2025 年秋组会讲义 “外三角范畴”

张陈成

2025 年秋

最后更新于 2025 年 9 月 13 日.

目录

5 Hovey 对应

5.1 余挠对

余挠对是一门庞大的理论, 本章节仅罗列一些基本定义与结论. 以下选定外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$.

定义 5.1.1. ($\mathbb{E}$-垂直). 称两个对象类 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathbb{E}$-垂直的 (下简称**垂直**), 若对任意 $X \in \mathcal{X}$ 与 $Y \in \mathcal{Y}$, 总有 $\mathbb{E}(X, Y) = 0$. 我们引入以下记号:

1. 若 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 垂直, 则记作 $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$;
2. 记右垂直类 $\mathcal{X}^{\perp} := \{Y \mid \mathbb{E}(X, Y) = 0\}$;
3. 记左垂直类 ${}^{\perp}\mathcal{Y} := \{X \mid \mathbb{E}(X, Y) = 0\}$.

简便起见, 约定 $\{M\}^{\perp} = M^{\perp}$.

再引入几则 conflation 决定的类的运算.

定义 5.1.2. 假定 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 是任意 (非空的) 对象类. 定义如下运算.

1. $\mathsf{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{Z \mid$ 存在 $X \in \mathcal{X}$ 与 $Y \in \mathcal{Y}$, 使得有 conflation $X \rightarrowtail Y \twoheadrightarrow Z\}$;
2. $\mathsf{coCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{W \mid$ 存在 $X \in \mathcal{X}$ 与 $Y \in \mathcal{Y}$, 使得有 conflation $W \rightarrowtail X \twoheadrightarrow W\}$;
3. $\mathcal{X} * \mathcal{Y} := \{E \mid$ 存在 $X \in \mathcal{X}$ 与 $Y \in \mathcal{Y}$, 使得有 conflation $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow Y\}$.

例子 5.1.3. 若 $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$, 则 $\mathcal{X} * \mathcal{Y} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

我们将 ET4 系列公理转化作如下引理.

引理 5.1.4. 对任意对象类 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, 与 $\mathcal{Z}$, 有如下等式.

1. $\mathsf{Cone}(\mathcal{X}, \mathsf{Cone}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})) = \mathsf{Cone}(\mathcal{Y} * \mathcal{X}, \mathcal{Z})$;
2. $\mathsf{coCone}(\mathsf{coCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \mathcal{Z}) = \mathsf{coCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Z} * \mathcal{Y})$;
3. $\mathsf{Cone}(\mathcal{X}, \mathsf{coCone}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})) = \mathsf{coCone}(\mathsf{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \mathcal{Z})$;
4. $\mathcal{X} * (\mathcal{Y} * \mathcal{Z}) = (\mathcal{X} * \mathcal{Y}) * \mathcal{Z}$.

证明. 先证明 (1). 观察下图. 若 $M \in \mathsf{Cone}(\mathcal{X}, \mathsf{Cone}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}))$, 则 M 由实线所示的 δ_i 决定. 依照 ET4’, M 由虚线所示的 ε_j 决定. 因此 $M \in \mathsf{Cone}(\mathcal{Y} * \mathcal{X}, \mathcal{Z})$. 对偶地, 依照 ET4, 虚线所示的 conflation 决定实所示者.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & X \arrow[r, dashed, "\varepsilon_1"] \arrow[d, tail] & {} \\
Y \arrow[r, tail] & Z \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, dashed] & E \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, two heads] & {} \\
& M \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & M \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{5.1.1}$$

(2) 是 (1) 在反范畴中的对偶. 证明 (3) ((4)) 所需的交换图分别是下图左 (右).

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & M \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & {} \\
X \arrow[r, tail, dashed] & Y \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads] & F \arrow[r, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] & {} \\
 & Z \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[d, dashed] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & Y \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & {} \\
X \arrow[r, tail] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, dashed] & F \arrow[r, dashed] \arrow[d, two heads] & {} \\
 & Z \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[d, dashed] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
. \tag{5.1.2}
$$

实线决出的 M 位于左式, 虚线决出的 M 位于右式. 由 ET4 与 ET4' 可证两者互相推导. □

结合 **定理** 3.1.1, 得如下引理.

引理 5.1.5. 给定任意对象类 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 与 $\mathcal{Z}$, 有以下包含关系.

1. $\mathrm{coCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) * \mathcal{Y} \subseteq \mathrm{coCone}(\mathcal{X} * \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \supseteq \mathrm{coCone}(\mathcal{Y}, \mathrm{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}))$;

2. $\mathcal{Y} * \mathrm{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) \subseteq \mathrm{Cone}(\mathcal{X}, \mathcal{Y} * \mathcal{Z}) \supseteq \mathrm{Cone}(\mathrm{coCone}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}), \mathcal{Y})$.

证明. 下证明 (1). 左式对应下图 (左) 蓝实线, 右式对应下图 (右) 红实线, 中式对应虚线:

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[d, blue] \\
X \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & M \arrow[d, blue] \\
X \arrow[r, blue] & Z \arrow[r, blue] & E
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, red] \arrow[d, red] & Y \arrow[r, red] \arrow[d, dashed] & M \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, dashed] \arrow[d, red] & B \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & M \\
Z \arrow[r, equal] & Z &
\end{tikzcd}
. \tag{5.1.3}
$$

由**定理** 3.1.1, 实线决定虚线; 反之, 虚线未必能决定实线. 上述包含通常无法改作等号. (2) 是 (1) 在反范畴中的对偶结论, 证明从略. □

定义 5.1.6. (余挠对). 称两个对象类 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 构成**余挠对**, 若 $\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{V}$, 且 $\mathcal{U} = {}^{\perp}\mathcal{V}$.

备注 5.1.7. 通常将 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 作为余挠对的固定顺序. 注意到 $\mathbb{E}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$.

引理 5.1.8. 对任意对象类 $\mathcal{X}$.

1. $({}^{\perp}\mathcal{X}, ({}^{\perp}\mathcal{X})^{\perp})$ 是余挠对, 称作 $\mathcal{X}$ **生成**的余挠对;

2. $({}^{\perp}(\mathcal{X}^{\perp}), \mathcal{X}^{\perp})$ 是余挠对, 称作 $\mathcal{X}$ **余生成**的余挠对.

