

# Gorenstein 同调理论

张陈成

2025 年秋

最后更新于 2025 年 12 月 2 日.

## 目录

|   |          |
|---|----------|
| <b>1 阅读笔记: Proper classes and Gorensteinness in extriangulated categories</b> | <b>2</b> |
| 1.1 带真类的外三角范畴 . . . . .   | 2        |
| 1.2 $\xi$ -同调代数 . . . . .   | 4        |
| 1.3 $\mathcal{GP}(\xi)$ 的结构 . . . . .   | 7        |
| 1.4 $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数 . . . . .                                       | 10       |
| 1.5 Hovey 四元组 . . . . .   | 12       |

## 1 阅读笔记: Proper classes and Gorensteinness in extriangulated categories

文章见 [HZZ20].

### 1.1 带真类的外三角范畴

本章节介绍真类  $\xi$  的定义, 并使用图表定理简单证明了 定理 1.1.5.

记号 1.1.1. 记  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$  为外三角范畴.

定义 1.1.2 (真类). 称  $\xi$  是  $\mathbb{E}$ -三角组成的真类, 若满足以下条件:

P1  $\xi$  对双积与同构封闭, 且包含所有可裂的  $\mathbb{E}$ -三角.

P2  $\xi$  对基变换和余积变换封闭. 对下图所示的  $\mathbb{E}$ -三角射, 若中间行属于  $\xi$ , 则上下行也属于  $\xi$ :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \\ \parallel & & \downarrow \gamma' & & \downarrow \gamma \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' & & \parallel \\ X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' & \xrightarrow{g''} & Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \dashrightarrow \gamma^*\delta \\ \dashrightarrow \delta \\ \dashrightarrow \alpha_*\delta \end{array} \quad (1.1.1)$$

P3  $\xi$  饱和: 给定  $\delta_1$  与  $\delta_2$  实现的“拉回”

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \dashrightarrow \delta'_1 & \cdot & \dashrightarrow \delta_1 & \cdot \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ \downarrow \delta'_2 & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow \end{array} \quad (1.1.2)$$

若  $\delta_2$  与  $\delta'_1$  的实现属于  $\xi$ , 则  $\delta_1$  的实现也属于  $\xi$ .

备注 1.1.3. 定义 1.1.2 中的“真类 (proper class)”无关集合论中的“真类”概念.

记号 1.1.4. 方便起见, 将  $\xi$  中三角标注作橘色 (■). 引入  $\xi$ -三角,  $\xi$ -扩张元,  $\xi$ -单射,  $\xi$ -满射等名称.

定理 1.1.5. 假定外三角的类  $\xi$  对同构封闭, 则  $\xi$  是真类当且仅当  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi)$  是外三角范畴. 此处

1.  $\mathbb{E}_\xi(Z, X)$  是  $\mathbb{E}(Z, X)$  中的  $\xi$ -扩张元;
2.  $\mathfrak{s}_\xi$  即  $\mathfrak{s}$  在  $\mathbb{E}_\xi$  上的限制.

证明. 方便起见, 将外三角范畴  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$  与带特定结构的加法范畴  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s})$  分别称作大范畴与小范畴.

( $\leftarrow$ ). 假定小范畴是外三角范畴, 下证  $\xi$  是真类. P1 与 P2 由  $\mathbb{E}_\xi$  的加法双函子性保证. P3 证明如下. 假定式 (1.1.2) 中  $\delta'_1, \delta_2$  是  $\xi$ -扩张元, 由 P2 知  $\delta'_2$  也是  $\xi$ -扩张元. 由图表定理,  $\delta_1$  可在小范畴中直接构造.

( $\rightarrow$ ). ET1, ET2, ET3, ET3<sup>op</sup> 显然成立. 只需验证 ET4 与 ET4<sup>op</sup>.

1. (ET4 的验证). 给定  $\xi$ -单射  $s$  与  $f$  的复合, 在大范畴中作同伦的 ET4 图

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 \parallel & & \downarrow s & \square & \downarrow m \\
 X & \dashrightarrow & A & \dashrightarrow & B \\
 & & \downarrow t & & \downarrow n \\
 C & \xlongequal{\quad} & C & & \\
 & & \downarrow \eta & & \downarrow \kappa
 \end{array} \quad . \quad (1.1.3)$$

直接地,  $\kappa = g_*\eta$  与  $n^*\eta = f_*\varepsilon$  都是  $\xi$ -扩张元. 在大范畴中作“拉回”:

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xlongequal{\quad} & Y & & \\
 \downarrow (1) & & \downarrow (g_s) & & \\
 X & \xrightarrow{(f_0)} & Y \oplus A & \xrightarrow{g \oplus 1_A} & Z \oplus A \xrightarrow{\delta \oplus 0} \\
 \parallel & & \downarrow (0,1) & & \downarrow (-m,p) \\
 X & \xrightarrow{sf} & A & \xrightarrow{p} & B \dashrightarrow \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow n^*\eta
 \end{array} \quad . \quad (1.1.4)$$

由 P3 得  $X \xrightarrow{sf} A \xrightarrow{p} Y \dashrightarrow$  是  $\xi$ -三角.

