第二十一章　重积分

第五节　三重积分

1. 三重积分的概念

2.三重积分的计算

定理： 设函数 $f(x,y,z)$ 在有界封闭区域 V 上可积. 变换

$$T:\{x=x(u,v,w),y=y(u,v,w),z=z(u,v,w)\}$$

将 uvw 空间中由按片光滑的封闭曲面所围成的区域 V', 一对一地映射成 xyz 空间中的封闭区域 V, 函数 $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ 和 $z(u,v,w)$在 V 内具有一阶连续偏导数, 且它们的行列式

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则

$$\iiint_V f(x,y,z)dV=\iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|dV'.$$

柱坐标变换

设函数 $f(x,y,z)$ 在有界封闭区域 V 上可积. 变换 $T:\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$

称为柱坐标变换, 此时

$$J(r,\theta,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

则

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz.$$

例题5： 求三重积分

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz,$$

其中 V 是以曲面 $2(x^2+y^2)=z$ 和 $z=4$ 为边界的区域.

球坐标变换

设函数 $f(x,y,z)$ 在有界封闭区域 V 上可积. 变换

$$T:\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi, \end{cases}$$

称为球坐标变换, 此时

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}=r^2\sin\varphi,$$

则

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{V'} f(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

例题6： 求三重积分

$$\iiint\limits_V ze^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz,$$

其中 V 是球体 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ 在 $z \geq 0$ 的区域.

例题7： 求由圆锥体

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

和球体

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$$

所确定的立体体积.

例题8： 求椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

的体积.

本节作业

作业：

第 234 页：第5题.