2025 年秋组会讲义 “外三角范畴”

张陈成

2025 年秋

最后更新于 2025 年 9 月 24 日.

目录

1 正合范畴与三角范畴拾遗

1.1 正合范畴

短正合列 (下简称 ses) 是同调代数的基本研究对象, 正合范畴研究了一般加法范畴上的短正合列理论.

定义 1.1.1. (Quillen 的正合范畴). **正合范畴** $(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 的基本资料是加法范畴 $\mathcal{C}$ 与一族图 $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ 中对象称为 **$\mathcal{C}$ 中的短正合列 (ses)**, 形如

$$0 \to X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \to 0, \tag{1.1.1}$$

其中 $i = \ker p$, 称 i 为**容许单态射**; $p = \operatorname{cok} i$, 称 p 为**容许满态射**. 正合范畴 $(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 需满足以下公理:

EX0 对任意对象 X, 恒等映射 id_X 是容许单态射;

EX0' 对任意对象 X, 恒等映射 id_X 是容许满态射;

EX1 容许单态射在复合下封闭;

EX1' 容许满态射在复合下封闭;

EX2 容许单态射 $X \to Y$ 对任意态射 $X \to Z$ 有推出, 且 $Z \to Y \sqcup_X Z$ 仍为容许单态射;

EX2' 容许满态射 $B \to C$ 对任意态射 $A \to C$ 有拉回, 且 $B \times^C A \to A$ 仍为容许满态射.

备注 1.1.2. 推出 (拉回) 所得的态射在相差个一个同构的意义下是唯一的. 因此, EX2 与 EX2' 表明所有同构都是容许单态射与容许满态射. 我们通常直接约定 $\mathcal{E}$ 对同构封闭.

以下说明所有可裂 ses 都是正合范畴的 ses.

备注 1.1.3. 实际上, EX2 与 EX2' 构造的交换方块是推出拉回方块. 更精细的表述见**定理** 1.3.8.

引理 1.1.4. $\binom{1}{0} : X \to Y$ 与 $(1\ \ 0) : X \oplus Y \to X$ 分别是容许单态射与容许满态射.

证明. 注意到以下两个方块均是推出拉回方块:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\binom{1}{0}"] \\ Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & X \oplus Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \oplus Y \arrow[r, "(1\ 0)"] \arrow[d, "(0\ 1)"] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} . \tag{1.1.2}$$

□

引理 1.1.5. $\mathcal{E}$ 对直和封闭. 此处的直和指二元双积 $\oplus$, 后不重复解释.

证明. 给定正合范畴的 ses $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ 与 $0 \to D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{q} F \to 0$, 下证明 $0 \to A \oplus D \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{smallmatrix}\right)} B \oplus E \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} C \oplus F \to 0$ 是正合范畴的 ses. 首先, 这一直和是范畴的正合列, 故只需证明其中的满态射是容许满态射. 引理 1.1.4 说明 $\binom{1}{0}$ 是容许单态射, EX1 说明 $\binom{i}{0} : A \to B \oplus E$ 与 $\binom{0}{j} : D \to C \oplus E$ 也是容许单态射. 相应地, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix}\right)$ 与 $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 是容许满态射. 由 EX1', $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 是容许满态射. □

推论 1.1.6. 在承认剩余公理的情况下, 可以将 EX0 与 EX0' 等价替换为:

$\overline{\text{EX0}}$ 任意可裂 ses 都属于 $\mathcal{E}$.

例子 1.1.7. 有时假定正合范畴的扩张类是局部本质小的. 换言之, 对任意对象 X, Z, 形如 $0 \to X \to ? \to Z \to 0$ 的 ses 的同构类是一个集合. 正合范畴满足这一假定, 若以下任意一则条件成立,

1. $\mathcal{C}$ 有足够投射对象, 或足够内射对象. (由维数移动.)
2. $\mathcal{C}$ 是本质小的, 即所有态射构成集合. (显然.)
3. $\mathcal{C}$ 中对象可遗忘作集合, 态射可遗忘作映射, 且遗忘函子保持核 (例如, 遗忘是右伴随). 对任意基数 κ, 基数为 κ 的对象构成本质小范畴. 模范畴复形范畴的常见正合结构满足这一假定.

   证明. 给定 X 与 Z, 则扩张项 E 满足 $|E/X| \simeq |Z|$. 由于所有基数不超过 $|X| \cdot |Z|$ 的对象构成本质小范畴, 故所有形如 $0 \to X \to ? \to Z \to 0$ 的 ses 构成本质小范畴. □

命题 1.1.8. 正合范畴的反范畴是正合范畴.

证明. 公理 EXn (EXn') 的在反范畴中的表述是 EXn' (EXn), 故成立. □

后文提及的 "对偶可证" 是基于反范畴的考量.

备注 1.1.9. 正合范畴的一般理论见 [Büh10] 与 [Kel96], 一些较有意义计算与反例参阅 [BK14].

正合范畴是特殊的外三角范畴. 由于正合范畴的部分主要结论 (如 "六项长正合列") 可从外三角范畴者退化得到, 此节无需提及这类结论. 以下几则正合范畴的重要结论被推广作外三角范畴定义的一部分, 应当给出证明.
第一则结论是, EX2 (EX2') 中的推出 (拉回) 方块给定了正合列的推出 (拉回).

定理 1.1.10. EX2 中的推出方块定义了正合范畴中正合列的推出; 特别地, 这也是推出拉回方块.

证明. 取定正合范畴的 ses $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$, 作 i 关于任意给定态射 $f : A \to A'$ 的推出. 依照泛性质取 p' 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& A' \arrow[r, "i'"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & E \arrow[r, dashed, "p'"] & C &
\end{tikzcd} \quad . \tag{1.1.3}$$

下证明 $p' = \operatorname{cok} i'$. 依照泛性质定义, 任取定 $\varphi : E \to F$ 使得 $\varphi \circ i' = 0$. 由 $p = \operatorname{cok} i$, 存在 ψ 使得 $\psi \circ p = \varphi \circ f'$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[r] \arrow[ddl, dashed, bend left, "\psi"] & 0 \\
& A' \arrow[r, "i'"] \arrow[dr, "0"'] & E \arrow[ur, dashed, "p'"'] \arrow[d, "\varphi"] & & \\
& & F & &
\end{tikzcd} \quad . \tag{1.1.4}$$

依照推出的泛性质, $(i' \ \ f') : A' \oplus B \to E$ 是满态射. 由 $(\varphi) \circ (i' \ \ f') = (\psi \circ p') \circ (i' \ \ f')$, 得 $\varphi = \psi \circ p'$. 这说明 "被 i' 零化的 φ 唯一决定了 ψ", 换言之, p' 是泛性质决定的 i' 的余核.

最后说明以上方块是拉回. 给定 x 与 y 使得 $f' \circ y = i' \circ x$, 如下如图所示:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[rrr, bend left, "y"] \arrow[dr, dashed, "s"'] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & & & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & E \arrow[r, "p'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \cdot \tag{1.1.5}
$$

由 $p \circ y = 0$, 则存在唯一的 s 使得 $i \circ s = y$. 同时有等式 $f \circ s = x$, 两侧复合单态射 i' 即可. s 的取法也是唯一的; 若不然, 则有 $i \circ s' = y = i \circ s$, 消去单态射 i 得到 $s = s'$ (矛盾). □

推论 1.1.11. $\mathrm{Ext}^1(Z, -)$ 与 $\mathrm{Ext}^1(-, X)$ 都是加法函子.

推论 1.1.12. EX2 给出给出了配对

$$
\mathrm{Ext}^1(Z, X) \times (X, X') \to \mathrm{Ext}^1(Z, X'), \quad (\theta, f) \mapsto \theta^\sharp(f). \tag{1.1.6}
$$

具体地, 如下图所示:

$$
\begin{tikzcd}
\theta \arrow[d, dashed, mapsto] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PO}"] & E \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\theta^\sharp(f) & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, dashed] & F \arrow[r, dashed] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} . \tag{1.1.7}
$$

我们希望这一配对是自然的.

引理 1.1.13. 式 (1.1.7) 定义的配对关于 (X, X') 项是自然的. 换言之, $\theta^\sharp$ 是自然变换.

证明. 假定 $\varphi : X' \to X''$. 依照定义, $\theta^\sharp(\varphi \circ f)$ 是正合列 $\theta^\sharp(f)$ 关于 φ 的拉回, 从而 $\mathrm{Ext}^1(Z, \varphi)(\theta^\sharp(f)) = \theta^\sharp(\varphi \circ f)$. 更清楚地说, 以下是交换图:

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[d, mapsto] & (X, X') \arrow[r, "\theta^\sharp"] \arrow[d, "{(X,\varphi)}"'] & \mathrm{Ext}^1(Z, X') \arrow[d, "{\mathrm{Ext}^1(Z,\varphi)}"] & \theta^\sharp(f) \arrow[d, dashed, mapsto] \\
\varphi \circ f & (X, X'') \arrow[r, "\theta^\sharp"'] & \mathrm{Ext}^1(Z, X'') & \theta^\sharp(\varphi \circ f)
\end{tikzcd} . \tag{1.1.8}
$$

□

第二则结论是 Ext^1 具有双函子性.

定理 1.1.14. 假定例 1.1.7. $\mathrm{Ext}^1 : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ 将一组对象 (Z, X) 对应至 “所有形如 $0 \to X \to ? \to Z \to 0$ 的 ses” 的同构类. 对任意态射 $f : X \to X'$, $\mathrm{Ext}^1(Z, f)$ 将短正合列 θ 对应至 θ', 机理是

$$
\begin{tikzcd}
\theta \arrow[d, dashed, mapsto, "{\mathrm{Ext}^1(f,Z)}"'] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PO}"] & E \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\theta' & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, dashed] & F \arrow[r, dashed] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} . \tag{1.1.9}
$$

对 $g' : Z \to Z'$, 可以通过拉回对偶地定义 $\mathrm{Ext}^1(g', X) : \mathrm{Ext}^1(Z', X) \to \mathrm{Ext}^1(Z, X)$. 今断言, 这是加法双函子, 其加法结构与 Baer 和匹配.

证明. 扩张的一般理论参阅 [Mit65] 章节 VII. 注意: Mitchell 通过 Baer 和证明 Ext^1 的双函子性; 为消解循环论证的疑虑, 以下直截了当地说明双函子性, 即证明如下引理.

引理 1.1.15. 对 ses $\tau : 0 \to X \to M \to Z' \to 0$, 态射 $f : X \to X'$ 与 $g : Z \to Z'$, 总有

$$\mathrm{Ext}^1(g, X')(\mathrm{Ext}^1(Z', f)(\tau)) = \mathrm{Ext}^1(Z, f)(\mathrm{Ext}^1(g, X)(\tau)). \tag{1.1.10}$$

方便起见, 将上式记作 $g^* f_* \tau = f_* g^* \tau$.
以下证明 $f_* : g^*\tau \mapsto g^* f_* \tau$, 即, 存在 $\varphi : G \to F$ 使得下图中 $b'' = x' \circ \varphi$, 且 $\star$ 是推出:

$$\begin{tikzcd}
g^*f_*\tau & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "y"] & F \arrow[r, "x'"] & Z \arrow[r] & 0 \\
g^*\tau \arrow[u, mapsto] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "z"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, phantom, "\star"] & G \arrow[r, "b''"] \arrow[u, dashed, "\varphi"] \arrow[d, "g''"] \arrow[dr, phantom, "\text{PB}"] & Z \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, "g"] & 0 \\
\tau \arrow[u, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "a"] \arrow[u, equal] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\text{PO}"] & M \arrow[r, "b"] \arrow[d, "f'"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
f_*\tau \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "a'"] & E \arrow[r, "x"] & Z' \arrow[r] & 0 \\
g^*f_*\tau & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "y"] \arrow[u, equal] & F \arrow[r, "x'"] \arrow[u, "g'"] \arrow[ur, phantom, "\text{PB}"] & Z \arrow[r] \arrow[u, "g"] & 0
\end{tikzcd} . \tag{1.1.11}$$

φ 由红, 蓝两组复合态射及右下方的拉回方块决定. 两组复合态射即

$$G \xrightarrow{f' \circ g''} E \xrightarrow{x} Z', \quad G \xrightarrow{b''} Z \xrightarrow{g} Z'. \tag{1.1.12}$$

由拉回的泛性质, 存在唯一的 φ 使得 $x' \circ \varphi = b''$ 且 $f' \circ g'' = g' \circ \varphi$. 因此右上方块交换. 为说明 $\star$ 的交换性, 只需验证 $y \circ f$ 与 $\varphi \circ z$ 均是如下拉回问题的解 $\mathfrak{X}$:

$$x \circ g' \circ \mathfrak{X} = g \circ x' \circ \mathfrak{X}. \tag{1.1.13}$$

自行追图较阅读连等式更为快捷, 遂略去检验过程. 由 $\operatorname{cok} y \simeq \operatorname{cok} z$, 故 $\star$ 是推出. □

备注 1.1.16. 实际上, **定理** 1.1.14 的证明并不依赖于**例** 1.1.7. 如 [Mit65] 的章节 VII 所示, $\mathrm{Ext}^1(Z, X)$ 可以取作 "Abel 类". 若读者熟悉公理集合论, 大多数结论可推广至 "Abel 类".
为规避过多技术性的细节, 本文一向承认**例** 1.1.7, 正如承认范畴的 Hom-类是集合.

第三则结论是 Noether 同构. 为精简记号, 通常作如下约定.

记号 1.1.17. 使用 $\rightarrowtail$ ($\twoheadrightarrow$) 表示容许单态射 (容许满态射). 例如, 正合范畴的 ses 形如 $X \rightarrowtail Y \twoheadrightarrow Z$.

定理 1.1.18. 假定容许单态射 i 与 j 可复合作 $j \circ i$, 则有三条 ses 作成的交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, tail, "j"] & Z \arrow[d, tail, dashed, "j'"] \\
X \arrow[r, tail, "j \circ i"] & A \arrow[r, two heads, "r"] \arrow[d, two heads, "q"] & W \arrow[d, two heads, dashed, "q'"] \\
& B \arrow[r, equal] & B
\end{tikzcd} . \tag{1.1.14}$$

余核的反性质诱导了 j' 与 q'. 今断言 $Z \overset{j'}{\rightarrowtail} W \overset{q'}{\twoheadrightarrow} B$ 也是 ses.

证明. 先作 $Y \rightarrowtail A \twoheadrightarrow B$ 关于 p 的推出. 依照**定理** 1.1.10 的对偶表述, $\star$ 是推出拉回. 此时, 两个推出方块依照同构 φ 分解:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, tail, "j"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & Z \arrow[d, "\overline{j'}"] \arrow[ddr, dashed, "j'"] & \\
X \arrow[r, tail, "j\circ i"] & A \arrow[r, "\overline{r}"] \arrow[d, two heads, "q"] \arrow[drr, "r"] & \overline{W} \arrow[d, two heads, "\overline{q'}"'] & \\
& B \arrow[r, equal] & B & W \arrow[l, dashed, "q'"] \arrow[ul, dashed, "\varphi"']
\end{tikzcd} . \tag{1.1.15}$$

最后说明满态射 r 诱导的 q' 满足 $\overline{q'} \circ \varphi = q'$. 这一等式在复合满态射 r 后显然相等. □

备注 1.1.19. 若记上述 $Z := Y/X$, $W := A/X$, 则 Noether 同构可表述为 $\frac{A/X}{Y/X} \simeq \frac{A}{Y}$. 这是 Noether 同构的初始形态.

1.2 三角范畴

外三角是正合范畴与三角范畴的共同推广. 试回顾三角范畴的定义.

定义 1.2.1. 三角范畴由资料 $(\mathcal{C}, \Sigma, \mathcal{E})$ 描述. 其中,

1. $\mathcal{C}$ 是加法范畴,
2. $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是范畴的自等价, 称作平移函子,
3. $\mathcal{E} = \{X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中好三角组成的类.

约定两则术语:

1. (三角射). 两个好三角间的态射描述作三元组 (α, β, γ), 使得下图交换 (横行是好三角):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\gamma"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\alpha"] \\
A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "j"] & C \arrow[r, "k"] & \Sigma A
\end{tikzcd} , \tag{1.2.1}$$

2. (旋转). 下图中, 中行是好三角, 首 (尾) 行是其逆 (顺) 时针旋转:

$$\begin{array}{ll}
\Sigma^{-1} Z \xrightarrow{-\Sigma^{-1} w} X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z & (逆) \\
X \xrightarrow{\quad u \quad} Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X & . \\
Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y & (顺)
\end{array} \tag{1.2.2}$$

特别地, 好三角类满足以下公理:

TR1-1 $\mathcal{E}$ 关于同构封闭. 具体地, 若**式** (1.2.1) 是 $\mathcal{C}$ 中通常的交换图, 且 α, β, γ 都是同构, 则上行是好三角当且仅当下行是好三角;

TR1-2 任意态射 u 可嵌入某一好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$;

TR1-3 对任意对象 X, 平凡三角 $0 \to X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0$ 是好三角;

TR2 好三角关于顺时针旋转封闭;

TR3 假定式 (1.2.1) 的上行与下行是好三角, 若图中仅存在 α 与 β 使得 $\beta \circ u = i \circ \alpha$, 则一定存在某一 γ 使得上图交换;

TR4 若下图中 r_1, r_2 与 c_2 均为好三角, 则存在虚线所示的好三角 c_3 使得所有方块交换:

$$\begin{tikzcd}
 & & c_2 & c_3 & \\
r_1 & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "a"] & W \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
r_2 & X \arrow[r, "x"] & Z \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & R \arrow[r, "z"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, red, "\Sigma u"] \\
 & & S \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"] & S \arrow[r, "c"] \arrow[d, dashed] & \Sigma Y \\
 & & \Sigma Y \arrow[r, red, "\Sigma v"] & \Sigma W &
\end{tikzcd} . \tag{1.2.3}$$

例子 1.2.2. 以下是一些注意事项.

1. Σ 是范畴自等价, 这并不意味着 $\Sigma X \simeq X$.
2. TR3 中补全的态射的方式未必唯一.

备注 1.2.3. 关于三角范畴的定义见 [Ver96] 或 [Nee01]. 更通俗的读物是 [Mur07] 或 [May01]. 特别地, [May01] 指出 TR3 可由其余公理推出.

以下从正合范畴的视角 "粗浅地" 解释三角范畴; 诚然, 更好的工具是外三角范畴.

例子 1.2.4. 给定好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$. 若将 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ 类比作 ses, 则 $w \in \mathrm{Ext}^1(Z, X)$ 描述了扩张元. 特别地, $\mathrm{Ext}(Z, X) := (Z, \Sigma X)$. TR1-1, TR1-2, TR3 类似核与余核泛性质的推论. TR1-3 即 Ex0. TR4 类似 Noether 同构.

命题 1.2.5. 以下是预三角范畴的直接推论 (无需 TR4). 证明细节见通常的教材.

1. (TR3 的加强). TR3 即是说, 给定式 (1.2.1) 中的 α 与 β 使得图交换, 则有 γ 使得图交换. 实际上, 若给定 α, β, γ 中任意两者使得图交换, 则一定存在第三者使得图交换.

   证明. 依照 TR2 与自然同构 $(\Sigma(?), \Sigma(-)) \simeq (?, -)$ 即得. □

2. (长正合列). 对任意好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$, 有上同调函子的长正合列

$$\cdots \to (-, \Sigma^{-1} Z) \to (-, X) \to (-, Y) \to (-, Z) \to (-, \Sigma X) \to \cdots , \tag{1.2.4}$$

   以及同调函子的长正合列

$$\cdots \to (\Sigma X, -) \to (Z, -) \to (Y, -) \to (X, -) \to (\Sigma^{-1} Z, -) \to \cdots . \tag{1.2.5}$$

3. (长正合列的推论). 若式 (1.2.1) 中 α, β 与 γ 中有两者为同构, 则第三者也是同构.

证明. 以上同调函子为例, 下证明对任意 A, 总有 $\ker(A,v)=\mathrm{im}(A,u)$. 给定 $\beta: A\to Y$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & \Sigma A \arrow[d, dashed, "\Sigma\alpha"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & \Sigma X \end{tikzcd} . \tag{1.2.6}$$

若存在 α 使得图交换, 则存在 γ 使得图交换. 因此 $\ker(A,v)\supseteq\mathrm{im}(A,u)$. 倒置 γ 与 α 的选取顺序, 得 $\ker(A,v)\subseteq\mathrm{im}(A,u)$, 从正合列在 $(-,Y)$ 处正合. 该正合列通过 TR2 右延, 通过 TR2 以及自然同构 $(\Sigma(?),\Sigma(-))\simeq(?,-)$ 左延. □

4. 好三角的直和也是好三角;

证明. 对 $i=1,2$, 记好三角 $X_i\xrightarrow{u_i}Y_i\xrightarrow{v_i}Z_i\xrightarrow{w_i}\Sigma X_i$. 记直和嵌入的好三角 $X_1\oplus X_2\xrightarrow{u_1\oplus u_2} Y_1\oplus Y_2\xrightarrow{(a\ b)}Z_0\xrightarrow{\binom{c}{d}}\Sigma(X_1\oplus X_2)$. 由直和的泛性质构造交换图

$$\begin{tikzcd} X_1\oplus X_2 \arrow[r, "u_1\oplus u_2"] \arrow[d, equal] & Y_1\oplus Y_2 \arrow[r, "v_1\oplus v_2"] \arrow[d, equal] & Z_1\oplus Z_2 \arrow[r, "w_1\oplus w_2"] \arrow[d, "(i\ j)"] & \Sigma X_1\oplus\Sigma X_2 \arrow[d, equal] \\ X_1\oplus X_2 \arrow[r, "u_1\oplus u_2"] & Y_1\oplus Y_2 \arrow[r, "(a\ b)"] & Z_0 \arrow[r, "\binom{c}{d}"] & \Sigma X_1\oplus\Sigma X_2 \end{tikzcd} . \tag{1.2.7}$$

对所有对象与态射取米田嵌入 $E\mapsto(-,E)$, 上下两行均是长正合列. 由五引理, $(-,(i\ j))$ 是自然同构. 由米田引理, $(i\ j)$ 是同构. □

5. (TR3 的特殊情形). 沿用交换图式 (1.2.1). 若 α,β 与 γ 两者为同构, 则第三者必为同构.

证明. 对所有对象与态射取米田嵌入 $E\mapsto(-,E)$. 由长正合列与五引理, $(-,\alpha)$, $(-,\beta)$ 与 $(-,\gamma)$ 均是自然同构. 最后由依照米田引理完成证明. □

6. (TR1-2 的加强). 任意态射可以以任意位置嵌入某一好三角; 若选定该位置, 则其嵌入的好三角在同构意义下唯一.

证明. 依照 TR2 与自然同构 $(\Sigma(?),\Sigma(-))\simeq(?,-)$, 态射的嵌入位置可以任意选定. 由上一条 "TR3 的特殊情形", 态射嵌入的好三角在同构意义下唯一. □

7. (TR2 的类似结论). 好三角关于逆时针旋转封闭. 顺 (逆) 时针旋转定义作式 (1.2.2).

证明. 选定好三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}\Sigma X$. 下图上行是 $-\Sigma^{-1}w$ 嵌入的好三角, 下行是逆时针旋转:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{-1}Z \arrow[r, "-\Sigma^{-1}w"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "u'"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & Z \arrow[d, equal] \\ \Sigma^{-1}Z \arrow[r, "-\Sigma^{-1}w"] & X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \end{tikzcd} . \tag{1.2.8}$$

下解释 φ 的选取方式. 对上下两行作顺时针旋转, 得好三角的交换图, 由 "TR3 的加强" 可得 φ 使得图交换. 由 "TR3 的特殊情形", φ 是同构. □

命题 1.2.6. 对预三角范畴 (无需 TR4) 中的态射 f, 以下命题等价:

1. f 存在核;

2. f 存在余核;

3. f 在前后复合同构的意义下形如 $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right): X\oplus A\to Y\oplus A$.

仅需证明 $(1\to 3)$. 反方向是显然的. 对 $(2\leftrightarrow 3)$ 的证明是对偶的.

证明. 记 $i: K\to U$ 是 $f: U\to V$ 的核. 记好三角 $R\xrightarrow{r}K\xrightarrow{i}U\xrightarrow{s}\Sigma R$, 由长正合列知 $\operatorname{im}(-,r)=\ker(-,i)=0$. 从而 r 是零态射. 下图说明 i 是可裂单态射:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "r"] \arrow[d] & K \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & U \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "p"] & R \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, equal] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} . \tag{1.2.9}$$

将 i 嵌入好三角 $K\xrightarrow{i}U\xrightarrow{q}C\xrightarrow{z}\Sigma K$. 由 "TR3 的特殊情形", 得同构的好三角

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & U \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\binom{p}{s}"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Sigma K \arrow[d, equal] \\
K \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & K\oplus C \arrow[r, "(0\ 1)"] & C \arrow[r] & \Sigma K
\end{tikzcd} . \tag{1.2.10}$$

这说明 f 形如 $K\oplus C\xrightarrow{(0\ \varphi)}V$, 其中 φ 是单态射. 同样的论证说明 φ 是可裂单, 且由直和关系 $V\simeq L\oplus D$. 此时, f 形如 $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right): C\oplus K\to D\oplus L$. □

推论 1.2.7. 给定好三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}\Sigma X$, 则以下命题等价: (1) u 是单态射; (2) u 是可裂单态射; (3) v 是满态射; (4) v 是可裂满态射; $w=0$.

引理 1.2.8. 特别地, 预三角范畴的所有可裂单 (满) 都有相应的直和项, 即**定义** 3.3.1 定义的弱幂等完备性.

证明. 给定好三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}\Sigma X$, 其中 v 是可裂单. 推论 1.2.7 说明 $u=0$. 可以补全以下三角射:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & Y\oplus\Sigma X \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "0"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X
\end{tikzcd} . \tag{1.2.11}$$

由 "TR3 的特殊情形", φ 是同构. 这说明 $\operatorname{cok} v=W$. □

1.3 同伦的推出拉回

本节所述的 "同伦的推出拉回" 在外三角范畴的图表定理中大有作用. 以下给出一侧预加范畴中的观察.

例子 1.3.1. 给定预加范畴 $\mathcal{A}$ 中的交换方块 (左), 以及其诱导的复形 (右):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
Z \arrow[r, "l"'] & W
\end{tikzcd} \qquad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\binom{f}{h}} Y\oplus Z \xrightarrow{(g\ -l)} W \longrightarrow 0 . \tag{1.3.1}$$

以下是一则转述定义即得的引理.

引理 1.3.2. 左图是拉回 (推出), 当且仅当右图左正合 (右正合).

称某交换方块是拉回 (推出), 若相应的态射方程存在唯一的解. 倘若去除唯一性, 则称该交换方块是弱拉回 (弱推出). 以下是一则转述定义即得的引理.

引理 1.3.3. 左图是弱拉回, 当且仅当以下是函子的正合列:

$$(-,X) \xrightarrow{\binom{f}{h}_*} (-,Y) \oplus (-,Z) \xrightarrow{(g\ -l)_*} (-,W). \tag{1.3.2}$$

左图是弱推出, 当且仅当以下是函子的正合列:

$$(W,-) \xrightarrow{(g\ -l)^*} (Y,-) \oplus (Z,-) \xrightarrow{\binom{f}{h}^*} (X,-). \tag{1.3.3}$$

命题 1.3.4. 由正合范畴的 Noether 同构, 容许单态射 $X \to Y$ 与容许满态射 $X \to Z$ 的推出是推出拉回方块. 特别地, 这一推出拉回方块诱导的 ses 是正合范畴的 ses.

证明. 只需证明, 若 $i : A \to B$ 是容许单态射, 则对任意 $f : A \to C$, $\binom{i}{f}$ 也是容许单态射. 以下证明一则更强的引理.

引理 1.3.5. 若 $q \circ p$ 是容许单态射, q 是容许满态射, 则 p 是容许单态射.

证明. 对态射 q 与 $q \circ p$ 使用 Noether 同构, 得以下交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "s"] \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[ddr, bend right, "1_X"'] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & A \arrow[d, tail, "i"] & \\
& F \arrow[r, tail, "p'"] \arrow[d, two heads, "\lambda"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "q"] & Z \arrow[d, equal] \\
& X \arrow[r, tail, "q\circ p"] & Y \arrow[r, two heads, "\pi"] & Z
\end{tikzcd}. \tag{1.3.4}$$

最左纵列的短正合列可裂. 考虑可裂 ses $X \overset{s}{\rightarrowtail} F \twoheadrightarrow A$ 知 s 是容许单态射. 由蓝线所示的拉回问题, 得 $p = p' \circ s$ 是容许单态射的复合, 故 p 也是容许单态射. □

注意, 以上引理的证明未使用弱幂等完备的假定. □

定义 1.3.6. (正合范畴中同伦的推出拉回). 称交换图是正合范畴中同伦的推出拉回方块, 若其诱导的链复形是正合范畴的 ses.

例子 1.3.7. 将 Abel 范畴与所有 ses 作成正合范畴, 则推出拉回方块必然是同伦的推出拉回方块.

定理 1.3.8. (正合范畴的同伦推出拉回方块). 以下五类是正合范畴的同伦推出拉回方块:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{PO}"] & \cdot \arrow[d, tail, dashed] \\
\cdot \arrow[r, tail, dashed] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\text{PO}"] & \cdot \arrow[d, two heads, dashed] \\
\cdot \arrow[r, tail, dashed] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] \arrow[dr, phantom, "\text{PB}"] & \cdot \arrow[d, two heads] \\
\cdot \arrow[r, tail] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] \arrow[dr, phantom, "\text{PB}"] & \cdot \arrow[d, two heads] \\
\cdot \arrow[r, two heads] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \cdot \arrow[d, two heads, dashed] \\
\cdot \arrow[r, tail] & \cdot \arrow[r, two heads] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, dashed] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \cdot \arrow[d, equal] \\
\cdot \arrow[r, tail] & \cdot \arrow[r, two heads] & \cdot
\end{tikzcd}
. \tag{1.3.5}$$

证明. 使用引理: 若 i 是容许单态射 (p 是容许满态射), 则 $\binom{i}{?}$ 是容许单态射 ($(p\ ?)$ 是容许满态射). □

定义 1.3.9. (三角范畴中同伦的推出拉回). 称交换图是三角范畴中同伦的推出拉回方块, 若其诱导的三项链复形是三角范畴中好三角前三项.

满足 TR1-TR3 的加法范畴称作预三角范畴. 对预三角范畴, 下给出一则八面体公理的等价公理, 更多等价公理 (不包括以下) 可参阅 [Nee91].

定理 1.3.10. 预三角范畴是三角范畴, 当且仅当其满足如下等价公理.

1. 八面体公理.
2. 给定红色处态射 a_1 与 b_1, 则可以补全下图中的三个好三角与一处三角射:

$$X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(b_2\ -a_2)} Z \xrightarrow{\mu\lambda} \Sigma X$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma b_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "a_2"] & Z \arrow[r, "\lambda"'] & W \arrow[r] & \Sigma Y_1
\end{tikzcd} \tag{1.3.6}$$

3. 给定红色个好三角, 同伦推出拉回方块, 以及第一行的好三角. 此时存在 $\mu\lambda = \delta$ 使得下图包含三个好三角与一处三角射:

$$X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(b_2\ -a_2)} Z \xrightarrow{\delta} \Sigma X$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma b_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "a_2"] & Z \arrow[r, "\lambda"'] & W \arrow[r] & \Sigma Y_1
\end{tikzcd} \tag{1.3.7}$$

证明. $(1 \to 2)$. 若给定 a_1 与 b_2, 则八面体公理 (下图上) 诱导了三角射 (下图下):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{a_1}{b_1}"] \arrow[d, equal] & Y_2 \oplus Y_1 \arrow[r, "(b_2{,}-a_2)"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & Z \arrow[r, "\mu\lambda"] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "a_1"] & Y_2 \arrow[r, "\lambda b_2"] \arrow[d, "0"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, dashed, "t"] & \Sigma X \arrow[d, "\binom{\Sigma a_1}{\Sigma b_1}"] \\
 & \Sigma Y_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Sigma Y_1 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, dashed] & \Sigma Y_2 \oplus \Sigma Y_1 \\
 & \Sigma Y_2 \oplus \Sigma Y_1 \arrow[r] & \Sigma Z &
\end{tikzcd} . \tag{1.3.8}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] & Y_2 \arrow[r, "\lambda b_2"] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma b_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "a_2"] & Z \arrow[r, dashed, "\lambda"] & W \arrow[r, "t"] & \Sigma Y_1
\end{tikzcd}$$

此处省略校验过程.

$(2 \to 1)$. 沿用 $(1 \to 2)$ 中构造即可.

(3 → 1). 依照题设补全四个好三角

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}W \arrow[r, "-\Sigma^{-1}\mu"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & Y_2 \arrow[r, "\lambda b_2"] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}W \arrow[r, "-b_1(\Sigma^{-1}\mu)"] & Y_1 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "la_2"] & Z \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "l"] \arrow[dr, phantom, "?"] & W \arrow[d, "-\mu"] \\
 & L \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"] & L \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "(\Sigma a_1)k"] & \Sigma X \\
 & \Sigma X \arrow[r, "\Sigma a_1"] & \Sigma Y_2 &
\end{tikzcd} . \tag{1.3.9}$$

由同伦推出拉回方块 ■, 上图除绿色方块 ? 处均交换. 依照 3 的题设,

$$X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(-b_2\ a_2)} Z \xrightarrow{kl} \Sigma X \tag{1.3.10}$$

与

$$X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(b_2\ -a_2)} Z \xrightarrow{\mu\lambda} \Sigma X \tag{1.3.11}$$

均是好三角. 同时 $\mu\lambda = \delta = -kl$.

(1 → 3). 沿用 (1 → 2) 中构造即可. □

备注 1.3.11. 特别地, 八面体公理中的方块 $\star$ 是同伦推出拉回.

$$\begin{tikzcd}
 & & c_2 & c_3 & \\
r_1 & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & W \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
r_2 & X \arrow[r, "x"] & Z \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & R \arrow[r, "z"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\
 & & S \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"] & S \arrow[r, "c"] \arrow[d, dashed] & \Sigma Y \\
 & & \Sigma Y \arrow[r, "\Sigma v"] & \Sigma W &
\end{tikzcd} . \tag{1.3.12}$$

特别地, 考虑以下三角射

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"] & \cdot \arrow[d, equal] \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot
\end{tikzcd} , \tag{1.3.13}$$

则存在 β 使得中间方块为同伦的推出拉回. 由八面体公理即证.

例子 1.3.12. 仍将好三角的第三项态射 "视作" ses 代表的扩张元, 则有三角射

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[d, "\Sigma f"] \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r, "f_*\delta"] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r, "g^*\varepsilon"] \arrow[d, "g"] & \cdot \arrow[d, equal] \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r, "\varepsilon"] & \cdot
\end{tikzcd} . \tag{1.3.14}$$

以上, "ses 的推出拉回" 由态射复合简练地描述:

$$(\Sigma f) \circ \delta = f_*\delta, \quad \varepsilon \circ g = g^*\varepsilon. \tag{1.3.15}$$

2 初探外三角范畴

2.1 基本定义

外三角范畴的第一手资料是 [NP19].

定义 2.1.1. (外三角范畴的基本资料). 外三角范畴描述作三元组 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$. 其中 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, 配有双函子

$$\mathbb{E}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathbf{Ab}. \tag{2.1.1}$$

Abel 群的 $\mathbb{E}(Z,X)$ 中元素称作扩张元, 记作 (X,δ,Z), 通常简写作 δ.
记函子范畴 $\mathcal{C}':=\mathcal{C}^{1\to2\to3}$, 定义 $\mathcal{C}'$ 上的等价关系 $\simeq$ 如式 (2.1.2):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d, "\varphi", "\simeq"'] & Z \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r] & E \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \qquad \varphi\text{ 是同构}. \tag{2.1.2}$$

定义 "类的映射" $\mathfrak{s}$ 如下:

$$\mathfrak{s}:\mathbb{E}(Z,X)\to\mathcal{C}'/\simeq,\quad \delta\mapsto[X\xrightarrow{a}Y\xrightarrow{b}Z], \tag{2.1.3}$$

以上明确了 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 的类型. 方便起见, 引入以下记号.

定义 2.1.2. (推出与拉回). 记 $f_*:\mathbb{E}(X,f)$. 一个兴许更好的理解方式是, f_* 是一族自然变换, $\mathbb{E}(X,f)$ 即 $(f_*)_X$. 对偶地记 $g^*:=\mathbb{E}(g,Z)$.

下面给出外三角范畴的公理.

定义 2.1.3. (外三角范畴的公理). 设 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 如上. 称其为外三角范畴, 若满足以下公理.

ET1 $\mathbb{E}$ 是加法双函子. 双函子性即 $f_*g^*=g^*f_*$, 可比对**定理** 1.1.14 阅读.

ET2-1 显然商函子 $\mathcal{C}^{1\to2\to3}\to\mathcal{C}'$ 保持直和. 今约定 $\mathfrak{s}$ 满足如下两则性质:

(a) 若 $\mathfrak{s}(\delta)$ 属于可裂 ses 所在的类, 则必有 $\delta=0$;

(b) $\mathfrak{s}(\delta\oplus\delta')=\mathfrak{s}(\delta)\oplus\mathfrak{s}(\delta')$. 其中, $\delta\in\mathbb{E}(Z,X)$, $\delta'\in\mathbb{E}(Z',X')$, 以及

$$(\delta\oplus\delta')\in\mathbb{E}(Z,X)\oplus\mathbb{E}(Z',X')\subseteq\mathbb{E}(Z\oplus Z',X\oplus X'). \tag{2.1.4}$$

ET2-2 若有扩张元的等式 $f_*\delta=g^*\delta'$, 则存在虚线处态射使得右图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}(Z,X) \arrow[d, "f_*"] & \delta \arrow[d] & \mathfrak{s}(\delta) & : & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{E}(Z,X') & f_*\delta=g^*\delta' & & & & & \\ \mathbb{E}(Z',X') \arrow[u, "g^*"] & \delta' \arrow[u] & \mathfrak{s}(\delta') & : & X' \arrow[r] & E \arrow[r] & Z' \end{tikzcd} . \tag{2.1.5}$$

ET3 若存在 a 与 b 使得下图左侧方块交换, 则存在 c 使得 $c^*\eta=a_*\delta$, 同时下图交换

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{s}(\delta) & : & X \arrow[r] \arrow[d, "a"] & F \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[d, dashed, "c"] \\ \mathfrak{s}(\eta) & : & X' \arrow[r] & E \arrow[r] & Z' \end{tikzcd} . \tag{2.1.6}$$

ET3’ 对偶地, 若存在 b 与 c 使得下图右侧方块交换, 则存在 a 使得 $c^*\eta = a_*\delta$, 同时下图交换

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{s}(\delta) & : & X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "a"] & F \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[d, "c"] \\ \mathfrak{s}(\eta) & : & X' \arrow[r] & E \arrow[r] & Z' \end{tikzcd} . \tag{2.1.7}$$

ET4 任给定以下 T 形图, 则可以补全虚线所示的 $\dashv$ 形图使得下图交换,

$$\begin{tikzcd} & & & \mathfrak{s}(\eta) & \mathfrak{s}(\eta') \\ & & & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \mathfrak{s}(\delta) & : & A \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "z"] & C \arrow[d, dashed, "u"] \\ \mathfrak{s}(\delta') & : & A \arrow[r, dashed, "zx"] & D \arrow[r, dashed, "v"] \arrow[d, "wv"] & F \arrow[d, dashed, "w"] \\ & & & E \arrow[r, equal] & E \end{tikzcd} , \tag{2.1.8}$$

同时 $u^*\delta' = \delta$, $y_*\eta = \eta'$, 以及 $x_*\delta' = w^*\eta$.