证明. 依照 Galois 连接, 得 $({}^{\perp}(\mathcal{X}^{\perp}))^{\perp} = \mathcal{X}^{\perp}$, 以及 ${}^{\perp}(({}^{\perp}\mathcal{X})^{\perp}) = {}^{\perp}\mathcal{X}$. 证明细节从略. □

引理 5.1.9. 假定 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是余挠对, 则有如下结论:

1. $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 关于形变收缩 (**定义** 3.3.2) 封闭 (特别地, 关于直和项封闭);

2. $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 关于扩张封闭 (特别地, 关于直和封闭).

证明. 仅看 $\mathcal{U}$. (1). 记 $U_0 \xrightarrow{i} U \xrightarrow{p} U_0$ 复合为恒等, $U \in \mathcal{U}$, 则有恒等自然变换

$$
\mathbb{E}(U_0, (-)_{\mathcal{V}}) \xrightarrow{p^*} \mathbb{E}(U, (-)_{\mathcal{V}}) \xrightarrow{i^*} \mathbb{E}(U_0, (-)_{\mathcal{V}}). \tag{5.1.4}
$$

这一恒等自然变换通过零函子 $\mathbb{E}(U,(-)_{\mathcal{V}})$ 分解, 从而 $U_0 \in {}^{\perp}\mathcal{V} = \mathcal{U}$.
(2). 任取 conflation $U \rightarrowtail W \twoheadrightarrow U' \dashrightarrow$ $(U, U' \in \mathcal{U})$. 将长正合列 (**式** (2.2.14)) 限制在 $\mathcal{V}$ 上, 得

$$0 = \mathbb{E}(U',(-)|_{\mathcal{V}}) \to \mathbb{E}(W,(-)|_{\mathcal{V}}) \to \mathbb{E}(U,(-)|_{\mathcal{V}}) = 0. \tag{5.1.5}$$

因此, $\mathbb{E}(W,(-)|_{\mathcal{V}}) = 0$, 即 $W \in {}^{\perp}\mathcal{V} = \mathcal{U}$. □

为较自然地引入完备余挠对, 我们介绍以下定义.

定义 5.1.10. (预盖, 右逼近). 给定范畴中的对象类 $\mathcal{X}$. 对象 M 的一个 $\mathcal{X}$-预盖 (或称右 $\mathcal{X}$-逼近) 是指一个态射 $p : M^X \to M$ $(M^X \in \mathcal{X})$, 使得以下等价表述成立:

- (态射语言). 对任意 $q : X \to M$ $(X \in \mathcal{X})$, 存在 $q' : X \to M^X$, 使得 $p \circ q' = q$.
- (函子语言). $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(-, M^X) \xrightarrow{p\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((-)|_{\mathcal{X}}, M)$ 是函子范畴 $\mathrm{Funct}(\mathcal{X}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab})$ 的满态射.

余挠对给出一类特殊的预盖.

引理 5.1.11. 假定 $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}$. 若存在 $U \in \mathcal{U}$ 与 $V \in \mathcal{V}$ 使得有 conflation $V \overset{i}{\rightarrowtail} U \overset{p}{\twoheadrightarrow} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, 则 p 是 $\mathcal{U}$-预盖. 以此类方法构造的预盖称作**特殊预盖**.

证明. 将长正合列 (**式** (2.2.14)) 限制在 $\mathcal{U}$ 上, 得

$$((-)|_{\mathcal{U}}, V) \xrightarrow{i\circ -} ((-)|_{\mathcal{U}}, U) \xrightarrow{p\circ -} ((-)|_{\mathcal{U}}, C) \xrightarrow{\delta_\sharp} \mathbb{E}((-), V) = 0. \tag{5.1.6}$$

因此, 以上 $p \circ -$ 是满态射, p 满足**定义** 5.1.10 的函子定义式. □

对偶地, 可以定义预包 (左逼近) 与特殊预包 (特殊右逼近). 给定余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. 任取 M 的特殊预盖 (若存在), 记相应的 conflation 为

$$M^V \rightarrowtail M^U \twoheadrightarrow M \dashrightarrow; \tag{5.1.7}$$

任取 M 的特殊预包 (若存在), 记相应的 conflation 为

$$M \rightarrowtail M_V \twoheadrightarrow M_U \dashrightarrow . \tag{5.1.8}$$

定义 5.1.12. (完备余挠对). 称余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是**完备**的, 若所有对象均有特殊预盖和特殊预包, 即

$$\mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \mathcal{C} = \mathrm{coCone}(\mathcal{V}, \mathcal{U}). \tag{5.1.9}$$

定理 5.1.13. (若松技巧). 余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是完备的, 当且仅当以下两点成立:

1. 所有对象有特殊预盖;
2. 对任意对象 X, 存在 inflation $X \rightarrowtail V$, 其中 $V \in \mathcal{V}$.

证明. 先说明任意对象 X 存在特殊预包. 先由 (2) 构造 δ, 再由 (1) 构造 ε. 依照**定理** 3.1.1 作交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & M^V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & M^V \arrow[d, tail] & \\
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & M^U \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, two heads] & {} \\
X \arrow[r, tail] & V \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\varepsilon'"] & M \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{5.1.10}$$

由 $\mathcal{V}$ 关于扩张封闭, 得 $E \in \mathcal{V}$. □

记 $\omega := \mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ 为一类特殊的自垂直对象.

引理 5.1.14. 对任意 $U\in\mathcal{U}$ 与 $V\in\mathcal{V}$, 任意态射 $f:U\to V$ 通过 ω 中对象分解.

证明. 取 inflation $i:U\rightarrowtail U_V$. 长正合列表明 (i,V) 满, 故 f 通过 U_V 分解. 显然 $U_V\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\omega$. □

预盖和预包通常不唯一, $(-)_V$ 与 $(-)^U$ 更无法称作函子; 但 $\mathcal{C}/\omega$ 是函子. 实际上, 有以下是更精细的结论.

定理 5.1.15. 全子加法范畴的嵌入 $(\mathcal{U}/\omega)\to(\mathcal{C}/\omega)$ 具有有伴随 $(-)^U$.

