

# 习题: 矩阵的秩

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Monday 29<sup>th</sup> September, 2025

## 目录

## 0.1 行满秩, 列满秩

**定理.** 将矩阵视作线性映射, 则秩是像的维数. 换言之,

$$r(A) = \dim(C(A)) = \dim(C(A^T)). \quad (0.1)$$

**定义 (行满秩).** 称  $A$  是行满秩的,  $A$  的所有行线性无关.

**习题 1** (行满秩的等价定义). 使用相抵标准型之类的技巧, 证明以下关于矩阵  $A$  的命题等价.

1.  $A$  是行满秩的, 即,  $A$  的所有行线性无关.
2. 存在  $B$  使得  $AB$  是单位矩阵. 此时,  $B$  称作右逆元.
3. 对任意同规格且允许右乘  $A$  的矩阵  $X$  与  $Y$ , 总有  $XA = YA$  当且仅当  $X = Y$ .
4. 对任意可乘的向量  $x$ ,  $x^T A = 0$  当且仅当  $x = 0$ .
5. 存在矩阵  $B$  (有时  $B = \emptyset$ ) 使得  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  是可逆矩阵.

**例子.** 假定所有的矩阵乘法式与分块矩阵是合法的. 证明以下问题.

1. 若  $A$  与  $B$  行满秩, 则  $AB$  亦然.
2. 若  $AB$  行满秩, 则  $A$  亦然.
3. 若  $A$  行满秩, 则  $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$  亦然.
4. 若  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  行满秩, 则  $A$  与  $B$  亦然.
5. 分块阵  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$  行满秩, 当且仅当  $A$  与  $B$  均行满秩.

对列满秩矩阵, 上述结论如何变化? (自行检验即可.)

**备注.** 左乘行满秩矩阵类似满射. 此处的满射是对集合, 交换群, 群, 线性空间等而言的.

1. 若  $f$  与  $g$  是满射, 则  $f \circ g$  亦然.
2. 若  $f \circ g$  满射, 则  $f$  亦然.
3. 若  $f_1 : X_1 \rightarrow Y$  是满射, 则对任意  $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ , 复合  $X_1 \sqcup X_2 \xrightarrow{(f_1, f_2)} Y$  亦然.
4. 若  $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : X \rightarrow Y_1 \times Y_2$  是满射, 则  $f_1$  与  $f_2$  亦然.
5. 略.

类似地, 右乘行满秩矩阵类似单射. 细节从略.

## 0.2 常用技巧: 完全平方

**例子.** 此例假定  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ , 定义  $A^H = (\overline{a_{j,i}})$  是矩阵的共轭转置. 则

$$N(A) = N(A^H A) = N(AA^H A) = N(A^H AA^H A) = \cdots. \quad (0.2)$$

第一个等式的证明如下:

1. 若  $Ax = 0$ , 则  $A^H Ax = 0$ ; 反之,
2. 若  $A^H Ax = 0$ , 则  $x^H A^H Ax = \|Ax\|^2 = 0$ , 从而  $Ax = 0$ .

每处等式都能归纳地得到.

**习题 2.** 固定数域上的矩阵  $A$ . 称  $B$  为“好矩阵”, 若  $B$  是有限个  $A$  与  $A^H$  的交错积. 证明任意两个好矩阵的秩相同.

**备注.**  $A(A - A^H) = O$  当且仅当  $A = A^H$ . 这是另一份文件的习题, 也是 2023 年的第一次小测题.

**命题.** 左乘矩阵不降低零空间的维数, 从而不增加秩.

**命题.** 若数域上的矩阵满足  $M^2 = O$ , 则  $r(M + M^T) = 2 \cdot r(M)$ .

- 我们将这一原理及其推广留至内积空间的重要应用: Hodge 分解.

这一结论是“几何的”, 毕竟有限域上处处存在反例.

