Gorenstein 同调理论

张陈成

2025 年秋

最后更新于 2025 年 11 月 24 日.

目录

1 阅读笔记: Proper classes and Gorensteinness in extriangulated categories

文章见 [HZZ20].

1.1 带真类的外三角范畴

本章节介绍真类 ξ 的定义, 并使用图表定理简单证明了 **定理** 1.1.7.

记号 1.1.1. 记 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 为外三角范畴.

定义 1.1.2 (真类 ξ). 称 ξ 是 $\mathbb{E}$-三角组成的真类, 若满足以下条件:

P1 ξ 对双积与同构封闭, 且包含所有可裂的 $\mathbb{E}$-三角.

P2 ξ 对基变换封闭: 任取 ξ-三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, 任何 $\gamma^*\delta$ 的实现 $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \overset{\gamma^*\delta}{\dashrightarrow}$ 也属于 ξ.

P2$^{\mathrm{op}}$ ξ 对余基变换封闭: 任取 ξ-三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, 任何 $\alpha_*\delta$ 的实现 $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z \overset{\alpha*\delta}{\dashrightarrow}$ 也属于 ξ.

P3 ξ 饱和: 给定 δ_1 与 δ_2 实现的 "拉回"

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[d] & \\
\cdot \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r, dashed, "\delta_1'"] \arrow[d] & {} \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\delta_2'"] & \cdot \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.1.1}$$

若 δ_2 与 δ_1' 的实现属于 ξ, 则 δ_1 的实现也属于 ξ.

备注 1.1.3. **定义** 1.1.2 中的 "真类 (proper class)" 无关集合论中的 "真类" 概念.

备注 1.1.4. 可对偶地定义 P3$^{\mathrm{op}}$, 但 ξ 的定义并没有这一条.

记号 1.1.5. 方便起见, 将 ξ 中三角标注作橘色 (■). 引入 ξ-三角, ξ-扩张元, ξ-单射, ξ-满射等记号.

引理 1.1.6. 给定 δ_1', δ_2 与 δ_2' 使得其实现作下图中的 $\mathbb{E}$-三角:

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "f_2'"'] & \cdot \arrow[d, "f_2"] & \\
\cdot \arrow[r, "f_1'"] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, "g_1'"] \arrow[d, "g_2'"] & \cdot \arrow[r, dashed, "\delta_1'"] \arrow[d, "g_2"] & {} \\
\cdot \arrow[r, dashed, "f_1"] & \cdot \arrow[r, dashed, "g_1"] \arrow[d, dashed, "\delta_2'"] & \cdot \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.1.2}$$

存在 δ_1 的实现使得底行能被补全, 且 $(1; g_2'; g_2')$ 与 $(1; g_1'; g_1)$ 是 $\mathbb{E}$-三角射, 同时 $(f_1')_*\delta_1 + (f_2')_*\delta_2 = 0$. 此时, 若 δ' 与 δ_2 是 ξ-扩张元, 则 δ_1 与 δ_2' 必是 ξ-扩张元.

证明. δ_1 的构造熟知. 由定义, δ_2' 必是 ξ-扩张元. 由 P3 可知 δ_1 也是 ξ-扩张元. □

定理 1.1.7. 假定外三角的类 ξ 对同构封闭, 则 ξ 是真类当且仅当 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi)$ 是外三角范畴. 此处

1. $\mathbb{E}_\xi(Z,X)$ 是 $\mathbb{E}(Z,X)$ 中的 ξ-扩张元;
2. $\mathfrak{s}_\xi$ 即 $\mathfrak{s}$ 在 $\mathbb{E}_\xi$ 上的限制.

证明. ($\Leftarrow$). P1, P2, P2$^{\mathrm{op}}$ 由 $\mathbb{E}_\xi$ 的加法双函子性保证. P4 即 引理 1.1.6.
($\Rightarrow$). ET1, ET2, ET3, ET3$^{\mathrm{op}}$ 显然成立. 只需验证 ET4 与 ET4$^{\mathrm{op}}$.

