复矩阵特征根的重要工具: Gershgorin 圆盘

Definition 给定 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 对 $1 \le k \le n$, 定义复平面 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上的第 i 个闭圆盘如下:

- 圆盘的中心是 $a_{i,i} \in \mathbb{C}$,
- 圆盘的半径是 $\sum_{1\le j\le n,\ 且\ j\ne i} |a_{i,j}|$.

以上定义了第 i 个 Gershgorin 圆盘, 记作

$$D_i = \left\{ z : |z - a_{i,i}| \le \sum_{1\le j\le n,\ 且\ j\ne i} |a_{i,j}| \right\}.$$

Problem 5 (Gershgorin 圆盘定理) 对上述复方阵 A, 任取特征值 λ 和相应特征向量 v, 满足 $Av = \lambda v$.

1. 假定 v 中第 i 个分量模长最大, 证明 $\lambda \in D_i$.

> 直接计算得 $\lambda v_i = \sum_{1\le j\le n} a_{i,j} v_j$. 由于向量 Av 的第 i 个分量模长最大 (因此 $v_i \ne 0$), 计算得
>
> $$|\lambda - a_{i,i}| = \frac{|\sum_{1\le j\le n} a_{i,j} v_j|}{|v_i|} \le \sum_{1\le j\le n} |a_{i,j}| \cdot \frac{|v_i|}{v_i} \le \sum_{1\le j\le n} |a_{i,j}|.$$

2. 作为推论, $\bigcup_{i=1}^n D_i$ 中包含了 A 的所有特征值.

3. 记复矩阵 $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 尝试求出 A 的所有特征根, 并画出所有的 Gershgorin 圆盘. 对 A^T 作类似的操作.

4. 假定 A 与 B 是可对角化的 n-阶复方阵. 证明: 对 $t \in [0,1]$, 存在复平面上连续的道路 $\{\lambda_i : [0,1] \to \mathbb{C}\}_{i=1}^n$, 满足

   1. $\{\lambda_i(0)\}_{i=1}^n$ 恰是 A 的所有特征值;
   2. $\{\lambda_i(1)\}_{i=1}^n$ 恰是 B 的所有特征值;
   3. $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^n$ 是 $(1-t)A + tB$ 的特征值.

   思考: 对某些 $t \in (0,1)$, 矩阵 $(1-t)A + tB$ 未必可对角化. 此时的特征道路应作何种调整?

> 依照 ε-δ 语言的论证, 这是可去间断点. 所以不用做任何调整.

5. 假定 A 可对角化, 且 $\bigcup_{i=1}^n D_i$ 有两个连通分支 $\bigcup_{i=1}^k D_i$ 与 $\bigcup_{i=k+1}^n D_i$. 证明: 则第一个连通分支恰包含 k 个特征值, 第二个连通分支包含 $n-k$ 个特征值.

> 记 Λ 是 A 的对角部分, $N := A - \Lambda$ 是对角线全零的矩阵. 定义 $A^{(t)} = \Lambda + tN$, 记第 i 个圆盘为 $D_i^{(t)}$. 对任意 $t \in [0,1]$ 总有
>
> $$\underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^k D_i^{(t)}\right)}_{\text{记作集合 } M^{(t)}} \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i=k+1}^n D_i^{(t)}\right)}_{\text{记作集合 } N^{(t)}} = \emptyset.$$
>
> $M^{(0)}$ 中包含 k 个特征值, 依照连续性, $M^{(t)}$ 中恰好包含 k 个特征值. $N^{(t)}$ 亦然.

6. 假定 A 的 n 个圆盘两两不交, 则 A 一定可对角化, 且每一圆盘中恰好包含一个特征值.

> 同上, 将 n 个离散的点连续变换作 n 个两两不交的闭圆盘.

Problem 6 以下研究复矩阵的幂方问题.

1. 找出所有 2×2 的复矩阵 A, 使得不存在 $B^2=A$. 使用 Jordan 标准型, 将这个结论推广至 $n\times n$ 阶的复矩阵.

> 论断: 2×2 复矩阵存在平方根, 当且仅当矩阵不相似于 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.
>
> 1. 一方面, 矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 不存在平方根. 若此类矩阵有平方根 Q, 则 Q 幂零且非零. 从而 $Q\sim\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. 这与 $Q^2\neq O$ 矛盾.
> 2. 另一方面, 所有可对角化矩阵存在平方根, 所有相似于 $J_2(\lambda)$ ($\lambda\neq 0$) 的矩阵存在平方根.
>
> - n-维情形: 仅需关注幂零部分. 若幂零矩阵 N 存在平方根, 当且仅当 N 是幂零矩阵的平方, 亦当且仅当 $J_1(0)$ 的数量不小于所有 $J_{\geq 2}(0)$ 的数量.
>
> 提供一个计算矩阵级数的一般方法:
>
> $$f(J_n(\lambda))=\begin{pmatrix}f(\lambda)&f'(\lambda)&\frac{f''(\lambda)}{2}&\cdots&\frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\\0&f(\lambda)&f'(\lambda)&\cdots&\frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!}\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&f(\lambda)&f'(\lambda)\\0&0&0&0&f(\lambda)\end{pmatrix}.$$
>
> 假定 A 是 n 阶矩阵, f 是解析函数 (依照收敛的形式幂级数定义的函数). 那么 $f(A)$ 仅与 f 的前 $(n-1)$ 阶导数相关.

