Ch6 微分中值定理及其应用

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820　QQ号：58105217

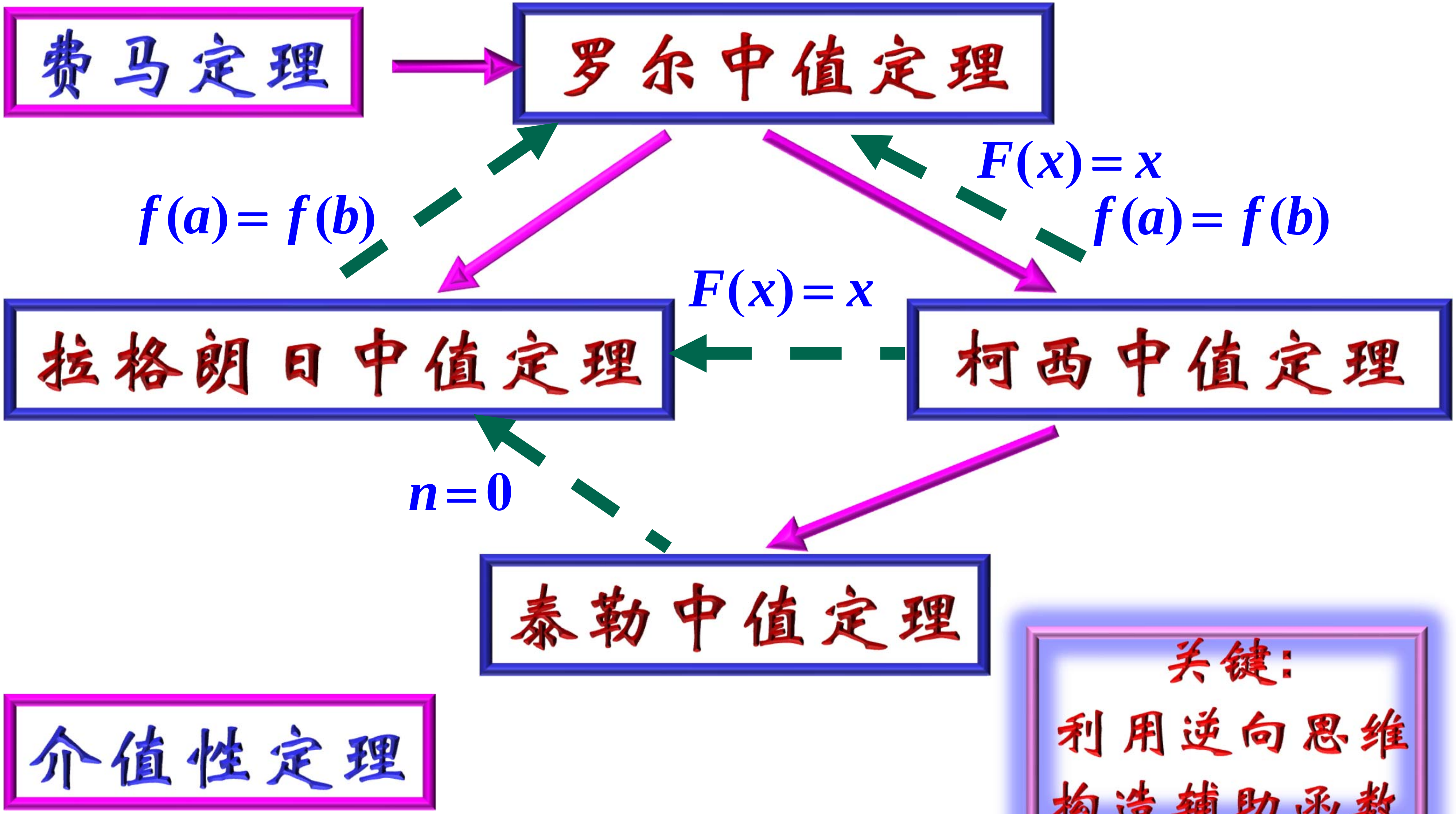
Email:　yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2024年01月02日　　BY GYH

微分中值定理的条件、结论及关系



关键:
利用逆向思维
构造辅助函数

- 函数性态
  - 函数的极值与最值
  - 函数的凸性与拐点
  - 函数的图像

重要定理

费马(Fermat)定理

设函数f在点x_0的某邻域上有定义,且在点x_0可导.

若点x_0是f的极值点,则必有 $f'(x_0)=0.$

罗尔(Rolle)中值定理

若函数f满足：(1) $f(x)\in C[a,b];$

(2) $f(x)\in D(a,b);$

(3) $f(a)=f(b),$

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0.$

重要定理 拉格朗日(Lagrange)中值定理

若函数f满足：(1) $f(x)\in C[a,b]$; (2) $f(x)\in D(a,b)$,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日(Lagrange)中值定理推论

若函数f在区间I上可导,且$f'(x)\equiv 0, x\in I$,

则f为I上的一个常量函数.

若函数f,g在区间I上可导,且$f'(x)\equiv g'(x), x\in I$,

则存在常数C,使得 $f(x)=g(x)+C, x\in I$.

重要定理

导数极限定理

若函数f在点x_0的某邻域$U(x_0)$上连续,

在$U^\circ(x_0)$上可导,且极限$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在,

则f在点x_0可导,且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

重要定理

柯西(Cauchy)中值定理

若函数f,g满足：(1) $f(x), g(x) \in C[a,b]$;

(2) $f(x), g(x) \in D(a,b)$;

(3) $f'(x), g'(x)$不同时为零;

(4) $g(a) \neq g(b)$,

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

重要定理 泰勒(Taylor)中值定理

带佩亚诺(Peano)型余项的泰勒(Taylor)公式

若函数f在点x_0处存在直至n阶的导数,则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

当$x_0=0$时,称

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

为f的带佩亚诺(Peano)型余项的麦克劳林(Maclaurin)公式.

重要定理 泰勒(Taylor)中值定理

带Lagrange型余项的Taylor公式

若函数f在$[a,b]$上存在直至n阶的连续导数,在(a,b)上存在$n+1$阶导函数,则对$\forall x, x_0 \in [a,b], \exists \xi \in (a,b)$,使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

当$x_0=0$时,称

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

为f的带Lagrange型余项的Maclaurin公式.

重要定理　函数单调性

函数递增(减)的充要条件

若函数f在区间I上可导,则f在I上递增(减)的充要条件是:

$$f'(x)\geq 0(\leq 0).$$

函数严格递增(减)的充要条件

若函数f在(a,b)上可导,则f在I上严格递增(减)的充要条件是:

(1) $f'(x)\geq 0\left(f'(x)\geq 0\right), x\in(a,b)$;

(2)在(a,b)的任何子区间上$f'(x)\neq 0$.

函数严格递增(减)的充分条件

若函数f在区间I上可导,对$\forall x\in I$,有$f'(x)>0\left(f'(x)<0\right)$,则$f$在区间$I$上严格递增(减).

重要定理

达布(Darboux)定理 (导函数介值定理)

若函数f在$[a,b]$上可导,且$f_+'(a)\neq f_-'(b)$,k为介于$f_+'(a)$, $f_-'(b)$之间的任一实数,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=k.$$

重要定理 $\frac{0}{0}$型不定式极限的洛必达法则

若函数f和g满足条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

(2)在点x_0的某空心邻域$U^\circ(x_0)$上两者都可导，且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$可为实数也可为$+\infty,-\infty$或$\infty$），

则 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

重要定理 $\dfrac{\bullet}{\infty}$ 型不定式极限的洛必达法则

若函数f和g满足条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$;

(2)在点x_0的某空心右邻域$U_+^\circ(x_0)$上两者都可导,且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$可为实数也可为$+\infty,-\infty$或$\infty$),

则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A.$

重要定理

费马(Fermat)定理

设函数f在点x_0的某邻域上有定义,且在点x_0可导.
若点x_0是f的极值点,则必有 $f'(x_0)=0.$

极值的必要条件

可微函数的极值点一定是稳定点(驻点).

重要定理

极值的第一充分条件

设函数f在点x_0连续，在某空心邻域$U^\circ(x_0;\delta)$上可导.

(i) 若当 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x) \le 0$；当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x) \ge 0$，则 f 在点 x_0 取得极小值.

(ii) 若当 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x) \ge 0$；当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x) \le 0$ 则 f 在点 x_0 取得极大值.

极值的第二充分条件

设函数f在点x_0某邻域$U(x_0;\delta)$上一阶可导，在$x=x_0$处二阶可导，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\ne 0$.

(i) 若$f''(x_0)<0$，则f在x_0取得极大值.(ii) 若$f''(x_0)>0$，则f在x_0取得极小值.

极值的第三充分条件

设函数f在点x_0某邻域上存在直到$n-1$阶导函数，在$x=x_0$处n阶可导，且$f^{(k)}(x_0)=0(k=1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\ne 0$. 则

(i) 当n为偶数时，f在x_0取得极值.且当$f^{(n)}(x_0)<0$时，取极大值；当$f^{(n)}(x_0)>0$时，取极小值.

(ii) 当n为奇数时，f在x_0处不取极值.

BY GYH

重要结论 最大值、最小值的求法

设$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数,求出f在$[a,b]$上的稳定点、不可导点,比较f在所有稳定点、不可导点和区间端点处的函数值,其中最大的即是f在$[a,b]$上的最大值,最小的即是f在$[a,b]$上的最小值.

f为(a,b)上的连续函数,若f在(a,b)上仅有唯一的极值点x_0,当x_0是f的极大(小)值点,则x_0必是f在(a,b)上的最大(小)值点.

重要定义 凸(凹)函数

设f为定义在区间I上的函数,若对I上的任意两点x_1, x_2和任意实数$\lambda \in (0,1)$,总有

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称f为I上的凸函数. 反之,如果总有

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称f为I上的凹函数.

如果为严格不等式,则相应的函数称为严格凸函数或严格凹函数.

重要定义 拐点

设曲线$y=f(x)$在点$M\left(x_0, f(x_0)\right)$处有穿过曲线的切线,且在切点近旁,曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的,这时称点$M\left(x_0, f(x_0)\right)$为曲线$y=f(x)$的拐点.

重要定理　凸函数的充要条件

函数$f(x)$为I上的凸函数 $\Leftrightarrow$ 对于I中的任意三点$x_1 < x_2 < x_3$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

一阶可导凸函数的充要条件

设f为区间I上的可导函数,则f为I上的凸函数 $\Leftrightarrow$ f'为I上的增函数.

$\Leftrightarrow$ 对于I上的任意两点x_1，x_2，有$f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$.

二阶可导凸函数的充要条件

设函数f在区间I上二阶可导,则f在区间I上是凸(凹)函数

$\Leftrightarrow$ $f''(x) \ge 0$ $(f''(x) \le 0)$, $x \in I$.

重要定理 拐点的必要条件

设$f(x)$在点x_0二阶可导,则$\left(x_0, f(x_0)\right)$为曲线$y = f(x)$的拐点的必要条件是：$f''(x_0) = 0.$

拐点的充分条件

设$f(x)$在点x_0可导,在某去心邻域$U^\circ(x_0)$二阶可导,若 $f''(x)$在$U_+^\circ(x_0)$, $U_-^\circ(x_0)$的符号相反,则 $\left(x_0, f(x_0)\right)$是曲线$y = f(x)$的拐点.

重要结论 凸函数的性质

Jensen不等式 设f为区间I上的凸函数,则对$\forall\ x_i \in I, \lambda_i > 0, i = 1,2,,\cdots,n,$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1,\ \text{必有}\ f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

设f为开区间(a,b)上的凸函数,那么它在(a,b)中每一点的左、右导数存在.特别是在(a,b)上处处连续.

设函数$f(x)$为(a,b)上的可导凸(凹)函数.
那么$f'(x_0)=0$的充要条件是x_0为$f(x)$的极小(大)值点.

设函数f为(a,b)上的凸函数,不恒为常数.则f在(a,b)上不取最大值.

若$f(x)$是区间$[a,b]$上的凸的连续函数,则$f(x) \le \max\{f(a), f(b)\}$.

重要结论

$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$型的不定式需要通过变形为

$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的不定式，再利用洛必达法则求极限.

