收敛数列的性质

(唯一性) 若数列$\{a_n\}$收敛,则其极限是唯一的.

(有界性) 若数列$\{a_n\}$收敛,则$\exists M>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $|a_n|\le M$.

(保号性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$(或$<0$),对$\forall r\in(0,a)$(或$r\in(a,0)$),
$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $a_n>r>0\left(a_n<r<0\right)$.

(保号性推论) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ne 0$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$.

(保号性推论) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且$b<a<c$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $b<a_n<c$.

(保号性推论(保序性)) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,且$a<b$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $a_n<b_n$.

(保不等式性) 若数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都收敛. $\exists N_0\in\mathbb{N}_+,\forall n>N_0$,有 $a_n\le b_n\left(a_n<b_n\right)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

(迫敛性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,且$\exists N_0\in\mathbb{N}_+,\forall n>N_0$,有 $a_n\le c_n\le b_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

(四则运算法则) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\pm b_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n=a\pm b.\quad \lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=a\cdot b.$$

当$b_n\ne 0$及$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\ne 0$时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$.

BY GYH