The Quantum Theory of Fields

Volume II Modern Applications

Steven Weinberg(著)
University of Texas at Austin

张驰(译)*

*此版仅为译稿, 未经校对, 如有任何翻译录入错误, 请联系zhangchi_110@163.com

目　　录

记　号 iii
15　非阿贝尔规范理论 1
15.1　规范不变性 1
15.2　规范理论拉格朗日量与单Lie群 5
15.3　场方程与守恒律 8
15.4　量子化 10
15.5　De Witt-Faddeev-Popov方法 13
15.6　鬼 18
15.7　BRST对称性 20
15.8　BRST对称性的推广 27
15.9　Batalin-Vilkovisky形式理论 30
A　关于Lie代数的一个定理 37
B　Cartan目录 39
参考文献 43
16　外场方法 47
16.1　量子有效作用量 47
16.2　有效作用量的计算 51
16.3　能量诠释 53
16.4　有效作用量的对称性 55
参考文献 58

记　　号

拉丁指标i, j, k等一般取遍三维空间坐标指标, 通常取做$1, 2, 3$. 在有特殊说明的情况下, 它们取遍值1,2,3,4, 其中$x^4 = \mathrm{i}t$.

希腊指标μ, ν等, 从希腊字母表的中间开始, 一般取遍四维时空坐标指标$1, 2, 3, 0$, 其中x^0是时间坐标.

希腊指标α, β等, 从希腊字母表的开头开始, 一般取遍对称性代数的生成元.

重复指标一般表示求和, 除非另有说明.

时空度规$\eta_{\mu\nu}$是对角的, 其元素为$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$.

达朗贝尔算符定义为$\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$, 其中$\nabla^2$是拉普拉斯算符$\partial^2/\partial x^i \partial x^i$.

列维-奇维塔张量$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$定义为全反对称量, 并有$\epsilon^{0123} = +1$.

空间三矢由黑体字母标记.

任意矢量上的“帽子”代表相应的单位矢量: 因此$\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$。

任意量上加点代表该量对时间的导数.

狄拉克矩阵γ_μ的定义满足$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$. 并且$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\beta = \mathrm{i}\gamma^0$.

阶跃函数$\theta(s)$: 当$s > 0$时为1, $s < 0$时为0.

矩阵或矢量A的复共轭、转置、厄米共轭分别记为A^*、A^T以及$A^\dagger = A^{*T}$. 算符O的厄米共轭记为$O^\dagger$, 除了强调一个算符的矩阵或矢量是非转置的才用星号. 在方程末尾的+H.c.或c.c.表示前面几项的厄米共轭或复共轭. 狄拉克旋量u上加横线定义为$\bar{u} = u^\dagger\beta$. 场χ在Batalin-Vilkovisky体系中的反场记为$\chi^\ddagger$而不是χ^*, 这是为了与普通的复共轭或反粒子场相区分.

使用的单位制通常取$\hbar$和c为1. 自始至终$-e$是电子的有理化电荷, 使得精细结构常数

是$\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$.

引用数据末尾括号中的数字给出了引用数据末尾数字的不确定度, 在没有额外指明的情况下, 实验数据取自‘Review of Particle Properties,’ *Phys. Rev.* **D50**, 1173 (1994).

第 15 章　非阿贝尔规范理论

已经成功证明了, 描述真实世界的量子场论都是非阿贝尔规范理论, 这些理论所基于的规范不变性原理要比量子电动力学的$U(1)$规范不变性更加普遍. 我们在8.1节的末尾概述了规范场的存在以及它的一些性质, 源于它们在定域变换下的不变性原理, 而这些理论与电动力学共享了这一迷人的特征. 在电动力学中, 电荷为e_n的场$\psi_n(x)$经历了$\Lambda(x)$任意的规范变换$\psi_n(x) \to \exp(ie_n\Lambda(x))\psi_n(x)$. 由于$\partial_\mu\psi_n(x)$并非像$\psi_n(x)$那样变换, 我们必须要引入场$A_\mu(x)$, 这个场有规范变换性质$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$, 我们用它来构建规范协变导数$\partial_\mu\psi_n(x) - ie_nA_\mu(x)\psi_n(x)$, 这个协变导数像$\psi_n(x)$那样变换, 因而可以用它和$\psi_n(x)$构建规范不变拉格朗日量. 以类似的方法, 广义相对论中的引力场$g_{\mu\nu}(x)$, 它的存在以及一些性质源于广义坐标变换下的一个对称性原理.* 给定这些不同的先例后, 很自然地应该将定域规范不变性拓广至定域非阿贝尔规范变换下的不变性.

在杨振宁和Mills1954年的原始工作中,[1] 非阿贝尔规范群被取成了同位旋旋转的$SU(2)$群, 而类似于光子场的矢量场则解释成相互作用很强的单位同位旋矢量介子的场. 这一设想立刻就遇到了障碍, 即这些矢量玻色子的质量必须为零, 就像光子一样, 而任何这样的粒子似乎应该早就被探测到了. 另一问题是, 像当时所有的强相互作用理论一样, 没有什么方法可以处理它; 理论过大的耦合常数似乎阻止了使用任何的微扰论.

规范理论不久就被推广至任意的非阿贝尔规范群,[2] 并且继续在数学上研究它们的量子化, 尤其是Feynman,[3] Faddeev和Popov,[4] 以及De Witt,[5] 部分的出发点是作为更难的量子化广义相对论问题的热身练习. 他们证明了通过简单地观察拉格朗日量所获得朴素Feynman规则需要被额外的“鬼”圈补足. 然而, 直到20世纪60年代后期, 这些理论的物理相关性才开始得以理解. 最后发现, 所有可观测的基本粒子相互作用都是由定域规范对称性所附带的矢量粒子生成的; 相应的自旋1粒子要么非常重, 这是规范对称性自发破缺的结果, 要么被“困住”了, 这是耦合常数在大尺度上升高后的结果. 这些事情将分别是第21章和第18章的课题. 在本章, 我们将探索非阿贝尔规范理论的公式化表述, 并研究如何推导出它们的Feynman规则.

15.1　规范不变性

我们假定我们理论的拉格朗日量在物质场$\psi_\ell(x)$的一组无限小变换

$$\delta\psi_\ell(x) = \mathrm{i}\,\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_\ell{}^m\psi_m(x) \tag{15.1.1}$$

下不变, 其中t_α为某组独立的常数矩阵**, 并且无限小参量$\epsilon^\alpha(x)$为实, 允许该参量(像电动力学

*当然, 定域规范不变性与广义协变性都可以以一种平庸的方式实现, 即把$A_\mu(x)$和$g_{\mu\nu}(x)$分别取为用来表征相位选择和坐标系选择的非动力学c-数函数. 当我们将$A_\mu(x)$和$g_{\mu\nu}(x)$处理成在计算S-矩阵元时要积掉的动力学场时, 这些对称性在物理上变得重要.

**在本书中, 我们一般将用字母α,β等来标记对称性生成元, 这些字母取自希腊字母表的开头, 以便与取自希腊字母的中间用来标记时空坐标的μ,ν等相区分. 在后面, 我们通常会用取自拉丁字母表开头的字母a,b等来标记破缺对称性的生成元, 而用取自拉丁字母表中间的字母i,j等来标记未破缺对称性的生成元.

中的规范变换那样)依赖于时空中的位置. 我们假定这些对称变换是一Lie群的无限小部分; 正如在2.2节中所证明的, 这要求t_α服从对易关系

$$[t_\alpha, t_\beta] = \mathrm{i}\, C^\gamma{}_{\alpha\beta} t_\gamma \ , \tag{15.1.2}$$

其中$C^\gamma{}_{\alpha\beta}$是一组实数, 称为群的结构常数. 对易子的反对称立刻就告诉我们, 结构常数同样是反对称的:

$$C^\gamma{}_{\alpha\beta} = -C^\gamma{}_{\beta\alpha} \ . \tag{15.1.3}$$

另外, 从Jacobi等式

$$0 = \Big[[t_\alpha, t_\beta], t_\gamma\Big] + \Big[[t_\gamma, t_\alpha], t_\beta\Big] + \Big[[t_\beta, t_\gamma], t_\alpha\Big] \tag{15.1.4}$$

我们看到这些C满足进一步的约束

$$0 = C^\delta{}_{\alpha\beta} C^\epsilon{}_{\delta\gamma} + C^\delta{}_{\gamma\alpha} C^\epsilon{}_{\delta\beta} + C^\delta{}_{\beta\gamma} C^\epsilon{}_{\delta\alpha} \ . \tag{15.1.5}$$

任何一组满足方程(15.1.3)和(15.1.5)的常数$C^\gamma{}_{\alpha\beta}$至少定义了一组矩阵$t^{\mathrm{A}}{}_\alpha$:

$$(t^{\mathrm{A}}{}_\alpha)^\beta{}_\gamma \equiv -\mathrm{i}\, C^\beta{}_{\gamma\alpha} \ , \tag{15.1.6}$$

它们满足含有结构常数$C^\gamma{}_{\alpha\beta}$的对易关系(15.1.2):

$$[t^{\mathrm{A}}{}_\alpha, t^{\mathrm{A}}{}_\beta] = \mathrm{i}\, C^\gamma{}_{\alpha\beta} t^{\mathrm{A}}{}_\gamma \ . \tag{15.1.7}$$

这称为结构常数为$C^\alpha{}_{\beta\gamma}$的Lie群的“伴随”(或“正则”)表示.

例如, 在原始的Yang-Mills理论中, 物质场是由质子场ψ_p和中子ψ_n组成的二重态

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

而t_α, 其中$\alpha = 1, 2, 3$, 是同位旋矩阵

$$t_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad t_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad t_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

它们满足

$$C^\gamma{}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta}$$

的对易关系(15.1.2), 其中, 同往常一样, 如果γ, α, β是1,2,3的偶置换或奇置换, 则$\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$分别是$+1$或$-1$, 如果是其它情况, 则$\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$为零. 我们发现这与3维旋转群的Lie代数(2.4.18)相同; 这里的矩阵构建了我们所公认的该Lie代数的自旋1/2表示. 伴随表示的矩阵(15.1.6)在这里是(处在行和列标记为1,2,3的基下):

$$t_1^{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \ , \qquad t_2^{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \qquad t_3^{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

这是旋转群Lie代数的自旋1表示.

我们现在来考察构建在变换(15.1.1)下不变的拉格朗日量需要什么. 如果不存在作用在场上的导数项, 这个任务将是非常简单的——物质场的任何函数, 只要它在ϵ^α为常数的变换(15.1.1)下是不变的, 那么它在ϵ^α为时空坐标的任意实函数的变换(15.1.1)下也将是不变的. 如果拉格朗日量包含场的导数项(正如它所必须的), 就不会是这种情况, 这是因为有了位置相关函数$\epsilon^\alpha(x)$. 物质场的导数就不会像场本身那样进行变换. 对方程(15.1.1)取微分给出

$$\delta\Big(\partial_\mu\psi_\ell(x)\Big) = \mathrm{i}\,\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_\ell{}^m\Big(\partial_\mu\psi_m(x)\Big) + \mathrm{i}\Big(\partial_\mu\epsilon^\alpha(x)\Big)(t_\alpha)_\ell{}^m\psi_m(x)\ . \tag{15.1.8}$$

为了使拉格朗日量不变, 我们需要一个场$A^\alpha{}_\mu$, 它的变换规则中包含一项$\partial_\mu\epsilon^\alpha$, 这一项可以用来抵消方程(15.1.8)中的第二项. 既然这个场携带一个α指标, 我们希望它也经历一个类似方程(15.1.1)的矩阵变换, 只不过将t_α替换成伴随矩阵表示(15.1.6). 因此, 我们先试验性地取新"规范"场的变换关系为

$$\delta A^\beta{}_\mu = \partial_\mu\epsilon^\beta + \mathrm{i}\,\epsilon^\alpha(t^{\mathrm{A}}{}_\alpha)^\beta{}_\gamma A^\gamma{}_\mu$$

或者, 利用方程(15.1.6),

$$\delta A^\beta{}_\mu = \partial_\mu\epsilon^\beta + C^\beta{}_{\gamma\alpha}\epsilon^\alpha A^\gamma{}_\mu\ . \tag{15.1.9}$$

这使得我们可以构建"协变导数":[†]

$$\Big(D_\mu\psi(x)\Big)_\ell = \partial_\mu\psi_\ell(x) - \mathrm{i}\,A^\beta{}_\mu(x)(t_\beta)_\ell{}^m\psi_m(x)\ . \tag{15.1.10}$$

按计划, 方程(15.1.10)第二项中的$A^\beta{}_\mu$, 它的变换中的$\partial_\mu\epsilon^\beta$项抵消了第一项变换中正比于$\partial_\mu\epsilon^\beta$的那一项, 给我们留下

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\psi)_\ell = {}&\mathrm{i}\,\epsilon^\alpha\,(t_\alpha)_\ell{}^m\,\partial_\mu\psi_m - \mathrm{i}\,C^\beta{}_{\gamma\alpha}\,\epsilon^\alpha\,A^\gamma{}_\mu\,(t_\beta)_\ell{}^m\,\psi_m\\ &+ A^\gamma{}_\mu\,(t_\gamma)_\ell{}^m\,(t_\alpha)_m{}^n\,\psi_n\end{aligned}$$

或者, 使用方程(15.1.2)

$$\delta(D_\mu\psi)_\ell = \mathrm{i}\,\epsilon^\alpha\,(t_\alpha)_\ell{}^m\,(D_\mu\psi)_m\ , \tag{15.1.11}$$

使得$D_\mu\psi$像ψ本身那样变换.

我们也需要关心一下规范场的导数. 为了消除$\partial_\nu A^\beta{}_\mu$的变换中的$\partial_\nu\partial_\mu\epsilon^\beta$项, 就像在电动力学中那样, 我们对$\mu$和$\nu$做反对称化处理. 然而, 在$\partial_\nu A^\beta{}_\mu - \partial_\mu A^\beta{}_\nu$的变换中, 我们仍然有正比于$\epsilon(x)$的一阶导数的项, 这些项产生于方程(15.1.9)中的第二项. "协变旋度", 即$F^\gamma{}_{\nu\mu}$, 在它的变换规则中所有这样的$\epsilon(x)$导数都互相抵消掉了, 构建它的最简单方法就是考察作用在物质场ψ上的两个协变导数的对易子:

$$\Big([D_\nu, D_\mu]\psi\Big)_\ell = -\mathrm{i}\,(t_\gamma)_\ell{}^m F^\gamma{}_{\nu\mu}\psi_m\ , \tag{15.1.12}$$

其中

$$F^\gamma{}_{\nu\mu} \equiv \partial_\nu A^\gamma{}_\mu - \partial_\mu A^\gamma{}_\nu + C^\gamma{}_{\alpha\beta}A^\alpha{}_\nu A^\beta{}_\mu\ . \tag{15.1.13}$$

方程(15.1.12)使得$F^\gamma{}_{\nu\mu}$必须像伴随表示下的物质场那样进行变换这件事变得显然:

$$\delta\,F^\beta{}_{\nu\mu} \equiv \mathrm{i}\,\epsilon^\alpha(t^{\mathrm{A}}{}_\alpha)^\beta{}_\gamma F^\gamma{}_{\nu\mu} = \epsilon^\alpha C^\beta{}_{\gamma\alpha}F^\gamma{}_{\nu\mu}\ . \tag{15.1.14}$$

[†]正如将要在下一节所讨论的, 在写下方程(15.1.10)的同时, 我们心照不宣地假定任何像电荷这样的耦合常数因子都被吸收进t_β中, 因而也被吸收进结构常数中.

读者可以通过直接计算(利用关系(15.1.5))验证(15.1.13)中所定义的量$F^\alpha{}_{\nu\mu}$确实有简单的变换规则(15.1.14).

由于某些原因, 知道这些无限小规范变换可以被提升为有限的变换是有用的. 群元可以被一组实函数$\Lambda^\alpha(x)$参数化, 进而使得它以如下的矩阵变换作用在一个一般的物质场上

$$\psi_\ell(x) \to \psi_{\ell\Lambda}(x) = \Big[\exp\Big(\mathrm{i}\, t_\alpha \Lambda^\alpha(x)\Big)\Big]_\ell{}^m \psi_m(x) \ . \tag{15.1.15}$$

我们希望协变导数以相同的方式进行变换:

$$(\partial_\mu - \mathrm{i}\, t_\alpha A^\alpha{}_{\mu\Lambda})\psi_\Lambda = \exp(\mathrm{i}t_\alpha\Lambda^\alpha)(\partial_\mu - \mathrm{i}t_\alpha A^\alpha{}_\mu)\psi \ , \tag{15.1.16}$$

所以我们必须给$A^\alpha{}_\mu$强加变换规则$A^\alpha{}_\mu \to A^\alpha{}_{\mu\Lambda}$, 使得

$$\partial_\mu \exp(\mathrm{i}t_\beta\Lambda^\beta) - \mathrm{i}\, t_\beta \exp(\mathrm{i}t_\alpha\Lambda^\alpha) A^\beta{}_{\mu\Lambda} = -\mathrm{i}\, \exp(\mathrm{i}t_\alpha\Lambda^\alpha) t_\beta A^\beta{}_\mu$$

或者, 以另一种形式

$$t_\alpha A^\alpha{}_{\mu\Lambda} = \exp(\mathrm{i}t_\beta\Lambda^\beta) t_\alpha A^\alpha{}_\mu \exp(-\mathrm{i}t_\beta\Lambda^\beta) - \mathrm{i}\Big[\partial_\mu \exp(\mathrm{i}t_\beta\Lambda^\beta)\Big] \exp(-\mathrm{i}t_\beta\Lambda^\beta) \ . \tag{15.1.17}$$

在$\Lambda^\alpha(x)$是一个无限小$\epsilon^\alpha(x)$的极限下, 方程(15.1.15)和(15.1.17)退化成之前的变换规则(15.1.1)和(15.1.9).

从方程(15.1.17)中, 我们可以看到, 通过对$\Lambda^\beta(x)$的合适选择, 总可以使$A^\alpha{}_{\mu\Lambda}(x)$在任意一个点处为零, 记该点$x = z$. (简单地令$\Lambda^\alpha(z)$为零, 并在$x = z$处令$\partial\Lambda^\alpha(x)/\partial x^\mu = -A^\alpha{}_\mu(x)$.) 另外, 总可以对$\Lambda^\beta(x)$进行选择, 使得$A^\alpha{}_{\mu\Lambda}(x)$的任意一个时空分量对于所有的$\alpha$至少在任意一个给定点邻近的有限区域内处处为零. 例如, 为了使$A^\alpha{}_{3\Lambda}(x)$为零, 我们必须要解参量$\Lambda^\beta(x)$的如下一阶常微分方程组:

$$\partial_3 \exp(\mathrm{i}t_\beta\Lambda^\beta) = -\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}t_\beta\Lambda^\beta) t_\alpha A^\alpha{}_3 \ , \tag{15.1.18}$$

该方程组至少在任意一个给定点邻近的有限区域内有一个解.

然而, 一般而言, 不可能通过选择$\Lambda^\alpha(x)$使得$A^\alpha{}_{\mu\Lambda}(x)$的4个分量在一个有限区域内都为零. 由于这个原因, 我们将不得不止步于偏微分方程组

$$\partial_\mu \exp(\mathrm{i}t_\beta\Lambda^\beta) = -\mathrm{i}\, \exp(\mathrm{i}t_\beta\Lambda^\beta) t_\alpha A^\alpha{}_\mu \ , \tag{15.1.19}$$

除非满足一定的可积性条件, 否则这个方程组是解不出来的. 特别地, 如果$A^\alpha{}_{\mu\Lambda}$处处为零, 那么$F^\alpha{}_{\mu\nu\Lambda}$也将是如此, 但是, 由于场强的变换是齐次的, 仅当$F^\alpha{}_{\mu\nu}$为零时, $F^\alpha{}_{\mu\nu\Lambda}$才能等于零. 如果存在一个规范变换使得$A^\alpha{}_\mu$处处为零, 则称该规范场为“纯规范”场. 不难证明, $F^\alpha{}_{\mu\nu}$处处为零是$A^\alpha{}_\mu(x)$在任意单连通区域可作为纯规范场进行表述的充分必要条件.[6]

* * *

在这里构造在规范变换下简单变换的客体, 与在广义相对论中构造广义坐标变换下协变的客体, 这两种构造之间存在着深刻的类比. 正如我们使用规范场构造物质场的协变导数$D_\mu\psi_\ell$, 它有着与物质场本身相同的规范变换性质, 我们使用仿射联络$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}(x)$来构造张量$T^{\rho\sigma\cdots}{}_{\kappa\lambda\cdots}$的协变导数:

$$T^{\rho\cdots}{}_{\kappa\cdots;\nu} \equiv \partial_\nu T^{\rho\cdots}{}_{\kappa\cdots} + \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} T^{\lambda\cdots}{}_{\kappa\cdots} + \cdots - \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa} T^{\rho\cdots}{}_{\mu\cdots} - \cdots \ ,$$

其本身也是张量. 另外, 从规范场的导数中, 我们构造出了场强$F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, 它的变换性质与属于规范群伴随表示的物质场的变换性质相同; 相应地, 从仿射联络的导数中, 我们可以构造一个量:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta} \ ,$$

这个量作为一个张量变换, 即Riemann-Christoffel曲率张量. 两个规范协变导数D_μ和D_ν, 它们的对易子可以表示成场强张量$F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$的形式; 类似地, 相对于x^ν和x^κ的两个协变导数, 它们的对易子也可以表示成曲率张量的形式:

$$T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots;\nu;\kappa} - T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots;\kappa;\nu} = R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\kappa}T^{\sigma\cdots}{}_{\mu\cdots} + \cdots - R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa}T^{\lambda\cdots}{}_{\mu\cdots} - \cdots \ .$$

存在一个规范, 使得该规范下的规范场在一个有限单连通区域内为零, 该规范存在的充要条件是场强张量为零, 而存在一个坐标系使得仿射联络在一个有限单连通区域内为零的充要条件是, Riemann-Christoffel曲率张量为零. 这个类比在一个重要方面上失效了: 在广义相对论中, 仿射联络本身是用度规张量的一阶导数构建的, 而在规范理论中, 规范场无法表示成更基本的场.

15.2 规范理论拉格朗日量与单Lie群

规范场张量$F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, 物质场ψ以及它们的规范协变导数, 它们的变换规则不包含变换参量$\epsilon^\alpha(x)$的导数, 所以如果只用这些元素构建拉格朗日量, 并且如果它在ϵ^α为常数的整体变换下不变, 那么它在$\epsilon^\alpha(x)$为一般的位置相关函数的规范变换就是不变的. 因此, 我们假定拉格朗日量满足这些条件: 即,

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi, D_\mu\psi, D_\nu D_\mu\psi, \cdots, F^{\alpha}{}_{\mu\nu}, D_\rho F^{\alpha}{}_{\mu\nu}) \tag{15.2.1}$$

以及不变性条件:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_\ell}\,\mathrm{i}(t_\alpha)_\ell{}^m\psi_m + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (D_\mu\psi_\ell)}\,\mathrm{i}(t_\alpha)_\ell{}^m(D_\mu\psi)_m \\ &+ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (D_\nu D_\mu\psi)_\ell}\,\mathrm{i}(t_\alpha)_\ell{}^m(D_\nu D_\mu\psi)_m + \cdots + \frac{\partial \mathscr{L}}{F^{\beta}{}_{\mu\nu}}C^{\beta}{}_{\gamma\alpha}F^{\gamma}{}_{\mu\nu} \\ &+ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial D_\rho F^{\beta}{}_{\mu\nu}}C^{\beta}{}_{\gamma\alpha}D_\rho F^{\gamma}{}_{\mu\nu} + \cdots = 0 \ . \end{aligned} \tag{15.2.2}$$

另一方面, 除了出现在$F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$以及规范协变导数D_μ中的规范场, 拉格朗日量可以不依赖于规范场本身. 特别地, 质量项$-\frac{1}{2}m^2{}_{\alpha\beta}A_{\alpha\mu}A_\beta{}^\mu$被排除了.

我们现在将要集中考察拉格朗日量中只依赖于$F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$的项. 如同电动力学中一样, 对于任何自旋为一的无质量粒子, 拉格朗日量必须要包含一个自由粒子项, 这一项是$\partial_\mu A^{\alpha}{}_{\nu} - \partial_\nu A^{\alpha}{}_{\mu}$的二次项, 而规范不变性则表明这一自由粒子项应该作为场强张量$F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$的二次项的一部分出现. Lorentz不变性与流守恒表明它的形式为

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}F^{\beta\mu\nu} \tag{15.2.3}$$

其中$g_{\alpha\beta}$是常数矩阵. 如果我们不假定宇称(或者CP或T)守恒, 那么我们也可在拉格朗日量引入如下的项

$$\mathscr{L}'_A = -\frac{1}{2}\,\theta_{\alpha\beta}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}F^{\beta}{}_{\rho\sigma}$$

其中$\theta^{\alpha\beta}$是另一个常数矩阵. 这一项实际上是全导数项, 因而并不影响场方程或Feynman规则. 然而, 这样的项会有非微扰的量子力学效应, 我们会在23.6节讨论它.

在继续考察矩阵$g_{\alpha\beta}$的性质之前, 值得关注如下的事实, 在不引入相互作用的前提下, 不可能引入规范场$A^\alpha{}_\mu$的动能项, 方程(15.2.3)中的这一项源于方程(15.1.13)所定义的场强$F^\alpha{}_{\mu\nu}$的二次部分. 这是非阿贝尔规范理论类似广义相对论的又一方面, 在广义相对论中, 引力场拉格朗日量的动能部分被包含在Einstein-Hilbert拉格朗日密度——$\sqrt{g}R/8\pi G$之中, 这一项也包含引力场的自能. 两种情况下的原因是相似的: 引力场与自身相作用是因为它与任何携带能量和动量的物质相作用, 而规范场与自身相作用是因为它与任何按照规范群的非平庸表示(在伴随表示的情况下)变换的物质相作用. 这与电动力学的情况相反, 在电动力学中, 光子不携带它所相互作用的量子数——电荷, 因而对于电磁场有可能引入不需要相互作用的动能项$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

数值矩阵$g_{\alpha\beta}$可以取成对称的, 并且为了给出实的拉格朗日量必须取成实的. 为了使这一项满足规范不变性要求(15.2.2), 对于所有的δ, 我们必须有:

$$g_{\alpha\beta}F^\alpha{}_{\mu\nu}C^\beta{}_{\gamma\sigma}F^{\gamma\mu\nu}=0\ .$$

为了在不对F之间附加任何的泛函关系的情况下使其成立, 矩阵$g_{\alpha\beta}$必须满足条件:

$$g_{\alpha\beta}C^\beta{}_{\gamma\delta}=-g_{\gamma\beta}C^\beta{}_{\alpha\delta}\ . \tag{15.2.4}$$

在矩阵$g_{\gamma\beta}$上还有一个更重要的条件. 如同电动力学中一样, 正则量子化规则与量子标量积的正定性要求拉格朗日量(15.2.3)中的矩阵$g_{\alpha\beta}$必须是正定的. (即, 对于所有实的u, $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$必须是正的, 而仅当对于所有的$\alpha$有$u^\alpha=0$时, $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$才为零.) 这类似于在实场$\phi$的动能拉格朗日量$-\frac{1}{2}Z\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2$中要求, 常数$Z$必须是正定的.

