Ch8 不定积分

总结及习题评讲

主讲教师: 顾燕红

办公室: 汇星楼409

办公室答疑时间: 每周四下午2点至4点

微信号: 18926511820　QQ号: 58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

数学分析2 —— Ch8 不定积分 —— 总结

- 不定积分
  - 基本概念
    - 原函数
    - 不定积分
    - 不定积分性质
  - 积分方法
    - 基本积分公式
    - 换元积分法
      - 第一换元法 (凑微分)
      - 第二换元法
    - 分部积分法
    - 有理函数积分
    - 三角函数有理式积分
    - 简单无理函数积分

重要定义

原函数

设函数f与F在区间I上都有定义，若

$F'(x)=f(x),\ \ x\in I$, 或 $\mathrm{d}F(x)=F'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x,\ \ x\in I$,

则称F是f在区间I上的一个原函数.

重要定义 不定积分

函数$f(x)$在区间I上的全体原函数$F(x)+C$称为$f(x)$在I上的不定积分，表示为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C \quad \left(F'(x)=f(x)\right),$$

其中x称为积分变量，$f(x)$称为被积函数，

$f(x)\,\mathrm{d}x$称为被积表达式，$\int$ 称为积分号.

重要性质 不定积分的线性运算法则

若函数$f(x)$和$g(x)$在区间I都存在原函数，k_1,k_2为任意常数且不同时为零，则$k_1f(x)+k_2g(x)$在I上也存在原函数，且

$$\int\left(k_1f(x)+k_2g(x)\right)\mathrm{d}x=k_1\int f(x)\mathrm{d}x+k_2\int g(x)\mathrm{d}x.$$

重要结论 原函数存在性相关结论

若函数$f(x)$在区间I上连续，则函数$f(x)$在区间I上存在原函数$F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$.

若函数$F(x)$是$f(x)$在区间I上的原函数，则$F(x)$一定可导，当然也是连续的.

重要结论 原函数存在性相关结论

函数$f(x)$在区间I上不连续，则函数$f(x)$在I上可能存在原函数可能不存在原函数.

若函数$f(x)$在区间I上存在第一类间断点，则函数$f(x)$在I上不存在原函数.

若函数$f(x)$在区间I上存在第二类间断点，则函数$f(x)$在I上可能有原函数,也可能没有原函数.

重要结论 原函数存在性相关结论

周期函数的原函数不一定是周期函数.

周期为T的函数$f(x)$, $F(x)$是它的一个原函数,
则$F(x)$为周期T的周期函数 $\Leftrightarrow F(T)=F(0)$.

奇函数的原函数是偶函数.

偶函数的原函数不一定是奇函数.

设$f(x)$为偶函数, $F(x)$是它的一个原函数,
则$F(x)$为奇函数 $\Leftrightarrow F(0)=0$.

不定积分的计算：

1. 利用不定积分的定义.
2. 利用基本积分表.
3. 利用不定积分的线性运算性质.
4. 利用不定积分的第一和第二换元积分法.
5. 利用不定积分的分部积分法.
6. 有理函数的不定积分.
7. 三角函数有理式的不定积分.
8. 简单无理式的不定积分.

P166/习题8.1/4

据理说明为什么每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数.

证 利用反证法证. 假设$f(x)$在I上存在原函数$F(x)$, 即 $F'(x)=f(x), x\in I$.

设x_0是$f(x)$在I上的第一类间断点, 则 $f(x_0-0), f(x_0+0)$都存在.

此时要么 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, 要么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

对$\forall x\in I$, 且$x<x_0$, $F(x)$在$[x,x_0]$上满足Lagrange中值定理的条件,

故$\exists\xi\in(x,x_0)$,使得 $F'(\xi)=\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$. 从而

$$F'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}F'(\xi)=\lim_{\xi\to x_0^-}f(\xi)=f(x_0-0).$$

对$\forall x\in I$, 且$x>x_0$, $F(x)$在$[x_0,x]$上满足Lagrange中值定理的条件,

故 $\exists\eta\in(x_0,x)$, 使得$F'(\eta)=\dfrac{F(x_0)-F(x)}{x_0-x}$. 从而

$$F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}F'(\eta)=\lim_{\eta\to x_0^+}f(\eta)=f(x_0+0).$$

又$F(x)$在点x_0可导, 即$F'_-(x_0)=F'_+(x_0)=F'(x_0)=f(x_0)$,

于是$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$, 即$f(x)$在点x_0连续, 这与已知条件矛盾.

