Caladea

外三角范畴的同调理论

张陈成

2025 年 10 月 6 日

这是几篇文章的阅读笔记.

1 同调理论

1.1 从 Auslander 公式到局部化序列

记号 1.1.1. 对加法范畴 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$, 记 $\mathbf{Funct}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是加法函子的范畴.

定义 1.1.2. (Serre 子范畴). Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是全子 Abel 范畴, 其关于子对象, 商对象与扩张封闭.

例子 1.1.3. 若 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 Abel 范畴间的正合函子, 则 $\ker F := \{A \in \mathcal{A} \mid F(A) = 0\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴. 反之, 可以对 Serre 子范畴构造局部化, 且局部化函子正合.

定理 1.1.4. (Serre 子范畴的局部化, 熟知结论). 给定 Serre 子范畴 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

1. (分式局部化). 态射类 $S \subseteq \mathsf{Mor}(\mathcal{A})$ 是构成左右分式. 其中, $f \in S$ 当且仅当 $\ker f, \operatorname{cok} f \in \mathcal{B}$. 通常将极限定义作双分式的滤过余极限:
$$(X, Y)_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} := \varinjlim_{(X', Y')} (X', Y/Y')_{\mathcal{A}}; \quad X/X', Y' \in \mathcal{B}. \tag{1.1.1}$$
2. (泛性质). 局部化 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ 是正合函子. 对任意正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, 若 $F(B) = 0$ 对任意 $B \in \mathcal{B}$ 成立, 则 F 唯一地分解为 $\mathcal{A}/\mathcal{B} \to \mathcal{C}$.

备注 1.1.5. 注意: Serre 商不是简单的加法商. 一般地, Abel 范畴关于子范畴的加法商未必是 Abel 范畴.

命题 1.1.6. 对 Serre 商 $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ 而言, $\mathcal{A}$ 中的零态射经过零对象分解. 因此, 加法商是 Serre 商的子范畴.

证明. 假定 $f : X \to Y$ 是 Serre 商范畴中的零态射. 依照 **式** (1.1.1), 存在复合的零态射
$$X' \overset{i}{\rightarrowtail} X \xrightarrow{f} Y \twoheadrightarrow Y/Y', \quad X/X', Y' \in \mathcal{B}. \tag{1.1.2}$$
往证 $\operatorname{im}(f) \in \mathcal{B}$. 只需证明 ses $0 \to \frac{X'+\ker f}{\ker f} \to \frac{X}{\ker f} \to \frac{X}{X'+\ker f} \to 0$ 的首尾两项属于 $\mathcal{B}$. 直接地, $\frac{X}{X'+\ker f}$ 是 $\frac{X}{X'}$ 的商, 从而属于 $\mathcal{B}$; 由同构定理,
$$\frac{X'+\ker f}{\ker f} \simeq \frac{X'}{X' \cap \ker f} \simeq \operatorname{im}(f \circ i) \rightarrowtail Y' \in \mathcal{B}. \tag{1.1.3}$$
□

例子 1.1.7. 有限表现函子范畴. 给定加法范畴 $\mathcal{C}$, 记 $\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$ 是有限表现函子范畴. 这是预层范畴 $\mathbf{Funct}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 的全子范畴, 对象是

$$F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Ab}, \quad F \simeq \mathrm{coker}((-,X)_{\mathcal{C}} \xrightarrow{(-,f)_{\mathcal{C}}} (-,Y)_{\mathcal{C}}). \tag{1.1.4}$$

若 $\mathcal{C}$ 有弱核, 则 $\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}$ 是 Abel 范畴 (Lemma 2.1.6., [Kra22]). 记米田嵌入 $\mathbb{Y} : \mathcal{A} \to \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$, 对任意 Abel 范畴 $\mathcal{D}$, 有函子

$$\mathbb{Y}^* : \mathbf{Funct}(\mathbf{mod}_{\mathcal{C}}, \mathcal{D}) \to \mathbf{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \quad G \mapsto G \circ \mathbb{Y}. \tag{1.1.5}$$

此时, $\mathbb{Y}^*$, 诱导了两则函子范畴的等价:

1. (Lemma 2.1.7, [Kra22]). 左侧的右正合函子, 与右侧的所有函子;
2. (Lemma 2.1.8, [Kra22]). 左侧的正合函子, 与右侧保持弱核的函子.