2. (ET4<sup>op</sup> 的验证). 给定  $\xi$ -满射  $n$  与  $p$  的复合, 在大范畴中作同伦的 ET4<sup>op</sup> 图

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \dashrightarrow & Y & \dashrightarrow & Z \\
 \parallel & & \downarrow s & \square & \downarrow m \\
 X & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & B \dashrightarrow \\
 & & \downarrow np & & \downarrow n \\
 C & \xlongequal{\quad} & C & & \\
 & & \downarrow \eta & & \downarrow \kappa
 \end{array} \quad . \quad (1.1.5)$$

直接地,  $\delta = m^*\varepsilon$  与  $n^*\eta = f_*\varepsilon$  都是  $\xi$ -扩张元. 在大范畴中作“拉回”:

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xlongequal{\quad} & Z & & \\
 \downarrow m & & \downarrow f_*\varepsilon & & \\
 Y & \xrightarrow{(s_{-g})} & A \oplus Z & \xrightarrow{(p,m)} & B \dashrightarrow \\
 \parallel & & \downarrow (1,0) & & \downarrow n \\
 Y & \xrightarrow{s} & A & \xrightarrow{np} & C \dashrightarrow \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow \kappa
 \end{array} \quad . \quad (1.1.6)$$

由 P3 得  $Y \xrightarrow{s} A \xrightarrow{np} C \dashrightarrow$  是  $\xi$ -三角.

□

**命题 1.1.6.** 若  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$  弱幂等完备, 则  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi)$  亦然.

证明. 即证, 若  $(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix}) : A \rightarrow B \oplus C$  是  $\xi$ -单射, 则  $i$  是  $\xi$ -单射. 由 WIC 条件,  $i$  是  $\mathbb{E}$ -单射, 从而有交换图

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & M' \dashrightarrow^{\delta'} \\ \parallel & & \downarrow (\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}) & & \downarrow \gamma \\ A & \xrightarrow{(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix})} & B \oplus C & \xrightarrow{\quad} & M \dashrightarrow^{\delta} \end{array} . \quad (1.1.7)$$

由 ET3 构造  $\gamma$ . 此时  $\delta' = \gamma^* \delta$  是  $\xi$ -扩张元, 因此  $i$  是  $\xi$ -单射.  $\square$

## 1.2 $\xi$ -同调代数

记号 1.2.1. 往后假定范畴弱幂等完备. 取定真类  $\xi$ .

定义 1.2.2 ( $\xi$ -投射对象). 称  $X$  是  $\xi$ -投射对象, 若对一切  $\xi$ -三角  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \dashrightarrow^{\delta}$ , 有短正合列

$$0 \rightarrow (X, A) \xrightarrow{(X, f)} (X, B) \xrightarrow{(X, g)} (X, C) \rightarrow 0. \quad (1.2.1)$$

备注 1.2.3. 传统的相对同调代数仅要求  $(X, -)$  映  $\xi$ -满射为满射, 对单射不设要求.

记号 1.2.4. 记  $\mathcal{P}(\xi)$  是  $\xi$ -投射对象构成的类.

备注 1.2.5. 其对余积(若存在)与缩回封闭.  $\mathcal{P}(\xi)$  显然是  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi)$  的外三角子范畴, 且是半单 Abel 范畴; 但是  $\mathcal{P}(\xi)$  未必是  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$  的外三角子范畴.

记号 1.2.6. 假定外三角范畴有足够的  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象. 即是说, 对任意对象  $A$  都存在  $\xi$ -三角  $K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} A \dashrightarrow^{\delta}$  使得  $P$  是  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象.

命题 1.2.7.  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射预盖恰好是  $\mathcal{P}(\xi)$  出发的  $\xi$ -满射.

证明. 任取  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射预盖  $q : Q \rightarrow A$ . 存在  $\xi$ -三角  $K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} A \dashrightarrow^{\delta}$ . 由投射预盖的定义,  $g$  经  $q$  分解. 由 WIC,  $q$  是  $\xi$ -满射. 反之, 设  $q : Q \rightarrow A$  是  $\mathcal{P}(\xi)$  出发的  $\xi$ -满射. 由定义知  $(-, q)$  映  $\mathcal{P}(\xi)$  为满射, 从而  $q$  是  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射预盖.  $\square$

下一引理说明  $\xi$ -三角与  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象通过某种“垂直配对”决定彼此.

命题 1.2.8. 假定范畴有足够的  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象. 则  $\mathbb{E}$ -三角  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \dashrightarrow^{\delta}$  是  $\xi$ -三角, 当且仅当对所有  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象  $P$  都有短正合列

$$0 \rightarrow (P, X) \xrightarrow{(P, f)} (P, Y) \xrightarrow{(P, g)} (P, Z) \rightarrow 0. \quad (1.2.2)$$

证明. 仅证明  $(\leftarrow)$  部分. 给定  $\mathbb{E}$ -三角  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \dashrightarrow^{\delta}$ . 由范畴有足够的  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象, 作交换图

$$\begin{array}{ccccc} K & \xlongequal{\quad} & K & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X & \dashrightarrow & X \oplus P & \dashrightarrow & P \dashrightarrow \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \dashrightarrow^{\delta} \end{array} . \quad (1.2.3)$$

可裂短正合列是  $\xi$ -三角. 由 P3,  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \dashrightarrow^{\delta}$  是  $\xi$ -三角.  $\square$

记号 1.2.9. 假定范畴有足够的  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象. 此时可以定义投射分解与维数.

**定义 1.2.10** ( $\mathcal{P}(\xi)$ -投射维数  $pd_\xi$ ). 约定  $\mathcal{P}(\xi)$  中对象的  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射维数为 0. 归纳地, 称  $pd_\xi M \leq n+1$ , 若存在  $\xi$ -三角  $K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \dashrightarrow$  使得  $P \in \mathcal{P}(\xi)$  且  $pd_\xi K \leq n$ . 称  $pd_\xi M = n$ , 若有  $pd_\xi M \leq n$ , 但没有  $pd_\xi M \leq n-1$ .

