

第一部分 数与代数

第1章 实 数

§ 1.1 实数的基本概念

一、有理数与无理数、相反数、绝对值

1.1.1 ★ 已知下列各数：

$$7.2, -2^2, -\sqrt{8}, 0.1, -\sqrt[3]{64}, -5\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{(-2)^2}, \sin 30^\circ, 0.6, 3.14, -5, \sqrt[3]{9}, 0.\dot{1}0\dot{2},$$

把它们分别填在相应的大括号里。

分数集合{ ... };

整数集合{ ... };

负有理数集合{ ... };

非负有理数集合{ ... }.

解析： 分数集合{ $7.2, 0.1, -5\frac{1}{2}, \sin 30^\circ, 0.6, 3.14, 0.\dot{1}0\dot{2}, \dots$ }.

整数集合{ $-2^2, -\sqrt[3]{64}, \sqrt{(-2)^2}, -5, \dots$ }.

负有理数集合{ $-2^2, -\sqrt[3]{64}, -5\frac{1}{2}, -5, \dots$ }.

非负有理数集合{ $7.2, 0.1, \sqrt{(-2)^2}, \sin 30^\circ, 0.6, 3.14, 0.\dot{1}0\dot{2}, \dots$ }.

1.1.2 ★ 实数 $0.10100100010\dots, \sqrt[3]{-8}, \sqrt{2\frac{1}{4}}, \frac{22}{7}, 3\pi, \tan 60^\circ, \sqrt[3]{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$-1, \sqrt{8}, 3.14$ 中, 有理数有_____个, 无理数有_____个.

解析： 根据有理数及无理数的意义, 通常可以循以下思路来挑选、甄别: 整数、分数(包括有限小数和无限循环小数)都是有理数; 无限不循环小数是无理数; π 是无理数; 有根号, 能求得结果是整数或分数(也称作开方能开尽)的是有理数, 否则

是无理数; 锐角特殊角的三角函数中除 $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 和 $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ =$

2 多功能题典

1外,都是无理数.

上述各数中 $\sqrt[3]{-8}$ 、 $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ 、 $\frac{22}{7}$ 、 -1 、 3.14 是有理数, 共有 5 个; $0.10100100010\dots$ 、

3π 、 $\tan 60^\circ$ 、 $\sqrt[3]{4}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\sqrt{8}$ 是无理数，共有 6 个.

1.1.3 ★★ 在实数中,倒数等于本身的数是_____，相反数等于本身的数是_____，绝对值等于本身的数是_____.

解析: 方法 1 因为互为倒数的两数乘积等于 1, 而这两数相等, 只能同时为 1 或同时为 -1 , 所以倒数等于本身的数是 ± 1 . 同理, 相等两数的和为 0, 只能同时为 0, 所以相反数等于本身的数是 0. 根据绝对值的意义, 绝对值等于本身的数是任何非负实数.

方法 2 设所求的数为 x , 根据题意, 可分别列出方程: $\frac{1}{x} = x$, $-x = x$,

$|x| = x$. 容易得到它们的解分别为 $x = \pm 1$, $x = 0$, $x \geq 0$.

1.1.4 ★★ 已知 a, b 互为相反数, 则下列各对数中()不是互为相反数.

- (A) $-2a$ 和 $-2b$ (B) $a+1$ 和 $b+1$
(C) $a+1$ 和 $b-1$ (D) $2a$ 和 $2b$

解析: 因为 a, b 互为相反数, 所以 $a + b = 0$, 而 $(a+1) + (b+1) = a+b+2 = 2$, 故选 B.

1.1.5 ★★ 下列命题中,正确的是()。

- (A) 若 $a < 0$, 则 $|a| = -a$ (B) 若 a 是实数, 则 $|a| = \pm a$
(C) 若 $|a| = a$, 则 $a \geq 0$ (D) 若 a 是实数, 则 $|a| > 0$

解析: 因为任意实数的绝对值总是惟一确定的非负数, 故(B)错误; 而 0 的绝对值也等于它本身, 所以(C)、(D) 错误. 故选 A.

1.1.6 ★★ 若 $a > b$ 且 $|a| < |b|$, 则下列说法正确的是() .

- (A) a 一定是正数 (B) a 一定是负数
 (C) b 一定是正数 (D) b 一定是负数

解析: 假设 a, b 都是非负数, 则条件中第二个不等式可化为 $a < b$, 与第一个不等式矛盾, 所以 a, b 中的较小数 b 一定是负数. 故选 D.

1.1.7 ★★ 判断语句“因为负数的绝对值等于它的相反数，所以若 $|x| = -x$ ，则 $x < 0$ ”是否正确，并说明理由。

解析: 上述语句中条件“因为负数的绝对值等于它的相反数”是正确的,但反过来还应注意到0也满足等式 $|x|=-x$,所以结论“若 $|x|=-x$,则 $x<0$ ”是错误的,应为“若 $|x|=-x$,则 $x\leqslant 0$ ”.

1.1.8 ★★ 某数与 -25 的和是 23 的相反数,求这个数.

解析: 方法1 根据题意,这个数是 $-23 - (-25) = 2$.

方法2 设这个数为 x ,则 $x - 25 = -23$,解得 $x = 2$.

1.1.9 ★★ 若 a 和 b 互为相反数, c 和 d 互为倒数, m 的绝对值为2,求代数式

$$\frac{a+b}{a+b+c} + m^2 - cd$$
 的值.

解析: 根据题意, $a+b=0$, $cd=1$, $m^2=4$,所以原式 $=\frac{0}{c}+4-1=3$.

1.1.10 ★★ 已知 $|2x-3|=3-2x$,求 x 的取值范围.

解析: 因为 $2x-3$ 的绝对值等于它的相反数,所以 $2x-3 \leqslant 0$,即 $x \leqslant \frac{3}{2}$.

1.1.11 ★★ 已知 $1 \leqslant x < 5$,化简 $|1-x| + |x-5|$.

解析: 因为 $1 \leqslant x < 5$,所以 $1-x \leqslant 0$, $x-5 < 0$. 原式 $=x-1+5-x=4$.

1.1.12 ★★ 已知 $ab \neq 0$,求 $\frac{|a|}{a} + \frac{b}{|b|}$ 的值.

解析: 本题有以下三种情形:

(1) 若 a 、 b 异号,则 $\frac{|a|}{a} + \frac{b}{|b|} = 0$;

(2) 若 a 、 b 都是正数,则 $\frac{|a|}{a} + \frac{b}{|b|} = 2$;

(3) 若 a 、 b 都是负数,则 $\frac{|a|}{a} + \frac{b}{|b|} = -2$.

1.1.13 ★★ 求出所有满足条件 $|a-b| + ab = 1$ 的非负整数对 (a, b) .

解析: 根据题意, $|a-b|$ 和 ab 两个代数式的值都是非负整数,则只能一个为0,另一个为1,即 a 与 b 的值只能在0与1中取.用逐一列举的方法,求得满足条件的非负整数对有三对:(0, 1), (1, 0), (1, 1).

1.1.14 ★★ 分别写出满足下列条件的实数,你能写出几个?试设计一个方案,使能写出随意指定的个数.你能从中体会到什么?

(1) 1与2之间的有理数; (2) 1与2之间的无理数.

解析: 本题答案不惟一.例如,可以随意取一个1与2之间的有理数1.5(无理数 $\sqrt{2}$),取这个数与2的平均数,再取所得数与2的平均数,……即可得到所需要的任意个有理数(无理数).从而我们能够体会到任意两个实数之间都有无穷多个有理数和无理数.

1.1.15 ★★ 设 x 、 y 是实数,试证明 $|x| + |y| \geqslant |x+y|$,并利用这一结论求 $|x-2| + |x+4|$ 的最小值.

解析: 显然,若 x 、 y 同号或至少有一个为0,则有 $|x| + |y| = |x+y|$;若 x 、 y 异号,则有 $|x| + |y| > |x+y|$.所以 $|x| + |y| \geqslant |x+y|$ 成立.

4 多功能题典

根据上述结论,得 $|x-2|+|x+4|=|2-x|+|x+4|\geqslant|2-x+x+4|=6$,所以代数式 $|x-2|+|x+4|$ 的最小值是6.

二、平方根与立方根

1.1.16 ★ 填空:

(1) 64 的平方根是_____;

(2) 64 的立方根是_____;

(3) 正数 a 的平方根是_____;

(4) m 的立方根是_____.

解析: (1) ± 8 . (2) 4. (3) $\pm \sqrt{a}$. (4) $\sqrt[3]{m}$.

1.1.17 ★ 填空:

(1) 因为 $(\text{_____})^2 = 25$, 所以 25 的平方根是_____, 25 的算术平方根是_____;

(2) 因为 $a^2 = m$, 所以 m 的平方根是_____, m 的算术平方根是_____.

解析: (1) ± 5 ; ± 5 ; 5.

(2) 注意到 a 的符号不能确定, 所以 m 的平方根是 $\pm a$, 算术平方根是 $|a|$.

1.1.18 ★ 填空:

(1) $(\text{_____})^2 = 1\frac{7}{9}$;

(2) $(\text{_____})^3 = 2\frac{10}{27}$;

(3) $(\text{_____})^2 = 15$;

(4) $(\text{_____})^3 = -6$.

解析: (1) 因为 $1\frac{7}{9} = \frac{16}{9}$, 所以填 $\pm \frac{4}{3}$.

(2) 因为 $2\frac{10}{27} = \frac{64}{27}$, 所以填 $\frac{4}{3}$.

(3) $\pm \sqrt{15}$. (4) $-\sqrt[3]{6}$.

1.1.19 ★★ 填空:

(1) 平方根等于本身的数是_____;

(2) 算术平方根等于本身的数是_____;

(3) 立方根等于本身的数是_____.

解析: (1) 因为正数的平方根有两个, 所以平方根等于本身的数只能是0.

(2) 因为正数的算术平方根只有一个, 0的算术平方根等于0, 所以应填0、1.

