Ch14 幂级数

总结及习题评讲(1)

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周四下午2点至4点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

- 幂级数
  - 阿贝尔定理
  - 收敛半径、收敛区间、收敛域
  - 幂级数性质
    - 内闭一致收敛性
    - 连续性、逐项求积、逐项求导
  - 幂级数的运算、求和函数
  - 函数的幂级数展开
    - 泰勒级数与麦克劳林级数
    - 函数展开成泰勒级数的充要条件
    - 初等函数的幂级数展开式

重要定义

幂级数的定义

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数，

其中x_0是任意给定的实数，$a_n (n=0,1,2,\cdots)$称为

幂级数的系数.

重要定理

Abel定理

(1) 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_1 \neq 0$处收敛，则对$\forall x : |x| < |x_1|$，

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$都收敛且绝对收敛.

(2) 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_2$处发散，则对$\forall x : |x| > |x_2|$，

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$都发散.

幻灯片 4

YG2 Yanhong Gu, 2023/6/3

重要定义 幂级数的收敛半径

若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$|x|<R$绝对收敛，在$|x|>R$发散，则称$R$为幂级数的收敛半径.

幂级数的收敛区间

若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径是$R$，则称$(-R,R)$为幂级数的收敛区间.

幂级数的收敛域

使幂级数收敛的点的全体所组成的集合称为幂级数的收敛域.

重要结论 求幂级数的收敛半径

对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$,若 $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ $\left(或\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$,

则 (1) 当$0<\rho<+\infty$时,幂级数的收敛半径$R=\frac{1}{\rho}$.

(2) 当$\rho=0$时,幂级数的收敛半径$R=+\infty$.

(3) 当$\rho=+\infty$时,幂级数的收敛半径$R=0$.

注:若幂级数是缺项幂级数,不能直接用上面公式计算收敛半径.

可以把幂级数看成数项级数,利用正项级数的比式判别法或根式判别法(极限形式)求得收敛范围, 进而得到收敛半径.

有时也可以通过变量代换化为标准幂级数形式,注意最后回代.

重要结论 幂级数的一致收敛性

若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R>0$,则

(1) 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$\forall [a,b]\subset(-R,R)$上一致收敛,

即幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R,R)$上内闭一致收敛.

(2) 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=R$(或$x=-R$)收敛,

则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[0,R]$(或$[-R,0]$)上一致收敛.

重要定理

幂级数的和函数的连续性定理

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R>0$,则

(1) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$是$(-R,R)$上的连续函数.

(2) 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=R$(或$x=-R$)收敛,

则其和函数$S(x)$在$x=R$(或$x=-R$)左连续(右连续).

重要结论

幂级数逐项求导、逐项求积后的幂级数的收敛半径

幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)', \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \, \mathrm{d} t\right)$有相同的收敛半径.

重要定理

幂级数逐项求导与逐项求积定理

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间$(-R,R)$上的和函数为$S(x)$,

即 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x\in(-R,R)$.则对$\forall x\in(-R,R)$,有

(1) $S(x)$在点x可导,且可逐项求导，即

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(2) $S(x)$在0到x可积,且可逐项求积，即

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

重要结论 幂级数的和函数的可导性

设$S(x)$为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在收敛区间$(-R,R)$上的和函数,则在$(-R,R)$上$S(x)$具有任意阶导数,且可任意次逐项求导,即

$$S^{(k)}(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)^{(k)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)^{(k)}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

重要结论 幂级数的运算

设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, |x|<R_a\neq 0, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, |x|<R_b$，记 $R=\min\{R_a,R_b\}$.

当$f(x)=g(x), |x|<R$时，称这两个幂级数相等.

(1) $f(x)=g(x), |x|<R \Leftrightarrow a_n=b_n, n=0,1,2,\cdots$.

(2) $\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n, |x|<R_a$ (λ为常数).

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n, |x|<R$.

(4) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n, |x|<R$，其中 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

重要结论 求幂级数的和函数的一般步骤：

(1) 求出幂级数的收敛半径,收敛区间与收敛域.

(2) 求幂级数在收敛区间上的和函数.

(3) 若收敛域不是开区间, 利用和函数的连续性讨论幂级数在收敛域端点处的和.

(4) 写出幂级数在收敛域上的和函数.

重要结论 求幂级数的和函数的一般方法：

(1) 通过变量代换将幂级数化为简单的幂级数.

(2) 通过拆项把幂级数拆成几个简单的幂级数的和.

(3) 通过逐项求导得到另一个幂级数,而该幂级数的和函数易求出,然后再通过积分,得到原幂级数的和函数.

