

外三角范畴的同调理论

张陈成

2025 年 9 月 29 日

这是几篇文章的阅读笔记.

1 同调理论

1.1 从 Auslander 公式到局部化序列

记号 **1.1.1.** 对加法范畴 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} , 记 $\mathbf{Funct}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是加法函子的范畴.

定义 **1.1.2.** (Serre 子范畴). Abel 范畴 \mathcal{A} 的 Serre 子范畴 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是全子 Abel 范畴, 其关于子对象, 商对象与扩张封闭.

例子 **1.1.3.** 若 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的正合函子, 则 $\ker F := \{A \in \mathcal{A} \mid F(A) = 0\}$ 是 \mathcal{A} 的 Serre 子范畴. 反之, 可以对 Serre 子范畴构造局部化, 且局部化函子正合.

定理 **1.1.4.** (Serre 子范畴的局部化, 熟知结论). 给定 Serre 子范畴 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

1. (分式局部化). 态射类 $S \subseteq \mathbf{Mor}(\mathcal{A})$ 是构成左右分式. 其中, $f \in S$ 当且仅当 $\ker f, \operatorname{cok} f \in \mathcal{B}$. 通常将极限定义作双分式的滤过余极限:

$$(X, Y)_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} := \varinjlim_{(X', Y')} (X', Y/Y')_{\mathcal{A}}; \quad X/X', Y' \in \mathcal{B}. \quad (1.1.1)$$

2. (泛性质). 局部化 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}$ 是正合函子. 对任意正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, 若 $F(B) = 0$ 对任意 $B \in \mathcal{B}$ 成立, 则 F 唯一地分解为 $\mathcal{A}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$.

备注 **1.1.5.** 注意: Serre 商不是简单的加法商. 一般地, Abel 范畴关于子范畴的加法商未必是 Abel 范畴.

命题 **1.1.6.** 对 Serre 商 \mathcal{A}/\mathcal{C} 而言, \mathcal{A} 中的零态射经过零对象分解. 因此, 加法商是 Serre 商的子范畴.

证明. 假定 $f : X \rightarrow Y$ 是 Serre 商范畴中的零态射. 依照式 (1.1.1), 存在复合的零态射

$$X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Y/Y', \quad X/X', Y' \in \mathcal{B}. \quad (1.1.2)$$

往证 $\operatorname{im}(f) \in \mathcal{B}$. 只需证明 $\operatorname{ses} 0 \rightarrow \frac{X' + \ker f}{\ker f} \rightarrow \frac{X}{\ker f} \rightarrow \frac{X}{X' + \ker f} \rightarrow 0$ 的首尾两项属于 \mathcal{B} . 直接地, $\frac{X}{X' + \ker f}$ 是 $\frac{X}{X'}$ 的商, 从而属于 \mathcal{B} ; 由同构定理,

$$\frac{X' + \ker f}{\ker f} \simeq \frac{X'}{X' \cap \ker f} \simeq \operatorname{im}(f \circ i) \rightarrow Y' \in \mathcal{B}. \quad (1.1.3)$$

□

例子 1.1.7. 有限表现函子范畴. 给定加法范畴 \mathcal{C} , 记 $\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$ 是有限表现函子范畴. 这是预层范畴 $\mathbf{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab})$ 的全子范畴, 对象是

$$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}, \quad F \simeq \mathrm{coker}((- , X)_{\mathcal{C}} \xrightarrow{(-, f)_{\mathcal{C}}} (- , Y)_{\mathcal{C}}). \quad (1.1.4)$$

若 \mathcal{C} 有弱核, 则 $\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$ 是 Abel 范畴 (Lemma 2.1.6., [Kra22]). 记米田嵌入 $\mathbb{Y} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$, 对任意 Abel 范畴 \mathcal{D} , 有函子

$$\mathbb{Y}^* : \mathbf{Funct}(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}, \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \quad G \mapsto G \circ \mathbb{Y}. \quad (1.1.5)$$

此时, \mathbb{Y}^* , 诱导了两则函子范畴的等价:

1. (Lemma 2.1.7, [Kra22]). 左侧的右正合函子, 与右侧的所有函子;
2. (Lemma 2.1.8, [Kra22]). 左侧的正合函子, 与右侧保持弱核的函子.

