数学建模算法与应用

第14章　综合评价与决策方法

评价方法大体上可分为两类，其主要区别在确定权重的方法上。一类是主观赋权法，多数采取综合咨询评分确定权重，如综合指数法、模糊综合评判法、层次分析法、功效系数法等。另一类是客观赋权，根据各指标间相关关系或各指标值变异程度来确定权数，如主成分分析法、因子分析法、理想解法（也称 TOPSIS 法）等。

目前国内外综合评价方法有数十种之多,其中主要使用的评价方法有主成分分析法、因子分析、TOPSIS、秩和比法、灰色关联法、熵权法、层次分析法、模糊评价法、物元分析法、聚类分析法、价值工程法、神经网络法等。

14.1 理想解法

目前已有许多解决多属性决策的排序法，如理想点法、简单线性加权法、加权平方和法、主成分分析法、功效系数法、可能满意度法、交叉增援矩阵法等。本节介绍多属性决策问题的理想解法，理想解法亦称为TOPSIS 法，是一种有效的多指标评价方法。这种方法通过构造评价问题的正理想解和负理想解，即各指标的最优解和最劣解，通过计算每个方案到理想方案的相对贴近度，即靠近正理想解和远离负理想解的程度，来对方案进行排序，从而选出最优方案。

14.1.1 方法和原理

设多属性决策方案集为$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}$，衡量方案优劣的属性变量为$x_1,\cdots,x_n$，这时方案集D中的每个方案d_i（$i=1,\cdots,m$）的n个属性值构成的向量是$[a_{i1},\cdots,a_{in}]$，它作为n维空间中的一个点，能唯一地表征方案d_i。

正理想解C^*是一个方案集D中并不存在的虚拟的最佳方案，它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最好值；而负理想解C^0则是虚拟的最差方案，它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最差值。在n维空间中，将方案集D中的各备选方案d_i与正理想解C^*和负理想解C^0的距离进行比较，既靠近正理想解又远离负理想解的方案就是方案集D中的最佳方案；并可以据此排定方案集D中各备选方案的优先序。

用理想解法求解多属性决策问题的概念简单，只要在属性空间定义适当的距离测度就能计算备选方案与理想解的距离。TOPSIS 法所用的是欧氏距离。至于既用正理想解又用负理想解是因为在仅仅使用正理想解时有时会出现某两个备选方案与正理想解的距离相同的情况，为了区分这两个方案的优劣，引入负理想解并计算这两个方案与负理想解的距离，与正理想解的距离相同的方案离负理想解远者为优。

14.1.2 TOPSIS法的算法步骤

TOPSIS 法的具体算法如下

（1）用向量规划化的方法求得规范决策矩阵

设多属性决策问题的决策矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，规范化决策矩阵 $B=(b_{ij})_{m\times n}$，其中

$$b_{ij}=a_{ij}\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_{ij}^2}\ ,\quad i=1,2,\cdots,m\ ,\quad j=1,2,\cdots,n\ .$$

（14.1）

（2）构造加权规范阵$C=(c_{ij})_{m\times n}$

设由决策人给定各属性的权重向量为$w=[w_1,w_2,\cdots,w_n]^T$，则

$$c_{ij}=w_j\cdot b_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n. \quad (14.2)$$

（3）确定正理想解C^*和负理想解C^0

设正理想解C^*的第j个属性值为c_j^*，负理想解C^0第j个属性值为c_j^0，则

正理想解

$$c_j^* = \begin{cases} \max\limits_i c_{ij}, & j\text{为效益型属性}, \\ \min\limits_i c_{ij}, & j\text{为成本型属性}, \end{cases} \quad j = 1,2,\cdots,n. \qquad (14.3)$$

负理想解

$$c_j^0 = \begin{cases} \min\limits_i c_{ij}, & j\text{为效益型属性}, \\ \max\limits_i c_{ij}, & j\text{为成本型属性}, \end{cases} \quad j = 1,2,\cdots,n. \qquad (14.4)$$

（4）计算各方案到正理想解与负理想解的距离

备选方案d_i到正理想解的距离为

$$s_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - c_j^*)^2},\ i = 1,2,\cdots,m. \qquad (14.5)$$

备选方案d_i到负理想解的距离为

$$s_i^0 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - c_j^0)^2},\ i = 1,2,\cdots,m. \qquad (14.6)$$

（5）计算各方案的排序指标值（即综合评价指数）

$$f_i^* = s_i^0 / (s_i^0 + s_i^*)，\ i = 1,2,\cdots,m. \tag{14.7}$$

（6）按 f_i^* 由大到小排列方案的优劣次序。

14.1.3 示例

例 14.1　研究生院试评估。

为了客观地评价我国研究生教育的实际状况和各研究生院的教学质量，国务院学位委员会办公室组织过一次研究生院的评估。为了取得经验，先选 5 所研究生院，收集有关数据资料进行了试评估，表 14.1 是所给出的部分数据。

表 14.1　研究生院试评估的部分数据

j / i	人均专著x_1（本/人）	生师比x_2	科研经费x_3（万元/年）	逾期毕业率x_4（%）
1	0.1	5	5000	4.7
2	0.2	6	6000	5.6
3	0.4	7	7000	6.7
4	0.9	10	10000	2.3
5	1.2	2	400	1.8

解　第一步，数据预处理

数据的预处理又称属性值的规范化。

属性值具有多种类型，包括效益型、成本型和区间型等。这三种属性，效益型属性越大越好，成本型属性越小越好，区间型属性是在某个区间最佳。

在进行决策时，一般要进行属性值的规范化，主要有如下三个作用：（1）属性值有多种类型，上述三种属性放在同一个表中不便于直接从数值大小判断方案的优劣，因此需要对数据进行预处理，使得表中任一属性下性能越优的方案变换后的属性值越大。

（2）非量纲化，多属性决策与评估的困难之一是属性间的不可公度性，即在属性值表中的每一列数具有不同的单位（量纲）。即使对同一属性，采用不同的计量单位，表中的数值也就不同。在用各种多属性决策方法进行分析评价时，需要排除量纲的选用对决策或评估结果的影响，这就是非量纲化。

（3）归一化，属性值表中不同指标的属性值的数值大小差别很大，为了直观，更为了便于采用各种多属性决策与评估方法进行评价，需要把属性值表中的数值归一化，即把表中数值均变换到[0，1]区间上。

