Ch4 函数的连续性

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820　QQ号：58105217

Email:　yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年11月14日

BY GYH

将学习：

函数连续性的概念

函数在一点的连续性

设函数$f(x)$在某$U(x_0)$上有定义.

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

函数$f(x)$在点x_0连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\overset{\varepsilon-\delta}{\Leftrightarrow}$ 对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

$$\overset{\Delta x=x-x_0}{\Leftrightarrow} \lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

函数在一点的左连续、右连续

设函数$f(x)$在某$U_-(x_0)\big(U_+(x_0)\big)$上有定义.

若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)\right)$,

则称函数$f(x)$在点x_0左连续(右连续).

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U_-(x_0;\delta),\text{ 有}\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U_+(x_0;\delta),\text{ 有}\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon.$$

函数在一点连续的充要条件

函数$f(x)$在点x_0连续的充要条件是：$f(x)$在点x_0既是左连续，又是右连续.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$

间断点

设函数$f(x)$在某$U^0(x_0)$上有定义.

若$f(x)$在点x_0无定义,

或$f(x)$在点x_0有定义但不连续,

则称点x_0为函数$f(x)$的间断点或不连续点.

间断点的分类

第一类间断点：左、右极限存在的间断点

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$存在，而$f(x)$在点$x_0$无定义，

或有定义但$f(x_0)\neq A$，则称点x_0是$f(x)$的可去间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$都存在，但$A\neq B$，

则称点x_0是$f(x)$的跳跃间断点.

第二类间断点：左、右极限至少有一个不存在的间断点

区间上的连续函数

若函数$f(x)$在区间I上的每一点都连续，则称函数$f(x)$为I上的连续函数.

对于闭区间或半闭区间的端点,函数在该点连续是指相应的左连续或右连续.

分段连续函数

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的不连续点都是第一类的,并且不连续点只有有限个,则称函数$f(x)$是$[a,b]$上的分段连续函数.

注：从几何上看,分段连续曲线就是由若干个小区间上的连续曲线合并而成.

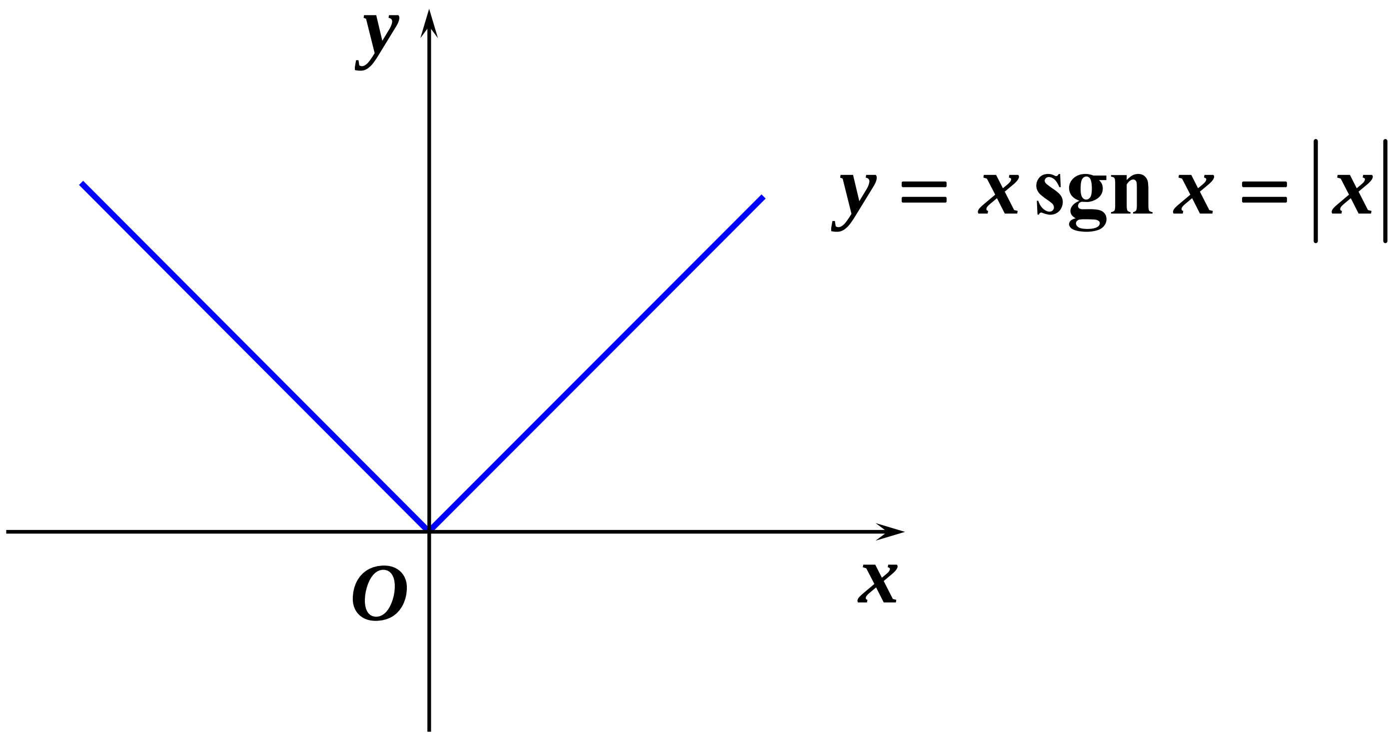
例如： $y=[x]$, $y=x-[x]$在$[-10,10]$上是分段连续的.

