Ch2 数列极限

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

§1 数列极限概念

§2 收敛数列的性质

§3 数列极限存在的条件

将学习：

收敛数列有哪些性质？

如何运用这些性质？

收敛数列的唯一性

若数列$\{a_n\}$收敛，则它只有一个极限.

即收敛数列的极限是唯一的.

唯一性 数列$\{a_n\}$收敛,则极限唯一.

证1 假设数列$\{a_n\}$有两个极限a,b,即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

根据数列极限的定义,

对$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_1 : |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$;

对上述$\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_2 : |a_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

令$N = \max\{N_1, N_2\}, \forall n > N : |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}, |a_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是,对$\forall n > N$,有

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \le |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因为ε是任意的,所以$a = b$. 从而收敛数列$\{a_n\}$的极限唯一.

命题 对$\forall \varepsilon > 0$,若$|a-b| < \varepsilon$,则$a = b$.

唯一性 数列$\{a_n\}$收敛,则极限唯一.

证2 设a是数列$\{a_n\}$的一个极限.

要证明：对任何定数$b \neq a$,b不是数列$\{a_n\}$的极限.

由于$\lim\limits_{a\to\infty} a_n = a$, 根据数列极限的定义, 取$\varepsilon_0 = \dfrac{|b-a|}{2}$,

因此$\{a_n\}$在$U(a;\varepsilon_0)$之外至多只有有限项.

从而$\{a_n\}$在$U(b;\varepsilon_0)$内至多只有有限项.

所以b不是数列$\{a_n\}$的极限.

故证明了收敛数列只能有一个极限.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq b \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$,若在$U(b;\varepsilon_0)$之外有数列$\{a_n\}$的无限多项.

唯一性 数列$\{a_n\}$收敛,则极限唯一.

证3 利用反证法证明.

假设数列$\{a_n\}$有两个极限a,b,即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

不妨设$a<b$. 根据数列极限的定义,

令$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon;$

对上述$\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_2 : |a_n - b| < \varepsilon.$

令$N = \max\{N_1, N_2\}, \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon, |a_n - b| < \varepsilon,$

即有 $\dfrac{3a-b}{2} < a_n < \dfrac{a+b}{2}, \quad \dfrac{a+b}{2} < a_n < \dfrac{3b-a}{2},$

产生矛盾. 所以只能$a=b$, 这就证明了极限是唯一的.

收敛数列的有界性

若数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$为有界数列，

即存在$M>0$，使得对$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$|a_n|\le M$.

有界性 数列$\{a_n\}$收敛,则数列$\{a_n\}$有界.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 根据数列极限的定义,

对于正数$\varepsilon = 1$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, $\forall n > N$: $|a_n - a| < 1$,

即 $a - 1 < a_n < a + 1$.

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |a-1|, |a+1|\}$,

则 对$\forall n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $|a_n| \le M$,

即 数列$\{a_n\}$有界.

有界性 数列$\{a_n\}$收敛,则数列$\{a_n\}$有界.

注：有界性是数列收敛的必要条件,而非充分条件.

例如 数列$\{(-1)^n\}$, $\{\sin n\}$有界,但不收敛.

注：逆否命题：若数列$\{a_n\}$无界,则数列$\{a_n\}$发散.

收敛数列的保号性

若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0\left(或 < 0\right)$，则对$\forall a' \in (0,a)\left(或 a' \in (a,0)\right)$，

