## 2025-09-16 作业

## 前置任务:

- 1. 请自学 2 × 2 矩阵的乘法.
- 2. 请尝试使用电脑计算矩阵乘法, 比如基于 python 的 sage, 在线网址是 https://sagecell.sagemath.org/. 教程自行 Google.

Ex-1 给定一个长宽相等的矩阵 (也称方阵) A, 定义  $A^2 = A \cdot A$ . 归纳地定义  $A^{k+1} = A^k \cdot A.$ 

$$1.$$
 若  $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ , 试计算  $A^k$  的通式.

$$2.$$
 若  $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 试计算  $A^k$  的通式.

3. 若 
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
, 试计算  $A^k$  的通式.

$$4.$$
 若  $A=egin{pmatrix} 13 & -6 \ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,试计算  $A^k$  的通式.

$$\mathcal{Q}$$
 **Tip** 提示: 将  $A$  写作  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$ , 再尝试计算  $A^2$ .

Ex-2 沿用上题 (3). 假定 a 与 b 是实数,定义集合

$$X = igg\{egin{pmatrix} a & b \ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} igg\}.$$

请证明以下是集合间的双射:

$$f:X o \mathbb{C}, \quad egin{pmatrix} a & b \ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a+ib.$$

对任意  $A, B \in X$ , 检验以下等式:

$$1. f(A) \cdot f(B) = f(A \cdot B);$$

2. 
$$f(A + B) = f(A) + f(B)$$
.

若 A 不是零矩阵, 如何定义  $A^{-1}$ ?

**Ex-3** 请先用(初)高中方法计算  $a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$  的通项, 结果用  $a_0$  与  $a_1$  表示. 若将递推式写作矩阵形式, 得到

$$egin{pmatrix} 2 & 3 \ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot egin{pmatrix} a_{n+1} \ a_n \end{pmatrix} = egin{pmatrix} a_{n+2} \ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

此时, 计算数列的通项, 等价于计算  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$  的通式.



我们在 Ex1-4 中给出一种计算方式,即,将矩阵 A 写作  $P \cdot X \cdot P^{-1}$  的形式.