Ch4 函数的连续性

总结及习题评讲

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

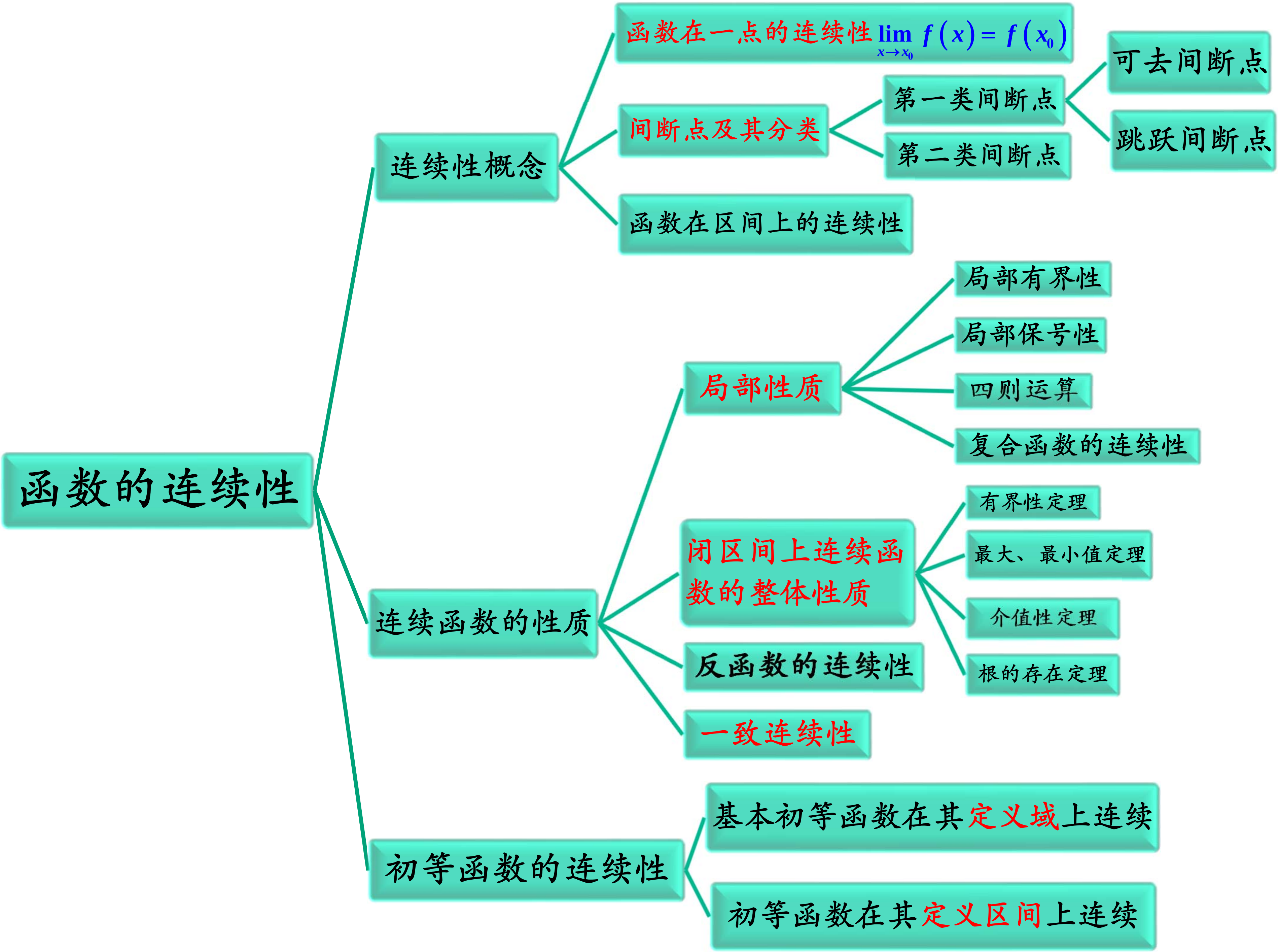
(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年12月14日

BY GYH

数学分析1 —— Ch4 函数的连续性 —— 总结



BY GYH

重要概念 函数连续性定义

设函数$f(x)$在某$U(x_0)$上有定义.若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

函数$f(x)$在点x_0连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0.$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0;\delta)$,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

设函数$f(x)$在某$U_-(x_0)$上有定义.若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, 则称函数$f(x)$在点$x_0$左连续.

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U_-(x_0;\delta)$,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

设函数$f(x)$在某$U_+(x_0)$上有定义.若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 则称函数$f(x)$在点$x_0$右连续.

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U_+(x_0;\delta)$,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

若函数$f(x)$在区间I上的每一点都连续,则称$f(x)$为I上的连续函数.

若函数$f(x)$在区间(a,b)上连续,在$x=a$右连续,在$x=b$左连续,则称$f(x)$在$[a,b]$上连续.

重要概念 函数间断点的定义

设函数$f(x)$在某$U^{\circ}(x_0)$上有定义.若$f(x)$在点x_0无定义,或$f(x)$在点x_0有定义但不连续,则称点x_0是函数$f(x)$的间断点或不连续点.

函数间断点的分类

第一类间断点：左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$,右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在.

跳跃间断点：左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在但不相等.

可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\in\mathbb{R}$, $f(x)$在点x_0无定义或有定义但$f(x_0)\neq A$.

第二类间断点：左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$中至少有一个不存在.

重要概念

函数一致连续性定义

设$f(x)$为定义在区间I上的函数.

对$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in I : |x' - x''| < \delta$,有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

则称函数$f(x)$在区间I上一致连续.

函数不一致连续性的定义

若$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in I$,虽然$|x_1 - x_2| < \delta$,但是$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$,

则称函数$f(x)$在区间I上不一致连续.

连续函数的局部性质

(局部有界性) 若函数$f(x)$在点x_0连续,则$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$上有界.

(局部保号性) 若函数$f(x)$在点x_0连续,且$f(x_0)>0$(或<0),则

对$\forall r\in(0,f(x_0))$(或$r\in(f(x_0),0)$), $\exists U^\circ(x_0)$,对$\forall x\in U^\circ(x_0)$,有

$$f(x)>r>0\left(\text{或}f(x)<r<0\right).$$

(四则运算法则) 若函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0连续,则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\left(g(x_0)\neq 0\right)\text{在点}x_0\text{连续}.$$

(复合函数的连续性) 若函数$u=g(x)$在点x_0连续,函数$y=f(u)$在点u_0

$(u_0=g(x_0))$连续,则复合函数$f\circ g$在点x_0连续.

$$\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)=f\left(g(x_0)\right).$$

闭区间上连续函数的性质

(有界性定理) 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

(最大、最小值定理) 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 则$f(x)$在$[a,b]$上有最大值、最小值.

(介值性定理) 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, $f(a)\neq f(b)$, μ是介于$f(a)$与$f(b)$之间的任何实数, 则$\exists x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=\mu$.

(根的存在定理) 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, $f(a)$与$f(b)$异号,

则$\exists x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=0$.

(反函数的连续性定理) 若函数$y=f(x)$在$[a,b]$上严格单调并连续,

则其反函数$x=f^{-1}(y)$在其定义域$\left[f(a),f(b)\right]$或$\left[f(b),f(a)\right]$上连续.

(一致连续性定理(Cantor定理)) 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

重要定理 函数在一点连续的充要条件

函数$f(x)$在点x_0连续当且仅当函数$f(x)$在点x_0既左连续,又右连续,

即 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$

重要结论 狄利克雷函数连续性

狄利克雷函数$D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$:

由于$D(x)$在$\mathbb{R}$上处处都不存在极限，所以$D(x)$在$\mathbb{R}$上每一点都不连续.

在$\mathbb{R}$上的每一点都是$D(x)$的第二类间断点.

函数$f(x)=xD(x)$:

由于$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} xD(x)=0=f(0)$，故$f(x)=xD(x)$在点$x=0$处连续.

由于$f(x)=xD(x)$在$x\neq 0$处极限都不存在，故在$\mathbb{R}$上除了$x=0$外的点都是$f(x)=xD(x)$的第二类间断点.

重要结论　黎曼函数连续性

$$黎曼函数R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, x=\dfrac{p}{q}, p,q\in\mathbb{N}_+, \dfrac{p}{q}为既约真分数 \\ 0,\ \ x=0,1以及(0,1)上的无理数\end{cases};$$

由于对$\forall x_0\in(0,1), \lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$,

当x_0是无理点时, $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0=R(x_0)$, 故$R(x)$在$(0,1)$上任何无理点处连续.

当x_0是有理点时, $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0\neq R(x_0)$, 故$R(x)$在$(0,1)$上任何有理点处不连续.

在$(0,1)$上的每一个有理点都是$R(x)$的第一类可去间断点.

重要结论 点态连续相关结论

(1)若函数$f(x)$在点x_0连续,则$|f(x)|$与$f^2(x)$在点x_0连续.

反之不一定成立.

(2)若函数$f(x),g(x)$在点x_0连续,则$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$,

$G(x)=\min\{f(x),g(x)\}$也在点x_0连续.

重要结论　间断点相关结论

若函数f在区间I上单调,则f在I上只可能有第一类间断点.

若函数f在区间$[a,b]$上只有第一类间断点,则f在$[a,b]$上有界.

重要结论 介值性相关结论

连续函数具有介值性,但具有介值性的函数不一定连续.

若$f(x)$为$[a,b]$上的增函数,其值域为$\left[f(a),f(b)\right]$,则$f(x)$在$[a,b]$上连续.

重要结论 连续、一致连续与有界的关系

(1)若函数f在$[a,b]$上连续,则f在$[a,b]$上有界.

(2)若函数f在无限区间$[a,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,则$f$在$[a,+\infty)$上有界.

(3)若函数f在(a,b)上连续,且$f(a+0)$与$f(b-0)$为有限值,则f在(a,b)上有界.

(4)若函数f在有限区间I上一致连续,则f在区间I上有界.

(5)若函数f在无限区间I上一致连续,则f在区间I上不一定有界.

$f(x)=x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续,但$f(x)=x$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

重要结论　连续函数与最值的关系

(1)若函数f在$[a,b]$上连续,则f在$[a,b]$上必能取到最大值与最小值.

(2)若函数f在无限区间$[a,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在, 则$f$在$[a,+\infty)$上不一定同时取得最大值与最小值,但一定能取到最大值或最小值.

