Ch13 函数列与函数项级数

总结及习题评讲(1)

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周四下午2点至4点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

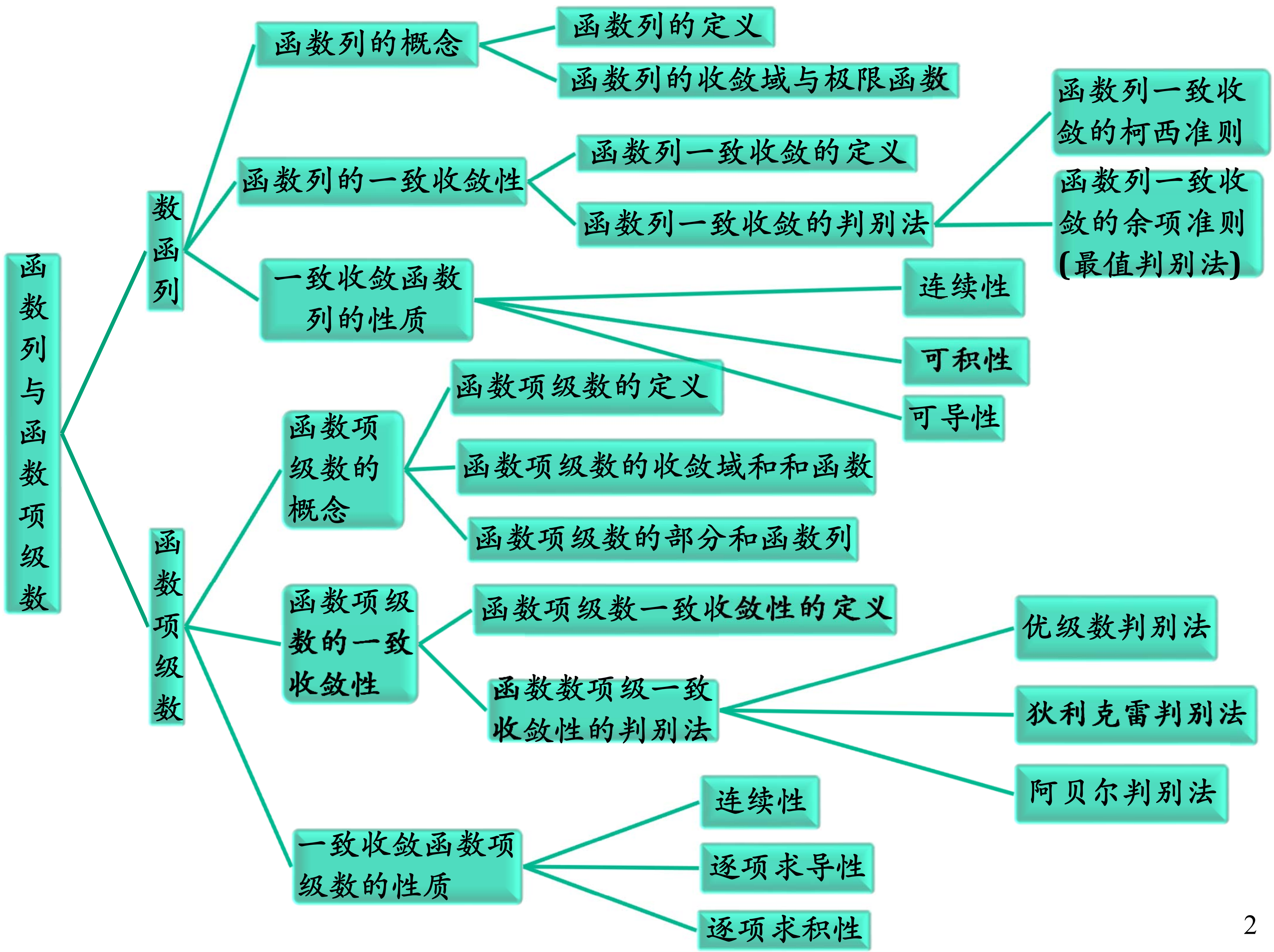
Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2024年6月13日

BY GYH


函数列与函数项级数
函数列
函数列的概念
函数列的定义
函数列的收敛域与极限函数
函数列的一致收敛性
函数列一致收敛的定义
函数列一致收敛的判别法
函数列一致收敛的柯西准则
函数列一致收敛的余项准则(最值判别法)
一致收敛函数列的性质
连续性
可积性
可导性
函数项级数
函数项级数的概念
函数项级数的定义
函数项级数的收敛域和和函数
函数项级数的部分和函数列
函数项级数的一致收敛性
函数项级数一致收敛性的定义
函数数项级一致收敛性的判别法
优级数判别法
狄利克雷判别法
阿贝尔判别法
一致收敛函数项级数的性质
连续性
逐项求导性
逐项求积性

重要定义

函数列一致收敛的定义

设函数列$\{f_n(x)\}$与函数$f(x)$定义在同一数集D上,

对$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \forall x \in D: \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$,

则称函数列$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于$f(x)$.

