2025-09-18 作业

自学任务:

1. 了解域的定义, 以及域和数域有何区别?
2. 了解行阶梯形的定义. 此处的行阶梯形的拐角处均是 1, 这类 1 的左/上/下位置均是 0. 有时称作最简行阶梯形 (reduced row échelon form).

   > **Note**
   >
   > 可以参考**此书**的第 88 页 (PDF 的第 96 页), 理解 **(既约) 阶梯形方程组**这一定义.

3. 了解方程组秩的定义. 秩就是最简行阶梯形中非零行数.

Ex-1 求包含有理数 $\mathbb{Q}$ 和 π 的最小的数域.

解答. 这个数域必须包含一切 $f(\pi)$, 其中 f 是有理系数的多项式.

- **引理**. f 是非零有理系数多项式, 则 $f(\pi) \neq 0$.
  证明. 大家愿意相信即可. 这是比无理数复杂一些的性质.

因此, 该数域必须包含所有 $\frac{f(\pi)}{g(\pi)}$, 其中 g 是有理系数的非零多项式, f 是有理系数多项式. 最后说明, 集合

$$X := \left\{ \frac{f(\pi)}{g(\pi)} \mid f, g \text{ 是有理系数多项式}, g \neq 0 \right\}$$

是个数域即可.

- (包含 0 与 1). 显然 $0, 1 \in X$.
- (加法封闭). $\frac{f_1(\pi)}{g_1(\pi)} + \frac{f_2(\pi)}{g_2(\pi)} = \frac{f_1(\pi)g_2(\pi)+f_2(\pi)g_1(\pi)}{g_1(\pi)g_2(\pi)} \in X$.
- (减法封闭). 注意到 $-\frac{f(\pi)}{g(\pi)} \in X$. 验证对减法封闭, 就是验证对加法和相反数封闭.
- (乘法封闭). $\frac{f_1(\pi)}{g_1(\pi)} \cdot \frac{f_2(\pi)}{g_2(\pi)} = \frac{f_1(\pi)f_2(\pi)}{g_1(\pi)g_2(\pi)} \in X$.
- (除法封闭). 对非零的数, 注意到 $\left(\frac{f(\pi)}{g(\pi)}\right)^{-1} \in X$. 验证对除法封闭就是验证对乘法和倒数封闭.

> **Important**
>
> 多项式只能是有限和, 不能是无限和. 例如
>
> - (错误书写). 取多项式 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$
> - (正确书写). 取多项式 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

Ex-2 最简行阶梯形 (reduced row échelon form) 是否总存在? 若存在, 是否唯一?

解答 从 9-19 作业可以观察到一个现象: 行变换不改变最简行阶梯形.

假定 A 是一个矩阵, A' 由 A 通过行变换得到, 且 A' 可以通过行变换复原至 A. 记 v_k 是 A 的第 k 列, v'_k 是 A' 的第 k 列. 不难发现, 如有 $v_1+2v_2=v_3$ 一类的式子成立, 当且仅当 $v'_1+2v'_2=v'_3$ 也成立. **在可逆行变换中, 所有这类列向量的等式被无损地传递.**

矩阵到最简行阶梯形的行变换是可逆的. 我们按照以上观察, 给出一个计算最简行阶梯形的算法, 并将以上的 A' 构造作 A 的最简行阶梯形. 这一算法适合借助线性空间的语言表述, 先给一个口语化的表述 (不完全归纳):

- 若 $v_1=0$, 则取 $v'_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$. 若 $v_1\neq 0$, 则取 $v'_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$.
- 假定 $v_1\neq 0$, 且 $v_2=\lambda\cdot v_1$, 则取 $v'_2=\begin{pmatrix}\lambda\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$. 假定不存在 $v_2=\lambda\cdot v_1$ 这类等式, 则取 $v'_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix}$.
- 假定 $v'_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}, v'_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix}$. 若存在 $av_1+bv_2=v_3$ 一类等式 (也就是 v_3 落在 $\{v_1,v_2\}$ 所在的平面中), 则取 $v'_3=\begin{pmatrix}a\\b\\0\\\vdots\end{pmatrix}$. 若不存在这类等式, 则取 $v'_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\end{pmatrix}$.
- 如是归纳即可.

