Ch2 数列极限

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

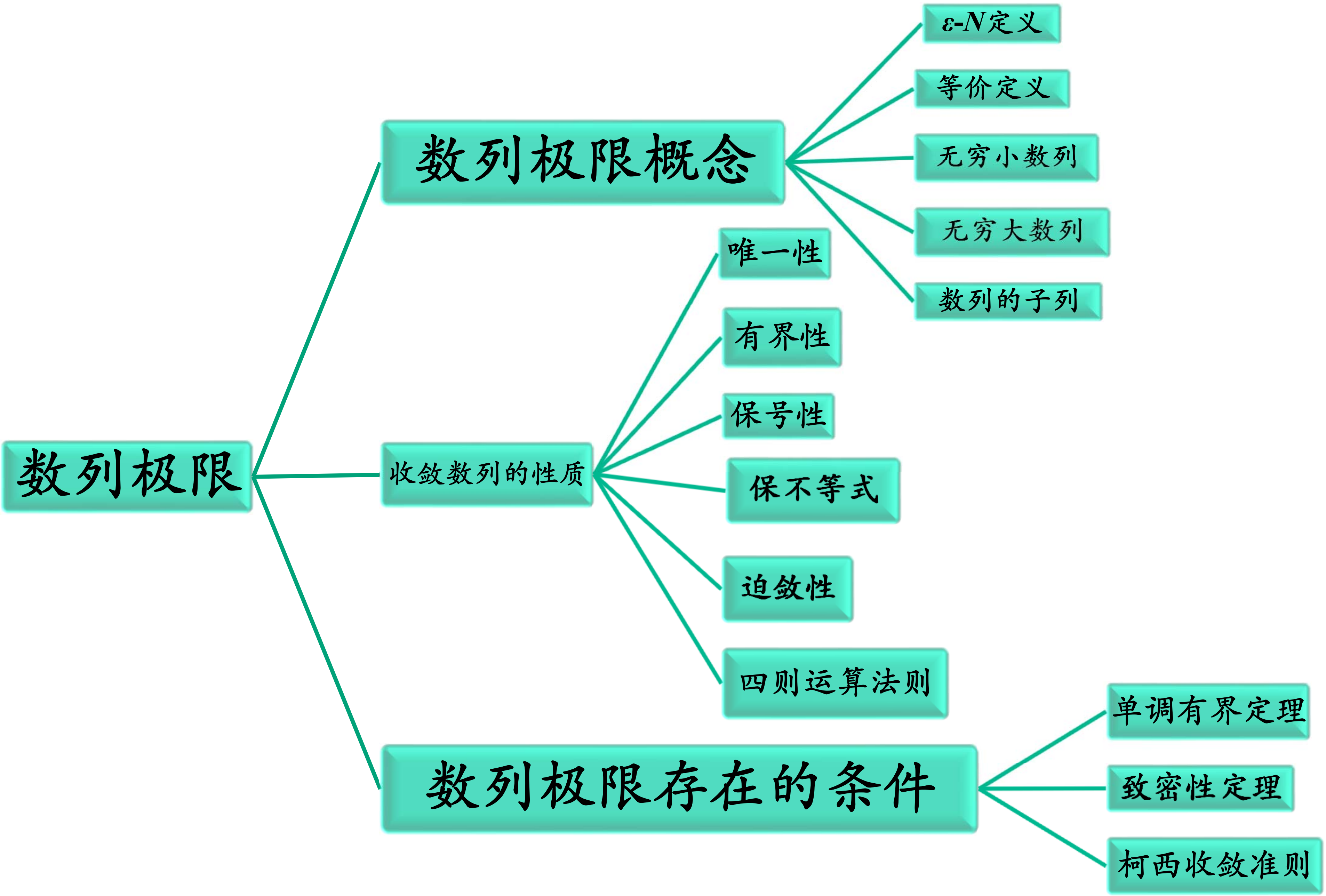
Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 姓名 学号 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年11月03日

BY GYH


数列极限
数列极限概念
ε-N定义
等价定义
无穷小数列
无穷大数列
数列的子列
收敛数列的性质
唯一性
有界性
保号性
保不等式
迫敛性
四则运算法则
数列极限存在的条件
单调有界定理
致密性定理
柯西收敛准则

重要概念

数列收敛的定义

数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0,,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有$|a_n-a|<\varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N,\text{有}\ |a_n-a|<\varepsilon.$$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,在$a$的$\varepsilon$邻域$U(a;\varepsilon)$之外至多只有$\{a_n\}$中的有限项.

数列$\{a_n\}$不以a为极限

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq a\quad\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N}_+,\exists n_0>N,\text{使得}\ |a_{n_0}-a|\geq\varepsilon_0.$$

$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$,数列$\{a_n\}$中有无穷多项落在$U(a;\varepsilon_0)$之外.

