02-Nov-2025

习题课

(作业讲评)

Ex 1 P1 ✓

P2 如何出学集合与映射?

单、满、双

$$f: \begin{bmatrix} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto f(x) \end{bmatrix}$$

自然语言 ⟶ 映射语言.

P3 向量变换

后. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$

由多种技巧(常规方法)

✓ $x^2 = 2x + 3x$ → $x_1 = 3,\ x_2 = -1$

$\Rightarrow (a_{n+2} + a_{n+1}) = 3(a_{n+1} + a_n)$

$(a_{n+2} - 3a_{n+1}) = -(a_{n+1} - a_n)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1}+a_n \\ a_{n+1}-3a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2}+a_{n+1} \\ a_{n+2}-3a_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_2+a_1 \\ a_2-3a_1 \end{pmatrix} =$$

向量变换.

提示: 将 A 写作

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10&0\\0&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.8&-0.6\\-0.2&0.4\end{pmatrix}$$

, 再尝试计算 A^2.

HW2 P1

什么是数域 类型. 性质. ($\subseteq \mathbb{C}$, $(+,-,\cdot,/)$, $0,1$)

化归方法. Step 1 证明, 该域若存在. (→ 得有什么.)

则必包含 $\left\{\frac{p(x)}{q(x)} \,\middle|\, p,q\in\mathbb{Q}[x]\right\}$

Step 2 猜好就是.

ex. 包含 $\sqrt[3]{2}$ 的最小数域

Step 1 得有什么.? 所有 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ ✓

Step 2 $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid$ 是域$\}$ ✓

难点 $\frac{1}{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}}$ 将如何 $p+q\sqrt[3]{2}+r\sqrt[3]{4}$

P2 * ref(-) 算法.

练习 $\forall S\subseteq\mathbb{C}$, 存在包含 S 的最小数域

Step 1, Step 2.

P3 计算题非常重要 (熟练第一)

HW3

P1 ($\Leftarrow$ HW2. P2)

行秩的定义. ref(-)的应用.

P2

以 P2-2 为例

Step 1 证 $r(A) \le r(A \mid B)$

pf. 由算法. $\mathrm{ref}(A \mid B) = (\mathrm{ref}(A) \mid ?)$ ✓

Step 2. 证 $r(A \mid B) \le r(A) + r(B)$

pf. 由 $r(M) = r(M^T)$

只需证 $r((A \mid B)^T) \le r(A^T) + r(B^T)$

$$\underset{r\left(\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}\right)}{\overset{\parallel}{}}$$

$(X := A^T, Y := B^T)$

即证 $r\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \le r(A) + r(B)$

由 $\mathrm{ref}\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) \xleftrightarrow{\text{行变换}} \mathrm{ref}\begin{pmatrix} \mathrm{ref}(A) \\ \mathrm{ref}(B) \end{pmatrix}$ ✓

P3 ($r(A) = r(A^TA)$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$)

P4 $r(ABC) + r(B) \ge r(AB) + r(BC)$

证. $\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{row}} \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$\Big\downarrow$ col.

$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \xleftarrow{1} \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$

$r(ABC) + r(B) = r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BC \end{pmatrix}$?

$r\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & 0 \end{pmatrix}$ ✓

$r\begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Recall 解 } Ax = b \longrightarrow \text{cef}(A) \longrightarrow \{\ \}}$

HW4 ✓

HW5 P1 ✓ $\quad P \cdot \text{ref}(A) = P \cdot \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Q \right)$

P2. $\quad A = P\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$

$*\quad \text{cef}(\text{ref}(A)) \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{ref}(\text{cef}(A))$

$$A \xrightarrow{\text{cef}} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 2 & & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 3 & 4 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P2-1 $\quad A \in \mathbb{F}^{n \times n} \quad \exists B \text{ s.t. } AB = I$

试证明. $\ \exists C$ s.t. $CA = I$. 且 $C = B$.

$(I \ 0)\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$ pf. (1) $AB = I \Rightarrow \text{cef}(A) = I \Rightarrow \text{ref}(A) = I$

(2) $C = C(AB) = (CA)B = B$.

ex. $A = P\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = \underbrace{P\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{列满}} \ \underbrace{(I\ \ 0)\,Q}_{\text{行满}}$

$$A = C_A \cdot R_A$$ （C_A, R_A 不唯一）

problem $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\boxed{r(A)+r(B)=r(A+B)}$

则 ∃ P（m阶可逆）

Q（n阶可逆）

s.t. $PAQ = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\geq r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A+B \\ B \end{pmatrix} \geq r(A+B)$

$\|$

$r\begin{pmatrix} \mathrm{ref}(A) \\ \mathrm{ref}(B) \end{pmatrix} = r(\mathrm{ref}(A)) + r(\mathrm{ref}(B))$

pf. 取定 $A = C_A \cdot R_A$ } $r(A)$

$B = C_B \cdot R_B$ } $r(B)$

Step 1

∃

$C_A \quad C_B \qquad R_A \quad R_B$

$(C_A | C_B) \cdot \begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} = A + B$

（线性无关）

$\begin{pmatrix} H_A \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} H_B \\ 0 \end{pmatrix}$

下证 {ref(A)的非零行 与 ref(B)的非零行}

是线性无关的.

ref$(A+B)$

ref$\begin{pmatrix} H_A \\ H_B \end{pmatrix}$ 与 $\begin{matrix} H_A \\ H_B \end{matrix}$ 有相同非零行的.

