

弦论笔记

Notes on Polchinski's String theory

作者：兴趣使然的弦论爱好者

时间：April 23, 2021

I have noticed when I was younger, that lots of old men in the field couldn't understand new ideas very well, and resisted them with one method or another, and that they were very foolish in saying these ideas were wrong —such as Einstein not being able to take quantum mechanics.

I'm an old man now, and these are new ideas, and they look crazy to me, and they look like they're on the wrong track. — Richard Feynman

目录

第一部分 玻色弦理论导论	2
1 弦论初探	3
1.1 为什么是弦?	3
1.2 作用量原理	3
1.3 开弦频谱	8
1.4 闭弦和非定向弦	15
第二部分 超弦理论以及拓展	19
10 I 型超弦和 II 型超弦	20
10.1 超共形代数	20
10.2 Ramond 分区和 Neveu-Schwarz 分区	27
10.3 顶点算子和玻色化	31
10.4 超共形鬼场	36
10.5 物理态	40
10.6 十维中的超弦理论	43
10.7 模不变形	48
10.8 I 型理论的发散	52
11 杂化弦	56
11.1 世界面超对称性	56
11.2 $SO(32)$ 和 $E_8 \times E_8$ 杂化弦	58
11.3 其他十维杂化弦	63
11.4 一点 Lie 代数	65
11.5 流代数	71
11.6 The bosonic construction and toroidal compactification	77
12 超弦相互作用	84
12.1 低能超引力	84
12.2 反常	89
12.3 超空间和超场	89
12.4 树级振幅	96
12.5 一般振幅	96
12.6 单圈振幅	96

第一部分

玻色弦理论导论

第一章 弦论初探

1.1 为什么是弦？

本节都是定性分析, 我没有翻译和注释. 原文参考:

J.Polchinski.String Theory.Cambridge:Cambridge University Press,2001.

1.2 作用量原理

弦在 D 维平坦时空中运动, 度规 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, \dots, +)$.

首先回顾零维物体的经典力学. 一个相对论性点粒子, 我们可以用 $D-1$ 个位置的时间函数 $\mathbf{X}(X^0)$ 来描述它. 但是这隐藏了理论的协变性, 所以最好引入沿着粒子世界线的参量 τ , 并用 D 个函数 $X^\mu(\tau)$ 来描述时空中的运动. 参量化是任意的: 相同路径不同的参量形式是物理上等价的, 即对于任何单调函数 $\tau'(\tau)$, 两条路径是相等的:

$$X'^\mu(\tau') = X^\mu(\tau) \quad (1.2.1)$$

最简单的 Poincaré 不变作用量 (不依赖于参量化的形式) 正比于沿世界线的固有时:

$$S_{\text{pp}} = -m \int d\tau (-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)^{1/2} \quad (1.2.2)$$

其中 $\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$. 作用量的变分 (在分部积分后) 是:

$$\delta S_{\text{pp}} = +m \int d\tau \frac{1}{2} (-\dot{X}^\nu \dot{X}_\nu)^{-1/2} 2\dot{X}_\mu \delta \dot{X}^\mu = m \int d\tau u_\mu \delta \dot{X}^\mu,$$

所以

$$\delta S_{\text{pp}} = -m \int d\tau \dot{u}_\mu \delta X^\mu \quad (1.2.3)$$

其中

$$u^\mu = \dot{X}^\mu (-\dot{X}^\nu \dot{X}_\nu)^{-1/2} \quad (1.2.4)$$

是归一化 D -速度. 因而运动方程 $\dot{u}^\mu = 0$ 描述了自由运动. 归一化常数 m 是粒子质量.

通过引入世界面上的额外场, 一个与世界线无关的度规 $\gamma_{\tau\tau}(\tau)$, 这个作用量可以变成另一形式. 利用标架 $\eta(\tau) = (-\gamma_{\tau\tau}(\tau))^{1/2}$ 处理将是方便的. 其被定义为正定的. 我们在任意维数下使用广义相对论项 tetrad (标架, 即便它的词根意味着“4”). 那么

$$S'_{\text{pp}} = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\eta^{-1} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - \eta m^2 \right) \quad (1.2.5)$$

这个作用量与 S_{pp} 有相同的对称性. 即 Poincaré 不变性与再参量化不变性. 后者 $\eta(\tau)$ 的变换为

$$\eta'(\tau') d\tau' = \eta(\tau) d\tau \quad (1.2.6)$$

证明

$$\begin{aligned}
S'_{\text{pp}} &= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\eta^{-1} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - \eta m^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau' \left(\frac{d\tau}{d\tau'} \eta^{-1} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} - \frac{d\tau}{d\tau'} \eta m^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau' \left(\frac{d\tau}{d\tau'} \eta^{-1} \left(\frac{d\tau'}{d\tau} \right)^2 \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau'} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau'} - \eta' m^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau' \left(\eta'^{-1} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau'} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau'} - \eta' m^2 \right)
\end{aligned}$$

对标架 $\eta(\tau)$ 变分得到运动方程

$$\begin{aligned}
\delta S'_{\text{pp}} &= \frac{1}{2} \int d\tau \left(-\frac{1}{\eta^2} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - m^2 \right) \delta \eta \\
\Rightarrow \eta^2 &= -\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu / m^2
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

利用上式消掉 (1.2.5) 中的 η , S'_{pp} 变成 S_{pp} . S'_{pp} 可以处理无质量粒子, 而 S_{pp} 不行. 尽管 S'_{pp} 与 S_{pp} 在经典上等价, 但是 S_{pp} 由于它复杂的形式很难做路径积分. 而 S'_{pp} 是导数的二次型, 路径积分是相当容易计算的. 可推测, 任何定义 S_{pp} 量子理论的尝试所导出的结果与 S'_{pp} 路径积分等价. 我们取后者为量子理论的出发点.

一维物体扫过二维世界面, 其以两个参量描述, 记作 $X^\mu(\tau, \sigma)$. 我们仍旧坚持作用量仅依赖于所嵌入的时空, 而不是参量化的形式. 最简单的作用量是 Nambu-Goto 作用量, 它正比于世界面的面积. 引入诱导度规 h_{ab} , a, b 取遍值 (τ, σ) :

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \tag{1.2.8}$$

那么 Nambu-Goto 作用量为

$$S_{\text{NG}} = \int_M d\tau d\sigma \mathcal{L}_{\text{NG}} \tag{1.2.9a}$$

$$\mathcal{L}_{\text{NG}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} (-\det h_{ab})^{1/2} \tag{1.2.9b}$$

其中 M 代表世界面, α' 量纲为 L^2 , 是 Regge 斜率. 弦的张力 T 与 Regge 斜率的关系为

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \tag{1.2.10}$$

现在考察这个作用量的对称性. 使 $S_{\text{NG}}(X') = S_{\text{NG}}(X)$ 的 $X^\mu(\tau, \sigma)$ 的变换有:

1. 平坦时空的等距群 (D 维 Poincaré 群)

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu. \tag{1.2.11}$$

2. 二维坐标不变性 (称为微分同胚映射不变性, 英文 diffeomorphism, 简写为 diff)

$$X'^\mu(\tau', \sigma') = X^\mu(\tau, \sigma). \tag{1.2.12}$$

NG 作用量类似 S_{pp} . 同样, 引入世界面无关度规 $\gamma_{ab}(\tau, \sigma)$. 之后度规总是指 γ_{ab} (除非说诱导度规). 令 γ_{ab} 有 Lorentz 特征 $(-, +)$, 作用量:

$$S_{\text{P}}[X, \gamma] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \tag{1.2.13}$$

其中 $\gamma = \det \gamma^{ab}$. 这是 Brink-Di Vecchia-Howe-Desert-Zumino 作用量, 简称 Polyakov 作用量. 提出原因: 为了推广定域世界面超对称性. Polyakov 强调了其优点, 尤其是路径积分量子化.

与 S_{NG} 的等价：对度规变分

$$\begin{aligned}\delta_\gamma S_{\text{P}}[X, \gamma] &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma \left[\delta\gamma^{ab}(-\gamma)^{1/2} h_{ab} - \frac{1}{2}(-\gamma)^{-1/2} (-\gamma\gamma_{ab}\delta\gamma^{ab}) h_{cd}\gamma^{cd} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \delta\gamma^{ab} \left(h_{ab} - \frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma^{cd} h_{cd} \right)\end{aligned}\quad (1.2.14)$$

其中利用了

$$\delta\gamma = \gamma\gamma^{ab}\delta\gamma_{ab} = -\gamma\gamma_{ab}\delta\gamma^{ab} \quad (1.2.15)$$

$\delta_\gamma S_{\text{P}}[X, \gamma] = 0$ 意味着

$$h_{ab} = \frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma^{cd} h_{cd} \quad (1.2.16)$$

两边同除 $(-h)^{1/2}$

$$h_{ab}(-h)^{-1/2} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma^{cd} h_{cd}}{\sqrt{-\gamma}\frac{1}{2}\gamma^{cd} h_{cd}} = \gamma_{ab}(-\gamma)^{-1/2} \quad (1.2.17)$$

所以 γ_{ab} 正比于 h_{ab} . 利用从 (1.2.17) 得到的 $h_{ab}\gamma^{ab}(-\gamma)^{1/2} = (-h)^{1/2}\gamma_{ab}\gamma^{ab}$, 从 S_{P} 中消除 γ_{ab} :

$$S_{\text{P}}[X, \gamma] \rightarrow -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} h_{ab}\gamma^{ab} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma (-h)^{1/2} = S_{\text{NG}}[X] \quad (1.2.18)$$

S_{P} 有如下对称性:

1. D 维 Poincaré 不变性

$$\begin{aligned}X'^\mu(\tau, \sigma) &= \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu \\ \gamma'_{ab}(\tau, \sigma) &= \gamma_{ab}(\tau, \sigma).\end{aligned}\quad (1.2.19)$$

2. Diff 不变性

$$\begin{aligned}X'^\mu(\tau', \sigma') &= X^\mu(\tau, \sigma) \\ \frac{\partial\sigma'^c}{\partial\sigma^a} \frac{\partial\sigma'^d}{\partial\sigma^b} \gamma'_{cd}(\tau', \sigma') &= \gamma_{ab}(\tau, \sigma).\end{aligned}\quad (1.2.20)$$

3. 二维 Weyl 不变性

$$\begin{aligned}X'^\mu(\tau, \sigma) &= X^\mu(\tau, \sigma) \\ \gamma'_{ab}(\tau, \sigma) &= \exp[2\omega(\tau, \sigma)]\gamma_{ab}(\tau, \sigma)\end{aligned}\quad (1.2.21)$$

证明

$$\begin{aligned}S'_{\text{P}} &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma')^{1/2} \gamma'^{ab} \partial_a X'^\mu \partial_b X'_\mu \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma e^{2\omega} (-\gamma)^{1/2} e^{-2\omega} \gamma^{ab} h_{ab} \\ &= S_{\text{P}}\end{aligned}$$

Weyl 不变性, 即世界面度规的定域缩放, 在 NG 形式中没有对比. 通过观察用以联系 Polyakov 作用量与 NG 作用量的运动方程 (1.2.17), 我们可以理解它的出现. (1.2.17) 并不唯一确定 γ_{ab} , 而是一个定域缩放. 所以 Weyl 等价度规对应于时空的相同嵌入. 这是 Polyakov 公式另加的冗余.

作用量相对度规的变分给出能动量张量

$$T^{ab}(\tau, \sigma) = -4\pi(-\gamma)^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta}{\delta\gamma_{ab}} S_P = -\frac{1}{\alpha'} (\partial^a X^\mu \partial^b X_\mu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \partial_c X^\mu \partial^c X_\mu) \quad (1.2.22)$$

证明 利用 $\gamma_{ab}\delta\gamma^{ab} = -\gamma^{ab}\delta\gamma_{ab}$, 那么

$$\begin{aligned} \delta\gamma^{ab}h_{ab} - \frac{1}{2}\delta\gamma^{ab}\gamma_{ab}\gamma^{cd}h_{cd} &= -\gamma^{ac}\delta\gamma_{ab}\gamma^{bd}h_{cd} + \frac{1}{2}\gamma^{ab}\delta\gamma_{ab}\gamma^{cd}h_{cd} \\ &= -\delta\gamma_{ab}h^{ab} + \frac{1}{2}\gamma^{ab}\gamma^{cd}h_{cd}\delta\gamma_{ab} \\ &\Rightarrow \frac{\delta}{\delta\gamma_{ab}} S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} (-\gamma)^{\frac{1}{2}} (-h^{ab} + \frac{1}{2}\gamma^{ab}\gamma^{cd}h_{cd}) \end{aligned}$$

能动张量是守恒的 ($\nabla_a T^{ab} = 0$), 这是 diff 不变性的结果. Weyl 不变性暗示着

$$\gamma_{ab} \frac{\delta}{\delta\gamma_{ab}} S_P = 0 \Rightarrow T_a^a = 0 \quad (1.2.23)$$

证明 $\delta S \sim \int \delta\gamma_{ab} T^{ab}$, 而 Weyl 变换 $\delta\gamma_{ab} = 2\omega\gamma_{ab}$, 于是 $T^{ab}\gamma_{ab} = 0$.

S_{NG} 与 S_P 在弦世界面上定义了 2 维场论. 在弦论中, 我们看到时空过程的振幅由世界面上的 2 维量子场论的矩阵元给定. 尽管是现实世界是 4 维时空, 但在弦微扰论中所使用的大多数机制是 2 维的. (1.2.12) 将 $X^\mu(\tau, \sigma)$ 定义为标量场, μ 是内部指标. 从 2 维的观点来看, Polyakov 作用量描述了与 γ_{ab} 协变耦合的无质量 Klein-Gordon 标量 X^μ . 这样, Poincaré 不变性是内部对称性.

对 γ_{ab} 变分给出运动方程:

$$T_{ab} = 0 \quad (1.2.24)$$

利用分部积分, 对 X^μ 变分给出

$$\begin{aligned} 0 &= (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} (2\partial_a X^\mu \delta\partial_b X_\mu) = -2\partial_b [(-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu] \delta X_\mu \\ &\Rightarrow \partial_a [(-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu] = (-\gamma)^{1/2} \nabla^2 X^\mu = 0 \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

证明

$$\begin{aligned} 0 &= (-\gamma)^{1/2} \partial_a \gamma^{ab} \partial_b X^\mu + \gamma^{ab} \partial_b X^\mu \partial_a (-\gamma)^{1/2} \\ &= (-\gamma)^{1/2} [\partial_a (\gamma^{ab} \partial_b X^\mu) + (-\gamma)^{-1/2} \partial_a (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu] \\ &= (-\gamma)^{1/2} [\nabla_a (\gamma^{ab} \partial_b X^\mu)] = (-\gamma)^{1/2} \nabla_a \gamma^{ab} \nabla_b X^\mu = (-\gamma)^{1/2} \nabla^2 X^\mu \end{aligned}$$

其中利用了 $\nabla_a = \partial_a + (\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \partial_a \sqrt{-\gamma})$. 注意 X^μ 是一标量, $\partial_b \rightarrow \nabla_b$.

对于有边界的世界面, 在作用量的变分中还有表面项. 具体些, 令坐标区域:

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 \leq \sigma \leq \ell \quad (1.2.26)$$

认为 τ, σ 分别是时间、空间变量, 则

$$\begin{aligned} \delta S_P &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^\ell d\sigma (-\gamma)^{1/2} \delta X^\mu \nabla^2 X_\mu \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (-\gamma)^{1/2} \delta X^\mu \partial^\sigma X_\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\ell} \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

边界项为零使得:

1.

$$\partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, \ell) = 0 \quad (1.2.28)$$

这是 Neumann 边界条件. 更协变的形式为

$$n^a \partial_a X_\mu = 0 \quad \text{on } \partial M \quad (1.2.29)$$

n^a 垂直于边界 ∂M . 开弦的末端在时空中自由运动.

2.

$$X^\mu(\tau, \ell) = X^\mu(\tau, 0), \quad \partial^\sigma X^\mu(\tau, \ell) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) \quad (1.2.30a)$$

$$\gamma_{ab}(\tau, \ell) = \gamma_{ab}(\tau, 0) \quad (1.2.30b)$$

这种场是周期的, 没有边界, 形成闭弦.

这两种条件是与 D 维 Poincaré 不变性与运动方程相容唯一的可能性. NG 和 Polyakov 作用量也许是带有给定对称性的最简单的作用量. 但简单性不是正确的判据, 对称性才是关键.

现在来推广 Polyakov 作用量, 要求对称性被保留, 且是导数的多项式. 整体 Weyl 不变性, 亦即 $\omega(\tau, \sigma) = C$ (C 为常数), 要求作用量中 γ^{ab} 比 γ_{ab} 多一个因子, 以抵消 $(-\gamma)^{1/2}$ 的变分. 额外的上标只能与导数收缩, 所以每一项有两个导数. 坐标不变性与 Poincaré 不变性允许:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} R \quad (1.2.31)$$

其中 R 是 Ricci 标量. 在定域 Weyl 缩放下:

$$(-\gamma')^{1/2} R' = (-\gamma)^{1/2} (R - 2\nabla^2 \omega) \quad (1.2.32)$$

证明

$$\begin{aligned} R' &= \frac{R}{e^{2\omega}} - 2g^{\rho\sigma} \frac{\nabla_\rho \partial_\sigma e^\omega}{e^{3\omega}} + 2g^{\rho\sigma} \frac{(\partial_\rho e^\omega)(\partial_\sigma e^\omega)}{e^{4\omega}} \\ &= \frac{R}{e^{2\omega}} - 2g^{\rho\sigma} \frac{\nabla_\rho \partial_\sigma e^\omega}{e^{3\omega}} - 2g^{\rho\sigma} \frac{(\partial_\sigma \partial_\rho \omega) \omega}{e^{2\omega}} \\ &= \frac{R}{e^{2\omega}} - 2g^{\rho\sigma} \frac{\nabla_\rho e^\omega \partial_\sigma \omega}{e^{3\omega}} - 2g^{\rho\sigma} \frac{(\nabla_\sigma \partial_\rho \omega) \omega}{e^{2\omega}} \end{aligned}$$

而

$$\nabla_\rho e^\omega \partial_\sigma \omega = \partial_\rho e^\omega \partial_\sigma \omega - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda e^\omega \partial_\lambda \omega = (-\nabla_\rho \partial_\sigma \omega - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \partial_\lambda \omega) e^\omega$$

那么后两项变成:

$$\frac{-2g^{\rho\sigma}}{e^{2\omega}} \left(-\nabla_\rho \partial_\sigma \omega - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \partial_\lambda \omega + \omega \nabla_\sigma \partial_\rho \omega \right)$$

(1.2.32) 中, 变分是一个全导数, 因为对于任意 v^a , 有 $(-\gamma)^{1/2} \nabla_a v^a = \partial_a [(-\gamma)^{1/2} v^a]$.

(1.2.31) 对于无边界的世界面是不变的. 有边界则多一个表面项.

可将 χ 写进作用量:

$$\begin{aligned} S'_P &= S_P - \lambda\chi \\ &= - \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \left(\frac{1}{4\pi\alpha'} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + \frac{\lambda}{4\pi} R \right) \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

这是最普遍的 (diff \times Weyl)-不变以及 Poincaré 不变作用量. S'_P 看起来像 (引力) 度规的 Hilbert 作用量 $\int (-\gamma)^{1/2} R$ 与 D 个无质量标量场的最小耦合. 然而 2 维中, Hilbert 作用量仅依赖于世界面的拓扑, 它的变分是 $R_{ab} - \frac{1}{2}\gamma_{ab}R$. 在 2 维情况, 曲率张量的对称性暗示着 $R_{ab} = \frac{1}{2}\gamma_{ab}R$. Hilbert 作用量在度规的连续变换下不变, 但却有整体效应.

注 在 2 维下 $R = \gamma^{ab}R_{ab}$, $\gamma\gamma_{ab}R = \gamma_{ab}\gamma^{ab}R_{ab} = 2R_{ab}$.

1.3 开弦频谱

引入时空中的光锥坐标

$$x^\pm = 2^{-1/2} (x^0 \pm x^1), \quad x^i, \quad i = 2, \dots, D-1 \quad (1.3.1)$$

时空坐标写为 X^μ , 世界面上的场写为 $X^\mu(\tau, \sigma)$. 在这些坐标下, 度规为

$$a^\mu b_\mu = -a^+ b^- - a^- b^+ + a^i b^i \quad (1.3.2a)$$

$$a_- = -a^+, \quad a_+ = -a^-, \quad a_i = a^i \quad (1.3.2b)$$

令世界面上的参量 τ 为时空坐标 X^+ . 那么 X^+ 会扮演时间的角色, p^- 则是能量. 纵向分量 X^-, p^+ 就像空间坐标和动量, 就像横向的 X^i, p^i . 从点粒子开始, 利用 S'_{pp} . 通过下式固定世界线的参量形式:

$$X^+(\tau) = \tau \quad (1.3.3)$$

于是作用量变成

$$S'_{pp} = \frac{1}{2} \int d\tau \left(-2\eta^{-1} \dot{X}^- + \eta^{-1} \dot{X}^i \dot{X}^i - \eta m^2 \right) \quad (1.3.4)$$

注 这里使用了 $\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu = -\dot{X}^+ \dot{X}^- - \dot{X}^+ \dot{X}^- + \dot{X}^i \dot{X}^i = -2\dot{X}^- + \dot{X}^i \dot{X}^i$
正则动量 $p_\mu = \partial L / \partial \dot{X}^\mu$ 为

$$p_- = -\eta^{-1}, \quad p_i = \eta^{-1} \dot{X}^i \quad (1.3.5)$$

利用度规 $p^i = p_i, p^+ = -p_-$, 那么哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= p_- \dot{X}^- + p_i \dot{X}^i - L \\ &= -\eta^{-1} \dot{X}^- + \eta p_i p^i + \eta^{-1} \dot{X}^- - \frac{1}{2} \eta p_i p_i + \frac{1}{2} \eta m^2 \\ &= \frac{p^i p_i + m^2}{2\eta^{-1}} = \frac{p^i p_i + m^2}{2p^+} \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

没有 $p_+ X^+$ 项是因为 X^+ 不是动力学变量. 另外, η 没有出现在作用量中. 所以 $p_\eta = 0$. 由于 $\eta = -1/p_-$, 我们不应把 η 处理为独立的正则坐标.

为了量子化, 给动力学场施加正则对易子

$$[p_i, X^j] = -i\delta_i^j, \quad [p_-, X^-] = -i \quad (1.3.7)$$

动量本征态 $|k_-, k^i\rangle$ 构成完全集. 剩余的动量分量由其他量决定. 规范选择将 τ 与 X^+ 相

关联, 所以 $H = -p_+ = p^-$. H 与 p_+ 间的负号是由于前者主动, 后者被动. 于是, (1.3.6) 变成相对论质壳条件. 我们已经获得了相对论标量的谱.

转向开弦. 坐标区域 $-\infty < \tau < +\infty, 0 \leq \sigma \leq l$. 选择规范以去掉 Polyakov 的冗余. 令:

$$X^+ = \tau \quad (1.3.8a)$$

$$\partial_\sigma \gamma_{\sigma\sigma} = 0 \quad (1.3.8b)$$

$$\det \gamma_{ab} = -1 \quad (1.3.8c)$$

如何得到上述规范? 首先, 根据 (1.3.8a) 选择 τ . 注意到 $f = \gamma_{\sigma\sigma} (-\det \gamma_{ab})^{-1/2}$ 变换为

$$f' d\sigma' = f d\sigma \quad (1.3.9)$$

定义不变长度 $dl = f d\sigma$. 定义一个点的 σ 坐标正比于从 $\sigma = 0$ 到该点的不变长度. 比例系数由右端点坐标保持 $\sigma = l$ 决定. 在这个坐标系下 $f = dl/d\sigma$ 是独立于 σ 的. 它依赖于 τ . 最终做一 Weyl 变换以满足 (1.3.8c). 由于 f 是 Weyl 不变的, 所以 $\partial_\sigma f$ 依旧为零. 结合 (1.3.8c), 这意味着 $\partial_\sigma \gamma_{\sigma\sigma} = 0$, 所以 (1.3.8b) 也满足.

针对 $\gamma_{\tau\tau}(\tau, \sigma)$, 我们可解出规范条件 (1.3.8c). 由于 $\gamma_{\sigma\sigma}$ 独立于 σ , 所以度规中独立的自由度现在只有 $\gamma_{\sigma\sigma}(\tau)$ 以及 $\gamma_{\sigma\tau}(\tau, \sigma)$. 度规的逆是

$$\begin{bmatrix} \gamma^{\tau\tau} & \gamma^{\tau\sigma} \\ \gamma^{\sigma\tau} & \gamma^{\sigma\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_{\sigma\sigma}(\tau) & \gamma_{\tau\sigma}(\tau, \sigma) \\ \gamma_{\tau\sigma}(\tau, \sigma) & \gamma_{\sigma\sigma}^{-1}(\tau) (1 - \gamma_{\tau\sigma}^2(\tau, \sigma)) \end{bmatrix} \quad (1.3.10)$$

证明

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\tau\tau} & \gamma_{\tau\sigma} \\ \gamma_{\tau\sigma} & \gamma_{\sigma\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{\tau\tau} & \gamma^{\tau\sigma} \\ \gamma^{\tau\sigma} & \gamma^{\sigma\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_{\tau\tau}\gamma_{\sigma\sigma} + \gamma_{\tau\sigma}^2 & \gamma_{\tau\tau}\gamma_{\tau\sigma} + \gamma_{\tau\sigma}\gamma_{\sigma\sigma}^{-1} (1 - \gamma_{\tau\sigma}^2) \\ -\gamma_{\sigma\sigma}\gamma_{\tau\sigma} + \gamma_{\sigma\sigma}\gamma_{\tau\sigma} & \gamma_{\tau\sigma}^2 + 1 - \gamma_{\tau\sigma}^2 \end{bmatrix}$$

然后利用 (1.3.8c) 给出的 $\gamma_{\tau\tau}\gamma_{\sigma\sigma} - \gamma_{\tau\sigma}^2 = -1$.

于是, Polyakov 拉格朗日量变成

$$L = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma \left[\gamma_{\sigma\sigma} (2\partial_\tau x^- - \partial_\tau X^i \partial_\tau X^i) - 2\gamma_{\sigma\tau} (\partial_\sigma Y^- - \partial_\tau X^i \partial_\sigma X^i) + \gamma_{\sigma\sigma}^{-1} (1 - \gamma_{\tau\sigma}^2) \partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i \right] \quad (1.3.11)$$

证明 将 Polyakov 作用量 (1.2.13) 按分量展开

$$L = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma \left[-\gamma_{\sigma\sigma} \underbrace{(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu)}_{(1)} + 2\gamma_{\tau\sigma} \underbrace{(\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)}_{(2)} + \gamma_{\sigma\sigma}^{-1} (1 - \gamma_{\tau\sigma}^2) \underbrace{(\partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu)}_{(3)} \right]$$

其中

$$(1) = -\dot{X}^+ \dot{X}^- - \dot{X}^i \dot{X}^i = -2\partial_\tau X^- + \partial_\tau X^i \partial_\tau X^i$$

$$(2) = -\partial_\tau X^\dagger \partial_\sigma X^- - \partial_\tau X^- \partial_\sigma X^+ + \partial_\tau X^i \partial_\sigma X^i \\ = -\partial_\sigma X^- - \partial_\tau X^- \partial_\sigma \tau + \partial_\tau X^i \partial_\tau X^i = -(\partial_\sigma Y^- - \partial_\tau X^i \partial_\sigma X^i)$$

$$(3) = -\partial_\sigma X^- \partial_\sigma X^+ - \partial_\sigma X^+ \partial_\sigma X^- + \partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i = \partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i$$

证毕.

这里我们将 $X^-(\tau, \sigma)$ 分成两部分 $x^-(\tau)$ 和 $Y^-(\tau, \sigma)$. $x^-(\tau)$ 是 τ 时刻 X^- 的平均值.

$$x^-(\tau) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell d\sigma X^-(\tau, \sigma) \quad (1.3.12a)$$

$$Y^-(\tau, \sigma) = X^-(\tau, \sigma) - x^-(\tau) \quad (1.3.12b)$$

Y^- 不出现在含有时间导数的项中, 因而是非动力学项. 它的作用类似 Lagrange 乘子, 约束 $\partial_\sigma \gamma_{\tau\sigma}$ 为零. 在规范(1.3.8)下, 开弦边界条件(1.2.28)变成

$$\gamma_{\tau\sigma} \partial_\tau X^\mu - \gamma_{\tau\tau} \partial_\sigma X^\mu = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, \ell \quad (1.3.13)$$

证明 $\partial^\sigma X^\mu = \gamma^{\sigma a} \partial_a X^\mu = \gamma^{\sigma\tau} \partial_\tau X^\mu + \gamma^{\sigma\sigma} \partial_\sigma X^\mu = \gamma_{\tau\sigma} \partial_\tau X^\mu + \gamma_{\sigma\sigma}^{-1} (1 - \gamma_{\tau\sigma}^2) \partial_\sigma X^\mu = \gamma_{\tau\sigma} \partial_\tau X^\mu - \gamma_{\tau\tau} \partial_\sigma X^\mu$ 证毕.

对于 $\mu = +$:

$$\gamma_{\tau\sigma} = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, \ell \quad (1.3.14)$$

由于 $\partial_\sigma \gamma_{\tau\sigma} = 0$, $\gamma_{\tau\sigma}$ 在任何地方为零. 对于 $\mu = i$, 边界条件为

$$\partial_\sigma X^i = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, \ell \quad (1.3.15)$$

施加规范条件, 并将 Lagrange 乘子 Y^- 考虑进来, 拉格朗日量为

$$L = -\frac{\ell}{2\pi\alpha'} \gamma_{\sigma\sigma} \partial_\tau x^- + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma \left(\gamma_{\sigma\sigma} \partial_\tau X^i \partial_\tau X^i - \gamma_{\sigma\sigma}^{-1} \partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i \right) \quad (1.3.16)$$

x^- 的共轲动量为

$$p_- = -p^+ = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\tau x^-)} = -\frac{\ell}{2\pi\alpha'} \gamma_{\sigma\sigma} \quad (1.3.17)$$

正如粒子中的 η , $\gamma_{\sigma\sigma}$ 是动量而非坐标. $X^i(\tau, \sigma)$ 的共轲动量密度为

$$\Pi^i = \frac{\delta L}{\delta (\partial_\tau X^i)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \gamma_{\sigma\sigma} \partial_\tau X^i = \frac{p^+}{\ell} \partial_\tau X^i \quad (1.3.18)$$

于是, 哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= p_- \partial_\tau x^- - L + \int_0^\ell d\sigma \Pi_i \partial_\tau X^i \\ &= p_- \partial_\tau x^- - p_- \partial_\tau x^- - \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma \left(\gamma_{\sigma\sigma} \partial_\tau X^i \partial_\tau X^i - \frac{\partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i}{\gamma_{\sigma\sigma}} \right) + \int_0^\ell d\sigma \frac{\ell \Pi_i^2}{p^+} \\ &= \frac{\ell}{4\pi\alpha' p^+} \int_0^\ell d\sigma 4\pi\alpha' \Pi_i^2 - \frac{\gamma_{\sigma\sigma}^{-1}}{4\pi\alpha'} \int_0^\ell d\sigma (2\pi\alpha' \Pi^i)^2 - \partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i \\ &= \frac{\ell}{4\pi\alpha' p^+} \int_0^\ell d\sigma \left(2\pi\alpha' \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i \right) \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

这正是 $D-2$ 个自由场 X^i 的哈密顿量, 其中 p^+ 是守恒量. 运动方程为

$$\partial_\tau x^- = \frac{\partial H}{\partial p_-} = -\frac{\partial H}{\partial p^+} = -\frac{H p^+ \partial(p^+)^{-1}}{\partial p^+} = \frac{H}{p^+}, \quad \partial_\tau p^+ = \frac{\partial H}{\partial x^-} = 0 \quad (1.3.20a)$$

$$\partial_\tau X^i = \frac{\delta H}{\delta \Pi^i} = \frac{\ell}{2p^+} 2\Pi^i = 2\pi\alpha' c \Pi^i, \quad \partial_\tau \Pi^i = -\frac{\delta H}{\delta X^i} = \frac{c}{2\pi\alpha'} \partial_\sigma^2 X^i, \quad (1.3.20b)$$

其中 $c = \ell/(2\pi\alpha' p^+)$. 由此得到波动方程

$$\partial_\tau^2 X^i = c^2 \partial_\sigma^2 X^i \quad (1.3.21)$$

选择 ℓ 使 $c = 1$. 因而 p^+ 守恒, 总弦长 ℓ 不变.

X^\pm 也满足波动方程. X^- 需要一点运算. 在 (1.3.15) 下, 波动方程的一般解为

$$X^i(\tau, \sigma) = x^i + \frac{p^i}{p^+} \tau + i(2\alpha')^{1/2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^i \exp\left(-\frac{\pi i n c \tau}{\ell}\right) \cos \frac{\pi n \sigma}{\ell} \quad (1.3.22)$$

X^i 是实的, 要求 $\alpha_{-n}^i = (\alpha_n^i)^\dagger$. 定义质心变量

$$x^i(\tau) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell d\sigma X^i(\tau, \sigma) \quad (1.3.23a)$$

$$p^i(\tau) = \int_0^\ell d\sigma \Pi^i(\tau, \sigma) = \frac{p^+}{\ell} \int_0^\ell d\sigma \partial_\tau X^i(\tau, \sigma) \quad (1.3.23b)$$

分别是平均质量与总动量. 这些是 Heisenberg 算符. (1.3.22) 中是 Schrodinger 算符 $x^i \equiv x^i(0)$, $p^i \equiv p^i(0)$. 为了量子化, 施加对易关系

$$[x^-, p^+] = i\eta^{-+} = -i \quad (1.3.24a)$$

$$[X^i(\sigma), \Pi^j(\sigma')] = i\delta^{ij} \delta(\sigma - \sigma') \quad (1.3.24b)$$

写成 Fourier 分量形式:

$$[x^i, p^j] = i\delta^{ij} \quad (1.3.25a)$$

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m\delta^{ij} \delta_{m, -n} \quad (1.3.25b)$$

证明 (1.3.24b), (1.3.25a), (1.3.25b) 三式构成因果循环, 知其二, 可推其三. 这里假定知后两个, 证第一个. 引入符号

$$\sum' = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty}$$

根据 (1.3.18) 和 (1.3.22) 可以得到

$$\begin{aligned} \Pi^i(\tau, \sigma) &= \frac{p^i}{\ell} + \frac{p^+}{\ell} i(2\alpha')^{1/2} \sum' \frac{1}{n} \alpha_n^i \left(-\frac{\pi i n c}{\ell}\right) \exp\left(-\frac{\pi i n c \tau}{\ell}\right) \cos \frac{n\pi\sigma}{\ell} \\ &= \frac{p^i}{\ell} + \frac{1}{(2\alpha')^{1/2} \ell} \sum' \alpha_n^i \exp\left(-\frac{\pi i n c \tau}{\ell}\right) \cos \frac{n\pi\sigma}{\ell} \end{aligned} \quad (1.a)$$

其中利用了

$$i(2\alpha')^{1/2} \frac{-i\pi c}{\ell} = \pi(2\alpha')^{1/2} \frac{1}{2\alpha' \pi p^+} = \frac{1}{(2\alpha')^{1/2} p^+}$$

那么

$$[X^i, \Pi^j] = \frac{1}{\ell} [x^i, p^j] + \frac{i}{\ell} \sum_{n,m} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{\pi i n c \tau}{\ell}\right) \cos \frac{n\pi\sigma}{\ell} [\alpha_n^i, \alpha_m^j] \exp\left(-\frac{\pi i m c \tau}{\ell}\right) \cos \frac{m\pi\sigma'}{\ell}$$

令 $[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m\delta_{m, -n}$, 由

$$2\pi\delta(\sigma' - \sigma) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\sigma' - \sigma)} = 1 + \sum' e^{in(\sigma' - \sigma)}$$

后一项变成

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{\ell} \sum' \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{\pi i n c \tau}{\ell}\right) \cos \frac{n \pi \sigma}{\ell} (-n) \exp\left(+\frac{\pi i n c \tau}{\ell}\right) \cos \frac{-n \pi \sigma'}{\ell} \\
& = \frac{i}{\ell} \sum' \cos \frac{n \pi \sigma}{\ell} \cos \frac{n \pi \sigma'}{\ell} \\
& = \frac{i}{4\ell} \sum' \left[e^{i n \pi (\sigma + \sigma') / \ell} + e^{-i n \pi (\sigma + \sigma') / \ell} + e^{i n \pi (\sigma - \sigma') / \ell} + e^{-i n \pi (\sigma - \sigma') / \ell} \right] \\
& = \frac{i}{2\ell} \left(2\pi \delta(\pi(\sigma + \sigma') / \ell) - 1 + 2\pi \delta(\pi(\sigma - \sigma') / \ell) - 1 \right) \\
& = -\frac{i}{\ell} + \frac{i\pi}{\ell} \delta(\pi(\sigma - \sigma') / \ell) = -\frac{i}{\ell} + i\delta(\sigma - \sigma')
\end{aligned}$$

注意 $\delta(\sigma - \sigma') = \delta(\sigma' - \sigma)$, 给出 2 倍; 且 $\sigma, \sigma' > 0$, 使得 $\delta(\pi(\sigma + \sigma') / \ell) = 0$. 再由 $[x^i, p^i] = i$, 可得

$$[X^i, \Pi^i] = i\delta(\sigma - \sigma')$$

证毕.

对于每个 m 和 i , 模式 (mode) 满足谐振子代数

$$\alpha_m^i \sim m^{1/2} a, \quad \alpha_{-m}^i \sim m^{1/2} a^\dagger, \quad m > 0 \quad (1.3.26)$$

其中 $[a, a^\dagger] = 1$. 态 $|0; k\rangle$ (其中 $k = (k^+, k^i)$) 被下降算符湮灭, 是质心动量的本征态:

$$p^+ |0; k\rangle = k^+ |0; k\rangle, \quad p^i |0; k\rangle = k^i |0; k\rangle \quad (1.3.27a)$$

$$\alpha_m^i |0; k\rangle = 0, \quad m > 0 \quad (1.3.27b)$$

一般的态用上升算符作用在 $|0; k\rangle$ 得到:

$$|N; k\rangle = \left[\prod_{i=2}^{D-1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{-n}^i)^{N_{in}}}{(n^{N_{in}} N_{in}!)^{1/2}} \right] |0; k\rangle \quad (1.3.28)$$

独立的态可被质心动量 k^+ 以及 k^i 以及占有数 N_{in} 所标记. 质心动量正是点粒子自由度. 而振子代表无限多个内部自由度. 以时空的观点来看, 每个占有数的选择对应不同的粒子态或自旋. 态 (1.3.28) 构成单个开弦的 Hilbert 空间 \mathcal{H} . 特别地, 态 $|0; 0\rangle$ 动量为零单个弦的基态, 而不是无弦真空态. 我们称后者为 $|\text{vacuum}\rangle$. 出现在它上面的各种算符不能产生或消灭弦, 而只能作用在单个弦的态空间上. n -弦 Hilbert 空间 \mathcal{H}_n 由 n 对空间 (1.3.28) 的乘积构成; 波函数必须是对称的, 这是因为所有这些态是整数自旋 (将证). 在自由极限下, 弦论的整个 Hilbert 空间为

$$\mathcal{H} = |\text{vacuum}\rangle \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots \quad (1.3.29)$$

将 (1.3.22) 代入 (1.3.19), 给出

$$H = \frac{p^i p^i}{2p^+} + \frac{1}{2p^+ \alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + A \right) \quad (1.3.30)$$

证明 首先将弦哈密顿量 (1.3.19) 拆成两部分:

$$H_{\Pi} = \frac{\ell}{2p^+} \int_0^\ell d\sigma \Pi^i \Pi^i, \quad H_X = \frac{\ell}{2p^+ (2\pi\alpha')^2} \int_0^\ell d\sigma \partial_\sigma X^i \partial_\sigma X^i.$$

利用(1.a)可以得到

$$\begin{aligned}
 H_{\Pi} &= \frac{\ell}{2p^+} \int_0^{\ell} d\sigma \left(\frac{p^i p^i}{\ell^2} + \frac{1}{2\alpha' \ell^2} \sum'_{n,m} \alpha_n^i \alpha_m^i \exp\left(-\frac{\pi i c \tau}{\ell}(n+m)\right) \cos \frac{n\pi\sigma}{\ell} \cos \frac{m\pi\sigma}{\ell} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2p^i}{(2\alpha')^{1/2} \ell^2} \sum' \alpha_n^i \exp\left(-\frac{\pi i n c \tau}{\ell}\right) \cos \frac{n\pi\sigma}{\ell} \right) \\
 &= \frac{p^i p^i}{2p^+} + \frac{1}{4p^+ \alpha'} \sum'_{n,m} \alpha_n^i \alpha_m^i \exp\left(-\frac{\pi i c \tau}{\ell}(n+m)\right) (\delta_{n,m} + \delta_{n,-m})/2
 \end{aligned}$$

利用(1.3.22)可得

$$\partial_{\sigma} X^i = -\frac{i(2\alpha')^{1/2} \pi}{\ell} \sum' \alpha_n^i \exp\left(-\frac{\pi i n c \tau}{\ell}\right) \sin \frac{n\pi\sigma}{\ell},$$

那么

$$\begin{aligned}
 H_X &= \frac{\ell}{2p^+ (2\pi\alpha')^2} \frac{-2\alpha' \pi^2}{\ell^2} \int_0^{\ell} d\sigma \sum'_{n,m} \alpha_n^i \alpha_m^i \exp\left(-\frac{\pi i c \tau}{\ell}(n+m)\right) \sin \frac{n\pi\sigma}{\ell} \sin \frac{m\pi\sigma}{\ell} \\
 &= -\frac{1}{4p^+ \alpha'} \sum'_{n,m} \alpha_n^i \alpha_m^i \exp\left(-\frac{\pi i c \tau}{\ell}(n+m)\right) (\delta_{n,m} - \delta_{n,-m})/2
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 H &= H_{\Pi} + H_X = \frac{p^i p^i}{2p^+} + \frac{1}{4p^+ \alpha'} \sum'_{n,m} \alpha_n^i \alpha_m^i \exp\left(-\frac{\pi i c \tau}{\ell}(n+m)\right) \delta_{n,-m} \\
 &= \frac{p^i p^i}{2p^+} + \frac{1}{4p^+ \alpha'} \sum_n \alpha_n^i \alpha_{-n}^i
 \end{aligned}$$

而

$$\sum_n \alpha_n^i \alpha_{-n}^i = \sum_{n=-1}^{-\infty} \alpha_n^i \alpha_{-n}^i + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^i \alpha_{-n}^i = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + (D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n$$

因此 $A = (D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n/2 = (D-2)\zeta(-1)/2$. 证毕.

