Ch12 数项级数

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周四下午2点至4点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

P23习题12.3/1(3) 判断级数$\sum\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$的敛散性.

解 记$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$. 由于当$p=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}}}$不存在,

当$p<0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}}}$

根据级数收敛的必要条件知，当$p\le 0$时,级数$\sum\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$发散.

考虑正项级数$\sum\left|\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|=\sum\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}(p>0)$:

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=1$, 根据比较判别法的极限形式知,级数$\sum\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$与$\sum\dfrac{1}{n^p}$同敛散.

当$p>1$时,级数$\sum\dfrac{1}{n^p}$收敛, 因此$\sum\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$收敛,从而级数$\sum\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$绝对收敛.

当$0<p\le 1$时,级数$\sum\dfrac{1}{n^p}$发散, 因此级数$\sum\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$发散.

P23习题12.3/1(3) 判断级数$\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$的敛散性.

当$0<p\le 1$时,考虑交错级数$\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$:

记$f(x)=x^{p+\frac{1}{x}}$,则 $f'(x)=\left(x^{p+\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\left(p+\frac{1}{x}\right)\ln x}\right)'=x^{p+\frac{1}{x}}\left(\left(p+\frac{1}{x}\right)\ln x\right)'$

$$=x^{p+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\ln x+\left(p+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{p+\frac{1}{x}}\left(\frac{px+1-\ln x}{x^2}\right),$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{px+1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}px=+\infty$, 因此当$x$充分大时,$px+1-\ln x>0$.

故当x充分大时,函数$f(x)=x^{p+\frac{1}{x}}$单调递增, 从而当n充分大时,数列$\left\{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right\}$单调递减.

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}=0$, 根据Leibniz判别法知,交错级数$\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$收敛.

因此当$0<p\le 1$时,级数$\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$条件收敛.

综上分析,当$p>1$时,级数$\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$绝对收敛; 当$0<p\le 1$时,级数$\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$条件收敛;

当$p\le 0$时,级数$\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$发散.

P23习题12.3/1(5) 判断级数$\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$的敛散性.

解 已知调和级数$\sum\frac{1}{n}$发散,

由于 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$单调递减, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$,

根据**Leibniz判别法**知,交错级数$\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛.

根据**级数的线性性质**知, 级数$\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$发散.

$$\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)\ne\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum\frac{1}{n}$$

P23习题12.3/1(7) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ 的敛散性.

解 考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ 的敛散性：

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

根据Cauchy判别法的极限形式知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ 收敛.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ 绝对收敛.

P23习题12.3/1(8) 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$的敛散性.

解 考虑正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\right|$的敛散性：记$u_n=\left|n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\right|$.

当$x=0$时,级数显然绝对收敛.

当$x\neq 0$时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\right|}{\left|n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}|x|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{|x|}{e},$$

根据比式判别法的极限形式知,

当$\frac{|x|}{e}<1$,即$|x|<e$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\right|$收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$绝对收敛.

当$\frac{|x|}{e}>1$,即$|x|>e$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\right|$发散，由于此时级数的通项不趋于0,

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$发散.

P23习题12.3/1(8) 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$的敛散性.

当$|x| = \mathrm{e}$时，$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$，已知数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调递增且小于e,

故$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$，从而$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$,

根据级数收敛的必要条件知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$发散.

综上分析,当$|x| < \mathrm{e}$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$绝对收敛;当$|x| \geq \mathrm{e}$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$发散.

Stirling公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} = 1$$

当$x = \mathrm{e}$时，$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n\pi} = +\infty$,

当$x = -\mathrm{e}$时，$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n!\left(\frac{-\mathrm{e}}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \left(\frac{-\mathrm{e}}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{2n\pi} = \infty$.

P23习题12.3/1(10) 判断级数$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$的敛散性.

解1 记级数$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$的部分和为$S_n$,则

$$S_{3n}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k}\right)>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-2},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$, 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 根据比较判别法的极限形式知,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$发散, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-2}=+\infty$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}=+\infty$,

根据数列与其子列的关系知, 数列$\{S_n\}$不存在极限.

根据级数收敛的定义知, 级数$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$发散.

P23习题12.3/1(10) 判断级数$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$的敛散性.

解2 对级数$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$加括号后得级数

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots,$$

令$u_n=\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}$,则

$$u_n=\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}>\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n}=\frac{1}{3n},$$

已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$发散，根据比较判别法知,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}\right)$发散. 根据级数的性质知,

加了括号的级数发散,则去掉括号的级数也发散,

即级数$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$发散.

