Ch5 导数和微分

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

将学习：

导数的概念

导函数

导数的几何意义

导数的引入

一般认为，求变速运动的瞬时速度，求已知曲线上一点处的切线，求函数的最大、最小值，这是微分学产生的三个源头．牛顿和莱布尼茨就是分别在研究瞬时速度和曲线的切线时发现导数的．下面是两个关于导数的经典例子．

瞬时速度

设一质点作直线运动,质点的位置s是时间t的函数,即其运动规律是$s=s(t)$,则在某时刻t_0及邻近时刻t之间的平均速度是 $\bar{v}=\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

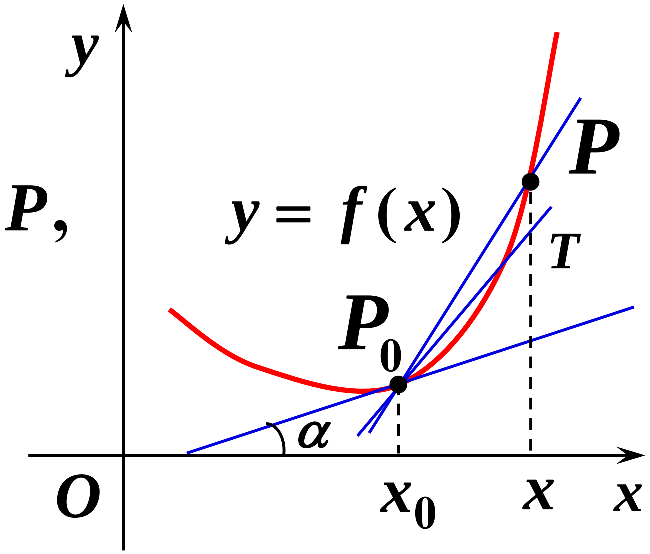
当t越来越接近t_0时,平均速度就越来越接近时刻t_0的瞬时速度.当极限 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$

存在时,这个极限就是质点在时刻t_0的瞬时速度$v(t_0)$.

切线的斜率

如图所示,需要寻找曲线$y = f(x)$在其上一点

$P_0(x_0, y_0)$处的切线P_0T.



为此在P_0的邻近取一点P,作曲线的割线P_0P,

这条割线的斜率为 $\bar{k} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

当动点P沿此曲线无限接近点P_0时,

$\bar{k}$的极限若存在,则这个极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \bar{k} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

就是曲线在点P_0的切线P_0T的斜率$k_{切}$.

导数的定义

设函数$y = f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，则称函数$f(x)$在点x_0可导，该极限称为

$f(x)$在点x_0的导数，记作$f'(x_0)$或$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

如果令$\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，导数就

可以写成

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

注1： 导数是函数增量Δy与自变量增量Δx之比的极限，

即$f'(x_0)$就是$f(x)$关于x在x_0处的变化率.

注2： 如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$不存在，

则称$f(x)$在点x_0不可导.

例1 求函数$f(x)=x^3$在$x=1$处的导数,并求该曲线在点$P(1,1)$的切线方程.

解 因为 $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^3 - 1$

所以

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3 + 3\Delta x + \Delta x^2) = 3.$$

由此可知曲线$y = x^3$在点$P(1,1)$的切线斜率为

$$k = f'(1) = 3,$$

于是所求切线方程为 $y - 1 = 3(x-1),$

即 $y = 3x - 2.$

例2 求常量函数$f(x)=c$的导数.

解 因为 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0,$

所以

$$f'(x) = (c)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

例3 证明函数$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$在$x=0$处不可导.

证 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在,

所以$f(x)$在$x=0$处不可导.

例4 研究函数$f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$在$x=0$的连续性与可导性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}\begin{cases} =0, & \alpha>0 \\ \text{不存在}, & \alpha\le 0 \end{cases}$, $f(0)=0$,

因此,当$\alpha>0$时, $f(x)$在$x=0$连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}\begin{cases} =0, & \alpha>1 \\ \text{不存在}, & \alpha\le 1 \end{cases}$,

所以当$\alpha>0$时, $f(x)$在$x=0$可导.

分段函数的导数

在对分段函数求导时，分段点处要用导数的定义或者左、右导数的定义来确定该点的导数是否存在或求导.

有限增量公式

设函数$f(x)$在点x_0可导，即$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，则

$$\varepsilon = f'(x_0)-\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

是当$\Delta x\to 0$时的无穷小量,于是$\varepsilon\Delta x = o(\Delta x)$,即

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

称为$f(x)$在点x_0的有限增量公式.

注：有限增量公式对$\Delta x = 0$仍然成立.

