Ch3 函数极限

主讲教师：顾燕红
办公室：汇星楼409
办公室答疑时间：每周二15点至17点
微信号：18926511820 QQ号：58105217
Email: yhgu@szu.edu.cn
(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)
QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年11月13日

BY GYH

将学习：

无穷小量与无穷大量

无穷小量

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上有定义.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

有界量

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上有界,

则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的有界量.

注：例如 $x-1$为$x\to 1$时的无穷小量;

$\sqrt{1-x^2}$ 为 $x\to 1^-$时的无穷小量;

$\dfrac{\sin x}{x}$为 $x\to\infty$时的无穷小量;

$\sin x$ 为 $x\to\infty$时的有界量;

$\sin\dfrac{1}{x}$为 $x\to 0$时的有界量.

无穷小量是有界量，而有界量不一定是无穷小量.

非正常极限∞

设函数f在某$U^{\circ}(x_0)$上有定义.若对$\forall G>0,\exists\delta>0,$使得当$x\in U^{\circ}(x_0;\delta)\left(\subset U^{\circ}(x_0)\right)$时，有

$$|f(x)|>G,$$

则称函数f当$x\to x_0$时有非正常极限∞,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

若$f(x)>G$或$f(x)<-G$, 则称函数f当$x\to x_0$时有非正常极限$+\infty$或$-\infty$,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \text{或} \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$$

无穷大量

对于自变量x的某种趋向(或$n \to \infty$时), 所有以$\infty, +\infty$或$-\infty$为非正常极限的函数(包括数列), 都称为无穷大量.

注： $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall G>0,\exists M>0,$当$x<-M$时,有$f(x)<-G.$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty \Leftrightarrow \forall G>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,$当$n>N$时,有$x_n>G.$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall G>0,\exists \delta>0,\forall x\in U^\circ(x_0;\delta),$有$f(x)<-G.$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall G>0,\exists \delta>0,\forall x\in U_-^\circ(x_0;\delta),$有$f(x)>G.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall G>0,\exists M>0,$当$|x|>M$时,有$|f(x)|>G.$

例1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

证 对$\forall G>0$,要使

$$\frac{1}{x^2}>G,$$

只要 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{G}}$.

因此,对$\forall G>0$,取$\delta=\dfrac{1}{\sqrt{G}}>0$,当 $0<|x|<\delta$ 时,有

$$\frac{1}{x^2}>G,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

例2 证明 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$.

证 对 $\forall G>0$, 要使

$$\left|\frac{1}{x-3}\right|>G,$$

只要 $|x-3|<\dfrac{1}{G}$.

因此, 对 $\forall G>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{G}>0$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{x-3}\right|>G,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$.

例3 当$a>1$时,证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

证 对$\forall G>0$(不妨设$G>1$),要使

$$a^x > G,$$

由于对数函数$\log_a x$的严格递增,只要$x>\log_a G$.

因此,对$\forall G>0$,取$M=\log_a G$,当 $x>M$ 时,有

$$a^x > G,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

注: $(a>1)\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

$(0<a<1)\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$. $(0<a<1)\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

例4 证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

证 对$\forall G>0$,要使 $\ln x<-G$,

由于$\ln x$单调增,只要$x<\mathrm{e}^{-G}$.

因此,对$\forall G>0$,取$\delta=\mathrm{e}^{-G}$,当 $0<x<\delta$时,有

$$\ln x<-G.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

对$\forall G>0$,要使 $\ln x>G$,

由于$\ln x$单调增,只要$x>\mathrm{e}^{G}$.

因此,对$\forall G>0$,取$M=\mathrm{e}^{G}$,当 $x>M$ 时,有

$$\ln x>G.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

例5 设$\{a_n\}$递增,无上界.证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

证 因为$\{a_n\}$无上界,所以对$\forall G>0, \exists N_0 \in \mathbb{N}_+$,使得

$$a_{N_0} > G.$$

取$N = N_0$,又因为$\{a_n\}$递增,故当$n > N = N_0$时,有

$$a_n \ge a_{N_0} > G,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

注： 无穷大量不是很大的一个数，而是具有非正常极限的变量.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，那么 $f(x)$ 在 x_0 的任何一个邻域内无界.

