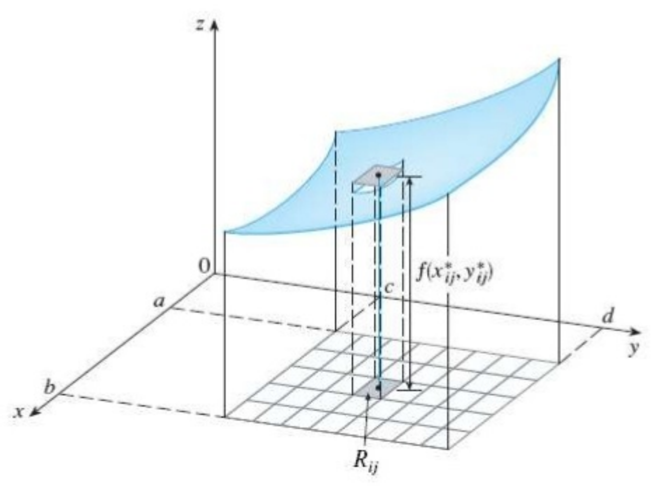
第二十一章　重积分

第二节　直角坐标下二重积分的计算

曲顶柱体的体积



曲顶柱体的体积

$$\iint\limits_{D=[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

二重积分与累次积分

定理： 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积，且对每个 $x\in[a,b]$，积分 $\int_c^d f(x,y)dy$ 存在，则累次积分

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

也存在，且

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

二重积分与累次积分

定理： 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$
$$= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

例题1： 计算

$$\iint_D y\sin(xy)d\sigma,$$

其中 $D=[0,\pi]\times[0,1]$.

X-型区域

能用

$$\{(x,y)|a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

形式来描述的区域 D, 称为 X-型区域.

X-型区域

能用

$$\{(x,y)|a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

形式来描述的区域 D, 称为 X-型区域.

Y-型区域

能用

$$\{(x,y)|c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

形式来描述的区域 D, 称为 Y-型区域.

例题2： D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

例题3： D 是由直线 $y=x$、$x=2$ 及 曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

例题4： D 是 Y 型闭区域:

$$\{(x,y)|0 \le y \le 2; y^2 \le x \le 2y\},$$

将其化成 X 型闭区域.

二重积分与累次积分

定理: 设函数 $f(x,y)$ 在 X-型区域 D 上可积, $y_1(x)$、$y_2(x)$ 连续, 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

如果函数 $f(x,y)$ 在 Y-型区域 D 上可积, $x_1(y)$、$x_2(y)$ 连续, 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

例题6： 计算

$$\iint\limits_{D} xyd\sigma,$$

其中 D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

例题7： 计算

$$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2} d\sigma,$$

其中 D 是由直线 $x = 0$, $y = 1$ 和 $y = x$ 所围成的闭区域.

例题8： 计算累次积分

$$\int_0^{\pi}\left[\int_y^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right]dy.$$

例题10： 求两个底圆半径都是 R 的直交圆柱体

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = a^2, \quad (a > 0)$$

在第一卦限所围成的立体的体积.

本节作业

作业：

第 208 页，第1题：(1)、(3).

第 208 页，第2题：(1)、(2).

第 209 页，第3题：(1)、(2).

第 209 页，第4题.