Ch6 微分中值定理及其应用

主讲教师: 顾燕红

办公室: 汇星楼409

办公室答疑时间: 每周二15点至17点

微信号: 18926511820 QQ号: 58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年12月25日

BY GYH

将学习：

如何求函数的极值？

如何求函数的最值？

回顾极值、极值点定义

如果函数f在点x_0的某邻域$U(x_0)$上对一切$x \in U(x_0)$,有

$$f(x) \le f(x_0) \quad \left(\text{或} f(x) \ge f(x_0)\right),$$

则称函数f在点x_0处取得**极大(小)值**,

称点x_0为**极大(小)值点**.

极大(小)值统称为**极值**, 极大(小)值点统称为**极值点**.

费马Fermat定理

设函数f在点x_0的某邻域上有定义,且在点x_0可导.

若x_0为f的极值点,则必有$f'(x_0)=0$.

极值的必要条件

可微函数的极值点一定是 稳定点(驻点).

问题：

稳定点一定是极值点吗? ✗

$y = x^3$: $x = 0$是$y = x^3$的稳定点,但不是$y = x^3$的极值点.

极值点一定是稳定点吗? ✗

$y = |x|$: $x = 0$是$y = |x|$的极小值点,但$y = |x|$在$x = 0$不可导.

问题：

给定函数$f(x), x \in I$, 若$U(x_0) \in I$,

如何判断点x_0是否是f的极大(小)值点?

极值的第一充分条件

设函数f在点x_0连续，在某空心邻域$U^{\circ}(x_0;\delta)$上可导.

(i) 若当$x \in (x_0 - \delta, x_0)$时，$f'(x) \le 0$;

当$x \in (x_0, x_0 + \delta)$时，$f'(x) \ge 0$,

则f在点x_0取得极小值.

(ii) 若当$x \in (x_0 - \delta, x_0)$时，$f'(x) \ge 0$;

当$x \in (x_0, x_0 + \delta)$时，$f'(x) \le 0$,

则f在点x_0取得极大值.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)\le 0, x\in(x_0-\delta,x_0) \\ f'(x)\ge 0, x\in(x_0,x_0+\delta) \end{array}\right\} \Rightarrow f\text{在点}x_0\text{取得极小值} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(x)\ge 0, x\in(x_0-\delta,x_0) \\ f'(x)\le 0, x\in(x_0,x_0+\delta) \end{array}\right\} \Rightarrow f\text{在点}x_0\text{取得极大值}$$

证 证(i). (ii)的证明类似.

因为 $f'(x)\le 0,\ x\in(x_0-\delta,x_0)$, 又 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上连续,

所以 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上递减, 故

$$f(x)\ge f(x_0),\ \ x\in(x_0-\delta,x_0].$$

因为 $f'(x)\ge 0,\ x\in(x_0,x_0+\delta)$, 又 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上连续,

所以 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上递增, 故

$$f(x)\ge f(x_0),\ \ x\in[x_0,x_0+\delta).$$

于是

$$f(x)\ge f(x_0),\ \ x\in U(x_0;\delta),$$

即 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值.

极值的第二充分条件

设函数f在点x_0某邻域$U(x_0;\delta)$上一阶可导，在$x=x_0$处二阶可导，且$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$.

那么$x=x_0$是f的一个极值点，并且

(i) 若 $f''(x_0)<0$, 则f在x_0取得极大值.

(ii) 若 $f''(x_0)>0$, 则f在x_0取得极小值.

$$f'(x_0)=0, f''(x_0)<0 \Rightarrow f\text{在}x_0\text{取得极大值}$$
$$f'(x_0)=0, f''(x_0)>0 \Rightarrow f\text{在}x_0\text{取得极小值}$$

证1 f 在点 x_0 的带有佩亚诺型余项的二阶泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$
$$=f(x_0)+\left(\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right)(x-x_0)^2.$$

从而 $f(x)-f(x_0)=\left(\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right)(x-x_0)^2$. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right)=\frac{f''(x_0)}{2}\neq 0,$

根据极限的局部保号性知，$\exists\delta'>0(\delta'<\delta),\forall x\in U^0(x_0;\delta'),$ $\frac{f''(x_0)}{2}$ 与 $\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)$ 同号.

