2025 年秋组会讲义 “外三角范畴”

张陈成

2025 年秋

最后更新于 2025 年 9 月 12 日.

目录

1 正合范畴与三角范畴拾遗

1.1 正合范畴

短正合列 (下简称 ses) 是同调代数的基本研究对象, 正合范畴研究了一般加法范畴上的短正合列理论.

定义 1.1.1. (Quillen 的正合范畴). **正合范畴** $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ 的基本资料是加法范畴 $\mathcal{C}$ 与一族映射图 $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ 中对象称为 $\mathcal{C}$ 中的**短正合列 (ses)**, 形如

$$0 \to X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \to 0, \tag{1.1.1}$$

其中 $i = \ker p$, 称 i 为**容许单态射**; $p = \operatorname{cok} i$, 称 p 为**容许满态射**. 正合范畴 $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ 需满足以下公理:

EX0 对任意对象 X, 恒等映射 id_X 是容许单态射;

EX0' 对任意对象 X, 恒等映射 id_X 是容许满态射;

EX1 容许单态射在复合下封闭;

EX1' 容许满态射在复合下封闭;

EX2 容许单态射 $X \to Y$ 对任意态射 $X \to Z$ 有推出, 且 $Z \to Y \sqcup_X Z$ 仍为容许单态射;

EX2' 容许满态射 $B \to C$ 对任意态射 $A \to C$ 有拉回, 且 $B \times^C A \to A$ 仍为容许满态射.

备注 1.1.2. 实际上, EX2 与 EX2' 构造的交换方块是推出拉回方块. 更精细的表述见**定理** 1.3.8.

引理 1.1.3. $\mathcal{E}$ 对直和封闭. 此处的直和指二元双积 $\oplus$, 后不重复解释.

证明. 由于 $\oplus$ 保持核与余核, 下只需说明容许单态射对直和封闭. 给定 ses $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ 与 $D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{q} F$. 容易检验以下是推出方块:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "p"'] & B \oplus E \arrow[d, dashed, "\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \\ C \arrow[r, dashed, "\binom{1}{0}"'] & C \oplus E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "q"'] & C \oplus E \arrow[d, dashed, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}"] \\ F \arrow[r, dashed, "\binom{0}{1}"'] & C \oplus F \end{tikzcd}. \tag{1.1.2}$$

由 EX2' 与 EX1', $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ 是容许满态射, 其核是 $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$. 证毕. □

推论 1.1.4. 任意可裂 ses 含于 $\mathcal{E}$.

例子 1.1.5. 有时假定正合范畴的扩张类是局部本质小的. 换言之, 对任意对象 X, Z, 形如 $0 \to X \to ? \to Z \to 0$ 的 ses 的同构类是一个集合. 正合范畴满足这一假定, 若以下任意一则条件成立,

1. $\mathcal{C}$ 有足够投射对象, 或足够内射对象. (由维数移动.)
2. $\mathcal{C}$ 是本质小的, 即所有态射构成集合. (显然.)
3. $\mathcal{C}$ 中对象可遗忘作集合, 态射可遗忘作映射, 且遗忘函子保持核 (例如, 遗忘是右伴随). 对任意基数 κ, 基数为 κ 的对象构成本质小范畴. 模范畴复形范畴的常见正合结构满足这一假定.

   证明. 给定 X 与 Z, 则扩张项 E 满足 $|E/X| \simeq |Z|$. 由于所有基数不超过 $|X| \cdot |Z|$ 的对象构成本质小范畴, 故所有形如 $0 \to X \to ? \to Z \to 0$ 的 ses 构成本质小范畴. □

命题 1.1.6. 正合范畴的反范畴是正合范畴.

证明. 公理 EXn (EXn') 的在反范畴中的表述是 EXn' (EXn), 故成立. □

后文提及的 "对偶可证" 是基于反范畴的考量.

备注 1.1.7. 正合范畴的一般理论见 [Büh10] 与 [Kel96], 一些较有意义计算与反例参阅 [BK].

正合范畴是特殊的外三角范畴. 由于正合范畴的部分主要结论 (如 "六项长正合列") 可从外三角范畴者退化得到, 此节无需提及这类结论. 以下两则正合范畴的重要结论被推广作外三角范畴定义的一部分, 应当给出证明. 第一则结论是 Ext^1 具有双函子性.

定理 1.1.8. 假定例 1.1.5. $\mathrm{Ext}^1 : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ 将一组对象 (Z, X) 对应至 "所有形如 $0 \to X \to ? \to Z \to 0$ 的 ses" 的同构类. 对任意态射 $f : X \to X'$, $\mathrm{Ext}^1(Z, f)$ 将短正合列 θ 对应至 θ', 机理是

$$\begin{tikzcd}
\theta \arrow[d, dashed, "\mathrm{Ext}^1(f,Z)"'] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & E \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\theta' & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, dashed] & F \arrow[r, dashed] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} . \tag{1.1.3}$$

对 $g' : Z \to Z'$, 可以通过拉回对偶地定义 $\mathrm{Ext}^1(g', X) : \mathrm{Ext}^1(Z', X) \to \mathrm{Ext}^1(Z, X)$. 今断言, 这是加法双函子, 其加法结构与 Baer 和匹配.

证明. 扩张的一般理论参阅 [Mit65] 章节 VII. 注意: Mitchell 通过 Baer 和证明 Ext^1 的双函子性; 为消解循环论证的疑虑, 以下直截了当地说明双函子性, 即证明如下引理.

引理 1.1.9. 对 ses $\tau : 0 \to X \to M \to Z' \to 0$, 态射 $f : X \to X'$ 与 $g : Z \to Z'$, 总有

$$\mathrm{Ext}^1(g, X')(\mathrm{Ext}^1(Z', f)(\tau)) = \mathrm{Ext}^1(Z, f)(\mathrm{Ext}^1(g, X)(\tau)). \tag{1.1.4}$$

方便起见, 将上式记作 $g^* f_* \tau = f_* g^* \tau$.

以下证明 $f_* : g^*\tau \mapsto g^* f_* \tau$, 即, 存在 $\varphi : G \to F$ 使得下图中 $b'' = x' \circ \varphi$, 且 $\star$ 是推出:

$$\begin{tikzcd}
g^* f_* \tau & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "y"] & F \arrow[r, "x'"] & Z \arrow[r] & 0 \\
g^* \tau \arrow[u] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "z"] \arrow[u, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\star"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, "b''", blue] \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, red, "g''"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & Z \arrow[u, equal] \arrow[r] \arrow[d, blue, "g"] & 0 \\
\tau \arrow[u] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & M \arrow[r, "b"] \arrow[d, red, "f'"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
f_* \tau \arrow[d] & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "a'"] & E \arrow[r, red, "x"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & Z' \arrow[r] & 0 \\
g^* f_* \tau & 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "y"] \arrow[u, equal] & F \arrow[r, "x'"] \arrow[u, "g'"] & Z \arrow[r] \arrow[u, "g"] & 0
\end{tikzcd} . \tag{1.1.5}$$

φ 由红, 蓝两组复合态射及右下方的拉回方块决定. 两组复合态射即

$$G \xrightarrow{f' \circ g''} E \xrightarrow{x} Z', \quad G \xrightarrow{b''} Z \xrightarrow{g} Z'. \tag{1.1.6}$$

由拉回的泛性质, 存在唯一的 φ 使得 $x' \circ \varphi = b''$ 且 $f' \circ g'' = g' \circ \varphi$. 因此右上方块交换. 为说明 $\star$ 的交换性, 只需验证 $y \circ f$ 与 $\varphi \circ z$ 均是如下拉回问题的解 $\mathfrak{X}$:

$$x \circ g' \circ \mathfrak{X} = g \circ x' \circ \mathfrak{X}. \tag{1.1.7}$$

自行追图较阅读连等式更为快捷, 遂略去检验过程. 由 $\operatorname{cok} y \simeq \operatorname{cok} z$, 故 $\star$ 是推出. □

备注 1.1.10. 实际上, **定理** 1.1.8 的证明并不依赖于**例** 1.1.5. 如 [Mit65] 的章节 VII 所示, $\mathrm{Ext}^1(Z,X)$ 可以取作 "Abel 类". 若读者熟悉公理集合论, 大多数结论可推广至 "Abel 类".
为规避过多技术性的细节, 本文一向承认**例** 1.1.5, 正如承认范畴的 Hom-类是集合.

第二则结论是 Noether 同构. 为精简记号, 通常作如下约定.

记号 1.1.11. 使用 $\rightarrowtail$ ($\twoheadrightarrow$) 表示容许单态射 (容许满态射). 例如, 正合范畴的 ses 形如 $X \rightarrowtail Y \twoheadrightarrow Z$.

定理 1.1.12. 假定容许单态射 i 与 j 可复合作 $j \circ i$, 则有三条 ses 作成的交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, tail, "j"] & Z \arrow[d, tail, dashed, "j'"] \\
X \arrow[r, tail, "j\circ i"] & A \arrow[r, two heads, "r"] \arrow[d, two heads, "q"] & W \arrow[d, two heads, dashed, "q'"] \\
& B \arrow[r, equal] & B
\end{tikzcd} . \tag{1.1.8}$$

余核的反性质诱导了 j' 与 q'. 今断言 $Z \overset{j'}{\rightarrowtail} W \overset{q'}{\twoheadrightarrow} B$ 也是 ses.

证明. 右上方方块是推出拉回. 依照 EX2, j' 是容许单态射, 从而嵌入某一 ses $Z \overset{j'}{\rightarrowtail} W \overset{q''}{\twoheadrightarrow} B'$. 依照推出方块, $\mathrm{cok}\, j \simeq \mathrm{cok}\, j'$, 从而 q' 与 q'' 相差左复合一个同构. 这说明题设所示的态射序列是 ses. □

备注 1.1.13. 若记上述 $Z := Y/X$, $W := A/X$, 则 Noether 同构可表述为 $\frac{A/X}{Y/X} \simeq \frac{A}{Y}$. 这是 Noether 同构的初始形态.

1.2 三角范畴

外三角是正合范畴与三角范畴的共同推广. 试回顾三角范畴的定义.

定义 1.2.1. 三角范畴由资料 $(\mathcal{C}, \Sigma, \mathcal{E})$ 描述. 其中,

1. $\mathcal{C}$ 是加法范畴,
2. $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是范畴的自等价, 称作平移函子,
3. $\mathcal{E} = \{X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中好三角组成的类.

约定两则术语:

1. (三角射). 两个好三角间的态射描述作三元组 (α, β, γ), 使得下图交换 (横行是好三角):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\gamma"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\alpha"] \\
A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "j"] & C \arrow[r, "k"] & \Sigma A
\end{tikzcd} , \tag{1.2.1}$$

2. (旋转). 下图中, 中行是好三角, 首 (尾) 行是其逆 (顺) 时针旋转:

$$\begin{array}{lr}
\Sigma^{-1}Z \xrightarrow{-\Sigma^{-1}w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z & (逆) \\
X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X & . \\
Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y & (顺)
\end{array} \tag{1.2.2}$$

特别地, 好三角类满足以下公理:

TR1-1 $\mathcal{E}$ 关于同构封闭. 具体地, 若式 (1.2.1) 是 $\mathcal{C}$ 中通常的交换图, 且 α, β, γ 都是同构, 则上行是好三角当且仅当下行是好三角;

TR1-2 任意态射 u 可嵌入某一好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$;

TR1-3 对任意对象 X, 平凡三角 $0 \to X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0$ 是好三角;

TR2 好三角关于顺时针旋转封闭;

TR3 假定式 (1.2.1) 的上行与下行是好三角, 若图中仅存在 α 与 β 使得 $\beta \circ u = i \circ \alpha$, 则一定存在某一 γ 使得上图交换;

TR4 若下图中 r_1, r_2 与 c_2 均为好三角, 则存在虚线所示的好三角 c_3 使得所有方块交换:

$$\begin{tikzcd}
 & & c_2 & c_3 & \\
r_1 & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "a"] & W \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
r_2 & X \arrow[r, "x"] & Z \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & R \arrow[r, "z"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\
 & & S \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"] & S \arrow[r, "c"] \arrow[d, dashed] & \Sigma Y \\
 & & \Sigma Y \arrow[r, "\Sigma v"] & \Sigma W &
\end{tikzcd} \tag{1.2.3}$$

备注 1.2.2. 关于三角范畴的定义见 [Ver96] 或 [Nee01]. 更通俗的读物是 [Mur07] 或 [May]. 特别地, [May] 指出 TR3 可由其余公理推出.

以下从正合范畴的视角 “粗浅地” 解释三角范畴; 诚然, 更好的工具是外三角范畴.

例子 1.2.3. 给定好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$. 若将 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ 类比作 ses, 则 $w \in \mathrm{Ext}^1(Z, X)$ 描述了扩张元. 特别地, $\mathrm{Ext}(Z, X) := (Z, \Sigma X)$. TR1-1, TR1-2, TR3 类似核与余核泛性质的推论. TR1-3 即 Ex0. TR4 类似 Noether 同构.