函数列不一致收敛的定义

函数列$\{f_n(x)\}$在D上不一致收敛于$f(x)$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0 > N, \exists x_0 \in D$,使得$\left| f_{n_0}(x_0) - f(x_0) \right| \geq \varepsilon_0$.

重要定义

函数项级数一致收敛的定义

函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和函数列$\{S_n(x)\}$在数集$D$上一致收敛于$S(x)$,

即对$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}_+,\forall n>N,\forall x\in D$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_n(x)-S(x)\right|=\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon,$$

则称函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$D$上一致收敛于$S(x)$.

函数项级数不一致收敛的定义

函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$D$上不一致收敛于$S(x)$

$\Leftrightarrow$ 部分和函数列$\{S_n(x)\}$在数集D上不一致收敛.

重要定理

函数列一致收敛的柯西准则

函数列$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于$f(x)$的充要条件是：

对$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n, m > N, \forall x \in D$：

$$\left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon.$$

函数列不一致收敛的柯西准则的否定陈述

函数列$\{f_n(x)\}$在D上不一致收敛于$f(x)$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0, m_0 > N, \exists x_0 \in D$,使得

$$\left| f_{n_0}(x_0) - f_{m_0}(x_0) \right| \geq \varepsilon_0.$$

重要定理

函数项级数一致收敛的柯西准则

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在数集$D$上一致收敛的充要条件是：

对$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \forall x \in D, \forall p \in \mathbb{N}_+$：

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

函数项级数不一致收敛的柯西准则的否定陈述

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上不一致收敛于$f(x)$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists n_0 > N, \exists x_0 \in D, \exists p_0 \in \mathbb{N}_+$，使得

$$\left|u_{n_0+1}(x_0) + u_{n_0+2}(x_0) + \cdots + u_{n_0+p_0}(x_0)\right| \geq \varepsilon_0.$$

重要结论

函数项级数一致收敛的必要条件

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在数集$D$上一致收敛的必要条件是：

函数列$\{u_n(x)\}$在D上一致收敛于0.

函数项级数不一致收敛的充分条件

函数列$\{u_n(x)\}$在D上不一致收敛于0

$\Rightarrow$函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在数集$D$上不一致收敛.

重要定理

函数列一致收敛的余项准则

函数列$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于$f(x)$的充要条件是：

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

函数列一致收敛的余项准则的否定陈述

函数列$\{f_n(x)\}$在D上不一致收敛于$f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\neq 0.$$

$\Leftrightarrow$ 存在$\{x_n\}\subset D$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|\neq 0.$

重要定理

函数项级数一致收敛的余项准则

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在数集$D$上一致收敛于$S(x)$的充要条件是：

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left|R_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left|S(x)-S_n(x)\right| = 0.$$

函数项级数一致收敛的余项准则的否定陈述

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$D$上不一致收敛于$S(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left|R_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left|S(x)-S_n(x)\right| \neq 0.$$

$\Leftrightarrow$ 存在$\{x_n\}\subset D$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|S(x_n)-S_n(x_n)\right| \neq 0.$

重要结论

关于余项$\left|f_n(x)-f(x)\right|$:

一般可以通过微分法求$\left|f_n(x)-f(x)\right|$在D上的最大值或上确界.

如果能估计出$\left|f_n(x)-f(x)\right|$在D上的上界a_n,使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$,

则可得函数列在D上一致收敛的结论.

如果函数项级数的部分和函数列以及和函数的表达式不好求或根本求不出来,

就不能利用余项准则判断函数项级数的一致收敛.

重要定理

判断函数项级数一致收敛的优级数判别法

设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$定义在数集$D$上，$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$为收敛的正项级数，

若对$\forall x \in D$,有

$$|u_n(x)| \le M_n,\ n = 1, 2, \cdots,$$

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛.

重要定理

判断函数项级数一致收敛的狄利克雷判别法

(1) $\forall x \in I, \{a_n(x)\}$关于$n$单调，(2) $\{a_n(x)\}$在I上一致收敛于0，

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$的部分和函数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right\}$在$I$上一致有界，

则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$在$I$上一致收敛.

判断函数项级数一致收敛的阿贝尔判别法

(1) $\forall x \in I, \{a_n(x)\}$关于$n$单调，(2) $\{a_n(x)\}$在I上一致有界，

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$在$I$上一致收敛，则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$在$I$上一致收敛.

重要定理

函数列的连续性定理

若函数列$\{f_n(x)\}$满足：
(1) 函数列$\{f_n(x)\}$的每一项$f_n(x)$在区间I上连续；
(2) 函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛于极限函数$f(x)$,
则极限函数$f(x)$在区间I上连续.

函数列的连续性定理推论

若函数列$\{f_n(x)\}$满足：
(1) 函数列$\{f_n(x)\}$的每一项$f_n(x)$在区间I上连续；
(2) 函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上内闭一致收敛于极限函数$f(x)$,
则极限函数$f(x)$在区间I上连续.

