# 2025 年秋组会讲义 “外三角范畴”

张陈成

2025 年秋

最后更新于 2025 年 9 月 9 日.

## 目录

# 1 正合范畴与三角范畴拾遗

## 1.1 正合范畴三角范畴

短正合列 (下简称 ses) 是同调代数的基本研究对象, 正合范畴研究了一般加法范畴上的短正合列理论.

**定义 1.** (Quillen 的正合范畴). **正合范畴** $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ 的基本资料是加法范畴 $\mathcal{C}$ 与一族映射图 $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ 中对象称为 $\mathcal{C}$ 中的**短正合列 (ses)**, 形如

$$0 \to X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \to 0, \tag{1}$$

其中 $i = \ker p$, 称 $i$ 为**容许单态射**; $p = \operatorname{cok} i$, 称 $p$ 为**容许满态射**. 正合范畴 $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ 需满足以下公理:

Ex0 对任意对象 $X$, 恒等映射 $\mathrm{id}_X$ 是容许单态射;

Ex0' 对任意对象 $X$, 恒等映射 $\mathrm{id}_X$ 是容许满态射;

Ex1 容许单态射在复合下封闭;

Ex1' 容许满态射在复合下封闭;

Ex2 容许单态射 $X \to Y$ 对任意态射 $X \to Z$ 有推出, 且 $Z \to Y \sqcup_X Z$ 仍为容许单态射;

Ex2' 容许满态射 $B \to C$ 对任意态射 $A \to C$ 有拉回, 且 $B \times^C A \to A$ 仍为容许满态射.

**命题 1.** 正合范畴的反范畴是正合范畴.

证明. 公理 Exn (Exn') 的在反范畴中的表述是 Exn' (Exn), 故成立. □

后文提及的 "对偶可证" 是基于反范畴的考量.

备注 1. 正合范畴的一般理论见 [Büh10] 与 [Kel96], 一些较有意义计算与反例参阅 [BK].

正合范畴是特殊的外三角范畴. 由于正合范畴的部分主要结论 (如 "六项长正合列") 可从外三角范畴者退化得到, 此节无需提及这类结论. 以下两则正合范畴的重要结论被推广作外三角范畴定义的一部分, 应当给出证明. 第一则结论是 $\mathrm{Ext}^1$ 具有双函子性.

**定理 1.** $\mathrm{Ext}^1 : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ 将一组对象 $(Z, X)$ 对应至 "所有形如 $0 \to X \to ? \to Z \to 0$ 的 ses" 的同构类. 对任意态射 $f : X \to X'$, $\mathrm{Ext}^1(Z, f)$ 将短正合列 $\theta$ 对应至 $\theta'$, 机理是

$$\begin{tikzcd} \theta \arrow[d, dashed, "\mathrm{Ext}^1(f,Z)"'] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & E \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ \theta' & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, dashed] & F \arrow[r, dashed] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2}$$

对 $g' : Z \to Z'$, 可以通过拉回对偶地定义 $\mathrm{Ext}^1(g', X) : \mathrm{Ext}^1(Z', X) \to \mathrm{Ext}^1(Z, X)$. 今断言, 这是加法双函子, 其加法结构与 Baer 和匹配.

证明. 扩张的一般理论参阅 [Mit65] 章节 VII. 注意: Mitchell 通过 Baer 和证明 $\mathrm{Ext}^1$ 的双函子性; 为消解循环论证的疑虑, 以下直截了当地说明双函子性, 即证明如下引理.

引理 1. 对 ses $\tau : 0 \to X \to M \to Z' \to 0$, 态射 $f : X \to X'$ 与 $g : Z \to Z'$, 总有

$$\mathrm{Ext}^1(g, X')(\mathrm{Ext}^1(Z', f)(\tau)) = \mathrm{Ext}^1(Z, f)(\mathrm{Ext}^1(g, X)(\tau)). \tag{3}$$

方便起见, 将上式记作 $g^* f_* \tau = f_* g^* \tau$.

以下证明 $f_*: g^*\tau \mapsto g^*f_*\tau$, 即, 存在 $\varphi: G \to F$ 使得下图中 $b'' = x' \circ \varphi$, 且 $\star$ 是推出:

$$\begin{tikzcd}
g^*f_*\tau & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "y"] & F \arrow[r, "x'"] & Z \arrow[r] & 0 \\
g^*\tau \arrow[u, mapsto] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "z"] \arrow[u, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\star"] & G \arrow[r, "b''", color=blue] \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "g''", color=red] \arrow[dr, phantom, "\text{PB}"] & Z \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, "g", color=blue] & 0 \\
\tau \arrow[u, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "a"] \arrow[u, equal] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\text{PO}"] & M \arrow[r, "b"] \arrow[d, "f'", color=red] & Z' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
f_*\tau \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "a'"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "x", color=red] \arrow[dr, phantom, "\text{PB}"] & Z' \arrow[r] & 0 \\
g^*f_*\tau & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "y"] & F \arrow[r, "x'"] \arrow[u, "g'"] & Z \arrow[r] \arrow[u, "g"] & 0
\end{tikzcd} . \tag{4}$$

$\varphi$ 由红, 蓝两组复合态射及右下方的拉回方块决定. 两组复合态射即

$$G \xrightarrow{f' \circ g''} E \xrightarrow{x} Z', \quad G \xrightarrow{b''} Z \xrightarrow{g} Z'. \tag{5}$$