数列发散的否定陈述

数列$\{a_n\}$发散$\Leftrightarrow\forall a\in\mathbb{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N}_+,\exists n_0>N$,使得$|a_{n_0}-a|\geq\varepsilon_0$.

重要概念

无穷小数列 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

无穷大数列

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \text{有 } |a_n| > M.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \text{有 } a_n > M.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \text{有 } a_n < -M.$$

重要概念

数列$\{a_n\}$有上界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 有 $a_n \le M$.

数列$\{a_n\}$有下界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 有 $a_n \le M$.

数列$\{a_n\}$有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 有 $|a_n| \le M$.

数列$\{a_n\}$无上界 $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}_+$, 使得 $a_{n_0} > M$.

数列$\{a_n\}$无下界 $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}_+$, 使得 $a_{n_0} < M$.

数列$\{a_n\}$无界 $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}_+$, 使得 $|a_{n_0}| > M$.

重要概念

设$\{a_n\}$为数列,$\{n_k\}$为满足条件$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$的各项都是正整数的数列, 则数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$称为数列$\{a_n\}$的一个子列,记为$\{a_{n_k}\}$.

收敛数列的性质

(唯一性) 若数列$\{a_n\}$收敛,则其极限是唯一的.

(有界性) 若数列$\{a_n\}$收敛,则$\exists M>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $|a_n|\le M$.

(保号性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$(或$<0$),对$\forall r\in(0,a)$(或$r\in(a,0)$),

$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $a_n>r>0\left(a_n<r<0\right)$.

(保号性推论) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$.

(保号性推论) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且$b<a<c$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $b<a_n<c$.

(保号性推论(保序性)) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,且$a<b$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $a_n<b_n$.

(保不等式性) 若数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都收敛. $\exists N_0\in\mathbb{N}_+,\forall n>N_0$,有 $a_n\le b_n$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

收敛数列的性质

(迫敛性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,且$\exists N_0\in\mathbb{N}_+,\forall n>N_0$,有 $a_n\le c_n\le b_n$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

(四则运算法则) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n=a\pm b.$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=a\cdot b.$$

当$b_n\ne0$及$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\ne0$时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$.

重要定理

单调有界定理　在实数系中,有界的单调数列必有极限.

致密性定理　任何有界数列必有收敛子列.

柯西收敛准则　数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n, m > N$,有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

柯西收敛准则的否定陈述

数列$\{a_n\}$发散$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0, m_0 > N$,使得

$$|a_{n_0} - a_{m_0}| \geq \varepsilon_0.$$

常用极限及重要结论

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0\ (a>0)$　$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ \left(|q|<1\right)$　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^a}{(1+b)^n}=0\left(a\in\mathbb{R},b>0\right)$

若$a_n\geq 0\left(n\in\mathbb{N}_+\right)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

若$a_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

若$a_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0,k\in\mathbb{N}_+$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$.

若$a_1,a_2,\cdots,a_m$是m个正数,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\left\{a_1,a_2,\cdots,a_m\right\}$.

常用极限及重要结论

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

若 $a_n > 0\left(n \in \mathbb{N}_+\right)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} = 0.$$

若 $a_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l\left(a_n > 0\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$

常用极限及重要结论

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_\alpha n}{n^k}=0\ (\alpha>0,\alpha\neq 1,k>0)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ (a>1,k>0)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

$$\left(\log_\alpha n\ll n^k\ll a^n\ll n!\ll n^n,\ \ \alpha>0,\alpha\neq 1,k>0,a>1\right)$$

$$(a_0b_0\neq 0)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_{m-1}n+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_{k-1}n+b_k}=\begin{cases}0, & m<k\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=k\\ \infty, & m>k\end{cases}$$

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.反之不一定成立.　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

Stolz定理　设$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=c$,

其中$c\in\mathbb{R}$,或$+\infty,-\infty$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=c$.

常用极限及重要结论

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$$

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是单调递增数列, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$是单调递减数列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n} \qquad \left|\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|<\frac{3}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma\approx 0.577215\cdots(\gamma\text{是欧拉常数})$$

数列$\left\{1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\cdots++\frac{1}{n^a}\right\}$,当 $a\le 1$时,发散;当$a>1$时,收敛.

常用极限及重要结论

若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则对$\forall k \in \mathbb{N}_+$,有$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow \{a_n\}$的任一子列都收敛.

若单调数列$\{a_n\}$含有一个收敛子列,则$\{a_n\}$收敛.

若$\{a_n\}$是递增(递减)有界数列,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}\left(\inf\{a_n\}\right)$.

单调递增无上界数列$\{a_n\}$必发散,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

单调递减无下界数列$\{a_n\}$必发散,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

若$\{a_n\}$为递增数列,$\{b_n\}$为递减数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$都存在且相等.

常用极限及重要结论

若$a_n \neq 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$.

若$\{a_n\}$是无穷小数列,$\{b_n\}$是有界数列,则$\{a_n b_n\}$必为无穷小数列.

