Ch9 定积分

总结及习题评讲(1)

主讲教师: 顾燕红

办公室: 汇星楼409

办公室答疑时间: 每周四下午2点至4点

微信号: 18926511820 QQ号: 58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

- 定积分
  - 定积分与可积的概念、定积分的几何意义
  - 牛顿-莱布尼茨公式
  - 可积条件
    - 可积的必要条件：有界
    - 可积的充要条件：可积准则
    - 可积函数类
      - 连续必可积
      - **单调必可积**
      - 有有限个间断点的有界函数必可积
  - 定积分的性质
    - 线性性质
    - 乘积可积性
    - 区间可加性
    - 积分不等式
    - **绝对可积性**
    - 积分第一中值定理及推广的积分第一中值定理
  - 微积分基本定理
    - 变限积分
    - ***原函数的存在性***
    - 积分第二中值定理
  - 定积分计算
    - 换元积分法
    - 分部积分法
      - 推广的分部积分公式
        - 泰勒公式的积分型余项
        - 泰勒公式的柯西型余项

重要定义 定积分、可积的概念

设f是定义在$[a,b]$上的函数，若$\exists J\in\mathbb{R}$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对$[a,b]$的任何分割

$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n<b$，当$\|T\|<\delta$时，其中$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}$，

$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon,$$

则称函数f在$[a,b]$上**可积**或**Riemann可积**，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$称为函数$f$在$[a,b]$上的一个**积分和**，也称**Riemann和**. 称数J为函数f在$[a,b]$上的**定积分**或**Riemann积分**，记作

$$J=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

函数f在$[a,b]$上**不可积**$\Leftrightarrow\forall J\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists T:\|T\|<\delta,\exists\{\xi_i\}$，使得

$$\left|\sum_{T}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|\ge\varepsilon_0.$$

函数f在$[a,b]$上**不可积**$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists T',T'':\ \|T'\|<\delta,\|T''\|<\delta,\exists\{\xi_i'\},\{\xi_i''\}$，使得

$$\left|\sum_{T'}f(\xi_i')\Delta x_i'-\sum_{T''}f(\xi_i'')\Delta x_i''\right|\ge\varepsilon_0.$$

重要定理 可积的必要条件

设函数f在$[a,b]$上可积，f在$[a,b]$上有界.

重要结论

无界函数一定是不可积的.

重要定理 可积的充要条件(可积准则)

函数f在$[a,b]$上可积$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists T$,使得$\sum\limits_{T} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

可积准则的等价形式

函数f在$[a,b]$上可积$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall T : \|T\| < \delta$,有$\sum\limits_{T} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

函数f在$[a,b]$上不可积$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall T$, 有$\sum\limits_{T} \omega_i \Delta x_i \geq \varepsilon_0$.

重要结论 可积的充分条件(三类可积函数类)

函数f在$[a,b]$上连续 $\Rightarrow$ 函数f在$[a,b]$上可积.

函数f在$[a,b]$上有界且只有有限个间断点 $\Rightarrow$ 函数f在$[a,b]$上可积.

函数f在$[a,b]$上单调 $\Rightarrow$ 函数f在$[a,b]$上可积.

重要结论

狄利克雷函数在$[0,1]$上不可积.

黎曼函数$R(x)$在$[0,1]$上可积，且$\int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x=0$.

重要性质

定积分的性质

(线性性质) 设函数f与g在$[a,b]$上可积，k_1和k_2是常数，则$k_1 f+k_2 g$在$[a,b]$上也可积，且

$$\int_a^b \left(k_1 f(x)+k_2 g(x)\right)\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + k_2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(乘积可积性) 设函数f与g在$[a,b]$上可积，则fg在$[a,b]$上也可积.

(区间可积性) 函数f在$[a,b]$上可积的充要条件是$\forall c\in(a,b)$，f在$[a,c]$与$[c,b]$上都可积，且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

重要性质　定积分的性质

(积分不等式)

(1)设函数f在$[a,b]$上可积，且$f(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,b]$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge 0$.

(2)设函数f,g在$[a,b]$上可积，且$f(x)\ge g(x)$, $\forall x\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3)在(2)中，若$\exists x_0\in[a,b]$，使得$f(x_0)>g(x_0)$，且f,g均在点x_0连续，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(绝对可积性) 设函数f在$[a,b]$上可积，则$|f|$在$[a,b]$上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

重要性质　定积分的性质

（积分第一中值定理）

设函数f在$[a,b]$上连续，则$\exists \xi \in [a,b]$，使得$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

（推广的积分第一中值定理）

设函数f,g在$[a,b]$上连续，且g在$[a,b]$上不变号，

则$\exists \xi \in [a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

重要性质 定积分的性质

(积分第二中值定理) 设函数f在$[a,b]$上可积.

(1) 若函数g在$[a,b]$上单调减少, 且$g(x)\geq 0$, 则$\exists\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 若函数g在$[a,b]$上单调增加, 且$g(x)\geq 0$, 则$\exists\eta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(积分第二中值定理的推论) 设函数f在$[a,b]$上可积. 若函数g在$[a,b]$上单调, 则$\exists\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

重要定义 变上限积分、变下限积分

设函数f在$[a,b]$上可积，则对$\forall x\in[a,b]$，f在$[a,x]$上也可积，记

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

称$\Phi(x)$为变上限积分.

设函数f在$[a,b]$上可积，则对$\forall x\in[a,b]$，f在$[x,b]$上也可积，记

$$\Psi(x)=\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

称$\Psi(x)$为变下限积分.

重要性质　变限积分的重要性质

若函数f在$[a,b]$上可积，则$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上连续.

