Ch6 微分中值定理及其应用

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

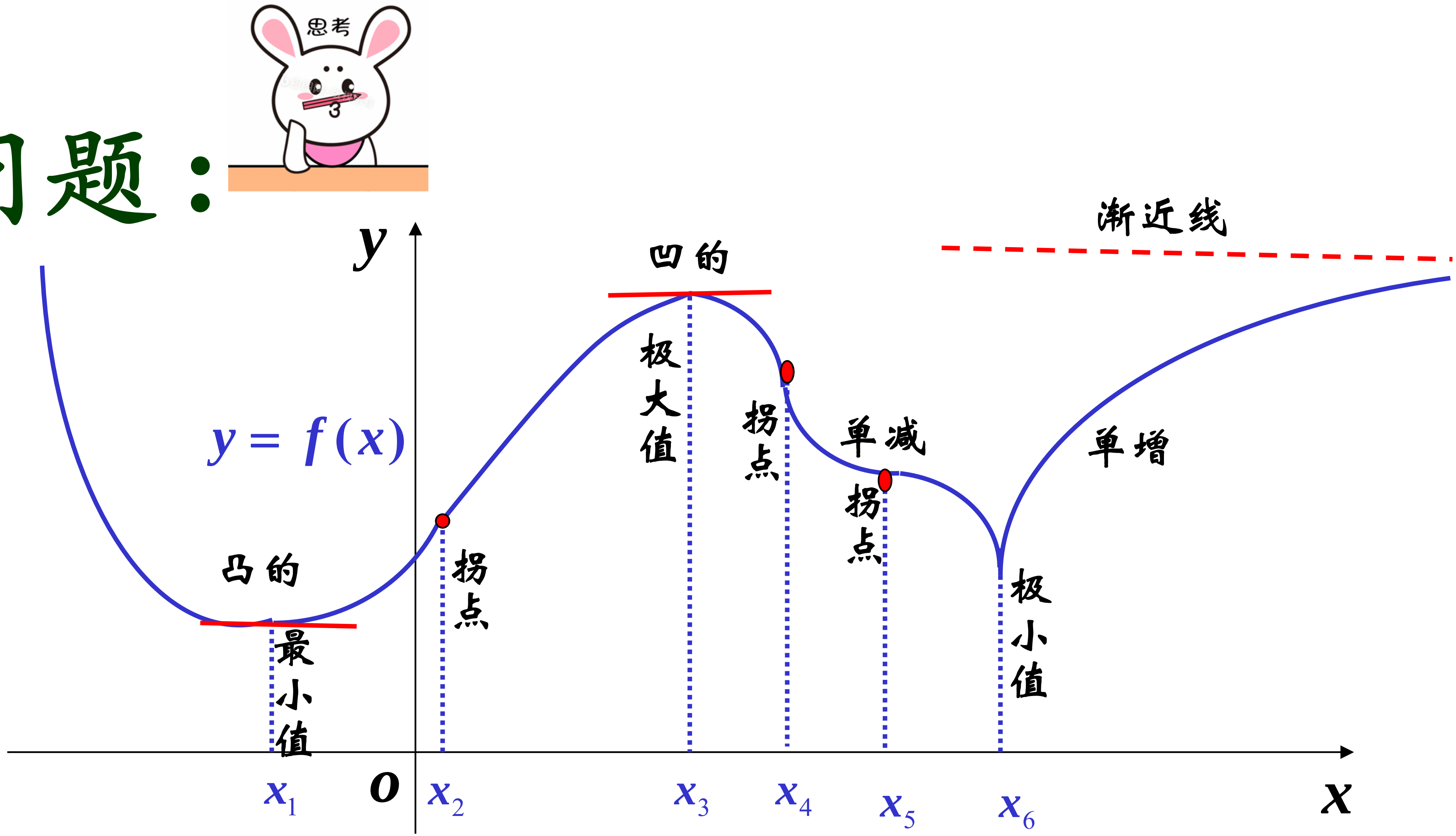
2023年12月28日

BY GYH

将学习：

如何运用微分学知识，并结合周期性、奇偶性等初等数学知识作出函数的图像？

问题：



如何找出图中各种信息，从而画出函数$y=f(x)$的图像？

函数作图基本步骤：

(i) 确定函数的定义域,并考察其奇偶性、周期性;

(ii) 求函数的一阶导数,二阶导数,从而得到
一阶导数与二阶导数为0和不存在的点;

(iii) 列表讨论,判别函数的增减及凹凸区间,
得到函数的极值和拐点;

(iv) 求函数的渐近线;

(v) 确定某些特殊点, 作出函数的图像.

回顾渐近线

垂直渐近线：

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则称$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的一条垂直渐近线.

水平渐近线：

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$, 则称$y=c$为曲线$y=f(x)$的一条水平渐近线.