若 $f(x)$ 在 x_0 的任何一个邻域内无界(称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无界量)，并不能保证 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

例如 $f(x)=x\sin x$ 在 ∞ 的任何邻域内无界，

但却不是 $x\to\infty$ 时的无穷大量. 事实上，对

$$x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2},\quad y_n=2n\pi,\quad n=1,2,\ldots,$$

有 $$f(x_n)\to\infty,\quad f(y_n)\to 0.$$

因而 $f(x)$ 不是 $x\to\infty$ 时的无穷大量.

例6 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$.

证 由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，则对$\forall G > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}_+$，当$n > N_1$时，有 $x_n > 4G$.

从而

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1} + x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} + \frac{x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n} > \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} + \frac{n - N_1}{n} 4G.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} = 0$，根据收敛数列的保号性知，$\exists N_2 \in \mathbb{N}_+$，当$n > N_2$时，有

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} > -G.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n - N_1}{n} = 1$，根据收敛数列的保号性知，$\exists N_3 \in \mathbb{N}_+$，当$n > N_3$时，有$\dfrac{n - N_1}{n} > \dfrac{1}{2}$.

取$N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$，当$n > N$时，有 $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} > -G + 2G = G$.

所以 $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

例7 证明：若$x_n > 0$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n} = +\infty$.

证1 由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n} = 0$.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{x_n}} = 0$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n} = +\infty$.

证2 由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，则对$\forall G > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$，当$n > N$时，有 $x_n > e^G$，即$\ln x_n > G$.

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n = +\infty$. 从而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n} = +\infty$,

即$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n} = +\infty$. 故对$\forall G > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$，当$n > N$时，有

$$\ln\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n} > \ln G,$$

即 $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n} > G$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n} = +\infty$.

无穷小量、无穷大量的性质

1. 两个(类型相同的)无穷小量的和、差、积仍是无穷小量.

2. 无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量.

3. 若$f(x)$是$x \to x_0$时的无穷大量，$0 \neq b \leq |g(x)| \leq c$，则$f(x)g(x)$是$x \to x_0$时的无穷大量.

4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) - A$是$x \to x_0$时的无穷小量.
$\Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中$\alpha(x)$是$x \to x_0$时的无穷小量.

2. 无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量.

证 (2) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, |g(x)|\le M, x\in U^{\circ}(x_0)$.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 根据函数极限的定义, 对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$,

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{M+1}.$$

从而

$$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|<\frac{\varepsilon}{M+1}M<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$,

