2025 年秋组会讲义 “外三角范畴”

张陈成

2025 年秋

最后更新于 2025 年 9 月 20 日.

目录

6 同伦范畴

6.1 局部化

局部化与分式计算的一般理论见 [GZ67].

定义 6.1.1. (局部化). 给定范畴 $\mathcal{C}$ 与态射类 S. 对任意范畴 $\mathcal{D}$, 定义 $\mathrm{Funct}_S(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 为函子范畴 $\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 的全子范畴, 其对象为将 S 中的态射映为 $\mathcal{D}$ 中同构的函子.

1. 称函子 $Q_1:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_1$ 是 $\mathcal{C}$ 关于 S 的弱局部化, 若以下是函子范畴间的等价

$$Q_1^*:\mathrm{Funct}(\mathcal{C}_1,\mathcal{D})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Funct}_S(\mathcal{C},\mathcal{D}),\quad F\mapsto F\circ Q_1. \tag{6.1.1}$$

2. 称函子 $Q_2:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_2$ 是 $\mathcal{C}$ 关于 S 的严格局部化, 若以下是函子范畴间的同构

$$Q_2^*:\mathrm{Funct}(\mathcal{C}_2,\mathcal{D})\xrightarrow{\cong}\mathrm{Funct}_S(\mathcal{C},\mathcal{D}),\quad F\mapsto F\circ Q_2. \tag{6.1.2}$$

例子 6.1.2. 给定范畴 $\mathcal{C}$ 与态射类 S, 其 Gabriel-Zisman 局部化 ([GZ67]) 的构造如下.

1. 我们保持范畴 $\mathcal{C}$ 对象类, 形式地加入 S 中态射的逆元, 得范畴 $\mathcal{C}_S$. 具体地, 子范畴 $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{C}_S$ 具有相同对象类. 对任意 X 与 Y,

$$(X,Y)_{\mathcal{C}_S}=(X,Y)_{\mathcal{C}}\sqcup((Y,X)_{\mathcal{C}}\cap\mathcal{S}). \tag{6.1.3}$$

依照无交并的定义, 我们将 (X,Y) 中态射表示作二元组 (n,f):

$$(X,Y)_{\mathcal{C}_S}=\{(0,f)\mid f\in(X,Y)_{\mathcal{C}}\}\cup\{(1,s)\mid s\in(Y,X)_{\mathcal{C}}\}. \tag{6.1.4}$$

这是类 $\{0,1\}\times\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 的一个子集. 依照 $\mathcal{C}$ 中态射复合关系约定

(a) $(0,1_X)$ 是 $X\in\mathcal{C}_S$ 的恒等态射;

(b) $(0,g)\circ(0,f)\sim(0,g\circ f)$, 若 g 与 f 可复合.

此时, $\mathcal{C}_S$ 是一个范畴, 但未必是局部小的. 存在子范畴

$$\iota:\mathcal{C}\to\mathcal{C}\to\mathcal{C}_S,\quad X\mapsto X,\quad f\mapsto(0,f). \tag{6.1.5}$$

2. 定义以下规则生成的等价关系 $\sim$:

† $(1,s)\circ(0,s)\sim(0,1_X)$ 与 $(0,s)\circ(1,s)\sim(0,1_Y)$, 若 $s:X\to Y$ 属于 S.

得商函子 $\pi:\mathcal{C}_S\to(\mathcal{C}_S)/\sim$.

3. 将复合函子 $\mathcal{C}\xrightarrow{\iota}\mathcal{C}_S\xrightarrow{\pi}(\mathcal{C}_S)/\sim$ 定义作 Gabriel-Zisman 局部化.

商函子 π 是以类为指标范畴的 "滤过余极限" 在 NBGC (von Neumann–Bernays–Gödel 与类的选择公理) 公理体系下合理的; 但是, 我们无法在集合视角中检验 $\mathcal{C}_S$ 中两个态射在局部化范畴中相同与否.

实际上, Gabriel-Zisman 局部化是严格的.

引理 6.1.3. 记 $Q := \pi \circ \iota : \mathcal{C} \to (\mathcal{C}_S)/\sim$ 是例 6.1.2 定义的函子, 则有函子范畴的同构

$$Q^* : \mathrm{Funct}((\mathcal{C}_S)/\sim, \mathcal{D}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Funct}_S(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \quad F \mapsto F \circ Q. \tag{6.1.6}$$

证明. (对象 (函子) 映满). Q 已将 S 映作同构, $Q^* : \mathrm{Funct}((\mathcal{C}_S)/\sim, \mathcal{D}) \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 的像必然在全子范畴 $\mathrm{Funct}_S(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中. 任取 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 使得 $F(S)$ 是同构, 取 F 关于 ι 的分解

$$F_1 : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}, \quad X \mapsto FX, \quad (0, f) \mapsto Ff, \quad (1, s) \mapsto (Fs)^{-1}. \tag{6.1.7}$$

函子 F_1 将 † 中等价关系映作恒等. 故存在唯一函子 $F_2 : (\mathcal{C}_S)/\sim \to \mathcal{D}$ 使得 $F_1 = F_2 \circ \pi$. 此时, $F = F_2 \circ Q$, 即 Q^* 在对象层面上是满的.

(态射 (自然变换) 全). 取 $\eta : F \to G$ 属于 $\mathrm{Funct}_S(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. 自然变换是一族由 $\mathcal{C}$ 中对象标记的 $\mathcal{D}$ 中的态射, 故只需检验 $\eta : F_1 \to G_1$ 与 $F_2 \to G_2$ 是自然变换即可. 对前者, 任取 $s : X \to Y$ 属于 S, 以下是交换图:

$$\begin{tikzcd} F_1Y \arrow[rr, bend left, "(F_1s)^{-1}"] & X & F_1X \\ G_1Y \arrow[u, "\eta_Y"] \arrow[rr, bend right, "(G_1s)^{-1}"'] & Y \arrow[u, "{(1,s)}"] & G_1X \arrow[u, "\eta_X"] \end{tikzcd} . \tag{6.1.8}$$

对后者, 交换方块在 “商” 的意义下必定也是交换的.

(态射 (自然变换) 忠实). 证明 Q^* 在态射 (自然变换) 层面全时, 我们注意到 $\{\eta_X\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} : F \circ Q \to F' \circ Q$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一族态射. 由于 Q 不改变对象类, 自然无法改变一族 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$-指标的 $\mathcal{D}$ 中态射, 从而 η 在 Q^* 下的原像只能是自身.

(对象 (函子) 单地映上). 若 $F \circ Q$ 与 $F' \circ Q$ 是相同的函子, 则 F 与 F' 在对象层面相同. 假定 $\eta : F \circ Q \to F' \circ Q$ 与 $\theta : F \circ Q \to F \circ Q$ 是互逆的自然变换, 则存在唯一的原像 $\overline{\eta} : F \to F'$ 与 $\overline{\theta} : F' \to F$. 显然 $\overline{\theta} \circ \overline{\eta}$ 与 $\overline{\eta} \circ \overline{\theta}$ 可以取作恒等自然变换, 从而只能取作恒等变换. □

备注 6.1.4. 式 (6.1.6) 是如下泛性质的决定式.

- 对任意函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 使得 $F(S)$ 是同构, 存在唯一函子 $\overline{F} : (\mathcal{C}_S)/\sim \to \mathcal{D}$ 使得 $F = \overline{F} \circ Q$.

此处谈及的 “泛性质” 不宜定义作顿范畴中的初/终对象, 应理解作普适函子问题的解 (见 solution d'un problème d'application universelle, [DG67]).

推论 6.1.5. $FQ = GQ$ 当且仅当 $F = G$. 函子 Q 类似 “满态射”.

备注 6.1.6. (关于类的滤过). 假定 $\mathcal{I}$ 是一个图, 其对象与态射构成集合. $\mathcal{C}$ 存在任意余极限. 函子 $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 的余极限是 $\coprod_{i \in I} F(i)$ 的商, 其等价关系由 $F(I)$ 中交换图生成. 通常地, 唯有求出具体的余极限 $\varinjlim_I F$, 我们才能检验 $\coprod_{i \in I} F(i)$ 中两个元素是否等价.

若 $\mathcal{I}$ 是滤过的, 则无需求解余极限即可判断 $\coprod_{i \in I} F(i)$ 中两个元素是否等价. 事实上, $a_i \in X_i$ 与 $a_j \sim X_j$ 在滤过余极限对象中等价, 当且仅当存在一个包含 i 与 j 的有限子图 I_0, 使得 a_i 与 a_j 在 $\varinjlim_{I_0} F$ 中等价. 在 Gabriel-Zisman 局部化中, I 标记了范畴 $\mathcal{C}_S$ 的点与边, 以及条件 † 蕴含的交换图. I 通常是真类. 若 I 是滤过的 (κ-滤过的), 则 $\mathcal{C}_S$ 中两个态射在局部化范畴中态射的等价性可以在某个有限子图 (基数小于 κ 的子图) 中检验. 通常来说, Gabriel-Zisman 局部化并非滤过的.

即便局部化可以被 “滤过地” 定义, 局部化范畴的 Hom-类未必是集合.

例子 6.1.7. 定义 $\mathcal{C}$ 为如下范畴: 对象类是 $\{A, B\} \sqcup \mathcal{X}$, 其中 $\mathcal{X}$ 是真类. 态射有且仅有以下几类:

1. 所有恒等态射, 2. 对任意 X, $(A,X)_{\mathcal{C}} = \{f_X\}$, 3. 对任意 X, $(B,X)_{\mathcal{C}} = \{g_X\}$.