例子 1.1.8. (Abel 范畴的局部化序列). 给定 Abel 范畴 \mathcal{A} , 函子 $\mathbb{Y} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$ 存在左伴随:

$$\mathbf{Nat}[F, \mathbb{Y}(M)] = \mathbf{Nat}[\mathrm{cok}(-, f)_{\mathcal{A}}, (-, M)_{\mathcal{A}}] \simeq \ker \mathbf{Nat}[(-, f)_{\mathcal{A}}, (-, M)_{\mathcal{A}}] \quad (1.1.6)$$

$$\simeq \ker((f, M)_{\mathcal{A}}) \simeq (\mathrm{cok} f, M)_{\mathcal{A}}. \quad (1.1.7)$$

记左伴随 $Q : \mathbf{mod}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$, $\mathrm{cok}(-, f) \mapsto \mathrm{cok} f$. 记 $\mathrm{eff}(\mathcal{A}) := \ker Q \subseteq \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$ 是 Abel 子范畴, 对象类是 $\{\mathrm{cok}(-, f) \mid f \text{ 满态射}\}$. 此时有如如下 Abel 范畴的函子序列

$$\mathrm{eff}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{mod}_{\mathcal{A}} \begin{array}{c} \xrightarrow{Q} \\ \xleftarrow{\mathbb{Y}} \end{array} \mathcal{A}. \quad (1.1.8)$$

引理 1.1.9. 式 (1.1.8) 中, Q 是正合的.

证明. 显然 $Q \circ \mathbb{Y}$ 是范畴等价, 从而保持弱核. 依照 例 1.1.7, Q 是正合的. □

引理 1.1.10. 式 (1.1.8) 中, Q 诱导了范畴等价 $\mathcal{A} \simeq \frac{\mathbf{mod}_{\mathcal{A}}}{\mathrm{eff}(\mathcal{A})}$.

证明. 记 $S \subseteq \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$ 为一切在 Q 下可逆的映射. 局部化给出分解

$$\mathbf{mod}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{Q_0} \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}[S^{-1}] \xrightarrow{\overline{Q}} \mathcal{A}. \quad (1.1.9)$$

下证明 \overline{Q} 是范畴等价, 其拟逆是 $Q_0 \circ \mathbb{Y}$.

1. 一方面, $\overline{Q} \circ (Q_0 \circ \mathbb{Y}) = Q \circ \mathbb{Y}$ 自等价函子;
2. 另一方面, 需要证明 $(Q_0 \circ \mathbb{Y}) \circ \overline{Q}$ 是自等价函子. 由于 Q_0^* 诱导了函子范畴同构, 故只需证明 $(1_{\mathbf{mod}_{\mathcal{A}}[S^{-1}]} \circ Q_0) \rightarrow ((Q_0 \circ \mathbb{Y}) \circ \overline{Q}) \circ Q_0$ 是自然同构. 事实上, 这一自然变换就是 $Q_0 \eta$. 伴随的三角恒等式说明 $Q \eta : Q \circ \mathbb{Y} \circ Q$ 是一族自然同构. 由局部化的泛性质, $Q_0 \eta$ 是自然同构.

$\mathrm{eff}(\mathcal{A})$ 是正合函子的核, 从而是 Serre 子范畴. □

以上范畴等价也称 Auslander 公式 (细节见 [Len97]). Auslander 的原始动机是研究模范畴 \mathbf{mod}_{Λ} 的同调理论, 其中 Λ 是 Artin 代数.

例子 1.1.11. 给定凝聚环 R , 即使得 \mathbf{mod}_R 是 Abel 范畴的环. 记有限表现函子范畴 $\mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R}$, 定义赋值函子

$$\mathrm{ev}_R : \mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R} \rightarrow \mathbf{mod}_R, \quad F \mapsto F(R). \quad (1.1.10)$$

函子 ev_R 是正合的, 且是米田嵌入 $\mathbb{Y} : \mathbf{mod}_R \rightarrow \mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R}$ 的左伴随. 记子范畴 $(\mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R})_0 := \ker(\mathrm{ev}_R)$, 则 ev_R 诱导了范畴等价

$$\mathbf{mod}_R \simeq \frac{\mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R}}{(\mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R})_0}. \quad (1.1.11)$$

式 (1.1.8) 中的 $\mathrm{eff}(\mathcal{A})$ 是一类“衡量缺陷”的函子, 这是建立导出函子的工具之一.