1. (ET4 的验证). 给定 ξ-单射 s 与 f 的复合, 在原先的外三角范畴中作同伦的 ET4 图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "m"] & {} \\
X \arrow[r, dashed, "sf"] & A \arrow[r, dashed, "p"] \arrow[d, "t"] & B \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "n"] & {} \\
 & C \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\eta"] & C \arrow[d, dashed, "\kappa"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.1.3}$$

直接地, $\kappa = g_*\eta$ 与 $n^*\eta$ 都是 ξ-扩张元. 作交换图 (ET4 给出 $n^*\eta = f_*\varepsilon$):

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\binom{1}{0}"] & Y \arrow[d, "\binom{g}{s}"] & \\
X \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & Y\oplus A \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "{(0,1)}"] & Z\oplus A \arrow[r, dashed, "\delta\oplus 0"] \arrow[d, "{(-m,p)}"] & {} \\
X \arrow[r, "sf"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "0"] & B \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "n^*\eta"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.1.4}$$

由 P3 得 $X \xrightarrow{sf} Y' \xrightarrow{p} Z \overset{\delta\oplus 0}{\dashrightarrow}$ 是 ξ-三角.

2. (ET4$^{\mathrm{op}}$ 的验证). 给定 ξ-满射 n 与 p 的复合, 在原先的外三角范畴中作同伦的 ET4$^{\mathrm{op}}$ 图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, dashed, "s"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "m"] & {} \\
X \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "np"] & B \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] \arrow[d, "n"] & {} \\
 & C \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\eta"] & C \arrow[d, dashed, "\kappa"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.1.5}$$

直接地, $\delta = m^*\varepsilon$ 与 $f_*\varepsilon$ 都是 ξ-扩张元. 作交换图 (ET4$^{\mathrm{op}}$ 给出 $f_*\varepsilon = n^*\eta$):

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[d, "m"] & \\
Y \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & A\oplus Z \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r, dashed, "f_*\varepsilon"] \arrow[d, "n"] & {} \\
Y \arrow[r, "s"] & A \arrow[r, "np"] \arrow[d, dashed, "0"] & C \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, dashed, "\kappa"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.1.6}$$

由 P3 得 $Y \xrightarrow{s} A \xrightarrow{np} C \overset{\eta}{\dashrightarrow}$ 是 ξ-三角.

$\square$

命题 1.1.8. 考虑 **定理** 1.1.7 给出的外三角子范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi) \subseteq (\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$. 若 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 弱幂等完备, 则 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi)$ 亦然.

证明. 依照 WIC 的等价定义, 只需证明, 若 $\binom{i}{0} : A \to B \oplus C$ 是 ξ-单射, 则 i 是 ξ-单射. 由 WIC 条件, i 是 $\mathbb{E}$-单射, 从而有交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & M' \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & {} \\ A \arrow[r, "\binom{i}{0}"] & B \oplus C \arrow[r] & M \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{1.1.7}$$

由 ET3 构造 γ. 从而 $\delta' = \gamma^* \delta$ 是 ξ-扩张元, 即 i 是 ξ-单射. $\square$

1.2 ξ-同调代数

定义 1.2.1 (投射对象). P 是投射对象, 若以下等价命题 (证明略) 成立:

1. 对所有 $\mathbb{E}$-满射 g, 群同态 (P, g) 满;
2. $\mathbb{E}(P, -)$ 是零函子, 即所有 $\mathbb{E}$-三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 可裂.

记号 1.2.2. 记 $\mathcal{P}$ 是投射对象构成的子范畴.

备注 1.2.3. $\mathcal{P}$ 对扩张 (含直和) 与形变收缩 (含直和项) 封闭. $\mathcal{P}$ 作为外三角子范畴是半单 Abel 范畴.

记号 1.2.4. 往后选定真类 ξ.

定义 1.2.5 ($\mathcal{P}(\xi)$-投射对象). 称 X 是 ξ 投射对象, 若对一切 ξ-三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, 有短正合列

$$0 \to (X, A) \xrightarrow{(X,f)} (X, B) \xrightarrow{(X,g)} (X, C) \to 0. \tag{1.2.1}$$

备注 1.2.6. 传统的相对同调代数仅要求 $(X, -)$ 映 ξ-满射为满射, 对单射不设要求.