(3) 因为正数、负数的立方根都是唯一的, 0的立方根是0, 所以立方根等于本身的数是0、1和-1.

1.1.20 ★ 对任意实数 a , 下列结论总正确的是() .

(A) a^2 与 $(-a)^2$ 互为相反数

(B) \sqrt{a} 与 $\sqrt{-a}$ 互为相反数

(C) $\sqrt[3]{a}$ 与 $\sqrt[3]{-a}$ 互为相反数

(D) $|a|$ 与 $|-a|$ 互为相反数

解析: 对任意实数 a , (A)、(D)中两式都是相等的, 而(B)中当 $a \neq 0$ 时, 总有一

个没有意义,(C)中 $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$,故选C.

1.1.21 ★★ 语句“① a^2 的算术平方根是 a , ② $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 4 , ③ 一个数的算术平方根总是非负数, ④ 一个数的立方根总比它本身小”中, 正确的有()。

- (A) 1句 (B) 2句 (C) 3句 (D) 4句

解析: ①中 a^2 的算术平方根应是 $|a|$, ②中 $\sqrt{16}$ 的平方根, 即 4 的平方根应是 ± 2 , ④中如 $\frac{1}{8}$ 的立方根是 $\frac{1}{2}$, 比它本身大, 所以都是错误的; 根据算术平方根的定义, ③是正确的, 故选 A.

1.1.22 ★★ 已知实数 a 、 b 、 c 满足等式 $a^2 + b^2 = 1$, $b^2 + c^2 = 2$, $c^2 + a^2 = 2$, 则 $ab + bc + ca$ 的最小值为()。

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

解析: 比较第二、三两个等式, 可知 $a^2 = b^2$, 由第一个等式可知 $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$, 则 $c^2 = \frac{3}{2}$, 所以 a , $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. 要使 $ab + bc + ca$ 的值最小, a 、 b 、 c 不能同号. 去除重复情形, a 、 b 、 c 的取值共有四种组合: $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, 对应 $ab + bc + ca$ 的值分别为 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$. 所以应选 D.

1.1.23 ★★ 求下列各式中 x 的值:

$$(1) 3x^2 - \frac{4}{3} = 0; \quad (2) (5x - 3)^2 = 20 \frac{1}{4};$$

$$(3) 2(x - 1)^3 = -16; \quad (4) \sqrt[3]{x+2} + 3 = 0.$$

解析: (1) 原等式可化为 $x^2 = \frac{4}{9}$, 所以 $x = \pm \frac{2}{3}$.

(2) 原等式可化为 $5x - 3 = \pm \sqrt[4]{20 \frac{1}{4}}$, 即 $5x = 3 \pm \frac{9}{2}$, 所以 $x = \frac{3}{2}$ 或 $x = -\frac{3}{10}$.

(3) 原等式可化为 $(x - 1)^3 = -8$, 即 $x - 1 = \sqrt[3]{-8}$, 所以 $x = -1$.

(4) 原等式可化为 $\sqrt[3]{x+2} = -3$, 即 $x + 2 = (-3)^3$, 所以 $x = -29$.

1.1.24 ★★ 分别求出满足下列条件的数:

6 多功能题典

(1) 某数立方根的绝对值是 5,求这个数;

(2) 某数的平方是 64,求这个数的立方根.

解析: (1) 设这个数为 x ,则根据题意,得 $|\sqrt[3]{x}| = 5$, 即 $\sqrt[3]{x} = \pm 5$, 所以 $x = \pm 125$.

(2) 设这个数为 x ,则 $x^2 = 64$,解得 $x = \pm 8$,所以 x 的立方根为 ± 2 .

1.1.25 ★★ 一个底面直径等于高的圆柱形容器,容量是 4.8 立方米,求它的底面半径(精确到 0.1 米).

解析: 设这个圆柱形容器的底面半径是 x 米,根据题意,得 $\pi x^2 \cdot 2x = 4.8$,即 $x^3 = \frac{4.8}{2\pi}$,解得 $x \approx 0.9$ (米).

1.1.26 ★★ 已知一个数的平方根是 $3x-2$ 和 $5x+6$,求这个数.

解析: 根据平方根的意义,可知 $3x-2$ 和 $5x+6$ 互为相反数,即 $(3x-2) + (5x+6) = 0$,解得 $x = -\frac{1}{2}$,所以这个数是 $\left(-\frac{3}{2}-2\right)^2 = \frac{49}{4}$.

1.1.27 ★★ 不用计算器,估计以下各数在哪两个连续整数之间:

(1) $\sqrt[3]{50}$; (2) $2\sqrt{30}$.

解析: (1) 因为 $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{50} < \sqrt[3]{64}$, 所以 $3 < \sqrt[3]{50} < 4$, 即 $\sqrt[3]{50}$ 在两个连续整数 3 和 4 之间.

(2) 因为 $2\sqrt{30} = \sqrt{120}$, 所以 $\sqrt{100} < 2\sqrt{30} < \sqrt{121}$, 即 $10 < 2\sqrt{30} < 11$,故 $2\sqrt{30}$ 在两个连续整数 10 和 11 之间.

1.1.28 ★★ 化简:

(1) $|1-\sqrt{2}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + |\sqrt{3}-\sqrt{4}| + |\sqrt{4}-\sqrt{5}|$;

(2) $|\sqrt[3]{-3^2}-2| + |3-\sqrt[3]{9}|$.

解析: 这类问题关键应确定绝对值内代数式的值的符号.

(1) 原式 $= \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4} = -1+\sqrt{5}$.

(2) 原式 $= \sqrt[3]{9}+2+3-\sqrt[3]{9} = 5$.

1.1.29 ★★ 将不超过 a 的最大整数 M 称作 a 的整数部分,将 $a-M$ 称作 a 的小数部分,求 $3-\sqrt{2}$ 的整数部分和小数部分.

解析: 方法 1 因为 $1 < \sqrt{2} < 2$, 所以 $-1 > -\sqrt{2} > -2$, 所以 $3-1 > 3-\sqrt{2} > 3-2$, 即 $2 > 3-\sqrt{2} > 1$, 所以 $3-\sqrt{2}$ 的整数部分是 1, 小数部分是 $3-\sqrt{2}-1 = 2-\sqrt{2}$.

方法 2 因为 $\sqrt{2} \approx 1.4$, 所以 $3-\sqrt{2} \approx 1.6$, 所以 $3-\sqrt{2}$ 的整数部分是 1, 小数部分是 $3-\sqrt{2}-1 = 2-\sqrt{2}$.

1.1.30 ★★ 已知 a 为实数, 且满足 $|2000-a| + \sqrt{a-2010} = a$, 求 $a-2000^2$ 的值.

解析: 由题意可知, $a \geq 2010$, 所以原式可化为 $a-2000 + \sqrt{a-2010} = a$, 即 $\sqrt{a-2010} = 2000$, 所以 $a-2010 = 2000^2$, 即 $a-2000^2 = 2010$.

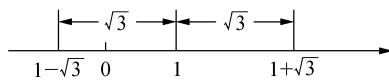
1.1.31 ★★ 整数 a 是一个完全平方数, 它的下一个完全平方数是什么?

解析: 因为整数 a 是一个完全平方数, 所以可设 $x^2 = a$, x 是自然数, 所以 a 的下一个完全平方数是 $(x+1)^2$, 即 $(\sqrt{a}+1)^2$.

三、实数与数轴

1.1.32 ★ 点 A 在数轴上和数 1 的对应点相距 $\sqrt{3}$ 个单位长度, 则点 A 所对应的实数是_____.

解析: 方法 1 如图, 在数轴上与数 1 的对应点相距 $\sqrt{3}$ 个单位长度的点有 2 个, 它们关于数 1 的对应点对称, 它们所对应的实数是 $1 \pm \sqrt{3}$.



第 1.1.32 题

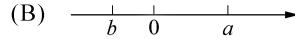
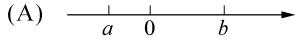
方法 2 在同一数轴上实数 x_1 、 x_2 的对应点之间的距离为 $|x_2 - x_1|$, 设点 A 所对应的实数为 x , 则 $|x - 1| = \sqrt{3}$. 解得 $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

1.1.33 ★ 和数轴上所有的点一一对应的是() .

- (A) 所有的有理数
- (B) 所有的正数和负数
- (C) 所有的无理数
- (D) 所有的整数、分数和无限不循环小数

解析: 因为数轴上的点与实数一一对应, 实数包括有理数与无理数, 其中有理数包括整数与分数, 无理数就是无限不循环小数, 所以应选 D.

1.1.34 ★★ 已知 a 、 b 是不为 0 的实数, 且 $|a| = -a$, $|b| = b$, $|a| > |b|$, 那么用数轴上的点来表示 a 、 b , 正确的应该是().

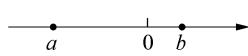


解析: 根据题意, $a < 0$, $b > 0$, 且在数轴上 a 的对应点与原点的距离较 b 的对应点大, 故选 C.

1.1.35 ★★ 实数 a 、 b 在数轴上的对应点如图所示, 试比较 a 、 $-a$ 、 b 、 $-b$ 、 $a+b$ 、 $a-b$ 的大小.

8 多功能题典

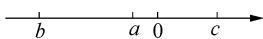
解析: 根据 a, b 在数轴上的位置可知, $a < 0$, $b > 0$, 且 a 的绝对值比 $2b$ 的绝对值大, 所以 $a - b < a < a + b < -b < b < -a$. 本题也可将 $-a, -b$ 的对应点在数轴上标出, 较为直观.



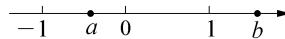
第 1.1.35 题

1.1.36 ★★ 实数 a, b, c 在数轴上的对应点如图所示, 化简 $|a| + |c - b| - |a + b| + |a - c|$.

解析: 由图可知: $a < 0$, $c - b > 0$, $a + b < 0$, $a - c < 0$, 所以原式 $= -a + c - b + a + b - a + c = 2c - a$.