有限个无穷小数列的代数和仍为无穷小数列.

无穷大数列一定是无界数列;无界数列不一定是无穷大数列.

无界数列一定存在无穷大子列.

若$\{a_n\}$是无界数列,$\{b_n\}$是无穷大数列,则$\{a_n b_n\}$必为无界数列.

同号无穷大量之和仍然是该符号的无穷大量.

若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中一个是收敛数列,另一个是发散数列,则$\{a_n \pm b_n\}$必为发散数列.

常用极限及重要结论

若$\{a_n\}$不是无穷大数列,则数列$\{a_n\}$一定存在收敛子列.

若$\{a_n\}$是无界数列,但不是无穷大数列,则存在$\{a_n\}$的两个子列,

其中一个子列收敛,另一个子列是无穷大数列.

P25/习题2.1/2(2) 按$\varepsilon-N$定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

证 对$\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-n}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{2n+3}{2\left(2n^2-n\right)}\right|=\frac{2n+3}{2\left(2n^2-n\right)}\overset{(n\geq2)}{<}\frac{2n+3n}{2\left(2n^2-n^2\right)}=\frac{5n}{4n^2}=\frac{5}{4n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{5}{4\varepsilon}$.

因此，对$\forall\varepsilon>0$，取$N=\max\left\{2,\left[\dfrac{5}{4\varepsilon}\right]\right\}$，当$n>N$时，有

$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-n}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon.$$

根据收敛数列的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$.

注：★的个数表示题目的难易程度

P25/习题2.1/2(3) 按$\varepsilon - N$定义证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0.$

证 对$\forall\varepsilon>0$, 要使

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n}{n\cdot n\cdots n\cdot n}\le\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当$n>N$时,有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon.$$

根据收敛数列的定义知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0.$

P25/习题2.1/2(5) 按$\varepsilon-N$定义证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0\left(a>1\right)$.

证 由于$a>1$, 记$a=1+r$, 故$a^n=\left(1+r\right)^n$.根据二项式定理,有

$$a^n=\left(1+r\right)^n=1+nr+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}r^2+\cdots+r^n>\frac{n\left(n-1\right)}{2!}r^2\left(n\geq 2\right).$$

对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{a^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}r^2}=\frac{2}{(n-1)r^2}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{2}{r^2\varepsilon}+1$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$N=\max\left\{2,\left[\dfrac{2}{r^2\varepsilon}\right]+1\right\}$,当$n>N$时,有

$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|<\varepsilon.$$

根据收敛数列的定义知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$.

P25/习题2.1/6

证明：数列$\{a_n\}$收敛于a的充要条件是：$\{a_n-a\}$为无穷小数列.

应用上述命题证明数列$\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限是1.

证 必要性 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，根据收敛数列的定义知，

对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

从而 $|(a_n-a)-0|<\varepsilon$. 根据收敛数列的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$，

即数列$\{a_n-a\}$为无穷小数列.

充分性 已知数列$\{a_n-a\}$为无穷小数列，即$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$，

根据收敛数列的定义知，对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，有$|(a_n-a)-0|<\varepsilon$.

从而$|a_n-a|<\varepsilon$. 根据收敛数列的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，

即数列$\{a_n\}$收敛于a.

P25/习题2.1/6

证明：数列$\{a_n\}$收敛于a的充要条件是：$\{a_n-a\}$为无穷小数列.

应用上述命题证明数列$\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限是1.

证 要证$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)=1$,即证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0.$

对$\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon,$

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$, 取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当$n>N$时,有 $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon.$

根据收敛数列的定义知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0.$

从而证明了数列$\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限是1.

P25/习题2.1/8

证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. 当且仅当$a$为何值时反之也成立？

证 已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，根据收敛数列的定义知，

对$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$，当$n > N$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$.

从而根据三角形不等式，有$\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a| < \varepsilon$，

根据收敛数列的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

当且仅当$a = 0$时，反之也成立，即$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

必要性 由于$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$，根据收敛数列的定义知，

对$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$，当$n > N$时，有$\big||a_n| - 0\big| = |a_n - 0| < \varepsilon$.

根据收敛数列的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

充分性 由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，根据收敛数列的定义知，

对$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$，当$n > N$时，有$|a_n - 0| = \big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$.

根据收敛数列的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

BY GYH

P25/习题2.1/9(2)

用$\varepsilon-N$定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0.$

证 对$\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0\right|=\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^3}=\frac{1+n}{2n^2}\le\frac{2n}{2n^2}=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此，对$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$时，有

$$\left|\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0\right|<\varepsilon.$$

根据收敛数列的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0.$

P25/习题2.1/9(3)

用$\varepsilon-N$定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$,其中$a_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, & n为偶数\\ \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n为奇数\end{cases}$.

证 对$\forall\varepsilon>0$,当n是偶数时,要使$\left|\dfrac{n-1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,只要$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

当n是奇数时,要使$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,

只要$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$, 取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当$n>N$时,有$|a_n-1|<\varepsilon$.