例1 讨论函数$f(x) = x\operatorname{sgn} x$在 $x = 0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sgn} x = 0 = f(0).$

(无穷小与有界量的乘积是无穷小)

所以$f(x) = x\operatorname{sgn} x$在 $x = 0$处连续.



例2 讨论函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 由于 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ 从而

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(-1)=-1,\quad \lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}1=1,$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-1\neq1=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$,

所以函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在点 $x=0$ 处不连续,

$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

例3 证明 $f(x)=xD(x)$ 在 $x=0$ 处连续，其中 $D(x)$ 为Dirichlet函数.

证 因为 $f(0)=0, |D(x)|\le 1, \lim\limits_{x\to 0} x=0$，所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} xD(x)=0=f(0).$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

注： 上述极限式绝不能写成

$$\lim_{x\to 0} xD(x) \cancel{=} \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} D(x)=0.$$

注：由上面的定义和例题应该可以看出：

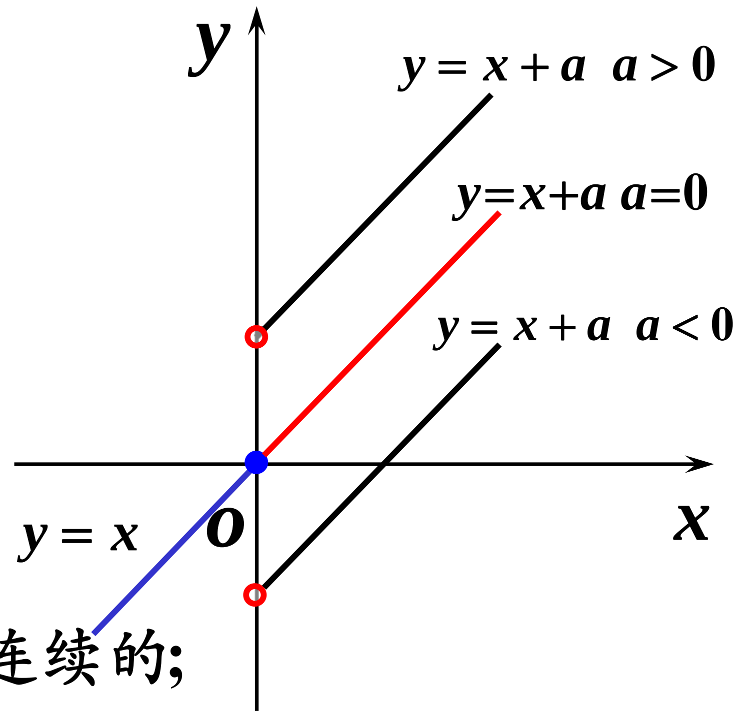
函数在点x_0有极限与在点x_0连续是有区别的.

首先$f(x)$在点x_0连续，那么它在点x_0必须要有极限，

就是极限存在是函数连续的一个必要条件.

而且还要求这个极限值只能是函数在该点的函数值.

例4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ x+a, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.



解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0=f(0)$,

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+a)=a$,

所以当 $a\neq 0$ 时, f 在 $x=0$ 处不是右连续的;

当 $a=0$ 时, f 在 $x=0$ 处是右连续的.

综上所述,当 $a=0$ 时, f 在 $x=0$ 处连续;

当 $a\neq 0$ 时, f 在 $x=0$ 处不连续.

$x=0$ 是 f 的第一类跳跃间断点.

例5 研究函数$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例6 研究函数$f(x)=c$的连续性.