微积分学基本定理、原函数存在定理

若函数f在$[a,b]$上连续，则$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

若f为连续函数，u,v为可导函数，且可实行复合$f\circ u$与$f\circ v$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t=f\big(v(x)\big)v'(x)-f\big(u(x)\big)u'(x).$$

重要公式

微积分学基本公式、Newton-Leibniz公式

设函数f在$[a,b]$上连续，F为f在$[a,b]$上的一个原函数，

即$F'(x)=f(x)$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

推广的Newton-Leibniz公式

设函数f在$[a,b]$上可积，F在$[a,b]$上连续，且在$[a,b]$上除有限个点外，

$F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

重要公式 定积分换元积分法

设函数f在$[a,b]$上连续，$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$上连续可微，其值域包含于$[a,b]$，且$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\varphi(t)}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

定积分分部积分法

若$u(x),v(x)$为$[a,b]$上的连续可微函数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)$$

$$=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

重要公式 推广的分部积分公式

若$u(x),v(x)$在$[a,b]$上有$n+1$阶的连续导函数，则

$$\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\Big[u(x)v^{(n)}(x)-u'(x)v^{(n-1)}(x)+\cdots+(-1)^n u^{(n)}(x)v(x)\Big]_a^b$$

$$+(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

重要定义 泰勒公式的积分型余项

设函数f在点x_0的某邻域$U(x_0)$上有$n+1$阶连续导数，则

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

其中$P_n(x)$为$f(x)$的n次泰勒多项式，余项为

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

泰勒公式的柯西型余项

设函数f在点x_0的某邻域$U(x_0)$上有$n+1$阶连续导数，则

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

其中$P_n(x)$为$f(x)$的n次泰勒多项式，余项为

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}\quad(0\le\theta\le1).$$

重要结论

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

Wallis公式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2k+1}$$

重要结论

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上连续，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(-x) = -f(x) \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, & f(-x) = f(x) \end{cases}.$$

设函数f是周期为T的连续函数，则对$\forall a \in \mathbb{R}$，有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

重要结论 积分不等式

Schwarz不等式(第九章总练习题P 220/6)

设$f,g\in\Re[a,b]$,则$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$

Minkowski不等式(第九章总练习题P 220/7(3))

设$f,g\in\Re[a,b]$, 则

$$\left(\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

重要结论 积分不等式

Hadamard不等式(习题9.4 P204/11) 凸函数平均值的估计

设f在$[a,b]$上二阶可导，且$f''(x)\geq 0$(f为凸函数)，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

重要结论 积分不等式

Jensen不等式(第九章总练习题P 220/1)

设φ在$[a,b]$上连续，f二阶可导，且$f''(x)>0$ (f为凸函数)，则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(x))\mathrm{d}x \ge f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x\right).$$

重要结论 积分不等式

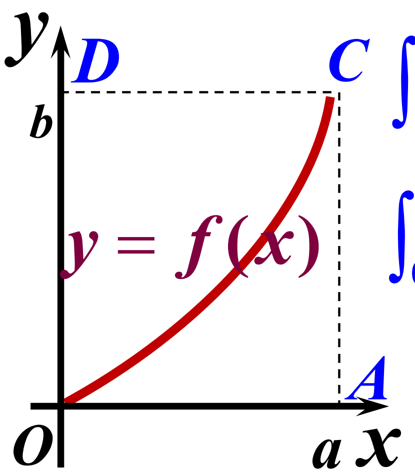
Young不等式

设$y=f(x)$是$[0,+\infty)$上严格单调增的连续函数，且$f(0)=0$.

记它的反函数为 $x=f^{-1}(y)$, 则

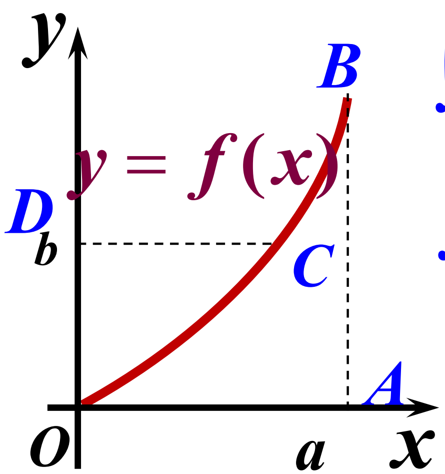
$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y\ge ab\,(a>0,b>0).$$

分析



$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=S_{OACO}$$

$$\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=S_{OCDO}$$



$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=S_{OABO}$$

$$\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=S_{OCDO}$$

$$f(a)=b\Rightarrow S_{OACO}+S_{OCDO}=ab$$

$$f(a)>b\Rightarrow S_{OABO}+S_{OCDO}>ab$$

Young不等式 积分不等式证明

分析 先证明当$f(a)=b$时 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=ab.$

将$[0,a]$作n等分：$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=a$，相应的点$y_i=f(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$

构成$[0,f(a)]$的一个分割：$0=y_0<y_1<\cdots<y_n=f(a).$

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f^{-1}(y_{i-1})\Delta y_i\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\Big(f(x_i)(x_i-x_{i-1})+x_{i-1}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\Big)=af(a)=ab.$$

若$0<b<f(a)$，则由$f(x)$的连续性可知，$\exists x_0\in(0,a)$，使得$f(x_0)=b.$

于是 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0}^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$

$$=\int_{x_0}^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{f(x_0)} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=\int_{x_0}^a f(x)\,\mathrm{d}x+x_0 f(x_0)$$

$>\int_{x_0}^a f(x_0)\,\mathrm{d}x+x_0 f(x_0)=af(x_0)=ab.$ $b>f(a)$的情况如何证？

Young不等式 积分不等式证明

设$y=f(x)$是$[0,+\infty)$上严格单调增的连续函数，且$f(0)=0$.