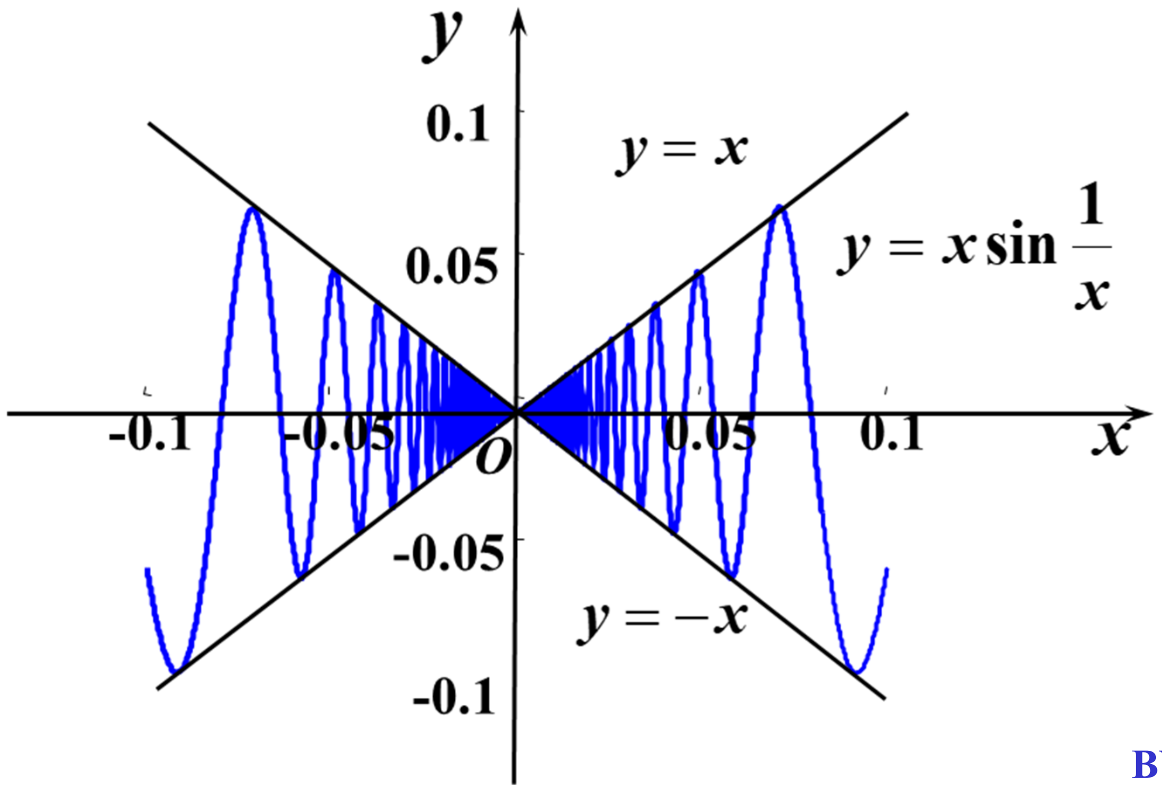
即 $f(x)g(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

注：例如 x 为 $x\to 0$ 时的无穷小量，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为 $x\to 0$ 时的有界量，

那么 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 为 $x\to 0$ 时的无穷小量.

从几何上看,曲线 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 近旁发生无限密集振动,其振幅被两条直线 $y=\pm x$ 所限制.

$y=\pm x$



注： 下面运算的写法是错误的：

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \cancel{=} \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = 0.$$

无穷小量、无穷大量的性质

5.若$f(x)$为$x \to x_0$时的无穷小量,且不等于零,

则$\dfrac{1}{f(x)}$为$x \to x_0$时的无穷大量.

若$g(x)$为$x \to x_0$时的无穷大量,

则$\dfrac{1}{g(x)}$为$x \to x_0$时的无穷小量.

证 对$\forall G>0$,因为f为$x\to x_0$时的无穷小量,所以

取$\varepsilon=\dfrac{1}{G}>0$,$\exists\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有 $|f(x)|<\varepsilon=\dfrac{1}{G}$,

即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|>G.$

所以$\dfrac{1}{f(x)}$为$x\to x_0$时的无穷大量.

对$\forall\varepsilon>0$,因为g为$x\to x_0$时的无穷大量,所以

取$G=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$,$\exists\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有 $|g(x)|>G=\dfrac{1}{\varepsilon}$,

即 $\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|<\varepsilon.$ 故 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=0$.

所以$\dfrac{1}{g(x)}$为$x\to x_0$时的无穷小量.

例8 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\neq 0$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\neq 0$，根据函数极限的局部保号性，

$\exists\delta_1>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(x)|\geq\dfrac{|b|}{2}$.

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，所以对 $\forall G>0$，$\exists\delta_2>0$，

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|g(x)|>\dfrac{2}{|b|}G$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$， 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)g(x)|>\frac{|b|}{2}\cdot\frac{2}{|b|}G=G.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty$.

注： 对于函数$f(x)=x$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，当$x\to 0$时，有

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=1\neq\infty.$$

这说明当$b=0$时结论不一定成立.

例9 设 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无界量.证明：存在 $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

证 因为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 为无界量,所以对 $\forall G > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta$, 当 $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x_\delta)| > G$.

