Ch1 实数集与函数

顾燕红微信

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023秋季数学分析(1...

群号：921774255

QQ学习交流群

2023年10月12日

BY GYH

将学习：

函数的基本特性

有界函数

设f为定义在D上的函数.

若$\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in D$,有$f(x)\le M$,则称$f$为$D$上的有上界的函数.

若$\exists L\in\mathbb{R},\forall x\in D$,有$f(x)\ge L$,则称$f$为$D$上的有下界的函数.

无界函数

设f为定义在D上的函数.

f在D上无上界$\Leftrightarrow \forall M\in\mathbb{R},\exists x_0\in D$,使得$f(x_0)>M$.

f在D上无下界$\Leftrightarrow \forall L\in\mathbb{R},\exists x_0\in D$,使得$f(x_0)<L$.

f在D上无界$\Leftrightarrow \forall K>0,\exists x_0\in D$,使得$|f(x_0)|>K$.

注1: f在D上有界的充要条件是f在D上既有上界又有下界.

注2: 若f是D上的有界函数,则f的图像完全落在直线

$y = M$与$y = -M$之间.

例1 证明: $f(x)=\tan x$ 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上无上界,有下界.

证 取$L=0$, 则 $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)\geq L$,

因此 f 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上有下界.

$\forall M\in\mathbb{R}$, 若$M<0$,取$x_0=0$, 有$f(x_0)=0>M$.

若$M\geq 0$, 取$x_0=\arctan(M+1)$,

则$x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且有$fx_0=\tan x_0=M+1>M$,

因此 f 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上无上界.

例2 证明：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上的无上界，有下界.

证 $\forall M\in\mathbb{R}$，若 $M\le 0$，取 $x_0=1\in(0,1]$，有 $f(x_0)=1>M$.

若 $M>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{1+M}\in(0,1]$，有 $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}=M+1>M$.

因此 f 在 $(0,1]$ 上无上界.

因为对 $\forall x\in(0,1]$，有 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ge 1$，

因此 f 在 $(0,1]$ 上有下界.

例3 证明：函数$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$在$\mathbb{R}$上有界.

证 对$\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$|f(x)|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{|x|}{x^2+1}=\frac{|x|\cdot 1}{x^2+1}\le\frac{\frac{1}{2}\left(|x|^2+1^2\right)}{x^2+1}=\frac{1}{2}.$$

因此 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$在$\mathbb{R}$上有界.

思考：能否通过分母缩小$x^2+1\ge 2|x|$进行求解？

函数的确界

设f为定义在D上的函数.

$\eta=\sup\limits_{x\in D} f(x) \Leftrightarrow$ (1)对$\forall x\in D$,有$f(x)\le\eta$.

(2)对$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in D$, 使得$f(x_0)>\eta-\varepsilon$.

(2)$'$对$\forall\alpha<\eta,\exists x_0\in D$, 使得$f(x_0)>\alpha$.

$\xi=\inf\limits_{x\in D} f(x) \Leftrightarrow$ (1)对$\forall x\in D$,有$f(x)\ge\xi$.

(2)对$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in D$,使得$f(x_0)<\xi-\varepsilon$.

(2)$'$对$\forall\beta>\xi,\exists x_0\in D$,使得$f(x_0)<\beta$.

函数的确界原理

设f为定义在D上的函数.

若f在D上有上界,则数集$f\left(D\right)$有上确界.

若f在D上有下界,则数集$f\left(D\right)$有下确界.

注1: $\eta=\sup\limits_{x\in D} f\left(x\right)\Leftrightarrow \eta$是$f\left(x\right)$在$D$上的最小的上界

$\Leftrightarrow$ (1)$\forall x\in D, f\left(x\right)\le\eta$

(2)$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in D, f\left(x_0\right)>\eta-\varepsilon$

注2: $\xi=\inf\limits_{x\in D} f\left(x\right)\Leftrightarrow \xi$是$f\left(x\right)$在$D$上的最大的下界

$\Leftrightarrow$ (1)$\forall x\in D, f\left(x\right)\ge\xi$

(2)$\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in D, f\left(x_0\right)<\xi+\varepsilon$

例4 设 $f(x), g(x)$ 在 D 上有界,证明:

$$(1)\inf_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$$

$$(2)\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le \sup_{x\in D} f(x)+\sup_{x\in D} g(x).$$

$$(3)\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le \inf_{x\in D} f(x)+\sup_{x\in D} g(x).$$

$$(4)\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\ge \inf_{x\in D} f(x)+\sup_{x\in D} g(x).$$

$$(1)\inf_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$$

证 由f,g在D上有界知, $f,g,f+g$在D上的确界均存在.

