Ch6 微分中值定理及其应用

主讲教师: 顾燕红

办公室: 汇星楼409

办公室答疑时间: 每周二15点至17点

微信号: 18926511820 QQ号: 58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年12月21日

BY GYH

§1 拉格朗日定理和函数的单调性

§2 柯西中值定理和不定式极限

§3 泰勒公式

将学习：

带有佩亚诺型余项的泰勒公式

带有拉格朗日型余项的泰勒公式

在近似计算中的应用

问题 设 $f(x)$在$x=x_0$处可导,由有限增量公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

当$|x-x_0|$充分小时,$f(x)$可以由一次多项式

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

近似地代替,其误差为$o(x-x_0)(x\to x_0)$.

但在许多情况下, 误差仅为$o(x-x_0)$是不够地,

而要考虑用较高次的多项式来逼近$f(x)$,

使得误差更小,如$o\left((x-x_0)^n\right)$.

$f(x)$在点 x_0可导

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha \quad (\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x \quad (\Delta x\to 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \quad (x\to x_0)$$

$f(x)$在点 x_0二阶可导

$f(x)$能不能用 $x-x_0$的二次多项式来近似,

误差为$o\left((x-x_0)^2\right)$ $(x\to x_0)$, 即

?

$$f(x)=\boxed{A}+\boxed{B}(x-x_0)+\boxed{C}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)(x\to x_0).$$

$$A=\lim_{x\to x_0}f(x)\quad =f(x_0)$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B+C(x-x_0)+o(x-x_0)\Rightarrow B=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

$$C=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\boxed{o((x-x_0)^2)}}{(x-x_0)^2}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}\cancel{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{2}\cancel{=}\frac{f''(x_0)}{2}$$

$$=\frac{f''(x_0)}{2}$$

用导数定义

此处不能使用洛必达法则

$f(x)$在点 x_0二阶可导

$f(x)$ 能用 $x-x_0$的二次多项式来近似,

误差为$o((x-x_0)^2)(x \to x_0)$, 即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$

$$(x \to x_0).$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\right)}{(x-x_0)^2}=0$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\right)}{(x-x_0)^2}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}-f''(x_0)\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}-\frac{1}{2}f''(x_0)$$

$$=\frac{1}{2}f''(x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)=0.$$

$f(x)$在点 x_0二阶可导

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$

$$(x\to x_0).$$

问题

是否存在一个n次多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$$

使得

$$f(x)-P_n(x)=o\left((x-x_o)^n\right)\ \left(x\to x_0\right)?$$

当$f(x)$在点x_0有n阶导数时,这样的n次多项式是存在的.

泰勒(Taylor)多项式

若函数$f(x)$在点x_0存在直到n阶的导数. 则称

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为$f(x)$在点x_0的n次泰勒(Taylor)多项式, 称

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

为泰勒系数.

带Peano型余项的Taylor公式

若函数$f(x)$在点x_0存在直到n阶的导数. 则有

$$f(x)=T_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right),$$

即 $$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

研究函数在一点近旁性态的有力工具

带Peano型余项的Taylor公式

f在点x_0 n阶可导,则$f(x)=T_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)$

证 设$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$，$Q_n(x)=(x-x_0)^n$,

故只需证 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{Q_n(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$

因为 $R_n(x)=f(x)-T_n(x), R_n^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)-T_n^{(k)}(x)\left(k=0,1,\cdots n\right)$,

所以 $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$,

$$Q_n(x_0)=Q_n'(x_0)=\cdots=Q_n^{(n-1)}(x_0)=0\,,Q_n^{(n)}(x_0)=n!.$$

则当$x\in U^\circ(x_0)$且$x\to x_0$时,连续使用$n-1$次洛必达法则,得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-\left(f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0)(x-x_0)\right)}{x-x_0}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right)=\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\right)=0.$$

注：问题

若 $f(x)=P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right),$

其中 $P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$

$P_n(x)$是否一定是$f(x)$的泰勒多项式?

答：$P_n(x)$不一定是$f(x)$的泰勒多项式.