命题 1.2.4. 以下是预三角范畴的直接推论 (无需 TR4). 证明细节见通常的教材.

1. (TR3 的加强). TR3 即是说, 给定式 (1.2.1) 中的 α 与 β 使得图交换, 则有 γ 使得图交换. 实际上, 若给定 α, β, γ 中任意两者使得图交换, 则一定存在第三者使得图交换.

   证明. 依照 TR2 与自然同构 $(\Sigma(?), \Sigma(-)) \simeq (?, -)$ 即得. □

2. (长正合列). 对任意好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$, 有上同调函子的长正合列

$$\cdots \to (-, \Sigma^{-1} Z) \to (-, X) \to (-, Y) \to (-, Z) \to (-, \Sigma X) \to \cdots, \tag{1.2.4}$$

   以及同调函子的长正合列

$$\cdots \to (\Sigma X, -) \to (Z, -) \to (Y, -) \to (X, -) \to (\Sigma^{-1} Z, -) \to \cdots. \tag{1.2.5}$$

3. (长正合列的推论). 若式 (1.2.1) 中 α, β 与 γ 中有两者为同构, 则第三者也是同构.

证明. 以上同调函子为例, 下证明对任意 A, 总有 $\ker(A, v) = \operatorname{im}(A, u)$. 给定 $\beta : A \to Y$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & \Sigma A \arrow[d, dashed, "\Sigma\alpha"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & \Sigma X \end{tikzcd} . \tag{1.2.6}$$

若存在 α 使得图交换, 则存在 γ 使得图交换. 因此 $\ker(A, v) \supseteq \operatorname{im}(A, u)$. 倒置 γ 与 α 的选取顺序, 得 $\ker(A, v) \subseteq \operatorname{im}(A, u)$, 从正合列在 $(-, Y)$ 处正合. 该正合列通过 TR2 右延, 通过 TR2 以及自然同构 $(\Sigma(?), \Sigma(-)) \simeq (?, -)$ 左延. □

4. 好三角的直和也是好三角;

证明. 对 $i = 1, 2$, 记好三角 $X_i \xrightarrow{u_i} Y_i \xrightarrow{v_i} Z_i \xrightarrow{w_i} \Sigma X_i$. 记直和嵌入的好三角 $X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{u_1 \oplus u_2} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{(a\ b)} Z_0 \xrightarrow{\binom{c}{d}} \Sigma(X_1 \oplus X_2)$. 由直和的泛性质构造交换图

$$\begin{tikzcd} X_1 \oplus X_2 \arrow[r, "u_1 \oplus u_2"] \arrow[d, equal] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r, "v_1 \oplus v_2"] \arrow[d, equal] & Z_1 \oplus Z_2 \arrow[r, "w_1 \oplus w_2"] \arrow[d, "(i\ j)"] & \Sigma X_1 \oplus \Sigma X_2 \arrow[d, equal] \\ X_1 \oplus X_2 \arrow[r, "u_1 \oplus u_2"] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r, "(a\ b)"] & Z_0 \arrow[r, "\binom{c}{d}"] & \Sigma X_1 \oplus \Sigma X_2 \end{tikzcd} . \tag{1.2.7}$$

对所有对象与态射取米田嵌入 $E \mapsto (-, E)$, 上下两行均是长正合列. 由五引理, $(-, (i\ j))$ 是自然同构. 由米田引理, $(i\ j)$ 是同构. □

5. (TR3 的特殊情形). 沿用交换图式 (1.2.1). 若 α, β 与 γ 两者为同构, 则第三者必为同构.

证明. 对所有对象与态射取米田嵌入 $E \mapsto (-, E)$. 由长正合列与五引理, $(-, \alpha)$, $(-, \beta)$ 与 $(-, \gamma)$ 均是自然同构. 最后由依照米田引理完成证明. □

6. (TR1-2 的加强). 任意态射可以以任意位置嵌入某一好三角; 若选定该位置, 则其嵌入的好三角在同构意义下唯一.

证明. 依照 TR2 与自然同构 $(\Sigma(?), \Sigma(-)) \simeq (?, -)$, 态射的嵌入位置可以任意选定. 由上一条 “TR3 的特殊情形”, 态射嵌入的好三角在同构意义下唯一. □

7. (TR2 的类似结论). 好三角关于逆时针旋转封闭. 顺 (逆) 时针旋转定义作式 (1.2.2).

证明. 选定好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$. 下图上行是 $-\Sigma^{-1}w$ 嵌入的好三角, 下行是逆时针旋转:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{-1}Z \arrow[r, "-\Sigma^{-1}w"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "u'"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & Z \arrow[d, equal] \\ \Sigma^{-1}Z \arrow[r, "-\Sigma^{-1}w"] & X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \end{tikzcd} . \tag{1.2.8}$$

下解释 φ 的选取方式. 对上下两行作顺时针旋转, 得好三角的交换图, 由 “TR3 的加强” 可得 φ 使得图交换. 由 “TR3 的特殊情形”, φ 是同构. □

命题 1.2.5. 对预三角范畴 (无需 TR4) 中的态射 f, 以下命题等价:

1. f 存在核;
2. f 存在余核;
3. f 在前后复合同构的意义下形如 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}: X\oplus A\to Y\oplus A$.

仅需证明 (1 → 3). 反方向是显然的. 对 (2 ↔ 3) 的证明是对偶的.

证明. 记 $i: K\to U$ 是 $f: U\to V$ 的核. 记好三角 $R\xrightarrow{r}K\xrightarrow{i}U\xrightarrow{s}\Sigma R$, 由长正合列知 $\mathrm{im}(-,r)=\ker(-,i)=0$. 从而 r 是零态射. 下图说明 i 是可裂单态射:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "r"] \arrow[d] & K \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & U \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "p"] & R \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, equal] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}. \tag{1.2.9}$$

将 i 嵌入好三角 $K\xrightarrow{i}U\xrightarrow{q}C\xrightarrow{z}\Sigma K$. 由 "TR3 的特殊情形", 得同构的好三角

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & U \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\binom{p}{s}"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Sigma K \arrow[d, equal] \\ K \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & K\oplus C \arrow[r, "(0\ 1)"] & C \arrow[r] & \Sigma K \end{tikzcd}. \tag{1.2.10}$$

这说明 f 形如 $K\oplus C\xrightarrow{(0\ \varphi)}V$, 其中 φ 是单态射. 同样的论证说明 φ 是可裂单, 且由直和关系 $V\simeq L\oplus D$. 此时, f 形如 $\begin{pmatrix}1&0\\&0\end{pmatrix}C\oplus K\to D\oplus L$. □

推论 1.2.6. 给定好三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}\Sigma X$, 则以下命题等价:

1. u 是单态射;
2. u 是可裂单态射;
3. v 是满态射;
4. v 是可裂满态射;
5. $w=0$.

特别地, 所有可裂单 (满) 都有相应的直和项, 即**定义** 3.3.1 定义的弱幂等完备性.

例子 1.2.7. 以下是一些注意事项.

1. Σ 是范畴自等价, 这并不意味着 $\Sigma X\simeq X$.
2. TR3 中补全的态射的方式未必唯一.

1.3 同伦的推出拉回

本节所述的 "同伦的推出拉回" 在外三角范畴的图表定理中大有作用. 以下给出一侧预加范畴中的观察.

例子 1.3.1. 给定预加范畴 $\mathcal{A}$ 中的交换方块 (左), 以及其诱导的复形 (右):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "l"'] & W \end{tikzcd} \qquad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\binom{f}{h}} Y \oplus Z \xrightarrow{(g\ -l)} W \longrightarrow 0 \quad . \tag{1.3.1}$$

以下是一则转述定义即得的引理.

引理 1.3.2. 左图是拉回 (推出), 当且仅当右图左正合 (右正合).
称某交换方块是拉回 (推出), 若相应的态射方程存在唯一的解. 倘若去除唯一性, 则称该交换方块是弱拉回 (弱推出). 以下是一则转述定义即得的引理.

引理 1.3.3. 左图是弱拉回, 当且仅当以下是函子的正合列:

$$(-,X) \xrightarrow{\binom{f}{h}_*} (-,Y) \oplus (-,Z) \xrightarrow{(g\ -l)_*} (-,W). \tag{1.3.2}$$

左图是弱推出, 当且仅当以下是函子的正合列:

$$(W,-) \xrightarrow{(g\ -l)^*} (Y,-) \oplus (Z,-) \xrightarrow{\binom{f}{h}^*} (X,-). \tag{1.3.3}$$

命题 1.3.4. 由正合范畴的 Noether 同构, 容许单态射 $X \to Y$ 与容许满态射 $X \to Z$ 的推出是推出拉回方块. 特别地, 这一推出拉回方块诱导的 ses 是正合范畴的 ses.

证明. 只需证明, 若 $i : A \to B$ 是容许单态射, 则对任意 $f : A \to C$, $\binom{i}{f}$ 也是容许单态射. 以下证明一则更强的引理.

引理 1.3.5. 若 $q \circ p$ 是容许单态射, q 是容许满态射, 则 p 是容许单态射.

证明. 对态射 q 与 $q \circ p$ 使用 Noether 同构, 得以下交换图:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "s"] \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[ddr, bend right, "1_X"'] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & A \arrow[d, tail, "i"] & \\ & F \arrow[r, tail, "p'"] \arrow[d, two heads, "\lambda"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "q"] & Z \arrow[d, equal] \\ & X \arrow[r, tail, "q\circ p"] & Y \arrow[r, two heads, "\pi"] & Z \end{tikzcd} \quad . \tag{1.3.4}$$

最左纵列的短正合列可裂. 考虑可裂 ses $X \overset{s}{\rightarrowtail} F \twoheadrightarrow A$ 知 s 是容许单态射. 由蓝线所示的拉回问题, 得 $p = p' \circ s$ 是容许单态射的复合, 故 p 也是容许单态射. □

注意, 以上引理的证明未使用弱幂等完备的假定. □

定义 1.3.6. (正合范畴中同伦的推出拉回). 称交换图是正合范畴中同伦的推出拉回方块, 若其诱导的链复形是正合范畴的 ses.

例子 1.3.7. 将 Abel 范畴与所有 ses 作成正合范畴, 则推出拉回方块必然是同伦的推出拉回方块.

定理 1.3.8. (正合范畴的同伦推出拉回方块). 以下五类是正合范畴的同伦推出拉回方块:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & \bullet \arrow[d, tail, dashed] \\
\bullet \arrow[r, tail, dashed] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & \bullet \arrow[d, two heads, dashed] \\
\bullet \arrow[r, tail, dashed] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & \bullet \arrow[d, two heads] \\
\bullet \arrow[r, tail] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, two heads, dashed] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & \bullet \arrow[d, two heads] \\
\bullet \arrow[r, two heads] & \bullet
\end{tikzcd}
.
\tag{1.3.5}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, dashed] \\
\bullet \arrow[r, tail] & \bullet \arrow[r, two heads] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, equal] \\
\bullet \arrow[r, tail] & \bullet \arrow[r, two heads] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

证明. 使用引理: 若 i 是容许单态射 (p 是容许满态射), 则 $\binom{i}{?}$ 是容许单态射 ($(p\ ?)$ 是容许满态射). □

定义 1.3.9. (三角范畴中同伦的推出拉回). 称交换图是三角范畴中同伦的推出拉回方块, 若其诱导的三项链复形是三角范畴中好三角前三项.

满足 TR1-TR3 的加法范畴称作预三角范畴. 对预三角范畴, 下给出一则八面体公理的等价公理, 更多等价公理 (不包括以下) 可参阅 [Nee91].

定理 1.3.10. 预三角范畴是三角范畴, 当且仅当其满足如下等价公理.

1. 八面体公理.
2. 给定红色处态射 a_1 与 b_1, 则可以补全下图中的三个好三角与一处三角射:

$$
X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(b_2\ -a_2)} Z \xrightarrow{\mu\lambda} \Sigma X
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma b_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "a_2"] & Z \arrow[r, "\lambda"'] & W \arrow[r] & \Sigma Y_1
\end{tikzcd}
\tag{1.3.6}
$$

3. 给定红色个好三角, 同伦推出拉回方块, 以及第一行的好三角. 此时存在 $\mu\lambda = \delta$ 使得下图包含三个好三角与一处三角射:

$$
X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(b_2\ -a_2)} Z \xrightarrow{\delta} \Sigma X
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma b_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "a_2"] & Z \arrow[r, "\lambda"'] & W \arrow[r] & \Sigma Y_1
\end{tikzcd}
\tag{1.3.7}
$$

证明. (1 → 2). 若给定 a_1 与 b_2, 则八面体公理 (下图上) 诱导了三角射 (下图下):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{a_1}{b_1}"] \arrow[d, equal] & Y_2 \oplus Y_1 \arrow[r, "(b_2, -a_2)"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & Z \arrow[r, "\mu\lambda"] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "a_1"] & Y_2 \arrow[r, "\lambda b_2"] \arrow[d, "0"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, dashed, "t"] & \Sigma X \arrow[d, "\binom{\Sigma a_1}{\Sigma b_1}"] \\
& \Sigma Y_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Sigma Y_1 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, dashed] & \Sigma Y_2 \oplus \Sigma Y_1 \\
& \Sigma Y_2 \oplus \Sigma Y_1 \arrow[r] & \Sigma Z &
\end{tikzcd} . \tag{1.3.8}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] & Y_2 \arrow[r, "\lambda b_2"] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma b_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "a_2"] & Z \arrow[r, dashed, "\lambda"] & W \arrow[r, "t"] & \Sigma Y_1
\end{tikzcd}$$

此处省略校验过程.

