Ch2 数列极限

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820   QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年10月16日

BY GYH

将学习：

收敛数列是如何定义的？

如何用定义证明数列极限？

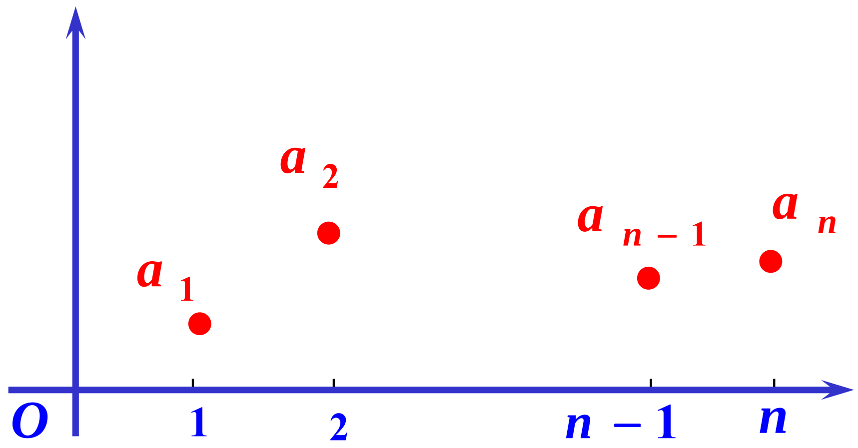
数列的定义

若函数 f 的定义域为全体正整数的集合$\mathbb{N}_+$，则称

$$f: \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R} \text{ 或 } f(n),\ n \in \mathbb{N}_+$$

为**数列**. 记作 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，或简记为$\{a_n\}$.

其中a_n称为数列$\{a_n\}$的**通项(一般项)**.



问题提出 $0.\dot{9}=1$

$$a_1=0.9,\quad a_2=0.99,\quad \cdots,\quad a_n=0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9},\quad \cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=1$$

$$|a_1-1|=\frac{1}{10},\ |a_2-1|=\frac{1}{10^2},\ \cdots,\ |a_n-1|=\frac{1}{10^n},\ \cdots,$$

其通项$a_n=0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$随着$n$的无限增大而无限趋于1.

问题提出

古代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用了一句话：

一尺之锤，日取其半，万世不竭.

第一天截下 $\dfrac{1}{2}$,

第二天截下 $\dfrac{1}{2^2}$,

⋮

第n天截下 $\dfrac{1}{2^n}$,

⋮

得到数列：$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots,$

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

其通项$\dfrac{1}{2^n}$随着n的无限增大而无限趋于0.

问题提出 圆周率π的计算

古代杰出数学家刘徽(公元263年)创立“割圆术”:

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣”