记 $\mathcal{S} = \{i_X\}_{X \in \mathcal{X}}$. 此时, $(A,B)_{\mathcal{C}_S/\sim}$ 是一个真类.

例子 6.1.8. (分式计算). 第一手资料见 [GZ67]. 其思想是将局部化范畴中 "锯齿状" 的态射化简作分式, 且两个分式的等价关系可以在有限步骤内检验. 局部化范畴中的一个态射即一个分式所在的等价类, 而这一等价类又是一个滤过系统, 该态射可表示为 "分子部分" 的滤过余极限. 由分式定义导出范畴 (Deligne 方法) 的例子见 [Kel96].

定义 6.1.9. (局部化的记号). 以下规定几类局部化记号.

1. (GZ 局部化). 通常记作 $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$, 即**例** 6.1.2 定义的 $\pi \circ \iota : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S/\sim$. 泛性质表述见备注 6.1.4.
2. (分式). 如果 S 是乘法系, 则由左 (右) 分式构造的局部化范畴记作 $S^{-1}\mathcal{C}$ ($LS^{-1}\mathcal{C}$).
3. (加法商). 加法商通常用 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 表示 (**定理** 4.5.4), 之后将证明这是局部化.
4. (同伦范畴). 给定模型范畴 $\mathcal{C}$, 其同伦范畴记作 $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$, 定义为 $\mathcal{C}$ 关于弱等价类的局部化.

6.2 加法局部化

一个棘手的问题是, 加法范畴的 GZ 局部化范畴未必是加法范畴.

例子 6.2.1. 记 $\mathcal{C}$ 是域 k 中的有限维向量空间范畴, 取 $S = \{0 \to k\}$. $\mathcal{C}[S^{-1}]$. 容易验证, $f \in \mathcal{C}$ 是局部化范畴中的零态射, 当且仅当 $\mathrm{rank}(f) \leq 1$. $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 显然不是加法范畴.

为给出 Q 是加法函子的充分条件, 先作如下准备.

定义 6.2.2. (积范畴). 将如下范畴定义作范畴 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的积.

1. 对象类是 $\mathsf{Ob}(\mathcal{A}) \times \mathsf{Ob}(\mathcal{B})$ (类的 Catersian 积).
2. 态射类是 $\mathsf{Mor}(\mathcal{A}) \times \mathsf{Mor}(\mathcal{B})$ (类的 Catersian 积).
3. 恒等态射与态射复合按分量定义.

引理 6.2.3. $\mathrm{Funct}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$ 恰好包含由 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 至 $\mathcal{C}$ 的双函子.

证明. 给定 $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, 下检验 $F(A, -) : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是函子.

1. 对象的对应是 $B \mapsto F(A,B)$, 态射的对应是 $f : B \to B' \mapsto F(1_A, f)$.
2. 复合律通过积范畴的态射复合 $(1_A, g) \circ (1_A, f) = (1_A, g \circ f)$ 检验, 单位律类似可验证.

对 $f : A \to A'$ 与 $g : B \to B'$, 有等式

$$F(f, 1_{B'}) \circ F(1_A, g) = F(f,g) = F(1_{A'}, g) \circ F(f, 1_B). \tag{6.2.1}$$

□

备注 6.2.4. 由以上引理, 我们似乎更愿意将 A 写作态射 1_A. 依照经验, 若某问题涉及双函子, 则 "应当" 将对象提升作态射.

引理 6.2.5. (范畴的 Curry 化). 以下是函子范畴的同构

$$\mathrm{Funct}(\mathcal{A}\times\mathcal{B},\mathcal{C})\cong\mathrm{Funct}(\mathcal{A},\mathrm{Funct}(\mathcal{B},\mathcal{C})),\quad F\mapsto(A\mapsto(B\mapsto F(A,B))). \tag{6.2.2}$$

证明. 给定 $F:(A\times B)\to C$, 记对应所得的函子为

$$\mathfrak{F}:\mathcal{A}\to\mathrm{Funct}(\mathcal{B},\mathcal{C}),\quad A\mapsto F(A,-). \tag{6.2.3}$$

下证明 $F\mapsto\mathfrak{F}$ 是函子.

1. (对象). 引理 6.2.3 说明 $F(A,-):\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 是一个函子.
2. (态射). 给定自然变换 $\theta_{(?,-)}:F\Rightarrow G$, 则 $\theta_{(A,-)}:\mathfrak{F}(A)\to\mathfrak{G}(A)$ 也是自然变换 (这无非将 $\mathcal{C}$ 中态射族的指标集由 $\{(?,-)\}$ 限制为 $\{(A,-)\}$).
3. (复合律与恒等律). 容易验证. 证明的关键步骤是把双函子遗忘成单函子.

反之, 我们由 $\mathfrak{F}$ 对应定义双函子 F. 困难之处是检验 F 的双函子性. 任取 $(f,g):(A,B)\to(A',B')$,

$$\begin{aligned}\theta_{(A',B')}\circ F(f,g)&=\theta_{A'}(B')\circ(\mathfrak{F}(f))(g)=\theta_{A'}(B')\circ(\mathfrak{F}(f))(\mathrm{id}_{B'})\circ(\mathfrak{F}(\mathrm{id}_A))(g) &(6.2.4)\\&=(\mathfrak{G}(f))(\mathrm{id}_{B'})\circ\theta_A(B')\circ(\mathfrak{F}(\mathrm{id}_A))(g)=(\mathfrak{G}(f))(\mathrm{id}_{B'})\circ(\mathfrak{G}(\mathrm{id}_A))(g)\circ\theta_A(B) &(6.2.5)\\&=(\mathfrak{G}(f))(g)\circ\theta_A(B)\qquad=G(f,g)\circ\theta_{(A,B)}. &(6.2.6)\end{aligned}$$

复合律与恒等律验证从略. □

例子 6.2.6. 记 I 为图, k 为域 (视作单点范畴). 积范畴 $k\times I$ 即路代数 kI. 例如, 对 $v\in\mathrm{Ob}(I)$ 与 $e\in\mathrm{Ob}(I)$, 则 $(1_k,1_v)$ 与 $(1_k,e)$ 分别是路代数基底中的点与边. 由式 (6.2.2), 得函子范畴的同构:

$$\mathrm{Funct}(kI,\mathbf{Ab})\cong\mathrm{Funct}(I,\mathrm{Funct}(k,\mathbf{Ab})). \tag{6.2.7}$$

左侧等价于左 kI-模范畴; 右侧等价于 I 的左 k-(模) 表示范畴. 通常要求 I 是有限图, 从而路代数 kI 有单位元.

定理 6.2.7. (积范畴的局部化). 给定范畴 $\mathcal{C}_1$ 与 $\mathcal{C}_2$, 分别取包含所有同构的态射类 S_1 与 S_2, 则 $S_1\times S_2$ 是 $\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2$ 的态射类, 且包含所有同构. 设 $Q_i:\mathcal{C}_i\to\mathcal{C}_i[S_i^{-1}]$ 是 $\mathcal{C}_i$ 关于 S_i 的 GZ 局部化, 则

$$\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2\to\mathcal{C}_1[S_1^{-1}]\times\mathcal{C}_2[S_2^{-1}],\quad(?,-)\mapsto(Q_1(?),Q_2(-)) \tag{6.2.8}$$

映 $S_1\times S_2$ 为同构. 今断言, 局部化诱导的函子

$$(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)[(S_1\times S_2)^{-1}]\to\mathcal{C}_1[S_1^{-1}]\times\mathcal{C}_2[S_2^{-1}] \tag{6.2.9}$$

是范畴的同构.

证明. 对任意范畴 $\mathcal{D}$, 由引理 6.1.3 得

$$\mathrm{Funct}((\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)[(S_1\times S_2)^{-1}],\mathcal{D})\cong\mathrm{Funct}_{S_1\times S_2}(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2,\mathcal{D}),\quad F\mapsto F\circ Q_{1\times2}. \tag{6.2.10}$$

引入以下引理.

引理 6.2.8. 函子 $G:\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2\to\mathcal{D}$ 将 $S_1\times S_2$ 映作同构, 当且仅当以下条件满足:

1. 对任意 $X_1 \in \mathcal{C}_1, G(X_1, -)$ 将 S_2 映至 $\mathcal{D}$ 中同构;
2. 对任意 $s_1 \in S_1, G(s_1, -)$ 是 $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D})$ 中的自然同构.

