Ch6 微分中值定理及其应用

主讲教师: 顾燕红

办公室: 汇星楼409

办公室答疑时间: 每周二15点至17点

微信号: 18926511820   QQ号: 58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

将学习：

柯西中值定理

不定式极限

柯西(Cauchy)中值定理

若函数$f(x),g(x)$满足如下条件:

(1)在闭区间$[a,b]$上连续;

(2)在开区间(a,b)上可导;

(3) $f'(x)$和$g'(x)$不同时为零;

(4)$g(a)\neq g(b)$.

则在(a,b)上至少存在一点ξ,使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

注：柯西中值定理的几何意义：

首先将f,g这两个函数视为以x为参数的方程 $\begin{cases} X = g(x) \\ Y = f(x) \end{cases}$.

它在XY平面上表示一段曲线. 曲线端点弦AB的斜率：

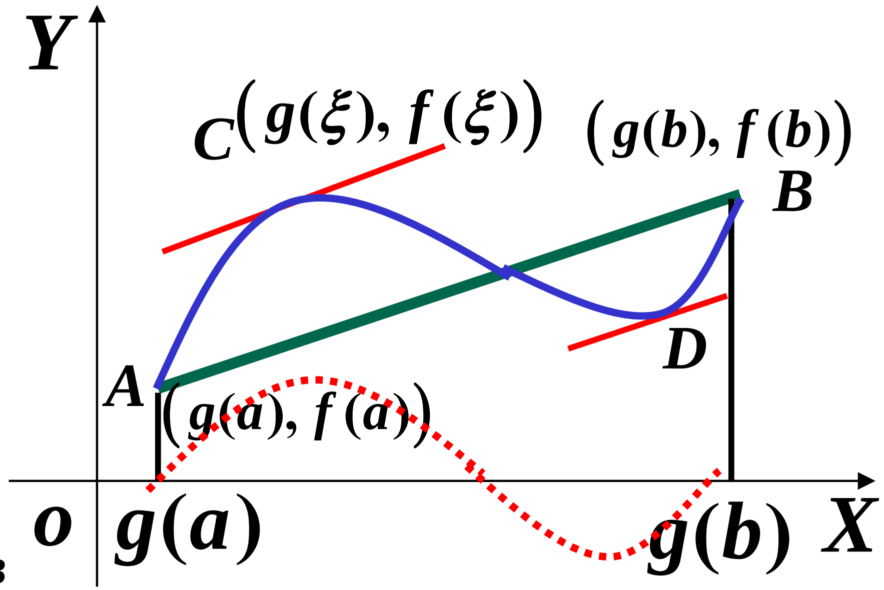
$$k_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

用平行推移的方法,曲线上至少

有一点$C\big(g(\xi), f(\xi)\big)$处的切线与$AB$平行,

其斜率

$$\left.\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right|_{x=\xi} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}}\right|_{x=\xi} = \left.\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|_{x=\xi} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k_{AB}$$



分析 弦AB的方程为 $Y = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(X - g(a)\big) + f(a)$.

曲线减去弦AB,得 $Y = f(x) - \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big) + f(a)\right)$.

柯西中值定理

$f(x),g(x)\in C[a,b]$, $f(x),g(x)\in D(a,b)$, $f'(x)$与$g'(x)$不同时为零, $g(a)\neq g(b)$

$\Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

证 作辅助函数 $F(x)=f(x)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)+f(a)\right)$.

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导, 且$F(a)=F(b)=0$,

根据罗尔中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,

即 $$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0.$$

因为$g'(\xi)\neq 0$(否则 $f'(\xi)$ 也为零,与条件(3)矛盾),

从而 $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

柯西中值定理

$f(x),g(x)\in C[a,b], f(x),g(x)\in D(a,b), f'(x)$与$g'(x)$不同时为零$, g(a)\neq g(b)$

$\Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

分析 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Leftarrow f'(\xi)\big(g(b)-g(a)\big)-g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big)=0$

$$\Leftarrow \Big(f(x)\big(g(b)-g(a)\big)-g(x)\big(f(b)-f(a)\big)\Big)'\Big|_{x=\xi}=0$$

证 作辅助函数 $F(x)=f(x)\big(g(b)-g(a)\big)-g(x)\big(f(b)-f(a)\big)$.