这个结论在单调性相关问题中经常使用

重要结论。

若函数f在(a,b)上(严格)递增(减),且f在点a右连续,则f在$[a,b)$上(严格)递增(减).

若函数f在(a,b)上(严格)递增(减),且f在点b左连续,则f在$(a,b]$上(严格)递增(减).

重要结论

导函数不可能有第一类间断点.

重要结论 六个常用麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \left(0 < \theta < 1, -\infty < x < +\infty\right)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + (-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1} \left(0 < \theta < 1, -\infty < x < +\infty\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2} \left(0 < \theta < 1, -\infty < x < +\infty\right)$$

重要结论 六个常用麦克劳林公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}\left(0<\theta<1,x>-1\right)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\left(0<\theta<1,x>-1\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}x^{n+1}\left(0<\theta<1,-1<x<1\right)$$

重要结论　证明等式、不等式的常用方法

利用介值性定理、最大最小值定理证明

利用罗尔中值定理证明

利用拉格朗日中值定理证明

应用函数的单调性、凹凸性证明

利用泰勒公式证明不等式

P116/习题6.1/1(1) 验证是否满足罗尔中值定理的三个条件

试讨论函数$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, 0<x\le\dfrac{1}{\pi} \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$在$\left[0,\dfrac{1}{\pi}\right]$上是否存在一点$\xi$,使得$f'(\xi)=0$.

解 因为$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,所以$f$在$x=0$右连续.

又当$x\in\left(0,\dfrac{1}{\pi}\right]$时,$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$,故$f$在$\left(0,\dfrac{1}{\pi}\right]$上连续. 所以$f$在$\left[0,\dfrac{1}{\pi}\right]$上连续.

当$x\in\left(0,\dfrac{1}{\pi}\right)$时,$f'(x)=\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$,故$f$在$\left(0,\dfrac{1}{\pi}\right)$上可导. $f(0)=f\left(\dfrac{1}{\pi}\right)=0$,

根据罗尔中值定理知,至少存在一点$\xi\in\left(0,\dfrac{1}{\pi}\right)$,使得 $f'(\xi)=0$.

条件需要一一验证.

罗尔中值定理的条件是充分条件,若条件不满足,则结论可能成立可能不成立.

P116/习题6.1/2(1)

证明：方程$x^3-3x+c=0$(这里c为常数)在$[0,1]$上不可能有两个不同的实根.

证 利用反证法证明. 设$f(x)=x^3-3x+c$.

假设存在$x_1,x_2\in[0,1]$,不妨设$x_1<x_2$,使得$f(x_1)=f(x_2)=0$.

则$f(x)$在$[x_1,x_2]$连续,在(x_1,x_2)内可导,且$f(x_1)=f(x_2)=0$,

根据罗尔中值定理的条件知,至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$,使得$f'(\xi)=0$,

即 $3\xi^2-3=0$.

由于$f'(x)=3x^2-3\neq0, x\in(0,1)$, 产生矛盾.

因此,方程$x^3-3x+c=0$在$[0,1]$上不可能有两个不同的实根.

此类题型可以通过反证法利用罗尔中值定理证明,
也可利用单调性证明.

P116/习题6.1/2(2) 证明：方程$x^n + px + q = 0$(n为正整数，p,q为实数)当n为偶数时至多有两个实根，当n为奇数时至多有三个实根.

证 利用反证法证明. 设 $g(x) = x^n + px + q$.

当n为偶数时，假设存在$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$，不妨设$x_1 < x_2 < x_3$，使得

$$g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0.$$

则$g(x)$在$[x_1, x_2], [x_2, x_3]$连续，在$(x_1, x_2), (x_2, x_3)$内可导，

且$g(x_1) = g(x_2) = 0, g(x_2) = g(x_3) = 0$，根据罗尔中值定理知，

$\exists \xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$，使得$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$.

由于$g'(x) = nx^{n-1} + p$，当n为偶数时，$n-1$为奇数，

从而$g'(x) = nx^{n-1} + p = 0$仅有一个实根$x = \left(-\dfrac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$，产生矛盾.

因此，方程$x^n + px + q = 0$当n为偶数时至多有两个实根.

P116/习题6.1/2(2) 证明：方程$x^n+px+q=0$(n为正整数，p,q为实数)当n为偶数时至多有两个实根，当n为奇数时至多有三个实根.

当n为奇数时，假设存在$x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$，不妨设$x_1<x_2<x_3<x_4$，使得

$$g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=g(x_4)=0.$$

则$g(x)$在$[x_1,x_2],[x_2,x_3],[x_3,x_4]$连续，在$(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4)$内可导，

且$g(x_1)=g(x_2)=0,g(x_2)=g(x_3)=0,g(x_3)=g(x_4)=0$，根据罗尔中值定理知，

$\exists\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3),\xi_3\in(x_3,x_4)$，使得

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=g'(\xi_3)=0.$$

由于$g'(x)=nx^{n-1}+p$，当n为奇数时，$n-1$为偶数，

从而$g'(x)=nx^{n-1}+p=0$至多有两个实根，产生矛盾.

因此，方程$x^n+px+q=0$当n为奇数时至多有三个实根.

P116/习题6.1/3 拉格朗日中值定理的另一个推论

证明：若函数f和g均在区间I上可导，且$f'(x)\equiv g'(x), x\in I$，则在区间$I$上$f(x)$和$g(x)$只相差某一常数，即

$$f(x)=g(x)+c\ (c\text{为某一常数}).$$

证 设$F(x)=f(x)-g(x), x\in I$.

则$F'(x)=f'(x)-g'(x)=0.$

由于F在I上可导，根据拉格朗日中值定理推论知，

$$F(x)=c, \text{其中}c\text{是常数},$$

即 $f(x)=g(x)+c, x\in I.$

P116/习题6.1/4

证明：(1)若函数f在$[a,b]$上可导，且$f'(x)\geq m$，则$f(b)\geq f(a)+m(b-a)$.

(2)若函数f在$[a,b]$上可导，且$|f'(x)|\leq M$，则$|f(b)-f(a)|\leq M(b-a)$.

(3)对任意实数x_1,x_2，都有$|\sin x_1-\sin x_2|\leq|x_1-x_2|$.

证 (1)由于f在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，根据拉格朗日中值定理知，

$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. 又$f'(x)\geq m$，因此

$$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)\geq f(a)+m(b-a).$$

(2)由于f在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，根据拉格朗日中值定理知，

$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. 又$|f'(x)|\leq M$，因此

$$|f(b)-f(a)|=|f'(\xi)(b-a)|\leq M(b-a).$$

(3)设$f(x)=\sin x$. 当$x_1=x_2$时，结论显然成立.

当$x_1\neq x_2$时，不妨设$x_1<x_2$. 则f在$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)内可导，

根据拉格朗日中值定理知，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，

即 $\sin x_2-\sin x_1=\cos\xi\cdot(x_2-x_1)$. 由于$|\cos\xi|\leq 1$，从而$|\sin x_2-\sin x_1|\leq|x_2-x_1|$.

综上分析，对任意实数x_1,x_2，都有$|\sin x_1-\sin x_2|\leq|x_1-x_2|$.

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

P116/习题6.1/5(1) 应用拉格朗日中值定理证明不等式：

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a},\text{其中}0<a<b.$$

证1 设$f(x)=\ln x$. 则$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,

根据拉格朗日中值定理知,$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

即 $\ln b-\ln a=\dfrac{1}{\xi}(b-a)$. 因为 $a<\xi<b$,所以$\dfrac{b-a}{b}<\dfrac{b-a}{\xi}<\dfrac{b-a}{a}$,

因此 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a},0<a<b.$

利用拉格朗日中值定理证明不等式,
主要通过中值来放大与缩小.

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}\Leftrightarrow\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

P116/习题6.1/5(1) 应用拉格朗日中值定理证明不等式：

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a},\text{其中}0<a<b.$$

证2 设 $f(x)=\ln x$. 则 $f(x)$ 在 $\left[1,\frac{b}{a}\right]$ 上连续，在 $\left(1,\frac{b}{a}\right)$ 内可导，

根据拉格朗日中值定理知，$\exists\xi\in\left(1,\frac{b}{a}\right)$，使得 $f\left(\frac{b}{a}\right)-f(1)=f'(\xi)\left(\frac{b}{a}-1\right)$，

即 $\ln\frac{b}{a}=\frac{1}{\xi}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\frac{b-a}{a\xi}$. 因为 $1<\xi<\frac{b}{a}$，所以 $\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{a\xi}<\frac{b-a}{a}$，

因此 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a},0<a<b.$

利用拉格朗日中值定理证明不等式，

主要通过中值来放大与缩小.

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}\Leftrightarrow\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

P116/习题6.1/5(1) 应用拉格朗日中值定理证明不等式：

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a},\text{其中}0<a<b.$$

证3 设$f(x)=\ln x$. 则$f(x)$在$\left[\frac{a}{b},1\right]$上连续，在$\left(\frac{a}{b},1\right)$内可导，

根据拉格朗日中值定理知，$\exists\xi\in\left(\frac{a}{b},1\right)$，使得$f(1)-f\left(\frac{a}{b}\right)=f'(\xi)\left(1-\frac{a}{b}\right)$，

即 $\ln\frac{b}{a}=\frac{1}{\xi}\left(1-\frac{a}{b}\right)=\frac{b-a}{b\xi}$. 因为$\frac{a}{b}<\xi<1$，所以$\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{b\xi}<\frac{b-a}{a}$，

因此 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a},0<a<b.$

利用拉格朗日中值定理证明不等式，

主要通过中值来放大与缩小.

P116/习题6.1/5(2) 应用拉格朗日中值定理证明不等式：

$$\frac{h}{1+h^2}<\arctan h<h, \text{其中} h>0.$$

证 设 $f(x)=\arctan x$. 则 $f(x)$ 在 $[0,h]$ 上连续, 在 $(0,h)$ 内可导,

根据拉格朗日中值定理知, $\exists \xi \in (0,h)$, 使得

$$f(h)-f(0)=f'(\xi)h,$$

即 $\arctan h=\dfrac{h}{1+\xi^2}$. 因为 $0<\xi<h$, 所以 $\dfrac{h}{1+h^2}<\dfrac{h}{1+\xi^2}<h$,

因此 $\dfrac{h}{1+h^2}<\arctan h<h, h>0.$

利用中值定理的结论前,需要写明哪个函数在哪个区间上满足中值定理的哪些条件.

P116/习题6.1/6(1) 确定函数$f(x)=3x-x^2$的单调区间.

解 函数$f(x)=3x-x^2$的定义域为:$x\in\mathbb{R}$.

则$f'(x)=3-2x$, 令$f'(x)=0$,得$x=\dfrac{3}{2}$,

从而当$x<\dfrac{3}{2}$时, $f'(x)>0$; 当$x>\dfrac{3}{2}$时, $f'(x)<0$.

又f在$(-\infty,+\infty)$上连续,

因此, f在$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$上递增,在$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$上递减.

端点是否包含在单调区间,

通过函数在该点是否连续来确定.

P116/习题6.1/6(2) 确定函数$f(x)=2x^2-\ln x$的单调区间.

解 函数$f(x)=2x^2-\ln x$的定义域为: $x>0$.

由于$f'(x)=4x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{4x^2-1}{x}$,

则当$0<x<\dfrac{1}{2}$时, $f'(x)<0$, 当$x>\dfrac{1}{2}$时, $f'(x)>0$.

又f在$(0,+\infty)$上连续,

因此, f在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$上严格递减, 在$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上严格递增.

研究函数的单调区间,第一步需确定函数的定义域.

P116/习题6.1/6(3) 确定函数$f(x)=\sqrt{2x-x^2}$的单调区间.

解 函数$f(x)=\sqrt{2x-x^2}$的定义域为: $x\in[0,2]$.

由于$f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$,

则当$0<x<1$时, $f'(x)>0$, 当$1<x<2$时, $f'(x)<0$.

又f在$[0,2]$上连续,

因此, f在$[0,1]$上严格递增,在$[1,2]$上严格递减.

此题需注意导函数在$x=0, x=2$无定义.

P116/习题6.1/6(4)

确定函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$的单调区间.