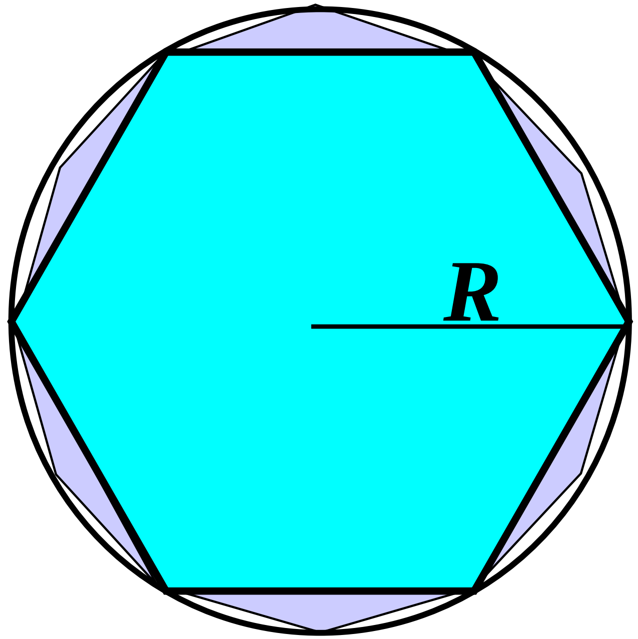
正六边形的周长 P_1

正十二边形的周长 P_2

…… ……

正$6\times 2^{n-1}$边形的周长P_n

$$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots \longrightarrow C$$



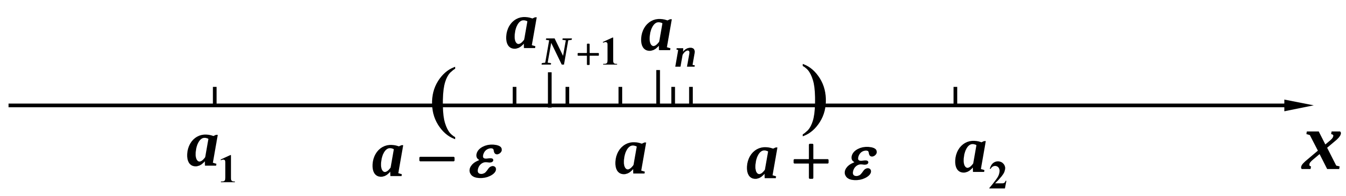
数列极限的定义

设$\{a_n\}$为一个数列，a为一个常数，若对任意的正数ε，总存在正整数N，使得当$n>N$时，

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$收敛于a，称a为数列$\{a_n\}$的极限.

记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ \left(\text{或}a_n\to a(n\to\infty)\right).$



注1: 若数列$\{a_n\}$没有极限，则称$\{a_n\}$不收敛，或称$\{a_n\}$为发散数列.

注2: 数列$\{a_n\}$收敛于a, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

ε-N语言

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

例 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9} = 1.$

证 对$\forall \varepsilon > 0$,要使 $|a_n - 1| = \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此,对$\forall \varepsilon > 0$,只要取$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$,则当$n > N$时,有

$$|a_n - 1| = \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{99\cdots9}_{n个9} = 1.$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

例 1 用定义验证: 对常数列$\{a_n\}$, $a_n = a$, 有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

证 对$\forall \varepsilon > 0$, 由于对任意的$n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

例 2 用定义验证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+2$,则当$n>N$时,有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$

例 3 用定义验证：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$，其中$\alpha$为正数.

证 对$\forall \varepsilon > 0$，要使

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| = \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon,$$

只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$.

因此，对$\forall \varepsilon > 0$，只要取$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\right] + 1$，则当$n > N$时，有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| = \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{N^\alpha} < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0.$

例 3 用定义验证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0$，其中$\alpha$为正数.

另证 若$\alpha\ge 1$，由于 $\left|\dfrac{1}{n^{\alpha}}-0\right|=\dfrac{1}{n^{\alpha}}\le\dfrac{1}{n}$，

因此，对$\forall\varepsilon>0$，只要取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，有

$$\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|=\frac{1}{n^{\alpha}}\le\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0\quad(\alpha\ge 1)$.

若$0<\alpha<1$，根据Archimedes性知，$\exists m\in\mathbb{N}_{+}$，使得$m\alpha>1$.

因此由前面结论有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{m\alpha}}=0\quad(0<\alpha<1)$.

故$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_{+}$，当$n>N$时，有 $\left|\dfrac{1}{n^{m\alpha}}-0\right|=\dfrac{1}{n^{m\alpha}}<\varepsilon^{m}$.

从而 $\left|\dfrac{1}{n^{\alpha}}-0\right|=\dfrac{1}{n^{\alpha}}<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0\quad(0<\alpha<1)$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

例 4 用定义验证：$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, (0 < |q| < 1).$

证 对$\forall \varepsilon > 0$ (不妨设$\varepsilon < 1$),要使

$$|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon,$$

只要 $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}.$

因此,对$\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$,只要取$N = \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}\right] + 1$,则当$n > N$时,有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

例 4 用定义验证： $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, (0 < |q| < 1).$

证2 记 $h = \dfrac{1}{|q|} - 1$，则 $h > 0$. 由二项式展开，有

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n > nh.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$，要使 $\quad |q^n - 0| = |q|^n = \dfrac{1}{(1+h)^n} < \dfrac{1}{nh} < \varepsilon,$

只要 $n > \dfrac{1}{h\varepsilon}.$

因此，对 $\forall \varepsilon > 0$，只要取 $N = \left[\dfrac{1}{h\varepsilon}\right] + 1$，则当 $n > N$ 时，有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

所以 $\quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

例 5 用定义验证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\dfrac{3}{2}$.

