Ch1 实数集与函数

顾燕红微信

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820　QQ号：58105217

Email:　yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023秋季数学分析(1...

群号：921774255

QQ学习交流群

将学习：

两类重要数集：区间与邻域

有界集

上、下确界定义和确界原理

开区间

设$a,b\in\mathbb{R}$, 且$a<b$,称数集$\{x|a<x<b\}$为开区间,记作(a,b).

闭区间

设$a,b\in\mathbb{R}$, 且$a<b$,称数集$\{x|a\le x\le b\}$为闭区间,记作$[a,b]$.

半开半闭区间

设$a,b\in\mathbb{R}$, 且$a<b$,称数集$\{x|a\le x<b\}$和$\{x|a<x\le b\}$为半开半闭区间, 记作$[a,b)$或$(a,b]$.

以上几类区间统称为有限区间.

无限区间

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\} \qquad [a,+\infty)=\{x|x\geq a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x|x<b\} \qquad (-\infty,b]=\{x|x\leq b\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbb{R}$$

有限区间和无限区间统称为区间.

邻域

$U(a;\delta)=\{x\,\big|\,|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$：点$a$的$\delta$邻域，简记为$U(a)$.

$U_+(a;\delta)=[a,a+\delta)$：点$a$的$\delta$右邻域，简记为$U_+(a)$.

$U_-(a;\delta)=(a-\delta,a]$：点$a$的$\delta$左邻域，简记为$U_-(a)$.

$U^\circ(a;\delta)=\{x\,\big|\,0<|x-a|<\delta\}$：点$a$的空心$\delta$邻域，简记为$U^\circ(a)$.

$U_+^\circ(a;\delta)=(a,a+\delta)$：点$a$的空心$\delta$右邻域，简记为$U_+^\circ(a)$.

$U_-^\circ(a;\delta)=(a-\delta,a)$：点$a$的空心$\delta$左邻域，简记为$U_-^\circ(a)$.

$U(\infty;M)=\{x\,\big|\,|x|>M\}$，其中$M$为充分大的正数：$\infty$的$M$邻域，简记为$U(\infty)$.

$U(+\infty;M)=\{x\mid x>M\}$，其中$M$为充分大的正数：$+\infty$的$M$邻域，简记为$U(+\infty)$.

$U(-\infty;M)=\{x\mid x<-M\}$，其中$M$为充分大的正数：$-\infty$的$M$邻域，简记为$U(-\infty)$.

有界集

设$S \subset \mathbb{R}$.

(1) 若$\exists M \in \mathbb{R}$, 对$\forall x \in S$, 有$x \le M$, 则称 M为S的一个上界,

称S为有上界的数集.

(2) 若$\exists L \in \mathbb{R}$, 对$\forall x \in S$, 有$x \ge L$, 则称 L为S的一个下界,

称S为有下界的数集.

(3) 若S既有上界又有下界, 则称S为有界集.

无界集

设$S \subset \mathbb{R}$.

(1) 若S不是有上界的数集, 则称S无上界,

即对$\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists x_0 \in S$, 使得 $x_0 > M$.

(2) 若S不是有下界的数集, 则称S无下界,

即对$\forall L \in \mathbb{R}$, $\exists x_0 \in S$, 使得 $x_0 < L$.

(3) 若S不是有界的数集, 则称S无界,

即对$\forall K > 0$, $\exists x_0 \in S$, 使得 $|x_0| > K$.

注1： S有界 $\Leftrightarrow \exists K>0$, 对$\forall x\in S$, 有$|x|\le K$.

注2： 任何有限区间都是有界集.

任何无限区间都是无界集.

注3： 由有限个数组成的数集是有界集.

例1 证明数集 $S=\{2^n \mid n\in\mathbb{N}_+\}$ 无上界, 有下界.

证 取$L=1$,则$\forall x=2^n\in S$,有$x>L$. 故S有下界.

$\forall M\in\mathbb{R}$,若$M<1$,取$x_0=2^1$, 则$x_0>M$.

若$M\geq 1$,取$x_0=2^{[M]+1}$, 则$x_0>[M]+1>M$.

因此S无上界.

例2 证明数集 $\mathbb{N}_+ = \{n \mid n\text{为正整数}\}$ 无上界, 有下界.

