Ch14 幂级数

总结及习题评讲(2)

主讲教师: 顾燕红

办公室: 汇星楼409

办公室答疑时间: 每周四下午2点至4点

微信号: 18926511820 QQ号: 58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2024年6月16日

BY GYH

P56习题14.2/1 设函数$f(x)$在区间(a,b)上的各阶导数一致有界，设$\forall x\in(a,b)$，有$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M, n=1,2,\cdots$. 证明：$\forall x,x_0\in(a,b)$，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ \left(f^{(0)}(x)=f(x),0!=1\right).$$

证 对$\forall x,x_0\in(a,b)$，根据泰勒公式，有 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$，

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$介于$x$与$x_0$之间.

由于 $0\le|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$，

考虑数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$的敛散性：由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{M}{(n+2)!}(b-a)^{n+2}}{\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)}{n+2}=0$，

根据正项级数的比式判别法的极限形式知，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$收敛.

根据级数收敛的必要条件知，$\lim_{n\to\infty}\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}=0$. 根据迫敛性知，$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$，$\forall x\in(a,b)$

从而 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0, \forall x\in(a,b)$. 因此对$\forall x,x_0\in(a,b)$，有 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

P56 习题14.2/2(2)

利用已知函数的幂级数展开式,求函数$\dfrac{x^{10}}{1-x}$在$x=0$处的幂级数展开式,并确定它收敛于该函数的区间.

解 已知

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,\ x\in(-1,1).$$

所以

$$\frac{x^{10}}{1-x}=x^{10}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+10},\ x\in(-1,1).$$

P56 习题14.2/2(6)

利用已知函数的幂级数展开式,求函数$\dfrac{x}{1+x-2x^2}$在$x=0$处的幂级数展开式,并确定它收敛于该函数的区间.

解1 由于
$$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{x}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right),$$
且已知
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1).$$
$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n,\ |-2x|<1,\text{即}x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$
所以
$$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-2)^n}{3}x^n,\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

P56 习题14.2/2(6)

利用已知函数的幂级数展开式,求函数$\dfrac{x}{1+x-2x^2}$在$x=0$处的幂级数展开式,并确定它收敛于该函数的区间.

解2 由于 $$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}\right),$$

且已知

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1).$$

$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n,\ |-2x|<1,\text{即}x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

所以

$$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{x}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-2)^n}{3}x^{n+1},\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

P56 习题14.2/2(7)

利用已知函数的幂级数展开式,求函数$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$在$x=0$处的幂级数展开式,并确定它收敛于该函数的区间.

解 已知 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in(-\infty,+\infty),$

根据幂级数的逐项求积定理,有

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}t^{2n+1}}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1},\ x\in\left(-\infty,+\infty\right).$$

P56习题14.2/3(2) 求函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=1$处的泰勒展开式.

解1 由于

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)},$$

且已知

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, x\in(-1,1),$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-(x-1)\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n,$$

$$-1<-(x-1)<1, \text{ 即 } 0<x<2.$$

注:利用间接展开法可以根据已知展开式成立的范围得到所求展开式成立的范围.

P56习题14.2/3(2) 求函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=1$处的泰勒展开式.

解2 由于 $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$, $f^{(n)}(1)=(-1)^n n!, n=1,2,\cdots,$

所以$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=1$处的泰勒级数是

$$\frac{1}{x}\sim f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{f''(n)}{n!}(x-1)^n+\cdots,$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}\right|}{\left|(-1)^n(x-1)^n\right|}=|x-1|$, 根据比式判别法的极限形式知,

当$|x-1|<1$,即$0<x<2$时, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n(x-1)^n\right|$收敛,从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$绝对收敛.

当$|x-1|>1$,即$x<0$或$x>2$时, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n(x-1)^n\right|$发散,

由于此时通项不趋于0,故级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$发散.

所以幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$的收敛半径是1,收敛区间是$(0,2)$. 当$x=0$时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$发散.

当$x=2$时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$发散. 所以幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$的收敛域是$(0,2)$.

P56习题14.2/3(2) 求函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=1$处的泰勒展开式.

