- (e) 依据

$$H(z) = 4 + \frac{5/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{14/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

画出系统 S 的并联型方框图表示。

10.39 考虑下列对应于因果 LTI 系统的三个系统函数：

$$H_1(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2})(1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2})}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2})(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2})}$$

$$H_3(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2})(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2})}$$

- (a) 对每一个系统函数画出直接型方框图。
- (b) 对每一个系统函数画出两个二阶系统级联的方框图，其中每个二阶系统应该都是直接型的。
- (c) 对每个系统函数判断是否都存在一种方框图表示，它是由 4 个全由实系数相乘的一阶系统的方

框图级联而成。

10.40 求习题 10.21 中每个序列的单边 z 变换。

10.41 考虑下面两个信号：

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \quad x_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

令 $\mathcal{X}_1(z)$ 和 $X_1(z)$ 分别代表 $x_1[n]$ 的单边和双边 z 变换, $\mathcal{X}_2(z)$ 和 $X_2(z)$ 分别代表 $x_2[n]$ 的单边和双边 z 变换。

(a) 取 $X_1(z)X_2(z)$ 的双边 z 反变换求 $g[n] = x_1[n] * x_2[n]$ 。

(b) 取 $\mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z)$ 的单边 z 反变换得到一个信号 $q[n]$, $n \geq 0$ 。

注意观察, 对 $n \geq 0$, $q[n]$ 和 $g[n]$ 是不相同的。

10.42 对下面给出的各差分方程, 输入 $x[n]$ 和初始条件, 利用单边 z 变换求零输入响应和零状态响应。

$$(a) y[n] + 3y[n-1] = x[n] \quad (b) y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad x[n] = u[n]$$

$$y[-1] = 1 \quad y[-1] = 0$$

$$(c) y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$x[n] = u[n]$$

$$y[-1] = 1$$

深入题

10.43 考虑一偶序列 $x[n]$ (即 $x[n] = x[-n]$), 它的有理 z 变换为 $X(z)$ 。

(a) 根据 z 变换的定义, 证明

$$X(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

(b) 根据(a)中的结果, 证明若 $X(z)$ 的一个极点(零点)出现在 $z = z_0$, 那么在 $z = 1/z_0$ 也一定有一个极点(零点)。

(c) 对下列序列验证(b)的结果:

$$(1) \delta[n+1] + \delta[n-1]$$

$$(2) \delta[n+1] - \frac{5}{2}\delta[n] + \delta[n-1]$$

10.44 设 $x[n]$ 是一离散时间信号, 其 z 变换为 $X(z)$, 对下列信号利用 $X(z)$ 求它们的 z 变换:

(a) $\Delta x[n]$, 这里 Δ 记作一次差分算子, 定义为

$$\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$(b) x_1[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶} \\ 0, & n \text{ 为奇} \end{cases} \quad (c) x_1[n] = x[2n]$$

10.45 确定下列 z 变换中的哪一个能够是一个离散时间线性系统的转移函数, 这些系统不一定是稳定的, 但是其单位脉冲响应是在 $n < 0$ 时为零。请清楚地陈述理由。

$$(a) \frac{(1-z^{-1})^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad (b) \frac{(z-1)^2}{z-\frac{1}{2}} \quad (c) \frac{(z-\frac{1}{4})^5}{(z-\frac{1}{2})^6} \quad (d) \frac{(z-\frac{1}{4})^6}{(z-\frac{1}{2})^5}$$

10.46 一个序列 $x[n]$ 是输入为 $s[n]$ 时一个 LTI 系统的输出, 该系统由下列差分方程描述:

$$x[n] = s[n] - e^{8a}s[n-8]$$

式中 $0 < a < 1$ 。

(a) 求系统函数

$$H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)}$$

并画出零极点图，指出收敛域。

(b) 想用一个 LTI 系统从 $x[n]$ 中恢复出 $s[n]$ ，求系统函数

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

以使得 $y[n] = s[n]$ 。求 $H_2(z)$ 的所有可能的收敛域，并对每一种收敛域回答该系统是否是因果的，或稳定的。

10.47 关于一个输入为 $x[n]$ ，输出为 $y[n]$ 的离散时间 LTI 系统已知下列情况：

1. 若对全部 n , $x[n] = (-2)^n$, 则对全部 n 有 $y[n] = 0$,
2. 若对全部 n , $x[n] = (1/2)^n u[n]$, 则对全部 n , $y[n]$ 为

$$y[n] = \delta[n] + a \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

其中 a 为一常数。

- (a) 求常数 a 的值。
- (b) 若输入 $x[n]$ 是

$$x[n] = 1, \text{ 全部 } n$$

求响应 $y[n]$ 。

10.48 假设一个二阶因果 LTI 系统已经设计或具有实值单位脉冲响应 $h_1[n]$ 和一个有理的系统函数 $H_1(z), H_1(z)$ 的零极点图如图 P10.48(a) 所示。现在要考虑另一个因果二阶系统，其单位脉冲响应为 $h_2[n]$ ，有理系统函数为 $H_2(z), H_2(z)$ 的零极点图如图 P10.48(b) 所示。求一个序列 $g[n]$ ，以便下面三个条件都满足：

- (1) $h_2[n] = g[n]h_1[n]$
- (2) $g[n] = 0, n < 0$
- (3) $\sum_{k=0}^{\infty} |g[k]| = 3$

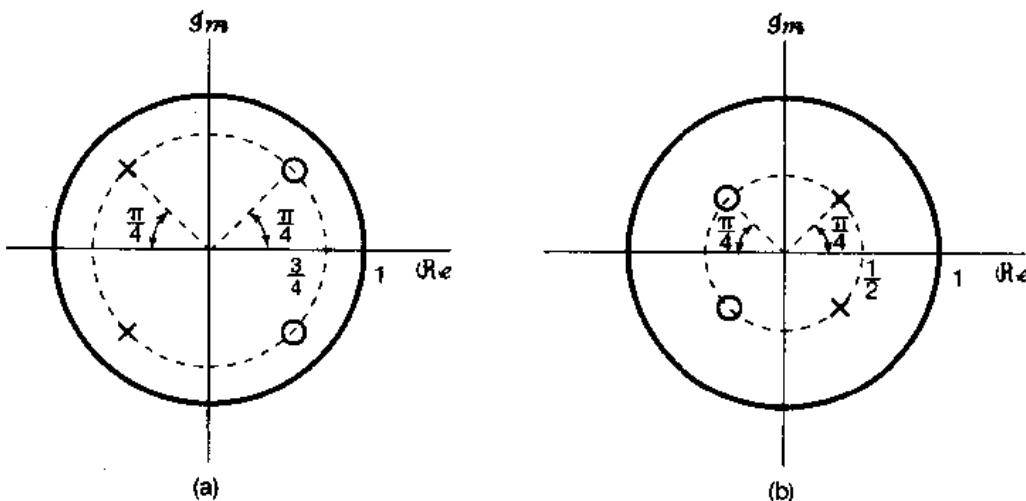


图 P10.48

10.49 在 10.2 节性质 4 说的是，若 $x[n]$ 是一个右边序列，而且若 $|z| = r_0$ 的圆是在 ROC 内，则全部 $|z| > r_0$ ^① 的有限 z 值都一定在这个 ROC 内。一种直观性的解释在讨论中已经给出。更为正规一些的证

① 原文为 $|z| < r_0$ ，有误——译者注。

明是与 9.2 节性质 4 有关拉普拉斯变换的讨论紧密并行的。这就是，考虑一个右边序列

$$x[n] = 0, n < N_1$$

对此有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

那么，若 $r_0 \leq r_1$

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} \leq A \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} \quad (\text{P10.49-1})$$

式中 A 是某一个正值常数。

(a) 证明(P10.49-1)是正确的，并用 r_0 , r_1 和 N_1 来确定常数 A 。

(b) 根据(a)的结果，证明可得 10.2 节的性质 4。

(c) 利用类似的方法来证明 10.2 节性质 5 的成立。

10.50 一离散时间系统，其零极点图如图 P10.50(a) 所示，因为无论频率为什么，频率响应的模都是常数，所以该系统称为一阶全通系统。

(a) 用代数的方法说明 $|H(e^{j\omega})|$ 是常数。

为了用几何的方法说明同一性质，考虑一下图 P10.50(b) 中的向量图。希望证明：向量 v_2 的长度是正比于向量 v_1 的长度而与频率 ω 无关。

(b) 利用余弦定理和下列事实来表示 v_1 的长度：

v_1 是一个三角形的一条边，该三角形的另两条边是单位向量和长度为 a 的向量。

(c) 用与(b)中相似的方法，确定 v_2 的长度，并证明它正比于 v_1 的长度而与频率 ω 无关。

10.51 有一实值序列 $x[n]$ ，其有理 z 变换为 $X(z)$ 。

(a) 由 z 变换定义，证明

$$X(z) = X^*(z^*)$$

(b) 根据(a)中的结果，证明：若 $X(z)$ 有一个极点(零点)出现在 $z = z_0$ ，那么在 $z = z_0^*$ 也一定有一个极点(零点)。

(c) 对下列每个序列验证(b)的结果：

$$(i) x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$(ii) x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

(d) 将(b)结果与习题 10.43(b)的结果结合在一起，证明：对于一个实值偶序列，若 $X(z)$ 有一个极点(零点)在 $z = \rho e^{j\theta}$ ，那么， $H(z)$ 在 $z = (1/\rho)e^{j\theta}$ 和 $z = (1/\rho)e^{-j\theta}$ 也都都有一个极点(零点)。

10.52 有一序列 $x_1[n]$ ，其 z 变换为 $X_1(z)$ 和另一序列 $x_2[n]$ ，其 z 变换为 $X_2(z)$ ，这里

$$x_2[n] = x_1[-n]$$

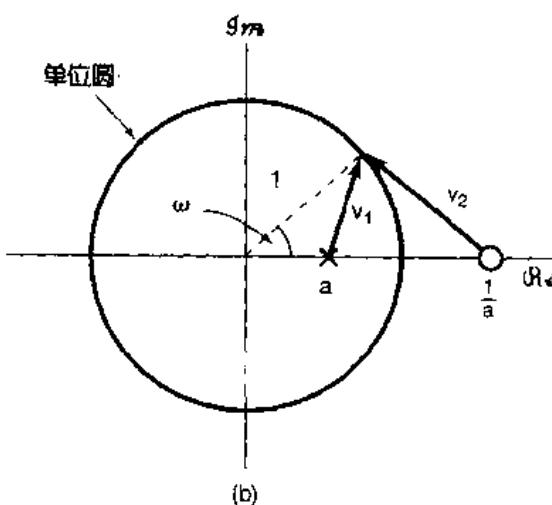
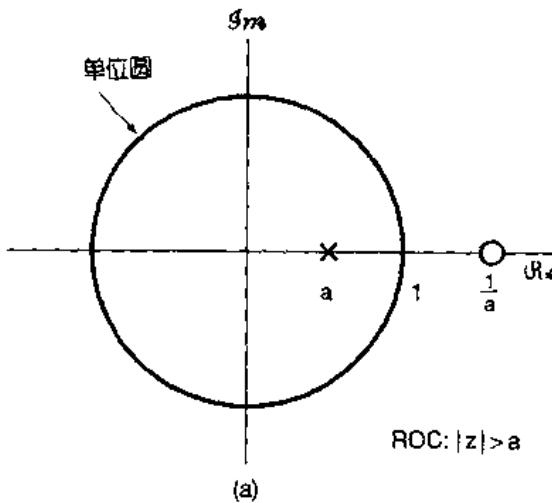


图 P10.50

证明 $X_2(z) = X_1(1/z)$, 并由此证明: 若 $X_1(z)$ 在 $z = z_0$ 有一个极点(零点), 那么 $X_2(z)$ 一定有一个极点(零点)在 $z = 1/z_0$ 。

10.53 (a) 完成表 10.1 中下列性质的证明:

- (i) 10.5.2 节的性质。
- (ii) 10.5.3 节的性质。
- (iii) 10.5.4 节的性质。

(b) 若用 $X(z)$ 记为 $x[n]$ 的 z 变换, 以 R_x 记为 $X(z)$ 的 ROC, 试用 $X(z)$ 和 R_x 确定下列每个序列的 z 变换及其 ROC:

- (i) $x^*[n]$
- (ii) $z_0^n x[n]$, z_0 为某一复数。

10.54 在 10.5.9 节提到并证明了因果序列的初值定理。

- (a) 若 $x[n]$ 是反因果序列(即, 若 $n > 0$, $x[n] = 0$), 陈述并证明相应的定理。
- (b) 证明: 若 $n < 0$, $x[n] = 0$, 那么

$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z(X(z) - x[0])$$

10.55 设 $x[n]$ 是一个 $x[0]$ 为非零且为有限的因果序列(即, 若 $n < 0$, $x[n] = 0$),

- (a) 利用初值定理证明: $X(z)$ 在 $z = \infty$ 不存在任何极点或零点。
- (b) 作为(a)的结论的一个结果, 证明在有限 z 平面内 $X(z)$ 的极点个数等于零点个数(有限 z 平面不包括 $z = \infty$)。

10.56 在 10.5.7 节曾提到 z 变换的卷积性质, 为了证明这个性质成立, 现从卷积和表示式入手, 即

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] \quad (\text{P10.56-1})$$

(a) 将(P10.56-1)式取 z 变换, 并利用(10.3)式证明

$$X_3(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \hat{X}_2(z)$$

式中 $\hat{X}_2(z)$ 是 $x_2[n-k]$ 的 z 变换。

(b) 利用(a)的结果和表 10.1 中的性质 10.5.2, 证明

$$X_3(z) = X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] z^{-k}$$

(c) 由(b), 证明

$$X_3(z) = X_1(z) X_2(z)$$

这就是(10.81)式所陈述的。

10.57 设 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 为

$$X_1(z) = x_1[0] + x_1[1]z^{-1} + \cdots + x_1[N_1]z^{-N_1}$$

$$X_2(z) = x_2[0] + x_2[1]z^{-1} + \cdots + x_2[N_2]z^{-N_2}$$

定义

$$Y(z) = X_1(z) X_2(z)$$

并令

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M y[k] z^{-k}$$

(a) 用 N_1 和 N_2 表示 M 。

(b) 用多项式相乘确定 $y[0]$, $y[1]$ 和 $y[2]$ 。

(c) 用多项式相乘证明: 对于 $0 \leq k \leq M$ 有

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[k-m]$$

- 10.58 一个最小相位系统是这样一个系统，它是因果和稳定的，而它的逆系统也是因果和稳定的。试确定一个最小相位系统的系统函数，其零极点在 z 平面内的位置应受到的必要限制。

- 10.59 考虑图 P10.59 所示的数字滤波器结构

(a) 求该因果滤波器的 $H(z)$ ，画出零极点图，指出收敛域。

(b) k 值为何值，该系统是稳定的？

(c) 若 $k=1$ 和 $x[n]=(2/3)^n$ （对全部 n ），求 $y[n]$ 。

- 10.60 有一信号 $x[n]$ ，其单边 z 变换是 $\mathcal{X}(z)$ 。证明

$y[n]=x[n+1]$ 的单边 z 变换是

$$\mathcal{Y}(z) = z\mathcal{X}(z) - zx[0]$$

- 10.61 若 $\mathcal{X}(z)$ 记为 $x[n]$ 的单边 z 变换，利用 $\mathcal{X}(z)$ ，求下列序列的单边 z 变换：

$$(a) x[n+3] \quad (b) x[n-3] \quad (c) \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

扩充题

- 10.62 序列 $x[n]$ 的自相关序列定义为

$$\phi_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k]$$

利用 $x[n]$ 的 z 变换确定 $\phi_{xx}[n]$ 的 z 变换。

- 10.63 利用幂级数展开式

$$\log(1-w) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{w^i}{i}, \quad |w| < 1$$

求下面两个 z 变换的反变换：

$$(a) X(z) = \log(1-2z), \quad |z| < \frac{1}{2} \quad (b) X(z) = \log(1-\frac{1}{2}z^{-1}), \quad |z| > \frac{1}{2}$$

- 10.64 用首先对 $X(z)$ 微分，再利用 z 变换的适当性质，求下列每个 z 变换所对应的序列：

$$(a) X(z) = \log(1-2z), \quad |z| < \frac{1}{2} \quad (b) X(z) = \log(1-\frac{1}{2}z^{-1}), \quad |z| > \frac{1}{2}$$

将(a)和(b)所得结果与利用幂级数展开在习题 10.63 所得结果进行比较。

- 10.65 双线性变换是一个从有理拉普拉斯变换 $H_c(s)$ 求得一个有理 z 变换 $H_d(z)$ 的映射，这种映射有两个重要性质：

1. 若 $H_c(s)$ 是一个因果稳定 LTI 系统的拉普拉斯变换，那么 $H_d(z)$ 就是一个因果稳定 LTI 系统的 z 变换。

2. $|H_c(j\omega)|$ 的某些重要特性在 $|H_d(e^{j\omega})|$ 中得到保留。本题对全通滤波器来说明第二个性质。

(a) 设 $H_c(s)$ 为

$$H_c(s) = \frac{a-s}{s+a}$$

式中 a 为实数且为正值。证明

$$|H_c(j\omega)| = 1$$

(b) 现在对 $H_c(s)$ 作双线性变换，以求得 $H_d(z)$ ，即

$$H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

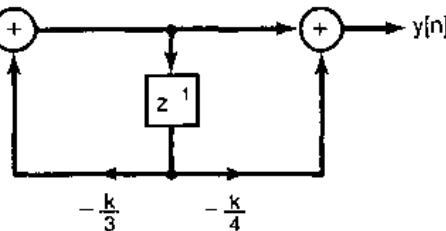


图 P10.59

证明: $H_d(z)$ 有一个极点(在单位圆里面)和一个零点(在单位圆外面)。

(c) 对于由(b)中导得的系统函数 $H_d(z)$, 证明

$$|H_d(e^{j\omega})| = 1$$

10.66 上题中所引入的双线性变换也可以用来得到一个离散时间滤波器, 该滤波器频率响应的模是与给定的连续时间低通滤波器的模特性相类似的。本题将以一个连续时间二阶巴特沃兹滤波器(系统函数为 $H_c(s)$)为例来说明这一相似性。

(a) 设

$$H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

证明

$$H_d(e^{j\omega}) = H_c\left(j\tan\frac{\omega}{2}\right)$$

(b) 已知

$$H_c(s) = \frac{1}{(s + e^{j\pi/4})(s + e^{-j\pi/4})}$$

并设该滤波器是因果的。证明: $H_c(0) = 1$, $|H_c(j\omega)|$ 随 ω 向正值方向增大而单调下降, $|H_c(j)|^2 = 1/2$ (也即, $\omega_c = 1$ 是半功率点频率)以及 $H_c(\infty) = 0$ 。

(c) 若对于(b)题中的 $H_c(s)$ 应用双线性变换而得到 $H_d(z)$, 那么有关 $H_d(z)$ 和 $H_d(e^{j\omega})$ 可以作出下面结论:

1. $H_d(z)$ 仅有两个极点, 均在单位圆内。

2. $H_d(e^{j0}) = 1$

3. $|H_d(e^{j\omega})|$ 随 ω 从 0 到 π 变化而单调下降。

4. $H_d(e^{j\omega})$ 的半功率点频率是 $\pi/2$ 。

第11章 线性反馈系统

11.0 引言

长期以来人们就认识到，在很多情况下应用反馈可以获得更多益处。反馈就是利用一个系统的输出去控制或改变系统的输入。例如在机电系统中这是很常用的，为要保持一台电机的轴的位置在一个恒定的角度上，可以测出电机轴的真正位置与要求位置之间的误差，然后利用这一误差信号使轴在适当的方向上转动。图 11.1 就是这样的一个例子，图中用一台直流电机使望远镜准确定位在某一方向上。图 11.1(a)示意性地画出了这样一个系统，其中 $v(t)$ 是电机的输入电压， $\theta(t)$ 是望远镜平台的角位置。图 11.1(b)是电机驱动定向系统的方框图。图 11.1(c)是控制该望远镜位置的反馈系统，该系统的等效方框图如图 11.1(d)所示。这个反馈系统的外部或参考输入就是所要求的轴向角 θ_D 。用第一个电位器把所要求的角 θ_D 正比地转换为一个电压 $K_1\theta_D$ ；而第二个电位器则用来产生一个正比于真正平台角度 $\theta(t)$ 的电压 $K_1\theta(t)$ 。然后把这两个电压进行比较，产生一个误差电压 $K_1(\theta_D - \theta(t))$ ，经放大后用来驱动电机。

图 11.1 对望远镜的定向提出了两种不同的方法。其中之一是图 11.1(c)和(d)的反馈系统，在这里必须提供的输入是所要求的参考角度 θ_D 。另一种就是如图 11.1(a)和(b)所示，这时，如果初始角，所要求的角，以及整个系统详细的电气特性和机械特性都完全准确知道，那么就可以给出输入电压 $v(t)$ 的精确特性，先使轴加速，然后减速，从而不用反馈也能把平台调到所要求的位置上。按照图 11.1(a)和(b)工作的系统一般称为开环系统，而与此对照的图 11.1(c)和(d)称为闭环系统。在实际情况下，用闭环系统来控制轴向角比用开环系统有很多明显的优点。例如，在闭环系统中，当轴已经转到正确的位置时，任何偏离这个位置的扰动都会被感受到，并且产生一个误差信号，该误差信号被用来进行校正，以使轴回到原来的正确位置上去。在开环系统中不存在这种校正作用。作为闭环系统的另一个优点是考虑对整个装置的系统特性在建模时所产生误差的影响上。在开环系统中，为了设计一个正确的输入，必须要求知道整个系统的精确特性；而在闭环系统中，输入只是所要求的轴向角度，并不要求对整个系统有过细的了解。闭环系统对扰动不灵敏及对系统特性的了解要求不高是反馈系统的两个重要优点。

电机的控制只是反馈起着重要作用的大量例子中的一个。反馈的类似应用还可以在各种各样的应用中找到，例如化学过程控制、汽车燃料系统、家庭供暖系统和空间系统等等不胜枚举。另外，反馈也存在于很多生物过程以及人们动作的控制过程当中，譬如当一个人伸手去拿某一件东西的时候，通常总是在拿的过程中，凭视觉来判断手和物之间的距离，然后使手的速度随着手和东西之间的距离（这就是误差）的缩短而渐渐地放慢。比较一下，在伸手拿东西时，有视觉反馈和没有视觉反馈的情形，就可以清楚地说明利用系统输出（手的位置）控制输入的效果。

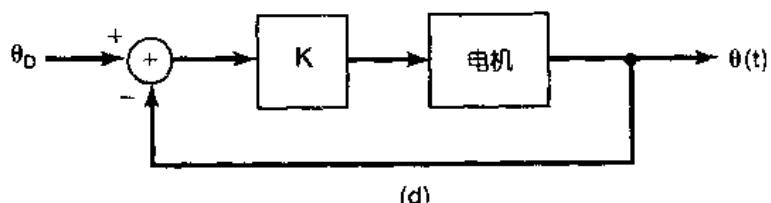
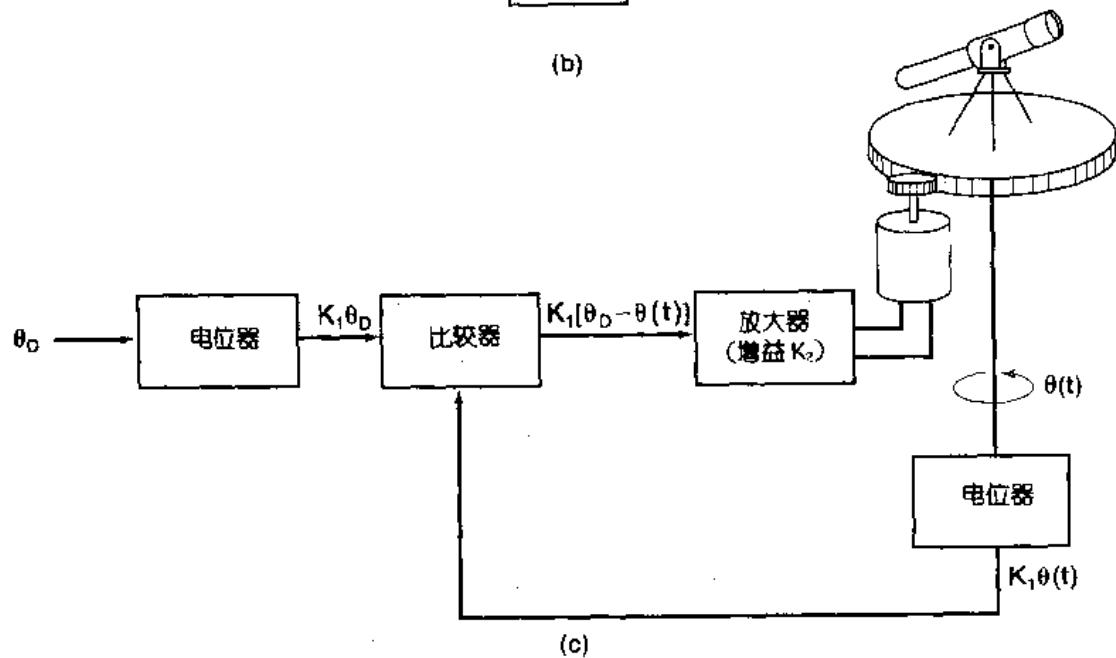
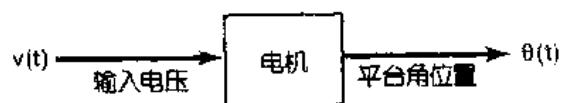
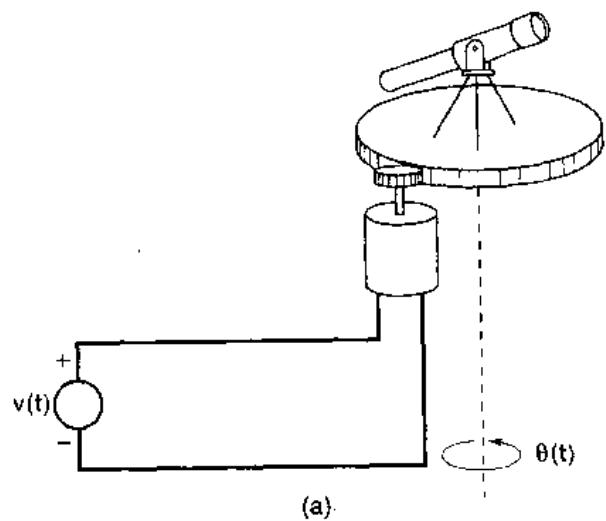


图 11.1 利用反馈控制一个望远镜的角位置：
 (a) 直流电机驱动望远镜平台；(b) 系统(a)的方框图；
 (c) 望远镜定向反馈系统；(d) 系统(c)的方框图(其中 $K = K_1 K_2$)

反馈除了能提供一个误差校正的机理而能减小系统对扰动以及系统数学模型误差的灵敏度以外,反馈的另一个重要特性在于使一个固有的不稳定系统稳定的能力上。考虑一个试图将一把扫帚的把子平衡地立在手掌心上的问题。如果手固定不动的话,任何小的扰动(如一丝微风或者手的无意运动)都会引起扫帚倒下来。当然,如果完全知道行将出现的扰动情况,并且能很得体地控制人手的运动,那么事前确立应如何移动手的位置以平衡它似乎也是可能的,但这一点很显然是不现实的!然而,如果不间断地在扫帚行将倒下的方向上移动手的话,就有可能将扫帚平衡住。当然,这就需要反馈以感受扫帚行将倒下的方向。与上面扫帚平衡的例子密切有关的第二个例子是一个控制所谓倒立摆的问题。如图 11.2 所示,一个倒立摆由一根细棒及其顶端的重物所组成。这根细棒的底部安装在一个小车上,这个小车可以沿轨道来回运动。同样,如果该小车保持静止不动的话,倒立摆一定会倒下来。稳定这个倒立摆的问题就是要设计一个反馈系统,该反馈系统使小车移动以保持倒立摆成垂直状态。这个例子将在习题 11.56 中给予讨论。与扫帚的平衡也具有某些相似性的第三个例子是一个控制火箭轨道的问题。在这个情况下,非常类似于用手的运动来补偿扫帚位置的扰动一样,是采用火箭推力的方向来校正由于空气动力的变化和风的扰动,以避免引起火箭偏离其航道。由于这些力和扰动都是不可能事前精确知道的,所以反馈就显得十分重要。

上面的例子都提供了某些迹象,说明为什么反馈是有用的。下面两节将介绍线性反馈系统的基本方框图和基本方程,并较为详细地讨论反馈和控制在连续时间系统和离散时间系统中的几个应用。同时也指出,反馈也和它们有用的一面一样,怎样会成为有害的。在这些例子当中,应用反馈及其带来的效果,会使我们对这样的问题得到更为透彻的理解,即:应该如何变化在一个反馈控制系统中的参数来导致系统性能的改变。在设计具有某些特性要求的反馈系统中,明了这些关系是最基本的。有了这方面的材料作为背景,就能在本章余下的各节中建立对连续时间和离散时间反馈系统的分析和设计中几个很有价值的具体方法。

11.1 线性反馈系统

一个连续时间 LTI 反馈系统的一般结构可以用图 11.3(a)来表示,而对离散时间 LTI 反馈系统则可以用图 11.3(b)来表示。由于反馈最典型的应用场合都是在因果系统中,所以很自然地把图 11.3(a)和(b)中的系统都局限为因果系统。这在整个这一章的讨论中都假设如此。这样,图 11.3 中的系统函数既可认为是单边变换,又可认为是双边变换;而作为因果性的一个结果,其有关的 ROC,对拉普拉斯变换而言,总是位于最右边极点的右边,而对 z 变换来说,总是位于最外层极点的外面。

应该注意,按照习惯,在图 11.3(a)中,反馈信号 $r(t)$ 都是从输入信号 $x(t)$ 中减去以形成 $e(t)$ 的。在离散时间情况下也采用这一约定。历史上,这一约定是在跟踪系统的应用中得到的,在那里 $x(t)$ 代表所要求的控制输入,而 $e(t)$ 代表 $x(t)$ 和真正响应 $r(t)$ 之间的误差。例如,早先讨论的望远镜定向系统就是这种情况。在更为一般的反馈系统中, $e(t)$ 和 $e[n]$ 可能

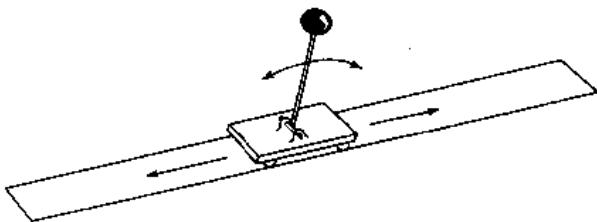


图 11.2 倒立摆

不对应于误差信号,或者不直接作为误差信号来理解。

图 11.3(a)中的 $H(s)$,或图 11.3(b)中的 $H(z)$ 称为正向通路系统函数,而 $G(s)$ 或 $G(z)$ 则称为反馈通路系统函数。图 11.3(a)或图 11.3(b)中整个系统的系统函数称为闭环系统函数,特记为 $Q(s)$ 或 $Q(z)$ 。在 9.8.1 节和 10.8.1 节都已经导出过 LTI 系统反馈互联的系统函数表示式,将这些结果用于图 11.3 的反馈系统,就得到

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (11.1)$$

$$Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (11.2)$$

(11.1)式和(11.2)式代表了研究 LTI 反馈系统的基本方程。下面几节,将以这两个方程为基础,对反馈系统的性质获得深入的了解,并建立分析反馈系统的几种方法。

11.2 反馈的某些应用及结果

在前面引言中,对反馈系统的某些性质和应用作了一个简短而直观的介绍。这一节将以基本反馈方程(11.1)式和(11.2)式作为出发点,以稍微比较定量的方式来研究反馈的几个特性和应用。其目的是对反馈的应用作一介绍并作一评价,而不是详细地涉及这些应用方面。在本章以后的各节中将较深入地集中在分析反馈系统的几个具体方法上,这些方法在范围广泛的一类问题中都是很有用的,其中包括即将讨论的这些应用方面。

11.2.1 逆系统设计

在某些应用中,希望综合出一个已知连续时间系统的逆系统。假定这个系统的系统函数为 $P(s)$,现考虑如图 11.4 所示的反馈系统。应用(11.1)式,若 $H(s) = K$ 和 $G(s) = P(s)$,可求得闭环系统函数为

$$Q(s) = \frac{K}{1 + KP(s)} \quad (11.3)$$

若增益 K 足够大,因而满足 $KP(s) \gg 1$,那么

$$Q(s) \approx \frac{1}{P(s)} \quad (11.4)$$

于是图 11.4 的反馈系统就可近似为系统函数为 $P(s)$ 的系统的逆系统。

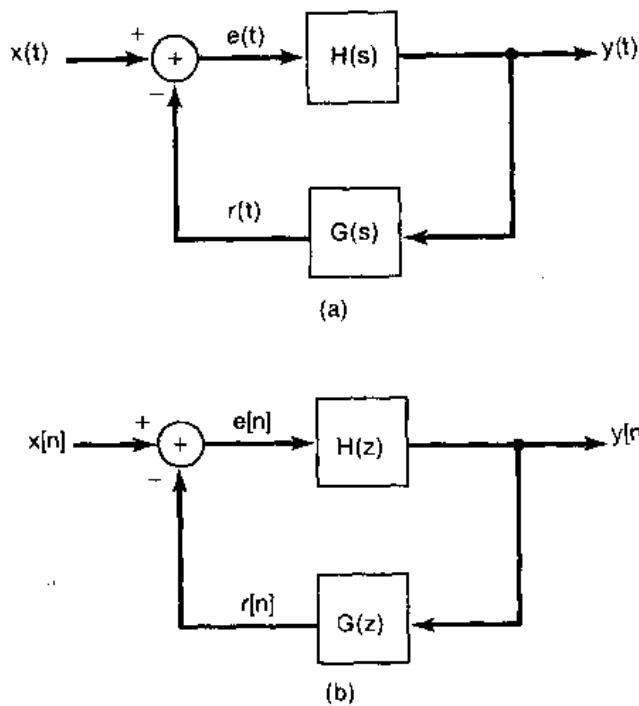


图 11.3 基本反馈系统的组成:
(a)连续时间系统;(b)离散时间系统

值得注意的是,(11.4)式的结果要求增益 K 足够大,否则它就与增益的具体大小有关。各种运算放大器就是具有这样一种增益特性的器件,并广泛用于反馈系统中。在(11.4)式中寓含的可逆性的最一般应用是在积分器的实现中。一个电容器具有这样的性质,它的电流正比于电容器上电压的导数。在一个运算放大器的反馈通路中插入一个电容器,这个电容器的微分性质就被取逆而给出积分特性。对于这个具体应用将在习题 11.50 到习题 11.52 中给予更详细地讨论。

虽然以上讨论大都局限于线性系统,但是值得指出的是,在求一个非线性系统的逆系统时,一般也采用这一基本途径。例如,对于输出是输入的对数这样一个非线性系统,也可以采用在一个运算放大器的反馈通路中利用具有指数型电流电压特性的二极管作为反馈来实现。这个问题将在习题 11.53 中作详细讨论。

11.2.2 非理想元件的补偿

反馈的另一种应用是校正开环系统的某些非理想特性。例如,反馈往往被用来设计一个在给定频率范围内具有恒定增益的放大器。事实上,这是在 20 世纪 20 年代由贝尔电话实验室的 H.S.Black 所开创的,这一应用被认为是对反馈控制的一套实际而有用的设计方法的建立一直起着促进作用。

具体说来,考虑一个开环频率响应 $H(j\omega)$, $H(j\omega)$ 在某一给定频带内有放大,但不是常数。例如,为 Black 所关注的运算放大器或电子管放大器一般都能提供很大的放大倍数,但是不能精确控制。虽然这类器件能提供几个数量级的放大倍数,但是带来的却是放大倍数的不稳定,随着频率,时间,温度等变化都能产生波动,从而也就引入了不需要的相位和非线性失真。Black 提出来的是把这样一个具有很强放大能力,但是飘忽不定的放大器放在图 11.3(a)的反馈回路内,而将 $G(s)$ 选为常数,即 $G(s)=K$,这时闭环频率响应是

$$Q(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + KH(j\omega)} \quad (11.5)$$

若在给定频带内有

$$|KH(j\omega)| \gg 1 \quad (11.6)$$

那么

$$Q(j\omega) \approx \frac{1}{K} \quad (11.7)$$

这就是说,如所要求的,闭环系统频率响应是一个常数。当然,这个结果的得到是假定在反馈通路中的系统 $G(s)$,它的频率响应 $G(j\omega)$ 能够设计成在所要求的频率范围内有一个常数增益 K ,而这个正是 $H(j\omega)$ 所不能保证的!然而,对于 $H(j\omega)$ 的要求和对于 $G(j\omega)$ 的要求,这两者之间的差别在于: $H(j\omega)$ 必须要提供放大量,而根据(11.7)式可见,若闭环系统能提

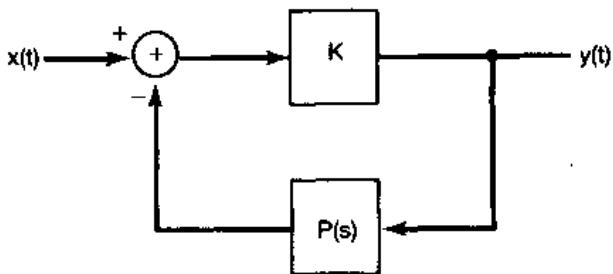


图 11.4 用于实现一个系统函数为 $P(s)$ 系统的逆系统的反馈系统

供一个比 1 大的增益， K 就必须小于 1。这就是说， $G(j\omega)$ 在给定频率范围内必须是一个衰减器。一般来说，实现一个具有近似平坦频率特性的衰减器比实现一个具有同样频率特性的放大器来说要容易得多（因为衰减器可以用无源元件构成）。

应用反馈可使频率响应平坦，这是要付出别的代价的，并且，正是由于这一点使得 Black 的想法受到很大的怀疑。由(11.6)式和(11.7)式可见

$$|H(j\omega)| \gg \frac{1}{K} \simeq Q(j\omega) \quad (11.8)$$

因此，闭环增益 $1/K$ 大大小于开环增益 $|H(j\omega)|$ 。这个在增益上明显的损失，在 Black 称之为负反馈的负反馈放大器中最初被认为是一个严重的缺憾。确实如此，这种效果已经知道了很多年，并且导致这样一种信念：负反馈不是一个特别有用的机理！然而，Black 指出，在总的增益上所失去的往往可以在降低总的闭环放大器的灵敏度上得到更多的补偿：闭环系统函数基本上就等于(11.7)式，只要 $|H(j\omega)|$ 足够大，就与 $H(j\omega)$ 的变化无关。因此，如果该开环放大器最初设计成比真正所需要的大得多的增益，那么，闭环放大器就能提供所要求的放大倍数，而又大大降低了灵敏度。这个拓宽一个放大器频带宽度的概念及其应用将在习题 11.49 中研究。

11.2.3 不稳定系统的稳定

如同在引言中所提到的，反馈的一个重要应用是稳定一个原先在没有反馈时是不稳定的系统。这种例子包括火箭轨道的控制，核电站中核反应堆的控制，飞行体的稳定，以及动物繁殖的自然节制和人为节制的控制等。

为了说明反馈如何可以用来稳定一个不稳定系统，先考虑一个简单一阶连续时间系统的例子，其系统函数为

$$H(s) = \frac{b}{s - a} \quad (11.9)$$

若 $a > 0$ ，这个系统是不稳定的。若选择系统函数 $G(s)$ 为一常数，则由(11.1)式闭环系统函数 $Q(s)$ 是

$$Q(s) = \frac{H(s)}{1 + KH(s)} = \frac{b}{s - a + Kb} \quad (11.10)$$

如果这个极点移到 s 平面的左平面，该闭环系统一定是稳定的。若

$$K > \frac{a}{b} \quad (11.11)$$

就是这种情况。因此，就可以在反馈通路中利用一个常数增益的系统，并且该常数增益满足于(11.11)式，就能使原来不稳定的系统稳定。因为在这种系统中被反馈回来的信号是比例于系统输出的，所以这种类型的反馈系统称为比例反馈系统。

作为另一个例子，考虑二阶系统

$$H(s) = \frac{b}{s^2 + a} \quad (11.12)$$

若 $a > 0$ ，该系统就是一个振荡器[也就是说， $H(s)$ 的极点位于 $j\omega$ 轴上]，并且系统的单位冲激响应是正弦变化的。若 $a < 0$ ， $H(s)$ 有一个极点在左半面和另一个极点在右半面。因此，无论 a 属何种情况之一，系统都是不稳定的。事实上，如习题 11.56 所讨论的，由(11.12)式给

出的系统函数可以用来描述在引言中提到的倒立摆的动态特性。

首先考虑对这个二阶系统利用比例反馈，即取

$$G(s) = K \quad (11.13)$$

将其代入(11.1)式，得

$$Q(s) = \frac{b}{s^2 + (a + Kb)} \quad (11.14)$$

在第6章二阶系统的讨论中，曾考虑下列形式的转移函数：

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (11.15)$$

对于这样一个系统要是稳定的， ω_n 必须为实数，且为正值(即 $\omega_n^2 > 0$)，而 ζ 也必须为正实数(相当于正的阻尼)。将(11.14)式和(11.15)式作一比较可见，比例反馈仅仅对 ω_n^2 的值有影响，因为不能引入任何阻尼因子，所以单靠比例反馈不能使该二阶系统稳定。为了提出一个能使该系统稳定的反馈类型，回忆一下曾在6.5.2节作为二阶系统讨论过的汽车减震系统。在那个系统中，系统的阻尼是由于包括了一个减震器(或阻尼器)，该减震器提供了一个比例于汽车速度的恢复力。由此使人想到，可以考虑利用一个比例加微分的反馈类型，也就是 $G(s)$ 具有如下形式：

$$G(s) = K_1 + K_2 s \quad (11.16)$$

从而得到

$$Q(s) = \frac{b}{s^2 + bK_2 s + (a + K_1 b)} \quad (11.17)$$

只要选择 K_1 和 K_2 满足下式：

$$bK_2 > 0, \quad a + K_1 b > 0 \quad (11.18)$$

闭环极点一定位于左半平面，因此闭环系统是稳定的。

前面的讨论说明反馈怎样能用于稳定连续时间系统。对离散时间系统不稳定系统的稳定也是反馈的一种重要应用。在反馈不存在的条件下，离散时间不稳定系统的例子是物种增殖模型。为了说明反馈如何能用来遏制某种动物总数的无休止增长，现来考虑一个简单的单种动物增殖模型。令 $y[n]$ 为第 n 代动物的总数，假定在没有任何阻碍因素存在的条件下，出生率使每一代的总数加倍。在这种情况下，这种动物数量增长的动力学基本方程就是

$$y[n] = 2y[n - 1] + e[n] \quad (11.19)$$

式中 $e[n]$ 代表由于外界的影响对总数引起的增加或减少。

这样一个增殖模型明显是不稳定的，因为它的单位脉冲响应按指数增长。然而，在任何生态系统中，总归存在着一些阻止它增长的因素。例如，当该类动物的数目变得很大时，由于有限食物的限制，将会使其增长减慢。类似地，如果该类动物有一些天然的“敌人”，往往做这样的假设也是合理的，即当这些提供食物的动物(即被捕食的动物)增加时，那些以捕获该动物为食的动物也将增加，结果，这些“天敌”也会阻碍它的增长。除了这些自然的因素以外，人类有目的地控制也有影响。例如控制食物供给或控制这些捕肉食动物的增长都将影响这些自然因素。另外，在湖中贮存鱼类或者从别的地方引进动物也都可以有助于提高增长率；而控制打猎或捕鱼也能够提供某一节制能力。所有以上讨论到的节制因素都取决于动物的总数(无论是自然的或是人为的)，它们都代表了反馈的效果。

