Ch1 实数集与函数

顾燕红微信

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023秋季数学分析(1...

群号：921774255

QQ学习交流群

2023年10月7日

BY GYH

§1 实数

§2 数集 确界原理

§3 函数概念

§4 具有某些特性的函数

将学习：

实数的基本概念

实数的基本性质

记号与术语

$\mathbb{N}$: 自然数集(包含0)　　$\mathbb{N}_+$: 正整数集

$\mathbb{Z}$: 整数集　　$\mathbb{Q}$: 有理数集

$\mathbb{R}_+$: 正实数集　　$\mathbb{R}_-$: 负实数集

$\mathbb{R}$: 实数集

$\forall$: 任意　　$\exists$: 存在

实数

有理数 有限十进制小数或无限十进制循环小数

$$\mathbb{Q}=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{p}{q},\text{其中 } p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0\right\}$$

例如 $\frac{7}{2}=0.35;\ \frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}.$

无理数 无限十进制不循环小数

例如 $\pi=3.1415926\cdots;x=0.1010010001\cdots;$

$$\sqrt{2}=1.414213\cdots;\mathrm{e}=2.7182818\cdots.$$

$0.\dot{9}$ 是否小于 1?

$$0.\dot{9} = 1$$

实数的统一表示

任何一个实数都可以用十进制无限小数表示.

若x为正有限小数, $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n$, 其中a_0为非负整数,

$a_i=\{0,1,\cdots,9\}, i=1,2,\ldots,n,\ a_n\neq 0$, 记

$$x=a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)999\cdots;$$

若x为负有限小数, $x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n$, 其中a_0为非负整数,

$a_i=\{0,1,\cdots,9\}, i=1,2,\ldots,n,\ a_n\neq 0$, 记

$$x=-a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)999\cdots.$$

注1: 规定 $0 = 0.000\cdots$.

注2: 若实数都用无限小数表示, 则表达式是唯一的.

注3: 用无限小数表示实数, 称为**正规表示**.

实数的大小

$\forall x,y\in\mathbb{R}_+$，若 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$， $y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$

是正规的十进制小数表示，规定

$x=y\Leftrightarrow a_k=b_k, n=0,1,2,\cdots.$

$x>y\Leftrightarrow a_0>b_0$ 或 $\exists n\in\mathbb{N}$，使得 $a_i=b_i\left(i=0,1,\cdots,n\right)$，而 $a_{n+1}>b_{n+1}$.

$\forall x,y\in\mathbb{R}_-$， 规定 $x=y\Leftrightarrow -x<-y$; $x>y\Leftrightarrow -x<-y$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+, y\in\mathbb{R}_-$， 规定 $y<0<x$.

不足近似、过剩近似

设$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为非负实数. 称有理数

$$x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

为实数x的n位不足近似, 而有理数 $\overline{x}_n = x_n + \dfrac{1}{10^n}$

称为实数x的n位过剩近似, $n = 0,1,2,\cdots$.

对于负实数$x = -a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,

x的n位不足近似规定为 $x_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n - \dfrac{1}{10^n}$,

x的n位过剩近似规定为 $\overline{x}_n = -a_0.a_1a_2\cdots a_n$.

例如$x = 3.14159265358979323846\cdots$

$$x_1 = 3.1 \quad x_2 = 3.14 \quad x_3 = 3.141 \quad x_5 = 3.14159$$

$$\bar{x}_1 = 3.2 \quad \bar{x}_2 = 3.15 \quad \bar{x}_3 = 3.142 \quad \bar{x}_5 = 3.14160$$

$$y = -3.14159265358979323846\cdots$$

$$y_1 = -3.2 \quad y_2 = -3.15 \quad y_3 = -3.142 \quad y_5 = -3.14160$$

$$\bar{y}_1 = -3.1 \quad \bar{y}_2 = -3.14 \quad \bar{y}_3 = -3.141 \quad \bar{y}_6 = -3.14159$$

注：$\forall n \in \mathbb{N}_+$,有 $x_n \le x_{n+1} \le x \le \bar{x}_{n+1} \le \bar{x}_n$.

实数大小关系相关命题

设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y=b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数，则

$$x>y \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}_+,\ 使得\ x_n>\overline{y}_n,$$

其中 x_n 表示 x 的 n 位不足近似，

$\overline{y}_n$ 表示 y 的 n 位过剩近似.

如何证明
必要性

分析：$\Leftarrow$ 充分性易证.