例如 $f(x)=x^{n+1}\cdot D(x),\ \ P_n(x)=0,$

在 $x_0=0$处满足 $f(x)=P_n(x)+o(x^n).$

但当$n>1$时,$P_n(x)$不是$f(x)$在点$x_0=0$的n次泰勒多项式.

原因是$f(x)$在点$x_0=0$的高阶导数(二阶和二阶以上)都不存在,

所以无法构造$n(n>1)$次泰勒多项式.

注： 若$f(x)$在点x_0有n阶导数,则只有唯一的多项式$\big($泰勒多项式$T_n(x)\big)$满足：

$$f(x)=T_n(x)+o\big((x-x_0)^n\big).$$

注： 可以证明对任意一个n次多项式$P_n(x)$,存在$U(x_0)$,使得

$$\left|f(x)-T_n(x)\right|\le\left|f(x)-P_n(x)\right|,\quad x\in U(x_0).$$

也就是说, $T_n(x)$是逼近$f(x)$的最佳n次多项式.

注：当 $x_0 = 0$时，称

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

为带佩亚诺(Peano)型余项的麦克劳林(Maclaurin)公式.

带Lagrange型余项的Taylor公式

若函数$f(x)$在$[a,b]$上存在直到n阶连续导数，在(a,b)上存在$n+1$阶导函数，则对$\forall x, x_0 \in [a,b]$，有

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

其中

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$ ξ介于x与x_0之间.

拉格朗日(Lagrange)型余项

带Lagrange型余项的Taylor公式

$$f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

证 设$G(t)=(x-t)^{n+1}$,

$$F(t)=f(x)-\left(f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right);$$

只要证明 $\dfrac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\dfrac{F(x_0)}{G(x_0)}=\dfrac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

不妨设$x>x_0$,则$F(t)$, $G(t)$在$[x_0,x]$上连续,在(x_0,x)上可导,

且 $G'(t)=-(n+1)(x-t)^n\neq 0,\ t\in[x_0,x)$.

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

根据柯西中值定理得 $\dfrac{F(x_0)}{G(x_0)}=\dfrac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$

$$=\frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\ \xi\in(x_0,x)\subset(a,b),$$

于是得到

$$f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi\text{介于}x\text{与}x_0\text{之间}.$$

注：称$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

为$f(x)$在点x_0的拉格朗日型余项.

注：$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

为$f(x)$在点x_0的带拉格朗日型余项的泰勒公式.

注：$R_n(x)$可改写成

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}，\quad 0<\theta<1.$$

注：当$n=0$时,

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$ 拉格朗日中值公式.

注：当$x_0=0$时,称

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\left(0<\theta<1\right)$$

为$f(x)$在点x_0的带拉格朗日型余项的n阶麦克劳林公式.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

例1 带佩亚诺型余项的麦克劳林公式：

1. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$; $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$ $\left.\left(e^x\right)^{(n)}\right|_{x=0}=1$

2. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$;

$$\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)\quad \left.\left(\sin x\right)^{(n)}\right|_{x=0}=\sin\frac{n}{2}\pi=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^{m-1}, & n=2m-1\end{cases}$$

3. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$;

$$\left(\cos x\right)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)\quad \left.\left(\cos x\right)^{(n)}\right|_{x=0}=\cos\frac{n}{2}\pi=\begin{cases}(-1)^m, & n=2m\\ 0, & n=2m-1\end{cases}$$

4. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$;

$$\left(\ln(1+x)\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},n=1,2\cdots\quad \left.\left(\ln(1+x)\right)^{(n)}\right|_{x=0}=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

5. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$;

$$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\quad \left.\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)}\right|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

6. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$.