根据前面的讨论，可将 $x[n]$ 分为两部分：

$$e[n] = x[n] - r[n] \quad (11.20)$$

其中 $r[n]$ 代表以上叙述过的一些控制因素的效果，而 $x[n]$ 则考虑到其它的外部因素，例如动物的迁移或其它自然灾害，疾病等因素。应该注意到，在(11.20)式中已经包括了一个负号。这一点是与利用负反馈的约定相一致的，在这里本身也有一个物理意义，因为动物繁殖的无限制增长是不稳定的，所以反馈项起的作用是减缓它。为了看出增长过程可以因这一反馈项的存在而控制住，假定在每代中，由于这些控制因素所引起的减少是以一个固定的比值 β 进行的。因为根据模型，每一代剩下的部分将在下一代加倍，因此有

$$y[n] = 2(1 - \beta)y[n - 1] + x[n] \quad (11.21)$$

将(11.21)式与(11.19)式和(11.20)式比较，可见

$$r[n] = 2\beta y[n - 1] \quad (11.22)$$

这里的因子 2 表示这样一个事实，这一代动物总数的减少使得下一代出生的数目下降。

图 11.5 表示了这样一个反馈应用的例子，其中正向通路的系统函数可由(11.19)式得到，且

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad (11.23)$$

而根据(11.22)式，反馈通路的系统函数是

$$G(z) = 2\beta z^{-1} \quad (11.24)$$

结果，闭环系统的系统函数就是

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{1}{1 - 2(1 - \beta)z^{-1}} \quad (11.25)$$

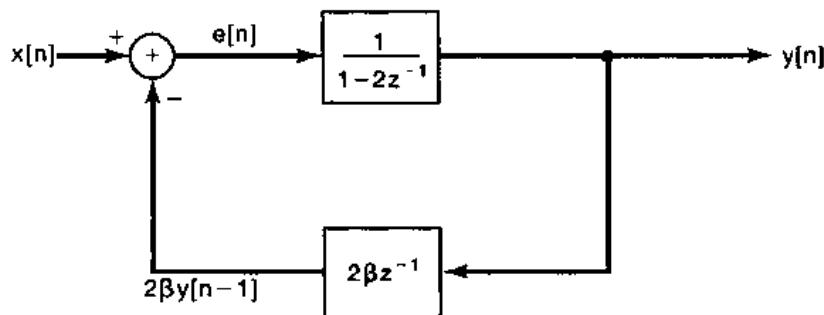


图 11.5 一个简单的动物总数动态反馈模型方框图

若 $\beta < 1/2$ 闭环系统仍然是不稳定的；但若 $1/2 < \beta < 3/2$ 闭环系统就是稳定的了^①。

很清楚，这个动物总数的增长和控制的例子是极端简化了的。譬如说：(11.22)式的反馈并没考虑这一事实，即 $r[n]$ 中由于天敌存在的那部分还应该依从于捕食动物的总数，而后者本身也有其增长的动态模型。吸收这些因素，使反馈模型变得更复杂以反映在一个生态系统中其它动态模型的存在，由此而形成一个反映各类动物种族间相互制约的增长模型，这一模型在生态研究中是极为重要的。然而，即使没有考虑这些相互间的影响，这个简单模型

^① 虽然，在现在这个例子中 β 是不可能超过 1 的，因为当 $\beta > 1$ 时，就相当于把动物总数移去了多于 100% 了。

也足以说明反馈如何能阻止一种动物无限制繁殖或灭绝的基本概念。特别是，也能初步看到如何利用人类的干预作用来力图保持这种生态平衡。例如，如果有一次自然灾害或者是由于天敌总数的增加，而导致某一种动物急剧减少，就可以采用严格限制打猎或捕鱼，以及其它加速繁殖的措施，将 β 减小，而使系统解除稳定，以让其有一个快速增长的过程直至该类动物总数再次达到正常的数量为止。

还应该注意到，对于这种类型的问题，人们通常并不需要严格的稳定。如果这些控制因素是使 $\beta = 1/2$ ，而且其它所有的外部因素都为 0（即若 $x[n] = 0$ ），那么， $y[n] = y[n-1]$ 。因此，只要 $x[n]$ 很小而且在几代中平均值为 0，那么， $\beta = 1/2$ 就将得出一个总数基本上恒定的系统。然而，对这个 β 值来说，该系统仍然是不稳定的。因为在这个情况下，(11.21)式就简化为

$$y[n] = y[n-1] + x[n] \quad (11.26)$$

这就是说，该系统等效为一个累加器。因此，如果 $x[n]$ 是一个阶跃，输出就会无界增长。当然，如果估计到在 $x[n]$ 有某一种稳定不变的倾向，如动物迁移到某一区域所引起的，那么就需要用 $\beta > 1/2$ 的值来稳定这一系统，以保持其动物总数在某一界限以内，从而维持生态平衡。

11.2.4 采样数据反馈系统

除了以上讨论到的问题外，离散时间反馈技术在涉及到连续时间系统的各种应用中也是很重要的。由于数字系统的灵活性已经使得采样数据反馈系统的实现具有极大的吸引力。在这样的系统中，连续时间系统的输出被采样，然后对采样的序列完成一些处理，这样就得到了一个反馈控制的离散序列。然后又将这个序列变换为连续时间信号反馈到输入端，并从外部输入中减去这一反馈信号而产生该连续时间系统的真正输入。

显然，在反馈系统上所作的因果性假定就对将这个离散时间反馈信号转换为一个连续时间信号的过程施加了限制（例如，理想低通滤波，或者理想低通的任何非因果近似都不容许应用）。最广泛应用的转换系统之一是零阶保持（曾于 7.1.2 节介绍过）。一种涉及零阶保持的采样数据反馈系统的结构示于图 11.6(a) 中。图中含有一个连续时间 LTI 系统，其系统函数为 $H(s)$ ，它的输出 $y(t)$ 被采样以产生一个离散时间序列

$$p[n] = y(nT) \quad (11.27)$$

然后序列 $p[n]$ 被系统函数为 $G(z)$ 的离散时间 LTI 系统所处理，其输出通过一个零阶保持而产生连续时间信号

$$z(t) = d[n], \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (11.28)$$

这个信号又从外部输入 $x(t)$ 中减去而得到 $e(t)$ 。

假设 $x(t)$ 在 T 的区间内是常数，即

$$x(t) = r[n], \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (11.29)$$

这里 $r[n]$ 是一个离散时间序列。因为采样率一般都很高，以至于 $x(t)$ 在 T 的区间内没有明显变化，所以在实际中，这种近似通常都是成立的。此外，在很多应用中，这个外部输入 $x(t)$ 本身就是在某一离散序列上应用零阶保持而产生的。例如，在先进航空器系统中，外部输入代表了人的控制命令，而这些都是首先经由数字化处理了的，然后再转换回到连续时间输入信号中来。由于零阶保持是一个线性运算，所以当 $x(t)$ 是由(11.29)式给出时，图 11.6(a)

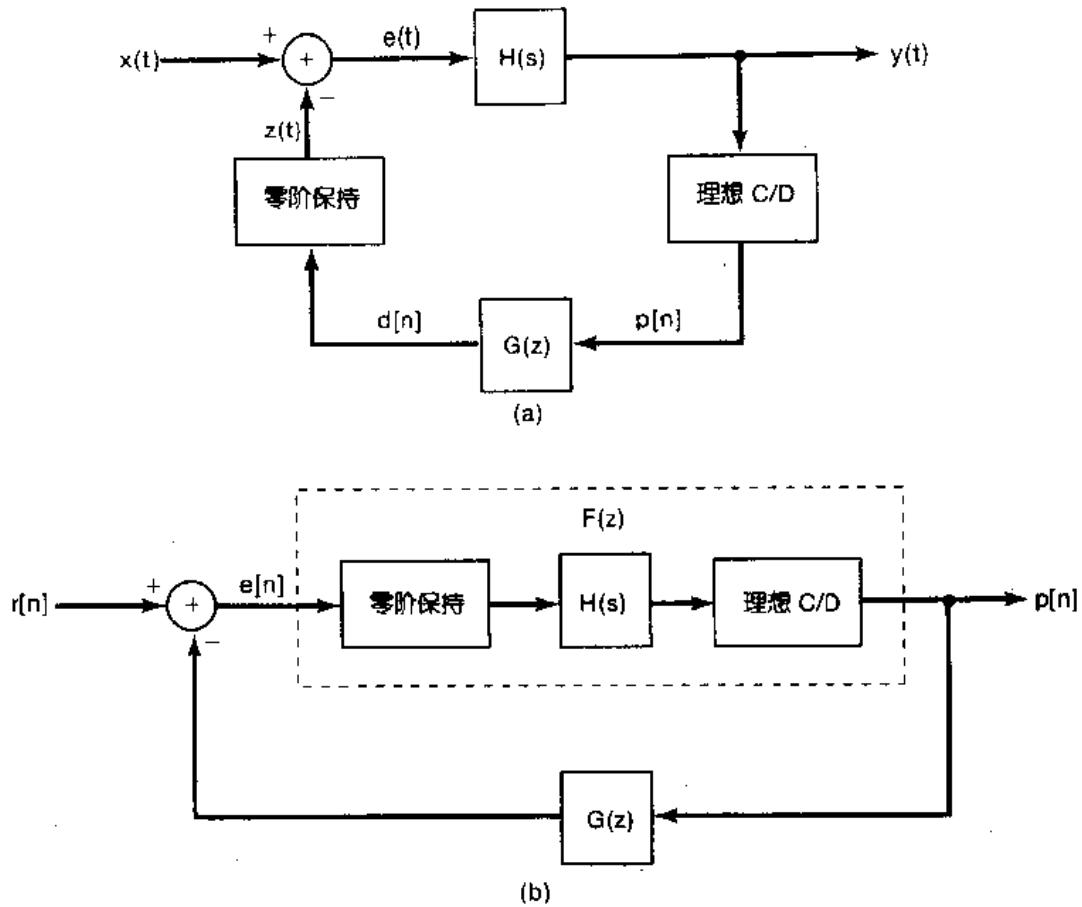


图 11.6 (a)一个应用零阶保持的采样数据反馈系统；(b)等效离散时间系统

的反馈系统就等效于图 11.6(b)的系统。

如同在习题 11.60 中所指出的，输入为 $e[n]$ 和输出为 $p[n]$ 的离散时间系统是一个系统函数为 $F(z)$ 的 LTI 系统，该系统函数 $F(z)$ 与连续时间系统函数 $H(s)$ 的关系是通过一种阶跃响应不定的变换联系起来的。这就是，若 $s(t)$ 是该连续时间系统的阶跃响应，那么该离散时间系统的阶跃响应 $q[n]$ 就由 $s(t)$ 的等间隔样本所组成，数学上表示是

$$q[n] = s(nT) \quad \text{对全部 } n \quad (11.30)$$

一旦确定了 $F(z)$ ，就有了一个完整的离散时间反馈系统的模型（图 11.6(b))。它真正反映了在采样瞬时 $t = nT$ 时该连续时间反馈系统（图 11.6(a)) 的特性，然后就能考虑设计这个反馈系统函数 $G(z)$ 来完成所要达到的目的。设计一个这样的采样数据反馈系统来稳定一个不稳定的连续时间系统的例子将在习题 11.60 中详细研究。

11.2.5 跟踪系统

正如在 11.0 节中提到的，反馈的重要应用之一是设计一个旨在使输出跟踪输入的系统。在范围广泛的各种问题中，跟踪是一个重要的部分。例如，在 11.0 节讨论的望远镜定向问题就是一个跟踪问题：图 11.1(c)和(d)的反馈系统以所要求的定向角作为它的输入，而反馈环路的目的就是为了能够提供一种机制以驱动望远镜跟随着输入变化。在飞机自动驾驶仪

中，输入就是要求的飞行路径，而自动驾驶仪的反馈系统就是利用飞机的控制翼面(方向舵，副翼和升降舵)和推力控制以保持飞机在预定的航线上飞行。

为了说明在跟踪系统设计中出现的某些问题，现在来考虑一下图 11.7(a)这个离散时间反馈系统。研究这种形式的离散时间跟踪系统常常会在分析作为连续时间应用的采样数据跟踪系统特性时遇到。数字自动驾驶仪就是这样一个系统的例子。在图 11.7(a)中， $H_p(z)$ 代表输出是要被控制的系统的系统函数。这个系统往往称为“工厂”。术语“工厂”的来历可以是追溯到这样一些应用场合，如发电厂的控制，供热系统以及化学处理工厂的控制等等。系统函数 $H_c(z)$ 代表某一种补偿器，它是待设计的部分。这里补偿器的输入是跟踪误差，即输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 之差 $e[n]$ 。补偿器的输出就是该“工厂”的输入[例如，在图 11.1(c)和(d)的反馈系统中加到电机上的真正电压，或者是加到一个飞机方向舵的驱动系统上的真正物理输入]。

为了简化符号，令 $H(z) = H_c(z)H_p(z)$ ，这时应用(11.2)式可得如下关系

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z)} X(z) \quad (11.31)$$

同时，因为有 $Y(z) = H(z)E(z)$ ，则

$$E(z) = \frac{1}{1 + H(z)} X(z) \quad (11.32)$$

或者，以 $z = e^{j\omega}$ 代入而得

$$E(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + H(e^{j\omega})} X(e^{j\omega}) \quad (11.33)$$

(11.33)式提供了有关跟踪系统设计中的一些内在性质，这就是：好的跟踪品质应该希望 $e[n]$ ，或者等效成 $E(e^{j\omega})$ 愈小愈好，即

$$\frac{1}{1 + H(e^{j\omega})} X(e^{j\omega}) \approx 0 \quad (11.34)$$

因此，对 $X(e^{j\omega})$ 为非零的那些频率范围内，希望 $|H(e^{j\omega})|$ 尽可能大。由此就可以得到反馈系统设计的一个基本原则：好的跟踪特性要求大的增益。然而，大增益的想法一般必须要经受几个方面的考验。这有几个原因，一个原因是，如果增益太大，那么闭环系统可能有某些不希望的特性(如过小的阻尼)，或者事实上可能变成不稳定。这种可能性下一节将会讨论到，

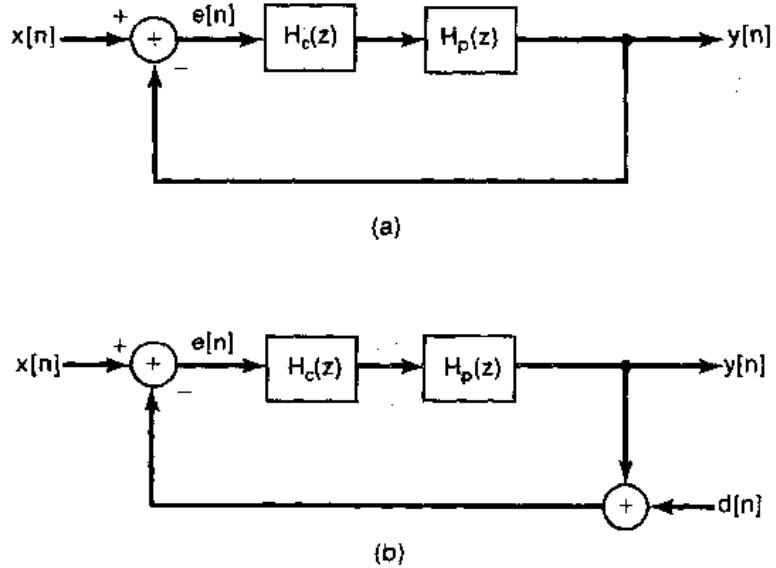


图 11.7 (a) 离散时间跟踪系统；
 (b) 在反馈路径具有扰动 $d[n]$ 时的跟踪系统(a)。 $d[n]$ 是
 计及测量误差的存在

并且将用下面各节中所建立的方法来讨论它。

除了稳定性的问题外，还存在一些其它的理由要求限制一个跟踪系统的增益。例如，在实现这样一个跟踪系统中，必须要测量出 $y[n]$ ，以便与控制输入 $x[n]$ 比较，而任何测量装置都有测量误差和其它误差源（如测量仪器中电子学方面的热噪声）。图 11.7(b) 在反馈回路中以干扰输入 $d[n]$ 的形式包括了这样一些误差源。经过简单的系统函数上的代数运算， $Y(z)$ 和 $x[n]$ 及 $d[n]$ 的变换 $X(z)$ 及 $D(z)$ 之间的关系为

$$Y(z) = \left[\frac{H(z)}{1 + H(z)} X(z) \right] - \left[\frac{H(z)}{1 + H(z)} D(z) \right] \quad (11.35)$$

从这个表示式可以看到，为了使 $d[n]$ 对 $y[n]$ 的影响最小， $H(z)$ 要尽量取小，这样(11.35)式右边的第二项就是小的。

从上面的讨论可见，跟踪的要求与减小测量误差的影响是互为矛盾的，设计中必须要考虑这一点，以便有一个可以接受的系统设计。一般来说，设计本身还与输入 $x[n]$ 和干扰 $d[n]$ 的更为详细的一些特性有关。例如，在很多应用中， $x[n]$ 的能量明显地集中在低频域，而像热噪声这样的测量误差源其大部分能量都在高频部分，这样通常就可以设计一个补偿器 $H_c(z)$ ，使 $|H(e^{j\omega})|$ 在低频域是大的。而在 ω 接近 π 区域是小的。

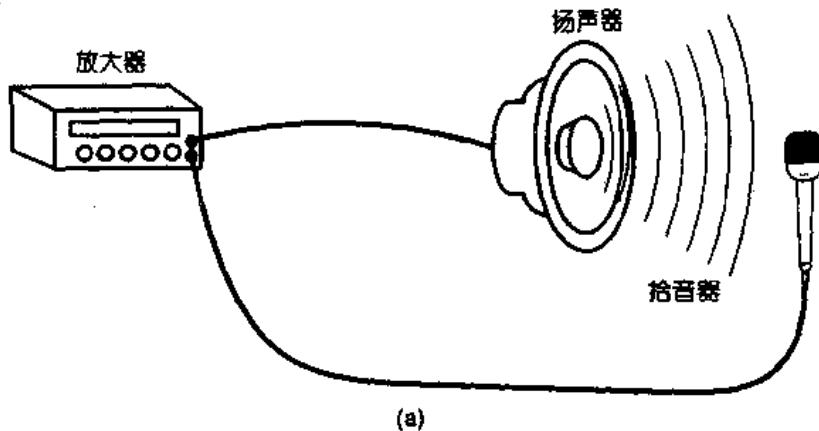
在设计跟踪系统中，还有很多其它方面的问题必须考虑，譬如在反馈回路中其它点上存在的干扰（例如，在设计自动驾驶仪时，风对飞机运动的影响就必须考虑）。本章所介绍的反馈系统分析方法对于研究这些问题提供了必要的手段。在习题 11.57 中，将用这些方法来研究设计跟踪系统中另外几个方面的问题。

11.2.6 反馈引起的不稳定

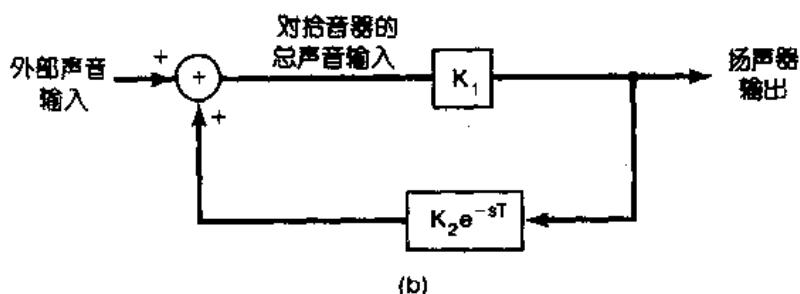
与反馈有很多应用一样，反馈也会有一些不希望的后果，事实上反馈可以引起不稳定。例如，就拿图 11.1 的望远镜定向系统来说，从前面的讨论知道，希望有一个大的放大器增益以实现在跟踪所要求的定向角上有一个好的特性。另一方面，随着增益的增加，很可能以系统阻尼的减小为代价而得到一个快速的跟踪响应。但是，当改变定向角时，其响应中就会有显著的超量和振荡。此外，如果增益增加太多，就可能形成不稳定。

反馈可能引起不稳定的另一个常见的例子是在音响系统中的反馈。考虑一下图 11.8(a) 这种情况。这里，扬声器出来的音频信号就是放大了的、由拾音器拾取来的声音信号。可以注意到，除了其它的音频输入外，从扬声器本身来的信号也可以被拾音器感受到，这个感受到的信号有多强决定于扬声器和拾音器之间的距离。由于空气的衰减，这个距离愈大，到达拾音器的信号就愈弱。另外，由于声波传播速度有限，由扬声器产生的信号和拾音器感受到的这个信号之间会有一个时间延迟。

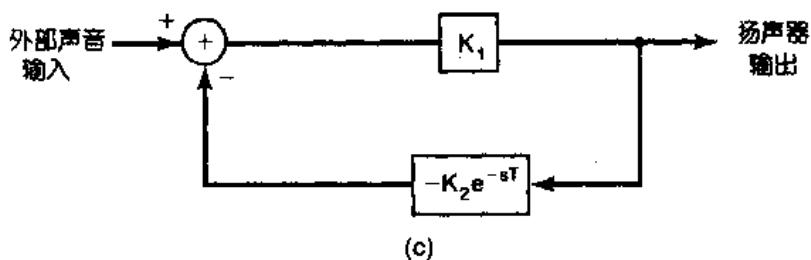
图 11.8(b) 示出了这个音频反馈系统的方框图。这里，在反馈路径中的 K_2 代表衰减，而 T 则是传播引起的延迟。常数 K_1 是放大器增益。同时，注意到从反馈路径来的输出是被加到外部输入上的。这就是一个正反馈的例子。正如在本节一开始所讨论的，在图 11.3 这种基本反馈系统的定义中，负号的应用纯粹是一种约定，而正负反馈系统都可以用相同的方法来分析。例如，如图 11.8(c) 中所说明的，图 11.8(b) 的反馈系统也可以写成负反馈，这只要在反馈通路的系统函数上加上一个负号就行了。从该图及(11.1)式，就可以确定闭环系统函数为



(a)



(b)



(c)

图 11.8 (a)音频反馈现象的形象表示; (b)图(a)的方框图表示;
(c)将(b)的方框图重画成一个负反馈系统。
(注意: e^{-sT} 就是 T 秒延迟环节的系统函数)

$$Q(s) = \frac{K_1}{1 - K_1 K_2 e^{-sT}} \quad (11.36)$$

稍后将回到这个例子中来，并利用在 11.3 节建立的方法可以证明：若

$$K_1 K_2 > 1 \quad (11.37)$$

那么图 11.8 的系统就是不稳定的。由于经由空气的传播所引起的衰减随扬声器和拾音器之间距离的减小而减小(即 K_2 增加)，因此如果这个拾音器放得离扬声器太近，而使(11.37)式满足的话，那么系统就会不稳定。这个不稳定的结果就是音频信号的过度放大和失真。

很有意思的是正反馈(Black 称之为再生反馈)在 Black 发明他的负反馈放大器以前就已经知道了，并且具有讽刺意味的是它一直被认为是一种很有用的机制(与对负反馈持怀疑态度正好相反)！确实如此，正反馈可以是有用的。例如，在 20 世纪 20 年代就知道，正反馈

的解稳定作用可以用来产生振荡信号。正反馈的这一应用将在习题 11.54 中讨论。

这一节已经提到了反馈的几个应用，其它方面的应用将在本章末的习题中给予较详细的讨论，例如，反馈在离散时间递归滤波器实现中的应用可见习题 11.55。从对反馈应用的讨论以及有可能稳定和去稳定作用的讨论中，很明显，必须仔细谨慎地对反馈系统进行设计和分析以确保闭环系统有所要求的特性。在 11.2.3 节和 11.2.6 节已经看到了几个反馈系统的例子，它们的闭环系统特性可以很明显地通过变更反馈系统中一个或两个参数值来改变。本章剩下几节将讨论用于分析闭环系统中参数变化的影响和用于满足所要求目标的(如稳定性)，并有足够阻尼等要求的系统设计的几种方法。

11.3 线性反馈系统的根轨迹分析法

从已经讨论到的几个例子和应用中已经看到，一种有用的反馈系统类型是在这个系统中有一个可调节的增益 K 的系统。随着这个增益的变化，考查一下闭环系统的极点如何变化是很有益处的。因为这些极点的位置告诉我们有关闭环系统特性的很多信息。例如，在稳定一个不稳定系统的过程中，增益的改变是用来把这些极点移到左半面(对连续时间系统)或者移到单位圆内(对离散时间系统)。另外，在习题 11.49 中也表明，利用反馈来移动一阶系统的极点，使得系统的时间常数减小，可以拓宽一阶系统的频带宽度。此外，就像利用反馈来重新安排极点以改善系统的性能一样，由 11.2.6 节中也看到，由于不适当当地选择反馈，一个稳定的系统可以不稳定，而这通常是不希望有的，这就是说反馈还存在着潜在的危险性。

这一节将讨论一种方法来检查随着可调增益的变化，闭环系统的极点在复平面内的轨迹(即路径)。这个方法称为根轨迹法，它是把一个有理的系统函数 $Q(s)$ 或 $Q(z)$ 的闭环极点作为增益的函数画出来的一种图示方法。这一方法对连续时间系统和离散时间系统都是同样有效的。

11.3.1 一个例子

为了说明对分析一个反馈系统的根轨迹方法的基本性质，现在重新研究一下前节讨论过的离散时间系统的例子，其系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{z}{z - 2} \quad (11.38)$$

和

$$G(z) = 2\beta z^{-1} = \frac{2\beta}{z} \quad (11.39)$$

现在，式中的 β 被看作一个可调节的增益。那么，闭环系统函数是

$$Q(z) = \frac{1}{1 - 2(1 - \beta)z^{-1}} = \frac{z}{z - 2(1 - \beta)} \quad (11.40)$$

这个例子的闭环极点可以直接看出是位于 $z = 2(1 - \beta)$ 。在图 11.9(a)中已经画出了当 β 从 0 变化到 $+\infty$ 时，这个系统的极点轨迹。该图的(b)是 β 从 0 变化到 $-\infty$ 时极点的轨迹。在每一张图上都指出了 $z = 2$ 这一点，这就是开环极点[也就是 $\beta = 0$ 时， $Q(z)$ 的极点]。随着 β 从 0 增加，极点沿实轴向 $z = 2$ 点的左边移动，图中在一条粗线上用箭头指出了随 β 增加，极点的

移动方向。同理，对 $\beta < 0$, $Q(z)$ 的极点向 $z=2$ 的右边移动。在图 11.9(b) 中的箭头方向指出随 $|\beta|$ 的增加极点的变化方向。对于 $1/2 < \beta < 3/2$, 极点位于单位圆内，于是系统就是稳定的。

作为第二个例子，考虑一个连续时间反馈系统，其

$$H(s) = \frac{s}{s-2} \quad (11.41)$$

和

$$G(s) = \frac{2\beta}{s} \quad (11.42)$$

其中 β 仍代表可调节的增益。因为在这个例子中的 $H(s)$ 和 $G(s)$ 在代数表示式上与前一个例子是相同的，所以除了用 s 来代替 z 外，闭环系统函数也是一样的，即

$$Q(s) = \frac{s}{s-2(1-\beta)} \quad (11.43)$$

并且，作为 β 函数的极点轨迹也与前例相同。

这两个例子之间的关系突出了这样一点，即极点的轨迹只决定于正向通路和反馈通路系统函数的代数表示式，而与该系统是否是一个连续时间系统或离散时间系统无关。然而，对所得结果的解释则是与连续时间系统或离散时间系统有密切关系。在离散时间情况下，重要的是极点位置与单位圆的关系；而在连续时间情况下，极点位置相对于虚轴的关系则是重要的。因此，已经看到，在(11.40)式的离散时间系统， $1/2 < \beta < 3/2$ 系统是稳定的；而对(11.43)式的连续时间系统， $\beta > 1$ 是稳定的。

11.3.2 闭环极点方程

在前面考虑的简单例子中，根轨迹图是很容易画出来的，因为闭环极点作为增益参数的函数可以用显式确定，然后，随着增益变化，就能画出极点的位置。对于较为复杂的系统，不能期望闭环极点能找到这样简单的闭式表示式。然而，不用真正地求出对任何一个具体增益值的极点位置，还是有可能准确地勾划出当增益参数值从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时极点的轨迹。确定根轨迹的这一方法对了解一个反馈系统的特性是极为有用的。随着对这一方法的讨论，将会看到，一旦确定了根轨迹，就有一个相当直接的办法来确定增益参数值，以沿根轨迹在任何给定位置上产生一个闭环极点。下面将只用拉普拉斯变换变量 s 来讨论，对离散时间情况同样也是适用的。

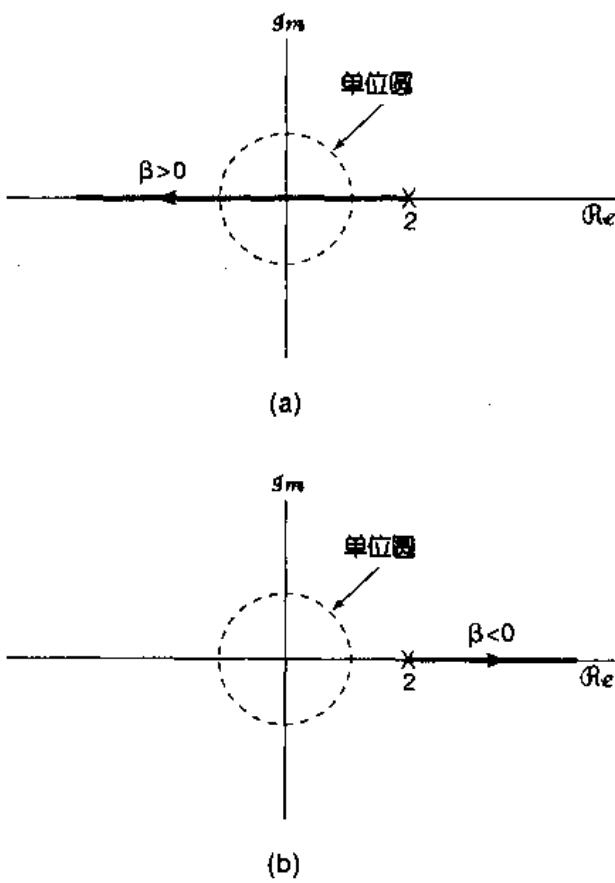
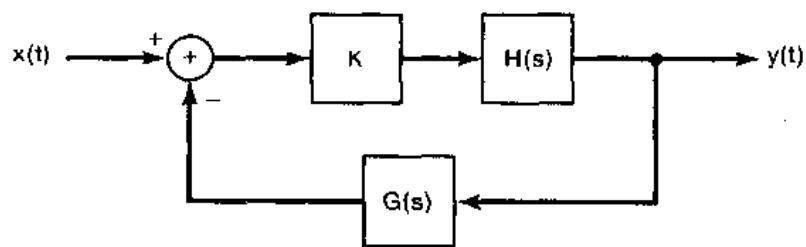


图 11.9 随 β 值变化，由(11.40)式表示的闭环系统的根轨迹：(a) $\beta > 0$; (b) $\beta < 0$ 。

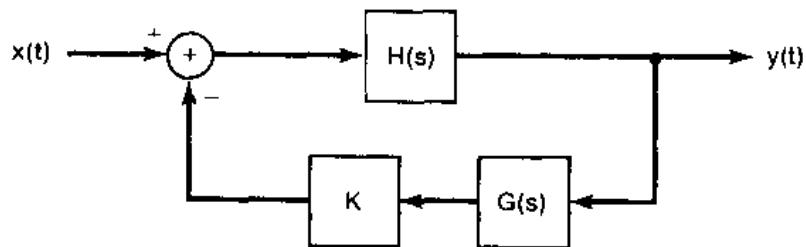
注意：图中已标出 $z=2$ 这一点，它对应于 $\beta=0$ 的极点位置

图 11.10 是一个变形了的图 11.3(a) 基本反馈系统。其中 $G(s)$ 或 $H(s)$ 与一个可调节的增益 K 级联。这两种情况下闭环系数函数的分母都是 $1 + KG(s)H(s)$ ^①。因此闭环系统极点



$$Q(s) = \frac{KH(s)}{1 + KH(s)G(s)}$$

(a)



$$Q(s) = \frac{H(s)}{1 + KH(s)G(s)}$$

(b)

图 11.10 包含一个可调增益的反馈系统：
(a) 可调增益位于正向通路的系统；(b) 可调增益位于反馈通路的系统

方程是下列方程的解：

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad (11.44)$$

重新写出(11.44)式，就得到确定这个闭环极点的基本方程为

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K} \quad (11.45)$$

画出这个根轨迹图的方法就是根据这个方程的性质以及它的解。本节的剩下部分将讨论这些性质，并给出如何利用它们来确定根轨迹。

11.3.3 根轨迹的端点： $K = 0$ 和 $K = +\infty$ 时的闭环极点

或许对于根轨迹来说，由(11.45)式得出的根轨迹立即可看出的是 $K=0$ 和 $|K|=+\infty$ 这两点。特别是对 $K=0$ ，这个方程的解必定是 $G(s)H(s)$ 的极点，因为 $1/K=\infty$ 。为了说明这一性质，回想一下由(11.41)式和(11.42)式给出的例子。如果令 β 起着 K 的作用，那么(11.45)式就变成

^① 以下讨论，为简单起见都假定 $G(s)H(s)$ 乘积中没有零、极点相抵消的情况。若有零极点抵消发生，也不会引起任何实质性的困难，本节讨论的方法能很容易推广到这种情况的（见习题 11.32）。事实上，本节开始的简单例子（即(11.41)式和(11.42)式）就涉及到一个在 $s=0$ 的零极点相消的情况。

$$\frac{2}{s-2} = -\frac{1}{\beta} \quad (11.46)$$

因此，根据上面的讨论， $\beta=0$ 就得出系统的极点将位于 $2/(s-2)$ 的极点上（即 $s=2$ ），这就与图 11.9 所指出的一致的。

现在假定 $|K| = \infty$ ，这时 $1/K = 0$ ，(11.45) 式的解必趋于 $G(s)H(s)$ 的零点。如果， $G(s)H(s)$ 分子的阶小于分母的阶，这些零点中有一些（其个数等于分母，分子阶的差）将在无限远点。

再回到(11.46)式，因为 $2/(s-2)$ 分母的阶是 1，而分子的阶是 0，所以有一个零点在无限远，而没有零点在有限 s 平面上。于是随着 $|\beta| \rightarrow \infty$ ，闭环极点趋于无限远点。这一点与图 11.9 也是一致的。从这里可以看到，极点的模对 $\beta > 0$ 或 $\beta < 0$ 都随 $|\beta| \rightarrow \infty$ 而无限增加。

虽然上面的讨论提供了在 K 的两个极限值之下，有关闭环极点位置的基本信息，但是以下讨论的结果，才是在没有真正解出闭环极点作为增益的显函数的条件下能够画出根轨迹的关键。

11.3.4 角判据

再来考虑(11.45)式。因为这个方程的右边是一个实数，所以 s_0 能够成为一个闭环极点的条件唯有在(11.45)式的左边，即 $G(s_0)H(s_0)$ 也是一个实数才有可能。将它写成

$$G(s_0)H(s_0) = |G(s_0)H(s_0)| e^{j\angle G(s_0)H(s_0)} \quad (11.47)$$

则 $G(s_0)H(s_0)$ 成为实数的条件就是

$$e^{j\angle G(s_0)H(s_0)} = \pm 1 \quad (11.48)$$

这就是说， s_0 欲能成为一个闭环极点的话，就必须有

$$\angle G(s_0)H(s_0) = \pi \text{ 的整倍数} \quad (11.49)$$

再回到(11.46)式立即可见， $2/(s_0-2)$ 成为实数， s_0 也必须是实数。对于更复杂一点的系统函数，要确定出使 $G(s_0)H(s_0)$ 成为实数的 s_0 可没有像这个例子这么容易。然而，将会看到，利用由(11.49)式给出的角判据，再结合第 9 章中介绍的有关求 $\angle G(s_0)H(s_0)$ 的几何方法，将会大大地方便于根轨迹的确定。

由(11.49)式给出的角判据提供了对某些增益值 K 来说，判定点 s_0 是否可能成为一个闭环极点的直接方法。再进一步研究(11.45)式，还给出了一种方法，利用这种方法可以计算出相应于根轨迹上任何一点的增益值。具体说来就是，设 s_0 满足

$$\angle G(s_0)H(s_0) = \pi \text{ 的奇数倍} \quad (11.50)$$

则 $e^{j\angle G(s_0)H(s_0)} = -1$ ，并且从(11.47)式中可得

$$G(s_0)H(s_0) = -|G(s_0)H(s_0)| \quad (11.51)$$

将(11.51)式代入(11.45)式，发现，若

$$K = \frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|} \quad (11.52)$$

那么， s_0 就是(11.45)式的一个解，所以是一个闭环极点。

同理，若 s_0 满足下列条件：

$$\angle G(s_0)H(s_0) = \pi \text{ 的偶数倍} \quad (11.53)$$

那么

$$G(s_0)H(s_0) = \pm G(s_0)H(s_0) \quad (11.54)$$

于是, 如果

$$K = -\frac{1}{|G(s_0)H(s_0)|} \quad (11.55)$$

那么, s_0 就是(11.45)式的一个解, 因此是一个闭环极点。

对于由(11.46)式给出的例子来说, 如果 s_0 是在实轴上并且 $s_0 < 2$, 那么

$$\arg\left(\frac{2}{s_0 - 2}\right) = -\pi \quad (11.56)$$

由(11.52)式, 使 s_0 成为闭环极点的 β 值为

$$\beta = \frac{1}{\left|\frac{2}{s_0 - 2}\right|} = \frac{2 - s_0}{2} \quad (11.57)$$

也即

$$s_0 = 2(1 - \beta) \quad (11.58)$$

这是与(11.43)式的结论一致的。

将以上所观察到的两点归纳为: 闭环系统的根轨迹, 即当 K 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时, 对某些 K 值来说, 在复平面 s 内是闭环极点的那些点的集合, 就是满足角条件(11.49)式的那些点。于是可归纳为:

1. 满足

$$\arg G(s_0)H(s_0) = \pi \text{ 的奇数倍} \quad (11.59)$$

的点 s_0 位于根轨迹上, 并且对 $K > 0$ 的某个值来说是一个闭环极点, 使 s_0 成为闭环极点的增益值由(11.52)式确定。

2. 满足

$$\arg G(s_0)H(s_0) = \pi \text{ 的偶数倍} \quad (11.60)$$

的点 s_0 位于根轨迹上, 并且对 $K < 0$ 的某个值来说是一个闭环极点, 使 s_0 成为闭环极点的增益值由(11.55)式确定。

因此, 现在把确定根轨迹的问题变成寻找满足由(11.59)式和(11.60)式给出的角条件的这些点的问题。从这两个条件出发, 可进一步提炼出一组性质, 利用这组性质将有助于画出根轨迹。在讨论这些性质以前, 先考虑一个简单的例子。

例 11.1 设

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}, \quad G(s) = \frac{1}{s + 2} \quad (11.61)$$

回想一下 9.4 节有关拉普拉斯变换的几何求值的讨论, 在那一节已经知道, 该有理拉普拉斯变换

$$\frac{\prod_{k=1}^m (s - \beta_k)}{\prod_{k=1}^n (s - \alpha_k)} \quad (11.62)$$

在复平面上某一点 s_0 的相位等于从每一个零点到 s_0 的零点向量的相角之和，减去从每一个极点到 s_0 的极点向量的相角之和。现将此应用于 $G(s)H(s)$ ，其中 $G(s), H(s)$ 均由(11.61)式给出，就能够在 s 平面上用几何的方法确定满足角判据(11.59)式和(11.60)式的那些点，因此就可以画出根轨迹来。

在图 11.11 中，已经画出了 $G(s)H(s)$ 的极点，并指出每一个极点到 s_0 的相角 θ 和 ϕ 。首先，对位于实轴上的点 s_0 来检验一下角判据。当一开始 s_0 位于实轴上 -1 的右边时，两个极点对相位的贡献都是零，于是

$$\Re G(s_0)H(s_0) = 0 = 0 \cdot \pi \quad s_0 \text{ 为实数且大于 } -1 \quad (11.63)$$

根据(11.60)式，这些点是位于 $K < 0$ 时的根轨迹上。对位于两个极点之间的那些点，极点 -1 提供的相角是 $-\pi$ ，而极点 -2 提供的相角是 0，因此

$$\Re G(s_0)H(s_0) = -\pi, \quad s_0 \text{ 为实数且 } -2 < s_0 < -1 \quad (11.64)$$

这些点在 $K > 0$ 时的根轨迹上。最后，当 s_0 是实数且小于 -2 时，每一个极点对相位的贡献都是 $-\pi$ ，因此

$$\Re G(s_0)H(s_0) = -2\pi, \quad s_0 \text{ 为实数且小于 } -2$$

这些点都位于 $K < 0$ 时的根轨迹上。

现在来检验一下 s 的上半平面(因为单位冲激响应是实值的，复数极点必须共轭成对，因此在研究了上半平面的极点之后，就能立即确定下半平面的极点所对应的情况)。由图 11.11， $G(s_0)H(s_0)$ 在 s_0 的相位角是

$$\Re G(s_0)H(s_0) = -(\theta + \phi) \quad (11.65)$$

另外，因为 s_0 的范围是在上半平面(不包括实轴)，所以有

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < \pi \quad (11.66)$$

于是有

$$-2\pi < \Re G(s)H(s) < 0 \quad (11.67)$$

因此立即看出，在上半平面，没有任何一点能够位于 $K < 0$ 的根轨迹上[因为 $\Re G(s)H(s)$ 绝不可能等于 π 的偶数倍]。另外，如果 s_0 是位于 $K > 0$ 的根轨迹上，则必有

$$\Re G(s_0)H(s_0) = -(\theta + \phi) = -\pi \quad (11.68)$$

或者

$$\theta = \pi - \phi \quad (11.69)$$

研究一下图 11.11 的几何性质，可以看出，只有在平行于虚轴，并且平分极点 -1 和 -2 联线的那根直线上的点，才有这样的相位特性。到现在为止，已经检查了整个 s 平面，并且已经确定了所有位于根轨迹上的那些点。另外，还知道 $K=0$ 时，闭环极点就等于 $G(s)H(s)$ 的极点，而在 $|K| \rightarrow \infty$ 时，闭环极点就是 $G(s)H(s)$ 的零点。在该例中， $G(s)$ 和 $H(s)$ 的零点都在无限远点。把所有这些结果放在一起，就能画出整个的根轨迹图，如图 11.12 所示。图中分别就 $K > 0$ 和 $K < 0$ ，用箭头指出 $|K|$ 增加的方向。

由图看到，当 $K > 0$ 时，根轨迹有两个分支，这点对 $K < 0$ 也是对的。存在两个分支的原因是因

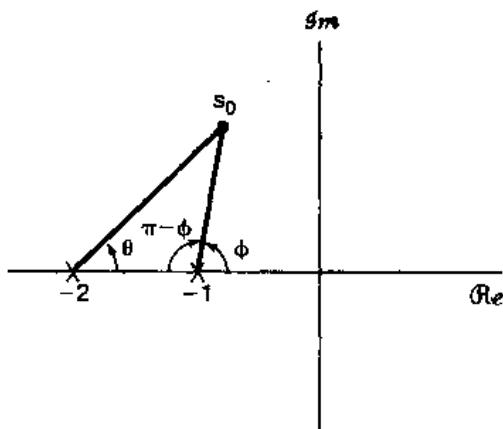


图 11.11 例 11.1 中求满足角判据的几何方法

为这个例子的闭环系统函数是二阶的，因而对任何特定的 K 值都有两个极点。因此，根轨迹有两个分支，其中每一个随着 K 的变化都为一个闭环极点的位置画出的一条轨迹，而且对任何特定的 K 值，在每一分支上都有一个闭环极点。另外，如果希望对轨迹上每一个具体的闭环极点 s_0 计算出 K 值，就可以用(11.52)式和(11.55)式来确定。