$\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$，有

$$a_n > a' > 0 \quad \left(或 a_n < a' < 0\right).$$

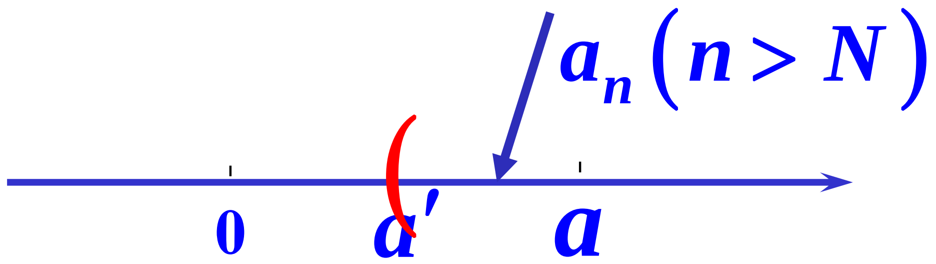
保号性 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0(<0), \forall a' \in (0,a)((a,0)) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 有 $a_n > a' > 0(a_n < a' < 0)$.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. 根据数列极限的定义,

取 $\varepsilon = a - a'$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$:

$$|a_n - a| < \varepsilon = a - a',$$

即 $a_n > a - (a - a') = a'$.



保号性 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0(<0), \forall a' \in (0,a)((a,0)) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 有 $a_n > a' > 0(a_n < a' < 0)$.

注：在应用保号性时，经常取$a' = \dfrac{a}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \text{有 } |a_n| > \frac{|a|}{2}.$$

收敛数列的保号性推论

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 对于任意两个实数 b, c, $b < a < c$,

则 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 有

$$b < a_n < c.$$

保号性推论 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \forall b < a < c \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 有 $b < a_n < c$.

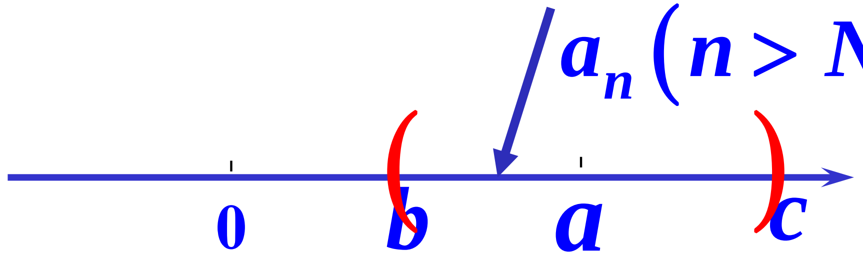
证 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 根据数列极限的定义,

取 $\varepsilon = \min\{a-b, c-a\} > 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$:

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

从而 $b = a-(a-b) \le a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \le a+(c-a) = c$,

即 $b < a_n < c$.



收敛数列的保号性推论(保序性)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 若 $a < b$,

则 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 有

$$a_n < b_n.$$

保序性 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 有 $a_n < b_n$.

证1 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a < \dfrac{a+b}{2} < b$,

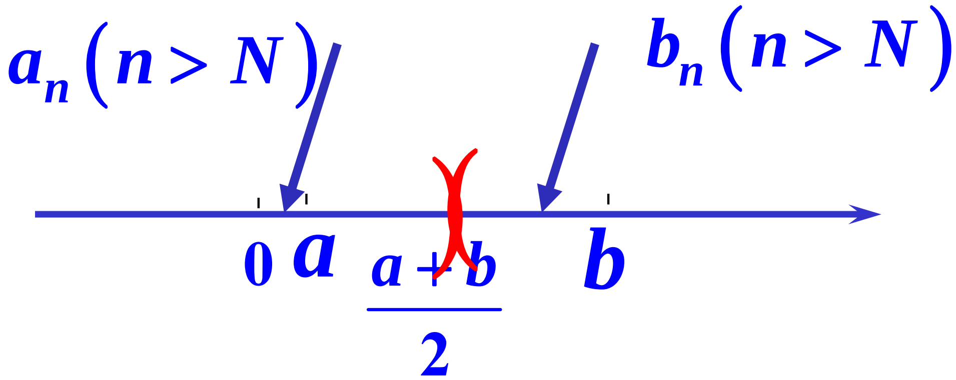
根据收敛数列的保号性,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_1:\ a_n < \frac{a+b}{2};$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_2:\ b_n > \frac{a+b}{2}.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}, \forall n > N: a_n < \dfrac{a+b}{2}, b_n > \dfrac{a+b}{2}$.