第 1.1.36 题

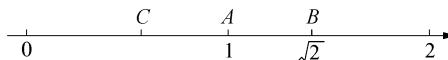


第 1.1.37 题

1.1.37 ★★ 实数 a, b 在数轴上的对应点如图所示, 试比较 $a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ 的大小.

解析: 根据 a, b 在数轴上的位置可知, $-1 < a < 0$, $b > 1$, 所以 $\frac{1}{a} < -1$, $0 < \frac{1}{b} < 1$, 因此 $\frac{1}{a} < a < \frac{1}{b} < b$.

1.1.38 ★★ 如图, 数轴上表示 1 和 $\sqrt{2}$ 的对应点分别是 A, B , 点 C 和点 B 关于点 A 对称, 求点 C 所表示的数.

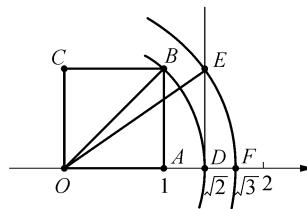


第 1.1.38 题

解析: 显然点 A 与点 B 之间的距离是 $\sqrt{2} - 1$, 因为点 C 是点 B 关于点 A 的对称点, 所以点 C 与点 A 之间的距离也是 $\sqrt{2} - 1$, 所以点 C 所表示的数是 $1 - (\sqrt{2} - 1)$, 即 $2 - \sqrt{2}$.

1.1.39 ★★ 在数轴上作出表示 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 的点.

解析: 如图, 以 1 个单位长度为边长作正方形 $OABC$, 连结 OB , 根据勾股定理可得 $OB = \sqrt{2}$, 以 O 为圆心, OB 为半径作弧, 交数轴的正方向于点 D , 则点 D 就是表示 $\sqrt{2}$ 的点. 过点 D 作数轴的垂线, 并在其上取一点 E , 使 DE 等于 1 个单位长度, 连结 OE , 以 O 为圆心, OE 为半径作弧, 交数轴的正方向于点 F , 则点

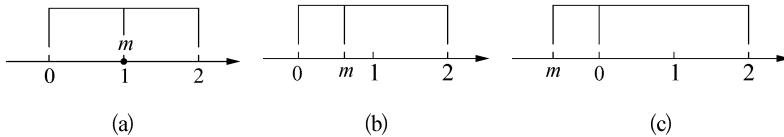


第 1.1.39 题

F 就是表示 $\sqrt{3}$ 的点.

1.1.40 已知 m 是实数, 求 $|m| + |m-1| + |m-2|$ 的最小值.

解析: 根据绝对值的几何意义, 这个问题可以转化为在数轴上找一点 m , 使点 m 到点 0、点 1 和点 2 的距离之和最小. 显然当 $m = 1$ 时(如图(a)所示), $|m| + |m-1| + |m-2|$ 的值是 2.



第 1.1.40 题

以下说明当点 m 位于其他位置时, 原式的值大于 2:

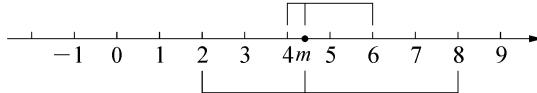
(1) 当点 m 位于点 0 与 2 之间(包含 0, 2), 但不同于点 1, 即 $0 \leq m < 1$ 或 $1 < m \leq 2$ 时, 如图(b), 则点 m 到点 0 和点 2 的距离之和等于 2, 再加上点 m 到点 1 的距离, 原式的值大于 2;

(2) 当点 m 位于点 0 的左边或点 2 的右边, 即 $m < 0$ 或 $m > 2$ 时, 如图(c), 则点 m 到点 0 和点 2 的距离之和已经大于 2, 原式的值大于 2.

综上所述, 当 $m \neq 1$ 时, 原式的值大于 2. 所以 $|m| + |m-1| + |m-2|$ 的最小值是 2.

1.1.41 已知 m 是实数, 求 $|m-2| + |m-4| + |m-6| + |m-8|$ 的最小值.

解析: 根据绝对值的几何意义, 这个问题可以转化为在数轴上找一点 m , 使 m 到点 2、点 4、点 6 和点 8 的距离和最小. 显然当点 m 在点 4 和点 6 之间(包含点 4 和点 6)时, 如图所示, $|m-2| + |m-4| + |m-6| + |m-8|$ 的值是 $2+6=8$. 与上题相仿, 可以证明当 $m < 4$ 或 $m > 6$ 时原式的值都大于 8, 所以 $|m-2| + |m-4| + |m-6| + |m-8|$ 的最小值是 8.



第 1.1.41 题

1.1.42 设 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是常数(n 是大于 1 的整数), 且 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$, m 是任意实数, 试探索求 $|m-a_1| + |m-a_2| + |m-a_3| + \dots + |m-a_n|$ 最小值的一般方法.

解析: 根据题 1.1.40 和题 1.1.41 的解法, 结合数轴, 不难得出:

10 多功能题典

(1) 当 n 为奇数 $2k+1$ (k 是正整数) 时, 点 m 应取在点 a_{k+1} 处, 原式的值最小, 最小值是 $(a_{2k+1} - a_1) + (a_{2k} - a_2) + \cdots + (a_{k+2} - a_k)$.

(2) 当 n 为偶数 $2k$ (k 是正整数) 时, m 应取点 a_k 和点 a_{k+1} 之间 (包括点 a_k 和点 a_{k+1}) 的任意位置, 原式的值最小, 最小值是 $(a_{2k} - a_1) + (a_{2k-1} - a_2) + \cdots + (a_{k+1} - a_k)$.

四、科学记数法与近似计算

1.1.43 ★ 填空:

(1) 用科学记数法表示 43 200 为 _____;

(2) 用科学记数法表示 $-0.000\ 010\ 4$ 为 _____;

(3) 3.60×10^6 是 _____ 位正整数;

(4) 将 2.07×10^{-9} 写成普通小数的形式, 在小数点后有连续 _____ 个零.

解析: (1) 4.32×10^4 . (2) -1.04×10^{-5} .

(3) 7 位正整数.

(4) 小数点后有连续 8 个零.

1.1.44 ★ 近似数 3.52 万精确到 _____ 位, 有 _____ 个有效数字, 分别是 _____.

解析: 近似数 3.52 万精确到百位, 它有 3 个有效数字, 分别是 3、5 和 2.

1.1.45 ★★ 将一个数 a 四舍五入, 精确到 0.01 所得的近似数为 4.05, 则这个数的正确值的范围是().

(A) $4.05 \leq a < 4.055$ (B) $4.04 \leq a < 4.06$

(C) $4.045 < a < 4.055$ (D) $4.045 \leq a < 4.055$

解析: 根据题意, 近似数精确到百分位, 说明是对数 a 千分位上的数字四舍五入所得, 所以应选 D.

1.1.46 ★★ 下列说法中正确的是().

(A) 近似数 3.00 与近似数 3.0 的精确度相同

(B) 近似数 2.4×10^2 与近似数 240 中都有三个有效数字

(C) 近似数 0.014 7 与近似数 23.6 中有效数字的个数相同

(D) 69.593 四舍五入精确到个位, 所得近似数有一个有效数字

解析: 近似数 3.00 精确到百分位, 而近似数 3.0 精确到十分位, 所以(A)不正确; 近似数 2.4×10^2 有两个有效数字, 所以(B)不正确; 近似数 69.593 四舍五入到个位是 7.0×10^1 , 有两个有效数字, 所以(D)不正确. 故选 C.

1.1.47 ★ 下列叙述中的数字哪些是精确数字, 哪些是近似数:

(1) 1986 年国家颁布实施《义务教育法》以来, 我省每年有近 1 百万小学生进入学校, 开始接受 9 年义务教育;

(2) 我国领土 960 万平方千米陆地面积中, 森林覆盖面积占 18.21%.

解析: (1) 中“1986”、“9”是精确数字; (1) 中“1 百万”, (2) 中“960 万”、“18. 21%”是近似数.

1.1.48 ★★ 判断下列语句是否正确, 并简述理由:

- (1) 对数字 3 233 取精确到百位的近似数为 3 200;
- (2) 近似数 1.2×10^{-2} 精确到十分位, 有两个有效数字;
- (3) 因为 $5.647 \times 10^3 \approx 5.65 \times 10^3 \approx 5.7 \times 10^3$, 所以 5.647×10^3 保留两个有效数字的近似数是 5.7×10^3 ;
- (4) 0.703 0 有三个有效数字 7、0、3;
- (5) 对于精确数 5 万与 50 000 是相同的, 若 5 万与 50 000 都是近似数, 则它们是不同的.

解析: 前四句语句都是错误的, (5) 是正确的.

- (1) 近似数写成 3 200, 仍表示精确到个位, 有四个有效数字, 按要求应表示为 3.2×10^3 .
- (2) 近似数 $1.2 \times 10^{-2} = 0.012$ 是一个完整的整体, 数字“2”是千分位上的数字, 表示精确到千分位.
- (3) 按照近似计算规则, 只能对精确到要求位数的下一位数字一次四舍五入, 不能两次累积进位.
- (4) 按有效数字的意义, 0.703 0 有四个有效数字 7、0、3、0.

(5) 若两者都是精确数, 显然是相同的. 若两者都是近似数, 5 万表示精确到万位, 有一个有效数字, 它的正确值在 4.5 万与 5.5 万之间(含 4.5 万); 50 000 表示精确到个位, 有五个有效数字, 它的正确值在 49 999.5 与 50 000.5 之间(含 49 999.5).

1.1.49 ★ 按括号内的要求对下列各数取近似值:

- | | |
|-----------------------|-------------------------------------|
| (1) 0.024 66(精确到千分位); | (2) 2.679×10^4 (保留三个有效数字); |
| (3) 1.967(精确到 0.1); | (4) 5 247.9(保留两个有效数字). |

解析: (1) $0.024 66 \approx 0.025$. (2) $2.679 \times 10^4 \approx 2.68 \times 10^4$.

(3) $1.967 \approx 2.0$. (4) $5 247.9 \approx 5.2 \times 10^3$.