在这个 H 中, 算符的次序是反常的. 我们已将下降算符放在右边, 上升算符放在左边. 常数 A 来源于对易子. 在光锥量子化的细致处理中, 常数的决定方法如下: 光锥规范的选择阻碍了理论的 Lorentz 不变性. 通过寻找生成 Lorentz 变换的算符 $M^{\mu\nu}$, 并验证其与 p^{μ} 以及其他算符是否有正确的代数, 仅有一种情况是符合的, 即 $A = -1$. 相对应的时空维数 $D = 26$.

在光锥量子化时, 我们不希望花太多时间在上面. 我们将用共形规范方法获得 A, D 的值. 它将告诉我们为什么在光锥方法中错误的 A 和 D 会失去 Lorentz 不变性.

首先, 我们认为哈密顿量中的算符序列常数源于对每个振子模的零点能的求和. 对于像 X^{μ} 的玻色场, 则是 $\omega/2$. 而 $\frac{1}{2}\omega (aa^{\dagger} + a^{\dagger}a)$ 和 $\omega (a^{\dagger}a + \frac{1}{2})$ 是等价的. 在 H 中

$$A = \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (1.3.31)$$

$D-2$ 来自对横向的求和. 这个零点能发散. 利用重整化的手段

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \rightarrow -\frac{1}{12} \quad (1.3.32)$$

为了得到这个, 插入光滑截断因子

$$\exp\left(-\epsilon\gamma_{\sigma\sigma}^{-1/2}|k_\sigma|\right) \quad (1.3.33)$$

其中 $k_\sigma = n\pi/\ell$. 因子 $\gamma_{\sigma\sigma}^{-1/2}$ 是为了在 σ 再参量化下不变.

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \exp\left[-\epsilon n (\pi/2p^+ \alpha' \ell)^{1/2}\right] \\ &= \frac{D-2}{2} \left(\frac{2\ell p^+ \alpha'}{\epsilon^2 \pi} - \frac{1}{12} + O(\epsilon) \right) \end{aligned} \quad (1.3.34)$$

截断的第一项正比于弦长 ℓ , 可被正比于 $\int d^2\sigma (-\gamma)^{1/2}$ 的作用量中的抵消项抵消. 事实上 Weyl 不变性要求它被抵消, 仅留下截断无关的第二项

$$A = \frac{2-D}{24} \quad (1.3.35)$$

有限的残余量是 Casimir 能量的例子. 这源于弦长是有限的. 对于点粒子 $p^- = H$, 所以

$$m^2 = 2p^+ H - p^i p^i = \frac{1}{\alpha'} \left(N + \frac{2-D}{24} \right) \quad (1.3.36)$$

其中 N 是能级

$$N = \sum_{i=2}^{D-1} \sum_{n=1}^{\infty} n N_{in} \quad (1.3.37)$$

每个态的质量以激发能级的形式决定. 看一些轻弦态. 最轻的是

$$|0; k\rangle, \quad m^2 = \frac{2-D}{24\alpha'} \quad (1.3.38)$$

如果 $D > 2$, m^2 为负, 这个态是快子. 在场论中, 标量场势能是 $\frac{1}{2}m^2\phi^2$, 所以负的质量平方意味着“无弦”真空实际上是不稳定的, 类似于自发对称性破缺中的对称态. 玻色弦是否有任何稳定的真空是个复杂的问题, 答案依旧是不清楚的. 对于超弦, 则有“无快子”弦论. 我们将继续使用玻色弦为模型发展弦技巧, 而忽视这个不稳定.

弦的最低激发态是激发 $n=1$ 的模 1 次

$$\alpha_{-1}^i |0; k\rangle, \quad m^2 = \frac{26-D}{24\alpha'} \quad (1.3.39)$$

Lorentz 不变性对 D 的要求如下. 对于无质量粒子和有质量粒子, 自旋的分析是不同的. 对于有质量粒子, 在静系下 $p^\mu = (m, 0, \dots, 0)$. 那么内部态构成空间旋转群 $SO(D-1)$ 的一个表示. 对于无质量粒子, 没有静系, 选择系为 $p^\mu = (E, E, 0, \dots, 0)$. 那么 $SO(D-2)$ 作用在横向上使 p^μ 不变, 同样内部态构成群表示. 对于 $D=4$, 有质量粒子被自旋 j 标记, 即 $SO(3)$ 表示, 所以有 $2j+1$ 个态. 无质量粒子由螺旋度 λ 标记, 是在 $SO(2)$ 的单个生成元下的本征态. Lorentz 不变仅要求这一个态, 但 CPT 对称性令 λ 取 $-\lambda$. 在 D 维, 一个有质量粒子有 $D-1$ 个自旋态, 而一个无质量粒子有 $D-2$ 个态. 在第一个能级我们仅发现 $D-2$ 个态 $\alpha_{-1}^i |0; k\rangle$, 所以是无质量的.

$$A = -1, \quad D = 26 \quad (1.3.40)$$

这是突出且重要的结果. 仅当时空维数 $D=26$, 频谱是 Lorentz 不变的. 经典理论对于任何 D 都是 Lorentz 不变的. 但有一个反常, 除了 $D=26$, 量子化不保护 Lorentz 不变性.

光锥量子化挑出两个方向, 留下 $SO(D-2)$ 作用在横向上. 对于横向, 自旋生成元是

$$S^{ij} = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i) \quad (1.3.41)$$

它关于 i, j 反对称, 和 Lorentz 不变性一道禁止了无质量态的零点能常数.

证明 S_{ij} 的定义是 $S_{ij} = \int_0^\ell d\sigma X^i \Pi^j - X^j \Pi^i$. 注意此时 $p_i = 0$, 所以

$$X^i \Pi^j - X^j \Pi^i = \frac{i}{\ell} \sum'_{n,m} \frac{1}{n} \alpha_n^i \alpha_m^j \exp\left(-\frac{\pi i c \tau}{\ell} (n+m)\right) \cos \frac{n\pi\sigma}{\ell} \cos \frac{m\pi\sigma}{\ell} - (i \leftrightarrow j).$$

由此可以得出

$$\begin{aligned} S_{ij} &= i \sum'_{n,m} \frac{1}{n} \alpha_n^i \alpha_m^j \exp\left(-\frac{\pi i c \tau}{\ell} (n+m)\right) (\delta_{n,m} + \delta_{n,-m})/2 - (i \leftrightarrow j) \\ &= i \sum'_n \frac{1}{n} \alpha_n^i \alpha_{-n}^j /2 - (i \leftrightarrow j) \end{aligned}$$

证毕.

对于无质量粒子, 通过选择动量方向为量子化所选择的 1 方向, 整个 $SO(D-2)$ 自旋对称性被凸显出来. 对于有质量粒子, 在光锥量子化的 $SO(D-1)$ 对称性中, 仅有一个 $SO(D-2)$ 子群是显然的. 但这依然是有用的. 在 $SO(D-2)$ 作用在横向方向下, $SO(D-1)$ 的矢量表示破缺成一个不变量和一个 $(D-2)$ -矢量:

$$\mathbf{v} = (v^1, 0, \dots, 0) + (0, v^2, \dots, v^{D-1}) \quad (1.3.42)$$

因而, 如果一个有质量粒子处在 $SO(D-1)$ 的矢量表示中, 当我们考察其在 $SO(D-2)$ 下的变换性质, 我们将看到一个标量和一个矢量. 弦的更高激发态是有质量的, 形成 $SO(D-1)$ 的全表示. 在能级 N , 给定自旋分量 S^{23} 的最大本征值是 N , 是通过用 $\alpha_{-1}^2 + i\alpha_{-1}^3$ 作用 N 次得到的. 因而

$$S^{23} \leq 1 + \alpha' m^2 \quad (1.3.43)$$

不等式中的斜率称为 **Regge 斜率**. 介子共振服从这个形式的线性关系, 即 $\alpha' \sim (1\text{GeV})^{-2}$. 由于这个原因, 弦论最初在 20 世纪 70 年代是作为强作用的理论. 现在, 作为量子引力的理论, α' 在 M_P^{-2} 阶, 有质量粒子的质量在 M_P 阶. 它是如此之大, 以至于在目前实验水平, 这些粒子仅出现在虚态中. 因此, 我们特别关心无质量弦谱. 多数已知粒子有质量, 但和 M_P 比如此小, 所以在一阶近似为零, 而由于小的对称性破缺变成非零.

1.4 闭弦和非定向弦

闭弦的光锥量子化与开弦十分类似. 再一次施加规范条件 (1.3.8a)-(1.3.8c). 在开弦下, 这些完全决定规范. 在闭弦下, 仍有一些额外的坐标自由度:

$$\sigma' = \sigma + s(\tau) \bmod \ell \quad (1.4.1)$$

因为 $\sigma = 0$ 可以选为弦上任意一点, 这个剩余自由度大部分可以被额外的规范条件所固定:

$$\gamma_{\tau\sigma}(\tau, 0) = 0 \quad (1.4.2)$$

即 $\sigma = 0$ 的线与 $\tau = C$ (C 为常数) 的线垂直. 除了一个整体平移外, 这完全决定了线 $\sigma = 0$. 因而, (1.3.8) 与 (1.4.2) 除了 σ 的与 τ 无关的平移外, 固定了所有的规范自由度.

$$\sigma' = \sigma + s \bmod \ell \quad (1.4.3)$$

现在的分析完全平行于开弦: 拉格朗日量, 正则动量, 哈密顿量, 运动方程等. 运动方程的普遍周期解:

$$X^i(\tau, \sigma) = x^i + \frac{p^i}{p^+} \tau + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \times \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_n^i}{n} \exp \left[-\frac{2\pi i n(\sigma + c\tau)}{\ell} \right] + \frac{\tilde{\alpha}_n^i}{n} \exp \left[\frac{2\pi i n(\sigma - c\tau)}{\ell} \right] \right\} \quad (1.4.4)$$

在闭弦中, 有两组独立的振荡解 $\alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^i$, 分别对应沿弦向左和向右运动的波. 在开弦中, 端点处的边界条件将这些混在一起. 独立的自由度又一次是横向振荡及横向与纵向的质心变量:

$$\alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^i, x^i, p^i, x^-, p^+ \quad (1.4.5)$$

并有正则对易子

$$[x^-, p^+] = -i \quad (1.4.6a)$$

$$[x^i, p^j] = i\delta^{ij} \quad (1.4.6b)$$

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m\delta^{ij}\delta_{m,-n} \quad (1.4.6c)$$

$$[\tilde{\alpha}_m^i, \tilde{\alpha}_n^j] = m\delta^{ij}\delta_{m,-n} \quad (1.4.6d)$$

从态 $|0, 0; k\rangle$ 开始, 其有质心动量 k^μ , 并被 $m > 0$ 的 $\alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^i$ 湮灭. 一般态为

$$|N, \tilde{N}; k\rangle = \left[\prod_{i=2}^{D-1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{-n}^i)^{N_{in}} (\tilde{\alpha}_{-n}^i)^{\tilde{N}_{in}}}{(n^{N_{in}} N_{in}! n^{\tilde{N}_{in}} \tilde{N}_{in}!)^{1/2}} \right] |0, 0; k\rangle \quad (1.4.7)$$

质量公式为

$$\begin{aligned} m^2 &= 2p^+ H - p^i p^i \\ &= \frac{2}{\alpha'} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i) + A + \tilde{A} \right] \\ &= \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} + A + \tilde{A}) \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

我们将能级与零点能分为两部分: 向左和向右运动的. 对零点能求和给出:

$$A = \tilde{A} = \frac{2-D}{24} \quad (1.4.9)$$

由于剩余规范自由度, 即 (1.4.3) 的 σ 平移, 还有进一步约束. 生成 σ 平移的算符为

$$\begin{aligned} P &= - \int_0^\ell d\sigma \Pi^i \partial_\sigma X^i \\ &= -\frac{2\pi}{\ell} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i) + A - \tilde{A} \right] \\ &= -\frac{2\pi}{\ell} (N - \tilde{N}) \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

态必须满足

$$N = \tilde{N} \quad (1.4.11)$$

最轻的闭弦态

$$|0, 0; k\rangle, \quad m^2 = \frac{2-D}{6\alpha'} \quad (1.4.12)$$

也是快子. 第一激发态

$$\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0, 0; k\rangle, \quad m^2 = \frac{26-D}{6\alpha'} \quad (1.4.13)$$

正如开弦, 这些态加起来不够 $SO(D-1)$ 的完全表示, 所以能级必须是无质量

$$A = \tilde{A} = -1, \quad D = 26 \quad (1.4.14)$$

态 (1.4.13) 在 $SO(D-2)$ 下像一个 2 阶张量变换. 这是一个可约表示. 它能分解成一个对称的无迹张量与反对称张量, 以及一个标量. 即任何一个张量 e^{ij} 可以分成:

$$e^{ij} = \frac{1}{2} \left(e^{ij} + e^{ji} - \frac{2}{D-2} \delta^{ij} e^{kk} \right) + \frac{1}{2} (e^{ij} - e^{ji}) + \frac{1}{D-2} \delta^{ij} e^{kk} \quad (1.4.15)$$

这 3 个单独的项在旋转下不互相混合.

注

(1.4.15) =

$$\frac{1}{2} \left(\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j + \tilde{\alpha}_{-1}^j \alpha_{-1}^i - \frac{2}{D-2} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^k \right) + \frac{1}{2} \left(\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j - \alpha_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-1}^i \right) + \frac{1}{D-2} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^k$$

在任何能阶下, 除了 $N = \tilde{N}$ 约束之外, N_{in} 与 \tilde{N}_{in} 独立. 因此在 $m^2 = 4(N-1)/\alpha'$ 的闭弦频谱是两对开弦能级 $m^2 = (N-1)/\alpha'$ 的乘积.

2 维 diff 不变性从频谱中移除了两类简正模. 如果我们尝试在没有这个不变性的情况下构建协变理论, 我们将不得不把横向对易子 (1.3.25) 推广为

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n} \quad (1.4.16)$$

Lorentz 不变性迫使类时振子有一负号 (wrong-sign) 对易子.

注 $[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n}$, 所以 $[\alpha_m^0, \alpha_{-m}^0] = -m$, 而 $\alpha_{-m}^0 = \alpha_m^{0\dagger}$. 因为 $\langle 0 | \alpha_m^0 \alpha_{-m}^0 | 0 \rangle = -m \langle 0 | 0 \rangle < 0$, 所以 $\alpha_m^0 | 0 \rangle$ 就是一个负范态.

有奇数次类时激发的态将会有有一个负的范数. 这与量子力学不一致. 事实上, (1.4.16) 的理论比我们所描述的弦论来得要早, 而后者是要求在物理过程中不能产生负范态的情况下被发现的. 对易子 (1.4.16) 诞生于弦论的协变量子化, 而坐标不变性作为约束出现, 用以消除负范态.

在开弦理论中无质量矢量的出现, 以及闭弦中无质量对称张量和反对称张量的出现是显著的. 普遍原理要求无质量矢量与一守恒流耦合, 因而理论有一规范不变性. 在所有基础弦论中, 这是我们无质量规范粒子的第一个例子. 实际上, 这个特殊的规范玻色子称为光子, 不是非常有趣, 因为规范群只是 $U(1)$. 并且该理论中的所有粒子都是中性的. 在第 6 章我们将讨论开弦理论的一个简单推广, 在弦端点增加 Chan-Paton 自由度. 这将导出 $U(n)$, $SO(n)$ 与 $Sp(n)$ 规范群. 类似地, 无质量对称张量粒子必须与守恒对称张量源耦合. 唯一这样的源是能动量张量 (在特殊情况下会有其他可能性, 以一种相容方式与其耦

合要求这个理论有时空坐标不变性)。因此无质量对称张量是引力子, 而广义相对论作为闭弦理论的一小部分被包含其中. 无质量反对称张量称为 2-形式规范玻色子. 在 3.7 节, 我们将看到有一种定域时空对称性与其联系.

在 4 维中, 被 2-方向和 3-方向振子所激发获得的无质量弦态通过螺旋度 $\lambda = S^{23}$ 来识别它们. 光子的 $\lambda = 1$, 引力子 $\lambda = 2$. 闭弦标量和反对称张量给出 $\lambda = 0$ 的态, 它们分别称为伸缩子与轴子.

我们以非定向弦论总结本节. 之前所讨论的都是定向弦论. 我们还没有考虑坐标变换

$$\sigma' = \ell - \sigma, \quad \tau' = \tau \quad (1.4.17)$$

这改变了世界面的方向 (手性). 这个对称性由世界面宇称算符 Ω 生成. 进行 (1.4.17) 两次, 给出恒等式, 因此 $\Omega^2 = 1$, Ω 的本征值是 ± 1 . 从模展开 (1.3.22), (1.4.4) 我们看到, 在开弦中

$$\Omega \alpha_n^i \Omega^{-1} = (-1)^n \alpha_n^i \quad (1.4.18)$$

在闭弦中

$$\Omega \alpha_n^i \Omega^{-1} = \tilde{\alpha}_n^i \quad (1.4.19a)$$

$$\Omega \tilde{\alpha}_n^i \Omega^{-1} = \alpha_n^i \quad (1.4.19b)$$

通过对于基态 $|0; k\rangle, |0, 0; k\rangle$ 固定 $\Omega = +1$, 我们定义 Ω 的相位. 稍后, 我们将看到这个选择是为了 Ω 对于相互作用守恒. 于是

$$\Omega |N; k\rangle = (-1)^N |N; k\rangle \quad (1.4.20a)$$

$$\Omega |N, \tilde{N}; k\rangle = |\tilde{N}, N; k\rangle. \quad (1.4.20b)$$

有一不矛盾的相互作用弦论, 即非定向弦论, 其中仅有 $\Omega = +1$ 的态被保留下来. 专注于无质量态, 开弦光子有 $\Omega = -1$, 因而在非定向理论中被禁止. 作用在闭弦中的无质量张量态, 宇称算符 Ω 令 e^{ij} 变成 e^{ji} . 所以引力子与伸缩子出现在非定向理论中, 而反对称张量则不是. 注意到开弦快子和闭弦快子都在非定向理论中存活, 我们不得不更加努力地移除它们.

再提另外两个在研究相互作用时会出现的约束:

首先, 有可能在只有闭弦的情况下或者闭弦和开弦都有, 而不能只有开弦的情况得到不矛盾的理论. 闭弦总可以在开弦的散射中产生.

第二, 定向或非定向开弦仅能与同类闭弦耦合. 我们列出可能的结合以及它们的无质量频谱. 设 $G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi, A_\mu$ 分别表示引力子, 反对称张量, 伸缩子, 光子. 那么

1. 定向 bosonic 闭弦: $G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi$.
2. 非定向 bosonic 闭弦: $G_{\mu\nu}, \Phi$.
3. 定向 bosonic 闭弦和开弦: $G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi, A_\mu$.
4. 非定向 bosonic 闭弦和开弦: $G_{\mu\nu}, \Phi$

所有的这些都有引力子, 伸缩子及快子. 无质量定向开弦将是 $U(n)$ 规范玻色子, 而无质量非定向开弦将是 $SO(n)$ 或 $Sp(n)$ 规范玻色子.

第二部分

超弦理论以及拓展

第十章 I 型超弦和 II 型超弦

10.1 超共形代数

玻色弦中, 质壳条件

$$p_\mu p^\mu + m^2 = 0 \quad (10.1.1)$$

来自于物理态条件

$$L_0|\psi\rangle = 0, \quad (10.1.2)$$

在闭弦中还得加上 $\tilde{L}_0|\psi\rangle = 0$. 为了得到费米子, 我们需要 Dirac 方程

$$ip_\mu \Gamma^\mu + m = 0. \quad (10.1.3)$$

在玻色弦中, L_0 和 \tilde{L}_0 是能动量张量 (T_B, \tilde{T}_B) 的质心模. 现在我们要引入新的守恒量 T_F 和 \tilde{T}_F , 使得它们的质心模给出 Dirac 方程. 注意到, 时空动量 p^μ 是世界面流 $(\partial X^\mu, \bar{\partial} X^\mu)$ 的质心模, 我们现在期待代数满足

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (10.1.4)$$

的 Γ 矩阵是反对易世界面场 ψ^μ 的质心模.

现在来考察世界面作用量

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial} \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu \right). \quad (10.1.5)$$

XX 的 OPE 是

$$X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(0, 0) \sim -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z|^2. \quad (10.1.6)$$

ψ 和 $\tilde{\psi}$ 分别是全纯和反全纯的, 它们的 OPE 是

$$\psi^\mu(z) \psi^\nu(0) \sim \frac{\eta^{\mu\nu}}{z}, \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \tilde{\psi}^\nu(0) \sim \frac{\eta^{\mu\nu}}{\bar{z}} \quad (10.1.7)$$

世界面超流是

$$T_F(z) = i(2/\alpha')^{1/2} \psi^\mu(z) \partial X_\mu(z), \quad \tilde{T}_F(\bar{z}) = i(2/\alpha')^{1/2} \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \bar{\partial} X_\mu(\bar{z}). \quad (10.1.8)$$

这给出希望的结果: ψ_0^μ 和 $\tilde{\psi}_0^\mu$ 模将满足 Gamma 矩阵代数, 而 T_F 和 \tilde{T}_F 的质心模有 Dirac 算符的形式.

从 OPE 和 Ward 恒等式可以得出: 流

$$j^\eta(z) = \eta(z) T_F(z), \quad \tilde{j}(\bar{z}) = \bar{\eta}(\bar{z}) \tilde{T}_F(\bar{z}) \quad (10.1.9)$$

生成了超共形变换

$$\epsilon^{-1}(2/\alpha')^{1/2} \delta X^\mu(z, \bar{z}) = \eta(z) \psi^\mu(z) + \eta(z)^* \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}), \quad (10.1.10a)$$

$$\epsilon^{-1}(2/\alpha')^{1/2} \delta \psi^\mu(z) = -\eta(z) \partial X^\mu(z), \quad (10.1.10b)$$

$$\epsilon^{-1}(2/\alpha')^{1/2} \delta \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) = -\eta(z)^* \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}). \quad (10.1.10c)$$

这个变换将对易场 X^μ 和反对易场 ψ^μ 和 $\tilde{\psi}^\mu$ 混在了一起, 所以 $\eta(z)$ 必须是反对易参量.

我们现在来考察 T_F, \tilde{T}_F 与 $X, \psi, \tilde{\psi}$ 的 OPE:

(1)

$$\begin{aligned} T_F(w)X^\mu(z, \bar{z}) &= i(2/\alpha')^{1/2}\psi^\nu(w)\partial X_\nu(w)X^\mu(z, \bar{z}) \\ &= i(2/\alpha')^{1/2}\psi^\nu(w)\partial_w\delta_\nu^\mu\left(-\frac{\alpha'}{2}\ln|z-w|^2\right) \\ &= -i(\alpha'/2)^{1/2}\frac{\psi^\mu(w)}{w-z} \end{aligned}$$

类似地可以得到

$$\tilde{T}_F(\bar{w})X^\mu(z, \bar{z}) = -i(\alpha'/2)^{1/2}\frac{\tilde{\psi}^\mu(\bar{w})}{\bar{w}-\bar{z}}$$

利用 Ward 恒等式

$$\frac{1}{i\epsilon}\delta\mathcal{A}(z, \bar{z}) = \text{Res}_{w\rightarrow z} j(w)\mathcal{A}(z, \bar{z}) + \overline{\text{Res}_{\bar{w}\rightarrow\bar{z}} \tilde{j}(\bar{w})\mathcal{A}(z, \bar{z})}$$

得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\epsilon}\delta X(z, \bar{z}) &= \eta(z)\left(-i(\alpha'/2)^{1/2}\psi^\mu(z)\right) + \eta(z)^*\left(-i(\alpha'/2)^{1/2}\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})\right) \\ \epsilon^{-1}(2/\alpha')^{1/2}\delta X(z, \bar{z}) &= \eta(z)\psi^\mu(z) + \eta(z)^*\tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} T_F(w)\psi^\mu(z) &= i(2/\alpha')^{1/2}\psi^\nu(w)\partial X_\nu(w)\psi^\mu(z) \\ &= i(2/\alpha')^{1/2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{w-z}\partial X_\nu(w) \\ &= i(2/\alpha')^{1/2}\frac{\partial X^\mu(w)}{w-z} \end{aligned}$$

利用 Ward 恒等式得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\epsilon}\delta\psi^\mu(z) &= \eta(z)\left(i(2/\alpha')^{1/2}\partial X^\mu(z)\right) \\ \epsilon^{-1}(\alpha'/2)^{1/2}\delta\psi^\mu(z) &= -\eta(z)\partial X^\mu(z) \end{aligned}$$

(3) 类似地, 就得到 (10.1.10c)

两个超共形变换的对易子是共形变换,

$$\delta_{\eta_1}\delta_{\eta_2} - \delta_{\eta_2}\delta_{\eta_1} = \delta_v, \quad v(z) = -2\eta_1(z)\eta_2(z), \quad (10.1.11)$$

类似地, 共形变换和超共形变换的对易子是超共形变换.

首先对 X 验证 (10.1.11), 可知

$$\begin{aligned}\delta_{\eta_1} \delta_{\eta_2} X &= (\alpha'/2)^{1/2} \delta_{\eta_1} (\eta_2(z) \psi^\mu(z) + \eta_2(z)^* \tilde{\psi}^\mu(\bar{z})) \\ &= -(\alpha'/2)^{1/2} (2/\alpha')^{1/2} (\eta_2(z) \eta_1(z) \partial X^\mu(z) + \eta_2(z)^* \eta_1(z)^* \bar{\partial} X^\mu(\bar{z})) \\ &= \eta_1(z) \eta_2(z) \partial X^\mu(z) + \eta_1(z)^* \eta_2(z)^* \bar{\partial} X^\mu(\bar{z})\end{aligned}$$

所以

$$[\delta_{\eta_1}, \delta_{\eta_2}] X = 2\eta_1 \eta_2 \partial X^\mu + 2\eta_1^* \eta_2^* \bar{\partial} X^\mu = \delta_v X$$

参看 (2.4.7).

接下来对 ψ 验证 (10.1.11), 可知

$$\begin{aligned}\delta_{\eta_1} \delta_{\eta_2} \psi^\mu &= -\delta_{\eta_1} (\eta_2(z) \partial X^\mu(z)) = -\eta_2(z) \partial (\delta_{\eta_1} X^\mu(z)) \\ &= -\eta_2(z) \partial (\eta_1(z) \psi^\mu(z) + \eta_1(z)^* \tilde{\psi}^\mu(\bar{z})) \\ &= -\eta_2 \eta_1 \partial \psi^\mu - \eta_2 (\partial \eta_1) \psi^\mu\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}[\delta_{\eta_1}, \delta_{\eta_2}] \psi^\mu &= -\eta_2 \eta_1 \partial \psi^\mu - \eta_2 (\partial \eta_1) \psi^\mu + \eta_1 \eta_2 \partial \psi^\mu + \eta_1 (\partial \eta_2) \psi^\mu \\ &= 2\eta_1 \eta_2 \partial \psi^\mu + \partial (\eta_1 \eta_2) \psi^\mu\end{aligned}$$

由于 ψ 是 $(\frac{1}{2}, 0)$ 场, 这正是 $\delta_v \psi$, 实际是对于权重为 $(h, 0)$ 的 primary 场 \mathcal{O} , 根据 (2.4.16)

$$T(z) \mathcal{O}(w, \bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^2} \mathcal{O}(w, \bar{w}) + \frac{1}{(z-w)} \partial \mathcal{O}(w, \bar{w}) + \dots,$$

那么 Ward 恒等式给出

$$\begin{aligned}\frac{1}{i} \delta_v \mathcal{O} &= \text{Res}_{z \rightarrow w} (i v(z) T(z) \mathcal{O}(w, \bar{w})) \\ \delta_v \mathcal{O} &= -(h(\partial v) \mathcal{O} + v \partial \mathcal{O})\end{aligned}$$

对于 $\tilde{\psi}$ 类似.

现在来考察共形变换和超共形变换的对易子, 首先是 X

$$\begin{aligned}\delta_\eta \delta_v X &= \delta_\eta (-v \partial X - v^* \bar{\partial} X) = -v \partial (\delta_\eta X) - v^* \bar{\partial} (\delta_\eta X) \\ &= -v \partial (\eta \psi + \eta^* \tilde{\psi}) - v^* \bar{\partial} (\eta \psi + \eta^* \tilde{\psi}) \\ &= -v (\partial \eta) \psi - v \eta \partial \psi - v^* (\partial \eta)^* \tilde{\psi} - v^* \eta^* \bar{\partial} \tilde{\psi}\end{aligned}$$

而

$$\delta_v \delta_\eta X = \delta_v (\eta \psi + \eta^* \tilde{\psi}) = \eta (-v \partial \psi - \frac{1}{2} (\partial v) \psi) + \eta^* (-v^* \bar{\partial} \tilde{\psi} - \frac{1}{2} (\partial v)^* \tilde{\psi})$$

所以

$$\begin{aligned}
[\delta_\eta, \delta_v]X &= -v(\partial\eta)\psi - v\eta\partial\psi - v^*(\partial\eta)^*\tilde{\psi} - v^*\eta^*\bar{\partial}\tilde{\psi} \\
&\quad + \eta v\partial\psi + \frac{1}{2}\eta(\partial v)\psi + \eta^*v^*\bar{\partial}\tilde{\psi} + \frac{1}{2}\eta^*(\partial v)^*\tilde{\psi} \\
&= -v(\partial\eta)\psi - v^*(\partial\eta)^*\tilde{\psi} + \frac{1}{2}\eta(\partial v)\psi + \frac{1}{2}\eta^*(\partial v)^*\tilde{\psi} \\
&= \delta_{\eta'}X
\end{aligned}$$

其中

$$\eta' = -v\partial\eta + \frac{1}{2}\eta\partial v$$

对于 ψ

$$\begin{aligned}
\delta_\eta\delta_v\psi &= \delta_\eta(-v\partial\psi + \frac{1}{2}(\partial v)\psi) = -v\partial(\delta_\eta\psi) + \frac{1}{2}(\partial v)\delta_\eta\psi \\
&= -v\partial(\eta\partial X) - \frac{1}{2}(\partial v)\eta\partial X \\
&= -v\eta\partial^2 X - v\partial\eta\partial X - \frac{1}{2}(\partial v)\eta\partial X
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\delta_v\delta_\eta\psi &= \delta_v(\eta\partial X) = \eta\partial(\delta_v X) = \eta\partial(-v\partial X - v^*\bar{\partial}X) \\
&= -\eta\partial v\partial X - \eta v\partial^2 X
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
[\delta_\eta, \delta_v]\psi &= -v\eta\partial^2 X - v\partial\eta\partial X - \frac{1}{2}(\partial v)\eta\partial X + \eta\partial v\partial X + \eta v\partial^2 X \\
&= -v\partial\eta\partial X + \frac{1}{2}(\partial v)\eta\partial X \\
&= \delta_{\eta'}\psi
\end{aligned}$$

对于 $\tilde{\psi}$ 类似.

从上面我们看到共形变换加上超共形变换封闭, 它们合起来构成了超共形代数. 以流的形式, 这意味着 T_F 与 T_B 的 OPE 封闭, 不过这时的 T_B 要加入费米子部分

$$T_B = -\frac{1}{\alpha'}\partial X^\mu\partial X_\mu - \frac{1}{2}\psi^\mu\partial\psi_\mu \quad (10.1.12)$$

它们的 OPE 是

$$T_B(z)T_B(0) \sim \frac{3D}{4z^4} + \frac{2}{z^2}T_B(0) + \frac{1}{z}\partial T_B(0), \quad (10.1.13a)$$

$$T_B(z)T_F(0) \sim \frac{3}{2z^2}T_F(0) + \frac{1}{z}\partial T_F(0), \quad (10.1.13b)$$

$$T_F(z)T_F(0) \sim \frac{D}{z^3} + \frac{2}{z}T_B(0), \quad (10.1.13c)$$

反全纯流有类似的结果. $T_B T_F$ 的 OPE 暗示了 T_F 是权重为 $(\frac{3}{2}, 0)$ 的张量. 每个标量为中性荷贡献 1, 而每个旋量为中心荷贡献 $\frac{1}{2}$, 所以总的中心荷是

$$c = (1 + \frac{1}{2})D = \frac{3}{2}D. \quad (10.1.14)$$

同玻色弦一样, T_B 和 T_F 是态上的约束代数, 它们会从频谱中移去一些态.

更一般的 $N = 1$ 超共形代数是

$$T_B(z)T_B(0) \sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T_B(0) + \frac{1}{z}\partial T_B(0), \quad (10.1.15a)$$

$$T_B(z)T_F(0) \sim \frac{3}{2z^2}T_F(0) + \frac{1}{z}\partial T_F(0), \quad (10.1.15b)$$

$$T_F(z)T_F(0) \sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z}T_B(0), \quad (10.1.15c)$$

对于 T_B , 我们可以将其写成 T_B^X 与 T_B^ψ 的和, 关于 T_B^X 的部分已经在 2.2 节讨论过, 参看 (2.2.11) 和 (2.4.22), 现在只需考察 T_B^ψ .

$$\begin{aligned} T_B^\psi(z)T_B^\psi(w) &= \frac{1}{4} : \psi^\mu(z)\partial_z\psi_\mu(z) :: \psi^\nu(w)\partial_w\psi_\nu(w) : \\ &= -\frac{1}{4}\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-w}\partial_z\partial_w\frac{\eta_{\mu\nu}}{z-w} + \frac{1}{4}\partial_w\frac{\delta_\nu^\mu}{z-w}\partial_z\frac{\delta_\nu^\mu}{z-w} \\ &\quad + \frac{1}{4}\partial_w\frac{\delta_\nu^\mu}{z-w}\partial_z\psi_\mu(z)\psi^\nu(w) - \frac{1}{4}\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-w}\partial_z\psi_\mu(z)\partial_w\psi_\nu(w) \\ &\quad + \frac{1}{4}\partial_z\frac{\delta_\mu^\nu}{z-w}\psi^\mu(z)\partial_w\psi_\nu(w) - \frac{1}{4}\partial_z\partial_w\frac{\eta_{\mu\nu}}{z-w}\psi^\mu(z)\psi^\nu(w) \\ &= \frac{1}{4}\frac{2D}{(z-w)^4} + \frac{1}{4}\frac{-D}{(z-w)^4} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z-w)^2}\partial_z\psi^\mu(z)\psi_\mu(w) \\ &\quad - \frac{1}{4}\frac{1}{(z-w)^2}\psi^\mu(z)\partial_w\psi_\mu(w) - \frac{1}{4}\frac{1}{z-w}\partial_z\psi^\mu(z)\partial_w\psi_\mu(w) \\ &\quad - \frac{1}{4}\frac{-2}{(z-w)^3}\psi^\mu(z)\psi_\mu(w) \\ &= \frac{D}{4(z-w)^4} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z-w)^2}\partial_w\psi^\mu(w)\psi_\mu(w) + \frac{1}{4}\frac{1}{z-w}\partial_w^2\psi^\mu(w)\psi_\mu(w) \\ &\quad - \frac{1}{4}\frac{1}{(z-w)^2}\psi^\mu(w)\partial_w\psi_\mu(w) - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-w)}\partial_w\psi^\mu(w)\partial_w\psi_\mu(w) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-w)^2}\partial_w\psi^\mu\psi_\mu + \frac{1}{4(z-w)}\partial_w^2\psi^\mu\psi_\mu \\ &= \frac{D}{4(z-w)^4} - \frac{1}{(z-w)^2}\psi_\mu\partial_w\psi^\mu - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-w)}(\psi_\mu\partial_w^2\psi^\mu + \partial_w\psi^\mu\partial_w\psi_\mu) \\ &= \frac{D}{4(z-w)^4} + \frac{2T_B^\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T_B^\psi(w)}{z-w} \end{aligned}$$

需要注意的是, 第一个等号后出现负号是因为 ψ 的反对易性, 同样由于反对易性, 所以 $(z-w)^{-3}\psi^\mu(w)\psi_\mu(w)$ 为零, 加上 $T_B^X(x)T_B^X(w)$ 的 OPE, 我们就给出了 (10.1.13a).

接下来证明 (10.1.13b)

$$\begin{aligned}
T_B(z)T_F(w) &= \left(-\frac{1}{\alpha'} \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \partial_z \psi_\mu \right) \left(i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^\nu(w) \partial_w X_\nu(w) \right) \\
&= -i \sqrt{\frac{2}{\alpha'^3}} 2 \partial_z \partial_w \frac{-\alpha'}{2} \ln |z-w|^2 \partial_z X_\mu \psi^\mu(w) \\
&\quad + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{\eta^{\mu\nu}}{z-w} \partial_z \psi_\mu \partial_w X_\nu(w) - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \partial_z \frac{\delta_\mu^\nu}{z-w} \psi^\mu(z) \partial_w X_\nu(w) \\
&= i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(z-w)^2} \partial_z X_\mu \psi^\mu(w) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{z-w} \partial_z \psi_\mu \partial_w X^\mu(w) \\
&\quad + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(z-w)^2} \psi^\nu(z) \partial_w X_\mu(w) \\
&= \frac{3}{2} i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(z-w)^2} \psi^\mu \partial_w X_\mu(w) + i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{z-w} \psi^\mu \partial_w^2 X_\mu(w) \\
&\quad + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{z-w} \partial_w \psi_\mu \partial_w X^\mu(w) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{z-w} \partial_w \psi^\nu(w) \partial_w X_\mu(w) \\
&= \frac{3}{2(z-w)^2} T_F(w) + \frac{i}{z-w} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} (\psi^\mu \partial_w^2 X_\mu(w) + \partial_w \psi_\mu \partial_w X^\mu(w)) \\
&= \frac{3}{2(z-w)^2} T_F(w) + \frac{1}{z-w} \partial T_F(w),
\end{aligned}$$

最后我们来考察 $T_F(z)T_F(w)$

$$\begin{aligned}
T_F(z)T_F(w) &= -(2/\alpha') \psi^\mu(z) \partial X_\mu(z) \psi^\nu(w) \partial X_\nu(w) \\
&= -(2/\alpha') \frac{\eta^{\mu\nu}}{z-w} \partial_z \partial_w [(-\alpha'/2) \eta_{\mu\nu} \ln |z-w|^2] \\
&\quad - (2/\alpha') \frac{\eta^{\mu\nu}}{z-w} \partial X_\mu(z) \partial X_\nu(w) \\
&\quad - (2/\alpha') \psi^\mu(z) \psi^\nu(w) \partial_z \partial_w [(-\alpha'/2) \eta_{\mu\nu} \ln |z-w|^2] \\
&= \frac{D}{(z-w)^3} + \frac{2}{z} T_B^X(w) + \psi^\mu(z) \psi_\mu(w) \frac{1}{(z-w)^2} \\
&= \frac{D}{(z-w)^3} + \frac{2}{z} T_B^X(w) - \psi_\mu(w) \partial_w \psi^\mu(w) \frac{1}{z-w} \\
&= \frac{D}{(z-w)^3} + \frac{2}{z} T_B(w)
\end{aligned}$$

这就证明了 (10.1.13c)

自由 SCFT

反对易 bc 理论加上对易 $\beta\gamma$ 系统会构成自由的 SCFT. 二者的权重分别是

$$h_b = \lambda, \quad h_c = 1 - \lambda, \quad (10.1.16a)$$

$$h_\beta = \lambda - \frac{1}{2}, \quad h_\gamma = \frac{3}{2} - \lambda. \quad (10.1.16b)$$

作用量是

$$S_{BC} = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z (b \bar{\partial} c + \beta \bar{\partial} \gamma), \quad (10.1.17)$$

而 T_B 和 T_F 分别是

$$T_B = (\partial b)c - \lambda \partial(bc) + (\partial \beta)\gamma - \frac{1}{2}(2\lambda - 1)\partial(\beta\gamma), \quad (10.1.18a)$$

$$T_F = -\frac{1}{2}(\partial \beta)c + \frac{2\lambda - 1}{2}\partial(\beta c) - 2b\gamma. \quad (10.1.18b)$$

中心荷是

$$[-3(2\lambda - 1)^2 + 1] + [3(2\lambda - 2)^2 - 1] = 9 - 12\lambda. \quad (10.1.19)$$

当然, 还有相应的反全纯理论.

我们可以预测出超共形鬼有 $\lambda = 2$, 反对易 $(2, 0)$ 鬼 b 对应的是对易 $(2, 0)$ 约束 T_B , 而对易 $(\frac{3}{2}, 0)$ 鬼 β 对应的是反对易 $(\frac{3}{2}, 0)$ 约束 T_F . 鬼场中心荷是 $-26 + 11 = -15$, 这给出了临界维数

$$0 = \frac{3}{2}D - 15 \Rightarrow D = 10. \quad (10.1.20)$$

当 $\lambda = 2$ 时,

$$T_B = (\partial b)c - 2\partial(bc) + (\partial \beta)\gamma - \frac{3}{2}\partial(\beta\gamma), \quad (10.1.21a)$$

$$T_F = (\partial \beta)c + \frac{3}{2}\beta\partial c - 2b\gamma. \quad (10.1.21b)$$

另一个自由 SCFT 是线性伸缩子理论的超对称版. 它依旧有作用量 (10.1.5), 但

$$T_B(z) = -\frac{1}{\alpha'}\partial X^\mu\partial X_\mu + V_\mu\partial^2 X^\mu - \frac{1}{2}\psi^\mu\partial\psi_\mu, \quad (10.1.22a)$$

$$T_F(z) = i(2/\alpha')^{1/2}\psi^\mu\partial X_\mu - i(2\alpha')^{1/2}V_\mu\partial\psi^\mu, \quad (10.1.22b)$$

可以证明它们满足

$$c = \frac{3}{2}D + 6\alpha'V^\mu V_\mu \quad (10.1.23)$$

的 $N=1$ 代数.