ET4’ 对调式 (2.1.8) 中虚线箭头与实线箭头, 其表述与 ET4 对偶.

备注 2.1.4. ET4 (ET4’) 蕴含以下公理: inflation (deflation) 关于合成封闭.

定义 2.1.5. (外三角范畴的术语). 以下是外三角范畴的通用术语.

1. 称 $\mathfrak{s}(\delta)$ 为扩张元 δ 的**加法实现** (简称**实现**). “加法” 的含义见 ET2-1, “实现” 的含义见 ET2-2. 即便扩张元的实现是一个等价类, 本文也使用 “实现” 指代该等价类中的任意代表元, 这通常不会引起矛盾.

2. 若 $X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{y} Z$ 是扩张元 δ 的加法实现, 则记作

$$A \overset{x}{\rightarrowtail} B \overset{y}{\twoheadrightarrow} C \overset{\delta}{\dashrightarrow} . \tag{2.1.9}$$

图中虚箭头 $\overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 用于标记加法实现对应的扩张元, 并非确指的态射. 称 x 是 $\mathbb{E}$-**inflation** (简称 **inflation**), y 是 $\mathbb{E}$-**deflation** (简称 **deflation**). 以上序列是 $\mathbb{E}$-**三角**或 $\mathbb{E}$-**conflation** (简称 **conflation**). 若同时涉及正合范畴与外三角范畴, 本文使用 “正合范畴的 inflation/deflation/conflation” 这一全称指代正合范畴中的相应概念.

3. 回顾式 (2.1.5). 称 $(f, g) : \delta \to \delta'$ 是**扩张元的态射**, 若 $f_*\delta = g^*\delta'$. 称 (f, h, g) 是实现之间的态射, 若 (f, g) 是扩张元的态射且式 (2.1.5) 交换.

4. 扩张元的推出与拉回诱导了实现的 “推出” 与 “拉回”. 类似三角范畴的余积变换与积变换, 实现的 “推出” 与 “拉回” 未必是范畴中的推出与拉回. 方便起见, 我们仍称之为**推出**与**拉回**. 外三角范畴的图表定理通常不涉及范畴意义下的推出与拉回.

我们类比三角范畴与正合范畴, 解释上述公理的动机如下.

例子 2.1.6. ET2-2, ET3 与 ET3’ 涉及两处交换方块和一处扩张元的态射, 姑且 “视作” 三个交换方块. 这三条公理类似三角范畴中三角射的 “二推三” 准则. ET4 (ET4’) 类似正合范畴中的 Noether 同构, 其包含三个交换方块与三个恒等式, “对应” (见例 1.3.12) 三角范畴 TR4 中的六个交换方块.

命题 2.1.7. Conflation 关于同构封闭.

证明. 假定以下交换图的首行是 δ 的实现, α, β 与 γ 是同构:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"] & {} \\ A' \arrow[r, tail, "f'"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] & C' & \end{tikzcd} . \tag{2.1.10}$$

任取 $\delta' := (\gamma^{-1})^*\alpha_*\delta$ 的实现. 考虑扩张元的态射 $(\alpha, \gamma) : \delta \to \delta'$, 依照 ET2-1 补全实现之间的态射 (α, β', γ). 由于 $\beta' \circ \beta^{-1}$ 是同构, 依照 $\mathcal{C}'$ 的构造可知上图下行也是 δ' 的实现. □

定理 2.1.8. 外三角范畴的反范畴也是外三角范畴.

证明. 容易验证. □

2.2 六项正合列

本节解释 conflation 诱导的六项正合列.

定理 2.2.1. (加法充实的米田引理). 假定 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ 是加法函子. 对任意 $X \in \mathcal{C}$, 存在以下 Abel 群的自然同构:

$$F(X) \simeq ((X,-), F(-))_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathbf{Ab})}, \quad a \mapsto [f \mapsto F(f)(a)], \quad \theta_X(1_X) \leftarrow\!\shortmid \theta. \tag{2.2.1}$$

假定 $G : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ 是反变加法函子. 对任意 $X \in \mathcal{C}$, 存在以下 Abel 群的自然同构:

$$G(X) \simeq ((-,X), G(-))_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathbf{Ab})}, \quad b \mapsto [f \mapsto G(f)(b)], \quad \psi_X(1_X) \leftarrow\!\shortmid \psi. \tag{2.2.2}$$

证明. 熟知. 例如可查阅 [Kel82] 的 2.1 章节. □

依照 [Yon60] 中隐约显现的动机, 米田引理的初衷或许是为了解释短正合列诱导长正合列时的连接态射. 我们将这一观点提炼作以下定义.

定义 2.2.2. ($\delta_\sharp$ 与 $\delta^\sharp$). 给定 conflation

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.2.3}$$

定义自然变换 $\delta_\sharp : (-, C) \to \mathbb{E}(-, A), \quad g \mapsto \delta_\sharp(g) := g^*\delta$. 依照米田引理, 这对应 $\delta \in \mathbb{E}(A, C)$.
定义自然变换 $\delta^\sharp : (A, -) \to \mathbb{E}(C, -), \quad f \mapsto \delta^\sharp(f) := f_*\delta$. 依照米田引理, 这对应 $\delta \in \mathbb{E}(A, C)$.

备注 2.2.3. 下标 $\delta_\sharp$ 表示扩张元 “被拉回”, 上标 $\delta^\sharp$ 表示扩张元 “被推出”. 在书写长正合列时, 我们会发现这一角标朝向的合理性.

定理 2.2.4. (五项正合列). 由公理 ET1-ET3, 以下是函子的正合列:

$$(C,-) \xrightarrow{-\circ g} (B,-) \xrightarrow{-\circ f} (A,-) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C,-) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(B,-) \tag{2.2.4}$$

换言之, 以上序列在中间三点正合.

证明. ($(B,-)$ 处的正合性). 任意选定 X, 试观察下图:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & {} \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, dashed, "0"] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.2.5}$$

假定 $\beta \in \ker(f,X)$. 由 ET3, 存在 γ 使得上图交换, 因此 $\beta \in \mathrm{im}(g,X)$. 反之, 若 $\beta = \gamma \circ g$, 则依照 ET3', $\beta \circ f = 0$, 故 $\beta \in \ker(f,X)$. 因此 $\ker(f,X) = \mathrm{im}(g,X)$.
($(A,-)$ 处的正合性). 下证明 $\delta^\sharp \circ (- \circ f) = 0$. 以下交换图表明 $f_*\delta = (1_C)^*0 = 0$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "\binom{1}{g}"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ B \arrow[r, tail, "\binom{1}{0}"] & B \oplus C \arrow[r, two heads, "(0\ 1)"] & C \arrow[r, dashed, "0"] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.2.6}$$

任取 $h: A \to X$, 得

$$\delta^\sharp \circ (h \circ f) = (hf)_*\delta = h_*(f_*\delta) = 0. \tag{2.2.7}$$

反之, 若 $\delta^\sharp(h) = h_*\delta = 0$, 则有如下实现的态射

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "\binom{a}{b}"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ X \arrow[r, tail, "\binom{1}{0}"] & X \oplus C \arrow[r, two heads, "(0\ 1)"] & C \arrow[r, dashed, "0"] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.2.8}$$

解得 $h = a \circ f$, 从而 $h \in \mathrm{im}(- \circ f)$. 综上, $\ker \delta^\sharp = \mathrm{im}(- \circ f)$.
($\mathbb{E}(C,-)$ 处的正合性). 下证明 $g^* \circ \delta^\sharp = 0$. 类似式 (2.2.6) 的推导, 得 $g^*\delta = 0$. 反之, 若 $\eta \in \ker g^* \subseteq \mathbb{E}(C,X)$, 则存在 q 使得下图中 $g = b \circ q$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "q"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, two heads, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\eta"] & {} \\ X \arrow[r, tail, "\binom{1}{0}"] & X \oplus B \arrow[r, two heads, "(0\ 1)"] \arrow[u, dashed, "(p\ q)"] & B \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[u, "g"'] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.2.9}$$

依照 ET3', 得 η 是 δ 的推出. 综上, $\ker g^* = \mathrm{im}\, \delta^\sharp$. □

依照外三角范畴的反范畴也是外三角范畴, 我们得到如下对偶的定理.

定理 2.2.5. (五项正合列). 由公理 ET1-ET3, 以下是函子的正合列:

$$(-,A) \xrightarrow{f\circ -} (-,B) \xrightarrow{g\circ -} (-,C) \xrightarrow{\delta_\sharp} \mathbb{E}(-,A) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(-,B) \tag{2.2.10}$$

证明. 证明略. □

ET4 (ET4') 公理将以上五项正合列延长为六项.

定理 2.2.6. (六项正合列). 由公理 ET1-ET4, 以下是函子的正合列:

$$(C,-) \xrightarrow{-\circ g} (B,-) \xrightarrow{-\circ f} (A,-) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C,-) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(B,-) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(A,-) \tag{2.2.11}$$

换言之, 以上序列在中间四点正合.

证明. 我们仅证明 $\mathbb{E}(B,-)$ 处的正合性. 函子性表明 $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = 0$. 任取 $\eta \in \ker f^* \subseteq \mathbb{E}(B,X)$, 依照 ET4’ 构造下图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, dashed, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, equal] & A \oplus X \arrow[r, two heads, dashed, "(1\ 0)"] \arrow[d, tail, dashed, "(x\ y)"] & A \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[d, tail, "f"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "a"] & E \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, two heads, dashed] & B \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, two heads, "g"] & {} \\
 & C \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varepsilon"] & C \arrow[d, "\delta"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{2.2.12}$$

计算得

$$\eta = (0\,1)_*(\binom{0}{1}_* \eta) = (0\,1)_*(g^*\varepsilon) = g^*((0\,1)_*\varepsilon) \in \operatorname{im} g^*. \tag{2.2.13}$$

综上, $\ker f^* = \operatorname{im} g^*$. □

依照外三角范畴的反范畴也是外三角范畴, 我们得到如下对偶的定理.

定理 2.2.7. (六项正合列). 由公理 ET1-ET4, 以下是函子的正合列:

$$(-,A) \xrightarrow{f\circ -} (-,B) \xrightarrow{g\circ -} (-,C) \xrightarrow{\delta_\sharp} \mathbb{E}(-,A) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(-,B) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(-,C) \tag{2.2.14}$$

证明. 证明略. □

2.3 五项正合列的推论

本小节中给出五项正合列若干推论, 所有命题无需 ET4 或 ET4’. 任取 conflation

$$A \overset{f}{\rightarrowtail} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \overset{\delta}{\dashrightarrow} . \tag{2.3.1}$$

命题 2.3.1. Conflation 中, 态射复合为 0.

命题 2.3.2. g 是 f 的弱余核, 即, $\ker(-\circ f) = \operatorname{im}(-\circ g)$; 对偶地 f 是 g 的弱核, 即, $\ker(g\circ -) = \operatorname{im}(f\circ -)$.

命题 2.3.3. g 是单态射, 当且仅当 f 是零态射, 亦当且仅当 g 是可裂单.

证明. g 单即 $(g\circ -)$ 单, 亦即 $(f\circ -) = 0$, 亦即 f 零, 亦即 $(-\circ f) = 0$, 亦即 $(-\circ g)$ 满, 亦即 g 可裂单. 此处涉及一则简单的引理.

> 引理 2.3.4. 给定任意范畴中的态射 g. $(g\circ -) = \operatorname{Hom}(-,g)$ 是函子的满射, 当且仅当 g 是可裂单态射.
>
> 证明. 若 $g : A \to B$ 是可裂满, 则 $(g\circ -)$ 有右逆元, 故满. 反之, 若 $(g\circ -)$ 满, 则 $(1_B) \in \operatorname{Hom}(g,B)$, 即存在 $h : A \to B$ 使得 $g\circ h = 1_B$, 故 g 可裂满. □

□

对偶地, 有如下命题.

命题 2.3.5. f 是满态射, 当且仅当 g 是零态射, 亦当且仅当 f 是可裂满.

证明. 略. □

备注 2.3.6. 由于 $\mathcal{C}$ 未必弱幂等完备, 单的 deflation 未必是 inflation. 三角范畴中, 单态射必然是可裂单. 正合范畴中, 单的容许满态射是同构. 对偶表述略.

回顾例 2.1.6, 公理 ET2-2, ET3 与 ET3' 可统一作 “二推三” 准则.

定理 2.3.7. 给定实现之间的态射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"] & {} \\ X' \arrow[r, tail, "f'"] & Y' \arrow[r, two heads, "g'"] & Z' \arrow[r, "\delta'"] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.3.2}$$

若 α, β 与 γ 中两者为同构, 则第三者亦为同构.

证明. 若 α 与 β 是同构, 则有五项正合列间的交换图

$$\begin{tikzcd} (-,X) \arrow[r, "f\circ-"] \arrow[d, "\alpha\circ-"] & (-,Y) \arrow[r, "g\circ-"] \arrow[d, "\beta\circ-"] & (-,Z) \arrow[r, "\delta_\sharp"] \arrow[d, "\gamma\circ-"] & \mathbb{E}(-,X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \mathbb{E}(-,Y) \arrow[d, "\beta_*"] \\ (-,X') \arrow[r, "f'\circ-"] & (-,Y') \arrow[r, "g'\circ-"] & (-,Z') \arrow[r, "\delta'_\sharp"] & \mathbb{E}(-,X') \arrow[r, "f'_*"] & \mathbb{E}(-,Y') \end{tikzcd} . \tag{2.3.3}$$

依照五引理, $\gamma \circ -$ 也是同构, 故 γ 亦为同构.
若 α 和 γ 是同构, 则以上 $\beta \circ -$ 是函子的满态射, 因此 β 可裂满. 另一方向的五项长正合列表明 $- \circ \beta$ 是函子的满态射, 因此 β 可裂单. 综上, β 是同构. □

定理 2.3.8. 在同构意义下, inflation (deflation) 嵌入唯一的 conflation.

证明. 上一定理的推论. □

备注 2.3.9. “对称” 地看, 扩张元的实现在同构意义下也是唯一的.

ET4 公理由两处 conflation 生成四处 conflation. 依照 inflation (deflation) 的唯一嵌入, 我们有如下结果.

命题 2.3.10. (严格 ET4). 给定下图实线部分的三处 deflation

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "z"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "u"] & {} \\ A \arrow[r, "zx"] & D \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"] & F \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, dashed, "w"] & {} \\ & E \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\eta"] & E \arrow[d, dashed, "\eta'"] & \\ & {} & {} & \end{tikzcd} , \tag{2.3.4}$$

存在虚线所示的 conflation η' 使得上图交换, 且 ET4 中的三个恒等式成立.

证明. 若依照 ET4 选取 $D \overset{v'}{\twoheadrightarrow} F'$, 则存在同构 $\varphi : F \simeq F'$ 使得 $v' = \varphi \circ v$. 往后从略. □

命题 2.3.11. 对偶地, 有严格 ET4' 引理. 表述与证明略.

2.4 扩张提升引理

以下是一则实用的引理.

定理 2.4.1. 假定 $\mathbb{E}(C,K)=0$, 以下是 conflation 间的交换图:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \\
K \arrow[r, tail, "j"'] & A \arrow[r, two heads, "q"'] & B \arrow[r, dashed, "\varepsilon"'] & {}
\end{tikzcd} . \tag{2.4.1}$$

则存在 $s:Y\to A$ 使得 $q\circ s=j$ 且 $s\circ i=f$.

证明. 转述命题如下: 若一组态射 (f,g) 满足 $q\circ f=g\circ i$, 则存在 "公共的原像", 即下图中的 s:

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[rrrr, mapsto, dashed] \arrow[dddd, mapsto, dashed] & & & & g \arrow[dddd, mapsto] \\
& (Y,A) \arrow[r, "{(Y,q)}"] \arrow[d, "{(i,A)}"'] & (Y,B) \arrow[d, "{(i,B)}"] & & \\
& (X,A) \arrow[r, "{(X,q)}"'] & (X,B) & & \\
& & & & \\
f \arrow[rrrr, mapsto] & & & & q\circ f=g\circ i
\end{tikzcd} . \tag{2.4.2}$$

依照长正合列式 (2.2.11) 与式 (2.2.14), 构造以下列正合的双复形 (未标注处均为 0):

$$\begin{tikzcd}
\ker_1 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ker_2 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ker_3 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ker_4 \arrow[d, tail] \\
(C,K) \arrow[r, "{(C,j)}"] \arrow[d, "{(p,K)}"] & (C,A) \arrow[r, "{(C,q)}"] \arrow[d, "{(p,A)}"] & (C,B) \arrow[r, "\varepsilon_\sharp"] \arrow[d, "{(p,B)}"] & \mathbb{E}(C,K) \arrow[d, "p^*"] \\
(Y,K) \arrow[r, "{(Y,j)}"] \arrow[d, "{(i,K)}"] & (Y,A) \arrow[r, "{(Y,q)}"] \arrow[d, "{(i,A)}"] & (Y,B) \arrow[r, "\varepsilon_\sharp"] \arrow[d, "{(i,B)}"] & \mathbb{E}(Y,K) \arrow[d, "i^*"] \\
(X,K) \arrow[r, "{(X,j)}"] \arrow[d, "\delta^\sharp"] & (X,A) \arrow[r, "{(X,q)}"] \arrow[d, "\delta^\sharp"] & (X,B) \arrow[r, "\varepsilon_\sharp"] \arrow[d, "\delta^\sharp"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & \mathbb{E}(X,K) \arrow[d] \\
\mathbb{E}(C,K) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{E}(C,A) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{E}(C,B) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & T \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{coker}_1 \arrow[r] & \mathrm{coker}_2 \arrow[r] & \mathrm{coker}_3 \arrow[r, equal] & \mathrm{coker}_3
\end{tikzcd} . \tag{2.4.3}$$

其相应的全复形依然是正合的. 我们将添加负号的态射标红, 并带入 $\mathbb{E}(C,K)$, 得下图

$$
\begin{tikzcd}
\ker_1 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ker_2 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ker_3 \arrow[d, tail] & \\
(C,K) \arrow[r, "{(C,j)}"] \arrow[d, "{-(p,K)}"] & (C,A) \arrow[r, two heads, "{(C,q)}"] \arrow[d, "{(p,A)}"] & (C,B) \arrow[r] \arrow[d, "{-(p,B)}"] & 0 \arrow[d] \\
(Y,K) \arrow[r, "{(Y,j)}"] \arrow[d, two heads, "{-(i,K)}"] & (Y,A) \arrow[r, "{(Y,q)}"] \arrow[d, "{(i,A)}"] & (Y,B) \arrow[r, "\varepsilon_\sharp"] \arrow[d, "{-(i,B)}"] & \mathbb{E}(Y,K) \arrow[d, tail, "i^*"] \\
(X,K) \arrow[r, "{(X,j)}"] \arrow[d] & (X,A) \arrow[r, "{(X,q)}"] \arrow[d, "\delta^\sharp"] & (X,B) \arrow[r, "\varepsilon_\sharp"] \arrow[d, "-\delta^\sharp"] & \mathbb{E}(X,K) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{E}(C,A) \arrow[r, tail, "q_*"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{E}(C,B) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & T \arrow[d, two heads] \\
& \operatorname{coker}_2 \arrow[r] & \operatorname{coker}_3 \arrow[r, equal] & \operatorname{coker}_3
\end{tikzcd}
. \tag{2.4.4}
$$

计算 $(f;g) \in (X,A) \oplus (Y,B)$ 的微分:

1. $(X,q)(f) - (i,B)(g) = q \circ f - g \circ i = 0$.
2. 由 $q_*(\delta^\sharp(f)) = \delta^\sharp(q \circ f) = \delta^\sharp(g \circ i) = 0$, 得 $\delta^\sharp(f) = 0$.
3. 由 $i^*(\varepsilon_\sharp(g)) = \varepsilon_\sharp(g \circ i) = \varepsilon_\sharp(q \circ f) = 0$, 得 $\varepsilon_\sharp(g) = 0$.

由全复形正合, $(f;g)$ 存在原像 $(a;b;c) \in (X,K) \oplus (Y,A) \oplus (C,B)$. 由于 (i,K) 与 (C,q) 是满射, 易知 $(f;g)$ 存在形如 $(0;s;0)$ 的原像. s 即为所求. □

备注 2.4.2. 扩张提升引理依赖六项正合列, 因此对预三角范畴与正合范畴适用.

备注 2.4.3. 短文 [Che18] 从导出范畴的视角给出**定理** 2.4.1 的证明.

3 图表定理

3.1 双 deflation (inflation) 的拉回 (推出)

ET4 刻画了 conflation 关于 deflation 的推出; ET4' 刻画了或关于 inflation 的拉回. 依照正合范畴中的经验 (**定理** 1.3.8), conflation 关于 inflation 的拉回或 deflation 的推出也应诱导出四处 conflation. 本小节将分析这一事实.

定理 3.1.1. (双 deflation 的拉回). 对 $i \in \{1,2\}$, 取 $\delta_i \in \mathbb{E}(C, A_i)$. 此时有四处 conflation 作成的交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "m_2"] & A_2 \arrow[d, tail, "x_2"] & \\
A_1 \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, two heads, "\lambda_2"] \arrow[d, two heads, "\lambda_1"] & B_2 \arrow[r, dashed, "(y_2)^*\delta_1"] \arrow[d, two heads, "y_2"] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, "x_1"] & B_1 \arrow[r, two heads, "y_1"] \arrow[d, dashed, "(y_1)^*\delta_2"] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.1.1}
$$

特别地, 有等式 $(m_1)_*\delta_1 + (m_2)_*\delta_2 = 0$.

证明. 引入以下 conflation $\binom{1}{1}^*(\delta_1 \oplus \delta_2) \in \mathbb{E}(C, A_1 \oplus A_2)$:

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \oplus A_2 \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, two heads, "k"] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r, dashed, "\binom{1}{1}^*(\delta_1 \oplus \delta_2)"] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] & {} \\
A_1 \oplus A_2 \arrow[r, tail, "x_1 \oplus x_2"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, two heads, "y_1 \oplus y_2"] & C \oplus C \arrow[r, dashed, "\delta_1 \oplus \delta_2"] & {}
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.1.2}
$$

记 (e_1, e_2, p_1, p_2) 是直和 $A_1 \oplus A_2$ 中的结构态射. 由 ET4 (ET4'), 得以下交换图

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "e_1"] \arrow[d, equal] & A_1 \oplus A_2 \arrow[r, two heads, "p_2"] \arrow[d, tail, "m"] & A_2 \arrow[d, tail, dashed, "x_2"] \\
A_1 \arrow[r, tail, dashed, "m_1"] & M \arrow[r, two heads, dashed, "\lambda_2"] \arrow[d, two heads, "k"] & B_2 \arrow[d, two heads, dashed, "y_2"] \\
 & C \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\binom{1}{1}^*(\delta_1 \oplus \delta_2)"'] & C \arrow[d, dashed, "\delta_2"'] \\
 & {} & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "e_2"'] & A_2 \arrow[d, tail, dashed, "m_2"'] & & \\
A_1 \oplus A_2 \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, two heads, "p_1"'] & M \arrow[r, two heads, "k"'] \arrow[d, two heads, dashed, "\lambda_1"'] & C \arrow[r, dashed, "\binom{1}{1}^*(\delta_1 \oplus \delta_2)"] \arrow[d, equal] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, dashed, "x_1"'] & B_1 \arrow[r, two heads, dashed, "y_1"'] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] & {}
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.1.3}
$$

删减部分态射, 拼接以下两图即可:

$$
\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "m_2"] & A_2 \arrow[d, tail, dashed, "x_2"] \\
A_1 \arrow[r, tail, dashed, "m_1"] & M \arrow[r, two heads, dashed, "\lambda_2"] \arrow[dr, two heads, "k"] & B_2 \arrow[d, two heads, dashed, "y_2"] \\
 & & C \arrow[d, dashed, "\delta_2"'] \\
 & & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[d, tail, dashed, "m_2"'] & & \\
A_1 \arrow[r, tail, "m_1"'] \arrow[d, equal] & M \arrow[d, two heads, dashed, "\lambda_1"'] \arrow[dr, two heads, "k"] & & \\
A_1 \arrow[r, tail, dashed, "x_1"'] & B_1 \arrow[r, two heads, dashed, "y_1"'] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] & {}
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.1.4}
$$

最后一处等式解释如下:

$$
\begin{aligned}
(m_1)_*\delta_1+(m_2)_*\delta_2 &= (m_1p_1+m_2p_2)_*\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^*(\delta_1\oplus\delta_2) && (3.1.5)\\
&= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^* m_*(\delta_1\oplus\delta_2)=m_*\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^*(\delta_1\oplus\delta_2) \quad =0. && (3.1.6)
\end{aligned}
$$

□

定理 3.1.2. (双 inflation 的拉回). 表述与证明略.

备注 3.1.3. 将双 deflation 的拉回与双 inflation 的推出写作下图:

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, tail] & \cdot \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, equal] & {} \\
\cdot \arrow[r, dashed, tail] \arrow[d, two heads] & \cdot \arrow[r, dashed, two heads, "l_1"] \arrow[d, dashed, two heads, "l_2"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & \cdot \\
{}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, tail, "r_1"] & \cdot \arrow[d, tail] \\
\cdot \arrow[r, dashed, tail, "r_2"] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d, dashed, two heads] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & \cdot \arrow[d, two heads] \\
\cdot \arrow[r, tail] & \cdot \arrow[r, two heads] & \cdot \arrow[r, dashed, "\varepsilon_2"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & {} \\
 & & {}
\end{tikzcd}
. \tag{3.1.7}
$$

此时, 左图与右图分别蕴含等式

$$
l_1^*\delta_1+l_2^*\delta_2=0,\quad (r_1)_*\varepsilon_1+(r_2)_*\varepsilon_2=0. \tag{3.1.8}
$$

以上定理存在一则实用的变体.

定理 3.1.4. (双 deflation 拉回的变体). 给定 conflation δ_1,ε 与 η 使得下图实线方块交换:

$$
\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "m_2"] & A_2 \arrow[d, dashed, tail, "x_2"] \\
A_1 \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, two heads, "\lambda_2"] \arrow[d, two heads, "\lambda_1"] & B_2 \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, two heads, "y_2"] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, "x_1"] & B_1 \arrow[r, two heads, "y_1"] \arrow[d, dashed, "\eta"] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & {} \\
 & {} & {}
\end{tikzcd}
. \tag{3.1.9}
$$

此时存在虚线所示 δ_2 使得上图交换, 同时 $(y_1)^*\delta_2=\eta$, $(y_2)^*\delta_1=\varepsilon$, 以及 $(m_1)_*\delta_1+(m_2)_*\delta_2=0$.

证明. 对 deflation 的复合 $y_1\circ\lambda_1$ 使用 ET4', 得下图:

$$
\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, tail, "e_2"] & A_2 \arrow[d, tail, "m_2"] \\
A_1\oplus A_2 \arrow[r, dashed, tail, "{(s,m_2)}"] \arrow[d, dashed, two heads, "p_1"] & M \arrow[r, dashed, two heads, "y_1\lambda_1"] \arrow[d, two heads, "\lambda_1"] & C \arrow[r, dashed, "\kappa"] \arrow[d, equal] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, "x_1"] \arrow[d, dashed, "0"] & B_1 \arrow[r, two heads, "y_1"] \arrow[d, dashed, "\eta"] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] & {} \\
{} & {}
\end{tikzcd}
. \tag{3.1.10}
$$

此处 $(x_1)^*\eta = (m_1)^*(\lambda_1)^*\eta = 0$. 由 $\lambda_1(s - m_1) = 0$, 故存在 $l : A_1 \to A_2$ 使得 $(s - m_1) = m_2 \circ l$. 下通过严格 ET4 (命题 2.3.10) 定义 δ_2:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "\binom{1}{-l}"] & A_1 \arrow[d, tail, "m_1"] & & \\
A_1 \oplus A_2 \arrow[r, tail, "{(s,m_2)}"] \arrow[d, "(l\ 1)"] & M \arrow[r, two heads, "y_1\lambda_1"] \arrow[d, "\lambda_2"] & C \arrow[r, dashed, "\kappa"] \arrow[d, equal] & {} \\
A_2 \arrow[r, tail, dashed, "x_2"] \arrow[d, dashed, "0"] & B_2 \arrow[r, dashed, two heads, "y_2"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & C \arrow[r, dashed, "\delta_2"] & {} \\
{} & {} & &
\end{tikzcd} \tag{3.1.11}$$

使得左下方块交换的唯一态射是 $\lambda_2 \circ m_2 = x_2$. 由以上交换图, 式 (3.1.9) 中的所有方块交换. 下检验扩张元的等式:

1. $(y_1)^*\delta_2 = (y_1)^*(l\ 1)_*\kappa = (l\ 1)_*(y_1)^*\kappa = (l\ 1)_*(e_2)_*\eta = \eta$;
2. $(y_2)^*\delta_1 = (y_2)^*(p_1)_*\kappa = (p_1)_*(y_2)^*\kappa = (p_1)_*\binom{1}{-l}_*\varepsilon = \varepsilon$;
3. $(m_1)_*\delta_1 + (m_2)_*\delta_2 = (m_1)_*(p_1)_*\kappa + (m_2)_*(l\ 1)_*\kappa = (s, m_2)_*\kappa = 0$.

综上, δ_2 即为所求. □

在 Abel 范畴中, **定理** 3.1.1 与**命题** 2.3.10 是蛇引理的退化形式.

定理 3.1.5. 给定 Abel 范畴中可复合的态射 $f \circ g$, 则有六项正合序列

$$0 \to \ker g \to \ker(f \circ g) \to \ker f \xrightarrow{\delta} \operatorname{cok} g \to \operatorname{cok}(f \circ g) \to \operatorname{cok} f \to 0. \tag{3.1.12}$$

记 $\cap$ $(+)$ 为两个子对象的拉回 (拉回的一次导出极限). δ 的满-单分解是

$$\frac{\ker f}{\ker(f \circ g)} \twoheadrightarrow \frac{\ker f}{\operatorname{im} g \cap \ker f} \simeq \frac{\operatorname{im} g + \ker f}{\operatorname{im} g} \rightarrowtail \operatorname{cok} g. \tag{3.1.13}$$

证明. 见一般的同调代数教材. 基于蝶螈定理的证明见 [Wis11]. 在正合范畴中的推广见 [RZ21]. □

例子 3.1.6. **命题** 2.3.10 对应如下 Abel 范畴中 ses 的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, "g"] & \text{“}\operatorname{cok} f\text{”} \arrow[r, dashed, "\delta_f"] \arrow[d, dashed, tail] & {} \\
\cdot \arrow[r, tail, "g\circ f"] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & \text{“}\operatorname{cok} g \circ f\text{”} \arrow[r, dashed, "\delta_{g\circ f}"] \arrow[d, dashed, two heads] & {} \\
 & \text{“}\operatorname{cok} g\text{”} \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_g"] & \text{“}\operatorname{cok} g\text{”} \arrow[d, dashed, "\delta_c"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{3.1.14}$$

例子 3.1.7. **定理** 3.1.1 对应如下 Abel 范畴中 ses 的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{“}\ker g\text{”} \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & \text{“}\ker g\text{”} \arrow[d, tail] & \\
\cdot \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "g"] & \text{“}\operatorname{cok} f\text{”} \arrow[r, dashed, "\delta_f"] \arrow[d, two heads] & {} \\
\cdot \arrow[r, tail, "g\circ f"] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\delta_g"] & \text{“}\operatorname{cok} g \circ f\text{”} \arrow[r, dashed, "\delta_{g\circ f}"] \arrow[d, dashed, "\delta_c"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{3.1.15}$$

为了在外三角范畴中推广**定理** 1.3.8, 我们先熟悉几类同伦的推出拉回方块.

3.2 同伦的推出拉回方块

本节是**定理** 1.3.8 在外三角范畴中的推广.

定义 3.2.1. 称 $\left[\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}\right]$ 是同伦的推出拉回方块, 若 $A \overset{\binom{f}{g}}{\rightarrowtail} B \oplus C \overset{(-g'\ f)}{\twoheadrightarrow} D$ 是 conflation.

推论 3.2.2. 将同伦推出拉回方块写作 conflation, 容易得到如下直接的结论:

1. 同伦的推出拉回方块在既是弱推出, 也是弱拉回 (**式** (2.2.11), **式** (2.2.14)).
2. 类似推出方块的唯一性, 同伦的推出拉回方块在同构意义下唯一 (**定理** 2.3.8).

定理 3.2.3. (同伦的推出拉回方块 I). 任给定扩张元的态射 $(\lambda, 1): \delta \to \lambda_*\delta$, 存在 w 使得下图交换, 同时左侧是同伦的推出拉回方块:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, "\lambda"] & Y \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, dashed, "w"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ A \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & Z \arrow[r, dashed, "\lambda_*\delta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{3.2.1}$$

特别地, 左侧同伦的推出拉回方块对应如下 conflation:

$$X \overset{\binom{\lambda}{a}}{\rightarrowtail} A \oplus Y \overset{(-x, w)}{\twoheadrightarrow} B \overset{y^*\delta}{\dashrightarrow} . \tag{3.2.2}$$

证明. 考虑 b 与 y 给出的双 deflation 的拉回 (**定理** 3.1.1), 得下图:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "\binom{\lambda'}{a}"] & X \arrow[d, tail, "a"] & \\ A \arrow[r, tail, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & A \oplus Y \arrow[r, two heads, "(0\ 1)"] \arrow[d, two heads, "(x, -w')"] & Y \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[d, two heads, "b"] & {} \\ A \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] \arrow[d, dashed, "y^*\delta"] & Z \arrow[r, dashed, "\lambda_*\delta"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & {} \\ & {} & {} & \end{tikzcd} . \tag{3.2.3}$$

依照**式** (3.1.8), 得

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_* (\lambda_*\delta) + \begin{pmatrix} \lambda' \\ a \end{pmatrix}_* \delta = \begin{pmatrix} \lambda + \lambda' \\ a \end{pmatrix}_* \delta. \tag{3.2.4}$$

由长正合列 (**式** (2.2.11)), $(\lambda + \lambda')$ 通过 a 分解得到 l. 具体地,

$$(\lambda + \lambda') = \quad X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{l} A. \tag{3.2.5}$$

遂有同构的态射序列:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "\binom{\lambda'}{a}"] \arrow[d, equal] & A \oplus Y \arrow[r, two heads, "(x, -w')"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} -1 & l \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] & B \arrow[r, dashed, "y^*\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ X \arrow[r, "\binom{\lambda}{a}"] & A \oplus Y \arrow[r, "(-x, w)"] & B & \end{tikzcd} . \tag{3.2.6}$$

因此, 上图下方的态射列也是 $y^*\delta$ 的实现. 这完成了证明. □

定理 3.2.4. (同伦的推出拉回方块 I'). 上一定理的对偶表述. 此处仅给出关键的交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, dashed, "u"] & Z \arrow[r, dashed, "\mu^*\delta"] \arrow[d, "\mu"] & {} \\ X \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{3.2.7}$$

$$Y \xrightarrow{\binom{u}{-b}} B \oplus Z \xrightarrow{(y\ \mu)} C \overset{a_*\delta}{\dashrightarrow}$$

定理 3.2.5. (同伦的推出拉回方块 II). 任给定任意态射 w 使得下图右侧方块交换.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & Y \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, "w"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ A \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & Z \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] & {} \end{tikzcd} . \tag{3.2.8}$$

则存在态射 λ 使得上图交换, $\varepsilon = \lambda_*\delta$. 同时, 左侧是同伦的推出拉回方块, 对应以下 conflation:

$$X \xrightarrow{\binom{\lambda}{a}} A \oplus Y \xrightarrow{(-x, w)} B \overset{y^*\delta}{\dashrightarrow} . \tag{3.2.9}$$

证明. 依照 ET3' 任意取定 $\lambda' : X \to A$. 对扩张元的态射 $(\lambda', 1_Z)$, 依照**定理** 3.2.3 取 $w' : Y \to B$ 使得下图交换 (共计四个 2×2 方块):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, "\lambda'"] & Y \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, shift right, "w"'] \arrow[d, shift left, "w'"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ A \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & Z \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] & {} \end{tikzcd} . \tag{3.2.10}$$

同时, 如下是同伦的推出拉回方块诱导的 conflation:

$$X \xrightarrow{\binom{\lambda'}{a}} A \oplus Y \xrightarrow{(-x\ w')} B \overset{y^*\delta}{\dashrightarrow} . \tag{3.2.11}$$

由 $y \circ (w - w') = 0$, 依照长正合列 (**式** (2.2.14)) 取 $(w - w') = x \circ l$. 考虑同构

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "\binom{\lambda'}{a}"] \arrow[d, equal] & A \oplus Y \arrow[r, two heads, "(-x\ w')"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] & B \arrow[r, dashed, "y^*\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ X \arrow[r, "\binom{\lambda}{a}"] & A \oplus Y \arrow[r, "(-x\ w)"] & B \end{tikzcd} , \tag{3.2.12}$$

其下行也是 $y^*\delta$ 的实现. 这完成了证明. □

定理 3.2.6. (同伦的推出拉回方块 II'). 上一定理的对偶表述. 此处仅给出关键的交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, "u"] & Z \arrow[r, dashed, "\mu^*\delta"] \arrow[d, dashed, "\mu"] & {} \\ X \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{3.2.13}$$

$$Y \xrightarrow{\binom{u}{-b}} B \oplus Z \xrightarrow{(y\ \mu)} C \overset{a_*\delta}{\dashrightarrow}$$

定理 3.2.7. (同伦的推出拉回方块 III). ET4 (ET4') 公理中的方块 $\star$ 是同伦的推出拉回方块:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta_{r1}"] \arrow[d, tail, "r"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "p"] & W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, two heads, "\beta"] & M \arrow[r, dashed, "\delta_{r2}"] \arrow[d, two heads, "s"] & {} \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_{c1}"] & K \arrow[d, dashed, "\delta_{c2}"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}. \tag{3.2.14}$$

$\star$ 诱导的 conflation 如**定理** 3.2.4 所示.

证明. 将证明分作两步.

引理 3.2.8. $\star$ 是弱推出方块.