矩阵$g_{\alpha\beta}$上的这些要求有着深远的含义. 它们构成了如下三个相互等价的条件中的一个:

a: 存在满足不变性条件(15.2.4)的实对称正定矩阵$g_{\alpha\beta}$.

b: 该Lie代数存在一组基(即, 一组生成元$\tilde{t}_\alpha=\mathscr{S}_{\alpha\beta}t_\beta$, 其中$\mathscr{S}$是实的非奇异矩阵), 使得结构常数$\tilde{C}^\alpha{}_{\beta\gamma}$不仅关于下指标$\beta$和$\gamma$是反对称的, 并且对所有三个指标$\alpha,\beta$和$\gamma$也是反对称的. (在这一基下, 不在上下指标$\alpha,\beta$等之间作区分将是方便的, 并将$\tilde{C}^\alpha{}_{\beta\gamma}$写成$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}$.)

c: 该Lie代数是$U(1)$子代数与互相交换的紧致单代数的直和.*

本章附录A给出了条件**a**, **b**和**c**相互等价的证明.[7]

在继续讨论这一结果的物理含义之前, 就完备性条件再说几点将是有用的. 我们不会在这里使用这个条件, 但是紧Lie代数构成了紧Lie群的生成元: 即群的不变体积有限的群. 例如, 旋转群

*一些定义: Lie代数$\mathscr{G}$的子代数$\mathscr{H}$是线性空间, 该线性空间由$\mathscr{G}$的生成元t_α的特定实线性组合$t_i=\mathscr{S}_{i\alpha}t_\alpha$张开, 使得$\mathscr{H}$本身是Lie代数, 也就是说, t_i彼此之间的对易子的形式是$[t_i,t_j]=\mathrm{i}c^k{}_{ij}t_k$. 如果整个代数$\mathscr{G}$的任何元素与子代数$\mathscr{H}$的任何元素的对易子处在子代数$\mathscr{H}$内, 则称子代数$\mathscr{H}$是不变的. 单纯(简称"单")Lie代数是没有不变子代数的Lie代数. $\mathscr{G}$的$U(1)$子代数是仅有一个生成元的代数, 并且该生成元与整个代数$\mathscr{G}$的所有生成元都对易. 半单Lie代数是不含有不变阿贝尔子代数的代数, 其中不变阿贝尔子代数是指生成元彼此对易的不变子代数. 半单Lie代数是单Lie代数(但不是$U(1)$)的直和. 如果矩阵$\mathrm{Tr}\{t^A{}_\alpha t^A{}_\beta\}=-C^\gamma{}_{\alpha\delta}C^\delta{}_{\beta\gamma}$是正定的, 则称单Lie代数或半单Lie代数是紧致(简称"紧")的. 单纯性与紧致性的含义与重要性将在下面进一步讨论. 称Lie代数$\mathscr{G}$是子群$\mathscr{H}_n$的直和是指, 有可能找到Lie代数$\mathscr{G}$的一个基, 其生成元为t_{na}, 使得结构常数采取形式

$$C^{\ell c}{}_{namb}=\delta_{\ell m}\delta_{mn}C^{(n)c}{}_{ab}\ ,$$

其中$C^{(n)c}{}_{ab}$是子代数$\mathscr{H}_n$的结构常数.

是紧致的; Lorentz群则不是. 作为一个不紧的单Lie代数的例子, 考察对易关系

$$[t_1, t_2] = -\mathrm{i}\, t_3 \ , \qquad [t_2, t_3] = \mathrm{i}\, t_1 \ , \qquad [t_3, t_1] = \mathrm{i}\, t_2 \ .$$

这里的结构常数是实的, 但不是全反对称的; 它的非零分量是

$$C^3{}_{12} = -C^3{}_{21} = -1 \ , \qquad C^1{}_{23} = -C^1{}_{32} = 1 \ , \qquad C^2{}_{31} = -C^2{}_{13} = 1 \ .$$

方程(15.A.10)所给出的度规在这里是对角的, 其中元素为:

$$g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -2 \ .$$

这不是正定矩阵, 所以Lie代数不是紧致的. 事实上它是非紧群$O(2,1)$的Lie代数, 该群是两维空间一维时间中的Lorentz群.

两组相差一个实非奇异线性变换的生成元被视为张开了同一个Lie代数, 并且生成了同一个群. 这对于生成元的复线性变换是不成立的. 特别地, 通过在合适的基下改变生成元的相位, 任何单Lie代数都可以变成紧致的形式. 例如, 对于上例的Lie代数, 只需定义新的生成元$t'_1 = \mathrm{i}t_1$, $t'_2 = \mathrm{i}t_2$, $t'_3 = t_3$, 对于这些生成元, 对易关系是

$$[t'_1, t'_2] = \mathrm{i}\, t'_3 \ , \qquad [t'_2, t'_3] = \mathrm{i}\, t'_1 \ , \qquad [t'_3, t'_1] = \mathrm{i}\, t'_2 \ .$$

结构常数现在就变成了实的并且是全反对称的: $C^a{}_{bc} = \epsilon_{abc}$. 这时$g_{ab} = 2\delta_{ab}$, 并且代数是紧致的. 当然, 我们辨认出这是熟悉的三维旋转的紧致群$O(3)$的代数. 为了看到, 对于任何的单Lie代数, 这总是可能的, 注意到方程(15.A.10)定义的矩阵g_{ab}是实的, 对称且非奇异的, 使得可以通过一个实正交变换将其变成非零元在主对角线上的对角形式. 然后, 只需要给这一基下对应g_{ab}负对角元的所有生成元乘以因子i即可.

我们不加证明地指出, 紧Lie群的有限维表示都是幺正的, 相应地, 紧Lie代数的有限维表示都是厄密的. 更进一步, 很容易看到, 通过独立的有限维厄密矩阵t_α而拥有任意的非平庸表示的唯一Lie代数是$U(1)$与紧致单Lie代数的直和. 为了证明这一点, 我们可以简单地定义

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Tr}\{t_\alpha t_\beta\} \ .$$

这个矩阵显然是正定的, 这是因为$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \mathrm{Tr}\{(u^\alpha t_\alpha)^2\}$对于任意实的$u^\alpha$都是正的, 而仅当$u^\alpha t_\alpha = 0$时才为零, 除非所有的$u^\alpha$都为零, 否则这是不可能的, 这是因为$t^\alpha$假定是独立的. 进一步的, 该$g_{\alpha\beta}$满足不变性条件(15.2.4), 这一点可以通过给对易关系(15.1.2)乘以t_δ再取迹看到; 这给出

$$\mathrm{i}\, C^\gamma{}_{\alpha\beta}\, \mathrm{Tr}\{t_\gamma t_\delta\} = \mathrm{Tr}\{[t_\alpha, t_\beta]\, t_\delta\} = \mathrm{Tr}\{t_\delta t_\alpha t_\beta - t_\beta t_\alpha t_\delta\} \ ,$$

这显然关于β和δ是反对称的. 证实了**a**后, 我们可以通过之上的定理推出条件**c**, 这使得Lie代数必须是紧致单纯子代数与$U(1)$子代数的直和.

现在我们回到规范理论的物理. 在本节, 从构建拉格朗日量中的规范场动能性的必要性, 我们已经推断出存在正定实对称矩阵$g_{\alpha\beta}$, 它满足不变性条件(15.2.4), 并且在本章的附录A中我们已经证明了这个结果等价于Lie代数上的一个条件, 即它是紧致单纯子代数与$U(1)$子代数的直和. 对于我们的目的, 关于这一结果重要的是, 单Lie代数都是某些类型有限且维数有限的代数. 例如, 很容易看到不存在生成元少于3个的单Lie代数, 这是因为在一维或二维中, 无法存在有3个指标的全反

对称结构常数. 有了三个生成元, 通过取$C^3{}_{12}$, $C^2{}_{31}$以及$C^1{}_{23}$非零, 可以避免不变子代数. 在结构常数是实的且全反对称的基下, 显然仅有一种可能性:

$$C_{\alpha\beta\gamma} = c\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ .$$

这里的c是一任意的非零常数, 可以通过生成元的标度变换, $t_\alpha \to t_\alpha/c$, 消掉它, 所以Lie代数是

$$[t_\alpha, t_\beta] = \mathrm{i}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} t_\gamma\ .$$

这可以视为三维旋转群$O(3)$的Lie代数, 以及二维中的幺正幺模群$SU(2)$的Lie代数, 并且在杨振宁和Mills的原始非阿贝尔理论中用它作为基. 以同样的方式继续下去, 当生成元个数为4, 5, 6或7时, 单Lie代数是不存在的, 生成元个数为8时有一个单Lie代数, 依次类推. 数学家(尤其是Killing(基灵)和E. Cartan(埃利·嘉当))已经能够编录所有的单Lie代数. 单Lie代数的紧致形式构成了几个“典型”Lie群代数的无限类——幺正幺模群, 幺正正交群以及幺正辛群——再加上五个例外Lie群. 本章的附录B给出了这个目录.

在附录A中同样证明了, 在等价条件a, b或c下, 度规采取形式

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2}\delta_{mn}\delta_{ab} \tag{15.2.5}$$

其中g_m是实的, 而m和n用来标记单纯子代数或$U(1)$子代数, 而a和b用来标记这些不变子代数的各个生成元. 我们可以通过重新调节规范场消掉常数g_m^{-2}

$$A^\mu_{ma} \to \tilde{A}^\mu_{ma} \equiv g_m^{-1} A^\mu_{ma}\ , \tag{15.2.6}$$

但另一方面, 为了保持$D_\mu\psi$和$F_\alpha{}^{\mu\nu}$的公式(15.1.10)和(15.1.13)不变, 我们必须重新定义矩阵t_α以及结构常数

$$t_{ma} \to \tilde{t}_{ma} = g_m t_{ma}\ , \tag{15.2.7}$$

$$C^{(m)}_{cab} \to \tilde{C}^{(m)}_{cab} = g_m C^{(m)}_{cab}\ . \tag{15.2.8}$$

即, 我们总可以定义规范场的标度(现在扔掉波浪符)使得方程(15.2.5)中的g_m为1:

$$g_{ab} = \delta_{ab}\ , \tag{15.2.9}$$

但另一方面, 对于每个单纯子代数或$U(1)$子代数, 变换矩阵t_α和结构常数$C_{\alpha\beta\gamma}$就要包含一个未知的乘子g_m. 这些因子是规范理论的耦合常数. 或者, 在每个单纯子代数或$U(1)$子代数中采取虽然任意但固定的归一化, 这有时更加方便一些, 在这种情况下, 就像因子g_m^{-2}出现在方程(15.2.5)中, 耦合常数将出现在规范场拉格朗日量(15.2.3)中.

15.3 场方程与守恒律

在方程(15.2.3)中使用矩阵$g_{\alpha\beta}$的方程(15.2.9), 全拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{4}\,F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha{}^{\mu\nu} + \mathscr{L}_M(\psi, D_\mu\psi)\ , \tag{15.3.1}$$

在没有规范场时, $\mathscr{L}_M(\psi, \partial_\mu\psi)$将是"物质"拉格朗日密度. 原则上, 我们可以引入$\mathscr{L}_M$对$F_{\alpha\mu\nu}$以及高阶协变导数$D_\nu D_\mu\psi$, $D_\lambda F_{\alpha\mu\nu}$等的相关性, 但是, 因为与电动力学相同的原因, 我们在这里将这些不可重整项排除在外: 正如12.3节所讨论的, 在普通的能量下, 这样的项将被某些非常大的质量项的负幂次高度抑制. 由于这个原因, 对于弱作用, 电磁作用和强作用的标准模型, 它的拉格朗日量的一般形式为(15.3.1).

规范场的运动方程在这里是

$$\begin{aligned}\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_{\alpha\nu})} &= -\partial_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\alpha\nu}} \\ &= -F_\gamma{}^{\nu\mu} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} - \mathrm{i}\, \frac{\partial \mathscr{L}_M}{\partial D_\nu \psi} t_\alpha \psi\end{aligned}$$

因而

$$\partial_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = -\mathscr{J}_\alpha{}^\nu \ , \tag{15.3.2}$$

其中$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$是流:

$$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu \equiv -F_\gamma{}^{\nu\mu} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} - \mathrm{i}\, \frac{\partial \mathscr{L}_M}{\partial D_\nu \psi} t_\alpha \psi \ . \tag{15.3.3}$$

流$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$在平常的意义下守恒

$$\partial_\nu \mathscr{J}_\alpha{}^\nu = 0 \ , \tag{15.3.4}$$

这一点即可以从ψ的运动方程和不变性条件(15.2.2)中看到, 也可以, 更简单地, 从场方程(15.3.2)中直接得出.

方程(15.3.2)和(15.3.4)中导数是普通导数, 不是规范协变导数D_ν, 所以这些方程的规范不变性晦涩不明. 用场强的规范协变导数重写方程(15.3.2), 这可以使得规范不变性变得显然

$$\begin{aligned}D_\nu F_\alpha{}^{\mu\nu} &\equiv \partial_\lambda F_\alpha{}^{\mu\nu} - \mathrm{i}(t^{\mathrm{A}}{}_\beta)_{\alpha\gamma} A_{\beta\lambda} F_\gamma{}^{\mu\nu} \\ &= \partial_\lambda F_\alpha{}^{\mu\nu} - C_{\alpha\gamma\beta} A_{\beta\lambda} F_\gamma{}^{\mu\nu} \ .\end{aligned} \tag{15.3.5}$$

这样, 方程(15.3.2)变成

$$D_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = -J_\alpha{}^\nu \ , \tag{15.3.6}$$

其中$J_\alpha{}^\nu$仅是物质场的流

$$J_\alpha{}^\nu \equiv -\mathrm{i} \frac{\partial \mathscr{L}_M}{\partial D_\nu \psi} t_\alpha \psi \ . \tag{15.3.7}$$

如果$\mathscr{L}_M$是规范不变的, 上式就是规范协变的. 另外, 通过用算符D_ν作用方程(15.3.6), 利用对易关系

$$[D_\nu, D_\mu] F_\alpha{}^{\rho\sigma} = -\mathrm{i}\, (t^{\mathrm{A}}{}_\gamma)_{\alpha\beta} F_{\gamma\nu\mu} F_\beta{}^{\rho\sigma} = -C_{\gamma\alpha\beta} F_{\gamma\nu\mu} F_\beta{}^{\rho\sigma} \ ,$$

我们看到$J_\alpha{}^\nu$满足规范协变守恒律

$$D_\nu J_\alpha{}^\nu = 0 \ , \tag{15.3.8}$$

而不是整个流$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$所满足的平常的守恒律(15.3.4). 另外, (利用方程(15.1.5))可以直接导出等式:

$$D_\mu F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda F_{\alpha\mu\nu} = 0 \ , \tag{15.3.9}$$

无论规范场是否满足场方程, 这总是成立的.

这些结果有助于强调在15.1节提到的非阿贝尔规范理论与广义相对论之间的深刻类比. 在广义相对论中, 类似于J^μ, 存在物质的能动量张量$T^\nu{}_\mu$, 它满足广义协变守恒律$T^\nu{}_{\mu;\nu}$, 并且在Einstein场方程的广义协变形式, $R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu{}_\mu R = -8\pi G T^\nu{}_\mu$中, 它在方程的右边. 然而, $T^\nu{}_\mu$在通常的意义下并不守恒: $\partial_\nu T^\nu{}_\mu$并不为零. 另一方面, 将Einstein方程左边的非线性项移至右边给出场方程[8]

$$\left(R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\nu{}_\mu R\right)_{\text{LINEAR}} = -8\pi G\,\tau^\nu{}_\mu \ ,$$

其中$\tau^\nu{}_\mu$不是张量

$$\tau^\nu{}_\mu \equiv T^\nu{}_\mu + \frac{1}{8\pi G}\left(R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\nu{}_\mu R\right)_{\text{NONLINEAR}} \ ,$$

类似于$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$. 同$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$一样, $\tau^\nu{}_\mu$在通常的意义下守恒

$$\partial_\nu \tau^\nu{}_\mu = 0$$

并可以视为能量和动量的流:

$$P_\mu = \int \tau^0{}_\mu \,\mathrm{d}^3x \ .$$

因为引力场携带能量和动量, 它包含一个纯引力项; 没有这一项, $\tau^\nu{}_\mu$无法守恒. 类似地, 对于非阿贝尔群(那些$C^\gamma{}_{\alpha\beta} \neq 0$的群), 规范场携带它们所作用的量子数, 所以$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$包含一个规范场项(方程(15.3.3)右边的第一项). 因为$\mathscr{J}_\alpha{}^\nu$在通常的意义下守恒, 它可以视为这些量子数的流, 其中对称性生成元由下面的时间无关量给出

$$T_\alpha = \int \mathscr{J}_\alpha{}^0 \,\mathrm{d}^3x \ . \tag{15.3.10}$$

(另外, 齐次方程(15.3.9)包含协变导数, 就像广义相对论的Bianchi(比安奇)等式.) 相反, 这些复杂性都没有出现在量子电动力学中, 这是因为光子不携带它所作用的量子数, 电荷.

15.4 量子化

我们现在开始量子化前两节所描述的规范理论. 拉格朗日密度取为(15.3.1)的形式:

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha{}^{\mu\nu} + \mathscr{L}_M(\psi, D_\nu\psi) \ , \tag{15.4.1}$$

其中

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}A_{\gamma\nu} \ ,$$
$$D_\mu\psi \equiv \partial_\mu\psi - \mathrm{i}t_\alpha A_{\alpha\mu}\psi \ .$$

我们不能简单地令对易子等于i乘以相对应的Poisson括号就将这个理论量子化. 问题是约束中的一个. 用7.6节所描述的Dirac术语来说, 存在一个初级约束

$$\Pi_{\alpha 0} \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha{}^0)} = 0 \tag{15.4.2}$$

以及$A_\alpha{}^0$的场方程所提供的次级约束:

$$\begin{aligned} -\partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_{\alpha 0})} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\alpha 0}} &= \partial_\mu F_\alpha{}^{\mu 0} + F_\gamma{}^{\mu 0}C_{\gamma\alpha\beta}A_{\beta\mu} + J_\alpha{}^0 \\ &= \partial_k \Pi_\alpha{}^k + \Pi_\gamma{}^k C_{\gamma\alpha\beta}A_{\beta k} + J_\alpha{}^0 = 0 \ , \end{aligned} \tag{15.4.3}$$

其中$\Pi_\alpha{}^k \equiv \partial\mathscr{L}/\partial(\partial_0 A_{\alpha k}) = F_\alpha{}^{k0}$是共轭于$A_{\alpha k}$的“动量”, 其中$k$在$1, 2, 3$之间取值. $\Pi_{\alpha 0}$与$\partial_k\Pi_\alpha{}^k + \Pi_\gamma{}^k C_{\gamma\alpha\beta}A_{\beta k} + J_\alpha{}^0$的Poisson括号为零(这是因为后一个量独立于$A_\alpha{}^0$), 所以它们是第一类约束, 这些约束不能用Dirac括号替换Poisson括号进行处理.

正如电动力学的情况, 我们通过选择规范来处理这些约束. 电动力学采用的Coulomb规范在这里将会导致一个令人不快的复杂性,* 所以我们转而在所谓的*轴向规范*下进行处理, 它基于条件

$$A_{\alpha 3} = 0 \ . \tag{15.4.4}$$

这样, 规范场的正则变量就是$A_{\alpha i}$, i现在在1和2之间取值, 再加上它们的正则共轭

$$\Pi_{\alpha i} \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_{\alpha i})} = -F_\alpha{}^{0i} = \partial_0 A_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta 0}A_{\gamma i} \ . \tag{15.4.5}$$

场$A_{\alpha 0}$不是独立的正则变量, 而是通过约束(15.4.3)以其它变量定义的. 为了看到这一点, 注意到“电”场场强$F_\alpha{}^{\mu 0}$是

$$F_\alpha{}^{i0} = \Pi_{\alpha i} \ , \qquad F_\alpha{}^{30} = \partial_3 A_\alpha{}^0 \ , \tag{15.4.6}$$

所以约束(15.4.3)变成

$$-(\partial_3)^2 A_\alpha{}^0 = \partial_i\Pi_{\alpha i} + \Pi_{\gamma i}C_{\gamma\alpha\beta}A_{\beta i} + J_\alpha{}^0 \ , \tag{15.4.7}$$

这个方程(在合理的边界条件下)可以很容易地解出, 并以$\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$和$J_\alpha{}^0$的泛函给出$A_\alpha{}^0$. (我们使用了求和约定, 指标i, j等对1和2求和.) 应该注意的是, 物质场ψ_ℓ的正则共轭是

$$\pi_\ell = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\psi_\ell)} = \frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial(D_0\psi_\ell)} \ , \tag{15.4.8}$$

所以物质流的时间分量可以仅用物质场的正则变量表示

$$J_\alpha{}^0 = -\mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial(D_0\psi_\ell)}(t_\alpha)_\ell{}^m\psi_m = -\mathrm{i}\pi_\ell(t_\alpha)_\ell{}^m\psi_m \ . \tag{15.4.9}$$

因此方程(15.4.7)将给定时刻的$A_\alpha{}^0$定义为同一时刻的正则变量$\Pi_{\gamma i}$, $A_{\beta i}$, π_ℓ和ψ_m的泛函.

既然我们已经找出了这一规范下的正则变量, 我们现在可以着手构建哈密顿量了. 哈密顿密度是

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \Pi_{\alpha i}\partial_0 A_{\alpha i} + \pi_\ell\partial_0\psi_\ell - \mathscr{L} \\ &= \Pi_{\alpha i}(F_{\alpha 0i} + \partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta 0}A_{\gamma i}) + \pi_\ell\partial_0\psi_\ell \\ &\quad - \tfrac{1}{2}F_{\alpha 0i}F_{\alpha 0i} + \tfrac{1}{2}F_{\alpha ij}F_{\alpha ij} + \tfrac{1}{2}F_{\alpha i3}F_{\alpha i3} \\ &\quad - \tfrac{1}{2}F_{\alpha 03}F_{\alpha 03} - \mathscr{L}_M \ .\end{aligned} \tag{15.4.10}$$

利用方程(15.4.4)和(15.4.6), 这变成

$$\begin{aligned}\mathscr{H} = \mathscr{H}_M &+ \Pi_{\alpha i}(\partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta 0}A_{\gamma i}) + \tfrac{1}{2}\Pi_{\alpha i}\Pi_{\alpha i} \\ &+ \tfrac{1}{4}F_{\alpha ij}F_{\alpha ij} + \tfrac{1}{2}\partial_3 A_{\alpha i}\partial_3 A_{\alpha i} - \tfrac{1}{2}\partial_3 A_{\alpha 0}\partial_3 A_{\alpha 0} \ ,\end{aligned} \tag{15.4.11}$$

---

*除了纯代数上的困难外, Coulomb规范(同其他许多规范一样)还有一个称为Gribov(格里波夫)多值性的问题:[9] 即便附加$\mathbf{A}_\alpha$在无限远处为零的条件, 对于Coulomb规范条件$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}_\alpha = 0$的每个解, 存在另一个解, 与其相差有限的规范变换. Gribov多值性不会在这里影响我们, 因为我们是在轴向规范下进行量子化的, 在轴向规范下, 这个问题是不存在的, 并且我们仅用其它规范, 例如Lorentz规范, 来生成微扰展开.

其中$\mathscr{H}_M$是物质哈密顿密度:

$$\mathscr{H}_M \equiv \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathscr{L}_M \ . \tag{15.4.12}$$

沿用9.2节所导出的一般规则, 我们现在可以用这一哈密顿密度计算作为路径积分的矩阵元, 该路径积分是对$A_{\alpha i}$, $\Pi_{\alpha i}$, ψ_ℓ和π_ℓ的路径积分, 含有权重因子$\exp(\mathrm{i}I)$, 其中

$$I = \int \mathrm{d}^4x \left[\Pi_{\alpha i}\partial_0 A_{\alpha i} + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathscr{H} + \epsilon\text{项}\right] , \tag{15.4.13}$$

在I中, "ϵ项"仅用来给出传播子分母中正确的无限小虚项. (参看9.2节.) 我们注意到方程(15.4.7)和(15.4.9)给出的$A_\alpha{}^0$是正则变量的泛函, 而该泛函关于$\Pi_{\alpha i}$和π_ℓ是线性的. 那么, 对方程(15.4.11)的观察表明了, (假定$\mathscr{L}_M$至多是$D_\mu\psi$的平方)完整作用量(15.4.13)的被积函数至多是$\Pi_{\alpha i}$和π_ℓ的二次. 因此, 通过高斯积分的通常规则, 我们可以算出对这些正则"动量"的路径积分. 这一步骤的麻烦是方程(15.4.13)中$\Pi_{\alpha i}$的二阶项系数是$A_{\alpha i}$的函数, 所以高斯积分将会产生一个可怕的场相关行列式因子. 另外, 此时的整个体系看起来没有丝毫的可能是Lorentz不变的.

我们不在这条道路上继续前行, 取而代之, 我们将使用一个类似于在9.6节的电动力学路径积分公式中使用过的技巧. 注意到, 如果我们暂且认为$A_{\alpha 0}$是独立变量, 那么作用量(15.4.13)显然是$A_{\alpha 0}$的二次型, 其中二阶项$A_{\alpha 0}(x)A_{\beta 0}(y)$的系数等于场无关核$(\partial_3)^2\delta^4(x-y)$. 正如我们在第九章的附录中所看到的, 这种对$A_{\alpha 0}(x)$的高斯积分, 除去一个常数因子外, 等于被积函数在指数变量稳定"点"的值. 但是, 这里的作用量变分导数是

$$\frac{\delta I}{\delta A_{\alpha 0}} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial A_{\alpha 0}} = J_\alpha{}^0 + \partial_i \Pi_{\alpha i} + C_{\beta\alpha\gamma}\Pi_{\beta i}A_{\gamma i} - \partial_3^2 A_{\alpha 0} \ ,$$

所以作用量的"稳定"点是约束方程(15.4.7)的解. 因此, 取代用$A_{\alpha 0}$作为方程(15.4.7)的解, 我们同样可以就把它当做独立的积分变量进行处理.

现在, 视$A_{\alpha 0}$为独立变量时, 哈密顿量$\int \mathrm{d}^3x \mathscr{H}$显然是$\Pi_{\alpha i}$的二次型, 其中二阶项$\Pi_{\alpha i}(x)\Pi_{\beta j}(y)$的系数由场无关核$\frac{1}{2}\delta^4(x-y)\delta_{ij}$给出. 假定这对于物质场$\pi_\ell$同样是成立的, 通过令$\pi_\ell$和$\Pi_{\alpha i}$等于对应方程(15.4.1)的作用量的稳定"点", 我们可以计算出对π_ℓ和$\Pi_{\alpha i}$的路径积分至相差一个常数因子, π_ℓ和$\Pi_{\alpha i}$的稳定"点"是:

$$0 = \frac{\delta I}{\delta \pi_\ell} = \partial_0 \psi_\ell - \frac{\partial \mathscr{H}_M}{\partial \pi_\ell} \ ,$$
$$0 = \frac{\delta I}{\delta \Pi_{\alpha i}} = \partial_0 A_{\alpha i} - \Pi_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta 0}A_{\gamma i} = F_{\alpha 0 i} - \Pi_{\alpha i} \ .$$

将其代回方程(15.4.13)给出

$$\begin{aligned} I = \int \mathrm{d}^4x \Big[&\mathscr{H}_M + \tfrac{1}{2}F_{\alpha 0i}F_{\alpha 0i} \\ &- \tfrac{1}{4}F_{\alpha ij}F_{\alpha ij} - \tfrac{1}{2}\partial_3 A_{\alpha i}\partial_3 A_{\alpha i} + \tfrac{1}{2}(\partial_3 A_{\alpha 0})^2\Big] \\ = \int \mathrm{d}^4x\, &\mathscr{L} \ , \end{aligned} \tag{15.4.14}$$

其中$\mathscr{L}$是我们所出发的拉格朗日量(15.3.1)! 换句话说, 我们要做的是对$\psi_\ell(x)$以及$A_{\alpha\mu}(x)$的全部4个分量的路径积分, 其中的权重因子由方程(15.4.14)和(15.3.1)给出且是显然协变的, 但是强加了轴向规范协变条件, 即插入了因子

$$\prod_{x,\alpha} \delta\Big(A_{\alpha 3}(x)\Big) \ . \tag{15.4.15}$$

只要$\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B\cdots$是规范不变的, 我们就有

$$\begin{aligned}\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_{\text{VACUUM}} \quad &\propto \quad \int\left[\prod_{\ell,x}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\right]\left[\prod_{\alpha,\mu,x}\mathrm{d}A_{\alpha\mu}(x)\right]\\ &\times\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\ \exp\{\mathrm{i}I+\epsilon\text{项}\}\prod_{x,\alpha}\delta(A_{\alpha 3}(x))\ ,\end{aligned} \tag{15.4.16}$$

其中I是方程(15.4.14)给出的Lorentz不变且规范不变的作用量.

* * *

为了将来的参考, 我们注意到, 方程(15.4.16)中对规范场积分的体积元$\prod_{\alpha,\mu,x}\mathrm{d}A_{\alpha\mu}(x)$是规范不变的, 也就是说

$$\prod_{\alpha,\mu,x}\mathrm{d}A_{\Lambda\alpha\mu}(x)=\prod_{\alpha,\mu,x}\mathrm{d}A_{\alpha\mu}(x)\ , \tag{15.4.17}$$

其中$A_{\Lambda\alpha\mu}$是用规范变换作用$A_{\alpha\mu}(x)$后的结果, 规范变换的参量是$\Lambda_\alpha(x)$. 证明对于单位元附近的变换, 即无限小的变换参量$\lambda_\alpha(x)$, 这是成立的就足够了. 在这一情况下

$$A_{\lambda\alpha}{}^{\mu}=A_\alpha{}^\mu+\partial_\mu\lambda_\alpha+C_{\alpha\beta\gamma}A_\beta{}^\mu\lambda_\gamma\ ,$$

所以体积元之间的关系为

$$\prod_{\alpha,\mu,x}\mathrm{d}A_{\lambda\alpha\mu}(x)=\mathrm{Det}(\mathscr{N})\prod_{\alpha,\mu,x}\mathrm{d}A_{\alpha\mu}(x)\ ,$$

其中$\mathscr{N}$是“矩阵”:

$$\mathscr{N}_{\alpha\mu x,\beta\nu y}=\frac{\delta A_{\lambda\alpha\mu}(x)}{\delta A_{\beta\nu}(y)}=\delta^4(x-y)\,\delta_\mu^\nu\left[\delta_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma(x)\right]\ .$$

因为迹$C_{\alpha\alpha\gamma}$为零, 所以到λ_γ的一阶, $\mathscr{N}$的行列式为1.

