Ch1 实数集与函数

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

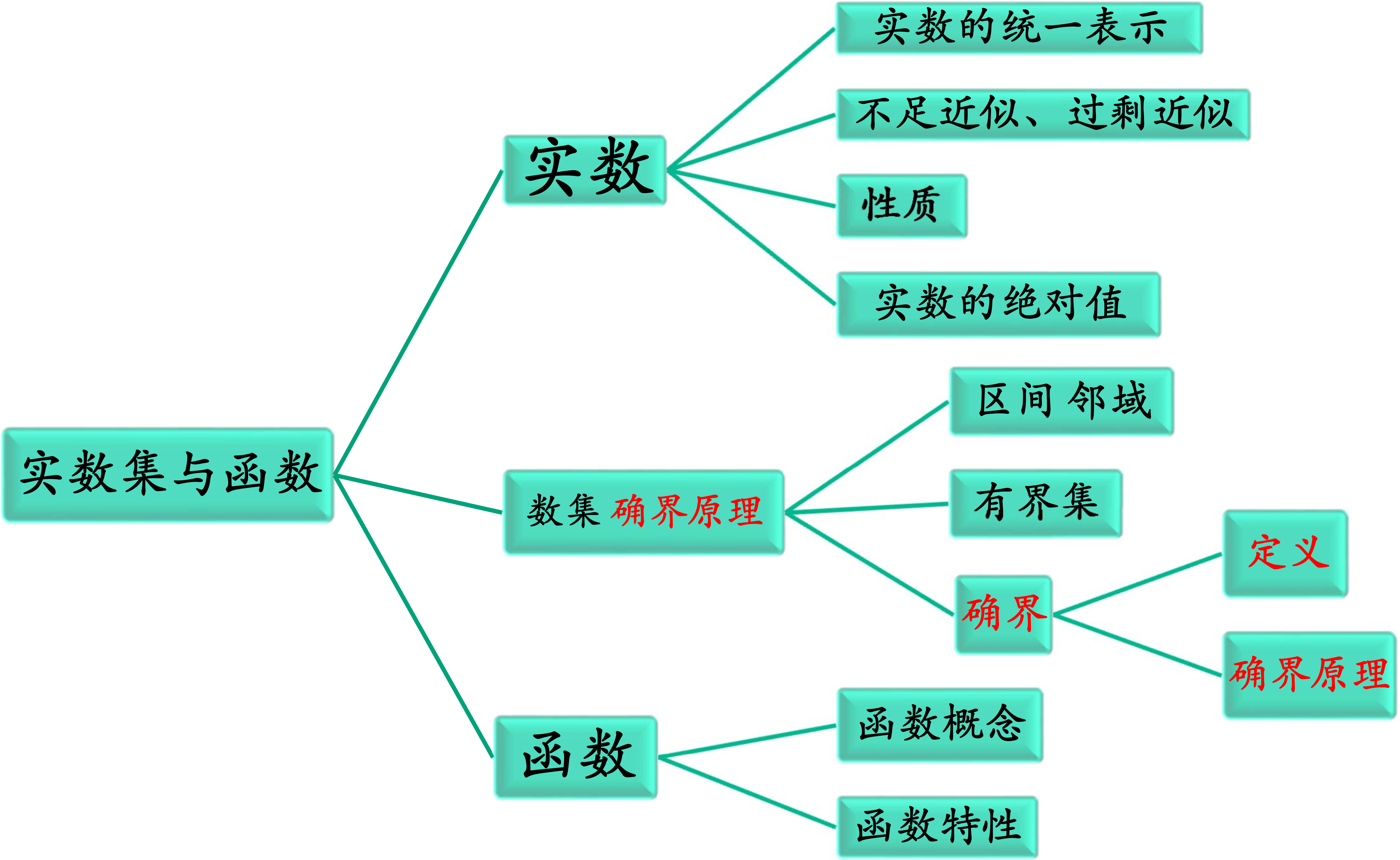
微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

数学分析1——Ch1 实数集与函数—— 总结



BY GYH

P4/习题1.1/3 设$a,b\in\mathbb{R}$. 证明：若对任何正数ε, 有$|a-b|<\varepsilon$, 则$a=b$.

证1 (反证法) 假设$a\neq b$.

取$\varepsilon_0=|a-b|>0$, 则有 $|a-b|=\varepsilon_0$. 矛盾. 所以 $a=b$.