证 取 $L = 1$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 有 $n \geq L$. 故 $\mathbb{N}_+$ 有下界.

$\forall M \in \mathbb{R}$, 若 $M < 1$, 取 $n_0 = 1$, 则 $n_0 > M$.

若 $M \geq 1$, 取 $n_0 = [M] + 1$, 则 $n_0 > M$.

因此 $\mathbb{N}_+$ 无上界.

例3 证明数集 $S=\left\{\dfrac{n^2-1}{2n^3}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}_+\right\}$ 有界.

证 对$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有

$$\left|\frac{n^2-1}{2n^3}\right|\le\left|\frac{n^2}{2n^3}\right|+\left|\frac{1}{2n^3}\right|\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

因此数集S有界.

上确界

设$S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$. 若数$\eta \subset \mathbb{R}$满足

(1) 对$\forall x \in S$,有$x \le \eta$, 即η是S的上界;

(2) 对$\forall \alpha < \eta$,$\exists x_0 \in S$,使得 $x_0 > \alpha$, 即η是S的最小上界,

则称数η是数集S的上确界,记为$\eta = \sup S$.

下确界

设$S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$. 若数$\xi \subset \mathbb{R}$满足

(1) 对$\forall x \in S$, 有$x \ge \xi$, 即ξ是S的下界;

(2) 对$\forall \beta > \xi$, $\exists x_0 \in S$, 使得 $x_0 < \beta$, 即ξ是S的最大下界,

则称数ξ是数集S的下确界, 记为$\xi = \inf S$.

注1： 上确界定义中条件(2)可换成

$$\forall \alpha < \eta, \exists x_0 \in S : x_0 > \alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in S,\ x_0 > \eta - \varepsilon.$$

注2： 下确界定义中条件(2)可换成

$$\forall \beta > \xi, \exists\, x_0 \in S : x_0 < \beta \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in S,\ x_0 < \xi + \varepsilon.$$

注3： 上确界与下确界统称为确界.

例4 设 $S=\left\{x \,\middle|\, x=1-\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots\right\}$，证明：$\sup S=1$，$\inf S=0$.

证 先证 $\sup S=1$.

(i) $\forall x\in S$, $x=1-\dfrac{1}{n}<1$,即1是S的上界；

(ii) 对$\forall\,\alpha<1$，有$1-\alpha>0$,由阿基米德性,$\exists\, n_0\in\mathbb{N}_+$,

使得 $n_0>\dfrac{1}{1-\alpha}$. 取$x_0=1-\dfrac{1}{n_0}\in S$,有 $x_0>\alpha$.

因此，$\sup S=1$. 再证 $\inf S=0$.

(i) $\forall x\in S$, $x=1-\dfrac{1}{n}\geq 0$，即0是S的下界;

(ii) 对$\forall\,\beta>0$. 取 $x_0=0\in S$,有$x_0<\beta$.

因此，$\inf S=0$.

例5 设 $S=\{x \mid x$为区间$(0,1)$上的有理数$\}$, 证明: $\sup S=1,\ \inf S=0.$

证 先证 $\sup S=1.$

(i) $\forall x\in S$, 显然有 $x<1$, 即1是S的上界;

(ii) 对$\forall\ \alpha<1$. 若$\alpha\le 0$, 取 $x_0=0.1\in S$, 有$x_0>\alpha$.

若 $0<\alpha<1$, 则由有理数集在实数集中的稠密性知,

在$(\alpha,1)$上必有有理数x_0, 即存在$x_0\in S$, 使 $x_0>\alpha$.

因此, $\sup S=1.$ 再证 $\inf S=0.$

(i) $\forall x\in S$, 显然$x>0$, 即0是S的下界;

(ii) 对$\forall\ \beta>0$. 若$\beta\ge 1$, 取$x_0=0.1\in S$, 有$x_0<\beta$.

若 $0<\beta<1$. 则由有理数集在实数集中的稠密性知,

在$(0,\beta)$上必有有理数x_0, 即存在$x_0\in S$, 使 $x_0<\beta$.