在本章, 我们将假定对物质场积分的体积元$\prod_{n,x}\mathrm{d}\psi_n(x)$也是规范不变的. 这里有一个很重要的微妙, 在第22章我们将回到这个问题上, 但是, 正如那里所证明的, 这一假定对于我们目前的强作用和电弱作用的非阿贝尔规范理论是适用的.

15.5 De Witt-Faddeev-Popov方法

我们的路径积分公式(15.4.16)是在一个有利于正则量子化的规范下导出的, 但是从这一公式导出的Feynman规则会隐藏理论潜在的旋转不变性与Lorentz不变性. 为了导出显然Lorentz不变的Feynman规则, 我们需要改变规范.

我们首先注意到的是, 方程(15.4.16)是(相差一个不重要的常数因子)一大类泛函积分中的一个特殊情况, 这类泛函积分的形式为:

$$\mathscr{I}=\int\left[\prod_{n,x}\mathrm{d}\phi_n(x)\right]\mathscr{G}[\phi]\ B\Big[f[\phi]\Big]\ \mathrm{Det}\,\mathscr{F}[\phi]\ , \tag{15.5.1}$$

其中$\phi_n(x)$是一组规范场和物质场; $\prod_{n,x} \mathrm{d}\phi_n(x)$是体积元; 而$\mathscr{G}[\phi]$是$\phi_n(x)$的泛函, 并满足规范不变条件:

$$\mathscr{G}[\phi_\lambda]\prod_{n,x}\mathrm{d}\phi_{\lambda n}(x)=\mathscr{G}[\phi]\prod_{n,x}\mathrm{d}\phi_n(x)\ , \tag{15.5.2}$$

其中$\phi_{\lambda n}(x)$是用一个规范变换作用在ϕ上的结果, 该规范变换的参量是$\lambda_\alpha(x)$. (通常情况下, 当这一点满足时, 泛函$\mathscr{G}$与体积元分别是不变的, 但在这里我们所需要的只有方程(15.5.2).) 另外, $f_\alpha[\phi;x]$是这些场的"规范固定泛函", 它不是规范不变的且依赖于x和α; $B[f]$是针对x和α的一般函数$f_\alpha(x)$所定义的某个数值泛函; 而$\mathscr{F}$是"矩阵":

$$\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi]\equiv\left.\frac{\delta f_\alpha[\phi_\lambda;x]}{\delta\lambda_\beta(y)}\right|_{\lambda=0}\ . \tag{15.5.3}$$

(与我们通常函数的泛函或泛函的泛函的记法一致, $B\Big[f[\phi]\Big]$所依赖的$f_\alpha[\phi;x]$值是: 对未表示出的变量α和x的所有值所取的值, 而表示出的变量, 函数$\phi_n(x)$, 保持不变.) 方程(15.5.1)并不代表方程(15.4.16)最大可能的推广; 在15.7节我们将看到, 由于某些原因, 需要并存在进一步的推广. 这里我们从方程(15.5.1)出发, 这是因为它将协助推动15.7节的形式体系, 并且就处理处在最方便规范下的非阿贝尔规范理论而言, 它是足够的.

我们必须要验证路径积分(15.4.16)确实是方程(15.5.1)的一个特殊情况. 在方程(15.4.16)中, 场$\phi_n(x)$由$A_{\alpha\mu}(x)$和物质场$\psi_\ell(x)$构成, 并且

$$f_\alpha[A,\psi;x]=A_{\alpha 3}(x)\ , \tag{15.5.4}$$

$$B[f]=\prod_{x,\alpha}\delta\Big(f_\alpha(x)\Big)\ , \tag{15.5.5}$$

$$\mathscr{G}[A,\psi]=\exp\{\mathrm{i}\,I+\epsilon\text{项}\}\,\mathscr{O}_A\mathscr{O}_B\cdots\ , \tag{15.5.6}$$

$$\prod_{n,x}\mathrm{d}\phi_n(x)=\left[\prod_{\ell,x}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\right]\left[\prod_{\alpha,\mu,x}\mathrm{d}A^\mu_\alpha(x)\right]\ . \tag{15.5.7}$$

(我们现在去掉上下标$\alpha,\beta,\cdots$之间的区别.) 比较方程(15.4.16)与方程(15.5.1)—(15.5.3), 这表明了除去因子$\mathrm{Det}\,\mathscr{F}[\phi]$之外, 这些路径积分实际上是相同的. 对于特定的规范固定泛函(15.5.4), 这一因子是场无关的: 如果$A^3_\alpha(x)=0$, 那么在参量为$\lambda_\alpha(x)$的规范变换下, $A^3_\alpha(x)$的变化是

$$A^3_{\lambda\alpha}(x)=\partial_3\,\lambda_\alpha(x)=\int\mathrm{d}^4y\,\lambda_\alpha(y)\,\partial_3\delta^4(x-y)\ ,$$

使得方程(15.5.3)在这里变成场无关"矩阵"

$$\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi]=\delta_{\alpha\beta}\,\partial_3\delta^4(x-y)\ .$$

因此, 方程(15.5.1)中的行列式在这一规范下也是场无关的. 正如第9章所论述过的, 泛函积分中的场无关因子仅影响期望值与S-矩阵的真空涨落部分, 因而与S-矩阵元连通部分的计算是无关的.

将任意非阿贝尔理论的泛函积分(15.4.16)视为一般路径积分(15.5.1)的一个特殊情况, 其中的关键之处在于, 在这一形式下我们可以自由地改变规范. 特别地, 我们有一个定理, 即积分(15.5.1)实际上(在一个很宽泛的限制下)独立于规范固定泛函$f_\alpha[\phi;x]$, 它仅通过一个不相关的常数因子与泛函$B[f]$的选择相关.

证明: 将方程(15.5.1)中的所有积分变量ϕ替换成一个新的积分变量ϕ_Λ, 其中的$\Lambda^\alpha(x)$是任意(但固定)一组规范变换参量:

$$\mathscr{I} = \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\phi_{\Lambda n}(x)\right] \mathscr{G}[\phi_\Lambda] B\Big[f[\phi_\Lambda]\Big] \,\mathrm{Det}\, \mathscr{F}[\phi_\Lambda] \; . \tag{15.5.8}$$

(这一步在数学上是平庸的, 就像将积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$变成$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{d}y$, 并且没有使用我们关于规范不变性的假定.) 现在使用已假定的测度$\Pi\mathrm{d}\phi$乘以泛函$\mathscr{G}[\phi]$的规范不变性(15.5.2), 将其重写为

$$\mathscr{I} = \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\phi_n(x)\right] \mathscr{G}[\phi] B\Big[f[\phi_\Lambda]\Big] \,\mathrm{Det}\, \mathscr{F}[\phi_\Lambda] \; . \tag{15.5.9}$$

既然$\Lambda^\alpha(x)$是任意的, 这时左边不能与它相关. 因此, 在一个合适的权重因子$\rho[\Lambda]$(会在后面选定)下积掉$\Lambda^\alpha(x)$会给出

$$\mathscr{I} \int \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}\Lambda^\alpha(x)\right] \rho[\Lambda] = \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\phi_n(x)\right] \mathscr{G}[\phi] C[\phi] \; , \tag{15.5.10}$$

其中

$$C[\phi] \equiv \int \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}\Lambda^\alpha(x)\right] \rho[\Lambda]\, B\Big[f[\phi_\Lambda]\Big] \,\mathrm{Det}\, \mathscr{F}[\phi_\Lambda] \; . \tag{15.5.11}$$

现在, 方程(15.5.3)给出

$$\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi_\lambda] = \left.\frac{\delta f_\alpha[(\phi_\Lambda)_\lambda; x]}{\delta\lambda^\beta(y)}\right|_{\lambda=0} \; . \tag{15.5.12}$$

我们假定这些变换构成群; 即, 我们可以将先进行参量为$\Lambda^\alpha(x)$的规范变换再进行参量为$\lambda^\alpha(x)$的规范变换后的结果, 写成规范变换参量为$\tilde{\Lambda}^\alpha(x;\Lambda,\lambda)$的单次“乘积”规范变换作用后的结果,

$$(\phi_\Lambda)_\lambda = \phi_{\tilde{\Lambda}(\Lambda,\lambda)} \; . \tag{15.5.13}$$

利用偏(泛函)微分的链式法则, 我们就有

$$\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}[\phi_\Lambda] = \int \mathscr{J}_{\alpha x,\gamma z}[\phi,\Lambda] \mathscr{R}^{\gamma z}{}_{\beta y}[\Lambda] \mathrm{d}^4 z \; , \tag{15.5.14}$$

其中

$$\mathscr{J}_{\alpha x,\gamma z}[\phi,\Lambda] \equiv \left.\frac{\delta f_\alpha[\phi_{\tilde{\Lambda}}; x]}{\delta\tilde{\Lambda}^\gamma(z)}\right|_{\tilde{\Lambda}=\Lambda} = \frac{\delta f_\alpha[\phi_\Lambda; x]}{\delta\Lambda^\gamma(z)} \tag{15.5.15}$$

以及

$$\mathscr{R}^{\gamma z}{}_{\beta y}[\Lambda] = \left.\frac{\delta\tilde{\Lambda}^\gamma(z;\Lambda,\lambda)}{\delta\lambda^\beta(y)}\right|_{\lambda=0} \; . \tag{15.5.16}$$

由此得出

$$\mathrm{Det}\, \mathscr{F}[\phi_\Lambda] = \mathrm{Det}\, \mathscr{J}[\phi,\Lambda] \;\mathrm{Det}\, \mathscr{R}[\Lambda] \; . \tag{15.5.17}$$

我们注意到, $\mathrm{Det}\, \mathscr{J}[\phi,\Lambda]$就是积分变量从$\Lambda^\alpha(x)$变换到($\phi$固定的)$f_\alpha[\phi_\Lambda; x]$的雅克比行列式. 因此, 如果我们将权重函数$\rho(\Lambda)$选为

$$\rho(\Lambda) = 1\Big/ \mathrm{Det}\, \mathscr{R}[\Lambda] \tag{15.5.18}$$

那么

$$C[\phi] = \int \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}\Lambda^\alpha(x)\right] \mathrm{Det}\,\mathscr{I}[\phi,\Lambda]\; B\Big[f[\phi_\Lambda]\Big]$$
$$= \int \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}f_\alpha(x)\right] B[f] \equiv C \ , \tag{15.5.19}$$

它显然是独立于ϕ的. (读者可以认为方程(15.5.18)给出了群的参量空间上的不变(Haar)测度.) 这样, 最终我们有

$$\mathscr{I} = \frac{C\int\left[\prod_{n,x}\mathrm{d}\phi_n(x)\right]\mathscr{G}[\phi]}{\int\left[\prod_{\alpha,x}\mathrm{d}\Lambda^\alpha(x)\right]\rho[\Lambda]} \ . \tag{15.5.20}$$

这个结果显然与我们对$f_\alpha[\phi;x]$的选择无关, 它已经被简化成单变量的积分, 并且它仅通过常数C与$B[f]$相关, 这正是所要证明的.

在继续应用这个定理之前, 我们应该暂停一下, 关注推导中的一个技巧点. 由于同一个原因, 方程(15.5.20)的分子和分母中的积分都是病态定义的. 因为假定$\mathscr{G}[\phi]$是规范不变的, 所以它对ϕ的积分不可能收敛的; 将ϕ变成ϕ_λ的"轨道"能够抵达所有可能的$\lambda_\alpha(x)$, 而$\mathscr{G}[\phi]$沿着所有这样的轨道都是常数. 同样, 分母中的积分也是发散的, 这是因为$\rho[\Lambda]\Pi\mathrm{d}\Lambda$就是普通群积分的不变体积元, 并且它沿着"轨道"$\Lambda\to\tilde{\Lambda}(\Lambda,\lambda)$是常数. 通过在一个有限的时空晶格内表述该理论, 方程(15.5.20)中分子和分母的发散都可以被消除掉, 在这一情况下, 规范群的体积就是整体Lie群本身的体积乘以晶格格位的数目. 对于方程(15.5.20)左边的原始定义(15.5.1)而言, 由于规范固定因子$B[f]$消除了这一发散, 我们可以推测, 随着晶格格位的数目趋于无穷, 它在方程(15.5.20)右边的分子和分母之间抵消了.

现在, 切入主题. 我们已经看到, 轴向规范下的真空期望值(15.4.16)由一般形式的路径积分(15.5.1)给出. 装备了之上的定理后, 对于$f_\alpha[A,\psi;x]$和$B[f]$的(几乎)任意选择, 我们得到结论

$$\langle T\{\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\}\rangle_V \propto \int\left[\prod_{\ell,x}\mathrm{d}\psi_\ell(x)\right]\left[\prod_{\alpha,\mu,x}\mathrm{d}A_\alpha{}^\mu(x)\right]$$
$$\times\,\mathcal{O}_A\mathcal{O}_B\cdots\exp\{\mathrm{i}I+\epsilon\text{项}\}\; B\Big[f[A,\psi]\Big]\;\mathrm{Det}\,\mathscr{F}[A,\psi] \ . \tag{15.5.21}$$

因此, 我们现在可以在一个更加方便的规范下用方程(15.5.21)推导Feynman规则.

我们知道如何计算的路径积分是高斯型乘以多项式的路径积分, 所以我们一般会取

$$B[f] = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\xi}\int\mathrm{d}^4x\, f_\alpha(x)f_\alpha(x)\right) \ , \tag{15.5.22}$$

其中ξ是任意的实参量. 在这一选择下, 因子B在方程(15.5.21)中的效应仅是给有效拉格朗日量增加一项

$$\mathscr{L}_{\mathrm{EFF}} = \mathscr{L} - \frac{1}{2\xi}f_\alpha f_\alpha \ . \tag{15.5.23}$$

Lorentz不变的规范固定函数f_α的最简单选择与电动力学中的选择相同:

$$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha{}^\mu \ . \tag{15.5.24}$$

这样, 裸规范场的传播子就可以像量子电动力学中那样进行计算. 有效作用量的自由矢量玻色子部分可以写成

$$\begin{aligned}I_{0A} &= -\int \mathrm{d}^4x \Big[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu})(\partial^\mu A_\alpha{}^\nu - \partial^\nu A_\alpha{}^\mu) \\ &\quad + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\alpha{}^\mu)(\partial_\nu A_\alpha{}^\nu) + \epsilon\text{项}\Big] \\ &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, \mathscr{D}_{\alpha\mu x,\beta\nu y} A_\alpha{}^\mu(x) A_\beta{}^\nu(y)\ ,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{\alpha\mu x,\beta\nu y} &= \eta_{\mu\nu}\,\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial y_\lambda}\,\delta^4(x-y)\delta_{\alpha\beta} \\ &\quad - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\,\delta^4(x-y)\delta_{\alpha\beta} + \epsilon\text{项} \\ &= (2\pi)^{-4}\delta_{\alpha\beta}\int \mathrm{d}^4p \left[\eta_{\mu\nu}(p^2 - \mathrm{i}\epsilon) - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)p_\mu p_\nu\right] e^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\ .\end{aligned}$$

取方括号中矩阵的倒数, 我们就得到了传播子:

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha\mu,\beta\nu}(x,y) &= (\mathscr{D}^{-1})_{\alpha\mu x,\beta\nu y} \\ &= (2\pi)^{-4}\int \mathrm{d}^4p \left[\eta_{\mu\nu} + (\xi-1)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right]\frac{e^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}}{p^2 - \mathrm{i}\epsilon}\ .\end{aligned} \tag{15.5.25}$$

这既是Landau规范的推广, 也是Feynman规范的推广, 可以通过取$\xi = 0$和$\xi = 1$分别回到这两个规范. 当$\xi \to 0$时, 除了$f_\alpha = 0$附近, 泛函(15.5.22)振荡的非常剧烈, 所以这个泛函的作用就像δ-函数, 给泛函积分强加了Landau规范条件$\partial_\mu A^\mu = 0$, 它很自然地导出了满足条件$\partial^\mu \Delta_{\alpha\mu,\beta\nu} = 0$所相应的传播子. 对于不为零的$\xi$值, 泛函$B[f]$并不挑出规范场, 使得$A_{\alpha\mu}$满足任何特定规范条件, 但是通常将传播子(15.5.25)称为"广义Feynman规范"或"广义ξ-规范"下的传播子. 一个很好的计算物理振幅的策略是, 保持ξ任意, 而在计算的最后检验结果是不是ξ-无关的.

附加一个条件后, Feynman规则现在是显然的: 顶点的贡献可以从原始拉格朗日$\mathscr{L}$的相互作用项中读出来, 而规范场传播子由方程(15.5.25)给出, 物质场传播子像往常那样计算. 确切些, $\mathscr{L}$中的三线性相互作用

$$-\tfrac{1}{2}\,C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu})A_\beta{}^\mu A_\gamma{}^\nu$$

对应与三个矢量玻色子线相连的顶点, 这些线携带(入)动量p, q, k以及Lorentz和规范指标$\mu\alpha, \nu\beta, \rho\gamma$, 那么, 根据动量空间Feynman规则, 这种顶点对被积函数的贡献是

$$\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\,[-\mathrm{i}\,C_{\alpha\beta\gamma}]\left[p_\nu\eta_{\mu\lambda} - p_\lambda\eta_{\mu\nu} + q_\lambda\eta_{\nu\mu} - q_\mu\eta_{\nu\lambda} + k_\mu\eta_{\lambda\nu} - k_\nu\eta_{\lambda\mu}\right]\ . \tag{15.5.26}$$

另外, $\mathscr{L}$中的A^4相互作用项,

$$-\tfrac{1}{4}\,C_{\epsilon\alpha\beta}C_{\epsilon\gamma\delta}\,A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_\gamma{}^\mu A_\delta{}^\nu\ ,$$

它对应与四个矢量玻色子线相连的顶点. 如果这些线携带(入)动量p, q, k, ℓ, 以及Lorentz和规范指标$\mu\alpha, \nu\beta, \rho\gamma$和$\sigma\delta$, 那么这种顶点对被积函数的贡献是

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(p+q+k+\ell)\ \times\ \Big[-C_{\epsilon\alpha\beta}\,C_{\epsilon\gamma\delta}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \\ &- C_{\epsilon\alpha\gamma}\,C_{\epsilon\alpha\beta}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}) - C_{\epsilon\alpha\delta}\,C_{\epsilon\beta\gamma}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu})\Big]\ .\end{aligned} \tag{15.5.27}$$

(回忆起结构常数$C_{\alpha\beta\gamma}$包含耦合常数因子, 所以因子(15.5.26)和(15.5.27)关于耦合常数分别是一阶和二阶的.)

在这一Feynman规则中, 还有一个困难我们没有处理, 即, 方程(15.5.21)中出现了因子$\det \mathscr{F}$, 对于一般的规范, 它不是常数. 我们现在转向这个因子的考察.

15.6 鬼

我们现在来考察方程(15.5.21)中的因子$\mathscr{F}$对非阿贝尔规范场论Feynman规则的影响. 为了能将这个影响处理成Feynman规则的修正, 回顾我们在9.5节所证明的一个事实, 即, 任何矩阵$\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}$的行列式可以表示为一个路径积分

$$\mathrm{Det}\,\mathscr{F} \propto \int \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}\omega^*_\alpha(x)\right] \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}\omega_\alpha(x)\right] \exp(\mathrm{i}I_{GH}) \ , \tag{15.6.1}$$

其中

$$I_{GH} \equiv \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \omega^*_\alpha(x)\, \omega_\beta(y)\, \mathscr{F}_{\alpha x,\beta y} \ . \tag{15.6.2}$$

这里的ω^*_α和ω_α是一组独立的反对易经典变量, 并且比例常数是场无关的. (为了再次给出因子$\mathrm{Det}\,\mathscr{F}$, 我们必须将场变量$\omega_\alpha$和$\omega^*_\alpha$选成费米场变量; 如果我们将这些场变量选成玻色的, 那么路径积分(15.6.1)就会正比于$(\mathrm{Det}\,\mathscr{F})^{-1}$.) 场$\omega^*_\alpha$和$\omega_\alpha$不非得通过复共轭相关联, 我们甚至会在15.7节看到, 由于某些原因, 我们需要假定ω^*_α和ω_α是独立的实变量. 因子$\mathrm{Det}\,\mathscr{F}$的全部效应等同于把$I_{GH}$纳入到全部的有效作用量中, 并对“场”$\omega$和$\omega^*$积分. 即, 对于任意的规范固定函数$f_\alpha(x)$,

$$\begin{aligned}\langle T\{\mathcal{O}_A\cdots\}\rangle_V \ \propto \ & \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\psi_n(x)\right] \left[\prod_{\alpha,\mu,x} \mathrm{d}A_{\alpha\mu}(x)\right] \\ & \times \left[\prod_{\alpha,x} \mathrm{d}\omega_\alpha(x)\, \mathrm{d}\omega^*_\alpha(x)\right] \exp\Big(\mathrm{i}\, I_{\mathrm{MOD}}[\psi, A, \omega, \omega^*]\Big)\, \mathcal{O}_A \cdots \ ,\end{aligned} \tag{15.6.3}$$

其中I_{MOD}是修正作用量

$$I_{\mathrm{MOD}} = \int \mathrm{d}^4x \left[\mathscr{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha\right] + I_{GH} \ . \tag{15.6.4}$$

场ω_α和ω^*_α(至少在协变规范下)是Lorentz标量, 但它们满足费米统计. 这里并没有真的违反自旋统计关系, 这是因为在初态或末态中不存在描述这些场的粒子. 由于这个原因, ω_α和ω^*_α称为“鬼”粒子和“反鬼”粒子的场. 对方程(15.6.2)的观察表明, 这个作用量反应了称为“鬼数”的守恒量, ω_α的鬼数等于1, ω^*_α的鬼数等于-1, 而对于所以其它的场则是零.

当“矩阵”$\mathscr{F}$可以表示成

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_0 + \mathscr{F}_1 \ , \tag{15.6.5}$$

其中$\mathscr{F}_0$与场无关且是耦合常数的零阶项, 而$\mathscr{F}_1$与场相关且正比于一个或多个耦合常数, 这时鬼场的Feynman规则最简单. 在这一情况下, 鬼场传播子就是

$$\Delta_{\alpha\beta}(x,y) = -(\mathscr{F}_0^{-1})_{\alpha x,\beta y} \tag{15.6.6}$$

而鬼场顶点直接从相互作用项中读出

$$I'_{GH} = \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\omega^*_\alpha(x)\,\omega_\beta(y)(\mathscr{F}_1)_{\alpha x,\beta y}\ . \tag{15.6.7}$$

例如, 在上一节所讨论的广义ξ-规范中, 我们有

$$f_\alpha = \partial_\mu A^\mu_\alpha\ , \tag{15.6.8}$$

并且, 对于无限小的规范参量λ_α, 方程(15.1.9)给出:

$$A^\mu_{\alpha\lambda} = A^\mu_\alpha + \partial_\mu\lambda_\alpha + C_{\alpha\gamma\beta}\lambda_\beta A^\mu_\gamma$$

使得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\alpha x,\beta y} &= \left.\frac{\delta\partial_\mu A^\mu_{\alpha\lambda}(x)}{\delta\lambda_\beta(y)}\right|_{\lambda=0}\\ &= \Box\,\delta^4(x-y) + C_{\alpha\gamma\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[A^\mu_\gamma(x)\delta^4(x-y)\right]\ .\end{aligned} \tag{15.6.9}$$

这就是(15.6.5)的形式, 其中

$$(\mathscr{F}_0)_{\alpha x,\beta y} = \Box\delta^4(x-y)\,\delta_{\alpha\beta}\ , \tag{15.6.10}$$

$$(\mathscr{F}_1)_{\alpha x,\beta y} = -C_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[A^\gamma_\mu(x)\delta^4(x-y)\right]\ . \tag{15.6.11}$$

从方程(15.6.6)和(15.6.10)中, 我们看到鬼场传播子是

$$\Delta_{\alpha\beta}(x,y) = \delta_{\alpha\beta}(2\pi)^{-4}\int \mathrm{d}^4p\,(p^2-i\epsilon)^{-1}\,e^{\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\ , \tag{15.6.12}$$

所以, 在这一规范下, 鬼场的行为就像零质量的无自旋费米子, 它按照规范群的伴随表示进行变换. 利用方程(15.6.7)和(15.6.11)并分部积分, 我们发现这一作用量中的鬼场相互作用项变成

$$I'_{GH} = \int \mathrm{d}^4x\,C_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial\omega^*_\alpha}{\partial x^\mu}\,A^\mu_\gamma\,\omega_\beta\ . \tag{15.6.13}$$

这一相互作用所对应的顶点与一个出鬼线, 一个入鬼线以及一个矢量玻色子线相连. 如果这些线分别携带(入)动量p, q, k以及规范指标α, β, γ, 并且规范场携带矢量指标μ, 那么这种顶点对积分的贡献由动量空间Feynman规则给定为

$$\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\ \times\ \mathrm{i}p_\mu C_{\alpha\beta\gamma}\ . \tag{15.6.14}$$

鬼粒子绕圈传播, 圈上的每一顶点与单个矢量玻色子线传播, 就像平常对费米场变量所做的那样, 对于每一个圈都要补充一个额外的负号.

鬼圈额外的负号表明, 每个鬼场ω_α, 连同相应的反鬼场ω^*_α, 代表的是某种负自由度. 这些负自由度是必要的, 这是因为我们在使用协变规范场传播子时, 我们确实对物理自由度重复计数了; 物理的自由度是$A^\mu_\alpha(x)$的全部分量, 减去描述规范变换所需要的参量$\Lambda_\alpha(x)$.

总结一下, 在广义ξ-规范下, 修正作用量(15.6.4)可以写成

$$I_{\mathrm{MOD}} = \int \mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}_{\mathrm{MOD}}\ , \tag{15.6.15}$$

其中的修正拉格朗日密度是:

$$\mathscr{L}_{\text{MOD}} = \mathscr{L}_{\text{M}} - \frac{1}{4} F_\alpha^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\alpha^\mu)(\partial_\nu A_\alpha^\nu)$$
$$- \partial_\mu \omega_\alpha^* \partial^\mu \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\alpha^*) A_\gamma^\mu \omega_\beta \ . \tag{15.6.16}$$

重点是(如果物质拉格朗日量是可重整的)这个拉格朗日量是可重整的, 在基础的意义上, 就是说它的项所包含的场与导数的乘积, 其总量纲(按质量幂次计)小于等于4. (方程(15.6.16)中的动能项$-\partial_\mu \omega_\alpha^* \partial^\mu \omega_\alpha$确定了场$\omega$和$\omega^*$的量纲, 它们是质量的一次, 和普通的标量场以及规范场相同.) 然而, 这里的可重整性并不止于幂次计数; 同样必要的是, 存在一个抵消项吸收了每个发散. 在下一节, 我们将考察一个显著的对称性, 在17.2节, 我们将用这个对称性证明非阿贝尔场论在这一意义下确实是可重整的, 并且, 这个对称性甚至可以取代我们一直讨论的Faddeev-Popov-De Witt方法.

15.7 BRST对称性

尽管前两节所描述的Faddeev-Popov-De Witt方法使得理论的Lorentz不变性变得显然, 但它仍然依赖于选取一个规范, 因而它很自然地隐藏了理论的底层规范不变性. 在尝试证明理论的可重整性时, 这将是一个严重的问题——规范不变性约束了拉格朗日量中可作为抵消项以吸收紫外发散的项的形式, 但是一旦我们选择了规范, 我们如何知道规范不变性是否仍然会约束无穷大所产生的方式?

然而, 值得注意的是, 即使在我们选择规范之后, 路径积分仍然含有一个与规范不变性相关的对称性. 发现这一对称性的是Becchi(贝奇), Rouet(鲁埃), 以及Stora(斯托拉),[10] (Tyutin(秋金)[11]同时独立地发现了这一对称性), 在1975年, Faddeev, Popov和De Witt的工作的几年之后, 他们发现了这一对称性, 为了纪念这些发现者, 这一对称性被称为BRST对称性. 这一对称性在一定程度上将以它的原始发现历程展现出来, 它在这一过程中是作为Faddeev, Popov和De Witt方法的副产物出现的, 然而, 正如我们将看到的, 它也可以视为Faddeev-Popov-De Witt方法的替代品.

