Ch11 反常积分

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周四下午2点至4点

微信号：18926511820　QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2024年05月20日

BY GYH

P261习题11.3/3(2) 讨论瑕积分$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$的敛散性.

解1 $x=0$是瑕点. 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$,

其中$p=\frac{1}{2}<1,\lambda=1$,根据柯西判别法的极限形式知, $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$收敛.

解2 $x=0$是瑕点. 由于 $\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\le\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $x\in(0,\pi]$,

已知$\int_0^{\pi}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$收敛, 根据比较判别法知, $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$收敛.

> 对于$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,a为瑕点,若 $f(x)\ge0$,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$,
>
> 可考察$x\to a^+$时无穷大量$f(x)$关于$\frac{1}{x-a}$的阶,
>
> 若阶数小于1,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛; 若阶数大于等于1,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

P261习题11.3/3(3) 讨论瑕积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\mathrm{d}x$的敛散性.

解 $x=0, x=1$是瑕点. $\dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x}$在(0,1)上不变号.

从而 $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac12} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\mathrm{d}x,$$

对于 $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\mathrm{d}x$: $$\lim_{x\to0^+} x^{\frac12}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\left|\ln x\right|}=-\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=0,$$

其中$p=\dfrac12<1, \lambda=0$,根据柯西判别法的极限形式知, $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\mathrm{d}x$收敛.

对于 $\displaystyle\int_{\frac12}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\mathrm{d}x$: $$\lim_{x\to1^-}(1-x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\left|\ln x\right|}=-\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{x}}\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{\ln(1+x-1)}=1,$$

其中$p=1, \lambda=1$, 根据柯西判别法的极限形式知, $\displaystyle\int_{\frac12}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\mathrm{d}x$发散.

所以$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\mathrm{d}x$发散.

P261习题11.3/3(4) 讨论瑕积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$的敛散性.

解 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln(1+x-1)}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-1}{1-x}=-1$, 故$x=1$不是瑕点.

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1-x}=-\infty$, 故$x=0$是瑕点. $\frac{\ln x}{1-x}$在$(0,1)$上不变号.

$$\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{|\ln x|}{1-x}=-\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-x}\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\ln x=0,$$

其中$p=\frac{1}{2}<1,\lambda=0$, 根据柯西判别法的极限形式知, $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$收敛.

P261习题11.3/3(6) 讨论瑕积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$的敛散性.

解 由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{2x^m}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}x^{2-m}=\begin{cases}0, & 2-m>0,\text{即}m<2,\\ 1, & 2-m=0,\text{即}m=2,\\ +\infty, & 2-m<0,\text{即}m>2,\end{cases}$$

因此当$m\le 2$时,$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$是定积分;当$m>2$时,$x=0$是瑕点.

由于 $\lim_{x\to0^+}x^{m-2}\cdot\frac{1-\cos x}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$,

根据柯西判别法的极限形式知,

当$m-2<1$,即$2<m<3$时,$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$收敛.

当$m-2\ge1$,即$m\ge3$时,$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$发散.

P261习题11.3/3(8) 讨论瑕积分$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$的敛散性.

解 由于 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x = \int_0^{1} \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$,

对于$\int_0^{1} \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$：$x=0$是瑕点，$\mathrm{e}^{-x}\ln x$在$(0,1]$上不变号.

$$\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}|\ln x| = -\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x = 0,$$

其中$p=\frac{1}{2}<1, \lambda=0$, 根据柯西判别法的极限形式知，$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}|\ln x|\mathrm{d}x$收敛，

从而$\int_0^{1} \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$收敛.

对于$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$：

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-x}\ln x = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x\ln x+x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+3}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x\mathrm{e}^x} = 0,$$

其中$p=2>1, \lambda=0$, 根据柯西判别法的极限形式知，$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$收敛.

因此$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$收敛，且为绝对收敛.

补充题　讨论$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$的敛散性.

解　$x=0,1$是可能的瑕点. $x^{m-1}(1-x)^{n-1}$在$(0,1)$上非负.

从而　$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x.$$

对于$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$：　$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-m}\cdot x^{m-1}(1-x)^{n-1}=1$,

根据柯西判别法的极限形式知, 当$1-m<1$,即$m>0$时, $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$收敛.

当$1-m\ge 1$,即$m\le 0$时, $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$发散.

对于$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$：　$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{1-n}\cdot x^{m-1}(1-x)^{n-1}=1$,

根据柯西判别法的极限形式知, 当$1-n<1$,即$n>0$时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$收敛.