(2 → 1). 沿用 (1 → 2) 中构造即可.

(3 → 1). 依照题设补全四个好三角

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}W \arrow[r, "-\Sigma^{-1}\mu"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "b_1"] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & Y_2 \arrow[r, "\lambda b_2"] \arrow[d, "b_2"] & W \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}W \arrow[r, "-b_1(\Sigma^{-1}\mu)"] & Y_1 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "la_2"] & Z \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "l"] \arrow[dr, phantom, "?"] & W \arrow[d, "-\mu"] \\
& L \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"] & L \arrow[r, "k"'] \arrow[d, "(\Sigma a_1)k"] & \Sigma X \\
& \Sigma X \arrow[r, "\Sigma a_1"] & \Sigma Y_2 &
\end{tikzcd} . \tag{1.3.9}$$

由同伦推出拉回方块 ■, 上图除绿色方块 ? 处均交换. 依照 3 的题设,

$$X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(-b_2\ a_2)} Z \xrightarrow{kl} \Sigma X \tag{1.3.10}$$

与

$$X \xrightarrow{\binom{a_1}{b_1}} Y_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{(b_2\ -a_2)} Z \xrightarrow{\mu\lambda} \Sigma X \tag{1.3.11}$$

均是好三角. 同时 $\mu\lambda = \delta = -kl$.

(1 → 3). 沿用 (1 → 2) 中构造即可. □

备注 1.3.11. 特别地, 八面体公理中的方块 ⋆ 是同伦推出拉回.

$$\begin{tikzcd}
& & c_2 & c_3 & \\
r_1 & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & W \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
r_2 & X \arrow[r, "x"] & Z \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & R \arrow[r, "z"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\
& & S \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"] & S \arrow[r, "c"] \arrow[d, dashed] & \Sigma Y \\
& & \Sigma Y \arrow[r, "\Sigma v"] & \Sigma W &
\end{tikzcd} . \tag{1.3.12}$$

特别地, 考虑以下三角射

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"] & \bullet \arrow[d, equal] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}, \tag{1.3.13}$$

则存在 β 使得中间方块为同伦的推出拉回. 由八面体公理即证.

例子 1.3.12. 仍将好三角的第三项态射 “视作” ses 代表的扩张元, 则有三角射

$$\begin{array}{c} \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[d, "\Sigma f"] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "f_*\delta"] & \bullet \end{tikzcd} \\ \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[r, "g^*\varepsilon"] \arrow[d, "g"] & \bullet \arrow[d, equal] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "\varepsilon"] & \bullet \end{tikzcd} \end{array}. \tag{1.3.14}$$

以上, “ses 的推出拉回” 由态射复合简练地描述:

$$(\Sigma f) \circ \delta = f_*\delta, \quad \varepsilon \circ g = g^*\varepsilon. \tag{1.3.15}$$

2 初探外三角范畴

2.1 基本定义

外三角范畴的第一手资料是 [NP19].

定义 2.1.1. (外三角范畴的基本资料). 外三角范畴描述作三元组 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$. 其中 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, 配有双函子

$$\mathbb{E} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}. \tag{2.1.1}$$

Abel 群的 $\mathbb{E}(Z, X)$ 中元素称作扩张元, 记作 (X, δ, Z), 通常简写作 δ.
记函子范畴 $\mathcal{C}' := \mathcal{C}^{1\to 2\to 3}$, 定义 $\mathcal{C}'$ 上的等价关系 $\simeq$ 如式 (2.1.2):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d, "\varphi", "\simeq"'] & Z \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r] & E \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \qquad \varphi \text{ 是同构.} \tag{2.1.2}$$

定义 "类的映射" $\mathfrak{s}$ 如下:

$$\mathfrak{s} : \mathbb{E}(Z, X) \to \mathcal{C}'/\simeq, \quad \delta \mapsto [X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z], \tag{2.1.3}$$

以上明确了 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 的类型. 方便起见, 引入以下记号.

定义 2.1.2. (推出与拉回). 记 $f_* : \mathbb{E}(X, f)$. 一个兴许更好的理解方式是, f_* 是一族自然变换, $\mathbb{E}(X, f)$ 即 $(f_*)_X$. 对偶地记 $g^* := \mathbb{E}(g, Z)$.

下面给出外三角范畴的公理.

定义 2.1.3. (外三角范畴的公理). 设 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 如上. 称其为外三角范畴, 若满足以下公理.

ET1 $\mathbb{E}$ 是加法双函子. 双函子性即 $f_* g^* = g^* f_*$, 可比对**定理** 1.1.8 阅读.

ET2-1 显然商函子 $\mathcal{C}^{1\to 2\to 3} \to \mathcal{C}'$ 保持直和. 今约定 $\mathfrak{s}$ 满足如下两则性质:

(a) 若 $\mathfrak{s}(\delta)$ 属于可裂 ses 所在的类, 则必有 $\delta = 0$;

(b) $\mathfrak{s}(\delta \oplus \delta') = \mathfrak{s}(\delta) \oplus \mathfrak{s}(\delta')$. 其中, $\delta \in \mathbb{E}(Z, X)$, $\delta' \in \mathbb{E}(Z', X')$, 以及

$$(\delta \oplus \delta') \in \mathbb{E}(Z, X) \oplus \mathbb{E}(Z', X') \subseteq \mathbb{E}(Z \oplus Z', X \oplus X'). \tag{2.1.4}$$

ET2-2 若有扩张元的等式 $f_* \delta = g^* \delta'$, 则存在虚线处态射使得右图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}(Z, X) \arrow[d, "f_*"] & \delta \arrow[d] & \mathfrak{s}(\delta) & : & X \arrow[r] \arrow[dd, "f"'] & F \arrow[r] \arrow[dd, dashed, "h"'] & Z \arrow[dd, "g"] \\ \mathbb{E}(Z, X') & f_* \delta = g^* \delta' & & & & & \\ \mathbb{E}(Z', X') \arrow[u, "g^*"'] & \delta' \arrow[u] & \mathfrak{s}(\delta') & : & X' \arrow[r] & E \arrow[r] & Z' \end{tikzcd} . \tag{2.1.5}$$

ET3 若存在 a 与 b 使得下图左侧方块交换, 则存在 c 使得 $c^* \eta = a_* \delta$, 同时下图交换

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{s}(\delta) & : & X \arrow[r] \arrow[d, "a"] & F \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[d, dashed, "c"] \\ \mathfrak{s}(\eta) & : & X' \arrow[r] & E \arrow[r] & Z' \end{tikzcd} . \tag{2.1.6}$$

ET3' 对偶地, 若存在 b 与 c 使得下图右侧方块交换, 则存在 a 使得 $c^*\eta = a_*\delta$, 同时下图交换

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{s}(\delta) & : & X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "a"] & F \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[d, "c"] \\
\mathfrak{s}(\eta) & : & X' \arrow[r] & E \arrow[r] & Z'
\end{tikzcd} . \tag{2.1.7}$$

ET4 任给定以下 T 形图, 则可以补全虚线所示的 ⊣ 形图使得下图交换,

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathfrak{s}(\eta) & \mathfrak{s}(\eta') \\
 & & & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
\mathfrak{s}(\delta) & : & A \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "z"] & C \arrow[d, dashed, "u"] \\
\mathfrak{s}(\delta') & : & A \arrow[r, dashed, "zx"] & D \arrow[r, dashed, "v"] \arrow[d, "wv"] & F \arrow[d, dashed, "w"] \\
 & & & E \arrow[r, equal] & E
\end{tikzcd} , \tag{2.1.8}$$

同时 $u^*\delta' = \delta$, $y_*\eta = \eta'$, 以及 $x_*\delta' = w^*\eta$.

ET4' 对调式 (2.1.8) 中虚线箭头与实线箭头, 其表述与 ET4 对偶.

定义 2.1.4. (外三角范畴的术语). 以下是外三角范畴的通用术语.

1. 称 $\mathfrak{s}(\delta)$ 为扩张元 δ 的**加法实现** (简称**实现**). "加法" 的含义见 ET2-1, "实现" 的含义见 ET2-2. 即便扩张元的实现是一个等价类, 本文也使用 "实现" 指代该等价类中的任意代表元, 这通常不会引起矛盾.

2. 若 $X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{y} Z$ 是扩张元 δ 的加法实现, 则记作

$$A \overset{x}{\rightarrowtail} B \overset{y}{\twoheadrightarrow} C \overset{\delta}{\dashrightarrow} . \tag{2.1.9}$$

图中虚箭头 $\overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 用于标记加法实现对应的扩张元, 并非确指的态射. 称 x 是 $\mathbb{E}$-**inflation** (简称 **inflation**), y 是 $\mathbb{E}$-**deflation** (简称 **deflation**). 以上序列是 $\mathbb{E}$-**三角**或 $\mathbb{E}$-**conflation** (简称 **conflation**). 若同时涉及正合范畴与外三角范畴, 本文使用 "正合范畴的 inflation/deflation/conflation" 这一全称指代正合范畴中的相应概念.

3. 回顾式 (2.1.5). 称 $(f, g) : \delta \to \delta'$ 是**扩张元的态射**, 若 $f_*\delta = g^*\delta'$. 称 (f, h, g) 是实现之间的态射, 若 (f, g) 是扩张元的态射且式 (2.1.5) 交换.

4. 扩张元的推出与拉回诱导了实现的 "推出" 与 "拉回". 类似三角范畴的余积变换与积变换, 实现的 "推出" 与 "拉回" 未必是范畴中的推出与拉回. 方便起见, 我们仍称之为**推出**与**拉回**. 外三角范畴的图表定理通常不涉及范畴意义下的推出与拉回.

我们类比三角范畴与正合范畴, 解释上述公理的动机如下.

例子 2.1.5. ET2-2, ET3 与 ET3' 涉及两处交换方块和一处扩张元的态射, 姑且 "视作" 三个交换方块. 这三条公理类似三角范畴中三角射的 "二推三" 准则. ET4 (ET4') 类似正合范畴中的 Noether 同构, 其包含三个交换方块与三个恒等式, "对应" (见例 1.3.12) 三角范畴 TR4 中的六个交换方块.

命题 2.1.6. Conflation 关于同构封闭.

证明. 假定以下交换图的首行是 δ 的实现, α, β 与 γ 是同构:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"] & {} \\ A' \arrow[r, tail, "f'"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] & C' & \end{tikzcd} . \tag{2.1.10}$$

任取 $\delta' := (\gamma^{-1})^*\alpha_*\delta$ 的实现. 考虑扩张元的态射 $(\alpha, \gamma) : \delta \to \delta'$, 依照 ET2-1 补全实现之间的态射 (α, β', γ). 由于 $\beta' \circ \beta^{-1}$ 是同构, 依照 $\mathcal{C}'$ 的构造可知上图下行也是 δ' 的实现. □

定理 2.1.7. 外三角范畴的反范畴也是外三角范畴.

证明. 容易验证. □

2.2 六项正合列

本节解释 conflation 诱导的六项正合列.

定理 2.2.1. (加法充实的米田引理). 假定 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$ 是加法函子. 对任意 $X \in \mathcal{C}$, 存在以下 Abel 群的自然同构:

$$F(X) \simeq ((X, -), F(-))_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})}, \quad a \mapsto [f \mapsto F(f)(a)], \quad \theta_X(1_X) \leftarrow\!\shortmid \theta. \tag{2.2.1}$$

假定 $G : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ 是反变加法函子. 对任意 $X \in \mathcal{C}$, 存在以下 Abel 群的自然同构:

$$G(X) \simeq ((-, X), G(-))_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab})}, \quad b \mapsto [f \mapsto G(f)(b)], \quad \psi_X(1_X) \leftarrow\!\shortmid \psi. \tag{2.2.2}$$

证明. 熟知. 例如可查阅 [Kel82] 的 2.1 章节. □

依照 [Yon60] 中隐约显现的动机, 米田引理的初衷或许是为了解释短正合列诱导长正合列时的连接态射. 我们将这一观点提炼作以下定义.

