Ch3 函数极限

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年11月02日

BY GYH

将学习：

函数极限的基本性质

唯一性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则此极限唯一.

唯一性 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则极限唯一.

证1 不妨设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$以及$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$.

根据函数极限的定义,对$\forall\varepsilon>0$,分别存在正数δ_1,δ_2,

当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有 $|f(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以

$$|A-B|=|A-f(x)+f(x)-B|\le|A-f(x)|+|f(x)-B|<\varepsilon.$$

由ε的任意性,推得$A=B$. 这就证明了极限是唯一的.

唯一性 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则极限唯一.

证2 利用反证法证明. 假设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B.$

不妨设$A<B$. 根据函数极限的定义, 令$\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}>0,$

$\exists\delta_1>0,$ 当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon,$

$\exists\delta_2>0,$ 当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有 $|f(x)-B|<\varepsilon.$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,\quad |f(x)-B|<\varepsilon,$$

即有

$$\frac{3A-B}{2}<f(x)<\frac{A+B}{2},\quad \frac{A+B}{2}<f(x)<\frac{3B-A}{2},$$

产生矛盾. 所以只能$A=B$, 这就证明了极限是唯一的.

证3 由于$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 则任取数列$\{x_n\}\subset U^0(x_0)$,满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

根据归结原则知,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

根据收敛数列的唯一性知, 函数极限也是唯一的.

局部有界性

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，则存在 x_0的某个去心邻域$U^\circ(x_0)$，$f(x)$在$U^\circ(x_0)$上有界.

局部有界性

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,则$\exists U^0(x_0)$, $f(x)$在$U^0(x_0)$上有界.

证 不妨设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. 根据函数极限的定义,

取$\varepsilon = 1$, 则$\exists \delta > 0$, 对$\forall x \in U^\circ(x_0;\delta)$, 有

$$|f(x) - A| < 1.$$

由此得

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|.$$

这就证明了$f(x)$在$U^\circ(x_0;\delta)$上有界.

注1: 与数列的有界性定理作比较.

注2: 有界函数不一定存在极限.

注3: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$, 但 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上并不是有界的 .

这说明定理中"局部"这两个字是关键性的.

局部保号性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$(或$<0$),则对任何正数$r<A$(或$r<-A$),存在$U^\circ(x_0)$,使得对一切$x\in U^\circ(x_0)$,有

$$f(x)>r>0\ (\text{或}\ f(x)<-r<0).$$

注：在应用局部保号性时，常取$r=\dfrac{A}{2}$.

局部保号性

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0(<0),\forall r\in\big(0,A\big)\big(\big(A,0\big)\big)\Rightarrow\exists U^0(x_0),\forall x\in U^0(x_0)$, 有 $f(x)>r>0(f(x)<r<0)$.

证 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,不妨设$A>0$. 对$\forall r\in(0,A)$,

根据函数极限的定义,

取$\varepsilon=A-r>0$,则$\exists\delta>0$,对$\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$,有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon=A-r.$$

由此得

$$f(x)>A-\varepsilon=r>0.$$

局部保号性推论

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$，则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|>\frac{|A|}{2}.$$

局部保号性推论

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0 \Rightarrow \exists U^0(x_0),\forall x\in U^0(x_0),\ 有\ |f(x)|>\frac{|A|}{2}.$$

证 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$, 根据函数极限的定义,

取 $\varepsilon=\dfrac{|A|}{2}>0$, $\exists\delta>0$, 对 $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{|A|}{2},$$

根据绝对值不等式, 有

$$|A|-|f(x)|\le|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{|A|}{2},$$

从而 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}.$

局部保号性推论(保序性)

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, 且 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$f(x) > g(x).$$

局部保号性推论(保序性)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B, A>B \Rightarrow \exists U^0(x_0), \forall x\in U^0(x_0)$, 有 $f(x)>g(x)$.

证 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B, B<A,$

根据函数极限的定义, 取 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0,$

$\exists\delta_1>0$, 对 $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta_1)$, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}$, 从而 $f(x)>\dfrac{A+B}{2}$.

$\exists\delta_2>0$, 对 $\forall x\in U^\circ(x_0;\delta_2)$, 有 $|g(x)-B|<\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}$, 从而 $g(x)<\dfrac{A+B}{2}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$f(x)>\frac{A+B}{2}>g(x),$$

即 $f(x)>g(x)$.

保不等式性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，且在某邻域 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有

$$f(x)\le g(x),$$

则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

保不等式性

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B, \exists U^0(x_0;\delta'), f(x)\le g(x) \Rightarrow A\le B.$

证1 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 根据函数极限的定义,

则对$\forall\varepsilon>0$,分别存在正数δ_1,δ_2,

当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,有 $f(x)>A-\dfrac{\varepsilon}{2}$,

当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有 $g(x)<B+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta=\min\{\delta',\delta_1,\delta_2\}>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)\le g(x)<B+\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $A<B+\varepsilon$.