证明. 任意取定等式 $n \circ g = m \circ \alpha$, 如下图所示:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail, "\alpha"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta_{r1}"] \arrow[d, tail, "r"] \arrow[ddr, dashed, bend left, "n"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "p"] & W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, two heads, "\beta"] \arrow[drr, dashed, bend right, "m"] & M \arrow[r, dashed, "\delta_{r2}"] \arrow[d, two heads, "s"] & {} \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_{c1}"] & K \arrow[d, dashed, "\delta_{c2}"] & T \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}. \tag{3.2.15}$$

注意到 $0 = (m\alpha)_* \delta_{c1} = n_* g_* \delta_{c1} = n_* \delta_{c2}$, 故 n 通过 r 分解. 记 $l \circ r = n$. 由于

$$(m - l \circ q) \circ \alpha = m \circ \alpha - l \circ q \circ \alpha = n \circ g - l \circ r \circ g = 0, \tag{3.2.16}$$

从而 $(m - l \circ q)$ 经 β 分解, 记 $(m - l \circ q) = \lambda \circ \beta$. 上述态射的来源与去向如下:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail, "\alpha"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta_{r1}"] \arrow[d, tail, "r"] \arrow[ddr, dashed, bend left, "n"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "p"] & W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, two heads, "\beta"] \arrow[drr, dashed, bend right, "m"] & M \arrow[r, dashed, "\delta_{r2}"] \arrow[d, two heads, "s"] \arrow[dr, dashed, "l"] & {} \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_{c1}"] & K \arrow[d, dashed, "\delta_{c2}"] \arrow[r, dashed, bend right, "\lambda"'] & T \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}. \tag{3.2.17}$$

今断言弱推出问题的解是 $l - \lambda \circ s$. 验证得

1. $(l - \lambda \circ s) \circ r = l \circ r = n$;
2. $(l - \lambda \circ s) \circ q = l \circ q - \lambda \circ \beta = m$.

□

依照**定理** 3.2.6, 存在 $r' : Z \to M$ 使得 (r', g, α, q) 构成同伦推出拉回方块. 记态射 l 与 m 为两个弱推出方块相互分解所得, 如下图所示:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail, "\alpha"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta_{r1}"] \arrow[d, tail, "r"] \arrow[ddr, dashed, bend left, "r'"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "p"] & W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, two heads, "\beta"] \arrow[dr, dashed, bend right, two heads, "q"] & M \arrow[r, dashed, "\delta_{r2}"] \arrow[d, two heads, "s"] \arrow[dr, dashed, "l"] & {} \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_{c1}"] & K \arrow[d, dashed, "\delta_{c2}"] & M \arrow[ul, dashed, "m"] \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{3.2.18}$$

显然 $(1_Z, m \circ l, 1_K)$ 与 $(1_W, 1_{Z\oplus W}, l \circ m)$ 是都是 conflation 的自同态. 依照**定理** 2.3.7, l 与 m 都是同构. 由 conflation 对同构封闭 (**命题** 2.1.7), $\star$ 也是同伦的推出拉回方块. □

定理 3.2.9. (同伦的推出拉回方块 IV). 双 deflation 拉回所得的方块 $\star$ 是同伦的推出拉回方块

$$\begin{tikzcd}
& A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "m_2"] & A_2 \arrow[d, tail, "x_2"] & \\
A_1 \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, two heads, "\lambda_2"] \arrow[d, two heads, "\lambda_1"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & B_2 \arrow[r, dashed, "(y_2)^*\delta_1"] \arrow[d, two heads, "y_2"] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, "x_1"] & B_1 \arrow[r, two heads, "y_1"] \arrow[d, dashed, "(y_1)^*\delta_2"] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{3.2.19}$$

如**定理** 3.2.4 所示, 方块 $\star$ 诱导了 conflation

$$M \xrightarrow{\binom{\lambda_1}{-\lambda_2}} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{(y_1, y_2')} C \overset{m_1^*(\delta_1)}{\dashrightarrow} . \tag{3.2.20}$$

证明. 类似**定理** 3.2.7 的证明, $\star$ 是弱拉回方块. 同时存在 $\lambda_1' : M \to B_1$ 使得 $(y_2)^*\delta_1$ 与 δ_1 满足**定理** 3.2.4 的条件. 由于弱拉回方块与同伦的推出拉回方块相互分解, 以及**定理** 2.3.7, $\star$ 同构于同伦的推出拉回方块. 由 conflation 对同构封闭 (**命题** 2.1.7), $\star$ 也是同伦的推出拉回方块. □

定理 3.2.10. (同伦推出拉回方块 IV'). 双 inflation 推出所得的方块 $\star$ 是同伦的推出拉回方块, 具体表述略. 此处仅给出关键的交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "x_1"] \arrow[d, tail, "x_2"] & B_1 \arrow[r, two heads, "y_1"] \arrow[d, tail, "m_2"] & C_1 \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, equal] & {} \\
B_2 \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[d, two heads, "y_2"] & M \arrow[r, two heads, "\mu_1"] \arrow[d, two heads, "\mu_2"] & C_1 \arrow[r, dashed, "(x_2)_*\delta_1"] & {} \\
C_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & C_2 \arrow[d, dashed, "(x_1)_*\delta_2"] & & \\
{} & {} & &
\end{tikzcd} \tag{3.2.21}$$

$$A \xrightarrow{\binom{x_1}{x_2}} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{(m_2\ -m_1)} M \overset{(\mu_1)^*\delta_1}{\dashrightarrow}$$

以下强化部分外三角范畴的公理.

命题 3.2.11. (ET2-2 的强化表述). 假定 $(\alpha,\gamma):\delta\to\eta$ 是扩张元的态射, 则存在分解 $\delta\xrightarrow{(\alpha,1)}\varepsilon\xrightarrow{(1,\gamma)}\eta$, 且 $\star$ 是同伦的推出拉回方块:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\beta_1"] & \cdot \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
\cdot \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\beta_2"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & \cdot \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, "\gamma"] & {} \\
\cdot \arrow[r, tail] & \cdot \arrow[r, two heads] & \cdot \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] & {}
\end{tikzcd}. \tag{3.2.22}$$

证明. 取中间行为 $\eta=\alpha_*\delta=\gamma^*\varepsilon$ 的实现. 依**定理** 3.2.3 与**定理** 3.2.4 构造两处 β_1 与 β_2 即可. □

命题 3.2.12. (ET3 的强化表述). 假定态射 α,β 与两处 inflation 作成交换方块. 存在分解 $\beta=\beta_2\circ\beta_1$ 与态射 γ, 使得**式** (3.2.22) 是扩张元的态射, 且 $\star$ 是同伦的推出拉回方块.

证明. 取 $\eta=\alpha_*\delta$, 依照**定理** 3.2.3 构造 β_1 与 β_2. 由于同伦的推出拉回方块是弱推出, 故 β 经 β_1 分解得 β_2. 最后使用**定理** 3.2.6 构造 γ 即可. □

命题 3.2.13. (ET3' 的强化表述). 这是上一定理的对偶表述, 最终效果如**式** (3.2.22) 所示.

定理 3.2.14. 同伦推出拉回方块的合成也是同伦推出拉回.

证明. 假定下图中两处 $\star$ 与外侧方块 $\left(\begin{smallmatrix}A & C\\ D & F\end{smallmatrix}\right)$ 均是同伦推出拉回方块.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & C \arrow[d, "\gamma"] \arrow[ddr, bend left, "l"] & \\
D \arrow[r, "u"] \arrow[drrr, bend right, "k"'] & E \arrow[r, "v"] & F & \\
& & & \widetilde{F}
\end{tikzcd}. \tag{3.2.23}$$

由**定理** 3.2.6, 构造 $p:E\to\widetilde{F}$ 使得下图是 conflation 的态射, 且 $\star$ 是同伦的推出拉回方块:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\binom{f}{\alpha}"] \arrow[d, equal] & B\oplus D \arrow[r, two heads, "(-\beta\ \ u)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}g & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & E \arrow[r, dashed, "p^*\delta"] \arrow[d, dashed, "p"] & {} \\
A \arrow[r, tail, "\binom{gf}{\alpha}"'] & C\oplus D \arrow[r, two heads, "(-l\ \ k)"'] & \widetilde{F} \arrow[r, dashed, "\delta"] & {}
\end{tikzcd}. \tag{3.2.24}$$

将 $\star$ 处写作 conflation $\binom{f}{\alpha}_*\delta$, 依照**命题** 2.3.10 作下图:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, equal] \arrow[d, tail, "\binom{0}{1}"] & & D \arrow[d, tail, "\left(\begin{smallmatrix}0\\ 1\\ -u\end{smallmatrix}\right)"] & & \\
B\oplus D \arrow[rr, tail, "\left(\begin{smallmatrix}g & 0\\ 0 & 1\\ \beta & -u\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, two heads, "(1\ \ 0)"] & & C\oplus D\oplus E \arrow[r, two heads, "(-l\ \ k\ \ p)"] \arrow[d, two heads, "\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & u & 1\end{smallmatrix}\right)"] & \widetilde{F} \arrow[r, dashed, "\binom{f}{\alpha}_*\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
B \arrow[rr, dashed, tail, "\binom{g}{\beta}"] & & C\oplus E \arrow[r, dashed, two heads, "(-l\ \ p)"] & \widetilde{F} \arrow[r, dashed, "f_*\delta"] & {}
\end{tikzcd}. \tag{3.2.25}$$

由 $\left(\begin{smallmatrix}0\\ 1\\ -u\end{smallmatrix}\right)$ 是可裂单, 不妨将对应的 conflation 取作上图所示的可裂 ses. 虚线处态射由交换图唯一确定. 推论推论 3.2.2 说明 $\left(\begin{smallmatrix}B & C\\ E & F\end{smallmatrix}\right)$ 与 $\left(\begin{smallmatrix}B & C\\ E & \widetilde{F}\end{smallmatrix}\right)$ 所在的同伦的推出拉回方块同构. 外侧的同伦的推出拉回方块 $\left(\begin{smallmatrix}A & C\\ D & \widetilde{F}\end{smallmatrix}\right)$ 同构于复合所得的方块. □

推论 3.2.15. 假定下图中左侧方块 $\star$ 与合成方块均是同伦的推出拉回方块, 则存在 $v' : E \to F$ 使得 $(v - v') \circ (\beta\ \ u) = 0$, 且 $(g; \beta; \gamma; v')$ 是同伦的推出拉回方块.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
D \arrow[r, "u"] & E \arrow[r, "v"] & F
\end{tikzcd}
. \tag{3.2.26}
$$

证明. 直接地, 取 v' 使得 $\star$ 是同伦的推出拉回方块:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\binom{f}{\alpha}"] \arrow[d, equal] & B \oplus D \arrow[r, two heads, "(-\beta\ \ u)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[dr, phantom, "\star"] & E \arrow[r, dashed, "p^*\delta"] \arrow[d, dashed, "v'"] & {} \\
A \arrow[r, tail, "\binom{gf}{\alpha}"'] & C \oplus D \arrow[r, two heads, "(-\gamma\ \ vu)"'] & F \arrow[r, dashed, "\delta"] & {}
\end{tikzcd}
. \tag{3.2.27}
$$

后续证明步骤同**定理** 3.2.14. □

3.3 弱幂等完备

依照 [Büh10] 的第七章, 正合范畴中许多 "理应成立的简单结论" 依赖弱幂等完备性. 例如, 若所有可裂单 (可裂满) 都是容许单态射 (容许满态射), 则正合范畴是弱幂等完备的. 以下给出弱幂等完备在一般加法范畴中的定义.

定义 3.3.1. (弱幂等完备). 称加法范畴 $\mathcal{A}$ 是**弱幂等完备**的, 若其满足以下等价条件:

1. 任意可裂满态射 $p : X \to C$ 存在核;
2. 任意可裂单态射 $i : K \to X$ 存在余核.

证明. 以下仅证明 $(1 \to 2)$, 另一方向在反范畴中得证. 对任意可裂单态射 $i : K \to X$, 取可裂满态射 $q : X \to K$ 使得 $q \circ i = 1_K$. 记 q 的核是 $j : C \to X$, 则 $(1_X - i \circ q)$ 通过 j 分解:

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dashed, "p"'] \arrow[d, "(1_X - i\circ q)"] & \\
C \arrow[r, "j"] & X \arrow[r, shift left, "q"] & K \arrow[l, shift left, dashed, "i"]
\end{tikzcd}
. \tag{3.3.1}
$$

容易验证 $j = j \circ p \circ j$ 与 $j \circ p \circ i = 0$. 消除单态射 j 得 $p \circ j = 1_C$ 与 $p \circ i = 0$. 结合 $q \circ i = 1_K$ 与 $q \circ j = 0$, 得同构 $\binom{p}{q} : X \leftrightarrows C \oplus K : (j\ i)$. □

弱幂等完备的又一等价定义基于形变收缩.

定义 3.3.2. (形变收缩). 称对象 X 是 Y 的形变收缩, 若存在可裂单态射 $X \to Y$.

命题 3.3.3. 加法范畴 $\mathcal{A}$ 是弱幂等完备的, 当且仅当任意形变收缩是直和项.

证明. 容易. □

备注 3.3.4. 预三角范畴自动是弱幂等完备的 (推论 1.2.7).

例子 3.3.5. (幂等完备, 也称 Karoubi 性质). 称加法范畴是**幂等完备**的, 若所有幂等态射有核与余核. 这一定义比弱幂等完备强, 例如以下两则例子.

- 记 $\mathcal{A}$ 是有限维实线性空间范畴, 加法全子范畴 $\mathcal{B}$ 包含一切维数为偶数 (含 0) 的线性空间. 显然 $\mathcal{B}$ 是弱幂等完备的, 但不幂等完备.
- 记 $\mathbf{Free}_R$ 是自由右 R-模构成的范畴. 今视之 Mod_R 的全子范畴, 则容易验证
  - 包含 $\mathbf{Free}_R$ 的最小 (范畴等价意义下) 的弱幂等完备范畴是所有稳定投射模构成的范畴;
  - 包含 $\mathbf{Free}_R$ 的最小 (范畴等价意义下) 的幂等完备范畴是所有投射模构成的范畴.

三角范畴一般不是幂等完备的, 除非承认某些在特殊条件 (例如三角范畴有可数积或可数余积, 再如 [LC07]). 三角范畴的幂等完备化的一般理论见 [BS01], 正合范畴的幂等完备化见 [Büh10] 的第六章.

此小节中, 我们仅讨论外三角范畴的弱幂等完备性, 暂不理会幂等完备性. 以下引理 3.3.6, 引理 3.3.7, 推论 3.3.8 与推论 3.3.10 无需弱幂等完备性, 推论 3.3.10 指出弱幂等完备的关键作用是 "消除赘余的零态射".

引理 3.3.6. 外三角范畴中, 若 $q \circ p$ 是 inflation, q 是 deflation, 则 p 是 inflation.

证明. 证明同引理 1.3.5, 将 "Noether 同构" 替换作 "ET4' 公理" 即可. **定理** 3.2.7 表明 □ 是同伦的推出拉回方块, 故 s 存在. □

引理 3.3.7. 外三角范畴中, 若 $j \circ i$ 是 deflation, i 是 inflation, 则 j 是 deflation.

证明. 上一引理的对偶. □

以下是两则常用的推论.

推论 3.3.8. 若 i 是 inflation, 则 $\binom{i}{f}$ 也是 inflation. 若 p 是 deflation, 则 $(p\ f)$ 也是 deflation.

证明. 由 $(1\ 0) \circ \binom{i}{f} = i$ 是 inflation, $(1\ 0)$ 是 deflation, 引理 3.3.6 表明 $\binom{i}{f}$ 是 inflation. 后一论断对偶. □

备注 3.3.9. 相应的 conflation 由**定理** 3.2.3 构造.

推论 3.3.10. 若 $X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{q} Z$ 是 inflation, 则 $\binom{p}{0} : Y \oplus Z$ 亦然.

证明. 推论 3.3.8 表明 $\binom{p}{-q\circ p}$ 是 inflation. 左复合同构 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$, 得 $\binom{p}{0}$. **命题** 2.1.7 表明 $\binom{p}{0}$ 是 inflation. □

以下给出外三角范畴弱幂等完备的若干等价定义.

定理 3.3.11. 称外三角范畴弱幂等完备, 若满足如下等价定义.

1. 若 $i : A \to C$ 可裂单, 则 i 有余核 B, 且 i 分解作 $A \xrightarrow{\binom{1}{0}} A \oplus B \simeq C$;
2. 若 $\binom{i}{0}$ 是 inflation, 则 i 也是 inflation;
3. 若 $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ 是 inflation, 则 i 与 j 也都是 inflation;
4. 若 $f \circ i$ 是 inflation, 则 i 也是 inflation;
5. inflation 的形变收缩仍是 inflation (态射的形变收缩即作为态射范畴中对象的形变收缩).

我们略去五个对偶的定义. 定义 1 与 1' 的等价性见**定义** 3.3.1.

证明. 我们先证明 $(2 \leftrightarrow 4)$.

1. $(2 \leftarrow 4)$. 若 $\binom{i}{0}$ 是 inflation, 则 $i = (1\ 0) \circ \binom{i}{0}$ 是 inflation.
2. $(2 \rightarrow 4)$. 若 $f \circ i$ 是 inflation, 推论 3.3.10 表明 $\binom{i}{0}$ 也是 inflation. 由假设, i 是 inflation.

继而证明 $(1 \leftrightarrow 4)$.

1. $(1 \rightarrow 4)$. 只需证明 $(1 \rightarrow 2)$. 若 $\binom{i}{0}$ 是 inflation, 取相应的 conflation δ. 依照长正合列 (式 (2.2.11)) 取分解所得的态射 $\binom{a}{b}$ 如下:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\binom{i}{0}"] \arrow[dr, bend right, "0"'] & Y \oplus Z \arrow[r, two heads, "(s\ t)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & W \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[dl, dashed, "\binom{a}{b}"] & {} \\
& W \oplus Z & &
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.3.2}
$$

注意到 $b \circ t = 1_Z$. 由题设, b 是以 Z 为像的可裂满, 不妨将 deflation 写作 $\left(\begin{smallmatrix} s_1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{smallmatrix}\right) : Y \oplus Z \twoheadrightarrow Y \oplus Q$. 依照**定理** 3.1.4 构造交换图

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "\binom{0}{1}"] & Z \arrow[d, tail, "\binom{0}{1}"] \\
X \arrow[r, tail, "\binom{i}{0}"] \arrow[d, equal] & Y \oplus Z \arrow[r, two heads, "\left(\begin{smallmatrix} s_1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, two heads, "(1{,}0)"] & Q \oplus Z \arrow[d, two heads, "(1{,}0)"] \\
X \arrow[r, tail, dashed] & Z \arrow[r, two heads, dashed] & Q
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.3.3}
$$

左下方的 inflation 是 $i = (1\ 0) \circ \binom{i}{0}$.

2. $(4 \rightarrow 1)$. 若 $f \circ i$ 恒等, 则 i 是 inflation. 因此所有可裂单都是 inflation.

再证明 $(2 \leftrightarrow 3)$. $(3 \rightarrow 2)$. 令 j 是零态射即可. $(2 \rightarrow 3)$. 若 $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{smallmatrix}\right)$ 是 inflation, 则 inflation 的复合 $\binom{i}{0} = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{smallmatrix}\right) \circ \binom{1}{0}$ 也是 inflation.
最后证明 $(3 \leftrightarrow 5)$. $(5 \rightarrow 3)$. 显然. $(3 \rightarrow 5)$. 以上证明了 $1, 2, 3$ 与 4 彼此等价. 往证 1 与 4 共同推导出 5. 若 f' 是 inflation f 的形变收缩, 则存在可裂单 i 与 j 使得 $fi = jf'$. 由 1, i 是 inflation, 从而 $fi = jf'$ 是 inflation. 由 4, 以及 j 是 inflation, 得 f' 是 inflation. □

3.4 九引理

假定外三角范畴弱幂等完备, 本小节将证明九引理 (3×3 引理) 在外三角范畴中类似物.

定理 3.4.1. (九引理). 假定外三角范畴弱幂等完备. 给定以下四条 conflation 的交换图

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_1 \arrow[r, tail, "f_B"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
& C_2 \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.4.1}
$$

存在 δ_C 与 ε_1 使得下图交换, 且所有相邻行与列都是实现间的态射:

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] \arrow[d, tail, "i_1"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_1 \arrow[r, tail, "f_B"] \arrow[d, two heads, "p_1"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
C_1 \arrow[r, tail, "f_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}
. \tag{3.4.2}
$$

证明. 由 ET4, 取 E, x 与 y 如下:

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] \arrow[d, equal] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, dashed, "y"] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, "i_2 f_A"'] & B_2 \arrow[r, dashed, two heads, "x"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & E \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, dashed, two heads, "z"] & {} \\
& C_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_2 \arrow[d, dashed, "(g_A)_*\varepsilon_2"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}
. \tag{3.4.3}
$$

方块 (g_A, y, i_2, x) 是同伦的推出拉回方块, 特别地, 这是弱推出. 此时存在 φ 使得下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[d, tail, dashed, "y"] \arrow[ddr, bend left, tail, "i_3"] & \\
B_2 \arrow[r, dashed, two heads, "x"] \arrow[drr, bend right, two heads, "g_B"'] \arrow[dr, phantom, "\triangle"] & E \arrow[dr, dashed, two heads, "\varphi"] \arrow[ur, phantom, "\square"] & {} \\
& & B_3
\end{tikzcd}
. \tag{3.4.4}
$$

由**定理** 3.3.11 第四条的对偶, φ 是 deflation. 对 $\triangle$ 与 $\square$ 分别使用 ET4' 与**定理** 3.1.4, 得下图:

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, dashed, "i_1"] & A_1 \arrow[d, tail, "i_2 f_A"] & & \\
B_1 \arrow[r, tail, "f_B"] \arrow[d, dashed, two heads, "p_1"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "x"] \arrow[dr, phantom, "\triangle"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, equal] & {} \\
C_1 \arrow[r, tail, "\psi"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & E \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\eta"] & B_3 \arrow[r, dashed, "(p_1)_*\delta_B"] & {} \\
{} & {} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A_3 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "y"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & A_3 \arrow[d, tail, "i_3"] & \\
C_1 \arrow[r, tail, "\psi"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "z"] & B_3 \arrow[r, dashed, "(p_1)_*\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
C_1 \arrow[r, tail, dashed, "f_C"] & C_2 \arrow[r, dashed, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed, "(g_A)_*\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}
. \tag{3.4.5}
$$

今断言式 (3.4.5) 即为所求. 显然式 (3.4.2) 中四个方块交换, 下检验扩张元的等式:

1. $(f_A)_*\varepsilon_1 = (f_A)_*\psi^*\eta = \psi^*(f_A)_*\eta = \psi^*z^*\varepsilon_2 = (z\circ\psi)^*\varepsilon_2 = (f_C)^*\varepsilon_2$;
2. 式 (3.4.5) 直接给出 $(g_A)_*\varepsilon_2 = (g_C)^*\varepsilon_3$;
3. $(i_1)_*\delta_A = (i_1)_*y^*\eta = y^*(i_1)_*\eta = y^*\varphi^*\delta_B = (\varphi\circ y)^*\delta_B = (i_3)^*\delta_B$;
4. 式 (3.4.5) 直接给出 $(p_1)_*\delta_B = (p_3)^*\delta_C$.

□

九引理即 conflation 的 “四推六”, 以下 “五推六” 变体无需弱幂等完备性.

定理 3.4.2. 给定以下五条 conflation 的交换图, 使得 $(g_A)_*\varepsilon_2 = (g_C)^*\varepsilon_3$:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_1 \arrow[r, tail, "f_B"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
C_1 \arrow[r, tail, "f_C"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.4.6}$$

存在 ε_1 使得下图交换, 且所有相邻行与列都是实现间的态射:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] \arrow[d, tail, "i_1"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_1 \arrow[r, tail, "f_B"] \arrow[d, two heads, "p_1"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
C_1 \arrow[r, tail, "f_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.4.7}$$

证明. 将 $(g_A, g_C) : \varepsilon_2 \to \varepsilon_3$ 拆解如下:

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "y"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_2 \arrow[r, two heads, "x"] \arrow[d, two heads, "p_2"] \arrow[rr, bend left, two heads, "g_B"] & E \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "z"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
C_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.4.8}$$

由 ET4 与**定理** 3.2.7, 左上方块是同伦的推出拉回. 由**定理** 3.1.1 与**定理** 3.2.9, 右下方块是同伦的推出拉回. 由 $(g_A)_*\varepsilon_2 = (g_C)^*\varepsilon_3$, 不妨假定两处方块交于 E. 特别地, φ 是 deflation.
往后证明同**定理** 3.4.1. 需要注意, **式** (3.4.8) 蕴含了**式** (3.4.5) 的右图此处仅需通过**命题** 2.3.10 构造**式** (3.4.5) 的左图. 最后验证扩张元的等式即可. □

定理 3.4.3. 给定以下五条 conflation 的交换图, 使得 $(f_A)_*\varepsilon_1 = (f_C)^*\varepsilon_2$, 且 $(g_A)_*\varepsilon_2 = (g_C)^*\varepsilon_3$”

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] \arrow[d, tail, "i_1"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_1 \arrow[d, two heads, "p_1"] & B_2 \arrow[d, two heads, "p_2"] & B_3 \arrow[d, two heads, "p_3"] & \\
C_1 \arrow[r, tail, "f_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{3.4.9}$$

则存在 conflation g_B 使得下图交换, 且所有相邻行与列都是实现间的态射:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] \arrow[d, tail, "i_1"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_1 \arrow[r, tail, dashed, "f_B"] \arrow[d, two heads, "p_1"] & B_2 \arrow[r, two heads, dashed, "g_B"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
C_1 \arrow[r, tail, "f_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.4.10}$$

证明. 首先通过两处同伦的推出拉回方块 $\star$ 构造 $g_B := (g'_C) \circ (g'_A)$:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] \arrow[d, tail, "i_1"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & A_3 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, dashed, "i'_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_1 \arrow[d, two heads, "p_1"] & B_2 \arrow[r, two heads, dashed, "g'_A"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & D \arrow[r, two heads, dashed, "g'_C"] \arrow[d, two heads, dashed, "p'_3"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & B_3 \arrow[d, two heads, "p_3"] & \\
C_1 \arrow[r, tail, "f_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & C_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
{} & {} & & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.4.11}$$

我们希望构造 $f_B : B_1 \rightarrowtail B_2$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "i_1"] & A_1 \arrow[d, tail, "i_2 \circ f_A"] & & \\
B_1 \arrow[r, dashed, "f_B", "?"'] \arrow[d, two heads, "p_1"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g'_C \circ g'_A"] \arrow[d, two heads, "g'_A"] & B_3 \arrow[d, equal] & \\
C_1 \arrow[r, tail, "f_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & D \arrow[r, two heads, "g'_C"] \arrow[d, dashed] & B_3 \arrow[r, dashed, "(p_3)^* \delta_C"] & {} \\
{} & {} & &
\end{tikzcd} . \tag{3.4.12}$$

实际上, 考虑 $(f_C \ g'_A)$ 所在的同伦的推出拉回方块:

□

4 特殊的外三角范畴

4.1 全子范畴

定义 4.1.1. (对 conflation 封闭的全子范畴). 定义外三角范畴 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 的全子范畴是三元组

$$(\mathcal{D},\mathbb{E}|_{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{D}},\mathfrak{s}|_{\mathcal{S}}). \tag{4.1.1}$$

其中,

1. $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 的加法全子范畴;
2. 给定 $\mathcal{C}$ 中 conflation $A\overset{i}{\rightarrowtail}B\overset{p}{\twoheadrightarrow}C\overset{\delta}{\dashrightarrow}$. 若 A,B,C 的其中两项属于 $\mathcal{D}$, 则第三项亦然;
3. $\mathbb{E}|_{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{D}}$ 与 $\mathfrak{s}|_{\mathcal{S}}$ 就是 $\mathbb{E}$ 与 $\mathfrak{s}$ 在子范畴上的限制.

以下一类全子范畴更为常见.

定义 4.1.2. (扩张闭子范畴). 给定外三角范畴 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$. 称加法全子范畴 $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}$ 是扩张闭的, 若对任意 $\mathcal{C}$ 中 conflation $A\overset{i}{\rightarrowtail}B\overset{p}{\twoheadrightarrow}C\overset{\delta}{\dashrightarrow}$. 若 A,C 属于 $\mathcal{D}$, 则 B 亦然.

定理 4.1.3. 外三角范畴的扩张闭子范畴 $(\mathcal{D},\mathbb{F},\mathfrak{s}|_{\mathcal{D}})$ 是外三角范畴. 其中, $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{E}$ 的子函子. 称 $\delta\in\mathbb{F}(Z,X)$, 当且仅当 $\mathfrak{s}(\delta)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的 conflation.

证明. (ET1). 只需如上定义的 $\mathbb{E}$ 是加法子双函子. 任取定 $\delta,\delta'\in\mathbb{F}(Z,X)$, 在 $\mathcal{C}$ 中加法如下:

$$\begin{tikzcd}
X\oplus X \arrow[r, tail, "f\oplus f'"] \arrow[d, "(1\ \ 1)"'] & Y\oplus Y' \arrow[r, two heads, "g\oplus g'"] \arrow[d] & Z\oplus Z \arrow[r, dashed, "\delta\oplus\delta'"] \arrow[d, equal] & {} \\
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] & Z\oplus Z \arrow[r, dashed] & {} \\
X \arrow[r, tail] & F \arrow[r, two heads] \arrow[u] & Z \arrow[r, dashed, "\delta+\delta'"] \arrow[u, "\binom{1}{1}"'] & {}
\end{tikzcd}. \tag{4.1.2}$$

由扩张闭, 以上三条 conflation 的取值均为 $\mathcal{D}$. 双函子性继承至 $\mathbb{E}$.
ET2, ET3 (ET3') 与 $\mathcal{C}$ 中无异, 验证略.
(ET4). 仅验证 ET4, ET4' 对偶可证. 给定实线所示的 $\mathcal{D}$ 中的 conflation, 则有 $\mathcal{C}$ 中交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "x"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads, "y"] \arrow[d, tail, "z"] & C \arrow[d, tail, dashed, "u"] \\
A \arrow[r, tail, dashed, "zx"] & D \arrow[r, two heads, dashed, "v"] \arrow[d, two heads, "wv"] & F \arrow[d, two heads, dashed, "w"] \\
& E \arrow[r, equal] & E
\end{tikzcd}. \tag{4.1.3}$$

由扩张闭, $F\in\mathcal{D}$. 因此, 这也是 $\mathcal{D}$ 中的交换图. □

例子 4.1.4. 导出范畴是三角范畴, 从而是外三角范畴 (Section 4.3). 扩展模范畴 ([Zho25]) 是外三角子范畴, 这通常既非三角范畴, 也非正合范畴.

4.2 正合范畴是外三角范畴

正合范畴定义见**定义** 1.1.1, 本节假定 Ext^1 的取值是集合 (**例** 1.1.7).

例子 4.2.1. (正合范畴视作外三角范畴). 给定正合范畴 $(\mathcal{C},\mathcal{E})$, 我们定义基本资料 (**定义** 2.1.1).

1. $\mathbb{E} := \mathrm{Ext}^1 : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$;
2. 若 ses $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ 对应同构类 $\delta \in \mathbb{E}(C,A)$, 则记 $A \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} C \in \mathfrak{s}(\delta)$.

下证明 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 是外三角范畴.

引理 4.2.2. 沿用**例** 4.2.1 的表述. 实现之间的同态 $(\alpha,\beta,\gamma):\delta \to \varepsilon$ 满足 $\alpha_*\delta = \gamma^*\varepsilon$.

证明. 这是 Baer 和的基本性质 (或 Yoneda 群的定义) 的定义. 细节见 [Mit65] 的章节 VII. □

命题 4.2.3. **例** 4.2.1 定义的 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 满足 ET1.

证明. 由**定理** 1.1.14, $\mathbb{E} := \mathrm{Ext}^1$ 是加法双函子. □

命题 4.2.4. **例** 4.2.1 定义的 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 满足 ET2.

证明. 我们说明 $\mathfrak{s}$ 是一个加法实现. 检验 ET2-1 如下.

1. 若 δ 对应 $X \rightarrowtail F \twoheadrightarrow Z$, 则一切式 (2.1.2) 中所示的同构的态射链也是 δ 的实现. 反之亦然.
2. 正合范畴的 ses 包含所有可裂 ses, 且可裂 ses 对应 Ext^1 的零元. 反之亦然.
3. 正合范畴的 ses 对直和封闭. $\mathfrak{s}$ 与直和交换.

继而检验 ET2-2. 给定 $f_*\delta = g^*\varepsilon$. 下求解提升问题:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "g"] & {} \\ X \arrow[r, tail, "j"] & Y \arrow[r, two heads, "q"] & Z \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] & {} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "jf"] \arrow[d, tail, "i"'] & Y \arrow[d, two heads, "q"] \\ B \arrow[r, "gp"'] \arrow[ur, dashed] & Z \end{tikzcd} . \tag{4.2.1}$$

依照**定理** 2.4.1 中构造, 得正合列的交换图

$$\begin{tikzcd} (C,X) \arrow[r, tail, "p^*"] \arrow[d, tail, "j_*"] & (B,X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, tail, "j_*"] & (A,X) \arrow[r, "\delta^\sharp"] \arrow[d, tail, "j_*"] & \mathrm{Ext}^1(C,X) \arrow[d, "j_*"] \\ (C,Y) \arrow[r, tail, "p^*"] \arrow[d, "q_*"] & (B,Y) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "q_*"] & (A,Y) \arrow[r, "\delta^\sharp"] \arrow[d, "q_*"] & \mathrm{Ext}^1(C,Y) \arrow[d, "q_*"] \\ (C,Z) \arrow[r, tail, "p^*"] \arrow[d, "\varepsilon_\sharp"] & (B,Z) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\varepsilon_\sharp"] & (A,Z) \arrow[r, "\delta^\sharp"] \arrow[d, "\varepsilon_\sharp"] & \mathrm{Ext}^1(C,Z) \\ \mathrm{Ext}^1(C,X) \arrow[r, "p^*"] & \mathrm{Ext}^1(B,X) \arrow[r, "i^*"] & \mathrm{Ext}^1(A,X) & \end{tikzcd} . \tag{4.2.2}$$

容易计算 $(0;gp;jf;0)$ 的微分为 0, 从而存在原像 $(a;b;c)$. 注意到 $a \in \ker \varepsilon_\sharp = \operatorname{im} q_*$, 类似的计算表明 $b \in \operatorname{im} i^*$. 此时存在 $(s;t) \in (C,Y) \oplus (B,X)$ 使得

$$d(s;t) + (a;b;c) = (0;b';0). \tag{4.2.3}$$

上式右侧的微分为 $d(a;b;c) = (0;gp;jf;0)$, $b' : B \to Y$ 即为所求. □

命题 4.2.5. 例 4.2.1 定义的 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 满足 ET3 (ET3').

证明. 式 (2.1.6) 虚线处态射由核 (余核) 的泛性质给出. 扩张元态射的等式由引理 4.2.2 检验. □

命题 4.2.6. 例 4.2.1 定义的 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 满足 ET4 (ET4').

证明. 由定理 1.1.18 (及其对偶表述) 得 conflation 的交换图.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, tail, "j"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, tail, dashed, "j'"] & {} \\
X \arrow[r, tail, dashed, "j\circ i"] & A \arrow[r, two heads, dashed, "r"] \arrow[d, two heads, "q"] & W \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, two heads, dashed, "q'"] & {} \\
 & B \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & B \arrow[d, dashed, "\varepsilon'"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{4.2.4}$$

特别地, 右上角同伦的推出拉回方块对应 $i_*\delta' = (q')^*\varepsilon$. 扩张元态射的等式由引理 4.2.2 检验. □

定理 4.2.7. 沿用例 4.2.1 的表述. $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是外三角范畴.

证明. 由上述命题. □

另一方面, 我们给出一则外三角范畴是正合范畴的充要条件.

定理 4.2.8. 外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 诱导的二元组 $(\mathcal{C}, \{\text{conflation}\})$ 是正合范畴, 当且仅当所有 inflation 是单态射, 且所有 deflation 是满态射.

证明. $(\rightarrow)$ 是显然的. 下证明 $(\leftarrow)$, 即验证定义 EX's.

1. EX0 与 EX0' 显然成立, 可裂短正合列必然是 conflation.
2. EX1 与 EX1' 由 ET4 (ET4') 证得. 容易发现, ET4 (ET4') 的推论是 inflation (deflation) 关于合成闭.
3. EX2 与 EX2' 对偶, 下仅证明 EX2. 由定理 3.2.3, 任意 inflation $A \to B$ 与任意态射 $A \to X$ 可补全作同伦的推出拉回方块, 且 inflation 的对边仍是 inflation. 注意到该方块既是弱推出, 也是与弱拉回. 由 inflation 是单态射, 所有弱拉回问题的解唯一; 由 deflation 是满态射, 所有弱推出问题的解唯一. 这说明上述同伦的推出拉回方块就是范畴意义下的推出拉回方块.

□

4.3 三角范畴是外三角范畴

三角范畴的定义见定义 1.2.1.

例子 4.3.1. (三角范畴视作外三角范畴). 给定三角范畴 $(\mathcal{C}, \Sigma, \mathcal{E})$, 我们定义基本资料 (定义 2.1.1).

1. $\mathbb{E} := (-, \Sigma(?))_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$;
2. 给定好三角 $\triangle : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$, 记 $\triangle \in \mathfrak{s}(h)$.

定理 4.3.2. 例 4.3.1 中定义的 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是外三角范畴.

证明. (ET1). 显然 $\mathbb{E}$ 是双函子. (ET2-1). 由态射嵌入唯一的好三角 (**命题** 1.2.6), $\mathfrak{s}$ 是态射到同构类的对应. 试回顾两则三角范畴的基本事实:

1. $X \to Y \to Z \xrightarrow{s} \Sigma X$ 的前三项是可裂短正合列, 当且仅当 $s = 0$ (推论 1.2.7).

2. **命题** 1.2.5 第四条表明好三角对直和封闭, 且 $\mathfrak{s}$ 与直和交换.

(ET2-2), (ET3) 与 (ET3') 是**命题** 1.2.5 第一条的直接推论.
(ET4) 与 (ET4') 是 TR4 的直接推论. □

4.4 自等价 + 外三角范畴 = 三角范畴

本小节给出外三角范畴是三角范畴的一个充分条件.

例子 4.4.1. (带自等价的外三角范畴). 假定外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 配有自等价 Σ, 使得 $\mathbb{E}(-, ?) := (-, \Sigma ?)$. 此时, conflation $A \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 的 δ 项是一个具体的态射, 形如 $\delta : C \to \Sigma A$.

例子 4.4.2. (1 的实现). 考虑以下特殊的扩张元:

$$1_{\Sigma X} \in (\Sigma X, \Sigma X) =: \mathbb{E}(\Sigma X, X) \ni \eta_X. \tag{4.4.1}$$

取实现 $X \overset{i}{\rightarrowtail} E_X \overset{p}{\twoheadrightarrow} \Sigma X \overset{\eta_X}{\dashrightarrow} (\Sigma X)$, 则有长正合列

$$(-, X) \xrightarrow{i\circ -} (-, E_X) \xrightarrow{p\circ -} (-, \Sigma X) \xrightarrow{(\eta_X)_\sharp = \mathrm{id}} (-, \Sigma X) \to \cdots . \tag{4.4.2}$$

从而 $p = 0$. 对偶地, 反变函子的长正合列表明 $i = 0$. 因此 $E_X = 0$. 我们得到一类特殊的 conflation

$$X \rightarrowtail 0 \twoheadrightarrow \Sigma X \overset{\eta_X}{\dashrightarrow} (\Sigma X) \ . \tag{4.4.3}$$

定理 4.4.3. **例** 4.4.1 中的外三角范畴是三角范畴, 平移函子即自等价 Σ, 好三角即 conflation 所在的四项态射序列.

