第十九章　含参量积分

第二节　含参量反常积分

第十九章　含参量积分

第二节　含参量反常积分

1. 一致收敛性及其判别法
2. 含参量积分的性质

定理19.8: 含参量积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的**充分必要条件是:**

对于任一趋于 $+\infty$ 的递增数列 $\{A_n\}$, (其中 $A_1 = c$), 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛.

含参量反常积分的性质

定理(连续性)： 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续, 若含参量反常积分

$$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则函数 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 即

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int_c^{+\infty} f(x_0,y)dy,\quad \forall x_0\in[a,b].$$

含参量反常积分的性质

推论(连续性)： 设 $f(x,y)$ 在 $I\times[c,+\infty)$ 上连续，若含参量反常积分

$$\Phi(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$$

在 I 上**内闭一致收敛**，则函数 $\Phi(x)$ 在 I 上连续，即

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^{+\infty}f(x,y)dy=\int_c^{+\infty}f(x_0,y)dy,\quad\forall x_0\in I.$$

含参量反常积分的性质

定理(可微性)： 设 $f(x,y)$ 与 $f_x(x,y)$ 在 $I\times[c,+\infty)$ 上连续，若含参量反常积分 $\Phi(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$ 在 I 上收敛，反常积分 $\int_c^{+\infty}f_x(x,y)dy$ 在 I 上内闭一致收敛，则函数 $\Phi(x)$ 在 I 上可微，且

$$\Phi(x)'(x)=\int_c^{+\infty}f_x(x,y)dy.$$

含参量反常积分的性质

定理(可积性1)： 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，若含参量反常积分

$$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛，则函数 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int_c^{+\infty} dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

含参量反常积分的性质

定理(可积性2)： 设 $f(x,y)$ 在 $[a,\infty)\times[c,+\infty)$ 上连续, 若

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在任何闭区域 $y\in[c,d]$ 上一致收敛,
  $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在任何闭区域 $x\in[a,b]$ 上一致收敛,
- 下列积分之一收敛,

$$\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty}|f(x,y)|dy,\quad 与\quad \int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty}|f(x,y)|dx,$$

则

$$\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx.$$

例： 证明含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos xy dx, \quad p > 0,$$

在闭区间 $y \in [a,b]$ 上一致收敛, 并计算

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin(bx) - \sin(ax)}{x}dx.$$

例： 计算 Dirichlet 积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx.$$

例： 已知概率积分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

求

$$\varphi(r) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(rx) dx.$$

含参量瑕积分的定义

定义1： 含参量反常积分

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)dy \tag{0.1}$$

其中 c, d 为有限数, d 是积分瑕点. 对任给的正数 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得对一切 $x\in[a,b]$, 都有

$$\left|\int_c^{d-\delta} f(x,y)dy-I(x)\right|<\varepsilon, \quad 或 \quad \left|\int_{d-\delta}^{d} f(x,y)dy\right|<\varepsilon,$$

则称含参量反常积分 (0.1) 在 $[a,b]$ 上**一致收敛于** $I(x)$, 或简称含参量积分 (0.1) 在 $[a,b]$ 上**一致收敛**.

柯西准则

一致收敛的柯西准则： 含参量积分 $\int_c^d f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的**充分必要条件**是：

对任给的正数 $\varepsilon > 0$，总存在某一实数 M，满足 $c < M < d$，使得当 $M < A_1 < A_2 < d$ 时，对一切 $x \in [a,b]$，都有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dy \right| < \varepsilon.$$

定理(魏尔斯特拉斯 M 判别法): 设有函数 $g(y)$, 使得

$$|f(x,y)| \le g(y), \quad a \le x \le b, \quad c \le y < d.$$

若 $\int_c^d g(y)dy$ 收敛, 则 $\int_c^d f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

$\cdots\cdots$

本节作业

作业：

第 178 页：第2题、第5题.

第 179 页：第9题.