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,

且$F(a)=f(a)g(b)-g(a)f(b)=F(b)$,

根据罗尔中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,

即 $f'(\xi)\big(g(b)-g(a)\big)-g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big)=0.$

因为$g'(\xi)\neq 0, g(a)\neq g(b)$, 从而 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例1 设函数$f(x)$在区间$[a,b](a>0)$上连续,在(a,b)上可导,

则存在$\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

分析 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}\Rightarrow\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}\Rightarrow\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\left.\dfrac{\left(f(x)\right)'}{\left(\ln x\right)'}\right|_{x=\xi}$

证 设 $g(x)=\ln x$.

f,g在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导, $g'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0$, $g(a)\neq g(b)$,

根据柯西中值定理知,$\exists\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$,

即 $$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

从而 $$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

例2 设函数$f(x)$在区间$(0,1]$上可导，$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,f'(x)=A$，则$f(x)$在$(0,1]$上一致连续.

证 因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,f'(x)=A$，根据函数极限的定义，对$\varepsilon=1$，$\exists\delta_1(0<\delta_1<1)$，当$0<x<\delta_1$时，$\left|\sqrt{x}\,f'(x)-A\right|<1.$

从而$\left|\sqrt{x}\,f'(x)\right|\le\left|\sqrt{x}\,f'(x)-A\right|+|A|<1+|A|.$

设$g(x)=\sqrt{x}$. 对$\forall x',x''\in(0,\delta_1]\,(x'<x'')$，$g(x)$和$f(x)$在$[x',x'']$上

满足柯西中值定理的条件，故存在$\xi\in(x',x'')$，使得

$\dfrac{f(x'')-f(x')}{g(x'')-g(x')}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，由于$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，所以$\left|\dfrac{f(x'')-f(x')}{\sqrt{x''}-\sqrt{x'}}\right|=2\left|\sqrt{\xi}\,f'(\xi)\right|$，得

$$\left|f(x'')-f(x')\right|=2\left|\sqrt{\xi}\,f'(\xi)\right|\left|\sqrt{x''}-\sqrt{x'}\right|<2(1+|A|)\left|\sqrt{x''}-\sqrt{x'}\right|=2(1+|A|)\frac{|x''-x'|}{\left|\sqrt{x''-x'+x'}+\sqrt{x'}\right|}<2(1+|A|)\left|\sqrt{x''-x'}\right|.$$

因此，对$\forall\varepsilon>0$，只要取$\delta_2=\dfrac{\varepsilon^2}{4(1+|A|)^2}$，$\forall x',x''\in(0,\delta_1]:|x'-x''|<\delta_2$，有$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon.$

所以$f(x)$在$(0,\delta_1]$上一致连续.又$f(x)$在$[\delta_1,1]$上连续，根据一致连续性定理知，$f(x)$在$[\delta_1,1]$上一致连续.

根据一致连续性的定义知，$\exists\delta_3>0$，$\forall x',x''\in[\delta_1,1]:|x'-x''|<\delta_3$，有$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon.$

因此，对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\{\delta_2,\delta_3\}>0$，$\forall x',x''\in(0,1]:|x'-x''|<\delta$，有两种情况：

(1) $x',x''\in(0,\delta_1]$或$[\delta_1,1]$，则$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon.$

(2) $x'\in(0,\delta_1]$，$x''\in[\delta_1,1]$，则$\left|x'-\delta_1\right|<\delta$，$\left|x''-\delta_1\right|<\delta$，从而

$$\left|f(x'')-f(x')\right|\le\left|f(x'')-f(\delta_1)\right|+\left|f(\delta_1)-f(x')\right|<2\varepsilon.$$

因此f在$(0,1]$上一致连续.

不定式极限

在极限的四则运算中,如果分子,分母均为无穷小量(无穷大量),这类极限统称为不定式极限.

$\frac{0}{0}$型不定式极限　洛必达(L'Hospital)法则

若函数 $f(x)$和$g(x)$满足：

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；

(ii) 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$内两者均可导，

且 $g'(x)\neq 0$；

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 可以为实数, $\pm\infty$, ∞).