引理 1.2.11. 对  $P \in \mathcal{P}(\xi)$ , 总有  $pd_\xi M = pd_\xi(M \oplus P)$ .

证明. 记命题  $\mathfrak{M}(n)$  为 “ $pd_\xi M = pd_\xi(M \oplus P)$  对  $pd_\xi M = n$  成立”, 证明  $\{\mathfrak{M}(n)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ . 由定义知  $\mathfrak{M}(0)$  成立. 假定  $\mathfrak{M}(\leq n)$  成立. 今任取  $pd_\xi M = n+1$ .

1. 一方面,  $pd_\xi(M \oplus P) \leq n+1$ . 取  $\xi$ -三角  $K \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} M \dashrightarrow$  使得  $Q \in \mathcal{P}(\xi)$  且  $pd_\xi K \leq n$ . 则有  $\xi$ -三角  $K \xrightarrow{(f_0)} Q \oplus P \xrightarrow{(g,0)} M \oplus P \dashrightarrow$ .
2. 另一方面,  $pd_\xi(M \oplus P) \not\leq n$ . 假定  $pd_\xi(M \oplus P) \leq n$ . 取  $\xi$ -三角  $K' \xrightarrow{f'} Q' \xrightarrow{g'} M \oplus P \dashrightarrow$  使得  $Q' \in \mathcal{P}(\xi)$  且  $pd_\xi K' \leq (n-1)$ . 作交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 & P & \xlongequal{\quad} & P & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 K' & \xrightarrow{f'} & Q' & \xrightarrow{g'} & M \oplus P \xrightarrow{\delta'} \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 K' & \dashrightarrow & E & \dashrightarrow & M \dashrightarrow \varepsilon \\
 & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & 
 \end{array} \tag{1.2.4}$$

此处  $E$  是  $Q'$  的直和项. 由底行得  $pd_\xi M \leq n$ , 矛盾.

最后证明  $\mathfrak{M}(\infty)$ . 实际上, 以上第二步说明  $pd_\xi(M \oplus P) \geq pd_\xi M$ , 从而得证.  $\square$

备注 1.2.12. 投射维数的归纳定义无关  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射模的选取. 可使用若松技巧证明, 假定有  $\xi$ -三角

$$K_1 \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{g_1} X \dashrightarrow, \quad K_2 \xrightarrow{f_2} P_2 \xrightarrow{g_2} X \dashrightarrow, \tag{1.2.5}$$

两者在  $X$  处的拉回是两条可裂的  $\xi$ -三角, 从而  $K_1 \oplus P_2 \cong K_2 \oplus P_1$ . 依照 引理 1.2.11 得  $pd_\xi K_1 = pd_\xi K_2$ . 这一备注是为了说明 命题 1.2.16.

**定义 1.2.13** (完全  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解). 给定双边无界复形  $X_\bullet = [\cdots X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} X_{-1} \rightarrow \cdots]$ .

- 称  $X_\bullet$  是  $\xi$ -正合的, 若存在分解  $d_n = g_{n-1} f_n$  使得每个  $K_{n+1} \xrightarrow{g_n} X_n \xrightarrow{f_n} K_n \dashrightarrow$  是  $\xi$ -三角.
- 称  $\mathbb{E}$ -三角  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \dashrightarrow$  是  $(-, \mathcal{W})$  正合的, 若对任意  $W \in \mathcal{W}$ , 有短正合列

$$0 \rightarrow (Z, W) \xrightarrow{(g,W)} (Y, W) \xrightarrow{(f,W)} (X, W) \rightarrow 0. \tag{1.2.6}$$

- 称  $X_\bullet$  是完全  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解, 若  $X_n \in \mathcal{P}(\xi)$ ,  $X_\bullet$  是  $\xi$ -正合的, 且每一  $K_{n+1} \xrightarrow{g_n} X_n \xrightarrow{f_n} K_n \dashrightarrow$  是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的.

可以定义对偶地定义完全  $\xi$ -内射分解.

备注 1.2.14. 在原文中, 默认  $(-, \mathcal{W})$ -正合的  $\mathbb{E}$ -三角(复形)是  $\xi$ -三角(复形).

**记号 1.2.15.** 方便起见, 称一个  $\mathbb{E}$ -单射 ( $\mathbb{E}$ -满射, 或扩张元) 是  $(-, \mathcal{W})$  正合的, 若其所在的  $\mathbb{E}$ -三角是  $(-, \mathcal{W})$  正合的.

**命题 1.2.16** ( $\mathcal{P}(\xi)$ -投射维数的等价定义).  $pd_{\xi} M \leq n$ , 当且仅当对任意  $\xi$ -正合复形

$$K_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \quad (P_i \in \mathcal{P}(\xi)), \quad (1.2.7)$$

总有  $K_n \in \mathcal{P}(\xi)$ .

证明. 由定义归纳得 ( $\leftarrow$ ). 由 备注 1.2.12 得 ( $\rightarrow$ ).  $\square$

**定义 1.2.17** ( $\xi$ -Gorenstein 投射). 对于完全  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解  $P_{\bullet}$ , 记  $K$ -项为  $\xi$ -Gorenstein 投射对象. 记作  $\mathcal{GP}(\xi)$ . 可以对偶地定义  $\xi$ -Gorenstein 内射对象, 记作  $\mathcal{GI}(\xi)$ .

**引理 1.2.18.** 给定  $\mathbb{E}$ -三角  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta}$ . 其  $(-, \mathcal{W})$ -正合, 当且仅当  $(g, \mathcal{W})$  与  $\mathbb{E}(g, \mathcal{W})$  总是单的.