给一个基于线性空间语言的严谨表述 (约定 e_l 是第 l 项为 1, 其余项为 0 的列向量):

- 找到最小的 k 使得 $v_k\neq 0$. 记 $v'_{<k}$ 为零向量. 记 $v'_k=e_1$.
- 假定构造了 $\{v'_i\}_{i\leq d}$, 且 d 小于矩阵宽度, 下构造 v'_{d+1}.

  a. 若 $v_{d+1}\notin\left\{\sum_{1\leq i\leq d}c_iv_i\right\}$, 则记 $v_{d+1}=e_{q+1}$, 其中 $q=\dim\left\{\sum_{1\leq i\leq d}c_iv_i\right\}$ 是向量空间的维数.

  b. 若 $v_{d+1}\in\left\{\sum_{1\leq i\leq d}c_iv_i\right\}$, 那么任取一个等式 $v_{d+1}=\sum_{1\leq i\leq d}c_iv_i$, 定义 $v'_{d+1}=\sum_{1\leq i\leq d}c_iv'_i$ 即可.

Ex-3 使用课堂方法求解以下方程组, **应当标明每步行变换方式**. 请视个人时间与能力, 自行选题完成.

- 见**此书** 3.3 习题与解答部分 (书中的第 97 页, PDF 的第 105 页).

问题 1. $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2, \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5, \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 14. \end{cases}$

问题 2. $\begin{cases} 6x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +18x_4 & +20x_5 & = & 14, \\ 10x_1 & +9x_2 & +7x_3 & +24x_4 & +30x_5 & = & 18, \\ 12x_1 & +12x_2 & +13x_3 & +27x_4 & +35x_5 & = & 32, \\ 8x_1 & +6x_2 & +6x_3 & +15x_4 & +20x_5 & = & 16, \\ 4x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +15x_4 & +15x_5 & = & 11. \end{cases}$

问题 3. $\begin{cases} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 5, \\ x_1 & +3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & = & 3, \\ x_1 & +5x_2 & -9x_3 & +8x_4 & = & 1, \\ 5x_1 & +18x_2 & 4x_3 & +5x_4 & = & 12. \end{cases}$

问题 4. $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 3, \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & -6x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & 5. \end{cases}$

问题 1. 的解答: 可以先将方程组转化成增广矩阵, 也可以直接操作方程组. 以下 := 是赋值符号, 定义作 “新 := 旧”.

$$
\left\{\begin{array}{lllcr}
2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2, \\
x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5, \\
x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\
2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 14.
\end{array}\right.
$$

$$
\xrightarrow{(r_1;r_2;r_3):=(r_3;r_1;r_2)}
\left\{\begin{array}{lllcr}
x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\
2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2, \\
x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5, \\
2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 14.
\end{array}\right.
$$

$$
\xrightarrow{\substack{r_2:=r_2-2r_1 \\ r_3:=r_3-r_1 \\ r_4:=r_4-2r_1}}
\left\{\begin{array}{lllcr}
x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\
 & -x_2 & -9x_3 & = & 16, \\
 & +2x_2 & -4x_3 & = & 12, \\
 & +x_2 & -13x_3 & = & 28.
\end{array}\right.
$$

$$
\xrightarrow{\substack{r_3:=r_3+2r_2 \\ r_4:=r_4+r_2}}
\left\{\begin{array}{lllcr}
x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\
 & -x_2 & -9x_3 & = & 16, \\
 & & -22x_3 & = & 44, \\
 & & -22x_3 & = & 44.
\end{array}\right.
$$

$$
\xrightarrow{r_4:=r_4-r_3}
\left\{\begin{array}{lllcr}
x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\
 & -x_2 & -9x_3 & = & 16, \\
 & & -22x_3 & = & 44.
\end{array}\right.
$$

$$
\xrightarrow{\substack{r_2:=-r_2 \\ r_3=\frac{-1}{22}r_3}}
\left\{\begin{array}{lllcr}
x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\
 & x_2 & +9x_3 & = & -16, \\
 & & x_3 & = & -2.
\end{array}\right.
$$

$$
\xrightarrow{r_2:=r_2-9r_3}
\left\{\begin{array}{lllcr}
x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7, \\
 & x_2 & & = & 2, \\
 & & x_3 & = & -2.
\end{array}\right.
$$

$$
\xrightarrow{r_1:=r_1-r_2-5r_3}
\left\{\begin{array}{lllcr}
x_1 & & & = & 1, \\
 & x_2 & & = & 2, \\
 & & x_3 & = & -2.
\end{array}\right.
$$