解 函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$的定义域为: $x\neq 0$.

由于$f'(x)=\dfrac{2x^2-x^2+1}{x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2}$,

则当$x\neq 0$时, $f'(x)>0$,

因此, f在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上严格递增.

P116/习题6.1/7(1)

应用函数的单调性证明不等式$\tan x > x - \dfrac{x^3}{3}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

证 设$f(x) = \tan x - x + \dfrac{x^3}{3}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

则$f'(x) = \sec^2 x - 1 + x^2 = \tan^2 x + x^2 > 0, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

又f在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$上连续,故$f$在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$上严格递增.

因此, $f(x) > f(0) = 0, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

从而 $\tan x > x - \dfrac{x^3}{3}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

P116/习题6.1/7(2) 应用函数的单调性证明不等式 $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

证1 设 $f(x) = \sin x - x, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. 则 $f'(x) = \cos x - 1 < 0$. 又 f 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续,故 f 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格递减.

因此, $f(x) < f(0) = 0, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. 从而 $\sin x < x, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

设 $g(x) = \dfrac{2x}{\pi} - \sin x, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. 则 $g'(x) = \dfrac{2}{\pi} - \cos x$, $g''(x) = \sin x > 0$.

又 g' 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续,故 g' 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增. 因此, $g'(0) = \dfrac{2}{\pi} - 1 < 0, g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi} > 0$.

根据闭区间上连续函数的介值性定理知, $\exists \xi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,使得 $g'(\xi) = 0$,且该零点唯一.

当 $x \in (0, \xi)$ 时, $g'(x) < 0$;当 $x \in \left(\xi, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0$. 又 g 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续,故 g 在 $[0, \xi]$ 上严格递减,

在 $\left[\xi, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增. 因此, $g(x) < g(0) = 0, x \in (0, \xi]$, $g(x) < g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, x \in \left[\xi, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

所以 $g(x) < 0, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. 从而 $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

综上分析, $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

P116/习题6.1/7(2) 应用函数的单调性证明不等式 $\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

证2 设 $f(x)=\sin x-x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 则 $f'(x)=\cos x-1<0$. 又 f 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续,故 f 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格递减.

因此, $f(x)<f(0)=0,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 从而 $\sin x<x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

设 $g(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 则 $g'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. 令 $h(x)=x\cos x-\sin x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

则 $h'(x)=-x\sin x$,当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $h'(x)<0$. 又 h 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续,故 h 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格递减.

因此, $h(x)<h(0)=0,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 从而 $g'(x)<0,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

又 g 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续,故 g 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格递减. 因此, $g(x)>g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

综上分析, $\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

P116/习题6.1/7(2) 应用函数的单调性证明不等式 $\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

证3 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. 则 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. 令 $h(x)=x\cos x-\sin x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

则 $h'(x)=-x\sin x$, 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $h'(x)<0$. 又 h 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 故 h 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格递减.

因此, $h(x)<h(0)=0, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 从而 $f'(x)<0, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 又 f 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续,

且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 定义 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 1, & x=0\end{cases}$. 因此 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

所以 F 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格递减.

故当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, 有 $\dfrac{2}{\pi}=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<F(x)<F(0)=1$, 即 $\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$

从而, 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, 有 $\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x$.

P116/习题6.1/7(3) 应用函数的单调性证明不等式

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)},x>0.$$

证 设$f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x),x>0.$

则 $f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=-\frac{x^2}{1+x}<0.$ 又f在$[0,+\infty)$上连续,故f在$[0,+\infty)$上严格递减.

因此,$f(x)<f(0)=0,x>0.$从而 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x),x>0.$

设$g(x)=x-\frac{x^2}{2(1+x)}-\ln(1+x),x>0.$

则 $g'(x)=1-\frac{2x+x^2}{2(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x^2}{2(1+x)^2}>0.$

又g在$[0,+\infty)$上连续,故g在$[0,+\infty)$上严格递增.

因此,$g(x)>g(0)=0,x>0.$ 从而 $\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)},x>0.$

综上分析,$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)},x>0.$

P116/习题6.1/9

设f为$[a,b]$上二阶可导函数, $f(a)=f(b)=0$, 并存在一点$c\in(a,b)$, 使得$f(c)>0$. 证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得$f''(\xi)<0$.

证 由于f在$[a,b]$上二阶可导, 则f在$[a,c]$与$[c,b]$上连续且可导.

根据拉格朗日中值定理知, $\exists\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$, 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\ f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$$

由于f'在$[\xi_1,\xi_2]$上连续且可导, 根据拉格朗日中值定理知,

$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

利用中值定理的结论前,需要写明哪个函数在哪个区间上满足中值定理的哪些条件.

BY GYH

P116/习题6.1/10 设函数f在(a,b)上可导,且f'单调. 证明f'在(a,b)上连续.

证 不妨设f'在(a,b)上递增. 对$\forall x_0\in(a,b),\exists U(x_0)\subset(a,b)$.

从而f'在$U_-(x_0)$上递增有上界$f'(x_0)$; 在$U_+(x_0)$上递增有下界$f'(x_0)$.

根据单调有界定理知, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$存在.

对$\forall x\in U_-^\circ(x_0)$, f在$[x,x_0]$上连续,在(x,x_0)内可导, 根据拉格朗日中值定理知,

$\exists\xi_1\in(x,x_0)$,使得 $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi_1).$$

由于$x<\xi_1<x_0$,当$x\to x_0^-$时,$\xi_1\to x_0^-$,从而 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(\xi_1)=\lim\limits_{\xi_1\to x_0^-} f'(\xi_1)=f'(x_0-0)$.

对$\forall x\in U_+^\circ(x_0)$, f在$[x_0,x]$上连续,在(x_0,x)内可导, 根据拉格朗日中值定理知,

$\exists\xi_2\in(x_0,x)$,使得 $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi_2).$$

由于$x_0<\xi_2<x$,当$x\to x_0^+$时,$\xi_2\to x_0^+$,从而 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(\xi_2)=\lim\limits_{\xi_2\to x_0^+} f'(\xi_2)=f'(x_0+0)$.

由于f在点x_0可导,故 $f_-'(x_0)=f_+'(x_0)=f'(x_0)$. 因此 $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)$,

所以f'在点x_0连续. 由x_0的任意性知, f'在(a,b)上连续.

BY GYH

P116/习题6.1/10 类似证明相关命题

设函数f可导,则f'不存在第一类间断点.

证 利用反证法证明. 假设x_0是f'的一个第一类间断点.

则$f'(x_0), f'(x_0-0), f'(x_0+0)$都存在.

对$\forall x\in U_-^\circ(x_0)$, f在$[x,x_0]$上连续,在(x,x_0)内可导, 根据拉格朗日中值定理知,

$\exists\xi_1\in(x,x_0)$,使得 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi_1)$.

由于$x<\xi_1<x_0$,当$x\to x_0^-$时,$\xi_1\to x_0^-$,从而 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(\xi_1)=\lim\limits_{\xi_1\to x_0^-}f'(\xi_1)=f'(x_0-0)$.

对$\forall x\in U_+^\circ(x_0)$, f在$[x_0,x]$上连续,在(x_0,x)内可导, 根据拉格朗日中值定理知,

$\exists\xi_2\in(x_0,x)$,使得 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi_2)$.

由于$x_0<\xi_2<x$,当$x\to x_0^+$时,$\xi_2\to x_0^+$,从而 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(\xi_2)=\lim\limits_{\xi_2\to x_0^+}f'(\xi_2)=f'(x_0+0)$.

由于f在点x_0可导,故 $f_-'(x_0)=f_+'(x_0)=f'(x_0)$. 因此 $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)$,

所以f'在点x_0连续. 这与x_0是f'的第一类间断点矛盾.

故导函数不可能有第一类间断点.

BY GYH

P116/习题6.1/12 证明：设f为n阶可导函数，若方程$f(x)=0$有$n+1$个相异的实根，则方程$f^{(n)}(x)=0$至少有一个实根.

证 设$x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$是方程$f(x)=0$的$n+1$个实根，不妨设$x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$.

从而$f(x_i)=0, i=1,2,\cdots,n+1$，$f$在$[x_i,x_{i+1}]$上连续，在$(x_i,x_{i+1})$内可导，$i=1,2,\cdots,n$，

根据罗尔中值定理知，存在$\xi_i^{(1)}\in(x_i,x_{i+1})$，使得$f'\left(\xi_i^{(1)}\right)=0, i=1,2,\cdots,n$.

f'在$\left[\xi_i^{(1)},\xi_{i+1}^{(1)}\right]$上连续，在$\left(\xi_i^{(1)},\xi_{i+1}^{(1)}\right)$内可导，$i=1,2,\cdots,n-1$，根据罗尔中值定理知，

存在$\xi_i^{(2)}\in(x_i,x_{i+1})$，使得$f''\left(\xi_i^{(2)}\right)=0, i=1,2,\cdots,n-1$. 反复使用罗尔中值定理，

可知存在$\xi_1^{(n-1)}\in\left(\xi_1^{(n-2)},\xi_2^{(n-2)}\right)$，$\xi_2^{(n-1)}\in\left(\xi_2^{(n-2)},\xi_3^{(n-2)}\right)$，使得$f^{(n-1)}\left(\xi_1^{(n-1)}\right)=0$，$f^{(n-1)}\left(\xi_2^{(n-1)}\right)=0$.

$f^{(n-1)}$在$\left[\xi_1^{(n-1)},\xi_2^{(n-1)}\right]$上连续，在$\left(\xi_1^{(n-1)},\xi_2^{(n-1)}\right)$内可导，根据罗尔中值定理知，

存在$\xi\in\left(\xi_1^{(n-1)},\xi_2^{(n-1)}\right)$，使得$f^{(n)}(\xi)=0$.

P116/习题6.1/13 设$a>0$. 证明函数$f(x)=x^3+ax+b$存在唯一的零点.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+ax+b\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+ax+b\right)=-\infty$,

因此对$G=1$, $\exists M_1>0,\forall x>M_1$,有$f(x)>1$, $\exists M_2>0,\forall x<-M_2$,有$f(x)<-1$.

取$x_1<-M_2, x_2>M_1$,有$f(x_1)<-1<0, f(x_2)>1>0$.

f在$[x_1,x_2]$上连续,且$f(x_1)f(x_2)<0$,根据介值性定理知,$\exists\xi\in(x_1,x_2)$,使得 $f(\xi)=0$.

假设f存在两个零点ξ,η,不妨设$\xi<\eta$. f在$[\xi,\eta]$上连续,在(ξ,η)上可导,且$f(\xi)=f(\eta)$,

根据罗尔中值定理知,$\exists x_0\in(\xi,\eta)$,使得 $f'(x_0)=0$.

又$f'(x)=3x^2+a>0$,产生矛盾.

所以函数$f(x)=x^3+ax+b$存在唯一的零点.

此题需先证明零点的存在性,再证明零点的唯一性.

特别注意寻找零点的过程的描述.

P116/习题6.1/14 证明: $\dfrac{\tan x}{x} > \dfrac{x}{\sin x}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

证 由于$x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,只需证明$\tan x \sin x > x^2$. 令$f(x) = \tan x \sin x - x^2, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

则$f'(x) = \sec^2 x \sin x + \sin x - 2x$,

$$f''(x) = 2\sec x \tan^2 x + \sec x + \cos x - 2 \geq 2\sec x \tan^2 x + 2\sqrt{\sec x \cos x} - 2$$

$$= 2\sec x \tan^2 x > 0,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

由于$f''(x) > 0$,又$f'(x)$在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$上连续, 因此$f'(x)$在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$上严格递增.

从而$f'(x) > f'(0) = 0, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

由于$f(x)$在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$上连续, 因此$f(x)$在$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$上严格递增.

从而$f(x) > f(0) = 0, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 即 $\dfrac{\tan x}{x} > \dfrac{x}{\sin x}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

P116/习题6.1/15

证明：若函数f,g在区间$[a,b]$上可导，且$f'(x)>g'(x)$, $f(a)=g(a)$，

则在$(a,b]$上有$f(x)>g(x)$.

证 令$F(x)=f(x)-g(x), x\in[a,b]$.