1.1.50 ★ 计算, 并将结果用科学记数法表示:

- (1) $(-4.2 \times 10^4) \times (6.5 \times 10^8)$;
- (2) $(1.6 \times 10^3)^2 \times (-3.5 \times 10^4)^3$;
- (3) $(3.5 \times 10^{-4}) \times (4.2 \times 10^{-8})$;
- (4) $(18 \times 10^6) \div (-3 \times 10^{-9})$.

解析: (1) 原式 $= -27.3 \times 10^{12} = -2.73 \times 10^{13}$.

(2) 原式 $= -2.56 \times 10^6 \times 42.875 \times 10^{12} = -109.76 \times 10^{18} = -1.0976 \times 10^{20}$.

(3) 原式 $= (3.5 \times 4.2) \times (10^{-4} \times 10^{-8}) = 14.7 \times 10^{-12} = 1.47 \times 10^{-11}$.

(4) 原式 $= [18 \div (-3)] \times (10^6 \div 10^{-9}) = -6 \times 10^{15}$.

1.1.51 ★★ 根据要求解答下列问题, 结果用科学记数法表示:

- (1) 随着计算机技术的发展, 不少复杂的数学命题都能用计算机进行证明. 已

12 多功能题典

知一种计算机每秒可进行 5×10^{12} 次运算,一个数学命题的证明花了 45 个小时,则共进行了多少次运算?

(2) 已知半径为 R 的球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 将地球近似看作半径约为 6 370

千米的球体时,求地球的体积(结果保留 3 个有效数字);

(3) 纳米是一个非常小的长度单位,已知 1 纳米 $= 10^{-9}$ 米. 一种病毒的直径为 100 纳米,若将这种病毒逐个紧靠,排成 0.5 毫米长,问病毒的个数是多少?

(4) 据测算,用 1 吨废纸造出的再生纸相当于 0.4~0.5 亩森林木材的造纸量. 某省今年大约有 87.4 万初中毕业生,经抽样估计,每位毕业生离校时平均有 9 千克废纸. 若他们都能将这些废纸送到回收站造纸,至少能使多少亩森林免遭砍伐(结果精确到十位)?

解析: (1) 进行运算次数为 $5 \times 10^{12} \times 45 \times 3600 = 8.1 \times 10^{17}$.

(2) 地球体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3.142 \times 6370^3 \approx 1.08 \times 10^{12}$ (立方千米).

(3) 根据题意,一个病毒的直径为 100×10^{-6} 毫米,则排成 0.5 毫米长的病毒个数为 $\frac{0.5}{100 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^3$.

(4) 根据题意,87.4 万初中毕业生的废纸吨数约为 $\frac{8.74 \times 10^5 \times 9}{1000} \approx 7.866 \times 10^3$, 至少相当于 $0.4 \times 7.866 \times 10^3 \approx 3.15 \times 10^3$ (亩) 森林木材的造纸量,即至少能使 3.15×10^3 亩森林免遭砍伐.

§ 1.2 实数的运算

1.2.1 ★ 直接写出下列各式运算的结果:

$$(1) 2 \times 7 \div \left(-\frac{1}{7}\right) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (2) -2 \div \frac{1}{4} \times 8 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right) \div 12 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (4) -5 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{5} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解析: (1) 原式 $= -2 \times 7 \times 7 = -98$. (2) 原式 $= -2 \times 4 \times 8 = -64$.

$$(3) \text{原式} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} = -\frac{1}{144}. \quad (4) \text{原式} = 5 \times \frac{1}{5} \times 5 = 5.$$

1.2.2 ★★ 已知 $\frac{|b|}{b} + \frac{a}{|a|} = 0$, 则 $-\frac{b}{a}$ 与 ab 的值中较大的是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析: 因为 $\frac{|b|}{b} + \frac{a}{|a|} = 0$, 所以等式左边两个加数(两个商式)中必然一个是 1, 另一个是 -1, 即 a, b 异号, 因而 $-\frac{b}{a} > 0, ab < 0$, 所以较大的是 $-\frac{b}{a}$.

1.2.3 ★ 下列说法中正确的是()。

- (A) 若两个实数的和是正数, 则这两个数都是正数
- (B) 两个实数的差一定小于被减数
- (C) 如果若干个实数相乘所得积是负数, 则负因数的个数是奇数
- (D) 零除以任意实数所得的商总为零

解析: (A)、(B) 中容易举出反例如下: $(-5) + 8 = 3$, $(-8) - (-5) = -3$; 而(D) 中除数应该是任意非零实数. 故选 C.

1.2.4 ★ 下列各式计算正确的是()。

- | | |
|--|--|
| (A) $(-1^2) \cdot (-1)^2 = 1$ | (B) $-(-3)^2 = 9$ |
| (C) $-5^2 \div \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = -625$ | (D) $\frac{1}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = 9$ |

解析: (A)、(B)、(D) 都在运算结果中的符号上出现了差错, 应选 C.

1.2.5 ★★ 下列说法是否正确, 试说明理由或举出反例判断:

- (1) 任意两个无理数的和或差仍是无理数;
- (2) 任意两个无理数的积或商仍是无理数;
- (3) 两个无理数的和与差有可能都是有理数;
- (4) 两个无理数的积与商有可能都是有理数.

解析: 例如: $\sqrt{2}$ 与 $-\sqrt{2}$ 的和是有理数 0, $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}$ 的差、积或商都是有理数, 所以(1)、(2) 是错误的; (4) 正确.

(3) 设两个无理数为 α 、 β , 如果 $\begin{cases} \alpha + \beta = a, \\ \alpha - \beta = b \end{cases}$ (a 、 b 是有理数), 那么

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a+b}{2}, \\ \beta = \frac{a-b}{2}. \end{cases}$$

显然与 α 、 β 是无理数的假设矛盾. 所以“两个无理数的和与差有可能都是有理数”是错误的.

1.2.6 ★ 计算:

$$(1) (-100) \times (0.01) \times (-999) \times 0 \times \left(-\frac{7}{11}\right);$$

$$(2) (-8) \times (-12) \times (-0.125) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-0.2).$$

解析: (1) 因为原式中有一因数是 0, 所以原式 = 0.

$$(2) \text{ 原式} = -\left(8 \times 0.125 \times 12 \times \frac{1}{3} \times 0.2\right) = -0.8.$$

1.2.7 ★★ 计算:

$$(1) -\frac{1}{42} \div \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{2}{3} - \frac{3}{14}\right); \quad (2) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{2}{3} - \frac{3}{14}\right) \div \left(-\frac{1}{42}\right).$$

14 多功能题典

解析：(1) 原式 $=-\frac{1}{42}\div\left(\frac{7}{42}-\frac{6}{42}+\frac{28}{42}-\frac{9}{42}\right)=-\frac{1}{42}\div\frac{20}{42}=-\frac{1}{42}\times\frac{42}{20}=-\frac{1}{20}$.

(2) 方法 1 根据上题计算结果可知 $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{2}{3}-\frac{3}{14}\right)=\frac{20}{42}$, 所以原式 $=\frac{20}{42}\times(-42)=-20$.

方法 2 原式 $=\frac{1}{6}\times(-42)-\frac{1}{7}\times(-42)+\frac{2}{3}\times(-42)-\frac{3}{14}\times(-42)=-7+6-28+9=-20$.

1.2.8 ★★ 计算：

$$(1) -0.3^2\div0.5\times2\div(-2)^2; \quad (2) \left(\frac{2}{3}\right)^3\div\frac{2^3}{3}\cdot(-3)^3\div(-3^2).$$

解析：(1) 原式 $=-0.09\div0.5\times2\div4=-0.09\times2\times2\times\frac{1}{4}=-0.09$.

$$(2) \text{原式}=\frac{8}{27}\cdot\frac{3}{8}\cdot(-27)\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{3}.$$

1.2.9 ★★ 计算：

$$(1) (-2^2)\times(-1)^2+(-3)\times(-2^3);$$

$$(2) \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right];$$

$$(3) 3\frac{1}{3}-\left\{8-2^2\div\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\frac{1}{4}\right]\times\frac{1}{2}\right\};$$

$$(4) \left[-2^4\div\left(-2\frac{2}{3}\right)^2+5\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{4}\right]\div\frac{1}{12};$$

$$(5) -1^4-\left(0.5-\frac{2}{3}\right)\div\frac{1}{3}\times[-2-(-3)^3]-\left|\frac{1}{8}-0.5^2\right|;$$

$$(6) \frac{(-2)^3\times(-1)^3-13\div\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}{0.125\times2^3+[1-3^2\times(-2)]}.$$

解析：(1) 原式 $=(-4)\times1+(-3)\times(-8)=-4+24=20$.

$$(2) \text{原式}=\left(-\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{9}\right)=\frac{1}{36}-\left(-\frac{7}{36}\right)=\frac{2}{9}.$$

$$(3) \text{原式}=3\frac{1}{3}-\left\{8-4\div\left[\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right]\times\frac{1}{2}\right\}=3\frac{1}{3}-\left\{8-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\right\}=3\frac{1}{3}-\{8+1\}=-5\frac{2}{3}.$$

$$(4) \text{ 原式} = \left[-16 \div \frac{64}{9} + \frac{11}{2} \times \left(-\frac{1}{6} \right) - \frac{1}{4} \right] \div \frac{1}{12} = \left[-\frac{9}{4} - \frac{11}{12} - \frac{1}{4} \right] \times 12 = -27 - 11 - 3 = -41.$$

$$(5) \text{ 原式} = -1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) \times 3 \times [-2 + 27] - \left| \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right| = -1 - \left(-\frac{1}{6} \right) \times 3 \times 25 - \frac{1}{8} = -1 + \frac{25}{2} - \frac{1}{8} = 11 \frac{3}{8}.$$

$$(6) \text{ 原式} = \frac{-8 \times (-1) - 13 \div \left[-\frac{1}{4} \right]}{0.125 \times 8 + [1 - 3^2 \times (-2)]} = \frac{8 + 52}{1 + 19} = \frac{60}{20} = 3.$$

1.2.10 ★★ 化简：

$$(1) -3^2 \div \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + |1 - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - \pi|;$$

$$(2) (-1) \div \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - (1 - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

解析：(1) 原式 = $-9 \div \frac{1}{4} + \sqrt{3} - 1 + \pi - \sqrt{3} = -37 + \pi$.