证明. 考虑五项长正合列

$$(C, W) \xrightarrow{(g, W)} (B, W) \xrightarrow{(f, W)} (A, W) \xrightarrow{\delta^{\sharp}} \mathbb{E}(C, W) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(B, W). \quad (1.2.8)$$

$\mathbb{E}$ -三角是  $(-, \mathcal{W})$ -正合的, 当且仅当  $(g, W)$  单且  $(f, W)$  满. 注意到  $(f, W)$  满当且仅当  $g^*$  单.  $\square$

**记号 1.2.19.** 往后将交换图中  $\mathcal{GP}(\xi)$  中对象标注为紫色 (■), 将  $(-, \mathcal{W})$  正合  $\mathbb{E}$ -三角标注为红色 (■), 将待定的  $\mathbb{E}$ -三角标注为蓝色 (■). 定理 1.1.5 已证明  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_{\xi}, \mathfrak{s}_{\xi})$  是外三角范畴, 故无需强调对  $\xi$ -三角的橘色标记 (■).

备注 1.2.20.  $(-, \mathcal{W})$ -正合  $\mathbb{E}$ -三角的图表定理, 相当于满态射的图表定理.

**命题 1.2.21.** 若  $\varepsilon$  是  $(-, \mathcal{W})$ -正合的, 则任意  $\lambda_* \delta$  亦然.

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \xrightarrow{\varepsilon} \\ \downarrow \lambda & \downarrow & \downarrow & \downarrow f' & \parallel \downarrow \lambda_* \varepsilon \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \end{array} \quad (1.2.9)$$

证明.  $\lambda_* \delta$  是  $\xi$ -扩张元. 由 引理 1.2.18, 只需证  $(f', \mathcal{W})$  与  $\mathbb{E}(f', \mathcal{W})$  单. 由  $(f, \mathcal{W})$  与  $\mathbb{E}(f, \mathcal{W})$  单, 证毕.  $\square$

**命题 1.2.22.** 若  $\delta$  与  $\varepsilon$  是  $(-, \mathcal{W})$ -正合的, 则  $\varepsilon'$  亦然.

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \xrightarrow{\delta'} \\ \parallel & \downarrow & \downarrow g & \downarrow & \downarrow \delta \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{gf} & \cdot \xrightarrow{\varepsilon'} \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \varepsilon \\ \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \end{array} \quad (1.2.10)$$

证明. 由 定理 1.1.5, 上图是  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_{\xi}, \mathfrak{s}_{\xi})$  中的交换图. 由 引理 1.2.18, 只需证明  $(gf, \mathcal{W})$  与  $\mathbb{E}(gf, \mathcal{W})$  单. 由假设,  $(g, \mathcal{W}), \mathbb{E}(g, \mathcal{W}), (f, \mathcal{W})$  与  $\mathbb{E}(f, \mathcal{W})$  单. 因此  $(gf, \mathcal{W})$  与  $\mathbb{E}(gf, \mathcal{W})$  单.  $\square$

**命题 1.2.23.** 若  $\delta'$  与  $\varepsilon$  是  $(-, \mathcal{W})$ -正合的, 则  $\delta$  亦然.

$$\begin{array}{ccccc} & \xlongequal{\quad} & & \xlongequal{\quad} & \\ \downarrow & & f & & \downarrow \delta' \\ \cdots & \dashrightarrow & \cdots & \dashrightarrow & \cdots \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow g \\ & & f' & & \downarrow \delta \\ \downarrow \varepsilon' & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ & & \xrightarrow{\quad} & & \end{array} \quad (1.2.11)$$

证明. (细节从略). 所有三角都是  $\xi$ -三角. 若  $gf$  “满”, 则  $f'$  “满”.

**定理 1.2.24.** 给定  $\xi$ -三角  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \dashrightarrow^{\delta}$ . 如  $C$  是  $\mathcal{GP}(\xi)$  的直和项, 则该三角是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的.

证明. 依照 命题 1.2.23, 只需考虑  $C \in \mathcal{GP}(\xi)$  的情形. 由  $C$  的定义作

$$\begin{array}{ccccc} K & \xlongequal{\quad} & K & & \\ \downarrow & & \downarrow i & & \\ A & \dashrightarrow & A \oplus P & \dashrightarrow & P \xrightarrow{0} \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \dashrightarrow^{\delta} \\ \downarrow \varepsilon' & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ & & \xrightarrow{\quad} & & \end{array} \quad (1.2.12)$$

依照 命题 1.2.22,  $\delta$   $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的.

**定理 1.2.25.** 假定存在六个  $\mathbb{E}$ -三角使得下图四个方块交换 (不要求扩张元间的态射):

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots \dashrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots \dashrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots \dashrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \end{array} \quad (1.2.13)$$

若任意五个  $\mathbb{E}$ -三角是  $(-, \mathcal{W})$  正合的, 则第六个三角亦然.

证明. 对上图作用  $(-, \mathcal{W})$ , 得五个短正合列与一个中间项正合的态射序列. 依照 Abel 范畴的  $3 \times 3$ -引理求解即可.

### 1.3 $\mathcal{GP}(\xi)$ 的结构

本节证明  $\mathcal{GP}(\xi)$  是消解的加法子范畴, 其对直和项封闭.

**引理 1.3.1.**  $\mathcal{GP}(\xi)$  中对象对  $\mathcal{P}(\xi)$  中直和项的消去封闭. 即, 若  $P \in \mathcal{P}(\xi)$ ,  $P \oplus G \in \mathcal{GP}(\xi)$ , 则  $G \in \mathcal{GP}(\xi)$ .