从而 $a_n < b_n$.



保序性 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 有 $a_n < b_n$.

证2 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a < b$, 根据收敛数列的定义,

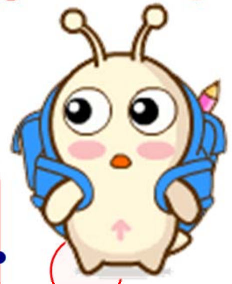
取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_1 : |a_n - a| < \dfrac{b-a}{2}$;

$\exists N_2 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_2 : |b_n - b| < \dfrac{b-a}{2}$.

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, $\forall n > N$:

$$a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad b_n > b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

从而 $a_n < b_n$.



例 1 证明: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.}$

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon \Leftarrow \frac{1}{n!}<\varepsilon^n \Leftarrow \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n}{n!}<1$$

证 对$\forall\varepsilon>0$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n}{n!}=0$,

根据收敛数列的保号性推论, $\exists N\in\mathbb{N}_+$,当$n>N$时,有

$$\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n}{n!}<1,\quad \text{从而}\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon,\ \text{即}\ \left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

$$(a>0)\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

保号性推论 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\forall a<c\Rightarrow\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$, 有 $a_n<c.$

例 1 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

另证 首先证明: 对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有$\sqrt{n}\le\sqrt[n]{n!}$.

对$\forall k,n\in\mathbb{N}_+,k\le n$,有$(n-k)(k-1)\ge 0$, 即 $n\le k(n-k+1)$.

当$k=1,2,\cdots,n$时, 分别有

$$n\le 1\cdot n,\quad n\le 2\cdot(n-1),\ \cdots,n\le n\cdot 1.$$

连乘得 $n^n\le(n!)^2$, 即 $\sqrt{n}\le\sqrt[n]{n!}$.

对$\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$, 只要$n>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$,当$n>N$时,有 $\left|\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

收敛数列的保不等式性

设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为收敛数列，如果存在正数N_0，当$n > N_0$时，有$a_n \le b_n$，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n .$$

保不等式性 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \exists N_0 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_0$, 有 $a_n \le b_n \Rightarrow a \le b$.

证1 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 根据收敛数列的定义,

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N_1$ 时: $a_n > a - \dfrac{\varepsilon}{2}$;

对上述 $\varepsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N_2$ 时: $b_n < b + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

令 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}, \forall n > N: a_n > a - \dfrac{\varepsilon}{2}, b_n < b + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

即 $a - \dfrac{\varepsilon}{2} < a_n \le b_n < b + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

从而 $a < b + \varepsilon$. 由 ε 的任意性可得 $a \le b$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

命题 对 $\forall \varepsilon > 0$, 若 $a < b + \varepsilon$, 则 $a \le b$.

保不等式性 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \exists N_0 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_0$, 有$a_n \le b_n \Rightarrow a \le b.$

证2 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 要证$a \le b$.

(反证法) 假设 $a > b$.

由于$b < \dfrac{b+a}{2} < a$,根据收敛数列的保号性,

$\exists N_1 \in \mathbb{N}_+$,当$n > N_1$时:$a_n > \dfrac{a+b}{2}$.

$\exists N_2 \in \mathbb{N}_+$,当$n > N_2$时: $b_n < \dfrac{a+b}{2}$.

令$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}, \forall n > N$,有 $b_n < \dfrac{a+b}{2} < a_n$,

与$a_n \le b_n$同时成立,因此产生矛盾.

所以 $a \le b$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

保不等式性 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \exists N_0 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_0$, 有 $a_n \le b_n \Rightarrow a \le b.$

注： 在保不等式性定理中，若条件$a_n \le b_n$改为$a_n < b_n$，

也只能得到$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

例如 数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}, \left\{\dfrac{2}{n}\right\}$，虽然$\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n}$，

但$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n}$.