解 对$\forall x_0\in\mathbb{R}$,

由于对$\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,有

$$|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}c=c$,

所以$f(x)=c$在点x_0处连续,

由x_0的任意性知,$f(x)=c$是$\mathbb{R}$上的连续函数.

例7 研究函数$f(x)=x^n$(n为正整数)的连续性.

解 对$\forall x_0\in\mathbb{R}$, 当$x_0=0$时,显然$f(x)$在$x_0=0$处连续.

当$x_0\neq 0$时, 限制$|x-x_0|<\dfrac{|x_0|}{2}$,即$|x|<\dfrac{3}{2}|x_0|=m$,

由于对$\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|f(x)-x_0^n\right|=\left|x^n-x_0^n\right|=\left|(x-x_0)\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_0+\cdots+x_0^{n-1}\right)\right|$$

$$\leq|x-x_0|\left(m^{n-1}+m^{n-2}|x_0|+\cdots+|x_0|^{n-1}\right)<\varepsilon$$

只要$|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{m^{n-1}+m^{n-2}|x_0|+\cdots+|x_0|^{n-1}}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\left\{\dfrac{|x_0|}{2},\dfrac{\varepsilon}{m^{n-1}+m^{n-2}|x_0|+\cdots+|x_0|^{n-1}}\right\}$,

当$|x-x_0|<\delta$时,有$\left|f(x)-x_0^n\right|=\left|x^n-x_0^n\right|<\varepsilon$, 即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}x^n=x_0^n$,

所以$f(x)=x^n$在点x_0处连续,

由x_0的任意性知, $f(x)=x^n$是$\mathbb{R}$上的连续函数.

例8 研究函数$f(x)=\sin x$的连续性.

解 对$\forall x_0\in\mathbb{R}$,

当$x_0\neq 0$时, 限制$|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$, 即$|x|<\frac{3}{2}|x_0|=m$,

由于对$\forall\varepsilon>0$, 要使

$$|f(x)-\sin x_0|=|\sin x-\sin x_0| =\left|2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|\leq|x-x_0|<\varepsilon,$$

只要 $|x-x_0|<\varepsilon$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\varepsilon$, 当$|x-x_0|<\delta$时,有

$$|f(x)-\sin x_0|=|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$,

所以$f(x)=\sin x$在点x_0处连续,

由x_0的任意性知, $f(x)=\sin x$是$\mathbb{R}$上的连续函数.

例9 研究函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$在$[-1,1]$上的连续性.

解 对$\forall x_0\in(-1,1)$, 由于对$\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|f(x)-\sqrt{1-x_0^2}\right|=\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}\right|=\left|\frac{x^2-x_0^2}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}\right|$$

$$=|x-x_0|\frac{|x+x_0|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1-x_0^2}}|x-x_0|<\varepsilon,$$

只要 $|x-x_0|<\dfrac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{|x_0-1|,|x_0+1|,\dfrac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon\right\}$,当$|x-x_0|<\delta$时,有

$$\left|f(x)-\sqrt{1-x_0^2}\right|=\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}\right|<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0^2}$,所以$f(x)=\sqrt{1-x^2}$在点$x_0$处连续,

由x_0的任意性知, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$是$(-1,1)$上的连续函数.

例9 研究函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$在$[-1,1]$上的连续性.

当$x_0=1$时，对$\forall\varepsilon>0$，要使$|f(x)-0|=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\le 2\sqrt{1-x}<\varepsilon$,

只要 $x-1>-\dfrac{\varepsilon^2}{4}$.因此,对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon^2}{4}\right\}$，当$-\delta<x-1\le 0$时,有

$$|f(x)-0|=\sqrt{1-x^2}<\varepsilon,\ 即\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}=0,$$

所以$f(x)=\sqrt{1-x^2}$在点$x_0=1$处左连续.

当$x_0=-1$时,对$\forall\varepsilon>0$,要使$|f(x)-0|=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\le 2\sqrt{x-(-1)}<\varepsilon$,

只要$x-(-1)<\dfrac{\varepsilon^2}{4}$.因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon^2}{4}\right\}$,当$0\le x-(-1)<\delta$时,有

$$|f(x)-0|=\sqrt{1-x^2}<\varepsilon,\ 即\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\sqrt{1-x^2}=0,$$

所以$f(x)=\sqrt{1-x^2}$在点$x_0=-1$处右连续.

综上分析知$f(x)=\sqrt{1-x^2}$是$[-1,1]$上的连续函数.

