Ch13 函数列与函数项级数

总结及习题评讲(2)

主讲教师: 顾燕红

办公室: 汇星楼409

办公室答疑时间: 每周四下午2点至4点

微信号: 18926511820 QQ号: 58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2024年6月13日

BY GYH

P39习题13.2/1(3) 讨论函数列$f_n(x)=nxe^{-nx^2}, n=1,2,\cdots$及其导函数列$\{f_n'(x)\}$在$[0,1]$上的一致收敛性. 验证$\{f_n\}$是否有函数列的连续性、可积性、可微性的条件与结论.

解 $\forall x\in[0,1], \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}=0.$ 故函数列$\{nxe^{-nx^2}\}$在$[0,1]$上的极限函数$f(x)=0.$

由于 $|f_n(x)-f(x)|=\left|nxe^{-nx^2}-0\right|=nxe^{-nx^2},$

记$g(x)=nxe^{-nx^2}$,则$g'(x)=ne^{-nx^2}-2n^2x^2e^{-nx^2}=ne^{-nx^2}(1-2nx^2)$. 令$g'(x)=0$,得$x=\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

$g(0)=0, g(1)=ne^{-n}, g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\dfrac{\sqrt{2n}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, 经比较,$g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\dfrac{\sqrt{2n}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$是$g(x)$在$[0,1]$上的最大值.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n}}{2}e^{-\frac{1}{2}}=+\infty\neq 0,$

根据函数列一致收敛的余项准则的否定陈述知,函数列$\{nxe^{-nx^2}\}$在$[0,1]$上不一致收敛于极限函数$f(x)=0.$

由于 $f_n'(x)=ne^{-nx^2}(1-2nx^2)$, $\forall x\in(0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} ne^{-nx^2}(1-2nx^2)=0,$

当$x=0$时, $f_n'(0)=n$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0)=\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$, 因此函数列$\{f_n'(x)\}$在$x=0$处发散,

根据函数列一致收敛的定义知,函数列$\{f_n'(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛.

P39习题13.2/1(3) 讨论函数列$f_n(x)=nxe^{-nx^2}$, $n=1,2,\cdots$及其导函数列$\left\{f_n'(x)\right\}$在[0,1]上的一致收敛性. 验证$\{f_n\}$是否有函数列的连续性、可积性、可微性的条件与结论.

函数列$\{f_n(x)\}$在[0,1]上不满足连续性、可积性、可微性的条件.

由于$f(x)=0$在[0,1]上连续, 故函数列$\{f_n(x)\}$在[0,1]上满足连续性的结论.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-n}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$,

$\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=0$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\neq\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x$, 即一致收敛函数列的可积性定理的结论不满足.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(0)$发散,所以一致收敛函数列的可微性定理的结论不成立.

若函数列$\{f_n(x)\}$在I上有发散点,则函数列$\{f_n(x)\}$在I上不一致收敛.

P39习题13.2/1(3) 讨论函数列$f_n(x)=nxe^{-nx^2}, n=1,2,\cdots$及其导函数列$\{f_n'(x)\}$在$[0,1]$上的一致收敛性. 验证$\{f_n\}$是否有函数列的连续性、可积性、可微性的条件与结论.

解 另证函数列$\{nxe^{-nx^2}\}$在$[0,1]$上不一致收敛于极限函数$f(x)=0$:

$\forall x\in[0,1], \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}=0.$ 故函数列$\{nxe^{-nx^2}\}$在$[0,1]$上的极限函数$f(x)=0.$

由于 $|f_n(x)-f(x)|=\left|nxe^{-nx^2}-0\right|=nxe^{-nx^2}$,

取$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\in[0,1]$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}e^{-1}=+\infty\neq 0.$

根据函数列一致收敛的余项准则的否定陈述知,

函数列$\{nxe^{-nx^2}\}$在$[0,1]$上不一致收敛于极限函数$f(x)=0.$

P39习题13.2/5 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}, x\in(-\infty,+\infty)$,计算$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t$.