证明. 对所有对象取定 conflation $M^V \overset{i}{\rightarrowtail} M^U \overset{p}{\twoheadrightarrow} M \dashrightarrow$. 下证明自然同构

$$(-\circ p):\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}/\omega}(U,M^U)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\omega}(U,M). \tag{5.1.11}$$

由正合列 $(U,M^U)\to(U,M)\to\mathbb{E}(U,M^V)=0$, 得 $(U,M^U)\to(U,M)$ 满, 这在加法商范畴中也是满射. 下只需证明对任意 $f:U\to M^U$, $[pf]=0$ 蕴含 $[f]=0$. 记 pf 通过 $W\in\omega$ 分解. 由 $\mathbb{E}(W,M^V)=0$, 存在 s 使得 ⟲ 所在的三角交换:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & W \arrow[d, "b"] \arrow[dl, dashed, "s"'] \\ M^V \arrow[r, tail, "i"] & M^U \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, dashed] & {} \end{tikzcd} . \tag{5.1.12}$$

此时 $p(sa-f)=0$. 由长正合列, $(sa-f)$ 通过 i 分解. 再由引理 5.1.14, $(sa-f)$ 通过 ω 中对象分解. 由于 sa 已通过 $W\in\omega$ 分解, 故 f 通过 ω 中对象分解. 因此 $[f]=0$. □

备注 5.1.16. 对偶可证, 全子加法范畴的嵌入 $\mathcal{V}/\omega\to\mathcal{C}/\omega$ 存在左伴随. 综合以上结果得

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}/\omega \arrow[r, shift left, hook, "\text{全子范畴}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}/\omega \arrow[l, shift left, "(-)^U"] \arrow[r, shift left, "(-)_V"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{V}/\omega \arrow[l, shift left, hook', "\text{全子范畴}"] \end{tikzcd} . \tag{5.1.13}$$

5.2 遗传余挠对

(投射对象, $\mathcal{C}$) 与 ($\mathcal{C}$, 内射对象) 是特殊的余挠对, 这类余挠对满足一些额外性质.

定义 5.2.1. (完备余挠对). 称余挠对 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是**遗传**的, 若 $\mathcal{U}$ 是消解的, 且 $\mathcal{V}$ 是余消解的.

1. 称全子范畴 $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{C}$ 是**消解**的, 若 $\mathcal{U}$ 包含一切投射对象且 $\mathrm{coCone}(\mathcal{U},\mathcal{U})=\mathcal{U}$;
2. 称全子范畴 $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{C}$ 是**余消解**的, 若 $\mathcal{V}$ 包含一切内射对象且 $\mathrm{Cone}(\mathcal{V},\mathcal{V})=\mathcal{V}$.

对余挠对而言, $\mathcal{U}$ ($\mathcal{V}$) 自动包含所有投射对象 (内射对象).

备注 5.2.2. 若 $0\in\mathcal{X}$, 则不必区分 $\mathrm{Cone}(\mathcal{X},\mathcal{X})\subseteq\mathcal{X}$ 与 $\mathrm{Cone}(\mathcal{X},\mathcal{X})=\mathcal{X}$. 关于 coCone 与 $*$ 的等式同理.

备注 5.2.3. 依照经验, 通常讨论的遗传余挠对往往也是完备的. 当然, 这并非推论. 若 $\mathcal{C}$ 不具有足够投射对象, 则 (投射对象, $\mathcal{C}$) 是遗传但非完备的.

给定完备余挠对 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$. 引理 5.1.14 说明 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\omega}(\mathcal{U}/\omega,\mathcal{V}/\omega)=0$.

命题 5.2.4. 类似定理 5.1.13, 我们给出遗传的单边判准. 假定 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是完备余挠对, 则以下六点等价:

1. $\mathcal{V}$ 是余消解的;
2. $\mathcal{U}$ 是消解的;
3. $\ker \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\omega}(\mathcal{U}/\omega, -) = \mathcal{V}/\omega$;
4. $\ker \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\omega}(-, \mathcal{V}/\omega) = \mathcal{U}/\omega$.
5. 对 $V \rightarrowtail \cdot \overset{p}{\twoheadrightarrow} \cdot$, $\mathbb{E}(\mathcal{U}, p)$ 是同构;
6. 对 $\cdot \overset{i}{\rightarrowtail} \cdot \twoheadrightarrow U$, $\mathbb{E}(i, \mathcal{V})$ 是同构.

证明. $(2 \to 1)$. 对任意 conflation $V_1 \rightarrowtail V_2 \twoheadrightarrow X$, 往证 $X \in \mathcal{V}$, 也就是任意 conflation $X \rightarrowtail A \twoheadrightarrow U$ 可裂. 依照 TR4' 构造下图

$$\begin{tikzcd}
& A^V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, dashed] & A^V \arrow[d, tail] & & \\
& W \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads, dashed, "q"'] \arrow[dl, bend right, dashed] & A^U \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads] & U \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
V_2 \arrow[r, two heads] & X \arrow[r, tail] & A \arrow[r, two heads] & U \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd} . \tag{5.2.1}$$

由 $\mathcal{U}$ 是消解的, 得 $W \in \mathcal{U}$. 由 $\mathbb{E}(W, V_1) = 0$, 得 q 关于 $V_2 \twoheadrightarrow X$ 分解. 从而 $q_*\delta = 0$. 这说明 conflation $X \rightarrowtail A \twoheadrightarrow U$ 可裂. $(1 \to 2)$ 是对偶的.

$(3 \to 1)$. 任取 conflation $V_1 \rightarrowtail V_2 \twoheadrightarrow X$, $U \in \mathcal{U}$ 以及任意态射 $f : U \to X$. 由 $\mathbb{E}(U, V_1) = 0$, 故 f 通过 V_2 分解, 从而通过某一 ω 中对象分解 (引理 5.1.14).

