The Quantum Theory of Fields

Volume II Modern Applications

Steven Weinberg（著）
University of Texas at Austin

张驰（译）

目　　录

记　号

拉丁指标i, j, k等一般取遍三维空间坐标指标, 通常取做$1, 2, 3$. 在有特殊说明的情况下, 它们取遍值1,2,3,4, 其中$x^4 = it$.

希腊指标μ, ν等, 从希腊字母表的中间开始, 一般取遍四维时空坐标指标$1, 2, 3, 0$, 其中x^0是时间坐标.

希腊指标α, β等, 从希腊字母表的开头开始, 一般取遍对称代数的生成元.

重复指标一般表示求和, 除非另有说明.

时空度规$\eta_{\mu\nu}$是对角的, 其元素为$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$.

达朗贝尔算符定义为$\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$, 其中$\nabla^2$是拉普拉斯算符$\partial^2/\partial x^i \partial x^i$.

列维-奇维塔张量$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$定义为全反对称量, 并有$\epsilon^{0123} = +1$.

空间三矢由黑体字母标记.

任意矢量上的"帽子"代表相应的单位矢量: 因此$\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$。

任意量上加点代表该量对时间的导数.

狄拉克矩阵γ_μ的定义满足$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$. 并且$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\beta = i\gamma^0$.

阶跃函数$\theta(s)$: 当$s > 0$时为1, $s < 0$时为0.

矩阵或矢量A的复共轭、转置、厄米共轭分别记为A^*、A^T以及$A^\dagger = A^{*T}$. 算符O的厄米共轭记为$O^\dagger$, 除了强调一个算符的矩阵或矢量是非转置的才用星号. 在方程末尾的+H.c.或c.c.表示前面几项的厄米共轭或复共轭. 狄拉克旋量u上加横线定义为$\bar{u} = u^\dagger\beta$. 场χ在Batalin-Vilkovisky体系中的反场记为$\chi^\ddagger$而不是χ^*, 这是为了与普通的复共轭或反粒子场相区分.

使用的单位值通常取$\hbar$和c为1. 自始至终$-e$是电子的合理电荷, 使得精细结构常数是$\alpha =$

$e^2/4\pi \simeq 1/137$.

引用数据末尾括号中的数字给出了引用数据末尾数字的不确定度, 在没有额外指明的情况下, 实验数据取自'Review of Particle Properties,' *Phys. Rev.* **D50**, 1173 (1994).

第 15 章　非阿贝尔规范理论

已经成功证明了, 描述真实世界的量子场论都是非阿贝尔规范理论, 这些理论所基于的规范不变性原理要比量子电动力学的$U(1)$规范不变性更加普遍. 我们在8.1节的末尾概述了, 规范场的存在以及它的一些性质源于在定域变换下的不变性原理, 而这些理论与电动力学共享了这一迷人的特征. 在电动力学中, 电荷为e_n的场$\psi_n(x)$经历了$\Lambda(x)$任意的规范变换$\psi_n(x) \to \exp(ie_n\Lambda(x))\psi_n(x)$. 由于$\partial_\mu\psi_n(x)$并非像$\psi_n(x)$那样变换, 我们必须要引入场$A_\mu(x)$, 这个场有规范变换性质$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$, 我们用它来构建规范协变导数$\partial_\mu\psi_n(x) - ie_nA_\mu(x)\psi_n(x)$, 这个协变导数像$\psi_n(x)$那样变换, 因而可以用它和$\psi_n(x)$构建规范不变拉格朗日量. 以类似的方法, 广义相对论中的引力场$g_{\mu\nu}(x)$, 它的存在以及一些性质源于广义坐标变换下的一个对称性原理.* 给定这些不同的先例后, 很自然地应该将定域规范不变性拓广至定域非阿贝尔规范变换下的不变性.

在杨振宁和Mills1954年的原始工作中,[1] 非阿贝尔规范群被取成了同位旋旋转的$SU(2)$群, 而类似于光子场的矢量场则解释成相互作用很强的单位同位旋矢量介子的场. 这一设想立刻就遇到了障碍, 即这些矢量玻色子的质量必须为零, 就像光子一样, 而任何这样的粒子似乎应该早就被探测到了. 另一问题是, 像当时所有的强相互作用理论一样, 没有什么方法可以处理它; 理论过大的耦合常数似乎阻止了使用任何的微扰论.

规范理论不久就被推广至任意的非阿贝尔规范群,[2] 并且继续在数学上研究它们的量子化, 尤其是Feynman,[3] Faddeev和Popov,[4] 以及De Witt,[5] 部分的出发点是作为更难的量子化广义相对论问题的热身练习. 他们证明了通过简单地观察拉格朗日量所获得朴素Feynman规则需要被额外的"鬼"圈补足. 然而, 知道20世纪60年代后期, 这些理论的物理相关性才开始得以理解. 最后发现, 所有可观测的基本粒子相互作用都是由定域规范对称性所附带的矢量粒子生成的; 相应的自旋1粒子要么非常重, 这是规范对称性自发破缺的结果, 要么被"困住"了, 这是耦合常数在大尺度上升高后的结果. 这些事情将分别是第21章和第18章的课题. 在本章, 我们将探索非阿贝尔规范理论的公式化表述, 并研究如何推导出它们的Feynman规则.

15.1　规范不变性

我们假定我们理论的拉格朗日量在物质场$\psi_\ell(x)$的一组无限小变换

$$\delta\psi_\ell(x) = i\,\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_\ell{}^m\psi_m(x) \tag{15.1.1}$$

下不变, 其中t_α为某组独立的常数矩阵**, 并且无限小参量$\epsilon^\alpha(x)$为实, 允许该参量(像电动力学

*当然, 定域规范不变性与广义协变性都可以以一种平庸的方式实现, 即把$A_\mu(x)$和$g_{\mu\nu}(x)$分别取为用来表征相位选择和坐标系选择的非动力学c-数函数. 当我们将$A_\mu(x)$和$g_{\mu\nu}(x)$处理成在计算S-矩阵元时要积掉的动力学场时, 这些对称性在物理上变得重要.

**在本书中, 我们一般将用字母α, β等来标记对称性生成元, 这些字母取自希腊字母表的开头, 以便与取自希腊字母的中间用来标记时空坐标的μ, ν等相区分. 在后面, 我们通常会用取自拉丁字母表开头的字母a, b等来标记破缺对称性的生成元, 而用取自拉丁字母表中间的字母i, j等来标记未破缺对称性的生成元.