重要定理

函数列的可积性定理

若函数列$\{f_n(x)\}$满足：

(1) 函数列$\{f_n(x)\}$的每一项$f_n(x)$在$[a,b]$上连续;

(2) 函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于极限函数$f(x)$,

则极限函数$f(x)$在$[a,b]$上可积,且

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}\,x = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}\,x\right).$$

重要定理

函数列的可微性定理

若函数列$\{f_n(x)\}$满足：

(1) $x_0\in[a,b]$是函数列$\{f_n(x)\}$的收敛点;

(2) 函数列$\{f_n(x)\}$的每一项$f_n(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数;

(3) 函数列$\{f_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛,

则 (a) 极限函数$f(x)$在$[a,b]$上可导,且$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right)$;

(b) 函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于极限函数$f(x)$.

重要定理

函数项级数的连续性定理

若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：

(1) 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的每一项$u_n(x)$在区间$I$上连续;

(2) 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$I$上一致收敛于和函数$S(x)$,

则和函数$S(x)$在区间I上连续,且对$\forall x_0 \in I$, $\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right)$.

判断函数项级数不一致收敛的方法：

若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的每一项$u_n(x)$在区间$I$上连续,

但函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的和函数$S(x)$在区间$I$上不连续,

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$I$上不一致收敛.

BY GYH

重要定理

函数项级数的连续性定理推论

若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：

(1) 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的每一项$u_n(x)$在区间$I$上连续;

(2) 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$I$上内闭一致收敛于和函数$S(x)$,

则和函数$S(x)$在区间I上连续.

重要定理

函数项级数的逐项求积定理

若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：

(1) 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的每一项$u_n(x)$在$[a,b]$上连续;

(2) 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于和函数$S(x)$,

则和函数$S(x)$在$[a,b]$上可积,且

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}\,x\right).$$

重要定理

函数项级数的逐项求导定理

若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$满足：

(1) $x_0\in[a,b]$是函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点;

(2) 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的每一项$u_n(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数;

(3) 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛,

则 (*a*) 和函数$S(x)$在$[a,b]$上可导,且$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)\right)$;

(*b*) 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

P33习题13.1/1(1)

讨论函数列$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}, n=1,2,\cdots$ 在$D=(-1,1)$上是否一致收敛或内闭一致收敛.

解1 对$\forall x\in(-1,1)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}=|x|$,

所以函数列$\left\{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right\}$在$(-1,1)$上的极限函数是 $f(x)=|x|$.

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-1,1)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-1,1)}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|$$

$$=\boxed{\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-1,1)}\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{0+\frac{1}{n^2}}+0}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=0.$$

根据函数列一致收敛的余项准则知,

函数列$\left\{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right\}$在$(-1,1)$上一致收敛于极限函数$f(x)=|x|$.

P33习题13.1/1(1)

讨论函数列$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}, n=1,2,\cdots$ 在$D=(-1,1)$上是否一致收敛或内闭一致收敛.

解2 对$\forall x\in(-1,1)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}=|x|$,

所以函数列$\left\{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right\}$在$(-1,1)$上的极限函数是 $f(x)=|x|$.

由于$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|$,

记 $g(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|, x\in(-1,1)$. 易知$g(x)$在$(-1,1$上是偶函数,

当$x\in(0,1)$时, $g'(x)=\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-x\right)'=\dfrac{x-\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}<0$,

从而$g(x)$在$[0,1)$上单调递减,在$(-1,0]$上单调递增, 故$x=0$是$g(x)$在$(-1,1)$上的最大值点.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(0)-f(0)|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

根据函数列一致收敛的余项准则知,

函数列 $\left\{\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于极限函数$f(x)=0$.

P33习题13.1/1(2)

讨论函数列$f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}, n=1,2,\cdots$ 在$D=(-\infty,\infty)$上是否一致收敛或内闭一致收敛.

解1 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+n^2x^2}=0$,

所以函数列$\left\{\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上的极限函数是 $f(x)=0$.

由于 $|f_n(x)-f(x)|=\left|\dfrac{x}{1+n^2x^2}-0\right|=\left|\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right|$, 记$g(x)=\left|\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right|, x\in(-\infty,+\infty)$.

易知$g(x)=\left|\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right|$在$(-\infty,+\infty)$上是偶函数,

当$x\in[0,+\infty)$时, $g'(x)=\left(\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right)'=\dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$, 令$g'(x)=0$,得稳定点$x=\dfrac{1}{n}$.

当$0<x<\dfrac{1}{n}$时,$g'(x)>0$;当$x>\dfrac{1}{n}$时,$g'(x)<0$, 故$x=\dfrac{1}{n}$是$g(x)$在$[0,+\infty)$上的唯一极大值点,

故$x=\dfrac{1}{n}$为最大值点. 从而$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的最大值为$g\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2n}$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}=0$. 根据函数列一致收敛的余项准则知,

函数列 $\left\{\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于极限函数$f(x)=0$.

P33习题13.1/1(2)

讨论函数列$f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}, n=1,2,\cdots$ 在$D=(-\infty,\infty)$上是否一致收敛或内闭一致收敛.