Step 2 ∃ s.t. $C_A \ C_B$ 可逆 ∃ s.t. $R_A \ R_B$ 可逆.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} C_A & C_B & * \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} R_A \\ R_B \\ * \end{bmatrix}Q^{-1} = A+B$$

$$\begin{pmatrix} C_A & C_B & * \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} R_A \\ R_B \\ * \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} C_A & C_B & * \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} R_A \\ R_B \\ * \end{bmatrix} = B$$

HW6

e.g. $r\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$

当且仅当 $\exists A, B$ s.t. $AZ + XB = Y$.

$$r(A^{n+2}) + r(A^n) \geq 2r(A^{n+1})$$

$$\begin{pmatrix} A^{n+2} & 0 \\ 0 & A^n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{row}} \begin{pmatrix} A^{n+2} & A^{n+1} \\ 0 & A^n \end{pmatrix}$$

col

$$r\begin{pmatrix} A^{n+1} & A^n \\ 0 & A^{n+1} \end{pmatrix} \overset{\sim}{\leftarrow} \begin{pmatrix} 0 & A^{n+1} \\ -A^{n+1} & A^n \end{pmatrix}$$

打洞

$$\vee\!\!|$$

$$r\begin{pmatrix} A^{n+1} & 0 \\ 0 & A^{n+1} \end{pmatrix}$$

0.5 初等变换与秩

例子. 行列初等变换 (或可逆变换) 给出

$$\begin{pmatrix} O & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

1

从而 $r(AB)+r(BC) \le r(B)+r(ABC)$. 试问取等的充要条件? (相抵标准型的习题中可找).

2 1. 若 $B = I_n$, 则 $r(A)+r(C) \le n + r(AC)$. 这是最为经典的 Silverster-秩不等式.

2. 若 $B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $ABC = O$, 则 $r(A)+r(B)+r(C) \le m+n$.

3 3. 若 $A = C$, $B = A^k$, 则 $\{r(A^{k+1}) - r(A^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是单调递减的数列.

4. 作为推论, 秩序列 $\{r(A^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意阶差分都是单调不增的数列.

4 **习题 8.** 证明 $r\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\right) = r(A+B) + r(A-B)$. 此处 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

习题 9. 证明 $r(AD-BC) \le r(A-B) + r(C-D)$. 其中 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 以及 $C, D \in \mathbb{F}^{n\times l}$.

5 **例子.** 给定 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ 与 $B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 对 $\begin{pmatrix} I_m & B \\ A & I_n \end{pmatrix}$ 使用初等变换, 得

$$r(I_m - BA) - m = r(I_n - AB) - n.$$

HW7 P1 1 ✗ $(1\ 1\ 1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$

2 ✗

3 ✗ $\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\vdots & \vdots\end{pmatrix}$

AB B

4 ✓ $r(AB) = r(B)$ → ref(AB), ref(B) 非零行数相同

ref(AB) 的行变换

$\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{\overset{(2\ 0)}{\rightleftarrows}} (\ *\ )$

$CAB = B$. $r(B) \ge r(AB) \overset{=}{\ge} r(CAB)$

5 ✓

6 ✗

P2

P3 $\begin{pmatrix} 100 & 4 & 5 \\ 1 & 200 & 6 \\ 2 & 3 & 300 \end{pmatrix}$

Pf. 若 $\begin{pmatrix} 100 & 4 & 5 \\ 1 & 200 & 6 \\ 2 & 3 & 300 \end{pmatrix}$ 不可逆.

则 $\exists\, v \neq 0$. $(\ \cdot\ ) \cdot v = 0$

取 v 中绝对值最大的一项.

例如 v_2

$1\, v_1 + v_2 \cdot 200 + 6\, v_3 \cdot 6 = 0$ ✓

HW8 P1

1 ✓

2 $\left(\begin{array}{cc|cc} A & C & I & 0 \\ 0 & B & 0 & I \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & I & ? \\ 0 & B & 0 & I \end{array}\right) \to$?