记它的反函数为$x=f^{-1}(y)$. 求证：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y\ge ab\left(a>0,b>0\right).$$

分析（另一种解法）记 $F(t)=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y-tb.$

则 $F'(t)=f(t)-b$. 记 $f(T)=b$.

当$t>T$时，$F'(t)>0$；当$0<t<T$时，$F'(t)<0$.

故 $F(t)$在$t=T$处取得最小值

$$F(T)=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{f(T)} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y-Tf(T)$$

所以 $F(a)\ge 0$.

由Young不等式得到的一个不等式

设$a,b>0, p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则有 $ab\le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

分析 因$p>1$, 故$f(x)=x^{p-1}$为严格单调递增的连续函数$(x\ge 0)$.

$$f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{p-1}}=y^{q-1}.$$

根据Young不等式,

$$ab\le \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x+\int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y\ge ab\,(a>0,b>0)$$

设$a,b>0,\ p>1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则有 $ab\le\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$.

分析 令$f(x)=\ln x$. $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, $f(x)$为凹函数.

根据Jensen不等式,

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)\ge\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q=\ln ab \Rightarrow ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Jensen不等式 若f为$[a,b]$上凸(凹)函数,

则对任意$x_i\in[a,b],\lambda_i>0,i=1,2,\cdots$.

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1, \text{有}\ f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le(\ge)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

重要结论 积分不等式

Hölder不等式

设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续, $p,q>0,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

分析 若$f=0$或$g=0$, 则不等式显然成立.

令 $\varphi(x)=\dfrac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}$, $\psi(x)=\dfrac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}$. $\varphi(x)\psi(x)\le\dfrac{(\varphi(x))^p}{p}+\dfrac{(\psi(x))^q}{q}$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}\le\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow \frac{\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}\le\frac{1}{p}\frac{\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x}{\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x}+\frac{1}{q}\frac{\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x}{\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

P192/习题9.2/1(5) 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x \, dx$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \left(\tan x - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

P192/习题9.2/1(6) 计算定积分 $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

解 $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_4^9 = \left(\frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot 9^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot 4^{\frac{1}{2}}\right)$

$$= (18 + 6) - \left(\frac{16}{3} + 4\right) = \frac{44}{3}.$$

P192/习题9.2/2(2) 利用定积分求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+x}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

P192/习题9.2/2(3) 利用定积分求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

P192/习题9.2/2(3) 利用定积分求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2n^2}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

P192/习题9.2/2(4) 利用定积分求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi+\sin\frac{n}{n}\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

P192/习题9.2/3 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，F 在 $[a,b]$ 上连续，且除有限个点外有 $F'(x)=f(x)$，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

证 设除有限个点：$t_1,t_2,\cdots,t_k$ 外有 $F'(x)=f(x)$.

对 $[a,b]$ 作分割 T，使得 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 恒为 T 中的一部分分点.

设分割 T 的分点为：$x_0=a,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b$. 因此对 $\forall x\in(x_{i-1},x_i)$，有 $F'(x)=f(x)$，即 $F(x)$ 在 (x_{i-1},x_i) 内可导且 $F(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上连续，根据Lagrange中值定理知，$\exists\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$，使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，因此对于分割 T 以及点集 $\{\xi_i\}$，$i=1,2,\cdots n$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^n\big(F(x_i)-F(x_{i-1})\big)$$

$$=\lim_{\|T\|\to0}\big(F(x_n)-F(x_0)\big)=F(b)-F(a).$$

P197/习题9.3/1 证明：若T'是T增加若干个分点后所得的分割，则

$$\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i' \le \sum_{T}\omega_i\Delta x_i .$$

证 不妨设T'是T增加一个分点后所得的分割.

则该分点必落在分割T的某个小区间Δ_k内，

将Δ_k分成两个小区间，记为Δ_k'与Δ_k''.

由于 $\sup\limits_{x\in\Delta_k} f(x) \ge \sup\limits_{x\in\Delta_k'} f(x),\ \sup\limits_{x\in\Delta_k} f(x) \ge \sup\limits_{x\in\Delta_k''} f(x);$

$\inf\limits_{x\in\Delta_k} f(x) \le \inf\limits_{x\in\Delta_k'} f(x),\ \inf\limits_{x\in\Delta_k} f(x) \le \inf\limits_{x\in\Delta_k''} f(x),$

记$\omega_k,\omega_k',\omega_k''$分别是$f$在$\Delta_k,\Delta_k',\Delta_k''$上的振幅，

因此 $\omega_k = \sup\limits_{x\in\Delta_k} f(x) - \inf\limits_{x\in\Delta_k} f(x) \ge \sup\limits_{x\in\Delta_k'} f(x) - \inf\limits_{x\in\Delta_k'} f(x) = \omega_k',$

$\omega_k = \sup\limits_{x\in\Delta_k} f(x) - \inf\limits_{x\in\Delta_k} f(x) \ge \sup\limits_{x\in\Delta_k''} f(x) - \inf\limits_{x\in\Delta_k''} f(x) = \omega_k''.$

所以 $$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i - \sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i' = \omega_k\Delta x_k - \left(\omega_k'\Delta x_k' + \omega_k''\Delta x_k''\right)$$

$$= \left(\omega_k - \omega_k'\right)\Delta x_k' + \left(\omega_k - \omega_k''\right)\Delta x_k'' \ge 0.$$

故 $\sum\limits_{T'}\omega_i'\Delta x_i' \le \sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i .$

P197/习题9.3/3 设f,g均为定义在$[a,b]$上的有界函数，仅在有限个点处$f(x)\neq g(x)$. 证明：若f在$[a,b]$上可积，则g在$[a,b]$上也可积，且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证1 设f与g在$[a,b]$上的值仅在k个点$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$处不同. 记$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=J$.

