网络流模型选讲

刘昀

天津市南开中学

2018年1月10日

自我介绍：

自我介绍：

- leoly

自我介绍：

- leoly
- 来自弱省弱校的蒟蒻

自我介绍：

- leoly
- 来自弱省弱校的蒟蒻
- 集训队最弱选手

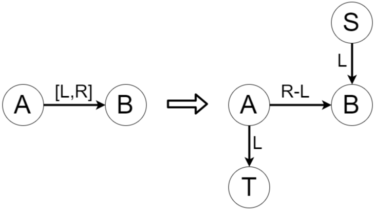
网络流算法

网络流算法

- Dinic
- 当前弧优化
- SAP

无源汇上下界可行流

无源汇上下界可行流

- 新建超级源点S和超级汇点T，去掉下界
- 

- 求S到T的最大流，若S的出边和T的入边均满流则说明问题有解
- 根据残量网络构造一组合法解

有源汇上下界最大流

有源汇上下界最大流

- 设源点为S，汇点为T，新建超级源点SS和超级汇点TT
- S和T作为源点和汇点，并不满足总入流=总出流的平衡条件，故新建一条T到S容量为inf的边使它们平衡
- 求解一组可行流，此时T到S的边的流量即为这组可行流的大小，我们的目的是最大化它
- 此时S到T的最大流即为答案

有源汇上下界最小流

有源汇上下界最小流

【方法一】二分答案+有源汇上下界可行流

有源汇上下界最小流

【方法一】二分答案+有源汇上下界可行流

【方法二】

- 参考有源汇上下界最大流的做法，我们想要最小化T到S的边的流量
- SS到TT的流量可分成两个部分：第一个部分经过了T到S的边，第二个部分不经过
- 问题转化为最大化第二个部分的流量

有源汇上下界最小流

【方法一】二分答案+有源汇上下界可行流

【方法二】

- 参考有源汇上下界最大流的做法，我们想要最小化T到S的边的流量
- SS到TT的流量可分成两个部分：第一个部分经过了T到S的边，第二个部分不经过
- 问题转化为最大化第二个部分的流量
- 不加T到S的边，求解SS到TT的最大流即可

有源汇上下界最小流

【方法一】二分答案+有源汇上下界可行流

【方法二】

- 参考有源汇上下界最大流的做法，我们想要最小化T到S的边的流量
- SS到TT的流量可分成两个部分：第一个部分经过了T到S的边，第二个部分不经过
- 问题转化为最大化第二个部分的流量
- 不加T到S的边，求解SS到TT的最大流即可
- 若问题可能无解，则还需一次有源汇上下界可行流验证

你有m个猪圈，第i个猪圈初始有A_i头猪。

依次到来n个顾客，每个顾客会指定几个猪圈，你可以先任意调换这些猪圈中的猪，再卖给这个顾客最多B_i头猪。

最大化总卖猪数量。

$n \leq 100$，$m \leq 1000$

做法很多。

调换猪可以视为把这些猪寄存在这个顾客手中。

给出一个$n \times m$的矩阵A，求一个$n \times m$的值域为$[L, R]$的矩阵B，最小化下式的值：

$$max\begin{cases}\max\limits_{1 \le j \le m}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}(A_{ij}-B_{ij})\right|\right\}\\ \max\limits_{1 \le i \le n}\left\{\left|\sum_{j=1}^{m}(A_{ij}-B_{ij})\right|\right\}\end{cases}$$