则$F'(x)=f'(x)-g'(x)>0$,

又F在$[a,b]$上连续，故F在$[a,b]$上严格递增.

因此，当$a<x\le b$时，$F(x)>F(a)=f(a)-g(a)=0$,

即 $f(x)>g(x), x\in(a,b]$.

P124/习题6.2/2 设函数f在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导.

证明:存在$\xi\in(a,b)$,使得 $2\xi\left(f(b)-f(a)\right)=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi)$.

证 作辅助函数 $F(x)=x^2\left(f(b)-f(a)\right)-\left(b^2-a^2\right)f(x)$.

$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导, $F(a)=F(b)=a^2f(b)-b^2f(a)$,

根据罗尔中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$2\xi\left(f(b)-f(a)\right)=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi).$$

P124/习题6.2/3 设函数f在点a处具有连续的二阶导数.证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

证1 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}$

$$=\frac{f''(a)+f''(a)}{2}=f''(a).$$

此题使用两次洛必达法则证明.
若条件改为f在点a具有二阶导数,
则只能使用一次洛必达法则.

设函数f在点a处具有二阶导数.证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

证 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{f''(a+h)+f''(a-h)}}{2}$$

$$=\frac{f''(a)+f''(a)}{2}$$

$$=f''(a).$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\frac{f'(a)-f'(a-h)}{h}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f''(a)+f''(a)\right)$$

$$=f''(a).$$

P124/习题6.2/3 设函数f在点a处具有连续的二阶导数.证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

证2 当$h>0$时,设 $F(x)=f(a+x)+f(a-x)-2f(a), G(x)=x^2, x\in[0,h]$.

则$F'(x)=f'(a+x)-f'(a-x), G'(x)=2x, F''(x)=f''(a+x)+f''(a-x), G''(x)=2$.

$F(x)$与$G(x)$在$[0,h]$上连续,在$(0,h)$内可导, $G'(x)\neq 0, x\in(0,h), G(0)\neq G(h)$,

根据柯西中值定理知,$\exists\xi\in(0,h)$,使得 $\dfrac{F(h)-F(0)}{G(h)-G(0)}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$,

即 $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\dfrac{f'(a+\xi)-f'(a-\xi)}{2\xi}$.

$F'(x)$与$G'(x)$在$[0,\xi]$上连续,在$(0,\xi)$内可导, $G''(x)\neq 0, x\in(0,\xi), G'(0)\neq G'(h)$,

根据柯西中值定理知,$\exists\eta\in(0,\xi)$,使得 $\dfrac{F'(\xi)-F'(0)}{G'(\xi)-G'(0)}=\dfrac{F''(\eta)}{G''(\eta)}$,

即 $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\dfrac{f'(a+\xi)-f'(a-\xi)}{2\xi}=\dfrac{f''(a+\eta)+f''(a-\eta)}{2}$.

因为$0<\eta<\xi<h$,所以当$h\to 0^+$时,$\eta\to 0^+$. 从而

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f''(a+\eta)+f''(a-\eta)}{2}=\lim_{\eta\to 0^+}\frac{f''(a+\eta)+f''(a-\eta)}{2}=f''(a).$$

同理可证$h<0$的情形. 因此 $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$.

P124/习题6.2/6 设函数f在点a的某个邻域上具有二阶导数. 证明:对充分小的h,存在$\theta,0<\theta<1$,使得

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}.$$

证 当$h>0$时,设 $F(x)=f(a+x)+f(a-x)-2f(a), G(x)=x^2, x\in[0,h]$.

则$F'(x)=f'(a+x)-f'(a-x), G'(x)=2x, F''(x)=f''(a+x)+f''(a-x), G''(x)=2$.

$F(x)$与$G(x)$在$[0,h]$上连续,在$(0,h)$内可导, $G'(x)\neq 0, x\in(0,h), G(0)\neq G(h)$,

根据柯西中值定理知,$\exists\xi\in(0,h)$,使得 $\dfrac{F(h)-F(0)}{G(h)-G(0)}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$,

即 $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\dfrac{f'(a+\xi)-f'(a-\xi)}{2\xi}$.

$F'(x)$与$G'(x)$在$[0,\xi]$上连续,在$(0,\xi)$内可导, $G''(x)\neq 0, x\in(0,\xi), G'(0)\neq G'(h)$,

根据柯西中值定理知,$\exists\eta\in(0,\xi)$,使得 $\dfrac{F'(\xi)-F'(0)}{G'(\xi)-G'(0)}=\dfrac{F''(\eta)}{G''(\eta)}$,

即 $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\dfrac{f'(a+\xi)-f'(a-\xi)}{2\xi}=\dfrac{f''(a+\eta)+f''(a-\eta)}{2}$.

因为$0<\eta<\xi<h$,所以存在$\theta\in(0,1)$,使得$\eta=\theta h$,由此得

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}.$$

同理可证$h<0$的情形.

P124/习题6.2/5(3) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\ln(1+x)-x\right)'}{\left(\cos x-1\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{-(1+x)\sin x}=1.$

解2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{-\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\ln(1+x)-x\right)'}{\left(-\frac{x^2}{2}\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{-x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{-x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{-x(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}=1.$$

P124/习题6.2/5(4) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2.$

解2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2.$

解3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sec^2 x\tan x}{\sin x}=2.$

P124/习题6.2/5(6) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解1 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^x-1-x\right)'}{\left(x^2\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

解2 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^x-1-x\right)'}{\left(x\left(\mathrm{e}^x-1\right)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)'}{\left(\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

P124/习题6.2/5(7) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}$.　(0^0)

解 $$\lim_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x\ln\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sec^2 x}{\tan x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}x\sec^2 x}=e^0=1.$$

P124/习题6.2/5(8) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. $\left(1^{\infty}\right)$

解1 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$.

解2 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1}(1+x-1)^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1}\left(1+(x-1)\right)^{\frac{1}{x-1}\cdot(-1)} = e^{-1}$.

P124/习题6.2/5(10) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x.$ $(0\cdot\infty)$

解 $$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}x=0.$$

P124/习题6.2/5(11) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4x^2}{2}}{6x^2}=-\frac{1}{3}.$$

P124/习题6.2/5(12) 求不定式极限： $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. (1^{∞})

解1

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}-\frac{1}{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sec^2 x-\tan x}{2x^2\tan x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sec^2 x-\tan x}{2x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x+2x\sec^2 x\tan x-\sec^2 x}{6x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x+4x\sec^2 x\tan^2 x+2x\sec^4 x}{12x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x+2x\tan^2 x+x\sec^2 x}{6x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x+2\tan^2 x+4x\sec^2 x\tan x+\sec^2 x+2x\sec^2 x\tan x}{6}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

解2

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan x-\ln x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}-\frac{1}{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{1}{x}}{2x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^2\sin x\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{6x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{4x^2}{2}}{6x^2}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

解3

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x}{x^3}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

P124/习题6.2/7(2) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x.\quad (0\cdot\infty)$

解1

$$\lim_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\ln^2 x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln^2 x+4\ln x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x+2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+2}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0.$$

解2

$$\lim_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\pi-2\arctan x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2}{(\pi-2\arctan x)^2(1+x^2)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi-2\arctan x)^2(1+x^2)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi-2\arctan x)^2}{\dfrac{1}{x}}\cdot\frac{1+x^2}{2x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\pi-2\arctan x)\cdot\dfrac{-2}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2}{1+x^2}(\pi-2\arctan x)=0.$$

P124/习题6.2/7(4) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$. (1^{∞})

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\tan 2x\ln\tan x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\ln\tan x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-2\csc^2 2x}}$

$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{\cos x\sin x}}=\mathrm{e}^{-1}$.

P124/习题6.2/7(5) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+1-1}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

P124/习题6.2/7(6) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$$

P124/习题6.2/7(8) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. (0^0)

解1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}}=e^{-1}.$$

解2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln \operatorname{arccot}x}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\operatorname{arccot}x}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot}x}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}}=e^{-1}.$$

P116/习题6.2/10 证明：$f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$为有界函数.

证1 $f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$的定义域为$\mathbb{R}$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x^3\mathrm{e}^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{2\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{4x\mathrm{e}^{x^2}}=0,$

根据函数极限的定义知，对$\varepsilon=1,\exists M>0,\forall |x|>M$，有 $|f(x)|<1.$

又$f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$在$[-M-1,M+1]$上连续，根据闭区间上连续函数的有界性知，

$\exists K>0$，当$-M-1\le x\le M+1$时，有 $|f(x)|\le K.$

因此，对$\forall x\in\mathbb{R}$，有$|f(x)|<K+1.$ 所以$f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$为有界函数.

注意函数有界的定义：

若$\exists M>0,\forall x\in I:|f(x)|\le M$，则称函数$f$在$I$上有界.

所得的界不是唯一的，例如也可以是$|f(x)|\le\max\{K,1\}.$

P116/习题6.2/10 证明：$f(x)=x^3e^{-x^2}$为有界函数.

证2 $f(x)=x^3e^{-x^2}$的定义域为$\mathbb{R}$. 则$f'(x)=3x^2e^{-x^2}-2x^4e^{-x^2}=x^2e^{-x^2}\left(3-2x^2\right)$,

令$f'(x)=0$,得稳定点$x_1=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, x_2=0, x_3=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

当$x\le-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时, $f'(x)\le 0$; 当$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\le x\le\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时, $f'(x)\ge 0$; 当$x\ge\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时, $f'(x)\le 0$.

由于f在$\mathbb{R}$上连续, 故$f(x)$在$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right],\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$上单调递减, 在$\left[-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$上单调递增.

从而当$x\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$时, $f(x)\ge f\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=-\dfrac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}$;当$x\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$时, $f(x)\le f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}$,

当$x\in\left[-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$时, $-\dfrac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}=f\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\le f(x)\le f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}$.

由于$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{2e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{4xe^{x^2}}=0$,

因此当$x\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$时,$-\dfrac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}\le f(x)\le 0$; 当$x\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$时,$0\le f(x)\le\dfrac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}$.

从而对$\forall x\in\mathbb{R}$,有 $-\dfrac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}\le f(x)\le\dfrac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}$. 所以$f(x)=x^3e^{-x^2}$为有界函数.

注意函数有界的定义：

若$\exists K,L\in\mathbb{R},\forall x\in I: L\le f(x)\le K$,则称函数$f$在$I$上有界.

BY GYH

P131/习题6.3/1(1) 求函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$带佩亚诺型余项的麦克劳林公式.

解1 由于$f'(x)=-\dfrac{1}{2}\left(1+x\right)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\left(1+x\right)^{-\frac{5}{2}}$, $f'''(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\left(1+x\right)^{-\frac{7}{2}}$,

$\cdots$, $f^{(k)}(x)=(-1)^k\dfrac{(2k-1)!!}{2^k}\left(1+x\right)^{-\frac{(2k+1)}{2}}$,

从而 $f^{(k)}(0)=(-1)^k\dfrac{(2k-1)!!}{2^k}, k=1,2,\cdots.$

于是
$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$
$$=f\left(0\right)+f'\left(0\right)x+\frac{f''\left(0\right)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n+o(x^n)$$
$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3!!}{2^2\cdot 2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n\left(2n-1\right)!!}{2^n\cdot n!}x^n+o(x^n).$$

P131/习题6.3/1(1) 求函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$带佩亚诺型余项的麦克劳林公式.

解2 已知 $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+o(x^{n})$,

于是 $f\left(x\right)=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{n}+o(x^{n})$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3!!}{2^{2}\cdot 2!}x^{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n}\left(2n-1\right)!!}{2^{n}\cdot n!}x^{n}+o(x^{n}).$$

P131/习题6.3/1(2) 求函数$f(x)=\arctan x$带佩亚诺型余项的麦克劳林公式$\left(\text{含到}x^5\text{的项}\right)$.