(2) 原式 = $-1 \div \frac{1}{2} - 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = -2 + 2\sqrt{2}$.

1.2.11 ★★ 计算：

$$(1) 99 \frac{35}{36} \times 18;$$

$$(2) \frac{1}{2} \times (-1949) + (-1949) \times \frac{1}{3} + 2010 \times \frac{5}{6};$$

$$(3) 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 2007 - 2008 + 2009 + 2010;$$

$$(4) \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} - \dots - \frac{1}{99 \times 100}.$$

解析：(1) 原式 = $\left(100 - \frac{1}{36} \right) \times 18 = 1800 - \frac{1}{2} = 1799 \frac{1}{2}$.

(2) 原式 = $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \times (-1949) + 2010 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times (-1949) + 2010 \times$

$$\frac{5}{6} = (-1949 + 2010) \times \frac{5}{6} = \frac{305}{6} = 50 \frac{5}{6}.$$

(3) 原式 = $1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (2006 - 2007 - 2008 + 2009) + 2010 = 2011$.

(4) 原式 = $1 - \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} - \dots - \frac{1}{99 \times 100} = 1 - \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{98 \times 99} \right)$

16 多功能题典

$$\frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100} = 1 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{100}.$$

1.2.12 ★★ 对下列每组 4 个数进行适当的混合运算, 每个数字都用到且只能用一次, 使运算结果为 -24 :

(1) $7, 3, -6, -3$;

(2) $1, -2, 2, 3$.

解析: 本题为开放型问题, 可结合有理数运算法则, 进行适当的估算, 结论一般并不惟一, 如:

(1) $(7+3) \times (-3) - (-6) = -24; (-6) - (-3) - 7 \times 3 = -24$.

(2) $(-2)^3 \times (1+2) = -24$.

1.2.13 ★★ 某超市推出如下优惠方案: (1) 一次性购物不超过 100 元不享受优惠; (2) 一次性购物超过 100 元但不超过 300 元一律九折; (3) 一次性购物超过 300 元一律八折. 李明两次购物分别付款 80 元和 252 元. 如果他将这两次所购物品并在一次购买, 应付款多少元?

解析: 李明第二次付款 252 元时, 所购物品价值可能是 $\frac{252}{0.9} = 280$ 元, 享受九折优惠后的付款数; 也可能是 $\frac{252}{0.8} = 315$ 元, 享受八折优惠后的付款数. 所以李明一次性购买全部商品, 应付款 $(80+280) \times 80\% = 288$ 元或 $(80+315) \times 80\% = 316$ 元.

1.2.14 ★★ 如图所示的 9 个方格中, 每行、每列以及每条对角线上三个数字的和相等, 求 N 的数值.

解析: 图中第 1 列三个方格内数字的和是 -6 , 根据题意, 第 2 行中间一格的数字应是 $-6 - (-4) = -2$, 同理, 第 3 行左起第 3 格数字应是 -5 , 这时第 3 行中间一格的数字应是 2, 所以 $N = -6$.

1	N	
-4		0
-3		

第 1.2.14 题

1.2.15 ★★ 对任意实数 x, y , 定义一个运算“ $*$ ”: $x * y = xy + y$, 若已知 $\sqrt{5} * \sqrt{2} = 7 * k$, 求 k 的值.

解析: 根据定义 $x * y = xy + y$, 得 $\sqrt{5} * \sqrt{2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}, 7 * k = 7k + k = 8k$. 所以 $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} = 8k$, 即 $k = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{8}$.

1.2.16 ★★ 某市有一块土地共 100 亩, 房地产商以每亩 80 万元的价格购得此地, 准备修建“和谐花园”住宅区. 计划在该住宅区内建造八个小区(A 区、B 区、C 区…H 区), 其中 A 区、B 区各修建一栋 24 层的楼房; C 区、D 区、E 区各修建一栋 18 层的楼房; F 区、G 区、H 区各修建一栋 16 层的楼房. 为了满足市民不同的购房

需求,开发商准备将A区、B区两个小区都修建成高档住宅,每层 800 m^2 ,初步核算成本为 $800\text{ 元}/\text{m}^2$;将C区、D区、E区三个小区都修建成中档住宅,每层 800 m^2 ,初步核算成本为 $700\text{ 元}/\text{m}^2$;将F区、G区、H区三个小区都修建成经济适用房,每层 750 m^2 ,初步核算成本为 $600\text{ 元}/\text{m}^2$.

整个小区内其他空余土地用于修建小区道路通道,植树造林,建花园、运动场及居民生活公共设施等,共计需要9 900万元.

开发商打算在修建完工后,将高档、中档和经济适用房以平均价格分别为 $3\,000\text{ 元}/\text{m}^2$ 、 $2\,600\text{ 元}/\text{m}^2$ 和 $2\,100\text{ 元}/\text{m}^2$ 的价格销售.若房屋全部出售完,请你帮忙计算出房地产开发商的赢利预计是多少元?

解析: 楼房全部售完总销售额为: $3\,000 \times 800 \times 24 \times 2 + 2\,600 \times 800 \times 18 \times 3 + 2\,100 \times 750 \times 16 \times 3 = 30\,312$ (万元).成本总价为: $800 \times 800 \times 24 \times 2 + 700 \times 800 \times 18 \times 3 + 600 \times 750 \times 16 \times 3 + (80 \times 100 + 9\,900) \times 10^4 = 26\,156$ (万元).总赢利=总销售额-成本总价= $30\,312 - 26\,156 = 4\,156$ (万元).

答:房地产开发商的赢利预计是4 156万元.

1.2.17 ★★ 某单位需以挂号信或特快专递方式向五所学校各寄一封信.这五封信的重量分别是72 g、90 g、215 g、340 g、400 g.根据这五所学校的地址及信件的重量范围,在邮局查得相关邮费标准如表1.2.1:

表1.2.1

业务种类	计 费 单 位	资费标准 (元)	挂号费 (元/封)	特制信封 (元/个)
挂 号 信	首重100 g内,每重20 g	0.80	3	0.50
	续重101~2 000 g,每重100 g	2.00		
特快专递	首重1 000 g内	5.00	3	1.00

(1) 重量为90 g的信若以挂号信方式寄出,邮寄费为多少元?若以特快专递方式寄出呢?

(2) 这五封信分别以怎样的方式寄出最合算?请说明理由.

附:信函资费常识

● 挂号信:

首重、续重计费方法:

如:信的重量为260 g,则其中100 g为“首重”,每20 g按0.8元计费(不足20 g按20 g计费);其余160 g为“续重”,每100 g按2元计费.160 g超过100 g,但不足200 g,按200 g计费.

邮寄费(每封)=首重资费+续重资费+挂号费+特制信封费.

● 特快专递：

如：首重不超过 1 000 g，则

$$\text{邮寄费(每封)} = \text{首重资费(5元)} + \text{挂号费(3元)} + \text{特制信封费(1元)}.$$

解析：(1) 重量为 90 g 的信以挂号信方式寄出，则邮寄费为 $5 \times 0.8 + 3 + 0.5 = 7.5$ (元)；以特快专递方式寄出，邮寄费为 $5 + 3 + 1 = 9$ (元)。

(2) 这五封信的重量均小于 1 000 g，若以特快专递方式寄出，邮寄费均为 $5 + 3 + 1 = 9$ (元)。由(1)得知，重量为 90 g 的信以挂号信方式寄出，费用为 7.5 元，小于 9 元；重量为 72 g 的信以挂号信方式寄出，费用也小于 9 元；若重量为 215 g 的信以挂号信方式寄出，则邮寄费为 $5 \times 0.8 + 2 \times 2 + 3 + 0.5 = 11.5$ (元) > 9 (元)。显然，重量为 400 g、340 g 的信以挂号信方式寄出，费用均超过 9 元。因此，将这五封信的前两封以挂号信方式寄出，后三封以特快专递方式寄出最合算。

1.2.18 ★★ 今年，某市市政府的一项实事工程就是由政府投入 1 000 万元资金，对城区 4 万户家庭的老式水龙头和 13 升抽水马桶进行免费改造，某社区为配合政府完成该项工作，对社区内 1 200 户家庭中的 120 户进行了随机抽样调查，并汇总成表 1.2.2：

表 1.2.2

改造情况	不需改造	需改造水龙头				需改造马桶	
		1个	2个	3个	4个	1个	2个
户数	20	31	28	21	12	69	2

(1) 试估计该社区需要对水龙头、马桶进行改造的家庭共有_____户。

(2) 改造后，一只水龙头一年大约可节省 5 吨水，一只马桶一年大约可节省 15 吨水，试估计该社区改造后一年共可节约多少吨自来水？

(3) 在抽样的 120 户家庭中，既要改造水龙头又要改造马桶的家庭共有多少户？

$$\text{解析：} (1) 1200 \times \frac{120 - 20}{120} = 1000.$$

(2) 抽样的 120 户家庭一年共可节约用水：

$$(1 \times 31 + 2 \times 28 + 3 \times 21 + 4 \times 12) \times 5 + (1 \times 69 + 2 \times 2) \times 15 \\ = 198 \times 5 + 73 \times 15 = 2085.$$

$$2085 \times \frac{1200}{120} = 20850(\text{吨}).$$

答：估计该社区一年共可节约用水 20 850 吨。

(3) 方法 1 设既要改造水龙头又要改造马桶的家庭共有 x 户，则只改造水龙

头不改造马桶的家庭共有 $(92-x)$ 户,只改造马桶不改造水龙头的家庭共有 $(71-x)$ 户.由题意,得 $x+(92-x)+(71-x)=100$,解得 $x=63$ (户).答:既要改造水龙头又要改造马桶的家庭共有63户.