例子 1.1.8. (Abel 范畴的局部化序列). 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$, 函子 $\mathbb{Y} : \mathcal{A} \to \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$ 存在左伴随:

$$\begin{aligned} \mathbf{Nat}[F, \mathbb{Y}(M)] = \mathbf{Nat}[\mathrm{cok}(-,f)_{\mathcal{A}}, (-,M)_{\mathcal{A}}] \quad &\simeq \ker \mathbf{Nat}[(-,f)_{\mathcal{A}}, (-,M)_{\mathcal{A}}] && (1.1.6) \\ \simeq \ker((f,M)_{\mathcal{A}}) \quad &\simeq (\mathrm{cok}\, f, M)_{\mathcal{A}}. && (1.1.7) \end{aligned}$$

记左伴随 $Q : \mathbf{mod}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}, \quad \mathrm{cok}(-,f) \mapsto \mathrm{cok}\, f$. 记 $\mathrm{eff}(\mathcal{A}) := \ker Q \subseteq \mathcal{A}$ 是 Abel 子范畴, 对象类是 $\{\mathrm{cok}(-,f) \mid f \text{ 满态射}\}$. 此时有如如下 Abel 范畴的函子序列

$$\begin{tikzcd} \mathrm{eff}(\mathcal{A}) \arrow[r] & \mathbf{mod}_{\mathcal{A}} \arrow[r, shift left, "Q"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift left, "\mathbb{Y}"] \end{tikzcd}. \tag{1.1.8}$$

引理 1.1.9. **式** (1.1.8) 中, Q 是正合的.

证明. 显然 $Q \circ \mathbb{Y}$ 是范畴等价, 从而保持弱核. 依照 **例** 1.1.7, Q 是正合的. □

引理 1.1.10. **式** (1.1.8) 中, Q 诱导了范畴等价 $\mathcal{A} \simeq \frac{\mathbf{mod}_{\mathcal{A}}}{\mathrm{eff}(\mathcal{A})}$.

证明. 记 $S \subseteq \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$ 为一切在 Q 下可逆的映射. 局部化给出分解

$$\mathbf{mod}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{Q_0} \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}[S^{-1}] \xrightarrow{\overline{Q}} \mathcal{A}. \tag{1.1.9}$$

下证明 $\overline{Q}$ 是范畴等价, 其拟逆是 $Q_0 \circ \mathbb{Y}$.

1. 一方面, $\overline{Q} \circ (Q_0 \circ \mathbb{Y}) = Q \circ \mathbb{Y}$ 自等价函子;
2. 另一方面, 需要证明 $(Q_0 \circ \mathbb{Y}) \circ \overline{Q}$ 是自等价函子. 由于 Q_0^* 诱导了函子范畴同构, 故只需证明 $(1_{\mathbf{mod}_{\mathcal{A}}[S^{-1}]}) \circ Q_0 \to ((Q_0 \circ \mathbb{Y}) \circ \overline{Q}) \circ Q_0$ 是自然同构. 事实上, 这一自然变换就是 $Q_0\eta$. 伴随的三角恒等式说明 $Q\eta : Q \circ \mathbb{Y} \circ Q$ 是一族自然同构. 由局部化的泛性质, $Q_0\eta$ 是自然同构.

$\mathrm{eff}(\mathcal{A})$ 是正合函子的核, 从而是 Serre 子范畴. □

以上范畴等价也称 Auslander 公式 (细节见 [Len97]). Auslander 的原始动机是研究模范畴 $\mathbf{mod}_{\Lambda}$ 的同调理论, 其中 Λ 是 Artin 代数.

例子 1.1.11. 给定凝聚环 R, 即使得 $\mathbf{mod}_R$ 是 Abel 范畴的环. 记有限表现函子范畴 $\mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R}$, 定义赋值函子

$$\mathrm{ev}_R : \mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R} \to \mathbf{mod}_R, \quad F \mapsto F(R). \tag{1.1.10}$$

函子 ev_R 是正合的, 且是米田嵌入 $\mathbb{Y} : \mathbf{mod}_R \to \mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R}$ 的左伴随. 记子范畴 $(\mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R})_0 := \ker(\mathrm{ev}_R)$, 则 ev_R 诱导了范畴等价

$$\mathbf{mod}_R \simeq \frac{\mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R}}{(\mathbf{mod}_{\mathbf{mod}_R})_0}. \tag{1.1.11}$$

式 (1.1.8) 中的 $\mathrm{eff}(\mathcal{A})$ 是一类"衡量缺陷"的函子, 这是建立导出函子的工具之一.