记$M=\max\limits_{1\le i\le k}\{|f(\alpha_i)-g(\alpha_i)|\}$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I$.

由于f在$[a,b]$上可积，根据可积的定义知，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall T:\|T\|<\delta_1,\forall\xi_i$,有$\left|\sum\limits_T f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

令$\delta=\min\left\{\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{2kM}\right\}$，则当$\|T\|<\delta$时，有

$$\left|\sum_T g(\xi_i)\Delta x_i-I\right|\le\left|\sum_T g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i\right|+\left|\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|$$

$$<\sum_T|g(\xi_i)-f(\xi_i)|\Delta x_i+\frac{\varepsilon}{2}\le\|T\|\sum_T|g(\xi_i)-f(\xi_i)|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

当$\xi_i\neq\alpha_i$时，$g(\xi_i)-f(\xi_i)=0$，所以$\sum\limits_T|g(\xi_i)-f(\xi_i)|$中至多仅有$k$项不为0.

故 $\left|\sum\limits_T g(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\|T\|\cdot kM+\dfrac{\varepsilon}{2}\le\dfrac{\varepsilon}{2kM}\cdot kM+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

根据可积的定义知，g在$[a,b]$上可积，且$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

P197/习题9.3/3 设f,g均为定义在$[a,b]$上的有界函数，仅在有限个点处$f(x)\neq g(x)$. 证明：若f在$[a,b]$上可积，则g在$[a,b]$上也可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证2 不失一般性，设f与g仅在一点c处的值不同，其中$c\in[a,b]$.

先证g在$[a,b]$上可积. 由题设知f,g在$[a,b]$上有界，故$\exists M>0$，使对$\forall x\in[a,b]$，有

$$|f(x)|\leq M,|g(x)|\leq M.$$

又f在$[a,b]$上可积，根据可积准则知，$\forall\varepsilon>0,\exists T$，使得 $\sum\limits_T \omega_i^f\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

记T'为T的加密，且满足$\|T'\|<\dfrac{\varepsilon}{8M+1}$，则有$\sum\limits_{T'}\omega_i'^{f}\Delta x_i'\leq\sum\limits_T\omega_i^f\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

点c最多落在T'中的两个区间中，记含有点c的区间为$\left\{\Delta_i^{1'}\right\}$，剩余区间为$\left\{\Delta_i^{2'}\right\}$，

从而g在$\left\{\Delta_i^{1'}\right\}$中每个区间的振幅$\omega_i^{1'g}\leq 2M$，在$\left\{\Delta_i^{2'}\right\}$中每个区间的振幅$\omega_i^{1''g}=\omega_i^{1''f}$.

根据可积准则知，g在$[a,b]$上可积.

再证$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

由于f,g在$[a,b]$上可积，因此对$\forall T$，取特殊的ξ_i，使得$\xi_i\neq c$，有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

习题9.3/4 设f在$[a,b]$上有界，$\{a_n\}\subset[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.

证明：若f在$[a,b]$上只有$a_n(n=1,2,\cdots)$为其间断点，则f在$[a,b]$上可积.

证 由于f在$[a,b]$上有界，则$\exists M>0,\forall x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\le M$.

由于$\{a_n\}\subset[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$，根据极限的保不等式性，有 $a\le c\le b$.

若$a<c<b$，对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{4M},c-a,b-c\right\}$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$，则

$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有 $|a_n-c|<\dfrac{\delta}{3}$，即 $c-\dfrac{\delta}{3}<a_n<c+\dfrac{\delta}{3}$.

则f在$\left[a,c-\dfrac{\delta}{3}\right],\left[c+\dfrac{\delta}{3},b\right]$上只有有限个间断点. 又由于$f$在$[a,c-\dfrac{\delta}{3}],[c+\dfrac{\delta}{3},b]$上有界，

根据可积的充分条件，f在$\left[a,c-\dfrac{\delta}{3}\right],\left[c+\dfrac{\delta}{3},b\right]$上可积. 根据可积准则，对上述$\varepsilon>0$，

分别存在$\left[a,c-\dfrac{\delta}{3}\right],\left[c+\dfrac{\delta}{3},b\right]$上的分割$T',T''$，使得 $\sum\limits_{T'}\omega_i'\Delta x_i'<\dfrac{\varepsilon}{3}$，$\sum\limits_{T''}\omega_i''\Delta x_i''<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

将分割T',T''与小区间$\left[c-\dfrac{\delta}{3},c+\dfrac{\delta}{3}\right]$合并，构成区间$[a,b]$的分割，记为$T$.

记f在小区间$\left[c-\dfrac{\delta}{3},c+\dfrac{\delta}{3}\right]$上的振幅为$\omega^0$，有$\omega^0\le 2M$. 于是

$$\sum_T\omega_i\Delta x_i=\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i'+\sum_{T''}\omega_i''\Delta x_i''+\omega^0\cdot\frac{2\delta}{3}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+2M\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon.$$

根据可积准则，f在$[a,b]$上可积.

习题9.3/4 设$f(x)$在$[a,b]$上有界，$\{a_n\}\subset[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.

证明：若f在$[a,b]$上只有$a_n\,(n=1,2,\cdots)$为其间断点，则f在$[a,b]$上可积.

