网络流模型选讲

刘昀

天津市南开中学

2018年1月10日

|昀

 算法
 直接应用
 路径覆盖
 时间分层
 回路限制
 最大权材合子图
 平面图对偶图
 距离限制
 Hall定理

 0
 00
 0
 0
 0
 0
 0

 000
 00
 000
 00
 00
 00
 00

 000
 00
 00
 00
 00
 00
 00

 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00

 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00

自我介绍:

刘昀

天津市南开中学

网络流模型洗讲

 算法
 直接应用
 路径覆盖
 时间分层
 回路限制
 最大权闭合子图
 平面图对偶图
 距离限制
 Hall定理

 0
 00
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0

自我介绍:

■ leoly

版 天津市南开中学

 算法
 直接应用
 路径覆盖
 时间分层
 回路限制
 最大权闭合子图
 平面图对偶图
 距离限制
 Hall定理

 0
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00
 00

自我介绍:

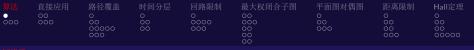
- leoly
- 来自弱省弱校的蒟蒻

自我介绍:

- leoly
- 来自弱省弱校的蒟蒻
- ■集训队最弱选手

网络海腊刑告出

网络流算法

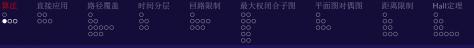


网络流算法

- Dinic
- 当前弧优化
- SAP

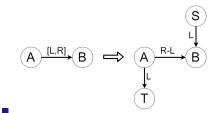
工厂乔网络

无源汇上下界可行流



无源汇上下界可行流

■ 新建超级源点S和超级汇点T,去掉下界



- 求S到T的最大流,若S的出边和T的入边均满流则说明问题 有解
- 根据残量网络构造一组合法解

刘昀 网络流模型洗讲

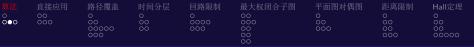
上下芥网络

有源汇上下界最大流

刘昀

天津市南开中学

网络流模型选讲



有源汇上下界最大流

- 设源点为S,汇点为T,新建超级源点SS和超级汇点TT
- S和T作为源点和汇点,并不满足总入流=总出流的平衡条 件, 故新建一条T到S容量为inf的边使它们平衡
- 求解一组可行流,此时T到S的边的流量即为这组可行流的 大小, 我们的目的是最大化它
- 此时*S*到*T*的最大流即为答案

上下芥州给?

有源汇上下界最小流

刘昀

天津市南开中学

网络流模型选讲

上卜界网络流

000

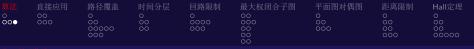
有源汇上下界最小流

【方法一】二分答案+有源汇上下界可行流

刘昀

天津市南开中学

网络流模型选讲

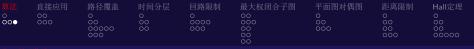


有源汇上下界最小流

【方法一】二分答案+有源汇上下界可行流

【方法二】

- 参考有源汇上下界最大流的做法,我们想要最小化*T*到*S*的 边的流量
- *SS*到*TT*的流量可分成两个部分:第一个部分经过了*T*到*S*的边,第二个部分不经过
- 问题转化为最大化第二个部分的流量



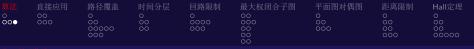
有源汇上下界最小流

【方法一】二分答案+有源汇上下界可行流

【方法二】

- 参考有源汇上下界最大流的做法,我们想要最小化*T*到*S*的 边的流量
- *SS*到*TT*的流量可分成两个部分:第一个部分经过了*T*到*S*的边,第二个部分不经过
- 问题转化为最大化第二个部分的流量
- 不加T到S的边,求解SS到TT的最大流即可

刘昀 网络流模型洗讲



有源汇上下界最小流

【方法一】二分答案+有源汇上下界可行流

【方法二】

- 参考有源汇上下界最大流的做法,我们想要最小化*T*到*S*的 边的流量
- *SS*到*TT*的流量可分成两个部分:第一个部分经过了*T*到*S*的边,第二个部分不经过
- 问题转化为最大化第二个部分的流量
- 不加T到S的边,求解SS到TT的最大流即可
- 若问题可能无解,则还需一次有源汇上下界可行流验证



