# Ch14 傅里叶级数

## 总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周四下午2点至4点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2024年06月19日

BY GYH

- 傅里叶级数
  - 傅里叶级数概念
    - 三角函数系正交性
    - 傅里叶系数
  - 周期函数的傅里叶展开
    - 以$2\pi$为周期的函数的展开式
    - 以$2l$为周期的函数的展开式
    - 余弦级数与正弦级数
  - 收敛定理中的几个重要结论
    - 傅里叶级数部分和的积分表达式
    - 黎曼引理
    - 贝塞尔不等式
    - 黎曼-勒贝格定理
    - 帕塞瓦尔等式
    - 黎曼-勒贝格定理推论

## 重要定义 三角函数系的正交性

三角函数系$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$

在任意一个长度为$2\pi$的区间上正交.

三角函数系$\left\{1, \cos\dfrac{\pi x}{l}, \sin\dfrac{\pi x}{l}, \cos\dfrac{2\pi x}{l}, \sin\dfrac{2\pi x}{l}, \cdots, \cos\dfrac{n\pi x}{l}, \sin\dfrac{n\pi x}{l}, \cdots\right\}$

在任意一个长度为$2l$的区间上正交.

## 重要定义 傅里叶系数及傅里叶级数

若$f(x)$是以$2\pi$为周期的函数且在$[-\pi,\pi]$上可积,则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots,$$

是函数$f(x)$的傅里叶系数.

以函数$f(x)$的傅里叶系数为系数的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为函数$f(x)$的傅里叶级数,记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

## 重要定义 傅里叶系数及傅里叶级数

若$f(x)$是以$2l$为周期的函数且在$[-l,l]$上可积，则

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots,$$

函数$f(x)$的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

## 重要定义 周期为$2\pi$的余弦级数、正弦级数

若$f(x)$是以$2\pi$为周期的偶函数且在$[-\pi,\pi]$上可积,则

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x,\ n=0,1,2,\cdots,\quad b_n=0,\ n=1,2,\cdots,$$

此时,相应的傅里叶级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$为余弦级数.

若$f(x)$是以$2\pi$为周期的奇函数且在$[-\pi,\pi]$上可积,则

$$a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x,\ n=1,2,\cdots,$$

此时,相应的傅里叶级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$为正弦级数.

## 重要定义 周期为$2l$的余弦级数、正弦级数

若$f(x)$是以$2l$为周期的偶函数且在$[-l,l]$上可积,则

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots,\quad b_n=0,\ n=1,2,\cdots$$

此时,相应的傅里叶级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}$为余弦级数.

若$f(x)$是以$2l$为周期的奇函数且在$[-l,l]$上可积,则

$$a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots,\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$$

此时,相应的傅里叶级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$为正弦级数.

## 重要结论 函数展开成傅里叶级数

### (1)若函数$f(x)$是周期为$2\pi$或$2l$的周期函数:

第一步:验证$f(x)$在$\mathbb{R}$上是否按段光滑,若按段光滑则$f(x)$可展开成傅里叶级数;

第二步:计算相应的傅里叶系数$a_n(n=0,1,2,\cdots)$, $b_n(n=1,2,\cdots)$;

第三步:写出$f(x)$的傅里叶级数, 根据傅里叶级数收敛定理,

在连续点处傅里叶级数收敛于$f(x)$,

在不连续点$x_0$处傅里叶级数收敛于 $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

**重要结论** 函数展开成傅里叶级数

(2)若函数$f(x)$是定义在$(-\pi,\pi]$或$(-l,l]$的函数：

需要先进行周期延拓,再如(1)的步骤得到函数

$f(x)$的傅里叶级数展开式.

(3)若函数$f(x)$是定义在$[0,\pi]$或$[0,l]$的函数：

若题目要求展开成余弦级数则进行偶式周期延拓;

若题目要求展开成正弦级数则进行奇式周期延拓.

## 重要定理

# 三角级数一致收敛的充分条件

若级数$\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$收敛，

则三角级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$在

$\mathbb{R}$上绝对收敛且一致收敛.