则 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

$\frac{0}{0}$型不定式极限　洛必达(L'Hospital)法则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $f(x), g(x)$在$U^\circ(x_0)$可导, $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

证　补充定义 $f(x_0) = g(x_0) = 0$, 所以 f, g 在点 x_0 连续.

任取 $x \in U^\circ(x_0)$, 则 $f(x), g(x)$ 在区间 $[x_0, x]$(或 $[x, x_0]$)上

满足柯西中值定理的条件, 故有

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\xi\text{介于}x_0\text{与}x\text{之间}).$$

令 $x \to x_0$, 则 $\xi \to x_0$, 于是有

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

注：将定理 中的 $x \to x_0$ 改为 $x \to x_0^+, x \to x_0^-$,
$x \to +\infty$, $x \to -\infty$ 的情形,只要修正相应的邻域,
结论同样成立.

例3 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\sin 4x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)'}{(\sin 4x)'}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sec^2 x}{4\cos 4x}$$

$$=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x(x+3)}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x(x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\cos x\right)'}{\left(x\right)'}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$=0.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}(a>0,b>0).$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(a^x-b^x\right)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}$$

$$=\ln a-\ln b$$

$$=\ln\frac{a}{b}.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\tan^2 x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\tan^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)'}{(\tan^2 x)'}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{2\tan x\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-\cos^3 x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\dfrac{1}{x}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)'}{\left(\sin\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 因为当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x^2)\sim x^2$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+(1+2x)^{-\frac{3}{2}}}{2}$$

$$=1.$$

注： 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍是$\dfrac{0}{0}$型不定式极限,只要满足洛必达法则的条件,可再用该法则.考察$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$的存在性.

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解1 这显然是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限, 可直接利用洛必达法则.

但若作适当变换, 在计算上会显得更简洁些.

令 $t=\sqrt{x}$, 当 $x\to 0^+$ 时有 $t\to 0^+$, 于是

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{1-\mathrm{e}^{t}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{-\mathrm{e}^{t}}=-1.$$

解2 因为当 $x\to 0^+$ 时, $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$, 所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}}=-1.$$

例10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)'}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right)'$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

例11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

例12 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^2}{2}}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

例13 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

$\dfrac{\cdot}{\infty}$ 型不定式极限 洛必达(L'Hospital)法则

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$;

(ii) 在点 x_0 的某右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 内二者均可导,

且 $g'(x)\neq 0$;

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 可以为实数, $\pm\infty$, ∞).

则 $$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

证 设A为实数.由于 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$,根据函数极限的定义,

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall x\in U_+^0(x_0;\delta_1)$,有 $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon.$

取$x_1\in U_+^0(x_0;\delta_1)$,则 满足不等式 $x_0<x<x_1$ 的每一个 x,有 $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon.$

$f(x),g(x)$在$[x,x_1]$上满足柯西中值定理的条件,故$\exists\xi\in(x,x_1)$,使得 $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$

从而有 $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}-A=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\Rightarrow f(x)-f(x_1)-A\big(g(x)-g(x_1)\big)=\left(\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right)\big(g(x)-g(x_1)\big)$

$$\Rightarrow f(x)-Ag(x)=\left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right)\big(g(x)-g(x_1)\big)+\big(f(x_1)-Ag(x_1)\big)\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}-A=\left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right)\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}.$$

由于x_1为固定点,$\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\infty$,所以 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{g(x_1)}{g(x)}=0,\ \lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}=0$

因此$\exists\delta_2(<x_1-x_0)$,使得当$x_0<x<x_0+\delta_2$时, $\left|\dfrac{g(x_1)}{g(x)}\right|<1.$

$\exists\delta_3(<x_1-x_0)$,使得当$x_0<x<x_0+\delta_3$时, $\left|\dfrac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}\right|<\varepsilon.$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}>0$,使得当$x_0<x<x_0+\delta$时,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|\le\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|\left(1+\left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|\right)+\left|\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}\right|<2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A.$

注：这里的$x \to x_0^+$可以用$x \to x_0^-$, $x \to x_0$，

$x \to +\infty, x \to -\infty, x \to \infty$来替换.当然定理的条件要作相应的改变.

