第二十二章　曲面积分

第一节　第一型曲面积分

第二十二章　曲面积分

第一节　第一型曲面积分

1. 第一型曲面积分的概念
2. 第一型曲面积分的计算

定义: 设 S 为空间中可求面积的曲面, $f(x,y,z)$ 为定义在 S 上的函数. 对曲面 S 做分割 T, 它把 S 分为 n 个可求面积的小曲面块 S_i, $i=1,2,\cdots$, S_i 的面积记为 ΔS_i, 分割 T 的细度为 $\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{S_i \text{ 的直径}\}$, 在 S_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i), $i=1,2,\cdots$. 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = J$$

存在且 J 与分割 T 与点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关, 则称此极限为 $f(x,y,z)$ 在 S 上的**第一型曲面积分**, 记为

$$\iint_S f(x,y,z)dS.$$

第一型曲面积分的计算

定理22.1： 设有光滑曲面

$$S: z = z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

$f(x,y,z)$ 为 S 上的连续函数，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy.$$

特别的，曲面 S 的面积为

$$\iint_S 1dS = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy.$$

例题1： 计算积分
$$\iint\limits_S \frac{dS}{z},$$
其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ $(0<h<a)$ 所截的顶部.

例题2： 计算积分

$$\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dS,$$

其中 S 为

- 球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

- 球面 $x^2+y^2+z^2=2az$.

例题3： 计算积分

$$\iint\limits_S xyz + 2x^2 + z^2 dS,$$

其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 被平面 $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 所截的顶部.

例题4： 计算积分

$$\iint\limits_S \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS,$$

其中 S 是介于 $z=0$ 和 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ $(H>0)$.

本节作业

作业：

第 262 页：第1题(1), (2), (3), (4) .