第十八章　隐函数定理及其应用

第四节　条件极值

条件极值问题

定义： 点 (x_0, y_0) 是函数 $z = f(x, y)$ 在条件

$$\varphi(x, y) = 0$$

下的极值点的含义是：$\varphi(x_0, y_0) = 0$，且 (x_0, y_0) 是区域

$$E = \Big\{(x, y) | (x, y) \in U((x_0, y_0)), \varphi(x, y) = 0\Big\}$$

中函数 $z = f(x, y)$ 的极值点.

条件极值问题

定理： 设函数 $z=f(x,y)$ 定义在区域 Ω 中并且可微, 函数 $\varphi(x,y)$ 也在 Ω 中有定义且可微. 若点 (x_0,y_0) 是函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点, 则必存在常数 λ 使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}=0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}=0.$$

条件极值问题

定理： 设函数 $z=f(x,y)$ 定义在区域 Ω 中并且可微，函数 $\varphi(x,y)$ 也在 Ω 中有定义且可微. 若点 (x_0,y_0) 是函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点，则必存在常数 λ 使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}=0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}=0.$$

实际上，构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

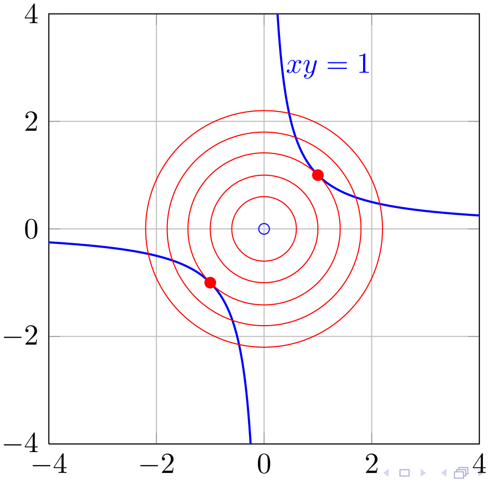
求它的稳定点.

条件极值问题

例题： 求曲线 $xy = 1$ 上点到原点距离(平方)最小的点.

条件极值问题

例题： 求曲线 $xy = 1$ 上点到原点距离(平方)最小的点.



条件极值问题

定义： 点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 是函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在条件

$$\varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, m \quad (m < n)$$

下的极值点的含义是：$\varphi_k(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) = 0$，且 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 是区域

$$E = \left\{(x_1, \cdots, x_n) | (x_1, \cdots, x_n) \in U((x_1^0, \cdots, x_n^0)), \varphi_k(x_1, \cdots, x_n) = 0\right\}$$

中函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的极值点.

条件极值问题

定理： 设函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 定义在区域 Ω 中并且可微，函数 $\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $1\le k\le m$, 在 Ω 中可微. 若点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 是函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在条件 $\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, $k=1,2,\cdots,m$, $(m<n)$ 下的极值点，且雅可比矩阵

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)},$$

的秩为 m, 则存在一组常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\right)\Bigg|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)}=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

条件极值问题

定理： 设函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 定义在区域 Ω 中并且可微，函数 $\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $1\le k\le m$, 在 Ω 中可微. 若点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 是函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在条件 $\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, $k=1,2,\cdots,m$, $(m<n)$ 下的极值点，且雅可比矩阵

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)},$$

的秩为 m, 则存在一组常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\right)\Big|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)}=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

$$L=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

例题： 要设计一个容积为 V 的长方形开口水箱, 试问水箱的长、宽、高各为多少时，其表面积最小?

例题： 已知抛物面

$$x^2 + y^2 = z$$

被平面

$$x + y + z = 1,$$

截成一个椭圆,求这个椭圆到原点的最长与最短距离.

例题： 求

$$f(x, y, z) = xyz$$

在条件

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{r}, \ (x > 0, y > 0, z > 0, r > 0)$$

下的极小值，并证明不等式

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^{-1} \leq \sqrt[3]{abc},$$

其中 a, b, c 为任意正实数.

例题： 求函数

$$E(x,y)=x^2-y^2$$

在条件

$$x^2+y^2\le 4,$$

下的最值问题.

本节作业

作业：

第 160 页：第1题：(1)、(2).

第 160 页：第3题.