(3)若函数f在(a,b)上连续,且$f(a+0)=f(b-0)=+\infty$,

则f在(a,b)上能取到最小值.

(4)若函数f在(a,b)上连续,且$f(a+0)=f(b-0)=-\infty$,

则f在(a,b)上能取到最大值.

(5)若f为$\mathbb{R}$上连续周期函数,则f在$\mathbb{R}$上有最大值和最小值.

重要结论 区间I上连续与一致连续性

函数连续的柯西收敛准则 函数$f(x)$在区间I上连续的充要条件是：

对$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in U(x_0;\delta) \cap I$,有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

函数$f(x)$在区间I上一致连续的充要条件是：

对$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in I: |x' - x''| < \delta$,有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

重要结论 一致连续性相关结论

(1)利用一致连续性的定义证明函数在给定区间上一致连续.

(2)若函数在闭区间上连续,利用一致连续性定理.

(3)若函数f在有限区间(a,b)上连续,且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在,

则f在(a,b)上一致连续.

(4)若函数f在(a,b)上一致连续,则$f(a+0)$与$f(b-0)$都存在.

(5)若函数f在无限区间$[a,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$存在,

则f在$[a,+\infty)$上一致连续.

重要结论　一致连续性相关结论

(6)一致连续的区间可加性：函数f分别在区间I_1, I_2上一致连续，

且I_1的右端点$c \in I_1$，I_2的左端点$c \in I_2$，

则函数f在区间$I_1 \cup I_2$上一致连续.

(7)若函数f, g在区间I上一致连续，则函数$f \pm g$在区间I上一致连续.

(8)若函数f, g在有限区间I上一致连续，则函数$f \cdot g$在区间I上一致连续.

(9)若函数f, g在无限区间I上一致连续，则函数$f \cdot g$在区间I上不一定一致连续.

(10)若f为$\mathbb{R}$上连续周期函数，则f在$\mathbb{R}$上一致连续.

重要定理　函数一致连续的充要条件

函数$f(x)$在区间I上一致连续的充要条件是

$$\forall\{x_n\},\{y_n\}\subset I, \text{若} \lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0, \text{则} \lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)-f(y_n)\big)=0.$$

重要结论　不一致连续性相关结论

(1)若函数f在区间I上不连续,则f在I上不一致连续.

(2)若$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in I$,虽然$|x_1 - x_2| < \delta$,但是$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$,
则f在区间I上不一致连续.

(3)若$\exists \{x_n\}, \{y_n\} \subset I$,虽然$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$,但是$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n) - f(y_n)\right) \neq 0$,
则f在区间I上不一致连续.

重要结论 具体函数一致连续与不一致连续相关结论

(1)函数$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

(2)函数$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

(3)函数$f(x)=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

(4)函数$f(x)=x^{\alpha}\,(0\le\alpha\le 1)$在$[0,+\infty)$上一致连续.

(5)函数$f(x)=\cos\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

(6)函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$(0,+\infty)$上一致连续.

(7)函数$f(x)=x^2$在$[a,b]$上一致连续.

函数$f(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

重要结论 具体函数一致连续与不一致连续相关结论

(8)函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.

函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续.

(9)函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.

函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续.

(10)函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.

函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续.

(11)函数$f(x)=\ln x$在$[1,+\infty)$上一致连续.

函数$f(x)=\ln x$在$(0,1)$上不一致连续.

重要结论

基本初等函数在其定义域上连续.

初等函数在其定义区间上连续.

重要结论

求极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

若函数$f(x)$在点x_0连续,则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

P68/习题4.1/1 按定义证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在其定义域内连续.

证 $f(x)=\dfrac{1}{x}$的定义域为,$D=\{x\,|\,x\neq 0\}$. 对$\forall x_0\in D$,限制$|x-x_0|<\dfrac{|x_0|}{2}$,

从而$|x_0|-|x|<\dfrac{|x_0|}{2}$,即$|x|>\dfrac{|x_0|}{2}$.

对$\forall\varepsilon>0$,要使

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{xx_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}<\frac{2}{x_0^2}|x-x_0|<\varepsilon,$$

只要$|x-x_0|<\dfrac{x_0^2}{2}\varepsilon$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$\delta=\min\left\{\dfrac{|x_0|}{2},\dfrac{x_0^2}{2}\varepsilon\right\}>0$, 对$\forall x\in U(x_0;\delta)$,有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon.$$

故f在点x_0连续. 由x_0的任意性知, $f(x)=\dfrac{1}{x}$在其定义域内连续.

P68/习题4.1/2(2) 指出函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$的间断点并说明其类型.

解 由于$f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$在$x=0$处无定义，故$x=0$是$f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$的间断点.

由于
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

从而$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1\neq1=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,

所以$x=0$是$f(x)$的第一类跳跃间断点.

此题先找出间断点,再通过计算极限判断间断点类型

间断点的类型要写完整.

P68/习题4.1/2(3)指出函数$f(x)=\left[\left|\cos x\right|\right]$的间断点并说明其类型.

解 由于$f(x)=\left[\left|\cos x\right|\right]=\begin{cases}1, x=n\pi\\ 0, x\neq n\pi\end{cases}, n\in\mathbb{Z}$, 从而

$$\lim_{x\to n\pi} f(x)=\lim_{x\to n\pi} 0=0.$$

由于 $$\lim_{x\to n\pi} f(x)=0\neq 1=f(n\pi),$$

所以$x=n\pi\left(n\in\mathbb{Z}\right)$是$f(x)$的第一类可去间断点.

此题先找出可疑间断点,一般是分段点,再通过计算极限

确定是否为间断点,同时得到该间断点的类型.

注意与前面一题寻找间断点的不同之处.

P68/习题4.1/2(5) 指出函数$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$的间断点并说明其类型.

解 由于

$$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)=\begin{cases}1, & \cos x>0\\ 0, & \cos x=0\\ -1, & \cos x<0\end{cases}=\begin{cases}1, & 2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ -1, & 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}\end{cases},n\in\mathbb{Z},$$

从而

$$\lim_{x\to\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^-}f(x)=\lim_{x\to\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^-}(-1)=-1,\quad \lim_{x\to\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^+}f(x)=\lim_{x\to\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^+}1=1,$$

$$\lim_{x\to\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-}f(x)=\lim_{x\to\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-}1=1,\quad \lim_{x\to\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^+}f(x)=\lim_{x\to\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^+}(-1)=-1,$$

由于 $\lim\limits_{x\to\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^-}f(x)=-1\neq1=\lim\limits_{x\to\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-}f(x)=1\neq-1=\lim\limits_{x\to\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^+}f(x)$,

所以$x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}\left(n\in\mathbb{Z}\right)$是$f(x)$的第一类跳跃间断点.

P68/习题4.1/2(6) 指出函数$f(x)=\begin{cases} x, & x\text{为有理数} \\ -x, & x\text{为无理数} \end{cases}$的间断点并说明其类型.

解 当$x_0=0$时，对$\forall\varepsilon>0$，要使$|f(x)-f(0)|=|f(x)-0|=|x|<\varepsilon$，只要$|x-0|<\varepsilon$.

因此，对$\forall\varepsilon>0$，只要取$\delta=\varepsilon>0$，对$\forall x\in U(0;\delta)$，有 $|f(x)-f(0)|=|x|<\varepsilon$.

因此，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，即$f(x)$在点$x=0$处连续.

当$x_0\neq0$时，根据有理数与无理数的稠密性知，

存在有理数列$\{x_n\}$，满足：$x_n\neq x_0$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$；

存在无理数列$\{y_n\}$，满足：$y_n\neq x_0$且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-y_n)=-x_0$；

根据归结原则知，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

所以$x_0\neq0$是$f(x)$的第二类间断点.

P68/习题4.1/2(7)

指出函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7\\ x, & -7\le x\le 1\\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty\end{cases}$ 的间断点并说明其类型.

解 $f(x)$的可疑间断点为$x=-7$, $x=1$.

由于 $\lim\limits_{x\to(-7)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-7)^-}\dfrac{1}{x+7}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to(-7)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-7)^+} x=-7$,

所以$x=-7$是$f(x)$的第二类间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}=0$,

从而 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1\neq 0=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$,

所以$x=1$是$f(x)$的第一类跳跃间断点.

注意无穷大属于极限不存在.

P68/习题4.1/4 证明:若f在点x_0连续,则$|f|$与f^2也在点x_0连续

又问:若$|f|$或f^2在I上连续,那么f在I上是否必连续?

证1 已知f在点x_0连续,即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 根据连续函数的定义,

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0;\delta)$,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

从而 $\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\le|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

所以$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$,即$|f|$在点$x_0$连续.

证2 已知f在点x_0连续,即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 根据连续函数的局部有界性知,

$\exists M>0,\exists\delta_1>0,\forall x\in U(x_0;\delta_1)$,有 $|f(x)|\le M.$

根据连续函数的定义,对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0,\forall x\in U(x_0;\delta_2)$,有$|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2M}.$

$$|f^2(x)-f^2(x_0)|=\big|(f(x)-f(x_0))(f(x)+f(x_0))\big|$$

$$\le|f(x)-f(x_0)|\big(|f(x)|+|f(x_0)|\big)<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2M=\varepsilon.$$

所以$\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=f^2(x_0)$,即$f^2$在点$x_0$连续.

P68/习题4.1/4 证明:若f在点x_0连续,则$|f|$与f^2也在点x_0连续

又问:若$|f|$或f^2在I上连续,那么f在I上是否必连续?

答 若$|f|$或f^2在I上连续, f在I上不一定连续.

例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ -1, & x\ge 0\end{cases}$ 在$x=0$处不连续,

$|f(x)|=1$, $f^2(x)=1$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

P68/习题4.1/5 设当$x \neq 0$时，$f(x) \equiv g(x)$，而$f(0) \neq g(0)$.

证明：f与g两者中至多有一个在$x=0$连续.

证 利用反证法证明.

假设f,g都在$x=0$连续，即$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

已知当$x \neq 0$时，$f(x) \equiv g(x)$，从而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

因此$f(0) = g(0)$，与已知条件矛盾.

所以f与g两者中至多有一个在$x=0$连续.

P68/习题4.1/8 设f为$\mathbb{R}$上的单调函数，定义$g(x)=f(x+0)$.

证明g在$\mathbb{R}$上每一点都右连续.

分析 对$\forall x_0\in\mathbb{R}$,要证$\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=g(x_0)$,

即要证$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U_+(x_0;\delta)$,有$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$.