【poj1149】PIG

你有m个猪圈,第i个猪圈初始有 A_i 头猪。

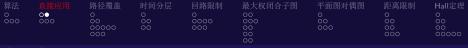
依次到来n个顾客,每个顾客会指定几个猪圈,你可以先任

意调换这些猪圈中的猪,再卖给这个顾客最多B;头猪。

最大化总卖猪数量。

 $n \le 100, m \le 1000$

刘昀 网络海腊刑选进



做法很多。

调换猪可以视为把这些猪寄存在这个顾客手中。

天津市南开中学 8 / 70

【bzoj2406】矩

给出一个 $n \times m$ 的矩阵A,求一个 $n \times m$ 的值域为[L, R]的矩

阵B,最小化下式的值:

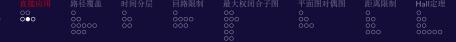
$$\max \left\{ \begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \left(A_{ij} - B_{ij} \right) \right| \right\} \\ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{m} \left(A_{ij} - B_{ij} \right) \right| \right\} \end{aligned} \right.$$

$$n \le 200, m \le 200$$

刘昀 网络海腊刑选进

【bzoj2406】矩

二分答案,问题转化为判定性问题。



【bzoj2406】矩阵

二分答案,问题转化为判定性问题。 对*B*矩阵每行每列的和均有一个区间限制。

【bzoj2406】矩阵

二分答案,问题转化为判定性问题。 对*B*矩阵每行每列的和均有一个区间限制。 行列建点,有源汇上下界可行流判定。

如何输出方案?

天津市南开中学

| Time |

【bzoj2406】矩队

如何输出方案?

对于图中每条边,实际流量=该边下界+当前流量。

刘昀

天津市南开中学

网络流模型选讲

这类问题通常是用一些路径去覆盖一张有向图。

- DAG最小路径覆盖, DAG最小链覆盖
- 利用度数限制进行二分图建模
- 也可使用上下界最小流直接解决
- 可以与Dilworth定理相结合



刘昀 网络海樽刑进训 【网络流24题】魔术球问题

在n个柱子上依次放入编号为1,2,3,...的球。

- 每次只能在柱子最上面放球
- 在同一个柱子中,任何两个相邻球编号之和为完全平方数 求*n*个柱子上最多能放多少个球。 *n* < 55

【网络流24题】魔术球问题

二分答案或枚举答案。

计算至少需要多少个柱子才能放入所有球。

【网络流24题】魔术球问题

二分答案或枚举答案。 计算至少需要多少个柱子才能放入所有球。 按两个球能否相邻的关系建图。 因为放入的球编号递增,故此图为*DAG*。



二分答案或枚举答案。 计算至少需要多少个柱子才能放入所有球。 按两个球能否相邻的关系建图。

因为放入的球编号递增,故此图为DAG。

每一个柱子相当于一条路径,故问题转化为DAG最小路径 覆盖。

给出一个n个点m条有向边的DAG,请你选出尽可能多的点, 使得这些点两两互不可达。

给出一种可能的最优解,并判断每个点是否可能出现于最优 解中。

n < 100, m < 1000

Dilworth定理:

時 天津市南开中学

16 / 70

【CTSC2008】祭礼

Dilworth定理:

■ 偏序关系: 自反性, 反对称性, 传递性

丙津市南开中学



【CTSC2008】祭礼

Dilworth定理:

- 偏序关系: 自反性, 反对称性, 传递性
- 链:任意两个不同元素可比;反链:任意两个不同元素不可 比



Dilworth 定理:

- 偏序关系: 自反性,反对称性,传递性
- 链: 任意两个不同元素可比: 反链: 任意两个不同元素不可 比
- 令P是一个有限偏序集,P中元素划分为不相交链的最小个 数=P的一个反链所包含的元素的最大个数

刘昀

16 / 70

【CTSC2008】祭

对于DAG,显然二元关系"可达"是偏序关系。

XIII

天津市南开中学 17 / 70

【CTSC2008】祭礼

对于DAG,显然二元关系"可达"是偏序关系。故可以直接应用Dilworth定理。

网络洛塔利选进

【CTSC2008】祭

对于DAG,显然二元关系"可达"是偏序关系。 故可以直接应用Dilworth定理。 DAG最小链覆盖=最长反链。

【CTSC2008】祭

回到本题,问题为求解最长反链。

【CTSC2008】祭

回到本题,问题为求解最长反链。 转化为求解最小链覆盖。 | Destrict | Destrict

【CTSC2008】祭

回到本题,问题为求解最长反链。 转化为求解最小链覆盖。 变成了我们熟悉的模型。

如何处理后两问?

【CTSC2008】祭

如何处理后两问?

一种朴素做法:选择一个点,把和它可比的点都删掉,求解剩余图的最长反链。

【CTSC2008】祭

如何处理后两问?