证明. 我们验证 TR1-1, TR1-2, TR1-3', TR2, TR3 与 TR4. 此处

TR1-3' 任意态射 h 可嵌入某一好三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$.

除去 TR2, 剩余公理的检验都是显然的. 以下构造 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ 的顺时针旋转. 依照**定理** 3.1.2 构造双 inflation 的推出:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, tail] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail, dashed, "g"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & (\Sigma X) \arrow[d, dashed, "(0)"] \\
0 \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads] & Z \arrow[r, equal, dashed] \arrow[d, two heads, dashed, "w"] & Z \arrow[r, dashed, "0"] & (0) \\
\Sigma X \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\eta_X"] & \Sigma X \arrow[d, dashed, "f_*\eta_X"] & & \\
(\Sigma X) \arrow[r, dashed, "(\Sigma f)"] & (\Sigma Y) & &
\end{tikzcd} . \tag{4.4.4}$$

以上, 第二横行取作标准的可裂 conflation, 第二纵列受制于第二横行. 由**式** (3.1.8) 得

$$0 = (1_Z)^*\delta + w^*\eta_X = \delta \circ 1_Z + 1_{\Sigma X} \circ w = \delta + w. \tag{4.4.5}$$

因此, 第二纵列所示的 conflation 是 $Y \overset{g}{\rightarrowtail} Z \overset{-\delta}{\twoheadrightarrow} \Sigma X \overset{\Sigma f}{\dashrightarrow} (\Sigma Y)$. 通过适当的同构调整符号, 我们得到顺时针旋转的构造. □

4.5 理想商

Happel 定理 ([Hap88], 章节 1.2) 指出 Frobenius 正合范畴的商范畴是三角范畴. 鉴于正合范畴与三角范畴都是外三角范畴, Happel 定理给出 “由外三角范畴创造外三角范畴” 的一般方式.
我们定义外三角范畴的投射对象与 Frobenius 外三角范畴.

定义 4.5.1. (投射对象) 称 P 是外三角范畴的投射对象, 若其满足以下等价定义.

1. 对任意 deflation p, (P,p) 是满射.
2. 任意形如 $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow P \dashrightarrow$ 的 conflation 是可裂的.
3. $\mathbb{E}(P,-)=0$.

证明. 依照实现的定义, $(2 \leftrightarrow 3)$ 是显然的. 长正合列式 (2.2.11) 给出了 $(3 \to 1)$. 考虑 1_P 的分解, 得 $(1 \to 2)$. □

备注 4.5.2. 以上定义的 “投射对象” 理应严谨表述作 “相对投射对象”. 基于类似**定义** 2.1.5 第四条的考量, 使用 “投射对象” 一词通常不会引起歧义.

定义 4.5.3. (理想). 称全子加法范畴 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ 是外三角范畴的理想, 若 $\mathcal{B}$ 中任意对象既是投射对象, 又是内射对象. 显然 $0 \in \mathcal{B}$, 且投射 (对象) 关于直和封闭, 因此 $\mathcal{B}$ 是良定义的. 任意外三角范畴都有 0 理想.

定理 4.5.4. (理想商). 取定理想 $B \subseteq \mathcal{C}$, 则加法商范畴 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 具有由 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 诱导的外三角范畴结构.

1. 依照惯例, 假定 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 有相同的对象类. 对态射 $f \in \mathcal{C}$, 记 $[f] \in \mathcal{C}/\mathcal{B}$ 为商范畴中相应的态射. $[f]=[f']$ 当且仅当 $(f-f')$ 通过 $\mathcal{B}$ 中某一对象分解.
2. (加法商的泛性质). 一般地, 若加法函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ 映加法全子范畴 $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ 至零对象, 则 F 通过 $\mathcal{A} \to (\mathcal{A}/\mathcal{A}')$ 唯一地分解. 具体地, 该函子与 F 在对象层面取值相同; 对每个 Hom-群, 泛性质唯一决定了 $[f] \mapsto Ff$. 此处不必疑虑范畴的 “同构” 与 “等价” 之别.

证明. 以下检验外三角范畴的公理.
(ET1). 由 $\mathbb{E} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B} \to 0$ 与 $\mathbb{E} : \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to 0$, 以下是良定义的双边加法函子

$$\mathbb{E}' : (\mathcal{C}/\mathcal{B})^{\mathrm{op}} \times (\mathcal{C}/\mathcal{B}) \to \mathbf{Ab}, \quad (X,Y) \mapsto \mathbb{E}(X,Y). \tag{4.5.1}$$

下验证这是双函子, 即 $[g]^*[f]_*\delta = [f]_*[d]^*\delta$. 依照加法商的泛性质, 所有 $[\cdot]$ 括号可以去除; 换言之, f 的 “作用” 就是 $[f]$ 的 “作用”. 从而等式成立.
(ET2-1). 若 $A \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} C \in \mathfrak{s}(\delta)$, 则记 $A \overset{[i]}{\rightarrowtail} B \overset{[p]}{\twoheadrightarrow} C \in \mathfrak{s}'(\delta)$. 尽管扩张元在商范畴中的实现 “有更多选择余地”, $\mathcal{C}$ 中不同的扩张元在 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 中仍旧不同. 加法商的泛性质仅涉及加法函子, 从而 ET2-1 得证.
(ET2-2). 给定 $f_*\delta = g^*\eta$ 与 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 中的交换图, 得

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "{[a]}"] \arrow[d, "{[f]}"] & Y \arrow[r, two heads, "{[b]}"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "{[g]}"] & {} \\ A \arrow[r, tail, "{[x]}"] & B \arrow[r, two heads, "{[y]}"] & C \arrow[r, dashed, "\eta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{4.5.2}$$

不妨假定上下两行删去 $[\cdot]$ 后是 $\mathcal{C}$ 中的 conflation. 以上交换图在去除 $[\cdot]$ 后合成为 0, 故交换. 依照外三角范畴 $\mathcal{C}$ 的 ET2-2 公理, 构造 $\varphi : Y \to B$, $[\varphi]$ 即为所求.
(ET3). 假定下图在 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 中交换, 且两横行删去 $[\cdot]$ 后是 $\mathcal{C}$ 中的 conflation:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "{[a]}"] \arrow[d, "{[f]}"] & Y \arrow[r, two heads, "{[b]}"] \arrow[d, "{[h]}"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \\ A \arrow[r, tail, "{[x]}"] & B \arrow[r, two heads, "{[y]}"] & C \arrow[r, dashed, "\eta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{4.5.3}$$

记 $xf - ha$ 经 $P \in \mathcal{B}$ 分解. 推论 3.3.8 表明 $\binom{a}{i}$ 是 inflation, 此时 $\mathcal{C}$ 中交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "\binom{a}{i}"] \arrow[d, "f"] & Y \oplus P \arrow[r, two heads, "b'"] \arrow[d, "(h\ j)"] & Z' \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & {} \\ A \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & C \arrow[r, dashed, "\eta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{4.5.4}$$

对 δ 与 δ' 使用**定理** 3.1.4, 得下图 (内射对象 P 出发的 inflation 可裂):

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "\binom{0}{1}"] & P \arrow[d, tail, dashed, "\binom{0}{1}"] & \\ X \arrow[r, tail, "\binom{a}{i}"] \arrow[d, equal] & Y \oplus P \arrow[r, two heads, "\begin{pmatrix} b & 0 \\ k & l \end{pmatrix}"] \arrow[d, two heads, "(1\ 0)"] & Z \oplus P \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, two heads, dashed, "(1\ 0)"] & {} \\ X \arrow[r, tail, "a"] & Y \arrow[r, two heads, "b"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{4.5.5}$$

特别地, $[\binom{1}{0}]^*\delta' = \delta$. 结合**式** (4.5.4) 与**式** (4.5.5), 取 $[\lambda \circ \binom{1}{0}] : Z \to C$ 即可.
(ET4). ET4 的题设不涉及交换图. 因此可以将 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 的题设视作 $\mathcal{C}$ 的题设, 再将 $\mathcal{C}$ 中结论取 $[\cdot]$ 即可. □

称 $\mathcal{C}$ 有足够投射 (内射) 对象, 若任意对象 X 配有 deflation $P \twoheadrightarrow X$ (inflation $X \rightarrowtail I$), 其中 P (I) 是投射 (内射) 对象.

定义 4.5.5. (Frobenius 外三角范畴). 称外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是 Frobenius 的, 若 $\mathcal{C}$ 既有足够的投射对象, 又有足够的内射对象, 且投射对象与内射对象相同.

定理 4.5.6. (外三角范畴的 Happel 定理). 设 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是 Frobenius 外三角范畴, 记 $\mathcal{B}$ 是所有投射对象构成的理想. 此时, **定理** 4.5.4 给出商范畴 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 是三角范畴.

证明. 依照**定理** 4.4.3, 只需构造自等价 Σ 使得有自然同构 $\mathbb{E}(-, (?)) \simeq (-, \Sigma(?))$. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 我们对所有对象 X 取定 conflation δ_X, 并对所有态射 $f : X \to Y$ 取定 conflation 间的态射:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "i_X"] \arrow[d, "f"] & I_X \arrow[r, two heads, "p_X"] \arrow[d, "I_f"] & C_X \arrow[r, dashed, "\delta_X"] \arrow[d, "C_f"] & {} \\ Y \arrow[r, tail, "i_Y"] & I_Y \arrow[r, two heads, "p_Y"] & C_Y \arrow[r, dashed, "\delta_Y"] & {} \end{tikzcd} . \tag{4.5.6}$$

以上 I_f 由内射对象的提升性取定, C_f 由 ET3 取定. 显然, $? \mapsto C_?$ 通常不是 $\mathcal{C}$ 中的函子; 直觉上看, 这诱导了 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 中的加法自函子. 我们将这一证明拆解作如下几步.

步骤 0 (选定骨架 $\mathcal{C}/\mathcal{B} \to \mathcal{K}$). 考虑复合 $\mathcal{C} \xrightarrow{C_\cdot} \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{B}$. 为避免对象相差一个同构, 我们依照类的选择公理取定 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 的骨架 $\mathcal{K}$ (同构类的代表元所在的全子范畴), 并记对应的全忠实函子 $[\cdot] : \mathcal{C}/\mathcal{B} \to \mathcal{K}$. 态射层面, 复合 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{B} \to \mathcal{K}$ 将 f 对应至 $[[f]]$, 往后简略地记作 $[f]$.

步骤 1 (检验函子 $\mathcal{C} \xrightarrow{C.} \mathcal{C} \xrightarrow{[\cdot]} \mathcal{K}$). 我们检验恒等律与复合律. 我们在此处给出直接的证明, 后续定理**定理** 5.1.18 说明 I_f 在商范畴中唯一确定.

(a) (恒等律). 不妨约定**式** (4.5.6) 中 $I_{1_X} := 1_{I_X}, C_{1_X} := 1_{C_X}$. 这不会引起矛盾.

(b) (复合律). 考虑以下 $\mathcal{C}$ 中交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i_X"] \arrow[d, "f"] & I_X \arrow[r, two heads, "p_X"] \arrow[d, "I_f"] & C_X \arrow[r, dashed, "\delta_X"] \arrow[d, "C_f"] & {} \\
Y \arrow[r, tail, "i_Y"] \arrow[d, "g"] & I_Y \arrow[r, two heads, "p_Y"] \arrow[d, "I_g"] & C_Y \arrow[r, dashed, "\delta_Y"] \arrow[d, "C_g"] & {} \\
Z \arrow[r, tail, "i_Z"] & I_Z \arrow[r, two heads, "p_Z"] & C_Z \arrow[r, dashed, "\delta_Z"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{4.5.7}$$

往证 $[C_g] \circ [C_f] = [C_{g\circ f}]$. 实际上, 只需证明以下命题.

引理 4.5.7. 沿用以上 δ_X 与 δ_Z 的实现. 假定对 $k = 1, 2$, 以下是 $\mathcal{C}$ 中 conflation 的态射:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i_X"] \arrow[d, "h"] & I_X \arrow[r, two heads, "p_X"] \arrow[d, "l_k"'] & C_X \arrow[r, dashed, "\delta_X"] \arrow[d, "q_k"'] & {} \\
Z \arrow[r, tail, "i_Z"] & I_Z \arrow[r, two heads, "p_Z"] & C_Z \arrow[r, dashed, "\delta_Z"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{4.5.8}$$

此时 $[q_1] = [q_2]$.

证明. 由 $(\delta_Z)_\sharp(q_1 - q_2) = (\delta_X)^\sharp(h - h) = 0$ 与长正合列 (**式** (2.2.11)), 得 $(q_1 - q_2)$ 通过投射对象 I_Z 分解. 从而 $[q_1] = [q_2]$. □

步骤 2 (证明函子 $\mathcal{C} \xrightarrow{[C.]} \mathcal{K}$ 是加法函子). 对加法范畴间的函子而言, 加法函子就是保持直和的函子 (证明熟知, 如 [Cre21]). 由于 $\mathcal{C}/\mathcal{B} \to \mathcal{K}$ 是加法函子, 故仅需证明 $[C_X \oplus C_Y] = [C_{X\oplus Y}]$. 任取 conflation 间的态射 $(1, n, q)$ 与 $(1, m, p)$, 如下所示:

$$\begin{tikzcd}
X \oplus Y \arrow[r, tail, "i_X \oplus i_Y"] \arrow[d, equal] & I_X \oplus I_Y \arrow[r, two heads, "p_X \oplus p_Y"] \arrow[d, dashed, shift left, "m"] & C_X \oplus C_Y \arrow[r, dashed, "\delta_X \oplus \delta_Y"] \arrow[d, dashed, shift left, "p"] & {} \\
X \oplus Y \arrow[r, tail, "i_Z"] & I_{X\oplus Y} \arrow[r, two heads, "p_Z"] \arrow[u, dashed, shift left, "n"] & C_{X\oplus Y} \arrow[r, dashed, "\delta_{X\oplus Y}"] \arrow[u, dashed, shift left, "q"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{4.5.9}$$

依照引理 4.5.7, $[pq] = [1_{C_{X\oplus Y}}]$ 与 $[qp] = [1_{C_X \oplus C_Y}]$.

步骤 3 (证明加法函子 $\mathcal{C} \xrightarrow{[C.]} \mathcal{K}$ 诱导了 $\mathcal{K}$ 的自函子). 不妨约定对一切投射对象 P, **式** (4.5.6) 中均有 $I_P = P$ 与 $C_P = 0$. 这不会引起任何矛盾. 我们得到诱导的函子 $\mathcal{C}/\mathcal{B} \xrightarrow{[C.]} \mathcal{K}$. 对任意范畴等价 $\mathcal{K} \to \mathcal{C}/\mathcal{B}$, 复合 $[C.]$ 所得的自函子是唯一的, 记作 Σ.

步骤 4 (对外三角范畴 $\mathcal{K}$, 有函子的自然同构 $\mathbb{E}'(Z, X) \simeq (Z, \Sigma X)$). 我们将同构选取如下:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\lambda"] & X \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & {} \\
Z \arrow[r, tail, "i_Z"] & I_Z \arrow[r, two heads, "p_Z"] & C_Z \arrow[r, dashed, "\delta_Z"] & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[\varepsilon]} \arrow[d] & & {[\varphi^*\delta_Z]} \\
{[\varphi]} & \text{1:1} & {[\varphi]} \arrow[u]
\end{tikzcd} . \tag{4.5.10}$$

对以上 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$, 记 $[\delta] \in \mathbb{E}([C], [A])$. 由引理 4.5.7, ET3 诱导的 $[\varepsilon] \mapsto [\varphi]$ 无关 λ 与 φ 的选取. 显然 $[\varepsilon] \mapsto [\varphi] \mapsto [\varphi^*\delta_Z]$ 与 $[\varphi] \mapsto [\varphi^*\delta_Z] \mapsto [\varphi']$ 是恒等. 最后验证函子性.

(a) (后项). 下图给出 $[\alpha_*\varepsilon] = [(C_\alpha)^*\varphi^*\delta_{Z'}] = [(C_\alpha)^*\alpha_*\delta_Z]$:

$$
\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, tail] & E' \arrow[r, two heads] & X \arrow[r, dashed, "\alpha_*\varepsilon"] & {} \\
Z \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[u] \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\lambda"] & X \arrow[u, equal] \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & {} \\
Z \arrow[r, tail, "i_Z"] \arrow[d, "\alpha"] & I_Z \arrow[r, two heads, "p_Z"] \arrow[d, "I_\alpha"] & C_Z \arrow[r, dashed, "\delta_Z"] \arrow[d, "C_\alpha"] & {} \\
Z' \arrow[r, tail, "i_{Z'}"] & I_{Z'} \arrow[r, two heads, "p_{Z'}"] & C_{Z'} \arrow[r, "\delta_{Z'}"] & {}
\end{tikzcd}
. \tag{4.5.11}
$$

因此, 扩张元 $[\alpha_*\varepsilon]$ 对应态射 $[C_\alpha] \circ [\varphi]$, 此处 $[C_\alpha]$ 即 $\Sigma[\alpha]$.

(b) (前项). 由下图, $[\gamma^*\varepsilon]$ 对应的态射是 $[\varphi] \circ [\gamma]$:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X' \arrow[r, dashed, "\gamma^*\varepsilon"] \arrow[d, "\gamma"] & {} \\
Z \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\lambda"] & X \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & {} \\
Z \arrow[r, tail, "i_Z"] & I_Z \arrow[r, two heads, "p_Z"] & C_Z \arrow[r, dashed, "\delta_Z"] & {}
\end{tikzcd}
. \tag{4.5.12}
$$

往证 Σ 是范畴等价. 可以同理构造 $\mathcal{K}$ 的自函子 $\Omega([X]) = [K_X]$, 其中 $K^X \overset{j^X}{\rightarrowtail} P^X \overset{q^X}{\twoheadrightarrow} X \overset{\kappa^X}{\dashrightarrow}$. 下证明 $\Sigma\Omega$ 与 $\Omega\Sigma$ 是恒同函子. 对前者, 考虑**定理** 3.1.1:

$$
\begin{tikzcd}
K^X \arrow[r, tail, "j^X"] \arrow[d, tail, "i_{K^X}"] & P^X \arrow[r, two heads, "q^X"] \arrow[d, tail] & X \arrow[r, "\kappa^X"] \arrow[d, equal] & {} \\
I_{K^X} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, "p_{K^X}"] & EX \arrow[r, two heads, "s^X"] \arrow[d, two heads, "t_X"] & X & \\
C_{K^X} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta_{K^X}"] & C_{K^X} & & \\
{} & & &
\end{tikzcd}
. \tag{4.5.13}
$$

由于 P^X 与 I_{K^X} 是投射对象, $[s^X]$ 与 $[t_X]$ 是 $\mathcal{K}$ 中的恒同态射, 得同构 $\theta_X : [X] \simeq [C_{K^X}] = \Sigma\Omega[X]$.

态射层面, 对任意 $f : X \to Y$, 对 Y 作式 (4.5.13). 取定态射 K^f, P^f, 与 I_{K^f}, 由同伦推出拉回方块与 ET3 (ET3') 构造 Ef, 继而由 ET3 构造 $\overline{C_{K^f}} : C_{K^X} \to C_{K^Y}$ 与 $\overline{f} : X \to Y$. 由引理 4.5.7, 得 $[\overline{f}] = [f]$ 且 $[\overline{C_{K^f}}] = [C_{K^f}]$. 此时,

$$
\begin{aligned}
\Sigma\Omega[f] \circ \theta_X &= [C_{K^f}] \circ [t_X] \circ [s^X]^{-1} && (4.5.14)\\
&= [t_Y] \circ [Ef] \circ [s^X]^{-1} && (4.5.15)\\
&= [t_Y] \circ [s^Y]^{-1} \circ [f] \quad = \theta_Y \circ [f]. && (4.5.16)
\end{aligned}
$$

□

以下是 Happel 定理的一些推论.

推论 4.5.8. 外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 能够以**定理** 4.4.3 的方式诱导三角范畴, 当且仅当所有态射既是 inflation 又是 deflation.

证明. ($\rightarrow$) 方向由态射唯一嵌入好三角 (**命题** 1.2.6) 与 TR2 即得. 下证明 ($\leftarrow$) 方向. 考虑以下引理 (关于内射对象的表述对偶).

> **引理 4.5.9.** 上述外三角范畴有足够投射对象, 且投射对象恰好是零对象.
>
> *证明.* 若 P 是投射对象, 则 1_P 经 deflation $0 \to P$ 分解, 故 P 是零对象. 实际上, 零对象必然是投射对象. 显然范畴有足够投射对象. $\square$

这说明 $\mathcal{C}$ 是 Frobenius 范畴. 由**定理** 4.5.6, $\mathcal{C}/0 = \mathcal{C}$ 的骨架是三角范畴, 从而 $\mathcal{C}$ 是三角范畴. $\square$

5 Hovey 对应

5.1 余挠对

余挠对是一门庞大的理论, 本章节仅罗列一些基本定义与结论. 以下选定外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$.

定义 5.1.1. ($\mathbb{E}$-垂直). 称两个对象类 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathbb{E}$-垂直的 (下简称**垂直**), 若对任意 $X \in \mathcal{X}$ 与 $Y \in \mathcal{Y}$, 总有 $\mathbb{E}(X, Y) = 0$. 我们引入以下记号:

1. 若 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 垂直, 则记作 $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$;

2. 记右垂直类 $\mathcal{X}^{\perp} := \{Y \mid \mathbb{E}(X, Y) = 0\}$;

3. 记左垂直类 ${}^{\perp}\mathcal{Y} := \{X \mid \mathbb{E}(X, Y) = 0\}$.

简便起见, 约定 $\{M\}^{\perp} = M^{\perp}$.

再引入几则 conflation 决定的类的运算.

定义 5.1.2. 假定 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 是任意 (非空的) 对象类. 定义如下运算.

1. $\mathsf{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{Z \mid$ 存在 $X \in \mathcal{X}$ 与 $Y \in \mathcal{Y}$, 使得有 conflation $X \rightarrowtail Y \twoheadrightarrow Z\}$;

2. $\mathsf{coCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{W \mid$ 存在 $X \in \mathcal{X}$ 与 $Y \in \mathcal{Y}$, 使得有 conflation $W \rightarrowtail X \twoheadrightarrow W\}$;

3. $\mathcal{X} * \mathcal{Y} := \{E \mid$ 存在 $X \in \mathcal{X}$ 与 $Y \in \mathcal{Y}$, 使得有 conflation $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow Y\}$.

例子 5.1.3. 若 $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$, 则 $\mathcal{X} * \mathcal{Y} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

我们将 ET4 系列公理转化作如下引理.

引理 5.1.4. 对任意对象类 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, 与 $\mathcal{Z}$, 有如下等式.

1. $\mathsf{Cone}(\mathcal{X}, \mathsf{Cone}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})) = \mathsf{Cone}(\mathcal{Y} * \mathcal{X}, \mathcal{Z})$;

2. $\mathsf{coCone}(\mathsf{coCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \mathcal{Z}) = \mathsf{coCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Z} * \mathcal{Y})$;

3. $\mathsf{Cone}(\mathcal{X}, \mathsf{coCone}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})) = \mathsf{coCone}(\mathsf{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \mathcal{Z})$;

4. $\mathcal{X} * (\mathcal{Y} * \mathcal{Z}) = (\mathcal{X} * \mathcal{Y}) * \mathcal{Z}$.

证明. 先证明 (1). 观察下图. 若 $M \in \mathsf{Cone}(\mathcal{X}, \mathsf{Cone}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}))$, 则 M 由实线所示的 δ_i 决定. 依照 ET4', M 由虚线所示的 ε_j 决定. 因此 $M \in \mathsf{Cone}(\mathcal{Y} * \mathcal{X}, \mathcal{Z})$. 对偶地, 依照 ET4, 虚线所示的 conflation 决定实所示者.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & X \arrow[r, dashed, "\varepsilon_1"] \arrow[d, tail] & {} \\
Y \arrow[r, tail] & Z \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, dashed] & E \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, two heads] & {} \\
& M \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & M \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{5.1.1}$$

(2) 是 (1) 在反范畴中的对偶. 证明 (3) ((4)) 所需的交换图分别是下图左 (右).

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & M \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & {} \\
X \arrow[r, tail, dashed] & Y \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads] & F \arrow[r, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] & {} \\
 & Z \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[d, dashed] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & Y \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & {} \\
X \arrow[r, tail] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, dashed] & F \arrow[r, dashed] \arrow[d, two heads] & {} \\
 & Z \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[d, dashed] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
. \tag{5.1.2}
$$

实线决出的 M 位于左式, 虚线决出的 M 位于右式. 由 ET4 与 ET4' 可证两者互相推导. □

结合 **定理** 3.1.1, 得如下引理.

引理 5.1.5. 给定任意对象类 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 与 $\mathcal{Z}$, 有以下包含关系.

1. $\mathtt{coCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) * \mathcal{Y} \subseteq \mathtt{coCone}(\mathcal{X} * \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \supseteq \mathtt{coCone}(\mathcal{Y}, \mathtt{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}))$;

2. $\mathcal{Y} * \mathtt{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) \subseteq \mathtt{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y} * \mathcal{Z}) \supseteq \mathtt{Cone}(\mathtt{coCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}), \mathcal{Y})$.

证明. 下证明 (1). 左式对应下图 (左) 蓝实线, 右式对应下图 (右) 红实线, 中式对应虚线:

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[d, blue] \\
X \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & M \arrow[d, blue] \\
X \arrow[r, blue] & Z \arrow[r, blue] & E
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, red] \arrow[d, red] & Y \arrow[r, red] \arrow[d, dashed] & M \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, dashed] \arrow[d, red] & B \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & M \\
Z \arrow[r, equal] & Z &
\end{tikzcd}
. \tag{5.1.3}
$$

由**定理** 3.1.1, 实线决定虚线; 反之, 虚线未必能决定实线. 上述包含通常无法改作等号. (2) 是 (1) 在反范畴中的对偶结论, 证明从略. □

定义 5.1.6. (余挠对). 称两个对象类 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 构成**余挠对**, 若 $\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{V}$, 且 $\mathcal{U} = {}^{\perp}\mathcal{V}$.

备注 5.1.7. 余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 中两组对象类的顺序固定. 注意到 $\mathbb{E}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$.

引理 5.1.8. 对任意对象类 $\mathcal{X}$.

1. $({}^{\perp}\mathcal{X}, ({}^{\perp}\mathcal{X})^{\perp})$ 是余挠对, 称作 $\mathcal{X}$ **生成**的余挠对;

2. $({}^{\perp}(\mathcal{X}^{\perp}), \mathcal{X}^{\perp})$ 是余挠对, 称作 $\mathcal{X}$ **余生成**的余挠对.

证明. 依照 Galois 连接, 得 $({}^{\perp}(\mathcal{X}^{\perp}))^{\perp} = \mathcal{X}^{\perp}$, 以及 ${}^{\perp}(({}^{\perp}\mathcal{X})^{\perp}) = {}^{\perp}\mathcal{X}$. 证明细节从略. □

引理 5.1.9. 假定 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是余挠对, 则有如下结论:

1. $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 关于形变收缩 (**定义** 3.3.2) 封闭 (特别地, 关于直和项封闭);

2. $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 关于扩张封闭 (特别地, 关于直和封闭).

证明. 仅看 $\mathcal{U}$. (1). 记 $U_0 \xrightarrow{i} U \xrightarrow{p} U_0$ 复合为恒等, $U \in \mathcal{U}$, 则有恒等自然变换

$$
\mathbb{E}(U_0, (-)_{\mathcal{V}}) \xrightarrow{p^*} \mathbb{E}(U, (-)_{\mathcal{V}}) \xrightarrow{i^*} \mathbb{E}(U_0, (-)_{\mathcal{V}}). \tag{5.1.4}
$$

这一恒等自然变换通过零函子 $\mathbb{E}(U,(-)_{\mathcal{V}})$ 分解, 从而 $U_0 \in {}^{\perp}\mathcal{V} = \mathcal{U}$.
(2). 任取 conflation $U \rightarrowtail W \twoheadrightarrow U' \dashrightarrow$ $(U, U' \in \mathcal{U})$. 将长正合列 (式 (2.2.14)) 限制在 $\mathcal{V}$ 上, 得

$$0 = \mathbb{E}(U',(-)|_{\mathcal{V}}) \to \mathbb{E}(W,(-)|_{\mathcal{V}}) \to \mathbb{E}(U,(-)|_{\mathcal{V}}) = 0. \tag{5.1.5}$$

因此, $\mathbb{E}(W,(-)|_{\mathcal{V}}) = 0$, 即 $W \in {}^{\perp}\mathcal{V} = \mathcal{U}$. □

为较自然地引入完备余挠对, 我们介绍以下定义.

定义 5.1.10. (预盖, 右逼近). 给定范畴中的对象类 $\mathcal{X}$. 对象 M 的一个 $\mathcal{X}$-预盖 (或称右 $\mathcal{X}$-逼近) 是指一个态射 $p : M^X \to M$ $(M^X \in \mathcal{X})$, 使得以下等价表述成立:

- (态射语言). 对任意 $q : X \to M$ $(X \in \mathcal{X})$, 存在 $q' : X \to M^X$, 使得 $p \circ q' = q$.
- (函子语言). $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(-, M^X) \xrightarrow{p\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((-)|_{\mathcal{X}}, M)$ 是函子范畴 $\mathrm{Funct}(\mathcal{X}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab})$ 的满态射.

余挠对给出一类特殊的预盖.

引理 5.1.11. 假定 $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$. 若存在 $U \in \mathcal{U}$ 与 $V \in \mathcal{V}$ 使得有 conflation $V \overset{i}{\rightarrowtail} U \overset{p}{\twoheadrightarrow} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, 则 p 是 $\mathcal{U}$-预盖. 以此类方法构造的预盖称作**特殊预盖**.

证明. 将长正合列 (式 (2.2.14)) 限制在 $\mathcal{U}$ 上, 得

$$((-)|_{\mathcal{U}}, V) \xrightarrow{i\circ -} ((-)|_{\mathcal{U}}, U) \xrightarrow{p\circ -} ((-)|_{\mathcal{U}}, C) \xrightarrow{\delta_\sharp} \mathbb{E}((-), V) = 0. \tag{5.1.6}$$

因此, 以上 $p \circ -$ 是满态射, p 满足**定义** 5.1.10 的函子定义式. □

对偶地, 可以定义预包 (左逼近) 与特殊预包 (特殊右逼近). 给定余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. 任取 M 的特殊预盖 (若存在), 记相应的 conflation 为

$$M^V \rightarrowtail M^U \twoheadrightarrow M \dashrightarrow; \tag{5.1.7}$$

任取 M 的特殊预包 (若存在), 记相应的 conflation 为

$$M \rightarrowtail M_V \twoheadrightarrow M_U \dashrightarrow . \tag{5.1.8}$$

定义 5.1.12. (完备余挠对). 称余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是**完备**的, 若所有对象均有特殊预盖和特殊预包, 即

$$\mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \mathcal{C} = \mathrm{coCone}(\mathcal{V}, \mathcal{U}). \tag{5.1.9}$$

给定 $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$, 通常难以直接检验 $\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{V}$. 若加入特殊预包 (预盖) 的条件, 则可以基本克服这一困难.

引理 5.1.13. 给定 $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$, 并假定 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 对直和项封闭. 有以下结论:

1. 若 $\mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ 是全范畴, 则 $\mathcal{U} = {}^{\perp}\mathcal{V}$.
2. 若 $\mathrm{coCone}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ 是全范畴, 则 $\mathcal{V} = \mathcal{U}^{\perp}$.

证明. 仅证明第一式, 第二式对偶可证. 将任意 $X \in {}^{\perp}\mathcal{V}$ 写作 conflation $V \rightarrowtail U \twoheadrightarrow X$, 由于 $\mathbb{E}(X, V) = 0$, 这一 conflation 可裂. 由 $\mathcal{U}$ 关于直和项封闭, 得 $X \in \mathcal{U}$. □

备注 5.1.14. 特别地, 引理 5.1.13 关于直和项封闭的假定不可缺少. 例如, 将模范畴 $\mathcal{A} = \mathbf{Mod}_R$ 与可裂 ses 作成正合范畴, 则 $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ 是余挠对. 记 $\mathcal{A}^{\kappa}$ 是基数大于 $|R|$ 的模构成对象类. Eilenburg 位移技巧 (如 [Bas63]) 表明 $(\mathcal{A}^{\kappa}, \mathcal{A}^{\kappa})$ 满足引理 5.1.13 的题设, 但显然 $(\mathcal{A}^{\kappa})^{\perp} = \mathcal{A} \neq \mathcal{A}^{\kappa}$.

定理 5.1.15. (若松技巧). 余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是完备的, 当且仅当以下两点成立:

1. 所有对象有特殊预盖;
2. 对任意对象 X, 存在 inflation $X \rightarrowtail V$, 其中 $V \in \mathcal{V}$.

证明. 先说明任意对象 X 存在特殊预包. 先由 (2) 构造 δ, 再由 (1) 构造 ε. 依照**定理** 3.1.1 作交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & M^V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & M^V \arrow[d, tail] & \\
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & M^U \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, two heads] & {} \\
X \arrow[r, tail] & V \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\varepsilon'"] & M \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{5.1.10}$$

由 $\mathcal{V}$ 关于扩张封闭, 得 $E \in \mathcal{V}$. □

定义 5.1.16. 记 $\omega := \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ 为一类特殊的自垂直对象.

引理 5.1.17. 假定 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是完备余挠对. 对任意 $U \in \mathcal{U}$ 与 $V \in \mathcal{V}$, 任意态射 $f : U \to V$ 通过 ω 中对象分解.

证明. 取 inflation $i : U \rightarrowtail U_V$. 长正合列表明 (i, V) 满, 故 f 通过 U_V 分解. 显然 $U_V \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \omega$. □

预盖和预包通常不唯一, $(-)_V$ 与 $(-)^U$ 更无法称作函子; 但 $\mathcal{C}/\omega$ 是函子. 实际上, 有以下是更精细的结论.

定理 5.1.18. 假定 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是完备余挠对. 全子加法范畴的嵌入 $(\mathcal{U}/\omega) \to (\mathcal{C}/\omega)$ 具有右伴随 $(-)^U$.

证明. 对所有对象取定 conflation $M^V \overset{i}{\rightarrowtail} M^U \overset{p}{\twoheadrightarrow} M \dashrightarrow$. 下证明自然同构

$$(- \circ p) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}/\omega}(U, M^U) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\omega}(U, M). \tag{5.1.11}$$

由正合列 $(U, M^U) \to (U, M) \to \mathbb{E}(U, M^V) = 0$, 得 $(U, M^U) \to (U, M)$ 满, 这在加法商范畴中也是满射. 下只需证明对任意 $f : U \to M^U$, $[pf] = 0$ 蕴含 $[f] = 0$. 记 pf 通过 $W \in \omega$ 分解. 由 $\mathbb{E}(W, M^V) = 0$, 存在 s 使得 $\circlearrowleft$ 所在的三角交换:

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & W \arrow[d, "b"] \arrow[dl, dashed, "s"'] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3ex] & \\
M^V \arrow[r, tail, "i"] & M^U \arrow[r, two heads, "p"] & M \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd} . \tag{5.1.12}$$

此时 $p(sa - f) = 0$. 由长正合列, $(sa - f)$ 通过 i 分解. 再由引理 5.1.17, $(sa - f)$ 通过 ω 中对象分解. 由于 sa 已通过 $W \in \omega$ 分解, 故 f 通过 ω 中对象分解. 因此 $[f] = 0$. □

备注 5.1.19. 对偶可证, 全子加法范畴的嵌入 $\mathcal{V}/\omega \to \mathcal{C}/\omega$ 存在左伴随. 综合以上结果得

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}/\omega \arrow[r, hook, shift left=1.5ex, "\text{全子范畴}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}/\omega \arrow[l, shift left=1.5ex, "(-)^U"] \arrow[r, shift left=1.5ex, "(-)_V"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{V}/\omega \arrow[l, hook, shift left=1.5ex, "\text{全子范畴}"]
\end{tikzcd} . \tag{5.1.13}$$

5.2 遗传余挠对

(投射对象, $\mathcal{C}$) 与 ($\mathcal{C}$, 内射对象) 是特殊的余挠对, 这类余挠对满足一些额外性质.

定义 5.2.1. (完备余挠对). 称余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是**遗传**的, 若 $\mathcal{U}$ 是消解的, 且 $\mathcal{V}$ 是余消解的.

1. 称全子范畴 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}$ 是**消解**的, 若 $\mathcal{U}$ 包含一切投射对象且 $\mathrm{coCone}(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = \mathcal{U}$;
2. 称全子范畴 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{C}$ 是**余消解**的, 若 $\mathcal{V}$ 包含一切内射对象且 $\mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \mathcal{V}$.

对余挠对而言, $\mathcal{U}$ ($\mathcal{V}$) 自动包含所有投射对象 (内射对象).

备注 5.2.2. 若 $0 \in \mathcal{X}$, 则不必区分 $\mathrm{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ 与 $\mathrm{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \mathcal{X}$. 关于 coCone 与 $*$ 的等式同理.

备注 5.2.3. 依照经验, 通常讨论的遗传余挠对往往也是完备的. 当然, 这并非推论. 若 $\mathcal{C}$ 不具有足够投射对象, 则 (投射对象, $\mathcal{C}$) 是遗传但非完备的.

给定完备余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. 引理 5.1.17 说明 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\omega}(\mathcal{U}/\omega, \mathcal{V}/\omega) = 0$.

命题 5.2.4. 类似**定理** 5.1.15, 我们给出遗传的单边判准. 假定 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是完备余挠对, 则以下六点等价:

1. $\mathcal{V}$ 是余消解的;
2. $\mathcal{U}$ 是消解的;
3. $\ker \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\omega}(\mathcal{U}/\omega, -) = \mathcal{V}/\omega$;
4. $\ker \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\omega}(-, \mathcal{V}/\omega) = \mathcal{U}/\omega$.
5. 对 $V \rightarrowtail \cdot \xrightarrow{p} \cdot$, $\mathbb{E}(\mathcal{U}, p)$ 是同构;
6. 对 $\cdot \overset{i}{\rightarrowtail} \cdot \twoheadrightarrow U$, $\mathbb{E}(i, \mathcal{V})$ 是同构.

证明. $(2 \to 1)$. 对任意 conflation $V_1 \rightarrowtail V_2 \twoheadrightarrow X$, 往证 $X \in \mathcal{V}$, 也就是任意 conflation $X \rightarrowtail A \twoheadrightarrow U$ 可裂. 依照 TR4' 构造下图

$$\begin{tikzcd}
& A^V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, dashed] & A^V \arrow[d, tail] & & \\
& W \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads, dashed, "q"'] \arrow[dl, dashed, bend right] & A^U \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d] & U \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
V_2 \arrow[r, two heads] & X \arrow[r, tail] & A \arrow[r, two heads] & U \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd} . \tag{5.2.1}$$

由 $\mathcal{U}$ 是消解的, 得 $W \in \mathcal{U}$. 由 $\mathbb{E}(W, V_1) = 0$, 得 q 关于 $V_2 \twoheadrightarrow X$ 分解. 从而 $q_*\delta = 0$. 这说明 conflation $X \rightarrowtail A \twoheadrightarrow U$ 可裂. $(1 \to 2)$ 是对偶的.