我们在方程(15.6.3)和(15.6.4)中已经看到, 对于非阿贝尔规范场论, 它的Feynman规则可以从对物质场, 规范场和鬼场的路径积分中获得, 路径积分中的作用量进行了修正, 我们可以将其写成

$$I_{\text{MOD}} = I_{\text{EFF}} + I_{GH} = \int \mathrm{d}^4x \, \mathscr{L}_{\text{MOD}} \ , \tag{15.7.1}$$

$$\mathscr{L}_{\text{MOD}} \equiv \mathscr{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha + \omega_\alpha^* \Delta_\alpha \ , \tag{15.7.2}$$

其中有一个我们现在引入的量

$$\Delta_\alpha(x) \equiv \int \mathrm{d}^4y \, \mathscr{F}_{\alpha x, \beta y}[A, \psi] \, \omega_\beta(y) \ . \tag{15.7.3}$$

它对应于(15.5.21)中规范固定泛函的选择:

$$B[f] \propto \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\xi} \int \mathrm{d}^4x \, f_\alpha f_\alpha \right) \ . \tag{15.7.4}$$

对于我们当前的目的, 将$B[f]$重写成Fourier积分将是有帮助的:

$$B[f] = \int \left[\prod_{\alpha, x} \mathrm{d}h_\alpha(x) \right] \exp\left[\frac{\mathrm{i}\xi}{2} \int \mathrm{d}^4x \, h_\alpha h_\alpha \right] \exp\left[\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \, f_\alpha h_\alpha \right] \ . \tag{15.7.5}$$

我们现在必须要做对场h_α(通常称为"Nakanishi-Lautrup"场[11a]), 以及物质场, 规范场, 鬼场和反鬼场做路径积分, 其中作用量是一个新的修正作用量

$$I_{\rm NEW} = \int {\rm d}^4x \left(\mathscr{L} + \omega^*_\alpha \Delta_\alpha + h_\alpha f_\alpha + \tfrac{1}{2}\xi h_\alpha h_\alpha \right) . \tag{15.7.6}$$

这一修正作用量不是规范不变的——相反, 如果我们要在路径积分中能够使用它, 它不是规范不变的反而更好. 然而, 它在"BRST"对称变换下不变, 该对称变换由一无限小常数θ参数化, θ与ω_α, ω^*_α以及所有的费米物质场反对易. 对于给定的θ, BRST变换是

$$\delta_\theta \psi = {\rm i} t_\alpha \theta \omega_\alpha \psi \ , \tag{15.7.7}$$

$$\delta_\theta A_{\alpha\mu} = \theta D_\mu \omega_\alpha = \theta[\partial_\mu \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma] \ , \tag{15.7.8}$$

$$\delta_\theta \omega^*_\alpha = -\theta h_\alpha \ , \tag{15.7.9}$$

$$\delta_\theta \omega_\alpha = -\tfrac{1}{2}\theta\, C_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma \ , \tag{15.7.10}$$

$$\delta_\theta h_\alpha = 0 \ . \tag{15.7.11}$$

(回忆, 在费米路径积分中, ω_α和ω^*_α之间不存在联系, 使得方程(15.7.9)不必须是方程(15.7.10)的共轭.) 因为h_α是BRST-不变的, 所以, 我们可以按照自己的意愿将方程(15.7.5)中的高斯因子$\exp(\frac{1}{2}i\xi\int h_\alpha h_\alpha)$替换为$h_\alpha$的任意光滑泛函, 这会产生一个任意的泛函$B[f]$, 但是不会影响作用量的BRST不变性. 然而, 为了图形计算以及重整化的目的, 保持$B[f]$为高斯型将是有帮助的.

在检查作用量(15.7.1)的不变性时, 先注意到变换(15.7.7)—(15.7.11)的幂零性将是很有帮助的; 即, 如果F是$\psi, A, \omega, \omega^*$以及$h$的任意泛函, 并且我们用

$$\delta_\theta F \equiv \theta s F \tag{15.7.12}$$

定义sF, 那么*

$$\delta_\theta(sF) = 0 \ , \tag{15.7.13}$$

或者等价地,

$$s(sF) = 0 \ . \tag{15.7.14}$$

当δ_θ作用在单个场上时, 验证这一幂零性是直接的. 首先, 作用在物质场上,

$$\begin{aligned}\delta_\theta s\psi = {\rm i}t_\alpha\, \delta_\theta(\omega_\alpha\psi) &= -\tfrac{1}{2}{\rm i}\, C_{\alpha\beta\gamma} t_\alpha \theta \omega_\beta \omega_\gamma \psi - t_\alpha t_\beta \omega_\alpha \theta \omega_\beta \psi \\ &= -\tfrac{1}{2}{\rm i}\, C_{\alpha\beta\gamma} t_\alpha \theta \omega_\beta \omega_\gamma \psi + t_\alpha t_\beta \theta \omega_\alpha \omega_\beta \psi \ .\end{aligned}$$

右边第二项中的乘积$\omega_\alpha\omega_\beta$关于$\alpha$和$\beta$是反对称的, 所以我们可以将这一项中的$t_\alpha t_\beta$替换成$\frac{1}{2}[t_\alpha, t_\beta]$, 这一项随之与第一项相抵消:

$$ss\psi = 0 \ . \tag{15.7.15}$$

*在BRST对称性的原始工作中, 泛函$B[f]$的形式停留在了(15.7.4), 使得方程(15.7.9)中的h_α被替换成了$-f_\alpha/\xi$, 并且, 仅当作用在ω_α以及规范场和物质场的函数上时, BRST变换才是幂零的, 但对于ω^*_α的函数则不是.

下一步, 作用在规范场上, 我们有

$$\begin{aligned}\delta_\theta s A_{\alpha\mu} &= \delta_\theta D_\mu \omega_\alpha \\ &= \partial_\mu \delta_\theta \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}\delta_\theta A_{\beta\mu}\omega_\gamma + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\delta_\theta\omega_\gamma \\ &= \theta\Big(-\tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\partial_\mu(\omega_\beta\omega_\gamma) + C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\omega_\beta)\omega_\gamma \\ &\quad + C_{\alpha\beta\gamma}C_{\beta\delta\epsilon}A_{\delta\mu}\omega_\epsilon\omega_\gamma - \tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}C_{\gamma\delta\epsilon}A_{\beta\mu}\omega_\delta\omega_\epsilon\Big) \\ &= \theta\Big(\tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\omega_\beta)\omega_\gamma + \tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\omega_\gamma)\omega_\beta \\ &\quad - C_{\alpha\beta\gamma}C_{\gamma\delta\epsilon}A_{\delta\mu}\omega_\epsilon\omega_\beta - \tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}C_{\gamma\delta\epsilon}A_{\beta\mu}\omega_\delta\omega_\epsilon\Big)\ .\end{aligned}$$

最后一式中, 由于$C_{\alpha\beta\gamma}$关于β和γ是反对称的, 所以前两项相互抵消了, 而第三项和第四项由于雅克比等式(15.1.5)相互抵消, 所以

$$ssA_{\alpha\mu} = 0\ . \tag{15.7.16}$$

方程(15.7.9)和(15.7.11)立刻证明了

$$ss\omega^*_\alpha = 0 \tag{15.7.17}$$

和

$$ssh_\alpha = 0\ . \tag{15.7.18}$$

最后,

$$\begin{aligned}\delta_\theta s\omega_\alpha &= -\tfrac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma}\delta_\theta(\omega_\beta\omega_\gamma) \\ &= \tfrac{1}{4}\theta\left(C_{\alpha\beta\gamma}C_{\beta\delta\epsilon}\,\omega_\delta\omega_\epsilon\omega_\gamma - C_{\alpha\beta\gamma}C_{\gamma\delta\epsilon}\,\omega_\beta\omega_\delta\omega_\epsilon\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\theta\, C_{\alpha\beta\gamma}C_{\gamma\delta\epsilon}\omega_\delta\omega_\epsilon\omega_\beta\ .\end{aligned}$$

但是, 乘积$\omega_\beta\omega_\delta\omega_\epsilon$是反对称的, 所以雅克比等式(15.1.5)表明它也为零

$$ss\omega_\alpha = 0\ . \tag{15.7.19}$$

现在考察两个场ϕ_1和ϕ_2的乘积, 它们中的一个是$\psi, A, \omega, \omega^*$或$h$, 也可以二者都是, 并且它们不一定在同一时空点上. 那么

$$\delta_\theta(\phi_1\phi_2) = \theta(s\phi_1)\phi_2 + \phi_1\theta(s\phi_2) = \theta\Big[(s\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1 s\phi_2\Big]\ ,$$

其中, 当ϕ_1是玻色场时, 符号$\pm$取正号, 当ϕ_1是费米场时, 则取负号. 即,

$$s(\phi_1\phi_2) = (s\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1 s\phi_2\ .$$

正如我们所看到的, 由于$\delta_\theta(s\phi_1) = \delta_\theta(s\phi_2) = 0$, BRST变换在$s(\phi_1\phi_2)$上的效果是

$$\delta_\theta s(\phi_1\phi_2) = (s\phi_1)\theta(s\phi_2) \pm \theta(s\phi_1)(s\phi_2)\ .$$

然而, $s\phi$总有一个与ϕ相反的统计, 所以将右边第一项中的θ移至左边会引入一个符号因子$\mp$:

$$\delta_\theta s(\phi_1\phi_2) = \theta\Big[\mp(s\phi_1)(s\phi_2) \pm (s\phi_1)(s\phi_2)\Big] = 0\ .$$

以这一方式继续下去, 我们会看到, BRST变换作用在不同时空点的场的任何乘积上都是幂零的:

$$\delta_\theta\, s(\phi_1\phi_2\phi_3\cdots) = 0\ .$$

任何泛函$F[\phi]$都能写成这种乘积再加上c-数系数的多重积分之和, 这样

$$\delta_\theta\, sF[\phi] = \theta s s F[\phi] = 0\ . \tag{15.7.20}$$

这样就补全了BRST变换幂零性的证明.

现在我们回到作用量(15.7.6)的BRST不变性验证. 首先, 注意到, 对于任何仅是物质场和规范场的泛函, BRST变换就是一个规范变换, 该规范变换的参量是无限小参量

$$\lambda_\alpha(x) = \theta\omega_\alpha(x)\ . \tag{15.7.21}$$

因此, 方程(15.7.6)中的第一项自动是BRST不变的:

$$\delta_\theta \int \mathrm{d}^4x\, \mathscr{L} = 0\ . \tag{15.7.22}$$

为了计算BRST变换在作用量(15.7.6)其它部分上的效果, 要注意到它在规范固定函数上的效应就是规范变换(15.7.21), 所以

$$\begin{aligned}\delta_\theta f_\alpha[x;A,\psi] &= \int \left.\frac{\delta f_\alpha[x;A_\lambda,\psi_\lambda]}{\delta\lambda^\beta(y)}\right|_{\lambda=0} \theta\,\omega_\beta(y)\,\mathrm{d}^4y \\ &= \theta\int \mathscr{F}_{\alpha x,\beta y}[A,\psi]\,\omega_\beta(y)\,\mathrm{d}^4y\end{aligned}$$

或者以(15.7.3)的形式

$$\delta_\theta f_\alpha[x;A,\psi] = \theta\Delta_\alpha(x;A,\psi,\omega)\ . \tag{15.7.23}$$

(注意, $\mathscr{F}$是一个玻色量, 所以在这里将θ移至左边时没有符号变化.) 另外, 回忆起$\delta_\theta\omega^*_\alpha = -\theta h_\alpha$和$\delta_\theta h_\alpha = 0$. 因此, 在“新”作用量(15.7.6)的被积函数中, 除$\mathscr{L}$以外的项可以写成

$$\omega^*_\alpha\Delta_\alpha + h_\alpha f_\alpha + \tfrac{1}{2}\xi h_\alpha h_\alpha = s\Big(\omega^*_\alpha f_\alpha + \tfrac{1}{2}\xi\omega^*_\alpha h_\alpha\Big) \tag{15.7.24}$$

或者, 以另一种形式

$$I_{\text{NEW}} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathscr{L} + s\Psi\ , \tag{15.7.25}$$

其中

$$\Psi \equiv -\int \mathrm{d}^4x\,\left(\omega^*_\alpha f_\alpha + \tfrac{1}{2}\xi\omega^*_\alpha h_\alpha\right)\ . \tag{15.7.26}$$

BRST变换的幂零性立刻告诉我们$s\Psi$和$\int \mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}$都是BRST不变的.

在某种意义上, 这一结果的逆方向也是成立的: 我们会在17.2节看到, 对于服从BRST不变性以及拉格朗日量(15.7.25)其它对称性的可重整拉格朗日量, 除了各种常系数的值会有一个变化外, 它必须采取方程(15.7.25)的形式. 但这还不足以确立这些理论的可重整性. BRST对称变换以非线性的方式作用在场上, 而在这一情形下, 拉格朗日量的对称性与矩阵元和Green函数的对称性之间不存在简单的联系. 利用下一章所发展的外场方法, 我们将在17.2节证明, Feynman振幅中的紫外

发散项(尽管有限部分不在此列)确实服从一种重整化后的BRST不变性, 这使得可重整性的证明完整了.

方程(15.7.25)表明, 任何规范理论的物理部分都包含在, BRST算符的核(即, 一般的BRST不变项$\int d^4x\mathscr{L}+s\Psi$)模掉BRST变换的像(即, 形式为$s\Psi$的项)后的那部分中. 任何幂零变换的核, 在模掉该变换的像后, 称为构成该变换的**上同调**. 换另一说法, 一个规范理论的物理部分可以等同为BRST算符的上同调.[12] 一个基本的物理要求是, 物理态之间的矩阵元应该独立于我们对规范固定函数f_α的选择, 换句话说, 矩阵元应该独立于对方程(15.7.25)中泛函Ψ的选择. 对于任意的矩阵元$\langle\alpha|\beta\rangle$, Ψ的变化$\tilde{\delta}\Psi$所引起的变化是

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle=\mathrm{i}\langle\alpha|\tilde{\delta}I_{\mathrm{NEW}}|\beta\rangle=\mathrm{i}\langle\alpha|s\tilde{\delta}\Psi|\beta\rangle\ . \tag{15.7.27}$$

(我们在这里使用波浪符是为了将规范固定函数中的这种任意变化与BRST变换或者规范变换区分开.) 我们可以引入一个费米的BRST“核”Q, 它的定义满足, 对于任何场算符Φ,

$$\delta_\theta\Phi=\mathrm{i}[\theta\,Q,\Phi]=\mathrm{i}\theta\,[Q,\Phi]_{\mp}\ ,$$

换句话说,

$$[Q,\Phi]_{\mp}=\mathrm{i}s\Phi\ , \tag{15.7.28}$$

根据Φ是玻色的还是费米的, 符号分别为$-$和$+$. 那么BRST变换的幂零性就给出了

$$0=-ss\Phi=[Q,[Q,\Phi]_{\mp}]_{\pm}=[Q^2,\Phi]_-\ .$$

为了使其对于所有的算符Φ都成立, Q^2要么为零, 要么正比于单位算符. 但是, 由于Q^2有一个不为零的鬼数**, 它不可能正比于单位算符, 所以它必须为零:

$$Q^2=0\ . \tag{15.7.29}$$

从方程(15.7.27)和(15.7.28), 我们得到

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle=\langle\alpha|[Q,\tilde{\delta}\Psi]|\beta\rangle\ . \tag{15.7.30}$$

为了使其对于Ψ的所有变化$\tilde{\delta}\Psi$都为零, 必须有

$$\langle\alpha|Q=Q|\beta\rangle=0\ . \tag{15.7.31}$$

因此, 物理态在幂零算符Q的核中. 两个物理态, 若它们仅相差Q的像中的一个态矢, 即, 形式为$Q|\cdots\rangle$的态矢, 显然, 它们与所有其它物理态之间的矩阵元是相同的, 因而在物理上是等价的. 因此, 独立的物理态对应于Q的核模掉Q的像后中的态——即, 它们对应于Q的上同调.

为了看到这在实际情形中是如何运作的, 我们来考察一个纯电动力学的简单例子.† 取规范固定函数为$f=\partial_\mu A^\mu$并积掉辅助场h, BRST变换(15.7.8)—(15.7.10)在这里是

$$s\,A_\mu=\partial_\mu\omega\ ,\qquad s\,\omega^*=\partial_\mu A^\mu/\xi\ ,\qquad s\,\omega=0\ . \tag{15.7.32}$$

** 回忆鬼数的定义, 它对于ω_α为+1, 对于ω^*_α为-1, 对于所有的规范场和物质场则是零.

† 由于电动力学中的结构常数为零, 方程(15.6.11)和(15.6.7)表明, 这里鬼场不与其它场耦合. 然而, 就用BRST对称性识别物理态这一点而言, 电动力学提供了一个很好的例子. 确实如此, 在分析“入”态和“出”态上的物理条件时, 我们忽略了相互作用, 所以, 由于这个原因, 处理非阿贝尔规范场论就像同时处理几个量子电动力学.

我们将场展成简正模[††]

$$
\begin{aligned}
A^\mu(x) &= (2\pi)^{-3/2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2p^0}}\left[a^\mu(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+a^{\mu*}(\mathbf{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]\,,\\
\omega(x) &= (2\pi)^{-3/2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2p^0}}\left[c(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+c^{*}(\mathbf{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]\,,\\
\omega^*(x) &= (2\pi)^{-3/2}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{2p^0}}\left[b(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+b^{*}(\mathbf{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right]\,.
\end{aligned}
\tag{15.7.33}
$$

匹配方程(15.7.28)两边$e^{\pm ip\cdot x}$的系数给出

$$
\begin{aligned}
&[Q,a^\mu(\mathbf{p})]_- = -p^\mu c(\mathbf{p})\,, \qquad [Q,a^{\mu*}(\mathbf{p})]_- = p^\mu c^*(\mathbf{p})\,,\\
&[Q,b(\mathbf{p})]_+ = p^\mu a_\mu(\mathbf{p})/\xi\,, \qquad [Q,b^*(\mathbf{p})]_+ = p^\mu a^*_\mu(\mathbf{p})/\xi\,,\\
&[Q,c(\mathbf{p})]_+ = [Q,c^*(\mathbf{p})]_+ = 0\,.
\end{aligned}
\tag{15.7.34}
$$

考察任何满足物理条件(15.7.31)的态$|\psi\rangle$:

$$
Q|\psi\rangle = 0\,. \tag{15.7.35}
$$

那么, 对于含有一个额外光子的态$|e,\psi\rangle = e_\mu a^{\mu*}(\mathbf{p})|\psi\rangle$, 如果$e_\mu p^\mu = 0$, 它们就满足物理条件$Q|e,\psi\rangle = 0$. 另外, 态$|\psi\rangle' \equiv b^*(\mathbf{p})|\psi\rangle$满足

$$
Q|\psi\rangle' = p^\mu a^*_\mu(\mathbf{p})|\psi\rangle/\xi\,, \tag{15.7.36}
$$

所以$|e+\alpha p,\psi\rangle = |e,\psi\rangle + \xi\alpha Q|\psi\rangle'$, 因而物理上的等价于$|e,\psi\rangle$. 由此我们得出$e^\mu$物理上等价于$e^\mu+\alpha p^\mu$, 这就是通常的光子极化矢量上的"规范不变"条件. 另一方面,

$$
Qb^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = p^\mu a^*_\mu(\mathbf{p}) \neq 0\,,
$$

所以不满足$b^*|\psi\rangle$不物理条件(15.7.31). 另外, 对于任何$e\cdot p\neq 0$的e_μ,

$$
c^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = Qe_\mu a^{\mu*}(\mathbf{p})|\psi\rangle/e\cdot p
$$

所以$c^*|\psi\rangle$是BRST-恰当的, 因而等价于零. 因此, *物理的Hilbert空间是没有鬼和反鬼的*.

为了保持Lorentz不变性, 我们必须要把$a^\mu(\mathbf{p})$全部4个分量解释成湮灭算符, 也就是说

$$
0 = a_\mu(\mathbf{p})|0\rangle\,, \tag{15.7.37}
$$

其中$|0\rangle$是BRST-不变的真空态. 但是, 从BRST-不变的作用量(例如, $\xi=1$的作用量)所导出的正则对易关系给出

$$
[a_\mu(\mathbf{p}),a^*_\nu(\mathbf{p}')]_- = \eta_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,, \tag{15.7.38}
$$

这对应于Feynman规范中的传播子. 这违反了量子力学通常的正定性规则, 原因是方程(15.7.37)和(15.7.38)给出[13]

$$
\langle 0|a_0(\mathbf{p})\,a^*_0(\mathbf{p}')|0\rangle = -\langle 0|0\rangle\,. \tag{15.7.39}
$$

[††]就像$\omega^*(x)$并没有视为$\omega(x)$的厄密共轭, b^*和c^*也不是c和b的共轭. 然而, 既然$A^\mu(x)$是厄密的, 那么如果Q是厄密的, $\omega(x)$也将是厄密的.

虽然如此, 我们能够确信物理态之间的所有振幅满足通常的正定性条件, 这是因为物理态满足方程(15.7.31), 而对于这样的态, 跃迁振幅与更加物理的规范下的振幅, 例如Coulomb规范或轴向规范下的跃迁振幅, 是相同的, 而在那样的规范下, 正定性或幺正性的问题是不存在的.

迄今为止所描述的Faddeev-Popov-De Witt形式理论, 它所产生的作用量关于鬼场ω_α^*和ω_α必然是双线性的. 对于规范固定函数为$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$的可重整Yang-Mills理论, 这是足够的, 但对于更普遍的情况, 作用量关于鬼场仅是双线性还不够. 例如, 我们会在17.2节看到, 在其它规范下, 对于有4条外鬼线的圈图中的紫外发散, 可重整Yang-Mills理论的拉格朗日密度中需要$\omega^*\omega^*\omega\omega$项来充当它的抵消项.

幸运的是, Faddeev-Popov-De Witt形式理论仅代表生成一类等价拉格朗日量的一种方法, 其中拉格朗日量等价是指它们所产生的幺正S-矩阵相同. BRST形式理论提供了一个更加普遍的方法, 它完全省去了Faddeev-Popov-De Witt形式理论. 在这一方法中, 取作用量为物质场, 规范场, ω^A场, ω^{*A}场以及h^A场最一般的定域泛函, 但满足鬼数为零, 并且在BRST变换(15.7.7)—(15.7.11)以及该理论其它任何的整体对称性下不变. (对于可重整理论, 还要限制拉格朗日密度是量纲小于等于4的算符, 但这个约束在下面的讨论中没有任何作用.) 我们会在下一节证明, 在一个比Yang-Mills理论更普遍的情形下, 这类作用量的最普遍形式是两项的和, 其中第一项仅是物质场和规范场(统称为ϕ)的泛函, 而第二项由BRST算符s作用在鬼数为-1的任意泛函Ψ上产生:

$$I_{\text{NEW}}[\phi,\omega,\omega^*,h] = I_0[\phi] + s\,\Psi[\phi,\omega,\omega^*,h]\ , \tag{15.7.40}$$

就像Faddeev-Popov-De Witt作用量(15.7.25), 只不过$s\,\Psi$现在关于鬼场和反鬼场不一定是双线性的.

通过与之前相同的讨论, 我们得到这样的结论: 对于被BRST算符Q所湮灭的态, 它的S-矩阵元与方程(15.7.40)中Ψ的选择无关, 所以只要存在使鬼场退耦的Ψ的选择, 那么鬼场在一般情形下都会退耦. 在Yang-Mills理论中, 对轴向规范中的理论进行量子化提供了一个这样的Ψ, 所以在这样的理论中, 不仅是那些如(15.7.26)那样由Faddeev-Popov-De Witt形式理论生成的选择, 对于泛函$\Psi[\phi,\omega,\omega^*,h]$的任意选择, 鬼场都会退耦.

我们可以更进一步, 并且可以完全摆脱对非Lorentz不变规范下的正则量子化的依赖, 例如对轴向规范中正则量子化的依赖. 再一次, 取作用量为规范场, 物质场, ω^A场, ω^{*A}场以及h^A场的最一般泛函, 满足鬼数为零, 且在BRST变换(15.7.7)—(15.7.11)以及该理论其它任何的整体对称性不变, 其中整体对称性包含Lorentz不变性. 从作用量的BRST不变性中, 我们可以推断出存在一个守恒的BRST幂零算符Q. 而把鬼场和反鬼场当做厄密场时, Q也将是厄密的. 像上面一样, 物理态的空间定义为被Q湮灭的态所构成的空间, 其中, 如果两个态的差是Q作用另一个态, 那么这两个态视为等价. 已经证明了, 对于Yang-Mills理论, 这一空间没有鬼和反鬼且有一个正定的范数, 并且这一空间中的S-矩阵是幺正的.

这一步骤称为*BRST量子化*. 它已经被扩展至含有其它定域对称性的理论, 例如广义相对论和弦论. 不幸的是, 到现在为止, BRST上同调无鬼以及作用在该空间上的S-矩阵幺正, 看起来必须要在每一种情形下分别进行证明. 这些证明中的关键是, 对于每一个负范的自由度, 例如Yang-Mills理论中规范场的时间分量, 存在一个定域对称性使得这一自由度被移除了.

* * *

尽管我们不会在这里使用它, 但是关于鬼和BRST对称性有一个非常漂亮的几何解释,[14] 我们应该在这里提及一下. 规范场A_α^μ可以写成1-形式$A_\alpha \equiv A_{\alpha\mu}\mathrm{d}x^\mu$, 其中$\mathrm{d}x^\mu$是一组反对易c-数.(参

看5.8节） 在一个扩张空间中，它可以与鬼场结合组成1-形式$\mathscr{A}_\alpha \equiv A_\alpha + \omega_\alpha$. 另外，普通的外导数$\mathrm{d} \equiv \mathrm{d}x^\mu \partial/\partial x^\mu$可以与BRST算符$s$相结合，它们构成了扩张空间下的外导数$\mathscr{D} = \mathrm{d} + s$，由于$s^2 = \mathrm{d}^2 = s\mathrm{d} + \mathrm{d}s = 0$，这一外导数是幂零的.

下一章会介绍外场方法，在第17章，我们将用这一方法并结合BRST对称性，完成对非阿贝尔规范场论可重整性的证明.

15.8 BRST对称性的推广*

上一节所描述的BRST对称性有一个很有用的推广，使得我们可以在一大类理论的量子化中使用它，而这些理论中包括广义相对论和弦论. 在所有这些情形中，我们处理的作用量$I[\phi]$和测度$[\mathrm{d}\phi] \equiv \prod_r \mathrm{d}\phi^r$在如下的无限小变换下不变：

$$\phi^r \to \phi^r + \epsilon^A \delta_A \phi^r \ . \tag{15.8.1}$$

这是缩略"De Witt"记号，其中r和A包含时空坐标和离散指标，而求和包含对这些坐标的积分. 例如，对于规范变换(15.1.9)，指标A由群指标α和时空坐标x构成，并有$\epsilon^{\alpha x} \equiv \epsilon^\alpha(x)$，而指标$r$由矢量指标$\mu$，群指标$\alpha$以及时空坐标$x$组成，并有$\phi^{\mu\alpha x} \equiv A^\alpha{}_\mu(x)$；以方程(15.8.1)的记法，在变换(15.1.9)中变分$\delta_A\phi^r$读作

$$\delta_{\beta y}\phi^{\mu\alpha x} = \delta^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^4(x-y) + C^\beta{}_{\gamma\alpha}\phi^{\mu\gamma x}\delta^4(x-y) \ .$$

正如上一节所讨论的特殊情况——Yang-Mills理论，BRST不变性可用来替代这些理论的Faddeev-Popov-De Witt表述，而即便Faddeev-Popov-De Witt方法失效了，BRST不变性依旧是适用的. 然而，为了引入BRST不变性，在这里，我们着手于那些有着一般定域对称性的理论，从这些理论的Faddeev-Popov-De Witt表述出发，然后再考察进一步的推广.

沿用导出方程(15.5.21)的讨论，我们就获得了广义Faddeev-Popov-De Witt定理：

$$\frac{C}{\Omega}\int [\mathrm{d}\phi]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}I[\phi]}\, V[\phi] = \int [\mathrm{d}\phi]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}I[\phi]}\, B[f[\phi]]\, \mathrm{Det}(\delta_A f_B[\phi])\, V[\phi] \ , \tag{15.8.2}$$

其中$V[\phi]$是ϕ^r的任意泛函，并满足在规范变换(15.8.1)下不变；$f_A[\phi]$是一组ϕ^r的规范固定泛函**，对它的选择要使得"矩阵"$\delta_A f_B[\phi]$有一个非零的行列式，而$B[f]$是f_A的泛函，它的选择多少有些任意(例如$\prod_A \delta(f_A)$.) 常数Ω是规范群的体积元，而常数C(就像方程(15.5.19)那样)定义为

$$C \equiv \int [\mathrm{d}f]\, B[f] \ . \tag{15.8.3}$$

我们已经看到，方程(15.8.2)在规范理论中的重要性就在于，它告诉我们右边的积分独立于规范固定泛函f_A的选择，而仅通过常数C与$B[f]$相关. 在这里，我们可以给通常无限大的规范群体积Ω赋

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外，可以在第一次阅读时省略.

