Ch6 微分中值定理及其应用

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820　QQ号：58105217

Email:　yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年12月26日

BY GYH

将学习：

如何判断函数的凸性?

如何求曲线的拐点?

凸函数、凹函数

设f为定义在区间I上的函数，若对I上的任意两点x_1，x_2和任意实数$\lambda\in(0,1)$，总有

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称f为I上的凸函数. 反之，如果总有

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\ge\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称f为I上的凹函数.

若两式中$x_1\ne x_2$,且不等式改为严格不等式，则相应的函数称为严格凸函数和严格凹函数.

注： $y = x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为严格凸函数.

$y = \sqrt{x}$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上为严格凹函数.

$y = x^3$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上为严格凸函数,

在 $\left(-\infty,0\right]$ 上为严格凹函数.

注： 若 $f(x)$ 为区间 I 上的(严格)凸函数,

那么 $-f(x)$ 为区间 I 上的(严格)凹函数, 反之亦然.

例1 (1)若f为凸函数,λ为非负实数,则λf为凸函数.

(2)若f,g均为凸函数,则$f+g$为凸函数.

(3)若f为区间I上凸函数,g为$J\supset f(I)$上凸增函数,则$g\circ f$为I上凸函数.

证 (3)由于f为I上的凸函数,根据凸函数的定义知, 对$\forall x_1,x_2\in I,\forall\lambda\in(0,1)$,有

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

由于g为$J\supset f(I)$上的增函数,所以

$$g\left(f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\right)\le g\left(\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\right).$$

由于g为$J\supset f(I)$上的凸函数, 根据凸函数的定义知,

$$g\left(\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\right)\le\lambda g\left(f(x_1)\right)+(1-\lambda)g\left(f(x_2)\right).$$

从而

$$g\left(f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\right)\le\lambda g\left(f(x_1)\right)+(1-\lambda)g\left(f(x_2)\right).$$

根据凸函数的定义知, $g\circ f$为I的上凸函数.

问题：

给定函数$f(x), x \in I$,

如何确定函数f在区间I上的凸区间与凹区间?

引理(凸函数的充要条件)

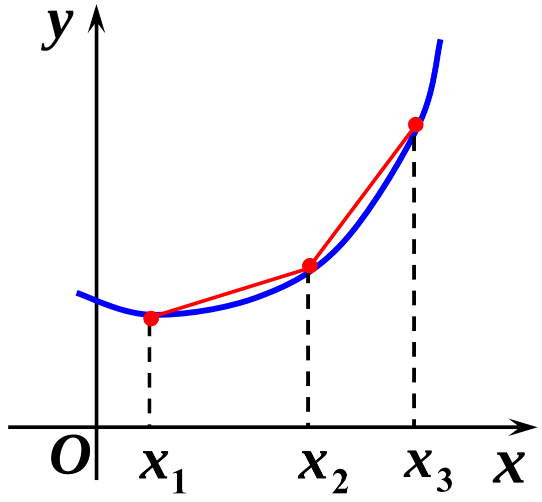
函数$f(x)$为I上的凸函数的充要条件是：

对于I中的任意三点$x_1 < x_2 < x_3$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

f为I上的凸函数 $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2,x_3\in I: x_1<x_2<x_3$, 有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

证 (必要性)记 $\lambda=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$,于是 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$.



因为 $f(x)$为I上的凸函数, 根据凸函数的定义知,

$$f(x_2)=f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3\right)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$$

$$=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3).$$

从而 $(x_3-x_1)f(x_2)\le(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)$,

即 $(x_3-x_2)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_2)\le(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)$,

