第十八章　隐函数定理及其应用

第三节　几何应用

例题1： 求圆周

$$x^2 + y^2 = 1$$

的切线.

切线和法线公式

定理: 设平面曲线由方程

$$F(x,y)=0$$

给出，并且在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内满足隐函数定理. 则它在 P_0 处的切线方程和法线方程为：

$$\text{切线：} F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0,$$

和

$$\text{法线：} F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

例题2： 求笛卡尔叶形线

$$2(x^3+y^3)-9xy=0$$

在点 $(2,1)$ 处的切线和法线.

定理： 设空间曲线的参数方程为

$$L: x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\quad \alpha \le t \le \beta,$$

其中函数 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $t = t_0 \in (\alpha, \beta)$ 的一个邻域内可微，且

$$[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2 + [z'(t_0)]^2 \neq 0.$$

令 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$，则曲线在 P_0 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

与切线相垂直的平面称为法平面，它的方程形式为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

例题3： 求曲线

$$x = a\sin^2 t,\quad y = b\sin t\cos t,\quad z = c\cos^2 t$$

在点 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程与法平面方程.

空间曲线的切线与法平面

定理： 设空间曲线由方程组$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$给出，并且在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内满足隐函数组定理的条件，不妨假设 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0} \neq 0$，则在 P_0 附近能确定唯一连续可微的隐函数组

$$x=\varphi(z), \quad y=\psi(z),$$

且 $x_0=\varphi(z_0), y_0=\psi(z_0)$. 那么曲线在 P_0 点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}} = \frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}} = \frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}},$$

法平面方程为

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}(z-z_0) = 0.$$

例题4： 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 50, \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

在点 $(3, 4, 5)$ 处的切线和法平面方程.

曲面的切平面和法线方程

定理(Page 121)： 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 存在不平行于 z 轴的切平面的充分必要条件是函数 f 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 可微，且切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{z_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{z_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

定理: 设曲面由方程

$$F(x,y,z)=0,$$

给出. 它在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内满足隐函数定理条件, 并且不妨假设 $F_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 即在 P_0 附近能确定唯一连续可微的隐函数 $z=f(x,y)$, 且 $z_0=f(x_0,y_0)$. 那么, 该曲面在 P_0 处的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

例题5： 求椭球面

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面方程和法线方程.

推论： 设空间曲线由方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出，并且在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内满足隐函数组定理的条件，不妨假设 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0} \neq 0$，则在 P_0 附近能确定唯一连续可微的隐函数组

$$x=\varphi(z), \quad y=\psi(z),$$

且 $x_0=\varphi(z_0), y_0=\psi(z_0)$. 那么切线方程的**切向量**和法平面方程的**法向量**为

$$\vec{n}=\operatorname{grad} F \times \operatorname{grad} G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix},$$

即，经过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线为两个切平面的交.

例题4： 求由方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=50, \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

所截出的曲线在点 $(3,4,5)$ 处的切线和法平面方程.

例题5： 证明：曲面 $f\left(\dfrac{x-a}{z-c}, \dfrac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 的任意切平面都过某个定点，其中 f 是连续可微函数.

本节作业

作业：

第 154 页：第1题.

第 155 页：第4题、第5题、第6题.

习题： 求函数

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

在点 $M(1, 2, -1)$ 沿曲线

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -2t^4$$

在该点切线的方向导数.