# Ch5 导数和微分

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

将学习：

参变量函数的导数

## 参变量函数

设平面曲线$C$的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$$

由上述参数方程所表示的函数,称为参变量函数.

# 参变量函数的求导法则

参变量函数 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$

如果 $\varphi(t), \psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t) \ne 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

**注：** 参变量函数的求导法则的几何意义：

设由 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ 表示的曲线 $C$ 在点 $P\big(\varphi(t_0), \psi(t_0)\big)$ 处有切线.

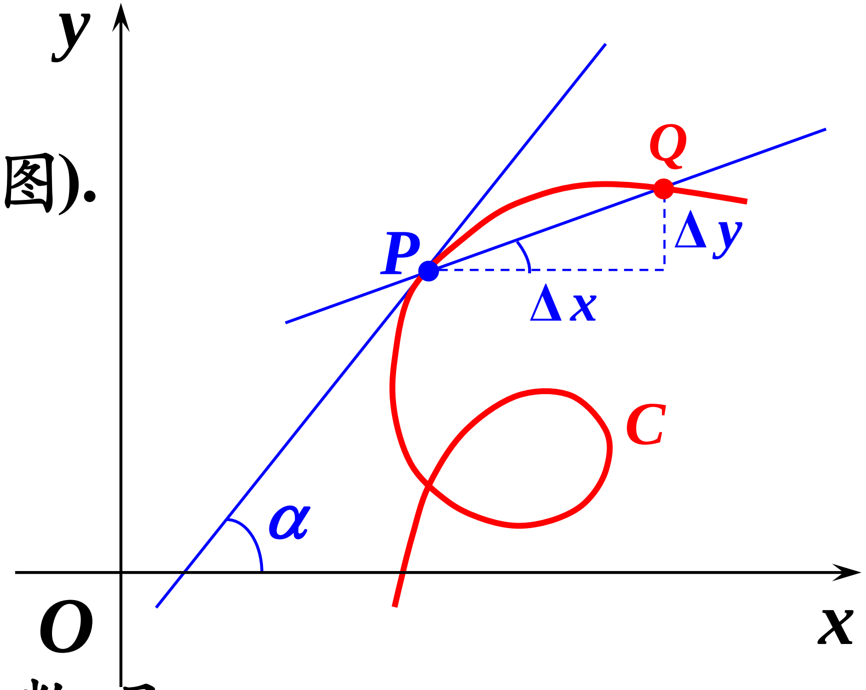
过点 $P$ 及邻近点 $Q(\varphi(t_0+\Delta t), \psi(t_0+\Delta t))$ 的割线 $PQ$ 的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\psi(t_0+\Delta t) - \psi(t_0)}{\varphi(t_0+\Delta t) - \varphi(t_0)}.$$

如果 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 在点 $t_0$ 可导, $\varphi'(t_0) \ne 0$, 则切线的斜率为

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{\psi(t_0+\Delta t) - \psi(t_0)}{\Delta t}}{\dfrac{\varphi(t_0+\Delta t) - \varphi(t_0)}{\Delta t}} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)},$$

其中$\alpha$是切线与$x$轴正向的夹角(见图).




当$\psi'(t_0)\neq 0$时,有

$$\cot\alpha=\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

若 $\varphi,\psi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上都存在连续导数,且

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0,$$

则称曲线$C$为光滑曲线. 光滑曲线的每一点都存在切线,

且切线与$x$轴正向的夹角$\alpha(t)$是$t$的连续函数.

**例1** 求参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $t \in (0, \pi)$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的导数，

并求此椭圆在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

**解**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = -\frac{b}{a}\cot t,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}. \qquad t = \frac{\pi}{4} \text{处对应的点为} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right).$$

故所求切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}b}{2} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{\sqrt{2}a}{2}\right).$$

例2 求参数方程 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的导数.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \cot\frac{t}{2}.$$

**例3** 设炮弹的弹头初速度是$v_0$,沿着与地面成$\alpha$角的方向抛射出去.求在时刻$t_0$时弹头的运动方向(忽略空气阻力、风向等因素).

**解** 已知弹头关于时间$t$的弹道曲线的参数方程是

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases},$$

其中$g$是重力加速度. 由参量方程求导法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{v_0\cos\alpha}.$$

设时刻$t_0$弹头的运动方向与地面的夹角为$\varphi$,有

$$\tan\varphi = \tan\alpha - \frac{gt_0}{v_0\cos\alpha},\text{即}\ \varphi = \arctan\left(\tan\alpha - \frac{gt_0}{v_0\cos\alpha}\right).$$