证明. 取  $P \oplus G$  的完全  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解

$$\cdots \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow \cdots \quad (1.3.1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow \\ & K_0 & & P \oplus G & & K_2 & \end{array}$$

下证明  $G$  嵌入某一完全  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解.

1. (向左延伸). 作以下  $\xi$ -三角的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 K_0 & \xrightarrow{\quad} & P' & \xrightarrow{\quad} & G & \xrightarrow{\quad} & \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 K_0 & \xrightarrow{\quad} & Q_0 & \xrightarrow{\quad} & P \oplus G & \xrightarrow{\quad} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & P & \xlongequal{\quad} & P & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow^0 & & \\
 & & & & & & .
 \end{array} \tag{1.3.2}$$

由 定理 1.2.25, 第一行是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的.

2. (向右延伸). 作以下  $\xi$ -三角的交换图, 这两个  $\Xi$ -三角也是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的:

$$\begin{array}{ccccc}
 P \oplus G & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & Q_1 & \xrightarrow{g} & K_2 \xrightarrow{\quad} \\
 \downarrow (1,0) & \square & \downarrow \binom{l}{m} & \parallel & \\
 P & \xrightarrow{\binom{1}{0}} & P \oplus K_2 & \xrightarrow{(0,1)} & K_2 \xrightarrow{0} \\
 & & & & .
 \end{array} \tag{1.3.3}$$

此时有  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合三角的交换图,

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xrightarrow{\quad} & Q_1 & \xrightarrow{\quad} & P \oplus K_2 \xrightarrow{\quad} \\
 \downarrow \binom{0}{1} & & \downarrow \binom{0}{1} & & \parallel \\
 P \oplus G & \xrightarrow{\binom{1}{f_1 f_2}} & P \oplus Q_1 & \xrightarrow{\binom{1}{0 m}} & P \oplus K_2 \xrightarrow{\quad} \\
 \downarrow (1,0) & & \downarrow (1,0) & & \\
 P & \xlongequal{\quad} & P & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & .
 \end{array} \tag{1.3.4}$$

由 定理 1.2.25, 第一行是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的.

□

引理 1.3.2. 对任意  $G \in \mathcal{GP}(\xi)$ . 任取  $P, Q \in \mathcal{P}(\xi)$  使得有  $\xi$ -三角

$$G \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} G' \xrightarrow{\delta}, \quad G'' \xrightarrow{j} Q \xrightarrow{q} G \xrightarrow{\varepsilon}. \tag{1.3.5}$$

则  $G', G'' \in \mathcal{GP}(\xi)$ .

证明. 考虑 备注 1.2.12. 以及  $\mathcal{GP}(\xi)$  中对象对  $\mathcal{P}(\xi)$ -中直和项的消去封闭 (引理 1.3.1). □

**定理 1.3.3.** 给定  $\xi$ -三角  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta}$ , 其中  $C \in \mathcal{GP}(\xi)$ . 此时  $A \in \mathcal{GP}(\xi)$  当且仅当  $B \in \mathcal{GP}(\xi)$ .

证明. 假定  $A \in \mathcal{GP}(\xi)$ . 下图  $(i_A; i_C)$  是扩张元的态射. 由 WIC-free 的  $3 \times 3$ -引理得  $\xi$ -三角的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \xrightarrow{\delta} \\
 \downarrow i_A & & \downarrow \binom{s}{i_C g} & & \downarrow i_C \\
 P_A & \xrightarrow{\binom{1}{0}} & P_A \oplus P_C & \xrightarrow{(0,1)} & P_C \xrightarrow{0} \\
 \downarrow p_A & & \downarrow (f' p_A, t) & & \downarrow p_C \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \xrightarrow{\delta'} \\
 \downarrow \varepsilon_A & & \downarrow \varepsilon_B & & \downarrow \varepsilon_C \\
 & & & & .
 \end{array} \tag{1.3.6}$$

由定理 1.2.24, 上图除  $\varepsilon_B$  外的五个扩张元都是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. 定理 1.2.25 说明中间列  $(-, \mathcal{P}(\xi))$  正合. 引理 1.3.2 说明  $B \in \mathcal{GP}(\xi)$ .

假定  $B \in \mathcal{GP}(\xi)$ , 作  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合三角  $B \rightarrow Q_B \rightarrow B'' \dashrightarrow$ , 其中  $Q_B \in \mathcal{P}(\xi)$ . ET4 给出下图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{\delta} & \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 A & \dashrightarrow & Q_B & \dashrightarrow & E & \dashrightarrow & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 B'' & \equiv & B'' & & & & \\
 | \varepsilon & & | \varepsilon' & & & & \\
 \end{array} . \quad (1.3.7)$$

已证  $\mathcal{GP}(\xi)$  扩张闭, 故  $E \in \mathcal{GP}(\xi)$ . 因此  $\delta''$  是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. 引理 1.3.2 说明  $A \in \mathcal{GP}(\xi)$ .  $\square$

推论 1.3.4.  $\mathcal{GP}(\xi)$  对直和项封闭.

- 经典 Gorenstein 同调理论中的证明依赖 Eilenberg swindle 技巧, 此处应避免使用该技巧.