此外，还可在属性规范时用非线形变换或其它办法，来解决或部分解决某些目标的达到程度与属性值之间的非线性关系，以及目标间的不完全补偿性。

常用的属性规范化方法有以下几种。

（1）线性变换

原始的决策矩阵为$A=(a_{ij})_{m\times n}$，变换后的决策矩阵记为$B=(b_{ij})_{m\times n}$，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$。设$a_j^{\max}$是决策矩阵第j列中的最大值，$a_j^{\min}$是决策矩阵第j列中的最小值。若x_j为效益型属性，则

$$b_{ij}=a_{ij}/a_j^{\max}. \tag{14.8}$$

采用上式进行属性规范化时，经过变换的最差属性值不一定为 0，最佳属性值为 1。

若 x_j 为成本型属性，则

$$b_{ij} = 1 - a_{ij} / a_j^{\max} \qquad (14.9)$$

采用上式进行属性规范时，经过变换的最佳属性值不一定为 1，最差属性值为 0。

（2）标准 0－1 变换

为了使每个属性变换后的最优值为 1 且最差值为 0，可以进行标准 0－1 变换。对效益型属性 x_j，令

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^{\min}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}, \tag{14.10}$$

对成本型属性 x_j，令

$$b_{ij} = \frac{a_j^{\max} - a_{ij}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}. \tag{14.11}$$

由上式可知，当燃料耗尽，结构质量抛弃完时，便只剩卫星质量m_p，从而最终速度的数学模型为

$$v(t) = (1-\alpha)u\ln\frac{m_0}{m_p}. \tag{6.12}$$

（6.12）式表明，当m_0足够大时，便可使卫星达到我们所希望它具有的任意速度。例如，考虑到空气阻力和重力等因素，估计要使$v = 10.5\ \text{km/s}$ 才行，如果取$u = 3\text{km/s}$，$\alpha = 0.1$，则可推出$m_0 / m_p = 50$，即发射 1 吨重的卫星大约需 50 吨重的理想火箭。

（3）区间型属性的变换

有些属性既非效益型又非成本型，如生师比。显然这种属性不能采用前面介绍的两种方法处理。

设给定的最优属性区间为$[a_j^0, a_j^*]$，a_j'为无法容忍下限，a_j''为无法容忍上限，则

$$b_{ij}=\begin{cases}1-(a_j^0-a_{ij})/(a_j^0-a_j'), & 若 a_j' \le a_{ij} < a_j^0, \\ 1, & 若 a_j^0 \le a_{ij} \le a_j^*, \\ 1-(a_{ij}-a_j^*)/(a_j''-a_j^*), & 若 a_j^* < a_{ij} \le a_j'', \\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（14.12）

变换后的属性值b_{ij}与原属性值a_{ij}之间的函数图形为一般梯形。当属性值最优区间的上下限相等时，最优区间退化为一个点时，函数图形退化为三角形。

设研究生院的生师比最佳区间为[5,6]，$a_2^{'}=2$，$a_2^{''}=12$。表 14.1 的属性 2 的数据处理见表 14.2(程序略)。

表 14.2　表 14.1 的属性 2 的数据处理

$i \backslash j$	生师比 x_2	处理后的生师比
1	5	1
2	6	1
3	7	0.8333
4	10	0.3333
5	2	0

（4）向量规范化

无论成本型属性还是效益型属性，向量规范化均用下式进行变换

$$b_{ij} = a_{ij} \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2}\,,\ i = 1,\cdots,m\,,\ j = 1,\cdots,n. \qquad (14.13)$$

它与前面介绍的几种变换不同，从变换后属性值的大小上无法分辨属性值的优劣。它的最大特点是，规范化后，各方案的同一属性值的平方和为 1，因此常用于计算各方案与某种虚拟方案（如理想点或负理想点）的欧氏距离的场合。

（5）标准化处理

在实际问题中，不同变量的测量单位往往是不一样的。为了消除变量的量纲效应，使每个变量都具有同等的表现力，数据分析中常对数据进行标准化处理，即

$$b_{ij}=\frac{a_{ij}-\overline{a}_j}{s_j},\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n, \qquad (14.14)$$

其 中 $\overline{a}_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$ ， $s_j=\sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}-\overline{x}_j)^2}$ ，$j=1,2,\cdots,n$。

表 14.1 中的数据经标准化处理后的结果见表 14.3（程序略）。

表 14.3　表 14.1 数据经标准化的属性值表

j \ i	人均专著 x_1	生师比 x_2	科研经费 x_3	逾期毕业率 x_4
1	-0.9741	-0.3430	-0.1946	0.2274
2	-0.7623	0	0.0916	0.6537
3	-0.3388	0.3430	0.3777	1.1747
4	0.7200	1.3720	1.2362	-0.9095
5	1.3553	-1.3720	-1.5109	-1.1463

我们首先对表 14.1 中属性 2 的数据进行最优值为给定区间的变换。然后对属性值进行向量规范化，计算结果见表 14.4（程序略）。

表 14.4　表 14.1 的数据经规范化后的属性值

i \ j	人均专著 x_1	生师比 x_2	科研经费 x_3	逾期毕业率 x_4
1	0.0638	0.597	0.3449	0.4546
2	0.1275	0.597	0.4139	0.5417
3	0.2550	0.4975	0.4829	0.6481
4	0.5738	0.199	0.6898	0.2225
5	0.7651	0	0.0276	0.1741

第二步，设权向量为$w=[0.2,0.3,0.4,0.1]$，得加权的向量规范化属性矩阵见表 14.5。

表 14.5　表 14.1 的数据经规范化后的加权属性值

i \ j	人均专著 x_1	生师比 x_2	科研经费 x_3	逾期毕业率 x_4
1	0.0128	0.1791	0.1380	0.0455
2	0.0255	0.1791	0.1656	0.0542
3	0.0510	0.1493	0.1931	0.0648
4	0.1148	0.0597	0.2759	0.0222
5	0.1530	0	0.0110	0.0174

第三步，由表 14.5 和式（14.3）和式（14.4），得正理想解$C^* = [0.1530, 0.1791, 0.2759, 0.0174]$；负理想解$C^0 = [0.0128, 0, 0.0110, 0.0648]$。