因此, $\inf S=0.$

例6 设 $S=\{x \mid x\in[0,1]\}$，证明：$\sup S=1,\ \inf S=0.$

证 先证 $\sup S=1.$

(i) $\forall x\in S$, 显然有 $x\le 1$, 即 1 是 S 的上界;

(ii) 对 $\forall\alpha<1$. 若 $\alpha\le 0$, 取 $x_0=0.1\in S$, 有 $x_0>\alpha.$

若 $\alpha>0$, 取 $x_0=1\in S$, 有 $x_0>\alpha.$

因此，$\sup S=1.$

再证 $\inf S=0.$

(i) $\forall x\in S$, 显然有 $x\ge 0$, 即 0 是 S 的下界;

(ii) 对 $\forall\beta>0$. 取 $x_0=0\in S$, 有 $x_0<\beta.$

因此，$\inf S=0.$

例7 设 $S=\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{(-1)^n}{n}, n=1,2,\cdots\right\}$, 证明：$\sup S=\dfrac{1}{2}$, $\inf S=-1.$

证 先证 $\sup S=\dfrac{1}{2}.$

(i) $\forall x\in S$, 显然有 $x\le\dfrac{1}{2}$, 即 $\dfrac{1}{2}$ 是 S 的上界;

(ii) 对 $\forall\,\alpha<\dfrac{1}{2}$. 取 $x_0=\dfrac{1}{2}\in S$, 有 $x_0>\alpha.$

因此，$\sup S=\dfrac{1}{2}.$

再证 $\inf S=-1.$

(i) $\forall x\in S$, 显然有 $x\ge -1$, 即 -1 是 S 的下界;

(ii) 对 $\forall\,\beta>-1$. 取 $x_0=-1\in S$, $x_0<\beta.$

因此，$\inf S=-1.$

例8 求数集 $S=\left\{x \middle| x=\dfrac{n}{n+1}, n=1,2,\cdots\right\}$ 上、下确界,并用定义验证.

解 $\sup S=1.$

(i) $\forall x\in S$,因对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $x=\dfrac{n}{n+1}<1$, 即1是 S 的上界;

(ii) 对 $\forall\,\alpha<1$,若 $\alpha\le 0$,取 $x_0=\dfrac{1}{2}$,有 $x_0>\alpha$.

若 $0<\alpha<1$,则 $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}>0$,由Archimedes性知, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}_+$,有 $n_0>\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$.

则 $x_0=\dfrac{n_0}{n_0+1}\in S$,且 $x_0>\alpha$. 因此, $\sup S=1$.

$\inf S=\dfrac{1}{2}.$

(i) $\forall x\in S$,因对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $x=\dfrac{n}{n+1}\ge\dfrac{1}{2}$, 即 $\dfrac{1}{2}$ 是 S 的下界;

(ii) 对 $\forall\,\beta>\dfrac{1}{2}$. 取 $x_0=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}\in S$, $x_0<\beta$.

因此, $\inf S=\dfrac{1}{2}$.

注1： 若数集S存在上(下)确界，则一定是唯一的.

注2： 若数集S存在上确界、下确界，则有$\inf S \le \sup S$.

注3： 数集S的确界可能属于S，也可能不属于S.

例9 设数集 S有上确界. 证明$\eta=\sup S\in S \Leftrightarrow \eta=\max S$.

证 $\Rightarrow$ 设$\eta=\sup S\in S$,则对$\forall x\in S$,有$x\le\eta$,而$\eta\in S$,

故η是数集S中最大的数, 即$\eta=\max S$.

$\Leftarrow$ 设$\eta=\max S$, 则$\eta\in S$.

(i) $\forall x\in S$, 显然有$x\le\eta$, 即η是S的上界;

(ii) 对$\forall\,\alpha<\eta$. 取 $x_0=\eta\in S$, 有 $x_0>\alpha$.

因此, $\sup S=\eta$.

注: $\xi=\inf S\in S\Leftrightarrow\xi=\min S$

确界原理

设$S \subset \mathbb{R}, S \neq \varnothing$.

若S有上界，则S必有上确界;

若S有下界，则S必有下确界.

注： 有界数集一定存在上、下确界，

但不一定有最大、最小数.

确界原理 非空有界数集必有上、下确界.

证 证明若数集S有上界，则S必有上确界.

不妨设S含有非负数. 由于S有上界，故可找到非负整数n，使得

(1)对$\forall x \in S$，有$x < n+1$. (2) $\exists a_0 \in S$，使$a_0 \geq n$.