记号 1.2.7. 记 $\mathcal{P}(\xi)$ 是 ξ 投射对象构成的类, 对直和与直和项封闭.

例子 1.2.8. $\mathcal{P}(\xi)$ 未必对扩张封闭. 给定 $\mathcal{P}(\xi)$ 对象组成的 $\mathbb{E}$ 三角 $P' \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} P'' \overset{\pi}{\dashrightarrow}$ 与任意 ξ-三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$, 有正合列的交换图

$$\begin{tikzcd} (P'', A) \arrow[r, "{(p,A)}"] \arrow[d, tail, "{(P'',f)}"] & (P, A) \arrow[r, "{(i,A)}"] \arrow[d, "{(P,f)}"] & (P', A) \arrow[d, tail, "{(P',f)}"] \\ (P'', B) \arrow[r, "{(p,B)}"] \arrow[d, two heads, "{(P'',g)}"] & (P, B) \arrow[r, "{(i,B)}"] \arrow[d, "{(P,g)}"] & (P', B) \arrow[d, two heads, "{(P',g)}"] \\ (P'', C) \arrow[r, "{(p,C)}"] & (P, C) \arrow[r, "{(i,C)}"] & (P', C) \end{tikzcd} . \tag{1.2.2}$$

计算谱序列知

1. $\ker(p, B) \simeq H\left[\ker(P'', f) \xrightarrow{\widetilde{(i,A)}} \ker(P, f) \xrightarrow{\widetilde{(p,A)}} \ker(P', f)\right]$,
2. $\operatorname{coker}(i, B) \simeq H\left[\operatorname{coker}(P'', g) \xrightarrow{\widehat{(p,C)}} \operatorname{coker}(P, g) \xrightarrow{\widehat{(i,C)}} \operatorname{coker}(P', g)\right]$.

备注 1.2.9. $\mathcal{P}(\xi)$ 显然是 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi)$ 的外三角子范畴, 且是半单 Abel 范畴.

定义 1.2.10 (足够 $\mathcal{P}(\xi)$-投射对象). 称外三角范畴有足够 $\mathcal{P}(\xi)$-投射对象, 若对任意对象 A, 存在 ξ-三角 $K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} A \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 使得 P 是 $\mathcal{P}(\xi)$-投射对象.

命题 1.2.11. 假定范畴有足够 $\mathcal{P}(\xi)$-投射对象. 则 $\mathbb{E}$-三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 是 ξ-三角当且仅当对所有 $\mathcal{P}(\xi)$-投射对象 P, 有正合列

$$0 \to (P, X) \xrightarrow{(P,f)} (P, Y) \xrightarrow{(P,g)} (P, Z) \to 0. \tag{1.2.3}$$

证明. 仅证明 ($\Leftarrow$) 部分. 给定 $\mathbb{E}$-三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$. 由范畴有足够 $\mathcal{P}(\xi)$-投射对象, 作交换图,

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & K \arrow[d] & \\
X \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & X \oplus P \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & P \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.2.4}$$

由 P3, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 是 ξ-三角. □

记号 1.2.12. 假定范畴有足够 $\mathcal{P}(\xi)$-投射对象. 此时可以定义投射分解与维数.

定义 1.2.13 ($\mathcal{P}(\xi)$-投射维数 pd_ξ). 约定 $\mathcal{P}(\xi)$ 中对象的 $\mathcal{P}(\xi)$-投射维数为 0. 归纳地, 称 $pd_\xi M \leq n+1$, 若存在 ξ-三角 $K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 使得 $P \in \mathcal{P}(\xi)$ 且 $pd_\xi K \leq n$. 称 $pd_\xi M = n$, 若有 $pd_\xi M \leq n$, 但没有 $pd_\xi M \leq n-1$.

备注 1.2.14. 投射维数的归纳定义无关 $\mathcal{P}(\xi)$-投射模的选取: 假定有 ξ-三角

$$K_1 \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{g_1} X \overset{\delta_1}{\dashrightarrow}, \quad K_2 \xrightarrow{f_2} P_2 \xrightarrow{g_2} X \overset{\delta_2}{\dashrightarrow}, \tag{1.2.5}$$

两者在 X 处的拉回是两条可裂的 ξ-三角, 从而 $K_1 \oplus P_2 \cong K_2 \oplus P_1$. 进而 $pd_\xi K_1 = pd_\xi K_2$.

