专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

第十四届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学 B 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 空间直角坐标系中两平面 $x+y+z-3=0$ 和 $x-2y-z+2=0$ 的交线为 L. 求过点 $(1,2,3)$ 并与直线 L 垂直的平面方程.

解答. 两平面的法向量分别为

$$(1,1,1),\ (1,-2,-1).$$

它们的交线 L 的直线方向 v 垂直于这两个平面的法向量，故

$$v=(1,1,1)\times(1,-2,-1)=(1,2,-3).$$

…………………………………………………………… (5 分)

向量 v 也是所求的与 L 垂直的平面的法向量. 于是，所求平面方程为

$$(x-1)+2(y-2)-3(z-3)=0,$$

$$x+2y-3z+4=0.$$

…………………………………………………………… (15 分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{n^2}=b$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^5}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ 存在并求其值.

解答. 对于 $n\geqslant 1$, 记 $A_n=\dfrac{a_n}{n^2}-a$, $B_n=\dfrac{b_n}{n^2}-b$. 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=0$. 从而 $\{A_n\},\{B_n\}$ 有界. 记 $M=\sup\limits_{n\geqslant1}\big(|A_n|+|B_n|\big)+|a|+|b|$.

.... (4 分)

由 Stolz 公式或利用定积分, 我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n}k^2(n-k)^2=\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^3}-2\sum_{k=0}^{n}\frac{k^3}{n^4}+\sum_{k=0}^{n}\frac{k^4}{n^5}\Big)$$
$$=\ \frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{30}.$$

.... (8 分)

另一方面, 对于 $n\geqslant 2$, 有

$$\Big|\frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}-\frac{ab}{n^5}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2-\frac{a_0b_n+a_nb_0}{n^5}\Big|$$
$$=\ \Big|\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2\Big(A_kB_{n-k}+bA_k+aB_{n-k}\Big)\Big|$$
$$\leqslant\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\big(|A_k|+|B_k|\big).$$

.... (12 分)

由 Stolz 公式,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\big(|A_k|+|B_k|\big)=\lim_{n\to+\infty}M\big(|A_n|+|B_n|\big)=0.$$

因此,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=ab\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2=\frac{ab}{30}.$$

.... (15 分)

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 与 A 可交换, 其元素均为正整数且行列式为 1. 证明存在正整数 k 使得 $B = A^k$.

证明. 令

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

由于 B 与 A 可交换, 可得 $c = b, d = a - b$. B 的元素均为正整数, 故 a, b 为正整数且 $a > b$. 再由 $\det B = 1$ 得到 $a^2 - ab - b^2 = 1$.

.... (5 分)

若 $b = 1$, 则由 $a^2 - ab - b^2 = 1$ 易得 $a = 2$, 因此

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

若 $b > 1$, 考察矩阵

$$B_1 = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2b-a \\ 2b-a & 2a-3b \end{pmatrix}.$$

令 $a_1 = a - b, b_1 = 2b - a$, 则有 $2a - 3b = a_1 - b_1$, 即

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 - b_1 \end{pmatrix}.$$

显然 a_1 为正整数. 注意到 $a^2 - ab - b^2 = 1$, 若 $a \geqslant 2b$, 则有 $1 + b^2 = a^2 - ab = a(a-b) \geqslant 2b^2$, 即 $b^2 \leqslant 1$, 矛盾, 由此得到 $b_1 = 2b - a$ 也是正整数. 显然 $a_1^2 - a_1b_1 - b_1^2 = \det B_1 = (\det A)^{-1}\det B = 1$, 即 $a_1(a_1 - b_1) = 1 + b_1^2 > 0$, 从而 $a_1 > b_1$. 这表明矩阵 B_1 中的元素 a_1, b_1 满足矩阵 B 中元素 a, b 所满足的条件, 但是 $b_1 = b - (a - b) < b$. 若 $b_1 > 1$, 则类似地矩阵

$$B_2 = A^{-1}B_1 = (A^{-1})^2B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