定义 2.2.2. ($\delta_\sharp$ 与 $\delta^\sharp$). 给定 conflation

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.2.3}$$

定义自然变换 $\delta_\sharp : (-, C) \to \mathbb{E}(-, A), \quad g \mapsto \delta_\sharp(g) := g^*\delta$. 依照米田引理, 这对应 $\delta \in \mathbb{E}(A, C)$.
定义自然变换 $\delta^\sharp : (A, -) \to \mathbb{E}(C, -), \quad f \mapsto \delta^\sharp(f) := f_*\delta$. 依照米田引理, 这对应 $\delta \in \mathbb{E}(A, C)$.

备注 2.2.3. 下标 $\delta_\sharp$ 表示扩张元 “被拉回”, 上标 $\delta^\sharp$ 表示扩张元 “被推出”. 在书写长正合列时, 我们会发现这一角标朝向的合理性.

定理 2.2.4. (五项正合列). 由公理 ET1-ET3, 以下是函子的正合列:

$$(C, -) \xrightarrow{-\circ g} (B, -) \xrightarrow{-\circ f} (A, -) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C, -) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(B, -) \tag{2.2.4}$$

换言之, 以上序列在中间三点正合.

证明. (($B,-$) 处的正合性). 任意选定 X, 试观察下图:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & {} \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, dashed, "0"] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.2.5}$$

假定 $\beta \in \ker(f, X)$. 由 ET3, 存在 γ 使得上图交换, 因此 $\beta \in \operatorname{im}(g, X)$. 反之, 若 $\beta = \gamma \circ g$, 则依照 ET3', $\beta \circ f = 0$, 故 $\beta \in \ker(f, X)$. 因此 $\ker(f, X) = \operatorname{im}(g, X)$.

(($A,-$) 处的正合性). 下证明 $\delta^\sharp \circ (- \circ f) = 0$. 以下交换图表明 $f_*\delta = (1_C)^*0 = 0$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "\binom{1}{g}"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ B \arrow[r, tail, "\binom{1}{0}"] & B \oplus C \arrow[r, two heads, "(0\ 1)"] & C \arrow[r, dashed, "0"] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.2.6}$$

任取 $h : A \to X$, 得

$$\delta^\sharp \circ (h \circ f) = (hf)_*\delta = h_*(f_*\delta) = 0. \tag{2.2.7}$$

反之, 若 $\delta^\sharp(h) = h_*\delta = 0$, 则有如下实现的态射

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "\binom{a}{b}"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & X \oplus C \arrow[r, "(0\ 1)"] & C \arrow[r, dashed, "0"] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.2.8}$$

解得 $h = a \circ f$, 从而 $h \in \operatorname{im}(- \circ f)$. 综上, $\ker \delta^\sharp = \operatorname{im}(- \circ f)$.

($\mathbb{E}(C,-)$ 处的正合性). 下证明 $g^* \circ \delta^\sharp = 0$. 类似式 (2.2.6) 的推导, 得 $g^*\delta = 0$. 反之, 若 $\eta \in \ker g^* \subseteq \mathbb{E}(C, X)$, 则存在 q 使得下图中 $g = b \circ q$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "q"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\ X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, two heads, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\eta"] & {} \\ X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & X \oplus B \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[u, dashed, "(p\ q)"'] & B \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[u, "g"'] & {} \end{tikzcd} . \tag{2.2.9}$$

依照 ET3', 得 η 是 δ 的推出. 综上, $\ker g^* = \operatorname{im} \delta^\sharp$. □

依照外三角范畴的反范畴也是外三角范畴, 我们得到如下对偶的定理.

定理 2.2.5. (五项正合列). 由公理 ET1-ET3, 以下是函子的正合列:

$$(-, A) \xrightarrow{f \circ -} (-, B) \xrightarrow{g \circ -} (-, C) \xrightarrow{\delta_\sharp} \mathbb{E}(-, A) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(-, B) \tag{2.2.10}$$

证明. 证明略. □

ET4 (ET4') 公理将以上五项正合列延长为六项.

定理 2.2.6. (六项正合列). 由公理 ET1-ET4, 以下是函子的正合列:

$$(C, -) \xrightarrow{- \circ g} (B, -) \xrightarrow{- \circ f} (A, -) \xrightarrow{\delta^\sharp} \mathbb{E}(C, -) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(B, -) \xrightarrow{f^*} \mathbb{E}(A, -) \tag{2.2.11}$$

换言之, 以上序列在中间四点正合.

证明. 我们仅证明 $\mathbb{E}(B,-)$ 处的正合性. 函子性表明 $f^*\circ g^* = (g\circ f)^* = 0$. 任取 $\eta\in\ker f^*\subseteq\mathbb{E}(B,X)$, 依照 ET4' 构造下图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, dashed, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, equal] & A\oplus X \arrow[r, two heads, dashed, "(1\,0)"] \arrow[d, tail, dashed, "(x\,y)"] & A \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[d, tail, "f"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "a"] & E \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, two heads, dashed] & B \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, two heads, "g"] & {} \\
 & C \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varepsilon"] & C \arrow[d, "\delta"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} \quad . \tag{2.2.12}$$

计算得

$$\eta = (0\,1)_*(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_*\eta) = (0\,1)_*(g^*\varepsilon) = g^*((0\,1)_*\varepsilon)\in\operatorname{im} g^*. \tag{2.2.13}$$

综上, $\ker f^* = \operatorname{im} g^*$. □

依照外三角范畴的反范畴也是外三角范畴, 我们得到如下对偶的定理.

定理 2.2.7. (六项正合列). 由公理 ET1-ET4, 以下是函子的正合列:

$$(-,A)\xrightarrow{f\circ-}(-,B)\xrightarrow{g\circ-}(-,C)\xrightarrow{\delta_\sharp}\mathbb{E}(-,A)\xrightarrow{f^*}\mathbb{E}(-,B)\xrightarrow{g^*}\mathbb{E}(-,C) \tag{2.2.14}$$

证明. 证明略. □

2.3 五项正合列的推论

本小节中给出五项正合列若干推论, 所有命题无需 ET4 或 ET4'. 任取 conflation

$$A \overset{f}{\rightarrowtail} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \overset{\delta}{\dashrightarrow} \quad . \tag{2.3.1}$$

命题 2.3.1. Conflation 中, 态射复合为 0.

命题 2.3.2. g 是 f 的弱余核, 即, $\ker(-\circ f) = \operatorname{im}(-\circ g)$; 对偶地 f 是 g 的弱核, 即, $\ker(g\circ -) = \operatorname{im}(f\circ -)$.

命题 2.3.3. g 是单态射, 当且仅当 f 是零态射, 亦当且仅当 g 是可裂单.

证明. g 单即 $(g\circ -)$ 单, 亦即 $(f\circ -)=0$, 亦即 f 零, 亦即 $(-\circ f)=0$, 亦即 $(-\circ g)$ 满, 亦即 g 可裂单. 此处涉及一则简单的引理.

> 引理 2.3.4. 给定任意范畴中的态射 g. $(g\circ -) = \operatorname{Hom}(-,g)$ 是函子的满射, 当且仅当 g 是可裂单态射.
>
> 证明. 若 $g: A\to B$ 是可裂满, 则 $(g\circ -)$ 有右逆元, 故满. 反之, 若 $(g\circ -)$ 满, 则 $(1_B)\in \operatorname{Hom}(g,B)$, 即存在 $h: A\to B$ 使得 $g\circ h = 1_B$, 故 g 可裂满. □

□

对偶地, 有如下命题.

命题 2.3.5. f 是满态射, 当且仅当 g 是零态射, 亦当且仅当 f 是可裂满.

证明. 略. □

备注 2.3.6. 由于 $\mathcal{C}$ 未必弱幂等完备, 单的 deflation 未必是 inflation. 三角范畴中, 单态射必然是可裂单. 正合范畴中, 单的容许满态射是同构. 对偶表述略.

回顾**例** 2.1.5, 公理 ET2-2, ET3 与 ET3' 可统一作 "二推三" 准则.

定理 2.3.7. 给定实现之间的态射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"] & {} \\ X' \arrow[r, tail, "f'"] & Y' \arrow[r, two heads, "g'"] & Z' \arrow[r, "\delta'"] & {} \end{tikzcd}. \tag{2.3.2}$$

若 α, β 与 γ 中两者为同构, 则第三者亦为同构.

证明. 若 α 与 β 是同构, 则有五项正合列间的交换图

$$\begin{tikzcd} (-,X) \arrow[r, "f\circ-"] \arrow[d, "\alpha\circ-"] & (-,Y) \arrow[r, "g\circ-"] \arrow[d, "\beta\circ-"] & (-,Z) \arrow[r, "\delta_\sharp"] \arrow[d, "\gamma\circ-"] & \mathbb{E}(-,X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \mathbb{E}(-,Y) \arrow[d, "\beta_*"] \\ (-,X') \arrow[r, "f'\circ-"] & (-,Y') \arrow[r, "g'\circ-"] & (-,Z') \arrow[r, "\delta'_\sharp"] & \mathbb{E}(-,X') \arrow[r, "f'_*"] & \mathbb{E}(-,Y') \end{tikzcd}. \tag{2.3.3}$$

依照五引理, $\gamma \circ -$ 也是同构, 故 γ 亦为同构.
若 α 和 γ 是同构, 则以上 $\beta \circ -$ 是函子的满态射, 因此 β 可裂满. 另一方向的五项长正合列表明 $- \circ \beta$ 是函子的满态射, 因此 β 可裂单. 综上, β 是同构. □

定理 2.3.8. 在同构意义下, inflation (deflation) 嵌入唯一的 conflation.

证明. 上一定理的推论. □

备注 2.3.9. "对称" 地看, 扩张元的实现在同构意义下也是唯一的.

ET4 公理由两处 conflation 生成四处 conflation. 依照 inflation (deflation) 的唯一嵌入, 我们有如下结果.

命题 2.3.10. (严格 ET4). 给定下图实线部分的三处 deflation

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "z"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "u"] & {} \\ A \arrow[r, "zx"] & D \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"] & F \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, dashed, "w"] & {} \\ & E \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\eta"] & E \arrow[d, dashed, "\eta'"] & \\ & {} & {} & \end{tikzcd}, \tag{2.3.4}$$

存在虚线所示的 conflation η' 使得上图交换, 且 ET4 中的三个恒等式成立.

证明. 若依照 ET4 选取 $D \overset{v'}{\twoheadrightarrow} F'$, 则存在同构 $\varphi : F \simeq F'$ 使得 $v' = \varphi \circ v$. 往后从略. □

命题 2.3.11. 对偶地, 有严格 ET4' 引理. 表述与证明略.

2.4 扩张提升引理

以下是一则实用的引理.

定理 2.4.1. 假定 $\mathbb{E}(C,K)=0$, 以下是 conflation 间的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \\
K \arrow[r, tail, "j"'] & A \arrow[r, two heads, "q"'] & B \arrow[r, dashed, "\varepsilon"'] & {}
\end{tikzcd} . \tag{2.4.1}$$

则存在 $s:Y\to A$ 使得 $q\circ s=j$ 且 $s\circ i=f$.

证明. 转述命题如下: 若一组态射 (f,g) 满足 $q\circ f=g\circ i$, 则存在 "公共的原像" s

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[rrr, mapsto, dashed] \arrow[ddd, mapsto, dashed] & & & g \arrow[ddd, mapsto] \\
 & (Y,A) \arrow[r, "{(Y,q)}"] \arrow[d, "{(i,A)}"'] & (Y,B) \arrow[d, "{(i,B)}"] & \\
 & (X,A) \arrow[r, "{(X,q)}"'] & (X,B) & \\
f \arrow[rrr, mapsto] & & & q\circ f=g\circ i
\end{tikzcd} . \tag{2.4.2}$$

依照长正合列式 (2.2.11) 与式 (2.2.14), 构造以下列正合的双复形 (未标注处均为 0):

$$\begin{tikzcd}
\ker_1 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ker_2 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ker_3 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ker_4 \arrow[d, tail] \\
(C,K) \arrow[r, "{(C,j)}"] \arrow[d, "{(p,K)}"] & (C,A) \arrow[r, "{(C,q)}"] \arrow[d, "{(p,A)}"] & (C,B) \arrow[r, "\varepsilon_\sharp"] \arrow[d, "{(p,B)}"] & \mathbb{E}(C,K) \arrow[d, "p^*"] \\
(Y,K) \arrow[r, "{(Y,j)}"] \arrow[d, "{(i,K)}"] & (Y,A) \arrow[r, "{(Y,q)}"] \arrow[d, "{(i,A)}"] & (Y,B) \arrow[r, "\varepsilon_\sharp"] \arrow[d, "{(i,B)}"] & \mathbb{E}(Y,K) \arrow[d, "i^*"] \\
(X,K) \arrow[r, "{(X,j)}"] \arrow[d, "\delta^\sharp"] & (X,A) \arrow[r, "{(X,q)}"] \arrow[d, "\delta^\sharp"] & (X,B) \arrow[r, "\varepsilon_\sharp"] \arrow[d, "\delta^\sharp"] \arrow[dr, phantom, "\text{PO}"] & \mathbb{E}(X,K) \arrow[d] \\
\mathbb{E}(C,K) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{E}(C,A) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{E}(C,B) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & T \arrow[d, two heads] \\
\operatorname{coker}_1 \arrow[r] & \operatorname{coker}_2 \arrow[r] & \operatorname{coker}_3 \arrow[r, equal] & \operatorname{coker}_3
\end{tikzcd} . \tag{2.4.3}$$

