Harmonic Analysis:

on the n-Dimensional Lorentz Group and Its Application to Conformal Field Theory

张 驰*

February 8, 2021

*email:zhangchi_110@163.com

1 群论基础

1.1 $O(2h+1,1)$ 群和它的 Lie 代数

记 $N=2h+1$. h 是半整数, 接下来主要考虑 $h>1$ 的情况.

$O(2h+1,1)$ 群是保持实 $(N+1)$-维矢量空间中的如下内积

$$\xi^2 := \xi\eta\xi = \xi_1^2 + \cdots + \xi_N^2 - \xi_0^2 \tag{1.1}$$

不变的线性变换构成的集合. (η 是对角矩阵, 其中 $\eta_{11} = \cdots = \eta_{NN} = -\eta_{00} = 1$.) 这个群由满足

$$g^{\mathrm{T}}\eta g = \eta \tag{1.2}$$

的 $(N+1)\times(N+1)$ 实矩阵 g 构成. 它的恒元分量 $G = SO^{\uparrow}(N,1)$ 由满足(1.1)以及

$$\det g = 1, \quad {g^0}_0 > 1 \tag{1.3}$$

的那些 g 组成. 我们将主要处理包含空间反射的扩张群

$$G_{\mathrm{ex}} = O^{\uparrow}(2h+1,1) = \{g \in O(2h+1,1) \,|\, {g^0}_0 \geq 1\}. \tag{1.4}$$

G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 由满足

$$X^{\mathrm{T}}\eta + \eta X = 0 \tag{1.5}$$

的 $(N+1)\times(N+1)$ 实矩阵 X 构成. 我们可以选择 $\mathfrak{g}$ 中的一组基 $X_{AB} = -X_{BA}$ ($A,B = 0,1,\ldots,N$)使其满足对易关系

$$[X_{AB}, X_{CD}] = \eta_{AC}X_{BD} + \eta_{BD}X_{AC} - \eta_{AD}X_{BC} - \eta_{BC}X_{AD}\,. \tag{1.6}$$

(注意物理中使用的 J_{AB} 与 X_{AB} 的关系是 $J_{AB} = \mathrm{i}X_{AB}$.) X_{AB} 的一个矩阵实现是

$$\big(X_{AB}\big)^C_{\ D} = \eta_{AD}\delta^C_B - \eta_{BD}\delta^C_A\,. \tag{1.7}$$

1.2 子代数和分解

下表给出了群 G 的几个重要子群:

子群	特性	生成元
$K = SO(2h+1)$	最大紧子群	X_{ab} 其中$a,b = 1,\ldots,2h+1$
$A = SO(1,1)$	1-维非紧群(“伸缩变换”)	$X_{2h+1,0} = D$
$M = SO(2h)$	A 在 K 中的中心($mam^{-1} = a$)	$X_{\mu\nu}$ 其中$\mu,\nu = 1,\ldots,2h$
N	幂零, 阿贝尔 (特殊共形变换)	$C_\mu = X_{\mu,0} - X_{\mu,2h+1}$
$\tilde{N}$	幂零, 阿贝尔 (平移)	$T_\mu = X_{\mu,0} + X_{\mu,2h+1}$
$H = H_{AM} = AH_M$	$(\lfloor h\rfloor+1)$-维阿贝尔群 (嘉当子群)	$D, X_{12}, \ldots, X_{2\lfloor h\rfloor-1,2\lfloor h\rfloor}$

表 1: 群 $G = SO^{\uparrow}$ 的几个重要子群.

根据(1.6), 生成元 D, C_μ 和 T_μ 满足对易关系:

$$\begin{aligned}
&[D, C_\mu] = -C_\mu\,, \quad [D, T_\mu] = T_\mu\,, \quad \tfrac{1}{2}[T_\mu, C_\nu] = D\delta_{\mu\nu} - X_{\mu\nu};\\
&[X_{\lambda\mu}, T_\nu] = \delta_{\lambda\nu}T_\mu - \delta_{\mu\nu}T_\lambda\,, \quad [X_{\lambda\mu}, C_\nu] = \delta_{\lambda\nu}C_\mu - \delta_{\mu\nu}C_\lambda\,.
\end{aligned} \tag{1.6$'$}$$

物理动量算符由 $\mathrm{i}T_\mu$ 的厄密表示给出.

