Ch12 数项级数

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周四下午2点至4点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友时请备注 学号 姓名 数学分析2)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

- 数项级数
  - 数项级数的敛散性的定义及性质
  - 正项级数
    - 正项级数的定义及收敛的充要条件
    - 正项级数敛散性判别法
      - 比较判别法
      - 比式判别法
      - 根式判别法
      - 积分判别法
  - 一般项级数
    - 交错级数：莱布尼茨判别法
    - 绝对收敛、条件收敛
    - 阿贝尔判别法
    - 狄利克雷判别法

重要定义

数项级数的定义

给定一个数列$\{u_n\}$,将其各项依次用加号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$$

称为数项级数,简称级数. 其中u_n称为级数的通项或一般项.

数项级数常记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$或简记为$\sum u_n$.

数项级数部分和的定义

数项级数的前n项之和记为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\dots+u_n$,

称为数项级数的第n个部分和,简称部分和.

数项级数敛散性的定义

若数项级数的部分和数列$\{S_n\}$收敛(于S),则称级数收敛(于S),

称S为级数的和,记作 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$.

若部分和数列$\{S_n\}$发散,则称级数发散.

BY GYH

重要定义 绝对收敛级数的定义

若级数$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$各项绝对值组成的级数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$$

收敛，则称原级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为绝对收敛级数.

条件收敛的定义

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，但级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛.

重要性质

数项级数收敛的柯西准则

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}_+, \forall m>N, \forall p\in\mathbb{N}_+$,有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon.$$

数项级数发散的充要条件 柯西准则的否定形式

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0, \exists\forall N\in\mathbb{N}_+, \exists m_0>N, \exists p_0\in\mathbb{N}_+$,使得

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geq\varepsilon_0.$$

数项级数收敛的必要条件

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0.$

数项级数发散的充分条件

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0 \Rightarrow$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

重要性质

数项级数收敛的线性性质

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛,c,d是两个常数,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)$也收敛,且$\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n+d\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

级数改变有限项后的敛散性

去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性.

收敛级数加括号后的敛散性

设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则在它的和式中任意加括号后所得级数仍收敛,且其和不变.

重要性质

正项级数收敛的充要条件

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列$\{S_n\}$有界.

$\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$,有$S_n \le M$.

绝对收敛级数的敛散性

绝对收敛的级数是收敛的,即若$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

正项级数判别法

比较判别法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数,如果$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$,有 $u_n\le v_n$,则

(1) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛; (2) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散.

比较判别法的极限形式

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$,则

(1) 当$0<l<+\infty$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$同敛散;

(2) 当$l=0$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛;

(3) 当$l=+\infty$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

正项级数判别法

比式(达朗贝尔)判别法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,

(1) 若$\exists N_0\in\mathbb{N}_+,\exists q(0<q<1)$,对$\forall n>N_0$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\le q$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) 若$\exists N_0\in\mathbb{N}_+$,对$\forall n>N_0$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

比式判别法的极限形式

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$,则

(1) 当$q<1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛; (2) 当$q>1$或$q=+\infty$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(3) 当$q=1$时,判别法失效.

若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$,级数收敛;若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q>1$,级数发散.

正项级数判别法

根式(柯西)判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数,且$\exists N_0 \in \mathbb{N}_+, \exists l > 0$,

(1) 若对$\forall n > N_0$: $\sqrt[n]{u_n} \le l < 1$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(2) 若对$\forall n > N_0$: $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

根式判别法的极限形 式

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数,且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$,则

(1) 当$l < 1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; (2) 当$l > 1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 当$l = 1$时,判别法失效.

若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = l < 1$,级数收敛;若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = l > 1$,级数发散.

正项级数判别法

拉贝判别法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,

(1) 若$n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\ge r>1(n>N_0)$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) 若$n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\le 1(n>N_0)$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

拉贝判别法的极限形 式

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,且$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$,则

(1) 当$r>1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛; (2) 当$r<1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l<1$,级数收敛;若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l>1$,级数发散.

正项级数判别法

积分判别法

设f是$[1,+\infty)$上的减函数,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛的充要条件是反常积分$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$收敛.

交错级数判别法 莱布尼茨判别法

若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$满足：

(1) 数列$\{u_n\}$单调递减; (2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$收敛,且其余项估计式为$|R_n| = |S - S_n| \le u_{n+1}$.

一般项级数判别法

狄利克雷判别法

(1) 数列$\{a_n\}$单调递减,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right\}$有界,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

阿贝尔判别法

(1) 数列$\{a_n\}$单调有界,

(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

重要结论

等比级数 $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ $(a\neq 0)$：$|q|<1$，级数收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$. $|q|\geq 1$，级数发散.

调和级数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$：发散.

p级数 $\dfrac{1}{1^p}+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\ldots+\dfrac{1}{n^p}+\ldots$：$p>1$，级数收敛. $p\leq 1$，级数发散.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$：$p>1$，级数收敛. $p\leq 1$，级数发散.