$\beta\gamma$ 场的起源

微分同胚不变性 (diffeomorphism) 带来的冗余给出了 bc 鬼场, 当我们引入超对称性, 定域超对称性带来的冗余就给出了 $\beta\gamma$ 鬼场. 为此我们要恢复作用量 (10.1.5) 的微分同胚不变性并使得超对称性定域. 为此我们先恢复世界面的 Minkowski 特征, 这时作用量变成

$$S = - \int d^2\sigma \frac{1}{4\pi\alpha'}(\eta^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu) + \frac{1}{4\pi}(i\bar{\psi}^\mu\rho^a\partial_a\Psi_\mu).$$

其中

$$\rho^0 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho^1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ρ^a 是二维的 Dirac 矩阵, 它满足 $\{\rho^a, \rho^b\} = 2\eta^{ab}$. 而 $\bar{\psi} = \Psi^\dagger\rho^0$, 对于 Majorana 旋量 λ , $\bar{\lambda} = \lambda^T\rho^0$.

很容易验证这个作用量有整体超对称变换:

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon X^\mu &= i(\alpha'/2)^{1/2} \bar{\epsilon} \Psi^\mu \\ \delta_\epsilon \Psi^\mu &= (2\alpha')^{-1/2} \rho^a \partial_a X^\mu \epsilon, \\ \delta_\epsilon \bar{\Psi}^\mu &= -(2\alpha')^{-1/2} \bar{\epsilon} \rho^a \partial_a X^\mu\end{aligned}$$

所以在这个变换下, 作用量的变化是

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon S &= -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \delta_\epsilon \left(\frac{1}{\alpha'} \partial_a X^\mu \partial^a X_\mu + i \bar{\Psi}^\mu \rho^a \partial_a \Psi_\mu \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \frac{2}{\alpha'} \partial_a \delta_\epsilon X^\mu \partial^a X_\mu + i(\delta_\epsilon \bar{\Psi}^\mu) \rho^a \partial_a \Psi_\mu + i \bar{\Psi}^\mu \rho^a \partial_a \delta_\epsilon \Psi_\mu \\ &= -\frac{i(2/\alpha')^{1/2}}{8\pi} \int d^2\sigma 2\partial_a (\bar{\epsilon} \Psi^\mu) \partial^a X_\mu - \bar{\epsilon} \rho^a \partial_a X^\mu \rho^b \partial_b \Psi_\mu + \bar{\Psi}^\mu \rho^a \partial_a (\rho^b \partial_b X^\mu \epsilon) \\ &= -\frac{i(2/\alpha')^{1/2}}{8\pi} \int d^2\sigma 2\partial_a (\bar{\epsilon} \Psi^\mu) \partial^a X_\mu + \partial_b (\bar{\epsilon} \rho^a \partial_a X^\mu) \rho^b \Psi_\mu + \bar{\Psi}^\mu \rho^a \partial_a (\rho^b \partial_b X^\mu \epsilon) \\ &= -\frac{i(2/\alpha')^{1/2}}{8\pi} \int d^2\sigma 2\partial_a (\bar{\epsilon} \Psi^\mu) \partial^a X_\mu + 2\partial_b (\bar{\epsilon} \rho^a \partial_a X^\mu) \rho^b \Psi_\mu \\ &= -\frac{i(2/\alpha')^{1/2}}{4\pi} \int d^2\sigma \partial_a (\bar{\epsilon} \Psi^\mu) \partial^a X_\mu + (\partial_b \bar{\epsilon}) \rho^a \partial_a X^\mu \rho^b \Psi_\mu + \bar{\epsilon} \rho^a \rho^b (\partial_b \partial_a X^\mu) \Psi_\mu \\ &= -\frac{i(2/\alpha')^{1/2}}{4\pi} \int d^2\sigma \partial_a (\bar{\epsilon} \Psi^\mu \partial^a X_\mu) - \bar{\epsilon} \Psi^\mu (\partial_a \partial^a X_\mu) + (\partial_b \bar{\epsilon}) \rho^a \partial_a X^\mu \rho^b \Psi_\mu + \bar{\epsilon} \rho^a \rho^b (\partial_b \partial_a X^\mu) \Psi_\mu \\ &= -\frac{i(2/\alpha')^{1/2}}{4\pi} \int d^2\sigma \partial_a (\bar{\epsilon} \Psi^\mu \partial^a X_\mu) + (\partial_b \bar{\epsilon}) \rho^a \rho^b \Psi_\mu \partial_a X^\mu \\ &= -\frac{i(2/\alpha')^{1/2}}{4\pi} \int d^2\sigma (\partial_b \bar{\epsilon}) \rho^a \rho^b \Psi_\mu \partial_a X^\mu\end{aligned}$$

当 $\bar{\epsilon}$ 是一常数时, 显然有 $\delta_\epsilon S = 0$, 所以称这个变换为整体超对称变换, 而如果要给出定域超对称变换, 那么 $\bar{\epsilon}$ 要是定域参量. 顺带地, 这给出超对称流

$$T_F = i(2/\alpha')^{1/2} \rho^a \rho^b \Psi_\mu \partial_a X^\mu$$

10.2 Ramond 分区和 Neveu-Schwarz 分区

现在在圆柱坐标 $w = \sigma^1 + i\sigma^2$ 上考察 ψ 场, 新增加的要素是周期性, ψ 场作用量是

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2w \left(\psi^\mu \partial_{\bar{w}} \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial_w \tilde{\psi}_\mu \right), \quad (10.2.1)$$

它必须在圆柱的周期等价性 $w \simeq w + 2\pi$ 下不变, 所以 ψ 有两种周期条件,

$$\text{Ramond (R)}: \quad \psi^\mu(w + 2\pi) = +\psi^\mu(w), \quad (10.2.2a)$$

$$\text{Neveu-Schwarz (NS)}: \quad \psi^\mu(w + 2\pi) = -\psi^\mu(w), \quad (10.2.2b)$$

所有 μ 取同一个边界条件, $\tilde{\psi}^\mu$ 也有两种边界条件, 总结一下

$$\psi^\mu(w + 2\pi) = \exp(2\pi i\nu) \psi^\mu(w), \quad (10.2.3a)$$

$$\tilde{\psi}^\mu(\bar{w} + 2\pi) = \exp(-2\pi i\tilde{\nu}) \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}), \quad (10.2.3b)$$

ν 和 $\tilde{\nu}$ 取值 0 和 $\frac{1}{2}$.

X^μ 是周期的, 所有超流的周期性与相应的 ψ 相同,

$$T_F(w + 2\pi) = \exp(2\pi i \nu) T_F(w), \quad (10.2.4a)$$

$$\tilde{T}_F(\bar{w} + 2\pi) = \exp(-2\pi i \tilde{\nu}) \tilde{T}_F(\bar{w}). \quad (10.2.4b)$$

把理论放在圆柱上有四种方式, 每一种给出不同的 Hilbert 空间, 因而有四种闭超弦. 我们记其为 $(\nu, \tilde{\nu})$ 或 NS-NS, NS-R, R-NS, R-R. 相容性将会要求整个弦频谱由每个截面 (sector) 中的态的特定组合构成.

对 $\psi, \tilde{\psi}$ 做 Fourier 展开,

$$\psi^\mu(w) = i^{-1/2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \psi_r^\mu \exp(irw), \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) = i^{-1/2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \tilde{\nu}} \tilde{\psi}_r^\mu \exp(-ir\bar{w}), \quad (10.2.5)$$

现在我们写出它们的 Laurent 展开, 除了要做替换 $\exp(-iw) \rightarrow z$ 外, 还要注意到 ψ 本身的共形权重是 $\frac{1}{2}$,

$$\psi_{z^{1/2}}^\mu(z) = (\partial_z w)^{1/2} \psi_{w^{1/2}}^\mu(w) = i^{1/2} z^{-1/2} \psi_{w^{1/2}}^\mu(w). \quad (10.2.6)$$

Laurent 展开是

$$\psi^\mu(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\psi_r^\mu}{z^{r+1/2}}, \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \tilde{\nu}} \frac{\tilde{\psi}_r^\mu}{\bar{z}^{r+1/2}}. \quad (10.2.7)$$

在 NS 截面中, $z^{-1/2}$ 的分支切割被反周期性抵消了, 而在 R 截面中引入了分支切割. 回忆 X 的展开

$$\partial X^\mu(z) = -i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}}, \quad \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = -i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^{m+1}}, \quad (10.2.8)$$

闭弦中, $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = (\alpha'/2)^{1/2} p^\mu$, 开弦中, $\alpha_0^\mu = (2\alpha')^{1/2} p^\mu$.

正则归一化给出

$$\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \{\tilde{\psi}_r^\mu, \tilde{\psi}_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r,-s}, \quad (10.2.9a)$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m \eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n}. \quad (10.2.9b)$$

T_F 和 T_B 的 Laurent 展开是

$$T_F(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{G_r}{z^{r+3/2}}, \quad \tilde{T}_F(\bar{z}) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \tilde{\nu}} \frac{\tilde{G}_r}{\bar{z}^{r+3/2}}, \quad (10.2.10a)$$

$$T_B(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{L_m}{z^{m+2}}, \quad \tilde{T}_B(\bar{z}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}. \quad (10.2.10b)$$

CFT 围道计算给出模式代数

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n}, \quad (10.2.11a)$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12} (4r^2 - 1) \delta_{r,-s}, \quad (10.2.11b)$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m - 2r}{2} G_{m+r}. \quad (10.2.11c)$$

当 r, s 为整数时, 这被称作 Ramond 代数, 当 r, s 为半整数时, 这被称作 Neveu-Schwarz 代数.

现在给出 (10.2.11b) 和 (10.2.11c) 的证明, 方程 (10.2.10) 给出

$$L_m = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+1} T_B \quad G_r = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{r+1/2} T_F$$

所以

$$\begin{aligned} \{G_r, G_s\} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_0 dw w^{s+1/2} \oint_w dz z^{r+1/2} \left\{ \frac{2c}{3(z-w)^3} + \frac{2T_B(w)}{z-w} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dw w^{s+1/2} \left\{ 2T_B(w) w^{r+1/2} + \frac{c}{3}(r+1/2)(r-1/2) w^{r-3/2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dw \left\{ 2T_B(w) w^{r+s+1} + \frac{c}{12}(4r^2-1) w^{r+s-1} \right\} \\ &= 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2-1) \delta_{r,-s} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} [L_m, G_r] &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_0 dw w^{r+1/2} \oint_w dz z^{m+1} \left\{ \frac{3T_F(w)}{2(z-w)^2} + \frac{\partial T_F(w)}{z-w} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dw w^{r+1/2} \left\{ \frac{3}{2}(m+1) w^m T_F(w) + w^{m+1} \partial T_F(w) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dw \left\{ \frac{3}{2}(m+1) w^{r+m+1/2} T_F(w) + w^{r+m+3/2} \partial T_F(w) \right\} \\ &= \frac{3}{2}(m+1) G_{r+m} - \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dw \left\{ (r+m+3/2) w^{r+m+1/2} T_F(w) \right\} \\ &= \frac{3}{2}(m+1) G_{r+m} - (r+m+3/2) G_{r+m} = \frac{m-2r}{2} G_{m+r}. \end{aligned}$$

每个截面中的超共形生成元是

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-n}^\mu \alpha_{\mu n} + \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \psi_{m-r}^\mu \psi_{\mu r} + a^m \delta_{m,0}, \quad (10.2.12a)$$

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \psi_{\mu r-n} \quad (10.2.12b)$$

a^m 有四种贡献: (1) 从圆柱坐标变换到球坐标, 共形变换给出 $\frac{c}{24} = \frac{D}{16}$.

(2) 每个玻色子的零点能给出 $-\frac{1}{24}$

(3) 每个周期费米子的零点能给出 $+\frac{1}{48}$

(4) 每个反周期费米子的零点能给出 $-\frac{1}{48}$.

所以,

$$\text{R: } a^m = \frac{D}{16}, \quad \text{NS: } a^m = 0. \quad (10.2.13)$$

对于开弦, 使得运动方程中的表面项为零有两种可能性

$$\psi^\mu(0, \sigma^2) = \exp(2\pi i \nu) \tilde{\psi}^\mu(0, \sigma^2), \quad \psi^\mu(\pi, \sigma^2) = \exp(2\pi i \nu') \tilde{\psi}^\mu(\pi, \sigma^2). \quad (10.2.14)$$

重定义 $\tilde{\psi}^\mu \rightarrow \exp(-2\pi i \nu') \tilde{\psi}^\mu$, 这使得 $\nu' = 0$. 因此开弦中只有两种截面, R 和 NS. 我们可以将 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 组合成一个场, 场的取值范围被扩展成 $0 \leq \sigma^1 \leq 2\pi$. 定义

$$\psi^\mu(\sigma^1, \sigma^2) = \tilde{\psi}^\mu(2\pi - \sigma^1, \sigma^2) \quad (10.2.15)$$

其中 $\pi \leq \sigma^1 \leq 2\pi$. 边界条件 $\nu' = 0$ 是自动的, 而 $\tilde{\psi}^\mu$ 的反全纯性给出了扩展 ψ^μ 的全纯

性. $\sigma^1 = 0$ 的边界条件 (10.2.14) 变成了扩展 ψ^μ 的周期性条件.

NS and R spectra

现在考察由一组 NS 模或 R 模生成的频谱.

NS 频谱没有 $r = 0$ 的模, 所以对基态的定义使得它被所有 $r > 0$ 的模湮灭,

$$\psi_r^\mu |0\rangle_{\text{NS}} = 0 \quad r > 0. \quad (10.2.16)$$

$r < 0$ 的模是产生算符, 由于它们反对易, 所以每个 mode 只能激发一次.

R 基态比较有趣, 由于 ψ_0^μ , 它是简并的, 基态定义成被所有 $r > 0$ 的湮灭, ψ_0^μ 满足 Dirac 矩阵代数 (10.1.4), 并有

$$\Gamma^\mu \simeq 2^{1/2} \psi_0^\mu. \quad (10.2.17)$$

由于对于 $r > 0$ 有 $\{\psi_r^\mu, \psi_0^\nu\} = 0$, 所以 ψ_0^μ 将基态变到基. 因此基态构成了 Γ -矩阵代数的表示; 当 $D = 10$ 时, 它的维数是 $32 = 2^{10/2}$. 我们可以取 Lorentz 生成元 S_a 的本征态的基:

$$|s_0, s_1, \dots, s_4\rangle_{\text{R}} \equiv |\mathbf{s}\rangle_{\text{R}}, \quad s_a = \pm \frac{1}{2}. \quad (10.2.18)$$

在开弦的 R 截面中, 所有态都是半整数时空自旋, 这是因为所有产生算符带的是矢量指标 (这里指的是 Lorentz 指标). 在 NS 截面中, 基态被 $S^{\mu\nu}$ 湮灭, 所以它是 Lorentz 单态 (标量), 因此所有其它态都有整数自旋.

在 NS 截面中,

$$S^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) - i \sum_{r=1/2}^{\infty} \psi_{-r}^\mu \psi_r^\nu - \psi_{-r}^\nu \psi_r^\mu$$

Dirac 表示 **32** 可以约化成两个 Weyl 表示 **16** + **16'**, 这两个表示根据它们在下述的本征值加以区分.

在 4 维中, Γ 就是我们熟知的 γ_5 . 它在一般维度 d 中的定义是

$$\Gamma = i^{-k} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{d-1},$$

有如下性质

$$(\Gamma)^2 = 1, \quad \{\Gamma, \Gamma^\mu\} = 0, \quad [\Gamma, \Sigma^{\mu\nu}] = 0.$$

它与 S_a 之间的关系是

$$\Gamma = 2^{k+1} S_0 S_1 \dots S_k$$

所以 (10.2.18) 中的态矢对于 Γ 有两种本征值.

我们希望把这种约化推广到整个弦频谱. 注意到 Γ 与所有 Γ^μ 都反对易, 而 Γ^μ 又是 ψ^μ 的质心模, 所以我们所需要的是与整个 ψ^μ 都反对易的算符. 我们记这个算符为

$$\exp(\pi i F), \quad (10.2.19)$$

其中 F 是世界面费米数. 由于 ψ^μ 造成的 F 的变化是 1, 所以 ψ^μ 与 $\exp(\pi i F)$ 反对易. 现在我们要把 F 写成时空 Lorentz 生成元, 它的原本形式是 $\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]$, 既然 Γ^μ 是 ψ^μ 的零模, 这可以自然地推广到整个 ψCFT ,

$$\Sigma^{\mu\lambda} = -\frac{i}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} [\psi_r^\mu, \psi_{-r}^\lambda]. \quad (10.2.20)$$

现在定义

$$S_a = i^{\delta_{a,0}} \Sigma^{2a, 2a+1}, \quad (10.2.21)$$

并令

$$F = \sum_{a=0}^4 S_a. \quad (10.2.22)$$

在计入鬼场的贡献后, 我们会发现

$$\exp(\pi i F) |0\rangle_{\text{NS}} = -|0\rangle_{\text{NS}}, \quad (10.2.23a)$$

$$\exp(\pi i F) |s\rangle_{\text{R}} = |s'\rangle_{\text{R}} \Gamma_{s's}. \quad (10.2.23b)$$

Closed string spectra

由于自旋 S_a 是加性的, 所以 NS-NS 态为整数自旋 (整数 + 整数), R-R 态为整数自旋 (半整数 + 半整数), NS-R 和 R-NS 则是半整数自旋.

更细致地考察 R-R 截面, 它的基态 $|s, s'\rangle_{\text{R}}$ 在左边和右边都简并. 它们按照两个 Dirac 表示的乘积变换:

$$\begin{aligned} \mathbf{32}_{\text{Dirac}} \times \mathbf{32}_{\text{Dirac}} &= [0] + [1] + [2] + \cdots [10] \\ &= [0]^2 + [1]^2 + \cdots + [4]^2 + [5], \end{aligned} \quad (10.2.24)$$

其中 $[n]$ 代表 n 阶反对称张量, 所以 $[10 - n] = [n]$. 对于闭弦, 有两个世界面费米子数 F 和 \tilde{F} , 在基态上退化至手征矩阵 Γ 和 $\tilde{\Gamma}$. 基态分解参看表 10.1

表 10.1: 无质量 R-R 态的 $SO(9, 1)$ 表示

$(\exp(\pi i F), \exp(\pi i \tilde{F}))$		$SO(9, 1)$ rep.	
$(+1, +1):$	$\mathbf{16} \times \mathbf{16}$	$=$	$[1] + [3] + [5]_+$
$(+1, -1):$	$\mathbf{16} \times \mathbf{16}'$	$=$	$[0] + [2] + [4]$
$(-1, +1):$	$\mathbf{16}' \times \mathbf{16}$	$=$	$[0] + [2] + [4]$
$(-1, -1):$	$\mathbf{16}' \times \mathbf{16}'$	$=$	$[1] + [3] + [5]_-$

10.3 顶点算子和玻色化

考察单位算符. 它所对应的场在原点处全纯, 并且是单值的. 从单值性来看, 单位算符在 NS 截面. 而 ψ 在原点的全纯性意味着, (从 Laurent 展开 (10.2.7) 可以看出), 对应于单位

算符的态满足

$$\psi_r^\mu |1\rangle = 0, r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \quad (10.3.1)$$

因此

$$|1\rangle = |0\rangle. \quad (10.3.2)$$

围道讨论给出映射

$$\psi_{-r}^\mu \rightarrow \frac{1}{(r-1/2)!} \partial^{r-1/2} \psi^\mu(0), \quad (10.3.3)$$

类比 Noether 关系 (2.9.6), NS 算符的超共形变分是

$$\delta_\eta \mathcal{A}(z, \bar{z}) = -\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\partial^n \eta(z) G_{n-1/2} + (\partial^n \eta(z))^* \tilde{G}_{n-1/2} \right] \cdot \mathcal{A}(z, \bar{z}). \quad (10.3.4)$$

由于 Laurent 展开 (10.2.7) 有分支切割, 所以 R 截面的顶点算符比较复杂. 我们要借助玻色化的手段来定义它. 我们先来讨论玻色化.

令 $H(z)$ 是标量场的全纯部分,

$$H(z)H(0) \sim -\ln z. \quad (10.3.5)$$

考察最基础的算符 $e^{\pm iH(z)}$. 它们有 OPE

$$e^{iH(z)} e^{-iH(0)} \sim \frac{1}{z}, \quad (10.3.6a)$$

$$e^{iH(z)} e^{iH(0)} = O(z), \quad (10.3.6b)$$

$$e^{-iH(z)} e^{-iH(0)} = O(z), \quad (10.3.6c)$$

根据 OPE 中的极点和零点, 以及在无穷远处光滑的条件, 我们可以得到一个推广公式 (差一个总的归一化常数):

$$\left\langle \prod_i e^{i\epsilon_i H(z_i)} \right\rangle = \prod_{i<j} z_{ij}^{\epsilon_i \epsilon_j}, \quad \sum_i \epsilon_i = 0. \quad (10.3.7)$$

其中 ϵ_i 是 ± 1 , 但是它对于一般 ϵ 值也是成立的. $\sum \epsilon_i = 0$ 由无穷远处光滑这个条件给出.

现在考察两个 Majorana-Weyl 费米子 $\psi^{1,2}(z)$ 的 CFT, 它们组合成复场,

$$\psi = 2^{-1/2}(\psi^1 + i\psi^2), \quad \bar{\psi} = 2^{-1/2}(\psi^1 - i\psi^2). \quad (10.3.8)$$

它们有如下 OPE

$$\psi(z)\bar{\psi}(0) \sim \frac{1}{z}, \quad (10.3.9a)$$

$$\psi(z)\psi(0) = O(z), \quad (10.3.9b)$$

$$\bar{\psi}(z)\bar{\psi}(0) = O(z), \quad (10.3.9c)$$

注意对于这两个费米场 $\psi^{1,2}$, 我们有 $\psi^i(z)\psi^j(0) \sim \delta_{ij}/z$, 所以

$$\psi(z)\bar{\psi}(0) \sim 2^{-1}(\psi^1(z)\psi^1(0) + \psi^2(z)\psi^2(0)) = 1/z$$

$$\psi(z)\psi(0) \sim 2^{-1}(\psi^1(z)\psi^1(0) - \psi^2(z)\psi^2(0)) = O(z).$$

方程 (10.3.6) 和 (10.3.9) 在形式上相同, 所以我们有

$$\psi(z) \cong e^{iH(z)}, \quad \bar{\psi}(z) \cong e^{-iH(z)} \quad (10.3.10)$$

推广到反全纯部分是很容易的

$$\tilde{\psi}(\bar{z}) \cong e^{i\tilde{H}(\bar{z})}, \quad \tilde{\bar{\psi}}(\bar{z}) \cong e^{-i\tilde{H}(\bar{z})}. \quad (10.3.11)$$

最后为了让这些理论在 CFT 意义下相同, 它们的能动量张量必须相等. 看到这一点的最简单方法是算符积

$$e^{iH(z)}e^{-iH(-z)} = \frac{1}{2z} + i\partial H(0) + 2zT_B^H(0) + O(z^2), \quad (10.3.12a)$$

$$\psi(z)\bar{\psi}(-z) = \frac{1}{2z} + \psi\bar{\psi}(0) + 2zT_B^\psi(0) + O(z^2). \quad (10.3.12b)$$

对于 (10.3.12a), 我们有

$$\begin{aligned} e^{iH(z)}e^{-iH(-z)} &= \frac{1}{2z} : e^{iH(z)}e^{-iH(-z)} : \\ &= \frac{1}{2z} \left\{ \left(1 + i\partial H(0)z - \frac{1}{2}((\partial H(0))^2 - i\partial^2 H(0))z^2 \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(1 + i\partial H(0)z - \frac{1}{2}((\partial H(0))^2 + i\partial^2 H(0))z^2 \right) \right\} + O(z^2) \\ &= \frac{1}{2z} \left(1 + 2zi\partial H(0) - 2z^2(\partial H(0))^2 \right) + O(z^2) \\ &= \frac{1}{2z} + i\partial H(0) + 2zT_B^H(0) + O(z^2) \end{aligned}$$

其中我们有 $T_B^H = -\frac{1}{2}(\partial H(0))^2$

对于 (10.3.12b), 我们有

$$\begin{aligned} \psi(z)\bar{\psi}(-z) &= \frac{1}{2z} + : \psi(z)\bar{\psi}(-z) : \\ &= \frac{1}{2z} + \left(\psi(0) + z\partial\psi(0) \right) \left(\bar{\psi}(0) - z\partial\bar{\psi}(0) \right) \\ &= \frac{1}{2z} + \psi(0)\bar{\psi}(0) + \frac{z}{2}(\partial\psi_1 + i\partial\psi_2)(\psi_1 - i\psi_2) - \frac{z}{2}(\psi_1 + i\psi_2)(\partial\psi_1 - i\partial\psi_2) \\ &= \frac{1}{2z} + \psi(0)\bar{\psi}(0) - \frac{z}{2}(\psi_1 - i\psi_2)(\partial\psi_1 + i\partial\psi_2) - \frac{z}{2}(\psi_1 + i\psi_2)(\partial\psi_1 - i\partial\psi_2) \\ &= \frac{1}{2z} + \psi(0)\bar{\psi}(0) - z(\psi_1\partial\psi_1 + \psi_2\partial\psi_2) \\ &= \frac{1}{2z} + \psi\bar{\psi}(0) + 2zT_B^\psi(0) \end{aligned}$$

其中利用了 ψ 的反对易性, 以及 $T_B^\psi = -\frac{1}{2}\psi^i\partial\psi_i$.

加上 (10.3.10), 这暗示了 H 动量流与 ψ 的数流等价, 以及两个能动量张量等价,

$$\psi\bar{\psi} \cong i\partial H, \quad T_B^\psi \cong T_B^H. \quad (10.3.13)$$

可以验证 e^{iH} 和 ψ 都是 $(\frac{1}{2}, 0)$ 张量.

在理论的算符描述中, 定义

$$\psi(z) \cong \mathbf{g}e^{iH(z)}\mathbf{g}. \quad (10.3.14)$$

从 CBH 公式, 对于等时 $|z| = |z'|$, 我们有

$$\begin{aligned} \circledast e^{iH(z)} \circledast e^{iH(z')} \circledast &= \exp\{-[H(z), H(z')]\} \circledast e^{iH(z')} \circledast e^{iH(z)} \circledast \\ &= - \circledast e^{iH(z')} \circledast e^{iH(z)} \circledast, \end{aligned} \quad (10.3.15)$$

从 $H(z)$ 的模式展开可以得到等时对易子 $[H(z), H(z')] = \pm i\pi$. 因此玻色化算符确实反对易. 特别地, CHB 公式给出等时对易子

$$\begin{aligned} H(z) \circledast e^{iH(z')} \circledast &= \circledast e^{iH(z')} \circledast (H(z) + i[H(z), H(z')]) \\ &= \circledast e^{iH(z')} \circledast (H(z) - \pi \operatorname{sign}(\sigma_1 - \sigma'_1)) \end{aligned} \quad (10.3.16)$$

所以费米场算符在玻色场中产生了一个扭结 (kink).

这种神奇的等价性叫玻色化. 注意这不是一个玻色态与一个费米态之间的简单对应. 例如, 在玻色场中线性的流在费米场中是二次的. 单个玻色子与一个 ψ 费米子和一个 $\bar{\psi}$ 费米子相同. 在 Minkowski 世界面上, 全纯性变成左移 (left-moving), 两个费米子以相同的速度向同一方向移动, 与一个玻色子没有什么分别. 另一方面, 单个费米场由玻色场的指数算符产生, 相干态也是这样.

玻色频谱与费米频谱之间的紧密关系也在配分函数中显示出来. $e^{\pm iH(z)}$ 的算符积生成了带有整数 k_L 的所有算符. 于是, 玻色动量和振子和给出

$$\operatorname{Tr}(q^{L_0}) = \left(\sum_{k_L \in \mathbb{Z}} q^{k_L^2/2} \right) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}. \quad (10.3.17)$$

在费米子理论的 NS 截面中, 振子和给出

$$\operatorname{Tr}(q^{L_0}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2})^2. \quad (10.3.18)$$

由于是费米子, 在每个模式 (mode) 上的占有数只能是 0 或 1, 对于 NS 截面, 第 n 个模式给出 $q^{n-1/2}$, 所以每个模式的贡献是 $(1 + q^{n-1/2})$, 平方是因为有两个费米子.

虽然不显然, 这两个结果等价. 展开这两个乘积给出

$$1 + 2q^{1/2} + q + 2q^{3/2} + 4q^2 + 4q^{5/2} + \dots \quad (10.3.19)$$

(10.3.17) 和 (10.3.18) 等价要用到椭圆函数 $\vartheta_{00}(z, q)$, 它有求和形式和乘积形式

$$\vartheta_{00}(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2} z^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)(1 + zq^{m-1/2})(1 + z^{-1}q^{m-1/2}),$$

令 $z = 1$ 即可.

玻色化可以扩展至 R 截面. 事实上, 我们可以考察更一般的周期性条件

$$\psi(w + 2\pi) = \exp(2\pi i\nu) \psi(w) \quad (10.3.20)$$

其中 ν 是任意实数. 在十维中只有 $\nu = 0, \frac{1}{2}$. Laurent 展开就是之前的形式 (10.2.7),

$$\psi(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}}, \quad \bar{\psi}(z) = \sum_{s \in \mathbb{Z} - \nu} \frac{\bar{\psi}_s}{z^{s+1/2}}. \quad (10.3.21)$$

代数是

$$\{\psi_r, \bar{\psi}_s\} = \delta_{r,-s}. \quad (10.3.22)$$

定义参考态 $|0\rangle_\nu$

$$\psi_{n+\nu}|0\rangle_\nu = \bar{\psi}_{n+1-\nu}|0\rangle_\nu = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10.3.23)$$

Laurent 展开中的一个非零项就是 $r = -1 + \nu$ 和 $s = -\nu$, 所以对于相应的定域算符 \mathcal{A}_ν , OPE 是

$$\psi(z)\mathcal{A}_\nu(0) = O(z^{-\nu+1/2}), \quad \bar{\psi}(z)\mathcal{A}_\nu(0) = O(z^{\nu-1/2}). \quad (10.3.24)$$

条件 (10.3.23) 唯一地找出态 $|0\rangle_\nu$, 所以相应的 OPE (10.3.24) 决定了玻色等价关系

$$\exp[i(-\nu + 1/2)H] \cong \mathcal{A}_\nu. \quad (10.3.25)$$

可以验证它们的权重都是 $h = \frac{1}{2}(\nu - \frac{1}{2})^2$.

边界条件 (10.3.20) 对于 ν 和 $\nu+1$ 相同, 但是 ν 和 $\nu+1$ 的参考态不同. 仅当 $0 \leq \nu \leq 1$ 时, 它才是基态. 当我们变化 ν 时, 态 $|0\rangle_\nu$ 连续变化, 当我们回到 $\nu+1$ 处的原始理论, 根据定义 (10.3.23), 它变成激发态

$$|0\rangle_{\nu+1} = \bar{\psi}_{-\nu}|0\rangle_\nu. \quad (10.3.26)$$

这称为谱流 (*spectral flow*). 对于 R 情况, $\nu = 0$, 有两个简并基态

$$|s\rangle \cong e^{isH}, \quad s = \pm \frac{1}{2}. \quad (10.3.27)$$

对于十维中的超弦, 我们需要 5 个玻色子, H^a , 其中 $a = 0, \dots, 4$, 那么

$$2^{-1/2}(\pm\psi^0 + \psi^1) \cong e^{\pm iH^0} \quad (10.3.28a)$$

$$2^{-1/2}(\psi^{2a} \pm i\psi^{2a+1}) \cong e^{\pm iH^a}, \quad a = 1, \dots, 4. \quad (10.3.28b)$$

R 态 $|s\rangle$ 的顶点算符 Θ_s 是

$$\Theta_s \cong \exp\left[i \sum_a s_a H^a\right]. \quad (10.3.29)$$

这个算符在 ψ^μ 中产生了一个分支切割, 有时被称为自旋场 (*spin field*). 对于闭弦态, 这要与反全纯顶点算符结合, 它用 \tilde{H}^a 构造.

一般的 bcCFT, 它与 ψ 的差距仅在于做了重命名 $\psi \rightarrow b$ 和 $\bar{\psi} \rightarrow c$, 并对能动量做了修正

$$T_B^\lambda = T_B^{(1/2)} - (\lambda - \frac{1}{2})\partial(bc). \quad (10.3.30)$$

等价性 (10.3.13) 给出相应的玻色算符

$$T_B^{(\lambda)} \cong T_B^H - i(\lambda - \frac{1}{2})\partial^2 H. \quad (10.3.31)$$

这与 $V = -i(\lambda - \frac{1}{2})$ 的线性伸缩子 CFT 相同. 有了 V 和 λ 之间的等价性, 线性伸缩子与 bc 理论等价,

$$b \cong e^{iH}, \quad c \cong e^{-iH}. \quad (10.3.32)$$

可以验证它们的中心荷相符

$$c = 1 - 3(2\lambda - 1)^2 = 1 + 12V^2. \quad (10.3.33)$$

场 (10.3.32) 的量纲也是这样, b 是 λ , c 是 $1 - \lambda$, 这与 e^{ikH} 的 $k^2/2 + ikV$ 相同. 流 bc 的非张量行为与 $i\partial H$ 相同. 由于重整化鬼的内积使得 b 和 c 厄米, 玻色场 H 必须是反厄米的. 鬼场的玻色化通常写成厄米场,

$$H \rightarrow i\rho; \quad c \cong e^\rho, \quad b \cong e^{-\rho}, \quad (10.3.34)$$

它的 OPE 与之前相差一个符号.

10.4 超共形鬼场

为了构造 BRST 流, 我们还需要权重分别为 $(\frac{3}{2}, 0)$ 和 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 对易鬼场, 以及相应的反全纯场. 为了使 BRST 流是周期的, β 和 γ 鬼的周期性必须与生成元 T_F 的周期 (10.2.4) 相同. 因此,

$$\beta(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\beta_r}{z^{r+3/2}}, \quad \gamma(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\gamma_r}{z^{r-1/2}}, \quad (10.4.1a)$$

$$b(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{z^{m+2}}, \quad c(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c_m}{z^{m-1}}, \quad (10.4.1b)$$

反全纯场类似. (反) 对易子是

$$[\gamma_r, \beta_s] = \delta_{r,-s}, \quad \{b_m, c_n\} = \delta_{n,-m}. \quad (10.4.2)$$

定义基态 $|0\rangle_{\text{NS,R}}$

$$\beta_r|0\rangle_{\text{NS}} = 0, \quad r \geq \frac{1}{2}, \quad \gamma_r|0\rangle_{\text{NS}} = 0, \quad r \geq \frac{1}{2}, \quad (10.4.3a)$$

$$\beta_r|0\rangle_{\text{R}} = 0, \quad r \geq 0, \quad \gamma_r|0\rangle_{\text{R}} = 0, \quad r \geq 1, \quad (10.4.3b)$$

$$b_m|0\rangle_{\text{NS,R}} = 0, \quad m \geq 0, \quad c_m|0\rangle_{\text{NS,R}} = 0, \quad m \geq 1. \quad (10.4.3c)$$

与玻色情况类似, 我们将 β_0 归到下降算符, 将 γ_0 归到上升算符. 生成元是

$$L_m^g = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (m+n) : b_{m-n} c_n : + \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{1}{2} (m+2r) : \beta_{m-r} \gamma_r : + a^g \delta_{m,0} \quad (10.4.4a)$$

$$G_r^g = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{2} (2r+n) \beta_{r-n} c_n + 2b_n \gamma_{r-n} \right]. \quad (10.4.4b)$$

常数 a^g 是

$$\text{R: } a^g = -\frac{5}{8}, \quad \text{NS: } a^g = -\frac{1}{2}. \quad (10.4.5)$$

Vertex operators

我们从对应单位算符的态出发. 从 Laurent 展开中可以看出这个态在 NS 截面中, 并满足

$$\beta_r|1\rangle = 0, \quad r \geq -\frac{1}{2}, \quad \gamma_r|1\rangle = 0, \quad r \geq \frac{3}{2}. \quad (10.4.6)$$

注意, $|1\rangle$ 的定义使得 $\beta(z), \gamma(z)$ 在 $z = 0$ 处全纯.

这并不是基态 $|0\rangle_{\text{NS}}$: $\gamma_{1/2}$ 湮灭了 $|0\rangle_{\text{NS}}$ 而它的共轭 $\beta_{-1/2}$ 湮灭了 $|1\rangle$. 对于 bc 鬼则是 c_1 和 b_{-1} . 由于反对易模只生成了两个态, 我们就有 $|0\rangle = c_1|1\rangle$. 对于对易鬼事情就没那么简单了: 通过用 $\gamma_{1/2}$ 作用在 $|1\rangle$ 上构造 Fock 空间, 在这个空间中没有一个态有 $|0\rangle_{\text{NS}}$ 的性质. $|0\rangle_{\text{NS}}$ 的定义对于相应的算符 $\delta(\gamma)$ 变成

$$\gamma(z)\delta(\gamma(0)) = O(z), \quad \beta(z)\delta(\gamma(0)) = O(z^{-1}). \quad (10.4.7)$$

(10.4.7) 来自 (10.4.3a), 由于 $r \geq \frac{1}{2}$ 的 γ_r 湮灭了 $|0\rangle_{\text{NS}}$, 所以 $\gamma(z)\delta(\gamma(0))$ 的起始项是 $r = -\frac{1}{2}$, 即 $O(z)$, 对于 β 类似.

记做 $\delta(\gamma)$ 是为了反映出 γ 在这个顶点算符上有单零点.

为了精确描述这个算符, 要再次使用玻色化. 这里的 β 和 γ 显然已经是玻色的, 这里的玻色化是指重写这两个算符. 但这里的玻色化要比反对易 bc 理论的玻色化要复杂些.

从流 $\beta\gamma$ 出发. 算符积是

$$\beta\gamma(z)\beta\gamma(0) \sim -\frac{1}{z^2}, \quad (10.4.8)$$

这与 $\partial\phi$ 相同, 其中 $\phi(z)\phi(0) \sim -\ln z$. 所以有

$$\beta\gamma(z) \cong \partial\phi(z). \quad (10.4.9)$$

流 $\beta\gamma$ 与 β 和 γ 的 OPE 暗示

$$\beta(z) \stackrel{?}{\cong} e^{-\phi(z)} \quad \gamma(z) \stackrel{?}{\cong} e^{\phi(z)}. \quad (10.4.10)$$

回忆 β 和 γ 的 OPE: $\beta(z)\gamma(w) \sim -(z-w)^{-1}$, $\gamma(z)\beta(w) \sim (z-w)^{-1}$. 所以有

$$\begin{aligned} \beta(z)\gamma(z)\beta(w) &\sim \frac{\beta(z)}{z-w} \sim \frac{\beta(w)}{z-w} \\ \beta(z)\gamma(z)\gamma(w) &= \beta(z)\gamma(w)\gamma(z) \sim -\frac{\gamma(w)}{z-w}. \end{aligned}$$

而 ϕ 与 e^ϕ 的 OPE 是

$$\begin{aligned} \phi(z)e^{\phi(w)} &= \phi(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(w)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln(z-w)\phi(w)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= -\ln(z-w) e^{\phi(w)}. \end{aligned}$$

所以有

$$\partial\phi(z)e^{\phi(w)} = \partial_z \left(-\ln(z-w) e^{\phi(w)} \right) = -\frac{e^{\phi(w)}}{z-w}$$

翻译到 $\beta\gamma$ 这就是 $\beta(z)\gamma(z)\gamma(w)$ 的 OPE.

玻色化 (10.4.10) 给出的 OPE 是

$$\beta(z)\beta(0) \stackrel{?}{=} O(z^{-1}), \quad \beta(z)\gamma(0) \stackrel{?}{=} O(z^1), \quad \gamma(z)\gamma(0) \stackrel{?}{=} O(z^{-1}), \quad (10.4.11)$$

这是错误的 OPE, 正确的 OPE 是

$$\beta(z)\beta(0) = O(z^0), \quad \beta(z)\gamma(0) = O(z^{-1}), \quad \gamma(z)\gamma(0) = O(z^0). \quad (10.4.12)$$

为了修复这个 OPE, 我们需要额外的因子

$$\beta(z) \cong e^{-\phi(z)} \partial \xi(z), \quad \gamma(z) \cong e^{\phi(z)} \eta(z). \quad (10.4.13)$$

为了不破坏 β 和 γ 与流 $\beta\gamma$ 的 OPE, 新的场必须与 ϕ 退耦, 我们需要 η 和 ξ 满足

$$\eta(z)\xi(0) \sim \frac{1}{z}, \quad \eta(z)\eta(0) = O(z), \quad \partial \xi(z)\partial \xi(0) = O(z). \quad (10.4.14)$$

这表明 $\eta\xi$ 理论是 bc 型的 CFT.

还需研究的是能动量张量. 我们暂时先考察一般的 $\beta\gamma$ 系统, β 权重为 λ' . OPE 是

$$T(z)\beta\gamma(0) = \frac{1-2\lambda'}{z^3} + \cdots, \quad (10.4.15)$$

它决定了 ϕ 的能动量张量,

$$T_B^\phi = -\frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi + \frac{1}{2}(1-2\lambda')\partial^2\phi. \quad (10.4.16)$$

我们先来证明 (10.4.15)

$$\begin{aligned} T(z)\beta\gamma(w) &= [(\partial\beta(z))\gamma(w) - \lambda'\partial(\beta\gamma(z))]\beta\gamma(w) \\ &= (\partial\beta(z))\gamma(w)\beta(w) - \lambda'\partial(\beta\gamma(z))\beta\gamma(w) \\ &\sim \partial_z\left(-\frac{1}{z-w}\right)\frac{1}{z-w} - \lambda'\partial_z\left(-\frac{1}{(z-w)^2}\right) \\ &= \frac{1-2\lambda'}{(z-w)^3} \end{aligned}$$

我们有 OPE

$$\partial^2\phi(z)\partial\phi(w) \sim \partial_z^2\partial_w(-\ln(z-w)) = \frac{2}{(z-w)^3}$$

所以 T_B^ϕ 第二项的系数是 $(1-2\lambda')/2$.

因此, 玻色化 (10.4.13) 中的指数分别有权重 $\lambda' - 1$ 和 $-\lambda'$.

