Ch3 函数极限

主讲教师: 顾燕红

办公室: 汇星楼409

办公室答疑时间: 每周二15点至17点

微信号: 18926511820 QQ号: 58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年10月30日

将学习：

函数极限的定义

当x趋于$+\infty$时的函数极限

设$f(x)$为定义在$[a,+\infty)$上的函数,A为常数.

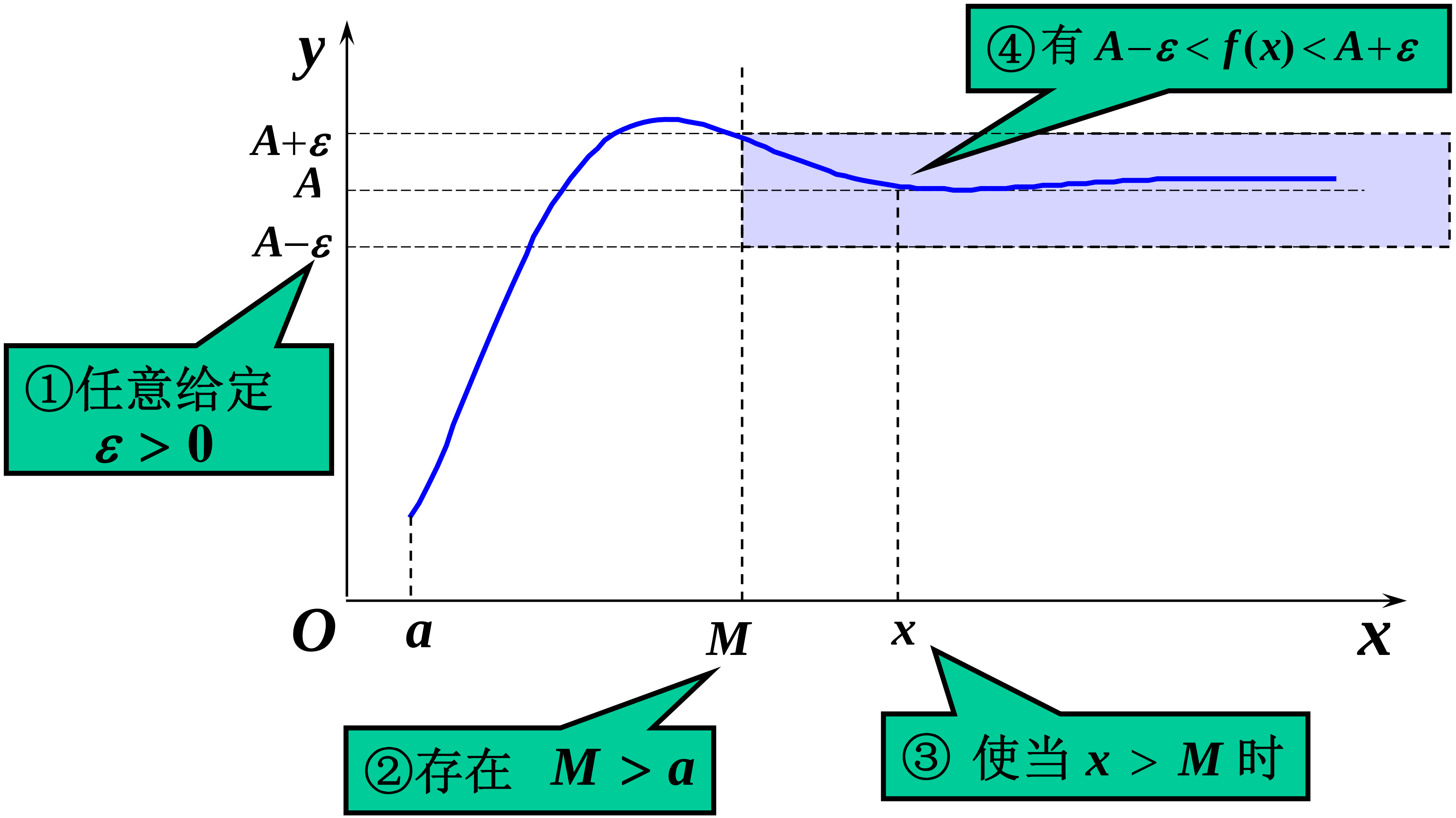
若对任意$\varepsilon>0$,存在正数$M(\geq a)$,使得当$x>M$时,