例10 证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$连续.

证 对$\forall x_0\in(0,1)$,考虑

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{xx_0}\right|,$$

限制$\left|x-x_0\right|<\dfrac{x_0}{2}$,则$\dfrac{x_0}{2}<x<\dfrac{3x_0}{2}$,从而对$\forall\varepsilon>0$,要使

$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right|=\left|\dfrac{x-x_0}{xx_0}\right|<\dfrac{2\left|x-x_0\right|}{x_0^2}<\varepsilon$,只要$\left|x-x_0\right|<\dfrac{x_0^2}{2}\varepsilon$.

因此对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{1-x_0,\dfrac{x_0}{2},\dfrac{x_0^2}{2}\varepsilon\right\}$, 当$x\in U(x_0;\delta)$时,有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon.$$

所以$f(x)=\dfrac{1}{x}$在点x_0连续. 由x_0的任意性知, $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$连续.

例11 证明函数$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$在$[0,1]$上连续.

证 对$\forall x_0\in(0,1)$, 令$\eta=\min\{x_0,1-x_0\}>0$, 当$|x-x_0|<\eta$时,

$x\in(0,1)$,因而对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\sqrt{x(1-x)}-\sqrt{x_0(1-x_0)}\right|=\frac{|x(1-x)-x_0(1-x_0)|}{\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{x_0(1-x_0)}}=\frac{|x-x_0||1-x-x_0|}{\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{x_0(1-x_0)}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}|x-x_0|<\varepsilon,\text{ 只要 }|x-x_0|<\sqrt{x_0(1-x_0)}\varepsilon.$$

因此对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{\eta_0,\sqrt{x_0(1-x_0)}\varepsilon\right\}$,当$x\in U(x_0;\delta)$时,

$$\left|\sqrt{x(1-x)}-\sqrt{x_0(1-x_0)}\right|<\frac{1}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}|x-x_0|<\varepsilon.$$

即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{x_0(1-x_0)}$, 所以$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$在点$x_0$处连续,

由x_0的任意性知, $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$在$(0,1)$连续.

例11 证明函数$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$在$[0,1]$上连续.

对于$x_0=0$, $|f(x)-f(0)|=\left|\sqrt{x(1-x)}\right|\le\sqrt{x}$,

因此对$\forall\varepsilon>0$(不妨设$\varepsilon<1$),取$\delta=\min\{1,\varepsilon^2\}$, 当$0\le x<\delta$时,

$$|f(x)-f(0)|\le\sqrt{x}<\varepsilon,$$

所以$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$在$x=0$右连续.

对于$x_0=1$, $|f(x)-f(1)|=\left|\sqrt{x(1-x)}\right|\le\sqrt{1-x}$,

因此对$\forall\varepsilon>0$(不妨设$\varepsilon<1$),取$\delta=\min\{1,\varepsilon^2\}$, 当$1-\delta<x\le 1$时,

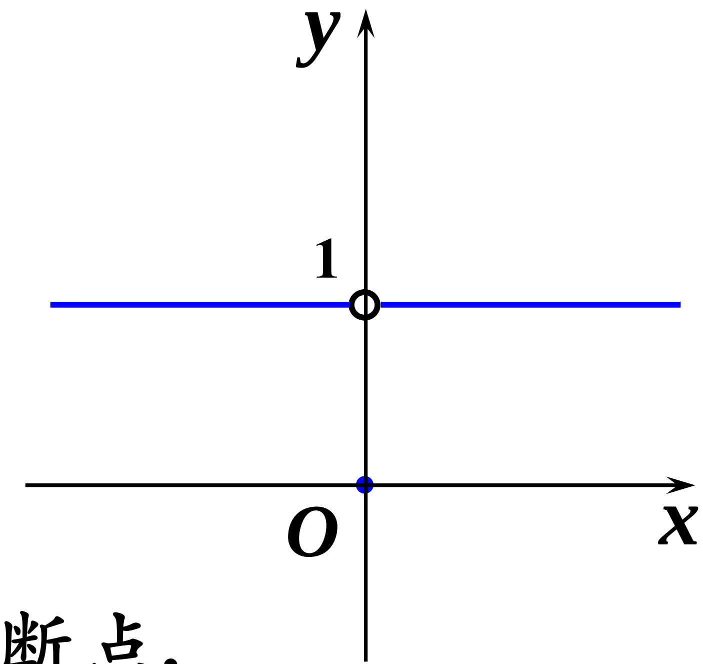
$$|f(x)-f(1)|\le\sqrt{1-x}<\varepsilon,$$

所以$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$在$x=1$左连续.