令 M' 是 A 在 K 中的正规化子, 即对所有的 $a \in A$ 使得 $m'am'^{-1} \in A$ 的 $m' \in K$ 的集合. 很容易看到 M' 同构于 $O(2h)$ 且 M 是 M' 的不变子群. 有限群

$$W = W(G, A) = M'/M \tag{1.8}$$

被称为 (G, A) 对的 Weyl 群(或者限制 Weyl 群). 它有两个元素 $W = \{1, w\}$. 幂零子群 N 和 $\tilde{N}$ 在 Weyl 变换下互为共轭

$$wNw^{-1} = \tilde{N}\,. \tag{1.9}$$

如有需要, 我们对 w 选择如下表示

$$w = \exp\bigl(\pi X_{2h,2h+1}\bigr) \tag{1.10}$$

即在 $(2h, 2h{+}1)$-平面中旋转 π. 在下文中, 我们将把 $K, N, A, M, \tilde{N}$ 中的元素记为 $k, n, a, m, \tilde{n}$.

注. K 中 $X_{\mu\nu}$ 以外的生成元是 $X_{\mu,2h+1}$, 它与 $D = X_{2h+1,0}$ 的关系是

$$\mathrm{Ad}(X_{\mu,2h+1})D := [X_{\mu,2h+1}, D] = -X_{\mu,0} \quad \mathrm{Ad}^2(X_{\mu,2h+1})D = -D$$

那么根据 Baker–Campbell–Hausdorff 公式

$$\begin{aligned}
\exp(tX_{\mu,2h+1})\exp(aD)\exp(-tX_{\mu,2h+1}) &= \exp\Bigl(a\sum_n \frac{t^n\,\mathrm{Ad}^n(X_{\mu,2h+1})D}{n!}\Bigr)\\
&= \exp\Bigl(a\cos(t)D - a\sin(t)X_{\mu,2h+1}\Bigr)
\end{aligned}$$

由此得出 A 在 K 中的中心化子至多再含有 $\exp(n\pi X_{\mu,2h+1})$, 这个元素加上 M 构成了 $O(2h)$. (1.9)式说明了: 平移作用在原点上但保持无限远不动, 而特殊共形变换则正相反.

Iwasana 分解: G 的每个群元可以表示为

$$g = kna\,, \tag{1.11}$$

或

$$g = \tilde{n}ak \tag{1.12}$$

((1.11)和(1.12)中的 k 和 a 因子一般不同). 两种分解版本中的顺序十分重要, 在下面我们将使用(1.11).

Bruhat 分解: G 的几乎所有群元 $g \in G$ (即那些不属于低维子流形 $wNAM$ 的群元)都可以唯一地写成

$$g = \tilde{n}nam\,. \tag{1.13}$$

评论. 对于奇数或偶数的 N, $SO^\uparrow(N,1)$ 有一个很大的不同. 对于偶数的 N 除了表:1所列的嘉当子群外, 还有另外一个紧嘉当子群, 生成元是 $X_{12}, X_{34}, \ldots, X_{N-1,N}$. 由此得出, 当 N 为偶数时, 椭圆元(本征值模为 1 的矩阵)集合的维数与 G 相同. 这使得进对于偶数的 N, G 的幺正表示是离散序列.

1.3 紧化欧几里得空间作为 G 的齐次空间

出现在 Bruhat 分解中的"抛物子群" NAM 在群 G 的诱导表示的 Harish-Chandra 构造中起到了特殊作用. 值得注意的是齐次空间

$$G/NAM \approx K/M \approx S^{2h} \tag{1.14}$$

(同构于 $2h{+}1$ 维中的单位球面 S^{2h})与物理有关. 它可以视为是 $2h$-维欧几里得空间 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{2h}$ 的共形紧化. (S^{2h} 是通过给 $\mathbb{X}$ 加上无穷远点 ∞ 获得的.)

