Ch2 数列极限

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

§1 数列极限概念

§2 收敛数列的性质

§3 数列极限存在的条件

将学习：

一个数列收敛的条件是什么？

如何利用数列收敛条件判断级数的敛散性？

单调有界定理

在实数系中，单调有界数列必有极限.

命题 任何数列都存在单调子列.

证 设数列为$\{a_n\}$,下面分两种情行讨论:

1. 若对任何正整数k,数列$\{a_{k+n}\}$有最大项. 设$\{a_{1+n}\}$的最大项为a_{n_1}.

因$\{a_{n_1+n}\}$亦有最大项,设其最大项为a_{n_2}. 显然有$n_2 > n_1$,

且因为$\{a_{n_1+n}\}$是$\{a_{1+n}\}$的一个子列,故 $a_{n_2} \le a_{n_1}$;

同理存在$n_3 > n_2$,使得 $a_{n_3} \le a_{n_2}$; ……

这样就得到一个递减的子列$\{a_{n_k}\}$.

2. 至少存在某个正整数k,数列$\{a_{k+n}\}$没有最大项.

先取$n_1 = k+1$,因为$\{a_{k+n}\}$没有最大项,故a_{n_1}后面总存在a_{n_2} $(n_2 > n_1)$,

使得$a_{n_2} > a_{n_1}$;同理存在a_{n_2}后面的项$a_{n_3}(n_3 > n_2)$,使得 $a_{n_3} > a_{n_2}$;

…… 这样就得到一个递增的子列$\{a_{n_k}\}$.

致密性(Bolzano-Weierstrass)定理

任何有界数列必有收敛子列.

证 设数列$\{a_n\}$有界, 由于任何数列都存在单调子列,

因此可以得到$\{a_n\}$一个单调子列$\{a_{n_k}\}$.

显然$\{a_{n_k}\}$是有界的.

根据单调有界定理知, $\{a_{n_k}\}$是收敛的.

无界数列与其子列关系

例 14 设$\{a_n\}$是一个无界数列，则存在子列$\{a_{n_k}\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty.$$

证 由于数列$\{a_n\}$无界，故对$\forall M>0, \exists a' \in \{a_n\}$，使得$|a'|>M$.

令$M_1=1$，则$\exists a_{n_1}$，使得$|a_{n_1}|>1$.

令$M_2=2$，在$\{a_n\}$中有无穷多项满足$|a_n|>2$，取a_{n_2}，满足$n_2>n_1$，使得$|a_{n_2}|>2$.

令$M_3=3$，在$\{a_n\}$中有无穷多项满足$|a_n|>3$，取a_{n_3}，满足$n_3>n_2$，使得$|a_{n_3}|>3$.

……

令$M_k=k$，在$\{a_n\}$中有无穷多项满足$|a_n|>k$，取a_{n_k}，满足$n_k>n_{k-1}$，使得$|a_{n_k}|>k$.

……

这样下去可得$\{a_n\}$的一个子列$\{a_{n_k}\}$，满足$|a_{n_k}|>k$.

所以 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty.$

柯西收敛准则

数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：

对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n,m>N$,有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

柯西收敛准则的否定叙述

数列$\{a_n\}$发散的充要条件是：

$\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbb{N}_+,\exists n_0,m_0>N$,有

$$|a_{n_0}-a_{m_0}|\geq\varepsilon_0.$$

注：柯西收敛准则的条件称为柯西条件.

满足柯西条件的数列称为柯西列.

注：柯西收敛准则的意义在于：可以根据数列通项本身的特征来判断该数列是否收敛，而不必依赖于极限定义中的那个极限值.

Cauchy收敛准则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}_+, \forall n,m>N$, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

证 (必要性) 已知数列$\{a_n\}$收敛,设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

由数列极限定义, 对$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$,当$n,m>N$时, 有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cauchy收敛准则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n,m > N$, 有$|a_n - a_m| < \varepsilon$.

(充分性) 先证明数列$\{a_n\}$有界. 由于数列$\{a_n\}$满足柯西条件,

取$\varepsilon_0 = 1$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}_+$, 当$n > N_0$时有 $\left|a_n - a_{N_0+1}\right| < \varepsilon_0 = 1$.

令$M = \max\left\{|a_1|, \cdots, |a_{N_0}|, \left|a_{N_0+1}\right| + 1\right\}$, 则对一切$n$有$|a_n| \le M$.

因此, 数列$\{a_n\}$有界.

由致密性定理, $\{a_n\}$有收敛子列$\{a_{n_k}\}$, 记$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

由条件, 对$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 当$n,m > N$时, 有$|a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

在上式中取$a_m = a_{n_k}$, k充分大时, 满足$n_k > N$, 从而有 $\left|a_n - a_{n_k}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

令$k \to \infty$, 于是得到 $|a_n - a| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

即数列$\{a_n\}$收敛.

例 15 设 $a_n = \frac{\sin 1}{2^1} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 不妨设 $\varepsilon < 1$, 取 $N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 当 $n > m > N$ 时, 有

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n} \right|$$

$$\le \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}}\right)$$

$$= \frac{2}{2^{m+1}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right) < \frac{1}{2^m} < \varepsilon.$$

根据柯西收敛准则知, 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例 16 设$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}\cdots+\frac{1}{n^\alpha},\alpha>1$. 证明: $\{a_n\}$收敛.