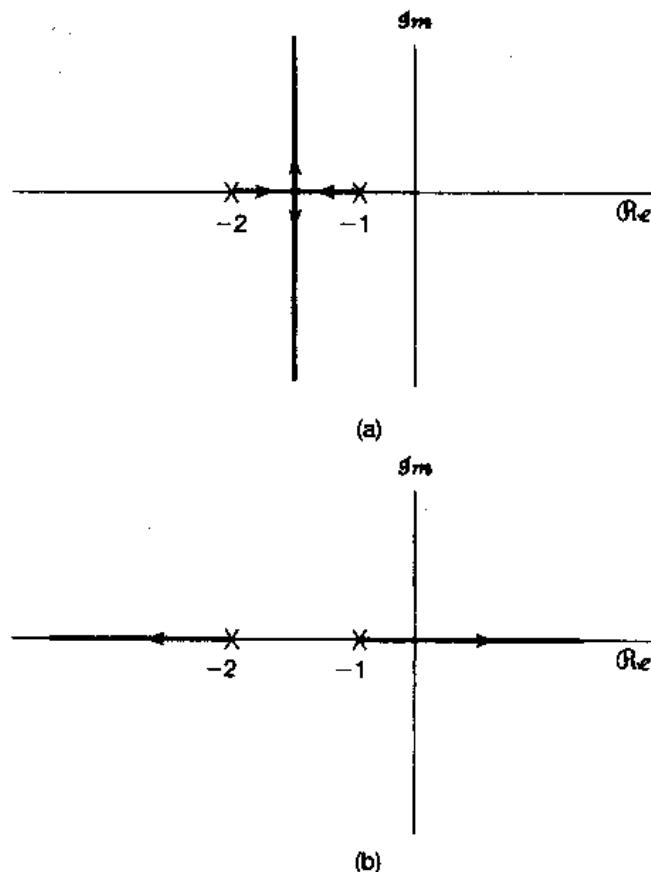


图 11.12 例 11.1 的根轨迹：
(a) $K > 0$; (b) $K < 0$ 。图中已标出 $G(s)H(s)$ 在 $s = -1$ 和 $s = -2$ 的极点

11.3.5 根轨迹的性质

前一小节所提到的这么一个过程原则上提供了确定任何连续和离散时间 LTI 反馈系统根轨迹的一种方法。这就是，用图解的方法或其它的方法，只要确定所有满足于(11.59)式，或(11.60)式的那些点就行了。所幸的是，根轨迹有几个另外的几何性质，这些性质使得根轨迹的作图大为简化。在开始讨论这些性质的时候，先假定 $G(s)H(s)$ 具有如下标准形式：

$$H(s)H(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\prod_{k=1}^m (s - \beta_k)}{\prod_{k=1}^n (s - \alpha_k)} \quad (11.70)$$

式中 β_k 代表零点，而 α_k 代表极点，它们都可以是复数。另外，由(11.70)式还看到，已将 $G(s)H(s)$ 的分子、分母多项式首项系数假定为 +1。这一点总是可以这样来办到的，即用分母 s^n 的系数去除分子、分母多项式，然后把 s^m 的系数吸收到增益 K 中去。例如

$$K \frac{2s+1}{3s^2+5s+2} = K \frac{\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}}{s^2 + \frac{5}{3}s + \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)K \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + \frac{5}{3}s + \frac{2}{3}} \quad (11.71)$$

然后在确定根轨迹的时候，将 $(2/3)K$ 这个量看作可变化的总增益。

另外，再假设

$$m \leq n \quad (11.72)$$

因为通常在实际中遇到的都属于这一情况。(习题 11.33 讨论了 $m > n$ 的情况)。以下就是有助于作根轨迹图的某些性质，其中也包括上面已讨论过的一些内容。

性质 1：对于 $K=0$, (11.45)式的解就是 $G(s)H(s)$ 的极点。因为假定有 n 个极点，因此根轨迹就有 n 个分支，其中每一个分支都始于 $G(s)H(s)$ 的一个极点($K=0$)。

性质 1 包括了在例 11.1 所提到的一般形式：对每一个闭环极点，都存在根轨迹的一个分支。下面的性质也只是重叙一下早先已经得到的结果。

性质 2：随着 $|K| \rightarrow \infty$ ，根轨迹的每一分支都趋于 $G(s)H(s)$ 的一个零点。因为假设 $m \leq n$ ，所以这些零点中的 $(n-m)$ 个在无限远点。

性质 3：位于 $G(s)H(s)$ 的奇数个实极点和零点左边的实轴部分是在 $K>0$ 时的根轨迹图上；位于 $G(s)H(s)$ 偶数个(包括零个)实极点和零点左边的实轴部分是在 $K<0$ 时的根轨迹图上。

可以对性质 3 作如下证明。从例 11.1 的讨论和图 11.13(a)看到，如果在实轴上有一个点位于 $G(s)H(s)$ 的一个实极点或零点的右边，那么这个极点或零点对 $G(s_0)H(s_0)$ 提供的相位就为零。另一方面，如果 s_0 位于一个零点的左边，这个零点对相位的贡献就是 $+\pi$ ，而如果 s_0 是在一个极点的左边，给出的相位就是 $-\pi$ (因为要减去极点相角)。所以，如果 s_0 是在奇数个实极点和零点的左边，那么这些极点和零点提供的总相位就是 π 的奇数倍；而若 s_0 位于偶数个实极点和零点的左边，则由这些极点和零点提供的总相位就是 π 的偶数倍。根据 (11.59)式和 (11.60)式，如果能证明具有非零虚部的全部极点和零点在相位上的总贡献是 π 的偶数倍的话，那么也一定有性质 3 的结果。这里的关键是这样的极点和零点都是共轭成对出现的，从而可以研究其中每一对的贡献，如图 11.13(b)所示。由于对称性，对实轴上任意一点 s_0 ，这一对极点的相角和总是 2π 。将全部共轭零点对的相角相加，再减去全部共轭极点对的相位和，就得到所要求的结果。因此，位于实极点或零点之间的实轴上的任何线段不是 $K>0$ 时的根轨迹，就是 $K<0$ 时的根轨迹，这要由这一线段究竟是位于 $G(s)H(s)$ 的奇数个还是偶数个极点和零点的左边来确定。

作为性质 1 到性质 3 的一个结果，现在考虑在实轴上的一个线段，该线段位于 $G(s)H(s)$ 的两个极点之间，并且其间无零点。根据性质 1，根轨迹始于极点；根据性质 3，这两个极点间的实轴部分对应于某一个正的或负的 K 值范围的根轨迹。因此，随着 $|K|$ 从零增加，开始于这两个极点的根轨迹的两条分支将沿着这两个极点间的实轴段相向移动。根据性质 2，随着 $|K|$ 增加到无穷大，根轨迹的每一条分支都必须趋向于一个零点。又因为在实轴的这一部分没有零点，唯一的可能就是当 $|K|$ 大到一定情况时，这两条分支在复平面内突然分裂开，这就是图 11.12 所说明的。在那里，对于 $K > 0$ 的根轨迹有一部分位于两个实极点之间。随着 K 增加，根轨迹最终离开实轴，形成两条复共轭分支。综合这些讨论，可以得到下面的根轨迹性质。

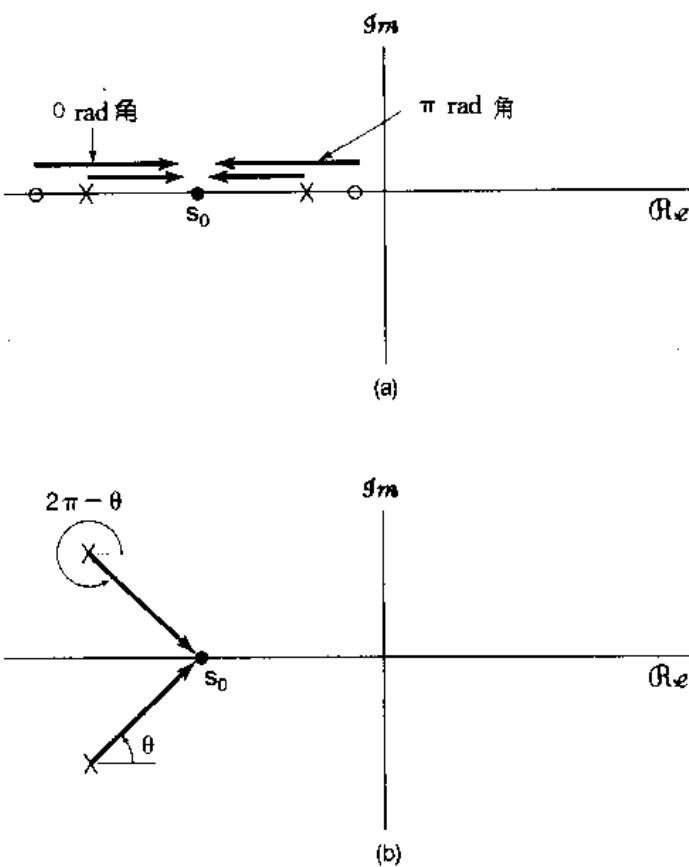


图 11.13 (a)由实极点和零点对实轴上某一点的角贡献；
(b)一对复数共轭极点对实轴上某一点的总相角贡献。

性质 4：当 $|K|$ 足够大时，两个实极点之间的根轨迹必然分裂而进入复平面。

性质 1 到性质 4 用来说明根轨迹特性如何能从(11.45)式，(11.59)式和(11.60)式推演出来。在很多情况下，图示出 $G(s)H(s)$ 的极点和零点，然后利用这四个性质就足以勾画出相当准确的根轨迹(见例 11.2 和例 11.3)。然而，除了这些性质以外，根轨迹还有其它很多特性，利用这些特性可以得到更为准确的根轨迹图。例如，根据性质 2 知道，根轨迹的 $(n - m)$ 个分支都要趋于无限远点。事实上，这些分支都是以一些特定的角度趋于无限远的，这些角度可以算出来，因此这些分支都渐近地平行于在这些角度上的直线。此外，画出这些渐近线，特别是确定这些渐近线的交点都是可能的等等。这两个性质及其它性质将在习题 11.34 到习题 11.36 和习题 11.41 到习题 11.42 中说明。有关根轨迹方法更详细的论述可参阅本书末所附参考文献中一些更为深入的教科书。

现在举两个例子，一个是连续时间，另一个是离散时间的情况，来说明如何用这 4 个性质作出根轨迹图，并演绎出当增益 K 变化时，一个反馈系统的稳定性特性。

例 11.2 设

$$G(s)H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \quad (11.73)$$

根据性质 1 和 2, K 为正和 K 为负的根轨迹开始于 $s = -1$ 和 $s = -2$ 这两个极点。一个分支终止于零点 $s = 1$, 另一个终止于无穷远。

先考虑 $K > 0$, 这时根轨迹如图 11.14(a) 所示。由性质 3 可以确认出位于根轨迹上的实轴部分, 即 $\Re\{s\} < -2$ 和 $-1 < \Re\{s\} < 1$ 的区域。因此, $K > 0$ 时根轨迹的--支起始于 $s = -1$, 且随着 $K \rightarrow +\infty$, 而趋向于 $s = 1$ 。另一支开始于 $s = -2$, 随着 $K \rightarrow +\infty$, 向左延伸直到 $\Re\{s\} = -\infty$ 。

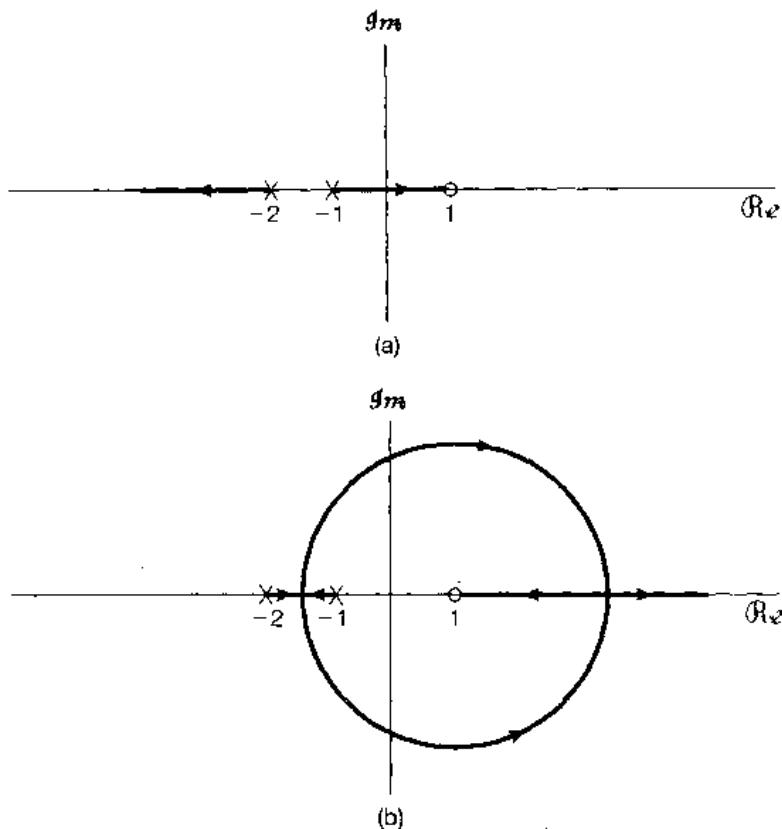


图 11.14 例 11.2 的根轨迹图:(a) $K > 0$; (b) $K < 0$ 。图中标出的是 $G(s)H(s)$ 在 $s = -1$ 和 $s = -2$ 的极点和在 $s = 1$ 的零点

由此可见, 对 $K > 0$ 来说, 若 K 足够大的话, 系统将变为不稳定, 因为闭环极点之一移到了右半平面。当然, 现在用以作根轨迹的这一方法并没有指出发生不稳定时的 K 值。然而, 对现在这个例子来说, 发生不稳定的 K 值对应于根轨迹通过 $s = 0$ 这一点。因此, 由(11.52)式相应的 K 值就是

$$K = \frac{1}{|G(0)H(0)|} = 2 \quad (11.74)$$

于是, 这个系统在 $0 \leq K < 2$ 时是稳定的, 而对 $K \geq 2$ 是不稳定的。

对于 $K < 0$, 位于根轨迹上的实轴部分是 $\Re\{s\} > 1$ 和 $-2 < \Re\{s\} < -1$ 。因此, 根轨迹还是从 $s = -2$ 和 $s = -1$ 开始, 移入 $-2 < \Re\{s\} < -1$ 的区域。在某一点上, 根轨迹分裂为两支而进入复平面, 并沿着某一条轨迹回到 $s > 1$ 的实轴上。一旦回到实轴上之后, 一支向左移直到 $s = 1$ 为止, 另一支一直向右移直到 $s = \infty$, 如图 11.14(b) 所示。这张图已经展现了 $K < 0$ 时的准确根轨迹图。

对于指出根轨迹离开和进入实轴的位置也能够确立一些规律, 甚至勿需精确的作图也能大致勾划出图 11.14(b) 根轨迹的一般形状来, 并且可以推断出对 $K < 0$, 当 $|K|$ 足够大时也能变成不稳定。

例 11.3 考虑图 11.15 的离散时间反馈系统, 这时

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \quad (11.75)$$

本节一开始就说过, 离散时间反馈系统根轨迹图的作法和连续时间情况是一样的。因此和上例完全一样, 可以推断出该例根轨迹的基本形式, 如图 11.16 所示。这时, 对 $K > 0$ 来说, 位于 $G(z)H(z)$ 两个极点 ($z = 1/4$ 和 $z = 1/2$) 之间的实轴部分是在根轨迹上, 并且随

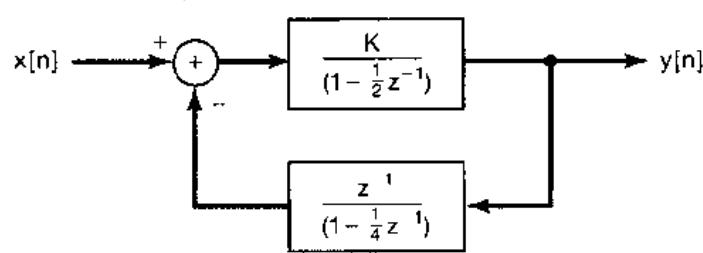
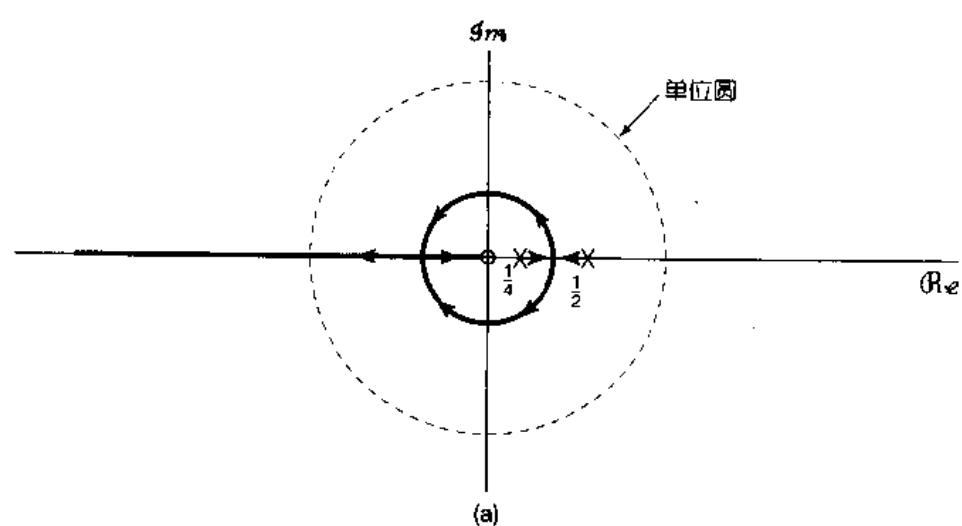
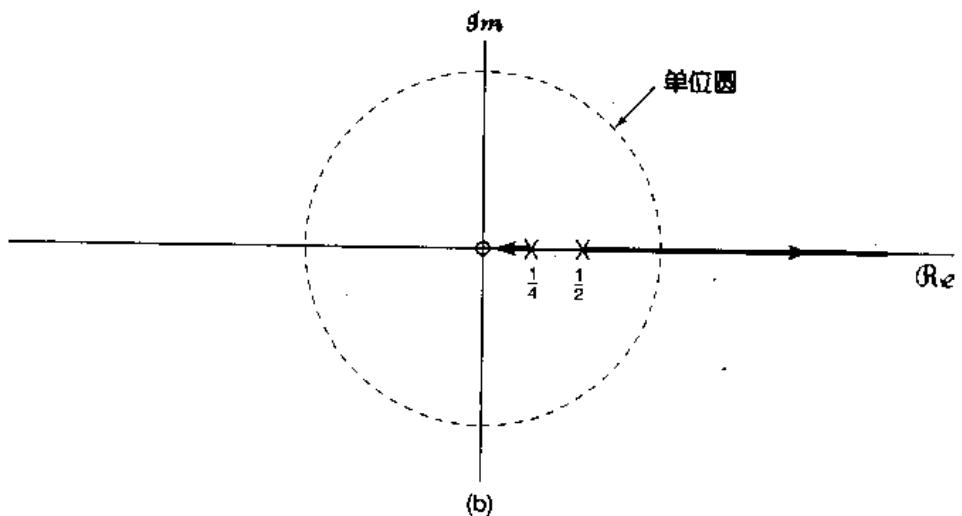


图 11.15 例 11.3 的离散时间反馈系统



(a)



(b)

图 11.16 例 11.3 的根轨迹：

(a) $K > 0$; (b) $K < 0$ 。图中已指出 $G(z)H(z)$ 的极点在 $z = 1/4$ 和 $z = 1/2$, 零点在 $z = 0$

着 K 的增加，根轨迹分裂为二而进入复平面内，并在左半平面实轴上的某一点重新回到实轴上。从这一点开始，一支随 $K \rightarrow \infty$ 向着 $G(z)H(z)$ 在 $z=0$ 的零点靠拢，而另一支则趋向于 ∞ 。 $K < 0$ 时的根轨迹图由实轴上的两支组成，一支趋向于 0，另一支则趋向于无限远。

如同早先已经指出过的，虽然根轨迹的形式与系统是连续时间的，还是离散时间的无关，但是依据根轨迹所作出的有关稳定性的结论则肯定与它们是属于何类系统有关。对这个例子来说，可以得出当 $|K|$ 足够大时，系统是不稳定的，因为两个极点中有一个极点的模大于 1。特别是，在图 11.16(a) 中从 $K > 0$ 的根轨迹图看出，由稳定到不稳定的过渡发生在当闭环极点之一是在 $z = -1$ 时，由(11.52)式，这时对应的 K 值是

$$K = \frac{1}{|G(-1)H(-1)|} = \frac{15}{8} \quad (11.76)$$

同理，由图 11.16(b) 中，从稳定到不稳定的过渡发生在当闭环极点之一是在 $z = 1$ 时，而由(11.55)式，这时对应的 K 值是

$$K = -\frac{1}{|G(1)H(1)|} = -\frac{3}{8} \quad (11.77)$$

将它们合在一起可见，若

$$-\frac{3}{8} < K < \frac{15}{8} \quad (11.78)$$

图 11.16 的闭环系统是稳定的，而 K 值在这个范围以外是不稳定的。

11.4 奈奎斯特稳定性判据

11.3 节所建立的根轨迹方法给出了关于闭环极点的位置随系统增益变化的详细情况。从根轨迹图上可以确定系统的阻尼以及它的稳定性特性随 K 变化的情况。根轨迹的确定需要正向和反馈通路系统函数的解析表达式，并且仅当这些变换是有理函数时才能适用。例如像单凭实验得到的这些系统函数的有关知识这种情况就不能直接应用这种方法。

这一节将介绍另一种方法，这种方法也是将反馈系统稳定性的确定作为某一可调增益参数的函数来处理的。这一方法称为奈奎斯特判据(Nyquist Criterion)。这种方法与根轨迹相比有两个基本的区别：一是不像根轨迹法那样，奈奎斯特判据不给出关于闭环极点位置作为 K 的函数的详细信息，而只是确定对任何具体的 K 值来说该系统是否稳定；二是奈奎斯特判据可以适用于非有理系统函数的情况，而且在正向和反馈通路系统函数非解析表述的情况下也是可用的。

本节的目的是概要地提出奈奎斯特判据所包含的基本思想，其中既包括连续时间系统，也包括离散时间系统。将会看到，离散时间和连续时间奈奎斯特判据的检验都是同一基本概念的结果，当然和根轨迹法一样，由于这两种系统的不同，对稳定性的真正判定是不同的。更为详细的有关奈奎斯特判据及其在反馈系统中的应用都可以在本书末所列的有关反馈系统和自动控制系统分析与综合方面的教科书中找到。

为了介绍这一方法，首先回忆一下图 11.10 的闭环系统以及所对应的离散时间系统。这个闭环系统的极点是下列方程的解，对连续时间系统是

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad (11.79)$$

而对离散时间系统则是

$$1 + KG(z)H(z) = 0 \quad (11.80)$$

对离散时间系统要确定的是(11.80)式的解是否有位于单位圆以外的；而对连续时间系统则是(11.79)式的解有无在 s 平面上的右半面内的。奈奎斯特判据决定这一点是通过检查 $G(s)H(s)$ 沿着 $j\omega$ 轴的值和 $G(z)H(z)$ 沿着单位圆上的值来进行的。这一判据的基础就是围线性质，将在下面进行讨论。

11.4.1 围线性质

现在考虑一个一般的有理函数 $W(p)$ ，这里 p 是一个复变量^①。假若要对在 p 平面上沿一条顺时针方向的封闭围线上的 p 值画出 $W(p)$ 。图 11.17 示出了这样一个图的说明，这里 $W(p)$ 在 p 平面上有两个零点，而没有极点。图 11.17(a) 中示出了在 p 平面上的一条闭合路径 C ，图 11.17(b) 则是当 p 沿 C 变化一周时画出的 $W(p)$ 的值的一条闭合围线。在该例中， $W(p)$ 的一个零点在闭合围线 C 的内部，而另一个零点则在其外面。对围线 C 上的任何一点 p ， $W(p)$ 的相位就是两个到 p 点的零点向量 v_1 和 v_2 的相角之和。当绕这条围线一周时，围线内部零点向量的相角 ϕ_1 有一个净的 -2π 的变化，而围线外面零点向量的相角 ϕ_2 在绕围线一周时，其净变化为零。因此， $W(p)$ 的图在 W 平面上相位上的净变化就为 -2π ；换言之，图 11.17(b) 的 $W(p)$ 的图在 W 平面上以顺时针方向绕原点一周。更一般地是，对任意一个有理函数 $W(p)$ ，当 p 以顺时针方向沿某一闭合围线一周时， $W(p)$ 位于该围线外的任何极点和零点对 $W(p)$ 相位的净变化没有贡献，而在围线内的每一个零点对 $W(p)$ 相位的净变化提供的贡献是 -2π ，

而在围线内的每一个极点的贡献则是 $+2\pi$ 。因为相位上 -2π 的净变化，就相当于 $W(p)$ 顺时针绕原点一周，因此可以给出如下基本围线性质：

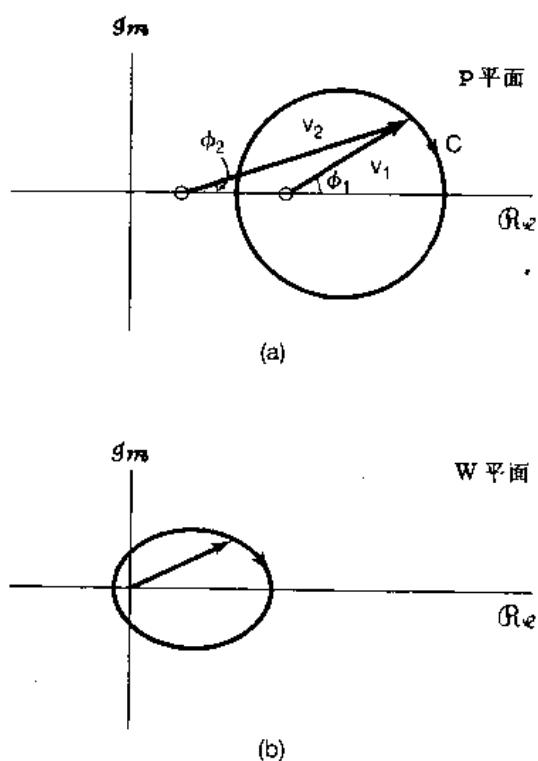


图 11.17 基本围线性质，在(b)中的闭合围线代表了 p 的值沿(a)的封闭围线 C 一周时，所对应的 $W(p)$ 的值的图。这里，(a)中围线 C 上的箭头指出 C 的绕向，而(b)中的箭头则是对应的 $W(p)$ 值的变化方向。

围线性质：当在 p 平面上，以顺时针方向沿一闭合路径 C 绕一周时，对于沿这条闭合路径的 p 值所对应的 $W(p)$ 的图以顺时针方向环绕原点的净次数等于在 p 平面上闭合路径 C 内 $W(p)$ 的零点数减去它的极点数。

^① 因为要把即将建立的性质既用于连续时间反馈系统，又用于离散时间反馈系统，所以选择了一个一般的复变量 p 来讨论它。下面将把这一性质应用于连续时间反馈系统，这时复变量就是 s ，在 11.4.3 节再将围线性质用于离散时间系统，这一场合复变量就是 z 。

在应用这个性质时, $W(p)$ 的逆时针围线将看成是负的顺时针围线。例如, $W(p)$ 在闭合路径 C 内有一个极点, 而无零点, 那么 $W(p)$ 一定有一个逆时针方向的围线, 或者等效成一个负的顺时针方向围线。

例 11.4 有一函数 $W(p)$ 为

$$W(p) = \frac{p - 1}{(p + 1)(p^2 + p + 1)} \quad (11.81)$$

在图 11.18 中, 在 p 平面上画出了几个闭合围线, 以及沿每一条闭合线的 $W(p)$ 的轨迹。图 11.18(a) 中, 围线 C_1 内没有包括 $W(p)$ 的任何极点和零点, 结果 $W(p)$ 的图就是一条不包围原点的闭合

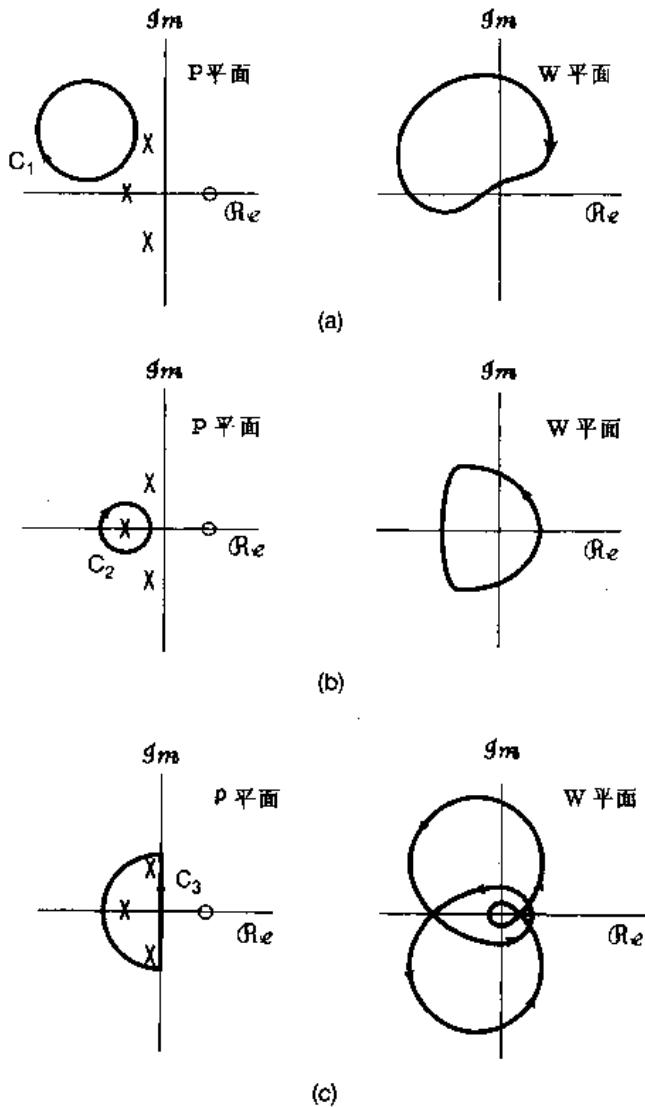


图 11.18 例 11.4 的基本围线性质:(a)围线 C_1 内不包含任何极点或零点, 结果 $W(p)$ 就不环绕原点; (b)围线 C_2 有一个极点, 因此 $W(p)$ 绕原点一周; (c)围线 C_3 内有三个极点, 因此 $W(p)$ 绕原点三周; (d)围线 C_4 内有一个极点和一个零点, 因此 $W(p)$ 不环绕原点; (e)围线 C_5 内有三个极点和一个零点, $W(p)$ 绕原点两周

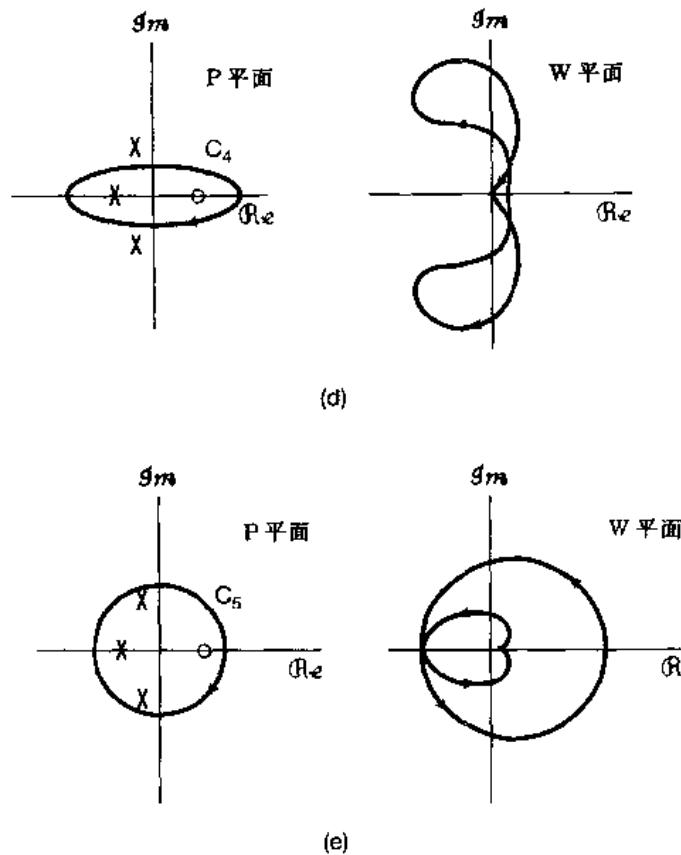


图 11.18(续)

轨迹。图 11.18(b)中, 闭合路径 C_2 内仅包括一个极点 $p = -1$, 因此 $W(p)$ 以逆时针方向绕原点一周。图 11.18(c)中的 C_3 内包括了 $W(p)$ 的三个极点, 所以 $W(p)$ 的轨迹以逆时针方向绕原点三周。图 11.18(d)中的 C_4 内含有一个极点和一个零点, 因此, $W(p)$ 的轨迹也不绕过原点。最后, 在图 11.18(e)中, C_5 内包含了 $W(p)$ 的全部零点和极点, 这时 $W(p)$ 以逆时针方向净绕原点两周。

11.4.2 连续时间 LTI 反馈系统的奈奎斯特判据

这一节将利用围线性质来研究图 11.10 的连续时间反馈系统的稳定性。这个系统的稳定性要求 $[1 + KG(s)H(s)]$ 或等效为函数

$$R(s) = \frac{1}{K} + G(s)H(s) \quad (11.82)$$

在 s 平面上的右半平面内没有零点。因此, 在应用以上所得到的一般结论时, 可以考虑如图 11.19 所示的一条围线。当 s 沿这条围线 C 旋转一周时, 由 $R(s)$ 的轨迹顺时针环绕原点的次数可得出在该围线内所包括的 $R(s)$ 的零点个数和极点个数的差数。随着 M 增加到无穷大。这就对应于在 s 右半平面内 $R(s)$ 的零点数与极点数之差。

再来研究当 M 增加到无穷大时, $R(s)$ 沿图 11.19 这条围线的求值问题。当沿着围线的半圆部分延伸到右半平面时, 必须保证随 M 增加, $R(s)$ 仍然是有界的。这就是要假设 $R(s)$ 的极点数至少要等于零点数。这时

$$R(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (11.83)$$

和

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} R(s) = \frac{b_n}{a_n} = \text{常数} \quad (11.84)$$

因此，当 M 增加到无穷大时，沿着这个围线的半圆部分 $R(s)$ 的值不变化，这个常数值就等于 $R(s)$ 在末端的值 [即当 $\omega = \pm \infty$ 时， $R(j\omega)$ 的值]。

因此， $R(s)$ 沿着图 11.19 这条围线的图可以这样来作出：将这条围线的一部分与虚轴重合，那么 $R(s)$ 的图就是当 ω 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时 $R(j\omega)$ 的图。因为 $R(j\omega)$ 就等于 $[1/K + G(j\omega)H(j\omega)]$ ，所以 $R(s)$ 沿着这条闭合围线的图可以根据 $G(j\omega)$ 和 $H(j\omega)$ 画出。如果正向和反馈通路的系统函数都是稳定的，那么这就是这两个系统的频率响应函数。然而，一般函数 $W(p)$ 的围线性质只是复变函数的一个性质，它与这个函数是由信号的拉普拉斯变换来的，还是由 z 变换来的无关，因此也与收敛域无关。这样，即便是正向和反馈通路的系统是不稳定的，倘若检查了函数 $R(j\omega) = 1/K + G(j\omega)H(j\omega)$ ，在 $-\infty < \omega < +\infty$ 范围内的图，还是能够利用围线性质去计算 $R(s)$ 位于右半平面内的零点数和极点数之差的。

再者，由(11.82)式可知： $R(s)$ 的极点就是 $G(s)H(s)$ 的极点，而 $R(s)$ 的零点是闭环极点。另外，因为 $C(j\omega)H(j\omega) = R(j\omega) - 1/k$ ，因此 $G(j\omega)H(j\omega)$ 围绕点 $-1/k$ 的次数就是 $R(j\omega)$ 绕原点的次数。当 ω 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 的图就称为奈奎斯特图。那么，根据围线性质可得

$$\text{奈奎斯特图顺时针绕 } -1/K \text{ 点的净次数} = \text{右半平面内闭环极点数减去 } G(s)H(s) \text{ 在右半平面内的极点数} \quad (11.85)$$

虽然开环系统 $G(s)H(s)$ 可以有不稳定的极点，但是对于一个闭环系统要是稳定的话，就要求没有右半平面内的闭环极点。这就得出连续时间奈奎斯特稳定性判据：

连续时间奈奎斯特稳定性判据：一个闭环系统要是稳定的， $G(j\omega)H(j\omega)$ 的奈奎斯特图顺时针方向环绕 $-1/K$ 点的净次数必须等于 $G(s)H(s)$ 在右半平面极点数的负值。或者说逆时针方向环绕 $-1/K$ 点的净次数必须等于 $G(s)H(s)$ 在右半平面的极点数。

例如，如果正向和反馈通路的系统都是稳定的，那么奈奎斯特图就是这两个系统级联的频率响应。这时，因为在右半平面 $G(s)H(s)$ 没有极点，所以奈奎斯特判据对稳定性的要求就是环绕 $-1/K$ 点的净次数为 0。

例 11.5 设

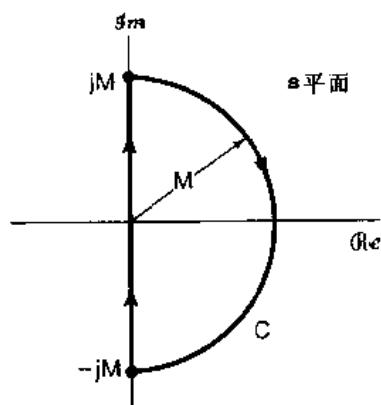


图 11.19 包括右半平面一部分的闭合围线；当 $M \rightarrow \infty$ 时，围线包围了整个右半平面

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = \frac{1}{\frac{1}{2}s+1} \quad (11.86)$$

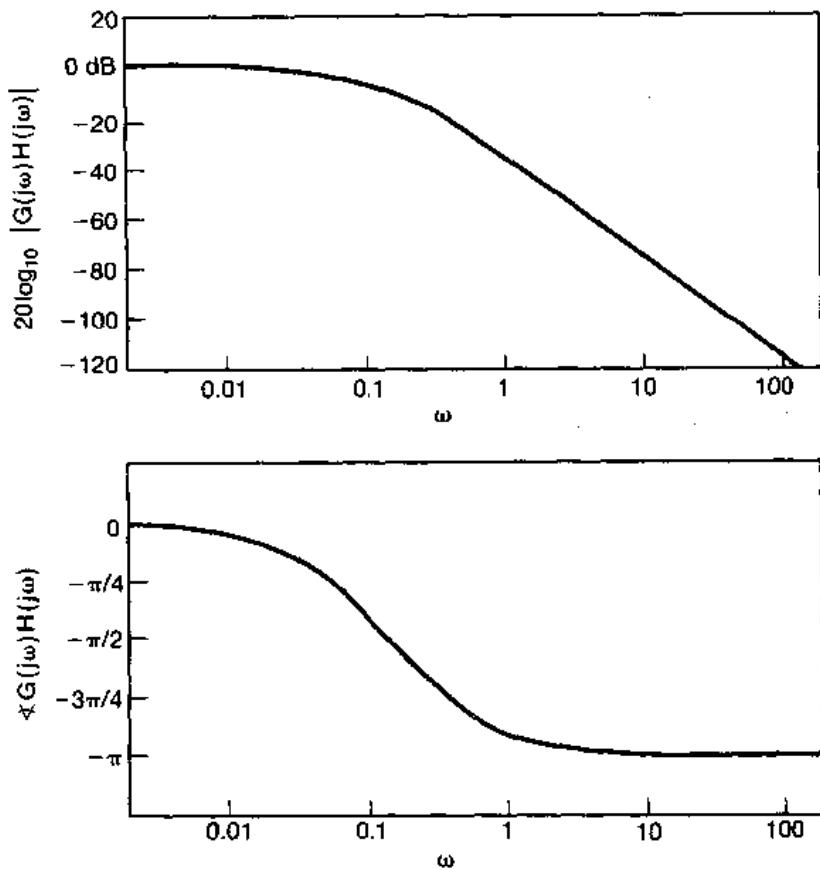


图 11.20 例 11.5 中的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 波特图

$G(j\omega)H(j\omega)$ 的波特图如图 11.20 所示。表示在图 11.21 的奈奎斯特图就是直接从它的对数模特性和相位特性构成的。也就是说，奈奎斯特图上的每一点对某一 ω 值都有相应的模 $|G(j\omega)H(j\omega)|$ 和相位 $\angle G(j\omega)H(j\omega)$ ，它们就组成了 $G(j\omega)H(j\omega)$ 在该 ω 下的极坐标表示。通过共轭对称性， $G(j\omega)H(j\omega)$ 在 $\omega < 0$ 时的极坐标表示可以从 $\omega > 0$ 时得到。这个性质本身表明，由实值单位冲激响应系统组成的反馈系统，可以很简单

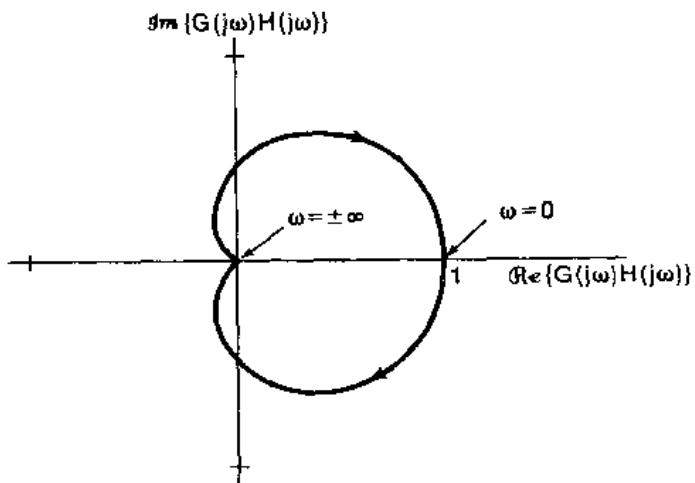


图 11.21 例 11.5 的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 奈奎斯特图。
图中曲线上的箭头指出 ω 的增加方向

地画出奈奎斯特图来。这是因为 $|G(-j\omega)H(-j\omega)| = |G(j\omega)H(j\omega)|$ ，而 $\text{arg} G(-j\omega)H(-j\omega) = -\text{arg} G(j\omega)H(j\omega)$ ，所以 $\omega \leq 0$ 时 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的奈奎斯特图与 $\omega \geq 0$ 时的图关于实轴对称。在图 11.21 上，同时标明了一个箭头，指出 ω 增加的方向；也就是说，这个方向是在应用奈奎斯特判据计算围绕次数时，奈奎斯特图移动的方向（ ω 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ ）。

这个例子没有右半平面的开环极点，所以对稳定性来说，奈奎斯特判据要求对点 $-1/K$ 没有净围绕。检查一下图 11.21，如果 $-1/K$ 点落在奈奎斯特围线外边，这个闭环系统就是稳定的；也就是说，若

$$-\frac{1}{K} \leq 0 \quad \text{或者} \quad -\frac{1}{K} > 1 \quad (11.87)$$

这就等效于

$$K \geq 0 \quad \text{或者} \quad 0 > K > -1 \quad (11.88)$$

把这两个条件结合在一起，就得出结论：只要 K 大于 -1 ，这个闭环系统一定是稳定的。

例 11.6 现在考虑

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(\frac{1}{2}s+1)} \quad (11.89)$$