根据收敛数列的定义知, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

P31/习题2.2/1(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^{n+1}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}=\frac{1}{3}.$$

P31/习题2.2/1(4) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

P31/习题2.2/1(6) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{3^n}}=2.$$

P31/习题2.2/2

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，且 $a < b$. 证明：存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$a_n < b_n$.

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，根据收敛数列的定义知，

取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_1$，有

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{2}, \text{从而 } a_n < \frac{a+b}{2},$$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_2$，有 $|b_n - b| < \dfrac{b-a}{2}$，从而 $b_n > \dfrac{a+b}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，$\forall n > N$，有 $a_n < \dfrac{a+b}{2} < b_n$，

即 $a_n < b_n$.

P31/习题2.2/4(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdots 2^{\frac{1}{2^n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2.$$

P31/习题2.2/4(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 令 $s_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$, 则 $\frac{1}{2}s_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,

从而

$$s_n-\frac{1}{2}s_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}},$$

于是

$$s_n=3-\frac{2n+3}{2^n}.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3.$$

P31/习题2.2/4(5) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$.

解 由于

$$\frac{n+1}{4n^2}=\frac{n+1}{(2n)^2}\le\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{n+1}{n^2},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)=0,$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0,$$

根据迫敛性知,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0.$$

P31/习题2.2/4(6) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 由于

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

根据迫敛性知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=0.$

P31/习题2.2/7

判断以下结论是否成立(若成立,说明理由;若不成立,举出反例).

(1) 若$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛,则$\{a_n\}$收敛.

答 结论不一定成立.

例如, $a_n=(-1)^n$,

$$a_{2k}=(-1)^{2k}=1,\quad a_{2k-1}=(-1)^{2k-1}=-1,$$

$\{a_{2k}\},\{a_{2k-1}\}$都收敛, 但$\{a_n\}$发散.

数列$\{a_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_{2k}\},\{a_{2k-1}\}$都收敛且极限相同.

P31/习题2.2/7

判断以下结论是否成立(若成立,说明理由;若不成立,举出反例).

(2) 若$\{a_{3k-2}\}$,$\{a_{3k-1}\}$和$\{a_{3k}\}$都收敛,且有相同极限,则$\{a_n\}$收敛.

答 结论成立. 设$\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k-2}=\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k-1}=\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k}=a$.

根据收敛数列的定义知,对$\forall\varepsilon>0,\exists K_1\in\mathbb{N}_+$,当$k>K_1$时,有$|a_{3k-2}-a|<\varepsilon$.

对上述$\varepsilon>0,\exists K_2\in\mathbb{N}_+$,当$k>K_2$时,有$|a_{3k-1}-a|<\varepsilon$.

对上述$\varepsilon>0,\exists K_3\in\mathbb{N}_+$,当$k>K_3$时,有$|a_{3k}-a|<\varepsilon$.

取$N=\max\{3K_1-2,3K_2-1,3K_3\}$,当$n>N$时,有$|a_n-a|<\varepsilon$.

根据收敛数列的定义知,$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$,从而数列$\{a_n\}$收敛.

数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow\{a_{3k}\},\{a_{3k-1}\}\{a_{3k-2}\}$都收敛且极限相同.

P31/习题2.2/8(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}$.

解 由于

$$1\le\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+\frac{1}{n}+\underbrace{\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}}_{n-2\text{项}}=1+\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n(n-1)},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{n-2}{n(n-1)}\right)=1,$

根据迫敛性知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}=1.$

P31/习题2.2/8(4) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}),|a|<1.$

解

$$\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})}{1-a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})}{1-a}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^{2^2})(1+a^{2^2})\cdots(1+a^{2^n})}{1-a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^{2^n})(1+a^{2^n})}{1-a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}=\frac{1}{1-a}.$$

P31/习题2.2/10(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[na_n]}{n} = a$.

证 由于 $na_n - 1 < [na_n] \le na_n$,

所以 $a_n - \dfrac{1}{n} < \dfrac{[na_n]}{n} \le a_n$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n - \dfrac{1}{n}\right) = a$,

根据迫敛性知, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[na_n]}{n} = 0.$

P31/习题2.2/10(2)设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.证明:若$a>0, a_n>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 根据收敛数列的定义知,

取$\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, $\forall n > N$,有 $|a_n - a| < \dfrac{a}{2}$,

即 $\dfrac{a}{2} < a_n < \dfrac{3a}{2}$. 从而 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a}{2}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}} = 1$,

根据迫敛性知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1.$

P37/习题2.3/3(1)

设$a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2a_n}, n=1,2,\cdots$.证明:数列$\{a_n\}$极限存在并求其值.