$a_n < \varepsilon^2$

例 2 设$a_n \geq 0(n=1,2,\cdots)$.证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证1 由于$a_n \geq 0$,根据收敛数列的保不等式性，有$a \geq 0$.

当$a=0$时，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.根据收敛数列的定义，

对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$,使得当$n > N$时,有 $|a_n - 0| < \varepsilon^2$,即$a_n < \varepsilon^2$.

从而 $\sqrt{a_n} < \varepsilon$,即$\boxed{\left|\sqrt{a_n} - 0\right| = \sqrt{a_n} < \varepsilon}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = 0$.

当$a > 0$时，根据收敛数列的定义，

对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得当$n > N$时,有 $|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$.

从而 $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \boxed{\dfrac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon}$.

$|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

例 2 设$a_n \geq 0(n=1,2,\cdots)$.证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

证2 首先有不等式$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| \leq \sqrt{|x-a|}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则对$\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}_+$,使得当$n>N$时,有

$$|a_n - a| < \varepsilon^2.$$

从而 $$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right| \leq \sqrt{|a_n-a|} < \varepsilon.$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}.$$

收敛数列的迫敛性

设三个数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足:

(1)$\exists N_0\in\mathbb{N}_+$,当$n>N_0$时,有 $x_n\le y_n\le z_n$.

(2)$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$.

则

$$\lim_{n\to\infty} y_n=a.$$

迫敛性 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n, \exists N_0 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_0$, 有$x_n \le y_n \le z_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

证 由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 根据收敛数列的定义,

对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}_+$,当$n > N_1$时: $|x_n - a| < \varepsilon$, 从而有 $x_n > a - \varepsilon$;

对上述ε,$\exists N_2 \in \mathbb{N}_+$,当$n > N_2$时: $|z_n - a| < \varepsilon$, 从而有 $z_n < a + \varepsilon$.

令 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 当$n > N$时,有

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon.$$

从而有 $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

迫敛性 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n, \exists N_0 \in \mathbb{N}_+, \forall n > N_0$, 有$x_n \le y_n \le z_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

注：收敛数列的迫敛性定理不仅给出了判断数列收敛的一种方法，而且提供了一种求极限的工具.

收敛数列的四则运算法则

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,则

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$;

当y_n为常数c时,

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n + c\right) = \lim_{n\to\infty} x_n + c, \lim_{n\to\infty} cx_n = c\lim_{n\to\infty} x_n;$$

(3)若$y_n \neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$,则$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$也收敛,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = a \pm b.$$

证 (1)因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，根据收敛数列的定义，

对$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}_+$，当$n > N_1$时：$|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$；

当$n > N_2$时：$|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

令$N = \max\{N_1, N_2\}$，当$n > N$时：

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $$\left|\left(x_n \pm y_n\right) - \left(a \pm b\right)\right| = \left|\left(x_n - a\right) \pm \left(y_n - b\right)\right|$$

$$\le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = ab.$$

证 (2)因为数列$\{y_n\}$收敛，根据收敛数列的有界性定理，

$\{y_n\}$有界,即$\exists M>0, \forall n\in\mathbb{N}_+$,有$|y_n|\le M$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，根据收敛数列的定义，

对$\forall \varepsilon>0$，$\exists N_1, N_2\in\mathbb{N}_+$,当$n>N_1$时： $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$；

当$n>N_2$时： $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2\left(|a|+1\right)}$.

令$N=\max\{N_1, N_2\}$，当$n>N$时: $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}, |y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2\left(|a|+1\right)}$.

从而 $|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \le |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab|$

$$= |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| < M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |a|\frac{\varepsilon}{2\left(|a|+1\right)} < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$$y_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

证 (3)因为 $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$，故只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{1}{b}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$，根据收敛数列的保号性，$\exists N_1 \in \mathbb{N}_+$，当 $n > N_1$ 时：

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，根据收敛数列的定义，

对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_2 \in \mathbb{N}_+$，当 $n > N_2$ 时：$|y_n - b| < \frac{b^2}{2}\varepsilon$.

