第二十一章　重积分

第三节　格林公式.曲线积分与路线的无关性

第二十一章　重积分

第三节　格林公式.曲线积分与路线的无关性

1. 格林公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

2.曲线积分与路线的无关性

定理

格林公式： 设区域 D 是由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上**具有连续一阶偏导数**,则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

其中 L 是 D 的取**正向**的边界曲线.

定理

格林公式: 设区域 D 是由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上**具有连续一阶偏导数**,则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

其中 L 是 D 的取**正向**的边界曲线.

区域边界正向的规定: 人沿着边界行走, 区域总在左侧!

例题1： 计算

$$\oint_L (x^2+3y)dx+(y^2-x)dy$$

其中 L 为区域 $\{(x,y): 0<y<\sqrt{4x-x^2}\}$ 的边界,逆时针.

例题2： 计算：

$$\int_L (x^2+1-e^y\sin x)dy - e^y\cos x dx,$$

其中 L 为半圆 $x=\sqrt{1-y^2}$ 上从点 $A(0,-1)$ 到点 $B(0,1)$ 的一段弧.

例题3： 证明正向闭曲线 L 所围区域 D 的面积

$$A=\iint\limits_{D} dxdy=\frac{1}{2}\oint_{L} xdy-ydx.$$

进而，求由抛物线 $(x+y)^2=ax\ (a>0)$ 与 x 轴所围成的面积.

例题4： 计算

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

其中 L 为一无重点且**不经过原点**的分段光滑正向闭曲线.

例题5： 计算第二类曲线积分

$$\int_L 2xydx + x^2dy$$

其中

(1) L 是从原点到点 $(1,0)$ 的线段,

(2) L 是 $x^2+y^2=x, y\geq 0$, 从原点到点 $(1,0)$.

(3) L 是 从原点到点 $(1,0)$ 的任意光滑曲线.

曲线积分与路径无关

定义： 设 G 是一个区域, $P(x,y)$ 以及 $Q(x,y)$ 在区域 G 内具有一阶连续偏导数. 如果对于 G 内任意指定的两个点 A、B 以及 G 内从点 A 到点 B 的任意两条曲线 L_1、L_2, 等式

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

恒成立, 就说**积分曲线**$\int_L Pdx + Qdy$ **在** G **内与路径无关**, 否则就说**与路径有关**.

定理： 设 D 是**单连通**闭区域. 若函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 内连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

定理: 设 D 是**单连通**闭区域. 若函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 内连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿 D 中任意按段光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0.$

定理： 设 D 是**单连通**闭区域. 若函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 内连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿 D 中任意按段光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0.$

(2) 对 D 中任意按段光滑曲线 L, 积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路线无关, 只与起点和终点相关.

定理: 设 D 是**单连通**闭区域. 若函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 内连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿 D 中任意按段光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$.

(2) 对 D 中任意按段光滑曲线 L, 积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路线无关, 只与起点和终点相关.

(3) $Pdx+Qdy$ 在 D 内为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即 $du = Pdx+Qdy$.

定理： 设 D 是**单连通**闭区域. 若函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 内连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿 D 中任意按段光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$.

(2) 对 D 中任意按段光滑曲线 L, 积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路线无关, 只与起点和终点相关.

(3) $Pdx+Qdy$ 在 D 内为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即 $du = Pdx+Qdy$.

(4) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内恒成立.

例题6： 计算

$$\int_L (x+y)dx + (x-y)dy,$$

其中 L 是连结 $(1,1)$ 到 $(2,3)$ 的任意曲线.

例题7： 验证

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

在右半平面 $(x > 0)$ 内是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数.

例题8： 验证

$$xy^2dx + x^2ydy$$

是某个函数的全微分，并求出这个函数.

本节作业

作业:

第 216 页：第1题.

第 216 页：第3题.

第 216 页：第5题(3)、(4).

第 216 页：第6题(1).