Ch6 微分中值定理及其应用

主讲教师：顾燕红

办公室：汇星楼409

办公室答疑时间：每周二15点至17点

微信号：18926511820 QQ号：58105217

Email: yhgu@szu.edu.cn

(添加好友、加群请备注 学号 姓名 数学分析1)

QQ群、QQ、微信群、微信随时答疑解惑

2023年12月7日

§1 拉格朗日中值定理和函数的单调性(1)

§2 柯西中值定理和不定式极限

§3 泰勒公式

将学习：

罗尔中值定理与拉格朗日中值定理

罗尔(Rolle)中值定理

若函数$f(x)$满足如下条件：

(1)在闭区间$[a,b]$上连续;

(2)在开区间(a,b)上可导;

(3) $f(a)=f(b)$.

则在(a,b)上至少存在一点ξ,使得 $f'(\xi)=0$.

罗尔中值定理

$f(x)\in C[a,b],\ f(x)\in D(a,b),\ f(a)=f(b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b),\text{s.t. } f'(\xi)=0.$

注：罗尔定理的几何意义:

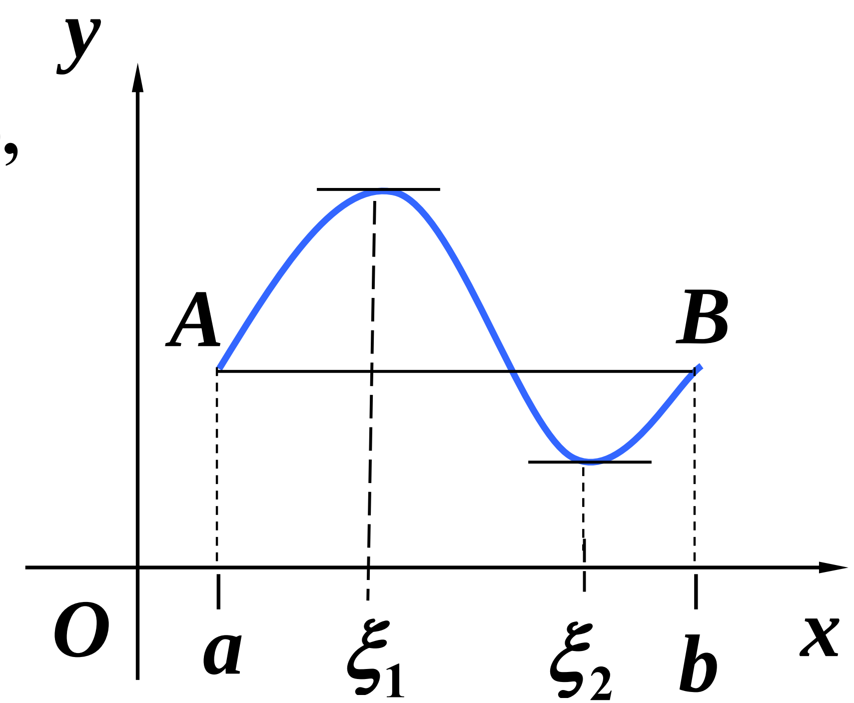
如右图所示,因为$f(a)=f(b)$,

所以线段AB是水平的.

由几何直观可以看出,

曲线上至少有一点处的切线

也是水平的.



罗尔中值定理

$f(x)\in C[a,b],\ f(x)\in D(a,b),\ f(a)=f(b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b),\text{s.t. } f'(\xi)=0.$