若$c=a$或$c=b$，不失一般性，设$c=a$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. $\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2M},b-a\right\}$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有 $a\le a_n<a+\dfrac{\delta}{2}$.

则f在$\left[a+\dfrac{\delta}{2},b\right]$上只有有限个间断点. 又由于$f$在$\left[a+\dfrac{\delta}{2},b\right]$上有界，

根据可积的充分条件，$f(x)$在$\left[a+\dfrac{\delta}{2},b\right]$上可积. 根据可积准则，对上述$\varepsilon>0$，

存在$\left[a+\dfrac{\delta}{2},b\right]$上的分割$T'$，使得 $\sum\limits_{T'}\omega_i'\,\Delta x_i'<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

将分割T'与小区间$\left[a,a+\dfrac{\delta}{2}\right]$合并，构成区间$[a,b]$的分割，记为$T$.

记f在小区间$\left[a,a+\dfrac{\delta}{2}\right]$上的振幅为$\omega^0$， 有$\omega^0\le 2M$. 于是

$$\sum_T\omega_i\,\Delta x_i=\sum_{T'}\omega_i'\,\Delta x_i'+\omega_0\cdot\frac{\delta}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+2M\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

根据可积准则， f在$[a,b]$上可积.

习题9.3/6 证明函数$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\in(0,1]\end{cases}$在$[0,1]$上可积.

证 已知函数$x-[x]$在所有正整数点处间断，因此函数f在$[0,1]$的间断点为

$$x=0,x=\frac{1}{n},n=2,3,\cdots.$$

由于$0\le f(x)<1,x\in[0,1]$，所以f在$[0,1]$上有界，且f在$[0,1]$上的振幅$\omega\le 1$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,则 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

则f在$\left[\dfrac{\varepsilon}{2},1\right]$上只有有限个间断点. 又$f$在$\left[\dfrac{\varepsilon}{2},1\right]$上有界， 根据可积的充分条件，

f在$\left[\dfrac{\varepsilon}{2},1\right]$上可积. 根据可积准则，对上述$\varepsilon>0$，存在$\left[\dfrac{\varepsilon}{2},1\right]$上的分割$T'$，使得

$\sum\limits_{T'}\omega_i'\Delta x_i'<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 将分割$T'$与小区间$\left[0,\dfrac{\varepsilon}{2}\right]$合并，得到区间$[0,1]$的分割，记为$T$.

记f在小区间$\left[0,\dfrac{\varepsilon}{2}\right]$上的振幅为$\omega_0$，有$\omega_0\le 1$.

于是 $$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i=\omega_0\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{T'}\omega_i'\Delta x_i'<1\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

根据可积准则，f在$[a,b]$上可积.

习题9.3/7 设函数f在$[a,b]$上有定义，且对于任给$\varepsilon>0$，存在$[a,b]$上的可积函数g，使得 $|f(x)-g(x)|<\varepsilon, x\in[a,b]$. 证明$f$在$[a,b]$上可积.

证 由于g在$[a,b]$上可积，根据可积准则知，对$\forall\varepsilon>0, \exists T$，使得 $\sum\limits_T \omega_i^g \Delta x_i<\varepsilon$.

由条件可知

$$\begin{aligned}
\omega_i^f &= \sup_{x',x''\in\Delta_i}\{|f(x')-f(x'')|\} \\
&= \sup_{x',x''\in\Delta_i}\{|f(x')-g(x')+g(x')-g(x'')+g(x'')-f(x'')|\} \\
&\le \sup_{x',x''\in\Delta_i}\{|f(x')-g(x')|\}+\sup_{x',x''\in\Delta_i}\{|g(x'')-f(x'')|\}+\sup_{x',x''\in\Delta_i}\{|g(x')-g(x'')|\} \\
&\le \varepsilon+\varepsilon+\omega_i^g=2\varepsilon+\omega_i^g.
\end{aligned}$$

于是

$$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i \le \sum_T (2\varepsilon+\omega_i^g)\Delta x_i = 2\varepsilon\sum_T \Delta x_i+\sum_T \omega_i^g \Delta x_i < 2\varepsilon(b-a)+\varepsilon=(2(b-a)+1)\varepsilon.$$

根据可积准则知，f在$[a,b]$上可积.

P204/习题9.4/1 证明：若f与g都在$[a,b]$上可积，则

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中ξ_i,η_i是T所属小区间Δ_i中的任意两点，$i=1,2,\cdots,n$.

证 由于f和g在$[a,b]$上可积，根据乘积可积性知，fg在$[a,b]$上可积.

根据可积定义知，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall T:\|T\|<\delta_1,\forall\{\xi_i\}$，有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

由于f在$[a,b]$上可积，根据可积的必要条件性知，$\exists M>0$，对$\forall x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\le M$.

又由于g在$[a,b]$上可积，根据可积准则(等价形式)知，对上述ε，$\exists\delta_2>0,\forall T:\|T\|<\delta_2$，有

$$\sum_T \omega_i^g\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当$\|T\|<\delta$时，$\forall\{\xi_i\},\{\eta_i\}$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\cdot|g(\eta_i)-g(\xi_i)|\Delta x_i+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\le M\sum_{i=1}^{n}\omega_i^g\Delta x_i+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以 $$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

P204/习题9.4/2(2)

不求出定积分的值，比较定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$ 的大小.

