Ch5 导数与微分

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

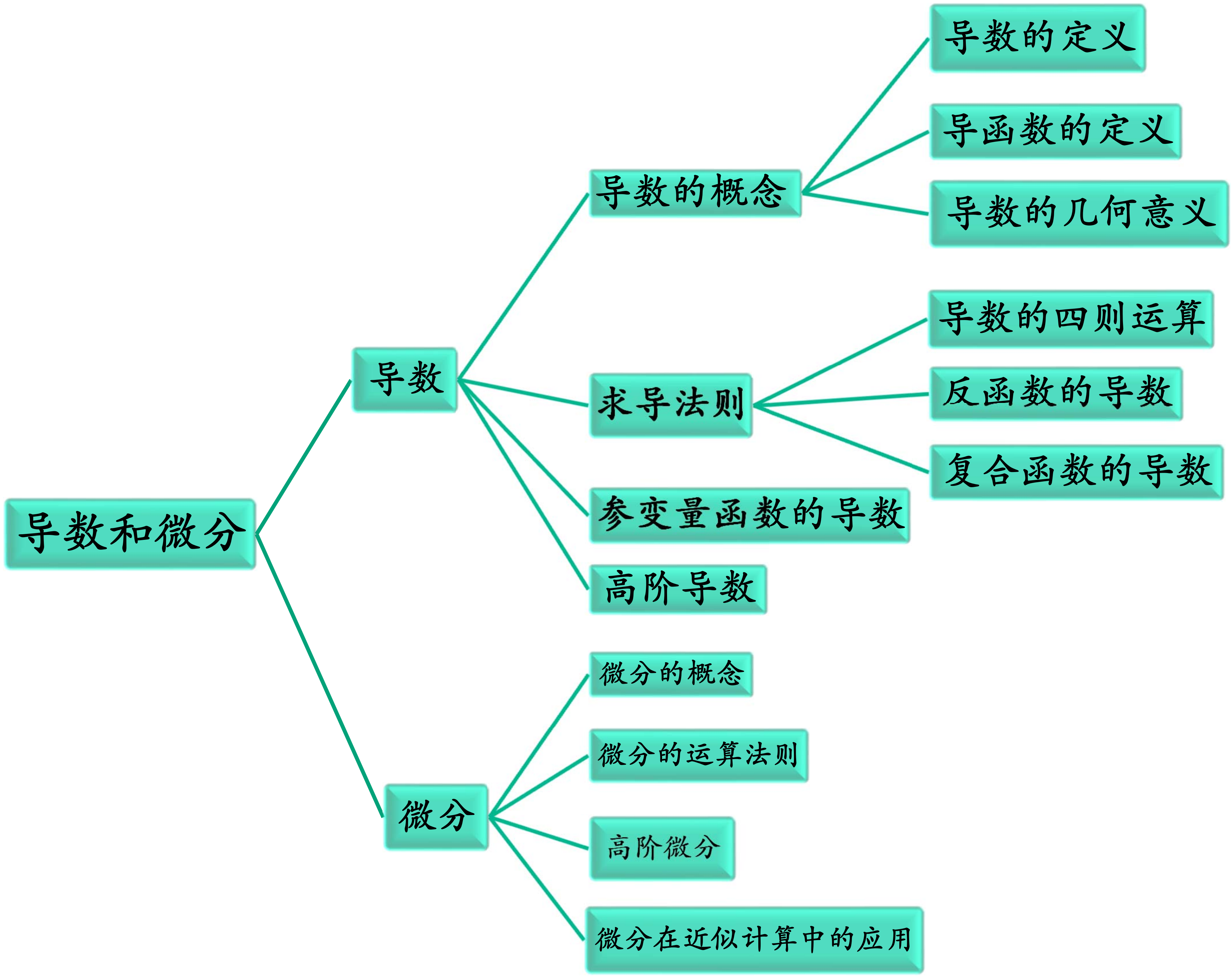
办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑


导数和微分
导数
导数的概念
导数的定义
导函数的定义
导数的几何意义
求导法则
导数的四则运算
反函数的导数
复合函数的导数
参变量函数的导数
高阶导数
微分
微分的概念
微分的运算法则
高阶微分
微分在近似计算中的应用

重要概念　函数在点x_0可导的定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$上有定义,若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{或}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{存在,}$$

则称函数f在点x_0可导,并称该极限为函数f在点x_0的导数,记作$f'(x_0)$或$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

若此极限不存在,则称f在点x_0不可导.

若极限值$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$或$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在,

则称函数f在点x_0左可导,并称该极限为函数f在点x_0的左导数,记作$f'_-(x_0)$.

若极限值$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$或$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在,

则称函数f在点x_0右可导,并称该极限为函数f在点x_0的右导数,记作$f'_+(x_0)$.

重要概念 导函数的定义

若函数$y=f(x)$在区间I上的每一点都可导(在区间的端点处,则考虑相应的单侧导数),则称函数f在区间I上可导,并有相应的导函数,记作$f'(x)$或$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

重要概念 二阶导数与高阶导数

若函数$y=f(x)$的导函数$f'(x)$在点x_0处可导，则称$f'(x)$在点x_0处的导数为$y=f(x)$在点x_0处的二阶导数，记作$f''(x_0)$，即

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x},$$

并称$y=f(x)$在点x_0处二阶可导.

由此可定义二阶导函数$f''(x)$.

如果$f^{(n-1)}(x)$为$y=f(x)$的$n-1$阶导函数，则$y=f(x)$的n阶导函数为

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x},$$

并记$f^{(0)}(x)=f(x)$.

重要概念 微分的定义

若函数$y=f(x)$在点x_0处的增量$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$

可表示为
$$\Delta y=A\Delta x+o\left(\Delta x\right),$$

其中A与Δx无关，则称函数$y=f(x)$在点x_0处可微，

称$A\Delta x$为函数$y=f(x)$在点x_0处的微分，记作$\mathrm{d}\,y$，即
$$\mathrm{d}\,y=A\Delta x=A\,\mathrm{d}\,x.$$

重要概念 高阶微分

若函数$y=f(x)$二阶可导,则$y=f(x)$二阶可微,

其二阶微分为$\mathrm{d}^2 y=f''(x)\,\mathrm{d}x^2$.

若函数$y=f(x)$ n阶可导,则$y=f(x)$ n阶可微,

其n阶微分为$\mathrm{d}^n y=f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n$.

$\mathrm{d}^2 y$表示y的二阶微分

$\mathrm{d}y^2$表示y的一阶微分的平方,即$\mathrm{d}y^2=(\mathrm{d}y)^2$

$\mathrm{d}(y^2)$表示y^2的一阶微分

重要定理 可导的充要条件

函数$y=f(x)$在点x_0处可导的充要条件是：

函数$y=f(x)$在点x_0的左、右导数都存在且相等，

即 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

重要定理 可导与连续的关系

函数f在点x_0处可导$\Rightarrow$函数f在点x_0处连续

函数f在点x_0存在左(右)导数$\Rightarrow$函数f在点x_0处左(右)连续

函数f在点x_0存在左、右导数$\Rightarrow$函数f在点x_0处连续

函数f在点x_0处不连续$\Rightarrow$函数f在点x_0处不可导

重要定理 费马Fermat定理

设函数f在点x_0处可导,若x_0是f的一个极值点,则$f'(x_0)=0$.