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{4\sqrt{n}-2}=\frac{5}{2\sqrt{n}+2\sqrt{n}-2}\le\frac{5}{2\sqrt{n}}<\frac{3}{\sqrt{n}}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{9}{\varepsilon^2}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$N=\left[\dfrac{9}{\varepsilon^2}\right]+1$,则当$n>N$时,有

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\dfrac{3}{2}$.

例 6 用定义验证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2-n-7}=\dfrac{1}{3}.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{n+7}{3(3n^2-n-7)}\right|\le\frac{n+n}{3\cdot 2n^2}=\frac{1}{3n}<\varepsilon\ (n\ge 7),$$

只要 $n>\dfrac{1}{3\varepsilon}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$N=\max\left\{7,\left[\dfrac{1}{3\varepsilon}\right]\right\}$,则当$n>N$时,有

$$\left|\frac{n^2}{3n^2-n-7}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2-n-7}=\dfrac{1}{3}.$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N: |a_n - a| < \varepsilon.$

例 7 用定义验证: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3+n-4}{2n^3-3} = \dfrac{5}{2}.$ 

证 对$\forall \varepsilon > 0$,要使

$$\left|\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3} - \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{2n+7}{2(2n^3-3)}\right| \overset{n\ge 2}{=} \frac{2n+7}{2(n^3+n^3-3)} < \frac{2n+7}{2n^3}$$

$$\le \frac{2n+n}{2\cdot n^3} = \frac{3}{2n^2} < \frac{2}{n^2} < \varepsilon \quad (n \ge 7),$$

只要 $n > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}.$

因此,对$\forall \varepsilon > 0$,只要取$N = \max\left\{7, \left[\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right]\right\}$,则当$n > N$时,有

$$\left|\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3} - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3+n-4}{2n^3-3} = \dfrac{5}{2}.$

例 8 用定义验证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=3.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{3n^2}{n^2-3}-3\right|=\left|\frac{9}{n^2-3}\right|=\frac{9}{n^2-3}=\frac{9}{\left(n+\sqrt{3}\right)\left(n-\sqrt{3}\right)}<\frac{9}{n+\sqrt{3}}<\frac{9}{n}<\varepsilon$$

$(n\ge 3)$,

只要 $n>\dfrac{9}{\varepsilon}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$N=\max\left\{3,\left[\dfrac{9}{\varepsilon}\right]\right\}$,则当$n>N$时,有

$$\left|\frac{3n^2}{n^2-3}-3\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-1}=3.$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$

例 9 用定义验证： $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 其中 $a > 0$.

证 当 $a = 1$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$， 结论成立.

当 $a > 1$ 时， 对 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$,

只要 $n > \dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$.

因此, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 只要取 $N = \left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 1)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N: |a_n - a| < \varepsilon.$

例 9 用定义验证： $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 其中 $a > 0$.

当 $0 < a < 1$ 时， 对 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < 1$) ,要使

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon,$$

只要 $n > \dfrac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}$.

因此,对 $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$,只要取 $N = \left[\dfrac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}\right] + 1$,则当 $n > N$ 时,有

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (0 < a < 1)$.

综上可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$.

例 9 用定义验证： $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, 其中 $a>0$.

另证 当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$, 结论成立.

当 $a>1$ 时, 记 $\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1$, 则 $\alpha_n>0$.

因为 $a=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\dfrac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n>n\alpha_n$, 所以

$$\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1<\frac{a}{n}.$$

因此, 对 $\forall\varepsilon>0$, 只要取 $N=\left[\dfrac{a}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>1)$.

例 9 用定义验证： $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，其中 $a>0$.

当 $0<a<1$ 时，令 $a=\dfrac{1}{b}$，从而 $b>1$.

