Ch3 函数极限

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820　QQ号：58105217

Email:　yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年11月16日　　BY GYH

数学分析1 —— Ch3 函数极限 —— 总结

- 函数极限
  - 函数极限概念
    - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的$\varepsilon-\delta$定义
    - $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A$的$\varepsilon-M$定义
  - 函数极限的性质
    - 唯一性
    - 局部有界性
    - 局部保号性
    - 保不等式
    - 迫敛性
    - 四则运算法则
  - 函数极限存在的条件
    - 归结原则
    - 单侧极限的单调有界定理
    - 柯西收敛准则
  - 两个重要极限
    - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
    - $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$
  - 无穷小量与无穷大量
    - 无穷小量与无穷大量
    - 无穷小量阶的比较
  - 曲线的渐近线

BY GYH

重要概念 函数极限的定义

$\varepsilon - M$ 定义

设$f(x)$在$U(\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$的充要条件是:
$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x : |x| > M$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

设$f(x)$在$U(+\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$的充要条件是:
$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x : x > M$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

设$f(x)$在$U(-\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$的充要条件是:
$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x : x < -M$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\varepsilon - \delta$ 定义

设$f(x)$在$U^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$的充要条件是:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0(\delta < \delta'), \forall x \in U^\circ(x_0;\delta)$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

右极限 $f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

设$f(x)$在$U_+^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$的充要条件是:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0(\delta < \delta'), \forall x \in U_+^\circ(x_0;\delta)$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

左极限 $f(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

设$f(x)$在$U_-^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$的充要条件是:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0(\delta < \delta'), \forall x \in U_-^\circ(x_0;\delta)$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

重要概念 函数不以A为极限的否定陈述

设$f(x)$在$U(\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq A$的充要条件是:
$\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0,\exists x':|x'|>M$, 有 $|f(x')-A|\geq\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U(+\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$的充要条件是:
$\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0,\exists x':x'>M$, 有 $|f(x')-A|\geq\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U(-\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\neq A$的充要条件是:
$\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0,\exists x':x'<-M$, 有 $|f(x')-A|\geq\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$的充要条件是:
$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\exists x'\in U^\circ(x_0;\delta)$, 有 $|f(x')-A|\geq\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U_+^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq A$的充要条件是:
$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\exists x'\in U_+^\circ(x_0;\delta)$, 有 $|f(x')-A|\geq\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U_-^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq A$的充要条件是:
$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\exists x'\in U_-^\circ(x_0;\delta)$, 有 $|f(x')-A|\geq\varepsilon_0$.

重要概念 函数极限不存在的否定陈述

设$f(x)$在$U(\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在的充要条件是：

$\forall A\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0,\exists x':|x'|>M$, 有 $|f(x')-A|\ge\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U(+\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在的充要条件是：

$\forall A\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0,\exists x':x'>M$, 有 $|f(x')-A|\ge\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U(-\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$不存在的充要条件是：

$\forall A\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0,\exists x':x'<-M$, 有 $|f(x')-A|\ge\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在的充要条件是：

$\forall A\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\exists x'\in U^\circ(x_0;\delta)$, 有 $|f(x')-A|\ge\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U_+^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$不存在的充要条件是：

$\forall A\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\exists x'\in U_+^\circ(x_0;\delta)$, 有 $|f(x')-A|\ge\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U_-^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$不存在的充要条件是：

$\forall A\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\exists x'\in U_-^\circ(x_0;\delta)$, 有 $|f(x')-A|\ge\varepsilon_0$.

重要概念 无穷小量与无穷大量

设$f(x)$在$U(\infty)$上有定义. 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$,则称$f(x)$为$x\to\infty$时的无穷小量.

设$f(x)$在$U(\infty)$上有定义. 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$,则称$f(x)$为$x\to\infty$时的无穷大量.

$G-M$定义 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall G>0,\exists M>0,\forall x:|x|>M$,有 $|f(x)|>G$.

$G-\delta$定义 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall G>0,\exists \delta>0,\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$,有 $f(x)<-G$.

注：非正常极限一共有十八种.

重要概念 无穷小量(无穷大量)阶的比较

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0(\infty)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0(\infty)$.

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则称当$x\to x_0$时$f(x)$为$g(x)$高阶(低阶)无穷小量(无穷大量),

记作$f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$. 也称当$x\to x_0$时$g(x)$为$f(x)$低阶(高阶)无穷小量(无穷大量).

(2)若$\exists L>0$及某$U^{\circ}(x_0)$,对$\forall x\in U^{\circ}(x_0)$,有$\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\le L$,

则称$\dfrac{f(x)}{g(x)}$为$x\to x_0$时的有界量,记作$f(x)=O(g(x))(x\to x_0)$.

(3)若$\exists K,L>0$及某$U^{\circ}(x_0)$,对$\forall x\in U^{\circ}(x_0)$,有$K\le\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\le L$,

则称$f(x)$与$g(x)$为$x\to x_0$时的同阶无穷小量(无穷大量).

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\ne 0$,则$f(x)$与$g(x)$必为$x\to x_0$时的同阶无穷小量(无穷大量).

(4)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则$f(x)$与$g(x)$为$x\to x_0$时的等价无穷小量(无穷大量),记作$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$.

重要概念 渐近线

若曲线$y=f(x)$上的动点沿着曲线无限远离原点时,动点与某定直线的距离趋于0,则这条定直线为曲线$y=f(x)$的渐近线.

$y=kx+b$为曲线$y=f(x)$的斜渐近线当且仅当下列条件之一满足:

$$(1)k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

$$(2)k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

$$(3)k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

若$k=0$,则称$y=b$为曲线$y=f(x)$的水平渐近线.

$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的垂直渐近线当且仅当下列条件之一满足:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$$

函数极限的性质

(唯一性) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则其极限是唯一的.

(局部有界性) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则$f(x)$在点$x_0$的某空心邻域$U^\circ(x_0)$上有界.

(局部保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$(或 < 0),对$\forall r \in (0, A)$(或$r \in (A,0)$),

存在$U^\circ(x_0)$,对$\forall x \in U^\circ(x_0)$,有 $f(x) > r > 0$(或$f(x) < r < 0$).

(局部保号性推论) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$,存在$U^\circ(x_0)$,对$\forall x \in U^\circ(x_0)$,有 $|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$.

(局部保号性推论) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,且$A < B$,则$\exists \delta > 0$, $\forall x \in U^\circ(x_0;\delta)$,有

$f(x) < g(x)$.

(保不等式性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,且$\exists \delta > 0$, $\forall x \in U^\circ(x_0;\delta)$,有$f(x) \le g(x)$,

则 $A \le B$.