方法2 表1.2.2中改造水龙头92户中包含只改造水龙头与同时改造水龙头和马桶两类家庭;同理,改造马桶71户中包含只改造马桶与同时改造水龙头和马桶两类.所以既要改造水龙头又要改造马桶的家庭户数为 $92+71-100=63$.

1.2.19 2008年5月12日四川汶川地区发生8.0级特大地震.举国上下通过各种方式表达爱心.某企业决定用 p 万元援助灾区 n 所学校,用于搭建帐篷和添置教学设备.根据各校不同的受灾情况,该企业捐款的分配方法如表1.2.3所示(其中 p, n, a 都是正整数).结果捐款恰好分完,且所有学校得到的捐款数都相等.

表1.2.3

分配顺序	分配数额(单位:万元)	
	帐篷费用	教学设备费用
第1所学校	5	剩余款的 $\frac{1}{a}$
第2所学校	10	再剩余款的 $\frac{1}{a}$
第3所学校	15	再剩余款的 $\frac{1}{a}$
...
第 $(n-1)$ 所学校	$5(n-1)$	再剩余款的 $\frac{1}{a}$
第 n 所学校	$5n$	0

根据以上信息,解答下列问题:

(1)写出 p 与 n 的关系式;

(2)当 $p=125$ 时,该企业能援助多少所学校?

(3)根据震区灾情,该企业计划再次提供不超过 $20a$ 万元的捐款,按照原来的分配方案援助其他学校.若 a 由(2)中条件确定,则再次提供的捐款最多又可以援助多少所学校?

解析: (1)根据题意,所有学校得到的捐款数都与第 n 所学校相等,即都为 $5n$ 万元,所以 $p=n \times 5n = 5n^2$ (n 为正整数).

(2)当 $p=125$ 时,可得 $5n^2=125$,取正整数解 $n=5$.即该企业的捐款可以援助5所学校.

(3) 由(2)可知,第一所学校获得捐款 25 万元,即 $5 + \frac{125 - 5}{a} = 25$,解得 $a = 6$,则 $20a = 120$. 根据题意,得 $5n^2 \leqslant 120$, $n^2 \leqslant 24$. n 取正整数,最大为 4. 所以再次提供的捐款最多又可以援助 4 所学校.

§ 1.3 探求规律中的数字运算

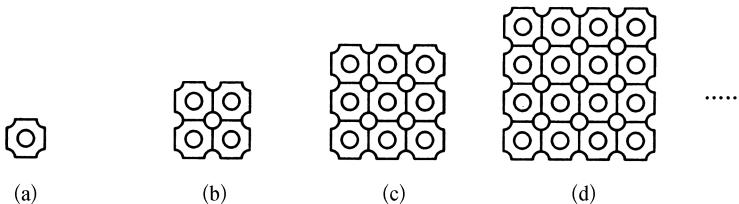
1.3.1 ★ 我们经常用作实验工具的普通骰子 6 个面上分别刻有 1 至 6 个点,你注意过没有,任意相对两个面上的点数之和都相等. 若一枚骰子向上一面有 5 个点,则向下面有_____个点.

解析: 6 个面分为 3 对相对的面,所有数字之和为 $1+2+3+4+5+6=21$,所以每一对相对两个面上的点数之和为 7,则所求向下面有 2 个点.

1.3.2 ★★ 科学家发现: 相当一部分植物的花瓣、花萼的数目及其他特征,非常吻合一个奇特的数字序列——著名的斐波那契数列: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ……仔细观察这个数列,它的第 11 个数是_____.

解析: 对于从观察分析中探求一般规律的问题,通常注重于数字序列的特征,采用“猜想——验证——排除”的方法进行. 对逐项增加(或逐项减少)的数列可以观察前后数的差或比值是否相同,后一数是否为它前面某些数的和或积等. 这个数列显然不具有前一特征,但明显的是前两个数都为 1,它们的和等于第三个数,进而注意到 $1+2=3$, $2+3=5$, $3+5=8$, ……这一规律直至给出的第 10 个数依然正确,故可归纳为:这个数列从第 3 个数起,每个数都是它前面两个数的和,故第 11 个数是 $34+55=89$.

1.3.3 ★★ 图(a)是一块瓷砖的图案,用这种瓷砖来铺设地面. 如果铺成一个 2×2 的正方形图案,如图(b),其中完整的圆共有 5 个;如果铺成一个 3×3 的正方形图案,如图(c),其中完整的圆共有 13 个;如果铺成一个 4×4 的正方形图案,如图(d),其中完整的圆共有 25 个. 若这样铺成一个 10×10 的正方形图案,则其中完整的圆共有_____个.



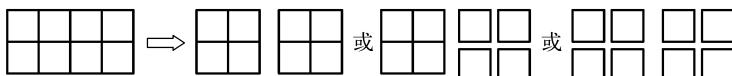
第 1.3.3 题

解析: 图案中完整的圆有两类:(1) 每块瓷砖内的一个圆;(2) 4 块瓷砖相拼而成的圆(如图(b)中中心处的圆). 显然,第(1)类圆在 10×10 的图案中有 $10 \times$

$10 = 100$ (个). 对第(2)类圆作如下观察、归纳: 1×1 的图案中没有这样的圆, 2×2 的图案中有 1×1 个这样的圆, 3×3 的图案中有 2×2 个这样的圆, \dots , 10×10 的图案中有 $9 \times 9 = 81$ (个)这样的圆. 所以一共有 181 个完整的圆.

一般地, $n \times n$ 的正方形图案中有 $n^2 + (n-1)^2 = 2n^2 - 2n + 1$ (个)完整的圆.

1.3.4 ★★ 如图所示,一个 4×2 的矩形可以用 3 种不同的方式分割成 2 个或 5 个或 8 个小正方形,小正方形的个数有 3 种可能. 那么一个 5×3 的矩形用不同的方式分割后,小正方形的个数可以有_____种可能.

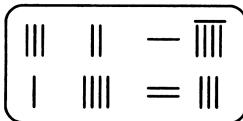


第 1.3.4 题

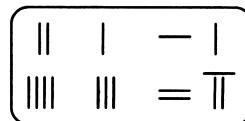
解析: 将 5×3 的矩形分割成正方形,有以下几种情形: ① 3×3 的正方形 1 个, 2×2 的正方形 1 个, 1×1 的正方形 2 个, 共 4 个正方形; ② 3×3 的正方形 1 个, 1×1 的正方形 6 个, 共 7 个正方形; ③ 2×2 的正方形 2 个, 1×1 的正方形 7 个, 共 9 个正方形; ④ 2×2 的正方形 1 个, 1×1 的正方形 11 个, 共 12 个正方形; ⑤ 1×1 的正方形 15 个. 故应填 5.

1.3.5 ★★《九章算术》是我国东汉初年编订的一部数学经典著作. 在其中“方程”一章里,一次方程组是由算筹布置而成的.《九章算术》中的算筹图是竖排的,为看图方便,我们把它改为横排,如图所示,图中各行从左到右列出的算筹数分别表示未知数 x 、 y 的系数与相应的常数项. 把图(a)所示的算筹图用我们现在所熟悉的方程组形式表述出来,就是 $\begin{cases} 3x + 2y = 19, \\ x + 4y = 23. \end{cases}$ 类似地,图(b)所示的算筹图我们可以表述为_____.

又试将方程组 $\begin{cases} 8x + 2y = 41, \\ x + 12y = 6 \end{cases}$ “翻译”为算筹图.



(a)



(b)

第 1.3.5 题

解析: 解答这类问题关键在于仔细阅读、理解题意,从给出的例题中观察、发现规律.

算筹图中第 1、2 两列分别是 x 、 y 的系数,比较数字与符号可知 1、2、3、4 分

22 多功能题典

别用一条、两条、三条、四条竖线表示；第3列是常数项中十位数字，1、2分别用一条、两条横线表示；第4列是常数项中的个位数字，其中9用一条横线（表示5）加四条竖线表示。注意到相应待探求的算筹图中第二个方程中常数项的个位数字是7，不难发现写成现在的方程组形式应是

$$\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 4x + 3y = 27. \end{cases}$$



将所给出方程组“翻译”为算筹图应该如图(c)所示。

第 1.3.5 题(c)

1.3.6 ★★ 下面是按一定规律排列的一列数 a_n ：

$$a_1 = \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right),$$

$$a_2 = \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left[1 + \frac{(-1)^2}{3}\right] \left[1 + \frac{(-1)^3}{4}\right],$$

$$a_3 = \frac{1}{4} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left[1 + \frac{(-1)^2}{3}\right] \left[1 + \frac{(-1)^3}{4}\right] \left[1 + \frac{(-1)^4}{5}\right] \left[1 + \frac{(-1)^5}{6}\right],$$

.....

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \left[1 + \frac{(-1)^2}{3}\right] \left[1 + \frac{(-1)^3}{4}\right] \left[1 + \frac{(-1)^4}{5}\right] \cdots$$

$$\left[1 + \frac{(-1)^5}{6}\right] \cdots \left[1 + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n}\right].$$

在这列数中第10个数开始的连续4个数 a_{10} 、 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{13} 中，最大的一个数是()。

(A) a_{10}

(B) a_{11}

(C) a_{12}

(D) a_{13}

解析：观察这一列数中各个数表达式的前一部分(被减数): $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$,

$\frac{1}{n+1}$ 逐个递减。后一部分(减数)第一个数为 $\left(1 + \frac{-1}{2}\right)$, 此后每个数多2个因数,

可尝试先对前两个因数进行探索: $\left[1 + \frac{(-1)^2}{3}\right] \left[1 + \frac{(-1)^3}{4}\right] = \left(1 + \frac{1}{3}\right)$

$\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1$, $\left[1 + \frac{(-1)^4}{5}\right] \left[1 + \frac{(-1)^5}{6}\right] = \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 1$, ... 进而可

得到一般情形: $\left[1 + \frac{(-1)^{2n-2}}{2n-1}\right] \left[1 + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n}\right] = \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1$,

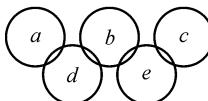
可知各数的后一部分(减数)都相等。综上所述, 可知这一列数中各数逐个递减, 故应选 A.