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\left|\frac{1}{\sqrt[n]{b}}-1\right|=\left|\frac{1-\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{b}}\right|<\left|\sqrt[n]{b}-1\right|.$$

因此，对 $\forall\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\dfrac{\ln b}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1=\left[\dfrac{-\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\left|\sqrt[n]{b}-1\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(0<a<1)$.

综上可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$

例 10 用定义验证： $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

证 记$h_n = \sqrt[n]{n} - 1$, 则$h_n > 0 (n > 1)$, $n = (1 + h_n)^n$,由二项式展开, 有

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

对$\forall \varepsilon > 0$,要使 $\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| = \sqrt[n]{n} - 1 = h_n < \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$,

只要 $n > \dfrac{2}{\varepsilon^2}$.

因此,对$\forall \varepsilon > 0$,只要取$N = \left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right] + 1$,则当$n > N$时,有

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$

例 10 用定义验证： $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

另证 利用算术平均–几何平均不等式，有

$$1 \le \sqrt[n]{n} = \Big(\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-2\text{个}} \cdot \sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\Big)^{\frac{1}{n}} \le \frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}.$$

因此，对 $\forall \varepsilon > 0$，要使

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| = \sqrt[n]{n} - 1 \le \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

只要 $n > \dfrac{4}{\varepsilon^2}$.

所以，对 $\forall \varepsilon > 0$，只要取 $N = \left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right] + 1$，则当 $n > N$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}_+,\ \forall n>N:\ |a_n-a|<\varepsilon.$

例 11 用定义验证： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$,其中$a$为实常数.

证 对$\forall a\in\mathbb{R}$,根据Archimedes性知,$\exists N_0\in\mathbb{N}_+$,使得$N_0>|a|$.

对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|\cdot|a|\cdots|a|}{1\cdot2\cdots n}=\frac{|a|\cdot|a|\cdots|a|}{1\cdot2\cdots N_0}\cdot\frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n}<\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\cdot\frac{|a|}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{|a|^{N_0}}{N_0!}\cdot\dfrac{|a|}{\varepsilon}=\dfrac{|a|^{N_0+1}}{N_0!\varepsilon}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$N=\max\left\{N_0,\left[\dfrac{|a|^{N_0+1}}{N_0!\varepsilon}\right]\right\}$,则当$n>N$时,有

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

例 12 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0.$

证1 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\sin\frac{1}{n}-0\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,则当$n>N$时,有

$$\left|\sin\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0.$

例 12 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0.$

证2 对$\forall\varepsilon>0$(不妨设$0<\varepsilon<1$),要使

$$\left|\sin\frac{1}{n}-0\right|=\sin\frac{1}{n}<\sin(\arcsin\varepsilon)=\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{1}{\arcsin\varepsilon}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$N=\left[\dfrac{1}{\arcsin\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时,有

$$\left|\sin\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0.$

关于数列极限的说明(ε-N语言):

1. ε的任意性: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$

定义中的ε用来刻画数列$\{a_n\}$的通项与定数a的接近程度.

正数ε愈小,表示a_n与a接近的程度愈高.

正数ε是任意的,表示a_n与a可以任意接近.

正数ε一旦给出,在寻找N的过程中,ε暂时看作是不变的.

ε是任意正数,因此$\frac{\varepsilon}{2}, 3\varepsilon, \varepsilon^2$等均可看作任意正数,所以定义中的不等式$|a_n - a| < \varepsilon$中的$\varepsilon$可用$\frac{\varepsilon}{2}, 3\varepsilon, \varepsilon^2$等代替.

也可写成$|a_n - a| \le \varepsilon$.

关于数列极限ε-N定义的说明：

1. ε的任意性：$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$

着重强调的是“任意小”，因而可以限定ε小于某一个正数，

比如$\varepsilon < 1$.

这是由于对$0 < \varepsilon < 1$能验证数列$\{a_n\}$满足$|a_n - a| < \varepsilon$，

那么对$\varepsilon \geq 1$也能满足$|a_n - a| < \varepsilon$.