可导与连续的关系

如果函数$f(x)$在点x_0可导,则$f(x)$在点x_0连续.

连续是可导的必要条件

可导是连续的充分条件

不连续一定不可导

单侧导数

设函数$y=f(x)$在点x_0的某右邻域$U_+(x_0)$上有定义,

若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称该极限为$f(x)$在点x_0的右导数,记作$f'_+(x_0)$.

若左极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称该极限为$f(x)$在点x_0的左导数,记作$f'_-(x_0)$.

右导数和左导数统称为单侧导数.

导数存在的充要条件

如果函数$f(x)$在点x_0的某邻域上有定义，则$f'(x_0)$存在的充要条件是$f'_+(x_0)$与$f'_-(x_0)$都存在，且

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

例5 证明函数$f(x)=x^2D(x)$仅在$x=0$处可导,

其中$D(x)$是Dirichlet函数.

证 当$x_0\neq 0$时,

取有理数列$\{x_n\}$,满足$x_n\neq x_0,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 则$f(x_n)=x_n^2$,从而

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_n^2=x_0^2.$$

取无理数列$\{y_n\}$,满足$y_n\neq x_0,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$. 则$f(y_n)=0$,从而

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}0=0.$$

根据归结原则知,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,故$f(x)$在点$x_0$不连续,从而不可导.

当$x_0=0$时, $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}xD(x)$,

因为$|D(x)|\leq 1$,所以$D(x)$是有界量,而x是$x\to 0$时的无穷小,

根据无穷小与有界量的乘积是无穷小知 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}xD(x)=0.$

例6 证明函数$f(x)=|x|$在$x=0$处不可导.

证 因为 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$,从而

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

由于$f'_-(0)\neq f'_+(0)$,

所以$f(x)=|x|$在$x=0$处不可导.

例7 设$f(x)=\begin{cases}1-\cos x, & x\geq 0\\ x, & x<0\end{cases}$，讨论$f(x)$在$x=0$处的左、右导数和导数.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$,

从而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0=f(0)$,

所以$f(x)$在点$x=0$处连续.

因为

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x}=0,$$

$$f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}1=1.$$

由于 $f_+'(0)\neq f_-'(0)$，故$f(x)$在$x=0$处不可导.

导函数

如果函数$f(x)$在区间I上的每一点都可导(对于区间端点考虑相应的单侧导数,如左端点考虑右导数),则称函数$f(x)$为区间I上的**可导函数**.

对每一个$x\in I$都有$f(x)$的一个导函数$f'(x_0)$与之对应,这就定义了一个在I上的函数,称为$f(x)$在I上的**导函数**,简称导数,记作$f'(x)$,y'或$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\ x\in I.$$

注： 这里$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$仅为一个记号,学了微分之后就会知道,这个记号实质上是一个“微分的商”.

注： $f'(x_0)$可表示为

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\quad y'\Big|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

例8 求函数$y=x^n$的导数,n为正整数.

解 由于 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\Delta x^n\right)-x^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1}\right)$$

$$=nx^{n-1},$$

所以 $$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}.$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

例9 证明：(i) $(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x$;

(ii) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e\ \ (a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$,$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(iii) $(a^x)'=a^x\ln a(a>0,\ a\neq 1)$.

证 (i)
$$\left(\sin x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$
$$\left(\cos x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-\sin x.$$

例9 证明：(i) $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x;$

(ii) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}\ \ (a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$,$(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

(iii) $(a^x)' = a^x \ln a (a>0,\ a\neq 1)$.

证 (ii) $$\left(\log_a x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$= \log_a\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}\right) = \log_a \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e} = \frac{1}{x\ln a},$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

(iii) $$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} a^x\frac{\mathrm{e}^{\Delta x\ln a}-1}{\Delta x}$$

$$= a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x} = a^x\ln a.\qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x\ln\mathrm{e} = \mathrm{e}^x.$$

例 求$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的导函数.

解 当 $x\neq 0$ 时, $g'(x)=\dfrac{1+e^{1/x}+\dfrac{1}{x}e^{1/x}}{\left(1+e^{1/x}\right)^2}$. 当 $x=0$ 时, 因为

$$g'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\dfrac{\Delta x}{1+e^{1/\Delta x}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{1/\Delta x}}=0,$$

$$g'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\dfrac{\Delta x}{1+e^{1/\Delta x}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{1/\Delta x}}=1,$$

所以$g(x)$在$x=0$处不可导. 因此 $g'(x)=\dfrac{1+e^{1/x}+\dfrac{1}{x}e^{1/x}}{\left(1+e^{1/x}\right)^2}$, $x\neq 0$.