证1 设f在$\mathbb{R}$上单调递增. 对$\forall x_0\in\mathbb{R},\forall x\in U_-^0(x_0),\forall y\in U_+^0(x_0)$,有$f(x)\le f(y)$.

从而f在$U_-^0(x_0)$上递增有上界,在$U_+^0(x_0)$上递增有下界. 根据单调有界定理知,

$f(x_0+0)$都存在. 因此, $g(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的函数.

对$\forall x_0\in\mathbb{R}$,由于$g(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{y\to x_0^+}f(y)$, 根据函数极限的定义,

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall y\in U_+^\circ(x_0;\delta_1)$,有$|f(y)-g(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

对$\forall x\in U_+^\circ(x_0;\delta_1)$,已知有$g(x)=f(x+0)=\lim\limits_{y\to x^+}f(y)$, 根据函数极限的定义,

对上述$\varepsilon>0,\exists\delta>0\left(\delta<\min\{x_0+\delta_1-x,x-x_0\}\right)$, $\forall y\in U_+^\circ(x;\delta)$,有$|f(y)-g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是$|g(x)-g(x_0)|=|g(x)-f(y)+f(y)-g(x_0)|\le|g(x)-f(y)|+|f(y)-g(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

根据函数极限的定义, $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=g(x_0)$,即$g(x)$在点$x_0$右连续.

由x_0的任意性知,$g(x)$在$\mathbb{R}$上每一点右连续.

P68/习题4.1/8 设f为$\mathbb{R}$上的单调函数，定义$g(x)=f(x+0)$.

证明g在$\mathbb{R}$上每一点都右连续.

证2 设f在$\mathbb{R}$上单调递增. 对$\forall x_0\in\mathbb{R},\forall x\in U_-^0(x_0),\forall y\in U_+^0(x_0)$,有 $f(x)\le f(y)$.

从而f在$U_-^0(x_0)$上递增有上界,在$U_+^0(x_0)$上递增有下界. 根据单调有界定理知,

$f(x_0+0)$都存在. 因此，$g(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的函数.

对$\forall x_0\in\mathbb{R}$,由于$g(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{y\to x_0^+}f(y)$，根据函数极限的定义,

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall y\in U_+^\circ(x_0;\delta_1)$,有 $|f(y)-g(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

即 $g(x_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}<f(y)<g(x_0)+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

对$\forall x\in U_+^\circ(x_0;\delta_1)$,已知有 $g(x)=f(x+0)=\lim\limits_{y\to x^+}f(y)$, 根据函数极限的保不等式性,

有 $g(x_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}\le g(x)=\lim\limits_{y\to x^+}f(y)\le g(x_0)+\dfrac{\varepsilon}{2}$, 即 $|g(x)-g(x_0)|\le\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

根据函数极限的定义, $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=g(x_0)$,即$g(x)$在点$x_0$右连续.

由x_0的任意性知,$g(x)$在$\mathbb{R}$上每一点右连续.

与P68/习题4.1/8相关命题

设函数f在$[a,b]$上只有第一类间断点. 证明f在$[a,b]$上有界.

证 利用反证法证明.

假设f在$[a,b]$上无界, 则对$\forall M>0,\exists x_M\in[a,b]$,使得$|f(x_M)|>M$.

对$M=1,\exists x_1\in[a,b]$,使得$|f(x_1)|>1$. 对$M=2,\exists x_2\in[a,b]$,使得$|f(x_2)|>2$. $\cdots$

对$M=n,\exists x_n\in[a,b]$,使得$|f(x_n)|>n$. $\cdots$ 得到数列$\{x_n\}\subset[a,b]$,使得$|f(x_n)|>n,n\in\mathbb{N}_+$.

由于数列$\{x_n\}$有界,根据致密性定理知, 数列$\{x_n\}$存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$,记$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c$.

由于$a\le x_{n_k}\le b$,根据收敛数列的保不等式性,有 $a\le c\le b$.

由于数列$\{x_{n_k}\}$收敛,则必存在子列$\{x_{n_{k_l}}\}$, 满足: $x_{n_{k_l}}<c$或$x_{n_{k_l}}>c$, $\lim\limits_{l\to\infty}x_{n_{k_l}}=c$.

由于f在$[a,b]$上只有第一类间断点, 故$\lim\limits_{x\to c^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to c^+}f(x)$都存在.

根据归结原则知,$\lim\limits_{l\to\infty}f\left(x_{n_{k_l}}\right)$存在.

对$\forall l\in\mathbb{N}_+$,由于$\left|f\left(x_{n_{k_l}}\right)\right|>n_{k_l}$, 于是$\lim\limits_{l\to\infty}f\left(x_{n_{k_l}}\right)=\infty$. 产生矛盾.

所以f在$[a,b]$上有界.

与P68/习题4.1/8相关命题　P68/习题4.1/6

设f为区间I上的单调函数.证明:若$x_0 \in I$为f的间断点,则x_0必是f的第一类间断点.

证 不妨设f在区间I上单调递增, $x_0 \in I$为f的间断点.

$\forall x \in U_-^0(x_0), \forall y \in U_+^0(x_0)$,有 $f(x) \le f(y)$.

从而f在$U_-^0(x_0)$上递增有上界,在$U_+^0(x_0)$上递增有下界.

根据单调有界定理知, $f(x_0+0)$与$f(x_0-0)$都存在.

因此, x_0是f的第一类间断点.

与P68/习题4.1/8相关命题 P68/习题4.1/7

设函数f只有可去间断点,定义$g(x)=\lim\limits_{y\to x} f(y)$. 证明$g$为连续函数.

证1 设f的定义域为D.由于f只有可去间断点, 所以f在D上每一点极限都存在.

由于$g(x)=\lim\limits_{y\to x} f(y)$,故$g$的定义域为$D$.

对$\forall x_0\in D$, x_0要么是区间的端点,要么是区间内部的点.

下面就x_0是区间内部的点进行证明,端点情况只需考虑单侧邻域即可.

由于$g(x_0)=\lim\limits_{y\to x_0} f(y)$, 根据函数极限的定义, 对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall y\in U^\circ\left(x_0;\delta_1\right)$,有

$$\left|f(y)-g(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对$\forall x\in U^\circ\left(x_0;\delta_1\right)$,已知$g(x)=\lim\limits_{y\to x} f(y)$, 根据函数极限的定义,

对上述$\varepsilon>0$,$\exists\delta>0\left(\delta<\min\left\{x_0+\delta_1-x,\left|x-x_0\right|,x-x_0+\delta_1\right\}\right)$, $\forall y\in U^\circ\left(x;\delta\right)$,有

$$\left|f(y)-g(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是 $\left|g(x)-g(x_0)\right|=\left|g(x)-f(y)+f(y)-g(x_0)\right|\le\left|g(x)-f(y)\right|+\left|f(y)-g(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

根据函数极限的定义, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$,即$g(x)$在点$x_0$连续.

由x_0的任意性知, $g(x)$在D上连续.

与P68/习题4.1/8相关命题 P68/习题4.1/7

设函数f只有可去间断点,定义$g(x)=\lim\limits_{y\to x} f(y)$. 证明$g$为连续函数.

证2 设f的定义域为D.由于f只有可去间断点,所以f在D上每一点极限都存在.

由于$g(x)=\lim\limits_{y\to x} f(y)$,故$g$的定义域为$D$.

对$\forall x_0\in D$, x_0要么是区间的端点,要么是区间内部的点.

下面就x_0是区间内部的点进行证明,端点情况只需考虑单侧邻域即可.

由于$g(x_0)=\lim\limits_{y\to x_0} f(y)$, 根据函数极限的定义, 对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall y\in U^\circ(x_0;\delta)$,有

$$\left|f(y)-g(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即 $g(x_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}<f(y)<g(x_0)+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

对$\forall x\in U^\circ(x_0;\delta)$,已知 $g(x)=\lim\limits_{y\to x} f(y)$, 根据函数极限的保不等式性,

有 $g(x_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}\le g(x)=\lim\limits_{y\to x} f(y)\le g(x_0)+\dfrac{\varepsilon}{2}$, 即 $\left|g(x)-g(x_0)\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$,即$g(x)$在点$x_0$连续. 由$x_0$的任意性知,$g(x)$在$D$上连续.

P68/习题4.1/9 注意函数要在[0,1]上有定义

举出定义在[0,1]上分别符合下述要求的函数：

(1)只在$\frac{1}{2},\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$三点不连续的函数； $f(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\\ -1, & x\neq\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\end{cases}.$

(2)只在$\frac{1}{2},\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$三点连续的函数； $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)D(x).$

(3)只在$\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$上间断的函数； $f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ x\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0,1.\\ 0, & x=1\end{cases}$

(4)只在$x=0$右连续,而在其他点都不连续的函数.

$f(x)=xD(x).$ $\quad f(x)=\begin{cases}x, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}.$

P77/习题4.2/2 设f,g在点x_0连续,证明: 连续函数的局部保号性推论

(1)若$f(x_0)>g(x_0)$,则存在$U(x_0;\delta)$,使在其上有$f(x)>g(x)$.

(2)若在某$U^\circ(x_0)$上有$f(x)>g(x)$,则$f(x_0)\geq g(x_0)$.

证 (1)因为f,g在点x_0连续,即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$,

证法一 又$f(x_0)>g(x_0)$,故对于$\varepsilon=\dfrac{f(x_0)-g(x_0)}{2}>0,\exists\delta_1>0,\forall x\in U(x_0;\delta_1)$,有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon,$$

即$f(x)>f(x_0)-\varepsilon=\dfrac{f(x_0)+g(x_0)}{2}$.

$\exists\delta_2>0,\forall x\in U(x_0;\delta_2)$,有 $\left|g(x)-g(x_0)\right|<\varepsilon$,

即$g(x)<g(x_0)+\varepsilon=\dfrac{f(x_0)+g(x_0)}{2}$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0,\forall x\in U(x_0;\delta)$,有 $f(x)>g(x)$.

(利用连续函数的定义证明)

P77/习题4.2/2 设f, g在点x_0连续,证明:连续函数的局部保号性推论

(1)若$f(x_0) > g(x_0)$,则存在$U(x_0;\delta)$,使在其上有$f(x) > g(x)$.

(2)若在某$U^{\circ}(x_0)$上有$f(x) > g(x)$,则$f(x_0) \geq g(x_0)$.