解 由于$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f'''(x)=-\dfrac{2(1+x^2)^2-8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}=-\dfrac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}$,

$$f^{(4)}(x)=-\frac{-12x(1+x^2)^3-6x(2-6x^2)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6}=-\frac{-24x+24x^3}{(1+x^2)^4},$$

$$f^{(5)}(x)=-\frac{(-24+72x^2)(1+x^2)^4-8x(-24x+24x^3)(1+x^2)^3}{(1+x^2)^8}=-\frac{-24+252x^2-168x^4}{(1+x^2)^5},$$

从而 $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(x)=-2,\ f^{(4)}(0)=0,\ f^{(5)}(0)=24.$

于是 $f(x)=\arctan x$

$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2++\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+o(x^5)$$

$$=0+x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-2}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{24}{5!}x^5+o\left(x^5\right)$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o\left(x^5\right).$$

P131/习题6.3/1(3) 求函数$f(x)=\tan x$带佩亚诺型余项的麦克劳林公式$\left(\text{含到}x^5\text{的项}\right)$.

解1 由于 $f'(x)=\sec^2 x,\ f''(x)=2\sec^2 x\tan x,\ f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x,$

$$f^{(4)}(x)=8\sec^2 x\tan^3 x+8\sec^4 x\tan x+8\sec^4 x\tan x$$

$$=8\sec^2 x\tan^3 x+16\sec^4 x\tan x,$$

$$f^{(5)}(x)=16\sec^2 x\tan^4 x+24\sec^4 x\tan^2 x+64\sec^4 x\tan^2 x+16\sec^6 x,$$

从而 $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(x)=2,\ f^{(4)}(0)=0,\ f^{(5)}(0)=16.$

于是 $f(x)=\tan x$

$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2++\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+o(x^5)$$

$$=x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+o(x^5)$$

$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5).$$

P131/习题6.3/1(3) 求函数$f(x)=\tan x$带佩亚诺型余项的麦克劳林公式（含到x^5的项）.

解2 $$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)}{1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)}=\frac{x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)}{1-\left(\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)}$$

$$=\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\left(\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4\right)^2+o(x^4)\right)$$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\right)$$

$$=x+\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{24}x^5-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^5+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)$$

$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{16}{120}x^5+o(x^5)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5).$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$$

P131/习题6.3/2(2) 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$. $(\infty-\infty)$

解1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{2}.$$

解2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right)$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

P131/习题6.3/2(3) 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)$. $(0\cdot\infty)$

解1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

解2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)-x\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

P131/习题6.3/3(1) 求函数$f(x)=x^3+4x^2+5$在$x=1$处带拉格朗日型余项的泰勒公式.

解 由于 $f'(x)=3x^2+8x,\ f''(x)=6x+8,\ f'''(x)=6,\ f^{(k)}(x)=0, k\geq 4,$

从而 $f(1)=10,\quad f'(1)=11,\quad f''(1)=14,\quad f'''(1)=6,\ f^{(k)}(1)=0, k\geq 4,$

于是

$$f(x)=x^3+4x^2+5$$

$$=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\frac{f^{(n+1)}\big(1+\theta(x-1)\big)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$$

$$\big(0<\theta<1\big)$$

$$=10+11(x-1)+\frac{14}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3$$

$$=10+11(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3.$$

P131/习题6.3/3(2) 求函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$在$x=0$处带拉格朗日型余项的泰勒公式.

解1 由于$f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$, $f'''(x)=-\dfrac{2\cdot 3}{(1+x)^4},\cdots,$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k\frac{k!}{(1+x)^{k+1}},\quad f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(1+x)^{n+2}},$$

从而 $f^{(k)}(0)=(-1)^k k!, k=0,1,2,\cdots.$

于是 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

$$=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

解2 已知 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\dfrac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}x^{n+1}$, $0<\theta<1.$

于是 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-(-x)}=1+(-x)+(-x)^2+\cdots+(-x)^n+\dfrac{1}{(1-\theta(-x))^{n+2}}(-x)^{n+1}$

$$=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

P131/习题6.3/3(2)相关补充题

求函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$的带佩亚诺型余项的麦克劳林公式.

解 已知 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$,

于是 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1-(-x^2)}$

$$=1+(-x^2)+(-x^2)^2+\cdots+(-x^2)^n+o\left((-x^2)^n\right)$$

$$=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o\left(x^{2n}\right).$$

P131/习题6.3/3(2)相关补充题

求函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$的带佩亚诺型余项的麦克劳林公式.

解 已知 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$,

于是 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1-(-x^2)}$

$$=1+(-x^2)+(-x^2)^2+\cdots+(-x^2)^n+o\left((-x^2)^n\right)$$

$$=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o\left(x^{2n}\right).$$

P136/习题6.4/1(1) 求函数$f(x)=2x^3-x^4$的极值.

解 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$. $f'(x)=6x^2-4x^3=2x^2(3-2x)$.

令$f'(x)=0$,解得稳定点$x_1=0, x_2=\dfrac{3}{2}$.

由于$f''(x)=12x-12x^2$,

从而 $f''(0)=0, f''\left(\dfrac{3}{2}\right)=-9<0$.

根据极值的第二充分条件知,函数$f(x)=2x^3-x^4$的极大值是$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{16}$.

由于$f'''(x)=12-24x$, 从而 $f'''(0)=12$.

根据极值的第三充分条件知, $x=0$不是极值点.

P136/习题6.4/1(3) 求函数$f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$的极值.

解1 $f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$.

令$f'(x)=0$,解得稳定点$x_1=1, x_2=e^2$.

列表讨论:

x	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	极小值0	$\nearrow$	极大值$4e^{-2}$	$\searrow$

根据极值的第一充分条件知,函数$f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$的极小值是$f(1)=0$, 极大值是$f(e^2)=4e^{-2}$.

解2 $f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$.

令$f'(x)=0$,解得稳定点$x_1=1, x_2=e^2$.

当$0<x<1$时, $f'(x)<0$; 当$1<x<e^2$时, $f'(x)>0$;当$x>e^2$时, $f'(x)<0$.

根据极值的第一充分条件知,函数$f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$的极小值是$f(1)=0$, 极大值是$f(e^2)=4e^{-2}$.

BY GYH

P136/习题6.4/1(3) 求函数$f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$的极值.

解3 $f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$.

令$f'(x)=0$,解得稳定点$x_1=1, x_2=\mathrm{e}^2$.

由于$f''(x)=\dfrac{\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}\right)x^2-\left(2\ln x-(\ln x)^2\right)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2-6\ln x+2(\ln x)^2}{x^3}$,

从而 $f''(1)=2>0$, $f''\left(\mathrm{e}^2\right)=-2\mathrm{e}^{-6}<0$.

根据极值的第二充分条件知,函数$f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$的极小值是$f(1)=0$, 极大值是$f\left(\mathrm{e}^2\right)=4\mathrm{e}^{-2}$.

P136/习题6.4/1 求函数极值的错误点分析：

(1) 没有给出函数的定义域.

(2) 函数求导错误.

(3) 没有具体判断过程.

(4) 没有利用找出的可疑点将整个定义域分隔成若干个开区间,在这些开区间上确定导函数的符号.

(5) 极值没有分极大值、极小值.

(6) 求出了极大值点与极小值点,但没求出极大值、极小值.

(7) 极值点与极值没有区分,两个概念混淆.

P136/习题6.4/3

证明：若函数f在点x_0有$f_+'(x_0)<0$, $f_-'(x_0)>0$,则x_0为f的极大值点.

证 由于$f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$, 根据函数极限的局部保号性知,

$\exists\delta_1>0,\forall x\in U_+^0(x_0;\delta_1)$,有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$.

从而 $f(x)-f(x_0)<0$, 即 $f(x)<f(x_0)$.

由于$f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$, 根据函数极限的局部保号性知,

$\exists\delta_2>0,\forall x\in U_-^0(x_0;\delta_2)$,有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$.

从而 $f(x)-f(x_0)<0$, 即 $f(x)<f(x_0)$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0,\forall x\in U(x_0;\delta)$,有 $f(x)\le f(x_0)$.

根据极值点的定义知, x_0是f的极大值点.

P136/习题6.4/3 错误点分析：

证明：若函数f在点x_0有$f'_+(x_0)<0$, $f'_-(x_0)>0$，则x_0为f的极大值点.

(1) 没有写出左右导数的定义.

(2) 没有体现函数极限的局部保号性中的局部.

(3) 没有给出局部保号性满足的左右邻域.

(4) 利用导函数在点x_0左右邻域的符号，

利用极值的第一充分条件证明.

本题函数f在x_0左右邻域的可导性未知.

(5) 极值与极值点概念混淆.

(6) 没有利用极值点的定义来证明.

本题只能用极值点的定义来证明，不能使用极值的充分条件证明.

P136/习题6.4/4(2)

求函数$y=2\tan x-\tan^2 x$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上的最大、最小值.

解 由于$y'=2\sec^2 x-2\tan x\sec^2 x=2\sec^2 x(1-\tan x)$,

令$y'=0$,解得稳定点$x=\dfrac{\pi}{4}$.

因为 $y(0)=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$,

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} y=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(2\tan x-\tan^2 x\right)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x\left(2-\tan x\right)=-\infty,$$

所以$y=2\tan x-\tan^2 x$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上有最大值$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, 没有最小值.

P136/习题6.4/4(2) 错误点分析：

求函数$y=2\tan x-\tan^2 x$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上的最大、最小值.

(1) 求导错误,特别是$\tan x$的导函数不熟悉.

(2) 没有表明 $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}$ 为左极限.

(3) 没有求f在$x=0$处的函数值.

(4) 此题求出稳定点$x=\dfrac{\pi}{4}$后不需要判断该点是否为极值点.

P136/习题6.4/5 设f在区间I上连续，且在I上仅有唯一的极值点x_0. 证明：若x_0是f的极大(小)值点，则x_0必是f在I上的最大(小)值点.

证 利用反证法证明. 若x_0是f的极大值点，假设$\exists x_1 \in I\left(不妨假设 x_1 > x_0\right)$，使得 $f(x_1) > f(x_0)$.

由于f在$[x_0, x_1]$上连续，根据最大、最小值定理知，$\exists x_2 \in [x_0, x_1]$，使得

$$f(x_2) = \min_{x\in[x_0,x_1]} f(x).$$

根据已知条件知，$f(x_2) < f(x_1)$. 由于x_0是I上唯一的极大值点，则

$\exists \delta > 0, \forall x \in U^{\circ}(x_0;\delta)$，有$f(x) < f(x_0)$. 所以 $x_2 \in (x_0, x_1)$.

取$\delta_1 = \min\{x_2 - x_0, x_1 - x_2\} > 0, \forall x \in U^{\circ}(x_2;\delta_1)$，有 $f(x) \geq f(x_2)$.

从而x_2是f的一个极小值点. 与题设矛盾.故命题得证.

若x_0是f的极小值点，可类似得x_0是f在I上的最小值点.

P136/习题6.4/5

设f在区间I上连续，且在I上仅有唯一的极值点x_0.

证明：若x_0是f的极大(小)值点，则x_0必是f在I上的最大(小)值点.

错误点分析：

(1) 错误使用函数f在I上可导,题目没有f在I上可导这一条件.

(2) 错误认为由于x_0是极值点,所以存在x_0的左右邻域,
f在左右邻域具有单调性.

(3) 证明过程不完整.

P136/习题6.4/7 有一个无盖的圆柱形容器,当给定体积为V时,要使容器的表面积为最小,问底的半径与容器高的比例应该怎样?

解 设圆柱形容器底的半径为r,高为h,根据题意有 $V=\pi r^2 h$,故$h=\dfrac{V}{\pi r^2}$.

从而圆柱形容器的表面积为 $f(r)=2\pi rh+\pi r^2=\dfrac{2V}{r}+\pi r^2$.

$f'(r)=-\dfrac{2V}{r^2}+2\pi r$,令$f'(r)=0$,解得唯一稳定点$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

由于$f''(r)=\dfrac{4V}{r^3}+2\pi$,故$f''\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}\right)=6\pi>0$.

根据极值的第二充分条件知, $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$是函数$f(r)$的唯一极小值点,

则这个极小值点一定是最小值点.

因此,当$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$,$h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$, 故底的半径与容器高的比例是1:1.

P136/习题6.4/7 有一个无盖的圆柱形容器,当给定体积为V时,要使容器的表面积为最小,问底的半径与容器高的比例应该怎样?

