复矩阵特征根的重要工具: Gershgorin 圆盘

Definition 给定 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 对 $1 \le k \le n$, 定义复平面 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上的第 i 个闭圆盘如下:

- 圆盘的中心是 $a_{i,i} \in \mathbb{C}$,
- 圆盘的半径是 $\sum_{1\le j\le n,\ \text{且}\ j\ne i} |a_{i,j}|$.

以上定义了第 i 个 Gershgorin 圆盘, 记作

$$D_i = \left\{ z : |z - a_{i,i}| \le \sum_{1\le j\le n,\ \text{且}\ j\ne i} |a_{i,j}| \right\}.$$

Problem 5 (Gershgorin 圆盘定理) 对上述复方阵 A, 任取特征值 λ 和相应特征向量 v, 满足 $Av = \lambda v$.

1. 假定 v 中第 i 个分量模长最大, 证明 $\lambda \in D_i$.
2. 作为推论, $\bigcup_{i=1}^n D_i$ 中包含了 A 的所有特征值.
3. 记复矩阵 $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 尝试求出 A 的所有特征根, 并画出所有的 Gershgorin 圆盘. 对 A^T 作类似的操作.
4. 假定 A 与 B 是可对角化的 n-阶复方阵. 证明: 对 $t \in [0,1]$, 存在复平面上连续的道路 $\{\lambda_i : [0,1] \to \mathbb{C}\}_{i=1}^n$, 满足
   1. $\{\lambda_i(0)\}_{i=1}^n$ 恰是 A 的所有特征值;
   2. $\{\lambda_i(1)\}_{i=1}^n$ 恰是 B 的所有特征值;
   3. $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^n$ 是 $(1-t)A + tB$ 的特征值.

   思考: 对某些 $t \in (0,1)$, 矩阵 $(1-t)A + tB$ 未必可对角化. 此时的特征道路应作何种调整?
5. 假定 A 可对角化, 且 $\bigcup_{i=1}^n D_i$ 有两个连通分支 $\bigcup_{i=1}^k D_i$ 与 $\bigcup_{i=k+1}^n D_i$. 证明: 则第一个连通分支恰包含 k 个特征值, 第二个连通分支包含 $n-k$ 个特征值.
6. 假定 A 的 n 个圆盘两两不交, 则 A 一定可对角化, 且每一圆盘中恰好包含一个特征值.

Problem 6 以下研究复矩阵的幂方问题.

1. 找出所有 2×2 的复矩阵 A, 使得不存在 $B^2=A$. 使用 Jordan 标准型, 将这个结论推广至 $n\times n$ 阶的复矩阵.

> 提供一个计算矩阵级数的一般方法:
>
> $$f(J_n(\lambda))=\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$
>
> 假定 A 是 n 阶矩阵, f 是解析函数 (依照收敛的形式幂级数定义的函数). 那么 $f(A)$ 仅与 f 的前 $(n-1)$ 阶导数相关.

2. 假定 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 若对一切 $1\le i\le n$ 都有

$$2|a_{i,i}|>\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|,$$

则 A 是可逆矩阵.

3. 假定 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 称 A 是有趣的, 当且仅当对一切 $1\le i\le n$, 都有

$$2a_{i,i}>\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|.$$

试用圆盘定理证明以下是单射:

$$n\text{-阶有趣矩阵}\to\mathbb{R}^{n\times n},\quad A\mapsto A^2.$$

4. 假定 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 称 A 是奇妙的, 当且仅当对一切 $1\le i\le n$, 都有

$$3|a_{i,i}|>\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|.$$

试用圆盘定理证明以下是单射:

$$n\text{-阶奇妙矩阵}\to\mathbb{R}^{n\times n},\quad A\mapsto A^3.$$

5. 称一个复方阵 A 是本质正的, 若 A 的所有特征根都是正实数. 试证明: 若 A 与 B 都是本质正的矩阵, 且 $A^2=B^2$, 则 $A=B$.

> 提示: 对等式 $A(A-B)=(A-B)(-B)$ 使用 Problem 3 中的某些结论.
>
> 特别地, 可以对本质正的条件做一些弱化, 例如本题第 3 小问.

6. 若 A 与 B 是本质正的, 且 $A^3=B^3$, 则 $A=B$.

> 提示: 记 $\omega_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ 是三次单位根, 考虑方程组
>
> $$\begin{cases} A(A^2+\omega_1AB+\omega_1^2B^2)=(A^2+\omega_1AB+\omega_1^2B^2)(\omega B); \\ A(A^2+\omega_2AB+\omega_2^2B^2)=(A^2+\omega_2AB+\omega_2^2B^2)(\omega B). \end{cases}$$
>
> 特别地, 可以对本质正的条件做一些弱化, 例如本题第 4 小问.

7. 证明: 本质正的矩阵有唯一的本质正的 n-次方根.

> 作为推论, 对任意本质正的方阵 A, 可以唯一地定义 A 的实数次幂, 使得幂函数是连续函数, 且一切 A^x 都是本质正的.