函数极限的性质

(迫敛性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 且 $\exists\delta'>0, \forall x\in U^\circ(x_0;\delta')$,

有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A.$

(四则运算法则) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=A\pm B.$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B.$$

当 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\ne 0$ 时, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}.$

注: $\infty-\infty, 0\cdot\infty, \dfrac{0}{0}, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ 不能使用四则运算法则.

无穷小量的性质

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-A\big)=0.$

$\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

(2) 有限个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量.

(3) 无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量.

(4) 非零无穷小量的倒数是无穷大量.

重要定理 归结原则(Heine定理)

设$f(x)$在$U^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是：
对任何含于$U^\circ(x_0;\delta')$且以x_0为极限的数列$\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在且相等.

设$f(x)$在$U_-^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在的充要条件是：
对任何含于$U_-^\circ(x_0;\delta')$且以x_0为极限的递增数列$\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在且相等.

设$f(x)$在$U_+^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在的充要条件是：
对任何含于$U_+^\circ(x_0;\delta')$且以x_0为极限的递减数列$\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在且相等.

设$f(x)$在$U(\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在的充要条件是：
对任何含于$U(\infty)$且趋于无穷大的数列$\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在且相等.

设$f(x)$在$U(+\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$的充要条件是：
对任何含于$U(+\infty)$且趋于正无穷大的数列$\{x_n\}$,$\{f(x_n)\}$都是正无穷大.

重要定理 归结原则(Heine定理)的否定陈述

设$f(x)$在$U^{\circ}(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在的充要条件是：

存在含于$U^{\circ}(x_0;\delta')$且以x_0为极限的数列$\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都不存在.

设$f(x)$在$U^{\circ}(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在的充要条件是：

存在含于$U^{\circ}(x_0;\delta')$且以x_0为极限的数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$存在,

但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.

设$f(x)$在$U(\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在的充要条件是：

存在含于$U(\infty)$且趋于无穷大的数列$\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在.

设$f(x)$在$U(\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在的充要条件是：

存在含于$U(\infty)$且趋于无穷大的数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$存在,

但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.

重要定理 单侧极限单调有界定理

设$f(x)$在$U_-^\circ(x_0)$上递增且有界(或递减且有界)，则极限$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在

且$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x)\left(或\ f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\inf\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x)\right)$.

设$f(x)$在$U_+^\circ(x_0)$上递增且有界(或递减且有界)，则极限$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在

且$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\inf\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x)\left(或\ f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\sup\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x)\right)$.

设$f(x)$在$U(+\infty)$上递增且有界(或递减且有界)，则极限$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$存在

且$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\sup\limits_{x\in U(+\infty)} f(x)\left(或\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\inf\limits_{x\in U(+\infty)} f(x)\right)$. P52/习题3.3第2题

设$f(x)$在$U(-\infty)$上递增且有界(或递减且有界)，

且$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\inf\limits_{x\in U(-\infty)} f(x)\left(或\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\sup\limits_{x\in U(-\infty)} f(x)\right)$.

重要定理 函数极限柯西收敛准则

设$f(x)$在$U(\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在的充要条件是：
$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall x',x'':|x'|>M,|x''|>M$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

设$f(x)$在$U(+\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在的充要条件是：
$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall x',x'':x',x''>M$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

设$f(x)$在$U(-\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在的充要条件是：
$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall x',x'':x',x''<-M$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

设$f(x)$在$U^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是：
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta'),\forall x',x''\in U^\circ(x_0;\delta)$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

设$f(x)$在$U_+^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在的充要条件是：
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta'),\forall x',x''\in U_+^\circ(x_0;\delta)$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

设$f(x)$在$U_-^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在的充要条件是：
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta'),\forall x',x''\in U_-^\circ(x_0;\delta)$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

重要定理 函数极限柯西收敛准则的否定陈述

设$f(x)$在$U(\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在的充要条件是：

$\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0,\exists x_1',x_2'':|x_1'|>M,|x_2''|>M$,使得 $|f(x_1')-f(x_2'')|\geq\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U(+\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在的充要条件是：

$\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0,\exists x_1',x_2'':x_1'>M,x_2''>M$,使得 $|f(x_1')-f(x_2'')|\geq\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U(-\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$不存在的充要条件是：

$\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0,\exists x_1',x_2'':x_1'<-M,x_2''<-M$,使得 $|f(x_1')-f(x_2'')|\geq\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在的充要条件是：

$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\exists x_1',x_2''\in U^\circ(x_0;\delta)$,有 $|f(x_1')-f(x_2'')|\geq\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U_+^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$不存在的充要条件是：

$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\exists x_1',x_2''\in U_+^\circ(x_0;\delta)$,有 $|f(x_1')-f(x_2'')|\geq\varepsilon_0$.

设$f(x)$在$U_-^\circ(x_0;\delta')$上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$不存在的充要条件是：

$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\exists x_1',x_2''\in U_-^\circ(x_0;\delta)$,有 $|f(x_1')-f(x_2'')|\geq\varepsilon_0$.

重要定理 等价无穷小替换定理

设$f(x),g(x),h(x)$在$U^\circ(x_0)$上有定义,且有$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$,则

$$(1)\ \lim_{x\to x_0} f(x)h(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)h(x).$$

$$(2)\ \lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}.$$

注:在乘除时大胆替换.

加减时尽量避免替换,以免出现错误.

千万不能对一个函数进行部分替换.

常用等价无穷小量

当 $\square \to 0$ 时,

$\sin\square \sim \square \qquad \arcsin\square \sim \square \qquad \tan\square \sim \square \qquad \arctan\square \sim \square$

$1-\cos\square \sim \dfrac{\square^2}{2} \qquad \ln(1+\square) \sim \square \qquad \log_a(1+\square) \sim \dfrac{\square}{\ln a}\,(a>0, a\neq 1)$

$e^{\square}-1 \sim \square \qquad a^{\square}-1 \sim \square\ln a\,(a>0) \qquad (1+\square)^{\alpha} \sim \alpha\square$

常用极限及重要结论

$$\lim_{x\to x_0} c = c\,(c\text{为常数}) \qquad \lim_{x\to x_0} x = x_0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \quad \lim_{x\to0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \lim_{x\to0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0} a^{x} = 1\,(a>0, a\neq1) \qquad \lim_{x\to x_0} a^{x} = a^{x_0}\,(a>0, a\neq1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^{x} = \begin{cases} 0, & 0<a<1 \\ 1, & a=1 \\ +\infty, & a>1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^{x} = \begin{cases} +\infty, & 0<a<1 \\ 1, & a=1 \\ 0, & a>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0}\log_a x = \log_a x_0\,(x_0>0, a>0, a\neq1) \qquad \lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0 \qquad \lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$$

常用极限及重要结论

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$.

若 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}\left(n\in\mathbb{N}_+\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty$.

