

Gorenstein 同调理论

张陈成

2025 年秋

最后更新于 2025 年 12 月 6 日.

目录

1	阅读笔记: Proper classes and Gorensteinness in extriangulated categories	2
1.1	带真类的外三角范畴	2
1.2	ξ -同调代数	4
1.3	$\mathcal{GP}(\xi)$ 的结构	7
1.4	$\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数	10
1.5	Hovey 四元组	13
2	阅读笔记: Complete cohomology for extriangulated categories	14
2.1	ξ -上投射分解	14
2.2	投射维数与生成子范畴	17
2.3	完全上同调	18

1 阅读笔记: Proper classes and Gorensteinness in extriangulated categories

文章见 [HZZ20].

1.1 带真类的外三角范畴

本章节介绍真类 ξ 的定义, 并使用图表定理简单证明了 定理 1.1.5.

记号 1.1.1. 记 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 为外三角范畴.

定义 1.1.2 (真类). 称 ξ 是 \mathbb{E} -三角组成的真类, 若满足以下条件:

P1 ξ 对双积与同构封闭, 且包含所有可裂的 \mathbb{E} -三角.

P2 ξ 对基变换和余积变换封闭. 对下图所示的 \mathbb{E} -三角射, 若中间行属于 ξ , 则上下行也属于 ξ :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \dashrightarrow^{\gamma^* \delta} \\
 \parallel & & \downarrow \gamma' & & \downarrow \gamma \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \dashrightarrow^{\delta} \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' & & \parallel \\
 X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' & \xrightarrow{g''} & Z \dashrightarrow^{\alpha_* \delta}
 \end{array} \quad (1.1.1)$$

P3 ξ 饱和: 给定 δ_1 与 δ_2 实现的“拉回”

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\
 & & \downarrow \delta'_2 & & \downarrow \delta_2
 \end{array} \quad (1.1.2)$$

若 δ_2 与 δ'_1 的实现属于 ξ , 则 δ_1 的实现也属于 ξ .

备注 1.1.3. 定义 1.1.2 中的“真类 (proper class)”无关集合论中的“真类”概念.

记号 1.1.4. 方便起见, 将 ξ 中三角标注作橘色 (■). 引入 ξ -三角, ξ -扩张元, ξ -单射, ξ -满射等名称.

定理 1.1.5. 假定外三角的类 ξ 对同构封闭, 则 ξ 是真类当且仅当 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi)$ 是外三角范畴. 此处

1. $\mathbb{E}_\xi(Z, X)$ 是 $\mathbb{E}(Z, X)$ 中的 ξ -扩张元;
2. \mathfrak{s}_ξ 即 \mathfrak{s} 在 \mathbb{E}_ξ 上的限制.

证明. 方便起见, 将外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 与带特定结构的加法范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s})$ 分别称作大范畴与小范畴.

(\leftarrow). 假定小范畴是外三角范畴, 下证 ξ 是真类. P1 与 P2 由 \mathbb{E}_ξ 的加法双函子性保证. P3 证明如下. 假定式 (1.1.2) 中 δ'_1, δ_2 是 ξ -扩张元, 由 P2 知 δ'_2 也是 ξ -扩张元. 由图表定理, δ_1 可在小范畴中直接构造.

(\rightarrow). ET1, ET2, ET3, ET3^{op} 显然成立. 只需验证 ET4 与 ET4^{op}.

1. (ET4 的验证). 给定 ξ -单射 s 与 f 的复合, 在大范畴中作同伦的 ET4 图

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \dashrightarrow^{\delta} \\
 \parallel & & \downarrow s & \square & \downarrow m \\
 X & \dashrightarrow^{sf} & A & \dashrightarrow^p & B \dashrightarrow^{\varepsilon} \\
 & & \downarrow t & & \downarrow n \\
 & & C & \xlongequal{\quad} & C \\
 & & \downarrow \eta & & \downarrow \kappa
 \end{array} . \quad (1.1.3)$$

直接地, $\kappa = g_*\eta$ 与 $n^*\eta = f_*\varepsilon$ 都是 ξ -扩张元. 在大范畴中作“拉回”:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & \xlongequal{\quad} & Y \\
 & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} g \\ s \end{pmatrix} \\
 X & \dashrightarrow^{(f)_0} & Y \oplus A & \xrightarrow{g \oplus 1_A} & Z \oplus A \dashrightarrow^{\delta \oplus 0} \\
 \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow (-m, p) \\
 X & \xrightarrow{sf} & A & \xrightarrow{p} & B \dashrightarrow^{\varepsilon} \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow n^*\eta
 \end{array} . \quad (1.1.4)$$

由 P3 得 $X \xrightarrow{sf} A \xrightarrow{p} Y \dashrightarrow^{\delta}$ 是 ξ -三角.

2. (ET4^{op} 的验证). 给定 ξ -满射 n 与 p 的复合, 在大范畴中作同伦的 ET4^{op} 图

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \dashrightarrow^f & Y & \dashrightarrow^g & Z \dashrightarrow^{\delta} \\
 \parallel & & \downarrow s & \square & \downarrow m \\
 X & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & B \dashrightarrow^{\varepsilon} \\
 & & \downarrow np & & \downarrow n \\
 & & C & \xlongequal{\quad} & C \\
 & & \downarrow \eta & & \downarrow \kappa
 \end{array} . \quad (1.1.5)$$

直接地, $\delta = m^*\varepsilon$ 与 $n^*\eta = f_*\varepsilon$ 都是 ξ -扩张元. 在大范畴中作“拉回”:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & \xlongequal{\quad} & Z \\
 & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow m \\
 Y & \dashrightarrow^{(s)_g} & A \oplus Z & \xrightarrow{(p, m)} & B \dashrightarrow^{f_*\varepsilon} \\
 \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow n \\
 Y & \xrightarrow{s} & A & \xrightarrow{np} & C \dashrightarrow^{\eta} \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow \kappa
 \end{array} . \quad (1.1.6)$$

由 P3 得 $Y \xrightarrow{s} A \xrightarrow{np} C \dashrightarrow^{\eta}$ 是 ξ -三角.

□

命题 1.1.6. 若 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 弱幂等完备, 则 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_{\xi}, \mathfrak{s}_{\xi})$ 亦然.

证明. 即证, 若 $\binom{i}{0} : A \rightarrow B \oplus C$ 是 ξ -单射, 则 i 是 ξ -单射. 由 WIC 条件, i 是 \mathbb{E} -单射, 从而有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & M' & \xrightarrow{\delta'} & \\ \parallel & & \downarrow \binom{1}{0} & & \downarrow \gamma & & \\ A & \xrightarrow{\binom{i}{0}} & B \oplus C & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\delta} & \end{array} \quad (1.1.7)$$

由 ET3 构造 γ . 此时 $\delta' = \gamma^* \delta$ 是 ξ -扩张元, 因此 i 是 ξ -单射. \square

1.2 ξ -同调代数

记号 1.2.1. 往后假定范畴弱幂等完备. 取定真类 ξ .

