Ch4 函数的连续性

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年11月23日

§1 连续性概念

§2 连续函数的性质(4)

§3 初等函数的连续性

将学习：

一致连续性

不一致连续性

一致连续性

设f为定义在区间I上的函数. 若对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 对$\forall x', x'' \in I$, 只要$|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

则称函数f在区间I上一致连续.

例10 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

证 对 $\forall \varepsilon>0$, 对 $\forall\ x',x''\in[1,+\infty)$, 要使

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\frac{\left|x'-x''\right|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\le\left|x'-x''\right|<\varepsilon,$$

只要 $\left|x'-x''\right|<\varepsilon$.

因此, 对 $\forall\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon>0$, 对 $\forall x',x''\in[1,+\infty)$: $\left|x'-x''\right|<\delta$, 有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|\le\left|x'-x''\right|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

例11 证明$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证 对$\forall\varepsilon>0$,对 $x',x''\in(-\infty,+\infty)$,要使

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\sin x'-\sin x''\right|=\left|2\cos\frac{x'+x''}{2}\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\le\left|x'-x''\right|<\varepsilon,$$

只要 $\left|x'-x''\right|<\varepsilon.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$\delta=\varepsilon>0$, 对$\forall x',x''\in(-\infty,+\infty):\left|x'-x''\right|<\delta$,有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\sin x'-\sin x''\right|\le\left|x'-x''\right|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

例12 证明$f(x)=ax+b(a\neq 0)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证 对$\forall\varepsilon>0$,对$\forall x',x''\in(-\infty,+\infty)$,要使

$$|f(x')-f(x'')|=|(ax'+b)-(ax''+b)|=|a||x'-x''|<\varepsilon,$$

只要 $|x'-x''|<\dfrac{\varepsilon}{|a|}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}>0$, 对$\forall x',x''\in(-\infty,+\infty):|x'-x''|<\delta$,有

$$|f(x')-f(x'')|=|a||x'-x''|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)=ax+b$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

不一致连续性

设f为定义在区间I上的函数. 若$\exists\varepsilon_0>0$, $\forall\delta>0$, $\exists x_1, x_2\in I$, 虽然$|x_1-x_2|<\delta$, 但是

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0,$$

则称函数f在区间I上不一致连续.

例13 证明：函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$,

(1)在$[a,1](0<a<1)$上一致连续；(2)在$(0,1]$上不一致连续.

证 (1)对$\forall\varepsilon>0$,对$\forall\ x',x''\in(-\infty,+\infty)$,要使

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{\left|x''-x'\right|}{x'x''}\le\frac{1}{a^2}\left|x'-x''\right|<\varepsilon,$$

只要 $\left|x'-x''\right|<a^2\varepsilon.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$\delta=a^2\varepsilon>0$, 对$\forall x',x''\in[a,1](0<a<1):\left|x'-x''\right|<\delta$,有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|\le\frac{1}{a^2}\left|x'-x''\right|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[a,1]$上一致连续.

例13 证明：函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$,

(1)在$[a,1](0<a<1)$上一致连续; (2)在$(0,1]$上不一致连续.

(2)证法一：

取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}>0$,对$\forall\delta>0\ (\delta<1)$,

取$x_1=\delta$, $x_2=\dfrac{\delta}{2}$,虽然$x_1,x_2\in(0,1]$, 且$|x_1-x_2|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$,

但是 $|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|=\dfrac{1}{\delta}>1>\dfrac{1}{2}=\varepsilon_0.$

所以$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上不一致连续.

