第二十一章　重积分

第一节　二重积分的概念

1. 二重积分的定义及其存在性

2.二重积分的性质

关于有界区域 P 的直线网格划分 T:

可求面积

关于有界区域 P 的直线网格划分 T:

- Δ_i 上的点都是 P 的内点, 所有这样 Δ_i 的面积记为 $s_P(T)$;

可求面积

关于有界区域 P 的直线网格划分 T:

- Δ_i 上的点都是 P 的内点, 所有这样 Δ_i 的面积记为 $s_P(T)$;
- Δ_i 上的点都是 P 的外点;

可求面积

关于有界区域 P 的直线网格划分 T:

- Δ_i 上的点都是 P 的内点，所有这样 Δ_i 的面积记为 $s_P(T)$;
- Δ_i 上的点都是 P 的外点;
- Δ_i 上存在 P 的边界点，所有这样 Δ_i 的面积与 $s_P(T)$ 的和记为 $S_P(T)$.

可求面积

平面图形的面积

关于有界区域 P 的直线网格划分 T:

- Δ_i 上的点都是 P 的内点, 所有这样 Δ_i 的面积记为 $s_P(T)$;
- Δ_i 上的点都是 P 的外点;
- Δ_i 上存在 P 的边界点, 所有这样 Δ_i 的面积与 $s_P(T)$ 的和记为 $S_P(T)$.

可求面积

定义: 若平面图形的内面积等于它的外面积, 即

$$\underline{I}_P = \sup_T\{s_P(T)\} = \overline{I}_P = \inf\{S_P(T)\},$$

则称 P 为**可求面积**, 并称其共同值 $I_P = \underline{I}_P = \overline{I}_P$ 为 P 的面积.

可求面积

定理： 平面图形 P 可求面积的充分必要条件是：

对任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在直线网 T, 使得

$$S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon.$$

可求面积

推论： 平面图形 P 可求面积为零的充分必要条件是：

它的外面积 $\overline{I}_P = 0$, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在直线网 T, 使得

$$S_P(T) < \varepsilon.$$

定理： 平面图形 P 可求面积的充分必要条件是：

P 的边界面积为零.

定理： 若曲线 K 为由定义在 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的图像, 则曲线 K 的面积为零.

平面图形的面积

定理： 平面图形 P 可求面积的充分必要条件是：

P 的边界面积为零.

定理： 若曲线 K 为由定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的图像, 则曲线 K 的面积为零.

推论： 参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[a,b]$ 所表示的光滑曲线 K 的面积为零.

定理： 平面图形 P 可求面积的充分必要条件是：

P 的边界面积为零.

定理： 若曲线 K 为由定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的图像，则曲线 K 的面积为零.

推论： 参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[a,b]$ 所表示的光滑曲线 K 的面积为零.

推论： 若有界平面图形 P 的边界由有限个连续函数构成，则 P 为可求面积.

曲顶柱体的体积

给定曲顶柱体:

曲顶柱体的体积

给定曲顶柱体:

- 底：xoy 面上可求面积的闭区域 D;

曲顶柱体的体积

给定曲顶柱体:

- 底：xoy 面上可求面积的闭区域 D;
- 侧面：以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面;

曲顶柱体的体积

给定曲顶柱体:

- 底：xoy 面上可求面积的闭区域 D;
- 侧面：以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面;
- 顶: 连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$.

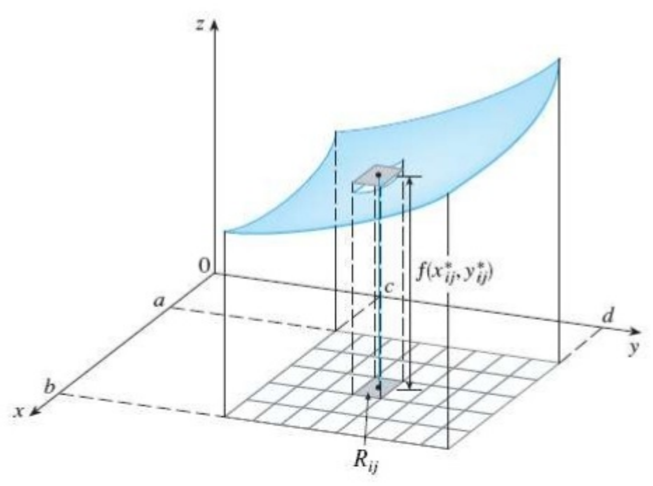
曲顶柱体的体积

给定曲顶柱体:

- 底：xoy 面上可求面积的闭区域 D;
- 侧面：以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面;
- 顶: 连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$.

