Ch11 数项级数

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周四下午2点至4点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

P15习题12.2 / 1(2) 判断级数$\sum 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$的敛散性.

解 由于 $2^n \sin\frac{\pi}{3^n} < 2^n \cdot \frac{\pi}{3^n} = \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

又$\sum \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛, 根据比较判别法知, 级数$\sum 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$收敛.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n \sin\frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n \cdot \frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \pi$,

又$\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛, 根据比较判别法的极限形式知,

级数$\sum 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$收敛.

P15习题12.2 / 1(4) 判断级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$的敛散性.

解 当$n>\mathrm{e}^2$时, 有 $\ln n>2$, 从而 $\frac{1}{(\ln n)^n}<\frac{1}{2^n}$,

又$\sum\frac{1}{2^n}$收敛, 根据比较判别法知, 级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$收敛.

解 由于$\frac{1}{(\ln n)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}^{n(\ln\ln n)}}<\frac{1}{\mathrm{e}^n}$, $n>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$,

又$\sum\frac{1}{\mathrm{e}^n}$收敛, 根据比较判别法知, 级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$收敛.

P15习题12.2 / 1(6) 判断级数$\sum \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$的敛散性.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

又$\sum\dfrac{1}{n}$发散, 根据比较判别法的极限形式知, 级数$\sum \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$发散.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 根据极限的局部保号性知,

$\exists N\in\mathbb{N}_+, \forall n>N$,有 $\sqrt[n]{n}<2.$

从而 $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}>\dfrac{1}{2n}, n>N$, 又$\sum\dfrac{1}{2n}$发散,根据比较判别法知,

级数$\sum \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$发散.

P15习题12.2 / 1(8) 判断级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{(\ln n)^{\ln n}}$的敛散性.

解 当$n > e^{e^3}$时,则

$$\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{n}{e^{\ln n \ln(\ln n)}} = \frac{n}{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}} = \frac{n}{n^{\ln(\ln n)}}$$

$$< \frac{n}{n^{\ln\ln e^{e^3}}} = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2},$$

又$\sum \dfrac{1}{n^2}$收敛，根据比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{(\ln n)^{\ln n}}$收敛.

P15习题12.2 / 1(9) 判断级数$\sum\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)(a>0)$的敛散性.

解1 当$a=1$时，$a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2=0$，因此级数$\sum\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$收敛.

当$a>0, a\neq 1$时，$a^x=1+x\ln a+x^2\dfrac{(\ln a)^2}{2!}+o(x^2)$，

所以$a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\ln a+\frac{1}{2n^2}(\ln a)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\left(1-\frac{1}{n}\ln a+\frac{1}{2n^2}(\ln a)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-2$$

$$=\frac{1}{2n^2}(\ln a)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2n^2}(\ln a)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=(\ln a)^2$，

又$\sum\dfrac{1}{n^2}$收敛，根据比较判别法的极限形式知，级数$\sum\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$收敛.

P15习题12.2 / 1(9) 判断级数$\sum\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)(a>0)$的敛散性.

解2 当$a=1$时，$a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2=0$, 因此级数$\sum\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$收敛.

当$a>0, a\neq 1$时, 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{\frac{1}{n^2}}\overset{t=\frac{1}{n}}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{a^t+a^{-t}-2}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{a^t\ln a-a^{-t}\ln a}{2t}$$

$$=\ln a\lim_{t\to 0^+}\frac{a^t\ln a+a^{-t}\ln a}{2}=(\ln a)^2,$$

又$\sum\frac{1}{n^2}$收敛，根据比较判别法的极限形式知，级数$\sum\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$收敛.

P15习题12.2 / 2(3) 判断级数$\sum\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$的敛散性.

解1 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$,

根据根式判别法的极限形式知, 级数$\sum\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$收敛.

解2 由于 $\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n}=\dfrac{n}{2n+1}<\dfrac{1}{2}<1$,

根据根式判别法知, 级数$\sum\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$收敛.

解3 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n+1)(2n+1)}{n(2n+3)}\right)^n\cdot\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n(2n+3)}\right)^{n(2n+3)\cdot\frac{1}{2n+3}}=\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}<1,$$

根据比式判别法的极限形式知, 级数$\sum\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$收敛.