关于数列极限ε-N定义的说明：

2. N的相对性： $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$

由定义可知，随着ε的取值不同，一般N也会不同. 因此常把N写作$N(\varepsilon)$，来强调N是依赖于ε的.

N不是由ε唯一确定的. 例如，当$n > N$时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$，

则当$n > N_1 = 2N$时，对于同样的ε，更应有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

也就是说，这里只是强调N的存在性，而不追求N的“最佳性”.

定义中的$n > N$可改写成$n \geq N$.

关于数列极限ε-N定义的说明:

2. N的相对性: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$

N可取为正数，而非正整数.

实际上N只是表示某个时刻，保证从这一时刻

以后的所有项都能使不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$成立即可.

关于数列极限ε-N定义的说明:

3. 数列极限的几何意义:

"当$n>N$时，有$|a_n-a|<\varepsilon$"，实际上就是所有下标大于N的a_n全都落在邻域$U(a;\varepsilon)$之内. 而在$U(a;\varepsilon)$之外，数列$\{a_n\}$中的项至多只有N项(有限项).

反之,对$\forall\varepsilon>0$,落在$U(a;\varepsilon)$之外至多只有有限项,这些项的最大下标为N,则当$n>N$时,有$a_n\in U(a;\varepsilon)$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

数列极限的一种等价定义:

$\forall\varepsilon>0$,若在$U(a;\varepsilon)$之外至多只有数列$\{a_n\}$的有限项,则称数列$\{a_n\}$收敛于a.

20231016QQ群讨论问题1

以下几种叙述与数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$的定义是否等价，说明理由：

(1)$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n \geq N$, 有$|a_n - a| \leq \varepsilon$.

(2)$\forall k \in \mathbb{N}_+, \exists N_k \in \mathbb{N}_+, \forall n \geq N_k$, 有$|a_n - a| < \dfrac{1}{k}$.

(3)有无限多个$\varepsilon > 0$,对每个$\varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$,有$|a_n - a| < \varepsilon$.

(4)$\forall \varepsilon > 0$,有无限多个a_n, 有$|a_n - a| < \varepsilon$.

(5)$\forall k \in \mathbb{N}_+$, 只有有限个$a_n$落在$\left(a - \dfrac{1}{k}, a + \dfrac{1}{k}\right)$之外.

数列$\{a_n\}$收敛

$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$,有$|a_n - a| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$,若在$U(a;\varepsilon)$之外至多只有数列$\{a_n\}$的有限项.

数列$\{a_n\}$发散

$\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0 > N$,有$|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$.

$\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_0 > 0$,在$U(a;\varepsilon_0)$之外有数列$\{a_n\}$的无限多项.

数列$\{a_n\}$以a为极限的定义：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 有$|a_n - a| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, 若在$U(a;\varepsilon)$之外至多只有数列$\{a_n\}$的有限项.

数列$\{a_n\}$不以a为极限的定义：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0 > N$, 有$|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$.

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$, 若在$U(a;\varepsilon_0)$之外有数列$\{a_n\}$的无限多项.

例13 证明数列$\{n^2\}$发散.

证 对$\forall a \in \mathbb{R}$, 取$\varepsilon_0 = 1$, 则数列$\{n^2\}$中所有满足

$$n > a + 1$$

的项(有无穷多项)落在$U(a;\varepsilon_0)$之外,

故$\{n^2\}$不以任何数a为极限, 即$\{n^2\}$为发散数列.

$\forall a\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,$在$U(a;\varepsilon_0)$之外有数列$\{a_n\}$的无限多项.

例 14 证明数列$\{(-1)^n\}$发散.

证1 对$\forall a\in\mathbb{R}$,取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$,使数列$\{(-1)^n\}$满足

当$a\le 0(a\ge 0)$时, 在$U(a;\varepsilon_0)$之外有无限多个偶数项(奇数项).

故$\{(-1)^n\}$不以任何数a为极限, 即$\{(-1)^n\}$为发散数列.

