Ch5 导数和微分

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2022年12月05日

BY GYH

将学习：

微分的概念

微分的运算法则

高阶微分

微分在近似计算中的应用

问题的引入

设一边长为x的正方形，它的面积$S = x^2$是x的函数.

如果给边长x一个增量Δx，则正方形面积的增量

$$\Delta S = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

由两部分组成：Δx的线性部分$2x\Delta x$和Δx的高阶部分$(\Delta x)^2$.

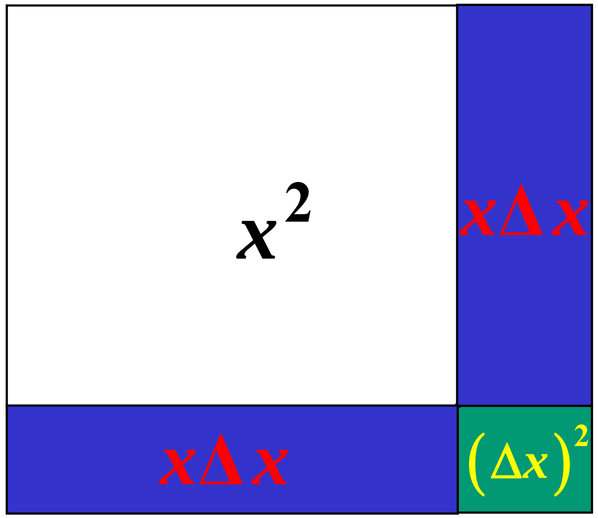
因此,当边长x增加一个微小量Δx时，

ΔS可用Δx的线性部分近似.

由此产生的误差是一个关于Δx的

高阶无穷小量$(\Delta x)^2$，

即以Δx为边长的小正方形.



微分定义

设函数$f(x), x \in U(x_0)$. 如果增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

可以表示成

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中A是与Δx无关的常数,则称函数f在点x_0可微,并称$A\Delta x$为f在点x_0处的微分,记作

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = A\Delta x, \text{或}\ \mathrm{d}f(x)\Big|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

可微与可导的关系

函数$y=f(x)$在点x_0可微的充要条件是$y=f(x)$在点x_0可导,且

$$\mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x.$$

证 (必要性) 如果f在点x_0可微,根据可微的定义,有 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$,

从而当$\Delta x \neq 0$时,有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1).$

于是

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \big(A + o(1)\big) = A,$$

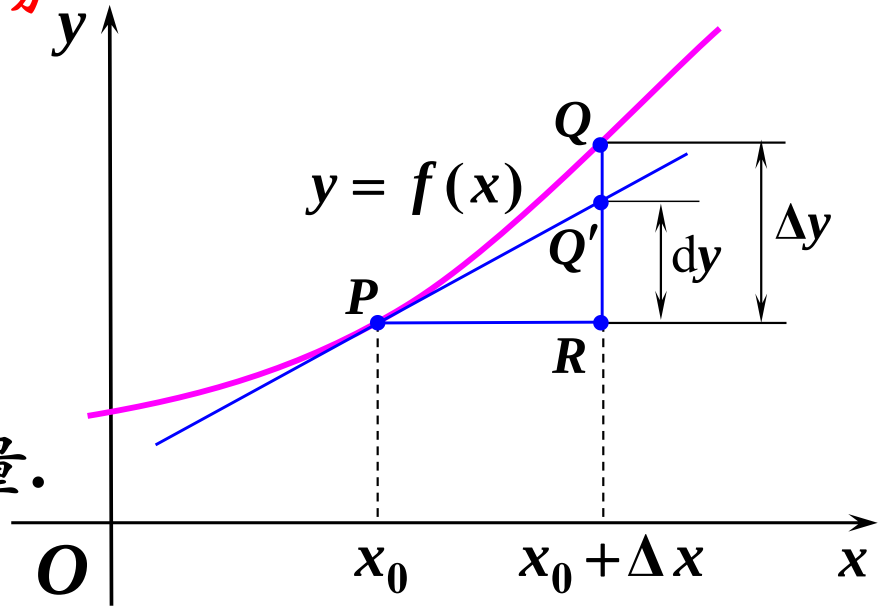
即f在点x_0可导,且$f'(x_0) = A$.

(充分性) 如果f在点x_0可导,根据有限增量公式,有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

说明函数增量Δy可以表示为Δx的线性部分$f'(x_0)\Delta x$与关于Δx的高阶无穷小量部分$o(\Delta x)$之和. 所以f在点x_0可微, 且

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x.$$



注： 微分概念的几何解释：

f 在点 x_0 的增量为 $\Delta y = RQ$，

而微分是 $\mathrm{d}y = RQ'$，

它是点 P 处切线相应于 Δx 的增量.