故$f(x)$在I上不存在原函数.

P166/习题8.1/5(10) 求不定积分$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\csc^2 x-\sec^2 x\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x-\tan x+C.$$

解 $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x=4\int \frac{\cos 2x}{4\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\mathrm{d}x=4\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x=2\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\mathrm{d}(2x)$$

$$=2\int \frac{1}{\sin^2 2x}\mathrm{d}(\sin 2x)=-\frac{2}{\sin 2x}+C.$$

P166/习题8.1/5(12) 求不定积分 $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x.$

解 $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x=\int\left(x\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\int\left(x\cdot x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{7}{8}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1}+C=\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C.$$

解 $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{7}{8}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1}+C=\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C.$$

P166/习题8.1/5(13) 求不定积分$\displaystyle\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x.$

解 $$\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1+x+1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\arcsin x+C.$$

解 $$\int\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\arcsin x+C.$$

P166/习题8.1/5(15) 求不定积分$\int \cos x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

解 $\int \cos x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cos 3x+\cos x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x+\sin x\right)+C$

$=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x+C.$

解 $\int \cos x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x=\int\cos x\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)\mathrm{d}x=2\int\cos^3 x\,\mathrm{d}x-\int\cos x\,\mathrm{d}x$

$=2\int(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}\sin x-\sin x=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C.$

解 $\int \cos x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x=\int\cos 2x\,\mathrm{d}\sin x=\int\left(1-2\sin^2 x\right)\mathrm{d}\sin x$

$=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C.$

$$\cos A\cdot\cos B=\frac{1}{2}\left(\cos\left(A+B\right)+\cos\left(A-B\right)\right)$$

P166/习题8.1/5(16) 求不定积分$\int\left(e^x-e^{-x}\right)^3 dx.$

解 $\int\left(e^x-e^{-x}\right)^3 dx=\int\left(e^{3x}-3e^{2x}\cdot e^{-x}+3e^x\cdot e^{-2x}-e^{-3x}\right)dx$

$$=\int\left(e^3\right)^x dx-3\int e^x dx+3\int\left(e^{-1}\right)^x dx-\int\left(e^{-3}\right)^x dx$$

$$=\frac{\left(e^3\right)^x}{\ln e^3}-3e^x+3\frac{\left(e^{-1}\right)^x}{\ln e^{-1}}-\frac{\left(e^{-3}\right)^x}{\ln e^{-3}}+C=\frac{1}{3}e^{3x}-3e^x-3e^{-x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+C.$$

解 $\int\left(e^x-e^{-x}\right)^3 dx=\int\left(e^x-e^{-x}\right)^2 d\left(e^x+e^{-x}\right)$

$$=\int\left(\left(e^x+e^{-x}\right)^2-4\right)d\left(e^x+e^{-x}\right)$$

$$=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^3}{3}-4\left(e^x+e^{-x}\right)+C.$$

P166/习题8.1/5(17) 求不定积分$\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x=\int\left(2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)\mathrm{d}x$

$$=2\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}}-\frac{1}{5}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{5}\frac{1}{2^x\ln 2}-2\frac{1}{5^x\ln 5}+C.$$

P166/习题8.1/5(18) 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sqrt{\left(x^2+x^{-2}\right)^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{x^2+x^{-2}}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+x^{-5}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|+\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+C$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$$

P166/习题8.1/6(1) 求不定积分$\int e^{-|x|}\,dx$.

解 设$f(x)=e^{-|x|}=\begin{cases} e^{-x}, x\ge 0 \\ e^{x}, \quad x<0 \end{cases}$. 由于$f$在$\mathbb{R}$上连续，故$f$在$\mathbb{R}$上存在原函数$F$.

当$x\ge 0$时，由于$F'(x)=e^{-x}$，所以$F(x)=-e^{-x}+C_1$.

当$x<0$时，由于$F'(x)=e^{x}$，所以$F(x)=e^{x}+C_2$.

令$C_1=0$，则 $F(x)=\begin{cases} -e^{-x}, \quad x\ge 0 \\ e^{x}+C_2, x<0 \end{cases}$. 已知$F$在$x=0$处连续，故

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^-}F(x)=F(0),$$

即 $-1=1+C_2$，解得 $C_2=-2$. 故 $F(x)=\begin{cases} -e^{-x}, \ x\ge 0 \\ e^{x}-2, x<0 \end{cases}$.

所以 $\int e^{-|x|}\,dx=F(x)+C$.