证明. $(\downarrow)$. 对任意 $s_2 \in S_2$, $G(X_1, -)(s_2) = G(1_{X_1}, s_2)$ 是同构. 对任意 $s_1 \in S_1$, 自然变换 $\{G(s_1, 1_{X_2})\}_{X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_2)}$ 是同构. $(\uparrow)$. 反之, G 将 $(S_1 \times 1)$ 与 $(1 \times S_2)$ 映作同构, 因此将复合得到的 $S_1 \times S_2$ 映作同构. □

由这一引理,

$$\mathrm{Funct}_{S_1 \times S_2}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D}) \cong \mathrm{Funct}_{S_1}(\mathcal{C}_1, \mathrm{Funct}_{S_2}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D})) \tag{6.2.11}$$

$$\cong \mathrm{Funct}(\mathcal{C}_1[S_1^{-1}], \mathrm{Funct}(\mathcal{C}_2[S_2^{-1}], \mathcal{D})) \cong \mathrm{Funct}(\mathcal{C}_1[S_1^{-1}] \times \mathcal{C}_2[S_2^{-1}], \mathcal{D}). \tag{6.2.12}$$

这说明 $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)[(S_1 \times S_2)^{-1}]$ 与 $\mathcal{C}_1[S_1^{-1}] \times \mathcal{C}_2[S_2^{-1}]$ 满足同一泛性质, 从而它们是同构的. □

备注 6.2.9. 以上证明过程与可表函子的米田引理有相似之处, 两者都是说明 "泛性质" 决定的对象唯一. 对后者, Hom 的 "泛性质" 由集合论语言描述.

引理 6.2.10. (伴随与局部化). 给定伴随函子的一组资料

$$(\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{C}) \dashv (\mathcal{C} \xrightarrow{G} \mathcal{D}); \quad (1_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\eta} GF, FG \xrightarrow{\varepsilon} 1_{\mathcal{C}}). \tag{6.2.13}$$

假定存在 $\mathcal{C}$ 态射类的 S 与 $\mathcal{D}$ 态射类的 T, 使得 $F(T) \subseteq S$ 且 $G(S) \subseteq T$. 记 $Q_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ 与 $Q_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}[T^{-1}]$ 是相应的 GZ 局部化, 则存在诱导的伴随函子

$$(\mathcal{D}[T^{-1}] \xrightarrow{\overline{F}} \mathcal{C}[S^{-1}]) \dashv (\mathcal{C}[S^{-1}] \xrightarrow{\overline{G}} \mathcal{D}[T^{-1}]); \quad (1_{\mathcal{D}[T^{-1}]} \xrightarrow{\overline{\eta}} \overline{G}\,\overline{F},\ \overline{F}\,\overline{G} \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} 1_{\mathcal{C}[S^{-1}]}). \tag{6.2.14}$$

证明. 函子 $\overline{F}$ 与 $\overline{G}$ 由泛性质诱导. 自然变换 η 定义如下:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, bend left, "1_{\mathcal{D}}"] \arrow[r, bend right, "GF"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{D}}"] & \mathcal{D} \arrow[d, "Q_{\mathcal{D}}"] \\
\mathcal{D}[T^{-1}] \arrow[r, bend left, "1_{\mathcal{D}[T^{-1}]}"] \arrow[r, bend right, "\overline{G}\,\overline{F}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\overline{\eta}"] & \mathcal{D}[T^{-1}]
\end{tikzcd}. \tag{6.2.15}$$

其中, 选取 $\overline{\eta}$ 如下:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\eta} \arrow[d, mapsto] & \in & \mathrm{Funct}(1_{\mathcal{D}[T^{-1}]}, \overline{G}\,\overline{F}) \arrow[d, "\cong"', "(Q_{\mathcal{D}})^*"] & \mathrm{Funct}(1_{\mathcal{D}}, GF) \arrow[d, "(Q_{\mathcal{D}})_*"'] & \ni & \eta \arrow[d, mapsto] \\
\overline{\eta} Q_{\mathcal{D}} & & \mathrm{Funct}(Q_{\mathcal{D}}, \overline{G}\,\overline{F}\,Q_{\mathcal{D}}) \arrow[r, equal] & \mathrm{Funct}(Q_{\mathcal{D}}, Q_{\mathcal{D}}\,GF) & & Q_{\mathcal{D}}\eta
\end{tikzcd}. \tag{6.2.16}$$

类似地定义 $\overline{\varepsilon}$. 这类构造具有统一格式 $\overline{?}Q = Q?$.

下证明伴随中的三角恒等式. 以下第一行复合为恒等自然变换:

$$\begin{tikzcd}
\overline{F} \arrow[r, "\overline{F}\overline{\eta}"] & \overline{F}\,\overline{G}\,\overline{F} \arrow[r, "\overline{\varepsilon}\overline{F}"] & \overline{F} & & \mathrm{Funct}(\mathcal{D}[T^{-1}], \mathcal{C}[S^{-1}]) \arrow[d, "(Q_{\mathcal{D}})^*"] \\
\overline{F} Q_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\overline{F}\overline{\eta}Q_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, equal] & \overline{F}\,\overline{G}\,\overline{F} Q_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\overline{\varepsilon}\overline{F}Q_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, equal] & \overline{F} Q_{\mathcal{D}} \arrow[d, equal] & & \mathrm{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{C}[S^{-1}]) \\
Q_{\mathcal{C}} F \arrow[r, "Q_{\mathcal{D}} F\eta"] & Q_{\mathcal{C}} FGF \arrow[r, "Q_{\mathcal{C}}\varepsilon F"] & Q_{\mathcal{C}} F & &
\end{tikzcd}. \tag{6.2.17}$$

依照原伴随的三角恒等式, 第三行复合为 $Q_{\mathcal{D}}$, 故第二行复合也为 $Q_{\mathcal{D}}$. 由 $(Q_{\mathcal{D}})^*$ 全忠实, 第一行复合为 $1_{\mathcal{F}}$. 另一三角恒等式的证明类似. □

定理 6.2.11. (加法局部化). 给定加法范畴的 GZ 局部化 $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$. 若 S 对直和封闭, 则 Q 是加法函子.

- 称 S 对直和封闭, 若对任意 $f, g \in S$, 总有 $\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{smallmatrix}\right) \in S$.

证明. 记 $I = \{\cdot, \cdot\}$ 是有两个点的离散图. 则有伴随函子

$$(\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}^I) \dashv (\mathcal{C}^I \xrightarrow{\oplus} \mathcal{C}); \quad (1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\eta} \oplus\Delta, \Delta\oplus \xrightarrow{\varepsilon} 1_{\mathcal{C}^I}). \tag{6.2.18}$$

将 C^I 视同 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, 则有 $\Delta : ? \mapsto (?, ?)$ 与 $\oplus : (?, !) \mapsto ?\oplus!$. 由 S 对直和封闭, 则局部化保持伴随函子. 结合**定理** 6.2.7, 得

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\Delta"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "\oplus"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}}"] \arrow[dr, bend left, "Q_{\mathcal{C}}\times Q_{\mathcal{C}}"] & \\
\mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[r, dashed, bend left, "\overline{\Delta}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & (\mathcal{C} \times \mathcal{C})[(S \times S)^{-1}] \arrow[l, dashed, bend left, "\overline{\oplus}"] \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{C}[S^{-1}] \times \mathcal{C}[S^{-1}]
\end{tikzcd} . \tag{6.2.19}$$

记复合函子 $\widetilde{\Delta} : \mathcal{C}[S^{-1}] \xrightarrow{\overline{\Delta}} (\mathcal{C} \times \mathcal{C})[(S \times S)^{-1}] \cong \mathcal{C}[S^{-1}] \times \mathcal{C}[S^{-1}]$. 交换图说明 $\widetilde{\Delta}Q_{\mathcal{C}} = (Q_{\mathcal{C}} \times Q_{\mathcal{C}})\Delta$, 该等式中的 $\widetilde{\Delta}$ 可以替换作 Δ, 泛性质 ($Q_{\mathcal{C}}$ 右可消, 推论 6.1.5) 说明 $\widetilde{\Delta} = \Delta$. 因此, $Q_{\mathcal{C}}$ 保持 Δ, 故保持直和 $\oplus$. 保持直和的函子是一个加法函子 ([Cre21]). □

以下是一类特殊的加法局部化.

定理 6.2.12. 给定加法范畴 $\mathcal{A}$ 与加法全子范畴 $\mathcal{B}$, 下定义两种商.

1. (加法商). 定义 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ 为如下范畴: 对象同 $\mathcal{A}$; 对任意 X 与 Y, 态射群为原始态射群的商群:

   $$(X, Y)_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} = (X, Y)_{\mathcal{A}}/\{\text{被 } \mathcal{B} \text{ 中对象分解的态射}\}. \tag{6.2.20}$$

   记函子 $R : \mathcal{A} \to A/\mathcal{B}, \quad X \mapsto RX = X, \quad f \mapsto Rf = [f]$.

2. (GZ 局部化). 称 $(f; y)$ 是一对好态射, 若 $f : X \to Y, g : Y \to X$, 且 $1_Y - fg$ 与 $1_X - gf$ 都能经 $\mathcal{B}$ 中对象分解. 记 S 是 $\mathcal{A}$ 中所有好态射构成的类. 记 GZ 局部化函子 $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$.

则存在范畴的同构 Φ, 使得 $R = \Phi \circ Q$.