解2 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+n^2x^2}=0,$

所以函数列$\left\{\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上的极限函数是 $f(x)=0.$

由于 $$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}-0\right|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|=\frac{n|x|}{n(1+n^2x^2)}$$

$$\le\frac{1+n^2x^2}{2n(1+n^2x^2)}=\frac{1}{2n},$$

从而 $$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{2n},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

根据函数列一致收敛的余项准则知,

函数列 $\left\{\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于极限函数$f(x)=0.$

P33习题13.1/1(4)

讨论函数列$f_n(x)=\dfrac{x}{n}, n=1,2,\cdots$ 在$D=[0,\infty)$上是否一致收敛或内闭一致收敛.

解 对$\forall x\in[0,+\infty)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{n}=0,$

所以函数列$\left\{\dfrac{x}{n}\right\}$在$[0,+\infty)$上的极限函数是 $f(x)=0.$

由于 $\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\dfrac{x}{n}-0\right|=\dfrac{x}{n},$

取$x_n=n\in[0,+\infty)$, 则 $\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=\dfrac{n}{n}=1\to 1\neq 0(n\to\infty),$

根据函数列一致收敛的余项准则的否定陈述知,

函数列$\left\{\dfrac{x}{n}\right\}$在$[0,+\infty)$上不一致收敛于极限函数$f(x)=0.$

对$\forall[a,b]\in[0,+\infty)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|\dfrac{x}{n}-0\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b}{n}=0,$

根据函数列一致收敛的余项准则知,

函数列$\left\{\dfrac{x}{n}\right\}$在$[a,b]\subset[0,+\infty)$上一致收敛于极限函数$f(x)=0.$

所以函数列$\left\{\dfrac{x}{n}\right\}$在$[0,+\infty)$上内闭一致收敛于极限函数$f(x)=0.$

P33习题13.1/1(5)

讨论函数列$f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}, n=1,2,\cdots$ 在$D=(-\infty,\infty)$上是否一致收敛或内闭一致收敛.

解1 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{x}{n}=0,$

所以函数列$\left\{\sin\dfrac{x}{n}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上的极限函数是 $f(x)=0.$

由于 $\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\sin\dfrac{x}{n}-0\right|=\left|\sin\dfrac{x}{n}\right|,$

取$x_n=n\in(-\infty,+\infty)$, 则 $\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|=\left|\sin\dfrac{n}{n}-0\right|=\sin 1\to\sin 1\neq 0(n\to\infty),$

根据函数列一致收敛的余项准则的否定陈述知,

函数列$\left\{\sin\dfrac{x}{n}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛于极限函数$f(x)=0.$

对$\forall[a,b]\in(-\infty,+\infty)$,有 $\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|\sin\dfrac{x}{n}-0\right|\le\sup\limits_{x\in[a,b]}\dfrac{|x|}{n}=\dfrac{\max\{|a|,|b|\}}{n},$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0.$ 根据函数列一致收敛的余项准则知,

函数列$\left\{\sin\dfrac{x}{n}\right\}$在$[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$上一致收敛于极限函数$f(x)=0.$

所以函数列$\left\{\sin\dfrac{x}{n}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上内闭一致收敛于极限函数$f(x)=0.$

P33习题13.1/1(5)

讨论函数列$f_n(x)=\sin\frac{x}{n},n=1,2,\cdots$ 在$D=(-\infty,\infty)$上是否一致收敛或内闭一致收敛.

解2 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n}=0$,

所以函数列$\left\{\sin\frac{x}{n}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上的极限函数是 $f(x)=0$.

$$\text{由于}\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\sin\frac{x}{n}-0\right|=\lim_{n\to\infty}1=1\neq0,$$

根据函数列一致收敛的余项准则的否定陈述知,

函数列$\left\{\sin\frac{x}{n}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛于极限函数$f(x)=0$.

对$\forall[a,b]\in(-\infty,+\infty)$,有 $\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|\sin\frac{x}{n}-0\right|\leq\sup\limits_{x\in[a,b]}\frac{|x|}{n}=\frac{\max\{|a|,|b|\}}{n}$,

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$. 根据函数列一致收敛的余项准则知,

函数列$\left\{\sin\frac{x}{n}\right\}$在$[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$上一致收敛于极限函数$f(x)=0$.

所以函数列$\left\{\sin\frac{x}{n}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上内闭一致收敛于极限函数$f(x)=0$.

P33习题13.1/2 证明：设$f_n(x)\to f(x), x\in D, a_n\to 0(n\to\infty)(a_n>0)$. 若对每一个正整数$n$有$\left|f_n(x)-f(x)\right|\le a_n, x\in D$, 则$\{f_n\}$在$D$上一致收敛于$f$.

证1 由于$a_n\to 0(n\to\infty)(a_n>0)$，根据数列极限的定义知，

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $0<a_n<\varepsilon$.

又对$\forall n\in\mathbb{N}_+,\forall x\in D$,有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|\le a_n$,

于是 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N,\forall x\in D$,有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|\le a_n<\varepsilon$.

根据函数列一致收敛的定义知，$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于$f(x)$.