P166/习题8.1/7 设$f'(\arctan x)=x^2$，求$f(x)$.

解 由于$f(\arctan x)=\int f'(\arctan x)\,\mathrm{d}\arctan x=\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=x-\arctan x+C,$$

故$f(x)=\tan x-x+C$.

解 令 $t=\arctan x$, 即 $x=\tan t$, 从而 $f'(t)=\tan^2 t$.

因此 $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.

错误解法 $f(x)=\int f'(\arctan x)\,\mathrm{d}\arctan x$

$$f(x)=\int f'(\arctan x)\mathrm{d}x$$

P166/习题8.1/8 举例说明含有第二类间断点的函数可能有原函数.

解 例如函数 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,

但 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在原函数 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

对于Dirichlet函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$,

在定义域$\mathbb{R}$上任何一点都是其第二类间断点,

根据Darboux定理知, $D(x)$在$\mathbb{R}$上不存在原函数.

P166/习题8.1/8 举例说明含有第二类间断点的函数可能有原函数.

例如函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{cases}$，其中$x=0$是$f(x)$的第二类间断点,

$f(x)$在$\mathbb{R}$上不存在原函数. 理由如下:

假设f在$\mathbb{R}$上存在原函数$F(x)$, 即 $F'(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$.

当$x>0$时, $F'(x)=\dfrac{1}{x}$, 所以 $F(x)=\ln x+C_1$.

当$x<0$时, $F'(x)=\dfrac{1}{x}$, 所以$F(x)=\ln(-x)+C_2$.

令$C_1=0$, 则 $F(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x)+C_2, & x<0\end{cases}$. 已知$F$在$x=0$处连续, 故

$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=F(0)$, 但 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(-x)=-\infty$,

所以F在$x=0$处不可能连续, 产生矛盾. 因此$f(x)$在$\mathbb{R}$上不存在原函数.

P173/习题8.2/1(10) 用至少三种方法求不定积分$\int \csc x \,\mathrm{d}x$.

解1 $$\int \csc x \,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x}=\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x-1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C.$$

解2 $$\int \csc x \,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\frac{x}{2}=-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

解3 $$\int \csc x \,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

P173/习题8.2/1(10) 用至少三种方法求不定积分 $\int \csc x \, \mathrm{d}x$.

解4 $$\int \csc x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x}$$

$$= \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C.$$

解5 $$\int \csc x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\csc x(\csc x + \cot x)}{\csc x + \cot x} \mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\csc x + \cot x)}{\csc x + \cot x}$$

$$= -\ln\left|\csc x + \cot x\right| + C = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C.$$

解6 $$\int \csc x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x = \int \frac{\sec x}{\tan x} \mathrm{d}x = \int \frac{\sec x \tan x}{\tan^2 x} \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\sec^2 x - 1} \mathrm{d}\sec x = \frac{1}{2} \ln \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1} + C.$$

P173/习题8.2/1(10) 用至少三种方法求不定积分$\int \csc x \,\mathrm{d}x$.

解7 令$t=\tan\frac{x}{2}$,即$x=2\arctan t$,则 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$,从而

$$\int \csc x \,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

解8

$$\int \csc x \,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=-\int \frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\overset{t=x+\frac{\pi}{2}}{=}-\int \frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=-\int \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=-\int \frac{\sec^2\frac{t}{2}}{1-\tan^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=2\int \frac{1}{\tan^2\frac{t}{2}-1}\mathrm{d}\tan\frac{t}{2}$$

$$=\ln\left|\frac{\tan\frac{t}{2}-1}{\tan\frac{t}{2}+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1}\right|+C.$$

P173/习题8.2/1(10) 用至少三种方法求不定积分$\int \csc x \,\mathrm{d}x$.

解9 $$\int \csc x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\tan\frac{x}{2} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

P173/习题8.2/1(21) 求不定积分$\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x$.

解 $\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x = \int \cos^4 x \,\mathrm{d}\sin x = \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \mathrm{d}\sin x$

$$= \int \left(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x\right) \mathrm{d}\sin x$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

P173/习题8.2/1(23) 求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\arctan\mathrm{e}^x+C.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{1}{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$

$$=-\arctan\mathrm{e}^{-x}+C.$$

解 令 $t=\mathrm{e}^x$, 即 $x=\ln t$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$, 从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t=\arctan t+C=\arctan\mathrm{e}^x+C.$$

P173/习题8.2/1(24) 求不定积分$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\mathrm{d}x$.