重要定理 可导与可微的关系

函数f在点x_0处可微 $\Leftrightarrow$ 函数f在点x_0处可导,且

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x.$$

求导法则 四则运算求导法则

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)' = u'(x)\pm v'(x)$$

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$$\left(cu(x)\right)' = cu'(x)$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

求导法则 反函数的求导法则

设$y=f(x)$为$x=\varphi(y)$的反函数,若$\varphi(y)$在点y的某邻域上连续、严格单调且$\varphi'(y)\neq 0$,

则$f(x)$在点$x\left(x=\varphi(y)\right)$可导,且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

求导法则 复合函数的求导法则

设$u=\varphi(x)$在点x可导，$y=f(u)$在点$u\left(u=\varphi(x)\right)$可导，

则复合函数$f\circ\varphi$在点x可导，且

$$\left(f\circ\varphi\right)'(x)=f'\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x).$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

求导法则　对数求导法

若函数$f(x)$是多个可导函数相乘(除)的形式或者幂指函数

$f(x)=\left(u(x)\right)^{v(x)}$,则可通过对数的性质而较为容易算出

$\left(\ln f(x)\right)'$,进而求得$f'(x)$.

求导法则 参变量函数的求导法则

若函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$所确定，

其中$\varphi(t)$和$\psi(t)$可导，且$\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

若$\varphi(t)$和$\psi(t)$二阶可导，则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}.$$

微分运算法则

$$\mathrm{d}\big(u(x)\pm v(x)\big)=\mathrm{d}u(x)\pm\mathrm{d}v(x)$$

$$\mathrm{d}\big(u(x)\cdot v(x)\big)=v(x)\,\mathrm{d}u(x)+u(x)\,\mathrm{d}v(x)$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{v(x)\,\mathrm{d}u(x)-u(x)\,\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}$$

$$\mathrm{d}\Big(f\big(g(x)\big)\Big)=f'(u)\,\mathrm{d}u=f'\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\big(\text{其中}\,u=g(x)\big)$$

重要结论 导数的几何意义

若函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则曲线在点$\left(x_0, f(x_0)\right)$处的切线斜率为$f'(x_0)$,则相应的切线方程和法线方程分别为

切线方程： $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程： $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$, $f'(x_0)\neq 0$.

重要结论 微分的几何意义

若函数$y=f(x)$在点x_0处可微，则曲线在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

则函数$y=f(x)$在点x_0的微分是曲线在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处切线的纵坐标当横坐标增加Δx时的增加量.

重要结论 极值点与稳定点(驻点)的关系

可导函数的极值点一定是该函数的稳定点.

若$f'(x_0)=0$,即x_0是f的稳定点,则x_0不一定是f的极值点.

重要结论 基本初等函数的导数公式

$(c)' = 0$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α为常数)

$(a^x)' = a^x \ln a$ $\quad (e^x)' = e^x$

$(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\quad (\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad (\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ $\quad (\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

重要结论 常见函数的高阶导数

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$\left(a^{x}\right)^{(n)}=a^{x}(\ln a)^{n} \qquad \left(e^{x}\right)^{(n)}=e^{x}$$

$$\left(\sin(ax+b)\right)^{(n)}=a^{n}\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\left(\cos(ax+b)\right)^{(n)}=a^{n}\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n}n!a^{n}}{(ax+b)^{n+1}} \qquad \left(\ln(ax+b)\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^{n}}{(ax+b)^{n}}$$

重要结论 莱布尼茨公式

设$u(x),v(x)$有n阶导数,则

$$\left(u(x)v(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x).$$

重要结论 一阶微分形式不变性

$y=f(x)$: 若x是自变量,则 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$

若x是中间变量,$x=g(u)$,则

$$\mathrm{d}y=\big(f(g(u))\big)'\mathrm{d}u=f'\big(g(u)\big)g'(u)\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x$$

重要结论 微分在近似计算中的应用

基本公式 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

在原点附近常用的近似公式

$$\sin x \approx x \qquad \tan x \approx x \qquad \arctan x \approx x$$

$$\ln(1+x)\approx x \qquad e^x \approx 1+x \qquad (1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$$

误差估计

设量x由测量得到,量y由函数$y=f(x)$经计算得到,

x_0是x的近似值,若测量值x_0的误差限为δ_x,即

$$|\Delta x|=|x-x_0|\le \delta_x,$$

则近似值$f(x_0)$的绝对误差限是 $|f'(x_0)|\delta_x$,

相对误差限是 $\left|\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta_x$.

重要结论

设函数f在点x_0存在左、右导数,则f在点x_0连续.

设函数f在点x_0处可导,则$|f|$在点x_0处不一定可导.

$f(x)=x$在$x=0$处可导,但$|f(x)|=|x|$在$x=0$处不可导.

设函数$|f|$在点x_0处可导,则f在点x_0处不一定可导.

$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ -1, & x\text{为无理数}\end{cases}$在$\mathbb{R}$上处处无极限,故在$\mathbb{R}$上处处不可导.

$|f(x)|=1$在$\mathbb{R}$上处处可导.

设函数$|f|$在点x_0处可导,且f在点x_0处连续,则f在点x_0处一定可导.

重要结论

$f'_+(x_0)$表示函数f在点x_0处的右导数,即

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$f'(x_0+0)$表示函数f的导函数f'在点x_0处的右极限,即

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x).$$

(导函数f'在点x_0可能不可导)

重要结论

若函数f在点x_0处可导,g在点x_0处不可导,

则$f \pm g$在点x_0处一定不可导.

若函数f在点x_0处可导,g在点x_0处不可导,

则$f \cdot g$在点x_0处可能可导可能不可导.

若函数f与g在点x_0处都不可导,

则$f \pm g, f \cdot g$在点x_0处可能可导可能不可导.

重要结论

可导的偶函数,其导函数为奇函数.

可导的奇函数,其导函数为偶函数.

可导的周期函数,其导函数仍为周期函数.

P88/习题5.1/4

设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \ge 3 \\ ax+b, & x<3 \end{cases}$,试确定$a,b$的值,使$f$在$x=3$处可导.

解1 由于f在$x=3$处可导,所以f在$x=3$处连续.

从而有 $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$,

即 $\lim\limits_{x\to 3^-}(ax+b)=\lim\limits_{x\to 3^+} x^2=9$, 得 $3a+b=9$.

又有 $f_-'(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{ax+b-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{ax+b-(3a+b)}{x-3}=a$,

$$f_+'(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6,$$

由于f在$x=3$处可导,所以$f_-'(3)=f_+'(3)$,即$a=6$.

解得 $a=6$, $b=-9$.

一定要用导数的定义求分段函数分段点处的导数

P88/习题5.1/4

设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 3 \\ ax+b, & x<3 \end{cases}$,试确定$a,b$的值,使$f$在$x=3$处可导.