$(3 \to 1)$. 任取 conflation $V_1 \rightarrowtail V_2 \twoheadrightarrow X$, $U \in \mathcal{U}$ 以及任意态射 $f : U \to X$. 由 $\mathbb{E}(U, V_1) = 0$, 故 f 通过 V_2 分解, 从而通过某一 ω 中对象分解 (引理 5.1.17).

$(1 \to 3)$. 给定 X 使得任意 $U \to X$ 通过 ω 分解, 下证明 $X \in \mathcal{V}$. 依照 ET4 作下图

$$\begin{tikzcd}
& X^V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & X^V \arrow[d, tail, dashed] & & \\
& X^U \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, "q"] \arrow[dl, dashed, bend right] & (X^U)_V \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, dashed] & (X^U)_U \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
W \arrow[r, dashed] & X \arrow[r, tail, dashed] & E \arrow[r, two heads, dashed] & (X^U)_U \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd} . \tag{5.2.2}$$

由构造, $(X^U)_V \in \omega$. 由 $\mathcal{V}$ 余消解, 得 $E \in \mathcal{V}$. 由假定, q 通过某一 $W \in \omega$ 分解, 从而 $q_*\delta = 0$. 这说明 X 是 E 的直和项, 从而 $X \in \mathcal{V}$.

$(2 \leftrightarrow 4)$ 的证明是对偶的.
$(5 \to 1)$. 对任意 conflation $V_1 \rightarrowtail V_2 \twoheadrightarrow X$, $\mathbb{E}((-)|_{\mathcal{U}}, V_2)$ 是零函子, 当且仅当 $\mathbb{E}((-)|_{\mathcal{U}}, X) = 0$.
$(1 \to 5)$. 给定 conflation $V \rightarrowtail A \overset{p}{\twoheadrightarrow} B$. 对任意 $U \in \mathcal{U}$, 长正合列给出

$$0 = \mathbb{E}(U,V) \to \mathbb{E}(U,A) \xrightarrow{\mathbb{E}(U,p)} \mathbb{E}(U,B). \tag{5.2.3}$$

从而 $\mathbb{E}(U,p)$ 单. 下证明任意 $\delta \in \mathbb{E}(U,B)$ 都有 $\mathbb{E}(U,A)$ 中的原像. 由 ET4 作下图前三行:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & V \arrow[d, tail, dashed] & & \\
A \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, "p"] & A_V \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, dashed] & A_U \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, equal] & {} \\
B \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, dashed] & A_U \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] & {} \\
B \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads] \arrow[u, dashed, "\beta"] & U \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[u, dashed, "\gamma"'] & {}
\end{tikzcd}. \tag{5.2.4}$$

由 $\mathcal{V}$ 余消解, 故 $F \in \mathcal{V}$, 从而存在 β 使得下两行交换. 由 ET3 构造 γ, 则

$$\delta = \gamma^*\varepsilon = \gamma^* p_* \eta = p_*(\gamma^*\eta) \in \operatorname{im} p_*. \tag{5.2.5}$$

□

定义 5.2.5. (余挠三元组). 称 $(\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是余挠三元组, 若 $(\mathcal{T},\mathcal{U})$ 与 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 均为余挠对. 称余挠三元组是完备的 (遗传的), 若其对应的两个余挠对均是完备的 (遗传的).

引理 5.2.6. 给定完备的余挠三元组 $(\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V})$. 这一三元组是遗传的, 当且仅当 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{C}$ 的厚子范畴.

证明. 若 $\mathcal{U}$ 是厚子范畴, 则 $\mathrm{Cone}(\mathcal{U},\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. 依照单边定义**命题** 5.2.4, 得 $(\mathcal{T},\mathcal{U})$ 是遗传完备的余挠对. 对偶地, 由 $\mathrm{coCone}(\mathcal{U},\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ 知 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 也是遗传完备的余挠对.
反之, 若以上是遗传完备的余挠三元组, 则 $\mathcal{U}$ 是消解且余消解的. 由

$$\mathcal{U} * \mathcal{U} = \mathcal{U}, \quad \mathrm{Cone}(\mathcal{U},\mathcal{U}) = \mathcal{U}, \quad \mathrm{coCone}(\mathcal{U},\mathcal{U}) = \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} \text{ 对直和项封闭}, \tag{5.2.6}$$

知 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{C}$ 的厚子范畴. □

遗传完备的余挠三元组有一些精彩的性质.

定理 5.2.7. 给定遗传完备的余挠三元组 $(\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V})$, 恰好有

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{U} = \text{投射对象}, \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \text{内射对象}. \tag{5.2.7}$$

证明. 下证明任意 $P \in \mathcal{T} \cap \mathcal{U}$ 是投射对象, 即任意 conflation $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow P$ 可裂. 由 ET4' 构造下图

$$\begin{tikzcd}
B^V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, dashed] & B^V \arrow[d, tail] & \\
E \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] & B^U \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads] & P \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads] & P
\end{tikzcd}. \tag{5.2.8}$$

由 $P \in \mathcal{U}$, 以及 $\mathcal{U}$ 是厚子范畴, 得 $E \in \mathcal{U}$. 由 $\mathbb{E}(P,E) = 0$, 底行 conflation 可裂. 对偶地可证 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ 恰是内射对象. □

推论 5.2.8. 若 Frobenius 范畴 $(\mathcal{C},\mathcal{P})$ 存在遗传完备的余挠三元组 $(\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V})$, 则全子范畴的包含 $\mathcal{U}/\mathcal{P}\to\mathcal{C}/\mathcal{P}$ 存在左右伴随 (备注 5.1.19).

推论 5.2.9. 若范畴存在遗传完备的余挠三元组, 则该范畴有足够的投射对象与内射对象.

证明. 对一切 $T\in\mathcal{T}$, 总有特殊的投射预盖 $T^U\twoheadrightarrow T$. 对一切 $V\in\mathcal{V}$, 总有特殊的内射预包 $V\rightarrowtail V_U$. 对 $U\in\mathcal{U}$, 总有特殊的投射预包 $U\rightarrowtail U_T$ 和特殊的内射预盖 $U^V\twoheadrightarrow U$. 特别地, 对任意对象 X 存在投射预盖 (下图左) 与内射预包 (下图右):

$$\begin{tikzcd}
(X^T)^V \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, equal] & (X^T)^V\oplus X^U \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & X^U \arrow[d, tail] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, tail, dashed] & \\
(X^T)^V \arrow[r, tail] & (X^T)^U \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, dashed] & X^T \arrow[d, two heads] & X_V \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads] & (X_V)_U \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] & (X_V)_T \arrow[d, equal] \\
 & X \arrow[r, equal] & X & X_U \arrow[r, tail] & X_U\oplus(X_V)_T \arrow[r, two heads] & (X_V)_T
\end{tikzcd}. \tag{5.2.9}$$

□

推论 5.2.10. $\mathcal{C}$ 是 Frobenius 外三角范畴, 当且仅当存在余挠四元组.

证明. $(\to)$. 取 $\mathcal{P}$ 为投射对象类, 则 $(\mathcal{C},\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{P})$ 是余挠四元组.
$(\leftarrow)$. 若由余挠四元组 $(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z},\mathcal{W})$, 则 $\mathcal{Y}\cap\mathcal{Z}$ 恰是投射对象, 也恰是内射对象 (**定理** 5.2.7). 依照推论 5.2.9, 知 $\mathcal{C}$ 有足够的投射对象与内射对象, 从而是 Frobenius 外三角范畴. □

以下引理给出 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{V}$ 的联系.

引理 5.2.11. 给定遗传完备的余挠三元组 $(\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V})$. $X\in T$ 当且仅当其满足以下性质.

- 对任意 $\mathcal{V}$-预包对应的 conflation $M\overset{i}{\rightarrowtail}V\overset{p}{\twoheadrightarrow}N$, 任意态射 $X\to N$ 经 p 分解.

证明. ($\to$ 方向). 作以下 conflation 的交换图, 其中 λ 由预包的定义选取, 取 μ 使得 $\star$ 是同伦的推出拉回方块 (细节见**定理** 3.2.3):

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & N \arrow[d, "\mu"] \\
M \arrow[r, tail, "j"] & M_V \arrow[r, two heads, "q"] & M_U
\end{tikzcd}. \tag{5.2.10}$$

任取 $X\in\mathcal{T}$ 与态射 $f:X\to N$. 结合引理 5.1.17 与**定理** 5.2.7, 复合态射 $X\xrightarrow{f}N\xrightarrow{\mu}M_U$ 通过某一投射对象 P 分解, 记作 $X\xrightarrow{a}P\xrightarrow{b}M_U$. 由投射对象的提升性作态射 c, 再有弱拉回的性质作态射 g:

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \arrow[dll, bend right, "g"'] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "a"] \\
M \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\lambda"] & N \arrow[d, "\mu"] & \\
M \arrow[r, tail, "j"] & M_V \arrow[r, two heads, "q"] & M_U & P \arrow[l, "b"'] \arrow[ll, bend left, "c"]
\end{tikzcd}. \tag{5.2.11}$$

g 即为所求.
($\leftarrow$ 方向). 若 X 满足上述性质, 下只需证明一切 $U\rightarrowtail E\twoheadrightarrow X$ 可裂. 先取 U 的特殊预包 δ, 其中 $U_V\in$

$\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ 是内射对象. 任取分解 λ, 依照 ET3 取 μ, 得以下 conflation 的拉回:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & X \arrow[r, dashed, "\mu^*\delta"] \arrow[d, dashed, "\mu"] & {} \\ U \arrow[r, tail, "i"] & U_V \arrow[r, two heads, "p"] & U_U \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{5.2.12}$$

由 δ 是特殊预包, 依照假定知 μ 通过 p 分解. 因此 $\mu^*\delta = 0$. □

5.3 态射观点

一些经验表明, 研究态射比研究对象更为方便. 例如, **定理** 2.4.1 是 $\mathbb{E}$-垂直关系在态射层面的推广. 若不涉及 conflation 或 $\mathbb{E}$-函子, 此处的范畴是一般的加法范畴.

定义 5.3.1. (态射的弱垂直关系). 称态射 f 与 g 是弱垂直的, 若对任意交换方块 (下图左), 总存在虚线态射使得下图右交换:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \cdot \end{tikzcd} . \tag{5.3.1}$$

常用的记号是 $f \pitchfork g$, 或 $f \boxslash g$.

备注 5.3.2. 之所以称之弱垂直, 是因为虚线处态射不必唯一. 弱垂直理论详见 [Joy08] 的附录 D.

定义 5.3.3. (弱垂直对). 态射类 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 是弱垂直对, 若 $\mathcal{C}^{\pitchfork} = \mathcal{F}$, 且 $\mathcal{C} = {}^{\pitchfork}\mathcal{F}$. 类似引理 5.1.8 定义

1. $({}^{\pitchfork}\mathcal{S}, ({}^{\pitchfork}\mathcal{S})^{\pitchfork})$ 是由 $\mathcal{S}$ 生成的 (也称**纤维地生成的**) 弱垂直对;

2. $({}^{\pitchfork}(\mathcal{S}^{\pitchfork}), \mathcal{S}^{\pitchfork})$ 是由 $\mathcal{S}$ 余生成的 (也称**余纤维地生成**的) 弱垂直对.

良定义性由 Galois 连接保证.

命题 5.3.4. (伴随提升). 假定 $F \dashv G$ 是伴随函子, 则 $(Ff) \pitchfork g$ 当且仅当 $f \pitchfork (Gg)$.

证明. 从式 (2.4.2) 的视角转述命题即可. 自然同构不影响 "公共的原像" 之选取. □

引理 5.3.5. 给定态射类 $\mathcal{S}$, 以下是一些基本事实.

1. ${}^{\pitchfork}\mathcal{S}$ 包含一切同构, 同时在复合同构的意义下封闭.

2. ${}^{\pitchfork}\mathcal{S}$ 对形变收缩 (态射的形变收缩见**定理** 3.3.11) 封闭.

   证明. 假定 $f \pitchfork g$, f' 是 f 的形变收缩. 任取定交换方块 $\square : (\alpha, \beta) : f' \Rightarrow g$. 由 $f \pitchfork g$, 取 s 使得 $gs = \beta q$ 且 $sf = \alpha p$:

   $$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"] & \cdot \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & \cdot \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "j"] & \cdot \arrow[r, "q"] \arrow[urr, dashed, "s"] & \cdot \arrow[r, "\beta"] & \cdot \end{tikzcd} \tag{5.3.2}$$

   今断言 sj 给出交换方块 $\square$ 的提升. 检验得 $(sj)f' = sfi = \alpha pi = \alpha$, 且 $g(sj) = \beta qj = \beta$. □

3. ${}^{\pitchfork}\mathcal{S}$ 对范畴的推出 (若存在) 封闭.

证明. 假定 $f \pitchfork g$, 且 f' 是 f 关于 m 的任意推出. 下证明交换方块 $\square : (\alpha, \beta) : f' \Rightarrow g$ 有提升 t:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"] & \cdot \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, ""] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "n"] \arrow[urr, dashed, "s"] & \cdot \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dashed, "t"] & \cdot \end{tikzcd} \tag{5.3.3}$$

取 s 为 $f \pitchfork g$ 对应的提升态射, 由推出的泛性质取 t 使得 $tf' = \alpha$ 且 $tn = s$. 为说明 $gt = \beta$, 只需在右侧复合推出诱导的满态射 $(n\ f')$ 即可. □

4. ${}^{\pitchfork}\mathcal{S}$ 对任意余积 (若存在) 封闭.

证明. 给定一族 $f_i \pitchfork g$. 由**命题** 5.3.4, 以下提升问题等价:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I} X_i \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\coprod_{i\in I} f_i"'] & A \arrow[d, "g"] \\ \coprod_{i\in I} Y_i \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X_i)_{i\in I} \arrow[r, "(\alpha\circ e_i)_{i\in I}"] \arrow[d, "(f_i)_{i\in I}"'] & (A)_{i\in I} \arrow[d, "(g)_{i\in I}"] \\ (Y_i)_{i\in I} \arrow[r, "(\beta\circ e_i)_{i\in I}"'] \arrow[ur, dashed] & (B)_{i\in I} \end{tikzcd} . \tag{5.3.4}$$

右图所示的 $(X_i)_{i\in I}$ 与 $(Y_i)_{i\in I}$ 是离散范畴, 从而提升态射 $(s_i)_{i\in I}$ 可逐次构造. □

5. ${}^{\pitchfork}\mathcal{S}$ 对超限复合 (若存在) 封闭.

证明. 取定序数 α 与函子 $(X, f) : \alpha \to \mathcal{C}$. 此时 (X, f) 对应图

$$X_0 \xrightarrow{f_{1,0}} X_1 \xrightarrow{f_{2,1}} X_2 \xrightarrow{f_{3,2}} \cdots \xrightarrow{f_{\beta+1,\beta}} X_{\beta+1} \to \cdots . \tag{5.3.5}$$

称之超限复合, 若对极限序数 $\gamma \in \alpha$ (若存在) 总有 $\varinjlim_{\beta\in\gamma} X_\beta = X_\gamma$.
不妨假定 α 是极限序数, 且恒有 $f_\bullet \pitchfork g$. 下证明 $f_{\alpha,0} : X_0 \to \varinjlim_{\beta\in\alpha} X_\beta$ 也属于 ${}^{\pitchfork}g$. 显然恒等态射的超限复合是恒等, 不妨记 $X_0 = \varinjlim_{\beta\in\alpha}(X_0)_\beta$. 以下两个提升问题是等价的:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_{\beta\in\alpha}(X_0)_\beta \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varinjlim_{\beta\in\alpha}(f_{\beta,0})"'] & A \arrow[d, "g"] \\ \varinjlim_{\beta\in\alpha} X_\beta \arrow[r, "q"] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X_0)_{\beta\in\alpha} \arrow[r, "(p\circ e_i)_{i\in I}"] \arrow[d, "(f_{\beta,0})_{\beta\in\alpha}"'] & (A)_{i\in I} \arrow[d, "(g)_{i\in I}"] \\ (Y_\beta)_{\beta\in I} \arrow[r, "(q\circ e_i)_{i\in I}"'] \arrow[ur, dashed] & (B)_{i\in I} \end{tikzcd} . \tag{5.3.6}$$

以下对右图归纳地构造 s_β.

(a) 若 $\beta = 0$, 则 $f_{\beta,0} = 1_{X_0}$. 取 $s_0 := \alpha \circ e_0$ 即可.

(b) 若 s_β 被构造, 下构造 $s_{\beta+1} : t_\beta \circ f_{\beta+1,\beta}$ 如下图所示:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "s_0"] \arrow[d, "f_{\beta,0}"'] & & A \arrow[d, "g"] \\ X_\beta \arrow[r, "f_{\beta+1,\beta}"'] \arrow[urr, "s_\beta"] & X_{\beta+1} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "s_{\beta+1}"'] & B \end{tikzcd} . \tag{5.3.7}$$

(c) 若 β 是极限序数, 且 $(s_\bullet)_{<\beta}$ 均被构造, 则下图是交换图的滤过极限, 从而显然交换:

$$\begin{tikzcd} (X_0)_{<\beta} \arrow[r, "(s_0)_{<\beta}"] \arrow[d, "(f_{-,0})_{<\beta}"'] & (A)_{<\beta} \arrow[d, "(g)_{<\beta}"] \\ (X)_{<\beta} \arrow[r, "(q\circ e)_{<\beta}"'] \arrow[ur, dashed, "s_{<\beta}"] & (B)_{<\beta} \end{tikzcd} . \tag{5.3.8}$$

□

例子 5.3.6. 考虑范畴向态射范畴的两种嵌入 $X \mapsto (0 \to X)$ 与 $X \mapsto (X \to 0)$. 给定余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, 取 $(0 \to \mathcal{U})$ 余生成的弱垂直对 $({}^{\pitchfork}((0 \to \mathcal{U})^{\pitchfork}), (0 \to \mathcal{U})^{\pitchfork})$. 此时有如下结论.

1. 给定 conflation $V \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} C, V \in \mathcal{V}$, 则 $p \in (0 \to \mathcal{U})^{\pitchfork}$. 由长正合列式 (2.2.11) 容易验证.

2. 若 $(X \to 0) \in {}^{\pitchfork}((0 \to \mathcal{U})^{\pitchfork})$, 则 $X \in \mathcal{U}$.

   证明. 对 X 构造特殊预盖 $X^V \rightarrowtail X^U \twoheadrightarrow X$. 由上一条, 以下提升问题有解:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed] \\ X^V \arrow[r, tail] & X^U \arrow[r, two heads] & X \end{tikzcd} . \tag{5.3.9}$$

   这说明 conflation 可裂, 从而 $X \in \mathcal{U}$. □

这说明, 余挠对理论可以 "无损地" 嵌入弱垂直对理论中.

备注 5.3.7. 容易发现, 所有形如 $(Y \to 0)$ 的态射属于 $(0 \to \mathcal{U})^{\pitchfork}$, 这一态射类的关键信息蕴含在 inflation 的 coCone-项中. 将余生成关系改作生成关系, 则有对偶的结论.

推论 5.3.8. 由例 5.3.6 与引理 5.3.5, $\mathcal{U}$ 对任意余积 (若存在) 封闭.

备注 5.3.9. 弱垂直理论的更多 "计算规则" 见 [JT06], 这在涉及幺半范畴或单纯集方法时尤为有用.

定义 5.3.10. (弱分解系统). 弱分解系统 (下简称 **WFS**) 是一个垂直对 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, 使得范畴中所有态射可表示为 $p \circ i \in \mathcal{F} \circ \mathcal{C}$.

依照经验, 直接计算 $\mathcal{C}^{\pitchfork}$ 往往是不切实际的. 以下是更常用的等价定义.

命题 5.3.11. $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 是 WFS 当且仅当下列条件成立.

1. $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{F}$ 对形变收缩封闭.

2. $\mathcal{C} \pitchfork \mathcal{F}$ 是一对弱垂直的态射.

3. 范畴中所有态射可表示为 $p \circ i \in \mathcal{F} \circ \mathcal{C}$

证明. $(\to)$ 方向是显然的. 下证明 $(\leftarrow)$ 方向. 对 $f \pitchfork \mathcal{F}$, 任取分解 $f = p \circ i$. 弱垂直性给出分解 s (下图左), 从而 f 是 i 的形变收缩 (下图右):

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \cdot \arrow[d, "p"] \\ \cdot \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "s"] & \cdot \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] & \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, "s"] & \cdot \arrow[r, "p"] & \cdot \end{tikzcd} . \tag{5.3.10}$$

□

5.4 模型结构

模型结构理论的综述与多数经典文献可在 [Hov07] 中找到. 以下谈论的模型结构都是闭模型结构. 我们使用 $\mathcal{A}$ 表示全范畴. 若不涉及 conflation 或 $\mathbb{E}$-函子, 此处的范畴是含有零对象的范畴.

定义 5.4.1. 范畴 $\mathcal{C}$ 上的**闭模型结构**是指三个态射类 (Cofib, Weq, Fib), 满足如下定义:

1. (Cofib, Fib ∩ Weq) 与 (Cofib ∩ Weq, Fib) 是 WFS;
2. 对任意可复合的态射 f, g 与 $g \circ f$. 若两者属于 Weq, 则第三者也属于 Weq;
3. Weq 对形变收缩封闭.

命题 5.4.2. 若范畴存在推出, 或者存在拉回, 则**定义** 5.4.1 的前两条蕴含第三条.

证明. 这一证明基于**命题** 5.7.7 的思路. 假定范畴存在拉回, 则*引理* 5.3.5 的第三条说明 TFib 与 Fib 对拉回封闭. 此时, **式** (5.7.10) 中的方块 ⊠ 是交换的, 故弱等价 w 存在形变收缩 $a' \in$ Cofib. **命题** 5.7.7 的后续步骤说明 $a' \in$ TCofib. □

定义 5.4.3. 我们规范一些术语. 以下是五类基本态射.

- Cofib, Weq 与 Fib 三类态射分别称作**余纤维**, **弱等价**与**纤维**.
- 记 TCofib := Cofib ∩ Weq 为**平凡纤维**, TFib := Fib ∩ Weq 为**平凡余纤维**.

以下是五类基本对象.

- X 称作**余纤维对象**, 若 $0 \to X \in$ Cofib. 记作 $X \in \mathcal{C}$.
- X 称作**纤维对象**, 若 $X \to 0 \in$ Fib. 记作 $X \in \mathcal{F}$.
- X 称作**平凡余纤维对象**, 若 $0 \to X \in$ TCofib. 记作 $X \in \mathsf{T}\mathcal{C}$.
- X 称作**平凡纤维对象**, 若 $X \to 0 \in$ TFib. 记作 $X \in \mathsf{T}\mathcal{F}$.
- X 称作**平凡对象**, 若 $0 \to X \in$ Weq. 记作 $X \in \mathcal{W}$.

直接地, $\mathsf{T}\mathcal{C} = \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, $\mathsf{T}\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.

方便起见, 有时使用以下等价定义.

命题 5.4.4. 态射类 (Cofib, Weq, Fib) 构成闭模型结构, 当且仅当以下成立.

CM1 对任意复合态射 $g \circ f$, 若 (f, g, gf) 中其中两者属于 Weq, 则第三者亦属于 Weq.

CM2 三类态射对形变收缩封闭.

CM3 存在两组提升关系 Cofib ⋔ (Weq ∩ Fib) 与 (TCofib ∩ Weq) ⋔ Fib.

CM4 范畴中所有态射可表示为 $p \circ i \in$ (Weq ∩ Fib) ∘ Cofib 与 $p' \circ i' \in$ Fib ∘ (TCofib ∩ Weq).

证明. **定义** 5.4.1 的第二条即 CM1. **定义** 5.4.1 的第一条与第三条等价于 CM2-4 (**命题** 5.3.11). □

备注 5.4.5. **定义** 5.4.1 以对偶为先, 性质为后; **命题** 5.4.4 以性质为先, 对偶为后.

引理 5.4.6. 以下是一些直接的推论.

1. $\mathcal{W}$ 中对象之间的态射必是 Weq.

   证明. 对 $X, Y \in \mathcal{W}, 0 \to X$ 与 $0 \to Y$ 属于 Weq. 由 CM1 可知 $X \to Y$ 也属于 Weq. □

2. Weq = TFib ∘ TCofib.

   证明. 由 Weq = Fib ∘ TCofib 与 CM1 得证. □

3. 若存在 $W \in \mathcal{W}$ 与 $f : X \to W$, 使得 $f \in$ Weq, 则 $X \in \mathcal{W}$. 对偶表述略.

4. 模型结构的态射范畴也是模型结构, 态射范畴的 Cofib (Weq, Fib) 是 Cofib$^{\to}$ (Weq$^{\to}$, Fib$^{\to}$). 更一般地, 部分模型的函子范畴也是模型范畴, 见 [Ree73].

   证明. CM1 与 CM2 是直接的. 下验证 CM3 (的一侧), 取 $(i, i) \in$ Cofib$^{\to}$ 与 $(p, p) \in$ (Weq ∩ Fib)$^{\to}$ 的交换方块, 存在以下虚线所示的态射使得所有胞腔交换:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[d, "p"] \arrow[rrr, bend left, "m"] & C_1 \arrow[l] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & C_1' \arrow[r] \arrow[d, "i'"] & F_1' \arrow[d, "p'"] \\ F_2 \arrow[rrr, bend right, "n"'] & C_2 \arrow[l] \arrow[r, "g"] \arrow[ul, dashed] & C_2' \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & F_2' \end{tikzcd} . \tag{5.4.1}$$

   最后验证 CM4 (的一侧). 对任意态射范畴的态射 (α, β), 取分解 $i, i' \in$ Cofib 与 $p, p' \in$ Weq ∩ Fib. 由原模型结构的 CM3, 存在虚线处态射使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "i"'] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] & \cdot \arrow[r, "p"'] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r, "i'"] \arrow[rr, bend right, "\beta"'] & \cdot \arrow[r, "p'"] & \cdot \end{tikzcd} . \tag{5.4.2}$$

□

例子 5.4.7. (代换). 引入模型结构的一大动机是构造局部化. 试回忆 ([GZ67]) 分式给出的局部化范畴 $\mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$, 局部化范畴中的态射 $X \to Y$ 本质上拆解作 $X \Leftrightarrow X' \to Y$. 换言之, 先使用 "同构" 代换 X 为 X', 使得 X' 至 Y 的态射能被直接描述.
类似地, 模型范畴中的 $\mathcal{S}$-态射类是 Weq. 对任意对象 X, 对 $0 \to X$ 与 $X \to 0$ 使用 CM4 得

$$0 \xrightarrow{\text{Cofib}} F \xrightarrow{\text{TCofib}} X, \quad X \xrightarrow{\text{TFib}} C \xrightarrow{\text{Fib}} 0. \tag{5.4.3}$$

换言之, 任意对象 X 可被代换为余纤维对象 F 或纤维对象 C.

5.5 Hovey 孪生余挠对

本小节取定外三角范畴 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$.

定义 5.5.1. (Hovey 孪生余挠对). 考虑两个完备余挠对 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}^{\perp})$ 与 $({}^{\perp}\mathcal{V}, \mathcal{V})$. 称资料 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}^{\perp}; {}^{\perp}\mathcal{V}, \mathcal{V})$ 为 **Hovey 孪生余挠对**, 若 $\mathcal{S} \perp \mathcal{V}$, 且 $\mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{S}) = \mathrm{coCone}(\mathcal{V}, \mathcal{S})$.

备注 5.5.2. 将 Hovey 孪生余挠对记作 $(\mathcal{S}, \mathcal{T}; \mathcal{U}, \mathcal{V})$, 则 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$, 且 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$.

以下引理给出一种由 Hovey 三元组复原 Hovey 孪生余挠对的直接方法.

引理 5.5.3. 给定 Hovey 孪生余挠对 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}^{\perp}; {}^{\perp}\mathcal{V}, \mathcal{V})$, 有以下等式

$$\mathcal{S} = {}^{\perp}\mathcal{V} \cap \mathrm{coCone}(\mathcal{V}, \mathcal{S}), \quad \mathcal{V} = \mathcal{S}^{\perp} \cap \mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \tag{5.5.1}$$

证明. 仅证明前一等式. ($\subseteq$ 方向). 由 $\mathcal{S} = {}^{\perp}\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{S} = \mathrm{coCone}(\mathcal{V}, \mathcal{S})$, 得证.
($\supseteq$ 方向). 任取 $X \in {}^{\perp}\mathcal{V} \cap \mathrm{coCone}(\mathcal{V}, \mathcal{S})$, 则有 conflation $V \rightarrowtail S \twoheadrightarrow X$. 由 $\mathbb{E}(X, V) = 0$, 这一 conflation 可裂. 从而 X 是 S 的直和项, 故 $X \in \mathcal{S}$. □

推论 5.5.4. 作为推论, ${}^{\perp}\mathcal{V} \cap \mathcal{V} = {}^{\perp}\mathcal{V} \cap \mathcal{N} \cap \mathcal{S}^{\perp} = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp}$.

备注 5.5.5. 我们将 $\mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ 记作 $\mathcal{N}$. 称 $({}^{\perp}\mathcal{V}, \mathcal{N}, \mathcal{S}^{\perp})$ 为 Hovey 三元组. 引理 5.5.3 说明 Hovey 三元组与 Hovey 孪生余挠对可以等价地转换.

定理 5.5.6. $\mathcal{N}$ 是厚子范畴, 从而也是外三角范畴.

证明. 先说明 $\mathcal{N}$ 对直和项封闭. 实际上, $\mathcal{N}$ 对形变收缩封闭. 任取 conflation $V \rightarrowtail S \twoheadrightarrow N \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 与形变收缩 N', 得以下交换图:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & S' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & N' \arrow[r, dashed, "i^*\delta"] \arrow[d, "i"] & {} \\
V \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & S \arrow[r, two heads] \arrow[d] & N \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "p"] & {} \\
V \arrow[r, tail] & S' \arrow[r, two heads] & N' \arrow[r, dashed, "i^*\delta"] & {}
\end{tikzcd} \tag{5.5.2}$$

复合态射 $S' \to S \to S'$ 必是同构 (**定理** 2.3.7), 从而 S' 是 S 的形变收缩. 因此 $S' \in \mathcal{S}$, 故 $N' \in \mathcal{N}$.
(证明 $\mathrm{Cone}(\mathcal{N}, \mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$). 依照引理 5.1.4, 总有

$$\mathrm{Cone}(\mathcal{N}, \mathcal{N}) = \mathrm{Cone}(\mathcal{N}, \mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{S})) = \mathrm{Cone}(\mathcal{V} * \mathcal{N}, \mathcal{S}). \tag{5.5.3}$$

依照引理 5.1.5, 得

$$\mathcal{V} * \mathcal{N} = \mathcal{V} * \mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{V} * \mathcal{S}) = \mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{V} \oplus \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{N}). \tag{5.5.4}$$

将式 (5.5.4) 代入式 (5.5.3), 得

$$\mathrm{Cone}(\mathcal{N}, \mathcal{N}) \subseteq \mathrm{Cone}(\mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{N}), \mathcal{S}) = \mathrm{Cone}(\mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathrm{coCone}(\mathcal{V}, \mathcal{S})), \mathcal{S}) \tag{5.5.5}$$

$$= \mathrm{Cone}(\mathrm{Cone}(\mathcal{V} * \mathcal{V}, \mathcal{S}), \mathcal{S}) = \mathrm{Cone}(\mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{S}), \mathcal{S}) \tag{5.5.6}$$

$$= \mathrm{Cone}(\mathrm{coCone}(\mathcal{V}, \mathcal{S}), \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{S} * \mathcal{S}) \qquad = \mathcal{N}. \tag{5.5.7}$$

(证明 $\mathrm{coCone}(\mathcal{N},\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$). 证明对偶, 从略.
(证明 $\mathcal{N} * \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$). 由引理 5.1.4 与引理 5.1.5, 得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N} * \mathcal{N} &= \mathcal{N} * \mathtt{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{S}) \subseteq \mathtt{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{N} * \mathcal{S}) && (5.5.8)\\
&= \mathtt{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{N}) = \mathtt{Cone}(\mathcal{V},\mathtt{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{S})) && (5.5.9)\\
&= \mathtt{Cone}(\mathcal{V} * \mathcal{V},\mathcal{S}) = \mathcal{N}. && (5.5.10)
\end{aligned}
$$

不难发现, 上述 $\subseteq$ 均可取为等号. 直接地,

$$
\mathtt{Cone}(\mathcal{N},\mathcal{N}) = \mathrm{coCone}(\mathcal{N},\mathcal{N}) = \mathcal{N} * \mathcal{N} = \mathcal{N}. \tag{5.5.11}
$$

□

推论 5.5.7. 以上证明步骤暗藏等式 $\mathtt{Cone}(\mathcal{N},\mathcal{S}) = \mathcal{N} = \mathrm{coCone}(\mathcal{V},\mathcal{N})$.

5.6 相容闭模型结构 → Hovey 孪生余挠对

Hovey 孪生余挠对由一对特殊的闭模型结构诱导, 称作相同闭模型结构.

定义 5.6.1. (相容闭模型结构). 称闭模型结构是**相容**的, 若存在四个对象类 $(\mathcal{S},\mathcal{T};\mathcal{U},\mathcal{V})$. 使得:

1. $f \in \mathsf{Cofib}$, 当且仅当 f 是 inflation, 且有 conflation $\cdot \overset{f}{\rightarrowtail} \cdot \twoheadrightarrow U$, 其中 $U \in \mathcal{U}$;
2. $f \in \mathsf{TCofib}$, 当且仅当 f 是 inflation, 且有 conflation $\cdot \overset{f}{\rightarrowtail} \cdot \twoheadrightarrow S$, 其中 $S \in \mathcal{S}$;
3. $g \in \mathsf{Fib}$, 当且仅当 g 是 deflation, 且有 conflation $T \rightarrowtail \cdot \overset{g}{\twoheadrightarrow} \cdot$, 其中 $T \in \mathcal{T}$;
4. $g \in \mathsf{TFib}$, 当且仅当 g 是 deflation, 且有 conflation $V \rightarrowtail \cdot \overset{g}{\twoheadrightarrow} \cdot$, 其中 $V \in \mathcal{V}$.

特别地, 引理 5.4.6 第二条说明 $\mathsf{Weq} = \mathsf{TFib} \circ \mathsf{TCofib}$.

例子 5.6.2. 直接地, 闭相容模型结构中 $(\mathcal{S},\mathcal{T};\mathcal{U},\mathcal{V}) = (\mathsf{T}\mathcal{C},\mathcal{F};\mathcal{C},\mathsf{T}\mathcal{F})$.

例子 5.6.3. 式 (5.4.3) 给出任意对象 X 的四种分解

$$
\begin{tikzcd}
{} & {} & 0 \arrow[d] \arrow[dl, bend right, tail, "\mathsf{TCofib}"'] & 0 & {} & {} \\
T \arrow[r, tail] & V \arrow[r, two heads, "\mathsf{Fib}"'] & X & X \arrow[u] \arrow[r, tail, "\mathsf{Cofib}"'] & S \arrow[ul, bend right, two heads, "\mathsf{TFib}"'] \arrow[r, two heads] & U \\
V \arrow[r, tail] & T \arrow[r, two heads, "\mathsf{TFib}"] & X & X \arrow[d] \arrow[r, tail, "\mathsf{TCofib}"] & U \arrow[r, two heads] \arrow[dl, bend left, two heads, "\mathsf{Fib}"] & S \\
{} & {} & 0 \arrow[u] \arrow[ul, bend left, tail, "\mathsf{Cofib}"] & 0 & {} & {}
\end{tikzcd}
. \tag{5.6.1}
$$

定理 5.6.4. 给定相容闭模型结构的资料 $(\mathcal{S},\mathcal{T};\mathcal{U},\mathcal{V})$, 则这是 Hovey 孪生余挠对.

证明. 将证明拆解作以下几步.

1. (证明垂直关系). **定理** 2.4.1 与 CM3 说明 $\mathcal{S} \perp \mathcal{T}, \mathcal{U} \perp \mathcal{V}$. 特别地, $\mathcal{S} \perp \mathcal{V}$.
2. (证明 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 与 $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ 是完备余挠对). 以 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 为例. 由引理 5.1.13, 只需说明 $\mathtt{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ 是全范畴, 且 $\mathcal{U}$ 对直和项封闭. 另一方向对偶.

(a) ($\mathcal{U}$ 对直和项封闭). 取 $X \overset{f}{\rightarrowtail} Y \twoheadrightarrow U$ 与形变收缩 $U_0 \xrightarrow{i} U \xrightarrow{p} U_0$. 依照与**式** (5.5.3) 类似的构造, 得 conflation $X \overset{f_0}{\rightarrowtail} Y_0 \twoheadrightarrow U_0$. 其中, f_0 是 f 的形变收缩, 因此属于 Cofib (CM2). 根据定义, $U_0 \in \mathcal{U}$.

(b) ($\mathrm{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ 是全范畴). 见**式** (5.6.1).

3. (证明 $\mathrm{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{S}) = \mathrm{coCone}(\mathcal{V},\mathcal{S})$). 先观察到以下两条事实.

(a) 若 $X \in \mathrm{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{S})$, 则有 conflation $V \rightarrowtail S \twoheadrightarrow X$. 此处的 inflation 与 deflation 均是弱等价, 从而合成态射 $0 \to V \to S \to X$ 也是弱等价.

(b) 假定 $0 \to X$ 是弱等价, 将这一态射分解作 $0 \xrightarrow{\text{TCofib}} S \xrightarrow{\text{TFib}} X$. 考虑 $S \overset{\text{TFib}}{\twoheadrightarrow} X$ 所在的 conflation, 得 $X \in \mathrm{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{S})$.

因此, $X \in \mathrm{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{S})$ 当且仅当 $0 \to X$ 是弱等价, 亦当且仅当 $X \to 0$ 是弱等价 (CM 1). 依照对偶命题, 这当且仅当 $X \in \mathrm{coCone}(\mathcal{V},\mathcal{S})$.

□

推论 5.6.5. **定理** 5.6.4 关于 $\mathrm{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{S}) = \mathrm{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{S})$ 的证明说明, $\mathcal{N}$ 就是模型结构中的平凡对象类 $\mathcal{W}$.

对外三角范畴上的相容闭模型结构, Weq 与 $\mathcal{W}$ 满足 “互逆” 的 “二推三” 法则. 先观察一则三角范畴的例子.

例子 5.6.6. 考虑 TR4 的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d, equal] \\
\cdot \arrow[r, "gf"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\
& Z \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \\
& \cdot \arrow[r] & \cdot &
\end{tikzcd} . \tag{5.6.2}$$

态射 f, gf 与 g 分别位于对象 X, Y 与 Z 的 “对立面”. 依照经验, 若给定一个满足 “合成的二推三性质” 且对 $\Sigma^{\pm}$ 封闭的态射类 $\mathcal{M}$, 则有一个三角子范畴与之对应 (TR1-3).

