Ch1 实数集与函数

顾燕红微信

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023秋季数学分析(1...

群号：921774255

QQ学习交流群

2023年10月12日

BY GYH

§1 实数

§2 数集 确界原理

§3 函数概念

§4 具有某些特性的函数

将学习：

函数的定义

函数的表示法

函数的四则运算

复合函数

反函数

初等函数

函数的定义

D与M是$\mathbb{R}$中两个非空数集,若有对应法则f,使D内每一个数x,都有唯一的一个数$y \in M$与它相对应,则称f是定义在数集D上的函数,记作

$$f: D \to M,$$
$$x \mapsto y.$$

D称为f的定义域;

x所对应的y称为f在点x的函数值,常记作$f(x)$;

$f(D)=\{y \mid y=f(x), x \in D\}(\subset M)$称为$f$的值域;

$G=\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D\}$称为$f$的图像.

注1: 函数由定义域D和对应法则f二要素完全决定. 因此若给出函数的定义域和对应法则, 也就确定了函数. 它与自变量和因变量的符号无关. 例如 $s=t^2, y=x^2$是相同的函数.

两个函数相同, 是指它们有相同的定义域和对应法则.

例如 $f(x)=1, x\in\mathbb{R}$和$g(x)=1, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$是不相同的函数.

$f(x)=|x|, x\in\mathbb{R}$和$g(x)=\sqrt{x^2}, x\in\mathbb{R}$是相同的函数.

注2: 函数f给出了x轴上的点集D到y轴上点集M之间的单值对应, 也称为映射. 对于$a\in D$, $f(a)$称为映射f下a的象, a则称为$f(a)$的原象.

注3: 若对每一个$x\in D$, 有唯一的一个y值与它对应, 则称单值函数.

若对同一个$x\in D$, 有多个y值与它对应, 则称多值函数.

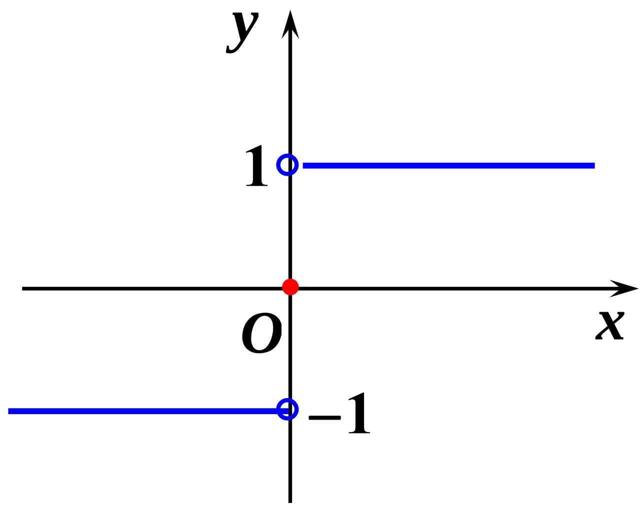
注4: 表示函数有多种方法, 常见的有: 解析法、列表法和图像法.

解析法表示函数时,若没有特别指明其定义域, 则一般约定其定义域为使该解析式有意义的自变量的全体(即存在域).

注5: 在定义域的不同部分用不同的公式表示, 称为分段函数.

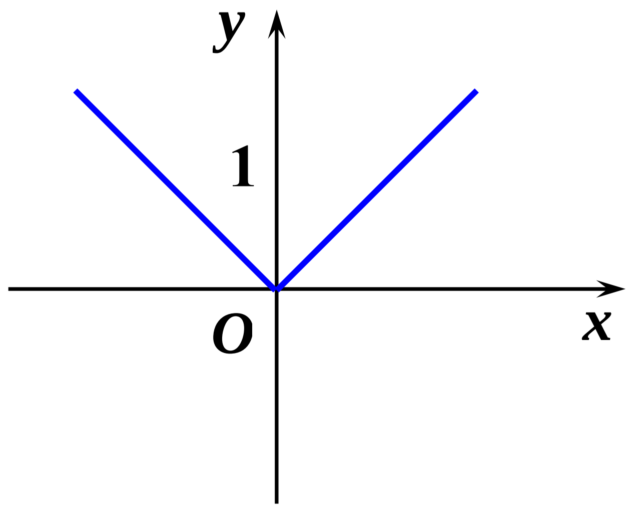
例1　符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