证明. 先说明 Q 是加法函子. 依照**定理** 6.2.11, 只需说明 S 对直和封闭. 给定好态射 $(f; y) : X \to Y$ 与 $(f'; y') : X' \to Y'$, 则显然 $(\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & y' \end{smallmatrix}\right)) : X \oplus X' \to Y \oplus Y'$ 也是好态射.
(Q 被 R 分解). 对任意 $X \in \mathcal{B}, QX$ 是零对象. 因此, 群同态 $(M, N)_{\mathcal{A}} \xrightarrow{Q} (M, N)_{\mathcal{A}[S^{-1}]}$ 经商群 $(M, N)_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}$ 分解. 商群的泛性质决定了一族对应

$$\overline{Q} : \mathcal{A}/\mathcal{B} \to \mathcal{A}[S^{-1}], \quad X \mapsto X, \quad [f] \mapsto Qf. \tag{6.2.21}$$

为了说明这是函子, 只需验证恒等律与复合律. 注意到 $[g \circ f] = [g] \circ [f]$, 且 Q 是函子, 故

$$\overline{Q}([g] \circ [f]) = \overline{Q}([g \circ f]) = Q(g \circ f) = Qg \circ Qf = \overline{Q}([g]) \circ \overline{Q}([f]). \tag{6.2.22}$$

(R 被 Q 分解). 给定一组好态射 $(f;g)$, 则 $[f]\circ[g]=[f\circ g]$ 与 $[g]\circ[f]=[g\circ f]$ 都是恒等态射. 由泛性质, R 经 Q 唯一地分解.

以上两种分解都是唯一的 (由商群的泛性质和局部化的泛性质), 从而两函子在去向处相差一个同构. □

6.3 Quillen 的同伦范畴

此部分介绍左右同伦关系与 Quillen 的同伦范畴, 第一手资料是 [Qui67] 与 [Qui69], 文献导读可参考 [Hov07].

定义 6.3.1. (闭区间). 闭区间即单纯形 $\Delta[1]$ 的某种 "实现". 常见的 "实现" 包含以下两种.

1. $|\Delta[1]|=[0,1]$ 是几何实现, 函子 $|\cdot|:\Delta\to k\mathbf{Top}$ 关于 $\Delta\rightarrowtail\mathbf{PSh}(\Delta)$ 延拓定义了 "实现-单纯集化" 伴随 ([Lura]). 详见介绍单纯集方法的书籍.

2. $\mathrm{h}(\Delta)=$ "图范畴 $\{\cdot\to\cdot\}$" 是同伦实现, 函子 $\mathrm{h}:\Delta\to\mathbf{Cat}$ 关于 $\Delta\rightarrowtail\mathbf{PSh}(\Delta)$ 延拓定义了 "同伦-脉" 伴随 ([Lurb]). 详见介绍无穷范畴的书籍.

特别地, "实现" 保持单纯形的典范态射 $d^k:\Delta[0]\to\Delta[1]$ $(k\in\{0,1\})$ 与 $s^0:\Delta[1]\to\Delta[0]$. 我们将五元组 $(\Delta[0],\Delta[1],s^0,d^0,d^1)$ 的实现定义作一个区间基本资料.

1. 区间 I 是 $\Delta[1]$ 的实现, 终对象 $\top$ 是 $\Delta[0]$ 的实现 (左伴随保持终对象).

2. $i_k:\top\to I$ 是 d^k 的实现, 表示端点 $k\in\{0,1\}$ 的包含;

3. $p:I\to\top$ 是 s^0 的实现, 表示收缩 I 到一个点.

备注 6.3.2. 以上两种 "实现" 分别对应拓扑语言与范畴语言. 与拓扑学相仿, 可以定义范畴中的柱对象与路对象, 也可以定义映射锥与映射柱等, 其元语言均取自单纯形.

定义 6.3.3. (路对象, 积). 给定对象 X. $\mathbf{Cat}$ (或 $\mathbf{Top}$) 中的对角态射为下图态射链 $(\star)$:

$$\begin{tikzcd} \bullet\sqcup\bullet \arrow[r, "(i_0,\, i_1)"] & I \arrow[r, "p"] & \bullet & (\star) \arrow[d, Rightarrow] \\ X\prod X & X^I \arrow[l, "X^{(i_0,\, i_1)}"'] & X \arrow[l, "X^p"'] \arrow[ll, bend left, "\Delta_X"] & X^{(\star)} \end{tikzcd} . \tag{6.3.1}$$

对 $(\star)$ 作用 $X^{\cdot}=\mathrm{Funct}(\cdot,X)$, 得相应的函子与自然变换. 特别地, Δ_X 是自然变换. 以上操作是在 Top (或 Cat) 中进行的, 所有函子与自然变换都视作 Top (或 Cat) 中对象与态射.

定义 6.3.4. (柱对象, 余积). 给定对象 X. $\mathbf{Cat}$ (或 $\mathbf{Top}$) 中的余对角态射为下图态射链 $X\prod(\star)$:

$$\begin{tikzcd} \bullet\sqcup\bullet \arrow[r, "(i_0,\, i_1)"] & I \arrow[r, "p"] & \bullet & (\star) \arrow[d, Rightarrow] \\ X\coprod X \arrow[r, "X\prod(i_0,\, i_1)"] \arrow[rr, bend right, "\nabla_X"'] & X\prod I \arrow[r, "X\prod p"] & X & X\prod(\star) \end{tikzcd} . \tag{6.3.2}$$

引理 6.3.5. Δ_X 是两组 1_X 关于积泛性质诱导的态射; ∇_X 是两组 1_X 关于余积泛性质诱导的态射.

证明. 以前者为例. 考虑单纯形范畴中一组复合为恒等的态射

$$\Delta[0] \xrightarrow{d^k} \Delta[1] \xrightarrow{s^0} \Delta[0] \quad (k = 0, 1). \tag{6.3.3}$$

经 “实现” 函子, 得 $p \circ i_k$ 是恒等, 从而 $X^{i_k} \circ X^p$ 是恒等的自然变换. $\{X^{i_k} : X^I \to X \prod X\}_{k=0,1}$ 由泛性质诱导的态射是 $X^{(i_0,i_1)} : X^I \to X$. 若复合 X^p, 则 $\{1_X = X^{i_k} \circ X^p : X \to X^I \to X \prod X\}_{k=0,1}$ 诱导的态射是 Δ_X. 对 ∇_X 的证明类似. □

我们通过路对象与柱对象定义同伦关系, 以此描述态射类的某种等价关系. 柱同伦 (左同伦) 的拓扑学视角广为数学工作者所知.

定义 6.3.6. (拓扑学的同伦). 称拓扑空间间的一对连续映射 $f, g : X \to Y$ 是左同伦的, 若 $\mathrm{im}(f) \cup \mathrm{im}(g) \subseteq Y$ 所示的上下柱体能被连续地填补. 即存在连续映射 $H : X \times [0, 1] \to Y$, 使得 $H(x, 0) = f(x)$ 且 $H(x, 1) = g(x)$ 对任意 $x \in X$ 成立. 称 H 为从 f 到 g 的同伦.
换言之, 下图交换 (左图与右图是等价的):

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "X\prod(i_1)"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X\prod I \arrow[rr, dashed, "H"] & & Y \\
& X \arrow[ul, "X\prod(i_0)"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[rr, "(f,g)"] \arrow[d, "\nabla_X"'] \arrow[drr, "(X\prod(i_0){,}X\prod(i_1))"] & & Y \\
X & & X\prod I \arrow[ll, "X\prod p"] \arrow[u, dashed, "H"']
\end{tikzcd}
. \tag{6.3.4}$$

以下是模型结构中左同伦的定义.

定义 6.3.7. 以下假定 $\mathcal{A}$ 是带有模型结构 (Cofib, Weq, Fib) 的范畴, 满足以下三点:

1. 范畴有有限积与有限余积;
2. 给定任意平凡余纤维 $p : A \to C$ 与任意态射 $f : A \to B$, 则存在弱推出使得 $p' : B \to D$ 是平凡余纤维;
3. 给定任意平凡纤维 $i : X \to Z$ 与任意态射 $g : Y \to Z$, 则存在弱推出使得 $i' : W \to Y$ 是平凡纤维.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, dashed, "\mathsf{Fib}"', "p'"] & X \arrow[d, "p"', "\mathsf{Fib}"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathsf{Cofib}"', "i"] & C \arrow[d, dashed, "i'"', "\mathsf{Cofib}"] \\
B \arrow[r, dashed, "g'"'] & D
\end{tikzcd}
. \tag{6.3.5}$$

记 $\prod$ 与 $\coprod$ 分别为 $\mathcal{A}$ 中的二元积运算与二元余积运算; 零元积即始对象 $\perp$, 零元余积即终对象 $\top$. 出于习惯, 我们将 $X \coprod Y$ 与 $X \prod Y$ 视作列向量, 态射仍以矩阵形式表示.

定义 6.3.8. (柱对象, 柱同伦). 如式 (6.3.4) 右图所示, 右上三角是柱同伦关系的的定义式, 左下角是余对角态射的定义 (式 (6.3.2)). 由于单纯形范畴到通常范畴未必有 “实现” 函子, 我们难以定义 $X \prod I$; 一个解决方法是将 $X \prod I$ 换作**柱对象** $\mathsf{Cyl}(X)$:

$$\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[d, "\nabla_X"'] \arrow[drr, "(X\prod(i_0){,}X\prod(i_1))"] & & \\
X & & X\prod I \arrow[ll, "X\prod p"]
\end{tikzcd}
\implies
\begin{tikzcd}
X\coprod X \arrow[d, "\binom{1}{1}"'] \arrow[drr, "\mathsf{Cofib}", "(\partial_0{,}\partial_1)"'] & & \\
X & & \mathsf{Cyl}(X) \arrow[ll, "\sigma"', "\mathsf{Weq}"]
\end{tikzcd}
. \tag{6.3.6}$$

称 $(\mathsf{Cyl}(X), \partial_0, \partial_1, \sigma, X)$ 是 X 对应的柱对象, 若存在余纤维 $(\partial_0, \partial_1) : X \coprod X \to \mathsf{Cyl}(X)$ 与弱等价 $\sigma : \mathsf{Cyl}(X) \to X$, 使得上图交换. 给定态射 $f, g : X \to Y$, 称 f 与 g 是**柱同伦**的, 若存在态射 $h : \mathsf{Cyl}(X) \to Y$, 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
X \coprod X \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "\binom{1}{1}"'] \arrow[dr, "\mathsf{Cofib}", "{(\partial_0,\partial_1)}"'] & Y \\
X & \mathsf{Cyl}(X) \arrow[l, "\sigma"', "\mathsf{Weq}"] \arrow[u, dashed, "h"']
\end{tikzcd} . \tag{6.3.7}$$

备注 6.3.9. (∂_0, ∂_1) 是余纤维, CM1 说明 ∂_0 与 ∂_1 是弱等价. 通常无法断言 (∂_0, ∂_1) 是弱等价, 或 ∂_k 是余纤维.