由拉回的泛性质, 存在唯一的 $\varphi$ 使得 $x' \circ \varphi = b''$ 且 $f' \circ g'' = g' \circ \varphi$. 因此右上方块交换. 为说明 $\star$ 的交换性, 只需验证 $y \circ f$ 与 $\varphi \circ z$ 均是如下拉回问题的解 $\mathfrak{X}$:

$$x \circ g' \circ \mathfrak{X} = g \circ x' \circ \mathfrak{X}. \tag{6}$$

自行追图较阅读连等式更为快捷, 遂略去检验过程. 由 $\operatorname{cok} y \simeq \operatorname{cok} z$, 故 $\star$ 是推出. □

第二则结论是 Noether 同构. 为精简记号, 通常作如下约定.

**记号 1.** 使用 $\rightarrowtail$ ($\twoheadrightarrow$) 表示容许单态射 (容许满态射). 例如, 正合范畴的 ses 形如 $X \rightarrowtail Y \twoheadrightarrow Z$.

**定理 2.** 假定容许单态射 $i$ 与 $j$ 可复合作 $j \circ i$, 则有三条 ses 作成的交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, tail, "j"] & Z \arrow[d, tail, dashed, "j'"] \\
X \arrow[r, tail, "j \circ i"] & A \arrow[r, two heads, "r"] \arrow[d, two heads, "q"] & W \arrow[d, two heads, dashed, "q'"] \\
& B \arrow[r, equal] & B
\end{tikzcd} \tag{7}$$

余核的反性质诱导了 $j'$ 与 $q'$. 今断言 $Z \overset{j'}{\rightarrowtail} W \overset{q'}{\twoheadrightarrow} B$ 也是 ses.

*证明.* 右上方方块是推出拉回. 依照 Ex2, $j'$ 是容许单态射, 从而嵌入某一 ses $Z \overset{j'}{\rightarrowtail} W \overset{q''}{\twoheadrightarrow} B'$. 依照推出方块, $\operatorname{cok} j \simeq \operatorname{cok} j'$, 从而 $q'$ 与 $q''$ 相差左复合一个同构. 这说明题设所示的态射序列是 ses. □

*备注 2.* 若记上述 $Z := Y/X, W := A/X$, 则 Noether 同构可表述为 $\frac{A/X}{Y/X} \simeq \frac{A}{Y}$. 这是 Noether 同构的初始形态.

## 1.2 三角范畴

外三角是正合范畴与三角范畴的共同推广. 试回顾三角范畴的定义.

**定义 2.** 三角范畴由资料 $(\mathcal{C}, \Sigma, \mathcal{E})$ 描述. 其中,

1. $\mathcal{C}$ 是加法范畴,
2. $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是范畴的自等价, 称作平移函子,
3. $\mathcal{E} = \{X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中好三角组成的类.

约定两则术语:

1. (三角射). 两个好三角间的态射描述作三元组 $(\alpha, \beta, \gamma)$, 使得下图交换 (横行是好三角):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\gamma"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\alpha"] \\
A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "j"] & C \arrow[r, "k"] & \Sigma A
\end{tikzcd}, \tag{8}$$

2. (旋转). 下图中, 中行是好三角, 首 (尾) 行是其逆 (顺) 时针旋转:

$$\begin{array}{ll}
\Sigma^{-1} Z \xrightarrow{-\Sigma w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z & \text{(逆)} \\
X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X & . \\
Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y & \text{(顺)}
\end{array} \tag{9}$$

特别地, 好三角类满足以下公理:

- TR1-1 $\mathcal{E}$ 关于同构封闭. 具体地, 若 8 是 $\mathcal{C}$ 中通常的交换图, 且 $\alpha, \beta, \gamma$ 都是同构, 则上行是好三角当且仅当下行是好三角;
- TR1-2 任意态射 $u$ 可嵌入某一好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$;
- TR1-3 对任意对象 $X$, 平凡三角 $0 \to X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0$ 是好三角;
- TR2 好三角关于顺时针旋转封闭;
- TR3 假定图 8 的上行与下行是好三角, 若图中仅存在 $\alpha$ 与 $\beta$ 使得 $\beta \circ u = i \circ \alpha$, 则一定存在某一 $\gamma$ 使得上图交换;
- TR4 若下图中 $r_1, r_2$ 与 $c_2$ 均为好三角, 则存在虚线所示的好三角 $c_3$ 使得所有方块交换:

$$\begin{tikzcd}
 & & c_2 & c_3 & \\
r_1 & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "a"] & W \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
r_2 & X \arrow[r, "x"] & Z \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & R \arrow[r, "z"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\
 & & S \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"] & S \arrow[r, "c"] \arrow[d, dashed] & \Sigma Y \\
 & & \Sigma Y \arrow[r, "\Sigma v"] & \Sigma W &
\end{tikzcd}. \tag{10}$$

备注 3. 关于三角范畴的定义见 [Ver96] 或 [Nee01]. 更通俗的读物是 [Mur07] 或 [May]. 特别地, [May] 指出 TR3 可由其余公理推出.

以下从正合范畴的视角 “粗浅地” 解释三角范畴; 诚然, 更好的工具是外三角范畴.