证 (1)设$F(x) = f(x) - g(x)$. 根据连续函数的四则运算法则知,F在点x_0连续.

证法二 由于$F(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$,根据连续函数的局部保号性知,

对$\forall r \in (0, F(x_0))$,$\exists \delta > 0$,$\forall x \in U(x_0;\delta)$,有

$$F(x) > r > 0,$$

即 $f(x) - g(x) > 0$.

所以对$\forall x \in U(x_0;\delta)$,有 $f(x) > g(x)$.

(利用连续函数的局部保号性证明)

P77/习题4.2/2 设f,g在点x_0连续,证明: 连续函数的保不等式性

(1)若$f(x_0)>g(x_0)$,则存在$U(x_0;\delta)$,使在其上有$f(x)>g(x)$.

(2)若在某$U^\circ(x_0)$上有$f(x)>g(x)$,则$f(x_0)\ge g(x_0)$.

证 (2)已知当$x\in U(x_0)$时,有$f(x)>g(x)$.

证法一 因为f,g在点x_0连续,即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$,

故对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall x\in U(x_0;\delta_1)$,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 即$f(x)<f(x_0)+\varepsilon$.

对上述$\varepsilon>0,\exists\delta_2>0,\forall x\in U(x_0;\delta_2)$,有$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$, 即$g(x)>g(x_0)-\varepsilon$.

已知$\exists\delta_3>0,\forall x\in U^0(x_0;\delta_3)$,有 $f(x)>g(x)$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}>0,\forall x\in U^0(x_0;\delta)$,有

$$g(x_0)-\varepsilon<g(x)<f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

即$g(x_0)<f(x_0)+2\varepsilon$. 由$\varepsilon$的任意性知,$g(x_0)\le f(x_0)$.

P77/习题4.2/2 设f,g在点x_0连续,证明: 连续函数的保不等式性

(1)若$f(x_0)>g(x_0)$,则存在$U(x_0;\delta)$,使在其上有$f(x)>g(x)$.

(2)若在某$U^{\circ}(x_0)$上有$f(x)>g(x)$,则$f(x_0)\geq g(x_0)$.

证 (2) 利用反证法证明. 假设$f(x_0)<g(x_0)$.

证法二 根据(1)知, 存在$U(x_0;\delta)$,在其上有 $f(x)<g(x)$.

与已知条件矛盾. 所以$f(x_0)\geq g(x_0)$.

P77/习题4.2/3

设f,g在区间I上连续.记$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$,$G(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.

证明F,G在区间I上连续.

证 由于$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$,

$$G(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2},$$

又f,g在区间I上连续,因此$f-g,|f-g|$在区间I上连续.

根据连续函数的性质知,F,G在区间I上连续.

P77/习题4.2/4 设f为$\mathbb{R}$上连续函数,常数$c>0$.记$F(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c\\ f(x), & |f(x)|\le c\\ c, & f(x)>c\end{cases}$.

证明F在$\mathbb{R}$上连续.

证1 对$\forall x_0\in\mathbb{R}$,当$|f(x_0)|\ne c$时,显然F在点x_0连续.

当$f(x_0)=c$时,由F的定义知,$F(x_0)=f(x_0)=c$.

因为f在点x_0连续,且$f(x_0)=c>0$,根据连续函数的局部保号性及函数在一点连续的定义,

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0;\delta)$,有 $f(x)>0$,且$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

从而 $0<F(x)\le c$.

若$F(x)=c$,则$|F(x)-F(x_0)|=|c-c|=0<\varepsilon$,

若$0<F(x)<c$,则$F(x)=f(x)$,所以$|F(x)-F(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,

因此对$\forall x\in U(x_0;\delta)$,总有$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$.

当$f(x_0)=-c$时,同样可得.故F在点x_0连续.由x_0的任意性知,F在$\mathbb{R}$上连续.

P77/习题4.2/4 设f为$\mathbb{R}$上连续函数,常数$c>0$.记$F(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c\\ f(x), & |f(x)|\le c\\ c, & f(x)>c\end{cases}$.

证明F在$\mathbb{R}$上连续.

证2 由于$F(x)=\frac{1}{2}\left(|c+f(x)|-|c-f(x)|\right)$, 又$f, c$为$\mathbb{R}$上连续函数,

根据连续函数的性质知, F在$\mathbb{R}$上连续.

证3 由于$F(x)=\max\{-c,\min\{c,f(x)\}\}$,

又c为$\mathbb{R}$上连续函数,$\min\{c,f(x)\}$为$\mathbb{R}$上连续函数,

故$\max\{-c,\min\{c,f(x)\}\}$为$\mathbb{R}$上连续函数, 即$F$在$\mathbb{R}$上连续.

P77/习题4.2/4 设f为$\mathbb{R}$上连续函数,常数$c>0$.记$F(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c\\ f(x), & |f(x)|\le c\\ c, & f(x)>c\end{cases}$.

证明F在$\mathbb{R}$上连续.

证2 由于$F(x)=\dfrac{1}{2}\left(|c+f(x)|-|c-f(x)|\right)$, 又$f,c$为$\mathbb{R}$上连续函数,

根据连续函数的性质知, F在$\mathbb{R}$上连续.

证3 由于$F(x)=\max\{-c,\min\{c,f(x)\}\}$,

又c为$\mathbb{R}$上连续函数,$\min\{c,f(x)\}$为$\mathbb{R}$上连续函数,

故$\max\{-c,\min\{c,f(x)\}\}$为$\mathbb{R}$上连续函数, 即$F$在$\mathbb{R}$上连续.

P77/习题4.2/6 一般证明函数有界,需要找到确定的界.

设f在$[a,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在. 证明: f在$[a,+\infty)$上有界.

又问f在$[a,+\infty)$上必有最大值或最小值吗?

证 由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 根据函数极限的定义,

对$\varepsilon=1$,$\exists M>\max\{0,a\}$,当$x>M$时,有 $|f(x)-A|<1$.

从而$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<1+|A|$.

由于f在$[a,+\infty)$上连续,故f在$[a,M]$上连续.

根据闭区间上连续函数的有界性定理知, $\exists K>0$,对$\forall x\in[a,M]$,有 $|f(x)|\le K$.

取$G=\max\{K,1+|A|\}>0$,对$\forall x\in[a,+\infty)$,有 $|f(x)|\le G$. 所以f在$[a,+\infty)$上有界.

答 f在$[a,+\infty)$上不一定同时取得最大值和最小值, 但一定能取到最大值或最小值.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上连续, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$,

但$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上取到最大值1,取不到最小值.

$g(x)=1-\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上连续, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$,

但$g(x)=1-\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上取到最小值0,取不到最大值.

P77/习题4.2/6补充证明为何一定能取到最大值或最小值

设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

f 在 $[a,+\infty)$ 上不一定同时取得最大值和最小值，但一定能取到最大值或最小值.

证 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，

若 $f(x)\equiv A, x\in[a,+\infty)$，则显然 f 在 $[a,+\infty)$ 既能取到最大值也能取到最小值.

若 $f(x)\not\equiv A$，则 $\exists x_0\in[a,+\infty)$，使得 $f(x_0)\neq A$.

若 $f(x_0)<A$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A>f(x_0)$，根据函数极限的定义知，

对 $\varepsilon=A-f(x_0)$，$\exists M_1>\max\{0,x_0\}$，$\forall x>M_1$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

即 $f(x)>A-\varepsilon=f(x_0)$. 由于 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，f 在 $[a,M_1]$ 上连续，

根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理知，$\exists x_1\in[a,M_1]$，使得 $f(x_1)=\min\limits_{x\in[a,M_1]}\{f(x)\}\le f(x_0)$.

从而 $f(x_1)=\min\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$，即 $f(x_1)$ 是 f 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值.

若 $f(x_0)>A$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A<f(x_0)$，根据函数极限的定义知，

对 $\varepsilon=f(x_0)-A$，$\exists M_2>x_0$，$\forall x>M_2$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $f(x)<A+\varepsilon=f(x_0)$.

由于 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，f 在 $[a,M_2]$ 上连续，

根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理知，$\exists x_2\in[a,M_2]$，使得 $f(x_2)=\max\limits_{x\in[a,M_2]}\{f(x)\}\ge f(x_0)$.

从而 $f(x_2)=\max\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$，即 $f(x_2)$ 是 f 在 $[a,+\infty)$ 上的最大值.

BY GYH

与P77/习题4.2/6相关命题 P77/习题4.2/16

设f在$[a,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在. 证明: f在$[a,+\infty)$上一致连续.

证 由于$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 根据函数极限的定义,

对$\forall\varepsilon>0,\exists M>\max\{0,a\}$,对$\forall x>M$,有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

从而对$\forall x',x''\in(M,+\infty):|x'-x''|<\delta$,有

$$|f(x')-f(x'')|=|f(x')-A+A-f(x'')|\le|f(x')-A|+|A-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由于f在$[a,+\infty)$上连续,故f在$[a,M+1]$上连续.

根据闭区间上连续函数的一致连续性定理知, f在$[a,M+1]$上一致连续.

对上述$\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<1)$,对$\forall x',x''\in[a,M+1]:|x'-x''|<\delta$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

对$\forall x',x''\in[a,+\infty)]:|x'-x''|<\delta$,下列两种情况之一必发生:

$$x',x''\in[a,M+1],\ x',x''\in(M,+\infty),$$

不管哪种情况$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$都成立. 所以$f$在$[a,+\infty)$上一致连续.

在无限区间$[a,+\infty)$上的连续函数f，加上$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在，

则f在$[a,+\infty)$上有界；f在$[a,+\infty)$上一致连续；

f在$[a,+\infty)$上必能取到最大值或最小值之一.

此题可以结合P81/第四章总练习题/1,2学习

P77/习题4.2/7

若对任何充分小的$\varepsilon>0$, f在$[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$上连续，能否由此推出$f$在$(a,b)$上连续？

答 能推出f在(a,b)上连续.

理由：对$\forall x_0\in(a,b)$, 取$\varepsilon=\min\left\{\dfrac{x_0-a}{2},\dfrac{b-x_0}{2}\right\}>0$, 则$a+\varepsilon<x_0<b-\varepsilon$.

由于f在$[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$上连续, 所以$f$在$x_0$连续.

由x_0的任意性知, f在(a,b)上连续.

理由：利用反证法. 假设f在(a,b)上不连续, 则$\exists x_0\in(a,b)$, 使得x_0是f的间断点.