$(1)\forall x\in D$, 有$\inf\limits_{x\in D} f(x)\le f(x)$, $\inf\limits_{x\in D} g(x)\le g(x)$.

所以 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)\le f(x)+g(x)$.

故$\inf\limits_{x\in D}(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)$是函数$f(x)+g(x)$的一个下界,

根据下确界的定义,有

$$\inf_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$$

$$(2)\sup_{x\in D}\left\{f(x)+g(x)\right\}\le \sup_{x\in D} f(x)+\sup_{x\in D} g(x).$$

(2)$\forall x\in D$, 有$f(x)\le \sup\limits_{x\in D} f(x), g(x)\le \sup\limits_{x\in D} g(x).$

所以 $f(x)+g(x)\le \sup\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x).$

故$\sup\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x)$是函数$f(x)+g(x)$的一个上界,

根据上确界的定义,有

$$\sup_{x\in D}\left\{f(x)+g(x)\right\}\le \sup_{x\in D} f(x)+\sup_{x\in D} g(x).$$

$$(3)\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x).$$

$(3)\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in D$，使$f(x_0)<\inf\limits_{x\in D}f(x)+\varepsilon.$

又$g(x_0)\le\sup\limits_{x\in D}g(x).$

所以

$$f(x_0)+g(x_0)<\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x)+\varepsilon.$$

根据下确界的定义及ε的任意性知

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le f(x_0)+g(x_0)\le\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x),$$

从而

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x).$$

$$(3)\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x).$$

另一种思路

$$\Leftrightarrow\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\sup_{x\in D}g(x)\le\inf_{x\in D}f(x)\Leftrightarrow\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\inf_{x\in D}\{-g(x)\}\le\inf_{x\in D}f(x)$$

对$\forall x\in D$，根据下确界的定义，有

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le f(x)+g(x),\quad \inf_{x\in D}\{-g(x)\}\le -g(x).$$

从而 $\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\inf_{x\in D}\{-g(x)\}\le f(x)+g(x)-g(x)=f(x).$

根据下确界的定义，有 $\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\inf_{x\in D}\{-g(x)\}\le\inf_{x\in D}f(x).$

所以 $\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in D}f(x)-\inf_{x\in D}\{-g(x)\}=\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x).$

需要证明： $-\sup_{x\in D}g(x)=\inf_{x\in D}\{-g(x)\}.$

$$(4)\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\geq\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x).$$

$(4)\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in D$，使$g(x_0)>\sup\limits_{x\in D}g(x)-\varepsilon$.

又$f(x_0)\geq\inf\limits_{x\in D}f(x)$.

所以

$$f(x_0)+g(x_0)>\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x)-\varepsilon.$$

根据上确界的定义及ε的任意性知

$$\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\geq f(x_0)+g(x_0)\geq\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x),$$

从而

$$\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\geq\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x).$$

$$(4)\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\ge \inf_{x\in D} f(x)+\sup_{x\in D} g(x).$$

另一种思路

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf_{x\in D} f(x)\ge \sup_{x\in D} g(x) \Leftrightarrow \sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\sup_{x\in D}\{-f(x)\}\ge \sup_{x\in D} g(x)$$

对$\forall x\in D$，根据上确界的定义，有

$$\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\ge f(x)+g(x),\quad \sup_{x\in D}\{-f(x)\}\ge -f(x).$$

从而 $\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\sup_{x\in D}\{-f(x)\}\ge f(x)+g(x)-f(x)=g(x).$

根据上确界的定义，有 $\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\sup_{x\in D}\{-f(x)\}\ge \sup_{x\in D} g(x).$

所以 $\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\ge \sup_{x\in D} g(x)-\sup_{x\in D}\{-f(x)\}=\sup_{x\in D} g(x)+\inf_{x\in D} f(x).$

需要证明： $-\inf_{x\in D} f(x)=\sup_{x\in D}\{-f(x)\}.$

例5 设函数 $f(x),g(x)$是D上的正值有界函数.