证2 由于$\forall n\in\mathbb{N}_+,\forall x\in D$,有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|\le a_n$,

从而 $0\le\sup\limits_{x\in D}\left|f_n(x)-f(x)\right|\le a_n$，又$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，根据迫敛性知，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0.$$

根据函数列一致收敛的余项准则知，$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于$f(x)$.

P33习题13.1/3(1) 讨论函数项级数$\sum\frac{x^n}{(n-1)!}$在$[-r,r]$上的一致收敛性.

解 对$\forall x\in[-r,r]$,有 $\left|\frac{x^n}{(n-1)!}\right|\le\frac{r^n}{(n-1)!}$, $n=1,2,\cdots$.

考虑正项级数$\sum\frac{r^n}{(n-1)!}$的敛散性: 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{r^{n+1}}{n!}}{\frac{r^n}{(n-1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r}{n}=0<1$,

根据正项级数的比式判别法的极限形式知,正项级数$\sum\frac{r^n}{(n-1)!}$收敛.

根据函数项级数的优级数判别法知,函数项级数$\sum\frac{x^n}{(n-1)!}$在$[-r,r]$上一致收敛.

P33习题13.1/3(5) 讨论函数项级数$\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$在$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性.

解1 记$a_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n}$,$b_n(x)=(-1)^{n-1}$. 考虑函数列$\{a_n(x)\}=\left\{\dfrac{1}{x^2+n}\right\}$:

对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $a_{n+1}(x)-a_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n+1}-\dfrac{1}{x^2+n}=\dfrac{-1}{(x^2+n+1)(x^2+n)}<0$,

所以对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,函数列$\left\{\dfrac{1}{x^2+n}\right\}$关于$n$单调递减.

对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^2+n}=0$. 所以函数列$\{a_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$的极限函数为$a(x)=0$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|a_n(x)-a(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\dfrac{1}{x^2+n}-0\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}\dfrac{1}{x^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,

根据函数列一致收敛的余项准则知,函数列$\{a_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于0.

考虑$\sum b_n(x)=\sum(-1)^{n-1}$部分和函数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上的一致有界性:

由于对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,$\forall n\in\mathbb{N}_+$,有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right|\le 1$,

所以$\sum b_n(x)=\sum(-1)^{n-1}$部分和函数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致有界.

根据函数项级数的狄利克雷判别法知,函数项级数$\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

P33习题13.1/3(5) 讨论函数项级数$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$在$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性.

解2 记$a_n(x)=\frac{n}{x^2+n}$, $b_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

考虑函数列$\{a_n(x)\}=\left\{\frac{n}{x^2+n}\right\}$: 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$0<a_n(x)=\frac{n+x^2-x^2}{x^2+n}=1-\frac{x^2}{x^2+n}<1,$$

所以对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,函数列$\left\{\frac{1}{x^2+n}\right\}$关于$n$单调递增且一致有界.

考虑$\sum b_n(x)=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$:由于$\left\{\frac{1}{n}\right\}$单调递减且趋于0,根据莱布尼茨判别法知,

级数$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛,从而$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

根据函数项级数的阿贝尔判别法知,函数项级数$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

P33习题13.1/3(5) 讨论函数项级数$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$在$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性.

解3 $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$是交错级数,记$u_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$.

由于 $u_{n+1}(x)-u_n(x)=\frac{1}{x^2+n+1}-\frac{1}{x^2+n}=\frac{-1}{(x^2+n+1)(x^2+n)}<0,$

函数列$\left\{\frac{1}{x^2+n}\right\}$关于$n$单调递减. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^2+n}=0.$

根据莱布尼茨判别法知,级数$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$收敛.

记级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$的部分和函数列为$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k}$,和函数为$S(x)$,则

$$|R_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k}\right|\le\frac{1}{x^2+n+1}\le\frac{1}{n+1},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|R_n(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|S(x)-S_n(x)|=0.$

根据函数项级数的余项准则知,函数项级数$\sum\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

P33习题13.1/3(6) 讨论函数项级数 $\sum \dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ 的部分和函数列为 $\{S_n(x)\}$, 则 当 $x=0$ 时, $S_n(0)=0, \lim\limits_{n\to\infty}S_n(0)=0.$

当 $x\neq 0$ 时,
$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{(1+x^2)^{k-1}}=x^2\frac{1-\dfrac{1}{(1+x^2)^n}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=(1+x^2)\left(1-\frac{1}{(1+x^2)^n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}(1+x^2)\left(1-\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)=1+x^2.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ 的和函数为 $S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1+x^2, & x\neq 0\end{cases}.$

由于
$$|R_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, & x\neq 0\end{cases}.$$
取 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\in(-\infty,+\infty)$, 则

$$|R_n(x_n)|=|S(x_n)-S_n(x_n)|=\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}}\to\frac{1}{e}\neq 0\ (n\to\infty),$$

根据函数项级数的余项准则否定陈述知, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛.

P33习题13.1/4

设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛于$S(x)$,函数$g(x)$在$D$上有界.

证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} g(x)u_n(x)$在$D$上一致收敛$g(x)S(x)$.

证 由于函数$g(x)$在D上有界,则$\exists M>0, \forall x\in[a,b]$,有$|g(x)|\le M$.

