Ch11 反常积分

总结及习题评讲(1)

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周四下午2点至4点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

- 反常积分
  - 反常积分敛散性的定义
  - 无穷积分
    - 无穷积分的性质
    - 无穷积分敛散性判别法
  - 瑕积分
    - 瑕积分的性质
    - 瑕积分敛散性判别法

重要定义 无穷积分敛散性的定义

设函数f在$[a,+\infty)$有定义,且在任何有限区间$[a,u]$上可积.若存在极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x=J,$$

则称无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,且收敛于$J$. 否则称无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

设函数f在$(-\infty,b]$有定义,且在任何有限区间$[u,b]$上可积.若存在极限

$$\lim_{v\to-\infty}\int_v^b f(x)\,\mathrm{d}x=J,$$

则称无穷积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,且收敛于$J$. 否则称无穷积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

设函数f在$(-\infty,+\infty)$有定义,且在任何有限区间$[v,u]$上可积.对$\forall c\in\mathbb{R}$,若两个无穷积分

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\text{与}\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$$

都收敛,则称无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$.

若至少有一个发散,则称无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

重要定义　瑕积分敛散性的定义

设函数f在$(a,b]$有定义,在点a的任一右邻域上无界,在任何内闭区间$[u,b]\subset(a,b]$上有界且可积. 如果存在极限 $\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x=J$,

则称瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,且收敛于$J$. 否则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

设函数f在$[a,b)$有定义,在点b的任一左邻域上无界,在任何内闭区间$[a,u]\subset[a,b)$上有界且可积. 如果存在极限 $\lim\limits_{u\to b^-}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x=J$,

则称瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,且收敛于$J$. 否则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

设函数f在$[a,c)\cup(c,b]$有定义,在点c的任一邻域上无界,在任何$[a,u]\subset[a,c)$和$[v,b]\subset(c,b]$上都可积. 若两个瑕积分 $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛,则称瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

若至少有一个发散,则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

重要定义 绝对收敛、条件收敛的定义

若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散，则称 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

若 $\int_a^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，其中 $x=a$ 是 $f(x)$ 的瑕点，则称 $\int_a^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

若 $\int_a^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而 $\int_a^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散，则称 $\int_a^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

重要性质 无穷积分的柯西收敛准则

无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件是：

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists G \ge a$, 当 $u_1, u_2 > G$ 时, 有

$$\left|\int_a^{u_1} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散的充要条件是：

$\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall G \ge a$, $\exists u_1, u_2 > G$, 使得 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \ge \varepsilon_0$.

BY GYH

重要性质 瑕积分的柯西收敛准则

瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (瑕点为a)收敛的充要条件是：

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,当$u_1, u_2 \in (a, a+\delta)$时,有

$$\left|\int_{u_1}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{u_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (瑕点为a)发散的充要条件是：

$\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists u_1, u_2 \in (a, a+\delta)$, 使得 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geq \varepsilon_0$.

重要性质 无穷积分的线性性质

若$\int_a^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}\,x$与$\int_a^{+\infty} f_2(x)\,\mathrm{d}\,x$都收敛，$k_1, k_2$为任意常数，则

$$\int_a^{+\infty}\big(k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\big)\,\mathrm{d}\,x$$

也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}\big(k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\big)\,\mathrm{d}\,x = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}\,x + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

瑕积分的线性性质

设函数f_1与f_2的瑕点同为$x=a$，k_1, k_2为任意常数.

若$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}\,x$和$\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}\,x$都收敛，则$\int_a^b\big(k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\big)\,\mathrm{d}\,x$

也收敛，且

$$\int_a^b\big(k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\big)\,\mathrm{d}\,x = k_1\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}\,x + k_2\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

重要性质 无穷积分的区间可加性

若 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\ (\forall b>a)$，同时收敛或同时发散，且有 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为黎曼积分.

瑕积分的区间可加性

设函数 f 的瑕点为 $x=a$，f 在 $(a,b]$ 的任一闭区间 $[u,b]\ (u>a)$ 上可积，若 $c\in(a,b)$，则 $\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散，且有

$$\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\int_c^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为黎曼积分.

重要性质 无穷积分收敛的充要条件

无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists G \geq a,$ 当 $u > G$ 时, 有 $\left|\int_u^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$

瑕积分收敛的充要条件

瑕积分 $\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛(a是瑕点)的充要条件是：

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$ 当 $u \in (a, a+\delta)$ 时, 有 $\left|\int_a^{u} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$

重要性质 绝对收敛无穷积分的收敛性

若f在任何有限区间$[a,u]$上可积,且$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$收敛,则$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$也收敛,并有 $\left|\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x.$

绝对收敛瑕积分的收敛性

设函数 f 的瑕点为 $x=a$, f 在 $(a,b]$的任一闭区间 $[u,b]$ $(u>a)$上可积,则 $\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 并有

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

重要性质

非负函数无穷积分收敛的充要条件

设定义在$[a,+\infty)$上的非负函数f在任何有限区间$[a,u]$上可积，则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛的充要条件是：$\exists M>0$，使得对$\forall u\in[a,+\infty)$，有

$$\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x \le M.$$

非负函数瑕积分收敛的充要条件

若定义在$(a,b]$上的非负函数$f(x)$，在任意闭区间$[u,b]\,(u>a)$上可积，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛的充要条件是：$\exists M>0$，使得对$\forall u\in(a,b]$，有

$$\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M.$$

判别法 非负函数无穷积分的比较判别法

设定义在$[a,+\infty)$上的两个非负函数f,g在任何有限区间$[a,u]$上可积，且满足$f(x)\le g(x), x\in[a,+\infty)$，

则当$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$亦收敛；当$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$亦发散.