于是，当 $f''(x_0)>0$ 时，对 $\forall x\in U^0(x_0;\delta')$，有 $f(x)-f(x_0)>0$，即 $f(x)>f(x_0)$，

故 f 在 x_0 取得极小值.

当 $f''(x_0)<0$ 时，对 $\forall\ x\in U^0(x_0;\delta')$，有 $f(x)-f(x_0)<0$，即 $f(x)<f(x_0)$，

故 f 在 x_0 取得极大值.

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Rightarrow f$ 在x_0取得极大值

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Rightarrow f$ 在x_0取得极小值

证2 证$f''(x_0)>0$的情况. $f''(x_0)<0$的情况证明类似.

因为 $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0,$

根据函数极限的局部保号性知,$\exists\delta'>0(\delta'<\delta)$, 当 $x\in U^\circ(x_0;\delta')$ 时,

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}>0\,.$$

从而当$x\in(x_0-\delta',x_0)$时, $f'(x)<0$; 当$x\in(x_0,x_0+\delta')$时, $f'(x)>0$.

根据极值的第一充分条件知, f 在点x_0取得极小值.

极值的第三充分条件

设函数f在点x_0某邻域上存在直到$n-1$阶导函数，在$x = x_0$处n阶可导，且$f^{(k)}(x_0) = 0(k = 1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0) \neq 0$. 则

(i) 当n为偶数时，f在x_0取得极值.

且当$f^{(n)}(x_0) < 0$时，取极大值;

当$f^{(n)}(x_0) > 0$时，取极小值.

(ii) 当n为奇数时，f在x_0处不取极值.

n为偶数, $f^{(k)}(x_0)=0\left(1\le k\le n-1\right), f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow f$在$x_0$取得极大值

n为偶数, $f^{(k)}(x_0)=0\left(1\le k\le n-1\right), f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow f$在$x_0$取得极小值

n为奇数数, $f^{(k)}(x_0)=0\left(1\le k\le n-1\right), f^{(n)}(x_0)\ne 0 \Rightarrow f$在$x_0$不取得极值

证 f在点x_0的带有佩亚诺型余项的n阶泰勒公式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)^2+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)=f(x_0)+\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right)(x-x_0)^n.$$

从而 $f(x)-f(x_0)=\left(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right)(x-x_0)^n$.

因为$f^{(n)}(x_0)\ne 0$, 故$\exists\delta'>0(\delta'<\delta)$,当$x\in U(x_0;\delta')$时, $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$与$\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)$同号.

(i) 当 n 为偶数, $f^{(n)}(x_0)<0$时, 对$\forall x\in U^0(x_0;\delta)$,有$f(x)-f(x_0)<0$, 即$f(x)<f(x_0)$,

故f在x_0取得极大值.

当 n 为偶数, $f^{(n)}(x_0)>0$时,对$\forall x\in U^0(x_0;\delta)$,有$f(x)-f(x_0)>0$,即$f(x)>f(x_0)$,

故f在x_0取得极小值.

(ii) 当 n 为奇数时,有 $(x-x_0)^n\begin{cases}<0, & x\in(x_0-\delta,x_0),\\ >0, & x\in(x_0,x_0+\delta).\end{cases}$ 从而$\left(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right)(x-x_0)^n$

在 x_0 左右两侧异号,即$f(x)-f(x_0)$在x_0左右两侧异号. 故f在x_0不取得极值.

例1 求函数 $f(x)=3\arctan x-\ln x$ 的极值点.

解 $f(x)$的定义域是 $(0,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{3}{1+x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-(x^2-3x+1)}{x(1+x^2)}$.

令$f'(x)=0$,得稳定点 $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

当$0<x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$时, $f'(x)<0$; 当$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$时, $f'(x)>0$;

当$x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$时, $f'(x)<0$.