BY GYH

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1$$

例2 带拉格朗日型余项的麦克劳林公式：

1. $$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (\,0<\theta<1,\ x\in(-\infty,+\infty)\,).$$

2. $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$
$$(\,0<\theta<1,\ x\in(-\infty,+\infty)\,).$$

3. $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}\ (\,0<\theta<1,\ x\in(-\infty,+\infty)\,).$$

4. $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots++(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$
$$(\,0<\theta<1,\ x>-1).$$

5. $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\ (\,0<\theta<1,\ x>-1).$$

6. $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}\ (\,0<\theta<1,\ |x|<1).$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

1. $\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$

解 因为 $f^{(k)}(x)=\mathrm{e}^x$, 所以 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$

于是e^x的带佩亚诺型余项的麦克劳林公式为

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

e^x的带拉格朗日型余项的麦克劳林公式为

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad\left(0<\theta<1,\ x\in(-\infty,+\infty)\right).$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1$$

2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \dfrac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}$ $(0<\theta<1,\ x\in(-\infty,+\infty))$.

解 设 $f(x)=\sin x$，则 $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{k}{2}\pi\right), k=0,1,2,\cdots.$

于是 $f^{(k)}(0)=\sin\dfrac{k}{2}\pi = \begin{cases} 0, & k=2l \\ (-1)^{l-1}, & k=2l+1 \end{cases}, l=0,1,\cdots,m$

$\sin x$的带佩亚诺型余项的麦克劳林公式为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m+1}).$$

$$f^{(2m+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + \frac{2m+1}{2}\pi\right) = (-1)^m \cos\theta x.$$

$\sin x$的带拉格朗日型余项的麦克劳林公式为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\cos\theta x \cdot x^{2m+1}$$

$$\big(0<\theta<1,\ x\in(-\infty,+\infty)\big).$$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{\cos\theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2} \; (0 < \theta < 1,\ x \in (-\infty, +\infty))$.

解 设 $f(x) = \cos x$，则 $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k}{2}\pi\right), k = 0, 1, 2, \cdots$.

于是

$$f^{(k)}(0) = \cos\frac{k}{2}\pi = \begin{cases} (-1)^l, & k = 2l \\ 0, & k = 2l+1 \end{cases}, l = 0, 1, \cdots, m$$

$\cos x$ 的带佩亚诺型余项的麦克劳林公式为

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}).$$

$$f^{(2m+2)}(\theta x) = \cos\big(\theta x + (m+1)\pi\big) = (-1)^{m+1} \cos\theta x.$$

$\cos x$ 的带拉格朗日型余项的麦克劳林公式为

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \cos\theta x \cdot x^{2m+2}$$

$$(0 < \theta < 1,\ x \in (-\infty, +\infty)).$$

6. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n).$

解 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 则 $f'(x)=\dfrac{1!}{(1-x)^2}$, $f''(x)=\dfrac{2!}{(1-x)^3}$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$,

故 $f(0)=1, f'(0)=1!, f''(0)=2!, \cdots, f^{(n)}(0)=n!.$

于是 $\dfrac{1}{1-x}$的带佩亚诺型余项的麦克劳林公式为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n).$$

$$f^{(n+1)}(\theta x)=\frac{(n+1)!}{(1-\theta x)^{n+2}}.$$

$\dfrac{1}{1-x}$的带拉格朗日型余项的麦克劳林公式为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}x^{n+1}$$

$$\big(0<\theta<1\,,\ x\in(-1,1)\big).$$

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+o\left((x-1)^n\right)$$

例3 求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=1$ 的带Peano型余项的Taylor公式.

解 利用 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$.

则
$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\frac{1}{1-\left(-(x-1)\right)}$$

$$=1+\left(-(x-1)\right)+\left(-(x-1)\right)^2+\cdots+\left(-(x-1)\right)^n+o\left((x-1)^n\right)$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2-\cdots+(-1)^n(x-1)^n+o\left((x-1)^n\right).$$

$$f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o\left((x-2)^n\right)$$

例4 求$f(x)=\ln x$在点$x=2$的带Peano型余项的Taylor公式.

解 利用$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$.

则 $\ln x=\ln\left(2+(x-2)\right)=\ln 2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$

$$=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)^n}{n}+o\left((x-2)^n\right)$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o\left((x-2)^n\right).$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

例5 求 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ 的带Peano型余项的Maclaurin公式.

