# Ch4 函数的连续性

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

§1 连续性概念

§2 连续函数的性质(1)

§3 初等函数的连续性

将学习：

连续函数的局部性质

连续函数的整体性质

反函数的连续性

# 连续函数在局部性质

## 连续函数的局部性质

连续函数的局部性质是指：

若函数$f(x)$在点$x_0$连续(左连续或右连续)，则可推知$f(x)$在点$x_0$的某个局部邻域(左邻域或右邻域)内具有有界性、保号性、四则运算的保连续性等性质.

## 局部有界性

若函数$f$在点$x_0$连续,则$f$在某$U(x_0)$上有界.

**局部有界性** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Rightarrow \exists U(x_0), f(x)$在$U(x_0)$上有界.

**证** 因为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,

根据函数在一点连续的定义, 对 $\varepsilon=1$, $\exists\delta>0$,

当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<1$.

从而

$$|f(x)|=|f(x)-f(x_0)+f(x_0)|\le|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|<1+|f(x_0)|.$$

所以 $f(x)$ 在 $U(x_0;\delta)$ 上有界.

**注**: 在证明有界性时, 取 $\varepsilon=1$ 这个特定的值,

而不是用术语 “对 $\forall\varepsilon>0$”, 这样可求得

$|f(x)|$ 的一个确定的上界.

## 局部保号性

若函数$f$在点$x_0$连续，且$f(x_0) > 0$(或$< 0$)，则对任何正数$r < f(x_0)$(或$r < -f(x_0)$)，$\exists \delta > 0$，当$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$时，有

$$f(x) > r > 0 \left(\text{或} f(x) < -r < 0\right).$$

**局部保号性** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0(<0),\forall r>0,r<f(x_0)\big(\text{或}r<-f(x_0)\big)$
$\Rightarrow \exists U(x_0),\forall x\in U(x_0),\ \text{有}f(x)>r>0(f(x)<-r<0).$

**证** 因为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0,$

根据函数在一点连续的定义，

对 $\varepsilon=f(x_0)-r$ ,$\exists\delta>0,$当$|x-x_0|<\delta$时,有

$$|f(x)-f(x_0)|<f(x_0)-r.$$

故

$$f(x)>f(x_0)-\big(f(x_0)-r\big)=r>0.$$

**注：** 在具体应用保号性时，常取$r=\dfrac{f(x_0)}{2}$.

## 局部保号性推论

若函数$f$在点$x_0$连续，且$f(x_0)\neq 0$，$\exists\delta>0$，当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，有

$$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}.$$

## 连续函数的四则运算

若函数$f(x)$, $g(x)$在点$x_0$连续,则函数

(1) $f(x)+g(x)$, (2) $f(x)-g(x)$,

(3) $f(x)\cdot g(x)$, (4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x_0)\neq 0$

也都在点$x_0$连续.

**注：** 多项式函数$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

有理函数$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$($P(x),Q(x)$为多项式)在其定义域的每一点都是连续的.

**注：** 正切函数$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$,正割函数$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

在其定义域$\left\{x\,|\,x\in\mathbb{R},x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$上连续.

余切函数$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$,余割函数$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

在其定义域$\{x\,|\,x\in\mathbb{R},x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$上连续.

## 三角函数的连续性

正弦函数$y=\sin x$,余弦函数$y=\cos x$在其定义域$(-\infty,+\infty)$上是连续的.

正切函数$y=\tan x$,正割函数$y=\sec x$在定义域$\left\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$上是连续的.

余切函数$y=\cot x$,余割函数$y=\csc x$在定义域$\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$上是连续的.