一种朴素做法:选择一个点,把和它可比的点都删掉,求解剩余图的最长反链。

如果大家有更好的做法,欢迎课后讨论。

【TJOI2015】组合数字

- 一个 $n \times m$ 的矩阵,每个点都有经过次数的下限。
- 一条路径从(1,1)走到(n,m),路径中的点的行列坐标均满足单调不减。

最小化路径条数。

$$n \le 1000, m \le 1000$$

暴力怎么做?

刈悶

【TJOI2015】组合数

暴力怎么做? 把矩阵看成*DAG*。

刘昀

天津市南开中学

网络流模型洗讲



【TJOI2015】组合数

暴力怎么做? 把矩阵看成*DAG*。 最小链覆盖模型比较显然。

昀 天津市南开中学

21 / 70

【TJOI2015】组合数字

有了上一题的基础,此题应该不难解决。

刘昀

天津市南开中学

网络流模型选讲

【TJOI2015】组合数:

有了上一题的基础, 此题应该不难解决。

还是考虑Dilworth定理,把问题转化成求解最长反链。

刘昀

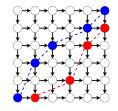
天津市南开中学

网络流模型选讲

【TJOI2015】组合数

有了上一题的基础, 此题应该不难解决。

还是考虑Dilworth定理,把问题转化成求解最长反链。



若两个点不可比,当且仅当一个在另一个的右上方。

刘昀

天津市南开中学

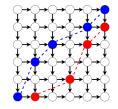
22 / 70



【TJOI2015】组合数

有了上一题的基础, 此题应该不难解决。

还是考虑Dilworth定理,把问题转化成求解最长反链。



若两个点不可比,当且仅当一个在另一个的右上方。 从左下到右上*DP*即可。

刘昀 网络流模刑选讲

这类问题通常是图随时间改变,最小化最大时间。

- ■二分答案
- 枚举答案,把时间当成一个维度,建出分层图

刘昀

天津市南开中学

【网络流24题】星际转移问题

有n个太空站位于地球和月球之间,有m艘太空船穿梭于其中。

每个太空站可以同时容纳无限多的人,但第i艘太空船只能同时容纳 H_i 个人。

每艘太空船将周期性地停靠一系列的太空站,每次移动耗时均为1。

初始地球上有k个人,最小化让所有人转移到月球的时间。 $m \le 13$, $n \le 20$, $k \le 50$

刘昀 网络流模刑选进 天津市南开中学

【网络流24题】星际转移问题

容易想到把每个人都看成一条增广路。

昀 天津市南开中学

网络流模型选讲 25 / 70

【网络流24题】星际转移问题

容易想到把每个人都看成一条增广路。 二分答案,判定可行性。

昀 天津市南开中学

25 / 70

【网络流24题】星际转移问题

容易想到把每个人都看成一条增广路。

二分答案,判定可行性。

按时间建出分层图,相邻两层之间连边,最大流验证。

【网络流24题】星际转移问题

容易想到把每个人都看成一条增广路。 二分答案,判定可行性。 按时间建出分层图,相邻两层之间连边,最大流验证。 也可枚举答案,每次在残余网络中增加一层。

刘昀

天津市南开中学

【HNOI2007】紧急疏青

一个 $n \times m$ 的矩形,每个格子是空地、门、墙中的一种,初始每个空地上都有一个人。

所有人要紧急疏散,每个人每一秒可以向上下左右中某个方 向移动一格。

每块空地同一时刻可以容纳任意多人,每个门同一时刻最多 容纳一人。

最小化让所有人安全撤离的时间。

$$n \le 20, m \le 20$$

26 / 70

【HNOI2007】紧急疏

我们似乎不能直接建模求解最短时间。

刘昀

天津市南开中学

网络流模型选讲

| HITE |

【HNOI2007】紧急疏

我们似乎不能直接建模求解最短时间。 和上一题类似,枚举答案,按时间分层建图。

刘昀

天津市南开中学

 直接应用
 路径複
 时間分层
 関係機制
 取入权闭合于图
 TⅢ图对偶图
 距离限制
 Hall定埋

 00
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0
 0

模型

这类问题通常会限制路径为若干回路。 利用度数限制建模。

刘昀

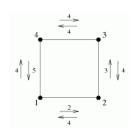
天津市南开中学



【POI2010】Bridge

给出一个n点m边无向连通图,每条边正反向分别有一个权

值。



请你找出一个欧拉回路,使得回路中最大权值尽可能小。

 0 0•00 000

首先二分答案。

天津市南开中学

30 / 70

0 **0•00** 000

首先二分答案。

【混连图欧拉回路】: 给每一条无向边定向,判断能否形成 欧拉回路。

天津市南开中学 30 / 70 | Deligible | Principal | Pri

【POI2010】Bridg

形成欧拉回路的充要条件:

刈呵

天津市南开中学

网络流模型选讲

【POI2010】Bridg

形成欧拉回路的充要条件:

- ■弱连通图
- 每个点满足出度=入度

AJIIJ

【POI2010】Bridg

无向边的处理:将其视作有向边,并保留一次反向的机会。

刘昀

天津市南开中学

网络流模型选讲

【POI2010】Bridge

无向边的处理:将其视作有向边,并保留一次反向的机会。设 w_i =第i个点的出度-入度,把边x->y反向会使得 $w_x-=2$, $w_y+=2$ 。



无向边的处理:将其视作有向边,并保留一次反向的机会。 设 w_i =第i个点的出度-入度,把边x->y反向会使 得 $w_x - = 2$, $w_v + = 2$ 。 我们的目标是使得每个点的w = 0。



【POI2010】Bridge

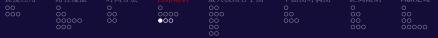
无向边的处理:将其视作有向边,并保留一次反向的机会。设 w_i =第i个点的出度-入度,把边x->y反向会使

得 $w_x - = 2$, $w_y + = 2$ 。

我们的目标是使得每个点的w=0。

把点按w的正负分成两个集合,即转化成最大流问题。

刘昀 网络流模刑选进



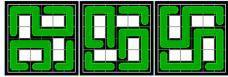
【bzoi4213】贪吃!

给出一个 $n \times m$ 的网格,有一些位置是障碍。

蛇是一条至少包含2个格子的折线,蛇的任何部分之间均不能重叠,每条蛇必须满足下列条件之一:

- 两个端点所在格子在网格的边界
- 蛇构成一个环

用一些蛇覆盖网格,要求每个非障碍格恰好被一条蛇覆盖。



最小化不构成环的蛇的数量。

刘昀 网络流模型选讲

【bzoj4213】 页内

如何把路径限制成环?

刈悶

【bzoj4213】贪吃

如何把路径限制成环?

从度数入手,环->度数->容量限制。

刈均

【bzoj4213】贪吃

如何把路径限制成环?

从度数入手,环->度数->容量限制。

边界点度数为1或2,其余点度数为2,转化成容量限制。

刘昀

| Extraction | First | First

【bzoj4213】贪吃

如何把路径限制成环? 从度数入手,环->度数->容量限制。 边界点度数为1或2,其余点度数为2,转化成容量限制。 如何判断解的存在性?

刘昀



【bzoj4213】贪吃

如何把路径限制成环?

从度数入手,环->度数->容量限制。

边界点度数为1或2,其余点度数为2,转化成容量限制。

如何判断解的存在性?

黑白染色,判断能否满足每个点的度数限制,即是否存在可行流。

刘昀网络诺朗连进

【bzoj4213】 黄蓝

对于边界点,每多出一对点度数为1,则答案+1。

刘盷

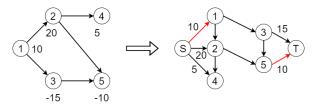
【bzoj4213】贪吃

对于边界点,每多出一对点度数为1,则答案+1。 求解有源汇上下界最大流即可。

刘昀



这类问题通常存在一种依赖关系:如果选了x就必须选择y。 按权值正负建模,和S相连的点视为选择。



若依赖关系成环, 我们无需强连通缩点。

対的 天津市南开中学 网络流標型洗排 36 / 70

推荐题目:

- 【bzoj2127】 happiness
- ■【2009国家集训队】人员雇佣
- 【NOI2009】植物大战僵尸
- ■【SHOI2017】寿司餐厅
- ■【CQOI2017】老C的方块

刘昀 网络流模型选讲

【TJOI2015】线性代验

给出 $n \times n$ 的矩阵B和 $1 \times n$ 的矩阵C。 求出一个 $1 \times n$ 的01矩阵A。 最大化 $D = (A \times B - C) \times A^T$ 。 $n \le 500$