$\Rightarrow$ 必要性 $\overline{x}_n=x_n+\dfrac{1}{10^n}\ge x \quad \Rightarrow x_n\ge x-\dfrac{1}{10^n}$

$$\overline{y}_n=y_n+\frac{1}{10^n}\le y+\frac{1}{10^n}\Rightarrow \overline{y}_n\le y+\frac{1}{10^n}$$

$$\Rightarrow x_n-\overline{y}_n\ge\left(x-\frac{1}{10^n}\right)-\left(y+\frac{1}{10^n}\right)=x-y-\frac{2}{10^n}$$

若 $x-y-\dfrac{2}{10^n}>0$，则 $n>\lg\dfrac{2}{x-y}$. 故可取 $n=\max\left\{\left[\lg\dfrac{2}{x-y}\right]+1,1\right\}$.

BY GYH

例1 设x, y为实数,$x < y$. 证明:存在有理数r,满足$x < r < y$.

证 由于$x < y$,故存在非负整数n,使得 $\bar{x}_n < y_n$.

令 $$r = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + y_n),$$

则r为有理数, 且有

$$x \le \bar{x}_n < r < y_n \le y,$$

即得 $x < r < y$.

实数的性质

(1) 实数集$\mathbb{R}$对加、减、乘、除(除数不为0)四则运算是**封闭的**，即任意两个实数的和、差、积、商(除数不为0)仍然是实数.

(2) 实数的**有序性**，即对$\forall x, y \in \mathbb{R}$，有

$$x < y,\ \ x = y,\ \ x > y$$

三者必有其中之一成立，且只有其中之一成立.

实数的性质

(3) 实数的大小关系具有**传递性**,

即对$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, 若$x > y, y > z$, 则$x > z$.

实数的性质

如何找n

(4) 实数具有阿基米德(Archimedes)性，

即对 $\forall a,b\in\mathbb{R}$且$a>0$, $\exists n\in\mathbb{N}_+$, 使得 $na>b$.

分析：设$b=b_0.b_1b_2\cdots b_l\cdots$, $b_0=k\in\mathbb{N}$,

则 $b\le k+1<10^{k+1}$.

设$a=a_0.a_1a_2\cdots a_l\cdots$,

其中a_p为第一个不为零的正整数，

取$n=10^{p+k+1}$，则$na\ge 10^{k+1}>b$.

推论：$\forall a>0,\ \exists n\in\mathbb{N}_+$, 使得 $\dfrac{1}{n}<a.$

$\forall b\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{N}_+$, 使得 $n>b.$

实数的性质

(5) 实数集的稠密性

任意两个不等的实数 a 与 b 之间, 必有另一个实数 c.

任意两个不等的实数 a 与 b 之间, 既有有理数又有无理数.

注：有理数集在实数集中是稠密的.

分析:若$0<a<b$, $\boxed{找 p=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}, m,n\in\mathbb{N}_+, 使得 a<\dfrac{m}{n}<b.}$

$$0<a<b \Rightarrow b-a>0 \xRightarrow{\text{Archimedes性}} \exists n\in\mathbb{N}_+, 使得 \frac{1}{n}<b-a \Rightarrow nb>na+1.$$

$$\boxed{找 m\in\mathbb{N}_+, 使得\ na<m\le na+1.}$$

$$na>0 \xRightarrow{\text{Archimedes性}} \exists m_1\in\mathbb{N}_+, 使得 m_1>na$$

$$\xRightarrow{\text{良序原理}} \exists m\in\mathbb{N}_+, 使得 m-1\le na<m$$

$$\Rightarrow na<m\le na+1<nb \Rightarrow a<\frac{m}{n}<b.$$

注： 无理数集在实数集中是稠密的.

分析：若$a < b$，则 $\pi a < \pi b$.

从而 $\exists r \in \mathbb{Q}$，使得 $\pi a < r < \pi b$，

即 $a < \dfrac{r}{\pi} < b$.

注： 有理数集本身也是稠密的.

$\mathbb{Q}$在$\mathbb{N}$中是稠密的.

$\mathbb{N}$本身并不稠密.

$\mathbb{N}$在$\mathbb{Q}$中不稠密.

实数的性质

(6) 实数与数轴上的点一一对应

实数集$\mathbb{R}$与数轴上的点可建立一一对应关系.

分析:设P是数轴上的一点(不妨设在0的右边),若P在整数n与$n+1$之间,则$a_0=n$. 把$(n,n+1]$十等分,若点P在第i个区间,则$a_1=i$. 类似可得到a_n, $n=2,3,\cdots$.这时,点P对应于实数$a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

反之,任何一实数也对应数轴上一点.