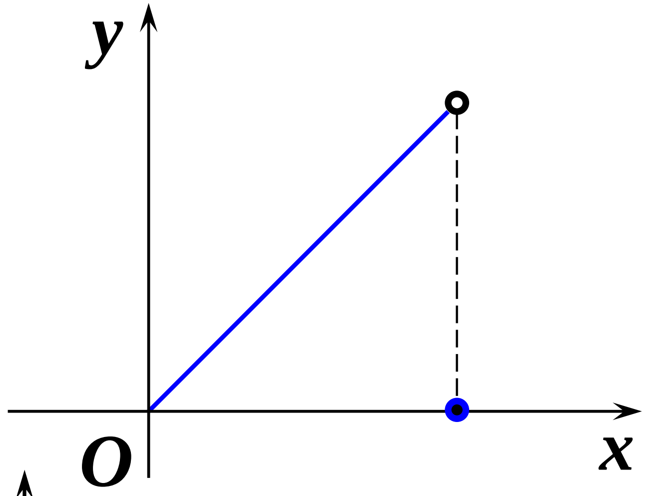
注：罗尔定理的条件分析：

定理中的三个条件都很重要,缺少一个,结论不一定成立.

(a)函数$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$, $x\in[0,1]$满足

条件(2)和(3),但不满足条件(1),

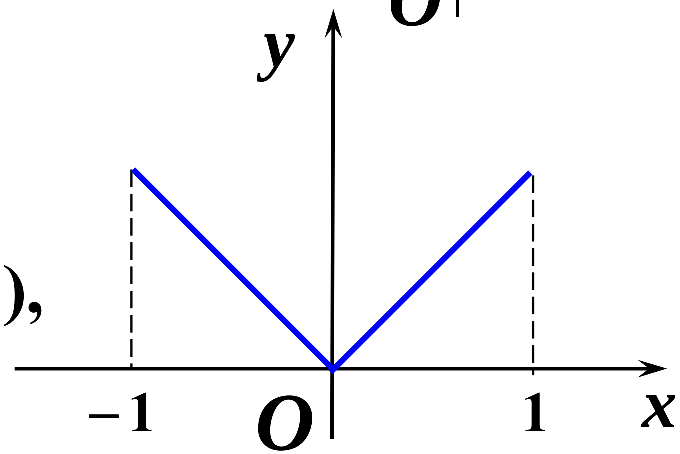
该函数在(0,1)上的导数恒为1.结论不成立.



(b)函数$f(x)=|x|$, $x\in[-1,1]$满足

条件(1)和(3),但不满足条件(2),

结论不成立.



罗尔中值定理

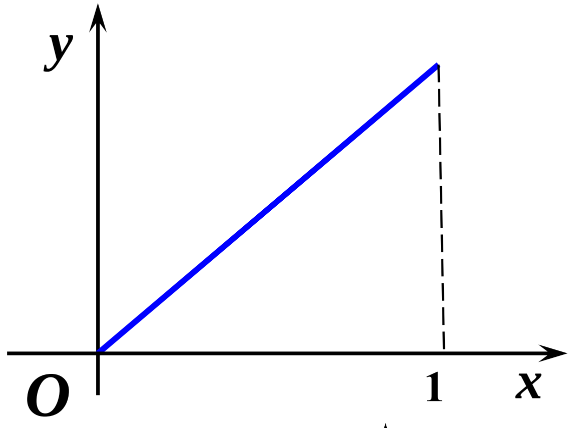
$f(x)\in C[a,b],\ f(x)\in D(a,b),\ f(a)=f(b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b),\text{s.t. } f'(\xi)=0.$

注：罗尔定理的条件分析：

(c)函数$f(x)=x,x\in[0,1]$上满足

条件(1)和(2),但不满足条件(3),

该函数在(0,1)上的导数恒为1.结论不成立.

