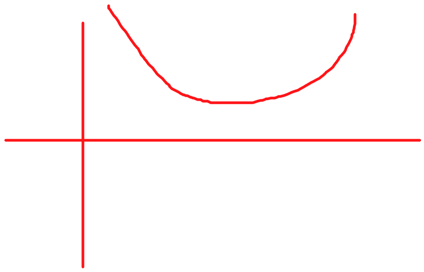
凸函数定义:
上图为凸,也叫下凸函数.



定义:

凸函数是一个定义在某个向量空间的凸子集C上的实值函数f，而且对于凸子集C中任意两个向量 x_1 、 x_2 有 $f\left((x_1+x_2)/2\right) \le \left(f(x_1)+f(x_2)\right)/2$ 成立。

于是容易得出对于任意（0,1）中有理数 λ ，有 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 如果f连续，那么 λ 可以改变成区间（0,1）中的任意实数。

证：

① 先证 $f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \le \frac{1}{4}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_4)\right)$

② 从而 λ 取 $\frac{m}{2^n}$ 时候,结论成立.

③ 反证法. 如果存在一个lamda有理数，和x1,x2 使得结论不成立.那么有

$\exists \lambda = \frac{p}{q}$ s.t. $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

由于f连续性，一定存在 $\lambda' = \frac{m}{2^n}$ 与 λ 接近 从而矛盾.证毕.

如果不假设函数有连续性如何证明???????????
貌似证明不了了.

KL散度:

$$D_{KL}(Q||P)=\sum_{i=1}^{n}P_i\log\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)$$

证明这个数值大于0.

$$\sum_{i=1}^{n}P_i\log\frac{P_i}{Q_i}=-\sum P_i\log\frac{Q_i}{P_i}$$

log函数的jensen不等式 $\longrightarrow$ $\geq -\log\left(\sum Q_i\right)$

$$=0$$

VAE公式推导　　　　q是N(μ,σ),　p是N(0,1)

$$D_{KL}(q_\phi(z|x)||p_\theta(z))=\int q(z)log\frac{q(z)}{p(z)}dz$$
$$=\int q(z)((logq(z))-logp(z))dz$$
$$=\int q(z)(log(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}})-log(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(z)^2}{2}})$$
$$=\int q(z)(log\frac{1}{\sigma})dz+\int\frac{z^2}{2}q(z)dz-\int\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}q(z)$$

利用方差的定义

$$=(log\frac{1}{\sigma})+\int\frac{1}{2}(z-\mu+\mu)^2q(z)dz-\frac{1}{2}$$

$$=(log\frac{1}{\sigma})+\frac{1}{2}(\int(z-\mu)^2q(z)dz+\int\mu^2q(z)dz+2\int(z-\mu)(\mu)dz)-\frac{1}{2}$$

q(z)

观察最后一项积分项，是求期望的公式，因此结果为0

综上可以得到结果

$D_{KL}(q_\phi(z|x)||p_\theta(z))$ =$(log\frac{1}{\sigma})+\frac{\sigma^2+\mu^2}{2}-\frac{1}{2}$

利用期望和方差的定义