根据极值的第一充分条件知, $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$是 $f(x)$的极小值点,

$x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$是 $f(x)$的极大值点.

例2 求函数 $f(x)=(x-a)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值点与极值.

解 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

当 $a=0$ 时, $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$. 令$f'(x)=0$, 得稳定点 $x=0$.

当$x<0$时, $f'(x)>0$; 当$x>0$时, $f'(x)>0$.

故$x=0$不是 $f(x)$ 的极值点, 此时f无极大值,也无极小值.

当 $a\neq 0$ 时, $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2a}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}(5x-2a)$,

得稳定点为 $x=\frac{2a}{5}$,不可导点为$x=0$.

例2 求函数 $f(x)=(x-a)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值点与极值.

当$a>0$时：

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{2a}{5}\right)$	$\frac{2a}{5}$	$\left(\frac{2a}{5},+\infty\right)$
f'	$+$	不存在	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}$	$\nearrow$

根据极值的第一充分条件知,

$x=0$是极大值点, $f(0)=0$ 是极大值;

$x=\frac{2a}{5}$是极小值点, $f\left(\frac{2a}{5}\right)=-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}$是极小值.

例2 求函数 $f(x)=(x-a)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值点与极值.

当$a<0$时：

x	$\left(-\infty,\frac{2a}{5}\right)$	$\frac{2a}{5}$	$\left(\frac{2a}{5},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	不存在	$+$
f	$\nearrow$	$-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

根据极值的第一充分条件知,

$x=\frac{2a}{5}$是极大值点, $f\left(\frac{2a}{5}\right)=-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{3}}$ 是极大值;

$x=0$是极小值点, $f(0)=0$是极小值.

例3 求函数 $f(x)=x^2+\dfrac{432}{x}$ 的极值点与极值.

解 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq 0$. $f'(x)=2x-\dfrac{432}{x^2}$.

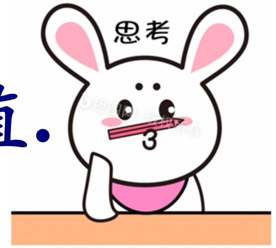
令 $f'(x)=0$, 得稳定点 $x=6$.

又因为 $f''(6)=\left.\left(2+\dfrac{864}{x^3}\right)\right|_{x=6}=6>0$,

根据极值的第二充分条件知,

$x=6$ 是极小值点, $f(6)=108$ 是极小值.

思考：这里为什么不考虑不可导点 $x=0$?



例4 求函数 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值点与极值.

解 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=2x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(2x-5)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

令 $f'(x)=0$, 得稳定点 $x=1$. $x=0$ 是 $f(x)$ 的不可导点.

列表讨论：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	不存在	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$

根据极值的第一充分条件知,

$x=0$ 是极大值点, $f(0)=0$ 是极大值; $x=1$ 是极小值点, $f(1)=-3$ 是极小值.

例5 求函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ 的极值.

解1 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{1-x}{1+x^2}$.

令$f'(x)=0$, 得稳定点 $x=1$.

$$由于f''(x)=\frac{-\left(1+x^2\right)-(1-x)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{x^2-2x-1}{\left(1+x^2\right)^2},$$

故$f''(1)=-\dfrac{1}{2}<0$.

根据极值的第二充分条件知,

函数$f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$的极大值是 $f(1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$.

例5 求函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ 的极值.

解2 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{1-x}{1+x^2}$.

令$f'(x)=0$, 得稳定点 $x=1$.

列表讨论:

x	$(-\infty,1)$	1	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$	$\searrow$

根据极值的第一充分条件知,

函数$f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$的极大值是 $f(1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$.

例6 求函数 $f(x)=x^4(x-1)^3$ 的极值.

解1 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. $f'(x)=x^3(x-1)^2(7x-4)$.

令 $f'(x)=0$, 得稳定点 $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=\dfrac{4}{7}$.