中的规范变换那样)依赖于时空中的位置. 我们假定这些对称变换是一Lie群的无限小部分; 正如在2.2节中所证明的, 这要求t_α服从对易关系

$$[t_\alpha, t_\beta] = i\,C^\gamma{}_{\alpha\beta} t_\gamma\ , \tag{15.1.2}$$

其中$C^\gamma{}_{\alpha\beta}$是一组实数, 称为群的结构常数. 对易子的反对称立刻就告诉我们, 结构常数同样是反对称的:

$$C^\gamma{}_{\alpha\beta} = -C^\gamma{}_{\beta\alpha}\ . \tag{15.1.3}$$

另外, 从Jacobi等式

$$0 = \Big[[t_\alpha, t_\beta], t_\gamma\Big] + \Big[[t_\gamma, t_\alpha], t_\beta\Big] + \Big[[t_\beta, t_\gamma], t_\alpha\Big] \tag{15.1.4}$$

我们看到这些C满足进一步的约束

$$0 = C^\delta{}_{\alpha\beta} C^\epsilon{}_{\delta\gamma} + C^\delta{}_{\gamma\alpha} C^\epsilon{}_{\delta\beta} + C^\delta{}_{\beta\gamma} C^\epsilon{}_{\delta\alpha}\ . \tag{15.1.5}$$

任何一组满足方程(15.1.3)和(15.1.5)的常数$C^\gamma{}_{\alpha\beta}$至少定义了一组矩阵$t^{\mathrm{A}}{}_\alpha$:

$$(t^{\mathrm{A}}{}_\alpha)^\beta{}_\gamma \equiv -i\,C^\beta{}_{\gamma\alpha}\ , \tag{15.1.6}$$

它们满足含有结构常数$C^\gamma{}_{\alpha\beta}$的对易关系(15.1.2):

$$[t^{\mathrm{A}}{}_\alpha, t^{\mathrm{A}}{}_\beta] = i\,C^\gamma{}_{\alpha\beta} t^{\mathrm{A}}{}_\gamma\ . \tag{15.1.7}$$

这称为结构常数为$C^\alpha{}_{\beta\gamma}$的Lie群的“伴随”(或“正则”)表示.

例如, 在原始的Yang-Mills理论中, 物质场是由质子场ψ_p和中子ψ_n组成的二重态

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

而t_α, 其中$\alpha = 1, 2, 3$, 是同位旋矩阵

$$t_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad t_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad t_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

它们满足

$$C^\gamma{}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta}$$

的对易关系(15.1.2), 其中, 同往常一样, 如果γ, α, β是1,2,3的偶置换或奇置换, 则$\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$分别是$+1$或$-1$, 如果是其它情况, 则$\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$为零. 我们发现这与3维旋转群的Lie代数(2.4.18)相同; 这里的矩阵构建了我们所公认的该Lie代数的自旋1/2表示. 伴随表示的矩阵(15.1.6)在这里是(处在行和列标记为1,2,3的基下):

$$t_1^{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}\ , \qquad t_2^{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}\ , \qquad t_3^{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ .$$

这是旋转群Lie代数的自旋1表示.

我们现在来考察构建在变换(15.1.1)下不变的拉格朗日量需要什么. 如果不存在作用在场上的导数项, 这个任务将是非常简单的——物质场的任何函数, 只要它在ϵ^α为常数的变换(15.1.1)下是不变的, 那么它在ϵ^α为时空坐标的任意实函数的变换(15.1.1)下也将是不变的. 如果拉格朗日量包含场的导数项(正如它所必须的), 就不会是这种情况, 这是因为有了位置相关函数$\epsilon^\alpha(x)$. 物质场的导数就不会像场本身那样进行变换. 对方程(15.1.1)取微分给出

$$\delta\Big(\partial_\mu\psi_\ell(x)\Big) = i\,\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_\ell{}^m\Big(\partial_\mu\psi_m(x)\Big) + i\Big(\partial_\mu\epsilon^\alpha(x)\Big)(t_\alpha)_\ell{}^m\psi_m(x)\;. \tag{15.1.8}$$

为了使拉格朗日量不变, 我们需要一个场$A^\alpha{}_\mu$, 它的变换规则中包含一项$\partial_\mu\epsilon^\alpha$, 这一项可以用来抵消方程(15.1.8)中的第二项. 既然这个场携带一个α指标, 我们希望它也经历一个类似方程(15.1.1)的矩阵变换, 只不过将t_α替换成伴随矩阵表示(15.1.6). 因此, 我们先试验性地取新“规范”场的变换关系为

$$\delta A^\beta{}_\mu = \partial_\mu\epsilon^\beta + i\,\epsilon^\alpha(t^{\mathrm{A}}{}_\alpha)^\beta{}_\gamma A^\gamma{}_\mu$$

或者, 利用方程(15.1.6),

$$\delta A^\beta{}_\mu = \partial_\mu\epsilon^\beta + C^\beta{}_{\gamma\alpha}\epsilon^\alpha A^\gamma{}_\mu\;. \tag{15.1.9}$$

这使得我们可以构建“协变导数”:†

$$\Big(D_\mu\psi(x)\Big)_\ell = \partial_\mu\psi_\ell(x) - i\,A^\beta{}_\mu(x)(t_\beta)_\ell{}^m\psi_m(x)\;. \tag{15.1.10}$$

按计划, 方程(15.1.10)第二项中的$A^\beta{}_\mu$, 它的变换中的$\partial_\mu\epsilon^\beta$项抵消了第一项变换中正比于$\partial_\mu\epsilon^\beta$的那一项, 给我们留下

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\psi)_\ell = {}& i\,\epsilon^\alpha\,(t_\alpha)_\ell{}^m\,\partial_\mu\psi_m - i\,C^\beta{}_{\gamma\alpha}\,\epsilon^\alpha\,A^\gamma{}_\mu\,(t_\beta)_\ell{}^m\,\psi_m\\ &+ A^\gamma{}_\mu\,(t_\gamma)_\ell{}^m\,(t_\alpha)_m{}^n\,\psi_n\end{aligned}$$

或者, 使用方程(15.1.2)

$$\delta(D_\mu\psi)_\ell = i\,\epsilon^\alpha\,(t_\alpha)_\ell{}^m\,(D_\mu\psi)_m\;, \tag{15.1.11}$$

使得$D_\mu\psi$像ψ本身那样变换.

我们也需要关心一下规范场的导数. 为了消除$\partial_\nu A^\beta{}_\mu$的变换中的$\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^\beta$项, 我们就像在电动力学中那样对$\mu$和$\nu$做反对称化处理. 然而, 在$\partial_\nu A^\beta{}_\mu - \partial_\mu A^\beta{}_\nu$的变换中, 我们仍然有正比于$\epsilon(x)$的一阶导数的项, 这些项产生于方程(15.1.9)中的第二项. “协变旋度”, 即$F^\gamma{}_{\nu\mu}$, 在它的变换规则中所有这样的$\epsilon(x)$导数都互相抵消掉了, 构建它的最简单方法就是考察作用在物质场ψ上的两个协变导数的对易子:

$$\Big([D_\nu, D_\mu]\psi\Big)_\ell = -i\,(t_\gamma)_\ell{}^m F^\gamma{}_{\nu\mu}\psi_m\;, \tag{15.1.12}$$

其中

$$F^\gamma{}_{\nu\mu} \equiv \partial_\nu A^\gamma{}_\mu - \partial_\mu A^\gamma{}_\nu + C^\gamma{}_{\alpha\beta}A^\alpha{}_\nu A^\beta{}_\mu\;. \tag{15.1.13}$$

方程(15.1.12)使得$F^\gamma{}_{\nu\mu}$必须像伴随表示下的物质场那样进行变换这件事变得显然:

$$\delta\,F^\beta{}_{\nu\mu} \equiv i\,\epsilon^\alpha(t^{\mathrm{A}}{}_\alpha)^\beta{}_\gamma F^\gamma{}_{\nu\mu} = \epsilon^\alpha C^\beta{}_{\gamma\alpha}F^\gamma{}_{\nu\mu}\;. \tag{15.1.14}$$

† 正如将要在下一节所讨论的, 在写下方程(15.1.10)的同时, 我们心照不宣地假定任何像电荷这样的耦合常数因子都被吸收进t_β中, 因而也被吸收进结构常数中.