当$1-n\ge 1$,即$n\le 0$时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$发散.

所以当$m>0,n>0$时, $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$收敛.

补充题　讨论$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x^m\ln x}\mathrm{d}x\ (m>0)$的敛散性.

解　$x=0$是瑕点. $\frac{1}{x^m\ln x}$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上不变号.

当$m<1$时，$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1+m}{2}}\cdot\frac{1}{x^m|\ln x|}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1-m}{2}}\cdot\frac{1}{|\ln x|}=0,$

其中$p=\frac{1+m}{2}<1,\lambda=0$, 根据柯西判别法的极限形式知，$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x^m\ln x}\mathrm{d}x$收敛.

当$m\geq1$时，$\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\frac{1}{x^m|\ln x|}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{1-m}\cdot\frac{1}{|\ln x|}=+\infty,$

其中$p=1,\lambda=+\infty$, 根据柯西判别法的极限形式知，$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x^m\ln x}\mathrm{d}x$发散.

所以当$m<1$时，$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x^m\ln x}\mathrm{d}x$收敛；当$m\geq1$时，$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x^m\ln x}\mathrm{d}x$发散.

补充题 讨论$\int_0^{+\infty}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$的敛散性.

解 $x=0,1$是可能的瑕点. 从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x,$$

对于$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$: $\lim\limits_{x\to0^+}x^{p-1}\cdot\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}=1$, 根据柯西判别法的极限形式知,

当$p-1<1$,即$p<2$时, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$收敛. 当$p-1\ge1$,即$p\ge2$时, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$发散.

对于$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$: $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{p+q}\cdot\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}=1$, 根据柯西判别法的极限形式知,

当$p+q<1$时, $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$收敛. 当$p+q\ge1$时, $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$发散.

对于$\int_1^{+\infty}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2p+q-1}\cdot\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}=1$, 根据柯西判别法的极限形式知,

当$2p+q-1>1$时, $\int_1^{+\infty}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$收敛. 当$2p+q-1\le1$时, $\int_1^{+\infty}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$发散.

所以当$p<2$, $2-2p<q<1-p$时, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$收敛.

P261第十一章总练习题/2(2) 证明：$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)<\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<1+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}.$

证 由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,$

其中 $\displaystyle\int_0^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\int_0^{1}1\mathrm{d}x=1,$

$$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\int_1^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_1^{u}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right)\Bigg|_1^u=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u^2}\right)=\frac{1}{2\mathrm{e}},$$

从而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<1+\frac{1}{2\mathrm{e}}.$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x>\int_0^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x>\int_0^{1}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right),$$

所以 $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)<\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<1+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}.$

P261第十一章总练习题/3(3) 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解 $x=0$是瑕点. 从而 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$

对于$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$： $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{|\ln x|}{1+x^2}=0,$

其中$p=\frac{1}{2}<1,\lambda=0,$ 根据柯西判别法的极限形式知，$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛.

对于$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$： $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\ln x}{1+x^2}=0,$

其中$p=\frac{3}{2}>1,\lambda=0,$ 根据柯西判别法的极限形式知，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛.

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛.

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\int_1^0\frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t,$

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$

P261第十一章总练习题/4

讨论反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x(b\neq 0)$，$\lambda$取何值时绝对收敛或条件收敛？

解 $x=0$是$\frac{\sin bx}{x^\lambda}$可能的瑕点. 从而 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{|b|}}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x.$

对于$\int_0^{\frac{1}{|b|}}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$： $\frac{\sin bx}{x^\lambda}$在$\left(0,\frac{1}{|b|}\right]$上不变号.

由于 当$\lambda\leq 1$时, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x^\lambda}=\lim\limits_{x\to 0^+}bx^{1-\lambda}=\begin{cases}b,\lambda=1\\0,\lambda<1\end{cases}$, 所以当$\lambda\leq 1$时, $\int_0^{\frac{1}{|b|}}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$为定积分.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\lambda-1}\frac{|\sin bx|}{x^\lambda}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|\sin bx|}{x}=|b|$, 根据柯西判别法的极限形式知,

当$0<\lambda-1<1$,即$1<\lambda<2$时, $\int_0^{\frac{1}{|b|}}\left|\frac{\sin bx}{x^\lambda}\right|\mathrm{d}x$收敛, 从而$\int_0^{\frac{1}{|b|}}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$绝对收敛.