**例子 1.** 给定好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$. 若将 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ 类比作 ses, 则 $w \in \mathrm{Ext}^1(Z, X)$ 描述了扩张元. 特别地, $\mathrm{Ext}(Z, X) := (Z, \Sigma X)$. TR1-1, TR1-2, TR3 类似核与余核泛性质的推论. TR1-3 即 Ex0. TR4 类似 Noether 同构.

**命题 2.** 以下是三角范畴的直接推论. 证明见通常的教材.

1. (TR1-2 的加强). 任意态射可以以任意位置嵌入某一好三角; 若选定该位置, 则其嵌入的好三角在同构意义下唯一;
2. (TR2 的类似结论). 好三角关于逆时针旋转封闭;
3. (TR3 的类似结论). 若给定 $\alpha, \beta$ 与 $\gamma$ 其中两者, 则一定存在第三者使得图 8 交换;
4. (长正合列). 对任意好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$, 有函子的长正合列
$$\cdots \to (-, \Sigma^{-1} Z) \to (-, X) \to (-, Y) \to (-, Z) \to (-, \Sigma X) \to \cdots, \tag{11}$$
以及
$$\cdots \to (\Sigma X, -) \to (Z, -) \to (Y, -) \to (X, -) \to (\Sigma^{-1} Z, -) \to \cdots. \tag{12}$$
5. (长正合列的推论). 若图 8 中 $\alpha, \beta$ 与 $\gamma$ 中有两者为同构, 则第三者也是同构.

**例子 2.** 以下是一些注意事项.

1. $\Sigma$ 是范畴自等价, 这并不意味着 $\Sigma X \simeq X$.
2. TR3 中补全的态射的方式未必唯一.

## 1.3 同伦的推出拉回

本节所述的 “同伦的推出拉回” 在外三角范畴的图表定理中大有作用. 以下给出一侧预加范畴中的观察.

**例子 3.** 给定预加范畴 $\mathcal{A}$ 中的交换方块 (左), 以及其诱导的复形 (右):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "l"'] & W \end{tikzcd} \qquad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\binom{f}{h}} Y \oplus Z \xrightarrow{(g\ -l)} W \longrightarrow 0 \quad. \tag{13}$$

以下是一则转述定义即得的引理.

引理 2. 左图是拉回 (推出), 当且仅当右图左正合 (右正合).

称某交换方块是拉回 (推出), 若相应的态射方程存在唯一的解. 倘若去除唯一性, 则称该交换方块是弱拉回 (弱推出). 以下是一则转述定义即得的引理.

引理 3. 左图是弱拉回, 当且仅当以下是函子的正合列:
$$(-, X) \xrightarrow{\binom{f}{h}_*} (-, Y) \oplus (-, Z) \xrightarrow{(g\ -l)_*} (-, W). \tag{14}$$
左图是弱推出, 当且仅当以下是函子的正合列:
$$(W, -) \xrightarrow{(g\ -l)^*} (Y, -) \oplus (Z, -) \xrightarrow{\binom{f}{h}^*} (X, -). \tag{15}$$

**命题 3.** 由正合范畴的 Noether 同构, 容许单态射 $X \to Y$ 与容许满态射 $X \to Z$ 的推出是推出拉回方块. 特别地, 这一推出拉回方块诱导的 ses 是正合范畴的 ses.

*证明.* 只需证明, 若 $i : A \to B$ 是容许单态射, 则对任意 $f : A \to C$, $\binom{i}{f}$ 也是容许单态射. 以下证明一则更强的引理.

> 引理 4. 若 $q \circ p$ 是容许单态射, $q$ 是容许满态射, 则 $p$ 是容许单态射.
>
> *证明.* 对态射 $q$ 与 $q \circ p$ 使用 Noether 同构, 得以下交换图:
>
> $$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[dr, dashed, "s"] \arrow[ddr, bend right, "1_X"'] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & A \arrow[d, tail, "i"] & \\ & F \arrow[r, tail, "p'"] \arrow[d, two heads, "\lambda"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "q"] & Z \arrow[d, equal] \\ & X \arrow[r, tail, "q\circ p"] & Y \arrow[r, two heads, "\pi"] & Z \end{tikzcd} \quad . \tag{16}$$
>
> 最左纵列的短正合列可裂. 考虑可裂 ses $X \overset{s}{\rightarrowtail} F \twoheadrightarrow A$ 知 $s$ 是容许单态射. 由蓝线所示的拉回问题, 得 $p = p' \circ s$ 是容许单态射的复合, 故 $p$ 也是容许单态射. □

注意, 以上引理的证明未使用弱幂等完备的假定. □

**定义 3.** (正合范畴中同伦的推出拉回). 称交换图是正合范畴中同伦的推出拉回方块, 若其诱导的链复形是正合范畴的 ses.

**例子 4.** 将 Abel 范畴与所有 ses 作成正合范畴, 则推出拉回方块必然是同伦的推出拉回方块.

**定理 3.** (正合范畴的同伦推出拉回方块). 以下五类是正合范畴的同伦推出拉回方块:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & \bullet \arrow[d, tail, dashed] \\ \bullet \arrow[r, tail, dashed] & \bullet \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & \bullet \arrow[d, two heads, dashed] \\ \bullet \arrow[r, tail, dashed] & \bullet \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & \bullet \arrow[d, two heads] \\ \bullet \arrow[r, tail] & \bullet \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & \bullet \arrow[d, two heads] \\ \bullet \arrow[r, two heads] & \bullet \end{tikzcd}$$
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, dashed] \\ \bullet \arrow[r, tail] & \bullet \arrow[r, two heads] & \bullet \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, equal] \\ \bullet \arrow[r, tail] & \bullet \arrow[r, two heads] & \bullet \end{tikzcd} \quad . \tag{17}$$