P15习题12.2 / 2(4) 判断级数$\sum \dfrac{n!}{n^n}$的敛散性.

解1 由于 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1,$$

根据比式判别法的极限形式知, 级数$\sum \dfrac{n!}{n^n}$收敛.

解2 由于 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}=e^{\int_0^1\ln x\,dx}=e^{\left(x\ln x|_0^1-\int_0^1 1\,dx\right)}=e^{-1}<1,$$

根据根式判别法的极限形式知, 级数$\sum \dfrac{n!}{n^n}$收敛.

解3 由于 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n\pi)^{\frac{1}{2n}}}{e}=\frac{1}{e}<1,$$

根据根式判别法的极限形式知, 级数$\sum \dfrac{n!}{n^n}$收敛.

P15习题12.2/5 设$a_n \geq 0, n = 1, 2, \cdots$,且$\{na_n\}$有界,证明$\sum a_n^2$收敛.

证 由于$a_n \geq 0, n = 1, 2, \cdots$,且$\{na_n\}$有界,则

$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$,有 $0 \leq na_n \leq M$.

从而 $0 \leq a_n \leq \dfrac{M}{n}$, 于是 $a_n^2 \leq \dfrac{M^2}{n^2}, n = 1, 2, \cdots$.

已知级数$\sum \dfrac{M^2}{n^2}$收敛,根据比较判别法知,级数$\sum a_n^2$收敛.

P15习题12.2/6　设级数$\sum a_n^2$收敛，证明$\sum \frac{a_n}{n}(a_n>0)$也收敛.

证　由于

$$\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n}\cdot a_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+a_n^2\right),\quad n=1,2,\cdots,$$

已知级数$\sum \frac{1}{n^2}, \sum a_n^2$收敛，根据级数收敛的线性性质知，

级数$\sum \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+a_n^2\right)$收敛.

根据比较判别法知，级数$\sum \frac{a_n}{n}$收敛.

P15习题12.2/8(1) 利用级数收敛的必要条件,证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0.$

证 考虑级数$\sum\dfrac{n^n}{(n!)^2}$的敛散性：由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{n^n}{(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n+1}=0<1,$$

根据比式判别法的极限形式知，级数$\sum\dfrac{n^n}{(n!)^2}$收敛.

根据级数收敛的必要条件知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0.$

P15习题12.2/9(4)

利用积分判别法判断级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$的敛散性.

解 当$p<0$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}=+\infty$,

已知级数$\sum\frac{1}{n}$发散，根据比较判别法的极限形式知，级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$发散.

当$p=0,q<0$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n(\ln\ln n)^q}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\ln\ln n)^q}=+\infty$,

已知级数$\sum\frac{1}{n}$发散，根据比较判别法的极限形式知，级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$发散.

当$p=0,q=0$时，级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

P15习题12.2/9(4)

利用积分判别法判断级数$\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}(\ln\ln n)^{q}}$的敛散性.

当$p>0$时，令$f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^{p}(\ln\ln x)^{q}}$，则

$$f'(x)=-\left(\frac{1}{x^{2}(\ln x)^{p}(\ln\ln x)^{q}}+\frac{p}{x^{2}(\ln x)^{p+1}(\ln\ln x)^{q}}+\frac{q}{x^{2}(\ln x)^{p+1}(\ln\ln x)^{q+1}}\right)=-\frac{\ln x+p(\ln\ln x)+q}{x^{2}(\ln x)^{p+}(\ln\ln x)^{q+1}},$$

不管q取什么值,$\exists X\geq 3$,当$x>X$时,$f'(x)<0$, 从而$f(x)$在$[X,+\infty)$上单调递减.

根据积分判别法知,级数$\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}(\ln\ln n)^{q}}$与反常积分$\displaystyle\int_{3}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{p}(\ln\ln x)^{q}}\mathrm{d}x$同敛散.

