2025-09-23 作业

定义 (矩阵转置). 给定一个 $m \times n$ 矩阵 (m 横行, n 纵列) 的矩阵 $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n}$, 定义转置矩阵 A^T 为 $n \times m$ 规格的矩阵

$$A^T = (a'_{i,j})_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m}, \quad a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

例如,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ex-1 给定矩阵 A. 证明最简行阶梯形的非零行数等于最简列阶梯形的非零列数. 用 9-19-Ex-1 的话说, $ref(A)$ 与 $ref(A^T)$ 有相同的非零行数.

> **Tip**
>
> 对矩阵 X 而言, 行变换与列变换的顺序可以交换. 因为行变换的本质是左乘某个矩阵 A, 列变换的本质是右乘某个矩阵 B. 由 $(AX)B = A(XB)$, 得证.

Ex-2 记 $r(A)$ 为矩阵 A 的秩, 也就是 $ref(A)$ 的非零行数. 请证明以下式子 (最好使用线性方程组的语言).

1. $r(A) = r(A^T)$ (即, **Ex-1** 结论);
2. $r(A) \leq r(A \quad B) \leq r(A) + r(B)$ (假定 A 和 B 行数相同);
3. $r(A) \leq r\binom{A}{B} \leq r(A) + r(B)$ (假定 A 和 B 列数相同);
4. $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ (假定 A 列数等于 B 行数);
5. $r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$.

Ex-3 假定 A 是取值为实数的矩阵. 证明 $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 有相同的解.

> **Note**
>
> 作为惯例, 我们不使用粗体表示矩阵与向量. 请各位习惯这一点.

Ex-4 假设 A 是 $n \times m$ 规格的矩阵, B 是 $m \times p$ 规格矩阵. 请证明,

$$r(AB) + m \geq r(A) + r(B).$$

> **Tip**
>
> 从零解的角度思考问题即可. 只需证明 $(m - r(A)) \geq (p - r(AB)) - (p - r(B))$.