当$\lambda-1\geq 1$,即$\lambda\geq 2$时, $\int_0^{\frac{1}{|b|}}\left|\frac{\sin bx}{x^\lambda}\right|\mathrm{d}x$发散. 从而 $\int_0^{\frac{1}{|b|}}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$发散.

对于$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$： 由于$\left|\frac{\sin bx}{x^\lambda}\right|\leq\frac{1}{x^\lambda}$, 根据比较判别法, $\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\left|\frac{\sin bx}{x^\lambda}\right|\mathrm{d}x$收敛,

从而 $\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$绝对收敛.

P261第十一章总练习题/4

讨论反常积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x(b\neq 0)$,$\lambda$取何值时绝对收敛或条件收 敛?

对于$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\dfrac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$:当$\lambda>1$时,绝对收敛;当$0<\lambda\le 1$时,考虑$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\left|\dfrac{\sin bx}{x^\lambda}\right|\mathrm{d}x$的敛散性:

$$\left|\frac{\sin bx}{x^\lambda}\right|\ge\frac{\sin^2 bx}{x}=\frac{1-\cos 2bx}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2bx}{2x},x\in\left[\frac{1}{|b|},+\infty\right),$$

已知$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\dfrac{1}{2x}\mathrm{d}x$发散.

$$\left|\int_{\frac{1}{|b|}}^{u}\cos 2bx\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{2b}\left(\sin 2bx\right)\Big|_{\frac{1}{|b|}}^{u}\right|=\left|\frac{1}{2b}\sin 2bu-\frac{1}{2b}\sin\frac{2b}{|b|}\right|\le\frac{1}{|b|},u\in\left[\frac{1}{|b|},+\infty\right),$$

即$\int_{\frac{1}{|b|}}^{u}\cos 2bx\mathrm{d}x$在$\left[\dfrac{1}{|b|},+\infty\right)$上有界.

$\dfrac{1}{2x}$在$\left[\dfrac{1}{|b|},+\infty\right)$上单调递减趋于0,根据狄利克雷判别法知,$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\dfrac{\cos 2bx}{x}\mathrm{d}x$收敛,

根据无穷积分收敛的性质知,$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\dfrac{\sin^2 bx}{x}\mathrm{d}x$发散,根据比较判别法知,$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\left|\dfrac{\sin bx}{x^\lambda}\right|\mathrm{d}x$发散.

P261第十一章总练习题/4

讨论反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x(b\neq 0)$,$\lambda$取何值时绝对收敛或条件收 敛?

考虑$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$的敛散性:由于 $\frac{1}{x^\lambda}$在$\left[\frac{1}{|b|},+\infty\right)$上单调递减趋于0,

$$\left|\int_{\frac{1}{|b|}}^{u}\sin bx\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{b}(-\cos bx)\Big|_{\frac{1}{|b|}}^{u}\right|=\left|\frac{1}{b}\cos\frac{b}{|b|}-\frac{1}{b}\cos\frac{b}{u}\right|\leq\frac{2}{|b|},x\in\left[\frac{1}{|b|},+\infty\right),$$

即$\int_{\frac{1}{|b|}}^{u}\sin bx\mathrm{d}x$在$\left[\frac{1}{|b|},+\infty\right)$上有界.

根据狄利克雷判别法知,$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$收敛,从而$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$条件收敛.

P261第十一章总练习题/4

讨论反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x(b\neq 0)$,$\lambda$取何值时绝对收敛或条件收 敛?

当$\lambda\le 0$时,不妨设$b>0$. 令$t=bx$,则

$$\int_{\frac{1}{b}}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x=b^{\lambda-1}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\lambda}\mathrm{d}t.$$

取$\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$,对$\forall G>0$,取$u_1=2[G]\pi+\frac{\pi}{4}$,$u_2=2[G]\pi+\frac{\pi}{2}$, 虽然$u_2>u_1>G>0$,但是

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sin t}{t^\lambda}\mathrm{d}t\right|=\int_{2[G]\pi+\frac{\pi}{4}}^{2[G]\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t^\lambda}\mathrm{d}t\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\left(2[G]\pi+\frac{\pi}{4}\right)^\lambda}\cdot\frac{\pi}{4}\ge\frac{\sqrt{2}}{8}\pi.$$

根据无穷积分收敛的柯西准则的否定陈述知,$\int_{\frac{1}{|b|}}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$发散.