证明. 记  $(G \oplus G_0) \in \mathcal{GP}(\xi)$ . 对  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的  $\mathbb{E}$ -三角  $(G \oplus G') \rightarrow P \rightarrow G' \dashrightarrow$ , 作  $\xi$ -三角的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 G_0 & \equiv & G_0 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 G \oplus G_0 & \xrightarrow{\quad} & P & \xrightarrow{\quad} & G' \dashrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 G & \dashrightarrow & H & \dashrightarrow & G' \dashrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow \delta & & \downarrow \\
 & & & & \\
 \end{array} . \quad (1.3.8)$$

其中  $H$  是  $G$  与  $G'$  的扩张项, 从而属于  $\mathcal{GP}(\xi)$ . 由定理 1.2.24, 所有三角都是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. 对  $\delta$  所在的  $\mathbb{E}$ -三角使用引理 1.3.2 即可.  $\square$

推论 1.3.5. 给定  $\xi$ -三角  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta} \dashrightarrow$ . 若  $A, B \in \mathcal{GP}(\xi)$ , 则  $C \in \mathcal{GP}(\xi)$  当且仅当  $\mathbb{E}$ -三角是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的.

证明. 由定理 1.2.24 可知必要性 ( $\rightarrow$  方向). 对充分性 ( $\leftarrow$  方向), 作  $\xi$ -三角的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \dashrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 P_A & \dashrightarrow & P_A \oplus C & \dashrightarrow & C \dashrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 A' & \equiv & A' & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \\
 \end{array} . \quad (1.3.9)$$

由定理 1.3.3 知  $P_A \oplus C \in \mathcal{GP}$ , 再由引理 1.3.1 得  $C \in \mathcal{GP}$ .  $\square$

## 1.4 $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数

本小节在外三角范畴中类推经典 Gorenstein 同调维数的相关定理.

**定义 1.4.1 ( $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数).** 约定  $\mathcal{GP}(\xi)$  中对象的  $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数为 0. 归纳地, 称  $\text{Gpd}_\xi M \leq n+1$ , 若存在  $\xi$ -三角  $K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{\delta}$  使得  $G \in \mathcal{GP}(\xi)$  且  $\text{Gpd}_\xi K \leq n$ . 称  $\text{Gpd}_\xi M = n$  若  $\text{Gpd}_\xi M \leq n$  且不满足  $\text{Gpd}_\xi M \leq n-1$ .

引理 1.4.2 (维数移动). 使用  $G$  表示  $\mathcal{GP}(\xi)$  中的某个元素. 以下三个命题对  $n \geq 0$  成立:

$\mathfrak{A}(n)$  对  $\xi$ -三角  $A \rightarrow G \rightarrow C \dashrightarrow$ , 若  $\text{Gpd}_\xi C = n+1$ , 则  $\text{Gpd}_\xi A = n$ .

$\mathfrak{B}(n)$  对  $\xi$ -三角  $A \rightarrow B \rightarrow G \dashrightarrow$ , 若  $\text{Gpd}_\xi A = n$ , 则  $\text{Gpd}_\xi B = n$ .

$\mathfrak{C}(n)$  对  $\xi$ -三角  $A \rightarrow B \rightarrow G \dashrightarrow$ , 若  $\text{Gpd}_\xi B = n$ , 则  $\text{Gpd}_\xi A = n$ .

证明. 使用数学归纳法证明. 由 定理 1.3.3,  $\mathfrak{B}(0)$  与  $\mathfrak{C}(0)$  成立. 下证明  $\mathfrak{A}(0)$ . 存在  $G', G'' \in \mathcal{GP}(\xi)$  使得

$$\begin{array}{ccccc} & G' & \xlongequal{\quad} & G' & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ A & \dashrightarrow & E & \dashrightarrow & G'' \dashrightarrow \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C \dashrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & & \end{array} . \quad (1.4.1)$$

由 定理 1.3.3,  $E \in \mathcal{GP}(\xi)$ , 进而  $A \in \mathcal{GP}(\xi)$ .

• (归纳:  $\mathfrak{B}(n+1) \wedge \mathfrak{C}(n+1) \rightarrow \mathfrak{A}(n+1)$ ). 考虑

$$\begin{array}{ccccc} & C' & \xlongequal{\quad} & C' & \text{Gpd}_\xi C' = n+1 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ A & \dashrightarrow & E & \dashrightarrow & G'' \dashrightarrow \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C \dashrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & & \end{array} . \quad (1.4.2)$$

由  $\mathfrak{B}(n+1)$ , 得  $\text{Gpd}_\xi E = n+1$ . 由  $\mathfrak{A}(n+1)$ , 得  $\text{Gpd}_\xi A = n+1$ .

• (归纳:  $\mathfrak{A}(n) \wedge \mathfrak{B}(n) \rightarrow \mathfrak{B}(n+1)$ ). 由 WIC-free 的  $3 \times 3$ -引理作得下图

$$\begin{array}{ccccc} & A' & \dashrightarrow & B' & \dashrightarrow G' \dashrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ & G''' & \longrightarrow & G'' \oplus P & \longrightarrow P \xrightarrow{0} \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & G \dashrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & & \end{array} . \quad (1.4.3)$$

$\text{Gpd}_\xi A' = n$

$\text{Gpd}_\xi A = n+1$

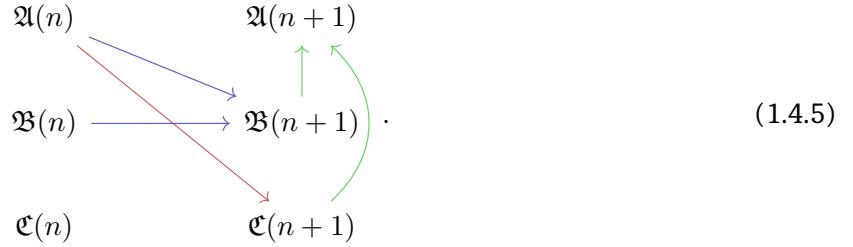
由  $\mathfrak{B}(n)$  知  $\text{Gpd}_\xi B' = n$ . 由  $\mathfrak{A}(n)$  知  $\text{Gpd}_\xi B = n+1$ .