对半开区间$[n, n+1)$作10等分,分点为$n.1, n.2, \cdots, n.9$，则存在$0,1,2,\cdots,9$中的一个数n_1,使得

(1)对$\forall x \in S$,有$x < n.n_1 + \dfrac{1}{10}$. (2)$\exists a_1 \in S$,使$a_1 \geq n.n_1$.

再对半开区间$[n.n_1, n.n_1 + \dfrac{1}{10})$作10等分,则存在$0,1,2,\cdots,9$中的一个数$n_2$,使得

(1)对$\forall x \in S$,有$x < n.n_1n_2 + \dfrac{1}{10^2}$.(2)$\exists a_2 \in S$,使$a_2 \geq n.n_1n_2$.

继续不断地10等分在前一步骤中所得到的半开区间,可知对$\forall k = 1,2,\cdots, \exists 0,1,2,\cdots,9$中的一个数$n_k$,使得

(1)对$\forall x \in S$,有$x < n.n_1n_2\cdots n_k + \dfrac{1}{10^k}$. (2)$\exists a_k \in S$,使$a_k \geq n.n_1n_2\cdots n_k$.

将上述步骤无限地进行下去，得到实数$\eta = n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$.

下面证明$\eta = \sup S$. 为此只需证明：

(i) $\forall x \in S$，有$x \le \eta$； (ii) 对$\forall\ \alpha < \eta, \exists a' \in S, a' > \alpha$.

若结论(i)不成立，即$\exists x \in S$，使 $x > \eta$.

则可找到x的k位不足近似x_k，使 $x_k > \overline{\eta}_k = n.n_1n_2\cdots n_k + \dfrac{1}{10^k}$,

从而 $x > n.n_1n_2\cdots n_k + \dfrac{1}{10^k}$,

矛盾.

设 $\alpha < \eta, \exists k$，使η的k位不足近似$\eta_k > \overline{\alpha}_k$，即 $n.n_1n_2\cdots n_k > \overline{\alpha}_k$,

根据数η的构造，$\exists a' \in S, a' \ge \eta_k$，从而 $a' \ge \eta_k > \overline{\alpha}_k \ge \alpha$,

即得到$\alpha < a'$. 故结论(ii)成立. 根据上确界的定义，$\eta = \sup S$.

非正常确界

1 规定 (i) $\forall a \in S$，则有 $-\infty < a < +\infty$.

(ii)若数集 S 无上界，记 $\sup S = +\infty$.

若数集 S 无下界，记 $\inf S = -\infty$.

2 推广的确界原理

任一非空数集必有上、下确界.

例10 设 A, B 为非空数集. 对 $\forall\, x \in A, \exists\, y \in B$, 有 $x \le y$.

证明: $\sup A \le \sup B$.

证 由于对$\forall x \in A$, $\exists y \in B$, 有$x \le y$, 因此y是A的一个上界,

由于A非空有上界,根据确界原理知, A存在上确界$\sup A$.

若数集B没有上界, 则$\sup B = +\infty$. 此时显然有$\sup A < \sup B = +\infty$.

若数集B有上界,由于B非空有上界,根据确界原理知,

B存在上确界$\sup B$.

由于对$\forall x \in A$,$\exists y \in B$, 有$x \le y$, 因此y是A的上界,

从而, 根据上确界的定义有 $\sup A \le y \le \sup B$,

即$\sup A \le \sup B$.

注: 需先证明确界的存在性.

例11 设 A, B 为非空数集. 满足：$\forall\, x \in A, \forall\, y \in B$, 有 $x \le y$.

证明：数集A有上确界, 数集 B有下确界, 且$\sup A \le \inf B$.

证 由假设B中任一数y都是A的上界, A中任一数x都是B的下界.

因此根据确界原理, A有上确界 $\sup A$, B有下确界$\inf B$.

由确界定义, 上确界$\sup A$是最小的上界, 因此, $\forall y \in B : \sup A \le y$.

$\sup A$又是B的一个下界, 而$\inf B$是最大的下界,

因此 $\sup A \le \inf B$.

注： 需先证明确界的存在性.