备注 6.3.10. 拓扑视角看, $f : X \to Y$ 建立了弱等价, 当且仅当其诱导的 $\pi_k(f)$ 群均是同构 (假定连通). 对 σ, 将 "圆柱" $\mathsf{Cyl}(X)$ 沿母线收缩至 "任意横截面" X, 其拓扑量 $\pi_\bullet$-群自然被保持.

定义 6.3.11. (路对象, 路同伦). 可以类似定义路对象 $\mathrm{Path}(-)$ 与路同伦的定义与柱对象与柱同伦类似. 此处仅给出定义路同伦的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Path}(Y) \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}", "\mathsf{Fib}"'] & Y \arrow[l, "\mathsf{Weq}"', "s"] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\
X \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"'] & Y \prod Y
\end{tikzcd} . \tag{6.3.8}$$

备注 6.3.12. $\binom{d_0}{d_1}$ 是纤维, CM1 说明 d_0 与 d_1 是弱等价. 通常无法断言 $\binom{d_0}{d_1}$ 是弱等价, 或 d_k 是纤维.

备注 6.3.13. 从拓扑视角看, 路对象 Y^I 即 "闭区间 $[0,1]$ 至 Y 的所有态射" 构成的空间, 配有紧-开拓扑. $s : Y \to Y^I$ 无非令所有道路 (Y^I 中对象) 连续地坍缩到道路起点. 其拓扑量 $\pi_\bullet$-群自然被保持.

备注 6.3.14. Steenrod 方便拓扑空间 ([Ste67]) 与 **Cat** 存在闭合幺半结构. 因此

$$(\mathsf{Cyl}(X), Y) = (X \prod I, Y) \cong (X, Y^I) = (X, \mathrm{Path}(Y)). \tag{6.3.9}$$

假定伴随函子保持某些态射类, 则无需区分路同伦与柱同伦.

例子 6.3.15. $\mathbf{Mod}_R$ 中链复形的一组同伦关系 $s : f \sim g : X \to Y$ ($f - g = sd + ds$) 对应态射 $(s, f, g) : \mathsf{Cyl}(X) \to Y$. 可以检验, f 与 g 是链映射且 $f - g = sd + ds$, 当且仅当下式成立:

$$(s, f, g) \circ \begin{pmatrix} -d_X & 0 & 0 \\ 1 & d_X & 0 \\ -1 & 0 & d_X \end{pmatrix} = d_Y \circ (s, f, g). \tag{6.3.10}$$

特别地, $\mathsf{Cyl}(R)$ 是单纯形 $\Delta[1]$ 在复形范畴中的实现, $\mathsf{Cyl}(X) = X \otimes \mathsf{Cyl}(R)$. 相应地,

$$\mathrm{Path}(Y) = \mathcal{HOM}(\mathsf{Cyl}(R), Y). \tag{6.3.11}$$

链复形的同伦无需区分左右.

备注 6.3.16. 从态射视角看, **式** (6.3.7) 本质上将 $\binom{1}{1}$ 分解作余纤维和弱等价的复合, 使得 (f, g) 能被余纤维态射分解. 我们并不关心 $\mathsf{Cyl}(X)$ 处的具体对象, 而是侧重 $\binom{1}{1}$ 的 $\mathsf{Weq} \circ \mathsf{Cofib}$-分解.
通常范畴中, 未必存在具体的函子 Cyl 或 Path. 往后将弃用 $\mathrm{Cyl}(-)$ 与 $\mathrm{Path}(-)$ 两个记号.

引理 6.3.17. (柱同伦的等价定义) 使用模型结构的性质, **定义** 6.3.8 中的题设 $(\partial_0, \partial_1) \in \mathsf{Cofib}$ 可以删去.

证明. 若将 (∂_0, ∂) 取作任意态射, 依照 CM4 将其分解作 $p \circ i \in \mathsf{TFib} \circ \mathsf{Cofib}$. 分别使用 $i, \sigma \circ p$ 与 $h \circ p$ 替换 $(\partial_0, \partial_1), \sigma$ 与 h 即可. 新的交换图满足**定义** 6.3.8 中假定. □

引理 6.3.18. (路同伦的等价定义) 使用模型结构的性质, 定义路同伦时, 可以删去题设 $\binom{d_0}{d_1} \in \mathsf{Fib}$.

命题 6.3.19. 向前复合 $- \circ \varphi$ 保持路同伦关系; 向后复合 $\psi \circ -$ 保持柱同伦关系.

证明. 以前者为例. 若 (f, g) 通过 h 实现柱同伦, 则 $(\psi \circ f, \psi \circ g)$ 通过 $\psi \circ h$ 实现柱同伦. □

定理 6.3.20. (余纤维对象出发的柱同伦). 选定 $\mathrm{Hom}(X, Y)$, 其中 $X \in \mathcal{C}$ (余纤维对象).

1. **定义** 6.3.8 中, 纤维态射 (∂_0, ∂_1) 的分量 ∂_0 与 ∂_1 均是平凡余纤维;

2. 柱同伦是 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 上的等价关系.

证明. (1). $\perp : \perp \to X$ 是余纤维, 推出所得的 $\perp \coprod X : \perp \sqcup X \to X \coprod X$ 也是余纤维. 复合得余纤维

$$\partial_k : \qquad X \xrightarrow{e_k} \perp \sqcup X \xrightarrow{\perp \sqcup X} X \sqcup X \xrightarrow{(\partial_0, \partial_1)} X' \ . \tag{6.3.12}$$

备注 6.3.9 说明 ∂_k 是弱等价, 从而是平凡余纤维.
(2). 自反性与对称性显然, 下证明传递性. 假定有以下柱同伦

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "{(g,f)}"] \arrow[d, "\nabla_X"'] \arrow[dr, "{(a,b)}"] & Y \\ X & X_1 \arrow[l, "\sigma_1"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "{(l,f)}"] \arrow[d, "\nabla_X"'] \arrow[dr, "{(c,d)}"] & Y \\ X & X_2 \arrow[l, "\sigma_2"] \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd} \ . \tag{6.3.13}$$

将式 (6.3.13) 两图右上方的三角分别拆分作交换图, 再拼接作式 (6.3.14) 左上方图. 依照**定义** 6.3.7, 作式 (6.3.14) 左上方图中的弱推出方块 □, 并诱导相应的态射 α 与 β (式 (6.3.14) 下行两图). 最终检验式 (6.3.14) 右上方图的交换性即可.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a"'] & Y & X \arrow[l, "l"'] \arrow[d, "d"] \\ X_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, dashed, bend right, "c'"'] & X \arrow[u, "f"] \arrow[l, "b"] \arrow[r, "c"'] \arrow[d, phantom, "\square"] & X_2 \arrow[ul, "j"'] \arrow[dl, dashed, bend left, "b'"] \\ & X' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[rr, "{(g,l)}"] \arrow[dd, "\nabla_X"'] \arrow[ddrr, "{(c'a,b'd)}"] & & Y \\ & & \\ X & & X' \arrow[ll, dashed, "\beta"] \arrow[uu, dashed, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_1 \arrow[d, "c'"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\ X_2 \arrow[r, "b'"'] \arrow[drr, bend right, "j"'] & X' \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\ & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_1 \arrow[d, "c'"] \arrow[ddr, bend left, "\sigma_1"] & \\ X_2 \arrow[r, "b'"'] \arrow[drr, bend right, "\sigma_2"'] & X' \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \\ & & X \end{tikzcd} \ . \tag{6.3.14}$$

□

引理 6.3.21. 选定 $\mathrm{Hom}(X, Y)$, 其中 $X \in \mathcal{C}$ (余纤维对象). 此时, 柱同伦蕴含路同伦.