P23习题12.3/1(10) 判断级数$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$的敛散性.

解3 对$\forall N\in\mathbb{N}_+$,取$m_0=\underline{3N}$, $p_0=\underline{3N}$,

$$\left|\frac{1}{3N+1}+\frac{1}{3N+2}-\frac{1}{3N+3}+\cdots+\frac{1}{6N-2}+\frac{1}{6N-1}-\frac{1}{6N}\right|$$

$$>\frac{1}{3N+3}+\frac{1}{3N+3}-\frac{1}{3N+3}+\cdots+\frac{1}{6N}+\frac{1}{6N}-\frac{1}{6N}$$

$$=\frac{1}{3N+3}+\frac{1}{3N+6}+\cdots+\frac{1}{6N}>\frac{1}{6N}+\frac{1}{6N}+\cdots+\frac{1}{6N}=N\cdot\frac{1}{6N}=\frac{1}{6}.$$

因此,取$\varepsilon_0=\frac{1}{6}>0$,对$\forall N\in\mathbb{N}_+$,$\exists m_0=3N>N$, $\exists p_0=m_0\in\mathbb{N}_+$,有

$$\left|\frac{1}{3N+1}+\frac{1}{3N+2}-\frac{1}{3N+3}+\cdots+\frac{1}{6N-2}+\frac{1}{6N-1}-\frac{1}{6N}\right|>\frac{1}{6}=\varepsilon_0,$$

根据级数收敛的Cauchy准则否定陈述知,级数$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$发散.

P 23习题12.3/2(1)

应用Abel判别法或Dirichlet判别法判断$\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}(x>0)$的敛散性.

解 考虑正项级数$\sum\left|\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}\right|=\sum\frac{1}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$的敛散性:

记$u_n=\frac{1}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\frac{x^n}{1+x^n}}=x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{1+x^n}}=\frac{x}{\max\{1,x\}}=\begin{cases}x,0<x<1\\1,\quad x\geq 1\end{cases},$$

当$0<x<1$时,根据根式判别法的极限形式知,级数$\sum\frac{1}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$收敛,

从而级数$\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$绝对收敛.

当$x\geq 1$时,$\frac{1}{n}\frac{x^n}{1+x^n}\geq\frac{1}{n}\frac{x^n}{x^n+x^n}=\frac{1}{2n}$,已知级数$\sum\frac{1}{2n}$发散,根据比较判别法知,

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$发散.

P23习题12.3/2(1)

应用Abel判别法或Dirichlet判别法判断$\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}(x>0)$的敛散性.

考虑级数$\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}(x\geq 1)$的敛散性：记$a_n=\frac{x^n}{1+x^n}, b_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

判断数列$\{a_n\}$的单调有界性：由于$a_n=1-\frac{1}{1+x^n}$，从而$0<a_n<1$.

当$x\geq 1$时，$\{x^n\}$单调递增，故数列$\{a_n\}$单调递增且有界.

对于级数$\sum b_n=\sum\frac{(-1)^n}{n}$，由于数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$单调递减趋于0，根据Leibniz判别法知，交错级数$\sum\frac{(-1)^n}{n}$收敛. 根据Abel判别法知，级数$\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$收敛.

因此，当$x\geq 1$时，级数$\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$条件收敛.

综上分析，当$0<x<1$时，级数$\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$绝对收敛；

当$x\geq 1$时，级数$\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$条件收敛.

P23习题12.3/2(2)

应用Abel判别法或Dirichlet判别法判断$\sum \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}, x \in (0,2\pi)(\alpha > 0)$的敛散性.

解 由于 $\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right| \le \frac{1}{n^{\alpha}}$,

当$\alpha > 1$时,已知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$收敛,根据比较判别法知,级数$\sum \left|\frac{\sin nx}{n^{p}}\right|$收敛,

从而级数$\sum \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$绝对收敛.

当$0 < \alpha \le 1$时,当$x = \pi$时, $\sum \frac{\sin nx}{n^{\alpha}} = \sum 0 = 0$, 从而级数$\sum \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$绝对收敛.

当$x \ne \pi$时,考虑正项级数$\sum \left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right|$的敛散性:

由于 $\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right| \ge \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1-\cos 2nx}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}$, 其中$\sum \frac{1}{2n}$发散,

对于级数$\sum \frac{\cos 2nx}{n}$: 记$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \cos 2nx$. 数列$\{a_n\}$单调递减趋于0.

