

# The Quantum Theory of Fields

## Volume II Modern Applications

Steven Weinberg(著)  
University of Texas at Austin

张驰(译)\*

\*此版仅为译稿, 未经校对, 如有任何翻译录入错误, 请联系zhangchi\_110@163.com



# 目 录

	记 号	iii
15	非阿贝尔规范理论	1
15.1	规范不变性	1
15.2	规范理论拉格朗日量与单Lie群	5
15.3	场方程与守恒律	8
15.4	量子化	10
15.5	De Witt-Faddeev-Popov方法	13
15.6	鬼	18
15.7	BRST对称性	20
15.8	BRST对称性的推广	27
15.9	Batalin-Vilkovisky形式理论	31
A	关于Lie代数的一个定理	37
B	Cartan目录	39
	参考文献	43
16	外场方法	47
16.1	量子有效作用量	47
16.2	有效作用量的计算	51
16.3	能量诠释	53
16.4	有效作用量的对称性	55
	参考文献	58
17	规范理论的重整化	59
17.1	Zinn-Justin方程	59
17.2	重整化: 直接分析	60
17.3	重整化: 一般规范理论	66
17.4	背景场规范	69

17.5	背景场规范下的单圈计算 . . . . .	73
	参考文献 . . . . .	80
18	重整化群方法 . . . . .	83
18.1	大对数来自何处? . . . . .	84
18.2	滑动标度 . . . . .	88
18.3	各种渐进行为 . . . . .	96
18.4	多耦合与质量效应 . . . . .	102
18.5	临界现象 . . . . .	106
18.6	最小减除 . . . . .	109
18.7	量子色动力学 . . . . .	111
18.8	改良微扰论 . . . . .	114
	参考文献 . . . . .	116

# 记 号

拉丁指标 $i, j, k$ 等一般取遍三维空间坐标指标, 通常取做1, 2, 3. 在有特殊说明的情况下, 它们取遍值1, 2, 3, 4, 其中 $x^4 = it$ .

希腊指标 $\mu, \nu$ 等, 从希腊字母表的中间开始, 一般取遍四维时空坐标指标1, 2, 3, 0, 其中 $x^0$ 是时间坐标.

希腊指标 $\alpha, \beta$ 等, 从希腊字母表的开头开始, 一般取遍对称性代数的生成元.

重复指标一般表示求和, 除非另有说明.

时空度规 $\eta_{\mu\nu}$ 是对角的, 其元素为 $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \eta_{00} = -1$ .

达朗贝尔算符定义为 $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial^2 / \partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2 / \partial t^2$ , 其中 $\nabla^2$ 是拉普拉斯算符 $\partial^2 / \partial x^i \partial x^i$ .

列维-奇维塔张量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 定义为全反对称量, 并有 $\epsilon^{0123} = +1$ .

空间三矢由黑体字母标记.

任意矢量上的“帽子”代表相应的单位矢量: 因此 $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v} / |\mathbf{v}|$ .

任意量上加一点代表该量对时间的导数.

狄拉克矩阵 $\gamma_\mu$ 的定义满足 $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$ . 并且 $\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \beta = i\gamma^0$ .

阶跃函数 $\theta(s)$ : 当 $s > 0$ 时为1,  $s < 0$ 时为0.

矩阵或矢量 $A$ 的复共轭、转置、厄米共轭分别记为 $A^*$ 、 $A^T$ 以及 $A^\dagger = A^{*T}$ . 算符 $O$ 的厄米共轭记为 $O^\dagger$ , 除了强调一个算符的矩阵或矢量是非转置的才用星号. 在方程末尾的+H.c.或c.c.表示前面几项的厄米共轭或复共轭. 狄拉克旋量 $u$ 上加横线定义为 $\bar{u} = u^\dagger \beta$ . 场 $\chi$ 在Batalin-Vilkovisky体系中的反场记为 $\chi^\dagger$ 而不是 $\chi^*$ , 这是为了与普通的复共轭或反粒子场相区分.

使用的单位制通常取 $\hbar$ 和 $c$ 为1. 自始至终 $-e$ 是电子的有理化电荷, 使得精细结构常数

是 $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ .

引用数据末尾括号中的数字给出了引用数据末尾数字的不确定度, 在没有额外指明的情况下, 实验数据取自‘Review of Particle Properties,’ *Phys. Rev.* **D50**, 1173 (1994).

## 第 15 章 非阿贝尔规范理论

已经成功证明了, 描述真实世界的量子场论都是非阿贝尔规范理论, 这些理论所基于的规范不变性原理要比量子电动力学的 $U(1)$ 规范不变性更加普遍. 我们在8.1节的末尾概述了规范场的存在以及它的一些性质, 源于它们在定域变换下的不变性原理, 而这些理论与电动力学共享了这一迷人的特征. 在电动力学中, 电荷为 $e_n$ 的场 $\psi_n(x)$ 经历了 $\Lambda(x)$ 任意的规范变换 $\psi_n(x) \rightarrow \exp(ie_n\Lambda(x))\psi_n(x)$ . 由于 $\partial_\mu\psi_n(x)$ 并非像 $\psi_n(x)$ 那样变换, 我们必须引入场 $A_\mu(x)$ , 这个场有规范变换性质 $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$ , 我们用它来构建规范协变导数 $\partial_\mu\psi_n(x) - ie_nA_\mu(x)\psi_n(x)$ , 这个协变导数像 $\psi_n(x)$ 那样变换, 因而可以用它和 $\psi_n(x)$ 构建规范不变拉格朗日量. 以类似的方法, 广义相对论中的引力场 $g_{\mu\nu}(x)$ , 它的存在以及一些性质源于广义坐标变换下的一个对称性原理.\* 给定这些不同的先例后, 很自然地应该将定域规范不变性拓广至定域非阿贝尔规范变换下的不变性.

在杨振宁和Mills1954年的原始工作中,<sup>1</sup> 非阿贝尔规范群被取成了同位旋旋转的 $SU(2)$ 群, 而类似于光子场的矢量场则解释成相互作用很强的单位同位旋矢量介子的场. 这一设想立刻就遇到了障碍, 即这些矢量玻色子的质量必须为零, 就像光子一样, 而任何这样的粒子似乎应该早就被探测到了. 另一问题是, 像当时所有的强相互作用理论一样, 没有什么方法可以处理它; 理论过大的耦合常数似乎阻止了使用任何的微扰论.

规范理论不久就被推广至任意的非阿贝尔规范群,<sup>2</sup> 并且继续在数学上研究它们的量子化, 尤其是Feynman,<sup>3</sup> Faddeev和Popov,<sup>4</sup> 以及De Witt,<sup>5</sup> 部分的出发点是作为更难的量子化广义相对论问题的热身练习. 他们证明了通过简单地观察拉格朗日量所获得朴素Feynman规则需要被额外的“鬼”圈补足. 然而, 直到20世纪60年代后期, 这些理论的物理相关性才开始得以理解. 最后发现, 所有可观测的基本粒子相互作用都是由定域规范对称性所附带的矢量粒子生成的; 相应的自旋1粒子要么非常重, 这是规范对称性自发破缺的结果, 要么被“困住”了, 这是耦合常数在大尺度上升高后的结果. 这些事情将分别是第21章和第18章的课题. 在本章, 我们将探索非阿贝尔规范理论的公式化表述, 并研究如何推导出它们的Feynman规则.

### 15.1 规范不变性

我们假定我们理论的拉格朗日量在物质场 $\psi_\ell(x)$ 的一组无限小变换

$$\delta\psi_\ell(x) = i\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_\ell^m\psi_m(x) \quad (15.1.1)$$

下不变, 其中 $t_\alpha$ 为某组独立的常数矩阵\*\*, 并且无限小参量 $\epsilon^\alpha(x)$ 为实, 允许该参量(像电动力学

---

\*当然, 定域规范不变性与广义协变性都可以以一种平庸的方式实现, 即把 $A_\mu(x)$ 和 $g_{\mu\nu}(x)$ 分别取为用来表征相位选择和坐标系选择的非动力学c-数函数. 当我们将 $A_\mu(x)$ 和 $g_{\mu\nu}(x)$ 处理成在计算 $S$ -矩阵元时要积掉的动力学场时, 这些对称性在物理上变得重要.

\*\*在本书中, 我们一般将用字母 $\alpha, \beta$ 等来标记对称性生成元, 这些字母取自希腊字母表的开头, 以便与取自希腊字母表的中间用来标记时空坐标的 $\mu, \nu$ 等相区分. 在后面, 我们通常会用取自拉丁字母表开头的字母 $a, b$ 等来标记破缺对称性的生成元, 而用取自拉丁字母表中间的字母 $i, j$ 等来标记未被破缺对称性的生成元.

中的规范变换那样)依赖于时空中的位置. 我们假定这些对称变换是一Lie群的无限小部分; 正如在2.2节中所证明的, 这要求 $t_\alpha$ 服从对易关系

$$[t_\alpha, t_\beta] = i C^\gamma_{\alpha\beta} t_\gamma, \quad (15.1.2)$$

其中 $C^\gamma_{\alpha\beta}$ 是一组实数, 称为群的结构常数. 对易子的反对称立刻就告诉我们, 结构常数同样是对称的:

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = -C^\gamma_{\beta\alpha}. \quad (15.1.3)$$

另外, 从Jacobi等式

$$0 = [[t_\alpha, t_\beta], t_\gamma] + [[t_\gamma, t_\alpha], t_\beta] + [[t_\beta, t_\gamma], t_\alpha] \quad (15.1.4)$$

我们看到这些 $C$ 满足进一步的约束

$$0 = C^\delta_{\alpha\beta} C^\epsilon_{\delta\gamma} + C^\delta_{\gamma\alpha} C^\epsilon_{\delta\beta} + C^\delta_{\beta\gamma} C^\epsilon_{\delta\alpha}. \quad (15.1.5)$$

任何一组满足方程(15.1.3)和(15.1.5)的常数 $C^\gamma_{\alpha\beta}$ 至少定义了一组矩阵 $t^A_\alpha$ :

$$(t^A_\alpha)^\beta_\gamma \equiv -i C^\beta_{\gamma\alpha}, \quad (15.1.6)$$

它们满足含有结构常数 $C^\gamma_{\alpha\beta}$ 的对易关系(15.1.2):

$$[t^A_\alpha, t^A_\beta] = i C^\gamma_{\alpha\beta} t^A_\gamma. \quad (15.1.7)$$

这称为结构常数为 $C^\alpha_{\beta\gamma}$ 的Lie群的“伴随”(或“正则”)表示.

例如, 在原始的Yang-Mills理论中, 物质场是由质子场 $\psi_p$ 和中子 $\psi_n$ 组成的二重态

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

而 $t_\alpha$ , 其中 $\alpha = 1, 2, 3$ , 是同位旋矩阵

$$t_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

它们满足

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta}$$

的对易关系(15.1.2), 其中, 同往常一样, 如果 $\gamma, \alpha, \beta$ 是1,2,3的偶置换或奇置换, 则 $\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$ 分别是+1或-1, 如果是其它情况, 则 $\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$ 为零. 我们发现这与3维旋转群的Lie代数(2.4.18)相同; 这里的矩阵构建了我们所公认的该Lie代数的自旋1/2表示. 伴随表示的矩阵(15.1.6)在这里是(处在行和列标记为1,2,3的基下):

$$t^A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad t^A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t^A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

这是旋转群Lie代数的自旋1表示.



我们现在来考察构建在变换(15.1.1)下不变的拉格朗日量需要什么. 如果不存在作用在场上的导数项, 这个任务将是非常简单的——物质场的任何函数, 只要它在 $\epsilon^\alpha$ 为常数的变换(15.1.1)下是不变的, 那么它在 $\epsilon^\alpha$ 为时空坐标的任意实函数的变换(15.1.1)下也将是不变的. 如果拉格朗日量包含场的导数项(正如它所必须的), 就不会是这种情况, 这是因为有了位置相关函数 $\epsilon^\alpha(x)$ . 物质场的导数就不会像场本身那样进行变换. 对方程(15.1.1)取微分给出

$$\delta(\partial_\mu \psi_\ell(x)) = i\epsilon^\alpha(x)(t_\alpha)_\ell^m (\partial_\mu \psi_m(x)) + i(\partial_\mu \epsilon^\alpha(x))(t_\alpha)_\ell^m \psi_m(x). \quad (15.1.8)$$

为了使拉格朗日量不变, 我们需要一个场 $A_\mu^\alpha$ , 它的变换规则中包含一项 $\partial_\mu \epsilon^\alpha$ , 这一项可以用来抵消方程(15.1.8)中的第二项. 既然这个场携带一个 $\alpha$ 指标, 我们希望它也经历一个类似方程(15.1.1)的矩阵变换, 只不过将 $t_\alpha$ 替换成伴随矩阵表示(15.1.6). 因此, 我们先试验性地取新“规范”场的变换关系为

$$\delta A_\mu^\beta = \partial_\mu \epsilon^\beta + i\epsilon^\alpha (t_\alpha^\beta)^\gamma A_\mu^\gamma$$

或者, 利用方程(15.1.6),

$$\delta A_\mu^\beta = \partial_\mu \epsilon^\beta + C_{\gamma\alpha}^\beta \epsilon^\alpha A_\mu^\gamma. \quad (15.1.9)$$

这使得我们可以构建“协变导数”:<sup>†</sup>

$$(D_\mu \psi)_\ell = \partial_\mu \psi_\ell(x) - i A_\mu^\beta(x) (t_\beta)_\ell^m \psi_m(x). \quad (15.1.10)$$

按计划, 方程(15.1.10)第二项中的 $A_\mu^\beta$ , 它的变换中的 $\partial_\mu \epsilon^\beta$ 项抵消了第一项变换中成正比于 $\partial_\mu \epsilon^\beta$ 的那一项, 给我们留下

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \psi)_\ell &= i\epsilon^\alpha (t_\alpha)_\ell^m \partial_\mu \psi_m - i C_{\gamma\alpha}^\beta \epsilon^\alpha A_\mu^\gamma (t_\beta)_\ell^m \psi_m \\ &\quad + A_\mu^\gamma (t_\gamma)_\ell^m (t_\alpha)_m^n \psi_n \end{aligned}$$

或者, 使用方程(15.1.2)

$$\delta(D_\mu \psi)_\ell = i\epsilon^\alpha (t_\alpha)_\ell^m (D_\mu \psi)_m, \quad (15.1.11)$$

使得 $D_\mu \psi$ 像 $\psi$ 本身那样变换.

我们也需要关心一下规范场的导数. 为了消除 $\partial_\nu A_\mu^\beta$ 的变换中的 $\partial_\nu \partial_\mu \epsilon^\beta$ 项, 就像在电动力学中那样, 我们对 $\mu$ 和 $\nu$ 做反对称化处理. 然而, 在 $\partial_\nu A_\mu^\beta - \partial_\mu A_\nu^\beta$ 的变换中, 我们仍然有成正比于 $\epsilon(x)$ 的一阶导数的项, 这些项产生于方程(15.1.9)中的第二项. “协变旋度”, 即 $F_{\nu\mu}^\gamma$ , 在它的变换规则中所有这样的 $\epsilon(x)$ 导数都互相抵消掉了, 构建它的最简单方法就是考察作用在物质场 $\psi$ 上的两个协变导数的对易子:

$$([D_\nu, D_\mu] \psi)_\ell = -i(t_\gamma)_\ell^m F_{\nu\mu}^\gamma \psi_m, \quad (15.1.12)$$

其中

$$F_{\nu\mu}^\gamma \equiv \partial_\nu A_\mu^\gamma - \partial_\mu A_\nu^\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma A_\nu^\alpha A_\mu^\beta. \quad (15.1.13)$$

方程(15.1.12)使得 $F_{\nu\mu}^\gamma$ 必须像伴随表示下的物质场那样进行变换这件事变得显然:

$$\delta F_{\nu\mu}^\beta \equiv i\epsilon^\alpha (t_\alpha^\beta)^\gamma F_{\nu\mu}^\gamma = \epsilon^\alpha C_{\gamma\alpha}^\beta F_{\nu\mu}^\gamma. \quad (15.1.14)$$

<sup>†</sup>正如将要在下一节所讨论的, 在写下方程(15.1.10)的同时, 我们心照不宣地假定任何像电荷这样的耦合常数因子都被吸收进 $t_\beta$ 中, 因而也被吸收进结构常数中.

读者可以通过直接计算(利用关系(15.1.5))验证(15.1.13)中所定义的量 $F^\alpha_{\nu\mu}$ 确实有简单的变换规则(15.1.14).

由于某些原因, 知道这些无限小规范变换可以被提升为有限的变换是有用的. 群元可以被一组实函数 $\Lambda^\alpha(x)$ 参数化, 进而使得它以如下的矩阵变换作用在一个一般的物质场上

$$\psi_\ell(x) \rightarrow \psi_{\ell\Lambda}(x) = \left[ \exp \left( i t_\alpha \Lambda^\alpha(x) \right) \right]_\ell^m \psi_m(x). \quad (15.1.15)$$

我们希望协变导数以相同的方式进行变换:

$$(\partial_\mu - i t_\alpha A^\alpha_{\mu\Lambda}) \psi_\Lambda = \exp(it_\alpha \Lambda^\alpha) (\partial_\mu - i t_\alpha A^\alpha_\mu) \psi, \quad (15.1.16)$$

所以我们必须给 $A^\alpha_\mu$ 强加变换规则 $A^\alpha_\mu \rightarrow A^\alpha_{\mu\Lambda}$ , 使得

$$\partial_\mu \exp(it_\beta \Lambda^\beta) - i t_\beta \exp(it_\alpha \Lambda^\alpha) A^\beta_{\mu\Lambda} = -i \exp(it_\alpha \Lambda^\alpha) t_\beta A^\beta_\mu$$

或者, 以另一种形式

$$t_\alpha A^\alpha_{\mu\Lambda} = \exp(it_\beta \Lambda^\beta) t_\alpha A^\alpha_\mu \exp(-it_\beta \Lambda^\beta) - i \left[ \partial_\mu \exp(it_\beta \Lambda^\beta) \right] \exp(-it_\beta \Lambda^\beta). \quad (15.1.17)$$

在 $\Lambda^\alpha(x)$ 是一个无限小 $\epsilon^\alpha(x)$ 的极限下, 方程(15.1.15)和(15.1.17)退化之前的变换规则(15.1.1)和(15.1.9).

从方程(15.1.17)中, 我们可以看到, 通过对 $\Lambda^\beta(x)$ 的合适选择, 总可以使 $A^\alpha_{\mu\Lambda}(x)$ 在任意一个点处为零, 记该点 $x = z$ . (简单地令 $\Lambda^\alpha(z)$ 为零, 并在 $x = z$ 处令 $\partial \Lambda^\alpha(x) / \partial x^\mu = -A^\alpha_\mu(x)$ .) 另外, 总可以对 $\Lambda^\beta(x)$ 进行选择, 使得 $A^\alpha_{\mu\Lambda}(x)$ 的任意一个时空分量对于所有的 $\alpha$ 至少在任意一个给定点邻近的有限区域内处处为零. 例如, 为了使 $A^\alpha_{3\Lambda}(x)$ 为零, 我们必须解参量 $\Lambda^\beta(x)$ 的如下一阶常微分方程组:

$$\partial_3 \exp(it_\beta \Lambda^\beta) = -i \exp(it_\beta \Lambda^\beta) t_\alpha A^\alpha_3, \quad (15.1.18)$$

该方程组至少在任意一个给定点邻近的有限区域内有一个解.

然而, 一般而言, 不可能通过选择 $\Lambda^\alpha(x)$ 使得 $A^\alpha_{\mu\Lambda}(x)$ 的4个分量在一个有限区域内都为零. 由于这个原因, 我们将不得不止步于偏微分方程组

$$\partial_\mu \exp(it_\beta \Lambda^\beta) = -i \exp(it_\beta \Lambda^\beta) t_\alpha A^\alpha_\mu, \quad (15.1.19)$$

除非满足一定的可积性条件, 否则这个方程组是解不出来的. 特别地, 如果 $A^\alpha_{\mu\Lambda}$ 处处为零, 那么 $F^\alpha_{\mu\nu\Lambda}$ 也将是如此, 但是, 由于场强的变换是齐次的, 仅当 $F^\alpha_{\mu\nu}$ 为零时,  $F^\alpha_{\mu\nu\Lambda}$ 才能等于零. 如果存在一个规范变换使得 $A^\alpha_\mu$ 处处为零, 则称该规范场为“纯规范”场. 不难证明,  $F^\alpha_{\mu\nu}$ 处处为零是 $A^\alpha_\mu(x)$ 在任意单连通区域可作为纯规范场进行表述的充分必要条件.<sup>6</sup>

\* \* \*

在这里构造在规范变换下简单变换的客体, 与在广义相对论中构造广义坐标变换下协变的客体, 这两种构造之间存在着深刻的类比. 正如我们使用规范场构造物质场的协变导数 $D_\mu \psi_\ell$ , 它有着与物质场本身相同的规范变换性质, 我们使用仿射联络 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)$ 来构造张量 $T^{\rho\sigma\cdots}_{\kappa\lambda\cdots}$ 的协变导数:

$$T^{\rho\cdots}_{\kappa\cdots;\nu} \equiv \partial_\nu T^{\rho\cdots}_{\kappa\cdots} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} T^{\lambda\cdots}_{\kappa\cdots} + \cdots - \Gamma^\mu_{\nu\kappa} T^{\rho\cdots}_{\mu\cdots} - \cdots,$$

其本身也是张量. 另外, 从规范场的导数中, 我们构造出了场强 $F^\alpha_{\mu\nu}$ , 它的变换性质与属于规范群伴随表示的物质场的变换性质相同; 相应地, 从仿射联络的导数中, 我们可以构造一个量:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta},$$

这个量作为一个张量变换, 即Riemann-Christoffel曲率张量. 两个规范协变导数 $D_\mu$ 和 $D_\nu$ , 它们的对易子可以表示成场强张量 $F^\alpha_{\mu\nu}$ 的形式; 类似地, 相对于 $x^\nu$ 和 $x^\kappa$ 的两个协变导数, 它们的对易子也可以表示成曲率张量的形式:

$$T^{\lambda\cdots}_{\mu\cdots;\nu;\kappa} - T^{\lambda\cdots}_{\mu\cdots;\kappa;\nu} = R^\lambda_{\sigma\nu\kappa} T^{\sigma\cdots}_{\mu\cdots} + \cdots - R^\sigma_{\mu\nu\kappa} T^{\lambda\cdots}_{\mu\cdots} - \cdots.$$

存在一个规范, 使得该规范下的规范场在一个有限单连通区域内为零, 该规范存在的充要条件是场强张量为零, 而存在一个坐标系使得仿射联络在一个有限单连通区域内为零的充要条件是, Riemann-Christoffel曲率张量为零. 这个类比在一个重要方面上失效了: 在广义相对论中, 仿射联络本身是用度规张量的一阶导数构建的, 而在规范理论中, 规范场无法表示成更基本的场.

## 15.2 规范理论拉格朗日量与单Lie群

规范场张量 $F^\alpha_{\mu\nu}$ , 物质场 $\psi$ 以及它们的规范协变导数, 它们的变换规则不包含变换参量 $\epsilon^\alpha(x)$ 的导数, 所以如果只用这些元素构建拉格朗日量, 并且如果它在 $\epsilon^\alpha$ 为常数的整体变换下不变, 那么它在 $\epsilon^\alpha(x)$ 为一般的位置相关函数的规范变换就是不变的. 因此, 我们假定拉格朗日量满足这些条件: 即,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, D_\mu \psi, D_\nu D_\mu \psi, \cdots, F^\alpha_{\mu\nu}, D_\rho F^\alpha_{\mu\nu}) \quad (15.2.1)$$

以及不变性条件:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\ell} i(t_\alpha)_\ell^m \psi_m + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\mu \psi)_\ell} i(t_\alpha)_\ell^m (D_\mu \psi)_m \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_\nu D_\mu \psi)_\ell} i(t_\alpha)_\ell^m (D_\nu D_\mu \psi)_m + \cdots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^\beta_{\mu\nu}} C^\beta_{\gamma\alpha} F^\gamma_{\mu\nu} \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\rho F^\beta_{\mu\nu}} C^\beta_{\gamma\alpha} D_\rho F^\gamma_{\mu\nu} + \cdots = 0. \end{aligned} \quad (15.2.2)$$

另一方面, 除了出现在 $F^\alpha_{\mu\nu}$ 以及规范协变导数 $D_\mu$ 中的规范场, 拉格朗日量可以不依赖于规范场本身. 特别地, 质量项 $-\frac{1}{2}m^2_{\alpha\beta} A_{\alpha\mu} A_{\beta\mu}$ 被排除了.

我们现在将要集中考察拉格朗日量中只依赖于 $F^\alpha_{\mu\nu}$ 的项. 如同电动力学中一样, 对于任何自旋为一的无质量粒子, 拉格朗日量必须要包含一个自由粒子项, 这一项是 $\partial_\mu A^\alpha_\nu - \partial_\nu A^\alpha_\mu$ 的二次项, 而规范不变性则表明这一自由粒子项应该作为场强张量 $F^\alpha_{\mu\nu}$ 的二次项的一部分出现. Lorentz不变性与流守恒表明它的形式为

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^\alpha_{\mu\nu} F^{\beta\mu\nu} \quad (15.2.3)$$

其中 $g_{\alpha\beta}$ 是常数矩阵. 如果我们不假定宇称(或者CP或T)守恒, 那么我们也可在拉格朗日量引入如下项

$$\mathcal{L}'_A = -\frac{1}{2} \theta_{\alpha\beta} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^\alpha_{\mu\nu} F^\beta_{\rho\sigma}$$

其中 $\theta^{\alpha\beta}$ 是另一个常数矩阵. 这一项实际上是全导数项, 因而并不影响场方程或Feynman规则. 然而, 这样的项会有非微扰的量子力学效应, 我们会在23.6节讨论它.

在继续考察矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 的性质之前, 值得关注如下事实, 在不引入相互作用的前提下, 不可能引入规范场 $A_\mu^\alpha$ 的动能项, 方程(15.2.3)中的这一项源于方程(15.1.13)所定义的场强 $F_{\mu\nu}^\alpha$ 的二次部分. 这是非阿贝尔规范理论类似广义相对论的又一方面, 在广义相对论中, 引力场拉格朗日量的动能部分被包含在Einstein-Hilbert拉格朗日密度—— $\sqrt{g}R/8\pi G$ 之中, 这一项也包含引力场的自能. 两种情况下的原因是相似的: 引力场与自身相作用是因为它与任何携带能量和动量的物质相作用, 而规范场与自身相作用是因为它与任何按照规范群的非平庸表示(在伴随表示的情况下)变换的物质相作用. 这与电动力学情况相反, 在电动力学中, 光子不携带它所相互作用的量子数——电荷, 因而对于电磁场有可能引入不需要相互作用的动能项 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ .

数值矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 可以取成对称的, 并且为了给出实的拉格朗日量必须取成实的. 为了使这一项满足规范不变性要求(15.2.2), 对于所有的 $\delta$ , 我们必须有:

$$g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}^\alpha C_{\gamma\sigma}^\beta F^{\gamma\mu\nu} = 0.$$

为了在不对 $F$ 之间附加任何的泛函关系的情况下使其成立, 矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 必须满足条件:

$$g_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}^\beta = -g_{\gamma\beta}C_{\alpha\delta}^\beta. \quad (15.2.4)$$

在矩阵 $g_{\gamma\beta}$ 上还有一个更重要的条件. 如同电动力学中一样, 正则量子化规则与量子标量积的正定性要求拉格朗日量(15.2.3)中的矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 必须是正定的. (即, 对于所有实的 $u$ ,  $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$ 必须是正的, 而仅当对于所有的 $\alpha$ 有 $u^\alpha = 0$ 时,  $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$ 才为零.) 这类似于在实场 $\phi$ 的动能拉格朗日量 $-\frac{1}{2}Z\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ 中要求, 常数 $Z$ 必须是正定的.

矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 上的这些要求有着深远的含义. 它们构成了如下三个相互等价的条件中的一个:

**a:** 存在满足不变性条件(15.2.4)的实对称正定矩阵 $g_{\alpha\beta}$ .

**b:** 该Lie代数存在一组基(即, 一组生成元 $\tilde{t}_\alpha = \mathcal{S}_{\alpha\beta}t_\beta$ , 其中 $\mathcal{S}$ 是实的非奇异矩阵), 使得结构常数 $\tilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha$ 不仅关于下指标 $\beta$ 和 $\gamma$ 是反对称的, 并且对所有三个指标 $\alpha, \beta$ 和 $\gamma$ 也是反对称的. (在这一基下, 不在上下指标 $\alpha, \beta$ 等之间作区分将是方便的, 并将 $\tilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha$ 写成 $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}$ .)

**c:** 该Lie代数是 $U(1)$ 子代数与互相交换的紧致单代数的直和.\*

本章附录A给出了条件**a**, **b**和**c**相互等价的证明.<sup>7</sup>

在继续讨论这一结果的物理含义之前, 就完备性条件再说几点将是有益的. 我们不会在这里使用这个条件, 但是紧Lie代数构成了紧Lie群的生成元: 即群的不变体积有限的群. 例如, 旋转群

\*一些定义: Lie代数 $\mathcal{G}$ 的子代数 $\mathcal{H}$ 是线性空间, 该线性空间由 $\mathcal{G}$ 的生成元 $t_\alpha$ 的特定实线性组合 $t_i = \mathcal{S}_{i\alpha}t_\alpha$ 张开, 使得 $\mathcal{H}$ 本身是Lie代数, 也就是说,  $t_i$ 彼此之间的对易子的形式是 $[t_i, t_j] = ic^k_{ij}t_k$ . 如果整个代数 $\mathcal{G}$ 的任何元素与子代数 $\mathcal{H}$ 的任何元素的对易子处在子代数 $\mathcal{H}$ 内, 则称子代数 $\mathcal{H}$ 是不变的. 单纯(简称“单”)Lie代数是没有任何不变子代数的Lie代数.  $\mathcal{G}$ 的 $U(1)$ 子代数是仅有一个生成元的代数, 并且该生成元与整个代数 $\mathcal{G}$ 的所有生成元都对易. 半单Lie代数是含有不变阿贝尔子代数的代数, 其中不变阿贝尔子代数是指生成元彼此对易的不变子代数. 半单Lie代数是单Lie代数(但不是 $U(1)$ )的直和. 如果矩阵 $\text{Tr}\{t_\alpha^\dagger t_\beta\} = -C_{\alpha\delta}^\gamma C_{\beta\gamma}^\delta$ 是正定的, 则称单Lie代数或半单Lie代数是紧致(简称“紧”)的. 单纯性与紧致性的含义与重要性将在下面进一步讨论. 称Lie代数 $\mathcal{G}$ 是子群 $\mathcal{H}_n$ 的直和是指, 有可能找到Lie代数 $\mathcal{G}$ 的一个基, 其生成元为 $t_{na}$ , 使得结构常数采取形式

$$C_{namb}^{\ell c} = \delta_{\ell m}\delta_{mn}C_{ab}^{(n)c},$$

其中 $C_{ab}^{(n)c}$ 是子代数 $\mathcal{H}_n$ 的结构常数.

是紧致的; Lorentz群则不是. 作为一个不紧的单Lie代数的例子, 考察对易关系

$$[t_1, t_2] = -it_3, \quad [t_2, t_3] = it_1, \quad [t_3, t_1] = it_2.$$

这里的结构常数是实的, 但不是全反对称的; 它的非零分量是

$$C^3_{12} = -C^3_{21} = -1, \quad C^1_{23} = -C^1_{32} = 1, \quad C^2_{31} = -C^2_{13} = 1.$$

方程(15.A.10)所给出的度规在这里是对角的, 其中元素为:

$$g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -2.$$

这不是正定矩阵, 所以Lie代数不是紧致的. 事实上它是非紧群 $O(2, 1)$ 的Lie代数, 该群是两维空间一维时间中的Lorentz群.

两组相差一个实非奇异线性变换的生成元被视为张开了同一个Lie代数, 并且生成了同一个群. 这对于生成元的复线性变换是不成立的. 特别地, 通过在合适的基下改变生成元的相位, 任何单Lie代数都可以变成紧致的形式. 例如, 对于上例的Lie代数, 只需定义新的生成元 $t'_1 = it_1$ ,  $t'_2 = it_2$ ,  $t'_3 = t_3$ , 对于这些生成元, 对易关系是

$$[t'_1, t'_2] = it'_3, \quad [t'_2, t'_3] = it'_1, \quad [t'_3, t'_1] = it'_2.$$

结构常数现在就变成了实的并且是全反对称的:  $C^a_{bc} = \epsilon_{abc}$ . 这时 $g_{ab} = 2\delta_{ab}$ , 并且代数是紧致的. 当然, 我们辨认出这是熟悉的三维旋转的紧致群 $O(3)$ 的代数. 为了看到, 对于任何的单Lie代数, 这总是可能的, 注意到方程(15.A.10)定义的矩阵 $g_{ab}$ 是实的, 对称且非奇异的, 使得可以通过一个实正交变换将其变成非零元在主对角线上的对角形式. 然后, 只需要给这一基下对应 $g_{ab}$ 负对角元的所有生成元乘以因子 $i$ 即可.

我们不加证明地指出, 紧Lie群的有限维表示都是幺正的, 相应地, 紧Lie代数的有限维表示都是厄密的. 更进一步, 很容易看到, 通过独立的有限维厄密矩阵 $t_\alpha$ 而拥有任意的非平庸表示的唯一Lie代数是 $U(1)$ 与紧致单Lie代数的直和. 为了证明这一点, 我们可以简单地定义

$$g_{\alpha\beta} \equiv \text{Tr}\{t_\alpha t_\beta\}.$$

这个矩阵显然是正定的, 这是因为 $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \text{Tr}\{(u^\alpha t_\alpha)^2\}$ 对于任意实的 $u^\alpha$ 都是正的, 而仅当 $u^\alpha t_\alpha = 0$ 时才为零, 除非所有的 $u^\alpha$ 都为零, 否则这是不可能的, 这是因为 $t^\alpha$ 假定是独立的. 进一步的, 该 $g_{\alpha\beta}$ 满足不变性条件(15.2.4), 这一点可以通过给对易关系(15.1.2)乘以 $t_\delta$ 再取迹看到; 这给出

$$iC^\gamma_{\alpha\beta} \text{Tr}\{t_\gamma t_\delta\} = \text{Tr}\{[t_\alpha, t_\beta] t_\delta\} = \text{Tr}\{t_\delta t_\alpha t_\beta - t_\beta t_\alpha t_\delta\},$$

这显然关于 $\beta$ 和 $\delta$ 是反对称的. 证实了**a**后, 我们可以通过之上的定理推出条件**c**, 这使得Lie代数必须是紧致单纯子代数与 $U(1)$ 子代数的直和.

现在我们回到规范理论的物理. 在本节, 从构建拉格朗日量中的规范场动能性的必要性, 我们已经推断出存在正定实对称矩阵 $g_{\alpha\beta}$ , 它满足不变性条件(15.2.4), 并且在本章的附录A中我们已经证明了这个结果等价于Lie代数上的一个条件, 即它是紧致单纯子代数与 $U(1)$ 子代数的直和. 对于我们的目的, 关于这一结果重要的是, 单Lie代数都是某些类型有限且维数有限的代数. 例如, 很容易看到不存在生成元少于3个的单Lie代数, 这是因为在一维或二维中, 无法存在有3个指标的全反

对称结构常数. 有了三个生成元, 通过取 $C^3_{12}$ ,  $C^2_{31}$ 以及 $C^1_{23}$ 非零, 可以避免不变子代数. 在结构常数是实的且全反对称的基下, 显然仅有一种可能性:

$$C_{\alpha\beta\gamma} = c \epsilon_{\alpha\beta\gamma} .$$

这里的 $c$ 是一任意的非零常数, 可以通过生成元的标度变换,  $t_\alpha \rightarrow t_\alpha/c$ , 消掉它, 所以Lie代数是

$$[t_\alpha, t_\beta] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} t_\gamma .$$

这可以视为三维旋转群 $O(3)$ 的Lie代数, 以及二维中的么正么模群 $SU(2)$ 的Lie代数, 并且在杨振宁和Mills的原始非阿贝尔理论中用它作为基. 以同样的方式继续下去, 当生成元个数为4, 5, 6或7时, 单Lie代数是存在的, 生成元个数为8时有一个单Lie代数, 依次类推. 数学家(尤其是Killing(基灵)和E. Cartan(埃利·嘉当))已经能够编录所有的单Lie代数. 单Lie代数的紧致形式构成了几个“典型”Lie群代数的无限类——么正么模群, 么正正交群以及么正辛群——再加上五个例外Lie群. 本章的附录B给出了这个目录.

在附录A中同样证明了, 在等价条件a, b或c下, 度规采取形式

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2} \delta_{mn} \delta_{ab} \quad (15.2.5)$$

其中 $g_m$ 是实的, 而 $m$ 和 $n$ 用来标记单纯子代数或 $U(1)$ 子代数, 而 $a$ 和 $b$ 用来标记这些不变子代数的各个生成元. 我们可以通过重新调节规范场消掉常数 $g_m^{-2}$

$$A^\mu_{ma} \rightarrow \tilde{A}^\mu_{ma} \equiv g_m^{-1} A^\mu_{ma} , \quad (15.2.6)$$

但另一方面, 为了保持 $D_\mu \psi$ 和 $F_\alpha^{\mu\nu}$ 的公式(15.1.10)和(15.1.13)不变, 我们必须重新定义矩阵 $t_\alpha$ 以及结构常数

$$t_{ma} \rightarrow \tilde{t}_{ma} = g_m t_{ma} , \quad (15.2.7)$$

$$C^{(m)}_{cab} \rightarrow \tilde{C}^{(m)}_{cab} = g_m C^{(m)}_{cab} . \quad (15.2.8)$$

即, 我们总可以定义规范场的标度(现在扔掉波浪符)使得方程(15.2.5)中的 $g_m$ 为1:

$$g_{ab} = \delta_{ab} , \quad (15.2.9)$$

但另一方面, 对于每个单纯子代数或 $U(1)$ 子代数, 变换矩阵 $t_\alpha$ 和结构常数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 就要包含一个未知的乘子 $g_m$ . 这些因子是规范理论的耦合常数. 或者, 在每个单纯子代数或 $U(1)$ 子代数中采取虽然任意但固定的归一化, 这有时更加方便一些, 在这种情况下, 就像因子 $g_m^{-2}$ 出现在方程(15.2.5)中, 耦合常数将出现在规范场拉格朗日量(15.2.3)中.

### 15.3 场方程与守恒律

在方程(15.2.3)中使用矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 的方程(15.2.9), 全拉格朗日密度是

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, D_\mu \psi) , \quad (15.3.1)$$



在没有规范场时,  $\mathcal{L}_M(\psi, \partial_\mu \psi)$  将是“物质”拉格朗日密度. 原则上, 我们可以引入  $\mathcal{L}_M$  对  $F_{\alpha\mu\nu}$  以及高阶协变导数  $D_\nu D_\mu \psi$ ,  $D_\lambda F_{\alpha\mu\nu}$  等的相关性, 但是, 因为与电动力学相同的原因, 我们在这里将这些不可重整项排除在外: 正如12.3节所讨论的, 在普通的能量下, 这样的项将被某些非常大的质量项的负幂次高度抑制. 由于这个原因, 对于弱作用, 电磁作用和强作用的标准模型, 它的拉格朗日量的一般形式为(15.3.1).

规范场的运动方程在这里是

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_{\alpha\nu})} &= -\partial_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha\nu}} \\ &= -F_\gamma{}^{\nu\mu} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} - i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\nu \psi} t_\alpha \psi \end{aligned}$$

因而

$$\partial_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}_\alpha{}^\nu, \quad (15.3.2)$$

其中  $\mathcal{J}_\alpha{}^\nu$  是流:

$$\mathcal{J}_\alpha{}^\nu \equiv -F_\gamma{}^{\nu\mu} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} - i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\nu \psi} t_\alpha \psi. \quad (15.3.3)$$

流  $\mathcal{J}_\alpha{}^\nu$  在平常的意义下守恒

$$\partial_\nu \mathcal{J}_\alpha{}^\nu = 0, \quad (15.3.4)$$

这一点即可以从  $\psi$  的运动方程和不变性条件(15.2.2)中看到, 也可以, 更简单地, 从场方程(15.3.2)中直接得出.

方程(15.3.2)和(15.3.4)中导数是普通导数, 不是规范协变导数  $D_\nu$ , 所以这些方程的规范不变性晦涩不明. 用场强的规范协变导数重写方程(15.3.2), 这可以使得规范不变性变得显然

$$\begin{aligned} D_\nu F_\alpha{}^{\mu\nu} &\equiv \partial_\lambda F_\alpha{}^{\mu\nu} - i(t^A{}_\beta)_{\alpha\gamma} A_{\beta\lambda} F_\gamma{}^{\mu\nu} \\ &= \partial_\lambda F_\alpha{}^{\mu\nu} - C_{\alpha\gamma\beta} A_{\beta\lambda} F_\gamma{}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (15.3.5)$$

这样, 方程(15.3.2)变成

$$D_\mu F_\alpha{}^{\mu\nu} = -J_\alpha{}^\nu, \quad (15.3.6)$$

其中  $J_\alpha{}^\nu$  仅是物质场的流

$$J_\alpha{}^\nu \equiv -i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\nu \psi} t_\alpha \psi. \quad (15.3.7)$$

如果  $\mathcal{L}_M$  是规范不变的, 上式就是规范协变的. 另外, 通过用算符  $D_\nu$  作用方程(15.3.6), 利用对易关系

$$[D_\nu, D_\mu] F_\alpha{}^{\rho\sigma} = -i(t^A{}_\gamma)_{\alpha\beta} F_{\gamma\nu\mu} F_\beta{}^{\rho\sigma} = -C_{\gamma\alpha\beta} F_{\gamma\nu\mu} F_\beta{}^{\rho\sigma},$$

我们看到  $J_\alpha{}^\nu$  满足规范协变守恒律

$$D_\nu J_\alpha{}^\nu = 0, \quad (15.3.8)$$

而不是整个流  $\mathcal{J}_\alpha{}^\nu$  所满足的平常的守恒律(15.3.4). 另外, (利用方程(15.1.5))可以直接导出等式:

$$D_\mu F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda F_{\alpha\mu\nu} = 0, \quad (15.3.9)$$

无论规范场是否满足场方程, 这总是成立的.

这些结果有助于强调在15.1节提到的非阿贝尔规范理论与广义相对论之间的深刻类比. 在广义相对论中, 类似于 $J^\mu$ , 存在物质的能动量张量 $T^\nu_\mu$ , 它满足广义协变守恒律 $T^\nu_{\mu;\nu}$ , 并且在Einstein场方程的广义协变形式,  $R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R = -8\pi G T^\nu_\mu$ 中, 它在方程的右边. 然而,  $T^\nu_\mu$ 在通常的意义下并不守恒:  $\partial_\nu T^\nu_\mu$ 并不为零. 另一方面, 将Einstein方程左边的非线性项移至右边给出场方程<sup>8</sup>

$$\left(R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R\right)_{\text{LINEAR}} = -8\pi G \tau^\nu_\mu ,$$

其中 $\tau^\nu_\mu$ 不是张量

$$\tau^\nu_\mu \equiv T^\nu_\mu + \frac{1}{8\pi G} \left(R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R\right)_{\text{NONLINEAR}} ,$$

类似于 $\mathcal{J}_\alpha^\nu$ . 同 $\mathcal{J}_\alpha^\nu$ 一样,  $\tau^\nu_\mu$ 在通常的意义下守恒

$$\partial_\nu \tau^\nu_\mu = 0$$

并可以视为能量和动量的流:

$$P_\mu = \int \tau^0_\mu d^3x .$$

因为引力场携带能量和动量, 它包含一个纯引力项; 没有这一项,  $\tau^\nu_\mu$ 无法守恒. 类似地, 对于非阿贝尔群(那些 $C^\gamma_{\alpha\beta} \neq 0$ 的群), 规范场携带它们所作用的量子数, 所以 $\mathcal{J}_\alpha^\nu$ 包含一个规范场项(方程(15.3.3)右边的第一项). 因为 $\mathcal{J}_\alpha^\nu$ 在通常的意义下守恒, 它可以视为这些量子数的流, 其中对称性生成元由下面的时间无关量给出

$$T_\alpha = \int \mathcal{J}_\alpha^0 d^3x . \quad (15.3.10)$$

(另外, 齐次方程(15.3.9)包含协变导数, 就像广义相对论的Bianchi(比安奇)等式.) 相反, 这些复杂性都没有出现在量子电动力学中, 这是因为光子不携带它所作用的量子数, 电荷.

## 15.4 量子化

我们现在开始量子化前两节所描述的规范理论. 拉格朗日密度取为(15.3.1)的形式:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, D_\nu\psi) , \quad (15.4.1)$$

其中

$$\begin{aligned} F_{\alpha\mu\nu} &\equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu} , \\ D_\mu\psi &\equiv \partial_\mu\psi - it_\alpha A_{\alpha\mu}\psi . \end{aligned}$$

我们不能简单地令对易子等于i乘以相对应的Poisson括号就将这个理论量子化. 问题是约束中的一个. 用7.6节所描述的Dirac术语来说, 存在一个初级约束

$$\Pi_{\alpha 0} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha^0)} = 0 \quad (15.4.2)$$

以及 $A_\alpha^0$ 的场方程所提供的次级约束:

$$\begin{aligned} -\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_{\alpha 0})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha 0}} &= \partial_\mu F_\alpha^{\mu 0} + F_\gamma^{\mu 0} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta\mu} + J_\alpha^0 \\ &= \partial_k \Pi_\alpha^k + \Pi_\gamma^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta k} + J_\alpha^0 = 0 , \end{aligned} \quad (15.4.3)$$



其中  $\Pi_\alpha^k \equiv \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_0 A_{\alpha k}) = F_\alpha^{k0}$  是共轭于  $A_{\alpha k}$  的“动量”，其中  $k$  在 1, 2, 3 之间取值.  $\Pi_{\alpha 0}$  与  $\partial_k \Pi_\alpha^k + \Pi_\gamma^k C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta k} + J_\alpha^0$  的 Poisson 括号为零 (这是因为后一个量独立于  $A_\alpha^0$ )，所以它们是第一类约束，这些约束不能用 Dirac 括号替换 Poisson 括号进行处理。

正如电动力学的情况，我们通过选择规范来处理这些约束. 电动力学采用的 Coulomb 规范在这里将会导致一个令人不快的复杂性，\* 所以我们转而在所谓的轴向规范下进行处理，它基于条件

$$A_{\alpha 3} = 0. \quad (15.4.4)$$

这样，规范场的正则变量就是  $A_{\alpha i}$ ， $i$  现在在 1 和 2 之间取值，再加上它们的正则共轭

$$\Pi_{\alpha i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_{\alpha i})} = -F_\alpha^{0i} = \partial_0 A_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}. \quad (15.4.5)$$

场  $A_{\alpha 0}$  不是独立的正则变量，而是通过约束 (15.4.3) 以其它变量定义的. 为了看到这一点，注意到“电”场场强  $F_\alpha^{\mu 0}$  是

$$F_\alpha^{i0} = \Pi_{\alpha i}, \quad F_\alpha^{30} = \partial_3 A_\alpha^0, \quad (15.4.6)$$

所以约束 (15.4.3) 变成

$$-(\partial_3)^2 A_\alpha^0 = \partial_i \Pi_{\alpha i} + \Pi_{\gamma i} C_{\gamma\alpha\beta} A_{\beta i} + J_\alpha^0, \quad (15.4.7)$$

这个方程 (在合理的边界条件下) 可以很容易地解出，并以  $\Pi_{\gamma i}$ ， $A_{\beta i}$  和  $J_\alpha^0$  的泛函给出  $A_\alpha^0$ . (我们使用了求和约定，指标  $i, j$  等对 1 和 2 求和.) 应该注意的是，物质场  $\psi_\ell$  的正则共轭是

$$\pi_\ell = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_\ell)} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (D_0 \psi_\ell)}, \quad (15.4.8)$$

所以物质流的时间分量可以仅用物质场的正则变量表示

$$J_\alpha^0 = -i \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (D_0 \psi_\ell)} (t_\alpha)_\ell^m \psi_m = -i \pi_\ell (t_\alpha)_\ell^m \psi_m. \quad (15.4.9)$$

因此方程 (15.4.7) 将给定时刻的  $A_\alpha^0$  定义为同一时刻的正则变量  $\Pi_{\gamma i}$ ， $A_{\beta i}$ ， $\pi_\ell$  和  $\psi_m$  的泛函。

既然我们已经找出了这一规范下的正则变量，我们现在可以着手构建哈密顿量了. 哈密顿密度是<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathcal{L} \\ &= \Pi_{\alpha i} (F_{\alpha 0 i} + \partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell \\ &\quad - \frac{1}{2} F_{\alpha 0 i} F_{\alpha 0 i} + \frac{1}{4} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + \frac{1}{2} F_{\alpha i 3} F_{\alpha i 3} \\ &\quad - \frac{1}{2} F_{\alpha 0 3} F_{\alpha 0 3} - \mathcal{L}_M. \end{aligned} \quad (15.4.10)$$

利用方程 (15.4.4) 和 (15.4.6)，这变成

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_M + \Pi_{\alpha i} (\partial_i A_{\alpha 0} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i}) + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha i} \Pi_{\alpha i} \\ &\quad + \frac{1}{4} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} + \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i} \partial_3 A_{\alpha i} - \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha 0} \partial_3 A_{\alpha 0}, \end{aligned} \quad (15.4.11)$$

\*除了纯代数上的困难外，Coulomb 规范 (同其他许多规范一样) 还有一个称为 Gribov (格里波夫) 多值性的问题。<sup>9</sup> 即便附加  $\mathbf{A}_\alpha$  在无限远处为零的条件，对于 Coulomb 规范条件  $\nabla \cdot \mathbf{A}_\alpha = 0$  的每个解，存在另一个解，与其相差有限的规范变换. Gribov 多值性不会在这里影响我们，因为我们在轴向规范下进行量化的，在轴向规范下，这个问题是不存在的，并且我们仅用其它规范，例如 Lorentz 规范，来生成微扰展开。

<sup>a</sup>原书方程 (15.4.10) 有笔误， $F_{\alpha i j} F_{\alpha i j}$  的系数应该是  $\frac{1}{4}$  而非  $\frac{1}{2}$ . ——译者注

其中 $\mathcal{H}_M$ 是物质哈密顿密度:

$$\mathcal{H}_M \equiv \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathcal{L}_M . \quad (15.4.12)$$

沿用9.2节所导出的一般规则, 我们现在可以用这一哈密顿密度计算作为路径积分的矩阵元, 该路径积分是对 $A_{\alpha i}$ ,  $\Pi_{\alpha i}$ ,  $\psi_\ell$ 和 $\pi_\ell$ 的路径积分, 含有权重因子 $\exp(iI)$ , 其中

$$I = \int d^4x \left[ \Pi_{\alpha i} \partial_0 A_{\alpha i} + \pi_\ell \partial_0 \psi_\ell - \mathcal{H} + \epsilon \text{项} \right] , \quad (15.4.13)$$

在 $I$ 中, “ $\epsilon$ 项”仅用来给出传播子分母中正确的无限小虚项. (参看9.2节.) 我们注意到方程(15.4.7)和(15.4.9)给出的 $A_\alpha^0$ 是正则变量的泛函, 而该泛函关于 $\Pi_{\alpha i}$ 和 $\pi_\ell$ 是线性的. 那么, 对方程(15.4.11)的观察表明了, (假定 $\mathcal{L}_M$ 至多是 $D_\mu \psi$ 的平方)完整作用量(15.4.13)的被积函数至多是 $\Pi_{\alpha i}$ 和 $\pi_\ell$ 的二次. 因此, 通过高斯积分的通常规则, 我们可以算出对这些正则“动量”的路径积分. 这一步骤的麻烦是方程(15.4.13)中 $\Pi_{\alpha i}$ 的二阶项系数是 $A_{\alpha i}$ 的函数, 所以高斯积分将会产生一个可怕的场相关行列式因子. 另外, 此时的整个体系看起来没有丝毫的可能是Lorentz不变的.

我们不在这条道路上继续前行, 取而代之, 我们将使用一个类似于在9.6节的电动力学路径积分公式中使用过的技巧. 注意到, 如果我们暂且认为 $A_{\alpha 0}$ 是独立变量, 那么作用量(15.4.13)显然是 $A_{\alpha 0}$ 的二次型, 其中二阶项 $A_{\alpha 0}(x)A_{\beta 0}(y)$ 的系数等于场无关核 $(\partial_3)^2 \delta^4(x-y)$ . 正如我们在第九章的附录中所看到的, 这种对 $A_{\alpha 0}(x)$ 的高斯积分, 除去一个常数因子外, 等于被积函数在指数变量稳定“点”的值. 但是, 这里的作用量变分导数是

$$\frac{\delta I}{\delta A_{\alpha 0}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_{\alpha 0}} = J_\alpha^0 + \partial_i \Pi_{\alpha i} + C_{\beta \alpha \gamma} \Pi_{\beta i} A_{\gamma i} - \partial_3^2 A_{\alpha 0} ,$$

所以作用量的“稳定”点是约束方程(15.4.7)的解. 因此, 取代用 $A_{\alpha 0}$ 作为方程(15.4.7)的解, 我们同样可以就把它当做独立的积分变量进行处理.

现在, 视 $A_{\alpha 0}$ 为独立变量时, 哈密顿量 $\int d^3x \mathcal{H}$ 显然是 $\Pi_{\alpha i}$ 的二次型, 其中二阶项 $\Pi_{\alpha i}(x)\Pi_{\beta j}(y)$ 的系数由场无关核 $\frac{1}{2}\delta^4(x-y)\delta_{ij}$ 给出. 假定这对于物质场 $\pi_\ell$ 同样是成立的, 通过令 $\pi_\ell$ 和 $\Pi_{\alpha i}$ 等于对应方程(15.4.1)的作用量的稳定“点”, 我们可以计算出对 $\pi_\ell$ 和 $\Pi_{\alpha i}$ 的路径积分至相差一个常数因子,  $\pi_\ell$ 和 $\Pi_{\alpha i}$ 的稳定“点”是:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta I}{\delta \pi_\ell} = \partial_0 \psi_\ell - \frac{\partial \mathcal{H}_M}{\partial \pi_\ell} , \\ 0 &= \frac{\delta I}{\delta \Pi_{\alpha i}} = \partial_0 A_{\alpha i} - \Pi_{\alpha i} - \partial_i A_{\alpha 0} + C_{\alpha \beta \gamma} A_{\beta 0} A_{\gamma i} = F_{\alpha 0 i} - \Pi_{\alpha i} . \end{aligned}$$

将其代回方程(15.4.13)给出

$$\begin{aligned} I &= \int d^4x \left[ \mathcal{H}_M + \frac{1}{2} F_{\alpha 0 i} F_{\alpha 0 i} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} F_{\alpha i j} F_{\alpha i j} - \frac{1}{2} \partial_3 A_{\alpha i} \partial_3 A_{\alpha i} + \frac{1}{2} (\partial_3 A_{\alpha 0})^2 \right] \\ &= \int d^4x \mathcal{L} , \end{aligned} \quad (15.4.14)$$

其中 $\mathcal{L}$ 是我们所出发的拉格朗日量(15.3.1)! 换句话说, 我们要做的是对 $\psi_\ell(x)$ 以及 $A_{\alpha \mu}(x)$ 的全部4个分量的路径积分, 其中的权重因子由方程(15.4.14)和(15.3.1)给出且是显然协变的, 但是强加了轴向规范协变条件, 即插入了因子

$$\prod_{x, \alpha} \delta(A_{\alpha 3}(x)) . \quad (15.4.15)$$

只要 $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B \cdots$ 是规范不变的, 我们就有

$$\begin{aligned} \langle T\{\mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \cdots\} \rangle_{\text{VACUUM}} &\propto \int \left[ \prod_{\ell, x} d\psi_{\ell}(x) \right] \left[ \prod_{\alpha, \mu, x} dA_{\alpha\mu}(x) \right] \\ &\times \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \cdots \exp\{iI + \epsilon \text{项}\} \prod_{x, \alpha} \delta(A_{\alpha 3}(x)) , \end{aligned} \quad (15.4.16)$$

其中 $I$ 是方程(15.4.14)给出的Lorentz不变且规范不变的作用量.

\* \* \*

为了将来的参考, 我们注意到, 方程(15.4.16)中对规范场积分的体积元 $\prod_{\alpha, \mu, x} dA_{\alpha\mu}(x)$ 是规范不变的, 也就是说

$$\prod_{\alpha, \mu, x} dA_{\Lambda\alpha\mu}(x) = \prod_{\alpha, \mu, x} dA_{\alpha\mu}(x) , \quad (15.4.17)$$

其中 $A_{\Lambda\alpha\mu}$ 是用规范变换作用 $A_{\alpha\mu}(x)$ 后的结果, 规范变换的参量是 $\Lambda_{\alpha}(x)$ . 证明对于单位元附近的变换, 即无限小的变换参量 $\lambda_{\alpha}(x)$ , 这是成立的就足够了. 在这一情况下

$$A_{\lambda\alpha}{}^{\mu} = A_{\alpha}{}^{\mu} + \partial_{\mu}\lambda_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta}{}^{\mu}\lambda_{\gamma} ,$$

所以体积元之间的关系为

$$\prod_{\alpha, \mu, x} dA_{\lambda\alpha\mu}(x) = \text{Det}(\mathcal{N}) \prod_{\alpha, \mu, x} dA_{\alpha\mu}(x) ,$$

其中 $\mathcal{N}$ 是“矩阵”:

$$\mathcal{N}_{\alpha\mu x, \beta\nu y} = \frac{\delta A_{\lambda\alpha\mu}(x)}{\delta A_{\beta\nu}(y)} = \delta^4(x-y) \delta_{\mu}^{\nu} \left[ \delta_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta\gamma}\lambda_{\gamma}(x) \right] .$$

因为迹 $C_{\alpha\alpha\gamma}$ 为零, 所以到 $\lambda_{\gamma}$ 的一阶,  $\mathcal{N}$ 的行列式为1.

在本章, 我们将假定对物质场积分的体积元 $\prod_{n, x} d\psi_n(x)$ 也是规范不变的. 这里有一个很重要的微妙, 在第22章我们将回到这个问题上, 但是, 正如那里所证明的, 这一假定对于我们目前的强作用和电弱作用的非阿贝尔规范理论是适用的.