解2 由于$f_-'(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{ax+b-9}{x-3}$,

$$f_+'(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6,$$

又f在$x=3$处可导,所以$f_-'(3)=f_+'(3)$,即$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{ax+b-9}{x-3}=6$,

从而 $\lim\limits_{x\to 3^-}(ax+b-9)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{ax+b-9}{x-3}\cdot(x-3)=6\cdot 0=0$,

即 $3a+b-9=0$.

从而 $f_-'(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{ax+b-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{ax+b-(3a+b)}{x-3}=a$,

因此 $a=6,\ b=-9.$

$$\cancel{ax+b-9=6(x-3)}$$

BY GYH

P88/习题5.1/4

设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 3 \\ ax+b, & x<3 \end{cases}$,试确定$a,b$的值,使$f$在$x=3$处可导.

解3 由于$f_-'(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{ax+b-9}{x-3}$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{ax-3a+3a+b-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\left(a+\frac{3a+b-9}{x-3}\right),$$

$$f_+'(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6,$$

又f在$x=3$处可导,所以$f_-'(3)=f_+'(3)$,即 $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(a+\dfrac{3a+b-9}{x-3}\right)=6.$

因此 $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3a+b-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(a+\dfrac{3a+b-9}{x-3}-a\right)=6-a,$

$$3a+b-9=\lim_{x\to 3^-}\frac{3a+b-9}{x-3}(x-3)=0,$$

解得 $a=6,\ b=-9.$

P88/习题5.1/4

设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 3 \\ ax+b, & x<3 \end{cases}$,试确定$a,b$的值,使$f$在$x=3$处可导.

分段函数分段点处的可导性或导数一定要用导数的定义来判断及计算.

$$\cancel{f'_+(3)=2x\big|_{x=3}}=6,\ \cancel{f'_-(3)=a}$$

一定不能用上面的方法求解

P88/习题5.1/11

设$g(0)=g'(0)=0$, $f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.求$f'(0)$.

解 因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$,

又 $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$,

根据无穷小与有界量的乘积为无穷小,有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

$$\cancel{\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\lim\sin\frac{1}{x}=0}$$

极限四则运算法则一定要在极限存在的情况下使用

与P88/习题5.1/11相关命题　P88/习题5.1/8

设函数$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ (m为正整数).

试问:(1)m等于何值时, f在$x=0$连续;(2)m等于何值时, f在$x=0$可导.

解 (1)要使f在$m=0$连续,则需成立 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^m\sin\dfrac{1}{x}=f(0)=0$,

因此对$\forall m\in\mathbb{N}_+$, f在$x=0$连续.

(2)要使f在$m=0$可导,则需

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^m\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to0}x^{m-1}\sin\frac{1}{x}\text{ 存在,}$$

因此当$m-1>0$,即$m>1$时, f在$x=0$可导.

与P88/习题5.1/11相关命题　P88/习题5.1/10

设函数f在点x_0存在左、右导数,则f在点x_0连续.

证 由于f在点x_0存在左、右导数,即

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

都存在.

由于$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)\right)=f'_-(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0)$,

即f在点x_0左连续.

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)\right)=f'_+(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0),$$

即f在点x_0右连续. 所以f在点x_0连续.

与P88/习题5.1/11相关命题　补充命题

设函数$|f|$在点x_0处可导,且f在点x_0处连续,则f在点x_0处一定可导.

证 若$f(x_0)>0$,由于f在点x_0连续,根据连续函数的局部保号性知,

$\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0;\delta)$,有 $f(x)>0$.

因此当$x\in U(x_0;\delta)$时,$f(x)=|f(x)|$,已知$|f|$在点x_0处可导,故f在点x_0处可导.

若$f(x_0)<0$,由于f在点x_0连续,根据连续函数的局部保号性知,

$\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0;\delta)$,有 $f(x)<0$.

因此当$x\in U(x_0;\delta)$时,$f(x)=-|f(x)|$,已知$|f|$在点x_0处可导,故f在点x_0处可导.

若$f(x_0)=0$,则x_0是$|f|$的极小值点,又$|f|$在点x_0处可导,

根据费马定理知,$\left.\left(|f(x)|\right)'\right|_{x=x_0}=0$.

从而 $\left|\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right|=\left|\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}\right|=\left|\dfrac{|f(x_0+\Delta x)|-|f(x_0)|}{\Delta x}\right|\to\left|\left.\left(|f(x)|\right)'\right|_{x=x_0}\right|=0\,(\Delta x\to 0)$,

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=0$, 即$f$在点$x_0$处可导.

P88/习题5.1/12 设f是定义在$\mathbb{R}$上的函数,且对任何$x_1,x_2\in\mathbb{R}$,都有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2).$$

若$f'(0)=1$,证明对任何$x\in\mathbb{R}$,都有$f'(x)=f(x)$.

证 由于对$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$,有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$,

所以 $f(0)=f(0+0)=f(0)\cdot f(0)$,即 $f(0)\big(1-f(0)\big)=0$,解得 $f(0)=0,\ f(0)=1.$

若$f(0)=0$,则对$\forall x\in\mathbb{R}$,有$f(x)=f(x+0)=f(x)\cdot f(0)=0$,

因此对$\forall x\in\mathbb{R}$,有 $f'(x)=0$,从而$f'(0)=0$. 与已知矛盾,故$f(0)=1$.

由于$f'(0)=0$,从而$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0.$

由于对$\forall x\in\mathbb{R}$,有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=f(x)f'(0)=f(x).$$

因此结论得证.

一定要熟知导数的定义

与P88/习题5.1/12相关命题　补充命题

设f在$\mathbb{R}$上满足$|f(x)| \le x^2$,试求$f'(0)$.

解 当$x=0$时,有 $|f(0)| \le 0^2 = 0$, 因此 $f(0)=0$.

由于 $$0 \le \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \frac{x^2}{|x|} = |x|,$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$,

根据函数极限的迫敛性知, $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = 0$.

所以 $$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

P88/习题5.1/13 证明：若$f'(x_0)$存在,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=2f'(x_0)$.

证 由于$f'(x_0)$存在, 从而 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$.

因此
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\right)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$$
$$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0).$$

P88/习题5.1/14

证明：若函数f在$[a,b]$上连续，且$f(a)=f(b)=K$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，

则至少有一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=K$.

证1 由于$f'_+(a)f'_-(b)>0$，故不妨设$f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$.

因为$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-K}{x-a}>0$，根据函数极限的局部保号性知，

$\exists\delta_1>0\left(\delta_1<\dfrac{b-a}{2}\right)$，$\forall x\in U^\circ_+(a;\delta_1)$，有 $\dfrac{f(x)-K}{x-a}>0$，

从而 $f(x)-K>0$，即$f(x)>K$. 取$x_1\in U^\circ_+(a;\delta_1)$，有 $f(x_1)>K$.

