第二十二章　曲面积分

第二节　第二型曲面积分

第二十二章　曲面积分

第二节　第二型曲面积分

1. **第二型曲面积分的概念**
2. **第二型曲面积分的计算**

双侧曲面: 设连通曲面 S 上到处都有连续变动的切平面(或法线), M 为曲面 S 上的一点, 曲面在 M 处的法线有两个方向：当取定其中一个指定为正方向时, 则另外一个为负方向.
设 M_0 为 S 上任意一点, L 为 S 上任一经过 M_0, 且不超出 S 边界的闭曲线. 又设 M 为动点, 它在 M_0 处与 M_0 有相同的法线方向, 且有如下特性：当 M 从 M_0 出发沿 L 回到 M_0 时, 若这时 M 的法线方向仍与 M_0 的法线方向相一致, 则说这曲面 S 是**双侧曲面**;若与 M_0 的法线方向相反, 则说 S 是**单侧曲面**.

定义: 设 P, Q, R 为定义在双侧曲面 S 上的函数, 在 S 所**指定的一侧**做分割 T, 它把 S 分为 n 个小曲面块 S_i, $i = 1, 2, \cdots$, 分割 T 的细度为 $\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{S_i \text{ 的直径}\}$, 以 $\Delta S_{i_{yz}}$, $\Delta S_{i_{zx}}$, $\Delta S_{i_{xy}}$ 分别表示 S_i 在三个坐标面上投影区域的面积, 它们的符号与 S_i 指定侧**法方向与坐标轴夹角余弦一致**. 例如, $\Delta S_{i_{xy}} = \Delta S_i \cos(\gamma_i)$. 在 S_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i). 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{yz}} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{zx}} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$$

存在且极限与分割 T 与点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关, 则称此极限为 P, Q, R 在 S 上的**第二型曲面积分**, 记为

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

性质1： 设 S 为光滑曲面，指定其法向量为 $\vec{n}$，令 $-S$ 表示 S 的反向，即指定法向量为 $-\vec{n}$，则

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{-S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

性质1： 设 S 为光滑曲面，指定其法向量为 $\vec{n}$，令 $-S$ 表示 S 的反向，即指定法向量为 $-\vec{n}$，则

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{-S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

性质2： 设 S 为光滑曲面，指定其法向量为 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，则

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

第二型曲面积分的计算

定理22.2： 设 R 是定义在光滑曲面

$$S: z = z(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

上的连续函数，若指定 S 方向为上侧，($\vec{n}$ 与 z 成锐角)，则

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dxdy.$$

然而，若指定 S 方向为下侧，($\vec{n}$ 与 z 成钝角)，则

$$\iint_S R(x, y, z) dxdy = -\iint_D R(x, y, z(x, y)) dxdy.$$

例题1： 计算积分

$$\iint_S xyzdxdy,$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x \geq 0,\ y \geq 0$ 的部分，取球面外侧.

例题2： 计算积分

$$\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 S 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部并选取外侧.

两类曲面积分的联系

定理22.3： 设 S 为光滑曲面，指定其法向量为 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，则

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

定理22.4： 设 S 为光滑曲面 $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D$, 并以 S 的上侧为正侧, 则

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=$$
$$=\iint_D\Big(P(x,y,z(x,y))(-z_x)+Q(x,y,z(x,y))(-z_y)$$
$$+R(x,y,z(x,y))\Big)dxdy.$$

例题3： 计算积分

$$\iint\limits_{S}(2x+z)dydz+zdzdx,$$

其中 S 是抛物面 $z=x^2+y^2$, $z\in[0,1]$ 的上侧.

例题4： 计算积分

$$\iint\limits_S (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (z+x)dxdy,$$

其中 S 为以正方体

$$\{(x,y,z) : |x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1\}$$

的整个表面的外侧.

例题5： 计算积分

$$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

其中 S 是半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

本节作业

作业：

第 269 页：第1题:(3),(4).

第 269 页：第2题.