错误点分析:

(1) 错误使用基本不等式$f(r)=\dfrac{2V}{r}+\pi r^2\ge\sqrt{\dfrac{2V}{r}\cdot\pi r^2}=\sqrt{2\pi V r}$.

(2) 没有说明极小值没什么是最小值.

(3) 求解过程不完整.

P136/习题6.4/10(3) 求函数$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$的极值.

解 $f(x)$的定义域为$\mathbb{R}$.

由于 $f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$,

令$f'(x)=0$,解得稳定点$x_1=-1, x_2=\dfrac{1}{5}, x_3=1$.

由于 $f''(x)=(x+1)^2(5x-1)+2(x-1)(x+1)(5x-1)+5(x-1)(x+1)^2$,

从而 $f''(-1)=0$, $f''\left(\dfrac{1}{5}\right)=-\dfrac{144}{5}<0$, $f''(1)=16>0$,

根据极值的第二充分条件知,$f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{3456}{3125}$函数$f(x)$的极大值,

$f(1)=0$函数$f(x)$的极小值.

当$x<-1$时, $f'(x)>0$; 当$-1<x<\dfrac{1}{5}$时, $f'(x)>0$.

根据极值的第一充分条件知, $x=-1$不是极值点.

P136/习题6.4/11 设$f(x)=a\ln x+bx^2+x$在$x_1=1,x_2=2$处取得极值，试求a与b；并问这时f在x_1与x_2是取得极大值还是极小值？

解 由于 $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$，根据题意有 $f'(1)=0,\ f'(2)=0$，即

$$\begin{cases} a+2b+1=0 \\ \dfrac{a}{2}+4b+1=0 \end{cases},$$

解得$a=-\dfrac{2}{3},b=-\dfrac{1}{6}$.

由于$f''(x)=-\dfrac{a}{x^2}+2b=\dfrac{2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}$，故$f''(1)=\dfrac{1}{3}>0,\ f''(2)=-\dfrac{1}{6}<0.$

根据极值的第二充分条件知，函数f在$x_1=1$处取得极小值$f(1)=\dfrac{5}{6}$，

在$x_2=2$处取得极大值$f(2)=-\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{4}{3}$.

P136/习题6.5/1(4) 确定函数$y=\ln\left(x^2+1\right)$的凸性区间与拐点.

解 函数$y=\ln\left(x^2+1\right)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

$$y'=\frac{2x}{x^2+1},\quad y''=\frac{2\left(x^2+1\right)-4x^2}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^4},$$

令$y''=0$,解得$x_1=-1, x_2=1$.

列表讨论:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	凹		凸		凹

因此函数y的凹区间为$(-\infty,-1],[1,+\infty)$, 凸区间为$[-1,1]$.

拐点为$(-1,\ln 2),(1,\ln 2)$.

P136/习题6.5/1(4) 确定函数$y=\ln\left(x^2+1\right)$的凸性区间与拐点.

错误点分析：

(1) 求导错误.

(2) 二阶导数为0的点求出来后,就给出拐点.

(3) 凸性区间包括凸区间、凹区间,凹区间没给出.

(4) 拐点的表示错误.

(5) 区间的端点应该包含没包含.

函数如果在区间端点连续,那么端点包含在凹凸区间.

P136/习题6.5/4

设f为区间I上严格凸函数.证明:若$x_0 \in I$为f的极小值点,则x_0为f在I上的唯一的极小值点.

证1 利用反证法证明.

假设f在I上存在另一个极小值点$x_1(x_1 \neq x_0)$,不妨设$f(x_1) \geq f(x_0)$.

因为$f(x)$是严格凸的,根据凸函数的定义,对$\forall \lambda \in (0,1)$,有

$$f\left(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1\right) < \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_1)$$

$$\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_1) = f(x_1).$$

从而对$\forall \delta > 0, \exists x = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 \in U^0(x_1;\delta) \cap I$,使得$f(x) < f(x_1)$.

这与x_1是极小值点矛盾. 所以x_0为f在I上的唯一的极小值点.

P136/习题6.5/4 设f为区间I上严格凸函数.证明:若$x_0\in I$为f的极小值点,则x_0为f在I上的唯一的极小值点.

证2 利用反证法证明.

假设f在I上存在另一个极小值点$x_1(x_1\neq x_0)$, 不妨设$f(x_1)\geq f(x_0)$.

由于x_0是f在I上的极小值点, 故$\exists\delta_1\left(<\dfrac{x_1-x_0}{2}\right)>0,\forall x\in U(x_0;\delta_1)\cap I$,有$f(x)\geq f(x_0)$.

取$x_2\in U_+^0(x_0;\delta_1)\cap I$,有$f(x_2)\geq f(x_0)$. 从而$\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}\geq 0$.

由于x_0是f在I上的极小值点, 故$\exists\delta_2\left(<\dfrac{x_1-x_0}{2}\right)>0,\forall x\in U(x_1;\delta_2)\cap I$,有$f(x)\geq f(x_1)$.

取$x_3\in U_-^0(x_1;\delta_2)\cap I$,有$f(x_3)\geq f(x_1)$. 从而$\dfrac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}\leq 0$.

因此 $\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}\geq\dfrac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}$.

因为$f(x)$是严格凸的,又$x_0<x_2<x_3<x_1$, 有$\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}<\dfrac{f(x_1)-f(x_3)}{x_3-x_1}$,

矛盾.所以x_0为f在I上的唯一的极小值点.

P136/习题6.5/4

设f为区间I上严格凸函数.证明:若$x_0 \in I$为f的极小值点,

则x_0为f在I上的唯一的极小值点.

证3 对$\forall x \in I: x < x_0$,因为$f(x_0)$是极小值,$\exists x_a \in (x, x_0)$,使得 $f(x_a) \geq f(x_0)$.

又因为$f(x)$是严格凸的,对于$x < x_a < x_0$,有

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0 - x} < \frac{f(x_0)-f(x_a)}{x_0 - x_a} \leq 0,$$

从而 $f(x_0) < f(x)$.

对$\forall x \in I: x > x_0$, 因为$f(x_0)$是极小值,$\exists x_b \in (x_0, x)$,使得 $f(x_b) \geq f(x_0)$.

又因为$f(x)$是严格凸的,对于$x_0 < x_b < x$,有

$$0 \leq \frac{f(x_b)-f(x_0)}{x_b - x_0} < \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0},$$

从而 $f(x_0) < f(x)$.

因此对$\forall x \in I: x \neq x_0$,有$f(x_0) < f(x)$.所以$x_0$为$f$在$I$上的唯一的极小值点.

P136/习题6.5/4

设f为区间I上严格凸函数.证明:若$x_0 \in I$为f的极小值点,则x_0为f在I上的唯一的极小值点.

错误点分析:

(1) 错误认为函数f存在一阶导与二阶导.

(2) 没有掌握严格凸函数的定义.

(3) 表达逻辑不清晰,证明过程不完整.

P136/习题6.5/5(1)

应用凸函数概念证明:对任意实数a,b,有$\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \le \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{b}\right)$.

证 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$, 则 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}, f''(x)=\mathrm{e}^{x}>0$,

所以 $f(x)$ 在$\mathbb{R}$上为严格凸的. 根据凸函数的定义,

对于任意实数a,b,有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}a+\left(1-\frac{1}{2}\right)b\right) \le \frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b),$$

即 $$\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \le \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{b}\right).$$

P136/习题6.5/5(2) 应用凸函数概念证明：对任意非负实数a,b,有

$$2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge \arctan a+\arctan b.$$

证 设 $f(x)=\arctan x,\ x\ge 0$,则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\ f''(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\le 0,$$

所以 $f(x)$ 是$[0,+\infty)$上的凹函数. 根据凹函数的定义,

对于任意非负实数a,b,有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}a+\left(1-\frac{1}{2}\right)b\right)\ge \frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b),$$

即 $$\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge \frac{1}{2}\arctan a+\frac{1}{2}\arctan b,$$

也就是 $$2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge \arctan a+\arctan b.$$

P136/习题6.5/6 证明：$\sin\pi x \le \dfrac{\pi^2}{2}x(1-x)$，其中 $x\in[0,1]$.

证1 设 $f(x)=\sin\pi x-\dfrac{\pi^2}{2}x(1-x),\ x\in[0,1]$.

则 $f'(x)=\pi\cos\pi x-\dfrac{\pi^2}{2}(1-2x)$，$f''(x)=-\pi^2\sin\pi x+\pi^2=\pi^2(1-\sin\pi x)\ge 0$.

所以 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的凸函数. $\forall x\in[0,1],\exists\lambda\in[0,1]$，使得 $x=\lambda\cdot 0+(1-\lambda)\cdot 1$.

根据凸函数的定义，有 $f(x)=f\big(\lambda\cdot 0+(1-\lambda)\cdot 1\big)\le\lambda f(0)+(1-\lambda)f(1)=0$，

由此得 $\sin\pi x\le\dfrac{\pi^2}{2}x(1-x),\ x\in[0,1]$.

证2 设 $f(x)=\sin\pi x-\dfrac{\pi^2}{2}x(1-x),\ x\in[0,1]$.

则 $f'(x)=\pi\cos\pi x-\dfrac{\pi^2}{2}(1-2x)$，$f''(x)=-\pi^2\sin\pi x+\pi^2=\pi^2(1-\sin\pi x)\ge 0$.

所以 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的凸函数. $\forall x\in(0,1)$，有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$，

又 $f(0)=f(1)=0$，故 $\dfrac{f(x)}{x}\le 0$，从而 $f(x)\le 0,\ x\in(0,1)$.

由此得 $\sin\pi x\le\dfrac{\pi^2}{2}x(1-x),\ x\in[0,1]$.

P136/习题6.5/6 证明: $\sin \pi x \le \dfrac{\pi^2}{2} x(1-x)$, 其中 $x \in [0,1]$.

证3 设 $f(x) = \sin \pi x - \dfrac{\pi^2}{2} x(1-x), x \in [0,1]$.

由于 f 在 $[0,1]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数的最值定理知,

f 在 $[0,1]$ 上存在最大值.

$f'(x) = \pi \cos \pi x - \dfrac{\pi^2}{2}(1-2x)$, 令 $f'(x) = 0$, 得稳定点 $x = \dfrac{1}{2}$.

由于 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{\pi^2}{8} < 0$,

经比较得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为0, 从而 $f(x) \le 0$.

由此得 $\sin \pi x \le \dfrac{\pi^2}{2} x(1-x), x \in [0,1]$.

P136/习题6.5/6 证明：$\sin \pi x \le \dfrac{\pi^2}{2} x(1-x)$，其中 $x \in [0,1]$.

错误点分析：

(1) 没有通过设一个函数来研究.

(2) 直接利用书上例题的结论.

课本中的定义、定理、性质可以直接使用，

但例题、课后习题的结论在证明时不能直接使用.

P144/习题6.6(2) 按函数作图步骤,作函数$y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$的图像.

解 $f(x)$的定义域是$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$$y'=\frac{3x^2(1+x)^2-2x^3(1+x)}{2(1+x)^4}=\frac{3x^2+x^3}{2(1+x)^3},\ y''=\frac{(6x+3x^2)(1+x)^3-3(3x^2+x^3)(1+x)^2}{2(1+x)^6}=\frac{6x}{2(1+x)^4},$$

令$y'=0$,解得稳定点$x=-3,x=0$. 令$y''=0$,解得$x=0$.

列表讨论:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	不存在	$+$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	不存在	$-$	0	$+$
y	凹增	极大值 $-\frac{27}{8}$	凹减	不存在	凹增	拐点 $(0,0)$	凸增

BY GYH

P144/习题6.6(2) 按函数作图步骤,作函数$y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$的图像.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	不存在	$+$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	不存在	$-$	0	$+$
y	凹增	极大值 $-\frac{27}{8}$	凹减	不存在	凹增	拐点 $(0,0)$	凸增

y在$(-\infty,-3],(-1,+\infty)$上单调递增;
在$[-3,-1)$上单调递减.

y在$(-\infty,-1),(-1,0]$上是凹函数;
在$[0,+\infty)$上是凸函数.

$y(-3)=-\dfrac{27}{8}$是极大值,$(0,0)$是拐点.