定义 1.2.2 (ξ -投射对象). 称 X 是 ξ -投射对象, 若对一切 ξ -三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta}$, 有短正合列

$$0 \rightarrow (X, A) \xrightarrow{(X, f)} (X, B) \xrightarrow{(X, g)} (X, C) \rightarrow 0. \quad (1.2.1)$$

备注 1.2.3. 传统的相对同调代数仅要求 $(X, -)$ 映 ξ -满射为满射, 对单射不设要求.

记号 1.2.4. 记 $\mathcal{P}(\xi)$ 是 ξ -投射对象构成的类.

备注 1.2.5. 其对余积 (若存在) 与缩回封闭. $\mathcal{P}(\xi)$ 显然是 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi)$ 的外三角子范畴, 且是半单 Abel 范畴; 但是 $\mathcal{P}(\xi)$ 未必是 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 的外三角子范畴.

记号 1.2.6. 假定外三角范畴有足够 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象. 即是说, 对任意对象 A 都存在 ξ -三角 $K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} A \xrightarrow{\delta}$ 使得 P 是 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象.

命题 1.2.7. $\mathcal{P}(\xi)$ -投射预盖恰好是 $\mathcal{P}(\xi)$ 出发的 ξ -满射.

证明. 任取 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射预盖 $q : Q \rightarrow A$. 存在 ξ -三角 $K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} A \xrightarrow{\delta}$. 由投射预盖的定义, g 经 q 分解. 由 WIC, q 是 ξ -满射. 反之, 设 $q : Q \rightarrow A$ 是 $\mathcal{P}(\xi)$ 出发的 ξ -满射. 由定义知 $(-, q)$ 映 $\mathcal{P}(\xi)$ 为满射, 从而 q 是 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射预盖. \square

下一引理说明 ξ -三角与 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象通过某种“垂直配对”决定彼此.

命题 1.2.8. 假定范畴有足够 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象. 则 \mathbb{E} -三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta}$ 是 ξ -三角, 当且仅当对所有 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象 P 都有短正合列

$$0 \rightarrow (P, X) \xrightarrow{(P, f)} (P, Y) \xrightarrow{(P, g)} (P, Z) \rightarrow 0. \quad (1.2.2)$$

证明. 仅证明 (\Leftarrow) 部分. 给定 \mathbb{E} -三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta}$. 由范畴有足够 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象, 作交换图

$$\begin{array}{ccccccc} & & K & \xlongequal{\quad} & K & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{\quad} & X \oplus P & \xrightarrow{\quad} & P & \xrightarrow{\quad} & \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{\delta} & \end{array} \quad (1.2.3)$$

可裂短正合列是 ξ -三角. 由 P3, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta}$ 是 ξ -三角. \square

记号 **1.2.9**. 假定范畴有足够 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象. 此时可以定义投射分解与维数.

定义 **1.2.10** ($\mathcal{P}(\xi)$ -投射维数 pd_ξ). 约定 $\mathcal{P}(\xi)$ 中对象的 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射维数为 0. 归纳地, 称 $pd_\xi M \leq n+1$, 若存在 ξ -三角 $K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \xrightarrow{\delta} \rightarrow$ 使得 $P \in \mathcal{P}(\xi)$ 且 $pd_\xi K \leq n$. 称 $pd_\xi M = n$, 若有 $pd_\xi M \leq n$, 但没有 $pd_\xi M \leq n-1$.

引理 **1.2.11**. 对 $P \in \mathcal{P}(\xi)$, 总有 $pd_\xi M = pd_\xi(M \oplus P)$.

证明. 记命题 $\mathfrak{M}(n)$ 为“ $pd_\xi M = pd_\xi(M \oplus P)$ 对 $pd_\xi M = n$ 成立”, 证明 $\{\mathfrak{M}(n)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$. 由定义知 $\mathfrak{M}(0)$ 成立. 假定 $\mathfrak{M}(\leq n)$ 成立. 今任取 $pd_\xi M = n+1$.

1. 一方面, $pd_\xi(M \oplus P) \leq n+1$. 取 ξ -三角 $K \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} M \xrightarrow{\delta} \rightarrow$ 使得 $Q \in \mathcal{P}(\xi)$ 且 $pd_\xi K \leq n$. 则有 ξ -三角 $K \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}} Q \oplus P \xrightarrow{(g,0)} M \oplus P \xrightarrow{\delta'} \rightarrow$.
2. 另一方面, $pd_\xi(M \oplus P) \not\leq n$. 假定 $pd_\xi(M \oplus P) \leq n$. 取 ξ -三角 $K' \xrightarrow{f'} Q' \xrightarrow{g'} M \oplus P \xrightarrow{\delta'} \rightarrow$ 使得 $Q' \in \mathcal{P}(\xi)$ 且 $pd_\xi K' \leq (n-1)$. 作交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & P & \xlongequal{\quad} & P & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 K' & \xrightarrow{f'} & Q' & \xrightarrow{g'} & M \oplus P & \xrightarrow{\delta'} \rightarrow & \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 K' & \dashrightarrow & E & \dashrightarrow & M & \xrightarrow{\varepsilon} \rightarrow & \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & &
 \end{array} \quad (1.2.4)$$

此处 E 是 Q' 的直和项. 由底行得 $pd_\xi M \leq n$, 矛盾.

最后证明 $\mathfrak{M}(\infty)$. 实际上, 以上第二步说明 $pd_\xi(M \oplus P) \geq pd_\xi M$, 从而得证. \square

备注 **1.2.12**. 投射维数的归纳定义无关 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射模的选取. 可使用若松技巧证明, 假定有 ξ -三角

$$K_1 \xrightarrow{f_1} P_1 \xrightarrow{g_1} X \xrightarrow{\delta_1} \rightarrow, \quad K_2 \xrightarrow{f_2} P_2 \xrightarrow{g_2} X \xrightarrow{\delta_2} \rightarrow, \quad (1.2.5)$$

两者在 X 处的拉回是两条可裂的 ξ -三角, 从而 $K_1 \oplus P_2 \cong K_2 \oplus P_1$. 依照引理 **1.2.11** 得 $pd_\xi K_1 = pd_\xi K_2$. 这一备注是为了说明命题 **1.2.17**.

定义 **1.2.13** (完全 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解). 给定双边无界复形 $X_\bullet = [\cdots X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} X_{-1} \rightarrow \cdots]$.

- 称 X_\bullet 是 ξ -正合的, 若存在分解 $d_n = g_{n-1}f_n$ 使得每个 $K_{n+1} \xrightarrow{g_n} X_n \xrightarrow{f_n} K_n \xrightarrow{\delta_n} \rightarrow$ 是 ξ -三角.
- 称 \mathbb{E} -三角 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\delta} \rightarrow$ 是 $(-, \mathcal{W})$ 正合的, 若对任意 $W \in \mathcal{W}$, 有短正合列

$$0 \rightarrow (Z, W) \xrightarrow{(g, W)} (Y, W) \xrightarrow{(f, W)} (X, W) \rightarrow 0. \quad (1.2.6)$$

- 称 X_\bullet 是完全 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解, 若 $X_n \in \mathcal{P}(\xi)$, X_\bullet 是 ξ -正合的, 且每一 $K_{n+1} \xrightarrow{g_n} X_n \xrightarrow{f_n} K_n \xrightarrow{\delta_n} \rightarrow$ 是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的.