斜渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0, \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$,

则称$y=kx+b$为曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线.

注：$x\to x_0$也可为$x\to x_0^-$或$x\to x_0^+$,

$x\to\infty$也可为$x\to-\infty$或$x\to+\infty$.

例1 作出函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的图像.

解 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$ 并在其上连续.

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{10x+2}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

令 $f'(x)=0$, 解得稳定点 $x=\dfrac{2}{5}$; $x=0$ 是 $f'(x)$ 不存在的点.

令 $f''(x)=0$, 解得 $x=-\dfrac{1}{5}$; $x=0$ 是 $f''(x)$ 不存在的点.

列表讨论：

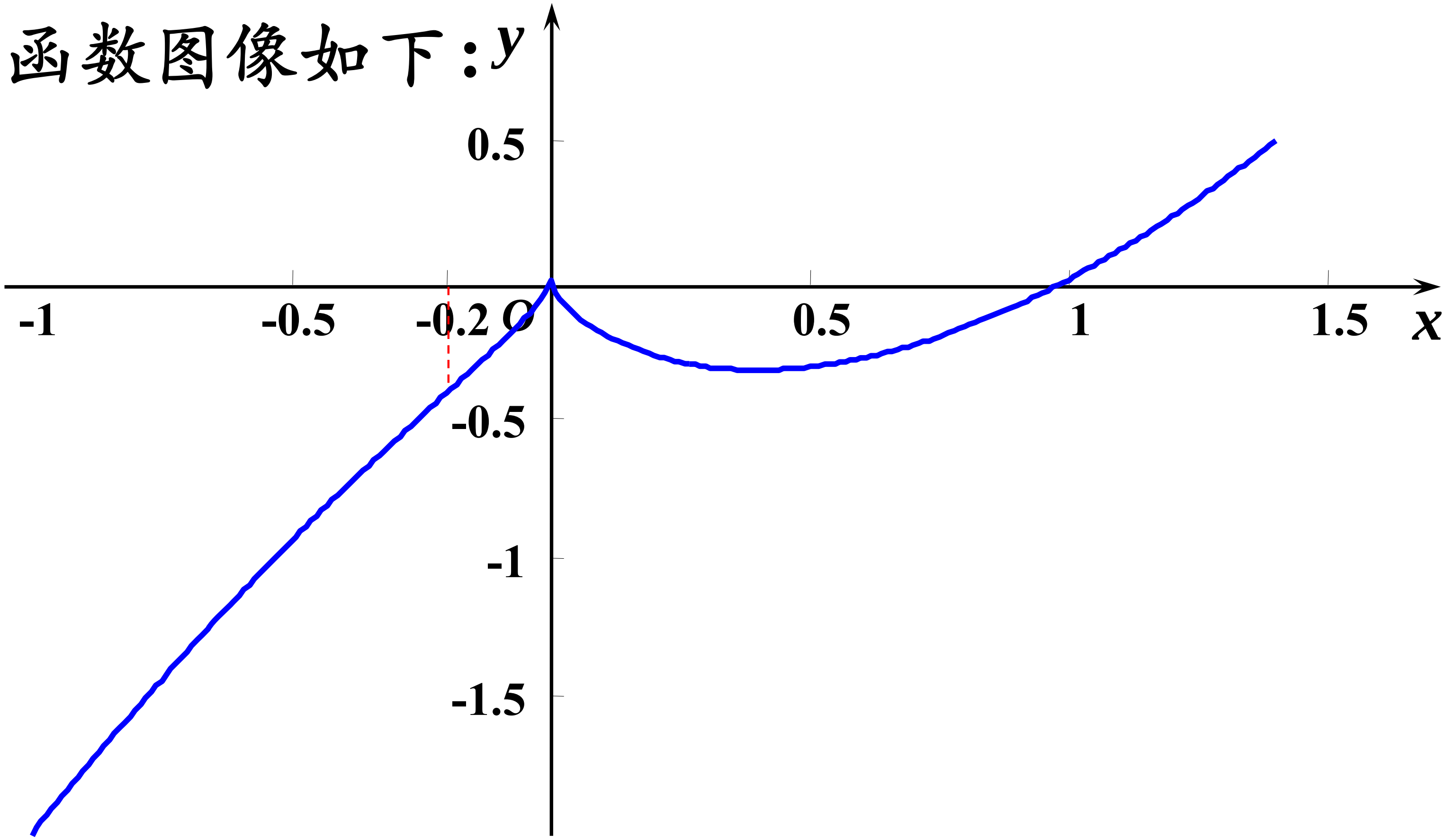
x	$\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right)$	$-\frac{1}{5}$	$\left(-\frac{1}{5},0\right)$	0	$\left(0,\frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	不存在	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	凹增	拐点 $\left(-\frac{1}{5},f\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$	凸增	极大值	凸减	极小值	凸增

例1 作出函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$的图像.