证 由于$a_1=\sqrt{2}$,故有$0<a_1<2$. 假设$0<a_n<2$,则

$$0<a_{n+1}=\sqrt{2a_n}<2.$$

由数学归纳法知, 对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $0<a_n<2$. 由于

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2a_n}-a_n=\frac{2a_n-a_n^2}{\sqrt{2a_n}+a_n}=\frac{a_n(2-a_n)}{\sqrt{2a_n}+a_n}>0,$$

因此数列$\{a_n\}$递增有上界.

根据单调有界定理, 数列$\{a_n\}$有极限, 记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

在等式$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$两边同时取极限, 得 $a=\sqrt{2a}$,

解得$a=2$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

P37/习题2.3/5(1)

设$a_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$,利用柯西收敛准则证明数列$\{a_n\}$收敛.

证 对$\forall\varepsilon>0$, 当 $n>m>N$ 时, 要使

$$|a_n-a_m|=\left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}+\frac{\sin(m+2)}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}\right|$$

$$\le\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{m+1}}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n-m}}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2^m}\left(1-\frac{1}{2^{n-m}}\right)$$

$$<\frac{1}{2^m}<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

只要 $m>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$, 取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当$n>m>N$时,有$|a_n-a_m|<\varepsilon$.

根据柯西收敛准则知, 数列$\{a_n\}$收敛.

P37/习题2.3/5(2)

设$a_n = 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$,利用柯西收敛准则证明数列$\{a_n\}$收敛.

证 对$\forall\varepsilon>0$, 当 $n>m>N$ 时, 要使

$$|a_n-a_m| = \left|\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right|$$

$$\le \frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

只要 $m>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$, 取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当$n>m>N$时,有$|a_n-a_m|<\varepsilon$.

根据柯西收敛准则知, 数列$\{a_n\}$收敛.

P37/习题2.3/6 证明：若单调数列$\{a_n\}$含有一个收敛子列，则$\{a_n\}$收敛.

证 利用单调有界定理证明.

不妨设$\{a_n\}$是递增数列，$\{a_{n_k}\}$是其收敛子列.

根据收敛数列的有界性知，数列$\{a_{n_k}\}$有界，

即 $\exists M>0$，对$\forall k\in\mathbb{N}_+$，有$\left|a_{n_k}\right|\le M$.

由于$\{a_n\}$是递增数列，故$\{a_{n_k}\}$也是递增数列. 从而 $a_{n_k}\le M$.

对数列$\{a_n\}$中的任一项a_k，由于$k\le n_k$，于是有 $a_k\le a_{n_k}\le M$.

因此数列$\{a_n\}$递增且有上界. 根据单调有界定理知，数列$\{a_n\}$收敛.

P37/习题2.3/6 证明:若单调数列$\{a_n\}$含有一个子列,则$\{a_n\}$收敛.

证 利用数列极限的定义证明.

不妨设$\{a_n\}$是递增数列,$\{a_{n_k}\}$是其收敛子列, 设$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=a$.

根据收敛数列的定义知, 对$\forall\varepsilon>0,\exists K\in\mathbb{N}_+$,当$k>K$时, 有 $|a_{n_k}-a|<\varepsilon$,

即 $a-\varepsilon<a_{n_k}<a+\varepsilon$.

对上述$\varepsilon>0$,取$N=n_K\in\mathbb{N}_+$,当$n>N=n_K$时,

$\{a_n\}$中的任一项a_n,必有子列$\{a_{n_k}\}(k>K)$的两项$a_{n_{k_0}},a_{n_{k_0+1}}$,使得

$$a_{n_{k_0}}\le a_n\le a_{n_{k_0+1}},$$

从而有 $a-\varepsilon<a_{n_{k_0}}\le a_n\le a_{n_{k_0+1}}<a+\varepsilon$, 即 $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$.

根据收敛数列的定义知, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 从而数列$\{a_n\}$收敛.

P37/习题2.3/7 证明：若$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证 由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，根据收敛数列的定义知，

取$\varepsilon=\frac{l-1}{2}>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，$\forall n>N$，有$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}-l\right|<\frac{l-1}{2}$，

即 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{l+1}{2}$. 从而 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{2}{l+1}$. 于是对$\forall n>N$，有

$$0<a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdot a_{N+1}<\left(\frac{2}{l+1}\right)^{n-N-1}\cdot a_{N+1},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{l+1}\right)^{n-N-1}\cdot a_{N+1}=0$，

根据迫敛性知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

P37/习题2.3/8　　单调有界定理

证明：若$\{a_n\}$为递增(递减)有界数列，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}\left(\inf\{a_n\}\right)$.
又问逆命题成立否？

证 若$\{a_n\}$为有上界的递增数列. 根据确界原理，数列$\{a_n\}$有上确界，

记$\eta = \sup\{a_n\}$. 由上确界的定义，有

(1)$\forall n \in \mathbb{N}_+, a_n \le \eta$. (2)$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}_+$，使得$a_{n_0} > \eta - \varepsilon$.