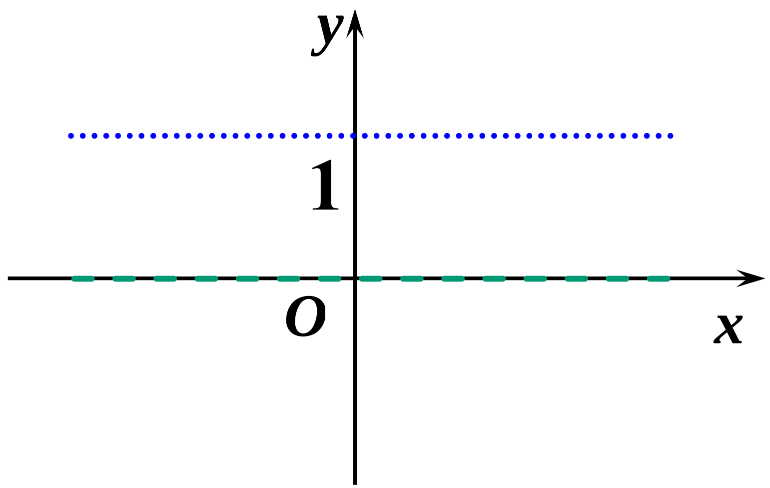
例2　绝对值函数

$$|x| = x \operatorname{sgn} x = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



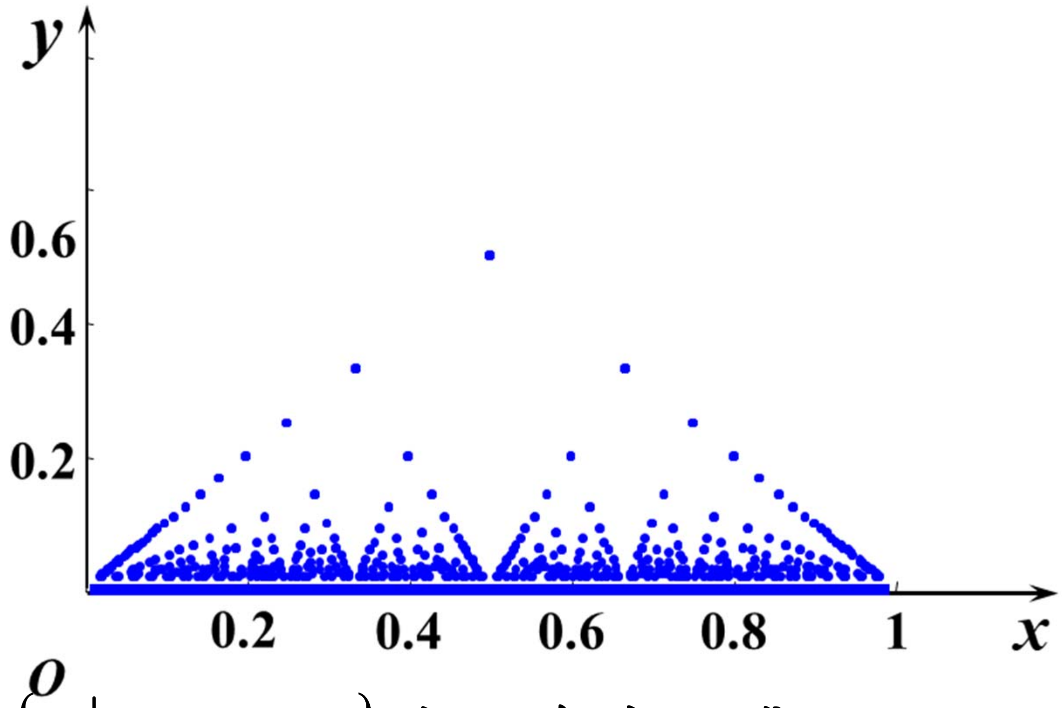
例3 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1\,, & x\in\mathbb{Q},\\ 0\,, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$



例4 黎曼(Riemann)函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\ \left(p,q\in\mathbb{N}_+,\ \dfrac{p}{q}\text{既约真分数}\right),\\[2ex] 0, & x=0,1 \text{ 或 } x\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