证明. 给定下图左侧所示的柱同伦, 下证明存在右式所示的路同伦:

$$\begin{tikzcd} X\coprod X \arrow[r, red, "{(g,f)}"] \arrow[d, "\nabla_X"'] \arrow[dr, blue, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & Y \\ X & X' \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, red, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y' \arrow[dr, blue, "\binom{d_0}{d_1}"] & Y \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\Delta_Y"] \\ X \arrow[u, red, dashed, "\lambda"] \arrow[r, red, "\binom{f}{g}"'] & Y\prod Y \end{tikzcd}. \tag{6.3.15}$$

依照 CM4, 将 Δ_Y 分解作 $\mathsf{Fib}\circ\mathsf{TCofib}$ 的形式. 下只需求解 λ 使得右图交换. 由**定理** 6.3.20, 不妨假定 ∂_0 与 ∂_1 为平凡纤维, CM3 给出态射提升的交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, red, "g"] \arrow[d, blue, "\partial_0"', "\mathsf{TCofib}"] & Y \arrow[r, "s"] & Y' \arrow[d, blue, "\mathsf{Fib}"', "\binom{d_0}{d_1}"] \\ X' \arrow[urr, dashed, "\mu"] \arrow[rr, red, "\binom{h}{g\sigma}"'] & & Y\prod Y \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} &\tbinom{d_0}{d_1}\circ s\circ g=\tbinom{1}{1}\circ g=\tbinom{g}{g}, \\ &\tbinom{h}{g\sigma}\circ\partial_0=\tbinom{h\circ\partial_0}{g\circ(\sigma\circ\partial_0)}=\tbinom{g}{g}. \end{aligned} \tag{6.3.16}$$

取提升所得的态射 μ, 记 $\lambda:=\mu\circ\partial_1$, 检验得交换图

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dr, blue, "\binom{d_0}{d_1}"] & Y \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\Delta_Y"] \\ X' \arrow[ur, "\mu"] & X \arrow[l, "\partial_1"] \arrow[u, red, dashed, "\lambda"] \arrow[r, red, "\binom{f}{g}"'] & Y\prod Y \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} d_0\circ\lambda&=d_0\circ\mu\circ\partial_1=h\circ\partial_1=f \\ d_1\circ\lambda&=d_1\circ\mu\circ\partial_1=g\circ\sigma\circ\partial_1=g \end{aligned}. \tag{6.3.17}$$

□

定理 6.3.22. (余纤维对象出发的路同伦).

定理 6.3.23. 柱同伦是 $\mathcal{F}$ 上的等价关系理想; 路同伦是 $\mathcal{C}$ 上的等价关系理想.

我们暂不给出**定理** 6.3.24 的证明.

定理 6.3.24. (Quillen 定理). 在**定义** 6.3.7 的前提下, 以下是范畴等价:

$$\begin{tikzcd} \pi\mathscr{C} \arrow[r, "\overline{\gamma_c}"] & \mathsf{Ho}(\mathscr{C}) \arrow[l, bend left, "\perp"] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[r, equal] & \mathscr{C}[\mathsf{TCofib}^{-1}] \\ \pi(\mathscr{C}\cap\mathscr{F}) \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \arrow[r, "\simeq", "\bar{\gamma}"'] & \mathsf{Ho}(\mathscr{A}) \arrow[r, equal] & \mathscr{C}[\mathsf{Weq}^{-1}] \\ \pi\mathscr{F} \arrow[r, "\overline{\gamma_f}"'] & \mathsf{Ho}(\mathscr{F}) \arrow[l, bend right, "\perp"'] \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[r, equal] & \mathscr{F}[\mathsf{TFib}^{-1}] \end{tikzcd}. \tag{6.3.18}$$

例子 6.3.25. 对外三角范畴的相同闭模型结构, **定理** 3.2.3 给出**式** (6.3.5) 的一种具体构造. **式** (6.3.18) 中范畴等价成立.

6.4 由 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 到同伦范畴的三种方式

对相容闭模型结构, 本小节使用 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 的三种 "等价的商" 描述同伦范畴. 往后选定外三角范畴 $\mathcal{A}$ 上的相容闭模型结构 (**定义** 5.6.1), 选定记号

定义 6.4.1. $\mathcal{A}$ 上的相容闭模型结构由以下资料描述:

1. Cofib, Fib 与 Weq 分别为闭模型结构中的余纤维, 纤维与弱等价类;
2. $\mathsf{TCofib} = \mathsf{Cofib}\cap\mathsf{Weq}$ 与 $\mathsf{TFib} = \mathsf{Fib}\cap\mathsf{Weq}$ 分别为平凡余纤维与平凡纤维;
3. $\mathcal{C}, \mathcal{F}$ 与 $\mathcal{W}$ 分别为闭模型结构中的余纤维对象, 纤维对象与平凡对象;
4. $\mathsf{T}\mathcal{F} = \mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ 与 $\mathsf{T}\mathcal{C} = \mathcal{C}\cap\mathcal{W}$ 分别为平凡纤维对象与平凡余纤维对象.
5. (Hovey). $(\mathcal{S}, \mathcal{S}^{\perp}; {}^{\perp}\mathcal{V}, \mathcal{V}) = (\mathsf{T}\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathsf{T}\mathcal{C})$ 是其对应的 Hovey 孪生余挠对 (见**定理** 5.6.4, 逆命题即 Section 5.7).
6. (Hovey). 平凡对象类 $\mathcal{W} = \mathcal{N} = \mathrm{Cone}(\mathcal{V}, \mathcal{S}) = \mathrm{coCone}(\mathcal{V}, \mathcal{S})$.

后续证明三种构造局部化的等价方式:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C}\cap\mathcal{F} \arrow[dl, bend right, "Q_1"'] \arrow[d, "Q_2"] \arrow[dr, bend left, "Q_3"] & \\
(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})[(\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}})^{-1}] & \frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}} & \pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})
\end{tikzcd}. \tag{6.4.1}$$

此处, $\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}} = \mathsf{Weq}\cap\mathsf{Mor}(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$, Q_1 是 GZ 局部化, Q_2 是加法商, Q_3 是同伦商 (稍后定义).
正式证明该命题前, 先看一则熟悉的例子.

命题 6.4.2. 假定 $\mathcal{R}$ 是一般的加法范畴, $C(\mathcal{R})$ 是复形范畴. 同伦范畴有以下三种等价描述.

1. (局部化). 称 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to X$ 同伦等价, 若 $fg - 1_Y, gf - 1_X$ 通过可裂无环复形分解. 记 S 是同伦等价, 定义 $Q_1: C(\mathcal{R}) \to C(\mathcal{R})[S^{-1}]$;
2. (加法商). 记 $\mathcal{N}$ 为所有可裂无环复形构成的全子加法范畴, 定义 $Q_2: C(\mathcal{R}) \to C(\mathcal{R})/\mathcal{N}$.
3. (同伦商). 称 $f, g: X \to Y$ 同伦, 若存在态射 $s: X \to Y$ 使得 $f - g = sd + ds$. 定义 $Q_3: C(\mathcal{R}) \to \pi C(\mathcal{R})$ 为加法范畴 $C(\mathcal{R})$ 关于同伦关系的商范畴.

以下证明过程无需**定理** 6.2.11.

证明. 显然 $Q_2(S)$ 是同构, 故 Q_2 经 Q_1 分解.
再证明 Q_1 经 Q_3 分解, 即同伦等价的态射 $s: f \dim g: X \to Y$ 在 $C(\mathcal{R})[S^{-1}]$ 中同构. **例** 6.3.15 构造了态射 $(s, f, g): \mathrm{Cyl}(X) \to Y$. 注意到

$$f = [X \xrightarrow{e_2} f = \mathrm{Cyl}(1_X) \xrightarrow{(s,f,g)} Y], \quad g = [X \xrightarrow{e_3} \mathrm{Cyl}(1_X) \xrightarrow{(s,f,g)} Y]. \tag{6.4.2}$$

e_2 与 e_3 在 $C(\mathcal{R})[S^{-1}]$ 中相同, 因为两者在复合同伦等价 $\mathrm{Cyl}(X) \to 0$ 后相同.
最后证明 Q_3 经 Q_2 分解. 显然 $Q_3(f) = Q_3(g)$ 蕴含 $(f-g)$ 零伦, 即, 通过零对象分解. □

引理 6.4.3. $\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}$ 对直和封闭, 从而 (**定理** 6.2.11) Q_1 是加法函子.

证明. 给定 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 中弱等价 $f: X \to Y$. 由引理 5.4.6 第二条, f 分解作 $\mathsf{TFib}\circ\mathsf{TCofib}$, 得

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "\mathsf{TCofib}"'] & & Y \\
& E \arrow[ur, "\mathsf{TFib}"'] \arrow[dr, two heads] & \\
V \arrow[ur, tail] & & S
\end{tikzcd}. \tag{6.4.3}$$

TCofib 所在的 conflation 表明 $E\in\mathcal{T}$, TFib 所在的 conflation 表明 $E\in\mathcal{U}$. 因此 $E\in\mathcal{U}\cap\mathcal{T}(=\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$. 这说明 w 经 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 中对象分解. 容易验证 $\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}$ 对直和封闭. □

定理 6.4.4. **式** (6.4.1) 中 Q_1 与 Q_2 互相分解, 诱导了**定理** 6.2.12 中所示的典范同构. 同**定理** 6.2.12 中记号, 我们暂时将 $Q_2(f)$ 记作 $[f]$.