取$\varepsilon=\min\left\{\dfrac{x_0-a}{2},\dfrac{b-x_0}{2}\right\}>0$, 则$a+\varepsilon<x_0<b-\varepsilon$.

而已知f在$[a+\varepsilon,b-a]$上连续, 故产生矛盾. 所以f在(a,b)上连续.

P77 / 习题4.2 / 9

证明：若f在$[a,b]$上连续，且对任何$x\in[a,b]$，$f(x)\neq 0$，则f在$[a,b]$上恒正或恒负.

证 利用反证法证明.

假设f在$[a,b]$上不恒正或恒负，则$\exists x_1, x_2\in[a,b]$，不妨设$x_1<x_2$，

使得$f(x_1)f(x_2)<0$.

由于f在$[a,b]$上连续，故f在$[x_1,x_2]$上连续.

根据闭区间上连续函数的根的存在定理知，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得$f(\xi)=0$.

故与已知条件矛盾. 所以f在$[a,b]$上恒正或恒负.

使用任何定理，一定要注意条件与结论要完全吻合.

P77/习题4.2/10 证明：任一实系数奇次方程至少有一个实根.

证 设有奇次方程为$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$，其中$a_0\neq 0$.

不妨设$a_0>0$. 设$f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}$.

则
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}x^{2n+1}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{2n}}{x^{2n}}+\frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}\right)=+\infty.$$

由非正常极限的定义，取$G=1>0$，$\exists M_1>0$，当$x<-M_1$时，有$f(x)<-1$.

$\exists M_2>0$，当$x>M_2$时，有$f(x)>1$.

因此可取$x_1<-M_1<0$，$x_2>M_2>0$，使得 $f(x_1)<-1<0$，$f(x_2)>1>0$.

f在$[x_1,x_2]$上连续.根据根的存在定理知，$\exists x_0\in(x_1,x_2)$，使得 $f(x_0)=0$.

P77/习题4.2/11 试用一致连续的定义证明：若f,g都在区间I上一致连续，则$f+g$也在I上一致连续.

证 由于f,g在区间I上一致连续，根据一致连续的定义，

$$\forall \varepsilon>0,\exists \delta_1>0,\forall x',x''\in I:|x'-x''|<\delta_1,有\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$对上述\varepsilon>0,\exists \delta_2>0,\forall x',x''\in I:|x'-x''|<\delta_2,有\left|g(x')-g(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，$\forall \varepsilon>0$，取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，$\forall x',x''\in I:|x'-x''|<\delta$，有

$$\begin{aligned}\left|\left(f(x')+g(x')\right)-\left(f(x'')+g(x'')\right)\right| &= \left|\left(f(x')-f(x'')\right)+\left(g(x')-g(x'')\right)\right| \\ &\le \left|f(x')-f(x'')\right|+\left|g(x')-g(x'')\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

根据一致连续的定义，$f+g$在区间I上一致连续.

要会利用一致连续性的定义来证明函数一致连续.

P77/习题4.2/13 证明：$f(x)=x^2$在$[a,b]$上一致连续，但在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

证1 由于$f(x)=x^2$在$[a,b]$上连续，根据闭区间上连续函数的一致连续性定理知，

$f(x)=x^2$在$[a,b]$上一致连续.

证2 对$\forall\varepsilon>0,\forall x',x''\in[a,b]$，要使

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|x'^2-x''^2\right|=\left|x'-x''\right|\left|x'+x''\right|\le\left|x'-x''\right|\left(\left|x'\right|+\left|x''\right|\right)$$

$$\le 2\max\{|a|,|b|\}\left|x'-x''\right|<\varepsilon,$$

只要$\left|x'-x''\right|<\dfrac{\varepsilon}{2\max\{|a|,|b|\}}$.

因此，对$\forall\varepsilon>0$，只要取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2\max\{|a|,|b|\}}>0$，$\forall x',x''\in[a,b]:\left|x'-x''\right|<\delta$，有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|x'^2-x''^2\right|<\varepsilon.$$

根据一致连续的定义，$f(x)=x^2$在$[a,b]$上一致连续.

P77/习题4.2/13 证明：$f(x)=x^2$在$[a,b]$上一致连续，但在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

证1 取$\varepsilon_0=1$，对$\forall\delta>0$，取$x_1=\dfrac{1}{\delta}\in(-\infty,+\infty)$，$x_2=\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{\delta}{2}\in(-\infty,+\infty)$，

虽然$|x_1-x_2|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$，但是

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1^2-x_2^2|=\left|\frac{1}{\delta^2}-\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)^2\right|=1+\frac{\delta^2}{4}>1,$$

所以$f(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

证2 取$x_n=n\in(-\infty,+\infty)$，$y_n=n+\dfrac{1}{n}\in(-\infty,+\infty)$，

虽然$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=0$，但是

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=\lim_{n\to\infty}(x_n^2-y_n^2)=\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\left(n+\frac{1}{n}\right)^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-2-\frac{1}{n^2}\right)=-2\neq0,$$

所以$f(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

P77/习题4.2/14 设函数f在区间I上满足利普希茨条件,即$\exists L>0,\forall x',x''\in I$,都有

$$|f(x')-f(x'')|\le L|x'-x''|.$$

证明f在I上一致连续.

证 对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}>0$,对$\forall x',x''\in I:|x'-x''|<\delta$,有

$$|f(x')-f(x'')|\le L|x'-x''|<L\cdot\delta=\varepsilon.$$

所以$f(x)$在区间I上一致连续.

P77/习题4.2/15 证明$\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证 对$\forall\varepsilon>0$,对$\forall x',x''\in(-\infty,+\infty)$, 要使

$$\left|\sin x'-\sin x''\right|=\left|2\sin\frac{x'-x''}{2}\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\le\left|x'-x''\right|<\varepsilon,$$

只要 $\left|x'-x''\right|<\varepsilon.$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$\delta=\varepsilon>0$,对$\forall x',x''\in(-\infty,+\infty):\left|x'-x''\right|<\delta$,有

$$\left|\sin x'-\sin x''\right|<\varepsilon,$$

所以$\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

P77/习题4.2/17

设函数f在$[0,2a]$上连续，且$f(0)=f(2a)$.证明：存在点$x_0\in[0,a]$，使得$f(x_0)=f(x_0+a)$.

证 设$F(x)=f(x)-f(x+a), x\in[0,a]$.

由于f在$[0,2a]$上连续，所以F在$[0,a]$上连续.

$F(0)=f(0)-f(a)$， $F(a)=f(a)-f(2a)$. 已知$f(0)=f(2a)$， 从而

$$F(0)\cdot F(a)=\big(f(0)-f(a)\big)\big(f(a)-f(0)\big)=-\big(f(0)-f(a)\big)\le 0.$$

当$F(0)\cdot F(a)=0$，即$f(0)=f(a)$时，取$x_0=0$或a， 使得$f(x_0)=f(x_0+a)$.

当$F(0)\cdot F(a)<0$时， 又F在$[0,a]$上连续，根据根的存在定理知，

存在$x_0\in(0,a)$， 使得$F(x_0)=0$，即$f(x_0)=f(x_0+a)$.

综上所述，存在$x_0\in[0,a]$，使得$f(x_0)=f(x_0+a)$.

P77/习题4.2/18 设f为$[a,b]$上的增函数,其值域为$[f(a),f(b)]$.证明f在$[a,b]$上连续.

证 利用反证法证明.

假设f在$[a,b]$上不连续,则$\exists x_0\in[a,b]$, f在x_0处不连续.

不妨设$x_0\in(a,b)$(端点情况可类似讨论).

因为f为$[a,b]$上的增函数,根据单调有界定理知,$f(x_0+0)$与$f(x_0-0)$都存在,

且$f(x_0-0)\le f(x_0+0)$.因为f在x_0处不连续,所以$f(x_0-0)<f(x_0+0)$.

对$\forall x\in[a,b]$,且$x\ne x_0$,若$x<x_0$,则有$f(a)\le f(x)\le f(x_0-0)$;

若$x>x_0$,则有$f(x_0-0)\le f(x)\le f(b)$.

因此$f\left([a,b]\right)=\left[f(a),f(x_0-0)\right]\cup\left[f(x_0+0),f(b)\right]\cup\left\{f(x_0)\right\}$.

这与$f\left([a,b]\right)=\left[f(a),f(b)\right]$矛盾.故$f$在$[a,b]$上连续.

P77/习题4.2/20 证明$f(x)=\cos\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

证1 对$\forall\varepsilon>0,\forall x',x''\in[0,+\infty)$,不妨设$x'>x''$,要使

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}\right|=2\left|\sin\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}}{2}\sin\frac{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}{2}\right|$$

$$\le 2\left|\sin\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}}{2}\right|\le\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}$$

$$=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'-x''+x''}+\sqrt{x''}}\le\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'-x''}}=\sqrt{x'-x''}<\varepsilon,$$

只要 $|x'-x''|<\varepsilon^2$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,只要取$\delta=\varepsilon^2>0$,对$\forall x',x''\in[0,+\infty):|x'-x''|<\delta$,有

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}\right|<\varepsilon.$$

所以$f(x)=\cos\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

P77/习题4.2/20 证明$f(x)=\cos\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

证2 由于$f(x)=\cos\sqrt{x}$在$[0,2]$上连续,根据一致连续性定理知,

$f(x)=\cos\sqrt{x}$在$[0,2]$上一致连续. 根据一致连续性的定义知,

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,\forall x',x''\in[0,2]:|x'-x''|<\delta_1$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

对上述$\varepsilon>0$,对$\forall x',x''\in[1,+\infty)$,要使

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}\right|=2\left|\sin\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}}{2}\sin\frac{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}{2}\right|$$

$$\le 2\left|\sin\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}}{2}\right|\le\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\le\frac{|x'-x''|}{2}<\varepsilon,$$

只要 $|x'-x''|<2\varepsilon.$

因此,对上述$\varepsilon>0$,只要取$\delta_2=2\varepsilon>0$,对$\forall x',x''\in[1,+\infty):|x'-x''|<\delta_2$,有

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}\right|<\varepsilon.$$

所以$f(x)=\cos\sqrt{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.