## 幻灯片 10

**YG9** Yanhong Gu, 2023/6/3

## 重要定理

# 周期为2π的傅里叶级数收敛定理

若以2π为周期的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上按段光滑，则$f(x)$的傅里叶级数在$\mathbb{R}$上收敛，其和函数是

$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$，即对$\forall x\in[-\pi,\pi]$，有

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

## 幻灯片 11

**YG8** Yanhong Gu, 2023/6/3

## 重要定理 傅里叶级数部分和函数的积分形式

若$f(x)$是以$2\pi$为周期的函数,且在$[-\pi,\pi]$上可积,

则其傅里叶级数部分和$S_n(x)$可写成

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,$$

当$t=0$时,被积函数中的不定式由极限

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=n+\frac{1}{2}$$极限确定.

## 幻灯片 12

**YG10** Yanhong Gu, 2023/6/3

**重要定理** 贝塞尔(Bessel)不等式

若函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积，则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中$a_n,b_n$是$f(x)$的傅里叶系数.

## 幻灯片 13

**YG7** Yanhong Gu, 2023/6/3

## 重要定理 帕塞瓦尔(Parseval)等式

设函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积,若函数$f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$一致收敛于$f(x)$,则有Parseval等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

其中$a_n,b_n$是$f(x)$的傅里叶系数.

## 重要定理 黎曼(Riemann)引理

若$f(x)$为$[a,b]$上的可积函数，则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.$$

## 重要定理

### 黎曼-勒贝格(Riemann–Lebesgue)定理

若$f(x)$为$[-\pi,\pi]$上的可积函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

**重要定理** 黎曼(Riemann)引理推论

若$f(x)$为$[-\pi,\pi]$上的可积函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=0.$$

**P68习题15.1/1(2)** 将函数$f(x)=x^2$在(i) $-\pi<x<\pi$;(ii) $0<x<2\pi$展开成傅里叶级数.

**解** (i) 将$f(x)$进行周期延拓,显然$f(x)$是按段光滑的,根据傅里叶级数收敛定理知,

$f(x)$可以展开成傅里叶级数. 先求$f(x)$的傅里叶系数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2\,\mathrm{d}\sin nx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x^2\right)=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}\cos nx$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)=\frac{4}{n^2\pi}\left(\pi\cos n\pi-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=(-1)^n\frac{4}{n^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

于是得到$f(x)$的傅里叶级数 $f(x)\sim\dfrac{1}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4}{n^2}\cos nx.$

根据傅里叶级数收敛定理知,当$x\in(-\pi,\pi)$时,$f(x)=x^2=\dfrac{1}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4}{n^2}\cos nx.$

当$x=-\pi,\pi$时,$f(x)$的傅里叶级数收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\dfrac{\pi^2+\pi^2}{2}=\pi^2.$

**P68习题15.1/1(2)** 将函数$f(x)=x^2$在(i) $-\pi<x<\pi$;(ii) $0<x<2\pi$展开成傅里叶级数.

(ii) 将$f(x)$进行周期延拓,显然$f(x)$是按段光滑的,根据傅里叶级数收敛定理知,$f(x)$可以展开成傅里叶级数. 先求$f(x)$的傅里叶系数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,\mathrm{d}\sin nx=\frac{1}{n\pi}\left(x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x^2\right)$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{d}\cos nx=\frac{2}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)=\frac{4\cos 2n\pi}{n^2}=\frac{4}{n^2},\quad n\geq 1.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,\mathrm{d}\cos nx=-\frac{1}{n\pi}\left(x^2\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left(4\pi^2-2\int_0^{2\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x\right)=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{d}\sin nx=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)=-\frac{4\pi}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

于是得到$f(x)$的傅里叶级数 $f(x)\sim\dfrac{4}{3}\pi^2+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$

根据傅里叶级数收敛定理知,当$x\in(0,2\pi)$时, $f(x)=x^2=\dfrac{4}{3}\pi^2+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$

当$x=0,2\pi$时,$f(x)$的傅里叶级数收敛于 $\dfrac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2}=\dfrac{0+4\pi^2}{2}=2\pi^2.$

**P68习题15.1/3**

把函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & -\pi<x<0\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数，并由它推出

(1) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$; (2) $\dfrac{\pi}{3}=1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$;

(3) $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots$.

