Ch2 数列极限

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年10月23日

BY GYH

§1 数列极限概念

§2 收敛数列的性质

§3 数列极限存在的条件

将学习：

一个数列收敛的条件是什么?

如何利用数列收敛条件判断级数的敛散性?

数列收敛 $\Rightarrow$ 数列一定有界

数列有界 $\not\Rightarrow$ 数列收敛

$+? \Rightarrow$ 数列收敛

数列有界

?

比收敛稍弱一些的结论

单调数列

若数列$\{a_n\}$的各项满足关系式

$$a_n \le a_{n+1} \quad (a_n \ge a_{n+1})$$

则称数列$\{a_n\}$为递增(递减)数列.

如果上面的不等式都是严格的，即

$$a_n < a_{n+1} (a_n > a_{n+1})$$

则称数列$\{a_n\}$为严格递增(严格递减)数列.

递增数列和递减数列统称为单调数列.

注： 数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$是递减数列.

数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$, $\left\{n^2\right\}$是递增数列.

数列$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$不是单调数列, 但其奇数项子列

与偶数项子列分别是单调的.

单调有界定理

在实数系中，单调有界数列必有极限.

单调有界定理 在实数系中,单调有界数列必有极限.

证 不妨设$\{a_n\}$为有上界的递增数列.

根据确界原理, 数列$\{a_n\}$有上确界, 记$\eta=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_+}\{a_n\}$.

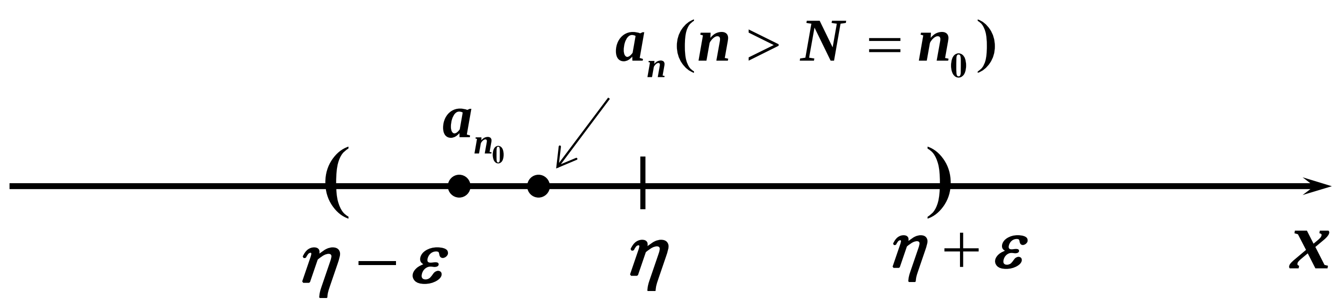
由上确界的定义, 有 (1)$\forall n\in\mathbb{N}_+, a_n\le\eta$.

(2)$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}_+$,使得$a_{n_0}>\eta-\varepsilon$.

取$N=n_0$, 当$n>N$时, 有

$$\eta-\varepsilon<a_{n_0}\le a_n\le\eta<\eta+\varepsilon,$$

即 $\eta-\varepsilon<a_n<\eta+\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\eta$.



$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\eta\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$, 有 $\eta-\varepsilon<a_n<\eta-\varepsilon$.

例 1 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ \ (a\in\mathbb{R})$.

证 令$a_n=\dfrac{|a|^n}{n!}\left(n\in\mathbb{N}_+\right)$. 从而 $a_{n+1}=\dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{|a|}{n+1}\cdot\dfrac{|a|^n}{n!}=\dfrac{|a|}{n+1}\cdot a_n$.

当$n>|a|-1$时，有 $a_{n+1}=\dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}=a_n\dfrac{|a|}{n+1}\le a_n$.

因此$\{a_n\}$从某个确定的项开始是递减数列,并且显然有下界0.

根据单调有界定理，数列$\{a_n\}$有极限，记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.

在等式$a_{n+1}=a_n\dfrac{|a|}{n+1}$两边取极限，得 $c=c\cdot 0=0$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a|^n}{n!}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

（用到此结论： $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$）

例 2 下面的叙述错在哪儿?

设$a_n = 2^n, n = 1,2,\cdots$, 则$a_{n+1} = 2^{n+1} = 2a_n$. 因为显然有$a_n > 0$, 所以$\{a_n\}$递增. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 从而得出$a = 2a$, 解得$a = 0$, 即 $\lim_{n\to\infty} 2^n = 0$.