例14 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

例15 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{6}=+\infty.$$

例16 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan x)'}{(\tan 3x)'}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-6\cos x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3.$$

例17 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{2x-\sin x}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 这是一个$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式. 如果用洛必达法则,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\cos x}{2-\cos x}.$$

而极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}$ 不存在, 但是原极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{\sin x}{x}}{2-\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时,不能推出 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

例18 求$A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{\arctan 2x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan 2x=\dfrac{\pi}{2}$,

所以$A=1$. 若错误使用洛必达法则:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{\arctan 2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{2}{1+4x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+4x^2}{2(1+x^2)}=2,$$

这就产生了错误的结果.这说明: 在使用洛必达法则前,

必须首先要判别它究竟是否是$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\cdot}{\infty}$型.

例19 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续可微，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+f'(x)\right)=A$.

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

证 根据洛必达法则,有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x f(x)\right)'}{\left(e^x\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+f'(x)\right)=A.$$

注： 不定式极限还有

$$0\cdot\infty,\ \infty\pm\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$$

等类型，它们一般均可化为$\dfrac{0}{0}$型或者$\dfrac{\infty}{\infty}$型.

例20 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$. $(0\cdot\infty)$

解　注意到 $x\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$,则

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

但若采用不同的转化方式:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-\frac{1}{x\ln^2 x}}=-\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x=\cdots\cdots,$$

很明显,这样下去将越来越复杂,难以求出结果.

例21 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-2\cot^2 x\right)$. $(\infty-\infty)$

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-2\cot^2 x\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-2\cos^2 x+2\cos^3 x}{(1-\cos x)\sin^2 x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-2\cos^2 x+2\cos^3 x}{x^4}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{6\sin x\cos x-6\sin x\cos^2 x}{4x^3}=3\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}\lim_{x\to0}\cos x$$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{3}{2}.$$

例22 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 $$\lim_{x\to0^+}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x}{2}=0.$$

例23 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln(1+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2x(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

例24 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. $\qquad (1^{\infty})$

解 $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cdot\cos x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

例25 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\sin x)^{\tan x}$. $\left(1^\infty\right)$

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\sin x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}e^{\tan x\ln\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x\ln\sin x}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\ln\sin x}{\cot x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{-\csc^2 x\cdot\sin x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(-\sin x\cos x)}=e^0=1.$$

例26 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. $\qquad \left(0^0\right)$

解 $$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

例27 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{k}{1+\ln x}}$ (k为不为0的常数). $\left(0^0\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{k}{1+\ln x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{k}{1+\ln x}\ln\sin x}$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{k}{1+\ln x}\ln\sin x}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{k\ln\sin x}{1+\ln x}}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{k\cos x}{\frac{1}{x}\sin x}}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{kx\cos x}{\sin x}} = \mathrm{e}^{k}.$$

例28 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$. $\left(\infty^0\right)$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}$$

$$= \mathrm{e}^0 = 1.$$

例29 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. $\left(\infty^0\right)$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}=e.$$

例30 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.已知$g(0)=g'(0)=0, g''(0)=3$.求 $f'(0)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{g(x)}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{3}{2}.$$

研究f在$x=0$处的连续性：

因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0$,

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例31 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.　　(1^∞)

解　由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x+x^2\right)-\ln x^2}{\frac{1}{x}}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1+2x}{1+x+x^2}-\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{1+x+x^2}}=\mathrm{e}.$$

根据归结原则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}.$

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\mathrm{e}.$$

你应该：

理解柯西中值定理

掌握洛必达法则

会求不定式极限

洛必达早年就显露出数学才能，在他15岁时就解出帕斯卡的摆线难题，以后又解出约翰·伯努利向欧洲挑战“最速降曲线问题”．稍后他放弃了炮兵的职务，投入更多的时间在数学上，在瑞士数学家伯努利的门下学习微积分，并成为法国新解析的主要成员．洛必达的《无限小分析》(1696)一书是微积分学方面最早的教科书，在十八世纪时为一模范著作，书中创造一种算法(洛必达法则)，用以寻找满足一定条件的两函数之商的极限，洛必达于前言中向莱布尼兹和伯努利致谢，特别是约翰·伯努利．洛必达逝世之后，伯努利发表声明该法则及许多的其它发现该归功于他．

—— 摘自百度百科

纪尧姆·弗朗索瓦·安托万·洛必达

Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital

(1661年- 1704年2月2日)

法国数学家