## 复合函数的连续性

对于复合函数$y = f\left(g(x)\right)$. 若$u = g(x)$在点$x_0$连续，$u_0 = g(x_0)$，又$y = f(u)$在点$u_0$连续，

则复合函数$f \circ g$在点$x_0$连续.

$$\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f\left(g(x_0)\right).$$

**复合函数连续性** $u=g(x)$在点$x_0$连续,$u_0=g(x_0)$, $y=f(u)$在点$u_0$连续

$\Rightarrow f\left(g(x)\right)$在点$x_0$连续, $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)=f\left(g(x_0)\right).$

**证** 由于$f(u)$在点$u_0$连续，即$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$,

因此对$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0$,当$|u-u_0|<\eta$时,有 $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon.$

又因为$g(x)$在点$x_0$连续，故对上述 $\eta>0$, $\exists\delta>0$,

当$|x-x_0|<\delta$时,有 $|g(x)-g(x_0)|=|u-u_0|<\eta$,

于是

$$\left|f\left(g(x)\right)-f\left(g(x_0)\right)\right|=\left|f(u)-f(u_0)\right|<\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=f\left(g(x_0)\right)$, 即 $f\circ g$ 在点 $x_0$ 连续.

**注1：** 由 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 不一定有 $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big)=A$.

$$f(u)=\begin{cases}1, u=0\\ 0, u\neq 0\end{cases},\quad u=g(x)=0,\quad \lim_{u\to 0} f(u)=0,\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=0,$$

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big)=\lim_{x\to x_0} f(0)=\lim_{x\to x_0} 1=1.$$

**注2：** 若 $f(u)$在$u_0$连续, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big)=f(u_0)=f\Big(\lim_{x\to x_0} g(x)\Big).$$

事实上,只要补充定义(或者重新定义)$g(x_0)=u_0$,

使得 $g(x)$ 在点 $x_0$ 连续.

**例1** 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin(1-x^2)$.

**解** $\sin(1-x^2)$可视为 $f(u)=\sin u, u=(1-x^2)$ 的复合,

$f(u)=\sin u$在$u=0$连续, $u=1-x^2$在$x=1$连续,

所以

$$\lim_{x\to 1}\sin(1-x^2)=\sin\left(\lim_{x\to 1}(1-x^2)\right)$$

$$=0.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

**解** 因为$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$, $f(u)=\sqrt{u}$ 在$u=1$连续,

所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$=\sqrt{2-1}=1.$$

**例3** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

**解** 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$, $f(u)=\sin u$ 在点 $u=\mathrm{e}$ 连续,

所以

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\sin\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$=\sin\mathrm{e}.$$

# 连续函数在闭区间上的整体性质

## 有界性定理

若函数$f$在闭区间$[a,b]$上连续，

则$f$在$[a,b]$上有界.

**有界性定理** $f(x)\in C[a,b]\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上有界.

**证** 利用反证法证明.

假设$f(x)$在$[a,b]$无上界. 则对$\forall M>0,\exists x_M\in[a,b]$, 使得$f(x_M)>M$.

取$M=1,\exists x_1\in[a,b]$, 使得$f(x_1)>1$;

取$M=2,\exists x_2\in[a,b]$, 使得$f(x_2)>2$; ……

取$M=n,\exists x_n\in[a,b]$, 使得$f(x_n)>n$; …… 由此得到$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$.

因为$\{x_n\}(\subset[a,b])$是有界数列, 根据致密性定理知,

$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$.

由于$a\le x_{n_k}\le b$,由收敛数列的保不等式得 $a\le x_0\le b$.

已知$f(x)$在$[a,b]$上连续, 故$f(x)$在点$x_0$连续, 即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

根据归结原则知, $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$,因而$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=+\infty$, 矛盾.所以$f(x)$在$[a,b]$上有界.

**注：** 对于开区间(或半开半闭区间)上的连续函数不一定是有界的.

例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$在(0,1)上连续, 但在(0,1)上是无界的.

## 最值

设 $f(x)$为定义在数集 $D$上的一个函数.

若存在$x_0 \in D$,使得对$\forall x \in D$,有

$$f(x) \le f(x_0)\big(f(x) \ge f(x_0)\big),$$

则称$f(x)$在$D$上有最大(小)值, $x_0$称为最大(小)值点, $f(x_0)$称为$f(x)$在$D$上的最大(小)值.

**注：** 符号函数$y=\operatorname{sgn} x$的最大值为1,最小值为$-1$.

正弦函数$y=\sin x$的最大值为1,最小值为$-1$.

函数$y=x-[x]$的最大值不存在,最小值为0.

函数$y=\sin x$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上既无最大值,又无最小值.