常用极限及重要结论

对Dirichlet函数 $D(x), \forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to x_0} D(x)$不存在.

对Riemann函数$R(x), \forall x_0 \in (0,1), \lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0,$

$$\lim_{x \to 0^+} R(x) = 0, \lim_{x \to 1^-} R(x) = 0.$$

常用工具

当$x \to +\infty$时, $\ln x \ll x^{\alpha} \ll a^{x} \ll x^{x}$, 其中$\alpha > 0, a > 1$.

$$[x] \le x < [x] + 1 \qquad x - 1 < [x] \le x$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \qquad a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

P46/习题3.1/1(2) 按定义证明极限 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-6x+10\right)=2.$

证 限制 $|x-2|<1$,即 $1<x<3$. 对 $\forall \varepsilon>0$, 要使

$$\left|\left(x^2-6x+10\right)-2\right|=\left|x^2-6x+8\right|=|x-2||x-4|<3|x-2|<\varepsilon,$$

只要 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

因此,对 $\forall \varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$, 当 $0<|x-2|<\delta$ 时,有

$$\left|\left(x^2-6x+10\right)-2\right|<\varepsilon.$$

根据函数极限的定义知, $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-6x+10\right)=2.$

P46/习题3.1/1(3) 按定义证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1.$

证 限制 $|x|>2.$ 对 $\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|\frac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|=\left|\frac{4}{x^2-1}\right|=\frac{4}{x^2-1}<\frac{4}{x^2-\frac{x^2}{2}}=\frac{8}{x^2}<\varepsilon,$$

只要 $|x|>\sqrt{\dfrac{8}{\varepsilon}}.$

因此,对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\max\left\{2,\sqrt{\dfrac{8}{\varepsilon}}\right\}$, 当 $|x|>M$ 时,有

$$\left|\frac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|<\varepsilon.$$

根据函数极限的定义知, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1.$

P46/习题3.1/1(3) 按定义证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1.$

证2 限制 $|x|>1.$ 对 $\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|\frac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|=\left|\frac{4}{x^2-1}\right|=\frac{4}{x^2-1}<\varepsilon,$$

只要 $|x|>\sqrt{\dfrac{4}{\varepsilon}+1}.$

因此, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\max\left\{1,\sqrt{\dfrac{4}{\varepsilon}+1}\right\}$, 当 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|<\varepsilon.$$

根据函数极限的定义知, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1.$

P46/习题3.1/1(4) 按定义证明极限 $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0.$

证 限制$1<x<2.$ 对$\forall\varepsilon>0,$ 要使

$$\left|\sqrt{4-x^2}-0\right|=\sqrt{4-x^2}=\sqrt{(2-x)(2+x)}<2\sqrt{2-x}<\varepsilon,$$

只要 $2-x<\dfrac{\varepsilon^2}{4}$,即$x-2>-\dfrac{\varepsilon^2}{4}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0,$ 取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon^2}{4}\right\}$,当$-\delta<x-2<0$时,有

$$\left|\sqrt{4-x^2}-0\right|<\varepsilon.$$

根据函数极限的定义知, $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0.$

利用函数极限定义证明极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$时，

关键是对$\forall\varepsilon>0$，找到使得不等式$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$成立的

点x_0的空心邻域$U^\circ\left(x_0;\delta\right)$. 一般过程如下：

(1)根据所给极限形式将x限制在点x_0的某一个小邻域 $U^\circ\left(x_0;\delta_1\right)$中.

(2)在$U^\circ\left(x_0;\delta_1\right)$中，想办法把$\left|f(x)-A\right|$转化成 $\left|\varphi(x)\right|\left|x-x_0\right|$的形式；

(3)在$U^\circ\left(x_0;\delta_1\right)$中，估计$\left|\varphi(x)\right|$的上界：$\left|\varphi(x)\right|\le M$，其中$M>0$；

(4)对$\forall\varepsilon>0$，解不等式$M\left|x-x_0\right|<\varepsilon$，得到 $\left|x-x_0\right|<\dfrac{\varepsilon}{M}$；

(5)取$\delta=\min\left\{\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$，就可以找到$\delta$了.

注：其他二十三种情况，大致思路一致，但有些细节处理方式不同.

BY GYH

P46/习题3.1/2

根据(函数极限的$\varepsilon-\delta$定义)设函数f在点x_0的某个空心邻域$U^\circ(x_0;\delta')$内有定义,A为定数.若对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta')$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称$f(x)$当$x$趋于$x_0$时以$A$为极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to x_0)$.

叙述$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$.

答 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$的$\varepsilon-\delta$定义的否定陈述:

设函数f在点x_0的某个空心邻域$U^\circ(x_0;\delta')$内有定义,A为定数.

$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\exists x'\in U(x_0;\delta)$,使得$|f(x')-A|\geq\varepsilon_0$.

则称$f(x)$当x趋于x_0时不以A为极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$.

P46/习题3.1/6(3)

讨论函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0\\ 0, & x=0\\ 1+x^2, & x<0\end{cases}$在$x\to 0$时的极限或左、右极限.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2^x=1,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+x^2\right)=1,$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x),$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$

注: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

$\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

P46/习题3.1/8

证明:对黎曼函数$R(x)$有$\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0, x_0\in[0,1]$ (当$x_0=0$或1时,考虑单侧极限).

证 对$\forall\varepsilon>0$, 由于满足$R(x)=R\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{1}{q}\ge\varepsilon$, 即$q\le\dfrac{1}{\varepsilon}$的正整数$q$只有有限个,又由于$\dfrac{p}{q}$是既约真分数,即$p<q$,所以$p$也是有限个.因此,在$(0,1)$中只有有限个有理数$x=\dfrac{p}{q}$,使得$R(x)\ge\varepsilon$.

故可设这些有理数为$x_1,x_2,\cdots,x_k$. 因此,除了这k个点外,其他点处的函数值都小于ε.

当$x_0\in(0,1)$时,

(1) 若x_0是$x_1,\cdots,x_k$中的某一个,可设$x_0=x_i$, 取$\delta=\min\limits_{1\le l\le k,\, l\ne i}\left\{|x_l-x_0|\right\}$;

(2) 若$x_0\notin\{x_1,\cdots,x_k\}$, 取$\delta=\min\limits_{1\le l\le k}\left\{|x_l-x_0|\right\}$.

于是,当$0<|x-x_0|<\delta$时,对以上两种情形都有$|R(x)-0|<\varepsilon$.根据函数极限的定义知, $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

当$x_0=0$时,取$\delta=\min\limits_{1\le l\le k}\{x_l\}$. 当$0<x<\delta$时,有$|R(x)-0|<\varepsilon$.

根据函数极限的定义知, $\lim\limits_{x\to 0^+}R(x)=0$.