(4) 通过逐项求积得到另一个幂级数,而该幂级数的和函数易求出,然后再通过求导,得到原幂级数的和函数.

重要结论

幂级数的系数与其和函数的奇偶性关系：

若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数为奇函数，

则幂级数仅出现奇次幂的项；

若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数为偶函数，

则幂级数仅出现偶次幂的项.

重要结论

利用幂级数求数项级数的和

需要选择合适的幂级数,使所求数项级数正好是该幂级数在某收敛点x_0处的值.

接着求出该幂级数的和函数$S(x)$,则$S(x_0)$就是所求数项级数的和.

重要结论　幂级数展开的唯一性

设函数$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)上能展开成幂级数,

即对$\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$,有

$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)上任意阶可导,且

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

即
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

其中$f^{(0)}(x)=f(x)$.

重要定义

泰勒级数、麦克劳林级数的定义

设函数$f(x)$在$x=x_0$处存在任意阶导数,得到

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

称为$f(x)$在$x=x_0$处的泰勒级数,

当$x=0$时,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$称为$f(x)$的麦克劳林级数.

重要定理

函数的泰勒级数收敛于函数本身的充要条件

若函数$f(x)$在点x_0具有任意阶导数,则$f(x)$在(x_0-r, x_0+r)上等于它的泰勒级数的和函数,即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$\Leftrightarrow$ 对一切满足不等式$|x-x_0|<r$的x,有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

这里$R_n(x)$是$f(x)$在点x_0的n阶泰勒公式的余项.

重要结论 几个常用的初等函数的幂级数展开式

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots,x\in(-1,1].$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$\alpha\le -1: x\in(-1,1);$

$-1<\alpha<0: x\in(-1,1];$

$\alpha>0: x\in[-1,1].$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1).$$

重要结论 求函数$f(x)$在$x=x_0$处的泰勒展开式：

(1) 直接展开法

(a)计算$f(x)$的各阶导数$f^{(n)}(x)$.

(b)代入x_0得到$f^{(n)}(x_0)$,得到$f(x)$的泰勒级数

(c)由余项$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0, \forall x\in(x_0-r, x_0+r)$来确定收敛域.

(2) 间接展开法

借助已有的展开式,通过适当变换、四则运算、逐项求导、逐项求积等方法,得到所求函数的幂级数展开式.

重要结论

函数与其幂级数展开式成立的范围的关系：

得到函数的幂级数展开式 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，

一定要给出等式成立的范围.

这个范围可能不同于左边函数 $f(x)$ 的定义域，

也可能与右边幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的收敛域不同.

P48习题14.1/1(3) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$的收敛半径与收敛域.

解 记$a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. 由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4},$$

所以幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$的收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}=4.$

当$x=4$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$：由于
$$\frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}4^{n+1}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}4^n}=\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{2(n+1)}{(2n+1)}>1,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}4^n\neq 0$, 不满足级数收敛的必要条件, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$发散.

当$x=-4$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n$：根据上面分析知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n\neq 0$,

不满足级数收敛的必要条件, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n$发散.

因此幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$的收敛域是$(-4,4)$.

P48习题14.1/2(2)

应用逐项求导或逐项求积方法求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$的和函数.

解 记 $a_n = n(n+1)$. 由于 $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1,$

所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$的收敛半径$R = \frac{1}{\rho} = 1.$

当$x=\pm1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(\pm1)^n$：由于 $\lim_{n\to\infty} n(n+1)(\pm1)^n = \infty \neq 0,$ 不满足级数收敛的必要条件,

故级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(\pm1)^n$发散. 因此幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$的收敛域是$(-1,1)$.

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n, x\in(-1,1)$. 对$\forall x\in(-1,1)$,利用幂级数的逐项求积定理,有

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)t^n\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x^2 h(x), h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

对$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$利用逐项求积定理,有 $\int_0^x h(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^x t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$

从而 $h(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},\quad S(x) = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}, x\in(-1,1).$

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n, x\in(-1,1)$. 对$\forall x\in(-1,1)$,利用幂级数的逐项求导定理,有

$$S(x) = x\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)'' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)'' = x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = x\left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}, x\in(-1,1).$$

注：若幂级数的系数分子中有n,可以有以下两种思路求解和函数：

第一种思路：先通过逐项求积的方法把分子中的n想办法消掉，

得到等比级数,进而得到等比级数的和函数,

再通过求导求得所给幂级数的和函数.

第二种思路：通过对等比级数逐项求导的方法产生分子的n,

从而得到所给幂级数的和函数.

