Ch3 函数极限

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

§1 函数极限概念

§2 函数极限的性质

§3 函数极限存在的条件

§4 两个重要的极限

§5 无穷小量与无穷大量

将学习：

函数极限存在的条件

归结原则(Heine定理)

设 f 在 $U^{\circ}(x_0;\delta')$ 上有定义. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是:
对任何含于 $U^{\circ}\left(x_0;\delta'\right)$ 且以 x_0 为极限的数列 $\left\{x_n\right\}$,
极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在且相等.

归结原则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在$\Leftrightarrow \forall\{x_n\}\subset U^\circ(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在且相等

证 (必要性) 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,根据函数极限的定义知,

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta')$,当$0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

设数列$\{x_n\}\subset U^\circ(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 根据数列极限的定义知,

对上述$\delta>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$, 当$n>N$ 时,有

$$0<|x_n-x_0|<\delta,$$

从而有

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon.$$

根据数列极限的定义知, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

归结原则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}\subset U^\circ(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

(充分性) 利用反证法证明.

设任给数列$\{x_n\}\subset U^\circ(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

假设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$不成立,则$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<\delta'),\ \exists x_\delta\in U^\circ(x_0,\delta)$,

使得 $|f(x_\delta)-A|\ge\varepsilon_0$.

取$\delta_1=\delta'$, 则$\exists x_1'\in U^\circ(x_0;\delta_1)$, 使得 $|f(x_1')-A|\ge\varepsilon_0$;

取$\delta_2=\dfrac{\delta'}{2}$, 则$\exists x_2'\in U^\circ(x_0;\delta_2)$, 使得 $|f(x_2')-A|\ge\varepsilon_0$; $\cdots$,

取$\delta_n=\dfrac{\delta'}{n}$, 则$\exists x_n'\in U^\circ(x_0;\delta_n)$, 使得 $|f(x_n')-A|\ge\varepsilon_0$; $\cdots$,

从而得到数列$\{x_n'\}$满足$\{x_n'\}\subset U^\circ(x_0;\delta')$, $0<|x_n'-x_0|<\dfrac{\delta'}{n}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=x_0$,

但是 $|f(x_n')-A|\ge\varepsilon_0$, $n=1,2,\cdots$.

这与$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=A$矛盾. 所以$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

注1： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \ \forall\{x_n\}\subset U^\circ(x_0;\delta')$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \ \forall\{x_n\}\subset U(+\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \ \forall\{x_n\}\subset U(-\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

注2： 定理中“极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在且相等”可改为：

“极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$都存在”.

理由如下：若存在$\{x_n\},\{y_n\}\subset U^\circ(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$,

设 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = B$. 要证$A = B$.

取新数列$\{z_n\}$: $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = y_n (n = 1,2,3,\cdots)$, 则

$\{z_n\}\subset U^\circ(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$, 根据已知条件$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$存在.

根据收敛数列与其子列的关系知，$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_{2n-1})$,

即 $A = B$.

注3： 归结原则有一个重要应用：

若存在$\{x_n\},\{y_n\}\subset U^\circ(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$,

但是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \neq B = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, 则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

若存在$\{x_n\}\subset U^\circ(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,但是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在,

则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

例1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

证 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi},\ y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}},\ n\in\mathbb{N}_+,$

有$x_n\neq 0, y_n\neq 0,$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=0.$

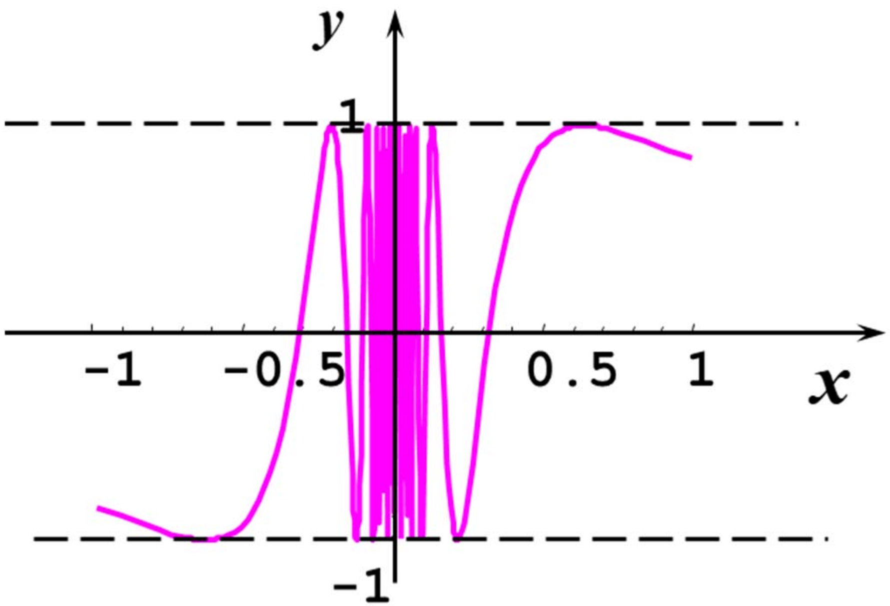
而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n\pi=\lim\limits_{n\to\infty}0=0,$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=0\neq 1=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{y_n},$