这个系统的奈奎斯特图如图 11.22 所示。对于这个例子， $G(s)H(s)$ 有一个右半平面的极点。因此对稳定性来说，要求逆时针围绕 $-1/K$ 点一次，这就是要求 $-1/K$ 点落在这条围线的里面。于是，当且仅当 $-1 < -1/K < 0$ ，即 $K > 1$ 时，系统才是稳定的。

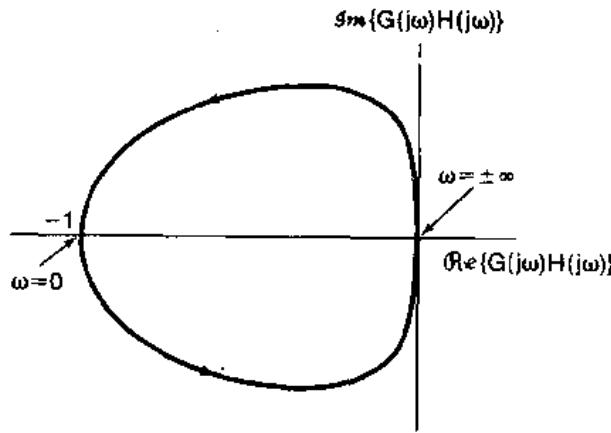


图 11.22 例 11.6 的奈奎斯特图。图中曲线上的箭头指出 ω 的增加方向

在上面的讨论中，已经介绍并说明了奈奎斯特稳定性判据的一种形式，它对于范围

极为广泛的一大类反馈系统都是适用的。另外，对这个判据还可以作一些细致的改进和推广，使之对许多其它的反馈系统也能用。例如，正如已经看到的，只要 $G(s)H(s)$ 没有极点在 $j\omega$ 轴上，没有什么困难就可以作出稳定或不稳定的 $G(s)H(s)$ 的奈奎斯特图。当有 $j\omega$ 轴上的极点时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 在这些点上的值就是无穷大。然而，如同在习题 11.44 讨论的那样，将奈奎斯特判据稍作修改也能用于 $G(s)H(s)$ 在 $j\omega$ 轴上有极点的情况。另外，在本节开头就提到过，奈奎斯特判据也能推广到 $G(s)$ 和 $H(s)$ 不是有理函数的情况。例如，可以证明：如果正向和反馈通路的系统都是稳定的，对系统函数是非有理函数和有理函数的情况，其奈奎斯特判据是相同的。也就是说，如果奈奎斯特图不包围 $-1/K$ 点，闭环系统就是稳定的。为了说明奈奎斯特判据对非有理系统函数的应用，现给出下面一个例子。

例 11.7 考虑在 11.2.6 节讨论过的声音反馈系统。回到图 11.8(a)，令 $K = K_1 K_2$ 和

$$G(s)H(s) = -e^{-sT} = e^{-(sT+j\pi)} \quad (11.90)$$

上式中已经用了 $e^{j\pi} = -1$ 的关系。这时

$$G(j\omega)H(j\omega) = e^{j(\omega T + \pi)} \quad (11.91)$$

当 ω 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 以顺时针方向画出一个半径为 1 的圆，而且当 ω 每变化

$2\pi/T$ 后, $G(j\omega)H(j\omega)$ 都沿着这个圆绕满一周。这就如图 11.23 所示。因为正向和反馈通路的系统都是稳定的 [$G(s)H(s)$ 的级联就是一个时延系统], 所以, 奈奎斯特稳定性判据指出, 当且仅当 $-1/K$ 点不落在该单位圆的里面时, 这个闭环系统就是稳定的。这就要求

$$|K| < 1 \quad (11.92)$$

因为 K_1 和 K_2 分别代表声音的增益和衰减, 它们都是正的, 因此稳定性判据就成为

$$K_1 K_2 < 1 \quad (11.93)$$

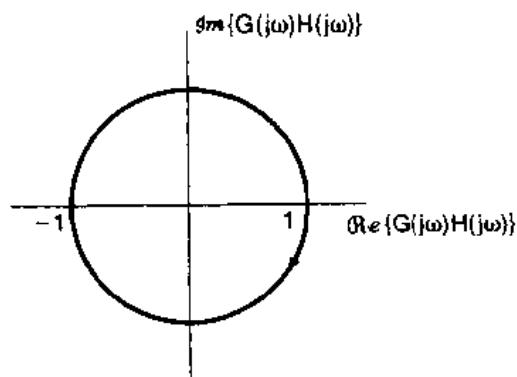


图 11.23 例 11.7 的奈奎斯特图

11.4.3 离散时间 LTI 反馈系统的奈奎斯特判据

和连续时间情况一样, 离散时间系统的奈奎斯特稳定性判据也是基于这样一点, 即: 对于一个有理函数来说, 用沿着某一个闭合路径的函数值图可以确定该函数在该闭合围线内部的零点和极点数之差。连续时间和离散时间情况之间的不同在于闭合路径的选择上。对离散时间情况, 闭环反馈系统的稳定性要求

$$R(z) = \frac{1}{K} + G(z)H(z) \quad (11.94)$$

在单位圆外没有零点。

回想一下, 围线性质是将任何给定围线内的零点和极点的关系联系在一起的, 而在研究一个离散时间系统的稳定性时, 关心的又是 $R(z)$ 在单位圆外的零点, 因此为了能应用围线性质, 首先应对 $R(z)$ 作一简单变换。现考虑如下有理函数

$$\hat{R}(z) = R\left(\frac{1}{z}\right) \quad (11.95)$$

正如在习题 10.43 中所看到的, 如果 z_0 是 $R(z)$ 的一个零点(或极点), 那么 $1/z_0$ 也必定是 $\hat{R}(z)$ 的一个零点(或极点)。如果 $|z_0| > 1$, 那么 $|1/z_0| < 1$, 这样, $R(z)$ 在单位圆外的任何零点或极点都与 $\hat{R}(z)$ 在单位圆内的零点或极点相对应。

由基本围线性质知道, 随着 z 沿单位圆顺时针向旋转一周, $\hat{R}(z)$ 顺时针方向环绕原点的净次数就等于 $\hat{R}(z)$ 在单位圆内的零点数和极点数之差。然而, 从上面讨论可以知道, 这就等于 $R(z)$ 在单位圆外的零点数和极点数之差。此外, 在单位圆上, $z = e^{j\omega}$, 而 $1/z = e^{-j\omega}$, 因此有

$$\hat{R}(e^{j\omega}) = R(e^{-j\omega}) \quad (11.96)$$

从这个式子可以知道, 随着 z 顺时针沿单位圆移动一周时对 $\hat{R}(z)$ 的求值就与逆时针绕单位圆一周对 $R(z)$ 的求值是完全一样的。总之

以逆时针方向在单位圆上绕过一 周时(即 ω 从 0 增加到 2π), $R(e^{j\omega})$ 值的图顺时针包围原点的次数	$=$ $R(z)$ 在单位圆外的零点数 减去单位圆外的极点数	(11.97)
---	---------------------------------------	---------

和在连续时间情况完全一样，计算 $R(e^{j\omega})$ 包围原点的次数就等效于计算 $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 的图包围 $-1/K$ 点的次数，因而把 $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 的图也称为奈奎斯特图，它是当 ω 从 0 到 2π 变化时作出的。同时， $R(z)$ 的极点就是 $G(z)H(z)$ 的极点，而 $R(z)$ 的零点就是闭环系统的极点。因此，前面所讨论的围线性质就意味着：奈奎斯特图顺时针包围 $-1/K$ 点的次数就等于单位圆外闭环极点数减去单位圆外 $G(z)H(z)$ 的极点数。为使闭环系统成为稳定的，就要求在单位圆外没有闭环极点，于是就得出离散时间奈奎斯特稳定性判据如下：

离散时间奈奎斯特稳定性判据：闭环系统要是稳定的，则当 ω 从 0 变化到 2π 时，奈奎斯特图 $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 顺时针方向包围 $-1/K$ 点的净次数必须等于 $G(z)H(z)$ 在单位圆外极点数的负值，或者等效为逆时针方向包围 $-1/K$ 点的净次数必须等于 $G(z)H(z)$ 在单位圆外的极点数。

例 11.8 设

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{z(z + \frac{1}{2})} \quad (11.98)$$

其奈奎斯特图如图 11.24 所示。因为 $G(z)H(z)$ 在单位圆外无极点，因此闭环系统要是稳定的， $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 就不能包围 $(-1/K)$ 点。由图可见，这种情况就是 $(-1/K) < -1$ 或者 $(-1/K) > 2$ ，因此，系统的稳定条件就是 $-1/2 < K < 1$ 。

和连续时间情况一样，如果正向和反馈通路的系统都是稳定的，那么奈奎斯特图就可以由这些系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 和 $G(e^{j\omega})$ 得到；如果它们是不稳定的，那么这两个频率响应就无定义，即便如此，函数 $H(z)H(z)$ 仍然可以在单位圆上求值，奈奎斯特判据照样可用。

由这一节讨论可见，奈奎斯特稳定性判据对于判断一个连续时间或离散时间反馈系统在什么样的增益 K 值范围内是稳定的或不稳定的，提供了一个有用的方法。这个判据和根轨迹法在反馈系统的设计和实现中都是极为重要的工具，并且每一种方法都有它本身的适用范围和局限性。例如，奈奎斯特判据可以应用于非有理系统函数，而根轨迹法则不能。另一方面，根轨迹图提供的不仅仅是稳定性特性，而且还给出了闭环系统响应的其它特性，譬如阻尼、振荡频率等等这些特性都很容易根据闭环系统极点的位置来得到。下一节将介绍另外一种分析反馈系统的重要方法，这个方法突出了闭环系统另一些重要特性。

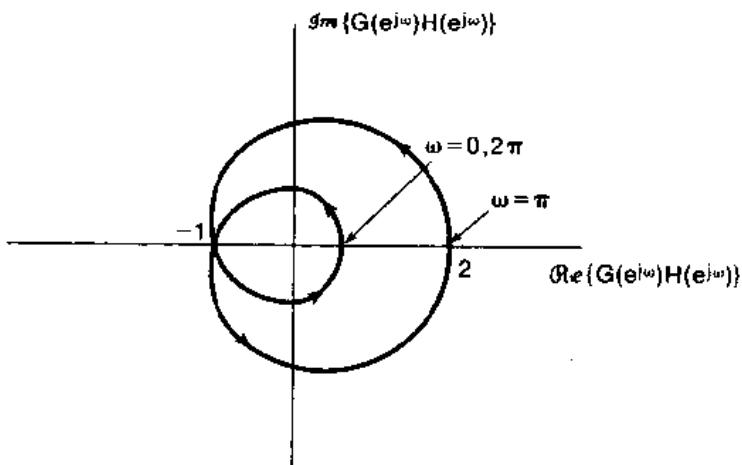


图 11.24 例 11.8 的奈奎斯特图。图中箭头指出当 ω 从 0 到 2π 增加时，该曲线移动的方向

11.5 增益和相位裕度

在这一节我们要介绍并研究在一个反馈系统中稳定性裕度的概念。问题往往是不仅要知道一个反馈系统是否是稳定的，而且要确定在系统中有多少增益量可以变化，有多少相移可以再加在这个系统上，直到系统变成不稳定为止。有关这方面的情况是很重要的，因为在很多实际应用中，正向和反馈通路的系统函数都是近似的，或者在工作过程中，由于磨损，元件的高温效应，或者类似的其它因素等等，都可能有一些微小的变化。

作为一个例子，考虑在引言中提到并在图 11.1(c)和(d)中说明过的望远镜定向系统。这个系统由一台电机，一个用于将轴角度转换为电压的电位器，以及用于放大代表角度差电压的放大器所组成。假定已经有了对每一种元件特性的近似表示，如果这些特性是准确的话，我们就可以给出一个放大器的增益，使得该系统是稳定的。然而，放大器增益和反映电位器角度一电压转换特性的比例常数不可能确切知道，因此，反馈系统的真正增益可能与在系统设计时的标称增益有差异。再者，电机的阻尼特性也不能绝对精确地确定，这样，电机响应的真正时间常数可能就与系统中所用的近似数据不一致。譬如说，如果真正电机时间常数大于在设计中使用的标称值，那么，电机的响应比预期的要更迟缓一些，从而在反馈系统中产生了时延效果。在早先的讨论中以及从例 11.11 中都知道，时延就是在一系统的频率响应上增加了负的相位，而这个相移可能是一个不稳定因素。由于在增益和相位上可能存在的误差，因此很明显总是希望对放大器的增益给予某些误差裕度，使得在设计过程中，即使真正的系统与近似模型有差异的话，而真正系统仍然是稳定的。

这一节将介绍对反馈系统的稳定性裕度进行定量的一种方法。为此，考虑如图 11.25 所示的闭环系统，并假设该系统在给定的正向和反馈通路系统函数标称值下是稳定的，在这里就用 $H(s)$ 和 $G(s)$ 代表这些标称值。同时，因为对连续和离散时间系统的基本概念都是一样的，所以还是集中对连续时间系统的情况来讨论，在本节的最后再举一个例子来说明这些概念对离散时间系统的应用。

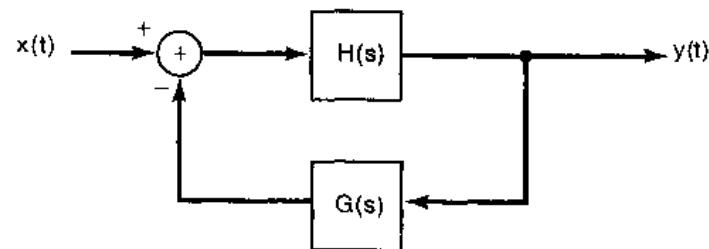


图 11.25 假设在 $H(s)$ 和 $G(s)$ 为标称值下设计成稳定的典型反馈系统

为了评价这个反馈系统的稳定性裕度，假设真正的反馈系统如图 11.26 所示，其中已经允许在反馈通路中可能有增益 K 和相移 ϕ 的变化。在标称系统中 K 是 1，相移 ϕ 是 0，但在真正系统中这两个量或其中之一可以有不同的值。因此关心的是这两个量能容许有多大变化而不会丧失闭环系统的稳定性。反馈系统的增益裕度定义为在 $\phi = 0$ 下，使得闭环系统变成不稳定的最小附加 K 值；类似地，相位裕度就是在 $K = 1$ 下，系统变成不稳定的相移附加量。按习惯，相位裕度表示成一个正的量，即等于使系统变成不稳定的附加负相移的大小。

因为图 11.25 的闭环系统是稳定的，所以仅当在 K 和 ϕ 变化之下，至少有一个闭环系统的极点跨过 $j\omega$ 轴，图 11.26 的系统才能变成不稳定。如果该闭环系统的一个极点位于 $j\omega$ 轴

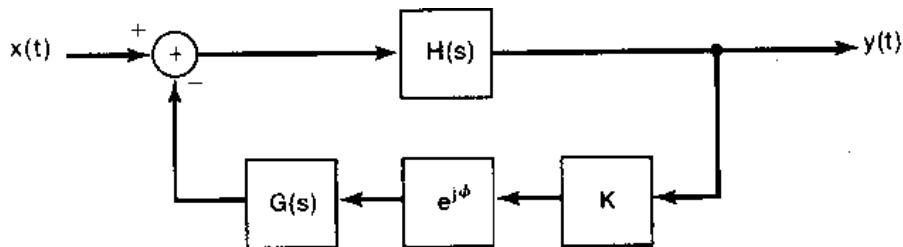


图 11.26 在图 11.25 的标称系统中，包括可能的增益和相位偏移的反馈系统

上，譬如说在 $\omega = \omega_0$ ，那么在这个频率上有

$$1 + Ke^{j\phi}G(j\omega_0)H(j\omega_0) = 0 \quad (11.99)$$

或者

$$Ke^{-j\phi}G(j\omega_0)H(j\omega_0) = -1 \quad (11.100)$$

注意到，图 11.25 标称反馈系统在 $K=1$ 和 $\phi=0$ 下假设是稳定的，因而，这时没有任何 ω_0 值能满足(11.100)式。这个系统的增益裕度就是在 $\phi=0$ 之下，使得(11.100)式有某一个 ω_0 的解时， $K>1$ 的最小值；也就是说，增益裕度是使下列方程有某个解的最小 K 值

$$KG(j\omega_0)H(j\omega_0) = -1 \quad (11.101)$$

同理，相位裕度就是在 $K=1$ 时，使(11.100)式有某个 ω_0 解的最小 ϕ 值；换句话说，相位裕度是使下列方程有某个解时 $\phi>0$ 的最小值

$$e^{-j\phi}G(j\omega_0)H(j\omega_0) = -1 \quad (11.102)$$

为了说明增益和相位裕度的计算和图解系统，考虑下面的例子。

例 11.9 设

$$G(s)H(s) = \frac{4\left(1 + \frac{1}{2}s\right)}{s(1+2s)(1+0.05s+(0.125s)^2)} \quad (11.103)$$

图 11.27 示出了这个例子的波特图。在作该波特图时应该注意(见习题 6.31)，在 $G(j\omega)H(j\omega)$ 中的因子 $1/j\omega$ 提供的是 -90° ($-\pi/2$ rad) 相移和在 $|G(j\omega)H(j\omega)|$ 中 $20\text{dB}/\text{每 }10\text{ 倍频程}$ 的衰减。为了确定增益裕度，可以看到在 $\phi=0$ 之下能满足(11.101)式的唯一频率是 $\angle G(j\omega_0)H(j\omega_0) = -\pi$ 。在这个频率上，以 dB 计的增益裕度可以由图 11.27 判断出来。这就是，首先检查图 11.27(b)，确定使相位特性越过 $-\pi$ rad 的频率 ω_1 ，然后把 ω_1 这一点定在图 11.27(a)上，给出一个 $|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|$ 的值。为使 $\omega_0=\omega_1$ 时满足(11.101)式， K 必须等于 $1/|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|$ 。这个值就是增益裕度。正如图 11.27(a)所表示的那样，以 dB 表示的增益裕度可以在对数模特性上表示为：当把曲线向上移，直到与 0dB 线在 ω_1 处相交时，曲线所移动的分贝数就是增益裕度。

完全相类似地，可以确定相位裕度。首先注意到，能满足(11.102)式的唯一频率是使 $|G(j\omega_0)H(j\omega_0)|=1$ ，或者等效为 $20\log_{10}|G(j\omega_0)H(j\omega_0)|=0$ 的频率 ω_2 。为了确定相位裕度，首先在图 11.27(a)上找到 ω_2 点，在频率 ω_2 上，对数模特性跨过 0dB 线。然后把这一点标定在图 11.27(b)上，由此可给出 $\angle G(j\omega_2)H(j\omega_2)$ 的值。为了使 $\omega_0=\omega_2$ 能满足(11.102)式，该式左边部分的相位必须等于 $-\pi$ ，满足这个要求的 ϕ 值就是相位裕度。在图 11.27(b)上，这个相位裕度的大小就是当把相位特性朝下移直到与 $-\pi$ 线在 ω_2 处相交时曲线向下移动的数量。

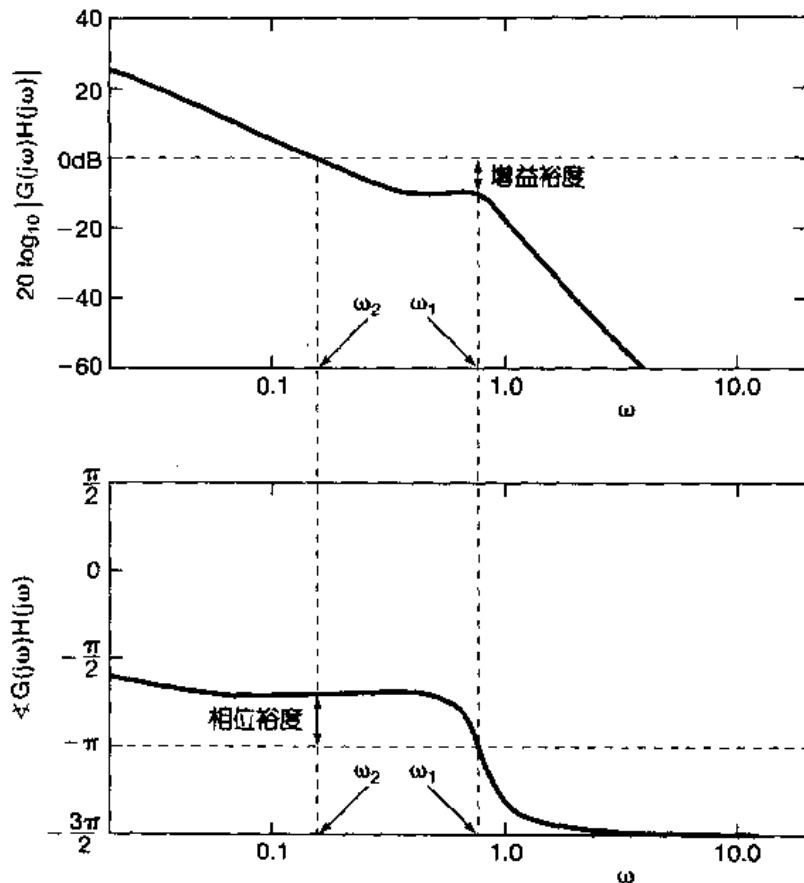


图 11.27 利用波特图对例 11.9 的系统计算增益和相位裕度

在确定增益和相位裕度时，明确地给出在什么频率下极点将跨过 $j\omega$ 轴总是无关紧要的。因此，作为另一种办法就是从一张对数幅—相图上来直接确定增益和相位裕度。例如，图 11.27 这个例子的对数幅—相图就如图 11.28 所示。在该图上，当 ω 从 0 变到 $+\infty$ 时，画出了 $20 \log_{10} |G(j\omega)H(j\omega)|$ 对 $\angle G(j\omega)H(j\omega)$ 的图。由于 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的共轭对称性，因此这张图包含了奈奎斯特图的同样内容，只不过奈奎斯特图是在 $-\infty < \omega < \infty$ 范围内，以 $\Re\{G(j\omega)H(j\omega)\}$ 对 $\Im\{G(j\omega)H(j\omega)\}$ 画出的。正如在图 11.28 中所指出的，相位裕度可由该对数幅—相特性与 0dB 线的交点来读出；这就是说，相位裕度值就是移动这条对数幅—相曲线使之在准确 180° (π rad) 的相位处与 0dB 线相交所需要的附加负相移。同理，增益裕度值可直接由这条对数幅—相曲线与 $-\pi$ rad 线相交处得到，而这就代表将这条曲线在 0dB 处与 $-\pi$ 线相交所需要的附加增益量。

下面几个例子给出了有关对数幅—相图的几个基本应用。

例 11.10 设

$$G(s)H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad \tau > 0 \quad (11.104)$$

这种情况下，可以求得如图 11.29 所画的对数幅—相图。这个系统有 π 的相位裕度，并且，因为这条曲线不会与 $-\pi$ 线相交，所以系统的增益裕度为无限大（也就是说可以任意增大增益，仍能维持系统稳定）。检查一下图 11.30(a) 的方框图，就可以得到上述同样结论。在图 11.30(b) 中画出

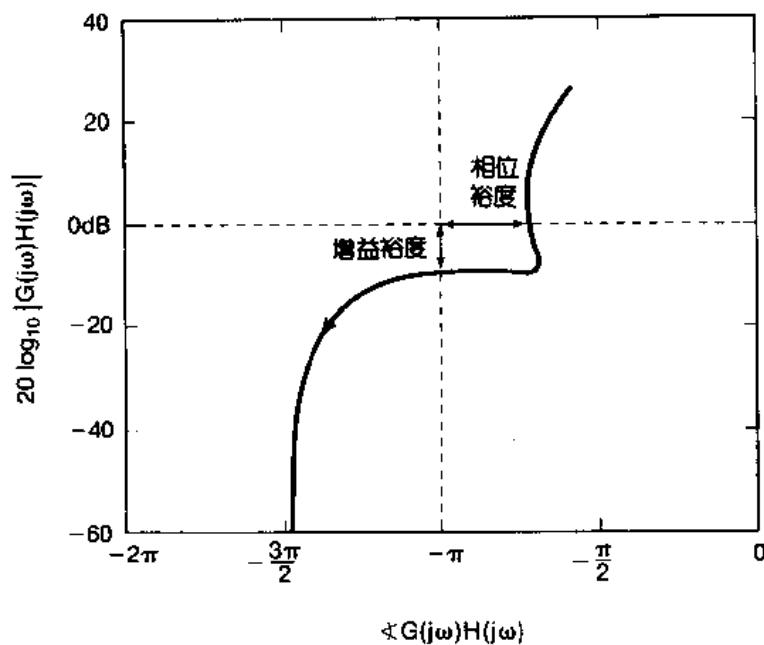


图 11.28 例 11.9 系统的对数幅-相图

了当 $\phi=0$ 和 $K>0$ 时的系统的根轨迹图。由该图明显看出，对任何正的 K 值，这个系统都是稳定的。另外，如果 $K=1$ 和 $\phi=\pi$ ，使得 $e^{j\phi}=-1$ ，图 11.30(a) 系统的闭环系统函数就是 $1/\tau s$ ，这个系统是不稳定的。

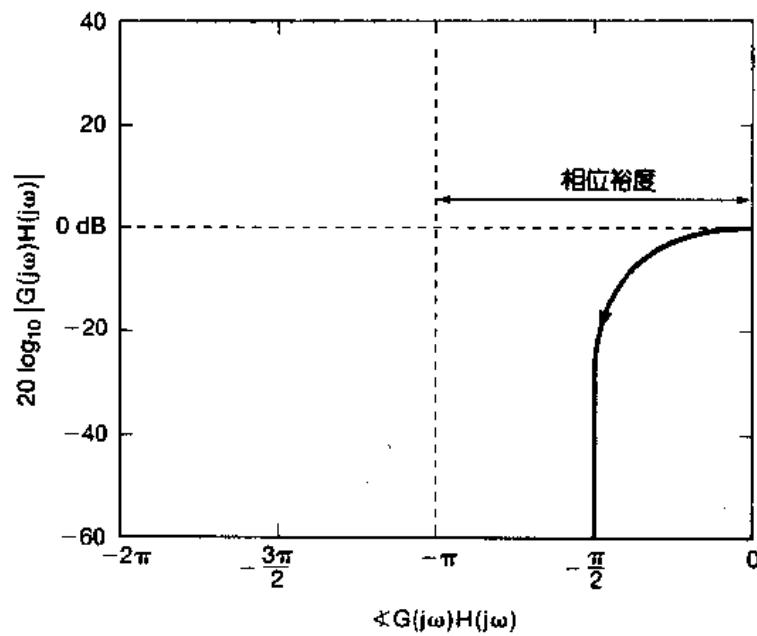


图 11.29 例 11.10 一阶系统的对数幅-相图

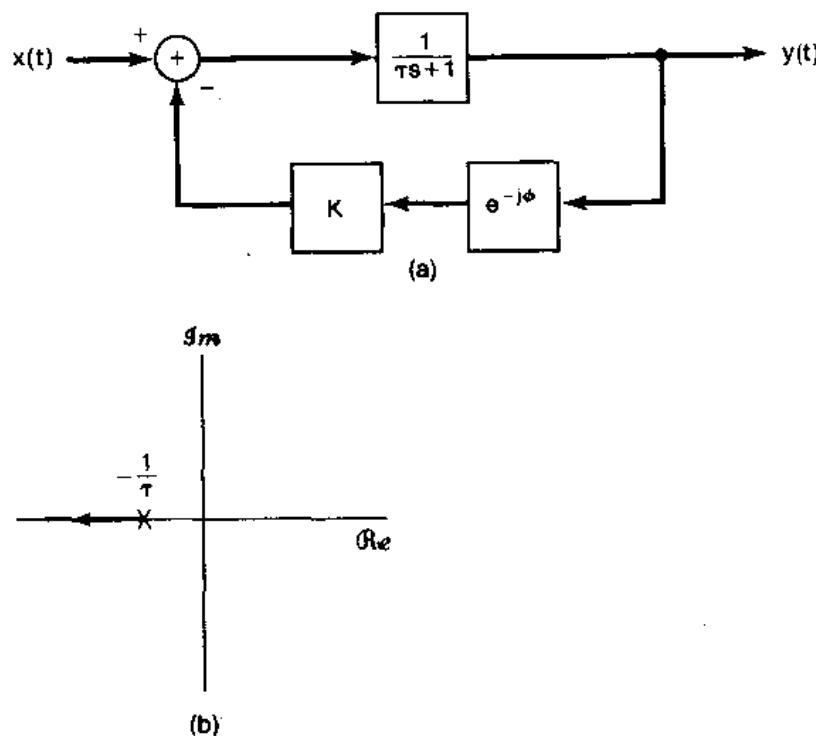


图 11.30 (a) 在反馈通路中可能有增益和相位变化的一阶反馈系统;
(b) 在 $\phi=0$, $K>0$ 下, 该系统的根轨迹图

例 11.11 设有一个二阶系统

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \quad G(s) = 1 \quad (11.105)$$

这个系统的无阻尼自然频率是 1, 阻尼比为 0.5。这个系统的对数幅-相图如图 11.31 所示。由

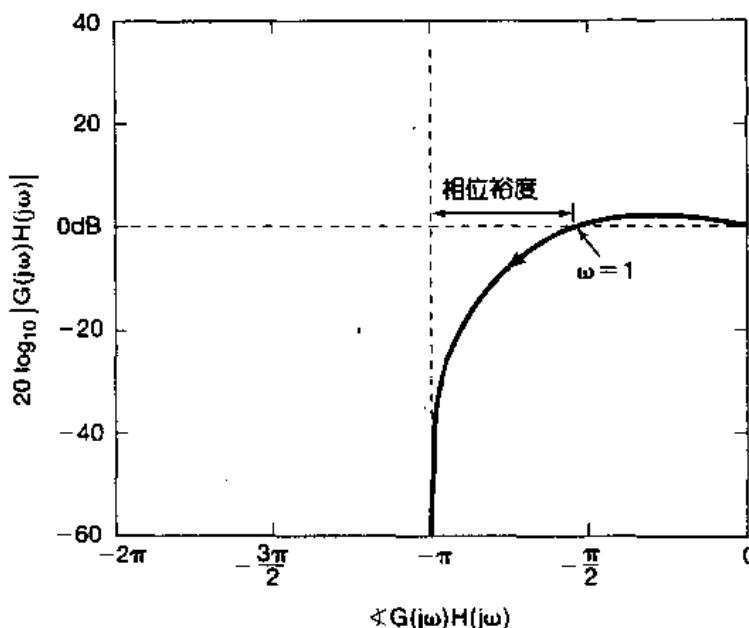


图 11.31 例 11.11 的二阶系统的对数幅-相图

图可见，其增益裕度为无限大，但相位裕度仅为 $\pi/2$ 。这个可以直接计算出来，因为 $\omega=1$ 时， $|H(j\omega)|=1$ ，而在这个频率下 $\angle H(j\omega)=-\pi/2$ 。

现在用这个例子可以说明用增益和相位裕度的概念能够解决的一类问题。设想由(11.105)式给出的系统不能实现，或者更确切地说，在反馈通路中引入某些不可避免的时延因素，即

$$G(s) = e^{-sT} \quad (11.106)$$

其中 T 是时延。想要知道的是：多么小的时延仍能保证该闭环系统的稳定性？

首先注意到的是

$$|e^{j\omega T}| = 1 \quad (11.107)$$

所以，时延环节并没有改变 $H(j\omega)G(j\omega)$ 的模。另一方面

$$\angle e^{-j\omega T} = -\omega T \text{ rad} \quad (11.108)$$

因此，在图 11.31 中曲线上的每一点都向左移动，而移动的量正比于在对数幅-相图上每一点的 ω 值。

由此可见，一旦相位裕度减小到 0，就会出现不稳定。这正是在 $\omega=1$ 时，由引入时延引起的相移为 $-\pi/2$ 的时候所发生的。这就是说，时延的临界值 τ^* 应满足

$$\angle e^{-j\tau^*} = -\tau^* = -\frac{\pi}{2} \quad (11.109)$$

或者(假设 ω 的单位为 rad/s)

$$\tau^* \approx 1.57 \text{ s} \quad (11.110)$$

因此，对于任何 $\tau < \tau^*$ 的时延，该系统仍然是稳定的。

例 11.12 再来研究曾在 11.2.6 节和例 11.7 中讨论过的声音反馈系统。假设图 11.8 的系统已经设计在 $K_1K_2 < 1$ ，所以闭环系统是稳定的。在这个情况下，图 11.32 给出了 $G(s)H(s) = K_1K_2 e^{-(sT+j\omega)}$ 的对数幅-相图。由图可见，系统的相位裕度为无限大，而以 dB 计的增益裕度为 $-20 \log_{10}(K_1K_2)$ dB。(也就是当乘以 K_1K_2 等于 1 的增益因子)。

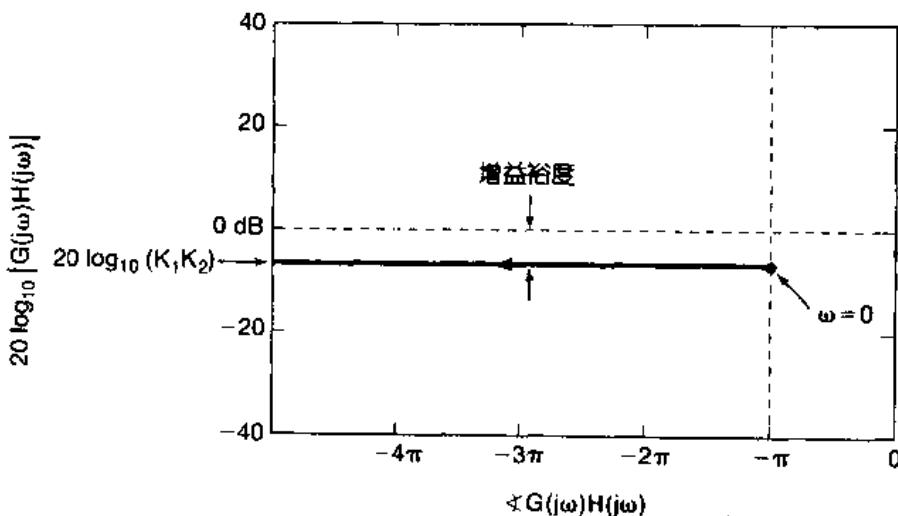


图 11.32 例 11.12 的对数幅-相图

在本节一开始就指出过，增益和相位裕度的定义对离散时间反馈系统与对连续时间系统是一样的。具体地说就是，如果有一个稳定的离散时间反馈系统，增益裕度就是使得闭环系统变成不稳定时所需要的最小附加增益；同理，相位裕度就是该反馈系统变成不稳定时所要

求的最小附加负相移。下面的例子就是说明离散时间反馈系统相位和增益裕度的图解求法，其步骤和连续时间系统基本上是一样的。

11.13 这个例子用来说明图 11.33 所示的离散时间反馈系统增益和相位裕度的概念。其中

$$G(z)H(z) = \frac{\frac{7\sqrt{2}}{4}z^{-1}}{1 - \frac{7\sqrt{2}}{8}z^{-1} + \frac{49}{64}z^{-2}} \quad (11.111)$$

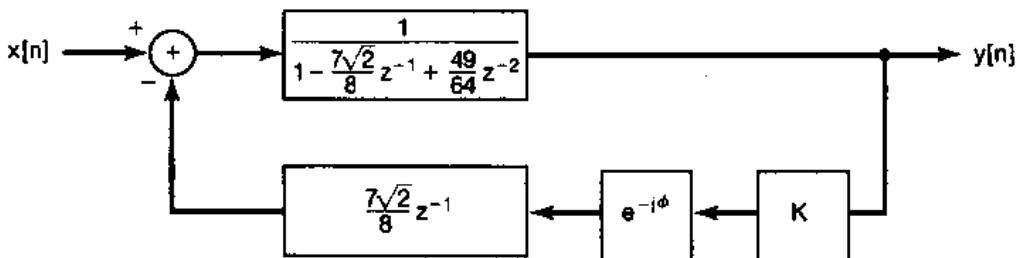


图 11.33 例 11.33 的离散时间反馈系统

通过直接计算可以证明，这个系统在 $K=1$ 且 $\phi=0$ 时是稳定的。图 11.34 画出了这个系统的对数幅-相图；即当 ω 从 0 到 2π 变化时， $20\log_{10}|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|$ 对于 $\angle G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 的图。这个系统有 1.68 dB 的增益裕度和 0.0685 rad(3.93°) 的相位裕度。

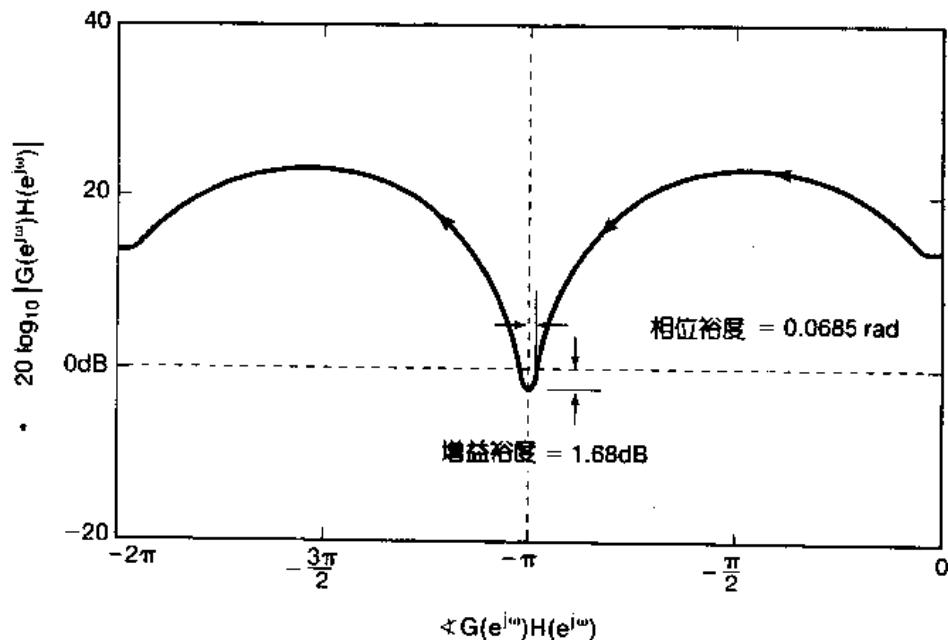


图 11.34 例 11.13 的离散时间反馈系统的对数幅-相图

在本节即将结束的时候应该强调地是，增益裕度是一个或几个闭环极点移到 $j\omega$ 轴（对连续时间情况）上，或单位圆（离散时间情况）上，从而引起系统不稳定的最小增益值；然而，这并不意味系统对所有超过增益裕度的增益值都是不稳定的。例如，像习题 11.47 所说明的，随着 K 的增加，根轨迹可以从左半平面移到右半平面来，然后它又再返回到左半平面去。增

益裕度只是提供这样的信息，即增益能增加多少才能使极点首先到达 $j\omega$ 轴，而并没有告诉我们对于甚至比这更大的增益值，系统还有可能是稳定的这样一些问题。为了得到这样一些信息，就必须借助于根轨迹图，或者用奈奎斯特判据来进一步研究。(见习题 11.47)^①。

11.6 小 结

这一章讨论了反馈系统的几个应用方面以及分析反馈系统的几种方法。我们已经看到，如何利用拉普拉斯变换和 z 变换，用代数和图解的方法来分析这些系统。在 11.2 节指出了反馈的几个应用例子，这包括逆系统的设计，不稳定系统的稳定及跟踪系统的设计等等。同时也看到反馈也能引起不稳定。

在 11.3 叙述了根轨迹法，这就是将闭环系统的极点作为增益参数的函数而画出的极点轨迹。我们发现，有理拉普拉斯变换或 z 变换的相位几何求值法对根轨迹性质的了解很有价值。这些性质往往可以在不必进行复杂计算的条件下，得到一个相当准确的根轨迹图。

与根轨迹法相比，11.4 节的奈奎斯特判据则是在用不着得到一个详细的闭环极点位置的条件下，确定反馈系统稳定性的一种方法。奈奎斯特判据可以适用于非有理系统函数以及利用由实验获得的系统频率响应特性。这点对 11.5 节讨论的增益和相位裕度来说也是成立的。这两个量提供了反馈系统稳定性裕度的一种度量，因此，对设计者来说是很重要的，它使设计者能确定对于正向和反馈通路系统函数的估计值与它们的真正值之间有差异时，系统有多大的稳健程度。

习 题

习题的第一部分属于基本题，答案在书末给出。剩下的三部分题分别属于基本题、深入题和扩充题。

基本题(附答案)

11.1 考虑图 P11.1 所示的离散时间 LTI 系统的互联，试将总系统函数用 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 和 $G(z)$ 表示。

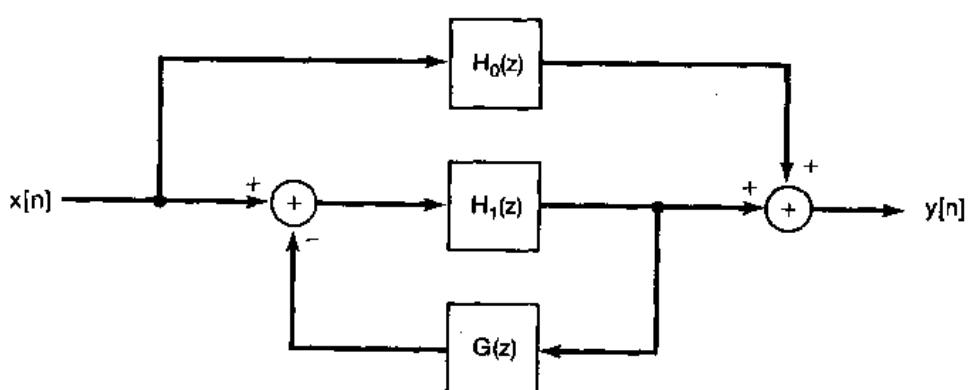


图 P11.1

^① 关于这一点以及有关增益和相位裕度，对数幅-相图的详细讨论，可参考书末参考文献中所列有关反馈方面的教科书。

- 11.2 考虑图 P11.2 所示连续时间 LTI 系统的互联，试将总系统函数用 $H_1(s)$, $H_2(s)$, $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 表示。

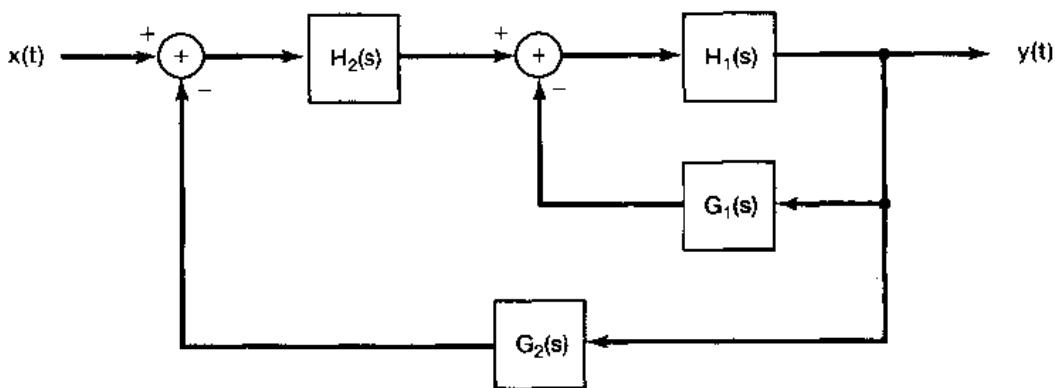


图 P11.2

- 11.3 考虑图 11.3(a) 中的连续时间反馈系统，其

$$H(s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{和} \quad G(s) = s - b$$