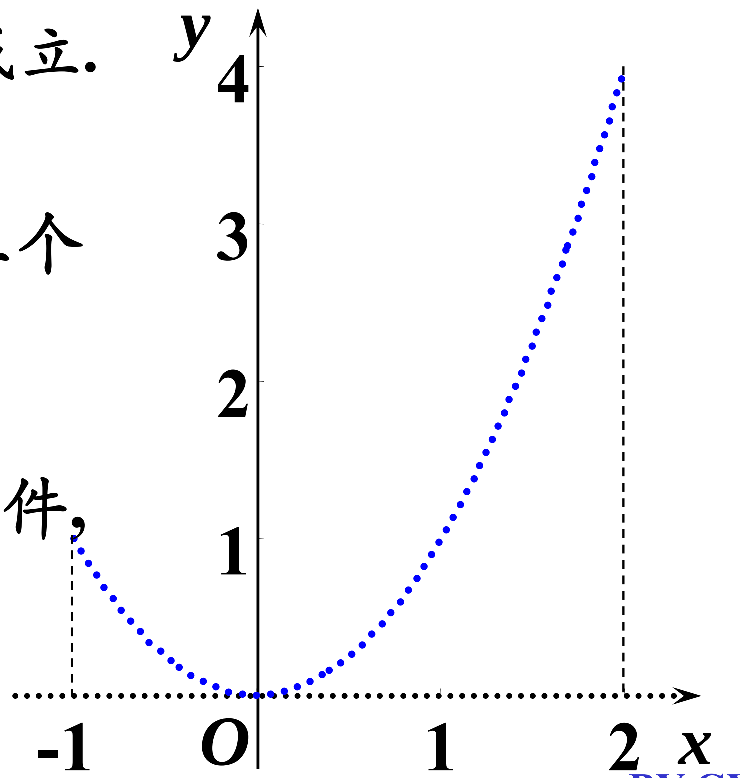


注：函数 $f(x)=x^2D(x)$在区间$[-1,2]$上三个

条件都不满足,却仍有$f'(0)=0$.

这说明罗尔定理的三个条件是充分条件,

而不是必要条件.



罗尔中值定理

$f(x)\in C[a,b],\ f(x)\in D(a,b),\ f(a)=f(b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b),\text{s.t. } f'(\xi)=0.$

证 由于$f(x)$在$[a,b]$上连续,

根据闭区间上连续函数的最大、最小值定理,

$f(x)$在$[a,b]$上能取得最大值M和最小值m.

下面分两种情形加以讨论.

情形1 $M=m$.此时$f(x)$恒为常数,它的导函数恒等于0,

此时(a,b)内任意一点都可取为ξ, 使得$f'(\xi)=0$.

情形2 $M>m$.由于$f(a)=f(b)$,从而最大值M与最小值m至少有

一个在(a,b)上的某点ξ处取到.

从而ξ是$f(x)$的一个极值点,且$f(x)$在点ξ处可导,

根据费马定理知 $f'(\xi)=0$.

例1 设$p(x)$是一个多项式,且方程$p'(x)=0$没有实根,

则方程$p(x)=0$至多有一个实根,且这个根的重数为1.

证 利用反证法证明.

设 $p(x)$ 有两个实根 x_1, x_2, $x_1 < x_2$, 由于$p(x)$是多项式,

显然 $p(x)$在$[x_1,x_2]$上连续,在(x_1,x_2)上可导, $f(x_1)=f(x_2)=0$,

根据罗尔中值定理知,$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$,使得$p'(\xi)=0$,这与已知条件矛盾.

又若 $p(x)$ 有一个 k 次重根 x_0, 则 $p(x)=(x-x_0)^k p_1(x)$, $k\ge 2$.

因为 $p'(x)=k(x-x_0)^{k-1}p_1(x)+(x-x_0)^k p_1'(x)$

$$=(x-x_0)^{k-1}\big(kp_1(x)+(x-x_0)p_1'(x)\big),$$

故 $p'(x_0)=0$,与已知条件矛盾.

所以 $p(x)=0$至多有一个实根,且这个根的重数为1.

例2 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,

$g(a)=f(b)=0,\forall x\in(a,b),f(x)\neq 0,g(x)\neq 0.$

证明:在(a,b)内至少存在一点ξ,使得$\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}.$

分析 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}\Leftarrow f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0\Leftarrow\left(f(x)g(x)\right)'\Big|_{x=\xi}=0$

证 作辅助函数$F(x)=f(x)g(x).$

$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导, $F(a)=F(b)=0,$

根据Rolle中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0.$

由于$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$

即 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$, 也即 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}.$

拉格朗日(Lagrange)中值定理

若函数$f(x)$满足如下条件:

(1)在闭区间$[a,b]$上连续;

(2)在开区间(a,b)上可导.