### 0.3 秩不等式

**习题 3. (Bonus)** 以下是秩的比较, 每一箭头朝向秩更大者. 哪些箭头是缺失的? 我没能看出更多.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & r(A+B) & \longrightarrow & r\left(\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\right) & & \\
 & & \searrow & & \swarrow & & \\
 r(AB) & \longrightarrow & \min(r(A), r(B)) & \longrightarrow & r(B) & \longrightarrow & \max(r(A), r(B)) \longrightarrow r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \longrightarrow r(A) + r(B) \longrightarrow r\left(\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\right) \\
 & \searrow & & \swarrow & & & \parallel \\
 & & r(A) & \longrightarrow & r\left(\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix}\right) & & r\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) \longrightarrow r\left(\begin{pmatrix} A & D \\ O & B \end{pmatrix}\right)
 \end{array} \quad (0.3)$$

注: 可以在另一份练习题中找到部分箭头的取等的充要条件. 如有兴趣, 可以继续总结探究.

**命题 (同时相抵化).** 假定矩阵可加, 则  $r(A) + r(B) = r(A+B)$  的充要条件是  $A$  与  $B$  能同时相抵化.

- 假若熟悉线性映射的语言, 则可直接断言存在可逆矩阵  $P$  与  $Q$  使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{r(B)} \end{pmatrix}. \quad (0.4)$$

**习题 4.** 设  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , 则  $AB = O$  且  $BA = O$  的充要条件是

- 存在可逆矩阵  $P$  与  $Q$ , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}BP^{-1} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{r(B)} \end{pmatrix}. \quad (0.5)$$

**定义 (广义逆).** 记  $A$  的一个相抵标准型是  $P \cdot \tilde{I} \cdot Q$ . 该相抵标准型对应的广义逆是  $Q^{-1} \cdot \tilde{I}^T \cdot P^{-1}$ .

此处谈论的不是 Moore-Penrose 逆 (有时这也叫广义逆).

备注. 既然相抵分解中的  $P$  与  $Q$  不唯一, 容易见得广义逆亦不唯一.

**例子.** 若  $AB = O$  且  $BA = O$ , 则  $A$  存在一个广义逆  $A'$ , 满足  $r(A' + B) = r(A) + r(B)$ .

**习题 5.**  $A$  与  $B$  互为广义逆, 当且仅当  $ABA = A$  且  $BAB = B$ .

**命题.** 广义逆在求解线性方程组中的应用 (假定  $Z$  是  $A$  的任意一个广义逆):

- $Ax = b$  有解, 当且仅当  $Zb$  是一个解; 此时, 线性方程组的所有解是

$$Zb + \text{im}(I - ZA) = \{Zb + (I - ZA)y \mid y \text{ 取遍所有可乘的向量}\}. \quad (0.6)$$

**习题 6.** 给定  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{p \times q}$ , 以及  $C \in \mathbb{F}^{m \times q}$ . 若  $AY = C$  与  $ZB = C$  有解, 则  $AXB = C$  有解.

## 0.4 Schur 打洞 (Schur 补) 及其推广

USTC 数学系曾有一句戏言: 龙生龙, 凤生凤, [华罗庚的学生](#)会打洞.

**定义** (传统的 Schur 补). 假定  $M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  是分块矩阵, 其中  $A$  是可逆方阵. 则有初等变换

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & B - A(A^{-1}B) \\ C & D - C(A^{-1}B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D - C(A^{-1}B) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}. \quad (0.7)$$

特别地, 定义 Schur 补为  $M/A := D - CA^{-1}B$ . 这一记号非常顺手, 因为  $\det(M/A) = \det M / \det A$ .

**例子.** 实际操作中,  $A$  与  $M$  未必是方阵. 假若  $C(B) \subset C(A)$  且  $C(C^T) \subset C(A^T)$ , 则可以采用广义逆的方法定义  $M/A$ . 细节从略.

**命题.** 以下是广义逆加上 Schur 打洞的一则应用: 给定分块矩阵 (不必是方阵)  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , 其中  $r(M) = r(A)$ ; 若已知  $(A, B, C)$ , 则  $D$  可以唯一确定.

