数学建模算法与应用

第16章　目标规划

线性规划只能解决一组线性约束条件下，一个目标的最大或最小值的问题。在实际决策中，衡量方案优劣要考虑多个目标，这些目标中，有主要的，也有次要的；有最大值的，也有最小值的；有定量的，也有定性的；有相互补充的，也有相互对立的，线性规划则无能为力。

美国经济学家查恩斯（A. Charnes）和库柏（W. W. Cooper）在 1961 年出版的《管理模型及线性规划的工业应用》一书中，首先提出目标规划（Goal Programming）。目标规划的求解思路有两种。

（1）加权系数法

为每一目标赋一个权系数，把多目标模型转化成单一目标的模型。但困难是要确定合理的权系数，以反映不同目标之间的重要程度。

（2）优先等级法

将各目标按其重要程度不同的优先等级，转化为单目标模型。

在目标规划中不提最优解的概念，只提满意解的概念，即寻求能够照顾到各个目标，并使决策者感到满意的解，由决策者来确定选取哪一个解，但满意解的数目太多而难以将其一一求出。

16.1 目标规划的数学模型

16.1.1 目标规划的概念

为了具体说明目标规划与线性规划在处理问题方法上的区别，先通过例子来介绍目标规划的有关概念及数学模型。

例 16.1　某工厂生产 I，II 两种产品，已知有关数据见表 16.1，试求获利最大的生产方案。

表 16.1　生产数据表

	I	II	拥有量
原材料 kg	2	1	11
设　备 hr	1	2	10
利润 万元/件	8	10	

解　这是一个单目标的规划问题。设生产产品Ⅰ，Ⅱ的量分别为x_1, x_2时获利z最大，建立如下线性规划模型

$$\max \quad z = 8x_1 + 10x_2,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

最优决策方案为$x_1^* = 4$，$x_2^* = 3$，$z^* = 62$万元。

但实际上工厂在作决策方案时，要考虑市场等一系列其它条件。如

(1)根据市场信息,产品 I 的销售量有下降的趋势,故考虑产品 I 的产量不大于产品 II。

（2）超过计划供应的原材料，需要高价采购，这就使成本增加。

（3）应尽可能充分利用设备，但不希望加班。

（4）应尽可能达到并超过计划利润指标 56 万元。

这样在考虑产品决策时，便为多目标决策问题。目标规划方法是解决这类决策问题的方法之一。下面引入与建立目标规划数学模型有关的概念。

1. 正、负偏差变量

设 f_i（$i=1,\cdots,l$）为第i个目标函数，它的正偏差变量$d_i^+=\max\{f_i-d_i^0,0\}$表示决策值超过目标值的部分，负偏差变量$d_i^-=-\min\{f_i-d_i^0,0\}$表示决策值未达到目标值的部分，这里$d_i^0$表示 f_i的目标值。因决策值不可能既超过目标值同时又未达到目标值，即恒有$d_i^+\times d_i^-=0$。

2. 绝对（刚性）约束和目标约束

绝对约束是指必须严格满足的等式约束和不等式约束，如线性规划问题的所有约束条件，不能满足这些约束条件的解称为非可行解，所以它们是硬约束。目标约束是目标规划特有的，可把约束右端项看作要追求的目标值。在达到此目标值时允许发生正或负偏差，因此在这些约束中加入正、负偏差变量，它们是软约束。线性规划问题的目标函数，在给定目标值和加入正、负偏差变量后可变换为目标约束。也可根据问题的需要将绝对约束变换为目标约束。

如: 例 16.1 的目标函数$z=8x_1+10x_2$可变换为目标约束$8x_1+10x_2+d_1^- - d_1^+ = 56$。绝对约束$2x_1+x_2\le 11$可变换为目标约束$2x_1+x_2+d_2^- - d_2^+ = 11$。