解 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$\left|\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{n\sqrt{n}}, n=1,2,\cdots.$$

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛，根据函数项级数一致收敛的优级数判别法知,

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

又对$\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$在$(-\infty,+\infty)$上连续,

根据逐项求积定理知，$S(t)$在$[0,x]$或$[x,0]$上可积,且

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\cos nt}{n\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{\sin nt}{n}\right)\Bigg|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\sqrt{n}}.$$

P39习题13.2/6 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}, x>0$,计算$\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(t)\mathrm{d}t.$

解 记 $u_n(x)=n\mathrm{e}^{-nx}, x>0$. 由于 $u_n'(x)=-n^2\mathrm{e}^{-nx}<0$,

故$u_n(x)=n\mathrm{e}^{-nx}$在$[\ln 2,\ln 3]$上单调递减, 所以对$\forall x\in[\ln 2,\ln 3]$,有

$$|u_n(x)|=\left|n\mathrm{e}^{-nx}\right|\le n\mathrm{e}^{-n\ln 2}=\frac{n}{2^n}.$$

对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$: 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1,$

根据比式判别法的极限形式知, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛.

根据优级数判别法知,函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$在$[\ln 2,\ln 3]$上一致收敛.

又对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,$n\mathrm{e}^{-nx}$在$[\ln 2,\ln 3]$上连续, 根据逐项求积定理知, $S(x)$在$[\ln 2,\ln 3]$上可积,且

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(t)\mathrm{d}t=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 2}^{\ln 3} n\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\mathrm{e}^{-nt}\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{3^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1-\frac{1}{3^k}}{1-\frac{1}{3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\right)=\frac{1}{2}.$$

BY GYH

P39习题13.2/7

证明：函数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且有连续的导函数.

证 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}, n=1,2,\cdots.$

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，根据优级数判别法知，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

又对$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，根据连续性定理知，函数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$\left|\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'\right|=\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}, n=1,2,\cdots.$

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，根据优级数判别法知，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

又对$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，根据逐项求导定理知，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

根据连续性定理知，函数$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

从而函数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的导函数.

P39习题13.2/10 设f在$(-\infty,+\infty)$上有任意阶导数,记$F_n = f^{(n)}$,且在任何有限区间内

$$F_n \rightrightarrows \varphi,(n\to\infty),$$

试证$\varphi(x)=ce^x$(c为常数).

证 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $F_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = F_n'(x)$, $n=1,2,\cdots$.

(1) 由于$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有任意阶导数,

所以$F_n(x)=f^{(n)}(x)$在任何有限区间$(a,b)\subset(-\infty,+\infty)$上有连续导数.

(2) 函数列$\{F_n(x)\}$在(a,b)上一致收敛于$\varphi(x)$.

(3) 函数列$\{F_n'(x)\}=\{F_{n+1}(x)\}$在$(a,b)$上一致收敛于$\varphi(x)$.

根据函数列一致收敛的可微性定理知,

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}F_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty}F_n'(x)=\left(\lim_{n\to\infty}F_n(x)\right)'=\varphi'(x).$$

由于 $\left(e^{-x}\varphi(x)\right)'=e^{-x}\left(\varphi'(x)-\varphi(x)\right)=0,$

根据拉格朗日中值定理推论知, $e^{-x}\varphi(x)=c$, 即 $\varphi(x)=ce^x$,c为常数.

P40第十三章总练习题/1(1)

试问k为何值时,函数列$f_n(x)=xn^k e^{-nx}, n=1,2,\cdots$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

解 当$x=0$时, $f_n(0)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=0$. 当$x>0$时, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} xn^k e^{-nx}=0$.

故函数列$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上的极限函数 $f(x)=0$.

由于 $|f_n(x)-f(x)|=|xn^k e^{-nx}-0|=xn^k e^{-nx}, x\in[0,+\infty)$,

设$g(x)=xn^k e^{-nx}$,则 $g'(x)=n^k e^{-nx}-nxn^k e^{-nx}=n^k e^{-nx}(1-nx)$,令$g'(x)=0$,得 $x=\dfrac{1}{n}$.

当$0<x<\dfrac{1}{n}$时,$g'(x)>0$;当$x>\dfrac{1}{n}$时,$g'(x)<0$, 故$x=\dfrac{1}{n}$是$g(x)$在$[0,+\infty)$上唯一的极大值点,

亦是最大值点. 因此

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}n^k e^{-n\cdot\frac{1}{n}}=n^{k-1}e^{-1}.$$

当且仅当$k<1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty} n^{k-1}e^{-1}=0$,

根据函数列一致收敛的余项准则知, 当$k<1$时, 函数列$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

P40第十三章总练习题/2

证明:(1)若$f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty),x\in I$,且$f$在$I$上有界,则$\{f_n\}$至多除有限项外在$I$上是一致有界的.