- (归纳:  $\mathfrak{A}(n) \rightarrow \mathfrak{C}(n+1)$ ). 考虑

$$\begin{array}{ccc}
 B' & \xlongequal{\quad} & B' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H & \xrightarrow{\quad} & G' \xrightarrow{\quad} G \dashrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow \parallel \\
 A & \xrightarrow{\quad} & B \xrightarrow{\quad} G \dashrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & & 
 \end{array} \quad \begin{array}{l}
 \mathcal{G}pd_{\xi}B' = n \\
 \mathcal{G}pd_{\xi}B = n+1
 \end{array} \quad . \quad (1.4.4)$$

由定理 1.3.3 得  $H \in \mathcal{GP}$ . 由  $\mathfrak{A}(n)$  知  $\mathcal{G}pd_{\xi}A = n+1$ .

归纳图示:



□

推论 1.4.3. 对不可裂的  $\xi$ -三角  $A \rightarrow G \rightarrow C \dashrightarrow$ , 若  $\mathcal{G}pd_{\xi}A = n+1$ , 则  $\mathcal{G}pd_{\xi}A = n+2$ .

证明. 假定  $\mathcal{G}pd_{\xi}A = n+1$ . 由定义,  $\mathcal{G}pd_{\xi}C \leq n+2$ . 由  $\mathfrak{A}(n)$  知只能有  $\mathcal{G}pd_{\xi}C = n+2$ . □

推论 1.4.4 ( $\mathcal{G}pd_{\xi}$  的等价定义).  $\mathcal{G}pd_{\xi}M \leq n$  当且仅当对任意  $\xi$ -正合复形

$$K_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \quad (P_i \in \mathcal{P}(\xi)), \quad (1.4.6)$$

总有  $K_n \in \mathcal{GP}(\xi)$ .

证明. ( $\rightarrow$ ). 依照  $\mathcal{P}(\xi) \subseteq \mathcal{GP}(\xi)$  与维数移位. ( $\leftarrow$ ). 取如上所述的  $M$ . 依照定义,  $\mathcal{G}pd_{\xi}M \leq n$ . □

推论 1.4.5. 若  $pd_{\xi}M < \infty$ , 则  $pd_{\xi}M = \mathcal{G}pd_{\xi}M$ .

记号 1.4.6. 给定  $I \subseteq (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ .

- 记  $\mathcal{P}(\xi)$  是  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象,  $\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}$  是  $pd_{\xi}$  有限的对象,  $\mathcal{P}(\xi)^I$  是  $\mathcal{P}(\xi)$ -投射维数在  $I$  中的对象.
- 记  $\mathcal{GP}(\xi)$  是  $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射对象,  $\widetilde{\mathcal{GP}(\xi)}$  是  $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数有限的对象,  $\mathcal{GP}(\xi)^I$  是  $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数在  $I$  内的对象.

命题 1.4.7.  $\mathbb{E}_{\xi}(\mathcal{GP}(\xi), \widetilde{\mathcal{P}(\xi)}) = 0$ .

证明. 只需证明  $\mathbb{E}_{\xi}(\mathcal{GP}(\xi), \mathcal{P}(\xi)^{\leq n}) = 0$  对一切  $n \geq 0$  成立. 由定理 1.3.3 知  $n = 0$  时显然成立. 假定  $\mathbb{E}_{\xi}(\mathcal{GP}(\xi), \mathcal{P}(\xi)^{\leq n}) = 0$  成立, 下证明  $\mathbb{E}_{\xi}(\mathcal{GP}(\xi), \mathcal{P}(\xi)^{\leq n+1}) = 0$ . 取定

$$N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \dashrightarrow, \quad pd_{\xi}N = n, \quad P \in \mathcal{P}(\xi), \quad pd_{\xi}M = n+1, \quad (1.4.7)$$

以及  $(-, \mathcal{P})$ -正合  $\mathbb{E}$ -三角

$$G' \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{p} G \dashrightarrow, \quad G', G \in \mathcal{GP}(\xi), \quad Q \in \mathcal{P}(\xi). \quad (1.4.8)$$

此时有正合列的交换图 (■ 色对象是零 Abel 群):

$$\begin{array}{ccccccc} (Q, P) & \longrightarrow & (Q, M) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(Q, N) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (G', P) & \xrightarrow{(G', g)} & (G', M) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G', N) \\ \downarrow & & \downarrow ((\delta_\xi)^\sharp)_M & & \\ \mathbb{E}_\xi(G, P) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G, M) & & \\ \downarrow & & & & \\ \mathbb{E}_\xi(Q, M) & & & & \end{array} . \quad (1.4.9)$$

由于  $((\delta_\xi)^\sharp)_M \circ (G', g)$  是零态射, 且  $(G', g)$  是满态射, 故  $((\delta_\xi)^\sharp)_M = 0$ . 由长正合列, 得  $\mathbb{E}_\xi(G, M) = 0$ .  $\square$

**命题 1.4.8.** 完全投射分解是  $(-, \widetilde{\mathcal{P}(\xi)})$ -正合的.

证明. 由定义, 完全投射分解是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. 假定是  $(-, \mathcal{P}(\xi)^{\leq n})$ -正合的, 下证明其  $(-, \mathcal{P}(\xi)^{\leq n+1})$  正合. 沿用 [命题 1.4.7](#) 中记号, 得正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} (G, N) & \xrightarrow{(p, N)} & (Q, N) & \longrightarrow & (G', N) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G, N) \\ \downarrow (G, f) & & \downarrow (Q, f) & & \downarrow (G', f) & & \downarrow \\ (G, P) & \xrightarrow{(p, P)} & (Q, P) & \longrightarrow & (G', P) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G, P) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (G, M) & \longrightarrow & (Q, M) & \longrightarrow & (G', M) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G, M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}_\xi(G, N) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(Q, N) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G', N) & & \end{array} . \quad (1.4.10)$$