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$当x趋于$+\infty$时以A为极限,记为

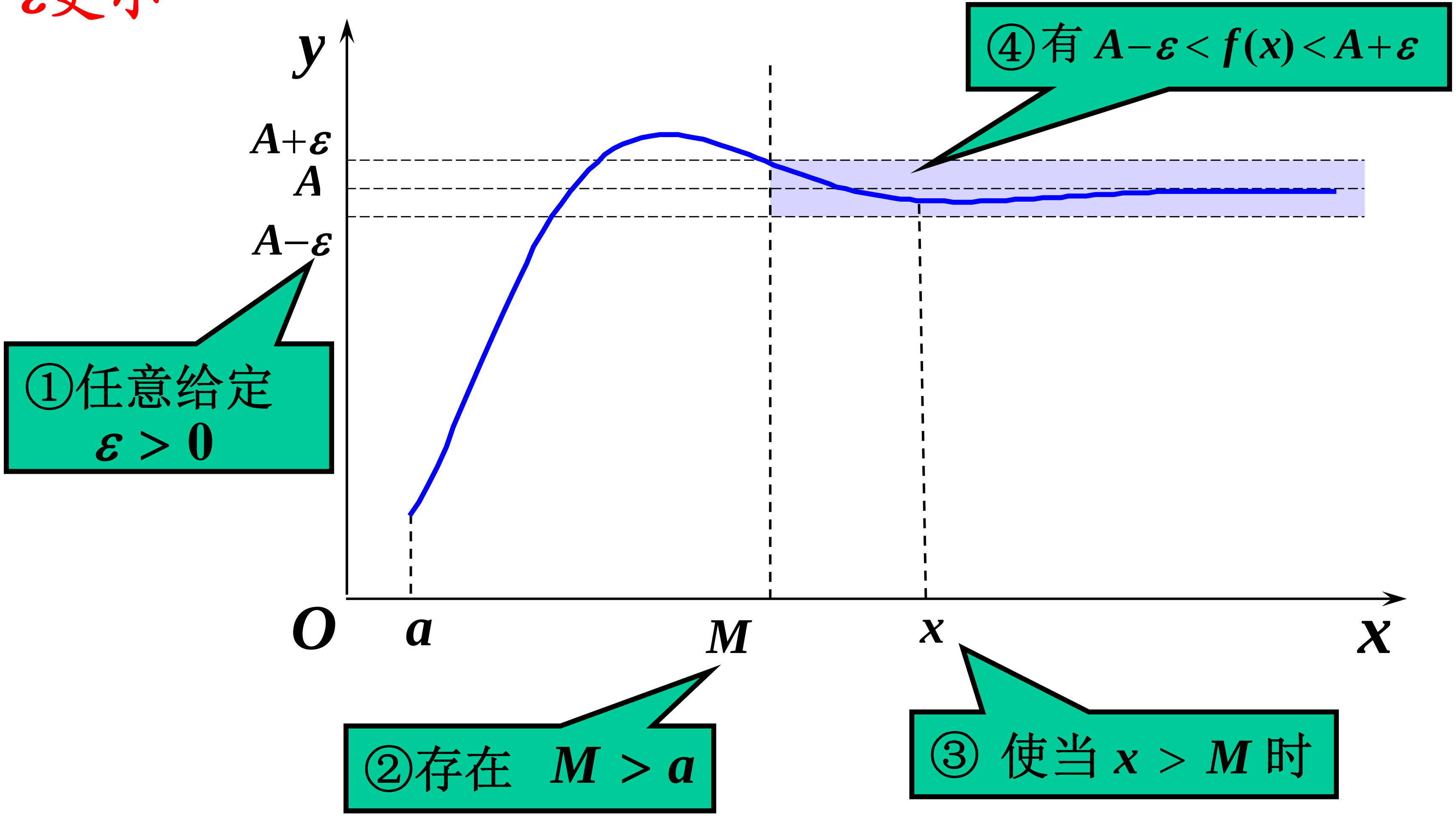
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to+\infty).$$

注： $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的几何意义



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的几何意义

ε更小



注：数列可视为定义在正整数集上的函数.

正数M的作用与数列极限定义中的N相类似,

表明x充分大的程度; 但这里所考虑的是比M大的

所有实数x, 而不仅仅是正整数n.

当x趋于$-\infty$时的函数极限

设$f(x)$为定义在$(-\infty,b]$上的函数,A为常数.