**例4** 若曲线$C$由极坐标方程$r=r(\theta)$给出,则可以把它转化成以极角$\theta$为参数的参数方程

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta, \\ y=r(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

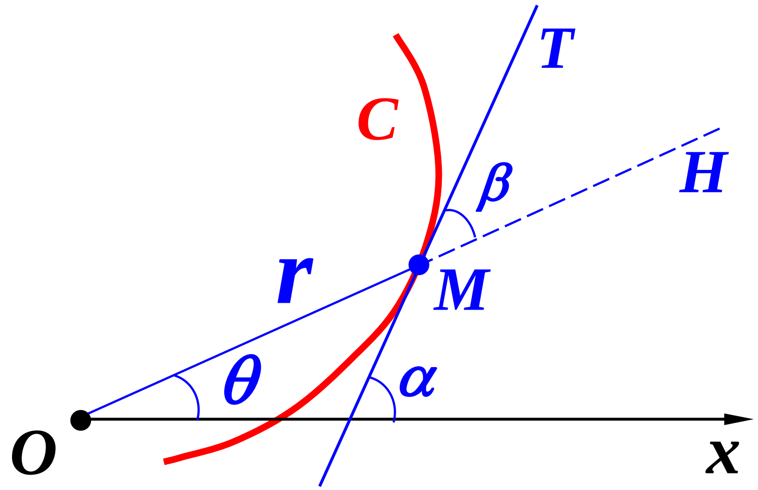
如果 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}$ 存在,且$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(r(\theta)\sin\theta)'}{(r(\theta)\cos\theta)'}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{r'(\theta)\tan\theta+r(\theta)}{r'(\theta)-r(\theta)\tan\theta}.$$

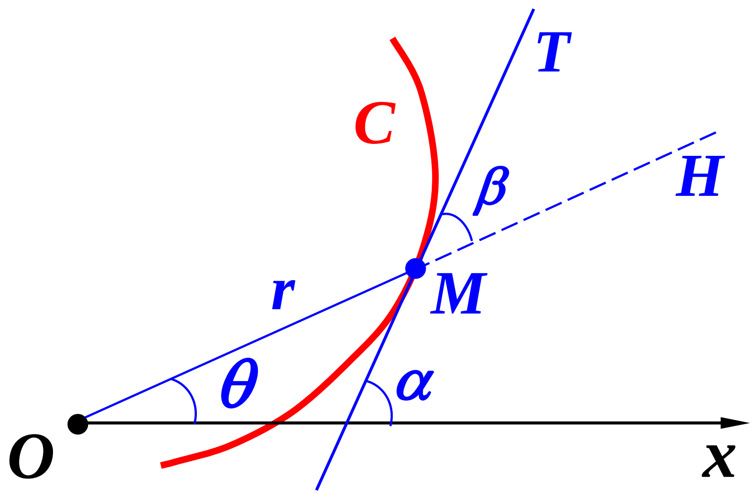
曲线$r=r(\theta)$在点$M(r,\theta)$处的切线$MT$与极轴$Ox$的夹角$\alpha$,则

$$\tan\alpha=\frac{r'(\theta)\tan\theta+r(\theta)}{r'(\theta)-r(\theta)\tan\theta}.$$



过点$M$的射线$OH$(即点$M$的向径)与切线$MT$的夹角$\beta$的正切是

$$\tan\beta = \tan(\alpha-\theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta} = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}.$$



**例5** 证明对数螺线$r=\mathrm{e}^{\theta/2}$上所有点处的切线与向径的夹角$\beta$是常数.

**证** 因为对每一 $\theta$ 值,

$$\tan\beta=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\frac{\mathrm{e}^{\theta/2}}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\theta/2}}=2.$$

所以这条曲线上任一点的切线与向径的夹角等于常数 arctan 2.

**例6** 证明：圆 $r = 2a\sin\theta (a > 0)$ 上所有点处的切线与向径的夹角等于向径的极角.

**证** 因为对每一 $\theta$ 值，

$$\tan\beta = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{2a\sin\theta}{2a\cos\theta} = \tan\theta.$$

所以切线与向径的夹角等于向径的极角.

注：极角 $\theta$ 的范围为 $[0,\pi]$，向径与切线的夹角范围为 $[0,\pi)$.

# 你应该:

会求参变量函数的导数