**我们用相同的字母A, B等来标记f_A和规范变分δ_A，是为了强调规范固定泛函的数目要与独立规范变换的数目相同. 然而，在某些情形下，例如在弦理论中，即便指标a与规范变分δ_A上的指标A取的值完全不同，只要它们所取的值"个数相同"，就会很自然地使用f^a. 只要我们能够定义$f_A = c_{Aa}f^a$，其中c_{Aa}是场无关且非奇异的，那么在现在的形式理论中就不需要作出改变.

予某些含义, 就像我们在有限时空晶格上的规范理论中所做的那样, 这样, 方程(15.8.2)在作为左边的积分公式时也可以有值.

为了定义幂零的BRST变换, 我们必须先把泛函$B[f]$表示成Fourier变换

$$B[f] = \int [\mathrm{d}h]\ \exp(\mathrm{i}h^A f_A)\, \mathscr{B}[h]\ , \tag{15.8.4}$$

其中$[\mathrm{d}h] \equiv \prod_A \mathrm{d}h^A$. 另外, 行列式可以表示成对费米c-数场†$\omega^{*A}$和$\omega^A$的积分:

$$\mathrm{Det}(\delta_A f_B[\phi]) \propto \int [\mathrm{d}\omega^*]\, [\mathrm{d}\omega]\ \exp\left(\mathrm{i}\omega^{*B}\omega^A \delta_A f_B\right)\ , \tag{15.8.5}$$

其中$[\mathrm{d}\omega^*] \equiv \prod_A \mathrm{d}\omega^{*A}$而$[\mathrm{d}\omega] \equiv \prod_A \mathrm{d}\omega^A$, 像往常一样, “$\propto$”是指相差一个与场无关的比例因子. 将这些代入方程(15.8.2), 就给出了规范固定路径积分的普遍公式

$$\begin{aligned}&\int [\mathrm{d}\phi]\ \exp\left(\mathrm{i}I(\phi)\right)\ B[f[\phi]]\ \mathrm{Det}(\delta_A f_B[\phi])\, V[\phi] \\ &\quad \propto \int [\mathrm{d}\phi]\, [\mathrm{d}h]\, [\mathrm{d}\omega^*]\, [\mathrm{d}\omega]\ \exp\left(\mathrm{i}I_{\mathrm{NEW}}[\phi, h, \omega, \omega^*]\right) \mathscr{B}[h]\, V[\phi]\ ,\end{aligned} \tag{15.8.6}$$

其中I_{NEW}是新的总作用量:

$$I_{\mathrm{NEW}}[\phi, h, \omega, \omega^*] = I[\phi] + h^A f_A[\phi] + \omega^{*B}\omega^A \delta_A f_B[\phi]\ . \tag{15.8.7}$$

我们在15.6节提到过, 在对所有ϕ^r的积分中包含哪些仅相差规范变换(15.8.1)的ϕ^r, 而我们可以把鬼场看成对这一积分的补救. 因为鬼场是费米场, 所以鬼线构成的圈会携带额外的负号, 这使得这些圈抵消了对规范等价的ϕ的积分. 但为了使其成功运作, 鬼场ω^A的数目必须要和独立规范变换的数目一样多. 即, 既然ω^A是独立的, 那么规范变换(15.8.1)必须全是独立的. 对于Yang-Mills理论中的规范变换和广义相对论中的坐标变换, 正是这种情况, 但不总是这样. 理论的规范变换不独立的经典例子是p-形式规范场, 我们在8.8节描述过这一理论. p-形式A(p阶反对称张量)承载规范变换$A \to A + \mathrm{d}\phi$, 其中ϕ是$(p-1)$-形式, 而$\mathrm{d}\phi$是它的外导数(反对称化导数). 由于d是幂零的, 当$p \geq 2$时, 我们可以让ϕ偏移$\mathrm{d}\psi$但不改变规范变换, 所以在规范变换的规范变换下存在一个不变性, 其中变换参量是$(p-2)$-形式ψ. 在这种情况下, 由于引入了太多的鬼场, 我们必须要进行补偿, 进而又要引入“鬼场的鬼场”.[15] 当$p \geq 3$时, 我们需要通过引入“鬼场的鬼场的鬼场”进行补偿, 以此类推. 在下文中, 我们将假定规范变换(15.8.1)都是独立的, 使得鬼场ω^A(和反鬼场ω^{*A})是我们需要的全部.

尽管原始对称性(15.8.1)被非规范不变泛函$B[f]$的插入所消除, 但是, 在无限小BRST变换下, 新的总作用量有一个恰当对称性

$$\chi \to \chi + \theta\, s\chi\ , \tag{15.8.8}$$

其中χ是ϕ^r, ω^A, ω^{*A}或h^A中的任意一个量; θ是无限小反对易c-数; 而s是*Slavnov*(斯拉夫诺夫)算符

$$s = \omega^A\, \delta_A\phi^r\, \frac{\delta_L}{\delta\phi^r} - \frac{1}{2}\omega^B\omega^C\, f^A{}_{BC}\, \frac{\delta_L}{\delta\omega^A} - h^A\, \frac{\delta_L}{\delta\omega^{*A}}\ . \tag{15.8.9}$$

†在弦论和其它地方, 通常会发现鬼场ω^{*A}和ω^A分别写成了b^A(或b_A)和c^A.

在方程(15.8.9)中, 下标L代表左微分, 它的定义满足如果$\delta F=\delta\chi G$, 那么$\delta_L F/\delta\chi=G$, 而$f^A{}_{BC}$是对易关系中所出现的结构常数[††]

$$[\delta_B,\delta_C]=f^A{}_{BC}\delta_A\ . \tag{15.8.10}$$

$f^A{}_{BC}$在非阿贝尔规范理论和弦理论中是场无关的, 尽管不总是这样, 但BRST形式理论没有限制在这一情形中. 直接的计算给出

$$\begin{aligned}s^2=&\frac{1}{2}\omega^A\omega^B\left[\delta_A\phi^s\frac{\delta_L(\delta_B\phi^r)}{\delta\phi^s}-\delta_B\phi^s\frac{\delta_L(\delta_A\phi^r)}{\delta\phi^s}-f^C{}_{AB}\delta_C\phi^r\right]\frac{\delta_L}{\delta\phi^r}\\&-\frac{1}{2}\omega^B\omega^C\omega^D\left[f^E{}_{BC}f^A{}_{DE}+\delta_D\phi^r\frac{\delta_L f^A{}_{BC}}{\delta\phi^r}\right]\frac{\delta_L}{\delta\omega^A}\ .\end{aligned} \tag{15.8.11}$$

因此, BRST变换是幂零变换的条件等价于对易关系(15.8.10), 再加上一个相容性条件

$$f^E{}_{[BC}f^A{}_{D]E}+\delta_{[D}\phi^r\left(\delta_L f^A{}_{BC]}/\delta\phi^r\right)=0\ , \tag{15.8.12}$$

其中, 下标中的括号代表对括号内的指标B,C和D做反对称化. 按照导出通常的Jacobi等式的方法, 方程(15.8.12)可以从对易关系(15.8.10)中导出, 对于含有场相关结构常数的对称性, 它取代了Jacobi等式.

为了证明变换(15.8.8)是$I_{\rm NEW}$的对称性, 我们注意到(回忆起θ与ω^{*A}反对易)方程(15.8.7)可以重写为

$$I_{\rm NEW}[\phi,h,\omega,\omega^*]=I[\phi]-s(\omega^{*A}\,f_A)\ . \tag{15.8.13}$$

因为BRST变换在场ϕ上的效果就是规范变换(15.8.1), 只不过其中的ϵ^A被换成了$\theta\omega^A$, 而$\theta\omega^A$与所有的ϕ^r对易, 所以$I[\phi]$项是BRST-不变的. 由于BRST变换是幂零的, 所以$s(\omega^{*A}\,f_A)$项是BRST不变的.

由于几个原因, 我们需要考察一类更广的作用量, 这类作用要求在BRST变换(15.8.8)下不变, 但超出了Faddeev-Popov-De Witt方法所构建出的作用量的范围. 这些作用量给出了物理上合理的结果, 作为迈向证明该陈述的一步, 我们现在证明如下的普遍结果(在上一节使用过), 最普遍的鬼数为零的BRST-不变泛函是两项的和, 其中第一项仅是场ϕ的泛函, 而另一项由BRST算符s作用在鬼数为-1的任意泛函Ψ上给出:

$$I_{\rm NEW}[\phi,\omega,\omega^*,h]=I_0[\phi]+s\Psi[\phi,\omega,\omega^*,h]\ , \tag{15.8.14}$$

Faddeev-Popov-De Witt作用量(15.8.13)就是其中的一个例子. 简言之, 构成BRST上同调的规范不变泛函$I[\phi]$仅是场ϕ^r的泛函.

为了证明方程(15.8.14), 我们注意到BRST变换(15.8.8)—(15.8.9)并不改变h^A场和ω^{*A}场的总数, 所以, 如果我们将I展成I_N项的级数, 其中I_N包含总数为N的h^A场和ω^{*A}场, 那么在sI中, N不同的项之间不存在抵消, 所以每一项必须分别是BRST-不变的:

$$sI_N=0\ . \tag{15.8.15}$$

我们接下来引入所谓的Hodge(霍奇)算符:

$$t\equiv\omega^{*A}\frac{\delta}{\delta h^A}\ . \tag{15.8.16}$$

[††]例如, 对于作用在物质场$\psi(x)$上的规范变换, 我们有$\delta_{\beta y}\psi(x)={\rm i}t_\beta\psi(x)\delta^4(x-y)$, 因而$\delta_{\beta y}\delta_{\gamma z}\psi(x)=-t_\gamma t_\beta\psi(x)\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)$. 因此, 在这一情况下, 我们有$f^{\alpha x}{}_{\beta y\gamma z}=C^\alpha{}_{\beta\gamma}\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)$.

可以直接验证反对易关系

$$\{s,t\} = -\omega^{*A}\frac{\delta_L}{\delta\omega^{*A}} - h^A\frac{\delta}{\delta h^A} \ . \tag{15.8.17}$$

那么, 用算符$\{s,t\}$作用I_N并利用方程(15.8.15)就给出了

$$stI_N = -NI_N \ , \tag{15.8.18}$$

所以, 除了I_0外, 每个I_N都是BRST-恰当的, 也就是说, 它可以写成算符s作用其它某个泛函上. 因此, 完整的泛函I可以写成$I_0 + s\Psi$的形式, 其中

$$\Psi = -\sum_{N=1}^{\infty}\frac{tI_N}{N} \ . \tag{15.8.19}$$

由定义可知I_0独立于ω^{*A}和h^A, 并且, 既然我们假定了它的鬼数为零, 它也必须独立于ω^A, 这正是所要证明的.

为了证明, 当规范固定泛函Ψ的定义改变时, 物理矩阵元是不变的, 我们定义费米“荷”Q, 使得任意算符Φ在BRST变换下的变化是

$$\delta_\theta\Phi = \mathrm{i}[\theta\, Q, \Phi] = \mathrm{i}\theta[Q, \Phi]_\mp \tag{15.8.20}$$

其中, 根据Φ是玻色的还是费米的, 分别在$[x,y]_\mp \equiv xy \mp yx$使用上部的符号和下部的符号. 如同上一节, 这样, BRST变换的幂零性就告诉我们$Q^2 = 0$. 当且仅当物理态$|\alpha\rangle$和$\langle\beta|$满足

$$Q|\alpha\rangle = \langle\beta|Q = 0 \ , \tag{15.8.21}$$

规范不变算符在物理态之间的矩阵元才独立于Ψ的选择, 这一条件又一次告诉我们, 物理上可分辨的物理态与Q的上同调中的元素一一对应. 因此, 如果我们能找到某个Ψ, 就像Yang-Mills理论中的轴向规范, 使得在这个规范下鬼场不与其它场相互作用, 那么对于任意的规范固定泛函Ψ, 广义BRST-不变作用量(15.8.14)就会产生物理上合理的结果. 如果Ψ的这一无鬼(ghost-free)选择对于实际运算而言并不方便, 就像轴向规范由于违反了Lorentz不变性而不方便, 我们可以选择任何我们想要的规范固定泛函Ψ, 并依旧可以确信, 当初态和末态没有鬼时, 存在幺正的S-矩阵.

这一方法在弦论中运作良好, 在弦论中, 所谓的光锥量子化发挥了轴向规范的作用. 但在其它理论中, 例如广义相对论, 无法选择一个坐标系使得鬼场退耦. 这样的理论可以用上一节末尾所描述的BRST-量子化方法进行处理, 用BRST-不变性证明S-矩阵在无鬼的物理Hilbert空间中是幺正的.

发现[17]“反-BRST” 对称[18]下的不变性表明了, 除去表象, 在ω^A和ω^{*A}的角色之间有相似之处, 而这两个场的角色依旧保持着些许神秘.

15.9 Batalin-Vilkovisky形式理论*

这一节将会描述一个强有力的形式理论, 它被大家称为Batalin-Vilkovisky[19]方法. 它是在拉格朗日框架下发展起来的, 但是它根植于更早的Batalin-Fradkin-Vilkovisky形式理论,[20] 而这一形式理论是在哈密顿框架下导出的. (在微扰论的意义下, 已经证明这两种方案是等价的.[21]) 我们

*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时省略.

会在17.1节看到, 为了处理规范理论的重整化, Zinn-Justin[22]甚至在此之前就发展了同样的形式机制. 至少有如下三个方面证明这一形式理论的价值是无可估量的:

(i) 直到现在, 我们所考察的仅是不可约系统, 并且它的代数在方程(15.8.10)的意义下封闭. 在某些理论中, 例如超引力(没有辅助场),[23] 代数是开的: 仅当场方程成立时, 代数才是封闭的, 这使得方程(15.8.10)中会出现正比于$\delta I/\delta\chi^n$的项. 这样, 在相容性条件(15.8.12)中也会出现类似的项. 那么, 方程(15.8.11)就表明了s^2在这样的理论中并不为零, 而是等于导数$\delta I/\delta\chi^n$的线性组合. 我们会在这一节看到, Batalin-Vilkovisky方法使得我们能够处理非常宽泛的规范理论, 这些理论中包含那些有着开规范对称代数或者可约规范对称代数的理论.

(ii) 就像上面所提及的, Batalin-Vilkovisky形式理论的重要方面就在于, 它原本是Zinn-Justin为证明规范理论的可重整性而发展的. 其中的关键点是, 尽管背景场中所有单粒子不可约图的和不服从原始作用量的BRST对称性, 但是它共享了作用量的关键性质之一, 即称为主方程的性质, 我们将在17.1节对其进行阐述.

(iii) Batalin-Vilkovisky方法提供了一个方便的技巧用以分析量子效应所造成的作用量对称性的可能破坏. 由于这个原因, 它将用于22.6节.

Batalin-Vilkovisky形式理论的出发点是对于理论中的每个场引入所谓的“反场”, 我们令χ^n取遍所有的场ϕ^r, ω^A, ω^{*A}和h^A, 并对每一个χ^n, 我们引入外反场**$\chi^\ddagger_n$, 它与BRST-变换后的场$s\chi^n$有着相同的玻色统计或费米统计, 但鬼数相反. 即, $\chi^\ddagger_n$与χ^n有着相反的统计, 但它的鬼数等于$-\mathrm{gh}(\chi^n)-1$, 其中$\mathrm{gh}(\chi^n)$是χ^n的鬼数. 在最简单的情况下, 包括Yang-Mills理论和量子引力, 要给原始规范不变作用量$I[\phi]$添加反场$\chi^\ddagger_n$与$s\chi^n$相耦合的一项, 这给出了作用量.

$$S[\chi,\chi^\ddagger]\equiv I[\phi]+(s\chi^n)\chi^\ddagger_n\ . \tag{15.9.1}$$

它满足所谓的主方程(*master equation*)

$$0=\frac{\delta_R S}{\delta\chi^\ddagger_n}\frac{\delta_L S}{\delta\chi^n}\ , \tag{15.9.2}$$

其中“R”和“L”在这里代表右微分和左微分. 为了验证它, 注意到方程(15.9.2)中反场的零阶项正好给出规范不变性条件

$$0=\left(s\phi^r\right)\frac{\delta_L I}{\delta\phi^r}=\omega^A\,\delta_A I[\phi]\ , \tag{15.9.3}$$

而反场$\phi^\ddagger_n$的线性项提供了幂零条件:

$$0=\left(s\chi^m\right)\frac{\delta_L(s\chi^n)}{\delta\chi^m}=s^2\chi^n\ . \tag{15.9.4}$$

$\chi^\ddagger_n$是外场, 在用$S[\chi,\chi^\ddagger]$计算S-矩阵之前, 我们必须要赋予它合适的值. 由于这个原因, 我们引入一个任意的费米泛函$\Psi[\chi]$, 它的鬼数为-1, 并令†

$$\chi^\ddagger_n=\frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi^n}\ . \tag{15.9.5}$$

**在这里使用符号‡而不是最通常的∗, 是为了强调它与复共轭或电荷共轭无关. 特别地, 反鬼场ω^{*A}与鬼场ω^A的反场$\omega^\ddagger_A$并不相同.

†在这里没有必要区分左微分和右微分, 这是因为χ^n或$\delta\Psi/\delta\chi^n$中必有一个是玻色的.

这样, 方程(15.9.1)就变成

$$S[\phi,\delta\Psi/\delta\chi]=I[\phi]+(s\chi^n)\delta\Psi\left[\chi\right]/\delta\chi^n=I[\phi]+s\Psi[\chi]\ . \tag{15.9.6}$$

与方程(15.8.14)相比较表明它与规范固定泛函$I_{\text{NEW}}[\chi]$是相同的. 因此, 利用与上一节相同的讨论可以得出这样的结论: 物理矩阵元不被Ψ的微小变化所影响. Faddee-Popov-De Witt方法构建的作用量(15.8.7)对应于选择$\Psi=-\omega^{*A}f_A$, 这意味着$\phi_r^\ddagger=\omega^{*A}\,\delta f_A/\delta\phi^r$, $\omega_C^\ddagger=0$, 以及$\omega_A^{*\ddagger}=-f_A$.

迄今为止, 并没有建立任何新的东西. 第一个创新点是, 通过令$S[\chi,\chi^\ddagger]$是反场$\chi_n^\ddagger$的非线性泛函, 主方程(15.9.2)可以用于更广泛的理论. (对于可约理论, 就像上一节所讨论的那样, 对于χ^n中的鬼场, 我们要引入鬼场的鬼场, 以及相应的反场.) 像之前一样, 我们取$\chi_n^\ddagger$的统计为与χ^n相反的统计, 并令它的鬼数等于$-\,\mathrm{gh}(\chi^n)-1$, 并且我们要求$S[\chi,\chi^\ddagger]$是鬼数为零的玻色算符. 因为ω^{*A}和h_A有着线性BRST变换, 所以影响其它χ^n的复杂性不会影响ω^{*A}和h_A(在这一点上, 可参看16.4节), 所以它们和它们的反场进入作用量$S[\chi,\chi^\ddagger]$的方式与它们进入方程(15.9.1)的方式相同. 即,

$$S=S_{\min}[\phi,\omega,\phi^\ddagger,\omega^\ddagger]-h^A\,\omega_A^{*\ddagger}\ , \tag{15.9.7}$$

其中$\phi_r^\ddagger$, $\omega_A^\ddagger$和$\omega_A^{*\ddagger}$是ϕ^r, ω^A和ω^{*A}的反场, 它们的鬼数分别是-1, -2和0. (15.9.7)中的最后一项对主方程没有任何影响, 所以$S_{\min}$凭借自身满足主方程.[††]

因为$S_{\min}$的鬼数为零, 它的反场级数展开必须采取如下的形式

$$\begin{aligned}S_{\min}=I[\phi]&+\omega^A f_A^r[\phi]\phi_r^\ddagger+\tfrac{1}{2}\omega^A\omega^B f^C{}_{AB}[\phi]\omega_C^\ddagger\\&+\tfrac{1}{2}\omega^A\omega^B f^{rs}{}_{AB}[\phi]\phi_r^\ddagger\phi_s^\ddagger+\omega^A\omega^B\omega^C f^{rD}{}_{ABC}[\phi]\phi_r^\ddagger\omega_D^\ddagger\\&+\tfrac{1}{2}\omega^A\omega^B\omega^C\omega^D f^{EF}{}_{ABCD}[\phi]\omega_E^\ddagger\omega_F^\ddagger+\cdots\ .\end{aligned} \tag{15.9.8}$$

主方程(15.9.2)中反场的零阶项(因而也就是ω^A的一阶项)给出

$$0=f_A^r[\phi]\,\frac{\delta I[\phi]}{\delta\phi^r}\ , \tag{15.9.9}$$

这正是说$I[\phi]$在如下变换下不变

$$\phi^r\to\phi^r+\epsilon^A f_A^r[\phi]\ , \tag{15.9.10}$$

其中ϵ^A是任意的无限小量. 主方程中右正比于$\phi_s^\ddagger$并左正比于$\omega^A\omega^B$的项给出

$$\begin{aligned}0=f_A^r[\phi]\,\frac{\delta f_B^s[\phi]}{\delta\phi^r}-f_B^r[\phi]\,\frac{\delta f_A^s[\phi]}{\delta\phi^r}+f^C{}_{AB}[\phi]\,f_C^s[\phi]\\+\frac{\delta I[\phi]}{\delta\phi^r}f^{rs}{}_{AB}[\phi]\ ,\end{aligned} \tag{15.9.11}$$

当场方程$\delta I/\delta\phi=0$成立时, 这变成了变换(15.9.10)的对易关系(结构常数为$f^C{}_{AB}[\phi]$). 主方程中反场的其它线性项左正比于$\omega^A\omega^B\omega^C$并右正比于$\omega_D^\ddagger$, 它给出

$$0=f_{[A}^r[\phi]\frac{\delta f^D{}_{BC]}[\phi]}{\delta\phi^r}-f^E{}_{[AB}[\phi]f^D{}_{C]E}[\phi]+f^{rD}{}_{ABC}[\phi]\frac{\delta I[\phi]}{\delta\phi^r}\ , \tag{15.9.12}$$

[††] 场ϕ^r, ω^A, $\phi_r^\ddagger$, $\omega_A^\ddagger$有时被称为最小变量(*minimal variables*), 而像ω^{*A}和h_A这样的场, 它们和它们的反场以双线性的方式进入作用量, 就像方程(15.9.7)中那样, 它们被称为平庸对(*trivial pairs*).

其中方括号代表对括号内的指标A, B和C做反对称化. 当场方程成立时, 这变成广义Jacobi等式(15.8.12). 为了对称性条件(15.9.9)(假定f^r_A构成规范对称性的完备基)的相容性, 方程(15.9.11)是必须的, 而为了对易关系(15.9.11)的相容性, 方程(15.9.12)又是必须的. 注意到, 方程(15.9.11)和(15.9.12)中正比于$\delta I[\phi]/\delta\chi$的那些项, 它们来源于$S_{\min}$中反场的二次项, 由于它们正比于$\delta I[\phi]/\delta\chi$, 所以当场方程成立时, 它们为零, 并且在这一意义下, 它们是开对称性代数的特征. 主方程中反场的二阶项或更高阶项包含了$S_{\min}$中反场的三阶项和/或更高阶项, 这提供了方程(15.9.11)和(15.9.12)的相容性条件, 相容性条件的相容性条件, 等等. Batalin-Vilkovisky形式理论的优点之一正是把所有这些相容性条件全部并入一个主方程中.

主方程可以重新解释为S在广义BRST变换下不变的陈述. 为了看到这一点, 并为了将来做准备, 引入一种称为*反括号*(*antibracket*)的形式工具将是非常有帮助的. 现在回到我们上一节的记号, 两个一般泛函$F[\chi,\chi^\ddagger]$和$G[\chi,\chi^\ddagger]$的反括号定义为

$$(F,G)\equiv\frac{\delta_R F}{\delta\chi^n}\frac{\delta_L G}{\delta\chi^\ddagger_n}-\frac{\delta_R F}{\delta\chi^\ddagger_n}\frac{\delta_L G}{\delta\chi^n}\ . \tag{15.9.13}$$

注意到, 像S这样的玻色泛函, 它对玻色变量或费米变量的右泛函导数和左泛函导数分别等于彼此或等于彼此的倒数. 既然$\chi^\ddagger_n$和χ^n总是一个玻色的而另一个是费米的, 由此得出, 对于反括号(S,S), 如果我们逆转左微分和右微分, 方程(15.9.13)右边第二项会改变符号

$$\frac{\delta_R S}{\delta\chi^\ddagger_n}\frac{\delta_L S}{\delta\chi^n}=-\frac{\delta_L S}{\delta\chi^\ddagger_n}\frac{\delta_R S}{\delta\chi^n}=-\frac{\delta_R S}{\delta\chi^n}\frac{\delta_L}{\delta\chi^\ddagger_n}\ .$$

(最后一步之所以成立是因为, 这里有一个因子是玻色的, 进而它们的次序是无关紧要的.) 我们看到, 对于(S,S), 方程(15.9.13)右边第二项是第一项的倒数. 因此, 主方程可以写成要求S与其自身的反括号为零:

$$(S,S)=0\ . \tag{15.9.14}$$

这是不平庸的要求, 因为反括号有一般的对称性质

$$(F,G)=\pm(G,F)\ , \tag{15.9.15}$$

其中, 当F和G都是玻色时, 符号取$+1$, 否则取-1. 特别地, 如果F是费米的, (F,F)自动为零, 但如果F是玻色的, 就不会这样.

广义BRST变换定义为

$$\hat{\delta}_\theta\chi^n=\theta\frac{\delta_R S}{\delta\chi^\ddagger_n}=-\theta(S,\chi^n)\ , \tag{15.9.16}$$

$$\hat{\delta}_\theta\chi^\ddagger_n=-\theta\frac{\delta_R S}{\delta\chi^n}=-\theta(S,\chi^\ddagger_n)\ . \tag{15.9.17}$$

其中θ是无限小的费米参量. (当S的形式为(15.9.1)时, χ的变换与原始BRST变换$\hat{\delta}_\theta\chi^n=\theta s\chi^n$相同.) 为了计算这一变换在一般泛函上的效果, 我们注意到反括号像导数一样作用, 也就是说

$$(F,GH)=(F,G)H\pm G(F,H)\ , \tag{15.9.18}$$

其中, 如果G是费米的而F是玻色的, 那么符号取-1, 否则取$+1$. 如果G和H是χ和$\chi^\ddagger$的任意泛函并满足$\hat{\delta}_\theta G=-\theta(S,G)$和$\hat{\delta}_\theta H=-\theta(S,H)$, 那么

$$\hat{\delta}_\theta(GH)=-\theta(S,G)H-G\theta(S,H)=-\theta[(S,G)H\pm G(S,H)]\ ,$$

其中, 根据G是玻色的或费米的, 符号分别取$+$或$-$. 令方程(15.9.18)中的F等于玻色泛函S, 那么我们就看到

$$\hat{\delta}_\theta(GH) = -\theta(S, GH) .$$

再加上方程(15.9.16)和(15.9.17), 这表明, 对于任意的泛函F, 如果它能变形成场与反场的乘积之和, 那么

$$\hat{\delta}_\theta F = -\theta(S, F) . \tag{15.9.19}$$

主方程(15.9.14)可以解释为如下的陈述, 这些广义BRST变换使得S不变

$$\hat{\delta}_\theta S = -\theta(S, S) = 0 . \tag{15.9.20}$$

就像原始的BRST变换, 这一对称变换是幂零的. 为了看到这一点, 我们使用反括号的Jacobi恒等式

$$\pm\,(F, (G, H)) + \text{轮换} = 0 , \tag{15.9.21}$$

其中, 如果F和H是玻色的, 第一项的符号为$-$, 否则为$+$, 对F, G和H的其它两个轮换取相应的符号. 取$F = G = S$, 方程(15.9.21)变成

$$0 = \mp(S, (S, H)) \mp (H, (S, S)) - (S, (H, S)) = \mp 2(S, (S, H)) \mp (H, (S, S)) ,$$

其中, 如果H是玻色的, 符号取$-$, 如果H是费米的, 符号取$+$. 这样, 主方程(15.9.14)就给出了幂零条件

$$(S, (S, H)) = 0 . \tag{15.9.22}$$

由于这一对称性, 主方程的解是不唯一的. 例如, 方程(15.9.22)表明对于任何给定的解S, 我们能够发现另一解, 该解由如下的无限小变换给出

$$S' = S + (\delta F, S) , \tag{15.9.23}$$

其中δF是χ和$\chi^\ddagger$的无限小泛函, 为了使S'是玻色的且鬼数为零, δF必须是费米的且鬼数为-1, 除这些要求外, 它是任意的. 特别地, 取δF为费米泛函$\epsilon\Psi$, 使它仅是χ^n的泛函, 这样就给出

$$S'[\chi, \chi^\ddagger] = S[\chi, \chi^\ddagger] + \epsilon \frac{\delta \Psi[\chi]}{\delta \chi^n} \frac{\delta_R S}{\delta \chi^\ddagger_n} = S\left[\chi, \chi^\ddagger + \epsilon \frac{\delta \Psi}{\delta \chi}\right] . \tag{15.9.24}$$

这些无限小变换可以被平庸地积掉, 进而表明, 如果我们将反场偏移至新的变量$\chi^{\ddagger\prime}_n \equiv \chi^\ddagger_n - \delta\Psi/\delta\chi^n$, 主方程依旧是满足的.