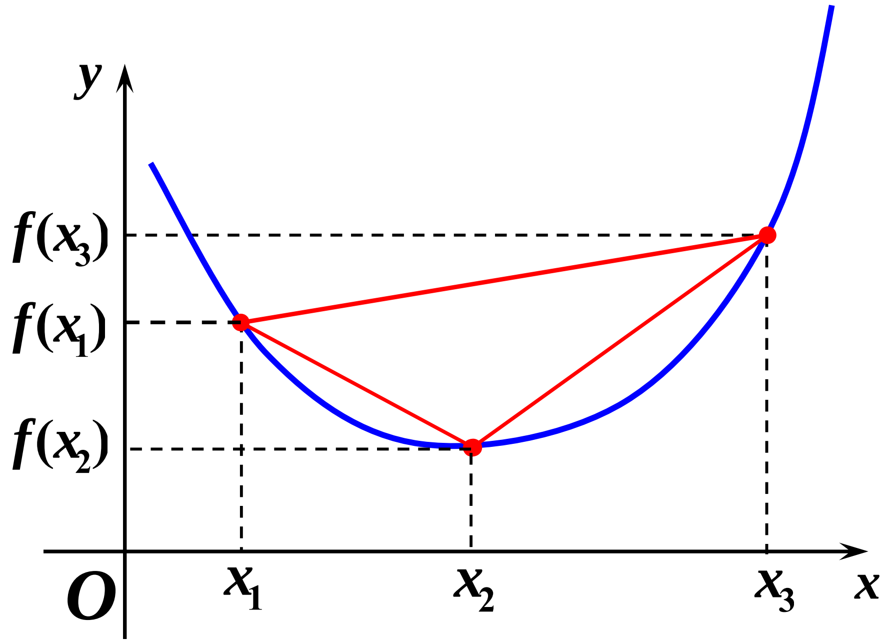
整理得 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

(充分性) 对于任意$x_1<x_3,\lambda\in(0,1)$. 设 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$. 则

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

由于必要性的证明是可逆的,从而得到 $f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3\right)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$.

所以f为I上的凸函数.



注： f 为 I 上的凸函数的充要条件是：

对于 I 中的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \quad (4)$$

可导凸函数定理

设f为区间I上的可导函数,则下述论断互相等价:

(i) f 为 I 上的凸函数;

(ii) f' 为 I 上的增函数;

(iii) 对于 I 上的任意两点x_1, x_2, 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

f为I上的可导凸函数 $\Leftrightarrow$ f'为I上增函数

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$, 有 $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

证 (i) $\Rightarrow$ (ii) 任取 $x_1, x_2 \in I$(不妨设$x_1 < x_2$)和正数 h, 使得 $x_1 - h \in I$, $x_2 + h \in I$.

已知f是凸函数, 故有 $\dfrac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h}$.

令$h \to 0^+$, 因为 $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} = f'_-(x_1) = f'(x_1)$,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h} = f'_+(x_2) = f'(x_2),$$

所以 $f'(x_1) \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$. 故 $f'(x)$ 为I上的增函数.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 不妨设 $x_1 < x_2$.

f在$[x_1, x_2]$上满足Lagrange中值定理的条件,故

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),\ x_1 < \xi < x_2.$$

因为 f' 递增, 所以 $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$.

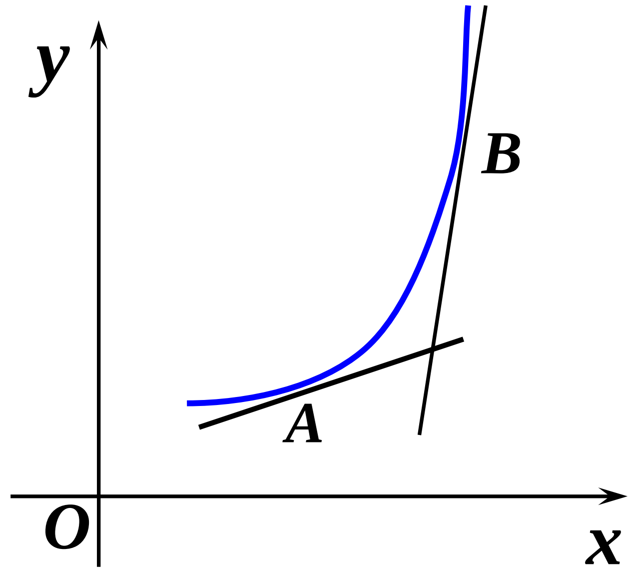
(iii) $\Rightarrow$ (i) 仍设$x_1 < x_2$, $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 (0 < \lambda < 1)$, 则

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), (1) \quad f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0). \ (2)$$

将(1)式乘以λ, (2)式乘以$(1 - \lambda)$作和,并注意到 $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_0 = 0$,得

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \geq f(x_0) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

所以$f(x)$是I上的凸函数.



注：可导凸函数f的几何意义是：

曲线$y = f(x)$的图像总位于它的任一条切线的上方.