由于函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$D$上一致收敛于$S(x)$,

根据函数项级数一致收敛的定义知, 对$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}_+, \forall n>N, \forall x\in[a,b]$,有

$$\left|u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)-S(x)\right|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

于是

$$\left|g(x)u_1(x)+g(x)u_2(x)+\cdots+g(x)u_n(x)-g(x)S(x)\right|$$

$$=\left|g(x)\right|\left|u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)-S(x)\right|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

根据函数项级数一致收敛的定义知,

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} g(x)u_n(x)$在$D$上一致收敛于$g(x)S(x)$.

P33习题13.1/5 若在区间I上,对任何正整数n,$|u_n(x)| \le v_n(x)$,

证明当$\sum v_n(x)$在I上一致收敛时,$\sum u_n(x)$在I上也一致收敛.

证 由于$\sum v_n(x)$在I上一致收敛,根据函数项级数一致收敛的柯西准则知,

对$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}_+, \forall x \in I$,有

$$|v_{n+1}(x) + v_{n+2}(x) + \cdots + v_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

对$\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall x \in I$,有$|u_n(x)| \le v_n(x)$,于是

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)|$$

$$\le |v_{n+1}(x) + v_{n+2}(x) + \cdots + v_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

根据函数项级数一致收敛的柯西准则知,$\sum u_n(x)$在I上一致收敛.

P33习题13.1/6

设$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$是$[a,b]$上的单调函数.若$\sum u_n(a)$与$\sum u_n(b)$都绝对收敛,则$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上绝对且一致收敛.

证 由于$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$是$[a,b]$上的单调函数,因此对$\forall n\in\mathbb{N}_+,\forall x\in[a,b]$,有

$$|u_n(x)|\le\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}\le|u_n(a)|+|u_n(b)|.$$

已知$\sum u_n(a)$与$\sum u_n(b)$都绝对收敛,

根据级数收敛的线性性质知,$\sum\left(|u_n(a)|+|u_n(b)|\right)$收敛.

根据正项级数的比较判别法知,$\sum|u_n(x)|\left(x\in[a,b]\right)$收敛,

从而$\sum u_n(x)\left(x\in[a,b]\right)$绝对收敛.

根据函数项级数一致收敛的优级数判别法知,$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

所以$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上绝对且一致收敛.

P33习题13.1/8 在$[0,1]$上定义函数列$u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, x=\dfrac{1}{n}\\ 0,\quad x\neq\dfrac{1}{n}\end{cases}, n=1,2,\cdots.$

证明级数$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛,但它不存在优级数.

证 对$\forall\varepsilon>0,\forall x\in[0,1],\forall p\in\mathbb{N}_+$,要使 $\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|\le\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon,$

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 因此对$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1,\forall n>N,\forall x\in[0,1],\forall p\in\mathbb{N}_+$,有

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon,$$

根据函数项级数一致收敛的柯西准则知,级数$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛.

假设级数$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上存在优级数$\sum M_n$,

对$\forall x\in[0,1],\left|u_n(x)\right|\le M_n,n=1,2,\cdots$,且$\sum M_n$收敛.

由于 $\dfrac{1}{n}=\left|u_n\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\le M_n$, 已知调和级数$\sum\dfrac{1}{n}$发散,

根据正项级数的比较判别法知,$\sum M_n$发散.产生矛盾.

所以级数$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上不存在优级数.

P33习题13.1/9(1)

讨论函数项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}$在$[-1,1]$上的一致收敛性.

解1 记$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}$的部分和函数列为$\{S_n(x)\}$,则

$$S_n(x)=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1-2k}{(x^2+k^2)\left(x^2+(k-1)^2\right)}=\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{x^2+k^2}-\frac{1}{x^2+(k-1)^2}\right)=\frac{1}{x^2+(n+1)^2}-\frac{1}{x^2+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+(n+1)^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)=-\frac{1}{x^2+1}.$$

因此$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}$的和函数为 $S(x)=-\dfrac{1}{x^2+1},x\in[-1,1].$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1,1]}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1,1]}|S(x)-S_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{1}{x^2+(n+1)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0.$$

根据函数项级数的余项准则知,

函数项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}$在$[-1,1]$上一致收敛.

P33习题13.1/9(1)

讨论函数项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}$在$[-1,1]$上的一致收敛性.

解2 记$u_n(x)=\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}$.

对$\forall x\in[-1,1]$,

$$|u_n(x)|=\left|\frac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}\right|\le\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}\le\frac{2n}{n^2(n-1)^2}=\frac{2}{n(n-1)^2},$$

已知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2}{n(n-1)^2}$收敛，根据函数项级数一致收敛的优级数判别法知，

函数项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}$在$[-1,1]$上一致收敛.

P33习题13.1/9(1)

讨论函数项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}$在$[-1,1]$上的一致收敛性.

解3 记$u_n(x)=\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}$,则 $u_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n^2}-\dfrac{1}{x^2+(n-1)^2}$.

