30-Nov-2025

Ex U, V 是数域上的非零线性空间

$\{f_i : U \longrightarrow V\}_{i=1}^{m}$ 是不同的线性映射.

证明 存在 $x \in U$ s.t. $\{f_i(x)\}_{i=1}^{m}$ 两两不同.

Thm $\mathbb{F}$ 数域 $\{U_i \subsetneq \mathbb{F}^n\}_{i=1}^{m}$, 则 $\bigcup_{i=1}^{m} U_i \neq \mathbb{F}^n$

Pf. 构造 $\{(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) \mid x \in \mathbb{F}\} =: S \subseteq \mathbb{F}^n$

由 Vandermonde S 中任意 n 个元素都能作为基.

由"真子空间" 每个 U_i 至多包含 $\le n-1$ 个 S 中元素

故 $\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ 至多包含 S 中 $m(n-1)$ 个元素.

但 $|S| = \infty$ 矛盾!

Ex $\mathbb{F}$ 数域 $f : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$ 线性映射.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

满足: $\forall v \in \mathbb{F}^n$, $f(v)$ 属于某一 V_i $(\exists\, 1 \le i \le n)$

请证明 一定存在 k s.t. $f(v) = v_k$ ($\forall v \in \mathbb{F}^n$)

解. 对 $1 \le i \le n$ 令

$$S_i = \{v \in \mathbb{F}^n \mid f(v) = v_i\}$$

- S_i 是线性空间. 即
  - ✓ ① $S_i \neq \phi$
  - ✓ ② $\forall u, v \in S_i$, $u+v \in S_i$
  - ✓ ③ $\forall u \in S_i$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \cdot u \in S_i$

由题设. $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = \mathbb{F}^n$, 由 thm $\exists k$ s.t. $S_k = \mathbb{F}^n$.

Ex U, V 是实域上的非零线性空间

$\{f_i : U \longrightarrow V\}_{i=1}^{m}$ 是不同的线性映射.

证明. 存在 $x \in U$ s.t. $\{f_i(x)\}_{i=1}^{m}$ 两两不同.

解 $\forall$ $1 \le i < j \le m$. 令

$$S_{i,j} = \{u \in U \mid f_i(u) = f_j(u)\}$$

由题设. $S_{i,j}$ 都是真子空间.

由 Thm $\bigcup_{1 \le i < j \le n} S_{ij} \neq U$. 任取 $x \notin U$ 即可.

Lem $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\exists\ P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $P^{-1}AP = B$. 则 $\exists\ Q \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $QAQ^{-1} = B$.

Pf. $AP = PB$ $\quad (P = X + iY,\ X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n})$

$\Rightarrow \begin{cases} AX = XB, \\ AY = YB. \end{cases}$ 引入多项式

$$\det(x_1 \cdot X + x_2 \cdot Y) \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$$

* 数域上多项式在每一点处取值为0 则这是零多项式. Vandermonde.

$\det(x_1 \cdot X + x_2 \cdot Y)$ 作为 $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ 中多项式 是非零的. 代入 $(x_1, x_2) = (1, i)$ 即知.

因为 $\det(x_1 \cdot X + x_2 \cdot Y) \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ 是非零的. $\exists\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$ s.t.

$$\det(aX + bY) \neq 0.$$

$$\Rightarrow A \cdot \underbrace{(aX+bY)}_{\in GL_n(\mathbb{R})} = \underbrace{(aX+bY)}_{} \cdot B$$

Lem $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. $\exists\ P\in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $P^{-1}AP=B$. 则 $\exists\ Q\in GL_n(\mathbb{F})$ s.t. $QAQ^{-1}=B$.

pf. $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{F}$-线性空间.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{CLAIM } \exists\ \{x_i\}_{i=1}^{m} \text{ 线性无关} \\ \quad \exists\ P_i\in\mathbb{F}^{n\times n} \text{ s.t.} \\ \quad P=x_1P_1+x_2P_2+\cdots+x_nP_n. \\ \#\end{array}}$$