因为$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-K}{x-b}>0$，根据函数极限的局部保号性知，

$\exists\delta_2>0\left(\delta_2<\dfrac{b-a}{2}\right)$，$\forall x\in U^\circ_-(b;\delta_2)$，有 $\dfrac{f(x)-K}{x-b}>0$，

从而 $f(x)-K<0$，即$f(x)<K$. 取$x_2\in U^\circ_-(b;\delta_2)$，有 $f(x_2)<K$.

因为f在$[a,b]$上连续，故f在$[x_1,x_2]$上连续，又$f(x_1)>K>f(x_2)$，

根据闭区间上连续函数的介值性定理知，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $f(\xi)=K$.

P88/习题5.1/14

证明：若函数f在$[a,b]$上连续，且$f(a)=f(b)=K$, $f_+'(a)f_-'(b)>0$,
则至少有一点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=K$.

证2 利用反证法证明. 假设对$\forall x\in(a,b)$,都有$f(x)\neq K$.

从而要么$f(x)>K$要么$f(x)<K$.

若不然$\exists x_1\in(a,b)$,使得$f(x_1)>K$, $\exists x_2\in(a,b)$,使得$f(x_2)<K$,不妨设$x_1<x_2$,

又f在$[x_1,x_2]$上连续，根据闭区间上连续函数的介值性定理知，

$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$,使得$f(\xi)=K$.与假设矛盾.

不妨设$f(x)>K, x\in(a,b)$.

$$\text{从而}f_+'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-K}{x-a}>0,$$

$$f_-'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-K}{x-b}<0,$$

有 $f_+'(a)f_-'(b)<0$,与已知条件矛盾.

因此至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=K$.

P88/习题5.1/14

证明：若函数f在$[a,b]$上连续，且$f(a)=f(b)=K$, $f_+'(a)f_-'(b)>0$,
则至少有一点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=K$.

证3 设$F(x)=f(x)-K$. 由于$f_+'(a)f_-'(b)>0$,故不妨设$f_+'(a)>0$, $f_-'(b)>0$.

从而$F_+'(a)>0, F_-'(b)>0$.

因为$F_+'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{F(x)}{x-a}>0$, 根据函数极限的局部保号性知，

$\exists\delta_1>0\left(\delta_1<\dfrac{b-a}{2}\right)$, $\forall x\in U_+^\circ(a;\delta_1)$,有 $\dfrac{F(x)}{x-a}>0$, 从而 $F(x)>0$.

取$x_1\in U_+^\circ(a;\delta_1)$,有 $F(x_1)>0$.

因为$F_-'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{F(x)}{x-b}>0$, 根据函数极限的局部保号性知，

$\exists\delta_2>0\left(\delta_2<\dfrac{b-a}{2}\right)$, $\forall x\in U_-^\circ(b;\delta_2)$,有 $\dfrac{F(x)}{x-b}>0$, 从而 $F(x)<0$.

取$x_2\in U_-^\circ(b;\delta_2)$,有 $F(x_2)<0$. 因为F在$[a,b]$上连续，故F在$[x_1,x_2]$上连续，

根据闭区间上连续函数的根的存在定理知，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$,

使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=K$.

BY GYH

P88/习题5.1/17设$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$的最大零点为$x_0$. 证明: $f'(x_0)\geq 0$.

证1 根据已知条件知$f(x_0)=0$, 且对$\forall x>x_0$,有 $f(x)\neq 0$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^n\left(1+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}}\right)=+\infty,$$

所以对$\forall x>x_0$,有 $f(x)>0$.

于是,当$x>x_0$时,有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x)}{x-x_0}>0$.

根据函数极限的保不等式性知,

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}\geq 0.$$

由于f在$\mathbb{R}$上可导,故f在点x_0可导,因此 $f'(x_0)=f'_+(x_0)\geq 0$.

P88/习题5.1/17 设$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$的最大零点为$x_0$. 证明: $f'(x_0)\ge 0.$

证2 利用反证法证明. 假设$f'(x_0)<0.$

由于f在$\mathbb{R}$上可导,故f在点x_0可导,因此

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}<0.$$

根据函数极限的局部保号性知, $\exists\delta>0,\forall x\in U^\circ_+(x_0;\delta)$,有 $\dfrac{f(x)}{x-x_0}<0,$

从而 $f(x)<0$. 因此,$\exists x_1\in U^\circ_+(x_0;\delta)$,有 $f(x_1)<0.$

又因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\left(1+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^{n-1}}\right)=+\infty,$

所以对$\forall G>0,\exists M>0(M>x_1),\forall x>M$,有 $f(x)>G>0.$

因此,$\exists x_2>M>x_1$,有 $f(x_2)>0.$

由于f在$\mathbb{R}$上连续,故f在$[x_1,x_2]$上连续,且$f(x_1)f(x_2)<0,$

根据闭区间上连续函数根的存在定理知,$\exists x_3\in(x_1,x_2)$,使得$f(x_3)=0.$

而$x_3>x_0$,这与x_0是f的最大零点矛盾. 所以 $f'(x_0)\ge 0.$

P96/习题5.2/2(4) 求函数$y=\frac{x}{m}+\frac{m}{x}+2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$的导数.

解 $y'=\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}+2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'$

$$=\left(\frac{x}{m}\right)'+\left(\frac{m}{x}\right)'+\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)'+\left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)'$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{m}{x^2}+x^{-\frac{1}{2}}+2\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{m}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

P96/习题5.2/2(5) 求函数$y=x^3\log_3 x$的导数.

解 $$y'=\left(x^3\log_3 x\right)'$$

$$=\left(x^3\right)'\log_3 x+x^3\left(\log_3 x\right)'$$

$$=3x^2\log_3 x+x^3\frac{1}{x\ln 3}$$

$$=3x^2\log_3 x+\frac{x^2}{\ln 3}.$$

P96/习题5.2/2(11) 求函数$y=\left(\sqrt{x}+1\right)\arctan x$的导数.

解 $y'=\left(\left(\sqrt{x}+1\right)\arctan x\right)'$

$$=\left(\sqrt{x}+1\right)'\arctan x+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\arctan x\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\arctan x+\frac{\sqrt{x}+1}{1+x^2}.$$

P96/习题5.2/3(8) 求函数$y=\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$的导数.

解1 由于$y=\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\ln\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}$

$$=\ln\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{2x}=\ln\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)-\ln x,$$

所以 $y'=\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}$

$$=\frac{x^2-\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{x\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

能化简尽量化简

P96/习题5.2/3(8) 求函数$y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$的导数.

解2 $$y'=\left(\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)'=\left(\ln\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)-\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\right)'$$

$$=\left(\ln\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\right)'-\left(\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\right)'$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)'}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)'}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}-\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)^2+\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}{2\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{4}{4x\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

P96/习题5.2/3(15) 求函数$y=\operatorname{arccot}\frac{1+x}{1-x}$的导数.

解 $$y'=-\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'$$

$$=-\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}$$

$$=-\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}$$

$$=-\frac{1}{1+x^2}.$$

P96/习题5.2/3(20) 求函数$y=x^{x^x}$的导数.