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0 > N,$ 有 $\left|a_{n_0} - a\right| \geq \varepsilon_0.$

例 14 证明数列 $\left\{(-1)^n\right\}$ 发散.

证2 对 $\forall a \in \mathbb{R}$, 取 $\varepsilon_0 = 1$,

当 $a \geq 0$ 时, 对 $\forall N \in \mathbb{N}_+$, 取 $n_0 = 2N + 1 > N$, 使得

$$\left|(-1)^{n_0} - a\right| = \left|-1 - a\right| = 1 + a \geq 1 = \varepsilon_0.$$

当 $a < 0$ 时, 对 $\forall N \in \mathbb{N}_+$, 取 $n_0 = 2N > N$, 使得

$$\left|(-1)^{n_0} - a\right| = \left|1 - a\right| = 1 - a > 1 = \varepsilon_0.$$

故 $\left\{(-1)^n\right\}$ 不以任何数 a 为极限, 即 $\left\{(-1)^n\right\}$ 为发散数列.

例 15 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 作数列$\{z_n\}$为

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots.$$

证明：数列$\{z_n\}$收敛的充要条件是$a = b$.

证 (充分性)因为$a = b$, 即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 所以对$\forall \varepsilon > 0$, 数列$\{x_n\},\{y_n\}$落在$U(a;\varepsilon)$之外的项至多只有有限项，从而数列$\{z_n\}$落在$U(a;\varepsilon)$之外的项至多只有有限项，因此$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(必要性) 设$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. 所以对$\forall \varepsilon > 0$, 数列$\{z_n\}$落在$U(A;\varepsilon)$之外的项至多只有有限项, 从而数列$\{x_n\},\{y_n\}$落在$U(A;\varepsilon)$之外的项也至多只有有限项.

因此$a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

例 16 设$\{a_n\}$为给定的数列, $\{b_n\}$为对$\{a_n\}$增加、减少或改变有限项之后得到的数列.

证明: 数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$同敛散,且收敛时两者的极限相等.

证 设$\{a_n\}$为收敛数列,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则对$\forall \varepsilon > 0$,

数列$\{a_n\}$落在$U(a;\varepsilon)$之外的项至多只有有限项.

而数列$\{b_n\}$是对$\{a_n\}$增加、减少或改变有限项之后得到的,

故从某一项开始, $\{b_n\}$中的每一项都是$\{a_n\}$中确定的一项,

所以数列$\{b_n\}$落在$U(a;\varepsilon)$之外的项也至多只有有限项.

因此$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

设$\{a_n\}$为发散数列. 倘若$\{b_n\}$为收敛数列, 则因$\{a_n\}$可看成是对$\{b_n\}$增加、减少或改变有限项之后得到的数列, 从而$\{a_n\}$收敛, 矛盾. 所以当$\{a_n\}$发散时$\{b_n\}$也发散.

无穷小数列的定义

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

无穷小数列定理

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是:

$\{a_n - a\}$ 是无穷小数列.

无穷大数列(无穷大量)的定义

若数列$\{a_n\}$满足:

对$\forall M>0, \exists N\in\mathbb{N}_+, \forall n>N: |a_n|>M$,

则称数列$\{a_n\}$发散于无穷大,记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

若$|a_n|>M$改为$a_n>M$或$a_n<-M$,则称$\{a_n\}$是正无穷大数列(正无穷大)或负无穷大数列(负无穷大),

分别记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

20231016QQ群讨论问题2

注： 若数列$\{a_n\}$是无穷大，则$\{a_n\}$必然无界.

逆命题不成立.

注： 设$a_n \neq 0$,则数列$\{a_n\}$是无穷大量的充要条件是

$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是无穷小数列.