P23习题12.3/2(2)

应用Abel判别法或Dirichlet判别法判断$\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}, x\in(0,2\pi)(\alpha>0)$的敛散性.

级数$\sum\cos 2nx$的部分和$\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right|=\left|\frac{2\sin x}{2\sin x}\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right|=\frac{1}{2|\sin x|}\left|\sum_{k=1}^{n}2\sin x\cos 2kx\right|$$

$$=\frac{1}{2|\sin x|}\left|(\sin 3x-\sin x)+(\sin 5x-\sin 3x)+\cdots+(\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x)\right|$$

$$=\frac{1}{2|\sin x|}\left|\sin(2n+1)x-\sin x\right|\le\frac{1}{|\sin x|},$$

级数$\sum\cos 2nx$的部分和数列$\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right\}$有界.

根据狄利克雷判别法知，级数$\sum\frac{\cos 2nx}{2n}$收敛.

根据级数的线性性质知,级数$\sum\frac{\sin^2 nx}{n}$发散，根据比较判别法知，级数$\sum\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right|$发散.

P23习题12.3/2(2)

应用Abel判别法或Dirichlet判别法判断$\sum \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}, x\in(0,2\pi)(\alpha>0)$的敛散性.

考虑级数$\sum \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\left(0<\alpha\le 1, x\ne\pi\right)$：数列$\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}$单调递减趋于0.

级数$\sum \sin nx$的部分和$\sum_{k=1}^{n}\sin kx$：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left|\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right|$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left|\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left|\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}},$$

级数$\sum \sin nx$的部分和数列$\left\{\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right\}$有界.

根据狄利克雷判别法知，级数$\sum \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$收敛,且为条件收敛.

P23习题12.3/2(2)

应用Abel判别法或Dirichlet判别法判断$\sum\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}, x\in(0,2\pi)(\alpha>0)$的敛散性.

所以，当$x=\pi$时，级数$\sum\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$绝对收敛;

当$0<\alpha\leq 1, x\neq\pi$时，级数$\sum\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$条件收敛;

当$\alpha>1, x\neq\pi$时，级数$\sum\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$绝对收敛.

P23习题12.3/2(3)

应用Abel判别法或Dirichlet判别法判断 $\sum(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}$的敛散性.

解 考虑正项级数$\sum\left|(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}\right|=\sum\dfrac{\cos^2 n}{n}$的敛散性:

由于 $\dfrac{\cos^2 n}{n}=\dfrac{1+\cos 2n}{2n}=\dfrac{1}{2n}+\dfrac{\cos 2n}{2n}$, 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$发散,

对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{2n}$: 数列$\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$单调递减且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}=0.$

考虑级数$\sum\cos 2n$的部分和数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos 2k\right\}$的有界性:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\right|=\left|\frac{1}{2\sin 1}\sum_{k=1}^{n}2\sin 1\cos 2k\right|=\left|\frac{\sin 3-\sin 1+\sin 5-\sin 3+\cdots+\sin(2n+1)-\sin(2n-1)}{2\sin 1}\right|$$

$$=\left|\frac{\sin(2n+1)-\sin 1}{2\sin 1}\right|\le\frac{1}{\sin 1},$$

因此级数$\sum\cos 2n$的部分和数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos 2k\right\}$有界. 根据Dirichlet判别法知,

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{2n}$收敛.根据级数的性质知, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{\cos 2n}{2n}\right)$发散.

P 23习题12.3/2(3)

应用Abel判别法或Dirichlet判别法判断 $\sum(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}$的敛散性.

考虑级数$\sum(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}$的敛散性：记$a_n=\dfrac{1}{n},b_n=(-1)^n\cos^2 n.$

数列$\{a_n\}$单调递减且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

考虑级数$\sum b_n$的部分和数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cos^2 k\right\}$的有界性：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos^2 k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1+\cos 2k}{2}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\cos 2k}{2}\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2}\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\cos 2k}{2}\right|$$

$$\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(2k+k\pi)\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2\sin\left(1+\frac{1}{2}\pi\right)}\sum_{k=1}^{n}2\sin\left(1+\frac{1}{2}\pi\right)\cos(2k+k\pi)\right|$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\frac{\sin\left(2n+n\pi+1+\frac{1}{2}\pi\right)-\sin\left(1+\frac{1}{2}\pi\right)}{2\sin\left(1+\frac{1}{2}\pi\right)}\right|\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cos 1},$$

因此级数$\sum b_n$的部分和数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right\}$有界.根据**Dirichlet判别法**知,$\sum(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}$收敛.