当$p=1$时, $$\int_{3}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{q}}\mathrm{d}x\overset{t=\ln\ln x}{=}\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{q}}=\begin{cases}\dfrac{1}{q-1}\cdot\dfrac{1}{(\ln\ln 3)^{q-1}}, & q>1\\ +\infty, & q\leq 1\end{cases}$$

当$q>1$时,$\displaystyle\int_{3}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{p}(\ln\ln x)^{q}}\mathrm{d}x$收敛；当$q\leq 1$时, $\displaystyle\int_{3}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{p}(\ln\ln x)^{q}}\mathrm{d}x$发散.

P15习题12.2/9(4)

利用积分判别法判断级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$的敛散性.

当$p\neq 1$时，$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}dx=\int_3^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}d\ln x$

$$\overset{t=\ln x}{=}\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{t^p(\ln t)^q}dt,$$

当$p>1$时，$\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{1+p}{2}}\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\frac{p-1}{2}}(\ln t)^q}=0$,

根据柯西判别法的极限形式知，$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}dx$收敛.

当$p<1$时，$\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{1+p}{2}}\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\frac{1-p}{2}}}{(\ln t)^q}=+\infty$,

根据柯西判别法的极限形式知，$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}dx$发散.

P15习题12.2/9(4)

利用积分判别法判断级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$的敛散性.

因此，当$p>1$时，级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$收敛;

当$p=1, q>1$时，级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$收敛;

当$p=1, q\le 1$时，级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$发散;

当$p<1$时，级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$发散.

P15习题12.2/10(5) 判断级数$\sum \frac{n!3^n}{n^n}$的敛散性.

解 记$u_n = \frac{n!3^n}{n^n}$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!3^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1,$$

根据比式判别法的极限形式知,原级数发散.

P15习题12.2/10(6) 判断级数$\sum\frac{1}{3^{\ln n}}$的敛散性.

解1 由于 $\frac{1}{3^{\ln n}}=\frac{1}{e^{\ln n\ln 3}}=\frac{1}{n^{\ln 3}}$,

又$\ln 3>1$, 故级数$\sum\frac{1}{n^{\ln 3}}$收敛,即级数$\sum\frac{1}{3^{\ln n}}$收敛.

解2 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 3^{\ln n}}{\ln n}=\ln 3>1$, 根据极限的局部保号性,

$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $\frac{\ln 3^{\ln n}}{\ln n}>\frac{\ln 3+1}{2}>1$, 即 $\ln 3^{\ln n}>\frac{\ln 3+1}{2}\ln n$,

从而 $\frac{1}{3^{\ln n}}<\frac{1}{n^{\frac{\ln 3+1}{2}}}$.

已知级数$\sum\frac{1}{n^{\frac{\ln 3+1}{2}}}$收敛, 根据比较判别法知, 级数$\sum\frac{1}{3^{\ln n}}$收敛.

P15习题12.2/10(6) 判断级数$\sum \frac{1}{3^{\ln n}}$的敛散性.

解3 记$f(x)=\frac{1}{3^{\ln x}}, x\geq 1$. $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减,

根据积分判别法知, 级数$\sum \frac{1}{3^{\ln n}}$与反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{3^{\ln x}}\mathrm{d}x$同敛散.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{3^{\ln x}}\mathrm{d}x \overset{t=\ln x}{=} \int_0^{+\infty}\frac{1}{3^t}\mathrm{d}e^t = \int_0^{+\infty}\frac{e^t}{3^t}\mathrm{d}t = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u\left(\frac{e}{3}\right)^t\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left.\frac{\left(\frac{e}{3}\right)^t}{\ln\frac{e}{3}}\right|_0^u = \frac{1}{\ln\frac{e}{3}}\lim_{u\to+\infty}\left(\left(\frac{e}{3}\right)^u-1\right)=\frac{1}{\ln\frac{3}{e}},$$

因此反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{3^{\ln x}}\mathrm{d}x$收敛,从而级数$\sum \frac{1}{3^{\ln n}}$收敛.

P15习题12.2/10(7)

判断级数$\sum \dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}(x>0)$的敛散性.

解 记$u_n=\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n+1})}\cdot\frac{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}{x^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^{n+1}}=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1\ (x>0)$.

根据比式判别法的极限形式知,原级数收敛.

补充题　判断级数$\sum \frac{1}{\ln(n+1)!}$的敛散性.