## 15.5 De Witt-Faddeev-Popov方法

我们的路径积分公式(15.4.16)是在一个有利于正则量子化的规范下导出的, 但是从这一公式导出的Feynman规则会隐藏理论潜在的旋转不变性与Lorentz不变性. 为了导出显然Lorentz不变的Feynman规则, 我们需要改变规范.

我们首先注意到的是, 方程(15.4.16)是(相差一个不重要的常数因子)一大类泛函积分中的一个特殊情况, 这类泛函积分的形式为:

$$\mathcal{J} = \int \left[ \prod_{n, x} d\phi_n(x) \right] \mathcal{G}[\phi] B[f[\phi]] \text{Det } \mathcal{F}[\phi] , \quad (15.5.1)$$

其中 $\phi_n(x)$ 是一组规范场和物质场;  $\prod_{n,x} d\phi_n(x)$ 是体积元; 而 $\mathcal{G}[\phi]$ 是 $\phi_n(x)$ 的泛函, 并满足规范不变条件:

$$\mathcal{G}[\phi_\lambda] \prod_{n,x} d\phi_{\lambda n}(x) = \mathcal{G}[\phi] \prod_{n,x} d\phi_n(x), \quad (15.5.2)$$

其中 $\phi_{\lambda n}(x)$ 是用一个规范变换作用在 $\phi$ 上的结果, 该规范变换的参量是 $\lambda_\alpha(x)$ . (通常情况下, 当这一点满足时, 泛函 $\mathcal{G}$ 与体积元分别是不变的, 但在这里我们所需要的只有方程(15.5.2).) 另外,  $f_\alpha[\phi; x]$ 是这些场的“规范固定泛函”, 它不是规范不变的且依赖于 $x$ 和 $\alpha$ ;  $B[f]$ 是针对 $x$ 和 $\alpha$ 的一般函数 $f_\alpha(x)$ 所定义的某个数值泛函; 而 $\mathcal{F}$ 是“矩阵”:

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\phi] \equiv \left. \frac{\delta f_\alpha[\phi_\lambda; x]}{\delta \lambda_\beta(y)} \right|_{\lambda=0}. \quad (15.5.3)$$

(与我们通常函数的泛函或泛函的泛函的记法一致,  $B[f[\phi]]$ 所依赖的 $f_\alpha[\phi; x]$ 值是: 对未表示出的变量 $\alpha$ 和 $x$ 的所有值所取的值, 而表示出的变量, 函数 $\phi_n(x)$ , 保持不变.) 方程(15.5.1)并不代表方程(15.4.16)最大可能的推广; 在15.7节我们将看到, 由于某些原因, 需要并存在进一步的推广. 这里我们从方程(15.5.1)出发, 这是因为它将协助推动15.7节的形式体系, 并且就处理处在最方便规范下的非阿贝尔规范理论而言, 它是足够的.

我们必须验证路径积分(15.4.16)确实是方程(15.5.1)的一个特殊情况. 在方程(15.4.16)中, 场 $\phi_n(x)$ 由 $A_{\alpha\mu}(x)$ 和物质场 $\psi_\ell(x)$ 构成, 并且

$$f_\alpha[A, \psi; x] = A_{\alpha 3}(x), \quad (15.5.4)$$

$$B[f] = \prod_{x, \alpha} \delta(f_\alpha(x)), \quad (15.5.5)$$

$$\mathcal{G}[A, \psi] = \exp\{i I + \epsilon \text{项}\} \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \cdots, \quad (15.5.6)$$

$$\prod_{n,x} d\phi_n(x) = \left[ \prod_{\ell, x} d\psi_\ell(x) \right] \left[ \prod_{\alpha, \mu, x} dA_\alpha^\mu(x) \right]. \quad (15.5.7)$$

(我们现在去掉上下标 $\alpha, \beta, \dots$ 之间的区别.) 比较方程(15.4.16)与方程(15.5.1)——(15.5.3), 这表明了除去因子 $\text{Det } \mathcal{F}[\phi]$ 之外, 这些路径积分实际上是相同的. 对于特定的规范固定泛函(15.5.4), 这一因子是场无关的: 如果 $A_\alpha^3(x) = 0$ , 那么在参量为 $\lambda_\alpha(x)$ 的规范变换下,  $A_\alpha^3(x)$ 的变化是

$$A_{\lambda\alpha}^3(x) = \partial_3 \lambda_\alpha(x) = \int d^4 y \lambda_\alpha(y) \partial_3 \delta^4(x - y),$$

使得方程(15.5.3)在这里变成场无关“矩阵”

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\phi] = \delta_{\alpha\beta} \partial_3 \delta^4(x - y).$$

因此, 方程(15.5.1)中的行列式在这一规范下也是场无关的. 正如第9章所论述过的, 泛函积分中的场无关因子仅影响期望值与 $S$ -矩阵的真空涨落部分, 因而与 $S$ -矩阵元连通部分的计算是无关的.

将任意非阿贝尔理论的泛函积分(15.4.16)视为一般路径积分(15.5.1)的一个特殊情况, 其中的关键之处在于, 在这一形式下我们可以自由地改变规范. 特别地, 我们有一个定理, 即积分(15.5.1)实际上(在一个很宽泛的限制下)独立于规范固定泛函 $f_\alpha[\phi; x]$ , 它仅通过一个不相关的常数因子与泛函 $B[f]$ 的选择相关.

证明: 将方程(15.5.1)中的所有积分变量 $\phi$ 替换成一个新的积分变量 $\phi_\Lambda$ , 其中的 $\Lambda^\alpha(x)$ 是任意(但固定)一组规范变换参量:

$$\mathcal{J} = \int \left[ \prod_{n,x} d\phi_{\Lambda n}(x) \right] \mathcal{G}[\phi_\Lambda] B[f[\phi_\Lambda]] \text{Det } \mathcal{F}[\phi_\Lambda] . \quad (15.5.8)$$

(这一步在数学上是平庸的, 就像将积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 变成 $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$ , 并且没有使用我们关于规范不变性的假定.) 现在使用已假定的测度 $\Pi d\phi$ 乘以泛函 $\mathcal{G}[\phi]$ 的规范不变性(15.5.2), 将其重写为

$$\mathcal{J} = \int \left[ \prod_{n,x} d\phi_n(x) \right] \mathcal{G}[\phi] B[f[\phi_\Lambda]] \text{Det } \mathcal{F}[\phi_\Lambda] . \quad (15.5.9)$$

既然 $\Lambda^\alpha(x)$ 是任意的, 这时左边不能与它相关. 因此, 在一个合适的权重因子 $\rho[\Lambda]$ (会在后面选定)下积掉 $\Lambda^\alpha(x)$ 会给出

$$\mathcal{J} \int \left[ \prod_{\alpha,x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \rho[\Lambda] = \int \left[ \prod_{n,x} d\phi_n(x) \right] \mathcal{G}[\phi] C[\phi] , \quad (15.5.10)$$

其中

$$C[\phi] \equiv \int \left[ \prod_{\alpha,x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \rho[\Lambda] B[f[\phi_\Lambda]] \text{Det } \mathcal{F}[\phi_\Lambda] . \quad (15.5.11)$$

现在, 方程(15.5.3)给出

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\phi_\Lambda] = \left. \frac{\delta f_\alpha[(\phi_\Lambda)_\lambda; x]}{\delta \lambda^\beta(y)} \right|_{\lambda=0} . \quad (15.5.12)$$

我们假定这些变换构成群; 即, 我们可以将先进行参量为 $\Lambda^\alpha(x)$ 的规范变换再进行参量为 $\lambda^\alpha(x)$ 的规范变换后的结果, 写成规范变换参量为 $\tilde{\Lambda}^\alpha(x; \Lambda, \lambda)$ 的单次“乘积”规范变换作用后的结果,

$$(\phi_\Lambda)_\lambda = \phi_{\tilde{\Lambda}(\Lambda, \lambda)} . \quad (15.5.13)$$

利用偏(泛函)微分的链式法则, 我们就有

$$\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[\phi_\Lambda] = \int \mathcal{J}_{\alpha x, \gamma z}[\phi, \Lambda] \mathcal{R}^{\gamma z}_{\beta y}[\Lambda] d^4 z , \quad (15.5.14)$$

其中

$$\mathcal{J}_{\alpha x, \gamma z}[\phi, \Lambda] \equiv \left. \frac{\delta f_\alpha[\phi_{\tilde{\Lambda}}; x]}{\delta \tilde{\Lambda}^\gamma(z)} \right|_{\tilde{\Lambda}=\Lambda} = \frac{\delta f_\alpha[\phi_\Lambda; x]}{\delta \Lambda^\gamma(z)} \quad (15.5.15)$$

以及

$$\mathcal{R}^{\gamma z}_{\beta y}[\Lambda] = \left. \frac{\delta \tilde{\Lambda}^\gamma(z; \Lambda, \lambda)}{\delta \lambda^\beta(y)} \right|_{\lambda=0} . \quad (15.5.16)$$

由此得出

$$\text{Det } \mathcal{F}[\phi_\Lambda] = \text{Det } \mathcal{J}[\phi, \Lambda] \text{Det } \mathcal{R}[\Lambda] . \quad (15.5.17)$$

我们注意到,  $\text{Det } \mathcal{J}[\phi, \Lambda]$ 就是积分变量从 $\Lambda^\alpha(x)$ 变换到( $\phi$ 固定的) $f_\alpha[\phi_\Lambda; x]$ 的雅克比行列式. 因此, 如果我们将权重函数 $\rho(\Lambda)$ 选为

$$\rho(\Lambda) = 1 / \text{Det } \mathcal{R}[\Lambda] \quad (15.5.18)$$

那么

$$\begin{aligned} C[\phi] &= \int \left[ \prod_{\alpha, x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \text{Det } \mathcal{J}[\phi, \Lambda] B[f[\phi_\Lambda]] \\ &= \int \left[ \prod_{\alpha, x} df_\alpha(x) \right] B[f] \equiv C, \end{aligned} \quad (15.5.19)$$

它显然是独立于 $\phi$ 的. (读者可以认为方程(15.5.18)给出了群的参量空间上的不变(Haar)测度.) 这样, 最终我们有

$$\mathcal{J} = \frac{C \int \left[ \prod_{n, x} d\phi_n(x) \right] \mathcal{G}[\phi]}{\int \left[ \prod_{\alpha, x} d\Lambda^\alpha(x) \right] \rho[\Lambda]}. \quad (15.5.20)$$

这个结果显然与我们对 $f_\alpha[\phi; x]$ 的选择无关, 它已经被简化成单变量的积分, 并且它仅通过常数 $C$ 与 $B[f]$ 相关, 这正是所要证明的.

在继续应用这个定理之前, 我们应该暂停一下, 关注推导中的一个技巧点. 由于同一个原因, 方程(15.5.20)的分子和分母中的积分都是病态定义的. 因为假定 $\mathcal{G}[\phi]$ 是规范不变的, 所以它对 $\phi$ 的积分不可能收敛的; 将 $\phi$ 变成 $\phi_\lambda$ 的“轨道”能够抵达所有可能的 $\lambda_\alpha(x)$ , 而 $\mathcal{G}[\phi]$ 沿着所有这样的轨道都是常数. 同样, 分母中的积分也是发散的, 这是因为 $\rho[\Lambda] \prod d\Lambda$ 就是普通群积分的不变体积元, 并且它沿着“轨道” $\Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}(\Lambda, \lambda)$ 是常数. 通过在一个有限的时空晶格内表述该理论, 方程(15.5.20)中分子和分母的发散都可以被消除掉, 在这一情况下, 规范群的体积就是整体Lie群本身的体积乘以晶格格位的数目. 对于方程(15.5.20)左边的原始定义(15.5.1)而言, 由于规范固定因子 $B[f]$ 消除了这一发散, 我们可以推测, 随着晶格格位的数目趋于无穷, 它在方程(15.5.20)右边的分子和分母之间抵消了.

现在, 切入主题. 我们已经看到, 轴向规范下的真空期望值(15.4.16)由一般形式的路径积分(15.5.1)给出. 装备了之上的定理后, 对于 $f_\alpha[A, \psi; x]$ 和 $B[f]$ 的(几乎)任意选择, 我们得到结论

$$\begin{aligned} \langle T\{\mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \cdots\} \rangle_V &\propto \int \left[ \prod_{\ell, x} d\psi_\ell(x) \right] \left[ \prod_{\alpha, \mu, x} dA_\alpha^\mu(x) \right] \\ &\times \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \cdots \exp\{iI + \epsilon \text{项}\} B[f[A, \psi]] \text{Det } \mathcal{F}[A, \psi]. \end{aligned} \quad (15.5.21)$$

因此, 我们现在可以在一个更加方便的规范下用方程(15.5.21)推导Feynman规则.

我们知道如何计算的路径积分是高斯型乘以多项式的路径积分, 所以我们一般会取

$$B[f] = \exp \left( -\frac{i}{2\xi} \int d^4x f_\alpha(x) f_\alpha(x) \right), \quad (15.5.22)$$

其中 $\xi$ 是任意的实参量. 在这一选择下, 因子 $B$ 在方程(15.5.21)中的效应仅是给有效拉格朗日量增加一项

$$\mathcal{L}_{\text{EFF}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha. \quad (15.5.23)$$

Lorentz不变的规范固定函数 $f_\alpha$ 的最简单选择与电动力学中的选择相同:

$$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu. \quad (15.5.24)$$



这样, 裸规范场的传播子就可以像量子电动力学中那样进行计算. 有效作用量的自由矢量玻色子部分可以写成

$$\begin{aligned} I_{0A} &= - \int d^4x \left[ \frac{1}{4} (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) (\partial^\mu A_\alpha{}^\nu - \partial^\nu A_\alpha{}^\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\alpha{}^\mu) (\partial_\nu A_\alpha{}^\nu) + \epsilon\text{项} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \mathcal{D}_{\alpha\mu x, \beta\nu y} A_\alpha{}^\mu(x) A_\beta{}^\nu(y), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha\mu x, \beta\nu y} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial y_\lambda} \delta^4(x-y) \delta_{\alpha\beta} \\ &\quad - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \delta^4(x-y) \delta_{\alpha\beta} + \epsilon\text{项} \\ &= (2\pi)^{-4} \delta_{\alpha\beta} \int d^4p \left[ \eta_{\mu\nu} (p^2 - i\epsilon) - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) p_\mu p_\nu \right] e^{ip \cdot (x-y)}. \end{aligned}$$

取方括号中矩阵的倒数, 我们就得到了传播子:

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\mu, \beta\nu}(x, y) &= (\mathcal{D}^{-1})_{\alpha\mu x, \beta\nu y} \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4p \left[ \eta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (15.5.25)$$

这既是Landau规范的推广, 也是Feynman规范的推广, 可以通过取 $\xi = 0$ 和 $\xi = 1$ 分别回到这两个规范. 当 $\xi \rightarrow 0$ 时, 除了 $f_\alpha = 0$ 附近, 泛函(15.5.22)振荡的非常剧烈, 所以这个泛函的作用就像 $\delta$ -函数, 给泛函积分强加了Landau规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ , 它很自然地导出了满足条件 $\partial^\mu \Delta_{\alpha\mu, \beta\nu} = 0$ 所相应的传播子. 对于不为零的 $\xi$ 值, 泛函 $B[f]$ 并不挑出规范场, 使得 $A_{\alpha\mu}$ 满足任何特定规范条件, 但是通常将传播子(15.5.25)称为“广义Feynman规范”或“广义 $\xi$ -规范”下的传播子. 一个很好的计算物理振幅的策略是, 保持 $\xi$ 任意, 而在计算的最后检验结果是不是 $\xi$ -无关的.

附加一个条件后, Feynman规则现在是显然的: 顶点的贡献可以从原始拉格朗日 $\mathcal{L}$ 的相互作用项中读出来, 而规范场传播子由方程(15.5.25)给出, 物质场传播子像往常那样计算. 确切些,  $\mathcal{L}$ 中的三线相互作用

$$-\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}) A_\beta{}^\mu A_\gamma{}^\nu$$

对应与三个矢量玻色子线相连的顶点, 这些线携带(入)动量 $p, q, k$ 以及Lorentz和规范指标 $\mu\alpha, \nu\beta, \rho\gamma$ , 那么, 根据动量空间Feynman规则, 这种顶点对被积函数的贡献是

$$i(2\pi)^4 \delta^4(p+q+k) [-i C_{\alpha\beta\gamma}] \left[ p_\nu \eta_{\mu\lambda} - p_\lambda \eta_{\mu\nu} + q_\lambda \eta_{\nu\mu} - q_\mu \eta_{\nu\lambda} + k_\mu \eta_{\lambda\nu} - k_\nu \eta_{\lambda\mu} \right]. \quad (15.5.26)$$

另外,  $\mathcal{L}$ 中的 $A^4$ 相互作用项,

$$-\frac{1}{4} C_{\epsilon\alpha\beta} C_{\epsilon\gamma\delta} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_\gamma{}^\mu A_\delta{}^\nu,$$

它对应与四个矢量玻色子线相连的顶点. 如果这些线携带(入)动量 $p, q, k, \ell$ , 以及Lorentz和规范指标 $\mu\alpha, \nu\beta, \rho\gamma$ 和 $\sigma\delta$ , 那么这种顶点对被积函数的贡献是

$$\begin{aligned} i(2\pi)^4 \delta^4(p+q+k+\ell) \times &\left[ -C_{\epsilon\alpha\beta} C_{\epsilon\gamma\delta} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) \right. \\ &\left. - C_{\epsilon\alpha\gamma} C_{\epsilon\alpha\beta} (\eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho}) - C_{\epsilon\alpha\delta} C_{\epsilon\beta\gamma} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\sigma\nu}) \right]. \end{aligned} \quad (15.5.27)$$

(回忆起结构常数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 包含耦合常数因子, 所以因子(15.5.26)和(15.5.27)关于耦合常数分别是一阶和二阶的.)

在这一Feynman规则中, 还有一个困难我们没有处理, 即, 方程(15.5.21)中出现了因子 $\det \mathcal{F}$ , 对于一般的规范, 它不是常数. 我们现在转向这个因子的考察.

## 15.6 鬼

我们现在来考察方程(15.5.21)中的因子 $\mathcal{F}$ 对非阿贝尔规范场论Feynman规则的影响. 为了能将这个影响处理成Feynman规则的修正, 回顾我们在9.5节所证明的一个事实, 即, 任何矩阵 $\mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}$ 的行列式可以表示为一个路径积分

$$\text{Det } \mathcal{F} \propto \int \left[ \prod_{\alpha, x} d\omega_{\alpha}^*(x) \right] \left[ \prod_{\alpha, x} d\omega_{\alpha}(x) \right] \exp(iI_{GH}), \quad (15.6.1)$$

其中

$$I_{GH} \equiv \int d^4x d^4y \omega_{\alpha}^*(x) \omega_{\beta}(y) \mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}. \quad (15.6.2)$$

这里的 $\omega_{\alpha}^*$ 和 $\omega_{\alpha}$ 是一组独立的反对易经典变量, 并且比例常数是场无关的. (为了再次给出因子 $\text{Det } \mathcal{F}$ , 我们必须将场变量 $\omega_{\alpha}$ 和 $\omega_{\alpha}^*$ 选成费米场变量; 如果我们将这些场变量选成玻色的, 那么路径积分(15.6.1)就会正比于 $(\text{Det } \mathcal{F})^{-1}$ .) 场 $\omega_{\alpha}^*$ 和 $\omega_{\alpha}$ 不非得通过复共轭相关联, 我们甚至会在15.7节看到, 由于某些原因, 我们需要假定 $\omega_{\alpha}^*$ 和 $\omega_{\alpha}$ 是独立的实变量. 因子 $\text{Det } \mathcal{F}$ 的全部效应等同于把 $I_{GH}$ 纳入到全部的有效作用量中, 并对“场” $\omega$ 和 $\omega^*$ 积分. 即, 对于任意的规范固定函数 $f_{\alpha}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \langle T\{\mathcal{O}_A \cdots\} \rangle_V &\propto \int \left[ \prod_{n, x} d\psi_n(x) \right] \left[ \prod_{\alpha, \mu, x} dA_{\alpha\mu}(x) \right] \\ &\times \left[ \prod_{\alpha, x} d\omega_{\alpha}(x) d\omega_{\alpha}^*(x) \right] \exp\left(i I_{\text{MOD}}[\psi, A, \omega, \omega^*]\right) \mathcal{O}_A \cdots, \end{aligned} \quad (15.6.3)$$

其中 $I_{\text{MOD}}$ 是修正作用量

$$I_{\text{MOD}} = \int d^4x \left[ \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_{\alpha} f_{\alpha} \right] + I_{GH}. \quad (15.6.4)$$

场 $\omega_{\alpha}$ 和 $\omega_{\alpha}^*$ (至少在协变规范下)是Lorentz标量, 但它们满足费米统计. 这里并没有真的违反自旋统计关系, 这是因为在初态或末态中不存在描述这些场的粒子. 由于这个原因,  $\omega_{\alpha}$ 和 $\omega_{\alpha}^*$ 称为“鬼”粒子和“反鬼”粒子的场. 对方程(15.6.2)的观察表明, 这个作用量反应了称为“鬼数”的守恒量,  $\omega_{\alpha}$ 的鬼数等于1,  $\omega_{\alpha}^*$ 的鬼数等于-1, 而对于所以其它的场则是零.

当“矩阵” $\mathcal{F}$ 可以表示成

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1, \quad (15.6.5)$$

其中 $\mathcal{F}_0$ 与场无关且是耦合常数的零阶项, 而 $\mathcal{F}_1$ 与场相关且正比于一个或多个耦合常数, 这时鬼场的Feynman规则最简单. 在这一情况下, 鬼场传播子就是

$$\Delta_{\alpha\beta}(x, y) = -(\mathcal{F}_0^{-1})_{\alpha x, \beta y} \quad (15.6.6)$$



而鬼场顶点直接从相互作用项中读出

$$I'_{GH} = \int d^4x d^4y \omega_\alpha^*(x) \omega_\beta(y) (\mathcal{F}_1)_{\alpha x, \beta y} . \quad (15.6.7)$$

例如, 在上一节所讨论的广义 $\xi$ -规范中, 我们有

$$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu , \quad (15.6.8)$$

并且, 对于无限小的规范参量 $\lambda_\alpha$ , 方程(15.1.9)给出:

$$A_{\alpha\lambda}^\mu = A_\alpha^\mu + \partial_\mu \lambda_\alpha + C_{\alpha\gamma\beta} \lambda_\beta A_\gamma^\mu$$

使得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha x, \beta y} &= \left. \frac{\delta \partial_\mu A_{\alpha\lambda}^\mu(x)}{\delta \lambda_\beta(y)} \right|_{\lambda=0} \\ &= \square \delta^4(x-y) + C_{\alpha\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ A_\gamma^\mu(x) \delta^4(x-y) \right] . \end{aligned} \quad (15.6.9)$$

这就是(15.6.5)的形式, 其中

$$(\mathcal{F}_0)_{\alpha x, \beta y} = \square \delta^4(x-y) \delta_{\alpha\beta} , \quad (15.6.10)$$

$$(\mathcal{F}_1)_{\alpha x, \beta y} = -C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ A_\mu^\gamma(x) \delta^4(x-y) \right] . \quad (15.6.11)$$

从方程(15.6.6)和(15.6.10)中, 我们看到鬼场传播子是

$$\Delta_{\alpha\beta}(x, y) = \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^{-4} \int d^4p (p^2 - i\epsilon)^{-1} e^{ip \cdot (x-y)} , \quad (15.6.12)$$

所以, 在这一规范下, 鬼场的行为就像零质量的无自旋费米子, 它按照规范群的伴随表示进行变换. 利用方程(15.6.7)和(15.6.11)并分部积分, 我们发现这一作用量中的鬼场相互作用项变成

$$I'_{GH} = \int d^4x C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \omega_\alpha^*}{\partial x^\mu} A_\gamma^\mu \omega_\beta . \quad (15.6.13)$$

这一相互作用所对应的顶点与一个出鬼线, 一个入鬼线以及一个矢量玻色子线相连. 如果这些线分别携带(入)动量 $p, q, k$ 以及规范指标 $\alpha, \beta, \gamma$ , 并且规范场携带矢量指标 $\mu$ , 那么这种顶点对积分的贡献由动量空间Feynman规则给定为

$$i(2\pi)^4 \delta^4(p+q+k) \times i p_\mu C_{\alpha\beta\gamma} . \quad (15.6.14)$$

鬼粒子绕圈传播, 圈上的每一顶点与单个矢量玻色子线传播, 就像平常对费米场变量所做的那样, 对于每一个圈都要补充一个额外的负号.

鬼圈额外的负号表明, 每个鬼场 $\omega_\alpha$ , 连同相应的反鬼场 $\omega_\alpha^*$ , 代表的是某种负自由度. 这些负自由度是必要的, 这是因为我们在使用协变规范场传播子时, 我们确实对物理自由度重复计数了; 物理的自由度是 $A_\alpha^\mu(x)$ 的全部分量, 减去描述规范变换所需要的参量 $\Lambda_\alpha(x)$ .

总结一下, 在广义 $\xi$ -规范下, 修正作用量(15.6.4)可以写成

$$I_{\text{MOD}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{MOD}} , \quad (15.6.15)$$

其中的修正拉格朗日密度是:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{MOD}} = \mathcal{L}_M - \frac{1}{4}F_{\alpha}^{\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_{\mu}A_{\alpha}^{\mu})(\partial_{\nu}A_{\alpha}^{\nu}) \\ - \partial_{\mu}\omega_{\alpha}^{*}\partial^{\mu}\omega_{\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_{\mu}\omega_{\alpha}^{*})A_{\gamma}^{\mu}\omega_{\beta} .\end{aligned}\quad (15.6.16)$$

重点是(如果物质拉格朗日量是可重整的)这个拉格朗日量是可重整的, 在基础的意义, 就是说它的项所包含的场与导数的乘积, 其总量纲(按质量幂次计)小于等于4. (方程(15.6.16)中的动能项 $-\partial_{\mu}\omega_{\alpha}^{*}\partial^{\mu}\omega_{\alpha}$ 确定了场 $\omega$ 和 $\omega^{*}$ 的量纲, 它们是质量的一次, 和普通的标量场以及规范场相同.) 然而, 这里的可重整性并不止于幂次计数; 同样必要的是, 存在一个抵消项吸收了每个发散. 在下一节, 我们将考察一个显著的对称性, 在17.2节, 我们将用这个对称性证明非阿贝尔场论在这一意义下确实是可重整的, 并且, 这个对称性甚至可以取代我们一直讨论的Faddeev-Popov-De Witt方法.

## 15.7 BRST对称性

尽管前两节所描述的Faddeev-Popov-De Witt方法使得理论的Lorentz不变性变得显然, 但它仍然依赖于选取一个规范, 因而它很自然地隐藏了理论的底层规范不变性. 在尝试证明理论的可重整性时, 这将是一个严重的问题——规范不变性约束了拉格朗日量中可作为抵消项以吸收紫外发散的项的形式, 但是一旦我们选择了规范, 我们如何知道规范不变性是否仍然会约束无穷大所产生的方式?

然而, 值得注意的是, 即使在我们选择规范之后, 路径积分仍然含有一个与规范不变性相关的对称性. 发现这一对称性的是Becchi(贝奇), Rouet(鲁埃), 以及Stora(斯托拉),<sup>10</sup> (Tyutin(秋金)<sup>11</sup>同时独立地发现了这一对称性), 在1975年, Faddeev, Popov和De Witt的工作的几年之后, 他们发现了这一对称性, 为了纪念这些发现者, 这一对称性被称为BRST对称性. 这一对称性在一定程度上将以它的原始发现历程展现出来, 它在这一过程中是作为Faddeev, Popov和De Witt方法的副产物出现的, 然而, 正如我们将看到的, 它也可以视为Faddeev-Popov-De Witt方法的替代品.

我们在方程(15.6.3)和(15.6.4)中已经看到, 对于非阿贝尔规范场论, 它的Feynman规则可以从对物质场, 规范场和鬼场的路径积分中获得, 路径积分中的作用量进行了修正, 我们可以将其写成

$$I_{\text{MOD}} = I_{\text{EFF}} + I_{GH} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{MOD}} , \quad (15.7.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{MOD}} \equiv \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi}f_{\alpha}f_{\alpha} + \omega_{\alpha}^{*}\Delta_{\alpha} , \quad (15.7.2)$$

其中有一个我们现在引入的量

$$\Delta_{\alpha}(x) \equiv \int d^4y \mathcal{F}_{\alpha x, \beta y}[A, \psi] \omega_{\beta}(y) . \quad (15.7.3)$$

它对应于(15.5.21)中规范固定泛函的选择:

$$B[f] \propto \exp \left( -\frac{i}{2\xi} \int d^4x f_{\alpha}f_{\alpha} \right) . \quad (15.7.4)$$

对于我们当前的目的, 将 $B[f]$ 重写成Fourier积分将是有帮助的:

$$B[f] = \int \left[ \prod_{\alpha, x} dh_{\alpha}(x) \right] \exp \left[ \frac{i\xi}{2} \int d^4x h_{\alpha}h_{\alpha} \right] \exp \left[ i \int d^4x f_{\alpha}h_{\alpha} \right] . \quad (15.7.5)$$

我们现在必须要做对场 $h_\alpha$ (通常称为“Nakanishi-Lautrup”场<sup>11a</sup>), 以及物质场, 规范场, 鬼场和反鬼场做路径积分, 其中作用量是一个新的修正作用量

$$I_{\text{NEW}} = \int d^4x \left( \mathcal{L} + \omega_\alpha^* \Delta_\alpha + h_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2} \xi h_\alpha h_\alpha \right). \quad (15.7.6)$$

这一修正作用量不是规范不变的——相反, 如果我们要在路径积分中能够使用它, 它不是规范不变的反面更好. 然而, 它在“BRST”对称变换下不变, 该对称变换由一无限小常数 $\theta$ 参数化,  $\theta$ 与 $\omega_\alpha$ ,  $\omega_\alpha^*$ 以及所有的费米物质场反对易. 对于给定的 $\theta$ , BRST变换是

$$\delta_\theta \psi = i t_\alpha \theta \omega_\alpha \psi, \quad (15.7.7)$$

$$\delta_\theta A_{\alpha\mu} = \theta D_\mu \omega_\alpha = \theta [\partial_\mu \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma], \quad (15.7.8)$$

$$\delta_\theta \omega_\alpha^* = -\theta h_\alpha, \quad (15.7.9)$$

$$\delta_\theta \omega_\alpha = -\frac{1}{2} \theta C_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \omega_\gamma, \quad (15.7.10)$$

$$\delta_\theta h_\alpha = 0. \quad (15.7.11)$$

(回忆, 在费米路径积分中,  $\omega_\alpha$ 和 $\omega_\alpha^*$ 之间不存在联系, 使得方程(15.7.9)不必须是方程(15.7.10)的共轭.) 因为 $h_\alpha$ 是BRST-不变的, 所以, 我们可以按照自己的意愿将方程(15.7.5)中的高斯因子 $\exp(\frac{1}{2} i \xi \int h_\alpha h_\alpha)$ 替换为 $h_\alpha$ 的任意光滑泛函, 这会产生一个任意的泛函 $B[f]$ , 但是不会影响作用量的BRST不变性. 然而, 为了图形计算以及重整化的目的, 保持 $B[f]$ 为高斯型将是有帮助的.

在检查作用量(15.7.1)的不变性时, 先注意到变换(15.7.7)–(15.7.11)的幂零性将是很有帮助的; 即, 如果 $F$ 是 $\psi, A, \omega, \omega^*$ 以及 $h$ 的任意泛函, 并且我们用

$$\delta_\theta F \equiv \theta sF \quad (15.7.12)$$

定义 $sF$ , 那么\*

$$\delta_\theta (sF) = 0, \quad (15.7.13)$$

或者等价地,

$$s(sF) = 0. \quad (15.7.14)$$

当 $\delta_\theta$ 作用在单个场上时, 验证这一幂零性是直接的. 首先, 作用在物质场上,

$$\begin{aligned} \delta_\theta s\psi &= i t_\alpha \delta_\theta (\omega_\alpha \psi) = -\frac{1}{2} i C_{\alpha\beta\gamma} t_\alpha \theta \omega_\beta \omega_\gamma \psi - t_\alpha t_\beta \omega_\alpha \theta \omega_\beta \psi \\ &= -\frac{1}{2} i C_{\alpha\beta\gamma} t_\alpha \theta \omega_\beta \omega_\gamma \psi + t_\alpha t_\beta \theta \omega_\alpha \omega_\beta \psi. \end{aligned}$$

右边第二项中的乘积 $\omega_\alpha \omega_\beta$ 关于 $\alpha$ 和 $\beta$ 是反对称的, 所以我们可以将这一项中的 $t_\alpha t_\beta$ 替换成 $\frac{1}{2} [t_\alpha, t_\beta]$ , 这一项随之与第一项相抵消:

$$ss\psi = 0. \quad (15.7.15)$$

---

\*在BRST对称性的原始工作中, 泛函 $B[f]$ 的形式停留在了(15.7.4), 使得方程(15.7.9)中的 $h_\alpha$ 被替换成了 $-f_\alpha/\xi$ , 并且, 仅当作用在 $\omega_\alpha$ 以及规范场和物质场的函数上时, BRST变换才是幂零的, 但对于 $\omega_\alpha^*$ 的函数则不是.

下一步, 作用在规范场上, 我们有

$$\begin{aligned}
 \delta_\theta s A_{\alpha\mu} &= \delta_\theta D_\mu \omega_\alpha \\
 &= \partial_\mu \delta_\theta \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} \delta_\theta A_{\beta\mu} \omega_\gamma + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \delta_\theta \omega_\gamma \\
 &= \theta \left( -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} \partial_\mu (\omega_\beta \omega_\gamma) + C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\beta) \omega_\gamma \right. \\
 &\quad \left. + C_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\delta\epsilon} A_{\delta\mu} \omega_\epsilon \omega_\gamma - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} A_{\beta\mu} \omega_\delta \omega_\epsilon \right) \\
 &= \theta \left( \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\beta) \omega_\gamma + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\gamma) \omega_\beta \right. \\
 &\quad \left. - C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} A_{\delta\mu} \omega_\epsilon \omega_\beta - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} A_{\beta\mu} \omega_\delta \omega_\epsilon \right) .
 \end{aligned}$$

最后一式中, 由于 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 关于 $\beta$ 和 $\gamma$ 是反对称的, 所以前两项相互抵消了, 而第三项和第四项由于雅克比等式(15.1.5)相互抵消, 所以

$$ss A_{\alpha\mu} = 0 . \quad (15.7.16)$$

方程(15.7.9)和(15.7.11)立刻证明了

$$ss \omega_\alpha^* = 0 \quad (15.7.17)$$

和

$$ssh_\alpha = 0 . \quad (15.7.18)$$

最后,<sup>b</sup>

$$\begin{aligned}
 \delta_\theta s \omega_\alpha &= -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} \delta_\theta (\omega_\beta \omega_\gamma) \\
 &= \frac{1}{4} \theta \left( C_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\delta\epsilon} \omega_\delta \omega_\epsilon \omega_\gamma - C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} \omega_\beta \omega_\delta \omega_\epsilon \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \theta C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} \omega_\delta \omega_\epsilon \omega_\beta .
 \end{aligned}$$

但是, 乘积 $\omega_\beta \omega_\delta \omega_\epsilon$ 是反对称的, 所以雅克比等式(15.1.5)表明它也为零

$$ss \omega_\alpha = 0 . \quad (15.7.19)$$

现在考察两个场 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 的乘积, 它们中的一个 $\psi, A, \omega, \omega^*$ 或 $h$ , 也可以二者都是, 并且它们不一定在同时空点上. 那么

$$\delta_\theta (\phi_1 \phi_2) = \theta(s\phi_1) \phi_2 + \phi_1 \theta(s\phi_2) = \theta \left[ (s\phi_1) \phi_2 \pm \phi_1 s\phi_2 \right] ,$$

其中, 当 $\phi_1$ 是玻色场时, 符号 $\pm$ 取正号, 当 $\phi_1$ 是费米场时, 则取负号. 即,

$$s(\phi_1 \phi_2) = (s\phi_1) \phi_2 \pm \phi_1 s\phi_2 .$$

正如我们所看到的, 由于 $\delta_\theta(s\phi_1) = \delta_\theta(s\phi_2) = 0$ , BRST变换在 $s(\phi_1 \phi_2)$ 上的效果是

$$\delta_\theta s(\phi_1 \phi_2) = (s\phi_1) \theta(s\phi_2) \pm \theta(s\phi_1) (s\phi_2) .$$

<sup>b</sup>原书最后一个等号处有符号错误, 但不影响结果. ———译者注

然而,  $s\phi$  总有一个与  $\phi$  相反的统计, 所以将右边第一项中的  $\theta$  移至左边会引入一个符号因子  $\mp$ :

$$\delta_\theta s(\phi_1 \phi_2) = \theta \left[ \mp (s\phi_1)(s\phi_2) \pm (s\phi_1)(s\phi_2) \right] = 0 .$$

以这一方式继续下去, 我们会看到, BRST变换作用在不同时空点的场的任何乘积上都是零:

$$\delta_\theta s(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \cdots) = 0 .$$

任何泛函  $F[\phi]$  都能写成这种乘积再加上  $c$ -数系数的多重积分之和, 这样

$$\delta_\theta sF[\phi] = \theta s sF[\phi] = 0 . \quad (15.7.20)$$

这样就补全了BRST变换零性的证明.

现在我们回到作用量(15.7.6)的BRST不变性验证. 首先, 注意到, 对于任何仅是物质场和规范场的泛函, BRST变换就是一个规范变换, 该规范变换的参量是无限小参量

$$\lambda_\alpha(x) = \theta \omega_\alpha(x) . \quad (15.7.21)$$

因此, 方程(15.7.6)中的第一项自动是BRST不变的:

$$\delta_\theta \int d^4x \mathcal{L} = 0 . \quad (15.7.22)$$

为了计算BRST变换在作用量(15.7.6)其它部分上的效果, 注意到它在规范固定函数上的效应就是规范变换(15.7.21), 所以

$$\begin{aligned} \delta_\theta f_\alpha[x; A, \psi] &= \int \frac{\delta f_\alpha[x; A_\lambda, \psi_\lambda]}{\delta \lambda^\beta(y)} \Big|_{\lambda=0} \theta \omega_\beta(y) d^4y \\ &= \theta \int \mathcal{F}_{\alpha\beta}(y) \omega_\beta(y) d^4y \end{aligned}$$

或者以(15.7.3)的形式

$$\delta_\theta f_\alpha[x; A, \psi] = \theta \Delta_\alpha(x; A, \psi, \omega) . \quad (15.7.23)$$

(注意,  $\mathcal{F}$  是一个玻色量, 所以在这里将  $\theta$  移至左边时没有符号变化.) 另外, 回忆起  $\delta_\theta \omega_\alpha^* = -\theta h_\alpha$  和  $\delta_\theta h_\alpha = 0$ . 因此, 在“新”作用量(15.7.6)的被积函数中, 除  $\mathcal{L}$  以外的项可以写成

$$\omega_\alpha^* \Delta_\alpha + h_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2} \xi h_\alpha h_\alpha = s \left( \omega_\alpha^* f_\alpha + \frac{1}{2} \xi \omega_\alpha^* h_\alpha \right) \quad (15.7.24)$$

或者, 以另一种形式

$$I_{\text{NEW}} = \int d^4x \mathcal{L} + s\Psi , \quad (15.7.25)$$

其中

$$\Psi \equiv - \int d^4x \left( \omega_\alpha^* f_\alpha + \frac{1}{2} \xi \omega_\alpha^* h_\alpha \right) . \quad (15.7.26)$$

BRST变换的零性立刻告诉我们  $s\Psi$  和  $\int d^4x \mathcal{L}$  都是BRST不变的.

在某种意义上, 这一结果的逆方向也是成立的: 我们会在17.2节看到, 对于服从BRST不变性以及拉格朗日量(15.7.25)其它对称性的可重整拉格朗日量, 除了各种常系数的值会有一个变化外,

它必须采取方程(15.7.25)的形式. 但这还不足以确立这些理论的可重整性. BRST对称变换以非线性的方式作用在场上, 而在这一情形下, 拉格朗日量的对称性与矩阵元和Green函数的对称性之间不存在简单的联系. 利用下一章所发展的外场方法, 我们将在17.2节证明, Feynman振幅中的紫外发散项(尽管有限部分不在此列)确实服从一种重整化后的BRST不变性, 这使得可重整性的证明完整了.

方程(15.7.25)表明, 任何规范理论的物理部分都包含在, BRST算符的核(即, 一般的BRST不变项 $\int d^4x \mathcal{L} + s\Psi$ )模掉BRST变换的像(即, 形式为 $s\Psi$ 的项)后的那部分中. 任何幂零变换的核, 在模掉该变换的像后, 称为构成该变换的上同调. 换另一说法, 一个规范理论的物理部分可以等同为BRST算符的上同调.<sup>12</sup> 一个基本的物理要求是, 物理态之间的矩阵元应该独立于我们对规范固定函数 $f_\alpha$ 的选择, 换句话说, 矩阵元应该独立于对方程(15.7.25)中泛函 $\Psi$ 的选择. 对于任意的矩阵元 $\langle\alpha|\beta\rangle$ ,  $\Psi$ 的变化 $\tilde{\delta}\Psi$ 所引起的变化是

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle = i\langle\alpha|\tilde{\delta}I_{\text{NEW}}|\beta\rangle = i\langle\alpha|s\tilde{\delta}\Psi|\beta\rangle. \quad (15.7.27)$$

(我们在这里使用波浪符是为了将规范固定函数中的这种任意变化与BRST变换或者规范变换区分开.) 我们可以引入一个费米的BRST“核” $Q$ , 它的定义满足, 对于任何场算符 $\Phi$ ,

$$\delta_\theta\Phi = i[\theta Q, \Phi] = i\theta [Q, \Phi]_\mp,$$

换句话说,

$$[Q, \Phi]_\mp = is\Phi, \quad (15.7.28)$$

根据 $\Phi$ 是玻色的还是费米的, 符号分别为 $-$ 和 $+$ . 那么BRST变换的幂零性就给出了

$$0 = -ss\Phi = [Q, [Q, \Phi]_\mp]_\pm = [Q^2, \Phi]_-.$$

为了使其对于所有的算符 $\Phi$ 都成立,  $Q^2$ 要么为零, 要么正比于单位算符. 但是, 由于 $Q^2$ 有一个不为零的鬼数<sup>\*\*</sup>, 它不可能正比于单位算符, 所以它必须为零:

$$Q^2 = 0. \quad (15.7.29)$$

从方程(15.7.27)和(15.7.28), 我们得到

$$\tilde{\delta}\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|[Q, \tilde{\delta}\Psi]|\beta\rangle. \quad (15.7.30)$$

为了使其对于 $\Psi$ 的所有变化 $\tilde{\delta}\Psi$ 都为零, 必须有

$$\langle\alpha|Q = Q|\beta\rangle = 0. \quad (15.7.31)$$

因此, 物理态在幂零算符 $Q$ 的核中. 两个物理态, 若它们仅相差 $Q$ 的像中的一个态矢, 即, 形式为 $Q|\cdots\rangle$ 的态矢, 显然, 它们与所有其它物理态之间的矩阵元是相同的, 因而在物理上是等价的. 因此, 独立的物理态对应于 $Q$ 的核模掉 $Q$ 的像后中的态——即, 它们对应于 $Q$ 的上同调.

<sup>\*\*</sup> 回忆鬼数的定义, 它对于 $\omega_\alpha$ 为 $+1$ , 对于 $\omega_\alpha^*$ 为 $-1$ , 对于所有的规范场和物质场则是零.

为了看到这在实际情形中是如何运作的, 我们来考察一个纯电动力学的简单例子.<sup>†</sup> 取规范固定函数为  $f = \partial_\mu A^\mu$  并积掉辅助场  $h$ , BRST变换(15.7.8)—(15.7.10)在这里是

$$s A_\mu = \partial_\mu \omega, \quad s \omega^* = \partial_\mu A^\mu / \xi, \quad s \omega = 0. \quad (15.7.32)$$

我们将场展成简正模<sup>††</sup>

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left[ a^\mu(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + a^{\mu*}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right], \\ \omega(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left[ c(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + c^*(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right], \\ \omega^*(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left[ b(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + b^*(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right]. \end{aligned} \quad (15.7.33)$$

匹配方程(15.7.28)两边  $e^{\pm ip \cdot x}$  的系数给出

$$\begin{aligned} [Q, a^\mu(\mathbf{p})]_- &= -p^\mu c(\mathbf{p}), & [Q, a^{\mu*}(\mathbf{p})]_- &= p^\mu c^*(\mathbf{p}), \\ [Q, b(\mathbf{p})]_+ &= p^\mu a_\mu(\mathbf{p}) / \xi, & [Q, b^*(\mathbf{p})]_+ &= p^\mu a_\mu^*(\mathbf{p}) / \xi, \\ [Q, c(\mathbf{p})]_+ &= [Q, c^*(\mathbf{p})]_+ = 0. \end{aligned} \quad (15.7.34)$$

考察任何满足物理条件(15.7.31)的态  $|\psi\rangle$ :

$$Q|\psi\rangle = 0. \quad (15.7.35)$$

那么, 对于含有一个额外光子的态  $|e, \psi\rangle = e_\mu a^{\mu*}(\mathbf{p})|\psi\rangle$ , 如果  $e_\mu p^\mu = 0$ , 它们就满足物理条件  $Q|e, \psi\rangle = 0$ . 另外, 态  $|\psi'\rangle \equiv b^*(\mathbf{p})|\psi\rangle$  满足

$$Q|\psi'\rangle = p^\mu a_\mu^*(\mathbf{p})|\psi\rangle / \xi, \quad (15.7.36)$$

所以  $|e + \alpha p, \psi\rangle = |e, \psi\rangle + \xi \alpha Q|\psi'\rangle$ , 因而物理上的等价于  $|e, \psi\rangle$ . 由此我们得出  $e^\mu$  物理上等价于  $e^\mu + \alpha p^\mu$ , 这就是通常的光子极化矢量上的“规范不变”条件. 另一方面,

$$Qb^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = p^\mu a_\mu^*(\mathbf{p})|\psi\rangle \neq 0,$$

所以不满足  $b^*|\psi\rangle$  不物理条件(15.7.31). 另外, 对于任何  $e \cdot p \neq 0$  的  $e_\mu$ ,

$$c^*(\mathbf{p})|\psi\rangle = Q e_\mu a^{\mu*}(\mathbf{p})|\psi\rangle / e \cdot p$$

所以  $c^*|\psi\rangle$  是BRST-恰当的, 因而等价于零. 因此, 物理的 *Hilbert* 空间是没有鬼和反鬼的.

为了保持Lorentz不变性, 我们必须要把  $a^\mu(\mathbf{p})$  全部4个分量解释成湮灭算符, 也就是说

$$0 = a_\mu(\mathbf{p})|0\rangle, \quad (15.7.37)$$

<sup>†</sup> 由于电动力学中的结构常数为零, 方程(15.6.11)和(15.6.7)表明, 这里鬼场不与其它场耦合. 然而, 就用BRST对称性识别物理态这一点而言, 电动力学提供了一个很好的例子. 确实如此, 在分析“入”态和“出”态上的物理条件时, 我们忽略了相互作用, 所以, 由于这个原因, 处理非阿贝尔规范场论就像同时处理几个量子电动力学.

<sup>††</sup> 就像  $\omega^*(x)$  并没有视为  $\omega(x)$  的厄密共轭,  $b^*$  和  $c^*$  也不是  $c$  和  $b$  的共轭. 然而, 既然  $A^\mu(x)$  是厄密的, 那么如果  $Q$  是厄密的,  $\omega(x)$  也将是厄密的.



其中 $|0\rangle$ 是BRST-不变的真空态. 但是, 从BRST-不变的作用量(例如,  $\xi = 1$ 的作用量)所导出的正则对易关系给出

$$[a_\mu(\mathbf{p}), a_\nu^*(\mathbf{p}')]_- = \eta_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \quad (15.7.38)$$

这对应于Feynman规范中的传播子. 这违反了量子力学通常的正定性规则, 原因是方程(15.7.37)和(15.7.38)给出<sup>13</sup>

$$\langle 0 | a_0(\mathbf{p}) a_0^*(\mathbf{p}') | 0 \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle . \quad (15.7.39)$$

虽然如此, 我们能够确信物理态之间的所有振幅满足通常的正定性条件, 这是因为物理态满足方程(15.7.31), 而对于这样的态, 跃迁振幅与更加物理的规范下的振幅, 例如Coulomb规范或轴向规范下的跃迁振幅, 是相同的, 而在那样的规范下, 正定性或么正性的问题是不存在的.

迄今为止所描述的Faddeev-Popov-De Witt形式理论, 它所产生的作用量关于鬼场 $\omega_\alpha^*$ 和 $\omega_\alpha$ 必然是双线性的. 对于规范固定函数为 $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$ 的可重整Yang-Mills理论, 这是足够的, 但对于更普遍的情况, 作用量关于鬼场仅是双线性还不够. 例如, 我们会在17.2节看到, 在其它规范下, 对于有4条外鬼线的圈图中的紫外发散, 可重整Yang-Mills理论的拉格朗日密度中需要 $\omega^* \omega^* \omega \omega$ 项来充当它的抵消项.

幸运的是, Faddeev-Popov-De Witt形式理论仅代表生成一类等价拉格朗日量的一种方法, 其中拉格朗日量等价是指它们所产生的么正 $S$ -矩阵相同. BRST形式理论提供了一个更加普遍的方法, 它完全省去了Faddeev-Popov-De Witt形式理论. 在这一方法中, 取作用量为物质场, 规范场,  $\omega^A$ 场,  $\omega^{*A}$ 场以及 $h^A$ 场最一般的定域泛函, 但满足鬼数为零, 并且在BRST变换(15.7.7)——(15.7.11)以及该理论其它任何的整体对称性下不变. (对于可重整理论, 还要限制拉格朗日密度是量纲小于等于4的算符, 但这个约束在下面的讨论中没有任何作用.) 我们会在下一节证明, 在一个比Yang-Mills理论更普遍的情形下, 这类作用量的最普遍形式是两项的和, 其中第一项仅是物质场和规范场(统称为 $\phi$ )的泛函, 而第二项由BRST算符 $s$ 作用在鬼数为 $-1$ 的任意泛函 $\Psi$ 上产生:

$$I_{\text{NEW}}[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + s \Psi[\phi, \omega, \omega^*, h] , \quad (15.7.40)$$

就像Faddeev-Popov-De Witt作用量(15.7.25), 只不过 $s \Psi$ 现在关于鬼场和反鬼场不一定是双线性的.

通过与之前相同的讨论, 我们得到这样的结论: 对于被BRST算符 $Q$ 所湮灭的态, 它的 $S$ -矩阵元与方程(15.7.40)中 $\Psi$ 的选择无关, 所以只要存在使鬼场退耦的 $\Psi$ 的选择, 那么鬼场在一般情形下都会退耦. 在Yang-Mills理论中, 对轴向规范中的理论进行量子化提供了一个这样的 $\Psi$ , 所以在这样的理论中, 不仅是那些如(15.7.26)那样由Faddeev-Popov-De Witt形式理论生成的选择, 对于泛函 $\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h]$ 的任意选择, 鬼场都会退耦.

我们可以更进一步, 并且可以完全摆脱对非Lorentz不变规范下的正则量子化的依赖, 例如对轴向规范中正则量子化的依赖. 再一次, 取作用量为规范场, 物质场,  $\omega^A$ 场,  $\omega^{*A}$ 场以及 $h^A$ 场的最一般泛函, 满足鬼数为零, 且在BRST变换(15.7.7)——(15.7.11)以及该理论其它任何的整体对称性不变, 其中整体对称性包含Lorentz不变性. 从作用量的BRST不变性中, 我们可以推断出存在一个守恒的BRST幂零算符 $Q$ . 而把鬼场和反鬼场当做厄密场时,  $Q$ 也将是厄密的. 像上面一样, 物理态的空间定义为被 $Q$ 湮灭的态所构成的空间, 其中, 如果两个态的差是 $Q$ 作用另一个态, 那么这两个态视为等价. 已经证明了, 对于Yang-Mills理论, 这一空间没有鬼和反鬼且有一个正定的范数, 并且这一空间中的 $S$ -矩阵是么正的.



这一步骤称为BRST量子化. 它已经被扩展至含有其它定域对称性的理论, 例如广义相对论和弦论. 不幸的是, 到现在为止, BRST上同调无鬼以及作用在该空间上的 $S$ -矩阵么正, 看起来必须要在每一种情形下分别进行证明. 这些证明中的关键是, 对于每一个负范的自由度, 例如Yang-Mills理论中规范场的时间分量, 存在一个定域对称性使得这一自由度被移除了.

\* \* \*

尽管我们不会在这里使用它, 但是关于鬼和BRST对称性有一个非常漂亮的几何解释,<sup>14</sup> 我们应该在这里提及一下. 规范场 $A_\alpha^\mu$ 可以写成1-形式 $A_\alpha \equiv A_{\alpha\mu} dx^\mu$ , 其中 $dx^\mu$ 是一组反对易c-数.(参看5.8节) 在一个扩张空间中, 它可以与鬼场结合组成1-形式 $\mathcal{A}_\alpha \equiv A_\alpha + \omega_\alpha$ . 另外, 普通的外导数 $d \equiv dx^\mu \partial / \partial x^\mu$ 可以与BRST算符 $s$ 相结合, 它们构成了扩张空间下的外导数 $\mathcal{D} = d + s$ , 由于 $s^2 = d^2 = sd + ds = 0$ , 这一外导数是幂零的.

下一章会介绍外场方法, 在第17章, 我们将用这一方法并结合BRST对称性, 完成对非阿贝尔规范场论可重整性的证明.

## 15.8 BRST对称性的推广\*

上一节所描述的BRST对称性有一个很有用的推广, 使得我们可以在一大类理论的量子化中使用它, 而这些理论中包括广义相对论和弦论. 在所有这些情形中, 我们处理的作用量 $I[\phi]$ 和测度 $[d\phi] \equiv \prod_r d\phi^r$ 在如下的无限小变换下不变:

$$\phi^r \rightarrow \phi^r + \epsilon^A \delta_A \phi^r. \quad (15.8.1)$$

这是缩略“De Witt”记号, 其中 $r$ 和 $A$ 包含时空坐标和离散指标, 而求和包含对这些坐标的积分. 例如, 对于规范变换(15.1.9), 指标 $A$ 由群指标 $\alpha$ 和时空坐标 $x$ 构成, 并有 $\epsilon^{\alpha x} \equiv \epsilon^\alpha(x)$ , 而指标 $r$ 由矢量指标 $\mu$ , 群指标 $\alpha$ 以及时空坐标 $x$ 组成, 并有 $\phi^{\mu \alpha x} \equiv A_\mu^\alpha(x)$ ; 以方程(15.8.1)的记法, 在变换(15.1.9)中变分 $\delta_A \phi^r$ 读作

$$\delta_{\beta y} \phi^{\mu \alpha x} = \delta_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta^4(x - y) + C^\beta_{\gamma \alpha} \phi^{\mu \gamma x} \delta^4(x - y).$$

正如上一节所讨论的特殊情况——Yang-Mills理论, BRST不变性可用来替代这些理论的Faddeev-Popov-De Witt表述, 而即便Faddeev-Popov-De Witt方法失效了, BRST不变性依旧是适用的. 然而, 为了引入BRST不变性, 在这里, 我们着手于那些有着一般定域对称性的理论, 从这些理论的Faddeev-Popov-De Witt表述出发, 然后再考察进一步的推广.

沿用导出方程(15.5.21)的讨论, 我们就获得了广义Faddeev-Popov-De Witt定理:

$$\frac{C}{\Omega} \int [d\phi] e^{iI[\phi]} V[\phi] = \int [d\phi] e^{iI[\phi]} B[f[\phi]] \text{Det}(\delta_A f_B[\phi]) V[\phi], \quad (15.8.2)$$

其中 $V[\phi]$ 是 $\phi^r$ 的任意泛函, 并满足在规范变换(15.8.1)下不变;  $f_A[\phi]$ 是一组 $\phi^r$ 的规范固定泛函\*\*, 对它的选择要使得“矩阵” $\delta_A f_B[\phi]$ 有一个非零的行列式, 而 $B[f]$ 是 $f_A$ 的泛函, 它的选择多少有些任

\* 本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

\*\* 我们用相同的字母 $A, B$ 等来标记 $f_A$ 和规范变分 $\delta_A$ , 是为了强调规范固定泛函的数目要与独立规范变换的数目相同. 然而, 在某些情形下, 例如在弦理论中, 即便指标 $a$ 与规范变分 $\delta_A$ 上的指标 $A$ 取的值完全不同, 只要它们所取的值“个数相同”, 就会很自然地使用 $f^a$ . 只要我们能够定义 $f_A = c_{Aa} f^a$ , 其中 $c_{Aa}$ 是场无关且非奇异的, 那么在现在的形式理论中就不需要作出改变.

意(例如 $\prod_A \delta(f_A)$ .) 常数 $\Omega$ 是规范群的体积元, 而常数 $C$ (就像方程(15.5.19)那样)定义为

$$C \equiv \int [df] B[f] . \quad (15.8.3)$$

我们已经看到, 方程(15.8.2)在规范理论中的重要性就在于, 它告诉我们右边的积分独立于规范固定泛函 $f_A$ 的选择, 而仅通过常数 $C$ 与 $B[f]$ 相关. 在这里, 我们可以给通常无限大的规范群体积 $\Omega$ 赋予某些含义, 就像我们在有限时空晶格上的规范理论中所做的那样, 这样, 方程(15.8.2)在作为左边的积分公式时也可以有值.