定义 1.2.15 (完全 $\mathcal{P}(\xi)$-投射分解). 给定双边无界复形 $X_\bullet = [\cdots X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} X_{-1} \to \cdots]$.

- 称 $X_\bullet$ 是 ξ-正合的, 若存在分解 $d_n = g_{n-1} f_n$ 使得每个 $K_{n+1} \xrightarrow{g_n} X_n \xrightarrow{f_n} K_n \overset{\delta_n}{\dashrightarrow}$ 是 ξ-三角.
- 称 $\mathbb{E}$-三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 是 $(-, \mathcal{W})$ 正合的, 若对任意 $W \in \mathcal{W}$, 有短正合列

$$0 \to (Z, W) \xrightarrow{(g,W)} (Y, W) \xrightarrow{(f,W)} (X, W) \to 0. \tag{1.2.6}$$

- 称 $X_\bullet$ 是完全 $\mathcal{P}(\xi)$-投射分解, 若 $X_n \in \mathcal{P}(\xi)$, $X_\bullet$ 是 ξ-正合的, 且每一 $K_{n+1} \xrightarrow{g_n} X_n \xrightarrow{f_n} K_n \overset{\delta_n}{\dashrightarrow}$ 是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$-正合的.

可以定义对偶地定义完全 ξ-内射分解.

备注 1.2.16. 在原文中, 默认 $(-, \mathcal{W})$-正合的 $\mathbb{E}$-三角 (复形) 是 ξ-三角 (复形).

命题 1.2.17 ($\mathcal{P}(\xi)$-投射维数的等价定义)**.** $pd_\xi M \le n$, 当且仅当对任意 ξ-正合复形

$$K_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \quad (P_i \in \mathcal{P}(\xi)), \tag{1.2.7}$$

总有 $K_n \in \mathcal{P}(\xi)$.

证明. 由定义归纳得 ($\leftarrow$). 由 备注 1.2.14 得 ($\rightarrow$). □

定义 1.2.18 (ξ-Gorenstein 投射)**.** 对于完全 $\mathcal{P}(\xi)$-投射分解 $P_\bullet$, 记 K-项为 ξ-Gorenstein 投射对象. 记作 $\mathcal{GP}(\xi)$. 可以对偶地定义 ξ-Gorenstein 内射对象, 记作 $\mathcal{GI}(\xi)$.

引理 1.2.19. 给定 $\mathbb{E}$-三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$. 其 $(-,\mathcal{W})$-正合, 当且仅当 $(g,\mathcal{W})$ 与 $\mathbb{E}(g,\mathcal{W})$ 总是单的.

证明. 考虑五项长正合列

$$(C,W) \xrightarrow{(g,W)} (B,W) \xrightarrow{(f,W)} (A,W) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C,W) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(B,W). \tag{1.2.8}$$

$\mathbb{E}$-三角是 $(-,\mathcal{W})$-正合的, 当且仅当 (g,W) 单且 (f,W) 满. 注意到 (f,W) 满当且仅当 g^* 单. □

记号 1.2.20. 往后将交换图中 $\mathcal{GP}(\xi)$ 中对象标注为紫色 (■), 将 $(-,\mathcal{W})$ 正合 $\mathbb{E}$-三角标注为红色 (■), 将待定的 $\mathbb{E}$-三角标注为蓝色 (■). **定理** 1.1.7 已证明 $(\mathcal{C},\mathbb{E}_\xi,\mathfrak{s}_\xi)$ 是外三角范畴, 故无需强调对 ξ-三角的橘色标记 (■).

备注 1.2.21. $(-,\mathcal{W})$-正合 $\mathbb{E}$-三角的图表定理, 相当于满态射的图表定理.