解　由于

$$\frac{1}{\ln(n+1)!}=\frac{1}{\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln(n+1)}>\frac{1}{n\ln(n+1)}>\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

考虑级数$\sum \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$的敛散性：设$f(x)=\frac{1}{x\ln x}, x\in[2,+\infty)$.

$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递减，根据积分判别法知，

级数$\sum \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$与反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$同敛散.

反常积分$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_2^{u}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\left(\ln(\ln x)\right)\Big|_2^u$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left(\ln(\ln u)-\ln\ln 2\right)=+\infty$$ 发散，

故级数$\sum \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$发散. 根据比较判别法知，级数$\sum \frac{1}{\ln(n+1)!}$发散.

P15习题12.2/11 柯西(Cauchy)凝聚判别法

设$\{a_n\}$为递减正项数列,证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{m=1}^{\infty}2^m a_{2^m}$同敛散.

证 记级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{m=1}^{\infty}2^m a_{2^m}$的部分和数列分别为$\{S_n\}$与$\{T_m\}$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad T_m=\sum_{k=0}^{m-1}2^k a_{2^k}=a_1+2a_2+2^2a_4+\cdots+2^{m-1}a_{2^{m-1}}.$$

对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,$\exists m\in\mathbb{N}_+$,使得 $2^m>n$. 由$\{a_n\}$为递减正项数列,有

$$S_n\le S_{2^m}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^m}\le a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^m}+\cdots+a_{2^{m+1}-1})$$

$$\le a_1+2a_2+2^2a_{2^2}+\cdots+2^m a_{2^m}=a_1+T_m.$$

对$\forall m\in\mathbb{N}_+$,$\exists n\in\mathbb{N}_+$,使得 $n>2^m$. 由$\{a_n\}$为递减正项数列,有

$$S_n\ge S_{2^m}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^m}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{m-1}+1}+\cdots+a_{2^m})$$

$$\ge a_1+a_2+2a_{2^2}+\cdots+2^{m-1}a_{2^m}\ge\frac{1}{2}T_m.$$

因此$\{S_n\}$与$\{T_m\}$同时有界或无界,根据单调有界定理知,

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{m=1}^{\infty}2^m a_{2^m}$同时收敛或同时发散.

补充题 判断级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$的敛散性.

解 记$u_n=\dfrac{1}{n\ln n}$. 则数列$\{u_n\}$非负递减.

根据柯西凝聚判别法知,

级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$与$\sum\limits_{n=2}^{\infty}2^n u_{2^n}$具有相同的敛散性.

$$\sum_{n=2}^{\infty}2^n u_{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln 2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2},$$

已知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln 2}$发散, 故级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散.

P15习题12.2/14(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^p}+\dfrac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^p}\right)(p>1)$.

解 由于当 $p>1$ 时,级数 $\sum\dfrac{1}{n^p}$ 收敛,

根据级数收敛的柯西准则知,对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有

$$\left|\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right|<\varepsilon.$$

根据数列极限的定义知知, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^p}+\dfrac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^p}\right)=0.$

解 由于 $\dfrac{n}{(2n)^p}\le\dfrac{1}{(n+1)^p}+\dfrac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^p}\le\dfrac{n}{(n+1)^p}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(2n)^p}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)^p}=0$, 根据迫敛性知,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)=0.$$

P15习题12.2/14(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)(p>1)$.

解 由于当$p>1$时,级数$\sum\frac{1}{p^n}$收敛,

根据级数收敛的柯西准则知,对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有

$$\left|\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right|<\varepsilon.$$

根据数列极限的定义知知, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)=0.$

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{p^{n+1}}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)}{1-\frac{1}{p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p^n-1}{p^{2n}(p-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{p^n}}{p^n(p-1)}=0.$$

P15习题12.2/15

设$a_n>0$,证明数列$\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$与级数$\sum a_n$同敛散.

证 记$u_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$. 则 $\ln u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)$.

从而数列$\{u_n\}$,数列$\{\ln u_n\}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$同敛散.

因此只需证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$同敛散.

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$,

根据比较判别法的极限形式知, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$同敛散.

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+a_n)\neq 0$,

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$都发散. 结论得证.