第四步，分别用式（14.5）和式（14.6）求各方案到正理想解的距离s_i^*和负理想解的距离s_i^0，列于表14.6。

表 14.6　距离值及综合指标值

	s_i^*	s_i^0	f_i^*
1	0.1987	0.2204	0.5258
2	0.1726	0.2371	0.5787
3	0.1428	0.2385	0.6255
4	0.1255	0.2932	0.7003
5	0.3198	0.1481	0.3165

第五步，计算排序指标值 f_i^*（见表 14.6），由 f_i^*值的大小可确定各方案的从优到劣的次序为 4，3，2，1，5(程序略)。

14.2 模糊综合评判法

随着知识经济时代的到来，人才资源已成为企业最重要的战略要素之一，对其进行考核评价是现代企业人力资源管理的一项重要内容。

人事考核需要从多个方面对员工做出客观全面的评价，因而实际上属于多目标决策问题。对于那些决策系统运行机制清楚，决策信息完全，决策目标明确且易于量化的多目标决策问题，已经有很多方法能够较好地解决。但是，在人事考核中存在大量具有模糊性的概念，这种模糊性或不确定性不是由于事件发生的条件难以控制而导致的，而是由于事件本身的概念不明确所引起的。这就使得很多考核指标都难以直接量化。在评判实施过程中，评判者又容易受经验、人际关系等主观因素的影响，因此对人才的综合素质评判往往带有一定的模糊性与经验性。

这里说明如何在人事考核中运用模糊综合评判，从而为企业员工职务升迁、评先晋级、聘用等提供重要依据，促进人事管理的规范化和科学化，提高人事管理的工作效率。

14.2.1 一级模糊综合评判在人事考核中的应用

在对企业员工进行考核时，由于考核的目的、考核对象、考核范围等的不同，考核的具体内容也会有所差别。有的考核，涉及的指标较少，有些考核，又包含了非常全面丰富的内容，需要涉及很多指标。鉴于这种情况，企业可以根据需要，在指标个数较少的考核中，运用一级模糊综合评判，而在问题较为复杂，指标较多时，运用多层次模糊综合评判，以提高精度。

一级模糊综合评判模型的建立，主要包括以下步骤。

（1） 确定因素集

对员工的表现，需要从多个方面进行综合评判，如员工的工作业绩、工作态度、沟通能力、政治表现等。所有这些因素构成了评价指标体系集合，即因素集，记为

$$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}.$$

(2)确定评语集

由于每个指标的凭价值的不同，往往会形成不同的等级。如对工作业绩的评价有好、较好、中等、较差、很差等。由各种不同决断构成的集合被称为评语集，记为

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}.$$

（3）确定各因素的权重

一般情况下，因素集中的各因素在综合评价中所起的作用是不相同的，综合评价结果不仅与各因素的评价有关，而且在很大程度上还依赖于各因素对综合评价所起的作用，这就需要确定一个各因素之间的权重分配，它是U上的一个模糊向量，记为

$$A=[a_1,a_2,\cdots,a_n],$$

其中a_i表示第i个因素的权重，且满足$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$。确定权重的方法很多，例如 Delphi 法、加权平均法、众人评估法等。

（1） 确定模糊综合判断矩阵

对指标u_i来说，对各个评语的隶属度为V上的模糊子集。对指标u_i的评判记为

$$R_i = [r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im}],$$

各指标的模糊综合判断矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix},$$

它是一个从U到V的模糊关系矩阵。

（2）综合评判

如果有一个从U到V的模糊关系$R=(r_{ij})_{n\times m}$，那么利用R就可以得到一个模糊变换

$$T_R : F(U) \to F(V),$$

由此变换，就可得到综合评判结果$B = A\cdot R$。

综合后的评判可看作是V上的模糊向量，记为$B=\left[b_1,b_2,\cdots,b_m\right]$。

例14.2　某单位对员工的年终综合评定。

解　（1）取因素集

$U=\{$政治表现u_1,工作能力u_2,工作态度u_3,工作成绩$u_4\}$。

（2）取评语集

$V=\{$优秀v_1,良好v_2,一般v_3,较差v_4,差$v_5\}$。

（3）确定各因素的权重$A=[0.25, 0.2, 0.25, 0.3]$。

（4）确定模糊综合评判矩阵，对每个因素u_i做出评价。

i）u_1比如由群众评议打分来确定

$$R_1 = [0.1, 0.5, 0.4, 0, 0].$$

上面式子表示，参与打分的群众中，有10%的人认为政治表现优秀，50%的人认为政治表现良好，40%的人认为政治表现一般，认为政治表现较差或差的人为0，用同样方法对其它因素进行评价。

ii）u_2, u_3 由部门领导打分来确定

$$R_2 = [0.2, 0.5, 0.2, 0.1, 0],\quad R_3 = [0.2, 0.5, 0.3, 0, 0].$$

iii）u_4 由单位考核组成员打分来确定

$$R_4 = [0.2, 0.6, 0.2, 0, 0].$$

以 R_i 为第 i 行构成评价矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

它是从因素集 U 到评语集 V 的一个模糊关系矩阵。

（5）模糊综合评判。进行矩阵合成运算

$$B = A \cdot R = [0.25, 0.2, 0.25, 0.3] \cdot \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0.175, 0.53, 0.275, 0.02, 0].$$

取数值最大的评语作综合评判结果，则评判结果为“良好”。

14.2.2 多层次模糊综合评判在人事考核中的应用

对于一些复杂的系统，例如人事考核中涉及的指标较多时，需要考虑的因素很多，这时如果仍用一级模糊综合评判，则会出现两个方面的问题，一是因素过多，它们的权数分配难以确定；另一方面，即使确定了权分配，由于需要满足归一化条件，每个因素的权值都小。对这种系统，我们可以采用多层次模糊综合评判方法。对于人事考核而言，采用二级系统就足以解决问题了，如果实际中要划分更多的层次，那么可以用建二级模糊综合评判的方法类推。

下面介绍一下二级模糊综合评判法模型建立的步骤。

第一步，将因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$按某种属性分成s个子因素集$U_1,U_2,\cdots,U_s$，其中$U_i=\{u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{in_i}\}$，$i=1,2,\cdots,s$，且满足

i）$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$，

ii）$U_1\bigcup U_2\bigcup\cdots\bigcup U_s=U$，

iii）对任意的$i\neq j$，$U_i\bigcap U_j=\Phi$.