证明：(1) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\le\sup\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

(2) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\ge\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)$.

证 由f,g在D上有界知，$f,g,f\cdot g$在D上的确界均存在.

$\forall x\in D$，有$0\le\inf\limits_{x\in D}f(x)\le f(x)\le\sup\limits_{x\in D}f(x)$,

$$0\le\inf_{x\in D}g(x)\le g(x)\le\sup_{x\in D}g(x),$$

因此 $\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)\le f(x)g(x)\le\sup\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

所以 $\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)$与$\sup\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)$分别是$\{f(x)g(x)\}$的一个下界与上界.

根据上、下确界的定义，有 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\ge\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)$.

$$\sup_{x\in D}\{f(x)g(x)\}\le\sup_{x\in D}f(x)\cdot\sup_{x\in D}g(x).$$

单调函数

设f为定义在D上的函数.若$\forall x_1, x_2 \in D$,当$x_1 < x_2$时,总有

(i) 有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则称f为D上的(递)增函数;

特别有 $f(x_1) < f(x_2)$时, 称 f 为严格(递)增函数.

(ii) 有 $f(x_1) \ge f(x_2)$, 则称f为D上的(递)减函数;

特别有 $f(x_1) > f(x_2)$时, 称 f 为严格(递)减函数.

增函数和减函数统称为单调函数.

严格增函数和严格减函数统称为严格单调函数.

注：常量函数$f(x)=c$既是增函数也是减函数.

考虑其他五大类基本初等函数在其定义域上的单调性.

例6 任意 $n\in\mathbb{N}_+$，$y_{2n-1}=x^{2n-1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格增;

$y_{2n}=x^{2n}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上严格增，在 $\mathbb{R}_-$ 上严格减.

证 由 $y_1=x$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上为正值严格增，可知 $y_2=x^2=y_1y_1$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上亦正值严格增. 由数学归纳法，若已证 y_n 在 $\mathbb{R}_+$ 上为正值严格增，可知 $y_{n+1}=y_1y_n$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上亦正值严格增.

若 $x_1<x_2<0$，则 $0<-x_2<-x_1$，于是

$$(-x_2)^{2n}<(-x_1)^{2n},\ (-x_2)^{2n-1}<(-x_1)^{2n-1},$$

即 $x_2{}^{2n}<x_1{}^{2n}$，$x_2{}^{2n-1}>x_1{}^{2n-1}$.

这就证明了 y_{2n} 在 $\mathbb{R}_-$ 上严格减，而 y_{2n-1} 在 $\mathbb{R}_-$ 上严格增.

若 $x_1\le 0<x_2$ 或 $x_1<0\le x_2$，则

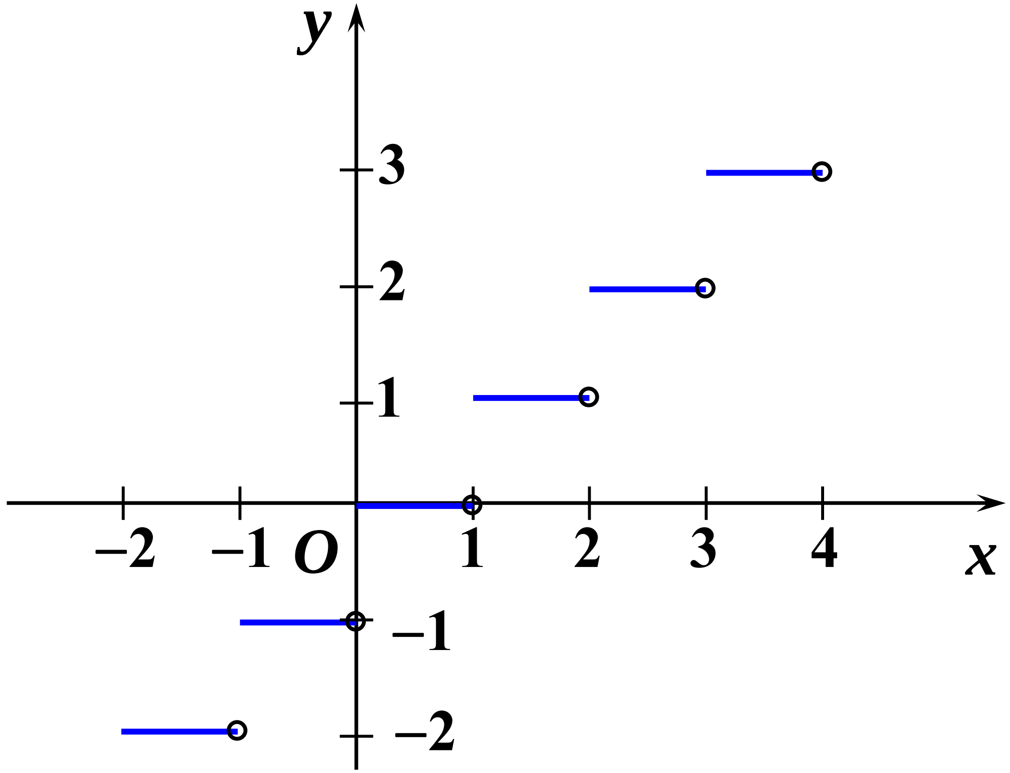
$$x_1^{2n-1}\le 0<x_2^{2n-1}\ \text{或}\ x_1^{2n-1}<0\le x_2^{2n-1},$$