其相应的全复形依然是正合的. 我们将添加负号的态射标红, 并带入 $\mathbb{E}(C,K)$, 得下图

$$
\begin{tikzcd}
\ker_1 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ker_2 \arrow[r] \arrow[d, tail] & \ker_3 \arrow[d, tail] & \\
(C,K) \arrow[r, "{(C,j)}"] \arrow[d, "{-(p,K)}"] & (C,A) \arrow[r, two heads, "{(C,q)}"] \arrow[d, "{(p,A)}"] & (C,B) \arrow[r] \arrow[d, "{-(p,B)}"] & 0 \arrow[d] \\
(Y,K) \arrow[r, "{(Y,j)}"] \arrow[d, two heads, "{-(i,K)}"] & (Y,A) \arrow[r, "{(Y,q)}"] \arrow[d, "{(i,A)}"] & (Y,B) \arrow[r, "\varepsilon_\sharp"] \arrow[d, "{-(i,B)}"] & \mathbb{E}(Y,K) \arrow[d, tail, "i^*"] \\
(X,K) \arrow[r, "{(X,j)}"] \arrow[d] & (X,A) \arrow[r, "{(X,q)}"] \arrow[d, "\delta^\sharp"] & (X,B) \arrow[r, "\varepsilon_\sharp"] \arrow[d, "-\delta^\sharp"] & \mathbb{E}(X,K) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{E}(C,A) \arrow[r, tail, "q_*"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{E}(C,B) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & T \arrow[d, two heads] \\
& \operatorname{coker}_2 \arrow[r] & \operatorname{coker}_3 \arrow[r, equal] & \operatorname{coker}_3
\end{tikzcd}
. \tag{2.4.4}
$$

计算 $(f;g) \in (X,A) \oplus (Y,B)$ 的微分:

1. $(X,q)(f) - (i,B)(g) = q \circ f - g \circ i = 0.$
2. 由 $q_*(\delta^\sharp(f)) = \delta^\sharp(q \circ f) = \delta^\sharp(g \circ i) = 0$, 得 $\delta^\sharp(f) = 0$.
3. 由 $i^*(\varepsilon_\sharp(g)) = \varepsilon_\sharp(g \circ i) = \varepsilon_\sharp(q \circ f) = 0$, 得 $\varepsilon_\sharp(g) = 0$.

由全复形正合, $(f;g)$ 存在原像 $(a;b;c) \in (X,K) \oplus (Y,A) \oplus (C,B)$. 由于 (i,K) 与 (C,q) 是满射, 易知 $(f;g)$ 存在形如 $(0;s;0)$ 的原像. s 即为所求. $\square$

备注 2.4.2. 扩张提升引理依赖六项正合列, 因此对预三角范畴与正合范畴适用.

备注 2.4.3. 短文 [Che] 从导出范畴的视角给出**定理** 2.4.1 的证明.

3 图表定理

3.1 双 deflation (inflation) 的拉回 (推出)

ET4 刻画了 conflation 关于 deflation 的推出; ET4' 刻画了或关于 inflation 的拉回. 依照正合范畴中的经验 (**定理** 1.3.8), conflation 关于 inflation 的拉回或 deflation 的推出也应诱导出四处 conflation. 本小节将分析这一事实.

定理 3.1.1. (双 deflation 的拉回). 对 $i \in \{1,2\}$, 取 $\delta_i \in \mathbb{E}(C, A_i)$. 此时有四处 conflation 作成的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "m_2"] & A_2 \arrow[d, tail, "x_2"] & \\
A_1 \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, two heads, "\lambda_2"] \arrow[d, "\lambda_1"] & B_2 \arrow[r, dashed, "(y_2)^*\delta_1"] \arrow[d, "y_2"] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, "x_1"] & B_1 \arrow[r, two heads, "y_1"] \arrow[d, dashed, "(y_1)^*\delta_2"] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} \quad . \tag{3.1.1}$$

特别地, 有等式 $(m_1)_*\delta_1 + (m_2)_*\delta_2 = 0$.

证明. 引入以下 conflation $\binom{1}{1}^*(\delta_1 \oplus \delta_2) \in \mathbb{E}(C, A_1 \oplus A_2)$:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \oplus A_2 \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, two heads, "k"] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r, dashed, "\binom{1}{1}^*(\delta_1\oplus\delta_2)"] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] & {} \\
A_1 \oplus A_2 \arrow[r, tail, "x_1\oplus x_2"] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r, two heads, "y_1\oplus y_2"] & C \oplus C \arrow[r, dashed, "\delta_1\oplus\delta_2"] & {}
\end{tikzcd} \quad . \tag{3.1.2}$$

记 (e_1, e_2, p_1, p_2) 是直和 $A_1 \oplus A_2$ 中的结构态射. 由 ET4 (ET4'), 得以下交换图

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "e_1"] \arrow[d, equal] & A_1 \oplus A_2 \arrow[r, two heads, "p_2"] \arrow[d, tail, "m"] & A_2 \arrow[d, tail, dashed, "x_2"] \\
A_1 \arrow[r, tail, dashed, "m_1"] & M \arrow[r, two heads, dashed, "\lambda_2"] \arrow[d, two heads, "k"] & B_2 \arrow[d, two heads, dashed, "y_2"] \\
 & C \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\binom{1}{1}^*(\delta_1\oplus\delta_2)"'] & C \arrow[d, dashed, "\delta_2"'] \\
 & {} & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "e_2"'] & A_2 \arrow[d, tail, dashed, "m_2"'] & & \\
A_1 \oplus A_2 \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, two heads, "p_1"'] & M \arrow[r, two heads, "k"'] \arrow[d, two heads, dashed, "\lambda_1"'] & C \arrow[r, dashed, "\binom{1}{1}^*(\delta_1\oplus\delta_2)"] \arrow[d, equal] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, dashed, "x_1"'] & B_1 \arrow[r, two heads, dashed, "y_1"'] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] & {}
\end{tikzcd} \quad . \tag{3.1.3}$$

删减部分态射, 拼接以下两图即可:

$$\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "m_2"] & A_2 \arrow[d, tail, dashed, "x_2"] \\
A_1 \arrow[r, tail, dashed, "m_1"] & M \arrow[r, two heads, dashed, "\lambda_2"] \arrow[dr, two heads, "k"] & B_2 \arrow[d, two heads, dashed, "y_2"] \\
 & & C \arrow[d, dashed, "\delta_2"'] \\
 & & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[d, tail, dashed, "m_2"'] & & \\
A_1 \arrow[r, tail, "m_1"'] \arrow[d, equal] & M \arrow[d, two heads, dashed, "\lambda_1"'] \arrow[dr, two heads, "k"] & & \\
A_1 \arrow[r, tail, dashed, "x_1"'] & B_1 \arrow[r, two heads, dashed, "y_1"'] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] & {}
\end{tikzcd} \quad . \tag{3.1.4}$$

最后一处等式解释如下:

$$(m_1)_*\delta_1 + (m_2)_*\delta_2 = (m_1p_1 + m_2p_2)_* \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^* (\delta_1 \oplus \delta_2) \tag{3.1.5}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^* m_*(\delta_1 \oplus \delta_2) = m_* \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^* (\delta_1 \oplus \delta_2) \quad = 0. \tag{3.1.6}$$

□

定理 3.1.2. (双 inflation 的拉回). 表述与证明略.

备注 3.1.3. 将双 deflation 的拉回与双 inflation 的推出写作下图:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, dashed] & \bullet \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, equal] & {} \\
\bullet \arrow[r, tail, dashed] \arrow[d, two heads] & \bullet \arrow[r, dashed, two heads, "l_1"] \arrow[d, dashed, two heads, "l_2"] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & \bullet \\
{}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, dashed, "r_1"] & \bullet \arrow[d, tail] \\
\bullet \arrow[r, tail, dashed, "r_2"] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d, dashed, two heads] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & \bullet \arrow[d, two heads] \\
\bullet \arrow[r, tail] & \bullet \arrow[r, two heads] & \bullet \arrow[r, dashed, "\varepsilon_2"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & {} \\
& & {}
\end{tikzcd}
. \tag{3.1.7}$$

此时, 左图与右图分别蕴含等式

$$l_1^*\delta_1 + l_2^*\delta_2 = 0, \quad (r_1)_*\varepsilon_1 + (r_2)_*\varepsilon_2 = 0. \tag{3.1.8}$$

以上定理存在一则实用的变体.

定理 3.1.4. (双 deflation 拉回的变体). 给定 conflation δ_1, ε 与 η 使得下图实线方块交换:

$$\begin{tikzcd}
& A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "m_2"] & A_2 \arrow[d, tail, dashed, "x_2"] \\
A_1 \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, two heads, "\lambda_2"] \arrow[d, two heads, "\lambda_1"] & B_2 \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, two heads, "y_2"] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, "x_1"] & B_1 \arrow[r, two heads, "y_1"] \arrow[d, dashed, "\eta"] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & {} \\
& {} & {}
\end{tikzcd}
. \tag{3.1.9}$$

此时存在虚线所示 δ_2 使得上图交换, 同时 $(y_1)^*\delta_2 = \eta$, $(y_2)^*\delta_1 = \varepsilon$, 以及 $(m_1)_*\delta_1 + (m_2)_*\delta_2 = 0$.

证明. 对 deflation 的复合 $y_1 \circ \lambda_1$ 使用 ET4', 得下图:

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, dashed, "e_2"] & A_2 \arrow[d, tail, "m_2"] \\
A_1 \oplus A_2 \arrow[r, tail, dashed, "{(s,m_2)}"] \arrow[d, dashed, two heads, "p_1"] & M \arrow[r, dashed, two heads, "y_1\lambda_1"] \arrow[d, two heads, "\lambda_1"] & C \arrow[r, dashed, "\kappa"] \arrow[d, equal] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, "x_1"] \arrow[d, dashed, "0"] & B_1 \arrow[r, two heads, "y_1"] \arrow[d, dashed, "\eta"] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] & {} \\
{} & {}
\end{tikzcd}
. \tag{3.1.10}$$

此处 $(x_1)^*\eta = (m_1)^*(\lambda_1)^*\eta = 0$. 由 $\lambda_1(s-m_1) = 0$, 故存在 $l : A_1 \to A_2$ 使得 $(s-m_1) = m_2 \circ l$. 下通过严格 ET4 (**命题** 2.3.10) 定义 δ_2:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "\binom{1}{-l}"] & A_1 \arrow[d, tail, "m_1"] & & \\
A_1 \oplus A_2 \arrow[r, tail, "{(s,m_2)}"] \arrow[d, "(l\ 1)"] & M \arrow[r, two heads, "y_1\lambda_1"] \arrow[d, "\lambda_2"] & C \arrow[r, dashed, "\kappa"] \arrow[d, equal] & {} \\
A_2 \arrow[r, tail, dashed, "x_2"] \arrow[d, dashed, "0"] & B_2 \arrow[r, two heads, dashed, "y_2"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & C \arrow[r, dashed, "\delta_2"] & {} \\
{} & {} & &
\end{tikzcd} . \tag{3.1.11}$$

使得左下方块交换的唯一态射是 $\lambda_2 \circ m_2 = x_2$. 由以上交换图, **式** (3.1.9) 中的所有方块交换. 下检验扩张元的等式:

1. $(y_1)^*\delta_2 = (y_1)^*(l\ 1)_*\kappa = (l\ 1)_*(y_1)^*\kappa = (l\ 1)_*(e_2)_*\eta = \eta$;
2. $(y_2)^*\delta_1 = (y_2)^*(p_1)_*\kappa = (p_1)_*(y_2)^*\kappa = (p_1)_*\binom{1}{-l}_*\varepsilon = \varepsilon$;
3. $(m_1)_*\delta_1 + (m_2)_*\delta_2 = (m_1)_*(p_1)_*\kappa + (m_2)_*(l\ 1)_*\kappa = (s, m_2)_*\kappa = 0$.

综上, δ_2 即为所求. □

在 Abel 范畴中, **定理** 3.1.1 与**命题** 2.3.10 是蛇引理的退化形式.