3. 优先因子（优先等级）与权系数

一个规划问题常常有若干个目标。但决策者在要求达到这些目标时，是有主次或轻重缓急的。凡要求第一位达到的目标赋于优先因子P_1，次位的目标赋于优先因子$P_2,\cdots,$并规定$P_k >> P_{k+1}, k=1,2,\cdots,q$。表示$P_k$比$P_{k+1}$有更大的优先权。以此类推，若要区别具有相同优先因子的两个目标的差别，这时可分别赋于它们不同的权系数w_j，这些都由决策者按具体情况而定

4. 目标规划的目标函数

目标规划的目标函数（准则函数）是按各目标约束的正、负偏差变量和赋于相应的优先因子而构造的。当每一目标值确定后，决策者的要求是尽可能缩小偏离目标值。因此目标规划的目标函数只能是所有偏差变量的加权和。其基本形式有三种。

（1）第i个目标要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能地小，这时

$$\min \quad w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+ .$$

（2）第i个目标要求不超过目标值，即允许达不到目标值，就是正偏差变量要尽可能地小，这时

$$\min \quad w_i^+ d_i^+ .$$

（3）第i个目标要求超过目标值，即超过量不限，但必须是负偏差变量要尽可能地小，这时

$$\min \quad w_i^- d_i^- .$$

对每一个具体目标规划问题，可根据决策者的要求和赋于各目标的优先因子来构造目标函数，以下用例子说明。

例 16.2 例 16.1 的决策者在原材料供应受严格限制的基础上考虑，首先是产品 II 的产量不低于产品 I 的产量；其次是充分利用设备有效台时，不加班；再次是利润额不小于 56 元。求决策方案。

解　按决策者所要求的，分别赋于这三个目标的优先因子为P_1, P_2, P_3。这问题的数学模型是

$$\min \quad P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11, \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0, \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10, \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56, \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases}$$

16.1.2 目标规划的一般数学模型

设x_j（$j=1,2,\cdots,n$）是目标规划的决策变量，共有m个约束是刚性约束，可能是等式约束，也可能是不等式约束。设有l个柔性目标约束，其目标约束的偏差为d_i^+,d_i^-（$i=1,2,\cdots,l$）。设有 个优先级别，分别为$P_1,P_2,\cdots,P_q$。在同一个优先级P_k中，有不同的权重，分别记为$w_{ki}^+,w_{ki}^-(i=1,2,\cdots,l)$。因此目标规划模型的一般数学表达式为

16.1.2 目标规划的一般数学模型

$$\min \quad z=\sum_{k=1}^{q} P_k \left(\sum_{i=1}^{l} w_{ki}^{-} d_i^{-} + w_{ki}^{+} d_i^{+} \right)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j \le (=,\ge) b_t, \quad t=1,\cdots,m, \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + d_i^{-} - d_i^{+} = d_i^{0}, \quad i=1,2,\cdots,l, \\ x_j \ge 0, \quad j=1,2,\cdots,n, \\ d_i^{-}, d_i^{+} \ge 0, \quad i=1,2,\cdots,l. \end{cases}$$

建立目标规划的数学模型时，需要确定目标值、优先等级、权系数等，它们都具有一定的主观性和模糊性，可以用专家评定法给以量化。

16.2 求解目标规划的序贯算法

序贯算法是求解目标规划的一种早期算法，其核心是根据优先级的先后次序，将目标规划问题分解成一系列的单目标规划问题，然后再依次求解。

下面介绍求解目标规划的序贯算法。对于 $k=1,2,\cdots,q$，求解单目标规划

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{l}(w_{ki}^{-}d_i^{-}+w_{ki}^{+}d_i^{+}), \tag{16.1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}a_{tj}x_j \le (=,\ge) b_t, \quad t=1,\cdots,m, \tag{16.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j+d_i^{-}-d_i^{+}=d_i^{0}, \quad i=1,2,\cdots,l, \tag{16.3}$$

$$\sum_{i=1}^{l}(w_{si}^{-}d_i^{-}+w_{si}^{+}d_i^{+})\le z_s^{*},$$

$$s=1,2,\cdots,k-1, \tag{16.4}$$

$$x_j\ge 0, \quad j=1,2,\cdots,n, \tag{16.5}$$

$$d_i^{-},d_i^{+}\ge 0, \quad i=1,2,\cdots,l. \tag{16.6}$$

其最优目标值为z_k^*，当$k=1$时，约束（16.4）为空约束。当$k=q$时，z_q^*所对应的解x^*为目标规划的解。

注：也可能求解到$k=k^*<q$时，解集就为空集，说明第k^*个目标是无法实现的。

例 16.3 某企业生产甲、乙两种产品，需要用到 A,B,C 三种设备，关于产品的赢利与使用设备的工时及限制如表 16.2 所示。问该企业应如何安排生产，才能达到下列目标。