$n \le 200$，$m \le 200$

二分答案，问题转化为判定性问题。

二分答案，问题转化为判定性问题。

对B矩阵每行每列的和均有一个区间限制。

二分答案，问题转化为判定性问题。

对B矩阵每行每列的和均有一个区间限制。

行列建点，有源汇上下界可行流判定。

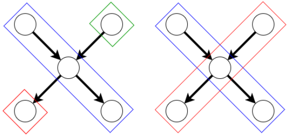
如何输出方案？

如何输出方案？

对于图中每条边，实际流量=该边下界+当前流量。

这类问题通常是用一些路径去覆盖一张有向图。

- *DAG*最小路径覆盖，*DAG*最小链覆盖
- 利用度数限制进行二分图建模
- 也可使用上下界最小流直接解决
- 可以与*Dilworth*定理相结合



在n个柱子上依次放入编号为$1, 2, 3, \ldots$的球。

- 每次只能在柱子最上面放球
- 在同一个柱子中，任何两个相邻球编号之和为完全平方数

求n个柱子上最多能放多少个球。

$n \leq 55$

二分答案或枚举答案。

计算至少需要多少个柱子才能放入所有球。

二分答案或枚举答案。

计算至少需要多少个柱子才能放入所有球。

按两个球能否相邻的关系建图。

因为放入的球编号递增，故此图为*DAG*。

二分答案或枚举答案。

计算至少需要多少个柱子才能放入所有球。

按两个球能否相邻的关系建图。

因为放入的球编号递增，故此图为DAG。

每一个柱子相当于一条路径，故问题转化为DAG最小路径覆盖。

给出一个n个点m条有向边的DAG，请你选出尽可能多的点，使得这些点两两互不可达。

给出一种可能的最优解，并判断每个点是否可能出现于最优解中。

$n \leq 100$，$m \leq 1000$

*Dilworth*定理：

*Dilworth*定理：

- 偏序关系：自反性，反对称性，传递性

*Dilworth*定理：

- 偏序关系：自反性，反对称性，传递性
- 链：任意两个不同元素可比；反链：任意两个不同元素不可比

*Dilworth*定理：

- 偏序关系：自反性，反对称性，传递性
- 链：任意两个不同元素可比；反链：任意两个不同元素不可比
- 令P是一个有限偏序集，P中元素划分为不相交链的最小个数$=P$的一个反链所包含的元素的最大个数