对于什么样的 b 值，该反馈系统是稳定的？

- 11.4 一个输入为 $x(t)$ 和输出为 $y(t)$ 的因果 LTI 系统 S，其微分方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

现在要用 $H(s) = 1/(s+1)$ 的图 11.3(a) 的反馈互联来实现系统 S，试求 $G(s)$ 。

- 11.5 考虑图 11.3(b) 的离散时间反馈系统，其

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{和} \quad G(z) = 1 - bz^{-1}$$

对于什么样的 b 值，该反馈系统是稳定的？

- 11.6 考虑图 11.3(b) 的离散时间反馈系统，其

$$H(z) = 1 - z^{-N} \quad \text{和} \quad G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-N}}$$

这个系统是 IIR 的，还是 FIR 的？

- 11.7 假设一个反馈系统的闭环极点满足

$$\frac{1}{(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{K}$$

利用根轨迹法确定保证该反馈系统是稳定的 K 值范围。

- 11.8 假设一个反馈系统的闭环极点满足

$$\frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = -\frac{1}{K}$$

利用根轨迹法确定保证该反馈系统是稳定的负的 K 值范围。

- 11.9 假设一个反馈系统的闭环极点满足

$$\frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)} = -\frac{1}{K}$$

利用根轨迹法确定：是否存在可调节增益 K 的任何值，使得该系统的单位冲激响应含有 $e^{-\omega_0 t} \cos(\omega_0 t + \phi)$ 形式的振荡分量？这里 $\omega_0 \neq 0$ 。

- 11.10 对应于 $G(s)H(s) = -1/K$ 的根轨迹图如图 P11.10 所示。图中对于根轨迹的每一分支的起点 ($K = 632$

0) 和终点都用符号‘•’标出, 请标出 $G(s)H(s)$ 的极点和零点。

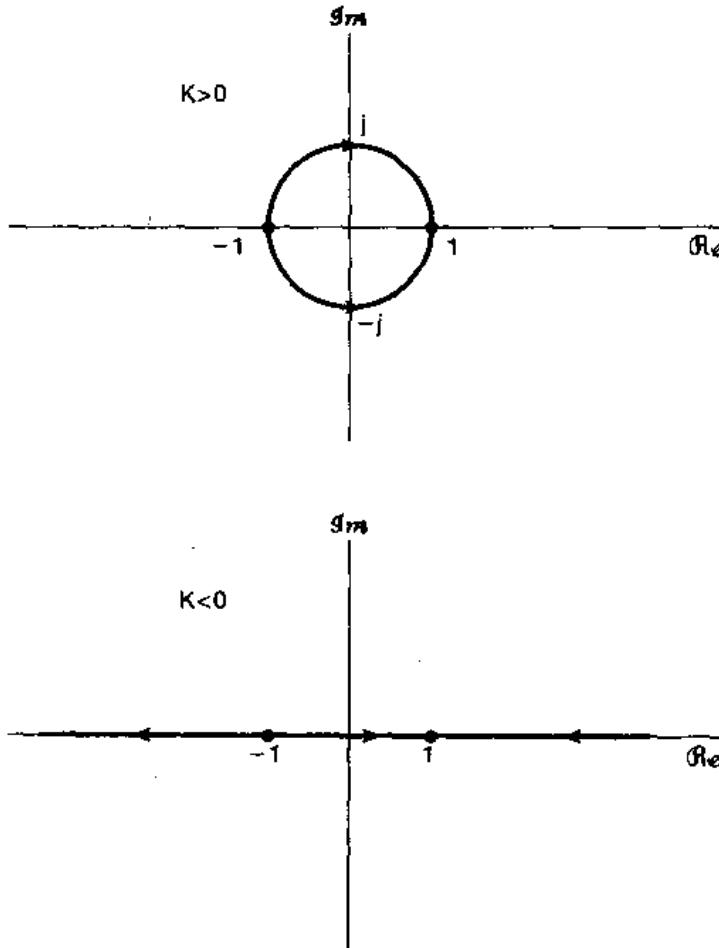


图 P11.10

11.11 假设一个离散时间反馈系统的闭环极点满足

$$\frac{z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = -\frac{1}{K}$$

利用根轨迹法确定该系统是稳定的 K 的正值范围。

11.12 $z=1/2$, $z=1/4$, $z=0$ 和 $z=-1/2$ 这四个中的每一个都是 $G(z)H(z)$ 的一个单阶极点或零点, 此外还知道 $G(z)H(z)$ 仅有两个极点。根据对全部 K 值, 对应于

$$G(z)H(z) = -\frac{1}{K}$$

的根轨迹都位于实轴上这一事实, 关于 $G(z)H(z)$ 的极点和零点能够推出什么样的信息。

11.13 考虑图 P11.13 的一个离散时间系统的方框图, 利用根轨迹法确定保证该系统是稳定的 K 值。

11.14 设 C 是一条闭合路径, 它就位于 p 平面的单位圆上, 现将 p 以顺时针方向绕 C 一周以求得 $W(p)$ 。对于下列每一个 $W(p)$ 的表示式, 确定 $W(p)$ 的图以顺时针方向环绕原点的净次数。

$$(a) W(p) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}p^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}p^{-1}\right)} \quad (b) W(p) = \frac{\left(1 - 2p^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}p^{-1}\right)\left(1 - 2p^{-1} + 4p^{-2}\right)}$$

11.15 考虑一连续时间反馈系统, 其闭环极点满足

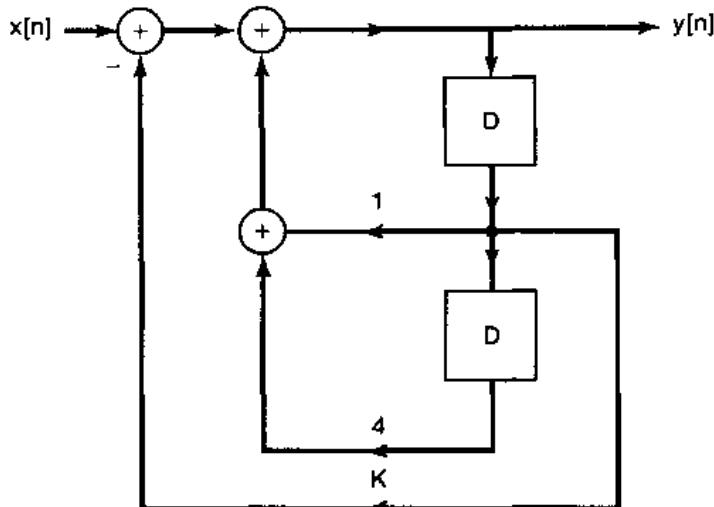


图 P11.13

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)} = -\frac{1}{K}$$

利用奈奎斯特图和奈奎斯特稳定性判据确定该闭环系统是稳定的 K 值范围。

提示：在画奈奎斯特图时，先画出相应的波特图是有用的，同时确定出 $G(j\omega)H(j\omega)$ 为实值的 ω 值也是有帮助的。

11.16 考虑一连续时间反馈系统，其闭环极点满足

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s/10+1)} = -\frac{1}{K}$$

利用奈奎斯特图和奈奎斯特稳定性判据确定该闭环系统是稳定的 K 值范围。

11.17 考虑一连续时间反馈系统，其闭环极点满足

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)^4} = -\frac{1}{K}$$

利用奈奎斯特图和奈奎斯特稳定性判据确定该闭环系统是稳定的 K 值范围。

11.18 考虑一离散时间反馈系统，其闭环极点满足

$$G(z)H(z) = z^{-3} = -\frac{1}{K}$$

利用奈奎斯特图和奈奎斯特稳定性判据确定该闭环系统是稳定的 K 值范围。

11.19 考虑一反馈系统，既可以是连续时间的，也可以是离散时间的，假设该系统的奈奎斯特图穿过 $-1/K$ 点，请问对这个增益值，该系统是稳定的，还是不稳定的？为什么？

11.20 考虑图 11.3(a)的基本连续时间反馈系统，确定下列 $H(s)$ 和 $G(s)$ 的增益和相位裕度：

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}, G(s) = 1$$

基本题

11.21 考虑图 P11.21 的反馈系统，试对下列 K 值，求该系统的闭环极点和零点：

- (i) $K=0.1$
- (ii) $K=1$
- (iii) $K=10$
- (iv) $K=100$

11.22 考虑图 11.3(a)的基本反馈系统，求在下列每一个正向和反馈通路系统函数时的闭环系统单位冲激响应：

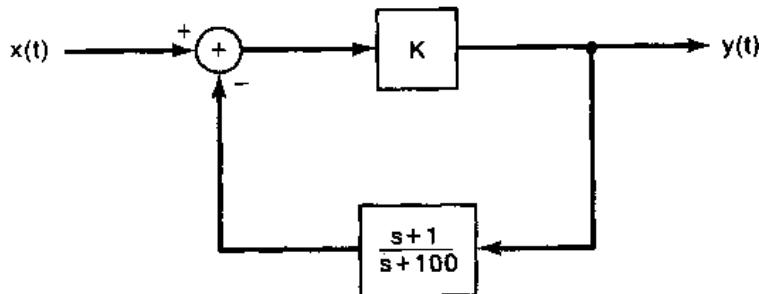


图 P11.21

- (a) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$, $G(s) = 1$ (b) $H(s) = \frac{1}{s+3}$, $G(s) = \frac{1}{s+1}$
 (c) $H(s) = \frac{1}{2}$, $G(s) = e^{-s/3}$

11.23 考虑图 11.3(b) 的基本反馈系统, 求在下列每一个正向和反馈通路系统函数时的闭环系统单位脉冲响应:

$$(a) H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, G(z) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}z^{-1} \quad (b) H(z) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}z^{-1}, G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

11.24 对下列每一种情况分别画出 $K > 0$ 和 $K < 0$ 时的根轨迹:

(a) $G(s)H(s) = \frac{1}{s+1}$	(b) $G(s)H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)}$
(c) $G(s)H(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	(d) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^2}$
(e) $G(s)H(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3}$	(f) $G(s)H(s) = \frac{s^2+2s+2}{s^2(s-1)}$
(g) $G(s)H(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s(s^2+2s+2)}$	(h) $G(s)H(s) = \frac{(1-s)}{(s+2)(s+3)}$

11.25 对下列每一种情况分别画出 $K > 0$ 和 $K < 0$ 时的根轨迹:

(a) $G(z)H(z) = \frac{z-1}{z^2 - \frac{1}{4}}$	(b) $G(z)H(z) = \frac{2}{z^2 - \frac{1}{4}}$
(c) $G(z)H(z) = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$	(d) $G(z)H(z) = z^{-1} - z^{-2}$

(e) $G(z)H(z)$ 是由下面差分方程描述的因果 LTI 系统的系统函数

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n-1] - x[n-2]$$

11.26 有一反馈系统, 其

$$G(s)H(s) = \frac{(s-a)(s-b)}{s(s+3)(s+6)}$$

分别就下列所给的几组 a 和 b 的值, 画出 $K > 0$ 和 $K < 0$ 时的根轨迹图:

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| (a) $a = 1, b = 2$ | (b) $a = -2, b = 2$ | (c) $a = -4, b = 2$ |
| (d) $a = -7, b = 2$ | (e) $a = -1, b = -2$ | (f) $a = -4, b = -2$ |
| (g) $a = -7, b = -2$ | (h) $a = -5, b = -4$ | (i) $a = -7, b = -4$ |
| (j) $a = -7, b = -8$ | | |

11.27 有一反馈系统, 其

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 4}, G(s) = K$$

- (a) 画出 $K > 0$ 时的根轨迹。
(b) 画出 $K < 0$ 时的根轨迹。
(c) 求出闭环系统单位冲激响应不呈现任何振荡特性的最小正 K 值。
- 11.28** 画出下列每一个 $G(s)H(s)$ 的奈奎斯特图，并利用连续时间奈奎斯特判据确定闭环系统是稳定的 K 值范围(如果存在的话)。注意：在作奈奎斯特图时，先画出相应的波特图并求出 $G(j\omega)H(j\omega)$ 为实数的 ω 值都是有帮助的。
- (a) $G(s)H(s) = \frac{1}{s-1}$ (b) $G(s)H(s) = \frac{1}{s^2-1}$
(c) $G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ (d) $G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$
(e) $G(s)H(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}$ (f) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2}$
(g) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^2-4}$ (h) $G(s)H(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$
(i) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+2}$ (j) $G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+100)(s-1)^2}$
(k) $G(s)H(s) = \frac{s^2}{(s+1)^3}$
- 11.29** 考虑图 11.3(a) 的基本连续时间反馈系统，对下列每一种 $G(s)H(s)$ ，画出对数幅-相图，并大致确定增益和相位裕度。应用第 6 章建立的波特图直线近似有助于画出对数幅-相图。然而当有欠阻尼的二阶项存在时，要仔细考虑在折转频率附近真正的频率响应与它的近似值之间的偏差如何(见 6.5.2 节)
- (a) $H(s) = \frac{10s+1}{s^2+s+1}$, $G(s) = 1$ (b) $H(s) = \frac{s/10+1}{s^2+s+1}$, $G(s) = 1$
(c) $H(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+10)}$, $G(s) = 100$ (d) $H(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$, $G(s) = \frac{1}{s+1}$
(e) $H(s) = \frac{1-s}{(s+1)(s+10)}$, $G(s) = 1$ (f) $H(s) = \frac{1-s/100}{(s+1)^2}$, $G(s) = \frac{10s+1}{s/10+1}$
(g) $H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, $G(s) = \frac{1}{s+1}$
- 注意：在画(g)的时候应该反映出这一点，对该反馈系统当 $\omega \rightarrow 0$ 时， $|G(j\omega)H(j\omega)| \rightarrow \infty$ ；当 $\omega = 0^+$ ，即 ω 有一个比 0 大的无限小量时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 的相位是什么？
- 11.30** 画出下列每一个 $G(z)H(z)$ 的奈奎斯特图，并利用离散时间奈奎斯特判据确定闭环系统是稳定的 K 值范围(如果存在的话)。[注意：在作奈奎斯特图时先画出作为频率函数的模和相位图，或者至少计算出在几个点上的 $|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|$ 和 $\angle G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 值，并求出 $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 为实数的 ω 值都是有帮助的。]
- (a) $G(z)H(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$ (b) $G(z)H(z) = \frac{1}{z^{-2}}$
(c) $G(z)H(z) = z^{-1}$ (d) $G(z)H(z) = z^{-2}$
(e) $G(z)H(z) = \frac{1}{(z + \frac{1}{2})(z - \frac{3}{2})}$ (f) $G(z)H(z) = \frac{z - \sqrt{3}}{z(z + 1/\sqrt{3})}$
(g) $G(z)H(z) = \frac{1}{z^2 - z + \frac{1}{3}}$ (h) $G(z)H(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z(z - 2)}$
(i) $G(z)H(z) = \frac{(z + 1)^2}{z^3}$
- 11.31** 考虑图 11.3(b) 的基本离散时间反馈系统，对下列每一种 $G(z)$ 和 $H(z)$ ，画出对数幅-相图，并大致

确定增益和相位裕度。先确定出 $|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})| = 1$ 或者 $\angle G(e^{j\omega}) = -\pi$ 的 ω 值将有利于作图。

$$(a) H(z) = z^{-1}, G(z) = \frac{1}{2}$$

$$(b) H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, G(z) = \frac{1}{2}$$

$$(c) H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}, G(z) = z^{-2}$$

$$(d) H(z) = \frac{2}{z-2}, G(z) = 1$$

$$(e) H(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{2}}, G(z) = \frac{1}{z - \frac{3}{2}}$$

$$(f) H(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{2}}, G(z) = 1 - \frac{3}{2}z^{-1}$$

$$(g) H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z^2 - z + \frac{1}{3}}, G(z) = 1$$

$$(h) H(z) = \frac{1}{z-1}, G(z) = \frac{1}{4}z^{-1}$$

(注意：在画(h)的时候应该反映出这一点，对该反馈系统， $G(z)H(z)$ 有一个极点在 $z=1$ ；对于 $e^{j\omega}$ 刚刚位于 $z=1$ 这一点的任意一边时， $\angle G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 的值是什么？)

深入题

11.32 (a) 考虑图 11.10(b)的反馈系统，其

$$H(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, G(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \quad (\text{P11.32-1})$$

假设在 $G(s)H(s)$ 不存在零极点相抵消的情况下，证明：闭环系统函数的零点由 $H(s)$ 的零点和 $G(s)$ 的极点组成。

(b) 利用(a)中的结果，再结合根轨迹的适当性质确认：若 $K=0$ ，闭环系统的零点就是 $H(s)$ 的零点，而闭环系统的极点就是 $H(s)$ 的极点。

(c) 虽然通常在(P11.32-1)式中的 $H(s)$ 和 $G(s)$ 都是约化了的形式[即 $N_1(s)$ 和 $D_1(s)$ 多项式没有公共因子， $N_2(s)$ 和 $D_2(s)$ 也没有公共因子]，但是 $N_1(s)$ 和 $D_1(s)$ ，或者 $N_2(s)$ 和 $D_2(s)$ 可能有公共因子。为了看出，当这样一些公共因子存在时会发生什么问题，今令 $p(s)$ 记为 $N_2(s)$ 和 $D_1(s)$ 的最大公共因子，也即

$$\frac{N_1(s)}{p(s)} \text{ 和 } \frac{D_2(s)}{p(s)}$$

都是两个没有公共因子的多项式。同理

$$\frac{N_2(s)}{q(s)} \text{ 和 } \frac{D_1(s)}{q(s)}$$

也是两个没有公共因子的多项式。证明：闭环系统函数可以写成

$$Q(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \left[\frac{\hat{H}(s)}{1 + K\hat{G}(s)\hat{H}(s)} \right] \quad (\text{P11.32-2})$$

式中

$$\hat{H}(s) = \frac{N_1(s)/p(s)}{D_1(s)/q(s)}$$

和

$$\hat{G}(s) = \frac{N_2(s)/q(s)}{D_2(s)/p(s)}$$

因此，由(P11.32-2)式和(a)中结果可见， $Q(s)$ 的零点是 $p(s)$ 的零点， $\hat{H}(s)$ 的零点以及 $\hat{G}(s)$ 的极点，而 $Q(s)$ 的极点则是 $q(s)$ 的零点和下列方程：

$$1 + K\hat{G}(s)\hat{H}(s) = 0 \quad (\text{P11.32-3})$$

的解。依前构成原理，在乘积 $\hat{G}(s)\hat{H}(s)$ 中不存在零极点相消的情况，因此可以应用在 11.3 节所叙述的根轨迹图法画出随 K 变化时，(P11.32-3)式解的位置。

(d) 利用在(c)中所提出的步骤，当

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+4)(s+2)}, G(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

时，确定闭环零点，任何其位置与 K 无关的闭环极点，以及对 $K>0$ ，剩下的那些闭环极点的轨迹。

(e) 对于

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, G(z) = \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

重做(d)。

(f) 令

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z+2)}, G(z) = \frac{1}{z^2}$$

- (i) 分别画出 $K>0$ 和 $K<0$ 时的根轨迹。
- (ii) 求整个系统是稳定的所有 K 值。
- (iii) 当 $K=4$ 时，求闭环系统的单位脉冲响应。

11.33 考虑图 11.10(a)的反馈系统，并假设

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{k=1}^m (s - \beta_k)}{\prod_{k=1}^n (s - \alpha_k)}$$

式中 $m > n$ ^①。这时， $G(s)H(s)$ 在无限远点有 $(m-n)$ 阶极点（见第 9 章），并且可以通过注意以下几点改写正文中给出的根轨迹法则：(1) 根轨迹有 m 条支路；(2) 当 $K=0$ 时，根轨迹的所有支路都开始于 $G(s)H(s)$ 的极点，其中有 $(m-n)$ 条开始于无限远点。此外，随 $|K| \rightarrow \infty$ ，这些支路收敛于 $G(s)H(s)$ 的 m 个零点，即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 。利用这些事实，可以有助于对下列每种情况画出 $K>0$ 和 $K<0$ 时的根轨迹：

$$(a) G(s)H(s) = s-1 \quad (b) G(s)H(s) = (s+1)(s+2) \quad (c) G(s)H(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s-1}$$

11.34 在 11.3 节曾导出几个性质，这些性质在确定一个反馈系统的根轨迹时是很有用的。本题将建立几个另外的性质。在导出这些性质时将以连续时间系统为例。但是，和所有的根轨迹性质一样，对离散时间系统这些性质也是成立的。在讨论中，针对的就是由闭环极点所满足的基本方程，即

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K} \quad (\text{P11.34-1})$$

其中

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{k=1}^m (s - \beta_k)}{\prod_{k=1}^n (s - \alpha_k)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} \quad (\text{P11.34-2})$$

整个这个题目都假设 $m \leq n$ 。

(a) 由性质 2 知道，根轨迹的 $(n-m)$ 条支路伸到 $G(s)H(s)$ 位于无限远点的零点。在第一部分要说

^① 应该注意，对连续时间系统而言，条件 $m > n$ 意味着具有系统函数为 $G(s)H(s)$ 的系统涉及到输入的微分[事实上， $G(s)H(s)$ 的反变换包含有直到 $(m-n)$ 阶的奇异函数]。在离散时间下，若 $G(z)H(z)$ 写成 z 的多项式之比，且有 $m > n$ ，那么它一定是一个非因果系统的系统函数[事实上， $G(z)H(z)$ 的反变换在时间 $(n-m) < 0$ 有非零值]。因此，本题所考虑的情况，实际上只对连续时间系统才有意义。

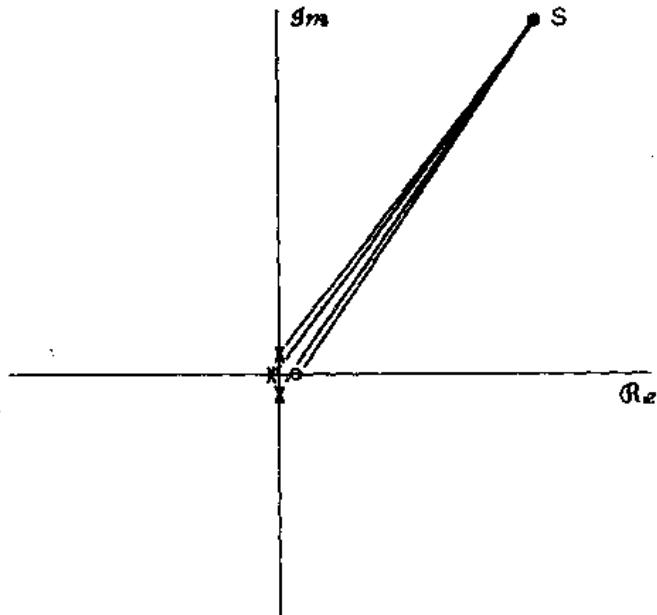


图 P11.34

明，可以直接确定这些支路趋向无限远点的角度。现考虑在 s 平面的很远区域[即 $|s|$ 极大，且远离 $G(s)H(s)$ 的任何零点和极点]，这个区域示意于图 P11.34。利用图中的几何特性，再结合角判据($K>0$ 和 $K<0$)，推出：

·当 $K>0$ 时，根轨迹的 $(n-m)$ 条支路以角度

$$\frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, \dots, n-m-1$$

趋向无限远点。

·当 $K<0$ 时，根轨迹的 $(n-m)$ 条支路以角度

$$\frac{2k\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, \dots, n-m-1$$

趋向无限远点。

因此，根轨迹的这些支路是以对称地设置的角度趋向于无限远的。例如，当 $(n-m)=3$ ，且 $K>0$ 时，可见渐近线的角度是 $\pi/3$, π 和 $5\pi/3$ 。本题(a)中的结果，再结合另一个条件，就能够以渐近线画出那些趋向于无限远点的根轨迹支路。这个条件就是，所有这 $(n-m)$ 条渐近线都相交于实轴上的一个点。这个结论由本题的下一部分导出。

(b) (i) 作为第一步，先考虑一个一般多项式方程

$$s^r + f_{r-1}s^{r-1} + \dots + f_0 = (s - \xi_1)(s - \xi_2)\dots(s - \xi_r) = 0$$

证明

$$f_{r-1} = - \sum_{i=1}^r \xi_i$$

(ii) 将 $1/G(s)H(s)$ 作长除，将其写成

$$\frac{1}{G(s)H(s)} = s^{n-m} + \gamma_{n-m-1}s^{n-m-1} + \dots \quad (\text{P11.34-3})$$

证明

$$\gamma_{n-m-1} = a_{n-1} - b_{m-1} = \sum_{k=1}^m \beta_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

[见(P11.34-2)式]

(iii) 证明: 对于大的 s , (P11.34-1)式的解就是下列方程的近似解:

$$s^{n-m} + \gamma_{n-m-1}s^{n-m-1} + \gamma_{n-m-2}s^{n-m-2} + \cdots + \gamma_0 + K = 0$$

(iv) 利用(i)到(iii)的结果, 推演出: 趋向于无限远点的 $(n-m)$ 个闭环极点之和渐近地等于

$$b_{m-1} - a_{n-1}$$

因此, 这 $(n-m)$ 个极点的重心是

$$\frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{n-m}$$

与 K 无关。因此可得, $(n-m)$ 个闭环极点以均匀等分角趋向无限远, 而且其重心与 K 无关。由此可以推出:

趋于无限远点的 $(n-m)$ 条根轨迹支路的渐近线相交于点

$$\frac{b_{m-1} - a_{n-1}}{n-m} = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k - \sum_{k=1}^m \beta_k}{n-m}$$

这些渐近线相交的这一点对于 $K>0$ 和 $K<0$ 都是相同的。

(c) 假设

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

(i) 当 $K>0$ 和 $K<0$ 时, 趋于无限远点的闭环极点的渐近线角度是什么?

(ii) 渐近线的交点是什么?

(iii) 画出这些渐近线, 并用它们画出 $K>0$ 和 $K<0$ 时的根轨迹。

(d) 对下列每一个 $G(s)H(s)$, 重做(c):

$$(i) G(s)H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+4)} \quad (ii) G(s)H(s) = \frac{1}{s^4}$$

$$(iii) G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)(s+6)} \quad (iv) G(s)H(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s-1)^2}$$

$$(v) G(s)H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+2)} \quad (vi) G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2(s^2+2s+2)}$$

$$(vii) G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+100)(s-1)(s-2)}$$

(e) 利用(a)中结果来解释为什么下列说法是对的: 对具有(P11.34-2)式所给 $G(s)H(s)$ 的任何连续时间反馈系统, 若 $(n-m) \geq 3$, 就能够把 $|K|$ 选得足够大, 而使闭环系统不稳定。

(f) 对由下式给出的离散时间反馈系统, 重做(c):

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-3}}{(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

(g) 请解释为什么下述说法是对的: 对于具有

$$G(z)H(z) = \frac{z^n + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

的任何离散时间反馈系统, 若 $n > m$, 可以通过选择 K 足够大, 而使闭环系统不稳定。

11.35 (a) 再次考虑例 11.2 的反馈系统:

$$G(s)H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

$K<0$ 时的根轨迹图示如图 11.14(b)。对某一 K 值, 闭环极点位于 $j\omega$ 轴上。通过考查方程

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{1}{K}$$

的实部和虚部，若 $s = j\omega$ 对任何给定的 K 值是位于根轨迹上，上式就必须满足，依此求出这个 K 值和相应的闭环极点位置。利用这一结果，再加上例 11.2 中的分析，求出使闭环系统稳定的全部 K 值(正的和负的)的范围。

- (b) 注意，当 $|K|$ 足够大时，该反馈系统是不稳定的。解释为什么对连续时间反馈系统，当 $G(s)H(s)$ 在右半平面有一个零点，对离散时间反馈系统，当 $G(z)H(z)$ 在单位圆外有一个零点，这个结论一般都是正确的。

11.36 考虑一连续时间反馈系统，其

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \quad (\text{P11.36-1})$$

- (a) 分别画出 $K > 0$ 和 $K < 0$ 的根轨迹。(提示：这里可以利用习题 11.34 的结果)。
 (b) 如果已经正确地画出了这条根轨迹，将会发现，对于 $K > 0$ ，这条根轨迹的两条支路跨过 $j\omega$ 轴，由左半平面进入右半平面，结果可以得出该闭环系统在 $0 < K < K_0$ 是稳定的，这里 K_0 就是根轨迹的两条支路与 $j\omega$ 轴相交时的增益值。应该注意，作根轨迹时本身并没有告诉 K_0 值是多少，或者两条支路跨过 $j\omega$ 轴是在哪一点。根据习题 11.35，利用解方程

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{1}{K_0} \quad (\text{P11.36-2})$$

所得到的一对实部和虚部方程求出 K_0 值和相应的两个 ω 值(因为极点成复数共轭，所以它们是互为负值)。

根据在(a)中所得到的根轨迹图，可以看到，在实轴上位于两个极点之间的一段是位于 $K > 0$ 时的根轨迹图上，而在实轴上有另外一段是位于 $K < 0$ 时的根轨迹图上。在两种情况下，根轨迹都在实轴上的某一点分裂开。本题的下一部分说明如何计算出这些分裂点。

- (c) 将闭环极点方程记为

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K} \quad (\text{P11.36-3})$$

利用(P11.36-1)式证明：闭环极点的等效方程是

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 2s = -K \quad (\text{P11.36-4})$$

考虑实轴上位于 0 和 -1 之间的一段，这一段是位于 $K \geq 0$ 时的根轨迹上。对于 $K=0$ ，根轨迹的两条支路从 0 和 -1 开始，随着 K 增大而互相靠近。

- (i) 利用上面陈述的理由，并结合 (P11.36-4) 式，解释为什么函数 $p(s)$ 在 $-1 \leq s \leq 0$ 时具有图 P11.36(a) 所示的形状，以及为什么发生最小值的点 s_+ 是分离点(即，是 $K > 0$ 时根轨迹的两条支路在 -1 和 0 之间的实轴段分离的点)。

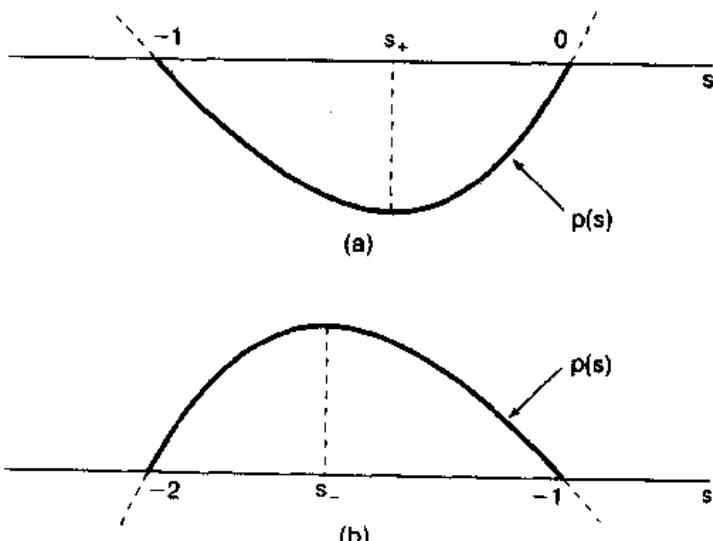


图 P11.36

同理。考虑 $K < 0$ 时的根轨迹，在实轴上位于 -1 和 -2 之间的一段是 $K < 0$ 时根轨迹的一部分。对于 $K = 0$ ，根轨迹的两条支路开始于 -1 和 -2，随着 K 的减小，这些极点互相靠近。

- (ii) 利用(i)所用的类似方法，解释为什么函数 $p(s)$ 具有图 P11.36(b) 所示的形状，以及为什么发生最大值的 s_+ 是 $K < 0$ 时的分离点。

因此，当 s 在负实轴上一段范围内变化时，分离点就相应于 $p(s)$ 的最大值和最小值。

- (iii) $p(s)$ 具有最大值或最小值的点是方程

$$\frac{dp(s)}{ds} = 0$$

的解。利用这一点，求出分离点 s_+ 和 s_- ，然后利用(P11.36-4)式求出使这些点成为闭环极点的增益。

除了(c)中所说明的方法之外，还有其它方法，这些都是部分地分析法或部分地图解方法，可以确定分离点。另外，还可以利用类似于(c)中所说明的步骤来确定“进入点”，即根轨迹的两条路又在“进入点”相会合而进入实轴。这些方法连同刚才所说的都可以在本书末所列的一些较深入的教科书中找到。

11.37 系统设计者必须始终要考虑的一个问题是：当试图通过反馈来稳定或改变系统特性时，该系统未经模型化的部分可能带来的影响。在本题中用一个例子来说明为什么是这样的。设想有一连续时间反馈系统，其

$$H(s) = \frac{1}{(s + 10)(s - 2)} \quad (\text{P11.37-1})$$

和

$$G(s) = K \quad (\text{P11.37-2})$$

(a) 利用根轨迹方法证明：如果 K 取得足够大，闭环系统还是稳定的。

(b) 假设要想利用反馈来稳定的系统，其实际的系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{(s + 10)(s - 2)(10^{-3}s + 1)} \quad (\text{P11.37-3})$$

这个附加的因子可以认为代表了一个一阶系统，它与(P11.37-1)式的系统相串联。可以注意到，这个附加的一阶系统其时间常数是极小的，因而有一个几乎是瞬时出现的阶跃响应。为此，可以常常忽略掉这样的因子，以便得到一个简单而易于处理的，并且体现了系统所有重要特性的模型。然而，在获得一个有用的反馈设计时，必须要记住这些已被忽略掉的动态因素。为了看出为什么是这种情况，试证明：如果 $G(s)$ 由(P11.37-2)式给出， $H(s)$ 是(P11.37-3)式所示，那么在 K 选得太大时，闭环系统将不稳定。提示：见习题 11.34。

(c) 利用根轨迹法证明：若

$$G(s) = K(s + 100)$$

如果 $H(s)$ 由(P11.37-1)式或者(P11.37-3)式给出，那么，在所有足够大的 K 值，该反馈系统都将稳定。

11.38 考虑图 11.3(b) 的反馈系统，其

$$H(z) = \frac{Kz^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

和

$$G(z) = 1 - az^{-1}$$

(a) 当 $a = 1/2$ 时，分别画出 $K > 0$ 和 $K < 0$ 的根轨迹。

(b) 当 $a = -1/2$ 时，重做(a)。

(c) 若 $a = -1/2$ ，求出 K 的一个值，使闭环单位脉冲响应对于某些常数 A 、 B 和 α ， $|\alpha| < 1$ ，具有

$$(A + Bn) \alpha^n$$

形式。(提示: 在这种情况下, 闭环系统的分母必须为什么形式?)

11.39 考虑图 P11.39 的反馈系统, 其

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad G(z) = K \quad (\text{P11.39-1})$$

(a) 画出 $K > 0$ 时的根轨迹图。

(b) 画出 $K < 0$ 时的根轨迹图。(注意:

对这个根轨迹要细心些。应用在实轴上的角判据会发现, 随着 K 从零开始减小, 闭环极点沿着正实轴趋向于 $z = +\infty$, 然后再沿负实轴从 $z = -\infty$ 返回来。验证这点实际上就是把闭环极点作为 K 的函数, 以显式求解的情况。试问 K 为何值时, 极点在 $|z| = \infty$?)

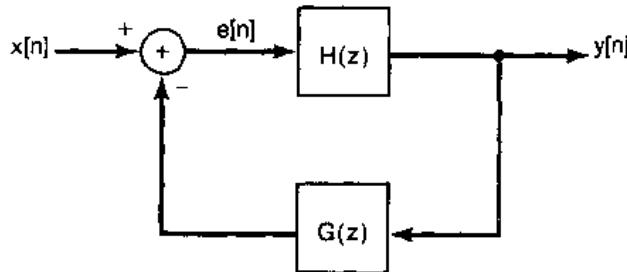


图 P11.39

(c) 求出使闭环系统稳定的全部 K 值的范围。

(d) 在(b)中看到的现象是如下事实的一个直接结果: 在这个例子中, $G(z)H(z)$ 分子分母同阶。当这种情况出现在离散时间反馈系统中时, 意味着在系统中存在一个无延迟的回路; 这就是说, 在一个给定时间点上的输出被反馈到系统中去, 又依次返回来影响在同一时刻点上的自身值。为了能看出这正是在这个例子中考虑的情况, 试写出联系 $y[n]$ 和 $e[n]$ 的差分方程, 然后利用该反馈系统的输入和输出表示 $e[n]$ 。将此结果与

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad G(z) = Kz^{-1} \quad (\text{P11.39-2})$$

的反馈系统的结果相对照。

具有无延迟回路的主要后果是: 这样的反馈系统是不能按所画出的反馈形式来实现的。例如, 对(P11.39-1)式的系统, 由于 $e[n]$ 与 $y[n]$ 有关, 因此不能先计算 $e[n]$, 然后再算出 $y[n]$ 。应该注意, 对(P11.39-2)式的系统, 就可以进行这种计算, 因为 $e[n]$ 与 $y[n-1]$ 有关。

(e) 证明: 除了使闭环极点在 $|z| = \infty$ 的 K 值以外, (P11.39-1)式代表了一个因果系统。

11.40 考虑图 P11.40 的离散时间反馈系统。这个系统在正向通路中阻尼得不够好, 希望选择反馈系统函数以改善总的阻尼性能。用根轨迹法, 证明这一目的可以用

$$G(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

来完成。

具体地说就是, 画出 $K > 0$ 时的根轨迹, 并标出使阻尼能得到明显改善的增益值 K 。

11.41 (a) 考虑一反馈系统, 其

$$H(z) = \frac{z+1}{z^2 + z + \frac{1}{4}}, \quad G(z) = \frac{K}{z-1}$$

(i) 以两个多项式之比的显式写出闭环系统函数。(分母多项式将有系数是与 K 有关的。)

(ii) 证明: 闭环极点之和与 K 无关。

(b) 更一般化是, 有一反馈系统, 其系统函数为

$$G(z)H(z) = K \frac{z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

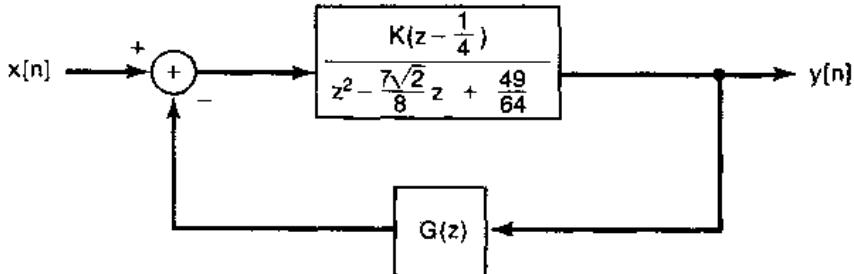


图 P11.40

证明：若 $m \leq (n-2)$ ，闭环极点之和与 K 无关。

11.42 再次考虑例 11.3 的离散时间反馈系统

$$G(z)H(z) = \frac{z}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$$

$K > 0$ 和 $K < 0$ 时的根轨迹如图 11.16 所示。

- (a) 考虑 $K > 0$ 时的根轨迹。这时，当闭环极点之一是小于或等于 -1 时，该系统就变成不稳定，求当 $z = -1$ 是一个闭环极点时的 K 值。
- (b) 考虑 $K < 0$ 时的根轨迹。这时，当闭环极点之一是大于或等于 1 时，该系统就变成不稳定，求当 $z = 1$ 是一个闭环极点时的 K 值。
- (c) 闭环系统是稳定的整个 K 值范围是什么？

11.43 有一离散时间反馈系统，其

$$G(z)H(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

- (a) 分别画出 $K > 0$ 和 $K < 0$ 时的根轨迹。
- (b) 如果已经正确地画出了 $K > 0$ 时的根轨迹，将会发现，根轨迹的两条支路跨过单位圆，并从单位圆上出去，结果可以得出，在 $0 < K < K_0$ 内，闭环系统是稳定的，这里 K_0 就是两条支路与单位圆相交的增益值。这些支路从单位圆上的什么点上出去？ K_0 值为多少？

11.44 在 11.4 节曾提到过，连续时间奈奎斯特判据可以推广到 $G(s)H(s)$ 容许在 $j\omega$ 轴上有极点的情况。本题将通过几个例子说明这样做的一般方法。现考虑一个连续时间系统，其

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (\text{P11.44-1})$$

当 $G(s)H(s)$ 在 $s=0$ 有一个极点时，可以修改图 11.19 的闭合围线以避开原点。为此，在这个闭合围线的右半平面加一个半径为无限小 ϵ 的半圆[见图 P11.44(a)]。因此，右半平面内只有很小的部分未被修改了的围线所包围，而且当令 $\epsilon \rightarrow 0$ 时，这部分的面积趋于零。结果，随着 $M \rightarrow \infty$ ，该围线将包围整个右半平面。根据正文所述， $G(s)H(s)$ 沿无限大半径的圆为一常数(在此情况下为零)。因此，为了画出 $G(s)H(s)$ 沿围线的图，就只需要对由 $j\omega$ 轴和无限小半圆所组成的围线部分，画出它的图就可以了。

- (a) 证明

$$\angle G(j0^+)H(j0^+) = -\frac{\pi}{2}$$

和

$$\angle G(j0^-)H(j0^-) = \frac{\pi}{2}$$

其中 $s = j0^-$ 是无限小半圆与 $j\omega$ 轴相交于刚好在原点下面的点，而 $s = j0^+$ 是刚好在原点上面的

对应点。

(b) 利用(a)中的结果, 再结合(P11.44-1)式证明: 图 P11.44(b)是 $G(s)H(s)$ 沿 $-j\infty$ 到 $j0^-$ 和 $j0^+$ 到 $j\infty$ 的围线部分的准确图形。特别是, 应该校核一下 $\Im G(j\omega)H(j\omega)$ 和 $|G(j\omega)H(j\omega)|$ 在图示情况下的特性。

(c) 现在余下要做的就是确定 $G(s)H(s)$ 沿着位于 $s=0$ 附近这个小的半圆上的图。注意到, 随着 $\epsilon \rightarrow 0$, $G(s)H(s)$ 的模沿该围线趋于无限大。证明: 随着 $\epsilon \rightarrow 0$, 在 $s=-1$ 的极点对 $\Im G(s)H(s)$ 沿该半圆的贡献是零。然后再证明: 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$\Im G(s)H(s) = -\theta$$

这里 θ 由图 P11.44(a) 定义。因为, 当 θ 从在 $s=j0^-$ 的 $-\pi/2$ 按逆时针方向变化到在 $s=j0^+$ 的 $+\pi/2$ 时, $\Im G(s)H(s)$ 必须从在 $s=j0^+$ 的 $+\pi/2$ 按顺时针方向变化到在 $s=j0^-$ 的 $-\pi/2$ 。其结果就是图 P11.44(c) 所画出的完整的奈奎斯特图。

(d) 利用图 P11.44(c) 的奈奎斯特图, 求出使闭环反馈系统稳定的 K 值范围。(注释: 如在正文中所提到的, 连续时间奈奎斯特判据说的是, 为了使闭环系统稳定, 顺时针方向环绕点 $(-1/K)$ 的净次数必须等于 $G(s)H(s)$ 在右半平面极点数的负值。在现在的例子中, 应该注意, $G(s)H(s)$ 在 $s=0$ 的极点位于修改了的围线外面, 因而在计算 $G(s)H(s)$ 在右半平面的极点数时, 它不包括在内。[即, 在应用奈奎斯特判据时, 只有严格位于右半平面内的 $G(s)H(s)$ 的极点才能计及]。因此, 在此情况下, 由于 $G(s)H(s)$ 没有严格位于右半平面内的极点, 所以为了使闭环系统稳定, 就不能环绕点 $s=-1/K$ 。)