定理 3.1.5. 给定 Abel 范畴中可复合的态射 $f \circ g$, 则有六项正合序列

$$0 \to \ker g \to \ker(f \circ g) \to \ker f \xrightarrow{\delta} \operatorname{cok} g \to \operatorname{cok}(f \circ g) \to \operatorname{cok} f \to 0. \tag{3.1.12}$$

记 $\cap$ $(+)$ 为两个子对象的拉回 (拉回的一次导出极限). δ 的满-单分解是

$$\frac{\ker f}{\ker(f \circ g)} \twoheadrightarrow \frac{\ker f}{\operatorname{im} g \cap \ker f} \simeq \frac{\operatorname{im} g + \ker f}{\operatorname{im} g} \rightarrowtail \operatorname{cok} g. \tag{3.1.13}$$

证明. 见一般的同调代数教材. 基于蝾螈定理的证明见 [Wis]. 在正合范畴中的推广见 [RZ21]. □

例子 3.1.6. **命题** 2.3.10 对应如下 Abel 范畴中 ses 的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, "g"] & \text{“}\operatorname{cok} f\text{”} \arrow[r, dashed, "\delta_f"] \arrow[d, tail, dashed] & {} \\
\bullet \arrow[r, tail, "g \circ f"] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \text{“}\operatorname{cok} g \circ f\text{”} \arrow[r, dashed, "\delta_{g\circ f}"] \arrow[d, two heads, dashed] & {} \\
& \text{“}\operatorname{cok} g\text{”} \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_g"] & \text{“}\operatorname{cok} g\text{”} \arrow[d, dashed, "\delta_c"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.1.14}$$

例子 3.1.7. **定理** 3.1.1 对应如下 Abel 范畴中 ses 的交换图:

$$\begin{tikzcd}
& \text{“}\ker g\text{”} \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & \text{“}\ker g\text{”} \arrow[d, tail] & \\
\bullet \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "g"] & \text{“}\operatorname{cok} f\text{”} \arrow[r, dashed, "\delta_f"] \arrow[d, two heads] & {} \\
\bullet \arrow[r, tail, "g \circ f"] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\delta_g"] & \text{“}\operatorname{cok} g \circ f\text{”} \arrow[r, dashed, "\delta_{g\circ f}"] \arrow[d, dashed, "\delta_c"] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.1.15}$$

为了在外三角范畴中推广**定理** 1.3.8, 我们先熟悉几类同伦的推出拉回方块.

3.2 同伦的推出拉回方块

本节是**定理** 1.3.8 在外三角范畴中的推广.

定理 3.2.1. (同伦的推出拉回方块 I). 任给定扩张元的态射 $(\lambda,1):\delta\to\lambda_*\delta$, 存在 w 使得下图交换, 同时左侧是同伦的推出拉回方块:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, "\lambda"] & Y \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, dashed, "w"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
A \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & Z \arrow[r, dashed, "\lambda_*\delta"] & {}
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.2.1}
$$

特别地, 左侧同伦的推出拉回方块对应如下 conflation:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\binom{\lambda}{a}"] & A\oplus Y \arrow[r, two heads, "{(-x,w)}"] & B \arrow[r, dashed, "y^*\delta"] & {}
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.2.2}
$$

证明. 考虑 b 与 y 给出的双 deflation 的拉回 (**定理** 3.1.1), 得下图:

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "\binom{\lambda'}{a}"] & X \arrow[d, tail, "a"] & \\
A \arrow[r, tail, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & A\oplus Y \arrow[r, two heads, "(0\ 1)"] \arrow[d, two heads, "{(x,-w')}"] & Y \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[d, two heads, "b"] & {} \\
A \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] \arrow[d, dashed, "y^*\delta"] & Z \arrow[r, dashed, "\lambda_*\delta"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.2.3}
$$

依照**式** (3.1.8), 得

$$
0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_*(\lambda_*\delta)+\begin{pmatrix}\lambda'\\a\end{pmatrix}_*\delta=\begin{pmatrix}\lambda+\lambda'\\a\end{pmatrix}_*\delta. \tag{3.2.4}
$$

由长正合列 (**式** (2.2.11)), $(\lambda+\lambda')$ 通过 a 分解得到 l. 具体地,

$$
(\lambda+\lambda')=\quad X\xrightarrow{a}Y\xrightarrow{l}A. \tag{3.2.5}
$$

遂有同构的态射序列:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\binom{\lambda'}{a}"] \arrow[d, equal] & A\oplus Y \arrow[r, two heads, "{(x,-w')}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}-1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}"] & B \arrow[r, dashed, "y^*\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
X \arrow[r, "\binom{\lambda'}{a}"] & A\oplus Y \arrow[r, "{(-x,w)}"] & B &
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.2.6}
$$

因此, 上图下方的态射列也是 $y^*\delta$ 的实现. 这完成了证明. □

定理 3.2.2. (同伦的推出拉回方块 I'). 上一定理的对偶表述. 此处仅给出关键的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, dashed, "u"] & Z \arrow[r, dashed, "\mu^*\delta"] \arrow[d, "\mu"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {}
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.2.7}
$$

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, tail, "\binom{u}{-b}"] & B\oplus Z \arrow[r, two heads, "(y\ \mu)"] & C \arrow[r, dashed, "a_*\delta"] & {}
\end{tikzcd}
$$

定理 3.2.3. (同伦的推出拉回方块 II). 任给定任意态射 w 使得下图右侧方块交换.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & Y \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, "w"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
A \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & Z \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{3.2.8}$$

则存在态射 λ 使得上图交换, $\varepsilon = \lambda_* \delta$. 同时, 左侧是同伦的推出拉回方块, 对应以下 conflation:

$$X \xrightarrow{\binom{\lambda}{a}} A \oplus Y \xrightarrow{(-x, w)} B \overset{y^*\delta}{\dashrightarrow} . \tag{3.2.9}$$

证明. 依照 ET3' 任意取定 $\lambda' : X \to A$. 对扩张元的态射 $(\lambda', 1_Z)$, 依照**定理** 3.2.1 取 $w' : Y \to B$ 使得下图交换 (共计四个 2×2 方块):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, "\lambda'"] & Y \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, shift right, "w"'] \arrow[d, shift left, "w'"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
A \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & Z \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{3.2.10}$$

同时, 如下是同伦的推出拉回方块诱导的 conflation:

$$X \xrightarrow{\binom{\lambda'}{a}} A \oplus Y \xrightarrow{(-x\ w')} B \overset{y^*\delta}{\dashrightarrow} . \tag{3.2.11}$$

由 $y \circ (w - w') = 0$, 依照长正合列 (**式** (2.2.14)) 取 $(w - w') = x \circ l$. 考虑同构

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\binom{\lambda'}{a}"] \arrow[d, equal] & A \oplus Y \arrow[r, two heads, "(-x\ w')"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] & B \arrow[r, dashed, "y^*\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
X \arrow[r, "\binom{\lambda}{a}"] & A \oplus Y \arrow[r, "(-x\ w)"] & B &
\end{tikzcd} , \tag{3.2.12}$$

其下行也是 $y^*\delta$ 的实现. 这完成了证明. □

定理 3.2.4. (同伦的推出拉回方块 II'). 上一定理的对偶表述. 此处仅给出关键的交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "b"] \arrow[d, "u"] & Z \arrow[r, dashed, "\mu^*\delta"] \arrow[d, dashed, "\mu"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "x"] & B \arrow[r, two heads, "y"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{3.2.13}$$

$$Y \xrightarrow{\binom{u}{-b}} B \oplus Z \xrightarrow{(y\ \mu)} C \overset{a_*\delta}{\dashrightarrow}$$

定理 3.2.5. (同伦的推出拉回方块 III). ET4 (ET4') 公理中的方块 $\star$ 是同伦的推出拉回方块:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta_{r1}"] \arrow[d, tail, "r"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "p"] & W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, two heads, "\beta"] & M \arrow[r, dashed, "\delta_{r2}"] \arrow[d, two heads, "s"] & {} \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_{c1}"] & K \arrow[d, dashed, "\delta_{c2}"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.2.14}$$

$\star$ 诱导的 conflation 如**定理** 3.2.2 所示.

证明. 将证明分作两步.

引理 3.2.6. $\star$ 是弱推出方块.

证明. 任意取定等式 $n\circ g = m\circ\alpha$, 如下图所示:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail, "\alpha"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta_{r1}"] \arrow[d, tail, "r"] \arrow[ddr, dashed, bend left, "n"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "p"] & W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, two heads, "\beta"] \arrow[drr, dashed, "m"] & M \arrow[r, dashed, "\delta_{r2}"] \arrow[d, two heads, "s"] & {} \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_{c1}"] & K \arrow[d, dashed, "\delta_{c2}"] & T \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}. \tag{3.2.15}$$

注意到 $0=(m\alpha)_*\delta_{c1}=n_*g_*\delta_{c1}=n_*\delta_{c2}$, 故 n 通过 r 分解. 记 $l\circ r=n$. 由于

$$(m-l\circ q)\circ\alpha = m\circ\alpha - l\circ q\circ\alpha = n\circ g - l\circ r\circ g = 0, \tag{3.2.16}$$

从而 $(m-l\circ q)$ 经 β 分解, 记 $(m-l\circ q)=\lambda\circ\beta$. 上述态射的来源与去向如下:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail, "\alpha"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta_{r1}"] \arrow[d, tail, "r"] \arrow[ddr, dashed, bend left, "n"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "p"] & W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, two heads, "\beta"] \arrow[drr, dashed, "m"] & M \arrow[r, dashed, "\delta_{r2}"] \arrow[d, two heads, "s"] \arrow[dr, dashed, "l"] & {} \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_{c1}"] & K \arrow[d, dashed, "\delta_{c2}"] \arrow[r, dashed, bend right, "\lambda"'] & T \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}. \tag{3.2.17}$$

今断言弱推出问题的解是 $l-\lambda\circ s$. 验证得

1. $(l-\lambda\circ s)\circ r = l\circ r = n$;
2. $(l-\lambda\circ s)\circ q = l\circ q - \lambda\circ\beta = m$.

□

依照**定理** 3.2.4, 存在 $r': Z\to M$ 使得 (r', g, α, q) 构成同伦推出拉回方块. 记态射 l 与 m 为两个弱推出方块相互分解所得, 如下图所示:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail, "\alpha"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta_{r1}"] \arrow[d, tail, "r"] \arrow[ddr, dashed, bend left, "r'"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "p"] & W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, two heads, "\beta"] \arrow[drr, dashed, two heads, "q"'] & M \arrow[r, dashed, "\delta_{r2}"] \arrow[d, two heads, "s"] \arrow[dr, dashed, shift left, "l"] & {} \\
& K \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_{c1}"] & K \arrow[d, dashed, "\delta_{c2}"] & M \arrow[ul, dashed, shift left, "m"] \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}. \tag{3.2.18}$$

显然 $(1_Z, m\circ l, 1_K)$ 与 $(1_W, 1_{Z\oplus W}, l\circ m)$ 是都是 conflation 的自同态. 依照**定理** 2.3.7, l 与 m 都是同构. 由 conflation 对同构封闭 (**命题** 2.1.6), $\star$ 也是同伦的推出拉回方块. □

定理 3.2.7. (同伦的推出拉回方块 IV). 双 deflation 拉回所得的方块 $\star$ 是同伦的推出拉回方块

$$\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "m_2"] & A_2 \arrow[d, tail, "x_2"] & \\
A_1 \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, two heads, "\lambda_2"] \arrow[d, two heads, "\lambda_1"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & B_2 \arrow[r, dashed, "(y_2)^*\delta_1"] \arrow[d, two heads, "y_2"] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, "x_1"] & B_1 \arrow[r, two heads, "y_1"] \arrow[d, dashed, "(y_1)^*\delta_2"] & C \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.2.19}$$

如定理 3.2.2 所示, 方块 $\star$ 诱导了 conflation

$$M \xrightarrow{\binom{\lambda_1}{-\lambda_2}} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{(y_1, y_2')} C \overset{m_1^*(\delta_1)}{\dashrightarrow} . \tag{3.2.20}$$

证明. 类似定理 3.2.5 的证明, $\star$ 是弱拉回方块. 同时存在 $\lambda_1' : M \to B_1$ 使得 $(y_2)^*\delta_1$ 与 δ_1 满足定理 3.2.2 的条件. 由于弱拉回方块与同伦的推出拉回方块相互分解, 以及定理 2.3.7, $\star$ 同构于同伦的推出拉回方块. 由 conflation 对同构封闭 (命题 2.1.6), $\star$ 也是同伦的推出拉回方块. □

定理 3.2.8. (同伦推出拉回方块 IV'). 双 inflation 推出所得的方块 $\star$ 是同伦的推出拉回方块, 具体表述略. 此处仅给出关键的交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "x_1"] \arrow[d, tail, "x_2"] & B_1 \arrow[r, two heads, "y_1"] \arrow[d, tail, "m_2"] & C_1 \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, equal] & {} \\
B_2 \arrow[r, tail, "m_1"] \arrow[d, two heads, "y_2"] & M \arrow[r, two heads, "\mu_1"] \arrow[d, two heads, "\mu_2"] & C_1 \arrow[r, dashed, "(x_2)_*\delta_1"] & {} \\
C_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & C_2 \arrow[d, dashed, "(x_1)_*\delta_2"] & & \\
{} & {} & &
\end{tikzcd} . \tag{3.2.21}$$

$$A \xrightarrow{\binom{x_1}{x_2}} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{(m_2\ -m_1)} M \overset{(\mu_1)^*\delta_1}{\dashrightarrow}$$

以下强化部分外三角范畴的公理.