于是对 $G_1 = 1, \delta_1 = 1$, $\exists x_1$, 当 $0 < |x_1 - x_0| < 1$ 时,有 $|f(x_1)| > 1$.

对 $G_1 = 2, \delta_1 = \dfrac{1}{2}$, $\exists x_2$, 当 $0 < |x_2 - x_0| < \dfrac{1}{2}$ 时,有 $|f(x_2)| > 2$.

……

对 $G_n = n, \delta_n = \dfrac{1}{n}$, $\exists x_n$, 当 $0 < |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ 时,有 $|f(x_n)| > n$.

……

由此得到一列 $\{x_n\}$,满足 $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

例10 证明:当$x \to +\infty$时,$f(x)=\dfrac{\log_a x}{x^k}$,$g(x)=\dfrac{x^k}{a^x}$都是无穷小量,其中$a>1,k>1$.

证 不妨设$x>1$,则$\exists n=[x]\in\mathbb{N}_+$,有$n\le x<n+1$.

当$x\to+\infty$时,有$n\to\infty$.

$$0<\frac{\log_a x}{x^k}<\frac{\log_a(n+1)}{n^k}<\frac{n+1}{n^k}<\frac{2n}{n^k}=\frac{2}{n^{k-1}},$$

$$0<\frac{x^k}{a^x}<\frac{(n+1)^k}{a^n},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^{k-1}}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^k}{a^n}=0,$

根据迫敛性知,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^k}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0.$

无穷小(大)量阶的比较

设当 $x \to x_0$ 时，$f(x), g(x)$ 均是无穷小(大)量，且$g(x) \neq 0$.

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$，则称 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 为$g(x)$的

高阶(低阶)无穷小(大)量,或称$g(x)$为$f(x)$的

低阶(高阶)无穷小(大)量,

记作 $f(x) = o\big(g(x)\big)\ (x \to x_0)$.

当 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量时,记

$$f(x) = o(1)\quad (x \to x_0).$$

无穷小(大)量阶的比较

设当 $x \to x_0$ 时，$f(x), g(x)$ 均是无穷小(大)量，且$g(x) \neq 0$.

2. 若存在正数K和L,使得在某$U^\circ(x_0)$上有

$$K \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq L,$$

则称$f(x)$与$g(x)$是$x \to x_0$时的同阶无穷小(大)量.

特别当 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$

时，$f(x)$与$g(x)$必为同阶无穷小(大)量.

无穷小(大)量阶的比较

设当 $x \to x_0$ 时，$f(x), g(x)$ 均是无穷小(大)量，且$g(x) \neq 0$.

若两个无穷小(大)量在$U^\circ(x_0)$上满足

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le L,$$

则称$\dfrac{f(x)}{g(x)}$是$x \to x_0$时的有界量，

记 $f(x) = O\big(g(x)\big)\ (x \to x_0)$.

若f在某$U^\circ(x_0)$上有界，则记为 $f(x) = O(1)\ (x \to x_0)$.

无穷小(大)量阶的比较

设当 $x \to x_0$ 时，$f(x), g(x)$ 均是无穷小(大)量，且$g(x) \neq 0$.

3. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，则称$f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的

等价无穷小(大)量.

记作 $f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0)$.

同时有 $f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big) \quad (x \to x_0)$.

无穷小(大)量阶的比较

设当 $x \to x_0$ 时，$f(x), g(x)$ 均是无穷小(大)量，且 $g(x) \neq 0$.

4.若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = c \neq 0(\alpha > 0)$,则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的 α 阶无穷小量.

若 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = c \neq 0(\alpha > 0)$,则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的 α 阶无穷小量.

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{(x-x_0)^\alpha}} = c \neq 0(\alpha > 0)$,则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的 α 阶无穷大量.

若 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^\alpha} = c \neq 0(\alpha > 0)$,则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的 α 阶无穷大量.