又因为 $f''(x)=6x^2(x-1)(7x^2-8x+2)$,

$$f''(0)=f''(1)=0\,,\ f''\left(\frac{4}{7}\right)>0\,,$$

根据极值的第二充分条件知, $f\left(\dfrac{4}{7}\right)=-\dfrac{6912}{823543}$ 是极小值.

由于 $f'''(x)=6x(35x^3-60x^2+30x-4)$, $f'''(0)=0$, $f'''(1)>1$,

根据极值的第三充分条件知, $x=1$ 不是极值点($n=3$ 是奇数).

又因为 $f^{(4)}(x)=24(35x^3-45x^2+15x-1)$, $f^{(4)}(0)=-24<0$,

根据极值的第三充分条件知, $f(0)=0$ 是极大值($n=4$ 是偶数).

例6 求函数 $f(x)=x^4(x-1)^3$ 的极值.

解2 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. $f'(x)=x^3(x-1)^2(7x-4)$.

令 $f'(x)=0$, 得稳定点 $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=\dfrac{4}{7}$.

列表讨论：

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{4}{7}\right)$	$\frac{4}{7}$	$\left(\frac{4}{7},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{6912}{823543}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

根据极值的第一充分条件知, $f(0)=0$ 是极大值,

$$f\left(\frac{4}{7}\right)=-\frac{6912}{823543}\text{ 是极小值.}$$

例7 求函数 $f(x)=2\cos x+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$ 的极值.

解 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. $f'(x)=-2\sin x+\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$.

令 $f'(x)=0$, 得稳定点 $x=0$.

又因为 $f''(x)=-2\cos x+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$, $f''(0)=0$,

$$f'''(x)=2\sin x+\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x},\quad f'''(0)=0,$$

$$f^{(4)}(x)=2\cos x+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x},\quad f^{(4)}(0)=4>0,$$

根据极值的第三充分条件知, $f(0)=4$是极小值($n=4$是偶数).

注：极值的第一充分条件并非必要条件.

例如 $x=0$ 是 $f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$

的极大值点，但是 $f'(x)=\begin{cases}-2x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)+\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,

对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 当 $x_k=\dfrac{1}{2k\pi}$ 时, $f'(x_k)>0$; 当 $y_k=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ 时, $f'(y_k)<0$,

因此 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的任何一个邻域上无限次改变符号,

所以函数 $f(x)$ 不可能在 $x=0$ 的某一个邻域上在零点左侧递增,右侧递减.

所以无法用极值的第一充分条件来判别.

注： 极值的第一、二充分条件并非必要条件.

例如 $x=0$ 是 $f(x)=\begin{cases} x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ 的极小值点,但是 $f'(x)=\begin{cases} 4x^3\sin^2\dfrac{1}{x}-x^2\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$,

对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$,当 $x_k=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{4}}$ 时, $f'(x_k)=\dfrac{2}{\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)^3}-\dfrac{1}{\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)^2}<0$;

当 $y_k=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ 时, $f'(y_k)=\dfrac{4}{\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^3}>0$,

因此 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的任何一个邻域上无限次改变符号,

所以函数 $f(x)$ 不可能在 $x=0$ 的某一个邻域上在零点左侧递减,右侧递增.

因此无法用极值的第一充分条件来判别.

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3\sin^2\dfrac{1}{x}-x^2\sin\dfrac{2}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\sin^2\frac{1}{x}-x\sin\frac{2}{x}\right)=0.$$

因此无法用极值的第二充分条件来判别.

注：极值的第三充分条件并非必要条件.

例如 $x=0$是

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$$

的极小值点,但是因为 $f^{(k)}(0)=0, k=1,2,\cdots,$

所以无法用极值的第三充分条件来判别.

求函数$f(x)$的极值步骤：

(1) 确定f的定义域D.

(2) 求出f在D上的稳定点与不可导点.

(3) 选择适当的方法判别：

极值的第一充分条件、极值的第二充分条件、极值的第三充分条件,

若都失败,根据极值的定义来判定.