定理 5.6.7. 给定 conflation $X \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{p}{\twoheadrightarrow} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, 则

1. $i \in$ Weq 当且仅当 $Z \in \mathcal{W}$;

2. $p \in$ Weq 当且仅当 $X \in \mathcal{W}$.

注意, inflation (deflation) 中的弱等价未必是平凡纤维 (平凡余纤维).

证明. 我们仅证明第一个命题, 第二个命题对偶可证. 将 i 分解作 TFib ∘ Cofib, 由**定理** 3.1.4 构造交换图

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & V \arrow[d, tail] \\
X \arrow[r, tail, "i_c"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "i_f"] & U \arrow[d, two heads] \\
X \arrow[r, tail, "i"] & Y \arrow[r, two heads, "p"] & Z
\end{tikzcd} . \tag{5.6.3}$$

由上图, $i \in$ Weq 当且仅当 $i_c \in$ TCofib, 当且仅当 $U \in \mathcal{S}$, 当且仅当 $Z \in \mathcal{W}$. □

命题 5.6.8. 给定弱等价 w 与任意 inflation f, 则存在同伦的推出拉回方块 $\star$ 使得 f' 是 inflation, 且 w' 是弱等价.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "w"] \arrow[d, tail, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\star"] & \cdot \arrow[d, tail, dashed, "f'"] \\
\cdot \arrow[r, dashed, "w'"'] & \cdot
\end{tikzcd} \tag{5.6.4}$$

证明. 将 w 拆解作 $\mathsf{TFib} \circ \mathsf{TCofib}$. 依照**定理** 3.1.1 与 ET4 分解构造同伦的推出拉回方块 $\star$ 与 $\bullet$ 如下:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail, "i"'] \arrow[rr, bend left, "w"] \arrow[d, tail, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\star"] & \cdot \arrow[r, two heads, "p"'] \arrow[d, tail, dashed, "f''"'] \arrow[dr, phantom, "\bullet"] & \cdot \arrow[d, tail, dashed, "f'"'] \\
\cdot \arrow[r, tail, dashed, "i'"'] & \cdot \arrow[r, two heads, dashed, "p'"'] & \cdot
\end{tikzcd} \tag{5.6.5}$$

依照构造, $i' \in \mathsf{TCofib}$ 且 $p' \in \mathsf{TFib}$, 记 $w' = p' \circ i'$. 依照**定理** 3.2.14, 合成所得的方块也是同伦的推出拉回方块. □

命题 5.6.9. 对偶地, 任给定去向相同的弱等价 w 与 deflation p, 则能够构造同伦的推出拉回方块使得 p' 是 deflation, 且 w' 是弱等价.

定理 5.6.10. 给定外三角范畴与相容闭模型结构, 任取 (α, β, γ) 是 conflation 间的态射. 若某两者属于 Weq, 不妨取作 α 和 β, 则存在 $\widetilde{\gamma} \in \mathsf{Weq}$ 使得 $(\alpha, \beta, \widetilde{\gamma})$ 也是 conflation 间的态射.

证明. 下仅证明其中两种情形, 余下一种情形的证明对偶.
(情形 1). 假定 $\alpha, \gamma \in \mathsf{Weq}$. 作同伦的推出拉回方块 $\star$ 使得, 并依照 ET2 取同构 φ:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "\mathsf{Weq}"', "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, dashed, "\mathsf{Weq}"', "\alpha'"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
A' \arrow[r, tail, dashed, "j"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, dashed, "q"] \arrow[d, dashed, "\cong"', "\varphi"] & C \arrow[r, dashed, "\alpha_*\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
A' \arrow[r, tail, dashed, "j'"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, two heads, dashed, "q'"] \arrow[d, dashed, "\mathsf{Weq}"', "\gamma'"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & C \arrow[r, dashed, "\gamma^*\delta'"] \arrow[d, "\mathsf{Weq}"', "\gamma"] & {} \\
A' \arrow[r, tail, "i'"] & B' \arrow[r, two heads, "p'"] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{5.6.6}$$

此时, $\widetilde{\beta} := \gamma' \circ \varphi\alpha'$ 即为所求.
(情形 2). 假定 $\alpha, \beta \in \mathsf{Weq}$. 先对 (i, α) 作同伦的推出拉回方块, 得弱等价 α'. β 经 α' 分解所得的 β' 也是弱等价 (CM1). 取合适的 γ 使得右下方也是同伦的推出拉回方块 (**定理** 3.2.6):

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, dashed, "\alpha'"] \arrow[dd, bend left, "\beta"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
A' \arrow[r, tail, dashed, "j"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, dashed, "q"] \arrow[d, dashed, "\beta'"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & C \arrow[r, dashed, "\alpha_*\delta=\gamma^*\delta'"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & {} \\
A' \arrow[r, tail, "i'"] & B' \arrow[r, two heads, "p'"] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{5.6.7}$$

将 γ 拆解作 $\gamma_f \circ \gamma_c$TFib ∘ Cofib, 由**命题** 5.6.9 作两次同伦推出拉回:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, dashed, "j"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, dashed, "q"] \arrow[d, two heads, dashed, "\gamma'_{tf}"] \arrow[dd, bend right, dashed, "\beta'"'] \arrow[r, phantom, "\star"'] & C \arrow[r, dashed, "\gamma^*\delta'"] \arrow[d, two heads, "\gamma_{tf}"] \arrow[dd, bend right, "\gamma"'] & {} \\
A' \arrow[r, tail, dashed, "i''"] \arrow[d, equal] & \widetilde{C} \arrow[r, two heads, dashed, "p''"] \arrow[d, tail, dashed, "\gamma'_c"] & \widetilde{C} \arrow[r, dashed, "(\gamma_c)^*\delta'"] \arrow[d, tail, "\gamma_c"] & {} \\
A' \arrow[r, tail, "i'"] & B' \arrow[r, two heads, "p'"] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{5.6.8}$$

由 CM1, $\gamma'_c \in$ Weq, 因此 $\gamma'_c \in$ TCofib. 由 ET4 与相容闭模型结构的定义, 得 $\gamma_c \in$ TCofib. 再由 CM1, 复合所得的 γ 也是弱等价. □

5.7 Hovey 孪生余挠对 → 相容闭模型结构

今选定 Hovey 孪生余挠对 $(\mathcal{S}, \mathcal{T}; \mathcal{U}, \mathcal{V})$, 这组资料确定了 (**定义** 5.6.1) 四组态射 (Cofib, TFib, FibTCofib), 以及复合所得的 Weq := TFib ∘ TCofib. 我们希望这是相容闭模型结构.

备注 5.7.1. 通常地, 假定范畴的对象与态射存在某类 "相容" 的性质. 若态射的性质被形变收缩保持, 则对象的性质也被形变收缩保持; 反之未必. 例如, 在证明相同闭模型结构诱导 Hovey 孪生余挠对时, 可以轻易证明四个对象类关于形变收缩封闭; 反之, 若通过 Hovey 孪生余挠对推导相同闭模型结构时, 我们甚至难以断言恒等态射的形变收缩未必是 deflation.

以下假定外三角范畴 $\mathcal{A}$ 是弱幂等完备的, 具体性质见**定理** 3.3.11. 同时, 可以使用九引理 (**定理** 3.4.1).

命题 5.7.2. CM3 成立, 即, Cofib ⋔ TFib 且 TCofib ⋔ Fib.

证明. 依照**定理** 2.4.1 得提升态射. □

命题 5.7.3. CM4 成立, 即, 任意态射能分解作 TFib ∘ Cofib 与 Fib ∘ TCofib.

证明. 下证明任意态射 $f : X \to Y$ 分解作 TFib ∘ Cofib, 另一分解对偶. 取 inflation $i : X \rightarrowtail X_V$, 推论 3.3.8 表明 $\binom{i}{f} : X \oplus X_V \oplus Y$ 也是 inflation. 依照**定理** 3.1.1 构造下图

$$\begin{tikzcd}
 & Z^V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, dashed] & Z^V \arrow[d, tail] \\
X \arrow[r, tail, dashed, "\mathsf{Cofib}"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads, dashed, "\mathsf{TFib}"] & Z^U \arrow[d, two heads] \\
X \arrow[r, tail, "\binom{i}{f}"] \arrow[d, "f"'] & X_V \oplus Y \arrow[r, two heads] \arrow[dl, dashed, "(0\ 1)\ (\in \mathsf{TFib})"] & Z \\
Y & &
\end{tikzcd} . \tag{5.7.1}$$

复合态射 $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow X_V \oplus Y \twoheadrightarrow Y$ 即 f. □

CM1 与 CM2 的证明需要一些准备工作.

引理 5.7.4. 选定任意态射类 $\mathfrak{S} \in \{$Cofib, TCofib, Fib, TFib$\}$. $\mathfrak{S}$ 对合成封闭.

证明. 以 $\mathfrak{S} = \mathsf{Cofib}$ 为例, 剩余命题的证明类似. 记 $i, i' \in \mathsf{Cofib}$, 其中 $i \circ i'$ 可复合. 由 ET4 构造下图

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, "i"] & U' \arrow[d, tail, dashed] \\
\cdot \arrow[r, tail, dashed, "i \circ i'"'] & \cdot \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d] & W \arrow[d, two heads, dashed] \\
 & U \arrow[r, equal] & U
\end{tikzcd} . \tag{5.7.2}$$

依照定义, $U, U' \in \mathcal{U}$. 从而 $W \in \mathcal{U} * \mathcal{U} = \mathcal{U}$. 依照定义, $i \circ i' \in \mathsf{Cofib}$. □

引理 5.7.5. Weq 对合成封闭.

证明. 弱等价必然形如 $\mathsf{TFib} \circ \mathsf{TCofib}$. 为证明两个弱等价的合成仍是弱等价, 只需证明 $\mathsf{TCofib} \circ \mathsf{TFib} \subseteq \mathsf{Weq}$. 今取定复合态射 ip, 其中 $i \in \mathsf{TCofib}$ 与 $p \in \mathsf{TFib}$. 按照 CM4 (**命题** 5.7.3) 将 ip 分解作 $\mathsf{Fib} \circ \mathsf{TCofib}$, 依照**定理** 3.4.1 作交换图

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, dashed] & \cdot \arrow[r, two heads, "\mathsf{TFib}", "p"'] \arrow[d, tail, "\mathsf{TCofib}"', "j"] & \cdot \arrow[d, tail, "i"', "\mathsf{TCofib}"] \\
T \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, dashed] & \cdot \arrow[r, two heads, "f", "\mathsf{Fib}"'] \arrow[d, two heads] & \cdot \arrow[d, two heads] \\
L \arrow[r, tail, dashed] & S_1 \arrow[r, two heads, dashed] & S_2
\end{tikzcd} . \tag{5.7.3}$$

由 $\mathcal{S}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}$, 以及 $\mathcal{N}$ 是厚子范畴 (**定理** 5.5.6), 得 $T \in \mathcal{N} \cap \mathcal{T} = \mathcal{V}$ (**式** (5.5.1)). □

命题 5.7.6. CM1 成立, 即, 对任意复合态射 $g \circ f$, 若 (f, g, gf) 中其中两者属于 Weq, 则第三者亦属于 Weq.

证明. 引理 5.7.5 说明 Weq 对合成封闭. 下证明, 若 g 与 gf 属于 Weq, 则 f 亦属于 Weq. 另一对偶命题的表述与证明从略.

依照 CM4 (**命题** 5.7.3), 将 f 分解作 $\mathsf{TFib} \circ \mathsf{Cofib}$. 将弱等价 gf 与 f 分解作 $\mathsf{TFib} \circ \mathsf{TCofib}$, 整合得到下图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\mathsf{Cofib}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] \arrow[rrdd, bend right, "gf"'] \arrow[dd, tail, "\mathsf{TCofib}"'] & X \arrow[r, two heads, "\mathsf{TFib}"] & B \arrow[d, tail, "\mathsf{TCofib}"] \arrow[dd, bend right=40, "g"'] \\
 & & Y \arrow[d, two heads, "\mathsf{TFib}"] \\
H \arrow[rr, two heads, "\mathsf{TFib}"'] & & C
\end{tikzcd} . \tag{5.7.4}$$

往证上图中的 $A \rightarrowtail X$ 是 TCofib 即可. 将复合所得的弱等价 $X \twoheadrightarrow B \rightarrowtail Y \twoheadrightarrow C$ 分解作 $\mathsf{TFib} \circ \mathsf{TCofib}$, 得下图中 “五边形的黑色外框” 所示交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[lld, tail, blue, "4"', near start] \arrow[rrd, tail, "\mathsf{TCofib}"] \arrow[ld, tail, blue, "\mathsf{Cofib}"] \arrow[rd, tail, red, "\mathsf{Cofib}", "3"'] & & \\
A \arrow[rru, tail, "\mathsf{Cofib}", "5"'] \arrow[rd, tail, blue, "\mathsf{Cofib}", "1"'] \arrow[dd, tail, "\mathsf{TCofib}"'] & & & & M \arrow[dd, two heads, "\mathsf{TFib}"] \\
 & E \arrow[rr, tail, red, "\mathsf{Cofib}", "2"'] \arrow[ld, blue, "\mathsf{TFib}"'] & & F \arrow[ru, red, "\mathsf{TFib}"] & \\
H \arrow[rrrr, two heads, "\mathsf{TFib}"'] & & & & C
\end{tikzcd} \tag{5.7.5}$$

上图内部染色箭头解释如下:

1. (蓝色箭头). 依照**命题** 5.7.2 作提升态射 $X \to H$, 并将之分解作 TFib∘Cofib, 再取复合态射 $A \to E$, 得上图的蓝色部分. 蓝色箭头即 $A \rightarrowtail E, X \rightarrowtail E$ 与 $E \twoheadrightarrow X$.

2. (红色箭头). 依照**命题** 5.7.2 作提升态射 $E \to M$, 并将之分解作 TFib∘Cofib, 再取复合态射 $X \to F$, 得上图的红色部分. 红色箭头即 $X \rightarrowtail F, E \rightarrowtail F$ 与 $F \twoheadrightarrow M$.

往后依照指标 $\{n\}_{n=1}^{5}$ 所示的顺序, 依次证明各箭头是弱等价. 即证,

1, 3 若 $(f, g, gf) \in$ (Cofib, TFib, TCofib), 则 $f \in$ TCofib.

2 若 $(f, g, gf) \in$ (Cofib, TFib, TFib), 则 $f \in$ TCofib.

4, 5 若 $(f, g, gf) \in$ (Cofib, TCofib, TCofib), 则 $f \in$ TCofib.

先证明 (1, 3). 由**定理** 3.1.4 构造 conflation 的交换图:

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & V \arrow[d, tail, dashed] \\
\cdot \arrow[r, tail, "\mathsf{Cofib}"] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "\mathsf{TFib}"] & U \arrow[d, two heads, dashed] \\
\cdot \arrow[r, tail, "\mathsf{TCofib}"] & \cdot \arrow[r, two heads] & S
\end{tikzcd} \tag{5.7.6}$$

由**定理** 5.5.6 与**式** (5.5.1) 得 $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N} = \mathcal{S}$. 从而上图中的 Cofib 是 TCofib.
(2) 与 (4, 5) 的证明是类似的. 只需证明以下左, 右两图中 $U \in \mathcal{N}$ 即可:

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, tail] & V \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, tail] & U \arrow[d, equal] \\
\cdot \arrow[r, tail, "\mathsf{Cofib}"] \arrow[d, two heads, "\mathsf{TFib}"] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "\mathsf{TFib}"] & U \\
\cdot \arrow[r, equal] & \cdot &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail, "\mathsf{Cofib}"] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, "\mathsf{TCofib}"] & U \arrow[d, tail, dashed] \\
\cdot \arrow[r, tail, "\mathsf{TCofib}"] & \cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \arrow[d, two heads, dashed] \\
& S' \arrow[r, equal] & S'
\end{tikzcd} \tag{5.7.7}$$

□

命题 5.7.7. CM2 成立, 即, Cofib, Fib 与 Weq 对形变收缩封闭.

证明. 先证明 Cofib 对形变收缩封闭. 对 Fib 的证明是对偶的. 依照弱幂等完备性, Cofib 的形变收缩仍是 Cofib (**定理** 3.3.11). 记 $f \in$ Cofib, 对应扩张元 δ, 其形变收缩是 f', 对应扩张元 δ'. 依照 ET3 构造 conflation 的态射:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "i"] & \cdot \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "j"] & W \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, dashed, "a"] & {} \\
\cdot \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "p"] & \cdot \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "q"] & U \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "b"] & {} \\
\cdot \arrow[r, tail, "f'"] & \cdot \arrow[r, two heads, "g'"] & W \arrow[r, dashed, "\delta'"] & {}
\end{tikzcd} \tag{5.7.8}$$

由**定理** 2.3.7, $b \circ a$ 是同构, 从而 W 是 U 的形变收缩. 因此 $W \in \mathcal{U}$. 依照定义, $f' \in$ Cofib.

最后证明 Weq 对形变收缩封闭. 假定 $g \in \mathsf{Weq}$ 有形变收缩 g', 并将 g' 分解作 $\mathsf{TFib} \circ \mathsf{Cofib}$, 得下图:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, tail, "a'"] \arrow[dd, bend right, "g'"'] & X \arrow[r, "p_X"] \arrow[dd, bend right, "g"'] & X' \arrow[d, tail, "a'"] \arrow[dd, bend right, "g'"'] \\
Y' \arrow[d, two heads, "c'"] & & Y' \arrow[d, two heads, "c'"] \\
Z' \arrow[r, "i_Z"] & Z \arrow[r, "p_Z"] & Z'
\end{tikzcd} . \tag{5.7.9}$$

往证 $a' \in \mathsf{TCofib}$. 由**定理** 3.2.4 构造同伦的推出拉回方块 $\square$:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, tail, "a'"] \arrow[dr, phantom, "\boxtimes"] & X \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, dashed, "w"] \arrow[dd, bend right, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X' \arrow[d, tail, "a'"] \\
Y' \arrow[r, dashed, "j_Y"] \arrow[d, two heads, "c'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F \arrow[r, "q_Y"] \arrow[d, two heads, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[d, two heads, "c'"] \\
Z' \arrow[r, "i_Z"] & Z \arrow[r, "p_Z"] & Z'
\end{tikzcd} . \tag{5.7.10}$$

记 conflation $V \overset{x}{\rightarrowtail} F \overset{f}{\twoheadrightarrow} Z$. **定理** 3.2.4 的构造表明 $f \in \mathsf{TFib}$. 任取两组弱拉回问题的解:

1. (态射 $w : X \dashrightarrow F$). 考虑 $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{p_Z} Z'$ 与 $X \xrightarrow{p_X} X' \xrightarrow{g'} Z'$;
2. (态射 $j_Y : Y' \dashrightarrow F$). 考虑 $Y' \xrightarrow{c'} Z'$ 与 $Y' \xrightarrow{c'} Z' \xrightarrow{i_Z} Z \xrightarrow{p_Z} Z'$.

上图 $\circlearrowright$ 交换, 但 $\boxtimes$ 未必交换. 取 $\boxtimes$ 的 "缺陷" $(w \circ i_X - j_Y \circ a')$, 则

$$f \circ (w \circ i_X - j_Y \circ a') = g \circ i_X - i_Z \circ c' \circ a' = 0. \tag{5.7.11}$$

由长正合列, 记 $(w \circ i_X - j_Y \circ a') = x \circ \widetilde{l}$, 以及 $l = \widetilde{l} \circ p_X$, 如下图所示:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p_X"] \arrow[rrr, bend left=40, "l"] & X' \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, tail, "a'"] \arrow[rr, dashed, bend left, "\widetilde{l}"] \arrow[dr, phantom, "\boxtimes"] & X \arrow[d, dashed, "w"] & V \arrow[dl, tail, "x"] \\
& Y' \arrow[r, dashed, "j_Y"] & F \arrow[d, two heads, "f"] & \\
& & Z &
\end{tikzcd} . \tag{5.7.12}$$

可以发现, $q_Y \circ x \circ l = q_Y \circ (w \circ i_X - j_Y \circ a') \circ p_X = 0$. 此时可验证下图交换:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\binom{i_X}{l \circ i_X}"] \arrow[d, "a'"'] & X \oplus V \arrow[r, "(p_X \ \ 0)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ -l & 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & X' \arrow[d, "a'"'] \\
Y' \arrow[r, "\binom{j_Y}{0}"] & F \oplus V \arrow[r, "(q_Y \ \ -q_Y \circ x)"] & Y'
\end{tikzcd} . \tag{5.7.13}$$

验证细节如下:

1. (左方块). $\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ -l & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} i_X \\ l \circ i_X \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} j_Y \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ a' = \left(\begin{smallmatrix} w \circ i_X + x \circ l \circ i_X \\ -l \circ i_X + l \circ i_X \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} j_Y \circ a' \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} (w \circ i_X - j_Y \circ a') + x \circ \widetilde{l} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$;
2. (右方块). $q_Y \circ (1 \ \ -x)\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ -l & 1 \end{smallmatrix}\right) - a' \circ (p_X \ \ 0) = q_Y \circ (w + x \circ l \ \ 0) - a' \circ (p_X \ \ 0) = 0$

下证明 $\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ -l & 1 \end{smallmatrix}\right) \in$ Weq.

引理 5.7.8. $\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ -l & 1 \end{smallmatrix}\right) \in$ Weq.

证明. 反复利用**命题** 5.7.6 即可. 由 $g = fw$ 与 $f, g \in$ Weq, 得 $w \in$ Weq. 由 $V \to 0$ 是平凡纤维, 得 $0 \to 0$ 与 $V \to 0$ 是弱等价, 从而 $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : X \to X \oplus V$ 与 $(1\,0) : F \oplus V \to F$ 都是弱等价. 由 $(1\,0) \circ \left(\begin{smallmatrix} w & x \\ -l & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = w$, 得证. □

这说明 $a' \in$ Cofib 是弱等价 $\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ -l & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 的形变收缩. 将 $\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ -l & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 分解作 TCofib ∘ TFib, 由 CM3 (**命题** 5.7.2) 取提升态射 s, 得下图:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\binom{i_X}{l \circ i_X}"] \arrow[dd, "a'"'] & X \oplus V \arrow[r, "(p_X \ \ 0)"] \arrow[d, "\mathsf{TCofib}"'] & X' \arrow[dd, "a'"] \\ & \cdot \arrow[d, "\mathsf{TFib}"'] & \\ Y' \arrow[r, "\binom{j_Y}{0}"] \arrow[ur, dashed, bend left, "s"] & F \oplus V \arrow[r, "(q_Y \ \ -q_Y \circ x)"] & Y' \end{tikzcd} . \tag{5.7.14}$$

这说明 a' 是 TCofib 的形变收缩. 仿照 "Cofib 对形变收缩封闭" 的证明, 得 TCofib 对形变收缩封闭. 因此 $a' \in$ TCofib. □

6 同伦范畴

6.1 局部化

局部化与分式计算的一般理论见 [GZ67].

定义 6.1.1. (局部化). 给定范畴 $\mathcal{C}$ 与态射类 S. 对任意范畴 $\mathcal{D}$, 定义 $\mathrm{Funct}_S(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 为函子范畴 $\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 的全子范畴, 其对象为将 S 中的态射映为 $\mathcal{D}$ 中同构的函子.

1. 称函子 $Q_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$ 是 $\mathcal{C}$ 关于 S 的弱局部化, 若以下是函子范畴间的等价

$$Q_1^* : \mathrm{Funct}(\mathcal{C}_1,\mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Funct}_S(\mathcal{C},\mathcal{D}), \quad F \mapsto F \circ Q_1. \tag{6.1.1}$$

2. 称函子 $Q_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_2$ 是 $\mathcal{C}$ 关于 S 的严格局部化, 若以下是函子范畴间的同构

$$Q_2^* : \mathrm{Funct}(\mathcal{C}_2,\mathcal{D}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Funct}_S(\mathcal{C},\mathcal{D}), \quad F \mapsto F \circ Q_2. \tag{6.1.2}$$

例子 6.1.2. 给定范畴 $\mathcal{C}$ 与态射类 S, 其 Gabriel-Zisman 局部化 ([GZ67]) 的构造如下.

1. 我们保持范畴 $\mathcal{C}$ 对象类, 形式地加入 S 中态射的逆元, 得范畴 $\mathcal{C}_S$. 具体地, 子范畴 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_S$ 具有相同对象类. 对任意 X 与 Y,

$$(X,Y)_{\mathcal{C}_S} = (X,Y)_{\mathcal{C}} \sqcup ((Y,X)_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{S}). \tag{6.1.3}$$

依照无交并的定义, 我们将 (X,Y) 中态射表示作二元组 (n,f):

$$(X,Y)_{\mathcal{C}_S} = \{(0,f) \mid f \in (X,Y)_{\mathcal{C}}\} \cup \{(1,s) \mid s \in (Y,X)_{\mathcal{C}}\}. \tag{6.1.4}$$

这是类 $\{0,1\} \times \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 的一个子集. 依照 $\mathcal{C}$ 中态射复合关系约定

(a) $(0,1_X)$ 是 $X \in \mathcal{C}_S$ 的恒等态射;

(b) $(0,g) \circ (0,f) \sim (0,g \circ f)$, 若 g 与 f 可复合.

此时, $\mathcal{C}_S$ 是一个范畴, 但未必是局部小的. 存在子范畴

$$\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S, \quad X \mapsto X, \quad f \mapsto (0,f). \tag{6.1.5}$$

2. 定义以下规则生成的等价关系 $\sim$:

† $(1,s) \circ (0,s) \sim (0,1_X)$ 与 $(0,s) \circ (1,s) \sim (0,1_Y)$, 若 $s : X \to Y$ 属于 S.

得商函子 $\pi : \mathcal{C}_S \to (\mathcal{C}_S)/\sim$.

3. 将复合函子 $\mathcal{C} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}_S \xrightarrow{\pi} (\mathcal{C}_S)/\sim$ 定义作 Gabriel-Zisman 局部化.

商函子 π 是以类为指标范畴的 “滤过余极限” 在 NBGC (von Neumann–Bernays–Gödel 与类的选择公理) 公理体系下合理的; 但是, 我们无法在集合视角中检验 $\mathcal{C}_S$ 中两个态射在局部化范畴中相同与否.

实际上, Gabriel-Zisman 局部化是严格的.

引理 6.1.3. 记 $Q := \pi \circ \iota : \mathcal{C} \to (\mathcal{C}_S)/\sim$ 是例 6.1.2 定义的函子, 则有函子范畴的同构

$$Q^* : \mathrm{Funct}((\mathcal{C}_S)/\sim, \mathcal{D}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Funct}_S(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \quad F \mapsto F \circ Q. \tag{6.1.6}$$

证明. (对象 (函子) 映满). Q 已将 S 映作同构, $Q^* : \mathrm{Funct}((\mathcal{C}_S)/\sim, \mathcal{D}) \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 的像必然在全子范畴 $\mathrm{Funct}_S(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中. 任取 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 使得 $F(S)$ 是同构, 取 F 关于 ι 的分解

$$F_1 : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}, \quad X \mapsto FX, \quad (0, f) \mapsto Ff, \quad (1, s) \mapsto (Fs)^{-1}. \tag{6.1.7}$$

函子 F_1 将 † 中等价关系映作恒等. 故存在唯一函子 $F_2 : (\mathcal{C}_S)/\sim \to \mathcal{D}$ 使得 $F_1 = F_2 \circ \pi$. 此时, $F = F_2 \circ Q$, 即 Q^* 在对象层面上是满的.
(态射 (自然变换) 全). 取 $\eta : F \to G$ 属于 $\mathrm{Funct}_S(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. 自然变换是一族由 $\mathcal{C}$ 中对象标记的 $\mathcal{D}$ 中的态射, 故只需检验 $\eta : F_1 \to G_1$ 与 $F_2 \to G_2$ 是自然变换即可. 对前者, 任取 $s : X \to Y$ 属于 S, 以下是交换图:

$$\begin{tikzcd} F_1Y \arrow[rr, bend left, "(F_1s)^{-1}"] & X & F_1X \\ G_1Y \arrow[u, "\eta_Y"] \arrow[rr, bend right, "(G_1s)^{-1}"'] & Y \arrow[u, "(1,s)"] & G_1X \arrow[u, "\eta_X"] \end{tikzcd} . \tag{6.1.8}$$

对后者, 交换方块在 “商” 的意义下必定也是交换的.
(态射 (自然变换) 忠实). 证明 Q^* 在态射 (自然变换) 层面全时, 我们注意到 $\{\eta_X\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} : F \circ Q \to F' \circ Q$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一族态射. 由于 Q 不改变对象类, 自然无法改变一族 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$-指标的 $\mathcal{D}$ 中态射, 从而 η 在 Q^* 下的原像只能是自身.
(对象 (函子) 单地映上). 若 $F \circ Q$ 与 $F' \circ Q$ 是相同的函子, 则 F 与 F' 在对象层面相同. 假定 $\eta : F \circ Q \to F' \circ Q$ 与 $\theta : F \circ Q \to F \circ Q$ 是互逆的自然变换, 则存在唯一的原像 $\overline{\eta} : F \to F'$ 与 $\overline{\theta} : F' \to F$. 显然 $\overline{\theta} \circ \overline{\eta}$ 与 $\overline{\eta} \circ \overline{\theta}$ 可以取作恒等自然变换, 从而只能取作恒等变换. □

备注 6.1.4. 式 (6.1.6) 是如下泛性质的决定式.

- 对任意函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 使得 $F(S)$ 是同构, 存在唯一函子 $\overline{F} : (\mathcal{C}_S)/\sim \to \mathcal{D}$ 使得 $F = \overline{F} \circ Q$.

此处谈及的 “泛性质” 不宜定义作顿范畴中的初/终对象, 应理解作普适函子问题的解 (见 solution d’un problème d’application universelle, [DG67]).

推论 6.1.5. $FQ = GQ$ 当且仅当 $F = G$. 函子 Q 类似 “满态射”.

备注 6.1.6. (关于类的滤过). 假定 $\mathcal{I}$ 是一个图, 其对象与态射构成集合. $\mathcal{C}$ 存在任意余极限. 函子 $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 的余极限是 $\coprod_{i \in I} F(i)$ 的商, 其等价关系由 $F(I)$ 中交换图生成. 通常地, 唯有求出具体的余极限 $\varinjlim_I F$, 我们才能检验 $\coprod_{i \in I} F(i)$ 中两个元素是否等价.
若 $\mathcal{I}$ 是滤过的, 则无需求解余极限即可判断 $\coprod_{i \in I} F(i)$ 中两个元素是否等价. 事实上, $a_i \in X_i$ 与 $a_j \sim X_j$ 在滤过余极限对象中等价, 当且仅当存在一个包含 i 与 j 的有限子图 I_0, 使得 a_i 与 a_j 在 $\varinjlim_{I_0} F$ 中等价.
在 Gabriel-Zisman 局部化中, I 标记了范畴 $\mathcal{C}_S$ 的点与边, 以及条件 † 蕴含的交换图. I 通常是真类. 若 I 是滤过的 (κ-滤过的), 则 $\mathcal{C}_S$ 中两个态射在局部化范畴中态射的等价性可以在某个有限子图 (基数小于 κ 的子图) 中检验. 通常来说, Gabriel-Zisman 局部化并非滤过的.

即便局部化可以被 “滤过地” 定义, 局部化范畴的 Hom-类未必是集合.

例子 6.1.7. 定义 $\mathcal{C}$ 为如下范畴: 对象类是 $\{A, B\} \sqcup \mathcal{X}$, 其中 $\mathcal{X}$ 是真类. 态射有且仅有以下几类:

1. 所有恒等态射, 2. 对任意 X, $(A,X)_{\mathcal{C}}=\{f_X\}$, 3. 对任意 X, $(B,X)_{\mathcal{C}}=\{g_X\}$.

记 $\mathcal{S}=\{i_X\}_{X\in\mathcal{X}}$. 此时, $(A,B)_{\mathcal{C}_S/\sim}$ 是一个真类.

例子 6.1.8. (分式计算). 第一手资料见 [GZ67]. 其思想是将局部化范畴中 "锯齿状" 的态射化简作分式, 且两个分式的等价关系可以在有限步骤内检验. 局部化范畴中的一个态射即一个分式所在的等价类, 而这一等价类又是一个滤过系统, 该态射可表示为 "分子部分" 的滤过余极限. 由分式定义导出范畴 (Deligne 方法) 的例子见 [Kel96].

定义 6.1.9. (局部化的记号). 以下规定几类局部化记号.

1. (GZ 局部化). 通常记作 $Q:\mathcal{C}\to\mathcal{C}[S^{-1}]$, 即**例** 6.1.2 定义的 $\pi\circ\iota:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_S/\sim$. 泛性质表述见备注 6.1.4.
2. (分式). 如果 S 是乘法系, 则由左 (右) 分式构造的局部化范畴记作 $S^{-1}\mathcal{C}$ ($LS^{-1}\mathcal{C}$).
3. (加法商). 加法商通常用 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 表示 (**定理** 4.5.4), 之后将证明这是局部化.
4. (同伦范畴). 给定模型范畴 $\mathcal{C}$, 其同伦范畴记作 $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$, 定义为 $\mathcal{C}$ 关于弱等价类的局部化.

6.2 加法局部化

一个棘手的问题是, 加法范畴的 GZ 局部化范畴未必是加法范畴.

例子 6.2.1. 记 $\mathcal{C}$ 是域 k 中的有限维向量空间范畴, 取 $S=\{0\to k\}$. $\mathcal{C}[S^{-1}]$. 容易验证, $f\in\mathcal{C}$ 是局部化范畴中的零态射, 当且仅当 $\mathrm{rank}(f)\le 1$. $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 显然不是加法范畴.

为给出 Q 是加法函子的充分条件, 先作如下准备.

定义 6.2.2. (积范畴). 将如下范畴定义作范畴 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的积.

1. 对象类是 $\mathsf{Ob}(\mathcal{A})\times\mathsf{Ob}(\mathcal{B})$ (类的 Catersian 积).
2. 态射类是 $\mathsf{Mor}(\mathcal{A})\times\mathsf{Mor}(\mathcal{B})$ (类的 Catersian 积).
3. 恒等态射与态射复合按分量定义.

引理 6.2.3. $\mathrm{Funct}(\mathcal{A}\times\mathcal{B},\mathcal{C})$ 恰好包含由 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 至 $\mathcal{C}$ 的双函子.

证明. 给定 $F:\mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{C}$, 下检验 $F(A,-):\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 是函子.

1. 对象的对应是 $B\mapsto F(A,B)$, 态射的对应是 $f:B\to B'\mapsto F(1_A,f)$.
2. 复合律通过积范畴的态射复合 $(1_A,g)\circ(1_A,f)=(1_A,g\circ f)$ 检验, 单位律类似可验证.

对 $f:A\to A'$ 与 $g:B\to B'$, 有等式

$$F(f,1_{B'})\circ F(1_A,g)=F(f,g)=F(1_{A'},g)\circ F(f,1_B). \tag{6.2.1}$$

□

备注 6.2.4. 由以上引理, 我们似乎更愿意将 A 写作态射 1_A. 依照经验, 若某问题涉及双函子, 则 "应当" 将对象提升作态射.

引理 6.2.5. (范畴的 Curry 化). 以下是函子范畴的同构

$$\mathrm{Funct}(\mathcal{A}\times\mathcal{B},\mathcal{C})\cong\mathrm{Funct}(\mathcal{A},\mathrm{Funct}(\mathcal{B},\mathcal{C})),\quad F\mapsto(A\mapsto(B\mapsto F(A,B))). \tag{6.2.2}$$

证明. 给定 $F:(A\times B)\to C$, 记对应所得的函子为

$$\mathfrak{F}:\mathcal{A}\to\mathrm{Funct}(\mathcal{B},\mathcal{C}),\quad A\mapsto F(A,-). \tag{6.2.3}$$

下证明 $F\mapsto\mathfrak{F}$ 是函子.

1. (对象). 引理 6.2.3 说明 $F(A,-):\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 是一个函子.
2. (态射). 给定自然变换 $\theta_{(?,-)}:F\Rightarrow G$, 则 $\theta_{(A,-)}:\mathfrak{F}(A)\to\mathfrak{G}(A)$ 也是自然变换 (这无非将 $\mathcal{C}$ 中态射族的指标集由 $\{(?,-)\}$ 限制为 $\{(A,-)\}$).
3. (复合律与恒等律). 容易验证. 证明的关键步骤是把双函子遗忘成单函子.

反之, 我们由 $\mathfrak{F}$ 对应定义双函子 F. 困难之处是检验 F 的双函子性. 任取 $(f,g):(A,B)\to(A',B')$,

$$\begin{aligned}\theta_{(A',B')}\circ F(f,g)&=\theta_{A'}(B')\circ(\mathfrak{F}(f))(g)=\theta_{A'}(B')\circ(\mathfrak{F}(f))(\mathrm{id}_{B'})\circ(\mathfrak{F}(\mathrm{id}_A))(g) &(6.2.4)\\ &=(\mathfrak{G}(f))(\mathrm{id}_{B'})\circ\theta_A(B')\circ(\mathfrak{F}(\mathrm{id}_A))(g)=(\mathfrak{G}(f))(\mathrm{id}_{B'})\circ(\mathfrak{G}(\mathrm{id}_A))(g)\circ\theta_A(B) &(6.2.5)\\ &=(\mathfrak{G}(f))(g)\circ\theta_A(B)\qquad=G(f,g)\circ\theta_{(A,B)}. &(6.2.6)\end{aligned}$$

复合律与恒等律验证从略. □

例子 6.2.6. 记 I 为图, k 为域 (视作单点范畴). 积范畴 $k\times I$ 即路代数 kI. 例如, 对 $v\in\mathrm{Ob}(I)$ 与 $e\in\mathrm{Ob}(I)$, 则 $(1_k,1_v)$ 与 $(1_k,e)$ 分别是路代数基底中的点与边. 由式 (6.2.2), 得函子范畴的同构:

$$\mathrm{Funct}(kI,\mathbf{Ab})\cong\mathrm{Funct}(I,\mathrm{Funct}(k,\mathbf{Ab})). \tag{6.2.7}$$

左侧等价于左 kI-模范畴; 右侧等价于 I 的左 k-(模) 表示范畴. 通常要求 I 是有限图, 从而路代数 kI 有单位元.

定理 6.2.7. (积范畴的局部化). 给定范畴 $\mathcal{C}_1$ 与 $\mathcal{C}_2$, 分别取包含所有同构的态射类 S_1 与 S_2, 则 $S_1\times S_2$ 是 $\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2$ 的态射类, 且包含所有同构. 设 $Q_i:\mathcal{C}_i\to\mathcal{C}_i[S_i^{-1}]$ 是 $\mathcal{C}_i$ 关于 S_i 的 GZ 局部化, 则

$$\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2\to\mathcal{C}_1[S_1^{-1}]\times\mathcal{C}_2[S_2^{-1}],\quad(?,-)\mapsto(Q_1(?),Q_2(-)) \tag{6.2.8}$$

映 $S_1\times S_2$ 为同构. 今断言, 局部化诱导的函子

$$(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)[(S_1\times S_2)^{-1}]\to\mathcal{C}_1[S_1^{-1}]\times\mathcal{C}_2[S_2^{-1}] \tag{6.2.9}$$

是范畴的同构.