注： 例如 $1-\cos x = o(x)\ (x\to 0)$； $\sin x = o(1)\ (x\to 0)$；

$$\tan x - \sin x = o(x^2)\ (x\to 0);$$

$$x^k = o(1)\ (x\to 0, k>0)\ .\ x^{k+1} = o(x^k)\ (x\to 0, k>0)\ .$$

当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x$与x^2是同阶无穷小量.

当 $x\to 0$ 时,x与$x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$是同阶无穷小量.

若$f(x),g(x)$为$x\to x_0$时的同阶无穷小量,则有

$$f(x)=O\big(g(x)\big)\ (x\to x_0).$$

反之不一定成立, 例如 $x\sin\dfrac{1}{x}=O(x)\ (x\to 0)$.

但是$x\sin\dfrac{1}{x}$与x这两个无穷小量不是同阶的.

注：这里的$f(x)=o\big(g(x)\big)$与$f(x)=O\big(g(x)\big)(x\to x_0)$和通常的等式是不同的，这两个式子的右边，本质上只是表示一类函数.

例如 $o\big(g(x)\big)(x\to x_0)$表示$g(x)$的所有高阶无穷小量的集合. 也就是说，这里的“$=$”类似于“$\in$”.

$$o\big(g(x)\big)\pm o\big(g(x)\big)=o\big(g(x)\big)(x\to x_0).$$

注： 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 所以$\sin x\sim x(x\to 0)$;

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$, 所以$\arctan x\sim x(x\to 0)$;

同样还有 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$.

注： 并不是任何两个无穷小量都可作阶的比较.

例如 $\dfrac{\sin x}{x}$与$\dfrac{1}{x^2}$均为$x\to+\infty$时的无穷小量,却不能

按照前面讨论的方式进行阶的比较.这是因为

$$\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1}{x^2}}=x\sin x\ (x\to+\infty)$$

是一个无界量,并且$(2n\pi)\sin(2n\pi)\to 0$.

例11 证明：当$x\to 0^+$时，$f(x)=\left(\dfrac{-1}{\ln x}\right)^k$是$x$的低阶无穷小量，其中$k\in\mathbb{N}_+$.

证 考虑极限$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\left(\dfrac{-1}{\ln x}\right)^k}$.

令$y=-\ln x$，即$x=\mathrm{e}^{-y}$，则当$x\to 0^+$时，$y\to+\infty$，于是

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\left(\dfrac{-1}{\ln x}\right)^k}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{\left(\dfrac{1}{y}\right)^k}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^k}{\mathrm{e}^y}=0.$$

所以当$x\to 0^+$时，$f(x)=\left(\dfrac{-1}{\ln x}\right)^k$是$x$的低阶无穷小量.

例12 证明：当$x \to 0^+$时，$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$是x^k的高阶无穷小量，其中$k \in \mathbb{N}_+$.

证 考虑极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^k}$.

令$y=\dfrac{1}{x}$，则当$x \to 0^+$时，$y \to +\infty$，于是

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^k}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y}}{\left(\dfrac{1}{y}\right)^k}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^k}{e^y}=0.$$

所以当$x \to 0^+$时，$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$是x^k的高阶无穷小量.

等价无穷小量的性质

若 $f(x) \sim g(x)\ (x \to x_0)$, $g(x) \sim h(x)\ (x \to x_0)$,

那么 $f(x) \sim h(x)\ (x \to x_0)$.

证 因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{h(x)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}=1\ .$$

所以$f(x)\sim h(x)(x\to x_0)$.

等价无穷小量替换定理

设函数 f, g, h 在 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，且有

$$f(x) \sim g(x)\ (x \to x_0).$$

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x) = A$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = A$.

证 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1,$

所以

$$\lim_{x\to x_0} g(x)h(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}f(x)h(x)=A.$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1,$

所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

例13 证明: $\ln(1+x) \sim x\,(x \to 0)$.

证 利用 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ 以及复合函数极限运算法则, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

例14 证明: $e^x-1\sim x(x\to 0)$. $a^x-1\sim x\ln a(x\to 0,a>0)$.