重要结论

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$加了括号后发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也发散.

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散,加括号后的级数敛散性不定.

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$加了括号后收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性不定.

绝对收敛级数满足交换律与分配律.

重要结论

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 也收敛. 反之不一定成立.

$$\left(\sqrt{u_n u_{n+1}} \le \frac{u_n + u_{n+1}}{2} \right)$$

$$\left(u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 2k+1 \\ \dfrac{1}{n^2}, & n = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{N}_+, \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{收敛}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \right)$$

P5习题12.1/1(2)

证明级数$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$收敛,并求其和.

解1 级数的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-(\frac{1}{3})^n\right)}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right)=\frac{3}{2}$,

从而级数收敛,且其和为$\frac{3}{2}$.

P5习题12.1/1(2)

证明级数$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$收敛,并求其和.

解2 由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$是等比级数,公比分别为$\frac{1}{2},\frac{1}{3}$,

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$都收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

因此根据级数的线性性质知,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$收敛,

且 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

P5习题12.1/1(4) 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$收敛,并求其和.

解1 级数的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)=\sum_{k=3}^{n+2}\sqrt{k}-2\sum_{k=2}^{n+1}\sqrt{k}+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$$

$$=2\sum_{k=3}^{n}\sqrt{k}-2\sum_{k=3}^{n}\sqrt{k}-2\sqrt{2}-2\sqrt{n+1}+1+\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$$

$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}+1-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}+1-\sqrt{2},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}+1-\sqrt{2}\right)=1-\sqrt{2},$

从而级数收敛,且其和为$1-\sqrt{2}$.

P5习题12.1/1(4) 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$收敛,并求其和.

解2 级数的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}+\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1-\sqrt{2},$

从而级数收敛,且其和为$1-\sqrt{2}$.

P5习题12.1/1(5) 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$收敛,并求其和.

解 级数的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2(2k-1)-(2k-1)}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=3,$

从而级数收敛,且其和为3.

P5习题12.1 / 3

级数$\sum u_n$与$\sum v_n$都发散,试问$\sum(u_n+v_n)$一定发散吗?

又若u_n与$v_n(n=1,2,\cdots)$都是非负数,则能得出什么结论?

解 不一定.

$$\sum u_n=\sum(-1)^n \text{ 发散}, \sum v_n=\sum(-1)^{n-1} \text{ 发散},$$

$$\sum(u_n+v_n)=\sum\left((-1)^n+(-1)^{n-1}\right)=\sum 0=0 \text{ 收敛}.$$

若u_n与$v_n(n=1,2,\cdots)$为非负数,则

$$u_n+v_n\ge u_n\ge 0,$$

已知级数$\sum u_n$发散,根据比较判别法知,$\sum(u_n+v_n)$发散.

相关结论

若级数$\sum u_n, \sum v_n$收敛, 则$\sum (u_n + v_n)$收敛.

若级数$\sum u_n$收敛, $\sum v_n$发散, 则$\sum (u_n + v_n)$发散.

若级数$\sum u_n, \sum v_n$发散, 则$\sum (u_n + v_n)$可能收敛可能发散.

若正项级数$\sum u_n, \sum v_n$发散, 则$\sum (u_n + v_n)$发散.

P5习题12.1 / 4

证明：若数列$\{a_n\}$收敛于a，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

证 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$$

$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1}.$$

已知$\lim_{n\to\infty}a_n=a$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-a.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a.$

P5习题12.1 / 5(1) 应用柯西判别法判别级数$\sum \frac{\sin 2^n}{2^n}$的敛散性.

解 记$u_n=\frac{\sin 2^n}{2^n}$. 对$\forall \varepsilon>0$,对$\forall p\in\mathbb{N}_+$,要使

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|=\left|\frac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}}+\frac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{\sin 2^{m+p}}{2^{m+p}}\right|$$

$$\le\left|\frac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}}\right|+\left|\frac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}}\right|+\cdots+\left|\frac{\sin 2^{m+p}}{2^{m+p}}\right|\le\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+p}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2^{m+1}}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^m}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^m}<\varepsilon,$$ 只要$m>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$.

因此,$\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$,取$N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,$\forall m>N,\forall p\in\mathbb{N}_+$,有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|=\left|\frac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}}+\frac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{\sin 2^{m+p}}{2^{m+p}}\right|<\frac{1}{2^m}<\varepsilon,$$

根据级数收敛的柯西准则知, 级数$\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$收敛.

P5习题12.1/5(3) 应用柯西判别法判别级数$\sum \frac{(-1)^n}{n}$的敛散性.