证明. 对任意范畴 $\mathcal{D}$, 由引理 6.1.3 得

$$\mathrm{Funct}((\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)[(S_1\times S_2)^{-1}],\mathcal{D})\cong\mathrm{Funct}_{S_1\times S_2}(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2,\mathcal{D}),\quad F\mapsto F\circ Q_{1\times 2}. \tag{6.2.10}$$

引入以下引理.

引理 6.2.8. 函子 $G:\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2\to\mathcal{D}$ 将 $S_1\times S_2$ 映作同构, 当且仅当以下条件满足:

1. 对任意 $X_1 \in \mathcal{C}_1, G(X_1, -)$ 将 S_2 映至 $\mathcal{D}$ 中同构;
2. 对任意 $s_1 \in S_1, G(s_1, -)$ 是 $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D})$ 中的自然同构.

证明. ($\downarrow$). 对任意 $s_2 \in S_2$, $G(X_1, -)(s_2) = G(1_{X_1}, s_2)$ 是同构. 对任意 $s_1 \in S_1$, 自然变换 $\{G(s_1, 1_{X_2})\}_{X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2)}$ 是同构. ($\uparrow$). 反之, G 将 $(S_1 \times 1)$ 与 $(1 \times S_2)$ 映作同构, 因此将复合得到的 $S_1 \times S_2$ 映作同构. □

由这一引理,

$$\mathrm{Funct}_{S_1 \times S_2}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D}) \cong \mathrm{Funct}_{S_1}(\mathcal{C}_1, \mathrm{Funct}_{S_2}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D})) \tag{6.2.11}$$

$$\cong \mathrm{Funct}(\mathcal{C}_1[S_1^{-1}], \mathrm{Funct}(\mathcal{C}_2[S_2^{-1}], \mathcal{D})) \cong \mathrm{Funct}(\mathcal{C}_1[S_1^{-1}] \times \mathcal{C}_2[S_2^{-1}], \mathcal{D}). \tag{6.2.12}$$

这说明 $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)[(S_1 \times S_2)^{-1}]$ 与 $\mathcal{C}_1[S_1^{-1}] \times \mathcal{C}_2[S_2^{-1}]$ 满足同一泛性质, 从而它们是同构的. □

备注 6.2.9. 以上证明过程与可表函子的米田引理有相似之处, 两者都是说明 "泛性质" 决定的对象唯一. 对后者, Hom 的 "泛性质" 由集合论语言描述.

引理 6.2.10. (伴随与局部化). 给定伴随函子的一组资料

$$(\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{C}) \dashv (\mathcal{C} \xrightarrow{G} \mathcal{D}); \quad (1_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\eta} GF, FG \xrightarrow{\varepsilon} 1_{\mathcal{C}}). \tag{6.2.13}$$

假定存在 $\mathcal{C}$ 态射类的 S 与 $\mathcal{D}$ 态射类的 T, 使得 $F(T) \subseteq S$ 且 $G(S) \subseteq T$. 记 $Q_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ 与 $Q_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}[T^{-1}]$ 是相应的 GZ 局部化, 则存在诱导的伴随函子

$$(\mathcal{D}[T^{-1}] \xrightarrow{\overline{F}} \mathcal{C}[S^{-1}]) \dashv (\mathcal{C}[S^{-1}] \xrightarrow{\overline{G}} \mathcal{D}[T^{-1}]); \quad (1_{\mathcal{D}[T^{-1}]} \xrightarrow{\overline{\eta}} \overline{G}\,\overline{F},\ \overline{F}\,\overline{G} \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} 1_{\mathcal{C}[S^{-1}]}). \tag{6.2.14}$$

证明. 函子 $\overline{F}$ 与 $\overline{G}$ 由泛性质诱导. 自然变换 η 定义如下:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "1_{\mathcal{D}}"] \arrow[r, bend right, "GF"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{D}}"] & \mathcal{D} \arrow[d, "Q_{\mathcal{D}}"] \\ \mathcal{D}[T^{-1}] \arrow[r, bend left, "1_{\mathcal{D}[T^{-1}]}"] \arrow[r, bend right, "\overline{G}\,\overline{F}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\overline{\eta}"] & \mathcal{D}[T^{-1}] \end{tikzcd}. \tag{6.2.15}$$

其中, 选取 $\overline{\eta}$ 如下:

$$\begin{tikzcd} \overline{\eta} \arrow[d, mapsto] & \in & \mathrm{Funct}(1_{\mathcal{D}[T^{-1}]}, \overline{G}\,\overline{F}) \arrow[d, "\cong", "(Q_{\mathcal{D}})^*"'] & \mathrm{Funct}(1_{\mathcal{D}}, GF) \arrow[d, "(Q_{\mathcal{D}})_*"'] & \ni & \eta \arrow[d, mapsto] \\ \overline{\eta} Q_{\mathcal{D}} & & \mathrm{Funct}(Q_{\mathcal{D}}, \overline{G}\,\overline{F}\,Q_{\mathcal{D}}) \arrow[r, equal] & \mathrm{Funct}(Q_{\mathcal{D}}, Q_{\mathcal{D}}\,GF) & & Q_{\mathcal{D}}\eta \end{tikzcd}. \tag{6.2.16}$$

类似地定义 $\overline{\varepsilon}$. 这类构造具有统一格式 $\overline{?}Q = Q?$.

下证明伴随中的三角恒等式. 以下第一行复合为恒等自然变换:

$$\begin{tikzcd} \overline{F} \arrow[r, "\overline{F}\overline{\eta}"] & \overline{F}\,\overline{G}\,\overline{F} \arrow[r, "\overline{\varepsilon}\overline{F}"] & \overline{F} & \mathrm{Funct}(\mathcal{D}[T^{-1}], \mathcal{C}[S^{-1}]) \arrow[d, "(Q_{\mathcal{D}})^*"] \\ \overline{F} Q_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\overline{F}\overline{\eta}Q_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, equal] & \overline{F}\,\overline{G}\,\overline{F} Q_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\overline{\varepsilon}\overline{F}Q_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, equal] & \overline{F} Q_{\mathcal{D}} \arrow[d, equal] & \mathrm{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{C}[S^{-1}]) \\ Q_{\mathcal{C}} F \arrow[r, "Q_{\mathcal{D}} F\eta"] & Q_{\mathcal{C}} FGF \arrow[r, "Q_{\mathcal{C}}\varepsilon F"] & Q_{\mathcal{C}} F & \end{tikzcd}. \tag{6.2.17}$$

依照原伴随的三角恒等式, 第三行复合为 $Q_{\mathcal{D}}$, 故第二行复合也为 $Q_{\mathcal{D}}$. 由 $(Q_{\mathcal{D}})^*$ 全忠实, 第一行复合为 $1_{\overline{F}}$. 另一三角恒等式的证明类似. □

定理 6.2.11. (加法局部化). 给定加法范畴的 GZ 局部化 $Q:\mathcal{C}\to\mathcal{C}[S^{-1}]$. 若 S 对直和封闭, 则 Q 是加法函子.

- 称 S 对直和封闭, 若对任意 $f,g\in S$, 总有 $\left(\begin{smallmatrix} f & 0\\ 0 & g\end{smallmatrix}\right)\in S$.

证明. 记 $I=\{\cdot,\cdot\}$ 是有两个点的离散图. 则有伴随函子

$$(\mathcal{C}\xrightarrow{\Delta}\mathcal{C}^I)\dashv(\mathcal{C}^I\xrightarrow{\oplus}\mathcal{C});\quad (1_{\mathcal{C}}\xrightarrow{\eta}\oplus\Delta,\Delta\oplus\xrightarrow{\varepsilon}1_{\mathcal{C}^I}). \tag{6.2.18}$$

将 C^I 视同 $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$, 则有 $\Delta:?\mapsto(?,?)$ 与 $\oplus:(?,!)\mapsto ?\oplus !$. 由 S 对直和封闭, 则局部化保持伴随函子. 结合**定理** 6.2.7, 得

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\Delta"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[l, bend left, "\oplus"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}}"] \arrow[dr, bend left, "Q_{\mathcal{C}}\times Q_{\mathcal{C}}"] & \\
\mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[r, dashed, bend left, "\overline{\Delta}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & (\mathcal{C}\times\mathcal{C})[(S\times S)^{-1}] \arrow[l, dashed, bend left, "\overline{\oplus}"] \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{C}[S^{-1}]\times\mathcal{C}[S^{-1}]
\end{tikzcd}. \tag{6.2.19}$$

记复合函子 $\widetilde{\Delta}:\mathcal{C}[S^{-1}]\xrightarrow{\overline{\Delta}}(\mathcal{C}\times\mathcal{C})[(S\times S)^{-1}]\cong\mathcal{C}[S^{-1}]\times\mathcal{C}[S^{-1}]$. 交换图说明 $\widetilde{\Delta}Q_{\mathcal{C}}=(Q_{\mathcal{C}}\times Q_{\mathcal{C}})\Delta$, 该等式中的 $\widetilde{\Delta}$ 可以替换作 Δ, 泛性质 ($Q_{\mathcal{C}}$ 右可消, 推论 6.1.5) 说明 $\widetilde{\Delta}=\Delta$. 因此, $Q_{\mathcal{C}}$ 保持 Δ, 故保持直和 $\oplus$. 保持直和的函子是一个加法函子 ([Cre21]). □

以下是一类特殊的加法局部化.

定理 6.2.12. 给定加法范畴 $\mathcal{A}$ 与加法全子范畴 $\mathcal{B}$, 下定义两种商.

1. (加法商). 定义 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ 为如下范畴: 对象同 $\mathcal{A}$; 对任意 X 与 Y, 态射群为原始态射群的商群:

$$(X,Y)_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}=(X,Y)_{\mathcal{A}}/\{\text{被 }\mathcal{B}\text{ 中对象分解的态射}\}. \tag{6.2.20}$$

   记函子 $R:\mathcal{A}\to A/\mathcal{B},\quad X\mapsto RX=X,\quad f\mapsto Rf=[f]$.

2. (GZ 局部化). 称 $(f;y)$ 是一对好态射, 若 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$, 且 1_Y-fg 与 1_X-gf 都能经 $\mathcal{B}$ 中对象分解. 记 S 是 $\mathcal{A}$ 中所有好态射构成的类. 记 GZ 局部化函子 $Q:\mathcal{A}\to\mathcal{A}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$.

则存在范畴的同构 Φ, 使得 $R=\Phi\circ Q$.

证明. 先说明 Q 是加法函子. 依照**定理** 6.2.11, 只需说明 S 对直和封闭. 给定好态射 $(f;y):X\to Y$ 与 $(f';y'):X'\to Y'$, 则显然 $(\left(\begin{smallmatrix} f & 0\\ 0 & f'\end{smallmatrix}\right);\left(\begin{smallmatrix} y & 0\\ 0 & y'\end{smallmatrix}\right)):X\oplus X'\to Y\oplus Y'$ 也是好态射.
(Q 被 R 分解). 对任意 $X\in\mathcal{B}$, QX 是零对象. 因此, 群同态 $(M,N)_{\mathcal{A}}\xrightarrow{Q}(M,N)_{\mathcal{A}[S^{-1}]}$ 经商群 $(M,N)_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}$ 分解. 商群的泛性质决定了一族对应

$$\overline{Q}:\mathcal{A}/\mathcal{B}\to\mathcal{A}[S^{-1}],\quad X\mapsto X,\quad [f]\mapsto Qf. \tag{6.2.21}$$

为了说明这是函子, 只需验证恒等律与复合律. 注意到 $[g\circ f]=[g]\circ[f]$, 且 Q 是函子, 故

$$\overline{Q}([g]\circ[f])=\overline{Q}([g\circ f])=Q(g\circ f)=Qg\circ Qf=\overline{Q}([g])\circ\overline{Q}([f]). \tag{6.2.22}$$

(R 被 Q 分解). 给定一组好态射 $(f;g)$, 则 $[f]\circ[g]=[f\circ g]$ 与 $[g]\circ[f]=[g\circ f]$ 都是恒等态射. 由泛性质, R 经 Q 唯一地分解.
以上两种分解都是唯一的 (由商群的泛性质和局部化的泛性质), 从而两函子在去向处相差一个同构.

$\square$

6.3 Quillen 的同伦范畴

此部分介绍左右同伦关系与 Quillen 的同伦范畴, 第一手资料是 [Qui67] 与 [Qui69], 文献导读可参考 [Hov07].

定义 6.3.1. (闭区间). 闭区间即单纯形 $\Delta[1]$ 的某种 "实现". 常见的 "实现" 包含以下两种.

1. $|\Delta[1]|=[0,1]$ 是几何实现, 函子 $|\cdot|:\Delta\to k\mathbf{Top}$ 关于 $\Delta\rightarrowtail\mathbf{PSh}(\Delta)$ 延拓定义了 "实现-单纯集化" 伴随 ([Lura]). 详见介绍单纯集方法的书籍.

2. $\mathrm{h}(\Delta)=$ "图范畴 $\{\cdot\to\cdot\}$" 是同伦实现, 函子 $\mathrm{h}:\Delta\to\mathbf{Cat}$ 关于 $\Delta\rightarrowtail\mathbf{PSh}(\Delta)$ 延拓定义了 "同伦-脉" 伴随 ([Lurb]). 详见介绍无穷范畴的书籍.

特别地, "实现" 保持单纯形的典范态射 $d^k:\Delta[0]\to\Delta[1]$ $(k\in\{0,1\})$ 与 $s^0:\Delta[1]\to\Delta[0]$. 我们将五元组 $(\Delta[0],\Delta[1],s^0,d^0,d^1)$ 的实现定义作一个区间基本资料.

1. 区间 I 是 $\Delta[1]$ 的实现, 终对象 $\top$ 是 $\Delta[0]$ 的实现 (左伴随保持终对象).

2. $i_k:\top\to I$ 是 d^k 的实现, 表示端点 $k\in\{0,1\}$ 的包含;

3. $p:I\to\top$ 是 s^0 的实现, 表示收缩 I 到一个点.

备注 6.3.2. 以上两种 "实现" 分别对应拓扑语言与范畴语言. 与拓扑学相仿, 可以定义范畴中的柱对象与路对象, 也可以定义映射锥与映射柱等, 其元语言均取自单纯形.

定义 6.3.3. (路对象, 积). 给定对象 X. $\mathbf{Cat}$ (或 $\mathbf{Top}$) 中的对角态射为下图态射链 $(\star)$:

$$\begin{tikzcd}
\bullet\sqcup\bullet \arrow[r, "{(i_0,\,i_1)}"] & I \arrow[r, "p"] & \bullet & (\star) \arrow[d, Rightarrow] \\
X\prod X & X^I \arrow[l, "X^{(i_0,\,i_1)}"'] & X \arrow[l, "X^p"'] \arrow[ll, bend left, "\Delta_X"] & X^{(\star)}
\end{tikzcd} \quad . \tag{6.3.1}$$

对 $(\star)$ 作用 $X^{\cdot}=\mathrm{Funct}(\cdot,X)$, 得相应的函子与自然变换. 特别地, Δ_X 是自然变换. 以上操作是在 Top (或 Cat) 中进行的, 所有函子与自然变换都视作 Top (或 Cat) 中对象与态射.

定义 6.3.4. (柱对象, 余积). 给定对象 X. $\mathbf{Cat}$ (或 $\mathbf{Top}$) 中的余对角态射为下图态射链 $X\prod(\star)$:

$$\begin{tikzcd}
\bullet\sqcup\bullet \arrow[r, "{(i_0,\,i_1)}"] & I \arrow[r, "p"] & \bullet & (\star) \arrow[d, Rightarrow] \\
X\coprod X \arrow[r, "{X\prod(i_0,\,i_1)}"] \arrow[rr, bend right, "\nabla_X"'] & X\prod I \arrow[r, "X\prod p"] & X & X\prod(\star)
\end{tikzcd} \quad . \tag{6.3.2}$$

引理 6.3.5. Δ_X 是两组 1_X 关于积泛性质诱导的态射; ∇_X 是两组 1_X 关于余积泛性质诱导的态射.

证明. 以前者为例. 考虑单纯形范畴中一组复合为恒等的态射

$$\Delta[0] \xrightarrow{d^k} \Delta[1] \xrightarrow{s^0} \Delta[0] \quad (k=0,1). \tag{6.3.3}$$

经 "实现" 函子, 得 $p \circ i_k$ 是恒等, 从而 $X^{i_k} \circ X^p$ 是恒等的自然变换. $\{X^{i_k} : X^I \to X \prod X\}_{k=0,1}$ 由泛性质诱导的态射是 $X^{(i_0,i_1)} : X^I \to X$. 若复合 X^p, 则 $\{1_X = X^{i_k} \circ X^p : X \to X^I \to X \prod X\}_{k=0,1}$ 诱导的态射是 Δ_X. 对 ∇_X 的证明类似. □

我们通过路对象与柱对象定义同伦关系, 以此描述态射类的某种等价关系. 柱同伦 (左同伦) 的拓扑学视角广为数学工作者所知.

定义 6.3.6. (拓扑学的同伦). 称拓扑空间间的一对连续映射 $f, g : X \to Y$ 是左同伦的, 若 $\mathrm{im}(f) \cup \mathrm{im}(g) \subseteq Y$ 所示的上下柱体能被连续地填补. 即存在连续映射 $H : X \times [0,1] \to Y$, 使得 $H(x,0) = f(x)$ 且 $H(x,1) = g(x)$ 对任意 $x \in X$ 成立. 称 H 为从 f 到 g 的同伦.
换言之, 下图交换 (左图与右图是等价的):

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "X\prod(i_1)"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X\prod I \arrow[rr, dashed, "H"] & & Y \\
 & X \arrow[ul, "X\prod(i_0)"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[rr, "(f,g)"] \arrow[d, "\nabla_X"'] \arrow[drr, "(X\prod(i_0),X\prod(i_1))"] & & Y \\
X & & X\prod I \arrow[ll, "X\prod p"] \arrow[u, dashed, "H"']
\end{tikzcd} . \tag{6.3.4}$$

以下是模型结构中左同伦的定义.

定义 6.3.7. 以下假定 $\mathcal{A}$ 是带有模型结构 (Cofib, Weq, Fib) 的范畴, 满足以下三点:

1. 范畴有有限积与有限余积;
2. 给定任意平凡余纤维 $p : A \to C$ 与任意态射 $f : A \to B$, 则存在弱推出使得 $p' : B \to D$ 是平凡余纤维;
3. 给定任意平凡纤维 $i : X \to Z$ 与任意态射 $g : Y \to Z$, 则存在弱推出使得 $i' : W \to Y$ 是平凡纤维.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, dashed, "\mathsf{Fib}"', "p'"] & X \arrow[d, "p"', "\mathsf{Fib}"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathsf{Cofib}"', "i"] & C \arrow[d, dashed, "i'"', "\mathsf{Cofib}"] \\
B \arrow[r, dashed, "g'"'] & D
\end{tikzcd} . \tag{6.3.5}$$

记 $\prod$ 与 $\coprod$ 分别为 $\mathcal{A}$ 中的二元积运算与二元余积运算; 零元积即始对象 $\perp$, 零元余积即终对象 $\top$. 出于习惯, 我们将 $X \coprod Y$ 与 $X \prod Y$ 视作列向量, 态射仍以矩阵形式表示.

定义 6.3.8. (柱对象, 柱同伦). 如式 (6.3.4) 右图所示, 右上三角是柱同伦关系的的定义式, 左下角是余对角态射的定义 (式 (6.3.2)). 由于单纯形范畴到通常范畴未必有 "实现" 函子, 我们难以定义 $X \prod I$; 一个解决方法是将 $X \prod I$ 换作**柱对象** $\mathsf{Cyl}(X)$:

$$\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[d, "\nabla_X"'] \arrow[dr, "(X\prod(i_0),X\prod(i_1))"] & \\
X & X\prod I \arrow[l, "X\prod p"]
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[d, "\binom{1}{1}"'] \arrow[dr, "(\partial_0,\partial_1)"', "\mathsf{Cofib}"] & \\
X & \mathsf{Cyl}(X) \arrow[l, "\sigma", "\mathsf{Weq}"']
\end{tikzcd} . \tag{6.3.6}$$

称 $(\mathsf{Cyl}(X), \partial_0, \partial_1, \sigma, X)$ 是 X 对应的柱对象, 若存在余纤维 $(\partial_0, \partial_1) : X \coprod X \to \mathsf{Cyl}(X)$ 与弱等价 $\sigma : \mathsf{Cyl}(X) \to X$, 使得上图交换. 给定态射 $f, g : X \to Y$, 称 f 与 g 是**柱同伦**的, 若存在态射 $h : \mathsf{Cyl}(X) \to Y$, 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[d, "\binom{1}{1}"'] \arrow[dr, "\mathsf{Cofib}", "(\partial_0,\partial_1)"'] & Y \\ X & \mathsf{Cyl}(X) \arrow[l, "\sigma"', "\mathsf{Weq}"] \arrow[u, dashed, "h"'] \end{tikzcd} . \tag{6.3.7}$$

备注 6.3.9. (∂_0, ∂_1) 是余纤维, CM1 说明 ∂_0 与 ∂_1 是弱等价. 通常无法断言 (∂_0, ∂_1) 是弱等价, 或 ∂_k 是余纤维.

备注 6.3.10. 拓扑视角看, $f : X \to Y$ 建立了弱等价, 当且仅当其诱导的 $\pi_k(f)$ 群均是同构 (假定连通). 对 σ, 将 "圆柱" $\mathsf{Cyl}(X)$ 沿母线收缩至 "任意横截面" X, 其拓扑量 $\pi_\bullet$-群自然被保持.

定义 6.3.11. (路对象, 路同伦). 可以类似定义路对象 $\mathrm{Path}(-)$ 与路同伦的定义与柱对象与柱同伦类似. 此处仅给出定义路同伦的交换图:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Path}(Y) \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}", "\mathsf{Fib}"'] & Y \arrow[l, "\mathsf{Weq}"', "s"] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ X \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"'] & Y \prod Y \end{tikzcd} . \tag{6.3.8}$$

备注 6.3.12. $\binom{d_0}{d_1}$ 是纤维, CM1 说明 d_0 与 d_1 是弱等价. 通常无法断言 $\binom{d_0}{d_1}$ 是弱等价, 或 d_k 是纤维.

备注 6.3.13. 从拓扑视角看, 路对象 Y^I 即 "闭区间 $[0,1]$ 至 Y 的所有态射" 构成的空间, 配有紧-开拓扑. $s : Y \to Y^I$ 无非令所有道路 (Y^I 中对象) 连续地坍缩到道路起点. 其拓扑量 $\pi_\bullet$-群自然被保持.

备注 6.3.14. Steenrod 方便拓扑空间 ([Ste67]) 与 **Cat** 存在闭合幺半结构. 因此

$$(\mathsf{Cyl}(X), Y) = (X \prod I, Y) \cong (X, Y^I) = (X, \mathrm{Path}(Y)). \tag{6.3.9}$$

假定伴随函子保持某些态射类, 则无需区分路同伦与柱同伦.

例子 6.3.15. $\mathbf{Mod}_R$ 中链复形的一组同伦关系 $s : f \sim g : X \to Y$ $(f - g = sd + ds)$ 对应态射 $(s, f, g) : \mathsf{Cyl}(X) \to Y$. 可以检验, f 与 g 是链映射且 $f - g = sd + ds$, 当且仅当下式成立:

$$(s, f, g) \circ \begin{pmatrix} -d_X & 0 & 0 \\ 1 & d_X & 0 \\ -1 & 0 & d_X \end{pmatrix} = d_Y \circ (s, f, g). \tag{6.3.10}$$

特别地, $\mathsf{Cyl}(R)$ 是单纯形 $\Delta[1]$ 在复形范畴中的实现, $\mathsf{Cyl}(X) = X \otimes \mathsf{Cyl}(R)$. 相应地,

$$\mathrm{Path}(Y) = \mathcal{HOM}(\mathsf{Cyl}(R), Y). \tag{6.3.11}$$

链复形的同伦无需区分左右.

备注 6.3.16. 从态射视角看, 式 (6.3.7) 本质上将 $\binom{1}{1}$ 分解作余纤维和弱等价的复合, 使得 (f, g) 能被余纤维态射分解. 我们并不关心 $\mathsf{Cyl}(X)$ 处的具体对象, 而是侧重 $\binom{1}{1}$ 的 $\mathsf{Weq} \circ \mathsf{Cofib}$-分解.
通常范畴中, 未必存在具体的函子 Cyl 或 Path. 往后将弃用 $\mathsf{Cyl}(-)$ 与 $\mathrm{Path}(-)$ 两个记号.

引理 6.3.17. (柱同伦的等价定义) 使用模型结构的性质, **定义** 6.3.8 中的题设 $(\partial_0, \partial_1) \in \mathsf{Cofib}$ 可以删去.

证明. 若将 (∂_0, ∂) 取作任意态射, 依照 CM4 将其分解作 $p \circ i \in \mathsf{TFib} \circ \mathsf{Cofib}$. 分别使用 $i, \sigma \circ p$ 与 $h \circ p$ 替换 $(\partial_0, \partial_1), \sigma$ 与 h 即可. 新的交换图满足**定义** 6.3.8 中假定. □

引理 6.3.18. (路同伦的等价定义) 使用模型结构的性质, 定义路同伦时, 可以删去题设 $\binom{d_0}{d_1} \in \mathsf{Fib}$.

命题 6.3.19. 向前复合 $- \circ \varphi$ 保持路同伦关系; 向后复合 $\psi \circ -$ 保持柱同伦关系.

证明. 以前者为例. 若 (f, g) 通过 h 实现柱同伦, 则 $(\psi \circ f, \psi \circ g)$ 通过 $\psi \circ h$ 实现柱同伦. □

定理 6.3.20. (余纤维对象出发的柱同伦). 选定 $\mathrm{Hom}(X, Y)$, 其中 $X \in \mathcal{C}$ (余纤维对象).

1. **定义** 6.3.8 中, 纤维态射 (∂_0, ∂_1) 的分量 ∂_0 与 ∂_1 均是平凡余纤维;
2. 柱同伦是 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 上的等价关系.

证明. (1). $\perp : \perp \to X$ 是余纤维, 推出所得的 $\perp \coprod X : \perp \sqcup X \to X \coprod X$ 也是余纤维. 复合得余纤维

$$\partial_k : \qquad X \xrightarrow{e_k} \perp \sqcup X \xrightarrow{\perp \sqcup X} X \sqcup X \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} X' . \tag{6.3.12}$$

备注 6.3.9 说明 ∂_k 是弱等价, 从而是平凡余纤维.
(2). 自反性与对称性显然, 下证明传递性. 假定有以下柱同伦

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "{(g,f)}"] \arrow[d, "\nabla_X"'] \arrow[dr, "{(a,b)}"] & Y \\ X & X_1 \arrow[l, "\sigma_1"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "{(l,f)}"] \arrow[d, "\nabla_X"'] \arrow[dr, "{(c,d)}"] & Y \\ X & X_2 \arrow[l, "\sigma_2"] \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd} . \tag{6.3.13}$$

将式 (6.3.13) 两图右上方的三角分别拆分作交换图, 再拼接作式 (6.3.14) 左上方图. 依照**定义** 6.3.7, 作式 (6.3.14) 左上方图中的弱推出方块 □, 并诱导相应的态射 α 与 β (式 (6.3.14) 下行两图). 最终检验式 (6.3.14) 右上方图的交换性即可.

$$\begin{array}{cc} \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a"'] & Y & X \arrow[l, "l"'] \arrow[d, "d"] \\ X_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, dashed, "c'"'] & X \arrow[l, "b"'] \arrow[r, "c"] \arrow[u, "f"] \arrow[d, phantom, "\square"] & X_2 \arrow[ul, "j"'] \arrow[dl, dashed, "b'"] \\ & X' & \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[rr, "{(g,l)}"] \arrow[dd, "\nabla_X"'] \arrow[ddrr, "{(c'a,b'd)}"] & & Y \\ & & \\ X & & X' \arrow[ll, dashed, "\beta"] \arrow[uu, dashed, "\alpha"'] \end{tikzcd} \\ \begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_1 \arrow[d, "c'"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\ X_2 \arrow[r, "b'"'] \arrow[drr, bend right, "j"'] & X' \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\ & & Y \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_1 \arrow[d, "c'"] \arrow[ddr, bend left, "\sigma_1"] & \\ X_2 \arrow[r, "b'"'] \arrow[drr, bend right, "\sigma_2"'] & X' \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \\ & & X \end{tikzcd} \end{array} . \tag{6.3.14}$$

□

引理 6.3.21. 选定 $\mathrm{Hom}(X, Y)$, 其中 $X \in \mathcal{C}$ (余纤维对象). 此时, 柱同伦蕴含路同伦.

证明. 给定下图左侧所示的柱同伦, 下证明存在右式所示的路同伦:

$$
\begin{tikzcd}
X \coprod X \arrow[r, "{(g,f)}"] \arrow[d, "\nabla_X"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & Y \\
X & X' \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y' \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & Y \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\Delta_Y"] \\
X \arrow[u, dashed, "\lambda"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"'] & Y \prod Y
\end{tikzcd}
. \tag{6.3.15}
$$

依照 CM4, 将 Δ_Y 分解作 Fib $\circ$ TCofib 的形式. 下只需求解 λ 使得右图交换. 由**定理** 6.3.20, 不妨假定 ∂_0 与 ∂_1 为平凡纤维, CM3 给出态射提升的交换图

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial_0"', "\mathsf{TCofib}"] & Y \arrow[r, "s"] & Y' \arrow[d, "\mathsf{Fib}"', "\binom{d_0}{d_1}"] \\
X' \arrow[urr, dashed, "\mu"] \arrow[rr, "\binom{h}{g\sigma}"'] & & Y \prod Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
&\tbinom{d_0}{d_1} \circ s \circ g = \tbinom{1}{1} \circ g = \tbinom{g}{g}, \\
&\tbinom{h}{g\sigma} \circ \partial_0 = \tbinom{h\circ\partial_0}{g\circ(\sigma\circ\partial_0)} = \tbinom{g}{g}.
\end{aligned}
\tag{6.3.16}
$$

取提升所得的态射 μ, 记 $\lambda := \mu \circ \partial_1$, 检验得交换图

$$
\begin{tikzcd}
& Y' \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & Y \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\Delta_Y"] \\
X' \arrow[ur, "\mu"] & X \arrow[l, "\partial_1"] \arrow[u, dashed, "\lambda"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"'] & Y \prod Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
d_0 \circ \lambda &= d_0 \circ \mu \circ \partial_1 = h \circ \partial_1 = f \\
d_1 \circ \lambda &= d_1 \circ \mu \circ \partial_1 = g \circ \sigma \circ \partial_1 = g
\end{aligned}
. \tag{6.3.17}
$$

□

定理 6.3.22. (余纤维对象出发的路同伦). 选定 $\mathrm{Hom}(X, Y)$, 其中 $X \in \mathcal{C}$ (余纤维对象). 对任意的路同伦的态射 $f, g : X \to Y$, 有以下事实

1. 对任意 $\psi : U \to X$, $f \circ \psi$ 与 $g \circ \psi$ 也是路同伦的态射;

2. 对任意 $\varphi : Y \to W$, $\varphi \circ f$ 与 $\varphi \circ g$ 也是路同伦的态射.

证明. (1). **命题** 6.3.19 说明向前复合永远保持路同伦关系.
(2). 给定路同伦交换图

$$
\begin{tikzcd}
Y' \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & Y \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\Delta_Y"] \\
X \arrow[u, dashed, "\lambda"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"'] & Y \prod Y
\end{tikzcd}
. \tag{6.3.18}
$$

由引理 6.3.18, 假定 $\binom{d_0}{d_1} \in$ Fib. 将 s 分解作 Fib $\circ$ TCofib, 则存在提升态射 λ' (CM3):

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{Y} \arrow[dr, "s_1"', "\mathsf{TFib}"] & & Y \arrow[ll, "s_2"', "\mathsf{TCofib}"] \arrow[dd, "\Delta_Y"] \\
& Y' \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & \\
X \arrow[uu, dashed, "\lambda'"] \arrow[ur, dashed, "\lambda"] \arrow[rr, "\binom{f}{g}"'] & & Y \prod Y
\end{tikzcd}
. \tag{6.3.19}
$$

因此, 不妨假设式 (6.3.18) 中 $s\in$ TCofib. 将 Δ_C 分解作 Fib $\circ$ TCofib, 由 CM3 得提升态射 t:

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[drr, dashed, "t"] \arrow[ddr, "\binom{d_0}{d_1}"'] & Y \arrow[l, "s"', "\text{TCofib}"] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\Delta_Y"] & & W \arrow[dl, "\text{TCofib}"'] \arrow[dd, "\Delta_W"] \\
 & & W' \arrow[dr, "\text{Fib}"] & \\
X \arrow[uu, dashed, "\lambda"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"'] & Y\coprod Y \arrow[rr, "\varphi\coprod\varphi"'] & & W\coprod W
\end{tikzcd} . \tag{6.3.20}$$

删减与 Y 相连的态射, 以及 $\binom{d_0}{d_1}$, 得到路同伦关系

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[ddrr, "\text{Fib}"] & & W \arrow[ll, "\text{TCofib}"'] \arrow[dd, "\Delta_W"] \\
Y' \arrow[u, dashed, "t"] & & \\
X \arrow[u, dashed, "\lambda"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"'] & Y\coprod Y \arrow[r, "\varphi\coprod\varphi"'] & W\coprod W
\end{tikzcd} . \tag{6.3.21}$$

$\square$

推论 6.3.23. 柱同伦是 $\mathcal{F}$ 上的等价关系理想; 路同伦是 $\mathcal{C}$ 上的等价关系理想.

我们暂不给出**定理** 6.3.24 的证明.

定理 6.3.24. (Quillen 定理). 在**定义** 6.3.7 的前提下, 以下是范畴等价:

$$\begin{tikzcd}
\pi\mathcal{C} \arrow[r, "\overline{\gamma_c}"] & \mathsf{Ho}(\mathcal{C}) \arrow[l, bend left, "\perp"] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[r, equal] & \mathcal{C}[\mathsf{TCofib}^{-1}] \\
\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F}) \arrow[u, tail] \arrow[d, tail] \arrow[r, "\simeq", "\overline{\gamma}"'] & \mathsf{Ho}(\mathcal{A}) \arrow[r, equal] & \mathcal{C}[\mathsf{Weq}^{-1}] \\
\pi\mathcal{F} \arrow[r, "\overline{\gamma_f}"'] & \mathsf{Ho}(\mathcal{F}) \arrow[l, bend right, "\perp"'] \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[r, equal] & \mathcal{F}[\mathsf{TFib}^{-1}]
\end{tikzcd} . \tag{6.3.22}$$

其中, $\pi(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 关于路同伦这一等价关系 (推论 6.3.23) 的商, $\pi(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 关于柱同伦这一等价关系的商, $\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 关于柱同伦 (或路同伦) 这一等价关系的商.

例子 6.3.25. 对外三角范畴的相同闭模型结构, **定理** 3.2.3 给出**式** (6.3.5) 的一种具体构造. **式** (6.3.22) 中范畴等价成立.

6.4 由 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 到同伦范畴的三种方式

对相容闭模型结构, 本小节使用 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 的三种 "等价的商" 描述同伦范畴. 往后选定外三角范畴 $\mathcal{A}$ 上的相容闭模型结构 (**定义** 5.6.1), 选定记号

定义 6.4.1. $\mathcal{A}$ 上的相容闭模型结构由以下资料描述:

1. Cofib, Fib 与 Weq 分别为闭模型结构中的余纤维, 纤维与弱等价类;
2. TCofib $=$ Cofib $\cap$ Weq 与 TFib $=$ Fib $\cap$ Weq 分别为平凡余纤维与平凡纤维;

3. $\mathcal{C},\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{W}$ 分别为闭模型结构中的余纤维对象, 纤维对象与平凡对象;

4. $\mathsf{T}\mathcal{F}=\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ 与 $\mathsf{T}\mathcal{C}=\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ 分别为平凡纤维对象与平凡余纤维对象.

5. (Hovey). $(\mathcal{S},\mathcal{S}^{\perp};{}^{\perp}\mathcal{V},\mathcal{V})=(\mathsf{T}\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{C},\mathsf{T}\mathcal{C})$ 是其对应的 Hovey 孪生余挠对 (见**定理** 5.6.4, 逆命题即 Section 5.7).

6. (Hovey). 平凡对象类 $\mathcal{W}=\mathcal{N}=\mathsf{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{S})=\mathsf{coCone}(\mathcal{V},\mathcal{S})$.

后续证明三种构造局部化的等价方式:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}\cap\mathcal{F} \arrow[dl, bend right, "Q_1"'] \arrow[d, "Q_2"] \arrow[dr, bend left, "Q_3"] & \\ (\mathcal{C}\cap\mathcal{F})[(\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}})^{-1}] & \frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}} & \pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F}) \end{tikzcd}. \tag{6.4.1}$$

此处, $\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}=\mathsf{Weq}\cap\mathsf{Mor}(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$, Q_1 是 GZ 局部化, Q_2 是加法商, Q_3 是同伦商 (稍后定义).
正式证明该命题前, 先看一则熟悉的例子.

命题 6.4.2. 假定 $\mathcal{R}$ 是一般的加法范畴, $C(\mathcal{R})$ 是复形范畴. 同伦范畴有以下三种等价描述.

1. (局部化). 称 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to X$ 同伦等价, 若 $fg-1_Y,gf-1_X$ 通过可裂无环复形分解. 记 S 是同伦等价, 定义 $Q_1:C(\mathcal{R})\to C(\mathcal{R})[S^{-1}]$;

2. (加法商). 记 $\mathcal{N}$ 为所有可裂无环复形构成的全子加法范畴, 定义 $Q_2:C(\mathcal{R})\to C(\mathcal{R})/\mathcal{N}$.

3. (同伦商). 称 $f,g:X\to Y$ 同伦, 若存在态射 $s:X\to Y$ 使得 $f-g=sd+ds$. 定义 $Q_3:C(\mathcal{R})\to\pi C(\mathcal{R})$ 为加法范畴 $C(\mathcal{R})$ 关于同伦关系的商范畴.

以下证明过程无需**定理** 6.2.11.

证明. 显然 $Q_2(S)$ 是同构, 故 Q_2 经 Q_1 分解.
再证明 Q_1 经 Q_3 分解, 即同伦等价的态射 $s:f\dim g:X\to Y$ 在 $C(\mathcal{R})[S^{-1}]$ 中同构. **例** 6.3.15 构造了态射 $(s,f,g):\mathsf{Cyl}(X)\to Y$. 注意到

$$f=[X\xrightarrow{e_2}f=\mathsf{Cyl}(1_X)\xrightarrow{(s,f,g)}Y],\quad g=[X\xrightarrow{e_3}\mathsf{Cyl}(1_X)\xrightarrow{(s,f,g)}Y]. \tag{6.4.2}$$

e_2 与 e_3 在 $C(\mathcal{R})[S^{-1}]$ 中相同, 因为两者在复合同伦等价 $p_1:\mathsf{Cyl}(X)\to\Sigma$ 后都是零态射.
最后证明 Q_3 经 Q_2 分解. 显然 $Q_3(f)=Q_3(g)$ 蕴含 $(f-g)$ 零伦, 即, 通过零对象分解. □

引理 6.4.3. $\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}$ 对直和封闭, 从而 (**定理** 6.2.11) Q_1 是加法函子.