令 $\underline{\det(t_1\cdot P_1+t_2\cdot P_2+\cdots+t_n\cdot P_n)}\in\mathbb{F}[t_1,\dots,t_n]$ $\mathbb{F}$

作为 $\mathbb{C}$ 非零 (代入 $t_1\dots t_n$ 即知)

$\Rightarrow$ $\neq 0$

$\Rightarrow$ 作为 $\mathbb{F}$ 非零

$\Rightarrow$ $\exists$ $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{F}$ s.t.

$$\det(a_1\cdot P_1+a_2\cdot P_2+\cdots+a_n\cdot P_n)\neq 0.$$

F 整域

Def 给定 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，称 $m_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 A 的极小多项式，若 $m_A(A)=0$，且 $\forall\, m_A(x)$ 因子 $f(x)$ 总有 $f(A)\neq 0$.

Thm (Hamilton-Cayley) $\det(xI-A)$ 零化 A

由 Thm $m_A(x)$ 是 $\det(xI-A)$ 的因子

Ex $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$m_A(x)=x^2$

$$A=\left(\begin{array}{cc|c}2&1&\\&2&\\\hline&&3\end{array}\right) \quad m_A(x)=(x-3)(x-2)^2$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&&\\\hline&&&0&1\\&&&&0\end{array}\right) \quad m_A(x)=x^3$$

Ex $A=\begin{pmatrix}J_{s_1}(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&J_{s_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}$

求 $m_A(x)$ $\qquad m_A(x)=(x-\lambda_i)^{n_i}$

n_i 是 λ_i 所在的最大 Jordan 块的阶数.

Rmk $m_A(x) = \det(xI - A)$

$\Leftrightarrow$ A的 Jordan块的特征值两两不同.

Def 给定 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $v \in \mathbb{F}^n$

$m_A^v(x)$ 是 v关于A的极小多项式. i.e.

$$\begin{cases} \left[m_A^v(A)\right] \cdot v = 0 \\ \forall\ m_A^v(x) \text{的因子 } f(x).\ \left[f(A)\right] \cdot v \neq 0 \end{cases}$$

Thm $\exists\ v \in \mathbb{F}^n$ s.t. $m_A(x) = m_A^v(x)$.

* 试证明: $\left(m_A^v(x) \mid m_A(x) \right)$

pf. 取 $S := \{ g(x) \in \mathbb{F}[x] \mid g(A) \cdot v = 0 \}$

则 S 中所有多项式的最大公因子即为所求

* 试证明 $\forall\ X \subseteq \mathbb{C}$, $\exists$包含X的最小域

pf. 取 $S := \{ \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C} \mid X \subseteq \mathbb{F} \}$

$\bigcap_{\mathbb{F} \in S} \mathbb{F}$ 即为所求.

Thm $\exists\, v \in \mathbb{F}^n$ s.t. $m_A(x) = m_A^v(x)$.

Pf. $m_A(x)$ 的因子"有限"

设 S 是 $m_A(x)$ 的所有因子.

对 $f \in S$, 设 $V_f := \{ v \mid m_A^v(x) = f \} \cup \{0\}$.

由构造 $\bigcup_{f\in S} V_f \neq \mathbb{F}^n$

取 $\bigcup_{f\in S} V_f$ 外的向量即可.

Ex $\exists \{v_1, \cdots, v_n\} \subseteq \mathbb{F}^n$ 为基 s.t. $m_A^{v_i}(x) = m_A(x)$

Q $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 求 $\dim \{ X \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid AX = XA \}$.

Comm A

(1) $\dim \operatorname{Comm} A = n^2 \iff A$ 是纯量矩阵.

(2) $\dim \operatorname{Comm} A = \dim \operatorname{Comm}(P^{-1}AP)$.

$\operatorname{Comm}(P^{-1}AP) = \{ P^{-1}XP \mid X \in \operatorname{Comm} A \}$.

Q: $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{m\times m}$, 求 $AX=XB$ 的解.