证 令$y=e^x-1$,即$x=\ln(1+y)$, 则当$x\to 0$时,$y\to 0$. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

令$y=a^x-1$,即$x=\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$,则当$x\to 0$时,$y\to 0$.于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)\cdot\ln a}=1.$$

例15 证明：$(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x (x \to 0)$.

证 令$y=(1+x)^{\alpha}-1$，则当$x \to 0$时，$y \to 0$.于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\ln(1+x)^{\alpha}}\cdot\frac{\ln(1+x)^{\alpha}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\ln(1+x)^{\alpha}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}$$

$$=\alpha\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}$$

$$=\alpha.$$

注： 常用的等价无穷小：当 $x \to 0$ 时，

$$\sin x \sim x; \quad \arcsin x \sim x; \quad \tan x \sim x; \quad \arctan x \sim x;$$

$$e^x - 1 \sim x; \quad a^x - 1 \sim x \ln a; \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2};$$

$$\ln(1+x) \sim x; \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

例16 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin 2x}$.

解 因为 $\arctan x \sim x$, $\sin 2x \sim 2x \quad (x\to 0)$,

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

例17 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}\cancel{=}\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\big(x+o(x)\big)-\big(x+o(x)\big)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x^3}$,

不能据此判断极限是否存在.

注：等价无穷小替换适用于乘、除运算，不适用于加、减运算.

如当 $x \to 0$ 时，$x^3 + x \sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3+x\right)-x}{x^3} \cancel{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3+x\right)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3} = 1.$$

例18 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{1}{2}x}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x\right)}$$

$$=-\frac{1}{8}.$$

例19 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{(e^{2x}-1)\tan x}$.

解 由于 $\ln(1+x^2)\sim x^2, \mathrm{e}^{2x}-1\sim 2x, \tan x\sim x (x\to 0)$,从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{(\mathrm{e}^{2x}-1)\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x\cdot x}=\frac{1}{2}.$$

例20 计算 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$.

解1

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}-1\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\left(\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-\left(-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{2}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{2}{3}.$$

例20 计算 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$.

解2

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\frac{(x^3+x)-(x^3-x)}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x)(x^3-x)}+\sqrt[3]{(x^3-x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x)(x^3-x)}+\sqrt[3]{(x^3-x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}}=\frac{2}{3}.$$

例21 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{-\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^{-\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)-\left(e^{-\frac{x}{3}}-1\right)}{\ln(1+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)-\left(-\frac{x}{3}+o(x)\right)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}x+o(x)}{2x}=\frac{5}{12}.$$

例22 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\right)\tan\dfrac{x^2}{2}}{1-\cos x^{\frac{5}{4}}}$.

解 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\right)\tan\dfrac{x^2}{2}}{1-\cos x^{\frac{5}{4}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\sqrt{x}}{2}\cdot\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{2}}=\frac{1}{2}.$$

例23 设$y(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$,求$y(x)$的等价无穷小量与等价无穷大量.

解 $y(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}=\sqrt{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}=\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}\sim\sqrt{x}(x\to+\infty).$

$y(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=x^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{x}+1}\sim x^{\frac{1}{4}}(x\to 0^+).$

例24 设$y(x)=2x^3+3x^6$,求$y(x)$的等价无穷小量与等价无穷大量.