(2)若$f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty),x\in I$,且对每个正整数$n$, f_n在I上有界,则$\{f_n\}$在I一致有界.

证 (1)由于f在I上有界,则$\exists M>0,\forall x\in I$,有$|f(x)|\le M$.

由于$f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty),x\in I$, 根据函数列一致收敛的定义知,

取$\varepsilon=1,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N,\forall x\in I$,有$|f_n(x)-f(x)|<1$. 从而当$n>N$时,$\forall x\in I$,有

$$|f_n(x)|=|f_n(x)-f(x)+f(x)|\le|f_n(x)-f(x)|+|f(x)|<1+M,$$

即除了前面有限项外$\{f_n(x)\}$在I上是一致有界的.

(2)由于对$\forall n\in\mathbb{N}_+$, f_n在I上有界,则$\exists M_n>0,\forall x\in I$,有$|f_n(x)|\le M_n$.

由于$f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty),x\in I$,根据函数列一致收敛的柯西准则知,

取$\varepsilon=1,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N,\forall x\in I$,有$|f_n(x)-f_{N+1}(x)|<1$,即$|f_n(x)|\le|f_{N+1}(x)|+1=M_{N+1}+1$.

令$M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_N,M_{N+1}+1\}$,则对$\forall n>N,\forall x\in I$,有$|f_n(x)|\le M$,

即$\{f_n(x)\}$在I上是一致有界的.

P40第十三章总练习题/4 设函数列$\{f_n(x)\}$的每一项在$[a,b]$上可积，且$\{f_n(x)\}$在在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

证 由于$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，根据函数列一致收敛的定义知，

对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，$\forall n>N$，$\forall x\in[a,b]$，有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$.

取$n_0>N$，由于$f_{n_0}(x)$在$[a,b]$上可积，根据可积准则知，对上述$\varepsilon>0$，

存在$[a,b]$的分割T，使得 $\sum\limits_T\omega_i^{f_{n_0}}\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 对$\forall x',x''\in\Delta x_i$，

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|f(x')-f_{n_0}(x')+f_{n_0}(x')-f_{n_0}(x'')+f_{n_0}(x'')-f(x'')\right|$$

$$\le\left|f(x')-f_{n_0}(x')\right|+\left|f_{n_0}(x'')-f(x'')\right|+\left|f_{n_0}(x')-f_{n_0}(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}+\omega_i^{f_{n_0}}=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}+\omega_i^{f_{n_0}}.$$

从而 $\omega_i^f=\sup\limits_{x',x''\in\Delta x_i}\left|f(x')-f(x'')\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}+\omega_i^{f_{n_0}}$.

$$\sum_T\omega_i^f\Delta x_i\le\sum_T\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}+\omega_i^{f_{n_0}}\right)\Delta x_i=\sum_T\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_i+\sum_T\omega_i^{f_{n_0}}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

根据可积准则知，$f(x)$在$[a,b]$上可积.

P40第十三章总练习题/5 设级数$\sum a_n$收敛.证明: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sum \dfrac{a_n}{n^x}=\sum a_n$.

证 对$\forall x\in[0,+\infty)$, $\sum a_n$收敛，故$\sum a_n$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

$\forall x\in[0,+\infty)$,有$\dfrac{1}{n^x}\ge\dfrac{1}{(n+1)^x}$，故对$\forall x\in[0,+\infty)$,函数列$\left\{\dfrac{1}{n^x}\right\}$关于$n$单调递减.

$\forall x\in[0,+\infty)$,有$0<\dfrac{1}{n^x}\le 1, n=1,2,\cdots$，故函数列$\left\{\dfrac{1}{n^x}\right\}$在$[0,+\infty)$上一致有界.