对于DAG，显然二元关系“可达”是偏序关系。

对于DAG，显然二元关系“可达”是偏序关系。

故可以直接应用$Dilworth$定理。

对于DAG，显然二元关系“可达”是偏序关系。

故可以直接应用$Dilworth$定理。

DAG最小链覆盖=最长反链。

回到本题，问题为求解最长反链。

回到本题，问题为求解最长反链。

转化为求解最小链覆盖。

回到本题，问题为求解最长反链。

转化为求解最小链覆盖。

变成了我们熟悉的模型。

如何处理后两问？

如何处理后两问？

一种朴素做法：选择一个点，把和它可比的点都删掉，求解剩余图的最长反链。

如何处理后两问？

一种朴素做法：选择一个点，把和它可比的点都删掉，求解剩余图的最长反链。

如果大家有更好的做法，欢迎课后讨论。

一个$n \times m$的矩阵，每个点都有经过次数的下限。

一条路径从$(1,1)$走到(n,m)，路径中的点的行列坐标均满足单调不减。

最小化路径条数。

$n \leq 1000$，$m \leq 1000$

暴力怎么做？

暴力怎么做？

把矩阵看成DAG。

暴力怎么做？

把矩阵看成DAG。

最小链覆盖模型比较显然。

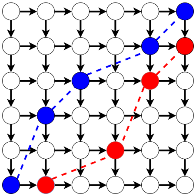
有了上一题的基础，此题应该不难解决。

有了上一题的基础，此题应该不难解决。

还是考虑*Dilworth*定理，把问题转化成求解最长反链。

有了上一题的基础，此题应该不难解决。

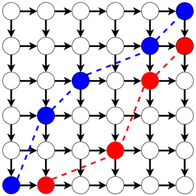
还是考虑*Dilworth*定理，把问题转化成求解最长反链。



若两个点不可比，当且仅当一个在另一个的右上方。

有了上一题的基础，此题应该不难解决。

还是考虑*Dilworth*定理，把问题转化成求解最长反链。



若两个点不可比，当且仅当一个在另一个的右上方。

从左下到右上*DP*即可。

这类问题通常是图随时间改变，最小化最大时间。

- 二分答案
- 枚举答案，把时间当成一个维度，建出分层图

有n个太空站位于地球和月球之间，有m艘太空船穿梭于其中。

每个太空站可以同时容纳无限多的人，但第i艘太空船只能同时容纳H_i个人。

每艘太空船将周期性地停靠一系列的太空站,每次移动耗时均为1。

初始地球上有k个人，最小化让所有人转移到月球的时间。

$m \le 13$，$n \le 20$，$k \le 50$

容易想到把每个人都看成一条增广路。

容易想到把每个人都看成一条增广路。

二分答案，判定可行性。

容易想到把每个人都看成一条增广路。

二分答案，判定可行性。

按时间建出分层图，相邻两层之间连边，最大流验证。

容易想到把每个人都看成一条增广路。

二分答案，判定可行性。

按时间建出分层图，相邻两层之间连边，最大流验证。

也可枚举答案，每次在残余网络中增加一层。

一个$n \times m$的矩形，每个格子是空地、门、墙中的一种，初始每个空地上都有一个人。

所有人要紧急疏散，每个人每一秒可以向上下左右中某个方向移动一格。

每块空地同一时刻可以容纳任意多人，每个门同一时刻最多容纳一人。

最小化让所有人安全撤离的时间。

$n \leq 20$，$m \leq 20$