为了定义幂零的BRST变换, 我们必须先把泛函 $B[f]$ 表示成Fourier变换

$$B[f] = \int [dh] \exp(ih^A f_A) \mathcal{B}[h] , \quad (15.8.4)$$

其中 $[dh] \equiv \prod_A dh^A$ . 另外, 行列式可以表示成对费米c-数场 $\omega^{*A}$ 和 $\omega^A$ 的积分:

$$\text{Det}(\delta_A f_B[\phi]) \propto \int [d\omega^*] [d\omega] \exp\left(i\omega^{*B} \omega^A \delta_A f_B\right) , \quad (15.8.5)$$

其中 $[d\omega^*] \equiv \prod_A d\omega^{*A}$ 而 $[d\omega] \equiv \prod_A d\omega^A$ , 像往常一样, “ $\propto$ ”是指相差一个与场无关的比例因子. 将这些代入方程(15.8.2), 就给出了规范固定路径积分的普遍公式

$$\begin{aligned} & \int [d\phi] \exp\left(iI(\phi)\right) B[f[\phi]] \text{Det}(\delta_A f_B[\phi]) V[\phi] \\ & \propto \int [d\phi] [dh] [d\omega^*] [d\omega] \exp\left(iI_{\text{NEW}}[\phi, h, \omega, \omega^*]\right) \mathcal{B}[h] V[\phi] , \end{aligned} \quad (15.8.6)$$

其中 $I_{\text{NEW}}$ 是新的总作用量:

$$I_{\text{NEW}}[\phi, h, \omega, \omega^*] = I[\phi] + h^A f_A[\phi] + \omega^{*B} \omega^A \delta_A f_B[\phi] . \quad (15.8.7)$$

我们在15.6节提到过, 在对所有 $\phi^r$ 的积分中包含哪些仅相差规范变换(15.8.1)的 $\phi^r$ , 而我们可以把鬼场看成对这一积分的补救. 因为鬼场是费米场, 所以鬼线构成的圈会携带额外的负号, 这使得这些圈抵消了对规范等价的 $\phi$ 的积分. 但为了使其成功运作, 鬼场 $\omega^A$ 的数目必须要和独立规范变换的数目一样多. 即, 既然 $\omega^A$ 是独立的, 那么规范变换(15.8.1)必须全是独立的. 对于Yang-Mills理论中的规范变换和广义相对论中的坐标变换, 正是这种情况, 但不总是这样. 理论的规范变换不独立的经典例子是 $p$ -形式规范场, 我们在8.8节描述过这一理论.  $p$ -形式 $A$ ( $p$ 阶反对称张量)承载规范变换 $A \rightarrow A + d\phi$ , 其中 $\phi$ 是 $(p-1)$ -形式, 而 $d\phi$ 是它的外导数(反对称化导数). 由于 $d$ 是幂零的, 当 $p \geq 2$ 时, 我们可以让 $\phi$ 偏移 $d\psi$ 但不改变规范变换, 所以在规范变换的规范变换下存在一个不变性, 其中变换参量是 $(p-2)$ -形式 $\psi$ . 在这种情况下, 由于引入了太多的鬼场, 我们必须要进行补偿, 进而又要引入“鬼场的鬼场”.<sup>15</sup> 当 $p \geq 3$ 时, 我们需要通过引入“鬼场的鬼场的鬼场”进行补偿, 以此类推. 在下文中, 我们将假定规范变换(15.8.1)都是独立的, 使得鬼场 $\omega^A$ (和反鬼场 $\omega^{*A}$ )是我们需要的全部.

尽管原始对称性(15.8.1)被非规范不变泛函 $B[f]$ 的插入所消除, 但是, 在无限小BRST变换下, 新的总作用量有一个恰当对称性

$$\chi \rightarrow \chi + \theta s\chi , \quad (15.8.8)$$

<sup>15</sup>在弦论和其它地方, 通常会发现鬼场 $\omega^{*A}$ 和 $\omega^A$ 分别写成了 $b^A$ (或 $b_A$ )和 $c^A$ .

其中 $\chi$ 是 $\phi^r$ ,  $\omega^A$ ,  $\omega^{*A}$ 或 $h^A$ 中的任意一个量;  $\theta$ 是无限小反对易c-数; 而 $s$ 是 $Slavnov$ (斯拉夫诺夫)算符

$$s = \omega^A \delta_A \phi^r \frac{\delta_L}{\delta \phi^r} - \frac{1}{2} \omega^B \omega^C f^A_{BC} \frac{\delta_L}{\delta \omega^A} - h^A \frac{\delta_L}{\delta \omega^{*A}}. \quad (15.8.9)$$

在方程(15.8.9)中, 下标 $L$ 代表左微分, 它的定义满足如果 $\delta F = \delta \chi G$ , 那么 $\delta_L F / \delta \chi = G$ , 而 $f^A_{BC}$ 是对易关系中所出现的结构常数<sup>††</sup>

$$[\delta_B, \delta_C] = f^A_{BC} \delta_A. \quad (15.8.10)$$

$f^A_{BC}$ 在非阿贝尔规范理论和弦理论中是场无关的, 尽管不总是这样, 但BRST形式理论没有限制在这一情形中. 直接的计算给出

$$\begin{aligned} s^2 = & \frac{1}{2} \omega^A \omega^B \left[ \delta_A \phi^s \frac{\delta_L(\delta_B \phi^r)}{\delta \phi^s} - \delta_B \phi^s \frac{\delta_L(\delta_A \phi^r)}{\delta \phi^s} - f^C_{AB} \delta_C \phi^r \right] \frac{\delta_L}{\delta \phi^r} \\ & - \frac{1}{2} \omega^B \omega^C \omega^D \left[ f^E_{BC} f^A_{DE} + \delta_D \phi^r \frac{\delta_L f^A_{BC}}{\delta \phi^r} \right] \frac{\delta_L}{\delta \omega^A}. \end{aligned} \quad (15.8.11)$$

因此, BRST变换是幂零变换的条件等价于对易关系(15.8.10), 再加上一个相容性条件

$$f^E_{[BC} f^A_{D]E} + \delta_{[D} \phi^r (\delta_L f^A_{BC]) / \delta \phi^r = 0, \quad (15.8.12)$$

其中, 下标中的括号代表对括号内的指标 $B, C$ 和 $D$ 做反对称化. 按照导出通常的Jacobi等式的方法, 方程(15.8.12)可以从对易关系(15.8.10)中导出, 对于含有场相关结构常数的对称性, 它取代了Jacobi等式.

为了证明变换(15.8.8)是 $I_{\text{NEW}}$ 的对称性, 我们注意到(回忆起 $\theta$ 与 $\omega^{*A}$ 反对易)方程(15.8.7)可以重写为

$$I_{\text{NEW}}[\phi, h, \omega, \omega^*] = I[\phi] - s(\omega^{*A} f_A). \quad (15.8.13)$$

因为BRST变换在场 $\phi$ 上的效果就是规范变换(15.8.1), 只不过其中的 $\epsilon^A$ 被换成了 $\theta \omega^A$ , 而 $\theta \omega^A$ 与所有的 $\phi^r$ 对易, 所以 $I[\phi]$ 项是BRST-不变的. 由于BRST变换是幂零的, 所以 $s(\omega^{*A} f_A)$ 项是BRST不变的.

由于几个原因, 我们需要考察一类更广的作用量, 这类作用要求在BRST变换(15.8.8)下不变, 但超出了Faddeev-Popov-De Witt方法所构建出的作用量的范围. 这些作用量给出了物理上合理的结果, 作为迈向证明该陈述的一步, 我们现在证明如下的普遍结果(在上一节使用过), 最普遍的鬼数为零的BRST-不变泛函是两项的和, 其中第一项仅是场 $\phi$ 的泛函, 而另一项由BRST算符 $s$ 作用在鬼数为 $-1$ 的任意泛函 $\Psi$ 上给出:

$$I_{\text{NEW}}[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + s\Psi[\phi, \omega, \omega^*, h], \quad (15.8.14)$$

Faddeev-Popov-De Witt作用量(15.8.13)就是其中的一个例子. 简言之, 构成BRST上同调的规范不变泛函 $I[\phi]$ 仅是场 $\phi^r$ 的泛函.

为了证明方程(15.8.14), 我们注意到BRST变换(15.8.8)—(15.8.9)并不改变 $h^A$ 场和 $\omega^{*A}$ 场的总数, 所以, 如果我们将 $I$ 展成 $I_N$ 项的级数, 其中 $I_N$ 包含总数为 $N$ 的 $h^A$ 场和 $\omega^{*A}$ 场, 那么在 $sI$ 中,  $N$ 不同的项之间不存在抵消, 所以每一项必须分别是BRST-不变的:

$$sI_N = 0. \quad (15.8.15)$$

<sup>††</sup>例如, 对于作用在物质场 $\psi(x)$ 上的规范变换, 我们有 $\delta_{\beta y} \psi(x) = i t_{\beta} \psi(x) \delta^4(x - y)$ , 因而 $\delta_{\beta y} \delta_{\gamma z} \psi(x) = -t_{\gamma} t_{\beta} \psi(x) \delta^4(x - y) \delta^4(x - z)$ . 因此, 在这一情况下, 我们有 $f^{\alpha}_{\beta \gamma} = C^{\alpha}_{\beta \gamma} \delta^4(x - y) \delta^4(x - z)$ .

我们接下来引入所谓的Hodge(霍奇)算符:

$$t \equiv \omega^{*A} \frac{\delta}{\delta h^A} . \quad (15.8.16)$$

可以直接验证反对易关系

$$\{s, t\} = -\omega^{*A} \frac{\delta_L}{\delta \omega^{*A}} - h^A \frac{\delta}{\delta h^A} . \quad (15.8.17)$$

那么, 用算符 $\{s, t\}$ 作用 $I_N$ 并利用方程(15.8.15)就给出了

$$stI_N = -NI_N , \quad (15.8.18)$$

所以, 除了 $I_0$ 外, 每个 $I_N$ 都是BRST-恰当的, 也就是说, 它可以写成算符 $s$ 作用其它某个泛函上. 因此, 完整的泛函 $I$ 可以写成 $I_0 + s\Psi$ 的形式, 其中

$$\Psi = - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{tI_N}{N} . \quad (15.8.19)$$

由定义可知 $I_0$ 独立于 $\omega^{*A}$ 和 $h^A$ , 并且, 既然我们假定了它的鬼数为零, 它也必须独立于 $\omega^A$ , 这正是所要证明的.

为了证明, 当规范固定泛函 $\Psi$ 的定义改变时, 物理矩阵元是不变的, 我们定义费米“荷” $Q$ , 使得任意算符 $\Phi$ 在BRST变换下的变化是

$$\delta_\theta \Phi = i[\theta Q, \Phi] = i\theta[Q, \Phi]_{\mp} \quad (15.8.20)$$

其中, 根据 $\Phi$ 是玻色的还是费米的, 分别在 $[x, y]_{\mp} \equiv xy \mp yx$ 使用上部的符号和下部的符号. 如同上一节, 这样, BRST变换的幂零性就告诉我们 $Q^2 = 0$ . 当且仅当物理态 $|\alpha\rangle$ 和 $\langle\beta|$ 满足

$$Q|\alpha\rangle = \langle\beta|Q = 0 , \quad (15.8.21)$$

规范不变算符在物理态之间的矩阵元才独立于 $\Psi$ 的选择, 这一条件又一次告诉我们, 物理上可分辨的物理态与 $Q$ 的上同调中的元素一一对应. 因此, 如果我们能找到某个 $\Psi$ , 就像Yang-Mills理论中的轴向规范, 使得在这个规范下鬼场不与其它场相互作用, 那么对于任意的规范固定泛函 $\Psi$ , 广义BRST-不变作用量(15.8.14)就会产生物理上合理的结果. 如果 $\Psi$ 的这无一鬼(ghost-free)选择对于实际运算而言并不方便, 就像轴向规范由于违反了Lorentz不变性而不方便, 我们可以选择任何我们想要的规范固定泛函 $\Psi$ , 并依旧可以确信, 当初态和末态没有鬼时, 存在么正的 $S$ -矩阵.

这一方法在弦论中运作良好, 在弦论中, 所谓的光锥量子化发挥了轴向规范的作用. 但在其它理论中, 例如广义相对论, 无法选择一个坐标系使得鬼场退耦. 这样的理论可以用上一节末尾所描述的BRST-量子化方法进行处理, 用BRST-不变性证明 $S$ -矩阵在无鬼的物理Hilbert空间中是么正的.

发现<sup>17</sup>“反-BRST”对称<sup>18</sup>下的不变性表明了, 除去表象, 在 $\omega^A$ 和 $\omega^{*A}$ 的角色之间有相似之处, 而这两个场的角色依旧保持着些许神秘.

## 15.9 Batalin-Vilkovisky形式理论\*

这一节将会描述一个强有力的形式理论, 它被大家称为Batalin-Vilkovisky<sup>19</sup>方法. 它是在拉格朗日框架下发展起来的, 但是它根植于更早的Batalin-Fradkin-Vilkovisky形式理论,<sup>20</sup> 而这一形式理论是在哈密顿框架下导出的. (在微扰论的意义下, 已经证明这两种方案是等价的.<sup>21</sup>) 我们会在17.1节看到, 为了处理规范理论的重整化, Zinn-Justin<sup>22</sup>(齐恩-朱斯坦)甚至在此之前就发展了同样的形式机制. 至少有如下三个方面证明这一形式理论的价值是无可估量的:

(i) 直到现在, 我们所考察的仅是不可约系统, 并且它的代数在方程(15.8.10)的意义下封闭. 在某些理论中, 例如超引力(没有辅助场),<sup>23</sup> 代数是开的: 仅当场方程成立时, 代数才是封闭的, 这使得方程(15.8.10)中会出现正比于 $\delta I/\delta\chi^n$ 的项. 这样, 在相容性条件(15.8.12)中也会出现类似的项. 那么, 方程(15.8.11)就表明了 $s^2$ 在这样的理论中并不为零, 而是等于导数 $\delta I/\delta\chi^n$ 的线性组合. 我们会在这一节看到, Batalin-Vilkovisky方法使得我们能够处理非常宽泛的规范理论, 这些理论中包含那些有着开规范对称代数或者可约规范对称代数的理论.

(ii) 就像上面所提及的, Batalin-Vilkovisky形式理论的重要方面就在于, 它原本是Zinn-Justin为证明规范理论的可重整性而发展的. 其中的关键点是, 尽管背景场中所有单粒子不可约图的和不服从原始作用量的BRST对称性, 但是它共享了作用量的关键性质之一, 即称为主方程的性质, 我们将在17.1节对其进行阐述.

(iii) Batalin-Vilkovisky方法提供了一个方便的技巧用以分析量子效应所造成的作用量对称性的可能破坏. 由于这个原因, 它将用于22.6节.

Batalin-Vilkovisky形式理论的出发点是对于理论中的每个场引入所谓的“反场”, 我们令 $\chi^n$ 取遍所有的场 $\phi^r$ ,  $\omega^A$ ,  $\omega^{*A}$ 和 $h^A$ , 并对每一个 $\chi^n$ , 我们引入外反场 $\chi_n^\dagger$ , 它与BRST-变换后的场 $s\chi^n$ 有着相同的玻色统计或费米统计, 但鬼数相反. 即,  $\chi_n^\dagger$ 与 $\chi^n$ 有着相反的统计, 但它的鬼数等于 $-\text{gh}(\chi^n) - 1$ , 其中 $\text{gh}(\chi^n)$ 是 $\chi^n$ 的鬼数. 在最简单的情况下, 包括Yang-Mills理论和量子引力, 要给原始规范不变作用量 $I[\phi]$ 添加反场 $\chi_n^\dagger$ 与 $s\chi^n$ 相耦合的一项, 这给出了作用量.

$$S[\chi, \chi^\dagger] \equiv I[\phi] + (s\chi^n)\chi_n^\dagger. \quad (15.9.1)$$

它满足所谓的主方程(*master equation*)

$$0 = \frac{\delta_R S}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L S}{\delta \chi^n}, \quad (15.9.2)$$

其中“ $R$ ”和“ $L$ ”在这里代表右微分和左微分. 为了验证它, 注意到方程(15.9.2)中反场的零阶项正好给出规范不变性条件

$$0 = (s\phi^r) \frac{\delta_L I}{\delta \phi^r} = \omega^A \delta_A I[\phi], \quad (15.9.3)$$

而反场 $\phi_n^\dagger$ 的线性项提供了幂零条件:

$$0 = (s\chi^m) \frac{\delta_L (s\chi^n)}{\delta \chi^m} = s^2 \chi^n. \quad (15.9.4)$$

\*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

\*\*在这里使用符号 $\dagger$ 而不是最通常的 $*$ , 是为了强调它与复共轭或电荷共轭无关. 特别地, 反鬼场 $\omega^{*A}$ 与鬼场 $\omega^A$ 的反场 $\omega_A^\dagger$ 并不相同.



$\chi_n^\dagger$ 是外场, 在用 $S[\chi, \chi^\dagger]$ 计算 $S$ -矩阵之前, 我们必须赋予它合适的值. 由于这个原因, 我们引入一个任意的费米泛函 $\Psi[\chi]$ , 它的鬼数为 $-1$ , 并令<sup>†</sup>

$$\chi_n^\dagger = \frac{\delta \Psi[\chi]}{\delta \chi^n}. \quad (15.9.5)$$

这样, 方程(15.9.1)就变成

$$S[\phi, \delta \Psi / \delta \chi] = I[\phi] + (s \chi^n) \delta \Psi[\chi] / \delta \chi^n = I[\phi] + s \Psi[\chi]. \quad (15.9.6)$$

与方程(15.8.14)相比较表明它与规范固定泛函 $I_{\text{NEW}}[\chi]$ 是相同的. 因此, 利用与上一节相同的讨论可以得出这样的结论: 物理矩阵元不被 $\Psi$ 的微小变化所影响. Faddeev-Popov-De Witt方法构建的作用量(15.8.7)对应于选择 $\Psi = -\omega^{*A} f_A$ , 这意味着 $\phi_r^\dagger = \omega^{*A} \delta f_A / \delta \phi^r$ ,  $\omega_C^\dagger = 0$ , 以及 $\omega_A^{*\dagger} = -f_A$ .

迄今为止, 并没有建立任何新的东西. 第一个创新点是, 通过令 $S[\chi, \chi^\dagger]$ 是反场 $\chi_n^\dagger$ 的非线性泛函, 主方程(15.9.2)可以用于更广泛的理论. (对于可约理论, 就像上一节所讨论的那样, 对于 $\chi^n$ 中的鬼场, 我们要引入鬼场的鬼场, 以及相应的反场.) 像之前一样, 我们取 $\chi_n^\dagger$ 的统计为与 $\chi^n$ 相反的统计, 并令它的鬼数等于 $-\text{gh}(\chi^n) - 1$ , 并且我们要求 $S[\chi, \chi^\dagger]$ 是鬼数为零的玻色算符. 因为 $\omega^{*A}$ 和 $h_A$ 有着线性BRST变换, 所以影响其它 $\chi^n$ 的复杂性不会影响 $\omega^{*A}$ 和 $h_A$ (在这一点上, 可参看16.4节), 所以它们和它们的反场进入作用量 $S[\chi, \chi^\dagger]$ 的方式与它们进入方程(15.9.1)的方式相同. 即,

$$S = S_{\min}[\phi, \omega, \phi_r^\dagger, \omega^\dagger] - h^A \omega_A^{*\dagger}, \quad (15.9.7)$$

其中 $\phi_r^\dagger$ ,  $\omega_A^\dagger$ 和 $\omega_A^{*\dagger}$ 是 $\phi^r$ ,  $\omega^A$ 和 $\omega^{*A}$ 的反场, 它们的鬼数分别是 $-1$ ,  $-2$ 和 $0$ . (15.9.7)中的最后一项对主方程没有任何影响, 所以 $S_{\min}$ 凭借自身满足主方程.<sup>††</sup>

因为 $S_{\min}$ 的鬼数为零, 它的反场级数展开必须采取如下的形式

$$\begin{aligned} S_{\min} = & I[\phi] + \omega^A f_A^r[\phi] \phi_r^\dagger + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B f_{AB}^C[\phi] \omega_C^\dagger \\ & + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B f_{AB}^{rs}[\phi] \phi_r^\dagger \phi_s^\dagger + \omega^A \omega^B \omega^C f_{ABC}^D[\phi] \phi_r^\dagger \omega_D^\dagger \\ & + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B \omega^C \omega^D f_{ABCD}^{EF}[\phi] \omega_E^\dagger \omega_F^\dagger + \cdots \end{aligned} \quad (15.9.8)$$

主方程(15.9.2)中反场的零阶项(因而也就是 $\omega^A$ 的一阶项)给出

$$0 = f_A^r[\phi] \frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi^r}, \quad (15.9.9)$$

这正是说 $I[\phi]$ 在如下变换下不变

$$\phi^r \rightarrow \phi^r + \epsilon^A f_A^r[\phi], \quad (15.9.10)$$

其中 $\epsilon^A$ 是任意的无限小量. 主方程中右正比于 $\phi_s^\dagger$ 并左正比于 $\omega^A \omega^B$ 的项给出

$$\begin{aligned} 0 = & f_A^r[\phi] \frac{\delta f_B^s[\phi]}{\delta \phi^r} - f_B^r[\phi] \frac{\delta f_A^s[\phi]}{\delta \phi^r} + f_{AB}^C[\phi] f_C^s[\phi] \\ & + \frac{\delta I[\phi]}{\delta \phi^r} f_{AB}^{rs}[\phi], \end{aligned} \quad (15.9.11)$$

<sup>†</sup>在这里没有必要区分左微分和右微分, 这是因为 $\chi^n$ 或 $\delta \Psi / \delta \chi^n$ 中必有一个是玻色的.

<sup>††</sup>场 $\phi^r$ ,  $\omega^A$ ,  $\phi_r^\dagger$ ,  $\omega_A^\dagger$ 有时被称为最小变量(*minimal variables*), 而像 $\omega^{*A}$ 和 $h_A$ 这样的场, 它们和它们的反场以双线性的方式进入作用量, 就像方程(15.9.7)中那样, 它们被称为平庸对(*trivial pairs*).

当场方程 $\delta I/\delta\phi = 0$ 成立时, 这变成了变换(15.9.10)的对易关系(结构常数为 $f^C_{AB}[\phi]$ ). 主方程中反场的其它线性项左正比于 $\omega^A\omega^B\omega^C$ 并右正比于 $\omega^\dagger_D$ , 它给出

$$0 = f^r_{[A}[\phi] \frac{\delta f^D_{BC]}[\phi]}{\delta\phi^r} - f^E_{[AB}[\phi] f^D_{C]E}[\phi] + f^{rD}_{ABC}[\phi] \frac{\delta I[\phi]}{\delta\phi^r}, \quad (15.9.12)$$

其中方括号代表对括号内的指标 $A, B$ 和 $C$ 做反对称化. 当场方程成立时, 这变成广义Jacobi等式(15.8.12). 为了对称性条件(15.9.9)(假定 $f^r_A$ 构成规范对称性的完备基)的相容性, 方程(15.9.11)是必须的, 而为了对易关系(15.9.11)的相容性, 方程(15.9.12)又是必须的. 注意到, 方程(15.9.11)和(15.9.12)中正比于 $\delta I[\phi]/\delta\chi$ 的那些项, 它们来源于 $S_{\min}$ 中反场的二次项, 由于它们正比于 $\delta I[\phi]/\delta\chi$ , 所以当场方程成立时, 它们为零, 并且在这一意义下, 它们是开对称性代数的特征. 主方程中反场的二阶项或更高阶项包含了 $S_{\min}$ 中反场的三阶项和/或更高阶项, 这提供了方程(15.9.11)和(15.9.12)的相容性条件, 相容性条件的相容性条件, 等等. Batalin-Vilkovisky形式理论的优点之一正是把所有这些相容性条件全部并入一个主方程中.

主方程可以重新解释为 $S$ 在广义BRST变换下不变的陈述. 为了看到这一点, 并为了将来做准备, 引入一种称为反括号(*antibracket*)的形式工具将是非常有帮助的. 现在回到我们上一节的记号, 两个一般泛函 $F[\chi, \chi^\dagger]$ 和 $G[\chi, \chi^\dagger]$ 的反括号定义为

$$(F, G) \equiv \frac{\delta_R F}{\delta\chi^n} \frac{\delta_L G}{\delta\chi_n^\dagger} - \frac{\delta_R F}{\delta\chi_n^\dagger} \frac{\delta_L G}{\delta\chi^n}. \quad (15.9.13)$$

注意到, 像 $S$ 这样的玻色泛函, 它对玻色变量或费米变量的右泛函导数和左泛函导数分别等于彼此或等于彼此的倒数. 既然 $\chi_n^\dagger$ 和 $\chi^n$ 总是一个玻色的而另一个是费米的, 由此得出, 对于反括号 $(S, S)$ , 如果我们逆转左微分和右微分, 方程(15.9.13)右边第二项会改变符号

$$\frac{\delta_R S}{\delta\chi_n^\dagger} \frac{\delta_L S}{\delta\chi^n} = -\frac{\delta_L S}{\delta\chi_n^\dagger} \frac{\delta_R S}{\delta\chi^n} = -\frac{\delta_R S}{\delta\chi^n} \frac{\delta_L S}{\delta\chi_n^\dagger}.$$

(最后一步之所以成立是因为, 这里有一个因子是玻色的, 进而它们的次序是无关紧要的.) 我们看到, 对于 $(S, S)$ , 方程(15.9.13)右边第二项是第一项的倒数. 因此, 主方程可以写成要求 $S$ 与其自身的反括号为零:

$$(S, S) = 0. \quad (15.9.14)$$

这是不平庸的要求, 因为反括号有一般的对称性质

$$(F, G) = \pm(G, F), \quad (15.9.15)$$

其中, 当 $F$ 和 $G$ 都是玻色时, 符号取+1, 否则取-1. 特别地, 如果 $F$ 是费米的,  $(F, F)$ 自动为零, 但如果 $F$ 是玻色的, 就不会这样.

广义BRST变换定义为

$$\hat{\delta}_\theta \chi^n = \theta \frac{\delta_R S}{\delta\chi_n^\dagger} = -\theta(S, \chi^n), \quad (15.9.16)$$

$$\hat{\delta}_\theta \chi_n^\dagger = -\theta \frac{\delta_R S}{\delta\chi^n} = -\theta(S, \chi_n^\dagger). \quad (15.9.17)$$

其中 $\theta$ 是无限小的费米参量. (当 $S$ 的形式为(15.9.1)时,  $\chi$ 的变换与原始BRST变换 $\hat{\delta}_\theta \chi^n = \theta s \chi^n$ 相同.) 为了计算这一变换在一般泛函上的效果, 我们注意到反括号像导数一样作用, 也就是说

$$(F, GH) = (F, G)H \pm G(F, H), \quad (15.9.18)$$

其中, 如果 $G$ 是费米的而 $F$ 是玻色的, 那么符号取 $-1$ , 否则取 $+1$ . 如果 $G$ 和 $H$ 是 $\chi$ 和 $\chi^\dagger$ 的任意泛函并满足 $\hat{\delta}_\theta G = -\theta(S, G)$ 和 $\hat{\delta}_\theta H = -\theta(S, H)$ , 那么

$$\hat{\delta}_\theta(GH) = -\theta(S, G)H - G\theta(S, H) = -\theta[(S, G)H \pm G(S, H)] ,$$

其中, 根据 $G$ 是玻色的或费米的, 符号分别取 $+$ 或 $-$ . 令方程(15.9.18)中的 $F$ 等于玻色泛函 $S$ , 那么我们就看到

$$\hat{\delta}_\theta(GH) = -\theta(S, GH) .$$

再加上方程(15.9.16)和(15.9.17), 这表明, 对于任意的泛函 $F$ , 如果它能变形成场与反场的乘积之和, 那么

$$\hat{\delta}_\theta F = -\theta(S, F) . \quad (15.9.19)$$

主方程(15.9.14)可以解释为如下的陈述, 这些广义BRST变换使得 $S$ 不变

$$\hat{\delta}_\theta S = -\theta(S, S) = 0 . \quad (15.9.20)$$

就像原始的BRST变换, 这一对称变换是幂零的. 为了看到这一点, 我们使用反括号的Jacobi恒等式

$$\pm (F, (G, H)) + \text{轮换} = 0 , \quad (15.9.21)$$

其中, 如果 $F$ 和 $H$ 是玻色的, 第一项的符号为 $-$ , 否则为 $+$ , 对 $F, G$ 和 $H$ 的其它两个轮换取相应的符号. 取 $F = G = S$ , 方程(15.9.21)变成

$$0 = \mp (S, (S, H)) \mp (H, (S, S)) - (S, (H, S)) = \mp 2(S, (S, H)) \mp (H, (S, S)) ,$$

其中, 如果 $H$ 是玻色的, 符号取 $-$ , 如果 $H$ 是费米的, 符号取 $+$ . 这样, 主方程(15.9.14)就给出了幂零条件

$$(S, (S, H)) = 0 . \quad (15.9.22)$$

由于这一对称性, 主方程的解是不唯一的. 例如, 方程(15.9.22)表明对于任何给定的解 $S$ , 我们能够发现另一解, 该解由如下的无限小变换给出

$$S' = S + (\delta F, S) , \quad (15.9.23)$$

其中 $\delta F$ 是 $\chi$ 和 $\chi^\dagger$ 的无限小泛函, 为了使 $S'$ 是玻色的且鬼数为零,  $\delta F$ 必须是费米的且鬼数为 $-1$ , 除这些要求外, 它是任意的. 特别地, 取 $\delta F$ 为费米泛函 $\epsilon\Psi$ , 使它仅是 $\chi^n$ 的泛函, 这样就给出

$$S'[\chi, \chi^\dagger] = S[\chi, \chi^\dagger] + \epsilon \frac{\delta\Psi[\chi]}{\delta\chi^n} \frac{\delta_R S}{\delta\chi_n^\dagger} = S \left[ \chi, \chi^\dagger + \epsilon \frac{\delta\Psi}{\delta\chi} \right] . \quad (15.9.24)$$

这些无限小变换可以被平庸地积掉, 进而表明, 如果我们将反场偏移至新的变量 $\chi_n^{\dagger'} \equiv \chi_n^\dagger - \delta\Psi/\delta\chi^n$ , 主方程依旧是满足的.

变换(15.9.23)是通常所说的正则变换的一个特殊情况, 在这里为了与第7章的正则变换相区分, 称其为“反正则变换”. 反正则变换是场和反场的任意变换, 它可以是有限小或无限小的, 但它保持如下的基本反括号关系不变:

$$(\chi^n, \chi_m^\dagger) = \delta_m^n , \quad (\chi^n, \chi^m) = (\chi_n^\dagger, \chi_m^\dagger) = 0 . \quad (15.9.25)$$



例如, 考察由无限小费米算符 $\delta F$ 生成的无限小反正则变换, 在该变换下, 任何的玻色泛函或费米泛函 $G$ 变换到

$$G \rightarrow G' = G + (\delta F, G). \quad (15.9.26)$$

可以很容易证明这确实不改变基本反括号(15.9.25). 由于这一原因, 注意到两个泛函 $G$ 和 $H$ 的反括号变换到 $(G', H')$ , 它到一阶无限小是

$$(G', H') = (G, H) + ((\delta F, G), H) + (G, (\delta F, H)).$$

利用Jacobi恒等式(15.9.21), 这变成

$$(G', H') = (G, H) \pm (\delta F, (G, H)), \quad (15.9.27)$$

其中, 如果 $G$ 和 $H$ 都是玻色的, 符号取+, 否则取-. 特别地, 如果 $(G, H)$ 是c-数, 那么它在反正则变换下不变. (这是证明变换(15.9.23)保持主方程不变的另一方法.) 场和反场的反括号(15.9.25)是c-数, 所以对于变换后的场和反场, 它们的反括号必须有相同的c-数.

为了计算 $S$ -矩阵, 我们必须赋予反场确定的值. 正如闭规范代数的简单情况, 在那里 $S$ 是(15.9.5)的线性形式, 通过取形式为(15.9.5)中的反场, 我们可以计算出 $S$ -矩阵; 即, 我们利用“规范固定”作用量

$$I_\Psi[\chi] = S \left[ \chi, \frac{\delta \Psi[\chi]}{\delta \chi} \right] \quad (15.9.28)$$

计算 $S$ -矩阵, 其中 $\Psi[\chi]$ 是鬼数为-1的费米泛函. 根据方程(15.9.24)后面的评述, 这相当于取正则变换后的反场 $\chi^\dagger$ 为零.

当BRST变换仅作用在场 $\chi^n$ 上时:

$$\delta_\theta \chi^n = \theta s \chi^n, \quad \text{其中} \quad s \chi^n = \left( \frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta \Psi / \delta \chi}, \quad (15.9.29)$$

在这一变换下, 规范固定作用量不变. 为了验证这点, 注意到

$$\begin{aligned} s I_\Psi[\chi] &= \left( \frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi_n^\dagger} \frac{\delta_L S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi^n} \right)_{\chi^\dagger = \delta \Psi / \delta \chi} \\ &+ \left( \frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi_m^\dagger} \frac{\delta_L^2 \Psi[\chi]}{\delta \chi^m \delta \chi^n} \frac{\delta_L S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta \chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta \Psi / \delta \chi}. \end{aligned}$$

右边的第一项是主方程的结果, 因而为零, 而第二项由于被加数关于 $m$ 和 $n$ 是反对称<sup>‡</sup>的, 所以为零.

对于闭代数且形式为(15.9.1)的 $S$ , 变换(15.9.29)是原始的BRST变换 $\delta_\theta \chi^n = \theta s \chi^n$ . 但对于一般的开代数, 变换(15.9.29)并不与原始BRST变换相同, 并且, 一般而言, 除非场方程被满足, 它甚至不是幂零的. 诚然, 从主方程中偏移场 $\chi_n^\dagger = \chi_n^\dagger - \delta \Psi[\chi] / \delta \chi^n$ 的一阶项中, 我们发现

$$s^2 \chi^m = \mp \left( \frac{\delta_L}{\delta \chi_m^\dagger} \frac{\delta_R}{\delta \chi_n^\dagger} I[\chi, \chi^\dagger] \right)_{\chi^\dagger = \delta \Psi / \delta \chi} \frac{\delta I_\Psi[\chi]}{\delta \chi^n}, \quad (15.9.30)$$

<sup>‡</sup>若 $\chi^n$ 和 $\chi^m$ 都是玻色的, 这是因为 $\delta S / \delta \chi^n$ 和 $\delta S / \delta \chi^m$ 反对易. 若 $\chi^n$ 和 $\chi^m$ 中一个是玻色的而另一个是费米的, 这是因为 $S$ 对费米的 $\chi$ 的右导数和左导数符号相反. 若 $\chi^n$ 和 $\chi^m$ 都是费米的, 由于对于这些项,  $\delta_L^2 \Psi / \delta \chi^m \delta \chi^n$ 是反对称的, 所以该项是反对称的.

其中, 根据 $\chi^m$ 是玻色的还是费米的, 符号反别是 $-$ 和 $+$ . 再一次, 我们看到开代数对场方程特征的相关性与 $S$ 中反场的二次项相联系.

直到现在, 我们所考察的仅是基于开规范代数或闭规范代数的经典理论的公式化. 现在, 我们必须考虑如何在这种理论中做量子力学计算. 物理矩阵元可以通过含有权重为 $\exp(iI_\Psi[\chi])$ 的泛函积分算出, 其中, 就像前面所解释的那样,  $I_\Psi[\chi]$ 是通过令 $\chi_n^\dagger = \delta\Psi[\chi]/\delta\chi^n$ 从 $S[\chi, \chi^\dagger]$ 中获得的, 换句话说, 是通过令 $\chi_n^{\dagger'} = 0$ 获得的. 我们希望计算 $\Psi[\chi]$ 的变化在这些矩阵元上的效应. 首先考察真空-真空期望值

$$Z_\Psi = \int \left[ \prod d\chi \right] \exp(iI_\Psi[\chi]) . \quad (15.9.31)$$

在 $\Psi[\chi]$ 的偏移 $\delta\Psi[\chi]$ 下, 它的变化是

$$\delta Z = i \int \left[ \prod d\chi \right] \exp(iI_\Psi[\chi]) \left( \frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} \left( \frac{\delta(\delta\Psi[\chi])}{\delta\chi^n} \right) . \quad (15.9.32)$$

在场空间中分部积分, 这变成

$$\begin{aligned} \delta Z = & \int \left[ \prod d\chi \right] \exp(iI_\Psi[\chi]) \\ & \times \left\{ \frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi_n^\dagger} \frac{\delta_L I_\Psi[\chi]}{\delta\chi^n} - i\Delta S[\chi, \chi^\dagger] \right\}_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} \delta\Psi[\chi] , \end{aligned} \quad (15.9.33)$$

其中

$$\Delta \equiv \frac{\delta_R}{\delta\chi_n^\dagger} \frac{\delta_L}{\delta\chi^n} . \quad (15.9.34)$$

我们看到, 一般而言,  $\Phi$ 与真空-真空振幅无关的条件不是主方程(15.9.2), 而是所谓的量子主方程

$$(S, S) - 2i\Delta S = 0 \quad \text{在} \quad \chi^\dagger = \delta\Phi/\delta\chi . \quad (15.9.35)$$

在cgs单位制<sup>c</sup>中, 伴随每个 $S[\chi, \chi^\dagger]$ 因子, 都会有因子 $1/\hbar$ , 所以在方程(15.9.35)的第二项中, 系数 $-2i$ 要被换成 $-2i\hbar$ . 因此, 无论量子主方程(15.9.35)是在何时成立的,  $S$ 中 $\hbar$ 的零阶项满足原始主方程(15.9.2). 通常情况下, 构建一个满足经典主方程的作用量是很容易的, 这使得方程(15.9.35)中的第一项为零, 这样一来, 问题就变成是否第二项也为零. 在第22章, 关于反常的讨论中, 我们会考察定域作用量不满足量子主方程的情况.

假定量子主方程(15.9.35)是满足的,  $\Psi$ 的变化 $\delta\Psi$ 所引起的算符 $\mathcal{O}[\chi]$ 的真空期望值的变化是

$$\delta\langle\mathcal{O}\rangle = \frac{-i}{Z_\Psi} \int \left[ \prod d\chi \right] \exp(iI_\Psi[\chi]) \frac{\delta_R \mathcal{O}[\chi]}{\delta\chi^n} \left( \frac{\delta_R S[\chi, \chi^\dagger]}{\delta\chi_n^\dagger} \right)_{\chi^\dagger = \delta\Psi/\delta\chi} \delta\Psi[\chi] . \quad (15.9.36)$$

在方程(15.9.36)的被积函数中, 指数的系数正是 $s\mathcal{O}[\chi]$ . 我们看到, 对于在广义BRST变换(15.9.16)—(15.9.17)下不变的算符,<sup>††</sup> 它们的真空期望值不被规范固定泛函 $\Psi$ 的变化所影响. 对于两个或多个算符的真空期望值, 相对应的结果同样成立.

<sup>††</sup>对于开规范理论, 一般而言, 除了常数以外, 没有在变换(15.9.16)—(15.9.17)下不变的算符. 取而代之, 应该考虑的是在幂零的“量子BRST算符” $\sigma$ 下不变的算符 $\mathcal{O}(\chi, \chi^\dagger)$ , 其中 $\sigma$ 定义为 $\sigma\mathcal{O} = (\mathcal{O}, S) - i\Delta\mathcal{O}$ . 对于仅依赖于 $\chi$ 的 $\mathcal{O}$ , 这一条件退化至方程(15.9.36). 如果 $\sigma\mathcal{O} = 0$ , 那么规范固定函数 $\Psi$ 的微小变换不会影响 $\mathcal{O}(\Psi, \delta\Psi/\delta\chi)$ 的期望值.<sup>24</sup>

<sup>c</sup>即厘米-克-秒(Centimeter-Gram-Second)单位制. —译者注

## 附录A 关于Lie代数的一个定理

在这个附录中, 我们所考察的是一般的Lie代数 $\mathcal{G}$ , 生成元为 $t_\alpha$ , 结构常数为 $C^\alpha_{\beta\gamma}$ , 并将证明如下3个条件的等价性:

**a:** 存在一个实的对称正定矩阵 $g_{\alpha\beta}$ , 其满足不变性条件

$$g_{\alpha\beta}C^\beta_{\gamma\delta} = -g_{\gamma\beta}C^\beta_{\alpha\delta}. \quad (15.A.1)$$

(这正是在15.2节中证明的物理背景所需要的条件(15.2.4).)

**b:** 该Lie代数存在一组基(即, 一组生成元 $\tilde{t}_\alpha = \mathcal{S}_{\alpha\beta}t_\beta$ , 其中 $\mathcal{S}$ 是非奇异的实矩阵), 使得这组基的结构常数 $\tilde{C}^\alpha_{\beta\gamma}$ 不仅对于下指标 $\beta$ 和 $\gamma$ 是反对称的, 并且对于全部3个指标 $\alpha$ ,  $\beta$ 和 $\gamma$ 是全反对称的.

**c:** Lie代数 $\mathcal{G}$ 是相互交换的紧致单纯子代数与 $U(1)$ 子代数的直和, 记为子代数 $\mathcal{H}_m$ 的直和.

我们将通过证明**a**推出**b**, **b**推出**c**, 以及**c**推出**a**的方式来证明陈述**a**, **b**和**c**的等价性. 作为中间的一个副产品, 我们也将证明, 如果这些条件被满足了, 那么能够选出 $\mathcal{G}$ 的一组基 $t_{ma}$ , 其中 $m$ 标记 $t_{ma}$ 所属的单纯或 $U(1)$ 子代数 $\mathcal{H}_m$ ,  $a$ 标记该子代数下的个体生成元, 使得满足方程(15.A.1)的矩阵采取形式

$$g_{ma,nb} = g_m^{-2}\delta_{mn}\delta_{ab}, \quad (15.A.2)$$

其中 $g_m^{-2}$ 是任意的正实数.

首先, 我们假定**a**, 即存在满足不变性条件(15.A.1)的实对称正定矩阵 $g_{\alpha\beta}$ . 那么, 我们就可以定义新的生成元

$$\tilde{t}_\alpha \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\beta}t_\beta, \quad (15.A.3)$$

其中实的逆平方根矩阵 $g^{-1/2}$ 的存在性由 $g_{\alpha\beta}$ 的正定性保证. 这些生成元满足Lie代数

$$[\tilde{t}_\alpha, \tilde{t}_\beta] = i\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}\tilde{t}_\gamma, \quad (15.A.4)$$

其中

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv (g^{-1/2})_{\alpha\alpha'}(g^{-1/2})_{\beta\beta'}(g^{+1/2})_{\gamma\gamma'}C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}. \quad (15.A.5)$$

(在这一基下, 不再区分上下标 $\alpha$ ,  $\beta$ 等将是方便的, 取代 $\tilde{C}^\gamma_{\alpha\beta}$ , 写成 $\tilde{C}_{\gamma\alpha\beta}$ .) 那么, 方程(15.A.1)就告诉我们 $\tilde{C}_{\alpha\gamma\delta}$ 关于 $\alpha$ 和 $\gamma$ 是反对称的并且关于 $\gamma$ 和 $\delta$ 也是反对称的, 进而是全反对称的, 证明了**b**.

接下来, 我们假定**b**, 即存在Lie代数的一组基使得结构常数是全反对称的. 在这一基下, 伴随表示的矩阵 $(\tilde{t}^A_\alpha)_{\beta\gamma} \equiv -i\tilde{C}_{\beta\gamma\alpha}$ 是纯虚且全反对称的, 因而是厄米的. 根据关于厄米矩阵的一般定理,\*  $\tilde{t}^A_\alpha$ 要是不可约的, 要是完全可约的.

一组不可约的 $N \times N$ 矩阵 $\tilde{t}^A_\alpha$ 是指, 对于这组矩阵不存在维数 $< N$ 的子空间, 使得该子空间在所有的 $\tilde{t}^A_\alpha$ 作用下不变——即, 不存在一组个数小于 $N$ 的非零矢量 $(u_r)_\beta$ , 使得对于每一 $\alpha$ 和 $r$ ,

\*如果一组矩阵 $H_\alpha$ 的一组基不是不可约的, 那么由定义可知, 必存在一组矢量 $u_n$ , 它们张开了一个子空间(不是整个空间), 使得这个子空间在 $H_\alpha$ 的作用下不变: 即, 对于所有的 $\alpha$ 和 $n$ ,  $H_\alpha u_n = \sum_m (C_\alpha)_{mn} u_m$ . 在这一情况下, 我们可以取矢量 $u_n$ 以及矢量 $v_k$ 构成一个基, 其中 $v_k$ 张开的空间正交于所有 $u_n$ . 如果 $H_\alpha$ 是厄米的, 那么 $(u_n, H_\alpha v_k) = \sum_m (C_\alpha)^*_{mn} (u_m, v_k) = 0$ , 所以由 $v_k$ 张开的空间在 $H_\alpha$ 也是不变的:  $H_\alpha v_k = \sum_\ell (D_\alpha)_{\ell k} v_\ell$ . 在这一基下, 矩阵 $H_\alpha$ 可以同时约化至分块对角形式:

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} C_\alpha & 0 \\ 0 & D_\alpha \end{pmatrix}.$$

以这种方式继续下去, 我们可以完全地将矩阵 $H_\alpha$ 约化至每个分块矩阵都不可约的分块对角形式.

$(\tilde{t}^A_\alpha)_{\beta\gamma}(u_r)_\gamma$ 是矢量 $(u_s)_\beta$ 的线性组合. 既然矩阵 $(\tilde{t}^A_\alpha)_{\beta\gamma}$ 正比于这组基下的结构常数, 这等价于陈述: 不存在一组线性组合 $\mathcal{T}_r \equiv (u_r)_\gamma \tilde{t}^A_\gamma$ , 使得它与所有 $\tilde{t}^A_\alpha$ 的对易子封闭, 即对于每一 $\alpha$ 和 $r$ ,  $[\tilde{t}^A_\alpha, \mathcal{T}_r]$ 是 $\mathcal{T}_s$ 的线性组合. 这样的矩阵 $\mathcal{T}_r$ 将构成整个Lie代数的一个不变子代数的生成元; 这种矩阵不存在意味着Lie代数是单纯的.

一组矩阵 $\tilde{t}^A_\alpha$ 完全可约是指, 通过选择合适的基, 它们可以写成分块对角的超矩阵

$$(\tilde{t}^A_\alpha)_{ma,nb} = [t^{A(m)}_\alpha]_{ab} \delta_{mn}, \quad (15.A.6)$$

其中子矩阵 $t^{A(m)}_\alpha$ 要么不可约要么为零.\*\* 对Lie代数本身也采用这组基, 那么结构常数就变成

$$\tilde{C}_{\ell c,ma,nb} = i(\tilde{t}^A_{\ell c})_{ma,nb} = i(t^{A(m)}_{\ell c})_{ab} \delta_{mn}. \quad (15.A.7)$$

但是, 既然它是全反对称的, 并正比于 $\delta_{mn}$ , 它必须也正比于 $\delta_{\ell n}$ 和 $\delta_{\ell m}$ :

$$\tilde{C}_{\ell c,ma,nb} = \delta_{\ell n} \delta_{\ell m} C_{cab}^{(\ell)}. \quad (15.A.8)$$

换句话说, 在这组基下, 对于Lie代数的任何表示 $t^{(m)}_a \equiv t_{ma}$ , 我们有

$$[t^{(m)}_a, t^{(m)}_b] = i \delta_{mn} C_{cab}^{(m)} t^{(m)}_c, \quad (15.A.9)$$

其中 $C_{cab}^{(m)}$ 是实的且关于指标 $a, b, c$ 反对称. 当我们说Lie代数是子代数 $t^{(m)}$ 的直和时, 我们是指, 能够找到一组基, 使得在这组基下, 生成元落入集合 $t^{(m)}$ 中, 并且一个集合内的生成元, 它们彼此之间的对易子有该集合内的生成元的线性组合给出, 并且一个集合内的所有生成元与所有其它集合内的所有生成元对易. 对于每一个 $m$ , 伴随表示 $t^{(m)A}$ 的矩阵的集合要么不可约要么为零, 分别对应于单独子代数或者由所谓的 $U(1)$ 生成元构成的子代数, 而后者与整个代数的所有生成元均对易.

因此, 我们证明了, 对于最一般的Lie代数, 若它的结构常数是全反对称的, 那么它是一个或多个单纯Lie代数和/或 $U(1)$ Lie代数的直和. 更进一步, 单纯子代数是紧致的, 也就是说, 每个矩阵 $-C_{acd}^{(m)} C_{bdc}^{(m)}$ 是正定的, 这是因为对于任意实矢量 $u_a$ ,  $-C_{acd}^{(m)} C_{bdc}^{(m)} u_a u_b = \sum_{cd} [\sum_a u_a C_{acd}^{(m)}]^2$ 是正量的和, 除非 $u_a = 0$ , 否则它不能为零, 既然对于 $u_a \neq 0$ , 条件 $\sum_a u_a C_{acd}^{(m)} = 0$ 将表明 $\sum_a u_a t^{(m)}_a$ 本身是一个不变阿贝尔子代数, 与 $t^{(m)}_a$ 构成单Lie代数的事实相矛盾. 这完成了 $\mathbf{c}$ 的证明.

最后, 我们假定 $\mathbf{c}$ , 即Lie代数是一组单纯Lie代数或 $U(1)$ Lie代数的直和; 也就是说, 在某个基 $t_a^{(m)} = \mathcal{S}_{ma,\alpha} t_\alpha$ 下, 其中 $\mathcal{S}$ 是实的且非奇异, 我们有

$$[t_a^{(m)}, t_b^{(m)}] = i \delta_{nm} C_{abc}^{(m)} t_c^{(m)},$$

其中每一子代数 $t^{(m)}$ 不是单纯的就与所有量均对易. 我们进一步假定单纯子代数是紧致的, 也就是说, 矩阵

$$g_{ab}^{(m)} \equiv -C_{acd}^{(m)} C_{bdc}^{(m)} \quad (15.A.10)$$

是正定的. 为了构建满足方程(15.A.1)的实正定矩阵 $g_{\alpha\beta}$ , 在生成元的基为 $t_{ma} = t_a^{(m)}$ 下, 我们取

$$g_{ma,nb} \equiv g_{ab}^{(m)} \delta_{mn}, \quad (15.A.11)$$

\*\*这里 $m$ 和 $n$ 用来标记沿着主对角的块, 而 $a$ 和 $b$ 标记这些块内的行和列. 另外,  $m$ 是不求和的, 且 $a, b$ 等指标的范围一般会依赖于 $m$ .

其中, 当 $t^{(m)}$ 是单纯子代数时,  $g_{ab}^{(m)}$ 取为矩阵(15.A.10), 而当 $t^{(m)}$ 是一个或多个 $U(1)$ 子代数的直和时,  $g_{ab}^{(m)}$ 取为任意的实对称正定矩阵. 由于每一个 $g_{ab}^{(m)}$ 是实对称正定矩阵, 那么矩阵(15.A.11)显然也是如此. 为了验证要求(15.A.1), 回忆结构常数的Jacobi恒等式:

$$C^{(m)c}_{ad}C^{(m)d}_{be} + C^{(m)c}_{bd}C^{(m)d}_{ea} + C^{(m)c}_{ed}C^{(m)d}_{ab} = 0 \quad (15.A.12)$$

然后与 $C^{(m)e}_{fc}$ 收缩. 重新命名第三项的指标, 使得 $c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c$ , 并使用方程(15.A.10), 在做了这些之后, 针对单纯子代数的结果可以写成

$$g_{df}^{(m)}C^{(m)d}_{ab} = C^{(m)c}_{ad}C^{(m)d}_{be}C^{(m)e}_{cf} - C^{(m)c}_{fd}C^{(m)d}_{be}C^{(m)e}_{ca}.$$

其中的关键点在于, 它表明左边关于 $a$ 和 $f$ 是全反对称的:

$$g_{df}^{(m)}C^{(m)d}_{ab} = -g_{da}^{(m)}C^{(m)d}_{fb}. \quad (15.A.13)$$

这一结果在 $U(1)$ 子代数中是平庸的, 在那里结构常数为零. 从方程(15.A.13)中就立刻得出了对称性条件(15.A.1), 因此完成了 $\mathbf{a}$ 的证明. 这样就完成了我们对陈述 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 相互等价的证明.

现在我们回到矩阵 $g_{\alpha\beta}$ . 有了全反对称的结构常数, 不变性条件(15.2.4)可以表示为如下的陈述, 矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 与Lie代数伴随表示中的所有矩阵均对易

$$[g, t^A_\gamma] = 0. \quad (15.A.14)$$

我们已经看到所有的 $(t^A_\gamma)_{\alpha\beta}$ 都可以变成分块对角的形式, 并且沿着主对角的是不可约子矩阵(或零矩阵). 那么, 一个著名的定理<sup>25</sup>会告诉我们,  $g_{\alpha\beta}$ 也必须是分块对角的, 且其中的块与 $t^A_\gamma$ 中的块有相同的大小和位置, 而且每一块中的子矩阵正比于单位矩阵. (若 $t^A_\gamma$ 中的两个矩阵是等价的, 也就是说这两个矩阵通过一个相似变换相关, 为了使 $g_{\alpha\beta}$ 的子矩阵变成正比于单位矩阵的形式, 可能就需要在那里对基做一个合适的变换.) 那么以方程(15.A.11)的记法, 矩阵就由方程(15.A.2)给出.

## 附录B Cartan目录

我们在这里不加证明的呈现出单Lie代数的全部目录, 它的最终形式是由E. Cartan给出的.<sup>26</sup> 这里所要呈现的是它们的“紧致”形式——即, 生成元可以被有限维厄米矩阵忠实表示. Lie代数的标记中含有下标 $n \geq 1$ , 这用来标记它们的“秩”(rank)——相互独立且交换的生成元的线性组合的个数.

$\mathbf{A}_n$ : 这是特殊么正群 $SU(n+1)$ 的代数, 特殊么正群 $SU(n+1)$ 是 $n+1$ 维中所有么正( $U^\dagger = U^{-1}$ )幺模( $\text{Det } U = 1$ )矩阵构成的群. 任何这样的矩阵, 只要它无限接近于单位元, 它可以表示成

$$U = 1 + iH,$$

其中无限小的 $H$ 满足条件

$$H^\dagger = H, \quad \text{Tr } H = 0,$$

所以 $\mathbf{A}_n$ 是 $n+1$ 维中所有无迹厄米矩阵的Lie代数. 任何一组相互交换的厄米矩阵可以同时对角化, 在 $n+1$ 维中, 相互独立的无迹对角矩阵的最大数目是 $n$ , 所以 $n$ 是 $\mathbf{A}_n$ 的秩.  $n+1$ 维中的任何厄米矩

阵有 $(n+1)^2$ 个独立的实参数(其中沿着主对角的是 $n+1$ 个实数, 而在主对角上方有 $n(n+1)/2$ 个复数, 这些复数等于主对角下方复数的共轭), 无迹条件会消掉一个实参数, 所以 $A_n$ 的维数是

$$d(A_n) = (n+1)^2 - 1 = n(n+2) .$$

所有 $A_n$ 都是单纯的.

$B_n$ : 这是么正正交群 $O(2n+1)$ 的代数, 该群由 $2n+1$ 维中所有么正( $\mathcal{O}^\dagger = \mathcal{O}^{-1}$ )且正交( $\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^{-1}$ )的矩阵构成, 由于矩阵是么正且正交的, 所以它还是实矩阵. (有时为了体现么正的限制会称这个群为 $UO(2n+1)$ .) 任何这样的矩阵 $\mathcal{O}$ , 若它无限接近于单位元, 它可以表示为

$$\mathcal{O} = 1 + iA ,$$

其中 $A$ 是无限小矩阵并满足条件

$$A^* = -A = A^T .$$

(如果我们将自身限制于子群 $SO(2n+1)$ ,  $\mathcal{O}$ 要服从进一步的条件 $\text{Det } \mathcal{O} = 1$ , 既然任何接近于单位元的正交矩阵 $\mathcal{O}$ 都会有 $\text{Det } \mathcal{O} = 1$ , 所以这并不会造成任何区别.) 任何一组 $(2n+1)$ -维中的反对称虚矩阵可以(通过普通的正交矩阵)变成如下超矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} a_1\sigma_2 & & & 0 \\ & a_2\sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\sigma_2 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\sigma_2$ 是通常的 $2 \times 2$ 矩阵

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

而 $a_1, \dots, a_n$ 是实数. 因此 $B_n$ 的秩显然等于 $n$ . 反对称虚矩阵完全由实对角上方的虚数指定, 所以它的维数是

$$d(B_n) = \frac{(2n+1)(2n)}{2} = n(2n+1) .$$

所有 $B_n$ 都是单纯的.

$O(N)$ 还有另一种定义方法, 而这个定义将会帮助我们理解下一大类单Lie代数的动机. 除了将 $O(N)$ 定义成满足正交条件 $\mathcal{O}^T \mathcal{O} = 1$ 的所有 $N$ 维实矩阵构成的群, 它也可以定义为满足条件

$$\mathcal{M}^T \mathcal{P} \mathcal{M} = \mathcal{P}$$

的所有 $N$ 维实矩阵 $\mathcal{M}$ 的群, 其中 $\mathcal{P}$ 是正定对称实矩阵. 这是因为任何这样的 $\mathcal{P}$ 总可以表示为 $\mathcal{P} = \mathcal{R}^T \mathcal{R}$ , 其中 $\mathcal{R}$ 是某个非奇异的实矩阵, 所以存在相似变换, 使得满足上述条件的 $\mathcal{M}$ 变成实正交矩阵 $\mathcal{R}^{-1} \mathcal{M} \mathcal{R}$ , 所以我们可以令 $\mathcal{P}$ 为各种各不相同的实对称正定矩阵却不改变群.

$C_n$ : 这是么正辛群 $USp(2n)$ 的代数, 么正辛群由所有保持反对称非奇异矩阵 $\mathcal{A}$ 不变的么正矩阵 $\mathcal{M}$ 构成:

$$\mathcal{M}^T \mathcal{A} \mathcal{M} = \mathcal{A} ,$$

$$\mathcal{A}^T = -\mathcal{A}, \quad \text{Det } \mathcal{A} \neq 0.$$

(注意, 在 $d$ 维中,  $\text{Det } \mathcal{A} = \text{Det } \mathcal{A}^T = (-1)^d \text{Det } \mathcal{A}$ , 所以, 如果 $d$ 是奇数,  $\text{Det } \mathcal{A}$ 必须为零, 因此, 除非 $d$ 为偶数, 否则不存在 $USp(d)$ .) 任何这样的反对称非奇异(可能为复)矩阵 $\mathcal{A}$ 可以写成如下的标准形式

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}^T \mathcal{A}_0 \mathcal{R},$$

其中 $\mathcal{R}$ 是么正矩阵, 而 $\mathcal{A}_0$ 是超矩阵:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(或者, 我们可以取 $\mathcal{A}_0$ 为分块对角超矩阵, 其中主对角线上是 $\sigma_1$ .)  $USp(2n)$ 可以描述成满足

$$\mathcal{S}^T \mathcal{A}_0 \mathcal{S} = \mathcal{A}_0$$

的么正矩阵 $\mathcal{S}$ 所构成的群, 这是因为任何这样的 $\mathcal{S}$ 可以变换至么正矩阵 $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{S} \mathcal{R}$ , 而 $\mathcal{M}$ 满足之前的条件 $\mathcal{M}^T \mathcal{A} \mathcal{M} = \mathcal{A}$ . 任何这样的矩阵 $\mathcal{S}$ , 若它无限接近于单位元, 它可以写成

$$\mathcal{S} = 1 + i\mathcal{H},$$

其中 $\mathcal{H}$ 是无限小矩阵, 并满足条件

$$\mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}^T \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0 \mathcal{H} = 0.$$

满足这些条件的最一般的 $2n$ 维矩阵可以写成超矩阵

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^* & -\mathcal{A}^* \end{bmatrix},$$

其中 $n$ 维复子矩阵 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 满足

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}, \quad \mathcal{B}^T = \mathcal{B}.$$

最大的一组相互对易的生成元满足 $\mathcal{A}$ 为对角矩阵而 $\mathcal{B}$ 为零, 因而为如下的形式

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_n & & & \\ & & & -a_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -a_n \end{bmatrix}$$

其中 $a_1, \dots, a_n$ 为实数. 因此,  $C_n$ 的秩显然为 $n$ .  $C_n$ 的维数是, 厄米矩阵 $\mathcal{A}$ 中相互独立的实参数数目 $n^2$ , 加上对称复矩阵 $\mathcal{B}$ 中相互独立的实参数数目 $2n(n+1)/2$

$$d(C_n) = n^2 + 2 \times n(n+1)/2 = n(2n+1).$$

所有 $C_n$ 代数都是单纯的.



