Ch7 实数的完备性

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周四下午2点至4点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年03月28日

BY GYH

- 实数集完备性的基本定理
  - 确界原理
  - 单调有界定理
  - 致密性定理
  - 柯西收敛准则
  - 区间套定理
  - 聚点定理
  - 有限覆盖定理

重要定义

闭区间套

设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 具有如下性质：

1. $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n = 1, 2, \cdots$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套，简称区间套.

重要定义

聚点

设S为数轴上的点集,ξ为定点(它可以属于S,也可以不属于S).
若ξ的任何邻域都含有S中无穷多个点,则称ξ为点集S的一个聚点.

对于点集S,若点ξ的任何ε邻域都含有S中异于ξ的点,即
$U^{\circ}(\xi;\varepsilon)\cap S \neq \varnothing$,则称$\xi$为点集$S$的一个聚点.

若存在各项互异的收敛数列$\{x_n\}\subset S$,则其极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$
称为S的一个聚点.

重要定义

开覆盖、无限(有限)开覆盖

设S为数轴上的点集,H为开区间的集合(即H的每一个元素都是形如(α,β)的开区间).若S中任何一点都含在H中至少一个开区间内,则称H为S的一个开覆盖,或称H覆盖S.若H中开区间的个数是无限(有限)的,则称H为S的一个无限开覆盖(有限开覆盖).

重要定理

确界原理

设S为非空数集.若 S 有上界,则S必有上确界;若 S 有下界,则 S 必有下确界.

单调有界定理

在实数系中,单调有界数列必有极限.

重要定理

致密性定理

任何有界数列必有收敛子列.

柯西收敛准则

数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：

$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}_+$，$\forall n, m > N$，有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

重要定理

区间套定理

若$\{[a_n, b_n]\}$是一个闭区间套，则存在唯一的实数ξ，使得$\xi \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$，即$a_n \le \xi \le b_n$, $n = 1, 2, \cdots$.

区间套定理推论

设$\{[a_n, b_n]\}$是一个区间套，$\xi \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$.

则对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, $\forall n > N$，有 $[a_n, b_n] \subset U(\xi; \varepsilon)$.

重要定理

聚点定理

实数轴上的任一有界无限点集至少有一个聚点.

有限覆盖定理

设H是$[a,b]$的一个(无限)开覆盖,则从H中可选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$.

相关结论

设 $\{(a_n, b_n)\}$ 是一列开区间，满足条件：

(1) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_2 < b_1$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

则存在唯一的实数 ξ，使得 $\xi \in (a_n, b_n)$, $n = 1, 2, \cdots$.

任何有限数集都没有聚点.

闭区间 $[a,b]$ 的全体聚点的集合是 $[a,b]$ 本身.

若单调数列 $\{x_n\}$ 存在聚点，则必是唯一的，且为 $\{x_n\}$ 的确界.

P155/习题7.1/1

证明数集$\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}$有且只有两个聚点$\xi_1=-1$和$\xi_2=1$.

证明存在两个聚点

证 记$S=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}$，$x_n=(-1)^{2n-1}+\frac{1}{2n-1}$，$y_n=(-1)^{2n}+\frac{1}{2n}$.

则$\{x_n\}\subset S$，$\{y_n\}\subset S$，且数列$\{x_n\}$各项互异，$\{y_n\}$各项互异，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^{2n-1}+\frac{1}{2n-1}\right)=-1$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^{2n}+\frac{1}{2n}\right)=1$，

根据聚点的定义知，$\xi_1=-1$和$\xi_2=1$是数集S的两个聚点.

证明两个聚点的唯一性

对$\forall\xi\neq-1,1$，取$\varepsilon_0=\min\left\{\frac{|\xi-1|}{2},\frac{|\xi+1|}{2}\right\}$，当$n>\frac{1}{\varepsilon_0}$，即$\frac{1}{n}<\varepsilon_0$时，有

$$\left|\xi-\left((-1)^n+\frac{1}{n}\right)\right|\geq\left|\xi-(-1)^n\right|-\frac{1}{n}\geq2\varepsilon_0-\varepsilon_0=\varepsilon_0,$$

从而当$n>\frac{1}{\varepsilon_0}$时，$(-1)^n+\frac{1}{n}\notin U(\xi;\varepsilon_0)$，即在$U(\xi;\varepsilon_0)$上至多含有$S$中有限多个点，

于是ξ不是S的聚点. 因此，数集S有且只有两个聚点$\xi_1=-1$和$\xi_2=1$.