$(1 \to 3)$. 给定 X 使得任意 $U \to X$ 通过 ω 分解, 下证明 $X \in \mathcal{V}$. 依照 ET4 作下图

$$\begin{tikzcd}
& X^V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & X^V \arrow[d, tail, dashed] & & \\
& X^U \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, "q"] \arrow[dl, bend right, dashed] & (X^U)_V \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, dashed] & (X^U)_U \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
W \arrow[r, dashed] & X \arrow[r, tail, dashed] & E \arrow[r, two heads, dashed] & (X^U)_U \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd} . \tag{5.2.2}$$

由构造, $(X^U)_V \in \omega$. 由 $\mathcal{V}$ 余消解, 得 $E \in \mathcal{V}$. 由假定, q 通过某一 $W \in \omega$ 分解, 从而 $q_*\delta = 0$. 这说明 X 是 E 的直和项, 从而 $X \in \mathcal{V}$.

$(2 \leftrightarrow 4)$ 的证明是对偶的.

$(5 \to 1)$. 对任意 conflation $V_1 \rightarrowtail V_2 \twoheadrightarrow X$, $\mathbb{E}((-)|_{\mathcal{U}}, V_2)$ 是零函子, 当且仅当 $\mathbb{E}((-)|_{\mathcal{U}}, X) = 0$.

$(1 \to 5)$. 给定 conflation $V \rightarrowtail A \overset{p}{\twoheadrightarrow} B$. 对任意 $U \in \mathcal{U}$, 长正合列给出

$$0 = \mathbb{E}(U, V) \to \mathbb{E}(U, A) \xrightarrow{\mathbb{E}(U,p)} \mathbb{E}(U, B). \tag{5.2.3}$$

从而 $\mathbb{E}(U, p)$ 单. 下证明任意 $\delta \in \mathbb{E}(U, B)$ 都有 $\mathbb{E}(U, A)$ 中的原像. 由 ET4 作下图前三行:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & V \arrow[d, tail, dashed] & & \\
A \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, "p"] & A_V \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, dashed] & A_U \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, equal] & {} \\
B \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, dashed] & A_U \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] & {} \\
B \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads] \arrow[u, dashed, "\beta"] & U \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[u, dashed, "\gamma"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{5.2.4}$$

由 $\mathcal{V}$ 余消解, 故 $F \in \mathcal{V}$, 从而存在 β 使得下两行交换. 由 ET3 构造 γ, 则

$$\delta = \gamma^*\varepsilon = \gamma^*p_*\eta = p_*(\gamma^*\eta) \in \mathrm{im}\, p_*. \tag{5.2.5}$$

□

定义 5.2.5. (余挠三元组). 称 $(\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是余挠三元组, 若 $(\mathcal{T},\mathcal{U})$ 与 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 均为余挠对. 称余挠三元组是完备的 (遗传的), 若其对应的两个余挠对均是完备的 (遗传的).

引理 5.2.6. 给定完备的余挠三元组 $(\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V})$. 这一三元组是遗传的, 当且仅当 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{C}$ 的厚子范畴.

证明. 若 $\mathcal{U}$ 是厚子范畴, 则 $\mathrm{Cone}(\mathcal{U},\mathcal{U})=\mathcal{U}$. 依照单边定义**命题** 5.2.4, 得 $(\mathcal{T},\mathcal{U})$ 是遗传完备的余挠对. 对偶地, 由 $\mathrm{coCone}(\mathcal{U},\mathcal{U})=\mathcal{U}$ 知 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 也是遗传完备的余挠对.
反之, 若以上是遗传完备的余挠三元组, 则 $\mathcal{U}$ 是消解且余消解的. 由

$$\mathcal{U}*\mathcal{U}=\mathcal{U},\quad \mathrm{Cone}(\mathcal{U},\mathcal{U})=\mathcal{U},\quad \mathrm{coCone}(\mathcal{U},\mathcal{U})=\mathcal{U},\quad \mathcal{U}\text{ 对直和项封闭,} \tag{5.2.6}$$

知 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{C}$ 的厚子范畴. □

遗传完备的余挠三元组有一些精彩的性质.

定理 5.2.7. 给定遗传完备的余挠三元组 $(\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V})$, 恰好有

$$\mathcal{T}\cap\mathcal{U}=\text{投射对象},\quad \mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\text{内射对象}. \tag{5.2.7}$$

证明. 下证明任意 $P\in\mathcal{T}\cap\mathcal{U}$ 是投射对象, 即任意 conflation $A\rightarrowtail B\twoheadrightarrow P$ 可裂. 由 ET4' 构造下图

$$\begin{tikzcd}
B^V \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, dashed] & B^V \arrow[d, tail] & \\
E \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] & B^U \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads] & P \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads] & P
\end{tikzcd}. \tag{5.2.8}$$

由 $P\in\mathcal{U}$, 以及 $\mathcal{U}$ 是厚子范畴, 得 $E\in\mathcal{U}$. 由 $\mathbb{E}(P,E)=0$, 底行 conflation 可裂. 对偶地可证 $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ 恰是内射对象. □

推论 5.2.8. 若 Frobenius 范畴 $(\mathcal{C},\mathcal{P})$ 存在遗传完备的余挠三元组 $(\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V})$, 则全子范畴的包含 $\mathcal{U}/\mathcal{P}\to\mathcal{C}/\mathcal{P}$ 存在左右伴随 (备注 5.1.16).

推论 5.2.9. 若范畴存在遗传完备的余挠三元组, 则该范畴有足够的投射对象与内射对象.

证明. 对一切 $T\in\mathcal{T}$, 总有特殊的投射预盖 $T^U\twoheadrightarrow T$. 对一切 $V\in\mathcal{V}$, 总有特殊的内射预包 $V\rightarrowtail V_U$. 对 $U\in\mathcal{U}$, 总有特殊的投射预包 $U\rightarrowtail U_T$ 和特殊的内射预盖 $U^V\twoheadrightarrow U$. 特别地, 对任意对象 X 存在投射预盖 (下图左) 与内射预包 (下图右):

$$\begin{tikzcd}
(X^T)^V \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, equal] & (X^T)^V\oplus X^U \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & X^U \arrow[d, tail] \\
(X^T)^V \arrow[r, tail] & (X^T)^U \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, dashed] & X^T \arrow[d, two heads] \\
 & X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, tail, dashed] & \\
X_V \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads] & (X_V)_U \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] & (X_V)_T \arrow[d, equal] \\
X_U \arrow[r, tail] & X_U\oplus(X_V)_T \arrow[r, two heads] & (X_V)_T
\end{tikzcd}. \tag{5.2.9}$$

□

推论 5.2.10. $\mathcal{C}$ 是 Frobenius 外三角范畴, 当且仅当存在余挠四元组.

