Ch3 函数极限

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年11月09日

BY GYH

将学习：

两个重要的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

证 因为 $\sin x < x < \tan x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

不等式中的三个表达式均是偶函数，故当$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$时，有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$

而$0 < 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$，由于 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$,

根据函数极限的迫敛性，$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0$,即$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$.

再根据函数极限的迫敛性，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

补充证明 利用单调有界准则证明数列$\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}$收敛,并求其极限.

证 设$x_n = n\sin\frac{\pi}{n}$. 令 $t = \frac{\pi}{n(n+1)}$, 则当$n \geq 3$时,$nt \leq \frac{\pi}{4}$.于是

$$\tan nt = \frac{\tan(n-1)t + \tan t}{1 - \tan(n-1)t\tan t} \geq \tan(n-1)t + \tan t \geq \cdots \geq n\tan t.$$

从而 $\sin(n+1)t = \sin nt\cos t + \cos nt\sin t = \sin nt\cos t\left(1 + \frac{\tan t}{\tan nt}\right)$

$$\leq \sin nt\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n}\sin nt.$$

所以当$n \geq 3$时,$x_n = n\sin\frac{\pi}{n} \leq (n+1)\sin\frac{\pi}{n+1} = x_{n+1}$.

又当$n \geq 3$时,$0 < x_n = n\sin\frac{\pi}{n} < n\cdot\frac{\pi}{n} = \pi$, 故$\{x_n\}$递增有上界.

根据单调有界定理知, $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}$收敛.

根据归结原则知, $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \pi\frac{\sin x}{x} = \pi.$

例1 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 令 $t=x-\pi$, 则 $\sin x=\sin(t+\pi)=-\sin t$,

所以

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}(a,b\neq 0).$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin ax}{ax}}{\dfrac{\sin bx}{bx}}\cdot\frac{ax}{bx}$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 令 $t=\arctan x$, 即 $x=\tan t$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}\cdot\lim_{t\to 0}\cos t$$

$$=1.$$

例4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

证 只需证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$, 则对 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}_+$,

当 $n>N$ 时,有 $\mathrm{e}-\varepsilon<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}<\mathrm{e}+\varepsilon$,

取 $M=N+1>0$, 当 $x>M$ 时, 令 $n=[x]$, 则 $n>N$, 且 $n\le x<n+1$,

从而有 $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$,

于是 $\mathrm{e}-\varepsilon<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}+\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

当 $x<0$ 时，设 $x=-y,\ y>0$，则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}.$$

因为当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\mathrm{e}.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$

注： 若令 $t = \dfrac{1}{x}$，则 $x \to \infty$ 时，$t \to 0.$

由此可得

$$\lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$. $\left(1^{\infty}\right)$

解

$$\lim_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2x}}\cdot\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2x}}=\mathrm{e}^{2}.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$. $\left(1^{\infty}\right)$

解

$$\lim_{x\to 0}\left(1-x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-x\right)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$. (1^{∞})

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}$. $\left(1^\infty\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3x^2}}\right]^3 = \mathrm{e}^3.$

例9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$. (1^∞)

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-x^2}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}=\mathrm{e}^2.$$

例10 利用归结原则求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$. (1^∞)

解 因为 $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to \mathrm{e}(n\to\infty)$,

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\geq\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}.$$

而由归结原则(取 $x_n=\dfrac{n^2}{n-1},n=1,2,\cdots$),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

于是,由数列极限的迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}.$

例10 利用归结原则求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$. (1^∞)

解 由归结原则(取$x_n=n, n=1,2,\cdots$),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}\cdot x}$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}}=\mathrm{e}.$$

你应该：

熟练运用两个重要极限