刘昀 网络海腊刑满洲

【13012015】 线针针(

$$D = A \times B \times A^{T} - C \times A^{T}$$

Allied

天津市南开中学

39 / 70

【TJOI2015】线性代

$$D = A \times B \times A^{T} - C \times A^{T}$$
。
由于A是01矩阵,不妨视为选或不选。

【TJOI2015】线性代验

$$D = A \times B \times A^{T} - C \times A^{T}.$$

由于A是01矩阵,不妨视为选或不选。

n个物品,选第i个物品花费 C_i ,同时选第i个和第j个物品获得 B_{ii} 的收益,最大化总收益-总代价。

刘昀

【TJOI2015】线性代

把"同时选"看成依赖关系,即每个条件依赖于两个物品。

政 天津市南开中学

【TJOI2015】线性代

把"同时选"看成依赖关系,即每个条件依赖于两个物品。 条件建点,每个条件向两个物品连有向边。 最大权闭合子图即为答案。 Codeforces Round #185(Div. 1)_E1 Biologis

已知n个01变量,你可以花费 v_i 改变第i个变量的取值。 有m个条件,每个条件指定 k_i 个变量,要求它们的取值均为某个特定值,满足条件可以获得 w_i 的收益。

对于某些条件,若没能满足则会额外付出g的代价。 最大化总收益-总代价。

 $n \le 10000, m \le 2000, k_i \le 10$

刘昀 网络海樽刑选讲 天津市南开中学

上一题的加强版。

天津市南开中学

42 / 70

| Deligizaria | Still talin | 1019772 | Elephrop | Acceptant | 1 | 101477 | 101 | 101477 | 101 | 101477 | 101 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 | 101477 |

【Codeforces Round #185(Div. 1)_E】Biologis

上一题的加强版。

和S相连的变量取值为0,和T相连的变量取值为1。

丙津市南开中学

42 / 70

[Codeforces Round #185(Div. 1)_E] Biologis

上一题的加强版。

和S相连的变量取值为0,和T相连的变量取值为1。同样是条件建点:

- 对于要求取值均为0的条件,不割掉这个条件当且仅当指定 的点均与*S*相连
- 对于要求取值均为1的条件,不割掉这个条件当且仅当指定 的点均与*T*相连

刘昀 网络流模型洗讲 上一题的加强版。

和S相连的变量取值为0,和T相连的变量取值为1。同样是条件建点:

- 对于要求取值均为0的条件,不割掉这个条件当且仅当指定 的点均与*S*相连
- 对于要求取值均为1的条件,不割掉这个条件当且仅当指定的点均与T相连转化为最大权闭合子图。

刘昀 网络流模型选讲

【CEOI2008】ord

n个工作,m个机器,完成每个工作都有收益。 每个工作依赖若干机器,机器可以买,也可以租。 最大化总收益-总代价。 $n \leq 1200, m \leq 1200$

刘昀

【CEOI2008】ord

若不考虑租用机器,则最大权闭合子图模型显然。

丙

【CEOI2008】ord

若不考虑租用机器,则最大权闭合子图模型显然。 租用机器改变了什么?

天津市南开中学

44 / 70

【CEOI2008】 ord

若不考虑租用机器,则最大权闭合子图模型显然。 租用机器改变了什么? 考虑每个工作的可能状态:

- ①不做工作
- ②做工作,租用机器
- ③做工作,购买机器

【CEOI2008】 orc

若不考虑租用机器,则最大权闭合子图模型显然。 租用机器改变了什么? 考虑每个工作的可能状态:

- ①不做工作
- ②做工作,租用机器
- ③做工作,购买机器

把这3种状态对应成一条S->T的增广路的3个部分,割掉的那一部分表示我们选择这种状态。

刘昀网络蓝铜珠洲

【CEOI2008】 ord

若不考虑租用机器,则最大权闭合子图模型显然。 租用机器改变了什么? 考虑每个工作的可能状态:

- ①不做工作
- ②做工作,租用机器
- ③做工作,购买机器

把这3种状态对应成一条S->T的增广路的3个部分,割掉的那一部分表示我们选择这种状态。

转化为最小割。

【bzoj3774】最优选技

n×m的网格图,控制每个点都要付出一定代价。 若一个点被控制,或它上下左右4个点都被控制,则视为它被选择,获得一定收益。 最大化总收益-总代价。

刘昀

天津市南开中学

上一题的加强版。

天津市南开中学

【bzoj3774】最优选择

上一题的加强版。

最大权闭合子图可以处理"与"的条件,但难处理"或"的 条件。

刘昀

天津市南开中学

网络流模型洗讲

【bzoi3774】最优选择

上一题的加强版。

最大权闭合子图可以处理"与"的条件,但难处理"或"的条件。

还是考虑每个点的状态:

- ①不选择这个点,放弃收益
- ②选择这个点,控制它自己
- ③选择这个点,控制它上下左右4个点

上一题的加强版。

最大权闭合子图可以处理"与"的条件, 但难处理"或"的 条件。

还是考虑每个点的状态:

- ①不选择这个点,放弃收益
- ②选择这个点,控制它自己
- ③选择这个点,控制它上下左右4个点 同样考虑把这3种状态对应成S->T的增广路的3个部分。

刘昀

【bzoj3774】最优选排

上一题的加强版。

最大权闭合子图可以处理"与"的条件,但难处理"或"的条件。

还是考虑每个点的状态:

- ①不选择这个点,放弃收益
- ②选择这个点,控制它自己
- ③选择这个点,控制它上下左右4个点 同样考虑把这3种状态对应成*S*-> *T*的增广路的3个部分。 黑白染色后把状态按②->①->③的顺序依次对应到增广 路中即可。

【bzoj3774】最优选排

上一题的加强版。

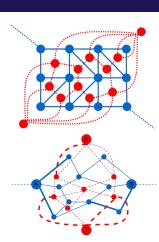
最大权闭合子图可以处理"与"的条件,但难处理"或"的条件。

还是考虑每个点的状态:

- ①不选择这个点,放弃收益
- ②选择这个点,控制它自己
- ③选择这个点,控制它上下左右4个点 同样考虑把这3种状态对应成*S*-> *T*的增广路的3个部分。 黑白染色后把状态按②->①->③的顺序依次对应到增广 路中即可。

同样是最小割。

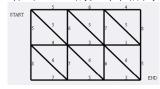
这类问题通常都有平面图的性质。 平面图和对偶图可以互相转化。 平面图最小割->对偶图最短路。



丙

【BeiJing2006】狼抓兔

给出 $n \times m$ 的如下图所示的网格:

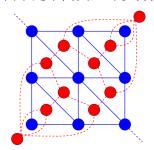


求START到END的最小割。

 $n \le 1000, m \le 1000$

刘昀 天津市南开中学

由于是平面图,可以转化成对偶图最短路。



天津市南开中学 49 / 70



【NOI2010】海拉

 $n \times n$ 的网格,已知每条边双向的通过人数。

左上角路口海拔为0,右下角路口海拔为1,其它路口的海拔可以任意取值。



一个人向上爬h的高度需要消耗h的体力,向下爬不消耗体

力。

最小化所有人消耗的体力之和。

$$n \le 500$$

刘昀 网络流模刑选进

一些结论:

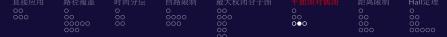
天津市南开中学 51 / 70



【NOI2010】海拉

一些结论:

- 每个点的海拔非0即1
- 整张图被分成了两个同海拔连通块



【NOI2010】海拉

一些结论:

- 每个点的海拔非0即1
- ■整张图被分成了两个同海拔连通块最小割->对偶图最短路。

| Expression | Prince | Princ

【NOI2010】海

与上题不同, 本题对边的方向有要求。

刘昀

天津市南开中学

网络流模型选讲

【NOI2010】海拉

与上题不同,本题对边的方向有要求。



l昀 天津市南开中学

0 00 00•

与上题不同, 本题对边的方向有要求。



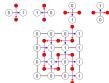
如上图所示,对于对偶图中每一条有向边,它的右侧 是0-连通块,左侧是1-连通块。

【NOI2010】海初

与上题不同,本题对边的方向有要求。



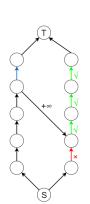
如上图所示,对于对偶图中每一条有向边,它的右侧 是0-连通块,左侧是1-连通块。



刘昀 网络游戏刑选进



这类问题是一类最小割问题。 每个点有若干种选择,编号为连续整数。 有一些限制,两个选择编号相差不超过*d*。



刘昀 网络流模刑选进

【HNOI2013】切

 $p \times q$ 的网格,每个位置有r种选择,编号为1到r,每种选择都有对应代价。

限制每个点和它上下左右相邻的4个点的选择编号相差均不能超过d。

最小化总代价。

$$p \le 40, \ q \le 40, \ r \le 40$$

[HNOI2013] W

模型的直接应用。

刈悶

【HNOI2013】切

模型的直接应用。

对网格中的每个点建出一条r+1个点的链,中间的r条边顺次对应r种选择的代价。

【HNOI2013】切

模型的直接应用。

对网格中的每个点建出一条r+1个点的链,中间的r条边顺次对应r种选择的代价。

用+∞边来满足距离的限制即可。

这个模型十分灵活,举一个例子:

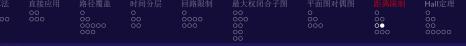
 $p \times q$ 的网格,每个位置有r种选择,编号为1到r,每种选择都有对应收益(可能为负)。

限制每个点和它上下左右相邻的4个点的选择编号之和不能超过d。

最大化总收益。

$$p \le 40, \ \ q \le 40, \ \ r \le 40$$

刘昀 网络流模型选讲



Ste t a testad

类似切糕,但现在有3个问题:权值可能为负、最大化权值和、限制编号之和。

刘昀

类似切糕,但现在有3个问题:权值可能为负、最大化权值和、限制编号之和。 分别处理:

- \emptyset >正:给所有权值加上一个较大的数x
- 最大化->最小化: 把权值w改成x-w,最大化权值->最 小化差值
- 和->差:对网格黑白染色,黑色点编号从1到r构建链,白色点编号从r到1构建链,和的限制->差的限制

类似切糕,但现在有3个问题:权值可能为负、最大化权值和、限制编号之和。 分别处理:

- 负->正:给所有权值加上一个较大的数x
- 最大化->最小化: 把权值w改成x-w,最大化权值->最小化差值
- 和->差:对网格黑白染色,黑色点编号从1到r构建链,白色点编号从r到1构建链,和的限制->差的限制至此问题转化为切糕。

【CTSC2009】移民站选出

平面中有n个黑点和m个白点,已知所有黑点的坐标。第i个黑点和第j个白点之间有权值 A_{ij} ,第i个白点和第j个白点之间有权值 B_{ij} 。

两个点之间的代价=它们之间的权值×它们的曼哈顿距离。 确定所有白点的坐标,最小化总代价。

刘昀网络游戏湖州洪洪

【CTSC2009】移民站选均

由于是曼哈顿距离,所以横纵坐标互不影响,可以分开考虑,以下只考虑横坐标。

刘昀

【CTSC2009】移民站选划

由于是曼哈顿距离,所以横纵坐标互不影响,可以分开考虑,以下只考虑横坐标。

贪心地发现: 所有白点的横坐标必然与某个黑点相同。

刘昀

由于是曼哈顿距离, 所以横纵坐标互不影响, 可以分开考 虑,以下只考虑横坐标。

含心地发现: 所有白点的横坐标必然与某个黑点相同。

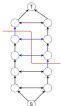
m个白点,每个白点有n种选择,每种选择都有相应代价, 且任意两个白点之间也会有代价,这个代价和它们的选择编号差 距密切相关。

刘昀

【CTSC2009】移民站选均

模型的变种。

处理白点之间的代价: 给限制距离的边增设权值。



|肉

这类问题通常和二分图完备匹配有关。

Hall定理:

设二分图G = (V1, V2, E)中 $\|V1\| = m <= \|V2\| = n$,G中存在完备匹配当且仅当V1中任意 $k(1 \le k \le m)$ 个点至少与V2中的k个点相邻。

在OI中,Hall定理通常会作为一个工具与其它算法相结合。

刘昀 网络流模型选讲 | Harris | H

K-元备匹置

二分图G中两个点集各包含n个点。 找出k个完备匹配,使其互不相交。 $n \leq 100$

K-完备匹置

K-正则二分图:每个点的度数均为K。

刘昀

天津市南开中学

网络流模型选讲

K-完备匹图

K-正则二分图:每个点的度数均为K。

根据Hall定理,我们容易推出:

若一个二分图是K-正则二分图,则其存在K个不相交的的完备匹配。

刘昀

K—正则二分图:每个点的度数均为K。

根据Hall定理,我们容易推出:

若一个二分图是K-正则二分图,则其存在K个不相交的的完备匹配。

网络流提取原图的K-正则二分子图,验证解的存在性。

刘昀

63 / 70

0.

K-正则二分图:每个点的度数均为K。

根据Hall定理,我们容易推出:

若一个二分图是K-正则二分图,则其存在K个不相交的的 完备匹配。

网络流提取原图的K-正则二分子图,验证解的存在性。 如何输出方案?

K-正则二分图:每个点的度数均为K。

根据Hall定理,我们容易推出:

若一个二分图是K-正则二分图,则其存在K个不相交的的完备匹配。

网络流提取原图的K-正则二分子图,验证解的存在性。

如何输出方案?