对$\forall\varepsilon>0,\forall x\in[-1,1],\forall p\in\mathbb{N}_+$,要使

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|=\frac{1}{x^2+n^2}-\frac{1}{x^2+(n+p)^2}<\frac{1}{x^2+n^2}\le\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此对$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1,\forall n>N,\forall x\in[0,1],\forall p\in\mathbb{N}_+$,有

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon,$$

根据函数项级数一致收敛的柯西准则知,

函数项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1-2n}{(x^2+n^2)\left(x^2+(n-1)^2\right)}$在$[-1,1]$上一致收敛.

P33习题13.1/9(2)

讨论函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在$(0,+\infty)$上的一致收敛性.

解1 记$u_n(x)=2^n\sin\frac{x}{3^n}$.

对$\forall x\in(0,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\cdot\frac{x}{3^n}=x\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0.$

所以函数列$\{u_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上的极限函数是$u(x)=0$.

取$x_n=3^n\in(0,+\infty)$, $|u_n(x_n)-u(x_n)|=|2^n\sin 1-0|=2^n\sin 1\to+\infty\neq 0(n\to\infty)$,

根据函数列一致收敛的余项准则的否定陈述知,

函数列$\{u_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛于0.

由于不满足函数项级数一致收敛的必要条件,

所以函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

P33习题13.1/9(2) 讨论函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在$(0,+\infty)$上的一致收敛性.

解2 记$u_n(x)=2^n\sin\frac{x}{3^n}$.

取$\varepsilon_0=1>0$, $\forall N\in\mathbb{N}_+$, 取$n_0=2N$, 取$x_0=\frac{\pi}{2}3^{2N+1}\in(0,+\infty)$, 取$p_0=1$, 使得

$$\left|u_{n_0+1}(x_0)\right| = 2^{2N+1}\sin\frac{\frac{\pi}{2}3^{2N+1}}{3^{2N+1}} = 2^{2N+1} > 1 = \varepsilon_0,$$

根据函数项级数一致收敛的柯西准则的否定陈述知,

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

P33习题13.1/9(3)

讨论函数项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+(n-1)x^2\right)(1+nx^2)}$在$(0,+\infty)$上的一致收敛性.

解 记$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+(n-1)x^2\right)(1+nx^2)}$的部分和函数列为$\{S_n(x)\}$,则

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{\left(1+(k-1)x^2\right)(1+kx^2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+(k-1)x^2}-\frac{1}{1+kx^2}\right)=1-\frac{1}{1+nx^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+nx^2}\right)=1.$$

因此$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+(n-1)x^2\right)(1+nx^2)}$的和函数为 $S(x)=1,x\in(0,+\infty).$

从而

$$|R_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|=\left|1-\left(1-\frac{1}{1+nx^2}\right)\right|=\frac{1}{1+nx^2},$$

取$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\in(-\infty,+\infty)$,则 $|R_n(x_n)|=|S(x_n)-S_n(x_n)|=\dfrac{1}{1+n\cdot\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}\neq0(n\to\infty)$,

根据函数项级数的余项准则的否定陈述知,

函数项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+(n-1)x^2\right)(1+nx^2)}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

P33习题13.1/9(5) 讨论函数项级$\sum(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$在$(-1,1)$上的一致收敛性.

解1 记$a_n(x)=\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$b_n(x)=(-1)^n$. 考虑函数列$\{a_n(x)\}=\left\{\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}$:

对$\forall x\in(-1,1)$，函数列$\left\{\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}$关于$n$单调. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}=0.$

所以函数列$\{a_n(x)\}$在$(-1,1)$的极限函数为$a(x)=0.$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-1,1)}|a_n(x)-a(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-1,1)}\left|\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}-0\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0,$

根据函数列一致收敛的余项准则知，函数列$\{a_n(x)\}$在$(-1,1)$上一致收敛于0.

考虑$\sum b_n(x)=\sum(-1)^n$部分和函数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right\}$在$(-1,1)$上的一致有界性：

由于 对$\forall x\in(-1,1),\forall n\in\mathbb{N}_+$，有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\le 1,$

所以$\sum b_n(x)=\sum(-1)^n$部分和函数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right\}$在$(-1,1)$上一致有界.

根据函数项级数的狄利克雷判别法知，

函数项级数$\sum(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$在$(-1,1)$上一致收敛.

P33习题13.1/9(5) 讨论函数项级$\sum(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$在$(-1,1)$上的一致收敛性.

解2 记$a_n(x)=x^{2n+1}$, $b_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. 考虑函数列$\{a_n(x)\}=\{x^{2n+1}\}$:

对$\forall x\in(-1,1)$,函数列$\{x^{2n+1}\}$关于n单调. 又$\forall x\in(-1,1),\forall n\in\mathbb{N}_+$, $|a_n(x)|=|x^{2n+1}|<1$,

所以对$\forall x\in(-1,1)$,函数列$\{x^{2n+1}\}$关于n单调且一致有界.

考虑$\sum b_n(x)=\sum\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$: 由于$\left\{\dfrac{1}{2n+1}\right\}$单调递减且趋于0,

根据莱布尼茨判别法知,级数$\sum\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$收敛, 从而$\sum\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$在$(-1,1)$上一致收敛.