$D_n$ : 这是么正正交群 $O(2n)$ 的代数,  $O(2n)$ 由 $2n$ 维中所有么正正交矩阵构成. 对 $B_n$ 的讨论可以挪至 $D_n$ , 所不同的是任何一组相互对易的生成元可以变成如下形式

$$\begin{bmatrix} a_1 \sigma_2 & & & 0 \\ & a_2 \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \sigma_2 \end{bmatrix}$$

所以秩仍然是 $n$ . 另外, 维数在这里是

$$d(D_n) = \frac{(2n)(2n-1)}{2} = n(2n-1).$$

除了 $D_1$ 和 $D_2$ 之外, 所有的 $D_n$ 都是单纯的,  $D_1$ 是只有一个生成元的阿贝尔代数, 而 $D_2$ 是直和 $B_1 + B_1$ .

**例外Lie代数:** 除了之上的典型Lie代数外, 还存在5种特殊情况,  $G_2(d=14)$ ;  $F_4(d=52)$ ;  $E_6(d=78)$ ;  $E_7(d=133)$ ;  $E_8(d=248)$ .

不是所有的典型Lie代数是真正不同的. 存在如下4个同构

$$A_1 = B_1 = C_1, \quad C_2 = B_2, \quad A_3 = D_3.$$

它们对应Lie群中代数之间的同构. 然而, 像 $B_1 = A_1$ ,  $B_2 = C_2$ 和 $D_3 = A_3$ 这样的同构并不意味着 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 同构, 或者 $SO(5)$ 与 $USp(4)$ 同构, 或者 $SO(6)$ 与 $SU(4)$ 同构. 取而代之,  $SU(2)$ ,  $USp(4)$ 和 $SU(4)$ 是 $SO(3)$ ,  $SU(2)$ 和 $SO(6)$ 的单连通覆盖群. (即第二章讨论的覆盖群.) 然而, Lie代数的同构使得 $SO(3)$ ,  $SU(2)$ 和 $SO(6)$ 双值基本表示的构造变得非常容易; 它们分别就是 $SU(2)$ ,  $USp(4)$ 和 $SU(4)$ 的定义表示. 另外 $SO(4)$ 同构于 $SO(3) \times SO(3)$ , 所以它的双值旋量表示就是 $SU(2) \times SU(2)$ 的定义表示. 当 $d \geq 7$ 时,  $SO(d)$ 的双值旋量表示必须通过其它方法构建. 最简单的技巧是使用5.4节讨论过的Clifford代数.

## 习题

1. 推导Bianchi恒等式

$$D_\mu F_{\alpha\nu\lambda} + D_\nu F_{\alpha\lambda\mu} + D_\lambda F_{\alpha\mu\nu} = 0.$$

2. 假定我们在非阿贝尔规范理论中使用广义Coulomb规范, 取规范固定函数为 $f_\alpha = \nabla \cdot \mathbf{A}_\alpha$ . 推导鬼场拉格朗日量. 鬼场传播子是什么? (取 $B[f] = \exp(-i \int d^4x f_\alpha f_\alpha / 2\xi)$ .)

3. 假定在电动力学中我们使用规范固定函数 $f = \partial_\mu A^\mu + c A_\mu A^\mu$ , 其中 $c$ 是任意常数. 推导鬼场拉格朗日量. (取 $B[f] = \exp(-i \int d^4x f^2 / 2\xi)$ .) 鬼场传播子是什么?

4. 证明单Lie单数的生成元个数不可能是4.

5. 证明, 如果 $\psi(x)$ 属于某个规范群的一个表示, 该规范群的生成元为 $t_\alpha$ , 并且 $\psi(x)$ 沿着路径 $x^\mu = x^\mu(\tau)$ 依照微分方程

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = it_\alpha \psi(\tau) A_{\alpha\mu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$$

进行变化, (其中 $\psi_\ell(x)$ 和 $A_{\alpha\mu}(x)$ 是经典c-数场) 那么对于围绕点 $X^\mu$ 的任何小的闭环路 $\mathcal{P}$ ,  $\psi$ 沿该环路的变化正比于

$$t_\alpha \psi(X) F_{\alpha\mu\nu}(X) \oint_{\mathcal{P}} x^\mu(\tau) \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

找到比例常数. 用这一结果证明, 如果 $F_{\alpha\mu\nu}$ 处处为零, 那么, 至少在一有限区域内, 可以通过一个规范变换使得 $A_{\alpha\mu}(x)$ 为零. (提示: 沿用电动力学中的类似讨论, 或者沿用广义相对论中的讨论, 例如参考文献6.)

6. 对一般的非阿贝尔规范理论应用路径积分方法, 选择规范固定泛函 $f_\alpha = n_\mu A_\alpha^\mu$ , 其中 $n_\mu$ 是任意常数, 计算规范场 $A_{\alpha\mu}(x)$ 的传播子. (取 $B[f] = \exp(-i \int d^4x f_\alpha f_\alpha / 2\xi)$ .) 鬼场拉格朗日量是什么? 鬼场传播子是什么? 鬼场相互作用顶点是什么?

7. 假定我们采用BRST不变性而非规范不变性作为基本的物理原理. 拉格朗日量是从场和场导数的乘积的和中构建的, 即从 $A_{\alpha\mu}$ ,  $\omega_\alpha$ ,  $\omega_\alpha^*$ ,  $h_\alpha$ 和/或它们的导数构建的, 要求场与场导数乘积的量纲(质量) $d$ 满足 $d \leq 4$ , 并且拉格朗日量在Lorentz变换, 鬼数相位变换( $\omega_\alpha \rightarrow e^{i\theta} \omega_\alpha$ ,  $\omega_\alpha^* \rightarrow e^{-i\theta} \omega_\alpha^*$ ), 整体规范变换( $\epsilon_\alpha$ 为常数)以及BRST变换下不变(可以相差一个全导数), 推导满足上述要求的最一般的拉格朗日量.

8. 证明反括号满足对称性条件(15.9.15)和Jacobi恒等式(15.9.21).

9. 证明, 如果泛函 $O$ 满足条件 $(O, S) = i\Delta S$ 并且作用量 $S$ 满足量子主方程, 那么量子均值 $\langle O \rangle$ 独立于规范固定泛函 $\Psi$ .

## 参考文献

- [1] C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954). 在1938年的华沙会议, O. Klein在一次讲演中曾经非常接近 $SU(2)$ Yang-Mills理论的公式化表述, 收录于*New Theories in Physics* (International Institute of Intellectual Cooperation, Paris, 1939). 关于Klein理论的批判性讨论, 参看D. J. Gross在1994年斯德哥尔摩的Oscar Klein研讨会上的报告“Oscar Klein and Gauge Theory”, Princeton preprint PUPT-1508.
- [2] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).
- [3] R. P. Feynman, *Acta Phys. Polonica* **24**, 697 (1963).
- [4] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29 (1967).
- [5] B. S. De Witt, *Phys. Rev.* **162**, 1195, 1239 (1967).

- [6] 这一证明可以从广义相对论中相对应结果的标准证明中改编过来, 即, 在一有限单连通区域内存在到平坦度规的坐标变换, 其充要条件是Riemann-Christoffel曲率张量为零的证明. 参看, S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972): Sections 6.3和6.4.
- [7]  $\mathbf{a}$ (其中 $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ )蕴含 $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}$ 蕴含 $\mathbf{a}$ 的证明是M. Gell-Mann和S. L. Glashow给出的, *Ann. Phys. (N.Y.)* **15**, 437 (1961).
- [8] 参看, S. Weinberg, 同上, Section 7.6.
- [9] V. Gribov, *Nucl. Phys.* **B139**, 1 (1978). 另见R. Jackiw, I. Muzinich and C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D17**, 1576 (1978); R. Jackiw, in *New Frontiers in High Energy Physics*, B. Kursunoglu, A. Perlmutter, and L. Scott编辑(Plenum, New York, 1978); N. Christ and T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D22**, 939 (1980); R. Jackiw, in *Current Algebra and Anomalies* (World Scientific, Singapore, 1985): footnote 50.
- [10] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Comm. Math. Phys.* **42**, 127 (1975); 收录在*Renormalization Theory*, G. Velo and A. S. Wightman编辑(Reidel, Dordrecht, 1976); *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976).
- [11] I. V. Tyutin, Lebedev Institute preprint N39 (1975).
- [11a] N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys.* **35**, 1111 (1966); B. Lautrup, *Mat. Fys. Medd. Kon. Dan. Vid.-Sel. Medd.* **35**, 29 (1967).
- [12] 我不知道这个讨论的原始来源, 我是从J. Polchinski那里学到它的.
- [13] S. N. Gupta, *Proc. Phys. Soc.* **63**, 681 (1950); **64**, 850 (1951); K. Bleuler, *Helv. Phys. Acta* **3**, 567 (1950); K. Bleuler and W. Heitler, *Progr. Theor. Phys.* **5**, 600 (1950).
- [14] J. Thierry-Mieg, *J. Math. Phys.* **21**, 2834 (1980); R. Stora, *Progress in Gauge Theories: Proceedings of a Symposium at Cargèse*, 1983, G. 't Hooft, A. Jaffe, H. Lehmann, P. K. Mitter, I. M. Singer, and R. Stora编辑(Plenum, New York, 1984): p. 543; L. Bonora and P. Cotta-Ramusino, *Commun. Math. Phys.* **155**, 249 (1993); P. M. Lavrov, P. Yu Moshhin and A. A. Reshetnyak, Tomsk preprint hep-th/9507104; P. M. Lavrov, Tomsk preprint hep-th/9507105.
- [15] W. Siegel, *Phys. Lett.* **93B**, 170 (1980); T. Kimura, *Prog. Theor. Phys.* **64**, 357 (1980); **65**, 338 (1981).
- [16] G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, *Commun. Math. Phys.* **174**, 57 (1995): Section 14.
- [17] G. Curci and R. Ferrari, *Nuovo Cimento* **32A**, 151 (1976); I. Ojima, *Prog. Theor. Phys. Supp.* **64**, 625 (1980); L. Baulieu and J. Thierry-Mieg, *Nucl. Phys.* **B197**, 477 (1982).

- [18] 反-BRST变换被L. Alvarez-Gaumé和L. Baulieu推广至一般的定域系统, *Nucl. Phys.* **B212**, 255 (1983). 它由如下算符诱导:

$$\begin{aligned}\bar{s} = & \omega^{*A} \delta_A \phi^r \frac{\delta L}{\delta \phi^r} - \frac{1}{2} \omega^{*B} \omega^{*C} f^A{}_{BC} \frac{\delta L}{\delta \omega^{*A}} - \omega^{*B} h^C f^A{}_{BC} \frac{\delta}{\delta h^A} \\ & + \left[ -f^A{}_{BC} \omega^{*B} \omega^C + h^A \right] \frac{\delta L}{\delta \omega^A} .\end{aligned}$$

可以直接验证这一变换是幂零的:

$$\bar{s}^2 = 0 .$$

另外, BRST变换和反-BRST变换反对易. 更进一步, 存在反-BRST变换的上同调定理(未发表), 类似于BRST变换的上同调定理:  $\phi$ ,  $\omega^A$ ,  $\omega^{*A}$ 和 $h^A$ 的泛函 $I$ , 如果满足反-BRST变换条件 $\bar{s}I = 0$ 并且鬼数为零, 那么它的最一般形式是

$$I[\phi, \omega, \omega^*, h] = I_0[\phi] + \bar{s} \bar{\Psi}[\phi, \omega, \omega^*, h] .$$

(用Hodge算符 $\bar{t} \equiv \omega^A \delta / \delta h^A$ 取代 $t$ 即可.) 反-BRST变换有助于列举拉格朗日量和Green函数中可能的项, 但我不知道它在什么情况下是不可或缺的.

- [19] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B102**, 27 (1981); *Nucl. Phys.* **B234**, 106 (1984); *J. Math. Phys.* **26**, 172 (1985). 另见B. L. Voronov and I. V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* **50**, 218, 628 (1982). 一个简明的综述可参看, J. Gomis, J. París and S. Samuel, *Phys. Rep.* **259**, 1 (1995).
- [20] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B55**, 224 (1975); CERN report TH2332 (1977); I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B69**, 309 (1977); I. S. Fradkin and T. E. Fradkina, *Phys. Lett.* **B72**, 334 (1977). 另见M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge System* (Princeton University Press, Princeton, 1992).
- [21] I. A. Batalin and I. V. Tyutin, *Phys. Lett.* **B356**, 373 (1995).
- [22] J. Zinn-Justin, *Trends in Elementary Particle Theory - International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974* (Springer-Verlag, Berlin, 1975): p. 2.
- [23] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, *Phys. Rev.*, **D13**, 3214 (1976); R. E. Kallosh, *Nucl. Phys.* **B141**, 141 (1978); B. de Wit and J. W. van Holten, *Phys. Lett.*, **B79**, 389 (1979); P. van Nieuwenhuizen *Phys. Rep.*, **68**, 189 (1981).
- [24] M. Henneaux and C. Teitelboim, 参考文献[20]: Section 18.1.4.
- [25] E. P. Wigner, *Group Theory* (Academic Press, New York, 1950): pp. 76-8.
- [26] 原始文献是E. Cartan, *Sur la Structure des Groupes de Transformations Finis et Continue*, (Paris, 1894; 2nd edn 1933). 教科书处理可以参看, R. Gilmore, *Lie Group, Lie Algebras, and some of Their Applications* (Wiley, New York, 1974): Chapter 9.



## 第 16 章 外场方法

考察有经典外场的量子场论通常是有益的. 一个原因是, 在很多物理情况下, 确实出现了外场, 例如经典电磁场或引力场, 或者真空期望值不为零的标量场. (我们将在第19章看到, 这种标量场会在拉格朗日量的对称性自发破缺中扮演一个重要角色.) 然而, 即便问题中没有出现真正的外场, 通过在一个虚拟外场下考察物理振幅可以极大地简化一些计算. 这一章将会证明, 可以将所有的多圈效应等效成对“树”图的求和, 这些树图的顶点和传播子从量子有效作用量中获得, 而量子有效作用量不是别的, 正是有外场时的单粒子不可约连通真空-真空振幅. 在下一章将会看到, 这提供了一种极其方便的方法, 即补全了始于第15章的非阿贝尔规范理论可重整性的证明, 又简化了荷重整化因子的计算, 而后者, 正是我们在构建量子色动力学中渐进自由的临界性质时所需要的.

### 16.1 量子有效作用量

考察一作用量为 $I[\phi]$ 的量子场论, 并假定我们“打开”了与该理论的场 $\phi^r(x)$ 相耦合的经典流 $J_r(x)$ . 那么, 有这些流的完整真空-真空振幅是

$$\begin{aligned} Z[J] &\equiv \langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_J \\ &= \int \left[ \prod_{s,y} d\phi^s(y) \right] \exp \left( iI[\phi] + i \int d^4x \phi^r(x) J_r(x) + \epsilon \text{项} \right). \end{aligned} \quad (16.1.1)$$

场 $\phi^r(x)$ 不需要是标量. 它们甚至可以是费米的, 尽管如此, 直到16.4节, 我们都不会费心于追踪这一情况下会出现的符号.) 计算 $Z[J]$ 的Feynman规则与计算没有外流的真空-真空振幅 $Z[0]$ 的Feynman规则相同, 只不过现在的Feynman图要包含一种新顶点, 这一顶点与单个 $\phi^r$ -线相连. 这类顶点会用坐标 $x$ 进行标记, 并且会给坐标空间Feynman振幅的被积函数贡献“耦合”因子 $iJ_r(x)$ . 等价地, 我们可以说, 在 $Z[J]$ 作为 $J$ 的幂级数展开式中, 正比于 $iJ_r(x)iJ_s(y)\cdots$ 的项, 它的系数就是外线(包含传播子)对应于 $\phi^r(x)$ ,  $\phi^s(y)$ 等场的图的和. 特别地, 一阶导数给出对应于 $\phi^r(x)$ 的量子力学算符 $\Phi^r(x)$ 的真空矩阵元:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\delta}{\delta J_r(y)} Z[J] \right]_{J=0} &= i \int \left[ \prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \phi^r(y) \exp \{ iI[\phi] + \epsilon \text{项} \} \\ &= i \langle \text{VAC, out} | \Phi^r(y) | \text{VAC, in} \rangle_{J=0}. \end{aligned} \quad (16.1.2)$$

对于泛函 $Z[J]$ 的定义(16.1.1), 其中的场 $\phi^r(x)$ 可以不是基本场(即, 出现在作用量中的场), 而是基本场的乘积, 我们有时也会处理这样的 $Z[J]$ . 若 $\phi^r(x)$ 是 $N$ 个基本场的乘积,  $Z[J]$ 的Feynman规则中的新顶点就会与 $N$ 个线相连. 本章的一些结果(包含方程(16.1.2))适用于这一情况, 但是, 凡是涉及Feynman图的地方, 将默认假定 $\phi^r(x)$ 是基本的.

现在,  $Z[J]$ 由含有流 $J$ 的所有真空-真空振幅的和给出, 这些振幅中既包括连通图也包括非连通图, 但是, 对于在同一子图或不同的连通子图中仅相差顶点置换的那些图, 并没有计为不同的图. 一个由 $N$ 个连通分支构成的一般图对 $Z[J]$ 的贡献等于这些分支的贡献之积, 再除以顶点的置换数 $N!$ , 即仅对一个连通分支与另一个连通分支的所有顶点进行置换产生的重复计数.\* 因此, 所有图的和是

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (iW[J])^N = \exp(iW[J]), \quad (16.1.3)$$

其中 $iW[J]$ 是所有连通真空-真空振幅的和, 再一次地, 对于那些仅相差顶点置换的图, 并没有计为不同的图.

由于众多目的, 更进一步, 并用所有连通单粒子不可约图取代 $W[J]$ 进行处理将是有用的. (单粒子不可约图是指无法通过剪掉任何一条内线变得不连通的图.) 我们可以以如下方式给出这一求和的形式表达式. 首先, 定义 $\phi_J^r(x)$ 为算符有流 $J$ 时的 $\Phi^r(x)$ 的真空期望值:

$$\phi_J^r(x) \equiv \frac{\langle \text{VAC}, \text{out} | \Phi^r(x) | \text{VAC}, \text{in} \rangle_J}{\langle \text{VAC}, \text{out} | \text{VAC}, \text{in} \rangle_J} = -\frac{i}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J_r(x)} Z[J] \quad (16.1.4)$$

或者, 以连通图之和的形式

$$\phi_J^r(x) = \frac{\delta}{\delta J_r(x)} W[J]. \quad (16.1.5)$$

这一公式可以逆转. 定义 $J_{\phi r}(x)$ 为使(16.1.4)有规定值 $\phi^r(x)$ 的流:

$$\phi_J^r(x) = \phi^r(x) \quad \text{如果} \quad J_r(x) = J_{\phi r}(x).$$

量子有效作用量<sup>1</sup>由Legendre变换定义(作为 $\phi$ 的泛函, 而非 $J$ )

$$\Gamma[\phi] \equiv - \int d^4x \phi^r(x) J_{\phi r}(x) + W[J_\phi]. \quad (16.1.6)$$

我们将证明 $\Gamma[\phi]$ 是有流 $J_\phi$ 时的所有连通单粒子不可约图的和. 然而, 我们先来看一下它另一方面的物理意义.

注意到,  $\Gamma[\phi]$ 的泛函导数是

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi^s(y)} &= - \int d^4x \phi^r(x) \frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta \phi^s(y)} - J_{\phi s}(y) \\ &\quad + \int d^4x \left[ \frac{\delta W[J]}{\delta J_r(x)} \right]_{J=J_\phi} \frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta \phi^s(y)} \end{aligned}$$

或者, 使用方程(16.1.5)

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi^s(y)} = -J_{\phi s}(y). \quad (16.1.7)$$

因此,  $\Gamma[\phi]$ 是“有效作用量”, 也就是说, 在没有流 $J$ 时, 外场 $\phi^s(y)$ 的可能值由 $\Gamma$ 的驻“点”给定:

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi^s(y)} = 0 \quad \text{对于} \quad J = 0. \quad (16.1.8)$$

\*有 $N$ 个连通分支的Feynman图, 若每个分支中的顶点数分别为 $n_1, n_2, \dots, n_N$ , 从Dyson展开中可知, 这个Feynman图的贡献正比于因子 $1/(n_1 + \dots + n_N)!$ , 而因子 $(n_1 + \dots + n_N)!/N!$ 是这些顶点的置换数, 在置换计数时, 那些仅交换两个分支所有顶点的置换视为是等同的.



可以与经典场方程做一比较, 经典场方程仅要求实际的作用量 $I[\phi]$ 是稳定的. 因此, 方程(16.1.8)可以视为将量子修正考虑在内的外场 $\phi$ 的运动方程.

$\Gamma[\phi]$ 不仅提供了量子修正后的场方程; 它还是有效作用量, 也就是说, 如果作用量是 $\Gamma[\phi]$ 而不是 $I[\phi]$ , 利用从此得出的顶点,  $iW[J]$ 可以作为真空-真空振幅的连通树图和算出. 我们这里的树图是指, 如果剪断任何一条内线这个图就会变得不连通. 通过用 $\Gamma[\phi]$ 而非 $I[\phi]$ , 就将所有的圈图效应考虑在内了.

为了看到这点,<sup>2</sup> 我们来考察将用来代替 $W[J]$ 的量 $W_\Gamma[J, g]$ , 如果我们用作用量 $g^{-1}\Gamma[\phi]$ 代替 $I[\phi]$ :

$$\exp\{iW_\Gamma[J, g]\} \equiv \int \prod_{r,x} d\phi^r(x) \exp \left\{ ig^{-1} \left[ \Gamma[\phi] + \int d^4x \phi^r(x) J_r(x) \right] + \epsilon \text{项} \right\}, \quad (16.1.9)$$

其中 $g$ 是任意常数. 这里的传播子是 $g^{-1}\Gamma[\phi]$ 中 $\phi$ 的二次项系数的逆, 因而正比于 $g$ , 而所有顶点的贡献均正比于 $1/g$ , 所以, 若一个图包含 $V$ 个顶点(包含那些流 $J$ 产生的顶点)和 $I$ 条内线(包含那些与 $J$ 顶点相连的线), 那么它正比于 $g^{I-V}$ . 对于任何连通图, 圈的数目是 $L = I - V + 1$ , 所以 $W_\Gamma[J, g]$ 中的 $L$ -圈项与 $g$ 的关系是

$$\left( W_\Gamma[J, g] \right)_{L \text{ loops}} \propto g^{L-1}. \quad (16.1.10)$$

等效地, 我们可以写成(至少形式上地)

$$W_\Gamma[J, g] = \sum_{L=0}^{\infty} g^{L-1} W_\Gamma^{(L)}[J], \quad (16.1.11)$$

其中(通过令 $g = 1$ 可以看到),  $W_\Gamma^{(L)}[J]$ 是对连通真空振幅 $W_\Gamma[J, 1]$ 的 $L$ -圈贡献, 而 $W_\Gamma[J, 1]$ 是通过使用 $\Gamma[\phi]$ (不含因子 $g$ )而非作用量 $I[\phi]$ 获得的.

现在, 我们在这里只关心无圈的树图的和, 计算这些图所用的顶点和传播子是从 $\Gamma[\phi]$ 而非 $I[\phi]$ 中得出的. 在我们目前的记法中, 这是 $W_\Gamma^{(0)}[J]$ . 为了孤立出方程(16.1.11)中 $L = 0$ 的项, 考察极限 $g \rightarrow 0$ . 在这一极限下, 路径积分(16.1.9)被稳相点所主导,

$$\exp \{ iW_\Gamma[J, g] \} \propto \exp \left\{ ig^{-1} \left[ \Gamma[\phi_J] + \int d^4x \phi_J^r(x) J_r(x) \right] \right\}, \quad (16.1.12)$$

其中, 由于它是作为 $J$ 所产生的场定义的, 场 $\phi_J$ 是指数的驻点, 也就是说

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi^r(x)} \right|_{\phi=\phi_J} = -J_r(x). \quad (16.1.13)$$

方程(16.1.12)中的比例因子一般是 $J$ 的泛函, 但它是 $g^0$ 阶项开始的 $g$ 的幂级数. 因此, 对两边取对数, 并将 $g^{-1}$ 阶项孤立出来, 这会给出

$$W_\Gamma^{(0)}[J] = \Gamma[\phi_J] + \int d^4x \phi_J^r(x) J_r(x). \quad (16.1.14)$$

在方程(16.1.6)中令 $\phi = \phi_J$ , 我们看到方程(16.1.14)的右边正是 $W[J]$ :

$$W_{\Gamma}^{(0)}[J] = W[J] . \quad (16.1.15)$$

概括一下, 这说明, 通过用 $\Gamma[\phi]$ 代替 $I[\phi]$ (下标 $\Gamma$ )并只保持树(0-圈)图可以算出 $W[J]$ :

$$iW[J] = \int_{\text{CONNECTED TREE}} \left[ \prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \exp \left\{ i\Gamma[\phi] + i \int \phi^r(x) J_r(x) d^4x \right\} . \quad (16.1.16)$$

现在,  $iW[J]$ 的任何连通图都可视为树图, 只不过其中的顶点由单粒子不可约子图组成. 因此, 为了使方程(16.1.16)成立,  $i\Gamma[\phi]$ 必须是外线数目任意的所有单粒子不可约连通图的和, 而图中的每一外线对应的是因子 $\phi$ 而非传播子或波函数. 由于这个原因, 在 $\Gamma[\phi]$ 围绕某个固定场 $\phi_0$ 关于场以及场导数的幂级数展开中, 展开系数可以视为重整化耦合常数, 而这里的重整化“点”是由 $\phi_0$ 而非某组动量指定的.

等价地, 对于某个固定场 $\phi_0^r(x)$ ,  $i\Gamma[\phi_0]$ 可以表示为真空-真空振幅的单粒子不可约图的和, 只不过计算使用的是偏移作用量 $I[\phi + \phi_0]$ :

$$i\Gamma[\phi_0] = \int_{\text{1PI CONNECTED}} \left[ \prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \exp \{ i I[\phi + \phi_0] \} . \quad (16.1.17)$$

这是因为只要是 $\phi_0$ 出现的地方, 无论是方程(16.1.17)中单粒子不可约图中的顶点还是传播子, 都会与一个外 $\phi$ -线相连. (限制在单粒子不可约图上在方程(16.1.17)中扮演了一个重要角色; 没有这个限制, 我们偏移积分变量所产生的积分显然与 $\phi_0$ 无关.) 取代方程(16.1.17), 写成

$$\exp [i\Gamma[\phi_0]] = \int_{\text{1PI}} \left[ \prod_{r,x} d\phi^r(x) \right] \exp \{ i I[\phi + \phi_0] \} \quad (16.1.18)$$

通常是方便的, 其中我们计算的路径积分包含所有图, 包括连通或非联通的, 但在每个图中, 每个连通分支都是不可约的.

\* \* \*

这一形式理论提供了对树图求和的简单方法. 作为一个例子, 考察全两点函数 $\Delta^{rx,sy}$ 与它的单粒子不可约部分 $\Pi_{rx,sy}$ 之间的关系. 从方程(16.1.5)和(16.1.7)中, 我们发现

$$\Delta^{rx,sy} \equiv \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_r(x) \delta J_s(y)} = \frac{\delta \phi_J^r(x)}{\delta J_s(y)} , \quad (16.1.19)$$

$$\Pi_{rx,sy} \equiv \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi^r(x) \delta \phi^s(y)} = - \frac{\delta J_{\phi r}(x)}{\delta \phi^s(y)} . \quad (16.1.20)$$

由此立刻得出“矩阵” $\Delta$ 和 $\Pi$ 之间的关系为

$$\Delta = -\Pi^{-1} . \quad (16.1.21)$$

这一关系是传播子与自能部分之间的常见关系(10.3.15)的副本, 在方程(10.3.15)中, 分母中的额外项 $q^2 + m^2$ 代表单粒子不可约两点函数的零阶项.

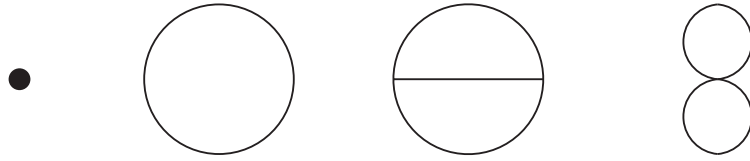


图 16.1 相互作用为 $\phi^4$ 的中性标量场 $\phi$ 的量子有效作用量的Feynman图, 这些图依次对应零圈阶, 单圈阶和两圈阶.

## 16.2 有效作用量的计算

为了看到上一节的形式理论在真实情况中是如何运作的, 考察一个简单例子, 单个实标量场 $\phi(x)$ 的可重整理论, 其作用量为

$$I[\phi] = - \int d^4x \left[ \lambda + \frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{24} g \phi^4 \right]. \quad (16.2.1)$$

(在这里, 我们在拉格朗日密度中引入了“宇宙学常数” $-\lambda$ , 这样做的原因在后文中将会变得非常清楚). 简单起见, 假定我们希望计算的是某个位置无关场 $\phi_0(x) = \phi_0$ 的 $\Gamma[\phi_0]$ .  $\Gamma[\phi_0]$ 中的每一项将包含一时空体积因子

$$\mathcal{V}_4 = \int d^4x = \delta^4(p-p)(2\pi)^4 \quad (16.2.2)$$

这产生于动量守恒 $\delta$ -函数. 因而, 对于常数的 $\phi_0$ , 我们将写出

$$\Gamma[\phi_0] = -\mathcal{V}_4 V(\phi_0), \quad (16.2.3)$$

其中 $V(\phi_0)$ 是一普通函数, 称为有效势. 在本节, 我们将计算有效势至它的一阶. 这一工作最初是由Coleman和E. Weinberg<sup>3</sup>在研究对称性自发破缺时完成的, 对称性自发破缺将是第19章和第21章的主题. 他们也将这一结果用于重整化群的一个早期应用, 我们会在18.2节描述它.

令 $\phi$ 偏移 $\phi_0$ , 这样, 方程(16.1.18)中的作用量是:<sup>\*</sup>

$$\begin{aligned} I[\phi + \phi_0] = & -\mathcal{V}_4 \left[ \lambda + \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{24} g \phi_0^4 \right] - [m^2 \phi_0 + \frac{1}{6} g \phi_0^3] \int d^4x \phi \\ & - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \frac{1}{2} \mu^2(\phi_0) \phi^2 \right] - \int d^4x \left[ \frac{1}{6} g \phi_0 \phi^3 + \frac{1}{24} g \phi^4 \right], \end{aligned} \quad (16.2.4)$$

其中 $\mu^2$ 是场相关质量

$$\mu^2(\phi_0) = m^2 + \frac{1}{2} g \phi_0^2. \quad (16.2.5)$$

注意到, 现在出现了正比于 $\phi$ 的新相互作用(这对于单粒子不可约图没有任何影响)和正比于 $\phi^3$ 的新相互作用, 以及与原相互作用有相同结构的项.

图16.1展示了 $\Gamma[\phi_0]$ 到两圈阶的Feynman图. 真空-真空振幅中的零圈阶项由 $I[\phi + \phi_0]$ 中的常数项给出

$$i \Gamma^{(0 \text{ loop})}[\phi_0] = -i \mathcal{V}_4 \left( \lambda + \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{g}{24} \phi_0^4 \right). \quad (16.2.6)$$

<sup>\*</sup>对于 $m^2 < 0$ 的理论, 在微扰论的适用性上有一限制, 我们会在下一节讨论它.

单圈项给定为

$$\exp\left(i\Gamma^{(1\text{ loop})}[\phi_0]\right) = \int \prod_x d\phi(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}i \int d^4x \left[\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \mu^2(\phi_0)\phi^2\right] + \epsilon\text{项}\right\}. \quad (16.2.7)$$

在第九章我们学习过如何计算这样的积分, 结果由方程(9.A.18)给出

$$i\Gamma^{(1\text{ loop})}[\phi_0] = \ln \text{Det} \left( \frac{iK}{\pi} \right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left( \frac{iK}{\pi} \right), \quad (16.2.8)$$

其中

$$K_{x,y} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial y_\lambda} + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon \right] \delta^4(x-y). \quad (16.2.9)$$

像往常一样, 为了计算这样的矩阵, 经由动量空间将 $K$ 对角化将是有帮助的:

$$\begin{aligned} K_{p,q} &= \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2} e^{-ip \cdot x} \frac{d^4y}{(2\pi)^2} e^{iq \cdot y} K_{x,y} \\ &= (p^2 + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon) \delta^4(p-q). \end{aligned} \quad (16.2.10)$$

对角矩阵的对数就是对主对角元取对数:

$$\left[ \ln \left( \frac{iK}{\pi} \right) \right]_{p,q} = \ln \left[ \frac{i}{\pi} (p^2 + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon) \right] \delta^4(p-q) \quad (16.2.11)$$

那么, 它的迹是

$$\begin{aligned} i\Gamma^{(1\text{ loop})}[\phi_0] &= -\frac{1}{2} \int d^4p \left[ \ln \left( \frac{iK}{\pi} \right) \right]_{p,p} \\ &= -\frac{\mathcal{V}_4}{2(2\pi)^4} \int d^4p \ln \left( \frac{i}{\pi} (p^2 + \mu^2(\phi_0) - i\epsilon) \right). \end{aligned} \quad (16.2.12)$$

将方程(16.2.6)和(16.2.12)合在一起, 我们就有了到一圈阶的有效势

$$V(\phi_0) = \lambda + \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{g}{24}\phi_0^4 + \mathcal{J}(\mu^2(\phi_0)), \quad (16.2.13)$$

其中

$$\mathcal{J}(\mu^2) \equiv \frac{-i}{2(2\pi)^4} \int d^4p \ln \left( \frac{i}{\pi} [p^2 + \mu^2 - i\epsilon] \right). \quad (16.2.14)$$

有效势的这一公式包含紫外发散是极其显然的. 幸运的是, 这些紫外发散会自然地理论参数的重整化所吸收. 尽管积分(16.2.14)是发散的, 简单的幂次级数表明, 通过对 $\mu^2$ 微分三次可以使这个积分收敛:

$$\mathcal{J}'''(\mu^2) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4p (p^2 + \mu^2 - i\epsilon)^{-3}.$$

$-i\epsilon$ 项又一次告诉我们, 必须要逆时针旋转 $p^0$ 围道, 使得 $p^0 = ip^4$ , 而 $p^4$ 从 $-\infty$ 取到 $+\infty$ :

$$\mathcal{J}'''(\mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{2\pi^2 k^3 dk}{(k^2 + \mu^2)^3} = \frac{1}{32\pi^2 \mu^2}.$$

积分三次, 我们就有

$$\mathcal{J}(\mu^2) = \frac{\mu^4 \ln \mu^2}{64\pi^2} + A + B\mu^2 + C\mu^4.$$

常数  $A, B, C$  不由这一计算方法决定, 而且, 既然它们显然无论如何都是无穷大的, 这也很难说的上是一个严重问题. 我们通过定义  $\lambda, m^2$  和  $g$  的“重整化”值来消除这些常数:

$$\begin{aligned}\lambda_R &\equiv \lambda + A + Bm^2 + C\mu^4, \\ m_R^2 &\equiv m^2 + gB + 2gm^2C, \\ g_R &\equiv g + 6g^2C.\end{aligned}$$

那么, 对于到一圈阶的势, 我们的最终结果是

$$V(\phi_0) = \lambda_R + \frac{1}{2}m_R^2\phi_0^2 + \frac{g_R}{24}\phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0) \ln \mu^2(\phi_0)}{64\pi^2}. \quad (16.2.15)$$

其中  $\mu(\phi_0)$  是方程(16.2.5)所定义的场相关质量, 到这一阶, 它可以用  $m_R$  和  $g_R$  而非  $m$  和  $g$  计算出来:

$$\mu^2(\phi) = m_R^2 + \frac{1}{2}g_R\phi^2.$$

如果理论包含一个自旋  $\frac{1}{2}$  的复费米场  $\psi(x)$ , 并且它与标量  $\phi$  相互作用, 那么会有类似的结果成立. 例如, 如果相互作用哈密顿密度有简单形式  $G\phi\bar{\psi}\psi$ , 那么在有一常数背景标量场  $\phi_0$  的情况下, 费米子的质量  $M(\phi_0)$  就有形式:

$$M(\phi_0) = M(0) + G\phi_0.$$

很容易看到势(16.2.15)在这一情况下得到一个额外项:

$$\begin{aligned}V(\phi_0) &= \lambda_R + \frac{1}{2}m_R^2\phi_0^2 + \frac{g_R}{24}\phi_0^4 + \frac{\mu^4(\phi_0) \ln \mu^2(\phi_0)}{64\pi^2} \\ &\quad - \frac{M^4(\phi_0) \ln M^2(\phi_0)}{16\pi^2}.\end{aligned} \quad (16.2.16)$$

新项中的数值系数是方程(16.2.15)中  $\mu^4 \ln \mu^2$  项的数值系数的4倍, 这是因为这里假定  $\psi$  和  $\bar{\psi}$  所描述的费米子和反费米子是不同的, 并且它们中的每一个都有两个自旋态, 符号相反是由于(正如第9章所示), 高斯型的费米路径积分所给出的结果正比于指数中系数矩阵的行列式, 不同于玻色路径积分, 后者给出的结果正比于这一行列式的倒数.

## 16.3 能量诠释

分别以能量和能量密度的形式, 对有效作用量  $\Gamma[\phi]$  和有效势  $V[\phi]$  有一重要的解释.<sup>4</sup> 为了看到这一点, 假定我们打开流  $J^n(\mathbf{x}, t)$ , 它从  $t = -\infty$  时的零光滑地增长至一有限值  $\mathcal{J}^n(\mathbf{x})$ , 并在一段很长的时间  $T$  内保持该值, 在此之后又光滑地衰减到  $t = +\infty$  时的零. 这一微扰的效应是将真空转化至有确定能量  $E[\mathcal{J}]$  ( $\mathcal{J}(\mathbf{x})$  的泛函) 的态, 在这个态上会持续时间  $T$ , 然后又回到真空. 然而, 尽管“出”真空与“入”真空是相同的物理态, 但是在时段  $T$  内会累积相因子  $\exp(-iE[\mathcal{J}]T)$ , 所以这两个态矢会相差相因子  $\exp(-iE[\mathcal{J}]T)$ :

$$\langle \text{VAC, out} | \text{VAC, in} \rangle_J = \exp\left(-iE[\mathcal{J}]T\right). \quad (16.3.1)$$

与方程(16.1.1)和(16.1.3)相比较, 这给出

$$W[J] = -E[\mathcal{J}]T . \quad (16.3.2)$$

为了看到这一能量与有效作用量之间的联系, 假定我们要寻找一个态 $\Omega_\phi$ , 它使得能量期望值最小

$$\langle H \rangle_\Omega = \frac{(\Omega, H\Omega)}{(\Omega, \Omega)} , \quad (16.3.3)$$

它满足条件: 量子场 $\Phi_n(\mathbf{x}, t)$ 有一与时间无关的期望值 $\phi_n(\mathbf{x})$

$$\frac{(\Omega, \Phi_n(\mathbf{x}, t)\Omega)}{(\Omega, \Omega)} = \phi_n(\mathbf{x}) . \quad (16.3.4)$$

同时附加上 $\Omega$ 是归一化的条件将是方便的

$$(\Omega, \Omega) = 1 . \quad (16.3.5)$$

为了最小化服从约束(16.3.4)和(16.3.5)的期望值(16.3.3), 我们使用拉格朗日数乘法, 转而最小化如下的量

$$(\Omega, H\Omega) - \alpha(\Omega, \Omega) - \int d^3x \beta^n(\mathbf{x}) (\Omega, \Phi_n(\mathbf{x})\Omega) , \quad (16.3.6)$$

这样,  $\Omega$ 上就没有约束了. 这给出

$$H\Omega = \alpha\Omega + \int d^3x \beta^n(\mathbf{x}) \Phi_n(\mathbf{x})\Omega . \quad (16.3.7)$$

选择 $\alpha$ 和 $\beta^n(\mathbf{x})$ 的方式要使得约束(16.3.4)和(16.3.5)被满足, 因而它们会以泛函的形式依赖于规定的期望值 $\phi_n(\mathbf{x})$ .

好了, 我们曾说过, 当有流 $\mathcal{J}^n(\mathbf{x})$ 时, 哈密顿量 $H - \int d^3x \mathcal{J}^n(\mathbf{x}) \Phi_n(x)$ 会有本征值 $E[\mathcal{J}]$ :

$$\left[ H - \int d^3x \mathcal{J}^n(\mathbf{x}) \Phi_n(x) \right] \Psi_{\mathcal{J}} = E[\mathcal{J}] \Psi_{\mathcal{J}} , \quad (16.3.8)$$

其中 $\Psi_{\mathcal{J}}$ 是归一化的本征矢. 更进一步, 既然缓慢地打开这个流使得真空转化成这一能量本征态, 我们可以假定 $E[\mathcal{J}]$ 是有流时的最低能量本征态. 因此, 如果

$$\Omega = \Psi_{\mathcal{J}_\phi} , \quad (16.3.9)$$

$$\alpha = E[\mathcal{J}_\phi] , \quad (16.3.10)$$

$$\beta^n(\mathbf{x}) = \mathcal{J}_\phi^n(\mathbf{x}) , \quad (16.3.11)$$

方程(16.3.4), (16.3.5)和(16.3.7)就会被满足, 其中 $\mathcal{J}_\phi(\mathbf{x})$ 是使得 $\Phi(x)$ 在态 $\Psi_{\mathcal{J}}$ 上有期望值 $\phi(\mathbf{x})$ 的流.

在方程(16.3.8)中取 $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\phi$ , 并取其与 $\Psi_{\mathcal{J}_\phi}$ 的标量积, 对于约束场 $\Phi_n$ 有期望值 $\phi_n$ 的态, 它的最低能量被视作是

$$\langle H \rangle_\Omega = E[\mathcal{J}_\phi] + \int d^3x \mathcal{J}_\phi^n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) . \quad (16.3.12)$$

回忆方程(16.3.2)以及 $J(x)$ 的假定形式, 这是

$$\langle H \rangle_\Omega = \frac{1}{T} \left[ -W[J_\phi] + \int d^4x J_\phi^n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{x}) \right] = -\frac{1}{T} \Gamma[\phi] . \quad (16.3.13)$$

正如上一节所指出的, 如果场 $\phi(x)$ 在一个很大的时空体积 $\mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_3 T$ 上有常数值 $\phi$ , 那么我们可以将有效作用量写成有效势 $V(\phi)$ 的形式:

$$\Gamma[\phi] = -\mathcal{V}_3 T V(\phi). \quad (16.3.14)$$

在这一情况下, 方程(16.3.13)告诉我们能量密度是

$$\langle H \rangle_\Omega / \mathcal{V}_3 = V(\phi). \quad (16.3.15)$$

主要结果是: 对于所有态, 若它服从标量场 $\Phi_n$ 在态上的期望值为 $\phi_n$ 的约束条件, 那么它的能量密度期望值的最小值是 $V(\phi)$ . 一个结果是, 在没有外流时, 真空态将放松至另一个态, 在这个态中, 由于场方程(16.1.8)的要求, 势 $V(\phi)$ 是稳定的, 此外它也是最小的.

这一结果帮助解决了量子有效势诠释中的一个问题, 路径积分形式理论的欧几里得版本(将在第23章的附录A进行描述)使得两点函数 $\Delta$ (在矩阵意义下)为正这件事变得显然, 所以, 根据方程(16.1.2),  $-\Pi = \Delta^{-1}$ 也是这样. 再加上方程(16.2.3), 这暗示了, 对于单个标量场, 有效势 $V(\phi)$ 对 $\phi$ 的二阶导数必须为正(或零). 更普遍的, 有效势必须是凸的.<sup>5</sup>

$$V(\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2) \leq \lambda V(\phi_1) + (1-\lambda)V(\phi_2) \quad \text{对于 } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

但对方程(16.2.13)的检查表明, 当 $m^2 < 0$ 和 $g > 0$ 时, 对于作用量为(16.2.1)的标量场论, 在 $\phi$ 处在有效势的两个极值点 $\pm\sqrt{6|m^2|/g}$ 之间时, 它的有效势的零圈近似有一个负定的二阶导数. 会产生这个矛盾是因为, 微扰论的引出暗中依赖于稳定真空的存在, 但当 $V''(\phi) < 0$ 时, 场 $\phi$ 所处的值 $\tilde{\phi}$ 使得 $V(\tilde{\phi}) - J_\phi \tilde{\phi}$ 是极大值而不是极小值, 这意味着当有流 $J_\phi$ 时, 真空态是不稳定的.

那么, 当 $m < 0$ 且 $\phi$ 处在有效势的两个极小值之间时, 这一标量场真正的有效势是什么呢? 本节的结果是, 我们必须找到使得算符 $\Phi$ 的期望值等于 $\phi$ 的最小能量态. 只要 $\phi$ 在该势的两个极小值之间, 通过将 $\Phi$ 取做 $\phi$ 处在极小值 $\phi \simeq \pm\sqrt{6|m^2|/g}$ 时的态的合适的线性组合, 我们就可以赋予 $\Phi$ 期望值 $\phi$ . 这一态中的能量等于极小值处的能量, 所以这一态显然使得能量最小化. (在体积无限大的极限下, 交叉项为零, 原因会在19.1节进行阐述.) 因此, 在两个极小值之间的有效势是常数, 这满足二阶导数非负的要求. 相同的讨论表明, 在有限势有两个能量不等的定域极小值的更普遍理论中, 这两个极小值之间的有效势是线性的.<sup>6</sup>

## 16.4 有效作用量的对称性

虽然不总是这样, 但在某些情况下, 作用量 $I[\phi]$ 的对称性自动地也是有效作用量的 $\Gamma[\phi]$ 的对称性. 例如, 在16.2节的例子中, 作用量(16.2.1)在离散变换 $\phi \rightarrow -\phi$ 下有一对称性. 因此, 从 $Z[J]$ 和 $W[J]$ 的定义中可以知道, 它们在相对应的反射 $J \rightarrow -J$ 下是偶的. 这样, 方程(16.1.5)表明 $\phi_{-J} = -\phi_J$ , 因此 $J_{-\phi} = -J_\phi$ , 所以方程(16.1.6)表明 $\Gamma[\phi]$ 在 $\phi \rightarrow -\phi$ 下是偶的. 这一结果被单圈结果(16.2.15)所证实. 对于(16.2.16)中的费米圈贡献, 在 $M(0) = 0$ 的特殊情况下, 这一贡献也呈现出在 $\phi \rightarrow -\phi$ 下的对称性, 这是因为, 在这一情况下, 作用量在 $\phi \rightarrow -\phi$ 和 $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ 的组合变换下不变.

除非我们能够证明附加于作用量的对称性也适用于有效作用量, 否则我们在建立理论的可重整性时会遇到问题. 例如, 在上面的例子中, 如果假定 $I[\phi]$ 对 $\phi$ 是偶的, 但 $\Gamma[\phi]$ 却不是, 那么 $\Gamma$ 中正比



于  $\int d^4x \phi$  项和  $\int d^4x \phi^3$  项的系数将会发散, 但作用量的对称性将不允许我们引入吸收这些无限大的抵消项.

在这一动机下, 我们现在转向一类重要的对称性, 这类对称性由如下的无限小变换生成

$$\chi^n(x) \rightarrow \chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi], \quad (16.4.1)$$

其中  $F^n$  是  $x^\mu$  的函数但以泛函的形式依赖于  $\chi^n$ . (例如,  $F^n[x; \chi]$  可以是  $\chi^n$  以及  $\chi^n$  在点  $x$  处导数的普通函数.) 我们现在使用符号  $\chi^n$  而非  $\phi^r$  来标记不同类型的场, 是为了强调它们不仅包含普通的规范场和物质场(它们在下一章会被记为  $\phi^r(x)$ ), 而且包含出现在规范固定作用量中的所有其它场, 包括鬼场. 我们再次指出:  $\chi^n(x)$  不一定是标量, 它可以是任意类型的场.

我们假定作用量和测度均在对称变换(16.4.1)下不变:

$$I[\chi + \epsilon F] = I[\chi], \quad (16.4.2)$$

$$\prod_{n,x} d(\chi^n(x) + \epsilon F[x; \chi]) = \prod_{n,x} d\chi^n(x). \quad (16.4.3)$$

(实际上, 仅乘积  $(\prod_{n,x} d\chi^n(x) \exp(iI))$  不变就足够了, 但这时方程(16.4.2)和(16.4.3)往往都是成立的.) 用  $\chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi]$  替换方程(16.1.1)中的积分变量, 这样我们就有

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \left[ \prod_{n,x} d(\chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi]) \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ i I[\chi + \epsilon F] + i \int d^4x (\chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi]) J_n(x) \right\} \\ &= \int \left[ \prod_{n,x} d\chi^n(x) \right] \exp \left\{ i I[\chi] + i \int d^4x (\chi^n(x) + \epsilon F^n[x; \chi]) J_n(x) \right\} \\ &= Z[J] + i\epsilon \int \left( \prod_{n,x} d\chi^n(x) \right) \int F^n(y; \chi) J_n(y) d^4y \\ &\quad \times \exp \left\{ i I[\chi] + i \int d^4x \chi^n(x) J_n(x) \right\} \end{aligned}$$

因而

$$\int d^4y \langle F^n(y) \rangle_J J_n(y) = 0, \quad (16.4.4)$$

其中  $\langle \rangle_J$  代表有流  $J_n(x)$  时的量子平均值,

$$\begin{aligned} Z[J] \langle F^n(y) \rangle_J &\equiv \int \left( \prod_{n,x} d\chi^n(x) \right) F^n[y; \chi] \\ &\quad \times \exp \left\{ i I[\chi] + i \int d^4x \chi^n(x) J_n(x) \right\}, \end{aligned} \quad (16.4.5)$$

归一化使得  $\langle 1 \rangle_J = 1$ . 但回忆起  $J_n(y)$  是以有效作用量  $\Gamma[\chi]$  的形式通过方程(16.1.7)给定的

$$J_{n,\chi}(y) = -\frac{\delta \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)}.$$

因此, 方程(16.4.4)可以写成

$$0 = \int d^4y \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)} . \quad (16.4.6)$$

换句话说,  $\Gamma[\chi]$ 在无限小变换

$$\chi^n(y) \rightarrow \chi^n(y) + \epsilon \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} . \quad (16.4.7)$$

下不变. 这样的对称性条件被称为 $Slavnov-Taylor$ 恒等式.<sup>7</sup>

这一对称变换是否是我们所出发的对称变换呢? 对于一类非常重要的无限小对称变换确实是这样, 即那些线性的变换. 对于这样的对称性,  $F$ 是

$$F^n[x; \chi] = s^n(x) + \int t_m^n(x, y) \chi^m(y) d^4y . \quad (16.4.8)$$

(在最通常的情况下,  $s^n(x)$ 为零而 $t_m^n(x, y)$ 是常数矩阵与 $\delta^4(x - y)$ 之积.) 对于任何线性的 $F$ , 我们有

$$\langle F^n(y) \rangle_J = s^n(x) + \int t_m^n(x, y) \langle \chi^m(y) \rangle_J d^4y .$$

但对于任何固定的 $\chi$ ,  $J_\chi$ 定义为使得 $\langle \chi^m(y) \rangle_J$ 等于 $\chi^m(y)$ 的流 $J$ 的值, 所以

$$\langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} = s^n(x) + \int t_m^n(x, y) \chi^m(y) d^4y = F^n[x; \chi] . \quad (16.4.9)$$

因此, 对于所有的泛函线性变换 $\chi^n \rightarrow \chi^n + \epsilon F$ , 若该变换保持 $I[\chi]$ 和测度不变, 那么方程(16.4.6)会要求 $\Gamma[\chi]$ 在这样的变换下不变.

我们有时还要处理非线性的对称变换. 15.7节所讨论的BRST变换就提供了一个重要例子. 对于非线性的变换, 使得有限作用量不变的对称变换(16.4.7)一般与保持原作用量不变的假设对称变换(16.4.1)不相同, 这是因为场的非线性泛函的均值一般不等于平均场的泛函. 的确如此,  $\langle F^n \rangle_{J_\chi}$ 作为 $\chi$ 的泛函, 它的形式一般会依赖于系统的动力学, 并且通常是非定域. 这一复杂性将在下一章利用反括号的方法进行处理.

\* \* \*

直到现在, 我们默认假定场 $\chi^n$ 和相对应的变换函数 $F^n$ 以及流 $J_n$ 都是玻色的. 当其中的一些量是费米量时, 特别地, 就像超对称变换或BRST变换, 在那里 $\epsilon$ 是常数而 $\chi^n$ 和 $F^n$ 有相反的统计, 这时我们将需要注意到可能出现的符号因子. 当流像方程(16.1.1)和(16.1.5)中那样插入在场的右边时, 方程(16.1.5)和(16.1.7)会变成如下的形式

$$\frac{\delta_R W[J]}{\delta J_m(y)} = \chi_J^m(y) , \quad (16.4.10)$$

$$\frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^m(y)} = -J_{\chi, m}(y) , \quad (16.4.11)$$

其中下标 $R$ 和 $L$ 是指导数是从右边和左边作用的. 因此,  $Slavnov-Taylor$ 恒等式(16.4.6)应该写成

$$0 = \int d^4y \langle F^n(y) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(y)} . \quad (16.4.12)$$

## 习题

1. 考察实标量 $\phi(x)$ 与复Dirac场 $\psi(x)$ 的理论, 它们的质量分别是 $M$ 和 $m$ , 相互作用为 $g\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$ . 计算 $\phi = \text{常数}$ ,  $\psi = 0$ 时的有效势, 并计算至一圈阶.
2. 导出 $\delta^3 W[J]/\delta J_n(x)\delta J_m(y)\delta J_\ell(z)$ 和 $\delta^4 W[J]/\delta J_n(x)\delta J_m(y)\delta J_\ell(z)\delta J_k(w)$ 的一般公式, 将其写成 $\Gamma[\phi]$ 对 $\phi$ 的变分导数的形式. 指出这些公式中的每一项分别对应那些Feynman图.
3. 对于六维中相互作用拉格朗日密度为 $g\phi^3/6$ 的中性标量场 $\phi$ 的理论, 计算有效势至一圈阶.
4. 假定作用量 $I[\phi]$ 在有限大矩阵变换 $\phi_n(x) \rightarrow \sum_m M_{nm}\phi_m(x)$ 下不变. 那么在流的何种变换下 $W[J]$ 不变? 利用这一结果导出 $\Gamma[\phi]$ 的对称性质

## 参考文献

- [1] 有效作用量 $\Gamma[\phi]$ 由J. Goldstone, A. Salam和S. Weinberg引入, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962), 在这里是以微扰论的方式, 将其作为对单粒子不可约图的求和定义的. 非微扰定义(16.1.6)是如下几人独立地给出的, B. De Witt, in *Relativity, Groups, and Topology - Lectures Delivered at Les Houches during the 1963 Session of the Summer School of Theoretical Physics*, C. De Witt和B. De Witt编辑. (Gordon and Breach, New York, 1964); G. Jona-Lasinio, *Nuovo Cimento* **34**, 1790 (1964).
- [2] S. Coleman, *Aspect of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985): pp. 135-6
- [3] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973).
- [4] K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.* **16**, 48 (1970); S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985): pp. 139-42.
- [5] K. Symanzik, 参考文献4; J. Iliopoulos, C. Itzyskon, and A. Matrin, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 165 (1975).
- [6] Y. Fujimoto, L. O'Raiheartaigh, and G. Parravicini, *Nucl. Phys.* **B212**, 268 (1983); R. W. Haymaker and J. Perez-Mercader, *Phys. Rev.* **D27**, 1948 (1983); C. M. Bender and F. Cooper, *Nucl. Phys.* **B224**, 403 (1983); M. Hindmarsh and D. Johnston, *J. Math. Phys.* **A19**, 141 (1986); V. Branchina, P. Castorina, and D. Zappalà, *Phys. Rev.* **D41**, 1948 (1990); K. Cahill, *Phys. Rev.* **D52**, 4704 (1995).
- [7] A. A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* **10**, 152 (1972) [英译版: *Theor. and Math. Phys.* **10**, 99 (1972)]; J. C. Taylor, *Nucl. Phys.* **B33**, 436 (1971).

## 第 17 章 规范理论的重整化

我们现在转向规范理论, 并使用上一章所描述的外场形式理论来研究这些理论的重整化, 然后进行一个重要的计算.

### 17.1 Zinn-Justin方程

在本节, 我们将用15.7节所描述的BRST对称性来例证量子有效作用量的一个泛函性质, 这一性质是由Zinn-Justin首先导出的.<sup>1</sup> 根据16.4节中所概述的一般规则, 作用量 $I[\chi]$ 的BRST不变性给有效作用量附加了条件

$$\int d^4x \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_\chi} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(x)} = 0, \quad (17.1.1)$$

其中,  $\chi^n(x)$ 在BRST变换下的改变是

$$\delta_\theta \chi^n(x) = \theta \Delta^n(x), \quad (17.1.2)$$

这里的 $\theta$ 是无限小费米参量,  $\langle \dots \rangle$ 是有流 $J_\chi$ 时的真空期望值, 而流 $J_\chi$ 使得算符场 $X^n(x)$ 的真空期望值等于c-数函数 $\chi^n(x)$ . 隐含地对 $n$ 求和取遍BRST形式理论中的所有场; 即, 对 $\omega_\alpha$ ,  $\omega_\alpha^*$ 和 $h_\alpha$ 以及我们统称为 $\phi^r$ 的物质场和规范场求和. 当 $\chi^n$ 是规范场或物质场或 $\omega_\alpha$ 时, 由于这时 $\Delta^n(x)$ 是场的二次型, 方程(17.1.1)一般不会告诉我们有效作用量就像作用量本身那样在同一BRST变换下是不变的.