(e) 依照(a)到(c)中所列各步骤, 画出下列每种情况的奈奎斯特图:

$$(i) G(s)H(s) = \frac{(s/10)+1}{s(s+1)}$$

$$(ii) G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

$$(iii) G(s)H(s) = 1/s^2 [在计算沿无限小半圆的 \Im G(s)H(s) 时要特别小心]$$

$$(iv) G(s)H(s) = \frac{s+1}{s(1-s)} [在随 \omega 变化计算 \Im G(j\omega)H(j\omega) 时要当心, 务必考虑分母中的负]$$

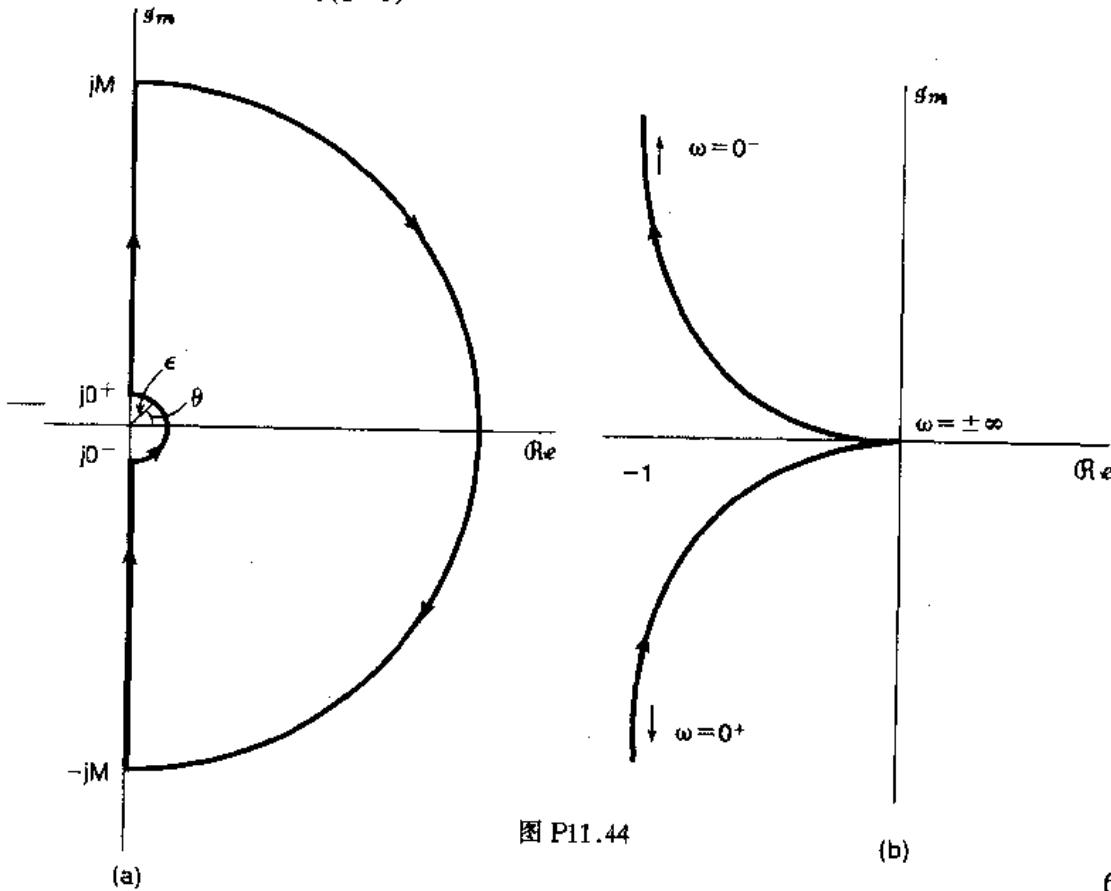


图 P11.44

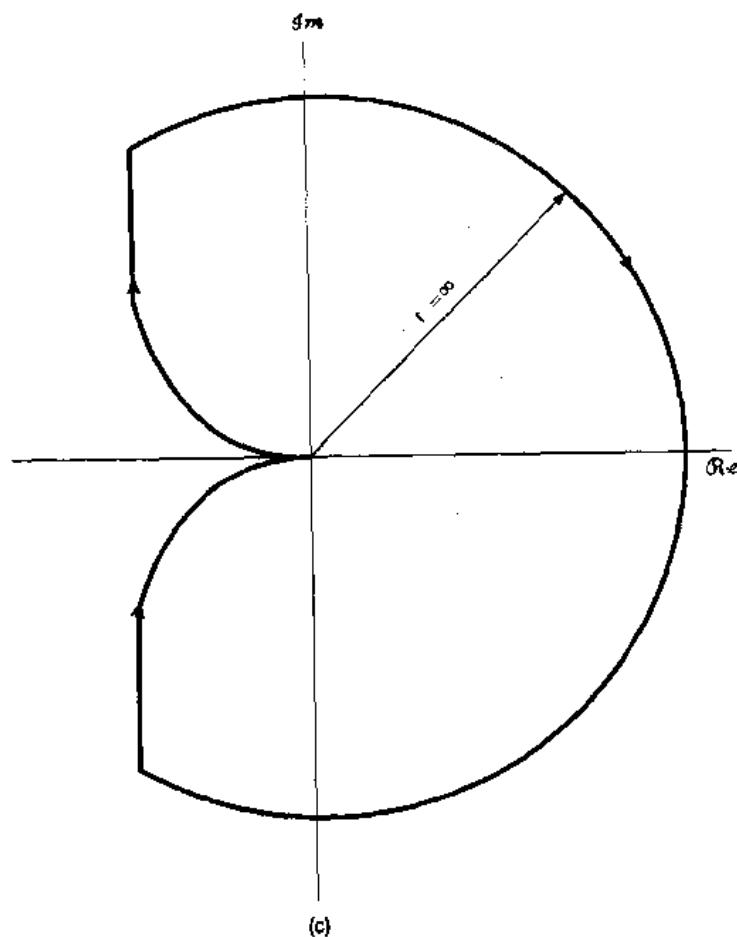


图 P11.44(续)

号。]

$$(v) G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^2} \quad [\text{注意点同(iii)}]。$$

在每种情况下，利用奈奎斯特判据，确定使闭环系统稳定的 K 值范围(如果存在的话)。同时用另一种方法(根轨迹法或作为 K 的函数直接计算闭环极点的方法)对奈奎斯特图的正确性给出部分校核。[注释：在画奈奎斯特图时，可以发现先画出 $G(s)H(s)$ 的波特图和确定使 $G(j\omega)H(j\omega)$ 为实数的 ω 值都是有帮助的。]

(f) 对下列情况，重做(e)：

$$(i) G(s)H(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (ii) G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 1}$$

注释：在这些情况下，有两个极点在虚轴上，需要修改图 11.19 的围线以避开它们，像图 P11.44

(a) 那样再利用无限小的半圆。

11.45 考虑一系统。其系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)} \quad (\text{P11.45-1})$$

因为这个系统是不稳定的，现在要想出一些办法来稳定它。

(a) 首先考虑用图 P11.45(a)的串联补偿方案，证明：如果系统函数 $C(s)$ 为

$$C(s) = \frac{s-2}{s+3}$$

那么这个图的整个系统是稳定的。实际上，这不认为是一个特别有用的方法来试图稳定一个系统。解释一下为什么？

- (b) 现在设想用图 P11.45(b) 的反馈系统来取代上述方案，利用常数增益作为补偿单元，即

$$C(s) = K$$

有可能稳定这个系统吗？请用奈奎斯特方法解释理由。

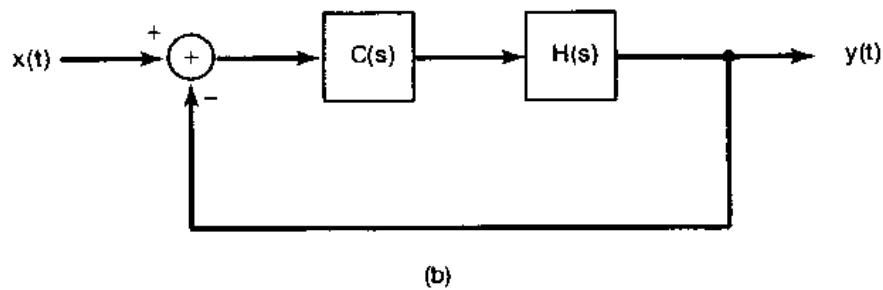
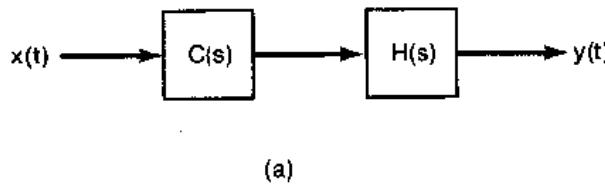


图 P11.45

- (c) 若 $C(s)$ 是一个比例加微分的系统，即

$$C(s) = K(s + a)$$

证明：图 P11.45(b) 可以被稳定。（解题既要考虑 $a > 1$ ，也要考虑 $0 < a < 1$ 的情况。）

- (d) 假设

$$C(s) = K(s + 2)$$

选取 K 的值，以使该闭环系统有一对复数极点，其阻尼系数 $\zeta = 1/2$ 。（提示：这时，闭环系统函数的分母必须具有如下形式：

$$s^2 + \omega_n s + \omega_n^2$$

其中 $\omega_n > 0$ 。）

- (e) 单纯的微分补偿在实际中是不可能得到的，也是不理想的。这是由于要求任意高频的放大既做不到，也不可取，所有真实的系统都要受到某种程度的高频干扰。因此提出用这种形式的补偿器：

$$C(s) = K \left(\frac{s + a}{s + b} \right), a, b > 0 \quad (\text{P11.45-2})$$

如果 $b < a$ ，这是一个滞后网络，因为对所有的 $\omega > 0$ ，都有 $\Im C(j\omega) < 0$ ，因此该系统输出的相位滞后于输入的相位。如果 $b > a$ ，则对所有的 $\omega > 0$ ，都有 $\Im C(j\omega) > 0$ ，该系统就称为超前网络。

- (i) 证明：若 K 选得足够大，利用超前补偿器

$$C(s) = K \frac{s + \frac{1}{2}}{s + 2} \quad (\text{P11.45-3})$$

有可能稳定该系统。

- (ii) 证明：利用滞后网络

$$C(s) = K \frac{s+3}{s+2}$$

不可能使图 P11.45(b)的反馈系统稳定。

提示：在画根轨迹时，利用习题 11.34 的结果。然后确定是在根轨迹上的位于 $j\omega$ 轴上的那些点，以及使每一个这样的点成为闭环极点的 K 值。利用这些信息来证明没有一个 K 值能使所有的闭环极点位于左半平面内。

11.46 有一连续时间反馈系统如图

P11.46(a)所示。

- (a) 利用第 6 章所建立的波特图直线近似求得该系统的对数幅-相图。从图中估计出相位和增益裕度。

- (b) 设想在反馈系统内有一个未知的延时，所以真实的反馈系统如图 P11.46(b)所示。问在该反馈系统变成不稳定之前，能容许的最大延时 τ 是多少(近似值)？计算中利用(a)中的结果。

- (c) 精确计算出相位和增益裕度值，并将结果与(a)中结果作比较。这样应该可以给出由于应用近似的波特图所引起的误差大小的某些概念。

11.47 在 11.5 节结束时曾提到，相位和增益裕度可以提供充分的条件以保证一个稳定系统仍然是稳定的。例如，当增益增大时直到由增益裕度所给出的极限为止，一个稳定反馈系统将仍然是稳定的。这并没有意味着：

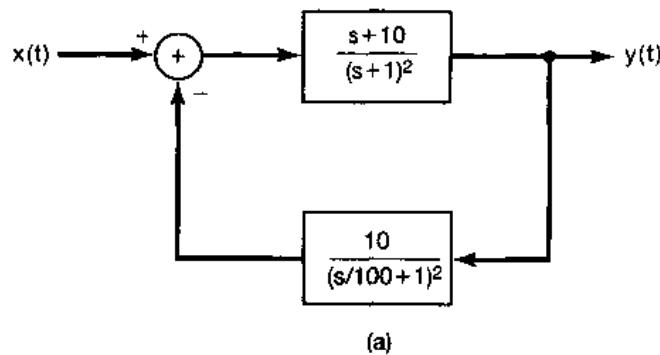
- (a) 减小增益，不会使反馈系统变成不稳定，或者(b)所有大于增益裕度极限的增益值，系统都一定是不稳定的。本题将说明以上两点。

- (a) 考虑一连续时间反馈系统，其

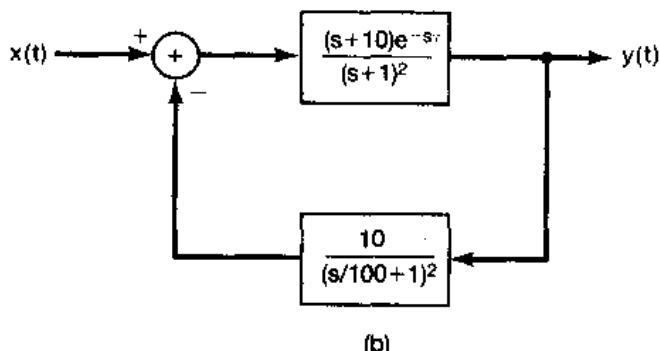
$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

画出 $K > 0$ 时，该系统的根轨迹。利用正文中所列的以及在习题 11.34 所讨论的根轨迹性质有助于作出准确的根轨迹。一旦得到根轨迹之后，应该看出：对于小的增益 K 值，系统是不稳定的；对于比较大的 K 值，系统是稳定的；而对于更大的 K 值，该系统再次变成不稳定。试求出使该系统稳定的 K 值范围。**提示：**利用在例 11.2 和习题 11.35 中所使用的同样方法，确定根轨迹的支路通过原点和跨过 $j\omega$ 轴的 K 值。

如果将增益设在刚才求得的稳定范围内的某处，可以把增益再稍许增大一些，并仍保持系统稳定。但是，在增益上增加到足够量时，又引起系统不稳定。使闭环系统刚刚变为不稳定的这个增益的最大增加量，就是增益裕度。还应该注意到，如果将增益减小得太多，也会引起不稳定。



(a)



(b)

图 P11.46

- (b) 考虑(a)的反馈系统, 将增益值设在 7。证明: 该闭环系统是稳定的。画出该系统的对数幅-相图, 并证明有两个非负的 ω 值, 使 $\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\pi$ 。进而证明对其中一个 ω 值有 $7|G(j\omega)H(j\omega)| < 1$, 而对另一个 ω 值有 $7|G(j\omega)H(j\omega)| > 1$ 。前者提供了通常的增益裕度, 也就是可以把增益增加 $1/(7G(j\omega)H(j\omega))$ 倍而刚刚引起不稳定。而后者则是可以将增益减小 $1/(7G(j\omega)H(j\omega))$ 倍而引起系统刚好不稳定。

- (c) 考虑有一反馈系统, 其

$$G(s)H(s) = \frac{(s/100 + 1)^2}{(s + 1)^3}$$

画出 $K > 0$ 时的根轨迹。证明: 根轨迹的两条支路起始于左半平面, 随着 K 的增加, 这两条支路进入右半平面, 然后又回到左半平面。可以通过考查下列方程来进行

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{1}{K}$$

具体做法就是, 令该方程的实部和虚部相等, 证明有两个 $K \geq 0$ 的值使闭环极点位于 $j\omega$ 轴上。因此, 若将增益设置得足够小, 以使系统是稳定的, 那么就可以把增益加大到使根轨迹的两条支路与 $j\omega$ 轴相交这一点的增益值为止。对超过这一点的增益值某一范围, 闭环系统是不稳定的。然而, 若再继续增大增益, 当 K 足够大时, 该系统又将变成稳定的。

- (d) 对(c)的系统画出奈奎斯特图, 并应用奈奎斯特判据(确信计算出了环绕 $-1/K$ 点的净次数)确认在(c)中所得出的结论。

像在本题(c)和(d)中所讨论的系统, 通常都称为条件稳定系统, 因为当增益变化时, 这种系统的稳定性特征可以改变多次。

- 11.48** 本题要讨论与习题 11.44 所对应的离散时间系统的方法。这就是, 离散时间奈奎斯特判据可以推广到容许 $G(z)H(z)$ 在单位圆上有极点的情况。

考虑一个离散时间反馈系统, 其

$$G(z)H(z) = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z(z - 1)} \quad (\text{P11.48-1})$$

在这种情况下, 将 $G(z)H(z)$ 在其上求值的围线修改成图 P11.48(a)所示。

(a) 证明:

$$\angle G(e^{j\theta^+})H(e^{j\theta^+}) = -\frac{\pi}{2}$$

和

$$\angle G(e^{j2\pi^-})H(e^{j2\pi^-}) = \frac{\pi}{2}$$

其中 $z = e^{j2\pi^-}$ 是小的半圆与单位圆相交于实轴下面的点, 而 $z = e^{j0^+}$ 是在相应于在实轴上面的点。

- (b) 利用(a)的结果, 再结合(P11.48-1)式, 证实: 图 P11.48(b)是当 ω 以逆时针方向从 0^+ 变化到 $2\pi^-$ 时, $G(z)H(z)$ 沿围线 $z = e^{j\omega}$ 部分的准确图形。特别是, 要证明 $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 的角度变化是如图所指出的。

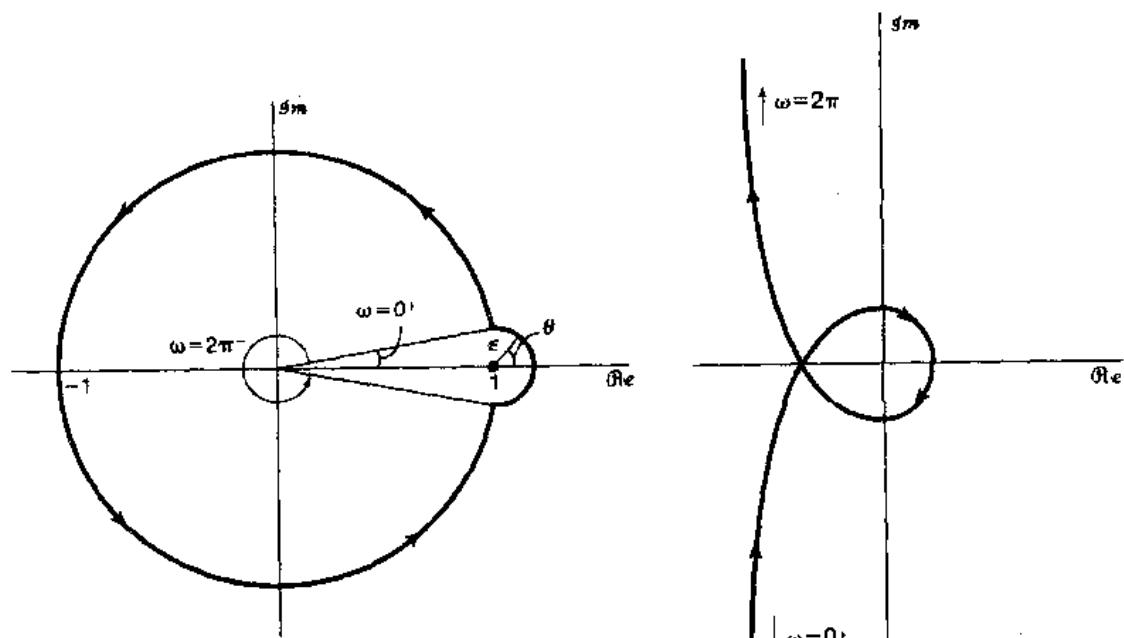
- (c) 求出使 $\angle G(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = -\pi$ 时的 ω 值, 并证明在这一点上有

$$|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})| = 1$$

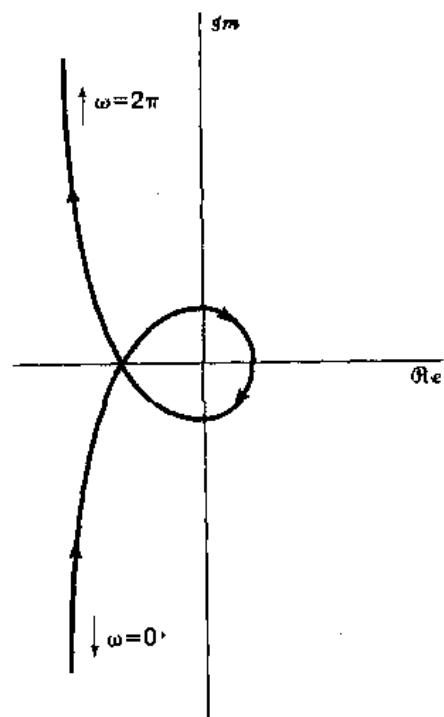
提示: 利用计算 $\angle G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 的几何方法, 再结合初等几何学来确定 ω 的值。

- (d) 接下来考虑沿着在 $z = 1$ 附近的小半圆上 $G(z)H(z)$ 的图。注意到, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $G(z)H(z)$ 的模沿这条围线趋于无穷大。证明: 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 位于 $z = 0$ 的极点对沿该半圆的 $\angle G(z)H(z)$ 的贡献为零; 然后证明, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$\angle G(z)H(z) = -\theta$$



(a)



(b)

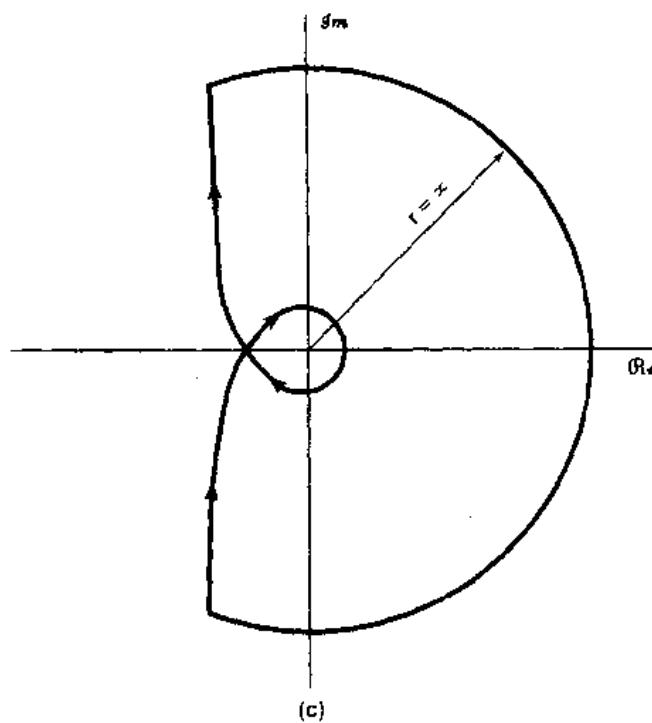


图 P11.48

式中 θ 由图 P11.48(a) 所定义。

于是, 当 θ 以逆时针方向从 $-\pi/2$ 到 $+\pi/2$ 变化时, $G(z)H(z)$ 就以顺时针方向从 $+\pi/2$ 变化到 $-\pi/2$, 其结果就是图 P11.48(c) 所示的完整的奈奎斯特图。

- (e) 利用该奈奎斯特图求出使闭环反馈系统稳定的 K 值范围。[注释: 因为 $G(z)H(z)$ 在 $z=1$ 的极

点位于修改后的围线里面，因而在计算 $G(z)H(z)$ 位于单位圆外的极点数时，它不包括在内；也就是说，在应用奈奎斯特判据时，只有严格位于单位圆外的极点才被计入。在此情况下，由于 $G(z)H(z)$ 没有极点严格位于单位圆外，因此为了使闭环系统稳定，就不能环绕点 $z = -1/K_0$ 。]

(f) 依照在(a), (b)和(d)中所列步骤，画出下列每种情况的奈奎斯特图。

$$(i) \frac{z + \frac{1}{2} + \sqrt{3}}{z - 1} \quad (ii) \frac{1}{(z - 1)(z + \frac{1}{2} + \sqrt{3})} \quad (iii) \frac{z + 1}{z(z - 1)}$$

$$(iv) \frac{z - 1/\sqrt{3}}{(z - 1)^2}$$

[在计算沿无限小半圆上的 $\text{Arg } G(z)H(z)$ 时要特别当心。]

对上列每种情况，利用奈奎斯特判据，确定使闭环系统稳定的 K 值范围（如果存在的话）。并且用另一种方法（根轨迹法或作为 K 的函数直接计算闭环极点的方法）来对所得的奈奎斯特图的正确性给出部分校核。[注释：在画奈奎斯特图时，先画出作为频率函数的模和相位图，或者至少在几个点上计算出 $|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|$ 和 $\text{Arg } G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 的值都是有助于作图的。同时，确定 $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 为实值的 ω 值也是有用的。]

(g) 对于

$$G(z)H(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

重做(f)。在这个情况下，有两个极点在单位圆上，因此必须围绕每一个极点这样来修改围线：包含一个延伸到单位圆外的无限小半圆，藉此把极点置于围线的里面。

扩充题

- 11.49** 本题要给出一个说明性的例子，来说明如何利用反馈来增大一个放大器的带宽。现考虑一个增益在高频跌落的放大器；也就是说，假定该放大器的系统函数是

$$H(s) = \frac{Ga}{s + a}$$

- (a) 该放大器的直流增益是什么（即零频率处，放大器频率响应的模）？
- (b) 系统的时间常数是什么？
- (c) 假若把带宽定义为：当放大器频率响应的模等于直流时频率响应模的 $1/\sqrt{2}$ 时所对应的频率，那么该放大器的带宽是多少？
- (d) 假若将该放大器放在图 P11.49 所示的反馈环中，那么闭环系统的直流增益是什么？该闭环系统的时间常数和带宽是什么？
- (e) 求出使该闭环系统的带宽恰好等于开环放大器带宽的两倍时 K 的值，这时闭环系统的时间常数和直流增益是什么？

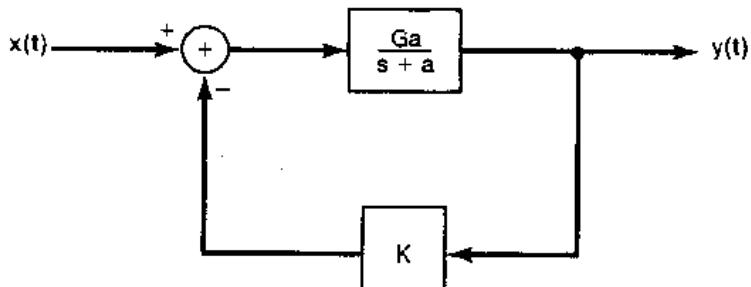
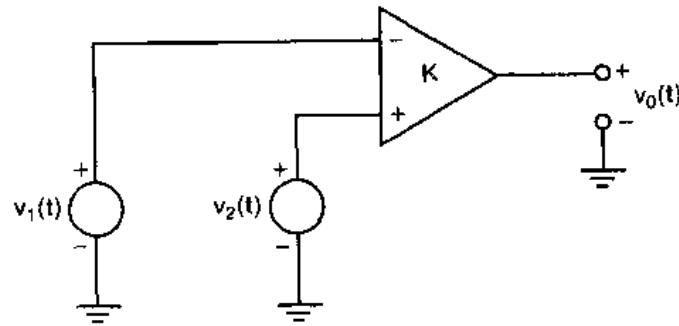


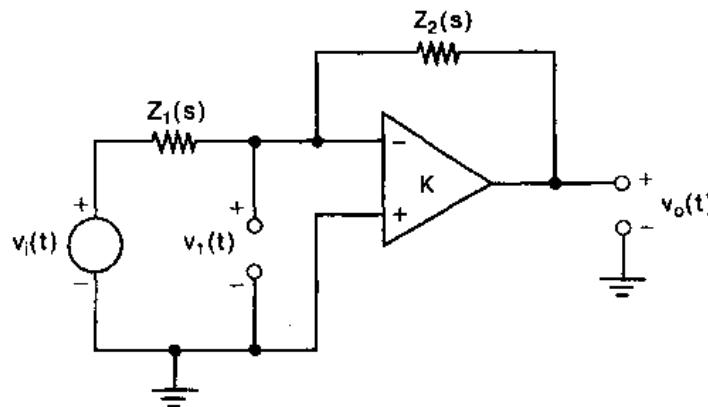
图 P11.49

- 11.50** 在正文中曾提到，用来实现反馈系统的一类重要器件是各种运算放大器。图 P11.50(a)示出这样一个放大器的模型，该放大器的输入是两个电压 $v_2(t)$ 和 $v_1(t)$ 之差，输出电压 $v_0(t)$ 则是放大的输入，即

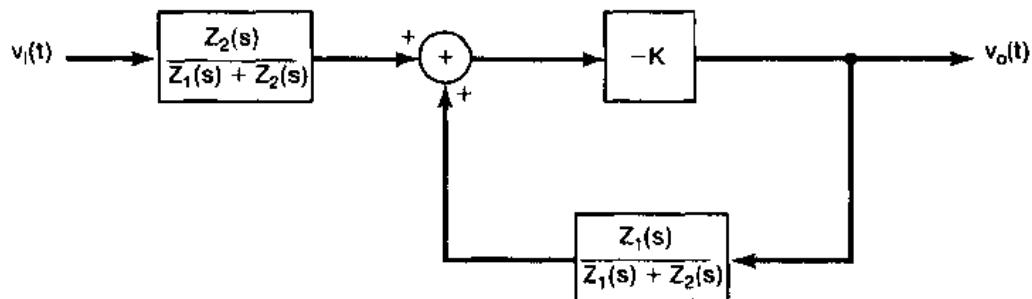
$$v_0(t) = K[v_2(t) - v_1(t)] \quad (\text{P11.50-1})$$



(a)



(b)



(c)

图 P11.50

现在考虑一个运算放大器的连接如图 P11.50(b)所示。图中, $Z_1(s)$ 和 $Z_2(s)$ 都是阻抗(也就是说,每一个都是一个 LTI 系统的系统函数,其输入是流入这个阻抗元件的电流,其输出则是跨在该元件两端的电压)。现作如下近似: 运算放大器的输入阻抗为无限大,而输出阻抗为零。在这个近似条件下可以得到 $v_1(t)$, $v_2(t)$ 和 $v_0(t)$ 的拉普拉斯变换 $V_1(s)$, $V_2(s)$ 和 $V_0(s)$ 之间的下列关系:

$$V_1 = \left[\frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \right] V_i(s) + \left[\frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \right] V_0(s) \quad (\text{P11.50-2})$$

另外,由(P11.50-1)式和图 P11.50(b)可见有

$$V_0(s) = -KV_1(s) \quad (\text{P11.50-3})$$

(a) 证明: 按图 P11.50(b)互连的系统函数

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)}$$

与图 P11.50(c)所示系统的整个闭环系统函数是相同的。

(b) 若 $K \gg 1$, 证明

$$H(s) \approx -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

- 11.51** (a) 假设在图 P11.50(b)中, $Z_1(s)$ 和 $Z_2(s)$ 都是两个纯电阻, 譬如说 R_1 和 R_2 。 R_2/R_1 的典型值是在 1 到 10^3 的范围内, 而 K 的典型值是 10^6 。利用习题 11.50(a)的结果, 对这个 K 值, 并在 $R_2/R_1=1$, 然后等于 10^3 时, 计算出真正的系统函数; 并将所得出的每一个值与 $(-R_2/R_1)$ 相比较。这个题告诉你, 关于习题 11.50(b)的近似式是一个相当好的近似
 (b) 反馈的重要应用之一在于降低系统对参数变化的灵敏度, 这点对于涉及到运算放大器的电路显得特别重要, 因为放大器的高增益其值是近似知道的。
 (i) 考虑在(a)中讨论的电路, 若 $R_2/R_1=10^2$, 如果 K 从 10^6 变到 5×10^5 , 问该系统的闭环增益变化的百分比是多少?
 (ii) 为了使 K 的值减小 50% 时, 只引起闭环增益减小 1%, 问 K 值必须要多大? 再次取 $R_2/R_1=10^2$ 。

11.52 考虑图 P11.52 的电路。这个电路是

在图 P11.50(b)中用

$$Z_1(s) = R, Z_2(s) = \frac{1}{sC}$$

而得到的。利用习题 11.50 的结果, 证明该系统特性近似为一个积分器。在什么频率范围内(用 K , R 和 C 表示)这个近似特性被破坏?

- 11.53** 考虑图 P11.53(a)的电路, 该电路由图 P11.50(b)用 $Z_1(s)=R$, 并以具有指数电流电压关系的二极管来取代 $Z_2(s)$ 而得到的。假设这个指数关系是

$$i_d(t) = M e^{q v_d(t)/kT}$$

(P11.53-1)

式中 M 是一个与二极管结构有关的常数, q 是一个电子的电荷, k 是波尔兹曼常数, T 是绝对温度。注意, (P11.53-1)式的理想化关系是假定没有任何负的二极管电流存在的。通常情况虽然有一个很小的二极管最大反向电流, 但在分析中略去这种可能性。

(a) 假定运算放大器的输入阻抗无限大, 而输出阻抗为零, 证明下列关系成立:

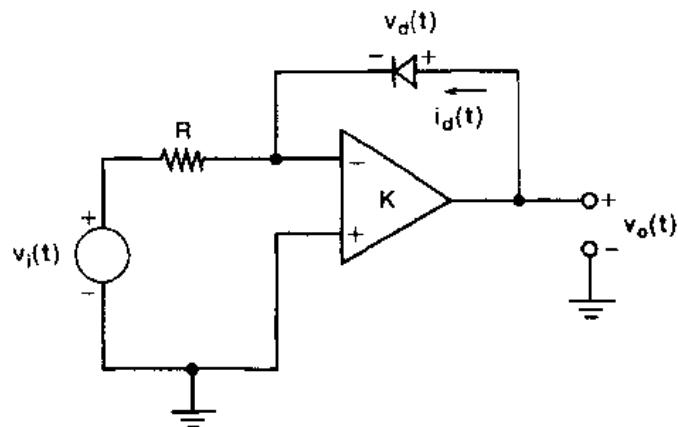
$$v_0(t) = v_u(t) + R i_d(t) + v_i(t) \quad (\text{P11.53-2})$$

$$v_0(t) = -K[v_0(t) - v_d(t)] \quad (\text{P11.53-3})$$

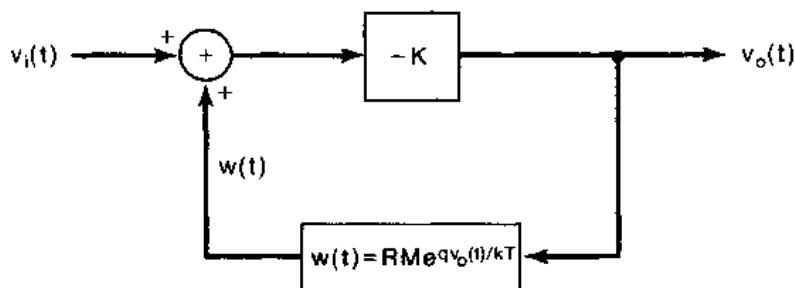
(b) 证明: 对于大的 K 值, $v_0(t)$ 和 $v_i(t)$ 之间的关系与图 P11.53(b)反馈系统中的关系基本相同, 在该图中反馈通路上的系统是一个非线性无记忆系统, 其输入为 $v_0(t)$, 输出为

$$w(t) = R M e^{q v_0(t)/kT}$$

(c) 证明: 对于大的 K 值



(a)



(b)

图 P11.53

$$\nu_0(t) \approx \frac{kT}{q} \ln \left(- \frac{v_i(t)}{RM} \right) \quad (\text{P11.53-4})$$

注意，(P11.53-4)式仅对负的 $v_i(t)$ 有意义，这与二极管电流不能是负值的要求相一致。如果加上一个正的 $v_i(t)$ ，那么电流 $i_d(t)$ 就不能平衡掉通过电阻器的电流。因此就有一个不可忽略的电流反馈给放大器，而引起放大器饱和。

11.54 本题要说明利用正反馈来产生振荡信号。

(a) 考虑图 P11.54(a) 所表示的系统，证明：若

$$G(s)H(s) = -1 \quad (\text{P11.54-1})$$

则 $x_f(t) = x_i(t)$ 。

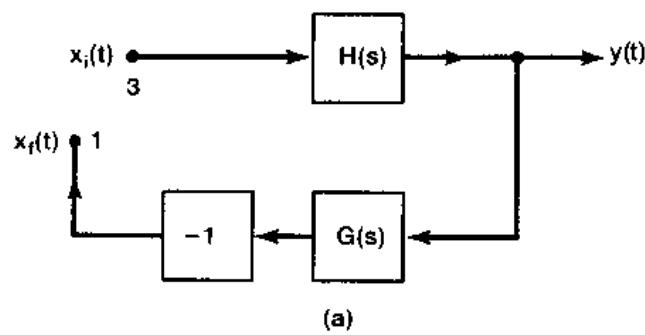
假设在图 P11.54(a) 中将端点 1 和 2 连接起来，并使 $x_i(t) = 0$ ，那么，若仍满足 (P11.54-1) 式，系统的输出应该保持不变。现在这个系统在没有任何输入下产生了一个输出。因此，只要 (P11.54-1) 式满足，图 P11.54(b) 所示系统就是一个振荡器。

(b) 在实际中一般常用的是正弦波振荡器。对于这样的振荡器，可以将 (P11.54-1) 式的条件重写为

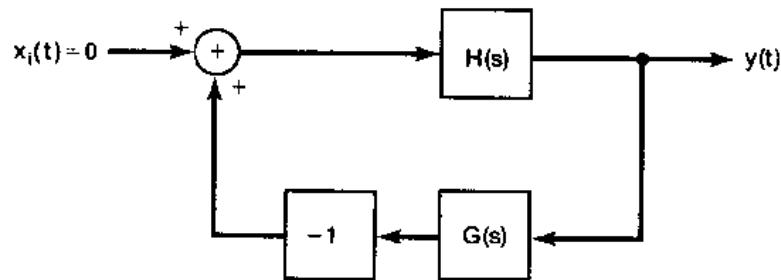
$$G(j\omega_0)H(j\omega_0) = -1 \quad (\text{P11.54-2})$$

当 (P11.54-2) 式满足时，图 P11.54(b) 所示的系统在 ω_0 处的闭环增益值是什么？

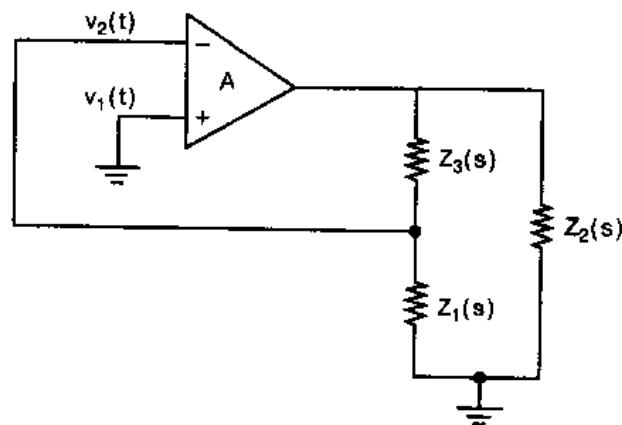
(c) 一个正弦振荡器可以利用图 P11.54(c) 所示电路，根据上述原理来构成。该放大器的输入是电压 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 之差。在这个电路中，放大器的增益为 A ，输出电阻是 R_0 ； $Z_1(s)$ ， $Z_2(s)$ 和 $Z_3(s)$ 都是阻抗。（也就是说，每一个都是一个 LTI 系统的系统函数，其输入是流入该阻抗元件的电流，输出是跨在该元件两端的电压）。对这个电路可以证明



(a)



(b)



(c)

图 P11.54

$$H(s) = \frac{-AZ_L(s)}{Z_L(s) + R_0}$$

式中

$$Z_L = \frac{Z_2(s)(Z_1(s) + Z_3(s))}{Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)}$$

另外也能证明

$$G(s) = \frac{-Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_3(s)}$$

(i) 证明

$$G(s)H(s) = \frac{AZ_1(s)Z_2(s)}{R_0(Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)) + Z_2(s)(Z_1(s) + Z_3(s))}$$

(ii) 若 $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ 和 $Z_3(s)$ 都是纯电抗(即电感或电容), 就能写成 $Z_1(j\omega) = jX_1(j\omega)$, $Z_2(j\omega) = jX_2(j\omega)$ 和 $Z_3(j\omega) = jX_3(j\omega)$, 其中 $X_i(j\omega)$, $i = 1, 2, 3$, 均是实数。利用(b)和(i)中的结果, 证明该电路能产生振荡的一个必要条件是

$$X_1(j\omega) + X_2(j\omega) + X_3(j\omega) = 0$$

(iii) 证明: 除了(ii)中的条件外, $AX_1(j\omega) = X_2(j\omega)$ 是该电路产生振荡必须满足的另一个条件。

[因为对电感来说, $X_i(j\omega)$ 为正; 对电容来说, $X_i(j\omega)$ 为负, 所以后面这个条件要求 $Z_1(s)$ 和 $Z_2(s)$ 必须是同一种类型的阻抗(即, 应该同为电感或同为电容)。]

(iv) 假设 $Z_1(s)$ 和 $Z_2(s)$ 同为电感, 则有

$$X_1(j\omega) = X_2(j\omega) = \omega L$$

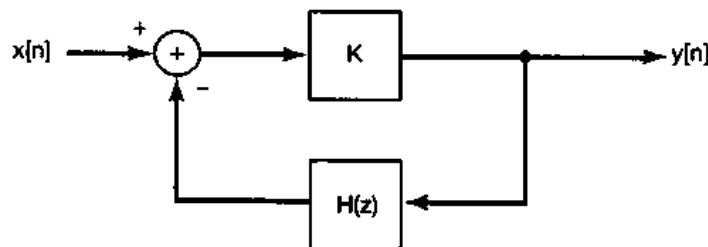
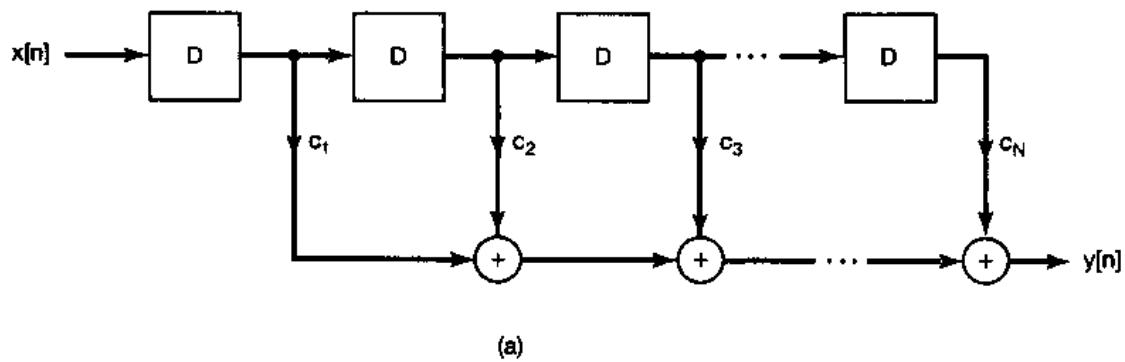
而 $Z_3(s)$ 为电容, 则有

$$X_3(j\omega) = -1/(\omega C)$$

利用(ii)中导出的条件确定电路产生振荡的频率(用 L 和 C 表示)。

11.55 (a) 考虑图 P11.55(a) 的非递归离散时间 LTI 滤波器。围绕这个非递归系统通过应用反馈, 可以实现一个递归滤波器。为此, 考虑一下示于图 P11.55(b) 中的结构, 其中 $H(z)$ 是图 P11.55(a) 的非递归 LTI 系统的系统函数。试求该反馈系统总的系统函数, 并求出关于整个系统输入和输出的差分方程。

(b) 现在假定图 P11.55(b) 中的 $H(z)$ 是一个递归 LTI 系统的系统函数, 这就是假设



(b)