在(0,2)考虑其柯西型余项:

$$|R_n(x)|=\left|\frac{1}{n!}f^{(n+1)}\big(1+\theta(x-1)\big)(1-\theta)^n(x-1)^{n+1}\right|=\left|(-1)^{n+1}\frac{(n+1)(1-\theta)^n(x-1)^{n+1}}{\big(1+\theta(x-1)\big)^{n+1}}\right|$$

$$=(n+1)\left(\frac{1-\theta}{1+\theta(x-1)}\right)^n\frac{1}{1+\theta(x-1)}|x-1|^{n+1}\le\frac{n+1}{1+\theta(x-1)}|x-1|^{n+1},0\le\theta\le1$$

考虑级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{1+\theta(x-1)}|x-1|^{n+1}$: 由于 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+2}{1+\theta(x-1)}|x-1|^{n+2}}{\dfrac{n+1}{1+\theta(x-1)}|x-1|^{n+1}}=|x-1|<1,$

根据比式判别法的极限形式知,$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{1+\theta(x-1)}|x-1|^{n+1}$收敛.

根据级数收敛的必要条件知,$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{1+\theta(x-1)}|x-1|^{n+1}=0.$

根据迫敛性知,$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$,从而$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,0<x<2.$

所以函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=1$处的泰勒展开式为 $f(x)=\dfrac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n,0<x<2.$

P58第十四章总练习题/1

证明：当$|x|<\dfrac{1}{2}$时，函数$\dfrac{1}{1-3x+2x^2}=1+3x+7x^2+\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots$.

证 由于

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x},$$

且已知

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1),$$

$$\frac{2}{1-2x}=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n,\ 2x\in(-1,1),\text{即}x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

所以

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)x^n$$

$$=1+3x+7x^2+\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots,\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

P58第十四章总练习题/2(1)

求函数$f(x)=(1+x)\ln(1+x)$的幂级数展开式.

解 已知 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}, x\in(-1,1],$

所以

$$f(x)=(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^n}{n-1}$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n,\quad x\in(-1,1].$$

注:幂级数$x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$的收敛域是$[-1,1]$,其和函数为

$$x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n=S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x), & x\in(-1,1]\\ 0, & x=-1\end{cases}$$

P58第十四章总练习题/3(2) 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$的和函数.

解 记$u_n(x)=\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)x^{2n+2}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{(2n+1)x^{2n}}\right|=\frac{|x|^2}{2}$,

根据正项级数的比式判别法的极限形式知,

当$\frac{|x|^2}{2}<1$,即$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时,级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}\right|$收敛, 从而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$绝对收敛.

当$\frac{|x|^2}{2}>1$,即$x<-\sqrt{2},x>\sqrt{2}$时, 级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$发散.

所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$的收敛半径是$\sqrt{2}$.

当$x=\pm\sqrt{2}$时,级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}$:由于$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2}=+\infty\neq 0$,

即级数的通项不趋于0,不满足级数收敛的必要条件, 故级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}$发散.

所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$的收敛域是$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

P58第十四章总练习题/3(2) 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$的和函数.

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 对$\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,利用幂级数的逐项求积定理,有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{2n+1}{2^{n+1}}t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^{2n+1}=\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

所以$S(x)=\left(\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}=S(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 对$\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,利用幂级数的逐项求导定理,有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}x^{2n+1}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'$$

$$=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\ x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}=S(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

P58第十四章总练习题/3(4) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$的和函数.

解 记$u_n(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+2)^2-1}\cdot\dfrac{(2n)^2-1}{x^{2n+1}}\right|=x^2$,

根据正项级数的比式判别法的极限形式知,

当$x^2<1$,即$-1<x<1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}\right|$收敛, 从而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$绝对收敛.

当$x^2>1$,即$x<-1, x>1$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}\right|$发散. 由于此时通项不趋于0,

根据级数收敛的必要条件知, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$发散.

所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$的收敛半径是1.

当$x=\pm1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(\pm1)^{2n+1}}{(2n)^2-1}$:由于$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left|\dfrac{(-1)^{n-1}(\pm1)^{2n+1}}{(2n)^2-1}\right|}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(2n)^2-1}=\dfrac{1}{4}$,

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛, 根据正项级数的比较判别法的极限形式知,

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}(\pm1)^{2n+1}}{(2n)^2-1}\right|$收敛, 故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(\pm1)^{2n+1}}{(2n)^2-1}$收敛.

所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$的收敛域是$[-1,1]$.

P58第十四章总练习题/3(4) 求幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$的和函数.