需要先证明数列$\{a_n\}$有极限, 才可设$\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

数列$\{2^n\}$虽递增但没有上界, 故其没有极限.

例 3 设$a_1=\sqrt{2}, a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}}, \cdots.$

证明数列$\{a_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证 显然$a_n>0$. 因为$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=a_1$,故 $a_2>a_1$.

假设 $a_n>a_{n-1}$，则有

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-\sqrt{2+a_{n-1}}=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n}+\sqrt{2+a_{n-1}}}>0,$$

所以$\{a_n\}$递增.

显然 $a_1=\sqrt{2}<2$，设 $a_n<2$，则 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2.$

所以$\{a_n\}$递增且有上界2.

根据单调有界定理，数列$\{a_n\}$有极限，记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

等式$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$两边取极限得$a=\sqrt{2+a}$，解得$a=2$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2.$

例 4 设$a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}, n=1,2,\cdots.$

证明数列$\{a_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证 由于$a_1=\sqrt{2}$,故有$0<a_1<3$. 假设$0<a_n<3$,则

$$0<a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}<3.$$

由数学归纳法知，对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $0<a_n<3$. 由于

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{3+2a_n}-a_n=\frac{3+2a_n-a_n^2}{\sqrt{3+2a_n}+a_n}=\frac{(3-a_n)(a_n+1)}{\sqrt{3+2a_n}+a_n}>0,$$

因此数列$\{a_n\}$递增有上界.

根据单调有界定理，数列$\{a_n\}$有极限，记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

在等式$a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}$两边同时取极限，得 $a=\sqrt{3+2a}$,

解得$a=3$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

例 5 设$x_1>0, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}, n=1,2,\cdots$.

证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 由于$x_1>0$,从而$1<x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1}<2$. 假设$1<x_n<2$,则

$$1<x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}<2.$$

因此，当$n\geq 2$时,$1<x_n<2$.

由于 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n}{1+x_n}-\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$,

因此当$n\geq 2$时,$x_{n+1}-x_n$具有相同符号，从而$\{x_n\}$是单调数列.

根据单调有界定理，数列$\{x_n\}$有极限，记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

在等式$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$两边同时取极限，得 $a=1+\dfrac{a}{1+a}$,

解得$a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.由$x_n>1(n>1)$,舍去负值，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 6 设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1 - x_n), n = 1, 2, \cdots$.

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证 由于 $0 < x_1 < 1$，从而 $0 < x_2 = x_1(1 - x_1) < 1$. 假设 $0 < x_n < 1$，则

$$0 < x_{n+1} = x_n(1 - x_n) < 1.$$

因此，对 $\forall n \in \mathbb{N}_+, 0 < x_n < 1$.

由于 $x_{n+1} - x_n = x_n(1 - x_n) - x_n = -x_n^2 < 0$,

因此数列 $\{x_n\}$ 递减有下界.

根据单调有界定理，数列 $\{x_n\}$ 有极限，记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

在等式 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ 两边同时取极限，得 $a = a(1 - a)$,

解得 $a = 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

例 7 设$b>0, x_0>0, x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{b}{x_{n-1}}\right), n=1,2,\cdots$.

证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证 对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{b}{x_{n-1}}\right)\geq\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{b}{x_{n-1}}}=\sqrt{b}$,

因此数列$\{x_n\}$有下界.

对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{b}{x_n}\right)\leq\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{x_n^2}{x_n}\right)=x_n$,

所以数列$\{x_n\}$递减有下界.

根据单调有界定理, 数列$\{x_n\}$有极限, 记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

在等式$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{b}{x_{n-1}}\right)$两边同时取极限, 得 $a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{a}\right)$,

解得$a=\pm\sqrt{b}$. 根据收敛数列的保不等式性, $a\geq\sqrt{b}$, 故

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{b}.$$

注：利用单调有界定理求数列极限的一般步骤：

(1) 由数列$\{x_n\}$的通项确定递推关系式 $x_{n+1}=f(x_n)$，

其中$f(x)$连续.

(2) 利用递推式证明$\{x_n\}$单调有界，从而可设

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a(a\text{待定}).$$

(3) 对递推式$x_{n+1}=f(x_n)$两端取极限，得到一关于

未知数a的方程：$a=f(a)$，

然后解此方程，求出符合题意的a值.