非负函数无穷积分的比较判别法的极限形式

设定义在$[a,+\infty)$上的两个非负函数f,g在任何有限区间$[a,u]$上可积，$g(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$，则

(i)当$0<c<+\infty$时，$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$同敛散；

(ii) 当$c=0$时，由$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$收敛可得$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛；

(iii) 当$c=+\infty$时，由$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$发散可得$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

判别法 非负函数无穷积分的柯西判别法

设f是定义在$[a,+\infty)(a>0)$上的非负函数,在任何有限区间$[a,u]$上可积,则

(i) 当 $f(x)\le\dfrac{1}{x^p}$,且$p>1$时, $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 当 $f(x)\ge\dfrac{1}{x^p}$,且$p\le 1$时, $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

非负函数无穷积分的柯西判别法的极限形式

设f是定义在$[a,+\infty)(a>0)$上的非负函数,在任何有限区间$[a,u]$上可积,

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=\lambda$,则

(i) 当 $p>1,\ 0\le\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 当 $p\le 1,\ 0<\lambda\le+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

判别法 无穷积分的狄利克雷判别法

如果函数f,g满足：

(1)$F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$ 在$[a,+\infty)$上有界，(2)$g(x)$在$[a,+\infty)$上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$，

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

无穷积分的阿贝尔判别法

如果函数f,g满足：

(1)$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，(2)$g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界，

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

判别法 非负函数瑕积分的比较判别法

设定义在 $(a,b]$ 上的两个非负函数 f 与 g, 瑕点同为 a, 在任何 $[u,b]\subset(a,b]$上都可积, 且满足 $f(x)\le g(x),\ x\in(a,b]$,

则当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 亦收敛; 当 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散时, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 亦发散.

非负函数瑕积分的比较判别法的极限形式

设定义在 $(a,b]$ 上的两个非负函数 f 与 g, 瑕点同为 a, 在任何 $[u,b]\subset(a,b]$上都可积, $g(x)>0$, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$, 则

(i)当 $0<c<+\infty$时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散;

(ii) 当 $c=0$时, 由 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛可得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(iii) 当 $c=+\infty$时, 由 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散可得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

判别法　非负函数瑕积分的柯西判别法

设f是定义在$(a,b]$上的非负函数,瑕点为a,在任何$[u,b]\subset(a,b]$上都可积,则

(i) 当$f(x)\le\dfrac{1}{(x-a)^p}$,且$0<p<1$时,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛;

(ii) 当$f(x)\ge\dfrac{1}{(x-a)^p}$,且$p\ge 1$时,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

非负函数瑕积分的柯西判别法的极限形式

设f是定义在$(a,b]$上的非负函数,瑕点为a,在任何$[u,b]\subset(a,b]$上都可积,

若$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=\lambda$,则

(i) 当$0<p<1$, $0\le\lambda<+\infty$时,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛;

(ii) 当$p\ge 1$, $0<\lambda\le+\infty$时,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

判别法 非负函数瑕积分的柯西判别法

设f是定义在$[a,b)$上的非负函数,瑕点为b,在任何$[a,u]\subset[a,b)$上都可积,则

(i) 当$f(x)\le\dfrac{1}{(b-x)^p}$,且$0<p<1$时,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛;

(ii) 当$f(x)\ge\dfrac{1}{(b-x)^p}$,且$p\ge1$时,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

非负函数瑕积分的柯西判别法的极限形式

设f是定义在$[a,b)$上的非负函数,瑕点为b,在任何$[a,u]\subset[a,b)$上都可积,

若$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^p f(x)=\lambda$,则

(i) 当$0<p<1$, $0\le\lambda<+\infty$时,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛;

(ii) 当$p\ge1$, $0<\lambda\le+\infty$时,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

判别法 瑕积分的狄利克雷判别法

设a为$f(x)$的瑕点,对于瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$,

若(1)$F(u)=\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 在$(a,b]$上有界,(2)$g(x)$在$(a,b]$上单调且$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$,

则$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

瑕积分的阿贝尔判别法

设a为$f(x)$的瑕点,对于瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$,

若(1)瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,(2)$g(x)$在$(a,b]$上单调有界,

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

重要结论

无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}\,(p\in\mathbb{R})$的敛散性：

当$p>1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}$收敛，且收敛于$\frac{1}{p-1}$；

当$p\le 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}$发散。

$\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}\;(p\in\mathbb{R})$的敛散性：

当$0<p<1$时，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}$收敛，且收敛于$\frac{1}{1-p}$；

当$1\le p<+\infty$时，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{x^p}$发散。

反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}\,x$的敛散性：无论$p$取何值，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}\,x$都发散。

重要结论

无穷积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性：

当 $p>1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ 收敛，收敛于 $\frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}$；

当 $p\le 1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ 发散.

无穷积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln x}\mathrm{d}x$，$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性：

当 $p>1$ 时，收敛；

当 $p\le 1$ 时，发散.

无穷积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 的敛散性：

当 $p=1,q>1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 收敛；

当 $p=1,q\le 1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 发散；

当 $p>1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 收敛；

当 $p<1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p(\ln x)^q}\mathrm{d}x$ 发散.

重要结论

反常积分$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x$的敛散性：当$p>1$时，$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x$收敛；当$p\le 1$时，$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x$发散.