解1 两边取对数,得 $\ln y=\ln x^{x^x}=x^x\ln x$,

两边再取对数,得 $\ln(\ln y)=\ln(x^x\ln x)=x\ln x+\ln(\ln x)$,

两边关于x求导,得

$$\left(\ln(\ln y)\right)'=\left(x\ln x+\ln(\ln x)\right)',$$

$$\frac{1}{\ln y}(\ln y)'=\ln x+1+\frac{1}{\ln x}(\ln x)',$$

$$\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{y'}{y}=\ln x+1+\frac{1}{x\ln x},$$

所以 $$y'=y\ln y\left(\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}\right)$$

$$=x^{x^x}\cdot x^x\ln x\left(\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}\right).$$

P96/习题5.2/3(20) 求函数$y=x^{x^x}$的导数.

解2 $y=x^{x^x}=e^{\ln x^{x^x}}=e^{x^x\ln x}=e^{e^{x\ln x}\ln x}$.

$$y'=\left(e^{e^{x\ln x}\ln x}\right)'=e^{e^{x\ln x}\ln x}\left(e^{x\ln x}\ln x\right)'$$

$$=x^{x^x}\left(\left(e^{x\ln x}\right)'\ln x+e^{x\ln x}(\ln x)'\right)$$

$$=x^{x^x}\left(e^{x\ln x}(x\ln x)'\ln x+e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=x^{x^x}\left(x^x\ln x(\ln x+1)+x^x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{x^x}\left(x^x\ln x(\ln x+1)+x^{x-1}\right).$$

注意$a^{b^c}=a^{\left(b^c\right)}$ 而不是$a^{b^c}=\left(a^b\right)^c$

P96/习题5.2/3(22) 求函数$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$的导数.

解 $$y'=\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)'\right)$$ 注意函数的结构

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)=\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

P96/习题5.2/3(24) 求函数$y=\sin\left(\dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)}\right)$的导数.

解 $$y'=\cos\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)'$$

$$=\cos\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)\frac{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)-x\cos\left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)'}{\sin^2\left(\frac{x}{\sin x}\right)}$$

$$=\cos\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)\frac{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)-x\cos\left(\frac{x}{\sin x}\right)\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}}{\sin^2\left(\frac{x}{\sin x}\right)}.$$

P96/习题5.2/4 对下列各函数计算$f'(x), f'(x+1), f'(x-1)$.

$$(1) f(x)=x^3; (2) f(x+1)=x^3; (3) f(x-1)=x^3.$$

解 (1) $f'(x)=3x^2,\ f'(x+1)=3(x+1)^2,\ f'(x-1)=3(x-1)^2$.

(2) $f(x)=(x-1)^3,\ f'(x)=3(x-1)^2, f'(x+1)=3x^2, f'(x-1)=3(x-2)^2$.

(3) $f(x)=(x+1)^3,\ f'(x)=3(x+1)^2, f'(x+1)=3(x+2)^2, f'(x-1)=3x^2$.

P96/习题5.2/5 已知g为可导函数,a为实数,试求下列函数f的导数:

$$(1)\ f(x)=g(x+g(a));\qquad (2)\ f(x)=g(x+g(x));$$

$$(3)\ f(x)=g(xg(a));\qquad (4)\ f(x)=g(xg(x)).$$

解

$$(1)\ f'(x)=g'(x+g(a))\cdot(x+g(a))'=g'(x+g(a)).$$

$$(2)\ f'(x)=g'(x+g(x))\cdot(x+g(x))'=(1+g'(x))g'(x+g(x)).$$

$$(3)\ f'(x)=g'(xg(a))\cdot(xg(a))'=g(a)g'(xg(a)).$$

$$(4)\ f'(x)=g'(xg(x))\cdot(xg(x))'=(g(x)+xg'(x))g'(xg(x)).$$

P96/习题5.2/6 设f为可导函数,证明:若$x=1$时有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)$.
则必有$f'(1)=0$或$f(1)=1$.

解 由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=f'(x^2)(x^2)'=2xf'(x^2)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)=2f(x)f'(x)$,

又当$x=1$时,有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)$,

故 $2f'(1)=2f(1)f'(1)$, $2f'(1)(1-f(1))=0$,

因此必有 $f'(1)=0$或$f(1)=1$.

P99/习题5.3/1(2) 求由参量方程 $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t} \\ y = \dfrac{1-t}{1+t} \end{cases}, t > 0$ 所确定的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)'}{\left(\dfrac{t}{1+t}\right)'} = \frac{\dfrac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2}}{\dfrac{(1+t)-t}{(1+t)^2}} = -2.$$

分子是因变量对参数求导

分母是自变量对参数求导

千万不要颠倒

P99/习题5.3/4

证明曲线$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$上任一点的法线到原点距离等于$a$.

证 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\left(a(\sin t - t\cos t)\right)'}{\left(a(\cos t + t\sin t)\right)'} = \frac{a(\cos t - \cos t + t\sin t)}{a(-\sin t + \sin t + t\cos t)} = \tan t.$$

设曲线上任一点的坐标为$\left(x(t_0), y(t_0)\right)$，则过该点的法线方程为

$$y - a(\sin t_0 - t_0\cos t_0) = -\cot t_0 (x - a(\cos t_0 + t_0 \sin t_0)),$$

即 $\cos t_0 \cdot x + \sin t_0 \cdot y - a = 0.$

根据点到直线的距离公式知，原点到该法线的距离为

$$d = \frac{\left|\cos t_0 \cdot 0 + \sin t_0 \cdot 0 - a\right|}{\sqrt{\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0}} = a.$$

P99/习题5.3/6 求心形线$r=a(1+\cos\theta)$的切线与切点向径之间的夹角.

解 切线与切点向径之间的夹角φ的正切为

$$\tan\varphi=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\frac{a(1+\cos\theta)}{-a\sin\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=-\cot\frac{\theta}{2}=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right).$$

所以

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2},\theta\in[0,\pi)\\ \dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2},\theta\in[\pi,2\pi)\end{cases}.$$

心形线$r=a(1+\cos\theta)$中参数θ的范围为$[0,2\pi]$,向径与切线的夹角范围为$[0,\pi]$.

P103/习题5.4/2 设函数f在$x=1$处二阶可导,证明:若$f'(1)=0,\ f''(1)=0$,

则在$x=1$处有$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f^2(x)$.

证 由于f在$x=1$处二阶可导,故f在$x=1$的某邻域一阶可导.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=2xf'(x^2),\qquad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)\right|_{x=1}=2f'(1)=0.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)=2f(x)f'(x),\quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)\right|_{x=1}=2f(1)f'(1)=0,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f^2(x)\right|_{x=1}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)-\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x)\right|_{x=1}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2f(x)f'(x)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2f(x)f'(x)-2f(x)f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}\cdot2f(x)$$

$$=f''(1)\cdot2f(1)=0.$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)\right|_{x=1}=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f^2(x)\right|_{x=1}$.

P103/习题5.4/3(4) 求函数$f(x)=x^3e^x$的高阶导数$f^{(10)}(x)$.