第二步，对每一个因素集U_i，分别做出综合评判。设$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$为评语集，U_i中各因素相对于V的权重分配是

$$A_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in_i}].$$

若$\tilde{R}_i$为单因素评判矩阵，则得到一级评判向量

$$B_i=A_i\cdot\tilde{R}_i=\left[b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{im}\right],\ \ i=1,2,\cdots,s.$$

第三步，将每个U_i看作一个因素，记为

$$K=\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\cdots,\tilde{u}_s\}.$$

这样，K又是一个因素集，K的单因素评判矩阵为

$$R=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sm} \end{bmatrix}.$$

每个U_i作为U的部分，反映了U的某种属性，可以按它们的重要性给出权重分配$A=[a_1,a_2,\cdots,a_s]$，于是得到二级评判向量

$$B=A\cdot R=\left[b_1,b_2,\cdots,b_m\right].$$

如果每个子因素集U_i，$i=1,2,\cdots,s$，含有较多的因素，可将U_i再进行划分，于是有三级评判模型，甚至四级、五级模型等。

例14.3 某部门员工的年终评定。

关于考核的具体操作过程，以对一名员工的考核为例。如表14.7所示，根据该部门工作人员的工作性质，将18个指标分成工作绩效（U_1）、工作态度（U_2）、工作能力（U_3）和学习成长（U_4）这4个子因素集。

表14.7　员工考核指标体系及考核表

一级指标	二级指标	评价				
		优秀	良好	一般	较差	差
工作绩效	工作量	0.8	0.15	0.05	0	0
	工作效率	0.2	0.6	0.1	0.1	0
	工作质量	0.5	0.4	0.1	0	0
	计划性	0.1	0.3	0.5	0.05	0.05
工作态度	责任感	0.3	0.5	0.15	0.05	0
	团队精神	0.2	0.2	0.4	0.1	0.1
	学习态度	0.4	0.4	0.1	0.1	0
	工作主动性	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1
	满意度	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1
工作能力	创新能力	0.1	0.3	0.5	0.1	0
	自我管理能力	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1
	沟通能力	0.2	0.3	0.35	0.15	0
	协调能力	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1
	执行能力	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1
学习特长	勤情评价	0.3	0.4	0.2	0.1	0
	技能提高	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1
	培训参与	0.2	0.3	0.4	0.1	0
	工作提案	0.4	0.3	0.2	0.1	0

设专家设定指标权重，一级指标权重为

$$A = [0.4, 0.3, 0.2, 0.1].$$

二级指标权重为

$$A_1 = [0.2, 0.3, 0.3, 0.2],$$

$$A_2 = [0.3, 0.2, 0.1, 0.2, 0.2],$$

$$A_3 = [0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.2],$$

$$A_4 = [0.3, 0.2, 0.2, 0.3].$$

对各个子因素集进行一级模糊综合评判得到

$$B_1 = A_1 \cdot R_1 = \left[0.39, 0.39, 0.26, 0.04, 0.01\right],$$

$$B_2 = A_2 \cdot R_2 = \left[0.025, 0.33, 0.235, 0.125, 0.06\right],$$

$$B_3 = A_3 \cdot R_3 = \left[0.15, 0.32, 0.355, 0.115, 0.06\right],$$

$$B_4 = A_4 \cdot R_4 = \left[0.27, 0.35, 0.26, 0.1, 0.02\right].$$

这样，二级综合评判为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{R} = [0.4, 0.3, 0.2, 0.1]$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0.39 & 0.39 & 0.26 & 0.04 & 0.01 \\ 0.25 & 0.33 & 0.235 & 0.125 & 0.06 \\ 0.15 & 0.32 & 0.355 & 0.115 & 0.06 \\ 0.27 & 0.35 & 0.26 & 0.1 & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$= [0.288, 0.354, 0.2355, 0.0865, 0.036].$$（程序略）

根据最大隶属度原则，认为对该员工的评价为良好。同理可对该部门其他员工进行考核。

以上说明了如何用一级模糊综合评判和多层次模糊综合评判来解决企业中的人事考评问题，该方法在实践中取得了良好的效果。经典数学在人事考核的应用中显现出了很大的局限性，而模糊分析很好地将定性分析和定量分析结合起来，为人事考核工作的量化提供了一个新的思路。

14.3 数据包络分析

1978年A. Charnes, W. W. Cooper和E. Rhodes给出了评价多个决策单元（Decision Making Units，简称DMU）相对有效性的数据包络分析方法（data envelopment analysis, DEA）。

目前，数据包络分析是评价具有多指标输入和多指标输出系统的较为有效的方法。

14.3.1 相对有效评价问题

例14.4（多指标评价问题）某市教委需要对六所重点中学进行评价，其相应的指标如表14.8所示。表14.8中的生均投入和非低收入家庭百分比是输入指标，生均写作得分和生均科技得分是输出指标。请根据这些指标，评价哪些学校是相对有效的。

表14.8　评价指标数据表

学　　校	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
生均投入(百元/年)	89.39	86.25	108.13	106.38	62.40	47.19
非低收入家庭百分比(%)	64.3	99	99.6	96	96.2	79.9
生均写作得分(分)	25.2	28.2	29.4	26.4	27.2	25.2
生均科技得分(分)	223	287	317	291	295	222

为求解例14.4，先对表14.8作简单的分析。

学校C的两项输出指标都是最高的，达到29.4和317，应该说，学校C是最有效的。但从另一方面说，对它的投入也是最高的，达到108.13和99.6，因此，它的效率也可能是最低的。究竟如何评价这六所学校呢？这还需要仔细地分析。

这是一个多指标输入和多指标输出的问题，对于这类评价问题，A. Charnes, W. W. Cooper 和 E. Rhodes 建立了评价决策单元相对有效性的 C^2R 模型。

14.3.2 数据包络分析的C^2R模型

数据包络分析有多种模型，其中C^2R（由Charnes，Cooper和Rhodes三位作者的第一个英文字母命名）的建模思路清晰、模型形式简单、理论完善。设有n个DMU，每个DMU都有m种投入和s种产出，设x_{ij}（$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$）表示第j个DMU的第i种投入量，y_{rj}（$r=1,\cdots,s$，$j=1,\cdots,n$）表示第j个DMU的第r种产出量，v_i $(i=1,\cdots,m)$表示第i种投入的权值，u_r（$r=1,\cdots,s$）表示第r种产出的权值。

