# 第十七章　多元函数微分学

## 第四节　泰勒公式与极值问题

# 第十七章　多元函数微分学

## 第四节　泰勒公式与极值问题

1. 高阶偏导数的概念及计算

2. 泰勒公式

3. 极值问题

**定义：** 若区域 $D$ 上任意两点的连线都含于 $D$ 中, 则称 $D$ 为**凸区域**, 也就是说对 $D$ 中任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$, 都有

$$P(x_1 + \lambda(x_2 - x_1), y_1 + \lambda(y_2 - y_1)) \in D, \ \forall\lambda \in [0, 1].$$

**定义：** 若区域 $D$ 上任意两点的连线都含于 $D$ 中，则称 $D$ 为**凸区域**，也就是说对 $D$ 中任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，都有

$$P(x_1 + \lambda(x_2 - x_1), y_1 + \lambda(y_2 - y_1)) \in D, \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

### 中值定理

**中值定理：** 设二元函数 $f(x, y)$ 在**凸开域** $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续，在 $D$ 的所有内点内都可微. 则对 $D$ 内任意两点$P(a, b) \in D$, $Q(a + h, b + k) \in D$，存在某个 $\theta \in (0, 1)$，使得

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f_x(a + \theta h, b + \theta k)h + f_y(a + \theta h, b + \theta k)k.$$

**推论：** 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上存在偏导数，且

$$f_x = f_y \equiv 0,$$

则 $f$ 在区域 $D$ 上恒为常数.

**例题4：** 对函数

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2xy+1}}$$

应用微分中值定理，证明存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$1-\sqrt{2}=\sqrt{2}(1-3\theta)(1-2\theta+3\theta^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

**泰勒定理：** 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，则对 $U(P_0)$ 内任一点 $(x_0+h,y_0+k)$，存在相应的 $\theta\in(0,1)$，使得如下**泰勒公式**:

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h,y_0+k) &= f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\\
&+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\\
&+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{\partial^m f(x_0,y_0)}{\partial x^i\partial y^{m-i}}h^ik^{m-i}.
$$

**泰勒定理：** 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有直到 $n$ 阶的连续偏导数，则对 $U(P_0)$ 内任一点 $(x_0+h,y_0+k)$，存在如下**泰勒公式**:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+o((\sqrt{h^2+k^2})^n).$$

**例题：** 设

$$f(x,y)=x^y,$$

求它在点 $(1,4)$ 的泰勒公式(直到二阶), 并计算 $(1.08)^{3.96}$.

# 极值问题

**定义：** 设函数 $f$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义. 若对于任何点 $P(x, y) \in U(P_0)$, 成立不等式

$$f(P) \leq f(P_0) \quad (\text{或 } f(P) \geq f(P_0)),$$

则称函数 $f$ 在点 $P_0$ 取得**极大(或极小)**值, 称点 $P_0$ 为 $f$ 的**极大(或极小)值点**, 极大值、极小值统称为**极值**. 极大值点和极小值点统称为**极值点**.

## 极值必要条件

**定理：** 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 处存在偏导函数，且在 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极值，则有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0.$$

此时，称 $P_0$ 为 $f$ 的**稳定点**.

## 极值必要条件

**定理：** 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 处存在偏导函数，且在 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极值，则有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=0.$$

此时，称 $P_0$ 为 $f$ 的**稳定点**.

**注意1**：极值点不一定都是稳定点，例如：不可导点.

**注意2**：稳定点不一定都是极值点，例如：原点是 $f(x,y)=xy$ 的稳定点.

**定义：** 对称矩阵

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

若 $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, 则称 $H$ 为**正定矩阵**; 若 $a < 0$, $ac - b^2 > 0$, 则称 $H$ 为**负定矩阵**; 若 $ac - b^2 < 0$, 则称 $H$ 为**不定矩阵**.

**定义**: 对称矩阵

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

若 $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, 则称 $H$ 为**正定矩阵**; 若 $a < 0$, $ac - b^2 > 0$, 则称 $H$ 为**负定矩阵**; 若 $ac - b^2 < 0$, 则称 $H$ 为**不定矩阵**.