则在(a,b)上至少存在一点ξ,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

拉格朗日公式

拉格朗日中值定理

$$f(x)\in C[a,b],\ f(x)\in D(a,b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b),\text{s.t. } f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

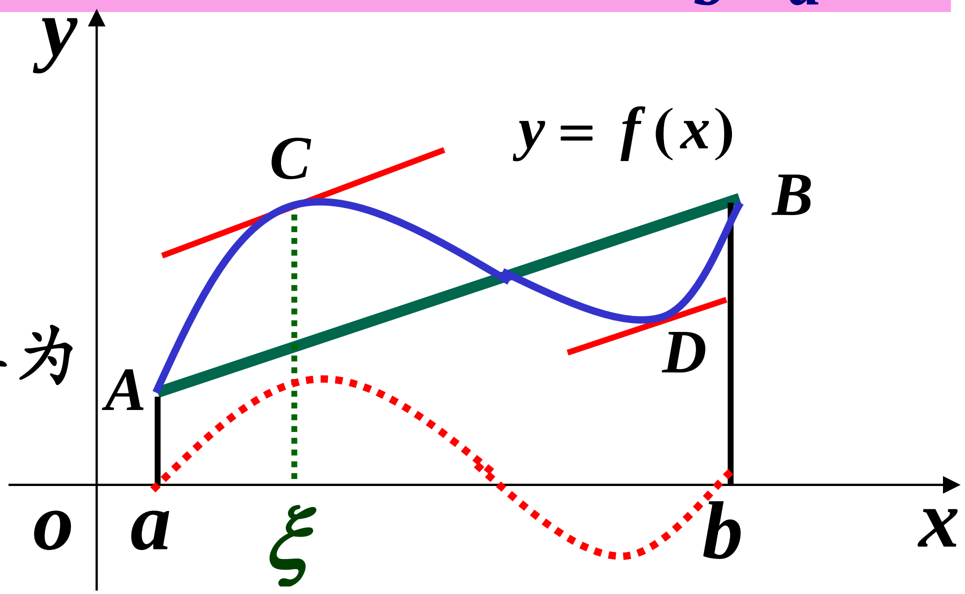
注：当$f(a)=f(b)$时，拉格朗日中值定理就是罗尔中值定理.

可见，罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的一个特例.

拉格朗日中值定理

$$f(x)\in C[a,b],\ f(x)\in D(a,b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b),\text{s.t. } f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注： 拉格朗日定理的几何意义：



如右图所示,曲线$y=f(x)$的两个端点A,B连线的斜率为

$$k_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

用平行推移的方法,曲线上至少有一点$C(\xi,f(\xi))$处的切线与AB平行,其斜率$f'(\xi)$也等于k_{AB}.

分析 弦AB的方程为 $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$

曲线$f(x)$减去弦AB,得 $y=f(x)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right).$

拉格朗日中值定理

$$f(x)\in C[a,b],\ f(x)\in D(a,b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b),\text{s.t. } f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证 设 $F(x)=f(x)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right).$

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,且$F(a)=F(b)=0,$

根据罗尔中值定理知, $\exists\xi\in(a,b),$使得 $F'(\xi)=0,$

即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

拉格朗日中值定理

$$f(x)\in C[a,b],\ f(x)\in D(a,b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b),\text{s.t. } f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

分析 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftarrow f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Leftarrow \left.\left(f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right)'\right|_{x=\xi}=0$

证 设 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$

显然$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,

且$F(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=F(b)$,

根据罗尔中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,

即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

思路: 利用逆向思维找出一个满足罗尔定理条件的函数.

拉格朗日中值定理

$$f(x)\in C[a,b],\ f(x)\in D(a,b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b),\text{s.t. } f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注：拉格朗日公式有几个等价的表示形式：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ a<\xi<b.$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\ 0<\theta<1.$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,\ 0<\theta<1.$$

注：拉格朗日公式对$b<a$仍然成立，此时ξ是介于a与b之间的一个常数.

例3 设$f(x)$在区间I上可微，且$|f'(x)|\le K$. 则$f(x)$在I上一致连续.