解 利用 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n).$

则 $\dfrac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+o(x^{2n}).$

解 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{(1-x)(1+x)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$

$$=\frac{1}{2}\Big(\big(1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)\big)+\big(1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)\big)\Big)$$

$$=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2m}+o(x^{2m}).$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

例6 求$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$的带Peano型余项的Maclaurin公式.

解 利用 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$.

则 $$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-\left(-x^2\right)}$$

$$=1+\left(-x^2\right)+\left(-x^2\right)^2+\left(-x^2\right)^3+\cdots+\left(-x^2\right)^n+o(x^{2n})$$

$$=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+\left(-1\right)^n x^{2n}+o(x^{2n}).$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

例7 求$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$的带Peano型余项的Maclaurin公式，并求$f^{(98)}(0)$与$f^{(99)}(0)$.

解 由 $\mathrm{e}^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$,

则 $$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}+o(x^{2n}).$$

由泰勒系数公式可知x^{98}和x^{99}的系数为

$$\frac{1}{98!}f^{(98)}(0)=\frac{(-1)^{49}}{2^{49}\cdot 49!},\quad \frac{1}{99!}f^{(99)}(0)=0,$$

于是得到 $$f^{(98)}(0)=-\frac{98!}{2^{49}\cdot 49!},\quad f^{(99)}(0)=0.$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)-e^{-x^2}-\sin x^3+1}{x^3}$.

解 因为 $\ln(1-x^2)=-x^2-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$,

$$\sin x^3=x^3+o(x^3), e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)-e^{-x^2}-\sin x^3+1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)-\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)-\left(x^3+o(x^3)\right)+1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+o(x^3)}{x^3}=-1.$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 因为 $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$,

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}\right)+o(x^4)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

例10 设$f(x)$在$[0,1]$上2阶可导，$|f(0)|\le 1, |f(1)|\le 1, |f''(x)|\le 2, \forall x\in[0,1]$.

证明：$|f'(x)|\le 3, \forall x\in[0,1]$.

证 对$\forall t,x\in[0,1]$有 $f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(t-x)^2$, ξ介于x与t之间.

取$t=1$，得$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(1-x)^2(*)$, $x<\xi_1<1$.

取$t=0$，得 $f(0)=f(x)-f'(x)x+\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}x^2(**)$, $0<\xi_2<x$.

$(*)$式$-(**)$式，得

$$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}x^2,$$

从而$|f'(x)|=\left|f(1)-f(0)-\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(1-x)^2+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}x^2\right|$

$$\le |f(1)|+|f(0)|+\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}\right|(1-x)^2+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}\right|x^2$$

$$\le 1+1+(1-x)^2+x^2\le 2+(1-x+x)^2=3.$$

例11 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有三阶导数，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)$ 都存在且有限，

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0.$

证 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=b.$

因为 $f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\dfrac{f''(x)}{2!}(t-x)^2+\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(t-x)^3$，　ξ 介于 x 与 t 之间.

取 $t=x+1$，得　$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\dfrac{f''(x)}{2!}+\dfrac{f'''(\xi_1)}{3!}$，　$x<\xi_1<x+1.$

取 $t=x-1$，得 $f(x-1)=f(x)-f'(x)+\dfrac{f''(x)}{2!}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{3!}$，　$x-1<\xi_2<x.$

两式相加，得　$f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+f''(x)+\dfrac{f'''(\xi_1)}{3!}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{3!}$，

由于 $x<\xi_1<x+1,\ x-1<\xi_2<x$，因此当 $x\to+\infty$ 时，$\xi_1\to+\infty,\ \xi_2\to+\infty.$

令 $x\to+\infty$，得　$2a=2a+\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'''(\xi_1)}{3!}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'''(\xi_2)}{3!}=2a+\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)+\dfrac{b}{6}-\dfrac{b}{6}$，

所以　$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0.$

由 $f(x+1)=f(x)+f'(x)+\dfrac{f''(\eta)}{2!},\ x<\eta<x+1$，　令 $x\to+\infty$，得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0.$

由 $f(x+1)=f(x)+f'(x)+\dfrac{f''(x)}{2!}+\dfrac{f'''(\xi_1)}{3!},\ x<\xi_1<x+1$，令 $x\to+\infty$，得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0.$

例12 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f'(a)=f'(b)=0$，

证明在(a,b)内存在一点ξ，使得$|f''(\xi)| \ge \dfrac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$.