解 记$u_n=\frac{(-1)^n}{n}$. 对$\forall p\in\mathbb{N}_+$,当p是奇数时,有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|=\left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1}+\frac{(-1)^{m+2}}{m+2}+\cdots+\frac{(-1)^{m+p}}{m+p}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots-\frac{1}{m+p-1}+\frac{1}{m+p}\right|=\left|\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+p-2}-\frac{1}{m+p-1}\right)+\frac{1}{m+p}\right|$$

$$=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots-\frac{1}{m+p-1}+\frac{1}{m+p}=\frac{1}{m+1}-\left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{m+p-1}-\frac{1}{m+p}\right)<\frac{1}{m+1}.$$

当p是偶数时,有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|=\left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1}+\frac{(-1)^{m+2}}{m+2}+\cdots+\frac{(-1)^{m+p}}{m+p}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+p-1}-\frac{1}{m+p}\right|=\left|\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+p-1}-\frac{1}{m+p}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots-\frac{1}{m+p-1}+\frac{1}{m+p}=\frac{1}{m+1}-\left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+3}\right)-\cdots-\frac{1}{m+p}<\frac{1}{m+1}.$$

P5习题12.1 / 5(3) 应用柯西判别法判别级数$\sum \frac{(-1)^n}{n}$的敛散性.

所以对$\forall p \in \mathbb{N}_+$,都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}| = \left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1}+\frac{(-1)^{m+2}}{m+2}+\cdots+\frac{(-1)^{m+p}}{m+p}\right| < \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m}.$$

因此,$\forall \varepsilon > 0$,取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,$\forall m > N$,$\forall p \in \mathbb{N}_+$,有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}| = \left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1}+\frac{(-1)^{m+2}}{m+2}+\cdots+\frac{(-1)^{m+p}}{m+p}\right| < \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

根据级数收敛的柯西准则知, 级数$\sum \frac{(-1)^n}{n}$收敛.

P5习题12.1 / 5(4) 应用柯西判别法判别级数$\sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$的敛散性.

解 对$\forall N \in \mathbb{N}_+$,取$m_0 = 2N > N, p_0 = 2N \in \mathbb{N}_+$,有

$$\left| u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{(m_0+1)+(m_0+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(m_0+2)+(m_0+2)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2m_0+(2m_0)^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{(2N+1)+(2N+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2N+2)+(2N+2)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4N+(4N)^2}} \right|$$

$$\geq \frac{2N}{\sqrt{4N+(4N)^2}} \geq \frac{2N}{4N\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

因此,取$\varepsilon_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} > 0$,对$\forall N \in \mathbb{N}_+$,取$m_0 = 2N > N$, $p_0 = 2N \in \mathbb{N}_+$,使得

$$\left| u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} \right| \geq \varepsilon_0.$$

根据级数收敛的柯西准则知, 级数$\sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$发散.

P5习题12.1 / 9

举例说明：若级数$\sum u_n$对每个固定的p满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right)=0,$$

此级数仍可能不收敛.

解 考查调和级数$\sum\frac{1}{n}$：已知$\sum\frac{1}{n}$发散，但对每个固定的p，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+p}$$

$$=0.$$

级数收敛的Cauchy准则

级数$\sum u_n$收敛$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall m>N,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|<\varepsilon.$$

$\Leftrightarrow\ \forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $\lim\limits_{m\to\infty}\left(u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right)=0.$

与P5习题12.1/9有些相似的题

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\left(\ln(1+x)\right)\Big|_0^1=\ln 2.$$

P5习题12.1 / 10

设级数$\sum u_n$满足：加括号后级数$\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+1}}\right)$收敛$(n_1=0)$，且在同一括号中的$u_{n_k+1},u_{n_k+2},\cdots,u_{n_{k+1}}$符号相同，证明级数$\sum u_n$亦收敛.

证 设级数$\sum u_n$的部分和数列为$\{S_n\}$，设级数$\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{n_k+1}+u_{n_k+2}+\cdots+u_{n_{k+1}}\right)$的部分和数列为$\{T_k\}$，

且 $\lim_{k\to\infty} T_k = T$. 有 $T_k = T_{k-1} + u_{n_k+1} + u_{n_k+2} + \cdots + u_{n_{k+1}}$.

对$\forall n \in \mathbb{N}_+, \exists k \in \mathbb{N}_+$，使得 $n_k + 1 \le n \le n_{k+1}$.

因$u_{n_k+1},u_{n_k+2},\cdots,u_{n_{k+1}}$的符号相同，所以当$n$从$n_k+1$到$n_{k+1}$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和$S_n$

将单调地在T_{k-1}和T_k之间变动，即 $T_{k-1} \le S_n \le T_k$或$T_k \le S_n \le T_{k-1}$.

当$n\to\infty$时，有$k\to\infty$，而$\lim_{k\to\infty} T_{k-1} = \lim_{k\to\infty} T_k = T$，从而根据迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = T.$$

因此级数$\sum u_n$收敛.