可以定义对偶地定义完全 ξ -内射分解.

备注 **1.2.14**. 在原文中, 默认 $(-, \mathcal{W})$ -正合的 \mathbb{E} -三角 (复形) 是 ξ -三角 (复形).

备注 1.2.15. 给定完全 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解 X_\bullet , 态射 $d = gf$ 的选取未必唯一, 即 ξ -三角的拆解未必唯一. 然而, (P, X_\bullet) 的满-单分解是唯一的, 即 ξ -三角在 $(\mathcal{P}(\xi), -)$ 下的像唯一. 鉴于外三角范畴缺乏函子的满-单分解, $\mathcal{GP}(\xi)$ 更宜被定义为“能被中项为 $\mathcal{P}(\xi)$ 的 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合 \mathbb{E} -三角双边无界延拓”.

记号 1.2.16. 方便起见, 称一个 \mathbb{E} -单射 (\mathbb{E} -满射, 或扩张元) 是 $(-, \mathcal{W})$ 正合的, 若其所在的 \mathbb{E} -三角是 $(-, \mathcal{W})$ 正合的.

命题 1.2.17 ($\mathcal{P}(\xi)$ -投射维数的等价定义). $pd_\xi M \leq n$, 当且仅当对任意 ξ -正合复形

$$K_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \quad (P_i \in \mathcal{P}(\xi)), \quad (1.2.7)$$

总有 $K_n \in \mathcal{P}(\xi)$.

证明. 由定义归纳得 (\leftarrow) . 由 备注 1.2.12 得 (\rightarrow) . □

定义 1.2.18 (ξ -Gorenstein 投射). 对于完全 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解 P_\bullet , 记 K -项为 ξ -Gorenstein 投射对象. 记作 $\mathcal{GP}(\xi)$. 可以对偶地定义 ξ -Gorenstein 内射对象, 记作 $\mathcal{GI}(\xi)$.

引理 1.2.19. 给定 \mathbb{E} -三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta} A$, 其 $(-, \mathcal{W})$ -正合, 当且仅当 (g, \mathcal{W}) 与 $\mathbb{E}(g, \mathcal{W})$ 总是单的.

证明. 考虑五项长正合列

$$(C, \mathcal{W}) \xrightarrow{(g, \mathcal{W})} (B, \mathcal{W}) \xrightarrow{(f, \mathcal{W})} (A, \mathcal{W}) \xrightarrow{\delta^\#} \mathbb{E}(C, \mathcal{W}) \xrightarrow{g^*} \mathbb{E}(B, \mathcal{W}). \quad (1.2.8)$$

\mathbb{E} -三角是 $(-, \mathcal{W})$ -正合的, 当且仅当 (g, \mathcal{W}) 单且 (f, \mathcal{W}) 满. 注意到 (f, \mathcal{W}) 满当且仅当 g^* 单. □

记号 1.2.20. 往后将交换图中 $\mathcal{GP}(\xi)$ 中对象标注为紫色 (■), 将 $(-, \mathcal{W})$ 正合 \mathbb{E} -三角标注为红色 (■), 将待定的 \mathbb{E} -三角标注为蓝色 (■). 定理 1.1.5 已证明 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi)$ 是外三角范畴, 故无需强调对 ξ -三角的橘色标记 (■).

备注 1.2.21. $(-, \mathcal{W})$ -正合 \mathbb{E} -三角的图表定理, 相当于满态射的图表定理.

命题 1.2.22. 若 ε 是 $(-, \mathcal{W})$ -正合的, 则任意 $\lambda_*\delta$ 亦然.

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \xrightarrow{f} & \cdots & \xrightarrow{\varepsilon} & \cdots \\ \downarrow \lambda & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \lambda_*\varepsilon \\ \cdots & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \xrightarrow{f'} & \cdots & \xrightarrow{\quad} & \cdots \end{array} \quad (1.2.9)$$

证明. $\lambda_*\delta$ 是 ξ -扩张元. 由 引理 1.2.19, 只需证 (f', \mathcal{W}) 与 $\mathbb{E}(f', \mathcal{W})$ 单. 由 (f, \mathcal{W}) 与 $\mathbb{E}(f, \mathcal{W})$ 单, 证毕. □

命题 1.2.23. 若 δ 与 ε 是 $(-, \mathcal{W})$ -正合的, 则 ε' 亦然.

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \xrightarrow{\delta'} & \cdots \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \xrightarrow{g} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\ & & \downarrow gf & & \downarrow f & & \\ & & \cdots & \xrightarrow{\quad} & \cdots & \xrightarrow{\quad} & \cdots \\ & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & & \end{array} \quad (1.2.10)$$

证明. 取 $P \oplus G$ 的完全 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & \cdots \\ & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\ & & K_0 & & P \oplus G & & K_2 \end{array} \quad (1.3.1)$$

下证明 G 嵌入某一完全 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解.

1. (向左延伸). 作以下 ξ -三角的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} K_0 & \dashrightarrow & P' & \dashrightarrow & G & \dashrightarrow & \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_0 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & P \oplus G & \dashrightarrow & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & P & = & P & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array} \quad (1.3.2)$$

由 定理 1.2.26, 第一行是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的.

2. (向右延伸). 作以下 ξ -三角的交换图, 这两个 \mathbb{E} -三角也是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的:

$$\begin{array}{ccccccc} P \oplus G & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & Q_1 & \xrightarrow{g} & K_2 & \dashrightarrow & \\ (1,0) \downarrow & \square & \downarrow \binom{l}{m} & & \parallel & & \\ P & \xrightarrow{\binom{1}{0}} & P \oplus K_2 & \xrightarrow{(0,1)} & K_2 & \dashrightarrow 0 & \end{array} \quad (1.3.3)$$

此时有 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合三角的交换图,

$$\begin{array}{ccccccc} G & \dashrightarrow & Q_1 & \dashrightarrow & P \oplus K_2 & \dashrightarrow & \\ \downarrow \binom{0}{1} & & \downarrow \binom{0}{1} & & \parallel & & \\ P \oplus G & \xrightarrow{\binom{1}{f_1} \binom{0}{f_2}} & P \oplus Q_1 & \xrightarrow{\binom{1}{0} \binom{l}{m}} & P \oplus K_2 & \dashrightarrow & \\ \downarrow (1,0) & & \downarrow (1,0) & & & & \\ P & = & P & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \end{array} \quad (1.3.4)$$

由 定理 1.2.26, 第一行是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的.

□

引理 1.3.2. 对任意 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$. 任取 $P, Q \in \mathcal{P}(\xi)$ 使得有 ξ -三角

$$G \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} G' \xrightarrow{\delta} \quad G'' \xrightarrow{j} Q \xrightarrow{q} G \xrightarrow{\varepsilon} \quad (1.3.5)$$

则 $G', G'' \in \mathcal{GP}(\xi)$.