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x$:当$1<\lambda<2$时,绝对收敛;当$0<\lambda\le 1$时,条件收敛.

P261第十一章总练习题5

证明：设f在$[0,+\infty)$上连续，且$0<a<b$. (1)若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$，则$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\big(f(0)-k\big)\ln\frac{b}{a}$.

证

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{1}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to0^+}\int_u^{1}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to0^+}\left(\int_u^1\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_u^1\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right)=\lim_{u\to0^+}\left(\int_{au}^{a}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{bu}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\lim_{u\to0^+}\left(\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{u\to0^+}\left(f(\xi)\int_{au}^{bu}\frac{1}{t}\mathrm{d}t-\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{u\to0^+}\left(f(\xi)\ln\frac{b}{a}-\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right),\quad au\le\xi\le bu.$$

当$u\to0^+$时，$\xi\to0^+$，故
$$\int_0^{1}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to0^+}\left(f(\xi)\ln\frac{b}{a}-\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=f(0)\ln\frac{b}{a}-\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_1^{u}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\left(\int_1^u\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_1^u\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\int_{a}^{au}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{b}^{bu}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left(\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-f(\eta)\int_{au}^{bu}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-f(\eta)\ln\frac{b}{a}\right),\quad au\le\eta\le bu.$$

当$u\to+\infty$，$\eta\to+\infty$，故
$$\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to+\infty}\left(\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-f(\eta)\ln\frac{b}{a}\right)=\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-k\ln\frac{b}{a}.$$

所以
$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\left(f(0)\ln\frac{b}{a}-\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)+\left(\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-k\ln\frac{b}{a}\right)=\big(f(0)-k\big)\ln\frac{b}{a}.$$

P261第十一章总练习题5

证明：设f在$[0,+\infty)$上连续，且$0<a<b$. (2)若$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$收敛，则$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

证1 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x.$

$$\int_0^{1}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to0^+}\int_u^{1}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to0^+}\left(\int_u^1\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_u^1\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right)=\lim_{u\to0^+}\left(\int_{au}^a\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{bu}^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\lim_{u\to0^+}\left(\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{u\to0^+}\left(f(\xi)\int_{au}^{bu}\frac{1}{t}\mathrm{d}t-\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{u\to0^+}\left(f(\xi)\ln\frac{b}{a}-\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right),\quad au\le\xi\le bu.$$

当$u\to0^+$时，$\xi\to0^+$，故 $\int_0^{1}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to0^+}\left(f(\xi)\ln\frac{b}{a}-\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=f(0)\ln\frac{b}{a}-\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$

$$\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_1^{u}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\left(\int_1^u\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_1^u\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left(\int_a^{au}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_b^{bu}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\int_a^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right),$$

由于$\int_a^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$收敛，根据无穷积分收敛的柯西准则知，$\lim_{u\to+\infty}\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=0$.

因此 $\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\left(\int_a^{b}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\left(f(0)\ln\frac{b}{a}-\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)+\int_a^b\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=f(0)\ln\frac{b}{a}.$

P261第十一章总练习题5

证明：设f在$[0,+\infty)$上连续，且$0<a<b$. (2)若$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$收敛，则$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

证2
$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to0^+}\int_u^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{u\to0^+}\int_u^{+\infty}\left(\frac{f(ax)}{x}-\frac{f(bx)}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{u\to0^+}\left(\int_u^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_u^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right)=\lim_{u\to0^+}\left(\int_{au}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{bu}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{u\to0^+}\int_{au}^{bu}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{u\to0^+}\left(f(\xi)\int_{au}^{bu}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{u\to0^+}\left(f(\xi)\ln\frac{b}{a}\right),\quad au\le\xi\le bu.$$

当$u\to0^+$时，$\xi\to0^+$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to0^+}\left(f(\xi)\ln\frac{b}{a}\right)=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

P261第十一章总练习题6(1)

设$f(x)\in C[a,+\infty)$且非负,若$\int_a^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

分析： $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 非负函数无穷积分

取$M=\max\{|a|,1\}$,则 当$x\geq M$时, $0\leq f(x)\leq xf(x)$

$\int_a^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^{M} xf(x)\mathrm{d}x+\int_M^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$,其中$\int_a^{M} xf(x)\mathrm{d}x$是定积分.

