2025-09-25 作业

Ex-1 给定 n 行的矩阵 A.

1. 交换 A 的第 i 行与第 j 行, 等价于左乘一个矩阵 $S_{i,j}$. 写出该矩阵.
2. 将 A 第 k 行的各项同时乘上一个非零常数 λ, 等价于左乘一个矩阵 D_k^λ. 写出该矩阵.
3. 向 A 的第 j 行加上其第 i 行的 λ 倍 (这一过程仅改变第 j 行, 其他行不变), 等价于左乘一个矩阵 $T_{i,j}^\lambda$. 写出该矩阵.
4. 求逆变换 (逆矩阵) $S_{i,j}^{-1}$, $(D_k^\lambda)^{-1}$, 以及 $(T_{i,j}^\lambda)^{-1}$.
5. 使用自然语言描述这三类逆变换.
6. 求 $S_{i,j}S_{k,l} = S_{k,l}S_{i,j}$ 的充要条件.
7. 求 $T_{i,j}^\lambda T_{k,l}^\mu = T_{k,l}^\mu T_{i,j}^\lambda$ 的充要条件.
8. 以上给出了三类矩阵. 能否通过某两类矩阵得到第三类? 请讨论这三种情况 (构造或给出反例).
9. 假定 A 是方阵. 将以上 $S_{i,j}, T_{i,j}$ 与 D_k 乘在 A 的右侧, 效果如何?

> **Caution**
>
> 注意: 6, 7, 8, 9 四问涉及一些无聊的数学归纳法, 可以认为没有太大意义.

Ex-2 简单证明如下事实:

1. 假定方阵 A 可以通过初等行变换变成 I (单位矩阵), I 通过同样的初等行变换变成 B. 请证明 $AB = I$ 且 $BA = I$.
2. 任何矩阵都能表示成 **Ex-1** 中 S, D 与 T 这三类矩阵交替的乘积.
3. 证明相抵标准型的存在性: 对任意矩阵 A, 存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

   $$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$

   以上, I_r 是 r 阶单位矩阵, O 表示数字 0 出现的位置.

Ex-3 给定 n 列的矩阵 A.

1. 交换 A 的第 i 列与第 j 列, 等价于右乘一个矩阵. 写出该矩阵.
2. 将 A 第 k 列的各项同时乘上一个非零常数 λ, 等价于右乘一个矩阵. 写出该矩阵.
3. 向 A 的第 j 列加上其第 i 列的 λ 倍 (这一过程仅改变第 j 列, 其他列不变), 等价于右乘一个矩阵. 写出该矩阵.
4. 求以上三类矩阵的逆变换 (逆矩阵).
5. 简单说明 **Ex-3** 与 **Ex-1** 的联系. 一个角度是矩阵转置.