当$x_0=1$时,取$\delta=\min\limits_{1\le l\le k}\{1-x_l\}$. 当$-\delta<x-1<0$时,有$|R(x)-0|<\varepsilon$.

根据函数极限的定义知, $\lim\limits_{x\to 1^-}R(x)=0$.

P49/习题3.2/1(6) 求极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.$$

P49/习题3.2/1(8) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x\left(3+\dfrac{6}{x}\right)\right)^{70}\left(x\left(8-\dfrac{5}{x}\right)\right)^{20}}{\left(x\left(5-\dfrac{1}{x}\right)\right)^{90}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{70}\left(3+\dfrac{6}{x}\right)^{70}x^{20}\left(8-\dfrac{5}{x}\right)^{20}}{x^{90}\left(5-\dfrac{1}{x}\right)^{90}}=\frac{3^{70}\cdot 8^{20}}{5^{90}}.$$

P49/习题3.2/5

设$f(x)>0,\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$，其中$n\geq 2$为正整数.

证1 由于$f(x)>0,\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，根据保不等式性知，$A\geq 0$.

当$A=0$时，根据函数极限的定义，对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$，有

$$|f(x)-0|=f(x)<\varepsilon^n.$$

从而$\left|\sqrt[n]{f(x)}-0\right|=\sqrt[n]{f(x)}<\varepsilon$.根据函数极限的定义知，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=0$.

当$A\neq 0$时，根据函数极限的定义，对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$，有

$$|f(x)-A|<\sqrt[n]{A^{n-1}}\varepsilon.$$

从而
$$\left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\right|=\left|\frac{\left(\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\right)\left(\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}+\sqrt[n]{Af^{n-2}(x)}+\cdots+\sqrt[n]{A^{n-1}}\right)}{\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}+\sqrt[n]{Af^{n-2}(x)}+\cdots+\sqrt[n]{A^{n-1}}}\right|$$

$$=\frac{|f(x)-A|}{\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}+\sqrt[n]{Af^{n-2}(x)}+\cdots+\sqrt[n]{A^{n-1}}}<\frac{|f(x)-A|}{\sqrt[n]{A^{n-1}}}<\varepsilon.$$

根据函数极限的定义知，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$.

P49/习题3.2/5

设$f(x)>0,\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.证明:$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$,其中$n\geq 2$为正整数.

证2 由于$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,根据函数极限的定义,

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,$\forall x\in U^{\circ}(x_0;\delta)$,有$|f(x)-A|<\varepsilon^n$.

从而$\left|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}\right|\leq\sqrt[n]{|f(x)-A|}<\varepsilon$.

根据函数极限的定义知,$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$.

P49/习题3.2/7 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B.$

(1)若在某$U^\circ(x_0)$上有$f(x)<g(x)$,问是否必有$A<B$? 为什么?

(2)证明:若$A>B$,则在某$U^\circ(x_0)$上有$f(x)>g(x)$.

(1)答 不一定. 例如, $f(x)=x^2, g(x)=2x^2$.

在$x=0$的任何空心邻域$U^0(0)$上,有$f(x)=x^2<g(x)=2x^2$,

但是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0} g(x).$

(2)证 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 根据函数极限的定义,

对$\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$, 分别$\exists\delta_1>0, \delta_2>0$,

当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 从而 $f(x)>\dfrac{A+B}{2}$.

当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有 $|g(x)-B|<\varepsilon$, 从而 $g(x)<\dfrac{A+B}{2}$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$g(x)<\dfrac{A+B}{2}<f(x)$.

P49/习题3.2/8(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$.

解 由于 $x-1<[x]\le x$,

当 $x>0$ 时,有 $1-\frac{1}{x}<\frac{[x]}{x}\le 1$, 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$,

根据迫敛性知, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$.

当 $x<0$ 时,有 $1\le\frac{[x]}{x}<1-\frac{1}{x}$, 又 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$,

根据迫敛性知, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{[x]}{x}=1$.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{[x]}{x}$, 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$.

注: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

P49/习题3.2/9

(1)证明：若$\lim\limits_{x\to0} f\left(x^3\right)$存在，则$\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0} f\left(x^3\right)$.

(2)若$\lim\limits_{x\to0} f\left(x^2\right)$存在，试问是否成立$\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0} f\left(x^2\right)$?

(1)证 设$\lim\limits_{x\to0} f\left(x^3\right)=A$, 根据函数极限的定义，

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$, 当$0<|x|<\delta_1$时，有 $\left|f\left(x^3\right)-A\right|<\varepsilon$.

取$\delta=\delta_1^3>0$, 当$0<|x|<\delta=\delta_1^3$,即$0<\left|\sqrt[3]{x}\right|<\delta_1$时，

从而 $\left|f\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\right)-A\right|=\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$.

根据函数极限的定义知，$\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right)=A=\lim\limits_{x\to0} f\left(x^3\right)$.

(2)答不一定成立. 例如，$f(x)=\begin{cases}1, & x\ge0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $f\left(x^2\right)=1$,

$\lim\limits_{x\to0} f\left(x^2\right)=1$, $\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right)$不存在.

P52/习题3.3/1

叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$的归结原则, 并应用它证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$不存在.

(1)答 函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$的归结原则:

设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上有定义. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在的充要条件是:

对任何含于$[a,+\infty)$的数列$\{x_n\}$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在且相等.

(2)证 取$x_n=2n\pi,\ y_n=2n\pi+\pi$, 则

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} 2n\pi=+\infty,\ \lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}(2n\pi+\pi)=+\infty,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2n\pi=\lim\limits_{n\to\infty}1=1,$

$$\lim_{n\to\infty}\cos y_n=\lim_{n\to\infty}\cos(2n\pi+\pi)=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1,$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n=1\neq-1=\lim\limits_{n\to\infty}\cos y_n$,

根据归结原则的否定称述知, $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$不存在.

P52/习题3.3/2 单侧极限单调有界定理

设f为定义在$[a,+\infty)$上的增(减)函数.

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在的充要条件$f$在$[a,+\infty)$上有上(下)界.

证 不妨设f为定义在$[a,+\infty)$上的增函数.

(必要性)由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,故设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.根据函数极限的定义,

对$\varepsilon=1>0,\exists M>0(M>a),\ \forall x>M$,有$|f(x)-A|<\varepsilon=1$,即 $f(x)<A+1$.

由于f在$[a,+\infty)$上递增,所以对$\forall x\le M(x\ge a)$,有$f(x)\le f(M)<A+1$.

因此f在$[a,+\infty)$上有上界.

(充分性)已知f在$[a,+\infty)$上有上界,根据函数的确界原理知,

f在$[a,+\infty)$上存在上确界,记$A=\sup\limits_{x\in[a,+\infty)} f(x)$. 根据上确界的定义,

(1)对$\forall x\in[a,+\infty)$,有$f(x)\le A$.(2)对$\forall\varepsilon>0,\exists x'\in[a,+\infty)$,使得$f(x')>A-\varepsilon$.