例12 设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 中非空有上界的数集,

(i) 定义 $A+B=\{z \mid z=x+y, x \in A, y \in B\}$,则 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$;

(ii) 若 $c \in \mathbb{R}$, 定义 $A+c=\{z \mid z=x+c, x \in A\}$,则 $\sup(A+c)=\sup A+c$;

(iii) 若 $c>0$, 定义 $cA=\{z \mid z=cx, x \in A\}$,则 $\sup(cA)=c\sup A$.

(iv) 若A,B为非空非负有界数集,定义 $C=\{z \mid z=xy, x \in A, y \in B\}$,

则 $\inf C=\inf A \cdot \inf B$; $\sup C=\sup A \cdot \sup B$.

证 (方法一) (i)由于A,B非空有上界,显然$A+B$也是非空有上界.

根据确界原理知,$A,B,A+B$存在上确界.

$\forall z \in A+B$,根据$A+B$的定义知, $\exists x \in A, y \in B$,使得$z=x+y$.

由于$x \le \sup A, y \le \sup B$,所以 $z=x+y \le \sup A+\sup B$, 即$\sup A+\sup B$是$A+B$的上界.

根据上确界的定义,对$\forall \varepsilon>0, \exists x_0 \in A$,使得$x_0>\sup A-\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\exists y_0 \in B$,使得$y_0>\sup B-\dfrac{\varepsilon}{2}$.

即$\exists z_0=x_0+y_0 \in A+B$,使得$z_0=x_0+y_0>\sup A+\sup B-\varepsilon$.

所以 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

例12 设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 中非空有上界的数集,

(i) 定义 $A+B=\{z \mid z=x+y, x\in A, y\in B\}$,则 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$;

(ii) 若 $c\in\mathbb{R}$, 定义 $A+c=\{z \mid z=x+c, x\in A\}$,则 $\sup(A+c)=\sup A+c$;

(iii) 若 $c>0$, 定义 $cA=\{z \mid z=cx, x\in A\}$,则 $\sup(cA)=c\sup A$.

(iv) 若A,B为非空非负有界数集, 定义 $C=\{z \mid z=xy, x\in A, y\in B\}$,

则 $\inf C=\inf A\cdot\inf B$; $\sup C=\sup A\cdot\sup B$.

证 (方法二) (i)由于A,B非空有上界,显然$A+B$也是非空有上界.

根据确界原理知,$A,B,A+B$存在上确界.

$\forall z\in A+B$, 根据$A+B$的定义知, $\exists x\in A, y\in B$, 使得$z=x+y$.

由于$x\le\sup A, y\le\sup B$, 所以 $z=x+y\le\sup A+\sup B$,

于是 $\sup(A+B)\le\sup A+\sup B$.

根据上确界的定义, 对$\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in A, \exists y_0\in B$, 使得$x_0>\sup A-\dfrac{\varepsilon}{2}, y_0>\sup B-\dfrac{\varepsilon}{2}$.

即$\exists z_0=x_0+y_0\in A+B$, 使得$z_0=x_0+y_0>\sup A+\sup B-\varepsilon$.

于是 $\sup(A+B)>\sup A+\sup B-\varepsilon$. 由于$\varepsilon$的任意性, 有 $\sup(A+B)\ge\sup A+\sup B$.

所以 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

例12 设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 中非空有上界的数集,

(i) 定义 $A+B=\{z \mid z=x+y, x\in A, y\in B\}$,则 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$;

(ii) 若 $c\in\mathbb{R}$, 定义 $A+c=\{z \mid z=x+c, x\in A\}$,则 $\sup(A+c)=\sup A+c$;

(iii) 若 $c>0$, 定义 $cA=\{z \mid z=cx, x\in A\}$,则 $\sup(cA)=c\sup A$.

(iv) 若A,B为非空非负有界数集, 定义 $C=\{z \mid z=xy, x\in A, y\in B\}$,

则 $\inf C=\inf A\cdot\inf B$; $\sup C=\sup A\cdot\sup B$.

证 (ii)由于A非空有上界, 显然$A+c$也是非空有上界.

根据确界原理知, $A, A+c$存在上确界.

$\forall z\in A+c$, 根据$A+c$的定义知, $\exists x\in A$, 使得$z=x+c$.

由于 $x\le\sup A$, 所以 $z=x+c\le\sup A+c$, 即$\sup A+c$是$A+c$的上界.