P155/习题7.1/4

试举例说明：在有理数集上，确界原理、单调有界定理、聚点定理和柯西收敛准则一般都不能成立.

解 记 $S=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. 则$S$是有理数集，且$S$非空有上界，根据确界原理，

数集S存在上确界$\sup S=\mathrm{e}$，但$\sup S=\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}$.

记 $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. 则$\{x_n\}$是单调递增有上界的数列，

数列$\{x_n\}$收敛$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{e}$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}$.

记 $S=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. 则$S$是有界无限点集，根据聚点定理，

点集S有聚点$\xi=\mathrm{e}$，但$\xi=\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}$.

记 $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. 则$\{x_n\}$满足柯西条件，根据柯西收敛准则，

数列$\{x_n\}$收敛$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{e}$，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}$.

P155/习题7.1/5

设$H=\left\{\left(\dfrac{1}{n+2},\dfrac{1}{n}\right)\middle|\, n=1,2,\cdots\right\}$. 问(1)$H$能否覆盖$(0,1)$?

(2)能否从H中选出有限个开区间覆盖(i)$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,(ii)$\left(\dfrac{1}{100},1\right)$?

解 (1) H能覆盖$(0,1)$. 由于对$\forall x\in(0,1)$, 即 $\dfrac{1}{x}>1$.

若 $1<\dfrac{1}{x}\le 2$, 即 $\dfrac{1}{2}\le x<1$, 则取$n_0=1$,使得 $x\in\left(\dfrac{1}{n_0+2},\dfrac{1}{n_0}\right)=\left(\dfrac{1}{3},1\right)\in H$.

若 $\dfrac{1}{x}>2$, 则取$n_0=\left[\dfrac{1}{x}\right]-1\in\mathbb{N}_+$,使得

$$n_0=\left[\frac{1}{x}\right]-1<\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1=n_0+2,$$

从而$x\in\left(\dfrac{1}{n_0+2},\dfrac{1}{n_0}\right)\in H$. 因此, H能覆盖$(0,1)$.

P155/习题7.1/5

设$H=\left\{\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)\middle| n=1,2,\cdots\right\}$. 问(1)$H$能否覆盖(0,1)?

(2)能否从H中选出有限个开区间覆盖(i)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$,(ii)$\left(\frac{1}{100},1\right)$?

解(2) (i) 不能从H中选出有限个开区间覆盖$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

因为对于H中任意有限个开区间,设这些开区间的左端点的最小值为$\frac{1}{N+2}$,

从而, $\left(0,\frac{1}{N+2}\right)$中的点不属于这有限个开区间中的任何一个,

所以, 不能从H中选出有限个开区间覆盖$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

(2) (ii) 能从H中选出有限个开区间覆盖$\left(\frac{1}{100},1\right)$.

例如选取$\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)\in H, n=1,2,\cdots,98$,这98个开区间就能覆盖$\left(\frac{1}{100},1\right)$.

P155/习题7.1/9 试用聚点定理证明柯西收敛准则.

数列$\{x_n\}$收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n, m > N: |x_n - x_m| < \varepsilon.$

证 (必要性)由于数列$\{x_n\}$收敛, 记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 根据数列极限的定义知,

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N: |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是, $\forall n, m > N:$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(充分性) 取$\varepsilon_0 = 1$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}_+$, $\forall n, m > N_0: |x_n - x_m| < \varepsilon_0$.

取$m = N_0 + 1$, $n > N_0$,则 $|x_n - x_{N_0+1}| < 1$, 即 $x_{N_0+1} - 1 < x_n < x_{N_0+1} + 1$.

