Ch6 微分中值定理及其应用

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820　QQ号：58105217

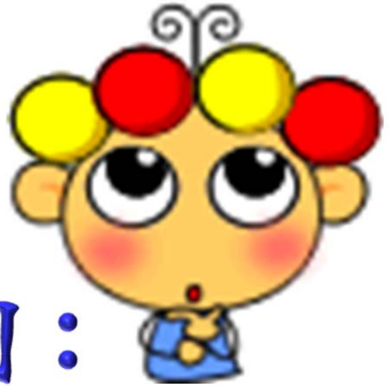
Email:　yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年12月11日

BY GYH



将学习：

函数单调性的判别

单调函数

若函数$f(x)$在区间I对任意$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$,

必有$f(x_1) \le f(x_2)(f(x_1) \ge f(x_2))$,则称函数

$f(x)$在区间I上单调增(单调减).

若"$\le(\ge)$"改为严格不等号,则相应地称

它为严格增(减).

单调的充要条件

设 $f(x)$在区间I上可导,则$f(x)$在区间I上单调增(减)的充要条件是：$f'(x)\geq 0\ (\leq 0)$.

单调充要条件

$f(x)$在区间I上可导, $f(x)$在区间I上单调增(减) $\Leftrightarrow f'(x)\ge 0\,(\le 0)$.

证 必要性. 若 f 为递增函数,则对$\forall x_0\in I$,当 $x\ne x_0$时,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0.$$

令 $x\to x_0$,根据函数极限的保不等式性,得 $f'(x_0)\ge 0.$

充分性. 若 $f'(x)\ge 0, x\in I$. $\forall x_1,x_2\in I$, (设$x_1<x_2$)

f在$[x_1,x_2]$上连续,在(x_1,x_2)上可导, 根据拉格朗日中值定理知,

$\exists\xi\in(x_1,x_2)$,使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\ge 0$,

即$f(x_2)\ge f(x_1)$, 这就证明了函数 $f(x)$ 在I上递增.

严格单调的充要条件

若函数$f(x)$在(a,b)上可导,则$f(x)$在(a,b)上严格递增(递减)的充要条件是:

(i)对$\forall x\in(a,b)$,有$f'(x)\geq 0\ (f'(x)\leq 0)$;

(ii)在(a,b)的任何子区间上$f'(x)\not\equiv 0$.

严格单调充要条件

$f(x)$在(a,b)上可导, $f(x)$在(a,b)上严格递增(递减)

$\Leftrightarrow \forall x\in(a,b), f'(x)\ge 0(\le 0)$;在$(a,b)$的任何子区间上$f'(x)\not\equiv 0$.

证 (必要性) 若 f 为严格递增函数,则对$\forall x_0\in(a,b)$,当 $x\ne x_0$时,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0.$$

令 $x\to x_0$,根据函数极限的保不等式性,得 $f'(x_0)\ge 0$.

若$f(x)$在某子区间上$f'(x)=0$,

根据拉格朗日中值定理推论知, 在此子区间上$f(x)=c$,矛盾.

(充分性) 由$f'(x)\ge 0$知 $f(x)$递增.

若$f(x)$不是严格递增,则存在$x_1,x_2\in(a,b), x_1<x_2$,使$f(x_1)=f(x_2)$.

这就得到 $f(x)$在区间(x_1,x_2)上恒为常数,

因此 $f'(x)\equiv 0$, $x\in(x_1,x_2)$,与已知条件矛盾.

严格单调的充分条件

若函数$f(x)$在区间I上可微,若$f'(x)>0(f'(x)<0)$,则 f 在 I上严格递增(严格递减).

单调推论

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上(严格)递增(减),

则 $f(x)$ 在$[a,b]$上(严格)递增(减).

例13 证明：$e^x > 1 + x$, $x \neq 0$.

证 设 $f(x) = e^x - 1 - x$, 则 $f'(x) = e^x - 1$. 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$.

又 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 严格递增, 在 $(-\infty, 0]$ 严格递减.

则当 $x \neq 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$,

即 $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$.

例13 证明：$e^x > 1 + x$，$x \neq 0$.

证 设 $f(x) = e^x$，则 $f'(x) = e^x$.

当 $x > 0$ 时，f 在 $[0, x]$ 上连续，在 $(0, x)$ 上可导，

根据拉格朗日中值定理知，$\exists \xi_1 \in (0, x)$，使得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi_1)x,$$

即 $e^x - 1 = e^{\xi_1}x > e^0 x = x.$

当 $x < 0$ 时，f 在 $[x, 0]$ 上连续，在 $(x, 0)$ 上可导，

根据拉格朗日中值定理知，$\exists \xi_2 \in (x, 0)$，使得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi_2)x,$$

即 $e^x - 1 = e^{\xi_2}x > e^0 x = x.$

因此当 $x \neq 0$ 时，$e^x > 1 + x$.

例14 设$f(x)=x^3-x$.讨论函数f的单调区间.

解 $f(x)$的定义域为$\mathbb{R}$.

由于 $f'(x)=3x^2-1=(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)$,

令$f'(x)=0$,得$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$时, $f'(x)>0$; 当 $x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$时, $f'(x)<0$;

当 $x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$时, $f'(x)>0$. f在$\mathbb{R}$上连续.