例14 函数$f(x)$定义在区间I上，证明$f(x)$在I上一致连续的充要条件是：

对任何数列$\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$，若$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0.$$

证 (必要性) 已知$f(x)$在I上一致连续，根据一致连续的定义，

对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，当$|x'-x''|<\delta$时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

I上任意两个数列$\{x_n'\},\{x_n''\}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，

根据数列极限的定义，对上述$\delta>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$，有

$$|x_n'-x_n''|<\delta.$$

从而得到 $|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0.$

(充分性)已知对I上任意两个数列$\{x_n'\},\{x_n''\}$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=0.$

利用反证法证明. 假设$f(x)$在I上不一致连续,

则$\exists\varepsilon_0>0, \forall\delta>0$, $\exists x_1, x_2\in[a,b]$, 虽然$|x_1-x_2|<\delta$, 但是

$$|f(x_1)-f(x_2)|\ge\varepsilon_0.$$

取$\delta_1=1, \exists\, x_1, y_1\in I, |x_1-y_1|<1,\quad |f(x_1)-f(y_1)|\ge\varepsilon_0$;

取$\delta=\dfrac{1}{2}, \exists\, x_2, y_2\in I, |x_2-y_2|<\dfrac{1}{2},\quad |f(x_2)-f(y_2)|\ge\varepsilon_0$; ……

取$\delta_n=\dfrac{1}{n}, \exists\, x_n, y_n\in I, |x_n-y_n|<\dfrac{1}{n},\quad |f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0$;……

于是$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$,但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n)-f(y_n)\right)\ne 0.$

与已知条件矛盾. 所以$f(x)$在I上一致连续.

注： 函数$f(x)$在区间I上一致连续与$f(x)$在区间I上连续的区别究竟在哪里?

对于$\varepsilon > 0$,如果$f(x)$在区间I上连续，那么,δ不仅与ε有关,

而且还与所讨论的点x_0有关，即$\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$.

而$f(x)$在区间I上一致连续,则δ仅与ε有关.

若$\delta(\varepsilon, x_0)$在x_0的变化过程中有一个正下界(当然这个下界

只与ε有关,而与x_0无关),则此时$f(x)$在区间I上就一致连续了.

例13 证明：函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$,

(1)在$[a,1](0<a<1)$上一致连续; (2)在$(0,1]$上不一致连续.

(2)证法二:

取$x_n=\dfrac{1}{n+1},y_n=\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots,$

则$\{x_n\},\{y_n\}\subset(0,1]$,且

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n-y_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n(n+1)}=0,$$

但是 $$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_n\right)-f\left(y_n\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(n+1\right)-n\right)=1\neq0,$$

所以$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上不一致连续.

例15 证明：函数$f(x)=x^2$,

(1)在$[0,a)$(a为任意有限正数)上一致连续；(2)在$[0,+\infty)$上不一致连续.

证 (1)对$\forall\varepsilon>0$,对$\forall x',x''\in[0,a)$,要使

$$|f(x')-f(x'')|=\left|x'^2-x''^2\right|=|x'+x''||x'-x''|$$

$$\le(|x'|+|x''|)|x'-x''|<2a|x'-x''|,$$

只要 $|x'-x''|<\dfrac{\varepsilon}{2a}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2a}<0$, 对$\forall x',x''\in[0,a):|x'-x''|<\delta$,有

$$|f(x')-f(x'')|=\left|x'^2-x''^2\right|<2a|x'-x''|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)=x^2$ 在$[0,a)$上一致连续.

例15 证明：函数$f(x)=x^2$,

(1)在$[0,a)$(a为任意有限正数)上一致连续；(2)在$[0,+\infty)$上不一致连续.

(2)证法一：

取$x_n=\sqrt{n+1}$, $y_n=\sqrt{n}$, $n=1,2,\cdots$,

则$\{x_n\},\{y_n\}\subset[0,+\infty)$,且

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0,$$

但是 $$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)-f(y_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left((n+1)-n\right)=1\neq0,$$

所以$f(x)=x^2$在$[0,+\infty)$上不一致连续.

例15 证明：函数$f(x)=x^2$,

(1)在$[0,a)$(a为任意有限正数)上一致连续; (2)在$[0,+\infty)$上不一致连续.