例 8 设S是有界数集.证明：若$\sup S = a \notin S$，则存在严格递增数列$\{a_n\} \subset S$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证 由于$\sup S = a$,根据上确界的定义，对$\forall \varepsilon > 0, \exists a' \in S$,使得$a' > a - \varepsilon$.

又因$a \notin S$,所以$a' < a$.从而有 $a - \varepsilon < a' < a$.

现取$\varepsilon_1 = 1$,则$\exists a_1 \in S$,使得 $a - \varepsilon_1 < a_1 < a$.

再取$\varepsilon_2 = \min\left\{\dfrac{1}{2}, a - a_1\right\}$,则$\exists a_2 \in S$,使得 $a - \varepsilon_2 < a_2 < a$.

且有$a_2 > a - \varepsilon_2 \geq a - (a - a_1) = a_1$.

一般地,按上述步骤得到$a_{n-1} \in S$之后，取$\varepsilon_n = \min\left\{\dfrac{1}{n}, a - a_{n-1}\right\}$,

则$\exists a_n \in S$,使得$a - \varepsilon_n < a_n < a$. 且有$a_n > a - \varepsilon_n \geq a - (a - a_{n-1}) = a_{n-1}$.

一直重复以上操作，于是得到严格递增数列$\{a_n\} \subset S$,满足

$$a - \varepsilon_n < a_n < a < a + \varepsilon_n.$$

因此$|a_n - a| < \varepsilon_n \leq \dfrac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

例 9 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在.

证 设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, n=1,2,\cdots$. 由二项式展开，得

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{1}{n^k}=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$>1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)=a_n,$$

$n=1,2,\cdots$.

因此 $\{a_n\}$ 是递增数列.

例 9 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在.

又由于

$$a_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

$$=1+1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}<3,$$

因此 $\{a_n\}$ 递增且有上界. 根据单调有界定理知, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

记此极限为e, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}.$

例 10 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 存在且相等.

证 设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$, 利用几何平均-算术平均不等式, 有

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 1<\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=a_{n+1}.$$

因此 $\{a_n\}$ 是递增数列. 设 $b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, 有

$$\frac{1}{b_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1<\left(\frac{(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)+1}{n+2}\right)^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{b_{n+1}}.$$

因此 $\{b_n\}$ 是递减数列.

例 10 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 存在且相等.

又由于

$$2=a_1<a_n<b_n<b_1=4,$$

从而数列$\{a_n\}$递增有上界,数列$\{b_n\}$递减有下界.

根据单调有界定理知, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$都存在.

因为

$$b_n=a_n\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

例 11 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 存在.

伯努利不等式

证 设 $b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$，有

$$\frac{b_{n-1}}{b_n}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}\frac{n}{n+1}$$

$$>\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n-\dfrac{1}{n}}\right)\frac{n}{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1}=1,$$

因此 $\{b_n\}$ 是递减数列且有下界0.

根据单调有界定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在.

例 12 设$s_n = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}, n=1,2,\cdots$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}$.

证 显然$\{s_n\}$是严格递增数列.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$= s_n \le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

因此$\{s_n\}$是有界的. 根据单调有界定理知, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$存在.

又根据收敛数列的保不等式性, $\mathrm{e} \le \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

例 12 设$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, n = 1,2,\cdots$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}$.

又对任意的$n > m$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$> 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n}),$$

因此,在上式中固定m,两边令 $n\to\infty$, 得

$$\mathrm{e} \ge 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m .$$

当$m\to\infty$时, 由收敛数列的保不等式性, $\mathrm{e} \ge \lim\limits_{m\to\infty} s_m$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}) = \mathrm{e}.$

例 13 设 $b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,\ n=1,2,\cdots$. 证明 $\{b_n\}$ 收敛.

证 由于 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

所以 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 即 $\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$.

于是 $$b_{n+1}-b_n = \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n = \frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n} < 0,$$

$$b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n > \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n$$

$$= \ln(n+1)-\ln n > 0.$$

故数列 $\{b_n\}$ 递减且有下界.

根据单调有界定理知, 数列 $\{b_n\}$ 是收敛的. 记此极限为 γ, 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = \gamma = 0.57721566490\cdots.$$ (Euler常数)

你应该：

知道单调有界定理并会证明相关题目