读者可以通过直接计算(利用关系(15.1.5))验证(15.1.13)中所定义的量$F^\alpha{}_{\nu\mu}$确实有简单的变换规则(15.1.14).

由于某些原因, 知道这些无限小规范变换可以被提升为有限的变换是有用的. 群元可以被一组实函数$\Lambda^\alpha(x)$参数化, 进而使得它以如下的矩阵变换作用在一个一般的物质场上

$$\psi_\ell(x) \to \psi_{\ell\Lambda}(x) = \Big[\exp\Big(i\,t_\alpha\Lambda^\alpha(x)\Big)\Big]_\ell{}^m \psi_m(x)\ . \tag{15.1.15}$$

我们希望协变导数以相同的方式进行变换:

$$(\partial_\mu - i\,t_\alpha A^\alpha{}_{\mu\Lambda})\psi_\Lambda = \exp(it_\alpha\Lambda^\alpha)(\partial_\mu - it_\alpha A^\alpha{}_\mu)\psi\ , \tag{15.1.16}$$

所以我们必须给$A^\alpha{}_\mu$强加变换规则$A^\alpha{}_\mu \to A^\alpha{}_{\mu\Lambda}$, 使得

$$\partial_\mu \exp(it_\beta\Lambda^\beta) - i\,t_\beta\ \exp(it_\alpha\Lambda^\alpha)A^\beta{}_{\mu\Lambda} = -i\ \exp(it_\alpha\Lambda^\alpha)t_\beta A^\beta{}_\mu$$

或者, 以另一种形式

$$t_\alpha A^\alpha{}_{\mu\Lambda} = \exp(it_\beta\Lambda^\beta)t_\alpha A^\alpha{}_\mu \exp(-it_\beta\Lambda^\beta) - i\Big[\partial_\mu \exp(it_\beta\Lambda^\beta)\Big]\exp(-it_\beta\Lambda^\beta)\ . \tag{15.1.17}$$

在$\Lambda^\alpha(x)$是一个无限小$\epsilon^\alpha(x)$的极限下, 方程(15.1.15)和(15.1.17)退化成之前的变换规则(15.1.1)和(15.1.9).

从方程(15.1.17)中, 我们可以看到, 通过对$\Lambda^\beta(x)$的合适选择, 总可以使$A^\alpha{}_{\mu\Lambda}(x)$在任意一个点处为零, 记该点$x = z$. (简单地令$\Lambda^\alpha(z)$为零, 并在$x = z$处令$\partial\Lambda^\alpha(x)/\partial x^\mu = -A^\alpha{}_\mu(x)$.) 另外, 总可以对$\Lambda^\beta(x)$进行选择, 使得$A^\alpha{}_{\mu\Lambda}(x)$的任意一个时空分量对于所有的$\alpha$至少在任意一个给定点邻近的有限区域内处处为零. 例如, 为了使$A^\alpha{}_{3\Lambda}(x)$为零, 我们必须要解参量$\Lambda^\beta(x)$的如下一阶常微分方程组:

$$\partial_3 \exp(it_\beta\Lambda^\beta) = -i\exp(it_\beta\Lambda^\beta)t_\alpha A^\alpha{}_3\ , \tag{15.1.18}$$

该方程组至少在任意一个给定点邻近的有限区域内有一个解.

然而, 一般而言, 不可能通过选择$\Lambda^\alpha(x)$使得$A^\alpha{}_{\mu\Lambda}(x)$的4个分量在一个有限区域内都为零. 由于这个原因, 我们将不得不止步于偏微分方程组

$$\partial_\mu \exp(it_\beta\Lambda^\beta) = -i\ \exp(it_\beta\Lambda^\beta)t_\alpha A^\alpha{}_\mu\ , \tag{15.1.19}$$

除非满足一定的可积性条件, 否则这个方程组是解不出来的. 特别地, 如果$A^\alpha{}_{\mu\Lambda}$处处为零, 那么$F^\alpha{}_{\mu\nu\Lambda}$也将是如此, 但是, 由于场强的变换是齐次的, 仅当$F^\alpha{}_{\mu\nu}$为零时, $F^\alpha{}_{\mu\nu\Lambda}$才能等于零. 如果存在一个规范变换使得$A^\alpha{}_\mu$处处为零, 则称该规范场为“纯规范”场. 不难证明, $F^\alpha{}_{\mu\nu}$处处为零是$A^\alpha{}_\mu(x)$在任意单连通区域可作为纯规范场进行表述的充分必要条件.[6]

* * *

在这里构造在规范变换下简单变换的客体, 与在广义相对论中构造广义坐标变换下协变的客体, 这两种构造之间存在着深刻的类比. 正如我们使用规范场构造物质场的协变导数$D_\mu\psi_\ell$, 它有着与物质场本身相同的规范变换性质, 我们使用仿射联络$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(x)$来构造张量$T^{\rho\sigma\cdots}{}_{\kappa\lambda\cdots}$的协变导数:

$$T^{\rho\cdots}{}_{\kappa\cdots;\nu} \equiv \partial_\nu T^{\rho\cdots}{}_{\kappa\cdots} + \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}T^{\lambda\cdots}{}_{\kappa\cdots} + \cdots - \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}T^{\rho\cdots}{}_{\mu\cdots} - \cdots\ ,$$

其本身也是张量. 另外, 从规范场的导数中, 我们构造出了场强$F^\alpha{}_{\mu\nu}$, 它的变换性质与属于规范群伴随表示的物质场的变换性质相同; 相应地, 从仿射联络的导数中, 我们可以构造一个量:

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta{}_{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta{}_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda{}_{\nu\eta} \ ,$$

这个量作为一个张量变换, 即Riemann-Christoffel曲率张量. 两个规范协变导数D_μ和D_ν, 它们的对易子可以表示成场强张量$F^\alpha{}_{\mu\nu}$的形式; 类似地, 相对于x^ν和x^κ的两个协变导数, 它们的对易子也可以表示成曲率张量的形式:

$$T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots;\nu;\kappa} - T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots;\kappa;\nu} = R^\lambda{}_{\sigma\nu\kappa} T^{\sigma\cdots}{}_{\mu\cdots} + \cdots - R^\sigma{}_{\mu\nu\kappa} T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots} - \cdots \ .$$

存在一个规范, 使得该规范下的规范场在一个有限单连通区域内为零, 该规范存在的充要条件是场强张量为零, 而存在一个坐标系使得仿射联络在一个有限单连通区域内为零的充要条件是, Riemann-Christoffel曲率张量为零. 这个类比在一个重要方面上失效了: 在广义相对论中, 仿射联络本身是用度规张量的一阶导数构建的, 而在规范理论中, 规范场无法表示成更基本的场.