图 P11.55

$$H(z) = \frac{\sum_{i=1}^N c_i z^{-i}}{\sum_{i=1}^N d_i z^{-i}}$$

证明：如何能求得系数 K, c_1, \dots, c_N 和 d_0, \dots, d_N 的值，使得闭环系统函数为

$$Q(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

其中 a_i 和 b_i 都是已给定的系数。

在本题中已经看到，利用反馈可以提供实现由线性常系数差分方程确定的 LTI 系统的另一种方法。因为有一些技术是最适合于用这种抽头延迟线的结构（即，由一串具有抽头的延迟线来构成。在各抽头处的输出经加权后再相加作为输出的系统）来实现的，因此在(a)中的由围绕非递归系统的反馈所构成的实现是特别有意义的。

11.56 考虑按装在一个可移动小车上的倒立摆系统，如图 P11.56 所示。

这里已经将这个摆模型化为一个长度为 L 的，没有质量的杆，和一个系在杆的末端的质量 m 所组成。变量 $\theta(t)$ 记为该摆偏离垂直位置的角度， g 是重力加速度， $s(t)$ 是小车相对于某个参考点的位置， $a(t)$ 是小车的加速度， $x(t)$ 代表由任何扰动（如一阵微风）引起的角加速度。

本题的目的是要分析这个倒立摆的动态特性，具体一些就是通过合理地选择小车加速度 $a(t)$ 来研究该倒立摆的平衡问题。联系 $\theta(t), a(t)$ 和 $x(t)$ 的微分方程是

$$L \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = g \sin[\theta(t)] - a(t) \cos[\theta(t)] + Lx(t) \quad (\text{P11.56-1})$$

这个关系就是将该质量沿垂直于杆的方向上的实际加速度与沿此方向外加的加速度（包括重力加速度、由于 $x(t)$ 引起的扰动加速度和小车的加速度）相等。

注意，(P11.56-1)是一个非线性微分方程。详细而严格地分析这个摆的特性，要求考查这一方程。然而通过线性化分析还是能够得到大量的有关这个摆的动态特性的细节。具体地说，当考虑该摆在接近垂直位置[即 $\theta(t)$ 很小]的时候摆的动态特性。这时可作如下近似

$$\sin[\theta(t)] \approx \theta(t), \cos[\theta(t)] \approx 1 \quad (\text{P11.56-2})$$

(a) 假设小车是静止的[即 $a(t)=0$]，研究由(P11.56-1)式所描述的，其输入为 $x(t)$ ，输出为 $\theta(t)$ 的因果 LTI 系统，再结合由(P11.56-2)式给出的近似关系，求出该系统的系统函数，并证明它在右半平面有一个极点，这意味着这个系统是不稳定的。

(b) 在(a)中的结果表明，如果小车是静止不动的话，那么，任何由 $x(t)$ 所造成的微小角扰动都将导致偏离垂直方向的角度进一步增大。很明显，在某一点，这种角偏离已经大到(P11.56-2)式的近似不再成立，在这一点上线性化分析不再正确。但是，正是在小的角偏离时这个近似是对的，才得出这个垂直平衡点是不稳定的，因为小的角度偏移将一直增加，而不是最终消失。

现在要研究当小车以适当的方式移动时，摆在垂直位置的稳定问题。设想试图用比例反馈，即

$$a(t) = K\theta(t)$$

假定 $\theta(t)$ 很小，所以(P11.56-2)式有效。试以 $\theta(t)$ 作为输出， $x(t)$ 作为外部输入， $a(t)$ 作为

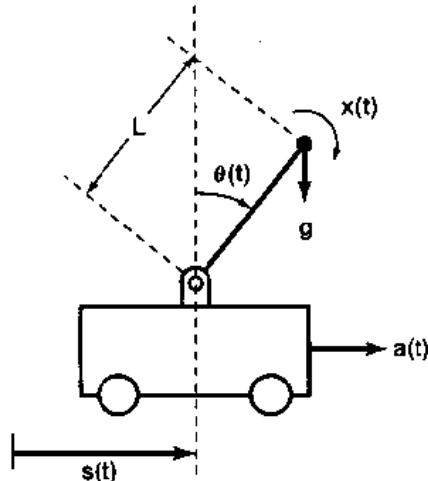


图 P11.56

反馈信号，画出这个线性化的系统方框图。证明：所得到的闭环系统是不稳定的。求出，当 $x(t) = \delta(t)$ 时，该摆以无阻尼振荡方式来回摆动的 K 值。

(c) 现在考虑使用比例加微分(PD)反馈

$$a(t) = K_1\theta(t) + K_2 \frac{d\theta(t)}{dt}$$

证明：可以求出使摆稳定的 K_1 和 K_2 值。事实上，利用下列 g 和 L 的值：

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad (\text{P11.56-3})$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

可以选择 K_1 和 K_2 的值，使得闭环系统的阻尼系数为 1，自然频率为 3 rad/s 。

11.57 本题要考慮设计跟踪系统的几个例子。考查图 P11.57 所示的系统，其中 $H_p(s)$ 是一个其输出要被控制的系统， $H_c(s)$ 是要设计的补偿器。在选择 $H_c(s)$ 时，其目的是要想输出 $y(t)$ 跟踪输入 $x(t)$ ；特别是，除了稳定这个系统外，还想使这个系统设计成对某些给定的输入，其误差 $e(t)$ 衰减到零。

(a) 假设

$$H_p(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \alpha \neq 0 \quad (\text{P11.57-1})$$

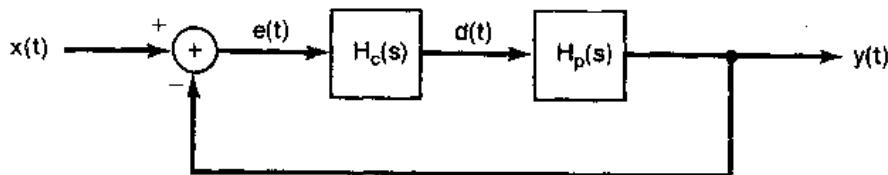


图 P11.57

证明：若 $H_c(s) = K$ （这称为比例控制或 P 控制），就能够选择 K 值，以稳定该系统，并使得在 $x(t) = \delta(t)$ 时，有 $e(t) \rightarrow 0$ 。证明：若 $x(t) = u(t)$ ，就不能得到 $e(t) \rightarrow 0$ 。

(b) 再次设 $H_p(s)$ 为 (P11.57-1) 式，并设想采用比例加积分(PI)控制，即

$$H_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}$$

证明：能够选择 K_1 和 K_2 的值，以稳定该系统，并在 $x(t) = u(t)$ 时，还能得到 $e(t) \rightarrow 0$ 。因此，这个系统可以跟踪一个阶跃变化。事实上，这就说明了在反馈系统设计中一个基本而重要的原理：为了跟踪一个阶跃变化 [$X(s) = 1/s$]，在反馈系统中就需要一个积分器 ($1/s$)。下面的题是考虑对这个原理的一种推广。

(c) 假设 $H_p(s)$ 为

$$H_p(s) = \frac{1}{(s - 1)^2}$$

证明：用一个 PI 控制器不能稳定这个系统。但是，如果采用比例-积分-微分(PID)控制，即

$$H_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s$$

就能稳定这个系统，并让它能跟踪一个阶跃的变化。

11.58 在习题 11.57 中讨论了存在于反馈系统中的积分器，如何能使系统有可能跟踪一个阶跃输入，并具有稳态误差为零。本题将推广这一想法。现考图 P11.58 的反馈系统，假设总的闭环系统是稳定的，同时假设

$$H(s) = \frac{K \prod_{k=1}^m (s - \beta_k)}{s' \prod_{k=1}^{n'} (s - \alpha_k)}$$

式中 α_k 和 β_k 都是已知的非零数, l 是一个正整数。图 P11.58 的反馈系统常称为 I 型反馈系统。

- (a) 利用终值定理(9.5.10 节)证明: I 型系统能够跟踪一个阶跃变化, 即若 $x(t) = u(t)$ 则 $e(t) \rightarrow 0$

- (b) 类似地证明: I 型系统不能跟踪一个斜坡变化, 而是若 $x(t) = u_{-2}(t)$, 则

$$e(t) \rightarrow \text{一个有限值常数}$$

- (c) 证明: 若

$$x(t) = u_{-k}(t), k > 2$$

那么 I 型系统就会有一个无界的结果。

- (d) 更一般地是证明, 对 I 型系统:

- (i) 若 $x(t) = u_{-k}(t), k \leq l$, 则 $e(t) \rightarrow 0$ 。
- (ii) 若 $x(t) = u_{(-l+1)}(t)$, 则 $e(t) \rightarrow \text{有限常数}$ 。
- (iii) 若 $x(t) = u_{-k}(t), k > l + 1$, 则 $e(t) \rightarrow \infty$ 。

11.59 (a) 考虑图 P11.59 的离散时间反馈系

统。假设

$$H(z) = \frac{1}{(z-1)(z+\frac{1}{2})}$$

证明该系统在下述意义下能够跟踪一个单位阶跃, 若 $x[n] = u[n]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e[n] = 0$$

(P11.59-1)

- (b) 更一般的是, 考虑图 P11.59 的反馈系统, 并假设闭环系统是稳定的。假定 $H(z)$ 有一个极点在 $z=1$, 证明: 该系统能够跟踪一个单位阶跃。[提示: 用 $H(z)$ 和 $u[n]$ 的变换式表示 $e[n]$ 的变换 $E(z)$; 解释为什么 $E(z)$ 的全部极点都在单位圆内。]

- (c) 上面(a)和(b)的结果是在离散时间下, 与习题 11.57 和习题 11.58 讨论的连续时间系统的结果相对应的。在离散时间中, 也能够考虑在经过若干步以后完全地跟踪给定输入的系统设计问题。这种系统称为临界阻尼反馈系统。

现考虑图 P11.59 的离散时间系统, 其

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

证明: 整个闭环系统是一个临界阻尼系统, 而且在经过一步以后, 就能完全跟踪上一个阶跃输入, 即若 $x[n] = u[n]$, 那么 $e[n] = 0, n \geq 1$ 。

- (d) 证明图 P11.59 的反馈系统, 在

$$H(z) = \frac{\frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

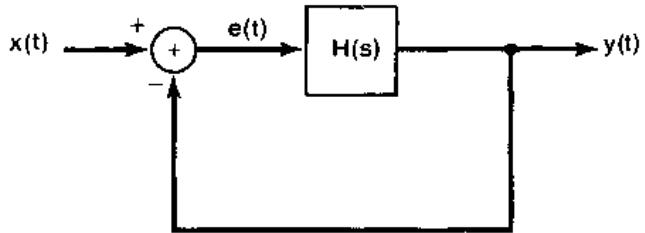


图 P11.58

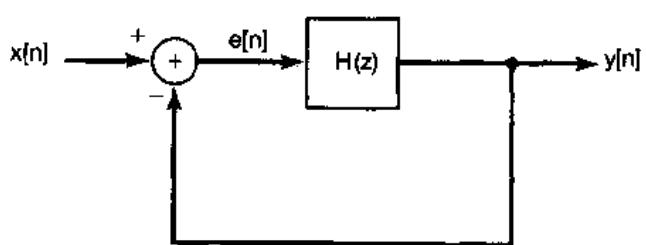


图 P11.59

下是一个临界阻尼系统，并具有如下跟踪性质：在经过若干步之后，输出能完全跟踪一个单位阶跃，问在哪一步，误差 $e[n]$ 首先到达零？

- (e) 更一般地是，对于图 P11.59 的反馈系统，求出使 $y[n]$ 在 $n \geq N$ 后完全跟踪一个单位阶跃的 $H(z)$ ；事实上，这就是要使

$$e[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta[n-k] \quad (\text{P11.59-2})$$

式中 a_k 是给定的常数。提示：当输入为单位阶跃， $e[n]$ 由 (P11.59-2) 式给出时，应用 $H(z)$ 和 $E(z)$ 之间的关系。

- (f) 若图 P11.59 的系统中的

$$H(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

证明：该系统在经过两步以后就能完全跟踪一个斜坡信号 $x[n] = (n+1)u[n]$ 。

- 11.60 本题要研究采样-数据反馈系统的几个性质并说明这种系统的应用。回想一下在 11.2.4 节所提到的，在一个采样-数据反馈系统中，连续时间系统的输出被采样，所得到的样本序列通过一个离散时间系统处理之后又转换回到连续时间信号中来，然后将该连续时间信号反馈到输入端，并从外部输入中减去它以产生该连续时间系统的真正输入。

- (a) 考虑在图 11.6(b) 中虚线框内的系统。这是一个输入为 $e[n]$ ，输出为 $p[n]$ 的离散时间系统，证明：它是一个 LTI 系统。在图中已指出，将 $F(z)$ 记为该系统的系统函数。
- (b) 证明：在图 11.6(b) 中，系统函数为 $F(z)$ 的离散时间系统与系统函数为 $H(s)$ 的连续时间系统是以阶跃响应不变法相联系的；也就是说，若 $s(t)$ 是连续时间系统的阶跃响应， $q[n]$ 是离散时间系统的阶跃响应，那么

$$q[n] = s(nT) \quad \text{对全部 } n$$

- (c) 假设

$$H(s) = \frac{1}{s-1}, \Re\{s\} > 1$$

证明

$$F(z) = \frac{(e^T - 1)z^{-1}}{1 - e^T z^{-1}}, |z| > e^T$$

- (d) 假设 $H(s)$ 同 (c) 所给，而 $G(z) = K$ ，试求使图 11.6(b) 的闭环离散时间系统是稳定的 K 值范围。
- (e) 假设

$$G(z) = \frac{K}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

问 T 在什么条件下能够找到一个 K 值使整个系统稳定？试求出一对 K 和 T 的值而产生一个稳定的闭环系统。提示：考查根轨迹，找出使极点进入或离开单位圆的 K 值。

附录 部分分式展开

A.1 引言

本附录的目的是阐述部分分式展开方法。在信号与系统的研究中，这一方法是非常有用的；尤其是在求傅里叶反变换、拉普拉斯反变换或 z 反变换，以及分析由线性常系数微分方程或差分方程表征的 LTI 系统时，显得特别有用。部分分式展开法就是把一个由两个多项式之比构成的函数，展开成一些形式上相同的简单项的线性组合。在这个线性组合中，确定系数是获得部分分式展开要解决的基本问题。将会看到，这个问题在代数中能用一种“簿记”的形式很方便解决的一个相当直接的问题。

为了说明基本想法和部分分式展开的基本法则。现考虑在 6.5.2 节中讨论过的二阶连续时间 LTI 系统的分析问题。其微分方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t) \quad (\text{A.1})$$

该系统的频率响应是

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (\text{A.2})$$

或者，若将分母因式分解，有

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)} \quad (\text{A.3})$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ c_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

有了 $H(j\omega)$ 之后，就可以回答许多有关该系统的问题。例如，为了求出该系统的单位冲激响应，回忆一下，对于任何实部 $\Re\{s\} < 0$ 的 s

$$x_1(t) = e^{at} u(t) \quad (\text{A.5})$$

的傅里叶变换为

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega - a} \quad (\text{A.6})$$

而如果

$$x_2(t) = t e^{at} u(t) \quad (\text{A.7})$$

那么

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{(j\omega - a)^2} \quad (\text{A.8})$$

因此，若能将 $H(j\omega)$ 展开成一些具有(A.6)式或(A.8)式这些项之和，就能凭直观求得

$H(j\omega)$ 的反变换。例如，在6.5.2节中，注意到，当 $c_1 \neq c_2$ 时，(A.3)式就可以重新写成如下形式：

$$H(j\omega) = \left(\frac{\omega_n^2}{c_1 - c_2}\right) \frac{1}{j\omega - c_1} + \left(\frac{\omega_n^2}{c_2 - c_1}\right) \frac{1}{j\omega - c_2} \quad (\text{A.9})$$

这时，就可以利用(A.5)式和(A.6)式的傅里叶变换对，立即写出 $H(j\omega)$ 的反变换为

$$h(t) = \left[\frac{\omega_n^2}{c_1 - c_2} e^{c_1 t} + \frac{\omega_n^2}{c_2 - c_1} e^{c_2 t} \right] u(t) \quad (\text{A.10})$$

虽然以上所讨论的是针对连续时间傅里叶变换的，但类似的概念对离散时间傅里叶分析和在拉普拉斯变换及 z 变换的应用中也同样适用。在所有这些情况中，尤其是遇到有理变换这样一类重要的类型，即变换式是某个变量的多项式之比时更是如此。同时，在每种情况下，都能发现为什么要将变换式展开成形如(A.9)式的这些简单项之和的原因。在这一节，为了导出求这种展开式的一般方法，现考虑一个一般变量 v 的有理函数，即考查具有如下形式的函数

$$H(v) = \frac{\beta_m v^m + \beta_{m-1} v^{m-1} + \cdots + \beta_1 v + \beta_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0} \quad (\text{A.11})$$

对于连续时间傅里叶分析来说， v 就相当于 $(j\omega)$ ；而对拉普拉斯变换来说， v 就对应于复变量 s 。在离散时间傅里叶分析中，通常将 v 取作 $e^{-j\omega}$ ；而对 z 变换，可用 z^{-1} 或者 z 取代 v 。在导出部分分式展开的基本方法之后，再说明它在连续和离散时间LTI系统分析中的应用。

A.2 部分分式展开和连续时间信号与系统

在推导中，为了方便起见，设有理函数是两种标准形式中的一种。其中第二种形式在离散时间信号与系统分析中是常用的，将给予简要讨论。第一种标准形式是

$$G(v) = \frac{b_{n-1} v^{n-1} + b_{n-2} v^{n-2} + \cdots + b_1 v + b_0}{v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0} \quad (\text{A.12})$$

在这种形式中，分母中阶数最高的项的系数为1，并且分子的阶数低于分母的阶数（如 $b_{n-1} = 0$ ，分子的阶数将低于 $n-1$ ）。

如果以(A.11)式的形式给出 $H(v)$ ，可以经由两步简单的计算得到形如(A.12)式的有理函数。第一步，将 $H(v)$ 的分子分母同除以 a_n ，得

$$H(v) = \frac{\gamma_m v^m + \gamma_{m-1} v^{m-1} + \cdots + \gamma_1 v + \gamma_0}{v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0} \quad (\text{A.13})$$

这里

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \frac{\beta_m}{a_n}, & \gamma_{m-1} &= \frac{\beta_{m-1}}{a_n}, \dots \\ a_{n-1} &= \frac{a_{n-1}}{a_n}, & a_{n-2} &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \dots \end{aligned}$$

如果 $m < n$ ， $H(v)$ 称为严格真有理函数，在这种情况下，令 $b_0 = \gamma_0$ ， $b_1 = \gamma_1, \dots, b_m = \gamma_m$ ，并置余下的 b 都等于零，(A.13)式中的 $H(v)$ 就已经具有(A.12)式的形式了。本书大多

数情况有关有理函数的讨论主要都是关于严格真有理函数的。然而，如果 $H(v)$ 不是真有理函数(即 $m \geq n$)，可以通过基本的计算，将 $H(v)$ 写成一个 v 的多项式与一个严格真有理函数之和，即

$$\begin{aligned} H(v) &= c_{m-n}v^{m-n} + c_{m-n-1}v^{m-n-1} + \cdots + c_1v + c_0 \\ &\quad + \frac{b_{n-1}v^{n-1} + b_{n-2}v^{n-2} + \cdots + b_1v + b_0}{v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \cdots + a_1v + a_0} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

系数 c_0, c_1, \dots, c_{m-n} 和 b_0, b_1, \dots, b_{n-1} 可通过令(A.13)式和(A.14)式相等，然后两边同乘以分母而求得，即

$$\begin{aligned} \gamma_m v^m + \cdots + \gamma_1 v + \gamma_0 &= b_{n-1}v^{n-1} + \cdots + b_1v + b_0 \\ &\quad + (c_{m-n}v^{m-n} + \cdots + c_0)(v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \cdots + a_0) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

令(A.15)式两边 v 次幂相同的项系数相等，就能利用 a 和 γ 的值求得 c 和 b 的值。例如，若 $m=2, n=1$ 。则

$$H(v) = \frac{\gamma_2 v^2 + \gamma_1 v + \gamma_0}{v + a_1} = c_1 v + c_0 + \frac{b_0}{v + a_1} \quad (\text{A.16})$$

这时，(A.15)式就变成

$$\begin{aligned} \gamma_2 v^2 + \gamma_1 v + \gamma_0 &= b_0 + (c_1 v + c_0)(v + a_1) \\ &= b_0 + c_1 v^2 + (c_0 + a_1 c_1)v + a_1 c_0 \end{aligned}$$

由相同次幂项的系数相等，就得如下方程：

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= c_1 \\ \gamma_1 &= c_0 + a_1 c_1 \\ \gamma_0 &= b_0 + a_1 c_0 \end{aligned}$$

从第一个方程直接得到 c_1 值，代入第二个方程可解得 c_0 ，依次将 c_0, c_1 代入第三个方程求得 b_0 ，最后结果是

$$\begin{aligned} c_1 &= \gamma_2 \\ c_0 &= \gamma_1 - a_1 \gamma_2 \\ b_0 &= \gamma_0 - a_1(\gamma_1 - a_1 \gamma_2) \end{aligned}$$

(A.15)式的一般情况可用类似的方法来解。

现在，把目标放在(A.12)式的真有理函数 $G(v)$ 上，将它展开成简单的真有理函数之和。为了看清展开方法，考虑 $n=3$ 的情况，这时(A.12)式简化成

$$G(v) = \frac{b_2 v^2 + b_1 v + b_0}{v^3 + a_2 v^2 + a_1 v + a_0} \quad (\text{A.17})$$

第一步先将 $G(v)$ 的分母因式分解，为此将它写成

$$G(v) = \frac{b_2 v^2 + b_1 v + b_0}{(v - \rho_1)(v - \rho_2)(v - \rho_3)} \quad (\text{A.18})$$

暂且假设分母的根 ρ_1, ρ_2 和 ρ_3 都不相同，可将 $G(v)$ 展开成如下形式的和：

$$G(v) = \frac{A_1}{v - \rho_1} + \frac{A_2}{v - \rho_2} + \frac{A_3}{v - \rho_3} \quad (\text{A.19})$$

接下来就是确定系数 A_1, A_2 和 A_3 。一种方法是令(A.18)式与(A.19)式相等，然后两边同

乘以分母。这种情况下，可得到方程

$$b_2v^2 + b_1v + b_0 = A_1(v - \rho_2)(v - \rho_3) + A_2(v - \rho_1)(v - \rho_3) + A_3(v - \rho_1)(v - \rho_2) \quad (\text{A.20})$$

将(A.20)式的右边展开，并令 v 的同幂次项的系数相等，可以得到一组线性方程，以解出 A_1 , A_2 和 A_3 。

虽然这种方法总是可行的，但还有一种更简单的方法。考虑(A.19)式，并假定要想计算 A_1 ，那么两边都乘以 $(v - \rho_1)$ ，得

$$(v - \rho_1)G(v) = A_1 + \frac{A_2(v - \rho_1)}{v - \rho_2} + \frac{A_3(v - \rho_1)}{v - \rho_3} \quad (\text{A.21})$$

因为 ρ_1 , ρ_2 和 ρ_3 是各不相同的，对于 $v = \rho_1$, (A.21)式右边的最后两项等于零，因此

$$A_1 = [(v - \rho_1)G(v)]|_{v=\rho_1} \quad (\text{A.22})$$

或者，利用(A.18)式

$$A_1 = \frac{b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)} \quad (\text{A.23})$$

同理

$$A_2 = [(v - \rho_2)G(v)]|_{v=\rho_2} = \frac{b_2\rho_2^2 + b_1\rho_2 + b_0}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3)} \quad (\text{A.24})$$

$$A_3 = [(v - \rho_3)G(v)]|_{v=\rho_3} = \frac{b_2\rho_3^2 + b_1\rho_3 + b_0}{(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)} \quad (\text{A.25})$$

现在假设 $\rho_1 = \rho_3 \neq \rho_2$ ，即

$$G(v) = \frac{b_2v^2 + b_1v + b_0}{(v - \rho_1)^2(v - \rho_2)} \quad (\text{A.26})$$

在这种情况下，要寻求一种

$$G(v) = \frac{A_{11}}{v - \rho_1} + \frac{A_{12}}{(v - \rho_1)^2} + \frac{A_{21}}{v - \rho_2} \quad (\text{A.27})$$

的展开式。这里，当把(A.27)式通分时，为了得到正确的分母，就需要有 $1/(v - \rho_1)^2$ 这一项。在一般情况下，也需要包括 $1/(v - \rho_1)$ 这一项。为了说明其理由，考虑令(A.26)式和(A.27)式相等，两边再同乘以(A.26)式的分母，得

$$b_2v^2 + b_1v + b_0 = A_{11}(v - \rho_1)(v - \rho_2) + A_{12}(v - \rho_1)^2 + A_{21}(v - \rho_1)^2 \quad (\text{A.28})$$

如果再次令相同次幂项的系数相等，就得到三个方程（对于 v^0 , v^1 和 v^2 项的系数）。倘若略去(A.27)式中的 A_{11} 项，将得到含有两个未知量的三个方程；这样，一般将不是一个解。一旦包括了这一项，总是能求得一个解。然而，在这种情况下，还有一个更简单的方法。考虑(A.27)式，两边同乘以 $(v - \rho_1)^2$ ：

$$(v - \rho_1)^2 G(v) = A_{11}(v - \rho_1) + A_{12} + \frac{A_{21}(v - \rho_1)^2}{v - \rho_2} \quad (\text{A.29})$$

从上面的例子，可立即看出如何来确定 A_{12} ：

$$A_{12} = [(v - \rho_1)^2 G(v)]|_{v=\rho_1} = \frac{b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0}{\rho_1 - \rho_2} \quad (\text{A.30})$$

至于 A_{11} , 假设将(A.29)式两边对 v 微分:

$$\frac{d}{dv}[(v - \rho_1)^2 G(v)] = A_{11} + A_{21} \left[\frac{2(v - \rho_1)}{v - \rho_2} - \frac{(v - \rho_1)^2}{(v - \rho_2)^2} \right] \quad (\text{A.31})$$

这时很明显, 对于 $v = \rho_1$, (A.31)式中最后一项是零, 因此

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left[\frac{d}{dv}(v - \rho_1)^2 G(v) \right] \Big|_{v=\rho_1} \\ &= \frac{2b_2\rho_1 + b_1}{\rho_1 - \rho_2} - \frac{b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0}{(\rho_1 - \rho_2)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

最后, 把(A.27)式乘以 $(v - \rho_2)$, 可以求得

$$A_{21} = [(v - \rho_2)G(v)] \Big|_{v=\rho_2} = \frac{b_2\rho_2^2 + b_1\rho_2 + b_0}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \quad (\text{A.33})$$

这个例子说明了在一般情况下, 部分分式展开中的所有基本概念。特别是, 设(A.12)式中 $G(v)$ 的分母有不同的根 ρ_1, \dots, ρ_r 分别具有 $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ 重根时, 那么

$$G(v) = \frac{b_{n-1}v^{n-1} + \dots + b_1v + b_0}{(v - \rho_1)^{\sigma_1}(v - \rho_2)^{\sigma_2}\dots(v - \rho_r)^{\sigma_r}} \quad (\text{A.34})$$

这时, $G(v)$ 具有部分分式展开的形式为

$$\begin{aligned} G(v) &= \frac{A_{11}}{v - \rho_1} + \frac{A_{12}}{(v - \rho_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\sigma_1}}{(v - \rho_1)^{\sigma_1}} + \frac{A_{21}}{v - \rho_2} \\ &\quad + \dots + \frac{A_{2\sigma_2}}{(v - \rho_2)^{\sigma_2}} + \dots + \frac{A_{r1}}{v - \rho_r} + \dots + \dots + \frac{A_{r\sigma_r}}{(v - \rho_r)^{\sigma_r}} \quad (\text{A.35}) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{A_{ik}}{(v - \rho_i)^k} \end{aligned}$$

的展开式, 这里 A_{ik} 由下式^① 计算出:

$$A_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} \left[\frac{d^{\sigma_i-k}}{dv^{\sigma_i-k}} [(v - \rho_i)^{\sigma_i} G(v)] \right] \Big|_{v=\rho_i} \quad (\text{A.36})$$

这个结果可以用象上面例子一样来校验: 将(A.35)式两边乘以 $(v - \rho_i)^{\sigma_i}$, 并重复求导, 直到 A_{ik} 不再乘有 $(v - \rho_i)$ 的次幂为止, 然后令 $v = \rho_i$ 。

例 A.1 在例 4.25 中, 研究了一个由微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) \quad (\text{A.37})$$

描述的 LTI 系统。该系统的频率响应是

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} \quad (\text{A.38})$$

为了确定这个系统的单位冲激响应, 将 $H(j\omega)$ 展开成一些简单项的和, 而这些简单项的反变换凭直观就能求得。将 $j\omega$ 换成 v , 就得到下面函数:

^① 这里阶乘用符号 $r!$ 表示, 记作 $r(r-1)(r-2)\dots 2 \cdot 1, 0!$ 定义为 1。

$$G(v) = \frac{v+2}{v^2 + 4v + 3} = \frac{v+2}{(v+1)(v+3)} \quad (\text{A.39})$$

$G(v)$ 的部分分式展开是

$$G(v) = \frac{A_{11}}{v+1} + \frac{A_{21}}{v+3} \quad (\text{A.40})$$

其中

$$A_{11} = [(v+1)G(v)]|_{v=-1} = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2} \quad (\text{A.41})$$

$$A_{21} = [(v+3)G(v)]|_{v=-3} = \frac{-3+2}{-3+1} = \frac{1}{2} \quad (\text{A.42})$$

于是

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+3} \quad (\text{A.43})$$

将(A.43)式取反变换，就得该系统的单位冲激响应

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) \quad (\text{A.44})$$

由(A.37)式描述的系统也能用拉普拉斯变换分析方法来分析，该系统的系统函数是

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2 + 4s + 3} \quad (\text{A.45})$$

并且，若以 v 代替 s ，就得到如(A.39)式相同的 $G(v)$ 。因此，其部分分式展开完全与(A.40)式到(A.42)式相同，其结果是

$$H(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3} \quad (\text{A.46})$$

求该式的反变换就得到单位冲激响应，如(A.44)式所给出。

例 A.2 现在说明当分母中具有重因子时部分分式展开的方法。在例 4.26 中考虑过当输入为

$$x(t) = e^{-t}u(t) \quad (\text{A.47})$$

时，由(A.37)式描述的系统响应。由(4.81)式，系统输出的傅里叶变换是

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)} \quad (\text{A.48})$$

以 v 代替 $j\omega$ ，就得有理函数

$$G(v) = \frac{v+2}{(v+1)^2(v+3)} \quad (\text{A.49})$$

这个函数的部分分式展开是

$$G(v) = \frac{A_{11}}{v+1} + \frac{A_{12}}{(v+1)^2} + \frac{A_{21}}{v+3} \quad (\text{A.50})$$

其中，由(A.36)式

$$A_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dv} [(v+1)^2 G(v)]|_{v=-1} = \frac{1}{4} \quad (\text{A.51})$$

$$A_{12} = [(v+1)^2 G(v)]|_{v=-1} = \frac{1}{2} \quad (\text{A.52})$$

$$A_{21} = [(v+3)G(v)]|_{v=-3} = -\frac{1}{4} \quad (\text{A.53})$$

因此

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 3} \quad (\text{A.54})$$

取反变换就得到

$$y(t) = \left[\frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-3t} \right] u(t) \quad (\text{A.55})$$

同样，这个分析本来也能够用拉普拉斯变换来完成，并且所得代数表示式与(A.49)式到(A.55)式完全相同。

A.3 部分分式展开和离散时间信号与系统

如前面提及的，在对离散时间傅里叶变换或 z 变换式实行部分分式展开时，另一种形式稍有不同的有理函数形式常常更便于处理。现假设有一个有理函数，其形式为

$$G(v) = \frac{d_{n-1}v^{n-1} + \cdots + d_1v + d_0}{f_nv^n + \cdots + f_1v + 1} \quad (\text{A.56})$$

这种形式的 $G(v)$ ，可通过把(A.12)式中的 $G(v)$ 分子分母同除以 a_0 而得到。

对于(A.56)式中给出的 $G(v)$ ，分母相应的因式分解具有如下形式：

$$G(v) = \frac{d_{n-1}v^{n-1} + \cdots + d_1v + d_0}{(1 - \rho_1^{-1}v)^{\sigma_1}(1 - \rho_2^{-1}v)^{\sigma_2} \cdots (1 - \rho_r^{-1}v)^{\sigma_r}} \quad (\text{A.57})$$

部分分式展开的形式为

$$G(v) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{B_{ik}}{(1 - \rho_i^{-1}v)^k} \quad (\text{A.58})$$

B_{ik} 可用类似于前面使用过的方法计算得

$$B_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!} (-\rho_i)^{\sigma_i - k} \left[\frac{d^{\sigma_i - k}}{dv^{\sigma_i - k}} [(1 - \rho_i^{-1}v)^{\sigma_i} G(v)] \right] \Big|_{v=\rho_i} \quad (\text{A.59})$$

同前面一样，(A.59)式的正确性可以这样验证：将(A.58)式两边各乘以 $(1 - \rho_i^{-1}v)^{\sigma_i}$ ，然后重复对 v 求导，直到 B_{ik} 中不再有乘以 $(1 - \rho_i^{-1}v)$ 的幂为止，最后令 $v = \rho_i$ 。

例 A.3 考虑在例 5.19 的因果 LTI 系统，其差分方程为

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n] \quad (\text{A.60})$$

该系统的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-2j\omega}} \quad (\text{A.61})$$

对于像这样的离散时间变换，最方便地是用 v 来代替 $e^{-j\omega}$ 。作这样的替换后，得到有理函数为

$$G(v) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{8}v^2} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}v)(1 - \frac{1}{4}v)} \quad (\text{A.62})$$

利用由(A.57)式到(A.59)式给出的部分分式展开式，得到

$$G(v) = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{2}v} + \frac{B_{21}}{1 - \frac{1}{4}v} \quad (\text{A.63})$$

$$B_{11} = \left[\left(1 - \frac{1}{2}v \right) G(v) \right] \Big|_{v=2} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \quad (\text{A.64})$$

$$B_{21} = \left[\left(1 - \frac{1}{4}v \right) G(v) \right] \Big|_{v=4} = \frac{2}{1 - 2} = -2 \quad (\text{A.65})$$

于是有

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}, \quad (\text{A.66})$$

将(A.66)式取反变换，得到单位脉冲响应为

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]. \quad (\text{A.67})$$

在 10.7 节，提出了用 z 变换分析方法对由线性常系数差分方程表征的离散时间 LTI 系统进行研究。把这个分析方法应用于这个例子，发现该系统函数可由(A.60)式凭直观可以确定是

$$H(z) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \quad (\text{A.68})$$

然后，用 v 代替 z^{-1} ，就得出如(A.62)式的 $G(v)$ ，利用(A.63)式到(A.65)式的部分分式展开式计算，求得

$$H(z) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (\text{A.69})$$

当反变换后，就得到(A.67)式的单位脉冲响应。

例 A.4 假定例 A.3 考虑的系统输入是

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (\text{A.70})$$

那么，由例 5.20，输出的傅里叶变换是

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} \quad (\text{A.71})$$

用 v 代替 $e^{-j\omega}$ 可得

$$G(v) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}v)(1 - \frac{1}{4}v)^2} \quad (\text{A.72})$$

于是，应用(A.58)式和(A.59)式，可得部分分式展开式为

$$G(v) = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{4}v} + \frac{B_{12}}{(1 - \frac{1}{4}v)^2} + \frac{B_{21}}{1 - \frac{1}{2}v} \quad (\text{A.73})$$

并求得

$$B_{11} = (-4) \left[\frac{d}{dv} \left(1 - \frac{1}{4}v \right)^2 G(v) \right] \Big|_{v=4} = -4 \quad (\text{A.74})$$

$$B_{12} = \left[\left(1 - \frac{1}{4}v \right)^2 G(v) \right] \Big|_{v=4} = -2 \quad (\text{A.75})$$

$$B_{21} = \left[\left(1 - \frac{1}{2}v \right) G(v) \right] \Big|_{v=2} = 8 \quad (\text{A.76})$$

因此

$$Y(j\omega) = -\frac{4}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (\text{A.77})$$

利用表 4.2 的傅里叶变换时，凭直观就可求出反变换为：

$$y[n] = \left\{ -4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} u[n] \quad (\text{A.78})$$

例 A.5 在离散时间系统分析中，常常碰到假有理函数。为了说明这个问题，同时也指出如何用在本附录中提出的方法进行分析，考虑由差分方程

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] + 3x[n-1] + \frac{11}{6}x[n-2] + \frac{1}{3}x[n-3]$$

表征的因果 LTI 系统。该系统的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 3e^{-j\omega} + \frac{11}{6}e^{-2j\omega} + \frac{1}{3}e^{-3j\omega}}{1 + \frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-2j\omega}} \quad (\text{A.79})$$

用 v 代替 $e^{-j\omega}$ 可得

$$G(v) = \frac{1 + 3v + \frac{11}{6}v^2 + \frac{1}{3}v^3}{1 + \frac{5}{6}v + \frac{1}{6}v^2} \quad (\text{A.80})$$

这个有理函数可以写成一个多项式和一个真有理函数之和：

$$G(v) = c_0 + c_1 v + \frac{b_1 v + b_0}{1 + \frac{5}{6}v + \frac{1}{6}v^2} \quad (\text{A.81})$$

令(A.80)式和(A.81)式相等，并乘以 $(1 + \frac{5}{6}v + \frac{1}{6}v^2)$ ，得

$$\begin{aligned} 1 + 3v + \frac{11}{6}v^2 + \frac{1}{3}v^3 &= (c_0 + b_0) + \left(\frac{5}{6}c_0 + c_1 + b_1\right)v \\ &\quad + \left(\frac{1}{6}c_0 + \frac{5}{6}c_1\right)v^2 + \frac{1}{6}c_1 v^3 \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

令各系数相等，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}c_1 &= \frac{1}{3} \rightarrow c_1 = 2 \\ \frac{1}{6}c_0 + \frac{5}{6}c_1 &= \frac{11}{6} \rightarrow c_0 = 1 \\ \frac{5}{6}c_0 + c_1 + b_1 &= 3 \rightarrow b_1 = \frac{1}{6} \\ c_0 + b_0 &= 1 \rightarrow b_0 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

因此

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + \frac{\frac{1}{6}e^{-j\omega}}{1 + \frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-2j\omega}} \quad (\text{A.84})$$

另外，采用本附录提出的方法，将(A.81)式中的真有理函数展开成

$$\frac{\frac{1}{6}v}{1 + \frac{5}{6}v + \frac{1}{6}v^2} = \frac{\frac{1}{6}v}{(1 + \frac{1}{3}v)(1 + \frac{1}{2}v)} = \frac{B_{11}}{(1 + \frac{1}{3}v)} + \frac{B_{21}}{(1 + \frac{1}{2}v)} \quad (\text{A.85})$$

这些系数是

$$B_{11} = \left[\frac{\frac{1}{6}v}{1 + \frac{1}{2}v} \right] \Big|_{v=-3} = 1$$

$$B_{21} = \left| \frac{\frac{1}{6}v}{1 + \frac{1}{3}v} \right| \Big|_{v=-2} = -1$$

因此求得

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (\text{A.86})$$

凭直观可求得该系统的单位脉冲响应为

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u[n] \quad (\text{A.87})$$

文献目录

本文献目录的目的是为了在信号与系统分析方面，给读者提供一些附加的和较深入的专题论述材料的来源。这决不是想要给出一个毫无遗漏的目录清单，而是旨在指出在每一个方面进一步研究的方向和若干参考的方面。

本文献目录共分为 16 个不同的科目。前面几个涉及信号与系统分析方面的一些数学方法，其中包括在基础数学(微积分、微分和差分方程和复变函数)，傅里叶级数、傅里叶变换、拉普拉斯变换和 z 变换理论，以及在信号与系统分析中常常碰到并使用的其它方面的一些数学问题。接下来的几部分是涉及已在本书正文中介绍过的，在信号与系统方面几个专题的更为完整和专门的论述，其中包括滤波、采样与离散时间信号处理、通信以及反馈与控制等。另外还给出了在信号与系统和电路理论方面一些基本教材和著作的目录。此外，对于那些有志于进一步扩大在信号与系统方法方面知识领域的读者，或者是利用这些先进的技术在应用中进行探索的读者，为了进一步学习，也给出了几个重要的，有代表性的领域方面的参考文献。特别是，包括了状态空间模型和方法，多维信号与图像处理，语音处理，多速率和多分辨率信号分析，随机信号和统计信号处理，以及非线性系统等有关部分。最后，还包括了一些涉及其它应用和近代论题方面的参考目录。这篇文献目录所收集的参考文献为读者在信号与系统领域所构成的广泛范围和应用领域都提供了一个很有意义的评价。

B.1 基础数学

B.1.1 微积分学、分析数学与高等数学

ARFKEN, G., and WEBER, H. J.. Mathematical Methods for Physicists. 4th ed. Boston, MA: Academic Press, 1995

HILDEBRAND, F. B.. Advanced Calculus for Applications. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976

THOMAS, G. B., Jr., and FINNEY, R. L.. Calculus and Analytic Geometry. 9th ed. Reading, MA: Addison - wesley, 1996

B.1.2 微分和差分方程

BIRKHOFF, G., and ROTA, G. - C. Ordinary Differential Equations, 3rd ed. New York, NY: John Wiley, 1978

BOYCE, W. E., and DIPRIMA, R. C.. Elementary Differential Equations. 3rd ed. New York, NY: John Wiley, 1977

HILDEBRAND, F. B.. Finite Difference Equations and Simulations. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1968

LEVY, H., and LESSMAN, F.. Finite Difference Equations. New York, NY: Macmillan, 1961

SIMMONS, G. F.. Differential Equations: With Applications and Historical Notes. New York, NY: McGraw - Hill, 1972

B.1.3 复变函数

CARRIER, G. F., KROOK, M., and PEARSON, C. E.. Functions of a Complex Variable: Theory and Technique. Ithaca, NY: Hod Books, 1983

CHURCHILL, R. V., BROWN, J. W., and VERHEY, R. F. Complex Variables and Applications. 5th ed. New York, NY: McGraw - Hill, 1990

B.2 级数展开与变换

B.2.1 傅里叶级数、变换及应用

BRACEWELL, R. N.. The Fourier Transform and Its Applications. 2nd ed. New York, NY: McGraw - Hill, 1986

CHURCHILL, R. V., and BROWN, J. W.. Fourier Series and Boundary Value Problems. 3rd ed. New York, NY: McGraw - Hill, 1978

DYM, H., and MCKEAN, H. P.. Fourier Series and Integrals. New York, NY: Academic Press, 1972

EDWARDS, R. E.. Fourier Series: A Modern Introduction. 2nd ed. New York, NY: Springer - Verlag, 1979

GRAY, R. M., and GOODMAN, J. W.. Fourier Transforms: An Introduction for Engineers. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1995

LIGHTHILL, M. J.. Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions. New York, NY: Cambridge University Press, 1962

PAPOULIS, A.. The Fourier Integral and Its Applications. New York, NY: McGraw - Hill, 1987

WALKER, P. L.. The Theory of Fourier Series and Integrals. New York, NY: John Wiley, 1986

B.2.2 拉普拉斯变换

DOETSCH, G.. Introduction to the Theory and Applications of the Laplace Transformation with a Table of Laplace Transformations. New York, NY: Springer Verlag, 1974

LEPAGE, W. R.. Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers. New York, NY: McGraw - Hill, 1961

RAINVILLE, E. D.. The Laplace Transform: An Introduction. New York, NY: Macmillan, 1963

B.2.3 z 变换

JURY, E. I.. Theory and Application of the Z - Transform Method. Malabar, FL: R. E. Krieger, 1982

VICH, R.. Z Transform Theory and Applications. Boston, MA: D. Reidel, 1987

B.3 数学的其它论题

B.3.1 广义函数

ARSAC, J.. Fourier Transforms and the Theory of Distributions. Translated by A. Nussbaum and G. C. Heim. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1966

GELFAND, I. M. et al.. Generalized Functions. 5 vols. Translated by E. Saletan et al. New York, NY: Academic Press, 1964 - 68

- HOSKINS, R. F.. Generalised Functions. New York, NY: Halsted Press, 1979
ZEMANIAN, A. H.. Distribution Theory and Transform Analysis. New York, NY: McGraw - Hill, 1965

B.3.2 线性代数

- GOLUB, G.H., and VAN LOAN, C.F.. Matrix Computations. 2nd ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1989.
HORN, R. A., and JOHNSON, C. R.. Matrix Analysis. New York, NY: Cambridge University Press, 1985.
STRANG, G.. Introduction to Linear Algebra. Wellesley, MA: Wellesley - Cambridge Press, 1993.