$\int_a^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Leftrightarrow$ $\int_M^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$收敛

比较判别法 $\Longrightarrow$ $\int_M^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛 $\xRightarrow{\text{无穷积分性质}}$ $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛

补充题

设$f(x)\in C[1,+\infty)$,若$\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

分析: $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} xf(x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$

$$\left.\begin{array}{l}\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x\text{收敛}\\ \text{当}x\in[1,+\infty)\text{时},\left|\frac{1}{x}\right|\le 1,\text{故}\frac{1}{x}\text{在}[1,+\infty)\text{单调有界}\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{Abel判别法}}\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\text{收敛}$$

但无法得知$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$是条件收敛还是绝对收敛.

P261第十一章总练习题6(2)

设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续可微，且当$x\to+\infty$时，$f(x)$递减趋于0.

$$\text{则}\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\text{收敛}\Leftrightarrow\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x\text{收敛}.$$

分析：若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，

$$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_a^{u} xf'(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_a^{u} x\mathrm{d}f(x)=\lim_{u\to+\infty}\left(xf(x)\Big|_a^u-\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(uf(u)-af(a)-\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right)$$

只要证明$\lim\limits_{u\to+\infty} uf(u)$存在. $\forall\varepsilon>0,\exists G\ge\max\{a,0\},\forall u_2>u_1>G$，有$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$

当$x\to+\infty$时，$f(x)$递减趋于0，故$f(x)\ge0.$ $\forall\dfrac{u}{2}>G$，有$\int_{\frac{u}{2}}^{u} f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$

$$0\le\frac{u}{2}f(u)=\int_{\frac{u}{2}}^{u} f(u)\mathrm{d}t\le\int_{\frac{u}{2}}^{u} f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon\Rightarrow\lim_{u\to+\infty} uf(u)=0$$

若$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$收敛，

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_a^{u} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\left(xf(x)\Big|_a^u-\int_a^u xf'(x)\mathrm{d}x\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(uf(u)-af(a)-\int_a^u xf'(x)\mathrm{d}x\right)$$

只要证明$\lim\limits_{u\to+\infty} uf(u)$存在. $\forall\varepsilon>0,\exists G\ge\max\{a,0\},\forall u_2>u>G$，有

$$(f'(x)\text{不变号})\quad\left|\int_u^{u_2} xf'(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\xi\int_u^{u_2} f'(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\xi\left(f(u_2)-f(u)\right)\right|<\varepsilon\qquad(u\le\xi\le u_2)$$

$$0\le u\left(f(u)-f(u_2)\right)\le\left|\xi\left(f(u_2)-f(u)\right)\right|<\varepsilon$$

$$\text{当}u_2\to+\infty\text{时}\Rightarrow 0\le uf(u)\le\varepsilon\Rightarrow\lim_{u\to+\infty} uf(u)=0$$

P261第十一章总练习题7

设f在$[1,+\infty)$上二阶连续可微,对于任何$x\in[1,+\infty)$有$f(x)>0$,

且$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=+\infty$.证明$\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$收敛.

证1 根据洛必达法则,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{2}=+\infty.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{f(x)}=0,\quad 其中\ p=2>1,\lambda=0,$$

根据柯西判别法的极限形式知, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$收敛.

P261第十一章总练习题7

设f在$[1,+\infty)$上二阶连续可微,对于任何$x\in[1,+\infty)$有$f(x)>0$,

且$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=+\infty$.证明$\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$收敛.

证2 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=+\infty$,根据无穷大的定义,$\forall G>0,\exists x_1\geq 1,\forall x>x_1$,有$f''(x)>G$.

$f'(x)$在$[x_1,x]$上满足Lagrange中值定理的条件,$\exists\eta\in(x_1,x)$,使得

$$f'(x)-f'(x_1)=f''(\eta)(x-x_1)>G(x-x_1).$$

于是有 $f'(x)>f'(x_1)+G(x-x_1)$, 因此,$\exists x_0>x_1$,对$\forall x\geq x_0$,有 $f'(x)>0$.

从而$f(x)$在点$x_0(x>x_0)$的二阶泰勒公式:$\exists\xi\in(x_0,x)$,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2>\frac{G}{2}(x-x_0)^2.$$

于是 $\frac{1}{f(x)}<\frac{2}{G(x-x_0)^2}$,$x>x_0$. 已知$\int_{2x_0}^{+\infty}\frac{2}{G(x-x_0)^2}\mathrm{d}x$收敛,根据比较判别法知,$\int_{2x_0}^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$收敛,

从而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_1^{2x_0}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_{2x_0}^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ 收敛.