综上分析知$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$在$[0,1]$上连续.

例12 试证函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续，

并且$x=0$是$f(x)$的可去间断点.



证 因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\neq f(0),$$

所以 $x=0$是$f(x)$的第一类可去间断点.

注1： 对于任意函数 $g(x)$, 若它在 $x = x_0$ 处连续,

那么函数

$$F(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0 \end{cases}$$

在 $A \neq g(x_0)$ 时, x_0 恒为 $F(x)$ 的可去间断点.

注2： 若点 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点, 只要重新定义 $f(x)$ 在点 x_0 的值为 $\lim_{x \to x_0} f(x)$, 那么它就在点 x_0 连续.

例13 指出函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点并说明其类型.

解 由于$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$在$x=0$处无定义, 且

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0,$$

所以$x=0$是$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$的第一类可去间断点.

例14 指出函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的间断点并说明其类型.

解 由于$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$x=0$处无定义，且

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

所以$x=0$是$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$的第一类可去间断点.

例15 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{1/x}+1}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否连续?

若不连续,是什么类型的间断点?

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{e^y+1}=0=f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{1}{e^y+1}=1\neq f(0),$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续而不左连续, 从而不连续.

由于其左、右极限都存在但不相等,

因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

例16 讨论$x=0$是函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的哪一类间断点?

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在,

所以$x=0$是$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$的第二类间断点.

例17 证明Riemann函数$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p,q\in\mathbb{N}_+, \dfrac{p}{q}\text{是既约真分数}\\ 0, & x=\text{无理数以及}0,1\end{cases}$

在(0,1)上任何无理点都连续,任何有理点都不连续.

证 设$x_0\in(0,1)$为任一无理数,则$R(x_0)=0$.

对$\forall\varepsilon>0\left(\text{不妨设}\varepsilon<\dfrac{1}{2}\right)$, 满足$\dfrac{1}{q}\geq\varepsilon$的正整数$q$显然只有有限个

(但至少有一个,如$q=2$),从而使$R(x)\geq\varepsilon$的有理数$x\in(0,1)$只有

有限个$\left(\text{至少有一个,如}\dfrac{1}{2}\right)$,设为$r_1,r_2,\cdots,r_n$.

取 $\delta=\min\{|r_1-x_0|,\cdots,|r_n-x_0|,x_0,1-x_0\}$,

则对$\forall x\in U(x_0;\delta)(\subset(0,1))$, 当$x$为有理数时,有$R(x)<\varepsilon$,

当x为无理数时,有$R(x)=0$.于是,对$\forall x\in U(x_0;\delta)$,总有

$$|R(x)-R(x_0)|=|R(x)-0|=R(x)<\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0=R(x_0)$. 这就证明了$R(x)$在无理点连续.

现设$x_0=\dfrac{p_0}{q_0}$为(0,1)上任一有理数,$R(x_0)=\dfrac{1}{q_0}$.

若x_0取$r_1,r_2,\cdots,r_n$中某一个,不妨设$x_0=r_i$,则 取 $\delta=\min\limits_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne i}}\left\{|r_k-x_0|,x_0,1-x_0\right\}$,

若$x_0\notin\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$,则 取 $\delta=\min\limits_{1\le k\le n}\left\{|r_k-x_0|,x_0,1-x_0\right\}$.

于是,当$0<|x-x_0|<\delta$时,对以上两种情形都有 $|R(x)-0|<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

由于$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0\ne\dfrac{1}{q_0}=R(x_0)=R\left(\dfrac{p_0}{q_0}\right)$,

所以$R(x)$在任何有理点都不连续.

证 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) \neq R(x_0)=\dfrac{1}{q_0}$,其中 $x_0=\dfrac{p_0}{q_0}$.

设 $x_0=\dfrac{p_0}{q_0}$ 为(0,1)上任一有理数, $R(x_0)=\dfrac{1}{q_0}$.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2q_0}$,对 $\forall\delta>0$, 取 x' 为 $U(x_0;\delta)\subset(0,1)$ 中的无理数, 则有

$$\left|R(x')-R(x_0)\right|=\frac{1}{q_0}>\frac{1}{2q_0}=\varepsilon_0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) \neq R(x_0)=\dfrac{1}{q_0}$.

你应该：

知道函数在一点连续的定义

会判断函数在一点是否连续

会判断函数在区间上的连续性

知道间断点的类型并会判断