1.3.7 ★★ 甲、乙、丙三人进行乒乓球比赛,规则是:两人比赛,另一人当裁判,输者将在下一局中担任裁判,每一局比赛没有平局.已知甲、乙各比赛了4局,丙当了3次裁判.则第2局的输者是().

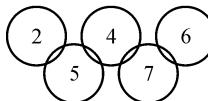
- (A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 不能确定

解析:由条件“丙当了3次裁判”,可知甲、乙对阵3局;由条件“甲、乙各比赛了4局”可知甲、丙对阵1局,乙、丙对阵1局.所以比赛总局数为5.因为甲、乙对阵必有一输,所以在甲、乙对阵之后至少有1局有丙参加.又因为丙只参加了2局比赛,所以这5局比赛的顺序只能是第1、3、5局甲、乙对阵,第2、4局有丙参加,而丙在2局中都是输的,故应选C.

1.3.8 ★★ 在五环图案内,分别填写五个数 a 、 b 、 c 、 d 、 e ,如图(a),其中 a 、 b 、 c 是三个连续偶数 ($a < b < c$), d 、 e 是两个连续奇数 ($d < e$),且满足 $a+b+c=d+e$,如图(b).请你在0到20之间选择另一组符合条件的数填入图(c).



(a)



(b)



(c)

第1.3.8题

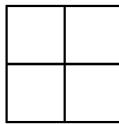
解析:方法1 显然,三个连续偶数之和是3的倍数,又是2的倍数,即是6的倍数.根据题意,两个连续奇数 d 、 e 的和也是6的倍数.列出0到20之间的奇数:1、3、5、7、9、11、13、15、17、19.满足条件的 d 、 e 的值只有三对:5和7,11和13,17和19;则相应 a 、 b 、 c 的值为如下三组:2、4和6,6、8和10,10、12和14.

方法2 根据题意,设 a 、 b 、 c 分别为 $2n-2$ 、 $2n$ 、 $2n+2$ (n 是整数, $0 < n < 10$),设 d 、 e 分别为 $2m-1$ 、 $2m+1$ (m 是整数, $0 < m < 10$).则 $6n=4m$,即 $m=\frac{3}{2}n$.满足要求的 n 、 m 的取值只有三对:2和3,4和6,6和9.由此可得 a 、 b 、 c 、 d 、 e 的值依次为2、4、6、5、7,或6、8、10、11、13,或10、12、14、17、19.

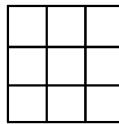
1.3.9 ★★ 阅读理解并填空 如图(a),一个已知正方形的边长为1,则周长为



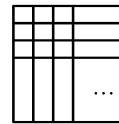
(a)



(b)



(c)



(d)

第1.3.9题

24 多功能题典

$$4 \times 1 = 4.$$

将这个正方形各边两等分,如图(b)分割成 2^2 个全等的小正方形,则每个小正方形的边长为 $\frac{1}{2}$,周长为 $4 \times \frac{1}{2}$,所有小正方形周长的和为 $4 \times \frac{1}{2} \times 2^2 = 4 \times 2$,是原正方形周长的2倍;

将这个正方形各边三等分,如图(c)分割成 3^2 个全等的小正方形,则每个小正方形的边长为 $\frac{1}{3}$,周长为 $4 \times \frac{1}{3}$,所有小正方形周长的和为_____ ,是原正方形周长的_____ 倍;

.....

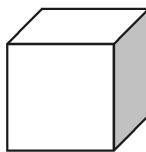
将这个正方形各边 n 等分,如图(d)分割成_____个全等的小正方形,则每个小正方形的边长为_____ ,周长为_____ ,所有小正方形周长的和为_____ ,是原正方形周长的_____ 倍.

比较探究并解答 将一个正方体各条棱 n 等分(n 是大于1的正整数),切割成若干个相同的小正方体,这些小正方体表面积的和与原正方体表面积有什么关系?

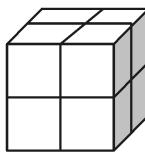
解析:依次填上: $4 \times \frac{1}{3} \times 3^2 = 4 \times 3; 3; n^2; \frac{1}{n}; \frac{4}{n}; 4n; n.$

设已知正方体的棱长为1,则一个面的面积为1个平方单位,正方体的表面积为 $6 \times 1 = 6$.

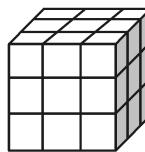
可以参照上述分析、解答,分别对棱二等分、三等分的情形进行讨论、归纳,探索一般规律,如图(f)、(g)、(h).



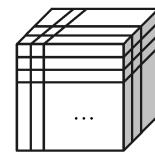
(e)



(f)



(g)



(h)

第1.3.9题

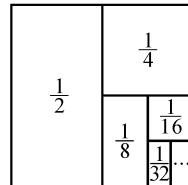
在上述基础上,也可以直接对将棱 n 等分进行探究:

将这个正方体各条棱 n 等分,可将正方体分割成 n^3 个相同的小正方体,每个小正方体的棱长为 $\frac{1}{n}$,一个面的面积为 $\frac{1}{n^2}$,表面积为 $6 \times \frac{1}{n^2}$,则所有小正方体表面积的和为 $6 \times \frac{1}{n^2} \times n^3 = 6n$,是原正方体表面积的 n 倍.

1.3.10 ★★ 试利用正方形的面积,计算以下无穷个数的和:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$$

解析: 如图,把一个面积为1的正方形等分成两个面积为 $\frac{1}{2}$ 的矩形,接着,再把面积为 $\frac{1}{2}$ 的矩形中的一个等分成两个面积为 $\frac{1}{4}$ 的矩形,再把面积为 $\frac{1}{4}$ 的矩形中的一个等分成两个面积为 $\frac{1}{8}$ 的矩形,……显然,图中所有矩形面积的和就是整个正方形的面积,所以 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots = 1$.



第1.3.10题

1.3.11 ★★ 观察以下一列数的规律,写出其中的第十个数:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

解析: 解这类问题的关键是由观察、分析入手,发现规律,归纳得出结论. 在这列数中,负数、正数交替出现,第十个数应该是正数. 从第二个数开始,每个数的绝对值是它前面一个数的 $\frac{1}{2}$ 倍,也就是说: 第二个数是1乘了一个 $\frac{1}{2}$, 第三个数是1乘了两个 $\frac{1}{2}$, 第四个数是1乘了三个 $\frac{1}{2}$ ……那么,第十个应该是1乘了九个 $\frac{1}{2}$. 综上所述,第十个数是 $\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$.

1.3.12 ★★ 在一列数 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ 中, 已知 $a_1 = -\frac{1}{2}$, 从第二个数起, 每个数都等于“1与它前面的那个数的差的倒数”.

(1) 求 a_2, a_3, a_4 的值;

(2) 根据以上计算结果,求 a_{20}, a_{2010} 的值.

解析: (1) 直接通过计算可得 $a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = 3, a_4 = -\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $a_1 = a_4 = -\frac{1}{2}$, 所以这一列数以(1)中所得的三个数为一组循环出现, 依次为 $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3, \dots$. 因为 20 被 3 除余 2, 所以 $a_{20} = \frac{2}{3}$; 而 2010 被 3 整除, 所以 $a_{2010} = 3$.

1.3.13 ★★ 7个学生面朝南站成一排. (1) 若每次让 3 个学生向后转(不论原

来方向如何),能否经过若干次转动后,使 7 个学生都面朝北? (2) 若每次让 4 个学生向后转(不论原来方向如何),能否经过若干次转动后,使 7 个学生都面朝北?

解析: 我们可作如下规定: 将学生面朝南的状态用“+1”来表示, 面朝北的状态用“-1”来表示, 则每“向后转”一次, 对应于原来的数乘以“-1”. 这样, 我们可以利用有理数乘法来说明问题.

(1) 能够经过若干次转动, 使 7 个学生都面朝北. 以下是其中的一个方案: 开始转动之前的对应数是

$$\begin{array}{ccccccc} +1, & +1, & +1, & +1, & +1, & +1, & +1 \\ \text{第一次转动后: } & +1, & +1, & +1, & +1, & -1, & -1, \\ \text{第二次转动后: } & +1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, \\ \text{第三次转动后: } & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & +1, \\ \text{第四次转动后: } & -1, & -1, & -1, & +1, & +1, & +1, \\ \text{第五次转动后: } & -1, & -1, & -1, & -1, & -1, & -1. \end{array}$$

(2) 不能使 7 个学生全部面朝北. 因为当全体学生面朝南时, 对应于 7 个学生对应的数字之积是 1, 如果全部朝北, 则对应于 7 个学生对应的数字之积是 -1. 而每次 4 个学生向后转, 相当于将 7 个数之积乘以 $(-1)^4 = 1$, 所以每次转动后, 积的符号总不变, 也就是说, 每次有 4 个学生向后转, 不论多少次, 都不能使 7 个学生都面朝北.

1.3.14 ★★ 观察下表中各数, 试问绝对值为 2 010 的数应排在第几行, 第几列? 是正数还是负数?

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	第 5 列
第 1 行		2	-4	6	-8
第 2 行	-16	14	-12	10	
第 3 行		18	-20	22	-24
.....					

解析: 观察各数排列规则, 我们发现: 表中各数的绝对值正好是偶数的依次排列; 每行有 4 个数; 奇数行 4 个数的绝对值从小到大分别位于第 2、第 3、第 4、第 5 列, 偶数行 4 个数的绝对值从大到小分别位于第 1、第 2、第 3、第 4 列; 奇数列的数是负数, 偶数列的数是正数. 而 $(2010 \div 2) \div 4$ 的商是 251, 余数是 1, 所以绝对值为 2 010 的数应排在第 252 行, 第 4 列, 它是正数.

