第二十一章　重积分

第六节　重积分的应用

第二十一章　重积分

第六节　重积分的应用

1. 曲面的面积

问题: 设 D 为可求面积的平面有界区域, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数, 求方程

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

所确定的曲面 S 的面积.

1. 对区域 D 做分割 T, 把 D 分割成 n 个小区域 σ_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$;
2. 把曲面 S 也分割分割成 n 个小区域 S_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得 S_i 在 xy 平面上投影为 σ_i;
3. 在每个 S_i 上任取一点 M_i, 做经过 M_i 的切平面 π_i, 在 π_i 上取出一小块 A_i, 使得 A_i 在 xy 平面上投影为 σ_i;

则近似地

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i.$$

曲面的面积

分割 T 的细度为 $\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{\sigma_i$ 的直径$\}$, 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i = \Delta S$$

存在且 ΔS 与分割 T 与点 M_i 的取法无关, 则称此极限为 S 的面积.

曲面的面积

计算 A_i 的面积：

$$\Delta A_i = \frac{\Delta \sigma_i}{|\cos\gamma_i|} = \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)}\Delta\sigma_i,$$

其中 $M_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，$\gamma_i$ 为点 M_i 处的法向量 $(f_x, f_y, -1)$ 与 z 轴的夹角，满足

$$|\cos\gamma_i| = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)}}.$$

曲面的面积

定理： 设有光滑曲面

$$S : z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

则

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy.$$

例题1： 计算半径为 R 的球面面积.

例题2： 求圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在圆柱体 $x^2+y^2\le x$ 内那一部分的面积.

本节作业

作业：

第 273 页：第1题、第2题.

例题： 试改变下列累次积分的顺序：

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz.$$

例题： 求三重积分

$$\iiint\limits_V (x^2 + xy)dxdydz,$$

其中 V 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$.