记$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N_0}|, |x_{N_0+1}| + 1\}$.

则对$\forall n \in \mathbb{N}_+$, 有 $|x_n| \le M$. 所以$\{x_n\}$为有界数列.

P155/习题7.1/9 试用聚点定理证明柯西收敛准则.

数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n,m>N: |x_n-x_m|<\varepsilon$.

记 $S=\{x_n \mid n=1,2,\cdots\}$.

若S为有限点集, 则在S中至少有一个$a\in S$出现无限多次,

即有子列$\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k}=a$. 于是 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

若S为无限点集, 从而S是有界无限点集,根据聚点定理知,

S至少有一个聚点a, 根据聚点定义知, 存在各项互异的数列$\{x_{n_k}\}\subset S$,

使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

P155/习题7.1/9 试用聚点定理证明柯西收敛准则.

$$\text{数列}\{x_n\}\text{收敛} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n, m > N: |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

由于数列$\{x_n\}$满足柯西条件, 因此, 对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}_+$, $\forall n,m > N_1$:

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, 根据数列极限的定义知,对上述$\varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}_+, \forall k > K$:

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取$N = \max\{N_1, n_K\} \in \mathbb{N}_+$, $\forall n > N$, 任取$m = n_k$, 使得$k > K, m > N$, 有

$$|x_n - a| = |x_n - x_m + x_m - a| \le |x_n - x_m| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

P155/习题7.1/10 用有限覆盖定理证明根的存在性定理.

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)f(b)<0$, 则$\exists x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=0$.

证 利用反证法证明. 假设f在$[a,b]$上无根,则对$\forall x\in[a,b]$, $f(x)\neq 0$.

不妨设$f(a)<0, f(b)>0$. 由于f在$[a,b]$上连续,根据连续函数的局部保号性知,

对$\forall x\in[a,b]$, $\exists\delta_x>0, \forall x'\in U(x;\delta_x)\cap[a,b]$: $f(x')$与$f(x)$同号.

作开区间集$H=\{U_x=U(x;\delta_x)\,|\,x\in[a,b]\}$. 则$H$覆盖了$[a,b]$.

根据有限覆盖定理知, 存在H中有限个开区间$U_{x_i}(i=1,2,\cdots,n)$覆盖了$[a,b]$.

不妨设这些区间互不包含,且从左到右依次覆盖区间$[a,b]$. 于是$x_1<x_2<\cdots<x_n$.

由于$a\in U_{x_1}, b\in U_{x_n}$, 因此$f(x_1)<0, f(x_n)>0$.

从而必有某个$i(i\in(1,2,\cdots,n))$, 满足$f(x_i)<0, f(x_{i+1})>0$.

因为$U_{x_i}\cap U_{x_{i+1}}\neq\varnothing$, $\forall x\in U_{x_i}\cap U_{x_{i+1}}$,由$x\in U_{x_i}, f(x)<0$;由$x\in U_{x_{i+1}}, f(x)>0$. 矛盾.

所以$f(x)$在$[a,b]$上有根, 即$\exists x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=0$.

P155/习题7.1/11 用有限覆盖定理证明连续函数的一致连续性定理.

设函数f在$[a,b]$上连续，则函数f在$[a,b]$上一致连续.

证 由于f在$[a,b]$上连续，故$\forall x\in[a,b],\forall\varepsilon>0,\exists\delta_x>0,\ \forall x'\in[a,b]\cap U(x;\delta_x)$:

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

作开区间集$H=\left\{U\left(x;\frac{\delta_x}{2}\right)\middle| x\in[a,b],|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},x'\in[a,b]\cap U(x;\delta_x)\right\}$.

则H覆盖了$[a,b]$. 根据有限覆盖定理知，

存在H中有限个开区间$U\left(x_i;\frac{\delta_{x_i}}{2}\right)(i=1,2,\cdots,n)$覆盖了$[a,b]$. 记$\delta=\min\limits_{1\le i\le n}\left\{\frac{\delta_{x_i}}{2}\right\}>0$.