证2 (反证法) 假设$a\neq b$, 则 $|a-b|>0$.

取$\varepsilon_0=\dfrac{|a-b|}{2}>0$, 则有 $|a-b|>\varepsilon_0$, 矛盾. 所以 $a=b$.

证3 对$\forall\varepsilon>0$, 有$|a-b|<\varepsilon$, 即 $-\varepsilon<a-b<\varepsilon$.

从而 $-\varepsilon<a-b \Rightarrow b<a+\varepsilon \Rightarrow b\leq a$.

$a-b<\varepsilon \Rightarrow a<b+\varepsilon \Rightarrow a\leq b$.

所以 $a=b$.

利用已证命题：若对$\forall\varepsilon>0$, 有$a<b+\varepsilon$, 则$a\leq b$.

P4/习题1.1/6 设$a,b,c\in\mathbb{R}_+$. 证明：$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\le|b-c|$.

并说明此不等式的几何意义.

证1 根据根式有理化，有

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|=\left|\frac{b^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}\right|=\frac{|b-c|\cdot(b+c)}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}\le|b-c|.$$

证2

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\le|b-c|\Leftrightarrow\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|^2\le|b-c|^2$$

$$\Leftrightarrow\ a^2+b^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+a^2+c^2\le b^2-2bc+c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+bc\le\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\Leftrightarrow a^4+2a^2bc+b^2c^2\le a^4+a^2c^2+b^2a^2+b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 2bc\le c^2+b^2\Leftrightarrow\ 0\le(b-c)^2.$$

不等式的几何意义：三角形两边之差小于第三边.

P8/习题1.2/4(1) 求数集$S=\{x \mid x^2<2\}$的上、下确界，并依定义加以验证.

解1 $\sup S=\sqrt{2}$，$\inf S=-\sqrt{2}$.

验证$\sup S=\sqrt{2}$.

(1)对$\forall x\in S$，有$x<\sqrt{2}$，即$\sqrt{2}$是S的一个上界.

(2)对$\forall \alpha<\sqrt{2}$，若$\alpha\le 0$，取$x_0=1\in S$，有 $x_0>\alpha$.

若$0<\alpha<\sqrt{2}$，根据实数集的稠密性知，$\exists x_0\in(\alpha,\sqrt{2})$，

则$x_0\in S$，且 $x_0>\alpha$.

因此 $\sup S=\sqrt{2}$.

验证$\inf S=-\sqrt{2}$.

(1)对$\forall x\in S$，有$x>-\sqrt{2}$，即$-\sqrt{2}$是S的一个下界.

(2)对$\forall \beta>-\sqrt{2}$，若$\beta\ge 0$，取$x_0=-1\in S$，有 $x_0<\beta$.

若$-\sqrt{2}<\beta<0$，根据实数集的稠密性知，$\exists x_0\in(-\sqrt{2},\beta)$，

则$x_0\in S$，且 $x_0<\beta$.

因此 $\inf S=-\sqrt{2}$.

P8/习题1.2/4(1) 求数集$S=\{x|x^2<2\}$的上、下确界,并依定义加以验证.

解2 $\sup S=\sqrt{2}$, $\inf S=-\sqrt{2}$.

验证$\sup S=\sqrt{2}$.

(1)对$\forall x\in S$,有$x<\sqrt{2}$,即$\sqrt{2}$是S的一个上界.

(2)对$\forall \alpha<\sqrt{2}$,则$\sqrt{2}-\alpha>0$, 根据阿基米德性知, $\exists n_0\in\mathbb{N}_+$, 使得$\dfrac{1}{n_0}<\sqrt{2}-\alpha$.

取$x_0=\sqrt{2}-\dfrac{1}{n_0}$, 则$x_0\in S$, 且 $x_0>\alpha$.

因此 $\sup S=\sqrt{2}$.

验证$\inf S=-\sqrt{2}$.

(1)对$\forall x\in S$,有$x>-\sqrt{2}$,即$-\sqrt{2}$是S的一个下界.

(2)对$\forall \beta>-\sqrt{2}$,则$\beta+\sqrt{2}>0$, 根据阿基米德性知, $\exists n_0\in\mathbb{N}_+$,使得$\dfrac{1}{n_0}<\beta+\sqrt{2}$.

取$x_0=-\sqrt{2}+\dfrac{1}{n_0}$, 则$x_0\in S$, 且 $x_0<\beta$.

因此 $\inf S=-\sqrt{2}$.