二阶可导凸函数的充要条件

设函数f在区间I上二阶可导,则f在区间I上是凸(凹)函数的充要条件是:

$$f''(x) \ge 0 \quad (f''(x) \le 0),\ x \in I.$$

f为I上的二阶可导凸函数 $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0, x \in I$

证 (必要性) 因为f是I上的凸函数, 所以 f' 为I上的增函数.

故 $f''(x) \geq 0, x \in I$.

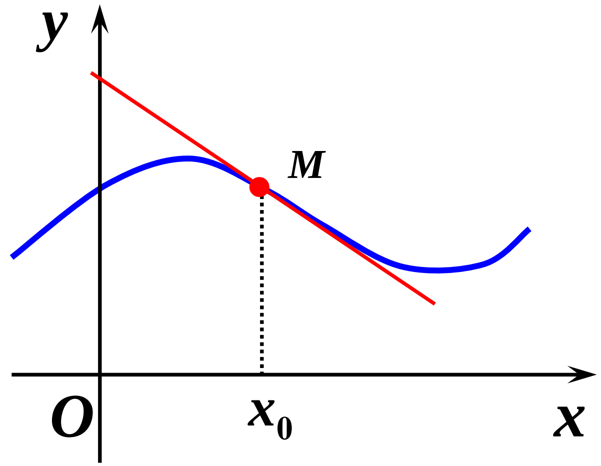
(充分性) 由于 $f''(x) \geq 0$, $x \in I$, 故 $f'(x)$ 为I上的增函数.

所以f是I上的凸函数.

拐点的定义

设曲线$y=f(x)$在点$M\left(x_0, f(x_0)\right)$处有穿过曲线的切线，且在切点近旁，曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的，这时称点$M\left(x_0, f(x_0)\right)$为曲线$y=f(x)$的**拐点**.

注：右图中M是一个拐点.



问题：

给定函数$f(x), x \in I$,

如何求曲线$y = f(x)$在区间I上的拐点?

拐点的必要条件

设$f(x)$在点x_0二阶可导，则$\left(x_0, f(x_0)\right)$为曲线$y = f(x)$的拐点的必要条件是：

$$f''(x_0) = 0.$$

f在点x_0二阶可导,$\left(x_0, f(x_0)\right)$是曲线$y=f(x)$拐点$\Rightarrow f''(x_0)=0$

证 已知$\left(x_0, f(x_0)\right)$是曲线$y=f(x)$的拐点，根据拐点的定义知，

$\exists\delta>0$,当$x\in U_-(x_0;\delta)$时，f'为增(减)函数;

当$x\in U_+(x_0;\delta)$时，f'为减(增)函数.

当$x<x_0$时，$f'(x)\le(\ge)f'(x_0)$，从而 $\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\ge(\le)0.$

根据函数极限的保不等式性知，$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\ge(\le)0.$

当$x>x_0$时，$f'(x)\le(\ge)f'(x_0)$，从而 $\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\le(\ge)0.$

根据函数极限的保不等式性知，$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\le(\ge)0.$

由于f在点x_0二阶可导,因此 $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0.$

注：$f(x)=x^4$：　$f'(x)=4x^3, f''(x)=12x^2\geq 0,$

故$f(x)=x^4$在$\mathbb{R}$上是凸函数.

虽然$f''(0)=0$, 但$(0,0)$不是拐点.

拐点的充分条件

设$f(x)$在点x_0可导,在某去心邻域$U^\circ(x_0)$二阶可导,

若 $f''(x)$在$U_+^\circ(x_0)$, $U_-^\circ(x_0)$的符号相反,

则 $\big(x_0, f(x_0)\big)$是曲线$y = f(x)$的拐点.

求曲线$y = f(x)$的拐点步骤：

(1)求出所有使得$f''(x) = 0$和$f''(x)$不存在的点,

记这些点为$x_1, x_2, \cdots, x_n$.

(2)考察这些点左右充分小邻域中$f''(x)$的符号：

若$f''(x)$在$U_-^0(x_i)$与$U_+^0(x_i)$的符号相反,

则 $\left(x_i, f(x_i)\right)$是曲线$y = f(x)$的一个拐点.