取$\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}>0$,对$\forall x',x''\in[0,+\infty):|x'-x''|<\delta$, 则有且仅有下列情况之一发生:

$$x',x''\in[0,2],\ x',x''\in[1,+\infty).$$

因此,对$\forall x',x''\in[0,+\infty):|x'-x''|<\delta$,都有 $|f(x')-f(x'')|=\left|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}\right|<\varepsilon.$

所以$f(x)=\cos\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

一致连续相关命题 设f在$(-\infty,+\infty)$上连续,且为周期函数.则f在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证 设f的周期为$T>0$. 已知f在$(-\infty,+\infty)$上连续,故f在$[0,2T]$上连续.

根据闭区间上连续函数的一致连续性定理知, f在$[0,2T]$上一致连续.

则对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<T),\forall x',x''\in[0,2T]:|x'-x''|<\delta$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

于是,对$\forall x',x''\in(-\infty,+\infty):x'\le x'',|x'-x''|<\delta$, 记$x'=nT+r'$,其中$n\in\mathbb{Z},r'\in[0,T)$,

有 $x''=(x''-x')+x' =(x''-x')+nT+r'$, 且$(x''-x')+r'\in[0,2T]$.

从而

$$|f(x')-f(x'')|=\left|f(nT+r')-f\big((x''-x')+nT+r'\big)\right|$$

$$=\left|f(r')-f\big((x''-x')+r'\big)\right|<\varepsilon.$$

根据一致连续的定义知,f在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

一致连续相关命题

证明：$f(x)=\ln x$在$[1,+\infty)$上一致连续，但在$(0,+\infty)$上不一致连续.

证 对$\forall\varepsilon>0$，对$\forall x',x''\in[1,+\infty)$，不妨设$x'>x''$，要使

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\ln x'-\ln x''\right|=\ln\frac{x'-x''+x''}{x''}=\ln\left(\frac{x'-x''}{x''}+1\right)\le\ln\left(x'-x''+1\right)<\varepsilon.$$

只要 $\left|x'-x''\right|<e^{\varepsilon}-1$.

因此，对$\forall\varepsilon>0$，只要取$\delta=e^{\varepsilon}-1>0$，对$\forall x',x''\in[1,+\infty)$：$\left|x'-x''\right|<\delta$，有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\ln x'-\ln x''\right|<\varepsilon.$$

所以$f(x)=\ln x$在$[1,+\infty)$上一致连续.

一致连续相关命题

证明：$f(x)=\ln x$在$[1,+\infty)$上一致连续,但在$(0,+\infty)$上不一致连续.

证1　取$\varepsilon_0=\ln 2$,对$\forall\delta>0$(不妨设$\delta<1$),取$x_1=\delta\in(0,+\infty)$, $x_2=\dfrac{\delta}{3}\in(0,+\infty)$,

虽然$|x_1-x_2|=\dfrac{2\delta}{3}<\delta$,但是

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\ln x_1-\ln x_2\right|=\left|\ln\delta-\ln\frac{\delta}{3}\right|=\ln 3>\ln 2=\varepsilon_0,$$

所以$f(x)=\ln x$在$(0,+\infty)$上不一致连续.

证2　取$x_n=\dfrac{1}{2n}\in(0,+\infty)$, $y_n=\dfrac{1}{4n}\in(0,+\infty)$,虽然$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4n}\right)=0$,但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)-f(y_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n-\ln y_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{2n}-\ln\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln 2=\ln 2\neq 0,$$

所以$f(x)=\ln x$在$(0,+\infty)$上不一致连续.

P80/习题4.3/1(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+\sqrt{0+0}}+1}=\frac{1}{2}.$$

P80/习题4.3/1(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$.

解

$$\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}=2\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}}\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}\right)}$$

$$=2\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}=2\frac{\sqrt{1+\sqrt{0}}}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}+\sqrt{1-\sqrt{0+\sqrt{0}}}}=1.$$

P80/习题4.3/1(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\cot x}$.

解 $$\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\cos x}=\lim_{x\to0}\left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\lim\limits_{x\to0}\cos x}$$

$$=e^{1}=e.$$

$$\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\cancel{\frac{1}{\sin x}}}=e.$$

$$\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=\cancel{\lim_{x\to0}}e^{\cos x}=e.$$

P81/第四章总练习题/1 设函数f在(a,b)上连续,且$f(a+0)$与$f(b-0)$为有限值.证明:

(1) f在(a,b)上有界.

(2)若存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)\geq\max\{f(a+0),f(b-0)\}$,则$f$在$(a,b)$上能取到最大值.

(3) f在(a,b)上一致连续.

通过构造辅助函数证明

证1

定义$F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a \\ f(x), & x\in(a,b). \\ f(b-0), & x=b \end{cases}$

由于$\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a+0)=F(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b-0)=F(b)$,

故F在$x=a$处右连续,在$x=b$处左连续.

由于对$\forall x\in(a,b)$, $F(x)=f(x)$,已知f在(a,b)上连续,故F在(a,b)上连续.

从而F在$[a,b]$上连续.

P81/第四章总练习题/1 设函数f在(a,b)上连续，且$f(a+0)$与$f(b-0)$为有限值.证明：

(1) f在(a,b)上有界.

(2)若存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)\ge\max\{f(a+0),f(b-0)\}$，则$f$在$(a,b)$上能取到最大值.

(3) f在(a,b)上一致连续.

从而F在$[a,b]$上连续.

(1)根据闭区间上连续函数的有界性定理知，F在$[a,b]$上有界.

则$\exists M>0$，对$\forall x\in[a,b]$，有$|F(x)|\le M$. 从而对$\forall x\in(a,b)$，有$|f(x)|=|F(x)|\le M$.

所以f在(a,b)上有界.

(2)根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理知，F在$[a,b]$上能取到最大值K.

从而对$\forall x\in(a,b)$，有$F(x)\le K$. 已知$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)\ge\max\{f(a+0),f(b-0)\}$.

若$K=f(\xi)$，则f在点$\xi\in(a,b)$取到最大值.

若$K>f(\xi)$，则$\exists x_0\in[a,b]$，使得$F(x_0)=K$.从而$x_0\ne a$，$x_0\ne b$，即$x_0\in(a,b)$.

故f在$x_0\in(a,b)$取到最大值. 综上分析，f在(a,b)上能取到最大值.

(3)根据闭区间上连续函数的一致连续性定理知，F在$[a,b]$上一致连续.

从而，F在(a,b)上一致连续. 所以f在(a,b)上一致连续.

P81/第四章总练习题/1 设函数f在(a,b)上连续，且$f(a+0)$与$f(b-0)$为有限值.证明:

(1) f在(a,b)上有界.

(2)若存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)\geq\max\{f(a+0),f(b-0)\}$,则$f$在$(a,b)$上能取到最大值.

(3) f在(a,b)上一致连续.

从而F在$[a,b]$上连续.

证2 (1)由于$f(a+0),f(b-0)$为有限值,设$f(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$, $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$.

根据函数极限的局部有界性知,分别$\exists M_1>0, M_2>0, \exists\delta_1>0\left(\delta_1<\frac{b-a}{2}\right), \delta_2>0\left(\delta_2<\frac{b-a}{2}\right)$,

对$\forall x\in U_+^\circ(a;\delta_1)$,有$|f(x)|\leq M_1$.对$\forall x\in U_-^\circ(b;\delta_2)$,有$|f(x)|\leq M_2$.

已知f在(a,b)上连续,所以f在$[a+\delta_1,b-\delta_2]$上连续.

根据闭区间上连续函数的有界性定理知, f在$[a+\delta_1,b-\delta_2]$上有界,

即$\exists M_3>0$,对$\forall x\in[a+\delta_1,b-\delta_2]$,有$|f(x)|\leq M_3$.

取$M=\max\{M_1,M_2,M_3\}>0$,对$\forall x\in(a,b)$,有$|f(x)|\leq M$.

所以f在(a,b)上有界.

与P81/第四章总练习题/1相关命题 P81/第四章总练习题/2

设函数f在(a,b)上连续,且$f(a+0)=f(b-0)=+\infty$.证明f在(a,b)上能取到最小值.

证 取$x_0\in(a,b)$.由于$f(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(b-0)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$,

根据非正常极限的定义知,对$G=|f(x_0)|+1>0,\exists\delta_1>0\left(\delta_1<\min\left\{\frac{x_0-a}{2},\frac{b-x_0}{2}\right\}\right)$,

$\forall x\in U_+^\circ(a;\delta_1)$,有$f(x)>|f(x_0)|+1>|f(x_0)|\geq f(x_0)$,

$\exists\delta_2>0\left(\delta_2<\min\left\{\frac{x_0-a}{2},\frac{b-x_0}{2}\right\}\right),\forall x\in U_-^\circ(b;\delta_2)$,有$f(x)>|f(x_0)|+1>|f(x_0)|\geq f(x_0)$,

已知f在(a,b)上连续,所以f在$[a+\delta_1,b-\delta_2]$上连续.

根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理知,f在$[a+\delta_1,b-\delta_2]$上取到最小值$m\leq f(x_0)$,

即$\exists\xi\in[a+\delta_1,b-\delta_2]$,使得$f(\xi)=m=\min\limits_{x\in[a+\delta_1,b-\delta_2]}f(x)$.

因此对$\forall x\in(a,b)$,有$f(x)\geq m=f(\xi)$.所以f在(a,b)上能取到最小值.

在有限区间(a,b)上的连续函数f,加上$\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在,则$f$在$(a,b)$上有界;

f在(a,b)上一致连续;f在(a,b)上不一定取到最大值与最小值,

若$\exists\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)\geq\max\{f(a+0),f(b-0)\}$,则$f$在$(a,b)$上能取到最大值.

若$\exists\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)\leq\min\{f(a+0),f(b-0)\}$,则$f$在$(a,b)$上能取到最小值.

在有限区间(a,b)上的连续函数f,若$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$,
则f在(a,b)上能取到最小值.

在有限区间(a,b)上的连续函数f,若$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=-\infty$,
则f在(a,b)上能取到最大值.

此题可以结合P77/习题4.2/6,16学习

与P81/第四章总练习题/1相关命题

设函数f在(a,b)上一致连续,则f在(a,b)上有界.

证 由于f在(a,b)上一致连续,根据一致连续的定义知,

对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in(a,b):|x'-x''|<\delta$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

从而对$\forall x',x''\in(a,a+\delta)$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

对$\forall x',x''\in(b-\delta,b)$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

根据柯西收敛准则知,$f(a+0),f(b-0)$都存在. 定义 $F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a \\ f(x), & x\in(a,b). \\ f(b-0), & x=b \end{cases}$

由于$\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a+0)=F(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b-0)=F(b)$,

故F在$x=a$处右连续,在$x=b$处左连续.