若对任意$\varepsilon>0$,存在$M>0$,使得当$x<-M(\le b)$时,

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$当x趋于$-\infty$时以A为极限,记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to-\infty).$$

当x趋于∞时的函数极限

设 $f(x)$定义在∞的某个邻域$U(\infty)$内,A为常数.

若对任意$\varepsilon>0$,存在$M>0$,使得当$|x|>M$时,

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$当x趋于∞时以A为极限,记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to\infty).$$

x趋于x_0时的函数极限

设函数$f(x)$在点x_0的某个空心邻域$U^\circ(x_0;\delta')$内有定义,A为常数.若对任意$\varepsilon>0$,存在正数$\delta(<\delta')$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,

则称函数$f(x)$当x趋于x_0时以A为极限,记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to x_0).$$

x趋于∞时函数极限存在的充要条件

设函数$f(x)$定义在∞的一个邻域内，则

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$的充要条件是

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

注1: 讨论f在点x_0处的极限时，不关心f在点x_0处是否有定义.

函数极限定义中，$0<|x-x_0|$把x_0排除在外.

注2: f在点x_0处极限是否存在、有极限时极限为多少,只取决于f在点x_0的充分小的去心邻域的状态，而与f在远处的值无关.

单侧极限

设函数$f(x)$在$U_+^\circ(x_0;\delta')$(或$U_-^\circ(x_0;\delta')$)上有定义，A为常数. 若对任意$\varepsilon>0$,存在正数$\delta(<\delta')$,使得当$x_0<x<x_0+\delta$ ($x_0-\delta<x<x_0$)时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称数A为函数$f(x)$当x趋于x_0^+(或x_0^-)时的右(左)极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\right)$$

或 $f(x)\to A\ (x\to x_0^+)\left(f(x)\to A\ (x\to x_0^-)\right)$.

右极限与左极限统称为单侧极限. 又可记为

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x),\quad f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

注： $f(x_0+0), f(x_0-0)$不等同于$f(x_0)$.

函数极限存在的充要条件

设函数 $f(x)$ 在 $U^{\circ}(x_0)$ 有定义，则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

注： 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn} x = -1$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ 不存在.

例1 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,不妨设$x>0$,要使

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{x}<\varepsilon,$$

只要 $x>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$, 取$M=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$,

当 $x>M$ 时,有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,\text{ 即 } |x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

只要取$M=\dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$, 取$M=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$,

当 $|x|>M$ 时,有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

例2 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|=\frac{2}{x+1}<\varepsilon,\quad (x>1)$$

只要 $x>\dfrac{2}{\varepsilon}-1.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$M=\max\left\{1,\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right\}>0,$

当 $x>M$ 时,有

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1.$$

证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|=\left|\frac{2}{x+1}\right|\le\frac{2}{|x|-1}<\varepsilon,\quad (|x|>1)$$

只要 $|x|>\dfrac{2}{\varepsilon}+1.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$M=\dfrac{2}{\varepsilon}+1>0,$

当 $|x|>M$ 时,有

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1.$$

证明：$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|=\left|\frac{2}{x+1}\right|=\frac{2}{-x-1}<\varepsilon,\quad (x<-1)$$

只要 $x<-\left(\dfrac{2}{\varepsilon}+1\right).$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$M=\dfrac{2}{\varepsilon}+1>0$,当 $x<-M$ 时,有

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1.$

例3 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^a}=0\ \ (a>0).$

证 对$\forall\varepsilon>0$,不妨设$x>0$,要使

$$\left|\frac{1}{x^a}-0\right|=\frac{1}{x^a}<\varepsilon,$$

只要 $x>\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$M=\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}>0$,当 $x>M$ 时,有

$$\left|\frac{1}{x^a}-0\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^a}=0.$

例4 证明： $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}.$

证 对$\forall\varepsilon>0$(不妨设$\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$),要使

$$\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan x<\varepsilon,$$

只要 $x>\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right).$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$M=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)>0$,

当 $x>M$ 时,有 $\left|\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon.$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}.$

证明： $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}.$

证 对$\forall\varepsilon>0$(不妨设$\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$),要使

$$\left|\arctan x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\frac{\pi}{2}+\arctan x<\varepsilon,$$

只要 $x<-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right).$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$M=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)>0$,

当 $x<-M$ 时,有

$$\left|\arctan x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}.$

例5 证明：$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0.$

证 对$\forall\varepsilon>0$(不妨设$\varepsilon<1$),要使

$$\left|e^x-0\right| = e^x < \varepsilon,$$

只要 $x<\ln\varepsilon.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$M=-\ln\varepsilon>0$,

当 $x<-M$ 时,有

$$\left|e^x-0\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0.$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$

证 对$\forall G>0$(不妨设$G>1$),要使

$$e^x > G,$$

只要 $x>\ln G.$

因此,对$\forall G>0(G>1)$,取$M=\ln G>0$,

当 $x>M$ 时,有

$$e^x>G.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$

注：由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$,

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$不存在.

