《线性代数》期中考试1 (20251107)参考解答

1. 判断题(各2分，共20分) 考虑以下10个命题：

(1) 若A, B, C是同阶方阵且满足$AB = AC$，则$A = 0$或$B = C$.

(2) 方程组$Ax = b$有唯一解 $\iff$ A列满秩.

(3) 设A, B为同阶方阵，则AB可逆 $\iff$ A, B均可逆.

(4) 设$Ax = b$有解. 则$Ax = b$与$A^T Ax = A^T b$同解.

(5) 设AB有意义. 则$r(AB) = r(B)$ $\iff$ A列满秩.

(6) 矩阵A行满秩 $\iff$ 存在矩阵B使得AB可逆.

(7) 向量u, v, w线性相关 $\iff$ $u + v, v + w, w + u$线性相关.

(8) 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 若$AX = XA, \forall X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 则$A$是纯量矩阵.

(9) $Ax = b$ 有解 $\iff$ $A^T y = 0, y^T b = 1$ 无解.

(10) 任何方阵都是两个可逆矩阵的和.

则其中正确的命题是(3, 4, 6, 7, 8, 9, 10).

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 试求可逆矩阵 P 使得 PA 是简化行阶梯形.

(2) 设$b = Ae_1 + 2Ae_2$, 求$Ax = b$的所有解.

(3) 求矩阵 $L_{4\times 2}, U_{2\times 4}$ 使得 $A = LU$; 由此计算 A^n.

(4) 求A的四个子空间的各一组基并验证**Strang**的线性代数基本定理.

解. (1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. .... **5 分**

(2) $PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N(A) = span\{(0,1,1,0)^T, (1,0,1,0)^T\}, x_0 = (1,2,0,0)^T$.

.... **5 分**

(3) $L = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$A * n = (LU)^n = L(UL)^{n-1}U$.

一般地, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & \dfrac{a^k - c^k}{a - c} b \\ 0 & c^k \end{pmatrix}$. 故

$$(UL)^k = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 4^k & 1 - 4^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此得

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^k & 1 - 4^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 1-3a & 3a-1 & -3a \\ 2a & 1-2a & 2a-1 & -2a \\ 2a & -2a & 2a & -2a \\ a & -a & a & -a \end{pmatrix},$$

其中 $a = 4^k$. .... **5 分**

(4) $N(A), R(A^T) = span\{e_1^T(PA), e_2^T(PA)\} = span\{(1,0,0,-1)^T, (1,0,-1,0)^T\}$,

$N(A^T) = span\{e_3^T P, e_4^T P\} = span\{(0,0,1,2)^T, (1,-1,0,1)^T\}$,

$R(A) = span\{Ae_1), Ae_2\}$. .... **5 分**

3. (1) 构造3阶非对角矩阵A与B, 使得$A^3 = I, A^2 \neq I, B^3 = 0, B^2 \neq 0$.

(2) 构造$n \geq 4$阶非对角矩阵A, B使得$A^n = I, A^{n-1} \neq I, B^n = 0, B^{n-1} \neq 0$.

(3) 设B是(2)中的矩阵, 证明$I + B$可逆并求其逆.

(4) 设A, B是(2)中的矩阵, 判断$A + B$是否可逆, 说明理由.

解：(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $A = (e_n, e_1, e_2, ..., e_{n-1}), B = (0, e_1, ..., e_{n-1})$.

(3) $(I + B)^{-1} = I - B + B^2 - B^3 + ... + (-1)^{n-1} B^{n-1}$.

(4) 不一定. 比如现在(2)中的矩阵$A + B$显然可逆，但$-B$也满足(2)中条件，但$A + (-B)$显然不可逆.

4. 设$v_1, v_2, ..., v_s \in \mathbb{R}^n$. 证明或否定：$v_1, v_2, ..., v_s$ 线性无关当且仅当$v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, ..., v_{s-1} - v_s, v_s - v_1$线性无关.

解. (1) $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, ..., v_{s-1} - v_s, v_s - v_1$的和显然为0，故总是线性相关的.

.... **6 分**

(2) 深度思考：可将差改为和，即将原题改为下述"新命题"

证明或否定：$v_1, v_2, ..., v_s$ 线性无关当且仅当$v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, ..., v_{s-1} + v_s, v_s + v_1$线性无关.

.... **7 分**

设$A = VC, C = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, ..., e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$.

故命题成立 $\Longleftrightarrow$ 矩阵C可逆 $\Longleftrightarrow$ $s \geq 2$是奇数.

.... **7 分**

5. 设所有矩阵均可逆, 证明华罗庚恒等式(1949年):

$$A-(A^{-1}+(B^{-1}-A)^{-1})^{-1}=ABA.$$

证明. (1) 代入特殊矩阵者给2分。比如:

取$A=I, B=2I$，得左$=I-(-I)=2I$=右。

(2) 变形两步以内者不给分，比如$A-ABA=(A^{-1}+(B^{-1}-A)^{-1})^{-1}$.

变形至少三步者给2分以上，比如

$A-ABA=(A^{-1}+(B^{-1}-A)^{-1})^{-1}$.

$(A-ABA)^{-}1=A^{-1}+(B^{-1}-A)^{-1}$.

$A^{-1}(I-AB)^{-1}=(A^{-1}+(B^{-1}-A)^{-1})^{-1}$.

$(I-AB)^{-1}=A(A^{-1}+(B^{-1}-A)^{-1})^{-1}=I+A(B^{-1}-A)^{-1})^{-1}$.

(3) 既代入特殊矩阵又变形三步以上者给4分。

(4) 用分块矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$**求逆得到更一般的华罗庚恒等式**

$(A-BD^{-1}C)^{-1}=A^{-1}+AB^{-1}(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$，

再取$B=C=A, D=F^{-1}$给满分(并标记该做法，表扬该同学)。

6. (1) 提一个与课程相关的问题，越新颖、越独特越好(=得分越高).

(2) 解释其几何或物理意义.

(3) 给出你认为合理的解决方案(不必写细节)。