中的元素 a_2, b_2 也满足矩阵 B 中元素 a, b 所满足的条件, 但是 $b_2 < b_1 < b$. 继续进行下去, 通过左乘 A^{-1} 有限次, 比如 s 次后可以使得得到的矩阵

$$B_s = (A^{-1})^sB = \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ b_s & a_s - b_s \end{pmatrix}$$

中的元素 a_s, b_s 满足 $a_s > b_s > 0, a_s^2 - a_s b_s - b_s^2 = 1$ 且 b_s 为最小正整数, 即 $b_s = 1$.

. . . . (12 分)

由前面的证明得到 $B_s = A$, 从而 $B = A^{s+1}$, 令 $k = s + 1$ 即可.

. . . . (15 分)

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & y_1 & y_2 \\ y_2 & \frac{8}{3} & y_1 \\ y_1 & y_2 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ 为复数域上的两个 3 阶方阵，其中 x, y_1, y_2 为未知复数. 若已知 A 与 B 有相同的 Jordan 标准型, 求 x, y_1, y_2.

解答. 1) 首先令 $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则有$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H^3 = E$. 于是 $B = \frac{8}{3}E + y_1 H + y_2 H^2$. 由于 $|\lambda E - H| = \lambda^3 - 1$, 故 H 的特征值为 $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$, 它们各不相同, 因此 H 可对角化, 即

$$H \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\frac{2\pi}{3}} & \\ & & e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}.$$

结果 B 也可对角化,

$$B \sim \begin{pmatrix} f(1) & & \\ & f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) & \\ & & f(e^{i\frac{4\pi}{3}}) \end{pmatrix},$$

其中$f(t) = \frac{8}{3} + y_1 t + y_2 t^2$.

.... (5 分)

2) 现由 $A \sim B$ 可知：A 可相似对角化. 直接计算可知 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1$(2 重), $\lambda_2 = 6$(1 重). 故有 $\lambda_1 = 1$ 的几何重数为 2, 即相应于 $\lambda_1 = 1$ 的 A 的特征向量空间的维数为 2. 由 $(A - \lambda_1 E)z = 0$ 知：秩 $(A - E) = 1$.

将$A - E$ 进行初等行变换，将之化为行阶梯型：

$$A - 1E = \begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & x \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

结果，要使秩$(A - E) = 1$ 当且仅当$x - 4 = 0$, 从而求得$x = 4$.

.... (10 分)

3) 下面求y_1, y_2. 现有 $A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$. 故有 $A \sim B \Leftrightarrow B$ 的三个特征值为$1, 1, 6$. 由此得下列三种情形：

$$(I)\begin{cases} f(1) &= 1, \\ f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) &= 1, \\ f(e^{i\frac{4\pi}{3}}) &= 6; \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} f(1) &= 1, \\ f(e^{i\frac{4\pi}{3}}) &= 1, \\ f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) &= 6; \end{cases}$$

$$(III)\begin{cases} f(1) &= 6, \\ f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) &= 1, \\ f(e^{i\frac{4\pi}{3}}) &= 1; \end{cases}$$

对情形(I), 解之得$\begin{cases} y_1 &= -\frac{5}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i \\ y_2 &= -\frac{5}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i \end{cases}$; 对情形$(II)$, 解之得$\begin{cases} y_1 &= -\frac{5}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i \\ y_2 &= -\frac{5}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i \end{cases}$;

对情形(III), 解之得$\begin{cases} y_1 &= \frac{5}{3} \\ y_2 &= \frac{5}{3}. \end{cases}$

综上所述，本题所求的x, y_1, y_2 共有三组解：

第一组为$\begin{cases} x &= 4, \\ y_1 &= -\frac{5}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i, \\ y_2 &= -\frac{5}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i; \end{cases}$

第二组为$\begin{cases} x &= 4, \\ y_1 &= -\frac{5}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i, \\ y_2 &= -\frac{5}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i; \end{cases}$

第三组为$\begin{cases} x &= 4, \\ y_1 &= \frac{5}{3}, \\ y_2 &= \frac{5}{3}; \end{cases}$

....（20 分）

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$, $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)\ (n\geqslant 0)$. 证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$ 收敛并求它的和.