根据上确界的定义, 对$\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in A$, 使得$x_0>\sup A-\varepsilon$,

即$\exists z_0=x_0+c\in A+c$,使得$z_0=x_0+c>\sup A+c-\varepsilon$.

所以 $\sup(A+c)=\sup A+c$.

例12 设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 中非空有上界的数集,

(i) 定义 $A+B=\{z \mid z=x+y, x\in A, y\in B\}$,则 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$;

(ii) 若 $c\in\mathbb{R}$, 定义 $A+c=\{z \mid z=x+c, x\in A\}$,则 $\sup(A+c)=\sup A+c$;

(iii) 若 $c>0$, 定义 $cA=\{z \mid z=cx, x\in A\}$,则 $\sup(cA)=c\sup A$.

(iv) 若 A,B 为非空非负有界数集, 定义 $C=\{z \mid z=xy, x\in A, y\in B\}$,

则 $\inf C=\inf A\cdot\inf B$; $\sup C=\sup A\cdot\sup B$.

证 (iii)由于A非空有上界,显然cA也是非空有上界.

根据确界原理知, A,cA存在上确界.

$\forall z\in cA$, 根据cA的定义知, $\exists x\in A$, 使得$z=cx$.

由于 $x\le\sup A$, 所以 $z=cx\le c\sup A$, 即$c\sup A$是cA的上界.

根据上确界的定义, 对$\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in A$, 使得$x_0>\sup A-\dfrac{\varepsilon}{c}$,

即$\exists z_0=cx_0\in cA$,使得$z_0=cx_0>c\sup A-\varepsilon$.

所以 $\sup(cA)=c\sup A$.

例12 设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 中非空有上界的数集,

(i) 定义 $A+B=\{z \mid z=x+y, x\in A, y\in B\}$,则 $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$;

(ii) 若 $c\in\mathbb{R}$,定义 $A+c=\{z \mid z=x+c, x\in A\}$,则 $\sup(A+c)=\sup A+c$;

(iii) 若 $c>0$,定义 $cA=\{z \mid z=cx, x\in A\}$,则 $\sup(cA)=c\sup A$.

(iv) 若A,B为非空非负有界数集,定义 $C=\{z \mid z=xy, x\in A, y\in B\}$,

则 $\inf C=\inf A\cdot\inf B$; $\sup C=\sup A\cdot\sup B$.

证 (iv)由于A,B非空有界,显然C也是非空有界.

根据确界原理知,数集A,B,C存在确界.

$\forall z\in C$,根据C的定义知, $\exists x\in A, y\in B$,使得$z=xy$.

由于$0\le x\le\sup A, 0\le y\le\sup B$,所以 $z=xy\le\sup A\sup B$,即$\sup A\sup B$是C的上界.

于是 $\sup C\le\sup A\sup B$. 根据上确界的定义,对$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in A, y_0\in B$,使得

$$x_0>\sup A-\frac{\varepsilon}{2(\sup A+\sup B+\varepsilon+1)}, y_0>\sup B-\frac{\varepsilon}{2(\sup A+\sup B+\varepsilon+1)}$$

从而 $$x_0y_0>\left(\sup A-\frac{\varepsilon}{2(\sup A+\sup B+\varepsilon+1)}\right)\left(\sup B-\frac{\varepsilon}{2(\sup A+\sup B+\varepsilon+1)}\right)$$

$$=\sup A\sup B-\frac{(\sup A+\sup B)\varepsilon}{2(\sup A+\sup B+\varepsilon+1)}+\frac{\varepsilon^2}{4(\sup A+\sup B+\varepsilon+1)^2}>\sup A\sup B-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=\sup A\sup B-\varepsilon.$$

由于ε的任意性知， $\sup C \ge x_0 y_0 \ge \sup A \sup B.$

所以 $\sup C = \sup A \sup B.$

$\forall z \in C$,根据C的定义知，$\exists x \in A, y \in B$,使得$z = xy.$

由于 $x \ge \inf A \ge 0, y \ge \inf B \ge 0$, 所以 $z = xy \ge \inf A \inf B$, 即$\inf A \inf B$是C的下界.