例 17 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，根据数列极限的定义，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}_+$，当 $n>N_1$ 时，有 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na}{n}\right|$$

$$=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)+(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\le\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\le\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$ 是一个固定的数，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}=0$，

根据数列极限的定义，对上述 $\varepsilon>0,\exists N_2\in\mathbb{N}_+$，当 $n>N_2$ 时，有 $\dfrac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

根据数列极限的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$

例 17 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

证2 当 $a = 0$ 时，$\{a_n\}$ 是无穷小量，则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}_+$，

当 $n > N_1$ 时，有 $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是 $$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1} + a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n}\right| + \frac{|a_{N_1+1}| + \cdots + |a_n|}{n} \leq \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n}\right| + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}$ 是一个固定的数，因此

可以取 $N > N_1$，当 $n > N$ 时，有 $\left|\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

因此 $$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0.$$

当$a\neq 0$时,$\{a_n-a\}$是无穷小量,即$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$.

于是 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}=0.$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ a_n > M.$

例 18 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-3n-5\right)=+\infty.$

证 对 $\forall M > 0$, 要使

$$n^2-3n-5 \ge n^2-3n-5n = n^2-8n = n(n-8)$$

$$\ge n > M \quad (n>8),$$

因此, 对 $\forall M > 0$, 只要取 $N = \max\{[M]+1, 8\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$n^2-3n-5 > M.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-3n-5\right)=+\infty.$

例 19 设$|q|>1$,证明$\{q^n\}$是无穷大量.

证 对$\forall M>0$(不妨设$M>1$),要使

$$|q^n|=|q|^n>M,$$

只要 $n>\dfrac{\ln M}{\ln|q|}$.

因此,对$\forall M>1$,只要取$N=\left[\dfrac{\ln M}{\ln|q|}\right]+1$,则当$n>N$时,有

$$|q^n|>M.$$

所以 $\{q^n\}$是无穷大量.

例 20 证明$\left\{\dfrac{n^2-1}{n+5}\right\}$是正无穷大量.

证 对$\forall M>0$,要使

$$\frac{n^2-1}{n+5}=\frac{(n+1)(n-1)}{n+5}>\frac{n(n-1)}{2n}=\frac{n-1}{2}>M\,(n>5),$$

只要 $n>2M+1$.

因此,对$\forall M>0$,只要取$N=\max\{[2M+1],5\}$,则当$n>N$时,有

$$\frac{n^2-1}{n+5}>M.$$

所以 $\left\{\dfrac{n^2-1}{n+5}\right\}$是无穷大量.

$\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}(\alpha>0),\left\{\frac{a^{n}}{n!}\right\},\{q^{n}\}\left(|q|<1\right)$是无穷小数列.

$\{n\},\left\{(-1)^{n}\frac{n^{2}+1}{n}\right\},\{q^{n}\}\left(|q|>1\right)$ 是无穷大量.

$\left\{\left(1+(-1)^{n}\right)n\right\}$ 是无界数列, 不是无穷大量.

20231016QQ群讨论问题3

猜测数列$\left\{\dfrac{2^n n!}{n^n}\right\}$的极限,并用数列极限的定义验证你的猜测.

你应该：

知道数列极限的“ε - N”语言

会用定义证明数列极限

知道无穷小数列与无穷大数列

庄子,名周,战国时期宋国蒙人。战国中期思想家、哲学家、文学家,庄学的创立者,道家学派代表人物,与老子并称“老庄”。庄子散文极具浪漫主义风格,在古代散文中罕有其比,在中国的文学史上独树一帜,对后世文学具有深远的影响。他的文章体制已脱离语录体形式,标志着先秦散文已经发展到成熟的阶段,可以说,《庄子》代表了先秦散文最高成就。

——摘自百度百科

庄子(道家学派代表人物)
(约公元前369年-约公元前286年)
思想家、哲学家、文学家

刘徽是魏晋期间伟大的数学家，中国古典数学理论的奠基人之一.在中国数学史上作出了极大的贡献，他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》，是中国最宝贵的数学遗产.刘徽思想敏捷，方法灵活，既提倡推理又主张直观.他是中国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人.刘徽的一生是为数学刻苦探求的一生.他虽然地位低下，但人格高尚.他不是沽名钓誉的庸人，而是学而不厌的伟人，他给我们中华民族留下了宝贵的财富.

——摘自百度百科

刘徽(汉族，山东邹平县人)
(约225年—约295年)
数学家