证明. 考虑 备注 1.2.12. 以及 $\mathcal{GP}(\xi)$ 中对象对 $\mathcal{P}(\xi)$ -中直和项的消去封闭 (引理 1.3.1). □

定理 1.3.3. 给定 ξ -三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta}$, 其中 $C \in \mathcal{GP}(\xi)$. 此时 $A \in \mathcal{GP}(\xi)$ 当且仅当 $B \in \mathcal{GP}(\xi)$.

证明. 假定 $A \in \mathcal{GP}(\xi)$. 下图 $(i_A; i_C)$ 是扩张元的态射. 由 **WIC-free** 的 3×3 -引理得 ξ -三角的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \dashrightarrow^{\delta} \\
 \downarrow i_A & & \downarrow (i_C g) & & \downarrow i_C \\
 P_A & \xrightarrow{(1)} & P_A \oplus P_C & \xrightarrow{(0,1)} & P_C \dashrightarrow^0 \\
 \downarrow p_A & & \downarrow (f' p_A, t) & & \downarrow p_C \\
 A' & \dashrightarrow^{f'} & B' & \dashrightarrow^{g'} & C' \dashrightarrow^{\delta'} \\
 \downarrow \varepsilon_A & & \downarrow \varepsilon_B & & \downarrow \varepsilon_C
 \end{array} \quad (1.3.6)$$

由 **定理 1.2.25**, 上图除 ε_B 外的五个扩张元都是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. **定理 1.2.26** 说明中间列 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ 正合. 这说明 B 可以通过中项为 $\mathcal{P}(\xi)$ 的 $\mathcal{P}(\xi)$ -正合 \mathbb{E} -三角向右扩张. 对偶地, B 可以同样地向左扩张. 这构造了 $\mathcal{P}(\xi)$ -正合的完全 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解.

假定 $B \in \mathcal{GP}(\xi)$, 作 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合三角 $B \rightarrow Q_B \rightarrow B'' \dashrightarrow$, 其中 $Q_B \in \mathcal{P}(\xi)$. **ET4** 给出下图:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \dashrightarrow^{\delta} \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \dashrightarrow & Q_B & \dashrightarrow & E \dashrightarrow^{\delta''} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & B'' & = & B'' \\
 & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'
 \end{array} \quad (1.3.7)$$

已证 $\mathcal{GP}(\xi)$ 扩张闭, 故 $E \in \mathcal{GP}(\xi)$. 因此 δ'' 是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. **引理 1.3.2** 说明 $A \in \mathcal{GP}(\xi)$. □

命题 1.3.4. $\mathcal{GP}(\xi)$ 对直和项封闭.

证明. 假定 $H \oplus H' \in \mathcal{GP}(\xi)$, 作下图

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \xlongequal{\quad} & H & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 H \oplus H' & \xrightarrow{\quad} & P & \xrightarrow{\quad} & G \dashrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 H' & \xrightarrow{\quad} & M & \xrightarrow{\quad} & G \dashrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow & &
 \end{array} \quad (1.3.8)$$

由 3×3 引理知所有三角 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合. 由同样构造得 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合 ξ -三角 $H' \rightarrow P \rightarrow M' \dashrightarrow$. 由 $H' \oplus H \rightarrow P \oplus P \rightarrow M \oplus M' \dashrightarrow$ 是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的, 从而 M 是 $\mathcal{GP}(\xi)$ 的直和项. 由 **命题 1.2.24**, 指向 $\mathcal{GP}(\xi)$ 直和项的 ξ -三角也是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. 存在 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的 ξ -三角 $L \rightarrow Q \rightarrow H \dashrightarrow$ 使得 L 是 $\mathcal{GP}(\xi)$ 的直和项.

综上, $\mathcal{GP}(\xi)$ 的直和项可向左且向右扩张为 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的 ξ -三角, 中间项是 $\mathcal{P}(\xi)$. 这说明 $\mathcal{GP}(\xi)$ 对直和项封闭. □

推论 1.3.5. 给定 ξ -三角 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \dashrightarrow^{\delta}$. 若 $A, B \in \mathcal{GP}(\xi)$, 则 $C \in \mathcal{GP}(\xi)$ 当且仅当 \mathbb{E} -三角是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的.

证明. 由 **定理 1.2.25** 可知必要性 (\rightarrow 方向). 对充分性 (\leftarrow 方向), 若 \mathbb{E} -三角是 $\mathcal{P}(\xi)$ -正合的, 则其关于 $A \rightarrow P_A$ 的推出是总可裂短正合列. 作 ξ -三角的交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & B & \xrightarrow{\quad} & C \dashrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 P_A & \dashrightarrow & P_A \oplus C & \dashrightarrow & C \dashrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 A' & \xlongequal{\quad} & A' & & \\
 \downarrow & & \downarrow & &
 \end{array} . \quad (1.3.9)$$

由 **定理 1.3.3** 知 $P_A \oplus C \in \mathcal{GP}(\xi)$, 再由 **引理 1.3.1** 得 $C \in \mathcal{GP}(\xi)$. □

1.4 $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数

本小节在外三角范畴中类推经典 **Gorenstein** 同调维数的相关定理.

定义 1.4.1 ($\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数). 约定 $\mathcal{GP}(\xi)$ 中对象的 $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数为 0. 归纳地, 称 $\mathcal{Gpd}_\xi M \leq n+1$, 若存在 ξ -三角 $K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} M \dashrightarrow$ 使得 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$ 且 $\mathcal{Gpd}_\xi K \leq n$. 称 $\mathcal{Gpd}_\xi M = n$ 若 $\mathcal{Gpd}_\xi M \leq n$ 且不满足 $\mathcal{Gpd}_\xi M \leq n-1$.

引理 1.4.2 (维数移动). 使用 G 表示 $\mathcal{GP}(\xi)$ 中的某个元素. 以下三个命题对 $n \geq 0$ 成立:

$\mathfrak{A}(n)$ 对 ξ -三角 $A \rightarrow G \rightarrow C \dashrightarrow$, 若 $\mathcal{Gpd}_\xi C = n+1$, 则 $\mathcal{Gpd}_\xi A = n$.

$\mathfrak{B}(n)$ 对 ξ -三角 $A \rightarrow B \rightarrow G \dashrightarrow$, 若 $\mathcal{Gpd}_\xi A = n$, 则 $\mathcal{Gpd}_\xi B = n$.

$\mathfrak{C}(n)$ 对 ξ -三角 $A \rightarrow B \rightarrow G \dashrightarrow$, 若 $\mathcal{Gpd}_\xi B = n$, 则 $\mathcal{Gpd}_\xi A = n$.

证明. 使用数学归纳法证明. 由 **定理 1.3.3**, $\mathfrak{B}(0)$ 与 $\mathfrak{C}(0)$ 成立. 下证明 $\mathfrak{A}(0)$. 存在 $G', G'' \in \mathcal{GP}(\xi)$ 使得

$$\begin{array}{ccccc}
 & G' \xlongequal{\quad} & G' & & \\
 & \downarrow & \downarrow & & \\
 A & \dashrightarrow & E & \dashrightarrow & G'' \dashrightarrow \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C \dashrightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array} . \quad (1.4.1)$$

由 **定理 1.3.3**, $E \in \mathcal{GP}(\xi)$, 进而 $A \in \mathcal{GP}(\xi)$.