于是 $\inf A \inf B \le \inf C.$

根据下确界的定义,对$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A, y_0 \in B$,使得

$$x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2(\inf A + \inf B + \varepsilon + 1)}, y_0 < \inf B + \frac{\varepsilon}{2(\inf A + \inf B + \varepsilon + 1)}$$

从而

$$x_0 y_0 < \left(\inf A + \frac{\varepsilon}{2(\inf A + \inf B + \varepsilon + 1)}\right)\left(\inf B + \frac{\varepsilon}{2(\inf A + \inf B + \varepsilon + 1)}\right)$$

$$= \inf A \inf B + \frac{(\inf A + \inf B)\varepsilon}{2(\inf A + \inf B + \varepsilon + 1)} + \frac{\varepsilon^2}{4(\inf A + \inf B + \varepsilon + 1)^2}$$

$$< \inf A \inf B + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \inf A \inf B + \varepsilon.$$

由于ε的任意性知， $\inf C \le x_0 y_0 \le \inf A \inf B.$

所以 $\inf C = \inf A \inf B.$

例13 设 A,B为非空有界数集, $S = A\cup B$. 证明:

(i) $\sup S = \max\{\sup A,\sup B\}$;

(ii) $\inf S = \min\{\inf A,\inf B\}$.

(结合确界性质)

证1 由于$S = A\cup B$,显然S也是非空有界数集,

根据确界原理知, 数集A,B,S的上、下确界都存在.

(i) $\forall x\in S$,有 $x\in A$或$x\in B$, 从而$x\le\sup A$或$x\le\sup B$.

因此 $x\le\max\{\sup A,\sup B\}$,

所以 $\sup S\le\max\{\sup A,\sup B\}$.

$\forall x\in A$,有 $x\in S$,从而$x\le\sup S$. 所以 $\boxed{\sup A\le\sup S;}$

同理又有$\sup B\le\sup S$. 所以 $\sup S\ge\max\{\sup A,\sup B\}$.

从而得证$\sup S = \max\{\sup A,\sup B\}$.

例13 设 A,B 为非空有界数集，$S = A \cup B$. 证明:

(i) $\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$;

(ii) $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

(ii) $\forall x \in S$,有 $x \in A$ 或 $x \in B$, 从而 $x \geq \inf A$ 或 $x \geq \inf B$.

因此 $x \geq \min\{\inf A, \inf B\}$,

所以 $\inf S \geq \min\{\inf A, \inf B\}$.

$\forall x \in A$,有 $x \in S$,从而 $x \geq \inf S$. 所以 $\boxed{\inf A \geq \inf S;}$

同理又有 $\inf B \geq \inf S$. 所以 $\inf S \leq \min\{\inf A, \inf B\}$.

从而得证 $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

例13 设 A,B为非空有界数集, $S = A \cup B$. 证明:

(i) $\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$;

(ii) $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

(利用确界的定义证明)

证2 由于$S = A \cup B$,显然S也是非空有界数集,

根据确界原理知, 数集A,B,S的上、下确界都存在.

(i) 不妨设$\sup A \geq \sup B$,则$\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$.

对$\forall x \in S = A \cup B$, 则$x \in A$或$x \in B$

从而$x \leq \sup A$或$x \leq \sup B \leq \sup A$, 因此$x \leq \sup A$.

对$\forall \alpha < \sup A$, $\exists\, x_0 \in A$,使$x_0 > \alpha$. 而$x_0 \in S$,且$x_0 > \alpha$.

从而得证$\sup S = \sup A$, 即$\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$.

例13 设 A,B为非空有界数集, $S = A\cup B$. 证明:

(i) $\sup S = \max\{\sup A,\sup B\}$;

(ii) $\inf S = \min\{\inf A,\inf B\}$.

(ii) 不妨设$\inf A \geq \inf B$,则$\min\{\inf A,\inf B\} = \inf B$.

对$\forall x \in S = A\cup B$,则$x \in A$或$x \in B$

从而$x \geq \inf A$或$x \geq \inf B$, 因此$x \geq \inf B$.

对$\forall \beta > \inf B$, $\exists\, x_0 \in B$,使$x_0 < \beta$. 而$x_0 \in S$,且$x_0 < \beta$.

从而得证$\inf S = \inf B$, 即$\inf S = \min\{\inf A,\inf B\}$.

例14 求下列数集的上下确界,并依定义加以验证:

(1)正整数集$\mathbb{N}_+$.　(2)$S=\{-2^n \mid n\in\mathbb{N}_+\}$.