解 设$u(x)=x^3, v(x)=e^x$,

则$u'(x)=3x^2, u''(x)=6x, u'''(x)=6, u^{(k)}(x)=0, k\geq 4,$

$v^{(k)}(x)=e^x, k\geq 0.$

利用莱布尼茨公式,有

$$f^{(10)}(x)=\left(x^3e^x\right)^{(10)}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(x^3\right)^{(k)}\left(e^x\right)^{(10-k)}$$

$$=x^3\left(e^x\right)^{(10)}+C_{10}^1 3x^2\left(e^x\right)^{(9)}+C_{10}^2 6x\left(e^x\right)^{(8)}+C_{10}^3 6\left(e^x\right)^{(7)}$$

$$=x^3e^x+30x^2e^x+\frac{10\cdot 9}{2}6xe^x+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}6e^x$$

$$=e^x\left(x^3+30x^2+270x+720\right).$$

这种类型要想到使用莱布尼茨公式

BY GYH

P103/习题5.4/4(3) 设f为二阶可导函数,求$y=f\big(f(x)\big)$的二阶导数.

解 $y'=f'(x)f'\big(f(x)\big)$,

$$y''=f''(x)f'\big(f(x)\big)+f'(x)\Big(f'\big(f(x)\big)\Big)'$$

$$=f''(x)f'\big(f(x)\big)+f'(x)f''\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$$

$$=f''(x)f'\big(f(x)\big)+\big(f'(x)\big)^2 f''\big(f(x)\big).$$

P103/习题5.4/5(3) 求$y=\dfrac{1}{x(1-x)}$的n阶导数.

解 由于$y=\dfrac{1}{x(1-x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$,从而

$$y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2},\quad y''=\frac{2}{x^3}+\frac{2}{(1-x)^3},$$

$$y'''=-\frac{2\cdot 3}{x^4}+\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4},\cdots,$$

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

这种类型对函数先处理后再求高阶导数

P103/习题5.4/5(4) 求$y=\dfrac{\ln x}{x}$的n阶导数.

解 设$u(x)=\ln x, v(x)=\dfrac{1}{x}$,则

$$u'(x)=\frac{1}{x}, u''(x)=-\frac{1}{x^2}, u'''(x)=\frac{2}{x^3}, u^{(4)}(x)=-\frac{2\cdot 3}{x^4},\cdots, u^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k},$$

$$v'(x)=-\frac{1}{x^2}, u''(x)=\frac{2}{x^3}, u'''(x)=-\frac{2\cdot 3}{x^4},\cdots, v^{(k)}(x)=(-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

根据莱布尼茨公式,有

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)}$$

$$=\ln x\cdot(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\left((-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}\right)\cdot\left((-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}\right)$$

$$=\ln x\cdot(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+(-1)^{n-1}\frac{n!}{x^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

P103/习题5.4/5(4) 求$y=\dfrac{\ln x}{x}$的n阶导数.

解 $$y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2},$$

$$y''=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right)'=-\frac{2}{x^3}-\frac{x-2x\ln x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^3}+\frac{2\ln x}{x^3},$$

$$y'''=\left(-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^3}+\frac{2\ln x}{x^3}\right)'=\frac{3!}{x^4}+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^4}-\frac{3!\ln x}{x^4},$$

$$y^{(4)}=\left(\frac{3!}{x^4}+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^4}-\frac{3!\ln x}{x^4}\right)'=-\frac{4!}{x^5}-\frac{4\cdot 3}{x^5}-\frac{4\cdot 2}{x^5}-\frac{3!}{x^5}+\frac{4!\ln x}{x^5},$$

$\cdots$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{n!}{x^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+(-1)^n\frac{n!\ln x}{x^{n+1}}.$$

如果能找到规律可以用这个方法

P103/习题5.4/6(2) 求参量方程 $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}{(\cos t - \sin t)^2}}{e^t(\cos t - \sin t)}$$

$$= \frac{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}{e^t(\cos t - \sin t)^3} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}.$$

二阶导数注意是对自变量x求导

千万不要只是对参数t求导

P103/习题5.4/8 设函数$y=f(x)$在点x三阶可导，且$f'(x)\neq 0$. 若$f(x)$存在反函数$x=f^{-1}(y)$，试用$f'(x)$, $f''(x)$及$f'''(x)$表示$(f^{-1})'''(y)$.

解1 $$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

注意是对自变量y求导

$$\left(f^{-1}\right)''(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)=\frac{-f''(x)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}{\left(f'(x)\right)^2}=-\frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^3}.$$

$$\left(f^{-1}\right)'''(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^3}\right)=-\frac{f'''(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\left(f'(x)\right)^3-f''(x)\cdot 3\left(f'(x)\right)^2 f''(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}{\left(f'(x)\right)^6}$$

$$=-\frac{f'''(x)f'(x)-3\left(f''(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^5}.$$

此种解法先利用除法求导法则

碰到x的函数需要把x当作中间变量，

利用复合函数的链式求导法则求导

P103/习题5.4/8 设函数$y=f(x)$在点x三阶可导，且$f'(x)\neq 0$.

若$f(x)$存在反函数$x=f^{-1}(y)$，试用$f'(x)$, $f''(x)$及$f'''(x)$表示$(f^{-1})'''(y)$.

解2 $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

注意是对自变量y求导

$$\left(f^{-1}\right)''(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{-f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^3}.$$

$$\left(f^{-1}\right)'''(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^3}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^3}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$=-\frac{f'''(x)\left(f'(x)\right)^3-f''(x)\cdot 3\left(f'(x)\right)^2f''(x)}{\left(f'(x)\right)^6}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f'''(x)f'(x)-3\left(f''(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^5}.$$

此种解法将一阶导函数二阶导函数直接看成

x为中间变量的复合函数

P103/习题5.4/10 设$y=\arcsin x$.

(1)证明它满足方程$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0\ (n\geq 0)$. (2)求$y^{(n)}\big|_{x=0}$.

(1)证 由于$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，从而$(1-x^2)\left(y'\right)^2=1$.

方程$(1-x^2)\left(y'\right)^2=1$两边关于$x$求导,得 $-2x\left(y'\right)^2+2(1-x^2)y'\cdot y''=0$,

即 $(1-x^2)y''-xy'=0$.

方程$(1-x^2)y''-xy'=0$两边关于x求n阶导, $\left((1-x^2)y''\right)^{(n)}-\left(xy'\right)^{(n)}=0$,

利用莱布尼茨公式,得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}+n\left(-2x\right)y^{(n+1)}+\frac{n(n-1)}{2}\left(-2\right)y^{(n)}-\left(xy^{(n+1)}+ny^{(n)}\right)=0,$$

即 $\left(1-x^2\right)y^{(n+2)}-\left(2n+1\right)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$.

P103/习题5.4/10 设$y=\arcsin x$.

(1)证明它满足方程$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0\ (n\ge 0)$. (2)求$y^{(n)}\big|_{x=0}$.