特别的, G 在矢量空间 $\mathbb{X}$ 上有一个定义良好的定域作用, 这个作用可以等同为右陪集 $\tilde{n}NMA$ 的流形. 由于 $g \in G\backslash wNAm$的 Bruhat 分解(1.13)的唯一性, 陪集 $x \in \mathbb{X}$ 与群元 $\tilde{n} \in \tilde{N}$ 存在对应使得 $x = \tilde{n}NMA$. 由于这个原因, 我们将 $\tilde{N}$ 中与 $x(\in \mathbb{X})$ 对应的元素记为 $\tilde{n}_x$. 我们以

$$\tilde{n}_{x_1}\tilde{n}_{x_2} = \tilde{n}_{x_1+x_2} \tag{1.15a}$$

方式赋予 $\mathbb{X}$ 以实矢量空间的结构. G 的抛物子群 $\tilde{N}MA$ 是 $\mathbb{X}$ 的自同构群. 特别的,

$$\tilde{n}_x y = x + y\,. \tag{1.15b}$$

零矢量 $x = 0$ 的稳定子群是 G 的抛物子群 NAM. 齐次空间(1.14)同构于 $\mathbb{R}^{2h+1,1}$ 中类光射线的集合:

$$G/NAM \approx \mathbb{K}_+/\mathbb{R}_+ \tag{1.14$'$}$$

其中 $\mathbb{R}_+$ 是正实数的乘法群, 而

$$\mathbb{K}_+ := \mathbb{K}_+^{2h+1,1}(\approx G/NM) = \{\xi \in \mathbb{R}^{2h+2};\ \xi_0 > 0,\ \xi\eta\xi = 0\}$$

$x \in \mathbb{X}$ 用 ξ 表示是

$$x_\mu = \frac{\xi_\mu}{\xi_0 + \xi_{2h+1}}\,, \quad \xi_M := [\xi_0 : \xi_\mu : \xi_{2h+1}] = [1 + x^2 : 2x_\mu : 1 - x^2]\,. \tag{1.16}$$

g 在齐次空间(1.14$'$)上的左传递生成了 G 在 $\mathbb{K}_+$ 的自然作用 $g : \xi \to g\xi$, 这给出了 x 的变换规则. 我们推出 $\mathbb{X}$ 的自同构群是抛物子群 $\tilde{N}AM$ (与 NAM 共轭). $\tilde{N}$ 的作用已经在(1.15b)中给出. 伸缩 $a \in A$ 与旋转 $m \in M$ 在 $\mathbb{X}$ 上的作用是

$$ax = |a|x\,, \tag{1.17a}$$

$$(mx)_\mu = m_{\mu\nu}x_\nu\,. \tag{1.17b}$$

由于特殊线性变换总可以把 $\mathbb{X}$ 中的任意一点送到无穷远, 我们只讨论它的无限小版本. 对于 N 中单位元附近的元素 n_ϵ, 我们有

$$n_\epsilon x : x \to x'(\epsilon), \quad x'_\mu = x_\mu + (x^2\delta_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu)\epsilon_\nu + O(\epsilon^2)\,. \tag{1.18}$$

1.4 G 的各种子群的矩阵实现. Bruhat 分解的构造

矩阵 $\tilde{n}$ 和 n 可以分别被相应的 $2h$-维矢量 $x(\in \mathbb{X})$ 和 b 实现. 利用生成元的矩阵实现(1.7), 我们获得矩阵 $x_\mu T_\mu$ 和 $b_\mu C_\mu$ 的如下表示:

$$x_\mu T_\mu = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{0}_{2h\times 2h} & -x^{\mathrm{T}} & x^{\mathrm{T}} \\ \hline x & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{0}_{2\times 2}$}} \\ x & & \end{array}\right) \tag{1.19a}$$

其中$x=(x_1,\dots,x_{2h})$是行矢量; 类似的,

$$
b_\mu C_\mu = \left(\begin{array}{c:cc} \mathbf{0}_{2h\times 2h} & -b^{\mathrm{T}} & b^{\mathrm{T}} \\ \hdashline -b & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{0}_{2\times 2}$}} \\ b & & \end{array}\right) \tag{1.19b}
$$

由此可以得到

$$
\tilde{n}_x = \exp(x_\mu T_\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2h\times 2h} & -x^{\mathrm{T}} & x^{\mathrm{T}} \\ x & 1-\frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2 \\ x & -\frac{1}{2}x^2 & 1+\frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} \tag{1.20a}
$$

和

$$
n_b = \exp(b_\mu C_\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2h\times 2h} & b^{\mathrm{T}} & b^{\mathrm{T}} \\ -b & 1-\frac{1}{2}b^2 & -\frac{1}{2}b^2 \\ b & \frac{1}{2}b^2 & 1+\frac{1}{2}b^2 \end{pmatrix} . \tag{1.20b}
$$