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时：$|y_n| > \frac{|b|}{2}$，$|y_n - b| < \frac{b^2}{2}\varepsilon$.

从而 $$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{b y_n}\right| = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{1}{|y_n|} \cdot |y_n - b| < \frac{2}{b^2}|y_n - b| < \varepsilon.$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}.$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cancel{=}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}$$

$$=\infty-\infty$$

$$=0.$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

$(\alpha>0)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0$

解1 由于

$$0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=0.$

根据收敛数列的迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0.$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

$(a_n \ge 0)\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

解2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{0}{1+1}=0.$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

例 3 用定义验证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0.$

证 对$\forall \varepsilon > 0$, 要使

$$\left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-0\right| = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

因此,对$\forall \varepsilon > 0$,只要取$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$,则当$n > N$时,有

$$\left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-0\right| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0.$

$(a>0)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

例 4 设$a_n>0(n=1,2,\cdots)$.证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$,$\dfrac{a}{2}<a<\dfrac{3a}{2}$, 根据收敛数列的保号性,

$\exists N\in\mathbb{N}_+$,当$n>N$时,有 $\dfrac{a}{2}<a_n<\dfrac{3a}{2}$,

从而 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{2}}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}}.$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}}=1,$

根据收敛数列的迫敛性, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1.$

例 5 求数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的极限.

解 记$h_n=\sqrt[n]{n}-1\geq 0$,则有

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2\quad(n\geq 2).$$

故 $1\leq \sqrt[n]{n}=1+h_n<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

数列$\left\{1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right\}$收敛于1.

这是由于对$\forall\varepsilon>0,\exists N=1+\frac{2}{\varepsilon^2},\forall n>N:\left|\left(1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)-1\right|<\varepsilon.$

根据收敛数列的迫敛性,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

例 6 用四则运算法则计算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0}$，

其中 $m,k\in\mathbb{N}_+, a_m\neq 0, b_k\neq 0.$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^m\left(a_m + a_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_1\frac{1}{n^{m-1}}+a_0\frac{1}{n^m}\right)}{n^k\left(b_k + b_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{k}}+b_0\frac{1}{n^k}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{m-k}=\begin{cases}0, & m<k,\\ 1, & m=k,\\ +\infty, & m>k.\end{cases}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\boxed{n^{m-k}}\frac{a_m + a_{m-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_1\frac{1}{n^{m-1}}+a_0\frac{1}{n^m}}{b_k + b_{k-1}\frac{1}{n}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{k-1}}+b_0\frac{1}{n^k}}=\begin{cases}0, & m<k,\\ \dfrac{a_m}{b_m}, & m=k,\\ \infty, & m>k.\end{cases}$$

例 7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+4}{5n^2+4n-1}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+4}{5n^2+4n-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(5+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{5+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2}{5}.$$

例 8 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

例 9 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}=\frac{1}{3}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{0+1}{0+1}=\frac{1}{3}.$$

例 10 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-(-2)^n}{3\cdot 5^n+2\cdot 3^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0, & |q|<1,\\ 1, & q=1,\\ \text{不存在}, & q=-1,\\ \infty, & |q|>1.\end{cases}$$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-(-2)^n}{3\cdot 5^n+2\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\left(1-\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(3+2\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}5\cdot\frac{1-\frac{1}{5}\boxed{\left(-\frac{2}{5}\right)^n}}{3+2\left(\frac{3}{5}\right)^n}=5\cdot\frac{1-\frac{1}{5}\cdot 0}{3+2\cdot 0}=\frac{5}{3}.$$

例 11 设$|q|<1$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-q^n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-q\right)}=\frac{1-0}{1-q}=\frac{1}{1-q}.$$

例 12 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\boxed{a^n}}{a^n+1}$，其中 $a\neq -1$.

解 (1)当 $a=1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

(2)当 $|a|<1$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$，

所以由极限四则运算法则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a^n}{\lim\limits_{n\to\infty}a^n+1}=0$.