（1）力求使利润指标不低于 1500 元；

（2）考虑到市场需求，甲、乙两种产品的产量比应尽量保持 1:2；

（3）设备 A 为贵重设备，严格禁止超时使用；

（4）设备 C 可以适当加班，但要控制；设备 B 既要求充分利用，又尽可能不加班。在重要性上，设备 B 是设备 C 的 3 倍。建立相应的目标规划模型并求解。

表 16.2　企业生产的有关数据

	甲	乙	设备的生产能力(h)
$_A$(h/件)	2	2	12
$_B$(h/件)	4	0	16
$_C$(h/件)	0	5	15
赢利（元/件）	200	300	

解　设备A是刚性约束，其余是柔性约束。首先，最重要的指标是企业的利润，因此，将它的优先级列为第一级；其次，甲、乙两种产品的产量保持1:2的比例，列为第二级；再次，设备C,B的工作时间要有所控制，列为第三级。在第三级中，设备B的重要性是设备C的三倍，因此，它们的权重不一样，设备B前的系数是设备C前系数的3倍。

设生产甲乙两种产品的件数分别为x_1, x_2，相应的目标规划模型为（序贯算法 lingo 程序略）

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + P_3(3d_3^+ + 3d_3^- + d_4^+)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 200x_1 + 300x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1500, \\ 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0, \\ 4x_1 + d_3^- - d_3^+ = 16, \\ 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15, \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3,4. \end{cases}$$

目标函数的最优值为29，即第三级偏差为29。

分析计算结果，$x_1 = 2$，$x_2 = 4$，$d_1^+ = 100$，因此，目标规划的最优解为$x^* = [2,4]$，最优利润为1600。

例 16.4（续例 16.3） 按照序贯算法，编写求解例 16.3 的通用 Lingo 程序。

16.3 多标规划的Matlab解法

多目标规划可以归结为

$$\min_{x,\gamma} \ \gamma,$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} F(x) - weight \cdot \gamma \le goal, \\ A \cdot x \le b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ c(x) \le 0, \\ ceq(x) = 0, \\ lb \le x \le ub. \end{cases}$$

其中$x,weight,goal,b,beq,lb$和ub是向量，A和Aeq是矩阵；$c(x),ceq(x)$和$F(x)$是向量函数，他们可以是非线性函数。$F(x)$是所考虑的目标函数，$goal$是欲达到的目标，多目标规划的 Matlab 函数 fgoalattain 的用法为

[x,fval]= fgoalattain('fun',x_0,goal,weight)

[x,fval]= fgoalattain('fun',x_0,goal,weight,A,b)

[x,fval]= fgoalattain('fun',x_0,goal,weight,A,b,Aeq,beq)

[x,fval]=

fgoalattain('fun',x_0,goal,weight,A,b,Aeq,beq,lb,ub,

nonlcon)

其中 fun 是用 M 文件定义的目标向量函数，x_0 是初值，weight 是权重。A,b 定义不等式约束$A\cdot x \le b$，Aeq，beq 定义等式约束$Aeq\cdot x = beq$，nonlcon 是用 M 文件定义的非线性约束$c(x)\le 0$，$ceq(x)=0$。返回值 fval 是目标向量函数的值。