导数的几何意义

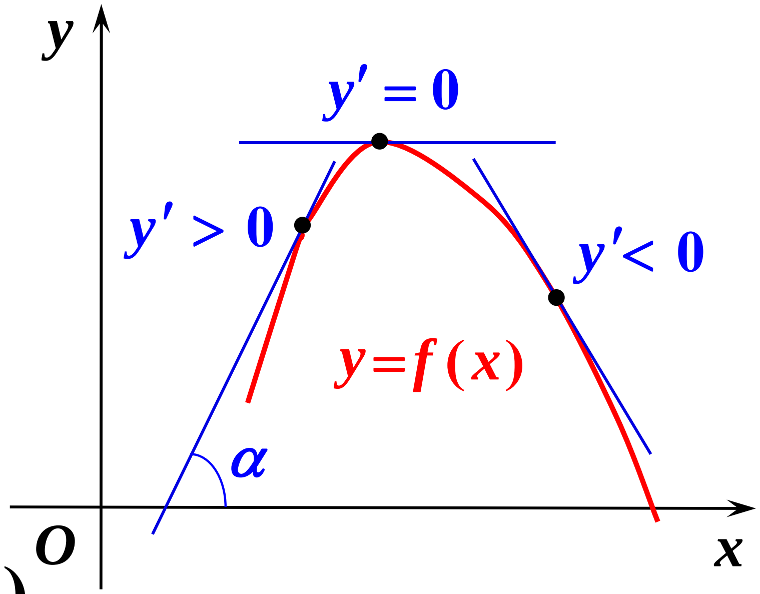
在用几何问题引出导数概念时,已知$f'(x_0)$是曲线$y=f(x)$

在点$P_0(x_0,f(x_0))$处切线的斜率.所以该切线方程是

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

记α为切线与x轴正向的夹角,则

$$f'(x_0)=\tan\alpha.$$



$f'(x_0)>0$说明α是锐角;

$f'(x_0)<0$说明α是钝角;

$f'(x_0)=0$说明$\alpha=0$(切线与x轴平行).

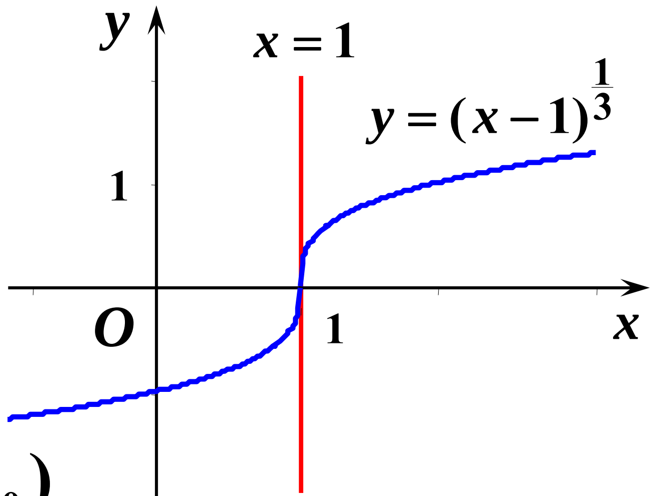
导数的几何意义

曲线$y=f(x)$过点$P\left(x_0, f(x_0)\right)$的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\left(x-x_0\right).$$

曲线$y=f(x)$过点$P\left(x_0, f(x_0)\right)$的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\left(x-x_0\right).$$



导数的几何意义

如果$f(x)$在点x_0连续,且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$$

则曲线$y=f(x)$在点P_0的切线垂直于x轴,此时

$y=f(x)$在点P_0的切线方程为$x=x_0$.

$y=f(x)$在点$P\big(x_0,f(x_0)\big)$的法线方程为 $y=f\left(x_0\right)$.

如右图所示,曲线

$$y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$$

在点(1,0)处符合上述特征,故该点处的切线为$x=1$.

例10 求曲线$y = x^3$在其上任一点$P(x_0, y_0)$处的切线和法线方程.

解 由于

$$y'\big|_{x=x_0} = \left(x^3\right)'\Big|_{x=x_0} = 3x_0^2,$$

因此$y = x^3$在点$P(x_0, y_0)$的切线方程和法线方程分别为

$$y - x_0^3 = 3x_0^2(x - x_0),$$

$$y - x_0^3 = -\frac{1}{3x_0^2}(x - x_0).$$

若$x_0 = 0$，则切线方程为$y = 0$,法线方程为$x = 0$.

例11 求曲线$y=\ln x$在其上任一点$P(x_0,\ln x_0)$处的切线和法线方程.

