lydsy Monthly, December 2017

解题报告

2017 年 12 月 29 日

1 彩虹溜冰鞋

首先可以通过找规律或推公式等方式直接算出终点坐标，然后倒着模拟 $O(r+c)$ 轮，一定可以填满整个矩形。

时间复杂度 $O((r+c)^2)$。

2 线段树的匹配

设 $f_{l,r,0/1}$ 表示以区间 $[l,r]$ 为根的线段树，根节点匹配情况为 0/1 时的最大匹配以及方案数，枚举子节点状态转移即可。

注意到 $r-l$ 相同的区间信息完全相同，故最多只有 $O(\log n)$ 种本质不同的区间，记忆化搜索即可。

3 波浪序列

设 $f_{i,j,k}$ 表示仅考虑 $a[1..i]$ 与 $b[1..j]$，选择的两个子序列结尾分别是 a_i 和 b_j，且上升下降状态是 k 时的方案数，则 $f_{i,j,k}=\sum f_{x,y,1-k}$，其中 $x<i,y<j$。暴力转移的时间复杂度为 $O(kn^2m^2)$，不能接受。

考虑将枚举决策点 x,y 的过程也 DP 掉。设 $g_{i,y,k}$ 表示从某个 $f_{x,y,k}$ 作为决策点出发，当前要更新的是 i 的方案数，$h_{i,j,k}$ 表示从某个 $f_{x,y,k}$ 作为决策点出发，已经经历了 g 的枚举，当前要更新的是 j 的方案数。转移则是要么开始更新，要么将 i 或者 j 继续枚举到 $i+1$ 以及 $j+1$。因为每次只有一个变量在动，因此另一个变量恰好可以表示上一个位置的值，可以很方便地判断是否满足上升和下降。

时间复杂度 $O(knm)$。

4 小 Q 的书架

不难发现一个连续段的代价等于其内部逆序对的个数。设 $f_{i,j}$ 表示将 $[1,j]$ 划分成 i 个连续段的最小总代价，则 $f_{i,j}=\min(f_{i-1,k}+cost(k+1,j))$，其中 $0\leq k<j$。

对于固定的状态 $f_{i,j}$，考虑两个可行的决策 $k_1,k_2(k_1<k_2)$，若 k_1 比 k_2 劣，则对于更大的 j 来说，$[k_1+1,j]$ 的逆序对个数会始终不小于 $[k_2+1,j]$ 的逆序对个数，故 k_1 将永远比 k_2 劣，这说明最优决策满足单调性。

那么将决策分治，同时通过移动区间端点的方式维护区间逆序对个数即可。

若采用树状数组，则时间复杂度为 $O(nk\log^2 n)$，可以通过。

一个更好的方法：

注意到每次移动端点时，需要计算的本质是前 i 个数中不超过 j 的数字个数，故可持久地预处理出权值分块即可，修改 $O(\sqrt{n})$，查询 $O(1)$，总时间复杂度 $O(n\sqrt{n}+nk\log n)$。

5 自动售货机

将差值看成边权，并添加 0 边来消除负数，首先可以贪心将每个点都买到剩一个。

那么若是树或者自环，则答案为每个点的入边中权值的最大值。

对于环（自环除外）来说，必须要删掉环上一条边，枚举每条边删除即可。

时间复杂度 $O(n\log n)$。

6 数据校验

一个区间合法当且仅当任意两个相邻的数差值不超过 1，预处理出对于每个 l，最多能往右延伸到哪里即可。

时间复杂度 $O(n+m)$。

7 寻找母串

枚举长度 len，那么 len 必须要是 n 的约数，然后枚举每个长度为 len 的子串 S，检查是否可行。

对于检查，设 $f_{i,j}$ 表示区间 $[i,j]$ 能否通过 S 产生，转移则是要么在末尾产生某个长度为 len 倍数的区间，要么接着匹配一位（即 $S_{(j-i) \bmod |S|}$），时间复杂度 $O(\frac{n^3}{len})$。

总时间复杂度 $O(n^3 d(n)\log n)$。可以加上字符个数是否符合要求的可行性判断来剪枝，使得复杂度远远达不到上界。

8 树上传送

设 dis_x 表示从 S 到 x 的最小代价，$w_x = dis_x + cost_x$，考虑最短路的 Dijkstra 算法，每次从堆中取出 w 最小的 x，然后更新与 x 距离不超过 lim_x 的所有点即可。

注意到 Dijkstra 算法中每次取出的 w 单调不下降，故每个点只有第一次被更新时才是最短路，这说明一个点访问过就可以不再考虑它。

对树进行点分治，对于每个分治结构，从重心开始 BFS 预处理出一个序列，满足序列中所有点到重心的距离依次递增。那么每次从堆中取出 x 后，枚举 $O(\log n)$ 个经过它的分治结构，不断更新序列首部的点的最短路，并把更新过的点删除，直到树上距离超过 lim_x 为止。

因为每个点只被 $O(\log n)$ 个分治结构经过，故总时间复杂度为 $O(n\log n)$。

9 字符串的周期

爆搜字符串 S 的最小表示，然后通过 KMP 算法求出权值，再用组合数计算方案数即可。时间复杂度 $O(nBell(n))$。