证 对$\forall x', x'' \in I$，不妨设$x' < x''$.

显然$f(x)$在$[x', x'']$上满足Lagrange中值定理的条件,

故 $\exists \xi \in (x', x'')$，使得 $f(x') - f(x'') = f'(\xi)(x' - x'')$.

从而有 $\left|f(x') - f(x'')\right| = \left|f'(\xi)\right|\left|(x' - x'')\right| \le K\left|x_2 - x_1\right|$.

因此，对$\forall \varepsilon > 0$，取$\delta = \dfrac{\varepsilon}{K+1} > 0$，对$\forall x', x'' \in I : \left|x' - x''\right| < \delta$，有

$$\left|f(x') - f(x'')\right| \le K\left|x' - x''\right| < \frac{K\varepsilon}{K+1} < \varepsilon.$$

所以$f(x)$在I上一致连续.

f在I上一致连续 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in I : \left|x' - x''\right| < \delta$，有 $\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon$.

例4 证明：$f(x)=\arctan x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证 对$\forall x',x''\in\mathbb{R}$,不妨设$x'<x''$.

$f(x)=\arctan x$在$[x',x'']$上满足Lagrange中值定理的条件,

故 $\exists\xi\in(x',x'')$,使得 $f(x'')-f(x')=f'(\xi)(x''-x')$.

即 $\arctan x''-\arctan x'=\dfrac{1}{1+\xi^2}(x''-x')$.

由于 $0<\dfrac{1}{1+\xi^2}\le 1$,

所以 $\left|\arctan x''-\arctan x'\right|=\left|\dfrac{1}{1+\xi^2}(x''-x')\right|\le\left|x''-x'\right|$.

因此,对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\varepsilon>0$,对$\forall x',x''\in\mathbb{R}$: $\left|x'-x''\right|<\delta$,有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\arctan x'-\arctan x''\right|\le\left|x'-x''\right|<\delta=\varepsilon.$$

所以$f(x)=\arctan x$在$\mathbb{R}$上一致连续.

例5 证明: $\arctan b - \arctan a \le b - a, \quad (a < b).$

证 设 $f(x) = \arctan x$.

显然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导,

根据拉格朗日中值定理知, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$\arctan b - \arctan a = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a) \le b - a.$$

例6 设$0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$.证明:$\dfrac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\dfrac{b-a}{\cos^2 b}$.

证 设$f(x)=\tan x$.

$f(x)=\tan x$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,

根据拉格朗日中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=\tan b-\tan a=(b-a)\sec^2\xi.$$

由于

$$0<\frac{1}{\cos^2 a}<\sec^2\xi=\frac{1}{\cos^2\xi}<\frac{1}{\cos^2 b},$$

所以 $$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a=(b-a)\sec^2\xi<\frac{b-a}{\cos^2 b}.$$

例7 设$f(x)$在$(a,+\infty)$可导, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$,根据函数极限的定义,

对$\forall\varepsilon>0,\exists M_1>0(M_1>a),\forall x>M_1$,有 $|f'(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$f(x)$在$[M_1,x]$上满足Lagrange中值定理的条件,

故 $\exists\xi\in(M_1,x)$,使得 $f(x)-f(M_1)=f'(\xi)(x-M_1)$.

从而 $|f(x)-f(M_1)|=|f'(\xi)(x-M_1)|<\dfrac{\varepsilon}{2}(x-M_1)$.

于是 $|f(x)|=|f(x)-f(M_1)+f(M_1)|\le|f(x)-f(M_1)|+|f(M_1)|$

$$<\frac{\varepsilon}{2}(x-M_1)+|f(M_1)|.$$

由此得 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}\left(1-\dfrac{M_1}{x}\right)+\dfrac{|f(M_1)|}{x}<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{|f(M_1)|}{x}$,

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(M_1)}{x}=0$,根据函数极限的定义,

对上述$\varepsilon>0,\exists M_2>0(M_2>a),\forall x>M_2$,有 $\left|\dfrac{f(M_1)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取$M=\max\{M_1,M_2\}>0,\forall x>M$,有$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

拉格朗日中值定理推论

若函数$f(x)$在区间I上可导，且$f'(x)\equiv 0$，则$f(x)$在I上是一个常量函数.