取$M=\max\{x',1\}>0$,由于f在$[a,+\infty)$上递增,所以对$\forall x>M$,有

$$A-\varepsilon<f(x')\le f(x)\le A<A-\varepsilon,$$

即 $|f(x)-A|<\varepsilon$.根据函数极限的定义知,$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A=\sup\limits_{x\in[a,+\infty)} f(x)$.

P52/习题3.3/3

(1)叙述极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$的柯西准则.

(2)根据柯西准则叙述 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$不存在的充要条件,

并应用它证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$不存在.

(1)答 极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$的柯西收敛准则:

设函数$f(x)$在$(-\infty,a]$上有定义.极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在的充要条件是:

对$\forall\varepsilon>0,\exists M>0(-M<a)$, $\forall x',x''<-M$,有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$.

(2)答 函数极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$不存在的柯西收敛准则的否定陈述:

设函数$f(x)$在$(-\infty,a]$上有定义. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$不存在的充要条件是:

$\exists\varepsilon_0>0,\forall M>0(-M<a)$, $\exists x_1',x_2''<-M$,使得$\left|f(x_1')-f(x_2'')\right|\geq\varepsilon_0$.

证 取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$,对$\forall M>0$, 取$x_1'=-(2[M+1]\pi)<-M$, $x_2''=-\left(2[M+1]\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)<-M$,

使得 $$\left|\sin x_1'-\sin x_2''\right|=\left|\sin\left(-(2[M+1]\pi)\right)-\sin\left(-\left(2[M+1]\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

根据柯西收敛准则的否定陈述知, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$不存在.

P51/习题3.3/5 函数单侧极限的单调有界定理的另一种形式

设f为$U^{\circ}(x_0)$上的递增函数.证明：$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$都存在,且

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U_-^{\circ}(x_0)} f(x),\ f(x_0+0)=\inf_{x\in U_+^{\circ}(x_0)} f(x).$$

证 由于f是$U^{\circ}(x_0)$上的递增函数，所以对$\forall x\in U_-^{\circ}(x_0),\forall y\in U_+^{\circ}(x_0)$,

有 $f(x)\le f(y)$, 即$f(y)$是f在$U_-^{\circ}(x_0)$上的上界, $f(x)$是f在$U_+^{\circ}(x_0)$上的下界.

根据函数的确界原理知, f在$U_-^{\circ}(x_0)$上存在上确界 $\sup\limits_{x\in U_-^{\circ}(x_0)} f(x)$, 记$A=\sup\limits_{x\in U_-^{\circ}(x_0)} f(x)$,

f在$U_+^{\circ}(x_0)$上存在下确界 $\inf\limits_{x\in U_+^{\circ}(x_0)} f(x)$, 记$B=\inf\limits_{x\in U_+^{\circ}(x_0)} f(x)$.

根据上确界的定义,对$\forall\varepsilon>0,\exists x'\in U_-^{\circ}(x_0)$, 使得 $f(x')>A-\varepsilon$.

取$\delta=x_0-x'>0$, 对$\forall x\in U_-^{\circ}(x_0;\delta)$,有 $A-\varepsilon<f(x')\le f(x)\le A<A+\varepsilon$,

即 $|f(x)-A|<\varepsilon$.根据函数极限的定义知, $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A=\sup\limits_{x\in U_-^{\circ}(x_0)} f(x)$.

根据下确界的定义,对$\forall\varepsilon>0,\exists x''\in U_+^{\circ}(x_0)$, 使得 $f(x'')<B+\varepsilon$.

取$\delta=x''-x_0>0$, 对$\forall x\in U_+^{\circ}(x_0;\delta)$,有 $B-\varepsilon<B\le f(x)\le f(x'')<B+\varepsilon$,

即 $|f(x)-B|<\varepsilon$.根据函数极限的定义知, $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B=\inf\limits_{x\in U_+^{\circ}(x_0)} f(x)$.

BY GYH

利用函数极限定义的否定陈述证明函数极限不存在

P52/习题3.3/6 设$D(x)$为狄利克雷函数，$x_0\in\mathbb{R}$.证明：$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$不存在.

证1 对$\forall A\in\mathbb{R}$，若$A\geq\dfrac{1}{2}$，取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$，对$\forall\delta>0$，

根据无理数在实数集中的稠密性知，存在无理数$x'\in U^0(x_0;\delta)$，使得

$$\left|D(x')-A\right|=A>\frac{1}{4}=\varepsilon_0.$$

若$A<\dfrac{1}{2}$，取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$，对$\forall\delta>0$，根据有理数在实数集中的稠密性知，

存在有理数$x''\in U^0(x_0;\delta)$，使得

$$\left|D(x'')-A\right|=1-A>\frac{1}{4}=\varepsilon_0,$$

根据函数极限定义的否定陈述知，$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$不存在.

利用归结原则的否定陈述证明函数极限不存在

P52/习题3.3/6 设$D(x)$为狄利克雷函数,$x_0\in\mathbb{R}$.证明: $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在.

证2 存在有理数列$\{x_n\}$和无理数列$\{y_n\}$,使得

$$x_n\neq x_0,y_n\neq x_0,\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\ \lim_{n\to\infty}y_n=x_0.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}D(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0=\lim\limits_{n\to\infty}D(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}0,$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}D(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}D(y_n),$

根据归结原则的否定称述知, $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在.

利用柯西收敛准则的否定陈述证明函数极限不存在

P52/习题3.3/6 设$D(x)$为狄利克雷函数，$x_0\in\mathbb{R}$.证明：$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在.

证3 取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对$\forall\delta>0$，根据有理数与无理数在实数集中的稠密性知，

存在有理数$x_1'\in U^0(x_0;\delta)$与无理数$x_2''\in U^0(x_0;\delta)$，使得

$$\left|D(x_1')-D(x_2'')\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

根据Cauchy收敛准则的否定陈述知，$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在.

P52/习题3.3/7 证明：若f为周期函数，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $f(x)\equiv 0$.

证1 设$f(x)$的定义域为D，周期为$T>0$.

对$\forall x_0\in D$，取$x_n=x_0+nT$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，根据归结原则知，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

从而

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f(x_0+nT)=\lim_{n\to\infty} f(x_0)=f(x_0)=0.$$

由x_0的任意性知，$f(x)\equiv 0$.

P52/习题3.3/7 证明：若f为周期函数，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $f(x)\equiv 0$.

证2 设$f(x)$的定义域为D，周期为$T>0$.

利用反证法证明.

假设$f(x)\not\equiv 0$，即$\exists x_0\in D$，使得$f(x_0)\neq 0$.