P8/习题1.2/4(3) 求数集$S=\{x\mid x为(0,1)上的无理数\}$的上、下确界,并依定义加以验证.

解 $\sup S=1,\quad \inf S=0.$

验证$\sup S=1$.

(1)对$\forall x\in S$,有$x<1$,即1是S的一个上界.

(2)对$\forall\alpha<1$,若$\alpha\le 0$,取$x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\in S$,有 $x_0>\alpha$.

若$0<\alpha<1$,根据无理数在实数集中的稠密性知,

$\exists x_0\in(\alpha,1)\cap\mathbb{Q}^c$,则$x_0\in S$,且 $x_0>\alpha$.

因此 $\sup S=1$.

验证$\inf S=0$.

(1)对$\forall x\in S$,有$x>0$,即0是S的一个下界.

(2)对$\forall\beta>0$,若$\beta\ge 1$,取$x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\in S$,有 $x_0<\beta$.

若$0<\beta<1$,根据无理数在实数集中的稠密性知,

$\exists x_0\in(0,\beta)\cap\mathbb{Q}^c$,则$x_0\in S$,且 $x_0<\beta$.

因此 $\inf S=0$.

P8/习题1.2/6(2) 设S为非空数集,定义$S^{-}=\{x \mid -x\in S\}$.证明:$\sup S^{-}=-\inf S$.

证 考虑S有下界的情形,根据确界原理, S存在下确界. 设$\xi=\inf S$.

根据下确界的定义以及$S^{-}=\{x \mid -x\in S\}$,

(i) 对$\forall x\in S^{-}$, 有$-x\in S$, 从而$-x\geq\xi$, 于是 $x\leq-\xi$,

即$-\xi$是数集S^{-}的一个上界.

(ii) 对$\forall\alpha<-\xi$, 有$-\alpha>\xi$, 从而$\exists x_0\in S$, 使得$x_0<-\alpha$,

于是 $-x_0>\alpha$, 且$-x_0\in S^{-}$, 即$-\xi$是数集S^{-}的最小上界.

从而$-\xi$是数集S^{-}的上确界.

因此 $\sup S^{-}=-\xi=-\inf S$.

P8/习题1.2/7(2) 设A,B为非空有界数集,定义$A+B=\{z|z=x+y,x\in A,y\in B\}$.

证明: $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

证 由于A,B非空有下界,显然$A+B$也是非空有下界.

根据确界原理知,$A,B,A+B$存在下确界.

$\forall z\in A+B$,根据$A+B$的定义知,$\exists x\in A,y\in B$,使得$z=x+y$.

由于 $x\geq\inf A,y\geq\inf B$, 所以 $z=x+y\geq\inf A+\inf B$,

即$\inf A+\inf B$是$A+B$的一个下界.

根据下确界的定义,对$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in A$,使得$x_0<\inf A+\dfrac{\varepsilon}{2}$,

$\exists y_0\in B$,使得$y_0<\inf B+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

即$\exists z_0=x_0+y_0\in A+B$,使得$z_0=x_0+y_0<\inf A+\inf B+\varepsilon$.

所以 $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

P8/习题1.3/10 试问下列等式是否成立:

$$(1)\tan(\arctan x)=x, x\in\mathbb{R}.$$

$$(2)\arctan(\tan x)=x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

解 (1) 等式成立. 记$y=\arctan x, x\in\mathbb{R}$, 则$x=\tan y, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

因此 $\tan(\arctan x)=\tan y=x, x\in\mathbb{R}$.

(2) 等式不成立. 记$y=\tan x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

则当$x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$时, $y=\tan x=\tan(x-k\pi), x-k\pi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), k\in\mathbb{Z}$.

因此 $\arctan(\tan x)=\arctan y=x-k\pi, x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

P8/习题1.3/12 证明关于函数$y=[x]$的如下不等式：

$$(1)\text{当} x>0\text{时},1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1.$$

$$(2)\text{当} x<0\text{时},1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x.$$

解 由于 $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$，因此

(1) 当$x>0$时,有 $x\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\left[\frac{1}{x}\right]\le x\cdot\frac{1}{x}$，即 $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1.$

(2) 当$x<0$时,有 $x\left(\frac{1}{x}-1\right)>x\left[\frac{1}{x}\right]\ge x\cdot\frac{1}{x}$，即 $1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x.$

P18/习题1.4/2 (1)叙述无界函数的定义.

(2)证明$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$为$(0,1)$上的无界函数.