命题 3.2.9. (ET2-2 的强化表述). 假定 $(\alpha, \gamma) : \delta \to \eta$ 是扩张元的态射, 则存在分解 $\delta \xrightarrow{(\alpha,1)} \varepsilon \xrightarrow{(1,\gamma)} \eta$, 且 $\star$ 是同伦的推出拉回方块:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\beta_1"] & \bullet \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
\bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\beta_2"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & \bullet \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, "\gamma"] & {} \\
\bullet \arrow[r, tail] & \bullet \arrow[r, two heads] & \bullet \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] & {}
\end{tikzcd} . \tag{3.2.22}$$

证明. 取中间行为 $\eta = \alpha_*\delta = \gamma^*\varepsilon$ 的实现. 依定理 3.2.1 与定理 3.2.2 构造两处 β_1 与 β_2 即可. □

命题 3.2.10. (ET3 的强化表述). 假定态射 α, β 与两处 inflation 作成交换方块. 存在分解 $\beta = \beta_2 \circ \beta_1$ 与态射 γ, 使得式 (3.2.22) 是扩张元的态射, 且 $\star$ 是同伦的推出拉回方块.

证明. 取 $\eta = \alpha_*\delta$, 依照定理 3.2.1 构造 β_1 与 β_2. 由于同伦的推出拉回方块是弱推出, 故 β 经 β_1 分解得 β_2. 最后使用定理 3.2.4 构造 γ 即可. □

命题 3.2.11. (ET3' 的强化表述). 这是上一定理的对偶表述, 最终效果如式 (3.2.22) 所示.

3.3 弱幂等完备

依照 [Büh10] 的第七章, 正合范畴中许多 “理应成立的简单结论” 依赖弱幂等完备性. 例如, 若所有可裂单 (可裂满) 都是容许单态射 (容许满态射), 则正合范畴是弱幂等完备的. 以下给出弱幂等完备在一般加法范畴中的定义.

定义 3.3.1. (弱幂等完备). 称加法范畴 $\mathcal{A}$ 是**弱幂等完备**的, 若其满足以下等价条件:

1. 任意可裂满态射 $p : X \to C$ 存在核;
2. 任意可裂单态射 $i : K \to X$ 存在余核.

证明. 以下仅证明 $(1 \to 2)$, 另一方向在反范畴中得证. 对任意可裂单态射 $i : K \to X$, 取可裂满态射 $q : X \to K$ 使得 $q \circ i = 1_K$. 记 q 的核是 $j : C \to X$, 则 $(1_X - i \circ q)$ 通过 j 分解:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, dashed, "p"'] \arrow[d, "(1_X - i\circ q)"] & \\
C \arrow[r, "j"] & X \arrow[r, shift left, "q"] & K \arrow[l, shift left, dashed, "i"]
\end{tikzcd} . \tag{3.3.1}$$

容易验证 $j = j \circ p \circ j$ 与 $j \circ p \circ i = 0$. 消除单态射 j 得 $p \circ j = 1_C$ 与 $p \circ i = 0$. 结合 $q \circ i = 1_K$ 与 $q \circ j = 0$, 得同构 $\binom{p}{q} : X \leftrightarrows C \oplus K : (j\ i)$. □

弱幂等完备的又一等价定义基于形变收缩.

定义 3.3.2. (形变收缩). 称对象 X 是 Y 的形变收缩, 若存在可裂单态射 $X \to Y$.

命题 3.3.3. 加法范畴 $\mathcal{A}$ 是弱幂等完备的, 当且仅当任意形变收缩是直和项.

证明. 容易. □

备注 3.3.4. 预三角范畴自动是弱幂等完备的 (推论 1.2.6).

例子 3.3.5. (幂等完备, 也称 Karoubi 性质). 称加法范畴是**幂等完备**的, 若所有幂等态射有核与余核. 这一定义比弱幂等完备强, 例如以下两则例子.

- 记 $\mathcal{A}$ 是有限维实线性空间范畴, 加法全子范畴 $\mathcal{B}$ 包含一切维数为偶数 (含 0) 的线性空间. 显然 $\mathcal{B}$ 是弱幂等完备的, 但不幂等完备.
- 记 $\mathbf{Free}_R$ 是自由右 R-模构成的范畴. 今视之 Mod_R 的全子范畴, 则容易验证
  - 包含 $\mathbf{Free}_R$ 的最小 (范畴等价意义下) 的弱幂等完备范畴是所有稳定投射模构成的范畴;
  - 包含 $\mathbf{Free}_R$ 的最小 (范畴等价意义下) 的幂等完备范畴是所有投射模构成的范畴.

三角范畴一般不是幂等完备的, 除非承认某些在特殊条件 (例如三角范畴有可数积或可数余积, 再如 [LC07]). 三角范畴的幂等完备化的一般理论见 [BS01], 正合范畴的幂等完备化见 [Büh10] 的第六章.

此小节中, 我们仅讨论外三角范畴的弱幂等完备性, 暂不理会幂等完备性. 以下引理 3.3.6, 引理 3.3.7, 推论 3.3.8 与推论 3.3.9 无需弱幂等完备性, 推论 3.3.9 指出弱幂等完备的关键作用是 “消除赘余的零态射”.

引理 3.3.6. 外三角范畴中, 若 $q \circ p$ 是 inflation, q 是 deflation, 则 p 是 inflation.

证明. 证明同引理 1.3.5, 将 “Noether 同构” 替换作 “ET4’ 公理” 即可. **定理** 3.2.5 表明 □ 是同伦的推出拉回方块, 故 s 存在. □

引理 3.3.7. 外三角范畴中, 若 $j\circ i$ 是 deflation, i 是 inflation, 则 j 是 deflation.

证明. 上一引理的对偶. □

以下是两则常用的推论.

推论 3.3.8. 若 i 是 inflation, 则 $\binom{i}{f}$ 也是 inflation. 若 p 是 deflation, 则 $(p\ f)$ 也是 deflation.

证明. 由 $(1\,0)\circ\binom{i}{f}=i$ 是 inflation, $(1\,0)$ 是 deflation, 引理 3.3.6 表明 $\binom{i}{f}$ 是 inflation. 后一论断对偶. □

推论 3.3.9. 若 $X\xrightarrow{p}Y\xrightarrow{q}Z$ 是 inflation, 则 $\binom{p}{0}:Y\oplus Z$ 亦然.

证明. 推论 3.3.8 表明 $\binom{p}{-q\circ p}$ 是 inflation. 左复合同构 $\begin{pmatrix}1&0\\q&1\end{pmatrix}$, 得 $\binom{p}{0}$. **命题** 2.1.6 表明 $\binom{p}{0}$ 是 inflation. □

以下给出外三角范畴弱幂等完备的若干等价定义.

定理 3.3.10. 称外三角范畴弱幂等完备, 若满足如下等价定义.

1. 若 $i:A\to C$ 可裂单, 则 i 有余核 B, 且 i 分解作 $A\xrightarrow{\binom{1}{0}}A\oplus B\simeq C$;
2. 若 $\binom{i}{0}$ 是 inflation, 则 i 也是 inflation;
3. 若 $\begin{pmatrix}i&0\\0&j\end{pmatrix}$ 是 inflation, 则 i 与 j 也都是 inflation;
4. 若 $f\circ i$ 是 inflation, 则 i 也是 inflation;
5. inflation 的形变收缩仍是 inflation (态射的形变收缩即作为态射范畴中对象的形变收缩).

我们略去五个对偶的定义. 定义 1 与 1’ 的等价性见**定义** 3.3.1.

证明. 我们先证明 $(2\leftrightarrow 4)$.

1. $(2\leftarrow 4)$. 若 $\binom{i}{0}$ 是 inflation, 则 $i=(1\,0)\circ\binom{i}{0}$ 是 inflation.
2. $(2\to 4)$. 若 $f\circ i$ 是 inflation, 推论 3.3.9 表明 $\binom{i}{0}$ 也是 inflation. 由假设, i 是 inflation.

继而证明 $(1\leftrightarrow 4)$.

1. $(1\to 4)$. 只需证明 $(1\to 2)$. 若 $\binom{i}{0}$ 是 inflation, 取相应的 conflation δ. 依照长正合列 (**式** (2.2.11)) 取分解所得的态射 $\binom{a}{b}$ 如下:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\binom{i}{0}"] \arrow[dr, bend right, "0"'] & Y\oplus Z \arrow[r, two heads, "(s\ t)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}s&0\\0&1\end{pmatrix}"'] & W \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[dl, dashed, "\binom{a}{b}"] & {} \\
& W\oplus Z & &
\end{tikzcd}. \tag{3.3.2}$$

注意到 $b \circ t = 1_Z$. 由题设, b 是以 Z 为像的可裂满, 不妨将 deflation 写作 $\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix} : Y \oplus Z \twoheadrightarrow Y \oplus Q$. 依照**定理** 3.1.4 构造交换图

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "\binom{0}{1}"] & Z \arrow[d, tail, "\binom{0}{1}"] \\ X \arrow[r, tail, "\binom{i}{0}"] \arrow[d, equal] & Y \oplus Z \arrow[r, two heads, "\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, two heads, "(1{,}0)"] & Q \oplus Z \arrow[d, two heads, "(1{,}0)"] \\ X \arrow[r, tail, dashed] & Z \arrow[r, two heads, dashed] & Q \end{tikzcd} . \tag{3.3.3}$$

左下方的 inflation 是 $i = (1\ 0) \circ \binom{i}{0}$.

2. $(4 \to 1)$. 若 $f \circ i$ 恒等, 则 i 是 inflation. 因此所有可裂单都是 inflation.

再证明 $(2 \leftrightarrow 3)$. $(3 \to 2)$. 令 j 是零态射即可. $(2 \to 3)$. 若 $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ 是 inflation, 则 inflation 的复合 $\binom{i}{0} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \circ \binom{1}{0}$ 也是 inflation.
最后证明 $(3 \leftrightarrow 5)$. $(5 \to 3)$. 显然. $(3 \to 5)$. 以上证明了 $1, 2, 3$ 与 4 彼此等价. 往证 1 与 4 共同推导出 5. 若 f' 是 inflation f 的形变收缩, 则存在可裂单 i 与 j 使得 $fi = jf'$. 由 1, i 是 inflation, 从而 $fi = jf'$ 是 inflation. 由 4, 以及 j 是 inflation, 得 f' 是 inflation. □

3.4 九引理

假定外三角范畴弱幂等完备, 本小节将证明九引理 (3×3 引理) 在外三角范畴中类似物.

定理 3.4.1. (九引理). 假定外三角范畴弱幂等完备. 给定以下四条 conflation 的交换图

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\ B_1 \arrow[r, tail, "f_B"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\ & C_2 \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & \\ & {} & {} & \end{tikzcd} . \tag{3.4.1}$$

存在 δ_C 与 ε_1 使得下图交换, 且所有相邻行与列都是实现间的态射:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] \arrow[d, tail, "i_1"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\ B_1 \arrow[r, tail, "f_B"] \arrow[d, two heads, "p_1"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\ C_1 \arrow[r, tail, "f_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\ {} & {} & {} & \end{tikzcd} . \tag{3.4.2}$$

证明. 由 ET4, 取 E, x 与 y 如下:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] \arrow[d, equal] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, dashed, "y"] & {} \\
A_1 \arrow[r, tail, "i_2 f_A"'] & B_2 \arrow[r, two heads, dashed, "x"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & E \arrow[r, dashed, "\eta"] \arrow[d, two heads, dashed, "z"] & {} \\
& C_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_2 \arrow[d, dashed, "(g_A)_*\varepsilon_2"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.4.3}$$

方块 (g_A, y, i_2, x) 是同伦的推出拉回方块, 特别地, 这是弱推出. 此时存在 φ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[d, tail, dashed, "y"] \arrow[ddr, tail, bend left, "i_3"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \\
B_2 \arrow[r, two heads, dashed, "x"] \arrow[drr, two heads, bend right, "g_B"'] \arrow[dr, phantom, "\triangle"] & E \arrow[dr, two heads, dashed, "\varphi"] & \\
& & B_3
\end{tikzcd} . \tag{3.4.4}$$

由**定理** 3.3.10 第四条的对偶, φ 是 deflation. 对 $\triangle$ 与 $\square$ 分别使用 ET4' 与**定理** 3.1.4, 得下图:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, dashed, "i_1"] & A_1 \arrow[d, tail, "i_2 f_A"] & & \\
B_1 \arrow[r, tail, "f_B"] \arrow[d, two heads, dashed, "p_1"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "x"] \arrow[dr, phantom, "\triangle"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, equal] & {} \\
C_1 \arrow[r, tail, "\psi"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & E \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\eta"] & B_3 \arrow[r, dashed, "(p_1)_*\delta_B"] & {} \\
{} & {} & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A_3 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "y"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & A_3 \arrow[d, tail, "i_3"] & \\
C_1 \arrow[r, tail, "\psi"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "z"] & B_3 \arrow[r, dashed, "(p_1)_*\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
C_1 \arrow[r, tail, dashed, "f_C"] & C_2 \arrow[r, two heads, dashed, "g_C"] \arrow[d, dashed, "(g_A)_*\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.4.5}$$

今断言式 (3.4.5) 即为所求. 显然式 (3.4.2) 中四个方块交换, 下检验扩张元的等式:

1. $(f_A)_*\varepsilon_1 = (f_A)_*\psi^*\eta = \psi^*(f_A)_*\eta = \psi^* z^*\varepsilon_2 = (z \circ \psi)^*\varepsilon_2 = (f_C)^*\varepsilon_2$;
2. 式 (3.4.5) 直接给出 $(g_A)_*\varepsilon_2 = (g_C)^*\varepsilon_3$;
3. $(i_1)_*\delta_A = (i_1)_* y^*\eta = y^*(i_1)_*\eta = y^*\varphi^*\delta_B = (\varphi \circ y)^*\delta_B = (i_3)^*\delta_B$;
4. 式 (3.4.5) 直接给出 $(p_1)_*\delta_B = (p_3)^*\delta_C$.