反常积分$\int_1^{e}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$的敛散性：当$p<1$时，$\int_1^{e}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$收敛；当$p\ge 1$时，$\int_1^{e}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$发散.

反常积分$\int_0^{1}\frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x$的敛散性：无论$p$取何值，$\int_0^{1}\frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x$都发散.

重要结论

瑕积分 $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^p \ln x} \mathrm{d}x$ 的敛散性：

当 $p < 1$ 时，$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^p \ln x} \mathrm{d}x$ 收敛；

当 $p \geq 1$ 时，$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^p \ln x} \mathrm{d}x$ 发散.

瑕积分 $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^p (-\ln x)^q} \mathrm{d}x$ 的敛散性：

当 $p = 1, q > 1$ 时，$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^p (-\ln x)^q} \mathrm{d}x$ 收敛；

当 $p = 1, q \leq 1$ 时，$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^p (-\ln x)^q} \mathrm{d}x$ 发散；

当 $p < 1$ 时，$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^p (-\ln x)^q} \mathrm{d}x$ 收敛；

当 $p \geq 1$ 时，$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^p (-\ln x)^q} \mathrm{d}x$ 发散.

重要结论

无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\,(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性：

当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛；

当 $0<p\le 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛；

当 $p\le 0$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x\,(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性：

当 $p<1$ 时，$\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛；

当 $1\le p<2$ 时，$\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛；

当 $p\ge 2$ 时，$\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^p}\mathrm{d}x\,(b\ne 0,p\in\mathbb{R})$ 的敛散性：

当 $1<p<2$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛；

当 $0<p\le 1$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛；

当 $p\le 0, p\ge 2$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

重要结论 无穷积分(瑕积分)敛散性的各种判别法：

(1)利用反常积分敛散性的定义判断反常积分的敛散性：

通过计算变上限积分或变下限积分的极限来判断.

(2)利用反常积分的柯西收敛准则.

(3)利用反常积分的线性性质.

(4)利用反常积分的绝对收敛结论.

(5)利用比较判别法或比较判别法的极限形式.

(6)利用柯西判别法或柯西判别法的极限形式.

(7)利用狄利克雷判别法.

(8)利用阿贝尔判别法.

重要结论

用运算性质判断敛散性：

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$收敛, 则 $\int_a^{+\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big)\,\mathrm{d}x$收敛.

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$发散, 则 $\int_a^{+\infty} \big(f(x) \pm g(x)\big)\,\mathrm{d}x$发散.

若反常积分既是无穷积分又是瑕积分,

需要拆成几个单纯形式的反常积分,

当且仅当所有反常积分都收敛,原来的反常积分才收敛.

重要结论 反常积分收敛与被积函数的关系：

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛不能推出$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，且$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)(x\to+\infty).$

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续不能推出$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$都收敛$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

重要结论

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$、瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$的关系：

$\int_a^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$收敛不能推出$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛不能推出$\int_a^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛不能推出$\int_a^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

$x=a$是瑕点,$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛不能推出$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

$x=a$是瑕点,$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$收敛$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛.

重要结论

$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$的敛散性：

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$存在 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛.

$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$条件收敛，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$存在不能推出$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

$f(x)$为$[a,+\infty)$上的非负连续函数，$\int_a^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

$\int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

重要结论

$$h(x) \le f(x) \le g(x), \int_a^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{收敛}.$$

P251习题11.1/1(3) 讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$ 的敛散性,若收敛,则求其值.

解 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^{u}e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\Big|_0^u=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-2e^{-\frac{u}{2}}+2\right)=2,$

根据无穷积分敛散性的定义知 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$ 收敛,且收敛于2.

若只需判断无穷积分的敛散性,可按如下方法:

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$,其中 $\int_0^{1}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$ 是定积分,对于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}=0$$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛,比较判别法的极限形式

$\Rightarrow$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$ 收敛.

$p=2>1,\lambda=0$,柯西判别法的极限形式

P251习题11.1/1(4) 讨论无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}$的敛散性,若收敛,则求其值.

解 $$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}=\lim_{u\to+\infty}\int_1^u\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}=\lim_{u\to+\infty}\int_1^u\left(\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+D}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\int_1^u\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_1^u\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left(\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^u=\lim_{u\to+\infty}\left(\left(\ln\frac{1+u}{u}-\frac{1}{u}\right)-\ln 2+1\right)=1-\ln 2,$$

根据无穷积分敛散性的定义知$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}$收敛,且收敛于$1-\ln 2$.

若只需判断无穷积分的敛散性,可按如下方法:

$$\frac{1}{x^2(1+x)}<\frac{1}{x^3},x\in[1,+\infty)\ \xRightarrow[p=3>1,\text{柯西判别法}]{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x\text{收敛,比较判别法}}\ \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}\text{收敛.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2(1+x)}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}x^3\cdot\frac{1}{x^2(1+x)}=1\ \xRightarrow[p=3>1,\lambda=1,\text{柯西判别法的极限形 式}]{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x\text{收敛,比较判别法的极限形 式}}\ \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}\text{收敛.}$$

P251习题11.1/1(5) 讨论无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$ 的敛散性,若收敛,则求其值.

解 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}+\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$,

其中 $\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}=\lim\limits_{u\to-\infty}\int_{u}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}=\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{4}\int_{u}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$

$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{4}\left(\arctan\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\Bigg|_{u}^{0}=\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{4}\left(\arctan\frac{1}{2}-\arctan\left(u+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8},$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}=\lim_{u\to+\infty}\int_{0}^{u}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{4}\int_{0}^{u}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{4}\left(\arctan\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\Bigg|_{0}^{u}=\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{4}\left(\arctan\left(u+\frac{1}{2}\right)-\arctan\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2},$$

因此 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}=\left(\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$,

根据无穷积分敛散性的定义知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$ 收敛,且收敛于 $\frac{\pi}{4}$.

