Ch9 定积分

总结及习题评讲(3)

主讲教师: 顾燕红

办公室: 汇星楼409

办公室答疑时间: 每周四下午2点至4点

微信号: 18926511820 QQ号: 58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2024年04月18日

变限积分相关问题

P220/第九章总练习题/2 证明下列命题：

(1) 若f在$[a,b]$上连续增，$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, & x\in(a,b]\\ f(a), & x=a\end{cases}$. 则$F$为$[a,b]$上的增函数.

证 因为 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{1}=f(a)$,

所以$F(x)$在点$x=a$右连续. 从而$F(x)$在$[a,b]$上连续.

对$\forall x\in(a,b)$, 由于f连续,故F可微, 且有 $F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$,

由于$f(x)$在$[a,x]$上连续,根据积分第一中值定理知,$\exists\xi\in[a,x]$,使得$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(x-a)$.

由于$f(x)$在$[a,b]$上是增函数, 所以有 $f(\xi)\le f(x)$.

于是 $F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}=\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-a}\ge 0$, $x\in(a,b)$.

所以$F(x)$在$[a,b]$上是增函数.

$$\left.\begin{array}{l}F(x)\in C[a,b]\\ F(x)\in D(a,b)\\ F'(x)\ge 0,x\in(a,b)\end{array}\right\}\Rightarrow F(x)\text{是}[a,b]\text{上的增函数}$$

变限积分相关问题

P220/第九章总练习题/2 证明下列命题：

(1) 若f在$[a,b]$上连续增，$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, & x\in(a,b]\\ f(a), & x=a\end{cases}$. 则$F$为$[a,b]$上的增函数.

证 因为 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{1}=f(a)$,

所以$F(x)$在点$x=a$右连续. 从而$F(x)$在$[a,b]$上连续.

对$\forall x\in(a,b)$, 由于f连续,故F可微，且有 $F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$,

由于$f(t)$在$[a,x]$上连续增， 所以有 $f(t)\le f(x)$.

根据积分的不等式性知， $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\le\int_a^x f(x)\mathrm{d}t=f(x)(x-a)$.

于是 $F'(x)\ge 0,\ x\in(a,b)$.

所以$F(x)$在$[a,b]$上是增函数.

$$\left.\begin{array}{l}F(x)\in C[a,b]\\ F(x)\in D(a,b)\\ F'(x)\ge 0,x\in(a,b)\end{array}\right\}\Rightarrow F(x)\text{是}[a,b]\text{上的增函数}$$

变限积分相关问题

P220/第九章总练习题/2 证明下列命题：

(2)若f在$[0,+\infty)$上连续,且$f(x)>0$,则$\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$为$(0,+\infty)$上的严格增函数.

如果要使φ在$[0,+\infty)$上为严格增，试问应补充定义$\varphi(0)=?$

证 对$\forall x>0$, $\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)\cdot\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}=\dfrac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$,

对$\forall t\in[0,x]$, 有 $(x-t)f(t)\ge 0$, 且$(x-t)f(t)$连续不恒为0,

根据积分的不等式性知, $\int_0^x (x-t)ft\,\mathrm{d}t>0.$

又$f(x)>0$, 从而 $\varphi'(x)>0, x\in(0,+\infty).$

所以$\varphi(x)$为$(0,+\infty)$上的严格增函数.

$\varphi'(x)>0, x\in(0,+\infty)$
$\Rightarrow\varphi(x)$是$(0,+\infty)$上的严格增函数

$\varphi(x)\in C[0,+\infty), \varphi'(x)>0, x\in(0,+\infty)$
$\Rightarrow\varphi(x)$是$[0,+\infty)$上的严格增函数

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xf(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}x=0,$

所以补充$\varphi(0)=0$, 可使$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 从而保证$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上为严格增.

变限积分求极限问题

P220/第九章总练习题/3 设f在$[0,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A.$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A.$

证1 因为f在$[0,+\infty)$上连续, 所以$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$可导.

根据洛必达法则知,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

$$=A.$$

变限积分求极限问题

P220/第九章总练习题/3 设f在$[0,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=A$.