我们先来计算 $e^{-\phi(w)}$ 的权重

$$\begin{aligned} T_B^\phi(z)e^{-\phi(w)} &= -\frac{1}{2}(\partial\phi(z))^2e^{-\phi(w)} + \frac{1}{2}(1-2\lambda')\partial^2\phi(z)e^{-\phi(w)} \\ &\sim -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(\partial\phi(z))^2\frac{(-\phi(w))^n}{n!} + \frac{1}{2}(1-2\lambda')\partial_z^2\left[\ln(z-w)e^{-\phi(w)}\right] \\ &= -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(\partial_z\ln(z-w))^2\frac{(-\phi(w))^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{1}{2}(1-2\lambda')\frac{e^{-\phi(w)}}{(z-w)^2} \\ &\sim -\frac{e^{-\phi(w)}}{2(z-w)^2} - \frac{1}{2}(1-2\lambda')\frac{e^{-\phi(w)}}{(z-w)^2} \\ &= (\lambda'-1)\frac{e^{-\phi(w)}}{(z-w)^2} \end{aligned}$$

对于 $e^{\phi(w)}$ 类似.

由于 β 和 γ 的权重分别是 λ' 和 $1 - \lambda'$, 所以 η 和 ξ 的权重分别是 1 和 0: 这是 $\lambda = 1$ 的 bc 系统, 我们就有

$$T_B^{\eta\xi} = -\eta\partial\xi \quad (10.4.17)$$

和

$$T_B^{\beta\gamma} \cong T_B^\phi + T_B^{\eta\xi}. \quad (10.4.18)$$

可以验证, T_B^ϕ 的中心荷是 $3(2\lambda' - 1)^2 + 1$, 而 $T_B^{\eta\xi}$ 的则是 -2 , 加起来正好是 $\beta\gamma$ 的 $3(2\lambda' - 1)^2 - 1$.

如果需要, 可以进一步将 $\eta\xi$ 理论表示成一个自由玻色子, 一般记做 χ , 有 $\chi(z)\chi(0) \sim \ln z$. 因此

$$\eta \cong e^{-\chi}, \quad \xi \cong e^{\chi}, \quad (10.4.19a)$$

$$\beta \cong e^{-\phi+\chi}\partial\chi, \quad \gamma \cong e^{\phi-\chi}. \quad (10.4.19b)$$

能动量张量是

$$T_B = -\frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi + \frac{1}{2}\partial\chi\partial\chi + \frac{1}{2}(1 - 2\lambda')\partial^2\phi + \frac{1}{2}\partial^2\chi. \quad (10.4.20)$$

对于弦, $\lambda' = \frac{3}{2}$. $\delta(\gamma)$ 的性质 (10.4.7) 给出了玻色化

$$\delta(\gamma) \cong e^{-\phi}, \quad h = \frac{1}{2}. \quad (10.4.21)$$

那么, 快子顶点算符和无质量 NS 顶点算符的费米部分分别是

$$e^{-\phi}, \quad e^{-\phi}e^{\pm iH^a}. \quad (10.4.22)$$

当 $\lambda' = \frac{3}{2}$, 指数 $e^{l\phi}$ 的权重是 $-\frac{1}{2}l^2 - l$.

与 $|0\rangle_R$ 对应的算符 Σ 满足

$$\beta(z)\Sigma(0) = O(z^{-1/2}), \quad \gamma(z)\Sigma(0) = O(z^{1/2}). \quad (10.4.23)$$

这给出

$$\Sigma = e^{-\phi/2}, \quad h = \frac{3}{8}. \quad (10.4.24)$$

加上 bc 鬼的贡献 -1 , $e^{-\phi/2}$ 和 $e^{-\phi}$ 的权重与 (10.4.5) 相符. 那么 R 基态顶点算符就是

$$\mathcal{V}_s = e^{-\phi/2}\Theta_s, \quad (10.4.25)$$

其中 Θ_s 是方程 (10.3.29) 定义的自旋场.

我们需要扩展世界面费米数 F 的定义, 使得它对于 β 和 γ 是奇数. 根本原因是 F 与 T_F 反对易, 而我们需要 F 与 BRST 流反对易, BRST 流中又含有 γT_F 这样的项. F 的自然定义就是流 (10.4.9) 带的荷, 这个荷对于 $e^{l\phi}$ 是 l . 这解释了方程 (10.2.23) 中的鬼场贡献. 注意到, 由于鬼场的自旋-统计关系是错误的, 这个定义基于自旋而非统计; 因此称 F 为世界面旋量数更恰当些.

完整起见, 我们给出自由场指数的上闭链的一般表达式. 一般而言, 我们有算符

$$\exp(ik_L \cdot H_L + ik_R \cdot H_R), \quad (10.4.26)$$

动量 k 在某个晶格 Γ 上取值. 自然地想, 算符积有相位 $z^{-k \circ k'}$, 其中 $k \circ k' = k_L \cdot k'_L - k_R \cdot k'_R$.

当 $k \circ k'$ 是奇数时, 顶点算符反对易. 修正顶点算符定义成

$$C_k(\alpha_0) \circ \exp(ik_L \cdot H_L + ik_R \cdot H_R) \circ \quad (10.4.27)$$

上闭链 C_k 定义如下. 取 Γ 的一组基矢 k_α ; 即, Γ 由整系数线性组合 $n_\alpha k_\alpha$ 构成. 类似地, 将零模算符的矢量写在这组基下, $\alpha_0 = \alpha_{0\alpha} k_\alpha$. 那么对于 $k = n_\alpha k_\alpha$,

$$C_k(\alpha_0) = \exp\left(\pi i \sum_{\alpha > \beta} n_\alpha \alpha_{0\beta} k_\alpha \circ k_\beta\right). \quad (10.4.28)$$

这推广了简单情况 (8.2.22). 可以验证 $k \circ k$ 为偶数的顶点算符现在与所有算符对易, 而那些 $k \circ k$ 为奇数的顶点算符彼此反对易. 注意, 上闭链对顶点算符与其自身对易性没有影响, 所以, 如果 $k \circ k$ 是偶数, 指数肯定是玻色的, 如果 $k \circ k$ 是奇数, 指数肯定是费米的.

10.5 物理态

在玻色弦中, 我们将共形代数用作态的约束. 在超弦中, 我们就需要把超共形代数用作约束.

OCQ

我们从开弦出发, 附加物理态条件

$$L_n^m |\psi\rangle = 0, \quad n > 0, \quad G_r^m |\psi\rangle = 0, \quad r \geq 0. \quad (10.5.1)$$

上标 “m” 是指每个生成元的物质部分. 同时还存在等价关系

$$L_n^m |\chi\rangle \cong 0, \quad n < 0, \quad G_r^m |\chi\rangle \cong 0, \quad r < 0. \quad (10.5.2)$$

质量壳条件总可以写成物质 Virasoro 生成元加上鬼场 Virasoro 生成元, 有总的中心荷为零, 这与世界面哈密顿 H 相同:

$$L_0 |\psi\rangle = H |\psi\rangle = 0. \quad (10.5.3)$$

在 10 维平坦时空中, 这是

$$H = \begin{cases} \alpha' p^2 + N - \frac{1}{2} & \text{(NS)} \\ \alpha' p^2 + N & \text{(R)} \end{cases}. \quad (10.5.4)$$

鬼场与纵向的零点能抵消了, 剩下的是横向模的贡献

$$\text{NS: } 8 \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{48} \right) = -\frac{1}{2}, \quad \text{R: } 8 \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{24} \right) = 0. \quad (10.5.5)$$

对于快子和无质量能级, 我们只需要如下的项

$$G_0^m = (2\alpha')^{1/2} p_\mu \psi_0^\mu + \cdots, \quad (10.5.6a)$$

$$G_{\pm 1/2}^m = (2\alpha')^{1/2} p_\mu \psi_{\pm 1/2}^\mu + \cdots, \quad (10.5.6b)$$

NS 截面很像玻色弦. 最低的态是 $|0; k\rangle_{\text{NS}}$. 唯一的非平庸条件来自 L_0 , 它给出

$$m^2 = -k^2 = -\frac{1}{2\alpha'}. \quad (10.5.7)$$

这个态是快子. 它有 $\exp(\pi i F) = -1$. 第一激发态是

$$|e; k\rangle_{\text{NS}} = e \cdot \psi_{-1/2} |0; k\rangle_{\text{NS}}. \quad (10.5.8)$$

非平庸的物理态条件是

$$0 = L_0 |e; k\rangle_{\text{NS}} = \alpha' k^2 |e; k\rangle_{\text{NS}}, \quad (10.5.9a)$$

$$0 = G_{1/2}^{\text{m}} |e; k\rangle_{\text{NS}} = (2\alpha')^{1/2} k \cdot e |e; k\rangle_{\text{NS}}, \quad (10.5.9b)$$

而

$$G_{-1/2}^{\text{m}} |0; k\rangle_{\text{NS}} = (2\alpha')^{1/2} k \cdot \psi_{-1/2} |0; k\rangle_{\text{NS}}, \quad (10.5.10)$$

这是 null 态. 因此

$$k^2 = 0, \quad e \cdot k = 0, \quad e^\mu \cong e^\mu + k^\mu. \quad (10.5.11)$$

这个态是无质量的, 半单位的激发抵掉了零点能, 并有 $\exp(\pi i F) = +1$.

注意, 这时玻色部分 X 的上升算符 α 提供一个单位的激发, 它给出的是有质量的激发态.

在 R 截面, 最低的态是

$$|u; k\rangle_{\text{R}} = |s; k\rangle_{\text{R}} u_s. \quad (10.5.12)$$

这里的 u_s 是极化, 暗含了对 s 的求和. 平庸的物理态条件是

$$0 = L_0 |u; k\rangle_{\text{R}} = \alpha' k^2 |u; k\rangle_{\text{R}}, \quad (10.5.13a)$$

$$0 = G_0^{\text{m}} |u; k\rangle_{\text{R}} = \alpha'^{1/2} |s'; k\rangle_{\text{R}} k \cdot \Gamma_{s's} u_s. \quad (10.5.13b)$$

由于 R 截面中的零点能为零, 所以基态是无质量的. G_0^{m} 给出无质量 Dirac 方程

$$k \cdot \Gamma_{s's} u_s = 0, \quad (10.5.14)$$

这是我们引入超共形代数的原始目标. 由于在临界维数 $G_0^2 = L_0$, 并且 G_0 的鬼场湮灭鬼场真空, 所以 G_0^{m} 条件就给出了 L_0 条件.

在十维中, 无质量粒子态根据它们在 $SO(8)$ 旋转下的行为被分类. 取 $k_0 = k_1$ 的坐标系. 在 NS 截面中, 无质量态只有 8 个横向极化方向, 构成了 $SO(8)$ 的矢量表示 $\mathbf{8}_v$. 在 R 截面中, 无质量 Dirac 算符变成

$$k_0 \Gamma^0 + k_1 \Gamma^1 = -k_1 \Gamma^0 (\Gamma^0 \Gamma^1 - 1) = -2k_1 \Gamma^0 (S_0 - \frac{1}{2}). \quad (10.5.15)$$

那么物理态条件是

$$(S_0 - \frac{1}{2}) |s, 0; k\rangle_{\text{R}} u_s = 0, \quad (10.5.16)$$

所以只有那些 $s_0 = +\frac{1}{2}$ 的态留下来了. 我们在 $SO(9, 1) \rightarrow SO(1, 1) \times SO(8)$ 下有分解

$$\mathbf{16} \rightarrow (+\frac{1}{2}, \mathbf{8}) + (-\frac{1}{2}, \mathbf{8}'), \quad (10.5.17a)$$

$$\mathbf{16}' \rightarrow (+\frac{1}{2}, \mathbf{8}') + (-\frac{1}{2}, \mathbf{8}), \quad (10.5.17b)$$

因此 Dirac 方程留下了 $\exp(\pi i F) = +1$ 的 $\mathbf{8}$ 和 $\exp(\pi i F) = -1$ 的 $\mathbf{8}'$.

快子态和无质量态总结在表 10.2 中. 开弦频谱有四个截面, 对应于周期 ν 和世界面费

米子数 $\exp(\pi i F)$. 我们用 $\text{NS}\pm$ 和 $\text{R}\pm$ 来标记这些截面. 相容性会要求我们只保留截面的特定子集, 并且确实存在无快子的相容弦论.

表 10.2: 无质量弦态和快子弦态

截面	$SO(8)$ 自旋	m^2
NS+	$\mathbf{8}_v$	0
NS-	$\mathbf{1}$	$-1/2\alpha'$
R+	$\mathbf{8}$	0
R-	$\mathbf{8}'$	0

Closed string spectrum

闭弦就是两倍的开弦, 只不过动量重标度为 $k \rightarrow \frac{1}{2}k$. $\nu, \tilde{\nu}$ 取值为 0 或 $\frac{1}{2}$, 质壳条件可以总结为

$$\frac{\alpha'}{4}m^2 = N - \nu = \tilde{N} - \tilde{\nu}. \quad (10.5.18)$$

将左移态和右移态组合起来就可获得快子和无质量闭弦频谱, 其中左移态和右移态满足等式 (10.5.18).

(NS-, NS-) 截面包含 $m^2 = -2/\alpha'$ 的闭弦快子. 在无质量能级, 将表 10.2 中不同的无质量左移态和右移态组合起来会给出表 10.3 中给出的 $SO(8)$ 表示. 由于能级匹配条件, NS- 截面不能与其它三个截面匹配. 和玻色弦相同, 矢量乘矢量分解成一个标量, 一个反对称张量和一个无迹对称张量, 我们把无迹对称张量记做 (2).

表 10.3: 无质量闭弦能级中出现的 $SO(8)$ 表示的乘积. R-NS 截面与 NS-R 截面相同.

截面	$SO(8)$ 自旋	张量	维数
(NS+, NS+)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v$	$= [0] + [2] + (2)$	$= \mathbf{1} + \mathbf{8} + \mathbf{35}$
(R+, R+)	$\mathbf{8} \times \mathbf{8}$	$= [0] + [2] + [4]_+$	$= \mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}_+$
(R+, R-)	$\mathbf{8} \times \mathbf{8}'$	$= [1] + [3]$	$= \mathbf{8}_v + \mathbf{56}_t$
(R-, R-)	$\mathbf{8}' \times \mathbf{8}'$	$= [0] + [2] + [4]_-$	$= \mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}_-$
(NS+, R+)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}$		$= \mathbf{8}' + \mathbf{56}$
(NS+, R-)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}'$		$= \mathbf{8} + \mathbf{56}'$

$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}$ 和 $\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}'$ 中的 64 个态都分解成了两个不可约表示. 用 $|i, \mathbf{s}\rangle$ 标记 $\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}$ 中的态, 我们可以构成 8 个线性组合.

$$|i, \mathbf{s}\rangle \Gamma_{\mathbf{s}\mathbf{s}'}^i. \quad (10.5.19)$$

这些态在 $SO(8)$ 下变换到彼此, 并且由于缺失的指标 \mathbf{s}' 的手征性与 \mathbf{s} 相反, 它们落在 $\mathbf{8}'$ 表示中. 其它 56 个态构成不可约表示 $\mathbf{56}$. 乘积 $\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}'$ 类似. 注意, 有几个不相同的表示, 它们的维数相同的: 8 维的一个矢量和两个旋量, 56 维的 3 阶全反对称张量和两个矢量-旋量, 35 维的 2 阶无迹对称张量和自对偶以及反自对偶 4 阶张量.

BRST quantization

类似玻色弦论, 在超弦中, BRST 算符定义成

$$Q_B = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz j_B - d\bar{z} \tilde{j}_B), \quad (10.5.20)$$

其中

$$\begin{aligned} j_B &= cT_B^m + \gamma T_F^m + \frac{1}{2} (cT_B^g + \gamma T_F^g) \\ &= cT_B^m + \gamma T_F^m + bc\partial c + \frac{3}{4}(\partial c)\beta\gamma + \frac{1}{4}c(\partial\beta)\gamma - \frac{3}{4}c\beta\partial\gamma - b\gamma^2, \end{aligned} \quad (10.5.21)$$

BRST 流有如下的性质

$$j_B(z)b(0) \sim \cdots + \frac{1}{z}T_B(0), \quad j_B(z)\beta(0) \sim \cdots + \frac{1}{z}T_F(0), \quad (10.5.22)$$

这使得 Q_B 与 b, β 鬼的对易子给出约束, 写成模式的形式

$$\{Q_B, b_n\} = L_n, \quad [Q_B, \beta_r] = G_r. \quad (10.5.23)$$

只要中心荷为零, 就可以证明 BRST 算符是幂零的. 为了使 BRST 荷是合理定义的, BRST 流必须是周期的. 因此, SCFT 超流的周期性必须与 ψ^μ, β, γ 的周期性相同. BRST 算符的展开是

$$\begin{aligned} Q_B &= \sum_m c_{-m} L_m^m + \sum_r \gamma_{-r} G_r^m - \sum_{m,n} \frac{1}{2} (n-m) :b_{-m-n} c_m c_n: \\ &\quad + \sum_{m,r} \left[\frac{1}{2} (2r-m) : \beta_{-m-r} c_m \gamma_r : - :b_{-m} \gamma_{m-r} \gamma_r : \right] + a^g c_0, \end{aligned} \quad (10.5.24)$$

其中 m 和 n 取遍整数, r 取遍 (整数 + ν). 鬼场正规编序常数是方程 (10.4.5).

可观测频谱是 BRST 上同调类的空间. 同玻色理论一样, 我附加额外的约束

$$b_0|\psi\rangle = L_0|\psi\rangle = 0. \quad (10.5.25)$$

另外, 我们在 R 截面附加

$$\beta_0|\psi\rangle = G_0|\psi\rangle = 0, \quad (10.5.26)$$

可以解出前几个能级, 结果与 OCQ 精确相同. 无鬼定理与玻色情况相同. BRST 上同调有一正定的内积, 因此它同构于 OCQ 进而同构于横向 Hilbert 空间 \mathcal{H}^\perp , 而 \mathcal{H}^\perp 定义成没有 $\alpha^{0,1}, \psi^{0,1}, b, c, \beta, \gamma$ 激发.

我们已经将 $\exp(\pi i F)$ 定义成与 Q_B 对易. 因此我们考察的子空间还可以对 $\exp(\pi i F)$ 有明确的本征值.

10.6 十维中的超弦理论

我们现在集中在十维平坦时空中的理论. 我们现在引入记号

$$(\alpha, F), \quad (10.6.1)$$

其中

$$\alpha = 1 - 2\nu, \quad (10.6.2)$$

它在 R 截面中是 1, 在 NS 截面中是 0. 闭弦在两边有独立周期和费米子数, 因此它有 16 个截面

$$(\alpha, F, \tilde{\alpha}, \tilde{F}). \quad (10.6.3)$$

实际上, 其中 6 个截面是空的: 在 $NS-$ 截面中, 能级 $L_0 - \alpha' p^2/4$ 是半整数, 但是 $NS+, R+, R-$ 截面中它是整数. 因此无法满足能级匹配条件 $L_0 = \tilde{L}_0$.

不是任意的态合在一起就能构成相容的弦论. 先来考察闭弦频谱. 我们已经看到自旋场在有 R 截面顶点算符时会有分支切割. 那么顶点算符的不同配对在它们的算符积中就会有分支切割. 算符 F 计数了顶点算符中自旋场的个数, 所以当在一个顶点算符绕另一个顶点算符一圈时, 净相位是

$$\exp \pi i (F_1 \alpha_2 - F_2 \alpha_1 - \tilde{F}_1 \tilde{\alpha}_2 + \tilde{F}_2 \tilde{\alpha}_1). \quad (10.6.4)$$

如果它不是 1, 有这两个算符的振幅无法相容地定义.

相容的闭弦理论只包含 10 个截面的特定子集. 这种子集的个数是 2^{10} , 但只有几个子集给出相容的弦论. 我们附加相容性条件:

(a) 从上面的讨论中, 顶点算符的所有配对都必须定域: 如果 $(\alpha_1, F_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{F}_1)$ 和 $(\alpha_2, F_2, \tilde{\alpha}_2, \tilde{F}_2)$ 都在频谱中, 那么

$$F_1 \alpha_2 - F_2 \alpha_1 - \tilde{F}_1 \tilde{\alpha}_2 + \tilde{F}_2 \tilde{\alpha}_1 \in 2\mathbb{Z}. \quad (10.6.5)$$

(b) OPE 必须封闭. α 和 F 在模掉 2 的意义下在算符积中守恒. 因此, 如果 $(\alpha_1, F_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{F}_1)$ 和 $(\alpha_2, F_2, \tilde{\alpha}_2, \tilde{F}_2)$ 都在频谱中, 那么

$$(\alpha_1 + \alpha_2, F_1 + F_2, \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2, \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2). \quad (10.6.6)$$

也在频谱之中.

(c) 对于相位的任意选择, 一圈振幅不是模不变的. 为了使模不变, 有如下的必要条件:

至少存在一个左移 R 截面 ($\alpha = 1$) 和一个右移 R 截面 ($\tilde{\alpha} = 1$).

我们现在来解这些约束. 首先假定至少存在一个 $R-NS$ 截面, $(\alpha, \tilde{\alpha}) = (1, 0)$. 根据能级匹配条件, 它不是 $(R+, NS+)$ 就是 $(R-, NS+)$. 更进一步, 由于 (a), 由于这两个顶点算符的乘积不是单值的, 所以只有其中一个能存在. 根据 (c), 还必须存在 $NS-R$ 截面或 $R-R$ 截面, 由于 $R-NS \times R-R = NS-R$, 所以 $NS-R$ 截面必然存在. 根据上面的讨论, 这个截面只能是 $(NS+, R+)$ 或 $(NS+, R-)$ 中的一个. 所以我们有四种可能性, $(R+, NS+)$ 或 $(R-, NS+)$ 加上 $(NS+, R+)$ 或 $(NS+, R-)$, 根据封闭性和单值性, 每种可能性中又会多出两个截面, $(NS+, NS+)$ 和 (R, R) . 所有的结果总结如下

$$IIB: \quad (NS+, NS+) \quad (R+, NS+) \quad (NS+, R+) \quad (R+, R+),$$

$$IIA: \quad (NS+, NS+) \quad (R+, NS+) \quad (NS+, R-) \quad (R+, R-),$$

$$IIA': \quad (NS+, NS+) \quad (R-, NS+) \quad (NS+, R+) \quad (R-, R+),$$

$$IIB': \quad (NS+, NS+) \quad (R-, NS+) \quad (NS+, R-) \quad (R-, R-).$$

注意, 所有这些理论中都没有包含快子.

这四个解实际上只代表两种不同的物理理论. 在 IIA 理论和 IIA' 理论中, $R-R$ 态的左

边和右边的手征性相反. 而在 IIB 理论和 IIB' 理论中, 它们的手征性相同. 沿着一个轴的时空反演, 比如

$$X^2 \rightarrow -X^2, \quad \psi^2 \rightarrow -\psi^2, \quad \tilde{\psi}^2 \rightarrow -\tilde{\psi}^2, \quad (10.6.7)$$

它会保持作用和约束不变, 但是会反转左移 R 截面中 $\exp(\pi i F)$ 的符号和右移 R 截面中 $\exp(\pi i \tilde{F})$ 的符号. 在无质量能级, 这调换了 Weyl 表示, $\mathbf{16} \leftrightarrow \mathbf{16}'$. 因此它将 IIA' 理论变成了 IIA, 将 IIB' 理论变成了 IIB.

现在假定不存在 R-NS 截面. 根据 (c), 至少存在一个 R-R 截面. 事实上, (NS+, NS+) 与任何 R-R 截面的组合都满足 (a), (b), (c). 但是它们不满足模不变性. 满足模不变性的只有

$$0A: \quad (\text{NS}+, \text{NS}+) \quad (\text{NS}-, \text{NS}+) \quad (\text{R}+, \text{R}-) \quad (\text{R}-, \text{R}+),$$

$$0B: \quad (\text{NS}+, \text{NS}+) \quad (\text{NS}-, \text{NS}-) \quad (\text{R}+, \text{R}+) \quad (\text{R}-, \text{R}-).$$

注意, 虽然它们是模不变的, 但是它们都有快子, 并且它们都没有时空费米子.

总结一下, 我们发现两类非常有趣的弦理论, IIA 型超弦理论和 IIB 型超弦理论. 回到表 10.3, 我们发现无质量频谱

$$\text{IIA:} \quad [0] + [1] + [2] + [3] + (2) + \mathbf{8} + \mathbf{8}' + \mathbf{56} + \mathbf{56}', \quad (10.6.8a)$$

$$\text{IIB:} \quad [0]^2 + [2]^2 + [4]_+ + (2) + \mathbf{8}'^2 + \mathbf{56}^2. \quad (10.6.8b)$$

IIB 理论保留的截面是

$$\exp(\pi i F) = \exp(\pi i \tilde{F}) = +1, \quad (10.6.9)$$

IIA 理论保留的截面是

$$\exp(\pi i F) = +1, \quad \exp(\pi i \tilde{F}) = (-1)^{\tilde{\alpha}}. \quad (10.6.10)$$

整个频谱到 $\exp(\pi i F)$ 和 $\exp(\pi i \tilde{F})$ 的本征空间的投影被称为 GSO 投影. (GSO: Gliozzi-Scherk-Olive). 在 IIA 理论中, NS-R 截面取的 GSO 投影与 R-NS 截面相反, 所以频谱是非手征的. 即, 频谱在时空宇称下不变, 而这个变换的作用是 $\mathbf{8} \leftrightarrow \mathbf{8}'$ 和 $\mathbf{56} \leftrightarrow \mathbf{56}'$. 在世界面上, 这个对称性是时空宇称与世界面宇称的乘积. 在 IIB 理论中, 所有截面取同一个 GSO 投影, 所以频谱是手征的.

0 型理论是通过另一方法构造的: 例如, 0B 定义成只保留

$$\alpha = \tilde{\alpha}, \quad \exp(\pi i F) = \exp(\pi i \tilde{F}) \quad (10.6.11)$$

的截面. 定义 II 理论的投影分别作用在左移和右移旋量上, 而定义 0 型理论的投影则将二者绑在一起. 后者有时被称为对角 GSO 投影.

II 型弦论的最显著特征是 NS-R 截面和 R-NS 截面中出现了无质量矢量-旋量引力微子. II 型这个术语是指这种理论中有两个引力微子. 在 IIA 理论中, 引力微子有相反的手征性 (Γ 本征值), 而在 IIB 理论中, 它们有相同的手征性. NS-R 引力微子态是

$$\psi_{-1/2}^\mu |0; \mathbf{s}; k\rangle_{\text{NS-R}} u_{\mu \mathbf{s}}. \quad (10.6.12)$$

物理态条件是

$$k^2 = k^\mu u_{\mu \mathbf{s}} = k \cdot \Gamma_{\mathbf{s} \mathbf{s}'} u_{\mu \mathbf{s}'} = 0, \quad (10.6.13)$$

以及等价性条件

$$u_{\mu s} \cong u_{\mu s} + k_{\mu} \zeta_s. \quad (10.6.14)$$

我们已经知道这种等价关系是定域时空对称性的特征. 这里的对称性参量 ζ_s 是时空旋量, 所以我们有定域时空超对称性. 在平坦时空, 将存在守恒时空超荷 Q_s^A , 其中 A 用来区分两个引力微子附带的对称性, 而 s 是对应的引力微子的旋量指标, 它们有相同的手征性. 因此, IIA 理论中的一个超荷按照 $SO(9, 1)$ 的 **16** 表示变换, 另一个按照 **16'** 表示变换, 而 IIB 理论中的两个引力微子都按照 **16** 表示变换.

引力微子顶点算符是

$$\mathcal{V}_s e^{-\tilde{\phi}} \tilde{\psi}^{\mu} e^{ik \cdot X}, \quad e^{-\phi} \psi^{\mu} \tilde{\mathcal{V}}_s e^{ik \cdot X}. \quad (10.6.15)$$

算符 \mathcal{V}_s 和 $\tilde{\mathcal{V}}_s$ 的定义是 (10.4.25), 它们的权重分别是 (1,0) 和 (0,1), 因此它们是时空超对称性带出的超流.

这是我们第一次遇到时空超对称性. IIA 超引力理论和 IIB 超引力理论分别描述了 IIA 超弦和 IIB 超弦的低能物理. 在每个 II 型 (超引力) 理论中, 都有唯一的无质量表示, 这个表示有 256 个态. 无质量超弦频谱是 $d = 10$ 维 IIA 时空超对称性和 IIB 时空超对称性的表示.

根据 (10.6.8a), IIA 型超弦的无质量态的个数是: $1 + 8 + 28 + 56 + 35 + 8 + 8 + 56 + 56 = 256$.

根据 (10.6.8b), IIB 型超弦的无质量态的个数是: $1 \times 2 + 28 \times 2 + 35 + 35 + 8 + 8 + 56 + 56 = 256$.

本节的构造称为超弦的 *RNS* 形式. (RNS: Ramond-Neveu-Schwarz) 我们也期望自一开始, 时空超对称性就是明显的. 但是现存的超对称体系 (Green-Schwarz 超弦) 看起来似乎更加难处理.

注意, 世界面超对称性与时空超对称性不同, 并且它们之间的联系是不直接的. 世界面对称性参量 $\eta(z)$ 是时空标量和世界面旋量, 而时空超对称性参量 ζ_s 是时空旋量和世界面标量. 世界面对称性是世界面理论上的约束, 它湮灭物理态. 尽管时空超对称性在时空中变成了定域对称性, 但它是世界面理论的整体对称性, 给出了质量和振幅之间的关系.

关于自旋-统计关系的评注: 在玻色化的形式下, 所有 R 截面顶点算符的长度平方是奇数, 所有 NS 截面顶点算符的长度平方是偶数. 根据 10.4 节末尾的讨论, 时空自旋与世界面统计相关. 事实上, 这与时空统计相同. 世界面统计控制世界面振幅在反演下的行为, 这里的反演是同时交换世界面位置, 时空动量和其它量子数. 在积掉所有位置后, 这决定了时空 S-矩阵的对称性. 结果正是预期的时空自旋-统计关系. 注意, 有些算符的自旋-统计关系是错误的, 比如 ψ^{μ} 和 $e^{-\phi}$, 它们会出现在中间步骤中, 但是给出相容理论的投影也给出自旋-统计关系. 自旋-统计关系出现的方式看起来非常巧妙, 但是值得注意的是, 所有的弦论似乎都服从通常的自旋-统计关系.

Unoriented and open superstrings

IIB 超弦在两边的手征相同, 它有世界面宇称 Ω . 我们可以将这个对称性规范化以获得非定向闭弦理论. 在 NS-NS 截面中, 这湮灭了 $[2]$, 留下了 $[0] + (2)$, 这和非定向玻色理论相同. IIB 理论的费米 NS-R 截面和 R-NS 截面拥有相同的频谱, 所以 Ω 投影挑出线性组合 $(\text{NS-R}) + (\text{R-NS})$, 它有无质量态 $\mathbf{8}' + \mathbf{56}$. 特别地, 在这个投影下只留下了一个引力微子. 最后, 存在引力微子意味着无质量玻色子和无质量费米子的数目相同, 所以为了使世界面宇称算符的定义是相容的, 我们必须从 R-R 截面中挑出 $[2]$.

NS-NS 截面给出无质量玻色子, 个数是: $1 + 35 = 36$. NS-R 截面给出无质量费米子, 个数是: $8 + 56 = 64$. 所以从 R-R 截面中挑出 $[2]$.

我们可以这样理解它. R-R 顶点算符是

$$\mathcal{V}_{\mathbf{s}} \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbf{s}'}, \quad (10.6.16)$$

它按照 $\mathbf{8} \times \mathbf{8} = [0] + [2] + [4]_+$ 变换. $[0]$ 和 $[4]_+$ 在 \mathbf{s} 和 \mathbf{s}' 的交换下是对称的, 而 $[2]$ 则是反对称的. 世界面宇称给左边的 \mathcal{V} 加上波浪符, 给右边的 $\tilde{\mathcal{V}}$ 取掉波浪波, 这给出

$$\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbf{s}} \mathcal{V}_{\mathbf{s}'} = -\mathcal{V}_{\mathbf{s}'} \tilde{\mathcal{V}}_{\mathbf{s}}, \quad (10.6.17)$$

最后的负号来自 R 顶点算符的费米特性. 因此到 $\Omega = +1$ 的投影挑出了反对称的 $[2]$. 这个结果是 I 型非定向闭弦理论, 频谱是

$$[0] + [2] + (2) + \mathbf{8}' + \mathbf{56} = \mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35} + \mathbf{8}' + \mathbf{56}. \quad (10.6.18)$$

然而, 这个理论本身是不相容的. 我们会在后面进一步解释.

现在考察开弦理论. OPE 的封闭性加上 开弦 + 开弦 \rightarrow 闭弦 的振幅, 这二者暗示了, 对于任何开弦, 想要它和 I 型超对称闭弦和 II 型超对称闭弦的耦合是相容的, 它在任何开弦截面上必须有 GSO 投影. 有两种可能性, 它们的无质量频谱是

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & \text{NS+}, \text{R+} = \mathbf{8}_v + \mathbf{8}, \\ \tilde{\text{I:}} \quad & \text{NS+}, \text{R-} = \mathbf{8}_v + \mathbf{8}', \end{aligned}$$

加上 Chan-Paton 因子, 定向情况中规范群是 $U(n)$, 非定向情况中规范群是 $SO(n)$ 或 $Sp(k)$. 其中的 $\mathbf{8}$ 或 $\mathbf{8}'$ 旋量, 因为它们与超对称性与规范玻色子相关, 它们被称为规范微子 (gauginos). 由于超对称性与规范对称性互相对易, 所以它们和规范玻色子一样要处在规范群的伴随表示中.

我们已经预见了并非所有的理论都是相容的. 开弦多重态有 16 个态, 是 $d = 10, N = 1$ 超对称性的表示, 但不是 $N = 2$ 的超对称性表示. 由于定向超对称闭弦有两个引力微子 ($N = 2$), 所以超对称开弦无法与它们耦合. 它只能与非定向超对称闭弦理论 (10.6.18) 耦合, 因此, 为了使相互作用相容, 开弦理论也必须是非定向的. 有了手征性 (10.6.18), 无质量开弦态必须是 $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}$. 这是时空超对称性要求的, 要求 $\exp(\pi i F)$ 在世界面上守恒也能得到这个结果. 这个结果是非定向 I 超对称开弦和闭弦理论, 无质量态是

$$[0] + [2] + (2) + \mathbf{8}' + \mathbf{56} + (\mathbf{8}_v + \mathbf{8})_{SO(n) \text{ or } Sp(k)}. \quad (10.6.19)$$

除了 $SO(32)$ 理论, 其它理论都是不相容的. 我们会在 10.8 节看到所有其它群以及非定向闭弦理论都有一圈发散和超共形反常.

就此, 我们发现了三种没有快子和反常的弦理论: IIA 型, IIB 型和 I 型 $SO(32)$.

10.7 模不变形

根据 Coleman-Weinberg 公式 (7.3.24), 为了得到闭弦的真空振幅, 我们只需将积分区域换成环面模空间的基本区域 (Fundamental region):

$$Z_{T_2} = V_{10} \int_F \frac{d^2\tau}{4\tau_2} \int \frac{d^{10}k}{(2\pi)^{10}} \sum_{i \in \mathcal{H}^\perp} (-1)^{\mathbf{F}_i} q^{\alpha'(k^2+m_i^2)/4} \bar{q}^{\alpha'(\tilde{k}^2+\tilde{m}_i^2)/4}, \quad (10.7.1)$$

其中 $q = \exp(2\pi i\tau)$. 其中, 对于时空费米子, 我们要引入负号, 注意区分时空费米子数 \mathbf{F} 和世界面费米子数 F . 质量由横向哈密顿量的左移部分和右移部分给出:

$$m^2 = 4H^\perp/\alpha', \quad \tilde{m}^2 = 4\tilde{H}^\perp/\alpha'. \quad (10.7.2)$$

取迹引入了对超弦 Hilbert 空间不同截面 $(\alpha, F; \tilde{\alpha}, \tilde{F})$ 的求和. 在每个截面, 它变成对横向 $X, \psi, \tilde{\psi}$ 振子各自求和然后取乘积, 类似地, 横向哈密顿量变成求和. 每个横向 X 的贡献同玻色弦相同, 所以我们有

$$\begin{aligned} Z_X(\tau) &= (4\pi^2\alpha'\tau_2)^{-1/2} (q\bar{q})^{-1/24} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{N_n, \tilde{N}_n=1}^{\infty} q^{nN_n} \bar{q}^{n\tilde{N}_n} \right) \\ &= (4\pi^2\alpha'\tau_2)^{-1/2} |\eta(\tau)|^{-2}, \end{aligned} \quad (10.7.3)$$

振子和给出 $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$. 动量积分给出 $\tau_2^{-1/2}$, 除此之外, $k^{0,1}$ 的积分会给出额外的因子 $i(4\pi^2\alpha'\tau_2)^{-1}$.

对于 ψ , 每个截面的模式和依赖于空间周期 α 和投影算符 $\frac{1}{2}[1 \pm \exp(\pi i F)]$. 我们先考察一般周期 (10.3.20) 的情况,

$$\psi(w + 2\pi) = \exp[\pi i(1 - \alpha)] \psi(w) \quad (10.7.4)$$

其中 $\alpha = 1 - 2\nu$. 根据基态的定义 (10.3.23), 上升算符是

$$\psi_{-m+(1-\alpha)/2}, \quad \bar{\psi}_{-m+(1+\alpha)/2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (10.7.5)$$

基态的权重是 $\alpha^2/8$. 那么

$$\text{Tr}_\alpha(q^H) = q^{(3\alpha^2-1)/24} \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + q^{m-(1-\alpha)/2} \right] \left[1 + q^{m-(1+\alpha)/2} \right]. \quad (10.7.6)$$

我们来逐项解释这一结果, 其中 $q^{-1/24}$ 来自于从圆柱到球面的共形变换, $q^{\alpha^2/8}$ 来自于权重的贡献, 这一项也可以看做是玻色化算符 (10.3.25) $\exp[i(-\nu + 1/2)H]$ 的动量贡献, 对于费米子的每个能级, 占有数只能是 0 或 1, 0 给出 $q^0 = 1$, 1 给出振子的能量, 这里的振子能量分别是 $m - (1 - \alpha)/2$ 和 $m - (1 + \alpha)/2$.

为了定义一般的边界条件, 我们还要加入费米子. 因此我们定义费米子数, 它对于 ψ 是 +1, 对于 $\bar{\psi}$ 是 -1. 精确些, 定义 Q 是玻色化 (10.3.10) 中的 H -动量. 玻色化 (10.3.25) 给出

的基态荷就是 $\alpha/2$. 因此我们可以定义更一般的迹

$$Z^\alpha_\beta(\tau) = \text{Tr}_\alpha \left[q^H \exp(\pi i \beta Q) \right] \quad (10.7.7a)$$

$$= q^{(3\alpha^2-1)/24} \exp(\pi i \alpha \beta / 2)$$

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + \exp(\pi i \beta) q^{m-(1-\alpha)/2} \right] \left[1 + \exp(-\pi i \beta) q^{m-(1+\alpha)/2} \right] \quad (10.7.7b)$$

$$= \frac{1}{\eta(\tau)} \vartheta \left[\begin{matrix} \alpha/2 \\ \beta/2 \end{matrix} \right] (0, \tau). \quad (10.7.7c)$$

荷 Q 模掉 2 就是费米子数 F . 因此与 10 维超弦有关的迹就是

$$Z^0_0(\tau) = \text{Tr}_{\text{NS}} [q^H] \quad (10.7.8a)$$

$$Z^0_1(\tau) = \text{Tr}_{\text{NS}} [\exp(\pi i F) q^H] \quad (10.7.8b)$$

$$Z^1_0(\tau) = \text{Tr}_{\text{R}} [q^H] \quad (10.7.8c)$$

$$Z^1_1(\tau) = \text{Tr}_{\text{R}} [\exp(\pi i F) q^H] \quad (10.7.8d)$$

注意这里的迹是对于一对维数的.

对于 NS 截面, $\alpha = 0$, 对于 R 截面, $\alpha = 1$.

对所有 8 个费米子取迹, GSO 投射只保留 $\exp(\pi i F) = +1$ 的态. 这是 $Z^+_\psi(\tau)$, 其中

$$Z^\pm_\psi(\tau) = \frac{1}{2} \left[Z^0_0(\tau)^4 - Z^0_1(\tau)^4 - Z^1_0(\tau)^4 \mp Z^1_1(\tau)^4 \right] \quad (10.7.9)$$

$\frac{1}{2}$ 来自于投影算符, 第二项的负号来自鬼场对 $\exp(\pi i F)$ 的贡献, 第三项和第四项 (R 截面) 的负号来自时空自旋统计. 如果是 IIB 理论, 对于 $\tilde{\psi}$ 我们获得共轭 $Z^+_\psi(\tau)^*$. 在 IIA 理论中, R 截面中 $\tilde{F} = -1$, 这使得结果是 $Z^+_\psi(\tau)^*$. 合起来有

$$Z_{T_2} = iV_{10} \int_F \frac{d^2\tau}{16\pi^2\alpha'\tau_2^2} Z_X^8 Z^+_\psi(\tau) Z^\pm_\psi(\tau)^*. \quad (10.7.10)$$

对于弦理论的相容性, 模不变性是必要的. 在超弦中, 模不变性以一种非常有趣的方式浮现出来. 首先, $d^2\tau/\tau_2^2$ 是模不变的, 其次 Z_X 也是这样 (这是由于 $\tau_2|\eta(\tau)|^4$ 是模不变的). 为了理解费米迹的模变换, 注意给出 Z^α_β 的路径积分要求环面上的费米场 ψ 有如下周期性

$$\psi(w + 2\pi) = -\exp(-\pi i \alpha) \psi(w), \quad (10.7.11a)$$

$$\psi(w + 2\pi\tau) = -\exp(-\pi i \beta) \psi(w). \quad (10.7.11b)$$

这给出

$$\psi[w + 2\pi(\tau + 1)] = \exp[-\pi i(\alpha + \beta)] \psi(w). \quad (10.7.12)$$

那么想当然地有 $Z^\alpha_\beta(\tau) = Z^\alpha_{\alpha+\beta-1}(\tau + 1)$. 另外, 定义 $w' = w/\tau$ 和 $\psi'(w') = \psi(w)$,

$$\psi'(w' + 2\pi) = -\exp(-\pi i \beta) \psi'(w'), \quad (10.7.13a)$$

$$\psi'(w' - 2\pi/\tau) = -\exp(\pi i \alpha) \psi'(w'), \quad (10.7.13b)$$

这会给出 $Z^\alpha_\beta(\tau) = Z^\beta_{-\alpha}(-1/\tau)$. 现在就可以看到, 无论我们从那种路径积分出发, 最后我们总会得到 $\alpha = 1$ 的路径积分, 这解释了上一节的规则 (c).