P251习题11.1/1(5) 讨论无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$的敛散性,若收敛,则求其值.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+2^2}\cancel{=}\frac{1}{4}\left(\arctan\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

P251习题11.1/1(8) 讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性,若收敛,则求其值.

解 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^{u}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\overset{x=\tan t}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^{\arctan u}\sec t\,\mathrm{d}t$

$$=\lim_{u\to+\infty}\ln\left|\sec t+\tan t\right|\Big|_0^{\arctan u}=\lim_{u\to+\infty}\ln\left|\sqrt{1+u^2}+u\right|=+\infty,$$

根据无穷积分的敛散性的定义知 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ 发散.

若只需判断无穷积分的敛散性,可按如下方法:

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{(1+x)^2}}=\frac{1}{1+x},x\in[0,+\infty)$ $\overset{\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^{u}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(1+x)\big|_0^u=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(1+u)=+\infty\text{发散,比较判别法}}{\Longrightarrow}$ $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ 发散.

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$,其中 $\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ 是定积分,对于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1$ $\underset{p=1,\lambda=1,\text{柯西判别法的极限形式}}{\overset{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\text{发散,比较判别法的极限形式}}{\Longrightarrow}}$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ 发散.

P251习题11.1/2(3) 讨论瑕积分 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}}$ 的敛散性,若收敛,则求其值.

解 $x=1$是$\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$的瑕点.

从而 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}},$

其中 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{u\to1^-}\int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{u\to1^-}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^u = \lim_{u\to1^-}\left(2-2\sqrt{1-u}\right) = 2,$

$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}} = \lim_{u\to1^+}\int_u^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}} = \lim_{u\to1^+}\left(2\sqrt{x-1}\right)\Big|_u^2 = \lim_{u\to1^+}\left(2-2\sqrt{u-1}\right) = 2,$

因此 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}} = 2+2=4,$

根据瑕积分敛散性的定义知 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}}$ 收敛,且收敛于4.

P251习题11.1/2(7) 讨论瑕积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$的敛散性,若收敛,则求其值.

解1 $x=0, x=1$是$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的瑕点.

从而 $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}},$$

其中 $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \lim_{u\to0^+}\int_u^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \lim_{u\to0^+}\int_u^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \lim_{u\to0^+}\arcsin(2x-1)\Big|_u^{\frac{1}{2}} = -\lim_{u\to0^+}\arcsin(2u-1) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \lim_{u\to1^-}\int_{\frac{1}{2}}^u \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \lim_{u\to1^-}\int_{\frac{1}{2}}^u \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \lim_{u\to1^-}\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^u = \lim_{u\to1^-}\arcsin(2u-1) = \frac{\pi}{2},$$

因此 $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi,$$

根据瑕积分敛散性的定义知$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$收敛,且收敛于$\pi$.

P251习题11.1/2(7) 讨论瑕积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$的敛散性,若收敛,则求其值.

解2 令$x=\sin^2 t$, 则当$x=0$时,$t=0$;当$x=1$时,$t=\frac{\pi}{2}$. $\mathrm{d}x=2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$.

于是

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos t}{\sqrt{\sin^2 t-\sin^4 t}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t=\pi.$$

根据瑕积分敛散性的定义知$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$收敛,且收敛于$\pi$.

P251习题11.1/2(7) 讨论瑕积分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$的敛散性,若收敛,则求其值.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} \cancel{=} 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$$

P251习题11.1/2(8)讨论瑕积分$\int_0^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x$的敛散性,若收敛,则求其值.

解 $x=0$是$\frac{1}{x(-\ln x)^p}$的瑕点. 当$p>0$时,$x=1$是$\frac{1}{x(-\ln x)^p}$的瑕点.

从而 $$\int_0^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac12} \frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x.$$

对于$\int_0^{\frac12} \frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x$:

当$p=1$时,$$\int_0^{\frac12} \frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac12} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=-\lim_{u\to0^+}\int_u^{\frac12} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=-\lim_{u\to0^+}\left(\ln|\ln x|\right)\Big|_u^{\frac12}$$
$$=-\lim_{u\to0^+}\left(\ln\left|\ln\frac12\right|-\ln|\ln u|\right)=+\infty.$$

当$p\neq1$时,$$\int_0^{\frac12} \frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x=\lim_{u\to0^+}\int_u^{\frac12} \frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x=-\lim_{u\to0^+}\int_u^{\frac12} \frac{1}{(-\ln x)^p}\mathrm{d}(-\ln x)=-\lim_{u\to0^+}\left(\frac{(-\ln x)^{-p+1}}{-p+1}\right)\Big|_u^{\frac12}$$
$$=-\lim_{u\to0^+}\frac{1}{1-p}\left(\left(-\ln\frac12\right)^{1-p}-(-\ln u)^{1-p}\right)=\begin{cases}\frac{1}{(p-1)(-\ln2)^{p-1}}, & 1-p<0\\ +\infty, & 1-p>0\end{cases}.$$

因此当$p>1$时,$\int_0^{\frac12} \frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x$收敛;当$p\le1$时,$\int_0^{\frac12} \frac{1}{x(-\ln x)^p}\mathrm{d}x$发散.

P251习题11.1/2(8) 讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx$ 的敛散性,若收敛,则求其值.