*证明.* 使用引理: 若 $i$ 是容许单态射 ($p$ 是容许满态射), 则 $\binom{i}{?}$ 是容许单态射 ($(p\ ?)$ 是容许满态射). □

**定义 4.** (三角范畴中同伦的推出拉回). 称交换图是三角范畴中同伦的推出拉回方块, 若其诱导的三项链复形是三角范畴中好三角前三项.

满足 TR1-TR3 的加法范畴称作预三角范畴. 对预三角范畴, 下给出一则八面体公理的等价公理, 更多等价公理 (不包括以下) 可参阅 [Nee91].

**定理 4.** 预三角范畴是三角范畴, 当且仅当其满足如下等价公理.

1. 八面体公理.

2. 给定红色处态射 $a_1$ 与 $b_1$, 则可以补全下图中的三个好三角与一处三角射:

$$X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(b_2\ -a_2)} Z \xrightarrow{\mu\lambda} \Sigma X$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma b_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "a_2"] & Z \arrow[r, "\lambda"'] & W \arrow[r] & \Sigma Y_1
\end{tikzcd} \tag{18}$$

3. 给定红色个好三角, 同伦推出拉回方块, 以及第一行的好三角. 此时存在 $\mu\lambda = \delta$ 使得下图包含三个好三角与一处三角射:

$$X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(b_2\ -a_2)} Z \xrightarrow{\delta} \Sigma X$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma b_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "a_2"] & Z \arrow[r, "\lambda"'] & W \arrow[r] & \Sigma Y_1
\end{tikzcd} \tag{19}$$

证明. $(1 \to 2)$. 若给定 $a_1$ 与 $b_2$, 则八面体公理 (下图上) 诱导了三角射 (下图下):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{a_1}{b_1}"] \arrow[d, equal] & Y_2 \oplus Y_1 \arrow[r, "{(b_2,-a_2)}"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & Z \arrow[r, "\mu\lambda"] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "a_1"] & Y_2 \arrow[r, "\lambda b_2"] \arrow[d, "0"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, dashed, "t"] & \Sigma X \arrow[d, "\binom{\Sigma a_1}{\Sigma b_1}"] \\
& \Sigma Y_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Sigma Y_1 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, dashed] & \Sigma Y_2 \oplus \Sigma Y_1 \\
& \Sigma Y_2 \oplus \Sigma Y_1 \arrow[r] & \Sigma Z &
\end{tikzcd} \tag{20}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] & Y_2 \arrow[r, "\lambda b_2"] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma b_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "a_2"] & Z \arrow[r, dashed, "\lambda"] & W \arrow[r, "t"] & \Sigma Y_1
\end{tikzcd}$$

此处省略校验过程.

$(2 \to 1)$. 沿用 $(1 \to 2)$ 中构造即可.

$(3 \to 1)$. 依照题设补全四个好三角

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}W \arrow[r, "-\Sigma^{-1}\mu"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] \arrow[dr, phantom, "\blacklozenge"] & Y_2 \arrow[r, "\lambda b_2"] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}W \arrow[r, "-b_1(\Sigma^{-1}\mu)"] & Y_1 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "la_2"] & Z \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "l"] \arrow[dr, phantom, "?"] & W \arrow[d, "-\mu"] \\
& L \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"] & L \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "(\Sigma a_1)k"] & \Sigma X \\
& \Sigma X \arrow[r, "\Sigma a_1"] & \Sigma Y_2 &
\end{tikzcd} . \tag{21}$$

由同伦推出拉回方块 ■, 上图除绿色方块？处均交换. 依照 3 的假定,

$$X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(-b_2\ a_2)} Z \xrightarrow{kl} \Sigma X \tag{22}$$

与

$$X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(b_2\ -a_2)} Z \xrightarrow{\mu\lambda} \Sigma X \tag{23}$$

均是好三角. 同时 $\mu\lambda = \delta = -kl$.

$(1 \to 3)$. 沿用 $(1 \to 2)$ 中构造即可. □

备注 4. 特别地, 八面体公理中的方块 $\star$ 是同伦推出拉回.

$$\begin{tikzcd}
 & & c_2 & c_3 & \\
r_1 & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & W \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
r_2 & X \arrow[r, "x"] & Z \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & R \arrow[r, "z"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\
 & & S \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"] & S \arrow[r, "c"] \arrow[d, dashed] & \Sigma Y \\
 & & \Sigma Y \arrow[r, "\Sigma v"] & \Sigma W &
\end{tikzcd} . \tag{24}$$

特别地, 考虑以下三角射

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"] & \bullet \arrow[d, equal] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd} , \tag{25}$$

则存在 $\beta$ 使得中间方块为同伦的推出拉回. 由八面体公理即证.