证明. $(\to)$. 取 $\mathcal{P}$ 为投射对象类, 则 $(\mathcal{C},\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{P})$ 是余挠四元组.
$(\leftarrow)$. 若由余挠四元组 $(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z},\mathcal{W})$, 则 $\mathcal{Y}\cap\mathcal{Z}$ 恰是投射对象, 也恰是内射对象 (**定理** 5.2.7). 依照推论 5.2.9, 知 $\mathcal{C}$ 有足够的投射对象与内射对象, 从而是 Frobenius 外三角范畴. □

以下引理给出 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{V}$ 的联系.

引理 5.2.11. 给定遗传完备的余挠三元组 $(\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V})$. $X\in\mathcal{T}$ 当且仅当其满足以下性质.

- 对任意 $\mathcal{V}$-预包对应的 conflation $M\overset{i}{\rightarrowtail}V\overset{p}{\twoheadrightarrow}N$, 任意态射 $X\to N$ 经 p 分解.

证明. ($\to$ 方向). 作以下 conflation 的交换图, 其中 λ 由预包的定义选取, 取 μ 使得 $\star$ 是同伦的推出拉回方块 (细节见**定理** 3.2.1):

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & N \arrow[d, "\mu"] \\ M \arrow[r, tail, "j"] & M_V \arrow[r, two heads, "q"] & M_U \end{tikzcd} . \tag{5.2.10}$$

任取 $X\in\mathcal{T}$ 与态射 $f:X\to N$. 结合引理 5.1.14 与**定理** 5.2.7, 复合态射 $X\xrightarrow{f}N\xrightarrow{\mu}M_U$ 通过某一投射对象 P 分解, 记作 $X\xrightarrow{a}P\xrightarrow{b}M_U$. 由投射对象的提升性作态射 c, 再有弱拉回的性质作态射 g:

$$\begin{tikzcd} & & & X \arrow[dll, bend right, "g"'] \arrow[dl, "f"'] \arrow[ddd, "a"] \\ M \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\lambda"] & N \arrow[d, "\mu"] & \\ M \arrow[r, tail, "j"] & M_V \arrow[r, two heads, "q"] & M_U & \\ & & & P \arrow[ul, "b"'] \arrow[ull, bend left, "c"] \end{tikzcd} . \tag{5.2.11}$$

g 即为所求.
($\leftarrow$ 方向). 若 X 满足上述性质, 下只需证明一切 $U\rightarrowtail E\twoheadrightarrow X$ 可裂. 先取 U 的特殊预包 δ, 其中 $U_V\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ 是内射对象. 任取分解 λ, 依照 ET3 取 μ, 得以下 conflation 的拉回:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & X \arrow[r, dashed, "\mu^*\delta"] \arrow[d, dashed, "\mu"] & {} \\ U \arrow[r, tail, "i"] & U_V \arrow[r, two heads, "p"] & U_U \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{5.2.12}$$

由 δ 是特殊预包, 依照假定知 μ 通过 p 分解. 因此 $\mu^*\delta=0$. □

5.3 态射观点

一些经验表明, 研究态射比研究对象更为方便. 例如, **定理** 2.4.1 是 $\mathbb{E}$-垂直关系在态射层面的推广. 若不涉及 conflation 或 $\mathbb{E}$-函子, 此处的范畴是一般的加法范畴.

定义 5.3.1. (态射的弱垂直关系). 称态射 f 与 g 是弱垂直的, 若对任意交换方块 (下图左), 总存在虚线态射使得下图右交换:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \cdot \end{tikzcd} . \tag{5.3.1}$$

常用的记号是 $f \pitchfork g$, 或 $f \boxslash g$.

备注 5.3.2. 之所以称之弱垂直, 是因为虚线处态射不必唯一. 弱垂直理论详见 [Joy] 的附录 D.

定义 5.3.3. (弱垂直对). 态射类 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 是弱垂直对, 若 $\mathcal{C}^{\pitchfork} = \mathcal{F}$, 且 $\mathcal{C} = {}^{\pitchfork}\mathcal{F}$. 类似引理 5.1.8 定义

1. $({}^{\pitchfork}\mathcal{S}, ({}^{\pitchfork}\mathcal{S})^{\pitchfork})$ 是由 $\mathcal{S}$ 生成的 (也称**纤维地生成的**) 弱垂直对;
2. $({}^{\pitchfork}(\mathcal{S}^{\pitchfork}), \mathcal{S}^{\pitchfork})$ 是由 $\mathcal{S}$ 余生成的 (也称**余纤维地生成**的) 弱垂直对.

良定义性由 Galois 连接保证.

命题 5.3.4. (伴随提升). 假定 $F \dashv G$ 是伴随函子, 则 $(Ff) \pitchfork g$ 当且仅当 $f \pitchfork (Gg)$.

证明. 从**??** 的视角转述命题即可. 自然同构不影响 "公共的原像" 之选取. □

引理 5.3.5. 给定态射类 $\mathcal{S}$, 以下是一些基本事实.

1. ${}^{\pitchfork}\mathcal{S}$ 包含一切同构, 同时在复合同构的意义下封闭.
2. ${}^{\pitchfork}\mathcal{S}$ 对形变收缩 (态射的形变收缩见**定理** 3.3.10) 封闭.

   证明. 假定 $f \pitchfork g$, f' 是 f 的形变收缩. 任取定交换方块 $\square : (\alpha, \beta) : f' \Rightarrow g$. 由 $f \pitchfork g$, 取 s 使得 $gs = \beta q$ 且 $sf = \alpha p$:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"] & \cdot \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & \cdot \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "j"] & \cdot \arrow[r, "q"] \arrow[urr, dashed, "s"] & \cdot \arrow[r, "\beta"] & \cdot \end{tikzcd} \tag{5.3.2}$$

   今断言 sj 给出交换方块 $\square$ 的提升. 检验得 $(sj)f' = sfi = \alpha pi = \alpha$, 且 $g(sj) = \beta qj = \beta$. □

3. ${}^{\pitchfork}\mathcal{S}$ 对范畴的推出 (若存在) 封闭.