3 ✓

4 $A \cdot (\ \ddots\ ) = A \mid A$

5 锻炼、计算(我自己的能力)

P2 ✓

P3

$$\begin{pmatrix} k^0 \cdot C_0^0 & & & & & & \\ k^1 \cdot C_1^0 & k^0 \cdot C_1^1 & & & & & \\ k^2 \cdot C_2^0 & k^1 \cdot C_2^1 & k^0 \cdot C_2^2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ k^{n-2} \cdot C_{n-2}^0 & k^{n-3} \cdot C_{n-2}^1 & k^{n-4} \cdot C_{n-2}^2 & \cdots & k^0 \cdot C_{n-2}^{n-2} & & \\ k^{n-1} \cdot C_{n-1}^0 & k^{n-2} \cdot C_{n-1}^1 & k^{n-3} \cdot C_{n-1}^2 & \cdots & k^1 \cdot C_{n-1}^{n-2} & k^0 \cdot C_{n-1}^{n-1} & \\ k^n \cdot C_n^0 & k^{n-1} \cdot C_n^1 & k^{n-2} \cdot C_n^2 & \cdots & k^2 \cdot C_n^{n-2} & k^1 \cdot C_n^{n-1} & k^0 \cdot C_n^n \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ (x+k) \\ (x+k)^2 \\ \vdots \\ (x+k)^n \end{pmatrix}$$

记号?

* $f: V \longrightarrow W$ 映射.

$v \longmapsto f(v)$

已知 $f(v) = w$

则 $f(kv) = kw$

"from" "the"

Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} \qquad x \neq y,\ y \neq z,\ z \neq x$$

$$\Big\downarrow \text{row}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & 0 & (z-x)\cdot(z-y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$(n \geq 2)$

e.g. 给定 $\mathbb{R}^n$ 中有限个 $(n-1)$ 维的子空间 $\{V_i\}_{i=1}^m$

证明 $\bigcup_{i=1}^m V_i \neq \mathbb{R}^n$

Pf. 取所有 $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}\right\}_{x \in \mathbb{R}} =: S$

* S 中任意 n 个向量线性无关.

If not, then $S \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$ ✓

HW9 P1 $r(A) = n-k-1$

$$A = \boxed{C_A} \cdot \boxed{R_A} \} n-k-1$$

$n \times (n+2)$

P2 $I + xy^T$ 不逆 $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I+xy^T \end{pmatrix}$ 不逆

$\Updownarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & y^T \\ 0 & I+xy^T \end{pmatrix}$ 不逆

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & y^T & 1 & 0 \\ 0 & I+xy^T & 0 & I \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & y^T & 1 & 0 \\ -x & I & -x & I \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1+y^Tx & 0 & 1+y^Tx & -y^T \\ -x & I & 0 & I \end{array}\right)$$

原矩阵可逆

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1+y^Tx & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ 可逆.

$\Longleftrightarrow 1+y^Tx \neq 0$

$$(A+BC)^{-1}$$

HW 10

P1-1 $(Q \mid I) \xrightarrow{\text{row}} (U \mid L)$

$$= \left(\begin{array}{c|c} Q_1 & * \\ \hline * & * \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

不变 (n-1) (1)

$(U \mid L)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} Q_2 & * & I_{n-1} & 0 \\ 0 & * & * & 1 \end{array}\right)$$

可逆

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} Q_2 & * & * & I_{n-2} & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} Q_2 & * & * & I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 1 \end{array}\right)$$

$L^{-1} \cdot U = Q$

P1-4 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ P1-2 ✓

P2 行满秩的等价定义. $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$

① ref 无零行 (*每行有主元)

② $\underline{\text{ref}(A)} = (I_m \mid 0)$ * 列满秩的 ref 是 $\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$

③ $\mathbb{F}^m$ 的任何向量是 A 列线性组合.

⟺ ∀b. $Ax=b$ 有解

④ $\left[\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^n & \longrightarrow & \mathbb{F}^m \\ v & \longmapsto & A\cdot v \end{array}\right]$ 满 $\mathcal{L}_A$

4 → 5

$\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_R = \mathcal{L}_{AR} = id$

满 单

⑤ 有右逆元 $(AR = I)$

5 → 4 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 都 $\in \mathcal{L}_A$ 像

取这原像. 即 R 的列

⑥ A 行线性无关.

⑦ $\left[\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^{1\times m} & \longrightarrow & \mathbb{F}^{1\times n} \\ u^T & \longmapsto & u^T\cdot A \end{array}\right]$ 单.

(, ,)

"难" 易

P3 $MXN + PX + XQ = 0$ | $Ax = 0$

m·n 个未知码 m·n 个方程 | $A \in \mathbb{F}^{mn\times mn}$

A 列满秩 ⟷ ① $Ax=0$ 解唯一

A 行满秩 ⟷ ② $Ax=b$ 总有解

$\left[\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^{mn} & \longrightarrow & \mathbb{F}^{mn} \\ x & \longmapsto & Ax \end{array}\right]$ 双 ⟷ ③ $Ax=b$ 总有唯一解

✓

(1, 2) || ||
 00

$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$

$$\dim N(A) + r(A) = n$$

假设 $A = \mathrm{cef}(A)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

$r(BA) = r(A)$

$r(A) = r(A^TA)$

$r(A) = r(AA^T)$

$C(A) = C(AA^T)$

$C(A) + C(B) = C(A|B)$

$\|$

$C(AA^T + BB^T)$

$(A|B)\cdot(A|B)^T = AA^T + BB^T$