例2 讨论函数 $f(x)=\arctan x$ 的凹凸性区间与拐点.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

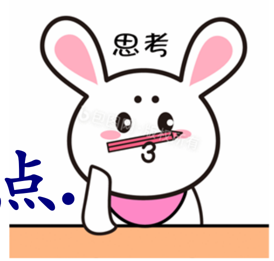
因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$,

令$f''(x)=0$,得$x=0$.

当 $x>0$时, $f''(x)<0$; 当 $x<0$时, $f''(x)>0$.

从而, $f(x)$在$(-\infty,0]$上为凸函数,在$[0,+\infty)$上为凹函数.

$(0,0)$是曲线$f(x)=\arctan x$的拐点.



例3 讨论函数 $f(x)=x^3$ 的凹凸性区间与拐点.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

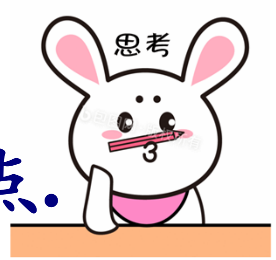
因为 $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$,

令$f''(x)=0$,得$x=0$.

当 $x>0$时, $f''(x)>0$; 当 $x<0$时, $f''(x)<0$.

从而, $f(x)$在$(-\infty,0]$上为凹函数,在$[0,+\infty)$上为凸函数.

$(0,0)$是曲线$f(x)=x^3$的拐点.



例4 讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 的凹凸性区间与拐点.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

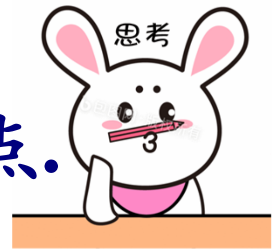
因为 $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x)=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, x\neq 0$

$x=0$是$f''(x)$不存在的点.

当 $x>0$时, $f''(x)<0$; 当 $x<0$时, $f''(x)>0$.

从而, $f(x)$在$(-\infty,0]$上为凸函数,在$[0,+\infty)$上为凹函数.

$(0,0)$是曲线$f(x)=\sqrt[3]{x}$的拐点.



例5 讨论函数$f(x)=x\arctan\dfrac{1}{x}$的凹凸性与拐点.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

因为 $f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}$,

$$f''(x)=-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{2}{(1+x^2)^2}<0.$$

因此, $f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上都是严格凸的, 没有拐点.

例6 设f为开区间(a,b)上的凸(凹)函数,那么它在(a,b)上每一点的左、右导数存在,且f在(a,b)上连续.

证 对$\forall\, x_0 \in (a,b)$, $a < x_1 < x_2 < x_0 < x_3 < b$,因为$f(x)$在$(a,b)$上为凸函数,所以

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \le \frac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0}.$$

由此知$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$当$x < x_0$时递增,且有上界$\dfrac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0}$,

根据函数的单调有界定理知,$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在.

同理可证 $f'_+(x_0)$ 存在.

由于$\lim\limits_{x\to x_0^-}\big(f(x)-f(x_0)\big)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=f'_-(x_0)\cdot 0=0$,故

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0).$$

即 $f(x)$在点x_0左连续. 同理可证$f(x)$在点x_0右连续.

从而$f(x)$在点x_0连续. 由x_0的任意性知, f在(a,b)上连续.

注： 开区间上的凸函数处处连续，但不一定处处可导；

注： 闭区间上的凸函数在端点不一定连续.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ x^2, & x>0\end{cases}$$

在$[0,+\infty)$上为凸函数，但$f(x)$在$x=0$不连续.

例7 设函数f为(a,b)上的凸(凹)函数，不恒为常数.

证明：f不取最大(小)值.

证 利用反证法证明. 假设f在点$x_0 \in (a,b)$取得最大值.

对$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_0 < x_2$，由于$f$是$(a,b)$上的凸函数,有

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}x_2\right) \le \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$

$$\le \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}f(x_0) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}f(x_0) = f(x_0).$$

从而得到$f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$.

由x_1, x_2的任意性知, f是(a,b)上的常量函数,与已知矛盾.

故结论得证.

注： 若f是区间$[a,b]$上的凸的连续函数，则 $f(x) \le \max\{f(a), f(b)\}$.

若f是区间$[a,b]$上的凹的连续函数，则 $f(x) \ge \min\{f(a), f(b)\}$.