回顾最值定义

设函数$f(x), x \in D, x_0 \in D$. 若对$\forall x \in D$,有

$$f(x) \le f(x_0) \quad \left(\text{或} f(x) \ge f(x_0)\right),$$

则称$f(x_0)$是函数f在D上的**最大(小)值**,

称点x_0为**最大(小)值点**.

最大(小)值统称为**最值**,最大(小)值点统称为**最值点**.

问题:

给定函数$f(x), x \in [a,b]$,

如何求f在$[a,b]$上的最大、最小值点?

如果函数f在$[a,b]$上连续,

根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理知,

则f在$[a,b]$上有最大值与最小值.

求闭区间[a,b]上的连续函数f的最大值、最小值步骤：

(1) 求出$f(x)$在(a,b)上的稳定点与不可导点.

设这些点为$x_1, x_2, \cdots, x_n$.

(2) 最大值 $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \max\left\{ f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n) \right\}$,

最小值 $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \min\left\{ f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n) \right\}$.

注：最大(小)值只可能在稳定点、不可导点和区间端点之中取得.

例8 求函数 $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$在区间$[-1,2]$上的最大、最小值.

解 由于$f(x)$在$[-1,2]$上连续，故存在最大值与最小值.

$$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2\left(x^2-4x+3\right)=5x^2(x-1)(x-3),$$

令$f'(x)=0$,得$[-1,2]$上稳定点$x_1=0, x_2=1$.

因为$f(-1)=-10, f(0)=1, f(1)=2, f(2)=-7$,

所以最大值为 $f(1)=2$,最小值为 $f(-1)=-10$.

例9 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在区间 $\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{2}\right]$ 上的最大、最小值.

解 由于 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{2}\right]$ 上连续，故存在最大值与最小值.

$$f(x)=\left|\,x(2x^2-9x+12)\,\right|=\begin{cases}-x(2x^2-9x+12), & -\dfrac{1}{4}\le x\le 0\\[2mm] x(2x^2-9x+12), & 0<x\le\dfrac{5}{2}\end{cases},$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12\\ 6x^2-18x+12\end{cases}=\begin{cases}-6(x-1)(x-2), & -\dfrac{1}{4}<x<0\\[2mm] 6(x-1)(x-2), & 0<x<\dfrac{5}{2}\end{cases}.$$

令 $f'(x)=0$，得稳定点 $x=1, x=2$.

由于 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x(2x^2-9x+12)}{x}=-12,$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(2x^2-9x+12)}{x}=12,$

从而 $f'_-(0)\ne f'_+(0)$，因此 f 在 $x=0$ 不可导.

因为 $f(1)=5, f(2)=4, f(0)=0, f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{115}{31}, f\left(\dfrac{5}{2}\right)=5,$

所以最大值为 $f(1)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=5$，最小值为 $f(0)=0.$

例9 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在区间 $\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{2}\right]$ 上的最大、最小值.

解 由于 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{2}\right]$ 上连续，故存在最大值与最小值.

$$f(x)=\left|\,x(2x^2-9x+12)\,\right|=\begin{cases}-x(2x^2-9x+12), & -\dfrac{1}{4}\le x\le 0\\ x(2x^2-9x+12), & 0<x\le\dfrac{5}{2}\end{cases},$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12\\ 6x^2-18x+12\end{cases}=\begin{cases}-6(x-1)(x-2), & -\dfrac{1}{4}<x<0\\ 6(x-1)(x-2), & 0<x<\dfrac{5}{2}\end{cases}.$$

令 $f'(x)=0$，得稳定点 $x=1, x=2.$

由于 $f'(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\big(-6(x-1)(x-2)\big)=-12$，并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 左连续，
由导数极限定理知，$f'_-(0)=f'(0-0)=-12.$

由于 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}6(x-1)(x-2)=12$，并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 右连续，
由导数极限定理知，$f'_+(0)=f'(0+0)=12.$ 从而 $f'_-(0)\ne f'_+(0)$，因此 f 在 $x=0$ 不可导.