要完整掌握其用法，请用 doc fgoalattain 或 type fgoalattain 查询相关的帮助。

例 16.5 求解多目标线性规划问题

$$\max\ Z_1 = 100x_1 + 90x_2 + 80x_3 + 70x_4,$$

$$\min\ Z_2 = 3x_2 + 2x_4,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 30, \\ x_3 + x_4 \geq 30, \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 120, \\ 3x_2 + 2x_4 \leq 48, \\ x_i \geq 0,\quad i = 1,\cdots,4. \end{cases}$$

求得 $x_1 = 32.3845$，$x_2 = 0$，$x_3 = 11.4232$，$x_4 = 18.5768$，对应的第一个目标函数 $Z_1 = 4538.3$，第二个目标函数 $Z_2 = 37.2$(程序略)。

注：可能每次运行结果都不一样，不过差异不大。

16.4 目标规划模型的实例

前面介绍了目标规划的求解方法，这里再介绍几个目标规划模型的例子，帮助我们进一步了解目标规划模型的建立和求解过程。

例16.6 某计算机公司生产三种型号的笔记本电脑A,B,C。这三种笔记本电脑需要在复杂的装配线上生产，生产1台A,B,C型号的笔记本电脑分别需要5，8，12（h）。公司装配线正常的生产时间是每月1700h。公司营业部门估计A,B,C三种笔记本电脑的利润分别是每台1000，1440，2520（元），而公司预测这个月生产的笔记本电脑能够全部售出。公司经理考虑以下目标

第一目标：充分利用正常的生产能力，避免开工不足；

第二目标：优先满足老客户的需求，A,B,C 三种型号的电脑分别为50，50，80（台），同时根据三种电脑的纯利润分配不同的权因子；

第三目标：限制装配线加班时间，最好不要超过200h；

第四目标：满足各种型号电脑的销售目标，A,B,C 型号分别为100，120，100（台），再根据三种电脑的纯利润分配不同的权因子；

第五目标：装配线的加班时间尽可能少。

请列出相应的目标规划模型，并用LINGO软件求解。

解　首先建立目标约束。

（1）装配线正常生产

设生产A,B,C型号的电脑为x_1,x_2,x_3（台），d_1^-为装配线正常生产时间未利用数，d_1^+为装配线加班时间，希望装配线正常生产，避免开工不足，因此装配线目标约束为

$$\begin{cases} \min\{d_1^-\}, \\ 5x_1+8x_2+12x_3+d_1^- - d_1^+ = 1700. \end{cases}$$

（2）销售目标

优先满足老客户的需求，并根据三种电脑的纯利润分配不同的权因子，A,B,C 三种型号的电脑每小时的利润是$\frac{1000}{5},\frac{1440}{8},\frac{2520}{12}$，因此，老客户的销售目标约束为

$$\begin{cases} \min\{20d_2^- + 18d_3^- + 21d_4^-\}, \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 50, \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 50, \\ x_3 + d_4^- - d_4^+ = 80. \end{cases}$$

再考虑一般销售。类似上面的讨论，得到

$$\begin{cases} \min\{20d_5^- + 18d_6^- + 21d_7^-\}, \\ x_1 + d_5^- - d_5^+ = 100, \\ x_2 + d_6^- - d_6^+ = 120, \\ x_3 + d_7^- - d_7^+ = 100. \end{cases}$$

（3）加班限制

首先是限制装配线加班时间，不允许超过200h，因此得到

$$\begin{cases}\min \{d_8^+\},\\ 5x_1+8x_2+12x_3+d_8^- - d_8^+ = 1900.\end{cases}$$

其次装配线的加班时间尽可能少，即

$$\begin{cases}\min \{d_1^+\},\\ 5x_1+8x_2+12x_3+d_1^- - d_1^+ = 1700.\end{cases}$$

写出目标规划的数学模型(lingo程序略)

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(20d_2^- + 18d_3^- + 21d_4^-) + P_3 d_8^+$$
$$+ P_4(20d_5^- + 18d_6^- + 21d_7^-) + P_5 d_1^+,$$

$$\text{s.t.}\quad 5x_1 + 8x_2 + 12x_3 + d_1^- - d_1^+ = 1700,$$
$$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 50,$$
$$x_2 + d_3^- - d_3^+ = 50,$$
$$x_3 + d_4^- - d_4^+ = 80,$$
$$x_1 + d_5^- - d_5^+ = 100,$$
$$x_2 + d_6^- - d_6^+ = 120,$$
$$x_3 + d_7^- - d_7^+ = 100,$$
$$5x_1 + 8x_2 + 12x_3 + d_8^- - d_8^+ = 1900,$$
$$x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1, 2, \cdots, 8.$$