由ε的任意性,推得$A\le B$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

保不等式性

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B, \exists U^0(x_0;\delta'), f(x)\le g(x) \Rightarrow A\le B.$

证2 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. 利用反证法证明.假设$A>B$.

根据函数极限的定义，取$\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$,则分别存在正数$\delta_1,\delta_2$,

当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,有 $f(x)>\dfrac{A+B}{2}$,

当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有 $g(x)<\dfrac{A+B}{2}$.

取 $\delta=\min\{\delta',\delta_1,\delta_2\}>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$f(x)>\frac{A+B}{2}>g(x),$$

这与已知条件矛盾，所以$A\le B$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

保不等式性

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B, \exists U^0(x_0;\delta'), f(x)\le g(x) \Rightarrow A\le B.$

证3 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$存在，则任取数列$\{x_n\}\subset U^0(x_0;\delta')$，满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

从而有 $f(x_n)\le g(x_n).$

根据收敛数列的保不等式性知，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\le \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n).$

根据归结原则知，

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{n\to\infty} g(x_n)=\lim_{x\to x_0} g(x).$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x).$

迫敛性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$,且在某邻域$U^{\circ}(x_0;\delta')$内有

$$f(x)\le h(x)\le g(x),$$

则

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=A.$$

迫敛性

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=A, \exists U^0(x_0;\delta'), f(x)\le h(x)\le g(x)\Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x)=A.$$

证 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, 根据函数极限的定义,

则对$\forall\varepsilon>0$,分别存在正数δ_1,δ_2,

当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,有 $f(x)>A-\varepsilon$,

当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有 $g(x)<A+\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta',\delta_1,\delta_2\}>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$A-\varepsilon<f(x)\le h(x)\le g(x)<A+\varepsilon.$$

由此得 $$|h(x)-A|<\varepsilon.$$

所以 $$\lim_{x\to x_0} h(x)=A.$$

四则运算法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在,则 $f\pm g$, $f\cdot g$ 当 $x\to x_0$ 时,极限也存在,且

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(3) 又若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$,则 $\dfrac{f}{g}$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在,且有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\lim_{x\to x_0} g(x)=B \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

证(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 根据函数极限的定义,

则对$\forall \varepsilon>0$,分别存在正数δ_1,δ_2,

当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有 $|g(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$\left|\left(f(x)\pm g(x)\right)-\left(A\pm B\right)\right|=\left|\left(f(x)-A\right)\pm\left(g(x)-B\right)\right|$$

$$\le |f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x).$$

证(2) 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，根据函数极限的局部有界性，

$\exists\delta_0>0, \exists M>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，有 $|f(x)|\le M$.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，根据函数极限的定义，

则对 $\forall\varepsilon>0$，分别存在正数 δ_1,δ_2，

当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$.

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|g(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$.

取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)g(x)-AB|=|f(x)g(x)-f(x)B+f(x)B-AB|$$

$$\le|f(x)||g(x)-B|+|B||f(x)-A|<M\frac{\varepsilon}{2(M+1)}+|B|\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

证(3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\neq 0$, 根据函数极限的局部保号性推论,

$\exists\delta_0>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta_0$时, 有 $|g(x)|>\dfrac{|B|}{2}$.

根据函数极限的定义, 对$\forall\varepsilon>0$, 分别存在正数δ_1,δ_2,

当 $0<|x-x_0|<\delta_1$时, 有 $|f(x)-A|<\dfrac{|B|\varepsilon}{4}$.

当$0<|x-x_0|<\delta_2$时, 有 $|g(x)-B|<\dfrac{B^2\varepsilon}{4(|A|+1)}$.

取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{Bf(x)-Ag(x)}{Bg(x)}\right|=\left|\frac{Bf(x)-AB+AB-Ag(x)}{Bg(x)}\right|$$

$$<\frac{2|f(x)-A|}{|B|}+\frac{2|A||g(x)-B|}{|B|^2}<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\lim_{x\to x_0} g(x)=B\neq 0\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

证(3) 由于$\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$存在，则任取数列$\{x_n\}\subset U^0(x_0)$,满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0.$$

根据归结原则知，

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x),\lim_{n\to\infty} g(x_n)=\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0.$$

根据收敛数列的四则运算法则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)}$,

由于$\{x_n\}$是任意趋于x_0的数列,根据归结原则知,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

复合函数的极限运算法则

设有复合函数$f\left(g(x)\right)$. 若

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$;

(2)在某个$U^\circ(x_0)$内$g(x)\neq u_0$;

(3) $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=\lim\limits_{u\to u_0} f\left(u\right)=A.$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0, \exists U^0\left(x_0\right), \forall x\in U^0\left(x_0\right), g(x)\neq u_0, \lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=A$

证 由于$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, 根据函数极限的定义,

则对$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0$, 当$0<|u-u_0|<\eta$时,有 $|f(u)-A|<\varepsilon$.