因此当 $p>1$ 时, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx$ 收敛;当 $p\le 1$ 时, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx$ 发散.

对于 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx$:

当 $p=1$ 时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\ln x}dx = -\lim\limits_{u\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^u \frac{1}{x\ln x}dx = -\lim\limits_{u\to 1^-}\left(\ln|\ln x|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^u$

$$= -\lim_{u\to 1^-}\left(\ln|\ln u| - \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right|\right) = +\infty.$$

当 $p\ne 1$ 时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx = \lim\limits_{u\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^u \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx = -\lim\limits_{u\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^u \frac{1}{(-\ln x)^p}d(-\ln x) = -\lim\limits_{u\to 1^-}\left(\frac{(-\ln x)^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^u$

$$= -\lim_{u\to 1^-}\frac{1}{1-p}\left(\left(-\ln u\right)^{1-p} - \left(\ln 2\right)^{1-p}\right) = \begin{cases} \frac{1}{(1-p)(\ln 2)^{p-1}}, & 1-p>0 \\ +\infty, & 1-p<0 \end{cases}.$$

因此当 $p<1$ 时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx$ 收敛;当 $p\ge 1$ 时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx$ 发散.

所以对 $\forall p\in\mathbb{R}$, $\int_0^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx$ 都是发散的.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x(-\ln x)^p}dx = -\int_0^1 \frac{1}{(-\ln x)^p}d(-\ln x) \overset{t=-\ln x}{=} \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^p}dt}$$

BY GYH

P251习题11.1/5 证明：若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，且存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则$A=0$.

证 假设$A\neq 0$，不妨设$A>0$.

已知$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A>0$，根据函数极限的局部保号性知，

$\exists X>a, \forall x>X$，有 $f(x)>\dfrac{A}{2}>0$.

于是，对$\forall u>X$，根据积分不等式性，有

$$\int_a^u f(x)\mathrm{d}x=\int_a^X f(x)\mathrm{d}x+\int_X^u f(x)\mathrm{d}x\geq\int_a^X f(x)\mathrm{d}x+\int_X^u \frac{A}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^X f(x)\mathrm{d}x+\frac{A}{2}(u-X),$$

令$u\to+\infty$，根据函数极限的保不等式性，有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\geq\lim_{u\to+\infty}\left(\int_a^X f(x)\mathrm{d}x+\frac{A}{2}(u-X)\right)=+\infty,$$

所以$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散，这与已知条件矛盾，故$A=0$.

P257习题11.2/4(1) 讨论无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x$的敛散性.

解 由于$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x$, 其中$\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x$是定积分,

根据无穷积分的区间可加性, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x$与$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x$具有相同的敛散性.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}=1,$

其中$p=\frac{4}{3}>1,\lambda=1$, 根据柯西判别法的极限形式知, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x$收敛.

所以$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\mathrm{d}x$收敛.

对于$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$, 若$f(x)\ge 0$, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,

可考察$x\to+\infty$时无穷小量$f(x)$关于$\frac{1}{x}$的阶,

若阶数大于1, 则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛; 若阶数小于等于1, 则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散.

P257习题11.2/4(2) 讨论无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{x}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$的敛散性.

解 由于$\frac{x}{1-\mathrm{e}^x}$在$[1,+\infty)$上不变号,

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x}{\left|1-\mathrm{e}^x\right|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{\mathrm{e}^x}=0,$

其中$p=2>1,\lambda=0$, 根据柯西判别法的极限形式知, $\int_1^{+\infty}\frac{x}{\left|1-\mathrm{e}^x\right|}\mathrm{d}x$收敛,

因此$\int_1^{+\infty}\frac{x}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$收敛,且为绝对收敛.

P257习题11.2/4(3) 讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$

其中 $\int_0^{1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 是定积分,

根据无穷积分的区间可加性, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1,$

其中 $p=\frac{1}{2}\le 1,\lambda=1$, 根据柯西判别法的极限形式知, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散.

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散.

P257习题11.2/4(4) 讨论无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$的敛散性.

解1 由于 $0<\frac{x\arctan x}{1+x^3}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{1+x^3}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$, $x\in[1,+\infty)$,

已知$\int_1^{+\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛, 根据比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$收敛,

且为绝对收敛.

解2 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x\arctan x}{1+x^3}=\frac{\pi}{2}$,

其中$p=2>1,\lambda=\frac{\pi}{2}$, 根据柯西判别法的极限形式知, $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$收敛,

且为绝对收敛.

P257习题11.2/4(4) 讨论无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$的敛散性.

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \quad \times$$

反常积分不能带积分号直接比较

P257习题11.2/4(5) 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 当 $n>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1+n}{2}}\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\frac{n-1}{2}}}=0$,

其中 $p=\dfrac{1+n}{2}>1,\lambda=0$，根据柯西判别法的极限形式知，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $n\le 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-n}\ln(1+x)=+\infty$,

其中 $p=1,\lambda=+\infty$，根据柯西判别法的极限形式知，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ 发散.

所以当 $n>1$ 时, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ 收敛,且为绝对收敛;

当 $n\le 1$ 时, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$ 发散.

P257习题11.2/4(6) 讨论无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x(m,n\ge 0)$的敛散性.

解 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$, 其中$\int_0^{1}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$是定积分,

根据无穷积分的区间可加性,$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$与$\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$具有相同的敛散性.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=1$,

根据柯西判别法的极限形式知, 当$n-m>1$时, $\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$收敛.

当$n-m\le 1$时, $\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$发散.

所以当$n-m>1$时,$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$收敛; 当$n-m\le 1$时,$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$发散.