例8 证明不等式：$1+x^2 \le 2^x \le 1+x\,, x \in [0,1].$

证 设 $f(x)=1+x^2-2^x,\ x\in[0,1]$, 则

$$f'(x)=2x-2^x\ln 2,\ f''(x)=2-2^x(\ln 2)^2>0,$$

所以 f 为 $[0,1]$ 上的凸函数. 又 f 在 $[0,1]$ 上连续, 因此有

$$f(x)\le \max\{f(0),f(1)\}=0.$$

设 $g(x)=2^x-1-x,\ x\in[0,1]$, 则

$$g'(x)=2^x\ln 2-1,\ g''(x)=2^x(\ln 2)^2>0,$$

所以 g 为 $[0,1]$ 上的凸函数. 又 g 在 $[0,1]$ 上连续, 因此有

$$g(x)\le \max\{g(0),g(1)\}=0.$$

所以 $1+x^2 \le 2^x \le 1+x\,, x\in[0,1].$

例9 设函数f为(a,b)上的可导凸(凹)函数.

那么 $f'(x_0)=0$ 的充要条件是 x_0 为 f 的极小(大)值点.

证 (充分性) 由费马定理即得结论.

(必要性) 设f是凸函数,x_0是f的稳定点,即$f'(x_0)=0$.

对$\forall x\in(a,b)$,有

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$=f(x_0).$$

即x_0是$f(x)$在(a,b)上的极小值点.

例10 设函数f为(a,b)上的严格凸函数. 若$f(x_0)$是f的一个极值, 则f仅有唯一的极值, 并且是极小值.

证 因为$f(x)$严格凸, 所以当$x_1 < x_0 < x_2$时, $\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} < \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$.

由于$f(x_0)$是极值, 因此当x_1, x_2充分接近x_0时, 有

$$\left(f(x_0)-f(x_1)\right)\cdot\left(f(x_2)-f(x_0)\right)\le 0.$$

又因为$f(x)$是严格凸的,所以 $f(x_0)-f(x_1)\le 0$, $f(x_2)-f(x_0)\ge 0$, 即$f(x_0)$是极小值.

对于任意$x\in(x_0,b)$,因为$f(x_0)$是极小值,所以$\exists x_b\in(x_0,x)$,使得 $f(x_b)\ge f(x_0)$.

又因为$f(x)$是严格凸的,所以 $0\le\dfrac{f(x_b)-f(x_0)}{x_b-x_0} < \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, 即$f(x)>f(x_0)$.

同理可证对于任意$x\in(a,x_0)$,仍有$f(x)>f(x_0)$.

设$f(x)$有另一极小值$f(x^*)$. 根据以上讨论, 把x^*和x_0分别看作极值点时,有

$$f(x_0)>f(x^*) \text{ 和 } f(x^*)>f(x_0)$$

同时成立,矛盾. 所以极值点唯一.

例11 证明不等式 $e^{\frac{a+b}{2}} \le \frac{1}{2}\left(e^a + e^b\right)$，其中 a,b 为任意实数.

证 设 $f(x) = e^x$，则 $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x > 0$，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为严格凸的. 根据凸函数的定义，

对于任意实数 a,b，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}a + \left(1 - \frac{1}{2}\right)b\right) \le \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b),$$

即

$$e^{\frac{a+b}{2}} \le \frac{1}{2}\left(e^a + e^b\right).$$

例12 证明不等式 $2\arctan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\ge \arctan a+\arctan b$, 其中$a,b$为任意非负实数.

证 设 $f(x)=\arctan x,\ x\ge 0$,则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\ f''(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\le 0,$$

所以 $f(x)$ 是$[0,+\infty)$上的凹函数. 根据凹函数的定义,

对于任意非负实数a,b,有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}a+\left(1-\frac{1}{2}\right)b\right)\ge \frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b),$$

即 $$\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge \frac{1}{2}\arctan a+\frac{1}{2}\arctan b,$$

也就是 $$2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge \arctan a+\arctan b.$$

例13 设f为区间I上的凸函数,则对$\forall\ x_i\in I,\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n,\ \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, 必有

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n).$$

延森(Jensen)不等式

证 应用数学归纳法. 当$n=2$时,由凸函数的定义,有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),\ \lambda_1+\lambda_2=1,$$

即$n=2$时命题成立. 设$n=k$时命题成立, 即

对$\forall\ x_1,\cdots,x_k\in I,0<\lambda_i<1,\ \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i=1$, 有 $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_ix_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_if(x_i)$.