从而级数$\sum(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}$条件收敛.

P23习题12.3/8 证明：级数$\sum \dfrac{(-1)^{[n]}}{n}$收敛.

证1 当$k^2 \le n < (k+1)^2$时，$[n]=k$.

对级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[n]}}{n}$加括号后得到级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{k^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{(k+1)^2-1}\right)$,

记$u_k=\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{k^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{(k+1)^2-1}$，则

$$u_k=\left(\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^2+k-1}\right)+\left(\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k}\right)<\frac{k}{k^2}+\frac{k+1}{k^2+k}=\frac{2}{k},$$

$$u_k=\left(\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^2+k}\right)+\left(\frac{1}{k^2+k+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k}\right)>\frac{k+1}{k^2+k}+\frac{k}{k^2+2k}>\frac{2}{k+2},$$

因此 $\dfrac{2}{k+1}<u_k<\dfrac{2}{k}$，于是 $u_{k+1}<\dfrac{2}{k+1}<u_k<\dfrac{2}{k}$. 根据迫敛性知，$\lim\limits_{k\to\infty}u_k=0.$

因为数列$\{u_k\}$单调递减且$\lim\limits_{k\to\infty}u_k=0$，根据莱布尼茨判别法知，级数$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k$收敛.

由于括号中每一项都同号，所以级数$\sum \dfrac{(-1)^{[n]}}{n}$收敛.

P23习题12.3/8 证明：级数$\sum\frac{(-1)^{[n]}}{n}$收敛.

证2 记$a_n=\frac{1}{n},b_n=(-1)^{[\sqrt{n}]}$，则$\forall n\in\mathbb{N}_+,\exists k\in\mathbb{N}_+$，使得 $k^2\le n<(k+1)^2$.

因此$\{b_n\}$中使得$k\le\left[\sqrt{n}\right]<k+1$的项最多有 $(k+1)^2-k^2=O(k)=O\left(\sqrt{n}\right)$.

因为 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right|\le(k+1)^2-k^2$，所以 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right|=O\left(\sqrt{n}\right)$.

$\forall p\in\mathbb{N}_+$，根据阿贝尔变换，得

$$\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=N}^{N+p}a_nb_n\right|=\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{n=N}^{N+p-1}(a_n-a_{n+1})\sum_{k=N}^{n}b_k+a_{N+p}\sum_{k=N}^{N+p}b_k\right|=\lim_{N\to\infty}\left|O\left(\sum_{n=N}^{N+p-1}\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)+O\left(\frac{\sqrt{N+p}}{N+p}\right)\right|=0.$$

根据级数收敛的柯西准则知，级数$\sum\frac{(-1)^{[n]}}{n}$收敛.

阿贝尔变换 设$\{a_n\},\{b_n\}$是两个数列，记$B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i,i=1,2,\cdots,n$，

则 $$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_nB_n+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k.$$

P24第十二章总练习题/1

证明：若正项级数$\sum u_n$收敛，且数列$\{u_n\}$单调，则$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0.$

证1 已知级数$\sum u_n$收敛，根据级数收敛的Cauchy准则知，

对$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$，有

$$|u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_n| = u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据级数收敛的必要条件知，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$ 又数列$\{u_n\}$单调，故数列$\{u_n\}$必单调递减.

因此

$$0 \le (n-N)u_n \le u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

当$n > 2N$时，有

$$0 \le \frac{n}{2}u_n < (n-N)u_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$|nu_n - 0| = nu_n < \varepsilon.$$

根据数列收敛的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0.$

P24第十二章总练习题/1

证明：若正项级数$\sum u_n$收敛，且数列$\{u_n\}$单调，则$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n=0.$

证2 已知级数$\sum u_n$收敛，根据级数收敛的Cauchy准则知，

对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$，有

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n}\right|=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

根据级数收敛的必要条件知，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0.$ 又数列$\{u_n\}$单调，故数列$\{u_n\}$必单调递减.