15.2　规范理论拉格朗日量与单Lie群

规范场张量$F^\alpha{}_{\mu\nu}$, 物质场ψ以及它们的规范协变导数, 它们的变换规则不包含变换参量$\epsilon^\alpha(x)$的导数, 所以如果只用这些元素构建拉格朗日量, 并且如果它在ϵ^α为常数的整体变换下不变, 那么它在$\epsilon^\alpha(x)$为一般的位置相关函数的规范变换就是不变的. 因此, 我们假定拉格朗日量满足这些条件: 即,

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi, D_\mu\psi, D_\nu D_\mu\psi, \cdots, F^\alpha{}_{\mu\nu}, D_\rho F^\alpha{}_{\mu\nu}) \tag{15.2.1}$$

以及不变性条件:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_\ell}\, i(t_\alpha)_\ell{}^m \psi_m + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (D_\mu\psi_\ell)}\, i(t_\alpha)_\ell{}^m (D_\mu\psi)_m \\ &+ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (D_\nu D_\mu \psi)_\ell}\, i(t_\alpha)_\ell{}^m (D_\nu D_\mu\psi)_m + \cdots + \frac{\partial \mathscr{L}}{F^\beta{}_{\mu\nu}} C^\beta{}_{\gamma\alpha} F^\gamma{}_{\mu\nu} \\ &+ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial D_\rho F^\beta{}_{\mu\nu}} C^\beta{}_{\gamma\alpha} D_\rho F^\gamma{}_{\mu\nu} + \cdots = 0 \ .\end{aligned} \tag{15.2.2}$$

另一方面, 除了出现在$F^\alpha{}_{\mu\nu}$以及规范协变导数D_μ中的规范场, 拉格朗日量可以不依赖于规范场本身. 特别地, 质量项$-\frac{1}{2}m^2{}_{\alpha\beta}A_{\alpha\mu}A_\beta{}^\mu$被排除了.

我们现在将要集中考察拉格朗日量中只依赖于$F^\alpha{}_{\mu\nu}$的项. 如同电动力学中一样, 对于任何自旋为一的无质量粒子, 拉格朗日量必须要包含一个自由粒子项, 这一项是$\partial_\mu A^\alpha{}_\nu - \partial_\nu A^\alpha{}_\mu$的二次项, 而规范不变性则表明这一自由粒子项应该作为场强张量$F^\alpha{}_{\mu\nu}$的二次项的一部分出现. Lorentz不变性与流守恒表明它的形式为

$$\mathscr{L}_A = -\tfrac{1}{4}\, g_{\alpha\beta} F^\alpha{}_{\mu\nu} F^{\beta\mu\nu} \tag{15.2.3}$$

其中$g_{\alpha\beta}$是常数矩阵. 如果我们不假定宇称(或者CP或T)守恒, 那么我们也可在拉格朗日量引入如下的项

$$\mathscr{L}'_A = -\tfrac{1}{2}\, \theta_{\alpha\beta}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^\alpha{}_{\mu\nu} F^\beta{}_{\rho\sigma}$$

其中$\theta^{\alpha\beta}$是另一个常数矩阵. 这一项实际上是全导数项, 因而并不影响场方程或Feynman规则. 然而, 这样的项会有非微扰的量子力学效应, 我们会在23.6节讨论它.

在继续考察矩阵$g_{\alpha\beta}$的性质之前, 值得关注如下的事实, 在不引入相互作用的前提下, 不可能引入规范场$A^\alpha{}_\mu$的动能项, 方程(15.2.3)中的这一项源于方程(15.1.13)所定义的场强$F^\alpha{}_{\mu\nu}$的二次部分. 这是非阿贝尔规范理论类似广义相对论的又一方面, 在广义相对论中, 引力场拉格朗日量的动能部分被包含在Einstein-Hilbert拉格朗日密度——$\sqrt{g}R/8\pi G$之中, 这一项也包含引力场的自能. 两种情况下的原因是相似的: 引力场与自身相作用是因为它与任何携带能量和动量的物质相作用, 而规范场与自身相作用是因为它与任何按照规范群的非平庸表示(在伴随表示的情况下)变换的物质相作用. 这与电动力学的情况相反, 在电动力学中, 光子不携带它所相互作用的量子数——电荷, 因而对于电磁场有可能引入不需要相互作用的动能项$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

数值矩阵$g_{\alpha\beta}$可以取成对称的, 并且为了给出实的拉格朗日量必须取成实的. 为了使这一项满足规范不变性要求(15.2.2), 对于所有的δ, 我们必须有:

$$g_{\alpha\beta}F^\alpha{}_{\mu\nu}C^\beta{}_{\gamma\sigma}F^{\gamma\mu\nu}=0\ .$$

为了在不对F之间附加任何的泛函关系的情况下使其成立, 矩阵$g_{\alpha\beta}$必须满足条件:

$$g_{\alpha\beta}C^\beta{}_{\gamma\delta}=-g_{\gamma\beta}C^\beta{}_{\alpha\delta}\ . \tag{15.2.4}$$

在矩阵$g_{\gamma\beta}$上还有一个更重要的条件. 如同电动力学中一样, 正则量子化规则与量子标量积的正定性要求拉格朗日量(15.2.3)中的矩阵$g_{\alpha\beta}$必须是正定的. (即, 对于所有实的u, $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$必须是正的, 而仅当对于所有的$\alpha$有$u^\alpha=0$时, $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$才为零.) 这类似于在实场$\phi$的动能拉格朗日量$-\frac{1}{2}Z\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2$中要求, 常数$Z$必须是正定的.

矩阵$g_{\alpha\beta}$上的这些要求有着深远的含义. 它们构成了如下三个相互等价的条件中的一个:

a: 存在满足不变性条件(15.2.4)的实对称正定矩阵$g_{\alpha\beta}$.

b: 该Lie代数存在一组基(即, 一组生成元$\tilde{t}_\alpha=\mathscr{S}_{\alpha\beta}t_\beta$, 其中$\mathscr{S}$是实的非奇异矩阵), 使得结构常数$\tilde{C}^\alpha{}_{\beta\gamma}$不仅关于下指标$\beta$和$\gamma$是反对称的, 并且对所有三个指标$\alpha,\beta$和$\gamma$也是反对称的. (在这一基下, 不在上下指标$\alpha,\beta$等之间作区分将是方便的, 并将$\tilde{C}^\alpha{}_{\beta\gamma}$写成$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}$.)

c: 该Lie代数是$U(1)$子代数与交换紧致单代数的直和.*

本章附录A给出了条件**a**, **b**和**c**相互等价的证明.[7]

在继续讨论这一结果的物理含义之前, 就完备性条件再说几点将是有用的. 我们不会在这里使用这个条件, 但是紧Lie代数构成了紧Lie群的生成元: 即群的不变体积有限的群. 例如, 旋转群

---

*一些定义: Lie代数$\mathscr{G}$的子代数$\mathscr{H}$是线性空间, 该线性空间由$\mathscr{G}$的生成元t_α的特定实线性组合$t_i=\mathscr{S}_{i\alpha}t_\alpha$张开, 使得$\mathscr{H}$本身是Lie代数, 也就是说, t_i彼此之间的对易子的形式是$[t_i,t_j]=ic^k{}_{ij}t_k$. 如果整个代数$\mathscr{G}$的任何元素与子代数$\mathscr{H}$的任何元素的对易子处在子代数$\mathscr{H}$内, 则称子代数$\mathscr{H}$是不变的. 简单(简称"单")Lie代数是没有不变子代数的Lie代数. $\mathscr{G}$的$U(1)$子代数是仅有一个生成元的代数, 并且该生成元与整个代数$\mathscr{G}$的所有生成元都对易. 半单Lie代数是不含有不变阿贝尔子代数的代数, 其中不变阿贝尔子代数是指生成元彼此对易的不变子代数. 半单Lie代数是单Lie代数(但不是$U(1)$)的直和. 如果矩阵$\mathrm{Tr}\{t^A{}_\alpha t^A{}_\beta\}=-C^\gamma{}_{\alpha\delta}C^\delta{}_{\beta\gamma}$是正定的, 则称单Lie代数或半单Lie代数是紧致(简称"紧")的. 简单性与紧致性的含义与重要性将在下面进一步讨论. 称Lie代数$\mathscr{G}$是子群$\mathscr{H}_n$的直和是指, 有可能找到Lie代数$\mathscr{G}$的一个基, 其生成元为t_{na}, 使得结构常数采取形式

$$C^{\ell c}{}_{namb}=\delta_{\ell m}\delta_{mn}C^{(n)c}{}_{ab}\ ,$$

其中$C^{(n)c}{}_{ab}$是子代数$\mathscr{H}_n$的结构常数.