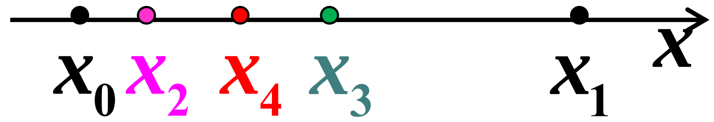
因为 $f(1)=5, f(2)=4, f(0)=0, f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{115}{31}, f\left(\dfrac{5}{2}\right)=5,$

所以最大值为 $f(1)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=5$，最小值为 $f(0)=0.$

求开区间(a,b)(有限或无限)上的连续函数f的最大值、最小值：

若f在(a,b)上仅有唯一的极值点x_0，当x_0是f的极大(小)值点，则x_0必是f在(a,b)上的最大(小)值点.

命题 设函数$f(x)$在区间I(可为无限)内可微，且存在唯一的$x_0\in I$，使得$f'(x_0)=0$.



证明:若x_0是f的极大(小)值点，则x_0必是f在I上的最大(小)值点.

证 利用反证法证明.

假设$\exists x_1\in I\left(不妨假设x_1>x_0\right)$，使得$f(x_1)>f(x_0)$.

由于x_0是极大值点,则$\exists x_2\in I: x_0<x_2<x_1$，使得

$$f(x_2)<f(x_0)<f(x_1).$$

由于f在$[x_2,x_1]$上连续，根据介值性定理知，$\exists x_3\in(x_2,x_1)$,使得

$$f(x_3)=f(x_0).$$

由于f在$[x_0,x_3]$上满足罗尔定理的条件，故$\exists x_4\in(x_0,x_3)$,使得

$$f'(x_4)=0.$$

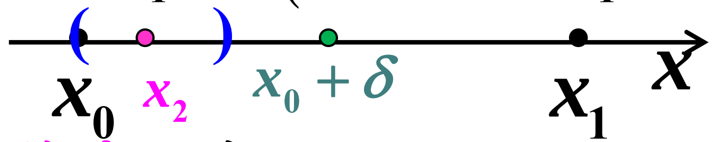
与题设矛盾. 故命题得证.

命题 设函数f在区间I上连续，且存在唯一的极值点x_0.

证明:若x_0是f的极大(小)值点，则x_0必是f在I上的最大(小)值点.

证 利用反证法证明. 若x_0是f的极大值点，假设$\exists x_1 \in I\left(\text{不妨假设} x_1 > x_0\right)$，使得

$$f(x_1) > f(x_0).$$



由于f在$[x_0, x_1]$上连续，根据最大、最小值定理知，$\exists x_2 \in [x_0, x_1]$，使得

$$f(x_2) = \min_{x\in[x_0,x_1]} f(x).$$

根据已知条件知，$f(x_2) < f(x_1)$. 由于x_0是I上唯一的极大值点，则

$\exists \delta > 0, \forall x \in U^\circ(x_0;\delta) \subset I$，有 $f(x) < f(x_0)$. 所以$x_2 \in (x_0, x_1)$.

取$\delta_1 = \min\left\{x_2 - x_0, x_1 - x_2\right\} > 0, \forall x \in U^\circ(x_2;\delta_1)$，有 $f(x) \geq f(x_2)$.

从而x_2是f的一个极小值点. 与题设矛盾. 故命题得证.

若x_0是f的极小值点，可类似得x_0是f在I上的最小值点.

例10 求函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$在区间$(0,+\infty)$上的最值.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$,

令$f'(x)=0$, 得唯一的稳定点$x=\mathrm{e}^{-2}$.

当$0<x<\mathrm{e}^{-2}$时, $f'(x)<0$; 当$x>\mathrm{e}^{-2}$时, $f'(x)>0$.

根据极值的第一充分条件知,

$x=\mathrm{e}^{-2}$是$f(x)=\sqrt{x}\ln x$在$(0,+\infty)$上的唯一极小值点,因此亦是最小值点,

所以$f(x)=\sqrt{x}\ln x$在$(0,+\infty)$上的最小值为$f\left(\mathrm{e}^{-2}\right)=-2\mathrm{e}^{-1}$.