**定理**: 设 $H$ 为 $2 \times 2$ 的对称矩阵, $x$ 为任意非零二维向量.

- 若$H$为**正定矩阵**, 则 $x^T Hx > 0$, 且存在 $\delta > 0$, 使得 $x^T Hx \geq \delta |x|^2$.
- 若$H$为**负定矩阵**, 则 $x^T Hx < 0$, 且存在 $\delta < 0$, 使得 $x^T Hx \leq \delta |x|^2$.
- 若$H$为**不定矩阵**, 则存在非零向量 $y$, $z$ 使得 $y^T Hy > 0$, $z^T Hz < 0$.

以上, 反之亦然.

**定义1:** 设函数 $f$ 在 $P_0$ 处有二阶连续偏导数, 称

$$H_f(P_0)=\begin{bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{P_0}$$

为 $f$ 在 $P_0$ 点的**黑塞(Hesse)矩阵**.

**定义1：** 设函数 $f$ 在 $P_0$ 处有二阶连续偏导数，称

$$H_f(P_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{P_0}$$

为 $f$ 在 $P_0$ 点的**黑塞(Hesse)矩阵**.

- $H_f(P_0)$ **正定矩阵**的充要条件是 $f_{xx}(P_0) > 0$, $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) > 0$.
- $H_f(P_0)$ **负定矩阵**的充要条件是 $f_{xx}(P_0) < 0$, $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) > 0$.
- $H_f(P_0)$ **不定矩阵**的充要条件 $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) < 0$.

**引理：** 设二元函数 $f$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内**有二阶连续偏导数**, $H_f(P_0)$ 是正定(负定)矩阵, 则存在一个邻域 $U(P_0)$, 使得在 $U(P_0)$ 内, $H_f(P)$ 是正定(负定)矩阵.

## 极值存在的充分性条件

**定理：** 设二元函数 $f$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内**有二阶连续偏导数**，且 $P_0$ **是稳定点**. 则

- 当 $H_f(P_0)$ 是正定矩阵，即 $f_{xx}(P_0) > 0$, $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) > 0$ 时，$f$ 在点 $P_0$ **取得极小值**.
- 当 $H_f(P_0)$ 是负定矩阵，即 $f_{xx}(P_0) < 0$, $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) > 0$ 时，$f$ 在点 $P_0$ **取得极大值**.
- 当 $H_f(P_0)$ 是不定矩阵，即 $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) < 0$ 时，$f$ 在点 $P_0$ **不能取得极值**.
- 当 $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) = 0$ 时，$f$ 在点 $P_0$ **不一定能取得极值**.

**例题：** 求函数

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 6x + 10y + 6,$$

的极值.

**例题8：** 求函数

$$f(x,y)=x^2+xy,$$

的极值.

**例题：** 讨论函数

$$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2),$$

是否在原点取到极值.

## 最值问题

$$\textbf{最值点}\begin{cases}\text{稳定点,}\\ \text{无偏导数点,}\\ \text{边界点.}\end{cases}$$

# 极值问题

## 最值问题

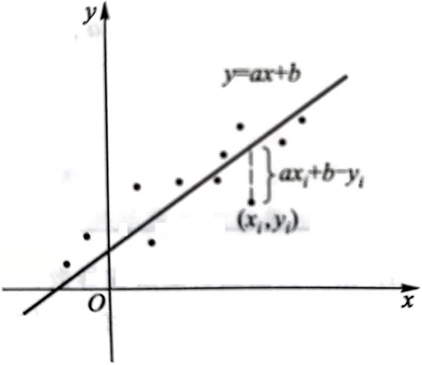
$$\textbf{最值点}\begin{cases}\text{稳定点},\\ \text{无偏导数点},\\ \text{边界点}.\end{cases}$$

## 应用问题

**证明：** 圆的所有外切三角形中，以正三角形的面积为最小.

## 最小二乘法问题

设通过观测或实验得到 $n$ 个点 $(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 他们大体上在一条直线上, 即大体上可以用直线方程来反映变量 $x$ 和 $y$ 之间的对应关系. 现要确定一条直线使得这 $n$ 个点的偏差平方和最小.



# 本节作业

**作业：**

第 133 页：第7题(1)、(4).

第 133 页：第8题(1).

第 133 页：第9题(1).

第 133 页：第11题.

**例题:** 求曲面

$$z = \arctan \frac{y}{x},$$

在点 $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ 处的切平面方程和法平面方程.

**例题：** 求下列函数的高阶偏导数

$$z = f\left(x+y, xy, \frac{x}{y}\right), z_x, z_{xx}, z_{xy}.$$