• (归纳: $\mathfrak{B}(n+1) \wedge \mathfrak{C}(n+1) \rightarrow \mathfrak{A}(n+1)$). 考虑

$$\begin{array}{ccccc}
 & C' \xlongequal{\quad} & C' & & \mathcal{Gpd}_\xi C' = n+1 \\
 & \downarrow & \downarrow & & \\
 A & \dashrightarrow & E & \dashrightarrow & G'' \dashrightarrow \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C \dashrightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array} . \quad (1.4.2)$$

$\mathcal{Gpd}_\xi C = n+2$

由 $\mathfrak{B}(n+1)$, 得 $\mathcal{Gpd}_\xi E = n+1$. 由 $\mathfrak{A}(n+1)$, 得 $\mathcal{Gpd}_\xi A = n+1$.

- (归纳: $\mathfrak{A}(n) \wedge \mathfrak{B}(n) \rightarrow \mathfrak{B}(n+1)$). 由 WIC-free 的 3×3 -引理作得下图

$$\begin{array}{ccccc}
 A' & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & B' & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G' & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{Gpd}_\xi A' = n \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 G'' & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G'' \oplus P & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & P & \xrightarrow{\quad\quad\quad 0 \quad\quad\quad} & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 A & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & B & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{Gpd}_\xi A = n+1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
 \end{array} \quad (1.4.3)$$

由 $\mathfrak{B}(n)$ 知 $\mathcal{Gpd}_\xi B' = n$. 由 $\mathfrak{A}(n)$ 知 $\mathcal{Gpd}_\xi B = n+1$.

- (归纳: $\mathfrak{A}(n) \rightarrow \mathfrak{C}(n+1)$). 考虑

$$\begin{array}{ccccc}
 B' & \xlongequal{\quad\quad\quad} & B' & & \mathcal{Gpd}_\xi B' = n \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 H & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G' & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G & \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
 A & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & B & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G & \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & & & \mathcal{Gpd}_\xi B = n+1
 \end{array} \quad (1.4.4)$$

由 定理 1.3.3 得 $H \in \mathcal{GP}$. 由 $\mathfrak{A}(n)$ 知 $\mathcal{Gpd}_\xi A = n+1$.

归纳图示:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{A}(n) & & \mathfrak{A}(n+1) \\
 \searrow & & \uparrow \\
 \mathfrak{B}(n) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathfrak{B}(n+1) \\
 \searrow & & \uparrow \\
 \mathfrak{C}(n) & & \mathfrak{C}(n+1)
 \end{array} \quad (1.4.5)$$

□

推论 1.4.3. 对 ξ -三角 $A \rightarrow G \rightarrow C \dashrightarrow$, 若 $\mathcal{Gpd}_\xi A = n+1$, 则 $\mathcal{Gpd}_\xi C = n+2$.

证明. 假定 $\mathcal{Gpd}_\xi A = n+1$. 由定义, $\mathcal{Gpd}_\xi C \leq n+2$. 由 $\mathfrak{A}(n)$ 知只能有 $\mathcal{Gpd}_\xi C = n+2$. □

推论 1.4.4 (\mathcal{Gpd}_ξ 的等价定义). $\mathcal{Gpd}_\xi M \leq n$ 当且仅当对任意 ξ -正合复形

$$K_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \quad (P_i \in \mathcal{P}(\xi)), \quad (1.4.6)$$

总有 $K_n \in \mathcal{GP}(\xi)$.

证明. (\rightarrow). 依照 $\mathcal{P}(\xi) \subseteq \mathcal{GP}(\xi)$ 与维数移位. (\leftarrow). 取如上所述的 M . 依照定义, $\mathcal{Gpd}_\xi M \leq n$. □

推论 1.4.5. 若 $pd_\xi M < \infty$, 则 $pd_\xi M = \mathcal{Gpd}_\xi M$.

记号 **1.4.6.** 给定 $I \subseteq (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$.

- 记 $\mathcal{P}(\xi)$ 是 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射对象, $\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}$ 是 pd_ξ 有限的对象, $\mathcal{P}(\xi)^I$ 是 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射维数在 I 中的对象.
- 记 $\mathcal{GP}(\xi)$ 是 $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射对象, $\widetilde{\mathcal{GP}(\xi)}$ 是 $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数有限的对象, $\mathcal{GP}(\xi)^I$ 是 $\mathcal{GP}(\xi)$ -投射维数在 I 内的对象.

命题 1.4.7. $\mathbb{E}_\xi(\mathcal{GP}(\xi), \widetilde{\mathcal{P}(\xi)}) = 0$.

证明. 只需证明 $\mathbb{E}_\xi(\mathcal{GP}(\xi), \mathcal{P}(\xi)^{\leq n}) = 0$ 对一切 $n \geq 0$ 成立. 由 **定理 1.3.3** 知 $n = 0$ 时显然成立. 假定 $\mathbb{E}_\xi(\mathcal{GP}(\xi), \mathcal{P}(\xi)^{\leq n}) = 0$ 成立, 下证明 $\mathbb{E}_\xi(\mathcal{GP}(\xi), \mathcal{P}(\xi)^{\leq n+1}) = 0$. 取定

$$N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \dashrightarrow, \quad pd_\xi N = n, \quad P \in \mathcal{P}(\xi), \quad pd_\xi M = n+1, \quad (1.4.7)$$

以及 $(-, \mathcal{P})$ -正合 \mathbb{E} -三角

$$G' \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{p} G \dashrightarrow, \quad G', G \in \mathcal{GP}(\xi), \quad Q \in \mathcal{P}(\xi). \quad (1.4.8)$$

此时有正合列的交换图 (■ 色对象是零 Abel 群):

$$\begin{array}{ccccc} (Q, P) & \longrightarrow & (Q, M) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(Q, N) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (G', P) & \xrightarrow{(G', g)} & (G', M) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G', N) \\ \downarrow & & \downarrow ((\delta_\xi)^\sharp)_M & & \downarrow \\ \mathbb{E}_\xi(G, P) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G, M) & & \\ & & \downarrow & & \\ & & \mathbb{E}_\xi(Q, M) & & \end{array} \quad (1.4.9)$$

由于 $((\delta_\xi)^\sharp)_M \circ (G', g)$ 是零态射, 且 (G', g) 是满态射, 故 $((\delta_\xi)^\sharp)_M = 0$. 由长正合列, 得 $\mathbb{E}_\xi(G, M) = 0$. \square

命题 1.4.8. 完全投射分解是 $(-, \widetilde{\mathcal{P}(\xi)})$ -正合的.