其上确界为1,下确界为$-1$.

## 最大、最小值定理

若函数$f$在闭区间$[a,b]$上连续,
则$f$在$[a,b]$上能取到最大、最小值.

**最大、最小值定理** $f(x)\in C[a,b]\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上能取到最大、最小值.

**证1** 由有界性定理和确界原理,存在上确界 $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)=M$.

下面说明：存在$\eta\in[a,b]$, 使得 $f(\eta)=M$.

利用反证法证明.假设不存在这样的$\eta\in[a,b]$,使 $f(\eta)=M$.

则对$\forall x\in[a,b]$都有$f(x)<M$. 令$g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$, $x\in[a,b]$.

易见函数$g(x)$在$[a,b]$上连续,且取正值.

由有界性定理知, $g(x)$在$[a,b]$上有上界, 记为$J$, 即有

$$0<g(x)=\frac{1}{M-f(x)}\le J, x\in[a,b].$$

从而有 $f(x)\le M-\dfrac{1}{J}$, $x\in[a,b]$.

但这与$M$是$f(x)$在$[a,b]$上的上确界矛盾.

所以存在$\eta\in[a,b]$, 使$f(\eta)=M$,即$f(x)$在$[a,b]$上能取得最大值.

同理可证$f(x)$在$[a,b]$上能取得最小值.

最大、最小值定理 $f(x)\in C[a,b]\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上能取到最大、最小值.

**证2** 由有界性定理和确界原理,存在上确界 $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)=M$.

下面说明:存在$\eta\in[a,b]$, 使得 $f(\eta)=M$.

根据上确界的定义, 对$\forall x\in[a,b]$都有$f(x)\le M$.

对$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in[a,b]$,使得$f(x_0)>M-\varepsilon$.

取$\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots),\exists x_n\in[a,b]$,使得$f(x_n)>M-\dfrac{1}{n}$.

从而 $M-\dfrac{1}{n}<f(x_n)\le M$.

因为$\{x_n\}$是有界数列,故根据致密性定理知, $\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$.

设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\eta$, 且 $a\le x_{n_k}\le b$.

考虑不等式$M-\dfrac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\le M,k=1,2,\cdots$. 令$k\to\infty$,

由迫敛性与$f(x)$在点$\eta$的连续性, 得 $f(\eta)=M$.

即$f(x)$在$[a,b]$上能取得最大值.

同理可证$f(x)$在$[a,b]$上能取得最小值.

**注：** 对于开区间(或半开半闭区间)上的连续函数即使有界，也不一定能取到最大(小)值.

例如：$f(x)=x$在$(0,1)$上连续且有界，因而有上、下确界.

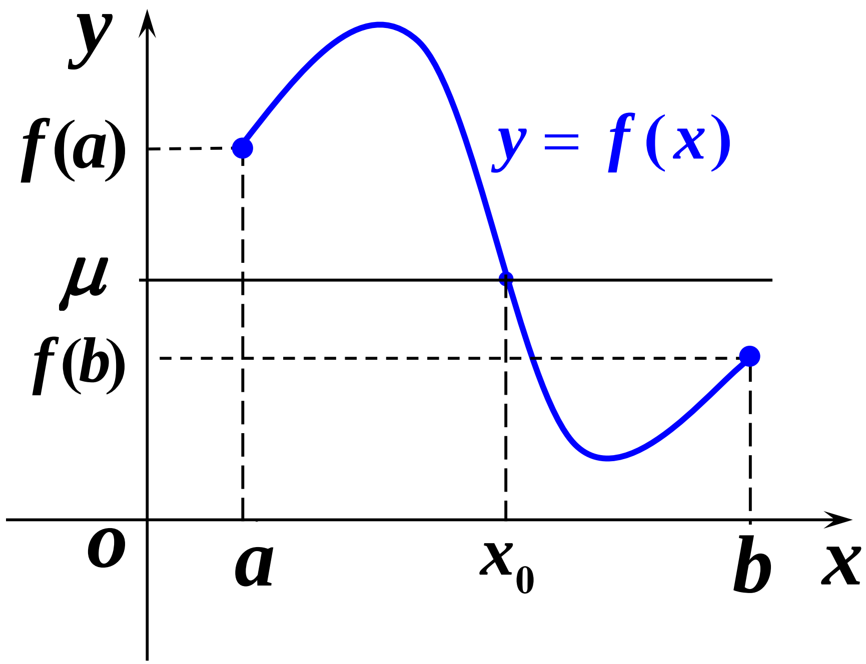
$$\sup_{x\in(0,1)} f(x)=1,\ \inf_{x\in(0,1)} f(x)=0.$$