(2)解 在$\left(1-x^2\right)y^{(n+2)}-\left(2n+1\right)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$中令$x=0$,得

$$y^{(n+2)}\Big|_{x=0}=n^2\,y^{(n)}\Big|_{x=0}.$$

从而 $y^{(n)}\Big|_{x=0}=\left(n-2\right)^2 y^{(n-2)}\Big|_{x=0}$.

由于$y=\arcsin x, y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,故 $y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1$.

$$y^{(2m)}\Big|_{x=0}=\left(2m-2\right)^2 y^{(2m-2)}\Big|_{x=0}=\cdots=\left(2m-2\right)^2\left(2m-4\right)^2\cdots 2^2 y^{(2)}\Big|_{x=0}=0.$$

$$y^{(2m+1)}\Big|_{x=0}=\left(2m-1\right)^2 y^{(2m-1)}\Big|_{x=0}=\cdots=\left(2m-1\right)^2\cdots 5^2\cdot 3^2\cdot 1^2 y'\Big|_{x=0}=\left(\left(2m-1\right)!!\right)^2.$$

所以 $$y^{(n)}\Big|_{x=0}=\begin{cases}0, & n=2m\\ \left(\left(2m-1\right)!!\right)^2, & n=2m+1\\ 0, & n=0\\ 1, & n=1\end{cases}, m\in\mathbb{N}_+.$$

P103/习题5.4/11

证明函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导且 $f^{(n)}(0)=0, n\in\mathbb{N}_+$.

证 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0.$

从而 $f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

当 $x\neq 0$ 时，$f''(x)=\left(\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=-\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$.

当 $x=0$ 时，$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t^4}{e^{t^2}}=0.$

从而 $f''(x)=\begin{cases} \left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

P103/习题5.4/11

证明函数$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$在$x=0$处$n$阶可导且 $f^{(n)}(0)=0, n\in\mathbb{N}_+$.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}. \qquad f''(x)=\begin{cases} \left(-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}.$$

假设$f^{(k)}(x)=\begin{cases} p_{3k}\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}$，其中$p_{3k}\left(\dfrac{1}{x}\right)$是$\dfrac{1}{x}$的$3k$次多项式. 当$n=k+1$时,

当$x\neq 0$时，$f^{(k+1)}(x)=\left(p_{3k}\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}p'_{3k}\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x^3}p_{3k}\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=p_{3(k+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

当$x=0$时，$f^{(k+1)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{tp_{3k}(t)}{\mathrm{e}^{t^2}}=0$.

因此根据数学归纳法知，$f^{(n)}(x)=\begin{cases} p_{3n}\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}$.

所以f在$x=0$处n阶可导且$f^{(n)}(x)=0, n\in\mathbb{N}_+$.

P109/习题5.5/2(4) 求函数$y=\dfrac{x}{1-x^2}$的微分.

解1 $$y'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{\left(1-x^2\right)-x\cdot\left(-2x\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2},$$

$$\mathrm{d}\,y=y'\mathrm{d}\,x=\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}\mathrm{d}\,x.$$

解2 $$\mathrm{d}\,y=\mathrm{d}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)=\frac{\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\,x+2x^2\,\mathrm{d}\,x}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}\mathrm{d}\,x.$$

如果对微分运算法则不熟练,建议使用解法1.

P109/习题5.5/2(6) 求函数$y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$的微分.

解1 $$y'=\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}},$$

$$\mathrm{d}y=y'\,\mathrm{d}x=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

解2 $$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\mathrm{d}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=\frac{-2x}{2\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

如果对微分运算法则不熟练,建议使用解法1.

解法2用到了复合函数的微分形式不变性.

P109/习题5.5/3(1) 设函数$u(x)=\ln x, v(x)=e^x$，求$d^3(uv), d^3\left(\dfrac{u}{v}\right)$.

解 $$d^3(uv)=(uv)'''\,dx^3=\left(e^x\ln x\right)'''\,dx^3=\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)''\,dx^3$$

$$=\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}\right)'\,dx^3=\left(e^x\ln x+\frac{2e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}\right)'\,dx^3$$

$$=\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}+\frac{2e^x}{x}-\frac{2e^x}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}+\frac{2e^x}{x^3}\right)dx^3=\left(\ln x+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^x\,dx^3.$$

$$d^3(uv)=(uv)'''\,dx^3=\left(e^x\ln x\right)'''\,dx^3$$ 利用莱布尼茨公式求三阶导数

$$=\left(C_3^0\left(e^x\right)'''(\ln x)^{(0)}+C_3^1\left(e^x\right)''(\ln x)'+C_3^2\left(e^x\right)'(\ln x)''+C_3^3\left(e^x\right)^{(0)}(\ln x)'''\right)dx^3$$

$$=\left(e^x\ln x+3\frac{e^x}{x}-3\frac{e^x}{x^2}+\frac{2e^x}{x^3}\right)dx^3=\left(\ln x+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^x\,dx^3.$$

P109/习题5.5/3(1) 设函数$u(x)=\ln x, v(x)=\mathrm{e}^x$，求$\mathrm{d}^3(uv)$，$\mathrm{d}^3\left(\frac{u}{v}\right)$.

解

$$\mathrm{d}^3\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'''\mathrm{d}x^3=\left(\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}\right)'''\mathrm{d}x^3=\left(\mathrm{e}^{-x}\ln x\right)'''\mathrm{d}x^3=\left(-\mathrm{e}^{-x}\ln x+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)''\mathrm{d}x^3$$

$$=\left(\mathrm{e}^{-x}\ln x-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\right)'\mathrm{d}x^3=\left(\mathrm{e}^{-x}\ln x-\frac{2\mathrm{e}^{-x}}{x}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\right)'\mathrm{d}x^3$$

$$=\left(-\mathrm{e}^{-x}\ln x+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}+\frac{2\mathrm{e}^{-x}}{x}+\frac{2\mathrm{e}^{-x}}{x^2}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}-\frac{2\mathrm{e}^{-x}}{x^3}\right)\mathrm{d}x^3=\left(-\ln x+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x^3.$$

$$\mathrm{d}^3\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'''\mathrm{d}x^3=\left(\mathrm{e}^{-x}\ln x\right)'''\mathrm{d}x^3$$

利用莱布尼茨公式求三阶导数

$$=\left(C_3^0\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'''(\ln x)^{(0)}+C_3^1\left(\mathrm{e}^{-x}\right)''(\ln x)'+C_3^2\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'(\ln x)''+C_3^3\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{(0)}(\ln x)'''\right)\mathrm{d}x^3$$

$$=\left(-\mathrm{e}^{-x}\ln x+3\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}+3\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}-\frac{2\mathrm{e}^{-x}}{x^3}\right)\mathrm{d}x^3=\left(-\ln x+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x^3.$$

P110/第五章总练习题/2(2) 证明函数$f(x)=\big|\ln|x-1|\big|$在$x=0$处不可导.

证
$$f(x)=\begin{cases}\ln(x-1), & x>2\\ -\ln(x-1), & 1<x\le 2\\ -\ln(1-x), & 0<x<1\\ \ln(1-x), & x\le 0\end{cases}.$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln(1-x)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$

由于$f_-'(0)=-1\neq 1=f_+'(0)$，所以$f=\big|\ln|x-1|\big|$在$x=0$处不可导.