当 $|\Delta x|$ 很小时，两者之差 $|\Delta y - \mathrm{d}y| = Q'Q$ 相比于 $|\Delta x|$

将是更小的量(高阶无穷小).更由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}\right| = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Q'Q}{RQ'}\,|f'(x_0)| = 0,$$

故若 $f'(x_0)\neq 0$，则得到 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{Q'Q}{RQ'} = 0$.

这说明当 $\Delta x\to 0$ 时，QQ' 还是 RQ' 的高阶无穷小量.

可微函数

若函数$f(x)$在区间I上每一点都可微,则称$f(x)$是I上的可微函数.$f(x)$在I上的微分记为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x,\quad x \in I,$$

它既依赖于Δx,也与x有关.

注：习惯上把Δx写成$\mathrm{d}x$,于是

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x,\ x \in I.$$

这相当于$y = x$的情形,此时显然有$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = \Delta x$.

导数可以看成函数的微分与自变量的微分之商，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x),$$

所以导数也称为微商.

例1

$$\mathrm{d}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x\ ;$$

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x\ ;$$

$$\mathrm{d}(a^{x}) = a^{x}\ln a\,\mathrm{d}x.$$

微分的运算法则

1. $\mathrm{d}(u(x)\pm v(x))=\mathrm{d}u(x)\pm \mathrm{d}v(x)$;

2. $\mathrm{d}(u(x)v(x))=v(x)\mathrm{d}u(x)+u(x)\mathrm{d}v(x)$;

3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)=\dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x)-u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}$;

4. $\mathrm{d}(f\circ g(x))=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$, 其中 $u=g(x)$.

由于 $\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$,故有 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$.

一阶微分形式不变性

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u.$$

不管u是自变量还是中间变量(另一个变量的可微函数)上式都成立.

这个性质称为一阶微分形式不变性.

例2 求$y = x^2 \ln x + \cos x^2$的微分.

解 $$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2 \ln x + \cos x^2) = \mathrm{d}(x^2 \ln x) + \mathrm{d}(\cos x^2)$$

$$= \ln x \,\mathrm{d}(x^2) + x^2 \mathrm{d}(\ln x) - \sin x^2 \mathrm{d}(x^2)$$

$$= x(2\ln x + 1 - 2\sin x^2)\mathrm{d}x.$$

例3 求$y=\mathrm{e}^{x^3+2x+1}$的微分.

解

$$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x^3+2x+1}\mathrm{d}(x^3+2x+1)$$

$$=(3x^2+2)\mathrm{e}^{x^3+2x+1}\mathrm{d}x.$$

高阶微分

若将一阶微分$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$仅看成$x$的函数,

则当f二阶可导时,$\mathrm{d}y$关于x的微分为

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(f'(x)\Delta x)=f''(x)\Delta x\cdot\Delta x+f'(x)\mathrm{d}(\Delta x)$$

$$=f''(x)(\Delta x)^2=f''(x)(\mathrm{d}x)^2.$$

或写作$\mathrm{d}^2y=f''(x)\mathrm{d}x^2$,称为$f$的二阶微分.

可由$n-1$阶微分求n阶微分:

$$\mathrm{d}^n y=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y)=\mathrm{d}(f^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x^{n-1})=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n.$$

对$n\geq 2$的n阶微分均称为高阶微分.

注：由于$\mathrm{d}x$与x无关,因此x的二阶微分$\mathrm{d}(\mathrm{d}x)=\mathrm{d}^2x=0$,

它与$\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}x)^2$,$\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x$三者各不相同,不可混淆.

注：高阶微分不具有形式不变性.当x是自变量时,

$y=f(x)$的二阶微分

$$\mathrm{d}^2y=f''(x)\mathrm{d}x^2;$$

当x是中间变量时($y=f(x),x=\varphi(t)$)时,二阶微分

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}\left(f'(x)\mathrm{d}x\right)=f''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}(\mathrm{d}x)$$

$$=f''(x)\mathrm{d}x^2+f'(x)\mathrm{d}^2x.$$

当$x=\varphi(t)$时,$\mathrm{d}^2x=\varphi''(t)\mathrm{d}t^2$不一定为0,而当$x$时自变量时,$\mathrm{d}^2x=0$.

例4 设 $y = f(x) = \sin x$， $x = \varphi(t) = t^2$，求 $\mathrm{d}^2 y$.