命题 1.2.22. 若 ε 所在的 $\mathbb{E}$-三角是 $(-,\mathcal{W})$-正合的, 则任意 $\lambda_*\delta$ 所在的三角亦然.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] & {} \\
\cdot \arrow[r, dashed] & \cdot \arrow[r, dashed, "f'"] & \cdot \arrow[r, dashed, "\lambda_*\varepsilon"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{1.2.9}$$

证明. $\lambda_*\delta$ 是 ξ-扩张元. 由 引理 1.2.19, 只需证 $(f',\mathcal{W})$ 与 $\mathbb{E}(f',\mathcal{W})$ 单. 由 $(f,\mathcal{W})$ 与 $\mathbb{E}(f,\mathcal{W})$ 单, 证毕. □

命题 1.2.23. 若 δ 与 ε 所在的 $\mathbb{E}$-三角是 $(-,\mathcal{W})$-正合的, 则 ε' 所在的三角亦然.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d] & {} \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "gf"] & \cdot \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "f"] & {} \\
& \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon'"] & \cdot \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.2.10}$$

证明. 由 **定理** 1.1.7, 上图是 $(\mathcal{C},\mathbb{E}_\xi,\mathfrak{s}_\xi)$ 中的交换图. 由 引理 1.2.19, 只需证明 $(gf,\mathcal{W})$ 与 $\mathbb{E}(gf,\mathcal{W})$ 单. 由假设, $(g,\mathcal{W}), \mathbb{E}(g,\mathcal{W}), (f,\mathcal{W})$ 与 $\mathbb{E}(f,\mathcal{W})$ 单. 因此 $(gf,\mathcal{W})$ 与 $\mathbb{E}(gf,\mathcal{W})$ 单. □

命题 1.2.24. 若 δ' 与 ε 所在的 $\mathbb{E}$-三角是 $(-,\mathcal{W})$-正合的, 则 δ 所在的三角亦然.

$$\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[d] & \\
\cdot \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, "g"] & {} \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r, "f'"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon'"] & \cdot \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.2.11}$$

证明. (细节从略). 所有三角都是 ξ-三角. 若 gf “满”, 则 f' “满”. □

定理 1.2.25. 给定 ξ-三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$. 如 C 是 $\mathcal{GP}(\xi)$ 的直和项, 则该三角是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$-正合的.

证明. 依照 **命题** 1.2.24, 只需考虑 $C \in \mathcal{GP}(\xi)$ 的情形. 由 C 的定义作

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & K \arrow[d, "i"] & \\
A \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & A \oplus P \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & P \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[d, "p"] & {} \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon'"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.2.12}$$

依照 **命题** 1.2.23, 蓝色 $\mathbb{E}$-三角是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$-正合的. □

定理 1.2.26. 假定存在六个 $\mathbb{E}$-三角使得下图四个方块交换 (不要求扩张元间的态射):

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
\cdot \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.2.13}$$

若任意五个 $\mathbb{E}$-三角是 $(-, \mathcal{W})$ 正合的, 则第六个三角亦然.

证明. 对上图作用 $(-, \mathcal{W})$, 得五个短正合列与一个中间项正合的态射序列. 依照 Abel 范畴的 3×3-引理求解即可. □

1.3 $\mathcal{GP}(\xi)$ 的结构

本节证明 $\mathcal{GP}(\xi)$ 是消解的加法子范畴, 其对直和项封闭.

引理 1.3.1. $\mathcal{GP}(\xi)$ 中对象对 $\mathcal{P}(\xi)$ 中直和项的消去封闭. 即, 若 $P \in \mathcal{P}(\xi)$, $P \oplus G \in \mathcal{GP}(\xi)$, 则 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$.

证明. 取 $P \oplus G$ 的完全 $\mathcal{P}(\xi)$-投射分解

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & K_0 \arrow[ur] & & P \oplus G \arrow[ur] & & K_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd} . \tag{1.3.1}$$

下证明 G 嵌入某一完全 $\mathcal{P}(\xi)$-投射分解.

1. (向左延伸). 作以下 ξ-三角的交换图

$$\begin{tikzcd}
K_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & P' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & G \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
K_0 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & P\oplus G \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
& P \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & P \arrow[d, dashed, "0"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.3.2}$$

由 **定理** 1.2.26, 第一行是 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的.