取$N = n_0$，当$n > N$时，有 $\eta - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le \eta < \eta + \varepsilon$，

即 $\eta - \varepsilon < a_n < \eta + \varepsilon$. 根据收敛数列的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \eta = \sup\{a_n\}$.

若$\{a_n\}$为有下界的递减数列. 根据确界原理，数列$\{a_n\}$有下确界，

记$\xi = \inf\{a_n\}$. 由下确界的定义，有

(1)$\forall n \in \mathbb{N}_+, a_n \ge \xi$. (2)$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}_+$，使得$a_{n_0} < \xi + \varepsilon$.

取$N = n_0$，当$n > N$时，有 $\xi - \varepsilon < \xi \le a_n \le a_{n_0} < \xi + \varepsilon$，

即 $\xi - \varepsilon < a_n < \xi + \varepsilon$. 根据收敛数列的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi = \inf\{a_n\}$.

BY GYH

P37/习题2.3/8　　单调有界定理

证明：若$\{a_n\}$为递增(递减)有界数列，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}\left(\inf\{a_n\}\right)$.
又问逆命题成立否？

答 逆命题不一定成立.

也就是数列收敛于上(下)确界时，该数列不一定是单调数列.

例如，数列$a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$： $0,1,0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{3},0,\dfrac{1}{4},0,\dfrac{1}{5},\cdots$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n + 1}{n} = 0,\quad \inf\{a_n\} = 0.$$

数列$a_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{n}$： $-2,0,-\dfrac{2}{3},0,-\dfrac{2}{5},0,-\dfrac{2}{7},0,-\dfrac{2}{9},0,-\dfrac{2}{11},\cdots$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n} = 0,\quad \sup\{a_n\} = 0.$$

P37/习题2.3/10 证明：$\left|e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right|<\dfrac{3}{n}$.

证 记$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

已知数列$\{a_n\}$严格单调递增趋于e, 数列$\{b_n\}$严格单调递减趋于e,

从而 $a_n<e<b_n$.

于是 $\left|e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right|=e-a_n<b_n-a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}.$$

P39/第二章总练习题/2(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = 0\left(|q|<1\right)$.

证1 当$q=0$时, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

当$0<|q|<1$时, $\dfrac{1}{|q|}>1$, 设$\dfrac{1}{|q|}=1+h\left(h>0\right)$,根据二项式定理知,

$$\frac{1}{|q|^n}=\left(1+h\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k h^k>\mathrm{C}_n^3 h^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3\left(n>2\right),$$

即 $|q|^n<\dfrac{1}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3}\left(n>2\right)$.

对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|n^2q^n-0\right|=n^2|q|^n<\frac{n^2}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3}=\frac{6n}{(n^2-3n+2)h^3}<\frac{6n}{(n^2-3n)h^3}<\varepsilon\left(n>3\right),$$

只要 $n>\dfrac{6}{\varepsilon h^3}+3$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$, 取$N=\left[\dfrac{6}{\varepsilon h^3}\right]+1$, 当$n>N$时,有$\left|n^2q^n-0\right|<\varepsilon$.

根据收敛数列的定义知, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = 0$.

P39/第二章总练习题/2(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = 0\left(|q|<1\right).$

证2 当$q=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$

当$0<|q|<1$时，$\dfrac{1}{|q|}>1$，设$\dfrac{1}{|q|}=1+h\left(h>0\right)$，根据二项式定理知，

$$\frac{1}{|q|^n}=\left(1+h\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k h^k > C_n^3 h^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3\left(n>2\right),$$

因此 $0<n^2|q|^n=\dfrac{n^2}{|q|^n}<\dfrac{n^2}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3}=\dfrac{6n}{(n-1)(n-2)h^3}, n>2,$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{(n-1)(n-2)h^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{6}{n}}{(1-\dfrac{1}{n})(1-\dfrac{2}{n})h^3}=\frac{0}{h^3}=0,$$

根据迫敛性知，$\lim\limits_{n\to\infty} n^2|q|^n=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = 0.$

P39/第二章总练习题/2(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = 0\left(|q|<1\right).$

证3 当$q=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$

当$0<|q|<1$时，$a_n = n^2|q|^n$，$a_{n+1} = (n+1)^2|q|^{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2}|q|a_n$，

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2|q|^{n+1}}{n^2|q|^n} = \lim_{n\to\infty}|q|\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = |q| < 1.$$

根据收敛数列的保号性知，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1.$

于是从$n>N$起数列$\{a_n\}$递减，且有下界0. 根据单调有界定理知，

数列$\{a_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

在等式$a_{n+1} = |q|\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 a_n$两边取极限，得$a=|q|a$，解得 $a=0$，

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = 0.$

P39/第二章总练习题/2(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = 0\left(|q|<1\right).$

证4 当$q=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$

当$0<|q|<1$时，$a_n = n^2 |q|^n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2|q|^{n+1}}{n^2|q|^n} = \lim_{n\to\infty}|q|\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = |q|<1.$$

根据实数的稠密性知，$\exists r\in\mathbb{R}$，使得$|q|<r<1$.