由于$\lim\limits_{x\to-1}y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}=-\infty$,所以曲线有垂直渐近线$x=-1$.

由于$\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}=\infty$,所以曲线没有水平渐近线.

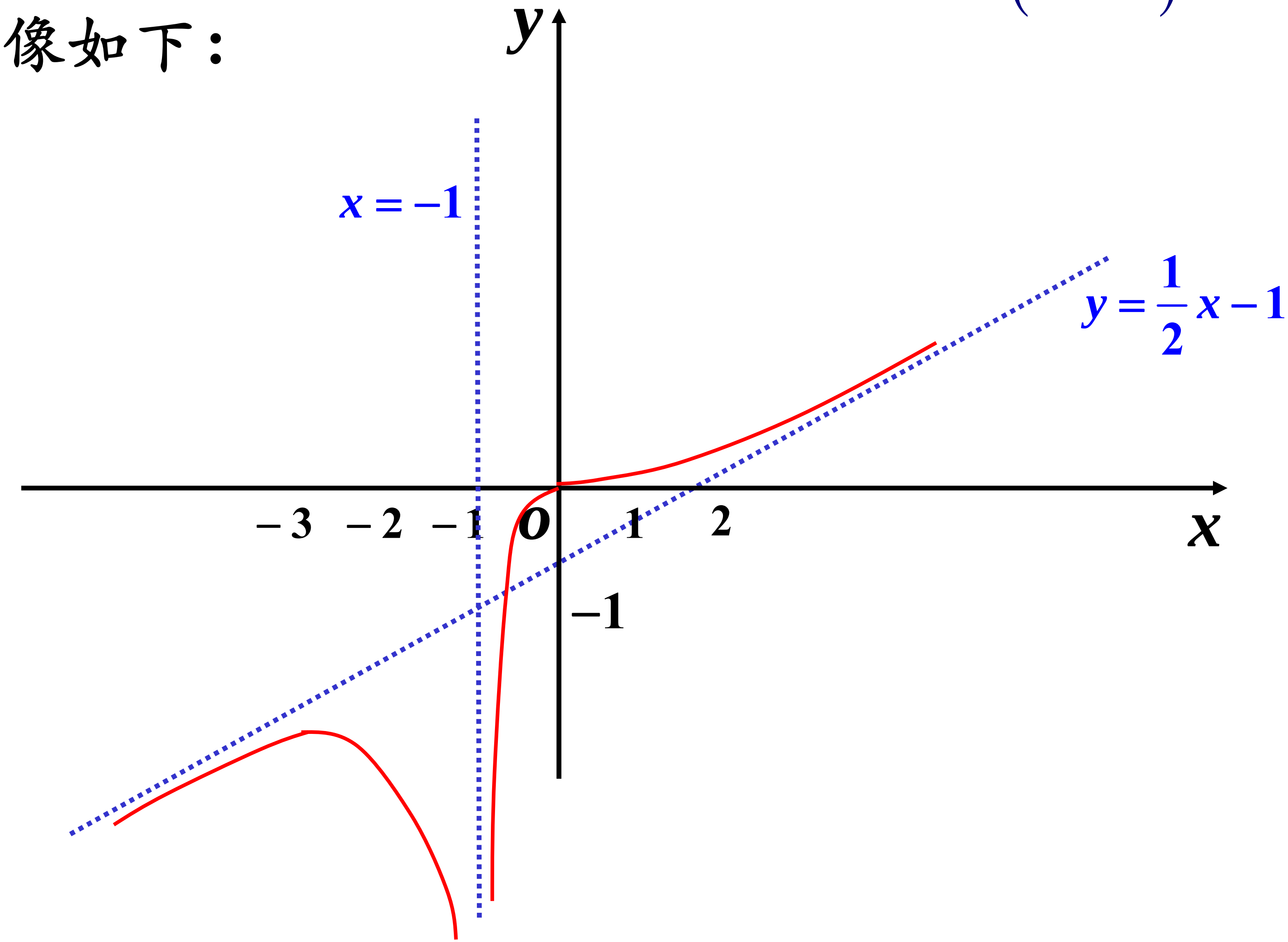
由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2(1+x)^2}=\dfrac{1}{2}$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(y-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(1+x)^2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-2x^2}{2(1+x)^2}=-1,$$

所以曲线有斜渐近线$y=\dfrac{1}{2}x-1$.

P144/习题6.6(2) 按函数作图步骤,作函数$y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$的图像.

函数图像如下:



P144/习题6.6(2) 按函数作图步骤,作函数$y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$的图像.

错误点分析:

(1) 没有求函数的凹凸区间与拐点.

(2) 没有列表讨论.

(3) 没有求渐近线.

(4) 渐近线概念不清楚,没有写出渐近线的名称.

(5) 只有过程没有图或只有图没有过程.

★★★

P147/第六章总练习题/1

证明：若$f(x)$在有限区间(a,b)上可导，且$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x)$，

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

证 记$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x)=c$.

令$F(x)=\begin{cases} c, & x=a \\ f(x), & a<x<b \\ c, & x=b \end{cases}$.

从而$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

根据罗尔中值定理知，$\exists\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$.

由于$F'(x)=f'(x), x\in(a,b)$，所以$f'(\xi)=0, \xi\in(a,b)$.

P147/第六章总练习题/2 证明：若$x>0$，则

$$(1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},\text{其中}\frac{1}{4}\le\theta(x)\le\frac{1}{2}.\quad(2)\lim_{x\to0^+}\theta(x)=\frac{1}{4},\ \lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}.$$

证 (1) 设$f(t)=\sqrt{t}$. 对$\forall x>0$, f在$[x,x+1]$上连续，在$(x,x+1)$内可导，

根据拉格朗日中值定理，有$f(x+1)-f(x)=f'(x+\theta(x)),0<\theta(x)<1$,

即 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},0<\theta(x)<1.$ 从而 $\theta(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{2}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}.$

由于 $\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{x^2}}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}<\theta(x)=\frac{\sqrt{x^2+x}}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}<\frac{x+\frac{1}{2}}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$

得证$\dfrac{1}{4}\le\theta(x)\le\dfrac{1}{2}$.

$$(2)\lim_{x\to0^+}\theta(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}+\frac{1}{4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

P147/第六章总练习题/4

设f在$[a,b]$上三阶可导,证明存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)\big(f'(a)+f'(b)\big)-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

证1 作辅助函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)\big(f'(a)+f'(x)\big)$,

$$G(x)=(x-a)^3.$$

从而 $F'(x)=\frac{1}{2}\big(f'(x)-f'(a)\big)-\frac{1}{2}f''(x)(x-a)$, $G'(x)=3(x-a)^2$,

$$F''(x)=-\frac{1}{2}f'''(x)(x-a), G''(x)=6(x-a).$$

$F(x)$与$G(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件,故$\exists\eta\in(a,b)$,使得 $\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)}$.

$F'(x)$与$G'(x)$在$[a,\eta]$上满足柯西中值定理的条件,故$\exists\xi\in(a,\eta)$,使得 $\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)}=\frac{F'(\eta)-F'(a)}{G'(\eta)-G'(a)}=\frac{F''(\xi)}{G''(\xi)}$,

即 $$\frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)\big(f'(a)+f'(b)\big)}{(b-a)^3}=\frac{-\frac{1}{2}f'''(\xi)(\xi-a)}{6(\xi-a)},$$

因此 $f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)\big(f'(a)+f'(b)\big)-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$, $\xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$.

★★★

P147/第六章总练习题/4

设f在$[a,b]$上三阶可导,证明存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)\big(f'(a)+f'(b)\big)-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

证2 令 $f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)\big(f'(a)+f'(b)\big)+\frac{K}{12}(b-a)^3=0$, 其中$K$为待定常数.

作辅助函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)\big(f'(a)+f'(x)\big)+\frac{K}{12}(x-a)^3$.

从而 $F'(x)=\frac{1}{2}\big(f'(x)-f'(a)\big)-\frac{1}{2}f''(x)(x-a)+\frac{K}{4}(x-a)^2$.

由于$F(a)=F(b)=0$, $F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,

根据罗尔中值定理知, $\exists\eta\in(a,b)$,使得 $F'(\eta)=0$.

由于$F'(a)=F'(\eta)=0$, $F(x)$在$[a,\eta]$上连续,在(a,η)上可导,

根据罗尔中值定理知, $\exists\xi\in(a,\eta)$,使得 $F''(\xi)=0$.

又$F''(x)=-\frac{1}{2}f'''(x)(x-a)+\frac{K}{2}(x-a)$,从而 $-\frac{1}{2}f'''(\xi)(\xi-a)+\frac{K}{2}(\xi-a)=0$,

即$K=f'''(\xi)$. 所以 $f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)\big(f'(a)+f'(b)\big)-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$, $\xi\in(a,b)$.

P147/第六章总练习题/5

设$f(x)=\ln(1+x)$应用拉格朗日中值定理,试证:对$x>0$,有$0<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<1.$

证 设$f(t)=\ln(1+t)$. 易知$f(t)$在$[0,x]$上连续,在$(0,x)$上可导,

根据拉格朗日中值定理知, $\exists\xi\in(0,x)$,使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$,

即 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}.$

由于$0<\xi<x$,因此 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}<\dfrac{x}{1+0}.$

从而 $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\ln(1+x)}<\dfrac{1+x}{x},$

即 $0<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<1, x>0.$

★★

P147/第六章总练习题/7(1) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to1^-}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$. $\left(0^0\right)$

解

$$\lim_{x\to1^-}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}=\lim_{x\to1^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(1-x)}\ln\left(1-x^2\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{\ln(1-x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)'}{\left(\ln(1-x)\right)'}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{\frac{-1}{1-x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x(1-x)}{1-x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x}{1+x}}=\mathrm{e}.$$

★★

P147/第六章总练习题/7(2) 求不定式极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解1 $$\lim_{x\to0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^x+xe^x+\dfrac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{3}{2}.$$

解2 $$\lim_{x\to0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+x)^2-1}{2x(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+x)^2-1}{2x}=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+x)^2+2e^x(1+x)}{2}=\frac{3}{2}.$$

解3 $$\lim_{x\to0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\big(1+x+o(x)\big)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

★★

P147/第六章总练习题/7(3)

求不定式极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0.$

此题虽然是$\dfrac{0}{0}$型不定式极限,但不能使用洛必达法则求极限. 由于极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在.

P147/第六章总练习题/9 设$k>0$,试问k为何值时,方程$\arctan x-kx=0$有正实根.

解 设$f(x)=\arctan x-kx$. 则$f(0)=0$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-k=\dfrac{1-k-kx^2}{1+x^2}$.

当$k\ge 1$时, $f'(x)<0, x>0$. 又f在$[0,+\infty)$上连续, 因此f在$[0,+\infty)$上严格递减.

于是$f(x)<f(0)=0, x>0$. 从而方程无正实根.

当$k<1$时,由$f'(x)=0$,解得$x_0=\sqrt{\dfrac{1-k}{k}}$.从而当$x\in[0,x_0)$时, $f'(x)>0$.

又f在$[0,x_0]$上连续, 因此f在$[0,x_0]$上严格递增.于是$f(x_0)>f(0)=0$.

又因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, 因此$\exists M>0,\forall x>M\,(M>x_0)$,有$f(x)<0$.

取$x_1>M$,则$f(x_1)<0$. 又f在$[x_0,x_1]$上连续, 根据根的存在定理知,

$\exists\xi\in(x_0,x_1)$,使得$f(\xi)=0$, 即ξ是方程$\arctan x-kx=0$的一个正实根.

综上所述, 当且仅当$0<k<1$时,方程$\arctan x-kx=0$有正实根.

P147/第六章总练习题/11 讨论函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

(1)在$x=0$点是否可导？ (2)是否存在$x=0$的一个邻域,使f在该邻域上单调?

解 (1) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}$,

因此f在$x=0$可导.

(2) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$,

当$x_k=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}(k\in\mathbb{N}_+)$时， $f'(x_k)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}>0$;

当$y_k=\dfrac{1}{2k\pi}(k\in\mathbb{N}_+)$时, $f'(y_k)=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}<0$.