由于对$\forall x\in(a,b),F(x)=f(x)$,已知$f$在$(a,b)$上连续,故$F$在$(a,b)$上连续,

从而F在$[a,b]$上连续.根据闭区间上连续函数的有界性定理知,F在$[a,b]$上有界.

则$\exists M>0$,对$\forall x\in[a,b]$,有$|F(x)|\le M$.从而对$\forall x\in(a,b)$,有$|f(x)|=|F(x)|\le M$.

所以f在(a,b)上有界.

P81/第四章总练习题/5

设f在$[a,b]$上连续,且对$\forall x\in[a,b],\exists y\in[a,b]$,使得$|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$.

证明:$\exists\xi\in[a,b]$,使得$f(\xi)=0$.

证1 已知f在$[a,b]$上连续,又$|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$,故$|f(x)|$在$[a,b]$上连续.

根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理知,$|f(x)|$在$[a,b]$上能取到最小值,

即$\exists\xi\in[a,b]$,使得$|f(\xi)|=\min\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|=m\ge 0$. 下证$m=0$.

若$m>0$,根据题意,对$\xi\in[a,b],\exists y\in[a,b]$,使得$|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(\xi)|$.

又$|f(\xi)|\le|f(y)|,\le\frac{1}{2}|f(\xi)|$.从而$|f(\xi)|=m\le|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(\xi)|=\frac{1}{2}m$.产生矛盾.

因此$|f(\xi)|=0$,从而$f(\xi)=0$.

P81/第四章总练习题/5

设f在$[a,b]$上连续,且对$\forall x\in[a,b],\exists y\in[a,b]$,使得$|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$.

证明:$\exists\xi\in[a,b]$,使得$f(\xi)=0$.

证2 取$x_0\in[a,b]$,根据题意$\exists x_1\in[a,b]$,使得$|f(x_1)|\le\frac{1}{2}|f(x_0)|$.

对于$x_1\in[a,b],\exists x_2\in[a,b]$,使得$|f(x_2)|\le\frac{1}{2}|f(x_1)|\le\frac{1}{2^2}|f(x_0)|$.

对于$x_2\in[a,b],\exists x_3\in[a,b]$,使得$|f(x_3)|\le\frac{1}{2}|f(x_2)|\le\frac{1}{2^3}|f(x_0)|$.

$\cdots$

对于$x_{n-1}\in[a,b],\exists x_n\in[a,b]$,使得$|f(x_n)|\le\frac{1}{2}|f(x_{n-1})|\le\frac{1}{2^n}|f(x_0)|$.

$\cdots$

由于$0\le|f(x_n)|\le\frac{1}{2^n}|f(x_0)|$,又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}|f(x_0)|=0$,根据收敛数列的迫敛性知,$\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)|=0$.

从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$.因为$\{x_n\}\subset[a,b]$,即数列$\{x_n\}$有界.根据致密性定理知,

数列$\{x_n\}$存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$,设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$,由于$a\le x_{n_k}\le b$,根据收敛数列的保不等式性知,

$a\le\xi\le b$.若$a<\xi<b$,已知f在$[a,b]$上连续,故f在点ξ处连续,于是$\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$.

若$\xi=a$或$\xi=b$,可类似讨论得$f(\xi)=0$.所以$\exists\xi\in[a,b]$,使得$f(\xi)=0$.

P81/第四章总练习题/5

设f在$[a,b]$上连续,且对$\forall x\in[a,b],\exists y\in[a,b]$,使得$|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$.

证明:$\exists\xi\in[a,b]$,使得$f(\xi)=0$.

证3 利用反证法证明.假设对$\forall x\in[a,b]$,有$f(x)\ne 0$.则f在$[a,b]$上恒正或恒负.

否则$\exists x_1,x_2\in[a,b]$,使得$f(x_1)f(x_2)<0$. 已知f在$[a,b]$上连续,故f在$[x_1,x_2]$或$[x_2,x_1]$上连续.

根据闭区间上连续函数的介值性定理知,$\exists\eta\in(x_1,x_2)$或(x_2,x_1),使得$f(\eta)=0$.

与已知条件矛盾.所以f在$[a,b]$上恒正或恒负.不妨设对$\forall x\in[a,b]$, $f(x)>0$.

因为f在$[a,b]$上连续,根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理知,

$\exists x_0\in[a,b]$,使得$f(x_0)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)>0$.

根据已知条件,$\exists y\in[a,b]$,使得$0<f(y)\le\frac{1}{2}f(x_0)<f(x_0)$.

这与$f(x_0)$是f在$[a,b]$上的最小值矛盾. 所以$\exists\xi\in[a,b]$,使得$f(\xi)=0$.

P81/第四章总练习题/6

设f在$[a,b]$上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，另有一组正数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，满足

$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$.证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

证1 已知f在$[a,b]$上连续，根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理知，

f在$[a,b]$上取得最大值M与最小值m. 从而 $m\le\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\le M$.

根据闭区间上连续函数的介值性定理推论知，$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n).$$

证2 记$\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}=f(x_M)$，$\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}=f(x_m)$.

若$f(x_M)=f(x_m)$，则$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)=f(x_M)=f(x_m)$，

取$\xi=x_M$或$x_m\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

若$f(x_M)>f(x_m)$，则$f(x_m)<\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)<f(x_M)$.

已知f在$[a,b]$上连续，故f在$[x_m,x_M]$或$[x_M,x_m]$上连续，根据闭区间上连续函数的介值性定理知，

$\exists\xi\in(x_m,x_M)$或(x_M,x_m)，使得$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

综上分析，$\exists\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

P81/第四章总练习题/6

设f在$[a,b]$上连续,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$,另有一组正数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,满足

$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$.证明:$\exists\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

证3 设$F(x)=f(x)-\left(\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\right)$.

已知f在$[a,b]$上连续,所以F在$[a,b]$上连续.

记$\max\left\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\right\}=f(x_M)$,$\min\left\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\right\}=f(x_m)$.

$$F(x_M)=f(x_M)-\left(\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\right)\geq 0,$$

$$F(x_m)=f(x_m)-\left(\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\right)\leq 0,$$

若$F(x_M)=0$,则取$\xi=x_M\in[a,b]$,使得$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

若$F(x_m)=0$,则取$\xi=x_m\in[a,b]$,使得$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

若$F(x_m)F(x_M)<0$,又F在$[x_m,x_M]$或$[x_M,x_m]$上连续,

根据闭区间上连续函数的根的存在定理知,$\exists\xi\in(x_m,x_M)$或(x_M,x_m),使得$F(\xi)=0$,

即 $f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

综上分析,$\exists\xi\in[a,b]$,使得$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

BY GYH

P81/第四章总练习题/7

设f在$[0,+\infty)$上连续,满足$0\le f(x)\le x, x\in[0,+\infty)$.设$a_1\ge 0, a_{n+1}=f(a_n), n=1,2,\cdots$.证明:

(1)$\{a_n\}$为收敛数列. (2)设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$,则有$f(t)=t$.

(3)若条件改为$0\le f(x)<x, x\in(0,+\infty)$,则$t=0$.

证 (1)因为$0\le f(x)\le x, x\in[0,+\infty)$,所以$0\le a_{n+1}=f(a_n)\le a_n, n=1,2,\cdots$,

即数列$\{a_n\}$递减且有下界0.根据单调有界定理知,$\{a_n\}$为收敛数列.

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$,由于$a_n\ge 0, n=1,2,\cdots$,根据收敛数列的保不等式性知,$t\ge 0$.

由于f在$[0,+\infty)$上连续,则f在点t连续,从而

$$f(t)=\lim_{x\to t}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=t.$$

(3)因为$a_n\ge 0, n=1,2,\cdots$,根据收敛数列的保不等式性知,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t\ge 0$.

若$t>0$,则由条件$0\le f(x)<x, x\in(0,+\infty)$,必有$f(t)<t$.

这与(2)中的结论$f(t)=t$矛盾.所以$t=0$.

P81/第四章总练习题/8

设f在$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)$.证明：对任何正整数n，存在$\xi\in[0,1]$，使得$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$.

证 当$n=1$时，由于$f(0)=f(1)$，故取$\xi=0$，满足$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$.

当$n>1$时，设$F(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$，$x\in\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$. F在$\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$上连续.

则$F(0)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)$，$F\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)$，$\cdots$，$F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

相加得 $F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(1)-f(0)=0$.

若 $F(0),F\left(\frac{1}{n}\right),\cdots,F\left(\frac{n-1}{n}\right)$中有一个为0，设$F\left(\frac{i}{n}\right)=0$，$i=0,1,\cdots n-1$，则可取$\xi=\frac{i}{n}$，使得$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$.

若 $F(0),F\left(\frac{1}{n}\right),\cdots,F\left(\frac{n-1}{n}\right)$全不为0，则$\exists x_1=\frac{i}{n}$，$x_2=\frac{j}{n}$，其中$0\le i<j\le n-1$，

使得 $F(x_1)F(x_2)<0$. F在$[x_1,x_2]$上连续，根据闭区间上连续函数的根的存在定理知，

$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得$F(\xi)=0$，即$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$.

综上分析，对任何正整数n，存在$\xi\in[0,1]$，使得$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$.

P81/第四章总练习题/9

设f在$x=0$连续,且对任何$x,y\in\mathbb{R}$,有$f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明:(1) f在$\mathbb{R}$上连续;(2) $f(x)=f(1)x$.

证 (1)因为$f(0+0)=f(0)+f(0)$,所以$f(0)=0$.已知f在$x=0$连续,故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$.

对$\forall x_0\in\mathbb{R}$,由于$f(x)=f(x-x_0+x_0)=f(x-x_0)+f(x_0)$,

从而$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x-x_0)+f(x_0)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x-x_0)+\lim\limits_{x\to x_0}f(x_0)=f(0)+f(x_0)=f(x_0)$.

所以f在点x_0连续,由x_0的任意性知,f在$\mathbb{R}$上连续.

(2)对$\forall p\in\mathbb{N}_+$,有$f(p)=f(p-1+1)=f(p-1)+f(1)=f(p-2+1)+f(1)$

$$=f(p-2)+2f(1)=\cdots=pf(1).$$

对$\forall q\in\mathbb{N}_+$,有$f(1)=f\left(\underbrace{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q}}_{q个\frac{1}{q}}\right)=qf\left(\frac{1}{q}\right)$,所以$f\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{q}f(1)$.