B.4 电路理论

- BOBROW, L. S.. Elementary Linear Circuit Analysis. New York, NY: Holt, Rinehart, and Winston, 1981
CHUA, L.O., DESOER, C. A., and KUH, E. S.. Basic Circuit Theory. New York: McGraw - Hill, 1987
IRVINE, R. G.. Operational Amplifier Characteristics and Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994
ROBERGE, J. K.. Operational Amplifiers; Theory and Practice. New York, NY: John Wiley, 1975
VAN VALKENBURG, M. E.. Network Analysis. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1974

B.5 基本的信号与系统

- CADZOW, J. A., and VAN LANDINGHAM, H. F.. Signals and SYstems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1985
CRUZ, J. B., and VAN VALKENBURG, M. E.. Signals in Linear Circuits. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1974
GABEL, R. A., and ROBERTS, R. A.. Signals and Linear Systems. 3rd ed. New York, NY: John Wiley, 1987
GLISSON, T. H.. Introduction to System Analysis. New York, NY: McGraw - Hill, 1985
HOOTS, R. C.. Signal Analysis in Linear Systems. New York, NY: Saunders College, 1991
JACKSON, L. B.. Signals, Systems, and Transforms. Reading, MA: Addison - Wesley, 1991
KAMEN, E.. Introduction to Signals and Systems. New York, NY: Macmillan, 1987
LATHI, B. P.. Linear Systems and Signals. Carmichael, CA: Berkeley - Cambridge Press, 1992
LIU, C.L., and LIU, J.W.. Linear Systems Analysis. New York: McGraw - Hill, 1975
MAYHAN, R.J.. Discrete - time and Continuous - time Linear Systems. Reading, MA: Addison - Wesley, 1984
MCGILLEM, C.D., and COOPER, G. R.. Continuous and Discrete Signal and System Analysis. 3rd ed. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston, 1991
NEFF, H. P.. Continuous and Discrete Linear Systems. New York, NY: Harper and Row, 1984
PAPOULIS, A.. Signal Analysis. New York, NY: McGraw - Hill, 1977
SIEBERT, W. M.. Circuits, Signals, and Systems. Cambridge, MA: The MIT Press, 1986
SOLIMAN, S., and SRINATH, M.. Continuous and Discrete Signals and Systems. New York, NY: Prentice Hall, 1990

TAYLOR, F. J.. Principles of Signals and Systems. McGraw - Hill Series in Electrical and Computer Engineering. New York, NY: McGraw - Hill, 1994

ZIEMER, R. E., TRANTER, W. H., and FANNIN, D. R.. Signals and Systems: Continuous and Discrete. 2nd ed. New York, NY: Macmillan, 1989

B.6 离散时间信号处理

BRIGHAM, O. E.. The Fast Fourier Transform and its Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988

BURRUS, C. S., McCLELLAN, J. H., OPPENHEIM, A. V., PARKS, T. W., SCHAFER, R. W., and SCHUESSLER, H. W. Computer - Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1994

GOLD, B., and RADER, C. M.. Digital Processing of Signals. Lincoln Laboratory Publications. New York, NY: McGraw - Hill, 1969

OPPENHEIM, A. V., and SCHAFER, R. W.. Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975

OPPENHEIM, A. V., and SCHAFER, R. W.. Discrete - Time Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989

PELED, A., and LIU, B.. Digital Signal Processing: Theory Design and Implementation. New York, NY: John Wiley, 1976

PROAKIS, J. G., and MANOLAKIS, D. G.. Digital Signal Processing Principles, Algorithms, and Applications. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996

RABINER, L. R., and GOLD, B.. Theory and Application of Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975

ROBERTS, R. A., and MULLIS, C. T.. Digital Signal Processing. Reading, MA: Addison - Wesley, 1987

STRUM, R. D., and KIRK, D. E.. First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing. Addison - Wesley Series in Electrical Engineering. Reading, MA: Addison - Wesley, 1988

TRETTNER, S. A.. Introduction to Discrete - Time Signal Processing. New York, NY: John Wiley, 1976

B.7 滤波器设计

ANTONIOU, A.. Digital Filters, Analysis, Design, and Applications. 2nd ed. New York, NY: McGraw - Hill, 1993

CHRISTIAN, E., and EISENMANN, E.. Filter Design Tables and Graphs. Knightdale, NC: Transmission Networks International, 1977

HAMMING, R. W.. Digital Filters. 3rd ed. Rnglewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989

HUELSMAN, L. P., and ALLEN, P. E.. Introduction to the Theory and Design of Active Filters. New York, NY: McGraw - Hill, 1980

PARKS, T. W., and BURRUS, C. S.. Digital Filter Design. New York, NY: John Wiley, 1987

VAN VALKENBURG, M. E.. Analog Filter Design. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston, 1982

WEINBERG, L.. Network Analysis and Synthesis. New York, NY: McGraw - Hill, 1962

ZVEREV, A. I.. Handbook of Filter Synthesis. New York, NY: John Wiley, 1967

B.8 状态空间模型和方法

- BROCKETT, R.. Finite Dimensional Linear Systems. New York, NY: John Wiley, 1970
- CHEN, C. T.. Linear System Theory and Design. New York, NY: Holt, Rinehart, and Winston, 1984
- CLOSE, C. M., and FREDERICK, D. K.. Modeling and Analysis of Dynamic Systems. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1978
- GUPTA, S. C.. Transform and State Variable Methods in Linear Systems. New York, NY: John Wiley, 1966
- KAILATH, T.. Linear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980
- LJUNG, L.. System Identification: Theory for the User. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987
- LUENBERGER, D. G.. Introduction to Dynamic Systems; Theory, Models, and Applications. New York, NY: John Wiley, 1979
- ZADEH, L. A., and DESOER, C. A.. Linear System Theory: The State Space Approach. New York, NY: McGraw - Hill, 1963

B.9 反馈与控制

- ANDERSON, B. D. O., and MOORL, J. B.. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990
- D'AZZO, J. J., and HOUPIS, C. H.. Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern. 4th ed. NY: McGraw - Hill, 1995
- DORF, R. C., and BISHOP, R. H.. Modern Control Systems. 7th ed. Reading, MA: Addison - Wesley Publishing Company, 1995
- DOYLE, J. C., FRANCIS, B. A., and TANNENBAUM, A. R.. Feedback Control Theory. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992
- HOSTETTER, G. H., SAVANT, Jr., C. J., and STEFANI, R. T.. Design of Feedback Control SYstems. 2nd ed. Saunders College Publishing, a Division of Holt, Reinhart and Winston, Inc., 1989
- KUO, B. C.. Automatic Control Systems. 7th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995
- OGATA, K.. Modern Control Engineering. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990
- OGATA, K.. Discrete - Time Control Systems. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994
- RAGAZZINI, J. R., and FRANKLIN, G. F.. Sampled - Data Control Systems. New York, NY: McGraw - Hill, 1958
- ROHRS, C. E., MELSA, J. L., and SCHULTZ, D. G., Linear Control Systems. New York, NY: McGraw - Hill, 1993
- VACCARO, R. J.. Digital Control: A State - Space Approach. New York, NY: McGraw Hill, 1995

B.10 通信系统

- BENNETT, W. R.. Introduction to Signal Transmission. New York, NY:McGraw - Hill, 1970
- BLAHUT, R. E.. Digital Transmission of Information. Reading, MA: Addison - Wesley Publishing Company, 1990
- BLAHUT, R. E.. Algebraic Methods for Signal Processing and Communications Coding. New York, NY:

Springer - Verlag, 1992

CARLSON, A. B. . Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication. 3rd ed. New York, NY; McGraw - Hill, 1986

COUCH, II, L. W.. Modern Communication Systems Principles and Applications. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 1995

COVER, T. M. , and THOMAS, J. B.. Elements of Information Theory. New York, NY: John Wiley and Sons, Inc., 1991

GALLAGER, R. M.. Information Theory and Reliable Communication. New York, NY: John Wiley and Sons, Inc., 1968

HAYKIN, S.. Digital Communications. New York, NY: John Wiley & Sons, 1988

JAYANT, N. S. , and NOLL, P.. Digital Coding of Waveforms: Principles and Applications to Speech and Video. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1984

LATHI, B. P.. Modern Digital and Analog Communication Systems. 2nd ed. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1989

LEE, E. A. , and MESSERSCHMITT, D. G.. Digital Communication. 2nd ed. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1994

PEEBLES, JR., P. Z.. Communication System Principles. Reading, MA: Addison - Wesley Publishing Company, 1976

PROAKIS, J. G.. Digital Communications. 3rd ed. New York, NY: McGraw - Hill, 1995

PROAKIS, J. G. and SALEHI, M.. Communication Systems Engineering. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994

RODEN, M. S.. Analog and Digital Communication Systems. 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 1996

SCHWARTZ, M.. Information Transmission, Modulation, and Noise. 4th ed. New York, NY: McGraw - Hill, 1990

SIMON, M. K. , et al. , eds.. Spread Spectrum Communication Handbook. Rev. ed., New York, NY: McGraw - Hill, 1994

STREMLER, F. G.. Introduction to Coommunication Systems. 3rd ed. Addison - Wesley Series in Electrical Engineering, Reading, MA: Addison - Wesley, 1990

TAUB, H. , and SCHILLING, D. L.. Principles of Communication Systems. 2nd ed. New York, NY: McGraw - Hill, 1986.

VITERBI, A. J. , and OMURA, J. K.. Principles of Digital Communication and Coding. New York, NY: McGraw - Hill, 1979

ZIEMER, R. E. and TRANTER, W. H.. Principles of Communications Systems, Modulation, and Noise. 4th ed. Boston, MA: Houghton Mifflin Co., 1995

B.11 多维信号、图像和视频处理

BRACEWELL, R. N.. Two - Dimensional Imaging. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1995

CASTLEMAN, K. R.. Digital Image Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1996

DUDGEON, D. E. , MERSEREAU, R. M.. Multidimensional Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1984

GONZALEZ, R. C. , and WOODS, R. E.. Digital Image Processing. Reading, MA: Addison - Wesley,

1993

JAIN, A. K. . Fundamentals of Digital Image Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989

LIM, J. S. . Two - Dimensional Signal and Image Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1990

NETRAVALI, A. N. , and HASKELL, B. G. . Digital Pictures: Representation, Compression, and Standards. 2nd ed. New York, NY: Plenum Press, 1995

PRATT, W. K.. Digital Image Processing. 2nd ed. New York, NY: John Wiley and Sons, 1991

TEKALP, A. M. . Digital Video Processing. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 1995

B.12 语音信号处理

DELLER, J. R. , PROAKIS, J. G. , and HANSEN, J. H. L. . Discrete - Time Processing of Speech Signals. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1987

KLEUN, W. B. , and P. ,K. K. . Speech Coding and Synthesis. Amsterdam: Elsevier, 1995

LIM, J. S. ,ed.. Speech Enhancement. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1983

MARKEL, J. D. , and GRAY, A. H. . Linear Prediction of Speech. New York, NY: Springer - Verlag, 1976

RABINER, L. R. , and JUANG, B. H. . Fundamentals of Speech Recognition. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993

RABINER, L. R. , and SCHAFER, R. W. . Digital Processing of Speech Signals. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1978

B.13 多速率与多分辨率信号分析

AKANSU, A. N. , and HADDAD, R. A. . Multiresolution Signal Decomposition: Transforms, Subbands and Wavelets. San Diego, CA: Academic Press, Inc., 1992

CHUI, C. K.. An Introduction to Wavelets. San Diego, CA: Academic Press Inc., 1992

CROCHIERE, R. E. , and RABINER, L. R.. Multirate Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1983

DAUBECHIES, I.. Ten Lectures on Wavelets. CBMS - NSF Series on Applied Mathematics, Philadelphia: SIAM, 1992

MALVAR, H. S.. Signal Processing with Lapped Transforms. Norwood, MA; Artech House, 1992

VAIDYANATHAN, P. P.. Multirate Systems and Filter Banks. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1993

VETTERLI, M. , and KOVACEVIC, J.. Wavelets and Subband Coding. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1995

WORNELL, G. W.. Signal Processing with Fractals: A Wavelet - Based Approach. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 1996

B.14 随机信号与统计信号处理

B.14.1 基本概率论

DRAKE, A. W.. Fundamentals of Applied Probability Theory. New York, NY: McGraw Hill, 1967

Ross, S. . Introduction to Probability Models. 5th ed. Boston, MA: Academic Press, 1993

B.14.2 随机过程、检测与估值

KAY, S. M. . Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1993

LEON-GARCIA, A. . Probability and Random Processes for Electrical Engineering. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co., 1994

PAPOULIS, A. . Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. 3rd ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1991

PEEBLES, JR., P. Z. . Probability, Random Variables, and Random Signal Principles. 3rd ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1993

PORAT, B. . Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1994

THERRIEN, C. W. . Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1992

VAN TREES, H. L. Detection, Estimation, and Modulation Theory: Part I. New York, NY: John Wiley and Sons, Inc., 1968

B.15 非线性与时变系统

CHUA, L. O. . Introduction to Nonlinear Network Theory. New York, NY: McGraw-Hill, 1969

D'ANGELO, H. . Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis. Boston, MA: Allyn and Bacon, 1970

GRAHAM, D., and MCRUER, D. Analysis of Nonlinear Control Systems. New York, NY: Dover, 1971

HILLBORN, R. C. . Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for scientists and Engineers. New York, NY: Oxford University Press, 1994

KHALIL, H. K. . Nonlinear Systems. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992

LEFSCHETZ, S. . Stability of Nonlinear Control Systems. Mathematics in Science and Engineering, no. 13. New York, NY: Academic Press, 1965

RICHARDS, J. A. . Analysis of Periodically Time-Varying Systems. New York, NY: Springer-Verlag, 1983

STROGATZ, S. S. . Nonlinear Dynamics and Chaos. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1994

VIDYASAGER, M. . Nonlinear Systems Analysis, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993

B.16 其它应用与近代论题

BOX, G. E. P., and JENKINS, G. M. . Time Series Analysis: Forecasting and Control. Rev. ed. San Francisco, CA: Holden-Day, 1976

HAMILTON, J. D. . Time Series Analysis. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994

HAYKIN, S. . Adaptive Filter Theory, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991

HERMAN, G. T. . Image Reconstruction from Projections. New York, NY: Academic Press, 1980

JOHNSON, D. H. and DUDGEON, D. E. . Array Signal Processing: Concepts and Techniques. Englewood

Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1993

KAK, A. C., and SLANEY, M. . Principles of Computerized Tomography. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989

KAY, S. M.. Modern Spectral Estimation: Theory and Application. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988

MACOVSKI, A.. Medical Imaging Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1983

MARPLE, JR., S. L.. Digital Spectral Analysis with Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987

OPPENHEIM, A., V.. ed. Applications of Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1978

ROBINSON, E. A.. et al. Geophysical Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1986

VAN TREES, H. L.. Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part III: Radar - Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise. New York, NY: John Wiley, 1971

WIDROW, B., and STEARNS, S. D.. Adaptive Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1985

第一部分 基本题答案

第1章 答案

1.1. $-0.5, -0.5, j, -j, j, 1+j, 1+j, 1-j, 1-j$

1.2. $5e^{j0}, 2e^{j\pi}, 3e^{-j\pi/3}, e^{-j\pi/3}, \sqrt{2}e^{j\pi/4}, 2e^{-j\pi/2}, \sqrt{2}e^{j\pi/4}, e^{j\pi/2}, e^{-j\pi/12}$

1.3. (a) $P_{\infty}=0, E_{\infty}=\frac{1}{4}$ (b) $P_{\infty}=1, E_{\infty}=\infty$ (c) $P_{\infty}=\frac{1}{2}, E_{\infty}=\infty$

(d) $P_{\infty}=0, E_{\infty}=\frac{4}{3}$ (e) $P_{\infty}=1, E_{\infty}=\infty$ (f) $P_{\infty}=\frac{1}{2}, E_{\infty}=\infty$

1.4. (a) $n < 1$ 和 $n > 7$ (b) $n < -6$ 和 $n > 0$ (c) $n < -4$ 和 $n > 2$
(d) $n < -2$ 和 $n > 4$ (e) $n < -6$ 和 $n > 0$

1.5. (a) $t > -2$ (b) $t > -1$ (c) $t > -2$ (d) $t < 1$ (e) $t < 9$

1.6. (a) 否 (b) 否 (c) 对

1.7. (a) $|n| > 3$ (b) 全部 t (t) $|n| < 3, |n| \rightarrow \infty$ (d) $|t| \rightarrow \infty$

1.8. (a) $A=2, a=0, \omega=0, \phi=\pi$ (b) $A=1, a=0, \omega=3, \phi=0$

(c) $A=1, a=1, \omega=3, \phi=\frac{\pi}{2}$ (d) $A=1, a=2, \omega=100, \phi=\frac{\pi}{2}$

1.9. (a) $T = \frac{\pi}{5}$ (b) 非周期 (c) $N=2$

(d) $N=10$ (e) 非周期

1.10. π

1.11. 35

1.12. $M = -1, n_0 = -3$

1.13. 4

1.14. $A_1=3, t_1=0, A_2=-3, t_2=1$

1.15. (a) $y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$ (b) 否

1.16. (a) 否 (b) 0 (c) 否

1.17. (a) 否; 即, $y(-\pi) = x(0)$ (b) 对

1.18. (a) 对 (b) 对 (c) $C \leq (2n_0+1)B$

1.19. (a) 线性, 时变 (b) 非线性、时不变

(c) 线性、时不变 (d) 线性、时变

1.20. (a) $\cos(3t)$ (b) $\cos(3t-1)$

第2章 答案

2.1. (a) $y_1[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4]$

$$(b) y_2[n] = y_1[n+2] \quad (c) y_3[n] = y_2[n]$$

$$2.2. A = n - 9, B = n + 3$$

$$2.3. 2[1 - \frac{1}{2}^{n+1}]u[n]$$

$$2.4. y[n] = \begin{cases} n - 6 & 7 \leq n \leq 11 \\ 6, & 12 \leq n \leq 18 \\ 24 - n & 19 \leq n \leq 23 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

$$2.5. N = 4$$

$$2.6. y[n] = \begin{cases} \frac{3^n}{2}, & n < 0 \\ \frac{1}{2}, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$2.7. (a) u[n-2] - u[n-6] \quad (b) u[n-4] - u[n-8] \quad (c) \text{否}$$

$$(d) y[n] = 2u[n] - \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$2.8. y(t) = \begin{cases} t+3, & -2 < t \leq -1 \\ t+4, & -1 < t \leq 0 \\ 2-2t, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases}$$

$$2.9. A = t - 5, B = t - 4$$

$$2.10. (a) y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \alpha \\ a, & \alpha \leq t \leq 1 \\ 1+a-t, & 1 \leq t \leq 1+\alpha \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases} \quad (b) \alpha = 1$$

$$2.11. (a) y(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 3 \\ \frac{1-e^{-3(t-3)}}{3}, & 3 < t \leq 5 \\ \frac{(1-e^{-6})e^{-3(t-5)}}{3}, & 5 < t \leq \infty \end{cases}$$

$$(b) g(t) = e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5) \quad (c) g(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$2.12. A = \frac{1}{1-e^{-3}}$$

$$2.13. (a) A = \frac{1}{5} \quad (b) g[n] = \delta[n] - \frac{1}{5}\delta[n-1]$$

$$2.14. h_1(t), h_2(t)$$

$$2.15. h_2[n]$$

$$2.16. (a) \text{对} \quad (b) \text{错} \quad (c) \text{对} \quad (d) \text{对}$$

$$2.17. (a) y(t) = \frac{1-j}{6}[e^{(-1+j3)t} - e^{-4t}]u(t)$$

$$(b) y(t) = \frac{1}{6}[e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t) - e^{-4t}]u(t)$$

$$2.18. (1/4)^{n-1}u[n-1]$$

$$2.19. (a) \alpha = \frac{1}{4}, \beta = 1 \quad (b) [2(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n]u[n]$$

$$2.20. (a) 1 \quad (b) 0 \quad (c) 0$$

第3章 答案

3.1. $x(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 8\cos\left(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$

3.2. $x[n] = 1 + 2\sin\left(\frac{4\pi}{5}n + \frac{3\pi}{4}\right) + 4\sin\left(\frac{8\pi}{5}n + \frac{5\pi}{6}\right)$

3.3. $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$, $a_0 = 2$, $a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$, $a_5 = a_{-5} = -2j$

3.4. $a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ e^{-jk\pi/2} \frac{3\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}, & k \neq 0 \end{cases}$

3.5. $\omega_2 = \omega_1$, $b_k = e^{-jka_1}[a_{-k} + a_k]$

3.6. (a) $x_2(t)$, $x_3(t)$ (b) $x_2(t)$

3.7. $a_k = \begin{cases} \frac{2}{T}, & k=0 \\ \frac{b_k}{j\frac{2\pi}{T}k}, & k \neq 0 \end{cases}$

3.8. $x_1(t) = \sqrt{2}\sin(\pi t)$, $x_2(t) = -\sqrt{2}\sin(\pi t)$

3.9. $a_0 = 3$, $a_1 = 1 - 2j$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1 + 2j$

3.10. $a_0 = 0$, $a_{-1} = -j$, $a_{-2} = -2j$, $a_{-3} = -3j$

3.11. $A = 10$, $B = \frac{\pi}{5}$, $C = 0$

2.12. $c_k = 6$ 对全部 k

3.13. $y(t) = 0$

3.14. $H(e^{j\pi/2}) = H^*(e^{j3\pi/2}) = 2e^{j\pi/4}$, $H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 0$

3.15. $|k| > 8$

3.16. (a) 0 (b) $\sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$ (c) 0

3.17. S_1 和 S_3 都不是 LTI

3.18. S_1 和 S_2 都不是 LTI

3.19. (a) $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$ (b) $H(j\omega) = \left(\frac{1}{1+j\omega}\right)$ (c) $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t - \frac{\pi}{4})$

3.20. (a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$ (b) $H(j\omega) = \left(\frac{1}{1+j\omega - \omega^2}\right)$ (c) $-\cos t$

第4章 答案

4.1. (a) $\frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$ (b) $\frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^2}$

4.2. (a) $2\cos\omega$ (b) $-2j\sin 2\omega$

4.3. (a) $\frac{\pi}{j} [e^{j\pi/4}\delta(\omega - 2\pi) - e^{-j\pi/4}\delta(\omega + 2\pi)]$
(b) $2\pi\delta(\omega) + \pi[e^{j\pi/8}\delta(\omega - 6\pi) + e^{-j\pi/8}\delta(\omega + 6\pi)]$

4.4. (a) $1 + \cos 4\pi t$ (b) $-\frac{4|\sin^2 t|}{\pi t}$

$$4.5. x(t) = -\frac{2\sin(3(t-3/2))}{\pi(t-3/2)}, \quad t = \frac{k\pi}{3} + \frac{3}{2} \quad \text{对非零整数 } k$$

$$4.6. (a) X_1(j\omega) = 2X(-j\omega)\cos\omega \quad (b) X_2(j\omega) = \frac{1}{3}e^{-j\omega}X(j\frac{\omega}{3})$$

$$(c) X_3(j\omega) = -\omega^2 e^{-j\omega}X(j\omega)$$

4.7. (a) 都不是, 都不是 (b) 虚, 奇 (c) 虚, 都不是
(d) 实, 偶

$$4.8. (a) \frac{2\sin(\omega/2)}{j\omega^2} + \pi\delta(\omega) \quad (b) \frac{2\sin(\omega/2)}{j\omega^2}$$

$$4.9. (a) \frac{\sin\omega}{j\omega^2} - \frac{e^{-j\omega}}{j\omega} \quad (b) \frac{\sin\omega}{\omega} \quad (c) \frac{\sin\omega}{j\omega^2} - \frac{\cos\omega}{j\omega}$$

$$4.10. (a) X(j\omega) = \begin{cases} j/2\pi, & -2 \leq \omega < 0 \\ -j/2\pi, & 0 \leq \omega < 2 \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases} \quad (b) A = \frac{1}{2\pi^3}$$

$$4.11. A = \frac{1}{3}, B = 3$$

$$4.12. (a) -\frac{4j\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (b) j2\pi\omega e^{-|\omega|}$$

4.13. (a) 否 (b) 是 (c) 是

$$4.14. x(t) = \sqrt{12}[e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

$$4.15. x(t) = 2te^{-|t|}u(t)$$

$$4.16. (a) g(t) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{k\pi}{4}) \quad (b) X(j\omega) = \begin{cases} 4, & |\omega| \leq 1 \\ 0, & 1 < |\omega| \leq 4 \end{cases}$$

4.17. (a) 错 (b) 对

$$4.18. h(t) = \begin{cases} \frac{5}{4}, & |t| < 1 \\ -\frac{|t|}{4} + \frac{3}{2}, & 1 \leq |t| \leq 5 \\ -\frac{|t|}{8} + \frac{7}{8}, & 5 < |t| < 7 \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases}$$

$$4.19. x(t) = e^{-4t}u(t)$$

$$4.20. h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t)$$

第 5 章 答案

$$5.1. (a) \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (b) \frac{0.75e^{-j\omega}}{1.25 - \cos\omega}$$

$$5.2. (a) 2\cos\omega \quad (b) 2j\sin(2\omega)$$

$$5.3. (a) \frac{\pi}{j} \{ e^{j\pi/4} \delta(\omega - \frac{\pi}{3}) - e^{-j\pi/4} \delta(\omega + \frac{\pi}{3}) \}$$

$$(b) 4\pi\delta(\omega) + \pi \{ e^{j\pi/8} \delta(\omega - \frac{\pi}{6}) + e^{-j\pi/8} \delta(\omega + \frac{\pi}{6}) \}$$

$$5.4. (a) x_1[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{2}n) \quad (b) -4 \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}$$

$$5.5. x[n] = \frac{\sin[\frac{\pi}{4}(n - \frac{3}{2})]}{\pi(n - \frac{3}{2})}, \text{ 和 } x[n] = 0 \text{ 对 } n = \pm\infty$$

$$5.6. (a) X_1(e^{j\omega}) = (2\cos\omega)X(e^{-j\omega}) \quad (b) X_2(e^{j\omega}) = \mathcal{R}_\omega\{X(e^{j\omega})\}$$

$$(c) X_3(e^{j\omega}) = -\frac{d^2}{d\omega^2}X(e^{j\omega}) - 2j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})$$

5.7. (a) 虚, 都不是 (b) 实, 奇 (c) 实, 都不是

$$5.8. x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq -2 \\ n+3, & -1 \leq n \leq 1 \\ 4, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$5.9. x[n] = -\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n]$$

$$5.10. A = 2$$

$$5.11. \alpha = \pi$$

$$5.12. \frac{\pi}{2} \leq |\omega_c| \leq \pi$$

$$5.13. h_2[n] = -2(\frac{1}{4})^n u[n]$$

$$5.14. h[n] = \frac{16}{17}\delta[n] - \frac{1}{17}\delta[n-2]$$

$$5.15. \omega_c = 3\pi/4$$

$$5.16. (a) \alpha = \frac{1}{4} \quad (b) N = 4 \quad (c) \text{否}$$

$$5.17. b_k = \frac{1}{2}(-1)^k$$

$$5.18. a_k = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{|k|}$$

$$5.19. (a) H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega})}$$

$$(b) h[n] = \frac{3}{5}(\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{2}{5}(-\frac{1}{3})^n u[n]$$

$$5.20. (a) H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{4}{5}e^{-j\omega}}{1 - \frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

$$(b) y[n] - \frac{4}{5}y[n-1] = \frac{4}{5}x[n-1]$$

第 6 章 答案

$$6.1. (a) A = |H(j\omega_0)| \quad (b) t_0 = -\frac{\Im H(j\omega_0)}{\omega_0}$$

$$6.2. \Im H(e^{j\omega_0}) = -n_0(\omega_0) + 2\pi k \quad \text{对某整数 } k$$

$$6.3. (a) A = 1 \quad (b) \tau(\omega) > 0, \omega > 0$$

$$6.4. (a) 2\cos(\frac{\pi}{2}n - \pi) \quad (b) 2\sin(\frac{7\pi}{2}n - \frac{3\pi}{4})$$

$$6.5. (a) g(t) = 2\cos(2\omega_c t) \quad (b) \text{更集中}$$

$$6.6. (a) g[n] = (-1)^n \quad (b) \text{更集中}$$

$$6.7. (a) 1\,000\text{Hz} \text{ 和 } 3\,000\text{Hz} \quad (b) 800\text{Hz} \text{ 和 } 3\,200\text{Hz}$$

$$6.8. \pi - \omega_p \leq \omega \leq \pi$$

6.9. 终值 = 2/5, $t_0 = 2/5$ s

$$6.10. (a) 20\log_{10}|H(j\omega)| \approx \begin{cases} -20 & \omega \ll 0.1 \\ 20\log_{10}(\omega) & 0.1 \ll \omega \ll 40 \\ 32, & \omega \gg 40 \end{cases}$$

$$(b) 20\log_{10}|H(j\omega)| \approx \begin{cases} 20 & \omega \ll 0.2 \\ -20\log_{10}(\omega) + 6 & 0.2 \ll \omega \ll 50 \\ -28, & \omega \gg 50 \end{cases}$$

$$6.11. (a) 20\log_{10}|H(j\omega)| \approx \begin{cases} 20 & \omega \ll 0.5 \\ -20\log_{10}(\omega) + 14 & 0.5 \ll \omega \ll 50 \\ -40\log_{10}(\omega) + 48, & \omega \gg 50 \end{cases}$$

$$(b) 20\log_{10}|H(j\omega)| \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll 1 \\ -40\log_{10}\omega & 1 \ll \omega \ll 50 \\ -20\log_{10}(\omega) - 34, & \omega \gg 50 \end{cases}$$

$$6.12. H_2(j\omega) = \frac{0.01(j\omega + 40)}{(j\omega + 1)(j\omega + 8)}$$

6.13. (a) 不唯一 (b) 唯一

$$6.14. H_I(j\omega) = 0.2 \times 10^{-4} \frac{(j\omega + 50)(j\omega + 10)}{(j\omega + 0.2)^2}$$

6.15. (a) 临界阻尼 (b) 欠阻尼
(c) 过阻尼 (d) 欠阻尼

$$6.16. y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \frac{3}{2}x[n]$$

6.17. (a) 振荡 (b) 非振荡

6.18. 否

$$6.19. R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$6.20. \tau(\omega) = 2$$

第7章 答案

7.1. $|\omega| > 5000\pi$

7.2. (a) 和 (c)

7.3. (a) 8000π (b) 8000π (c) 16000π

7.4. (a) ω_0 (b) ω_0 (c) $2\omega_0$ (d) $3\omega_0$

7.5. $|H(j\omega)| = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$, 其中 $\frac{\omega_0}{2} < \omega_c < \frac{2\pi}{T} - \frac{\omega_0}{2}$, $\nexists H(j\omega) = 0$

$$7.6. T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

$$7.7. H(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega T} \times e^{j(\omega T/2)}$$

7.8. (a) 是

$$(b) g(t) = \sum_{k=-4}^4 a_k e^{ikt}, \text{ 其中 } a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ -j\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, & 1 \leq k \leq 4 \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{-k+1}, & -4 \leq k \leq -1 \end{cases}$$

7.9. $\omega_0 = 50\pi$

7.10. (a) 错 (b) 对 (c) 对

7.11. (a) $X_c(j\omega)$ 为实

(b) $\text{Max}\{|X_c(j\omega)|\} = 0.5 \times 10^{-3}$

(c) $X_c(j\omega) = 0, |\omega| \geq 1500\pi$

(d) $X_c(j\omega) = X_c(j(\omega - 2000\pi)), 0 \leq \omega \leq 2000\pi$

7.12. $|\omega| \geq 750\pi$

7.13. $h[n] = \delta[n - 2]$

$$7.14. h[n] = -\frac{\sin[\pi(n - \frac{1}{2})]}{T\pi(n - \frac{1}{2})^2}$$

7.15. $N = 2$

$$7.16. x[n] = 4 \left(\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} \right)^2$$

7.17. 理想低通滤波器，截止频率为 $\pi/2$ ，通带增益为 1

7.18. 理想低通滤波器，截止频率为 $\pi/4$ ，通带增益为 2

$$7.19. (a) y[n] = \frac{\sin(5\omega_1 n/3)}{5\pi n} \quad (b) y[n] = \frac{1}{5} \delta[n]$$

7.20. (a) 是 (b) 否

第 8 章 答案

8.1. $m(t) = \frac{1}{2} e^{-j\omega_c t}$

8.2. (a) 没必要限制 (b) $|\omega_c| > 1000\pi$

8.3. $y(t) = 0$

8.4. $y(t) = \sin 200\pi t$

8.5. $m = \frac{3}{2\pi}$

8.6. $A = 4$

8.7. $\omega_0 = 2\omega_c, A = 2$

8.8. (a) 是 (b) 是, $x(t) = \{y(t)\sin\omega_c t\} * \frac{2\sin\omega_c t}{\pi t}$

8.9. (a) $|\omega| > 2\omega_c$ (b) $\omega_0 = \omega_c, A = 2$

8.10. (a) $X(j\omega) = 0, |\omega| \geq 1000\pi$ (b) $\omega_c = 1000\pi, A = 4$

8.11. (a) $\frac{\omega_c}{2} \leq |\omega| \leq \frac{3\omega_c}{2}$, 增益 = 1 (b) $A = 2|a_1|, \phi = \angle a_1$

8.12. $\Delta = 0.5 \times 10^{-4}$

8.13. (a) $p(0) = \frac{1}{T_1}$ (b) $p(kT_1) = 0$

8.14. $Y(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_c) - \frac{m\pi}{2j}\delta(\omega - \omega_c - \omega_m) - \frac{m\pi}{2j}\delta(\omega - \omega_c + \omega_m)$

8.15. $\omega_0 = 0$ 和 $\omega_0 = \pi$

8.16. $0 \leq \omega \leq \frac{3\pi}{8}$ 和 $\frac{5\pi}{8} \leq \omega \leq \pi$

8.17. $0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{2}$

$$8.18. H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & 0 < \omega \leq \frac{\pi}{4} \\ -j, & -\frac{\pi}{4} \leq \omega < 0 \end{cases}$$

8.19. $N = 20$

$$8.20. p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k]$$

第9章 答案

- 9.1. (a) $\sigma > -5$ (b) $\sigma < -5$ (c) $-\infty \leq \sigma \leq \infty$
 (d) 没有 σ 值 (e) $|\sigma| < 5$ (f) $\sigma < 5$

$$9.2. (a) \frac{e^{-(s+5)}}{s+5}, \Re\{s\} > -5 \quad (b) A = -1, t_0 = -1, \Re\{s\} < -5$$

9.3. $\Re\{\beta\} = 3$, $\Im\{\beta\}$ 任意

9.4. $1+2j, 1-2j, \Re\{s\} < 1$

9.5. (a) 1,1 (b) 0,1 (c) 1,0

9.6. (a) 否 (b) 是 (c) 否 (d) 是

9.7. 4

9.8. 双边

$$9.9. x(t) = 4e^{-4t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$$

9.10. (a) 低通 (b) 带通 (c) 高通

$$9.11. |X(j\omega)| = 1$$

9.12. (a) 不一致 (b) 一致 (c) 一致

$$9.13. \alpha = -1, \beta = \frac{1}{2}$$

$$9.14. X(s) = 1/[4(s^2 - \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4})(s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4})], -\frac{\sqrt{2}}{4} < \Re\{s\} < \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$9.15. X(s) = \frac{s}{s^2 + 4}; \Re\{s\} > 0, Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}; \Re\{s\} > 0$$

9.16. (a) 2 (b) $\alpha > 0$

$$9.17. \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 10 \frac{dy(t)}{dt} + 16y(t) = 12x(t) + 3 \frac{dx(t)}{dt}$$

$$9.18. (a) H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \Re\{s\} > -\frac{1}{2}$$

(b) 低通

$$(c) H(s) = \frac{1}{s^2 + 10^{-3}s + 1}, \Re\{s\} > -0.0005$$

(d) 带通

$$9.19. (a) \frac{1}{s+2}, \Re\{s\} > -2$$

$$(b) 1 + \frac{e^{-6}}{s+2}, \Re\{s\} > -2$$

$$(c) \frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+2}, \Re\{s\} > -2$$

$$9.20. (a) e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$(b) e^{-t}u(t)$$

$$(c) 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

第 10 章 答案

10.1. (a) $|z| > \frac{1}{2}$ (b) $|z| < \frac{1}{2}$ (c) $|z| > 1$ (d) $\frac{1}{2} < |z| < 2$

10.2. $X(z) = \frac{1}{125} \frac{z^{-3}}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}$; $|z| > \frac{1}{5}$

10.3. $|\alpha| = 2$, n_0 任意

10.4. 极点在 $z = \frac{1}{3} e^{\pm j\pi/4}$, ROC: $|z| < \frac{1}{3}$

10.5. (a) 1,1 (b) 2,0 (c) 1,2

10.6. (a) 否 (b) 否 (c) 是 (d) 是

10.7. 3

10.8. 双边

10.9. $x[n] = \frac{2}{9}u[n] + \frac{7}{9}(-2)^n u[n]$

10.10. (a) $x[0] = 1$, $x[1] = \frac{2}{3}$, $x[2] = -\frac{2}{9}$

(b) $x[0] = 3$, $x[-1] = -6$, $x[-2] = 18$

10.11. $x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$

10.12. (a) 高通 (b) 低通 (c) 带通

10.13. (a) $G(z) = 1 - z^{-6}$; $|z| > 0$ (b) $X(z) = \frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}}$; $|z| > 0$

10.14. (a) $n_0 = 2$ (b) $G(z) = \left(\frac{z^{-1} - z^{-7}}{1 - z^{-1}} \right)^2$

10.15. $(\frac{1}{3})^n u[n]$ 和 $(-\frac{1}{3})^n u[n]$

10.16. (a) 非因果 (b) 因果 (c) 非因果

10.17. (a) 是 (b) 是

10.18. (a) $y[n] - \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] - 6x[n-1] + 8x[n-2]$
 (b) 是

10.19. (a) $X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{4}$

(b) $X_2(z) = 2$, 全部 z

(c) $X_3(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{2}$

10.20. (a) $-(-\frac{1}{2})^n u[n]$

(b) $\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^n u[n]$

(c) $-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^n u[n]$

第 11 章 答案

11.1. $H_0(z) + \frac{H_1(z)}{1 + G(z)H_1(z)}$

$$11.2. \frac{H_1(s)H_2(s)}{1+H_1(s)G_1(s)+H_1(s)H_2(s)G_2(s)}$$

$$11.3. b < -1$$

$$11.4. G(s) = \frac{1}{s}$$

$$11.5. -\frac{5}{2} < b < \frac{3}{2}$$

11.6. FIR

$$11.7. K > -6$$

$$11.8. -3 < k < 0$$

11.9. 否，根轨迹在实轴上

11.10. $s = -1$ 为二阶极点， $s = 1$ 为二阶零点

$$11.11. 0 < k < \frac{5}{4}$$

11.12. 在实轴上零点和极点交替

11.13. 对所有的 k 不稳定

$$11.14. (a) 0 \quad (b) 1$$

$$11.15. K > -1$$

$$11.16. K > -1$$

$$11.17. -1 < K < 4$$

$$11.18. -1 < K < 1$$

11.19. 不稳定

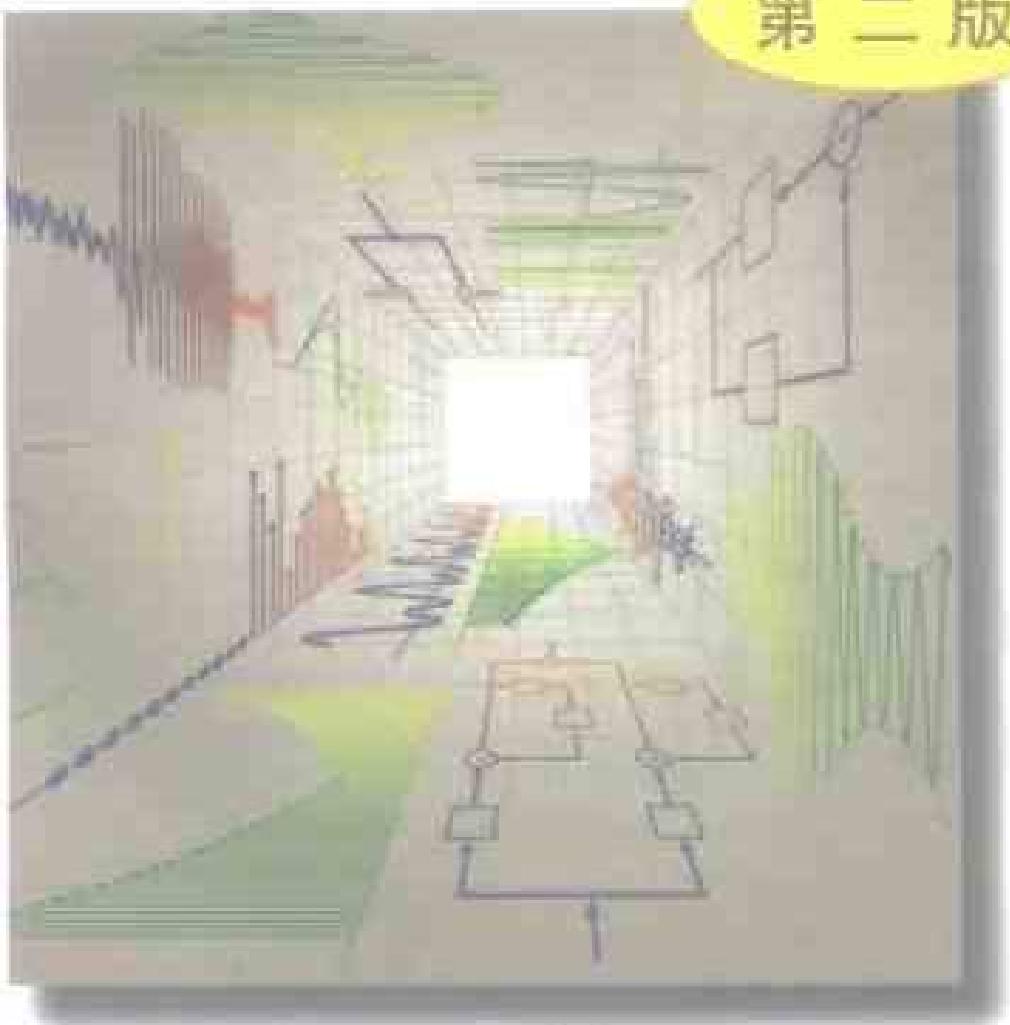
11.20. 增益裕度无限，相位裕度为 $2\tan^{-1}\sqrt{2}$

信号与系统

SIGNALS & SYSTEMS

SECOND EDITION

第二版



ALAN V. OPPENHEIM

ALAN S. WILLSKY

WITH S. HAHID HAWAB

刘树棠 译

信号与系统
第二版
Oppenheim, Willsky, Hamid
著
刘树棠 译

西安交通大学出版社

Prentice Hall