**解** 将 $f(x)$ 进行周期延拓，显然 $f(x)$ 是按段光滑的，根据傅里叶级数收敛定理知，$f(x)$ 可以展开成傅里叶级数. 先求 $f(x)$ 的傅里叶系数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2n}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2n}(1-\cos n\pi)=\frac{1}{2n}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, n\text{为奇数}\\ 0,\ n\text{为偶数}\end{cases},n=1,2,\cdots.$$ 于是得到 $f(x)$ 的傅里叶级数 $f(x)\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$

根据傅里叶级数收敛定理知，当 $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ 时，$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$

当 $x=0$ 时，$f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 $\dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\dfrac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{2}=0.$

当 $x=-\pi,\pi$ 时，$f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\dfrac{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2}=0.$

**P68习题15.1/3**

把函数$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & -\pi<x<0\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0\le x<\pi\end{cases}$展开成傅里叶级数，并由它推出

(1) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$; (2) $\dfrac{\pi}{3}=1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$;

(3) $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots$.

(1) 当$x=\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{\pi}{4}=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$.

(2) 上式两边同乘$\dfrac{1}{3}$，得 $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{21}+\cdots$,

再将上面两式相加，得

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\cdots\right)=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots.$$

(3) 当$x=\dfrac{\pi}{3}$时，$\dfrac{\pi}{4}=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots\right)$,

即 $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots$.

**P68习题15.1/5** 设函数$f(x)$满足条件$f(x+\pi)=f(x)$.

问此函数在$(-\pi,\pi)$上的傅里叶级数具有什么特性.

**解** 由于$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$,

对于$\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0}f(x+\pi)\cos nx\,\mathrm{d}x$：令$t=x+\pi$,即$x=t-\pi$,则$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

当$x=-\pi$时,$t=0$;当$x=0$时,$t=\pi$.

于是 $\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}f(t)\cos(nt-n\pi)\mathrm{d}t=(-1)^n\int_{0}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$.

因此 $a_n=(-1)^n\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left((-1)^n+1\right)f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, & n\text{为偶数}\end{cases},n=0,1,2,\cdots\Rightarrow a_{2n-1}=0,n=1,2,\cdots.$$

由于$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$,

对于$\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0}f(x+\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x$：令$t=x+\pi$,即$x=t-\pi$,则$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

当$x=-\pi$时,$t=0$;当$x=0$时,$t=\pi$.

于是 $\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}f(t)\sin n(t-\pi)\mathrm{d}t=(-1)^n\int_{0}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$.

因此 $b_n=(-1)^n\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left((-1)^n+1\right)f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, & n\text{为偶数}\end{cases},n=1,2,\cdots\Rightarrow b_{2n-1}=0,n=1,2,\cdots.$$

**P68习题15.1/6** 试证函数系$\cos nx, n=0,1,2,\cdots$和$\sin nx, n=1,2,\cdots$都是$[0,\pi]$上的正交函数系. 但是函数系$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$不是$[0,\pi]$上的正交函数系.

**证** 由于$\int_0^\pi 1^2\,\mathrm{d}x=\pi.$

$$\int_0^\pi \cos nx\cos mx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\pi\big(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\big)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, n=m\\ 0, n\neq m\end{cases}, n=0,1,2,\cdots,m=1,2,\cdots.$$

$$\int_0^\pi \sin x\sin mx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\pi\big(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\big)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, n=m\\ 0, n\neq m\end{cases}, n,m=1,2,\cdots.$$

因此函数系$\cos nx, n=0,1,2,\cdots$和$\sin nx, n=1,2,\cdots$都是$[0,\pi]$上的正交函数系.

由于$\int_0^\pi 1\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=2,$

$$\int_0^\pi \cos 2x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\pi(\sin 3x-\sin x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 3x}{3}+\cos x\right)\Bigg|_0^\pi=-\frac{2}{3},$$

因此函数系$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$不是$[0,\pi]$上的正交函数系.

**P68习题15.1/7(2)** 将函数$f(x)=\sqrt{1-\cos x}$在$-\pi\le x\le\pi$上展开成傅里叶级数.

**解** 将$f(x)$进行周期延拓,显然$f(x)$是按段光滑的，根据傅里叶级数收敛定理知，$f(x)$可以展开成傅里叶级数. 先求$f(x)$的傅里叶系数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{4\sqrt{2}}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\cos x}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}+\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{n-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\left(\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{2n-1}-\frac{-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=\frac{4\sqrt{2}}{\pi(1-4n^2)},\quad n\ge 1.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\cos x}\sin nx\,\mathrm{d}x=0,\quad n\ge 1.$$

于是得到$f(x)$的傅里叶级数 $f(x)\sim\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi(1-4n^2)}\cos nx.$