证明. 给定 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 中弱等价 $f:X\to Y$. 由引理 5.4.6 第二条, f 分解作 $\mathsf{TFib}\circ\mathsf{TCofib}$, 得

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "\mathsf{TCofib}"'] & & Y \\ & E \arrow[ur, "\mathsf{TFib}"'] \arrow[dr] & \\ V \arrow[ur, tail] & & S \end{tikzcd}. \tag{6.4.3}$$

TCofib 所在的 conflation 表明 $E\in\mathcal{T}$, TFib 所在的 conflation 表明 $E\in\mathcal{U}$. 因此 $E\in\mathcal{U}\cap\mathcal{T}(=\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$. 这说明 w 经 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 中对象分解. 容易验证 $\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}$ 对直和封闭. □

定理 6.4.4. 式 (6.4.1) 中 Q_1 与 Q_2 互相分解, 诱导了**定理** 6.2.12 中所示的典范同构. 同**定理** 6.2.12 中记号, 我们暂时将 $Q_2(f)$ 记作 $[f]$.

证明. (Q_2 经 Q_1 分解). 只需说明对任意 $f\in\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}}$, $[f]$ 是同构. 由态射分解式 (6.4.3), 只需证明 $X\rightarrowtail E$ 与 $E\twoheadrightarrow Y$ 是同构. 以前者为例, 将 $X\rightarrowtail E=X\oplus S$ 写作直和, 今断言 $(1\ \ 0):X\oplus S$ 是 $\frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}}$ 中的逆映射. 往证 $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right):X\oplus S\to X\oplus S$ 通过 $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}$ 中对象分解. 只需证明 1_S 被 $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}$ 中对象分解. 考虑可裂 conflation $S\rightarrowtail S_V\twoheadrightarrow S_S$, 则 $S_V\in\mathcal{S}\cap\mathcal{V}=\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$. 得证.

(Q_1 经 Q_2 分解). 依照**定理** 6.2.12 将加法商转写作 GZ-局部化. 只需说明对任意 $f:X\to Y$, 若 $[f]$ 是同构, 则 $f\in\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}$. 将 f 分解作 $p\circ i\in\mathsf{TFib}\circ\mathsf{Cofib}$, 则 p 是可裂满态射, 记右逆元 j.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "i"] & & Y \arrow[dl, tail, shift left, "j"] \\
& E \arrow[ul, dotted, bend left, "q"] \arrow[ur, two heads, "p"] \arrow[dr] & \\
V \arrow[ur] & & U
\end{tikzcd}
\quad . \tag{6.4.4}
$$

由上一步骤中的结论, $p\circ j$ 与 1 相差一个 1_S, 从而 $[p]$ 与 $[j]$ 是同构. 因此 $[i]=[j]\circ[f]$ 也是同构. 任取 $q:E\to X$ 使得 $[q]$ 是 $[i]$ 的逆元. 下图是加法商范畴中交换:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X\oplus U \arrow[r, "(0\ \ 1)"] & U \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail, "i"] & E \arrow[u, "\binom{q}{\pi}"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[l, dotted, bend left, "q"] & U
\end{tikzcd}
\quad . \tag{6.4.5}
$$

因此 $[\binom{1}{0}]:X\to X\oplus U$ 是同构. 容易看出 $[1_U]=0$. 由定义, U 是 $\mathcal{W}$ 中对象的形变收缩, 故 $U\in\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\mathcal{S}$. 由定义, i 是平凡纤维, 故 $f\in\mathsf{Weq}$. □

备注 6.4.5. 以上将加法商写作 GZ 局部化 (**定理** 6.2.12), 并证明了范畴关于 S 与 $\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}$ 两个态射类的局部化是同构的.

定理 6.4.6. 式 (6.4.1) 中存在 $Q_3:\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\to\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$ 诱导的范畴同构 $\frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}}\cong\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$.

证明. 为证明 $\frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}}\cong\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$ 良定义, 只需说明 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 中弱等价被映至 $\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$ 中同构 (**定理** 6.4.4). 将弱等价分解作 $\mathsf{TFib}\circ\mathsf{TCofib}$, 下通过路同伦证明 TFib 在 Q_3 下是同构. 通过柱同伦, 可以对偶地证明 TCofib 在 Q_3 下也是同构.

任取平凡纤维 $p:X\to Y$, 下证明 $\pi(-,p):\pi(-,X)\to\pi(-,Y)$ 是函子的同构.

1. (可裂满). 由 $(0\to A)\pitchfork p$, 得 $(-,p)_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}$ 是满自然变换. 由引理 2.3.4 知 p 可裂满, 故 $\pi(-,p)$ 可裂满.

2. (单). 即证: 若 $p\circ f,p\circ g:A\to X$ 通过 h 实现柱同伦, 则 $f,g:A\to Y$ 也是柱同伦的. 考虑下图:

$$
\begin{tikzcd}
A\coprod A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "\nabla_A"'] \arrow[drr, "{(\partial_0,\partial_1)}"', "\mathsf{Cofib}"] & X \arrow[r, "p", "\mathsf{TFib}"'] & Y \\
A & & A' \arrow[ll, "\mathsf{Weq}", "\sigma"'] \arrow[ul, dashed, "s"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}
\quad . \tag{6.4.6}
$$

CM3 给出分解态射 s. 此时, f 与 g 通过 s 实现柱同伦.

下证明 $Q_3 : \mathcal{C} \cap \mathcal{F} \to \pi(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})$ 经 Q_2 分解, Q_3 是关于柱同伦这一等价关系理想的商. 若 f 与 g 路同伦, 则考虑交换图:

$$\begin{tikzcd} A \coprod A \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[d, "\nabla_A"'] \arrow[d, phantom, "(\partial_0,\partial_1)"] \arrow[dr, "\mathsf{Cofib}"] & X \\ A & A' \arrow[l, "\mathsf{Weq}"', "\sigma"] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd} \quad . \tag{6.4.7}$$

特别地, $[\sigma] \circ [\partial_0 - \partial_1] = [0]$. 由 $\sigma \in \mathsf{Weq}$, 得 $[\partial_0 - \partial_1] = 0$. 因此 $[f] = [g]$. □

6.5 同伦范畴的三角结构

本章节证明 $\mathsf{Ho}\mathcal{A}$ 是三角范畴. 试回顾相容闭模型结构的资料 (**定义** 6.4.1), 以及同伦范畴的等价描述:

1. (Quillen 定理, **定理** 6.3.24). $\pi(\mathcal{C} \cap \mathcal{F}), \pi(\mathcal{F}), \pi(\mathcal{C})$ 与 $\mathsf{Ho}\mathcal{A}$ 是互相等价的范畴. 等价函子由全子范畴的包含诱导.

2. (双纤维对象逼近, Section 6.4). **式** (6.4.1) 中函子彼此分解, 诱导了范畴同构

$$(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})[(\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}})^{-1}] \cong \frac{\mathcal{C} \cap \mathcal{F}}{\mathcal{C} \cap \mathcal{W} \cap \mathcal{F}} \cong \pi(\mathcal{C} \cap \mathcal{F}). \tag{6.5.1}$$

我们尽可能地在 $\mathsf{Ho}\mathcal{A}$ 中构造平移函子, 最后使用 $\pi(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})$ 建立一类 “标准好三角”.
以下关于 “好三角位移” 的构造类似**定理** 4.5.6.

定义 6.5.1. 记局部化函子为 $[\cdot] : \mathcal{A} \to \mathsf{Ho}\mathcal{A}$. 对任意 $X \in \mathcal{A}$, 选定 conflation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "i_X"] & X_V \arrow[r, two heads, "p_X"] & X_U \arrow[r, dashed, "\delta_X"] & {} \end{tikzcd} \quad . \tag{6.5.2}$$

现选定 $\mathsf{Ho}\mathcal{A} \simeq \pi(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})$ 的骨架 $\mathcal{K}$.

引理 6.5.2. 对任意 $f : X \to Y$, 可选取 f_V (由提升性) 与 f_U (由 ET3) 使得下图是 conflation 间的态射:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "i_X"] \arrow[d, "f"] & X_V \arrow[r, two heads, "p_X"] \arrow[d, "f_V"] & X_U \arrow[r, dashed, "\delta_X"] \arrow[d, "f_U"] & {} \\ Y \arrow[r, tail, "i_Y"] & Y_V \arrow[r, two heads, "p_Y"] & Y_U \arrow[r, dashed, "\delta_Y"] & {} \end{tikzcd} \quad . \tag{6.5.3}$$

特别地, f_V 与 f_U 在 $\mathcal{K}$ 中唯一.

证明. 态射 f 是 $\mathsf{Ho}\mathcal{A}$ 中的零态射, 当且仅当 f 通过 $\mathcal{W}$ 中对象分解, 亦当且仅当态射被某个 $U \to V$ 分解 (**引理** 5.1.17).
(f_V 的唯一性). 对任意不同的 f_V 与 $(f_V)'$ 使得上左侧方块图交换, 则 $(f_V - (f_V)') \circ i_X = 0$. 从而 $f_V - (f_V)'$ 被 $X_U \to Y_V$ 分解, 故为零态射.
(f_U 的唯一性). 今选定 f_V. 对任意不同的 f_U 与 $(f_U)'$ 使得上图右侧方块交换, 则 $(\delta_Y)_\sharp(f_U - (f_U)') = 0$. 从而 $f_U - (f_U)'$ 被 $X_U \to Y_V$ 分解, 故为零态射. □

推论 6.5.3. $[(\cdot)_U] : \mathcal{A} \xrightarrow{(\cdot)_U} \mathcal{A} \xrightarrow{[\cdot]} \mathcal{K}$ 是加法函子.

证明. 由**引理** 6.5.2, $X \mapsto [X_U]$ 与 $f \mapsto [X_f]$ 唯一决定. 后续验证步骤与**定理** 4.5.6 完全相同. □

再证明 $[(\cdot)_U]$ 通过 $\mathcal{A} \to \mathcal{K}$ 分解.

引理 6.5.4. 若 $f \in \mathsf{TCofib}$ ($f \in \mathsf{TFib}$), 则 U_f 是弱等价.

证明. ($f \in \mathsf{TCofib}$). 考虑 inflation 的复合 $X \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{i_Y}{\rightarrowtail} Y_V$. 由 ET4 得下图左, 进而得下图右

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\mathsf{TCofib}", "i"'] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, "\mathsf{Cofib}"] & S \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & {} \\
X \arrow[r, tail] & Y_V \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & E \arrow[r, dashed, "\widetilde{\delta_X}"] \arrow[d, two heads, dashed, "\lambda"] & {} \\
& Y_U \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_Y"] & Y_U \arrow[d, dashed] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_V \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X_U \arrow[r, dashed, "\delta_X"] \arrow[d, dashed, "\mu"] & {} \\
X \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, "i"] & Y_V \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal, "1_{Y_V}"] & E \arrow[r, dashed, "\widetilde{\delta_X}"] \arrow[d, "\lambda"] & {} \\
Y \arrow[r, tail] & Y_V \arrow[r, two heads] & Y_U \arrow[r, dashed, "\delta_Y"] & {}
\end{tikzcd}
. \tag{6.5.4}
$$

由引理 6.5.2, $[\mu]$ 是同构. 再由 $S \in \mathcal{W}$, 得 $\lambda \in \mathsf{Weq}$. 从而 $[U_f] = [\lambda \circ \mu]$ 是同构.

($f \in \mathsf{TCofib}$). **定理** 3.4.2 给出了交换图:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, tail] & X_V \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, tail] & N \arrow[d, tail] & \\
X \arrow[r, tail, "\binom{i_X}{0}"] \arrow[d, two heads, "f"'] & X_V \oplus Y_V \arrow[r, two heads, "p_X \oplus 1"] \arrow[d, two heads, "{(f_V, 1)}"'] & X_U \oplus V_Y \arrow[r, dashed, "\delta_X \oplus 0"] \arrow[d, two heads, "{(f_U, p_Y)}"'] & {} \\
Y \arrow[r, tail, "i_Y"] & Y_V \arrow[r, two heads, "p_Y"] & Y_U \arrow[r, dashed, "\delta_Y"] & {}
\end{tikzcd}
. \tag{6.5.5}
$$

由于 $\mathcal{W}$ 是厚子范畴 (**定理** 5.5.6), 得 $N \in \mathcal{W}$. 由**定理** 5.6.7 知 $(f_U, p_Y) \in \mathsf{Weq}$. 由于 $X_U \xrightarrow{\binom{1}{0}} X_U \oplus V_Y \to X_U$ 也是弱等价, 故 U_f 是弱等价. □

定理 6.5.5. 存在加法双函子 $\Sigma : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, 使得 $\Sigma[\cdot] = [(\cdot)_U]$.

证明. 对推论 6.5.3 使用引理 6.5.4, 得局部化诱导的函子 $\widetilde{\Sigma} : \mathsf{Ho}\mathcal{A} \to \mathcal{K}$. 最后复合 $\mathcal{K} \to \mathsf{Ho}\mathcal{A}$ 即可. □

定理 6.5.6. 存在加法双函子 $\Omega : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, 满足 $[(\cdot)^T] = \Omega[\cdot]$, 其中

$$
X^T \overset{j_X}{\rightarrowtail} X^S \overset{q_X}{\twoheadrightarrow} X \overset{\varepsilon_X}{\dashrightarrow} \quad . \tag{6.5.6}
$$

在证明 Σ 与 Ω 互逆前, 我们需要将扩张元对应作局部化范畴中的态射. 不同于**定理** 4.5.6, 此处涉及局部化范畴中的 “分式” 计算.

定义 6.5.7. (ℓ-变换). 对 conflation $X \overset{f}{\rightarrowtail} Y \overset{g}{\twoheadrightarrow} Z \overset{\eta}{\dashrightarrow}$, 定义

$$
\ell : \mathbb{E}(Z, X) \to (Z, \Sigma X)_{\mathcal{K}}, \quad \eta \mapsto [a] \circ [s]^{-1}. \tag{6.5.7}
$$

其中, a 与 s 来自**定理** 3.1.1 给出的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, tail, "i_X"] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail] & Z \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, equal] & {} \\
X_V \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, "p_X"] & E \arrow[r, two heads, "\mathsf{TFib}", "s"'] \arrow[d, two heads, "-a"] & Z \arrow[r, dashed] & {} \\
X_U \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_X"] & X_U \arrow[d, dashed] & & \\
{} & {} & &
\end{tikzcd}
. \tag{6.5.8}
$$

需要检验, 这是良定义的.

备注 6.5.8. **定理** 3.1.1 的等式表明 $s^*\eta = a^*\delta_X$. 定义表明 $\ell(\delta_X) = 1$. 我们希望 $\ell(\eta) = [a] \circ [s]^{-1}$.

定义 6.5.9. (分式). 若 $s \in \mathsf{TFib}$, 我们将一对态射 $A \xleftarrow{s} B \xrightarrow{f} C$ 称作一个分式. 往后记作 (s, f). 分式仅看作 $\mathsf{Mor} \sqcup \mathsf{TFib}$ 中的一类字, (s, f) 在局部化范畴中的取值是 $[f] \circ [s]^{-1}$.

备注 6.5.10. **定义** 6.5.7 也可通过 TCofib 对偶地定义, 从而得到反向的分式. 我们不使用这种分式, 因此无需考虑左分式与右分式之别.

命题 6.5.11. 沿用**定义** 6.5.7 中的记号. 假定存在另一组分式 (t, b), 满足

$$s^*\eta = a^*\delta_X, \quad t^*\eta = b^*\delta_X. \tag{6.5.9}$$

此时, $[a] \circ [s]^{-1} = [b] \circ [t]^{-1}$.

证明. 将 (s, a) 与 (t, b) 置于下图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[dd, equal] & Y \arrow[r, two heads, "g"] & Z \arrow[r, dashed, "\eta"] & {} \\
& M \arrow[ur, two heads, "s", "\mathsf{TFib}"'] \arrow[dr, "a"] & & N \arrow[ul, two heads, "t"', "\mathsf{TFib}"] \arrow[dl, "b"] \\
X \arrow[r, tail, "i_X"'] & X_V \arrow[r, two heads, "p_X"'] & X_U \arrow[r, dashed, "\delta_X"'] & {}
\end{tikzcd} . \tag{6.5.10}$$

使用**定理** 3.1.1 作 s' 与 t', 记合成态射 $st' = c = ts'$, 得下图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[dd, equal] & Y \arrow[r, two heads, "g"] & Z \arrow[r, dashed, "\eta"] & {} \\
& M \arrow[ur, two heads, "s"] \arrow[dr, "a"'] & F \arrow[l, two heads, "t'"'] \arrow[r, two heads, "s'"] \arrow[u, "c"] \arrow[d, phantom, "\boxed{?}"] & N \arrow[ul, two heads, "t"'] \arrow[dl, "b"] \\
X \arrow[r, tail, "i_X"'] & X_V \arrow[r, two heads, "p_X"'] & X_U \arrow[r, dashed, "\delta_X"'] & {}
\end{tikzcd} . \tag{6.5.11}$$

由 $[a] \circ [s]^{-1} = [at'] \circ [c]^{-1}$ 与 $[b] \circ [t] = [bs'] \circ [c]$, 下只需证明 $[at'] = [bs']$. 注意到

$$(at' - bs')^*\delta_X = (st' - ts')^*\eta = 0^*\eta = 0, \tag{6.5.12}$$

因此, $(at' - bs')$ 经 p_X 分解. 由 $X_V \in \mathcal{W}$, 得 $[at' - bs'] = 0$. □

命题 6.5.12. (ℓ 保持加法). 对任意 $\eta, \eta' \in \mathbb{E}(Z, X)$, 总有 $\ell(\eta + \eta') = \ell(\eta) + \ell(\eta')$.

证明. **命题** 6.5.11 说明 $\ell(\cdot)$ 无关分式选取, **式** (6.5.11) 说明任意两个分式可以 "通分". 因此

$$\ell(\eta + \eta') = [a + a'] \circ [s]^{-1} = [a] \circ [s]^{-1} + [a'] \circ [s]^{-1} = \ell(\eta) + \ell(\eta'). \tag{6.5.13}$$

□

定理 6.5.13. (ℓ 是自然变换). 假定下图左侧是 conflation 间的态射, 则下图右侧交换:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, two heads] \arrow[d] & Z \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, "g"] & {} \\
X' \arrow[r, tail] & Y' \arrow[r, two heads] & Z' \arrow[r, dashed, "\eta'"] & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[Z]} \arrow[r, "\ell(\eta)"] \arrow[d, "{[g]}"'] & {[X_U]} \arrow[d, "{[f_U]}"] \\
{[Z']} \arrow[r, "\ell(\eta')"'] & {[X'_U]}
\end{tikzcd} . \tag{6.5.14}$$

证明. 记 (s,a) 与 (t,b) 分别是 η 与 η' 对应的分式, 只需验证下图在局部化范畴中交换:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "g"'] & M \arrow[l, two heads, "s"'] \arrow[r, "a"] & X_U \arrow[d, "f_U"] \\
Z' & N \arrow[l, two heads, "t"] \arrow[r, "b"'] & X'_U
\end{tikzcd} . \tag{6.5.15}$$

由**定理** 3.2.5 构造同伦的推出拉回方块 1, 得 $t' \in \mathsf{TCofib}$ 与 p'. 定义 $b' = b \circ p$, 得交换方块 2. 由**定理** 3.1.1 作同伦的推出拉回方块 3, 以及 $\overline{s}, \overline{t'} \in \mathsf{TCofib}$. 最后只需证明 $\boxed{?}$ 在局部化范畴中交换:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dd, equal] & M \arrow[l, two heads, "s"'] \arrow[rr, "a"] & & X_U \arrow[dd, "f_U"] \\
\arrow[r, phantom, "3"] & E \arrow[u, two heads, "\overline{s}"] \arrow[d, two heads, "\overline{t'}"'] \arrow[rr, phantom, "\boxed{?}"] & & \\
Z \arrow[d, "g"'] & C \arrow[l, dashed, two heads, "t'"'] \arrow[rr, dashed, "b'"] \arrow[d, dashed, "p"] & & X'_U \arrow[d, equal] \\
Z' \arrow[r, phantom, "1"] & N \arrow[l, two heads, "t"] \arrow[rr, "b"'] \arrow[rr, phantom, "2", shift left=3ex] & & X'_U
\end{tikzcd} . \tag{6.5.16}$$

我们希望 $(b' \circ \overline{t'} - f_U \circ a \circ \overline{s})$ 通过 $p_{X'} : X'_V \twoheadrightarrow X'_U$ 分解, 即证 $(b' \circ \overline{t'} - f_U \circ a \circ \overline{s})^* \delta_{X'} = 0$. 计算得

$$(b' \circ \overline{t'} - f_U \circ a \circ \overline{s})^* \delta_{X'} \qquad = (b \circ p \circ \overline{t'})^* \delta_{X'} - (f_U \circ a \circ \overline{s})^* \delta_{X'} \tag{6.5.17}$$
$$= (p \circ \overline{t'})^* (b^* \delta_{X'}) - (a \circ \overline{s})^* ((f_U)^* \delta_{X'}) \qquad = (p \circ \overline{t'})^* (t^* \eta') - (a \circ \overline{s})^* (f_* \delta_X) \tag{6.5.18}$$
$$= (t \circ p \circ \overline{t'})^* \eta' - f_* \overline{s}^* (a^* \delta_X) \qquad = (g \circ s \circ \overline{s})^* \eta' - f_* \overline{s}^* (s^* \eta) \tag{6.5.19}$$
$$= \overline{s}^* s^* (g^* \eta' - f_* \eta) \qquad = 0. \tag{6.5.20}$$

□

在说明 ℓ 是自然变换的前提下, 我们证明 **定理** 6.5.5 与**定理** 6.5.6 是局部化范畴的自等价.

定理 6.5.14. $\Sigma(\Omega(\cdot)) : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 是自同构.

证明. 由**定理** 3.1.1 作交换图:

$$\begin{tikzcd}
X^T \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & X^S \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, tail] & X \arrow[r, dashed, "\varepsilon_X"] \arrow[d, equal] & {} \\
(X^T)_V \arrow[r, dashed, tail] \arrow[d, two heads] & FX \arrow[r, dashed, two heads, "s_X"] \arrow[d, dashed, two heads, "-t_X"] & X & \\
(X^T)_U \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_{X^T}"] & (X^T)_U & & \\
{} & & &
\end{tikzcd} . \tag{6.5.21}$$

由定义, $\ell(\varepsilon_X) = [t_X] \circ [s_X]^{-1}$. 因此 $\ell(\varepsilon_X) : X \to \Sigma\Omega X$ 是同构. 继而证明 $\ell(\varepsilon_\cdot)$ 是自然同构. 对任意 $f : X \to Y$, 则有诱导的 S^f, f^T 与 $(f^T)_V$. 依照与**定理** 4.5.6 中相同的论证, 取诱导的 $Ff : FX \to FY$, 以及 $\overline{f} : X \to Y$ 与 $\overline{(f^T)_U} : (X^T)_U \to (Y^T)_U$. 特别地, $[(f^T)_U] = [\overline{(f^T)_U}]$ 且 $[f] = [\overline{f}]$. 对扩张元间的态射 $(f^T, \overline{f}) : \varepsilon_X \to \varepsilon_Y$, 由 ℓ 是自然变换, 得

$$\ell(\varepsilon_Y) \circ [\overline{f}] = \Sigma[f^T] \circ \ell(\varepsilon_X) = \Sigma\Omega[f] \circ \ell(\varepsilon_X). \tag{6.5.22}$$

这说明 $\ell(\varepsilon_X) : X \to \Sigma\Omega X$ 是一族自然同构. □

定理 6.5.15. $(\mathcal{K},\Sigma,\mathcal{E})$ 是三角范畴. 其中,

$$\mathcal{E}=\{[X]\xrightarrow{[f]}[Y]\xrightarrow{[g]}[Z]\xrightarrow{\ell(\eta)}\Sigma[X]\mid X\overset{f}{\rightarrowtail}Y\overset{g}{\twoheadrightarrow}Z\overset{\eta}{\dashrightarrow}\text{ 是 conflation}\}. \tag{6.5.23}$$

证明. 由**定理** 6.3.24 与推论 6.3.23, $\mathcal{K}$ 即 $\frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}}$ 的骨架. 由 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 是外三角范畴 (**定理** 4.1.3), $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}$ 包含投射且内射的对象, 因此 $\frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}}$ 是外三角范畴 (**定理** 4.5.4). 由 Σ 是自同构 (**定理** 6.5.14), 只需证明**定义** 6.5.7 诱导的自然变换 $\mathbb{E}([Z],[X])\to([Z],\Sigma[X])$ 是同构.

1. (满). 对任意 $[f]:[Z]\to\Sigma[X]$, 有原像 $f^*\delta_X$.
2. (单). 记 $X\overset{i}{\rightarrowtail}Y\overset{p}{\twoheadrightarrow}Z\overset{\eta}{\dashrightarrow}$. 若 $\ell(\eta)=0$, 则存在分式 (s,a) 使得 $f^*\delta_X=s^*\eta=0$, 其中 $s\in\mathsf{TFib}$ 通过 p 分解. 由 $\mathbb{E}(Z,\mathcal{V})=0$, 则存在 $V\in\mathcal{V}$ 使得 $s=[M\simeq V\oplus Z\xrightarrow{(0\ \ 1)}Z]$. 因此 $(0\ \ 1)$ 被 p 分解, 从而 p 是可裂满, 即 $\eta=0$.

结合**定理** 4.4.3, 以上是三角范畴. □

以下特殊情形可避免使用**定理** 6.5.14, 即证明 Σ 是子等价.

例子 6.5.16. 假定 Hovey 孪生余挠对是遗传的, 则 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 是 Forbenius 外三角范畴. 其投射内射对象是 $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}$.

证明. 先说明 $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}$ 恰好包含 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 中的投射内射对象 (未必足够多). 下仅证明投射情形.

1. 由 $\mathbb{E}(\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F},\mathcal{C}\cap\mathcal{F})=0$, 故 $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}$ 中对象必投射.
2. 对任意投射对象 P, 取可裂 conflation $P^T\rightarrowtail P^S\twoheadrightarrow P$. 由 $P^S\in\mathcal{W}$, 得 $P\in\mathcal{W}$. 从而 $P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}$.

若余挠对遗传, 则 $P^T\rightarrowtail P^S\twoheadrightarrow P$ 中 $P^T\in\mathrm{coCone}(\mathcal{U},\mathcal{U})=\mathcal{U}=\mathcal{C}$. 因此 $P^S\in\mathcal{C}\cap\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$. 由扩张闭, 上述 conflation 是 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 中取值的. □

7 同调性质

7.1 函子

Section 4.1 与 Section 4.5 表明外三角范畴在特殊的自范畴与商范畴运算封闭. 为了系统化的表述, 我们应当定义外三角范畴间的函子.

定义 7.1.1. (外三角函子). 外三角范畴 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 与 $(\mathcal{C}',\mathbb{E}',\mathfrak{s}')$ 间的一个函子描述作二元对 (F,θ). 其中,

1. $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是加法函子, 其保持 conflation;
2. $\theta_{Z,X}:\mathbb{E}(Z,X)\to\mathbb{E}'(FZ,FX),\quad \delta\mapsto\theta_{Z,X}(\delta)$. 使得对任意 $\mathcal{C}$ 中 conflation $X\overset{i}{\rightarrowtail}Y\overset{p}{\twoheadrightarrow}Z\overset{\delta}{\dashrightarrow}$, 总有 $\mathcal{C}'$ 中 conflation $FX\overset{Fi}{\rightarrowtail}FY\overset{Fp}{\twoheadrightarrow}FZ\overset{\theta_{Z,X}(\delta)}{\dashrightarrow}$.

备注 7.1.2. 自然性表明 $\theta(g_*f^*\delta)=(Fg)_*(Ff)^*\theta(\delta)$.

定理 7.1.3. (外三角等价). 称**定义** 7.1.1 中的外三角函子 (F,θ) 是**外三角等价**, 若以下等价命题成立

1. F 是范畴等价, 且 θ 是双自然同构;
2. 存在逆函子 $(G,\phi):(\mathcal{C}',\mathbb{E}',\mathfrak{s}')\to(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$, 使得 $(G,\phi)\circ(F,\theta)\cong 1_{\mathcal{C}}$ 且 $(F,\theta)\circ(G,\phi)\cong 1_{\mathcal{C}'}$.

证明. 只看 $(1\to 2)$. 任取伴随等价的资料 $(F\dashv G;\eta,\varepsilon)$. 定义

$$\phi:\mathbb{E}'(C,A)\to\mathbb{E}(GC,GA),\quad \delta\mapsto\theta^{-1}\left[(\varepsilon_A)_*(\varepsilon_C^{-1})^*\delta\right]. \tag{7.1.1}$$

具体地, 上下效果相同:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}'(C,A) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{E}(GC,GA) & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{E}'(FGC,FGA) \\ \delta & \longmapsto & & & (\varepsilon_A)_*(\varepsilon_C^{-1})^*\delta \end{array}. \tag{7.1.2}$$

继而证明 (G,ϕ) 是一个外三角函子, 即证 ϕ 是双自然变换. 往证等式

$$\phi(g_*f^*\delta)=(Gg)_*(Gf)^*\phi(\delta). \tag{7.1.3}$$

将两侧作用同构 θ, 即证

$$\theta\phi(g_*f^*\delta)=(FGg)_*(FGf)^*\theta\phi(\delta). \tag{7.1.4}$$

记 $g:A'\to A$ 与 $f:C\to C'$, 上式即

$$(\varepsilon_{A'})_*(\varepsilon_{C'}^{-1})^*(g_*f^*\delta)=(FGg)_*(FGf)^*(\varepsilon_A)_*(\varepsilon_C^{-1})^*\delta. \tag{7.1.5}$$

由 ε 是自然变换, 得 $\varepsilon_{A'}\circ g=(FGg)\circ\varepsilon_A$ 与 $\varepsilon_C\circ(FGf)=f\circ\varepsilon_{C'}$. 故上式成立.
容易验证自然同构 $(G,\phi)\circ(F,\theta)\cong 1_{\mathcal{C}}$ 与 $(F,\theta)\circ(G,\phi)\cong 1_{\mathcal{C}'}$. □

8 外三角范畴的 Heller-构造

8.1 基本资料

这一构造来自观察 [Hel58]. 我们希望由一个外三角范畴 $(\mathcal{C},\mathcal{E},\mathfrak{s})$ 构造新的外三角范畴 $(\mathcal{E},\mathbb{F},\mathfrak{t})$, 其中 $\mathcal{E}$ 以 $\mathcal{C}$ 中全体扩张元为对象.

定义 8.1.1. (加法范畴 $\mathcal{E}$). 方便起见, 我们将 $\delta\in\mathbb{E}(Z,X)$ 记作 (X,δ,Z), 即明确 δ 所属的扩张群. 定义 $\mathcal{E}$ 为如下加法范畴:

1. $\mathsf{Ob}(\mathcal{E})=\bigcup_{Z,X\in\mathcal{C}}\mathbb{E}(Z,X)$, 即 $\mathcal{C}$ 中全体扩张元;
2. 对扩张元 (X,δ,Z) 与 (A,η,C), 定义态射 $(\alpha,\gamma)\in(X,A)_{\mathcal{C}}\oplus(Z,C)_{\mathcal{C}}$, 满足 $\alpha_*\delta=\gamma^*\eta$;
3. 恒等态射与态射复合由 $\mathcal{C}$ 中的复合诱导.

备注 8.1.2. 由 $\mathbb{E}$ 是双函子, 得 $(1,g)\circ(f,1)=(f,1)\circ(1,g)$.

定义 8.1.3. ($\mathbb{F}$). 定义对应 $\mathbb{F}:\mathcal{E}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{E}\to\mathbf{Ab}$,

$$((X,\delta,Z),(A,\eta,C))\mapsto(\alpha,\gamma)\in\mathbb{E}(X,A)\oplus\mathbb{E}(Z,C). \tag{8.1.1}$$

引理 8.1.4. $\mathbb{F}$ 是加法双函子.

证明. 两个加法双函子的直和仍是加法双函子. □

定义 8.1.5. ($\mathfrak{t}$). 对 $(\alpha,\gamma)\in\mathbb{E}(X,A)\oplus\mathbb{E}(Z,C)$, 定义 $\mathfrak{t}(\alpha,\gamma)$ 为一类图的同构类, 其中一个代表元是:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] & L \arrow[r, two heads, "p"] & X \arrow[r, dashed, "\alpha"] & {} \\ \eta & \varepsilon & \delta & \\ C \arrow[r, tail, "j"] & N \arrow[r, two heads, "q"] & Z \arrow[r, dashed, "\gamma"] & {} \end{tikzcd}, \tag{8.1.2}$$

满足 $i_*\eta=j^*\varepsilon$, 以及 $p_*\varepsilon=q^*\delta$. 所有与式 (8.1.2) 等价图如下

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\varphi i"] & L' \arrow[r, two heads, "p\varphi^{-1}"] & X \arrow[r, dashed, "\alpha"] & {} \\ \eta & \psi^*\varphi_*\varepsilon & \delta & \\ C \arrow[r, tail, "\psi j"] & N' \arrow[r, two heads, "q\psi^{-1}"] & Z \arrow[r, dashed, "\gamma"] & {} \end{tikzcd}. \tag{8.1.3}$$

其中, φ 与 ψ 取遍所有同构.

参考文献

[Bas63] Hyman Bass. Big projective modules are free. *Illinois Journal of Mathematics*, 7(1):24–31, March 1963. doi:10.1215/ijm/1255637479.

[BK14] Theo Bühler and Matthias Kunzer. Some elementary considerations in exact categories, July 2014. URL: https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/excounter.pdf.

[BS01] Paul Balmer and Marco Schlichting. Idempotent Completion of Triangulated Categories. *Journal of Algebra*, 236(2):819–834, February 2001. doi:10.1006/jabr.2000.8529.

[Büh10] Theo Bühler. Exact categories. *Expositiones Mathematicae*, 28(1):1–69, January 2010. doi:10.1016/j.exmath.2009.04.004.

[Che18] Xiao-Wu Chen. The Extension-lifting Lemma via Two-term Complexes, November 2018. URL: http://home.ustc.edu.cn/~xwchen/USTC%20Algebra%20Notes%20Archiv/The%20Extension-Lifting%20lemma%20via%20two-term%20complexes.pdf.

[Cre21] Richard Crew. Homological Algebra Lecture 6, 2021. URL: https://people.clas.ufl.edu/rcrew/files/homology-lect6.pdf.

[DG67] Jean Dieudonné and Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1961–1967.

[GZ67] Peter Gabriel and Michel Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1967. doi:10.1007/978-3-642-85844-4.

[Hap88] Dieter Happel. *Triangulated Categories in the Representation of Finite Dimensional Algebras*. Cambridge University Press, 1 edition, February 1988. doi:10.1017/CBO9780511629228.

[Hel58] Alex Heller. Homological algebra in abellian categories. *Annals of Mathematics*, 68(3):484–525, 1958. URL: http://www.jstor.org/stable/1970153.

[Hov07] Mark Hovey. *Model Categories*. American Mathematical Soc., 2007. URL: https://www.nzdr.ru/data/media/biblio/kolxoz/M/MA/MAct/Hovey%20M.%20Model%20categories%20(LN,%20Wesleyan%20U.,%201998)(213s)_MAct_.pdf.

[Joy08] André Joyal. The theory of quasi-categories and its applications. 2008. URL: https://ncatlab.org/nlab/files/JoyalTheoryOfQuasiCategories.pdf.

[JT06] Andre Joyal and Myles Tierney. Quasi-categories vs Segal spaces, November 2006. arXiv:math/0607820, doi:10.48550/arXiv.math/0607820.

[Kel82] Gregory M. Kelly. *Basic Concepts of Enriched Category Theory*. Number 64 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 1982. URL: http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html.

[Kel96] Bernhard Keller. Derived Categories and Their Uses. In *Handbook of Algebra*, volume 1, pages 671–701. Elsevier, 1996. doi:10.1016/S1570-7954(96)80023-4.

[LC07] Jue Le and Xiao-Wu Chen. Karoubianness of a triangulated category. *Journal of Algebra*, 310(1):452–457, April 2007. doi:10.1016/j.jalgebra.2006.11.027.

[Lura] Jacob Lurie. Kerodon. https://kerodon.net/tag/0022.

[Lurb] Jacob Lurie. Kerodon. https://kerodon.net/tag/004N.

[May01] John P. May. The axioms for triangulated categories, 2001. URL: https://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/Triangulate.pdf.

[Mit65] Barry Mitchell. *Theory of Categories*. Academic Press, 1965. URL: https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/mitchell.pdf.

[Mur07] Daniel Murfet. Triangulated categories part i, April 2007. URL: http://therisingsea.org/notes/TriangulatedCategories.pdf.

[Nee91] Amnon Neeman. Some new axioms for triangulated categories. *Journal of Algebra*, 139(1):221–255, May 1991. doi:10.1016/0021-8693(91)90292-G.

[Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated Categories*. Number no. 148 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, 2001. URL: https://homepage.mi-ras.ru/~akuznet/homalg/Neeman%20Triangulated%20categories.pdf.

[NP19] Hiroyuki Nakaoka and Yann Palu. Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, LX(2):117–193, 2019. arXiv title "Mutation via Hovey twin cotorsion pairs and model structures in extriangulated categories". URL: https://hal.science/hal-02136919.

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical Algebra*, volume 43 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1967. doi:10.1007/BFb0097438.

[Qui69] Daniel Quillen. Rational Homotopy Theory. *The Annals of Mathematics*, 90(2):205, September 1969. arXiv:1970725, doi:10.2307/1970725.

[Ree73] Christopher L. Reedy. Homotopy theory of model categories. 1973. URL: https://math.mit.edu/~psh/reedy.pdf.

[RZ21] Shi Rong and Pu Zhang. Strong version of Snake Lemma in exact categories. *Homology, Homotopy and Applications*, 23(2):151–163, 2021. doi:10.4310/HHA.2021.v23.n2.a9.

[Ste67] N. E. Steenrod. A convenient category of topological spaces. *Michigan Mathematical Journal*, 14(2):133–152, May 1967. doi:10.1307/mmj/1028999711.

[Ver96] Jean-Louis Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. Number 239 in Astérisque. Société mathématique de France, 1996. URL: https://www.numdam.org/item/AST_1996__239__R1_0/.

[Wis11] Jonathan Wise. A A Non-elementary Proof of the Snake Lemma, 2011. URL: https://ncatlab.org/nlab/files/Wise-SnakeLemma.pdf.

[Yon60] Nobuo Yoneda. On Ext and exact sequences. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 8:507–576, 1960. URL: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=225854.

[Zho25] Yu Zhou. Tilting theory for extended module categories, January 2025. arXiv:2411.15473, doi:10.48550/arXiv.2411.15473.