因此

$$0\le nu_{2n}\le u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $0\le 2nu_{2n}<\varepsilon.$ 根据数列收敛的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}2nu_{2n}=0.$

又 $u_{2n+1}\le u_{2n}$，所以有 $0\le(2n+1)u_{2n+1}\le(2n+1)u_{2n}$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)u_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(2nu_{2n}+u_{2n})=0$，根据迫敛性知，$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)u_{2n+1}=0.$

根据数列与其子列的关系知，$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0.$

与P24第十二章总练习题/1相关问题

若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛能否推出$\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$?

答 不能.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9^2}+\cdots \text{ 收敛}$$

其中$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = k^2 \\ \dfrac{1}{n^2}, & n \neq k^2 \end{cases}$,则 $nu_n = \begin{cases} 1, & n = k^2 \\ \dfrac{1}{n}, & n \neq k^2 \end{cases}$,

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n \neq 0$.

P24第十二章总练习题/2

若$\sum a_n$与$\sum c_n$都发散,且$a_n \le b_n \le c_n$,能否推出$\sum b_n$发散?

不能. $a_n = -\frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n^2}, c_n = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow a_n \le b_n \le c_n$

$\sum a_n$与$\sum c_n$都发散, $\sum b_n$收敛.

若$\sum a_n$与$\sum c_n$都收敛,且$a_n \le b_n \le c_n$,能否推出$\sum b_n$收敛?

$a_n \le b_n \le c_n \quad \Rightarrow 0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$

$\sum a_n$与$\sum c_n$都收敛$\Rightarrow \sum (c_n - a_n)$收敛

根据比较判别法知, $\sum (b_n - a_n)$收敛

$\Downarrow \quad \sum b_n = \sum \left((b_n - a_n) + a_n \right)$

$\sum b_n$收敛

P24第十二章总练习题/3

讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ (0<x<2\pi, p>0)$的收敛性.

解 考虑正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|$的敛散性：

由于

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| \le \frac{1}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \frac{\mathrm{e}}{n^p},$$

当$p>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}}{n^p}$收敛，根据比较判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|$收敛，

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$绝对收敛.

当$0<p\le 1$时，$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| \ge \frac{2\sin^2 nx}{n} = \frac{1-\cos 2nx}{n} = \frac{1}{n}-\frac{\cos 2nx}{n}$.

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散. 考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}$的敛散性：

P24第十二章总练习题/3

讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(0<x<2\pi, p>0)$的收敛性.

考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}$的敛散性：记$a_n=\frac{1}{n}, b_n=\cos 2nx$.

已知数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$单调递减且$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2nx$的部分和数列$\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right\}$的有界性：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right|=\left|\frac{1}{2\sin x}\sum_{k=1}^{n}2\sin x\cos 2kx\right|=\left|\frac{\sin(2n+1)x-\sin x}{2\sin x}\right|\le\frac{1}{\sin x},\ (x\ne\pi)$$

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2nx(x\ne\pi)$的部分和数列$\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right\}$有界.

根据Dirichlet判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}(x\ne\pi)$收敛. 根据级数的性质知，

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin^2 nx}{n}$发散. 根据比较判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|$发散.

P24第十二章总练习题/3

讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(0<x<2\pi, p>0)$的收敛性.

考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的敛散性：数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调递增且$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|<\mathrm{e}$.

考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$的敛散性：数列$\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$单调递减且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$.

考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$的部分和数列$\left\{\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right\}$的有界性：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}},$$

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$的部分和数列$\left\{\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right\}$有界.

根据**Dirichlet判别法**知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$收敛. 根据**Abel判别法**知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$收敛.因此,当$0<p\le 1, x\ne\pi$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$条件收敛.

P24第十二章总练习题/3

讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^p}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(0<x<2\pi,\ p>0)$的收敛性.

综上分析,当$p>1$时或$x=\pi$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^p}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$绝对收敛;

当$0<p\le 1, x\ne\pi$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^p}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$条件收敛.

P24第十二章总练习题/4

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k\neq 0$,级数$\sum b_n$绝对收敛,证明级数$\sum a_n$也收敛.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0 \quad\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|b_n|}=|k|\neq 0$$

已知级数$\sum b_n$绝对收敛 $\Rightarrow$ 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛

根据比较判别法的极限形式知,$\sum|a_n|$收敛 $\Rightarrow \sum a_n$绝对收敛 $\Rightarrow \sum a_n$收敛

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k\neq 0$,级数$\sum b_n$收敛能否推出$\sum a_n$收敛?