证2 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，根据函数极限的定义知，$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall x>M$，有$|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是
$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt-A\right|=\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt-\frac{1}{x}\int_0^x A\,dt\right|=\left|\frac{\int_0^x (f(t)-A)\,dt}{x}\right|$$

$$=\left|\frac{\int_0^M (f(t)-A)\,dt+\int_M^x (f(t)-A)\,dt}{x}\right|\le\frac{1}{x}\left|\int_0^M (f(t)-A)\,dt\right|+\frac{1}{x}\left|\int_M^x (f(t)-A)\,dt\right|$$

$$\le\frac{1}{x}\left|\int_0^M (f(t)-A)\,dt\right|+\frac{1}{x}\int_M^x |f(t)-A|\,dt<\frac{1}{x}\left|\int_0^M (f(t)-A)\,dt\right|+\frac{1}{x}\int_M^x \frac{\varepsilon}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{x}\left|\int_0^M (f(t)-A)\,dt\right|+\frac{\varepsilon}{2}\frac{x-M}{x}<\frac{1}{x}\left|\int_0^M (f(t)-A)\,dt\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left|\int_0^M (f(t)-A)\,dt\right|=0$，故$\exists X>M$，当$x>X$时，有$\dfrac{1}{x}\left|\int_0^M (f(t)-A)\,dt\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

从而 $\left|\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=A$.

P220/第九章总练习题/4 变限积分求极限问题

设f是定义在$(-\infty,+\infty)$上的一个连续周期函数，周期为p，证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t.$$

证 $\forall x>p$，$\exists n\in\mathbb{N}_+$，使得$x=np+x'$，$0\le x'<p$.

于是 $$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{np+x'}\int_0^{np+x'} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{np+x'}\left(\int_0^{np} f(t)\mathrm{d}t+\int_{np}^{np+x'} f(t)\mathrm{d}t\right),$$

其中 $$\int_0^{np} f(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{ip}^{(i+1)p} f(t)\mathrm{d}t\overset{u=t-ip}{=}\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^p f(u+ip)\mathrm{d}u=\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^p f(u)\mathrm{d}u=n\int_0^p f(u)\mathrm{d}u.$$

$$\int_{np}^{np+x'} f(t)\mathrm{d}t\overset{u=t-np}{=}\int_0^{x'} f(u+np)\mathrm{d}u=\int_0^{x'} f(u)\mathrm{d}u,$$

从而 $$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{n}{np+x'}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{np+x'}\int_0^{x'} f(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{np+x'}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{np+x'}\int_0^{x'} f(t)\mathrm{d}t=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t.$$

P220/第九章总练习题/5 奇偶函数的原函数的奇偶性

证明：连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数；

连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数.

证 f的一切原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$.

若f为奇函数，则

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=-\int_0^x f(-s)\mathrm{d}s+C=\int_0^x f(s)\mathrm{d}s+C=F(x),$$

所以$f(x)$的一切原函数$F(x)$为偶函数.

若f为偶函数，则

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=-\int_0^x f(s)\mathrm{d}s+C,$$

当且仅当$C=0$时，$F(x)$为奇函数.

P220/第九章总练习题/6 积分不等式证明

证明施瓦兹(Schwarz)不等式：若f和g在$[a,b]$上可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证1 由于f,g在$[a,b]$上可积，因此$f^2,g^2,fg,f-tg$在$[a,b]$上也可积.

对$\forall t\in\mathbb{R}$,根据积分不等式,有 $\int_a^b \left(f(x)-tg(x)\right)^2\mathrm{d}x\ge 0,$

即 $$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+t^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ge 0.$$

这是关于t的二次三项式,且非负,

也就是

$$\Delta=\left(2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\le 0,$$

即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

P220/第九章总练习题/6 积分不等式证明

证明施瓦兹(Schwarz)不等式:若f和g在$[a,b]$上可积,则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证2 由于f,g在$[a,b]$上可积,因此f^2,g^2,fg在$[a,b]$上也可积.

根据定积分的定义,对区间$[a,b]$进行n等分,取$\xi_i = x_i = a + \frac{b-a}{n}i$,则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\frac{b-a}{n},$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{b-a}{n},\qquad \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n g(x_i)\frac{b-a}{n}.$$

根据Cauchy不等式,有 $\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\right).$

从而 $$\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\frac{b-a}{n}\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\frac{b-a}{n}\right).$$

根据极限的保不等式性,有 $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\frac{b-a}{n}\right)^2 \le \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\frac{b-a}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\frac{b-a}{n}\right),$

即 $$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

P220/第九章总练习题/7(3) 积分不等式证明

证明闵可夫斯基(Minkowski)不等式：若f和g在$[a,b]$上可积，则

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证 由于

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x} + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\left(\boxed{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Schwarz不等式

两边开平方，即得

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

积分不等式证明

P220/第九章总练习题/8 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$. 证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

证1 $\ln t$ 在 $t_0=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的带Lagrange余项的Taylor公式为

$$\ln t=\ln t_0+\frac{1}{t_0}(t-t_0)-\frac{1}{\xi^2}(t-t_0)^2,\ \xi\text{介于}t\text{与}t_0\text{之间}.$$

从而 $\ln t\le \ln t_0+\dfrac{1}{t_0}(t-t_0)$.