这些结果只是想当然的结果, 原因是, 对于只有左移费米子的路径积分, 我们无法以一种微分同胚不变 (diff-invariant) 的方式定义路径积分的相位. 对于边界条件匹配的左移费米子和右移费米子, 我们可以通过 Pauli-Villars 正规化子或者其它正规化子定义路径积分. 这与左移路劲积分的绝对值平方相同, 但对于单个的路径积分, 其中有一个潜在的相位歧义 (ambiguity). 我们前面的结果对于 $\tau \rightarrow -1/\tau$ 是正确的, 但是在 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 要被修正成

$$\begin{aligned} Z^\alpha_\beta(\tau) &= Z^\beta_{-\alpha}(-1/\tau) \\ &= \exp[-\pi i(3\alpha^2 - 1)/12] Z^\alpha_{\alpha+\beta-1}(\tau + 1). \end{aligned} \quad (10.7.14)$$

这个相位来自于 (10.7.7b) 中的 $q^{(3\alpha^2-1)/24}$, 物理意义是给定边界条件的零点能. 在 $\tau \rightarrow -1/\tau$ 下没有相位可以通过取 $\tau = i$ 看到. 注意到, 由于两个 R 截面基态之间的抵消, Z^1_1 实际上为零, 我们会在下面进一步解释.

注意

$$Z^1_1(\tau) = i q^{1/12} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)(1 - q^{m-1}),$$

在 $m = 1$ 时, $1 - q^{m-1} \rightarrow 1 - 1 = 0$.

这个相位代表整体引力反常 (global gravitational anomaly), 这个反常是指我们无法定义路径积分的相位使得它在大的坐标变换下不变. 显然, 单个左移费米子有 $c \neq \tilde{c}$, 因此它在无限小坐标变换下有一个反常, 但即使把左移费米子和右移费米子结合在一起, 整体反常依旧存在. 例如, $Z^1_0(\tau) * Z^0_0(\tau)$ 没有无限小反常, 它应该在 $\tau \rightarrow \tau + 2$ 下回到自身, 但是实际会跳出一个相位 $\exp(-\pi i/2)$. 这个相位来自于能级错位, NS 截面和 R 截面的零点能的差异.

可以证明, 在变换 (10.7.14) 下, Z^\pm_ψ 在 $\tau \rightarrow -1/\tau$ 下不变, 但是在 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 下会多出相位 $\exp(2\pi i/3)$.

$$\begin{aligned} 2Z^\pm_\psi(\tau + 1) &= Z^0_0(\tau + 1)^4 - Z^0_1(\tau + 1)^4 - Z^1_0(\tau + 1)^4 \mp Z^1_1(\tau + 1)^4 \\ &= [e^{-\pi i/12} Z^0_1(\tau)]^4 - [e^{-\pi i/12} Z^0_0(\tau)]^4 - [e^{\pi i/6} Z^1_0(\tau)]^4 \mp [e^{\pi i/6} Z^1_1(\tau)]^4 \\ &= \exp(2\pi i/3) \left[Z^0_0(\tau)^4 - Z^0_1(\tau)^4 - Z^1_0(\tau)^4 \mp Z^1_1(\tau)^4 \right] \end{aligned}$$

结合共轭的右移, 这个结果是模不变的且环面振幅是相容的. 为了使这个不变的构造存在, 必须要有 8 个横向费米子. 在 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 下不变要求 $L_0 - \tilde{L}_0$ 对于所有态都是整数. 对于 R-NS 截面中的单个实费米子, 基态能量的差是 $\frac{1}{16}$. 如果有 8 个费米子, 这就变成了 $\frac{1}{2}$, 这使得有奇数个 NS 激发的态 (这也是 GSO 投射所要求的) 是能级匹配的. 同时注意到, 模不变性迫使 (10.7.9) 中出现负号, 特别地, $(Z^0_0)^4$ 与 $(Z^1_0)^4$ 之间的相对符号对应于 R 截面态的费米统计.

在 0 型超弦中, 费米迹是

$$\frac{1}{2} \left[|Z^0_0(\tau)|^N + |Z^0_1(\tau)|^N + |Z^1_0(\tau)|^N + |Z^1_1(\tau)|^N \right] \quad (10.7.15)$$

其中 $N = 8$. 这被称为对角模不变量 (diagonal modular invariant), 由于相位在绝对值中抵消了, 它对于任意的 N 都是不变的.

II 型理论中有时空超对称性. 这暗示了在每个质量能级玻色子和费米子的数目相等, 由于玻色子和费米子之间的抵消, 这些理论中的 Z_{T_2} 应该为零. 事实也确实如此, 由于 $Z^1_1 = 0$ 以及 Jacobi 的“晦涩恒等式”(abstruse identity)

$$Z^0_0(\tau)^4 - Z^0_1(\tau)^4 - Z^1_0(\tau)^4 = 0, \quad (10.7.16)$$

Z_{T_2} 也确实为零. 在开弦和非定向弦论中也发生了相同的事情.

带有顶点算符的振幅也必须是模不变的. 在现在的情况中, 重要的问题是路径积分的测度, 通过一个计算可以证明, 无论有没有顶点算符, 模性质是相同的. 然而, 如果有顶点算符插入, $\alpha = \beta = 1$ 的路径积分就不再为零, 其它三个的和也是如此.

More on $c = 1$ CFT

玻色配分函数 (10.3.17) 和费米配分函数 (10.3.18) 相等是玻色化的结果. 这些配分函数不是模不变的, 所以无法定义合理的弦背景. 组成费米频谱的是所有的 NS-NS 态, 组成玻色频谱的是所有 k_R 和 k_L 为整数的态; 这不是在任意半径做环向紧致化得到的频谱. 最简单的模不变费米配分函数是对角不变的, 即对左移和右移取共同的周期. 以态的形式, 这解释成投影

$$\alpha = \tilde{\alpha}, \quad \exp(\pi i F) = \exp(\pi i \tilde{F}). \quad (10.7.17)$$

NS-NS 截面由我们已经考察过的定域算符构成, 而手征投影 $\exp(\pi i F) = \exp(\pi i \tilde{F})$ 意味着在玻色这边 $k_R = k_L \bmod 2$. 玻色这边与 R-R 截面等价的态则是半整数的 k_R 和 k_L , 依然有 $k_R = k_L \bmod 2$. 总结起来,

$$(k_R, k_L) = (n_1, n_2) \text{ or } (n_1 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}) \quad (10.7.18)$$

其中 $n_1 - n_2 \in 2\mathbb{Z}$. 这是玻色子在半径为 2 或 1 的圆上的频谱, 我们看到它等价于拥有对角模不变投影的复费米子. (对于 H 标量, 无质量半径 r 对应于 X^μ 的 $R = r(\alpha'/2)^{1/2}$, 所以 $r = 2^{1/2}$ 是自对偶半径.)

为了在任意半径获得等价的费米理论, 我们在世界面拉格朗日密度中加入

$$\partial H \bar{\partial} H \cong -\bar{\psi} \psi \tilde{\psi} \tilde{\psi}. \quad (10.7.19)$$

H 理论仍然是自由的, 但是等价的费米理论现在是相互作用理论, 被称为 Thirring 模型. Thirring 模型有一个不平庸的微扰级数, 但由于它等价一个自由的玻色理论, 它是精确可解的. 实际上, 对于任何有理的 r , 玻色理论还等价于一个自由的费米理论, 只不过有一个更复杂的扭变 (twist).

还有另一个有趣的 CFT, 它的顶点算符有

$$k_R = m/3^{1/2}, \quad k_L = n/3^{1/2}, \quad m - n \in 3\mathbb{Z}. \quad (10.7.20)$$

很容易验证它与 $k_{R,L}$ 为整数的顶点算符有相同的性质. 即, 它是单值的算子代数, 但是它不对应弦在任何半径上的频谱, 并且它没有模不变的配分函数. 它的特殊性质是存在算符

$$\exp\left[\pm i3^{1/2}H(z)\right], \quad \exp\left[\pm i3^{1/2}\tilde{H}(\bar{z})\right]. \quad (10.7.21)$$

它们有重量 $(\frac{3}{2}, 0)$ 和 $(0, \frac{3}{2})$: 它们是世界面超流. 这个 CFT 拥有 $(2, 2)$ 世界面超对称性. 将超流写自由场的二次型, 这个标准表示有两个自由的 X 场和自由的 ψ 场, 并且中心荷都为 3.

如果我们用对称性扭变这个理论

$$(H, \tilde{H}) \rightarrow (H, \tilde{H}) + \frac{2\pi}{2 \times 3^{1/2}}(1, -1), \quad (10.7.22)$$

这将频谱投影在 $m - n \in 6\mathbb{Z}$ 的态上, 并加入了 $m, n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ 的扭变截面. 相应的频谱是 $r = 2 \times 3^{1/2}$ 的理论. 这个扭变是对角 GSO 投射, 超流在这个对称性为奇.

10.8 I 型理论的发散

The cylinder

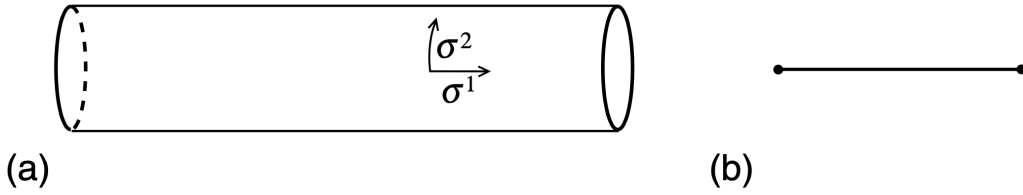


图 10.8.1: (a) 小 t 极限下的圆柱. (b) 场论类比图.

首先考察圆柱, 结合玻色弦 (7.4.1) 在十维中的结果, 再加上费米迹 (10.7.9), 这里的迹来自 II 型弦的一边, 我们把它写成两项的和

$$Z_{C_2} = Z_{C_2,0} + Z_{C_2,1}, \quad (10.8.1)$$

其中

$$Z_{C_2,0} = iV_{10}n^2 \int_0^\infty \frac{dt}{8t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-5} \eta(it)^{-8} \left[Z^0_0(it)^4 - Z^1_0(it)^4 \right], \quad (10.8.2a)$$

$$Z_{C_2,1} = iV_{10}n^2 \int_0^\infty \frac{dt}{8t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-5} \eta(it)^{-8} \left[-Z^0_1(it)^4 - Z^1_1(it)^4 \right], \quad (10.8.2b)$$

(注意 I 型超弦只能是非定向的, 它来自于 IIB 型弦论, 所以 Z^1_1 前面是负号.) 我们分离这四项是根据迹中是否出现了 $\exp(\pi i F)$. $Z_{C_2,0}$ 中没有, 所以 ψ^μ 在 σ_2 方向是反周期的. $Z_{C_2,1}$ 中有这一项, 所以 ψ^μ 在 σ_2 方向是周期的. 我们也可以认为是圆柱是闭弦从真空中产生又湮灭到真空中. ψ^μ 的周期性说明 $Z_{C_2,0}$ 来自 NS-NS 弦而 $Z_{C_2,1}$ 来自 R-R 闭弦.

由于超对称性, 总的费米弦配分函数为零, 这使得 $Z_{C_2,1} = -Z_{C_2,0}$; 我们现在集中考察 $Z_{C_2,0}$. 利用模变换

$$\eta_{it} = t^{-1/2} \eta(i/t), \quad Z^\alpha_\beta(it) = Z^\beta_{-\alpha}(i/t) \quad (10.8.3)$$

定义 $s = \pi/t$, 这变成

$$\begin{aligned} Z_{C_2,0} &= i \frac{V_{10} n^2}{8\pi(8\pi^2 \alpha')^5} \int ds \eta(is/\pi)^{-8} \left[Z^0_0(is/\pi)^4 - Z^0_1(is/\pi)^4 \right] \\ &= i \frac{V_{10} n^2}{8\pi(8\pi^2 \alpha')^5} \int ds [16 + O(\exp(-2s))] . \end{aligned} \quad (10.8.4)$$

$s \rightarrow \infty$ 的发散是由于无质量闭弦的蝌蚪图, 注意这必须是 NS-NS 态. 我们视其为伸缩子-引力子相互作用 $(-G)^{1/2} e^{-\Phi}$.

然而这里有一个矛盾: $d = 10, N = 1$ 超对称代数不允许这样的项. 更奇怪的是, $Z_{C_2,1}$ 中有一个大小相等, 符号相反的发散, 它只能来自于 R-R 态的蝌蚪图, 但是唯一的无质量 R-R 态是 2 阶张量, 它不可能有 Lorentz 不变的蝌蚪图.

可以猜测解决方案是这样的. IIB 弦对于所有偶数的 n 有 n 秩的势, 而 n 和 $8-n$ 在 Poincaré 对偶下相等. Ω 投影移去了 $n = 0$ 和等价的 $n = 8$, 以及 $n = 4$: 所有 4 的倍数. 留下了 $n = 2$, 等价的 $n = 6$ 和 $n = 10$. 10 维中允许存在 10-form 势 C_{10} , 但是它的 11-form 场强 dC_{10} 恒为零. 这个势对时空的积分

$$\mu_{10} \int C_{10} \quad (10.8.5)$$

在 $\delta C_{10} = d\chi_9$ 下不变, 所以可以出现在作用量中. 由于没有动能项, 这个场的传播子是 $1/0$, 而蝌蚪图的发散是

$$\frac{\mu_{10}^2}{0} . \quad (10.8.6)$$

这正是 $Z_{C_2,1}$ 中发散的起源. 对 C_{10} 变分给出的运动方程就是 $\mu_{10} = 0$, 所以不像之前遇到的发散, 这个发散不能通过背景场的修正移除. 它代表一个真实的不相容性.

The Klein bottle

还有一种抵消蝌蚪图发散的方法. 圆柱, 莫比乌斯带和克莱因瓶都有来自于无质量闭弦态的发散, 总发散正比于圆盘蝌蚪图与 RP_2 蝌蚪图之和的平方. 两个蝌蚪图的相对大小依赖于 Chan-Paton 因子, 对于特定的规范群相互抵消.

为了能对这些贡献求和, 我们必须重新调整这些曲面, 使得 σ^2 方向上的周长和 σ^1 方向上的长度一致, 我们分别取其为 2π 和 s . 对于圆柱, 原始的 σ^1 的长度为 π (由于圆柱对应开弦), σ^2 方向上的长度为 $2\pi t$, 所以得到 $s = \pi/t$, 对于克莱因瓶 $s = \pi/2t$, 对于莫比乌斯带 $s = \pi/4t$.

各个振幅是迹的和, 这些迹来自不同的边界条件和投影. 我们需要通过检验费米子在世界面路径积分上的边界条件决定那些项对 NS-NS 交换有贡献, 那些项对 R-R 交换有贡献. 在克莱因瓶上, GSO 投影算符是

$$\frac{1 + \exp(\pi i F)}{2} , \quad \frac{1 + \exp(\pi i \tilde{F})}{2} . \quad (10.8.7)$$

在迹中加入 $R = \Omega \exp(\pi i \beta F + \pi i \tilde{\beta} \tilde{F})$, 路径积分边界条件是

$$\psi(w + 2\pi i t) = -R \psi(w) R^{-1} = -\exp(\pi i \beta) \tilde{\psi}(\bar{w}) , \quad (10.8.8a)$$

$$\tilde{\psi}(\bar{w} + 2\pi i t) = -R \tilde{\psi}(\bar{w}) R^{-1} = -\exp(\pi i \tilde{\beta}) \psi(w) , \quad (10.8.8b)$$

出现负号是由于费米场. 这给出了

$$\psi(w + 4\pi it) = \exp[\pi i(\beta + \tilde{\beta})] \psi(w). \quad (10.8.9)$$

NS-NS 交换来自在 $\sigma^2 \rightarrow \sigma^2 + 4\pi t$ 下反对称的截面, 因而来自于计入权重 $\Omega \exp(\pi i F)$ 或 $\Omega \exp(\pi i \tilde{F})$ 的迹; 更进一步, 这两个迹相等. NS-NS 态和 R-R 态均对这个迹有贡献, 它们各自的贡献是

$$\text{NS-NS :} \quad q^{-1/3} \prod_{m=1}^{\infty} (1 + q^{2m-1})^8 = Z^0_0(2it)^4, \quad (10.8.10a)$$

$$\text{R-R :} \quad -16q^{2/3} \prod_{m=1}^{\infty} (1 + q^{2m})^8 = -Z^1_0(2it)^4, \quad (10.8.10b)$$

其中 $q = \exp(-2\pi t)$.

这样, 整个克莱因瓶对 NS-NS 交换的贡献就是

$$\begin{aligned} Z_{K_2,0} &= iV_{10} \int_0^\infty \frac{dt}{8t} (4\pi^2 \alpha' t)^{-5} \eta(2it)^{-8} [Z^0_0(2it)^4 - Z^1_0(2it)^4] \\ &= i \frac{2^{10} V_{10}}{8\pi(8\pi^2 \alpha')^5} \int_0^\infty ds \eta(is/\pi)^{-8} [Z^0_0(is/\pi)^4 - Z^1_0(is/\pi)^4] \\ &= i \frac{2^{10} V_{10}}{8\pi(8\pi^2 \alpha')^5} \int_0^\infty ds [16 + O(\exp(-2s))], \end{aligned} \quad (10.8.11)$$

并有 $Z_{K_2,1} = -Z_{K_2,0}$. 玻色部分与以往相同.

The Möbius strip

在开弦上, Ω 的作用是

$$\Omega \psi^\mu(w) \Omega^{-1} = \tilde{\psi}(\pi - \bar{w}) = \psi^\mu(w - \pi), \quad (10.8.12)$$

这里使用了 doubling trick (10.2.15). 以振子模的形式, 这是

$$\Omega \psi^\mu_r \Omega^{-1} = \exp(-\pi i r) \psi^\mu_r. \quad (10.8.13)$$

这个相位在 NS 截面是虚的且平方等于 -1 . 因此,

$$\Omega^2 = \exp(\pi i F). \quad (10.8.14)$$

根据 GSO 投射, $\exp(\pi i F) = 1$, 在物理上, 它的平方与单位算符相同, 但是 Ω 与 GSO 的组合投射要求

$$\frac{1 + \Omega + \Omega^2 + \Omega^3}{4}. \quad (10.8.15)$$

现在迹中有 $R = \Omega \exp(\pi i \beta F)$, 场的周期性是

$$\psi^\mu(w + 4\pi it) = -\exp(\pi i \beta) \psi^\mu(w + 2\pi it - \pi) = \psi^\mu(w - 2\pi). \quad (10.8.16)$$

由此得出, 在迹的 R 截面中, 场在 σ^2 方向上周期的, 对应于 R-R 交换, 而迹的 NS 截面给出 NS-NS 交换.

R-R 交换要简单一些, 含有 Ω 和含有 $\Omega \exp(\pi i F)$ 的迹之和是

$$\begin{aligned} & -16q^{1/3} \prod_{m=1}^{\infty} [1 + (-1)^m q^m]^8 - (1-1)^4 q^{1/3} \prod_{m=1}^{\infty} [1 - (-1)^m q^m]^8 \\ & = Z^0_1(2it)^4 Z^1_0(2it)^4. \end{aligned} \quad (10.8.17)$$

整个莫比乌斯振幅是

$$\begin{aligned} Z_{M_2,1} &= \pm i n V_{10} \int_0^{\infty} \frac{dt}{8t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-5} \frac{Z^0_1(2it)^4 Z^1_0(2it)^4}{\eta(2it)^8 Z^0_0(2it)^4} \\ &= \pm 2in \frac{2^5 V_{10}}{8\pi(8\pi^2 \alpha')^5} \int_0^{\infty} ds \frac{Z^0_1(2is/\pi)^4 Z^1_0(2is/\pi)^4}{\eta(2is/\pi)^8 Z^0_0(2is/\pi)^4} \\ &= \pm 2in \frac{2^5 V_{10}}{8\pi(8\pi^2 \alpha')^5} \int_0^{\infty} ds [16 + O(\exp(-2s))], \end{aligned} \quad (10.8.18)$$

其中正号对应 $SO(n)$.

R-R 交换的总发散是

$$Z_1 = -i(n \mp 32)^2 \frac{V_{10}}{8\pi(8\pi^2 \alpha')^5} \int_0^{\infty} ds [16 + O(\exp(-2s))]. \quad (10.8.19)$$

R-R 蝌蚪图对规范群 $SO(32)$ 为零. 对于每个世界面拓扑, NS-NS 发散是 R-R 发散的负数, 所以伸缩子-引力子蝌蚪对于 $SO(32)$ 也为零.

第十一章 杂化弦

11.1 世界面超对称性

在上一章, 我们看到了通过增加超流 $T_F(z)$ 和 $\tilde{T}_F(\bar{z})$ 的方法来扩大世界面约束代数. 现在我们来了解一下这个想法能走多远, 具体来说, 就是寻找全纯流或反全纯流的集合使得它们的 Laurent 系数构成封闭的代数.

我们先来指明整体对称性和约束的区别. 世界面上的整体对称性就像时空中的整体对称性, 它暗示了质量和振幅之间的关系. 然而, 我们通常也会挑出一部分对称性作为约束附加到系统上, 这意味着物理态必须要被这些约束湮灭. 在玻色弦中, 时空 Poincaré 对称性是世界面理论的一个整体对称性, 而共形对称性是约束. 我们目前的兴趣是约束代数, 事实上我们发现的可能的集合非常小, 但后面我们会遇到一些加性代数, 它们是作为整体对称性出现的.

首先要注意到, 能够作为世界面对称性代数的集合非常大. 举例来说, 在玻色弦中, 因子 $\partial^n X^\mu$ 的任意乘积都是全纯流. 在大多数情况下, 这种流的 OPE 会生成无限多个新流. 即使限制到个数有限的流上, 依然留下了无限多的可能性.

我们先集中在全纯流上. 在么正 CFT 中, 仅当算符的权重为 $(h, 0)$ 且 $h > 0$, 这个算符才能是全纯的.(全纯要求 $\tilde{h} = 0$, 么正性给出 $h > 0$.) 尽管完整的世界面理论因带有鬼场和类时振子而没有正定的范数, 空间部分却确实是么正的, 所以它处在对称性的一个么正表示中. 由于 $\tilde{h} = 0$, 流的自旋也等于 h . (注意, $h + \tilde{h}$ 决定流的标度行为, $h - \tilde{h}$ 决定流的标度行为, 这是因为 $z\bar{z} = r^2$, $z/\bar{z} = e^{2i\varphi}$, 其中 $z = re^{i\varphi}$.) 我们假定流是厄密的, 现在在考察如下的可能性:

自旋 $h \geq 2$, 对于自旋 > 2 的流的代数, 我们通常称其为 W 代数. 大多数是已知的, 包括几类无限大的代数, 但是还没有完整的分类. 有过将其中的一些代数用作约束代数的尝试. 其中的一个困难就是, 生成元的对易子一般是生成元的非线性函数, 这使得 BRST 算符的构造变得非常不平庸. 少数几个被构造出的例子在规范固定后被发现只是玻色弦的特殊情况. 另一个困难是几何解释不清楚. 所以我们将把我们的注意力放在 $h \leq 2$ 的代数上. 另外, CFT 可以拥有多个 $(2, 0)$ 流作为整体对称性. 玻色弦至少有 27 个, 即鬼场的能动量张量和 26 个 X^μ 场的能动量张量. 然而只有它们的和有作为共形不变性的几何解释, 因此我们将假定只有一个 $(2, 0)$ 约束流, 即总的能动量张量.

自旋 h 不是 $\frac{1}{2}$ 的整数倍. 对于自旋为 h 的流 j ,

$$j(z)j(0) \sim z^{-2h} \quad (11.1.1)$$

如果 $2h$ 不是整数, 这将是多值的. 尽管已经已知有很多 CFT 拥有这样的流, 但如果我们尝试把这样的流作为约束时, 非定域性会带来困难. 构造这种分数弦的尝试给出了部分结果, 但是这样的理论是否存在依旧是不清楚的. 所以我们限制在 h 是 $\frac{1}{2}$ 的整数倍.

有了这些约束, 可能的代数被极大的限制了, 自旋只能是 $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$. Jacobi 恒等式允许的代数列在表 11.1 中. 前两个显然是我们研究过的共形代数和 $N = 1$ 超共形代数. 3 个

$N = 4$ 的代数彼此相关. 其中, 第二个代数是第一个代数的特殊情况, 即第一个代数的 $U(1)$ 流是某个标量的梯度. 第三个则是第二个的子代数.

表 11.1: 世界面超共形代数. 表中列出了每个自旋流的数目, 总的鬼场中心荷, 自旋 1 流生成的整体对称性, 以及超荷在这些对称性下的变换.

$n_{3/2} = N$	n_1	$n_{1/2}$	n_0	c^g	symmetry	T_F rep.
0	0	0	0	-26		
1	0	0	0	-15		
2	1	0	0	-6	$U(1)$	± 1
3	3	1	0	0	$SU(2)$	3
4	7	4	0	0	$SU(2) \times SU(2) \times U(1)$	(2, 2, 0)
4	6	4	1	0	$SU(2) \times SU(2)$	(2, 2)
4	3	0	0	12	$SU(2)$	2

鬼场中心荷由每个自旋的流的数目决定, 对自旋为 h 的流相关的鬼场中心荷是

$$c_h = (-1)^{2h+1}[3(2h-1)^2 - 1], \quad (11.1.2a)$$

$$c_2 = -26, \quad c_{3/2} = +11, \quad c_1 = -2, \quad c_{1/2} = -1, \quad c_0 = -2. \quad (11.1.2b)$$

符号 $(-1)^{2h+1}$ 是将鬼场的统计考虑在内的结果, 对于整数自旋反对易, 对于半整数自旋对易. 由于物质场中心荷 c^m 是 $-c^g$, 所以只有一种新代数有临界维数, 即 $N = 2$.

对于 $N = 2$, 将两个实超流组合成一个复超流将是方便的

$$T_F^\pm = 2^{-1/2}(T_{F1} \pm iT_{F2}). \quad (11.1.3)$$

这样, $N = 2$ 代数在算符积形式下就是

$$T_B(z)T_F^\pm(0) \sim \frac{3}{2z^2}T_F^\pm(0) + \frac{1}{z}\partial T_F^\pm(0), \quad (11.1.4a)$$

$$T_B(z)j(0) \sim \frac{1}{z^2}j(0) + \frac{1}{z}\partial j(0), \quad (11.1.4b)$$

$$T_F^+(z)T_F^-(0) \sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z^2}j(0) + \frac{2}{z}T_B(0) + \frac{1}{z}\partial j(0), \quad (11.1.4c)$$

$$T_F^+(z)T_F^+(0) \sim T_F^-(z)T_F^-(0) \sim 0, \quad (11.1.4d)$$

$$j(z)T_F^\pm(0) \sim \pm \frac{1}{z}T_F^\pm(0), \quad (11.1.4e)$$

$$j(z)j(0) \sim \frac{c}{3z^2}. \quad (11.1.4f)$$

这暗示了 T_F^\pm 和 j 是 primary field, T_F^\pm 在 j 生成的 $U(1)$ 下拥有荷 ± 1 . 根据 Jacobi 恒等式, $T_F^+T_F^-$ 和 jj 中的常数 c 必须是中心荷.

$N = 2$ 代数的最小线性表示拥有两个实标量场和两个费米子, 我们将其组合成一个复标量 Z 和复费米子 ψ . 作用量是

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(\partial \bar{Z} \bar{\partial} Z + \bar{\psi} \bar{\partial} \psi + \tilde{\bar{\psi}} \partial \tilde{\psi} \right). \quad (11.1.5)$$

流是

$$T_B = -\partial \bar{Z} \partial Z - \frac{1}{2}(\bar{\psi} \partial \psi + \psi \partial \bar{\psi}), \quad j = -\bar{\psi} \psi, \quad (11.1.6a)$$

$$T_F^+ = 2^{1/2}i\psi \partial \bar{Z}, \quad T_F^- = 2^{1/2}i\bar{\psi} \partial Z. \quad (11.1.6b)$$

同时还存在反全纯流, 所以这个 $Z\psi\tilde{\psi}$ CFT 拥有 $(2, 2)$ 超共形对称性.

$Z\psi\tilde{\psi}$ CFT 的中心荷是 3, 所以两个这样的 CFT 将会抵消鬼场中心荷. 由于每个 CFT 中有两个实标量场, 所以临界维数是 4. 然而这些维数组合成复对, 所以时空只能是纯欧几里得时空或者 $(2, 2)$ 时空, 但不可能是闵可夫斯基 $(3, 1)$ 时空. 更进一步, 这个理论只有 4 维平移不变性但是没有 4 维 Lorentz 不变性. 这里的对称性是 $U(2)$ 或 $U(1, 1)$. 最后, 这里的频谱非常小. 约束完全确定了两组 $Z\psi\tilde{\psi}$ 振子. 因此只剩下了单态的质心运动. 这有一些数学上的兴趣, 但它是否有物理应用仍然是不清楚的.

这样我们又回到了原始的 $N = 0$ 代数和 $N = 1$ 代数. 然而, 存在另一种推广, 即闭弦的左移和右移有不同的代数. 全纯代数和反全纯代数彼此对易, 所以没有什么理由使得它们必须是相等的. 在开弦中, 边界条件将全纯部分和反全纯部分关联在一起, 所以开弦没有类似的构造.

这给出了一种新的可能性, $(N, \tilde{N}) = (0, 1)$ 杂化弦; $(N, \tilde{N}) = (1, 0)$ 与它同构, 不再单独考察. 另外 $(0, 2)$ 杂化弦论和 $(1, 2)$ 杂化弦论有一些数学上的兴趣.

应该强调的是, 本节分析有很多显式和隐式的假设, 在我们找到所有弦论这些应该谨慎对待这些假设. 事实上, 确实有一些理论没有落在这个分类中. 一个是超弦的 Green-Schwarz 形式. 它们没有简单的协变规范固定, 但在光锥规范下, 经由玻色化可以证明它实际上等价于 RNS 超弦. 另一个例外是拓扑弦理论, 它在协变约束下不满足我们假定的自旋-统计. 这个弦理论没有物理自由度, 但由于它的可观测量是拓扑的, 所以它在数学上有一些有趣的应用.

11.2 $SO(32)$ 和 $E_8 \times E_8$ 杂化弦

$(0, 1)$ 杂化弦结合了左移玻色弦和右移 Π 型弦的鬼场和约束. 事实上我们可以更进一步, 将玻色弦的左移和 Π 型弦的右移组合在一起, 这样左边就是 26 个平坦维, 右边是 10 个平坦维. 这是可以实现的, 但是它的物理含义不清楚, 因此我们在两边保持相同的维数. 因而是 10. 我们从如下的场出发

$$X^\mu(z, \bar{z}), \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}), \quad \mu = 0, \dots, 9, \quad (11.2.1)$$

总的中心荷是 $(c, \tilde{c}) = (10, 15)$. 鬼场中心荷是 $(c^g, \tilde{c}^g) = (-26, -15)$, 所以剩余的物质场有 $(c, \tilde{c}) = (16, 0)$. 最简单的可能性是取 32 个左移自旋 $\frac{1}{2}$ 场

$$\lambda^A(z), \quad A = 1, \dots, 32. \quad (11.2.2)$$

总的物质场作用量是

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \lambda^A \bar{\partial} \lambda^A + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu \right). \quad (11.2.3)$$

算符积是

$$X^\mu(z, \bar{z})X^\nu(0, 0) \sim -\eta^{\mu\nu} \frac{\alpha'}{2} \ln|z|^2, \quad (11.2.4a)$$

$$\lambda^A(z)\lambda^B(z) \sim \delta^{AB} \frac{1}{z}, \quad (11.2.4b)$$

$$\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})\tilde{\psi}^\nu(0) \sim \eta^{\mu\nu} \frac{1}{\bar{z}}. \quad (11.2.4c)$$

能能量张量和超流是

$$T_B = -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \lambda^A \partial \lambda^A, \quad (11.2.5a)$$

$$\tilde{T}_B = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\psi}_\mu, \quad (11.2.5b)$$

$$\tilde{T}_F = i(2/\alpha')^{1/2} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X_\mu. \quad (11.2.5c)$$

世界面理论拥有对称性 $SO(9, 1) \times SO(32)$. $SO(32)$ 作用在 λ^A 上, 它是内部对称性. λ^A 不能有类时的特征, 这是因为它们费米约束来消除掉负范态. 所以, 尽管 λ^A 的作用量和 RNS 超弦的 ψ 的作用量相同, 但是由于约束不同, 这两个理论之间差异很大.

右移鬼和 RNS 超弦相同, 左移鬼和玻色弦相同. 幂零 BRST 荷和无鬼定理的证明是直接的.

为了完成对这个理论的描述, 我们需要指定场上的边界条件以及频谱中的截面. 现在的情况要比 II 型弦更加复杂, 现在 Poincaré 不变性和 BRST 不变性并没有要求所有 λ^A 有相同的边界条件. T_B 周期性仅要求 λ^A 在差一个 $O(32)$ 旋转的意义下是周期的,

$$\lambda^A(w + 2\pi) = O^{AB} \lambda^B(w). \quad (11.2.6)$$

我们不对相容理论做系统的分析, 但是会给出所有已知的理论. 基于作用量 (11.2.3) 已知有 9 个理论, 其中 6 个有快子. 在剩下的 3 个无快子的理论中, 两个有时空超对称性, 这两个理论将是我们的主题.

在 IIA 型和 IIB 型超弦中, GSO 投射分别作用在左移和右移上. 在任何超对称杂化理论中, 这也是成立的. 带有时空对称性的世界面流是方程 (10.4.25) 中的 \mathcal{V}_s , 其中 s 属于 **16**. 为了使相应的荷是合理定义的, 这个流与任何顶点算符的 OPE 必须是单值的. 对于这个顶点算符的右移旋量部分, 自旋本征值 s' 对于任何 $s \in \mathbf{16}$ 必须满足

$$s \cdot s' + \frac{l}{2} \in \mathbb{Z}, \quad (11.2.7)$$

其中 NS 截面中 l 等于 -1 , R 截面中 l 等于 $-\frac{1}{2}$. 取 $s = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 这个条件精确是右移 GSO 投射

$$\exp(\pi i \tilde{F}) = 1; \quad (11.2.8)$$

任何其它的 $s \in \mathbf{16}$ 给出相同的条件.

现在我们对左移旋量也附加 GSO 投射. 即我们对所有 32 个分量取相同的周期性

$$\lambda^A(w + 2\pi) = \pm \lambda^A(w), \quad (11.2.9)$$

并对左移费米子数附加

$$\exp(\pi i F) = 1. \quad (11.2.10)$$

通过玻色化的方法很容易证明 OPE 是定域且封闭的, 方法和 IIA 弦和 IIB 弦相同. 将 32 个实费米子组合成 16 个复费米子给出

$$\lambda^{K\pm} = 2^{-1/2}(\lambda^{2K-1} \pm i\lambda^{2K}), \quad K = 1, \dots, 16. \quad (11.2.11)$$

这些可以玻色化用 16 个左移标量 $H^K(z)$ 表示. 通过类比 II 型弦中 F 的定义, 定义

$$F = \sum_{K=1}^{16} q_K, \quad (11.2.12)$$

其中 $\lambda^{K\pm}$ 有 $q_K = \pm 1$. F 是加性的, 所以 OPE 是封闭的, 而投射 (11.2.10) 保证了与 \mathbf{R} 截面顶点算符没有分支切割. 在玻色化的描述中, 我们有 26 个左移玻色子和 10 个右移玻色子, 所以 (11.2.3) 实际上是玻色弦和 II 型弦的融合 (fusion).

模不变性是直接的. λ 的配分函数是

$$Z_{16}(\tau) = \frac{1}{2} \left[Z^0_0(\tau)^{16} + Z^0_1(\tau)^{16} + Z^1_0(\tau)^{16} + Z^1_1(\tau)^{16} \right]. \quad (11.2.13)$$

模变换的效果仅是对这四项的置换, 在 $\tau \rightarrow -1/\tau$ 下没有相位, 而在 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 下会产生 $\exp(2\pi i/3)$ 的相位. 这个相位会与 $\tilde{\psi}$ 的配分函数 $Z^+_{\tilde{\psi}}(\tau)^*$ 的相位相抵消. (11.2.13) 的形式类似于 II 型弦的 $Z^+_{\psi}(\tau)$, 但是现在所有项的符号为正号. 从几方面看, 这个符号是必然的. 现在有 32 个费米子而非 8 个, 所以模变换中的符号要提升四次, 所以前三个符号必须相同. 而 Z^1_1 项变换到自身, 所以同往常一样, 它的符号依赖于 \mathbf{R} 截面的手征性. 其它三个理论是通过翻转单边或双边 \mathbf{R} 截面定义的, 它们在物理上等价. 另外, $Z^+_{\psi}(\tau)$ 中的第一项和第二项有相反的符号是因为超共形鬼场的 F , 而对于杂化弦, 左边时没有这种鬼场的. 第一项和第三项的相对符号来自于时空统计, 但 λ 是时空标量, 所以它们的 \mathbf{R} 截面态也是. 所以模不变性, OPE 对 F 守恒, 以及时空自旋统计均与配分函数 (11.2.13) 自洽.

我们现在来找最轻的态. 右移部分与 II 型弦相同, 没有快子, 最低能级处在 $8_v + 8$ 上. 在左移这一边, 左移横向哈密顿量 $H^\perp = \alpha' m^2/4$ 中的正规编序常数 (normal ordering constant) 是

$$\text{NS} : \quad -\frac{8}{24} - \frac{32}{48} = -1, \quad \mathbf{R} : \quad -\frac{8}{24} + \frac{32}{24} = +1. \quad (11.2.14)$$

注意, \mathbf{R} 截面的正规编序常数已经是 +1 了, 这意味着在 \mathbf{R} 截面中, 即使最轻的态也是有质量的.

所以左移 NS 基态是快子. 第一激发态是

$$\lambda^A_{-1/2}|0\rangle_{\text{NS}} \quad (11.2.15)$$

有 $H^\perp = -\frac{1}{2}$, 但是它被投射 (11.2.10) 移除了: 由于现在没有鬼场的贡献, 所以 NS 基态上现在有 $\exp(\pi i F) = +1$. $H^\perp = 0$ 的态现在可以以两种方式获得:

$$\alpha^i_{-1}|0\rangle_{\text{NS}}, \quad \lambda^A_{-1/2}\lambda^B_{-1/2}|0\rangle_{\text{NS}}. \quad (11.2.16)$$

λ^A 在内部 $SO(32)$ 对称性下进行变换. 在全部对称性 $SO(8)_{\text{spin}} \times SO(32)$ 下, NS 基态是不变的 $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$. (11.2.16) 中的第二个态在 $A \leftrightarrow B$ 下是反对称的, 所以无质量态 (11.2.16) 的变换是 $(8_v, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, [2])$. 反对称张量表示是 $SO(32)$ 的伴随表示, 它的维数是 $32 \times 31/2 =$

496.

表 11.2: 杂化弦的低能态

m^2	NS	R	$\widetilde{\text{NS}}$	$\widetilde{\text{R}}$
$-4/\alpha'$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})$	-	-	-
0	$(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{496})$	-	$\mathbf{8}_v$	$\mathbf{8}$

表 11.2 总结了两边的快子态和无质量态. 其中左移部分由它们的 $SO(8) \times SO(32)$ 量子数表示, 而右移部分则是它们的 $SO(8)$ 量子数. 闭弦要结合质量相同的左移态和右移态. 左移部分同玻色弦一样本来有一个快子, 但是由于右边没有快子态与之配对, 所以这个理论是无快子的. 在无质量能级, 乘积

$$(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}) \times (\mathbf{8}_v + \mathbf{8}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{28}, \mathbf{1}) + (\mathbf{35}, \mathbf{1}) + (\mathbf{56}, \mathbf{1}) + (\mathbf{8}', \mathbf{1}) \quad (11.2.17)$$

是 I 型弦的超引力多重态. 乘积

$$(\mathbf{1}, \mathbf{496}) \times (\mathbf{8}_v + \mathbf{8}) = (\mathbf{8}_v, \mathbf{496}) + (\mathbf{8}, \mathbf{496}) \quad (11.2.18)$$

是 $SO(32)$ 伴随表示中的 $N = 1$ 规范多重态. 因此后者是时空中的规范对称性.

这与 I 型开弦加闭弦 $SO(32)$ 理论的无质量频谱精确相同. 然而, 这两个理论的有质量频谱不同. 在开弦中, 规范量子数有端点的 $SO(32)$ 矢量携带, 所以, 即使是在有质量能级, 除了该规范群 2 秩张量表示外, 不会存在比之更高的表示. 但是在杂化弦中, 规范量子数由场携带, 它们在整个世界面上传播. 在有质量能级, 这样的激发可以有任意个, 这就会给出任意大的规范群表示. 然而, 我们会在 14 章看到, I 型理论和杂化 $SO(32)$ 理论实际上是相同的.

第二种杂化弦理论是将 λ^A 分成两组, 每组各 16 个, 并在每组上附加相互独立的边界条件,

$$\lambda^A(w + 2\pi) = \begin{cases} \eta \lambda^A(w), & A = 1, \dots, 16, \\ \eta' \lambda^A(w), & A = 17, \dots, 32, \end{cases} \quad (11.2.19)$$

其中 η 和 η' 各为 ± 1 . 对应地, 存在算符

$$\exp(\pi i F_1), \quad \exp(\pi i F'_1), \quad (11.2.20)$$

它们分别与第一组 λ^A 和第二组 λ^A 反对易. 分别对右移和两个左移取 GSO 投射. 即, 在投射

$$\exp(\pi i F_1) = \exp(\pi i F'_1) = \exp(\pi i \tilde{F}) = 1 \quad (11.2.21)$$

下对 $2^3 = 8$ 个不同的周期性组合求和. OPE 的封闭性和定域性以及模不变性都很容易证明. 特别地, 配分函数

$$Z_8(\tau)^2 = \frac{1}{4} \left[Z_0^0(\tau)^8 + Z_1^0(\tau)^8 + Z_0^1(\tau)^8 + Z_1^1(\tau)^8 \right]^2 \quad (11.2.22)$$

的变换与 Z_ψ^\pm 和 Z_{16} 相同. 这里重要的是, 费米子以 16 个为一组, 这使得 Z_ψ^\pm 中的符号被平方了.