类似地, 伸缩变换a的矩阵表示是

$$
a = \exp(\alpha D) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2h\times 2h} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ 0 & \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \tag{1.21}
$$

注. 在这个变换下, $(\xi_{2h+1},\xi_0) \to (\xi_{2h+1}\cosh\alpha + \xi_0\sinh\alpha, \xi_{2h+1}\sinh\alpha + \xi_0\cosh\alpha)$, 所以$\xi_{2h+1}+\xi_0 \to \mathrm{e}^{\alpha}(\xi_{2h+1}+\xi_0)$, 那么$ax = \mathrm{e}^{-\alpha}x$.

同样有

$$
m = \begin{pmatrix} m_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad (m_{\mu\nu}) \in SO(2h) , \tag{1.22}
$$

$$
k = \begin{pmatrix} k_{\mu\nu} & k_{\mu,2h+1} & 0 \\ k_{2h+1,\nu} & k_{2h+1,2h+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad (k_{ab}) \in SO(2h+1) . \tag{1.23}
$$

将矩阵(1.20a)—(1.23)乘起来就得到了群元g形如(1.13)的表达式

$$
\begin{aligned}
g = \tilde{n}_x n_b a m &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2h\times 2h} & -x^{\mathrm{T}} & x^{\mathrm{T}} \\ x & 1-\frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2 \\ x & -\frac{1}{2}x^2 & 1+\frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^\mu{}_\nu & \mathrm{e}^\alpha b^\mu & \mathrm{e}^\alpha b^\mu \\ -b_\sigma m^\sigma{}_\nu & \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^\alpha(1-b^2)+\mathrm{e}^{-\alpha}\big) & \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^\alpha(1-b^2)-\mathrm{e}^{-\alpha}\big) \\ b_\sigma m^\sigma{}_\nu & \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^\alpha(1+b^2)-\mathrm{e}^{-\alpha}\big) & \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^\alpha(1+b^2)+\mathrm{e}^{-\alpha}\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m^\mu{}_\nu + 2x^\mu b_\sigma m^\sigma{}_\nu & \mathrm{e}^\alpha b^\mu + (\mathrm{e}^\alpha b^2 - \mathrm{e}^{-\alpha})x^\mu & \mathrm{e}^\alpha b^\mu + (\mathrm{e}^\alpha b^2 + \mathrm{e}^{-\alpha})x^\mu \\ x_\sigma m^\sigma{}_\nu + b_\sigma m^\sigma{}_\nu(x^2-1) & \mathrm{e}^\alpha x_\rho b_\rho + \frac{\left(\mathrm{e}^\alpha + (\mathrm{e}^\alpha b^2 - \mathrm{e}^{-\alpha})(x^2-1)\right)}{2} & \mathrm{e}^\alpha x_\rho b_\rho + \frac{\left(\mathrm{e}^\alpha + (\mathrm{e}^\alpha b^2 + \mathrm{e}^{-\alpha})(x^2-1)\right)}{2} \\ x_\sigma m^\sigma{}_\nu + b_\sigma m^\sigma{}_\nu(x^2+1) & \mathrm{e}^\alpha x_\rho b_\rho + \frac{\left(\mathrm{e}^\alpha + (\mathrm{e}^\alpha b^2 - \mathrm{e}^{-\alpha})(x^2+1)\right)}{2} & \mathrm{e}^\alpha x_\rho b_\rho + \frac{\left(\mathrm{e}^\alpha + (\mathrm{e}^\alpha b^2 + \mathrm{e}^{-\alpha})(x^2+1)\right)}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

矩阵$g \in G$可以写成形如(1.24)的条件是

$$
d(g) := \tfrac{1}{2}\big(g^{2h+1}{}_{2h+1} - g^{2h+1}{}_0 - g^0{}_{2h+1} + g^0{}_0\big) = \mathrm{e}^{-\alpha} > 0 . \tag{1.25}
$$

注意, $d(g)$ 对形如 $wnam$ 的 g 为零.