注 $(\lambda\neq\mu)$, $J_m(\lambda)\cdot X = X\cdot J_n(\mu)$ 的所有解. 0

$$f(J_m(\lambda))\cdot X = X\cdot f(J_n(\mu))$$

$$f=\det(xI-J_m(\lambda))$$

只需证 $\big(\underbrace{\det(xI-J_m(\lambda))}_{=(x-\lambda)^m}\big)(J_n(\mu))$ 可逆.

$X\in\mathbb{F}^{m\times n}$

注 $(\lambda=\mu)$ $J_m(\lambda)\cdot X = X\cdot J_n(\lambda)$.

$\Leftarrow$ 与 $J_m(0)X = X J_n(0)$ 同解.

e.g. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & c & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \ddots & & \begin{matrix} c & b & a \\ & c & b \\ & & c \end{matrix} \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{array}\right) \quad m\le n$$

解构成 $\min(m,n)$ 维空间.

Q: $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\dim(\mathrm{Comm}\,A)$ 可能取哪些值?

解:

Recall $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{m\times m}$: $(AX=XB \Rightarrow X=0)$

$\Leftrightarrow$ ($\forall\, C$ 形如 $AY-YB$) ✓

$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{pmatrix}$ $\dim=2$

$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ $\dim=2$

$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ $\dim=4$

$A\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}A$
$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}p&0\\0&q\end{pmatrix}$

Q: $A\in\mathbb{F}^{3\times 3}$ $\dim(\mathrm{Comm}\,A)$ 可能取值.

3 5 9

Thm $A_{n\times n}$ 所有Jordan块有不同的特征值

$\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Comm}\,A)=n$.

$\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & \\ & 0 & \\ \hline & & 0\end{array}\right)$ $\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ & 0 & 1\\ & & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} AX_{2\times 2} & AY_{2\times 1} \\ BZ_{2\times 1} & BW_{1\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XA & YB \\ ZA & WB \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \quad = 5$$

$$X \qquad \begin{matrix} \lambda_1 & \overset{a_{11}}{J_1} & \overset{a_{12}}{J_2} & \cdots & \overset{a_{1n}}{J_n} \\ \vdots & & & & \\ \lambda_n & \overset{a_{n1}}{J_1} & \overset{a_{n2}}{J_2} & \cdots & \overset{a_{nn}}{J_n} \end{matrix}$$

dim Comm X ?

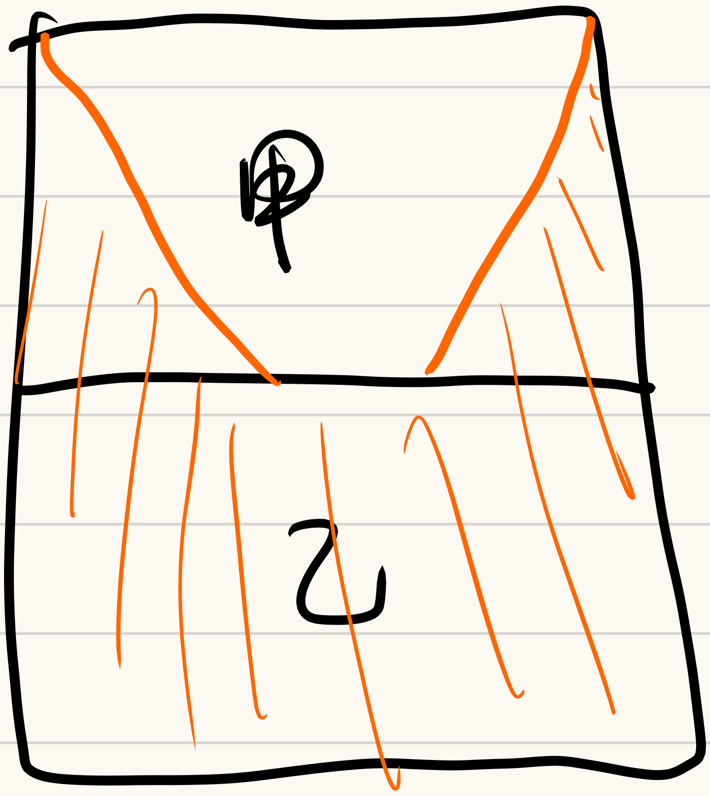
Rmk $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ $\quad \dim \mathrm{Comm}(A) \geq n$. #