是紧致的; Lorentz群则不是. 作为一个不紧的单Lie代数的例子, 考察对易关系

$$[t_1,t_2]=-i\,t_3\ ,\qquad [t_2,t_3]=i\,t_1\ ,\qquad [t_3,t_1]=i\,t_2\ .$$

这里的结构常数是实的, 但不是全反对称的; 它的非零分量是

$$C^3{}_{12}=-C^3{}_{21}=-1\ ,\qquad C^1{}_{23}=-C^1{}_{32}=1\ ,\qquad C^2{}_{31}=-C^2{}_{13}=1\ .$$

方程(**??**)所给出的度规在这里是对角的, 其中元素为:

$$g_{11}=g_{22}=-g_{33}=-2\ .$$

这不是正定矩阵, 所以Lie代数不是紧致的. 事实上它是非紧群$O(2,1)$的Lie代数, 该群是两维空间一维时间中的Lorentz群.

两组相差一个实非奇异线性变换的生成元被视为张开了同一个Lie代数, 并且生成了同一个群. 这对于生成元的复线性变换是不成立的. 特别地, 通过在合适的基下改变生成元的相位, 任何单Lie代数都可以变成紧致的形式. 例如, 对于上例的Lie代数, 只需定义新的生成元$t'_1=it_1$, $t'_2=it_2$, $t'_3=t_3$, 对于这些生成元, 对易关系是

$$[t'_1,t'_2]=i\,t'_3\ ,\qquad [t'_2,t'_3]=i\,t'_1\ ,\qquad [t'_3,t'_1]=i\,t'_2\ .$$

结构常数现在就变成了实的并且是全反对称的: $C^a{}_{bc}=\epsilon_{abc}$. 这时$g_{ab}=2\delta_{ab}$, 并且代数是紧致的. 当然, 我们辨认出这是熟悉的三维旋转的紧致群$O(3)$的代数. 为了看到, 对于任何的单Lie代数这总是可能的, 注意到方程(**??**)定义的矩阵g_{ab}是实的, 对称且非奇异的, 使得可以通过一个实正交变换将其变成非零元在主对角线上的对角形式. 然后, 只需要给这一基下对应g_{ab}负对角元的所有生成元乘以因子i即可.

我们不加证明地指出, 紧Lie群的有限维表示都是幺正的, 相应地, 紧Lie代数的有限维表示都是厄密的. 更进一步, 很容易看到, 通过独立的有限维厄密矩阵t_α而拥有任意的非平庸表示的唯一Lie代数是$U(1)$与紧致单Lie代数的直和. 为了证明这一点, 我们可以简单地定义

$$g_{\alpha\beta}\equiv \mathrm{Tr}\{t_\alpha t_\beta\}\ .$$

这个矩阵显然是正定的, 这是因为$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta=\mathrm{Tr}\{(u^\alpha t_\alpha)^2\}$对于任意实的$u^\alpha$都是正的, 而仅当$u^\alpha t_\alpha=0$时才为零, 除非所有的$u^\alpha$都为零, 否则这是不可能的, 这是因为$t^\alpha$假定是独立的. 进一步的, 该$g_{\alpha\beta}$满足不变性条件(15.2.4), 这一点可以通过给对易关系(15.1.2)乘以t_δ再取迹看到; 这给出

$$i\,C^\gamma{}_{\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\{t_\gamma t_\delta\}=\mathrm{Tr}\{[t_\alpha,t_\beta]\,t_\delta\}=\mathrm{Tr}\{t_\delta t_\alpha t_\beta-t_\beta t_\alpha t_\delta\}\ ,$$

这显然关于β和δ是反对称的. 证实了**a**后, 我们可以通过之上的定理推出条件**c**, 这使得Lie代数必须是紧致简单子代数与$U(1)$子代数的直和.

现在我们回到规范理论的物理. 在本节, 从构建拉格朗日量中的规范场动能性的必要性, 我们已经推断出存在正定实对称矩阵$g_{\alpha\beta}$, 它满足不变性条件(15.2.4), 并且在本章的附录A中我们已经证明了这个结果等价于Lie代数上的一个条件, 即它是紧致简单子代数与$U(1)$子代数的直和. 对于我们的目的, 关于这一结果重要的是, 单Lie代数都是某些类型有限且维数有限的代数. 例如, 很容易看到不存在生成元少于3个的单Lie代数, 这是因为在一维或二维中, 无法存在有3个指标的全反

对称结构常数. 有了三个生成元, 通过取$C^3{}_{12}$, $C^2{}_{31}$以及$C^1{}_{23}$非零, 可以避免不变子代数. 在结构常数是实的且全反对称的基下, 显然仅有一种可能性:

$$C_{\alpha\beta\gamma} = c\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ .$$

这里的c是一任意的非零常数, 可以通过生成元的标度变换, $t_\alpha \to t_\alpha/c$, 消掉它, 所以Lie代数是

$$[t_\alpha, t_\beta] = i\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} t_\gamma\ .$$

这可以视为三维旋转群$O(3)$的Lie代数, 以及二维中的幺正幺模群$SU(2)$的Lie代数, 并且在杨振宁和Mills的原始非阿贝尔理论中用它作为基. 以同样的方式继续下去, 当生成元个数为4, 5, 6或7时, 单Lie代数是不存在的, 生成元个数为8时有一个单Lie代数, 依次类推. 数学家(尤其是Killing(基灵)和E. Cartan(埃利·嘉当))已经能够编录所有的单Lie代数. 单Lie代数的紧致形式构成了几个"典型"Lie群代数的无限类——幺正幺模群, 幺正正交群以及幺正辛群——再加上五个例外Lie群. 本章的附录B给出了这个目录.

在附录A中同样证明了, 在等价条件a, b或c下, 度规采取形式

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2}\delta_{mn}\delta_{ab} \tag{15.2.5}$$

其中g_m是实的, 而m和n用来标记简单子代数或$U(1)$子代数, 而a和b用来标记这些不变子代数的各个生成元. 我们可以通过重新调节规范场消掉常数g_m^{-2}

$$A^\mu_{ma} \to \tilde{A}^\mu_{ma} \equiv g_m^{-1} A^\mu_{ma}\ , \tag{15.2.6}$$

但另一方面, 为了保持$D_\mu\psi$和$F_\alpha{}^{\mu\nu}$的公式(15.1.10)和(15.1.13)不变, 我们必须重新定义矩阵t_α以及结构常数

$$t_{ma} \to \tilde{t}_{ma} = g_m t_{ma}\ , \tag{15.2.7}$$

$$C^{(m)}_{cab} \to \tilde{C}^{(m)}_{cab} = g_m C^{(m)}_{cab}\ . \tag{15.2.8}$$

即, 我们总可以定义规范场的标度(现在扔掉波浪符)使得方程(15.2.5)中的g_m为1:

$$g_{ab} = \delta_{ab}\ , \tag{15.2.9}$$

但另一方面, 对于每个简单子代数或$U(1)$子代数, 变换矩阵t_α和结构常数$C_{\alpha\beta\gamma}$就要包含一个未知的乘子g_m. 这些因子是规范理论的耦合常数. 或者, 在每个简单子代数或$U(1)$子代数中采取虽然任意但固定的归一化, 这有时更加方便一些, 在这种情况下, 就像因子g_m^{-2}出现在方程(15.2.5)中, 耦合常数将出现在规范场拉格朗日量(15.2.3)中.