这证明了 y_{2n-1} 在 $\mathbb{R}$ 上严格增.

例7 证函数 $y=[x]$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数,但非严格增.

证 对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $[x_1] \le [x_2]$.

取 $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{1}{2}$, 则有 $[x_1] = [x_2] = 0$.



严格单调函数有反函数

设 $y=f(x), x\in D$为严格增(减)函数, 则 f 必有反函数f^{-1}, 且 f^{-1}在其定义域 $f(D)$上也是严格增(减)函数.

证 设 f 在 D 上严格增, 则 $\forall y \in f(D)$ 只有一个 $x \in D$,

使 $f(x) = y$. 事实上, 若 $\exists x_1 < x_2$, 使 $f(x_1) = y = f(x_2)$,

则与 f 的严格增性质相矛盾.

从而函数 f 存在反函数 $x = f^{-1}(y), y \in f(D)$.

再证 f^{-1} 必是严格增的:

$\forall\ y_1, y_2 \in f(D)$, $\quad y_1 < y_2$, 设 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$,

则 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

由于 $y_1 < y_2$ 及 f 的严格增性, 必有 $x_1 < x_2$, 即

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

因此 f^{-1} 也是严格增函数.

例8 双曲函数 sh x 和 ch x 定义如下：

$$\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right),\ \operatorname{ch} x=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

求双曲函数 sh x 和 ch x的反函数.

解 sh x 在 $\mathbb{R}$ 上严格增, 因此 sh x 有反函数.

设 $y=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$, 得到 e^{x} 的一元二次方程

$$\left(e^{x}\right)^{2}-2ye^{x}-1=0.$$

解得 $x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^{2}+1}\right)$,

因此 $y=\operatorname{sh} x$ 的反函数为 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right),\ x\in\mathbb{R}$.

$\mathrm{ch}\,x$ 在 $\mathbb{R}_+$ 和 $\mathbb{R}_-$ 的值域均为 $[1,+\infty)$, 在 $\mathbb{R}_+$ 上严格增,

在 $\mathbb{R}_-$ 上严格减.

设 $y=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)$, 得到 e^x 的一元二次方程

$$\left(\mathrm{e}^x\right)^2-2y\mathrm{e}^x+1=0.$$

解得 $\quad x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right)$,

因此 $\mathrm{ch}\,x$ 在 $\mathbb{R}_+$ 和 $\mathbb{R}_-$ 的反函数分别为

$$y_1=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty),\ y_1\in[0,+\infty).$$

$$y_2=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty),\ y_2\in(-\infty,0].$$

例9 由于 $y_n = x^n$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上严格增，因此 y_n 的反函数 $z_n = x^{1/n}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上严格增，故对任意有理数 $r = \dfrac{n}{m}$，$y = x^r$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上亦为严格增.

例10 证明：$y = a^x$ 当 $a > 1$ 时，在 $\mathbb{R}$ 上严格增；

当 $0 < a < 1$ 时，在 $\mathbb{R}$ 上严格减.