取$x_n = x_0 + nT$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

由$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，根据归结原则知，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0+nT)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0)= f(x_0)\neq 0$,

与已知矛盾. 因此 $f(x)\equiv 0$.

P52/习题3.3/7 证明：若f为周期函数，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $f(x)\equiv 0$.

证3 设$f(x)$的定义域为D，周期为$T>0$.

利用反证法证明.

假设$f(x)\not\equiv 0$，即$\exists x_0\in D$，使得$f(x_0)\neq 0$.

由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，根据函数极限的定义，

取$\varepsilon=\dfrac{|f(x_0)|}{2}>0$，$\exists M>0$，$\forall x>M$，有$|f(x)-0|<\varepsilon=\dfrac{|f(x_0)|}{2}$.

$\exists n\in\mathbb{N}_+$，使得$x_0+nT>M$，从而

$$|f(x_0)|=|f(x_0+nT)-0|<\frac{|f(x_0)|}{2}，矛盾.$$

因此 $f(x)\equiv 0$.

P55/习题3.4/1(7) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

P55/习题3.4/1(8) 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$.

解1 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot(\sin x+\sin a)$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)}{x-a}\lim_{x\to a}(\sin x+\sin a)$$

$$=2\sin a\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{\dfrac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

$$=2\sin a\cos a=\sin 2a.$$

P55/习题3.4/1(8) 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$.

解2 $$\lim_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(\sin x-\sin a)\cdot(\sin x+\sin a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\sin(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}\lim_{x\to a}\sin(x+a)$$

$$=1\cdot\sin 2a=\sin 2a.$$

P55/习题3.4/1(9) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\sin 4x}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)\frac{\sin 4x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)\lim_{x\to 0}4\frac{\sin 4x}{4x}$$

$$=2\cdot 4=8.$$

P55/习题3.4/1(10) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

解1 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x^2}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}.$$

P55/习题3.4/1(10) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

解2 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}\sqrt{1+\cos x^2}\left(1+\cos x\right)}{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)\sqrt{1+\cos x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x^2}}{1-\cos^2 x}\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\sqrt{1+\cos x^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin^2 x^2}}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\sin^2 x}=\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=\sqrt{2}.$$

P55/习题3.4/2(4) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解1

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1-x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\left((1-x)^{-\frac{1}{x}}\right)^{-1}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^2.$$

解2

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}\cdot 2\cdot+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^2\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)=\mathrm{e}^2.$$

解3

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}\cdot\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{2}{1-x}}=\mathrm{e}^2.$$

P55/习题3.4/2(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$.

解1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{2\left(\frac{3x-1}{3}\right)-\frac{1}{3}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right)^{2}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{-\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^2\cdot 1=\mathrm{e}^2.$$

解2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}\cdot\frac{3(2x-1)}{3x-1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\frac{3(2x-1)}{3x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3(2x-1)}{3x-1}}=\mathrm{e}^2.$$

P55/习题3.4/3 证明：$\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)\right\}=1.$

证1 由于 $\sin 2x=2\cos x\sin x=2^2\cos x\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$

$$=\cdots=2^{n+1}\cos x\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n},$$

所以 $\cos x\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\dfrac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}.$

$$\lim_{x\to0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\sin 2x\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{2x\sin\frac{x}{2^n}}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=1.$$

P55/习题3.4/3 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)\right\}=1.$

证2 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)\right\}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots 2\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos x\sin x\right)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}\right)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=1.$$

P55/习题3.4/4(1) 利用归结原则计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

解1 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin\dfrac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\cdot\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}=1\cdot 0=0,$

取$x_n=n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty,$

根据归结原则知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin\dfrac{\pi}{x}=0.$

解2 由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,取$x_n=\dfrac{\pi}{n}$,则 $x_n\neq0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}=0,$

根据归结原则知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=0\cdot1=0.$

P62/习题3.5/1(2) 证明：$x\sin\sqrt{x}=O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\left(x\to 0^{+}\right)$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$,

根据函数极限的局部有界性知，$\exists\delta>0$,

$\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}$ 在 $U_{+}^{0}(0;\delta)$ 上有界,

所以 $x\sin\sqrt{x}=O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\left(x\to 0^{+}\right)$.

P62/习题3.5/1(4) 证明：$(1+x)^n=1+nx+o(x)\,(x\to 0)\,(n$为正整数$)$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-(1+nx)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(C_n^0\cdot 1^n\cdot x^0+C_n^1\cdot 1^{n-1}\cdot x^1+\cdots+C_n^n\cdot 1^0\cdot x^n\right)-(1+nx)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n-(1+nx)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{n(n-1)}{2!}x+\cdots+x^{n-1}\right)=0$$

所以 $(1+x)^n-(1+nx)=o(x)\,(x\to 0)$，即 $(1+x)^n=1+nx+o(x)\,(x\to 0)$.

P62/习题3.5/1(5) 证明：$2x^3+x^2=O\left(x^3\right)\left(x\to\infty\right)$.

证1 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2$,

根据函数极限的局部有界性知, $\exists M>0$,

$\dfrac{2x^3+x^2}{x^3}$ 在 $|x|>M$ 上有界, 所以 $2x^3+x^2=O\left(x^3\right)\left(x\to\infty\right)$.

证2 不妨设 $|x|>1$, 因为 $\left|\dfrac{2x^3+x^2}{x^3}\right|=\left|2+\dfrac{1}{x}\right|\le 2+\left|\dfrac{1}{x}\right|<3$,

所以 $2x^3+x^2=O\left(x^3\right)\left(x\to\infty\right)$.

P62/习题3.5/1(7) 证明：$o\left(g_1(x)\right)\cdot o\left(g_2(x)\right)=o\left(g_1(x)g_2(x)\right)\left(x\to x_0\right).$

证 因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o\left(g_1(x)\right)\cdot o\left(g_2(x)\right)}{g_1(x)g_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{o\left(g_1(x)\right)}{g_1(x)}\cdot\frac{o\left(g_2(x)\right)}{g_2(x)}=0,$$

所以 $o\left(g_1(x)\right)\cdot o\left(g_2(x)\right)=o\left(g_1(x)g_2(x)\right)\left(x\to x_0\right).$

P62/习题3.5/2(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x}}{x-\cos x}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x\arctan\dfrac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\dfrac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{\cos x}{x}}=\frac{0}{1-0}=0.$$

P62/习题3.5/2(2) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

解1 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}=1.$$

解1 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\frac{x^2}{2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=1.$$

P62/习题3.5/4(3) 求曲线$y=\dfrac{3x^3+4}{x^2-2x}$的渐近线.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+4}{x^2-2x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3+4}{x^2-2x}=\infty$,

所以直线$x=0, x=2$是曲线$y=\dfrac{3x^3+4}{x^2-2x}$的垂直渐近线.