根据傅里叶级数收敛定理知，当$x\in[-\pi,\pi]$时，$f(x)=\sqrt{1-\cos x}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi(1-4n^2)}\cos nx.$

**P68习题15.1/10** 证明：若三角级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$中的系数$a_n,b_n$满足关系$\sup\limits_{n}\{|n^3a_n|,|n^3b_n|\}\le M$，$M$为常数，则上述三角级数收敛，且其和函数具有连续导函数。

**证** 由于对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le|a_n|+|b_n|\le\dfrac{2M}{n^3}$，$n=1,2,\cdots$.

已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2M}{n^3}$收敛，根据正项级数的比较判别法知，

级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$绝对收敛，故收敛.

三角级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$的各项导函数所组成的三角级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx).$$

由于对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$|-na_n\sin nx+nb_n\cos nx|\le|na_n|+|nb_n|\le\dfrac{2M}{n^2}$，$n=1,2,\cdots$.

已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2M}{n^2}$收敛，根据函数项级数的优级数判别法知，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

又对$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$-na_n\sin nx+nb_n\cos nx$在$(-\infty,+\infty)$上连续，

根据函数项级数一致收敛的连续性定理与逐项求导定理知，

三角级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$的和函数具有连续的导函数.

**P74习题15.2/4** 将函数$f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$在$[0,\pi]$上展开成正弦级数.

解 $l=\pi$. 将$f(x)$进行奇式周期延拓, 显然$f(x)$是按段光滑的,

根据傅里叶级数收敛定理知, $f(x)$可以展开成正弦级数.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}-\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{n-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}+\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{2n-1}\right)\right)$$

$$=\frac{8n}{\pi(4n^2-1)},\quad n=1,2,\cdots.$$

于是得到$f(x)$的正弦级数 $f(x)\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\sin nx.$

根据傅里叶级数收敛定理知, 当$x\in(0,\pi]$时, $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\sin nx.$

当$x=0$时, $f(x)$的正弦级数收敛于 $0$.

**P74习题15.2/6** 将函数$f(x)=(x-1)^2$在$(0,1)$上展开成余弦级数,并推出

$$\pi^2=6\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right).$$

解 $l=1$. 将$f(x)$进行偶式周期延拓, 显然$f(x)$是按段光滑的,

根据傅里叶级数收敛定理知, $f(x)$可以展开成余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(x-1)^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(x-1)^3\Big|_0^1=\frac{2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(x-1)^2\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^1(x-1)^2\,\mathrm{d}\sin n\pi x=-\frac{4}{n\pi}\int_0^1(x-1)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1(x-1)\,\mathrm{d}\cos n\pi x=\frac{4}{n^2\pi^2}(x-1)\cos n\pi x\Big|_0^1-\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2},n=1,2,\cdots.$$

于是得到$f(x)$的余弦级数 $f(x)\sim\frac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x.$

根据傅里叶级数收敛定理知, 当$x\in(0,1)$时, $f(x)=(x-1)^2=\frac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x.$

当$x=0$时, $f(x)$的余弦级数收敛于1. 当$x=1$时, $f(x)$的余弦级数收敛于0.

因此,当$x=0$时, $1=\frac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}$, 从而 $\pi^2=6\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$

**P79习题15.3/1** 设$f(x)$以$2\pi$为周期且具有二阶连续的导函数,证明$f$的傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于$f$.

**证1** 由于$f(x)$是以$2\pi$为周期且具有二阶连续的导函数, 所以$f$与$f'$在$(-\infty,+\infty)$上均光滑,
根据傅里叶级数的收敛定理知, $f$与$f'$均可展开为傅里叶级数.

设
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),x\in(-\infty,+\infty),$$
$$f'(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx),x\in(-\infty,+\infty),$$
其中
$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\big(f(\pi)-f(-\pi)\big)=0,$$
$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}f(x)=\frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=nb_n,n=1,2,\cdots,$$
$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}f(x)=\frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=-na_n,n=1,2,\cdots.$$
从而
$$|a_n|+|b_n|=\left|\frac{B_n}{n}\right|+\left|\frac{A_n}{n}\right|\le\frac{1}{2}\left(B_n^2+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(A_n^2+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(B_n^2+A_n^2\right)+\frac{1}{n^2}.$$
由于$f'$在$[-\pi,\pi]$上可积,根据贝塞尔不等式,有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^2+B_n^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)\mathrm{d}x$,
即级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^2+B_n^2\right)$收敛. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(B_n^2+A_n^2)+\frac{1}{n^2}\right)$收敛.
根据正项级数的比较判别法知,$\displaystyle\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)$收敛. 由于$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le|a_n|+|b_n|$,
根据函数项级数的优级数判别法知, $f$的傅里叶级数$\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于$f$.