$f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}$ 为极小值, $f(0)=0$为极大值, $\left(-\frac{1}{5},-\frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$ 为拐点.

由于$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)x^{\frac{2}{3}}=\infty$, 函数没有渐近线.

补充点:(1,0).函数图像如下:



例2 作出函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图像.

解 $f(x)$ 的定义域是 $x\neq 0$.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3},\quad f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0$, 解得稳定点 $x=-2$. 令 $f''(x)=0$, 解得 $x=-3$.

列表讨论：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	不存在	$-$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	不存在	$+$
f	凹 减	拐点 $\left(-3,-\frac{26}{9}\right)$	凸 减	极小值 -3	凸 增	不存在	凸 减

例2 作出函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图像.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	不存在	$-$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	不存在	$+$
f	凹 减	拐点 $\left(-3,-\frac{26}{9}\right)$	凸 减	极小值	凸 增	不存在	凸 减

f 在 $(-\infty,-2],(0,+\infty)$ 上单调递减; 在 $[-2,0)$ 上单调递增.

f 在 $(-\infty,-3]$ 上是凹函数; 在 $[-3,0),(0,+\infty)$ 上是凸函数.

$f(-2)=-3$ 为极小值, $\left(-3,-\dfrac{26}{9}\right)$ 为拐点.

$x=0$ 是 f 的间断点.

例2 作出函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图像.

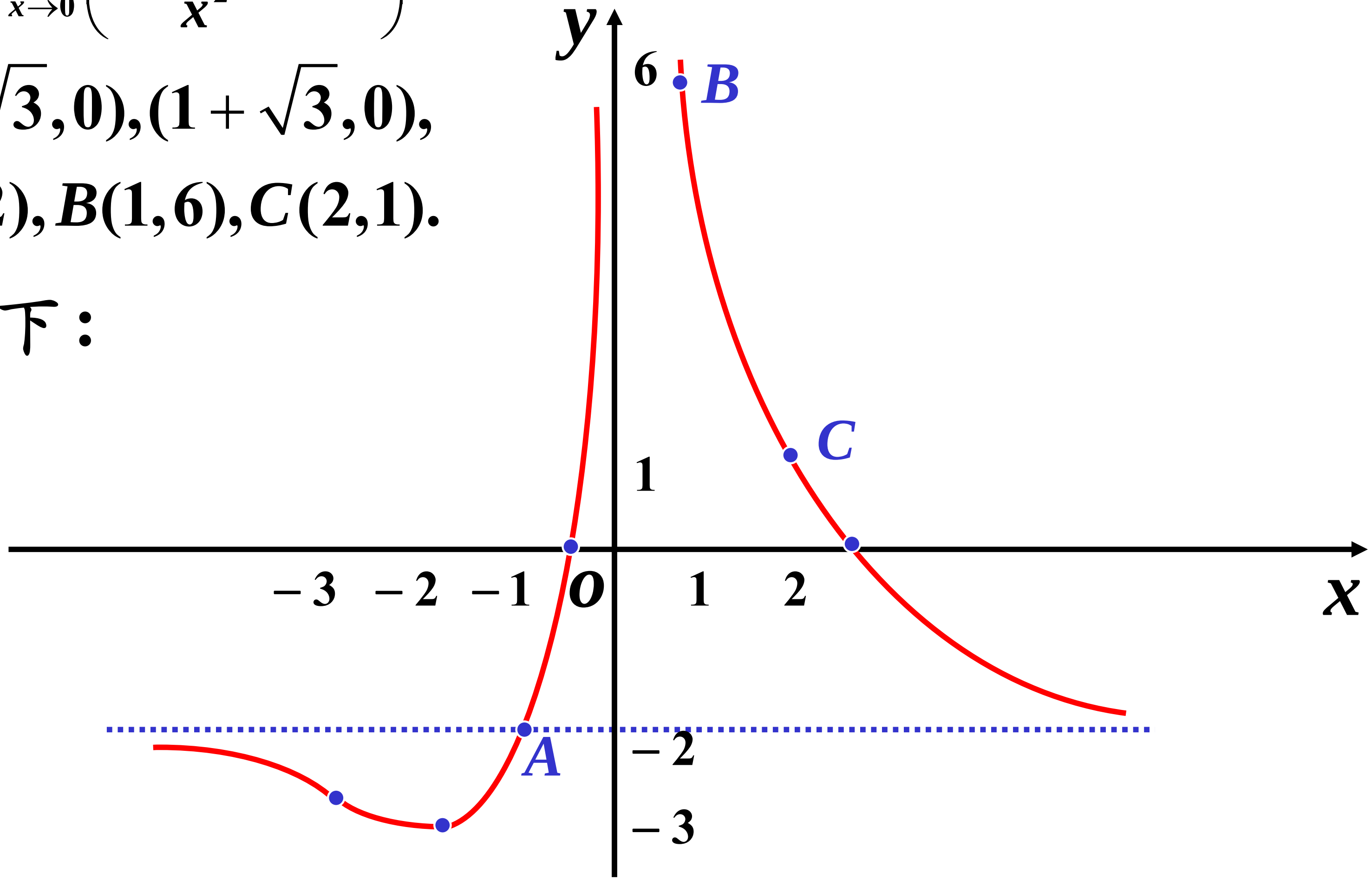
由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2\right)=-2$, 得水平渐近线 $y=-2$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2\right)=+\infty$, 得垂直渐近线 $x=0$.