拉格朗日中值定理推论

$$\forall x \in I, f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=c, x \in I.$$

证 对于区间I上的任意两点x_1与x_2,不妨设$x_1 < x_2$.

$f(x)$在$[x_1,x_2]$上满足拉格朗日中值定理的条件,则$\exists \xi \in (x_1,x_2)$,使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0.$$

这就证得f在区间I上任何两点之值相等,所以f在I上为常量函数.

拉格朗日中值定理推论

若函数 f 和 g 均在区间 I 上可导，且

$$f'(x) \equiv g'(x),\ x \in I,$$

则在区间 I 上 $f(x)$ 和 $g(x)$ 只相差一个常数，即

$$f(x) = g(x) + C \quad (C\text{为某一常数}).$$

例8 证明: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ \ x \in [-1, 1].$

证 设$f(x) = \arcsin x + \arccos x$. 则在$(-1,1)$上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0.$$

根据拉格朗日中值定理推论知,

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x = C, x \in (-1, 1).$$

令$x = 0$,得$C = \dfrac{\pi}{2}$.

又$f(\pm 1) = \dfrac{\pi}{2}$,故所证等式在$[-1,1]$上成立.

注：要证当$x\in I$时$f(x)=C_0$,只需证在I上$f'(x)\equiv 0$,

且$\exists\, x_0\in I$,使 $f(x_0)=C_0$.

注：$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$.

例9 设$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上可微，且$f'(x)\geq c>0$.

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

证 任取$x>a$, $f(x)$在$[a,x]$上满足拉格朗日中值定理的条件,

故有

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$$

$$\geq c(x-a),\quad a<\xi<x.$$

从而

$$f(x)\geq f(a)+c(x-a).$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(a)+c(x-a))=+\infty$,所以

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

问题 $f'(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) \overset{?}{=} f'_+(a).$

$$f'(a-0)=\lim_{x\to a^-} f'(x) \overset{?}{=} f'_-(a).$$

$$\lim_{x\to a} f'(x) \overset{?}{=} f'(a).$$

例 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x},\ x\neq 0.$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})$ 不存在.

$$f'(0)\neq \lim_{x\to 0} f'(x)$$

导数极限定理

设函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上连续，在 $U^\circ(x_0)$ 上可导，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，则 f 在点 x_0 可导，且

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f'(x).$$

导数极限定理 $f(x)$在$U(x_0)$上连续,在$U^\circ(x_0)$上可导,$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在

$\Rightarrow f(x)$在点x_0可导,且$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

证 分别按左、右导数来证明. (要证$f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$, $f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$)

(1) 任取 $x\in U_+^\circ(x_0)$, $f(x)$ 在$[x_0,x]$上满足拉格朗日中值定理条件,

则存在$\xi\in(x_0,x)$, 使得 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$.

由于$x_0<\xi<x$,因此当$x\to x_0^+$时, 随之有$\xi\to x_0^+$, 对上式两边求极限,得

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+} f'(\xi)=\lim_{\xi\to x_0^+} f'(\xi)=f'(x_0+0).$$

(2) 同理可得 $f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$.

因为$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在,所以 $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$,

从而 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$,所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

例12 求$f(x)=\begin{cases} x+\sin x^2, x\le 0 \\ \ln(1+x), \quad x>0 \end{cases}$的导数.

解 当$x<0, f'(x)=1+2x\cos x^2$；当$x>0, f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

从而 $f'(x)=\begin{cases} 1+2x\cos x^2, x<0 \\ \dfrac{1}{1+x}, \qquad x>0 \end{cases}$.

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\sin x^2}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}1+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^2}{x}=1+\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=1,$$ 故$f'(0)=1$.

从而 $f'(x)=\begin{cases} 1+2x\cos x^2, x\le 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, \qquad x>0 \end{cases}$.