2. (向右延伸). 作以下 ξ-三角的交换图, 这两个 $\mathbb{E}$-三角也是 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的:

$$\begin{tikzcd}
P\oplus G \arrow[r, "{(f_1,f_2)}"] \arrow[d, "{(1,0)}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Q_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "{\binom{l}{m}}"] & K_2 \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & {} \\
P \arrow[r, "{\binom{1}{0}}"] & P\oplus K_2 \arrow[r, "{(0,1)}"] & K_2 \arrow[r, dashed, "0"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{1.3.3}$$

此时有 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合三角的交换图,

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, dashed] \arrow[d, "{\binom{0}{1}}"] & Q_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, "{\binom{0}{1}}"] & P\oplus K_2 \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & {} \\
P\oplus G \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}}"] \arrow[d, "{(1,0)}"] & P\oplus Q_1 \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & m \end{pmatrix}}"] \arrow[d, "{(1,0)}"] & P\oplus K_2 \arrow[r, dashed] & {} \\
P \arrow[r, equal] & P & &
\end{tikzcd} . \tag{1.3.4}$$

□

引理 1.3.2. 对任意 $G\in\mathcal{GP}(\xi)$. 任取 $P,Q\in\mathcal{P}(\xi)$ 使得有 ξ-三角

$$G \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} G' \overset{\delta}{\dashrightarrow}, \quad G'' \xrightarrow{j} Q \xrightarrow{q} G \overset{\varepsilon}{\dashrightarrow} . \tag{1.3.5}$$

则 $G',G''\in\mathcal{GP}(\xi)$.

证明. 考虑 备注 1.2.14. 以及 $\mathcal{GP}(\xi)$ 中对象对 $\mathcal{P}(\xi)$-中直和项的消去封闭 (引理 1.3.1). □

定理 1.3.3. 给定 ξ-三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, 其中 $C\in\mathcal{GP}(\xi)$. 此时 $A\in\mathcal{GP}(\xi)$ 当且仅当 $B\in\mathcal{GP}(\xi)$.

证明. 假定 $A\in\mathcal{GP}(\xi)$. 下图 $(i_A;i_C):\delta\to 0$ 是扩张元的态射. 由 WIC-free 的 3×3-引理得

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_A"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "{\binom{s}{i_C g}}"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "i_C"] & {} \\
P_A \arrow[r, "{\binom{1}{0}}"] \arrow[d, "p_A"] & P_A\oplus P_C \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[d, dashed, "{(f'p_A,t)}"] & P_C \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[d, "p_C"] & {} \\
A' \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_A"] & B' \arrow[r, dashed, "g'"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_B"] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_C"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.3.6}$$

上图不依赖外三角范畴的选取, 故 ε_B 是 ξ-扩张元. 由 **定理** 1.2.25, 上图除 ε_B 所在列外的五个 $\mathbb{E}$-三角都是 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的. 对上图作用 $(-,\mathcal{P}(\xi))$ 并使用 3×3-引理, 中间列必正合. 因此上图所有列都是 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的. 另一方向证明对偶. 从而 $B\in\mathcal{GP}(\xi)$.

假定 $B\in\mathcal{GP}(\xi)$, 作 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合三角 $B\to Q_B\to B''\dashrightarrow$, 其中 $Q_B\in\mathcal{P}(\xi)$. ET4 给出下图:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed] & {} \\
A \arrow[r, dashed] & Q_B \arrow[r, dashed] \arrow[d] & E \arrow[r, dashed, "\delta''"] \arrow[d, dashed] & {} \\
 & B'' \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & B'' \arrow[d, dashed, "\varepsilon'"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
\quad . \tag{1.3.7}
$$

上文已证明 $\mathcal{GP}(\xi)$ 扩张闭, 从而 $E\in\mathcal{GP}(\xi)$. 因此 δ'' 是 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的. 引理 1.3.2 说明 $A\in\mathcal{GP}(\xi)$. □

推论 1.3.4. $\mathcal{GP}(\xi)$ 对直和项封闭.

- 经典 Gorenstein 同调理论中的证明依赖 Eilenberg swindle 技巧, 此处应避免使用该技巧.