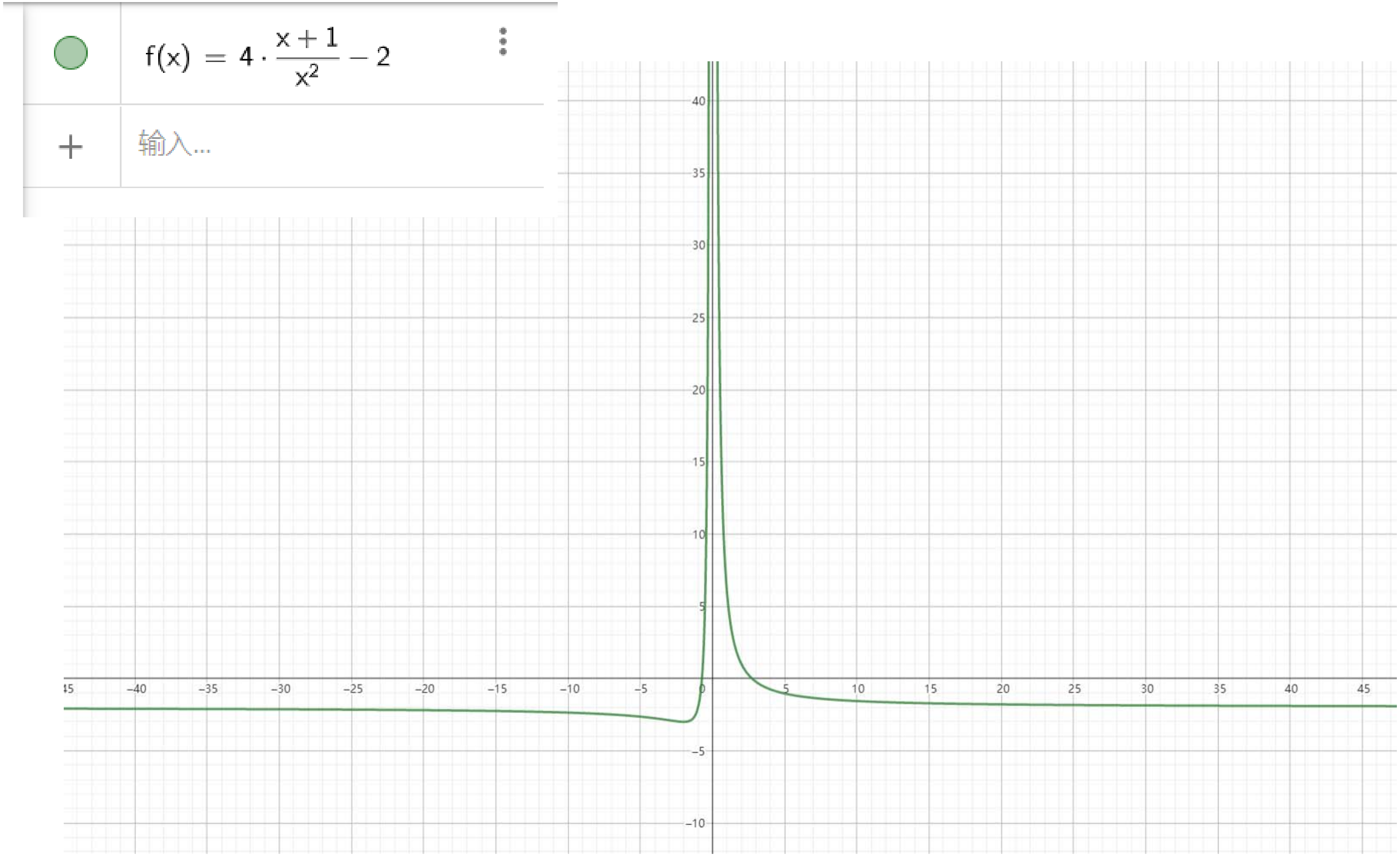
补充点: $(1-\sqrt{3},0),(1+\sqrt{3},0)$,

$A(-1,-2),B(1,6),C(2,1)$.

函数图像如下:



GeoGebra 计算器套件 **https://www.geogebra.org/calculator**



你应该：

会作函数的图像