变换(15.9.23)是通常所说的正则变换的一个特殊情况, 在这里为了与第7章的正则变换相区分, 称其为“反正则变换”. 反正则变换是场和反场的任意变换, 它可以是有限小或无限小的, 但它保持如下的基本反括号关系不变:

$$(\chi^n, \chi^\ddagger_m) = \delta^n_m , \qquad (\chi^n, \chi^m) = (\chi^\ddagger_n, \chi^\ddagger_m) = 0 . \tag{15.9.25}$$

例如, 考察由无限小费米算符δF生成的无限小反正则变换, 在该变换下, 任何的玻色泛函或费米泛函G变换到

$$G \to G' = G + (\delta F, G) . \tag{15.9.26}$$

可以很容易证明这确实不改变基本反括号(15.9.25). 由于这一原因, 注意到两个泛函G和H的反括号变换到(G',H'), 它到一阶无限小是

$$(G',H')=(G,H)+((\delta F,G),H)+(G,(\delta F,H))\ .$$

利用Jacobi恒等式(15.9.21), 这变成

$$(G',H')=(G,H)\pm(\delta F,(G,H))\ , \tag{15.9.27}$$

其中, 如果G和H都是玻色的, 符号取$+$, 否则取$-$. 特别地, 如果(G,H)是c-数, 那么它在反正则变换下不变. (这是证明变换(15.9.23)保持主方程不变的另一方法.) 场和反场的反括号(15.9.25)是c-数, 所以对于变换后的场和反场, 它们的反括号必须有相同的c-数.

为了计算S-矩阵, 我们必须要赋予反场确定的值. 正如闭规范代数的简单情况, 在那里S是(15.9.5)的线性形式, 通过取形式为(15.9.5)中的反场, 我们可以计算出S-矩阵; 即, 我们利用"规范固定"作用量

$$I_\Psi[\chi]=S\left[\chi,\frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi}\right] \tag{15.9.28}$$

计算S-矩阵, 其中$\Psi[\chi]$是鬼数为-1的费米泛函. 根据方程(15.9.24)后面的评述, 这相当于取正则变换后的反场$\chi^{\ddagger\prime}$为零.

当BRST变换仅作用在场χ^n上时:

$$\delta_\theta\chi^n=\theta s\chi_n\ ,\qquad 其中\qquad s\chi^n=\left(\frac{\delta_R S[\chi,\chi^\ddagger]}{\delta\chi^\ddagger_n}\right)_{\chi^\ddagger=\delta\Psi/\delta\chi}\ , \tag{15.9.29}$$

在这一变换下, 规范固定作用量不变. 为了验证这点, 注意到

$$\begin{aligned}sI_\Psi[\chi]=&\left(\frac{\delta_R S[\chi,\chi^\ddagger]}{\delta\chi^\ddagger_n}\frac{\delta_L S[\chi,\chi^\ddagger]}{\delta\chi^n}\right)_{\chi^\ddagger=\delta\Psi/\delta\chi}\\&+\left(\frac{\delta_R S[\chi,\chi^\ddagger]}{\delta\chi^\ddagger_m}\frac{\delta_L^2\Psi[\chi]}{\delta\chi^m\delta\chi^n}\frac{\delta_L S[\chi,\chi^\ddagger]}{\delta\chi^\ddagger_n}\right)_{\chi^\ddagger=\delta\Psi/\delta\chi}\ .\end{aligned}$$

右边的第一项是主方程的结果, 因而为零, 而第二项由于被加数关于m和n是反对称[‡]的, 所以为零.

对于闭代数且形式为(15.9.1)的S, 变换(15.9.29)是原始的BRST变换$\delta_\theta\chi^n=\theta s\chi^n$. 但对于一般的开代数, 变换(15.9.29)并不与原始BRST变换相同, 并且, 一般而言, 除非场方程被满足, 它甚至不是幂零的. 诚然, 从主方程中偏移场$\chi^{\ddagger\prime}_n=\chi^\ddagger_n-\delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n$的一阶项中, 我们发现

$$s^2\chi^m=\mp\left(\frac{\delta_L}{\delta\chi^\ddagger_m}\frac{\delta_R}{\delta\chi^\ddagger_n}I[\chi,\chi^\ddagger]\right)_{\chi^\ddagger=\delta\Psi/\delta\chi}\frac{\delta I_\Psi[\chi]}{\delta\chi^n}\ , \tag{15.9.30}$$

其中, 根据χ^m是玻色的还是费米的, 符号反别是$-$和$+$. 再一次, 我们看到开代数对场方程特征的相关性与S中反场的二次项相联系.

[‡]若χ^n和χ^m都是玻色的, 这是因为$\delta S/\delta\chi^n$和$\delta S/\delta\chi^m$反对易. 若χ^n和χ^m中一个是玻色的而另一个是费米的, 这是因为S对费米的χ的右导数和左导数符号相反. 若χ^n和χ^m都是费米的, 由于对于这些项, $\delta_L^2\Psi/\delta\chi^m\delta\chi^n$是反对称的, 所以该项是反对称的.

直到现在, 我们所考察的仅是基于开规范代数或闭规范代数的经典理论的公式化. 现在, 我们必须考虑如何在这种理论中做量子力学计算. 物理矩阵元可以通过含有权重为$\exp(\mathrm{i}I_\Psi[\chi])$的泛函积分算出, 其中, 就像前面所解释的那样, $I_\Psi[\chi]$是通过令$\chi^\ddagger_n = \delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n$从$S[\chi,\chi^\ddagger]$中获得的, 换句话说, 是通过令$\chi^{\ddagger\prime}_n = 0$获得的. 我们希望计算$\Psi[\chi]$的变化在这些矩阵元上的效应. 首先考察真空-真空期望值

$$Z_\Psi = \int \left[\prod \mathrm{d}\chi\right] \exp(\mathrm{i}I_\Psi[\chi]) \ . \tag{15.9.31}$$

在$\Psi[\chi]$的偏移$\delta\Psi[\chi]$下, 它的变化是

$$\delta Z = \mathrm{i}\int \left[\prod \mathrm{d}\chi\right] \exp(\mathrm{i}I_\Psi[\chi]) \left(\frac{\delta_R S[\chi,\chi^\ddagger]}{\delta\chi^\ddagger_n}\right)_{\chi^\ddagger=\delta\Psi/\delta\chi} \left(\frac{\delta(\delta\Psi[\chi])}{\delta\chi^n}\right) \ . \tag{15.9.32}$$

在场空间中分部积分, 这变成

$$\begin{aligned}\delta Z = &\int \left[\prod \mathrm{d}\chi\right] \exp(\mathrm{i}I_\Psi[\chi]) \\ &\times \left\{\frac{\delta_R S[\chi,\chi^\ddagger]}{\delta\chi^\ddagger_n}\frac{\delta_L I_\Psi[\chi]}{\delta\chi^n} - \mathrm{i}\Delta S[\chi,\chi^\ddagger]\right\}_{\chi^\ddagger=\delta\Psi/\delta\chi} \delta\Psi[\chi] \ ,\end{aligned} \tag{15.9.33}$$

其中

$$\Delta \equiv \frac{\delta_R}{\delta\chi^\ddagger_n}\frac{\delta_L}{\delta\chi^n} \ . \tag{15.9.34}$$

我们看到, 一般而言, Φ与真空-真空振幅无关的条件不是主方程(15.9.2), 而是所谓的*量子主方程*

$$(S,S) - 2\mathrm{i}\Delta S = 0 \qquad \text{在} \quad \chi^\ddagger = \delta\Phi/\delta\chi \ . \tag{15.9.35}$$

在cgs单位制[a]中, 伴随每个$S[\chi,\chi^\ddagger]$因子, 都会有因子$1/\hbar$, 所以在方程(15.9.35)的第二项中, 系数$-2\mathrm{i}$要被换成$-2\mathrm{i}\hbar$. 因此, 无论量子主方程(15.9.35)是在何时成立的, S中$\hbar$的零阶项满足原始主方程(15.9.2). 通常情况下, 构建一个满足经典主方程的作用量是很容易的, 这使得方程(15.9.35)中的第一项为零, 这样一来, 问题就变成是否第二项也为零. 在第22章, 关于反常的讨论中, 我们会考察定域作用量不满足量子主方程的情况.

假定量子主方程(15.9.35)是满足的, Ψ的变化$\delta\Psi$所引起的算符$\mathcal{O}[\chi]$的真空期望值的变化是

$$\delta\langle\mathcal{O}\rangle = \frac{-\mathrm{i}}{Z_\Psi}\int \left[\prod \mathrm{d}\chi\right] \exp\left(\mathrm{i}I_\Psi[\chi]\right) \frac{\delta_R\mathcal{O}[\chi]}{\delta\chi^n}\left(\frac{\delta_R S[\chi,\chi^\ddagger]}{\delta\chi^\ddagger_n}\right)_{\chi^\ddagger_n=\delta\Psi/\delta\chi} \delta\Psi[\chi] \ . \tag{15.9.36}$$

在方程(15.9.36)的被积函数中, 指数的系数正是$s\mathcal{O}[\chi]$. 我们看到, 对于在广义BRST变换(15.9.16)—(15.9.17)下不变的算符,[‡‡] 它们的真空期望值不被规范固定泛函Ψ的变化所影响. 对于两个或多个算符的真空期望值, 相对应的结果同样成立.

[‡‡]对于开规范理论, 一般而言, 除了常数以外, 没有在变换(15.9.16)—(15.9.17)下不变的算符. 取而代之, 应该考虑的是在幂零的“量子BRST算符”σ下不变的算符$O(\chi,\chi^\ddagger)$, 其中σ定义为$\sigma O=(O,S)-\mathrm{i}\Delta O$. 对于仅依赖于$\chi$的$O$, 这一条件退化至方程(15.9.36). 如果$\sigma O=0$, 那么规范固定函数$\Psi$的微小变换不会影响$O(\Psi,\delta\Psi/\delta\chi)$的期望值.[24]

[a]即厘米-克-秒(Centimeter-Gram-Second)单位制. ——译者注

附录A　关于Lie代数的一个定理

在这个附录中, 我们所考察的是一般的Lie代数$\mathscr{G}$, 生成元为t_α, 结构常数为$C^\alpha{}_{\beta\gamma}$, 并将证明如下3个条件的等价性:

a: 存在一个实的对称正定矩阵$g_{\alpha\beta}$, 其满足不变性条件

$$g_{\alpha\beta}C^\beta{}_{\gamma\delta} = -g_{\gamma\beta}C^\beta{}_{\alpha\delta} \ . \tag{15.A.1}$$

(这正是在15.2节中证明的物理背景所需要的条件(15.2.4).)

b: 该Lie代数存在一组基(即, 一组生成元$\tilde{t}_\alpha = \mathscr{S}_{\alpha\beta}t_\beta$, 其中$\mathscr{S}$是非奇异的实矩阵), 使得这组基的结构常数$\tilde{C}^\alpha{}_{\beta\gamma}$不仅对于下指标$\beta$和$\gamma$是反对称的, 并且对于全部3个指标$\alpha$, β和γ是全反对称的.

c: Lie代数$\mathscr{G}$是相互交换的紧致单纯子代数与$U(1)$子代数的直和, 记为子代数$\mathscr{H}_m$的直和.

我们将通过证明**a**推出**b**, **b**推出**c**, 以及**c**推出**a**的方式来证明陈述**a**, **b**和**c**的等价性. 作为中间的一个副产品, 我们也将证明, 如果这些条件被满足了, 那么能够选出$\mathscr{G}$的一组基t_{ma}, 其中m标记t_{ma}所属的单纯或$U(1)$子代数$\mathscr{H}_m$, a标记该子代数下的个体生成元, 使得满足方程(15.A.1)的矩阵采取形式

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2}\delta_{mn}\delta_{ab} \ , \tag{15.A.2}$$

其中g_m^{-2}是任意的正实数.

首先, 我们假定**a**, 即存在满足不变性条件(15.A.1)的实对称正定矩阵$g_{\alpha\beta}$. 那么, 我们就可以定义新的生成元

$$\tilde{t}_\alpha \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\beta}t_\beta \ , \tag{15.A.3}$$

其中实的逆平方根矩阵$g^{-1/2}$的存在性由$g_{\alpha\beta}$的正定性保证. 这些生成元满足Lie代数

$$\left[\tilde{t}_\alpha, \tilde{t}_\beta\right] = \mathrm{i}\,\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}\tilde{t}_\gamma \ , \tag{15.A.4}$$

其中

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\alpha'}(g^{-1/2})_{\beta\beta'}(g^{+1/2})_{\gamma\gamma'}C^{\gamma'}{}_{\alpha'\beta'} \ . \tag{15.A.5}$$

(在这一基下, 不再区分上下标α, β等将是方便的, 取代$\tilde{C}^\gamma{}_{\alpha\beta}$, 写成$\tilde{C}_{\gamma\alpha\beta}$.) 那么, 方程(15.A.1)就告诉我们$\tilde{C}_{\alpha\gamma\delta}$关于$\alpha$和$\gamma$是反对称的并且关于$\gamma$和$\delta$也是反对称的, 进而是全反对称的, 证明了**b**.

接下来, 我们假定**b**, 即存在Lie代数的一组基使得结构常数是全反对称的. 在这一基下, 伴随表示的矩阵$(\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_\alpha)_{\beta\gamma} \equiv -\mathrm{i}\tilde{C}_{\beta\gamma\alpha}$是纯虚且全反对称的, 因而是厄米的. 根据关于厄米矩阵的一般定理,* $\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_\alpha$要么是不可约的, 要么是完全可约的.

一组不可约的$N\times N$矩阵$\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_\alpha$是指, 对于这组矩阵不存在维数$< N$的子空间, 使得该子空间在所有的$\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_\alpha$作用下不变——即, 不存在一组个数小于$N$的非零矢量$(u_r)_\beta$, 使得对于每一$\alpha$和$r$,

*如果一组矩阵H_α的一组基不是不可约的, 那么由定义可知, 必存在一组矢量u_n, 它们张开了一个子空间(不是整个空间), 使得这个子空间在H_α的作用下不变: 即, 对于所有的α和n, $H_\alpha u_n = \sum_m (C_\alpha)_{mn}u_m$. 在这一情况下, 我们可以取矢量$u_n$以及矢量$v_k$构成一个基, 其中$v_k$张开的空间正交于所有$u_n$. 如果$H_\alpha$是厄米的, 那么$(u_n, H_\alpha v_k) = \sum_m (C_\alpha)^*_{mn}(u_m, v_k) = 0$, 所以由$v_k$张开的空间在$H_\alpha$也是不变的: $H_\alpha v_k = \sum_\ell (D_\alpha)_{\ell k}v_\ell$. 在这一基下, 矩阵$H_\alpha$可以同时约化至分块对角形式:

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} C_\alpha & 0 \\ 0 & D_\alpha \end{pmatrix} \ .$$

以这种方式继续下去, 我们可以完全地将矩阵H_α约化至每个分块矩阵都不可约的分块对角形式.

$(\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_{\alpha})_{\beta\gamma}(u_r)_\gamma$是矢量$(u_s)_\beta$的线性组合. 既然矩阵$(\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_{\alpha})_{\beta\gamma}$正比于这组基下的结构常数, 这等价于陈述: 不存在一组线性组合$\mathscr{T}_r \equiv (u_r)_\gamma \tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_\gamma$, 使得它与所有$\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_\alpha$的对易子封闭, 即对于每一$\alpha$和$r$, $[\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_\alpha, \mathscr{T}_r]$是$\mathscr{T}_s$的线性组合. 这样的矩阵$\mathscr{T}_r$将构成整个Lie代数的一个不变子代数的生成元; 这种矩阵不存在意味着Lie代数是单纯的.

一组矩阵$\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_\alpha$完全可约是指, 通过选择合适的基, 它们可以写成分块对角的超矩阵

$$(\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_\alpha)_{ma,nb} = [t^{\mathrm{A}(m)}{}_\alpha]_{ab}\,\delta_{mn} \ , \tag{15.A.6}$$

其中子矩阵$t^{\mathrm{A}(m)}{}_\alpha$要么不可约要么为零.** 对Lie代数本身也采用这组基, 那么结构常数就变成

$$\tilde{C}_{\ell c,ma,nb} = \mathrm{i}(\tilde{t}^{\mathrm{A}}{}_{\ell c})_{ma,nb} = \mathrm{i}(t^{\mathrm{A}(m)}{}_{\ell c})_{ab}\,\delta_{mn} \ . \tag{15.A.7}$$

但是, 既然它是全反对称的, 并正比于δ_{mn}, 它必须也正比于$\delta_{\ell n}$和$\delta_{\ell m}$:

$$\tilde{C}_{\ell c,ma,nb} = \delta_{\ell n}\,\delta_{\ell m}\,C^{(\ell)}_{cab} \ . \tag{15.A.8}$$

换句话说, 在这组基下, 对于Lie代数的任何表示$t^{(m)}{}_a \equiv t_{ma}$, 我们有

$$[t^{(m)}{}_a, t^{(m)}{}_b] = \mathrm{i}\,\delta_{mn} C^{(m)}_{cab}\, t^{(m)}{}_c \ , \tag{15.A.9}$$

其中$C^{(m)}_{cab}$是实的且关于指标a, b, c反对称. 当我们说Lie代数是子代数$t^{(m)}$的直和时, 我们是指, 能够找到一组基, 使得在这组基下, 生成元落入集合$t^{(m)}$中, 并且一个集合内的生成元, 它们彼此之间的对易子有该集合内的生成元的线性组合给出, 并且一个集合内的所有生成元与所有其它集合内的所有生成元对易. 对于每一个m, 伴随表示$t^{(m)A}$的矩阵的集合要么不可约要么为零, 分别对应于单独子代数或者由所谓的$U(1)$生成元构成的子代数, 而后者与整个代数的所有生成元均对易.

因此, 我们证明了, 对于最一般的Lie代数, 若它的结构常数是全反对称的, 那么它是一个或多个单纯Lie代数和/或$U(1)$Lie代数的直和. 更进一步, 单纯子代数是紧致的, 也就是说, 每个矩阵$-C^{(m)}_{acd} C^{(m)}_{bdc}$是正定的, 这是因为对于任意实矢量$u_a$, $-C^{(m)}_{acd} C^{(m)}_{bdc} u_a u_b = \sum_{cd}[\sum_a u_a C^{(m)}_{acd}]^2$是正量的和, 除非$u_a = 0$, 否则它不能为零, 既然对于$u_a \neq 0$, 条件$\sum_a u_a C^{(m)}_{acd} = 0$将表明$\sum_a u_a t^{(m)}{}_a$本身是一个不变阿贝尔子代数, 与$t^{(m)}{}_a$构成单Lie代数的事实相矛盾. 这完成了**c**的证明.

最后, 我们假定**c**, 即Lie代数是一组单纯Lie代数或$U(1)$Lie代数的直和; 也就是说, 在某个基$t^{(m)}_a = \mathscr{S}_{ma,\alpha} t_\alpha$下, 其中$\mathscr{S}$是实的且非奇异, 我们有

$$[t^{(m)}_a, t^{(m)}_b] = \mathrm{i}\delta_{nm} C^{(m)c}{}_{ab} t^{(m)}_c \ ,$$

其中每一子代数$t^{(m)}$不是单纯的就与所有量均对易. 我们进一步假定单纯子代数是紧致的, 也就是说, 矩阵

$$g^{(m)}_{ab} \equiv -C^{(m)c}{}_{ab} C^{(m)d}{}_{bc} \tag{15.A.10}$$

是正定的. 为了构建满足方程(15.A.1)的实正定矩阵$g_{\alpha\beta}$, 在生成元的基为$t_{ma} = t^{(m)}_a$下, 我们取

$$g_{ma,nb} \equiv g^{(m)}_{ab} \delta_{mn} \ , \tag{15.A.11}$$

** 这里m和n用来标记沿着主对角的块, 而a和b标记这些块内的行和列. 另外, m是不求和的, 且a, b等指标的范围一般会依赖于m.

其中，当$t^{(m)}$是单纯子代数时，$g^{(m)}_{ab}$取为矩阵(15.A.10)，而当$t^{(m)}$是一个或多个$U(1)$子代数的直和时，$g^{(m)}_{ab}$取为任意的实对称正定矩阵．由于每一个$g^{(m)}_{ab}$是实对称正定矩阵，那么矩阵(15.A.11)显然也是如此．为了验证要求(15.A.1)，回忆结构常数的Jacobi恒等式:

$$C^{(m)c}{}_{ad}C^{(m)d}{}_{be}+C^{(m)c}{}_{bd}C^{(m)d}{}_{ea}+C^{(m)c}{}_{ed}C^{(m)d}{}_{ab}=0 \tag{15.A.12}$$

然后与$C^{(m)e}{}_{fc}$收缩．重新命名第三项的指标，使得$c\to d\to e\to c$，并使用方程(15.A.10)，在做了这些之后，针对单纯子代数的结果可以写成

$$g^{(m)}_{df}C^{(m)d}{}_{ab}=C^{(m)c}{}_{ad}C^{(m)d}{}_{be}C^{(m)e}{}_{cf}-C^{(m)c}{}_{fd}C^{(m)d}{}_{be}C^{(m)e}{}_{ca}\ .$$

其中的关键点在于，它表明左边关于a和f是全反对称的:

$$g^{(m)}_{df}C^{(m)d}{}_{ab}=-g^{(m)}_{da}C^{(m)d}{}_{fb}\ . \tag{15.A.13}$$

这一结果在$U(1)$子代数中是平庸的，在那里结构常数为零．从方程(15.A.13)中就立刻得出了对称性条件(15.A.1)，因此完成了**a**的证明．这样就完成了我们对陈述**a**, **b**和**c**相互等价的证明．

现在我们回到矩阵$g_{\alpha\beta}$．有了全反对称的结构常数，不变性条件(15.2.4)可以表示为如下的陈述，矩阵$g_{\alpha\beta}$与Lie代数伴随表示中的所有矩阵均对易

$$[g,t^{\mathrm{A}}{}_{\gamma}]=0\ . \tag{15.A.14}$$

我们已经看到所有的$(t^{\mathrm{A}}{}_{\gamma})_{\alpha\beta}$都可以变成分块对角的形式，并且沿着主对角的是不可约子矩阵(或零矩阵)．那么，一个著名的定理[25]会告诉我们，$g_{\alpha\beta}$也必须是分块对角的，且其中的块与$t^{\mathrm{A}}{}_{\gamma}$中的块有相同的大小和位置，而且每一块中的子矩阵正比于单位矩阵．(若$t^{\mathrm{A}}{}_{\gamma}$中的两个矩阵是等价的，也就是说这两个矩阵通过一个相似变换相关，为了使$g_{\alpha\beta}$的子矩阵变成正比于单位矩阵的形式，可能就需要在那里对基做一个合适的变换.) 那么以方程(15.A.11)的记法，矩阵就由方程(15.A.2)给出．

附录B　Cartan目录

我们在这里不加证明的呈现出单Lie代数的全部目录，它的最终形式是由E. Cartan给出的.[26] 这里所要呈现的是它们的“紧致”形式——即，生成元可以被有限维厄米矩阵忠实表示．Lie代数的标记中含有下标$n\geq 1$，这用来标记它们的“秩”(rank)——相互独立且交换的生成元的线性组合的个数．

$\boldsymbol{A}_n$: 这是特殊幺正群$SU(n+1)$的代数，特殊幺正群$SU(n+1)$是$n+1$维中所有幺正($U^\dagger=U^{-1}$)幺模($\mathrm{Det}\,U=1$)矩阵构成的群．任何这样的矩阵，只要它无限接近于单位元，它可以表示成

$$U=1+\mathrm{i}H\ ,$$

其中无限小的H满足条件

$$H^\dagger=H\ ,\qquad \mathrm{Tr}\,H=0\ ,$$

所以A_n是$n+1$维中所有无迹厄米矩阵的Lie代数．任何一组相互交换的厄米矩阵可以同时对角化，在$n+1$维中，相互独立的无迹对角矩阵的最大数目是n，所以n是A_n的秩．$n+1$维中的任何厄米矩

阵有$(n+1)^2$个独立的实参数(其中沿着主对角的是$n+1$个实数, 而在主对角上方有$n(n+1)/2$个复数, 这些复数等于主对角下方复数的共轭), 无迹条件会消掉一个实参数, 所以A_n的维数是

$$d(A_n) = (n+1)^2 - 1 = n(n+2)\ .$$

所有A_n都是单纯的.

$\boldsymbol{B}_n$: 这是幺正正交群$O(2n+1)$的代数, 该群由$2n+1$维中所有幺正($\mathscr{O}^\dagger = \mathscr{O}^{-1}$)且正交($\mathscr{O}^{\mathrm{T}} = \mathscr{O}^{-1}$)的矩阵构成, 由于矩阵是幺正且正交的, 所以它还是实矩阵. (有时为了体现幺正的限制会称这个群为$UO(2n+1)$.) 任何这样的矩阵$\mathscr{O}$, 若它无限接近于单位元, 它可以表示为

$$\mathscr{O} = 1 + \mathrm{i}A\ ,$$

其中A是无限小矩阵并满足条件

$$A^* = -A = A^{\mathrm{T}}\ .$$

(如果我们将自身限制于子群$SO(2n+1)$, $\mathscr{O}$要服从进一步的条件$\mathrm{Det}\,\mathscr{O} = 1$, 既然任何接近于单位元的正交矩阵$\mathscr{O}$都会有$\mathrm{Det}\,\mathscr{O} = 1$, 所以这并不会造成任何区别.) 任何一组$(2n+1)$-维中的反对称虚矩阵可以(通过普通的正交矩阵)变成如下超矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} a_1\sigma_2 & & & & 0 \\ & a_2\sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_n\sigma_2 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中σ_2是通常的2×2矩阵

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$$

而$a_1, \cdots, a_n$是实数. 因此B_n的秩显然等于n. 反对称虚矩阵完全由实对角上方的虚数指定, 所以它的维数是

$$d(B_n) = \frac{(2n+1)(2n)}{2} = n(2n+1)\ .$$

所有B_n都是单纯的.

$O(N)$还有另一种定义方法, 而这个定义将会帮助我们理解下一大类单Lie代数的动机. 除了将$O(N)$定义成满足正交条件$\mathscr{O}^{\mathrm{T}}\mathscr{O} = 1$的所有$N$维实矩阵构成的群, 它也可以定义为满足条件

$$\mathscr{M}^{\mathrm{T}}\mathscr{P}\mathscr{M} = \mathscr{P}$$

的所有N维实矩阵$\mathscr{M}$的群, 其中$\mathscr{P}$是正定对称实矩阵. 这是因为任何这样的$\mathscr{P}$总可以表示为$\mathscr{P} = \mathscr{R}^{\mathrm{T}}\mathscr{R}$, 其中$\mathscr{R}$是某个非奇异的实矩阵, 所以存在相似变换, 使得满足上述条件的$\mathscr{M}$变成实正交矩阵$\mathscr{R}^{-1}\mathscr{M}\mathscr{R}$, 所以我们可以令$\mathscr{P}$为各种各不相同的实对称正定矩阵却不改变群.