例6 证明: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|e^{-\frac{1}{x}}-1\right| = e^{-\frac{1}{x}}-1<\varepsilon,$$

只要 $x<-\dfrac{1}{\ln(1+\varepsilon)}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$M=\dfrac{1}{\ln(1+\varepsilon)}>0$, 当 $x<-M$ 时,有

$$\left|e^{-\frac{1}{x}}-1\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$

例7 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{1}{1+x^2}-0\right|=\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{x^2}<\varepsilon,$$

只要 $|x|>\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$M=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}>0$, 当$|x|>M$时,有

$$\left|\frac{1}{1+x^2}-0\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0.$

例8 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-2}=3.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}-3\right|=\left|\frac{2x+5}{x^2-2}\right|\le\frac{2|x|+5}{|x^2-2|}\overset{(|x|>3)}{<}\frac{2|x|+2|x|}{x^2-\frac{x^2}{2}}=\frac{4|x|}{\frac{x^2}{2}}=\frac{8}{|x|}<\varepsilon,$$

只要 $|x|>\dfrac{8}{\varepsilon}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$M=\max\left\{3,\dfrac{8}{\varepsilon}\right\}>0$,当$|x|>M$时,有

$$\left|\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}-3\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-2}=3.$

例9 证明：$\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$|(2x-1)-5|=|2x-6|=2|x-3|<\varepsilon,\ \text{即}\ |x-3|<\frac{\varepsilon}{2},$$

只要取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$, 当$0<|x-3|<\delta$时,有

$$|(2x-1)-5|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5.$

例10 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0.$

证 对$\forall \varepsilon > 0$,要使

$$|\sin x - 0| = |\sin x| \le |x| = |x - 0| < \varepsilon,$$

只要取$\delta = \varepsilon$.

因此,对$\forall \varepsilon > 0$,取$\delta = \varepsilon > 0$, 当$0 < |x - 0| < \delta$时,有

$$|\sin x - 0| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0.$

例11 证明：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0.$

证 由于

$$\left| x\sin\frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x\sin\frac{1}{x} \right| \le |x|,$$

因此,对$\forall\varepsilon > 0$,取$\delta = \varepsilon > 0$, 当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时,有

$$\left| x\sin\frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0.$

例12 证明：$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$

证 对$\forall \varepsilon > 0$,要使

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |\, x + 2 - 4 \,| = |\, x - 2 \,| < \varepsilon,$$

只要取$\delta = \varepsilon.$

因此,对$\forall \varepsilon > 0$,取$\delta = \varepsilon > 0$, 当$0 < |x - 2| < \delta$时,有

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$

例13 证明: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|$$

$$=\frac{\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right|}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{|x-1|}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)^2}\le|x-1|<\varepsilon,$$

只要取$\delta=\varepsilon.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\varepsilon>0$, 当$0<|x-1|<\delta$时,有

$$\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

例14 证明：$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}=1.$

证 由于

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|=\left|\frac{\frac{7}{16x^2-9}-1}{\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}+1}\right|<\left|\frac{16(x-1)(x+1)}{16x^2-9}\right|=16|x-1|\frac{|x+1|}{|4x-3||4x+3|},$$

先限制$|x-1|<\dfrac{1}{5}$,即$\dfrac{4}{5}<x<\dfrac{6}{5}$.

从而对$\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}-1\right|<16|x-1|\dfrac{\frac{11}{5}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{31}{5}}=\dfrac{880}{31}|x-1|<\varepsilon$,

只要 $|x-1|<\dfrac{31}{880}\varepsilon$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{\dfrac{1}{5},\dfrac{31}{880}\varepsilon\right\}$,当$0<|x-1|<\delta$时,有

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}=1.$

例15 证明：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}.$

证 由于

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{2}{3}\right|=\frac{|x-1|}{3|2x+1|},$$

先限制$|x-1|<1$,即$0<x<2$.