**P79习题15.3/1** 设$f(x)$以$2\pi$为周期且具有二阶连续的导函数,证明$f$的傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于$f$.

**证2** 由于$f(x)$是以$2\pi$为周期且具有二阶连续的导函数，所以$f$与$f'$在$(-\infty,+\infty)$上均光滑，根据傅里叶级数的收敛定理知，$f$与$f'$均可展开为傅里叶级数. 设

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),x\in(-\infty,+\infty),\quad f'(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx),x\in(-\infty,+\infty),$$

由于$f''$在$(-\infty,+\infty)$上连续,因此$f''$在$[-\pi,\pi]$上可积,从而 $f''(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$,

其中 $$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\big(f(\pi)-f(-\pi)\big)=0,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}f(x)=\frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=nb_n,n=1,2,\cdots,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}f(x)=\frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=-na_n,n=1,2,\cdots.$$

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f'(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\big(f'(\pi)-f'(-\pi)\big)=0,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}f'(x)=\frac{1}{\pi}f'(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=nB_n=-n^2a_n n=1,2,\cdots.$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}f'(x)=\frac{1}{\pi}f'(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x=-nA_n=-n^2b_n n=1,2,\cdots.$$

由于$f''$在$[-\pi,\pi]$上可积,根据贝塞尔不等式,有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4a_n^2+n^4b_n^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''^2(x)\mathrm{d}x$,

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4a_n^2+n^4b_n^2\right)$收敛.根据级数收敛的必要条件知，$\lim_{n\to\infty}\left(n^4a_n^2+n^4b_n^2\right)=0.$

**P79习题15.3/1** 设$f(x)$以$2\pi$为周期且具有二阶连续的导函数,证明$f$的傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于$f$.

因而,对$\varepsilon=1,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有$\left|n^4a_n^2+n^4b_n^2\right|<\varepsilon=1$,即$a_n^2+b_n^2<\dfrac{1}{n^4}$.

因此$a_n^2<\dfrac{1}{n^4},b_n^2<\dfrac{1}{n^4}$.于是$\left|a_n\right|<\dfrac{1}{n^2},\left|b_n\right|<\dfrac{1}{n^2}$.

因此对$\forall x\in(-\infty,+\infty),\left|a_n\cos nx+b_n\sin nx\right|\le\left|a_n\right|+\left|b_n\right|<\dfrac{2}{n^2},n=N+1,N+2,\cdots$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,根据函数项级数的优级数判别法知,

$f$的傅里叶级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于$f$.

# P79习题15.3/2

设$f$为$[-\pi,\pi]$上的可积函数.证明:若$f$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f$,

则成立帕塞瓦尔等式:$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$.

这里$a_n,b_n$为$f$的傅里叶系数.

**证** $f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$,所以 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, $x\in[-\pi,\pi]$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n f(x)\cos nx+b_n f(x)\sin nx)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

由于$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积,根据可积的必要条件知 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有界.

又由于 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$, 所以

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n f(x)\cos nx+b_n f(x)\sin nx)$在$[-\pi,\pi]$上一致收敛,根据函数项级数的逐项求积定理知,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n f(x)\cos nx+b_n f(x)\sin nx\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right)=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).
\end{aligned}
$$

# P79习题15.3/2

设$f$为$[-\pi,\pi]$上的可积函数.证明:若$f$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f$,

则成立帕塞瓦尔等式:$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$.

这里$a_n,b_n$为$f$的傅里叶系数.

**另证** 令 $S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

因为$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积,所以有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

由于$f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$,即

$$S_m(x)\rightrightarrows f(x),\ x\in[-\pi,\pi]\ (m\to\infty),$$

因此 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_m(x)\right)^2\mathrm{d}x=0.$

由此得 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\right)=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$

## P80总练习题/1

试求三角多项式$T_n(x)=\dfrac{A_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$的傅里叶级数展开式.

