第十七章　多元函数微分学

第四节　泰勒公式与极值问题

第十七章　多元函数微分学

第四节　泰勒公式与极值问题

1. 高阶偏导数的概念及计算
2. 泰勒公式
3. 极值问题

引例：

例： 设
$$f(x,y)=e^{x+2y}.$$
求 $f(x,y)$ 的二阶偏导数.

高阶偏导数

定义1： 设二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 存在,则它们仍然是关于自变量 x 和 y 的函数，如果它们关于 x 和 y 的偏导数也存在，则说函数 f 具有二阶偏导数，具体有如下四种形式：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y),$$

其中第二、第三个二阶偏导数被称为**混合偏导数**.

求高阶偏导数

例2： 设

$$z(x,y)=\arctan\frac{y}{x}.$$

求函数 $z(x,y)$ 的二阶混合偏导数.

求高阶偏导数

例： 设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的二阶混合偏导数, 即 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.

高阶偏导数

定理： 若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x_0,y_0) 连续，则

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

高阶偏导数的概念和计算

(1) 三元函数 $u=f(x,y,z)$ 具有九种形式的二阶偏导数:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y,z), &&\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y,z), &&\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=f_{xz}(x,y,z),\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y,z), &&\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y,z), &&\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=f_{yz}(x,y,z),\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f_{zz}(x,y,z), &&\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=f_{zx}(x,y,z), &&\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=f_{zy}(x,y,z).
\end{aligned}$$

(2)可以定义更高阶的偏导数, 例如

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=f_{xxy},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f_{xzy}.$$

(3)同样, 如果混合偏导数连续, 则高阶偏导数与求导次序无关.

复合函数的高阶偏导数计算

例： 设函数

$$z(x,y)=f(x,\frac{x}{y}),$$

其中 f 具有连续的二阶偏导数. 求 $z(x,y)$ 的二阶偏导数 z_{xx} 和 z_{xy}.

复合函数的高阶偏导数计算

例题： 已知

$$\omega = f(x+y+z, xyz),$$

并且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}$.

本节作业

作业：

第 132 页：第1题(1)、(2)、(5).

第 133 页：第2题,第3题.