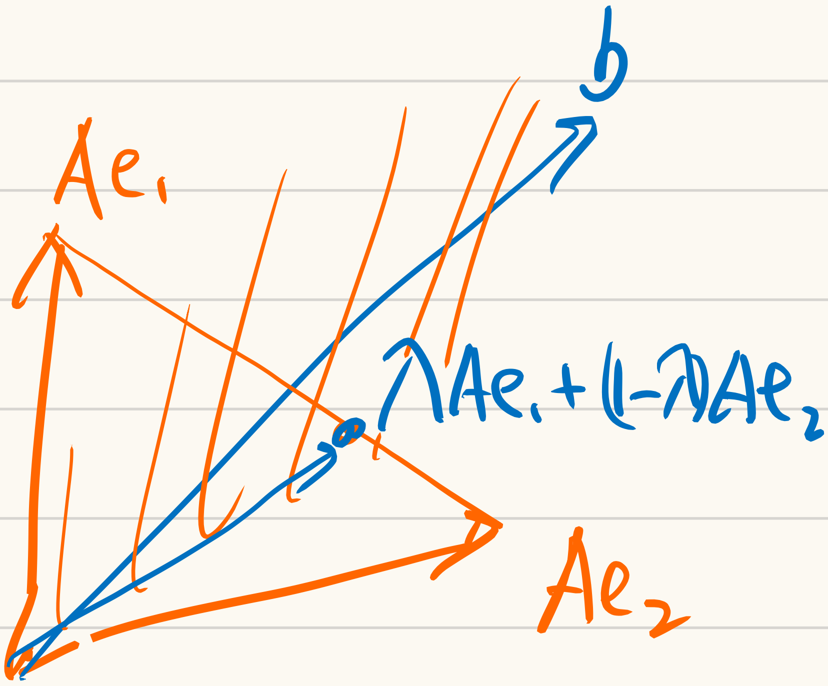
$$\left[\begin{array}{l} \mathbb{F}^{n\times m} \longrightarrow \mathbb{F}^{n\times m} \\ X \longmapsto \underset{n\times n}{A}X - X\underset{m\times m}{B} \end{array}\right]$$

单 $\Leftrightarrow$ 满 $\Leftrightarrow$ 双

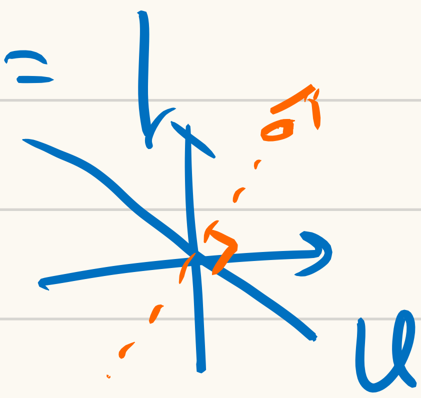
$\Updownarrow$

$\det(xI-A)$ $\det(xI-B)$ 互素.





$-t_1x_1-t_2x_2-\cdots-t_nx_n=$



Corollary 8. 若 U 中的任意非零向量既有正项也有负项, 则 $U^{\perp}$ 中存在正的向量.

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

若 $A=A^T$, $A^n=0$

$\Rightarrow A=0. \Leftrightarrow A^TA=0 \Leftrightarrow A^2=0$

A 的 Jordan 块 均一阶

$$(\lambda I-A)^T(\lambda I-A)$$
$$\parallel$$

$\Leftrightarrow \forall\lambda\in$ eigenvalue $\boxed{N(\lambda I-A)=N((\lambda I-A)^2)}$