P257习题11.2/5(1) 讨论无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$为绝对收敛还是条件收敛.

解1 首先考虑$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$的敛散性：$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$：

由于 $\left|\int_1^{u}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right|=\left|2\int_1^{u}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x}\right|=\left|2(-\cos\sqrt{x})\Big|_1^u\right|=\left|2\cos 1-2\cos\sqrt{u}\right|\le 4,u\in[1,+\infty)$,

即$\int_1^{u}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$在$[1,+\infty)$上有界. $\frac{1}{\sqrt{x}}$在$[1,+\infty)$上单调递减,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$. 根据Dirichlet判别法知,$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$收敛.

接着考虑$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\right|\mathrm{d}x$的敛散性：由于$\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\right|\ge\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}=\frac{1-\cos 2\sqrt{x}}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2\sqrt{x}}{2x},x\in[1,+\infty)$.

已知$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$发散. $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2\sqrt{x}}{2x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$：

由于 $\left|\int_1^{u}\frac{\cos 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{2}\int_1^{u}\cos 2\sqrt{x}\mathrm{d}2\sqrt{x}\right|=\left|\frac{1}{2}(\sin 2\sqrt{x})\Big|_1^u\right|=\left|\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{u}-\frac{1}{2}\sin 2\right|\le 1,u\in[1,+\infty)$,

即$\int_1^{u}\frac{\cos 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$在$[1,+\infty)$上有界. $\frac{1}{\sqrt{x}}$在$[1,+\infty)$上单调递减,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$. 根据Dirichlet判别法知,$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2\sqrt{x}}{2x}\mathrm{d}x$收敛.

根据无穷积分的性质知,$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$发散. 根据比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\right|\mathrm{d}x$发散.

所以$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$条件收敛.

P257习题11.2/5(1) 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$ 为绝对收敛还是条件收敛.

解2 令 $t=\sqrt{x}$,即 $x=t^2$,则 $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$,当 $x=1$ 时,$t=1$;当 $x=+\infty$,$t=+\infty$.从而

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

首先考虑 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 的敛散性:由于 $\left|\int_1^u \sin t\mathrm{d}t\right|=\left|(-\cos t)\big|_1^u\right|=|\cos 1-\cos u|\le 2, u\in[1,+\infty)$,

即 $\int_1^u \sin t\mathrm{d}t$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界. $\frac{1}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}=0$. 根据Dirichlet判别法知,$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 收敛.

接着考虑 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$ 的敛散性:由于 $\left|\frac{\sin t}{t}\right|\ge\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1-\cos 2t}{2t}=\frac{1}{2t}-\frac{\cos 2t}{2t}, t\in[1,+\infty)$.

已知 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2t}\mathrm{d}t$ 发散. 考虑 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{2t}\mathrm{d}t$ 的敛散性:由于 $\left|\int_1^u\cos 2t\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{1}{2}(\sin 2t)\big|_1^u\right|=\left|\frac{1}{2}\sin 2u-\frac{1}{2}\sin 2\right|\le 1, u\in[1,+\infty)$,

即 $\int_1^u\cos 2t\mathrm{d}t$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界. $\frac{1}{2t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{2t}=0$. 根据Dirichlet判别法知,$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{2t}\mathrm{d}t$ 收敛.

根据无穷积分的性质知,$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}x$ 发散. 根据比较判别法知,$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$ 发散.

所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 条件收敛,即 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

P257习题11.2/5(1) 讨论无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$为绝对收敛还是条件收敛.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\right|\cancel{=1}$$

由于$\left|\frac{\sin t}{t}\right|\geq\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1-\cos 2t}{2t}=\frac{1}{2t}-\frac{\cos 2t}{2t}, t\in[1,+\infty)$.

已知$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2t}\mathrm{d}t$发散, ~~所以~~$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t$发散.

由于$\int_1^{+\infty}\sin t\,\mathrm{d}t\cancel{=}-\cos t\Big|_1^{+\infty}\leq 2$, 所以$\cancel{\int_1^{+\infty}}\sin t\,\mathrm{d}t$在$[1,+\infty)$上有界.

$\cancel{\sin t}$在$[1,+\infty)$上有界.

当$t\to+\infty$时, $\frac{1}{t}$趋于0,

P257习题11.2/5(2) 讨论无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$为绝对收敛还是条件收敛.

解1 考虑$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|\mathrm{d}x$的敛散性： 由于$\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2}$，$x\in[0,+\infty)$.

又 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\arctan x\right)\Big|_0^u=\lim\limits_{u\to+\infty}\arctan u=\frac{\pi}{2}$,

所以$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛. 根据比较判别法知, $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|\mathrm{d}x$收敛. 所以$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$绝对收敛.

解2 由于$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$, 其中$\int_0^1\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$是定积分,

$\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{x^2}$, $x\in[1,+\infty)$, 已知$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛, 根据比较判别法知, $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|\mathrm{d}x$收敛.

从而$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$绝对收敛,所以$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$绝对收敛.

解3 由于$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$, 其中$\int_0^1\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$是定积分,

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\left|\operatorname{sgn}(\sin x)\right|}{1+x^2}=0$, 其中$p=\frac{3}{2}>1,\lambda=0$, 根据柯西判别法的极限形式知,

$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|\mathrm{d}x$收敛, 从而$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$绝对收敛,所以$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$绝对收敛.

P257习题11.2/5(3)讨论无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$为绝对收敛还是条件收敛.