将 $t=f(x)$ 代入，有 $\ln f(x)\le \ln t_0+\dfrac{1}{t_0}\left(f(x)-t_0\right)$.

在 $[a,b]$ 上关于 x 积分，根据积分的不等式性，有

$$\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x\le \int_a^b \ln t_0\,\mathrm{d}x+\frac{1}{t_0}\int_a^b\left(f(x)-t_0\right)\mathrm{d}x=(b-a)\ln t_0+\frac{1}{t_0}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)$$

$$=(b-a)\ln t_0=(b-a)\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

即

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x\le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

积分不等式证明

P220/第九章总练习题/8 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$. 证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

证2 令$t_0=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 由于$(\ln t)''=-\dfrac{1}{t^2}<0$, 故$\ln t$在$(0,+\infty)$上是凹函数.

根据凹函数的等价条件知，对$\forall t_0,t\in(0,+\infty)$, 有 $\ln t\le \ln t_0+\dfrac{1}{t_0}(t-t_0)$.

令$t=f(x)$, 有 $\ln(f(x))\le \ln t_0+\dfrac{1}{t_0}(f(x)-t_0)$.

根据积分的不等式性,有

$$\int_a^b \ln(f(x))\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \ln t_0\,\mathrm{d}x+\int_a^b \frac{1}{t_0}(f(x)-t_0)\,\mathrm{d}x$$

$$=(b-a)\ln t_0+\frac{1}{t_0}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)$$

$$=(b-a)\ln t_0=(b-a)\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right),$$

即

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

积分不等式证明

P220/第九章总练习题/8 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$. 证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right).$$

证3 由于$f(x)$与$\ln f(x)$在$[a,b]$上连续，因此可积.

将区间$[a,b]$ n等分，并记$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$, $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n)$.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i).$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

由于$(\ln x)''=-\frac{1}{x^2}<0$, 故$\ln x$在$(0,+\infty)$上是凹函数.由Jensen不等式，得

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i).$$

由$\ln x$的连续性及极限的保不等式,有

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_i)\right)=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_i)\right)=\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)\ge\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i)=\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx,$$

即 $$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right).$$

积分不等式证明

P220/第九章总练习题/8 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$. 证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

证4 由于$f(x)$与$\ln f(x)$在$[a,b]$上连续，因此可积.

将区间$[a,b]$ n等分，并记$x_i = a+\frac{i}{n}(b-a)$, $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n)$.

$$\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \ge \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}}.$$

根据极限的保不等式性，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

于是

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

积分不等式证明

P220/第九章总练习题/1 证明：若 φ 在 $[0,a]$ 上连续，f 二阶可导，且 $f''(x)\geq 0$，则有 $\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t \geq f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)$.

证1 令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t$. 由于 $f''(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函数.

根据凸函数的等价条件知，$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

令 $x=\varphi(t)$，有 $f(\varphi(t))\geq f(x_0)+f'(x_0)(\varphi(t)-x_0)$.

根据积分的不等式性，有

$$\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t \geq \int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t+\int_0^a f'(x_0)(\varphi(t)-x_0)\mathrm{d}t$$

$$=af(x_0)+f'(x_0)\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t-f'(x_0)\int_0^a x_0\,\mathrm{d}t$$

$$=af(x_0)+ax_0f'(x_0)-ax_0f'(x_0)$$

$$=af(x_0)=af\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right),$$

即 $$\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t \geq f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

积分不等式证明

P220/第九章总练习题/1 证明:若φ在$[0,a]$上连续,f二阶可导,

且$f''(x)\ge 0$,则有 $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t \ge f\left(\boxed{\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t}\right)$.

