

第二十章 曲线积分

第一节 第一型曲线积分

第二十章 曲线积分

第一节 第一型曲线积分

1. 第一型曲线积分的定义
2. 第一型曲线积分的计算

第一型曲线积分的定义

定义: 设 L 为平面上可求长度的曲线段, $f(x, y)$ 为定义在 L 上的函数. 对曲线 L 做分割 T , 它把 L 分为 n 个可求长度的小曲线段 $L_i, i = 1, 2, \dots$, L_i 的弧长记为 Δs_i , 分割 T 的细度为 $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i$, 在 L_i 上任取一点 $(\xi_i, \eta_i), i = 1, 2, \dots$. 若极限

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = J$$

且 J 的值与分割 T 与点 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 则称此极限为 $f(x, y)$ 在 L 上的**第一型曲线积分**, 记为

$$\int_L f(x, y) ds.$$

同理可定义三维空间上的第一型曲线积分

$$\int_L f(x, y, z) ds.$$

第一型曲线积分的定义

性质1: 设 $\int_L f(x, y)ds$, $\int_L g(x, y)ds$ 存在, α, β 为常数, 则

$$\int_L [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]ds = \alpha \int_L f(x, y)ds + \beta \int_L g(x, y)ds.$$

性质2: 设曲线 L 由 L_1, L_2 首尾相接, 且 $\int_{L_1} f(x, y)ds$, $\int_{L_2} f(x, y)ds$ 存在, 则

$$\int_L f(x, y)ds = \int_{L_1} f(x, y)ds + \int_{L_2} f(x, y)ds.$$

第一型曲线积分的定义

性质3: 设 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 且 $\int_L f(x, y)ds$, $\int_L g(x, y)ds$ 存在, 则

$$\int_L f(x, y)ds \leq \int_L g(x, y)ds.$$

进而

$$\left| \int_L f(x, y)ds \right| \leq \int_L |f(x, y)|ds.$$

性质4: 设 $\int_L f(x, y)ds$ 存在, $f(x, y)$ 连续, 则

$$\int_L f(x, y)ds = cs,$$

其中 s 表示 L 的长度, $\inf_L f(x, y) \leq c \leq \sup_L f(x, y)$.

第一型曲线积分的定义

性质5(奇对称性质): 设曲线 L 关于 y 轴对称, $f(x, y) = -f(-x, y)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0.$$

设曲线 L 关于 x 轴对称, $f(x, y) = -f(x, -y)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0.$$

第一型曲线积分的计算

定理： 设有光滑曲线 $L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$, 函数 $f(x, y)$ 为定义在 L 上的连续函数, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

同理

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

第一型曲线积分的计算

例题1: 计算积分

$$\int_L (x^2 + y^2) ds,$$

其中 L 为半圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, $y \geq 0$.

第一型曲线积分的计算

例题2: 计算积分

$$\int_L y ds,$$

其中 L 为抛物线 $y^2 = 4x$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,2)$.

第一型曲线积分的计算

例题3： 计算积分

$$\int_L x^3 + 3zy^2 - x^2y ds,$$

其中 L 为点 $A(0,0,0)$ 到点 $B(3,2,1)$ 的直线段 AB .

第一型曲线积分的计算

例题4： 计算积分

$$\int_L \frac{x+y}{1+x^2+y^2} ds,$$

其中 L 为半圆周 $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$.

第一型曲线积分的计算

例题5: 计算积分

$$\int_L x^2 + xyz ds,$$

其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $x + y + z = 0$ 所截得的圆周.

本节作业

作业：

第 189 页：第1题(1), (3), (5), (7) .