设$\displaystyle S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$, $x\in[-1,1]$.对$\forall x\in(-1,1)$,利用幂级数的逐项求导定理,有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=xg(x),$$

记$\displaystyle g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 利用幂级数的逐项求导定理,对$\forall x\in(-1,1)$,

$$g'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2},$$

从而 $\displaystyle g(x)=\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t+g(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x,$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t+S(0)=\int_0^x t\arctan t\,\mathrm{d}t=\int_0^x\arctan t\,\mathrm{d}\frac{t^2}{2}=\left(\frac{t^2}{2}\arctan t\right)\Bigg|_0^x-\int_0^x\frac{t^2}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(t-\arctan t)\Big|_0^x=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2},\quad x\in(-1,1),$$

利用幂级数和函数的连续性知, $\displaystyle S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},$

$$S(-1)=\lim_{x\to-1^+}S(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2},$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}=S(x)=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2},\ x\in[-1,1].$$

P58第十四章总练习题/3(4) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$的和函数.

设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}, x\in[-1,1]$.对$\forall x\in(-1,1)$,利用幂级数的逐项求积定理,有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^{n-1}t^{2n}}{2n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\left(t\int_0^t(-1)^{n-1}s^{2n-2}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left(t\int_0^t(-1)^{n-1}s^{2n-2}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\int_0^x t\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}s^{2n-2}\right)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\int_0^x t\int_0^t\frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x t\arctan t\,\mathrm{d}t=\int_0^x\arctan t\,\mathrm{d}\frac{t^2}{2}=\left(\frac{t^2}{2}\arctan t\right)\Bigg|_0^x-\int_0^x\frac{t^2}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(t-\arctan t)\Big|_0^x=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2},$$

利用幂级数和函数的连续性知,$S(1)=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x^2+1}{2}\arctan x-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$,

$$S(-1)=\lim_{x\to-1^+}S(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}=S(x)=\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{x}{2}, x\in[-1,1].$$

P58第十四章总练习题/4(1) 应用幂级数性质求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$的和.

解 考虑幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}x^{n+1}$记 $a_n=\dfrac{n}{(n+1)!}$.

由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}=0,$$

所以幂级数的收敛半径$R=+\infty$,收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}x^{n+1},x\in(-\infty,+\infty)$.

对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,利用幂级数的逐项求导定理,有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(n+1)!}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}=x\mathrm{e}^{x},$$

从而

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t+S(0)=\int_0^x t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\left(t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t\right)\Big|_0^x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1,x\in(-\infty,+\infty).$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=S(1)=1.$

P58第十四章总练习题/4(2) 应用幂级数性质求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$的和.

解 考虑幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$：记$u_n(x)=\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{3n+4}x^{3n+4}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}\right|}=|x|^3,$$

根据正项级数的比式判别法的极限形式知,

当$|x|^3<1$,即$-1<x<1$时,级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}\right|$收敛, 从而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$绝对收敛.

当$|x|^3>1$,即$x<-1,x>1$时,级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}\right|$发散, 此时由于通项不趋于0,

不满足级数收敛的必要条件,故$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$发散. 所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$的收敛半径是1.

当$x=1$时,级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$：数列$\left\{\frac{1}{3n+1}\right\}$单调递减且$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}=0$,

根据莱布尼茨判别法知,级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$收敛.当$x=-1$时,负项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3n+1}$：由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3},$$已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,根据比较判别法的极限形式知,

级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$发散,故级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3n+1}$发散.所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$的收敛域是$(-1,1]$.

P58第十四章总练习题/4(2) 应用幂级数性质求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$的和.

设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}, x\in(-1,1]$. 对$\forall x\in(-1,1)$,利用幂级数的逐项求导定理,有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3},\quad x\in(-1,1).$$

从而

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t+S(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t-2}{t^2-t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{3}\int_0^x\frac{\frac{1}{2}(t^2-t+1)'-\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\int_0^x\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}(t^2-t+1)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2t-1)}{\sqrt{3}}\bigg|_0^x$$

$$=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x-1)}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}},\quad x\in(-1,1).$$

根据幂级数的连续性定理知, $S(x)$在$x=1$处左连续, 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x-1)}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

P58第十四章总练习题/4(2) 应用幂级数性质求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$的和.

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}, x\in(-1,1]$. 对$\forall x\in(-1,1)$,利用幂级数的逐项求积定理,有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{3n}\,dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{3n}\,dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^3}dt=\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t-2}{t^2-t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{3}\int_0^x\frac{\frac{1}{2}(t^2-t+1)'-\frac{3}{2}}{t^2-t+1}dt=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\int_0^x\frac{1}{t^2-t+1}d(t^2-t+1)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2t-1)}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^x$$

$$=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x-1)}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}},\quad x\in(-1,1).$$

根据幂级数的连续性定理知,$S(x)$在$x=1$处左连续,于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x-1)}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$