证 设 $a > 1$. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. 由有理数集的稠密性，

$\exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, 使 $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$, 因此

$$a^{x_1} = \sup\{a^r \mid r \in Q,\ r < x_1\} \le a^{r_1} < a^{r_2}$$

$$\le \sup\{a^r \mid r \in Q, r < x_2\} = a^{x_2}.$$

类似可证 a^x 当 $0 < a < 1$ 时，在 $\mathbb{R}$ 上严格减.

注： 由于 $y=\log_a x$ 是 $y=a^x$ 的反函数,因此

$y=\log_a x$ 当 $a>1$ 时, 在 $\mathbb{R}_+$ 上严格增;

$y=\log_a x$ 当 $0<a<1$ 时, 在 $\mathbb{R}_+$ 上严格减.

奇函数和偶函数

设D关于原点对称,即:$\forall x \in D$,必有$-x \in D$.
设f为定义在D上的函数.

若$\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$,称$f$为$D$上的奇函数.

若$\forall x \in D, f(-x) = f(x)$,称$f$为$D$上的偶函数.

注：若记$G(f)$为 f 的图象，则$f(x)$是奇函数或偶函数的

充要条件是:

$(x,y)\in G(f)\Leftrightarrow(-x,-y)\in G(f)$,即奇函数的图像关于原点对称;

$(x,y)\in G(f)\Leftrightarrow(-x,y)\in G(f)$,即偶函数的图像关于$y$轴对称.

例如 $y=\sin x,\ y=\tan x,\ y=x^{2n+1}$ 是奇函数,

$y=\cos x,\ y=x^{2n},y=c$ 是偶函数.

$y=0$既是奇函数也是偶函数.

$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$是奇函数 $y_1=\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$的反函数,

从而它也是奇函数.

周期函数

设f为定义在D上的函数.

若$\exists\sigma>0$,使得$\forall x\in D, x\pm\sigma\in D$,有

$$f\left(x\pm\sigma\right)=f\left(x\right),$$

则称f为周期函数,σ为f的一个周期.

若周期函数 f 的所有周期中有一个最小的周期,

则称此最小正周期为 f 的基本周期, 简称周期.

注：周期函数不一定有最小周期.

例如常量函数$f(x)=c$以任意正数为周期, 但没有最小周期.

Dirichlet函数以任意正有理数为周期, 但没有最小周期.

例11 设函数 $f(x)$既关于$x=a$对称,又关于$x=b$对称,已知$a<b$.

证明：函数$f(x)$是周期函数，并求其周期.

证 已知函数$f(x)$关于$x=a$对称，则对$\forall x\in\mathbb{R}$,$a+x$与$a-x$是关于直线$x=a$的两个对称点，有 $f(a+x)=f(a-x)$.

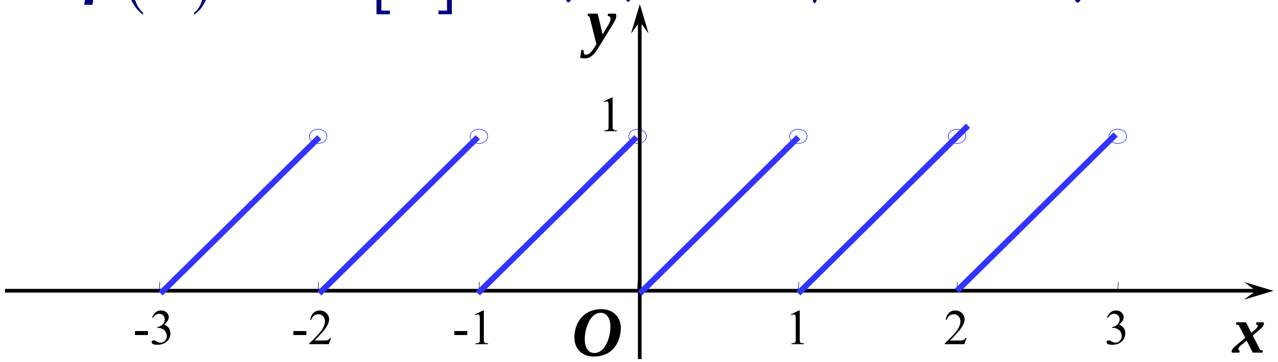
已知函数$f(x)$关于$x=b$对称，则对$\forall x\in\mathbb{R}$,$b+x$与$b-x$是关于直线$x=b$的两个对称点，有 $f(b+x)=f(b-x)$.