利用(1.24)可以得到

$$x^\mu = \frac{1}{2d(g)}\Big(g^\mu{}_0 - g^\mu{}_{2h+1}\Big)\,, \tag{1.26a}$$

$$2b^\mu = \big(g^0{}_0 - g^{2h+1}{}_0\big)g^\mu{}_{2h+1} + \big(g^{2h+1}{}_{2h+1} - g^0{}_{2h+1}\big)g^\mu{}_0 \tag{1.26b}$$

$$m^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu - \frac{\big(g^\mu{}_0 - g^\mu{}_{2h+1}\big)\big(g^0{}_\nu - g^{2h+1}{}_\nu\big)}{2d(g)} \tag{1.26c}$$

通过

$$g\tilde{n}_x = \tilde{n}_{x'}n(g,x)a(g,x)m(g,x)\,. \tag{1.27}$$

我们定义变换 $x \xrightarrow{g} x'$. 这给出了在 $\mathbb{X}$ 的自同构群 $\tilde{N}AM$ 下的变换规则(1.15b), (1.17), 以及特殊共形变换规则

$$x'^\mu = \frac{x^\mu + x^2 b^\mu}{1 + 2b_\nu x^\nu + b^2 x^2}\,. \tag{1.28}$$

注意到(1.28)中的分母正是(1.25)中定义的 $d(n_b\tilde{n}_x)$. 特殊共形变换可以表示为平移和 $(2h{+}1)$-轴的反射 R (R 等于(1.10)定义的 Weyl 变换 w 再加上反射 $\xi_i \to -\xi_i$, $i = 1, \dots, 2h-1$.) 利用 $R\tilde{n}_x$ 的分解(1.27), 我们得到在共形反演下的变换:

$$Rx^\mu = -\frac{x^\mu}{x^2}\,; \qquad wx^\mu = \frac{\theta x^\mu}{x^2}\,, \tag{1.29}$$

其中 θ 是 $2h$-轴的反射, 很容易证明 $n_b = R\tilde{n}_b R^{-1}$.

我们回到(1.27). 通过

$$g^{-1}\tilde{n}_x = \tilde{n}_{x'}p(x,g)^{-1}\,, \qquad x' = g^{-1}x\,, \tag{1.27a}$$

我们定义 $p(x,g) \in MAN$. 那么 $p(x,g^{-1})^{-1} = n(g,x)a(g,x)m(g,x)$. 从(1.27a)中可以推出上闭链条件

$$p(x,g_1g_2) = p(x,g_1)p(g_1^{-1}x,g_2)\,. \tag{1.27b}$$

$$\boxed{\tilde{n}_{g_2^{-1}g_1^{-1}x}p(x,g_1g_2)^{-1} = g_2^{-1}g_1^{-1}\tilde{n}_x = g_2^{-1}\tilde{n}_{g_1^{-1}x}p(x,g_1)^{-1} = \tilde{n}_{g_2^{-1}g_1^{-1}x}p(g_1^{-1}x,g_2)^{-1}p(x,g_1)^{-1}}$$

从定义可以立即得出如下的特殊情况

$$p(x,\tilde{n}) = 1 \qquad \text{对于} \quad \tilde{n} \in \tilde{N}\,; \qquad p(x,ma) = ma \qquad \text{对于} \quad ma \in MA\,. \tag{1.27b}$$

对于

$$p_x := p(x,w)\,. \tag{1.27d}$$

方程(1.24)给出显式公式

$$p_x := m_x a_x n_{\theta x} \qquad \text{其中}\ m_x = \left(-\mathbb{1} + 2\frac{xx^{\mathrm{T}}}{x^2}\right)I_s\,, \quad |a(x)| = x^2\,. \tag{1.27e}$$

其中 x, x^{T} 分别列矢量和行矢量 $(x^1, \dots, x^{2h})$. 可以立即得到如下恒等式

$$m_{x+y}m_{wy} = m_x m_{wx+wy}\,; \qquad a_{x+y}a_{wy} = a_x a_{wx+wy} \tag{1.27f}$$

和

$$p(x, n_{-Ry}) = h_x h_{wx-wy} n_{Ru} = n_{R(y-x)} h_x h_{wx-wy} \tag{1.27g}$$

其中 $h_x = m_x a_x$ 且 $u = y + w(wx - wy)$.

注. HW: 证明(1.27e)—(1.27g). I_s 是什么?

1.5 Bruhat 分解与 Iwasawa 分解之间的关系