从而对$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{|x-1|}{3|2x+1|}<\dfrac{|x-1|}{3}<\varepsilon$,

只要 $|x-1|<3\varepsilon$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\{1,3\varepsilon\}>0$, 当$0<|x-1|<\delta$时,有

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}.$

例16 证明：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}.$

证 由于 $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{3-x}{3x}\right|=\dfrac{|x-3|}{3|x|},$

先限制 $|x-3|<1$，即 $2<x<4.$

从而对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{|x-3|}{3|x|}<\dfrac{|x-3|}{6}<\varepsilon,$

只要 $|x-3|<6\varepsilon.$

因此，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{1,6\varepsilon\}>0$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}.$

例17 证明：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}=2.$

证 由于
$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}-2\right|=\left|\frac{x+1}{x}-2\right|=\frac{|x-1|}{|x|},$$

先限制$|x-1|<\dfrac{1}{2}$,即$\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$.

从而对$\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\dfrac{|x-1|}{|x|}<2|x-1|<\varepsilon$,

只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}>0$, 当$0<|x-1|<\delta$时,有
$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}=2.$

例18 证明：$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\dfrac{1}{10}.$

证 由于

$$\left|\frac{x-5}{x^2-25}-\frac{1}{10}\right|=\left|\frac{1}{x+5}-\frac{1}{10}\right|=\left|\frac{x-5}{10(x+5)}\right|=\frac{|x-5|}{10|x+5|},$$

先限制$|x-5|<1$,即$4<x<6.$

从而对$\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{x-5}{x^2-25}-\dfrac{1}{10}\right|=\dfrac{|x-5|}{10|x+5|}<\dfrac{|x-5|}{90}<\varepsilon,$

只要 $|x-5|<90\varepsilon.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\{1,90\varepsilon\}>0$, 当$0<|x-5|<\delta$时,有

$$\left|\frac{x-5}{x^2-25}-\frac{1}{10}\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\dfrac{1}{10}.$

例19 证明：$\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-4x+4\right)=1.$

证 由于

$$\left|\left(x^2-4x+4\right)-1\right|=\left|x^2-4x+3\right|=\left|(x-3)(x-1)\right|,$$

先限制$|x-3|<1$,即$2<x<4$.

从而对$\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\left(x^2-4x+4\right)-1\right|=\left|(x-3)(x-1)\right|<3\left|x-3\right|<\varepsilon,$

只要 $\left|x-3\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{3}\right\}>0$, 当$0<\left|x-3\right|<\delta$时,有

$$\left|\left(x^2-4x+4\right)-1\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-4x+4\right)=1.$

例20 证明：$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$

证 由于 $|x^2-4| = |x-2||x+2|,$

先限制$|x-2|<1,$则$|x+2| = |x-2+4| \le |x-2|+4 < 5.$

从而对$\forall\varepsilon>0,$要使 $|x^2-4|<5|x-2|<\varepsilon,$

只要 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}.$

因此,对$\forall\varepsilon>0,$取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right\}>0,$ 当$0<|x-2|<\delta$时,有

$$|x^2-4|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$

例21 证明：$\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

证 由于 $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|$,

先限制 $|x - x_0| < 1$, 则 $|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \le |x - x_0| + 2|x_0|$

$$< 1 + 2|x_0|.$$

从而对 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x^2 - x_0^2| < (1 + 2|x_0|)|x - x_0| < \varepsilon$,

只要 $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}$.

因此, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right\} > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

注： 将式子适当放大,其目的就是为了更简洁地求出δ,

或许所求出的δ不是“最佳”的,但这不影响解题的有效性.