故$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

注： 从几何上看，$y=\sin\dfrac{1}{x}$的图像在$x=0$附近作密集的等幅振荡，当然不会趋于一个固定的值.



单侧极限归结原则(Heine定理)(加强版)

设函数$f(x)$在$U_{+}^{\circ}(x_0;\delta')$有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 的充要条件是:对任何以x_0为极限的递减数列 $\{x_n\}\subset U_{+}^{\circ}(x_0;\delta')$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

设函数$f(x)$在$U_{-}^{\circ}(x_0;\delta')$有定义. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 的充要条件是:对任何以x_0为极限的递增数列 $\{x_n\}\subset U_{-}^{\circ}(x_0;\delta')$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

单侧极限归结原则

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall$递减数列$\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

证 (必要性) 设$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$,根据函数极限的定义知,

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<\delta')$,使得当$0<x-x_0<\delta$ 时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

设递减数列$\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,根据数列极限的定义知,

对上述$\delta>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$,当$n>N$ 时,有 $0<|x_n-x_0|<\delta$,

从而有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$.

根据数列极限的定义知, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

单侧极限归结原则

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \text{递减数列}\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0;\delta')\text{且}\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\text{有}\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

(充分性) 利用反证法证明.

设任给递减数列$\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

假设 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq A$, 则$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0$, $\exists x_\delta\in U_+^\circ(x_0;\delta)$,使得

$$|f(x_\delta)-A|\geq\varepsilon_0.$$

取 $\delta_1=\delta'$, $\exists\, x_1'$, $0<x_1'-x_0<\delta_1$, $|f(x_1')-A|\geq\varepsilon_0$;

取 $\delta_2=\min\left\{\dfrac{\delta'}{2},x_1'-x_0\right\}$, $\exists\, x_2'$, $0<x_2'-x_0<\delta_2$, $|f(x_2')-A|\geq\varepsilon_0$; ……

取 $\delta_n=\min\left\{\dfrac{\delta'}{n},x_{n-1}'-x_0\right\}$, $\exists\, x_n'$, $0<x_n'-x_0<\delta_n$, $|f(x_n')-A|\geq\varepsilon_0$; ……

从而得到递减数列$\{x_n'\}\subset U_+^\circ(x_0;\delta')$, $0<|x_n'-x_0|<\dfrac{\delta'}{n}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=x_0$,

但是 $|f(x_n')-A|\geq\varepsilon_0$, $n=1,2,\cdots$.

这与$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=A$矛盾. 所以$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

单调有界定理

设$f(x)$为定义在$U_{+}^{\circ}(x_0)$上的单调有界函数，

则右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在.

单调有界定理 $f(x)$在$U_+^0(x_0)$上单调有界 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$存在

证 不妨设$f(x)$在$U_+^\circ(x_0)$上递减.

因为$f(x)$在$U_+^\circ(x_0)$上有界,根据确界原理, $\sup\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x)$存在,

设为A, 即 $\sup\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x)=A$. 由上确界定义,

对$\forall\varepsilon>0,\exists\, x^*\in U_+^\circ(x_0)$,使得 $A-\varepsilon<f(x^*)\le A$.

令 $\delta=x^*-x_0>0$, 当$0<x-x_0<\delta$ 时,由$f(x)$的递减性,

$$A-\varepsilon<f(x^*)\le f(x)\le A<A+\varepsilon.$$

从而 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

根据函数极限的定义知, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

例2 设 $f(x)$ 在 $U_{+}^{\circ}(x_0;\delta')$ 上单调, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^{+}} f(x)$ 存在的充要条件是存在一个数列 $\{x_n\}\subset U_{+}^{\circ}(x_0;\delta')$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在.

证 必要性可直接由归结原则得出. 下面证明充分性. 假设 $f(x)$ 递减.

设 $\exists\{x_n\}\subset U_{+}^{\circ}(x_0;\delta')$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. 根据数列极限的定义知,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_{+}$, 当 $n > N$ 时, 有 $A-\varepsilon < f(x_n) < A+\varepsilon$.

