Ch4 函数的连续性

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年11月21日

BY GYH

§1 连续性概念

§2 连续函数的性质

§3 初等函数的连续性

将学习：

初等函数的连续性

指数函数的性质

设$a>0, a\neq 1, x_1$、x_2为任意实数,则有

$$a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2},(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}.$$

证 先设$a>1$,由定义 $a^x=\sup\limits_{r\le x}\{a^r\,|\,r$ 为有理数$\}$. 根据上确界的定义,

$\forall\varepsilon>0\left(\varepsilon<a^{x_1},\varepsilon<a^{x_2}\right)$,存在有理数$r_1\le x_1$, $r_2\le x_2$,使得

$$a^{r_1}>a^{x_1}-\varepsilon,\ a^{r_2}>a^{x_2}-\varepsilon,$$

于是有 $(a^{x_1}-\varepsilon)(a^{x_2}-\varepsilon)<a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}\le a^{x_1+x_2}$.

由ε的任意性知, $a^{x_1}\cdot a^{x_2}\le a^{x_1+x_2}$.

存在有理数$r_0(r_0\le x_1+x_2)$, 使 $a^{r_0}>a^{x_1+x_2}-\varepsilon$.

再取有理数 $r_1\le x_1$, $r_2\le x_2$, 使 $r_0\le r_1+r_2$, 则

$$a^{r_0}\le a^{r_1+r_2}=a^{r_1}\cdot a^{r_2}\le a^{x_1}\cdot a^{x_2},$$

从而 $a^{x_1+x_2}-\varepsilon<a^{x_1}\cdot a^{x_2}$, 由$\varepsilon$的任意性知, $a^{x_1+x_2}\le a^{x_1}\cdot a^{x_2}$.

这就证明了 $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$.

对于$0<a<1$的情形,只要令$b=\dfrac{1}{a}$,就有

$$a^{x_1}\cdot a^{x_2}=b^{(-x_1)}\cdot b^{(-x_2)}=b^{-(x_1+x_2)}=a^{x_1+x_2}.$$

指数函数的连续性

指数函数$y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$在$\mathbb{R}$上是连续的.

证 先假设$a>1$.

首先证明指数函数在$x=0$处连续，即$\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$.

对$\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，取$\delta=\min\left\{\log_a(1+\varepsilon), \left|\log_a(1-\varepsilon)\right|\right\}$,

当$|x|<\delta$时，就有$\left|a^x-1\right|<\varepsilon$.

所以a^x在$x=0$处连续.

对于一般的点$x_0\in\mathbb{R}$，由指数函数的性质得

$$\lim_{x\to x_0} a^x=\lim_{x\to x_0} a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x}=a^{x_0}.$$

所以$y=a^x$在$\mathbb{R}$上连续.

对于$0<a<1$的情形，只要令$b=\dfrac{1}{a}$，由 $a^x=\left(\dfrac{1}{b}\right)^x=\dfrac{1}{b^x}$,

就可得到相应的结论.

注 当$a=1$时，$y=a^x=1$显然是连续函数.

对数函数的连续性

对数函数$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$在定义域$(0, +\infty)$上是连续的.

幂函数的连续性

对$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,幂函数$y = x^{\alpha}$在$(0,+\infty)$上是连续的.

证 由于幂函数$y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$由

$$f(u) = e^{u}, u \in (-\infty, +\infty)\text{与}u = \alpha \ln x, x \in (0, +\infty)$$

复合而成,

而已知指数函数与对数函数都是连续的,

根据复合函数的连续性定理知, 幂函数$y = x^{\alpha}$在$(0, +\infty)$连续.

注： 对于具体给定的实数α, $f(x)=x^{\alpha}$的定义域可以扩大.

幂函数$f(x)=x^{\alpha}(x\in\mathbb{R})$在其定义域连续.

例1 设 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b$. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}=a^b$.

证 补充定义 $u(x_0)=a$，$v(x_0)=b$，则 $u(x),v(x)$ 在点 x_0 连续，

从而 $v(x)\ln u(x)$ 在点 x_0 也连续.

于是
$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)}$$
$$=\mathrm{e}^{b\ln a}=a^b.$$

注： $$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b = \left[\lim_{x\to x_0} u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. $\left(1^{\infty}\right)$

解 $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. $\left(1^{\infty}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

初等函数的连续性

基本初等函数的连续性

一切基本初等函数在其**定义域**上是连续的.

初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所产生的函数称为**初等函数**.

初等函数的连续性

初等函数在其定义区间上是连续的.

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 根据对数函数的连续性,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\ln e=1.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$.

解 因为 $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ 是初等函数,所以在 $x=0$ 处连续.

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\cos x}=\frac{\ln(1+0)}{\cos 0}=0.$$

例5 据理说明$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$不是初等函数.

解 因为$x=0$是$f(x)$的定义区间上的点,而

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\neq 0= f(0),$$

所以$f(x)$在$x=0$处不连续.

因此函数$f(x)$不是初等函数.

你应该:

知道基本初等函数的连续性

知道初等函数的连续性

会利用连续性求极限