和之前一样, 右边最轻的态是无质量的 $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}$. 在左边, 截面 NS-NS' 仍然有正规编序

常数 -1 , 所以基态是快子态, 但是右边没有态与之匹配. 第一激发态处在 $m^2 = 0$, 它是

$$\begin{aligned} & \alpha_{-1}^i |0\rangle_{\text{NS,NS'}}, \\ & \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0\rangle_{\text{NS,NS'}}, \quad 1 \leq A, B \leq 16 \text{ or } 17 \leq A, B \leq 32. \end{aligned} \quad (11.2.23)$$

这与 $SO(32)$ 的情况有一个差别: 因为两组 λ 上有各自的 GSO 投射, A 和 B 必须来自同一组 λ . 由于 $SO(32)$ 被边界条件部分破缺, 我们根据剩余的 $SO(16) \times SO(16)$ 对态分类. 态 (11.2.23) 对每个 $SO(16)$

包含一个反对称张量伴随表示, 维数是 $16 \times 15/2 = 120$.

在左移 R-NS' 截面中, 正规编序尝试是

$$-\frac{8}{24} + \frac{16}{24} - \frac{16}{48} = 0, \quad (11.2.24)$$

所以基态是无质量的. 用 8 个上升算符和 8 个下降算符组出 16 个 λ^A 零模会给出第一个 $SO(16)$ 的 256 维旋量表示. GSO 投射将其分成两个不可约表示, $\mathbf{128} + \mathbf{128}'$, 前者处在频谱中. NS-R' 截面给出了另一个 $SO(16)$ 的 $\mathbf{128}$, R-R' 截面依然没有无质量态.

总结一下, 左手边无质量的 $SO(8)_{\text{spin}} \times SO(16) \times SO(16)$ 表示是

$$(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{120}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{120}) + (\mathbf{1}, \mathbf{128}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{128}). \quad (11.2.25)$$

与右移的 $\mathbf{8}_v$ 组合对于每个 $SO(16)$ 给出无质量矢量玻色子, 它们的变换是 $\mathbf{120} + \mathbf{128}$. 时空理论的自洽性要求无质量矢量按照规范的伴随表示变换. 而例外群 E_8 满足这个要求, $SO(16)$ 是它的一个子群, 并且在这个子群下 E_8 按照 $\mathbf{120} + \mathbf{128}$ 变换. 显然, 第二个杂化弦理论拥有规范群 $E_8 \times E_8$. 即使在当前的描述下只有 $SO(16) \times SO(16)$ 对称性在世界面理论上是明显的, 但是世界面理论拥有全部的 $E_8 \times E_8$ 对称性. 额外的流由玻色化给出

$$\exp \left[i \sum_{K=1}^{16} q_K H^K(z) \right]. \quad (11.2.26)$$

这是一个自旋场, 和费米子顶点算符 (10.4.25) 中的自旋场相同. 对于第一个 E_8 , 荷是

$$q_K = \begin{cases} \pm \frac{1}{2}, & K = 1, \dots, 8 \\ 0, & K = 9, \dots, 16 \end{cases}, \quad \sum_{K=1}^{16} q_K \in 2\mathbb{Z}, \quad (11.2.27)$$

对于第二个类似. 它们确实是 $(1, 0)$ 算符. 无质量频谱是 $d = 10, N = 1$ 超引力多重态加上 $E_8 \times E_8$ 规范多重态. 无质量场的 $SO(8)_{\text{spin}} \times E_8 \times E_8$ 量子数是

$$\begin{aligned} & (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{28}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{35}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{56}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{8}', \mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ & + (\mathbf{8}_v, \mathbf{248}, \mathbf{1}) + (\mathbf{8}, \mathbf{248}, \mathbf{1}) + (\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{248}) + (\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{248}). \end{aligned} \quad (11.2.28)$$

自洽性要求费米子以 16 个为一组. 我们可以用 8 个为一组的费米子给出模不变的理论, 这样左移配分函数就是 $(Z_\psi^\pm)^4$. 然而, 我们已经看到, 模不变性要求了 Z_ψ^\pm 中的相对符号. 这些符号将赋予左移 R 截面以负权重, 并对应于 NS 截面上有投射 $\exp(\pi i F)$. 前者与自旋统计不自洽, 因为这些态是时空标量, 而后者与 OPE 的封闭性不自洽, 这使得相互作用不自洽. 所以 $SO(32)$ 和 $E_8 \times E_8$ 理论是 10 维中唯一的超对称杂化弦.

11.3 其他十维杂化弦

通过 8.5 节引入的扭变构造, 其它杂化弦理论可以从一个理论中构造出来. “最小扭变理论”, 即路径积分截面最少的理论, 对应的是对角模不变量

$$\frac{1}{2} \left[Z^0_0(\tau)^{16} Z^0_0(\tau)^{*4} - Z^0_1(\tau)^{16} Z^0_1(\tau)^{*4} - Z^1_0(\tau)^{16} Z^1_0(\tau)^{*4} - Z^1_1(\tau)^{16} Z^1_1(\tau)^{*4} \right]. \quad (11.3.1)$$

与这个模不变量对应的是, 对所有的费米子, λ^A 和 $\tilde{\psi}^\mu$, 对环面的每个闭链 (cycle) 同时取成周期或反周期. 写成频谱就是, 世界面费米子不是全部都为 **R** 就是全部都为 **NS**, 对角投影是

$$\exp[\pi i(F + \tilde{F})] = 1. \quad (11.3.2)$$

除了一个快子外, 这个理论是自洽的, 态

$$\lambda^A_{-1/2} |0\rangle_{\text{NS,NS}}, \quad m^2 = -\frac{2}{\alpha'}, \quad \exp(\pi i F) = \exp(\pi i \tilde{F}) = -1, \quad (11.3.3)$$

按照 $SO(32)$ 下的一个矢量变换. 在无质量能级, 态是

$$\alpha^i_{-1} \tilde{\psi}^j_{-1/2} |0\rangle_{\text{NS,NS}}, \quad \lambda^A_{-1/2} \lambda^B_{-1/2} \tilde{\psi}^j_{-1/2} |0\rangle_{\text{NS,NS}}, \quad (11.3.4)$$

它们是引力子, 伸缩子, 反对称张量以及 $SO(32)$ 规范玻色子. 频谱中有费米子, 但是最轻的态处在 $m^2 = 4/\alpha'$.

现在我们来考察各种扭变. 首先考察 $\exp(\pi i \tilde{F})$ 生成的 \mathbb{Z}_2 . 结合对角投射 (11.3.2), 这给出总投射

$$\frac{1 + \exp[\pi i(F + \tilde{F})]}{2} \cdot \frac{1 + \exp(\pi i \tilde{F})}{2} = \frac{1 + \exp(\pi i F)}{2} \cdot \frac{1 + \exp(\pi i \tilde{F})}{2}. \quad (11.3.5)$$

这等同于投射 (11.2.8) 加上 (11.2.10), 这些投射定义了超对称 $SO(32)$ 杂化弦. 另外, $\exp(\pi i \tilde{F})$ 给出的空间扭变所附加的截面中, λ^A 和 $\tilde{\psi}^\mu$ 有相反的周期性. 因此这个扭变理论是 $SO(32)$ 杂化弦. 用 $\exp(\pi i \tilde{F})$ 扭变效果相同.

现在考察被 $\exp(\pi i F_1)$ 扭变的对角理论, $\exp(\pi i F_1)$ 反转了前 16 个 λ^A 的符号并且它被用来构造 $E_8 \times E_8$ 杂化弦. 相应的理论不是超对称的——就像方程 (11.2.8) 中那样, 一个理论当且仅当投射包含 $\exp(\pi i \tilde{F})$ 时才是超对称的. 它有规范群 $E_8 \times SO(16)$ 并在 **(1, 16)** 中有一个快子. (给出证明.) 再用 $\exp(\pi i \tilde{F})$ 做一次扭变会给出超对称 $E_8 \times E_8$ 杂化弦.

通过将 λ^A 分别分成 8, 4, 2, 1 一个一组, 这一步可以继续下去. 将 $SO(32)$ 指标 A 写成二进制, $A = 1 + d_1 d_2 d_3 d_4 d_5$, 其中每个数位 d_i 是 0 或 1. 对 $i = 1, \dots, 5$ 定义算符 $\exp(\pi i F_i)$, 使得该算符与那些 $d_i = 0$ 的 λ_A 反对易, 与那些 $d_i = 1$ 的 λ_A 对易. 显然有五种可能的扭变群, 它们分别有 2, 4, 8, 16, 32 个群元, 通过从 $\exp(\pi i F_i)$ 中选择 1, 2, 3, 4, 5 个并构造各种乘积生成. 第一个给出刚才描述的 $E_8 \times SO(16)$ 理论; 进一步扭变产生规范群 $SO(24) \times SO(8)$, $E_7 \times E_7 \times SO(4)$, $SU(16) \times SO(2)$ 和 E_8 . 这些理论中没有一个是超对称的, 并且都有快子. 进一步用 $\exp(\pi i \tilde{F})$ 扭变会给出超对称理论, 这些理论不是 $SO(32)$ 理论就是 $E_8 \times E_8$ 理论. 在这个构造中规范群是不显然的, 更多的流来自于 **R** 截面.

我们来回顾一下扭变构造的逻辑. 对于被群元 h 扭变的截面, 与之对应的顶点算符会在场中产生一个分支切割, 但是到 h -不变态上的投射意味着这些分支切割不会出现在顶点算符的乘积中. 由于 h 是对称性, 投射被相互作用保护. 在环面上, 对类时扭变和类空扭变的和是模不变的, 而这可以推广到任意亏格. 然而我们在 10.7 节了解到, 由于模变换中有反常相位, 这个对路径积分边界求和的想当然模不变性是不够的. 仅对于右-左对称的路径积分, 相位才会自动抵消.

在一圈, 反常相位仅在变换 $\tau \rightarrow \tau + 1$ 中出现, 它们被解释成能级匹配条件 $L_0 - \tilde{L}_0 \in \mathbb{Z}$ 没有被满足. 进一步有一个定理, 对于阿贝尔扭变群 (像这里考察的 \mathbb{Z}_2 的乘积), 如果每个扭变截面在附加投射之前有无限多个能级匹配态, 那么一圈振幅, 实际上是所有振幅, 都精确是模不变的. 在杂化弦中, 取这样的截面: k 个 λ^A 满足 R 边界条件, $32 - k$ 个 λ^A 满足 NS 边界条件, 零点能 (注: 右移部分是零, 这里只考虑了左移) 是

$$-\frac{8}{24} + \frac{k}{24} - \frac{(32-k)}{48} = -1 + \frac{k}{16}. \quad (11.3.6)$$

振子会将能量提高 $\frac{1}{2}$ 的整数倍, 所以左移部分的能量是 $\frac{1}{16}k \bmod \frac{1}{2}$. 在右移这一边, 为了 Lorentz 不变性, 我们仍对所有费米子取共同的边界条件, 所以能量是 $\frac{1}{2}$ 的整数倍. 因此, 如果 k 是 8 的整数倍, 能级匹配条件是精确满足的. 而正如我们所看到的, OPE 的封闭性以及时空自旋-统计实际上要求 k 是 16 的整数倍. 定义扭变 $\exp(\pi i F_i)$ 使得它们中的任意乘积正好与 16 个 λ^A 反对易, 这样就满足了这个条件.

当能级匹配条件被满足时, 实际上可以存在多个模不变且相容的理论. 考察一个扭变理论, 它有配分函数

$$Z = \frac{1}{\text{order}(H)} \sum_{h_1, h_2 \in H} Z_{h_1, h_2}, \quad (11.3.7)$$

其中 h_1 和 h_2 是环面上的类时周期和类空周期. 那么, 配分函数是

$$Z = \frac{1}{\text{order}(H)} \sum_{h_1, h_2 \in H} \epsilon(h_1, h_2) Z_{h_1, h_2}, \quad (11.3.8)$$

也是相容的 (模不变且有封闭和定域的 OPE), 其中相位 $\epsilon(h_1, h_2)$ 满足

$$\epsilon(h_1, h_2) = \epsilon(h_2, h_1)^{-1}, \quad (11.3.9a)$$

$$\epsilon(h_1, h_2)\epsilon(h_1, h_3) = \epsilon(h_1, h_2 h_3), \quad (11.3.9b)$$

$$\epsilon(h, h) = 1. \quad (11.3.9c)$$

写成原始扭变理论中的 \hat{h}_2 , 新理论不再投射到 H -不变态上, 而是投射到满足

$$\hat{h}_2 |\psi\rangle_{h_1} = \epsilon(h_1, h_2)^{-1} |\psi\rangle_{h_1} \quad (11.3.10)$$

换句话说, 态现在是 \hat{h} 的本征矢量, 且相位与截面相关; 等价地, 我们有一个与截面相关的重定义

$$\hat{h} \rightarrow \epsilon(h_1, h) \hat{h}. \quad (11.3.11)$$

相因子 $\epsilon(h_1, h_2)$ 被称作离散挠率 (*discrete torsion*).

在前面的理论中, 即由 $\exp(\pi i F_1)$ 和 $\exp \pi i \tilde{F}$ 生成的群, 这个群从对角理论中生成了

$E_8 \times E_8$ 弦, 离散挠率有一种有趣的可能性. 对于

$$(h_1, h_2) = \left(\exp[\pi i(k_1 F_1 + l_1 \tilde{F})], \exp[\pi i(k_2 F_1 + l_2 \tilde{F})] \right) \quad (11.3.12)$$

相位

$$\epsilon(h_1, h_2) = (-1)^{k_1 l_2 + k_2 l_1} \quad (11.3.13)$$

满足条件 (11.3.9). 它把产生超对称 $E_8 \times E_8$ 弦的投射

$$\exp(\pi i F_1) = \exp(\pi i F'_1) = \exp(\pi i \tilde{F}) = 1, \quad (11.3.14)$$

修正成

$$\exp[\pi i(F_1 + \alpha'_1 + \tilde{\alpha})] = \exp[\pi i(F'_1 + \alpha_1 + \tilde{\alpha})] = \exp[\pi i(\tilde{F} + \alpha_1 + \alpha'_1)] = 1, \quad (11.3.15)$$

这里的符号约定与方程 (10.7.11) 中的类似: 在 $w \rightarrow w + 2\pi$ 的变换下, $\tilde{\psi}^\mu$, 前 16 个 λ^A , 后 16 个 λ^A 分别挑出相位 $-\exp(-\pi i \tilde{\alpha})$, $-\exp(-\pi i \alpha_1)$ 和 $-\exp(-\pi i \alpha'_1)$. 这些 α 在 OPE 下守恒, 所以这个投射是自洽的. 换句话说, 频谱由如下截面构成

$$\begin{aligned} &(\text{NS}+, \text{NS}+, \text{NS}+), \\ &(\text{NS}-, \text{NS}-, \text{R}+), \quad (\text{NS}-, \text{R}+, \text{NS}-), \quad (\text{NS}+, \text{R}-, \text{R}-), \\ &(\text{R}+, \text{NS}-, \text{NS}-), \quad (\text{R}-, \text{R}-, \text{NS}+), \quad (\text{R}-, \text{NS}+, \text{R}-), \\ &(\text{R}+, \text{R}+, \text{R}+) \end{aligned}$$

其中三个符号分别指 $\tilde{\psi}^\mu$, 前 16 个 λ^A 和后 16 个 λ^A .

引力微子在 $(\text{R}\pm, \text{NS}+, \text{NS}+)$ 截面中, 所以它不在这个频谱中. 快子在 $(\text{NS}-, \text{NS}-, \text{NS}+)$ 截面和 $(\text{NS}-, \text{NS}+, \text{NS}-)$ 截面, 所以它也不在这个频谱中. 这个扭变留下了 $SO(16) \times SO(16)$ 规范对称性. 根据态的 $SO(8)_{\text{spin}} \times SO(16) \times SO(16)$ 量子数对它们进行分类, 我们发现了如下无质量频谱

$$\begin{aligned} (\text{NS}+, \text{NS}+, \text{NS}+) : & \quad (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{28}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{35}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{8}_v, \mathbf{120}, \mathbf{1}) + (\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{120}), \\ (\text{R}+, \text{NS}-, \text{NS}-) : & \quad (\mathbf{8}, \mathbf{16}, \mathbf{16}), \\ (\text{R}-, \text{R}-, \text{NS}+) : & \quad (\mathbf{8}', \mathbf{128}', \mathbf{1}), \\ (\text{R}-, \text{NS}+, \text{R}-) : & \quad (\mathbf{8}', \mathbf{1}, \mathbf{128}'). \end{aligned}$$

这表明没有超对称性的理论是可能不含快子的.

11.4 一点 Lie 代数

Basic definitions

Lie 代数是装备反对易乘积 $[T, T']$ 的矢量空间. 以基 T^a 的形式, 这个乘积是

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}_c T^c, \quad (11.4.1)$$

其中 f^{ab}_c 是结构常数. 这个乘积被要求满足 Jacobi 恒等式

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0. \quad (11.4.2)$$

相应的 Lie 群由指数

$$\exp(i\theta_a T^a), \quad (11.4.3)$$

生成, 其中 θ_a 是实数. 对于紧 Lie 群, 相应的紧 Lie 代数拥有正定的内积

$$(T^a, T^b) = d^{ab}, \quad (11.4.4)$$

它是不变的,

$$([T, T'], T'') + (T', [T, T'']) = 0. \quad (11.4.5)$$

不变性的等价陈述是 f^{abc} 全反对称的, 指标用 d^{ab} 进行升降.

我们感兴趣的是单纯 Lie 代数, 它们没有不平凡的不变子代数 (理想). 一般紧致代数是单代数与 $U(1)$ 的直和. 对于单代数, 内积在相差一个归一化的意义下唯一, 并存在生成元的一组基使得它就是 δ^{ab} . 对于 Lie 代数的任何表示 r (任何一组满足 f^{ab}_c 给定的 (11.4.1) 的矩阵 $t_{r,ij}^a$), 它的基是不变的, 因此对于单纯 Lie 代数, 它正比于 d^{ab} ,

$$\text{Tr}(t_r^a t_r^b) = T_r d^{ab} \quad (11.4.6)$$

其中 T_r 是某个常数. 另外, $t_r^a t_r^b d_{ab}$ 与所有 t_r^c 所以它正比于单位算符,

$$t_r^a t_r^b d_{ab} = Q_r \quad (11.4.7)$$

Q_r 是表示 r 的 Casimir 不变量.

先来证明 $t_r^a t_r^b d_{ab}$ 与所有 t_r^c 对易,

$$\begin{aligned} [d_{ab} t_r^a t_r^b, t_r^c] &= d_{ab} [t_r^a, t_r^c] t_r^b + d_{ab} t_r^a [t_r^b, t_r^c] = i d_{ab} (f_{ac}^d t_r^d t_r^b + f_{bc}^d t_r^a t_r^d) \\ &= i (f_{ac}^d t_r^d t_r^b + f_{bc}^d t_r^a t_r^d) = i (f_{bcd} t_r^d t_r^b + f_{acd} t_r^a t_r^d) \\ &= i (f_{bcd} t_r^d t_r^b + f_{dcb} t_r^d t_r^b) = 0 \end{aligned}$$

再根据 Schur 引理就得到了 (11.4.7).

典型 Lie 代数有

- $SU(n)$: 生成元是无迹厄米 $n \times n$ 矩阵. 相应的群由行列式为 1 的幺正矩阵构成. 这个代数也被记成 A_{n-1} .
- $SO(n)$: 生成元是反对称厄米 $n \times n$ 矩阵. 相应的群 $SO(n, \mathbb{R})$ 由行列式为 1 的实正交矩阵构成. 当 $n = 2k$ 时, 这个代数也被记做 D_k . 当 $n = 2k + 1$ 时, 它被记做 B_k .
- $Sp(k)$: 生成元是 $2k \times 2k$ 厄米矩阵, 不过拥有额外结构

$$MTM^{-1} = -T^T. \quad (11.4.8)$$

这里的上标 T 指转置, 并且

$$M = i \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{bmatrix} \quad (11.4.9)$$

其中 I_k 是 $k \times k$ 单位矩阵. 相应的群也由幺正矩阵 U 构成, 不过满足额外的性质

$$MUM^{-1} = (U^T)^{-1}. \quad (11.4.10)$$

有时候也用 $Sp(2k)$ 标记这个群. 它同时被记做 C_k .

对于每个紧致群, 通过给它的一些生成元乘以 i , 我们可以获得各种非紧群. 例如, 无迹虚矩阵生成了 $SL(n, \mathbb{R})$ 群, 它是行列式为 1 的实矩阵构成的群. 保 Lorentz 型内积的群 $SO(m, n, \mathbb{R})$ 可以类似地从 $SO(m+n)$ 获得. 另外一个非紧群的生成元也满足辛条件 (11.4.8), 但是生成元是虚矩阵而非厄米矩阵, 这个群由满足 (11.4.10) 的实矩阵构成. 这个非紧群也别记做 $Sp(k)$ 或 $Sp(2k)$; 有时用 $USp(2k)$ 来区分紧致么正的情况.

这种非紧群不会出现在 Yang-Mills 理论中 (相应的结果将不会是么正的), 但是它们有其它应用. 在紧致化弦论中, 一些 $SL(n, \mathbb{R})$ 和 $SO(m, n, \mathbb{R})$ 会作为低能对称性出现. 而在经典力学中, $Sp(k)$ 的实形式会作为 Poisson 括号的一个不变量出现.

Roots and weights

对任何 Lie 代数 \mathfrak{h} , 选成最大的一组互相对易的生成元 $H^i, i = 1, \dots, \text{rank}(g)$. 剩下的生成元 E^α 可以取成在 H^i 在有确定的荷,

$$[H^i, E^\alpha] = \alpha^i E^\alpha. \quad (11.4.11)$$

$\text{rank}(g)$ -维矢量 α^i 被称为根. 有一个定理, 对于一个给定的根只有一个生成元, 所以记号 E^α 是没有歧义的. Jacobi 恒等式定下了剩下的代数是

$$[E^\alpha, E^\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E^{\alpha+\beta} & \text{如果 } \alpha + \beta \text{ 是根,} \\ 2\alpha \cdot H / \alpha^2 & \text{如果 } \alpha + \beta = 0, \\ 0 & \text{其它情况.} \end{cases} \quad (11.4.12)$$

乘积 $\alpha \cdot H$ 与 α^2 利用与 d_{ij} 收缩定义, d_{ij} 是内积 (11.4.4) 限制在对易子代数上的逆. 取与 H^i 的迹, 第二个方程定出了归一化 $(E^\alpha, E^{-\alpha}) = 2/\alpha^2$. 常数 $\epsilon(\alpha, \beta)$ 只能取值 ± 1 .

现在来证明 (11.4.12), 利用 Jacobi 恒等式

$$\begin{aligned} [H^i, [E^\alpha, E^\beta]] &= [E^\alpha, [H^i, E^\beta]] + [E^\beta, [E^\alpha, H^i]] = \beta^i [E^\alpha, E^\beta] - \alpha^i [E^\beta, E^\alpha] \\ &= (\alpha^i + \beta^i) [E^\alpha, E^\beta], \end{aligned}$$

这说明 $[E^\alpha, E^\beta]$ 要么是 H^i 的本征矢, 要么为零, 即情况 3. 如果 $\alpha + \beta$ 不为零, 那么它就是根, $[E^\alpha, E^\beta]$ 就是相应的 $E^{\alpha+\beta}$, 这里还有一个归一化系数尚待确定. 如果 $\alpha + \beta$ 为零, 则说明 $[E^\alpha, E^\beta]$ 与 H^i 互相对易, 那么 $[E^\alpha, E^\beta]$ 只能是 H^i 的线性组合. 于是设 $[E^\alpha, E^{-\alpha}] = a_j H^j$, 那么根据 (11.4.5),

$$\begin{aligned} (H^i, [E^\alpha, E^{-\alpha}]) &= -([E^\alpha, H^i], E^{-\alpha}) \\ a^i &= \alpha^i (E^\alpha, E^{-\alpha}) \end{aligned}$$

令 $(E^\alpha, E^{-\alpha})$ 归一化到 $2/\alpha^2$ 就获得了想要的结果. 而第一项的结果任意, 这里取系数为 ± 1 .

表示 H^i 的矩阵 t_r^i 可以取成对角的. 它们的共同本征值 w^i , 组合成矢量

$$(w^1, \dots, w^{\text{rank}(g)}), \quad (11.4.13)$$

这个矢量称为权, 它的个数等于表示的维数. 在伴随表示中, 根和权是相同的.

由于 H^i 互相对易, 它们可以同时对角化, 拥有共同的本征矢量 $|\lambda\rangle$, $|\lambda\rangle$ 张开了表示空间, 本征矢量的个数就是表示的维数. 对于伴随表示, $|\lambda\rangle$ 就是 E^α .

例子:

- 对于 $SO(2k) = D_k$, 考察沿着对角线的 k 个 2×2 分块, 令 H^i 是第 i 个分块为

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad (11.4.14)$$

其它地方都为零的矩阵. 这是最大的互相对易集合. 在这 k 个 H^i 下, $2k$ -矢量 $(1, \pm i, 0, \dots, 0)$ 拥有本征值

$$(\pm 1, 0^{k-1}); \quad (11.4.15)$$

它们是这个矢量表示的权. 其它的权只不过把 ± 1 换到其它位置.

伴随表示是反对称张量, 它被包含在两个矢量表示的乘积中. 权具有相加性, 所以, 通过将任何两个不同 (由于反对称性) 的矢量权加在一起就得到了根. 这给出

$$(+1, +1, 0^{k-2}), \quad (+1, -1, 0^{k-2}), \quad (-1, -1, 0^{k-2}), \quad (11.4.16)$$

和它们的所有置换. 通过将任何权和它相反的权加在一起, 我们就获得了 k 个零根, 而它们就是 H^i .

考察 2 个 $2k$ -矢量, $|\lambda_{1,2}\rangle$ 的反对称积 $|\lambda_1\rangle \wedge |\lambda_2\rangle$, 并假定 $|\lambda_{1,2}\rangle$ 分别只在 $H^{1,2}$ 下有本征值 $+1$, 那么

$$H^1|\lambda_1\rangle \wedge |\lambda_2\rangle = 1$$

$$H^2|\lambda_1\rangle \wedge |\lambda_2\rangle = 1$$

由此就得到了 (11.4.16)

在旋量表示中, 权 w^i 由所有分量为 $\frac{1}{2}$ 的 k -矢给出, 其中 2^{k-1} 有偶数个 $-\frac{1}{2}$, 而 $2^{k-1}'$ 有奇数个.

- 对于 $SO(2k+1) = B_k$, 可以取相同的对角生成元, 只不过最后一列和最后一行为零. 矢量表示中的权与上基本相同, 不过多了一个来自于最后一行的 (0^k) . 多出的生成元有根

$$(\pm 1, 0^{k-1}) \quad (11.4.17)$$

以及所有的置换.

- $Sp(k) = C_k$ 的伴随是对称张量, 所以会获得与 $SO(2k)$ 相同的根, 不同的是矢量权重不需要是不同的. 相应的根是 $SO(2k)$ 的根和

$$(\pm 2, 0^{k-1}) \quad (11.4.18)$$

以及置换. 通常会对这个跟做归一化使得最长的根的长度是 $\sqrt{2}$, 所以我们要对所有根除以 $2^{1/2}$.

- 对于 $SU(n) = A_{n-1}$, 先来讨论 $U(n)$ 会比较方便, 尽管它的代数不是单代数. n 个互

相对易的生成元 H^i 可以取成在位置 ii 为 1 在其它位置为零. 那么在位置 ij 为 1 的带荷生成元对于 H^i 有本征值 +1, 对于 H^j 有本征值 -1: 根是

$$(+1, -1, 0^{n-2}) \quad (11.4.19)$$

的所有置换. 注意到所有根都处在超平面 $\sum_i a^i = 0$ 上; 这是因为 $U(1)$ 生成元的所有本征值为零. $SU(n)$ 的根就是 $U(n)$ 中被认为处在这个超平面上的那些根.

- 我们说过 E_8 生成元分解成 $SO(16)$ 的伴随表示和旋量表示. $SO(16)$ 的对易生成元也可以取成 E_8 的对易生成元, 所以 E_8 的根就是 $SO(16)$ 的根加上旋量的根, 即根 (11.4.16) 的所有置换加上

$$(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}) \quad (11.4.20)$$

以及对这个根做偶数次翻号得到的根. 等价的这个集合可以描述成

$$\text{对于所有的 } i, \quad \alpha^i \in \mathbb{Z} \text{ 或 } \alpha^i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \quad (11.4.21a)$$

和

$$\sum_{i=1}^8 \alpha^i \in 2\mathbb{Z}, \quad \sum_{i=1}^8 (\alpha^i)^2 = 2. \quad (11.4.21b)$$

对于 A_n , D_k 和 E_8 (以及我们还没有描述的 E_6 和 E_7), 所有根都是等长的. 它们被称为单链 (*simply-laced*) 代数. 对于 B_k 和 C_k (以及 F_4 和 G_2), 有两种不同长度的根, 所以被称为长根和短根.

后面一个非常有用的量是 Lie 代数 g 的对偶 Coxeter 数 $h(g)$, 定义成

$$-\sum_{c,d} f_{ac}^a f_{bd}^b = h(g) \psi^2 d^{ab} \quad (11.4.22)$$

这里的 ψ 是任意的长根. 作为参考, 我们在表 11.3 中给出所有单 Lie 代数的相应值. 因为 $\psi^2 = \psi^i \psi^j d_{ij}$ 中出现了 d^{ab} 的逆, 所以定义 (11.4.22) 使得 $h(g)$ 独立于内积 d^{ab} 的任何归一化.

表 11.3: 单纯 Lie 代数的维数和 Coxeter 数

	$SU(n)$	$SO(n), n \geq 4$	$Sp(k)$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$\dim(g)$	$n^2 - 1$	$n(n-1)/2$	$2k^2 + k$	78	133	248	52	14
$h(g)$	n	$n-2$	$k+1$	12	18	30	9	4

Useful facts for grand unification

例外群 E_8 通过数个子群与大统一中出现的群相联系. 这会在杂化弦的紧致化中起到作用.

第一个子群是

$$E_8 \rightarrow SU(3) \times E_6. \quad (11.4.23)$$

E_6 表示的进一步分解参看表 11.4. 在 $E_8 \times E_8$ 弦的简单紧致化中, 标准模型的费米子可以认为全部来自于其中一个 E_8 的 248 维伴随表示. 因此追踪这个表示在连续数个对称性

破缺下的命运是有益的. 在 $E_8 \rightarrow SU(3) \times E_6$,

$$248 \rightarrow (8, 1) + (1, 78) + (3, 27) + (\bar{3}, \bar{27}). \quad (11.4.24)$$

即, E_8 的伴随表示包含子群的伴随表示 ((11.4.24) 中的前两个表示), 在剩下的 162 个生成元中, 一半按照 $SU(3)$ 的三重态和 E_6 的复 27 维表示变换, 另一半是前者的共轭. 进一步的子群参看表 11.4. 前三个子群代表 E_6 经过数个较小的大统一子群破缺值标准模型群; 第四个是另一种破缺模式.

表 11.4: 大统一群的子群和表示

E_6	\rightarrow	$SO(10) \times U(1)$
78	\rightarrow	$45_0 + 16_{-3} + \bar{16}_3 + 1_0$
27	\rightarrow	$1_4 + 10_{-2} + 16_1$
$SO(10)$	\rightarrow	$SU(5) \times U(1)$
45	\rightarrow	$24_0 + 10_4 + \bar{10}_{-4} + 1_0$
16	\rightarrow	$10_{-1} + \bar{5}_3 + 1_{-5}$
10	\rightarrow	$5_2 + \bar{5}_{-2}$
$SU(5)$	\rightarrow	$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
10	\rightarrow	$(3, 2)_1 + (\bar{3}, 1)_{-4} + (1, 1)_6$
5	\rightarrow	$(\bar{3}, 1)_2 + (1, 2)_{-3}$
E_6	\rightarrow	$SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$
78	\rightarrow	$(8, 1, 1) + (1, 8, 1) + (1, 1, 8) + (3, 3, 3) + (\bar{3}, \bar{3}, \bar{3})$
27	\rightarrow	$(3, 3, 1) + (1, 3, 3) + (\bar{3}, 1, 3)$

在大统一中, 精确有夸克和轻子的一个 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 落入到 $SU(5)$ 的 **10** 加 $\bar{5}$ 中. 进一步往回追溯, 我们看到这种代落入到 $SO(10)$ 的表示 **16**, 其中还剩下一个态 1_{-5} . 这个额外的态在 $SU(5)$ 下中性的, 所以在 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 下也是中性的, 它可以被认作右手中微子. 回溯到 E_6 , **27** 包含单代的 15 个态, 除此之外还有 12 个态. 与 $SU(5)$ 大统一相比, $SO(10)$ 和 E_6 要更统一一些, 也就是说这个代被包含在单个表示中, 但是不太经济的是, 这个表示中还包含其它没有看到的态. 事实上, 后者可能不是那么难. 为了看到原因, 考察 E_6 的 **27** 在 $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5) \subset SO(10) \subset E_6$ 下的分解:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{27} \rightarrow & (\mathbf{3}, \mathbf{2})_1 + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-4} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_6 + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_2 + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-3} \\
 & + [\mathbf{1}_0] \\
 & + [(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_2 + (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-2}] + [(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-3} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_3] + [\mathbf{1}_0]. \quad (11.4.25)
 \end{aligned}$$

第一行列出了一代, 第二行是 $SO(10)$ 的 **16** 中出现的额外的态, 第三行是 E_6 的 **27** 中额外的态. 每对方括号中的子集是 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 的一个实表示. 重点在于, 对于实表示 r , CPT 共轭也在表示 r 中, 所以对于粒子和它们的反粒子, 这个组合规范加上 $SO(2)$ 螺旋度表示是 $(r, +\frac{1}{2}) + (r, -\frac{1}{2})$. 这与表示 r 中的有质量自旋- $\frac{1}{2}$ 粒子是相同的, 所以规范与时空对称性与这些粒子有质量是自洽的. 在最一般的不变作用量中, $[\]$ 括号中的所有粒子都将有很大 (大统一能标) 的质量. 值得注意的是, 对于 $SU(5)$ 的 **10** + $\bar{5}$, $SO(10)$ 的 **16**, 或者 E_6 的 **27**, 自然的 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 频谱在这三者中的任何一个都是标准的夸克和轻子代.

11.5 流代数

在杂化弦中, 规范玻色子顶点算符的形式是 $j(z)\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})e^{ik\cdot X}$, 其中 $j(z)$ 是费米子双线性型 $\lambda^A\lambda^B$ 或自旋场 (11.2.26). 类似地, 对于环面紧致化的玻色弦, 规范玻色子顶点算符的形式是 $j(z)\bar{\partial}X^\mu(\bar{z})e^{ik\cdot X}$, 其中 $j(z)$ 对于 Kaluza-Klein 规范玻色子是 ∂X^m 对于扩展规范对称性是指指数 $\exp[\pm 2i\alpha' X_{L,R}^m]$. 所有这些流都是全纯 $(1,0)$ 算符.

我们在一般的 CFT 中考察 $(1,0)$ 流 $j^a(z)$ 的集合. 共形不变性要求它们的 OPE 必须采取如下形式

$$j^a(z)j^b(0) \sim \frac{k^{ab}}{z^2} + \frac{ic^{ab}_c}{z} j^c(0) \quad (11.5.1)$$

其中 k^{ab} 和 c^{ab}_c 是常数. 从量纲上讲, z^{-2} 项的系数必须是常数, z^{-1} 项的系数必须正比于一个流. Laurent 系数

$$j^a(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{j_m^a}{z^{m+1}} \quad (11.5.2)$$

因此满足一个封闭的代数

$$[j_m^a, j_n^b] = mk^{ab}\delta_{m,-n} + ic^{ab}_c j_{m+n}^c. \quad (11.5.3)$$

现在来证明 (11.5.3), 利用

$$j_m^a = \oint_0 dz j^a(z) z^m,$$

方程 (11.5.3) 的左边可以写成

$$\begin{aligned} [j_m^a, j_n^b] &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_0 dw w^n \oint_w dz z^m \left\{ \frac{k^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{ic^{ab}_c}{z-w} j^c(w) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_0 dw w^n \left\{ mw^{m-1} k^{ab} + ic^{ab}_c w^m j^c(w) \right\} \\ &= mk^{ab}\delta_{m,-n} + ic^{ab}_c j_{m+n}^c. \end{aligned}$$

特别地,

$$[j_0^a, j_0^b] = ic^{ab}_c j_0^c. \quad (11.5.4)$$

即, $m=0$ 的模构成了 Lie 代数 g , 并且

$$c^{ab}_c = f^{ab}_c. \quad (11.5.5)$$

我们首先限制在 g 是单代数的情况. $j_1^a j_0^b j_{-1}^c$ 的 Jacobi 恒等式要求

$$f^{bc}_d k^{ad} + f^{ba}_d k^{dc} = 0. \quad (11.5.6)$$

$$\begin{aligned}
0 &= [j_1^a, [j_0^b, j_{-1}^c]] + [j_0^b, [j_{-1}^c, j_1^a]] + [j_{-1}^c, [j_1^a, j_0^b]] \\
&= [j_1^a, ic^{bc}_d j_{-1}^d] + [j_0^b, -k^{ca} + ic^{ca}_d j_0^d] + [j_{-1}^c, ic^{ab}_d j_1^d] \\
&= ic^{bc}_d (k^{ad} + ic^{ad}_e j_0^e) + ic^{ca}_d ic^{bd}_e j_0^e + ic^{ab}_d (-k^{cd} + ic^{cd}_e j_0^e)
\end{aligned}$$

由定义可知 k^{ab} 关于 a, b 是对称的而 c^{ab}_c 关于 a, b 是反对称的, 再对 $c c$ 项利用平常的 Jacobi 恒等式就证明了 (11.5.6).

这个关系与定义 Lie 代数内积 d^{ab} 的方程 (11.4.5) 相同, 而我们又假定 g 是单的, 它必须是

$$k^{ab} = \hat{k} d^{ab}, \quad (11.5.7)$$

其中 \hat{k} 是某个常数. 代数 (11.5.3) 有各种名字, 流代数, 仿射李代数, (仿射) *Kac-Moody* 代数. 流是 $(1, 0)$ 张量, 所以

$$[L_m, j_n^a] = -n j_{m+n}^a. \quad (11.5.8)$$

物理上讲, j_n^a 生成了位置相关的 g -变换. 由于存在定域流, 所以这在量子场论中是可能的. 在么正理论中, 中心扩张或 *Schwinger* 项 \hat{k} 必须永远是正的. 为了证明这点, 注意到

$$\hat{k} d^{aa} = \langle 1 | [j_1^a, j_{-1}^a] | 1 \rangle = \| j_{-1}^a | 1 \rangle \|^2 \quad (11.5.9)$$

(没有对 a 求和.) 对于紧 Lie 代数, d^{aa} 是正的, 所以 \hat{k} 必须是非负的. 而它仅当 $j_{-1}^a | 1 \rangle = 0$ 时为零, 但是 $j_{-1}^a | 1 \rangle$ 的顶点算符就是流 j^a : j^a 的任何矩阵元可以通过将 j_{-1}^a 粘进世界面中获得. 因此仅当流恒等为零时, $\hat{k} = 0$.

系数 \hat{k} 是量子化的. 为了证明这点, 考察任意的根 α . 定义

$$J^3 = \frac{\alpha \cdot H}{\alpha^2}, \quad J^\pm = E^{\pm\alpha}, \quad (11.5.10)$$

利用一般形式 (11.4.12) 可以验证它们满足 $SU(2)$ 代数

$$[J^3, J^\pm] = J^\pm, \quad [J^+, J^-] = 2J^3. \quad (11.5.11)$$

可以验证

$$\frac{\alpha \cdot H_0}{\alpha^2}, \quad E_0^\alpha, \quad E_0^{-\alpha}, \quad (11.5.12a)$$

$$\frac{\alpha \cdot H_0 + \hat{k}}{\alpha^2}, \quad E_1^\alpha, \quad E_{-1}^{-\alpha} \quad (11.5.12b)$$

也满足 $SU(2)$ 代数. 第一个就是通常的质心 Lie 代数, 而第二个被称为赝自旋 (*pseudospin*). 而 $SU(2)$ 中的 $2J_3$ 的本征值又必须是整数, 所以 $2\hat{k}/\alpha^2$ 也必须是整数. 如果 α 取得是代数中的长根 (记做 ψ), 这个条件是最强的. 这样等级

$$k = \frac{2\hat{k}}{\psi^2} \quad (11.5.13)$$

就是非负整数, 对于不平庸的流就是正的.

习惯上将 Lie 代数的内积归一化成使得长根的长度为 $\sqrt{2}$, 这使得 $\hat{k} = k$ 是 OPE 领头项的系数. 附带地, 由此得出, 在这个归一化下, 生成元 (11.4.14) 是归一化的, 所以 $SO(n)$ 内积是矢量表示迹的一半. 类似地, $SU(n)$ 的内积等于基础表示中的迹. 从此之后, 我们取生成元的一组基使得 $d^{ab} = \delta^{ab}$.

等级表示的是 OPE 中 z^{-2} 项和 z^{-1} 项的相对大小. 对于 $U(1)$, 结构常数为零, 仅 z^{-2} 项出现. 因此对于 $U(1)$ 没有类似等级这样的东西. 将所有 $U(1)$ 流归一化成

$$j^a(z)j^b(0) \sim \frac{\delta^{ab}}{z^2} \quad (11.5.14)$$

将会比较方便. 从这个 OPE 以及全纯性可以得出每个 $U(1)$ 流代数同构于一个自由玻色 CFT,

$$j^a = i\partial H^a. \quad (11.5.15)$$

在杂化弦中, 流代数由 n 个是费米子 $\lambda^A(z)$ 构成. 流

$$i\lambda^A\lambda^B. \quad (11.5.16)$$

构成了 $SO(n)$ 代数. 对易流的最大集合是 $i\lambda^{2K-1}\lambda^{2K}$, 其中 $K = 1, \dots, [n/2]$. 这些对应于生成元 (11.4.14), 它们的归一化使得根 (11.4.16) 的长度为 $\sqrt{2}$. 等级就是 OPE 中领头项的系数: 领头项是 $1/z^2$, 所以等级是 $k = 1$. $n = 3$ 的情况是一个例外: 不存在长根, 只有短根 ± 1 , 所以我们将对角流重新调整成 $2^{1/2}i\lambda^1\lambda^2$, 等级就是 $k = 2$.