**例子.** (以上命题的推论) 若  $r(M) = r(F)$ , 且  $(B, D, F, G, K)$  固定, 则  $M$  唯一决定. 此处

$$M := \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & F & G \\ H & K & L \end{pmatrix}. \quad (0.8)$$

**备注.** 借用以上“十字引理”, 可以编出更多“好玩的问题”.

**例子** (Toy-“snake lemma”). 考虑以下分块矩阵:

$$\begin{array}{cccccc} \square & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ \downarrow & & & & & \\ \# \longrightarrow & \square & \longrightarrow & \# & 3 & 3 & 5 \\ & & & \downarrow & & & \\ 2 & 2 & & \square & 3 & 3 & 5 \cdot \\ & & & \downarrow & & & \\ 2 & 2 & & \# \longrightarrow & \square & \longrightarrow & \# & 5 \\ & & & & & & \downarrow & \\ 4 & 4 & 4 & 4 & & \# \longrightarrow & \square \end{array} \quad (0.9)$$

假定  $\square$  与  $\#$  是给定的, 数字处是未知的, 且所有  $\#$  的秩与大矩阵相同, 则大矩阵唯一确定.

**命题.** 四个 Toy-“snake lemma”可以拼成一个强形式的十字引理.

**例子.** 若  $A$  与  $M/A$  均是可逆方阵, 则

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (0.10)$$

- 以上与 Sherman-Morrison-Woodbury 逆公式 (见[习题课](#)) 有何异同之处?

**例子** (“同构定理-丙”). 若遇到好的代数结构, 第一任务是检验四个同构定理 (日后将借用线性空间描述). Schur 补没有很好的乘法结构, 其在形式上仅满足同构定理-丙: 对矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (0.11)$$

总有  $(M/A) = (M/E)/(A/E)$ .

**习题 7.** 证明: 若  $A$  是可逆方阵, 则  $A + BC$  是可逆方阵当且仅当  $I + CA^{-1}B$  是可逆方阵.

- 此时能否求出  $A + BC$  的逆? 可以类比第三次习题课第二题.

备注. 矩阵的行, 列可逆变换足以解决相当多的问题, 一般不会大动干戈地使用 Schur 补.

## 0.5 初等变换与秩

**例子.** 行列初等变换 (或可逆变换) 给出

$$\begin{pmatrix} O & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix}. \quad (0.12)$$

从而  $r(AB) + r(BC) \leq r(B) + r(ABC)$ . 试问取等的充要条件? (相抵标准型的习题中可找).

1. 若  $B = I_n$ , 则  $r(A) + r(C) \leq n + r(AC)$ . 这是最为经典的 Silverster-秩不等式.
2. 若  $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ,  $ABC = O$ , 则  $r(A) + r(B) + r(C) \leq m + n$ .
3. 若  $A = C$ ,  $B = A^k$ , 则  $\{r(A^{k+1}) - r(A^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  是单调递减的数列.
4. 作为推论, 秩序列  $\{r(A^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  的任意阶差分都是单调不增的数列.

**习题 8.** 证明  $r\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\right) = r(A + B) + r(A - B)$ . 此处  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ .

**习题 9.** 证明  $r(AD - BC) \leq r(A - B) + r(C - D)$ . 其中  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , 以及  $C, D \in \mathbb{F}^{n \times l}$ .

**例子.** 给定  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  与  $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ . 对  $\begin{pmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{pmatrix}$  使用初等变换, 得

$$r(I_m - BA) - m = r(I_n - AB) - n. \quad (0.13)$$

- (如果你学过特征多项式) 将  $I_m$  换作  $xI_m$ , 则  $x^m \cdot \det(xI_n - AB) = x^n \cdot \det(xI_m - BA)$ .

日后经常遇见  $m = 1$  的情况.

**习题 10.** 若  $A^2 = A$  且  $B^2 = B$ , 则  $r(A - B) = r(A - AB) + r(B - AB)$ .

- 提示: 考虑  $A - B = A(A - B) - (B - A)B$ , 并对  $A(A - B)B = O$  使用 Silverster-秩不等式.