注: 实数集与数轴上点的一一对应关系反映了实数的完备性.

记住并理解这个命题

例 3 若$a,b\in\mathbb{R}$, 对$\forall\varepsilon>0$, $a<b+\varepsilon$, 则$a\le b$.

证 利用反证法证明.

假设结论不成立, 则根据实数集的有序性, 有

$$a>b.$$

取$\varepsilon=a-b>0$, 则$a=b+\varepsilon$, 这与条件$a<b+\varepsilon$矛盾.

从而必有 $a\le b$.

实数的绝对值定义

实数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为 $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

实数的绝对值性质

(1) $|a| = |-a| \geq 0$; 当且仅当$a = 0$时$|a| = 0$.

(2) $-|a| \leq a \leq |a|$.

(3) $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h, |a| \leq h \Leftrightarrow -h \leq a \leq h(h > 0)$.

(4) $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$(三角形不等式).

(5) $|ab| = |a||b|$.　(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}(b \neq 0)$.

注： 三角形不等式 $|a|-|b| \le |a+b| \le |a|+|b|$ 的证明：

由 $-|a| \le a \le |b|, -|b| \le b \le |b|$ 得

$$-(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|,$$

即 $|a+b| \le |a|+|b|$.

又 $|a| = |a+b-b| = |a+b+(-b)| \le |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$,

即 $|a|-|b| \le |a+b|$.

有理数与自然数哪个多？

一样多

你应该：

理解实数的概念

掌握实数的表示方法

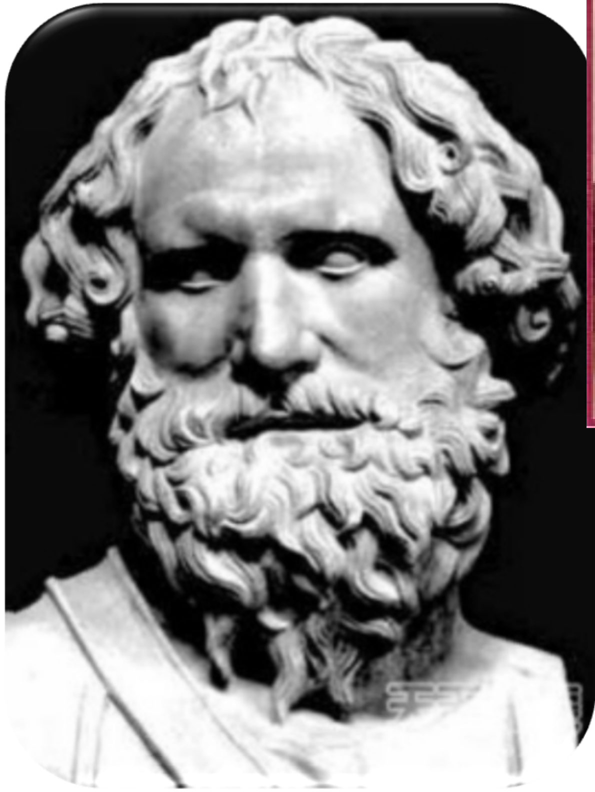
了解实数的性质，并在有关命题中应用

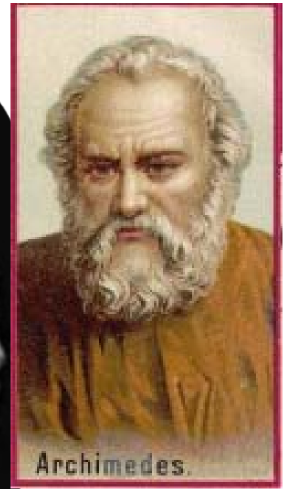
理解绝对值的概念

掌握绝对值的性质，并在有关命题中应用

阿基米德,伟大的古希腊哲学家、百科式科学家、数学家、物理学家、力学家，静态力学和流体静力学的奠基人，并且享有“力学之父”的美称，阿基米德和高斯、牛顿并列为世界三大数学家. 阿基米德曾说过:“给我一个支点，我就能撬起整个地球.”阿基米德对数学和物理的发展做出了巨大的贡献,为社会进步和人类发展做出了不可磨灭的影响，即使牛顿和爱因斯坦也都曾从他身上汲取过智慧和灵感，他是“理论天才与实验天才合于一人的理想化身”,文艺复兴时期的达芬奇和伽利略等人都拿他来做自己的楷模.

—— 摘自百度百科





阿基米德
Archimedes
(287B.C. – 212B.C.)
古希腊哲学家