我们似乎不能直接建模求解最短时间。

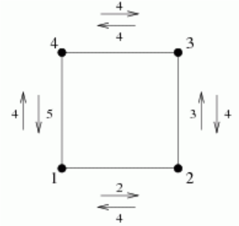
我们似乎不能直接建模求解最短时间。

和上一题类似，枚举答案，按时间分层建图。

这类问题通常会限制路径为若干回路。

利用度数限制建模。

给出一个n点m边无向连通图，每条边正反向分别有一个权值。



请你找出一个欧拉回路，使得回路中最大权值尽可能小。

首先二分答案。

首先二分答案。

【混连图欧拉回路】：给每一条无向边定向，判断能否形成欧拉回路。

形成欧拉回路的充要条件：

形成欧拉回路的充要条件:

- 弱连通图
- 每个点满足出度=入度

无向边的处理：将其视作有向边，并保留一次反向的机会。

无向边的处理：将其视作有向边，并保留一次反向的机会。

设w_i=第i个点的出度-入度，把边$x->y$反向会使得$w_x-=2$，$w_y+=2$。

无向边的处理：将其视作有向边，并保留一次反向的机会。

设w_i=第i个点的出度-入度，把边$x->y$反向会使得$w_x-=2$，$w_y+=2$。

我们的目标是使得每个点的$w=0$。

无向边的处理：将其视作有向边，并保留一次反向的机会。

设w_i=第i个点的出度-入度，把边$x->y$反向会使得$w_x-=2$，$w_y+=2$。

我们的目标是使得每个点的$w=0$。

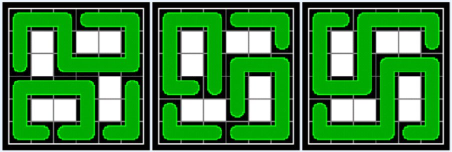
把点按w的正负分成两个集合，即转化成最大流问题。

给出一个$n \times m$的网格，有一些位置是障碍。

蛇是一条至少包含2个格子的折线，蛇的任何部分之间均不能重叠，每条蛇必须满足下列条件之一：

- 两个端点所在格子在网格的边界
- 蛇构成一个环

用一些蛇覆盖网格，要求每个非障碍格恰好被一条蛇覆盖。



最小化不构成环的蛇的数量。

$n \leq 12$， $m \leq 12$

如何把路径限制成环？

如何把路径限制成环？

从度数入手，环− >度数− >容量限制。

如何把路径限制成环？

从度数入手，环− >度数− >容量限制。

边界点度数为1或2，其余点度数为2，转化成容量限制。

如何把路径限制成环？

从度数入手，环− >度数− >容量限制。

边界点度数为1或2，其余点度数为2，转化成容量限制。

如何判断解的存在性？

如何把路径限制成环？

从度数入手，环− >度数− >容量限制。

边界点度数为1或2，其余点度数为2，转化成容量限制。

如何判断解的存在性？

黑白染色，判断能否满足每个点的度数限制，即是否存在可行流。

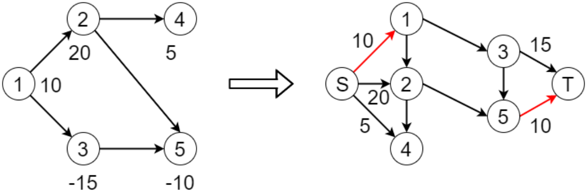
对于边界点，每多出一对点度数为1，则答案+1。

对于边界点，每多出一对点度数为1，则答案+1。

求解有源汇上下界最大流即可。

这类问题通常存在一种依赖关系：如果选了x就必须选择y。

按权值正负建模，和S相连的点视为选择。



若依赖关系成环，我们无需强连通缩点。

推荐题目：

- 【bzoj2127】happiness
- 【2009国家集训队】人员雇佣
- 【NOI2009】植物大战僵尸
- 【SHOI2017】寿司餐厅
- 【CQOI2017】老C的方块