解 $$y(x)=2x^3+3x^6=3x^6\left(\frac{2}{3x^3}+1\right)\sim 3x^6(x\to\infty).$$

$$y(x)=2x^3+3x^6=2x^3\left(1+\frac{3}{2}x^3\right)\sim 2x^3(x\to 0).$$

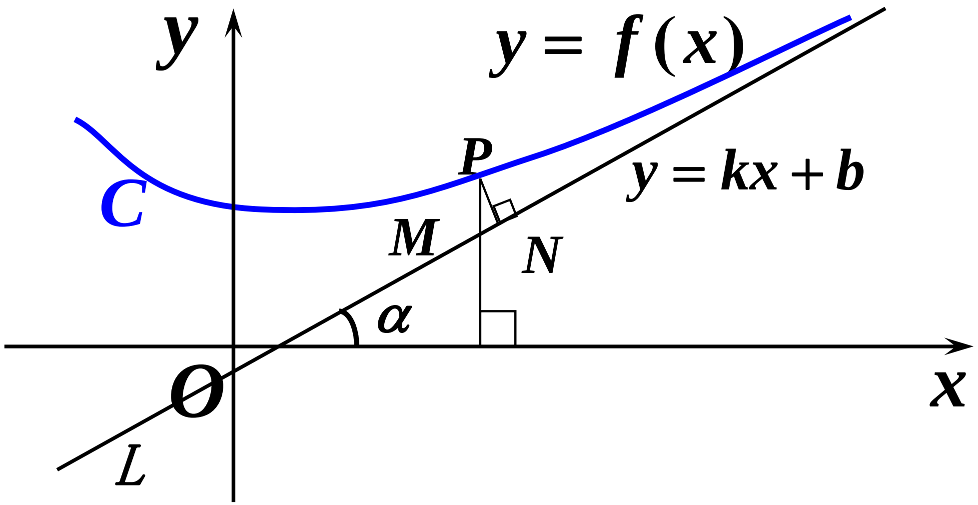
注： 一个变量由几个相互不同阶的变量相加而成的,

则当它是无穷大量时,它与阶数最高的那个无穷大量等价;

当它是无穷小量时,它与阶数最低的那个无穷小量等价.

渐近线

若曲线C上的动点P沿曲线无限远离原点时,点P与某定直线L的距离趋于零,则称直线L为曲线C的一条渐近线.



如何求曲线$y=f(x)$的斜渐近线?

如图所示,设斜渐近线L的方程为$y=kx+b$.

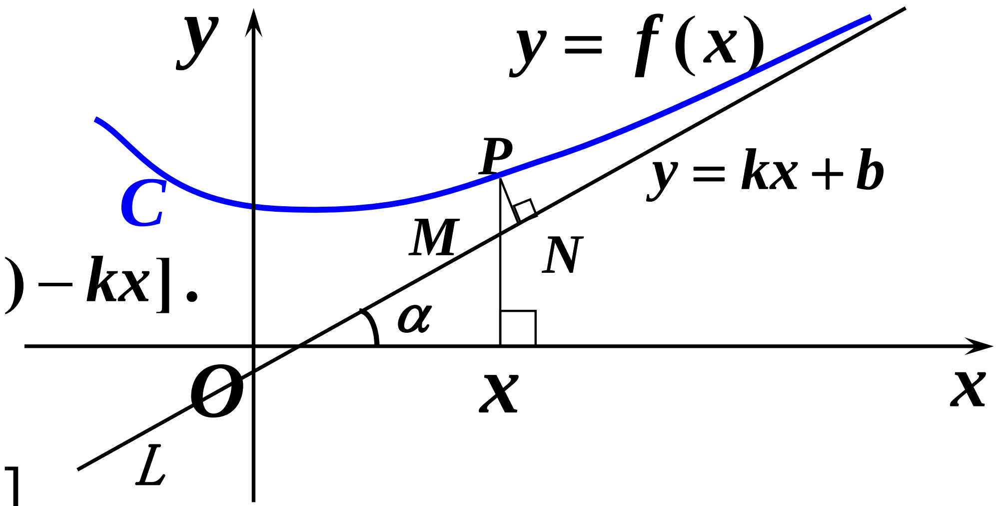
曲线上的动点$P(x,y)$到直线L的距离为

$$|PN|=|PM|\cdot|\cos\alpha|=\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

由渐近线的定义,$x\to+\infty$ 时(或$x\to-\infty$, $x\to\infty$时), $|PN|\to 0$,

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-kx-b}{\sqrt{1+k^2}}=0$, 从而

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0\Rightarrow b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx].$$



又 $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}[f(x)-kx]$$

$$=0\cdot b=0,\quad 所以\ k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

如何求曲线$y = f(x)$的斜渐近线?