证1 显然$\{a_n\}$是严格递增数列. 当$n\geq 2$时,

$$a_{2n}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}=\left(1+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)$$

$$<\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n-2)^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)$$

$$<\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right)=1+\frac{2}{2^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$=1+\frac{2}{2^\alpha}a_n=1+\frac{a_n}{2^{\alpha-1}},$$

又$a_n<a_{2n}$,所以 $a_n<1+\frac{a_n}{2^{\alpha-1}}$, 即 $a_n<\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$, 故$\{a_n\}$有上界.

根据单调有界定理知, 数列$\{a_n\}$是收敛的.

例 16 设$a_n = 1+\dfrac{1}{2^\alpha}\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}, \alpha>1$. 证明: $\{a_n\}$收敛.

证2 显然$\{a_n\}$是严格递增数列.

$$a_{2^k-1} = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^\alpha}$$

$$=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{(2^2-1)^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^3-1)^\alpha}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right)$$

$$\le 1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha}=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k}{1-\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}}<\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1},$$

故$\{a_n\}$的一个子列$\{a_{2^k-1}\}$是有上界的.

由于对$\forall n\in\mathbb{N}_+, \exists k\in\mathbb{N}_+$, 使得$2^k-1>n$, 又$\{a_n\}$是严格递增数列,

因此 $a_n < a_{2^k-1}$, 由此知$\{a_n\}$也是有上界的.

根据单调有界定理知, 数列$\{a_n\}$是收敛的.

例 17 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. 证明: $\{a_n\}$收敛.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n > m > N$ 时, 有

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right|$$

$$\le \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

根据柯西收敛准则知, 数列$\{a_n\}$收敛.

例 18 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\{a_n\}$ 发散.

证1 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N > 0$, 取 $n_0 = 4N > N$, $m_0 = 2N > N$, 使得

$$\left|a_{n_0} - a_{m_0}\right| = \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2} + \cdots + \frac{1}{4N}$$

$$\geq \frac{1}{4N} + \frac{1}{4N} + \cdots + \frac{1}{4N}$$

$$= \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

根据柯西收敛准则的否定陈述, 可知数列 $\{a_n\}$ 发散.

例 18 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$.证明$\{a_n\}$发散.

证2 由于对$\forall M > 0$,要使

$$a_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2^2}{8} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2} > \frac{k}{2} > M,$$

只要$k > 2M$.

因此, 对$\forall M > 0$,取$K = [2M] + 1$,$\forall k > K$,有 $a_{2^k} > M$.

故$\{a_{2^k}\}$是正无穷大量. 由于$\{a_{2^k}\}$是$\{a_n\}$的一个子列,

又因为$\{a_n\}$是递增数列, 由此得知$\{a_n\}$也是无穷大量.

所以数列$\{a_n\}$发散.

例 19 设数列满足条件：$|x_{n+1}-x_n|<r^n, n=1,2,\cdots$，其中 $r\in(0,1)$.

证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证 若 $n<m$，则

$$|x_n-x_m|\le|x_n-x_{n+1}+x_{n+1}-x_{n+2}+\cdots+x_{m-1}-x_m|$$

$$\le|x_n-x_{n+1}|+|x_{n+1}-x_{n+2}|+\cdots+|x_{m-1}-x_m|$$

$$\le r^n+r^{n+1}+\cdots+r^{m-1}=\frac{r^n\left(1-r^{m-n}\right)}{1-r}=\frac{r^n-r^m}{1-r}<\frac{r^n}{1-r}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1-r}=0$，于是对 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N\in\mathbb{N}_+, \forall n>N:\left|\dfrac{r^n}{1-r}\right|<\varepsilon.$

当 $m>n>N$ 时，也有 $|x_n-x_m|\le\left|\dfrac{r^n}{1-r}\right|<\varepsilon.$

根据柯西收敛准则知，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 20 证明：任一无限十进小数$\alpha = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$的$n$位不足近似值$(n=1,2,\cdots)$所组成的数列

$$\frac{b_1}{10},\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2},\cdots,\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n},\cdots$$

满足柯西条件(从而必收敛),其中b_k为$0,1,2,\cdots,9$中的一个数,$k=1,2,\cdots$.

证 记$a_n=\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}$. 不妨设$n>m$, 则有

$$|a_n-a_m|=\frac{b_{m+1}}{10^{m+1}}+\frac{b_{m+2}}{10^{m+2}}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}\le\frac{9}{10^{m+1}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-m-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{10^m}\left(1-\frac{1}{10^{n-m}}\right)<\frac{1}{10^m}<\frac{1}{m}.$$

对$\forall\,\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,当$n>m>N$时,有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

根据柯西收敛准则, 可知数列$\{a_n\}$收敛.

你应该：

知道单调有界定理并会证明相关题目

掌握致密性定理

理解柯西收敛准则及其否定陈述

19世纪初期，微积分已发展成一个庞大的分支，内容丰富，应用非常广泛。与此同时，它的薄弱之处也越来越暴露出来，微积分的理论基础并不严格。为解决新问题并澄清微积分概念，数学家们展开了数学分析严谨化的工作，在分析基础的奠基工作中，做出卓越贡献的要首推伟大的数学家柯西。柯西的主要成就包括柯西极限存在准则、柯西序列、柯西不等式、柯西积分公式等。他涉及领域广，包括单复变函数、分析基础、极限论的功能、常微分方程、弹性力学数学理论等。

——摘自百度百科

奥古斯丁·路易斯·柯西
Cauchy, Augustin Louis
(1789年8月21日至1857年5月23日)
法国数学家、物理学家、天文学家