取 $\delta = x_{N+1} - x_0 > 0$, 对 $\forall x \in U_{+}^{\circ}(x_0;\delta)$, $A-\varepsilon < f(x_{N+1}) \le f(x)$.

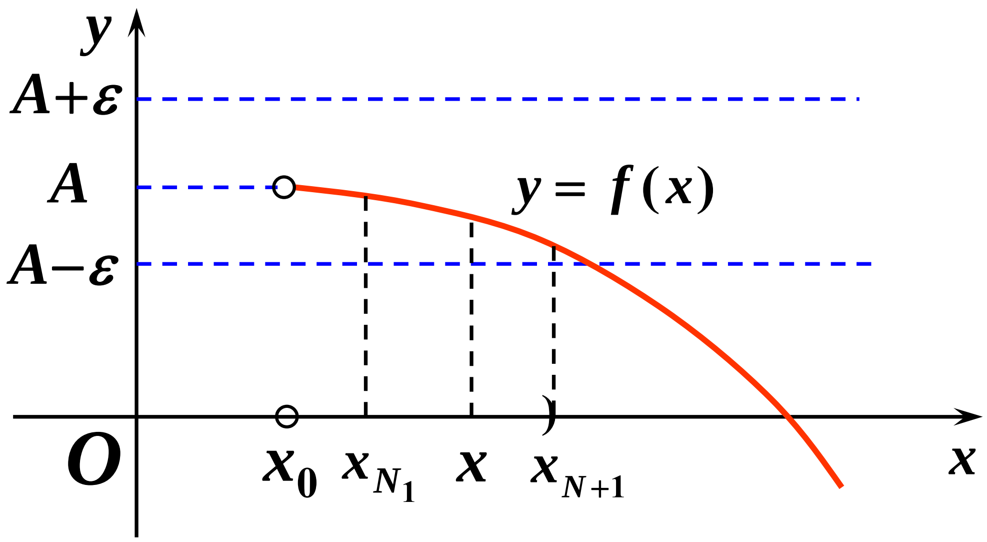
又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 < x$, 根据收敛数列的保号性知,

$\exists N_1 \in \mathbb{N}_{+}$, 且 $N_1 > N$, 使 $x_{N_1} < x$, 从而 $f(x) \le f(x_{N_1}) < A+\varepsilon$. 因此

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon.$$

根据函数极限的定义知, $\lim\limits_{x\to x_0^{+}} f(x) = A$.

注：



柯西收敛准则

设$f(x)$在$U(+\infty)$上有定义,则极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在的充要条件是对$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall x',x''>M$,有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon.$$

柯西收敛准则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall x',x''>M$,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

证1 (必要性) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,根据函数极限的定义知,

对$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall x>M$,有$|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}.$

所以对$\forall\ x',x''>M$,有 $|f(x')-f(x'')|\le |f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon.$

(充分性) 对$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall x',x''>M$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

任取$\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+$,当$n>N$时,$x_n>M$. 又当$n,m>N$时,

$x_n,x_m>M$,故$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$,即数列$\{f(x_n)\}$满足柯西条件,

根据数列极限的柯西收敛准则知,$\{f(x_n)\}$收敛.

若存在$\{x_n\},\{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty,\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A,\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=B,B\ne A$,

则令$\{z_n\}$为 $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots$,显然$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=+\infty$. 但$\{f(z_n)\}$发散,矛盾.

这就证明了对$\forall\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在且相等.

由归结原则知, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

柯西收敛准则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall x',x''>M$,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

证2 (必要性)设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则对$\forall\varepsilon>0,\exists M>0(M>a),\forall x>M$,有

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以对$\forall\ x',x''>M$,有$|f(x')-f(x'')|\le |f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon.$

(充分性) 对$\forall\varepsilon>0,\exists M>0(M>a),\forall x',x''>M$,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

任取$\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$,则$\exists N\in\mathbb{N}_+$,当$n>N$时,$x_n>M$. 又当$n,m>N$时,

$x_n,x_m>M$,故$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$, 即数列$\{f(x_n)\}$满足柯西条件,

根据数列极限的柯西收敛准则知,$\{f(x_n)\}$收敛.