$f(x)=x$在$(0,1)$上取不到最大值与最小值.

## 介值性定理

设函数$f$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a) \neq f(b)$.
若$\mu$是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一数
$\left( f(a) < \mu < f(b) \text{ 或 } f(b) < \mu < f(a) \right)$,
则$\exists x_0 \in (a, b)$，使得 $f(x_0) = \mu$.

**注：** 从几何上看，当连续曲线$y = f(x)$从水平直线$y = \mu$的一侧穿到另一侧时，两者至少有一个交点.



## 根的存在定理

若函数$f$在闭区间$[a,b]$上连续，$f(a)$与$f(b)$异号

$\left(\text{即} f(a)f(b)<0\right)$，则$\exists x_0 \in (a,b)$，使得

$$f(x_0)=0.$$

**根的存在定理** $f(x)\in C[a,b],\ f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=0.$

**证** 不妨设 $f(a)>0,\ f(b)<0$,并设$E=\{x \mid f(x)>0,\ x\in[a,b]\}$.

($E$为图中$x$轴上红色部分) 从几何上看,$E$的最大值就是函数零点.

因为$a\in E$,所以$E\neq\varnothing$, 又$E$是有界的,故由确界原理, $E$的上确界存在,记$x_0=\sup E$.

显然$a\le x_0\le b$. 由$f(x)$的连续性及$f(a)>0,\ f(b)<0$,

根据连续函数的局部保号性, $\exists\delta_1>0$,当$x\in[a,a+\delta_1)$时, $f(x)>0.$

$\exists\delta_2>0$,当$x\in(b-\delta_2,b)$时, $f(x)<0.$

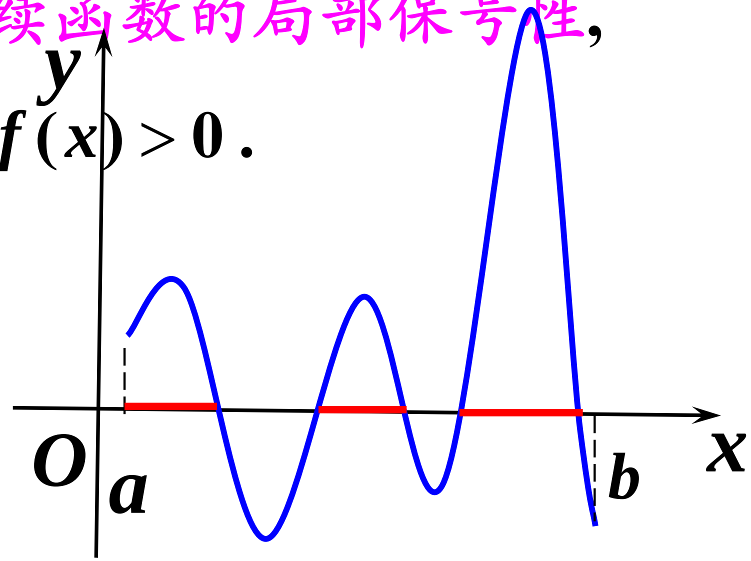
所以$a+\delta_1\le x_0\le b-\delta_2$, 即$a<x_0<b$.

若 $f(x_0)>0$,由$f(x)$在点$x_0$是连续的,根据连续函数的局部保号性,

$\exists\delta>0\ (x_0+\delta<b)$,当$x\in[x_0,\ x_0+\delta)$时,仍有$f(x)>0$.

特别是 $f\left(x_0+\dfrac{\delta}{2}\right)>0$, 而$x_0+\dfrac{\delta}{2}\in E$,

这就与$x_0=\sup E$ 相矛盾.