由于$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3x^3+4}{x^2-2x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4}{x^3-2x^2}=3$,

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+4}{x^2-2x}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+4}{x^2-2x}=6,$$

所以直线$y=3x+6$是曲线$y=\dfrac{3x^3+4}{x^2-2x}$的斜渐近线.

P62/习题3.5/5(3) 试确定α的值，使函数$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$与$x^{\alpha}$当$x\to 0$时为同阶无穷小量.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin x}{x^{\alpha}\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\left(1+\cos x\right)}{x^{\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0}x^{1-\alpha}\neq 0,$$

所以 $1-\alpha=0$,即 $\alpha=1$.

P62/习题3.5/6(2) 试确定α的值,使函数$x+x^2(2+\sin x)$与x^α当$x\to\infty$时为同阶无穷大量.

解 因为当$|x|>2$时,有

$$\left|\frac{x+x^2(2+\sin x)}{x^2}\right|=\left|\frac{1}{x}+2+\sin x\right|\geq 2-\left|\frac{1}{x}\right|-|\sin x|>2-\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2},$$

$$\left|\frac{x+x^2(2+\sin x)}{x^2}\right|=\left|\frac{1}{x}+2+\sin x\right|\leq\left|\frac{1}{x}\right|+2+|\sin x|<\frac{1}{2}+2+1<4,$$

所以 $\alpha=2.$

P62/习题3.5/7

证明：若S为无上界数集，则存在一递增数列$\{x_n\}\subset S$，使得$x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$.

证 因为S为无上界数集，所以对$\forall M>0,\exists x_M\in S$，使得$x_M>M$.

取$M_1=1,\exists x_1\in S$，使得$x_1>M_1$.

取$M_2=\max\{2,x_1\},\exists x_2\in S$，使得$x_2>M_2$.即有$x_2>x_1,x_2>2$.

按以上步骤取到$x_{n-1}\in S$之后，取$M_n=\max\{n,x_{n-1}\},\exists x_n\in S$，使得$x_n>M_n$.

一直重复以上操作，可以得到递增数列$\{x_n\}\subset S$，满足$x_n>x_{n-1},x_n>n$.

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

P62/习题3.5/8 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b\neq 0$.证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b\neq 0$，根据函数极限的局部保号性，

$\exists\delta_1>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,有 $|g(x)|>\dfrac{|b|}{2}$.

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，所以对$\forall G>0,\exists\delta_2>0$,

当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有 $|f(x)|>\dfrac{2}{|b|}G$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)g(x)|>\frac{2}{|b|}G\cdot\frac{|b|}{2}=G.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty$.

P62/习题3.5/10 写出并证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$的归结原则.

答 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$的归结原则：设$f$在$U(+\infty)$上有定义. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$的充要条件是

对任意数列$\{x_n\}\subset U(+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$.

证(必要性)设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,根据无穷大的定义知，对$\forall G>0,\exists M>0,\forall x>M$,有$f(x)>G$.

对任意数列$\{x_n\}\subset U(+\infty)$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,根据无穷大的定义知,对上述$M>0,\exists N\in\mathbb{N}_+$,

$\forall n>N$,有$x_n>M$. 从而有$f(x_n)>G$. 根据无穷大的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$.

(充分性)利用反证法证明. 设任给数列$\{x_n\}\subset U(+\infty)$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$.

假设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$不成立,则$\exists G_0>0,\forall M>0,\exists x_M>M$, 使得$f(x_M)\le G_0$.

取$M_1=1$, 则$\exists x_1'>M_1$,使得$f(x_1')\le G_0$; 取$M_2=2$, 则$\exists x_2'>M_2$,使得$f(x_2')\le G_0$;

$\cdots\cdots$,取$M_n=n$, 则$\exists x_n'>M_n$,使得$f(x_n')\le G_0$; $\cdots\cdots$, 从而得到数列$\{x_n'\}$满足

$\{x_n'\}\subset U(+\infty)$, $x_n'>n$, 即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=+\infty$, 但是$f(x_n')\le G_0$, $n=1,2,\cdots$.

这与$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=+\infty$矛盾. 所以$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

P63/第三章总练习题/1(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\right)$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+x)(b+x)-(a-x)(b-x)}{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(b-x)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(a+b)x}{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(b-x)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(a+b)}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)\left(\frac{b}{x}+1\right)}+\sqrt{\left(\frac{a}{x}-1\right)\left(\frac{b}{x}-1\right)}}=a+b.$$

★★

P63/第三章总练习题/1(6) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

解1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}$$

$$\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

★★

P63/第三章总练习题/1(6) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

解2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-1\right)}{\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2x}{1-x}}-1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{2x}{1-x}}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x}{2(1-x)}}{\dfrac{2x}{3(1-x)}}=\frac{3}{2}.$$

P63/第三章总练习题/2(2) 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$,求$a,b$.

解1 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+1-(ax-b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left((1-a^2)-(2ab+1)\frac{1}{x}+\frac{1-b^2}{x^2}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x-(2ab+1)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}}=0,$$

所以 $1-a^2=0,\ \dfrac{2ab+1}{1-a}=0$, 根据题意知,$a<0$,

因此解得 $a=-1,b=\dfrac{1}{2}$.

P63/第三章总练习题/2(2) 已知 $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$,求$a,b$.

解2 因为 $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0$,

所以 $\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=0$,

于是 $-1-a=0$, 解得$a=-1$.

所以 $b=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=-\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

P63/第三章总练习题/2(2) 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$,求$a,b$.

解3 由题意可知,$y=ax+b$是曲线$y=\sqrt{x^2-x+1}$的斜渐近线,

所以 $$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

P63/第三章总练习题/6　设$f(x)=x\cos x$.试作数列

(1) $\{x_n\}$使得$x_n\to\infty(n\to\infty)$, $f(x_n)\to 0(n\to\infty)$.

(2) $\{y_n\}$使得$y_n\to\infty(n\to\infty)$, $f(y_n)\to +\infty(n\to\infty)$.

(3) $\{z_n\}$使得$z_n\to\infty(n\to\infty)$, $f(z_n)\to -\infty(n\to\infty)$.

答 (1) $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $y_n=2n\pi$.

(3) $z_n=2n\pi+\pi$.

函数单侧极限的单调有界定理的另一种形式

P63/第三章总练习题/11

设f为$U_-^\circ(x_0)$上的递增函数.证明:若存在数列$\{x_n\}\subset U_-^\circ(x_0)$且$x_n\to x_0\,(n\to\infty)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,则有$f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)=A.$

证 先证f在$U_-^0(x_0)$上有上界.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,根据收敛数列的有界性,$\exists M>0$,对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有

$$\left|f(x_n)\right|\le M,\quad 即 f(x_n)\le M.$$

对$\forall x\in U_-^0(x_0)$,有$x<x_0$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,根据收敛数列的定义,

取$\varepsilon=x_0-x$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+$,对$\forall n>N$,有 $x_0-x_n<\varepsilon=x_0-x$,即$x<x_n$.

