第十八章　隐函数定理及其应用

第二节　隐函数组

隐函数组的定义: 设 $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$, 为定义在区域 $V\subset\mathbb{R}^4$ 上的两个四元函数. 若存在平面区域 D, 对于 D 中的每一点 (x,y), 分别有区间落在 J 和 K 内惟一的一对值 $u\in J$, $v\in K$, 它们与 x, y 一起满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0, \end{cases} \tag{0.1}$$

则说方程组 (0.1) 确定了两个定义在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上, 值域分别落在 J 和 K 内的**隐函数组**. 若分别记这两个函数为 $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$, 则在 D 上恒成立等式 $\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0 \\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0. \end{cases}$

隐函数组定理

隐函数组定理1: 如果隐函数组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0, \end{cases}$ 满足如下条件:

- $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;
- $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$, 以及 F 与 G 的所有一阶偏导数在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内连续;
- Jacobi 行列式: $J=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\right|_{P_0}\neq 0.$

则在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内能**唯一**确定定义在点 $Q_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(Q_0)$ 内的两个**连续隐函数**

$$u=f(x,y),\quad v=g(x,y),$$

使得 $u_0=f(x_0,y_0)$, $v_0=g(x_0,v_0)$ 且在区域 $U(Q_0)$ 内,

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,\quad G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0.$$

隐函数组定理1(续): 进一步, 隐函数组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0, \end{cases}$ 所确定的

函数 $u=f(x,y), v=g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 内有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/J, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/J,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\Big/J, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\Big/J.$$

其中

$$J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}\right|_{P_0}.$$

例题1： 讨论由方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0, \\ G(x,y,u,v) = -u + v - xy + 1 = 0, \end{cases}$$

在点 $P_0(2,1,1,2)$ 邻域

- (1) 能否确定形如 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ 的隐函数组?
- (2) 能否确定形如 $x = x(u,y)$, $v = v(u,y)$ 的隐函数组?
- (3) 如果可以确定隐函数组，求偏导数.

例题2： 讨论方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{2}, \\ x + y + z = 2, \end{cases}$$

在点 $P_0(1, -1, 2)$ 邻域内能否确定形如 $x = f(z)$, $y = g(z)$ 的隐函数组.

定义: 设函数组(1) $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 定义于 xy 平面点集 $B \subset \mathbb{R}^2$ 上. 则它确定了一个映射 $T : B \to \mathbb{R}^2$, 即 $(u,v) = T(x,y)$, 或 $Q = T(P)$, $P \in B$.

定义: 设函数组(1) $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 定义于 xy 平面点集 $B \subset \mathbb{R}^2$ 上. 则它确定了一个映射 $T: B \to \mathbb{R}^2$, 即 $(u,v) = T(x,y)$, 或 $Q = T(P)$, $P \in B$.

我们称 $Q(u,v)$ 为映射 T 下 $P(x,y)$ 的**象**, 而 P 是 Q 的**原象**. 记 B 在映射 T 下的**象集**为 $B' = T(B)$.

定义: 设函数组(1) $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 定义于 xy 平面点集 $B \subset \mathbb{R}^2$ 上. 则它确定了一个映射 $T: B \to \mathbb{R}^2$, 即 $(u,v) = T(x,y)$, 或 $Q = T(P)$, $P \in B$.

我们称 $Q(u,v)$ 为映射 T 下 $P(x,y)$ 的**象**, 而 P 是 Q 的**原象**. 记 B 在映射 T 下的**象集**为 $B' = T(B)$.

如果 T 为一一映射, 则每一点 $Q(u,v) \in B'$ 都存在惟一点 $P(x,y) \in B$ 与之对应, 我们称这种映射关系为 T 的**逆映射(逆变换)**, 记作 T^{-1}, 即 $T^{-1}(T(P)) = P$, $\quad T(T^{-1}(Q)) = Q$.

定义: 设函数组(1) $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 定义于 xy 平面点集 $B \subset \mathbb{R}^2$ 上. 则它确定了一个映射 $T: B \to \mathbb{R}^2$, 即 $(u,v) = T(x,y)$, 或 $Q = T(P), P \in B$.

我们称 $Q(u,v)$ 为映射 T 下 $P(x,y)$ 的**象**, 而 P 是 Q 的**原象**. 记 B 在映射 T 下的**象集**为 $B' = T(B)$.

如果 T 为一一映射, 则每一点 $Q(u,v) \in B'$ 都存在惟一点 $P(x,y) \in B$ 与之对应, 我们称这种映射关系为 T 的**逆映射(逆变换)**, 记作 T^{-1}, 即 $T^{-1}(T(P)) = P, \quad T(T^{-1}(Q)) = Q.$ 或说存在定义在 B' 上的函数组

(2) $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$ 使得 $\begin{cases} u \equiv u(x(u,v), y(u,v)), \\ v \equiv v(x(u,v), y(u,v)). \end{cases}$

此时称函数组 (2) 为函数组 (1) 的**反函数组**.

反函数组定理： 设函数组 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 及其一阶偏导数在某区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续，点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点，且

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad v_0 = v(x_0, y_0), \quad \left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0} \neq 0,$$

则在 $P'_0(u_0, v_0)$ 的某邻域 $U(P'_0)$ 内有惟一的连续可微的反函数组 $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$ 使得 $\begin{cases} u \equiv u(x(u,v), y(u,v)), \\ v \equiv v(x(u,v), y(u,v)). \end{cases}$ 且

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1.$$

例题3： 讨论极坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

所确定的反函数组.

例题4： 讨论球坐标变换

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

所确定的反函数组.

例题5： 设 φ 为二元连续可微函数. 对于函数组 $u = x + at$, $v = x - at$, 试把弦振动方程

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad a > 0$$

变换成以 u, v 为自变量的方程.

本节作业

作业：

第 149 页：第2题(1),(3).

第 149 页：第3题.

第 149 页：第6题.

习题4： 设 $z=z(x,y)$ 是由方程组

$$x=e^{u+v}, \quad y=e^{u-v}, \quad z=uv$$

(u,v 为参量)所定义的函数, 求当 $u=0,v=0$ 时的 dz.