如何求曲顶柱体的体积?

曲顶柱体的体积



定义

二重积分的定义： 设 $f(x,y)$ 是定义在可求面积的有界闭区域 D 上的函数. J 是**一个确定的数**, 若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正数 $\delta>0$, 使得对区域 D 任意分割 T, 当它的细度 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n} d_i<\delta$ 时, 其中 d_i 是每个小闭区域的直径, 属于 T 的所有积分和都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i - J\right| < \varepsilon,$$

则称 J 为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记作

$$J=\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy,$$

其中 $f(x,y)$ 叫做**被积函数**, x,y 叫做**积分变量**, D 叫做**积分区域**.

定理： $f(x,y)$ 在 D 上可积的**充分必要条件**是：

$$\lim_{\|T\|\to 0} S(T) = \lim_{\|T\|\to 0} s(T),$$

其中，$S(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i$, $M_i = \sup_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y)$,

$$s(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i,\ m_i = \inf_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y).$$

或者**充分必要条件**是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在 D 的某个分割 T, 使得

$$S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

定理： $f(x,y)$ 在 D 上可积的**充分必要条件**是：

$$\lim_{\|T\|\to 0} S(T) = \lim_{\|T\|\to 0} s(T),$$

其中, $S(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i$, $M_i = \sup_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y)$,

$$s(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i,\ m_i = \inf_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y).$$

或者**充分必要条件**是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在 D 的某个分割 T, 使得

$$S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

定理： 有界闭区域 D 上的连续函数必可积.

定理： 设 $f(x,y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的**有界函数**. 若 $f(x,y)$ 的不连续点集合面积为零, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

性质1： 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在区域 D 上可积, α,β 为常数, 则

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma$$

$$=\alpha\iint\limits_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

性质2： 设 $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $f(x,y)$ 在区域 D 上可积, 则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质3： 设 $f(x,y)=1$, 则

$$\sigma=\iint\limits_{D} 1d\sigma=\iint\limits_{D} d\sigma,$$

其中 σ 表示区域 D 的面积.

性质4： 设 $f(x,y) \le g(x,y)$ 都在区域 D 上可积，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

进而可以证明

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma.$$

性质5： 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积, 并且满足, $m \le f(x,y) \le M$, 则

$$m\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma.$$

其中 σ 表示区域 D 的面积.

性质6(二重积分中值定理)： 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot \sigma.$$

性质7(对称性质)： 设闭区域 D 关于 y 轴对称，$f(x,y)=-f(-x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = 0.$$

设闭区域 D 关于 x 轴对称，$f(x,y)=-f(x,-y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = 0.$$

例题： 求二重积分

$$\iint\limits_D \sin\left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right) d\sigma,$$

其中 D 是区域$\{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

本节作业

作业：

第 203 页：第1题、第4题.

X-型区域

用

$$\{(x,y)|a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

形式来描述区域 D.

例题1： D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

例题1： D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

例题2： D 是由直线 $y=x$、$x=-1$ 及 $y=1$ 所围成的闭区域.

二维直角坐标系下区域的描述

例题3： D 是由直线 $y = x - 2$ 及抛物线 $y^2 = x$ 所围成的闭区域.

例题3： D 是由直线 $y = x - 2$ 及抛物线 $y^2 = x$ 所围成的闭区域.

例题4： D 是由直线 $y = x$、$x = 2$ 及 曲线 $xy = 1$ 所围成的闭区域.

Y-型区域

用
$$\{(x,y)|a \le y \le b, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$$
形式来描述区域 D.

例题5： D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

例题5： D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

例题6： D 是由直线 $y=x$、$x=-1$ 及 $y=1$ 所围成的闭区域.

二维直角坐标系下区域的描述

例题7： D 是由直线 $y = x - 2$ 及抛物线 $y^2 = x$ 所围成的闭区域.

例题7： D 是由直线 $y=x-2$ 及抛物线 $y^2=x$ 所围成的闭区域.

例题8： D 是由直线 $y=x$、$x=2$ 及 曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

例题9： D 是 Y 型闭区域:

$$\{(x,y)|0 \le y \le 2; y^2 \le x \le 2y\},$$

将其化成 X 型闭区域.

例题9： D 是 Y 型闭区域:

$$\{(x,y)|0 \le y \le 2; y^2 \le x \le 2y\},$$

将其化成 X 型闭区域.

例题10： D 是 X 型闭区域:

$$\{(x,y)|1 \le x \le 2; 2-x \le y \le \sqrt{2x-x^2}\},$$

将其化成 Y 型闭区域.