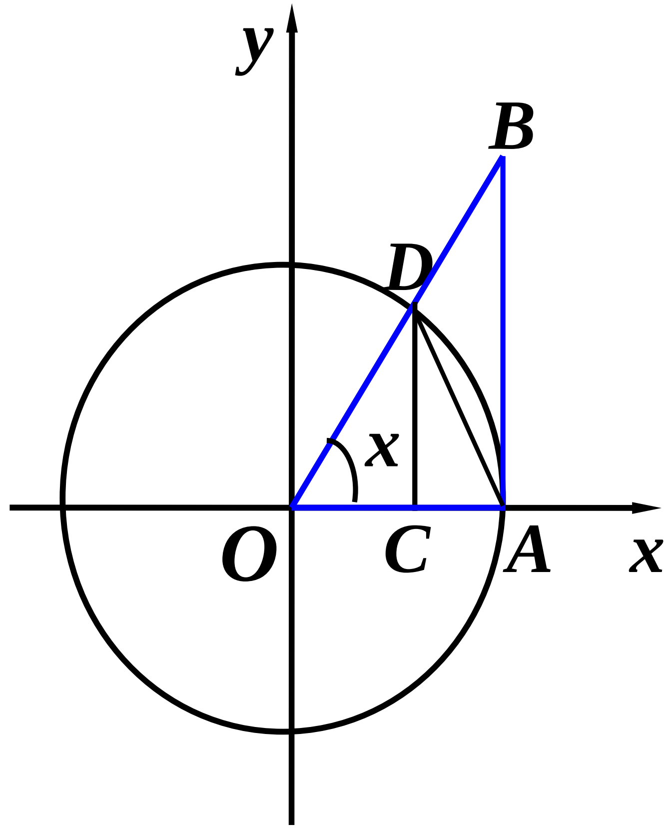
例22 证明：(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$;(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证(1) 首先,在右图所示的单位圆内,

当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时,显然有

$$S_{\Delta OAD}<S_{扇形OAD}<S_{\Delta OAB},$$

即 $$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$



故 $$\sin x<x<\tan x\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

因为当$x\ge\dfrac{\pi}{2}$时,$\sin x\le 1<x$,故对一切$x>0$,有$\sin x<x$,

又因为$\sin x, x$都是奇函数,故

$$|\sin x| \le |x|, x \in \mathbb{R}.$$

上式中的等号仅在$x=0$时成立.

任给$\varepsilon > 0$,要使

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x - x_0| < \varepsilon,$$

只要取$\delta = \varepsilon$.

因此,对$\forall \varepsilon > 0$,取$\delta = \varepsilon > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时,有

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$

例22 证明：(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$;(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

证(2) 对$\forall \varepsilon > 0$,要使

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| -2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2} \right|$$

$$= 2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x - x_0| < \varepsilon,$$

只要取$\delta = \varepsilon$.

因此,对$\forall \varepsilon > 0$,取$\delta = \varepsilon > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时,有

$$|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

例23 证明：$\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}=3.$

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\sqrt{x}-3\right|=\dfrac{|x-9|}{\sqrt{x}+3}<\dfrac{|x-9|}{3}<\varepsilon$,只要 $|x-9|<3\varepsilon$,

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=3\varepsilon>0$, 当 $0<|x-9|<\delta$ 时,有

$$\left|\sqrt{x}-3\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}=3.$

证 由于$\left|\sqrt{x}-3\right|=\dfrac{|x-9|}{\sqrt{x}+3}$,不妨限制 $|x-9|<1$,即$8<x<10$,对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\sqrt{x}-3\right|<\frac{|x-9|}{\sqrt{8}+3}<\frac{|x-9|}{5}<\varepsilon,\ \text{只要}\ |x-9|<5\varepsilon,$$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\{1,5\varepsilon\}>0$, 当 $0<|x-9|<\delta$ 时,有

$$\left|\sqrt{x}-3\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}=3.$

例24 证明: $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$ $(x_0>0, x>0)$.

证 对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}<\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon,$$

只要 $|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$,

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\sqrt{x_0}\varepsilon>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

例25 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0{}^2}\ \left(|x_0|<1\right).$

证 由于$|x|\le 1, |x_0|<1$,对$\forall\varepsilon>0$,不妨设$\varepsilon<1$,要使

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0{}^2}\right|=\frac{|x-x_0||x+x_0|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}\le\frac{2|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0{}^2}}<\varepsilon,$$

只要 $|x-x_0|<\dfrac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon,$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,不妨设$\varepsilon<1$,取$\delta=\min\left\{1-x_0, 1+x_0, \dfrac{\sqrt{1-x_0{}^2}}{2}\varepsilon\right\}>0,$

当$0<|x-x_0|<\delta$时,有

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0{}^2}\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0{}^2}.$

例26 证明：$\lim\limits_{x\to a} x^m = a^m, m\in\mathbb{N}_+$.

证 由于 $\left|x^m - a^m\right| = \left|x-a\right|\left|x^{m-1} + x^{m-2}a + \cdots + a^{m-1}\right|$,

$$\le \left|x-a\right|\left(\left|x\right|^{m-1} + \left|x\right|^{m-2}\left|a\right| + \cdots + \left|a\right|^{m-1}\right),$$

先限制 $\left|x-a\right|<1$, 即 $\left|x\right|<\left|a\right|+1$.