证明. (Q_2 经 Q_1 分解). 只需说明对任意 $f\in\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}}$, $[f]$ 是同构. 由态射分解**式** (6.4.3), 只需证明 $X\rightarrowtail E$ 与 $E\twoheadrightarrow Y$ 是同构. 以前者为例, 将 $X\rightarrowtail E=X\oplus S$ 写作直和, 今断言 $(1\ \ 0):X\oplus S$ 是 $\frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}}$ 中的逆映射. 往证 $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right):X\oplus S\to X\oplus S$ 通过 $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}$ 中对象分解. 只需证明 1_S 被 $\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}$ 中对象分解. 考虑可裂 conflation $S\rightarrowtail S_V\twoheadrightarrow S_S$, 则 $S_V\in\mathcal{S}\cap\mathcal{V}=\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$. 得证.
(Q_1 经 Q_2 分解). 依照**定理** 6.2.12 将加法商转写作 GZ-局部化. 只需说明对任意 $f:X\to Y$, 若 $[f]$ 是同构, 则 $f\in\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}$. 将 f 分解作 $p\circ i\in\mathsf{TFib}\circ\mathsf{Cofib}$, 则 p 是可裂满态射, 记右逆元 j.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "i"] & & Y \arrow[dl, tail, shift left, "j"] \\
& E \arrow[ul, dotted, bend left, "q"] \arrow[ur, two heads, shift left, "p"] \arrow[dr] & \\
V \arrow[ur] & & U
\end{tikzcd} \qquad . \tag{6.4.4}$$

由上一步骤中的结论, $p\circ j$ 与 1 相差一个 1_S, 从而 $[p]$ 与 $[j]$ 是同构. 因此 $[i]=[j]\circ[f]$ 也是同构. 任取 $q:E\to X$ 使得 $[q]$ 是 $[i]$ 的逆元. 下图是加法商范畴中交换:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X\oplus U \arrow[r, "(0\ \ 1)"] & U \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail, "i"] & E \arrow[u, "\binom{q}{\pi}"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[l, dotted, bend left, "q"] & U
\end{tikzcd} \qquad . \tag{6.4.5}$$

因此 $[\binom{1}{0}]:X\to X\oplus U$ 是同构. 容易看出 $[1_U]=0$. 由定义, U 是 $\mathcal{W}$ 中对象的形变收缩, 故 $U\in\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\mathcal{S}$. 由定义, i 是平凡纤维, 故 $f\in\mathsf{Weq}$. □

备注 6.4.5. 以上将加法商写作 GZ 局部化 (**定理** 6.2.12), 并证明了范畴关于 S 与 $\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}$ 两个态射类的局部化是同构的.

定理 6.4.6. **式** (6.4.1) 中存在 $Q_3:\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\to\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$ 诱导的范畴同构 $\frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}}\cong\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$.

证明. 为证明 $\frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}}\cong\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$ 良定义, 只需说明 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 中弱等价被映至 $\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$ 中同构 (**定理** 6.4.4). 将弱等价分解作 TFib ∘ TCofib, 下通过路同伦证明 TFib 在 Q_3 下是同构. 通过柱同伦, 可以对偶地证明 TCofib 在 Q_3 下也是同构.
任取平凡纤维 $p:X\to Y$, 下证明 $\pi(-,p):\pi(-,X)\to\pi(-,Y)$ 是函子的同构.

1. (可裂满). 由 $(0\to A)\pitchfork p$, 得 $(-,p)_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}$ 是满自然变换. 由引理 2.3.4 知 p 是可裂满, 故 $\pi(-,p)$ 可裂满.

2. (单). 即证: 若 $p\circ f, p\circ g : A\to X$ 通过 h 实现柱同伦, 则 $f,g:A\to Y$ 也是柱同伦的. 考虑下图:

$$\begin{tikzcd} A\coprod A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "\nabla_A"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}", "\mathsf{Cofib}"'] & X \arrow[r, "p", "\mathsf{TFib}"'] & Y \\ A & & A' \arrow[ll, "\mathsf{Weq}", "\sigma"'] \arrow[ul, dashed, "s"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} . \tag{6.4.6}$$

CM3 给出分解态射 s. 此时, f 与 g 通过 s 实现柱同伦.

下证明 $Q_3 : \mathcal{C}\cap\mathcal{F}\to\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$ 经 Q_2 分解, Q_3 是关于柱同伦这一等价关系理想的商. 若 f 与 g 路同伦, 则考虑交换图:

$$\begin{tikzcd} A\coprod A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "\nabla_A"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}", "\mathsf{Cofib}"'] & X \\ A & A' \arrow[l, "\mathsf{Weq}", "\sigma"'] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd} . \tag{6.4.7}$$

特别地, $[\sigma]\circ[\partial_0-\partial_1]=[0]$. 由 $\sigma\in\mathsf{Weq}$, 得 $[\partial_0-\partial_1]=0$. 因此 $[f]=[g]$. □

6.5 同伦范畴的三角结构

本章节证明 Ho$\mathcal{A}$ 是三角范畴. 试回顾相容闭模型结构的资料 (**定义** 6.4.1), 以及同伦范畴的等价描述:

1. (Quillen 定理, **定理** 6.3.24). $\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F}), \pi(\mathcal{F}), \pi(\mathcal{C})$ 与 Ho$\mathcal{A}$ 是互相等价的范畴. 等价函子由全子范畴的包含诱导.

2. (双纤维对象逼近, Section 6.4). **式** (6.4.1) 中函子彼此分解, 诱导了范畴同构

$$(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})[(\mathsf{Weq}_{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}})^{-1}]\cong\frac{\mathcal{C}\cap\mathcal{F}}{\mathcal{C}\cap\mathcal{W}\cap\mathcal{F}}\cong\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F}). \tag{6.5.1}$$

我们尽可能地在 Ho$\mathcal{A}$ 中构造平移函子, 最后使用 $\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$ 建立一类 "标准好三角".
以下关于 "好三角位移" 的构造类似**定理** 4.5.6.

定义 6.5.1. 记局部化函子为 $[\cdot]:\mathcal{A}\to$ Ho$\mathcal{A}$. 对任意 $X\in\mathcal{A}$, 选定 conflation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "i_X"] & X_V \arrow[r, two heads, "p_X"] & X_U \arrow[r, dashed, "\delta_X"] & {} \end{tikzcd} . \tag{6.5.2}$$

现选定 Ho$\mathcal{A}\simeq\pi(\mathcal{C}\cap\mathcal{F})$ 的骨架 $\mathcal{K}$.

引理 6.5.2. 对任意 $f:X\to Y$, 可选取 f_V (由提升性) 与 f_U (由 ET3) 使得下图是 conflation 间的态射:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "i_X"] \arrow[d, "f"] & X_V \arrow[r, two heads, "p_X"] \arrow[d, "f_V"] & X_U \arrow[r, dashed, "\delta_X"] \arrow[d, "f_U"] & {} \\ Y \arrow[r, tail, "i_Y"] & Y_V \arrow[r, two heads, "p_Y"] & Y_U \arrow[r, dashed, "\delta_Y"] & {} \end{tikzcd} . \tag{6.5.3}$$

特别地, f_V 与 f_U 在 $\mathcal{K}$ 中唯一.

证明. 态射 f 是 Ho$\mathcal{A}$ 中的零态射, 当且仅当 f 通过 $\mathcal{W}$ 中对象分解, 亦当且仅当态射被某个 $U \to V$ 分解 (引理 5.1.17).
(f_V 的唯一性). 对任意不同的 f_V 与 $(f_V)'$ 使得上左侧方块图交换, 则 $(f_V - (f_V)') \circ i_X = 0$. 从而 $f_V - (f_V)'$ 被 $X_U \to Y_V$ 分解, 故为零态射.
(f_U 的唯一性). 今选定 f_V. 对任意不同的 f_U 与 $(f_U)'$ 使得上图右侧方块交换, 则 $(\delta_Y)_\sharp(f_U - (f_U)') = 0$. 从而 $f_U - (f_U)'$ 被 $X_U \to Y_V$ 分解, 故为零态射. □

推论 6.5.3. $[(\cdot)_U] : \mathcal{A} \xrightarrow{(\cdot)_U} \mathcal{A} \xrightarrow{[\cdot]} \mathcal{K}$ 是加法函子.

证明. 由引理 6.5.2, $X \mapsto [X_U]$ 与 $f \mapsto [X_f]$ 唯一决定. 后续验证步骤与**定理** 4.5.6 完全相同. □

再证明 $[(\cdot)_U]$ 通过 $\mathcal{A} \to \mathcal{K}$ 分解.

引理 6.5.4. 若 $f \in$ TCofib ($f \in$ TFib), 则 U_f 是弱等价.