证明. 我们有 $\delta>0$ 使得

$$\begin{aligned}
1 &= (1-x-x^2)f(x)=(1-x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2} \\
&= a_0+(a_1-a_0)x+\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+2}-a_{n+1}-a_n)x^{n+2}, \qquad \forall\,|x|<\delta.
\end{aligned}$$

…………………………………………………………………………… (5 分)

因此, $a_0=1$, $a_1=a_0$,

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, \qquad \forall\, n\geqslant 0.$$

从而易见 $a_n\geqslant n$ 进而 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

…………………………………………………………………………… (10 分)

另一方面,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n\cdot a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_n}{a_n\cdot a_{n+2}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{m}\frac{a_{n+1}}{a_n\cdot a_{n+2}} \\
=\ &\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{m+1}}-\frac{1}{a_{m+2}}, \qquad \forall\, m\geqslant 2.
\end{aligned}$$

因此, 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n\cdot a_{n+2}}$ 收敛且和为 $\dfrac{1}{a_0}+\dfrac{1}{a_1}=2$.

…………………………………………………………………………… (15 分)

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 证明: (1) 对任意 $0 < a < 1$, 存在唯一实数 $b > 1$ 满足 $a - \ln a = b - \ln b$; (2) 对于上述数对 a, b 有 $ab < 1$; (3) 对于上述数对 a, b 有 $b + \ln a > 1$.

证明. 设 $f(x) = x - \ln x$, 它是定义在 $(0, +\infty)$上的连续函数.

(1) 注意到 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 于是该函数在 $(0, 1]$ 上严格递减, 在 $[1, +\infty)$ 上严格递增, 并且 $f((0, 1]) = f([1, +\infty)) = [1, +\infty)$. 于是, 对任意 $0 < a < 1$, 存在唯一实数 $b > 1$ 满足 $a - \ln a = b - \ln b$.

. . . . (6 分)

(2) 令 $h(a) = f\left(\frac{1}{a}\right) - f(a)$ $(a \in (0, 1])$. 由 (1) 的讨论, 我们只要证明对任何 $a \in (0, 1)$ 成立 $h(a) > 0$. 如果证明了这一点, 则当 $0 < a < 1$ 时有 $f\left(\frac{1}{a}\right) > f(a)$. 因为 $f(b) = f(a)$ 并且函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上严格递增, 于是 $b < \frac{1}{a}$.

具体地, 我们有 $h(1) = 0$, 而

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{a} - \ln\frac{1}{a} - a + \ln a\right) = -\frac{1}{a^2} - 1 + \frac{2}{a} = -\frac{(a-1)^2}{a^2} < 0,\ 0 < a < 1.$$

因此, 对任何 $a \in (0, 1)$ 成立 $h(a) > 0$.

. . . . (14 分)

(3) 类似于 (2), 令 $g(a) = f(1 - \ln a) - f(a)$ $(a \in (0, 1])$. 我们只要证明对任何 $a \in (0, 1)$ 成立 $g(a) < 0$. 即

$$1 - a < \ln(1 - \ln a), \qquad \forall a \in (0, 1).$$

这等价于

$$1 - e^{-x} < \ln(1 + x), \qquad \forall x > 0.$$

由中值定理, 对于 $x > 0$, 我们有 $0 < \eta < \xi < x$ 使得

$$\ln(1 + x) - 1 + e^{-x} = \left(\frac{1}{1 + \xi} - e^{-\xi}\right)x = \frac{(e^{\eta} - 1)x\xi}{(1 + \xi)e^{\xi}} > 0.$$

. . . . (20 分)