从而对$\forall x\in\mathbb{R}$，有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a-(a-x)) = f(a+(a-x)) = f(2a-x) \\
&= f(b-(b-2a+x)) = f(b+(b-2a+x)) \\
&= f(x+2(b-a)).
\end{aligned}
$$

因此函数$f(x)$是周期函数，且其周期为$2(b-a)$.

例12 研究函数 $f(x)=x-[x]$ 的有界性、单调性、奇偶性、周期性.



解 函数$f(x)=x-[x]$的定义域为$\mathbb{R}$. 对$\forall x\in\mathbb{R}$,

由$[x]\le x<[x]+1$,得 $0\le x-[x]<1$. 因此$f(x)$在$\mathbb{R}$上有界.

取$x_1=0, x_2=\dfrac{1}{2}, x_3=3$, 显然$x_1<x_2<x_3$.

而$f(x_1)=0, f(x_2)=\dfrac{1}{2}, f(x_3)=0$. 因此$f(x)$在$\mathbb{R}$上不具有单调性.

由于对$\forall x_1,x_2\in[n,n+1)(n\in\mathbb{Z}), x_1<x_2$,

$$f(x_1)=x_1-[x_1]=x_1-n, f(x_2)=x_2-[x_2]=x_2-n.$$

从而$f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2<0$, 即$f(x_1)<f(x_2)$.

因此$f(x)$在$[n,n+1)$上严格增.

由于 $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}\neq f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$, $\quad f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}\neq -f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}$,

因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为非奇非偶函数.

设 $T>0$, 若 T 为 f 的周期, 则 $f\left(x\pm T\right)=f\left(x\right)$,

即 $x\pm T-\left[x\pm T\right]=x-\left[x\right]$, 从而得 $\left[x\pm T\right]-\left[x\right]=\pm T$.

所以 T 为正整数.

又 $\left[x+1\right]-\left[x\right]=1$, 所以 f 的最小正周期为1.

例13 研究常量函数$f(x)=c$,(其中c为常数)的有界性、单调性、奇偶性和周期性.

有界函数

既是增函数也是减函数

偶函数 (当$c=0$时，既是奇函数也是偶函数)

周期函数,但没有最小正周期

例14 研究Dirichlet函数$D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\0, x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$的有界性、单调性、奇偶性和周期性.

解 由于对$\forall x\in\mathbb{R}$,有$0\le D(x)\le 1$. 因此$D(x)$在$\mathbb{R}$上有界.

由实数的稠密性,取$x_1<x_2<x_3, x_1, x_3\in\mathbb{Q}, x_2\notin\mathbb{Q}$,则

$$D(x_1)=1>D(x_2)=0,\ D(x_2)=0<D(x_3)=1.$$

因此$D(x)$在$\mathbb{R}$上不具有单调性.

当$x\in\mathbb{Q}$,则$-x\in\mathbb{Q}$,从而$D(x)=D(-x)=1$.

当$x\notin\mathbb{Q}$,则$-x\notin\mathbb{Q}$,从而$D(x)=D(-x)=0$.

因此$D(x)$在$\mathbb{R}$上为偶函数.

设$\sigma \in \mathbb{Q}_+$, $x \in \mathbb{R}$.

若 $x \in \mathbb{Q}$, 则 $x+\sigma \in \mathbb{Q}$, $D(x+\sigma)=1=D(x)$;

若 $x \notin \mathbb{Q}$, 则 $x+\sigma \notin \mathbb{Q}$, $D(x+\sigma)=0=D(x)$.

因此$\sigma \in \mathbb{Q}_+$是$D(x)$的一个周期.

设$\sigma \notin \mathbb{Q}, \sigma > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

若 $x \in \mathbb{Q}$, 则 $x+\sigma \notin \mathbb{Q}$, $D(x+\sigma)=0 \neq D(x)=1$.

因此$\sigma \notin \mathbb{Q}$不是$D(x)$的周期.

所以$D(x)$以任意正有理数为周期, 没有最小正周期.

你应该：

理解函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性

能利用定义证明函数是否具有有界性、单调性、奇偶性、周期性

掌握有界函数、单调函数、奇(偶)函数、周期函数的图形特征并会应用

了解证明函数无界、非单调、非奇偶、非周期的数学语言