为了处理这一困难, 我们采用一个技巧, 这一技巧已被证明在处理任何一种幂零对称变换时都是有用的. 首先, 我们引入一组c-数外场 $K_n(x)$ , 并定义一个新的有效作用量

$$\Gamma[\chi, K] \equiv W[J_{\chi, K}, K] - \int d^4x \chi^n(x) J_{\chi, K n}(x), \quad (17.1.3)$$

其中连通真空持续振幅 $W$ 在这里要用规范固定作用量 $^*I + \int d^4x \Delta^n K_n$ 计算:

$$e^{iW[J, K]} \equiv \int \left[ \prod_{n, x} d\chi^n(x) \right] \exp \left( iI + i \int d^4x \Delta^n K_n + i \int d^4x \chi^n J_n \right) \quad (17.1.4)$$

而流 $J_{\chi, K}$ 要求在有外场 $K$ 时赋予场期望值 $\chi$ :

$$\left. \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta J_n(x)} \right|_{J=J_{\chi, K}} \equiv \chi^n(x). \quad (17.1.5)$$

( $K_n$ 必须有与 $\Delta^n$ 相同的费米统计或玻色统计, 而这正好与 $\chi^n$ 的统计是相反的.) 既然BRST变换是幂零的,  $\Delta^n(x)$ 是BRST-不变的, 所以我们用16.4节的方法可以证明新的有效作用量满足BRST-不变条件:

$$\int d^4x \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_{\chi, K}, K} \frac{\delta_L \Gamma[\chi]}{\delta \chi^n(x)} = 0, \quad (17.1.6)$$

<sup>1</sup>这里的 $I$ 是15.7节所描述的修正作用量 $I_{NEW}$ , 它依赖于鬼场和反鬼场 $\omega_\alpha$ 和 $\omega_\alpha^*$ 以及辅助场 $h_\alpha$ , 从现在起省略下标“NEW”.

其中 $\langle \cdots \rangle_{J,K}$ 是指真空期望值是在有流 $J$ 和外场 $K$ 的情况下计算的:

$$\langle \mathcal{O}[\chi] \rangle_{J,K} = \frac{\int \left[ \prod_{n,x} d\chi^n(x) \right] \mathcal{O}[\chi] \exp \left( iI + i \int d^4x \Delta^n K_n + i \int d^4x \chi^n J_n \right)}{\int \left[ \prod_{n,x} d\chi^n(x) \right] \exp \left( iI + i \int d^4x \Delta^n K_n + i \int d^4x \chi^n J_n \right)}. \quad (17.1.7)$$

将 $\Delta^n$ 的期望值表示成有效作用量的变分导数是方便的. 取方程(17.1.3)对 $K$ 的右变分导数, 这给出

$$\begin{aligned} \frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} &= \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta K_n(x)} \Big|_{J=J_{\chi,K}} + \int d^4y \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta J_m(y)} \Big|_{J=J_{\chi,K}} \frac{\delta_R J_{\chi,K m}(y)}{\delta K_n(x)} \\ &\quad - \int d^4y \chi^m(y) \frac{\delta_R J_{\chi,K m}(y)}{\delta K_n(x)}. \end{aligned}$$

利用方程(17.1.5), 我们看到后两项抵消, 然后再使用定义(17.1.4)和(17.1.7)就给出了我们希望的结果:

$$\frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} = \frac{\delta_R W[J, K]}{\delta K_n(x)} \Big|_{J=J_{\chi,K}} = \langle \Delta^n(x) \rangle_{J_{\chi,K}, K}. \quad (17.1.8)$$

BRST对称变换(17.1.6)现在可以写成仅包含有效作用量的简单条件, Zinn-Justin方程:

$$\int d^4x \frac{\delta_R \Gamma[\chi, K]}{\delta K_n(x)} \frac{\delta_L \Gamma[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)} = 0. \quad (17.1.9)$$

根据方程(15.9.3)后面的评述, 场和反场的交换(或者这一情况下 $\chi^n$ 和 $K_n$ )的结果就是方程(17.1.9)的左边和右边有一个符号变化, 所以这可以写成

$$(\Gamma, \Gamma) = 0, \quad (17.1.10)$$

其中, 在计算这里的反括号时用 $K_n$ 替换了 $\chi^n$ 的反场:

$$(F, G) \equiv \int d^4x \frac{\delta_R F[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)} \frac{\delta_L G[\chi, K]}{\delta K_n(x)} - \int d^4x \frac{\delta_R F[\chi, K]}{\delta K_n(x)} \frac{\delta_L G[\chi, K]}{\delta \chi^n(x)}. \quad (17.1.11)$$

这在形式上与15.9节讨论的Batalin-Vilkovisky“主方程”相同, 但在这里它是作为对量子有效作用量而非基础作用量 $S[\chi, \chi^\dagger]$ 的约束出现的. 在接下来的两节中, Zinn-Justin方程(17.1.10)将用来说明如何重整化规范理论, 并在22.6节中用来研究这些理论中的反常.

## 17.2 重整化: 直接分析

在“Dyson”的意义下, 即拉格朗日密度中所有算符的量纲(按质量幂次计)均不超过4, 最简单的非阿贝尔规范理论是可重整的. 正如我们在第12章所看到的, 这保证了量子有效作用量中出现无限大的项可以被量纲不超过4的相互作用中的抵消项所抵消. 但是可重整性不仅仅是这些. 拉格朗日密度被规范不变性以及其它对称性所约束. 对于一个可重整化的理论, 除去场的一个可能的重整化之外, 量子有效作用量中的无限大也必须服从相同的约束.<sup>2</sup>

有效作用量 $\Gamma[\chi, K]$ 是 $\chi$ 和 $K$ 的复杂泛函, 它的对称条件(17.1.9)给出的结果也很复杂, 所幸的是, 对于 $\Gamma$ 中的无限大项, 事情要简单得多. 我们会将作用量 $S[\chi, K] \equiv I[\chi] + \int d^4x \Delta^n K_n$ 写成 $S_R[\chi, K]$ 与修正 $S_\infty[\chi, K]$ 的和, 其中前者的质量与耦合常数设置为它们的重整化值, 而后者

包含我们打算用来抵消来自圈图中的无限大的抵消项.  $S_R$ 和 $S_\infty$ 所取的形式都必须有原始作用量 $S[\chi, K]$ 的对称性, 所以问题变成, 在对 $\Gamma$ 的高阶修正中, 无限大部分是否分享了相同的对称性, 使得这些无限大可以被 $S_\infty$ 中的抵消项所抵消.

我们可以将 $\Gamma$ 展成 $\Gamma_N$ 的级数,  $\Gamma_N$ 既来自于那些只有 $N$ 个圈的图, 也来自于有 $N - M$ 个圈的图(其中 $1 \leq M \leq N$ ), 后者包含 $S_\infty[\chi, K]$ 中的抵消项, 这些抵消项将用来抵消总圈数为 $M$ 的图中的无限大:

$$\Gamma[\chi, K] = \sum_{N=0}^{\infty} \Gamma_N[\chi, K]. \quad (17.2.1)$$

那么, 对于每一个 $N$ , 对称性条件(17.1.10)变成,\*

$$\sum_{N'=0}^N (\Gamma_{N'}, \Gamma_{N-N'}) = 0. \quad (17.2.2)$$

在求和(17.2.1)中, 领头项就是 $\Gamma_0[\chi, K] = S_R[\chi, K]$ , 这当然是有限的. 假定, 对于所有的 $M \leq N - 1$ , 所有产生于 $M$ 圈图的无限大都被 $S_\infty$ 中的抵消项所抵消. 那么, 无限大仅能出现在 $N' = 0$ 的项和 $N' = N$ 的项, 它们是相等的, 并且这个条件的无限大部分告诉我们 $\Gamma_N$ 的无限大部分 $\Gamma_{N,\infty}$ 服从于条件

$$(S_R, \Gamma_{N,\infty}) = 0. \quad (17.2.3)$$

正像方程(15.9.16)和(15.8.17)所描述的那样, 这是由 $S_R$ 生成的对称性原理. 特别地, 注意到变换 $X \mapsto (S_R, X)$ 既作用在外场 $K_n$ 上, 也作用在场 $\chi^n$ 上.

直到现在, 我们还未曾使用过可重整Yang-Mills理论的任何特殊性质. 现在, 注意到, 根据可重整理论普遍的幂次计数规则, 再加上 $\Gamma_N$ 子图中的无限大全部抵消这一前提,  $\Gamma_N[\chi, K]$ 的无限大部分 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 只能是场(包括 $K$ )以及场导数量纲(按质量幂次计)不超过4的乘积的和. 最后, 16.4节的讨论表明对于任何可实现的线性对称变换, (正如下面所描述的, 它们是: Lorentz变换, 整体规范变换, 反鬼变换, 以及鬼相位变换和其所附带的鬼数守恒. 当然, 在这些对称变换下, 也必须赋予给辅助场 $K_n$ 合适的变换性质.) 若作用量在该变换下不变, 那么 $\Gamma[\chi, K]$ 以及随之的 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 也在该对称变换下不变. 这些条件连同方程(17.2.3)就足以告诉我们关于 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 我们所需知道的一切.

我们现在可以使用鬼数守恒证明 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 实际上不包含 $K_n$ 的任何二阶项. 对于这个目的, 我们同样需要知道 $K_n$ 的鬼数. 如果 $\chi^n$ 的鬼数是 $\gamma_n$ , 那么 $\Delta_n$ 的鬼数就是 $\gamma_n + 1$ , 所以必须要赋予 $K_n$ 鬼数 $-\gamma_n - 1$ . 场 $A^{\alpha\mu}$ ,  $\psi^\ell$ ,  $\omega^\alpha$ 和 $\omega^{\alpha*}$ 的鬼数分别是0, 0, +1和-1, 所以相应外场 $K_n$ 分别必须有鬼数-1, -1, -2和0. 除了一个可能的例外, 这排除了 $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$ 中所有 $K_n$ 的二阶项, 这个例外就是与 $\omega^{\alpha*}$ 相联系的外场 $K_a^*$ 的二阶项(不包含其它场). 然而, 最后的这些项由于一个不同的原因也被禁止了.  $\omega^{\alpha*}$ 的BRST变换关于场是线性的, 并有

$$\Delta^{\alpha*} = -h^\alpha, \quad (17.2.4)$$

\*通过重复使用16.1节的推理, 这种逐阶关系可以形式上地导出: 当作用量 $S_R$ 被替换成 $g^{-1}S_R$ 后, 有 $I$ 条内线以及 $V$ 个顶点的连通 $L$ 圈图的贡献要乘以因子 $g^{V-I} = g^{L-1}$ . 如果 $S_\infty$ 中与 $N$ 圈图相联系的抵消项也被赋予了因子 $g^N$ , 那么 $\Gamma_L$ 就是 $\Gamma$ 中 $g^{L-1}$ 阶项在 $g = 1$ 时的值. 然后, 通过要求方程(17.1.10)在 $g$ 的每一节都成立就得出了方程(17.2.2). 在cgs单位值中, 作用量的量纲与 $\hbar$ 相同, 因而当作用量在路径积分中出现时会乘以因子 $1/\hbar$ , 所以, 取代 $g$ , 我们可以用 $\hbar$ 作为圈计数的参量.



所以这时

$$\frac{\delta_L \Gamma_{N,\infty}[\chi, K]}{\delta K_\alpha^*} = \langle \Delta^{\alpha*} \rangle_{J_\chi, K} = -h^\alpha$$

是独立于  $K_\alpha^*$ . 由此得出  $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$  关于  $K^{\alpha*}$  是线性的, 并且仅通过项  $-\int d^4x K_\alpha^* h^\alpha$  与  $K^{\alpha*}$  相关. ( $K_\alpha^*$  和  $h^\alpha$  都是玻色的, 所以它们的顺序是无关紧要的.) 特别地, 对于  $N > 0$ ,  $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$  独立于  $K^{\alpha*}$ .

我们已经看到  $\Gamma_{N,\infty}[\chi, K]$  关于所有的  $K_n$  最多是线性的. 我们将它写成

$$\Gamma_{N,\infty}[\chi, K] = \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0] + \int d^4x \mathcal{D}_N^n[\chi; x] K_n(x). \quad (17.2.5)$$

我们同时回忆起  $S_R$  与  $K$  的关系:

$$S_R[\chi, K] = S_R[\chi] + \int d^4x \Delta^n[\chi; x] K_n(x).$$

因此, 方程(17.2.3)中  $K$  的零阶项和一阶项分别给出\*\*

$$\int d^4x \left[ \Delta^n[\chi; x] \frac{\delta_L \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0]}{\delta \chi^n(x)} + \mathcal{D}_N^n[\chi; x] \frac{\delta_L S_R[\chi]}{\delta \chi^n(x)} \right] = 0 \quad (17.2.6)$$

和

$$\int d^4x \left[ \Delta^n(\chi; x) \frac{\delta_L \mathcal{D}_N^m(\chi; y)}{\delta \chi^n(x)} + \mathcal{D}_N^n(\chi; x) \frac{\delta_L \Delta^m(\chi; y)}{\delta \chi^n(x)} \right] = 0. \quad (17.2.7)$$

通过引入

$$\Gamma_N^{(\epsilon)}[\chi] \equiv S_R[\chi] + \epsilon \Gamma_{N,\infty}[\chi, 0] \quad (17.2.8)$$

和

$$\Delta_N^{(\epsilon)n}(x) \equiv \Delta^n(x) + \epsilon \mathcal{D}_N^n(x), \quad (17.2.9)$$

其中  $\epsilon$  是无限小量, 上述关系可以变得更加清晰. 这样, (17.2.6)(连同  $S_R$  的BRST不变性)就告诉我们  $\Gamma_N[\chi]$  在变换

$$\chi^n(x) \rightarrow \chi^n(x) + \theta \Delta_N^{(\epsilon)n}(x) \quad (17.2.10)$$

下不变, 而方程(17.2.7)(连同原始BRST变换的的幂零性)则告诉我们这一变换是幂零的.

我们现在必须考察这一幂零变换可以采取什么形式. 正如已经提及的,  $\Gamma_{N,\infty}$  只由量纲不超过4的项构成, 所以  $\mathcal{D}_N^n$  以及随之的  $\Delta_N^{(\epsilon)n}(x)$  最多有原始BRST变换函数  $\Delta^n(x)$  的量纲. 另外,  $\mathcal{D}_N^n$  以及随之的  $\Delta_N^{(\epsilon)n}(x)$  的Lorentz变换性质和鬼量子数必须与  $\Delta^n(x)$  相同. 因此, 变换(17.2.10)的最普遍形式是

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi + i\theta \omega^\alpha T_\alpha \psi, \\ A_{\alpha\mu} &\rightarrow A_{\alpha\mu} + \theta [B_{\alpha\beta} \partial_\mu \omega_\beta + D_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma], \\ \omega_\alpha &\rightarrow \omega_\alpha - \frac{1}{2} \theta E_{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \omega_\gamma, \end{aligned}$$

\*\*回忆, 由于  $\chi^n$  和  $K_n$  有相反的统计, 所以对于任意的玻色泛函  $A$  和  $B$ ,

$$\frac{\delta_R A}{\delta \chi^n} \frac{\delta_L B}{\delta K_n} = - \frac{\delta_L A}{\delta \chi^n} \frac{\delta_R B}{\delta K_n} = - \frac{\delta_R B}{\delta K_n} \frac{\delta_L A}{\delta \chi^n},$$

这样, 方程(17.2.6)和(17.2.7)中的第二项就变成这里所表现出的形式.



其中 $T_\alpha$ 是作用在旋量场上的某个矩阵, 而 $B_{\alpha\beta}$ ,  $D_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 是常数, 其中 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 关于 $\beta$ 和 $\gamma$ 是反对称的. 另外,  $\omega_\alpha^*$ 和 $h_\alpha$ 的变换是线性的, 因而是不变的:

$$\omega_\alpha^* \rightarrow \omega_\alpha^* - \theta h_\alpha, \quad h_\alpha \rightarrow h_\alpha.$$

接下来我们附加幂零性条件. 最关键的要求是 $E_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma$ 应该是不变的. 这产生了 $E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon}\omega_\delta\omega_\epsilon\omega_\gamma$ 为零的要求, 使得 $E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon}$ 关于 $\delta, \epsilon, \gamma$ 全反对称的部分为零:

$$E_{\alpha\beta\gamma}E_{\beta\delta\epsilon} + E_{\alpha\beta\epsilon}E_{\beta\gamma\delta} + E_{\alpha\beta\delta}E_{\beta\epsilon\gamma} = 0.$$

但这仅告诉了我们 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 是某个Lie代数 $\mathcal{E}$ 的结构常数. 由于 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时趋于原始规范Lie代数 $\mathcal{A}$ 的结构常数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ , 所以 $\mathcal{E}$ 必须与 $\mathcal{A}$ 相同, 并且结构常数 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 与原始的 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 仅能相差一个乘数因子:<sup>†</sup>

$$E_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{Z}C_{\alpha\beta\gamma}.$$

(这是单纯规范群的情况; 在一般情况下, 对于每一个单子群, 我们分别有一因子 $\mathcal{Z}$ .)

接下来, 我们转向条件: 当变换(17.2.10)作用在规范场上时, 它是幂零的.  $B_{\alpha\beta}\partial_\mu\omega_\beta + D_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma$ 不变的要求告诉我们

$$D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta\delta\epsilon} - D_{\alpha\beta\epsilon}D_{\beta\delta\gamma} = E_{\beta\epsilon\gamma}D_{\alpha\delta\beta} = \mathcal{Z}C_{\beta\epsilon\gamma}D_{\alpha\delta\beta}$$

以及

$$B_{\alpha\beta}E_{\beta\gamma\delta} = D_{\alpha\beta\delta}B_{\beta\gamma}.$$

第一个条件有唯一解<sup>††</sup>

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{Z}C_{\alpha\beta\gamma}.$$

第二个条件告诉我们矩阵 $B_{\alpha\beta}$ 与规范群的伴随表示对易, 因此必须正比于克罗内克- $\delta$ , 我们将比例系数记为 $\mathcal{Z}\mathcal{N}$ :

$$B_{\alpha\beta} = \mathcal{Z}\mathcal{N}\delta_{\alpha\beta}.$$

最后, 当变换(17.2.10)作用在费米场(若有的话)上时是幂零的, 这一条件要求 $\omega^\alpha T_\alpha\psi$ 是不变的. 这告诉我们

$$[T_\beta, T_\gamma] = iE_{\alpha\beta\gamma}T_\alpha,$$

所以 $T_\alpha$ 与原始拉格朗日量中的生成元 $t_\alpha$ 仅相差因子 $\mathcal{Z}$ :

$$T_\alpha = \mathcal{Z}t_\alpha.$$

因此, 我们看到了, 除了出现新的常数 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{N}$ , 变换(17.2.10)就是我们所出发的BRST变换:

$$\psi \rightarrow \psi + i\mathcal{Z}\theta\omega^\alpha t_\alpha\psi, \quad (17.2.11)$$

$$A_{\alpha\mu} \rightarrow A_{\alpha\mu} + \mathcal{Z}\theta[\mathcal{N}\partial_\mu\omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\mu}\omega_\gamma], \quad (17.2.12)$$

$$\omega_\alpha \rightarrow \omega_\alpha - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\theta C_{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma, \quad (17.2.13)$$

$$\omega_\alpha^* \rightarrow \omega_\alpha^* - \theta h_\alpha, \quad (17.2.14)$$

$$h_\alpha \rightarrow h_\alpha. \quad (17.2.15)$$

<sup>†</sup>整体规范不变的要求排除了 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 通过非平庸相似变换与 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 相关的所有可能性.

<sup>††</sup>矩阵 $(D_\gamma)_{\alpha\beta} \equiv D_{\gamma\alpha\beta}/\mathcal{Z}$ 满足规范Lie代数的对易关系,  $[D_\gamma, D_\epsilon] = C_{\beta\epsilon\gamma}D_\beta$ . 但是与 $\mathcal{A}$ 的伴随表示维数相同并且有着相同的 $\mathcal{A}$ 变换性质的单Lie代数的唯一表示是伴随表示本身.

现在我们要用这一对称性约束修正作用量(17.2.8)的结构. 既然, 这仅包含了原始重整化作用量与 $N$ -圈修正的无限大部分, 它必须是一个拉格朗日密度的积分

$$\Gamma_N^{(\epsilon)} = \int d^4x \mathcal{L}_N^{(\epsilon)}, \quad (17.2.16)$$

其中 $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ 是场与场导数的定域函数, 并且它的量纲(按质量幂次计)不超过4. 更进一步, 正如我们在16.4节所发现的, 对于原始作用量的所有对称性, 若该对称性以线性的方式作用在场上, 那么它也是 $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ 的对称性. 为了找出这些对称性, 回忆在广义 $\xi$ -规范下, 方程(15.7.6)中的“新”拉格朗日密度所采取的形式是通过用方程(15.7.6)中的 $h_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2}\xi h_\alpha h_\alpha$ 替换方程(15.6.16)中的 $-(\partial_\mu A_\alpha^\mu)(\partial_\nu A_\alpha^\nu)$ 项给出:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NEW}} = & \mathcal{L}_M - \frac{1}{4}F_{\alpha}^{\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu} - \partial_\mu \omega_\alpha^* \partial^\mu \omega_\alpha \\ & + C_{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu \omega_\alpha^*)A_\gamma^\mu \omega_\beta + h_\alpha \partial_\mu A_\alpha^\mu + \frac{1}{2}\xi h_\alpha h_\alpha. \end{aligned} \quad (17.2.17)$$

对这一公式的检查揭示出了如下的线性对称性:

(1) **Lorentz不变性.**

(2) **整体规范不变性**——即, 在如下的变换下不变,

$$\delta\psi_\ell(x) = i\epsilon^\alpha(t_\alpha)_\ell^m \psi_m(x), \quad (17.2.18)$$

$$\delta A_\mu^\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha}\epsilon^\alpha A_\mu^\gamma(x), \quad (17.2.19)$$

$$\delta\omega_\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha}\epsilon^\alpha \omega_\gamma(x), \quad (17.2.20)$$

$$\delta\omega_\beta^*(x) = C_{\beta\gamma\alpha}\epsilon^\alpha \omega_\gamma^*(x), \quad (17.2.21)$$

$$\delta h_\beta(x) = C_{\beta\gamma\alpha}\epsilon^\alpha h_\gamma(x), \quad (17.2.22)$$

其中 $\epsilon^\alpha$ 是无限小常数参量.

(3) **反鬼平移不变性**——即, 在变换

$$\omega_\alpha^* \rightarrow \omega_\alpha^* + c_\alpha \quad (17.2.23)$$

下不变, 其中 $c_\alpha$ 是无限小常数参量.

(4) **鬼数守恒**——即,  $\omega_\alpha$ 的鬼数始终为+1,  $\omega_\alpha^*$ 的鬼数始终为-1, 而其它所有场的鬼数始终为0.

现在, 我们将继续解出最一般的可重整拉格朗日密度的结构, 也就是说该拉格朗日密度有量纲不超过4的项组成, 它有那些线性作用的对称性, 并且在修正BRST变换(17.2.11)——(17.2.15)下不变.

从方程(17.2.17)中我们可以看出, 场 $A_\alpha^\mu$ ,  $\omega_\alpha$ ,  $\omega_\alpha^*$ 和 $h_\alpha$ 的量纲(按质量幂次计)给别是+1, +1, +1和+2. 又注意到, 鬼数守恒要求 $\omega$ 和 $\omega^*$ 成对出现, 而反鬼平移不变性则使得 $\omega^*$ 总作为导数出现. 每对 $\omega$ 场和 $\partial_\mu \omega^*$ 场使得量纲+3, 所以, 若某项含有的这种对的个数超过1个, 可重整性规则就排除了该项. 有了一个这样的对后, 我们最多还能有一个额外的导数或一个额外的规范场, 而Lorentz不变性则要求我们必须在两者之中选一个. 那么, 唯一包含鬼场的可重整性允许的相互作用就是形式为 $\partial_\mu \omega_\alpha^* \partial^\mu \omega_\beta$ 的项与形式为 $\partial_\mu \omega_\alpha^* A_\gamma^\mu \omega_\beta$ 的项的线性组合.

接下来, 我们来考察包含场 $h_\alpha$ 以及除了 $\omega$ 和 $\omega^*$ 的其它可能的场的项.  $h_\alpha$ 的量纲为+2. 所以可重整性与Lorentz不变性要求<sup>‡</sup>该场出现时要乘以 $h_\beta$ 或 $\partial_\mu A_\beta^\mu$ 或 $A_\beta^\mu A_{\mu\gamma}$ .

<sup>‡</sup>在含有标量场的理论中, 可重整项还将包含 $h_\alpha$ 与一个或两个标量场相乘的项. 这样的项不会引起任何麻烦, 但为了简单起见, 在这里不对它们进行考察.

最后, 拉格朗日量将包含只含有物质场和规范场的项. 我们称这些项的和为 $\mathcal{L}_{\psi A}$ . 将这些放在一起并使用整体规范不变性, 假设对称性(除了BRST不变性)所允许的最一般的可重整相互作用采取如下的形式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N^{(\epsilon)} = & \mathcal{L}_{\psi A} + \frac{1}{2}\xi' h_\alpha h_\alpha + c h_\alpha \partial_\mu A_\alpha^\mu - e_{\alpha\beta\gamma} h_\alpha A_\beta^\mu A_{\gamma\mu} \\ & - Z_\omega (\partial_\mu \omega_\alpha^*) (\partial_\mu \omega_\alpha) - d_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\alpha^*) \omega_\beta A_\gamma^\mu, \end{aligned} \quad (17.2.24)$$

其中 $\xi'$ ,  $Z_\omega$ ,  $c$ ,  $d_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $e_{\alpha\beta\gamma}$ 是未知常数, 除了整体规范不变性和 $e_{\alpha\beta\gamma} = e_{\alpha\gamma\beta}$ 这样显然的对称性质之外, 对于这些常数没有约束. (正如之前所提及的, 为简单起见, 我们假定规范群是单纯的, 但是可以平庸地扩张到简单规范群与 $U(1)$ 规范群的直和; 例如, 取代只有一个正比于 $h_\alpha h_\alpha$ 的项, 我们可以有这种项的和, 而其中的每一项对应规范群的一个单纯子群.)

现在我们附加BRST不变性. 要使 $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ 中正比于 $\theta\partial_\mu h_\alpha \partial^\mu h_\alpha$ 的项相互抵消会要求

$$c = Z_\omega / \mathcal{L} \mathcal{N}. \quad (17.2.25)$$

要使 $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ 中正比于 $\theta\partial_\mu h_\alpha \omega_\beta A_\gamma^\mu$ (或 $\theta\partial_\mu \omega_\alpha^* \omega_\beta \partial^\mu \omega_\gamma$ )的项相互抵消会要求

$$d_{\alpha\beta\gamma} = -(Z_\omega / \mathcal{L}) C_{\alpha\beta\gamma}. \quad (17.2.26)$$

由于结构常数满足Jacobi恒等式,  $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ 中正比于 $\theta\partial_\mu \omega_\alpha^* \omega_\beta \omega_\gamma A_\delta^\mu$ 的项会自动相互抵消. 要使 $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ 中正比于 $\theta h_\alpha \partial_\mu \omega_\beta A_\gamma^\mu$ (或 $\theta h_\alpha A_\beta^\mu A_{\gamma\mu} \omega_\delta$ )的项相互抵消会给出

$$e_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (17.2.27)$$

最后, 对于作用在物质场和规范场上的无限小变换(17.2.10)而言, 它的效果等同于规范参量 $\epsilon_\alpha = \mathcal{L} \mathcal{N} \theta \omega_\alpha$ 且规范耦合被因子 $1/\mathcal{N}$ 重整化后的定域规范变换(被因子 $1/\mathcal{N}$ 重整化是指 $t_\alpha$ 和 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 分别被替换成 $\tilde{t}_\alpha \equiv t_\alpha / \mathcal{N}$ 和 $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv C_{\alpha\beta\gamma} / \mathcal{N}$ ), 所以, 对于 $\delta\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$ 中只含有一个 $\omega_\alpha$ 因子但不含 $h_\alpha$ 和 $\omega_\alpha^*$ 因子的项, 它们的相互抵消会告诉我们, 若这些场的拉格朗日量 $\mathcal{L}_{\psi A}$ 所含的耦合常数是重整化后的, 那么它是规范不变的. 我们由此得出, 我们所假设的对称性原理所允许的最一般的可重整拉格朗日密度是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N^{(\epsilon)} = & -\frac{1}{4} Z_A \tilde{F}_\alpha^{\mu\nu} \tilde{F}_{\alpha\mu\nu} - Z_\psi \bar{\psi} \gamma^\mu [\partial_\mu - i \tilde{t}_\alpha A_{\alpha\mu}] \psi - \bar{\psi} m_\psi \psi + \frac{1}{2} \xi' h_\alpha h_\alpha \\ & + (Z_\omega / \mathcal{L} \mathcal{N}) h_\alpha \partial_\mu A_\alpha^\mu - Z_\omega (\partial_\mu \omega_\alpha^*) (\partial_\mu \omega_\alpha) + Z_\omega \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} (\partial_\mu \omega_\alpha^*) \omega_\beta A_\gamma^\mu, \end{aligned} \quad (17.2.28)$$

其中 $\tilde{F}_\alpha^{\mu\nu}$ 上的波浪符表明这个场强是使用重整化结构常数 $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} \equiv C_{\alpha\beta\gamma} / \mathcal{N}$ 计算的. 然而, 除却几个新出现的常数外, 这与我们所出发的拉格朗日量是相同的. 通过调整未重整化原始拉格朗日量中相应常数的第 $N$ 阶项, 我们可以随意调节这一拉格朗日量中的新常数(包括规范耦合常数). 特别地, 我们可以调整这些项使得 $\Gamma_N^{(\epsilon)} = S_R$ , 在这一情况下 $\Gamma_{N,\infty} = 0$ , 完成了证明.

\* \* \*

在之上的证明中, 我们着重使用了规范固定拉格朗日量(17.2.17)在反鬼平移变换(17.2.23)下的偶然不变性. 对于除 $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$ 以外的规范固定函数, 即不是时空导数的规范固定函数, 这一对称性不会体现出来. 经常引用的一个例子是 $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu + a_{\alpha\beta\gamma} A_\beta^\mu A_{\gamma\mu}$ , 它保持了Lorentz不变性和整体规范不变性, 其中的 $a_{\alpha\beta\gamma}$ 是关于 $\beta$ 和 $\gamma$ 对称的常数矩阵, 它在整体规范变换下按照一个张量变

换. (这样的常数张量对于所有  $N > 3$  的  $SU(N)$  群是存在的.) 另一个重要例子是将在17.4节引入的背景规范固定泛函.

$\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$  是场与场导数量纲不超过4的定域泛函, 且  $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$  是 Lorentz-不变以及整体规范不变, 即在重整化BRST变换(17.2.11)—(17.2.15)下不变, 就这些结论而言, 即使没有了反鬼平移不变性, 得出这些结论的讨论也不会受到影响. 但是, 如果没有了反鬼平移不变性,  $\mathcal{L}_N^{(\epsilon)}$  中就会有新的项, 并且满足上述条件. 既然变换(17.2.11)—(17.2.15)是幂零的, 我们可以将这样的项写成  $s'F$ , 在这里变换(17.2.11)—(17.2.15)被写成  $\chi^n \rightarrow \chi^n + \theta s' \chi^n$ , 而  $F$  是鬼数为-1的 Lorentz-不变且整体规范不变的函数. 这种项的一种可能是

$$a_{\alpha\beta\gamma} s' \left( \omega_\alpha^* A_{\beta\mu} A_\gamma^\mu \right) = -a_{\alpha\beta\gamma} \left[ h_\alpha A_{\beta\mu} A_\gamma^\mu + 2\mathcal{Z} \omega_\alpha^* (\mathcal{N} \partial_\mu \omega_\beta + C_{\beta\delta\epsilon} A_{\delta\mu} \omega_\delta) A_\gamma^\mu \right].$$

这不会引起任何问题: 它仅是规范固定函数  $f_\alpha$  中的  $a_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_\gamma^\mu$  项所产生的通常的鬼场项和规范固定项的重整化版本. 但存在另一种可能的项, 它的形式是

$$b_{\alpha\beta\gamma} s' \left( \omega_\alpha^* \omega_\beta^* \omega_\gamma \right) = -b_{\alpha\beta\gamma} \left[ 2h_\alpha \omega_\beta^* \omega_\gamma + \frac{1}{2} \mathcal{Z} C_{\gamma\delta\epsilon} \omega_\alpha^* \omega_\beta^* \omega_\delta \omega_\epsilon \right],$$

其中  $b_{\alpha\beta\gamma}$  是常数并关于  $\alpha$  和  $\beta$  反对称, 它在整体规范变换下按照张量变换. (对于任意的 Lie 群, 这样的张量总是存在的; 例如, 我们可以令  $b_{\alpha\beta\gamma}$  正比于  $C_{\alpha\beta\gamma}$ .) 但 Faddeev-Popov-De Witt 方法无法给出拉格朗日量中的4-鬼场相互作用, 所以不存在可用的抵消项以吸收这一项中的紫外发散. 这不仅仅是证明可重整性的技术性障碍; 对于像  $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu + a_{\alpha\beta\gamma} A_\beta^\mu A_\gamma^\mu$  这样的规范固定函数, 在4-鬼振幅中, 一圈图确实产生了发散, 并且这一发散无法被 Faddeev-Popov-De Witt 拉格朗日量中的抵消项抵消.

除了避开  $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$  以外的规范固定函数, 解决这一问题的唯一方法似乎是在15.7节所提过的一个方案. 我们必须放弃 Faddeev-Popov-De Witt 方法, 取而代之, 在一开始就将作为规范场, 物质场, 鬼场和辅助场泛函的作用量取成在 BRST 对称性以及理论其它对称性不变的最一般的可重整形式. 根据15.8节的讨论, 作用量可以写成  $I_0 + s\Psi$  的形式, 其中  $I_0$  是无鬼的, 而  $S$ -矩阵与  $\Psi$  无关, 所以, 通过在鬼场退耦的轴向规范下量子化这一理论, 然后将  $\Psi$  取成我们所希望的形式, 我们可以证明这一步骤的合理性. 特别地, 我们可以在作用量中引入  $s(\omega^* \omega^* \omega)$  项以充当4-鬼顶点中发散的抵消项.

### 17.3 重整化: 一般规范理论\*

在上一节, 对于非阿贝尔规范理论的可重整性证明依赖于对作用量中量纲不超过4的可能项的“暴力”分析. 但我们在第12章看到, 附加在作用量中项的量纲上的限制至多是一个很好的近似. 用来描述强相互作用, 弱相互作用以及电磁相互作用的成功可重整量子场论几乎肯定是有效场论, 这些理论带有量纲  $d > 4$  的项; 这些项一般不会被观测到, 它们会被某些非常大的质量的  $4-d$  次方所抑制, 这些质量或许是  $10^{16}$ - $10^{18}$  GeV 阶的. 引力也可以被一个有效场论描述, 在这个理论中, 拉格朗日密度不仅包含 Einstein-Hilbert 项  $-\sqrt{g}R/16\pi G$ , 也包含由4个或者更多个引力场导数所构建的所有标量. 我们需要证明这类规范理论, 也就是在幂次计数意义下不可重整的规范理论, 在现代意义下却是可重整的, 即规范对称性会控制紫外发散使得总存在可用的抵消项以抵消每个无限大.<sup>3</sup>

\*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

由于这个原因, 我们回到15.9节所引入的作用量 $S[\chi, \chi^\dagger]$ , 将作用量取成独立场 $\chi^n$  (包括规范场和物质场 $\phi^r$ , 鬼场 $\omega^A$ 以及非最小化场 $\omega^{A*}$ 和 $h^A$ ) 和反场 $\chi_n^\dagger$ 的函数. 在类似量子引力或Yang-Mills理论的理论中, 这些理论基于结构常数为 $f_{AB}^C$ 的闭规范代数, 作用量被约束在如下的形式

$$S = I[\phi] + \omega^A f_A^r[\phi] \phi_r^\dagger + \frac{1}{2} \omega^A \omega^B f_{AB}^C[\phi] \omega_C^\dagger - h^A \omega_A^{*\dagger}, \quad (17.3.1)$$

其中 $I[\phi]$ 在无限小规范变换 $\phi^r \rightarrow \phi^r + \epsilon^A f_A^r[\phi]$ 下不变. (同15.9节一样, 指标 $r, A$ 等包含时空坐标, 在对这些指标的求和中要对时空坐标积分.)

在这里, 我们不会将自己限制在这一形式的作用量下, 但是我们会假定理论会被附加域对称性, 而这些对称性是通过要求作用量在它的反场相关性上必须服从某些“结构约束”得到的, 方程(17.3.1)就提供了这样的一个例子. 结构约束假定是线性的, 也就是说, 如果结构约束对于 $S + \mathcal{S}_1$ 和 $S + \mathcal{S}_2$ 都是满足的, 那么对于任意常数 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ ,  $S + \alpha_1 \mathcal{S}_1 + \alpha_2 \mathcal{S}_2$ 也满足结构约束. 我们同时附加量子主方程(15.9.35)

$$(S, S) - 2i\hbar \Delta S = 0, \quad (17.3.2)$$

其中 $\Delta S$ 通过方程(15.9.34)定义, 而按照上一节脚注所描述的含义, 因子 $\hbar$ 现在作为“圈计数”参量显式地写出.

将作用量取成 $\hbar$ 的幂级数

$$S = S_R + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \cdots, \quad (17.3.3)$$

其中 $S_R$ 是与 $S$ 结构大体相同的作用量, 但它的所有耦合参量被替换成了有限的重整化值, 而 $S_N$ 是一组无限大抵消项. 假定作用量 $S$ 对于 $\hbar$ 的所有阶均满足量子主方程(17.3.2), 这样 $S_R$ 就会满足经典主方程

$$(S_R, S_R) = 0, \quad (17.3.4)$$

而抵消项满足

$$(S_R, S_N) = -\frac{1}{2} \sum_{M=1}^{N-1} (S_M, S_{N-M}) + i\Delta S_{N-1}. \quad (17.3.5)$$

抵消项 $S_N$ 本身还不足以抵消掉圈图中的紫外发散. 作为传统场重整化的推广, 我们还得引入一组重整化场和重整化反场, 它们通过一个任意的反正则变换以原始场和原始反场的形式定义. 无限小的反正则变换可以通过方程(15.9.26)以无限小生成泛函 $\delta F$ 的形式定义, 所以连续的反正则变换 $G(t) \rightarrow G(t + \delta t) = G(t) + (F(t)\delta t, G(t))$  (其中 $G(t)$ 是场和反场的任意泛函,  $F(t)$ 是生成泛函)会给出有限大的正则变换 $G \rightarrow \tilde{G} \equiv G(1)$ , 并有

$$\frac{d}{dt} G(t) = (F(t), G(t)), \quad G(0) = G. \quad (17.3.6)$$

如果 $F(t)$ 给定为幂级数

$$F(t) = \hbar F_1 + \frac{1}{2} \hbar^2 t F_2 + \cdots, \quad (17.3.7)$$

那么方程(17.3.3), (17.3.6)和(17.3.7)就产生了变换后的作用量

$$\tilde{S} = S_R + \hbar \left[ S_1 + (F_1, S_R) \right] + \hbar^2 \left[ S_2 + (F_1, S_1) + (F_2, S_R) + \frac{1}{2} (F_1, (F_1, S_R)) \right] + \cdots. \quad (17.3.8)$$

现在, 问题就在于我们是否可以用我们所拥有的自由度去选择 $F_N$ 和 $S_N$ , 进而使得圈图中产生的所有无限大都被抵消掉.



如上文所述, 方程(17.3.3)中的第一项 $S_R$ 自动是有限的. 假定对于 $M < N$ , 无限大通过 $S_M$ 和 $F_M$ 被抵消掉了, 那么确实有可能消除量子有效作用量中 $M < N$ 的 $\hbar^M$ 阶项 $\Gamma_M$ 中的所有无限大. 正如我们在上一节所看到的, Zinn-Justin方程告诉我们, 量子有效作用量中 $\hbar^N$ 阶项的无限大部分 $\Gamma_{N,\infty}$ 满足条件

$$(S_R, \Gamma_{N,\infty}) = 0. \quad (17.3.9)$$

场变量 $\chi^n$ 和反场变量 $\chi_n^\dagger$ 通过反正则变换与变量 $\chi^n$ 和 $K_n$ 相关, 而反正则变换保护了所有的反括号, 所以, 方程(17.3.9)中的反括号可以 $\chi^n$ 和 $\chi_n^\dagger$ 的形式而非 $\chi^n$ 和 $K_n$ 进行计算.

抵消项 $S_N$ 所满足的条件(17.3.5)与 $\Gamma_{N,\infty}$ 所满足的条件(17.3.9)并不相同. 然而, 给定任意满足方程(17.3.5)的 $S_N^0$ , 我们可以找到一类另外的解

$$S_N = S_N^0 + S'_N,$$

其中 $S'_N$ 除了要满足以下条件外是任意的, 即 $S_R + S'_N$ 要像 $S_R + S_N^0$ 那样满足与 $S_R$ 相同的对称性条件, 并且, 为了不使方程(17.3.5)无效

$$(S_R, S'_N) = 0. \quad (17.3.10)$$

因此, 量子有效作用量中的第 $N$ 阶项的无限大部分可以写成

$$\Gamma_{N,\infty} = S'_{N,\infty} + (F_{N,\infty}, S_R) + X_{N,\infty}, \quad (17.3.11)$$

其中 $X_N$ 由来自圈图的项, 来自 $S_N^0$ 中的项, 以及 $\Gamma$ 中包含 $M < N$ 的 $S_M$ 和 $F_M$ 的各种项组成. 例如, 对于 $N = 2$ , 方程(17.3.8)给出

$$X_2 = S_2^0 + 2(F_1, S_1) + (F_1, (F_1, S_R)) + \text{仅包含 } S_R \text{ 的两圈项} \\ + \text{包含 } S_R, S_1 \text{ 和 } F_1 \text{ 的一圈项}.$$

对于我们的目的, 关于 $X_N$ 我们唯一需要知道的是它确实不包含 $S'_N$ 或 $F_N$ , 并且它在 $S_R$ 的任何可实现的线性整体变换下不变.

现在, 因为 $(S_R, S_R) = 0$ , 操作 $F \mapsto (S_R, F)$ 是幂零的; 对于所有的 $F$ ,

$$(S_R, (S_R, F)) = 0. \quad (17.3.12)$$

因此, 从方程(17.3.9)和(17.3.10)—(17.3.12)可以得出

$$(S_R, X_{N,\infty}) = 0. \quad (17.3.13)$$

通过选择 $F_{N,\infty}$ 使其等于 $Y$ ,  $X_{N,\infty}$ 中任何形式为 $(S_R, Y)$ 的项在方程(17.3.11)都可以被抵消掉. 因此,  $X_{N,\infty}$ 中需要被抵消项 $S'_{N,\infty}$ 抵消掉的可能的剩余无限大项的空间, 由那些满足 $(S_R, X) = 0$ 的泛函 $X$ 组成, 并且如果两个泛函相差的项形式为 $(S, X)$ , 则认为这两个泛函是等价的. 换句话说,  $\Gamma_N$ 中需要被抵消项 $S'_N$ 抵消掉的无限大属于映射 $X \mapsto (S_R, X)$ 的上同调.

$S_R + S'_N$ 必须满足附加在作用量 $S$ 上的结构约束, 这一要求会限制抵消项 $S'_N$ 的可能形式. 因此, 如果我们能够证明映射 $X \mapsto (S_R, X)$ 的上同调仅由那些满足这一结构约束的泛函组成, 我们就完成了可重整性的证明.

在量子引力与半单规范对称性的Yang-Mills场论耦合的情况下, 这一理论的对称性由结构约束(17.3.1)实现. 在这一情况下会有一个定理:<sup>4</sup> 构成\*\*映射 $X \mapsto (S_R, X)$ 的上同调的泛函 $A[\phi]$ (映射所在的空间是鬼数为零的定域泛函的空间, 而不是鬼数为零的时空相关函数的空间), 在结构常数为 $f_{AB}^C$ 的规范变换 $\phi^r \rightarrow \phi^r + \epsilon^A f_A^r[\phi]$ 下不变. 任何这类的 $N$ 阶无限大都可以被相同形式的抵消项 $S'_N$ 抵消掉, 所以, 尽管这些理论在传统的幂次计数意义下是不可重整的, 但是, 若可重整是指, 通过对原始裸作用量 $I[\phi]$ 中的参量进行选择, 并对场和反场做一个合适的重整化, 所有无限大都可以被消除掉, 那么在这一意义下, 这些理论完全是可重整的.

在其它理论中, 映射 $X \mapsto (S_R, X)$ 的上同调会包含额外的项. 这并不会一定要求削弱结构约束, 这是因为上同调中的额外项可能不对应真实的紫外发散. 例如, 在含有 $U(1)$ 因子的规范理论中, 上同调中所包含的项中会有一项<sup>4</sup>对应于 $U(1)$ 规范对称性的作用量在该理论各种场上的重定义, 如果这一项是无限大的, 那么它将会要求我们削弱结构约束, 让方程(17.3.1)中的变换函数 $f_A^r[\phi]$ 保持任意. 但是软光子定理告诉我们不同场的 $U(1)$ 耦合的比值(就像量子电动力学中各种轻子电荷的比值)不会被辐射修正影响,(参看10.4节) 这一定理会禁止这一无限大. 如果上同调中的额外项确实包含紫外发散, 那么, 为了让每一可能的紫外发散都存在一个抵消项, 附加在 $S$ 上的结构约束就必须要被削弱. 现在还不清楚这是否总是可能的; 如果不是, 某些理论可能会由于它们不可移除的紫外发散而不得不被丢掉.

## 17.4 背景场规范

接下来, 我们转向一个显然保护一类规范对称性的计算方法, 这个计算方法也因此证实是极其方便, 在一圈计算中尤其如此. 我们视有效作用量 $\Gamma[A, \psi, \omega, \omega^*]$ 为经典外规范场 $A_{\alpha\mu}(x)$ , 经典外物质场 $\psi_\ell(x)$ , 经典外鬼场 $\omega_\alpha(x)$ 和经典外反鬼场 $\omega_\alpha^*(x)$ 的泛函\*. 尽管鬼场和反鬼场无法出现在初态或末态中, 为了处理有外鬼线或外反鬼线的那部分图, 在考察背景规范场和背景物质场的同时, 我们也会考察背景鬼场和背景反鬼场.

正如16.1节中所描述的,  $\Gamma[A, \psi, \omega, \omega^*]$ 是真空-真空振幅的连通单粒子不可约图的和, 在计算这些振幅的理论中, 我们要积掉的量子场 $A', \psi', \omega'$ 和 $\omega'^*$ 被替换成了偏移场 $A + A', \psi + \psi', \omega + \omega'$ 和 $\omega^* + \omega'^*$ , 路径积分的积分变量是加撇的场, 而不加撇的场保持不变. 我们几乎可以按照我们喜欢的任何方式自由选择规范固定函数 $f_\alpha(x)$ ; 取代我们之前的选择 $f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha^\mu$ (或 $\partial_\mu[A_\alpha^\mu + A_\alpha^\mu]$ ), 我们现在取<sup>5</sup>

$$f_\alpha = \partial_\mu A_\alpha'^\mu + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_\gamma'^\mu. \quad (17.4.1)$$

这一选择的原因是, 它使得规范固定项 $f_\alpha f_\alpha$ 在一个形式变换下不变, 在这个形式变换中, 背景场 $A_\alpha^\mu$ 按照规范场变换, 而量子场 $A_\alpha'^\mu$ 就像属于规范群伴随表示的普通物质场那样进行齐次变换

$$\delta A_\alpha^\mu = \partial^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A_\gamma^\mu, \quad (17.4.2)$$

$$\delta A_\alpha'^\mu = C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A_\gamma'^\mu. \quad (17.4.3)$$

看到 $f_\alpha$ 的变换性质的最好方法是将 $f_\alpha$ 写成一类新的协变导数

$$f_\alpha \equiv \bar{D}_\mu A_\alpha'^\mu, \quad (17.4.4)$$

\*\*严格地讲, 只有要求 $S$ 中的耦合系数不会取某些会使得 $S$ 会在更大的定域对称群下不变的值, 这才是有效的. 例如, 这排除了 $S = 0$ 的情况.

\*我们现在回到规范固定泛函 $B[f]$ 的特殊选择——高斯型(15.7.4), 并且我们会积掉辅助场 $h_\alpha$ , 使得修正拉格朗日量中的规范固定项就是 $-f_\alpha f_\alpha / 2\xi$ .



其中, 对于伴随表示下的任何场 $\phi_\alpha$

$$\bar{D}_\mu \phi_\alpha \equiv \partial_\mu \phi_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \phi_\gamma . \quad (17.4.5)$$

我们看到在变换(17.4.2)和(17.4.3)下, 函数(17.4.1)就像 $A'_\alpha$ 那样变换:

$$\delta f_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta f_\gamma , \quad (17.4.6)$$

所以, 修正拉格朗日量中的 $f_\alpha f_\alpha$ 项是不变的

$$\delta(f_\alpha f_\alpha) = -2C_{\alpha\beta\gamma} f_\alpha \epsilon_\beta f_\gamma = 0 . \quad (17.4.7)$$

另外, 原始拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 仅通过和 $A + A'$ 依赖于 $A$ 和 $A'$ , 它在(17.4.2)和(17.4.3)的组合变换下经历一个普通的规范变换

$$\delta(A_\alpha^\mu + A_{\alpha'}^\mu) = \partial^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta (A_\gamma^\mu + A_{\gamma'}^\mu) . \quad (17.4.8)$$

如果我们对背景物质场和量子物质场的变换是

$$\delta\psi = i t_\alpha \epsilon_\alpha \psi , \quad (17.4.9)$$

$$\delta\psi' = i t_\alpha \epsilon_\alpha \psi' , \quad (17.4.10)$$

那么也有

$$\delta(\psi + \psi') = i t_\alpha \epsilon_\alpha (\psi + \psi') . \quad (17.4.11)$$

原始拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 在原始规范变换(17.4.8)和(17.4.11)下不变, 并且仅依赖于 $A + A'$ 和 $\psi + \psi'$ , 所以它在新形式变换(17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10)下也是不变的.

将 $\mathcal{L}$ 以背景协变导数 $\bar{D}_\mu$ 的形式写出会使得这一不变性更加明晰, 而这将是有帮助的. 一般而言, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \left( \partial_\mu [A_{\alpha\nu} + A'_{\alpha\nu}] - \partial_\nu [A_{\alpha\mu} + A'_{\alpha\mu}] + C_{\alpha\beta\gamma} [A_{\beta\mu} + A'_{\beta\mu}] [A_{\gamma\nu} + A'_{\gamma\nu}] \right)^2 \\ &\quad + \mathcal{L}_M \left( \psi + \psi', \partial_\mu (\psi + \psi') - i t_\alpha (A_{\alpha\mu} + A'_{\alpha\mu}) (\psi + \psi') \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( F_{\alpha\mu\nu} + \bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu} \right)^2 \\ &\quad + \mathcal{L}_M \left( \psi + \psi', \bar{D}_\mu (\psi + \psi') - i t_\alpha A'_{\alpha\mu} (\psi + \psi') \right) , \end{aligned} \quad (17.4.12)$$

其中, 同方程(17.4.5)一样,

$$\bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} \equiv \partial_\mu A'_{\alpha\nu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu} , \quad (17.4.13)$$

$$\bar{D}_\mu \psi \equiv \partial_\mu \psi - i t_\alpha A_{\alpha\mu} \psi , \quad (17.4.14)$$

而 $F_{\alpha\mu\nu}$ 是背景场强

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu} . \quad (17.4.15)$$

( $\mathcal{L}$ 第一项中的平方用来暗示写出的指标要进行收缩.) 因为 $\mathcal{L}$ 仅通过场强 $F_{\alpha\mu\nu}$ 以及“物质”场 $A'_{\alpha\mu}$ ,  $\psi'$ 和 $\psi$ 的背景协变导数 $\bar{D}_\mu$ 牵扯到 $A_{\alpha\mu}$ , 所以它在新变换(17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10)下显然是不变的.

这个新变换应该小心地与真实的规范变换区分开. 真实的规范变换在仅用来描述背景场的 $A$ 和 $\psi$ 上没有效应, 并诱导出了 $A + A'$ 和 $\psi + \psi'$ 上的普通规范变换, 所以

$$\delta_{\text{TRUE}} A_\alpha^\mu = 0, \quad (17.4.16)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{TRUE}} A_\alpha'^\mu &= \partial^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta (A_\gamma^\mu + A_\gamma'^\mu) \\ &= \bar{D}^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A_\gamma'^\mu \end{aligned} \quad (17.4.17)$$

以及

$$\delta_{\text{TRUE}} \psi = 0, \quad (17.4.18)$$

$$\delta_{\text{TRUE}} \psi' = i t_\alpha \epsilon_\alpha (\psi + \psi'). \quad (17.4.19)$$

当然, 这与形式变换(17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10)在 $A + A'$ 和 $\psi + \psi'$ 上的效应是相同的, 因而也保持原始拉格朗日量 $\mathcal{L}$ 不变. 然而, 对于 $f_\alpha$ 的新选择(17.4.1),  $f_\alpha f_\alpha$ 项是不依赖于 $A + A'$ 的, 并且在(17.4.16)和(17.4.17)下也不是不变的. 取而代之,

$$\delta_{\text{TRUE}} f_\alpha = \bar{D}_\mu (\bar{D}^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta A_\gamma'^\mu), \quad (17.4.20)$$

其中 $\bar{D}_\mu$ 由(17.4.5)给定.

最后, 我们来考察这一新规范下的鬼场拉格朗日量. 一般而言, 将 $\delta_{\text{TRUE}} f_\alpha$ 中的 $\epsilon_\alpha$ 替换成鬼场 $\omega_\alpha + \omega'_\alpha$ 就给出了鬼场作用量中的量(15.7.3):

$$\Delta_\alpha = \bar{D}_\mu \left[ \bar{D}^\mu (\omega_\alpha + \omega'_\alpha) - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_\beta + \omega'_\beta) A_\gamma'^\mu \right]. \quad (17.4.21)$$

因此, 方程(15.6.2)中的鬼场拉格朗日量是

$$\mathcal{L}_{\text{GH}} = (\omega_\alpha^* + \omega_\alpha'^*) \bar{D}_\mu \left[ \bar{D}^\mu (\omega_\alpha + \omega'_\alpha) - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_\beta + \omega'_\beta) A_\gamma'^\mu \right] \quad (17.4.22)$$

或者, 进行分部积分,

$$\mathcal{L}_{\text{GH}} = - \left( \bar{D}_\mu (\omega_\alpha^* + \omega_\alpha'^*) \right) \left[ \bar{D}^\mu (\omega_\alpha + \omega'_\alpha) - C_{\alpha\beta\gamma} (\omega_\beta + \omega'_\beta) A_\gamma'^\mu \right]. \quad (17.4.23)$$

为了使其在联合变换(17.4.2)和(17.4.3)下不变, 现在给 $\omega$ 和 $\omega'$ 补充变换:

$$\delta \omega_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta \omega_\gamma, \quad (17.4.24)$$

$$\delta \omega'_\alpha = -C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta \omega'_\gamma, \quad (17.4.25)$$

以及

$$\delta \omega_\alpha^* = -C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta \omega_\gamma^*, \quad (17.4.26)$$

$$\delta \omega_\alpha'^* = -C_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_\beta \omega_\gamma'^*. \quad (17.4.27)$$

我们看到形式变换(17.4.2), (17.4.3), (17.4.9), (17.4.10)的组合变换保持修正作用量(15.6.4)中的完整拉格朗日量不变:

$$\mathcal{L}_{\text{MOD}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha + \mathcal{L}_{\text{GH}}. \quad (17.4.28)$$

假定我们对 $A'$ ,  $\psi'$ ,  $\omega'$ 和 $\omega'^*$ 积分的积分测度在简单矩阵变换(17.4.3), (17.4.10), (17.4.25)和(17.4.27)下不变, 这样有效作用量 $\Gamma[A, \psi, \omega, \omega^*]$ 在剩余的变换(17.4.2), (17.4.9), (17.4.24)和(17.4.26)下是不变的. 换句话说, 它与原始作用量 $I[A, \psi, \omega, \omega^*]$ 在相同的意义下是规范不变的.

这一形式变换给有效作用量中能出现的无限大设置了强有力的限制.  $\Gamma$ 中的紫外发散出现在量纲[质量] $d$ 满足 $d \leq 4$ 的项的系数中, 但这里, 这些项在背景规范变换(17.4.2), (17.4.9), (17.4.24)和(17.4.26)下是不变的. 例如, 在基于单纯规范群的规范理论中, 且自旋1/2费米子属于该群的某个不可约表示, 唯一这样的项形式如下

$$\Gamma_\infty = \int d^4x \mathcal{L}_\infty, \quad (17.4.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\infty = & -\frac{1}{4}L_A F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha^{\mu\nu} - L_\psi \bar{\psi}\gamma^\mu \bar{D}_\mu \psi \\ & - m L_m \bar{\psi}\psi - L_\omega (\bar{D}_\mu \omega_\alpha^*)(\bar{D}^\mu \omega_\alpha), \end{aligned} \quad (17.4.30)$$

其中, 这里的 $F_{\alpha\mu\nu}$ ,  $\bar{D}_\mu \psi$ ,  $\bar{D}_\mu \omega_\alpha$ 和 $\bar{D}_\mu \omega_\alpha^*$ 完全是用背景场构建的:\*\*

$$F_{\alpha\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}, \quad (17.4.31)$$

$$\bar{D}_\mu \psi \equiv \partial_\mu \psi - i t_\alpha A_{\alpha\mu} \psi, \quad (17.4.32)$$

$$\bar{D}_\mu \omega_\alpha \equiv \partial_\mu \omega_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma, \quad (17.4.33)$$

$$\bar{D}_\mu \omega_\alpha^* \equiv \partial_\mu \omega_\alpha^* + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \omega_\gamma^*. \quad (17.4.34)$$

通过量纲分析, 我们预期常数 $L_A$ ,  $L_\psi$ ,  $L_m$ 和 $L_\omega$ 是对数发散的.