引理 1.1.12. (Serre 子范畴的局部化序列, 引理 2.2.10., [Kra22]). 这一定理是对式 (1.1.8) 的推广. 假定 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是 Serre 子范畴, $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}$ 是局部化. 假定 Q 存在右伴随函子 Q' , 如下图所示:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{I} & \mathcal{A} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{A}/\mathcal{B} \\ & \xleftarrow{I'} & & \xleftarrow{Q'} & \end{array} \quad (1.1.12)$$

此时, Q' 是全忠实的. 单位 $\eta : X \rightarrow Q'QX$ 在局部化范畴中可逆, 即, 下图是函子的正合列

$$0 \rightarrow X' \rightarrow X \xrightarrow{\eta_X} Q'QX \rightarrow X'' \rightarrow 0, \quad X', X'' \in \mathcal{B}. \quad (1.1.13)$$

特别地, $X \mapsto X'$ 是 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ 的右伴随.

例子 1.1.13. 由引理 1.1.12, 将式 (1.1.8) 中 $\mathrm{eff}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$ 的右伴随选取如下:

$$\mathbf{mod}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathrm{eff}(\mathcal{A}), \quad \mathrm{coker}((- , f)_{\mathcal{A}}) \mapsto \mathrm{coker}((- , f_1)_{\mathcal{A}}); \quad f_1 : X \twoheadrightarrow \mathrm{im} f. \quad (1.1.14)$$

推论 1.1.14. (粘合). 引理 1.1.12 及其对偶定理给出以下结论: 对 Abel 范畴的 Serre 子范畴 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, 记局部化 $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{I''} & & \xleftarrow{Q''} & \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{I} & \mathcal{A} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{A}/\mathcal{B} \\ & \xleftarrow{I'} & & \xleftarrow{Q'} & \end{array} \quad (1.1.15)$$

若 Q 有左伴随 Q'' , 则 Q'' 是全忠实的, 且余单位 $\delta_Y : QQ''Y \rightarrow Y$ 在局部化范畴中可逆, $I'' : Y \mapsto \mathrm{cok}(\delta_Y)$ 是 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ 的左伴随. 对偶地, 若 Q 有右伴随 Q' , 则 Q' 是全忠实的, 且单位 $\eta_X : X \rightarrow Q'QX$ 在局部化范畴中可逆, $I' : X \mapsto \ker(\eta_X)$ 是 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ 的右伴随. 用 I' 与 I'' 重新表述正合列, 得

$$0 \rightarrow II'X \rightarrow X \rightarrow Q'QX, \quad Q''QX \rightarrow X \rightarrow II''X \rightarrow 0, \quad X \in \mathcal{A}. \quad (1.1.16)$$

例子 1.1.15. 粘合理论的动机是层的拓扑六函子. 记 X 是拓扑空间, $Z \subseteq X$ 是闭子空间, $U := X \setminus Z$. 记 $\mathbf{Sh}(X), \mathbf{Sh}(Z), \mathbf{Sh}(U)$ 分别是 X, Z, U 上 Abel 群值的层范畴. 记包含映射 $i : Z \rightarrow X, j : U \rightarrow X$. 则有如下粘合图:

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j_!} & \\ \mathbf{Sh}(Z) & \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathbf{Sh}(X) & \xrightarrow{j^* = j^!} & \mathbf{Sh}(U) \\ & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} & \end{array} \quad (1.1.17)$$

特别地, 有 ses

$$0 \rightarrow j_! j^! F \rightarrow F \rightarrow i_* i^* F \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow i_! i^* G \rightarrow G \rightarrow j_* j^* G. \quad (1.1.18)$$

一般地, 第二个式子未必右正合. 当 G 是松弛层时, 第二个式子右正合.

定义 1.1.16. (预包络, 反变有限). 给定加法范畴 \mathcal{C} 与对象类 \mathcal{X} .