解 由于

$$y'\big|_{x=x_0}=(\ln x)'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0},$$

因此$y=\ln x$在点P的切线方程和法线方程分别为

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0),$$

$$y-\ln x_0=-x_0(x-x_0).$$

例12 求曲线$y=\sqrt[3]{x}$在点$P(0,0)$处的切线和法线方程.

解 由于$y=\sqrt[3]{x}$在$x=0$处连续,且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty,$$

因此$y=\sqrt[3]{x}$在点$P(0,0)$处的切线方程和法线方程分别为

$$x=0,$$

$$y=0.$$

导数的应用

与瞬时变化率有关的物理问题还有很多,例如瞬时电流强度$i(t)$

是通过导线截面电量$q(t)$的变化率,即

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}=q'(t).$$

质量分布不均匀的金属丝,以$m(x)$表示0到x的质量,

则它在x处的线密度$\rho(x)$是$m(x)$在x处的变化率,即

$$\rho(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}=m'(x).$$

极值、极值点

如果函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$上对一切$x \in U(x_0)$有

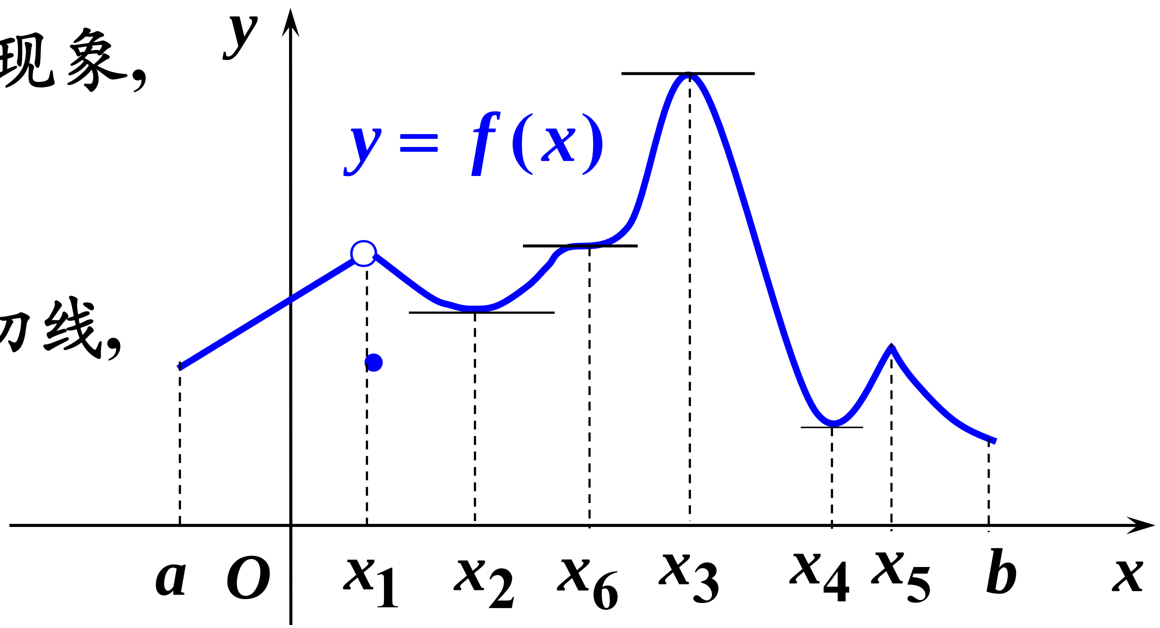
$$f(x) \le f(x_0) \quad \left(\text{或 } f(x) \ge f(x_0)\right),$$

则称函数f在点x_0处取得**极大(小)值**，称点x_0为**极大(小)值点**.

极大值、极小值统称为极值,极大值点、极小值点统称为**极值点**.

注： 如图，函数$y=f(x)$在点x_1, x_2, x_4处取得极小值，在x_3, x_5处取得极大值.

由于极值是一个局部性概念，因此如果出现某一极大值反而小于另一极小值的现象，那是不足为奇的. 此外，在点x_6处虽然也有水平切线，但它不是极值点.



例13 证明：若 $f'_+(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，使对任何 $x\in(x_0,x_0+\delta)$，有 $f(x)>f(x_0)$.