对于任意 Lie 代数的任意实表示 r , 我们可以用 $\dim(r)$ 个实费米子构建流

$$\frac{1}{2}\lambda^A\lambda^B t_{r,AB}^a. \quad (11.5.17)$$

它们满足等级为 $k = T_r/\psi^2$ 的流代数, 其中 T_r 由方程 (11.4.6) 定义. 上一段中的情况是 $SO(n)$ 的 n 维矢量表示, 对于这个表示 $T_R = \psi^2$. 另一个例子是, nk 个费米子按照 k 重矢量表示变换, 这给出等级 k .

作为最后一个例子, 我们来考察在环形紧致化自对偶点的 $SU(2)$ 对称性. 它的流是 $\exp[2^{1/2}iH(z)]$. 那么流 $i\partial H$ 就归一化成权重是 $2^{1/2}$, 长度为 $\sqrt{2}$. $i\partial H$ 与自身的 OPE 从 $1/z^2$ 开始, 所以等级依旧是 $k = 1$.

在一些情形中, 可能存在流不是周期性的截面, $j^a(w + 2\pi) = R^{ab}j^b(w)$, 其中 R^{ab} 是代数的任意自同构. 在这些情况中, 流的模式是分数的, 并满足扭变仿射 Lie 代数.

The Sugawara construction

在有共形对称性的流代数中, 在能量量张量和流之间有一个显著的联系, 这给出很多有趣的结构. 定义算符

$$:jj(z_1): := \lim_{z_2 \rightarrow z_1} \left(j^a(z_1)j^a(z_2) - \frac{\hat{k} \dim(g)}{z_{12}^2} \right), \quad (11.5.18)$$

其中暗含了对 a 的求和. 我们首先希望证明, 在相差一个归一化的意义下, $:jj:$ 与 j^a 的 OPE 与 T_B 与 j^a 的 OPE 是相同的.

乘积 $:jj:$ 的 OPE 并不是 OPE 的乘积, 这是因为与第三个流相比, $:jj:$ 中的两个流距

离彼此更近; 我们必须使用全纯性来做一个不太直接的讨论. 考察如下的乘积:

$$\begin{aligned} j^a(z_1)j^a(z_2)j^c(z_3) &= \frac{\hat{k}}{z_{31}^2}j^c(z_2) + \frac{if^{cad}}{z_{31}}j^d(z_1)j^a(z_2) + \frac{\hat{k}}{z_{32}^2}j^c(z_1) \\ &\quad + \frac{if^{cad}}{z_{32}}j^a(z_1)j^d(z_2) + \text{terms holomorphic in } z_3. \end{aligned} \quad (11.5.19)$$

我们已经使用流-流 OPE 定出 z_3 趋于 z_1 或 z_2 时的奇异性. 在这一关系中取 $z_2 \rightarrow z_1$ 并做 z_{21} 的 Laurent

展开, 保留 z_{21}^0 阶项, 获得

$$\begin{aligned} :jj(z_1):j^c(z_3) &\sim \frac{2\hat{k}}{z_{13}^2}j^c(z_1) + \frac{f^{cad}f^{ead}}{z_{13}^2}j^e(z_1) \\ &= \frac{2\hat{k} + h(g)\psi^2}{z_{13}^2}j^c(z_1) \\ &= (k + h(g))\psi^2 \left[\frac{1}{z_{13}^2}j^c(z_3) + \frac{1}{z_{13}}\partial j^c(z_3) \right]. \end{aligned} \quad (11.5.20)$$

这里的 $h(g)$ 是对偶 Coxeter 数. 定义

$$T_B^s(z) = \frac{1}{(k + h(g))\psi^2} :jj(z):. \quad (11.5.21)$$

T_B^s 与流的 OPE 和能动量张量 $T_B(z)$ 与流的 OPE 相同,

$$T_B^s(z)j^c(0) \sim T_B(z)j^c(0). \quad (11.5.22)$$

现在, 将 $j^c(z_3)$ 替换成 T_B^s 并重复上面的讨论,

$$\begin{aligned} j^a(z_1)j^a(z_2)T_B^s(z_3) &= \frac{1}{z_{31}^2}j^a(z_1)j^a(z_2) + \frac{1}{z_{31}}\partial j^a(z_1)j^a(z_2) \\ &\quad + \frac{1}{z_{32}^2}j^a(z_1)j^a(z_2) + \frac{1}{z_{32}}j^a(z_1)\partial j^a(z_2) + \text{terms holomorphic in } z_3. \end{aligned} \quad (11.5.23)$$

再次展成 z_{21} 并保留 z_{21}^0 阶项, 这给出

$$T_B^s(z_1)T_B^s(z_3) \sim \frac{c^{g,k}}{2z_{13}^4} + \frac{2}{z_{13}^2}T_B^s(z_3) + \frac{1}{z_{13}}\partial T_B^s(z_3) \quad (11.5.24)$$

其中

$$c^{g,k} = \frac{k \dim(g)}{k + h(g)}. \quad (11.5.25)$$

这是中心荷为 $c^{g,k}$ 的能动量张量的标准形式. Laurent 系数是

$$L_0^s = \frac{1}{(k + h(g))\psi^2} \left(j_0^a j_0^a + 2 \sum_{n=1}^{\infty} j_{-n}^a j_n^a \right), \quad (11.5.26a)$$

$$L_m^s = \frac{1}{(k + h(g))\psi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_n^a j_{m-n}^a, \quad m \neq 0, \quad (11.5.26b)$$

也满足有这个中心荷的 Virasoro 代数. 注意到, 由于全纯性要求 L_0^s 和 $n \geq 0$ 的 j_n^a 湮灭态 $|1\rangle$, 所以 L_0^s 中的正规编序常数为零.

我们已经用 jj OPE 定出了 $:jj::jj:$ OPE. 我们不能直接这样做, 这是因为仅当两个算符之间的距离相比任何其它算符之间的距离要近时, jj OPE 才是成立的, 而在这一情况中, 邻近位置总有两个额外的流. 想当然地使用 OPE 将会给出 T^s 和 $c^{g,k}$ 错误的归一化. 上面的讨论仅在 OPE 成立的时候才使用它, 然后利用了全纯性的优势. 从两个流的乘积

中构造出来的算符 T_B^s 被称为 *Sugawara* 能动量张量.

找到 $U(1)$ 流代数的 *Sugawara* 张量很简单. 在归一化 (11.5.14) 下, 它就是

$$T_B^s = \frac{1}{2} :jj:, \quad (11.5.27)$$

通过将其写成自由玻色子的流 $j = \partial H$ 也可以看到这一点.

张量 T_B^s 可能也可能不等于 CFT 的总 T_B . 定义

$$T'_B = T_B - T_B^s. \quad (11.5.28)$$

由于 T_B 和 T_B^s 与 j^a 的 OPE 有相同的奇异项, 这给出

$$T'_B(z_1)j^a(z_2) \sim 0. \quad (11.5.29)$$

由于 T_B^s 自身是用流构造的, 这暗示了 $T_B^s T'_B \sim 0$. 那么

$$\begin{aligned} T'_B(z)T'_B(0) &= T_B(z)T_B(0) - T_B^s(z)T_B^s(0) - T'_B(z)T_B^s(0) - T_B^s(z)T'_B(0) \\ &\sim \frac{c'}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T'_B(0) + \frac{1}{z}\partial T'_B(0), \end{aligned} \quad (11.5.30)$$

这是中心荷为

$$c' = c - c^{g,k} \quad (11.5.31)$$

的标准 TT OPE.

因此内部理论分成了两个退耦的 CFT. 一个拥有完全从流构建出来的能动量张量 T_B^s , 而另一个能动量张量 T'_B 与流对易. 既然两个 CFT 完全相互独立, 我们将用术语流代数来指代第一个. 对于一个么正的 CFT, c' 必须非负, 所以

$$c^{g,k} \leq c, \quad (11.5.32)$$

如果

$$c^{g,k} = c, \quad (11.5.33)$$

T'_B 就是精确平庸的, 在这一情况下, $T_B = T_B^s$.

我们现在来考察几个例子. 对偶 Coxeter 数可以写成根的求和. 对于任何单链代数, $h(g) + 1 = \dim(g)/\text{rank}(g)$, 所以

$$c^{g,k} = \frac{k \dim(g) \text{rank}(g)}{\dim(g) + (k-1) \text{rank}(g)}. \quad (11.5.34)$$

对于任何处在 $k=1$ 单链代数, 中心荷就是

$$c^{g,1} = \text{rank}(g). \quad (11.5.35)$$

对于 $E_8 \times E_8$ 和 $SO(32)$ 杂化弦, 这和自由费米子表示的中心荷相同, 而对于下一节的自由玻色子表示: 它们是 *Sugawara* 理论. 算符 $:jj:$ 看起来关于费米子好像是二次的, 但通过使用 OPE 和费米子的反对称性, 可以看到 T_B^s 退化至通常的 $-\frac{1}{2}\lambda^A \partial \lambda^A$.

另一个例子是 $SU(2) = SO(3)$, 它有 $(\dim(g) = 3, \text{rank}(g) = 1)$

$$c^{g,k} = \frac{3k}{2+k} = 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, 2, \frac{15}{7}, \dots \rightarrow 3. \quad (11.5.36)$$

我们已经见过这个序列中的第一个 CFT (环形紧致化的自对偶点) 和第二个 (自由费米子).

大多数等级没有自由场表示. 对于任何流代数, 中心荷所处的范围是

$$\text{rank}(g) \leq c^{g,k} \leq \dim(g). \quad (11.5.37)$$

第一个等号仅对于等级 1 的单链代数成立, 而第二个仅对于阿贝尔代数或者在 $k \rightarrow \infty$ 的极限下成立.

Primary fields

通过反复作用 $n > 0$ 的下降算符 j_n^a , 我们可以得到流代数的最高权重态或称初级态, 这个态被所有 $n > 0$ 的 j_n^a 湮灭. 因此它也被 $n > 0$ 的 L_n^s 方程 (11.5.26) 湮灭, 所以也是 Virasoro 代数的最高权重态. 质心生成元 j_0^a 将初级态变成初级态, 所以后者构成了代数 g 的一个表示,

$$j_0^a |r, i\rangle = |r, j\rangle t_{r,ji}^a \quad (11.5.38)$$

其中 r (没有求和) 标记表示. 由此得出

$$\begin{aligned} L_0^s |r, i\rangle &= \frac{1}{(k + h(g))\psi^2} |r, k\rangle t_{r,kj}^a t_{r,ji}^a \\ &= \frac{Q_r}{(k + h(g))\psi^2} |r, i\rangle, \end{aligned} \quad (11.5.39)$$

其中 Q_r 是 Casimir (11.4.7). 初级态的权重因此由代数, 等级和表示决定

$$h_r = \frac{Q_r}{(k + h(g))\psi^2} = \frac{Q_r}{2\hat{k} + Q_g}. \quad (11.5.40)$$

其中 Q_g 是伴随表示的 Casimir. 对于等级 k 的 $SU(2)$, 自旋 j 初级场的权重是

$$h_j = \frac{j(j+1)}{k+2}. \quad (11.5.41)$$

在任何给定的等级上, 初级态最多只有有限多个表示. 对于 g 的任何根 α 和 r 的任何权重 λ , $SU(2)$ 代数 (11.5.12b) 暗示了

$$\begin{aligned} \langle r, \lambda | [E_1^\alpha, E_{-1}^{-\alpha}] |r, \lambda\rangle &= 2 \langle r, \lambda | (\alpha \cdot H_0 + \hat{k}) |r, \lambda\rangle / \alpha^2 \\ &= 2(\alpha \cdot \lambda + \hat{k}) / \alpha^2. \end{aligned} \quad (11.5.42)$$

左边是 $\|E_{-1}^{-\alpha} |r, \lambda\rangle\|^2 \geq 0$, 所以 $\hat{k} \geq -\alpha \cdot \lambda$. 对于 $-\alpha$ 也是一样, 这给出, 对于 r 的任何权重 λ ,

$$\hat{k} \geq |\alpha \cdot \lambda|. \quad (11.5.43)$$

取 α 为长根 ψ , 那么等级必须满足

$$k \geq \frac{2|\psi \cdot \lambda|}{\psi^2} = 2|J^3|, \quad (11.5.44)$$

其中 J^3 指从荷 j_0^a 和根 ψ 构建的 $SU(2)$ 代数 (11.5.12a). 对于 $g = SU(2)$, 表述就是任何初级态的自旋 j 最多是 $\frac{1}{2}k$. 例如在 $k = 1$ 时, 只有表示 **1** 和 **2** 是可能的. 对于 $k = 1$ 处的 $g = SU(3)$, 只有 **1**, **3** 和 **3** 能出现. 对于等级 k 的 $g = SU(n)$, 能够出现的表示的杨表的列数不大于 k .

初级场的期望值完全由对称性决定. 我们会在第 15 章给出细节.

最后, 我们用同等抽象的语言简要地讨论一下 I 型理论的规范对称性. 规范顶点算符

的物质部分是边界上的

$$\dot{X}^\mu \lambda^a e^{ik \cdot X} \quad (11.5.45)$$

其中 λ^a 是权重为 0 的场. 在么正 CFT 中, 这种 λ^a 必须用运动方程构建. 那么 OPE 就是

$$\lambda^a(y_1) \lambda^b(y_2) = \left[\theta(y_1 - y_2) d^{ab}_c + \theta(y_2 - y_1) d^{ba}_c \right] \lambda^c(y_2), \quad (11.5.46)$$

所以 λ^a 构成了结构常数为 d^{ab}_c 的乘性代数. d^{ab}_c 的反对称部分是规范 Lie 代数的结构常数. 这是 Chan-Paton 因子的一个抽象描述. λ^a 代数必须是结合的这一要求会排除掉规范群 $E_8 \times E_8$.

11.6 The bosonic construction and toroidal compactification

在 8.2 节构造缠绕态顶点算符时, 我们看到我们可以单独考虑左移标量和右移标量. 现在我们来尝试构造有 26 个左移和 10 个右移的杂化弦, 它与 ψ^μ 一起给出了正确的中心荷. 主要的问题是 $k_{L,R}$ 的频谱; 同 8.4 节一样, 在绝大多数讨论中, 我们将使用无量纲动量

$$l_{L,R} = (\alpha'/2)^{1/2} k_{L,R}. \quad (11.6.1)$$

普通的不紧张维对应的是 $l_L^\mu = l_R^\mu = l^\mu$ 的左移加右移, 它们可以取连续值; 令 $d \leq 10$ 是不紧张的维数. 剩下的动量,

$$(l_L^m, l_R^n), \quad d \leq m \leq 25, d \leq n \leq 9, \quad (11.6.2)$$

在格点 Γ 上取值. 从 8.4 节的 Narain 紧致化的讨论中我们知道, 自洽 CFT 的要求是 OPE 的定域性加上模不变性. 在对右移取 GSO 投射后, Γ 上的条件精确就是玻色情况. 定义乘积

$$l \circ l' = l_L \cdot l'_L - l_R \cdot l'_R, \quad (11.6.3)$$

格点必须是特征为 $(26 - d, 10 - d)$ 的偶自对偶洛伦兹型格点,

$$l \circ l \in 2\mathbb{Z} \quad \text{for all } l \in \Gamma, \quad (11.6.4a)$$

$$\Gamma = \Gamma^*. \quad (11.6.4b)$$

和玻色情况一样, 那里的特征是 $(26 - d, 26 - d)$, 所有这样的格点都被分类了. 首先考察非紧张维的最大数目, $d = 10$, 在这一情况下, \circ 乘积只有正号, 所以 l_L^m 形成了一个 16 维的偶自对偶欧几里得型格点. 偶自对偶欧几里得型格点仅在维数是 8 的倍数的时候才会存在, 对于 16 维, 精确有两种这样的格点, Γ_{16} 和 $\Gamma_8 \times \Gamma_8$. 格点 Γ_{16} 是如下形式的所有点的集合

$$(n_1, \dots, n_{16}) \quad \text{or} \quad (n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_{16} + \frac{1}{2}), \quad (11.6.5a)$$

$$\sum_i n_i \in 2\mathbb{Z}, \quad (11.6.5b)$$

其中 n_i 是任意整数. 类似地, 格点 Γ_8 就是

$$(n_1, \dots, n_8) \quad \text{or} \quad (n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_8 + \frac{1}{2}), \quad (11.6.6a)$$

$$\sum_i n_i \in 2\mathbb{Z}. \quad (11.6.6b)$$

左移零点能和玻色弦中一样是 -1 , 所以无质量态将有左移顶点算符 $\partial X^\mu, \partial X^m$ 或满足 $l_L^2 = 2$ 的 $e^{ik_L \cdot X(z)}$. 与通常的右移 $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}$ 做张量积, 第一个给出通常的引力子, 伸缩子和反对称张量. 16 个 ∂X^m 流构成了对易 m -动量的最大对易集合. 动量 l_L^m 就是这个流下的荷, 因此它们是规范群的根. 对于 Γ_{16} , 长度为 $\sqrt{2}$ 的点就是 $SO(32)$ 的根 (11.4.16). 对于 Γ_8 , 长度为 $\sqrt{2}$ 的点是 E_8 的根 (11.4). 因此两种可能的格点刚好给出前面发现的两个规范群, $SO(32)$ 和 $E_8 \times E_8$. 对易的流有奇点 $1/z_2$, 所以再次 $k = 1$.

很容易看到之前的费米构造和现在的玻色构造在玻色化下是等价的. 格点 (11.6.5) 和 (11.6.6) 上的整数点映射到流代数的 NS 截面, 半整数点则映射到 R 截面. 总 k_L^m 必须是偶数这个约束是每个理论中在左移上的 GSO 投射. 在上一节我们看到, 流代数的动力学是完全由它的对称性决定的, 所以我们可以给出左移一个表示独立的描述, 将其描述为 $SO(32)$ 或 $E_8 \times E_8$ 等级 1 的流代数.

我们来回顾 Lie 代数和格点的一些一般结果. Lie 代数 g 的根的所有整系数线性组合构成的集合被称为 g 的根格点 Γ_g . 现在取任意表示 r 并让 λ 是 r 的任意权重. 对于所有 $v \in \Gamma_g$, 点 $\lambda + v$ 的集合被记作 Γ_r . 通过考察各种 $SU(2)$ 子群可以证明, 对于有 $\sqrt{2}$ 根长的单链 Lie 代数,

$$\Gamma_r \subset \Gamma_g^*. \quad (11.6.7)$$

所有 Γ_r 的并集是权重格点 Γ_w , 并且

$$\Gamma_w = \Gamma_g^*. \quad (11.6.8)$$

例如, $SO(2n)$ 的权重格点有 4 个子格点:

$$(0) : \quad 0 + \text{any root}; \quad (11.6.9a)$$

$$(v) : \quad (1, 0, 0, \dots, 0) + \text{any root}; \quad (11.6.9b)$$

$$(s) : \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) + \text{any root}; \quad (11.6.9c)$$

$$(c) : \quad (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) + \text{any root}; \quad (11.6.9d)$$

它们分别是根格点, 包含矢量表示权重的格点, 两个包含 2^{n-1} 维旋量表示权重的格点. 格点 Γ_8 是 E_8 的根格点, 同时由于它是自对偶的, 所以它是权格点. $SO(32)$ 个根格点给出 Γ_{16} 中的整数格点. 整个 Γ_{16} 是根格点加上 $SO(32)$ 的一个旋量格点.

对于任何单链 Lie 代数 g , 它的等级 1 的流代数可以被 $\text{rank}(g)$ 个左移玻色子表示, 随着根重标度成长度 $\sqrt{2}$, 动量格点就变成 g 的根格点. Lie 代数 (11.4.12) 中出现的常数 $\epsilon(\alpha, \beta)$ 就可以被顶点算子 OPE 决定; 当需要上闭链的显式形式时, 就是这样的情况. 通过同时取 $\text{rank}(g)$ 个右移玻色子, 我们可以获得模不变的 CFT, 动量格点变成

$$\Gamma = \sum_r \Gamma_r \times \tilde{\Gamma}_r. \quad (11.6.10)$$

即, 频谱取遍权格点的所有子格点, 于此同时, 左移动量和右移动量在同一子格点中取值.

Toroidal compactification

同玻色情况一样, 任何特征为 $(26-d, 10-d)$ 的偶自对偶晶格可以从任何单晶格通过 $O(26-d, 10-d, \mathbb{R})$ 获得. 再次从任意给定的解 Γ_0 出发; 例如它可以是所有紧致化维度都正交且处在 $SU(2) \times SU(2)$ 半径上的一个十维理论. 那么任何晶格

$$\Gamma = \Lambda \Gamma_0, \quad \Lambda \in O(26-d, 10-d, \mathbb{R}) \quad (11.6.11)$$

定义了自洽的杂化弦论. 同玻色情况一样, 存在等价关系

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \Gamma_0 \cong \Lambda \Gamma_0 \quad (11.6.12)$$

其中

$$\Lambda_1 \in O(26-d, \mathbb{R}) \times O(10-d, \mathbb{R}), \quad \Lambda_2 \in O(26-d, 10-d, \mathbb{Z}). \quad (11.6.13)$$

那么模空间就是

$$\frac{O(26-d, 10-d, \mathbb{R})}{O(26-d, \mathbb{R}) \times O(10-d, \mathbb{R}) \times O(26-d, 10-d, \mathbb{Z})}. \quad (11.6.14)$$

Γ_0 上保持不变的离散 T -对偶群 $O(26-d, 10-d, \mathbb{Z})$ 被理解成作用在右边.

现在考察未破缺的规范对称性. 有 $26-d$ 个顶点算符为 $\partial X^m \tilde{\psi}^\mu$ 的规范玻色子和 $10-d$ 个顶点算符为 $\partial X^\mu \tilde{\psi}^m$ 的规范玻色子. 它们是来自十维理论的原始 16 个对易对称性和 $10-d$ 个 Kaluza-Klein 规范玻色子, 另外 $10-d$ 个反对称张量的紧致化. 对于晶格 Γ 上满足

$$l_L^2 = 2, \quad l_R = 0, \quad (11.6.15)$$

的每个点, 还有额外的规范玻色子 $e^{ik_L \cdot X_L} \tilde{\psi}_\mu$. $l_R \neq 0$ 的点上没有规范玻色子, 这是因为这种态的质量至少是 $\frac{1}{2} l_R^2$. 对于一般的增速 Λ , 给出的是模空间上的一般点, Γ 中不存在 $l_R = 0$ 的点, 因而没有额外的规范玻色子; 规范群是 $U(1)^{36-2d}$. 通过在不带 Wilson 线的环面上紧致化原始的十维理论, 显然可以得到 $SO(32) \times U(1)^{20-2d}$ 或 $E_8 \times E_8 \times U(1)^{20-2d}$, 和场论中一样. 然而, 和玻色弦论相同, 在模空间中的特殊点上存在弦化的扩充规范对称性. 例如, 仿照晶格 Γ_8 和 Γ_{16} 定义的晶格 $\Gamma_{26-d, 10-d}$ 会给出 $SO(52-2d) \times U(1)^{10-d}$. 类似于玻色情况, 扩展对称性所在点附近的低能物理是 Higgs 机制. 所有以这种方式获得的群的秩是 $36-2d$. 这是微扰论中的最大值, 但是非微扰效应会导致更大的规范对称性. (参看第 19 章.)

模的数目来自于 SO 群的维数, 它是

$$\frac{1}{2} \left[(36-2d)(35-2d) - (26-d)(25-d) - (10-d)(9-d) \right] = (26-d)(10-d). \quad (11.6.16)$$

和玻色弦一样, 它们可以解释成十维规范理论的背景场. 度规和反对称张量的紧致化分量像以前一样总共给出 $(10-d)^2$ 个. 另外还可以有 Wilson 线, 即规范场 A_m 的常数背景. 正如第 8 章中所讨论的, 由于势 $\text{Tr}([A_m, A_n]^2)$, 不同方向上的场沿着平坦方向对易, 所以可以被选成处在一个 $U(1)^{16}$ 子群中. 因此总共的 $(26-d)(10-d)$ 中 A_m 的参量有 $16(10-d)$ 个.

在第8章我们研究了有反对称张量和开弦 Wilson 线背景的量子化. 这里略去细节直接给出结果. 如果我们在常数背景 G_{mn} , B_{mn} 和 A_m^I 下做紧致化 $x^m \cong x^m + 2\pi R$, 那么正则量子化给出

$$k_{Lm} = \frac{n_m}{R} + \frac{w^n R}{\alpha'} (G_{mn} + B_{mn}) - q^I A_m^I - \frac{w^n R}{2} A_n^I A_m^I, \quad (11.6.17a)$$

$$k_L^I = (q^I + w^m R A_m^I) (2/\alpha')^{1/2}, \quad (11.6.17b)$$

$$k_{Rm} = \frac{n_m}{R} + \frac{w^n R}{\alpha'} (-G_{mn} + B_{mn}) - q^I A_m^I - \frac{w^n R}{2} A_n^I A_m^I, \quad (11.6.17c)$$

其中 n_m 和 w^m 是整数, 取决于被紧致化的是哪种弦, q^I 处在 Γ_{16} 或 $\Gamma_8 \times \Gamma_8$ 上. 注意到, 当规范场设为零后, 这个结果退化到玻色结果 (8.4.7). k_{Lm} 和 k_{Rm} 中 A^I 的线性项来自于 Wilson 线在周期性上的效应, 同 (8.6.7) 一样. k_L^I 中 A^I 的线性项来源如下. 对于某个沿着紧致维缠绕的弦, Wilson 线意味着流代数费米子不再是周期的. 相应的顶点代数 (10.3.25) 表明动量被偏移了. 最后, A^I 的二次项可以通过查验 $\alpha' k \circ k/2$ 为偶轻松地验证.

为了比较这个频谱与 Narain 描述, 我们必须去往 $G_{m'n'} = \delta_{m'n'}$ 的坐标, 这使得 $k_{m'} = e_{m'}^n k_n$, 标架被定义成 $\delta_{p'q'} = e_{p'}^m e_{q'}^n G_{mn}$. 离散 T -对偶群由各个轴上的 T -对偶, 有限大时空坐标变换, 以及反对称张量背景和 Wilson 线的量子偏移生成.

这里有趣的一点是. 由于陪集空间 (11.6.14) 是相容性条件的通解, 无论我们紧致化的是 $SO(32)$ 理论还是 $E_8 \times E_8$ 理论, 我们必须获得同一族理论. 从另一方面看, 注意到陪集空间由于其洛伦兹特征因而不是不紧的——我们可以去往无限 Narain 增速极限. 其中一个这样的极限给出十维 $SO(32)$ 理论, 而另一个给出十维 $E_8 \times E_8$ 理论. 显然我们可以认为所有不同的环向紧致化杂化弦是同一个理论中的不同态. 那么这两个十维理论就是这个理论的两个不同的极限.

我们现在让这些理论之间的联系更显然些. 在一个半径为 R 的圆上紧致化 $SO(32)$ 理论, 设这个圆有 $G_{99} = 1$ 和 Wilson 线

$$R A_9^I = \text{diag}\left(\frac{1}{2}^8, 0^8\right) \quad (11.6.18)$$

一个指标取 $1 \leq A \leq 16$ 而另一个指标取 $17 \leq A \leq 32$ 的伴随态由于 Wilson 线因而是反周期的, 所以规范对称性就退化至 $SO(16) \times SO(16)$. 现在考察 $E_8 \times E_8$ 理论, 这次圆的半径设为 R' , 并有 $G_{99} = 1$ 和 Wilson 线

$$R' A_9^I = \text{diag}(1, 0^7, 1, 0^7). \quad (11.6.19)$$

在每个 E_8 中, 来自 $SO(16)$ 根格点的整数荷态仍然是周期的, 但来自 $SO(16)$ 旋量格点的半整数态变成反周期的. 像上面一样, 规范对称性依旧是 $SO(16) \times SO(16)$. 为了看到这两个理论之间的联系, 我们只关注那些在 $SO(16) \times SO(16)$ 下是中性的态, 即那些 $k_L^I = 0$ 的态. 在这两个理论中, 由于 k_L^I 中的偏移, 它们仅对于偶数的 $w = 2m$ 才呈现出来. 两个中性频谱分别是

$$k_{L,R} = \frac{\tilde{n}}{R} \pm \frac{2mR}{\alpha'}, \quad k'_{L,R} = \frac{\tilde{n}'}{R'} \pm \frac{2m'R'}{\alpha'}, \quad (11.6.20)$$

我们没有写出指标 9. 撇号指 $E_8 \times E_8$ 理论, 并有 $\tilde{n} = n + 2m$, $\tilde{n}' = n' + 2m'$. 我们在每种情况中使用了 Wilson 线的显式形式以及 $k_L^I = 0$. 在 $(\tilde{n}, m) \leftrightarrow (m', \tilde{n}')$ 和 $(k_L, k_R) \leftrightarrow (k'_L, -k'_R)$ 下, 如果 $RR' = \alpha'/2$, 那么这两个频谱是等同的. 这个对称性扩展到整个频谱.

最后, 我们看一下通过紧致化到 4 维所获得的理论有多现实. 在模空间的一般点, 无质量频谱通过维度约化获得, 态被它们的 4 维对称性分类. 用 4 维 $SO(2)$ 螺旋度分析这个频谱, $SO(8)$ 自旋分解成

$$\mathbf{8}_v \rightarrow +1, 0^6, -1, \quad (11.6.21a)$$

$$\mathbf{8} \rightarrow +\frac{1}{2}^4, -\frac{1}{2}^4, \quad (11.6.21b)$$

因而

$$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v \rightarrow +2, +1^{12}, 0^{38}, -1^{12}, -2, \quad (11.6.22a)$$

$$\mathbf{8} \times \mathbf{8}_v \rightarrow \frac{3}{2}^4, \frac{1}{2}^{28}, -\frac{1}{2}^{28}, -\frac{3}{2}^4. \quad (11.6.22b)$$

在这个超引力多重态中有一个螺旋度为 ± 2 的引力子, 4 个螺旋度为 $\pm \frac{3}{2}$ 的引力微子. 环向紧致化不破坏任何超对称. 由于超荷在 4 维中有 4 个分量, 16 个超对称性约化成 $d = 4$, $N = 4$ 的超对称. 对于这个紧致化, 这个超引力多重态还引入了 12 个 Kaluza-Klein 和反对称张量规范玻色子, 一些费米子和 36 个模. 最后两个自旋零的态是伸缩子和轴子. 在 4 维中, 2 阶张量 $B_{\mu\nu}$ 等价于一个标量. 这是轴子, 它的物理将在第 18 章进一步讨论.

在十维中, 唯一携带规范荷的场是规范场和规范微子. 它们约化至一个 $N = 4$ 的矢量多重态——一个规范场, 4 个 Weyl 旋量和 6 个标量, 全部处在伴随表示中. 对于没有在十维中呈现出来的扩充规范对称性, 由于超对称性获得的仍然是同一个 $N = 4$ 矢量多重态. 在有 $N = 4$ 超对称性的紧致化中, 由于费米子一定处在规范群的伴随表示中, 所以它不可能给出标准模型. 我们会在 16.2 节仔细解释, 一个引力微子是好的, 但 4 个引力微子就过头了. 我们会在第 16 章看到, 一个相当简单的轨形紧致化将这一对称性约化至 $N = 1$ 并给出一个比较现实的频谱.

Supersymmetry and BPS states

稍微想一下就知道环向紧致化理论的超对称代数必须采取如下形式

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = 2P_\mu(\Gamma^\mu\Gamma^0)_{\alpha\beta} + 2P_{Rm}(\Gamma^m\Gamma^0)_{\alpha\beta}. \quad (11.6.23)$$

它与十维代数的简单维数约化的不同之处在于我们把 P_m 替换成了 P_{Rm} , 即一个给定态中所有弦的总右移动量 k_{Rm} . 它们仅在总缠绕数为零时相等. 这个代数必须要采取这个形式是因为时空超对称性只包含杂化弦的右移部分.

我们现在来寻找 Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield (BPS) 态, 即被某些 Q_α 湮灭的态. 对质量为 M 的单个弦, 在静止参考系中取代数 (11.6.23) 在任意态 $|\psi\rangle$ 上的真空期望值. 左边是非负矩阵. 右边是

$$2(M + k_{Rm}\Gamma^m\Gamma^0)_{\alpha\beta}. \quad (11.6.24)$$

这个矩阵的零本征矢是湮灭 $|\psi\rangle$ 的超对称性. 由于 $(k_{Rm}\Gamma^m\Gamma^0)^2 = k_R^2$, 矩阵的本征值是

$$2(M \pm |k_R|), \quad (11.6.25)$$

其中两种符号各一半. 因此 BPS 态有 $M^2 = k_R^2$. 回忆杂化弦右移边的质壳条件,

$$M^2 = \begin{cases} k_R^2 + 4(\tilde{N} - \frac{1}{2})/\alpha' & (\text{NS}), \\ k_R^2 + 4\tilde{N}/\alpha' & (\text{R}), \end{cases} \quad (11.6.26)$$

所以 BPS 态是那些右移处在 R 基态或者处在被 $\psi_{-1/2}$ 激发一次的 NS 态中的态. 后者是在 GSO 投射下留存的最低态, 所以这里改变术语称它们是基态也是讲得通的. 那么 BPS 态就是右移处在 $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}$ 基态的那些态, 但有任意大的 k_R . 它们可以匹配多种可能的左移态. 左移质壳条件是

$$M^2 = k_L^2 + 4(N - 1)/\alpha' \quad (11.6.27)$$

或者

$$N = 1 + \alpha'(k_R^2 - k_L^2)/4 = 1 - n_m w^m - q^I q^I / 2. \quad (11.6.28)$$

只要紧致化动量和缠绕数满足条件 (11.6.28), 任意的左移振子态都是可能的. 对于任何给定的左移态, 16 个左移态 $\mathbf{8}_v + \mathbf{8}$ 构成了超对称代数的极短多重态, 与之相对的是处在正常有质量多重态中的 256 个态.

现在来看一下修正超对称代数 (11.6.23) 的十维起源. 将这个代数重写成

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = 2P_M(\Gamma^M \Gamma^0)_{\alpha\beta} - 2\frac{\Delta X^m}{2\pi\alpha'}(\Gamma^m \Gamma^0)_{\alpha\beta}, \quad (11.6.29)$$

其中 ΔX^m 是弦的总缠绕数. 考察紧致化半径变成宏观可视的极限, 这使得一个缠绕弦也变得宏观可视. 超对称代数中的中心荷项必须正比于一个守恒荷, 所以我们要寻找一个正比于弦长 ΔX 的荷. 实际上, 弦与反对称张量的耦合是

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M B = \frac{1}{2} \int d^{10}x j^{MN}(x) B_{MN}(x) \quad (11.6.30a)$$

$$j^{MN}(x) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma (\partial_1 X^M \partial_2 X^N - \partial_1 X^N \partial_2 X^M) \delta^{10}(x - X(\sigma)). \quad (11.6.30b)$$

在固定时刻积掉流给出荷

$$Q^M = \int d^9x j^{M0} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dX^M, \quad (11.6.31)$$

沿着弦的世界线的积分. 整个超对称代数就是

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = 2(P_M - Q_M)(\Gamma^M \Gamma^0)_{\alpha\beta}. \quad (11.6.32)$$

在十维非紧致时空中, 荷 (11.6.31) 对于有限的闭弦为零但对于无限长的弦非零, 例如一个无限长的弦可以作为一个缠绕弦的 $R \rightarrow \infty$ 的极限. 考虑这样的宏观弦通常是有用的, 它显然有无限大的总质量和总荷, 但单位长度上的均值是有限的. 在紧致化中, 组合 $P_m - Q_m$ 是右移规范荷. 左移荷不出现在超对称代数中.

一个很自然的问题是代数 (11.6.32) 现在是否是完整的, 事实上它不是. 考察在模空间一般点上到四维时空的紧致化, 这时规范群破缺至 $U(1)^{28}$. 在标准模型的 $U(1)$ 被嵌入单群的大统一理论中, 它总有对拓扑不平庸经典解量子化产生的磁单极. 弦论不是一个普通的大统一理论, 但它也有磁单极. 杂化弦的紧致化会给出三种规范对称性: 十维对称性, Kaluza-Klein 对称性, 反对称张量对称性. 对于每一种对称性, 都有相应的单极解: 't Hooft-Polyakov 单极解, Kaluza-Klein 单极, 和 H -单极. 当然, 由于各种荷可以被 $O(22, 6, \mathbb{Z})$ T -对

偶交换, 单极比必须同样如此. 单极荷出现在超对称代数中; 在现有的情况中, 它还是出现在右移荷中. 在低能超引力理论中, 有一种交换电荷和磁荷的对称性, 所以它们必须以一种对称的方式出现在超对称代数中.

第十二章 超弦相互作用

可以从两种观点来看超弦的相互作用。一种是研究无质量自由度的相互作用，它们被超对称性高度约束。第一节将讨论树级相互作用，而第二节讨论一种重要的一圈效应：定域时空对称性中的反常。然后我们会发展超弦微扰论。我们会引入超场和超黎曼面以赋予超共形对称性一个几何解释，并计算数个树级和一圈振幅。

12.1 低能超引力

十维超对称弦论要么有 32 个超对称生成元，要么有 16 个超对称生成元。这么多超对称性完全决定了低能作用量。

Type IIA superstring

我们先来讨论拥有可能最大时空超对称性和 Poincaré 对称性的场论，即 11 维超引力。维数有上界是因为非平庸的场论不能有自旋大于 2 的无质量粒子。

4 维时空中最大超对称性是 $N = 8$ ，即最多有 32 个超荷，而作为超引力理论，10 维和 11 维最少有 $2 \times 2^5 = 32$ 个超荷。

这个理论看似与要求十维时空的超弦理论没有直接联系。我们对它有兴趣的一个直接原因是它与 IIA 理论有相同的超对称代数。因此后者的作用量可以通过对前者做维数约化得到。（环向紧致化仅保留与紧致维数无关的场。）

十一维超引力理论有两个玻色场，度规 G_{MN} 以及场强为 F_4 的 3-形式势 $A_{MNP} = A_3$ 。高维超引力包含多种不同的 p -形式场；为了区分它们，我们用斜体下标来标记秩，用罗马体写数值张量指标。写成无质量态的 $SO(9)$ 自旋，度规给出有 44 个态的无迹对称张量，而 3-形式给出有 84 个态的 3 秩反对称张量。玻色态的总数就是 128，等于 $SO(9)$ 矢量-旋量引力微子的维数。

作用量的玻色部分是

$$2\kappa_{11}^2 \mathcal{S}_{11} = \int d^{11}x (-G)^{1/2} \left(R - \frac{1}{2} |F_4|^2 \right) - \frac{1}{6} \int A_3 \wedge F_4 \wedge F_4. \quad (12.1.1)$$

形式作用量完全写出来正比于

$$\int d^d x (-G)^{1/2} |F_p|^2 = \int d^d x \frac{(-G)^{1/2}}{p!} G^{M_1 N_1} \dots G^{M_p N_p} F_{M_1 \dots M_p} F_{N_1 \dots N_p}. \quad (12.1.2)$$

$p!$ 抵消了对指标置换的求和，这使得每个独立分量的系数都是 1。把形式写成带有下指标的张量是为了让它们的规范变换不包含度规。

注意

$$(A_p \wedge B_q)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]}.$$

我们不加推导地从文献中拿出结果. 我们感兴趣的是各种作用量的普遍性质, 并且我们不会写出全部费米项或者超对称变换. 对于来自弦论的超引力, 可以通过比对弦振幅的低能极限来证明作用量. 另外, 很多重要特征, 例如伸缩子的耦合, 将从更一般的推理来理解.

现在像 8.1 节那样做维度约化. 在 10-方向上的平移下不变的一般度规是

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{MN}^{11}(x^\mu) dx^M dx^N \\ &= G_{\mu\nu}^{10}(x^\mu) dx^\mu dx^\nu + \exp(2\sigma(x^\mu)) [dx^{10} + A_\nu(x^\mu) dx^\nu]^2. \end{aligned} \quad (12.1.3)$$

这里的 M, N 从 0 取到 10, 而 μ, ν 从 0 取到 9. 我们在之前的超引力作用量中的度规上加了上标 11, 并引入新的十维度规 $G_{\mu\nu}^{10} \neq G_{\mu\nu}^{11}$. 后面用的都是十维度规, 所以后面会略去上标 10.

11 维度规 (12.1.3) 约化至一个 10 维度规, 一个规范场 A_I , 和一个标量 σ . 势 A_3 约化成两个势 A_3 和 A_2 , 后一个来自于一个指标是紧致 10-方向的分量. (12.1.1) 中的三项变成

$$S_1 = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} \left(e^\sigma R - \frac{1}{2} e^{3\sigma} |F_2|^2 \right), \quad (12.1.4a)$$

$$S_2 = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} \left(e^{-\sigma} |F_3|^2 - e^\sigma |\tilde{F}_4|^2 \right), \quad (12.1.4b)$$

$$S_3 = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int A_2 \wedge F_4 \wedge F_4 = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int A_3 \wedge F_3 \wedge F_4. \quad (12.1.4c)$$

我们在坐标周期为 $2\pi R$ 的圆上紧致化这个理论并定义 $\kappa_{10}^2 = \kappa_{11}^2/2\pi R$. 动能项的归一化对 $2\kappa_{10}^2 = 1$ 是正则的.

方程 (12.1.4a) 的简单推导. 首先注意到

$$G_{MN}^{11} = \begin{pmatrix} G_{\mu\nu}^{10} + e^{2\sigma} A_\mu A_\nu & e^{2\sigma} A_\mu \\ e^{2\sigma} A_\nu & e^{2\sigma} \end{pmatrix}$$

所以

$$G^{11} = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & -A_\nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{\mu\nu}^{10} + e^{2\sigma} A_\mu A_\nu & e^{2\sigma} A_\mu \\ e^{2\sigma} A_\nu & e^{2\sigma} \end{pmatrix} \right) = G^{10} e^{2\sigma}$$

根据 (8.1.8),

$$R_{11} = R_{10} - 2e^{-\sigma} \nabla^2 e^\sigma - \frac{1}{4} e^{2\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

第二项与测度结合后是

$$(-G^{11})^{1/2} e^{-\sigma} \nabla^2 e^\sigma = (-G^{10})^{1/2} \nabla^2 e^\sigma = \partial_\mu (\sqrt{-G^{10}} G^{10\mu\nu} \partial_\nu e^\sigma)$$

是全导数项, 所以无需考虑.