$\boldsymbol{C}_n$: 这是幺正辛群$USp(2n)$的代数, 幺正辛群由所有保持反对称非奇异矩阵$\mathscr{A}$不变的幺正矩阵$\mathscr{M}$构成:

$$\mathscr{M}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}\mathscr{M} = \mathscr{A}\ ,$$

$$\mathscr{A}^{\mathrm{T}} = -\mathscr{A} \ , \qquad \mathrm{Det}\,\mathscr{A} \neq 0 \ .$$

(注意, 在d维中, $\mathrm{Det}\,\mathscr{A} = \mathrm{Det}\,\mathscr{A}^{\mathrm{T}} = (-)^d\,\mathrm{Det}\,\mathscr{A}$, 所以, 如果$d$是奇数, $\mathrm{Det}\,\mathscr{A}$必须为零, 因此, 除非$d$为偶数, 否则不存在$USp(d)$.) 任何这样的反对称非奇异(可能为复)矩阵$\mathscr{A}$可以写成如下的标准形式

$$\mathscr{A} = \mathscr{R}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}_0\mathscr{R} \ ,$$

其中$\mathscr{R}$是幺正矩阵, 而$\mathscr{A}_0$是超矩阵:

$$\mathscr{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

(或者, 我们可以取$\mathscr{A}_0$为分块对角超矩阵, 其中主对角线上是σ_1.) $USp(2n)$可以描述成满足

$$\mathscr{S}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}_0\mathscr{S} = \mathscr{A}_0$$

的幺正矩阵$\mathscr{S}$所构成的群, 这是因为任何这样的$\mathscr{S}$可以变换至幺正矩阵$\mathscr{M} = \mathscr{R}^{-1}\mathscr{S}\mathscr{R}$, 而$\mathscr{M}$满足之前的条件$\mathscr{M}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}\,\mathscr{M} = \mathscr{A}$. 任何这样的矩阵$\mathscr{S}$, 若它无限接近于单位元, 它可以写成

$$\mathscr{S} = 1 + \mathrm{i}\,\mathscr{H} \ ,$$

其中$\mathscr{H}$是无限小矩阵, 并满足条件

$$\mathscr{H}^{\dagger} = \mathscr{H} \ , \qquad \mathscr{H}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_0\mathscr{H} = 0 \ .$$

满足这些条件的最一般的$2n$维矩阵可以写成超矩阵

$$\mathscr{H} = \begin{bmatrix} \mathscr{A} & \mathscr{B} \\ \mathscr{B}^* & -\mathscr{A}^* \end{bmatrix} \ ,$$

其中n维复子矩阵$\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$满足

$$\mathscr{A}^{\dagger} = \mathscr{A} \ , \qquad \mathscr{B}^{\mathrm{T}} = \mathscr{B} \ .$$

最大的一组相互对易的生成元满足$\mathscr{A}$为对角矩阵而$\mathscr{B}$为零, 因而为如下的形式

$$\mathscr{H} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_n & & & \\ & & & -a_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -a_n \end{bmatrix}$$

其中$a_1, \cdots, a_n$为实数. 因此, C_n的秩显然为n. C_n的维数是, 厄米矩阵$\mathscr{A}$中相互独立的实参数数目n^2, 加上对称复矩阵$\mathscr{B}$中相互独立的实参数数目$2n(n+1)/2$

$$d(C_n) = n^2 + 2 \times n(n+1)/2 = n(2n+1) \ .$$

所有C_n代数都是单纯的.

$\boldsymbol{D}_n$: 这是幺正正交群$O(2n)$的代数, $O(2n)$由$2n$维中所有幺正正交矩阵构成. 对B_n的讨论可以挪至D_n, 所不同的是任何一组相互对易的生成元可以变成如下形式

$$\begin{bmatrix} a_1\sigma_2 & & & 0 \\ & a_2\sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\sigma_2 \end{bmatrix}$$

所以秩仍然是n. 另外, 维数在这里是

$$d(D_n) = \frac{(2n)(2n-1)}{2} = n(2n-1)\ .$$

除了D_1和D_2之外, 所有的D_n都是单纯的, D_1是只有一个生成元的阿贝尔代数, 而D_2是直和$B_1 + B_1$.

例外Lie代数: 除了之上的典型Lie代数外, 还存在5种特殊情况, $G_2(d=14)$; $F_4(d=52)$; $E_6(d=78)$; $E_7(d=133)$; $E_8(d=248)$.

不是所有的典型Lie代数是真正不同的. 存在如下4个同构

$$A_1 = B_1 = C_1\ , \qquad C_2 = B_2\ , \qquad A_3 = D_3\ .$$

它们对应Lie群中代数之间的同构. 然而, 像$B_1 = A_1$, $B_2 = C_2$和$D_3 = A_3$这样的同构并不意味着$SO(3)$与$SU(2)$同构, 或者$SO(5)$与$USp(4)$同构, 或者$SO(6)$与$SU(4)$同构. 取而代之, $SU(2)$, $USp(4)$和$SU(4)$是$SO(3)$, $SU(2)$和$SO(6)$的单连通*覆盖群*. (即第二章讨论的覆盖群.) 然而, Lie代数的同构使得$SO(3)$, $SU(2)$和$SO(6)$双值基本表示的构造变得非常容易; 它们分别就是$SU(2)$, $USp(4)$和$SU(4)$的定义表示. 另外$SO(4)$同构于$SO(3)\times SO(3)$, 所以它的双值旋量表示就是$SU(2)\times SU(2)$的定义表示. 当$d \geq 7$时, $SO(d)$的双值旋量表示必须通过其它方法构建. 最简单的技巧是使用5.4节讨论过的Clifford代数.

习题

1. 推导Bianchi恒等式

$$D_\mu\, F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu\, F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda\, F_{\alpha\mu\nu} = 0\ .$$

2. 假定我们在非阿贝尔规范理论中使用广义Coulomb规范, 取规范固定函数为$f_\alpha = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}_\alpha$. 推导鬼场拉格朗日量. 鬼场传播子是什么? (取$B[f] = \exp(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, f_\alpha f_\alpha/2\xi)$.)

3. 假定在电动力学中我们使用规范固定函数$f = \partial_\mu A^\mu + cA_\mu A^\mu$, 其中$c$是任意常数. 推导鬼场拉格朗日量. (取$B[f] = \exp(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, f^2/2\xi)$.) 鬼场传播子是什么?

4. 证明单Lie单数的生成元个数不可能是4.

5. 证明, 如果$\psi(x)$属于某个规范群的一个表示, 该规范群的生成元为t_α, 并且$\psi(x)$沿着路径$x^\mu = x^\mu(\tau)$依照微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\psi(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{i}t_\alpha\psi(\tau)A_{\alpha\mu}(x(\tau))\frac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}\tau}$$

进行变化, (其中$\psi_\ell(x)$和$A_{\alpha\mu}(x)$是经典c-数场) 那么对于围绕点X^μ的任何小的闭环路$\mathscr{P}$, ψ沿该环路的变化正比于

$$t_\alpha\psi(X)F_{\alpha\mu\nu}(X)\oint_{\mathscr{P}} x^\mu(\tau)\frac{\mathrm{d}x^\nu(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \ .$$

找到比例常数. 用这一结果证明, 如果$F_{\alpha\mu\nu}$处处为零, 那么, 至少在一有限区域内, 可以通过一个规范变换使得$A_{\alpha\mu}(x)$为零. (提示: 沿用电动力学中的类似讨论, 或者沿用广义相对论中的讨论, 例如参考文献6.)

6. 对一般的非阿贝尔规范理论应用路径积分方法, 选择规范固定泛函$f_\alpha = n_\mu A^\mu_\alpha$, 其中$n_\mu$是任意常数, 计算规范场$A_{\alpha\mu}(x)$的传播子. (取$B[f] = \exp(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\ f_\alpha f_\alpha/2\xi)$.) 鬼场拉格朗日量是什么? 鬼场传播子是什么? 鬼场相互作用顶点是什么?

7. 假定我们采用BRST不变性而非规范不变性作为基本的物理原理. 拉格朗日量是从场和场导数的乘积的和中构建的, 即从$A_{\alpha\mu}$, ω_α, ω^*_α, h_α和/或它们的导数构建的, 要求场与场导数乘积的量纲(质量)^{d}满足$d \leq 4$, 并且拉格朗日量在Lorentz变换, 鬼数相位变换($\omega_\alpha \to \mathrm{e}^{i\theta}\omega_\alpha$, $\omega^*_\alpha \to \mathrm{e}^{-i\theta}\omega^*_\alpha$), 整体规范变换($\epsilon_\alpha$为常数)以及BRST变换下不变(可以相差一个全导数), 推导满足上述要求的最一般的拉格朗日量.

8. 证明反括号满足对称性条件(15.9.15)和Jacobi恒等式(15.9.21).

9. 证明, 如果泛函O满足条件$(O, S) = \mathrm{i}\Delta S$并且作用量$S$满足量子主方程, 那么量子均值$\langle O\rangle$独立于规范固定泛函$\Psi$.

参考文献

[1] C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954). 在1938年的华沙会议, O. Klein在一次讲演中曾经非常接近$SU(2)$Yang-Mills理论的公式化表述, 收录于*New Theories in Physics* (International Institute of Intellectual Cooperation, Paris, 1939). 关于Klein理论的批判性讨论, 参看D. J. Gross在1994年斯德哥尔摩的Oscar Klein研讨会上的报告“Oscar Klein and Gauge Theory”, Princeton preprint PUPT-1508.

[2] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).

[3] R. P. Feynman, *Acta Phys. Polonica* **24**, 697 (1963).

[4] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967).

[5] B. S. De Witt, *Phys. Rev.* **162**, 1195, 1239 (1967).

[6] 这一证明可以从广义相对论中相对应结果的标准证明中改编过来, 即, 在一有限单连通区域内存在到平坦度规的坐标变换, 其充要条件是Riemann-Christoffel曲率张量为零的证明. 参看, S. Weinberg, *Gravitation amd Cosmology* (Wiley, New York, 1972): Sections 6.3和6.4.

[7] **a**(其中$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$)蕴含**b**, **b**蕴含**a**的证明是M. Gell-Mann和S. L. Glashow给出的, *Ann. Phys. (N.Y.)* **15**, 437 (1961).

[8] 参看, S. Weinberg, 同上, Section 7.6.

[9] V. Gribov, *Nucl. Phys.* **B139**, 1 (1978). 另见R. Jackiw, I. Muzinich and C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D17**, 1576 (1978); R. Jackiw, in *New Frontiers in High Energy Physics*, B. Kursunoglu, A. Perlmutter, and L. Scott编辑(Plenum, New York, 1978); N. Christ and T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D22**, 939 (1980); R. Jackiw, in *Current Algebra and Anomalies* (World Scientific, Singapore, 1985): footnote 50.

[10] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Comm. Math. Phys.* **42**, 127 (1975); 收录在*Renormalization Theory*, G. Velo and A. S. Wightman编辑(Reidel, Dordrecht, 1976); *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976).

[11] I. V. Tyutin, Lebedev Institute preprint N39 (1975).

[11a] N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys.* **35**, 1111 (1966); B. Lautrup, *Mat. Fys. Medd. Kon. Dan. Vid.-Sel. Medd.* **35**, 29 (1967).

[12] 我不知道这个讨论的原始来源, 我是从J. Polchinski那里学到它的.

[13] S. N. Gupta, *Proc. Phys. Soc.* **63**, 681 (1950); **64**, 850 (1951); K. Bleuler, *Helv. Phys. Acta* **3**, 567 (1950); K. Bleuler and W. Heitler, *Progr. Theor. Phys.* **5**, 600 (1950).

[14] J. Thierry-Mieg, *J. Math. Phys.* **21**, 2834 (1980); R. Stora, *Progress in Gauge Theories: Proceedings of a Symposium at Cargèse*, 1983, G.'t Hooft, A. Jaffe, H. Lehmann, P. K. Mitter, I. M. Singer, and R. Stora编辑(Plenum, New York, 1984): p. 543; L. Bonora and P. Cotta-Ramusino, *Commun. Math. Phys.* **155**, 249 (1993); P. M. Lavrov, P. Yu Moshhin and A. A. Reshetnyak, Tomsk preprint hep-th/9507104; P. M. Lavrov, Tomsk preprint hep-th/9507105.

[15] W. Siegel, *Phys. Lett.* **93B**, 170 (1980); T. Kimura, *Prog. Theor. Phys.* **64**, 357 (1980); **65**, 338 (1981).

[16] G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, *Commun. Math. Phys.* **174**, 57 (1995): Section 14.

[17] G. Curci and R. Ferrari, *Nuovo Cimento* **32A**, 151 (1976); I. Ojima, *Prog. Theor. Phys. Supp.* **64**, 625 (1980); L. Baulieu and J. Thierry-Mieg, *Nucl. Phys.* **B197**, 477 (1982).

[18] 反-BRST变换被L. Alvarez-Gaumè和L. Baulieu推广至一般的定域系统, *Nucl. Phys.* **B212**, 255 (1983). 它由如下算符诱导:

$$\bar{s} = \omega^{*A}\delta_A\phi^r \frac{\delta_L}{\delta\phi^r} - \frac{1}{2}\omega^{*B}\omega^{*C}f^A{}_{BC}\frac{\delta_L}{\delta\omega^{*A}} - \omega^{*B}h^C f^A{}_{BC}\frac{\delta}{\delta h^A} + \Big[-f^A{}_{BC}\omega^{*B}\omega^C + h^A\Big]\frac{\delta_L}{\delta\omega^A} \ .$$

可以直接验证这一变换是幂零的:

$$\bar{s}^2 = 0 \ .$$

另外, BRST变换和反-BRST变换反对易. 更进一步, 存在反-BRST变换的上同调定理(未发表), 类似于BRST变换的上同调定理: ϕ, ω^A, ω^{*A}和h^A的泛函I, 如果满足反-BRST变换条件$\bar{s}I = 0$并且鬼数为零, 那么它的最一般形式是

$$I[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + \bar{s}\,\bar{\Psi}[\phi, \omega, \omega^*, h] \ .$$

(用Hodge算符$\bar{t} \equiv \omega^A\delta/\delta h^A$取代$t$即可.) 反-BRST变换有助于列举拉格朗日量和Green函数中可能的项, 但我不知道它在什么情况下是不可或缺的.

[19] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B102**, 27 (1981); *Nucl. Phys.* **B234**, 106 (1984); *J. Math. Phys.* **26**, 172 (1985). 另见B. L. Voronov and I. V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* **50**, 218, 628 (1982). 一个简明的综述可参看, J. Gomis, J. París and S. Samuel, *Phys. Rep.* **259**, 1 (1995).

[20] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett* **B55**, 224 (1975); CERN report TH2332 (1977); I. A. Batain and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B69**, 309 (1977); I. S. Fradkin and T. E. Fradkina, *Phys. Lett.* **B72**, 334 (1977). 另见M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge System* (Princeton University Press, Princeton, 1992).

[21] I. A. Batalin and I. V. Tyutin, *Phys. Lett.* **B356**, 373 (1995).

[22] J. Zinn-Justin, *Trends in Elementary Particle Theory - International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974* (Springer-Verlag, Berlin, 1975): p. 2.

[23] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, *Phys. Rev.*, **D13**, 3214 (1976); R. E. Kallosh, *Nucl. Phys.* **B141**, 141 (1978); B. de Wit and J. W. van Holten. *Phys. Lett.*, **B79**, 389 (1979); P. van Nieuwenhuizen *Phys. Rep.*, **68**, 189 (1981).

[24] M. Henneaux and C. Teitelboim, 参考文献[20]: Section 18.1.4.

[25] E. P. Wigner, *Group Theory* (Academic Press, New York, 1950): pp. 76-8.

[26] 原始文献是E. Cartan, *Sur la Structure des Groupes de Transformations Finis et Continue,* (Paris, 1894; 2nd edn 1933). 教科书处理可以参看, R. Gilmore, *Lie Group, Lie Algebras, and some of Their Applications* (Wiley, New York, 1974): Chapter 9.

第 16 章　外场方法

考察有经典外场的量子场论通常是有益的. 一个原因是, 在很多物理情况下, 确实出现了外场, 例如经典电磁场或引力场, 或者真空期望值不为零的标量场. (我们将在第19章看到, 这种标量场会在拉格朗日量的对称性自发破缺中扮演一个重要角色.) 然而, 即便问题中没有出现真正的外场, 通过在一个虚拟外场下考察物理振幅可以极大地简化一些计算. 这一章将会证明, 可以将所有的多圈效应等效成对“树”图的求和, 这些树图的顶点和传播子从量子有效作用量中获得, 而量子有效作用量不是别的, 正是有外场时的单粒子不可约连通真空-真空振幅. 在下一章将会看到, 这提供了一种极其方便的方法, 即补全了始于第15章的非阿贝尔规范理论可重整性的证明, 又简化了荷重整化因子的计算, 而后者, 正是我们在构建量子色动力学中渐进自由的临界性质时所需要的.

16.1　量子有效作用量

考察一作用量为$I[\phi]$的量子场论, 并假定我们“打开”了与该理论的场$\phi^r(x)$相耦合的经典流$J_r(x)$. 那么, 有这些流的完整真空-真空振幅是

$$\begin{aligned}
Z[J] &\equiv \langle \text{VAC, out}|\text{VAC, in}\rangle_J \\
&= \int \left[\prod_{s,y} \mathrm{d}\phi^s(y)\right] \exp\left(\mathrm{i}I[\phi] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \phi^r(x) J_r(x) + \epsilon\text{项}\right) . \qquad (16.1.1)
\end{aligned}$$

场$\phi^r(x)$不需要是标量. 它们甚至可以是费米的, 尽管如此, 直到16.4节, 我们都不会费心于追踪这一情况下会出现的符号.) 计算$Z[J]$的Feynman规则与计算没有外流的真空-真空振幅$Z[0]$的Feynman规则相同, 只不过现在的Feynman图要包含一种新顶点, 这一顶点与单个ϕ^r-线相连. 这类顶点会用坐标x进行标记, 并且会给坐标空间Feynman振幅的被积函数贡献“耦合”因子$\mathrm{i}J_r(x)$. 等价地, 我们可以说, 在$Z[J]$作为J的幂级数展开式中, 正比于$\mathrm{i}J_r(x)\mathrm{i}J_s(y)\cdots$的项, 它的系数就是外线(包含传播子)对应于$\phi^r(x)$, $\phi^s(y)$等场的图的和. 特别地, 一阶导数给出对应于$\phi^r(x)$的量子力学算符$\Phi^r(x)$的真空矩阵元:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\delta}{\delta J_r(y)} Z[J]\right]_{J=0} &= \mathrm{i}\int \left[\prod_{r,x} \mathrm{d}\phi^r(x)\right] \phi^r(y)\, \exp\{\mathrm{i}I[\phi] + \epsilon\text{项}\} \\
&= \mathrm{i}\langle \text{VAC, out}|\Phi^r(y)|\text{VAC, in}\rangle_{J=0} . \qquad (16.1.2)
\end{aligned}$$

对于泛函$Z[J]$的定义(16.1.1), 其中的场$\phi^r(x)$可以不是基本场(即, 出现在作用量中的场), 而是基本场的乘积, 我们有时也会处理这样的$Z[J]$. 若$\phi^r(x)$是N个基本场的乘积, Z[J]的Feynman规则中的新顶点就会与N个线相连. 本章的一些结果(包含方程(16.1.2))适用于这一情况, 但是, 凡是涉及Feynman图的地方, 将默认假定$\phi^r(x)$是基本的.

现在, $Z[J]$由含有流J的所有真空-真空振幅的和给出, 这些振幅中既包括连通图也包括非连通图, 但是, 对于在同一子图或不同的连通子图中仅相差顶点置换的那些图, 并没有计为不同的图. 一个由N个连通分支构成的一般图对$Z[J]$的贡献等于这些分支的贡献之积, 再除以顶点的置换数$N!$, 即仅对一个连通分支与另一个连通分支的所有顶点进行置换产生的重复计数.* 因此, 所有图的和是

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N!}(\mathrm{i}W[J])^N = \exp(\mathrm{i}W[J]) \ , \tag{16.1.3}$$

其中$\mathrm{i}W[J]$是所有连通真空-真空振幅的和, 再一次地, 对于那些仅相差顶点置换的图, 并没有计为不同的图.

由于众多目的, 更进一步, 并用所有连通单粒子不可约图取代$W[J]$进行处理将是有用的. (单粒子不可约图是指无法通过剪掉任何一条内线变得不连通的图.) 我们可以以如下方式给出这一求和的形式表达式. 首先, 定义$\phi^r_J(x)$为算符有流J时的$\Phi^r(x)$的真空期望值:

$$\phi^r_J(x) \equiv \frac{\langle \mathrm{VAC, out}|\Phi^r(x)|\mathrm{VAC, in}\rangle_J}{\langle \mathrm{VAC, out}|\mathrm{VAC, in}\rangle_J} = -\frac{\mathrm{i}}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta J_r(x)}Z[J] \tag{16.1.4}$$

或者, 以连通图之和的形式

$$\phi^r_J(x) = \frac{\delta}{\delta J_r(x)}W[J] \ . \tag{16.1.5}$$

这一公式可以逆转. 定义$J_{\phi r}(x)$为使(16.1.4)有规定值$\phi^r(x)$的流:

$$\phi^r_J(x) = \phi^r(x) \quad 如果 \quad J_r(x) = J_{\phi r}(x) \ .$$

量子有效作用量[1]由Legendre变换定义(作为ϕ的泛函, 而非J)

$$\Gamma[\phi] \equiv -\int \mathrm{d}^4x\, \phi^r(x) J_{\phi r}(x) + W[J_\phi] \ . \tag{16.1.6}$$

我们将证明$\Gamma[\phi]$是有流J_ϕ时的所有连通单粒子不可约图的和. 然而, 我们先来看一下它另一方面的物理意义.

注意到, $\Gamma[\phi]$的泛函导数是

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^s(y)} = &-\int \mathrm{d}^4x\, \phi^r(x)\frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta\phi^s(y)} - J_{\phi s}(y)\\ &+\int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\delta W[J]}{\delta J_r(x)}\right]_{J=J_\phi}\frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta\phi^s(y)}\end{aligned}$$

或者, 使用方程(16.1.5)

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^s(y)} = -J_{\phi s}(y) \ . \tag{16.1.7}$$

因此, $\Gamma[\phi]$是“有效作用量”, 也就是说, 在没有流J时, 外场$\phi^s(y)$的可能值由Γ的驻“点”给定:

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^s(y)} = 0 \quad 对于 \quad J=0 \ . \tag{16.1.8}$$

---

*有N个连通分支的Feynman图, 若每个分支中的顶点数分别为n_1, n_2, $\cdots n_N$, 从Dyson展开中可知, 这个Feynman图的贡献正比于因子$1/(n_1+\cdots n_N)!$, 而因子$(n_1+\cdots n_N)!/N!$是这些顶点的置换数, 在置换计数时, 那些仅交换两个分支所有顶点的置换视为是等同的.

可以与经典场方程做一比较, 经典场方程仅要求实际的作用量$I[\phi]$是稳定的. 因此, 方程(16.1.8)可以视为将量子修正考虑在内的外场ϕ的运动方程.

$\Gamma[\phi]$不仅提供了量子修正后的场方程; 它还是有效作用量, 也就是说, 如果作用量是$\Gamma[\phi]$而不是$I[\phi]$, 利用从此得出的顶点, $\mathrm{i}W[J]$可以作为真空-真空振幅的连通树图和算出. 我们这里的树图是指, 如果剪断任何一条内线这个图就会变得不连通. 通过用$\Gamma[\phi]$而非$I[\phi]$, 就将所有的圈图效应考虑在内了.

为了看到这点,[2] 我们来考察将用来代替$W[J]$的量$W_\Gamma[J,g]$, 如果我们用作用量$g^{-1}\Gamma[\phi]$代替$I[\phi]$:

$$\exp\{\mathrm{i}W_\Gamma[J,g]\} \equiv \int \prod_{r,x} \mathrm{d}\phi^r(x) \exp\left\{\mathrm{i}g^{-1}\left[\Gamma[\phi] + \int \mathrm{d}^4x\, \phi^r(x) J_r(x)\right]\right.$$
$$\left. + \epsilon\text{项}\right\}, \tag{16.1.9}$$

其中g是任意常数. 这里的传播子是$g^{-1}\Gamma[\phi]$中ϕ的二次项系数的逆, 因而正比于g, 而所有顶点的贡献均正比于$1/g$, 所以, 若一个图包含V个顶点(包含那些流J产生的顶点)和I条内线(包含那些与J顶点相连的线), 那么它正比于g^{I-V}. 对于任何连通图, 圈的数目是$L = I - V + 1$, 所以$W_\Gamma[J,g]$中的L-圈项与g的关系是

$$\Big(W_\Gamma[J,g]\Big)_{L\text{ loops}} \propto g^{L-1}\ . \tag{16.1.10}$$

等效地, 我们可以写成(至少形式上地)

$$W_\Gamma[J,g] = \sum_{L=0}^{\infty} g^{L-1} W_\Gamma^{(L)}[J]\ , \tag{16.1.11}$$

其中(通过令$g=1$可以看到), $W_\Gamma^{(L)}[J]$是对连通真空振幅$W_\Gamma[J,1]$的L-圈贡献, 而$W_\Gamma[J,1]$是通过使用$\Gamma[\phi]$(不含因子g)而非作用量$I[\phi]$获得的.

现在, 我们在这里只关心无圈的树图的和, 计算这些图所用的顶点和传播子是从$\Gamma[\phi]$而非$I[\phi]$中得出的. 在我们目前的记法中, 这是$W_\Gamma^{(0)}[J]$. 为了孤立出方程(16.1.11)中$L=0$的项, 考察极限$g\to 0$. 在这一极限下, 路径积分(16.1.9)被稳相点所主导,

$$\exp\left\{\mathrm{i}W_\Gamma[J,g]\right\} \propto \exp\left\{\mathrm{i}\,g^{-1}\left[\Gamma[\phi_J] + \int \mathrm{d}^4x\, \phi_J^r(x) J_r(x)\right]\right\}\ , \tag{16.1.12}$$

其中, 由于它是作为J所产生的场定义的, 场ϕ_J是指数的驻点, 也就是说

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi^r(x)}\right|_{\phi=\phi_J} = -J_r(x)\ . \tag{16.1.13}$$

方程(16.1.12)中的比例因子一般是J的泛函, 但它是g^0阶项开始的g的幂级数. 因此, 对两边取对数, 并将g^{-1}阶项孤立出来, 这会给出

$$W_\Gamma^{(0)}[J] = \Gamma[\phi_J] + \int \mathrm{d}^4x\, \phi_J^r(x) J_r(x)\ . \tag{16.1.14}$$

在方程(16.1.6)中令$\phi=\phi_J$, 我们看到方程(16.1.14)的右边正是$W[J]$:

$$W_\Gamma^{(0)}[J]=W[J]\ . \tag{16.1.15}$$

概括一下, 这说明, 通过用$\Gamma[\phi]$代替$I[\phi]$(下标Γ)并只保持树(0-圈)图可以算出$W[J]$:

$$\mathrm{i}W[J]=\int_{\substack{\text{CONNECTED}\\ \text{TREE}}}\left[\prod_{r,x}\mathrm{d}\phi^r(x)\right]\exp\left\{\mathrm{i}\,\Gamma[\phi]+\mathrm{i}\int\phi^r(x)J_r(x)\,\mathrm{d}^4x\right\}\ . \tag{16.1.16}$$

现在, $\mathrm{i}W[J]$的任何连通图都可视为树图, 只不过其中的顶点由单粒子不可约子图组成. 因此, 为了使方程(16.1.16)成立, $\mathrm{i}\Gamma[\phi]$必须是外线数目任意的所有单粒子不可约连通图的和, 而图中的每一外线对应的是因子ϕ而非传播子或波函数. 由于这个原因, 在$\Gamma[\phi]$围绕某个固定场ϕ_0关于场以及场导数的幂级数展开中, 展开系数可以视为重整化耦合常数, 而这里的重整化"点"是由ϕ_0而非某组动量指定的.

等价地, 对于某个固定场$\phi_0^r(x)$, $\mathrm{i}\Gamma[\phi_0]$可以表示为真空-真空振幅的单粒子不可约图的和, 只不过计算使用的是偏移作用量$I[\phi+\phi_0]$:

$$\mathrm{i}\,\Gamma[\phi_0]=\int_{\substack{\text{1PI}\\ \text{CONNECTED}}}\left[\prod_{r,x}\mathrm{d}\phi^r(x)\right]\exp\{\mathrm{i}\,I[\phi+\phi_0]\}\ . \tag{16.1.17}$$

这是因为只要是ϕ_0出现的地方, 无论是方程(16.1.17)中单粒子不可约图中的顶点还是传播子, 都会与一个外ϕ-线相连. (限制在单粒子不可约图上在方程(16.1.17)中扮演了一个重要角色; 没有这个限制, 我们偏移积分变量所产生的积分显然与ϕ_0无关.) 取代方程(16.1.17), 写成

$$\exp\left[\mathrm{i}\,\Gamma[\phi_0]\right]=\int_{\text{1PI}}\left[\prod_{r,x}\mathrm{d}\phi^r(x)\right]\exp\left\{\mathrm{i}\,I[\phi+\phi_0]\right\} \tag{16.1.18}$$

通常是方便的, 其中我们计算的路径积分包含所有图, 包括连通或非联通的, 但在每个图中, 每个连通分支都是不可约的.

* * *

这一形式理论提供了对树图求和的简单方法. 作为一个例子, 考察全两点函数$\Delta^{rx,sy}$与它的单粒子不可约部分$\Pi_{rx,sy}$之间的关系. 从方程(16.1.5)和(16.1.7)中, 我们发现

$$\Delta^{rx,sy}\equiv\frac{\delta^2W[J]}{\delta J_r(x)\delta J_s(y)}=\frac{\delta\phi_J^r(x)}{\delta J_s(y)}\ , \tag{16.1.19}$$

$$\Pi_{rx,sy}\equiv\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi^r(x)\delta\phi^s(y)}=-\frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta\phi^s(y)}\ . \tag{16.1.20}$$

由此立刻得出"矩阵"Δ和Π之间的关系为

$$\Delta=-\Pi^{-1}\ . \tag{16.1.21}$$

这一关系是传播子与自能部分之间的常见关系(10.3.15)的副本, 在方程(10.3.15)中, 分母中的额外项q^2+m^2代表单粒子不可约两点函数的零阶项.

