

2025-09-18 作业

自学任务:

1. 了解域的定义, 以及域和数域有何区别?
2. 了解行阶梯形的定义. 此处的行阶梯形的拐角处均是 1, 这类 1 的左/上/下位置均是 0. 有时称作最简行阶梯形 (reduced row echelon form).

Note

可以参考[此书](#)的第 88 页 (PDF 的第 96 页), 理解 (既约) 阶梯形方程组这一定义.

3. 了解方程组秩的定义. 秩就是最简行阶梯形中非零行数.

Ex-1 求包含有理数 \mathbb{Q} 和 π 的最小的数域.

Ex-2 最简行阶梯形 (reduced row échelon form) 是否总存在? 若存在, 是否唯一?

Ex-3 使用课堂方法求解以下方程组, 应当标明每步行变换方式. 请视个人时间与能力, 自行选题完成.

$$\text{问题 1.} \begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2, \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5, \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 14. \end{cases}$$

$$\text{问题 2.} \begin{cases} 6x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +18x_4 & +20x_5 & = & 14, \\ 10x_1 & +9x_2 & +7x_3 & +24x_4 & +30x_5 & = & 18, \\ 12x_1 & +12x_2 & +13x_3 & +27x_4 & +35x_5 & = & 32, \\ 8x_1 & +6x_2 & +6x_3 & +15x_4 & +20x_5 & = & 16, \\ 4x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +15x_4 & +15x_5 & = & 11. \end{cases}$$

$$\text{问题 3.} \begin{cases} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 5, \\ x_1 & +3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & = & 3, \\ x_1 & +5x_2 & -9x_3 & +8x_4 & = & 1, \\ 5x_1 & +18x_2 & 4x_3 & +5x_4 & = & 12. \end{cases}$$

$$\text{问题 4.} \begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 3, \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & -6x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & 5. \end{cases}$$

问题 1. 的解答: 可以先将方程组转化成增广矩阵, 也可以直接操作方程组. 以下 $:=$ 是赋值符号, 定义作 “新 $:=$ 旧”.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2, \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5, \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 14. \end{cases} \\
 & \xrightarrow{(r_1;r_2;r_3):=(r_3;r_1;r_2)} \begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2, \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5, \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 14. \end{cases} \\
 & \xrightarrow{\begin{matrix} r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-r_1 \\ r_4:=r_4-2r_1 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\ & -x_2 & -9x_3 & = & 16, \\ & +2x_2 & -4x_3 & = & 12, \\ & +x_2 & -13x_3 & = & 28. \end{cases} \\
 & \xrightarrow{\begin{matrix} r_3:=r_3+2r_2 \\ r_4:=r_4+r_2 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\ & -x_2 & -9x_3 & = & 16, \\ & & -22x_3 & = & 44, \\ & & -22x_3 & = & 44. \end{cases} \\
 & \xrightarrow{r_4:=r_4-r_3} \begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\ & -x_2 & -9x_3 & = & 16, \\ & & -22x_3 & = & 44. \end{cases} \\
 & \xrightarrow{\begin{matrix} r_2:=-r_2 \\ r_3=\frac{-1}{22}r_3 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\ & x_2 & +9x_3 & = & -16, \\ & & x_3 & = & -2. \end{cases} \\
 & \xrightarrow{r_2:=r_2-9r_3} \begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\ & x_2 & & = & 2, \\ & & x_3 & = & -2. \end{cases} \\
 & \xrightarrow{r_1:=r_1-r_2-5r_3} \begin{cases} x_1 & & & = & 1, \\ & x_2 & & = & 2, \\ & & x_3 & = & -2. \end{cases}
 \end{aligned}$$