证 由右导数的定义

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

根据函数极限的局部保号性知，$\exists\delta>0$，使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0\ ,\ \forall x\in(x_0,\ x_0+\delta).$$

再由 $x>x_0$，得 $f(x)-f(x_0)>0$，于是有

$$f(x)>f(x_0).$$

注： 类似地，若$f'_{-}(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

$$f(x)<f(x_0),\ \forall x\in(x_0-\delta,\ x_0).$$

费马(Fermat)定理

如果函数$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，且在点x_0可导. 如果x_0是$f(x)$的极值点，则必有

$$f'(x_0)=0.$$

注： 如果$f(x)$在极值点$x = x_0$处可导，

则该点处的切线平行于x轴.

注： 称满足方程$f'(x) = 0$的点为稳定点(也称为驻点).

注： 稳定点不一定都是极值点，如$x = 0$是$y = x^3$

的稳定点，但不是极值点.

反之，极值点也不一定都是稳定点，如$x = 0$是$y = |x|$

的极值点，但不是稳定点(因为它在$x = 0$处不可导).

关于导数概念相关问题:

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)}$$

下面的说法是否正确?

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在, 则 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导, 且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0).$$

✗

例如 $f(x)=|x|$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$f'(0)$不存在

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0-\Delta x)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-|\Delta x|}{2\Delta x}=0$$

关于导数概念相关问题: $f'(x_0+0) \overset{?}{=} f'_+(x_0)$.

$f'(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ 表示$f'(x)$当$x \to x_0$时的右极限.

$f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 表示$f(x)$在点x_0处的右导数.

关于导数概念相关问题: $f'(x_0+0) \cancel{=} f'_+(x_0).$

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

$$f'_+(0)=f'(0)=0.$$

$$f'(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right) \text{ 不存在.}$$

关于导数概念相关问题: $f'(x_0+0) \cancel{=} f'_+(x_0).$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$$

当$x<0$时, $f'(x)=0.$

当$x>0$时, $f'(x)=2x.$

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2x, & x>0\end{cases}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1-\boxed{0}}{x}=\infty.$$

$$f'(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}2x=0.$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{0-0}{x}=0.$$

$$f'(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=0.$$

$$f'_-(0)=f'(0-0)$$

你应该：

理解导数的概念

掌握导数的几何意义

理解极值点与极值的概念

在力学上，牛顿阐明了角动量守恒的原理. 在光学上，他发明了反射式望远镜，并基于对三棱镜将白光发散成可见光谱的观察，发展出了颜色理论. 他还系统地表述了冷却定律，并研究了音速.在数学上，牛顿与戈特弗里德·莱布尼茨分享了发展出微积分学的荣誉. 他也证明了广义二项式定理，提出了“牛顿法”以趋近函数的零点，并为幂级数的研究作出了贡献. 1687年的巨作《自然哲学的数学原理》，开辟了大科学时代. 牛顿是最有影响的科学家，被誉为“物理学之父”，他是经典力学基础的牛顿运动定律的建立者. 他发现的运动三定律和万有引力定律，为近代物理学和力学奠定了基础，他的万有引力定律和哥白尼的日心说奠定了现代天文学的理论基础.

—— 摘自百度百科

艾萨克·牛顿

Isaac Newton

(1643年1月4日—1727年3月31日)

英国物理学家、数学家、天文学家

莱布尼茨在数学史和哲学史上都占有重要地位. 在数学上, 他和牛顿先后独立发现了微积分, 而且他所使用的微积分的数学符号被更广泛的使用, 莱布尼茨所发明的符号被普遍认为更综合, 适用范围更加广泛. 莱布尼茨还发明并完善了二进制.在哲学上, 莱布尼茨的乐观主义最为著名; 他认为:"我们的宇宙,在某种意义上是上帝所创造的最好的一个". 他和笛卡尔、巴鲁赫·斯宾诺莎被认为是十七世纪三位最伟大的理性主义哲学家. 莱布尼茨在政治学、法学、伦理学、神学、哲学、历史学、语言学诸多方向都留下了著作.

—— 摘自百度百科

戈特弗里德·威廉·莱布尼茨

Gottfried Wilhelm Leibniz

(1646年7月1日至1716年11月14日)

德国哲学家、数学家

费马一生从未受过专门的数学教育，数学研究也不过是业余之爱好. 然而，在17世纪的法国还找不到哪位数学家可以与之匹敌：他是解析几何的发明者之一；对于微积分诞生的贡献仅次于艾萨克·牛顿、戈特弗里德·威廉·凡·莱布尼茨，他还是概率论的主要创始人，以及独撑17世纪数论天地的人. 此外，费马对物理学也有重要贡献. 一代数学天才费马堪称是17世纪法国最伟大的数学家.

—— 摘自百度百科

皮耶 · 德 · 费马
Pierre de Fermat
(1601年8月17日至1666年1月12日)
法国律师、业余数学家