对于上述η,由于$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 根据函数极限的定义,

$\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时,有 $|g(x)-u_0|<\eta$.

由于$g(x)\neq u_0$, 故有 $0<|g(x)-u_0|=|u-u_0|<\eta$.

于是对$\forall\varepsilon>0$,($\exists\eta>0$,从而)$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,有

$$|f(u)-A|=\left|f\left(g(x)\right)-A\right|<\varepsilon,$$

即 $$\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=\lim_{u\to u_0} f\left(u\right)=A.$$

注：$g(x) \neq u_0, x \in U^0(x_0)$这个条件不可缺：

$$f(u)=\begin{cases}1, u=0\\ 0, u\neq 0\end{cases}, \quad u=g(x)=0,$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=0=u_0, \quad \lim_{u\to 0} f(u)=0,$$

根据复合函数的极限运算法则,有

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) \overset{u=g(x)}{=} \lim_{u\to 0} f(u)=0.$$

而 $f(g(x))=f(0)=1,$

于是 $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=\lim_{x\to x_0} 1=1.$

例1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 0=0.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解 由取整函数的性质, $\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x}$.

当 $x>0$时,有 $1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$, 又 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$,

根据迫敛性得 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$;

当 $x<0$时,有 $1\le x\left[\dfrac{1}{x}\right]<1-x$, 又 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1$,

根据迫敛性得 $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

于是 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

例3 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x-1)$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x-1)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}x\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x-1$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot 1-1=\frac{\pi}{4}-1.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+\cdots+x^n-n-1}{x-1}$.

解

$$\lim_{x\to1}\frac{1+x+\cdots+x^n-n-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+\cdots+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\right)$$

$$=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

例5 求证 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 \ (a>1)$

证1 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}=1$,

所以 $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}_+$,当 $n \geq N$ 时, 有

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon,$$

特别又有

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon.$$

取 $\delta = \dfrac{1}{N} > 0$,当 $0<|x-0|<\delta$ 时,

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon,$$

即 $|a^x-1|<\varepsilon$,从而 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1.$

例5 求证 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1\ (a>1)$

证2 对$\forall \varepsilon>0$,不妨设$\varepsilon<1$,要使 $\left|a^x-1\right|<\varepsilon$,

即 $1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$,

只要 $\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon)$

因此, 对$\forall \varepsilon>0$, 取$\delta=\min\left\{\left|\log_a(1-\varepsilon)\right|,\log_a(1+\varepsilon)\right\}$,

当$0<|x|<\delta$时,有 $\left|a^x-1\right|<\varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1.$

例6 求 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

解

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1-3}{x^3+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{-1-2}{(-1)^2-(-1)+1}=-1.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j}(m,n\in\mathbb{N}_+,a_nb_ma_kb_j\neq 0,\ n>k,m>j)$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_{k+1}}{x^{n-k-1}}+\dfrac{a_k}{x^{n-k}}\right)}{x^m\left(b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_{j+1}}{x^{m-j-1}}+\dfrac{b_j}{x^{m-j}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\boxed{x^{n-m}}\cdot\boxed{\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_{k+1}}{x^{n-k-1}}+\dfrac{a_k}{x^{n-k}}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_{j+1}}{x^{m-j-1}}+\dfrac{b_j}{x^{m-j}}}}$$

$$=\begin{cases}0, & n<m\\ \dfrac{a_n}{b_n}, & n=m\\ \infty, & n>m\end{cases}.$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=\begin{cases}0, & n<m\\ 1, & n=m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_k x^k}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_j x^j}\,(m,n\in\mathbb{N}_+, a_n b_m a_k b_j \neq 0, n>k, m>j)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_k x^k}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_j x^j}=\lim_{x\to 0}\frac{x^k\left(a_n x^{n-k}+a_{n-1}x^{n-1-k}+\cdots+a_{k+1}x+a_k\right)}{x^j\left(b_m x^{m-j}+b_{m-1}x^{m-1-j}+\cdots+b_{j+1}x+b_j\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\boxed{x^{k-j}}\cdot\boxed{\frac{a_n x^{n-k}+a_{n-1}x^{n-1-k}+\cdots+a_{k+1}x+a_k}{b_m x^{m-j}+b_{m-1}x^{m-1-j}+\cdots+b_{j+1}x+b_j}}$$

$$=\begin{cases}0, & k>j\\ \dfrac{a_k}{b_k}, & k=j\\ \infty, & k<j\end{cases}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}x^{k-j}=\begin{cases}0, & k>j\\ 1, & k=j\\ \infty, & k<j\end{cases}}$$

你应该:

知道函数极限的各种性质

会灵活使用函数极限的各种性质