   证明. 假定 $f \pitchfork g$, 且 f' 是 f 关于 m 的任意推出. 下证明交换方块 $\square : (\alpha, \beta) : f' \Rightarrow g$ 有提升 t:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"] & \cdot \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "n"] \arrow[urr, dashed, "s"] & \cdot \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dashed, "t"] & \cdot \end{tikzcd} . \tag{5.3.3}$$

   取 s 为 $f \pitchfork g$ 对应的提升态射, 由推出的泛性质取 t 使得 $tf' = \alpha$ 且 $tn = s$. 为说明 $gt = \beta$, 只需在右侧复合推出诱导的满态射 $(n\ f')$ 即可. □

4. ${}^{\pitchfork}\mathcal{S}$ 对任意余积 (若存在) 封闭.

   证明. 给定一族 $f_i \pitchfork g$. 由**命题** 5.3.4, 以下提升问题等价:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \in I} X_i \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\coprod_{i \in I} f_i"'] & A \arrow[d, "g"] \\ \coprod_{i \in I} Y_i \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X_i)_{i \in I} \arrow[r, "(\alpha \circ e_i)_{i \in I}"] \arrow[d, "(f_i)_{i \in I}"'] & (A)_{i \in I} \arrow[d, "(g)_{i \in I}"] \\ (Y_i)_{i \in I} \arrow[r, "(\beta \circ e_i)_{i \in I}"'] \arrow[ur, dashed] & (B)_{i \in I} \end{tikzcd} . \tag{5.3.4}$$

   右图所示的 $(X_i)_{i \in I}$ 与 $(Y_i)_{i \in I}$ 是离散范畴, 从而提升态射 $(s_i)_{i \in I}$ 可逐次构造. □

5. ${}^{\pitchfork}\mathcal{S}$ 对超限复合 (若存在) 封闭.

证明. 取定序数 α 与函子 $(X, f) : \alpha \to \mathcal{C}$. 此时 (X, f) 对应图

$$X_0 \xrightarrow{f_{1,0}} X_1 \xrightarrow{f_{2,1}} X_2 \xrightarrow{f_{3,2}} \cdots \xrightarrow{f_{\beta+1,\beta}} X_{\beta+1} \to \cdots. \tag{5.3.5}$$

称之超限复合, 若对极限序数 $\gamma \in \alpha$ (若存在) 总有 $\varinjlim_{\beta\in\gamma} X_\beta = X_\gamma$.
不妨假定 α 是极限序数, 且恒有 $f_\bullet \pitchfork g$. 下证明 $f_{\alpha,0} : X_0 \to \varinjlim_{\beta\in\alpha} X_\beta$ 也属于 ${}^{\pitchfork}g$. 显然恒等态射的超限复合是恒等, 不妨记 $X_0 = \varinjlim_{\beta\in\alpha}(X_0)_\beta$. 以下两个提升问题是等价的:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_{\beta\in\alpha}(X_0)_\beta \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varinjlim_{\beta\in\alpha}(f_{\beta,0})"'] & A \arrow[d, "g"] \\ \varinjlim_{\beta\in\alpha} X_\beta \arrow[r, "q"] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X_0)_{\beta\in\alpha} \arrow[r, "(p\circ e_i)_{i\in I}"] \arrow[d, "(f_{\beta,0})_{\beta\in\alpha}"'] & (A)_{i\in I} \arrow[d, "(g)_{i\in I}"] \\ (Y_\beta)_{\beta\in I} \arrow[r, "(q\circ e_i)_{i\in I}"'] \arrow[ur, dashed] & (B)_{i\in I} \end{tikzcd}. \tag{5.3.6}$$

以下对右图归纳地构造 s_β.

(a) 若 $\beta = 0$, 则 $f_{\beta,0} = 1_{X_0}$. 取 $s_0 := \alpha \circ e_0$ 即可.

(b) 若 s_β 被构造, 下构造 $s_{\beta+1} : t_\beta \circ f_{\beta+1,\beta}$ 如下图所示:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "s_0"] \arrow[d, "f_{\beta,0}"'] & & A \arrow[d, "g"] \\ X_\beta \arrow[r, "f_{\beta+1,\beta}"'] \arrow[urr, "s_\beta"] & X_{\beta+1} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "s_{\beta+1}"'] & B \end{tikzcd}. \tag{5.3.7}$$

(c) 若 β 是极限序数, 且 $(s_\bullet)_{<\beta}$ 均被构造, 则下图是交换图的滤过极限, 从而显然交换:

$$\begin{tikzcd} (X_0)_{<\beta} \arrow[r, "(s_0)_{<\beta}"] \arrow[d, "(f_{-,0})_{<\beta}"'] & (A)_{<\beta} \arrow[d, "(g)_{<\beta}"] \\ (X)_{<\beta} \arrow[r, "(q\circ e)_{<\beta}"'] \arrow[ur, dashed, "s_{<\beta}"] & (B)_{<\beta} \end{tikzcd}. \tag{5.3.8}$$

□

例子 5.3.6. 定义范畴向函子范畴的嵌入 $\mathfrak{t} : X \mapsto (0 \to X)$ 与 $\mathfrak{s} : X \mapsto (X \to 0)$. 给定余挠对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, 取 $\mathfrak{s}(\mathcal{U})$ 余生成的弱垂直对 $({}^{\pitchfork}(\mathfrak{s}(\mathcal{U})^{\pitchfork}), \mathcal{U}^{\pitchfork})$. 此时有如下结论.

1. 给定 conflation $V \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} C$, $V \in \mathcal{V}$, 则 $p \in \mathcal{U}^{\pitchfork}$. 由长正合列式 (2.2.11) 容易验证.

2. 若 $\mathfrak{t}(X) \in {}^{\pitchfork}(\mathfrak{s}(\mathcal{U})^{\pitchfork})$, 则 $X \in \mathcal{U}$.