引理 1.1.12. (Serre 子范畴的局部化序列, 引理 2.2.10., [Kra22]). 这一定理是对 式 (1.1.8) 的推广. 假定 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是 Serre 子范畴, $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ 是局部化. 假定 $\mathcal{Q}$ 存在右伴随函子 Q', 如下图所示:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left, "I"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift left, dashed, "I'"] \arrow[r, shift left, "Q"] & \mathcal{A}/\mathcal{B} \arrow[l, shift left, "Q'"] \end{tikzcd}. \tag{1.1.12}$$

此时, Q' 是全忠实的. 单位 $\eta : X \to Q'QX$ 在局部化范畴中可逆, 即, 下图是函子的正合列

$$0 \to X' \to X \xrightarrow{\eta_X} Q'QX \to X'' \to 0, \quad X', X'' \in \mathcal{B}. \tag{1.1.13}$$

特别地, $X \mapsto X'$ 是 $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 的右伴随.

例子 1.1.13. 由 引理 1.1.12, 将 式 (1.1.8) 中 $\mathrm{eff}(\mathcal{A}) \to \mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$ 的右伴随选取如下:

$$\mathbf{mod}_{\mathcal{A}} \to \mathrm{eff}(\mathcal{A}), \quad \mathrm{coker}((-, f)_{\mathcal{A}}) \mapsto \mathrm{coker}((-, f_1)_{\mathcal{A}}); \quad f_1 : X \twoheadrightarrow \mathrm{im}\, f. \tag{1.1.14}$$

推论 1.1.14. (粘合). 引理 1.1.12 及其对偶定理给出以下结论: 对 Abel 范畴的 Serre 子范畴 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, 记局部化 $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "I" description] & \mathcal{A} \arrow[l, bend right, dashed, "I''"'] \arrow[l, bend left, dashed, "I'"] \arrow[r, "Q" description] & \mathcal{A}/\mathcal{B} \arrow[l, bend right, "Q''"'] \arrow[l, bend left, "Q'"] \end{tikzcd}. \tag{1.1.15}$$

若 Q 有左伴随 Q'', 则 Q'' 是全忠实的, 且余单位 $\delta_Y : QQ''Y \to Y$ 在局部化范畴中可逆, $I'' : Y \mapsto \mathrm{cok}(\delta_Y)$ 是 $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 的左伴随. 对偶地, 若 Q 有右伴随 Q', 则 Q' 是全忠实的, 且单位 $\eta_X : X \to Q'QX$ 在局部化范畴中可逆, $I' : X \mapsto \ker(\eta_X)$ 是 $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 的右伴随. 用 I' 与 I'' 重新表述正合列, 得

$$0 \to II'X \to X \to Q'QX, \quad Q''QX \to X \to II''X \to 0, \quad X \in \mathcal{A}. \tag{1.1.16}$$

例子 1.1.15. 粘合理论的动机是层的拓扑六函子. 记 X 是拓扑空间, $Z \subseteq X$ 是闭子空间, $U := X \setminus Z$. 记 $\mathbf{Sh}(X), \mathbf{Sh}(Z), \mathbf{Sh}(U)$ 分别是 X, Z, U 上 Abel 群值的层范畴. 记包含映射 $i : Z \to X, j : U \to X$. 则有如下粘合图:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sh}(Z) \arrow[r, "i_* = i_!" description] & \mathbf{Sh}(X) \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^* = j^!" description] & \mathbf{Sh}(U) \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}. \tag{1.1.17}$$

特别地, 有 ses

$$0 \to j_! j^! F \to F \to i_* i^* F \to 0, \quad 0 \to i_! i^* G \to G \to j_* j^* G. \tag{1.1.18}$$

一般地, 第二个式子未必右正合. 当 G 是松弛层时, 第二个式子右正合.

定义 1.1.16. (预包络, 反变有限). 给定加法范畴 $\mathcal{C}$ 与对象类 $\mathcal{X}$.

1. 一个右 $\mathcal{X}$ 逼近是态射 $f : X \to C$ 使得 $X \in \mathcal{X}$, 且对任意 $X' \in \mathcal{X}$, 态射 $(X', f) : (X', X) \to (X', C)$ 是满的. 换言之, $(-, X) \xrightarrow{p\circ} ((-)|_{\mathcal{X}}, C)$ 是预层范畴中的投射预盖.