解 $$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(x^2-3x+8\right)'}{x^2-3x+8}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x^2-3x+8}\mathrm{d}\left(x^2-3x+8\right)$$

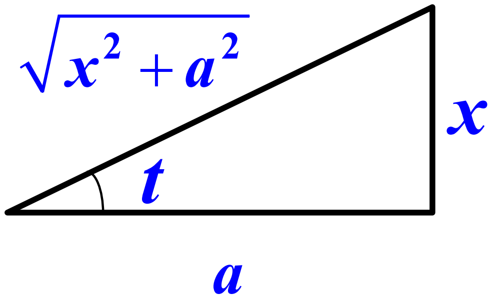
$$= \ln\left(x^2-3x+8\right)+C.$$

P173/习题8.2/1(27) 求不定积分$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}(a>0)$.

解1 令$x=a\tan t$, $|t|<\dfrac{\pi}{2}$. 则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$. 从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a^3\sec^3 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

$\tan t=\dfrac{x}{a}\Rightarrow$  $\Rightarrow\sin t=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

P173/习题8.2/1(27) 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}(a>0)$.

解2
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x - \frac{1}{a^2}\int x\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2a^2}\int x\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\left(x^2+a^2\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x + \frac{1}{a^2}\int x\,\mathrm{d}\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x + \frac{x}{a^2\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

P173/习题8.2/1(28) 求不定积分 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解1 令 $x=\sin t$, $|t|<\frac{\pi}{2}$. 则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$. 从而

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{\sin^5 t}{\cos t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int \sin^5 t\,\mathrm{d}t=-\int\left(1-\cos^2 t\right)^2\mathrm{d}\cos t$$

$$=-\int\left(1-2\cos^2 t+\cos^4 t\right)\mathrm{d}\cos t$$

$$=-\cos t+\frac{2}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t+C$$

$$=-\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}+C.$$

P173/习题8.2/1(28) 求不定积分 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解2 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\left(1-x^2\right) \overset{t=1-x^2}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

$= -\frac{1}{2}\int\left(t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}t$

$= -t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + C$

$= -\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}} + C.$

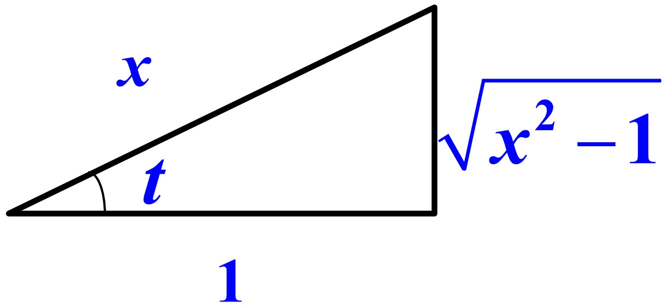
P173/习题8.2/1(36) 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

解1 当 $x>1$ 时,令 $x=\sec t, 0<t<\frac{\pi}{2}$. 则 $\mathrm{d}x=\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$. 从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{1}{\sec^4 t\cdot\tan t}\cdot\sec t\tan t\,\mathrm{d}t=\int\cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(1-\sin^2 t\right)\mathrm{d}\sin t=\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C.$$

$$\sec t=x\Rightarrow\cos t=\frac{1}{x}$$



$$\Rightarrow\sin t=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

当 $x<-1$ 时,令 $x=-t$. 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^4\sqrt{t^2-1}}=-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}+\frac{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3t^3}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C.$$

因此

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C.$$

P173/习题8.2/1(36) 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

解2 当 $x>1$ 时，$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\frac{1}{x^2}}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$，令 $t=\dfrac{1}{x^2}$. 则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}=\frac{1}{2}\int\frac{1-t-1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1-t}-\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{(1-t)^{\frac{3}{2}}}{3}+\sqrt{1-t}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C.$$

当 $x<-1$ 时，令 $x=-t$. 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. 从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^4\sqrt{t^2-1}}=-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}+\frac{\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3t^3}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C.$$

因此 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C.$$

P173/习题8.2/2(4) 求不定积分$\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x.$

解 $$\int\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\ln x\,\mathrm{d}\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\ln x-\int\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln x-\frac{1}{4x^2}+C.$$

P173/习题8.2/2(6) 求不定积分$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解 $$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x=\int \arctan x\,\mathrm{d}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

P173/习题8.2/2(7) 求不定积分$\displaystyle\int\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x$.