向量$X_j,Y_j(j=1,\cdots,n)$分别表示决策单元j的输入和输出向量，v和u分别表示输入、输出权值向量，则

$$X_j=(x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{mj})^T,\quad Y_j=(y_{1j},y_{2j},\cdots,y_{sj})^T,$$

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^T,\ v=(v_1,v_2,\cdots,v_s)^T。$$

定义决策单元j的效率评价指数为

$$h_j=(u^TY_j)/(v^TX_j),\ (j=1,2,\cdots,n).$$

评价决策单元j_0效率的数学模型为

$$\max \frac{u^T Y_{j_0}}{v^T X_{j_0}},$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dfrac{u^T Y_j}{v^T X_j} \le 1, \quad j = 1,2,\cdots,n, \\ u \ge 0, v \ge 0, u \ne 0, v \ne 0. \end{cases} \tag{14.15}$$

通过 Charnes-Cooper 变换：$\omega = tv$，$\mu = tu$，$t = \dfrac{1}{v^T X_{j_0}}$，可以将模型（14.15）变化为等价的线性规划问题

$$\max V_{j_0} = \mu^T Y_{j_0},$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \omega^T X_j - \mu^T Y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \\ \omega^T X_{j_0} = 1, \\ \omega \geq 0, \mu \geq 0. \end{cases}$$

（14.16）

可以证明，模型（14.15）与模型（14.16）是等价的。由于线性规划问题的对偶线性规划模型具有明确的经济意义。下面写出模型（14.16）的对偶形式

$$\min \theta,$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \le \theta X_{j_0}, \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \ge Y_{j_0}, \\ \lambda_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \qquad (14.17)$$

对于C^2R模型（14.16），有如下定义

定义 14.1　若线性规划问题（14.16）的最优目标值$V_{j_0}=1$，则称决策单元j_0是弱 DEA 有效的。

定义14.2 若线性规划问题（14.16）存在最优解 $\omega^* > 0$，$\mu^* > 0$，并且其最优目标值$V_{j_0} = 1$，则称决策单元j_0是DEA有效的。

从上述定义可以看出，所谓 DEA 有效，就是指那些决策单元，它们的投入产出比达到最大。因此，可以用 DEA 来对决策单元进行评价。

14.3.3 C²R模型的求解

从上面的模型可以看到，求解C²R模型，需要求解若干个线性规划，这一点可以用LINGO软件完成。

运用C2R模型（14.16）求解例14.4的LINGO程序经过6次计算，得到6个最优目标值

1，0.9096132，0.9635345，0.9143053，1，1.

并且对于学校A（决策单元 1）有$\omega_2 > 0, \mu_1 > 0$，对于学校E（决策单元 5）有$\omega_1 > 0$，$\mu_2 > 0$和对于学校F（决策单元 6）有$\omega_1 > 0, \mu_1 > 0$。因此，学校A, E, F是 DEA 有效的（程序略）。

14.3.4 数据包络分析案例

1 导言

数据包络分析（data envelopment analysis, DEA）是著名运筹学家A. Charnes 和 W. W. Copper 等学者以“相对效率”概念为基础，根据多指标投入和多指标产出对相同类型的单位（部门）进行相对有效性或效益评价的一种系统分析方法。它是处理多目标决策问题的好方法。它应用数学规划模型计算比较决策单元之间的相对效率，对评价对象做出评价。

DEA特别适用于具有多输入多输出的复杂系统，这主要体现在以下几点

（1）DEA以决策单位各输入输出的权重为变量，从最有利于决策单元的角度进行评价,从而避免了确定各指标在优先意义下的权重。

（2）假定每个输入都关联到一个或者多个输出，而且输出输入之间确实存在某种关系，使用DEA方法则不必确定这种关系的显示表达式。

DEA最突出的优点是无须任何权重假设，每一输入输出的权重不是根据评价者的主观认定，而是由决策单元的实际数据求得的最优权重。因此，DEA方法排除了很多主观因素，具有很强的客观性。

DEA是以相对效率概念为基础，以凸分析和线性规划为工具的一种评价方法。这种方法结构简单，使用比较方便。自从1978年提出第一个DEA模型—C^2R模型并用于评价部门间的相对有效性以来，DEA方法不断得到完善并在实际中被广泛应用，诸如被应用到技术进步、技术创新、资源配置、金融投资等各个领域，特别是在对非单纯盈利的公共服务部门，如学校、医院，某些文化设施等的评价方面被认为是一个有效的方法。

现在，有关的理论研究不断深入，应用领域日益广泛。应用DEA方法评价部门的相对有效性的优势地位，是其它方法所不能取代的。或者说，它对社会经济系统多投入和多产出相对有效性评价，是独具优势的。

我们把城市的可持续发展系统（某一时间或某一时段）视作DEA中的一个决策单元，它具有特定的输入输出，在将输入转化成输出的过程中，努力实现系统的可持续发展目标。

2 案例

利用DEA方法对天津市的可持续发展进行评价。在这里选取较具代表性的指标，作为输入变量和输出变量，见表14.9。

表14.9　各决策单元输入、输出指标值

序号	决策单元	政府财政收入占GDP的比重（%）	环保投资占GDP的比重（%）	每千人科技人员数（人）	人均GDP（元）	城市环境质量指数
1	1990	14.40	0.65	31.30	3621.00	0.00
2	1991	16.90	0.72	32.20	3943.00	0.09
3	1992	15.53	0.72	31.87	4086.67	0.07
4	1993	15.40	0.76	32.23	4904.67	0.13
5	1994	14.17	0.76	32.40	6311.67	0.37
6	1995	13.33	0.69	30.77	8173.33	0.59
7	1996	12.83	0.61	29.23	10236.00	0.51
8	1997	13.00	0.63	28.20	12094.33	0.44
9	1998	13.40	0.75	28.80	13603.33	0.58
10	1999	14.00	0.84	29.10	14841.00	1.00

输入变量：政府财政收入占GDP的比重、环保投资占GDP的比重、每千人科技人员数；输出变量：经济发展（用人均GDP表示）、环境发展（用城市环境质量指数表示；在计算过程中，城市环境指数的数值作了归一化处理）。 (Matlab程序略)