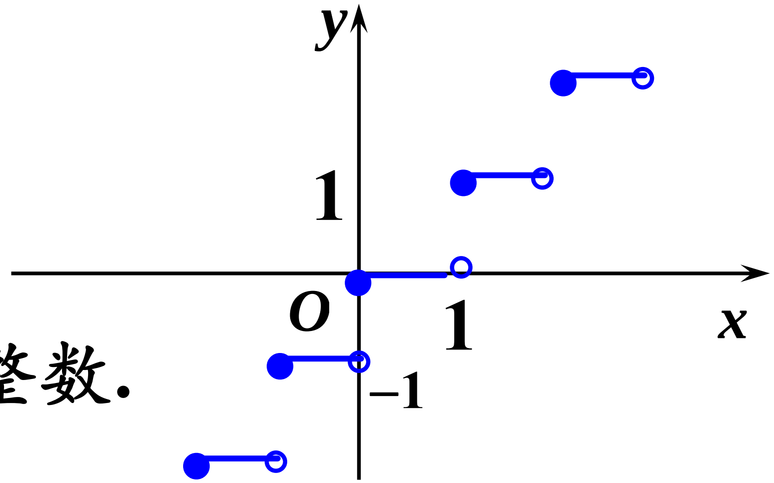


注： $\forall\varepsilon>0, A=\{x \mid R(x)\geq\varepsilon\}$为至多有限集.

例5 取整函数

$$y=[x], x\in\mathbb{R}.$$

$[x]$表示不超过x的最大整数.



注： $\forall x\in\mathbb{R}, x=[x]+\{x\}$

其中 $\{x\}$是x的小数部分.

注： $[x]\le x<[x]+1 \qquad x-1<[x]\le x \qquad [x+n]=[x]+n$

复合函数

设有两函数 $f=f(u), u\in D, u=g(x), x\in E$.

记 $E^*=\{x\,|\,g(x)\in D\}\cap E$. 若 $E^*\neq\varnothing$,则对每一个$x\in E^*$,

可通过g对应D上唯一的一个值u,而u又通过函数f对应

唯一的一个值y. 这就确定了一个定义在E^*上的函数,

它以x为自变量,y为因变量,记作

$$y=f\left(g(x)\right), x\in E^* \text{ 或 } y=\left(f\circ g\right)(x), x\in E^*,$$

称为函数f和g的复合函数. 并称f为外函数,g为内函数,

称u为中间变量.函数f和g的复合运算可简记为 $f\circ g$.

注： 若$D = D_f \cap D_g = \varnothing$，则$f$与$g$不能进行四则运算.

例如 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in D_f = \{x \mid |x| \le 1\}$,

$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}, x \in D_g = \{x \mid |x| \ge 2\}$,

表达式$f(x) + g(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4}$是没有意义的.

注：当且仅当$E^* \neq \varnothing$(即$D \cap g(E) \neq \varnothing$)时，函数$f$与$g$才能进行复合.

例如 以$y = f(u) = \arcsin u, u \in D = [-1,1]$为外函数，

$u = g(x) = 2 + x^2, x \in E = \mathbb{R}$为内函数，

就不能进行复合.

注： 一般$f \circ g \neq g \circ f$.

注：不仅能够将若干个简单函数复合，而且还要善于将复合函数分解为若干个简单函数.

例6 函数 $f(u)=\sqrt{u}, u\in[0,+\infty)$ 与函数 $u=g(x)=1-x^2, x\in\mathbb{R}$

的复合函数为

$$y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2}，其中 D_{f\circ g}=[-1,1].$$

例7 设 $f(x)=x^2, g(x)=\arcsin x, h(x)=\ln x$. 则

$$(f\circ g\circ h)(x)=\arcsin^2(\ln x),\ D_1=\left[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}\right];$$

$$(f\circ h\circ g)(x)=\ln^2(\arcsin x), D_2=(0,1];$$

$$(g\circ f\circ h)(x)=\arcsin\left(\ln^2 x\right), D_3=\left[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}\right];$$

$$(g\circ h\circ f)(x)=\arcsin\left(\ln x^2\right), D_4=\left[\mathrm{e}^{-1/2},\mathrm{e}^{1/2}\right]\cup\left[-\mathrm{e}^{1/2},-\mathrm{e}^{-1/2}\right];$$

$$(h\circ f\circ g)(x)=\ln\left(\arcsin^2 x\right), D_5=[-1,0)\cup(0,1];$$

$$(h\circ g\circ f)(x)=\ln\left(\arcsin\left(x^2\right)\right), D_6=[-1,0)\cup(0,1].$$