**例子 5.** 仍将好三角的第三项态射 “视作” ses 代表的扩张元, 则有三角射

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[d, "\Sigma f"] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "f_*\delta"] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[r, "g^*\varepsilon"] \arrow[d, "g"] & \bullet \arrow[d, equal] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "\varepsilon"] & \bullet
\end{tikzcd} . \tag{26}$$

以上, “ses 的推出拉回” 由态射复合简练地描述:

$$(\Sigma f) \circ \delta = f_*\delta, \quad \varepsilon \circ g = g^*\varepsilon. \tag{27}$$

# 2 外三角范畴的定义与基本性质

## 2.1 外三角范畴的定义

外三角范畴的第一手资料是 [NP19].

**定义 5.** (外三角范畴的基本资料). 外三角范畴描述作三元组 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$. 其中 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, 配有双函子

$$\mathbb{E} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}. \tag{28}$$

Abel 群的 $\mathbb{E}(Z, X)$ 中元素称作扩张元, 记作 $(X, \delta, Z)$, 通常简写作 $\delta$.
记函子范畴 $\mathcal{C}' := \mathcal{C}^{1\to 2\to 3}$, 定义 $\mathcal{C}'$ 上的等价关系 $\simeq$ 如式 29:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d, "\varphi", "\simeq"'] & Z \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r] & E \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \qquad \varphi \text{ 是同构.} \tag{29}$$

定义 “类的映射” $\mathfrak{s}$ 如下:

$$\mathfrak{s} : \mathbb{E}(Z, X) \to \mathcal{C}'/\simeq, \quad \delta \mapsto [X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z], \tag{30}$$

以上明确了 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 的类型. 方便起见, 引入以下记号.

**定义 6.** (推出与拉回). 记 $f_* : \mathbb{E}(X, f)$. 一个兴许更好的理解方式是, $f_*$ 是一族自然变换, $\mathbb{E}(X, f)$ 即 $(f_*)_X$. 对偶地记 $g^* := \mathbb{E}(g, Z)$.

下面给出外三角范畴的公理.

**定义 7.** (外三角范畴的公理). 设 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 如上. 称其为外三角范畴, 若满足以下公理.

ET1 $\mathbb{E}$ 是加法双函子. 双函子性即 $f_* g^* = g^* f_*$, 可比对定理 1 阅读.

ET2-1 显然商函子 $\mathcal{C}^{1\to 2\to 3} \to \mathcal{C}'$ 保持直和. 今约定 $\mathfrak{s}$ 满足如下两则性质:

(a) 若 $\mathfrak{s}(\delta)$ 属于可裂 ses 所在的类, 则必有 $\delta = 0$;

(b) $\mathfrak{s}(\delta \oplus \delta') = \mathfrak{s}(\delta) \oplus \mathfrak{s}(\delta')$. 其中, $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$, $\delta' \in \mathbb{E}(Z', X')$, 以及

$$(\delta \oplus \delta') \in \mathbb{E}(Z, X) \oplus \mathbb{E}(Z', X') \subseteq \mathbb{E}(Z \oplus Z', X \oplus X'). \tag{31}$$

ET2-2 若有扩张元的等式 $f_* \delta = g^* \delta'$, 则存在虚线处态射使得右图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}(Z, X) \arrow[d, "f_*"] \\ \mathbb{E}(Z, X') \\ \mathbb{E}(Z', X') \arrow[u, "g^*"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \delta \arrow[d, mapsto] \\ f_* \delta = g^* \delta' \\ \delta' \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{s}(\delta) & : & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ \mathfrak{s}(\delta') & : & X' \arrow[r] & E \arrow[r] & Z' \end{tikzcd} . \tag{32}$$

ET3 若存在 $a$ 与 $b$ 使得下图左侧方块交换, 则存在 $c$ 使得 $c^* \eta = a_* \delta$, 同时下图交换

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{s}(\delta) & : & X \arrow[r] \arrow[d, "a"] & F \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[d, dashed, "c"] \\ \mathfrak{s}(\eta) & : & X' \arrow[r] & E \arrow[r] & Z' \end{tikzcd} . \tag{33}$$

ET3' 对偶地, 若存在 $b$ 与 $c$ 使得下图右侧方块交换, 则存在 $a$ 使得 $c^* \eta = a_* \delta$, 同时下图交换

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{s}(\delta) & : & X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "a"] & F \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[d, "c"] \\ \mathfrak{s}(\eta) & : & X' \arrow[r] & E \arrow[r] & Z' \end{tikzcd} . \tag{34}$$

ET4 任给定以下 $T$ 形图, 则可以补全虚线所示的 $\dashv$ 形图使得下图交换,

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{s}(\eta) & \mathfrak{s}(\eta') \\
\mathfrak{s}(\delta) & A \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "z"] \arrow[u, phantom, "\vdots"] & C \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[u, phantom, "\vdots"] \\
\mathfrak{s}(\delta') & A \arrow[r, dashed, "zx"] & D \arrow[r, dashed, "v"] \arrow[d, "wv"] & F \arrow[d, dashed, "w"] \\
 & & E \arrow[r, equal] & E
\end{tikzcd}, \tag{35}
$$

同时 $u^*\delta' = \delta, y_*\eta = \eta'$, 以及 $x_*\delta' = w^*\eta$.

ET4' 对调 35 中虚线箭头与实线箭头, 其表述与 ET4 对偶.