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ 收敛} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right) \text{ 发散}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n}\right)=1\neq 0$$

P24第十二章总练习题/5

$\sum u_n$为正项级数,且$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$能否推出$\sum u_n$收敛? 不能

$$u_n=\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}<1\quad 正项级数\sum\frac{1}{n}发散$$

对于级数$\sum u_n$,有$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geq 1$,能否断定级数$\sum u_n$不绝对收敛,但可能条件收敛? 不能

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geq 1\Rightarrow|u_{n+1}|\geq|u_n|\geq\cdots\geq|u_1|>0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0\quad\Rightarrow 级数\sum|u_n|发散$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0\quad\Rightarrow 级数\sum u_n发散$$

P24第十二章总练习题/5

设$\sum u_n$为收敛的正项级数,能否存在一个正数ε,使得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}=c>0$?

不能

$$u_n=\frac{1}{n\ln^2 n}\qquad 级数\sum_{n=2}^{\infty}u_n\ 收敛$$

$$\forall\varepsilon>0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\ln^2 n}}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\varepsilon}}{\ln^2 n}=+\infty$$

$$u_n=\frac{1}{n^n}\qquad 级数\sum_{n=1}^{\infty}u_n\quad 收敛$$

$$\forall\varepsilon>0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\varepsilon}}{n^n}=0$$

P24第十二章总练习题/6

证明：若级数$\sum a_n$收敛，$\sum(b_{n+1}-b_n)$绝对收敛，则级数$\sum a_n b_n$也收敛.

证1 根据Abel变换，有

$$\left|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left((b_k-b_{k+1})\sum_{i=n+1}^{k}a_i\right)+b_{n+p}\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|$$

$$\le\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(\left|b_k-b_{k+1}\right|\left|\sum_{i=n+1}^{k}a_i\right|\right)+\left|b_{n+p}\right|\cdot\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|.$$

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$绝对收敛，记$\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{n+1}-b_n\right|=B$，则$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left|b_{k+1}-b_k\right|\le B$.

由于$\sum_{k=1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})=b_1-b_{n+p}$，从而

$$\left|b_{n+p}\right|=\left|b_1+\sum_{k=1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})\right|\le\left|b_1\right|+\sum_{k=1}^{n+p-1}\left|b_k-b_{k+1}\right|\le\left|b_1\right|+B.$$

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，根据级数收敛的Cauchy准则知，对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right|<\frac{\varepsilon}{2B+\left|b_1\right|+1}.$$

于是

$$\left|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}\right|<\frac{\varepsilon}{2B+\left|b_1\right|+1}\cdot B+\left(\left|b_1\right|+B\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2B+\left|b_1\right|+1}<\varepsilon.$$

根据级数收敛的Cauchy准则知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$收敛.

P24第十二章总练习题/6

证明：若级数$\sum a_n$收敛，$\sum(b_{n+1}-b_n)$绝对收敛，则级数$\sum a_n b_n$也收敛。

证2 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$的部分和为$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和为$A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$.

根据Abel变换，有$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})A_k+b_n A_n$.

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，根据级数收敛的定义知，其部分和数列$\{A_n\}$有极限，记$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=A$.

根据数列极限的必要条件知，数列$\{A_n\}$有界，$\exists M>0$，使得对$\forall n\in\mathbb{N}_+$，有$|A_n|\le M$.

考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})A_n$的敛散性：由于$|(b_n-b_{n+1})A_n|\le M|b_n-b_{n+1}|$，

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$绝对收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|b_{n+1}-b_n|$收敛，根据比较判别法知，

级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(b_n-b_{n+1})A_n|$收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})A_n$绝对收敛，设其和为$C$，即$C=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})A_n$.

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$绝对收敛，设其和为$B$，即 $B=\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)$,

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B+b_1$.

于是
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})A_k+b_n A_n\right)=C+(B+b_1)A.$$

根据级数收敛的Cauchy准则知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

P24第十二章总练习题/7

设$a_n>0$,证明级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$是收敛的.

证 记$u_n=\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$. 记级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$.

由于

$$u_n=\frac{1+a_n-1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},n\geq 2.$$

从而

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+\sum_{k=2}^{n}u_k=\frac{a_1}{1+a_1}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}\right)$$

$$=\frac{a_1}{1+a_1}+\left(\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\right)=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}<1,$$

又$a_n>0$, 所以数列$\{S_n\}$单调递增有上界, 根据单调有界准则知, 数列$\{S_n\}$有极限.

根据级数收敛的定义知, 级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$收敛.