这样求确定了斜渐近线的两个参数:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx].$$

这是沿x轴正向的渐近线的方程.

显然沿x轴负向的斜渐近线的斜率和截距分别为

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx].$$

同样也可以求出沿着$x\to\infty$的渐近线方程.

注： 特别当$k=0$时,该渐近线称为水平渐近线.

曲线$y=f(x)$有水平渐近线的充要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\,(\neq\infty)\quad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=A\,,\lim_{x\to\infty} f(x)=A\right).$$

若函数$f(x)$满足

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty \text{或} \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty\right),$$

则称$x=x_0$是曲线$y=f(x)$的垂直渐近线.

例25 求曲线$f(x)=\arctan x$的渐近线.

解 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,

所以$y=\dfrac{\pi}{2}, y=-\dfrac{\pi}{2}$是曲线$y=\arctan x$的水平渐近线.

曲线$y=\arctan x$没有垂直渐近线.

例26 求曲线$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$的渐近线.

解 由于 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$，从而

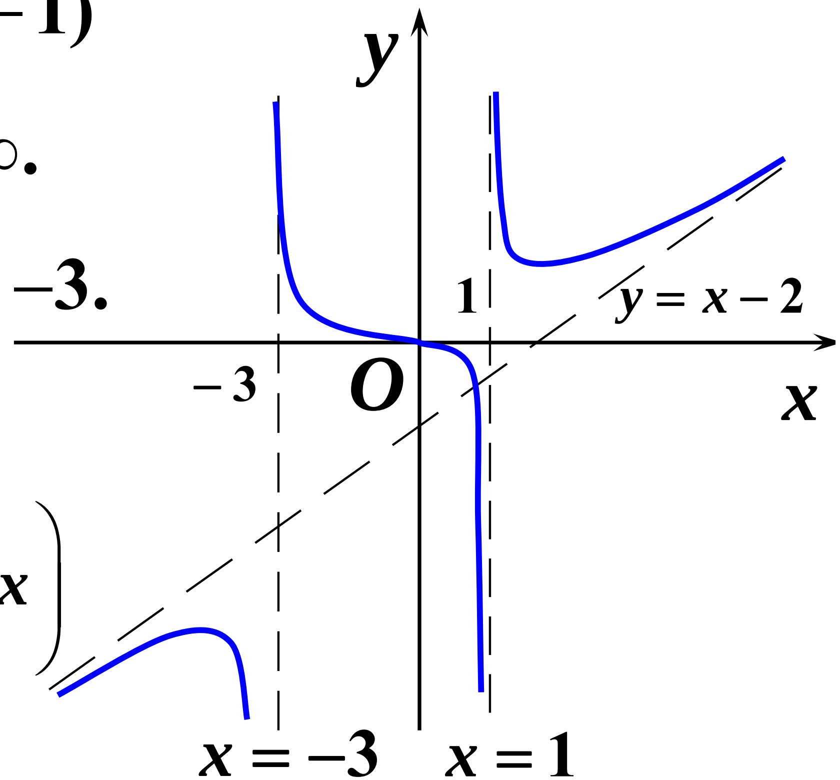
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to -3} f(x)=\infty.$$

所以此曲线有垂直渐近线 $x=1, x=-3.$

又 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(x+3)(x-1)}=1,$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2.$$



所以此曲线有斜渐近线 $y=x-2.$

例27 求曲线$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$的渐近线.

解 由于$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\dfrac{x^2+x-1}{x^3}}=1$,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{x^2+x-1}{x^3}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(-\frac{x^2+x-1}{3x^3}\right)=-\frac{1}{3}.$$

所以此曲线有斜渐近线 $y=x-\dfrac{1}{3}$.

你应该：

知道无穷小量、无穷大量的定义

理解无穷小量、无穷大量阶的比较

会利用等价无穷小替换求极限

会求曲线的渐近线