**定义 8.** (外三角范畴的术语). 以下是外三角范畴的通用术语.

1. 称 $\mathfrak{s}(\delta)$ 为扩张元 $\delta$ 的**加法实现** (简称**实现**). "加法" 的含义见 ET2-1, "实现" 的含义见 ET2-2. 即便扩张元的实现是一个等价类, 本文也使用 "实现" 指代该等价类中的任意代表元, 这通常不会引起矛盾.

2. 若 $X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{y} Z$ 是扩张元 $\delta$ 的加法实现, 则记作

$$
A \rightarrowtail^{x} B \overset{y}{\twoheadrightarrow} C \overset{\delta}{\dashrightarrow} . \tag{36}
$$

图中虚箭头 $\overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 用于标记加法实现对应的扩张元, 并非确指的态射. 称 $x$ 是 $\mathbb{E}$**-inflation** (简称 **inflation**), $y$ 是 $\mathbb{E}$**-deflation** (简称 **deflation**). 以上序列是 $\mathbb{E}$**-三角**或 $\mathbb{E}$**-conflation** (简称 **conflation**). 若同时涉及正合范畴与外三角范畴, 本文使用 "正合范畴的 inflation/deflation/conflation" 这一全称指代正合范畴中的相应概念.

3. 回顾图 32. 称 $(f,g) : \delta \to \delta'$ 是**扩张元的态射**, 若 $f_*\delta = g^*\delta'$. 称 $(f,h,g)$ 是实现之间的态射, 若 $(f,g)$ 是扩张元的态射且图 32 交换.

我们类比三角范畴与正合范畴, 解释上述公理的动机如下.

**例子 6.** ET2-2, ET3 与 ET3' 涉及两处交换方块和一处扩张元的态射, 姑且 "视作" 三个交换方块. 这三条公理类似三角范畴中三角射的 "二推三" 准则. ET4 (ET4') 类似正合范畴中的 Noether 同构, 其包含三个交换方块与三个恒等式, "对应" (见例 5) 三角范畴 TR4 中的六个交换方块.

**命题 4.** Conflation 关于同构封闭.

*证明.* 假定以下交换图的首行是 $\delta$ 的实现, $\alpha, \beta$ 与 $\gamma$ 是同构:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"] & {} \\
A' \arrow[r, tail, "f'"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] & C' &
\end{tikzcd} . \tag{37}
$$

任取 $\delta' := (\gamma^{-1})^*\alpha_*\delta$ 的实现. 考虑扩张元的态射 $(\alpha,\gamma) : \delta \to \delta'$, 依照 ET2-1 补全实现之间的态射 $(\alpha, \beta', \gamma)$. 由于 $\beta' \circ \beta^{-1}$ 是同构, 依照 $\mathcal{C}'$ 的构造可知上图下行也是 $\delta'$ 的实现. □

**定理 5.** 外三角范畴的反范畴也是外三角范畴.

*证明.* 容易验证. □

## 2.2 六项正合列

本节解释 conflation 诱导的六项正合列.

**定理 6.** (加法充实的米田引理). 假定 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ 是加法函子. 对任意 $X \in \mathcal{C}$, 存在以下 Abel 群的自然同构:

$$F(X) \simeq ((X,-),F(-))_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathbf{Ab})}, \quad a \mapsto [f \mapsto F(f)(a)], \quad \theta_X(1_X) \leftarrow\!\shortmid \theta. \tag{38}$$

假定 $G : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ 是反变加法函子. 对任意 $X \in \mathcal{C}$, 存在以下 Abel 群的自然同构:

$$G(X) \simeq ((-,X),G(-))_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathbf{Ab})}, \quad b \mapsto [f \mapsto G(f)(b)], \quad \psi_X(1_X) \leftarrow\!\shortmid \psi. \tag{39}$$

*证明.* 熟知. 例如可查阅 [Kel] 的 2.1 章节. □

依照 [Yon60] 中隐约显现的动机, 米田引理的初衷或许是为了解释短正合列诱导长正合列时的连接态射. 我们将这一观点提炼作以下定义.

**定义 9.** ($\delta_\sharp$ 与 $\delta^\sharp$). 给定 conflation

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{40}$$

定义自然变换 $\delta_\sharp : (-,C) \to \mathbb{E}(-,A), \quad g \mapsto \delta_\sharp(g) := g^*\delta$. 依照米田引理, 这对应 $\delta \in \mathbb{E}(A,C)$.
定义自然变换 $\delta^\sharp : (A,-) \to \mathbb{E}(C,-), \quad f \mapsto \delta^\sharp(f) := f_*\delta$. 依照米田引理, 这对应 $\delta \in \mathbb{E}(A,C)$.

*备注 5.* 下标 $\delta_\sharp$ 表示扩张元 "被拉回", 上标 $\delta^\sharp$ 表示扩张元 "被推出". 在书写长正合列时, 我们会发现这一角标朝向的合理性.

**定理 7.** (五项正合列). 由公理 ET1-ET3, 以下是函子的正合列:

$$(C,-) \xrightarrow{-\circ g} (B,-) \xrightarrow{-\circ f} (A,-) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C,-) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(B,-) \tag{41}$$

换言之, 以上序列在中间三点正合.