对$\forall x',x''\in[a,b],|x'-x''|<\delta,x'\in U\left(x_i;\frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$，即$|x'-x_i|<\frac{\delta_{x_i}}{2}$.

此时有$|x''-x_i|\le|x''-x'|+|x'-x_i|<\delta+\frac{\delta_{x_i}}{2}\le\delta_{x_i}$.

同时有$|f(x')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

从而 $$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-f(x_i)|+|f(x'')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故f在$[a,b]$上一致连续.

补充题 用区间套定理证明连续函数的一致连续性定理.

设函数f在$[a,b]$上连续, 则函数f在$[a,b]$上一致连续.

证 利用反证法证明. 假设f在$[a,b]$上连续,但不一致连续. 记 $[a_1,b_1]=[a,b]$.

将$[a_1,b_1]$等分为两个子区间, 则f至少在其中一个区间上不一致连续.

记该区间为$[a_2,b_2]$.无限重复这个过程,得闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$,满足

(1)$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$,$n=1,2,\cdots$; (2)$b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n-1}}\to 0(n\to\infty)$;

(3)f在$[a_n,b_n]$上不一致连续,$n=1,2,\cdots$.

由(1)和(2)知$\{[a_n,b_n]\}$是一个区间套,根据区间套定理知, $\exists\xi\in[a_n,b_n]$,$n=1,2,\cdots$,

即$a\le a_n\le\xi\le b_n\le b$. 根据数列极限的保不等式性知, 即$a\le\xi\le b$.

由于f在$[a,b]$上连续, 故f在点ξ连续, 即 $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$.

于是$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U(\xi,\delta)\cap[a,b]$: $|f(x)-f(\xi)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 根据区间套定理推论知,对上述的$\delta>0$,

对上述的$\delta>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有$[a_n,b_n]\subset(\xi-\delta,\xi+\delta)$.从而$\forall x',x''\in[a_n,b_n]$: $|x'-x''|<\delta$,

有$|x'-\xi|<\delta,|x''-\xi|<\delta$. 因而$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-f(\xi)|+|f(x'')-f(\xi)|<\varepsilon$.

所以f在$[a_n,b_n]$上一致连续. 这与所作区间套的性质矛盾.

故f在$[a,b]$上一致连续.

P159/第七章总练习题/2 用确界原理证明有限覆盖定理.

设 H 是闭区间 $[a, b]$ 的一个(无限)开覆盖,

则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a, b]$.

证1 设 H 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 作 $S=\{x \mid [a,x]$ 能被 H 有限覆盖, $a<x\le b\}$.

因为 H 覆盖了 $[a,b]$, 所以存在 $(\alpha_a,\beta_a)\in H$, 使得 $a\in(\alpha_a,\beta_a)$. 取 x_0, 使得 $a<x_0<\beta_a$,

从而 $[a,x_0]$ 被 $(\alpha_a,\beta_a)\in H$ 覆盖. 于是 $x_0\in S$. 从而 S 是非空的. 又显然 S 是有界的.

根据确界原理知, 数集 S 存在上确界 $\xi=\sup S$. 因为 $S\subset[a,b]$, 所以 $\xi\in[a,b]$.

下面证 $\xi\in S$ 且 $\xi=b$. 因为 $\xi\in[a,b]$, 所以存在 $(\alpha_\xi,\beta_\xi)\in H$, 使得 $\xi\in(\alpha_\xi,\beta_\xi)$.

因为 ξ 是 S 的上确界, 如果 $\xi\notin S$, 所以存在 $c\in S$, 使得 $\alpha_\xi<c<\xi<\beta_\xi$.

由于 $c\in S$, 所以 $[a,c]$ 可被 H 中有限个开区间 $U_1,U_2,\cdots,U_k$ 覆盖.

从而 $[a,\xi]$ 可被 H 中 $k+1$ 个开区间 $U_1,U_2,\cdots,U_k,(\alpha_\xi,\beta_\xi)$ 覆盖, 因此 $\xi\in S$.

如果 $\xi<b$, 则存在 $\eta\in(\alpha_\xi,\beta_\xi)\in H$, 使得 $\xi<\eta$, 且 $\eta<b$.