证明. 记 $(G\oplus G_0)\in\mathcal{GP}(\xi)$. 对 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的 $\mathbb{E}$-三角 $(G\oplus G')\to P\to G'\dashrightarrow$, 作 ξ-三角的交换图

$$
\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_0 \arrow[d, dashed] & & \\
G\oplus G_0 \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d, dashed] & G' \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & {} \\
G \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & H \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\delta"] & G' \arrow[r, dashed] & {} \\
{} & {} & &
\end{tikzcd}
\quad . \tag{1.3.8}
$$

其中 H 是 G 与 G' 的扩张项, 从而属于 $\mathcal{GP}(\xi)$. 由 **定理** 1.2.25, 所有三角都是 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的. 对 δ 所在的 $\mathbb{E}$-三角使用 引理 1.3.2 即可. □

推论 1.3.5. 给定 ξ-三角 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\overset{\delta}{\dashrightarrow}$. 若 $A,B\in\mathcal{GP}(\xi)$, 则 $C\in\mathcal{GP}(\xi)$ 当且仅当 $\mathbb{E}$-三角是 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的.

证明. 由 **定理** 1.2.25 可知必要性 ($\to$ 方向). 对充分性 ($\leftarrow$ 方向), 作 ξ-三角的交换图

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & {} \\
P_A \arrow[r, dashed] \arrow[d] & P_A\oplus C \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r, dashed] & {} \\
A' \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & A' \arrow[d, dashed] & & \\
{} & {} & &
\end{tikzcd}
\quad . \tag{1.3.9}
$$

由 **定理** 1.3.3 知 $P_A\oplus C\in\mathcal{GP}$, 再由 引理 1.3.1 得 $C\in\mathcal{GP}$. □

1.4 $\mathcal{GP}(\xi)$-投射维数

本小节在外三角范畴中类推经典 Gorenstein 同调维数的相关定理.

定义 1.4.1 ($\mathcal{GP}(\xi)$-投射维数)**.** 约定 $\mathcal{GP}(\xi)$ 中对象的 $\mathcal{GP}(\xi)$-投射维数为 0. 归纳地, 称 $\mathcal{G}pd_\xi M \le n+1$, 若存在 ξ-三角 $K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} M \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 使得 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$ 且 $\mathcal{G}pd_\xi K \le n$. 称 $\mathcal{G}pd_\xi M = n$ 若 $\mathcal{G}pd_\xi M \le n$ 且不满足 $\mathcal{G}pd_\xi M \le n-1$.

记号 1.4.2. 记 $\mathcal{P}(\xi)$ 是 $\mathcal{P}(\xi)$-投射对象, $\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}$ 是 pd_ξ 有限的对象. 记 $\mathcal{GP}(\xi)$ 是 $\mathcal{GP}(\xi)$-投射对象, $\widetilde{\mathcal{GP}(\xi)}$ 是 $\mathcal{GP}(\xi)$-投射维数有限的对象.

引理 1.4.3 (维数移动). 使用 G 表示 $\mathcal{GP}(\xi)$ 中的某个元素. 以下三个命题对 $n \ge 0$ 成立:

$\mathfrak{A}(n)$ 对 $(-, \mathcal{P}(\xi))$-正合的 $\mathbb{E}$-三角 $A \to G \to C \dashrightarrow$, 若 $\mathcal{G}pd_\xi C = n+1$, 则 $\mathcal{G}pd_\xi A = n$.

$\mathfrak{B}(n)$ 对 $(-, \mathcal{P}(\xi))$-正合的 $\mathbb{E}$-三角 $A \to B \to G \dashrightarrow$, 若 $\mathcal{G}pd_\xi A = n$, 则 $\mathcal{G}pd_\xi B = n$.

$\mathfrak{C}(n)$ 对 $(-, \mathcal{P}(\xi))$-正合的 $\mathbb{E}$-三角 $A \to B \to G \dashrightarrow$, 若 $\mathcal{G}pd_\xi B = n$, 则 $\mathcal{G}pd_\xi A = n$.

