第二十一章: 重 积 分 备 课

第 1 节: 第一型曲面积分

作业题 P262. 1. 计算下列第一型曲面积分:

(1) $\iint_S (x+y+z)\ \mathrm{d}S$, 其中 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$;

方法 1 求解: 易知球面表达式为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 它的投影区域为 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leq a^2\}$,

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

利用曲面积分的对称性和第一型曲面积分公式,

$$\iint_S (x+y+z)\ \mathrm{d}S=\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3.$$

方法 2 求解: 利用曲面积分的对称性和第二型曲面积分的定义

$$\iint_S (x+y+z)\ \mathrm{d}S=\iint_S z\ \mathrm{d}S=a\iint_S\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中最后一项曲面 S 的方向为球面上侧. 易知球面的投影区域为 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leq a^2\}$, 利用第二型曲面积分的计算方法

$$\iint_S (x+y+z)\ \mathrm{d}S=a\iint_S\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\iint_D\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3.$$

作业题 P262. 1. 计算下列第一型曲面积分:

(2) $\iint_S (x^2+y^2)\ \mathrm{d}S$, 其中 S 为立体 $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$ 的边界曲面;

解: 令 $S_1=\{(x,y,z):x^2+y^2\leq 1, z=1\}$, $S_2=\{(x,y,z):z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\leq z\leq 1\}$, $D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$, 则 $S=S_1\cup S_2$, 且

$$\iint_S (x^2+y^2)\ \mathrm{d}S=\iint_{S_1}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}S.$$

在曲面 S_1 上, $z=1$. 因此 $z_x=z_y=0$ $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 利用第一型曲面积分的计算公式

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}S=\iint_D (x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

在曲面 S_2 上, $z=\sqrt{x^2+y^2}$. 因此 $z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 利用第一型曲面积分的计算公式

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}S=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

综上所计算的结果, $\iint_S (x^2+y^2)\ \mathrm{d}S=\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)$. □

作业题 P262. 1. 计算下列第一型曲面积分:

(3) $\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2}$, 其中 S 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被 $z=0$, $z=H$ 所截取的部分;

解: 由于积分区域在柱面 $x^2+y^2=H^2$ 上, 因此

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2} = \iint_S \frac{1}{R^2}\ \mathrm{d}S = \frac{2\pi H}{R}.$$

□

作业题 P262. 1. 计算下列第一型曲面积分:

(4) $\iint_S xyz\ \mathrm{d}S$, 其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分;

解: 因为 $z=1-x-y$, $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D xyz\ \mathrm{d}S &= \sqrt{3}\iint_{\left\{\substack{x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}\right\}} xy(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^1\ \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(xy-x^2y-xy^2\right)\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{120}.\end{aligned}$$

□

第 2 节: 第二型曲面积分

例题 1：计算积分

$$\iint\limits_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\geq 0$, $y\geq 0$ 的部分, 取球面外侧.

答案：$\frac{2}{15}$.

例题 2：计算积分

$$\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部并选取外侧.

答案：$\frac{2}{5}\pi a^3bc$.

例题 3：计算积分

$$\iint\limits_S (2x+z)dydz+zdxdy,$$

其中 S 是抛物面 $z=x^2+y^2$, $z\in[0,1]$ 部分的上侧.

答案：$-\frac{\pi}{2}$.

例题 5：计算积分

$$\iint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

其中 S 是半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

答案：单位外法方向 (x, y, z), 转换到第一型曲面积分, 计算得到

$$\iint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_S 1dS = 2\pi.$$

作业题 P269. 1. 计算下列第二型曲面积分:

(3) $\iint_S xy \ \mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz \ \mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 和平面 $x + y + z = 1$ 所围的四面体表面并取外侧;

解法 1: 记

$$S_1 : x = 0,\ S_2 : y = 0,\ S_3 : z = 0,\ S_4 : x + y + z = 1,$$

其中 S_4 的方向指向上侧, 法向量为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. 因此

$$\begin{aligned}
&\iint_S (xy) \ \mathrm{d}y\mathrm{d}z + (yz) \ \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (xz) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sum_{i=1}^{4} \iint_{S_i} (xy) \ \mathrm{d}y\mathrm{d}z + (yz) \ \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (xz) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 0 + 0 + 0 + \iint_{D_{xy}} xy + y(1 - x - y) + x(1 - x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \ \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x + y - x^2 - y^2 - xy)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

□

解法 2: 记 V 是由曲面 S 所围成的四面体区域. 利用高斯公式,

$$\begin{aligned}
&\iint_S (xy) \ \mathrm{d}y\mathrm{d}z + (yz) \ \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (xz) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iiint_V (y + z + x) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3 \iiint_V z \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 3 \int_0^1 z \ \mathrm{d}z \iint_{D_z} \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{2} \int_0^1 z(1 - z)^2 \ \mathrm{d}z = \frac{3}{2} B(2, 3) = \frac{1}{8},
\end{aligned}$$

其中 D_z 是平面上由 $x = 0$, $y = 0$, 和 $x + y = 1 - z$ 所围成的三角形区域. □

作业题 P269. 1. 计算下列第二型曲面积分:

(4) $\iint_S yz\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分并取外侧;

解法 1: 利用高斯公式,

$$\begin{aligned}\iint_S yz\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x &= \iiint_V z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{S_1} yz\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\cos\varepsilon r^2 \sin\varphi dr - 0 \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

或者利用 $-z_y$,

作业题 P269. 2. 设某流体的流速为 $\vec{v}=(k,y,0)$, 其中 k 是常量. 求单位时间内从球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的内部流过球面的流量.

解法 1: 易知球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的外法向量为 $\vec{n}=\frac{1}{2}(x,y,z)$. 则单位时间内从球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的内部流过球面的流量为

$$Q=\iint_S k\frac{x}{2}+y\frac{y}{2}+0\frac{z}{2}\ \mathrm{d}S=\iint_S \frac{y^2}{2}\ \mathrm{d}S=\frac{1}{6}\iint_S 4\ \mathrm{d}S=\frac{32}{3}\pi.$$

解法 2: 利用高斯公式.