从而 $[a,\eta]$ 可被 H 中 $k+1$ 个开区间 $U_1,U_2,\cdots,U_k,(\alpha_\xi,\beta_\xi)$ 覆盖. 因此 $\eta\in S$.

这与 ξ 是 S 的上确界矛盾. 因此 $\xi=b$. 从而 $b\in S$, 即 $[a,b]$ 能被 H 有限覆盖.

P159/第七章总练习题/2 用确界原理证明有限覆盖定理.

设 H 是闭区间 $[a, b]$ 的一个(无限)开覆盖,

则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a, b]$.

证2 作 $A = \{x \mid [a,x]\text{能被}H\text{有限覆盖}, a < x \le b\}$.

因为 H 覆盖了 $[a,b]$,所以存在 $(\alpha,\beta) \in H$,使得 $a \in (\alpha,\beta)$. 取 x_0,使得 $a < x_0 < \beta$,

则对 $\forall x : a < x \le x_0$,有 $x \in A$. 从而 A 是有界非空数集. 根据确界原理知,

数集 A 存在上确界 $\xi = \sup A$. 下面证 $\xi = b$.

显然 $\xi \le b$. 假设 $\xi < b$. 由于 $a < \xi < b$,存在 $(\alpha_1,\beta_1) \in H$,使得 $\xi \in (\alpha_1,\beta_1)$.

取 x_1, x_2,使得 $\alpha_1 < x_1 < \xi < x_2 < \beta_2$,且 $x_1 \in A$. 因为 $[a,x_1]$ 能被 H 有限覆盖,

把 (α_1,β_1) 加入覆盖区间 $[a,x_1]$ 的有限区间集,得到区间 $[a,x_2]$ 也能被 H 有限覆盖.

从而 $x_2 \in A$. 这与 ξ 是 A 的上确界矛盾. 因此 $\xi = b$. 下面证 $\xi \in A$.

由于 H 覆盖了 $[a,b]$,所以存在 $(u,v) \in H$,使得 $b \in (u,v)$.

由于 $u < b = \sup A$(不妨设 $u \ge a$),$\exists x_3 \in A$, 使得 $u < x_3 \le b$.

所以 $[a,x_3]$ 能被 H 有限覆盖.把 (u,v) 加入覆盖区间 $[a,x_3]$ 的有限区间集,

从而证明了 $[a,b]$ 能被 H 有限覆盖.

补充题 用有限覆盖定理证明确界原理.

设S是非空有上界的数集, 则数集S有上确界.

证 设M是非空数集S的上界,即对$\forall x \in S$,有$x \le M$. 由于S非空,则$\exists a_1 \in S$.

从而$a_1 \le M$. 若$a_1 = M$, 则M是S的上确界.得证.

若$a_1 < M$,考虑闭区间$[a_1, M]$.假设S没有上确界,即没有最小上界.则对$\forall x \in [a_1, M]$,

(1)当x是S的上界时,必有更小的上界$x_1 < x$. 从而在$U\left(x; \frac{x - x_1}{2}\right)$中所有元素都是$S$的上界.

(2)当x不是S的上界时,则$\exists x_2 \in S$,使得$x_2 > x$.从而在$U\left(x; \frac{x_2 - x}{2}\right)$中所有元素都不是$S$的上界.

当x取遍$[a_1, M]$上的每一点,都有相应的属于它的邻域.

从而这些邻域构成$[a_1, M]$的一个无限开覆盖.根据有限覆盖定理知,

必存在有限个邻域覆盖$[a_1, M]$. 在这有限个邻域取所有满足x是S的上界的区间.

设这些区间的左端点(共有有限个)的最小值为M_0,则M_0是S的一个上界.

$M_0 \in [a_1, M]$,但M_0却不属于有限个区间中的任何一个.

这是因为M_0不属于由条件1构造的区间(它与这些区间中的任何数都小).

M_0也不属于由条件2构造的区间(这些区间中的数都不是S的上界). 矛盾.

所以S有上确界.