(2)证法二:

取$\varepsilon_0=1>0$,对$\forall\delta>0$,

取$x_1=\dfrac{1}{\delta}$, $x_2=\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{\delta}{2}$,虽然$x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且$|x_1-x_2|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$,

但是 $$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1^2-x_2^2|=\left|\frac{1}{\delta^2}-\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)^2\right|$$

$$=\left|1+\frac{\delta^2}{4}\right|>1=\varepsilon_0,$$

所以$f(x)=x^2$在$[0,+\infty)$上不一致连续.

例16 证明：函数$f(x)=x, g(x)=\sin x$,

(1) $f(x)+g(x)=x+\sin x$在$\mathbb{R}$上一致连续;

(2) $f(x)g(x)=x\sin x$在$\mathbb{R}$上不一致连续.

证 (1)对$\forall \varepsilon>0$,对$\forall\ x',x''\in(-\infty,+\infty)$,要使

$$\left|\big(f(x')+g(x')\big)-\big(f(x'')+g(x'')\big)\right| = \left|(x'+\sin x')-(x''+\sin x'')\right|$$

$$\le |x'-x''|+|\sin x'-\sin x''| \le |x'-x''|+|x'-x''| = 2|x'-x''|<\varepsilon,$$

只要 $|x'-x''|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$, 对$\forall x',x''\in(-\infty,+\infty)$: $|x'-x''|<\delta$,有

$$\left|(x'+\sin x')-(x''+\sin x'')\right|\le 2|x'-x''|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)+g(x)=x+\sin x$ 在$\mathbb{R}$上一致连续.

例16 证明：函数$f(x)=x, g(x)=\sin x$,

(1) $f(x)+g(x)=x+\sin x$在$\mathbb{R}$上一致连续;

(2) $f(x)g(x)=x\sin x$在$\mathbb{R}$上不一致连续.

(2)证 取$x_n=\sqrt{n^2+1}\pi$, $y_n=n\pi, n=1,2,\cdots$, 则$\{x_n\},\{y_n\}\subset(-\infty,+\infty)$,且

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi\right)=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0,$$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|f(x_n)g(x_n)-f(y_n)g(y_n)\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{n^2+1}\pi\sin\sqrt{n^2+1}\pi\right|=\pi\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\sqrt{n^2+1}\sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi-n\pi\right)\right|$$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{n^2+1}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right|=\pi\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\pi\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+n}\right|=\frac{\pi^2}{2}\neq 0,$$

所以 $f(x)g(x)=x\sin x$ 在$\mathbb{R}$上不一致连续.

例16 证明：函数$f(x)=x, g(x)=\sin x$,

(1) $f(x)+g(x)=x+\sin x$在$\mathbb{R}$上一致连续;

(2) $f(x)g(x)=x\sin x$在$\mathbb{R}$上不一致连续.

(2)证 取$x_n=2n\pi+\dfrac{1}{n}, y_n=2n\pi, n=1,2,\cdots,$ 则$\{x_n\},\{y_n\}\subset(-\infty,+\infty)$,且

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{1}{n}-2n\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n)g(x_n)-f(y_n)g(y_n)\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2x\pi+\frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2x\pi+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=2\pi\neq 0,$$

所以 $f(x)g(x)=x\sin x$ 在$\mathbb{R}$上不一致连续.

一致连续性定理Cantor定理

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,

则$f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

一致连续性定理 $f(x)\in C[a,b]\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

证 利用反证法证明.

假设$f(x)$在$[a,b]$上不一致连续,即$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x''\in[a,b]$,

虽然$|x'-x''|<\delta$,但是$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$.

现分别取

$$\delta_1=1,\ \exists\, x_1,y_1\in[a,b],\left|x_1-y_1\right|<1,\quad \left|f(x_1)-f(y_2)\right|\geq\varepsilon_0\ ;$$

$$\delta_2=\frac{1}{2},\ \exists\, x_2,y_2\in[a,b],\left|x_2-y_2\right|<\frac{1}{2},\quad \left|f(x_2)-f(y_2)\right|\geq\varepsilon_0\ ;$$

$$\cdots\cdots$$

$$\delta_n=\frac{1}{n},\ \exists\, x_n,y_n\in[a,b],\left|x_n-y_n\right|<\frac{1}{n},\quad \left|f(x_n)-f(y_n)\right|\geq\varepsilon_0\ ;$$

$$\cdots\cdots$$

由此得到两列$\{x_n\},\{y_n\}\subset[a,b]$,虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-y_n\right)=0$,

但是总有 $\left|f(x_n)-f(y_n)\right|\geq\varepsilon_0$.