为了处理这些无限大, 我们注意到拉格朗日量(17.4.12)包含一个纯经典部分

$$\mathcal{L}_{\text{CLASS}} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha^{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu \bar{D}_\mu + m)\psi - (\bar{D}_\mu \omega_\alpha^*)(\bar{D}^\mu \omega_\alpha), \quad (17.4.35)$$

这一项是通过扔掉 $\mathcal{L}_{\text{MOD}}$ 中所有涉及量子场 $A'$ ,  $\psi'$ ,  $\omega'$ ,  $\omega'^*$ 的项获得的. 我们定义重整化场

$$A_{\alpha\mu}^R \equiv \sqrt{1 + L_A} A_{\alpha\mu}, \quad (17.4.36)$$

$$\psi_\ell^R \equiv \sqrt{1 + L_\psi} \psi_\ell, \quad (17.4.37)$$

$$\omega_\alpha^R \equiv \sqrt{1 + L_\omega} \omega_\alpha, \quad (17.4.38)$$

$$\omega_\alpha^{*R} \equiv \sqrt{1 + L_\omega} \omega_\alpha^*, \quad (17.4.39)$$

这使得(17.4.30)与(17.4.35)的和采取如下的形式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CLASS}} + \mathcal{L}_\infty = & -\frac{1}{4}F_{\alpha\mu\nu}^R F_\alpha^{R\mu\nu} - \bar{\psi}^R \gamma^\mu D_\mu^R \psi^R \\ & - m^R \bar{\psi}^R \psi^R - (D_\mu^R \omega_\alpha^{*R})(D^{\mu R} \omega_\alpha^R), \end{aligned} \quad (17.4.40)$$

其中,  $m^R$ 是重整化质量

$$m^R \equiv m(1 + L_m) / (1 + L_\psi), \quad (17.4.41)$$

\*\*单纯规范群的条件确保了对于 $A$ 和 $\omega$ 分别仅有一个动能项, 这两个动能项分别正比于 $F_{\alpha\mu\nu}F_\alpha^{\mu\nu}$ 和 $\bar{D}_\mu \omega_\alpha^* \bar{D}^\mu \omega_\alpha$ , 而 $\psi$ 的变换不可约这一条件确保了对于 $\psi$ 仅有一个动能项和一个质量项. 处理更加普遍的可能性也不是困难的, 但代价是符号上会稍微有些复杂. 我们同时不言自明地使用了鬼数守恒.

以及

$$F_{\alpha\mu\nu}^R \equiv \partial_\mu A_{\alpha\nu}^R - \partial_\nu A_{\alpha\mu}^R + C_{\alpha\beta\gamma}^R A_{\beta\mu}^R A_{\gamma\nu}^R, \quad (17.4.42)$$

$$D_\mu^R \psi^R \equiv \partial_\mu \psi^R - i t_\alpha^R A_{\alpha\mu}^R \psi^R, \quad (17.4.43)$$

$$D_\mu^R \omega_\alpha^R \equiv \partial_\mu \omega_\alpha^R + C_{\alpha\beta\gamma}^R A_{\beta\mu}^R \omega_\gamma^R, \quad (17.4.44)$$

$$D_\mu^R \omega_\alpha^{*R} \equiv \partial_\mu \omega_\alpha^{*R} + C_{\alpha\beta\gamma}^R A_{\beta\mu}^R \omega_\gamma^{*R}. \quad (17.4.45)$$

这里的重整化结构常数和群生成元则是

$$C_{\alpha\beta\gamma}^R \equiv (1 + L_A)^{-1/2} C_{\alpha\beta\gamma}, \quad (17.4.46)$$

$$t_\alpha^R \equiv (1 + L_A)^{-1/2} t_\alpha. \quad (17.4.47)$$

由于我们假定了这里的Lie代数是单纯的, 所以, 除却一个公共因子, 即非重整化耦合常数 $g$ , 结构常数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 和群生成元 $t_\alpha$ 完全由群的结构所决定. 因此, 方程(17.4.46)和(17.4.47)告诉我们, 对于 $C^R$ 和 $t^R$ 中的耦合常数 $g^R$ , 它的重整化是

$$g^R = g(1 + L_A)^{-1/2}. \quad (17.4.48)$$

这一结果体现出了背景场规范的特殊优点. 在一般的规范下, 对于规范场和规范耦合常数, 我们会遇到相互独立的重整化因子, 并且为了把它们整理出来, 我们将不得不计算两个不同的振幅(例如, 真空极化和3-规范场顶角函数). 在背景场规范下, 通过要求有效作用量中的无限大项以场强的原始形式(17.4.31)将其包含在内, 背景场规范不变性将这两个重整化绑在了一起, 进而使得我们可以通过仅研究一个规范场振幅就能计算出荷重整化因子.

## 17.5 背景场规范下的单圈计算

作为一个练习, 我们将计算一般非阿贝尔规格理论下的规范耦合常数的一圈重整化因子. 正如我们将在下一章中看到的, 这为高能处的物理过程的所谓“重整化”群计算提供了一个重要的输入元素, 我们在这里所获得的结果将在下一章用来例证非阿贝尔规范理论的渐进自由.

这里所采用的方法有些新奇. 通常情况下, 我们考察背景规范场与时空相关的有效作用量, 并计算这些场的二次项, 抽取因子 $(q_\mu A_{\alpha\nu} - q_\nu A_{\alpha\mu})^2$ , 直到这时, 通过令 $q = 0$ 分离出这一因子系数中的对数发散. 在这里, 我们转而采取一个简单得多的方法, 从一开始就令规范场与时空不相关. 在这一情况下, 有效作用量中规范场的二次项和三次项为零, 但有一个紫外发散的四次项, 它可以用来计算耦合常数重整化因子 $(1 + L_A)^{-1/2}$ . 在这一方法中, 我们的一圈计算就变成了简单的矩阵代数问题. 要注意的是, 这个处理仅适用于背景场规范; 在其它情况下, 有效作用量中背景规范场的二次项部分和四次项部分将会给出相互独立的对数发散.

在这一动机下, 我们转向背景场下单圈有效作用量的计算, 在我们所选的背景场中,  $A_{\alpha\mu}$ 是常

数, 而  $\psi = \omega = \omega^* = 0$ . 对于这样的背景场, 完整的修正拉格朗日量是\*

$$\mathcal{L}_{\text{MOD}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{GH}, \quad (17.5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \left( F_{\alpha\mu\nu} + \bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu} \right)^2 \\ & - \bar{\psi}' (\bar{D} - i t_\alpha A'_\alpha + m) \psi', \end{aligned} \quad (17.5.2)$$

$$\mathcal{L}_f \equiv -\frac{1}{2\xi} f_\alpha f_\alpha = -\frac{1}{2\xi} (\bar{D}_\mu A'_\alpha)^2, \quad (17.5.3)$$

$$\mathcal{L}_{GH} = -(\bar{D}_\mu \omega'^*_\alpha)(\bar{D}^\mu \omega'_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma} \omega'_\beta A'_\gamma{}^\mu). \quad (17.5.4)$$

真空-真空振幅的一圈图是从作用量中量子场的二次项部分中计算出来的, 即要被积掉的  $A'$ ,  $\psi'$ ,  $\omega'$ ,  $\omega'^*$  的二次项. 仅保留这样的二次项, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QUAD}} = & -\frac{1}{4} (\bar{D}_\mu A'_{\alpha\nu} - \bar{D}_\nu A'_{\alpha\mu})^2 - \frac{1}{2} F_\alpha^{\mu\nu} C_{\alpha\beta\gamma} A'_{\beta\mu} A'_{\gamma\nu} \\ & - \bar{\psi}' (\bar{D} + m) \psi' - \frac{1}{2\xi} (\bar{D}_\mu A'_\alpha)^2 - (\bar{D}_\mu \omega'^*_\alpha)(\bar{D}^\mu \omega'_\alpha). \end{aligned} \quad (17.5.5)$$

相应的作用量可以写成一般的二次型形式:

$$\begin{aligned} I_{\text{QUAD}} \equiv & \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QUAD}} \\ = & -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y A'_\alpha{}^\mu(x) A'^\nu{}_\beta(y) \mathcal{D}_{x\alpha\mu, y\beta\nu}^A - \int d^4x d^4y \bar{\psi}'_k(x) \psi'_\ell(y) \mathcal{D}_{xk, y\ell}^\psi \\ & - \int d^4x d^4y \omega'^*_\alpha(x) \omega'_\beta(y) \mathcal{D}_{x\alpha, y\beta}^\omega, \end{aligned} \quad (17.5.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{x\alpha\mu, y\beta\nu}^A \equiv & \eta_{\mu\nu} \left( -\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + C_{\gamma\delta\alpha} A_\delta^\lambda(x) \right) \left( -\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\lambda}(y) \right) \delta^4(x-y) \\ & - \left( -\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + C_{\gamma\delta\alpha} A_{\delta\nu}(x) \right) \left( -\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\mu} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\mu}(y) \right) \delta^4(x-y) \\ & + F_{\gamma\mu\nu}(x) C_{\gamma\alpha\beta} \delta^4(x-y) \\ & + \frac{1}{\xi} \left( -\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_{\gamma\delta\alpha} A_{\delta\mu}(x) \right) \left( -\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\nu} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\nu}(y) \right) \delta^4(x-y), \end{aligned} \quad (17.5.7)$$

$$\mathcal{D}_{xk, y\ell}^\psi \equiv \left( -\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} - i_\alpha A_\alpha(y) + m \right)_{k\ell} \delta^4(x-y), \quad (17.5.8)$$

$$\mathcal{D}_{x\alpha, y\beta}^\omega \equiv \left( -\delta_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + C_{\gamma\delta\alpha} A_{\delta\lambda}(x) \right) \left( -\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} + C_{\gamma\epsilon\beta} A_{\epsilon\lambda}(y) \right) \delta^4(x-y). \quad (17.5.9)$$

(当我们分部积分时,  $\partial/\partial x$  和  $\partial/\partial y$  前面的负号要扔掉.)

有效作用量的单圈贡献(就像16.2节中那样)为

$$\begin{aligned} \exp(i\Gamma^{\text{1 loop}}[A]) & \propto \int_{1PI} (\prod dA') (\prod d\psi') (\prod d\bar{\psi}') (\prod d\omega') (\prod d\omega'^*) \\ & \quad \times \exp(i I_{\text{QUAD}}[A', \psi', \bar{\psi}', \omega', \omega'^*; A]) \\ & \propto (\text{Det } \mathcal{D}^A)^{-1/2} (\text{Det } \mathcal{D}^\psi)^{+1} (\text{Det } \mathcal{D}^\omega)^{+1}. \end{aligned} \quad (17.5.10)$$

\*参看方程(17.4.12), (17.4.4)和(17.4.23). 我们在这里特定为物质场构成自旋 $\frac{1}{2}$ 费米子多重态的情况.  $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}_f$ 中的平方包含指标收缩.

(出现指数 $-1/2$ 和 $+1$ 是因为 $A'$ 是实玻色场, 而 $\psi', \bar{\psi}', \omega', \omega'^*$ 是不同的费米场.) 这种行列式的计算一般而言并不简单. 然而, 在外场是常数的情况下,  $\mathcal{D}$ 可以经由动量空间对角化, 这时计算会变得简单的多.

因此, 我们现在来考察常数背景场 $A_{\alpha\mu}$ 的情况. 对于非阿贝尔规范理论, 这样的常数场无法通过规范变换移除, 这一点可以从各种规范协变场

$$F_{\alpha\mu\nu} = C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}, \quad (17.5.11)$$

$$D_\lambda F_{\delta\mu\nu} = C_{\delta\epsilon\alpha} C_{\alpha\beta\gamma} A_{\epsilon\lambda} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}, \quad (17.5.12)$$

等的非零值可以看到. Lorentz不变性和规范不变性告诉我们如何将 $\Gamma[A]$ 中量纲给定的部分表示成有限多个项的积分, 而这些项是 $F_{\alpha\mu\nu}$ ,  $D_\lambda F_{\alpha\mu\nu}$ 等的定域函数; 通过比较它们对 $\Gamma[A]$ 的常数背景场 $A_{\alpha\mu}$ 所做的贡献与微扰展开的结果, 就可以获得这一表达式中项的系数.

通过通常的归一化Fourier变换, 我们将每个矩阵 $\mathcal{D}^A$ ,  $\mathcal{D}^\psi$ 和 $\mathcal{D}^\omega$ 变换至动量基下

$$\mathcal{D}_{q\dots, p\dots} = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2} e^{-iq\cdot x} \int \frac{d^4y}{(2\pi)^2} e^{ip\cdot y} \mathcal{D}_{x\dots, y\dots}. \quad (17.5.13)$$

当 $A$ 是常数时, 这给出

$$\mathcal{D}_{q\dots, p\dots} = \delta^4(p - q) \mathcal{M}_{\dots, \dots}(q), \quad (17.5.14)$$

其中 $\dots$ 代表离散指标, 而 $\mathcal{M}$ 是有限维 $q$ -相关矩阵

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\mu, \beta\nu}^A(q) = & \eta_{\mu\nu}(-iq_\lambda \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\lambda} C_{\gamma\delta\alpha})(iq^\lambda \delta_{\gamma\beta} + A_\epsilon{}^\lambda C_{\gamma\epsilon\beta}) \\ & - (-iq_\nu \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\nu} C_{\gamma\delta\alpha})(iq_\mu \delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon\mu} + C_{\gamma\epsilon\beta}) \\ & + F_{\gamma\mu\nu} C_{\gamma\alpha\beta} \\ & + (-iq_\mu \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\mu} C_{\gamma\delta\alpha})(iq_\nu \delta_{\gamma\beta} + A_{\epsilon\nu} C_{\gamma\epsilon\beta})/\xi \\ & + \epsilon\text{项}, \end{aligned} \quad (17.5.15)$$

$$\mathcal{M}_{k\ell}^\psi(q) = (i\not{q} - i\not{t}_\alpha A_\alpha + m)_{k\ell} + \epsilon\text{项}, \quad (17.5.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha\beta}^\omega(q) = & (-iq_\lambda \delta_{\gamma\alpha} + A_{\delta\lambda} C_{\gamma\delta\alpha})(iq^\lambda \delta_{\gamma\beta} + A_\epsilon{}^\lambda C_{\gamma\epsilon\beta}) \\ & + \epsilon\text{项}, \end{aligned} \quad (17.5.17)$$

其中 $F_{\gamma\mu\nu}$ 由方程(17.5.11)给定. 那么, 从方程(17.5.10)我们可以得出

$$\begin{aligned} i\Gamma^{(1\text{ loop})}[A] = & -\frac{1}{2} \ln \text{Det } \mathcal{D}^A + \ln \text{Det } \mathcal{D}^\psi + \ln \text{Det } \mathcal{D}^\omega \\ = & -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{D}^A + \text{Tr} \ln \mathcal{D}^\psi + \text{Tr} \ln \mathcal{D}^\omega \\ = & \delta^4(p - q) \int d^4q \left[ -\frac{1}{2} \text{tr} \ln \mathcal{M}^A(q) + \text{tr} \ln \mathcal{M}^\psi(q) \right. \\ & \left. + \text{tr} \ln \mathcal{M}^\omega(q) \right]. \end{aligned} \quad (17.5.18)$$

在方程(17.5.18)的最后一行, 我们用“tr”而非“Tr”标记迹(并且在本节的下面都将这样做), 这样做的原因是为了表明它们是通常的有限维矩阵的迹而不是积分算符的迹.

既然我们这里的目标是计算有效作用量中与 $FF$ 项相乘的无限大因子 $L_A$ , 我们要将(17.5.18)中背景场 $A$ 的四阶项分离出来. 对于这个目的, 将 $\mathcal{M}$ 按照所含因子 $A$ 的个数分成 $\mathcal{M}_n$ 将是方便的, 其

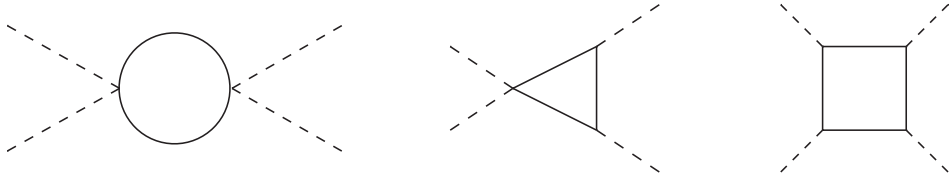


图 17.1 量子有效作用量中常数背景规范场  $A_\alpha^\mu$  四次项的Feynman图. 这里的实线代表内部规范场线, 内部鬼线或内部物质线; 而虚线代表因子  $A_\alpha^\mu$ . 这三个Feynman图对应于方程(17.5.20)中的三项.

中  $n = 0, 1$  或  $2$ , 代表因子  $A$  的个数:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2. \quad (17.5.19)$$

接下来, 找到(17.5.18)中  $A$  的四阶项就是基本代数运算

$$\begin{aligned} [\text{tr} \ln \mathcal{M}]_{A^4} = \text{tr} \left\{ -\frac{1}{2} [\mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_2]^2 \right. \\ \left. + [\mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_1]^2 \mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_2 - \frac{1}{4} [\mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_1]^4 \right\}. \end{aligned} \quad (17.5.20)$$

(为了看到这点, 给方程(17.5.19)中的  $\mathcal{M}_1$  和  $\mathcal{M}_2$  分别插入乘积因子  $\epsilon$  和  $\epsilon^2$ , 对  $\text{tr} \ln \mathcal{M}$  相对  $\epsilon$  微分4次, 然后除以  $4!$ , 再令  $\epsilon = 0$ .) 这里的  $\mathcal{M}_0^{-1}$  因子就是通常的传播子; 对于  $\xi = 1$ , 它们是

$$[\mathcal{M}_0^A(q)]_{\alpha\mu, \beta\nu}^{-1} = \delta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} (q^2 - i\epsilon)^{-1}, \quad (17.5.21)$$

$$[\mathcal{M}_0^\psi(q)]_{k\ell}^{-1} = [i\not{q} + m]_{k\ell}^{-1}, \quad (17.5.22)$$

$$[\mathcal{M}_0^\omega(q)]_{\alpha, \beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta} (q^2 - i\epsilon)^{-1}. \quad (17.5.23)$$

确实, 方程(17.5.20)中的三项正好对应图17.1中的三个Feynman图; 现在的计算方法使我们免于考察符号与组合学因子.

对于  $A$  圈以及  $\xi = 1$ , 方程(17.5.15)给出:

$$\begin{aligned} [\mathcal{M}_1^A(q)]_{\alpha\mu, \beta\nu} &= -2\eta_{\mu\nu} q^\lambda [\mathcal{A}_\lambda]_{\alpha\beta}, \\ [\mathcal{M}_2^A(q)]_{\alpha\mu, \beta\nu} &= + \left[ \eta_{\mu\nu} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\lambda - \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \right]_{\alpha\beta} + F_{\gamma\mu\nu} C_{\gamma\alpha\beta}, \end{aligned}$$

其中  $\mathcal{A}_\lambda$  是矩阵

$$[\mathcal{A}_\lambda]_{\alpha\beta} \equiv -i C_{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma\lambda}$$

这使得

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_\rho]_{\alpha\beta} &= -C_{\alpha\delta\gamma} C_{\delta\beta\epsilon} (A_{\gamma\lambda} A_{\epsilon\rho} - A_{\gamma\rho} A_{\epsilon\lambda}) \\ &= -(C_{\alpha\delta\gamma} C_{\delta\beta\epsilon} + C_{\alpha\delta\epsilon} C_{\delta\beta\gamma}) A_{\gamma\lambda} A_{\epsilon\rho} \\ &= +C_{\alpha\delta\beta} C_{\delta\epsilon\gamma} A_{\gamma\lambda} A_{\epsilon\rho} = C_{\alpha\delta\beta} F_{\delta\rho\lambda}. \end{aligned}$$

积分有如下的结构

$$\begin{aligned} \int d^4q q^\mu q^\nu f(q^2) &= \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \int d^4q q^2 f(q^2), \\ \int d^4q q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma f(q^2) &= \frac{1}{24} [\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}] \int d^4q (q^2)^2 f(q^2). \end{aligned}$$



那么, 对于  $\xi = 1$ , 我们发现

$$\begin{aligned} \int d^4q \operatorname{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \mathcal{M}_2^A(q)]^2 \right\} &= 4\mathcal{I} \operatorname{tr} [\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta] \\ &\quad + 4\mathcal{I} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}, \\ \int d^4q \operatorname{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \mathcal{M}_1^A(q)]^2 \mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \mathcal{M}_2^A(q) \right\} &= 4\mathcal{I} \operatorname{tr} [\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta], \\ \int d^4q \operatorname{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^A(q)^{-1} \mathcal{M}_1^A(q)]^4 \right\} &= \frac{8}{3}\mathcal{I} \operatorname{tr} \left[ 2\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta + \mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\eta \right], \end{aligned}$$

其中  $\mathcal{I}$  是发散积分

$$\mathcal{I} \equiv \int d^4q [q^2 - i\epsilon]^{-2}, \quad (17.5.24)$$

它的意义会在下面讨论. 将这些全部代入方程(17.5.20), 我们就有

$$\begin{aligned} \int d^4q \left[ \operatorname{tr} \ln \mathcal{M}^A(q) \right]_{A^4} &= \frac{2}{3}\mathcal{I} \operatorname{tr} \left[ \mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\eta \right] \\ &\quad - 2\mathcal{I} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

这两项实际上形式是相同的, 合并后给出

$$\int d^4q \left[ \operatorname{tr} \ln \mathcal{M}^A(q) \right]_{A^4} = -\frac{5}{3}\mathcal{I} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}. \quad (17.5.25)$$

现在跳到鬼圈, 我们从方程(17.5.17)看到

$$[\mathcal{M}_1^\omega(q)]_{\alpha\beta} = -2[\mathcal{A}^\lambda]_{\alpha\beta} q_\lambda, \quad (17.5.26)$$

$$[\mathcal{M}_2^\omega(q)]_{\alpha\beta} = [\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda]_{\alpha\beta} \quad (17.5.27)$$

那么, 我们发现

$$\begin{aligned} \int d^4q \operatorname{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_2^\omega(q)]^2 \right\} &= \mathcal{I} \operatorname{tr} [\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta], \\ \int d^4q \operatorname{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_1^\omega(q)]^2 \mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_2^\omega(q) \right\} &= \mathcal{I} \operatorname{tr} [\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta], \\ \int d^4q \operatorname{tr} \left\{ [\mathcal{M}_0^\omega(q)^{-1} \mathcal{M}_1^\omega(q)]^4 \right\} &= \frac{2}{3}\mathcal{I} \operatorname{tr} [2\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta + \mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\eta]. \end{aligned}$$

因此, 对于鬼圈, (17.5.20)的积分是

$$\begin{aligned} \int d^4q [\operatorname{tr} \ln \mathcal{M}^\omega(q)]_{A^4} &= \frac{1}{6}\mathcal{I} \operatorname{tr} [\mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}^\lambda \mathcal{A}^\eta \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\eta] \\ &= \frac{1}{12}\mathcal{I} C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (17.5.28)$$

最后, 物质圈中的顶角是

$$[\mathcal{M}_1^\psi(q)]_{kl} = -i(t_\alpha \mathcal{A}_\alpha)_{kl}, \quad [\mathcal{M}_2^\psi(q)]_{kl} = 0,$$

所以, 这时方程(17.5.20)中仅有一项:

$$\int d^4q [\operatorname{tr} \ln \mathcal{M}^\psi(q)]_{A^4} = -\frac{1}{4} \int d^4q \operatorname{tr} \left\{ [(i\not{q} + m)^{-1} t_\alpha \mathcal{A}_\alpha]^4 \right\}.$$

我们感兴趣的是这一积分的紫外发散部分, 所以我们可以扔掉质量(相对于很大的 $q^\nu$ 可忽略)并写成

$$\begin{aligned} \int d^4q [\text{tr} \ln \mathcal{M}^\psi(q)]_{A^4} &= -\frac{1}{4} \text{tr}\{t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta\} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_{\gamma\rho} A_{\delta\sigma} \\ &\quad \times \int d^4q \frac{\text{tr}\{\not{q}\gamma^\mu \not{q}\gamma^\nu \not{q}\gamma^\rho \not{q}\gamma^\sigma\}}{(q^2 - i\epsilon)^4} \\ &= -\frac{\mathcal{I}}{96} \text{tr}\{t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\delta\} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_{\gamma\rho} A_{\delta\sigma} \\ &\quad \times \text{tr}\left\{2\gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma_\eta \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma + \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma_\eta \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma\right\}, \end{aligned} \quad (17.5.29)$$

其中 $\mathcal{I}$ 就是发散积分(17.5.24). 为了计算Dirac矩阵的迹, 我们使用这些矩阵的反对易关系

$$\begin{aligned} &\text{tr}\left\{2\gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma_\eta \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma + \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma_\eta \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\eta \gamma^\sigma\right\} \\ &= 8 \text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} - 4 \text{tr}\{\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} - 4 \text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma\} \\ &= -64\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + 32\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} + 32\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}. \end{aligned}$$

这样, 方程(17.5.29)就给出

$$\begin{aligned} \int d^4q [\text{tr} \ln \mathcal{M}^\psi(q)]_{A^4} &= \frac{1}{3} \mathcal{I} \text{tr}\left\{[t_\alpha, t_\beta][t_\gamma, t_\delta]\right\} A_{\alpha\mu} A_{\beta\nu} A_\gamma^\mu A_\delta^\nu \\ &= -\frac{1}{3} \mathcal{I} F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu} \text{tr}\{t_\gamma t_\delta\}. \end{aligned} \quad (17.5.30)$$

在方程(17.5.18)中使用方程(17.5.25), (17.5.28)和(17.5.30), 这给出了

$$\Gamma_{A^4}^{(1\text{loop})} = \frac{-i\mathcal{I}}{(2\pi)^4} \int d^4x F_{\gamma\mu\nu} F_\delta^{\mu\nu} \left[ \left( \frac{5}{6} + \frac{1}{12} \right) C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} - \frac{1}{3} \text{tr}\{t_\gamma t_\delta\} \right], \quad (17.5.31)$$

其中, 我们将(17.5.14)中的动量空间 $\delta$ -函数表示成了

$$\delta^4(p - p) = (2\pi)^{-4} \int d^4x 1. \quad (17.5.32)$$

这里的重点在于, 结果仅通过场强(17.5.11)与 $A_{\alpha\mu}$ 相关, 这与背景规范不变性一致.

我们将(本节首次)使用之前假定的规范群的单纯性和物质场多重态的不可约性. 在这一情况下

$$C_{\gamma\alpha\beta} C_{\delta\alpha\beta} = g^2 C_1 \delta_{\gamma\delta}, \quad (17.5.33)$$

$$\text{tr}\{t_\gamma t_\delta\} = g^2 C_2 \delta_{\gamma\delta}, \quad (17.5.34)$$

其中 $g$ 是共用的耦合常数, 它作为一个因子出现在 $C_{\gamma\alpha\beta}$ 和 $t_\gamma$ 中, 而 $C_1$ 和 $C_2$ 是数值常数, 它们用来表征规范群和物质多重态所提供的群表示. 例如, 在原始的Yang-Mills理论中, 规范群是 $SU(2)$ (或者等价的 $SO(3)$ ), 而结构常数是

$$C_{\gamma\alpha\beta} = g\epsilon_{\gamma\alpha\beta},$$

其中 $\alpha, \beta$ 和 $\gamma$ 的取值范围是1, 2, 3. 与方程(17.5.33)相比较, 我们看到这里有

$$C_1 = 2.$$

另外, 在这个理论中, 物质场构成二重态, 而 $t_\alpha$ 是 $g/2$ 乘以通常的Pauli矩阵 $\sigma_\alpha$ , 所以

$$C_2 = 1/2 .$$

更普遍地, 对于群 $SU(n)$ , 若它的定义表示中有 $n_f$ 个费米子, 在通常约定的生成元的归一化下, 我们有\*\*

$$C_1 = N , \quad C_2 = n_f/2 . \quad (17.5.35)$$

现在回到这个普遍情况, 方程(17.5.33)和(17.5.34)给出

$$\Gamma_{A^4}^{(1\text{loop})} = \frac{-ig^2 \mathcal{J}}{(2\pi)^4} \int d^4x F_{\gamma\mu\nu} F_\gamma^{\mu\nu} \left[ \frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right] . \quad (17.5.36)$$

这样, 方程(17.4.30)中的无限大常数 $L_A$ 就是

$$L_A = \frac{4ig^2 \mathcal{J}}{(2\pi)^4} \left( \frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) . \quad (17.5.37)$$

尚未谈及的是发散积分 $\mathcal{J}$ 的解释. 首先, 在我们试着积掉3-动量 $\mathbf{q}$ 之前, 我们可以将方程(17.5.24)中 $q^0$ 的积分围道旋转至虚轴; 同往常一样, 分母中的 $-i\epsilon$ 项使得我们必须逆时针旋转, 这使得 $q^0 = iq^4$ , 其中 $q^4$ 从 $-\infty$ 取到 $+\infty$ . 那么积分就变成

$$\mathcal{J} = i \int_0^\infty \frac{2\pi^2 q^3 dq}{q^4} , \quad (17.5.38)$$

现在的 $q$ 是欧几里得4-矢( $q^1, q^2, q^3, q^4$ )的长度. 为了更进一步, 我们显然需要一些正规化该积分的方法. 处理这一紫外发散的最简单方法就是给 $q$ 的积分提供一个标度为 $\Lambda$ 的上截断. 然而, 为了处理红外发散我们还需要一个下截断. 这由物理情况决定. 如果4-矢粒子的动量不为零, 那么在图的内线中将会有动量流, 这在这些动量的标度 $\mu$ 处提供了一个红外发散. 类似地, 如果我们计算 $\Gamma[A]$ 相对 $A$ 的四阶变分导数, 并计算当 $A$ 取不等于零的有限值时该变分导数的值, 那么内线的传播子不会在零动量处发散, 并且我们在标度 $\mu \sim gA$ 处有了一个红外截断. 无论以那种方法,  $\mathcal{J}$ 采取如下的形式

$$\mathcal{J} = 2\pi^2 i \int_\mu^\Lambda \frac{dq}{q} = 2\pi^2 i \ln \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right) \quad (17.5.39)$$

因此,

$$L_A = -\frac{g^2}{2\pi^2} \left( \frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) \ln \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right) + O(g^4) . \quad (17.5.40)$$

这样, 方程(17.4.48)就给出了重整化耦合

$$g_R = g \left[ 1 + \frac{g^2}{4\pi^2} \ln \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right) \left( \frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^4) \right] . \quad (17.5.41)$$

我们注意到, 在量子电动力学中, 11.2节所讨论的辐射修正相对裸耦合 $g$ 会减小物理耦合 $g_R$ , 在非阿贝尔规范理论中, 若假定费米子多重态足够小使得 $C_2 < 11C_1/4$ , 那么辐射修正会在裸耦合之上提高物理耦合. 这一点的重要性将在第18章进行探索.

\*\*对于 $SU(3)$ ,  $t_\alpha$ 将取为 $g/2$ 乘以Gell-Mann矩阵 $\lambda_\alpha$ , Gell-Mann矩阵将在19.7节引入, 这使得 $C_{\alpha\beta\gamma} = (g/2)f_{\alpha\beta\gamma}$ .

或者, 我们也可使用11.2节所讨论的维度正规化方法处理这一紫外发散. 这时, 取代(17.5.39), 我们写成

$$\mathcal{J} = i \int_0^\infty \frac{2\pi^2 q^{d-1} dq}{(q^2 + \mu^2)^2}, \quad (17.5.42)$$

其中 $d$ 是复维度, 在计算的末尾会让其趋于4, 而 $\mu$ 是红外截断, 再一次取成与外动量同阶的量(或者取成背景场与 $g$ 之积的同阶量). 只要 $d$ 是 $\text{Re } d < 0$ 的复数且 $\mu^2 > 0$ , 这一积分就有有限值

$$\mathcal{J} = -i\pi^2 \left( \frac{d}{2} - 1 \right) \mu^{d-4} / \sin \left[ \left( \frac{d}{2} - 2 \right) \pi \right].$$

解析延拓至 $d \rightarrow 4$ , 这变成

$$\mathcal{J} \rightarrow -2i\pi^2 \left[ \frac{1}{d-4} + \ln \mu + \cdots \right], \quad (17.5.43)$$

其中 $\cdots$ 代表与 $\mu$ 无关的有限大项. 这时我们有

$$L_A = \frac{g^2}{2\pi^2} \left( \frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) \left( \frac{1}{d-4} + \ln \mu + \cdots \right) + O(g^4),$$

因而

$$g_R = g \left[ 1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \left( \frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) \left( \frac{1}{d-4} + \ln \mu + \cdots \right) + O(g^4) \right]. \quad (17.5.44)$$

注意到这里的紫外发散表现为一个不同的形式, 但是与红外截断 $\mu$ 的相关性是相同的. 在18.7节我们对渐进自由的讨论中, 方程(17.5.44)将提供一个重要的元素.

## 习题

1. 将基本标量场纳入到拉格朗日量中, 完成17.2节中的可重整性证明.
2. 利用17.2节末尾讨论的BRST量子化方法对背景场规范下的非阿贝尔规范理论进行量子化.
3. 若规范场依赖于时空, 计算 $\Gamma^{(1\text{ loop})}$ 中规范场的二次项, 并以此推导出重整化规范耦合和非重整化耦合之间的关系.
4. 对于包含基本标量场的规范理论, 计算重整化耦合和非重整化耦合之间单圈关系.

## 参考文献

- [1] J. Zinn-Justin, in *Trends in Elementary Particle Theory — International Summer Institute on Theoretical Physics in Bonn 1974* (Springer-Verlag, Berlin, 1975).
- [2] 在BRST对称性出现之前, 非阿贝尔规范场论的可重整性证明直接基于规范变换的Slavnov-Taylor恒等式; 参看B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* **D5**, 3121, 3137 (1972); *Phys. Rev.* **D7**, 1049 (1972); G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B50**, 318 (1972); B. W. Lee, *Phys. Rev.* **D9**, 933 (1974). 最早基于BRST对称性的可重整性证明是, C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Commun. Math. Phys.* **42**, 127 (1975); in *Renormalization Theory — Proceedings of the International School of Mathematical Physics at Erice, August 1975*, G. Velo and A. S. Wightman编辑(D. Reidel, Dordrecht, 1976): pp. 269-97, 299-343. 这里给出的证明沿用了J. Zinn-Justin的大体框架, 见参考文献1; B. W. Lee, in *Methods in Field Theory*, R. Balian and J. Zinn-Justin编辑(North-Holland, Amsterdam, 1976): pp. 79-139

- 
- [3] 这里的角度与论述基于J. Gomis and S. Weinberg, *Nucl. Phys.* **B469**, 475 (1996). 这些方法的早期应用, 参看B. L. Voronov and I. V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* **50**, 218 (1982); **52**, 628 (1982); B. L. Voronov, P. M. Lavrov, and I. V. Tyutin, *Sov. J. Nucl. Phys.* **36**, 292 (1982); P. M. Lavrov, and I. V. Tyutin, *Sov. J. Nucl. Phys.* **41**, 1049 (1985); D. Anselmi, *Class. and Quant. Grav.* **11**, 2181 (1994); **12**, 319 (1995); M. Harada, T. Kugo, and K. Yamawaki, *Prog. Theor. Phys.* **91**, 801 (1994).
- [4] G. Barnich and M. Henneaux, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1588 (1994); G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux, *Phys. Rev.* **51**, R143 (1995); *Commun. Math. Phys.* **174**, 57, 93 (1995); *Nucl. Phys.* **B455**, 357 (1995).
- [5] 背景场规范是B. S. De Witt引入的, *Phys. Rev.* **162**, 1195, 1239 (1967). 关于多圈效应的处理的, 参看G 't Hooft, in *Functional and Probabilistic Method in Quantum Field Theory: Proceedings of the 12th Karpacz Winter School of Theoretical Physics* (Acta Universitatis Wratislavenensis no. 38 1975); B. S. De Witt, in *Quantum Gravity II*, C. Isham, R. Penrose, and D. Sciama编辑(Oxford University Press, Oxford, 1982); L. F. Abbott, *Nucl. Phys.* **B185**, 189 (1981).



## 第 18 章 重整化群方法

重整化群方法最初是由Gell-Mann和Low<sup>1</sup>引入的, 他们的目的是用其处理微扰论在高能量量子电动力学中的失效问题. 对振幅的 $n$ -圈贡献, 若它所涉及的动量是 $q$ 阶的, 例如真空极化 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ , 那么在该振幅中除了含有因子 $\alpha^n$ 外, 还含有多达 $n$ 个的因子 $\ln(q^2/m_e^2)$ , 所以, 即使精细结构常数 $\alpha$ 很小, 当 $\alpha|\ln(q^2/m_e^2)|$ 很大的时候, 微扰论就会失效. 即使在非阿贝尔规范理论这样的无质量理论中, 我们也必须要指定定义重整化耦合常数的重整化点, 并且在这一情况下, 我们会遇到对数 $\ln(E/\mu)$ , 这使得即使耦合常数很小, 但如果 $E \gg \mu$ 或 $E \ll \mu$ , 微扰论也会失效.

幸运的是, 在这种情况下通常能够使用微扰论的一个修正版本. 这一修正版本的主要思想在于, 引入定义在滑动重整化标度 $\mu$ 处的耦合常数 $g_\mu$ , 其中的滑动重整化标度 $\mu$ 是指不以任何固定的方式与粒子质量相关的标度. 然后将 $\mu$ 选成与问题中过程的特征能量 $E$ 同一阶, 这样因子 $\ln(E/\mu)$ 就表现不出任何问题了. 那么只要 $g_\mu$ 保持着比较小的值, 我们就可以做微扰论. 特别地, 给定定义在标度 $\mu$ 处的耦合常数, 我们可以利用微扰论计算能量 $\mu + d\mu$ 处的物理振幅, 然后使用这些振幅计算定义在重整化标度 $\mu + d\mu$ 处的耦合常数. 通过对相应的微分方程进行积分, 我们可以将我们感兴趣标度处的耦合常数与通常定义的耦合常数关联起来. (“重整化群”这个名字起源是, 最初它被认为是, 在重整化耦合常数的重定义下, 描述理论的表现形式如何改变的方程, 但实际上它和群论毫无关系.) 关于极高能或(无质量理论中的)极低能时的渐进行为, 即便耦合常数在感兴趣的标度处过大以至于不允许使用微扰论, 重整化群方法也可提供一个定性的指导.

尽管重整化群方法最初出现于重整化耦合常数定义方案中的变化与重整化群之间的联系, 但它更广泛的意义也随之而来. 当我们将裸耦合和裸场替换成以矩阵元定义的重整化耦合和重整化场时, 若这些矩阵元是在某个特征能量标度 $\mu$ 处赋值的, 那么对虚动量的积分实际上就在 $\mu$ 阶的能量标度和动量标度处被截断了. 因此, 当我们改变 $\mu$ 时, 我们实际上改变的是计算中所需考虑的自由度范围. 重整化群最初给予我们的指导是, 为了避免大对数应该将 $\mu$ 取成与研究过程的特征能量 $E$ 的同阶量, 但这一指导只不过是一个更广阔原理的一个特殊情况: 为了在给定能量处做计算, 我们应该先去掉更高能处的自由度.

还有多种其它方法可以实现这点. 比如我们在12.4节中所看到的, 在Wilson<sup>2</sup>所开辟的重整化群方法中, 为了保持物理量不变, 在引入一个明显且有限的截断的同时, 理论的参量要发生变化. 这一方法要求, 凡是理论的对称性所允许的相互作用类型都要纳入在内, 这导致了要引入无限多个相互作用类型, 因此在处理像量子电动力学这样实际上可重整的理论时, 这一方法并不是特别方便.(尽管如此, 但现在对量子电动力学的看法有些许不同, 正如在12.3节中所讨论的, 现在的量子电动力学被视为仅是某个不可重整理论的非常好的近似, 而这个理论中的高维相互作用被某个非常大的质量的负幂次抑制了.) 若附加截断的手法是在一个有限大的时空晶格上对规范理论量子化, 那么Wilson方法的优点是, 在计算的同时会保持显然的规范不变性(规范群的体积等于整体对称群的体积乘以格点的总数), 但它的缺点是, 无法保持显然的Lorentz不变性和旋转不变性. 在任何情况下, 无论采用何种方法, 就在消去高能自由度这点上, 大多数重整化群体系是一致的.



## 18.1 大对数来自何处?

我们先来考察在能标处大对数能够以何种方式出现. 考察一个物理振幅, 或者截面, 或者其它的速率参量, 将其记为  $\Gamma(E, x, g, m)$ , 其中  $E$  是总的能量标度,  $x$  是各种角度以及各种能量比值,  $g$  是各种耦合常数, 而  $m$  是各种质量. 如果  $\Gamma$  的量纲是  $D$  (例如, 截面就会有  $D = -2$ ), 那么量纲分析告诉我们

$$\Gamma(E, x, g, m) = E^D \Gamma\left(1, x, g, \frac{m}{E}\right). \quad (18.1.1)$$

在极限  $E \rightarrow \infty$  下, 我们本预期这样的振幅会有一个简单的幂次行为

$$\Gamma(E, x, g, m) \rightarrow E^D \Gamma(1, x, g, 0).$$

但事实并非如此. 实际上, 在微扰论计算中会发现, 因子  $E^D$  会伴随着  $\ln(E/m)$  的幂函数, 这破坏了简单的幂次率行为.

显然, 仅当固定能量  $E$  处的振幅  $\Gamma$  在  $m \rightarrow 0$  时出现奇异,  $\ln(E/m)$  的幂次才能在  $E \rightarrow \infty$  时进入  $m$  固定的振幅. 这种质量奇异性有两类, 一类可以通过计算正确的振幅或速率常数得以消除, 而另一类则要求在我们的重整化方案中做出一些改变.

第一类零质量奇异性的起源是, 传播子在相对应粒子质量壳上的极点的效应. 例如, 假定一个 Feynman 图有一个总动量为  $p^\mu$  的入线, 这条线通过一个顶角与质量为  $m_1, m_2, \dots, m_n$  的内线相连. 根据第 10 章的讨论, 相对应的 Feynman 图在负的实  $p^2$  轴上有一个截断, 这个截断从  $p^2 = -(m_1 + \dots + m_n)^2$  延伸至  $-\infty$ . 如果外线是一个稳定粒子, 且它的质量  $M < m_1 + \dots + m_n$ , 那么, 由于  $p^2 = -M^2$  不在截断上, 所以它并不会给出奇异性. 然而, 当  $M, m_1, \dots, m_n$  全部趋于零时,  $-p^2$  在质量壳上的值以及截断顶部的分支点会汇聚到  $p^2 = 0$  这一点, 这产生了奇异性.

这表明我们可以通过远离质量壳的方法来避免  $m = 0$  处的红外发散, 例如, 让所有外线的  $p^2$  连同所有能量变量趋于  $+\infty$ . 然后, 采用色散关系或者其它解析延拓技巧, 我们就可以利用 Feynman 振幅行为在这一极限下的结果给出  $S$ -矩阵元的一切. 通常情况下, 我们感兴趣的不是在壳  $S$ -矩阵元而是流的矩阵元, 这里的流会携带与任何质量不相关的动量  $q$ , 所以延拓通常是不必须的. 这样的例子是 10.5 节中定义的真空中极化函数  $\pi(q^2)$ , 除了当  $q^2 < 0$  时, 它是没有第一类零质量奇异性的.

如果我们尝试计算的截面在极限  $m \rightarrow 0$  下变得不可测, 那么零质量奇异性一般都会出现, 这一特性给出了消除了零质量奇异性的另一方法. 例如, 在量子电动力学中, 对于任何包含有限个电子和光子的过程而言, 即使我们对无限个软光子求和, 由于当  $m_e \rightarrow 0$  时, 无法区分一个电子和电子, 正电子和光子组成的总电荷为  $-e$  的喷注, 其中的喷注(jet)是指所有粒子以相同速度沿同一方向运动的粒子体系, 这使得截面在极限  $m_e \rightarrow 0$  下也会红外发散. 我们在第 13 章看到, 通过仅考察合适的被积截面, 即在  $m_e \rightarrow 0$  下可测的截面, 我们就可以解决这样的红外发散. 例如, 取代计算特定的 Compton 散射过程的截面, 我们可以计算总电荷为  $-e$  的喷注与总电荷为零的喷注散射到另外两个这样的喷注和软光子的散射截面. 这种内含反应速率或者截面在所有质量为零时也是有限的, 它们被称作是“红外安全”的.

我们的麻烦还没有完. 即便我们通过积掉截面或者远离质量壳的方法避免了红外发散, 相应地, 能量为  $E$  的被积截面以及不在壳振幅将会包含第二类质量奇异性, 这会导致因子  $\ln(E/m)$ , 进而使得量纲分析给出的单纯的幂次率行为无效. 原因可以追溯到重整化耦合的如下性质: 当所有

质量为零时, 按照惯例以振幅定义的重整化耦合会红外发散. 例如, 考察一个实标量场的理论, 其拉格朗日密度是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{24}g\phi^4. \quad (18.1.2)$$

到一圈阶, 对于初态4-动量为 $p_1, p_2$ 而末态4-动量为 $p'_1, p'_2$ 的散射过程, 不变弹性散射振幅由方程(12.2.24)给出

$$A = g - \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 - sx(1-x)} \right) + \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 - tx(1-x)} \right) + \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 - ux(1-x)} \right) - 3 \right\} + O(g^3), \quad (18.1.3)$$

其中 $s, t$ 以及 $u$ 是Mandelstam变量

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_1 - p'_1)^2, \quad u = -(p_1 - p'_2)^2$$

而 $\Lambda$ 是紫外截断. 只要我们让 $s, t$ 和 $u$ 远离正实轴, 特别地, 如果它们全都趋于 $-\infty$ (这违反了质量壳条件 $s + t + u = 4m^2$ ), 那么它就没有零质量奇异性. 当然, 这些振幅同时依赖于截断 $\Lambda$ 和 $m$ , 所以即使没有零质量奇异性, 在 $s, t$ 和 $u$ 趋于 $-\infty$ 的极限下, 我们也没有发现 $A \rightarrow$ 常数这一根据单纯的标度讨论得到的结果. 与截断的相关性可以通过重整化隐藏起来; 我们将裸耦合 $g$ 替换成重整化耦合 $g_R$ , 它的定义是 $A$ 在某些约定重整化点的值. 例如, 我们可以取

$$\begin{aligned} g_R &\equiv A(s = t = u = 0) \\ &= g - \frac{3g^2}{32\pi^2} \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right\} + O(g^3). \end{aligned} \quad (18.1.4)$$

这样, (18.1.3)就变成

$$\begin{aligned} A &= g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left( 1 - \frac{sx(1-x)}{m^2} \right) + \ln \left( 1 - \frac{tx(1-x)}{m^2} \right) + \ln \left( 1 - \frac{ux(1-x)}{m^2} \right) \right\} + O(g_R^3). \end{aligned} \quad (18.1.5)$$

(我们可以毫无顾忌地将第二项中的 $g^2$ 替换成 $g_R^2$ , 这是因为二者的差是 $g^3$ 阶.) 这一振幅没有紫外发散, 但它现在在 $m = 0$ 处有一奇异性, 即使 $s, t$ 和 $u$ 全部为负, 这一奇异性也依旧存在. 因此, 当 $s, t$ 和 $u$ 全部趋于 $-\infty$ 时, 我们发现

$$A \rightarrow g_R + \frac{g_R^2}{32\pi^2} \left\{ \ln \left( \frac{-s}{m^2} \right) + \ln \left( \frac{-t}{m^2} \right) + \ln \left( \frac{-u}{m^2} \right) - 6 \right\}, \quad (18.1.6)$$

这一渐进行为与基于单纯的标度讨论预期得到的结果并不一致. (使用任何其它“自然的”重整化耦合定义会出现几乎相同的结果; 例如, 我们可以将 $g_R$ 定义为 $A$ 在在壳对称点 $s = t = u = 4m^2/3$ 的值, 除了 $-6$ 要被换成其它某个数值因子外, (18.1.6)中的其它渐进行为都会复现出来.) 很显然, 当 $A$ 以 $g_R$ 的形式表示时所出现的零质量极限完全是因为公式(18.1.4)中的 $\ln m^2$ 项, 即用裸耦合 $g$ 表示重整化耦合 $g_R$ 时出现的 $\ln m^2$ 项.

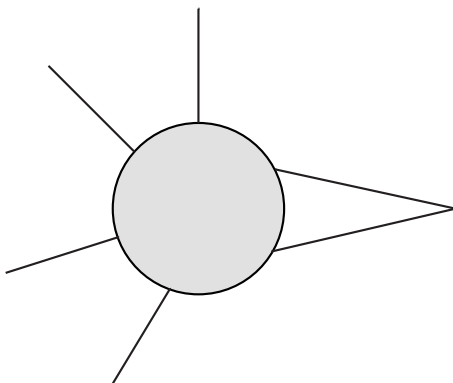


图 18.1 基本标量场 $\phi(x)$ 的理论中, 算符 $\int d^4x \exp(-ip \cdot x) \phi^2(x)$ 的矩阵元的动量空间Feynman图. 阴影圆盘代表外线与上图相同的所有图的和. 除了那对相交在 $\phi^2$ 顶点的外线外, 其它外线代表所计算矩阵元的初态和末态中的粒子.

当我们计算算符的矩阵元(例如不在壳的Feynman振幅)而非截面的积分时, 我们还会遇到其它的零质量奇异性. 这是因为同耦合常数一样, 这些算符也必须进行重整化. 例如, 假定在拉格朗日量为(18.1.2)的标量场论中, 我们希望计算算符

$$\mathcal{O}(p) \equiv \int d^4x e^{-ip \cdot x} \phi^2(x) \quad (18.1.7)$$

的矩阵元 $\langle \beta | \mathcal{O}(p) | \alpha \rangle$ . 以Feynman图的形式, 这对应于在跃迁 $\alpha \rightarrow \beta$ 的图中, 在两条 $\phi$ -内线汇集的地方插入一顶角, 而流经顶角的总4-动量为 $p$ . (参看图18.1.) 紫外发散源于这些图中的一类, 在这类图中, 图被分成了两部分, 新顶角是其中一个子图的一部分, 而该子图通过两条 $\phi$ 线与图的其它部分相连. (参看图18.2.) 由于相互作用 $\phi^2$ 的量纲为+2, 若这一顶角通过 $n > 2$ 条外线与图的剩余部分相连, 那么顶角所在的子图就有量纲 $4 - 2 - n < 0$ , 因此通过量纲分析可知, 如果用来连接两个子图的 $\phi$ 线数目多于两条, 那么含有顶角的子图就是收敛的. 这个子图的发散部分仅是一个对数发散的常数, 所以给 $\phi^2$ 乘以合适的发散常数 $Z_{\phi^2}$ 可以使得 $\phi^2$ 的矩阵元是有限的.\* 到 $g^2$ 阶, 相关的子图由图18.3中的图给出, 因此会给 $\mathcal{O}(p)$ 的矩阵元贡献发散因子

$$F(p) = 1 + \frac{1}{2} \left[ -i(2\pi)^4 g \right] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \right]^2 \int \frac{d^4k}{[k^2 + m^2 - i\epsilon][(p-k)^2 - m^2 - i\epsilon]}. \quad (18.1.8)$$

组合分母, 旋转 $k^0$ 积分围道, 并附加紫外截断 $\Lambda$ , 当 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时, 这给出结果

$$F(p) = 1 - \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 + p^2 x(1-x)} \right) - 1 \right] + O(g^2). \quad (18.1.9)$$

(只要我们保持 $p^2$ 为正) 这一结果没有零质量奇异性, 但它理所应当与截断相关. 通过定义重整化 $\phi^2$ 算符

$$(\phi^2)_R = N^{(\phi^2)} \phi^2, \quad (18.1.10)$$

这一紫外发散可以被消除掉, 其中的 $N^{(\phi^2)}$ 会使得 $N^{(\phi^2)} F(p)$ 在某个明确的重整化点有明确的有限值. 例如, 我们可以定义重整化 $\phi^2$ 算符使得

$$N^{(\phi^2)} F(0) = 1, \quad (18.1.11)$$

\*在这一讨论中我们假定, 对于那些与图的剩余部分仅通过两条 $\phi$ 线相连并含有顶角的子图, 只要发散是由它们引起的, 那么这些发散就以同样的方式消除.

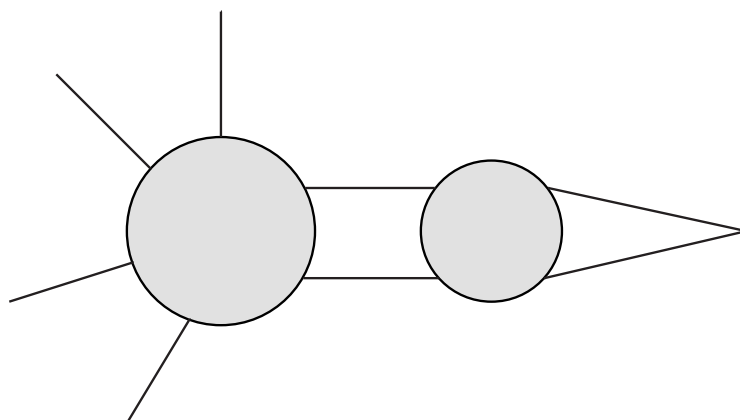


图 18.2 上面的Feynman图所代表的算符  $\int d^4x \exp(-ip \cdot x) \phi^2(x)$  的矩阵元会呈现出紫外发散. 它的记号与图18.1中的记号相同

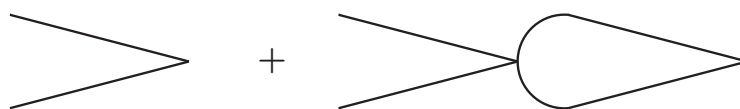


图 18.3 图18.2中直到一圈发散的图.

在这一情况下,

$$N^{(\phi^2)} = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 \right) + O(g^2). \quad (18.1.12)$$

这样, 重整化算符  $(\phi^2)_R$  的矩阵元就会包含因子

$$F_R(p) \equiv N^{(\phi^2)} F(p) = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left( 1 + \frac{p^2 x(1-x)}{m^2} \right) + O(g^2). \quad (18.1.13)$$

这对于所有的  $p^2 > 0$  和  $m^2 > 0$  都是有限的, 但它现在包含  $m \rightarrow 0$  的红外发散, 相对于  $p^2 \rightarrow +\infty$  时的渐进行为, 这一红外发散对应于其中的大对数. 当然, 为了消除高阶计算中的截断, 我们将不得不同时引入重整化耦合常数和重整化  $\phi^2$  算符, 并且我们会遇到这两者引起的大对数.

不仅仅是  $\phi^2(x)$ , 任何类型的算符都需要类似的重整化因子. 特别地, 取理论中的一个基本场  $\psi$  的矩阵元, 它所引入的紫外发散就源于对相对应传播子的辐射修正. 正如我们在第12章中看到的, 这些无限大可以通过引入重整化场  $\psi_R$  消除掉:

$$\psi_R = N^{(\psi)} \psi, \quad (18.1.14)$$

其中的  $N^{(\psi)}$  会使得  $\psi_R$  在单粒子态和真空之间的矩阵元, 与没有相互作用时, 按传统归一化的场的矩阵元是相同的. 它与重整化理论中通常的  $Z$  因子的关系是

$$Z^{(\psi)} = |N^{(\psi)}|^{-2}. \quad (18.1.15)$$

例如, 我们来回忆一下早先我们对旋量量子电动力学中光子场重整化的结果.\*\* 在这一情况

\*\*在上面作为例子的标量场论中, 相互作用为  $\phi^4$ , 对于这样的理论,  $N^{(\phi)}$  的最低阶项源于两圈图, 所以用这一理论论证  $N$  因子的计算将是不方便的.

中, 重整化电磁场  $A_R^\mu$  一般写成裸场  $A_B^\mu$  的形式

$$A_R^\mu = Z_3^{-1/2} A_B^\mu$$

其中  $Z_3$  由方程(11.2.21)给定

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + O(e^4). \quad (18.1.16)$$

它有一个零质量奇点, 而这将会影响到重整化光子场矩阵元的渐进行为. 特别地, 方程(11.2.22)给出了重整化电磁场的自能函数

$$\pi(q^2) = \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[ 1 + \frac{q^2 x(1-x)}{m^2} \right] + O(e_R^4). \quad (18.1.17)$$

它在  $m = 0$  处有奇点, 所以在它的渐进行为中就会有大大对数: 对于  $q^2 \rightarrow +\infty$

$$\pi(q^2) \longrightarrow \frac{e_R^2}{2\pi^2} \left[ \frac{1}{6} \ln \frac{q^2}{m^2} - \frac{5}{18} \right] + O(e_R^4). \quad (18.1.18)$$

电动力学有如下的特征, 出现在电磁场重整化中的常数  $Z_3$  同时出现在电荷重整化中:

$$e_R = Z_3^{-1/2} e_{\text{BARE}}, \quad (18.1.19)$$

但这并非普遍情况. 重整化群技巧首先是在量子电动力学中得以使用的, 但对于这里讨论的标量场论而言, 由于场和耦合的重整化的是分开的, 所以这给出了这些方法一个更加典型的例证.

## 18.2 滑动标度

在上一节我们看到, 合适的被积截面或者不在壳 Feynman 振幅在高能处会出现大大对数, 而有些大大对数可以追溯到用来定义重整化耦合常数和重整化算符的方案. 重整化群方法的核心思想就是改变这一方案.

