Ch5 导数和微分

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

将学习：

导数的四则运算

反函数的导数

复合函数的导数

基本求导法则与公式

导数的四则运算法则—加减

若函数$u(x)$和$v(x)$在点x可导，
则函数$f(x)=u(x)\pm v(x)$在点x也可导，且

$$f'(x)=u'(x)\pm v'(x).$$

导数的四则运算法则—乘法

若函数$u(x)$和$v(x)$在点x可导,

则函数$f(x)=u(x)v(x)$在点x也可导，且

$$f'(x)=(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

若函数$u(x)$在点x可导,c是常数,则

$$(cu(x))'=cu'(x).$$

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

乘法的求导法则 $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$

证

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x} \right.$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(v(x+\Delta x)\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u(x)\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

导数的四则运算法则—除法

若函数$u(x)$和$v(x)$在点x可导,$v(x)\neq 0$,

则函数$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$在点x也可导,且

$$f'(x)=\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

除法的求导法则 $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

证 设 $g(x)=\dfrac{1}{v(x)}$, 则 $f(x)=u(x)g(x)$. 对 $g(x)$, 有

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\frac{\dfrac{1}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{1}{v(x)}}{\Delta x}=-\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}.$$

由于$v(x)$在点x可导,$v(x)\neq 0$,因此 $g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$,

亦即 $\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)'=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$.

所以 $f'(x)=u'(x)\dfrac{1}{v(x)}+u(x)\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{v(x)}-u(x)\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

即 $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

例1 求 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的导数.

解 $f'(x)=(a_0x^n)' \quad +(a_1x^{n-1})'+\cdots+(a_{n-1}x)'+(a_n)'$

$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

例2 求 $y = \sin x \ln x$ 在 $x = \pi$ 处的导数.

解

$$y' = (\sin x)' \ln x + \sin x (\ln x)'$$

$$= \cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x.$$

$$y'\big|_{x=\pi} = -\ln \pi.$$

例3 求下列函数的导数:

(i) x^{-n}, n 是正整数; (ii) $\tan x$, $\cot x$; (iii) $\sec x$, $\csc x$.

解 (i) $$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

(ii) $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

同理可得 $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$

(iii) $$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\tan x.$$

同理可得 $(\csc x)' = -\csc x\cot x.$

反函数求导法则

设$y=f(x)$为$x=\varphi(y)$的反函数,若$x=\varphi(y)$在点y的某邻域上连续,严格单调且$\varphi'(y)\neq 0$,

则$f(x)$在点$x\left(x=\varphi(y)\right)$可导,且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

反函数求导法则 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}.$

证 因为$x=\varphi(y)$在点y的某邻域上连续且严格单调,

故其反函数$y=f(x)$在点x的某邻域上连续且严格单调.

设反函数$y=f(x)$在点x的自变量的增量为Δx.

从而有 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, $\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$.

从而当且仅当$\Delta y=0$时$\Delta x=0$,并且当且仅当$\Delta y\to 0$时$\Delta x\to 0$.

由$\varphi'(y)\neq 0$,可得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

例4 求下列函数的导数：

(i) $\arcsin x$ 和 $\arccos x$；(ii) $\arctan x$ 和 $\text{arccot}\, x$.

解 (i) $y=\arcsin x,\ x\in(-1,1)$ 是 $x=\sin y$ 在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上的反函数，

$x=\sin y$ 在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上连续且严格单调递增，且 $(\sin y)'=\cos y\neq 0, y\in(-\pi/2,\pi/2)$，

根据反函数的求导法则，有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},x\in(-1,1).$$

同理可得 $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$.

(ii) $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上的反函数，

$x=\tan y$ 在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上连续且严格单调递增，且 $(\tan y)'=\sec^2 y\neq 0, y\in(-\pi/2,\pi/2)$，

根据反函数的求导法则，有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

同理可得 $(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$.

例4 若$f(x)=x+x^3$,且g是f的反函数,求$g'(0),g'(2)$.

解 $f'(x)=1+3x^2$.

由于$f(0)=0$, 故$g(0)=f^{-1}(0)=0$,

从而 $g'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}=1.$

由于$f(1)=2$, 故$g(2)=f^{-1}(2)=1$,

从而 $g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}.$

复合函数求导法则

设$u=\varphi(x)$在x_0可导，$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数$f\circ\varphi$在点x_0可导，且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0)=f'\big(\varphi(x_0)\big)\varphi'(x_0)$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

引理

$f(x)$在点x_0可导的充要条件是：在x_0的某邻域$U(x_0)$上存在一个在x_0连续的函数$H(x)$，使得

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0),$$

且$f'(x_0)=H(x_0)$.

证 必要性. 设$f(x)$在点x_0可导,且令

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\in U^\circ(x_0)\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}.$$

因 $\lim\limits_{x\to x_0} H(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=H(x_0)$,

故 $H(x)$ 在 x_0 连续, 且 $f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0),\ x\in U(x_0)$.