例12 求$f(x)=\begin{cases} x+\sin x^2, x\le 0 \\ \ln(1+x), \ x>0 \end{cases}$的导数.

解 当$x<0$, $f'(x)=1+2x\cos x^2$; 当$x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

从而 $f'(x)=\begin{cases} 1+2x\cos x^2, x<0 \\ \dfrac{1}{1+x}, \quad x>0 \end{cases}$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+\sin x^2)=0=f(0)$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0=f(0)$,

故$f(x)$在$x=0$处连续.因此$f(x)$在$U(0)$上连续,在$U^\circ(0)$上可导.

由于 $f'(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+2x\cos x^2)=1$,

$f'(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+x}=1$,

故$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=1$.

根据导数极限定理知, $f(x)$在$x=0$处可导,且$f'(0)=1$.

你应该:

理解罗尔中值定理

理解拉格朗日中值定理

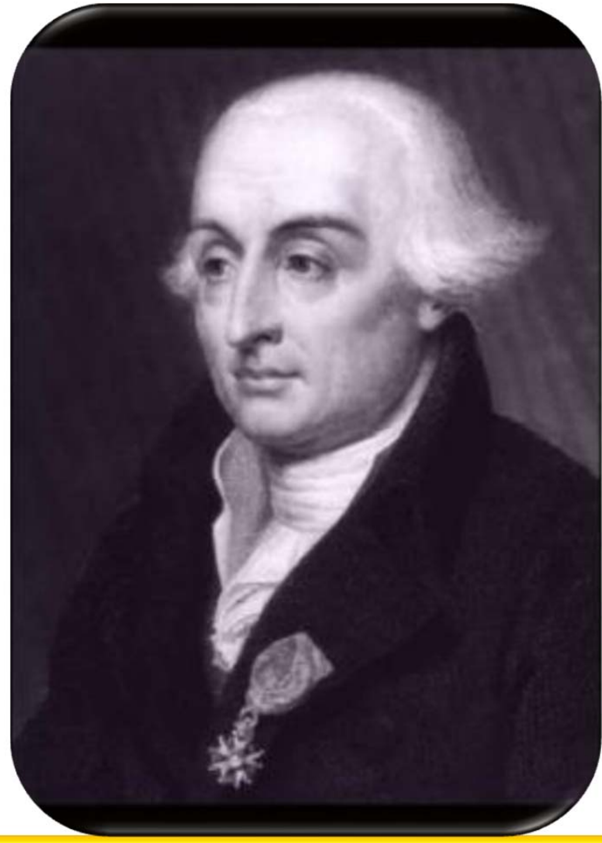
罗尔生于下奥弗涅的昂贝尔(Ambert)仅受过初等教育，依靠自学精通了代数与丢番图分析理论. 1675年他从昂贝尔搬往巴黎，1682年因为解决了数学家雅克·奥扎南提出的一个数论难题而获得盛誉，得到了让-巴蒂斯特·科尔贝的津贴资助. 1685年获选进法兰西皇家科学院，1699年成为科学院的Pensionnaire Géometre. 罗尔是微积分的早期批评者，认为它不准确，基于不稳固的推论. 他后来改变立场. 1719年11月8日，罗尔在巴黎逝世.

—— 摘自百度百科

米歇尔 · 罗尔
Michel Rolle
(1652年4月21日—1719年11月8日)
法国数学家

拉格朗日是18世纪的伟大科学家，在数学、力学和天文学三个学科中都有历史性的重大贡献．但他主要是数学家，拿破仑曾称赞他是“一座高耸在数学界的金字塔”，他最突出的贡献是在把数学分析的基础脱离几何与力学方面起了决定性的作用．使数学的独立性更为清楚，而不仅是其他学科的工具．同时在使天文学力学化、力学分析化上也起了历史性作用，促使力学和天文学（天体力学）更深入发展．由于历史的局限，严密性不够妨碍着他取得更多的成果．

—— 摘自百度百科



约瑟夫·拉格朗日
Joseph-Louis Lagrange
(1736年1月25日—1813年4月10日)
法国数学家、物理学家