由于f在$U_-^0(x_0)$上递增,从而$f(x)\le f(x_n)\le M$.证得f在$U_-^0(x_0)$上有上界.

根据确界原理知,f在$U_-^0(x_0)$上存在上确界 $\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)$.

P63/第三章总练习题/11

设f为$U_-^\circ(x_0)$上的递增函数.证明:若存在数列$\{x_n\}\subset U_-^\circ(x_0)$且$x_n\to x_0\,(n\to\infty)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,则有$f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)=A.$

下证 $\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)=A.$

由于$\{x_n\}\subset U_-^\circ(x_0)$, 根据上确界的定义知,对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有$f(x_n)\le\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x).$

根据收敛数列的保不等式性知, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\le\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)$,即有$A\le\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x).$

根据上确界的定义知, 对$\forall\varepsilon>0,\exists x'\in U_-^\circ(x_0)$,使得 $f(x')>\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)-\varepsilon.$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,根据收敛数列的定义,

取$\varepsilon=x_0-x'$,则$\exists N_1\in\mathbb{N}_+$,对$\forall n>N_1$,有 $x_0-x_n<\varepsilon=x_0-x'$,即$x'<x_n.$

由于f在$U_-^0(x_0)$上递增,从而 $\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)-\varepsilon<f(x')\le f(x_n).$

根据收敛数列的保不等式性知, $\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)-\varepsilon\le\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A.$

由ε的任意性知, $\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)\le A.$ 证得 $\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)}f(x)=A.$

P63/第三章总练习题/11　类似习题3.3/5

设f为$U_-^\circ(x_0)$上的递增函数.证明:若存在数列$\{x_n\}\subset U_-^\circ(x_0)$且$x_n\to x_0\,(n\to\infty)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$,则有$f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x)=A$.

下证 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\sup\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x)=A$.

根据上确界的定义知, 对$\forall\varepsilon>0,\exists x'\in U_-^\circ(x_0)$,使得 $f(x')>A-\varepsilon$.

取$\delta=x_0-x'>0$, 对$\forall x\in U_-^\circ(x_0;\delta)$及$f$在$U_-^0(x_0)$上递增,有

$$A-\varepsilon<f(x')\le f(x)\le A<A+\varepsilon,$$

即 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 根据函数极限的定义知,

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A=\sup_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x).$$

★★★

P63/第三章总练习题/12

设函数f在$(0,+\infty)$上满足方程$f(2x)=f(x)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

证明：　$f(x)\equiv A, x\in(0,+\infty)$.

证 对$\forall x_0\in(0,+\infty)$，由$f(2x)=f(x)$，有 $f(x_0)=f(2x_0)=f(2^2x_0)=\cdots=f(2^nx_0)$.

记$a_n=2^nx_0$. 由于$x_0>0$，从而 $a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}2^nx_0=+\infty$.

由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，根据归结原则知，

$$f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(2^nx_0\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(a_n\right)=\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=A.$$

即 $f\left(x_0\right)=A$.

由x_0的任意性知，$f(x)\equiv A, x\in(0,+\infty)$.

BY GYH

P63/第三章总练习题/13

设函数f在$(0,+\infty)$上满足方程$f\left(x^2\right)=f(x)$,

且$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$. 证明： $f(x)\equiv f(1), x\in(0,+\infty)$.

证 对$\forall x_0\in(0,+\infty)$,由$f\left(x^2\right)=f(x)$,有 $f(x_0)=f\left(x_0^2\right)=f\left(x_0^{2^2}\right)=\cdots=f\left(x_0^{2^n}\right)$.

记$a_n=x_0^{2^n}$. 当$0<x_0<1$时, $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_0^{2^n}=0$.

由于$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(1)$,根据归结原则知,

$$f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_0^{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(a_n\right)=\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)=f\left(1\right).$$

当$x_0=1$时,结论显然成立.

当$x_0>1$时, $a_n>0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_0^{2^n}=+\infty$. 由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$,根据归结原则知,

$$f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_0^{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(a_n\right)=\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=f\left(1\right).$$

由x_0的任意性知, $f(x)\equiv f(1), x\in(0,+\infty)$.

P63/第三章总练习题/14

设函数f在$(a,+\infty)$上，f在每一个有限区间(a,b)上有界，

并满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=A$. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=A$，根据函数极限的定义，

对$\forall\varepsilon>0,\exists M_1>0(M_1>a),\forall x>M_1$,有 $\left|\big(f(x+1)-f(x)\big)-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

由于对$\forall x>M$, $\exists n\in\mathbb{N},\exists x_0\in(M,M+1]$，使得$x=x_0+n$. 于是

$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|=\left|\frac{f(x)-Ax}{x}\right|=\frac{\left|f(x_0+n)-A(x_0+n)\right|}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\left|\big(f(x_0+n)-f(x_0+n-1)-A\big)+\cdots+\big(f(x_0+1)-f(x_0)-A\big)+f(x_0)-Ax_0\right|$$

$$\le\frac{1}{x}\Big(\left|f(x_0+n)-f(x_0+n-1)-A\right|+\cdots+\left|f(x_0+1)-f(x_0)-A\right|+\left|f(x_0)\right|+\left|Ax_0\right|\Big)$$

$$<\frac{1}{x}\cdot\frac{n\varepsilon}{3}+\frac{\left|f(x_0)\right|}{x}+\frac{x_0\left|A\right|}{x}\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\left|f(x_0)\right|}{x}+\frac{x_0\left|A\right|}{x}.$$

P63/第三章总练习题/14

设函数f在$(a,+\infty)$上, f在每一个有限区间(a,b)上有界,

并满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=A$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

因为f在每一个有限区间(a,b)上有界, 从而f在$(M_1,M_1+1]$上有界,

故$\exists K>0$,有$|f(x)|\le K, x\in(M_1,M_1+1]$. 于是

$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{|f(x_0)|}{x}+\frac{x_0|A|}{x}\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{K}{x}+\frac{x_0|A|}{x}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{K}{x}=0$, 对上述$\varepsilon>0,\exists M_2>0(M_2>a),\forall x>M_2$,有 $\left|\dfrac{K}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x_0|A|}{x}=0$, 对上述$\varepsilon>0,\exists M_3>0(M_3>a),\forall x>M_3$,有 $\left|\dfrac{x_0|A|}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

取$M=\max\{M_1,M_2,M_3\}>0$, $\forall x>M$,有 $\left|\dfrac{f(x)}{x}-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.

根据函数极限的定义知, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.