(3)当 $|a|>1$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty$，

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a^n}}=\dfrac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n}}=\dfrac{1}{1+0}=1$.

例 13 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

例 14 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}$$

$$=1.$$

例 15 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$=0+0+\cdots+0=0.$$

例 15 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

根据收敛数列的迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例 16 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ \ (a>0)$.

证 因为 $a>0$, 故 $\exists k\in\mathbb{N}_+$, 使得 $k>a$.

有 $\quad 1>\dfrac{a}{k+1}>\dfrac{a}{k+2}>\dfrac{a}{k+3}>\cdots.$

对 $\forall n>k$, 有

$$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{k}\cdot\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n-1}\cdot\frac{a}{n}$$

$$<\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{a}{n}=\frac{a^{k+1}}{k!}\cdot\frac{1}{n}.$$

且 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{k+1}}{k!}\cdot\dfrac{1}{n}=0.$

根据收敛数列的迫敛性, 得 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

例 17 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\ \ (a>1,k\in\mathbb{N}_+).$

证 当$k=1$时,令$a=1+h$,则

$$0<\frac{n}{a^n}=\frac{n}{(1+h)^n}=\frac{n}{1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n}<\frac{2}{(n-1)h^2}\quad (n>1),$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{(n-1)h^2}=0.$ 根据收敛数列的迫敛性,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0.$

由于 $\dfrac{n^k}{a^n}=\left(\dfrac{n}{\sqrt[k]{a^n}}\right)^k=\left(\dfrac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}\right)^k$, 且$a^{\frac{1}{k}}>1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}\right)^k=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}\cdots\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}}_{k个}=0.$$

例 18 设$a_1,a_2,\cdots,a_m$是m个正数.证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

证 设$a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$. 由于

$$a=\sqrt[n]{a^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le\sqrt[n]{a^n+a^n+\cdots+a^n}=\sqrt[n]{m}a,$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}a=a,$

根据收敛数列的迫敛性, 得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

子列的定义

设$\{a_n\}$为数列,$\{n_k\}$为正整数集$\mathbb{N}_+$的无限子集,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

称为数列$\{a_n\}$的一个子列,记为$\{a_{n_k}\}$.

注：由定义，数列$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$的各项均选自$\{a_n\}$，且保持这些项在$\{a_n\}$中的先后次序.

$\{a_{n_k}\}$中的第k项是$\{a_n\}$中的第n_k项,故总有 $n_k \geq k$.

注：$\{n_k\}$本身也是正整数列$\{n\}$的一个子列.

注：$\{a_n\}$本身也是$\{a_n\}$的一个子列，此时$n_k = k, k = 1,2,\cdots$.

$n_k = 2k$: $\{a_{n_k}\} = \{a_{2k}\}$: $a_2, a_4, \cdots, a_{2k}, \cdots$ $\{a_n\}$的偶子列

$n_k = 2k-1$: $\{a_{n_k}\} = \{a_{2k-1}\}$: $a_1, a_3, \cdots, a_{2k-1}, \cdots$ $\{a_n\}$的奇子列

$n_k = 2^k$: $\{a_{n_k}\} = \{a_{2^k}\}$: $a_2, a_4, a_8, \cdots, a_{2^k}, \cdots$

数列收敛与其子列的关系

数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{n_k}\}$都收敛.

$$\{a_n\}\text{收敛} \Leftrightarrow \forall\{a_{n_k}\}\text{收敛}$$

证 (充分性) 因为$\{a_n\}$本身也是$\{a_n\}$的一个子列，

所以充分性显然成立.

(必要性) 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则 对$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$,当$n>N$时：

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

设$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的任意一个子列.

取$K=N$,因$n_k\geq k$,故当$k>K$时, $n_k\geq k>N$,

从而 $|a_{n_k}-a|<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

注： 若数列$\{a_n\}$的两个子列收敛于不同的值，则数列$\{a_n\}$必发散.