反函数

$y=f(x), x\in D$满足：

对于值域$f(D)$上的每一个y, D中有且只有一个 x, 使得

$$f(x)=y,$$

则按此对应法则得到一个定义在$f(D)$上的函数, 称这个

函数为f的反函数, 记为

$$f^{-1}: f(D)\to D,$$
$$y\mapsto x.$$

或 $x=f^{-1}(y), y\in f(D).$

注1: 函数f有反函数, 则f是D与$f\left(D\right)$之间的一个一一映射.

称f^{-1}为映射f的逆映射.

注2: 函数f也是函数f^{-1}的反函数. f与f^{-1}互为反函数.

则有
$$f^{-1}\left(f(x)\right)=x, x\in D.$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right)=y, y\in f(D).$$

注3: 反函数表示式 $x = f^{-1}(y)$ 中, y 是自变量, x 是因变量.

若按习惯,仍用x作为自变量的记号,y作为因变量的记号,

则有

$$y = f^{-1}(x), x \in f(D).$$

例如 $y = ax + b(a \neq 0), y = a^{x}(a > 0, a \neq 1), y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

的反函数分别是

$$y = \frac{x - b}{a}, y = \log_{a} x, y = \arcsin x.$$

基本初等函数

以下六类函数称为基本初等函数：

(1) 常量函数 $y = c$ (c为常数);

(2) 幂函数 $y = x^{\alpha}$ (α 为实数);

(3) 指数函数 $y = a^{x}\ (a > 0, a \neq 1)$;

(4) 对数函数 $y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$;

(5) 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$,

$y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$;

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,

$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

注：$y = \arcsin x,\ x \in [-1,1],\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1,1] \quad \arcsin(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

$y = \arccos x,\ x \in [-1,1],\ y \in [0,\pi]$

$y = \arctan x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \operatorname{arccot} x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0,\pi)$

注：反三角函数不能分解.

无理指数幂

$\forall a>0, a\neq 1.$ 设x为无理数，定义

$$a^x \triangleq \begin{cases} \sup\left\{a^r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x\right\}, & a>1, \\ \inf\left\{a^r \mid r\in\mathbb{Q}, r<x\right\}, & 0<a<1. \end{cases}$$

注1: 对任一无理数x,由实数的稠密性,必有有理数r_0,

使$x < r_0$,则当有理数$r < x$时, 有$r < r_0$.

从而由有理数乘幂的性质,当$a > 1$时,$\forall r < x, r \in \mathbb{Q}$,有$a^r < a^{r_0}$.

这表明非空数集 $\{a^r \mid r < x, r \in \mathbb{Q}\}$ 有一个上界a^{r_0}.

根据确界原理,该数集有上确界,所以

$$\sup\left\{a^r \middle| r \in Q, r < x\right\}, \quad a > 1,$$

是一个确定的数. 同理,当$0 < a < 1$时,

$$\inf\left\{a^r \middle| r \in Q, r < x\right\}, \quad 0 < a < 1,$$

是一个确定的数.

注2: 若将定义中的$r < x$改为$r \le x$,则无论x是无理数或是有理数,

a^x都可用定义中的确界形式来统一表示.

例8 ($\mathbb{R}$中根的存在性)设 $a\in\mathbb{R}$且$a>0, n(\geq 2)$是自然数.

证明：方程$x^n=a$有唯一的正数解.

这个解称为a的n次正根(即算数根),记为$\sqrt[n]{a}$或者$a^{\frac{1}{n}}$.

证 为简单起见，仅证$n=2$的情形.

首先证明存在性. $a=1$时显然有解.又由于方程

$$x^2=a$$

与方程

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{a}$$

同解,所以仅需考虑$0<a<1$的情形.设 $E=\{x \mid x>0, x^2<a\}$.