15.3 场方程与守恒律

在方程(15.2.3)中使用矩阵$g_{\alpha\beta}$的方程(15.2.9), 全拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = -\tfrac{i}{4}\,F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha{}^{\mu\nu} + \mathscr{L}_M(\psi, D_\mu\psi)\ , \tag{15.3.1}$$

在没有规范场时, $\mathscr{L}_M(\psi,\partial_\mu\psi)$将是“物质”拉格朗日密度. 原则上, 我们可以引入$\mathscr{L}_M$对$F_{\alpha\mu\nu}$以及高阶协变导数$D_\nu D_\mu\psi$, $D_\lambda F_{\alpha\mu\nu}$等的相关性, 但是, 因为与电动力学相同的原因, 我们在这里将这些不可重整项排除在外: 正如12.3节所讨论的, 在普通的能量下, 这样的项将被某些非常大的质量项的负幂次高度抑制. 由于这个原因, 对于弱作用, 电磁作用和强作用的标准模型, 它的拉格朗日量的一般形式为(15.3.1).

规范场的运动方程在这里是

$$\begin{aligned}\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_{\alpha\nu})} &= -\partial_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\alpha\nu}}\\ &= -F_\gamma{}^{\nu\mu}C_{\gamma\alpha\beta}A_{\beta\mu} - i\,\frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial D_\nu\psi}t_\alpha\psi\end{aligned}$$

因而

$$\partial_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = -\mathscr{J}_\alpha{}^\nu\ , \tag{15.3.2}$$

其中$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$是流:

$$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu \equiv -F_\gamma{}^{\nu\mu}C_{\gamma\alpha\beta}A_{\beta\mu} - i\,\frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial D_\nu\psi}t_\alpha\psi\ . \tag{15.3.3}$$

流$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$在平常的意义下守恒

$$\partial_\nu\mathscr{J}_\alpha{}^\nu = 0\ , \tag{15.3.4}$$

这一点即可以从ψ的运动方程和不变性条件(15.2.2)中看到, 也可以, 更简单地, 从场方程(15.3.2)中直接得出.

方程(15.3.2)和(15.3.4)中导数是普通导数, 不是规范协变导数D_ν, 所以这些方程的规范不变性晦涩不明. 通过用场强的规范协变导数重写方程(15.3.2)可以使得规范不变性变得显然

$$\begin{aligned}D_\nu F_\alpha{}^{\mu\nu} &\equiv \partial_\lambda F_\alpha{}^{\mu\nu} - i(t^{\mathrm{A}}{}_\beta)_{\alpha\gamma}A_{\beta\lambda}F_\gamma{}^{\mu\nu}\\ &= \partial_\lambda F_\alpha{}^{\mu\nu} - C_{\alpha\gamma\beta}A_{\beta\lambda}F_\gamma{}^{\mu\nu}\ .\end{aligned} \tag{15.3.5}$$

这样, 方程(15.3.2)变成

$$D_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = -J_\alpha{}^\nu\ , \tag{15.3.6}$$

其中$J_\alpha{}^\nu$仅是物质场的流

$$J_\alpha{}^\nu \equiv -i\frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial D_\nu\psi}\,t_\alpha\psi\ . \tag{15.3.7}$$

如果$\mathscr{L}_M$是规范不变的, 上式就是规范协变的. 另外, 通过用算符D_ν作用方程(15.3.6), 利用对易关系

$$[D_\nu, D_\mu]F_\alpha{}^{\rho\sigma} = -i\,(t^{\mathrm{A}}{}_\gamma)_{\alpha\beta}F_{\gamma\nu\mu}F_\beta{}^{\rho\sigma} = -C_{\gamma\alpha\beta}F_{\gamma\nu\mu}F_\beta{}^{\rho\sigma}\ ,$$

我们看到$J_\alpha{}^\nu$满足规范协变守恒律

$$D_\nu J_\alpha{}^\nu = 0\ , \tag{15.3.8}$$

而不是整个流$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$所满足的平常的守恒律(15.3.4). 另外, (利用方程(15.1.5))可以直接导出等式:

$$D_\mu F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda F_{\alpha\mu\nu} = 0\ , \tag{15.3.9}$$

无论规范场是否满足场方程, 这总是成立的.

这些结果有助于强调在15.1节提到的非阿贝尔规范理论与广义相对论之间的深刻类比. 在广义相对论中, 类似于J^μ, 存在物质的能动量张量$T^\nu{}_\mu$, 它满足广义协变守恒律$T^\nu{}_{\mu;\nu}$, 并且在Einstein场方程的广义协变形式, $R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu{}_\mu R = -8\pi G T^\nu{}_\mu$中, 它在方程的右边. 然而, $T^\nu{}_\mu$在通常的意义下并不守恒: $\partial_\nu T^\nu{}_\mu$并不为零. 另一方面, 将Einstein方程左边的非线性项移至右边给出场方程[8]

$$\left(R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\nu{}_\mu R\right)_{\text{LINEAR}} = -8\pi G\,\tau^\nu{}_\mu \;,$$

其中$\tau^\nu{}_\mu$不是张量

$$\tau^\nu{}_\mu \equiv T^\nu{}_\mu + \frac{1}{8\pi G}\left(R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\nu{}_\mu R\right)_{\text{NONLINEAR}} \;,$$

类似于$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$. 同$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$一样, $\tau^\nu{}_\mu$在通常的意义下守恒

$$\partial_\nu \tau^\nu{}_\mu = 0$$

并可以视为能量和动量的流:

$$P_\mu = \int \tau^0{}_\mu\, d^3x \;.$$

因为引力场携带能量和动量, 它包含一个纯引力项; 没有这一项, $\tau^\nu{}_\mu$无法守恒. 类似地, 对于非阿贝尔群(那些$C^\gamma{}_{\alpha\beta} \neq 0$的群), 规范场携带它们所作用的量子数, 所以$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$包含一个规范场项(方程(15.3.3)右边的第一项). 因为$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$在通常的意义下守恒, 它可以视为这些量子数的流, 其中对称性生成元由下面的时间无关量给出

$$T_\alpha = \int \mathscr{J}_\alpha{}^0\, d^3x \;. \tag{15.3.10}$$

(另外, 齐次方程(15.3.9)包含协变导数, 就像广义相对论的Bianchi(比安奇)等式.) 相反, 这些复杂性都没有出现在量子电动力学中, 这是因为光子不携带它所作用的量子数, 电荷.