证明. 对 X 构造特殊预盖 $X^V \rightarrowtail X^U \twoheadrightarrow X$. 由上一条, 以下提升问题有解:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed] \\ X^V \arrow[r, tail] & X^U \arrow[r, two heads] & X \end{tikzcd}. \tag{5.3.9}$$

这说明 conflation 可裂, 从而 $X \in \mathcal{U}$. □

这说明, 余挠对理论可以 "无损地" 嵌入弱垂直对理论中.

备注 5.3.7. 容易发现, 所有形如 $(Y \to 0)$ 的态射属于 $\mathfrak{s}(\mathcal{U})^{\pitchfork}$, 这一态射类的关键信息蕴含在 inflation 的 coCone-项中. 将余生成关系改作生成关系, 则有对偶的结论.

推论 5.3.8. 由例 5.3.6 与引理 5.3.5, $\mathcal{U}$ 对任意余积 (若存在) 封闭.

备注 5.3.9. 弱垂直理论的更多 "计算规则" 见 [JT06], 这在涉及幺半范畴或单纯集方法时尤为有用.

定义 5.3.10. (弱分解系统). 弱分解系统 (下简称 **WFS**) 是一个垂直对 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, 使得范畴中所有态射可表示为 $p \circ i \in \mathcal{F} \circ \mathcal{C}$.

依照经验, 直接计算 $\mathcal{C}^{\pitchfork}$ 往往是不切实际的. 以下是更常用的等价定义.

命题 5.3.11. $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 是 WFS 当且仅当下列条件成立.

1. $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{F}$ 对形变收缩封闭.

2. $\mathcal{C} \pitchfork \mathcal{F}$ 是一对弱垂直的态射.

3. 范畴中所有态射可表示为 $p \circ i \in \mathcal{F} \circ \mathcal{C}$

证明. $(\to)$ 方向是显然的. 下证明 $(\leftarrow)$ 方向. 对 $f \pitchfork \mathcal{F}$, 任取分解 $f = p \circ i$. 弱垂直性给出分解 s (下图左), 从而 f 是 i 的形变收缩 (下图右):

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "p"] \\ \cdot \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "s"] & \cdot \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] & \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, "s"] & \cdot \arrow[r, "p"] & \cdot \end{tikzcd} . \tag{5.3.10}$$

□

5.4 模型结构

模型结构理论的综述与多数经典文献可在 [Hov07] 中找到. 以下谈论的模型结构都是闭模型结构. 我们使用 $\mathcal{A}$ 表示全范畴. 若不涉及 conflation 或 $\mathbb{E}$-函子, 此处的范畴是含有零对象的范畴.

定义 5.4.1. 范畴 $\mathcal{C}$ 上的**闭模型结构**是指三个态射类 (Cofib, Weq, Fib), 满足如下定义:

1. (Cofib, Fib ∩ Weq) 与 (Cofib ∩ Weq, Fib) 是 WFS;

2. 对任意可复合的态射 f, g 与 $g \circ f$. 若两者属于 Weq, 则第三者也属于 Weq.

定义 5.4.2. 我们规范一些术语. 以下是五类基本态射.

- Cofib, Weq 与 Fib 三类态射分别称作**余纤维**, **弱等价**与**纤维**.

- 记 TCofib := Cofib ∩ Weq 为**平凡纤维**, TFib := Fib ∩ Weq 为**平凡余纤维**.

以下是五类基本对象.

- X 称作**余纤维对象**, 若 $0 \to X \in$ Cofib. 记作 $X \in \mathcal{C}$.

- X 称作**纤维对象**, 若 $X \to 0 \in$ Fib. 记作 $X \in \mathcal{F}$.

- X 称作**平凡余纤维对象**, 若 $0 \to X \in$ TCofib. 记作 $X \in \mathrm{T}\mathcal{C}$.

- X 称作**平凡纤维对象**, 若 $X \to 0 \in \mathsf{TFib}$. 记作 $X \in \mathsf{T}\mathcal{F}$.
- X 称作**平凡对象**, 若 $0 \to X \in \mathsf{Weq}$. 记作 $X \in \mathcal{W}$.

直接地, $\mathsf{T}\mathcal{C} = \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, $\mathsf{T}\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.

方便起见, 有时使用以下等价定义.

命题 5.4.3. 态射类 (Cofib, Weq, Fib) 构成闭模型结构, 当且仅当以下成立.

CM1 对任意可复合的态射 f, g 与 $g \circ f$. 若两者属于 Weq, 则第三者也属于 Weq.

CM2 三类态射对形变收缩封闭.

CM3 存在两组提升关系 Cofib $\pitchfork$ (Weq $\cap$ Fib) 与 (TCofib $\cap$ Weq) $\pitchfork$ Fib.

CM4 范畴中所有态射可表示为 $p \circ i \in$ (Weq $\cap$ Fib) $\circ$ Cofib 与 $p' \circ i' \in$ Fib $\circ$ (TCofib $\cap$ Weq).

证明. **定义** 5.4.1 的第二条即 CM1. **定义** 5.4.1 的第一条等价于 CM2-4 (**命题** 5.3.11). □

备注 5.4.4. **定义** 5.4.1 以对偶为先, 性质为后; **命题** 5.4.3 以性质为先, 对偶为后.

引理 5.4.5. 以下是一些直接的推论.

1. $\mathcal{W}$ 中对象之间的态射必是 Weq.

   证明. 对 $X, Y \in \mathcal{W}$, $0 \to X$ 与 $0 \to Y$ 属于 Weq. 由 CM1 可知 $X \to Y$ 也属于 Weq. □

2. Weq $=$ TFib $\circ$ TCofib.

   证明. 由 Weq $=$ Fib $\circ$ TCofib 与 CM1 得证. □

3. 模型结构的态射范畴也是模型结构, 态射范畴的 Cofib (Weq, Fib) 是 $\mathsf{Cofib}^{\to}$ ($\mathsf{Weq}^{\to}$, $\mathsf{Fib}^{\to}$). 更一般地, 部分模型的函子范畴也是模型范畴, 见 [Ree].

