第二十二章　曲面积分

第三节　高斯公式与斯托克斯公式

第二十二章　曲面积分

第三节　高斯公式与斯托克斯公式

1. 高斯公式

2. 斯托克斯公式

高斯公式

定理:[高斯公式] 设空间区域 V 由分片光滑的**双侧封闭曲面** S 围成. 若函数 P, Q, R 在 V 上连续, 且有**一阶连续偏导数**, 则

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

其中 S 取**外侧**.

例题1： 计算积分

$$\iint\limits_S y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy,$$

其中 S 为以正方体

$$\{(x,y,z): 0<x<a, 0<y<a, 0<z<a\}$$

的整个表面的外侧.

例题2： 计算积分

$$\iint\limits_S xyzdxdy,$$

其中 S 是单位球 $\{x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ 在 $x \ge 0, y \ge 0$ 部分的表面, 取外侧.

例题3： 计算积分

$$\iint_S (z^2+x)dydz,$$

其中 S 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 被平面 $z=2$ 所截部分的下侧,方向取为 z 轴下侧.

例题4： 计算积分

$$\oiint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{r^3},$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, S 为分片光滑的双侧闭曲面的外侧.

斯托克斯公式

引理: 设函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 都是光滑曲面 S 上的连续函数.

$$S: z=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in D,$$

则

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=$$

$$=\pm\iint\limits_D\Big[-P(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}-Q(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}+R(x,y,\varphi(x,y))\Big]dxdy,$$

其中正负号由曲面 S 的侧决定, 上侧为正, 下侧为负.

斯托克斯公式

定理:[斯托克斯公式] 设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线. 若函数 P, Q, R 在 S 连同 L 上连续, 且有**一阶连续偏导数**, 则

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

其中 S 的侧与 L 的方向按右手法则确定.

例题5： 计算积分

$$\oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

其中 L 为平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 与立方体 $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ 的交线，从 z 轴上方看取逆时针方向.

斯托克斯公式

定理： 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单连通区域. 若函数 P, Q, R 在 Ω 上连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

斯托克斯公式

定理： 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单连通区域. 若函数 P, Q, R 在 Ω 上连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿 Ω 中任意按段光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$

定理: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单连通区域. 若函数 P, Q, R 在 Ω 上连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿 Ω 中任意按段光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$

(2) 对 D 中任意按段光滑曲线 L, 积分 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ 与路线无关, 只与起点和终点相关.

定理： 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单连通区域. 若函数 P, Q, R 在 Ω 上连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿 Ω 中任意按段光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

(2) 对 D 中任意按段光滑曲线 L, 积分 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ 与路线无关, 只与起点和终点相关.

(3) $Pdx + Qdy + Rdz$ 在 Ω 内为某一函数 u 的全微分, 即 $du = Pdx + Qdy + Rdz$.

定理： 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单连通区域. 若函数 P, Q, R 在 Ω 上连续, 且具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿 Ω 中任意按段光滑闭曲线 L, 有 $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

(2) 对 D 中任意按段光滑曲线 L, 积分 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ 与路线无关, 只与起点和终点相关.

(3) $Pdx + Qdy + Rdz$ 在 Ω 内为某一函数 u 的全微分, 即 $du = Pdx + Qdy + Rdz$.

(4) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$ 在 Ω 内恒成立.

例题5： 验证曲线积分

$$\int_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz,$$

与路线无关，并求被积表达式的原函数 $u(x,y,z)$，即 u 满足

$$du = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz.$$

本节作业

作业：

第 274 页：第1题.

第 275 页：第3题.

第 275 页：第5题.