根据收敛数列的保号性知，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，$\forall n>N$，有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<r$，即 $a_{n+1}<ra_n$.

从而 $a_{n+1}<ra_n<r^2a_{n-1}<\cdots<r^{n-N}a_{N+1}$，

因此，$0<a_{n+1}<r^{n-N}a_{N+1}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n-N}a_{N+1}=0.$

根据迫敛性知，$\lim\limits_{n\to\infty} n^2|q|^n=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2q^n=0.$

P39/第二章总练习题/2(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n^{\alpha}}=0\left(\alpha\geq 1\right).$

证1 由于 $0\leq\dfrac{\lg n}{n^{a}}=\dfrac{2\lg\sqrt{n}}{n^{a}}<\dfrac{2\sqrt{n}}{n^{a}}=\dfrac{2}{n^{a-\frac{1}{2}}}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^{a-\frac{1}{2}}}=0$，

根据迫敛性知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n^{\alpha}}=0.$

证2 对$\forall\varepsilon>0$，有$10^{\varepsilon}>1.$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，根据收敛数列的保号性知，$\exists N\in\mathbb{N}_{+},\forall n>N$，有$1\leq\sqrt[n]{n}<10^{\varepsilon}.$

上式两边取对数，得$0\leq\dfrac{\lg n}{n}<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n}=0.$

当$\alpha\geq 1$时，由于$0\leq\dfrac{\lg n}{n^{a}}\leq\dfrac{\lg n}{n}$，

根据迫敛性知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n^{\alpha}}=0.$

P39/第二章总练习题/3

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ (又问由此等式能否反过来推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$).

证1 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,根据收敛数列的定义,对 $\forall \varepsilon>0, \exists N_1\in\mathbb{N}_+$,当 $n>N_1$ 时,有 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na}{n}\right|$$

$$=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)+(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\le\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\le\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$ 是一个固定的数,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}=0$,

根据收敛数列的定义,对上述 $\varepsilon>0, \exists N_2\in\mathbb{N}_+$,当 $n>N_2$ 时,有 $\dfrac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,有 $\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

根据收敛数列的定义知,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

P39/第二章总练习题/3

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

证2 当 $a=0$ 时,即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$,根据收敛数列的定义,对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}_+$,当 $n>N_1$ 时,有 $|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是
$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}+a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}\right|$$
$$\le\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|+\frac{|a_{N_1+1}|+\cdots+|a_n|}{n}\le\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$ 是一个固定的数,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}|}{n}=0$,

根据收敛数列的定义,对上述 $\varepsilon>0,\exists N_2\in\mathbb{N}_+$,当 $n>N_2$ 时,有 $\dfrac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,有 $\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

根据收敛数列的定义知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$.

当 $a\ne0$ 时,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$, 于是
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}=0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

算术平均值极限定理

BY GYH

P39/第二章总练习题/3

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ (又问由此等式能否反过来推出$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$).

答 反过来不一定能推出$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

例如, $a_n=(-1)^n$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$不存在.

P39/第二章总练习题/3

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 证明: (2)若 $a_n > 0(n=1,2,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a$.

证 由于 $a_n > 0$, 根据保不等式性知, $a \geq 0$.

当 $a=0$ 时, 有 $0 < \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

根据迫敛性知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = 0$.

当 $a \neq 0$ 时, 有 $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}} = a,$$

根据迫敛性知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a$.

几何平均值极限定理

P39/第二章总练习题/5

证明：若$\{a_n\}$为递增数列，$\{b_n\}$为递减数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$都存在且相等.

证 由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，根据收敛数列的定义知，

取$\varepsilon=1$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，$\forall n>N$，有$|a_n-b_n|<1$，从而 $b_n-1<a_n<1+b_n$.

由$\{b_n\}$为递减数列，故 $a_n<1+b_n\le 1+b_1, n>N$.

由于$\{a_n\}$为递增数列，故$\forall n>N$，有 $a_n<1+b_1$.

因此$\{a_n\}$为递增有上界数列，根据单调有界定理知，数列$\{a_n\}$收敛.

根据收敛数列的有界性知，$\exists M>0$，$\forall n>N$，有$|a_n|\le M$.

又 $|b_n|=|b_n-a_n+a_n|\le|b_n-a_n|+|a_n|<1+M$，

因此$\{b_n\}$为递减有界数列，根据单调有界定理知，数列$\{b_n\}$收敛.

根据收敛数列的四则运算法则知，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

BY GYH

P39/第二章总练习题/6

设数列$\{a_n\}$满足：存在正数M，对一切n有

$$A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\le M.$$

证明：数列$\{a_n\}$与$\{A_n\}$都收敛.

