第二十一章　重积分

第四节　二重积分的变量变换

定理： 设函数 $f(x,y)$ 在有界封闭区域 D 上可积. 变换 T : $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 将 uv 平面上由按段光滑的封闭曲线所围成的区域 Δ, 一对一地映射成 xy 平面上的封闭区域 D, 函数 $x(u,v)$, $y(u,v)$ 在 Δ 内分别具有一阶连续偏导数, 且它们的行列式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv.$$

例题： 求积分

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$$

其中 D 是由 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的区域.

$$I=\frac{e-e^{-1}}{4}.$$

例题： 求由抛物线 $y^2 = mx$ 和 $y^2 = nx$, 直线 $y = \alpha x$ 和 $y = \beta x$ 所围成的区域的面积, 其中 $0 < m < n$, $0 < \alpha < \beta$.

定理21.14

极坐标变换： 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的连续函数. 在极坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 下, 将闭区域 D 与 $r\theta$ 平面上区域 Δ 对应, 则有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta.$$

例题： 计算积分

$$\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}\,dxdy,$$

其中 D 是圆域: $\{x^2+y^2\le R^2\}$. 进而证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例题： 求球体

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

被圆柱面

$$x^2 + y^2 = 2x,$$

所截得的(含在圆柱内的部分)立体体积.

例题： 计算积分

$$\iint_D xy\,\mathrm{dxdy} = \frac{9}{16},$$

其中 $D = \{(x,y)|1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x, y > 0\}$.

例题： 求椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的体积.

本节作业

作业：

第 224 页，第2题.

第 225 页，第5题.

性质(对称性质)： 设闭区域 D 关于 y 轴对称，$f(x,y)=-f(-x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = 0.$$

设闭区域 D 关于 x 轴对称，$f(x,y)=-f(x,-y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = 0.$$

例题： 求二重积分

$$\iint_D x^2 + \sin\left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right) d\sigma,$$

其中 D 是区域$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.