经5次计算得到$x_1 = 100$，$x_2 = 55$，$x_3 = 80$。装配线生产时间为1900h，满足装配线加班不超过200h的要求。能够满足老客户的需求，但未能达到销售目标。销售总利润为

100×1000+55×1440+80×2520=380800（元）

例16.7　已知三个工厂生产的产品供应给四个客户，各工厂生产量、用户需求量及从各工厂到用户的单位产品的运输费用如表16.3所示，其中总生产量小于总需求量。

表16.3　运输费用和供需数据表

	用户 1	用户 2	用户 3	用户 4	生产量
工厂1	5	2	6	7	300
工厂2	3	5	4	6	200
工厂3	4	5	2	3	400
需求量	200	100	450	250	

（1）求总运费最小的运输问题的调度方案。

（2）上级部门经研究后，制定了新调配方案的8项目标，并规定了重要性的次序。

第一目标：用户4为重要部门，需求量必须全部满足；

第二目标：供应用户1的产品中，工厂3的产品不少于100个单位；

第三目标：每个用户的满足率不低于80％；

第四目标：应尽量满足各用户的需求；

第五目标: 新方案的总运费不超过原运输问题的调度方案的10%;

第六目标：因道路限制，工厂2到用户4的路线应尽量避免运输任务;

第七目标：用户1和用户3的满足率应尽量保持平衡;

第八目标：力求减少总运费。

请列出相应的目标规划模型，并用 Lingo 程序求解。

解　设c_{ij}表示从工厂$i\,(i=1,2,3)$到用户$j(j=1,2,3,4)$的单位产品的运输费用，a_j表示第j个用户的需求量，b_i表示第i个工厂的生产量。

该题中总生产量小于总需求量。

（1）求解原运输问题

设x_{ij}为工厂$i(i=1,2,3)$调配给用户$j(j=1,2,3,4)$的运量，建立如下的总运费最小的线性规划模型

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = b_i, \quad i = 1,2,3, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \le a_j, \quad j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

求得总运费是2950元，运输方案如表16.4所示(程序略)。

表16.4　运输方案表

	用户 1	用户 2	用户 3	用户 4	生产量
工厂1		100	200		300
工厂2	200				200
工厂3			250	150	400
需求量	200	100	450	250	

（2）按照目标重要性的等级列出目标规划的约束和目标函数

仍设x_{ij}为工厂$i(i=1,2,3)$调配给用户$j(j=1,2,3,4)$的运量。

i）由于总生产量小于总需求量，产量约束应严格满足，即

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = b_i,\quad i=1,2,3.$$

ii）供应用户1的产品中，工厂3的产品不少于100个单位，即

$$x_{31} + d_1^- - d_1^+ = 100.$$

iii）需求约束。各用户的满足率不低于80%，即

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_2^- - d_2^+ = 160,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_3^- - d_3^+ = 80,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_4^- - d_4^+ = 360,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_5^- - d_5^+ = 200,$$

应尽量满足各用户的需求，即

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_6^- - d_6^+ = 200,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_7^- - d_7^+ = 100,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_8^- - d_8^+ = 450,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_9^- - d_9^+ = 250.$$

iv）新方案的总运费不超过原方案的10%（原运输方案的运费为2950元），即

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+d_{10}^{-}-d_{10}^{+}=3245.$$

v）工厂2到用户4的路线应尽量避免运输任务，即

$$x_{24}+d_{11}^{-}-d_{11}^{+}=0.$$

vi）用户1和用户3的满足率应尽量保持平衡，即

$$(x_{11}+x_{21}+x_{31})-\frac{200}{450}(x_{13}+x_{23}+x_{33})+d_{12}^{-}-d_{12}^{+}=0.$$

vii）力求总运费最少，即

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} + d_{13}^- - d_{13}^+ = 2950.$$