证明. 使用数学归纳法证明. 由 **定理** 1.3.3, $\mathfrak{A}(0)$ 与 $\mathfrak{B}(0)$ 成立. 下证明 $\mathfrak{C}(0)$. 存在 $G', G'' \in \mathcal{GP}(\xi)$ 使得

$$\begin{tikzcd}
& G' \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & G' \arrow[d] & \\
A \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & G'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
A \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{1.4.1}$$

由 **定理** 1.3.3, $E, A \in \mathcal{GP}(\xi)$.

- (归纳: $\mathfrak{B}(n+1) \wedge \mathfrak{C}(n+1) \to \mathfrak{A}(n+1)$). 考虑

$$\begin{tikzcd}
& C' \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & C' \arrow[d] & & \mathcal{G}pd_\xi C' = n+1 \\
A \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & G'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} & \\
A \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} & \mathcal{G}pd_\xi C = n+2 \\
& {} & {} & &
\end{tikzcd} . \tag{1.4.2}$$

  由归纳假设, E 与 A 的 $\mathcal{GP}(\xi)$-投射维数是 $n+1$.

- (归纳: $\mathfrak{C}(n+1) \to \mathfrak{B}(n+1)$). 由 WIC-free 的 3×3-引理做得下图

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & B' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & G' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} & \mathcal{G}pd_\xi A' = n \\
G'' \arrow[r] \arrow[d] & G'' \oplus P \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[d] & {} & \\
A \arrow[r] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r] \arrow[d, dashed] & G \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} & \mathcal{G}pd_\xi A = n+1 \\
{} & {} & {} & &
\end{tikzcd} . \tag{1.4.3}$$

由 3×3, 上图所有行与列皆为 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的. 由 $\mathfrak{B}(n)$ 知 $\mathcal{G}pd_\xi B' = n$. 由 $\mathfrak{A}(n)$ 知 $\mathcal{G}pd_\xi B = n+1$.

- (归纳: $\mathfrak{A}(n) \wedge \mathfrak{B}(n) \to \mathfrak{C}(n+1)$). 考虑

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & B' \arrow[d] & & & \mathcal{G}pd_\xi B' = n \\
H \arrow[r] \arrow[d, dashed] & G' \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & {} & \\
A \arrow[r] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r] \arrow[d, dashed] & G \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} & \mathcal{G}pd_\xi B = n+1 \\
{} & {} & {} & &
\end{tikzcd}. \tag{1.4.4}$$

由 3×3, 上图所有行与列皆为 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合的. $H \in \mathcal{GP}$. 由 $\mathfrak{C}(n+1)$ 知 $\mathcal{G}pd_\xi A = n+1$.

□

命题 1.4.4 ($\mathcal{G}pd_\xi$ 的等价定义). 以下关于 M 的定义等价

1. $\mathcal{G}pd_\xi M \leq n$,
2. 对任意 ξ-正合复形
$$K_n \xrightarrow{d_n} G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} G_0 \xrightarrow{d_0} M \quad (P_i \in \mathcal{GP}(\xi)), \tag{1.4.5}$$
总有 $K_n \in \mathcal{GP}(\xi)$.
3. 对任意 ξ-正合复形
$$K_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \quad (P_i \in \mathcal{P}(\xi)), \tag{1.4.6}$$

总有 $K_n \in \mathcal{GP}(\xi)$.

证明. $(1 \to 2)$. 记命题 $\mathfrak{P}(k)$ 为 "$(1 \to 2)$ 对 $\mathcal{G}pd_\xi M \leq k$ 情形成立". **定理** 1.3.3 说明 $\mathfrak{P}(0)$ 成立. 若 $\mathfrak{P}(n)$ 成立, 下证明 $\mathfrak{P}(n+1)$ 成立. 若 $\mathcal{G}pd_\xi M \leq n+1$, 则存在 $(-,\mathcal{P}(\xi))$-正合三角 $K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} M \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 使得 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$ 且 $\mathcal{G}pd_\xi K \leq n$. 对任意 ξ-正合复形 □

参考文献

[HZZ20] Jiangsheng Hu, Dongdong Zhang, and Panyue Zhou. Proper classes and Gorensteinness in extriangulated categories. *Journal of Algebra*, 551:23–60, June 2020. doi:10.1016/j.jalgebra.2019.12.028.