证明. 由定义, 完全投射分解是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. 假定是 $(-, \mathcal{P}(\xi)^{\leq n})$ -正合的, 下证明其 $(-, \mathcal{P}(\xi)^{\leq n+1})$ 正合. 沿用 **命题 1.4.7** 中记号, 得正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} (G, N) & \xrightarrow{(p, N)} & (Q, N) & \longrightarrow & (G', N) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G, N) \\ \downarrow (G, f) & & \downarrow (Q, f) & & \downarrow (G', f) & & \downarrow \\ (G, P) & \xrightarrow{(p, P)} & (Q, P) & \longrightarrow & (G', P) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G, P) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (G, M) & \longrightarrow & (Q, M) & \longrightarrow & (G', M) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G, M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}_\xi(G, N) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(Q, N) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\xi(G', N) & & \end{array} \quad (1.4.10)$$

由态射合成, (G, f) -单. 对 $G' \rightarrow P' \rightarrow G'' \dashrightarrow$ 作同样的交换图, 得 (G', f) -单. 上图包含五条短正合列, 由 3×3 引理得第六条短正合列, 这完成了归纳假设. \square

推论 1.4.9. 由维数移动知 $\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}$ 是厚子范畴. 所有 $\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}$ 中的 \mathbb{E} -三角都是 $(\mathcal{GP}(\xi), -)$ -正合的.

命题 1.4.10. 给定 ξ -三角 $A \rightarrow B \rightarrow C \dashrightarrow$, 其中 $C \in \mathcal{GP}(\xi)$. **定理 1.2.25** 证明了该 \mathbb{E} -三角是 $(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. 实际上, 该 \mathbb{E} -三角也是 $(-, \widetilde{\mathcal{P}(\xi)})$ -正合的.

证明. 依照与 **定理 1.2.25** 一致的证明思路, 只需说明完全投射分解 $(-, \widetilde{\mathcal{P}(\xi)})$ -正合, 即上一命题. \square

1.5 Hovey 四元组

引理 1.5.1. 约定 $\mathcal{P}(\xi)^{-1} = \{0\}$. 对 $n \geq 0$, 有如下等式:

$$\mathcal{GP}(\xi)^{\leq n} \subseteq \text{Cone}(\mathcal{P}(\xi)^{\leq n-1}, \mathcal{GP}(\xi)), \quad \mathcal{GP}(\xi)^{\leq n} \subseteq \text{coCone}(\mathcal{P}(\xi)^{\leq n}, \mathcal{GP}(\xi)). \quad (1.5.1)$$

证明. 下归纳证明. 上述命题对 $\mathcal{GP}(\xi)^{\leq 0} = \mathcal{GP}(\xi)$ 显然成立. 假定上述命题对 $\mathcal{GP}(\xi)^n$ 成立, 下证明其对 $\mathcal{GP}(\xi)^{n+1}$ 成立.

1. (前式). 取定 $M \in \mathcal{GP}(\xi)^{\leq n+1}$, 则存在 ξ -三角的交换图

$$\begin{array}{ccccc} L & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M \dashrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ A & \dashrightarrow & H & \dashrightarrow & M \dashrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ G & \xlongequal{\quad} & G & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{Gpd}_{\xi} M = n+1 \\ \mathcal{Gpd}_{\xi} L = n \\ pd_{\xi} A \leq n \end{array}. \quad (1.5.2)$$

因此 $\mathcal{GP}(\xi)^{\leq n+1} \subseteq \text{Cone}(\mathcal{P}(\xi)^{\leq n}, \mathcal{GP}(\xi))$.

2. (后式). 对上述 M , 作下图:

$$\begin{array}{ccccc} L & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M \dashrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \dashrightarrow & P \oplus Q & \dashrightarrow & N \dashrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & G' \dashrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{Gpd}_{\xi} M = n+1 \\ \mathcal{Gpd}_{\xi} L = n \\ pd_{\xi} A \leq n \end{array}. \quad (1.5.3)$$

由维数移动, $pd_{\xi} N \leq n+1$. 因此 $\mathcal{GP}(\xi)^{\leq n+1} \subseteq \text{coCone}(\mathcal{P}(\xi)^{\leq n+1}, \mathcal{GP}(\xi))$.

\square

推论 1.5.2. 若 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_{\xi}, \mathfrak{s}_{\xi})$ 中所有对象有有限 Gorenstein 投射维数, 则 $(\mathcal{GP}(\xi), \widetilde{\mathcal{P}(\xi)})$ 是完备余挠对.

定理 1.5.3. $((\mathcal{P}(\xi), \mathcal{C}), (\mathcal{GP}(\xi), \widetilde{\mathcal{P}(\xi)}))$ 是 Hovey 四元组.

证明. 已证这是两个余挠对. 容易验证

$$\text{Cone}(\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}, \mathcal{P}(\xi)) = \text{coCone}(\widetilde{\mathcal{P}(\xi)}, \mathcal{P}(\xi)) = \widetilde{\mathcal{P}(\xi)}. \quad (1.5.4)$$

从而这是 Hovey 四元组. \square

推论 1.5.4. 若 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_{\xi}, \mathfrak{s}_{\xi})$ 的 Gorenstein 投射维数 $\leq n$, 则 $\widetilde{\mathcal{P}(\xi)} = \mathcal{P}(\xi)^{\leq n}$. 此时 $((\mathcal{P}(\xi), \mathcal{C}), (\mathcal{GP}(\xi), \widetilde{\mathcal{P}(\xi)}))$ 是 Hovey 四元组.

2 阅读笔记: Complete cohomology for extriangulated categories

文章见 [HZZZ21].

2.1 ξ -上投射分解

记号 **2.1.1.** 假定 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}_\xi)$ 有足够投射. 记 X 的投射分解为链复形 P_X .

定义 **2.1.2** (上有界复形的 $\mathcal{P}(\xi)$ -投射分解). 给定上有界复形

$$M : \cdots \rightarrow M_2 \xrightarrow{d_1} M_1 \xrightarrow{d_0} M_0 \rightarrow 0. \quad (2.1.1)$$

称 $\varphi : P \rightarrow M$ 是一个投射分解, 若链映射 φ 的每一项是 ξ -满射, P 是取值 $\mathcal{P}(\xi)$ 中复形, 且 $\text{Cone}(\varphi)$ 是 ξ -正合复形.

命题 **2.1.3.** 上有界复形的投射分解总是存在的.