2. $\mathcal{X}$ 是反变有限的, 若对任意 $C \in \mathcal{C}$, 存在右 $\mathcal{X}$ 逼近.

定理 1.1.17. 假定 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是反变有限的全子加法子范畴, $\mathbf{mod}_{\mathcal{A}}$ 是 Abel 范畴, 则有下图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}/\mathcal{D} & \mathcal{C} \arrow[l, "p"'] & \mathcal{D} \arrow[l, "i"'] \\ \mathbf{mod}_{\mathcal{C}/\mathcal{D}} \arrow[r, shift right, "p^*"'] & \mathbf{mod}_{\mathcal{C}} \arrow[l, shift right, "p_!"'] \arrow[r, shift right, "i^*"'] & \mathbf{mod}_{\mathcal{D}} \arrow[l, shift right, "i_!"'] \end{tikzcd}. \tag{1.1.19}$$

这是余局部化序列, 即,

1. $(p_!, p_*)$ 与 $(i_!, i^*)$ 是伴随对;

2. p^* 与 i^* 是全忠实的;

3. $\operatorname{im} p^* = \ker i^*$.

证明. i^* 与 p^* 仅改变输入, 不改变输出, 从而是预层范畴的正合函子. □

1.2 正向与反向扩张

整理自 [GNP21].

记号 1.2.1. 环 R 含幺且交换.

记号 1.2.2. 约定 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是外三角范畴的资料. f^* 与 g_* 分别是自然变换 $\mathbb{E}(f, -)$ 与 $\mathbb{E}(-, g)$.

定义 1.2.3. (投射态射, 内射态射). 态射 f 是投射的, 若 f^* 是零自然变换; 对偶地, 态射 g 是内射的, 若 g_* 是零自然变换.

备注 1.2.4. 投射态射构成范畴理想 $\mathcal{P}$; 内射态射构成范畴理想 $\mathcal{I}$.

引理 1.2.5. 投射对象与投射态射的关系.

1. X 是投射对象, 当且仅当 1_X 是投射态射.

2. 若 f 通过投射对象分解, 则 f 是投射态射.

3. 若 $\mathcal{C}$ 有足够投射对象, 则

$$f \text{ 是投射态射} \iff f \text{ 通过投射对象分解}. \tag{1.2.1}$$

证明. 1 与 2 显然. 下证明 3 的 $\Longrightarrow$ 方向. 若 $f : X \to Y$ 是投射态射, 则存在投射对象 P 与 deflation $p : P \to Y$. 根据六项正合列, p 与 f 互相分解. □

定义 1.2.6. (足够投射态射). 若 deflation 是投射的, 则称之投射 deflation. 外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 有足够投射态射, 若对任意对象 $Y \in \mathcal{C}$, 存在投射 deflation $p : P \to Y$.

备注 1.2.7. 假定 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ 是由投射-内射对象构成的全子加法范畴, 构造外三角范畴的理想商范畴

$$(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s}) \to (\mathcal{C}/\mathcal{B}, \overline{\mathbb{E}}, \bar{\mathfrak{s}}). \tag{1.2.2}$$

若 $\mathcal{C}$ 有足够投射态射, 则 $\mathcal{C}/\mathcal{B}$ 也有足够投射态射.

证明. 理想商保持 deflation. $\mathbb{E}(f, -) = 0$ 蕴含 $\overline{\mathbb{E}}([f], -) = 0$. □

参考文献

[GNP21] Mikhail Gorsky, Hiroyuki Nakaoka, and Yann Palu. Positive and negative extensions in extriangulated categories, 2021. URL: https://arxiv.org/abs/2103.12482, arXiv:2103.12482.

[Kra22] Henning Krause. *Homological Theory of Representations*. Number 195 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2022. doi:10.1017/9781108979108.

[Len97] Helmut Lenzing. Auslander's work on artin algebras. In *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings*. Canadian Mathematical Society, 1997. Lecture notes / reprint of lectures given in Trondheim, July-August. URL: https://www.researchgate.net/profile/Helmut-Lenzing/publication/239437957_Auslander's_work_on_Artin_algebras/links/55ba282008aed621de0ac5cb/Auslanders-work-on-Artin-algebras.pdf.