因为$a^2<a$,故$a\in E$,且1是E的一个上界,

因此E是非空有上界的数集,根据确界原理, E存在上确界,

记为$c=\sup E$.由确界定义易得$a\leq c\leq 1$.

下面证明$c^2=a$. 利用反证法证明. 假设$c^2\neq a$.

$$\frac{1}{m}<\frac{c^2-a}{2c}$$

(1)若$c^2>a$,则$c^2-a>0$,根据实数的阿基米德性, $\exists m\in\mathbb{N}_+$,使得

$$\frac{1}{m}<\frac{c^2-a}{2},\quad \frac{1}{m}<c.$$

由上确界的定义,对于$c-\frac{1}{m}<c$,$\exists x_0\in E$,使得$x_0>c-\frac{1}{m}>0$,从而

$$x_0^2>\left(c-\frac{1}{m}\right)^2=c^2-2\frac{c}{m}+\frac{1}{m^2}>c^2-\frac{2}{m}>c^2-(c^2-a)=a,$$

这与$x_0\in E$矛盾,说明$c^2\leq a$.

(2)若$c^2 < a$,则$a - c^2 > 0$,根据实数的阿基米德性质, $\exists m \in \mathbb{N}_+$,使得

$$\frac{1}{m} < \frac{a - c^2}{2(1+c)}, \qquad \frac{1}{m} < 1.$$

从而

$$\left(c + \frac{1}{m}\right)^2 = c^2 + 2\frac{c}{m} + \frac{1}{m^2} < c^2 + 2\frac{c}{m} + \frac{2}{m^2}$$

$$= c^2 + \frac{2}{m}\left(c + \frac{1}{m}\right)^2 < c^2 + \frac{2}{m}(c+1)^2 < c^2 + \left(a - c^2\right) = a.$$

因此$c + \dfrac{1}{m} \in E$,这与$c = \sup E$矛盾.

所以$c^2 = a$, 即c是方程$x^2 = a$的正数解.

再证明唯一性. 对任意正数$b(\neq c)$,$b^2 - a = b^2 - c^2 = (b-c)(b+c) \neq 0$,

这证明了解的唯一性.

初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数，称为**初等函数**.

注：不是初等函数的函数,称为非初等函数.

Dirichlet函数与Riemann函数都是非初等函数.

例10 试问函数 $y=\ln\sin^2\sqrt{x}$ 由哪些基本初等函数复合而成.

解 $y=\ln u$, 对数函数

$u=v^2$, 幂函数

$v=\sin t$, 三角函数

$t=\sqrt{x}$, 幂函数

你应该：

理解函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立简单应用题中的函数关系

理解复合函数及分段函数的概念

了解反函数的概念

掌握基本初等函数的性质及图像，并在有关命题中应用

狄利克雷是解析数论的创始人，对函数论、位势论和三角级数论都有重要贡献.主要著作有《数论讲义》《定积分》等. 在分析方面，狄利克雷最卓越的工作是对傅立叶级数收敛性的研究. 他在1822——1825年期间在巴黎会见傅里叶之后，对傅里叶级数产生了兴趣. 日本数学家丸山哲郎说:“把任意函数用三角级数表示出来的傅里叶方法，被狄利克雷所继承，他给出了关于傅里叶级数的收敛性证明.”

—— 摘自百度百科

约翰·彼得·古斯塔夫·勒热纳·狄利克雷
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805年2月13日 - 1859年5月5日)
德国数学家

黎曼在数学分析和微分几何方面作出过重要贡献,他开创了黎曼几何,并且给后来爱因斯坦的广义相对论提供了数学基础. 他的名字出现在黎曼ζ函数、黎曼积分、黎曼引理、黎曼流形、黎曼空间、黎曼映照定理、黎曼-希尔伯特问题、柯西-黎曼方程、黎曼思路回环矩阵中. 高斯说:"黎曼……具有创造性的、活跃的、真正数学家的头脑,具有灿烂丰富的创造力."

—— 摘自百度百科

波恩哈德 · 黎曼
Georg Friedrich Bernhard Riemann
(1826年9月20日-1866年7月20日)
德国数学家