计算结果见表14.10，最优目标值用θ表示。显而易见，该市在20世纪90年代的发展是朝着可持续方向前进的。

表14.10　用DEA方法对天津市可持续发展的相对评价结果

年份	θ	结论
1990	0.2901843	非DEA有效
1991	0.2853571	非DEA有效，规模收益递减
1992	0.2968261	非DEA有效，规模收益递增
1993	0.3425151	非DEA有效，规模收益递增
1994	0.4594712	非DEA有效，规模收益递增
1995	0.7182609	非DEA有效，规模收益递增
1996	0.9069108	非DEA有效，规模收益递增
1997	1	DEA有效，规模收益递增
1998	1	DEA有效，规模收益不变
1999	1	DEA有效，规模收益不变

14.4 灰色关联分析法

灰色关联度分析具体步骤如下

（1）确定比较对象（评价对象）和参考数列（评价标准）

设评价对象有m个，评价指标有n个，参考数列为$x_0=\{x_0(k)\mid k=1,2,\cdots,n\}$，比较数列为$x_i=\{x_i(k)\mid k=1,2,\cdots,n\}$，$i=1,2,\cdots,m$。

（2）确定各指标值对应的权重

可用层次分析法等确定各指标对应的权重$w=[w_1,\cdots,w_n]$，其中w_k，$k=1,2,\cdots,n$为第k个评价指标对应的权重。

（3）计算灰色关联系数

$$\xi_i(k)=\frac{\min_s\min_t\left|x_0(t)-x_s(t)\right|+\rho\max_s\max_t\left|x_0(t)-x_s(t)\right|}{\left|x_0(k)-x_i(k)\right|+\rho\max_s\max_t\left|x_0(t)-x_s(t)\right|}$$

为比较数列 x_i 对参考数列 x_0 在第 k 个指标上的关联系数，其中 $\rho\in[0,1]$ 为分辨系数。称式中 $\min_s\min_t\left|x_0(t)-x_s(t)\right|$、$\max_s\max_t\left|x_0(t)-x_s(t)\right|$ 分别为两级最小差及两级最大差。

一般来讲，分辨系数 ρ 越大，分辨率越大；ρ 越小，分辨率越小。

（4）计算灰色加权关联度

灰色加权关联度的计算公式为

$$r_i = \sum_{k=1}^{n} w_i \xi_i(k),$$

这里r_i为第i个评价对象对理想对象的灰色加权关联度。

（5）评价分析

根据灰色加权关联度的大小，对各评价对象进行排序，可建立评价对象的关联序，关联度越大其评价结果越好。

例14.5　供应商选择决策

某核心企业需要在6个待选的零部件供应商中选择一个合作伙伴，各待选供应商有关数据见表14.11。

表14.11　某核心企业待选供应商的指标评价有关数据

评价指标	待选供应商					
	1	2	3	4	5	6
产品质量	0.83	0.90	0.99	0.92	0.87	0.95
产品价格（元）	326	295	340	287	310	303
地理位置（千米）	21	38	25	19	27	10
售后服务（小时）	3.2	2.4	2.2	2.0	0.9	1.7
技术水平	0.20	0.25	0.12	0.33	0.20	0.09
经济效益	0.15	0.20	0.14	0.09	0.15	0.17
供应能力（件）	250	180	300	200	150	175
市场影响度	0.23	0.15	0.27	0.30	0.18	0.26
交货情况	0.87	0.95	0.99	0.89	0.82	0.94

产品质量、技术水平、供应能力、经济效益、交货情况、市场影响度指标属于效益型指标；产品价格、地理位置、售后服务指标属于成本型指标。现分别对上述指标进行规范化处理，规范化数据结果见表14.12，取各指标值的最大值，得到虚拟最优供应商。

表14.12　比较数列和参考数列值

评价指标	供应商						最优供应商
	1	2	3	4	5	6	
指标1	0	0.4375	1	0.5625	0.25	0.75	1
指标2	0.2642	0.8491	0	1	0.566	0.6981	1
指标3	0.6071	0	0.4643	0.6786	0.3929	1	1
指标4	0	0.3478	0.4348	0.5217	1	0.6522	1
指标5	0.4583	0.6667	0.125	1	0.4583	0	1
指标6	0.5455	1	0.4545	0	0.5455	0.7273	1
指标7	0.6667	0.2	1	0.3333	0	0.1667	1
指标8	0.5333	0	0.8	1	0.2	0.7333	1
指标9	0.2941	0.7647	1	0.4118	0	0.7059	1

取$\rho = 0.5$，计算$\xi_i(k)$及r_i，具体数值见表14.13。

表14.13　关联系数和关联度值

评价指标	待选供应商					
	1	2	3	4	5	6
指标1	0.3333	0.4706	1	0.5333	0.4	0.6667
指标2	0.4046	0.7681	0.3333	1	0.5354	0.6235
指标3	0.56	0.3333	0.4828	0.6087	0.4516	1
指标4	0.3333	0.434	0.4694	0.5111	1	0.5897
指标5	0.48	0.6	0.3636	1	0.48	0.3333
指标6	0.5238	1	0.4783	0.3333	0.5238	0.6471
指标7	0.6	0.3846	1	0.4286	0.3333	0.375
指标8	0.5172	0.3333	0.7143	1	0.3846	0.6522
指标9	0.4146	0.68	1	0.4595	0.3333	0.6296
r_i	0.4630	0.5560	0.6491	0.6527	0.4936	0.6130

由表14.13，按灰色关联度排序可看出，$r_4 > r_3 > r_6 > r_2 > r_5 > r_1$，由于供应商4的关联度与虚拟最优供应商的关联度最大，亦即供应商4优于其它供应商，企业决策者可以优先考虑从供应商4处采购零部件以达到整体最优(程序略)。

将灰色关联分析用于供应商选择决策中可以针对大量不确定性因素及其相互关系，将定量和定性方法有机结合起来，使原本复杂的决策问题变得更加清晰简单，而且计算方便，并可在一定程度上排除决策者的主观任意性，得出的结论也比较客观，有一定的参考价值。