(3)$E=\{y \mid y=2-x^2, x\in\mathbb{R}\}$.

解　(1)　$\sup\mathbb{N}_+=+\infty$,　$\inf\mathbb{N}_+=1$.

对$\forall M>0$,由Archimedes性知,$\exists n\in\mathbb{N}_+$,使得$n>M$.

因此$\mathbb{N}_+$无上界,即$\sup\mathbb{N}_+=+\infty$.

对$\forall x\in\mathbb{N}_+$,有$x\geq 1$,故1是$\mathbb{N}_+$的下界.

又对$\forall\beta>1$,取$x_0=1\in\mathbb{N}_+$,有$x_0<\beta$.

因此,$\inf\mathbb{N}_+=1$.

例14 求下列数集的上下确界,并依定义加以验证:

(1)正整数集$\mathbb{N}_+$. (2)$S=\left\{-2^n \middle| n\in\mathbb{N}_+\right\}$.

(3)$E=\left\{y \middle| y=2-x^2, x\in\mathbb{R}\right\}$.

解 (2) $\sup S=-2,\quad \inf S=-\infty.$

对$\forall x\in S$,有$x\le -2$,故-2是S的上界.

又对$\forall \alpha<-2$,取$x_0=-2\in S$,有$x_0>\alpha$. 因此,$\sup S=-2$.

对$\forall L\in\mathbb{R}$,若$L\ge -1$,取$x_0=-2\in S$,有$x_0<L$.

若$L<-1$,则$\log_2(-L)>0$,由Archimedes性知,

$\exists n_0\in\mathbb{N}_+$,使得$n_0>\log_2(-L)$, 则$x_0=-2^{n_0}\in S$,且$x_0<L$.

因此S无下界,即$\inf S=-\infty$.

例14 求下列数集的上下确界,并依定义加以验证:

(1)正整数集$\mathbb{N}_+$. (2)$S=\{-2^n \mid n\in\mathbb{N}_+\}$.

(3)$E=\{y \mid y=2-x^2, x\in\mathbb{R}\}$.

解 (3) $\sup E=2$, $\inf E=-\infty$.

对$\forall y\in E$,有$y=2-x^2\le 2$,故2是E的上界.

又对$\forall\alpha<2$,取$y_0=2\in E$,有$y_0>\alpha$. 因此,$\sup E=2$.

对$\forall L\in\mathbb{R}$,若$L\ge 2$,取$y_0=2-1=1\in E$,有$y_0<L$.

若$L<2$,则$\sqrt{2-L}>0$,由Archimedes性知,

$\exists n_0\in\mathbb{N}_+$,使得$n_0>\sqrt{2-L}$, 取$y_0=2-n_0^2\in E$,且$y_0<L$.

因此E无下界,即$\inf E=-\infty$.

例15 设数集$A\subset\mathbb{R}_+$, $B=\left\{y \,\middle|\, y=\dfrac{1}{x}, x\in A\right\}$.

证明$\sup A=+\infty$的充要条件是$\inf B=0$.

证 $\Rightarrow$ 设若$\sup A=+\infty$. 显然$\forall\, y\in B$, $y=\dfrac{1}{x}>0$,即0是B的一个下界.

对$\forall \varepsilon>0$,令$M=\dfrac{1}{\varepsilon}$,则由于$\sup A=+\infty$, $\exists\, x_0\in A$, $x_0>M$.

于是 $y_0=\dfrac{1}{x_0}\in B$,且$y_0<0+\varepsilon=\varepsilon$. 因此$\inf B=0$.

$\Leftarrow$ 若$\inf B=0$.则$\forall M>0$,令$\varepsilon=\dfrac{1}{M}>0$, $\exists\, y_0\in B$,且$y_0<\varepsilon$.

根据B的定义,$\exists x_0\in A$,使得$y_0=\dfrac{1}{x_0}\in B$, 从而$x_0=\dfrac{1}{y_0}>\dfrac{1}{\varepsilon}=M$.

因此$\sup A=+\infty$.

思考:

利用确界原理证明实数集的阿基米德性.

你应该：

理解区间及邻域的概念

掌握有界集和上、下确界的概念

理解确界原理及其证明思路

能在有关命题中正确地使用确界原理