解 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，有 $x \geq \sin x$. 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\pi}{2}>1$，且 $x, \sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，

根据积分不等式性，有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

P204/习题9.4/3(3) 证明不等式：$1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}.$

证1 设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. 补充定义 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}\le 0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right],$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{x^2}{2}}{2x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{4}=0.$$

所以 f 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上递减，即 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\le f(x)\le f(0)$，从而 $\frac{2}{\pi}\le f(x)\le 1.$

又 $\frac{2}{\pi}<f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}<1$，$f$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，根据积分不等式性，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x,$$

因此 $1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}.$

P204/习题9.4/3(3) 证明不等式：$1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}.$

证2 当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，有 $\sin x<x<\tan x$，因此 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$

当$x=\frac{\pi}{4}$时，$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2\sqrt{2}}{\pi}<1$，且$\cos x,\frac{\sin x}{x},1$在$x=\frac{\pi}{4}$连续，

根据积分不等式性，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}x,$$

因此 $1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}.$

P204/习题9.4/3(4) 证明不等式：$3\sqrt{e}<\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx<6.$

证 设 $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x\in[e,4e].$

令 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=0,$ 得唯一稳定点 $x=e^2.$

由于 $f(e)=\frac{1}{\sqrt{e}},\ f(4e)=\frac{\ln 4e}{2\sqrt{e}},\ f(e^2)=\frac{2}{e},$

所以$f(x)$在$[e,4e]$上的最大值为 $f(e^2)=\frac{2}{e}$, 最小值为$f(e)=\frac{1}{\sqrt{e}}.$

因此在$[e,4e]$上有 $\frac{1}{\sqrt{e}}\le f(x)\le\frac{2}{e}.$

又由于 $\frac{1}{\sqrt{e}}<f(4e)=\frac{\ln 4e}{2\sqrt{e}}<\frac{2}{e},\ f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$在点$x=4e$连续,

根据积分不等式性,有 $\int_e^{4e}\frac{1}{\sqrt{e}}dx<\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx<\int_e^{4e}\frac{2}{e}dx,$

因此 $3\sqrt{e}<\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx<6.$

P204/习题9.4/4

设f在$[a,b]$上连续,且$f(x)$不恒等于零, 证明 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x>0.$

证 由于f不恒等于零, 故$\exists x_0\in[a,b]$, 使得$f(x_0)\neq 0$. 不妨设$x_0\in(a,b)$.

因为f在点x_0连续, 从而f^2在点x_0也连续, 且 $f^2(x_0)>0$.

根据连续函数的局部保号性, $\exists\delta>0\left(\delta<\min\{b-x_0,x_0-a\}\right)$, $\forall x\in U(x_0;\delta)$,有

$$f^2(x)>\frac{f^2(x_0)}{2}>0.$$

根据区间可加性及积分不等式性, 有

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{x_0-\delta}f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{b}f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{f^2(x_0)}{2}\,\mathrm{d}x=f^2(x_0)\cdot\delta>0.$$

对于$x_0=a$或$x_0=b$的情况可类似证明.

P204/习题9.4/5

设f与g都在$[a,b]$上可积,证明$M(x)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$, $m(x)=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$在$[a,b]$上也都可积.

证 由于 $M(x)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$,

$m(x)=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}=\dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$,

根据线性性质及绝对可积性知, $M(x),m(x)$在$[a,b]$上可积.

P204/习题9.4/6

试求心形线$r=a(1+\cos\theta)$, $0\le\theta\le 2\pi$上各点极径的平均值.

解 所求平均值为

$$r(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a(1+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a}{2\pi}(\theta+\sin\theta)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=a.$$

P204/习题9.4/7 设f在$[a,b]$上可积，且在$[a,b]$上满足$|f(x)|\geq m>0$.

证明$\dfrac{1}{f}$在$[a,b]$上也可积.

证 由于f在$[a,b]$上可积，根据可积准则知，$\forall\varepsilon>0,\exists T$，使得

$$\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < m^2\varepsilon.$$

由于

$$\omega_i^{\frac{1}{f}} = \sup_{x',x''\in\Delta_i}\left\{\left|\frac{f(x'')-f(x')}{f(x')f(x'')}\right|\right\}$$

$$\leq \frac{1}{m^2}\sup_{x',x''\in\Delta_i}\left\{\left|f(x'')-f(x')\right|\right\} = \frac{\omega_i^f}{m^2}.$$

于是

$$\sum_T \omega_i^{\frac{1}{f}}\Delta x_i \leq \sum_T\left(\frac{\omega_i^f}{m^2}\right)\Delta x_i = \frac{1}{m^2}\sum_T \omega_i^f\Delta x_i < \frac{1}{m^2}\cdot m^2\varepsilon=\varepsilon.$$

根据可积准则知，$\dfrac{1}{f}$在$[a,b]$上可积.

P204/习题9.4/10 设f在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$，

则在(a,b)内至少存在两点x_1,x_2，使得$f(x_1)=f(x_2)=0$.

证1 假设f在(a,b)上无零点，由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，根据介值性定理知，

f在(a,b)内恒大于0或恒小于0. 不妨设f在(a,b)上恒大于0.

由于f在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0, x\in(a,b)$，根据积分不等式性，有

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，这与已知条件$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.

假设f在(a,b)内只有一个零点x_1，由$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^b f(x)\mathrm{d}x=0$知，

f在(a,x_1)与(x_1,b)内严格异号，即有 $f(x)\begin{cases}>0, x\in(a,x_1)\\<0, x\in(x_1,b)\end{cases}$ 或 $f(x)\begin{cases}<0, x\in(a,x_1)\\>0, x\in(x_1,b)\end{cases}$.

设 $g(x)=(x-x_1)f(x)$，则 $g(x)\begin{cases}<0, x\in(a,x_1)\\<0, x\in(x_1,b)\end{cases}$ 或 $g(x)\begin{cases}>0, x\in(a,x_1)\\>0, x\in(x_1,b)\end{cases}$.