14.5 主成分分析法

例 14.6 表 14.14 是我国 1984—2000 年宏观投资的一些数据，试利用主成分分析对投资效益进行分析和排序。

表14.14　1984—2000年宏观投资效益主要指标

年份	投资效果系数（无时滞）	投资效果系数（时滞一年）	全社会固定资产交付使用率	建设项目投产率	基建房屋竣工率
1984	0.71	0.49	0.41	0.51	0.46
1985	0.40	0.49	0.44	0.57	0.50
1986	0.55	0.56	0.48	0.53	0.49
1987	0.62	0.93	0.38	0.53	0.47
1988	0.45	0.42	0.41	0.54	0.47
1989	0.36	0.37	0.46	0.54	0.48
1990	0.55	0.68	0.42	0.54	0.46
1991	0.62	0.90	0.38	0.56	0.46
1992	0.61	0.99	0.33	0.57	0.43
1993	0.71	0.93	0.35	0.66	0.44
1994	0.59	0.69	0.36	0.57	0.48
1995	0.41	0.47	0.40	0.54	0.48
1996	0.26	0.29	0.43	0.57	0.48
1997	0.14	0.16	0.43	0.55	0.47

解　用$x_1, x_2, \cdots, x_5$分别表示投资效果系数（无时滞），投资效果系数（时滞一年），全社会固定资产交付使用率，建设项目投产率，基建房屋竣工率。用$i=1,2,\cdots,17$分别表示 1984 年，1985 年，…，2000 年，第 i 年 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 的取值分别记作$[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{i5}]$，构造矩阵$A=(a_{ij})_{17\times 5}$。

基于主成分分析法的评价步骤如下

（1）对原始数据进行标准化处理

将各指标值a_{ij}转换成标准化指标$\tilde{a}_{ij}$，

$$\tilde{a}_{ij}=\frac{a_{ij}-\mu_j}{s_j},\quad (i=1,2,\cdots,17,\ j=1,2,\cdots,5),$$

其中$\mu_j=\frac{1}{17}\sum_{i=1}^{17}a_{ij}$，$s_j=\sqrt{\frac{1}{17-1}\sum_{i=1}^{17}(a_{ij}-\mu_j)^2}$，$(j=1,2,\cdots,5)$，即$\mu_j,s_j$为第$j$个指标的样本均值和样本标准差。对应地，称

$$\tilde{x}_j=\frac{x_j-\mu_j}{s_j},\quad (j=1,2,\cdots,5)$$

为标准化指标变量。

（2）计算相关系数矩阵R

相关系数矩阵$R=(r_{ij})_{5\times 5}$

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{17}\tilde{a}_{ki}\cdot\tilde{a}_{kj}}{17-1},\quad (i,j=1,2,\cdots,5),$$

式中$r_{ii}=1$，$r_{ij}=r_{ji}$，r_{ij}是第i个指标与第j个指标的相关系数。

（3）计算特征值和特征向量

计算相关系数矩阵R的特征值$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_5 \ge 0$，及对应的标准化特征向量$u_1, u_2$，$\cdots, u_5$，其中$u_j = [u_{1j}, u_{2j}, \cdots, u_{5j}]^T$，由特征向量组成5个新的指标变量

$$y_1 = u_{11}\tilde{x}_1 + u_{21}\tilde{x}_2 + \cdots + u_{51}\tilde{x}_5,$$

$$y_2 = u_{12}\tilde{x}_1 + u_{22}\tilde{x}_2 + \cdots + u_{52}\tilde{x}_5,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$y_5 = u_{15}\tilde{x}_1 + u_{25}\tilde{x}_2 + \cdots + u_{55}\tilde{x}_5,$$

式中y_1是第1主成分，y_2是第2主成分，…，y_5是第5主成分。

（4）选择 p（$p \le 5$）个主成分，计算综合评价值

i）计算特征值 $\lambda_j (j=1,2,\cdots,5)$ 的信息贡献率和累积贡献率。称

$$b_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^{5} \lambda_k} \quad (j=1,2,\cdots,5)$$

为主成分 y_j 的信息贡献率；

$$\alpha_p = \frac{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{5} \lambda_k}$$

为主成分$y_1, y_2, \cdots, y_p$的累积贡献率，当α_p接近于1（$\alpha_p = 0.85, 0.90, 0.95$）时，则选择前$p$个指标变量$y_1, y_2, \cdots, y_p$作为$p$个主成分，代替原来5个指标变量，从而可对$p$个主成分进行综合分析。

ii）计算综合得分

$$Z=\sum_{j=1}^{p} b_j y_j\,,$$

其中b_j为第j个主成分的信息贡献率，根据综合得分值就可进行评价。

利用Matlab软件求得相关系数矩阵的前5个特征根及其贡献率如表14.15。

表14.15　主成分分析结果

序号	特征根	贡献率	累计贡献率
1	3.1343	62.6866	62.6866
2	1.1683	23.3670	86.0536
3	0.3502	7.0036	93.0572
4	0.2258	4.5162	97.5734
5	0.1213	2.4266	100.0000

可以看出，前三个特征根的累计贡献率就达到93%以上，主成分分析效果很好。下面选取前三个主成分进行综合评价。前三个特征根对应的特征向量见表 14.16。

表14.16　标准化变量的前4个主成分对应的特征向量

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$
第1特征向量	0.490542	0.525351	-0.48706	0.067054	-0.49158
第2特征向量	-0.29344	0.048988	-0.2812	0.898117	0.160648
第3特征向量	0.510897	0.43366	0.371351	0.147658	0.625475

由此可得三个主成分分别为

$$y_1 = 0.491\tilde{x}_1 + 0.525\tilde{x}_2 - 0.487\tilde{x}_3 + 0.067\tilde{x}_5 - 0.492\tilde{x}_5,$$

$$y_2 = -0.293\tilde{x}_1 + 0.049\tilde{x}_2 - 0.281\tilde{x}_3 + 0.898\tilde{x}_4 + 0.161\tilde{x}_5,$$

$$y_3 = 0.511\tilde{x}_1 + 0.434\tilde{x}_2 + 0.371\tilde{x}_3 + 0.148\tilde{x}_4 + 0.625\tilde{x}_5,$$