**根的存在定理** $f(x)\in C[a,b],\ f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=0.$

若 $f(x_0)<0$, 由$f(x)$在点$x_0$是连续的,

根据连续函数的局部保号性,$\exists\eta>0(x_0-\eta>a)$,

当$x\in(x_0-\eta,\ x_0]$时,仍有$f(x)<0$ .

同时由$x_0=\sup E$,对上述$\eta$,$\exists x_1\in E$,使得

$$x_0-\eta<x_1\le x_0,\ \ x_1\in E.$$

从而 $f(x_1)>0$, 也导致矛盾.

所以证得$f(x_0)=0.$

## 介值性定理推论

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$一定能取到最大值$M$与最小值$m$之间的任何一个值.

**介值性推论**

$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow f(x)$能取到最大值$M$与最小值$m$之间的任何一个值.

**证** 根据最大、小值定理,$\exists\xi,\eta\in[a,b]$,使得$f(\xi)=m, f(\eta)=M$.

不妨设$\xi<\eta$.

若$m=M$,则$f(x)$为$[a,b]$上的常值函数,结论显然成立.

若$m<M$, 对$\forall c\in(m,M)$, 设$F(x)=f(x)-c$.

由于$F(x)$在$[\xi,\eta]$上连续,$F(\xi)=f(\xi)-c=m-c<0$,

$$F(\eta)=f(\eta)-c=M-c>0,$$

根据根的存在定理知, $\exists x_0\in(\xi,\eta)$,使得 $F(x_0)=0$,

即$f(x_0)=c$.

**注：** 由介值性定理与最大、最小值定理可得如下结论：

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,那么它的最大值$M$与最小值$m$存在,

并且 $f\left([a,b]\right)=[m,M]$.

**证** $\forall x\in[a,b]$,有 $m\le f(x)\le M$,即 $f\left([a,b]\right)\subset[m,M]$.

已知$f(x)$在$[a,b]$上连续,根据介值性推论,

$\forall c\in[m,M]$,$\exists\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=c$,

即 $[m,M]\subset f\left([a,b]\right)$.

所以 $f\left([a,b]\right)=[m,M]$.

**例4** 若$r>0$, $n$为正整数,则存在唯一正数$x_0$,使得$x_0^n=r$.

**证** 先证存在性:设$f(x)=x^n$.

因为$n$为正整数,所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$.

由非正常极限的定义,取$G=r>0$, $\exists M>0$,当$x>M$时,有$x^n>r$.

从而可取$x_1>M$,使得$f(x_1)=x_1^n>r$.

又因为函数$f(x)=x^n$在$[0,x_1]$上连续,且$f(0)<r<f(x_1)$,

根据介值性定理知, $\exists x_0\in(0,x_1)$,使得$f(x_0)=r$,即 $x_0^n=r$.

这个$x_0$记为$x_0=\sqrt[n]{r}$(读作$r$的$n$次算术根).

再证唯一性:设$x_2>0$, 满足$x_2^n=r$, 则

$$x_2^n-x_0^n=(x_2-x_0)(x_2^{n-1}+x_2^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})=0$$

由于$x_2^{n-1}+x_2^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1}>0$, 所以$x_2-x_0=0$,

即 $x_2=x_0$.

**例4** 若 $r>0$, $n$ 为正整数,则存在唯一正数 $x_0$,使得 $x_0^n=r$.

**证** 先证存在性:设 $f(x)=x^n$.

因为 $n$ 为正整数,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$.

由非正常极限的定义,取 $G=r>0$, $\exists M>0$,当 $x>M$ 时,有 $x^n>r$.

从而可取 $x_1>M$,使得 $f(x_1)=x_1^n>r$.

又因为函数 $f(x)=x^n$ 在 $[0,x_1]$ 上连续,且 $f(0)<r<f(x_1)$,

根据介值性定理知, $\exists x_0\in(0,x_1)$,使得 $f(x_0)=r$,即 $x_0^n=r$.

这个 $x_0$ 记为 $x_0=\sqrt[n]{r}$(读作 $r$ 的 $n$ 次算术根).