从而对 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|x^m-a^m\right|<\left|x-a\right|\cdot m\left(\left|a\right|+1\right)^{m-1}<\varepsilon$,

只要 $\left|x-x_0\right|<\dfrac{\varepsilon}{m\left(\left|a\right|+1\right)^{m-1}}$.

因此, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{m\left(\left|a\right|+1\right)^{m-1}}\right\}>0$,

当 $0<\left|x-a\right|<\delta$ 时, 有 $\left|x^m-a^m\right|<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{x\to a} x^m = a^m$.

例27 证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}=1.$

证 对$\forall x>0,\forall\varepsilon>0$(不妨设$\varepsilon<\dfrac{1}{2}$),要使

$$\left|\frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}-0\right|=\frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon,$$

只要 $x<\dfrac{1}{\lg\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{1}{\lg\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)}>0$, 当 $0<x<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}-0\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}=0.$

例27 证明: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}=1.$

对$\forall x<0,\forall\varepsilon>0$(不妨设$\varepsilon<\dfrac{1}{2}$),要使

$$\left|\frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}-1\right|=1-\frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon,\quad \text{只要 } x>\frac{1}{\lg\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=-\dfrac{1}{\lg\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}>0$, 当$-\delta<x<0$时,有

$$\left|\frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}-1\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}=1.$

注: 由于$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}$不存在.

例28 讨论函数$\sqrt{1-x^2}$ 在 $x=\pm1$ 处的单侧极限.

证 因为$|x|\le 1$, $\left|\sqrt{1-x^2}-0\right|=\sqrt{(1+x)(1-x)}\le\sqrt{2(1-x)}$,

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon^2}{2}>0$,当$1-\delta<x<1$时,有 $\left|\sqrt{1-x^2}-0\right|<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x^2}=0$.

因为$|x|\le 1$, $\left|\sqrt{1-x^2}-0\right|=\sqrt{(1+x)(1-x)}\le\sqrt{2(1+x)}$,

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon^2}{2}>0$,当$-1<x<-1+\delta$时,有 $\left|\sqrt{1-x^2}-0\right|<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{1-x^2}=0$.

例29 证明： $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{8}\right)^{+}}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=1,\quad \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{8}\right)^{-}}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=0.$

证 限制 $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{7}$，即 $0<x-\frac{1}{8}<\frac{1}{56}$，从而

$$\left|\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)-1\right|=\left|\frac{1}{x}-7-1\right|=8-\frac{1}{x}=\frac{8}{x}\left(x-\frac{1}{8}\right)<64\left(x-\frac{1}{8}\right),$$

因此，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{56},\frac{\varepsilon}{64}\right\}>0$，当 $0<x-\frac{1}{8}<\delta$ 时，有

$$\left|\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)-1\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{8}\right)^{+}}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=1.$

例29 证明: $\lim_{x\to\left(\frac{1}{8}\right)^+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=1,\quad \lim_{x\to\left(\frac{1}{8}\right)^-}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=0.$

证 限制$\frac{1}{9}<x<\frac{1}{8}$,即$-\frac{1}{72}<x-\frac{1}{8}<0$,从而

$$\left|\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)-0\right|=\left|\frac{1}{x}-8-0\right|=\frac{1}{x}-8=\frac{8}{x}\left(\frac{1}{8}-x\right)<72\left(\frac{1}{8}-x\right),$$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{\frac{1}{72},\frac{\varepsilon}{72}\right\}>0$, 当$-\delta<x-\frac{1}{8}<0$时,有

$$\left|\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)-0\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim_{x\to\left(\frac{1}{8}\right)^-}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=0.$

例30 证明Dirichlet函数$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$在$\mathbb{R}$上处处无极限.

证 对$\forall x_0\in\mathbb{R}$,以及$\forall A\in\mathbb{R}$, 取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,对$\forall\delta>0$,

若$A\ge\frac{1}{2}$,取$x^*\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, 满足 $0<|x^*-x_0|<\delta$, 使得

$$\left|D(x^*)-A\right|=\left|A\right|\ge\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

若$A<\frac{1}{2}$,取$x^*\in\mathbb{Q}$, 满足$0<\left|x^*-x_0\right|<\delta$,使得

$$\left|D(x^*)-A\right|=\left|1-A\right|\ge\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

所以Dirichlet函数在$\mathbb{R}$上处处无极限.