记$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$. 则对$\forall x>M,\forall n>N$,有$|f(x)-f(x_n)|<\varepsilon.$

令$n\to\infty$, 则 $|f(x)-A|\le\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A.$

注1：柯西收敛准则的否定陈述：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\text{不存在} \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\ \forall M>0, \exists x_1', x_2''>M,\text{使得}$$

$$|f(x_1')-f(x_2'')|\ge\varepsilon_0.$$

注2： 其他类型函数极限的柯西收敛准则及其否定陈述：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\text{存在} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists\delta>0, \forall x', x''\in U^0(x_0;\delta),\text{有}$$
$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\text{不存在} \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0, \exists x_1', x_2''\in U^0(x_0;\delta),\text{使得}$$
$$|f(x_1')-f(x_2'')|\ge\varepsilon_0.$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\text{存在} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists\delta>0, \forall x', x''\in U_+^0(x_0;\delta),\text{有}$$
$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\text{不存在} \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0, \exists x_1', x_2''\in U_+^0(x_0;\delta),\text{使得}$$
$$|f(x_1')-f(x_2'')|\ge\varepsilon_0.$$

注2： 其他类型函数极限的柯西收敛准则及其否定陈述：

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\text{存在} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0, \forall x', x'' \in U_-^0(x_0;\delta), \text{有}$$
$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)\text{不存在} \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0, \exists x_1', x_2'' \in U_-^0(x_0;\delta), \text{使得}$$
$$|f(x_1')-f(x_2'')|\geq\varepsilon_0.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)\text{存在} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists M>0, \forall x', x'' < -M, \text{有}$$
$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)\text{不存在} \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\ \forall M>0, \exists x_1', x_2'' < -M, \text{使得}$$
$$|f(x_1')-f(x_2'')|\geq\varepsilon_0.$$

例3 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

证 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对 $\forall M>0$,

取 $x_1'=2[M+1]\pi>M, x_2''=2[M+1]\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$,

有 $\left|\sin x_1-\sin x_2\right|=1>\dfrac{1}{2}=\varepsilon_0$.

根据柯西收敛准则的否定陈述知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

例4 利用柯西收敛准则证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 存在.

证 对 $\forall\varepsilon>0$，不妨设 $x'>x''>0$，要使

$$\left|\frac{\sin x'}{x'}-\frac{\sin x''}{x''}\right|\le\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}<\frac{2}{x''}<\varepsilon,$$

只要 $x''>\dfrac{2}{\varepsilon}$.

因此，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $M=\dfrac{2}{\varepsilon}>0$，当 $x'>x''>M$ 时，有

$$\left|\frac{\sin x'}{x'}-\frac{\sin x''}{x''}\right|<\varepsilon.$$

根据柯西收敛准则的否定陈述知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 存在.

例5 证明Dirichlet函数$D(x)=\begin{cases}1, & x=\text{有理数}\\ 0, & x=\text{无理数}\end{cases}$在$\mathbb{R}$上处处无极限.

证1 对于任意的$x_0\in\mathbb{R}$,存在有理数列$\{x_n\}$和无理数列$\{y_n\}$,使得

$$x_n\neq x_0, y_n\neq x_0,\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\ \lim_{n\to\infty}y_n=x_0.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}D(x_n)=\lim_{n\to\infty}1=1\neq 0=\lim_{n\to\infty}D(y_n)=\lim_{n\to\infty}0,$$

根据归结原则知, $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在.

由x_0的任意性知, Dirichlet函数在$\mathbb{R}$上处处无极限.

例5 证明Dirichlet函数$D(x)=\begin{cases}1, & x=\text{有理数}\\ 0, & x=\text{无理数}\end{cases}$在$\mathbb{R}$上处处无极限.

证2 对于任意的$x_0\in\mathbb{R}$,

取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$,对$\forall\delta>0$,根据有理数与无理数在实数集中的稠密性知,

存在有理数$x_1\in U^0(x_0;\delta)$与无理数$x_2\in U^0(x_0;\delta)$,有

$$\left|D(x_1)-D(x_2)\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

根据Cauchy收敛准则的否定陈述知,$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$不存在.

由x_0的任意性知,Dirichlet函数在$\mathbb{R}$上处处无极限.

你应该：

知道归结原则并会证明

理解单调有界定理

掌握柯西收敛准则并会证明

海涅1838年到柏林大学、哥廷根大学攻读,是高斯、狄利克雷的学生. 1842年在柏林大学获得哲学博士学位. 海涅阐述了一致收敛的概念,证明了连续函数的一致收敛定理. 独立发现并利用了海涅定理,建立了沟通数列极限与函数极限的桥梁.给出了无理数的算数定义.研究了球面函数、拉梅函数、贝塞尔函数等

——摘自百度百科

海因里希·爱德华·海涅
(1821年3月16日-1881年10月21日)
德国数学家