此外

$$x_{ij} \geq 0\text{，} \quad i = 1,2,3\text{，} \quad j = 1,2,3,4\text{，}$$

$$d_k^+, d_k^- \geq 0\text{，} \quad k = 1,\cdots,13.$$

目标函数为

$$\min z = P_1 d_9^- + P_2 d_1^- + P_3(d_2^- + d_3^- + d_4^- + d_5^-) + P_4(d_6^- + d$$

$$+ P_5 d_{10}^+ + P_6 d_{11}^+ + P_7(d_{12}^- + d_{12}^+) + P_8 d_{13}^+.$$

经8次运算，得到最终的计算结果，见表16.5。总运费为3360元，高于原运费410元，超过原方案10％的上限115元（程序略）。

表16.5　调运方案数据表

	用户 1	用户 2	用户 3	用户 4	生产量
工厂1		100		200	300
工厂2	90		110		200
工厂3	100		250	50	400
实际运量	190	100	360	250	
需求量	200	100	450	250	

下面给出目标规划的另外一种解法，把所有的目标偏差加权求和。

例16.8（续例16.7）　某公司从三个仓库向四个用户提供某种产品。仓库与用户所在地的供需量及单位运价见表16.6。

表16.6供需量及单位运价表

	B_1	B_2	B_3	B_4	生产量（件）
A_1	5	2	6	7	300
A_2	3	5	4	6	200
A_3	4	5	2	3	400
需求量（件）	200	100	450	250	

公司有关部门根据供求关系和经营条件，确定了下列目标

P_1：完全满足用户B_4的需要；

P_2：A_3向B_1提供的产品数量不少于100件；

P_3：每个用户的供应量不少于其需求的80%；

P_4：从仓库A_1到用户B_2之间的公路正在大修，运货量应尽量少；

P_5：平衡用户B_1和B_2的供货满意水平；

P_6：力求总运费最省；

试求满意的调运方案。

解　这是具有6个优先级目标的运输问题。设x_{ij}为从仓库A_i到用户B_j的运输量（$i=1,2,3$；$j=1,2,3,4$），d_k^-, d_k^+为第k个目标约束中，未达到规定目标的负偏差和超过目标的正偏差。a_j（$j=1,2,3,4$）是用户B_j的需求量，b_i（$i=1,2,3$）是仓库A_i的供应量，约束条件有以下几种

i）供应约束（硬约束）

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \le b_i,\quad i=1,2,3.$$

ii）需求约束。由于产品供不应求，向各用户的实际供应量不可能超过需求量，所以需求正偏差没有意义，约束为

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} + d_j^- = a_j, \quad j = 1,2,3,4.$$

iii）A_3向B_1的供货约束

$$x_{31} + d_5^- - d_5^+ = 100.$$

iv）至少满足用户需求80%的约束：

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} + d_{5+j}^- - d_{5+j}^+ = 0.8a_j, \quad j = 1,2,3,4.$$

v）A_1到B_2的运货量尽量少，也就是运货量尽可能为零。显然，负偏差没有意义，故有

$$x_{12}-d_{10}^{+}=0.$$

vi）平衡用户B_1和B_4的满意水平，也就是供应率要相同。约束条件为

$$\sum_{i=1}^{3}x_{i1}-\frac{200}{450}\sum_{i=1}^{3}x_{i3}+d_{11}^{-}-d_{11}^{+}=0.$$

vii）运费尽量少，即尽量等于零，负偏差没有意义。所以

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}-d_{12}^{+}=0.$$

目标函数为

$$\min z = P_1 d_4^- + P_2 d_5^- + P_3(d_6^- + d_7^- + d_8^- + d_9^-) + P_4 d_{10}^+ + P_5(d_{11}^- + d_{11}^+) + P_6 d_{12}^+$$

目标函数的值为 3570，观察 d1，d2 的值可以看出最小运费为 3570 元（程序略）。