给出$n \times n$的矩阵B和$1 \times n$的矩阵C。

求出一个$1 \times n$的01矩阵A。

最大化$D = (A \times B - C) \times A^T$。

$n \leq 500$

$$D = A \times B \times A^T - C \times A^T。$$

$D = A \times B \times A^T - C \times A^T$。

由于A是01矩阵，不妨视为选或不选。

$D = A \times B \times A^T - C \times A^T$。

由于A是01矩阵，不妨视为选或不选。

n个物品，选第i个物品花费C_i，同时选第i个和第j个物品获得B_{ij}的收益，最大化总收益-总代价。

把“同时选”看成依赖关系，即每个条件依赖于两个物品。

把“同时选”看成依赖关系，即每个条件依赖于两个物品。

条件建点，每个条件向两个物品连有向边。

最大权闭合子图即为答案。

已知n个01变量，你可以花费v_i改变第i个变量的取值。

有m个条件，每个条件指定k_i个变量，要求它们的取值均为某个特定值，满足条件可以获得w_i的收益。

对于某些条件，若没能满足则会额外付出g的代价。

最大化总收益-总代价。

$n \le 10000$，$m \le 2000$，$k_i \le 10$

上一题的加强版。

上一题的加强版。

和S相连的变量取值为0，和T相连的变量取值为1。

上一题的加强版。

和S相连的变量取值为0，和T相连的变量取值为1。

同样是条件建点：

- 对于要求取值均为0的条件，不割掉这个条件当且仅当指定的点均与S相连
- 对于要求取值均为1的条件，不割掉这个条件当且仅当指定的点均与T相连

上一题的加强版。

和S相连的变量取值为0，和T相连的变量取值为1。

同样是条件建点：

- 对于要求取值均为0的条件，不割掉这个条件当且仅当指定的点均与S相连
- 对于要求取值均为1的条件，不割掉这个条件当且仅当指定的点均与T相连

转化为最大权闭合子图。

n个工作，m个机器，完成每个工作都有收益。

每个工作依赖若干机器，机器可以买，也可以租。

最大化总收益-总代价。

$n \leq 1200$，$m \leq 1200$

若不考虑租用机器，则最大权闭合子图模型显然。

若不考虑租用机器，则最大权闭合子图模型显然。

租用机器改变了什么？

若不考虑租用机器，则最大权闭合子图模型显然。

租用机器改变了什么？

考虑每个工作的可能状态：

- ①不做工作
- ②做工作，租用机器
- ③做工作，购买机器

若不考虑租用机器，则最大权闭合子图模型显然。

租用机器改变了什么？

考虑每个工作的可能状态：

- ①不做工作
- ②做工作，租用机器
- ③做工作，购买机器

把这3种状态对应成一条$S->T$的增广路的3个部分，割掉的那一部分表示我们选择这种状态。

若不考虑租用机器，则最大权闭合子图模型显然。

租用机器改变了什么？

考虑每个工作的可能状态：

- ①不做工作
- ②做工作，租用机器
- ③做工作，购买机器

把这3种状态对应成一条$S->T$的增广路的3个部分，割掉的那一部分表示我们选择这种状态。

转化为最小割。

$n \times m$的网格图，控制每个点都要付出一定代价。

若一个点被控制，或它上下左右4个点都被控制，则视为它被选择，获得一定收益。

最大化总收益-总代价。

【bzoj3774】最优选择

上一题的加强版。

【bzoj3774】最优选择

上一题的加强版。

最大权闭合子图可以处理“与”的条件，但难处理“或”的条件。

上一题的加强版。

最大权闭合子图可以处理“与”的条件，但难处理“或”的条件。

还是考虑每个点的状态：

- ①不选择这个点，放弃收益
- ②选择这个点，控制它自己
- ③选择这个点，控制它上下左右4个点

上一题的加强版。

最大权闭合子图可以处理“与”的条件，但难处理“或”的条件。

还是考虑每个点的状态：

- ①不选择这个点，放弃收益
- ②选择这个点，控制它自己
- ③选择这个点，控制它上下左右4个点

同样考虑把这3种状态对应成$S->T$的增广路的3个部分。

上一题的加强版。

最大权闭合子图可以处理“与”的条件，但难处理“或”的条件。

还是考虑每个点的状态：

- ①不选择这个点，放弃收益
- ②选择这个点，控制它自己
- ③选择这个点，控制它上下左右4个点

同样考虑把这3种状态对应成$S->T$的增广路的3个部分。

黑白染色后把状态按②$->$①$->$③的顺序依次对应到增广路中即可。

上一题的加强版。

最大权闭合子图可以处理“与”的条件，但难处理“或”的条件。

还是考虑每个点的状态：

- ①不选择这个点，放弃收益
- ②选择这个点，控制它自己
- ③选择这个点，控制它上下左右4个点

同样考虑把这3种状态对应成$S->T$的增广路的3个部分。

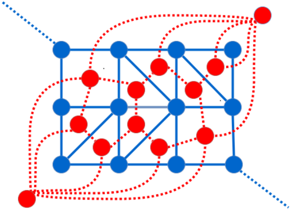
黑白染色后把状态按②$->$①$->$③的顺序依次对应到增广路中即可。

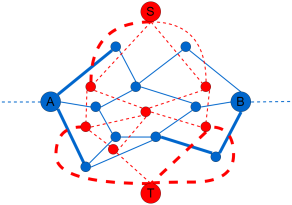
同样是最小割。

这类问题通常都有平面图的性质。

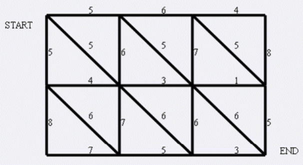
平面图和对偶图可以互相转化。

平面图最小割－ >对偶图最短路。





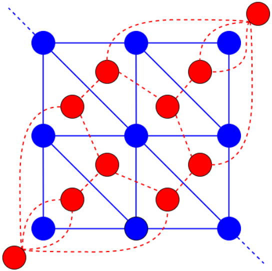
给出$n \times m$的如下图所示的网格：



求$START$到END的最小割。

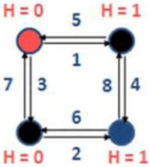
$n \leq 1000$，$m \leq 1000$

由于是平面图，可以转化成对偶图最短路。



$n \times n$的网格，已知每条边双向的通过人数。

左上角路口海拔为0，右下角路口海拔为1，其它路口的海拔可以任意取值。



一个人向上爬h的高度需要消耗h的体力，向下爬不消耗体力。

最小化所有人消耗的体力之和。

$n \leq 500$

一些结论:

一些结论:

- 每个点的海拔非0即1
- 整张图被分成了两个同海拔连通块

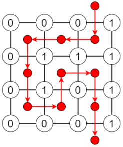
一些结论：

- 每个点的海拔非0即1
- 整张图被分成了两个同海拔连通块

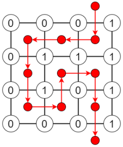
最小割－ >对偶图最短路。

与上题不同，本题对边的方向有要求。

与上题不同，本题对边的方向有要求。

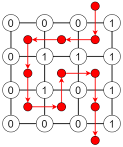


与上题不同，本题对边的方向有要求。

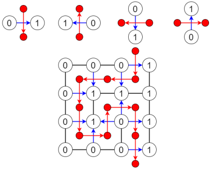


如上图所示，对于对偶图中每一条有向边，它的右侧是0–连通块，左侧是1–连通块。

与上题不同，本题对边的方向有要求。



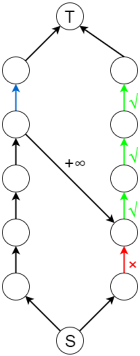
如上图所示，对于对偶图中每一条有向边，它的右侧是0−连通块，左侧是1−连通块。



这类问题是一类最小割问题。

每个点有若干种选择，编号为连续整数。

有一些限制，两个选择编号相差不超过d。



$p \times q$的网格，每个位置有r种选择，编号为1到r，每种选择都有对应代价。

限制每个点和它上下左右相邻的4个点的选择编号相差均不能超过d。

最小化总代价。

$p \leq 40$，$q \leq 40$，$r \leq 40$

模型的直接应用。

模型的直接应用。

对网格中的每个点建出一条$r+1$个点的链，中间的r条边顺次对应r种选择的代价。

模型的直接应用。

对网格中的每个点建出一条$r+1$个点的链，中间的r条边顺次对应r种选择的代价。

用$+\infty$边来满足距离的限制即可。

这个模型十分灵活，举一个例子：

$p \times q$的网格，每个位置有r种选择，编号为1到r，每种选择都有对应收益（可能为负）。

限制每个点和它上下左右相邻的4个点的选择编号之和不能超过d。

最大化总收益。

$p \leq 40$，$q \leq 40$，$r \leq 40$

类似切糕，但现在有3个问题：权值可能为负、最大化权值和、限制编号之和。

类似切糕，但现在有3个问题：权值可能为负、最大化权值和、限制编号之和。

分别处理：

- 负$-$ $>$正：给所有权值加上一个较大的数x
- 最大化$-$ $>$最小化：把权值w改成$x-w$，最大化权值$-$ $>$最小化差值
- 和$-$ $>$差：对网格黑白染色，黑色点编号从1到r构建链，白色点编号从r到1构建链，和的限制$-$ $>$差的限制

类似切糕，但现在有3个问题：权值可能为负、最大化权值和、限制编号之和。

分别处理：

- 负− >正：给所有权值加上一个较大的数x
- 最大化− >最小化：把权值w改成$x - w$，最大化权值− >最小化差值
- 和− >差：对网格黑白染色，黑色点编号从1到r构建链，白色点编号从r到1构建链，和的限制− >差的限制

至此问题转化为切糕。

平面中有n个黑点和m个白点，已知所有黑点的坐标。

第i个黑点和第j个白点之间有权值A_{ij}，第i个白点和第j个白点之间有权值B_{ij}。

两个点之间的代价=它们之间的权值×它们的曼哈顿距离。

确定所有白点的坐标，最小化总代价。

由于是曼哈顿距离，所以横纵坐标互不影响，可以分开考虑，以下只考虑横坐标。

由于是曼哈顿距离，所以横纵坐标互不影响，可以分开考虑，以下只考虑横坐标。

贪心地发现：所有白点的横坐标必然与某个黑点相同。

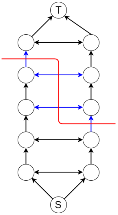
由于是曼哈顿距离，所以横纵坐标互不影响，可以分开考虑，以下只考虑横坐标。

贪心地发现：所有白点的横坐标必然与某个黑点相同。

m个白点，每个白点有n种选择，每种选择都有相应代价，且任意两个白点之间也会有代价，这个代价和它们的选择编号差距密切相关。

模型的变种。

处理白点之间的代价：给限制距离的边增设权值。



这类问题通常和二分图完备匹配有关。

*Hall*定理：

设二分图$G = (V1, V2, E)$中$\|V1\| = m <= \|V2\| = n$，G中存在完备匹配当且仅当$V1$中任意$k(1 \leq k \leq m)$个点至少与$V2$中的k个点相邻。