根据积分不等式性及g在$[a,b]$上连续知，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (x-x_1)f(x)\mathrm{d}x<0$(或$>0$)，

这与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-x_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

所以$f(x)$在(a,b)上至少有两个零点x_1,x_2，即$x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

P204/习题9.4/10 设f在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$，则在$(a,b)$内至少存在两点$x_1,x_2$，使得$f(x_1)=f(x_2)=0$.

证2 由$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$及积分第一中值定理知，$\exists x_1\in(a,b)$，使得 $f(x_1)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

假设f在(a,b)内只有一个零点x_1，由$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^b f(x)\mathrm{d}x=0$，

可得$\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{x_1}^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0$.

又因为f在$[a,x_1]$与$[x_1,b]$上都不变号，故由推广的积分第一中值定理知，

$\exists\xi_1,\xi_2\left(a<\xi_1<x_1<\xi_2<b\right)$，使得

$$0=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_1} xf(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^b xf(x)\mathrm{d}x=\xi_1\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\xi_2\int_{x_1}^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=(\xi_2-\xi_1)\int_{x_1}^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0,$$

产生矛盾.

所以$f(x)$在(a,b)上至少有两个零点x_1,x_2，即$x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

P204/习题9.4/10 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$，

若$\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，这时$f(x)$在$(a,b)$内是否至少有三个零点？

证 假设f在(a,b)上只有两个零点x_1,x_2，且$a<x_1<x_2<b$.

则$f(x)$在$[a,x_1],[x_1,x_2]$与$[x_2,b]$上都不变号.

由 $0=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x$,

得 $\int_{x_2}^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x.$

又因为f在$[a,x_1],[x_1,x_2],[x_2,b]$上都不变号，故由推广的积分第一中值定理知，

$\exists\xi_1,\xi_2,\xi_3\left(a<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\xi_3<b\right)$，使得

$$0=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_1} xf(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2} xf(x)\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{b} xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=\xi_1\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\xi_2\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x+\xi_3\int_{x_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x=(\xi_1-\xi_3)\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+(\xi_2-\xi_3)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $(\xi_1-\xi_3)\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x=-(\xi_2-\xi_3)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x.$

由于 $\xi_1-\xi_3<0,\xi_2-\xi_3<0$，$\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x\neq 0,\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\neq 0$,

从而$\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$异号，因此$f$在$(a,x_1)$与$(x_1,x_2)$符号相反.

P204/习题9.4/10 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$，若$\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，这时$f(x)$在$(a,b)$内是否至少有三个零点？

同理可得f在(x_1,x_2)与(x_2,b)符号相反.

即有

$$f(x)\begin{cases}>0, x\in(a,x_1)\\<0, x\in(x_1,x_2)\\>0, x\in(x_2,b)\end{cases} \text{ 或 } f(x)\begin{cases}<0, x\in(a,x_1)\\>0, x\in(x_1,x_2)\\<0, x\in(x_2,b)\end{cases}.$$

设$h(x)=(x-x_1)(x-x_2)f(x)$，则

$$h(x)\begin{cases}>0, x\in(a,x_1)\\>0, x\in(x_1,x_2)\\>0, x\in(x_2,b)\end{cases} \text{ 或 } h(x)\begin{cases}<0, x\in(a,x_1)\\<0, x\in(x_1,x_2)\\<0, x\in(x_2,b)\end{cases}.$$

根据积分的不等式性及h在$[a,b]$上连续知，

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)f(x)\mathrm{d}x>0(\text{或}<0).$$

这与 $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x-(x_1+x_2)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x+x_1x_2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.

所以$f(x)$在(a,b)上至少有三个零点.

更一般结论：

设f在$[a,b]$上连续，且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\cdots=\int_a^b x^{n-1}f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

则f在(a,b)内至少有n个零点.

P204/习题9.4/11 设f在$[a,b]$二阶可导，且$f''(x)>0$. 证明:

$$(1)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证1 由于$f''(x)>0$，所以f在$[a,b]$上是凸函数.　　根据凸函数的等价条件知，

$\forall x,x_0\in[a,b]$，有 $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

取$x_0=\dfrac{a+b}{2}$，有　$f(x)\ge f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$,

根据积分不等式性，有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left.\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}\right|_a^b=(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

即　$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

P204/习题9.4/11 设f在$[a,b]$二阶可导，且$f''(x)>0$. 证明:

$$(1)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证2 对$\forall x\in[a,b]$, $f(x)$在$x_0=\dfrac{a+b}{2}$的带Lagrange余项的Taylor公式为

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,\quad \xi\text{介于}x\text{与}\frac{a+b}{2}\text{之间}.$$

由于$f''(x)>0$, 故 $f(x)\ge f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$.

根据积分不等式性,有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_a^b\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left.\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}\right|_a^b=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

所以 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

P204/习题9.4/11 设f在$[a,b]$二阶可导，且$f''(x)>0$. 证明:

$$(1)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证3 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=a+\lambda(b-a)}{=} (b-a)\int_0^1 f(a+\lambda(b-a))\,\mathrm{d}\lambda,$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=b+\lambda(a-b)}{=} (a-b)\int_1^0 f(b+\lambda(a-b))\,\mathrm{d}\lambda=(b-a)\int_0^1 f(b+\lambda(a-b))\,\mathrm{d}\lambda,$$

从而 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left((b-a)\int_0^1 f(a+\lambda(b-a))\,\mathrm{d}\lambda+(b-a)\int_0^1 f(b+\lambda(a-b))\,\mathrm{d}\lambda\right)$$

$$=(b-a)\left(\int_0^1\left(\frac{1}{2}f(a+\lambda(b-a))+\frac{1}{2}f(b+\lambda(a-b))\right)\mathrm{d}\lambda\right),$$

由于$f''(x)>0$，因此f在$[a,b]$上是凸的，从而

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge(b-a)\int_0^1 f\left(\frac{a+\lambda(b-a)}{2}+\frac{b+\lambda(a-b)}{2}\right)\mathrm{d}\lambda$$

$$=(b-a)\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}\lambda=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

所以 $$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

P204/习题9.4/11 设f在$[a,b]$二阶可导，且$f''(x)>0$. 证明:

$$(1)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证4 当$x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]$时，$a+b-x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$.