因此对于$x=0$的任一邻域,在其中必有无限多个点处导数为负,

也必有无限多个点处导数为正, 所以在$x=0$的任一邻域, f不可能是单调的.

P147/第六章总练习题/12

设函数f在$[a,b]$上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$. 证明存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 将$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$分别在$a,b$展开为具有二阶拉格朗日型余项的泰勒公式：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2,\quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2},$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2,\quad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b.$$

上面两式相减得 $|f(b)-f(a)|=|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|\frac{(b-a)^2}{8}\le\left(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\right)\frac{(b-a)^2}{8}$.

设$|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则 $|f(b)-f(a)|\le|f''(\xi)|\frac{(b-a)^2}{4}$，

从而 $|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|,\xi\in(a,b)$.

P147/第六章总练习题/13

设函数f在$[0,a]$上具有二阶导数,且$|f''(x)| \le M$, f在$(0,a)$上取得最大值.试证

$$|f'(0)| + |f'(a)| \le Ma.$$

证 由于f在$(0,a)$上取得最大值,记$f(x_0) = \max\limits_{0<x<a} f(x)$.

由于$f(x_0)$是最大值,从而也是极大值,根据费马定理知,$f'(x_0) = 0$.

f'在$[0,x_0]$与$[x_0,a]$上分别满足拉格朗日中值定理的条件,所以

$f'(x_0) - f'(0) = f''(\xi_1)x_0, 0 < \xi_1 < x_0$, $f'(a) - f'(x_0) = f''(\xi_2)(a - x_0), x_0 < \xi_1 < a.$

于是

$$|f'(0)| + |f'(a)| = \left|f'\left(x_0\right) - f''\left(\xi_1\right)x_0\right| + \left|f''\left(\xi_2\right)\left(a - x_0\right) + f'\left(x_0\right)\right|$$

$$= \left|f''\left(\xi_1\right)x_0\right| + \left|f''\left(\xi_2\right)\left(a - x_0\right)\right| \le Mx_0 + M\left(a - x_0\right) = Ma.$$

★★★

P147/第六章总练习题/14

设f在$[0,+\infty)$上可微，且$0 \le f'(x) \le f(x)$, $f(0)=0$.

证明：在$[0,+\infty)$上$f(x) \equiv 0$.

证 作辅助函数$F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$, $x \in [0,+\infty)$, 则$F(x) \ge 0$.

由于 $F'(x) = -\mathrm{e}^{-x}f(x) + \mathrm{e}^{-x}f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(f'(x) - f(x)\right) \le 0$,

又$F(x)$在$[0,+\infty)$上连续，因此$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减.

因为$F(0)=0$,所以 $F(x) \le F(0) = 0$, $x \ge 0$.

从而$F(x) \equiv 0$, $x \in [0,+\infty)$, 即$f(x) \equiv 0$, $x \in [0,+\infty)$.

P147/第六章总练习题/15

设$f(x)$满足$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$，其中$g(x)$为任一函数.
证明：若$f(x_0)=f(x_1)=0(x_0<x_1)$，则f在$[x_0,x_1]$上恒等于0.

证 利用反证法证明. 假设f在$[x_0,x_1]$上不恒等于0.

已知f在$[x_0,x_1]$上连续，根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理知，

f在$[x_0,x_1]$上取得最大值与最小值.

由于$f(x_0)=f(x_1)$，故两个最值中至少有一个在(x_0,x_1)上取得.

不妨假设$\xi\in(x_0,x_1)$是最大值点. 从而$f(\xi)>0, f'(\xi)=0, f''(\xi)\le 0$.

已知$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$，令$g(x)=0$，则 $f''(x)=f(x)$.

于是$f''(\xi)=f(\xi)>0$. 产生矛盾. 命题得证.

同理可证$\xi\in(x_0,x_1)$是最小值点的情形.

P147/第六章总练习题/16

证明:定圆内接正n边形面积将随n的增加而增加.

证1 设定圆的半径为r,则其内接正n边形的面积为$S(n)=\frac{1}{2}r^2 n\sin\frac{2\pi}{n}, n\ge 3.$

令 $f(x)=\frac{1}{2}r^2 x\sin\frac{2\pi}{x}, x\ge 3.$ 则 $f'(x)=\frac{1}{2}r^2\left(\sin\frac{2\pi}{x}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x}\right).$

当$3\le x\le 4$时, $\frac{\pi}{2}\le\frac{2\pi}{x}\le\frac{2\pi}{3}$. 从而 $\sin\frac{2\pi}{x}>0, \cos\frac{2\pi}{x}\le 0$.因此 $f'(x)>0.$

当$x>4$时, $f'(x)=\frac{1}{2}r^2\cos\frac{2\pi}{x}\left(\tan\frac{2\pi}{x}-\frac{2\pi}{x}\right)$, 从而$\cos\frac{2\pi}{x}>0.$

令$g(t)=\tan t-t, 0<t<\frac{\pi}{2}$. $g'(t)=\sec^2 t-1>0.$

由于$g(t)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上连续,故$g(t)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上严格递增.

从而$g(t)>g(0)=0, 0<t<\frac{\pi}{2}$. 因此$f'(x)>0, x>4.$

所以$f(x)$在$[3,+\infty)$上严格递增,由此得$S(n)$随n的增加而增加.

P147/第六章总练习题/16

证明:定圆内接正n边形面积将随n的增加而增加.

证2 设定圆的半径为r,则其内接正n边形的面积为

$$S(n)=r^2 n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n},n\ge 3.$$

令$f(x)=r^2 x\sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x},x\ge 3.$ 则

$$f'(x)=r^2\sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}-r^2\frac{\pi}{x}\cos^2\frac{\pi}{x}+r^2\frac{\pi}{x}\sin^2\frac{\pi}{x}$$

$$=r^2\cos^2\frac{\pi}{x}\left(\tan\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\right)+r^2\frac{\pi}{x}\sin^2\frac{\pi}{x},x\ge 3.$$

令$g(t)=\tan t-t,0<t\le\frac{\pi}{3}$. 由于$g'(t)=\sec^2 t-1>0,0<t\le\frac{\pi}{3}$, 又$g(t)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上连续,

故$g(t)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上严格递增,从而$g(t)>g(0)=0,\ 0<t\le\frac{\pi}{3}$. 所以$f'(x)>0,x\ge 3.$

由于$f(x)$在$[3,+\infty)$上连续,故$f(x)$在$[3,+\infty)$上严格递增.

由此得$S(n)$随n的增加而增加.

P147/第六章总练习题/16

证明：定圆内接正n边形面积将随n的增加而增加.

证3 设定圆的半径为r,则其内接正n边形的面积为$S(n)=\frac{1}{2}r^2 n\sin\frac{2\pi}{n}, n\geq 3.$

令 $f(x)=\frac{1}{2}r^2 x\sin\frac{2\pi}{x}, x\geq 3.$ 则

$$f'(x)=\frac{1}{2}r^2\left(\sin\frac{2\pi}{x}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x}\right),\quad f''(x)=\frac{1}{2}r^2\frac{4\pi^2}{x^2}\sin\frac{2\pi}{x}>0, x\geq 3.$$

由于$f'(x)$在$[3,+\infty)$上连续,故$f'(x)$在$[3,+\infty)$上严格递增.

又$f'(3)=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}\right)>0$, 因此 $f'(x)>0, x\geq 3.$

由于$f(x)$在$[3,+\infty)$上连续,故$f(x)$在$[3,+\infty)$上严格递增.

由此得$S(n)$随n的增加而增加.

P147/第六章总练习题/17

证明：f为I上凸函数的充要条件是对任何$x_1,x_2\in I$，

$$\text{函数}\ \varphi(\lambda)=f\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)\ \text{为}[0,1]\text{上的凸函数.}$$

证 (必要性) $\forall x_1,x_2\in I,\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1],\forall\mu\in[0,1]$，有

$$\varphi\big(\mu\lambda_1+(1-\mu)\lambda_2\big)=f\Big(\big(\mu\lambda_1+(1-\mu)\lambda_2\big)x_1+\big(1-\mu\lambda_1-(1-\mu)\lambda_2\big)x_2\Big)$$

$$=f\Big(\mu\big(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2\big)+(1-\mu)\big(\lambda_2x_1+(1-\lambda_2)x_2\big)\Big)$$

$$\le\mu f\big(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2\big)+(1-\mu)f\big(\lambda_2x_1+(1-\lambda_2)x_2\big)$$

$$=\mu\varphi(\lambda_1)+(1-\mu)\varphi(\lambda_2).$$

因此$\varphi(\lambda)$为$[0,1]$上的凸函数.

(充分性) $\forall x_1,x_2\in I,\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)=\varphi(\lambda)=\varphi\big(\lambda\cdot1+(1-\lambda)\cdot0\big)$$

$$\le\lambda\varphi(1)+(1-\lambda)\varphi(0)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

因此f为I上的凸函数.

P147/第六章总练习题/19

设f为$(-\infty,+\infty)$上的二阶可导函数.若f在$(-\infty,+\infty)$上有界,则存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$,使得$f''(\xi)=0$.

证1 若$f'(x)\equiv 0, x\in(-\infty,+\infty)$,则结论显然成立.

若$f'(x)\not\equiv 0, x\in(-\infty,+\infty)$,则$\exists x_0\in(-\infty,+\infty)$,使得$f'(x_0)\neq 0$.不妨设$f'(x_0)>0$.

f在$[x,2x]$或$[2x,x](x\neq 0)$上满足拉格朗日中值定理的条件,所以有

$$f(2x)-f(x)=f'(\xi_x)x,\quad \xi_x\text{介于}x\text{与}2x\text{之间}.$$

由于f在$(-\infty,+\infty)$上有界,从而

$$\lim_{x\to+\infty}f'(\xi_x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}f'(\xi_x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0.$$

根据函数极限的局部保号性知,$\exists x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,满足$x_1<x_0<x_2$,使得

$$f'(x_1)<f'(x_0),\ f'(x_2)<f'(x_0).$$

f'在$[x_1,x_0]$与$[x_0,x_2]$上分别满足拉格朗日中值定理的条件,所以有

$$\frac{f'(x_0)-f'(x_1)}{x_0-x_1}=f''(\alpha)>0,\ \alpha\in(x_1,x_0),\quad \frac{f'(x_2)-f'(x_0)}{x_2-x_0}=f''(\beta)<0,\ \beta\in(x_0,x_2).$$

根据达布定理知,$\exists\xi\in(\alpha,\beta)\subset(-\infty,+\infty)$,使得 $f''(\xi)=0$.

P147/第六章总练习题/19

设f为$(-\infty,+\infty)$上的二阶可导函数.若f在$(-\infty,+\infty)$上有界,则存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$,使得$f''(\xi)=0$.

证2 若对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f''(x)\neq 0$, 根据达布定理知, $f''(x)>0$或$f''(x)<0$.

不妨设$f''(x)>0$. 从而$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调递增.

所以$\exists x_0\in(-\infty,+\infty)$,使得$f'(x_0)\neq 0$. 对$\forall x\neq x_0$,根据泰勒公式知,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2,\ \xi\text{介于}x\text{与}x_0\text{之间}.$$

已知$f''(x)>0$,因此 $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

若$f'(x_0)>0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\geq\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)=+\infty$.

若$f'(x_0)<0$,则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\geq\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)=+\infty$.

这与f在$(-\infty,+\infty)$上有界矛盾. 结论得证.

P147/第六章总练习题/19

设f为$(-\infty,+\infty)$上的二阶可导函数.若f在$(-\infty,+\infty)$上有界,则存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$,使得$f''(\xi)=0$.

证3 若对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f''(x)\neq 0$, 根据达布定理知, $f''(x)>0$或$f''(x)<0$.

不妨设$f''(x)>0$.则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为严格凸函数,且$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格递增.

所以$\exists x_0\in(-\infty,+\infty)$,使得$f'(x_0)\neq 0$.对$\forall x\neq x_0$,根据可导凸函数的充要条件知,

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

若$f'(x_0)>0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\geq \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)=+\infty.$

若$f'(x_0)<0$,则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\geq \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)=+\infty.$

这与f在$(-\infty,+\infty)$上有界矛盾. 结论得证.