

# 第十九章 含参量积分

## 第一节 含参量正常积分

# 第十九章 含参量积分

## 第一节 含参量正常积分

1. 含参量积分的定义
2. 含参量积分的性质与应用

# 含参量积分

**定义1:** 设二元函数  $f(x, y)$  定义在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上, 关于积分的一元函数

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b],$$

称为定义在  $[a, b]$  上**含参量  $x$  的(正常)积分**, 或简称**含参量积分**. 更一般地, 函数  $f(x, y)$  定义在区域  $G = \{(x, y) | c(x) \leq y \leq d(x), a \leq x \leq b\}$  上, 一元函数

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy, \quad x \in [a, b],$$

也称为**含参量积分**.

## 连续性

**定理：** 设二元函数  $f(x, y)$  在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上**连续**, 则一元函数

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b],$$

在  $[a, b]$  上连续. 从而

$$\lim_{x \rightarrow x_0} I(x) = \int_c^d f(x_0, y) dy.$$

## 连续性

**定理：** 设二元函数  $f(x, y)$  在区域

$$G = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

上连续, 其中  $c(x), d(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则一元函数

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy, \quad x \in [a, b],$$

在  $[a, b]$  上连续.

## 可微性

**定理：** 设二元函数  $f(x, y)$  和它的偏导数  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$  都在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上**连续**, 则一元函数

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b],$$

在  $[a, b]$  上可微, 且

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy.$$

## 可微性

**定理：** 设二元函数  $f(x, y)$  和它的偏导数  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$  都在矩形区域  $R = [a, b] \times [p, q]$  上**连续**,  $c(x), d(x)$  为定义在  $[a, b]$  上其值域含于  $[p, q]$  内的可微函数, 则一元函数

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy, \quad x \in [a, b],$$

在  $[a, b]$  上可微, 且

$$\frac{d}{dx} \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy = \int_{c(x)}^{d(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy + f(x, d(x))d'(x) - f(x, c(x))c'(x).$$

## 可积性

例题： 设

$$F(x) = \int_{\sin(x)}^{x+1} (x-y)f(x+y)dy$$

其中  $f$  为可微函数, 求  $F'(x)$ .



## 可积性

**定理：** 设二元函数  $f(x, y)$  在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上**连续**, 则函数

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

分别在  $[a, b]$  和  $[c, d]$  上可积, 且

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

最后这两个积分称为**累次积分**或者**二次积分**, 为方便也写为

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

例题： 求

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{dx}{1+x^2+a^2}.$$

**例题：** 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某个邻域内连续, 验证当  $|x|$  充分小时, 函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

的各阶导数存在, 且  $\varphi^{(n)}(x) = f(x)$ .

# 含参量积分

例题： 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx,$$

其中  $b > a > 0$ .

例题： 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

# 本节作业

作业：

第 168 页：第2题.

第 169 页：第3题、第6题.