证　由题意易知数列$\{A_n\}$递增且有上界，

根据单调有界定理知，数列$\{A_n\}$收敛. 根据柯西收敛准则，

对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n>m>N$时，有

$$|A_n-A_m|=|a_{m+1}-a_m|+|a_{m+2}-a_{m+1}|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|<\varepsilon.$$

从而

$$|a_n-a_m|=|a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_{m+1}-a_m|$$

$$\le|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_{m+1}-a_m|<\varepsilon.$$

根据柯西收敛准则知，数列$\{a_n\}$收敛.

$\{a_n\}$称为有界变差数列　　有界变差数列必收敛

BY GYH

P39/第二章总练习题/8

设$a_1>b_1>0$,记$a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_n=\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}},n=2,3,\cdots$.

证明:数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的极限都存在且等于$\sqrt{a_1b_1}$.

证 由题意知$a_n>0,b_n>0,n=1,2,\cdots$. 当$n\geq 2$时,有

$$a_n-b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}-\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}=\frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})},$$

由于$a_1>b_1>0$,所以对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $a_n-b_n>0$, 即$a_n>b_n$.

从而 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}<\dfrac{2a_{n-1}}{2}=a_{n-1}$, 即数列$\{a_n\}$严格递减有下界.

由于 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}-b_n=\dfrac{a_nb_n-b_n^2}{a_n+b_n}=\dfrac{b_n(a_n-b_n)}{a_n+b_n}>0$,

所以数列$\{b_n\}$严格递增,a_1是其一个上界. 根据单调有界定理知,

数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$极限都存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.

在等式$a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$两边同时取极限,得$a=\dfrac{a+b}{2}$, 即$a=b$.

由于$a_nb_n=a_{n-1}b_{n-1}=\cdots=a_1b_1$,在等式$a_nb_n=a_1b_1$两边同时取极限,得$ab=a_1b_1$,

所以$a=b=\sqrt{a_1b_1}$.

P39/第二章总练习题/9(2)

按柯西收敛准则叙述数列$\{a_n\}$发散的充要条件,

设$a_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$,证明$\{a_n\}$是发散的.

答 数列$\{a_n\}$发散$\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N}_+,\exists n_0,m_0>N$,使得$\left|a_{n_0}-a_{m_0}\right|\geq\varepsilon_0$.

证 取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$,对$\forall N\in\mathbb{N}_+$, 取$n_0=4N>N,m_0=4N+1>N$,使得

$$\left|a_{n_0}-a_{m_0}\right|=\left|\sin\frac{n_0\pi}{2}-\sin\frac{m_0\pi}{2}\right|=\left|\sin\frac{4N\pi}{2}-\sin\frac{(4N+1)\pi}{2}\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

根据柯西收敛准则的否定陈述知, 数列$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$发散.

P39/第二章总练习题/11

设$\{a_n\}$是无界数列,$\{b_n\}$是无穷大数列. 证明:$\{a_nb_n\}$必为无界数列.

证1 因为$\{b_n\}$是无穷大数列,即$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$,

故对$\forall M>0$(不妨设$M>1$), $\exists N\in\mathbb{N}_+$, $\forall n>N$,有 $|b_n|>M$.

因为$\{a_n\}$是无界数列, 因此$\{a_{N+n}\}$也是无界数列.

故对上述$M>0$, $\exists n_0\geq N+1$,使得$|a_{n_0}|>M$.

因此 $|a_{n_0}b_{n_0}|>M^2>M$.

根据无界数列的定义知, $\{a_nb_n\}$是无界数列.

P39/第二章总练习题/11

设$\{a_n\}$是无界数列,$\{b_n\}$是无穷大数列. 证明:$\{a_nb_n\}$必为无界数列.

证2 因为$\{b_n\}$是无穷大数列,即$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$,

故对$\forall M>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$,$\forall n>N$,有 $|b_n|>M$.

因为$\{a_n\}$是无界数列, 所以$\exists n_0\in\mathbb{N}_+$,且$n_0>N$,使得$|a_{n_0}|>1$.

如若不然,对$\forall n>N$,都有$|a_n|\le 1$,则对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有

$$|a_n|\le \max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,1\},$$

即$\{a_n\}$是有界数列,从而产生矛盾.

因此 $|a_{n_0}b_{n_0}|>1\cdot M=M$.

根据无界数列的定义知, $\{a_nb_n\}$是无界数列.

P39/第二章总练习题/12

倘若$\{a_n\},\{b_n\}$都是无界数列，试问$\{a_nb_n\}$是否必为无界数列?

(若是,需作证明;若否,需给出反例.)

答 不一定是无界数列.

例如， $a_n=\left((-1)^n+1\right)n,\quad b_n=\left((-1)^n-1\right)n,$

$\{a_n\},\{b_n\}$都是无界数列,

$$a_nb_n=\left((-1)^n+1\right)n\cdot\left((-1)^n-1\right)n=\left((-1)^{2n}-1\right)n^2=0,$$

$\{a_nb_n\}$是有界数列.