证明. 归纳地构造 P :

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_2 & & P_1 & & P_0 \\ & \nearrow g_3 & \searrow p_2 & \nearrow g_2 & \searrow p_1 & \nearrow g_1 & \searrow p_0 \\ & \diamond & & \diamond & & \diamond & \\ \cdots & \nearrow q_3 & K_2 & \nearrow q_2 & K_1 & \nearrow q_1 & K_0 \\ & \searrow f_2 & \searrow f_1 & \searrow f_0 & & & \\ \cdots & \xrightarrow{d_3} & M_3 & \xrightarrow{d_2} & M_2 & \xrightarrow{d_1} & M_1 & \xrightarrow{d_0} & M_0 \end{array} \quad (2.1.2)$$

假定构造了 $K_{\leq n}, g_{\leq n}, q_{\leq n}, p_{\leq n}$ 与 $f_{\leq n}$. 取同伦方块

$$\begin{array}{ccccccc} L_n & \xrightarrow{i_n} & P_n & \xrightarrow{p_n} & K_n & \xrightarrow{\delta_n} & \\ \parallel & & \uparrow g_{n+1} & \square & \uparrow f_n & & \\ L_n & \xrightarrow{j_n} & K_{n+1} & \xrightarrow{q_{n+1}} & M_{n+1} & \xrightarrow{(f_n)^*\delta_n} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K_{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_{n+1} \\ -q_{n+1} \end{pmatrix}} & P_n \oplus M_{n+1} \\ & \xrightarrow{(p_n, f_n)} & K_n \\ & & \xrightarrow{(j_n)^*\delta_n} \end{array} \quad (2.1.3)$$

由于 $f_n \circ d_{n+1}$ 与 $0 \circ p_n$ 都是 $M_{n+2} \rightarrow K_n$ 的零态射, 从而存在 $f_{n+1} : M_{n+2} \rightarrow K_{n+1}$ 使得 $d_{n+1} = q_{n+1} \circ f_{n+1}$ 且 $g_{n+1}f_{n+1} = 0$. 往复归纳即可:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & P_{n+2} & & P_{n+1} & & P_n & \cdots \\ & \searrow p_{n+2} & \nearrow g_{n+2} & \searrow p_{n+1} & \nearrow g_{n+1} & \searrow p_n & \\ \cdots & & \diamond & & \diamond & & \\ & \nearrow f_{n+2} & K_{n+2} & \nearrow q_{n+2} & K_{n+1} & \nearrow q_{n+1} & K_n \\ & \searrow f_{n+1} & \searrow f_n & \searrow f_{n-1} & \searrow f_{n-2} & \searrow f_{n-3} & \\ \cdots & M_{n+3} & \xrightarrow{d_2} & M_{n+2} & \xrightarrow{d_{n+1}} & M_{n+1} & \cdots \end{array} \quad (2.1.4)$$

容易检验映射锥是 ξ -正合复形:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 \oplus M_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_2 p_2 & 0 \\ -q_2 p_2 & -d_2 \end{pmatrix}} & P_1 \oplus M_2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g_1 p_1 & 0 \\ -q_1 p_1 & -d_1 \end{pmatrix}} & P_0 \oplus M_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_0 & d_0 \end{pmatrix}} & 0 \oplus M_0 \\ & & \searrow (p_2, f_2) & & \nearrow \begin{pmatrix} g_2 \\ -q_2 \end{pmatrix} & \searrow (p_1, f_1) & \nearrow \begin{pmatrix} g_1 \\ -q_1 \end{pmatrix} & \searrow (p_0, f_0) & \nearrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & & K_2 & & K_1 & & K_0 & & \end{array} \quad (2.1.5)$$

□

1. (构造 s_0). 注意到 $p'_0 \circ (\psi_0 - \psi'_0) = 0$. 依长正合类以及 P_0 的提升性构造

$$\begin{array}{ccccc}
 Q_1 & \xleftarrow{s_0} & P_0 & & \\
 \overline{p'_1} \downarrow & \swarrow t_0 & \downarrow (\psi_0 - \psi'_0) & \searrow 0 & \\
 L_{1,1} & \xrightarrow[\begin{pmatrix} g'_{1,1} \\ -q'_{1,1} \end{pmatrix}]{} & Q_0 \oplus N_1 & \xrightarrow[(p'_0, d'_0)]{} & N_0 \dashrightarrow
 \end{array} \quad (2.1.8)$$

此时 $(\psi_0 - \psi'_0) = (g'_{1,1} \overline{p'_1}) s_0$.

2. (构造 s_1). 只需证明 $(\psi_1 - \psi'_1 - s_0(g_{1,1} \overline{p_1}))$ 被 $g'_{2,2} \overline{p'_2}$ 分解. 由上一步的经验, 只需证明 $(\psi_1 - \psi'_1 - s_0(g_{1,1} \overline{p_1}))$ 复合 $Q_1 \rightarrow N_1$ 后为 0. 直接地

$$q'_{1,1} \overline{p'_1} s_0(g_{1,1} \overline{p_1}) = q'_{1,1} t_0(g_{1,1} \overline{p_1}) = 0(g_{1,1} \overline{p_1}) = 0. \quad (2.1.9)$$

另一方面, $(q'_{1,1} \overline{p'_1})(\psi_1 - \psi'_1) = 0$ 是显然的.

3. (构造 s_k). 只需证明 $(\psi_k - \psi'_k - s_{k-1}(g_{k,1} \overline{p_k}))$ 被 $g'_{k+1,k+1} \overline{p'_{k+1}}$ 分解. 由上一步的经验, 只需证明 $(\psi_k - \psi'_k - s_{k-1}(g_{k,1} \overline{p_k}))$ 复合 $Q_k \rightarrow N_k$ 后为 0. 直接地

$$q'_{k,1} \cdots q'_{k,k} \overline{p'_k} s_{k-1}(g_{k,1} \overline{p_k}) = q'_{k,1} \cdots q'_{k,k} t_{k-1}(g_{k,1} \overline{p_k}) = 0(g_{k,1} \overline{p_k}) = 0. \quad (2.1.10)$$

另一方面, $(q'_{k,1} \cdots q'_{k,k} \overline{p'_k})(\psi_k - \psi'_k) = 0$ 是显然的.

□

推论 2.1.6. 假定 $p : P \rightarrow X$ 与 $q : Q \rightarrow X$ 是上有界复形的投射分解. 则存在链映射 $\alpha : P \rightarrow Q$ 与 $\beta : Q \rightarrow X$ 使得 $q\alpha = p$ 且 $p\beta = q$. 特别地, (α, β) 是同伦等价.

证明. 由 命题 2.1.5 知 $\alpha\beta$ 与 $\beta\alpha$ 同伦于恒等链映射.

□

例子 2.1.7 (轴复形的投射分解). 特别地, $M \in \mathcal{C}$ 的 ξ -投射分解形如

$$\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{p} M \rightarrow 0, \quad (2.1.11)$$

其中各 P_i 是 ξ -投射对象, 且有 ξ -三角

$$K_{i+1} \xrightarrow{g_i} P_i \xrightarrow{p_{i-1}} K_i \dashrightarrow \quad (2.1.12)$$

满足 $d_i = g_i p_i$, $K_0 = M$ 与 $p_0 = p$. 由此可见, 轴复形的投射分解是唯一的, 且任意两个投射分解之间存在唯一的同伦等价.

定义 2.1.8 (Hom-复形). 记 \mathcal{C} 中的两个复形为 M 与 N . 定义 Hom-复形 $\mathcal{HOM}(M, N)$ 为如下复形:

1. 对象: 对于每个整数 n , 令

$$\mathcal{HOM}(M, N)_n = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M_k, N_{k+n}). \quad (2.1.13)$$

2. 微分: 对于每个 $f = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{HOM}(M, N)_n$, 其中 $f_k : M_k \rightarrow N_{k+n}$, 定义微分如下:

$$d_n^{\mathcal{HOM}(M, N)}(f_k) = d_{k+n}^N f_k - (-1)^n f_{k-1} d_k^M. \quad (2.1.14)$$

简单地说, 若 f 齐次, 则 $d^{\mathcal{HOM}(M, N)}(f) = [d, f] = d^N f - (-1)^{|f|} f d^M$.