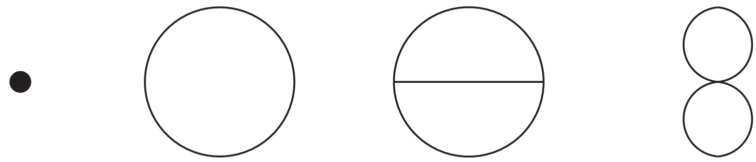

图 16.1 相互作用为ϕ^4的中性标量场ϕ的量子有效作用量的Feynman图, 这些图依次对应零圈阶, 单圈阶和两圈阶.

16.2 有效作用量的计算

为了看到上一节的形式理论在真实情况中是如何运作的, 考察一个简单例子, 单个实标量场$\phi(x)$的可重整理论, 其作用量为

$$I[\phi] = -\int \mathrm{d}^4x \left[\lambda + \tfrac{1}{2}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 + \tfrac{1}{24}\,g\phi^4\right] . \tag{16.2.1}$$

(在这里, 我们在拉格朗日密度中引入了“宇宙学常数”$-\lambda$, 这样做的原因在后文中将会变得非常清楚). 简单起见, 假定我们希望计算的是某个位置无关场$\phi_0(x) = \phi_0$的$\Gamma[\phi_0]$. $\Gamma[\phi_0]$中的每一项将包含一时空体积因子

$$\mathscr{V}_4 = \int \mathrm{d}^4x = \delta^4(p-p)(2\pi)^4 \tag{16.2.2}$$

这产生于动量守恒δ-函数. 因而, 对于常数的ϕ_0, 我们将写出

$$\Gamma[\phi_0] = -\mathscr{V}_4 V(\phi_0) , \tag{16.2.3}$$

其中$V(\phi_0)$是一普通函数, 称为*有效势*. 在本节, 我们将计算有效势至它的一阶. 这一工作最初是由Coleman和E. Weinberg[3]在研究对称性自发破缺时完成的, 对称性自发破缺将是第19章和第21章的主题. 他们也将这一结果用于重整化群的一个早期应用, 我们会在18.2节描述它.

令ϕ偏移ϕ_0, 这样, 方程(16.1.18)中的作用量是:*

$$\begin{aligned} I[\phi+\phi_0] = &-\mathscr{V}_4\left[\lambda + \tfrac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \tfrac{1}{24}g\phi_0^4\right] - [m^2\phi_0 + \tfrac{1}{6}g\phi_0^3]\int \mathrm{d}^4x\,\phi \\ &-\int \mathrm{d}^4x\left[\tfrac{1}{2}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + \tfrac{1}{2}\mu^2(\phi_0)\phi^2\right] - \int \mathrm{d}^4x\left[\tfrac{1}{6}g\phi_0\phi^3 + \tfrac{1}{24}g\phi^4\right] , \end{aligned} \tag{16.2.4}$$

其中μ^2是场相关质量

$$\mu^2(\phi_0) = m^2 + \tfrac{1}{2}g\phi_0^2 . \tag{16.2.5}$$

注意到, 现在出现了正比于ϕ的新相互作用(这对于单粒子不可约图没有任何影响)和正比于ϕ^3的新相互作用, 以及与原相互作用有相同结构的项.

图16.1展示了$\Gamma[\phi_0]$到两圈阶的Feynman图. 真空-真空振幅中的零圈阶项由$I[\phi+\phi_0]$中的常数项给出

$$\mathrm{i}\,\Gamma^{(0\text{ loop})}[\phi_0] = -\mathrm{i}\mathscr{V}_4\left(\lambda + \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{g}{24}\phi_0^4\right) . \tag{16.2.6}$$

*对于$m^2 < 0$的理论, 在微扰论的适用性上有一限制, 我们会在下一节讨论它.

单圈项给定为

$$\exp\left(\mathrm{i}\Gamma^{(1\text{ loop})}[\phi_0]\right)=\int\prod_x \mathrm{d}\phi(x)\ \exp\Big\{-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\Big[\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi+\mu^2(\phi_0)\phi^2\Big] + \epsilon\text{项}\Big\}\ . \tag{16.2.7}$$

在第九章我们学习过如何计算这样的积分, 结果由方程(9.A.18)给出

$$\mathrm{i}\Gamma^{(1\text{ loop})}[\phi_0]=\ln\mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{i}K}{\pi}\right)^{-1/2}=-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln\left(\frac{\mathrm{i}K}{\pi}\right)\ , \tag{16.2.8}$$

其中

$$K_{x,y}=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda\partial y_\lambda}+\mu^2(\phi_0)-\mathrm{i}\epsilon\right]\delta^4(x-y)\ . \tag{16.2.9}$$

像往常一样, 为了计算这样的矩阵, 经由动量空间将K对角化将是有帮助的:

$$\begin{aligned}K_{p,q}&=\int\frac{\mathrm{d}^4x}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\,\frac{\mathrm{d}^4y}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}K_{x,y}\\&=\Big(p^2+\mu^2(\phi_0)-\mathrm{i}\epsilon\Big)\delta^4(p-q)\ .\end{aligned} \tag{16.2.10}$$

对角矩阵的对数就是对主对角元取对数:

$$\left[\ln\left(\frac{\mathrm{i}K}{\pi}\right)\right]_{p,q}=\ln\left[\frac{\mathrm{i}}{\pi}(p^2+\mu^2(\phi_0)-\mathrm{i}\epsilon)\right]\delta^4(p-q) \tag{16.2.11}$$

那么, 它的迹是

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\Gamma^{(1\text{ loop})}[\phi_0]&=-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4p\left[\ln\left(\frac{\mathrm{i}K}{\pi}\right)\right]_{p,p}\\&-\frac{\mathscr{V}_4}{2(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4p\ \ln\left(\frac{\mathrm{i}}{\pi}(p^2+\mu^2(\phi_0)-\mathrm{i}\epsilon)\right)\ .\end{aligned} \tag{16.2.12}$$

将方程(16.2.6)和(16.2.12)合在一起, 我们就有了到一圈阶的有效势

$$V(\phi_0)=\lambda+\frac{1}{2}m^2\phi_0^2+\frac{g}{24}\phi_0^4+\mathscr{I}\Big(\mu^2(\phi_0)\Big)\ , \tag{16.2.13}$$

其中

$$\mathscr{I}(\mu^2)\equiv\frac{-\mathrm{i}}{2(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4p\ \ln\left(\frac{\mathrm{i}}{\pi}[p^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon]\right)\ . \tag{16.2.14}$$

有效势的这一公式包含紫外发散是极其显然的. 幸运的是, 这些紫外发散会自然地被理论参量的重整化所吸收. 尽管积分(16.2.14)是发散的, 简单的幂次级数表明, 通过对μ^2微分三次可以使这个积分收敛:

$$\mathscr{I}'''(\mu^2)=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4p\,(p^2+\mu^2-\mathrm{i}\epsilon)^{-3}\ .$$

$-\mathrm{i}\epsilon$项又一次告诉我们, 必须要逆时针旋转p^0围道, 使得$p^0=\mathrm{i}p^4$, 而p^4从$-\infty$取到$+\infty$:

$$\mathscr{I}'''(\mu^2)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\infty\frac{2\pi^2k^3\mathrm{d}k}{(k^2+\mu^2)^3}=\frac{1}{32\pi^2\mu^2}\ .$$

积分三次, 我们就有

$$\mathscr{I}(\mu^2) = \frac{\mu^4 \ln \mu^2}{64\pi^2} + A + B\,\mu^2 + C\,\mu^4 \ .$$

常数A, B, C不由这一计算方法决定, 而且, 既然它们显然无论如何都是无穷大的, 这也很难说的上是一个严重问题. 我们通过定义λ, m^2和g的"重整化"值来消除这些常数:

$$\begin{aligned}\lambda_R &\equiv \lambda + A + Bm^2 + Cm^4 \ , \\ m_R^2 &\equiv m^2 + gB + 2gm^2C \ , \\ g_R &\equiv g + 6g^2C \ .\end{aligned}$$

那么, 对于到一圈阶的势, 我们的最终结果是

$$V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2}m_R^2\phi_0^2 + \frac{g_R}{24}\phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0)\ln\mu^2(\phi_0)}{64\pi^2} \ . \tag{16.2.15}$$

其中$\mu(\phi_0)$是方程(16.2.5)所定义的场相关质量, 到这一阶, 它可以用m_R和g_R而非m和g计算出来:

$$\mu^2(\phi) = m_R^2 + \frac{1}{2}g_R\phi^2 \ .$$

如果理论包含一个自旋$\frac{1}{2}$的复费米场$\psi(x)$, 并且它与标量ϕ相互作用, 那么会有类似的结果成立. 例如, 如果相互作用哈密顿密度有简单形式$G\phi\bar{\psi}\psi$, 那么在有一常数背景标量场ϕ_0的情况下, 费米子的质量$M(\phi_0)$就有形式:

$$M(\phi_0) = M(0) + G\phi_0 \ .$$

很容易看到势(16.2.15)在这一情况下得到一个额外项:

$$\begin{aligned}V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2}m_R^2\phi_0^2 + \frac{g_R}{24}\phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0)\ln\mu^2(\phi_0)}{64\pi^2} \\ - \frac{M^4(\phi_0)\ln M^2(\phi_0)}{16\pi^2} \ .\end{aligned} \tag{16.2.16}$$

新项中的数值系数是方程(16.2.15)中$\mu^4\ln\mu^2$项的数值系数的4倍, 这是因为这里假定ψ和$\bar{\psi}$所描述的费米子和反费米子是不同的, 并且它们中的每一个都有两个自旋态, 符号相反是由于(正如第9章所示), 高斯型的费米路径积分所给出的结果正比于指数中系数矩阵的行列式, 不同于玻色路径积分, 后者给出的结果正比于这一行列式的倒数.

16.3 能量诠释

分别以能量和能量密度的形式, 对有效作用量$\Gamma[\phi]$和有效势$V[\phi]$有一重要的解释.[4] 为了看到这一点, 假定我们打开流$J^n(\mathbf{x},t)$, 它从$t=-\infty$时的零光滑地增长至一有限值$\mathscr{I}^n(\mathbf{x})$, 并在一段很长的时间$T$内保持该值, 在此之后又光滑的衰减到$t=+\infty$时的零. 这一微扰的效应是将真空转化至有确定能量$E[\mathscr{I}]$($\mathscr{I}(\mathbf{x})$的泛函)的态, 在这个态上会持续时间$T$, 然后又回到真空. 然而, 尽管"出"真空与"入"真空是相同的物理态, 但是在时段T内会累积相因子$\exp(-\mathrm{i}E[\mathscr{I}]T)$, 所以这两个态矢会相差相因子$\exp(-\mathrm{i}E[\mathscr{I}]T)$:

$$\langle \mathrm{VAC,\ out}|\mathrm{VAC,\ in}\rangle_J = \exp\Big(-\mathrm{i}E[\mathscr{I}]T\Big) \ . \tag{16.3.1}$$

与方程(16.1.1)和(16.1.3)相比较, 这给出

$$W[J] = -E[\mathscr{J}]T \ . \tag{16.3.2}$$

为了看到这一能量与有效作用量之间的联系, 假定我们要寻找一个态Ω_ϕ, 它使得能量期望值最小

$$\langle H\rangle_\Omega = \frac{(\Omega, H\Omega)}{(\Omega,\Omega)} \ , \tag{16.3.3}$$

它满足条件: 量子场$\Phi_n(\mathbf{x},t)$有一与时间无关的期望值$\phi_n(\mathbf{x})$

$$\frac{(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x},t)\Omega)}{(\Omega,\Omega)} = \phi_n(\mathbf{x}) \ . \tag{16.3.4}$$

同时附加上Ω是归一化的条件将是方便的

$$(\Omega,\Omega) = 1 \ . \tag{16.3.5}$$

为了最小化服从约束(16.3.4)和(16.3.5)的期望值(16.3.3), 我们使用拉格朗日数乘法, 转而最小化如下的量

$$(\Omega, H\Omega) - \alpha(\Omega,\Omega) - \int \mathrm{d}^3x\, \beta^n(\mathbf{x})\Big(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x})\Omega\Big) \ , \tag{16.3.6}$$

这样, Ω上就没有约束了. 这给出

$$H\Omega = \alpha\Omega + \int \mathrm{d}^3x\, \beta^n(\mathbf{x})\Phi_n(\mathbf{x})\Omega \ . \tag{16.3.7}$$

选择α和$\beta^n(\mathbf{x})$的方式要使得约束(16.3.4)和(16.3.5)被满足, 因而它们会以泛函的形式依赖于规定的期望值$\phi_n(\mathbf{x})$.

好了, 我们曾说过, 当有流$\mathscr{J}^n(\mathbf{x})$时, 哈密顿量$H - \int \mathrm{d}^3x \mathscr{J}^n(\mathbf{x})\Phi_n(x)$会有本征值$E[\mathscr{J}]$:

$$\left[H - \int \mathrm{d}^3x \mathscr{J}^n(\mathbf{x})\Phi_n(x)\right]\Psi_{\mathscr{J}} = E[\mathscr{J}]\Psi_{\mathscr{J}} \ , \tag{16.3.8}$$

其中$\Psi_{\mathscr{J}}$是归一化的本征矢. 更进一步, 既然缓慢地打开这个流使得真空转化成这一能量本征态, 我们可以假定$E[\mathscr{J}]$是有流时的最低能量本征态. 因此, 如果

$$\Omega = \Psi_{\mathscr{J}_\phi} \ , \tag{16.3.9}$$

$$\alpha = E[\mathscr{J}_\phi] \ , \tag{16.3.10}$$

$$\beta^n(\mathbf{x}) = \mathscr{J}^n_\phi(\mathbf{x}) \ , \tag{16.3.11}$$

方程(16.3.4), (16.3.5)和(16.3.7)就会被满足, 其中$\mathscr{J}_\phi(\mathbf{x})$是使得$\Phi(x)$在态$\Psi_{\mathscr{J}}$上有期望值$\phi(\mathbf{x})$的流.

在方程(16.3.8)中取$\mathscr{J} = \mathscr{J}_\phi$, 并取其与$\Psi_{\mathscr{J}_\phi}$的标量积, 对于约束场$\Phi_n$有期望值$\phi_n$的态, 它的最低能量被视作是

$$\langle H\rangle_\Omega = E[\mathscr{J}_\phi] + \int \mathrm{d}^3x\, \mathscr{J}^n_\phi(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x}) \ . \tag{16.3.12}$$

回忆方程(16.3.2)以及$J(x)$的假定形式, 这是

$$\langle H\rangle_\Omega = \frac{1}{T}\left[-W[J_\phi] + \int \mathrm{d}^4x\, J^n_\phi(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x})\right] = -\frac{1}{T}\Gamma[\phi] \ . \tag{16.3.13}$$

正如上一节所指出的, 如果场$\phi(x)$在一个很大的时空体积$\mathscr{V}_4=\mathscr{V}_3 T$上有常数值$\phi$, 那么我们可以将有效作用量写成有效势$V(\phi)$的形式:

$$\Gamma[\phi]=-\mathscr{V}_3\,T\,V(\phi)\ . \tag{16.3.14}$$

在这一情况下, 方程(16.3.13)告诉我们能量密度是

$$\langle H\rangle_\Omega/\mathscr{V}_3=V(\phi)\ . \tag{16.3.15}$$

主要结果是: 对于所有态, 若它服从标量场Φ_n在态上的期望值为ϕ_n的约束条件, 那么它的能量密度期望值的最小值是$V(\phi)$. 一个结果是, 在没有外流时, 真空态将放松至另一个态, 在这个态中, 由于场方程(16.1.8)的要求, 势$V(\phi)$是稳定的, 此外它也是最小的.

这一结果帮助解决了量子有效势诠释中的一个问题, 路径积分形式理论的欧几里得版本(将在第23章的附录A进行描述)使得两点函数Δ(在矩阵意义下)为正这件事变得显然, 所以, 根据方程(16.1.2), $-\Pi=\Delta^{-1}$也是这样. 再加上方程(16.2.3), 这暗示了, 对于单个标量场, 有效势$V(\phi)$对ϕ的二阶导数必须为正(或零). 更普遍的, 有效势必须是凸的:[5]

$$V\Big(\lambda\phi_1+(1-\lambda)\phi_2\Big)\le\lambda V(\phi_1)+(1-\lambda)V(\phi_2)\quad 对于\ 0\le\lambda\le1\ .$$

但对方程(16.2.13)的检查表明, 当$m^2<0$和$g>0$时, 对于作用量为(16.2.1)的标量场论, 在ϕ处在有效势的两个极值点$\pm\sqrt{6\,|m^2|\,/g}$之间时, 它的有效势的零圈近似有一个负定的二阶导数. 会产生这个矛盾是因为, 微扰论的引出暗中依赖于稳定真空的存在, 但当$V''(\phi)<0$时, 场ϕ所处的值$\tilde{\phi}$使得$V(\tilde{\phi})-J_\phi\tilde{\phi}$是极大值而不是极小值, 这意味着当有流$J_\phi$时, 真空态是不稳定的.

那么, 当$m<0$且ϕ处在有效势的两个极小值之间时, 这一标量场真正的有效势是什么呢? 本节的结果是, 我们必须找到使得算符Φ的期望值等于ϕ的最小能量态. 只要ϕ处在该势的两个极小值之间, 通过将Φ取做ϕ处在极小值$\phi\simeq\pm\sqrt{6\,|m^2|\,/g}$时的态的合适的线性组合, 我们就可以赋予$\Phi$期望值$\phi$. 这一态中的能量等于极小值处的能量, 所以这一态显然使得能量最小化. (在体积无限大的极限下, 交叉项为零, 原因会在19.1节进行阐述.) 因此, 在两个极小值之间的有效势是常数, 这满足二阶导数非负的要求. 相同的讨论表明, 在有限势有两个能量不等的定域极小值的更普遍理论中, 这两个极小值之间的有效势是线性的.[6]

16.4 有效作用量的对称性

虽然不总是这样, 但在某些情况下, 作用量$I[\phi]$的对称性自动地也是有效作用量的$\Gamma[\phi]$的对称性. 例如, 在16.2节的例子中, 作用量(16.2.1)在离散变换$\phi\to-\phi$下有一对称性. 因此, 从$Z[J]$和$W[J]$的定义中可以知道, 它们在相对应的反射$J\to-J$下是偶的. 这样, 方程(16.1.5)表明$\phi_{-J}=-\phi_J$, 因此$J_{-\phi}=-J_\phi$, 所以方程(16.1.6)表明$\Gamma[\phi]$在$\phi\to-\phi$下是偶的. 这一结果被单圈结果(16.2.15)所证实. 对于(16.2.16)中的费米圈贡献, 在$M(0)=0$的特殊情况下, 这一贡献也呈现出在$\phi\to-\phi$下的对称性, 这是因为, 在这一情况下, 作用量在$\phi\to-\phi$和$\psi\to\gamma_5\psi$的组合变换下不变.

除非我们能够证明附加于作用量的对称性也适用于有效作用量, 否则我们在建立理论的可重整性时会遇到问题. 例如, 在上面的例子中, 如果假定$I[\phi]$对ϕ是偶的, 但$\Gamma[\phi]$却不是, 那么Γ中正比

于$\int \mathrm{d}^4x\,\phi$项和$\int \mathrm{d}^4x\,\phi^3$项的系数将会发散, 但作用量的对称性将不允许我们引入吸收这些无限大的抵消项.

在这一动机下, 我们现在转向一类重要的对称性, 这类对称性由如下的无限小变换生成

$$\chi^n(x) \to \chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi] \;, \tag{16.4.1}$$

其中F^n是x^μ的函数但以泛函的形式依赖于χ^n. (例如, $F^n[x;\chi]$可以是χ^n以及χ^n在点x处导数的普通函数.) 我们现在使用符号χ^n而非ϕ^r来标记不同类型的场, 是为了强调它们不仅包含普通的规范场和物质场(它们在下一章会被记为$\phi^r(x)$), 而且包含出现在规范固定作用量中的所有其它场, 包括鬼场. 我们再次指出: $\chi^n(x)$不一定是标量, 它可以是任意类型的场.

我们假定作用量和测度均在对称变换(16.4.1)下不变:

$$I[\chi + \epsilon\, F] = I[\chi] \;, \tag{16.4.2}$$

$$\prod_{n,x} \mathrm{d}\Big(\chi^n(x) + \epsilon\, F[x;\chi]\Big) = \prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^n(x) \;. \tag{16.4.3}$$

(实际上, 仅乘积$(\prod_{n,x})\mathrm{d}\chi^n(x)\exp(\mathrm{i}I)$不变就足够了, 但这时方程(16.4.2)和(16.4.3)往往都是成立的.) 用$\chi^n(x)+\epsilon F^n[x;\chi]$替换方程(16.1.1)中的积分变量, 这样我们就有

$$\begin{aligned}
Z[J] = & \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\Big(\chi^n(x) + \epsilon\, F^n[x;\chi]\Big)\right] \\
& \times \exp\left\{\mathrm{i}\, I[\chi + \epsilon\, F] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \Big(\chi^n(x) + \epsilon\, F^n[x;\chi]\Big) J_n(x)\right\} \\
= & \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^n(x)\right] \exp\left\{\mathrm{i}\, I[\chi] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \Big(\chi^n(x) + \epsilon\, F^n[x;\chi]\Big) J_n(x)\right\} \\
= & Z[J] + \mathrm{i}\epsilon \int \left(\prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^n(x)\right) \int F^n(y;\chi) J_n(y) \mathrm{d}^4y \\
& \times \exp\left\{\mathrm{i}I[\chi] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \chi^n(x) J_n(x)\right\}
\end{aligned}$$

因而

$$\int \mathrm{d}^4y\, \langle F^n(y)\rangle_J J_n(y) = 0 \;, \tag{16.4.4}$$

其中$\langle\ \rangle_J$代表有流$J_n(x)$时的量子平均值,

$$\begin{aligned}
Z[J]\langle F^n(y)\rangle_J \equiv & \int \left(\prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^n(x)\right) F^n[y;\chi] \\
& \times \exp\left\{\mathrm{i}I[\chi] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \chi^n(x) J_n(x)\right\} \;,
\end{aligned} \tag{16.4.5}$$

归一化使得$\langle 1\rangle_J = 1$. 但回忆起$J_n(y)$是以有效作用量$\Gamma[\chi]$的形式通过方程(16.1.7)给定的

$$J_{n,\chi}(y) = -\frac{\delta\Gamma[\chi]}{\delta\chi^n(y)} \;.$$

因此, 方程(16.4.4)可以写成

$$0 = \int \mathrm{d}^4 y \, \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)} \ . \tag{16.4.6}$$

换句话说, $\Gamma[\chi]$在无限小变换

$$\chi^n(y) \to \chi^n(y) + \epsilon \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} \ . \tag{16.4.7}$$

下不变. 这样的对称性条件被称为*Slavnov-Taylor*恒等式.[7]

这一对称变换是否是我们所出发的对称变换呢? 对于一类非常重要的无限小对称变换确实是这样, 即那些线性的变换. 对于这样的对称性, F是

$$F^n[x;\chi] = s^n(x) + \int t^n{}_m(x,y)\chi^m(y) \, \mathrm{d}^4 y \ . \tag{16.4.8}$$

(在最通常的情况下, $s^n(x)$为零而$t^n{}_m(x,y)$是常数矩阵与$\delta^4(x-y)$之积.) 对于任何线性的F, 我们有

$$\langle F^n(y) \rangle_J = s^n(x) + \int t^n{}_m(x,y) \langle \chi^m(y) \rangle_J \, \mathrm{d}^4 y \ .$$

但对于任何固定的χ, J_χ定义为使得$\langle \chi^m(y) \rangle_J$等于$\chi^m(y)$的流$J$的值, 所以

$$\langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} = s^n(x) + \int t^n{}_m(x,y) \chi^m(y) \, \mathrm{d}^4 y = F^n[x;\chi] \ . \tag{16.4.9}$$

因此, 对于所有的泛函线性变换$\chi^n \to \chi^n + \epsilon F$, 若该变换保持$I[\chi]$和测度不变, 那么方程(16.4.6)会要求$\Gamma[\chi]$在这样的变换下不变.

我们有时还要处理非线性的对称变换. 15.7节所讨论的BRST变换就提供了一个重要例子. 对于非线性的变换, 使得有限作用量不变的对称变换(16.4.7)一般与保持原作用量不变的假设对称变换(16.4.1)不相同, 这是因为场的非线性泛函的均值一般不等于平均场的泛函. 的确如此, $\langle F^n \rangle_{J_\chi}$作为$\chi$的泛函, 它的形式一般会依赖于系统的动力学, 并且通常是非定域. 这一复杂性将在下一章利用反括号的方法进行处理.

* * *

直到现在, 我们默认假定场χ^n和相对应的变换函数F^n以及流J_n都是玻色的. 当其中的一些量是费米量时, 特别地, 就像超对称变换或BRST变换, 在那里ϵ是常数而χ^n和F^n有相反的统计, 这时我们将需要注意到可能出现的符号因子. 当流像方程(16.1.1)和(16.1.5)中那样插入在场的右边时, 方程(16.1.5)和(16.1.7)会变成如下的形式

$$\frac{\delta_R W[J]}{\delta J_m(y)} = \chi^m_J(y) \ , \tag{16.4.10}$$

$$\frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^m(y)} = -J_{\chi,m}(y) \ , \tag{16.4.11}$$

其中下标R和L是指导数是从右边和左边作用的. 因此, Slavnov-Taylor恒等式(16.4.6)应该写成

$$0 = \int \mathrm{d}^4 y \, \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)} \ . \tag{16.4.12}$$

习题

1. 考察赝实标量$\phi(x)$与复Dirac场$\psi(x)$的理论, 它们的质量分别是M和m, 相互作用为$g\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$. 计算$\phi=$常数, $\psi=0$时的有效势, 并计算至一圈阶.

2. 导出$\delta^3 W[J]/\delta J_n(x)\delta J_m(y)\delta J_\ell(z)$和$\delta^4 W[J]/\delta J_n(x)\delta J_m(y)\delta J_\ell(z)\delta J_k(w)$的一般公式, 将其写成$\Gamma[\phi]$对$\phi$的变分导数的形式. 指出这些公式中的每一项分别对应那些Feynman图.

3. 对于六维中相互作用拉格朗日密度为$g\phi^3/6$的中性标量场ϕ的理论, 计算有效势至一圈阶.

4. 假定作用量$I[\phi]$在有限大矩阵变换$\phi_n(x)\to\sum_m M_{nm}\phi_m(x)$下不变. 那么在流的何种变换下$W[J]$不变? 利用这一结果导出$\Gamma[\phi]$的对称性质

参考文献

[1] 有效作用量$\Gamma[\phi]$由J. Goldstone, A.Salam和S. Weinberg引入, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962), 在这里是以微扰论的方式, 将其作为对单粒子不可约图的求和定义的. 非微扰定义(16.1.6)是如下几人独立地给出的, B. De Witt, in *Relativity, Groups. and Topology - Lectures Delivered at Les Houches during the 1963 Session of the Summer School of Theoretical Physics,* C. De Witt和B. De Witt编辑. (Gordon and Breach, New York, 1964); G. Jona-Lasinio, *Nuovo Cimento* **34**, 1790 (1964).

[2] S. Coleman, *Aspect of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985): pp. 135-6

[3] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973).

[4] K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.* **16**, 48 (1970); S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985): pp. 139-42.

[5] K. Symanzik, 参考文献4; J. Iliopoulos, C. Itzyskon, and A. Matrin, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 165 (1975).

[6] Y. Fujimoto, L. O'Raifeartaigh, and G. Parravicini, *Nucl. Phys.* **B212**, 268 (1983); R. W. Haymaker and J. Perez-Mercader, *Phys. Rev.* **D27**, 1948 (1983); C. M. Bender and F. Cooper, *Nucl. Phys.* **B224**, 403 (1983); M. Hindmarsh and D. Johnston, *J. Math. Phys.* **A19**, 141 (1986); V. Branchina, P. Castorina, and D. Zappalà, *Phys. Rev.* **D41**, 1948 (1990); K. Cahill, *Phys. Rev.* **D52**, 4704 (1995).

[7] A. A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* **10**, 152 (1972) [英译版: *Theor. and Math. Phys.* **10**, 99 (1972)]; J. C. Taylor, *Nucl. Phys.* **B33**, 436 (1971).