再证唯一性:只需证明 $f(x)=x^n$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增即可.

事实上,对 $\forall x,y$,使 $0\le x<y$,有

$$y^n-x^n=(y-x)(y^{n-1}+y^{n-2}x+\cdots\cdots+yx^{n-2}+x^{n-1})>0,$$

即 $f(x)<f(y)$.

**例5** 证明齐次多项式 $P(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}$ 至少存在一个零点,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n+1}$ 都是常数,且 $a_0\neq 0.$

**证** 已知多项式 $P(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

由于 $P(x)=x^{2n+1}\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)$,不妨设 $a_0>0$,从而有

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty.$$

由非正常极限的定义,取 $G=1>0$,$\exists M_1>0$,当 $x>M_1$ 时,有 $P(x)>1.$

$\exists M_2>0$,当 $x<-M_2$ 时,有 $P(x)<-1.$

因此可取 $x_1>M_1>0,\ x_2<-M_2<0$,使得

$$P(x_1)>1>0,\ P(x_2)<-1<0.$$

根据根的存在定理知,$\exists x_0\in(x_1,x_2)$,使得 $P(x_0)=0.$

**例6** 证明方程$x=\cos x$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少存在一个实根.

**证** 设$f(x)=x-\cos x$,则$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上连续.

由于$f(0)=-1<0,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}>0$,

根据根的存在定理知，$\exists x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,使得 $f(x_0)=0$,

即$x_0=\cos x_0$.

**例7** 设 $f$ 在$[a,b]$上连续, $f([a,b])\subset[a,b]$.

证明: $\exists\, x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

**证** 由条件知$a\le f(a)$, $f(b)\le b$.

若$a=f(a)$ 或 $b=f(b)$,则结论成立.

现设 $a<f(a)$, $f(b)<b$.

作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$,

则 $F(a)\cdot F(b)=(f(a)-a)\cdot(f(b)-b)<0$.

因$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故$F(x)$在$[a,b]$上也连续.

由根的存在定理,$\exists x_0\in(a,b)$,使 $F(x_0)=0$,即$f(x_0)=x_0$.

综上所述, $\exists x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=x_0$.

**例8** 设 $f(x)$在$(a,b)$内满足介值性,且对$\forall r>0$, $f(x)=r$至多有有限个解.

证明: $f(x)$在$(a,b)$内连续.

**证** 对$\forall x_0\in(a,b)$, 对$\forall \varepsilon>0$,

由已知得$f(x)=f(x_0)-\varepsilon$, $f(x)=f(x_0)+\varepsilon$至多有有限个解,

设这有限个解为$x_1,x_2,\cdots,x_k$. 取$\delta=\min\limits_{1\le l\le k}\{|x_l-x_0|\}$,

当$|x-x_0|<\delta$时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

因此$f(x)$在点$x_0$处连续, 由$x_0$的任意性知, $f(x)$在$(a,b)$内连续.

## 反函数的连续性

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上严格单调且连续，则反函数$x=f^{-1}(y)$在$[f(a),f(b)]$或$[f(b),f(a)]$上连续.

**证** 不妨设 $f(x)$在$[a,b]$上严格增,那么$[f(a),f(b)]$就是反函数$x=f^{-1}(y)$的定义域.

$\forall y_0\in\left(f(a),f(b)\right)$,$\exists x_0\in(a,b)$,使得$x_0=f^{-1}(y_0)$. 对$\forall\varepsilon>0\left(\varepsilon<\min\{x_0-a,b-x_0\}\right)$,要使

$$\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right|=\left|x-x_0\right|<\varepsilon,\text{即}a<x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon<b,$$

设$y_1=f(x_0-\varepsilon)$,$y_2=f(x_0+\varepsilon)$,显然$y_1<y_0<y_2$.

取$\delta=\min\{y_2-y_0,y_0-y_1\}>0$, 当 $(y_1\le)y_0-\delta<y<y_0+\delta(\le y_2)$时,

由于$x=f^{-1}(y)$严格增,故 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_2)$, 即$f^{-1}(y_0)-\varepsilon<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0)+\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{y\to y_0}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$,即$x=f^{-1}(y)$在 点$y=y_0$连续,由$y_0$的任意性知,$f^{-1}(y)$在$\left(f(a),f(b)\right)$内连续.