15.4 量子化

我们现在开始量子化前两节所描述的规范理论. 拉格朗日密度取为(15.3.1)的形式:

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha{}^{\mu\nu} + \mathscr{L}_M(\psi, D_\nu\psi) \;, \tag{15.4.1}$$

其中

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu} \;,$$
$$D_\mu\psi \equiv \partial_\mu\psi - i t_\alpha A_{\alpha\mu}\psi \;.$$

我们不能简单地令对易子等于i乘以相对应的Poisson括号就将这个理论量子化. 问题是约束中的一个. 用7.6节所描述的Dirac术语来说, 存在一个初级约束

$$\Pi_{\alpha 0} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha{}^0)} = 0 \tag{15.4.2}$$

以及$A_\alpha{}^0$的场方程所提供的次级约束:

$$\begin{aligned} -\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_{\alpha 0})} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\alpha 0}} &= \partial_\mu F_\alpha{}^{\mu 0} + F_\gamma{}^{\mu 0} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} + J_\alpha{}^0 \\ &= \partial_k \Pi_\alpha{}^k + \Pi_\gamma{}^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta k} + J_\alpha{}^0 = 0 \;, \end{aligned} \tag{15.4.3}$$

其中$\Pi_\alpha{}^k \equiv \partial\mathscr{L}/\partial(\partial_0 A_{\alpha k}) = F_\alpha{}^{k0}$是共轭于$A_{\alpha k}$的“动量”, 其中$k$在$1,2,3$之间取值. $\Pi_{\alpha 0}$与$\partial_k \Pi_\alpha{}^k + \Pi_\gamma{}^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta k} + J_\alpha{}^0$的Poisson括号为零(这是因为后一个量独立于$A_\alpha{}^0$), 所以它们是第一类约束, 这些约束不能用Dirac括号替换Poisson括号进行处理.

正如电动力学的情况, 我们通过选择规范来处理这些约束. 电动力学采用的Coulomb规范在这里将会导致一个令人不快的复杂性,* 所以我们转而在所谓的轴向规范下进行处理, 基于条件

$$A_{\alpha 3} = 0 \ . \tag{15.4.4}$$

这样, 规范场的正则变量就是$A_{\alpha i}$, i现在在1和2之间取值, 再加上它们的正则共轭

$$\Pi_{\alpha i} \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_{\alpha i})} = -F_\alpha{}^{0i} = \partial_0 A_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i} \ . \tag{15.4.5}$$

场$A_{\alpha 0}$不是独立的正则变量, 而是通过约束(15.4.3)以其它变量定义的. 为了看到这一点, 注意到“电”场场强$F_\alpha{}^{\mu 0}$是

$$F_\alpha{}^{i0} = \Pi_{\alpha i} \ , \qquad F_\alpha{}^{30} = \partial_3 A_\alpha{}^0 \ , \tag{15.4.6}$$

所以约束(15.4.3)变成

$$-(\partial_3)^2 A_\alpha{}^0 = \partial_i \Pi_{\alpha i} + \Pi_{\gamma i} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta i} + J_\alpha{}^0 \ , \tag{15.4.7}$$

这个方程(在合理的边界条件下)可以很容易地解出, 并以$\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$和$J_\alpha{}^0$的泛函给出$A_\alpha{}^0$. (我们使用了求和约定, 指标i,j等对1和2求和.) 应该注意的是, 物质场ψ_ℓ的正则共轭是

$$\pi_\ell = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \psi_\ell)} = \frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial(D_0 \psi_\ell)} \ , \tag{15.4.8}$$

所以物质流的时间分量可以仅用物质场的正则变量表示

$$J_\alpha{}^0 = -i \frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial(D_0 \psi_\ell)} (t_\alpha)_\ell{}^m \psi_m = -i \pi_\ell (t_\alpha)_\ell{}^m \psi_m \ . \tag{15.4.9}$$

因此方程(15.4.7)将给定时刻的$A_\alpha{}^0$定义为同一时刻的正则变量$\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$, π_ℓ和ψ_m的泛函.

既然我们已经找出了这一规范下的正则变量, 我们现在可以着手构建哈密顿量了. 哈密顿密度是

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= \Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathscr{L} \\ &= \Pi_{\alpha i}(F_{\alpha 0i} + \partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell \\ &\quad - \tfrac{1}{2} F_{\alpha 0i} F_{\alpha 0i} + \tfrac{1}{2} F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} + \tfrac{1}{2} F_{\alpha i3} F_{\alpha i3} \\ &\quad - \tfrac{1}{2} F_{\alpha 03} F_{\alpha 03} - \mathscr{L}_M \ . \end{aligned} \tag{15.4.10}$$

利用方程(15.4.4)和(15.4.6), 这变成

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= \mathscr{H}_M + \Pi_{\alpha i}(\partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \tfrac{1}{2} \Pi_{\alpha i} \Pi_{\alpha i} \\ &\quad + \tfrac{1}{4} F_{\alpha ij} F_{\alpha ij} + \tfrac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i} \partial_3 A_{\alpha i} - \tfrac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha 0} \partial_3 A_{\alpha 0} \ , \end{aligned} \tag{15.4.11}$$

*除了纯代数上的困难外, Coulomb规范(同其他许多规范一样)还有一个称为Gribov(格里波夫)多值性的问题:[9] 即便附加$\mathbf{A}_\alpha$在无限远处为零的条件, 对于Coulomb规范条件$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}_\alpha = 0$的每个解, 存在另一个解, 与其相差有限的规范变换. Gribov多值性不会在这里影响我们, 因为我们是在轴向规范下进行量子化的, 在轴向规范下, 这个问题是不存在的, 并且我们仅用其它规范, 例如Lorentz规范, 来生成微扰展开.

其中$\mathscr{H}_M$是物质哈密顿密度:

$$\mathscr{H}_M \equiv \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathscr{L}_M \ . \tag{15.4.12}$$

沿用9.2节所导出的一般规则, 我们现在可以用这一哈密顿密度计算作为路径积分的矩阵元, 该路径积分是对$A_{\alpha i}$, $\Pi_{\alpha i}$, ψ_ℓ和π_ℓ的路径积分, 含有权重因子$\exp(iI)$, 其中

$$I = \int d^4x \left[\Pi_{\alpha i}\partial_0 A_{\alpha i} + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathscr{H} + \epsilon\text{项}\right] , \tag{15.4.13}$$

在I中, "ϵ项"仅用来给出传播子分母中正确的无限小虚项. (参看9.2节.) 我们注意到方程(15.4.7)和(15.4.9)给出的$A_\alpha{}^0$是正则变量的泛函, 而该泛函关于$\Pi_{\alpha i}$和π_ℓ是线性的. 那么, 对方程(15.4.11)的观察表明了, (假定$\mathscr{L}_M$至多是$D_\mu\psi$的平方)对完整作用量(15.4.13)的被积函数至多是$\Pi_{\alpha i}$和π_ℓ的二次. 因此, 通过高斯积分的通常规则, 我们可以算出对这些正则"动量"的路径积分. 这一步骤的麻烦是方程(15.4.13)中$\Pi_{\alpha i}$的二阶项系数是$A_{\alpha i}$的函数, 所以高斯积分将会产生一个可怕的场相关行列式因子. 另外, 此时的整个体系看起来没有丝毫的可能是Lorentz不变的.