**解** 由于$T_n(x)$是以$2\pi$为周期的光滑函数,根据傅里叶级数收敛定理,

$T_n(x)$可以展开成傅里叶级数,其傅里叶系数是

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right)\mathrm{d}x=A_0,$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\cos mx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right)\cos mx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m>n\\ A_m, & m\le n\end{cases},m=1,2,\cdots,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)\sin mx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right)\sin mx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m>n\\ B_m, & m\le n\end{cases},m=1,2,\cdots,$$

所以当$x\in(-\infty,+\infty)$时,

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)=\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(A_m\cos mx+B_m\sin mx)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

即$T_n(x)$傅里叶级数展开式就是其本身.

**P80总练习题/3** 设函数$f(x)$是以$2\pi$为周期,且具有二阶连续可微的函数,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad b_n''=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n''$绝对收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}\le\frac{1}{2}\left(2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)$.

**证** 由于$f(x)$是以$2\pi$为周期,故$f(\pi)=f(-\pi)$. 于是

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}\cos nx=-\frac{1}{n\pi}\left(f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxf'(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxf'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}\sin nx$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left(f'(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxf''(x)\mathrm{d}x\right)=-\frac{b_n''}{n^2}.$$

从而 $\sqrt{|b_n|}=\sqrt{\frac{|b_n''|}{n^2}}=\frac{1}{n}\sqrt{|b_n''|}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|b_n''|\right)$. 由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n''$绝对收敛,

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}<2$收敛,根据正项级数的比较判别法知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}$收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|b_n''|\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)\le\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right).$$

## P80总练习题/4

设周期为$2\pi$的可积函数$\varphi(x)$与$\psi(x)$满足以下关系式：

(1) $\varphi(-x)=\psi(x)$; (2) $\varphi(-x)=-\psi(x)$.

试问$\varphi(x)$的傅里叶系数$a_n,b_n$与$\psi(x)$的傅里叶系数$\alpha_n,\beta_n$有什么关系?

**解** (1) $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x\overset{x=-t}{=}\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\cos n(-t)\mathrm{d}(-t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\cos nt\mathrm{d}t=\alpha_n.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x\overset{x=-t}{=}\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\sin n(-t)\mathrm{d}(-t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\sin nt\mathrm{d}t=-\beta_n.$$

(2) $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x\overset{x=-t}{=}\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\cos n(-t)\mathrm{d}(-t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\cos nt\mathrm{d}t=-\alpha_n.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x\overset{x=-t}{=}\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\sin n(-t)\mathrm{d}(-t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\sin nt\mathrm{d}t=\beta_n.$$

# P80总练习题/5

设定义在$[a,b]$上的连续函数列$\{\varphi_n\}$满足关系$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, n\neq m\\ 1, n=m\end{cases}$,

对于在$[a,b]$上的可积函数$f$,定义$a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$.

证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛,且有不等式$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2\leq\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$.

**证** 记$S_m(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\varphi_k(x), m=1,2,\cdots$. 由于$f$在$[a,b]$上可积,$\{\varphi_n\}$在$[a,b]$上连续, 所以$(f(x)-S_m(x))^2$在$[a,b]$上可积.

从而 $\int_a^b (f(x)-S_m(x))^2\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b f(x)S_m(x)\mathrm{d}x+\int_a^b S_m^2(x)\mathrm{d}x$, 其中

$$\int_a^b f(x)S_m(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\sum_{k=1}^{m}a_k\varphi_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{k=1}^{m}a_k f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\right)=\sum_{k=1}^{m}a_k^2,$$

$$\int_a^b S_m^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\varphi_k(x)\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\varphi_k(x)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\varphi_k(x)\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m}a_j\varphi_j(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left[a_k\int_a^b\left(\sum_{j=1}^{m}a_j\varphi_k(x)\varphi_j(x)\right)\mathrm{d}x\right]=\sum_{k=1}^{m}\left[a_k\left(\sum_{j=1}^{m}a_j\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x\right)\right]=\sum_{k=1}^{m}\left[a_k\left(a_k\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\right)\right]=\sum_{k=1}^{m}a_k^2.$$

所以 $0\leq\int_a^b(f(x)-S_m(x))^2\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2+\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2$, 即 $\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2\leq\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$.

从而正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$的部分和$\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2$有上界, 因此正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.

对$\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2\leq\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$两边令$m\to\infty$,得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2\leq\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$.