分别以三个主成分的贡献率为权重，构建主成分综合评价模型

$$Z = 0.6269y_1 + 0.2337y_2 + 0.076y_3.$$

把各年度的三个主成分值代入上式，可以得到各年度的综合评价值以及排序结果如表 14.17 所示(程序略)。

表14.17　排名和综合评价结果

年代	1993	1992	1991	1994	1987	1990	1984	2000	1995
名次	1	2	3	4	5	6	7	8	9
评价值	2.4464	1.9768	1.1123	0.8604	0.8456	0.2258	0.0531	0.0531	-0.2534
年代	1988	1985	1996	1986	1989	1997	1999	1998	1986
名次	10	11	12	13	14	15	16	17	
评价值	0.2662	0.5292	0.7405	0.7789	0.9715	1.1476	-1.2015	-1.6848	

14.6 秩和比综合评价法

秩和比(Rank Sum Ration，RSR) 统计方法是我国统计学家田凤调教授于1988年提出的一种新的综合评价方法，该法在医疗卫生领域的多指标综合评价、统计预测预报、统计质量控制等方面已得到广泛的应用。秩和比是行（或列）秩次的平均值，是一个非参数统计量，具有0~1连续变量的特征。

14.6.1 原理及步骤

1. 原理

秩和比综合评价法基本原理是在一个n行m列矩阵中，通过秩转换，获得无量纲统计量RSR；在此基础上，运用参数统计分析的概念与方法，研究RSR的分布；以RSR值对评价对象的优劣直接排序或分档排序，从而对评价对象做出综合评价。

2. 步骤

先介绍一下样本秩的概念。

定义 14.3 样本秩 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是从一元总体抽取的容量为n的样本，其顺序统计量是$x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$。若$x_i = x_{(k)}$，则称$k$是$x_i$在样本中的秩，记作$R_i$，对每一个$i = 1, 2, \cdots, n$，称$R_i$是第$i$个秩统计量。$R_1, R_2, \cdots, R_n$总称为秩统计量。

例如，对样本数据 -0.8，-3.1，1.1，-5.2，4.2，顺序统计量是-5.2，-3.1，-0.8，1.1，4.2，而秩统计量是3，2，4，1，5。

秩和比综合评价法的步骤如下

（1）编秩

将n个评价对象的m个评价指标排列成n行m列的原始数据表。编出每个指标各评价对象的秩，其中效益型指标从小到大编秩,成本型指标从大到小编秩,同一指标数据相同者编平均秩。得到的秩矩阵记为$R=(R_{ij})_{n\times m}$。

（2）计算秩和比（RSR）

根据公式

$$RSR_i = \frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\,, \quad i = 1,\cdots,n, \tag{14.15}$$

计算秩和比。当各评价指标的权重不同时，计算加权秩和比（$WRSR$），其计算公式为

$$WRSR_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} w_j R_{ij}\,, \quad i = 1,\cdots,n, \tag{14.16}$$

其中w_j为第j个评价指标的权重，$\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$。

（3）计算概率单位

按从小到大的顺序编制 RSR（或 $WRSR$）频率分布表，列出各组频数 f_i，计算各组累积频数 cf_i，计算累积频率 $p_i = cf_i / n$，将 p_i 转换为概率单位 Probit_i，Probit_i 为标准正态分布的 p_i

分位数加5。

（4）计算直线回归方程

以累积频率所对应的概率单位 Probit_i 为自变量，以 RSR_i（或 $WRSR_i$）值为自变量，计算直线回归方程，即 RSR（$WRSR$）$= a + b \times \text{Probit}$。

（5）分档排序

按照回归方程推算所对应的*RSR*（*WRSR*）估计值对评价对象进行分档排序。

14.6.2 应用实例

例14.7 某市人民医院1983～1992年工作质量统计指标及权重系数见表14.18，其中x_1为治愈率，x_2为病死率，x_3为周转率，x_4为平均病床工作日，x_5为病床使用率，x_6为平均住院日，这里x_2和x_6为成本型指标，其余为效益型指标。

表14.18　统计指标及权重系数

年度	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1983	75.2	3.5	38.2	370.1	101.5	10.0
1984	76.1	3.3	36.7	369.6	101.0	10.3
1985	80.4	2.7	30.5	309.7	84.8	10.0
1986	77.8	2.7	36.3	370.1	101.4	10.2
1987	75.9	2.3	38.9	369.4	101.2	9.61
1988	74.3	2.4	36.7	335.3	91.9	9.2
1989	74.6	2.2	37.5	356.2	97.6	9.3
1990	72.1	1.8	40.3	401.7	101.1	10.0
1991	72.8	1.9	37.1	372.8	102.1	10.0
1992	72.1	1.5	33.2	358.1	97.8	10.4
权重系数	0.093	0.418	0.132	0.100	0.098	0.159

编秩和加权秩和比的计算结果见表14.19。

表14.19　统计指标及权重系数

年度	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$WRSR_i$
1983	8	2	4.5	6	5	2	0.3582
1984	10	3.5	1	1	1	5.5	0.3598
1985	6	1	8	7.5	9	5.5	0.4539
1986	9	3.5	3	7.5	8	3	0.4707
1987	4	5	4.5	2	2	10	0.5042
1988	1.5	10	2	4	4	1	0.5535
1989	5	7	7	3	3	9	0.6340
1990	7	6	9	5	7	8	0.6805
1991	3	8	6	9	10	5.5	0.7170
1992	1.5	9	10	10	6	5.5	0.7684

各组频数 f_i，累积频数 cf_i，累积频率 p_i，概率单位 Probit_i（$i=1,2,\cdots,10$ 分别对应1983年，…，1992年）的计算结果见表14.20。最后一个累积频率（0.975）按 $1-1/(4n)$ 估计。

表14.20　累积频率、概率单位及加权秩和比估计值

年度	f_i	cf_i	p_i	Probit_i	$WRSRfit_i$	排序
1984	1	1	0.1	3.7184	0.3371	10
1985	1	2	0.2	4.1584	0.4005	9
1983	1	3	0.3	4.4756	0.4462	8
1986	1	4	0.4	4.7467	0.4853	7
1988	1	5	0.5	5	0.5218	6
1992	1	6	0.6	5.2533	0.5583	5
1989	1	7	0.7	5.5244	0.5973	4
1987	1	8	0.8	5.8416	0.6430	3
1991	1	9	0.9	6.2816	0.7064	2
1990	1	10	0.975	6.95996	0.8041	1

求得的一元线性回归方程为

$$WRSR = -0.1986 + 0.1441\mathrm{Probit},$$

计算得到的$WRSR$的估计值见表 14.20 的倒数第二列，各年份工作质量的排序结果见表 14.20 的最后一列。