证 将$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$在$x=a, x=b$处分别展开成泰勒公式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2$$

$$\left(a<\xi_1<\frac{a+b}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}<\xi_2<b\right)$$

两式相减并整理得

$$|f(b)-f(a)|=\frac{(b-a)^2}{8}|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\left(|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|\right).$$

取$|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$则有 $|f(b)-f(a)|\le\dfrac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$

于是 $|f''(\xi)|\ge\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \left(0 < \theta < 1,\ x \in (-\infty, +\infty)\right).$$

例13 (1)计算e的值,使其误差不超过10^{-6}.

(2)证明e是无理数.

解 因为$\mathrm{e} = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$.

又因为$2 < \mathrm{e} < 3$,所以误差

$$R_9(1) = \frac{e^{\theta}}{10!} < \frac{3}{10!} = \frac{3}{3628800} < 10^{-6}.$$

于是

$$\mathrm{e} \approx 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718281,$$

其误差不超过10^{-6}.

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+1)!},0<\theta<1$$

例13 (2)证明e是无理数.

证 下证e是无理数. 因为 $n!\mathrm{e}-n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{n+1}$.

倘若 $\mathrm{e}=\frac{p}{q}\left(\ (p,q)=1\ \right)$是有理数. 取 $n\geq q$ 且$n\geq 3$,

则左边是整数,由于$\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{n+1}<\frac{\mathrm{e}}{n+1}<\frac{3}{n+1}$,

当$n>2$时$\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{n+1}$不是整数,矛盾. 所以e是一个无理数.

(同样可以证明sin1, cos1,都不是有理数)

利用带Peano型余项的Taylor公式，可以方便地计算许多不定式极限

可以比较彻底地研究函数的极值

利用带Lagrange型余项的Taylor公式，可以从理论上讨论函数的单调性、凸性，由此可以证明一些等式与不等式

利用Taylor公式计算函数在一点的近似值，也可以在整体上(即一个区间上)用多项式来逼近一个比较复杂的函数

你应该：

理解泰勒公式

会用泰勒公式

Taylor于1708年获得了“振荡中心”问题的一个解决方法，但是这个解法直到1714年才被发表。因此导致约翰·伯努利与他争谁首先得到解法的问题。他1715年发表的《Methodus Incrementorum Directa et Inversa》为高等数学添加了一个新的分支，今天这个方法被称为有限差分方法。除其它许多用途外他用这个方法来确定一个振动弦的运动。他是第一个把成功地使用物理效应来阐明这个运动的人。在同一著作中他还提出了著名的泰勒公式。直到1772年约瑟夫·拉格朗日才认识到这个公式的重要性并称之为“导数计算的基础”。

—— 摘自百度百科

布鲁克 · 泰勒
Brook Taylor
(1685年8月18日 - 1731年11月30日)
英国数学家

麦克劳林21岁时发表了第一本重要著作《构造几何》，在这本书中描述了作圆锥曲线的一些新的巧妙方法，精辟地讨论了圆锥曲线及高次平面曲线的种种性质. 1742年撰写的《流数论》以泰勒级数作为基本工具，是对牛顿的流数法作出符合逻辑的、系统解释的第一本书. 他得到数学分析中著名的Maclaurin级数展开式，并用待定系数法给予证明.他在代数学中的主要贡献是在《代数论》(1748，遗著)中，创立了用行列式的方法求解多个未知数联立线性方程组.但书中记叙法不太好，后来由另一位数学家克莱默Cramer又重新发现了这个法则，所以现今称之为Cramer法则.

—— 摘自百度百科

科林·麦克劳林
Colin Maclaurin
(1698年2月 - 1748年6月14日)
苏格兰数学家