2025-09-16 作业

前置任务:

1. 请自学 2×2 矩阵的乘法.
2. 请尝试使用电脑计算矩阵乘法, 比如基于 `python` 的 `sage`, 在线网址是 https://sagecell.sagemath.org/. 教程自行 Google.

Ex-1 给定一个长宽相等的矩阵 (也称方阵) A, 定义 $A^2 = A \cdot A$. 归纳地定义 $A^{k+1} = A^k \cdot A$.

1. 若 $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, 试计算 A^k 的通式.
2. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试计算 A^k 的通式.
3. 若 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, 试计算 A^k 的通式.
4. 若 $A = \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, 试计算 A^k 的通式.

> **Tip**
>
> 提示: 将 A 写作 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$, 再尝试计算 A^2.

解答 (1). $A^k = \begin{pmatrix} x^k & 0 \\ 0 & y^k \end{pmatrix}$. (2). $A^k = \begin{pmatrix} 1 & kx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3). 依照下一题, $A^k = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}((a+bi)^k) & \mathrm{Im}((a+bi)^k) \\ -\mathrm{Im}((a+bi)^k) & \mathrm{Re}((a+bi)^k) \end{pmatrix}$.

(4). $A^k = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$.

Ex-2 沿用上题 (3). 假定 a 与 b 是实数, 定义集合

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

请证明以下是集合间的双射:

$$f : X \to \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + ib.$$

解答 只需证明 f 是单射, 且是满射.

1. (证单). 任取 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 与 $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}$. 若 $f(X) = f(X')$, 则 $a + ib = a' + ib'$. 由高中知识, 两个复数相同当且仅当实部与虚部相同. 这说明 $a = a'$ 且 $b = b'$. 因此 $X = X'$.
2. (证满). 任意复数 $a + ib$ 都能表示作 $f(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix})$.

对任意 $A, B \in X$, 检验以下等式:

1. $f(A) \cdot f(B) = f(A \cdot B)$;
2. $f(A + B) = f(A) + f(B)$.

解答 (1). 即证明

$$\begin{pmatrix} aa' - bb' & a'b + ab' \\ -(a'b + ab') & aa' - bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}.$$

(2). 即证明

$$\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ -(b + b') & a' + a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}.$$

若 A 不是零矩阵, 如何定义 A^{-1}?

解答 逆矩阵就是复数倒数对应矩阵. 我们发现 f 与加法交换, 与乘法也交换. 实际上, f 把零矩阵映作 0, 把单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 映作 1. 若 A^{-1} 有定义, 则应有

$$f(A^{-1}) \cdot f(A) = f(A^{-1} \cdot A) = 1 = f(A)^{-1} \cdot f(A).$$

应当有 $f(A)^{-1} = f(A^{-1})$. 由于 f 是双射, f^{-1} 也是映射, 从而 $A^{-1} = f^{-1}(f(A)^{-1})$.

> **Important**
>
> **重要说明**. 称 y 是 x 的逆元, 应该说明 xy 与 yx 均为恒等元. 两个条件缺一不可.
>
> **例子**. 矩阵 $(1\ \ 0) \cdot \binom{1}{0} = 1$, 但是 $\binom{1}{0}$ 没有右逆元, 从而不是可逆矩阵.
>
> **定理**. 如果 $f \circ g$ 是恒等映射, $g \circ h$ 是恒等映射, 则 $f = h$.
>
> *证明*. $f = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = h$.

Ex-3 请先用(初)高中方法计算 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ 的通项, 结果用 a_0 与 a_1 表示. 若将递推式写作矩阵形式, 得到

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

此时, 计算数列的通项, 等价于计算 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ 的通式.

> **Tip**
>
> 我们在 **Ex1-4** 中给出一种计算方式, 即, 将矩阵 A 写作 $P \cdot X \cdot P^{-1}$ 的形式.

解答 由高中知识, 求 $x^2 = 2x + 3$ 的根 $x_1 = -1$ 与 $x_2 = 3$. 待定系数得

$$a_n = \frac{a_0 + a_1}{4} \cdot 3^n + \frac{3a_0 - a_1}{4} \cdot (-1)^n.$$

可以看出

$$3^n(a_0 + a_1) = (a_n + a_{n+1}), \quad (-1)^n(3a_0 - a_1) = (3a_n - a_{n+1}).$$

因此,

$$\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ 3a_0 - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + a_{n+1} \\ 3a_n - a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

从而有

$$\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

移项, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

- 注: 该分解不唯一. 例如, 将 $(3a_0 - a_1)$ 选成 $(2a_1 - 6a_0)$, 则会得到不同的答案.