(3)举出函数f的例子,使f为闭区间$[0,1]$上的无界函数.

解 (1) 设$f(x)$为定义在D上的函数,若对$\forall M>0$, $\exists x_0\in D$, 使得$|f(x_0)|>M$,

则称$f(x)$为定义在D上的无界函数.

(2) 对$\forall M>0$, 取 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1)$, 使得

$$|f(x_0)|=\frac{1}{x_0^2}=M+1>M.$$

所以$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$是$(0,1)$上的无界函数.

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, x\in(0,1]\\ 1, \quad x=0\end{cases}$.

注： $\exists$的否定是$\forall$； $\forall$的否定是$\exists$;

$\leq$的否定是$>$; $\geq$的否定是$<$;

且的否定是或.

P18/习题1.4/9(2) 设f为定义在D上的有界函数，证明：

$$\inf_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup_{x\in D} f(x).$$

证 由于f为定义在D上的有界函数，根据确界原理，f在D上存在上、下确界.

根据上确界的定义，对$\forall x\in D$,有 $f(x)\le\sup\limits_{x\in D} f(x)$.

因此对$\forall x\in D$,有$-f(x)\ge-\sup\limits_{x\in D} f(x)$,

即$-\sup\limits_{x\in D} f(x)$是$-f(x)$在$D$上的一个下界.

对$\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in D$,使得 $f(x_0)>\sup\limits_{x\in D} f(x)-\varepsilon$, 即 $-f(x_0)<-\sup\limits_{x\in D} f(x)+\varepsilon$,

从而$-\sup\limits_{x\in D} f(x)$是$-f(x)$在$D$上的最大下界.

根据下确界的定义，有 $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D} f(x)$.

P19/第一章总练习题/2 设f和g都是D上的初等函数,定义

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad m(x)=\min\{f(x),g(x)\},x\in D.$$

试问$M(x)$和$m(x)$是否为初等函数?

解 $M(x)$和$m(x)$都是初等函数. 因为

$$M(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}=\frac{f(x)+g(x)+\sqrt{(f(x)-g(x))^2}}{2},$$

$$m(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}=\frac{f(x)+g(x)-\sqrt{(f(x)-g(x))^2}}{2},$$

所以$M(x)$和$m(x)$是通过有限次四则运算与复合构成的,

故$M(x)$和$m(x)$都是初等函数.

P20/第一章总练习题/12(2) 设f,g为D上的有界函数.证明:

$$\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$$

证1 由于f,g为在D上的有界函数,根据确界原理,$f,g,f+g$在D上存在上、下确界.

根据下确界的定义,对$\forall x\in D$,有 $\inf_{x\in D} g(x)\le g(x)$.

根据上确界的定义,对$\forall \varepsilon>0$, $\exists x_0\in D$,使得 $f(x_0)>\sup_{x\in D} f(x)-\varepsilon$.

从而 $\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)-\varepsilon< f(x_0)+g(x_0)$.

由上确界的定义,有 $f(x_0)+g(x_0)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$.

于是 $\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)< \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\varepsilon$.

由ε的任意性,有 $\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$.

P20/第一章总练习题/12(2) 设f,g为D上的有界函数.证明:

$$\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$$

证2 由于f,g为在D上的有界函数,根据确界原理,$f,g,f+g$在D上存在上、下确界.

根据已证结论: $\sup_{x\in D}\{-g(x)\}=-\inf_{x\in D} g(x)$, 即要证

$$\sup_{x\in D} f(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\sup_{x\in D}\{-g(x)\}.$$

由于 $f(x)=(f(x)+g(x))+(-g(x))$, 根据上确界的定义, 对$\forall x\in D$,有

$$f(x)=(f(x)+g(x))+(-g(x))\le \sup_{x\in D}\{(f(x)+g(x))\}+\sup_{x\in D}\{-g(x)\}$$

从而

$$\sup_{x\in D} f(x)\le \sup_{x\in D}\{(f(x)+g(x))\}+\sup_{x\in D}\{-g(x)\}.$$

P20/第一章总练习题/12(2) 设f,g为D上的有界函数.证明：

$$\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$$

证3 由于f,g为在D上的有界函数，根据确界原理，$f,g,f+g$在D上存在上、下确界.