设$\forall\ x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}\in I,0<\lambda_i<1,\ \sum\limits_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$.

令$\alpha_i=\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}},i=1,2,\cdots,k$,则$\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}=\dfrac{1-\lambda_{k+1}}{1-\lambda_{k+1}}=1$. 由数学归纳法假设可得

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_ix_i\right)=f\left((1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\alpha_ix_i+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)\le(1-\lambda_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_ix_i\right)+\lambda_{k+1}f\left(x_{k+1}\right)$$

$$\le(1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\alpha_if(x_i)+\lambda_{k+1}f\left(x_{k+1}\right)=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_if(x_i).$$

因此, 对$\forall n\ge2$, 都有$f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)$.

注： 特别取 $\lambda_i = \dfrac{1}{n}$，有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big),$$

即
$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

是凸函数最常用的不等式.

例14 证明:对任意实数a,b,c,有$\mathrm{e}^{\frac{a+b+c}{3}} \le \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^c\right)$.

证1 设 $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in\mathbb{R}$, 则 $f'(x)=\mathrm{e}^x,\ f''(x)=\mathrm{e}^x>0$,

所以 $f(x)$ 在$\mathbb{R}$上为严格凸的. 根据Jensen不等式,

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\le\frac{1}{3}\big(f(a)+f(b)+f(c)\big),$$

即

$$\mathrm{e}^{\frac{a+b+c}{3}} \le \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^c\right).$$

例14 证明：对任意实数a,b,c，有$\mathrm{e}^{\frac{a+b+c}{3}} \le \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b+\mathrm{e}^c\right)$.

证2 设 $f(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in\mathbb{R}$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x,\ f''(x)=\mathrm{e}^x>0$,

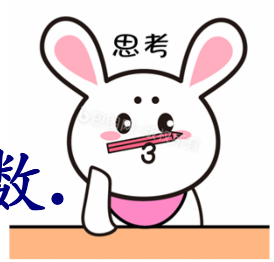
所以 $f(x)$ 在$\mathbb{R}$上为严格凸的. 根据凸函数的定义，有

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)\right)\le\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}f\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)$$

$$\le\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}f(b)+\frac{1}{2}f(c)\right)=\frac{1}{3}f(a)+\frac{1}{3}f(b)+\frac{1}{3}f(c),$$

即

$$\mathrm{e}^{\frac{a+b+c}{3}}\le\frac{1}{3}\mathrm{e}^a+\frac{1}{3}\mathrm{e}^b+\frac{1}{3}\mathrm{e}^c.$$



例15 证明不等式 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le a^a b^b c^c$，其中$a,b,c$均为正数.

证1 设 $f(x)=x\ln x$, 则 $f'(x)=\ln x+1,\ f''(x)=\dfrac{1}{x}>0,$

所以 $f(x)$ 在 $x>0$时为严格凸的. 根据凸函数的定义,有

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)\right)\le\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}f\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)$$

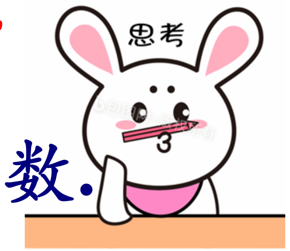
$$\le\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}f(b)+\frac{1}{2}f(c)\right)=\frac{1}{3}f(a)+\frac{1}{3}f(b)+\frac{1}{3}f(c),$$

即

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\le\frac{1}{3}a\ln a+\frac{1}{3}b\ln b+\frac{1}{3}c\ln c=\frac{1}{3}\ln a^a b^b c^c.$$

从而
$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}\le a^a b^b c^c.$$

又因为 $\sqrt[3]{abc}\le\dfrac{a+b+c}{3}$, 所以 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a^a b^b c^c.$



例15 证明不等式 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le a^a b^b c^c$，其中$a,b,c$均为正数.