例31 对于Riemann函数 $R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},\ x=\dfrac{p}{q},p,q\text{为正整数，且}p,q\text{互质}\\ 0,\ x=0,1\text{以及}x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}^c\end{cases}$.

证明：$\forall x_0\in(0,1)$, $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$以及$\lim\limits_{x\to 0^+}R(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}R(x)=0$.

证 对$\forall\varepsilon>0$,根据Archimedes性,$\exists N\in\mathbb{N}_+$,使得$\dfrac{1}{N}<\varepsilon$.

在(0,1)中分母小于N的有理数只有有限个,

故可设这些有理数为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.

因此,除了这n个点外,其他点的函数值都小于ε,所以

(1) 若 x_0 是 $x_1,\cdots,x_k$ 中的某一个,可设 $x_0=x_i$,

$$\text{取 }\delta=\min_{1\le l\le k,\ l\ne i}\left\{\left|x_l-x_0\right|\right\};$$

(2) 若 $x_0\notin\left\{x_1,\cdots,x_k\right\}$，取 $\delta=\min\limits_{1\le l\le k}\left\{\left|x_l-x_0\right|\right\}$.

于是,当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时,对以上两种情形都有 $\left|R(x)-0\right|<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

注1: 对于δ,强调其存在性. 对于固定的ε, 不同的方法会得到不同的δ, 不存在哪一个更好的问题.

注2: δ是不唯一的, 一旦求出了δ, 那么比它更小的正数都可以充当这个角色.

注3: 正数ε是任意的, 一旦给出, 它就是确定的常数.

有时为了方便, 需要让ε小于某个正数.

一旦对这样的ε能找到相应的δ, 那么比它大的ε,

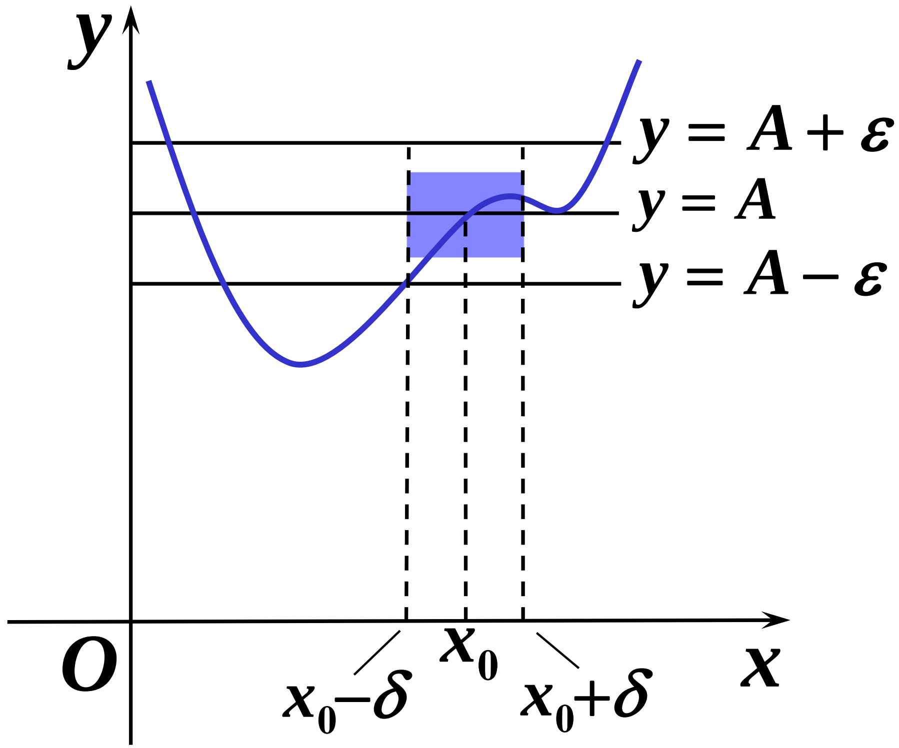
这个δ当然也能满足要求.

注4: 函数极限的几何意义如图, 任给$\varepsilon > 0$, 对于坐标平面上以$y = A$为中心线, 宽为2ε的窄带, 可以找到$\delta > 0$,

使得曲线段

$$y = f(x), x \in U^{\circ}(x_0, \delta)$$

落在窄带内.



你应该：

知道自变量趋于无穷大的函数极限定义

知道自变量趋于有限值的函数极限定义

会用定义证明函数极限