充分性. 设存在 $H(x)\ (x\in U(x_0))$ 在点 x_0 连续, 且

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0),\ x\in U(x_0).$$

由于 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}H(x)=H(x_0)$,

得$f(x)$在点x_0可导,且 $f'(x_0)=H(x_0)$.

复合函数导数证明方法一:

由$f(u)$在点u_0可导, 知存在一个在点u_0连续的函数$F(u)$,

使 $f'(u_0)=F(u_0)$, 且 $f(u)-f(u_0)=F(u)(u-u_0),\ u\in U(u_0)$.

同理, $u=\varphi(x)$在点x_0可导, 则存在一个在点x_0连续的函数$\Phi(x)$,

使 $\varphi'(x_0)=\Phi(x_0)$, 且 $u-u_0=\varphi(x)-\varphi(x_0)=\Phi(x)(x-x_0),\ x\in U(x_0)$.

于是当$x\in U(x_0)$时, 有 $f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))=F(\varphi(x))\Phi(x)(x-x_0)$.

由于φ, Φ 在点x_0连续, F 在点$u_0=\varphi(x_0)$连续,

所以 $H(x)=F(\varphi(x))\Phi(x)$ 在点x_0连续.

根据引理的充分性知, $f\circ\varphi$ 在点x_0可导, 且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=H(x_0)=F(\varphi(x_0))\Phi(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

复合函数导数证明方法二:

由$y=f(u)$在点u_0可导, 即$f'(u_0)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$, 从而对$\Delta u\neq 0$,有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha,\text{其中}\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0$$

即 $\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u \qquad (1).$

当$\Delta u=0$时,$\Delta y=0$.因此,规定当$\Delta u=0$时,$\alpha=0$.

(1)式两边除以Δx,则有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u_0)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

由于$u=\varphi(x)$在点x_0可导,即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=\varphi'(x_0)$,且有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$.

于是 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

注： 复合函数求导公式又称为“**链式法则**”.

若将公式 $(f\circ\varphi)'(x)=f'(u)\varphi'(x)=f'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

其中 $y=f(u),u=\varphi(x)$,这样就容易理解“链”的意义了.

在链式法则中一定要区分$f'\big(\varphi(x)\big)=f'(u)\big|_{u=\varphi(x)}$

与$\Big(f\big(\varphi(x)\big)\Big)'=f'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$ 的不同含义.

例5 求函数 $y=\sin x^2$ 的导数 y'.

解 $y=\sin x^2$是由$y=\sin u$ 与 $u=x^2$复合而成,

于是由链式法则,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\sin u)'(x^2)'$$

$$=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2.$$

例6 求幂函数 $y = x^{\alpha}$(α是实数, $x > 0$) 的导数.

解 $y = x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ 由 $y = \mathrm{e}^{u}$ 与 $u = \alpha \ln x$复合而成,

于是由链式法则,有

$$(x^{\alpha})' = (\mathrm{e}^{\alpha \ln x})' = (\mathrm{e}^{u})' \cdot (\alpha \ln x)' = \mathrm{e}^{u} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

例7 求函数 $y = e^{\cos x}$ 的导数.

解 $y = e^{\cos x}$ 由 $y = e^{u}$ 与 $u = \cos x$ 复合而成,

于是由链式法则,有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^{u} \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x.$$

例8 求函数 $y = \mathrm{e}^{\sqrt{1+\cos x}}$ 的导数.

解 $y = \mathrm{e}^{\sqrt{1+\cos x}}$ 由 $y = \mathrm{e}^{u}, u = \sqrt{v}, v = 1 + \cos x$ 复合而成,

于是由链式法则,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$= \mathrm{e}^{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot (-\sin x) = -\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+\cos x}} \sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}.$$

例9 求下列函数的导数：

$$\text{(i)}\ \sqrt{1+x^2}\,; \qquad \text{(ii)}\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,; \qquad \text{(iii)}\ \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

解

$$\text{(i)}\ \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{(ii)}\ \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}(1+x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$\text{(iii)}\ \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

例10 求函数 $y=\tan^2\frac{1}{x}$ 的导数.

解

$$y' = 2\tan\frac{1}{x}\cdot\left(\tan\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 2\tan\frac{1}{x}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= -\frac{2}{x^2}\tan\frac{1}{x}\cdot\sec^2\frac{1}{x}.$$

例11 求函数$f(x)=\dfrac{2}{3}\arctan\left(\dfrac{1}{3}\tan\dfrac{x}{2}\right)$的导数.

解 $$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{9}\tan^2\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{9}\tan^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{3}\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{9\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+8\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+8\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$=\frac{1}{5+4\cos x}.$$

幂指函数

设 $u(x)>0$, $u(x)$ 与$v(x)$均可导,求$y=u(x)^{v(x)}$的导数.

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)'=\left(\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}\right)'=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}\left(v(x)\ln u(x)\right)'$$

$$=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\,\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

例12 设 $y=(\sin x)^{\cos x}$, 求 y'.