证2 由于$\varphi, f\circ\varphi$在$[0,a]$上可积,根据可积的定义,对$[0,a]$ n等分,取$\xi_i=\dfrac{ia}{n}$,从而有

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(\varphi\left(\frac{ia}{n}\right)\right)\frac{a}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\varphi\left(\frac{ia}{n}\right)\right).$$

$$\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{ia}{n}\right)\frac{a}{n}=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{ia}{n}\right)}.$$

由于$f''(x)\ge 0$,所以$f(x)$在$[0,a]$上是凸函数. 根据Jensen不等式,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i),\quad \sum_{i=1}^n \lambda_i=1,\lambda_i>0.$$

从而得 $f\left(\boxed{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n \varphi\left(\dfrac{ia}{n}\right)}\right)\le\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n f\left(\varphi\left(\dfrac{ia}{n}\right)\right)$. 由$f$的连续性及极限的保不等式,有

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{ia}{n}\right)\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{ia}{n}\right)\right)=f\left(\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{ia}{n}\right)\frac{a}{n}\right)=f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}f\left(\varphi\left(\frac{ia}{n}\right)\right)=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(\varphi\left(\frac{ia}{n}\right)\right)\frac{a}{n}=\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t.$$

即 $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t\ge f\left(\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)$.

P220/第九章总练习题/9

若f为$(0,+\infty)$上的连续减函数，$f(x)>0$;又设$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.

证明$\{a_n\}$为收敛数列.

证 因为$f(x)$递减且连续,因此

$$a_{n+1}-a_n=\left(\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n}f(x)\mathrm{d}x\right)=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_n^{n+1}f(n+1)\mathrm{d}x-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}\big(f(n+1)-f(x)\big)\mathrm{d}x\le 0,$$

即数列$\{a_n\}$单调递减.

又因为

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right)+\cdots+\left(f(n-1)-\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x\right)+f(n)>0,$$

所以数列$\{a_n\}$单调递减且有下界. 根据单调有界定理知，数列$\{a_n\}$收敛.

P220/第九章总练习题/10 积分不等式证明

若f在$[0,a]$上连续可微，且$f(0)=0$, 则

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{a}{2}\int_0^a (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

证 设$F(x)=\int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=|f'(x)|$. 由$f(0)=0$, 知

$$|f(x)|=|f(x)-f(0)|=\left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t = F(x).$$

于是

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \int_0^a F(x)F'(x)\mathrm{d}x = \int_0^a F(x)\mathrm{d}F(x) = \frac{1}{2}\left(F^2(x)\right)\Big|_0^a$$

$$=\frac{1}{2}F^2(a) = \frac{1}{2}\left(\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^a 1\cdot|f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^a 1^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^a |f'(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int_0^a (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

积分不等式证明

补充 若f在$[a,b]$上连续可微$(0<a<b)$, $f(a)=f(b)=0, \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1.$

求证：$\int_a^b x^2 f'^2(x)\mathrm{d}x \ge \frac{1}{4}.$

证 由于

$$1=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = xf^2(x)\Big|_a^b - \int_a^b 2xf(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_a^b 2xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = -2\int_a^b f(x)\,xf'(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$1=\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2 = 4\left(\int_a^b f(x)\cdot xf'(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

Schwarz不等式

$$\le 4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b x^2 f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b x^2 f'^2(x)\mathrm{d}x \ge \frac{1}{4}.$$

积分不等式证明

补充 设$f(x)$在$[a,b]$上连续可微，且$f(a)=0$. 证明：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 由$f(a)=0$, 有$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$

根据Schwarz不等式,有

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2=\left(\int_a^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\le\int_a^x 1^2\mathrm{d}t\int_a^x f'^2(t)\mathrm{d}t$$

$$\le(x-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x,\ x\ge a.$$

于是

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left((x-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

积分不等式证明

补充 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，记$M=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$. 证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{M(b-a)^3}{24}.$$

证 $f(x)$在$x_0=\frac{a+b}{2}$的带Lagrange型余项的Taylor公式为

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,\quad \xi\text{介于}x\text{与}\frac{a+b}{2}\text{之间}.$$

两边在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$$

于是

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{2}\int_a^b\left|f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right|\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{M}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_a^b=\frac{M}{24}(b-a)^3.$$

★★★★

积分等式证明

补充 设f在$[a,b]$上二阶导连续，求证：$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$f''(\xi)=\frac{24}{(b-a)^3}\int_a^b\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x.$$

证 $f(x)$在$x_0=\dfrac{a+b}{2}$的带Lagrange型余项的Taylor公式为

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,\quad \eta\text{介于}x\text{与}\frac{a+b}{2}\text{之间}.$$

从而

$$f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

两边在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\boxed{\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x}$$

推广的积分第一中值定理

$$=\frac{f''(\xi)}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_a^b=\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,\quad \xi\in[a,b].$$