对子图求K次完备匹配即可,正确性容易证明。

【POI2009】Ly

初始时滑冰俱乐部有1到n号的溜冰鞋各k双。 x号脚的人可以穿x到x+d号的溜冰鞋。 有m次操作,每次修改 r_i ($1 \le r_i \le n-d$)号脚的人数。 每次操作后判断当前溜冰鞋是否足够。 $n \le 200000$, $m \le 500000$, $k \le 10^9$

刘昀 网络海腊刑选进

【POI2009】Ly

二分图建模显然,设人的集合为A、溜冰鞋的集合为B。

万津市南开中学

【POI2009】Ly

二分图建模显然,设人的集合为A,溜冰鞋的集合为B。 使用Hall定理,考虑A的所有子集。

【POI2009】Ly

二分图建模显然,设人的集合为A,溜冰鞋的集合为B。 使用Hall定理,考虑A的所有子集。

贪心地发现:我们只需考虑A中所有连续区间即可。若区间长度为L,则验证是否存在区间,其人数和 $> k \times (d+L)$ 。

二分图建模显然,设人的集合为A,溜冰鞋的集合为B。 使用Hall定理,考虑A的所有子集。

贪心地发现:我们只需考虑A中所有连续区间即可。若区间 长度为L,则验证是否存在区间,其人数和 $> k \times (d + L)$ 。

设 $w_i = i$ 号脚的人数-k,则问题转化为单点修改w,判断最 大子段和是否> $k \times d$ 。

[POI2009] Ly

二分图建模显然,设人的集合为A,溜冰鞋的集合为B。 使用Hall定理,考虑A的所有子集。

贪心地发现:我们只需考虑A中所有连续区间即可。若区间长度为L,则验证是否存在区间,其人数和 $> k \times (d + L)$ 。

设 $w_i = i$ 号脚的人数-k,则问题转化为单点修改w,判断最大子段和是否> $k \times d$ 。

线段树直接维护。

【CERC2016】Bipartite Blanket

给出一个二分图,两点集元素个数分别为**n**和**m**,每个点有一个正整数权值。

一个点集的权值为所有权值之和。

给出t,统计满足下列2个条件的点集V的个数:

- V的权值≥ t
- V被至少一个匹配覆盖

 $n \le 20$, $m \le 20$,点权 $\le 10^7$

刘昀 网络海樽刑诰讲

天津市南开中学

66 / 70

设二分图某部分的某子集为A,另一部分的某子集为B。 一个重要性质:

若A被至少一个匹配覆盖,B被至少一个匹配覆盖,则AUB至少被一个匹配覆盖。

【CERC2016】Bipartite Blanket

设二分图某部分的某子集为A,另一部分的某子集为B。一个重要性质:

若A被至少一个匹配覆盖, B被至少一个匹配覆盖,

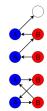
则 $A \cup B$ 至少被一个匹配覆盖。

如何证明?



【CERC2016】Bipartite Blanket

设 M_A 为一个覆盖A的匹配, M_B 为一个覆盖B的匹配。 构造一个二分图G: 把 M_A 中的边加入G中,把 M_B 中的边反 向加入G中,如下图所示:

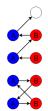


刘昀阿纳达塔刑选进



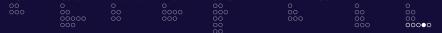
【CERC2016】Bipartite Blanket

设 M_A 为一个覆盖A的匹配, M_B 为一个覆盖B的匹配。 构造一个二分图G: 把 M_A 中的边加入G中,把 M_B 中的边反向加入G中,如下图所示:



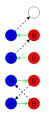
图G中的边可以被划分成若干部分,每个部分都是路径或环。

刘昀 网络流模型洗讲



【CERC2016】 Bipartite Blanket

对于每个部分,我们顺次选出所有编号为奇数的边,这样构造出一个匹配。



对路径和环分类讨论,容易证明这个匹配包含A和B,也就证明了这个性质。

刘昀 网络海樽刑选进 0 00 00 0000•

根据这个性质,我们便有了初步思路:

天津市南开中学 70 / 70 | Hartice | Har

【CERC2016】Bipartite Blanket

根据这个性质,我们便有了初步思路: 分别处理原图的两个点集,再把它们合并起来得到答案。

【CERC2016】Bipartite Blanket

根据这个性质,我们便有了初步思路: 分别处理原图的两个点集,再把它们合并起来得到答案。 如何判断一个点集的哪些子集合法?

根据这个性质,我们便有了初步思路: 分别处理原图的两个点集,再把它们合并起来得到答案。 如何判断一个点集的哪些子集合法? 状压DP + Hall定理轻松解决。