□

九引理即 conflation 的 “四推六”, 以下 “五推六” 变体无需弱幂等完备性.

定理 3.4.2. 给定以下五条 conflation 的交换图, 使得 $(g_A)_*\varepsilon_2 = (g_C)^*\varepsilon_3$:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_1 \arrow[r, tail, "f_B"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
C_1 \arrow[r, tail, "f_C"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{3.4.6}$$

存在 ε_1 使得下图交换, 且所有相邻行与列都是实现间的态射:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "f_A"] \arrow[d, tail, "i_1"] & A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_1 \arrow[r, tail, "f_B"] \arrow[d, two heads, "p_1"] & B_2 \arrow[r, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
C_1 \arrow[r, tail, "f_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_1"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{3.4.7}$$

证明. 将 $(g_A, g_C) : \varepsilon_2 \to \varepsilon_3$ 拆解如下:

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, two heads, "g_A"] \arrow[d, tail, "i_2"] & A_3 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "y"] & A_3 \arrow[r, dashed, "\delta_A"] \arrow[d, tail, "i_3"] & {} \\
B_2 \arrow[r, two heads, "x"] \arrow[rr, bend left, two heads, "g_B"] \arrow[d, two heads, "p_2"] & E \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "z"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\delta_B"] \arrow[d, two heads, "p_3"] & {} \\
C_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & C_2 \arrow[r, two heads, "g_C"] \arrow[d, dashed] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_C"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_3"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{3.4.8}$$

由 ET4 与**定理** 3.2.5, 左上方块是同伦的推出拉回. 由**定理** 3.1.1 与**定理** 3.2.7, 右下方块是同伦的推出拉回. 由 $(g_A)_*\varepsilon_2 = (g_C)^*\varepsilon_3$, 不妨假定两处方块交于 E. 特别地, φ 是 deflation.

往后证明同**定理** 3.4.1. 需要注意, **式** (3.4.8) 蕴含了**式** (3.4.5) 的右图此处仅需通过**命题** 2.3.10 构造**式** (3.4.5) 的左图. 最后验证扩张元的等式即可. □

4 特殊的外三角范畴

4.1 正合范畴是外三角范畴

正合范畴定义见**定义** 1.1.1, 本节假定 Ext^1 的取值是集合 (**例** 1.1.5).

例子 4.1.1. (正合范畴视作外三角范畴). 给定正合范畴 $(\mathcal{C},\mathcal{E})$, 我们定义基本资料 (**定义** 2.1.1).

1. $\mathbb{E} := \mathrm{Ext}^1 : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$;
2. 若 ses $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ 对应同构类 $\delta \in \mathbb{E}(C,A)$, 则记 $A \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} C \in \mathfrak{s}(\delta)$.

下证明 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 是外三角范畴.

引理 4.1.2. 沿用**例** 4.1.1 的表述. 实现之间的同态 $(\alpha,\beta,\gamma) : \delta \to \varepsilon$ 满足 $\alpha_*\delta = \gamma^*\varepsilon$.

证明. 这是 Baer 和的基本性质 (或 Yoneda 群的定义) 的定义. 细节见 [Mit65] 的章节 VII. □

命题 4.1.3. **例** 4.1.1 定义的 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 满足 ET1.

证明. 由**定理** 1.1.8, $\mathbb{E} := \mathrm{Ext}^1$ 是加法双函子. □

命题 4.1.4. **例** 4.1.1 定义的 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 满足 ET2.

证明. 我们说明 $\mathfrak{s}$ 是一个加法实现. 检验 ET2-1 如下.

1. 若 δ 对应 $X \rightarrowtail F \twoheadrightarrow Z$, 则一切式 (2.1.2) 中所示的同构的态射链也是 δ 的实现. 反之亦然.
2. 正合范畴的 ses 包含所有可裂 ses, 且可裂 ses 对应 Ext^1 的零元. 反之亦然.
3. 正合范畴的 ses 对直和封闭. $\mathfrak{s}$ 与直和交换.

继而检验 ET2-2. 给定 $f_*\delta = g^*\varepsilon$. 下求解提升问题:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "g"] & {} \\
X \arrow[r, tail, "j"] & Y \arrow[r, two heads, "q"] & Z \arrow[r, dashed, "\varepsilon"] & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "jf"] \arrow[d, tail, "i"'] & Y \arrow[d, two heads, "q"] \\
B \arrow[r, "gp"'] \arrow[ur, dashed] & Z
\end{tikzcd}. \tag{4.1.1}$$

依照**定理** 2.4.1 中构造, 得正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
(C,X) \arrow[r, tail, "p^*"] \arrow[d, "j_*"] & (B,X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "j_*"] & (A,X) \arrow[r, "\delta^\sharp"] \arrow[d, "j_*"] & \mathrm{Ext}^1(C,X) \arrow[d, "j_*"] \\
(C,Y) \arrow[r, tail, "p^*"] \arrow[d, "q_*"] & (B,Y) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "q_*"] & (A,Y) \arrow[r, "\delta^\sharp"] \arrow[d, "q_*"] & \mathrm{Ext}^1(C,Y) \arrow[d, "q_*"] \\
(C,Z) \arrow[r, tail, "p^*"] \arrow[d, "\varepsilon_\sharp"] & (B,Z) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\varepsilon_\sharp"] & (A,Z) \arrow[r, "\delta^\sharp"] \arrow[d, "\varepsilon_\sharp"] & \mathrm{Ext}^1(C,Z) \\
\mathrm{Ext}^1(C,X) \arrow[r, "p^*"] & \mathrm{Ext}^1(B,X) \arrow[r, "i^*"] & \mathrm{Ext}^1(A,X) &
\end{tikzcd}. \tag{4.1.2}$$

容易计算 $(0;gp;jf;0)$ 的微分为 0, 从而存在原像 $(a;b;c)$. 注意到 $a \in \ker \varepsilon_\sharp = \operatorname{im} q_*$, 类似的计算表明 $b \in \operatorname{im} i^*$. 此时存在 $(s;t) \in (C,Y) \oplus (B,X)$ 使得

$$d(s;t) + (a;b;c) = (0;b';0). \tag{4.1.3}$$

上式右侧的微分为 $d(a;b;c) = (0;gp;jf;0), b' : B \to Y$ 即为所求. □

命题 4.1.5. 例 4.1.1 定义的 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 满足 ET3 (ET3').

证明. 式 (2.1.6) 虚线处态射由核 (余核) 的泛性质给出. 扩张元态射的等式由引理 4.1.2 检验. □

命题 4.1.6. 例 4.1.1 定义的 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 满足 ET4 (ET4').

证明. 由定理 1.1.12 (及其对偶表述) 得 conflation 的交换图.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, tail, "j"] & Z \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, tail, dashed, "j'"] & {} \\
X \arrow[r, tail, dashed, "j \circ i"] & A \arrow[r, two heads, dashed, "r"] \arrow[d, two heads, "q"] & W \arrow[r, dashed, "\delta'"] \arrow[d, two heads, dashed, "q'"] & {} \\
& B \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & B \arrow[d, dashed, "\varepsilon'"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd} . \tag{4.1.4}$$

特别地, 右上角同伦的推出拉回方块对应 $i_*\delta' = (q')^*\varepsilon$. 扩张元态射的等式由引理 4.1.2 检验. □

定理 4.1.7. 沿用例 4.1.1 的表述. $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是外三角范畴.

证明. 由上述命题. □

4.2 三角范畴是外三角范畴

三角范畴的定义见**定义** 1.2.1.

例子 4.2.1. (三角范畴视作外三角范畴). 给定三角范畴 $(\mathcal{C}, \Sigma, \mathcal{E})$, 我们定义基本资料 (**定义** 2.1.1).

1. $\mathbb{E} := (-, \Sigma(?))_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$;

2. 给定好三角 $\triangle : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$, 记 $\triangle \in \mathfrak{s}(h)$.

定理 4.2.2. 例 4.2.1 中定义的 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是外三角范畴.

证明. (ET1). 显然 $\mathbb{E}$ 是双函子. (ET2-1). 依照 TR1-3, $\mathfrak{s}$ 是态射到同构类的对应. 试回顾两则三角范畴的基本事实:

1. 好三角包含所有可裂好三角. $X \to Y \to Z \xrightarrow{s} \Sigma X$ 的前三项是可裂短正合列, 当且仅当 $s = 0$.

2. 熟知好三角对直和封闭. 由 TR1-3, 态射直和嵌入的好三角同构于好三角的直和. 故 $\mathfrak{s}$ 与直和交换.

□

参考文献

[BK] Theo Bühler and Matthias Kunzer. Some elementary considerations in exact categories. URL: https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/excounter.pdf.

[BS01] Paul Balmer and Marco Schlichting. Idempotent Completion of Triangulated Categories. *Journal of Algebra*, 236(2):819–834, February 2001. doi:10.1006/jabr.2000.8529.

[Büh10] Theo Bühler. Exact categories. *Expositiones Mathematicae*, 28(1):1–69, January 2010. doi:10.1016/j.exmath.2009.04.004.

[Che] Xiao-Wu Chen. The Extension-lifting Lemma via Two-term Complexes. URL: http://home.ustc.edu.cn/~xwchen/USTC%20Algebra%20Notes%20Archiv/The%20Extension-Lifting%20lemma%20via%20two-term%20complexes.pdf.

[Kel82] G. M. Kelly. *Basic Concepts of Enriched Category Theory*. Number 64 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 1982. URL: http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html.

[Kel96] Bernhard Keller. Derived Categories and Their Uses. In *Handbook of Algebra*, volume 1, pages 671–701. Elsevier, 1996. doi:10.1016/S1570-7954(96)80023-4.

[LC07] Jue Le and Xiao-Wu Chen. Karoubianness of a triangulated category. *Journal of Algebra*, 310(1):452–457, April 2007. doi:10.1016/j.jalgebra.2006.11.027.

[May] John P. May. The axioms for triangulated categories. URL: https://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/Triangulate.pdf.

[Mit65] Barry Mitchell. *Theory of Categories*. Academic Press, 1965. URL: https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/mitchell.pdf.

[Mur07] Daniel Murfet. Triangulated categories part i, April 2007. URL: http://therisingsea.org/notes/TriangulatedCategories.pdf.

[Nee91] Amnon Neeman. Some new axioms for triangulated categories. *Journal of Algebra*, 139(1):221–255, May 1991. doi:10.1016/0021-8693(91)90292-G.

[Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated Categories*. Number no. 148 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, 2001. URL: https://homepage.mi-ras.ru/~akuznet/homalg/Neeman%20Triangulated%20categories.pdf.

[NP19] Hiroyuki Nakaoka and Yann Palu. Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, LX(2):117–193, 2019. arXiv title "Mutation via Hovey twin cotorsion pairs and model structures in extriangulated categories". URL: https://hal.science/hal-02136919.

[RZ21] Shi Rong and Pu Zhang. Strong version of Snake Lemma in exact categories. *Homology, Homotopy and Applications*, 23(2):151–163, 2021. doi:10.4310/HHA.2021.v23.n2.a9.

[Ver96] Jean-Louis Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. Number 239 in Astérisque. Société mathématique de France, 1996. URL: https://www.numdam.org/item/AST_1996__239__R1_0/.

[Wis] Jonathan Wise. A A Non-elementary Proof of the Snake Lemma. URL: https://ncatlab.org/nlab/files/Wise-SnakeLemma.pdf.

[Yon60] Nobuo Yoneda. On Ext and exact sequences. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 8:507–576, 1960. URL: https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=225854.