*证明.* ($(B,-)$ 处的正合性). 任意选定 $X$, 试观察下图:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & {} \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, dashed, "0"] & {} \end{tikzcd} \tag{42}$$

假定 $\beta \in \ker(f,X)$. 由 ET3, 存在 $\gamma$ 使得上图交换, 因此 $\beta \in \mathrm{im}(g,X)$. 反之, 若 $\beta = \gamma \circ g$, 则依照 ET3', $\beta \circ f = 0$, 故 $\beta \in \ker(f,X)$. 因此 $\ker(f,X) = \mathrm{im}(g,X)$.
($(A,-)$ 处的正合性). 下证明 $\delta^\sharp \circ (- \circ f) = 0$. 以下交换图表明 $f_*\delta = (1_C)^*0 = 0$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "\binom{1}{g}"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ B \arrow[r, tail, "\binom{1}{0}"] & B \oplus C \arrow[r, two heads, "(0\ 1)"] & C \arrow[r, dashed, "0"] & {} \end{tikzcd} . \tag{43}$$

任取 $h : A \to X$, 得

$$\delta^\sharp \circ (h \circ f) = (hf)_*\delta = h_*(f_*\delta) = 0. \tag{44}$$

反之, 若 $\delta^\sharp(h) = h_*\delta = 0$, 则有如下实现的态射

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "\binom{a}{b}"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & X \oplus C \arrow[r, "(0\ 1)"] & C \arrow[r, dashed, "0"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{45}$$

解得 $h = a \circ f$, 从而 $h \in \mathrm{im}(- \circ f)$. 综上, $\ker \delta^\sharp = \mathrm{im}(- \circ f)$.
($\mathbb{E}(C, -)$ 处的正合性). 下证明 $g^* \circ \delta^\sharp = 0$. 类似图 43 的推导, 得 $g^*\delta = 0$. 反之, 若 $\eta \in \ker g^* \subseteq \mathbb{E}(C, X)$, 则存在 $q$ 使得下图中 $g = b \circ q$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "q"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, two heads, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\eta"] & {} \\
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & X \oplus B \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[u, dashed, "(p\ q)"] & B \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[u, "g"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{46}$$

依照 ET3', 得 $\eta$ 是 $\delta$ 的推出. 综上, $\ker g^* = \mathrm{im}\, \delta^\sharp$. □

依照外三角范畴的反范畴也是外三角范畴, 我们得到如下对偶的定理.

**定理 8.** (五项正合列). 由公理 ET1-ET3, 以下是函子的正合列:

$$(-, A) \xrightarrow{f \circ -} (-, B) \xrightarrow{g \circ -} (-, C) \xrightarrow{\delta_\sharp} \mathbb{E}(-, A) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(-, B) \tag{47}$$

证明. 证明略. □

ET4 (ET4') 公理将以上五项正合列延长为六项.

**定理 9.** (六项正合列). 由公理 ET1-ET4, 以下是函子的正合列:

$$(C, -) \xrightarrow{- \circ g} (B, -) \xrightarrow{- \circ f} (A, -) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C, -) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(B, -) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(A, -) \tag{48}$$

换言之, 以上序列在中间四点正合.

证明. 我们仅证明 $\mathbb{E}(B, -)$ 处的正合性. 函子性表明 $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = 0$. 任取 $\eta \in \ker f^* \subseteq \mathbb{E}(B, X)$, 依照 ET4' 构造下图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, dashed, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, equal] & A \oplus X \arrow[r, two heads, dashed, "(1\ 0)"] \arrow[d, tail, dashed, "(x\ y)"] & A \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[d, tail, "f"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "a"] & E \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, two heads, dashed] & B \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, two heads, "g"] & {} \\
& C \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varepsilon"] & C \arrow[d, "\delta"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{49}$$

计算得

$$\eta = (0\,1)_* (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_* \eta) = (0\,1)_*(g^*\varepsilon) = g^*((0\,1)_*\varepsilon) \in \mathrm{im}\, g^*. \tag{50}$$

综上, $\ker f^* = \mathrm{im}\, g^*$. □

依照外三角范畴的反范畴也是外三角范畴, 我们得到如下对偶的定理.

**定理 10.** (六项正合列). 由公理 ET1-ET4, 以下是函子的正合列:

$$(-,A) \xrightarrow{f\circ -} (-,B) \xrightarrow{g\circ -} (-,C) \xrightarrow{\delta_\sharp} \mathbb{E}(-,A) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(-,B) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(-,C) \tag{51}$$

证明. 证明略. □

## 2.3 五项正合列的推论

本小节中给出五项正合列若干推论, 所有命题无需 ET4 或 ET4'. 任取 conflation

$$A \overset{f}{\rightarrowtail} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \overset{\delta}{\dashrightarrow} \quad . \tag{52}$$

**命题 5.** Conflation 中, 态射复合为 0.

**命题 6.** $g$ 是 $f$ 的弱余核, 即, $\ker(-\circ f) = \mathrm{im}(-\circ g)$; 对偶地 $f$ 是 $g$ 的弱核, 即, $\ker(g\circ -) = \mathrm{im}(f\circ -)$.

**命题 7.** $g$ 是单态射, 当且仅当 $f$ 是零态射, 亦当且仅当 $g$ 是可裂单.

证明. $g$ 单即 $(g\circ -)$ 单, 亦即 $(f\circ -) = 0$, 亦即 $f$ 零, 亦即 $(-\circ f) = 0$, 亦即 $(-\circ g)$ 满, 亦即 $g$ 可裂单. 此处涉及一则简单的引理.