假定我们发现了某种定义一类新的重整化耦合常数  $g(\mu)$  的方法, 使得它依赖于滑动能量标度  $\mu$ , 但是(至少当  $\mu \gg m$  时)与理论的质量标度无关. 这样, 合适的被积截面或者其它的红外安全速率参量就可以表示成  $g_\mu$  和  $\mu$  而不是  $g_R$  的函数. 通过量纲分析, 这样的函数可以写成

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma \left( 1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E} \right). \quad (18.2.1)$$

(我们的记号与 18.1 节是相同的; 特别地,  $x$  代表  $\Gamma$  所依赖的所有无量纲的角, 能量比值等.) 既然  $\mu$  是完全任意的重整化标度, 我们可以令  $\mu = E$ , 在这一情况下, 方程(18.2.1)变成

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma \left( 1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1 \right). \quad (18.2.2)$$

现在, 由于  $g_E$  在  $m \ll E$  时不依赖于  $m$ , 这里没有零质量奇点, 因而也没有大大对数, 并且只要  $g_E$  本身保持足够小, 我们就能以  $g_E$  的形式用微扰论计算  $\Gamma$ . 特别地, 在微扰论的任意有限阶,  $\Gamma$  有如下的渐进行为, 对于  $E \gg m$ ,

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) \longrightarrow E^D \Gamma(1, x, g_E, 0, 1). \quad (18.2.3)$$

(非微扰修正将在18.4节进行考察.)

尚需计算的是 $g_E$ , 我们举一个例子进行说明, 在拉格朗日量为(18.1.2)的标量场论中, 我们可以将 $g_\mu$ 定义成散射振幅在重整化点 $s = t = u = -\mu^2$ 的值:

$$\begin{aligned} g_\mu &\equiv A(s = t = u = -\mu^2) \\ &= g - \frac{3g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} - 1 \right) \right\} + O(g^3), \end{aligned} \quad (18.2.4)$$

或者, 将其写成传统的重整化耦合(18.2.5)的形式,

$$g_\mu = g_R + \frac{3g_R^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left( 1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2} \right) + O(g_R^3). \quad (18.2.5)$$

然而, 仅当修正项远小于 $g_R$ 时, 这一公式才是可靠的; 即, 仅当 $|g_R \ln(\mu/m)| \ll 1$ 时, 这一公式才是可靠的. 如果是 $\mu \simeq E$ 的情况, 我们不需要使用重整化群方法; 普通的微扰论就已经足够好了.

当 $\mu$ 很大时, 取代直接使用(18.2.5)这样的公式, 我们必须以阶段的方式进行: 只要 $\mu/m$ 不是远大于1, 我们就可以用 $g_R$ 计算 $g_\mu$ ; 这样, 只要 $\mu'/\mu$ 不远大于1, 我们就可以用 $g_\mu$ 计算 $g_{\mu'}$ ; 以此类推, 直到 $g_E$ . 取代用离散的步骤到达 $g_E$ , 我们也可以连续地到达 $g_E$ . 量纲分析告诉我们,  $g_{\mu'}$ 和 $g_\mu$ 之间的关系采取形式

$$g_{\mu'} = G(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu). \quad (18.2.6)$$

对 $\mu'$ 微分然后取 $\mu' = \mu$ , 这给出微分方程

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta \left( g_\mu, \frac{m}{\mu} \right), \quad (18.2.7)$$

其中

$$\beta \left( g_\mu, \frac{m}{\mu} \right) \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial z} G(g_\mu, z, m/\mu) \right]_{z=1}. \quad (18.2.8)$$

这里没有零质量奇点, 所以当 $\mu \gg m$ 时, 这一微分方程就变成

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta(g_\mu, 0) \equiv \beta(g_\mu), \quad (18.2.9)$$

这通常被称作 *Callan-Symanzik* 方程.<sup>1</sup> 我们将通过对微分方程(18.2.9)积分来计算 $g_E$ , 其中的初始值 $g_M$ 处在标度 $\mu = M$ , 对该标度的选择要比较小心, 一方面要足够大, 使得当 $\mu \geq M$ 时, 相比于 $\mu$ 我们可以忽略掉 $m$ , 一方面要足够小, 使得我们在用微扰论计算 $g_M$ 时, 大对数 $\ln(E/m)$ 不会妨碍我们用 $g_R$ 去计算 $g_M$ . 只要 $\beta(g)$ 在 $g_M$ 和 $g_E$ 之间不为零, 那么这个解就可以形式地写成

$$\ln(E/M) = \int_{g_M}^{g_E} dg / \beta(g). \quad (18.2.10)$$

上一段的结果不依赖微扰论, 但是我们通常需要用微扰论计算 $G$ 和 $\beta$ . 例如, 假定我们在相互作用为 $g\phi^4/24$ 的标量场论中计算 $g_{\mu'}$ , 通过将 $g$ 表示成 $g_\mu$ 而非 $g_R$ 进行重整化. 沿用导出方程(18.2.5)的步骤, 这给出

$$g_{\mu'} = g_\mu - \frac{3g_\mu^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left( \frac{m^2 + \mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu'^2 x(1-x)} \right) + O(g_\mu^3).$$

那么方程(18.2.8)给出

$$\beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) = +\frac{3g_\mu^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} + O(g_\mu^3). \quad (18.2.11)$$

当 $\mu \gg m$ 时, 这变成

$$\beta(g_\mu) = \frac{3g_\mu^2}{16\pi^2} + O(g_\mu^3). \quad (18.2.12)$$

到下一阶,  $\mu \gg m$ 的 $\beta$ -函数是<sup>3</sup>

$$\beta(g_\mu) = g_\mu \left[ 3 \left( \frac{g_\mu}{16\pi^2} \right) - \frac{17}{3} \left( \frac{g_\mu}{16\pi^2} \right)^2 + \cdots \right].$$

如果我们只满足单圈近似,  $\beta(g)$ 的计算有更加简单的方法. 为了避免矩阵元在 $\mu$ 阶能量处有很大的辐射修正, 我们必须将裸耦合 $g$ 写成有限的重整化耦合 $g_\mu$ , 就像

$$g = g_\mu + B(g_\mu) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \cdots. \quad (18.2.13)$$

例如, 从方程(18.1.3)中, 我们可以立刻读出 $g$ 中 $\ln \Lambda$ 项的系数

$$B(g) = -\frac{3}{2} \left[ -i(2\pi)^4 g^2 \right] \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} \right]^2 2\pi^2 i = \frac{3g^2}{16\pi^2}. \quad (18.2.14)$$

非重整化耦合显然独立于 $\mu$ , 所以到最低阶

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu - B(g_\mu) = 0$$

因此在最低阶

$$\beta(g) = B(g). \quad (18.2.15)$$

这里的 $B(g)$ 由方程(18.2.14)给定, 这与我们之前 $\beta(g)$ 在 $\phi^4$ 标量场论中的结果(18.2.14)一致.

简单的紫外截断会妨碍规范不变性, 所以用维数正规化来处理紫外发散通常是方便的. 对于时空维数 $d < 4$ , 我们发现 $\ln(\Lambda/\mu)$ 会被替换成收敛积分

$$\int_\mu^\infty k^{d-4} \frac{dk}{k} = \frac{\mu^{d-4}}{4-d} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \left[ \frac{1}{4-d} - \ln \mu \right].$$

因此, 不像之前通过将非重整化耦合写成(18.2.13)那样来消除截断相关性, 我们转而写成

$$g = g_\mu + B(g_\mu) \left[ \frac{1}{4-d} - \ln \mu \right], \quad (18.2.16)$$

其中的函数 $B(g_\mu)$ 与上面相同. 因此, 为了计算 $\beta(g_\mu)$ , 我们需要做的就是将重整化耦合中奇异因子 $1/(4-d)$ 的系数挑出来. 这一讨论将在18.6节扩展至所有阶.

在拉格朗日量为(18.1.2)的标量场论中, 只要 $g_\mu$ 足够小, 方程(18.2.9)和(18.2.12)可以很好地近似为

$$g_\mu = -\frac{16\pi^2}{3 \ln(\mu/M)}, \quad (18.2.17)$$



其中 $M$ 是一个积分常数. 这一表达式例证了重整化群运算的一个普遍特征, 即像 $g_R$ 这样的无量纲耦合会被 $M$ 这样量纲为质量的参量替代. 若 $\mu$ 的值足够大, 使得我们可以使用基于 $\mu \gg m$ 的近似, 并且又足够小, 使得 $|g_R \ln(\mu/M)| \ll 1$ , 通过比较解(18.2.17)与此时耦合的行为, 我们可以将 $M$ 与 $g_R$ 关联起来, 在 $\mu$ 满足上述条件时, (18.2.5)给出

$$g_\mu \simeq g_R + \frac{3g_R^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{M}\right). \quad (18.2.18)$$

以这种方式, 我们发现

$$M \simeq m \exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_R}\right), \quad (18.2.19)$$

这使得方程(18.2.17)可以变成更加常见的形式

$$g_\mu = g_R \left[1 - \frac{3g_R}{16\pi^2} \ln \frac{\mu}{m}\right]^{-1}. \quad (18.2.20)$$

再重申一次, 即使 $|g_R \ln(\mu/m)|$ 量级为1, 只要 $g_\mu$ 是小量, 上式就是成立的, 所以它代表的是对微扰结果(18.2.18)的重要提升. 当然, 当 $|g_R \ln(\mu/m)|$ 充分接近于临界值 $16\pi^2/3$ 时,  $g_\mu$ 是小量这个条件就会被破坏. 但是, 方程(18.2.20)至少做出了如下的明确预测: 在临界值(18.2.19)之下的某个能量 $E$ 处,  $g_E$ 变得足够大使得微扰论无法使用.

如果我们计算的不是被积截面而是算符的不在壳矩阵元, 我们还需要把出现在重整化算符定义中的 $N$ 因子考虑在内, 它会使得重整化算符的矩阵元是有限的. 在上一节我们看到, 如果这些 $N$ 因子以传统的方式定义(即, 当算符携带的4-动量为零或者算符是处在质量壳上的场时, 发散子图所产生的修正因子被抵消了), 那么 $N$ 因子的公式就会像方程(18.1.12)或(18.1.16)中那样包含零质量奇点, 而这又会在 $E \gg m$ 处产生大对数. 解决方法是在滑动标度 $\mu$ 处定义重整化常数 $N_\mu^{(\mathcal{O})}$ , 使得在重整化算符

$$\mathcal{O}_\mu = N_\mu^{(\mathcal{O})} \mathcal{O} \quad (18.2.21)$$

的矩阵元中, 包含算符 $\mathcal{O}$ 的发散子图所产生的修正因子在 $\mu$ 阶4-动量所表征的重整化点处被抵消了. 如果 $M_R$ 是按传统方式重整化的算符的矩阵, 而 $M$ 是算符按照方程(18.2.21)重整化后的矩阵元, 那么对于任意的 $\mu$

$$M_R = \left[ \prod_{\mathcal{O}} \left( N^{(\mathcal{O})} / N_\mu^{(\mathcal{O})} \right) \right] M(E, x, g_\mu, m, \mu). \quad (18.2.22)$$

我们可以再次使用量纲分析(假定 $M$ 的量纲为 $D$ )并令 $\mu = E$ , 将其写成

$$M_R = E^D \left[ \prod_{\mathcal{O}} \left( N^{(\mathcal{O})} / N_E^{(\mathcal{O})} \right) \right] M\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right). \quad (18.2.23)$$

因此, 为了发现不在壳振幅 $M_R$ 的高能行为, 我们需要知道当重整化标度 $\mu$ 变化时,  $N_\mu$ 是如何变化的.

对于任意两个重整化标度 $\mu$ 和 $\mu'$ , 重整化算符 $N_\mu^{(\mathcal{O})} \mathcal{O}$ 和 $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})} \mathcal{O}$ 的矩阵元都是有限的, 所以比值 $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})} / N_\mu^{(\mathcal{O})}$ 必须是截断无关的. 基于量纲分析, 这一比值必须采取如下的形式

$$N_{\mu'}^{(\mathcal{O})} / N_\mu^{(\mathcal{O})} = G^{(\mathcal{O})}(g_\mu, \mu' / \mu, m / \mu). \quad (18.2.24)$$

相对 $\mu'$ 微分并令 $\mu' = \mu$ , 这给出

$$\mu \frac{d}{d\mu} N_\mu^{(\mathcal{O})} = \gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, m/\mu) N_\mu^{(\mathcal{O})}, \quad (18.2.25)$$

其中

$$\gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, m/\mu) \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial z} G^{(\mathcal{O})}(g_\mu, z, m/\mu) \right]_{z=1}. \quad (18.2.26)$$

这一方程的解是

$$N_E^{(\mathcal{O})} \propto \exp \left[ \int^E \gamma^{(\mathcal{O})} \left( g_\mu, \frac{m}{\mu} \right) \frac{d\mu}{\mu} \right]. \quad (18.2.27)$$

由于引入了滑动标度,  $N_\mu^{(\mathcal{O})}$ 和 $N_{\mu'}^{(\mathcal{O})}$ 中不再有零质量奇点,  $G^{(\mathcal{O})}$ 和 $\gamma^{(\mathcal{O})}$ 也因此不再含有零质量奇点, 所以这一结果是相当有用的. 因此, 只要 $g_\mu$ 是一小量, 就不会有大对数妨碍用微扰论计算 $\gamma^{(\mathcal{O})}$ . 另外, 当 $\mu \gg m$ 时,  $\gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, m/\mu)$ 有一光滑极限

$$\gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu) \equiv \gamma^{(\mathcal{O})}(g_\mu, 0). \quad (18.2.28)$$

作为一个例子, 考察标量场论中的算符 $\mathcal{O} = \phi^2$ , 其中的相互作用是 $g\phi^4/24$ . 这时的重整化不会使得修正因子(18.1.9)在 $p^2 = 0$ 处被抵消掉, 而是在滑动标度 $p^2 = \mu^2$ 处抵消它, 方法是引入新的重整化 $\phi^2$ 算符 $N_\mu^{(\phi^2)}\phi^2$ , 其中

$$N_\mu^{(\phi^2)} \equiv F^{(\phi^2)}(\mu^2)^{-1} = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} \right] - 1 \right] + O(g^2).$$

那么, 对于这一算符, 函数(18.2.24)就是

$$G^{(\phi^2)} \left( g_\mu, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu} \right) \equiv \frac{N_{\mu'}^{(\phi^2)}}{N_\mu^{(\phi^2)}} = 1 + \frac{g_\mu}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{m^2 + \mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu'^2 x(1-x)} \right] + O(g_\mu^2).$$

(由于 $g_\mu$ 和 $g$ 的差或者 $g_\mu$ 和 $g_{\mu'}$ 的差仅影响 $g_\mu^2$ 阶的项或者更高阶的项, 所以在这里我们可以用 $g_\mu$ 替代 $g$ 或 $g_{\mu'}$ .) 那么, 从方程(18.2.26)中我们就有

$$\gamma^{(\phi^2)} \left( g_\mu, \frac{m}{\mu} \right) = -\frac{g_\mu}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} dx + O(g_\mu^2)$$

或者, 当 $\mu \gg m$ 时,

$$\gamma^{(\phi^2)}(g_\mu) = -\frac{g_\mu}{16\pi^2} + O(g_\mu^2). \quad (18.2.29)$$

另一个比较好的例子是量子电动力学中与电磁场重整化相联系的 $N$ 因子. 回忆, 通过用重整化电磁场来计算光子传播子, 我们可以使其对于所有的动量都是有限的, 这一方法可以等效为给非重整化场的传播子乘以 $Z_3^{-1}$ :

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma}(q) = Z_3^{-1} \Delta_{\rho\sigma}(q). \quad (18.2.30)$$

方程(10.5.17)表明这一重整化传播子可以写成

$$\tilde{\Delta}_{\rho\sigma}(q) = \frac{\eta_{\rho\sigma}}{[q^2 - i\epsilon][1 - \pi(q^2)]} + q_\rho q_\sigma \text{项}. \quad (18.2.31)$$

假定我们转而定义重整化场  $N_\mu^{(A)} A^\rho$ , 它的传播子中有一项正比于  $\eta_{\rho\sigma}/[q^2 - i\epsilon]$ , 并且比例系数在滑动标度  $q^2 = \mu^2$  处等于1. 由于这个原因, 显然我们必须取

$$N_\mu^{(A)} = Z_3^{-1/2} [1 - \pi(\mu^2)]^{1/2}. \quad (18.2.32)$$

利用方程(11.2.22), 函数(18.2.24)就是

$$\begin{aligned} G^{(A)}(g_\mu, \mu'/\mu, m/\mu) &= \left[ \frac{1 - \pi(\mu'^2)}{1 - \pi(\mu^2)} \right]^{1/2} \\ &= 1 - \frac{e_\mu^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[ \frac{m^2 + \mu'^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} \right] \\ &\quad + O(e_\mu^4), \end{aligned} \quad (18.2.33)$$

因此, 方程(18.2.26)给出

$$\gamma^{(A)}(e_\mu, m/\mu) = -\frac{e_\mu^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)^2 \mu^2}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} + O(e_\mu^4). \quad (18.2.34)$$

正如所承诺的, 它在  $\mu \gg m$  时的极限是光滑的

$$\gamma^{(A)}(e_\mu) \equiv \gamma^{(A)}(e_\mu, 0) = -\frac{e_\mu^2}{12\pi^2} + O(e_\mu^4). \quad (18.2.35)$$

正如之前提到过的, 由于出现在重整化电磁场中的重整化常数  $Z_3^{-1/2}$  与定义电子的重整化电荷的常数互为倒数:  $e_R = Z_3$ . 那么, 滑动标度  $\mu$  处的重整化电荷的自然定义就是

$$e_\mu = N_\mu^{(A)-1} e = Z_3^{-1/2} N_\mu^{(A)-1} e_R, \quad (18.2.36)$$

这使得  $e_\mu$  与在标度  $\mu$  处重整化的场  $N_\mu^{(A)} A^\rho$  相乘后与  $\mu$  无关, 从方程(18.2.25)中, 我们看到, 对于给出  $e_\mu$  对  $\mu$  的相关性的函数  $\beta(e)$ , 根据方程(18.2.9), 它在  $\mu \gg m$  时的值为

$$\beta(e) = -e\gamma^{(A)}(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + O(e^5). \quad (18.2.37)$$

更早的计算<sup>3a</sup>给出了真空极化函数  $\pi(q^2)$  的第四阶项. 借此, Gell-Mann和Low给出了  $\beta(e)$  中  $e$  的下一阶项.

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + O(e^7). \quad (18.2.38)$$

换句话说, 活动标度  $\mu$  处的电荷满足重整化群方程

$$\mu \frac{d}{d\mu} e_\mu = \frac{e_\mu^3}{12\pi^2} + \frac{e_\mu^5}{64\pi^2} + O(e_\mu^7). \quad (18.2.39)$$

这表明, 对于比较小的  $e_\mu$ ,  $e_\mu$  随着  $\mu$  的增大而增大.

我们还需要初始条件. 这由电荷著名的传统重整化值  $e_R = Z_3^{1/2} e$  提供, 对于这个值  $\alpha \equiv e_R^2/4\pi = 1/137.036 \dots$ . 方程(18.2.32)和(18.2.36)给出

$$\begin{aligned} e_R/e_\mu &= Z_3^{1/2} N_\mu^{(A)} = \sqrt{1 - \pi(\mu^2)} \\ &= 1 - \frac{e_R^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[ 1 + \frac{\mu^2 x(1-x)}{m_e^2} \right] + O(e_R^4). \end{aligned} \quad (18.2.40)$$

我们需要匹配这一公式与方程(18.2.39)的解, 在匹配时,  $\mu$  的值要足够大以使得方程(18.2.39)中的近似  $\mu \gg m_e$  是合理的, 但又足够小使得方程(18.2.40)中的对数与  $4\pi^2/e_R^2$  相比依然是个少量, 进而使得微扰论是成立的. (例如, 我们可以取  $\mu$  的量级为 100 MeV.) 对于这样的  $\mu$  值, 方程(18.2.40)给出

$$e_\mu \simeq e_R + \frac{e_R^3}{12\pi^2} \left[ \ln \frac{\mu}{m_e} - \frac{5}{6} \right]. \quad (18.2.41)$$

另一方面, 当  $e_\mu$  比较小的时候, 方程(18.2.39)(仅保留右边第一项)的解是

$$e_\mu = \left[ \text{常数} - \frac{\ln \mu}{6\pi^2} \right]^{-1/2}. \quad (18.2.42)$$

比较方程(18.2.41)和(18.2.42), 这给出解

$$e_\mu = e_R \left[ 1 - \frac{e_R^2}{6\pi^2} \left( \ln \left( \frac{\mu}{m_e} \right) - \frac{5}{6} \right) \right]^{-1/2}. \quad (18.2.43)$$

不像方程(18.2.41), 不管  $(e_R^2/6\pi^2) \ln(\mu/m_e)$  是不是少量, 只要  $e_\mu^2/6\pi^2$  是少量, 方程(18.2.43)就是适用的.

例如, 我们在 11.3 节就已经看到, 通过对  $\mu$  子磁矩的二阶(Schwinger)项(11.3.16)乘以  $k^2 \approx m_\mu^2$  处的真空极化函数  $\pi_e(k^2)$ , 我们就可以获得对  $\mu$  子磁矩的领头 4 阶修正, 根据方程(18.2.40), 这与将 Schwinger 项中的  $\alpha$  替换成  $e_{m_\mu}^2/4\pi$  的结果(到这一阶)是相同的.

另一个例子: 在 高能电子-正电子对撞实验中, 诸如 CERN 上的 LEP 或者 SLAC 上的 SLC<sup>d</sup>, 它们所研究的物理过程所处的能量量级大约是  $Z^0$  粒子的质量, 或者说 91 GeV. 方程(18.2.43)表明, 在能量达到这个量级时, 计算纯量子电动力学中的辐射修正所用的精细结构常数不是  $\alpha = 1/137.036$ , 而是

$$\frac{e^2(91 \text{ GeV})}{4\pi} = \frac{\alpha}{1 - 2(11.25)\alpha/3\pi} = \frac{1}{134.6}. \quad (18.2.44)$$

在这一结果所针对的理论中, 质量小于  $m_Z$  的带电粒子只有电子. 而在真实情况中, 这种粒子有很多, 相应地,  $m_Z$  处的精细结构常数<sup>4</sup>是  $(128.87 \pm 0.12)^{-1}$ .

\* \* \*

计算理论的耦合参数所在的滑动标度可以不是外线动量而是外场的值. 在重整化群方法的一个早期应用中, Coleman 和 E. Weinberg<sup>4a</sup> 考察了时空无关的外标量场  $\phi$  的有效势  $V(\phi)$ . 在这一简单情况中, 场只与自身作用, 它们的圈结果由方程(16.2.15)给出. 在重整化质量  $m_R$  为零的情况下考察有效势是特别有趣的, 这时, 到一圈阶我们可以令最后一项中的  $\mu^2(\phi)$  等于  $g_R\phi^2/2$ , 这使得方程(16.2.15)在这里变成(其中的  $g$  是重定义耦合, 与之前稍有不同):

$$V(\phi) = \lambda_R + \frac{g}{24}\phi^4 + \frac{g^2\phi^4 \ln \phi^2}{256\pi^2}. \quad (18.2.45)$$

第一眼看上去, 当  $g > 0$  时, 对于比较小的  $\phi$ , 有效势好像要小于  $\lambda_R$ , 这使得  $\phi = 0$  这一点是局域极大点而非极小点, 但对于这样小的  $\phi$ , 第三项要远大于第二项, 微扰论显然是靠不住的. 另外, 为了使

<sup>d</sup>CERN 是欧洲核子研究组织(European Organization for Nuclear Research)的缩写, LEP 是大型正负电子对撞机(Large Electron-Positron Collider)的缩写, 在 2000 年末的时候, LEP 被关停并拆解, 以给在建的新的的大型强子对撞机(LHC)腾出轨道空间, SLAC 是斯坦福直线加速器中心(Stanford Linear Accelerator Center)的缩写, 而 SLC 是斯坦福直线对撞机(Stanford Linear Collider)的缩写. —译者注

势对于比较大的场有下界, 我们能够论证 $g$ 必将是正的, 但是方程(18.2.45)表明, 无论 $g$ 多小, 总存在足够大的场使得微扰论不在成立. 因而方程(18.2.45)也就无法告诉我们势是否在场比较大时有下界.

通过使用定义在场强的滑动标度 $\mu$ 处的耦合常数, 我们可以做的更好. 假定我们通过条件

$$V(\mu) = \lambda_R + \frac{g_\mu}{24} \mu^4 \quad (18.2.46)$$

来定义耦合 $g_\mu$ . 如果我们在开头就用 $g_\mu$ 作为耦合参量, 那么, 取代方程(18.2.45), 我们将获得

$$V(\phi) = \lambda_R + \frac{g_\mu}{24} \phi^4 + \frac{g_\mu^2 \phi^4}{256\pi^2} \ln \left( \frac{\phi^2}{\mu^2} \right), \quad (18.2.47)$$

它显然满足方程(18.2.46).<sup>\*</sup> 从有效势独立于 $\mu$ 这一条件可以获得 $g_\mu$ 的重整化群方程,<sup>\*\*</sup>

$$\mu \frac{dg_\mu}{d\mu} = \frac{3g_\mu^2}{16\pi^2}. \quad (18.2.48)$$

(包含 $g_\mu^2$ 的导数的项被扔掉了, 这是因为它们是 $g_\mu$ 的高阶项, 因此只要 $g_\mu$ 足够小, 它们就可以被忽略.) 与重整化群方程(18.2.9)和(18.2.13)相比, 上式所采取的形式与它们一样, 尽管 $\mu$ 在那里是重整化动量, 这并非巧合, 我们将在下一节看到, 重整化群方程中的前两项与我们定义滑动标度的方式总是无关的. 这一方程的解由方程(18.2.17)给出, 一般而言所不同的是积分常数 $M$ . 因此, 通过令方程(18.2.17)中的 $\mu = \phi$ , 我们现在有

$$V(\phi) = \lambda_R - \frac{32\pi^2 \phi^4}{3 \ln(\phi^2/M^2)}, \quad (18.2.49)$$

$$g_\phi = -\frac{32\pi^2}{3 \ln(\phi^2/M^2)}. \quad (18.2.50)$$

使用这一结果要小心, 因为它仅在耦合常数 $g_\phi$ 比较小的情况下才是有效的. 这里的问题不仅是方程(18.2.49)在 $\phi$ 接近于 $M$ 时失去了它的有效性; 我们对重整化群方程的积分也不能穿过 $\phi = M$ 处的奇点, 所以 $g_\phi$ 在奇点一边的信息无法告诉我们它在奇点另一边的行为.

如果 $g_\phi$ 对于某个 $\phi_0$ 有很小的正值, 那么我们从方程(18.2.50)中可以知道 $M > |\phi_0|$ , 所以对于 $|\phi| < |\phi_0|$ ,  $g_\phi$ 会保持一个比较小的值并且方程(18.2.49)是有效的. 这表明 $\phi = 0$ 这一点是 $V(\phi)$ 的局域极小点, 与方程(18.2.45)所给予我们的预期相反. 这意味着对于在对称变换 $\phi \rightarrow -\phi$ 下不变的真空, 除开可能的量子力学势垒穿透效应, 这一真空是稳定的. 另一方面, 我们知道当 $|\phi|$ 与 $M$ 相比足够大时, 方程(18.2.49)会失效. 即使这一耦合对于某些 $|\phi| > M$ 会变得比较小, 但它仍然太大以至于对所有的 $|\phi| > M$ 都无法使用微扰论, 对于这样的 $\phi$ , 势可能由重整化标度 $M' > \phi$ 的方程(18.2.49)给出, 这会产生第二个奇点. 因此在这一情况下, 我们无法看到在 $|\phi| \rightarrow \infty$ 时 $V(\phi) \rightarrow -\infty$ .

<sup>\*</sup>通过在方程(18.2.45)中使用方程(18.2.46)进而将 $g$ 表示成 $g_\mu$ , 我们也可以得到 $V(\phi)$ , 但这一结果与方程(18.2.47)不同. 它们的差是 $g$ 的高阶项, 但是如果计算 $V(\phi)$ 所在的 $\phi$ 与 $\mu$ 相差很大, 这时大对数就能够补偿耦合的幂次方, 这一差异就会变得显著. 如果我们从一开始就用 $g_\mu$ 作为耦合参量, 并取 $\mu$ 为 $\phi$ 阶的, 那么这样的大对数就不会产生, 并且只要 $g_\mu$ 依旧是个小量, 近似方程(18.2.47)就是有效的.

<sup>\*\*</sup>为了消除所有的截断相关性,  $\phi$ 应该写成重整化场 $\phi_\mu = N_\mu^\phi \phi$ 的形式, 它给 $V(\phi_\mu)$ 赋予的 $\mu$ 相关性源于重整化常数 $N_\mu^\phi$ 的 $\mu$ 相关性. 这一点在这里被忽略了, 这是因为在相互作用 $\propto \phi^4$ 的标量场论中, 对 $N_\mu^\phi$ 的 $\mu$ 相关性有贡献的最低阶图有两个圈, 这使得我们现在计算的这一阶, 我们可以取 $N_\mu^\phi = 1$ .



类似地, 如果 $g_\phi$ 对于某个 $\phi_0$ 有很小的负值, 那么我们就可以得知 $M < |\phi_0|$ , 所以对于 $|\phi| > |\phi_0|$ ,  $g_\phi$ 会保持一个比较小的值并且方程(18.2.49)是有效的. 在这一情况下, 当 $|\phi| < M$ 时, 对于势的行为我们无法得出任何结论, 但这时我们可以用方程(18.2.49)看到 $|\phi| \rightarrow \infty$ 时 $V(\phi) \rightarrow -\infty$ , 这排除了任何稳定真空的可能性. 由于我们在这里考察的是极限 $|\phi| \rightarrow \infty$ , 因此, 假定 $m \ll |\phi_0|$ , 那么这一结论对于质量 $m > 0$ 的标量场同样是成立的. 这正是我们为什么必须要假定(在任何远大于该标量质量的标度处重整化的) $\phi^4$ 耦合为正的原因.

### 18.3 各种渐进行为

即使在跑动耦合 $g_\mu$ 不够小以至于无法使用微扰论的情况下, 对于量子场论中所遇到的可能的渐进行为类型, 重整化群方法提供了非常有用的洞察. 我们将区分 $g_\mu$ 在 $\mu \rightarrow \infty$ 时的4种不同行为方式, 这4中不同的行为分别对应于函数 $\beta(g)$ 的4种不同形状, 这是理论中只有一个耦合常数的情况. 在下一节, 我们将考察有多个相互独立耦合的理论.

我们先来回忆一下从上一节所考察的两个例子中所获得的 $\beta(g)$ . 其中的一个是相互作用为 $g\phi^4/24$ 的标量场论, 对于比较小的 $g$ ,  $\beta$ -函数是

$$\beta(g) = \frac{3g^2}{16\pi^2} - \frac{18}{3} \frac{g^3}{(16\pi^2)^2} + O(g^4). \quad (18.3.1)$$

另一个是量子电动力学. 取代在这里将 $\beta$ -函数写成(18.2.38)的形式, 为了突出这一理论与标量场论之间的相似性, 定义

$$g \equiv e^2, \quad (18.3.2)$$

并将 $\beta(g_\mu)$ 理解成 $\mu dg_\mu/d\mu$ , 这使得对于比较小的 $g$

$$\begin{aligned} \beta(g) &= 2e \left[ \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} + O(e^7) \right] \\ &= \frac{g^2}{6\pi^2} + \frac{g^3}{32\pi^2} + O(g^4). \end{aligned} \quad (18.3.3)$$

注意到, 在这两种情况中, 物理允许的耦合都落在 $g \geq 0$ 的范围内, 在这个范围内, 对于比较小的 $g$ , 我们有 $\beta(g) \geq 0$ . 在电动力学中, 这是因为拉格朗日量为实会要求 $e$ 是实的. 而在标量场论中, 正如我们在上一节末尾所看到的, 为了有稳定的真空我们必须要有 $g > 0$ . 然而, 我们可以考察相互作用哈密顿量为 $-g\phi^4/24$ 的标量场论, 其中的 $g$ 是一正数. 这或许不是物理的, 但只要我们只专注于微扰论, 那么稳定性稳定就不会困扰我们. 方程(18.2.9)表明, 如果我们重定义 $g \rightarrow -g$ , 那么 $\beta$ -函数的变化就是 $\beta(g) \rightarrow -\beta(-g)$ , 所以之前针对于相互作用 $g\phi^4/24$ 的结果 $\beta(g) = 3g^2/16\pi^2 + O(g^3)$ , 它现在对于相互作用哈密顿密度 $-g\phi^4/24$ 就会给出

$$\beta(g) = -3g^2/16\pi^2 + O(g^3). \quad (18.3.4)$$

它与物理的相关性更大, 我们将在18.7节看到, 对于旋量场不太多非阿贝尔规范场论, 对于某些小的正耦合常数会有 $\beta \leq 0$ . 在下文中, 我们对 $g$ 的定义总使得 $g \geq 0$ , 但对于 $g$ 比较小的 $\beta(g)$ , 我们既会考虑它为正的情况也会考虑它为负的情况.

现在我们将所有的可能性一一列举出来. (参看图18.4.)

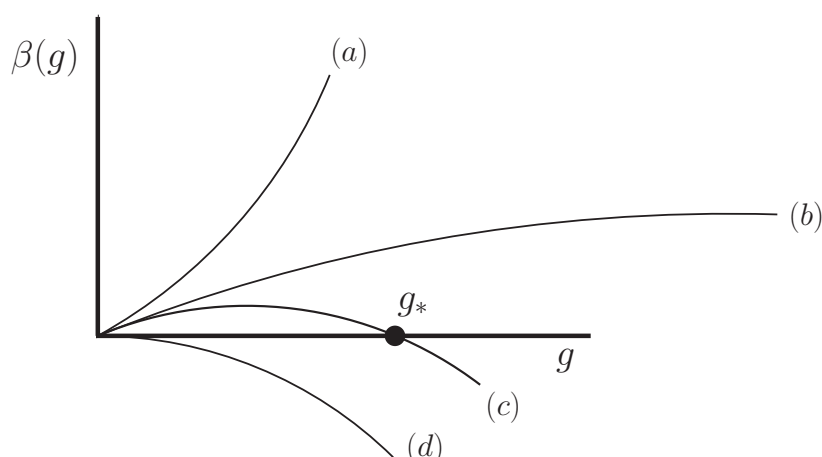


图 18.4  $\beta(g)$  函数四种可能形式的图形表示. 对于  $\beta(g)$  的这些形式, 跑动耦合  $g_\mu$  将会: (a) 在  $\mu$  的有限值处趋于无限大; (b) 随着  $\mu$  的增长而持续增长; (c) 在  $\mu \rightarrow \infty$  时趋于一个有限的极限值  $g_*$ ; (d) 在  $\mu \rightarrow \infty$  时趋于零.

### (a) 有限能量处的奇点

假定对于小的正  $g$ , 我们有  $\beta(g) > 0$  (例如方程(18.3.1)和(18.3.3)的情况), 并且随着  $g$  的增大,  $\beta(g)$  保持正值并且以足够快的速度持续上升, 这使得积分  $\int^\infty dg/\beta(g)$  收敛:

$$\int^\infty \frac{dg}{\beta(g)} < \infty. \quad (18.3.5)$$

$g_\mu$  将会稳定地远离  $g_\mu = 0$ , 并且方程(18.2.10)表明  $g_E$  必须在  $E$  的有限值处变成无限大:

$$E_\infty = \mu \exp \left( \int_{g_\mu}^\infty \frac{dg}{\beta(g)} \right), \quad (18.3.6)$$

其中  $\mu$  是满足  $\mu \gg m$  的任意重整化标度. 我们在上一节看到过这种想象的一个例子; 在标量场论中, 如果我们认为  $\beta$ -函数的最低阶公式  $\beta(g) = 3g^2/16\pi^2$  是对所有  $g$  都成立的精确值, 那么跑动耦合就会在能量(18.2.19)处变成无限大. 类似地, 在旋量量子电动力学中, 如果我们认为最低阶公式  $\beta(g) = g^2/6\pi^2$  (其中  $g \equiv e^2$ ) 是对所有  $g$  都成立的精确值, 那么在  $g_E$  和  $e_E$  都变成无限大的那一点, 能量(18.3.6)是

$$E_\infty = \mu \exp(6\pi^2/g_\mu). \quad (18.3.7)$$

利用方程(18.2.43), 我们可以将其表示成传统的重整化电荷:

$$E_\infty \simeq m_e \exp \left( \frac{6\pi^2}{e_R^2} + \frac{5}{6} + O(e_R^2) \right) = e^{646.6} m_e. \quad (18.3.8)$$

当然, 在到达这一能量之前, 近似  $\beta(g) = g^2/6\pi^2$  就会失效, 所以我们能够断言的只是:  $e_E$  在  $E_\infty$  之下的某个能量  $E$  处会变得非常大以至于微扰论失效.

### (b) 持续增长

现在, 假定在某个理论中  $\beta(g)$  在  $g \rightarrow \infty$  时保持正定, 但又增长(或减小)得非常缓慢以至于  $\int^\infty dg/\beta(g)$  是发散的. 那么耦合常数  $g_E$  就会随着  $E \rightarrow \infty$  持续增长, 但仅当  $E = \infty$  时才会变



成无限大. 更进一步,  $g_E$  渐进行为中的领头项在  $E \rightarrow \infty$  时独立于传统的重整化耦合. 例如, 如果  $\beta(g)$  在  $g$  很大时的行为类似于  $bg^k$ , 并且  $b < 0$  而  $k < 1$ , 那么方程(18.2.9)的解是

$$g_E = \left[ 1 + (1-k)b g_\mu^{k-1} \ln \frac{E}{\mu} \right]^{1/(1-k)} g_\mu. \quad (18.3.9)$$

如果  $g_\mu$  对于某些  $\mu$  (例如  $m$  阶的  $\mu$ ) 是小量, 那么仅当能量与这一  $\mu$  相比是一指数级大数时, 我们才能看到  $g_E$  的增长. 然而, 在极高的高能极限下, 耦合的增长遵循

$$g_E \rightarrow [(1-k)b \ln E]^{1/(1-k)}, \quad (18.3.10)$$

这是一个独立于  $g_\mu$  的极限行为!

### (c) 有限耦合处的不动点

接下来, 假定  $\beta(g)$  对于  $0 < g < g_*$  保持正定, 但在  $g = g_*$  这一点跌落为零, 并且对于  $g_*$  之后的值是负的. 那么方程(18.2.9)表明, 随着  $\mu$  的增长, 若  $g_\mu < g_*$ ,  $g_\mu$  会增长, 若  $g_\mu > g_*$ ,  $g_\mu$  会降低, 但无论是那一种情况,  $g_\mu$  都会在  $\mu \rightarrow \infty$  时趋于  $g_*$ . 如果  $\beta(g)$  是  $g_*$  这一点是单零点, 那么在这一点的邻域内我们有

$$\beta(g) \rightarrow a(g_* - g) \quad \text{对于 } g \rightarrow g_* \quad (18.3.11)$$

其中  $a > 0$ . 那么方程(18.2.9)的解是

$$g_* - g \propto \mu^{-a}. \quad (18.3.12)$$

(前面描述的(b)型行为可以视为不动点  $g_*$  在无限远处的特殊情况.) 另外, 我们可以预期任意算符  $\mathcal{O}$  的  $\gamma(g)$  在  $g_*$  附近的行为是光滑的:

$$\gamma(g) = \gamma(g_*) + c(g_* - g) + O((g_* - g)^2). \quad (18.3.13)$$

(我们在这里扔掉了  $\gamma$  和  $c$  上的指标  $\mathcal{O}$ .) 因此, 在这一算符(可能还有其它算符)的矩阵元中, 我们遇到因子(参看方程(18.2.27))

$$N_E^{-1} \propto \exp \left[ - \int^E \gamma(g_\mu) \frac{d\mu}{\mu} \right] \propto E^{-\gamma(g_*)} [1 + O(E^{-a})]. \quad (18.3.14)$$

因子  $E^{-\gamma(g_*)}$  的乘积可以与方程(18.2.23)中的因子  $E^D$  聚集在一起, 有了这一结果, 整个矩阵元就会趋于

$$M_R \propto E^{D_*}, \quad (18.3.15)$$

其中的量纲  $D_*$  相当于给出现在该矩阵元中的每一算符的实际量纲加上了一个“反常量纲”  $-\gamma(g_*)$ .

### (d) 渐进自由

在迄今为止所讨论的例子中,  $\beta(g)$  对于小的正  $g$  都是正的, 这使得  $g_\mu$  会随着  $\mu$  的增长远离  $g = 0$ . 假定在某个其它理论中,  $\beta(g)$  对于小的正  $g$  是负的. 那么

$$\beta(g) \rightarrow -bg^n, \quad (18.3.16)$$

其中  $b > 0$ . 这里的  $n$  是对  $\beta(g)$  有贡献的最低阶图的阶数, 因而  $n$  总是大于 1 的. (在这里用作例子的理论中,  $n = 2$ .) 这时, 方程(18.2.9)的解是

$$g_E = g_\mu \left[ 1 + b(n-1)g_\mu^{n-1} \ln \frac{E}{\mu} \right]^{-1/(n-1)}. \quad (18.3.17)$$

当  $E \rightarrow \infty$  时, 它有一个独立于  $g_\mu$  的极限

$$g_E \rightarrow [b(n-1) \ln E]^{-1/(n-1)} . \quad (18.3.18)$$

既然这在  $E \rightarrow \infty$  时给出一个为零的  $g_E$ , 只需假定当  $g$  和  $\beta(g)$  有相反的符号时, 对于某个有限的  $E$ ,  $g_E$  处在  $g = 0$  附近的区域内. 我们在这一极限下就可以相信微扰论. 不同算符  $\mathcal{O}$  的方程量纲  $\gamma^{(\mathcal{O})}$  预期会有弱耦合行为(扔掉指标  $\mathcal{O}$ )

$$\gamma(g) \rightarrow c g^m , \quad (18.3.19)$$

其中  $m$  是对这一算符的重整化有贡献的最低阶图的阶数, 而  $c$  是既可以为正又可以为负的实数. 那么由这一算符的重整化给矩阵元引入的因子, 它在高能处的渐进行为是

$$\begin{aligned} N_E^{-1} &\propto \exp \left[ - \int^E \gamma(g_\mu) \frac{d\mu}{\mu} \right] \\ &\rightarrow \exp \left[ - c \int^E [b(n-1) \ln \mu]^{-m/(n-1)} \frac{d\mu}{\mu} \right] \\ &\propto \exp \left[ - \frac{c[b(n-1)]^{-m/(n-1)}}{(1-m/(n-1))} (\ln E)^{1-m/(n-1)} \right] \end{aligned} \quad (18.3.20)$$

有一个例外  $m = n - 1$ , 这时,

$$N_E^{-1} \propto (\ln E)^{-c/b(n-1)} . \quad (18.3.21)$$

在渐进自由的情况中, 我们看到: 若有效量纲决定的是出现在矩阵元渐进行为中的能量幂次, 那么对它就没有修正, 但是这一渐进行为反而被  $\ln E$  的幂函数修正了.

我们可以用相互作用哈密顿量密度为  $-g\phi^4/24$  的标量场论作为展现渐进自由的一个玩具模型, 其中的  $g$  是一个正数. 这时, 方程(18.3.4)所给出的方程(18.3.16)的参量是:

$$b = 3/16\pi^2 , \quad n = 2 , \quad (18.3.22)$$

所以, 方程(18.3.17)在  $E \rightarrow \infty$  时给出

$$g_E \rightarrow \left[ \frac{3 \ln E}{16\pi^2} \right]^{-1} . \quad (18.3.23)$$

另外, 算符  $\phi^2$  在这一理论中的反常量纲由方程(18.2.29)给出

$$\gamma(g) = -\frac{g}{16\pi^2} + O(g^2) . \quad (18.3.24)$$

因此, 方程(18.3.19)这时会有

$$c = -1/16\pi^2 , \quad m = 1 . \quad (18.3.25)$$

根据方程(18.3.21), 矩阵元中的每个  $\phi^2$  算符会贡献因子

$$N_E^{-1} \propto (\ln E)^{1/3} . \quad (18.3.26)$$

标量场  $\phi$  自身在这一理论中有  $\gamma(g) \propto g^2$ , 因而  $m = 2$ , 根据方程(18.3.20), 矩阵元中的每个  $\phi$  算符会贡献因子

$$N_E^{-1} \propto 1 + O\left(\frac{1}{\ln E}\right) . \quad (18.3.27)$$

在 18.7 节研究量子色动力学时, 我们会看到另一个关于渐进自由的更见物理的例子.

在所有  $g_E$  可以扩展至无限大能量处的例子中,  $g_E$  在这一极限下表现出与重整化耦合  $g_R$  相独立的行为. 然而, 这并不必然意味着这一理论不包含自由的无量纲参量. 在所有这些情形中, 为了描述  $g_E$  在  $E \rightarrow \infty$  时是如何趋于它的极限的, 我们需要指定一个量纲为能量的自由参量  $\lambda$ . 对于情况(b), 方程(18.3.10)可以写成

$$g_E \rightarrow [(1-k)b \ln(E/\lambda)]^{1/(1-k)}.$$

对于情况(c), 方程(18.3.12)可以写成

$$g_E \rightarrow g_* \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{E} \right)^b \right].$$

最后, 对于情况(d), 方程(18.3.18)可以写成

$$g_E \rightarrow [b(n-1) \ln(E/\lambda)]^{-1/(n-1)}.$$

一般而言, 这样的理论确实拥有自由的无量纲参量:  $\lambda$  与质量  $m$  的比值. 像  $e_R$  这样的耦合常数, 它在与  $m$  相联系的标度处重整化, 因此可以表示为  $m/\lambda$  的函数. 仅当一个理论中的所有质量都为零时, 我们才能说这一理论不包含自由的无量纲参量.

在这里所描述的四种渐进行为中, (a)类和(b)类显然给出了不物理的行为, 即跑动耦合  $g_E$  在有限能量处(情况(a))或在  $E \rightarrow \infty$  时(情况(b))变成了无穷大. 这本身并不意味着灾难: 我们必须要注意耦合是如何定义的. 例如, 如果  $g_\mu$  随着  $\mu \rightarrow \infty$  从  $\mu = m$  处的有限值  $g_m$  光滑地衰落到零, 我们可以定义一个新耦合  $\tilde{g}_\mu \equiv g_\mu/[1 - g_\mu/g_{2m}]$ , 这样  $\tilde{g}_\mu$  就会在  $\mu = 2m$  处变成无限大, 但是这仅是对该耦合参量进行特殊选择的人工产品. 然而, 无论是在  $\phi^4$  标量场论中还是在量子电动力学中, 传统的重整化耦合  $g_\mu$  在那里都是以  $\mu$  阶能量处的矩阵元值定义的. 特别地,  $g_\mu$  在  $\phi^4$  标量场论中被定义成标量-标量散射在  $s = t = u = \mu^2$  处的不变 Feynman 振幅  $A$ , 而  $A$  在那里被认为是解析的. 另外, 在旋量量子电动力学中,  $g_\mu = e_\mu^2$  给定为

$$e_\mu^2/e_R^2 = Z_3/N_\mu^{(A)^2} = \left[ 1 - \pi(\mu^2) \right]^{-1}. \quad (18.3.28)$$

因此,  $e_\mu^2$  在这一点  $\mu_\infty$  处的无限大会在重整化光子传播子中产生一个极点或者其它奇点, 传播子中奇点处在  $p^2$  的一个正值处, 即  $p^2 = \mu_\infty^2$  处, 在这里传播子被认为是解析的. 因此, 随着  $g_\mu$  定义在这里, (a)中描述的渐进行为也就被物理地排除了.

那么我们的各种量子场论的行为到底是什么样的? 数年前, Landau<sup>4b</sup>认为: 在量子电动力学中, 每一阶微扰论都会遇到且幂次逐渐上升的因子  $\ln(E/M)$  在加起来后在  $E$  的有限值处会给出奇点(所谓的“Landau鬼”). 用现代观点来看, 可以说 Landau 发现了上面的可能性(a), 但是他没有给出任何反对情况(b)和(c)的讨论.

然而, 现今普遍接受的观点是, 不是渐进自由的相互作用量子场论, 例如量子电动力学或者相互作用为  $\phi^4$  的标量场论, 这样的理论在数学上是不自洽的. 在量子电动力学中, 存在一些反对情况(c)的证据, 即反对存在有限的不动点  $e_*$  的证据. 如果第 20 章将要讨论的算符积展开的定性性质被非微扰效应改变了, 或者第 22 章将要讨论的三角反常有了非微扰重整化, 那么这样的不动点才

是可能的.<sup>4c</sup> 但是, 即使情况(c)真的在量子电动力学中被排除了, 在无限大耦合处有不动点的情况(b)仍然是可能的.

相互作用非渐进自由的量子场论不自洽的大部分证据来源于对一个特殊标量场论的研究, 即4维中相互作用为 $\phi^4$ 的标量场在有限时空晶格上量子化的理论. 有一些严格的定理<sup>4d</sup>表明, 除非该理论是渐进自由的, 否则, 在晶格间距趋于零的极限下, 这一理论(该理论的参量对晶格间距的依赖性任意的)的极限不可能是有相互作用的连续理论, 显然这与微扰论中所发现的截然相反. 这一讨论同时看起来也不是决定性的. 如果有一个非渐进自由的自洽连续标量场论, 那么通过积掉一个时空晶格以外的所有点上的标量场, 我们确实有可能构建一个晶格理论. 但这个理论不会是那些定理中所考察的理论. 它将拥有对称性允许的所有相互作用——不仅仅是正比于 $\phi^4$ 的项, 也会有正比于 $\phi^6$ ,  $\phi^3\Box\phi$ 等的项, 而这些项的系数会与截断(晶格间距的倒数)相关, 它们之间的相关性将由12.4节讨论的Wilson重整化群方程给出, 关于这种理论的连续极限还没有人证明过任何事情.

如果在零晶格间距极限下真的不存在有相互作用的连续标量场论, 那么当我们试图解Wilson重整化群方程时必会遇到一些障碍, 在非常小的晶格间距处对于弱的重整化耦合则必然是这样. 这样的理论除非在非常小的间距处被检验过, 否则它会像相互作用标量场论那样出现. 在这一近似连续场论中, 可以推测重整化耦合常数在有限能量处会有奇点, 就像情况(a)一样, 这使得它在小间距处也崩溃掉了. (但对于强耦合, Wilson重整化群方程与Gell-Mann-Low重整化群方程在形式上没有直接联系, 所以裸耦合在有限晶格间距处有一个奇点并不一定暗示了重整化耦合在有限重整化标度处存在奇点.)

这类理论有时被称为是平庸的, 这样称呼它有时是因为, 对于在晶格上量子化的理论, 在对它的裸耦合附加几个假定条件后, 它的连续极限表现为自由场论, 有时是因为, 使得(a)类连续理论在所有能量处都符合物理要求的唯一方法是将重整化群方程(18.2.9)的解取为 $g_\mu = 0$ . 即使一个场论在这两种意义下都是平庸的, 也没有任何理由排除它是物理现象的实际理论的某个部分. 对于晶格间距很小的一个理论, 如果真实世界中在间距变得这样小时存在必须要考虑在内的其它场, 那么解该理论的重整化群方程存在障碍就是不重要的. 类似地, 一个给定的理论即使在某个很大的能量 $E_\infty$ 处有不物理的奇点, 如果这个理论在问题中只是一个更大理论的低能近似, 一个只在能量远低于 $E_\infty$ 时才成立的近似, 那么上述问题就不是一个物理问题. 特别地, 远在我们接近能量(18.3.8)之前, 即量子电动力学的行为预期会变得奇异的能量值处, 那怕是引力也必须要考虑在内, 但没有人知道如何计算这种能量下的强引力效应.

尽管这些论述让人安心, 但为了避免非物理的奇点, 存在这样的可能性: 我们所有分立的量子场论, 例如旋量量子电动力学, 到最后都必须要被整合进一个渐进自由的理论中. 幸运的是, 对于耦合常数的某个有限范围, 一个理论是否渐进自由可以被微扰计算确定: 如果 $\beta(g)$ 在 $g \rightarrow 0_+$ 是负的, 那么对于所有在零和 $\beta(g)$ 的第一个零点之间的重整化耦合常数 $g_\mu$ , 该理论是渐进自由的.

\* \* \*

在这里有一件值得注意的事: 尽管 $\beta(g)$ 的详尽形式依赖于规范并精确依赖于跑动耦合的定义方式, 但是 $\beta(g)$ 幂级数的前两项却与它们无关. 假定我们有两种跑动耦合常数的定义方式 $g_\mu$ 和 $\tilde{g}_\mu$ , 它们有可能采用的重整化标度 $\mu$ 的不同定义, 也有可能采用了不同规范. 既然 $g_\mu$ 和 $\tilde{g}_\mu$ 都是无量纲的且与截断无关, 那么当 $\mu \gg m$ 时,  $\tilde{g}_\mu$ 只可能依赖于 $g_\mu$ :

$$\tilde{g}_\mu = \tilde{g}(g_\mu) .$$

那么我们就有

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}_\mu) \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}_\mu = \frac{d\tilde{g}(g_\mu)}{dg_\mu} \beta(g_\mu)$$

因此

$$\tilde{\beta}(\tilde{g}) = \frac{d\tilde{g}(g)}{dg} \beta(g) . \quad (18.3.29)$$

只要我们坚持非重整化耦合的定义是相同的, 那么所有的重整化耦合在最低阶是相等的, 所以, 将 $\tilde{g}$ 表示成 $g$ 的幂级数, 它可以写成

$$\tilde{g}(g) = g + a g^2 + O(g^3)$$

或者, 等价的

$$g = \tilde{g} - a \tilde{g}^2 + O(\tilde{g}^3) .$$

导数是

$$\frac{d\tilde{g}}{dg} = 1 + 2a g + O(g^2) = 1 + 2a \tilde{g} + O(\tilde{g}^2) .$$

另外, 对于我们在这里已经考虑过的耦合(包括 $g = e^2$ ),  $\beta(g)$ 的幂级数应该采取形式

$$\beta(g) = b g^2 + b' g^3 + O(g^4)$$

或者, 以 $\tilde{g}$ 的形式

$$\beta(\tilde{g}) = b \tilde{g}^2 + (b' - 2ab) \tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4) .$$

那么, 从方程(18.3.29)中我们就有

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\tilde{g}) &= \left[ 1 + 2a \tilde{g} + O(\tilde{g}^2) \right] \left[ b \tilde{g}^2 + (b' - 2ab) \tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4) \right] \\ &= b \tilde{g}^2 + b' \tilde{g}^3 + O(\tilde{g}^4) . \end{aligned} \quad (18.3.30)$$

我们看到, 在 $\tilde{\beta}$ 的 $\tilde{g}$ 幂级数展开中和 $\beta$ 的 $g$ 幂级数展开中, 前两项的系数是相同的. 然而, 对于高阶项却绝不是这种情况. 事实上, 我们总可以选择函数 $\tilde{g}(g)$ 使得 $\tilde{\beta}(\tilde{g})$ 中所有比 $\tilde{g}$ 的三阶项更高的高阶项全部为零, 所以, 通过观察 $\beta(g)$ 微扰展开中的前两项, 我们就可以描述 $\tilde{g}_E$ 在 $E \rightarrow \infty$ 时的渐进行为. 但是它的意义并不大, 这是因为为了确定 $g$ 如何依赖于 $\tilde{g}$ , 我们需要计算至所有阶, 并且如果没有这些信息, 我们就不能用 $\tilde{g}$ 的渐进行为讨论 $g$ 的渐进行为, 或是物理量的渐进行为.

给出方程(18.3.30)的讨论同时表明, 在耦合很小时, 晶格间距远大于粒子质量的Wilson重整化群方程与重整化标度远大于粒子质量的Gell-Mann—Low重整化群方程是相同的, 其中前者是关于裸耦合的方程, 而裸耦合是晶格间距的函数, 后者是关于重整化耦合的方程, 而重整化耦合是重整化标度的函数. 因此, 如果一个连续理论是渐进自由的, 那么在过渡到在晶格上量子化的该理论的连续极限中不存在障碍.

## 18.4 多耦合与质量效应

直到现在, 我们所考察的理论中只有一个无量纲参数 $g$ . 很容易将这一形式体系拓广使其包含多个这样的耦合 $g^\ell$ : 对于每个 $g^\ell$ , 我们都有一个重整化群方程, 这一方程在 $\mu \gg m$ 时的形式为

$$\mu \frac{d}{d\mu} g^\ell(\mu) = \beta^\ell(g(\mu)) , \quad (18.4.1)$$



其中的每个 $\beta^\ell$ 一般会依赖所有的 $g$ . 现在, 在 $\mu \rightarrow \infty$ 时 $g^\ell(\mu)$ 的渐进行为有更多的可能性; 在一给定理论的 $g$ -空间中, 有些轨道会在 $\mu$ 的有限值或无限值处趋于无穷, 有些轨道会趋于不动点, 还有些轨道会趋于被称为“极限环(limit cycles)”的闭合曲线. 为了领略其中的一些性质, 我们来考察 $g^\ell(\mu)$ 在不动点附近的行为.

如果

$$\beta^\ell(g_*) = 0, \quad (18.4.2)$$

那么方程(18.4.1)有不动点解 $g^\ell(\mu) = g_*^\ell$ . 在这一点邻域, 方程(18.4.1)变成

$$\mu \frac{d}{d\mu} [g^\ell(\mu) - g_*^\ell] = \sum_k M_k^\ell [g^k(\mu) - g_*^k], \quad (18.4.3)$$

其中 $M$ 是矩阵

$$M_k^\ell \equiv \left[ \frac{\partial \beta^\ell(g)}{\partial g^k} \right]_{g=g_*}. \quad (18.4.4)$$

方程的解可以用该矩阵的本征矢量展开

$$g^\ell(\mu) = g_*^\ell + \sum_m c_m V_m^\ell \mu^{\lambda_m}, \quad (18.4.5)$$

其中 $V_m$ 是 $M$ 本征值为 $\lambda_m$ 的本征矢量(按任何方便的方式归一化):

$$\sum_k M_k^\ell V_m^k = \lambda_m V_m^\ell, \quad (18.4.6)$$

$c_m$ 则是一组展开系数.\* (本节不使用求和约定.)

方程(18.4.5)表明, 当且仅当所有 $\lambda_m > 0$ 的本征矢的 $c_m = 0$ 时, 耦合常数才会在 $\mu \rightarrow \infty$ 时趋于不动点. (简单起见, 我们在这里假定所有本征值均不为零.) 因此, 若 $M$ 的负本征值个数为 $N_-$ , 那么与不动点相连的轨道一般会处在一个 $N_-$ 维的面上; 与这个面在 $g_*$ 点相切的是本征值为负的本征矢. 不在这个面上的轨道可以靠近不动点, 但最终将远离它, 而这些轨道主要朝向正本征值最大的本征矢的方向上. 当然, 如果所有的本征值是负的, 那么在不动点附加就会有一个小区域, 使得在这个区域内的所有轨道都收敛到这个点上.