解 由于$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx=\int_0^{100}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx+\int_{100}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$，其中$\int_0^{100}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$是定积分，

考虑$\int_{100}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$的敛散性：

$$\left|\int_{100}^{u}\cos x dx\right|=\left|(\sin x)\Big|_{100}^{u}\right|=|\sin u-\sin 100|\le 2,\ u\in[100,+\infty),$$ 即$\int_{100}^{u}\cos x dx$在$[100,+\infty)$上有界.

记$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{100+x}$，则 $g'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(100+x)-\sqrt{x}}{(100+x)^2}=\frac{100-x}{2\sqrt{x}(100+x)^2}\le 0,\ x\in[100,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{100+x}=0$，即$g(x)$在$[100,+\infty)$上单调递减趋于0. 根据狄利克雷判别法知，$\int_{100}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$收敛.

接着考虑$\int_{100}^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right|dx$的敛散性： 由于$\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right|\ge\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{2x}=\frac{\sqrt{x}(1+\cos 2x)}{4x}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in[100,+\infty)$,

已知$\int_{100}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$发散. $\left|\int_{100}^{u}\cos 2x dx\right|=\left|\frac{1}{2}(\sin x)\Big|_{100}^{u}\right|=\left|\frac{1}{2}\sin u-\frac{1}{2}\sin 100\right|\le 1,\quad u\in[100,+\infty)$,

即$\int_{100}^{u}\cos 2x dx$在$[100,+\infty)$上有界. 又$\frac{1}{\sqrt{x}}$在$[100,+\infty)$上单调递减趋于0. 根据狄利克雷判别法知，

$\int_{100}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx$收敛. 根据无穷积分的性质知，$\int_{100}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{2x}dx$发散.根据比较判别法知，$\int_{100}^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right|dx$发散.

从而$\int_{100}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$条件收敛. 因此$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$条件收敛.

P257习题11.2/5(4) 讨论无穷积分$\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\,\mathrm{d}x$为绝对收敛还是条件收敛.

解 由于$\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x=\int_{e}^{e^e}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x+\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$, 其中$\int_{e}^{e^e}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$是定积分,

考虑$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$的敛散性：记$g(x)=\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$,则 $g'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\ln(\ln x)}{\ln^2 x}=\frac{1-\ln(\ln x)}{x\ln^2 x}\le 0,\ x\in[e^e,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$, 即$g(x)$在$[e^e,+\infty)$上单调递减趋于0.

由于 $\left|\int_{e^e}^{u}\sin x\mathrm{d}x\right|=\left|(-\cos x)\Big|_{e^e}^{u}\right|=\left|\cos e^e-\cos u\right|\le 2,\ u\in[e^e,+\infty)$, 即$\int_{e^e}^{u}\sin x\mathrm{d}x$在$[e^e,+\infty)$上有界.

根据狄利克雷判别法知, $\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$收敛.

接着考虑$\int_{e^e}^{+\infty}\left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\right|\mathrm{d}x$的敛散性：由于 $\left|\frac{\ln(\ln x)\sin x}{\ln x}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x},\ x\in[e^e,+\infty)$,

已知$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$发散. $\left|\int_{e^e}^{u}\cos 2x\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{2}(\sin x)\Big|_{e^e}^{u}\right|=\left|\frac{1}{2}\sin u-\frac{1}{2}\sin e^e\right|\le 1,\ u\in[e^e,+\infty)$, 即$\int_{e^e}^{u}\cos 2x\mathrm{d}x$在$[e^e,+\infty)$上有界.

又$\frac{1}{2x}$在$[e^e,+\infty)$上单调递减趋于0. 根据狄利克雷判别法知, $\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$收敛.

根据无穷积分的性质知,$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$发散. 根据比较判别法知, $\int_{e^e}^{+\infty}\left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\right|\mathrm{d}x$发散.

从而$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$条件收敛. 所以$\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$条件收敛.

P257习题11.2/6 举例说明：$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛时，$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$不一定收敛；

解 $\boxed{f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}},\ f^2(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x},\ x\in[1,+\infty)}$

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$：根据Dirichlet判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛，

而$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}\right)\mathrm{d}x$，

已知$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$收敛，根据无穷积分的线性性质知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$发散.

P257习题11.2/6 举例说明：$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛时，$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 不一定收敛.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}, x\in(0,1],\\ \dfrac{1}{x^2}, x\in(1,+\infty),\end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \text{ 收敛，}$$

$$f^2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\in(0,1],\\ \dfrac{1}{x^4}, x\in(1,+\infty),\end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x \text{ 发散.}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, x\in\left[n-1,n-\dfrac{1}{4^n}\right],\\ (-2)^n, x\in\left(n-\dfrac{1}{4^n},n\right),\end{cases} n=1,2,\cdots.$$

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1 \text{ 收敛，}$$

$$f^2(x)=\begin{cases}0, x\in\left[n-1,n-\dfrac{1}{4^n}\right],\\ 4^n, x\in\left(n-\dfrac{1}{4^n},n\right),\end{cases} n=1,2,\cdots.$$

$$\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1 \text{ 发散.}$$

P257习题11.2/6 举例说明：$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛时，$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$不一定收敛.

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}},\ f^2(x)=\frac{\sin^2 x}{x^3}$$

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$：由于$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$，

对于$\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$：$\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，其中$p=\frac{1}{2}<1,\lambda=1$，根据柯西判别法的极限形式知，$\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$收敛.

对于$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$：$\left|\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\right|\le\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$，$x\in[1,+\infty)$，又$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$收敛，

根据比较判别法的极限形式知，$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\right|\mathrm{d}x$收敛，故$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$绝对收敛. 所以$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$绝对收敛.