证明. ($f \in$ TCofib). 考虑 inflation 的复合 $X \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{i_Y}{\rightarrowtail} Y_V$. 由 ET4 得下图左, 进而得下图右

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\mathsf{TCofib}", "i"'] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, "\mathsf{Cofib}"] & S \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, dashed] & {} \\
X \arrow[r, tail] & Y_V \arrow[r, two heads] \arrow[d] & E \arrow[r, dashed, "\widetilde{\delta_X}"] \arrow[d, dashed, two heads, "\lambda"] & {} \\
& Y_U \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_Y"] & Y_U \arrow[d, dashed] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_V \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X_U \arrow[r, dashed, "\delta_X"] \arrow[d, dashed, "\mu"] & {} \\
X \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, "i"] & Y_V \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal, "1_{Y_V}"] & E \arrow[r, dashed, "\widetilde{\delta_X}"] \arrow[d, "\lambda"] & {} \\
Y \arrow[r, tail] & Y_V \arrow[r, two heads] & Y_U \arrow[r, dashed, "\delta_Y"] & {}
\end{tikzcd}
\quad . \tag{6.5.4}
$$

由引理 6.5.2, $[\mu]$ 是同构. 再由 $S \in \mathcal{W}$, 得 $\lambda \in$ Weq. 从而 $[U_f] = [\lambda \circ \mu]$ 是同构.
($f \in$ TCofib). **定理** 3.4.2 给出了交换图:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, tail] & X_V \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d, tail] & N \arrow[d, tail] & \\
X \arrow[r, tail, "\binom{i_X}{0}"] \arrow[d, "f"'] & X_V \oplus Y_V \arrow[r, two heads, "p_X \oplus 1"] \arrow[d, "{(f_V, 1)}"'] & X_U \oplus V_Y \arrow[r, dashed, "\delta_X \oplus 0"] \arrow[d, "{(f_U, p_Y)}"'] & {} \\
Y \arrow[r, tail, "i_Y"] & Y_V \arrow[r, two heads, "p_Y"] & Y_U \arrow[r, dashed, "\delta_Y"] & {}
\end{tikzcd}
\quad . \tag{6.5.5}
$$

由于 $\mathcal{W}$ 是厚子范畴 (**定理** 5.5.6), 得 $N \in \mathcal{W}$. 由**定理** 5.6.7 知 $(f_U,\ p_Y) \in$ Weq. 由于 $X_U \xrightarrow{\binom{1}{0}} X_U \oplus V_Y \to X_U$ 也是弱等价, 故 U_f 是弱等价. □

定理 6.5.5. 存在加法双函子 $\Sigma : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, 使得 $\Sigma[\cdot] = [(\cdot)_U]$.

证明. 对推论 6.5.3 使用引理 6.5.4, 得局部化诱导的函子 $\widetilde{\Sigma}$: Ho$\mathcal{A} \to \mathcal{K}$. 最后复合 $\mathcal{K} \to$ Ho$\mathcal{A}$ 即可. □

定理 6.5.6. 存在加法双函子 $\Omega : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, 满足 $[(\cdot)^T] = \Omega[\cdot]$, 其中

$$
\begin{tikzcd}
X^T \arrow[r, tail, "j_X"] & X^S \arrow[r, two heads, "q_X"] & X \arrow[r, dashed, "\varepsilon_X"] & {}
\end{tikzcd}
\quad . \tag{6.5.6}
$$

在证明 Σ 与 Ω 互逆前, 我们需要将扩张元对应作局部化范畴中的态射. 不同于**定理** 4.5.6, 此处涉及局部化范畴中的 “分式” 计算.

定义 6.5.7. (ℓ-变换). 对 conflation $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\eta}{\dashrightarrow}$, 定义

$$\ell : \mathbb{E}(Z, X) \to (Z, \Sigma X), \quad \eta \mapsto [a] \circ [s]^{-1}. \tag{6.5.7}$$

其中, a 与 s 来自**定理** 3.1.1 给出的交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, tail, "i_X"] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail] & Z \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, equal] & {} \\
X_V \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, "p_X"] & E \arrow[r, two heads, "\mathsf{TFib}", "s"'] \arrow[d, two heads, "-a"] & Z \arrow[r, dashed] & {} \\
X_U \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_X"] & X_U \arrow[d, dashed] & & \\
{} & {} & &
\end{tikzcd} . \tag{6.5.8}$$

需要检验, 这是良定义的.

备注 6.5.8. **定理** 3.1.1 的等式表明 $s^*\eta = a^*\delta_X$. 定义表明 $\ell(\delta_X) = 1$. 我们希望 $\ell(\eta) = [a] \circ [s]^{-1}$.

定义 6.5.9. (分式). 若 $s \in \mathsf{TFib}$, 我们将一对态射 $A \xleftarrow{s} B \xrightarrow{f} C$ 称作一个分式. 往后记作 (s, f). 分式仅看作 $\mathsf{Mor} \sqcup \mathsf{TFib}$ 中的一类字, (s, f) 在局部化范畴中的取值是 $[f] \circ [s]^{-1}$.

备注 6.5.10. **定义** 6.5.7 也可通过 TCofib 对偶地定义, 从而得到反向的分式. 我们不使用这种分式, 因此无需考虑左分式与右分式之别.

参考文献

[Bas63] Hyman Bass. Big projective modules are free. *Illinois Journal of Mathematics*, 7(1):24–31, March 1963. doi:10.1215/ijm/1255637479.

[BK14] Theo Bühler and Matthias Kunzer. Some elementary considerations in exact categories, July 2014. URL: https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/excounter.pdf.

[BS01] Paul Balmer and Marco Schlichting. Idempotent Completion of Triangulated Categories. *Journal of Algebra*, 236(2):819–834, February 2001. doi:10.1006/jabr.2000.8529.

[Büh10] Theo Bühler. Exact categories. *Expositiones Mathematicae*, 28(1):1–69, January 2010. doi:10.1016/j.exmath.2009.04.004.

[Che18] Xiao-Wu Chen. The Extension-lifting Lemma via Two-term Complexes, November 2018. URL: http://home.ustc.edu.cn/~xwchen/USTC%20Algebra%20Notes%20Archiv/The%20Extension-Lifting%20lemma%20via%20two-term%20complexes.pdf.

[Cre21] Richard Crew. Homological Algebra Lecture 6, 2021. URL: https://people.clas.ufl.edu/rcrew/files/homology-lect6.pdf.

[DG67] Jean Dieudonné and Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1961–1967.

[GZ67] Peter Gabriel and Michel Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1967. doi:10.1007/978-3-642-85844-4.

[Hap88] Dieter Happel. *Triangulated Categories in the Representation of Finite Dimensional Algebras*. Cambridge University Press, 1 edition, February 1988. doi:10.1017/CBO9780511629228.

[Hov07] Mark Hovey. *Model Categories*. American Mathematical Soc., 2007. URL: https://www.nzdr.ru/data/media/biblio/kolxoz/M/MA/MAct/Hovey%20M.%20Model%20categories%20(LN,%20Wesleyan%20U.,%201998)(213s)_MAct_.pdf.

[Joy08] André Joyal. The theory of quasi-categories and its applications. 2008. URL: https://ncatlab.org/nlab/files/JoyalTheoryOfQuasiCategories.pdf.

[JT06] Andre Joyal and Myles Tierney. Quasi-categories vs Segal spaces, November 2006. arXiv:math/0607820, doi:10.48550/arXiv.math/0607820.

[Kel82] Gregory M. Kelly. *Basic Concepts of Enriched Category Theory*. Number 64 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 1982. URL: http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html.

[Kel96] Bernhard Keller. Derived Categories and Their Uses. In *Handbook of Algebra*, volume 1, pages 671–701. Elsevier, 1996. doi:10.1016/S1570-7954(96)80023-4.

[LC07] Jue Le and Xiao-Wu Chen. Karoubianness of a triangulated category. *Journal of Algebra*, 310(1):452–457, April 2007. doi:10.1016/j.jalgebra.2006.11.027.

[Lura] Jacob Lurie. Kerodon. https://kerodon.net/tag/0022.

[Lurb] Jacob Lurie. Kerodon. https://kerodon.net/tag/004N.

[May01] John P. May. The axioms for triangulated categories, 2001. URL: https://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/Triangulate.pdf.

[Mit65] Barry Mitchell. *Theory of Categories*. Academic Press, 1965. URL: https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/mitchell.pdf.

[Mur07] Daniel Murfet. Triangulated categories part i, April 2007. URL: http://therisingsea.org/notes/TriangulatedCategories.pdf.

[Nee91] Amnon Neeman. Some new axioms for triangulated categories. *Journal of Algebra*, 139(1):221–255, May 1991. doi:10.1016/0021-8693(91)90292-G.

[Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated Categories*. Number no. 148 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, 2001. URL: https://homepage.mi-ras.ru/~akuznet/homalg/Neeman%20Triangulated%20categories.pdf.

[NP19] Hiroyuki Nakaoka and Yann Palu. Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, LX(2):117–193, 2019. arXiv title "Mutation via Hovey twin cotorsion pairs and model structures in extriangulated categories". URL: https://hal.science/hal-02136919.

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical Algebra*, volume 43 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1967. doi:10.1007/BFb0097438.

[Qui69] Daniel Quillen. Rational Homotopy Theory. *The Annals of Mathematics*, 90(2):205, September 1969. arXiv:1970725, doi:10.2307/1970725.

[Ree73] Christopher L. Reedy. Homotopy theory of model categories. 1973. URL: https://math.mit.edu/~psh/reedy.pdf.

[RZ21] Shi Rong and Pu Zhang. Strong version of Snake Lemma in exact categories. *Homology, Homotopy and Applications*, 23(2):151–163, 2021. doi:10.4310/HHA.2021.v23.n2.a9.

[Ste67] N. E. Steenrod. A convenient category of topological spaces. *Michigan Mathematical Journal*, 14(2):133–152, May 1967. doi:10.1307/mmj/1028999711.

[Ver96] Jean-Louis Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. Number 239 in Astérisque. Société mathématique de France, 1996. URL: https://www.numdam.org/item/AST_1996__239__R1_0/.

[Wis11] Jonathan Wise. A A Non-elementary Proof of the Snake Lemma, 2011. URL: https://ncatlab.org/nlab/files/Wise-SnakeLemma.pdf.

[Yon60] Nobuo Yoneda. On Ext and exact sequences. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 8:507–576, 1960. URL: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=225854.

[Zho25] Yu Zhou. Tilting theory for extended module categories, January 2025. arXiv:2411.15473, doi:10.48550/arXiv.2411.15473.