在考察趋于不动点的轨道的渐进行为时, 由于本征值 $\lambda_m$ 是非常重要的, 注意到这些本征值实质上独立于耦合的定义是非常有用的. 假使我们引入一组新耦合 $\tilde{g}^\ell$ , 定义为 $g$ 的函数. 它们满足重整化群方程

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{g}^\ell(\mu) = \sum_m \frac{\partial \tilde{g}^\ell(g)}{\partial g^m} \Big|_{g=g(\mu)} \beta^m(g(\mu)) \equiv \tilde{\beta}^\ell(\tilde{g}(\mu)),$$

所以

$$\tilde{\beta}^\ell(\tilde{g}) = \sum_m \frac{\partial \tilde{g}^\ell(g)}{\partial g^m} \beta^m(g). \quad (18.4.7)$$

(即,  $\beta$ 像耦合常数空间中的矢量那样进行变换.) 对其微分, 我们有

$$\sum_m \frac{\partial \tilde{g}^\ell(g)}{\partial \tilde{g}^m} \frac{\partial \tilde{g}^m}{\partial g^k} = \sum_m \frac{\partial^2 \tilde{g}^\ell}{\partial g^m \partial g^k} \beta^m(g) + \sum_m \frac{\partial \tilde{g}^\ell}{\partial g^m} \frac{\partial \beta^m(g)}{\partial g^k}.$$

---

\*我们在这里假定 $V_m$ 构成完备基. 虽然不总是这种情况, 但这是一种普遍情况; 对于有限维矩阵 $M$ , 如果久期方程 $\text{Det}(M - \lambda 1) = 0$ 的所有根都不相同, 那么 $M$ 的本征矢构成完备基. 如果本征矢没有构成完备基, 那么这个矩阵可以视为本征矢构成完备基的矩阵的某些本征值变成简并的极限情况.

在不动点 $g_*$ , 右边第一项为零, 所以这给出矩阵方程

$$\tilde{M} S = S M, \quad (18.4.8)$$

其中

$$\tilde{M}_k^\ell \equiv \left[ \frac{\partial \tilde{\beta}^\ell}{\partial \tilde{g}^k} \right]_{\tilde{g}=\tilde{g}(g_*)}, \quad (18.4.9)$$

$$S_k^\ell \equiv \left[ \frac{\partial \tilde{g}^\ell}{\partial g^k} \right]_{g=g_*}. \quad (18.4.10)$$

只要变换 $g \rightarrow \tilde{g}$ 是非奇异的, 方程(18.4.8)就是一个相似变换, 因此 $M$ 和 $\tilde{M}$ 就会有相同的本征值 $\lambda_m$ .

和可重整理论一样, 重整化群形式理论也可以扩展至不可重整理论. 正如在12.3节中所解释的那样, 就像可重整理论那样, 不可重整理论中的无限大可以通过对耦合常数和合适的重整化被消除掉; 唯一的不同是, 在不可重整理论中, 拉格朗日量必须要包含该理论对称性所允许的所有可能的相互作用. 如果 $g_B^\ell$ 是拉格朗日量中与量纲为 $D_\ell$ 的算符(即, 场与场的时空导数的乘积, 且它的量纲按质量或能量的幂次计是 $D_\ell$ )相乘的未重整耦合常数, 那么 $g_B^\ell$ 的量纲则是 $\Delta_\ell = 4 - D_\ell$ . 这样, 我们可以用一组无量纲的耦合 $g^\ell(\mu)$ 和一个截断 $\Lambda$ 重新表示这个裸耦合, 它们之间关系的一般形式为

$$g_B^\ell \equiv \mu^{\Delta_\ell} \left[ g^\ell(\mu) + \sum_{k,m} b_{km}^\ell g^k(\mu) g^m(\mu) \ln \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right) + O(g(\mu)^3) \right], \quad (18.4.11)$$

其中 $b_{km}^\ell$ 是无量纲的数值系数, 在高阶项中有类似的系数, 对它们的选择要抵消掉物理量的截断相关性. (在某些理论中, 领头项可能是耦合的三线性项甚至还要更高; 这时所需要的修正是显然的.) 从 $g_B$ 与截断无关这个要求中, 我们可以获得重整化群方程, 其中

$$\beta^\ell(g) = -\Delta_\ell g^\ell - \sum_{k,m} b_{km}^\ell g^k g^m + O(g^3). \quad (18.4.12)$$

不可重整的相互作用是那些 $D_\ell > 4$ 或 $\Delta_\ell < 0$ 的相互作用, 所以只有所有的 $g^\ell$ 都保持足够小, 我们可以预期对于不可重整耦合将有正的 $\beta^\ell$ , 因此它们会随着 $\mu$ 增长, 但是当耦合变得足够大以至于微扰论无效时, 没有人知道这时会发生什么.

然而, 正如我们将要在下一节所解释的那样, 即使是有无限多个独立参量的理论, 在矩阵(18.4.6)的负本征值个数 $N_-$ 有限的地方, 它通常会有不动点 $g_*$ , 就好像它在零耦合处. (特别地, 通常的情况是 $N_- = 1$ .) 当 $N_- \neq 0$ 时, 不动点处在一个 $N_-$ 维的曲面上, 这一曲面由 $\mu \rightarrow \infty$ 时与这一不动点相连的轨道组成. 若一个不可重整理论的耦合参量处在这样的临界曲面上, 尽管不一定是渐进自由的, 但由于重整化耦合对于比较大的 $\mu$ 值保持有限, 它被称作渐进安全的.<sup>5</sup> 在这种理论中, 渐进安全的条件将起到联系可重整性原理的作用, 即, 除了有限个自由参量外, 所有参量都被消除了, 而那有限个参量即是临界面的坐标.

在可重整理论中, 通过调整有限个裸耦合的截断相关性, 我们可以使得所有的物理量独立于截断. 这些裸耦合可以表示成相同数目个与 $\mu$ 相关的重整化耦合, 而裸耦合与 $\mu$ 无关这个条件会给出仅与这些重整化耦合相关的重整化群方程. 从一个广泛的观点来看, 假定我们既允许可重整耦合又允许不可重整耦合, 那么对于所有可重整理论和不可重整理论所构成的无限维空间而言, 一



个可重整理论就对应于其中一个有限维的不变曲面; 即, 该曲面上任意一点 $g$ 的 $\beta^\ell(g)$ 与该曲面相切于这一点.

迄今为止, 我们在这一节默认假定 $\mu \gg m$ , 这使得我们可以忽略 $\beta^\ell$ 对 $m/\mu$ 的依赖性. 然而, 这不是必须的; 只要我们愿意, 我们就可以把质量当成另一个耦合参量进行处理.<sup>6</sup> 即, 像之前一样, 所有的重整化耦合都可以用 $\mu$ 阶不在壳动量处的Green函数定义, 只不过这时Green函数中的裸质量取零值. Dirac场 $\psi$ 或标量场 $\phi$ 的无量纲参量可以定义为

$$m_\psi(\mu) \equiv N^{(\bar{\psi}\psi)}(\Lambda/\mu)^{-1} m_{\psi,\text{BARE}}(\Lambda)/\mu, \quad (18.4.13)$$

$$m_\phi^2(\mu) \equiv N^{(\phi^2)}(\Lambda/\mu)^{-1} m_{\phi,\text{BARE}}^2(\Lambda)/\mu^2, \quad (18.4.14)$$

其中 $N^{(\mathcal{O})}(\Lambda/\mu)$ 是无量纲参量, 当其被乘进相应算符 $\mathcal{O}$ 的矩阵元中时, 它会抵消掉这些算符矩阵元中的无限大, 并且在计算它时裸质量也取零(参看18.1节.) 这些新的重整化耦合和重整化质量没有直接的物理含义, 但是真实的物理质量以及所有的物理矩阵元都可以表示成它们. 这些矩阵元所采取的形式为, 在裸质量为零的矩阵元中插入了任意个重整化质量算符 $N^{(\phi^2)}\phi^2$ 和 $N^{(\bar{\psi}\psi)}\bar{\psi}\psi$ , 然后乘以相应的重整化质量参量, 最后求和.

在这一重整化方案中, 各种耦合的 $\beta$ -函数显然与质量无关, 并且质量参量的 $\beta$ -函数正比于这些参量, 其中的系数则依赖于所有耦合; 利用方程(18.2.25), 我们有

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_\psi(\mu) = [-1 - \gamma_{\bar{\psi}\psi}(g_\mu)] m_\psi(\mu), \quad (18.4.15)$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_\phi^2(\mu) = [-2 - \gamma_{\phi^2}(g_\mu)] m_\phi^2(\mu). \quad (18.4.16)$$

例如, 我们在18.2节注意到, 在拉格朗日量为(18.1.2)的标量场论中, 质量算符 $\phi^2$ 在 $m = 0$ 时有反常量纲(18.2.29), 所以这里有

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_\phi^2(\mu) = \left[ -2 + \frac{g_\mu}{16\pi^2} + O(g_\mu^2) \right] m_\phi^2(\mu). \quad (18.4.17)$$

另外, 方程(11.4.3)表明, 对电子传播子的高阶修正相当于将电子质量替换成 $m_e - \Sigma^*(p, m_e)$ , 所以对于算符 $\bar{\psi}_e \psi_e$ 在4-动量为 $p^\mu$ 的单电子态之间的矩阵元而言, 这个修正的效果就是给它们乘以因子

$$F(p) = 1 - \left( \frac{\partial \Sigma^*(p, m_e)}{\partial m_e} \right)_{m_e=0}.$$

因此, 算符 $\bar{\psi}_e \psi_e$ 的重整化常数 $N^{\bar{\psi}\psi}$ 就等于 $F^{-1}(p)$ , 且它所在的 $p$ 点满足 $p^2$ 等于某个重整化标度, 例如 $+\mu^2$ . 根据方程(11.4.8), 到一圈阶, 这是

$$\begin{aligned} N^{(\bar{\psi}\psi)} &= 1 + \left( \frac{\partial \Sigma_{1\text{ loop}}^*(p, m_e)}{\partial m_e} \right)_{m_e=0, p^2=\mu^2} \\ &= 1 - \frac{4\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \ln \left[ 1 + \left( \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) (1-x) \right] \\ &\rightarrow 1 - \frac{e^2}{4\pi^2} \left[ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (18.4.18)$$

其中 $\Lambda$ 是紫外截断,\*\* 并且我们取了 $\Lambda \gg \mu$ 的极限. 因此, 方程(18.2.25)所给出的算符 $\bar{\psi}_e \psi_e$ 的反常量纲是

$$\gamma^{(\bar{\psi}\psi)} = \mu \frac{d}{d\mu} \ln N^{(\bar{\psi}\psi)} = \frac{e_\mu^2}{2\pi^2} + O(e_\mu^4), \quad (18.4.19)$$

所以, 方程(18.4.15)在这里变成

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_e(\mu) = \left[ -1 - \frac{e_\mu^2}{2\pi^2} + O(e_\mu^4) \right] m_e(\mu). \quad (18.4.20)$$

对于一般的规范理论有相同的公式, 只不过这时 $e^2$ 要换成所考察问题中特定种类费米子的 $\sum_\alpha (t_\alpha)^2$ .

与理论的其它重整化参量相比,  $m(\mu)$ 与它们的重要差别显然是裸质量的量纲为正, 所以, 只要耦合保持一个很小的值,  $m(\mu)$ 在量级上总是减少的. 如果 $m(\mu)$ 确实在 $\mu \rightarrow \infty$ 时为零, 那么我们之前假定质量在 $\mu \rightarrow \infty$ 时可以忽略掉就是合理的. 然而, 唯一已知的是, 在渐进自由理论中才是这种情况, 在这种理论中所有耦合在 $\mu \rightarrow \infty$ 时会保持一个很小的值; 在所有其它情况中, 这一假定只是有根据的推测.

## 18.5 临界现象\*

对于某些情况, 我们感兴趣的可能是能量或波数非常低的极限而不是非常高的极限. 我们可以重复18.2节的讨论来研究这一极限, 不过这里我们必须检查 $\mu \rightarrow 0$ 的情况而不是 $\mu \rightarrow \infty$ 的情况. 如果这一理论中没有质量, 例如在手征变换 $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ 下有对称性的量子电动力学, 这个手征变换的对称性会禁止电子的质量, 那么这时这一极限显然是最简单的. 在这一特殊情况下, 对于足够小的耦合, 唯一的可重整耦合 $e A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ 以及所有的不可重整耦合都有 $\beta^\ell > 0$ , 所以, 至少在原点附近的一个有限区域内, 所有的轨道在 $\mu \rightarrow 0$ 时趋于点 $g^\ell = 0$ .

即使对于质量不为零的理论, 若理论中的质量非常小并且我们将这些质量计入理论的耦合参量中, 就像上一节所描述的那样, 那么同样可以对这一理论进行相同的讨论. 方程(18.4.12)中的系数 $\Delta$ 对于质量参量是正的, 所以这一情况下的轨道无法达到 $g = 0$ 这一点, 但是, 如果质量非常小, 它们可能会闭合.

当然, 即便我们可以认为某些自由度质量为零或者非常小, 例如电子场, 但是在真实世界中存在着许多质量不小的自由度. 重整化群的正确运用针对的不是包含所有重自由度的真实理论, 而是“有效理论”, 在这种理论中, 明显出现的仅是无质量或者近无质量的自由度, 以及将重粒子内线的效应包含在内的相互作用. (在第19章, 我们会对有效场论进行进一步讨论.)

在临界现象的研究中, 例如对二阶相变(一种光滑的相变, 没有潜热)点或其附近的长程关联的研究, 这时低波数极限是尤其有趣的. 因为我们感兴趣的是 $\mu \rightarrow 0$ 的极限, 矩阵(18.4.4)的本征矢中重要的是那些本征值 $\lambda < 0$ 的本征矢, 它们被称为相关的. 而本征值 $\lambda = 0$ 和 $\lambda > 0$ 的本征矢分别被称为临界的和不相关的.

假定存在一个非平庸的固定点 $g_*$ , 且它的本征值中只有一个为负, 记为 $\lambda_0$ , 该本征值可能近似对应于一个质量算符. 这样, 与这一固定点相连的轨道集 $g^\ell(\mu)$ 在 $\mu \rightarrow 0$ 时会构成余维数为1的临界

\*\*这里记号与方程(11.4.8)的记号不同, 在那里紫外截断记成了 $\mu$ .

\*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

面; 即, 由耦合上的一个条件所定义的曲面, 该条件是: 当  $g \rightarrow g_*$  时, 切线  $g^\ell - g_*^\ell$  在本征值为负的本征矢方向上没有分量. 当耦合在任一标度上的物理值趋于这一曲面时, 就会有相变. 由于临界面的余维数为1, 通过调整耦合所依赖的任何一个参量, 例如压强或温度, 我们就可以达到相变. 有一大类物质确实拥有这样的相变, 正如上一节已经讨论过的, 这一事实表明对于只有一个本征值为负的矩阵(18.4.4), 遇到不动点是非常普遍的.

确切些, 当温度  $T$  趋于它的临界值  $T_c$  时, 我们期望方程(18.4.5)中增长项的系数  $c_0$  正比于  $T - T_c$ , 这是因为没有什么原因使它奇异或使它趋于零的速度更快. 因此, 对于  $\mu \rightarrow 0$  以及随之的  $T \rightarrow T_c$ , 耦合趋于

$$g^\ell(\mu) \rightarrow (T - T_c)V_0^\ell \mu^{\lambda_0}, \quad (18.5.1)$$

其中  $\lambda_0$  是  $g_*$  处唯一为负的本征值, 而  $V_0^\ell$  是相应的本征矢.\*\* 对波数而非能量应用我们的重整化群讨论, 在一个小的特征波数标度  $\kappa$  处,  $N$ -点函数(有效作用量对场  $\phi$  的  $N$  阶导数, 其中  $\phi$  的量纲是[波数] $^{D_\phi}$ )采取形式<sup>†</sup>

$$\Gamma_N(\kappa) \rightarrow \kappa^{d-N(D_\phi+\gamma_\phi(g_*))} F_N((T - T_c)\kappa^{\lambda_0}), \quad (18.5.2)$$

其中  $\gamma_\phi(g)$  是场  $\phi$  的反常量纲, 而  $d$  是时空维数, 或者是经典统计力学中的空间维数. 将其改写成如下的等价形式将是方便的

$$\Gamma_N(\kappa) \rightarrow (T - T_c)^{-[d-N(D_\phi+\gamma_\phi(g_*))]/\lambda_0} G_N(\kappa(T - T_0)^{1/\lambda_0}). \quad (18.5.3)$$

这说明了一件事: 当  $T$  在  $T_c$  附近时, 随着  $T$  的增长, 关联长度  $\xi$  的增长方式为

$$\xi \propto (T - T_c)^{-\nu}, \quad (18.5.4)$$

其中  $\nu$  习惯上定义成正“临界指数”, 由方程(18.5.3)给定,

$$\nu = -1/\lambda_0. \quad (18.5.5)$$

另外, 由于零场有效作用量  $\Gamma_0$  (或者统计力学中的自由能) 对应没有外线的图, 它必须与  $\kappa$  无关. 由此得出, 在  $T \rightarrow T_c$  时, 方程(18.5.3)在这里变成:

$$\Gamma_0 - F_0 \propto (T - T_c)^{\nu d}, \quad (18.5.6)$$

其中常数  $F_0$  是积掉重自由度给出的有效作用量或自由能. 因此, 在  $T \rightarrow T_c$  时, 自由能中对温度不解析的那部分也由  $\nu$  控制.

在1972年, Wilson和Fisher<sup>7</sup>用  $d - 4$  的幂级数展开证明了单个标量场的理论满足上面的描述, 并且他们还进行了临界指数的近似计算, 例如  $\nu$  的计算. 考察只有一个“轻”自由度的理论, 即单个标量场  $\phi$  的理论, 例如铁磁体中的磁化强度, 并且该理论含有  $\phi \rightarrow -\phi$  下的对称性, 这排除了  $\phi$  的奇次相互作用. 除了“质量”项  $-g_2\phi^2/2$  外, 有效场论的拉格朗日密度还会有相互作用  $-g_4\phi^4/4!$ ,  $-g_6\phi^6/6!$  等. 场  $\phi$  的量纲按波数的幂次计是  $(d - 2)/2$  (这使得  $\int d^d x (\nabla\phi)^2$  是无量纲的), 所以耦合  $g_2, g_4$  等的量纲在  $d$  维中是  $+2, 4 - d, 6 - 2d$ , 等等. 对于三维中零耦合处的不动点,

\*\*对耦合的其它贡献将趋于  $(T - T_0)^0 \mu^{\lambda_1}$ , 其中  $\lambda_1 > 0$ . 因此, 若假定  $T - T_0$  趋于零的速度没有  $\mu^{\lambda_1 - \lambda_0}$  那么快, 方程(18.5.1)在这里就是成立的.

<sup>†</sup>函数  $F_N$  也依赖于无量纲角和波数比值. 注意到, 由于  $\delta^d(\sum \kappa)\Gamma$  必须是无量纲的, 所以  $\Gamma_N$  有一个“天然”的量纲  $d - ND_\phi$ .

存在两个相关耦合,  $g_2$ 和 $g_4$ , 但是非平庸不动点处的相互作用改变了这一结论. 我们在仅 $g_2$ 和 $g_4$ 非零的耦合常数空间中检查这一曲面, 并要求 $g_4$ 取一个很小的值.<sup>††</sup> 方程(18.2.12)对于 $d = 4$ 给出 $\beta(g_4) = 3g_4^2/16\pi^2 + O(g_4^3)$ , 而方程(18.4.12)告诉我们, 对于 $d = 4 - \epsilon$ 维, 我们还必须增加一项 $-\epsilon g_4$ , 所以

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_4(\mu) = -\epsilon g_4(\mu) + \frac{3g_4^2(\mu)}{16\pi^2} + O(g_4^3(\mu)) . \quad (18.5.7)$$

另外, 方程(18.4.17)给出

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_2(\mu) = \left[ -2 + \frac{g_4(\mu)}{16\pi^2} + O(g_4^2(\mu)) \right] g_2(\mu) . \quad (18.5.8)$$

因此, 对于较小的 $\epsilon$ 存在不动点

$$g_{4*} = \frac{16\pi^2\epsilon}{3} , \quad g_{2*} = 0 . \quad (18.5.9)$$

矩阵(18.4.4)处在这一不动点时是对角的, 它的本征值是

$$\lambda_4 = M_4^4 = -\epsilon + \frac{3g_{4*}}{8\pi^2} + O(g_{4*}^2) = +\epsilon + O(\epsilon^2) , \quad (18.5.10)$$

$$\lambda_2 = M_2^2 = -2 + \frac{g_{4*}}{16\pi^2} + O(g_{4*}^2) = -2 + \frac{\epsilon}{3} + O(\epsilon^2) . \quad (18.5.11)$$

从方程(18.5.10)中我们看到, 耦合 $g_4$ 实际上是不相关的, 这使得这里只有一个相关耦合, 标志着二阶相变的出现. 从方程(18.5.11)中我们看到反常指数(18.5.5)是

$$\nu = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2) . \quad (18.5.12)$$

对于物理值 $\epsilon = 1$ , 前两项给出 $\nu \simeq 0.58$ . 三圈计算<sup>8a</sup>给出了到 $\epsilon^3$ 阶的临界指数

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + \frac{7\epsilon^2}{162} - 0.01904\epsilon^3 , \quad (18.5.13)$$

这一结果对于 $\epsilon = 1$ 给出 $\nu = 0.61$ .

在这里所呈现的计算中, 对于所研究的系统, 我们只假定了它有二阶相变, 且在此附近唯一的长波长自由度是一个标量场, 除此之外, 我们并没有假定任何事情. 有很多其它系统也满足这个描述, 例如在铁磁材料和反铁磁材料中自发出现的磁化强度(这里由 $\phi$ 表示), 以及二元流体中气体和液体之间的二阶相变. 因此, 我们会期望所有这些系统有相同的 $\nu$ 值. 这被实验证实了, 实验给出的值<sup>8</sup>是 $\nu = 0.63 \pm 0.04$ , 与三圈结果(18.5.13)符合得相当好, 即便是单圈结果(18.5.12), 也基本吻合. 尽管有些不可思议, 但是1的幂级数展开竟有如此威力是十分幸运的.

更一般地, 若系统在它们的二阶相变附近由一组相同的长波长自由度描述, 则称它们属于同一个普适类(*universality class*). 对于给定普适类中的所有系统, 所有的临界面都是相同的.

<sup>††</sup>在 $3 \leq d \leq 4$ 时, 它们是唯一的可重整耦合, 所以, 对于这样的 $d$ , 这是一个不变曲面. 注意到, 我们并没有将 $(\nabla\phi)^2$ 的系数纳入到耦合中, 这是因为, 按照7.7节所描述的观点看, 这是一个冗余耦合.

## 18.6 最小减除

在11.2节, 我们看到维度正规化为量子电动力学中的辐射修正计算提供了特别方便的方法, 这主要是因为它保护了与规范不变性相联系的守恒律. 由于相同的原因, 维度正规化也为一般规范理论中重整化群的滑动标度提供了另一种非常方便的定义.<sup>9</sup>

在使用维度正规化的计算中, 当时空维度 $d$ 趋于它的物理值时, 紫外发散就会作为物理振幅中的极点出现. (例子可参看(11.2.13).) 为了抵消这些极点, 裸耦合常数 $g_B^\ell(d)$  (包括质量) 自身也必须有这样的极点, 而在 $d \rightarrow 4$ 时物理振幅是正则的这一条件确定了极点的留数. 这些裸耦合一般会有不为零的量纲 $\Delta_\ell(d)$ ,  $\Delta_\ell(d)$ 依赖于时空维度 $d$ , 所以考察无量纲量 $g_B^\ell(d)\mu^{-\Delta_\ell(d)}$ 是比较方便的, 这里的 $\mu$ 是量纲为能量或质量的滑动标度. 这一重新标度的裸耦合可以表示为正比于 $1/(d-4)$ 的 $\nu$ 次方的项的和, 其中 $\nu$ 是正定的, 物理振幅在 $d \rightarrow 4$ 时的极点被抵消这一要求则确定了系数 $b_\nu$ , 还有一些残余项, 它们在 $d=4$ 时关于 $d$ 解析. 这一残余项被认定为无量纲重整化耦合常数 $g^\ell(\mu, d)$ , 所以

$$g_B^\ell(d)\mu^{-\Delta_\ell(d)} = g^\ell(\mu, d) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (d-4)^{-\nu} b_\nu^\ell(g(\mu, d)). \quad (18.6.1)$$

只要物理振幅在 $d=4$ 处的奇点被抵消了, 我们就可以让裸耦合以任意的方式依赖于 $d$ ; 通过要求 $g^\ell(\mu, d)$ 不仅在 $d=4$ 时对 $d$ 解析, 并且对于所有的 $d$ 都解析, 我们可以移除这一不确定性.

为了计算 $g^\ell(\mu, d)$ 所满足的重整化群方程, 首先做方程(18.6.1)对 $\mu$ 的导数:

$$-\Delta_\ell(d) \left[ g^\ell + \sum_{\nu=1}^{\infty} (d-4)^{-\nu} b_\nu^\ell(g) \right] = \beta^\ell(g, d) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_m b_{\nu m}^\ell(g) \beta^m(g, d) (d-4)^{-\nu} \quad (18.6.2)$$

其中

$$b_{\nu m}^\ell(g) \equiv \frac{\partial}{\partial g^m} b_\nu^\ell(g) \quad (18.6.3)$$

并且, 像之前一样,

$$\mu \frac{d}{d\mu} g^\ell(\mu, d) = \beta^\ell(g(\mu, d), d). \quad (18.6.4)$$

注意到 $\beta^\ell$ 是所有 $g^m(\mu, d)$ 以及 $d$ 的函数, 但由于重新标度的质量也被纳入到无量纲的耦合参量中, 这样除了 $\mu$ 以外就没有别的带有量纲的参量, 所以 $\beta^\ell$ 不能仅靠自身依赖于 $\mu$ .

我们已经看到, 量纲 $\Delta_\ell(d)$ 总是 $d$ 的线性函数, 所以我们现在将其写成

$$\Delta_\ell(d) = \Delta_\ell + \rho_\ell(d-4). \quad (18.6.5)$$

我们将方程(18.6.2)的左边重写成

$$-\rho_\ell g^\ell(d-4) - \left[ \Delta_\ell g^\ell + b_1^\ell(g) \rho_\ell \right] - \sum_{\nu=1}^{\infty} (d-4)^{-\nu} \left[ \rho_\ell b_{\nu+1}^\ell(g) + \Delta_\ell b_\nu^\ell(g) \right].$$

这时, 解析部分中 $d$ 的最高幂次是一阶的, 所以对于方程(18.6.2)的右边也必须同样如此, 因此 $\beta(g, d)$ 关于 $d$ 必须是线性的:

$$\beta^\ell(g, d) = \beta^\ell(g) + (d-4)\alpha^\ell(g). \quad (18.6.6)$$

那么, 方程(18.6.2)两边零阶项和一阶项相等就给出

$$\alpha^\ell(g) = -\rho_\ell g^\ell \quad (18.6.7)$$

以及更加重要的

$$\beta^\ell(g) = -\Delta_\ell g^\ell - b_1^\ell(g)\rho_\ell + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_m b_{1m}^\ell(g)\rho_m g^m. \quad (18.6.8)$$

值得注意的是 $\beta$ 函数只依赖裸耦合中单极点的系数. 事实上, 这些系数也决定了所有高阶极点的系数; 将方程(18.6.2)两边的极点项等同起来就给出了递推关系

$$\rho_\ell b_{\nu+1}^\ell(g) - \sum_m \rho_m g^m b_{\nu+1m}^\ell(g) = -\Delta_\ell b_\nu^\ell(g) - \sum_m b_{\nu m}^\ell(g)\beta^m(g). \quad (18.6.9)$$

例如, 为了使 $\int d^d x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ 是无量纲的, 任意规范场 $A^\mu$ 必须有量纲(按质量幂次计) $(d-2)/2$ , 而既然 $g_B A^\mu$ 必须要有与 $\partial/\partial x^\mu$ 相同的量纲, 那么 $g_B$ 必须要有量纲 $(4-d)/2$ , 这使得对于规范耦合有 $\Delta = 0$ 和 $\rho = -1/2$ . 那么, 对于仅有一个耦合常数的规范理论, 方程(18.6.8)给出:

$$\beta(g) = \frac{1}{2}[b_1(g) - g b_1'(g)]. \quad (18.6.10)$$

特别地, 方程(11.2.20)表明, 在量子电动力学中, 到一圈阶, 裸电荷在 $d \rightarrow 4$ 处有极点, 确切些

$$e_B = Z_3^{-1/2} e \rightarrow e - \frac{e^3}{12\pi^2} \frac{1}{d-4}. \quad (18.6.11)$$

那么, 在方程(18.6.10)中令 $b_1(e) = -e^3/12\pi^2$ 就会给出

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}, \quad (18.6.12)$$

这与之前的结果(18.2.37)一致.

这一节所引入的耦合常数 $g^\ell(\mu)$ 被称作是通过最小剪除定义的. 这与另一个更加方便的方案稍有不同. 单极点 $(d-4)^{-1}$ 一般来自于函数 $(4\pi)^{d/2-2}\Gamma(2-d/2)$ (就像方程(11.2.13)中那样), 它对于 $d \rightarrow 4$ 有极限

$$(4\pi)^{2-d/2}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{2-d/2} - \gamma + \ln 4\pi, \quad (18.6.13)$$

其中 $\gamma$ 是欧拉常数,  $\gamma = 0.5772157$ .<sup>e</sup> 因此, 在方程(18.6.1)中的所有地方做如下的替换将是方便的:

$$\frac{1}{d-4} \rightarrow \frac{1}{d-4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln 4\pi. \quad (18.6.14)$$

有了这一处理, 就称这一耦合常数是通过修正最小减除定义的.

通过最小减除所定义的耦合的显著特征之一是, 既然在任何计算中连一个紫外截断的因子都没有出现过, 圈图在 $d=4$ 处所拥有的极点仅对应于对数紫外发散, 而非线性发散, 二次发散等. 因

<sup>e</sup>欧拉常数的定义是:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

到现在为止还无法证明它是有理数还是无理数. ———译者注



此, 要使留数函数 $b_1^\ell(g)$ 能够包含阶为 $g^a g^b g^c \dots$ 的项,  $g_B^\ell$ 在 $d = 4$ 处的量纲要等于耦合 $g_B^a, g_B^b, g_B^c$ 等的总量纲:

$$\Delta_\ell = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c + \dots, \quad (18.6.15)$$

并且, 从(18.6.8)可以得出这对于 $\beta^\ell(g)$ 同样成立. 特别地, 在没有超重整耦合的理论中(像含有无质量旋量且不含标量的规范理论, 例如电子质量为零的量子电动力学), 所有耦合都有 $\Delta_\ell \leq 0$ , 所以出现任何不可重整相互作用都不会影响可重整耦合( $\Delta_\ell = 0$ )的重整化群方程.<sup>5</sup> 另外, 在这样的理论中, 不可重整耦合的 $\beta$ -函数是不可重整耦合的有限阶多项式, 而每个多项式中的每个系数都由可重整耦合的一个无穷幂级数给定. 例如, 在光子和无质量电子的理论中(假定了 $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ 以及P下的不变性), 不存在量纲为+5的不可重整相互作用, 但有几个量纲为+6的相互作用(四费米子相互作用以及纯光子相互作用 $F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}$ ), 这些相互作用有量纲为-2的耦合常数 $f_i$ .  $f_i$ 的 $\beta$ -函数形式为 $\sum_j b_{ij}(e) f_j$ , 而其中的系数 $b_{ij}(e)$ 由 $e$ 的幂级数给定.

## 18.7 量子色动力学

量子色动力学是强相互作用的现代理论. 它是基于规范群 $SU(3)$ 的非阿贝尔规范理论. 除了规范场外, 量子色动力学还包含自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的场, 这些粒子被称作夸克. 有六种或者说六“味”夸克,  $u$ 夸克,  $c$ 夸克和 $t$ 夸克的电荷为 $2e/3$ , 而 $d$ 夸克,  $s$ 夸克和 $b$ 夸克的电荷为 $-e/3$ . 每一味夸克都拥有三种“颜色”, 而这些色构成了 $SU(3)$ 规范群的定义表示 $\mathbf{3}$ .<sup>\*</sup> 像质子和中子这样的重子可以近似的看成三个夸克的色中性束缚态, 它们关于夸克的色全反对称, 而像 $\rho$ 介子这样的介子, 它的行为可以近似为夸克和反夸克的色中性束缚态.<sup>11</sup>

若夸克质量与感兴趣的能量区域相比可以忽略, 那么在这一近似下, 方程(17.5.44)的逆方程表明, 一般规范理论中的裸耦合会在时空维度 $d \rightarrow 4$ 时有一个极点, 而其留数给定为

$$g_B \rightarrow \left[ \frac{g^3}{4\pi^2} \left( \frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^5) \right] \frac{1}{d-4},$$

其中 $C_1$ 和 $C_2$ 由方程(17.5.33)和(17.5.34)定义. 而按照上一节的记法,

$$b_1(g) = \frac{g^3}{4\pi^2} \left( \frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^5). \quad (18.7.1)$$

在方程(18.6.10)中使用这一结果给出

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2} \left( \frac{11}{12} C_1 - \frac{1}{3} C_2 \right) + O(g^5). \quad (18.7.2)$$

对于 $SU(3)$ 理论, 若它有 $n_f$ 个无质量夸克, 且这些夸克处在 $SU(3)$ 的定义表示 $\mathbf{3}$ 下, 那么方程(17.5.35)就会给出

$$C_1 = 3, \quad C_2 = n_f/2. \quad (18.7.3)$$

由于我们在这里将夸克取成了无质量的粒子, 这一理论可能仅适用于有效场论, 而有效场论是通过积掉所有比特征能量 $E$ 重的夸克获得的, 这使得 $n_f$ 就是质量远小于 $E$ 的夸克味的数目. 在这一理

<sup>\*</sup>在量子色动力学的最终形式确定下来之前, 就有数位学者推测出每一味夸克或许有三种,<sup>10</sup> 这一方面是为了解释像 $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ 这样的衰变速率, 一方面是为了引入额外的自由度, 使得可以解释重子中费米型夸克的波函数在自旋, 坐标和味空间中为什么能够是对称的.



解下, 方程(18.7.2)和(18.7.3)给出

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2} \left( \frac{11}{4} - \frac{1}{6}n_f \right) + O(g^5). \quad (18.7.4)$$

我们看到, 只要质量小于感兴趣的能量标度的夸克不超过16味, 那么这一理论就是渐进自由的. 由于实际中任何质量的夸克只有六味, 基于规范群 $SU(3)$ 的强相互作用理论就是渐进自由的.

这种非阿贝尔规范理论中的渐进自由是由Gross, Wilczek<sup>12</sup>和Politzer<sup>13</sup>在1973年发现的, 这使得理论物理学家相信这一理论就是正确的强相互作用理论. 它们的计算立即就解释了1968年在SLAC上一个著名且令人迷惑的实验结果,<sup>14</sup> 深度非弹性的电子-核子散射, 这表明强相互作用在 高能处反而表现的更弱.<sup>\*\*</sup> (这一实验将在20.6节进行进一步讨论.) 然而, 在Yang-Mills理论中发现渐进自由的历史意义不仅在于它解释了旧有的实验结果; 至少是在高能情况下, 它还第一次展示了对强相互作用做可信赖微扰计算的前景.

不久之后就发现渐进自由还有另一个重要的作用. 起初, 在发现渐进自由之后, 广泛假定在强相互作用的真实Yang-Mills理论中规范玻色子非常重, 这用来解释为什么在此之前一直没有发现这些强相互作用玻色子. 跟随弱相互作用和电磁相互作用的先例(将在第21章进行讨论), 大家认为规范玻色子的质量应该来自于色 $SU(3)$ 规范群的自发破缺, 由该群非平庸表示下标量场的真空期望值引发. 但这些强相互作用的标量将会给 $\beta(g)$ 贡献正项, 这会毁掉渐进自由. 更糟的是, 若一个理论含有强相互作用的标量场, 包含弱相互作用的辐射修正将会对各种对称性造成极大的破坏, 比如荷共轭不变性和味守恒, 但是, 正如我们将看到的, 如果没有标量, 它们就不会被破坏.<sup>17</sup> 由此认为应该扔掉强相互作用标量, 并接受这样做所带来的结果,  $SU(3)$ 规范玻色子, 即胶子, 没有质量.<sup>18</sup> 强耦合常数在高能或短程处衰减暗示着在低能或长程时增加, 由此可以认为这或许解释了为什么无质量胶子和夸克为什么没有被观测到. 根据这一假设, 只有像重子和介子这样的色中性粒子才能独立出现.<sup>19</sup> 不幸的是, 这依旧是个假设而不是定理, 但是, 二十年之后, 对于它是正确这一点似乎已没有疑问.

即使夸克无法实现为自由粒子, 它们在某种程度上可以视为在 高能碰撞过程中产生的喷注. 例如, 在电子-正电子湮灭的很多事件中, 末态由两个狭窄的平行强子喷注组成, 它们所成的分布为 $1 + \sin^2 \theta$ , 其中 $\theta$ 是(质心系下)对撞轻子动量与喷注方向所呈的角度, 这正是电子-正电子湮灭到夸克-反夸克末态的树图所预期的.<sup>20</sup> 可利用13.4节中对红外发散的一般分析理解<sup>21</sup> 这些. 在极高能下, 假定物理过程“红外安全”的, 即当所有质量趋于零时不会红外发散, 那么我们将预期物理过程的速率有最低阶微扰论给出. 在我们对所有的强子末态求和后, 电子-正电子湮灭到强子的总速率是红外安全的. (这里我们忽视了高阶电磁效应.) 因此我们可以使用微扰论, 而微扰论会立即告诉我们这一速率与 $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ 的速率比值 $R$ 是 $R = 3 \sum_q Q_q^2$ , 其中的求和取遍所有的夸克味, 而 $Q_q$ 是这些夸克以 $e$ 为单位的电荷量, 因子3是色的数目. (例如, 在 $m_b \approx 4.5\text{GeV}$ 到 $m_t \approx 180\text{GeV}$ 这个宽广的能量范围内,  $R \simeq 3(2/3)^2 + 3(-1/3)^2 = 11/3$ .) 另一方面, 电子-正电子湮灭成确定的夸克和胶子态不是红外安全的, 因此它的速率完全无法用微扰论计算; 事实上, 它是零. 在这个极端之间是电子-正电子湮灭到数量确定的喷注的速率, 每个喷注

<sup>\*\*</sup> Zee,<sup>15</sup> 可能还有一些理论家, 在此之前就知道若有一个理论它的 $\beta$ -函数对于小的正定耦合为负, 那么这一实验结果就可以在这一理论下被理解, 但除了非阿贝尔规范理论以外, 在其它所有可重整理论中对 $\beta(g)$ 的计算均给出 $\beta(g) > 0$ . 另一方面, 't Hooft在1972年就发展出了在Yang-Mills理论中计算 $\beta$ -函数的技巧, 并且同年在马赛关于规范理论的一个会议上,<sup>16</sup> 他宣称 $\beta(g) < 0$ , 但他在等待他的文章被发表并解出它的隐含意义, 在此期间, 他忙于其它事, 所以他的结果并没有引起太多的注意.

携带确定的总动量以及电荷, 在喷注之外还有一些未观测到的强子, 它们带有有限的总能量. 正如13.4节所讨论的, 这一速率时红外安全的. 因此在高能时, 将喷注(在微扰论的树阶)等同为出射的夸克, 反夸克和胶子, 就可以用微扰论的树阶近似进行计算. 我们甚至可以计算3-喷注事件的速率, 在产生这一事件的树图中, 胶子从出射的夸克或反夸克中发射, 并用这一结果与实验结果相比较进而测量 $\alpha_s(\mu)$ 的值.<sup>22</sup> 但是对于喷注内的动量分布, 由于这种微分速率不是红外安全的, 我们无法用微扰论进行预测. 类似结果适用于深度非弹轻子-强子碰撞中喷注的产生, 这将在20.6节进行讨论, 但是在初态中出现强子使得分析更加复杂.

沿用12.5节中的论证, 当没有标量场时, 最一般的可重整量子色动力学拉格朗日量可以变成如下的形式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha}^{\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu} - \sum_n \bar{\psi}_n[\not{D} - igA_{\alpha}t_{\alpha} + m_n]\psi_n, \quad (18.7.5)$$

其中 $A_{\alpha}^{\mu}$ 是色规范矢势;  $F_{\alpha}^{\mu\nu}$ 是色规范协变场强张量;  $g$ 是强耦合常数;  $t_{\alpha}$ 是色 $SU(3)$ 在3表示下的一组完备生成元,  $t_{\alpha}$ 的归一化使得 $\text{Tr}(t_{\alpha}t_{\beta}) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ ; 而下标 $n$ 标记的是夸克味, 夸克色指标隐去不写. 正如在12.5节针对电动力学所发现的, 这一拉格朗日量有一个重要的偶然对称性: 它有空间宇称守恒<sup>†</sup>, 荷共轭宇称守恒, 以及每一味的夸克数(夸克的数目减去相应的反夸克的数目), 其中包括历史悠久的“奇异”量子数, 即对“ $s$ ”夸克的计数. 因此量子色动力学立即解释了这样的奇怪事实: 强相互作用表现出的对称性中有几个不是全部相互作用的对称性. 同时, 正如前面所提及的, 这一讨论也解释清楚了为什么在这一理论中弱相互作用没有造成对宇称, 荷共轭, 奇异数等的大范围破坏. 既然夸克和胶子之间所有可重整的相互作用都保留这些对称性, 当能量 $E$ 远小于携带弱作用的粒子的质量 $m_W$ 时, 弄够破坏这些对称性的只有有效场论中的不可重整相互作用, 例如 $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ 相互作用, 而正如12.3节所讨论的, 这些相互作用将会被 $m_W$ 以及弱相互作用耦合常数的负幂次方压低.

当然, 在某个远大于表征量子色动力学的标度 $\Lambda$ 的能量标度 $\Lambda'$ 处, 夸克和胶子完全有可能呈现出某种新的强相互作用. 例如, 像22.5节将要讨论的那样, 夸克可能是更加基本的费米子的束缚态, 与其相互作用的规范场的渐进自由耦合在 $\Lambda'$ 阶能量处变得很强, 使这些费米子陷入到夸克中. 在这种情况下, 夸克的有效拉格朗日密度在能量 $E \ll \Lambda'$ 将会包含不可重整的相互作用, 例如 $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ , 这样的相互作用仅被 $E/\Lambda'$ 的次方压低. 这些相互作用不仅会在对宇称或夸克味守恒在普通能量处的小破坏中体现出来, 当能量接近于 $\Lambda'$ 时, 它们还会破坏<sup>23</sup>量子色动力学的定量预测.

现在我们来考察量子色动力学耦合常数更加细致的行为. 在最低阶, 重整化群方程由(18.7.4)给定

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = -\frac{g^3(\mu)}{4\pi^2} \left( \frac{11}{4} - \frac{1}{6}n_f \right). \quad (18.7.6)$$

它的解是

$$\alpha_s(\mu) \equiv \frac{g^2(\mu)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln(\mu^2/\Lambda^2)}, \quad (18.7.7)$$

其中 $\Lambda$ 是积分常数. 这一公式呈现出了无质量粒子(或者, 对于夸克这样的近无质量粒子)理论的特征: 在这样的理论中, 拉格朗日量中的某个无量纲耦合会被替换成一个自由的有量纲参量. 方程(18.7.7)中不包含自由的无量纲参量, 但它却包含一个带有质量量纲的自由参量, 积分常数 $\Lambda$ .

<sup>†</sup> 尽管在1973年还不知道, 但是非微扰效应可以破坏量子色动力学中的宇称, 我们将在23.6节看到这一点. 已经提出了几种避免宇称破坏的方法, 但是还不清楚那一个是正确的.

这些计算已经做到了三圈阶. 到这一阶的重整化群方程是<sup>24</sup>

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = -\beta_0 \frac{g^3(\mu)}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g^5(\mu)}{128\pi^4} - \beta_2 \frac{g^7(\mu)}{8192\pi^6}, \quad (18.7.8)$$

其中 $\beta_n$ 是数值系数:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \quad (18.7.9)$$

$$\beta_1 = 51 - \frac{19}{3}n_f, \quad (18.7.10)$$

$$\beta_2 = 2857 - \frac{5033}{9}n_f - \frac{325}{27}n_f^2. \quad (18.7.11)$$

解是

$$\begin{aligned} \alpha_s(\mu) &\equiv \frac{g^2(\mu)}{4\pi} \\ &= \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \left[ 1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln[\ln(\mu^2/\Lambda^2)]}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\beta_1^2}{\beta_0^4 \ln^2(\mu^2/\Lambda^2)} \left( \left( \ln[\ln(\mu^2/\Lambda^2)] - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{8\beta_2\beta_0}{\beta_1^2} - \frac{5}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (18.7.12)$$

前面结果中的 $n_f$ 是质量小于所感兴趣能量的夸克味的数目. 在两个连续夸克质量之间的能量范围内,  $n_f$ 和 $\Lambda$ 是相同的, 但对于每一个这样的能量范围, 我们有不同的 $n_f$ 值和 $\Lambda$ 值, 我们要对其选择使得 $g(\mu)$ 在每个夸克质量处连续. 特别地, 关于电子的深度非弹散射实验, 它一般所涉及的能量在前4个夸克味( $u, d, s$ 和 $c$ )之上, 所以这里我们必须取 $n_f = 4$ . 另一方面, 在电子-正电子对撞机上的实验, 例如在PEP, PETRA, TRISTRAN和LEP<sup>f</sup>上的实验, 它们所处的能量在第五个( $b$ )夸克质量之上, 所以在这些实验中我们必须取 $n_f = 5$ . 但是, 通过在 $b$ 夸克质量处匹配重整化群方程的解, 我们可以用 $n_f = 4$ 的结果表示 $n_f = 5$ 的结果. 以这种方式, 我们会发现<sup>25</sup>(在计算 $\beta_2$ 时使用修正最小减除方案)外推至 $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$ 的强耦合是 $\alpha_s(m_Z) \equiv g_s^2(m_Z)/4\pi = 0.118 \pm 0.006$ , 对于 $m_b \ll \mu \ll m_t$ 能量 $\mu$ , 所对应的 $\Lambda \approx 250 \text{ MeV}$ , 其中 $n_f = 5$ . 对于 $e^+e^-$ 湮灭在 $Z$ 共振上的强子产生, 一个更新的研究<sup>26</sup>给出了直接测量值 $\alpha_s(m_Z) = 0.1200 \pm 0.0025$ , 它还有理论上的不确定度 $\pm 0.0078$ , 对应 $\Lambda = 253_{-96}^{+130} \text{ MeV}$ .

## 18.8 改良微扰论\*

Gell-Mann和Low的开拓性文章<sup>1</sup>在很大程度上指向了“改良”微扰论的问题——即, 使用重整化群的思想, 用微扰论在某一给定阶的结果来研究它的下一阶. 为了阐明这一点, 我们先回到Gell-Mann和Low所研究的特殊情况: 量子电动力学中的真空极化.

\*本节或多或少的处在本书的发展主线之外, 可以在第一次阅读时跳过.

<sup>f</sup>PEP是指正电子-电子计划(Positron-Electron Project), 位于SLAC国家实验室; PETRA是正负电子串列环形加速器(Positron-Electron Tandem Ring Accelerator), 位于德国汉堡的DESY; TRISTRAN位于日本的KEK. ——译者注.

回忆, 按照方程(18.2.36), 将滑动标度 $\mu$ 处的重整化电荷 $e_\mu$ 表示成裸电荷 $e_B$ 后, 它的形式为

$$e_\mu = N_\mu^{(A)-1} e_B, \quad (18.8.1)$$

其中 $N_\mu^{(A)}$ 是一常数, 当其乘进未重整的电磁场中, 它会给出在标度 $\mu$ 处重整化的场. (参看方程(18.2.21).) 因此我们可以定义重整化(因而也是截断无关的)全光子传播子 $\Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu)$ , 以裸场的全传播子 $\Delta'_{B\rho\sigma}(q, e_B)$ 的形式, 这一传播子可以表示成

$$\Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu) = N_\mu^{(A)2} \Delta'_{B\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu) \quad (18.8.2)$$

在这种方式下, 函数 $e_\mu^2 \Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu)$ 由于等于 $e_B^2 \Delta'_{B\rho\sigma}(q, e_B)$ 而与 $\mu$ 无关, 又因为 $e_\mu$ 和 $\Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu)$ 都是重整化量, 所以它也与截断无关. (在这里我们不明确地写出截断相关性.) 但是Lorentz不变性和量纲分析告诉我们, 这一函数必须采取如下的形式:

$$e_\mu^2 \Delta'_{\rho\sigma}(q, \mu, e_\mu) = \frac{\eta_{\rho\sigma} d(q^2/\mu^2, e_\mu)}{q^2} + q_\rho q_\sigma \text{项}. \quad (18.8.3)$$

既然方程(18.8.3)与 $\mu$ 无关, 我们在这里可以令 $\mu = \sqrt{q^2} \equiv q$ , 这使得

$$d(q^2/\mu^2, e_\mu) = d(1, e_q). \quad (18.8.4)$$

现在来看看, 关于 $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ 的微扰级数结构, 这告诉了我们什么.  $e$ 的 $\beta$ -函数有展开:

$$\beta(e) = b_1 e^3 + b_2 e^5 + b_3 e^7 + \dots. \quad (18.8.5)$$

那么 $e_\mu$ 的重整化群方程就有级数解

$$\begin{aligned} e_q^2 = e_\mu^2 - b_1 e_\mu^4 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - b_2 e_\mu^6 \ln \frac{q^2}{\mu^2} \\ - \left( \frac{b_1 b_2}{2} \ln^2 \frac{q^2}{\mu^2} + b_3 \ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) e_\mu^8 + \dots. \end{aligned} \quad (18.8.6)$$

如果我们也对 $d$ 做展开:

$$d(1, e) = e^2 + d_1 e^4 + d_2 e^6 + d_3 e^8 + \dots \quad (18.8.7)$$

那么

$$\begin{aligned} d(q^2/\mu^2, e_\mu) = d(1, e_q) = e_\mu^2 - \left( b_1 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_1 \right) e_\mu^4 - \left( b_2 \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_2 \right) e_\mu^6 \\ - \left( \frac{1}{2} b_1 b_2 \ln^2 \frac{q^2}{\mu^2} + (b_3 - b_1 d_2) \ln \frac{q^2}{\mu^2} - d_3 \right) e_\mu^8 + \dots. \end{aligned} \quad (18.8.8)$$

注意到, 在 $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ 的每一阶中,  $\ln(q^2/\mu^2)$ 的领头项幂次分别是0, 1, 1, 2, 3,  $\dots$ . 另外, 如果我们计算 $d(q^2/\mu^2, e_\mu)$ 至 $e_\mu^6$ 阶并以此决定 $b_1$ 和 $b_2$ , 我们可以立即写出 $e_\mu^8$ 阶中领头对数的系数 $-\frac{1}{2}b_1 b_2$ . 如果不使用重整化群方法, 这里面的那一个都没有那么容易推断出来.

## 习题

1. 考察含有一个标量场的  $SU(N)$  规范理论, 且该标量场处在  $SU(N)$  的定义表示下. 将标量圈的贡献包含在内, 计算到规范耦合常数的  $\beta$ -函数至一圈阶. (建议: 使用背景场规范, 取常数背景场.)
2. 假定一个有正定耦合常数  $g$  的理论的  $\beta$ -函数  $\beta(g)$  在  $g = g_*$  处有一个单零点, 即在  $g_*$  附近,  $\beta(g) \rightarrow a(g_* - g)$ , 其中  $a > 0$ . 对因子  $N_E^{O-1}$  中  $\propto E\gamma^{O(g_*)}$  领头项的修正而言, 它的渐进行为是什么? 其中  $N_E^{O-1}$  是将算符  $\mathcal{O}$  包含在真空期望值中后所附带的因子.
3. 若在一个理论中有  $\beta(g) = bg^2 + b'g^3 + b''g^4 + \dots$ , 证明: 通过对耦合常数的重定义, 我们完全可以把系数  $b''$  变成我们想要的任何值.
4. 若反应所处的能量为 100 GeV, 将质量低于 100 GeV 的所有已知的带电夸克和轻子考虑在内, 计算用于研究反应的有效电荷.
5. 计算量子电动力学中的电子传播子在 4-动量很大时的渐进行为. (你可以使用其它地方计算出的  $Z_2$  的单圈值, 例如 11.4 节中算出的  $Z_2$  值.)
6. 对于标量场  $\phi_n(x)$  的  $O(N)$ -不变理论, 其中  $n = 1, \dots, N$ ,  $\phi_n(x)$  属于  $O(N)$  的矢量表示, 且理论有相互作用  $\frac{1}{4}g(\sum_n \phi_n^2)^2$ , 计算  $\epsilon = 4 - d$  展开中到一阶的反常指数  $\nu$ .

## 参考文献

- [1] M. Gell-Mann and F. E. Low, *phys. Rev.* **95**, 1300 (1954). 更早的时候, E. C. G. Stueckelberg 和 A. Peterman 也略微讨论了选择重整化耦合常数定义的自由度, *Helv. Phys. Acta* **26**, 499 (1953) (他们同时引入了“重整化群”这个灾难般的词汇), 但并没有说明它与计算极高能物理过程或极低能物理过程之间的相关性. 在 Gell-man 和 Low 的工作之后, N. N. Bogoliubov 和 D. V. Shirkov 进一步发展了重整化群方法, *Introduction to the Theory of Quantized fields* (Interscience, New York, 1959): Chapter VIII, 以及那里引用的文献. 粒子物理中对重整化群方法的二次热潮是由如下几人引起的, C. G. Callan, *Phys. Rev.* **D2**, 1541 (1970); K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.* **18**, 227 (1970); C. G. Callan, S. Coleman, and R. Jackiw, *Ann. of Phys.* (New York), **59**, 42 (1970).
- [2] K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **B4**, 3174, 3184 (1971); *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975).
- [3] J. C. Collins, *Phys. Rev.* **D10**, 1213 (1974).
- [3a] R. Jost and J. M. Luttinger, *Helv. Phys. Acta* **23**, 201 (1950).
- [4] 这个数值引用于 1994 年的 Particle Data Group. G. Altarelli 汇总了更新的计算, CERN preprint CERN-TH-95/203, 发表在 *Proceedings of the Workshop on Physics at DAΦNE, April 1995*. 较新的  $\alpha^{-1}(m_Z)$  值分布在 128.89 与 129.08 之间.
- [4a] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973).
- [4b] L. D. Landau, in *Niels Bohr and the Development of Physics* (Pergamon Press, New York, 1955): p.52; 以及那里引用的更早的工作.

- 
- [4c] S. L. Adler, C. G. Callan, D. J. Gross, and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D6**, 2982 (1972); M. Baker and K. Johnson, *Physica* **96A**, 120 (1979).
- [4d] 关于这一点的讨论与参考, 可参看J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics - A Fundamental Integral Point of View*, Second Edition (Springer-Verlag, New York, 1987): Section 21.6; R. Fernandez, J. Fröhlich, and A. D. Sokal, *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory* (Springer-Verlag, Berlin, 1992): Chapter 15.
- [5] S. Weinberg, in *General Relativity*, S. W. Hawking and W. Israel编辑. (Cambridge University Press, Cambridge, 1979): p. 790.
- [6] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D8**, 3497 (1973).
- [7] 原始计算是K. G. Wilson和M. E. Fisher给出的, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 240 (1972); K. G. Wilson, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 548 (1972). 关于综述可参看, K. G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rep.* **12C**, No. 2 (1974); M. E. Fisher, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 597 (1974); E. Brézin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, C. Domb and M. S. Green编辑(Academic Press, London, 1975).
- [8] 参看P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995): p. 231.
- [8a] E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, and B. G. Nickel, *Phys. Lett.* **44A**, 227 (1973); K. G. Wilson and J. Kogut, 参看文献7, Section 8.
- [9] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B461**, 455 (1973); *Nucl. Phys.* **B82**, 444 (1973). 这里所给出的推导相对't Hooft的推导做了些许的简化.
- [10] O. W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 598 (1964); M. Y. Han and Y. Nambu, *Phys. Rev.* **139**, B1006 (1965); W. A. Bardeen, H. Fritzsch, and M. Gell-Mann, in *Scale and Conformal Invariance in Hadron Physics*, R. Gatto编辑(Wiley, New York, 1973).
- [11] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8**, 214 (1964); G. Zweig, CERN preprint TH401 (1964).
- [12] D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1343 (1973).
- [13] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).
- [14] E. D. Bloom *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 930 (1969); M. Breidenbach *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 933 (1969); J. L. Friedman and H. W. Kendall, *Annual Reviews of Nuclear Science* **22**, 203 (1972).
- [15] A. Zee, 未发表.
- [16] G. 't Hooft, 未发表.
- [17] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D8**, 605 (1973).

- 
- [18] D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D8**, 3633 (1973); S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 494 (1973).
- [19] 在渐进自由被发现之前, H. Fritzsch, M. Gell-Mann, 和 H. Leutwyler 提出过类似的想法, *Phys. Lett.* **47B**, 365 (1973).
- [20] G. Hanson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1609 (1975). R. F. Schwitters, in *Proceedings of the International Conference on Lepton and Photon Interactions at High Energy at Stanford, 1975*, W. T. Kirk 编辑 (Stanford Linear Accelerator Center, Stanford, 1975): p.5; G. Hanson Stanford Linear Accelerator Center Report SLAC-PUB-1814 (1976), 未发表.
- [21] G. Sterman and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1436 (1977).
- [22] J. Ellis, M. K. Gaillard, and G. G. Ross, *Nucl. Phys.* **B111**, 253 (1976).
- [23] E. Eichten, K. Lane, and M. Peskin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 811 (1983).
- [24] 关于综述, 参看 I. Hinchliffe, in ‘Review of Particle Properties,’ *Phys. Rev.* **D50**, 1177 (1994): Section 25.
- [25] G. Altarelli, in *Proceedings of the Rencontres de Hanoi*, CERN preprint CERN-PRE/94-71 (1994).
- [26] K. Abe *et al.* (SLD collaboration), *Phys. Rev.* **D51**, 962 (1995). M. Shifman 汇总了  $Z^0$  衰变到强子的早期数据, Minnesota preprint hep-th/9501222 (1995), 这份数据给出  $\alpha_s(m_Z) = 0.125 \pm 0.005$ , 对应的  $\Lambda \approx 500 \text{ MeV}$ .