解1
$$\int\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x=\int\ln(\ln x)\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$$
$$=x\ln(\ln x)-\int x\,\mathrm{d}(\ln(\ln x))+\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$$
$$=x\ln(\ln x)-\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$$
$$=x\ln(\ln x)+C.$$

P173/习题8.2/2(7) 求不定积分 $\int\left(\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x.$

解2 $\int\left(\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x=\int\ln(\ln x)\mathrm{d}x+\int\dfrac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$

$$=\int\ln(\ln x)\mathrm{d}x+\int\frac{x}{x\ln x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\ln(\ln x)\mathrm{d}x+\int x\,\mathrm{d}\ln(\ln x)$$

$$=\int\ln(\ln x)\mathrm{d}x+x\ln(\ln x)-\int\ln(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$=x\ln(\ln x)+C.$$

P173/习题8.2/2(7) 求不定积分 $\displaystyle\int\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x.$

解3 令 $t=\ln x$,即 $x=\mathrm{e}^t$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. 从而

$$\int\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(\ln t+\frac{1}{t}\right)\cdot\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int\mathrm{e}^t\ln t\,\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t=\int\ln t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t+\int\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^t\ln t-\int\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t\ln t+C=x\ln(\ln x)+C.$$

P173/习题8.2/2(9) 求不定积分$\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x$.

解 $\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x = \int \sec x \cdot \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sec x \,\mathrm{d}\tan x$

$= \sec x \tan x - \int \tan x \,\mathrm{d}\sec x = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \,\mathrm{d}x$

$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \,\mathrm{d}x$

$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \,\mathrm{d}x + \int \sec x \,\mathrm{d}x$

$= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \,\mathrm{d}x,$

所以 $\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$

P173/习题8.2/4(1)

证明：若$I_n=\int \tan^n x\,\mathrm{d}x, n=2,3,\cdots$，则$I_n=\dfrac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$.

证 $I_n=\int \tan^n x\,\mathrm{d}x=\int \tan^{n-2}x\tan^2 x\,\mathrm{d}x$

$$=\int \tan^{n-2}x\left(\sec^2 x-1\right)\mathrm{d}x=\int \tan^{n-2}x\sec^2 x\,\mathrm{d}x-\int \tan^{n-2}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \tan^{n-2}x\,\mathrm{d}\tan x-I_{n-2}\quad=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}, n=2,3,\cdots.$$

P173/习题8.2/6(2) 求$I_n=\int(\ln x)^n\,\mathrm{d}x\,(n\in\mathbb{N}_+)$的递推公式.

解 $$I_n=\int(\ln x)^n\,\mathrm{d}x=x(\ln x)^n-\int x\,\mathrm{d}(\ln x)^n$$

$$=x(\ln x)^n-n\int x\cdot(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x=x(\ln x)^n-nI_{n-1},$$

$$I_1=\int\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\,\mathrm{d}\ln x=x\ln x-\int\mathrm{d}x=x\ln x-x+C.$$

P173/习题8.2/6(4) 求$I_n=\int e^{ax}\sin^n x\,dx\,(n\in\mathbb{N}_+)$的递推公式.

解 $$I_n=\int e^{ax}\sin^n x\,dx=\frac{1}{a}\int\sin^n x\,de^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{1}{a}\int e^{ax}\,d\sin^n x$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a}\int e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}\int\sin^{n-1}x\cos x\,de^{ax}$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n}{a^2}\int e^{ax}\,d\sin^{n-1}x\cos x$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n}{a^2}\int e^{ax}\left((n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-\sin^n x\right)dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n}{a^2}\int e^{ax}\left((n-1)\sin^{n-2}x-n\sin^n x\right)dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-1}-\frac{n^2}{a^2}I_n,$$

从而 $$I_n=\frac{a}{n^2+a^2}e^{ax}\sin^n x-\frac{n}{n^2+a^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n(n-1)}{n^2+a^2}I_{n-2},$$

$$I_0=\int e^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a}+C,$$

$$I_1=\int e^{ax}\sin x\,dx=\frac{1}{a}\int\sin x\,de^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\sin x-\frac{1}{a}\int e^{ax}\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin x-\frac{1}{a^2}\int\cos x\,de^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\sin x-\frac{1}{a^2}e^{ax}\cos x-\frac{1}{a^2}\int e^{ax}\sin x\,dx$$

$$=\frac{a}{1+a^2}e^{ax}\sin x-\frac{1}{1+a^2}e^{ax}\cos x+C.$$