证2 设 $f(x)=x\ln x$, 则 $f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$,

所以 $f(x)$ 在 $x>0$时为严格凸的. 根据Jensen不等式,

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\le \frac{1}{3}(f(a)+f(b)+f(c)),$$

从而 $\dfrac{a+b+c}{3}\ln\dfrac{a+b+c}{3}\le\dfrac{1}{3}\ln a^a b^b c^c$,

即 $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}\le a^a b^b c^c.$

又因为 $\sqrt[3]{abc}\le\dfrac{a+b+c}{3}$,

故有 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a^a b^b c^c.$

例16 设A,B,C是三角形的三个内角. 证明:

$$\sin A+\sin B+\sin C\le 3\sin\frac{A+B+C}{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

证1 设 $f(x)=\sin x,\ x\in(0,\pi)$, 则 $f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上为严格凹的. 根据凹函数的定义,

$$f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\right)\ge\frac{1}{3}f(A)+\frac{2}{3}f\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$$

$$\ge\frac{1}{3}f(A)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}f(B)+\frac{1}{2}f(C)\right)=\frac{1}{3}f(A)+\frac{1}{3}f(B)+\frac{1}{3}f(C),$$

即

$$\sin\frac{A+B+C}{3}\ge\frac{1}{3}\sin A+\frac{1}{3}\sin B+\frac{1}{3}\sin C.$$

所以 $\sin A+\sin B+\sin C\le 3\sin\dfrac{A+B+C}{3}=3\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}.$

例16 设A,B,C是三角形的三个内角. 证明:

$$\sin A+\sin B+\sin C\le 3\sin\frac{A+B+C}{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

证2 设 $f(x)=\sin x,\ x\in(0,\pi)$, 则 $f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x<0,$

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$上为严格凹的. 根据Jensen不等式,

$$f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\ge\frac{1}{3}\big(f(A)+f(B)+f(C)\big),$$

即 $$\sin\frac{A+B+C}{3}\ge\frac{1}{3}\sin A+\frac{1}{3}\sin B+\frac{1}{3}\sin C.$$

所以 $$\sin A+\sin B+\sin C\le 3\sin\frac{A+B+C}{3}=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

例17 应用Jensen不等式证明：设$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

算术平均－几何平均－调和平均不等式

证 设 $f(x)=\ln x,\ x>0$，则 $f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，

所以 $f(x)$ 在$x>0$上为严格凹的. 根据Jensen不等式，

对$\forall x_i>0,\lambda_i\in(0,1),i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，有 $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\ge\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$，

即 $\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\ge\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ln(x_i)=\ln\left(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\right)$，由对数函数的单调性，得

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n\ge x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}.$$

取$x_i=a_i,\lambda_i=\frac{1}{n}$，有 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$

取$x_i=\frac{1}{a_i},\lambda_i=\frac{1}{n}$，有 $\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_2}}{n}\ge\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_2}}$，即 $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_2}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$

例18 应用Jensen不等式证明：设$a_i,b_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,有

赫尔德(Hölder)不等式 $\sum_{i=1}^n a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$,其中$p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

证 设 $f(x)=x^{\frac{1}{q}},\ x>0$,则 $f'(x)=\frac{1}{q}x^{-\frac{1}{p}},\ f''(x)=-\frac{1}{pq}x^{-\frac{1}{p}-1}<0$,

所以 $f(x)$ 在$x>0$上为严格凹的. 根据Jensen不等式,

对$\forall x_i>0,\lambda_i\in(0,1),i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$,有 $f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right)\ge\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i)$,

即 $\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right)^{\frac{1}{q}}\ge\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^{\frac{1}{q}}$. 取$x_i=a_i^{-p}b_i^q\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right),\lambda_i=\dfrac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}$,有

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}\left(a_i^{-p}b_i^q\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}\ge\sum_{i=1}^n\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}\left(a_i^{-\frac{p}{q}}b_i\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{q}}\right)=\sum_{i=1}^n\frac{a_ib_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

因此 $\sum_{i=1}^n a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

你应该：

知道凹凸函数的定义

会求函数的凹凸区间及拐点

会利用凹凸性证明不等式及相关命题

约翰·延森最知名的是他的延森不等式.1915年延森也证明了存在无穷多个非正则素数.

—— 摘自百度百科

约翰·卢德维格·威廉·瓦尔德马尔·延森
Johan Ludwig William Valdemar Jensen
(1859年5月8日 - 1925年3月5日)
丹麦数学家、工程师