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=-2\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\ln x=+\infty$,

所以$f(x)=\sqrt{x}\ln x$在$(0,+\infty)$上没有最大值.

例11 求一正数a,使它与其倒数之和最小.

解 设$f(a)=a+\dfrac{1}{a}, a>0.$ $f'(a)=1-\dfrac{1}{a^2}.$

令$f'(a)=0$,得唯一的稳定点$a=1.$

由于$f''(a)=\dfrac{2}{a^3}$, 故$f''(1)=2>0.$

根据极值的第二充分条件知,

$a=1$是f在$(0,+\infty)$上唯一的极小值点,亦是最小值点.

因此当$a=1$时,它与其倒数之和最小.

例12 剪去正方形四角同样大小的小正方形后制成一个无盖的盒子,问剪去的小正方形的边长为何值时,盒子的容积最大.

解 设正方形的边长为a,每一个小正方形的边长为x,

则盒子的容积为

$$V(x)=x(a-2x)^2,\ x\in\left(0,\ \frac{a}{2}\right)\ .$$

因为 $V'(x)=12\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{6}\right)$,所以唯一点稳定点为 $x=\frac{a}{6}$.

又 $V''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0$, 根据极值的第二充分条件知, $V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}$为极大值.

因为$V(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right)$上仅有唯一一个极大值,则这个极大值一定是最大值.

所以问题的解为：在四个角上截取边长为$\frac{a}{6}$的小正方形后,

得到最大容积为$\frac{2}{27}a^3$的无盖盒子.

例13 设某商店每天向工厂按出厂价每件3元购进一批商品零售. 若零售价定为每件4元,估计销售量为400件.若零售价每降低0.05元,可多售40件,问每件定价多少和从工厂购进多少时才能获得最大利润.

解 设每件定价为p,购进x件(应该全部买完),则利润为

$$L=(p-3)x.$$

由条件p与x的关系为 $\dfrac{x-400}{p-4}=\dfrac{440-400}{3.95-4}=-800$, 即 $x=3600-800p$.

所以 $L(p)=(p-3)(3600-800p)=-800p^2+6000p-10800,\ p>0,$

$$L'(p)=-1600p+6000.$$

令$L'(p)=0$, 解得唯一的稳定点$p=3.75$. 由于$L''(3.75)=-1600<0$,

根据极值的第二充分条件知, $L(3.75)=450$(元)是极大值, 亦是最大值.

因此定价为3.75元/件时可获得最大利润450元.

应从工厂购进 $x=3600-800\times 3.75=600$(件).

例14 在抛物线$y^2=2px$上哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短?

解1 不妨设$p>0$. 设(x_0,y_0)为抛物线$y^2=2px$上的一点. 由于$2yy'=2p$, 故$y'=\dfrac{p}{y}$.

点(x_0,y_0)的法线斜率为$k_{法}=-\dfrac{y_0}{p}$,故该点的法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{y_0}{p}(x-x_0)$.

设该法线与抛物线的另一交点为(x_1,y_1).

从而两点的距离为$d^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=\dfrac{4\left(y_0^2+p^2\right)^3}{y_0^4}$.

设$f(y)=\dfrac{4\left(y^2+p^2\right)^3}{y^4}$, $f'(y)=\dfrac{8\left(y^2+p^2\right)^2\left(y^2-2p^2\right)}{y^5}$. 令$f'(y)=0$,解得$y=\pm\sqrt{2}p$.

由于$f(y)$为$\mathbb{R}$上的偶函数,且

$$\lim_{y\to0}f(y)=\lim_{y\to0}\frac{4\left(y^2+p^2\right)^3}{y^4}=+\infty,\quad \lim_{y\to\infty}f(y)=\lim_{y\to\infty}\frac{4\left(y^2+p^2\right)^3}{y^4}=+\infty,$$

故$y=\sqrt{2}p$是$f(y)$在$(0,+\infty)$上的唯一的极小值点,亦是最小值点.