> 引理 5. 给定任意范畴中的态射 $g$. $(g\circ -) = \mathrm{Hom}(-,g)$ 是函子的满射, 当且仅当 $g$ 是可裂单态射.
>
> 证明. 若 $g: A\to B$ 是可裂满, 则 $(g\circ -)$ 有右逆元, 故满. 反之, 若 $(g\circ -)$ 满, 则 $(1_B) \in \mathrm{Hom}(g,B)$, 即存在 $h: A\to B$ 使得 $g\circ h = 1_B$, 故 $g$ 可裂满. □

□

对偶地, 有如下命题.

**命题 8.** $f$ 是满态射, 当且仅当 $g$ 是零态射, 亦当且仅当 $f$ 是可裂满.

证明. 略. □

备注 6. 由于 $\mathcal{C}$ 未必弱幂等完备, 单的 deflation 未必是 inflation. 三角范畴中, 单态射必然是可裂单. 正合范畴中, 单的容许满态射是同构. 对偶表述略.

回顾例子6, ET2-2, ET3 与 ET3' 可统一作 “二推三” 准则.

**定理 11.** 给定实现之间的态射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"] & {} \\ X' \arrow[r, tail, "f'"] & Y' \arrow[r, two heads, "g'"] & Z' \arrow[r, "\delta'"] & {} \end{tikzcd} \quad . \tag{53}$$

若 $\alpha, \beta$ 与 $\gamma$ 中两者为同构, 则第三者亦为同构.

证明. 若 $\alpha$ 与 $\beta$ 是同构, 则有五项正合列间的交换图

$$\begin{tikzcd}
(-,X) \arrow[r, "f\circ-"] \arrow[d, "\alpha\circ-"] & (-,Y) \arrow[r, "g\circ-"] \arrow[d, "\beta\circ-"] & (-,Z) \arrow[r, "\delta_\sharp"] \arrow[d, "\gamma\circ-"] & \mathbb{E}(-,X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \mathbb{E}(-,Y) \arrow[d, "\beta_*"] \\
(-,X') \arrow[r, "f'\circ-"] & (-,Y') \arrow[r, "g'\circ-"] & (-,Z') \arrow[r, "\delta'_\sharp"] & \mathbb{E}(-,X') \arrow[r, "f'_*"] & \mathbb{E}(-,Y')
\end{tikzcd} . \tag{54}$$

依照五引理, $\gamma\circ-$ 也是同构, 故 $\gamma$ 亦为同构.
若 $\alpha$ 和 $\gamma$ 是同构, 则以上 $\beta\circ-$ 是函子的满态射, 因此 $\beta$ 可裂满. 另一方向的五项长正合列表明 $-\circ\beta$ 是函子的满态射, 因此 $\beta$ 可裂单. 综上, $\beta$ 是同构. □

**定理 12.** 在同构意义下, inflation (deflation) 嵌入唯一的 conflation.

证明. 上一定理的推论. □

备注 7. "对称" 地看, 扩张元的实现在同构意义下也是唯一的.

ET4 公理由两处 conflation 生成四处 conflation. 依照 inflation (deflation) 的唯一嵌入, 我们有如下结果.

**命题 9.** (严格 ET4). 给定下图实线部分的三处 deflation

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "z"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "u"] & {} \\
A \arrow[r, "zx"] & D \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"] & F \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, dashed, "w"] & {} \\
& E \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\eta"] & E \arrow[d, dashed, "\eta'"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} , \tag{55}$$

存在虚线所示的 conflation $\eta'$ 使得上图交换, 且 ET4 中的三个恒等式成立.

证明. 若依照 ET4 选取 $D \overset{v'}{\twoheadrightarrow} F'$, 则存在同构 $\varphi : F \simeq F'$ 使得 $v' = \varphi\circ v$. 往后从略. □

**命题 10.** 对偶地, 有严格 ET4' 引理. 表述与证明略.

# 3 外三角范畴基本图表定理

## 参考文献


[BK] Theo Buhler and Matthias Kunzer. Some elementary considerations in exact categories.

[Büh10] Theo Bühler. Exact categories. *Expositiones Mathematicae*, 28(1):1–69, January 2010.

[Kel] G. M. Kelly. Basic Concepts of Enriched Category Theory. http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html.

[Kel96] Bernhard Keller. Derived Categories and Their Uses. In *Handbook of Algebra*, volume 1, pages 671–701. Elsevier, 1996.

[May] John P. May. The axioms for triangulated categories.

[Mit65] Barry Mitchell. *Theory of Categories*. Academic Press, 1965.

[Mur07] Daniel Murfet. Triangulated categories part i, April 2007.

[Nee91] Amnon Neeman. Some new axioms for triangulated categories. *Journal of Algebra*, 139(1):221–255, May 1991.

[Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated Categories*. Number no. 148 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, 2001.

[NP19] Hiroyuki Nakaoka and Yann Palu. Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, LX(2):117–193, 2019. arXiv title ”Mutation via Hovey twin cotorsion pairs and model structures in extriangulated categories”.

[Ver96] Jean-Louis Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. Number 239 in Astérisque. Société mathématique de France, 1996.

[Yon60] Nobuo Yoneda. On Ext and exact sequences. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 8:507–576, 1960.