P110/第五章总练习题/3

(1)举出一个连续函数,它仅在已知点$a_1,a_2,\cdots,a_n$不可导.

$$f(x)=|x-a_1||x-a_2|\cdots|x-a_n|.$$

$$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|.$$

$$f(x)=(x-a_1)^{\frac{2}{3}}(x-a_2)^{\frac{2}{3}}\cdots(x-a_n)^{\frac{2}{3}}.$$

(2)举出一个函数,它仅在点$a_1,a_2,\cdots,a_n$可导.

$$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2D(x).$$

P110/第五章总练习题/4(1) 证明可导的偶函数,其导函数为奇函数.

证1 设$f(x)$为可导的偶函数,则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x).$$

所以$f'(x)$为奇函数.

证2 设$f(x)$为可导的偶函数,则 $f(-x)=f(x)$. 两边关于x求导,得

$$-f'(-x)=f'(x),$$

即$f'(-x)=-f'(x)$,所以$f'(x)$为奇函数.

P110/第五章总练习题/4(2)

证明可导的奇函数,其导函数为偶函数.

证1 设$f(x)$为可导的奇函数,则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x-\Delta x)+f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=f'(x).$$

所以$f'(x)$偶函数.

证2 设$f(x)$为可导的奇函数,则$f(-x)=-f(x)$. 两边关于x求导,得

$$-f'(-x)=-f'(x),$$

即$f'(-x)=f'(x)$,所以$f'(x)$为偶函数.

P110/第五章总练习题/4(3)

证明可导的周期函数,其导函数仍为周期函数.

证1 设$f(x)$是周期为T的周期函数,则

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

所以$f'(x)$仍是周期为T的周期函数.

证2 设$f(x)$是周期为T的周期函数,则 $f(x+T)=f(x).$

两边关于x求导,得 $f'(x+T)=f'(x),$

所以$f'(x)$仍是周期为T的周期函数.

$$f'(x_0+T)=\lim_{x\to x_0+T}\frac{f(x)-f(x_0+T)}{x-(x_0+T)}\qquad f'(x_0+T)\cancel{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x+T)-f(x_0+T)}{(x-T)-(x_0+T)}$$

P110/第五章总练习题/5 对下列命题,若认为是正确的,请给予证明;

若认为是错误的,请举一反例予以否定:

(1)设$f=\varphi+\psi$,若f在点x_0可导,则φ,ψ在点x_0可导.

答 错误.取$\varphi(x)=|x|,\psi(x)=-|x|$, 则$\varphi,\psi$在$x=0$不可导,

但$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)=0$在$x=0$可导.

(2)设$f=\varphi+\psi$,若φ在点x_0可导,ψ在点x_0不可导,则f在点x_0一定不可导.

答 正确.利用反证法证明. 假设f在点x_0可导, 则$\psi=f-\varphi$在点x_0可导,

与已知条件矛盾,故f在点x_0不可导.

(3)设$f=\varphi\cdot\psi$,若f在点x_0可导,则φ,ψ在点x_0可导.

答 错误.取$\varphi(x)=|x|,\psi(x)=-|x|$, 则$\varphi,\psi$在$x=0$不可导,

但$f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)=-x^2$在$x=0$可导.

P110/第五章总练习题/5 对下列命题,若认为是正确的,请给予证明;

若认为是错误的,请举一反例予以否定:

(4)设$f=\varphi\cdot\psi$,若φ在点x_0可导,ψ在点x_0不可导,则f在点x_0一定不可导.

答 错误.取$\varphi(x)=0,\psi(x)=-|x|$, 则$\varphi$在$x=0$可导,$\psi$在$x=0$不可导,

但$f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)=0$在$x=0$可导.

设$f=\varphi\cdot\psi$,若φ在点x_0可导且$\varphi(x_0)\neq 0$,ψ在点x_0不可导,

则f在点x_0一定不可导.

利用反证法证明.假设f在点x_0可导,则$\psi=\dfrac{f}{\varphi}$在点x_0可导,

与已知条件矛盾,故f在点x_0不可导.

P110/第五章总练习题/6

设φ在点a连续, $f(x)=|x-a|\varphi(x)$.求$f'_-(a)$和$f'_+(a)$. 问在什么条件下$f'(a)$存在?

解 由于φ在点a连续,所以$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$.

$$f'_-(x)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{|x-a|\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{-(a-x)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=-\lim_{x\to a^-}\varphi(x)=-\varphi(a).$$

$$f'_+(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{|x-a|\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a).$$

因此,当$-\varphi(a)=\varphi(a)$,即$\varphi(a)=0$时, $f'(a)$存在且等于0.

P110/第五章总练习题/6

设φ在点a连续, $f(x)=|x-a|\varphi(x)$.求$f'_-(a)$和$f'_+(a)$. 问在什么条件下$f'(a)$存在?

解 当$x<a$时, $f(x)=(a-x)\varphi(x)$,

注意题目条件,函数φ只是在点a连续,

所以 $f'(x)\cancel{=}-\varphi(x)+(a-x)\varphi'(x)$, 所以不能对函数$\varphi$求导.

故 $f'_-(a)=-\varphi(a)$.

当$x>a$时, $f(x)=(x-a)\varphi(x)$,

所以 $f'(x)\cancel{=}\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$,

故 $f'_+(a)=\varphi(a)$.

此题即使函数φ可导,

也不能这么求分段函数分段点处的左右导数.

P110/第五章总练习题/7

(1)设f为可导函数,求$y=f\left(e^{x}\right)e^{f(x)}$的一阶导数.

解 $y'=\left(f\left(e^{x}\right)e^{f(x)}\right)'=\left(f\left(e^{x}\right)\right)'e^{f(x)}+f\left(e^{x}\right)\left(e^{f(x)}\right)'$

$=e^{x}f'\left(e^{x}\right)e^{f(x)}+f\left(e^{x}\right)e^{f(x)}f'(x).$

(2)设f为可导函数,求$y=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$的一阶导数.

解 $y'=\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)'=f'\left(f\left(f(x)\right)\right)\left(f\left(f(x)\right)\right)'$

$=f'\left(f\left(f(x)\right)\right)f'\left(f(x)\right)f'(x).$

P110/第五章总练习题/8

设φ,ψ为可导函数,求y': (1)$y=\sqrt{(\varphi(x))^2+(\psi(x))^2}$. (2)$y=\arctan\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

$$(3)\ y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)(\varphi,\psi>0,\varphi\neq 1).$$

解 (1)$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}\left(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\right)'=\dfrac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$.

$$(2)\ y'=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)'=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2}\cdot\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{(\psi(x))^2}$$

$$=\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{(\psi(x))^2+(\varphi(x))^2}.$$

$$(3)\ y'=\left(\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}\right)'=\frac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x)-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}=\frac{\varphi(x)\psi'(x)\ln\varphi(x)-\psi(x)\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi(x)\psi(x)\ln^2\varphi(x)}.$$