在*OI*中，*Hall*定理通常会作为一个工具与其它算法相结合。

二分图G中两个点集各包含n个点。

找出k个完备匹配，使其互不相交。

$n \leq 100$

$K-$正则二分图：每个点的度数均为K。

$K-$正则二分图：每个点的度数均为K。

根据$Hall$定理，我们容易推出：

若一个二分图是$K-$正则二分图，则其存在K个不相交的的完备匹配。

$K-$正则二分图：每个点的度数均为K。

根据$Hall$定理，我们容易推出：

若一个二分图是$K-$正则二分图，则其存在K个不相交的的完备匹配。

网络流提取原图的$K-$正则二分子图，验证解的存在性。

$K-$正则二分图：每个点的度数均为K。

根据$Hall$定理，我们容易推出：

若一个二分图是$K-$正则二分图，则其存在K个不相交的的完备匹配。

网络流提取原图的$K-$正则二分子图，验证解的存在性。

如何输出方案？

$K-$正则二分图：每个点的度数均为K。

根据$Hall$定理，我们容易推出：

若一个二分图是$K-$正则二分图，则其存在K个不相交的的完备匹配。

网络流提取原图的$K-$正则二分子图，验证解的存在性。

如何输出方案？

对子图求K次完备匹配即可，正确性容易证明。

初始时滑冰俱乐部有1到n号的溜冰鞋各k双。

x号脚的人可以穿x到$x+d$号的溜冰鞋。

有m次操作，每次修改$r_i(1 \le r_i \le n-d)$号脚的人数。

每次操作后判断当前溜冰鞋是否足够。

$n \le 200000$，$m \le 500000$，$k \le 10^9$

二分图建模显然，设人的集合为A，溜冰鞋的集合为B。

二分图建模显然，设人的集合为A，溜冰鞋的集合为B。
使用$Hall$定理，考虑A的所有子集。

二分图建模显然，设人的集合为A，溜冰鞋的集合为B。

使用$Hall$定理，考虑A的所有子集。

贪心地发现：我们只需考虑A中所有连续区间即可。若区间长度为L，则验证是否存在区间，其人数和$> k \times (d + L)$。

二分图建模显然，设人的集合为A，溜冰鞋的集合为B。

使用$Hall$定理，考虑A的所有子集。

贪心地发现：我们只需考虑A中所有连续区间即可。若区间长度为L，则验证是否存在区间，其人数和$> k \times (d + L)$。

设$w_i = i$号脚的人数$-k$，则问题转化为单点修改w，判断最大子段和是否$> k \times d$。

二分图建模显然，设人的集合为A，溜冰鞋的集合为B。

使用$Hall$定理，考虑A的所有子集。

贪心地发现：我们只需考虑A中所有连续区间即可。若区间长度为L，则验证是否存在区间，其人数和$> k \times (d + L)$。

设$w_i = i$号脚的人数$-k$，则问题转化为单点修改w，判断最大子段和是否$> k \times d$。

线段树直接维护。

给出一个二分图，两点集元素个数分别为n和m，每个点有一个正整数权值。

一个点集的权值为所有权值之和。

给出t，统计满足下列2个条件的点集V的个数：

- V的权值$\geq t$
- V被至少一个匹配覆盖

$n \leq 20$，$m \leq 20$，点权$\leq 10^7$

设二分图某部分的某子集为A，另一部分的某子集为B。

一个重要性质：

若A被至少一个匹配覆盖，B被至少一个匹配覆盖，则$A \bigcup B$至少被一个匹配覆盖。

设二分图某部分的某子集为A，另一部分的某子集为B。

一个重要性质：

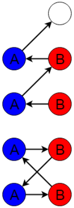
若A被至少一个匹配覆盖，B被至少一个匹配覆盖，则$A \bigcup B$至少被一个匹配覆盖。

如何证明？

【CERC2016】Bipartite Blanket

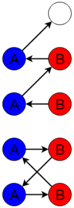
设M_A为一个覆盖A的匹配，M_B为一个覆盖B的匹配。

构造一个二分图G：把M_A中的边加入G中，把M_B中的边反向加入G中，如下图所示：



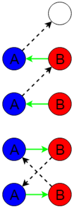
设M_A为一个覆盖A的匹配，M_B为一个覆盖B的匹配。

构造一个二分图G：把M_A中的边加入G中，把M_B中的边反向加入G中，如下图所示：



图G中的边可以被划分成若干部分，每个部分都是路径或环。

对于每个部分，我们顺次选出所有编号为奇数的边，这样构造出一个匹配。



对路径和环分类讨论，容易证明这个匹配包含A和B，也就证明了这个性质。

根据这个性质，我们便有了初步思路：

根据这个性质，我们便有了初步思路：

分别处理原图的两个点集，再把它们合并起来得到答案。

根据这个性质，我们便有了初步思路：

分别处理原图的两个点集，再把它们合并起来得到答案。

如何判断一个点集的哪些子集合法？

根据这个性质，我们便有了初步思路：

分别处理原图的两个点集，再把它们合并起来得到答案。

如何判断一个点集的哪些子集合法？

状压$DP + Hall$定理轻松解决。