我们不在这条道路上继续前行, 取而代之, 我们将使用一个类似于在9.6节的电动力学路径积分公式中使用过的技巧. 注意到, 如果我们暂且认为$A_{\alpha 0}$是独立变量, 那么作用量(15.4.13)显然是$A_{\alpha 0}$的二次型, 其中二阶项$A_{\alpha 0}(x)A_{\beta 0}(y)$的系数等于场无关核$(\partial_3)^2\delta^4(x-y)$. 正如我们在第九章的附录中所看到的, 这种对$A_{\alpha 0}(x)$的高斯积分, 除去一个常数因子外, 等于被积函数在指数变量稳定"点"的值. 但是, 这里的作用量变分导数是

$$\frac{\delta I}{\delta A_{\alpha 0}} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial A_{\alpha 0}} = J_\alpha{}^0 + \partial_i \Pi_{\alpha i} + C_{\beta\alpha\gamma}\Pi_{\beta i}A_{\gamma i} - \partial_3^2 A_{\alpha 0} \ ,$$

所以作用量的"稳定"点是约束方程(15.4.7)的解. 因此, 取代用$A_{\alpha 0}$作为方程(15.4.7)的解, 我们同样可以就把它当做独立的积分变量进行处理.

现在, 视$A_{\alpha 0}$为独立变量时, 哈密顿量$\int d^3x \mathscr{H}$显然是$\Pi_{\alpha i}$的二次型, 其中二阶项$\Pi_{\alpha i}(x)\Pi_{\beta j}(y)$的系数由场无关核$\frac{1}{2}\delta^4(x-y)\delta_{ij}$给出. 假定这对于物质场$\pi_\ell$同样是成立的, 通过令$\pi_\ell$和$\Pi_{\alpha i}$等于对应方程(15.4.1)的作用量的稳定"点", 我们可以计算出对π_ℓ和$\Pi_{\alpha i}$的路径积分至相差一个常数因子, π_ℓ和$\Pi_{\alpha i}$的稳定"点"是:

$$0 = \frac{\delta I}{\delta \pi_\ell} = \partial_0 \psi_\ell - \frac{\partial \mathscr{H}_M}{\partial \pi_\ell} \ ,$$
$$0 = \frac{\delta I}{\delta \Pi_{\alpha i}} = \partial_0 A_{\alpha i} - \Pi_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta 0}A_{\gamma i} = F_{\alpha 0 i} - \Pi_{\alpha i} \ .$$

将其代回方程(15.4.13)给出

$$\begin{aligned} I = &\int d^4x \Big[\mathscr{H}_M + \tfrac{1}{2} F_{\alpha 0 i}F_{\alpha 0 i} \\ &- \tfrac{1}{4} F_{\alpha ij}F_{\alpha ij} - \tfrac{1}{2}\partial_3 A_{\alpha i}\partial_3 A_{\alpha i} + \tfrac{1}{2}(\partial_3 A_{\alpha 0})^2\Big] \\ = &\int d^4x \, \mathscr{L} \ , \end{aligned} \tag{15.4.14}$$

其中$\mathscr{L}$是我们所出发的拉格朗日量(15.3.1)! 换句话说, 我们要做的是对$\psi_\ell(x)$以及$A_{\alpha\mu}(x)$的全部4个分量的路径积分, 其中的权重因子由方程(15.4.14)和(15.3.1)给出且是显然协变的, 但是强加了轴向规范协变条件, 即插入了因子

$$\prod_{x,\alpha} \delta\Big(A_{\alpha 3}(x)\Big) \ . \tag{15.4.15}$$

只要$\mathscr{O}_A, \mathscr{O}_B \cdots$是规范不变的, 我们就有

$$\begin{aligned}\langle T\{\mathscr{O}_A\mathscr{O}_B\cdots\}\rangle_{\text{VACUUM}} \quad \propto \quad & \int \left[\prod_{\ell,x} d\psi_\ell(x)\right]\left[\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x)\right] \\ & \times \mathscr{O}_A\mathscr{O}_B\cdots \exp\{iI+\epsilon\text{项}\}\prod_{x,\alpha}\delta(A_{\alpha 3}(x)) \ , \end{aligned} \tag{15.4.16}$$

其中I是方程(15.4.14)给出的Lorentz不变且规范不变的作用量.

* * *

为了将来的参考, 我们注意到, 方程(15.4.16)中对规范场积分的体积元$\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x)$是规范不变的, 也就是说

$$\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\Lambda\alpha\mu}(x) = \prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x) \ , \tag{15.4.17}$$

其中$A_{\Lambda\alpha\mu}$是用规范变换作用$A_{\alpha\mu}(x)$后的结果, 规范变换的参量是$\Lambda_\alpha(x)$. 证明对于单位元附近的变换, 即无限小的变换参量$\lambda_\alpha(x)$, 这是成立的就足够了. 在这一情况下

$$A_{\lambda\alpha}{}^{\mu} = A_\alpha{}^{\mu} + \partial_\mu\lambda_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}A_\beta{}^{\mu}\lambda_\gamma \ ,$$

所以体积元之间的关系为

$$\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\lambda\alpha\mu}(x) = \text{Det}(\mathscr{N})\prod_{\alpha,\mu,x} dA_{\alpha\mu}(x) \ ,$$

其中$\mathscr{N}$是“矩阵”:

$$\mathscr{N}_{\alpha\mu x,\beta\nu y} = \frac{\delta A_{\lambda\alpha\mu}(x)}{\delta A_{\beta\nu}(y)} = \delta^4(x-y)\,\delta_\mu^\nu\left[\delta_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma(x)\right] \ .$$

因为迹$C_{\alpha\alpha\gamma}$为零, 所以到λ_γ的一阶, $\mathscr{N}$的行列式为1.

在本章, 我们将假定对物质场积分的体积元$\prod_{n,x} d\psi_n(x)$也是规范不变的. 这里有一个很重要的微妙, 在第22章我们将回到这个问题上, 但是, 正如那里所证明的, 这一假定对于我们目前的强作用和电弱作用的非阿贝尔规范理论是适用的.

参考文献

[1] C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954). 在1938年的华沙会议, O. Klein在一次讲演中曾经非常接近$SU(2)$Yang-Mills理论的公式化表述, 收录于*New Theories in Physics* (International Institute of Intellectual Cooperation, Paris, 1939). 关于Klein理论的批判性讨论, 参看D. J. Gross在1994年斯德哥尔摩的Oscar Klein研讨会上的报告“Oscar Klein and Gauge Theory”, Princeton预印本PUPT-1508.

[2] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).

[3] R. P. Feynman, *Acta Phys. Polonica* **24**, 697 (1963).

[4] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967).

[5] B. S. De Witt, *Phys. Rev.* **162**, 1195, 1239 (1967).

[6] 这一证明可以从广义相对论中相对应结果的标准证明中改编过来, 即, 在一有限单连通区域内存在到平坦度规的坐标变换, 其充要条件是Riemann-Christoffel曲率张量为零的证明. 参看, S. Weinberg, *Gravitation amd Cosmology* (Wiley, New York, 1972): Sections 6.3和6.4.

[7] **a**(其中$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$)蕴含**b**, **b**蕴含**a**的证明是M. Gell-Mann和S. L. Glashow给出的, *Ann. Phys. (N.Y.)* **15**, 437 (1961).

[8] 参看, S. Weinberg, 同上, Section 7.6.

[9] V. Gribov, *Nucl. Phys.* **B139**, 1 (1978). 另见R. Jackiw, I. Muzinich and C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D17**, 1576 (1978); R. Jackiw, in *New Frontiers in High Energy Physics*, B. Kursunoglu, A. Perlmutter, and L. Scott编辑(Plenum, New York, 1978); N. Christ and T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D22**, 939 (1980); R. Jackiw, in *Current Algebra and Anomalies* (World Scientific, Singapore, 1985): footnote 50.