解1 先将 $x = \varphi(t)$ 代入 $y = f(x)$, 得 $y = \sin t^2$,

于是 $y' = 2t\cos t^2, y'' = 2\cos t^2 - 4t^2 \sin t^2$.

$$\mathrm{d}^2 y = (2\cos t^2 - 4t^2 \sin t^2)\,\mathrm{d}t^2.$$

例4 设 $y = f(x) = \sin x$，$x = \varphi(t) = t^2$，求 $\mathrm{d}^2 y$.

解2

$$\mathrm{d}^2 y = f''(x)\mathrm{d}x^2 + f'(x)\mathrm{d}^2 x$$

$$= -\sin x\,\mathrm{d}x^2 + \cos x\,\mathrm{d}^2 x$$

$$= -\sin t^2 \cdot (2t\,\mathrm{d}t)^2 + \cos t^2 \cdot 2\mathrm{d}t^2$$

$$= (2\cos t^2 - 4t^2 \sin t^2)\mathrm{d}t^2.$$

微分在近似计算中的应用

1.函数值的近似计算

由于$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$,故当$\Delta x$很小时,有$\Delta y \approx \mathrm{d}y$.

由此得 $$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

记$x = x_0 + \Delta x$,即当$x \approx x_0$时,有 $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

当x与x_0充分接近时,可用点$P(x_0, f(x_0))$处的切线近似代替曲线,

这种线性近似的方法可以简化一些复杂的计算问题.

$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$($|x|$充分小时)$\Rightarrow$

$$\sin x \approx x, \tan x \approx x, \ln(1+x) \approx x, \mathrm{e}^x \approx 1 + x,$$
$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x, \sqrt[n]{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{n}.$$

例5 试求$\sin 33^\circ$的近似值(保留三位有效数字).

解 $\sin 33^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{60}\right)$, 取 $f(x)=\sin x, x_0=\frac{\pi}{6}$, $\Delta x=\frac{\pi}{60}$,

根据$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$,有

$$\sin 33^\circ \approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{\pi}{60}\approx 0.545.$$

例6 试求$\tan 31^\circ$的近似值(保留四位有效数字).

解 $\tan 31^\circ = \tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$, 取 $f(x)=\tan x, x_0=\frac{\pi}{6}$, $\Delta x=\frac{\pi}{180}$,

根据$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$,有

$$\tan 31^\circ \approx \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{\pi}{180}\approx 0.5774+0.0233=0.6007.$$

例7 试求$\sqrt[3]{131}$与$\sqrt[5]{34}$的近似值.

解 $\sqrt[3]{131}=\sqrt[3]{125+6}$, 取 $f(x)=\sqrt[3]{x}, x_0=125,\ \Delta x=6,$

从而 $\sqrt[3]{131}=f(125+6)\approx f(125)+f'(125)\Delta x=5+\dfrac{2}{25}=5.08.$

$\sqrt[5]{34}=\sqrt[5]{32+2}$, 取 $f(x)=\sqrt[5]{x}, x_0=32,\ \Delta x=2,$

从而 $\sqrt[5]{34}=f(32+2)\approx f(32)+f'(32)\Delta x=2+\dfrac{1}{40}=2.025.$

微分在近似计算中的应用

2.误差的估计

设数x是由测量得到的,y是由函数$y = f(x)$经过计算得到.由于测量工具精度等原因,存在测量误差,实际测得的值只是x的某个近似值x_0.由x_0计算得到的$y_0 = f(x_0)$也是$y = f(x)$的一个近似值.

如果已知测量值x_0的误差限为δ_x,即 $|\Delta x| = |x - x_0| \le \delta_x$,则当$\delta_x$很小时,量$y_0$的绝对误差估计式为:

$$|\Delta y| = |f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)\Delta x| \le |f'(x_0)|\delta_x .$$

称 $\delta_y = |f'(x_0)|\delta_x$为$y_0$的绝对误差限,而$y_0$的相对误差限则为

$$\frac{\delta_y}{|y_0|} = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta_x .$$

例8 设测得一球体直径为42cm,测量工具的精度为0.05cm.试求以此直径计算球体体积时引起的绝对误差限和相对误差限.

解 以$d_0=42,\delta_d=0.05$计算的球体体积和误差估计分别为:

$$V_0=\frac{1}{6}\pi d_0^3\approx 38792.39\ \mathrm{cm}^3,$$

$$\delta_V=\left|\frac{1}{2}\pi d_0^2\right|\delta_d=\frac{\pi}{2}\times 42^2\times 0.05\approx 138.54\,\mathrm{cm}^3;$$

$$\frac{\delta_V}{|V_0|}=\frac{\frac{1}{2}\pi d_0^2}{\frac{1}{6}\pi d_0^3}\times\delta_d=\frac{3\delta_d}{d_0}\approx 0.00357.$$

你应该：

理解微分的定义

会求微分