根据对称性知,$y=-\sqrt{2}p$是$f(y)$在$(-\infty,0)$上的唯一的极小值点,亦是最小值点.

因此所求点为$\left(p,\pm\sqrt{2}p\right)$.

例14 在抛物线$y^2=2px$上哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短?

解2 不妨设$p>0$. 抛物线$y^2=2px$的参数方程为$\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$.

过点$\left(x(t),y(t)\right)$的法线斜率为$k_{法}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-2t$.

设该法线与抛物线的另一交点为$\left(x(T),y(T)\right)$,则$\dfrac{2pT-2pt}{2pT^2-2pt^2}=-2t$,

解得 $T=-t-\dfrac{1}{2t}$. 于是,法线被抛物线所截线段的长度为

$$f(t)=d^2=\left(x(t)-x(T)\right)^2+\left(y(t)-y(T)\right)^2=\left(2pt^2-2pT^2\right)^2+\left(2pt-2pT\right)^2=\frac{p^2}{4t^4}\left(4t^2+1\right)^3.$$

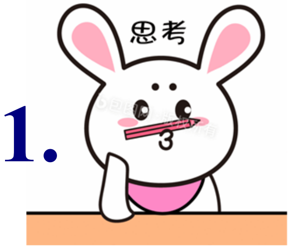
$f'(t)=\dfrac{p^2\left(4t^2+1\right)^2\left(2t^2-1\right)}{t^5}$. 令$f'(t)=0$,解得$t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 于是$x=p,y=\pm\sqrt{2}p$.

由于$\lim\limits_{t\to0}f(t)=+\infty,\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=+\infty$, 从而$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$是$f(t)$在$(0,+\infty)$上的唯一极值点,

所以是最小值点. 由对称性,$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$是$f(t)$在$(-\infty,0)$上的最小值点.

因此所求点为$\left(p,\pm\sqrt{2}p\right)$.

例15 证明不等式：$2^x \geq 1+x^2,\quad 0 \leq x \leq 1.$



证 设$f(x)=2^x-1-x^2$. 要证$f(x)\geq 0$, 也就是要证$f(x)$的最小值非负.

$$f'(x)=2^x\ln 2-2x,\ f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2.$$

当$x\in(0,1)$时, $f''(x)<0$, 又$f'(x)$在$[0,1]$上连续, 故$f'(x)$在$[0,1]$上严格递减.

而$f'(0)=\ln 2>0$, $f'(1)=2\ln 2-2<0$,

$f'(x)$在$[0,1]$上连续, 根据介值性定理及$f'(x)$在$[0,1]$上的单调性知,

存在唯一的点$x_0\in(0,1)$,使得 $f'(x_0)=0$.

根据极值的第二充分条件知, x_0是$f(x)$在$(0,1)$上唯一的极大值点.

从而x_0是$f(x)$在$[0,1]$上的最大值点. 所以最小值只能在端点取到,故

$$\min_{0\leq x\leq 1} f(x)=\min\{f(0),f(1)\}=0.$$

于是 $f(x)\geq 0$, 即$2^x\geq 1+x^2$, $x\in[0,1]$.

例16 证明：$\forall x > 0$, 有不等式 $x^a - ax + a - 1 \le 0,\quad 0 < a < 1.$

证 设 $f(x) = x^a - ax + a - 1.$

要证 $f(x) \le 0$, 也就是要证 $f(x)$ 的最大值非正.

$f'(x) = ax^{a-1} - a = a(x^{a-1} - 1).$ 令 $f'(x) = 0$, 解得唯一稳定点 $x = 1.$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

根据极值的第一充分条件知,

$x = 1$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上唯一的极大值点, 亦是最大值点.

于是, 对 $\forall x > 0$, 有 $f(x) \le f(1)$, 即 $x^a - ax + a - 1 \le 0.$

你应该:

会求极值

会求最值

会利用极值或最值证明不等式