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$：由于$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^3}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\sin^2 x}{x^3}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$，

对于$\int_0^{1}\frac{\sin^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$：$\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\frac{\sin^2 x}{x^3}=1$，其中$p=1,\lambda=1$，根据柯西判别法的极限形式知，$\int_0^{1}\frac{\sin^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$发散.

对于$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$：$\left|\frac{\sin^2 x}{x^3}\right|\le\frac{1}{x^3}$，$x\in[1,+\infty)$，又$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$收敛，根据比较判别法的极限形式知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$收敛.

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$发散.

P257习题11.2/7

证明：若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$必定收敛.

证 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，根据函数极限的定义知，对$\varepsilon=1$，$\exists X>a$，$\forall x>X$，有

$$|f(x)|<1.$$

于是 $f^2(x)\le|f(x)|$，$x>X$.

又$\int_X^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$收敛，根据比较判别法知，$\int_X^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$收敛.

由于$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^X f^2(x)\mathrm{d}x+\int_X^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$，其中$\int_a^X f^2(x)\mathrm{d}x$是定积分，

故$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$收敛.

P257习题11.2/8

若 $f(x)$在$[a,+\infty)$上单调,且$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,且$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right), x\to+\infty$.

证 不妨设f在$[a,+\infty)$上单调递增, 则要么$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,要么$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 则取$G=1,\exists M\ge a$,对$\forall x\ge M$,有 $f(x)>1$. 对$\forall u>M$,有

$$\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x+\int_M^u f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x+\int_M^u 1\,\mathrm{d}x=\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x+(u-M),$$

两边令$u\to+\infty$,有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x\ge\lim_{u\to+\infty}\left(\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x+(u-M)\right)=+\infty,$$

与$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛矛盾.

若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,且$A>0$, 则取$\varepsilon=\frac{A}{2}>0,\exists M\ge a$,对$\forall x\ge M$,有 $f(x)>\frac{A}{2}$.

对$\forall u>M$,有$\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x+\int_M^u f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x+\int_M^u \frac{A}{2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x+(u-M)\frac{A}{2},$$

两边令$u\to+\infty$,有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x\ge\lim_{u\to+\infty}\left(\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x+(u-M)\frac{A}{2}\right)=+\infty,$$

与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛矛盾. 若$A<0$,类似地可得到矛盾. 因此$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

P257习题11.2/8

若 $f(x)$在$[a,+\infty)$上单调,且$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,且$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$,$x\to+\infty$.

由于f在$[a,+\infty)$上单调递增,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 所以 $f(x)\le 0$.

已知$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, 根据无穷积分的柯西收敛准则知,

$\forall\varepsilon>0,\exists G\ge\max\{0,a\}$, 当$x>\frac{x}{2}>G$时,有 $\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$,

即 $0\le-\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$. (1)

由于$f(t)$在$\left[\frac{x}{2},x\right]$上单调递增, 从而 $f(t)\le f(x)$. 根据积分的不等式性,有

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t\le\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x)\mathrm{d}t=\frac{x}{2}f(x).$$

由(1)式,得 $0\le-\frac{x}{2}f(x)\le-\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

P257习题11.2/9 证明：若f在$[a,+\infty)$上一致连续，且$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证1 由于$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，故$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0(\delta\le\varepsilon)$，当$|x'-x''|<\delta$时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，根据无穷积分的柯西收敛准则知，对上述$\delta>0$，$\exists G\ge a$，当$x_1,x_2>G$时，有 $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\delta^2}{2}$.

对$\forall x>G$，取x_1,x_2，满足$G<x_1<x<x_2$，$x_2-x_1=\delta$，从而

$$|f(x)|=\frac{1}{\delta}\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}t\right|=\frac{1}{\delta}\left|\int_{x_1}^{x_2}\big(f(x)-f(t)+f(t)\big)\mathrm{d}t\right|$$

$$=\frac{1}{\delta}\left|\int_{x_1}^{x_2}\big(f(x)-f(t)\big)\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{\delta}\left|\int_{x_1}^{x_2}\big(f(x)-f(t)\big)\mathrm{d}t\right|+\frac{1}{\delta}\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\le\frac{1}{\delta}\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-f(t)|\mathrm{d}t+\frac{1}{\delta}\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right|<\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\delta+\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\delta^2}{2}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

根据函数极限的定义知，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

P257习题11.2/9 证明：若f在$[a,+\infty)$上一致连续，且$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证2 假设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$，则$\exists\varepsilon_0>0,\forall G\geq a,\exists x_1>G:|f(x_1)|\geq\varepsilon_0$.

由于$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，故对$\frac{\varepsilon_0}{2}>0,\exists\delta>0$，当$|x'-x''|<\delta$时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

当$x\in[x_1,x_1+\delta]$时，$|f(x)|=|f(x_1)+f(x)-f(x_1)|\geq\big||f(x_1)|-|f(x_1)-f(x)|\big|>\frac{\varepsilon_0}{2}$.

从而$f(x)$与$f(x_1)$同号. 若$f(x_1)>0$，则$f(x)>0$. 从而$f(x)>\frac{\varepsilon_0}{2},x\in[x_1,x_1+\delta]$.

于是

$$\left|\int_{x_1}^{x_1+\delta} f(x)\mathrm{d}x\right|\geq\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{x_1}^{x_1+\delta}\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon_0}{2}\delta>0,$$

根据无穷积分的柯西收敛准则，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散，与已知条件矛盾.

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.