

习题: 特殊矩阵 (1): 逆矩阵计算

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Tuesday 14th October, 2025

前言

特殊矩阵是线性代数中最接地气的内容, 其来源往往是分析, 计算, 或是物理学等学科.

特殊矩阵的相关习题分作两部分: 逆矩阵的计算与行列式的计算. 本节习题系第一部分.

请完成至少 4 道习题

1 基础习题

选定基域为 \mathbb{C} . 部分结论在一般数域上 (甚至是有限域上) 成立, 此处就不必考究了.

习题 1. 将 M 顺时针旋转 90° , 得 \widetilde{M} . 试描述由 M^{-1} 至 $(\widetilde{M})^{-1}$ 的“运动过程”.

习题 2. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

备注. M 并非“高度对称”的, 其严格表述是

$$M = 2I - E_{1,1} - \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} E_{i,j}. \quad (1.2)$$

习题 3. 计算以下矩阵的逆矩阵.

$$M = \begin{pmatrix} \xi^{1 \cdot 1} & \xi^{1 \cdot 2} & \xi^{1 \cdot 3} & \cdots & \xi^{1 \cdot (n-1)} & \xi^{1 \cdot n} \\ \xi^{2 \cdot 1} & \xi^{2 \cdot 2} & \xi^{2 \cdot 3} & \cdots & \xi^{2 \cdot (n-1)} & \xi^{2 \cdot n} \\ \xi^{3 \cdot 1} & \xi^{3 \cdot 2} & \xi^{3 \cdot 3} & \cdots & \xi^{3 \cdot (n-1)} & \xi^{3 \cdot n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi^{(n-1) \cdot 1} & \xi^{(n-1) \cdot 2} & \xi^{(n-1) \cdot 3} & \cdots & \xi^{(n-1) \cdot (n-1)} & \xi^{(n-1) \cdot n} \\ \xi^{n \cdot 1} & \xi^{n \cdot 2} & \xi^{n \cdot 3} & \cdots & \xi^{n \cdot (n-1)} & \xi^{n \cdot n} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

以上 $\xi = e^{2\pi i/n}$ 是 n -次单位根. n 即 M 的阶数.

备注. 以上矩阵在 Fourier 分析中常见. 若无思路, 不妨先计算 M^2 .

习题 4. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & a & a & a & \cdots & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

备注. 证明应当适当地借助引理, 例如分块上三角矩阵的逆, $I + uv^T$ 的逆等等.

习题 5. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

备注. 以上矩阵称作循环矩阵. 循环矩阵有一重要特性: 将 M 中一切非 2 的数字改作 0, 得矩阵 $2 \cdot Z$, 此时 M 是 Z 的多项式. Now M^{-1} is around the corner.

习题 6. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

备注. 更规范的表述: $m_{i,j} = \min(i, j)$.

习题 7. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} k^0 \cdot C_0^0 & & & & & & \\ k^1 \cdot C_1^0 & k^0 \cdot C_1^1 & & & & & \\ k^2 \cdot C_2^0 & k^1 \cdot C_2^1 & k^0 \cdot C_2^2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ k^{n-2} \cdot C_{n-2}^0 & k^{n-3} \cdot C_{n-2}^1 & k^{n-4} \cdot C_{n-2}^2 & \cdots & k^0 \cdot C_{n-2}^{n-2} & & \\ k^{n-1} \cdot C_{n-1}^0 & k^{n-2} \cdot C_{n-1}^1 & k^{n-3} \cdot C_{n-1}^2 & \cdots & k^1 \cdot C_{n-1}^{n-2} & k^0 \cdot C_{n-1}^{n-1} & \\ k^n \cdot C_n^0 & k^{n-1} \cdot C_n^1 & k^{n-2} \cdot C_n^2 & \cdots & k^2 \cdot C_n^{n-2} & k^1 \cdot C_n^{n-1} & k^0 \cdot C_n^n \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

备注. 以上 $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 是组合数¹.

提示: 矩阵 $A = B$ 的充要条件是 $Av = Bv$ 对一切试验向量 v 成立. 这个观点²类似电学中的“试验电荷”. 此处的试验向量 v 可以取作特殊的列向量 $(1, t, t^2, \dots, t^n)$ (为什么?).

¹约定: 若 $n \cdot k = 0$, 则 $C_n^k = 0$. 更惯用且国际化的记号是 $\binom{n}{k}$.

²换言之, $A = B$ 当且仅当 A 与 B 描述了同一基底下的相同线性映射. 从类型论的观点看, 假定 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 有相同的类型 $\mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, 则试验向量是所谓的 $\lambda(v : \mathbb{F}^m)$. 从范畴论的观点看, 这是“极弱化版的”米田引理.

2 困难习题

习题 8. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 2 \cos x & 1 & & & & \\ & 1 & 2 \cos x & 1 & & \\ & & 1 & 2 \cos x & 1 & \\ & & & 1 & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & 2 \cos x & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \cos x \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

备注. 提示: 考虑[切比雪夫多项式](#)³. [此文](#)总结了部分三对角矩阵的逆, 也可按图索骥地搜寻更多文献.

习题 9. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} (1+1)^{-1} & (1+2)^{-1} & (1+3)^{-1} & \cdots & (1+n-1)^{-1} & (1+n)^{-1} \\ (2+1)^{-1} & (2+2)^{-1} & (2+3)^{-1} & \cdots & (2+n-1)^{-1} & (2+n)^{-1} \\ (3+1)^{-1} & (3+2)^{-1} & (3+3)^{-1} & \cdots & (3+n-1)^{-1} & (3+n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1+1)^{-1} & (n-1+2)^{-1} & (n-1+3)^{-1} & \cdots & (n-1+n-1)^{-1} & (n-1+n)^{-1} \\ (n+1)^{-1} & (n+2)^{-1} & (n+3)^{-1} & \cdots & (n+n-1)^{-1} & (n+n)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

备注. 答案见[此文](#). 若矩阵通过两个数列和的倒数表达 (即, $m_{i,j} = (a_i + b_j)^{-1}$), 则称之 Hilbert 矩阵. Hilbert 矩阵虽然不是 $u^T v$ 形式的秩 1 矩阵, 但

$$M = \int_0^1 \begin{pmatrix} t & t^2 & \cdots & t^n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} t & t^2 & \cdots & t^n \end{pmatrix} dt. \quad (2.3)$$

上式也是 Hilbert 引入 (1890s) 此类矩阵的动机之一; 熟悉 Hilbert 空间的读者或频繁遇见此式.

习题 10. 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & x_{n-1}^3 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

备注. 答案见[此文](#). 以上矩阵称作 Vandermonde 矩阵, 其主要用途是构造可逆矩阵或是线性无关组. Vandermonde 矩阵的种种性质不依赖基的选取, 有限域上的 Vandermonde 矩阵与编码理论紧密关联.

³该俄文名存在 Chebyshev, Tchebichef, Tchebychev, Tchebycheff, Tschibyshev, Tschibyscheff, Tschibyscheff, Čebyčev, Čebyšev, Chebysheff, Chebychov 或 Chebyshov 等形式的英文转写; 中文翻译统一作“切比雪夫”. 类似地, 拓扑常用的“吉洪诺夫定理”也存在多种英文表述, 需稍作留意.