2. 假定 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 若对一切 $1\leq i\leq n$ 都有

$$2|a_{i,i}|>\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|,$$

则 A 是可逆矩阵.

> 依照圆盘定理, 0 不属于任何一个圆盘, 从而矩阵可逆.

3. 假定 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 称 A 是有趣的, 当且仅当对一切 $1\leq i\leq n$, 都有

$$2a_{i,i}>\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|.$$

试用圆盘定理证明以下是单射:

$$n\text{-阶有趣矩阵}\to\mathbb{R}^{n\times n},\quad A\mapsto A^2.$$

> 依照圆盘定理, $\sigma(A)\subset\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>0\}$. 由于
>
> $$\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>0\}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto z^2$$
>
> 是单射, 故以上对应的逆映射可以直接写出.

4. 假定 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 称 A 是奇妙的, 当且仅当对一切 $1\leq i\leq n$, 都有

$$3|a_{i,i}|>\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|.$$

试用圆盘定理证明以下是单射:

$$n\text{-阶奇妙矩阵}\to\mathbb{R}^{n\times n},\quad A\mapsto A^3.$$

> 类似地, $\sigma(A)$ 中特征向量的辐角属于 $(-30^\circ,30^\circ)\cup(\pi-30^\circ,\pi+30^\circ)$, 以这一开区域为定义域的立方函数 $z\mapsto z^3$ 是单射.

5. 称一个复方阵 A 是本质正的, 若 A 的所有特征根都是正实数. 试证明: 若 A 与 B 都是本质正的矩阵, 且 $A^2=B^2$, 则 $A=B$.

> 考虑 $A(A-B)=(A-B)(-B)$. 由于 $\sigma(A)\cap\sigma(-B)=\emptyset$, 因此 $AX=X(-B)$ 只有零解. 这说明 $A=B$.

6. 若 A 与 B 是本质正的, 且 $A^3=B^3$, 则 $A=B$.

> 提示: 记 $\omega_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ 是三次单位根, 考虑方程组
>
> $$\begin{cases} A(A^2+\omega_1AB+\omega_1^2B^2)=(A^2+\omega_1AB+\omega_1^2B^2)(\omega B); \\ A(A^2+\omega_2AB+\omega_2^2B^2)=(A^2+\omega_2AB+\omega_2^2B^2)(\omega B). \end{cases}$$
>
> 特别地, 可以对本质正的条件做一些弱化, 例如本题第 4 小问.

7. 证明: 本质正的矩阵有唯一的本质正的 n-次方根.

> 先考虑 $n=p$ 是素数. 记 w 是 p-次单位根, 则对一切 $1\le k\le p-1$,
>
> $$\begin{aligned} & A(A^{p-1}+w^kA^{p-2}B+w^{2k}A^{p-3}B^2+\cdots+w^{(p-1)k}B^{p-1}) \\ = {} & (A^{p-1}+w^kA^{p-2}B+w^{2k}A^{p-3}B^2+\cdots+w^{(p-1)k}B^{p-1})(w^kB). \end{aligned}$$
>
> 因此, $A^{p-1}+w^kA^{p-2}B+w^{2k}A^{p-3}B^2+\cdots+w^{(p-1)k}B^{p-1}=O$. 写作线性方程组, 得
>
> $$(w^{i\cdot(j-1)})_{1\le i\le(p-1),\,1\le j\le p}\cdot\begin{pmatrix} A^{p-1} \\ A^{p-1}B \\ \vdots \\ B^{p-1}\end{pmatrix}_p=\begin{pmatrix} O \\ O \\ \vdots \\ O\end{pmatrix}_{p-1}.$$
>
> 此处, $\{A^lB^{p-1-l}\}_{0\le l\le p-1}$ 是 p 个未知量. 左侧矩阵 $W_{(p-1)\times p}=(w^{i\cdot(j-1)})$ 形如增广矩阵 $(\mathbf{1}\ \ V)$, V 是 p-阶 Vandermonde 方阵 (可逆). 因此, 存在行初等变换, 使得
>
> $$W=(\mathbf{1}\ \ V)\xrightarrow{\text{行初等变换}}(\mathbf{v}\ \ I)\quad(\text{存在唯一的 }\mathbf{v}\in\mathbb{C}^{p-1}).$$
>
> 由于行变换不改变列线性关系, 结合 $\mathbf{1}\in N(W)$ 知 $\mathbf{v}=-\mathbf{1}$. 此时, 方阵组的最后一个等式是 $A^{p-1}-B^{p-1}=O$.
>
> ○ (关键结论) 我们证明了对任意素数 p, 若本质正矩阵满足 $A^p=B^p$, 则 $A^{p-1}=B^{p-1}$.
>
> 记 $S(p)$ 是命题: 本质正的矩阵有唯一的本质正的 n-次方根. 那么
>
> $$S(a)\text{ 真, 且 }S(b)\text{ 真}\implies S(a\cdot b)\text{ 真.}$$
>
> 上一条引理说明
>
> $$S(p-1)\text{ 真}\implies S(p)\text{ 真}\quad(\forall p\in\text{ 素数}).$$
>
> 从而对所有 $n\ge 2$, $S(n)$ 真.