在作用量 (12.1.4) 中, 我们定义了

$$\tilde{F}_4 = dA_3 - A_I \wedge F_3, \quad (12.1.5)$$

其中第二项来源于 4-形式作用量 (12.1.2) 中的分量 $G^{\mu 10}$. 我们将用 $F_{p+1} = dA_p$ 代表一个势的外导数, 而有额外项的场强则会像方程 (12.1.5) 中那样加一个波浪符进行区分. 注

意, 作用量中有几项出现的是 p -形式, 而不是它们的外导数, 但它们仍然是规范不变的. 它们被称为 *Chern-Simons* 项, 并且我们看到两类. 一类是一个势与任意多个场强的楔积, 它的规范不变性是场强的 *Bianchi* 恒等式的结果. 另一类出现在修正场强 (12.1.5) 的动能项中. \tilde{F}_4 的第二项有规范变分

$$-d\lambda_0 \wedge F_3 = -d(\lambda_0 \wedge F_3). \quad (12.1.6)$$

它被通常 $\delta A_3 = d\lambda_2$ 以外的另一个变换

$$\delta' A_3 = \lambda_0 \wedge F_3 \quad (12.1.7)$$

抵消了. 在现在的情况中, *Kaluze-Klein* 规范变换 λ_0 来源于 x^{10} 的再参数化, 而变换 (12.1.7) 就是 11 维张量变换的一部分. 由于 \tilde{F}_4 在 λ_0 和 λ_2 变换下都是不变的, 我们应该认为它是物理场强, 但满足一个不标准的 *Bianchi* 恒等式

$$d\tilde{F}_4 = -F_2 \wedge F_3 \quad (12.1.8)$$

形式理论的 *Poincaré* 对偶交换两种 *Chern-Simons* 项.

约化理论的场与 IIA 弦的玻色场相同. 特别的, 在相差某个场重定义的意义下, 标量 σ 必须是伸缩子 Φ . 弦耦合由伸缩子的值决定. 这意味在合适的场重定义后, 树级时空作用量要乘以一个总因子 $e^{-2\Phi}$, 而其它对 Φ 的依赖只是对它导数的依赖, (见 3.7 节). “合适的重定义” 是指场与弦世界面 σ 模型作用量中的场相同.

由于, 我们没有参考弦论就得到了作用量 (12.1.4), 我们不知道这些场与世界面作用量中的那些场是如何关联的. 我们将通过猜测继续, 然后再用世界面项解释结果. 首先重定义

$$G_{\mu\nu} = e^{-\sigma} G_{\mu\nu}(\text{new}), \quad \sigma = \frac{2\Phi}{3}. \quad (12.1.9)$$

原始度规不会再出现, 所以我们不会在新度规上加撇. 那么

$$S_{\text{IIA}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}}, \quad (12.1.10a)$$

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left(R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2}|H_3|^2 \right), \quad (12.1.10b)$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} \left(|F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2 \right), \quad (12.1.10c)$$

$$S_{\text{CS}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x B_2 \wedge F_4 \wedge F_4. \quad (12.1.10d)$$

注意 $R \rightarrow e^\sigma R + \dots$, $(-G)^{1/2} \rightarrow e^{-5\sigma} (-G)^{1/2}$, 以及形式作用量 (12.1.2) 被因子 $e^{(p-5)\sigma}$ 重新标度.

根据场处在弦论的 NS-NS 区域还是 R-R 区域, 我们对这些项进行了重新组合; *Chern-Simons* 项两种都包含. 区分 R-R 形式和 NS-NS 形式是有用的, 所以对于 R-R 场, 我们从此之后用 C_p 和 F_{p+1} 表示势和场强, 对 NS-NS 场则是用 B_2 和 H_3 . 另外, 我们将用 A_I 和 F_2 表示开弦和杂化规范场, 用 B_2 和 H_3 表示杂化反对称张量.

NS 作用量现在以正确的形式包含伸缩子. 方程 (12.1.9) 是唯一实现这点的重定义. R 作用量没有期待的因子 $e^{-2\Phi}$, 但可以通过进一步的重定义

$$C_I = e^{-\Phi} C'_I \quad (12.1.11)$$

变成这种形式, 在这之后,

$$\int d^{10}x (-G)^{1/2} |F_2|^2 = \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} |F'_2|^2, \quad (12.1.12a)$$

$$F'_2 \equiv dC'_I - d\Phi \wedge C'_I, \quad (12.1.12b)$$

对 F_3 和 C_4 类似. 作用量 (12.1.12) 使得圈展开的伸缩子依赖性变得显然, 但代价是 Bianchi 恒等式和规范变换变得复杂

$$dF'_2 = d\Phi \wedge F'_2, \quad \delta C'_I = d\lambda'_0 - \lambda'_0 d\Phi. \quad (12.1.13)$$

由于这个原因, 经常使用的形式是 (12.1.10). 例如, 在时间相关的伸缩子场中, 与不加撇场耦合的荷是守恒的.

我们现在与弦论联系起来并看一下为什么世界面作用量中出现的背景 R-R 场有更加复杂的性质 (12.1.13). 我们在线性化的级别下进行处理, 写成顶点算符的形式是

$$\mathcal{V}_\alpha \tilde{\mathcal{V}}_\beta (C\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p})_{\alpha\beta} e_{\mu_1 \dots \mu_p}(X). \quad (12.1.14)$$

这里 \mathcal{V}_α 是 R 背景态顶点算符 (10.4.25) 而 $\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} = \Gamma^{[\mu_1} \dots \Gamma^{\mu_p]}$. 非平庸的物理态条件来自 $G_0 \sim p_\mu \psi_0^\mu$ 和 $\tilde{G}_0 \sim p_\mu \tilde{\psi}_0^\mu$, 并归结于两个 Dirac 方程, 一个作用在左手旋量指标上而另一个作用在右手上:

$$\Gamma^\nu \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_\nu e_{\mu_1 \dots \mu_p}(X) = \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \Gamma^\nu \partial_\nu e_{\mu_1 \dots \mu_p}(X) = 0. \quad (12.1.15)$$

通过反对称化所有 $p+1$ 个 Γ 指标并保留反对易子, 我们得到

$$\Gamma^\nu \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} = \Gamma^{\nu\mu_1 \dots \mu_p} + p\eta^{\nu[\mu_1} \Gamma^{\mu_2 \dots \mu_p]}, \quad (12.1.16a)$$

$$\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_p} \Gamma^\nu = (-1)^p \Gamma^{\nu\mu_1 \dots \mu_p} + (-1)^{p+1} p\eta^{\nu[\mu_1} \Gamma^{\mu_2 \dots \mu_p]}, \quad (12.1.16b)$$

那么 Dirac 方程 (12.1.15) 就等价于

$$de_p = d * e_p = 0. \quad (12.1.17)$$

不像之前我们对玻色场遇到的二阶微分方程, 它们是一阶微分方程. 事实上, 它们与 p -形式场强的场方程和 Bianchi 恒等式有相同的形式. 因此, 我们把出现在顶点算符中的函数 $e_{\mu_1 \dots \mu_p}(X)$ 视为 R-R 场强而非势. 为了证实这点, 注意到在 IIA 理论中, R-R 顶点算符 (12.1.14) 中的旋量手征性相反, 所以它们在表 10.1 中的乘积包含偶数秩的形式, 与 IIA R-R 场强相同.

这有一个在后面很重要的结果. R-R 形式的振幅总会包含动量的幂函数因而在零动量处为零. 一个规范场的零动量耦合衡量了荷的大小, 所以这意味着弦在所有 R-R 规范场下是中性的.

场方程 (12.1.17) 的推导是针对平坦背景的. 现在我们来考虑伸缩子梯度的效应. 线性伸缩子背景给出自由 CFT (10.1.22),

$$T_F = i(2/\alpha')^{1/2} \psi^\mu \partial X_\mu - 2i(\alpha'/2)^{1/2} \Phi_{,\mu} \partial \psi^\mu, \quad (12.1.18a)$$

$$G_0 \sim (\alpha'/2)^{1/2} \psi_0^\mu (p_\mu + i\Phi_{,\mu}), \quad (12.1.18b)$$

对 \tilde{T}_F 和 \tilde{G}_0 类似. 场方程被修正成

$$(d - d\Phi \wedge) e_p = (d - d\Phi \wedge) * e_p = 0. \quad (12.1.19)$$

因此弦背景场的 Bianchi 恒等式和场方程被修正成了从作用量中推导出那种形式. NS-NS 张量没有这种修正. 它通过它的势

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M B_2 \quad (12.1.20)$$

与世界面耦合. 它在独立于伸缩子的 $\delta B_2 = d\lambda_I$ 下是不变的, 因此 $H_3 = dB_2$ 是不变的并且 $dH_3 = 0$.

Massive IIA supergravity

IIA 超引力理论有一个与 11 维超引力没有简单联系的推广, 但这个推广仍在弦论中起到一定作用. 这个 IIA 理论有 2-形式和 4-形式场强, 以及通过 Poincaré 对偶得到的 6-形式和 8-形式

$$\tilde{F}_6 = *F_4, \quad \tilde{F}_8 = *F_2; \quad (12.1.21)$$

波浪符是指场强满足不标准的 Bianchi 恒等式. 从这个规律来看, 我们还应考虑一个 10-形式 $F_{10} = dC_9$. 自由场方程将是

$$d * F_{10} = 0, \quad (12.1.22)$$

由于 $*F_{10}$ 是标量, 这意味着

$$*F_{10} = \text{常数}. \quad (12.1.23)$$

因此它没有传播自由度. 然而, 由于它携带能量密度, 它有物理效应. 这与 2 维时空中的电场 F_2 很像, 它没有传播自由度, 但有一个能量密度和一个禁闭电荷的线性势.

这种场确实可以被纳入进 IIA 超引力中. 作用量是

$$S'_{\text{IIA}} = \tilde{S}_{\text{IIA}} - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} M^2 + \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int M F_{10}. \quad (12.1.24)$$

这里的 \tilde{S}_{IIA} 是之前的 IIA 作用量 (12.1.10) 做替换

$$F_2 \rightarrow F_2 + MB_2, \quad F_4 \rightarrow F_4 + \frac{1}{2}MB_2 \wedge B_2, \quad \tilde{F}_4 \rightarrow \tilde{F}_4 + \frac{1}{2}MB_2 \wedge B_2 \quad (12.1.25)$$

后的结果. 标量 M 是辅助场. 因此它可以被积掉, 代价是引入一个对 B 的非线性依赖.

我们会在下一章看到, 这个有质量超引力确实出现在 IIA 弦论中. 为了把 9-形式势变得更透彻, 观测到在十维中能给出传播场的秩最大的势是 8-形式, 它的 9 形式场强与一个 1-形式对偶. 后者就是 R-R 标量场 C_0 的梯度. 10 形式也能填进 10 维时空中但不给出能传播的态. 我们在 10.8 节看到这在 I 型弦中确实存在, 所以我们不奇怪这个 9-形式也将出现在弦论中.

Type IIB superstring

对低能 IIB 超引力, 有一个自对偶场强 $F_5 = *F_5$ 引起的问题. 这样的场没有协变作用量, 当如下形式很接近

$$S_{\text{IIB}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}}, \quad (12.1.26a)$$

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left(R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} |H_3|^2 \right), \quad (12.1.26b)$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} \left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2} |\tilde{F}_5|^2 \right), \quad (12.1.26c)$$

$$S_{\text{CS}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3, \quad (12.1.26d)$$

其中

$$\tilde{F}_3 = F_3 - C_0 \wedge H_3, \quad (12.1.27a)$$

$$\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2} C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge F_3. \quad (12.1.27b)$$

Type I superstring

Heterotic strings

$$\tilde{H}_3 = dB_2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \omega_3, \quad \delta B_2 = \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \text{Tr}_v(\lambda dA_I) \quad (12.1.28)$$

12.2 反常

$$\delta Z[A] = -\pi \int d^2z \lambda^a(z, \bar{z}) \left[\hat{k}_L \partial_z A_{\bar{z}}^a(z, \bar{z}) + \hat{k}_R \partial_{\bar{z}} A_z^a(z, \bar{z}) \right]. \quad (12.2.1)$$

12.3 超空间和超场

为了构造超弦微扰论, 先给超共形对称性一个更加几何的解释是更有意义的. 为了做到这点, 我们需要超流形, 它是有一个普通复坐标 z 和一个反对易复坐标 θ 的世界面, 其中

$$\theta^2 = \bar{\theta}^2 = \{\theta, \bar{\theta}\} = 0. \quad (12.3.1)$$

由于反对易性, 对于 θ 和 $\bar{\theta}$ 的任意函数, 它的 Taylor 展开是截断的. 这样, 我们就可以把超流形上的任意函数看成是 Taylor 展开中出现的普通函数的集合. 然而, 就像算符 “ $\int \theta$ ” 的有很多普通积分的性质, 因而我们称它为积分, θ 的行为也很像一个坐标, 所以将其看成是一个既有普通坐标又有反对易坐标的流形是有用的.

我们可以这样看待普通的共形变换. 在世界面坐标的广义变换 $z'(z, \bar{z})$ 下, 导数的变换是

$$\partial_z = \frac{\partial z'}{\partial z} \partial_{z'} + \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} \partial_{\bar{z}'}. \quad (12.3.2)$$

共形变换就是那些将 ∂_z 变成自身的倍数的变换.

定义超导数,

$$D_\theta = \partial_\theta + \theta \partial_z, \quad D_{\bar{\theta}} = \partial_{\bar{\theta}} + \bar{\theta} \partial_{\bar{z}}, \quad (12.3.3)$$

它有如下的性质

$$D_\theta^2 = \partial_z, \quad D_{\bar{\theta}}^2 = \partial_{\bar{z}}, \quad \{D_\theta, D_{\bar{\theta}}\} = 0. \quad (12.3.4)$$

注意到

$$(\partial_\theta + \theta \partial_z)^2 f = \partial_\theta (\theta \partial_z f) + \theta \partial_z \partial_\theta f = \partial_z f - \theta \partial_\theta \partial_z f + \theta \partial_z \partial_\theta f,$$

第一等号中没有二次项是因为 θ 的反对易性, 第二个等号中第二项的负号也是因为如此.

$$\begin{aligned} \{D_\theta, D_{\bar{\theta}}\} &= \partial_\theta \partial_{\bar{\theta}} f + \theta \bar{\theta} \partial_z \partial_{\bar{z}} f + \theta \partial_{\bar{\theta}} \partial_z f - \bar{\theta} \partial_\theta \partial_{\bar{z}} f \\ &\quad + \partial_{\bar{\theta}} \partial_\theta f + \bar{\theta} \theta \partial_z \partial_{\bar{z}} f + \bar{\theta} \partial_\theta \partial_{\bar{z}} f - \theta \partial_{\bar{\theta}} \partial_z f = 0 \end{aligned}$$

超共形变换 $z'(z, \theta), \theta'(z, \theta)$ 就是将 D_θ 变成自身倍数的变换. 从

$$D_\theta = D_\theta \theta' \partial_{\theta'} + D_\theta z' \partial_{z'} + D_\theta \bar{\theta}' \partial_{\bar{\theta}'} + D_\theta \bar{z}' \partial_{\bar{z}'}, \quad (12.3.5)$$

得出超共形变换满足

$$D_\theta \bar{\theta}' = D_\theta \bar{z}' = 0, \quad D_\theta z' = \theta' D_\theta \theta', \quad (12.3.6)$$

因而

$$D_\theta = (D_\theta \theta') D_{\theta'}. \quad (12.3.7)$$

首先证明 (12.3.5)

$$\begin{aligned} D_\theta &= \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta'} + \frac{\partial z'}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'} + \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}'} \\ &\quad + \theta \frac{\partial \theta'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta'} + \theta \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} + \theta \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'} + \theta \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}'} \\ &= D_\theta \theta' \partial_{\theta'} + D_\theta z' \partial_{z'} + D_\theta \bar{\theta}' \partial_{\bar{\theta}'} + D_\theta \bar{z}' \partial_{\bar{z}'}, \end{aligned}$$

对 (12.3.5) 使用 (12.3.6) 就得到

$$D_\theta \theta' \partial_{\theta'} + D_\theta z' \partial_{z'} + D_\theta \bar{\theta}' \partial_{\bar{\theta}'} + D_\theta \bar{z}' \partial_{\bar{z}'} = D_\theta \theta' \partial_{\theta'} + \theta' D_\theta \theta' \partial_{z'} = (D_\theta \theta') D_{\theta'}.$$

利用 $D_{\bar{\theta}}^2 = \partial_{\bar{z}}$ 可以得出

$$\partial_{\bar{z}} z' = \partial_{\bar{\theta}} z' = \partial_{\bar{z}} \theta' = \partial_{\bar{\theta}} \theta' = 0 \quad (12.3.8)$$

以及它的共轭关系. 由此我们可以解出超共形变换, 并用全纯对易函数 $f(z)$ 和全纯反对易函数 $g(z)$ 将其表示出来,

$$z'(z, \theta) = f(z) + \theta g(z) h(z), \quad \theta'(z, \theta) = g(z) + \theta h(z), \quad (12.3.9a)$$

$$h(z) = \pm \left[\partial_z f(z) + g(z) \partial_z g(z) \right]^{1/2} \quad (12.3.9b)$$

无限小形式是

$$\delta z = \epsilon[v(z) - i\theta\eta(z)], \quad \delta\theta = \epsilon[-i\eta(z) + \frac{1}{2}\theta\partial v(z)] \quad (12.3.10)$$

其中 ϵ 和 v 是对易的, η 反对易. 它们满足超共形代数 (10.1.11)

首先 z' 肯定是 (12.3.9a) 中的形式. 我们可以把 θ' 写成

$$\theta'(z, \theta) = g'(z) + \theta h'(z)$$

再利用 (12.3.6)

$$\begin{aligned} D_\theta z' &= (\partial_\theta + \theta\partial_z)(f + \theta gh) = gh + \theta\partial_z f \\ \theta' D_\theta \theta' &= (g' + \theta h')(\partial_\theta + \theta\partial_z)(g' + \theta h') = (g' + \theta h')(h' + \theta\partial_z g') \\ &= g'h' + \theta(h'h' - g'\partial_z g') \end{aligned}$$

由此不难得到

$$g'h' = gh, \quad h'h' = g'\partial_z g' + \partial f$$

完全可以选择 $g' = g$ 和 $h' = h$, 这样就得到了 (12.3.9).

对于无限小形式, 不难看到 $f \sim O(z)$, $h \sim O(1)$ 以及 $g \sim O(\epsilon)$, 这意味着 (12.3.9b) 要取正号, 因此不妨取 $f = z + \epsilon v(z)$ 和 $g = -i\epsilon\eta(z)$, 那么 (12.3.9b) 就给出了 h

$$h = 1 + \frac{1}{2}\epsilon\partial_z v(z).$$

类比共形张量的变换, 权重为 (h, \tilde{h}) 的张量超场的变换是

$$(D_\theta \theta')^{2h} (D_{\bar{\theta}} \bar{\theta}')^{2\tilde{h}} \phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z}), \quad (12.3.11)$$

其中 z 代表 (z, θ) . 在无限小超共形变换 $\delta\theta = \epsilon\eta(z)$,

$$\delta\phi(z, \bar{z}) = -\epsilon \left[2h\theta\partial\eta(z) + \eta(z)Q_\theta + 2\tilde{h}\bar{\theta}\partial\bar{\eta}(\bar{z}) + \bar{\eta}(\bar{z})Q_{\bar{\theta}} \right] \phi(z, \bar{z}), \quad (12.3.12)$$

其中 $Q_\theta = \partial_\theta - \theta\partial_z$ 以及 $Q_{\bar{\theta}} = \partial_{\bar{\theta}} - \bar{\theta}\partial_{\bar{z}}$.

$\delta\theta = \epsilon\eta(z)$ 相当于在 (12.3.9a) 中取 $g(z) = \epsilon\eta(z)$, $h(z) = 1$ 以及 $f(z) = z$, 那么 $z' = z + \epsilon\theta\eta(z)$, 这样 $\delta\phi$ 就是 (简单起见只考虑全纯部分)

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \phi'(z) - \phi(z) = \phi'(z' - \epsilon\theta\eta, \theta' - \epsilon\eta) - \phi(z, \theta) \\ &= \phi'(z', \theta') - \epsilon\theta\eta\partial_{z'}\phi'(z', \theta') - \epsilon\eta\partial_{\theta'}\phi'(z', \theta') - \phi(z, \theta) \\ &= (D_\theta \theta')^{-2h} \phi(z) - \phi(z) - \epsilon\eta Q_\theta \left((D_\theta \theta')^{-2h} \phi(z) \right) \\ &= -2h\epsilon\theta(\partial_z \eta)\phi - \epsilon\eta Q_\theta \phi \end{aligned}$$

注意我们使用了 $(D_\theta \theta')^{-2h} = (1 + \epsilon\theta\partial\eta)^{-2h} = 1 - 2h\epsilon\theta\partial\eta$, 在第三个等号中我们使用了 θ 和 η 的反对易性, 所以得到的是 Q_θ 而不是 D_θ .

展成 θ 的幂级数, 简单起见只关注全纯部分, 我们有

$$\phi(z) = \mathcal{O}(z) + \theta\Psi(z). \quad (12.3.13)$$

那么无限小变换 (12.3.12) 就是

$$\delta\mathcal{O} = -\epsilon\eta\Psi, \quad \delta\Psi = -\epsilon[2h\partial\eta\mathcal{O} + \eta\partial\mathcal{O}]. \quad (12.3.14)$$

写成 OPE 系数 (10.3.4), 这是

$$G_{-1/2} \cdot \mathcal{O} = \Psi, \quad G_r \cdot \mathcal{O} = 0, \quad r \geq \frac{1}{2}, \quad (12.3.15a)$$

$$G_{-1/2} \cdot \Psi = \partial\mathcal{O}, \quad G_{1/2} \cdot \Psi = 2h\mathcal{O}, \quad G_r \cdot \Psi = 0, \quad r \geq \frac{3}{2}. \quad (12.3.15b)$$

无论是通过使用 NS 代数, 还是通过考虑纯共形变换 $\delta z = \epsilon v(z)$, 可以发现 \mathcal{O} 是权重为 h 的张量, 而 Ψ 是权重为 $h + \frac{1}{2}$ 的张量, 所以它们都被所有 Virasoro 下降生成元湮灭. 这个张量超场的最低分量 \mathcal{O} 是超共形初级场, 它被 NS 代数的所有下降生成元湮灭.

对比刚性平移, 现在刚性世界面对称平移, $\delta\theta = -i\epsilon\eta$, $\delta z = -i\epsilon\theta\eta$. T_F 的 Ward 恒等式给出了相应的生成元

$$G_{-1/2} \cdot \sim -iQ_\theta = -i(\partial_\theta - \theta\partial_z) \quad (12.3.16)$$

这推广了 CFT 中获得的 $L_{-1} \cdot \sim \partial_z$.

Actions and backgrounds

变换 (12.3.9) 的超雅克比矩阵是

$$dz' d\theta' = dz d\theta D_\theta \theta'. \quad (12.3.17)$$

为了构造一个超共形不变的作用量, 拉格朗日密度必须是权重为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 的张量超场. 两个张量超场的乘积也是张量超场, 其权重是原来两个权重的和, $(h, \tilde{h}) = (h_1, \tilde{h}_1) + (h_2, \tilde{h}_2)$. 另外, 超导数 D_θ 将 $(0, \tilde{h})$ 的张量超场变成 $(\frac{1}{2}, \tilde{h})$ 的张量超场, 而 $D_{\bar{\theta}}$ 将 $(h, 0)$ 的张量超场变成 $(h, \frac{1}{2})$ 的张量超场.

我们可以从 d 个权重为 $(0, 0)$ 的张量 $\mathbf{X}^\mu(z, \bar{z})$ 来构建不变作用量:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z d^2\theta D_{\bar{\theta}} \mathbf{X}^\mu D_\theta \mathbf{X}_\mu. \quad (12.3.18)$$

\mathbf{X}^μ 关于 θ 的 Taylor 展开是

$$\mathbf{X}^\mu(z, \bar{z}) = X^\mu + i\theta\psi^\mu + i\bar{\theta}\tilde{\psi}^\mu + \theta\bar{\theta}F^\mu. \quad (12.3.19)$$

其中设 $\alpha' = 2$, 可以通过 $X^\mu \rightarrow X^\mu(2/\alpha')^{1/2}$ 恢复. 作用量中对 $d^2\theta = d\theta d\bar{\theta}$ 的积分挑出了 $\bar{\theta}\theta$ 的系数

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial_{\bar{z}} X^\mu \partial_z X_\mu + \psi^\mu \partial_{\bar{z}} \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial_z \tilde{\psi}_\mu + F^\mu F_\mu \right). \quad (12.3.20)$$

场 F^μ 是辅助场, 它完全由运动方程决定, 在这里就是零. 作用量的剩余部分与之前的 (10.1.5) 相同.

很多之前的结果可以重铸成超场的形式, 运动方程是

$$D_\theta D_{\bar{\theta}} \mathbf{X}^\mu(z, \bar{z}) = 0. \quad (12.3.21)$$

对于 OPE, 平移和刚性超对称变换下的不变性告诉我们它只能是 $z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2$, $\theta_1 - \theta_2$ 以及它们的共轭的函数. 在这一情况下,

$$\mathbf{X}^\mu(z_1, \bar{z}_1) \mathbf{X}^\nu(z_2, \bar{z}_2) \sim -\eta^{\mu\nu} \ln|z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2|^2, \quad (12.3.22)$$

通过展成分量场可以证明上式.

平移和 θ 的刚性超对称变换告诉我们 z 和 θ 只能以 $z_1 - z_2$ 和 $\theta_1 - \theta_2$ 的方式出现. 然后 z 的刚性超对称变换给出

$$\delta_{\text{super}}(z_1 - z_2) = -i\epsilon\theta_1\eta + i\epsilon\theta_2\eta,$$

而 $\theta_1\theta_2$ 的刚性超对称变换给出

$$\delta_{\text{super}}(\theta_1\theta_2) = \delta(\theta_1)\theta_2 + \theta_1\delta(\theta_2) = \theta_1(-i\epsilon\eta) + (-i\epsilon\eta)\theta_2$$

二者恰好相抵.

超共形鬼场作用量是用权重分别为 $(\lambda - \frac{1}{2})$ 和 $(1 - \lambda, 0)$ 的张量超场 B 和 C 构建的,

$$S_{BC} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z d^2\theta B D_{\bar{\theta}} C. \quad (12.3.23)$$

运动方程是

$$D_{\bar{\theta}} B = D_{\bar{\theta}} C = 0. \quad (12.3.24)$$

用 $D_{\bar{\theta}}$ 作用这个方程给出 $\partial_{\bar{z}} B = \partial_{\bar{z}} C = 0$, 因而也就有 $\partial_{\bar{\theta}} B = \partial_{\bar{\theta}} C = 0$. 因此运动方程给出了

$$B(z) = \beta(z) + \theta b(z), \quad C(z) = c(z) + \theta \gamma(z). \quad (12.3.25)$$

这与理论 (10.1.17) 是相同的. OPE 是

$$B(z_1)C(z_2) \sim \frac{\theta_1 - \theta_2}{z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{z_1 - z_2}. \quad (12.3.26)$$

超场形式使得写下非线性 σ 模型作用量变得很简单

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi} \int d^2z d^2\theta [G_{\mu\nu}(X) + B_{\mu\nu}(X)] D_{\bar{\theta}} X^\nu D_{\theta} X^\mu \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left\{ [G_{\mu\nu}(X) + B_{\mu\nu}(X)] \partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X^\nu \right. \\ &\quad \left. + G_{\mu\nu}(X) (\psi^\mu \mathcal{D}_{\bar{z}} \psi^\nu + \tilde{\psi}^\mu \mathcal{D}_z \tilde{\psi}^\nu) + \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}(X) \psi^\mu \psi^\nu \tilde{\psi}^\rho \tilde{\psi}^\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (12.3.27)$$

在第二个等号中消掉了辅助场. Christoffel 联络和反对称张量场强组成协变导数

$$\mathcal{D}_{\bar{z}} \psi^\nu = \partial_{\bar{z}} \psi^\nu + \left[\Gamma_{\rho\sigma}^\nu(X) + \frac{1}{2} H_{\rho\sigma}^\nu(X) \right] \partial_{\bar{z}} X^\rho \psi^\sigma, \quad (12.3.28a)$$

$$\mathcal{D}_z \tilde{\psi}^\nu = \partial_z \tilde{\psi}^\nu + \left[\Gamma_{\rho\sigma}^\nu(X) - \frac{1}{2} H_{\rho\sigma}^\nu(X) \right] \partial_z X^\rho \tilde{\psi}^\sigma. \quad (12.3.28b)$$

这描述了两种 II 型超弦理论中的一般 NS-NS 背景. R-R 背景由于超共形变换在算符上有分支切割所以很难在这一框架下描述. 伸缩子没有出现在平坦世界面作用量中, 但确实在超共形生成元中出现了.

上面全部可以应用到杂化弦中, 这时只使用 $\bar{\theta}$ 不使用 θ . 现在需要超场

$$X^\mu = X^\mu + i\bar{\theta} \tilde{\psi}^\mu, \quad (12.3.29a)$$

$$\lambda^A = \lambda^A + \bar{\theta} G^A. \quad (12.3.29b)$$

G^A 是辅助场. 非线性 σ 模型是

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi} \int d^2z d\bar{\theta} \left\{ [G_{\mu\nu}(\mathbf{X}) + B_{\mu\nu}(\mathbf{X})] \partial_z \mathbf{X}^\mu D_{\bar{\theta}} \mathbf{X}^\nu - \lambda^A \mathcal{D}_{\bar{\theta}} \lambda^A \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left\{ [G_{\mu\nu}(X) + B_{\mu\nu}(X)] \partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X^\nu + G_{\mu\nu}(X) \tilde{\psi}^\mu \mathcal{D}_{\bar{z}} \tilde{\psi}^\nu \right. \\ &\quad \left. + \lambda^A \mathcal{D}_{\bar{z}} \lambda^A + \frac{i}{2} F_{\rho\sigma}^{AB}(X) \lambda^A \lambda^B \tilde{\psi}^\rho \tilde{\psi}^\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (12.3.30)$$

其中 $\mathcal{D}_{\bar{z}} \tilde{\psi}^\nu$ 和上面一样, 并有

$$\mathcal{D}_{\bar{\theta}} \lambda^A = D_{\bar{\theta}} \lambda^A - i A_\mu^{AB}(\mathbf{X}) D_{\bar{\theta}} \mathbf{X}^\mu \lambda^B, \quad (12.3.31a)$$

$$\mathcal{D}_{\bar{z}} \lambda^A = \partial_{\bar{z}} \lambda^A - i A_\mu^{AB}(X) \partial_{\bar{z}} X^\mu \lambda^B. \quad (12.3.31b)$$

值得注意的是, 在时空反常的抵消中扮演重要角色的 2-形式势的修正规范变换, 以世界面反常的形式, 它有一个简单起源. 时空规范变换

$$\delta A_\mu^{AB} = D_\mu \chi^{AB}, \quad \delta \lambda^A = i \chi^{AB} \lambda^B \quad (12.3.32)$$

使得经典作用量不变. 然而, 它仅作用在左移世界面费米子上因此在世界面路径积分中有一个反常. 我们可以使用结果 (12.2.1), 令 $\hat{k}_L = 1$, $\hat{k}_R = 0$, 以及

$$A_{\bar{z}}^{AB}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi} A_\mu^{AB}(X) \partial_{\bar{z}} X^\mu, \quad (12.3.33)$$

因子 2π 修正了 CFT 中 Noether 流的非标准归一化. 那么再加上抵消项后,

$$\delta Z[A] = \frac{1}{8\pi} \int d^2z \text{Tr}_v [\chi(X) F_{\mu\nu}(X)] \partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X^\nu. \quad (12.3.34)$$

如果我们同时改变背景

$$\delta B_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}_v (\chi F_{\mu\nu}), \quad (12.3.35)$$

这被精确抵消了. 与超引力结果 (12.1.28) 比较给出

$$\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\alpha'}{4}. \quad (12.3.36)$$

注意到左移这边有量纲 L^2 , 我们通过引入 $\alpha'/2$ 这个因子来恢复 α' . 这是杂化弦中引力与规范耦合之间的正确结果. 为了将来的参考, 注意到, 如果我们研究有非零伸缩子的真空, 物理耦合会与作用量中的参量相差一个 e^Φ , 这同样使得

$$\frac{\kappa^2}{g_{\text{YM}}^2} \equiv \frac{e^{2\Phi} \kappa_{10}^2}{e^{2\Phi} g_{10}^2} = \frac{\alpha'}{4}. \quad (12.3.37)$$

Vertex operators

玻色弦顶点算符来自于两种形式. 态-算符映射给出的是 $\tilde{c}c$ 乘以一个 $(1, 1)$ 物质张量. 在规范固定的 Polyakov 路径积分中, 这是坐标被固定的顶点算符的合适形式. 对于要被积分的顶点算符, $c\tilde{c}$ 被省略了, 被代之以 d^2z . 超弦的顶点算符有类似的形式, 或者说图景.

第 10 章的态-算符对应给出的 NS-NS 顶点算符是

$$\delta(\gamma)\delta(\tilde{\gamma}) = e^{-\phi-\tilde{\phi}} \quad (12.3.38)$$

乘以一个 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 超共形张量. 它们是固定玻色顶点算符的类似物. 我们已经看到超共形张量是超场的最低阶分量, 它确实对应于超场的 θ 和 $\bar{\theta}$ 被固定到 0 时的值. 称这一算符为 \mathcal{O} ,

方程给出要对 θ 和 $\bar{\theta}$ 积分的顶点算符是

$$\mathcal{V}^{0,0} = G_{-1/2} \tilde{G}_{-1/2} \cdot \mathcal{O}. \quad (12.3.39)$$

这个算符出现时不带 $\delta(\gamma)\delta(\tilde{\gamma})$. 非线性 σ 模型整个有这个形式, 对 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 超场做 $d^2\theta$ 积分. 用顶点算符的 ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 荷来标记它们是比较方便的, 这里就是这样. 这使得荷为 (q, \tilde{q}) 的算符被称为处在 (q, \tilde{q}) 图景中. θ -积分的算符 (12.3.39) 处在 $(0,0)$ 图景中, 而固定算符

$$\mathcal{V}^{-1,-1} = e^{-\phi-\tilde{\phi}} \mathcal{O} \quad (12.3.40)$$

处在 $(-1, -1)$ 图景中. 这些当然可以扩展到开弦和杂化弦, 那里只有一个超共形代数, 所以只有 -1 和 0 图景.

作为一个例子, 我们来考察无质量态

$$\psi_{-1/2}^\mu \tilde{\psi}_{-1/2}^\nu |0; k\rangle_{\text{NS}}, \quad (12.3.41)$$

它的顶点算符是

$$\mathcal{V}^{-1,-1} = g_c e^{-\phi-\tilde{\phi}} \psi^\mu \tilde{\psi}^\nu e^{ik \cdot X}. \quad (12.3.42)$$

要积分还是要固定的玻色坐标与费米坐标独立, 所以方便起见我们取它们是要积分的. 从

$$\begin{aligned} & G_{-1/2} \tilde{G}_{-1/2} \psi_{-1/2}^\mu \tilde{\psi}_{-1/2}^\nu |0; k\rangle_{\text{NS}} \\ &= -(\alpha_{-1}^\mu + \alpha_0 \cdot \psi_{-1/2} \psi_{-1/2}^\mu)(\tilde{\alpha}_{-1}^\nu + \tilde{\alpha}_0 \cdot \tilde{\psi}_{-1/2} \tilde{\psi}_{-1/2}^\nu) |0; k\rangle_{\text{NS}}, \end{aligned} \quad (12.3.43)$$

我们获得了要积分的顶点算符

$$\mathcal{V}^{0,0} = -\frac{2g_c}{\alpha'} (i\partial_z X^\mu + \frac{1}{2}\alpha' k \cdot \psi \psi^\mu) (i\partial_{\bar{z}} X^\nu + \frac{1}{2}\alpha' k \cdot \tilde{\psi} \tilde{\psi}^\nu) e^{ik \cdot X}. \quad (12.3.44)$$

注意到这里与无质量玻色顶点算符的相似性, 不过这里有额外的费米项. 这些额外项对应于非线性 σ 模型中的联络和曲率部分. 对于无质量开弦矢量,

$$\mathcal{V}^{-1} = g_o e^{-\phi} t^a \psi^\mu e^{ik \cdot X}, \quad (12.3.45a)$$

$$\mathcal{V}^0 = g_o (2\alpha')^{-1/2} t^a (i\dot{X}^\mu + 2\alpha' k \cdot \psi \psi^\mu) e^{ik \cdot X}, \quad (12.3.45b)$$

其中 t^a 是 Chan-Paton 因子. 对于杂化弦矢量

$$\mathcal{V}^{-1} = g_c e^{-\tilde{\phi}} \hat{k}^{-1/2} j^a \tilde{\psi}^\mu e^{ik \cdot X}, \quad (12.3.46a)$$

$$\mathcal{V}^0 = g_c (2/\alpha')^{1/2} \hat{k}^{-1/2} j^a (i\bar{\partial} X^\mu + \frac{1}{2}\alpha' k \cdot \tilde{\psi} \tilde{\psi}^\mu) e^{ik \cdot X}. \quad (12.3.46b)$$

为了之后的参考, 我们给出顶点算符归一化和 12.1 节低能作用量中的各种耦合之间的关系:

$$\text{type I: } g_o = g_{\text{YM}} (2\alpha')^{1/2}; \quad g_{\text{YM}} \equiv g_{10} e^{\Phi/2}, \quad (12.3.47a)$$

$$\text{heterotic: } g_c = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{\alpha'^{1/2} g_{\text{YM}}}{4\pi}; \quad \kappa \equiv \kappa_{10} e^\Phi, \quad g_{\text{YM}} \equiv g_{10} e^\Phi, \quad (12.3.47b)$$

$$\text{type I/II: } g_c = \frac{\kappa}{2\pi}; \quad \kappa \equiv \kappa_{10} e^\Phi. \quad (12.3.47c)$$

这些结果可以通过比较场论和弦论振幅获得.

12.4 树级振幅

我们希望得到的是几个玻色坐标或费米坐标被固定的顶点算符乘积在球面或圆盘上的期望值. 在玻色弦中, 在球面上, 由于存在三个 c 零模和三个 \tilde{c} 零模, 必须要固定三个顶点算符. 而在球面上有两个 γ 零模和两个 $\tilde{\gamma}$ 零模, 即 $1, z$ 和 $1, \bar{z}$: 对于一个权重 $-\frac{1}{2}$ 的场, 它们在无穷远处是全纯的. 我们需要这么多的 $\delta(\gamma)$ 和 $\delta(\tilde{\gamma})$ 因子, 否则零模积分发散. 因此我们将固定两个顶点算符的 $\theta, \bar{\theta}$ 坐标. 在圆盘上类似, 我们必须固定两个开弦顶点算符的 θ 坐标.

我们也可以从玻色化的形式中看到这点. ϕ 流中的反常要求总的 ϕ 荷是 -2 而总的 $\tilde{\phi}$ 荷是 -2 . 因此我们需要两个顶点算符处在 $(-1, -1)$ 图景中, 而其余顶点算符处在 $(0, 0)$ 图景中. 对于圆盘上的开弦 (或者球面上的杂化弦), 我们需要两个在 -1 图景中, 其余的在 0 图景中.

从鬼场背景态 (10.4.24) 中, R 截面顶点算符拥有 ϕ 荷 $-\frac{1}{2}$. 这介于固定图景和积分图景中间, 没有这样简单的解释. 然而, ϕ 荷的守恒告诉我们 ϕ 荷的总和必须是 -2 . 因此对于两个费米子和任意多个玻色子的振幅, 我们可以对两个费米子使用图景 $-\frac{1}{2}$, 对一个玻色子使用图景 -1 , 对剩余的玻色子使用图景 0 . 对于 4 个费米子和任意多个玻色子的振幅, 我们可以对费米子使用 $-\frac{1}{2}$ 图景, 对所有玻色子使用 0 图景. 对于 6 个费米子或更多费米子的散射, 将在下一节讨论.

Three-point amplitudes

Type I disk amplitudes : 根据上面的讨论, I 型 3 玻色子振幅是

$$\frac{1}{\alpha' g_0^2} \left\langle c \mathcal{V}_1^{-1}(x_1) c \mathcal{V}_2^{-1}(x_2) c \mathcal{V}_3^0(x_3) \right\rangle + (\mathcal{V}_1 \leftrightarrow \mathcal{V}_2), \quad (12.4.1)$$

其中我们取了 $x_1 > x_2 > x_3$. 对于无质量振幅, $bc, \beta\gamma$ 和 ψ CFT 中的相关期望值是

$$\langle c(x_1) c(x_2) c(x_3) \rangle = x_{12} x_{13} x_{23}, \quad (12.4.2a)$$

$$\langle e^{-\phi}(x) e^{-\phi}(x_2) \rangle = x_{12}^{-1}, \quad (12.4.2b)$$

$$\langle \psi^\mu(x_1) \psi^\nu(x_2) \rangle = \eta^{\mu\nu} x_{12}^{-1}, \quad (12.4.2c)$$

在 $X\psi$ 的组合 CFT 中则是

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi^\mu e^{ik_1 \cdot X}(x_1) \psi^\nu e^{ik_2 \cdot X}(x_2) (i\dot{X}_\rho + 2\alpha' k_3 \cdot \psi \psi^\rho) e^{ik_3 \cdot X}(x_3) \right\rangle \\ &= 2i\alpha' (2\pi)^{10} \delta^{10} \left(\sum_i k_i \right) \left(-\frac{\eta^{\mu\nu} k_1^\rho}{x_{12} x_{13}} - \frac{\eta^{\mu\nu} k_2^\rho}{x_{12} x_{23}} + \frac{\eta^{\mu\rho} k_3^\nu - \eta^{\nu\rho} k_3^\mu}{x_{13} x_{23}} \right) \end{aligned} \quad (12.4.3)$$

12.5 一般振幅

12.6 单圈振幅