根据函数项级数的阿贝尔判别法知,

函数项级数$\sum(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$在$(-1,1)$上一致收敛.

P33习题13.1/9(6) 讨论函数项级$\sum \frac{\sin nx}{n}$在$(0,2\pi)$上的一致收敛性.

解 记$u_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$.

取$\varepsilon_0=\frac{\sqrt{3}}{6}>0, \forall N\in\mathbb{N}_+$,取$n_0=2N$,取$x_0=\frac{\pi}{6N}\in(0,2\pi)$,取$p_0=N$,使得

$$
\begin{aligned}
\left|u_{n_0+1}(x_0)+u_{n_0+2}(x_0)+\cdots+u_{n_0+p_0}(x_0)\right| &= \left|\frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{6N}}{2N+1}+\frac{\sin(2N+2)\frac{\pi}{6N}}{2N+2}+\cdots+\frac{\sin 3N\cdot\frac{\pi}{6N}}{3N}\right| \\
&= \frac{\sin(2N+1)\frac{\pi}{6N}}{2N+1}+\frac{\sin(2N+2)\frac{\pi}{6N}}{2N+2}+\cdots+\frac{\sin 3N\cdot\frac{\pi}{6N}}{3N} \\
&> \frac{N\sin\frac{\pi}{3}}{3N}=\frac{\sqrt{3}}{6}=\varepsilon_0,
\end{aligned}
$$

根据函数项级数一致收敛的柯西准则的否定陈述知,

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$(0,2\pi)$上不一致收敛.

P33习题13.1/10 证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上绝对收敛并一致收敛，

但由其各项绝对值组成的级数在$[0,1]$上却不一致收敛.

证1 记$a_n(x)=x^n(1-x), b_n(x)=(-1)^n$. 对$\forall x\in[0,1]$,函数列$\{a_n(x)\}$关于$n$单调递减.

$\forall x\in[0,1], \lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n(1-x)=0$, 所以函数列$\{a_n(x)\}$在$[0,1]$的极限函数为$a(x)=0$.

由于 $\sup_{x\in[0,1]}|a_n(x)-a(x)|=\sup_{x\in[0,1]}|x^n(1-x)-0|=\sup_{x\in[0,1]}x^n(1-x)$,

令$g(x)=x^n(1-x)$, 则$g'(x)=x^{n-1}(n-(n+1)x)$, 令$g'(x)=0$,得$x=\frac{n}{n+1}$.

可知 $x=\frac{n}{n+1}$是$g(x)$在$[0,1]$上的唯一的极大值点,亦是最大值点.

于是 $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|a_n(x)-0|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=0.$

根据函数列一致收敛的余项准则知，函数列$\{x^n(1-x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于0.

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$的部分和函数列$\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right\}$: $\forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}_+$,有$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\le 1$.

故部分和函数列$\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right\}$在$[0,1]$上一致有界.

根据Dirichlet判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上一致收敛.

P33习题13.1/10 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在[0,1]上绝对收敛并一致收敛，

但由其各项绝对值组成的级数在[0,1]上却不一致收敛.

记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n x^n(1-x)\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$的部分和函数为$S_n(x)$，则 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}x^k(1-x)$.

当$x=1$时，$S_n(1)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(1)=0$.

当$0\le x<1$时，$S_n(x)=(1-x)\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}=x(1-x^n)$，　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x(1-x^n)=x$.

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$在[0,1]上的和函数为$S(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$.

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在[0,1]上绝对收敛.

考虑$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$在[0,1]上的一致收敛性：由于 $|R_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|=\begin{cases}x^{n+1}, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$,

取$x_n=1-\dfrac{1}{n}\in[0,1]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x_n)|=\lim\limits_{n\to\infty}|S(x_n)-S_n(x_n)|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{e}\ne 0$.

根据函数项级数的余项准则的否定陈述知，函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$在[0,1]上不一致收敛.

P33习题13.1/10 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上绝对收敛并一致收敛，但由其各项绝对值组成的级数在$[0,1]$上却不一致收敛.

证2 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上一致收敛的另一种证法：

记 $u_n(x)=(-1)^n x^n(1-x)$. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$是$[0,1]$上的交错级数.

由于$\{x^n(1-x)\}$在$[0,1]$上单调递减，且$\lim_{n\to\infty} x^n(1-x)=0, x\in[0,1]$,

根据莱布尼茨判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上收敛.

所以其余项$R_n(x)$满足$|R_n(x)|\le x^{n+1}(1-x)$.

记$f(x)=x^{n+1}(1-x), x\in[0,1]$，则$f'(x)=(n+1)x^n\left(\frac{n+1}{n+2}-x\right)$，令$f'(x)=0$，得$x=\frac{n+1}{n+2}$.

由于$f(0)=0, f(1)=0, f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$，故在$[0,1]$上$f(x)$在$x=\frac{n+1}{n+2}$处取得最大值，所以

$$|R_n(x)|\le x^{n+1}(1-x)\le\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}.$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0.$

根据函数项级数的余项准则知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$在$[0,1]$上一致收敛.