第二十章　曲线积分

第二节　第二型曲线积分

第二十章　曲线积分

第二节　第二型曲线积分

1. 第二型曲线积分的定义

2.第二型曲线积分的计算

3.两类曲线积分之间的联系

定义1： 设 $L:\widehat{AB}$ 为定义在平面**有向**可求长曲线, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 为定义在 L 上的二元函数. 对 L 的任意分割 T, 它把 L 分成 n 个小曲线段, $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 其中 $M_0=A$, $M_n=B$. 记各小曲线段 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δs_i, 分割 T 的细度 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$. 又设 T 的分点 $M_i=(x_i,y_i)$, 并设 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$. 在每个小曲线段上任取一点 (ξ_i,η_i), 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

存在且与分割 T 与点 (ξ_i,η_i) 的取法无关. 则称此极限为函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 沿有向曲线 L 上的**第二型曲线积分**, 记为

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

第二型曲线积分的定义

- 为了方便起见，把

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

简写成

$$\int_L Pdx + Qdy,$$

或可写成向量形式

$$\int_L \overrightarrow{F}(x,y) \cdot d\vec{s}$$

其中 $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, $d\vec{s} = (dx, dy)$.

第二型曲线积分的定义

- 若 L 为**封闭的**有向曲线, 则记 P, Q 沿有向曲线 L 的第二型曲线积分为

$$\oint_L Pdx + Qdy.$$

- 同理可定义沿有向三维空间曲线 L 上的第二型曲线积分为

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

或简写成

$$\int_L \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{s}$$

其中 $\vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$, $d\vec{s} = (dx,dy,dz)$.

第二型曲线积分的性质

性质1：

$$\int_L \left(\sum_{i=1}^{k} c_i P_i\right) dx + \left(\sum_{i=1}^{k} c_i Q_i\right) dy = \sum_{i=1}^{k} c_i \left(\int_L P_i dx + Q_i dy\right).$$

性质2： 设 L 可分成 k 条有向光滑曲线 L_i, $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 则

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \sum_{i=1}^{k} \int_{L_i} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

性质3： 用 L^- 表示 L 的反向弧, 则

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \\ = -\int_{L^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

定理1： 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续. 若 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t : \alpha \to \beta$, 则 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在有向曲线 L 上第二型曲线积分存在, 且有

$$\begin{aligned} &\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ = &\int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt. \end{aligned}$$

同样, 对于三维情形, 我们有

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)dt.$$

例题1： 计算第二型曲线积分

$$\int_L xy\,\mathrm{d}x + (y - x)\,\mathrm{d}y$$

其中

- L 为直线段，从点 $A(1,1)$ 到 $B(2,3)$ 的一段.
- L 为抛物线 $y = 2(x-1)^2 + 1$ 从点 $A(1,1)$ 到 $B(2,3)$ 的一段.
- L 为直线 $y = 1$, $x = 2$, $y = 2x - 1$ 所围区域的边界，逆时针方向.

例题2： 计算第二型曲线积分

$$\int_L y^2 dx,$$

其中 L 为

例题2： 计算第二型曲线积分

$$\int_L y^2 dx,$$

其中 L 为

- 半径为 a, 圆心为原点, 按逆时针方向绕行的上半圆周.

例题2： 计算第二型曲线积分

$$\int_L y^2 dx,$$

其中 L 为

- 半径为 a, 圆心为原点, 按逆时针方向绕行的上半圆周.
- 从 $A(a,0)$ 到 $B(-a,0)$ 直线段.

例题4： 求在力 $\vec{F} = (y, -x, x+y+z)$ 作用下，

- 质点由 $A(a,0,0)$ 沿着螺旋线 L 到 $B(a,0,2\pi b)$ 所做的功，其中 L 为

$$x = a\cos(t), \quad y = a\sin(t), \quad z = bt, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

- 质点沿着直线 L 由 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,2\pi b)$ 所做的功.

两类曲线积分之间的联系

设有向光滑弧 L, L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$ $t : c_1 \to c_2$, 已知 L 切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}, \cos\beta = \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}},$$

则两类曲线积分有如下联系

$$\begin{aligned} &\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ = &\int_L [P(x(t), y(t)) \cos\alpha + Q(x(t), y(t)) \cos\beta] ds. \end{aligned}$$

两类曲线积分之间的联系

设三维空间中的有向光滑弧 L, 已知 L 切向量的方向余弦为

$$\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

则两类曲线积分有如下联系

$$\begin{aligned}
&\int_L Pdx + Qdy + Rdz \\
=& \int_L [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]ds \\
=& \int_L \vec{A} \cdot \vec{\tau} ds.
\end{aligned}$$

例题5： 计算第二型曲线积分

$$\oint_L y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z,$$

其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x+y+z=1$ 的交线，从 x 轴正向看去取逆时针方向.

本节作业

作业：

第 196 页：第1题(2), (4), (5).

第 196 页：第3题.