当$y_0=f(a)$时, 对$\forall\varepsilon>0\left(\varepsilon<b-x_0\right)$,要使

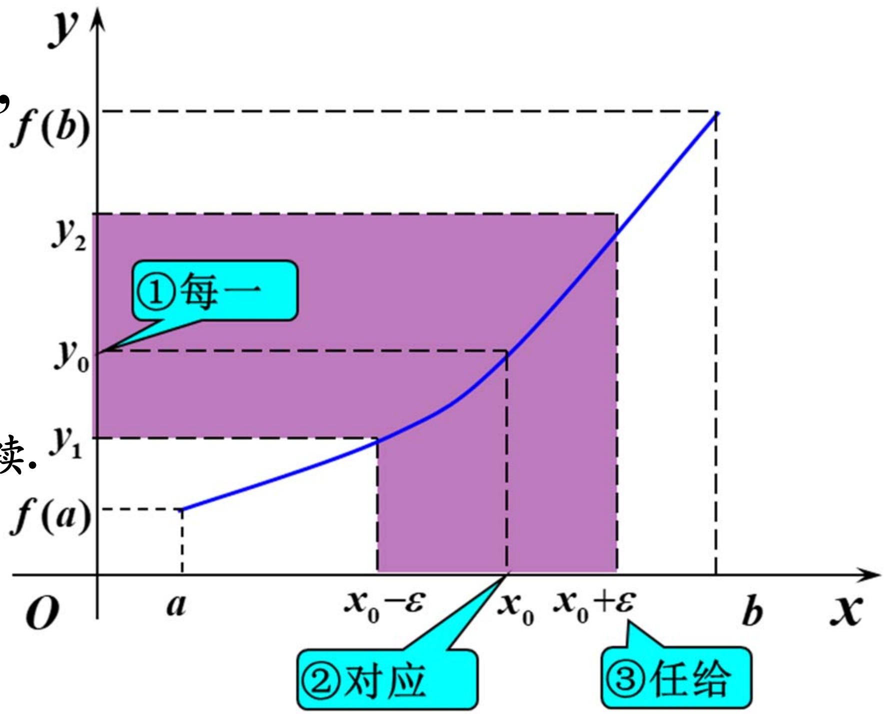
$$\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right|=\left|x-a\right|<\varepsilon,\text{即}a\le x<a+\varepsilon<b,$$

设$y_1=f(a+\varepsilon)$,显然$y_0<y_1$. 取$\delta=y_1-y_0>0$,

当$y_0\le y<y_0+\delta=y_1$ 时,由于$x=f^{-1}(y)$严格增,故

$f^{-1}(y_0)\le f^{-1}(y)<f^{-1}(y_1)$, 即$a\le f^{-1}(y)<a+\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{y\to y_0^+}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)=a$,即$x=f^{-1}(y)$在点$y=f(a)$处右连续.




可类似地证明$x=f^{-1}(y)$在$y=f(b)$处左连续.

综上分析$x=f^{-1}(y)$在$[f(a),f(b)]$上连续.

**注1** 由于 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续且严格增,

因此它的反函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上也是连续

且严格增. 关于其他反三角函数

$$y=\arccos x\,,x\in[-1,1],y\in[0,\pi]$$

$$y=\arctan x\,,x\in(-\infty,+\infty),y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y=\operatorname{arccot} x,x\in(-\infty,+\infty),y\in(0,\pi)$$

均可得到在定义域上连续的结论.

**注2** 由于 $y = x^n$($n$为正整数) 在 $[0,+\infty)$上连续且严格增,

因此它的反函数$y = x^{\frac{1}{n}}$在$[0\,,+\infty)$上亦为连续且严格增.

**注3** 由于 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续且单调,

因此它的反函数$y = \log_a x$在$(0\,,+\infty)$上亦为连续且单调.

# 你应该：

知道连续函数的局部性质

知道连续函数的整体性质

掌握和运用这些性质