解 由于 $y=\mathrm{e}^{\cos x\ln\sin x}$,

从而

$$y'=\left(\mathrm{e}^{\cos x\ln\sin x}\right)'=\mathrm{e}^{\cos x\ln\sin x}\left(\cos x\ln\sin x\right)'$$

$$=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

对数求导法

设 $u(x)>0$, $u(x)$ 与 $v(x)$ 均可导, 求 $y=u(x)^{v(x)}$ 的导数.

在 $y=u(x)^{v(x)}$ 两边取对数,

$$\ln y = v(x)\ln u(x),$$

再对上式两边求导,得

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\,\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

于是得到

$$y' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\,\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

例12 设 $y=(\sin x)^{\cos x}$，求 y'.

解 先对函数两边取对数,得

$$\ln y=\cos x\ln\sin x.$$

再对上式两边求导,得

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\ln\sin x+\cos x\frac{\cos x}{\sin x}.$$

于是得到

$$y'=(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right).$$

例13 设 $y=\dfrac{(x^2+1)^3(x-2)^{1/4}}{(5x-9)^{2/5}}(x>2)$, 求 y'.

解 先对函数两边取对数,得

$$\ln y=3\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{2}{5}\ln(5x-9).$$

再对上式两边求导,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{6x}{x^2+1}+\frac{1}{4(x-2)}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{5x-9}.$$

于是得到

$$y'=\frac{(x^2+1)^3(x-2)^{1/4}}{(5x-9)^{2/5}}\left[\frac{6x}{x^2+1}+\frac{1}{4(x-2)}-\frac{2}{5x-9}\right].$$

例14 设 $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}(x>4)$, 求 y'.

解 先对函数两边取对数,得

$$\ln y=2\ln(x+5)+\frac{1}{3}\ln(x-4)-5\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+4).$$

再对上式两边求导,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}.$$

于是得到

$$y'=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right).$$

例15 设 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x-1}}$, 求 y'.

解 先对函数两边取对数,得

$$\ln y=\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{3}\ln(x-1).$$

再对上式两边求导,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{3x}-\frac{1}{3(x-1)}.$$

于是得到

$$y'=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-1}}\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{3\,(x-1)}\right).$$

例16 设 $y=(x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2(2-x)}$, 求 y'.

解 先对函数两边取对数,得

$$\ln y=\ln(x-1)+\frac{2}{3}\ln(3x+1)+\frac{1}{3}\ln(2-x).$$

再对上式两边求导,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3x+1}-\frac{1}{3(2-x)}.$$

于是得到

$$y'=(x-1)\sqrt[3]{(3x+1)^2(2-x)}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3x+1}-\frac{1}{3(2-x)}\right).$$

例17 设 $y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$，求 y'.

解

$$y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)-\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}.$$

$$y'=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)'$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{(x^2+1)+\sqrt{2}x}-\frac{2x-\sqrt{2}}{(x^2+1)-\sqrt{2}x}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)^2}\frac{\sqrt{2}(1-x^2)+2\sqrt{2}x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{-2\sqrt{2}(x^2-1)}{(x^2+1)^2-2x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{2}\frac{1-x^2}{1+x^4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}.$$

例18 设 $y=\arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$，求 y'.

解

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\frac{(-2x)(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x}{|x|(1+x^2)}=\begin{cases}-\dfrac{2}{1+x^2}, & x>0\\ \dfrac{2}{1+x^2}, & x<0\end{cases}.$$

基本求导法则与公式

求导法则:

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

(2) $(uv)' = u'v + uv', (cu)' = cu'$($c$ 为常数);

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$;

(4) 反函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$;

(5) 复合函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

基本求导法则与公式

基本初等函数的导数公式：

(1) $(c)'=0$ (c为常数)；　(2) $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$ (α为常数)；

(3) $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$；

(4) $(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

$(\sec x)'=\sec x\tan x$, $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(5) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$, $(e^x)'=e^x$；(6) $\left(\log_a|x|\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$；

(7) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

例19 求 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 1,\\ x^2+1, & x>1,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 当 $x>1$ 时，$f'(x)=\left(x^2+1\right)'=2x$,

当 $x<1$ 时，$f'(x)=\left(2x\right)'=2$.

当 $x=1$ 时，$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x^2+1)-2}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1}=2,$$

从而 $f'(1)=2$, 故

$$f'(x)=\begin{cases}2, & x\le 1\\ 2x, & x>1\end{cases}.$$

例20 确定a,b的值,使得$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 1, \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$在$x=1$处可导.

解 由于可导必连续,从而 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$,

即 $\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=\lim\limits_{x\to1^-} e^x=e$, $a+b=e$.

由于$f(x)$在$x=1$处可导,从而 $f'_+(1)=f'_-(1)$,

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(ax+b)-e}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(ax+e-a)-e}{x-1}=a,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}=e,$$

于是 $a=e, b=0$.

例21 设函数$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

(1) $f(x)$在$x=0$处是否可导? (2) $f'(x)$在$x=0$处是否连续?

解 由于 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

故$f(x)$在$x=0$处可导.

当$x\neq 0$时, $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x},$

$$故f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在,

故$f'(x)$在$x=0$处不连续.

你应该：

理解导数的概念

掌握导数的几何意义

会求导