定义 2.1.9 ($\xi\text{xt}_{\mathcal{P}(\xi)}$ -函子). 假定 M 是上有界投射复形, 定义

$$\xi\text{xt}_{\mathcal{P}(\xi)}^\bullet(M, N) := H^\bullet(\mathcal{HOM}(P(M), N)). \quad (2.1.15)$$

以上 $P(M) \rightarrow M$ 是 ξ -投射分解. 该定义与 ξ -投射分解的选取无关 (命题 2.1.5).

命题 2.1.10. 假定 M 是上有界投射复形, 若 N 是 ξ -正合复形

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & N_{k+1} & \xrightarrow{d_k^N} & N_k & \xrightarrow{d_{k-1}^N} & N_{k-1} \longrightarrow \cdots \\ & \nearrow & \searrow p_{k+1} & \nearrow i_k & \searrow p_k & \nearrow i_{k-1} & \searrow \\ \cdots & & L_{k+1} & & L_k & & \cdots \end{array} \quad (2.1.16)$$

则 $\xi\text{xt}_{\mathcal{P}(\xi)}^n(M, N) = 0$ 恒成立.

证明. 只需证明 $\mathcal{HOM}(P(M), N)$ 无环. 不失一般性地, 只需证明 $H_0(\mathcal{HOM}(P(M), N)) = 0$, 即链映射 $\varphi : P(M) \rightarrow N$ 必零伦. 下归纳地构造 $s_k : P_k \rightarrow N_{k+1}$ 使得 $\varphi = sd + ds$.

1. (s_0) . 由 $i_{-1}p_0\varphi_0 = 0$ 以及 (P_0, i_{-1}) 单, 得 $p_0\varphi_0 = 0$, 从而存在 s_0 使得 $i_1s_0 = \varphi_0$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & & \\ & \swarrow s_0 & \downarrow \varphi_0 & \searrow 0 & \downarrow & & \\ L_1 & \xrightarrow{i_1} & N_0 & \xrightarrow{p_0} & L_0 & \xrightarrow{i_{-1}} & N_{-1} \end{array} \quad (2.1.17)$$

2. (s_k) . 假定已构造出 $s_{<k}$ 使得 $\varphi_{<k} = sd + ds$. 此时

$$d_{k-1}^N(\varphi_k - s_{k-1}d_{k-1}^P) = (\varphi_{k-1} - d_{k-1}^N s_{k-1})d_{k-1}^P = s_{k-2}d_{k-2}^P d_{k-1}^P = 0. \quad (2.1.18)$$

由 (P, i_{k-1}) 单, 故 $p_k(\varphi_k - s_{k-1}d_{k-1}^P) = 0$, 从而存在 s_k 使得 $i_k s_k = \varphi_k - s_{k-1}d_{k-1}^P$. 归纳构造完毕. \square

命题 2.1.11. 假若 M 与 N 都是上有界复形, 则

$$\xi\text{xt}_{\mathcal{P}(\xi)}^\bullet(M, N) \cong H^\bullet(\mathcal{HOM}(P(M), P(N))). \quad (2.1.19)$$

其中, $P(M) \rightarrow M$ 与 $P(N) \rightarrow N$ 是上有界复形的任意 ξ -投射分解.

证明. 只需证明 $p_N : P(N) \rightarrow N$ 诱导的态射 $(p_N \circ -) : \mathcal{HOM}(P(M), P(N)) \rightarrow \mathcal{HOM}(P(M), N)$ 是拟同构. 注意到

$$\text{Cone}((p_N) \circ -) \cong \mathcal{HOM}(P(M), \text{Cone}(p_N)). \quad (2.1.20)$$

由 命题 2.1.10, 上式的上同调全为零, 故 $(p_N \circ -)$ 是拟同构. \square

2.2 投射维数与生成子范畴

定义 2.2.1 (生成子范畴). 称 $\mathcal{P}(\xi)$ 是“生成的”, 若对 $M \in \mathcal{C}$,

$$M = 0 \iff (-, M) : \mathcal{P}(\xi) \rightarrow 0. \quad (2.2.1)$$

命题 2.2.2. 若 $\mathcal{P}(\xi)$ 是生成的, 则对 $M \in \mathcal{C}$, $\xi\text{xt}_{\mathcal{P}}^{\geq n}(M, -) = 0$ 当且仅当 $pd_\xi M \leq n$.

证明. \square

2.3 完全上同调

定义 2.3.1 (上有界态射). 给定复形 M 与 N . 记 $\overline{\mathcal{HOM}}(M, N)$ 为上有界态射构成的子复形, 即 $f = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \overline{\mathcal{HOM}}(M, N)$ 若对一切 k 均有

$$f_k(M_i) = 0, \quad \forall i \gg 0. \quad (2.3.1)$$

备注 2.3.2. 简单地说, 上有界态射的每一分次均能零化复形的足够高分支.

例子 2.3.3. 若 $P(M)$ 或 $P(N)$ 下有界, 则 $\mathcal{HOM}(M, N) = \overline{\mathcal{HOM}}(M, N)$.

定义 2.3.4 (ξ -完全复形). 记 $\widetilde{\mathcal{HOM}}(-, ?) := \mathcal{HOM}(-, ?) / \overline{\mathcal{HOM}}(-, ?)$.

定义 2.3.5. 假定 $P(M) \rightarrow M$ 与 $P(N) \rightarrow N$ 是上有界复形的投射分解. 定义三类上同调

1. $\xi \text{xt}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(M, N) := H^{\bullet}(\mathcal{HOM}(P(M), N));$
2. $\overline{\xi \text{xt}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(M, N) := H^{\bullet}(\overline{\mathcal{HOM}}(P(M), N));$
3. $\widetilde{\xi \text{xt}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(M, N) := H^{\bullet}(\widetilde{\mathcal{HOM}}(P(M), N)).$

备注 2.3.6. 这三类上同调可定义在 \mathbf{Hom} -复形 $\mathcal{HOM}(P(M), P(N))$ 上, 见 [命题 2.1.11](#). 这些定义投射分解的选取无关, 见 [命题 2.1.5](#).

参考文献

- [HZZ20] Jiangsheng Hu, Dongdong Zhang, and Panyue Zhou. Proper classes and Gorensteinness in extriangulated categories. *Journal of Algebra*, 551:23–60, June 2020. doi:[10.1016/j.jalgebra.2019.12.028](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.12.028).
- [HZZZ21] Jiangsheng Hu, Dongdong Zhang, Tiwei Zhao, and Panyue Zhou. Complete cohomology for extriangulated categories. *Algebra Colloquium*, 28(04):701–720, 2021. arXiv:<https://doi.org/10.1142/S1005386721000547>, doi:[10.1142/S1005386721000547](https://doi.org/10.1142/S1005386721000547).