因为$\{x_n\}$有界,从而由致密性定理,存在$\{x_n\}$的一个收敛子列$\{x_{n_k}\}$.

设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$. 由于$\left|x_{n_k}-y_{n_k}\right|<\dfrac{1}{n_k}$,所以$\lim\limits_{k\to\infty}(y_{n_k}-x_{n_k})=0.$

从而$\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}(y_{n_k}-x_{n_k})+\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$,

因为$a\le x_{n_k}\le b$,所以由极限的保不等式性, $a\le x_0\le b$.

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续, 故$f(x)$在点x_0连续, 即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

根据归结原则得 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k})=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

于是 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\right)=0$, 这与$\left|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\right|\ge\varepsilon_0$矛盾.

所以$f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

例17 设区间I_1的右端点为$c\in I_1$,区间I_2的左端点也为c,并且$c\in I_2$.

证明：若$f(x)$分别在I_1,I_2上一致连续,则$f(x)$在区间$I_1\cup I_2$上也一致连续.

证 因为$f(x)$在I_1,I_2上一致连续,所以对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\delta_2>0$,

$$\forall x',x''\in I_1:|x'-x''|<\delta_1,\text{有}|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

$$\forall x',x''\in I_2:|x'-x''|<\delta_2,\text{有}|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$,则对$\forall x',x''\in I_1\cup I_2:|x'-x''|<\delta$,

有以下两种情形：

情形1. $x',x''\in I_1$ 或 $x',x''\in I_2$.则有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

情形2. $x'\in I_1,\ x''\in I_2.c\in I_1\cap I_2,|x'-c|<\delta,|x''-c|<\delta$,

可得 $|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-f(c)|+|f(x'')-f(c)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$

综上分析,证得$f(x)$在区间$I_1\cup I_2$上一致连续.

注： 条件“$c \in I_1 \cap I_2$”是重要的.

比如

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le 2\\ 0, & 2<x\le 3\end{cases}$$

在区间[1,2]与区间(2,3]上分别一致连续,

但在区间[1,3]上不连续,当然也不一致连续.

例18 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,并且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

证明: $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

证 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,根据Cauchy收敛准则知,

对$\forall\varepsilon>0,\exists M>a$,当$x',x''>M$时,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

又$f(x)$在$[a,M+1]$上连续,根据一致连续性定理知,

$f(x)$在$[a,M+1]$上一致连续.因此对上述$\varepsilon,\exists\delta>0(\delta<1)$,

对$\forall x',x''\in[a,M+1]$,只要$|x'-x''|<\delta$,必有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

现对$\forall x',x''\in[a,+\infty),|x'-x''|<\delta$,讨论如下.

情形1. $x',x''\in[a,M+1]$,自然有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$;

情形2. 注意到$\delta<1$,所以若情形1不成立,必然有$x'>M,x''>M$,
于是$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

综上分析,证得$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

你应该：

理解一致连续性

会证明函数的一致连续性与不一致连续性

康托尔对数学的贡献是集合论和超穷数理论.两千多年来，科学家们接触到无穷，却又无力去把握和认识它，这的确是向人类提出的尖锐挑战.康托尔以其思维之独特，想象力之丰富，方法之新颖绘制了一幅人类智慧的精品——集合论和超穷数理论，令19、20世纪之交的整个数学界、甚至哲学界感到震惊。可以毫不夸张地讲，“关于数学无穷的革命几乎是由他一个人独立完成的.”

—— 摘自百度百科

格奥尔格·康托尔

Cantor，Georg Ferdinand Ludwig Philipp

(1845年3月3日-1918年1月6日)

德国数学家，集合论的创始人