根据上、下确界的定义，对$\forall x\in D$,有

$$f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le f(x)+g(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$$

从而对$\forall x\in D$,有 $f(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf_{x\in D} g(x).$

根据上确界的定义,有 $\sup_{x\in D} f(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf_{x\in D} g(x),$

即 $\sup_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$

P20/第一章总练习题/13 设f,g为D上的非负有界函数.证明:

$$(1)\inf_{x\in D} f(x)\cdot\inf_{x\in D} g(x)\le\inf_{x\in D}\{f(x)g(x)\}.$$

$$(2)\sup_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\le\sup_{x\in D} f(x)\cdot\sup_{x\in D} g(x).$$

证 由于f,g为在D上的有界函数，根据确界原理, $f,g,f\cdot g$在D上存在上、下确界.

(1) 根据下确界的定义,对$\forall x\in D$,有 $f(x)\ge\inf_{x\in D} f(x)\ge 0$, $g(x)\ge\inf_{x\in D} g(x)\ge 0$,

从而 $f(x)g(x)\ge\inf_{x\in D} f(x)\cdot\inf_{x\in D} g(x)$,

即$\inf_{x\in D} f(x)\cdot\inf_{x\in D} g(x)$是$f(x)g(x)$在$D$上的一个下界. 根据下确界的定义,

$$\inf_{x\in D} f(x)\cdot\inf_{x\in D} g(x)\le\inf_{x\in D}\{f(x)g(x)\}.$$

(2)根据上确界的定义,对$\forall x\in D$,有 $0\le f(x)\le\sup_{x\in D} f(x)$, $0\le g(x)\le\sup_{x\in D} g(x)$.

从而 $f(x)g(x)\le\sup_{x\in D} f(x)\cdot\sup_{x\in D} g(x)$,

即$\sup_{x\in D} f(x)\cdot\sup_{x\in D} g(x)$是$f(x)g(x)$在$D$上的一个上界.根据上确界的定义,

$$\sup_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\le\sup_{x\in D} f(x)\cdot\sup_{x\in D} g(x).$$

P20/第一章总练习题/15 设f为定义在$\mathbb{R}$上以h为周期的函数,a为实数.证明:若f在$[a,a+h]$上有界,则f在$\mathbb{R}$上有界.

证 已知f在$[a,a+h]$上有界,则$\exists M>0$,对$\forall x\in[a,a+h]$,有 $|f(x)|\le M$.

对$\forall x\in\mathbb{R}$,$\exists k\in\mathbb{Z}$,使得 $a+kh\le x<a+(k+1)h$,

即 $a\le x-kh<a+h$.

由于f是周期为h的函数,因此

$$|f(x)|=|f(x-kh)|\le M.$$

所以f在$\mathbb{R}$上有界.

P20/第一章总练习题/16 设f在区间I上有界.记$M=\sup\limits_{x\in I} f(x), m=\inf\limits_{x\in I} f(x)$.

证明：$$\sup_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|=M-m.$$

证 由于对$\forall x',x''\in I$,有 $m\le f(x')\le M$, $m\le f(x'')\le M$.

从而 $$m-M\le f(x')-f(x'')\le M-m.$$

因此 $\left|f(x')-f(x'')\right|\le M-m$, 即$M-m$是$\left|f(x')-f(x'')\right|$在$I$上的一个上界.

对$\forall\varepsilon>0$, $\exists x_1'\in I$,使得 $f(x_1')>M-\dfrac{\varepsilon}{2}$,

$\exists x_2''\in I$,使得 $f(x_2'')<m+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

从而 $f(x_1')-f(x_2'')>M-m-\varepsilon$. 于是

$$\left|f(x_1')-f(x_2'')\right|\ge f(x_1')-f(x_2'')>M-m-\varepsilon,$$

即$M-m$是$\left|f(x')-f(x'')\right|$在$I$上的最小上界.

所以 $$\sup_{x',x''\in I}\left|f(x')-f(x'')\right|=M-m.$$

数学证明中常用的方法：

1. 数学归纳法： 证明一个与正整数n有关的命题$P(n)$.

首先验证当$n=1(n=n_0)$时，命题$P(1)(P(n_0))$成立.

接着在假设当$n=k$时命题$P(n)$成立的条件下，证明当$n=k+1$时，

命题$P(n+1)$也成立.

从而该命题$P(n)$对任意的正整数$n(n\geq n_0)$都成立.

2. 反证法：

否定要证命题的结论，通过推导与已经条件矛盾.

矛盾的原因就是假设不成立，从而命题得证.

注意：是否定结论，不是否定条件和结论.