因此对$\forall x=\frac{p}{q},p,q\in\mathbb{N}_+$,有$f(x)=f\left(\frac{p}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1)=xf(1)$.

由于$0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$,即$f(-x)=-f(x)$,所以f是$\mathbb{R}$上的奇函数.

因此对$\forall x=-\frac{p}{q},p,q\in\mathbb{N}_+$,有$f(x)=f\left(-\frac{p}{q}\right)=-f\left(\frac{q}{q}\right)=-\frac{p}{q}f(1)=xf(1)$.

综上分析,对$\forall x\in\mathbb{Q}$,有$f(x)=xf(1)$.

对$\forall x_0\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$,根据有理数在实数集上的稠密性知,存在有理数列$\{r_n\}$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x_0$.

已证得f在$\mathbb{R}$上连续,故f在点x_0连续,且$f(r_n)=r_nf(1)$,于是

$$f(x_0)=f\left(\lim_{n\to\infty}r_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_nf(1)=x_0f(1).$$

因此对$\forall x\in\mathbb{R}$,有$f(x)=xf(1)$.

BY GYH

与P63/第三章总练习题/12,13相关命题

设f在$x=0$连续，且$f(x)=f(2x)$, $x\in\mathbb{R}$.证明:f在$\mathbb{R}$上为常量函数.

证 因为$f(x)$在$x=0$连续，故$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

由于$f(x)=f(2x)$, $x\in R$,因此对$\forall x_0\in R, x_0\neq 0$,有

$$f(x_0)=f\left(2\cdot\frac{x_0}{2}\right)=f\left(\frac{x_0}{2}\right)=f\left(2\cdot\frac{x_0}{2^2}\right)=f\left(\frac{x_0}{2^2}\right)=\cdots=f\left(\frac{x_0}{2^n}\right), n\in\mathbb{N}_+.$$

又$\dfrac{x_0}{2^n}\neq 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_0}{2^n}=0$.根据归结原则知,

$$f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty} f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=f\left(0\right).$$

由x_0的任意性知，f在$\mathbb{R}$上为常量函数.

与P63/第三章总练习题/12,13相关命题　P81/第四章总练习题/10

设定义在$\mathbb{R}$上的函数f在0,1两点连续,且对$\forall x\in\mathbb{R}$,有$f(x^2)=f(x)$.

证明:f在$\mathbb{R}$上为常量函数.

证　因为$f(x)$在$x=0, x=1$连续,故$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0),\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$.

由于$f(x^2)=f(x), x\in R$,因此对$\forall x_0\in R$,有

$$f(x_0)=f\left(x_0^2\right)=f\left(\left|x_0\right|^2\right)=f\left(\left|x_0\right|\right)=f\left(\left|x_0\right|^{\frac{1}{2}}\right)=f\left(\left|x_0\right|^{\frac{1}{4}}\right)=\cdots=f\left(\left|x_0\right|^{\frac{1}{2^n}}\right), n\in\mathbb{N}_+.$$

当$x_0\neq0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_0\right|^{\frac{1}{2^n}}=1$.又$f$在1处连续,故

$$f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(\left|x_0\right|^{\frac{1}{2^n}}\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\left|x_0\right|^{\frac{1}{2^n}}\right)=f(1).$$

当$x_0=0$时,由于f在0处连续,故$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(1)=f(1)$.

由x_0的任意性知,f在$\mathbb{R}$上为常量函数.

P81/第四章总练习题/12

设f是区间$[a,b]$上的一个非常数的连续函数,M,m分别是最大、最小值.证明:存在$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,使得(1)$m<f(x)<M,x\in(\alpha,\beta)$;(2)$f(\alpha),f(\beta)$恰好是$f$在$[a,b]$上的最大、最小值(最小、最大值).

证1 设$\alpha_1,\beta_1\in[a,b]$,使得$f(\alpha_1)=M,f(\beta_1)=m$. 因为$f$不是常量函数,所以$\alpha_1\neq\beta_1$.不失一般性,设$\alpha_1<\beta_1$.

记$E=\{x\mid f(x)=M,x\in[\alpha_1,\beta_1]\}$.由于$f(\alpha_1)=M$,从而$\alpha_1\in E$.又$E\subset[\alpha_1,\beta_1]$,故数集$E$有界.

因此E是非空有界数集,根据确界原理知,存在上确界,记$\alpha=\sup E\in[a,b]$.

下面证明$\alpha\in E$. 如果$\alpha\notin E$,根据上确界的定义知,对$\forall\varepsilon>0,\exists x_\varepsilon\in E$,s.t. $x_\varepsilon>\alpha-\varepsilon$.

依次取$\varepsilon=\frac{1}{n}>0,\exists x_n\in E$,s.t. $x_n>\alpha-\frac{1}{n}$. 从而得到有界数列$\{x_n\}\subset E$,满足 $\alpha\geq x_n>\alpha-\frac{1}{n}$.根据迫敛性知,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$.

由数集E的定义及$f(x)$在$x=\alpha$的连续性,有 $f(\alpha)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}M=M$.

因此$\alpha\in E$,产生矛盾.故$\alpha\in E$成立.因此$\alpha<\beta_1$.

记$F=\{x\mid f(x)=m,x\in[\alpha,\beta_1]\}$. 由于$f(\beta_1)=m$,从而$\beta_1\in F$.又$F\subset[\alpha,\beta_1]$,故数集$F$有界.

因此F是非空有界数集,根据确界原理知,存在下确界,记$\beta=\inf F\in[a,b]$.

下面证明$\beta\in F$. 如果$\beta\notin F$,根据下确界的定义知,对$\forall\varepsilon>0,\exists y_\varepsilon\in F$,s.t. $y_\varepsilon<\beta+\varepsilon$.

依次取$\varepsilon=\frac{1}{n}>0,\exists y_n\in F$,s.t. $y_n<\beta+\frac{1}{n}$. 从而得到有界数列$\{y_n\}\subset F$,满足 $\beta\leq y_n<\beta+\frac{1}{n}$.根据迫敛性知,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\beta$.

由数集F的定义及$f(x)$在$x=\beta$的连续性,有 $f(\beta)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}y_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}m=m$.

因此$\beta\in F$,产生矛盾.故$\beta\in F$成立.因此$\alpha<\beta$. 下面说明当$x\in(\alpha,\beta)$时,$m<f(x)<M$.

如果$\exists x_0\in(\alpha,\beta)$,使得$f(x_0)=m$或$f(x_0)=M$. 这与$\beta=\inf F,\alpha=\sup E$矛盾.

因此$m<f(x)<M,x\in(\alpha,\beta)$; $f(\alpha),f(\beta)$恰好是f在$[a,b]$上的最大、最小值.

P81/第四章总练习题/12

设f是区间$[a,b]$上的一个非常数的连续函数,M,m分别是最大、最小值.证明:存在$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,使得(1)$m<f(x)<M,x\in(\alpha,\beta)$;(2)$f(\alpha),f(\beta)$恰好是$f$在$[a,b]$上的最大、最小值(最小、最大值).

证2 设$\alpha_1,\beta_1\in[a,b]$,使得$f(\alpha_1)=M,f(\beta_1)=m$. 因为$f$不是常量函数,所以$\alpha_1\neq\beta_1$.不失一般性,设$\alpha_1<\beta_1$.

若对$\forall x\in(\alpha_1,\beta_1)$,有$m<f(x)<M$,则取$\alpha=\alpha_1,\beta=\beta_1$,从而 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,满足

$m<f(x)<M,x\in(\alpha,\beta)$; $f(\alpha),f(\beta)$恰好是f在$[a,b]$上的最大、最小值.

若$\exists x_0\in(\alpha_1,\beta_1)$,使得$f(x_0)=m$或$M$,当$f(x_0)=m$时,取$\alpha_2=\alpha_1,\beta_2=x_0$. 则有$[\alpha_2,\beta_2]\subset[a,b]$,使得$f(\alpha_2)=M,f(\beta_2)=m$. 当$f(x_0)=M$时,取$\alpha_2=x_0,\beta_2=\beta_1$. 则有$[\alpha_2,\beta_2]\subset[a,b]$,使得$f(\alpha_2)=M,f(\beta_2)=m$.

接着若对$\forall x\in(\alpha_2,\beta_2)$,有$m<f(x)<M$,则取$\alpha=\alpha_2,\beta=\beta_2$,从而 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,满足

$m<f(x)<M,x\in(\alpha,\beta)$; $f(\alpha),f(\beta)$恰好是f在$[a,b]$上的最大、最小值.

若$\exists x_1\in(\alpha_2,\beta_2)$,使得$f(x_1)=m$或$M$,当$f(x_1)=m$时,取$\alpha_3=\alpha_2,\beta_3=x_1$. 则有$[\alpha_3,\beta_3]\subset[a,b]$,使得$f(\alpha_3)=M,f(\beta_3)=m$. 当$f(x_1)=M$时,取$\alpha_3=x_1,\beta_3=\beta_2$. 则有$[\alpha_3,\beta_3]\subset[a,b]$,使得$f(\alpha_3)=M,f(\beta_3)=m$.

重复上述过程,要么得到$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,满足$m<f(x)<M,x\in(\alpha,\beta)$.

要么得到$[\alpha_n,\beta_n]\subset[a,b]$,使得$f(\alpha_n)=M,f(\beta_n)=m,n=1,2,\cdots$,其中$\{\alpha_n\}$是递增有上界数列,$\{\beta_n\}$是递减有下界数列,根据单调有界定理知,数列$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$都收敛,记$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha,\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\beta$.

根据数列的取法及收敛数列的保不等式性,有$a\le\alpha_n\le\alpha\le\beta\le\beta_n\le b$.

如果$\alpha=\beta$,由于$f(\alpha_n)=M,f(\beta_n)=m$,且$f$是$[a,b]$上的连续函数,有$M=\lim\limits_{n\to\infty}f(\alpha_n)=f(\alpha),m=\lim\limits_{n\to\infty}f(\beta_n)=f(\beta)$,即$M=m$,从而$f$是$[a,b]$上的常量函数,与已知条件矛盾.所以$\alpha<\beta$, 并且$m<f(x)<M,x\in(\alpha,\beta)$;

$f(\alpha),f(\beta)$恰好是f在$[a,b]$上的最大、最小值.