由于$f''(x)>0$，所以$f(x)$在$[a,b]$上是凸函数. 根据凸函数的定义知，

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b-x+x}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}(a+b-x)+\frac{1}{2}x\right)\le\frac{1}{2}f(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x).$$

于是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$,

对积分$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$作换元 $u=a+b-x$，则

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{a+b}{2}}^a f(a+b-u)\mathrm{d}u=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

从而 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\big(f(x)+f(a+b-x)\big)\mathrm{d}x\ge 2\int_a^{\frac{a+b}{2}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$,

即 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

P204/习题9.4/11 设f在$[a,b]$二阶可导，且$f''(x)>0$. 证明:

$$(1)\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证5 由于$f''(x)>0$, 所以f在$[a,b]$上是凸函数. 根据凸函数的定义知,

$\forall x_1,x_2\in[a,b]$, 有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2).$

由于f在$[a,b]$上可积, 对$[a,b]$进行特殊分割T:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=\frac{a+b}{2}=y_m<y_{m-1}<\cdots<y_1<y_0=b$$

满足x_i与y_i关于$x_m=\frac{a+b}{2}$对称, $i=1,\cdots,m-1$. 因此$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=y_{i-1}-y_i=\Delta y_i>0, i=1,2,\cdots,m.$

再取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$与$\eta_i\in[y_i,y_{i-1}]$关于$\frac{a+b}{2}$对称, 即 $\frac{\xi_i+\eta_i}{2}=\frac{a+b}{2}, i=1,2,\cdots,m-1.$

由f在$[a,b]$上是凸函数知,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{\xi_i+\eta_i}{2}\right)\le\frac{1}{2}f(\xi_i)+\frac{1}{2}f(\eta_i), i=1,2,\cdots,m-1.$$

于是
$$\sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^m f(\eta_i)\Delta y_i=\sum_{i=1}^m\big(f(\xi_i)+f(\eta_i)\big)\Delta x_i\ge\sum_{i=1}^m 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\Delta x_i=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\sum_{i=1}^m\Delta x_i$$
$$=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

令$\|T\|\to0$,即得
$$\lim_{\|T\|\to0}\left(\sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^m f(\eta_i)\Delta y_i\right)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

即
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

P204/习题9.4/11 设f在$[a,b]$二阶可导，且$f''(x)>0$. 证明:

(2) 又若$f(x)\le 0, x\in[a,b]$, 则 $f(x)\ge \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, x\in[a,b]$.

证 由于$f''(x)>0$, 所以f在$[a,b]$上是凸函数. 根据凸函数的等价条件知,

$\forall x,t\in[a,b]$, 有 $f(x)\ge f(t)+f'(t)(x-t)$.

两边在$[a,b]$上关于t积分, 根据积分不等式性, 有

$$f(x)(b-a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}t\ge\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_a^b f'(t)(x-t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+x\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t-\int_a^b tf'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+x\big(f(b)-f(a)\big)-\int_a^b t\,\mathrm{d}f(t)$$

$$=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+x\big(f(b)-f(a)\big)-tf(t)\Big|_a^b+\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+(x-b)f(b)+(a-x)f(a),$$

由于$f(x)\le 0, x\in[a,b]$, 故 $(x-b)f(b)+(a-x)f(a)\ge 0$.

从而 $f(x)(b-a)\ge 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即 $f(x)\ge\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, x\in[a,b]$.

补充证明 设f在$[a,b]$二阶可导，且$f''(x)>0$. 证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\lambda b+(1-\lambda)a}{=} \int_0^1 f\big(\lambda b+(1-\lambda)a\big)\,\mathrm{d}\lambda$$

$$\le \int_0^1 \big(\lambda f(b)+(1-\lambda)f(a)\big)\,\mathrm{d}\lambda$$

$$= f(b)\int_0^1 \lambda\,\mathrm{d}\lambda + f(a)\int_0^1 (1-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

$$= f(b)\frac{\lambda^2}{2}\bigg|_0^1 - f(a)\frac{(1-\lambda)^2}{2}\bigg|_0^1$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

P204/习题9.4/12

证明：(1) $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.

证1 (1) 由于

$$\frac{1}{k+1}=\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\mathrm{d}x<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_k^{k+1}=\ln(k+1)-\ln k<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\mathrm{d}x=\frac{1}{k},$$

从而 $\frac{1}{2}<\ln 2-\ln 1<1$, $\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$, $\cdots$, $\frac{1}{n}<\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n-1}$,

相加后得 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$,

所以 $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$.

(2) 由(1)得 $1<\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}<\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}<\dfrac{1}{\ln n}+1$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln n}+1\right)=1$,

根据迫敛性知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.

P204/习题9.4/12

证明:(1) $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.

证2 (1) 由于

$$\ln(1+n)=\int_0^n\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x<\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{1+k}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+k},$$

$$\ln n=\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x>\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1},$$

所以 $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n.$

(2) 利用Stolz公式, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln n+1-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1.$$