由态射合成,  $(G, f)$ -单. 对  $G' \rightarrow P' \rightarrow G'' \dashrightarrow$  作同样的交换图, 得  $(G', f)$ -单. 上图包含五条短正合列, 由  $3 \times 3$  引理得第六条短正合列, 这完成了归纳假设.  $\square$

**推论 1.4.9.** 由维数移动知  $\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}$  是厚子范畴. 所有  $\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}$  中的  $\mathbb{E}$ -三角都是  $(\mathcal{GP}(\xi), -)$ -正合的.

证明. 这蕴含在上述命题的证明中.  $\square$

**命题 1.4.10.** 给定  $\xi$ -三角  $A \rightarrow B \rightarrow C \dashrightarrow$ , 其中  $C \in \mathcal{GP}(\xi)$ . [定理 1.2.24](#) 证明了该  $\mathbb{E}$ -三角是  $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. 实际上, 该  $\mathbb{E}$ -三角也是  $(-, \widetilde{\mathcal{P}(\xi)})$ -正合的.

证明. 依照与 [定理 1.2.24](#) 一致的证明思路, 只需说明完全投射分解  $(-, \widetilde{\mathcal{P}(\xi)})$ -正合, 即上一命题.  $\square$

## 1.5 Hovey 四元组

**引理 1.5.1.** 约定  $\mathcal{P}(\xi)^{-1} = \{0\}$ . 对  $n \geq 0$ , 有如下等式:

$$\mathcal{GP}(\xi)^{\leq n} \subseteq \mathsf{Cone}(\mathcal{P}(\xi)^{\leq n-1}, \mathcal{GP}(\xi)), \quad \mathcal{GP}(\xi)^{\leq n} \subseteq \mathsf{coCone}(\mathcal{P}(\xi)^{\leq n}, \mathcal{GP}(\xi)). \quad (1.5.1)$$

证明. 下归纳证明. 上述命题对  $\mathcal{GP}(\xi)^{\leq 0} = \mathcal{GP}(\xi)$  显然成立. 假定上述命题对  $\mathcal{GP}(\xi)^n$  成立, 下证明其对  $\mathcal{GP}(\xi)^{n+1}$  成立.

1. (前式). 取定  $M \in \mathcal{GP}(\xi)^{\leq n+1}$ , 则存在  $\xi$ -三角的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 L & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \dashrightarrow & \mathcal{G}pd_{\xi}M = n+1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 A & \dashrightarrow & H & \dashrightarrow & M & \dashrightarrow & \mathcal{G}pd_{\xi}L = n \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 G & \xlongequal{\quad} & G & & & & \mathcal{P}d_{\xi}A \leq n \\
 \downarrow & & \downarrow & & & &
 \end{array} \quad (1.5.2)$$

因此  $\mathcal{GP}(\xi)^{\leq n+1} \subseteq \text{Cone}(\mathcal{P}(\xi)^{\leq n}, \mathcal{GP}(\xi))$ .

2. (后式). 对上述  $M$ , 作下图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 L & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \dashrightarrow & \mathcal{G}pd_{\xi}M = n+1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 A & \dashrightarrow & P \oplus Q & \dashrightarrow & N & \dashrightarrow & \mathcal{G}pd_{\xi}L = n \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 G & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & G' & \dashrightarrow & \mathcal{P}d_{\xi}A \leq n \\
 \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow & &
 \end{array} \quad (1.5.3)$$

由维数移动,  $\mathcal{P}d_{\xi}N \leq n+1$ . 因此  $\mathcal{GP}(\xi)^{\leq n+1} \subseteq \text{coCone}(\mathcal{P}(\xi)^{\leq n+1}, \mathcal{GP}(\xi))$ .

□

推论 1.5.2. 若  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_{\xi}, \mathfrak{s}_{\xi})$  中所有对象有有限 Gorenstein 投射维数, 则  $(\mathcal{GP}(\xi), \widetilde{\mathcal{P}(\xi)})$  是完备余挠对.

**定理 1.5.3.**  $((\mathcal{P}(\xi), \mathcal{C}), (\mathcal{GP}(\xi), \widetilde{\mathcal{P}(\xi)}))$  是 Hovey 四元组.

证明. 已证这是两个余挠对. 容易验证

$$\text{Cone}(\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}, \mathcal{P}(\xi)) = \text{coCone}(\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}, \mathcal{P}(\xi)) = \widetilde{\mathcal{P}(\xi)}. \quad (1.5.4)$$

从而这是 Hovey 四元组. □

推论 1.5.4. 若  $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_{\xi}, \mathfrak{s}_{\xi})$  的 Gorenstein 投射维数  $\leq n$ , 则  $\widetilde{\mathcal{P}(\xi)} = \mathcal{P}(\xi)^{\leq n}$ . 此时  $((\mathcal{P}(\xi), \mathcal{C}), (\mathcal{GP}(\xi), \widetilde{\mathcal{P}(\xi)}))$  是 Hovey 四元组.

## 参考文献

- [HZZ20] Jiangsheng Hu, Dongdong Zhang, and Panyue Zhou. Proper classes and Gorensteinness in extriangulated categories. *Journal of Algebra*, 551:23–60, June 2020. [doi:10.1016/j.jalgebra.2019.12.028](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.12.028).