所以 $f(x)$在$\left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$递增, 在$\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$递减.

达布(Darboux)定理

若函数$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f'_+(a) \neq f'_-(b)$，k为介于$f'_+(a), f'_-(b)$之间任一实数，则$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = k.$$

$f(x)$在$[a,b]$上可导，$f_+'(a)\neq f_-'(b)$，k为介于$f_+'(a)$与$f_-'(b)$之间任一实数$\Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=k$.

分析 $f'(\xi)=k \Leftarrow f'(\xi)-k=0 \Leftarrow \left(f(x)-kx\right)'\Big|_{x=\xi}=0$

证 令$F(x)=f(x)-kx$，则$F'(x)=f'(x)-k$. （要证$\exists\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$.）

（根据费马定理，只要证明$F(x)$在(a,b)上有极值点即可.）

由于$F_+'(a)\cdot F_-'(b)=(f_+'(a)-k)\cdot(f_-'(b)-k)<0$，

可设 $F_+'(a)>0$，$F_-'(b)<0$，即$F_+'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}>0$，$F_-'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{F(x)-F(b)}{x-b}<0$.

根据函数极限的局部保号性，分别存在$\delta_1,\delta_2>0\left(<\dfrac{b-a}{2}\right)$，

$\forall x\in U_+^\circ(a;\delta_1)$，有$\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}>0$，取$x_1\in U_+^\circ(a;\delta_1)$，有$\dfrac{F(x_1)-F(a)}{x_1-a}>0$，即$F(x_1)>F(a)$.

$\forall x\in U_-^\circ(b;\delta_2)$，有$\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$，取$x_2\in U_-^\circ(b;\delta_2)$，有$\dfrac{F(x_2)-F(b)}{x_2-b}<0$，即$F(x_2)>F(b)$.

由于$F(x)$在$[a,b]$上连续，根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理，

$F(x)$在$[a,b]$上必取得最大值，即$\exists\xi\in[a,b]$，使得$F(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]}F(x)$.

由于$F(x_1)>F(a)$，$F(x_2)>F(b)$，故$\xi\neq a,b$，即ξ在(a,b)取得.

从而ξ是$F(x)$的极大值点. 根据费马定理知，$F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=k,\xi\in(a,b)$.

注： 上述定理亦称为**导函数的介值性定理**.

注：导函数不可能有第一类间断点.

导函数可能有第二类间断点.

$$f(x)=\begin{cases} x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

当$a>1$时，$f(x)$在$\mathbb{R}$上可导.

当$1<a<2$时，$x=0$是$f'(x)$的第二类间断点.

当$a=2$时，$x=0$是$f'(x)$的第二类间断点.

达布(Darboux)定理推论

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x)\neq 0$，那么 $f(x)$ 在区间 I 严格单调.

你应该:

理解罗尔中值定理

理解拉格朗日中值定理

掌握函数单调性的判别

理解导函数的介值性

罗尔生于下奥弗涅的昂贝尔(Ambert)仅受过初等教育，依靠自学精通了代数与丢番图分析理论. 1675年他从昂贝尔搬往巴黎，1682年因为解决了数学家雅克·奥扎南提出的一个数论难题而获得盛誉，得到了让-巴蒂斯特·科尔贝的津贴资助. 1685年获选进法兰西皇家科学院，1699年成为科学院的Pensionnaire Géometre. 罗尔是微积分的早期批评者，认为它不准确，基于不稳固的推论. 他后来改变立场. 1719年11月8日，罗尔在巴黎逝世.

—— 摘自百度百科

米歇尔 · 罗尔

Michel Rolle

(1652年4月21日—1719年11月8日)

法国数学家

拉格朗日是18世纪的伟大科学家，在数学、力学和天文学三个学科中都有历史性的重大贡献. 但他主要是数学家，拿破仑曾称赞他是“一座高耸在数学界的金字塔”，他最突出的贡献是在把数学分析的基础脱离几何与力学方面起了决定性的作用. 使数学的独立性更为清楚，而不仅是其他学科的工具. 同时在使天文学力学化、力学分析化上也起了历史性作用，促使力学和天文学（天体力学）更深入发展. 由于历史的局限，严密性不够妨碍着他取得更多的成果.

—— 摘自百度百科

约瑟夫·拉格朗日
Joseph-Louis Lagrange
(1736年1月25日—1813年4月10日)
法国数学家、物理学家

达布在数学和物理的许多方面都很有建树，特别是在数学分析、微分几何、微分方程等领域有更大的贡献。在数学分析方面，他对函数连续性作了深入的研究。给出了一个“病态函数”，当从$x=a$变到$x=b$时，这个函数取遍两个给定值之间的一切中间值，但它却不是连续的函数。达布对黎曼积分理论作了推广。他严格地证明了，不连续函数也可以求定积分，而且间断点可以有无穷多个，只要它们包含在长度可以任意小的有限个区间之内就行，即证明了一个有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是$f(x)$的间断点组成一个测度为零的集合。他在1875年还给出了推广意义上的微积分基本定理的证明。定积分理论里的所谓上积分、下积分、达布大和、达布小和以及达布定理等都是以他的姓氏命名的。

—— 摘自百度百科

让·加斯东·达布
Jean Gaston Darboux
(1842年8月14日 - 1917年2月23日)
法国数学家