1. 一个右 \mathcal{X} 逼近是态射 $f: X \rightarrow C$ 使得 $X \in \mathcal{X}$, 且对任意 $X' \in \mathcal{X}$, 态射 $(X', f): (X', X) \rightarrow (X', C)$ 是满的. 换言之, $(-, X) \xrightarrow{p^\circ} ((-)|_{\mathcal{X}}, C)$ 是预层范畴中的投射预盖.
2. \mathcal{X} 是反变有限的, 若对任意 $C \in \mathcal{C}$, 存在右 \mathcal{X} 逼近.

定理 1.1.17. 假定 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是反变有限的全子加法子范畴, $\mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$ 是 Abel 范畴, 则下图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}/\mathcal{D} & \xleftarrow{p} & \mathcal{C} & \xleftarrow{i} & \mathcal{D} \\ \mathbf{mod}_{\mathcal{C}/\mathcal{D}} & \xleftarrow[p^*]{p_!} & \mathbf{mod}_{\mathcal{C}} & \xleftarrow[i^*]{i_!} & \mathbf{mod}_{\mathcal{D}} \end{array} \quad (1.1.19)$$

这是余局部化序列, 即,

- 1.

1.2 正向与反向扩张

整理自 [GNP21].

记号 1.2.1. 环 R 含幺且交换.

记号 1.2.2. 约定 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是外三角范畴的资料. f^* 与 g_* 分别是自然变换 $\mathbb{E}(f, -)$ 与 $\mathbb{E}(-, g)$.

定义 1.2.3. (投射态射, 内射态射). 态射 f 是投射的, 若 f^* 是零自然变换; 对偶地, 态射 g 是内射的, 若 g_* 是零自然变换.

备注 1.2.4. 投射态射构成范畴理想 \mathcal{P} ; 内射态射构成范畴理想 \mathcal{I} .

引理 1.2.5. 投射对象与投射态射的关系.

1. X 是投射对象, 当且仅当 1_X 是投射态射.
2. 若 f 通过投射对象分解, 则 f 是投射态射.
3. 若 \mathcal{C} 有足够投射对象, 则

$$f \text{ 是投射态射} \iff f \text{ 通过投射对象分解.} \quad (1.2.1)$$

证明. 1 与 2 显然. 下证明 3 的 \implies 方向. 若 $f: X \rightarrow Y$ 是投射态射, 则存在投射对象 P 与 deflation $p: P \rightarrow Y$. 根据六项正合列, p 与 f 互相分解. \square

定义 1.2.6. (足够投射态射). 若 deflation 是投射的, 则称之投射 deflation. 外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 有足够投射态射, 若对任意对象 $Y \in \mathcal{C}$, 存在投射 deflation $p: P \rightarrow Y$.

备注 1.2.7. 假定 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ 是由投射-内射对象构成的全子加法范畴, 构造外三角范畴的理想商范畴

$$(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s}) \rightarrow (\mathcal{C}/\mathcal{B}, \overline{\mathbb{E}}, \overline{\mathfrak{s}}). \quad (1.2.2)$$

若 \mathcal{C} 有足够投射态射, 则 \mathcal{C}/\mathcal{B} 也有足够投射态射.

证明. 理想商保持 deflation. $\mathbb{E}(f, -) = 0$ 蕴含 $\overline{\mathbb{E}}([f], -) = 0$. \square

参考文献

- [GNP21] Mikhail Gorsky, Hiroyuki Nakaoka, and Yann Palu. Positive and negative extensions in extriangulated categories, 2021. URL: <https://arxiv.org/abs/2103.12482>, arXiv:2103.12482.
- [Kra22] Henning Krause. *Homological Theory of Representations*. Number 195 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2022. doi:10.1017/9781108979108.
- [Len97] Helmut Lenzing. Auslander’s work on artin algebras. In *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings*. Canadian Mathematical Society, 1997. Lecture notes / reprint of lectures given in Trondheim, July-August. URL: https://www.researchgate.net/profile/Helmut-Lenzing/publication/239437957_Auslander's_work_on_Artin_algebras/links/55ba282008aed621de0ac5cb/Auslanders-work-on-Artin-algebras.pdf.