注： 若数列$\{a_n\}$有一个子列发散，则数列$\{a_n\}$必发散.

例如 $\left\{(-1)^n\right\}$：其偶数项组成的偶子列 $\left\{(-1)^{2k}\right\}$收敛于1;
其奇数项组成的奇子列 $\left\{(-1)^{2k-1}\right\}$收敛于$-1$.
从而数列$\left\{(-1)^n\right\}$发散.

$\left\{n^{(-1)^n}\right\}$：其偶数项组成的偶子列 $\left\{(2k)^{(-1)^{2k}}\right\}=\{2k\}$发散,
从而数列$\left\{n^{(-1)^n}\right\}$发散.

$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$：其奇数项组成的子列$\left\{\sin\dfrac{2k-1}{2}\pi\right\}$
即为$\left\{(-1)^{k-1}\right\}$，而$\left\{(-1)^{k-1}\right\}$发散，故数列$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$发散.

例 19 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$.

证 (必要性)设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时: $|a_n - a| < \varepsilon$.

取 $K = N + 1$, 当 $k > K$ 时,

$$2k > 2K = 2N + 2 > N,\quad 2k - 1 \ge 2K - 1 = 2N + 1 > N.$$

从而 $|a_{2k} - a| < \varepsilon, |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = a$.

(充分性) 因为 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = a$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists K_1 \in \mathbb{N}_+$, 当 $k > K_1$ 时:

$$|a_{2k} - a| < \varepsilon.$$

对上述 $\varepsilon > 0, \exists K_2 \in \mathbb{N}_+$, 当 $k > K_2$ 时: $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{2K_1, 2K_2 - 1\}$, 当 $n > N$ 时, 有

$n = 2k > N \ge 2K_1 \Rightarrow k > K_1$, $|a_{2k} - a| < \varepsilon$ 成立.

$n = 2k - 1 > N \ge 2K_2 - 1 \Rightarrow k > K_2$, $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$ 成立.

故 $|a_n - a| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

例 20 若$x_n=(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$. 证明数列$\{x_n\}$发散.

证 因为$x_{2k}=(-1)^{2k}\left(1-\dfrac{1}{2k}\right)=1-\dfrac{1}{2k}$,

$$x_{2k-1}=(-1)^{2k-1}\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)=-\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)=\frac{1}{2k-1}-1.$$

故 $$\lim_{k\to\infty}x_{2k}=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{2k}\right)=1.$$

$$\lim_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-1\right)=-1.$$

所以数列$\{x_n\}$发散.

例 21 证明：$\{\sin n\}$是一个发散数列.

证1 利用反证法证明. 假设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n = a$.

在等式 $\sin(n+1)-\sin(n-1)=2\sin 1\cos n$

两边取极限，得 $0=2\sin 1\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n = 0$.

再在等式 $\sin 2n = 2\sin n\cos n$ 两边取极限，得 $a=0$.

在等式 $\sin^2 n+\cos^2 n=1$ 两边取极限，得 $0=1$.

产生矛盾，所以$\{\sin n\}$是发散数列.

例 21 证明:$\{\sin n\}$是一个发散数列.

证2 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 因为$\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}, 2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)$的长度为$\dfrac{\pi}{2}>1$,

所以$\exists n_k \in \left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}, 2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)\cap\mathbb{N}$.

因为$(2k\pi-\pi, 2k\pi)$的长度为$\pi>1$, 所以$\exists n_k' \in (2k\pi-\pi, 2k\pi)\cap\mathbb{N}$.

显然$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots, n_1'<n_2'<\cdots<n_k'<\cdots$,且

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin n_k<1, -1<\sin n_k'<0, k\in\mathbb{N}_+.$$

子列$\{\sin n_k\}$与$\{\sin n_k'\}$不可能有同一极限.

所以$\{\sin n\}$是发散数列.

你应该：

知道收敛数列的性质

会应用收敛数列的性质

会求一些数列的极限