   证明. CM1 与 CM2 是直接的. 下验证 CM3 (的一侧), 取 $(i, i) \in \mathsf{Cofib}^{\to}$ 与 $(p, p) \in (\mathsf{Weq} \cap \mathsf{Fib})^{\to}$ 的交换方块, 存在以下虚线所示的态射使得所有胞腔交换:

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[d, "p"] \arrow[rrr, bend left, "m"] & C_1 \arrow[l] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & C_1' \arrow[r] \arrow[d, "i'"] & F_1' \arrow[d, "p'"] \\
F_2 \arrow[rrr, bend right, "n"'] & C_2 \arrow[l] \arrow[r, "g"] \arrow[ul, dashed] & C_2' \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & F_2'
\end{tikzcd}. \tag{5.4.1}$$

   最后验证 CM4 (的一侧). 对任意态射范畴的态射 (α, β), 取分解 $i, i' \in$ Cofib 与 $p, p' \in$ Weq $\cap$ Fib. 由原模型结构的 CM3, 存在虚线处态射使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "i"'] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] & \cdot \arrow[r, "p"'] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[d] \\
\cdot \arrow[r, "i'"] \arrow[rr, bend right, "\beta"'] & \cdot \arrow[r, "p'"] & \cdot
\end{tikzcd}. \tag{5.4.2}$$

   □

例子 5.4.6. (代换). 引入模型结构的一大动机是构造局部化. 试回忆 ([GZ67]) 分式给出的局部化范畴 $\mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$, 局部化范畴中的态射 $X \to Y$ 本质上拆解作 $X \Leftrightarrow X' \to Y$. 换言之, 先使用 "同构" 代换 X 为 X', 使得 X' 至 Y 的态射能被直接描述.

类似地, 模型范畴中的 $\mathcal{S}$-态射类是 Weq. 对任意对象 X, 对 $0 \to X$ 与 $X \to 0$ 使用 CM4 得

$$0 \xrightarrow{\text{Cofib}} F \xRightarrow{\text{TCofib}} X, \quad X \xRightarrow{\text{TFib}} C \xrightarrow{\text{Fib}} 0. \tag{5.4.3}$$

换言之, 任意对象 X 可被代换为余纤维对象 F 或纤维对象 C.

参考文献

[BK] Theo Bühler and Matthias Kunzer. Some elementary considerations in exact categories. URL: https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/excounter.pdf.

[BS01] Paul Balmer and Marco Schlichting. Idempotent Completion of Triangulated Categories. *Journal of Algebra*, 236(2):819–834, February 2001. doi:10.1006/jabr.2000.8529.

[Büh10] Theo Bühler. Exact categories. *Expositiones Mathematicae*, 28(1):1–69, January 2010. doi:10.1016/j.exmath.2009.04.004.

[Che] Xiao-Wu Chen. The Extension-lifting Lemma via Two-term Complexes. URL: http://home.ustc.edu.cn/~xwchen/USTC%20Algebra%20Notes%20Archiv/The%20Extension-Lifting%20lemma%20via%20two-term%20complexes.pdf.

[GZ67] Peter Gabriel and Michel Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1967. doi:10.1007/978-3-642-85844-4.

[Hap88] Dieter Happel. *Triangulated Categories in the Representation of Finite Dimensional Algebras*. Cambridge University Press, 1 edition, February 1988. URL: https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/AD4EA5E6215A0B586678B10B2D417F74/9780511629228c1_p1-56_CBO.pdf/triangulated_categories.pdf, doi:10.1017/CBO9780511629228.

[Hov07] Mark Hovey. *Model Categories*. American Mathematical Soc., 2007.

[Joy] André Joyal. The theory of quasi-categories and its applications. URL: https://mat.uab.cat/~kock/crm/hocat/advanced-course/Quadern45-2.pdf.

[JT06] Andre Joyal and Myles Tierney. Quasi-categories vs Segal spaces, November 2006. arXiv:math/0607820, doi:10.48550/arXiv.math/0607820.

[Kel82] G. M. Kelly. *Basic Concepts of Enriched Category Theory*. Number 64 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 1982. URL: http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html.

[Kel96] Bernhard Keller. Derived Categories and Their Uses. In *Handbook of Algebra*, volume 1, pages 671–701. Elsevier, 1996. doi:10.1016/S1570-7954(96)80023-4.

[LC07] Jue Le and Xiao-Wu Chen. Karoubianness of a triangulated category. *Journal of Algebra*, 310(1):452–457, April 2007. doi:10.1016/j.jalgebra.2006.11.027.

[May] John P. May. The axioms for triangulated categories. URL: https://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/Triangulate.pdf.

[Mit65] Barry Mitchell. *Theory of Categories*. Academic Press, 1965. URL: https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/mitchell.pdf.

[Mur07] Daniel Murfet. Triangulated categories part i, April 2007. URL: http://therisingsea.org/notes/TriangulatedCategories.pdf.

[Nee91] Amnon Neeman. Some new axioms for triangulated categories. *Journal of Algebra*, 139(1):221–255, May 1991. doi:10.1016/0021-8693(91)90292-G.

[Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated Categories*. Number no. 148 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, 2001. URL: https://homepage.mi-ras.ru/~akuznet/homalg/Neeman%20Triangulated%20categories.pdf.

[NP19] Hiroyuki Nakaoka and Yann Palu. Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, LX(2):117–193, 2019. arXiv title "Mutation via Hovey twin cotorsion pairs and model structures in extriangulated categories". URL: https://hal.science/hal-02136919.

[Pro] Stacks Project. Lemma 12.7.1 (0DLP)—The Stacks project. URL: https://stacks.math.columbia.edu/tag/0DLP.

[Ree] C L Reedy. HOMOTOPY THEORY OF MODEL CATEGORIES.

[RZ21] Shi Rong and Pu Zhang. Strong version of Snake Lemma in exact categories. *Homology, Homotopy and Applications*, 23(2):151–163, 2021. doi:10.4310/HHA.2021.v23.n2.a9.

[Ver96] Jean-Louis Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. Number 239 in Astérisque. Société mathématique de France, 1996. URL: https://www.numdam.org/item/AST_1996__239__R1_0/.

[Wis] Jonathan Wise. A A Non-elementary Proof of the Snake Lemma. URL: https://ncatlab.org/nlab/files/Wise-SnakeLemma.pdf.

[Yon60] Nobuo Yoneda. On Ext and exact sequences. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 8:507–576, 1960. URL: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=225854.