注：若幂级数的系数分母中有n,可以有以下两种思路求解和函数：

第一种思路：先通过逐项求导的方法把分母中的n想办法消掉,

得到等比级数,进而得到等比级数的和函数,

再通过求积求得所给幂级数的和函数.

第二种思路：通过对等比级数逐项求积的方法产生分母的n,

从而得到所给幂级数的和函数.

注:求幂级数的和函数需要先求收敛域.

注:逐项求积需要有积分上下限,而不是不定积分.

注:和函数与起始项有关,所以求和号要写完整.

注:正确利用逐项求导与逐项求积的条件与结论.

P48习题14.1/7 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径是$R(0<R<+\infty)$.

证明：对给定的$M>\dfrac{1}{R}$,存在$K>0$,使得$|a_n|\le KM^n, n=1,2,\cdots$.

证 由于$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径是$R$, 根据阿贝尔定理知,当$|x|<R$时,$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛.

对于给定的$M>\dfrac{1}{R}$,即$0<\dfrac{1}{M}<R$, 从而级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\dfrac{1}{M}\right)^n$绝对收敛.

根据级数收敛的必要条件知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{M^n}=0$.

根据收敛数列的有界性知, 数列$\left\{\dfrac{a_n}{M^n}\right\}$有界,即

$\exists K>0$,对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $\left|\dfrac{a_n}{M^n}\right|\le K$.

从而 $|a_n|\le KM^n, n=1,2,\cdots$.

注：不能从收敛半径是R,推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{R}$.

P48习题14.1/10(1) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径及其和函数.

解 记 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. 由于 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$,

所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径$R=\frac{1}{\rho}=1$.

当$x=\pm1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}$: 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}\right|}{\frac{1}{n^2}}=1$,已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,

根据正项级数的比较判别法的极限形式知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}\right|$收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}$收敛.

因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛域是$[-1,1]$.

P48习题14.1/10(1) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径及其和函数.

设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}, x\in[-1,1]$. $S(x)=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}, x\neq 0$. 记$g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}, x\in[-1,1]$.

对$\forall x\in(-1,1)$,利用幂级数的逐项求导定理,有

$$g'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad g''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

所以 $g'(x)=\int_0^x g''(t)\mathrm{d}t+g'(0)=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-t)\Big|_0^x=-\ln(1-x),\ \ x\in(-1,1)$.

$$g(x)=\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t+g(0)=-\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}t=\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}(1-t)=(1-t)\ln(1-t)\Big|_0^x-\int_0^x(1-t)\mathrm{d}\ln(1-t)$$

$$=(1-x)\ln(1-x)+\int_0^x 1\mathrm{d}t=(1-x)\ln(1-x)+x, x\in(-1,1).$$

因此当$x\in(-1,0)\cup(0,1)$时, $S(x)=\dfrac{1}{x}g(x)=\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1$. 根据幂级数的连续性定理知,

$S(x)$在$[-1,1]$上连续,于是 $S(0)=\lim\limits_{x\to0}S(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1\right)=0$.

$S(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}S(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1\right)=-2\ln2+1$. $S(1)=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1\right)=1$.

因此
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & x\in[-1,0)\cup(0,1).\\ 1, & x=1\end{cases}$$

P48习题14.1/10(1) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径及其和函数.

求和函数的另一种解法：

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}, x\in[-1,1]$. 对$\forall x\in(-1,0)\cup(0,1)$,利用幂级数的逐项求积定理,有

$$S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{t^n}{n}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\left(\int_0^t s^{n-1}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t s^{n-1}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\left(s^{n-1}\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\int_0^t\frac{1}{1-s}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\left(-\ln(1-t)\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\ln(1-t)\right)\mathrm{d}(1-t)$$

$$=\frac{1}{x}\left((1-t)\ln(1-t)\Big|_0^x-\int_0^x(1-t)\mathrm{d}\ln(1-t)\right)=\frac{1}{x}\left((1-x)\ln(1-x)+x\right),$$

根据幂级数的连续性定理知，$S(x)$在$[-1,1]$上连续,于是

$$S(0)=\lim_{x\to0}S(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left((1-x)\ln(1-x)+x\right)=0.$$

$$S(-1)=\lim_{x\to-1^+}S(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x}\left((1-x)\ln(1-x)+x\right)=-2\ln2+1.$$

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x}\left((1-x)\ln(1-x)+x\right)=1.$$

因此
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & x\in[-1,0)\cup(0,1).\\ 1, & x=1\end{cases}$$