根据函数项级数一致收敛的阿贝尔判别法知，$\sum\dfrac{a_n}{n^x}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

$\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\dfrac{1}{n^x}$在$[0,+\infty)$上连续，根据函数项级数的连续性定理知，

$\sum\dfrac{a_n}{n^x}$的和函数在$[0,+\infty)$上连续,且

$$\lim_{x\to 0^+}\sum\frac{a_n}{n^x}=\sum\lim_{x\to 0^+}\frac{a_n}{n^x}=\sum a_n.$$

P40第十三章总练习题/6 设可微函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上收敛，$\{f_n'\}$在$[a,b]$上一致有界。证明：$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛。

证 由于$\{f_n'\}$在$[a,b]$上一致有界，因此$\exists M>0,\forall n\in\mathbb{N}_+,\forall x\in[a,b]$，有 $|f_n'(x)|\le M$.

对$\forall\varepsilon>0$，将区间$[a,b]$进行k等分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$，使得 $\dfrac{b-a}{k}<\dfrac{\varepsilon}{4M}$.

由于$\{f_n\}$在$[a,b]$上收敛，故$\{f_n\}$在$x_i(i=1,2,\cdots,k)$处收敛。

根据函数列收敛的柯西准则知，对上述$\varepsilon>0$，对每个$x_i(i=0,1,2,\cdots,k)$，$\exists N_i\in\mathbb{N}_+,\forall n>N_i$，$\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $|f_{n+p}(x_i)-f_n(x_i)|<\dfrac{\varepsilon}{2},i=0,1,2,\cdots,k$. $\forall x\in[a,b)$，$\exists[x_{i-1},x_i)$，使得$x\in[x_{i-1},x_i)$.

$f_n(x)$在$[x,x_i]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故 $\exists\xi_i\in(x,x_i)$，使得

$$|f_n(x_i)-f_n(x)|=|f_n'(\xi_i)(x_i-x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\frac{\varepsilon}{4}.$$

取$N=\max\limits_{0\le i\le k}\{N_i\}$，$\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有

$$\begin{aligned}|f_{n+p}(x)-f_n(x)|&=|f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_i)+f_{n+p}(x_i)-f_n(x_i)+f_n(x_i)-f_n(x)|\\&\le|f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_i)|+|f_{n+p}(x_i)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_n(x)|\quad(\xi_i,\eta_i\in(x,x_i))\\&=|f_{n+p}'(\xi_i)||x-x_i|+|f_{n+p}(x_i)-f_n(x_i)|+|f_n'(\eta_i)||x-x_i|<M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2}+M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}_+,\forall x\in[a,b]$，有 $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

根据函数列一致收敛的柯西准则知，$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛。

P40第十三章总练习题/7 设连续函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$,而$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 证明:$\{g(f_n(x))\}$在$[a,b]$上一致收敛于$g(f(x))$.

证 先证明$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致有界. 由于$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 且$\forall n\in\mathbb{N}_+$, $f_n(x)$在$[a,b]$上连续,

根据函数列的连续性定理知, $f(x)$在$[a,b]$上连续. 根据闭区间上连续函数的有界性定理知,

$\exists M>0,\forall x\in[a,b]$,有$|f(x)|\le M$. 根据函数列一致收敛的定义知,

对$\varepsilon=1$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$, $\forall n>N$, $\forall x\in[a,b]$, 有$|f_n(x)-f(x)|<1$,从而$|f_n(x)|<|f(x)|+1\le M+1$.

由闭区间上连续函数的有界性知, $\forall n\in\mathbb{N}_+$, $f_n(x)$在$[a,b]$上有界,

故$\exists M_n>0,\forall x\in[a,b]$,有$|f_n(x)|\le M_n$. 取$G=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_N,M+1\}$,

从而 $\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\forall x\in[a,b]$, 有 $|f_n(x)|\le G$, 即$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致有界.

再证明$\{g(f_n(x))\}$在$[a,b]$上一致收敛于$g(f(x))$.

由于$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,故$g(x)$在$[-G,G]$上连续.根据一致连续性定理知,

$g(x)$在$[-G,G]$上一致连续. 根据一致连续性的定义知,

对$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0,\forall y',y''\in[-G,G]:|y'-y''|<\delta$,有 $|g(y')-g(y'')|<\varepsilon$.

由于$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$根据函数列一致收敛的定义知, 对上述$\delta>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$, $\forall n>N$,

$\forall x\in[a,b]$,有$|f_n(x)-f(x)|<\delta$. 于是 $|g(f_n(x))-g(f(x))|<\varepsilon$.

根据函数列一致收敛的定义知, $\{g(f_n(x))\}$在$[a,b]$上一致收敛于$g(f(x))$.