§ 1.4 实数的有关判定

1.4.1 ★★ 设实数 $0 < x < 1$, 则 x 、 x^2 、 \sqrt{x} 和 $\frac{1}{x}$ 的大小关系是_____.

解析: 方法 1 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{x} > 1$, 而 x^2 、 \sqrt{x} 的值都小于 1, 且 $x^2 < x$,

$\sqrt{x} > x$, 所以应填 $x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$.

方法 2 因为在 $0 < x < 1$ 范围之内, 4 个代数式的值不可能相等, 可取特殊值 $x = \frac{1}{4}$, 则 x 、 x^2 、 \sqrt{x} 和 $\frac{1}{x}$ 的值分别为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{16}$ 、 $\frac{1}{2}$ 和 4, 易得结果 $x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$.

1.4.2 ★★ 已知 a 为有理数, b 、 c 为无理数, 下列代数式: $a+b$, ab , $b+c$, bc 中, 值一定是无理数的有_____个.

解析: 因为 a 为有理数, b 为无理数, 所以 $a+b$ 必是无理数. 而当 $a=0$ 时, ab 是有理数; 当 b 、 c 互为相反数时, $b+c$ 是有理数; 当 $b=c=\sqrt{2}$ 时, bc 是有理数. 所以值一定是无理数的代数式有 1 个.

1.4.3 ★★ 设 $\sqrt{32.4} = a$, 下列等式成立的是() .

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| (A) $\sqrt{0.0324} = 0.01a$ | (B) $\sqrt{324} = 10a$ |
| (C) $\sqrt{32400} = 100a$ | (D) $\sqrt{0.324} = 0.1a$ |

解析: $\sqrt{0.324} = \sqrt{0.01 \times 32.4} = 0.1\sqrt{32.4} = 0.1a$, 故选 D.

1.4.4 ★★ 已知 x 、 y 是正整数, \sqrt{y} 是无理数, $x+\sqrt{y}$ 的小数部分是 a , $x-\sqrt{y}$ 的小数部分是 b , 则 $a+b$ 的值是().

- | | | | |
|-------|-------|-------|----------|
| (A) 0 | (B) 1 | (C) 2 | (D) 不能确定 |
|-------|-------|-------|----------|

解析: 因为 $(x+\sqrt{y})+(x-\sqrt{y})=2x$, 是正整数; 又 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, 所以 $0 < a+b < 2$. 因此 $a+b=1$. 应选 B.

1.4.5 ★★ 比较下列各组数的大小:

- | | |
|-----------------------|---------------------------------|
| (1) 7 和 $\sqrt{50}$; | (2) $5\sqrt{3}$ 和 $3\sqrt{5}$. |
|-----------------------|---------------------------------|

解析: 通常可以利用计算器求近似值, 或利用平方根的性质, 直接应用下题所得结论.

(1) 因为 $7 = \sqrt{49}$, 而 $\sqrt{49} < \sqrt{50}$, 所以 $7 < \sqrt{50}$.

(2) 方法 1 因为 $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$, $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$, 所以 $5\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$.

方法 2 因为 $(5\sqrt{3})^2 = 75$, $(3\sqrt{5})^2 = 45$, 所以 $5\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$.

1.4.6 ★★ 已知 $a > b > 0$, 试证明:

- | | |
|-------------------|-----------------------------|
| (1) $a^2 > b^2$; | (2) $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. |
|-------------------|-----------------------------|

解析: 要比较两数的大小, 我们可以求出它们的差, 判断差的符号.

(1) 根据题意, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) > 0$, 所以 $a^2 > b^2$.

(2) 因为 $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 0$, 所以 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

1.4.7 比较下列各组数的大小:

$$(1) \sqrt{10} + \sqrt{3} \text{ 和 } \sqrt{6} + \sqrt{7};$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{10}} \text{ 和 } 2\sqrt{11};$$

$$(3) \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ 和 } \sqrt{2} - 1;$$

$$(4) 6 - \sqrt{30} \text{ 和 } \sqrt{30} - 5.$$

解析: (1) 因为 $(\sqrt{10} + \sqrt{3})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$, $(\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$, 而 $\sqrt{30} < \sqrt{42}$, 所以 $\sqrt{10} + \sqrt{3} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$.

$$(2) \frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{10}} = \sqrt{11} + \sqrt{10} < 2\sqrt{11}.$$

$$(3) \text{因为 } \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}, \text{而 } \sqrt{3} + \sqrt{2} > \sqrt{2} + 1 > 0,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2} + 1}, \text{即 } \sqrt{3} - \sqrt{2} < \sqrt{2} - 1.$$

(4) 因为 $(6 - \sqrt{30}) - (\sqrt{30} - 5) = 11 - 2\sqrt{30} = (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{30} + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2 > 0$, 所以 $6 - \sqrt{30} > \sqrt{30} - 5$.

1.4.8 设 $m = \frac{3^{20} + 1}{3^{21} + 1}$, $n = \frac{3^{21} + 1}{3^{22} + 1}$, 试比较 m 和 n 的大小.

解析: 方法 1 因为 $m - n = \frac{3^{20} + 1}{3^{21} + 1} - \frac{3^{21} + 1}{3^{22} + 1} = \frac{(3^{20} + 1)(3^{22} + 1) - (3^{21} + 1)(3^{21} + 1)}{(3^{21} + 1)(3^{22} + 1)} = \frac{3^{42} + 3^{20} + 3^{22} + 1 - 3^{42} - 3^{21} - 3^{21} - 1}{(3^{21} + 1)(3^{22} + 1)} = \frac{3^{20} + 3^{22} - 3^{21} - 3^{21}}{(3^{21} + 1)(3^{22} + 1)} = \frac{3^{22} - 3^{21} + 3^{20} - 3^{21}}{(3^{21} + 1)(3^{22} + 1)} = \frac{2 \cdot 3^{21} - 2 \cdot 3^{20}}{(3^{21} + 1)(3^{22} + 1)} > 0$, 所以 $m > n$.

方法 2 设 $3^{21} = x$, 则 $m - n = \frac{\frac{x}{3} + 1}{x + 1} - \frac{x + 1}{3x + 1} = \frac{(x + 3)(3x + 1) - 3(x + 1)(x + 1)}{(3x + 3)(3x + 1)} = \frac{3x^2 + 10x + 3 - 3x^2 - 6x - 3}{(3x + 3)(3x + 1)} = \frac{4x}{(3x + 3)(3x + 1)} > 0$, 所以 $m > n$.

1.4.9 设 $A = |x - b| + |x - 20| - |x - b - 20|$, 其中 $0 < b \leq x \leq 20$. 试问 A 是否有最小值? 若有最小值, 请予求出; 若没有最小值, 说明理由.

解析: 因为 $0 < b \leq x \leq 20$, 所以 $x - b \geq 0$, $x - 20 \leq 0$, $x - b - 20 < 0$, 则 $A = (x - b) - (x - 20) + (x - b - 20) = x - 2b \geq x - 2x = -x \geq -20$. 而当 $x = b = 20$ 时, $A = -20$. 所以 A 有最小值 -20 .

1.4.10 证明: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{20^2} < \frac{19}{20}$.

解析: 因为 $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{20^2} < \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20} =$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}, \text{ 所以原不等式成立.}$$

1.4.11 ★★ 证明 $\sqrt{\underbrace{111\cdots 1}_{2n个} - \underbrace{222\cdots 2}_n}$ (n 是正整数)是有理数.

解析: 方法 1 先观察 $\sqrt{11-2} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{1111-22} = \sqrt{1089} = 33$, $\sqrt{111111-222} = \sqrt{110889} = 333$, 可以猜想 $\sqrt{\underbrace{111\cdots 1}_{2n个} - \underbrace{222\cdots 2}_n} = \underbrace{333\cdots 3}_{n个}$ 是整数, 当

然是有理数. 证明如下: $\sqrt{\underbrace{111\cdots 1}_{2n个} - \underbrace{222\cdots 2}_n} = \sqrt{\underbrace{111\cdots 1}_{n个} \times 10^n + \underbrace{111\cdots 1}_{n个} - 2 \times \underbrace{111\cdots 1}_{n个}} =$

$$\sqrt{\underbrace{111\cdots 1}_{n个} \times (10^n - 1)} = \sqrt{\underbrace{111\cdots 1}_{n个} \times 9 \times \underbrace{111\cdots 1}_{n个}} = \sqrt{\underbrace{(111\cdots 1 \times 3)^2}_{n个}} = \underbrace{333\cdots 3}_{n个}$$

$$\text{方法 2 } \quad \sqrt{\underbrace{111\cdots 1}_{2n个} - \underbrace{222\cdots 2}_n} = \sqrt{\frac{1}{9} \times \underbrace{999\cdots 9}_{2n个} - \frac{2}{9} \times \underbrace{999\cdots 9}_{n个}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{9}(10^{2n} - 1) - \frac{2}{9} \times (10^n - 1)} = \sqrt{\frac{1}{9}(10^{2n} - 2 \times 10^n + 1)} = \sqrt{\frac{1}{9}(10^n - 1)^2} =$$

$$\frac{1}{3}(10^n - 1) = \underbrace{333\cdots 3}_{n个}.$$

1.4.12 ★★ 证明: 若 N 是正整数, 则 \sqrt{N} 不是无理数就是正整数.

解析: \sqrt{N} 是无理数的情况是存在的, 例如 $\sqrt{6}$. 现假设 \sqrt{N} 不是无理数, 则 \sqrt{N} 是有理数, 而有理数都可以写成整数或分数的形式, 即可设 $\sqrt{N} = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 是正整数. 当 $q = 1$ 时, \sqrt{N} 是正整数. 当 $q > 1$ 时, 可设 p, q 互质, 将 $\sqrt{N} = \frac{p}{q}$ 两边平方, 可得 $N = \frac{p^2}{q^2}$, 因为 N 是正整数, 所以 q^2 整除 p^2 , 这与 p, q 互质矛盾. 所以 \sqrt{N} 不是无理数就是正整数.

1.4.13 ★★ 设 a 是不等于零的有理数, b 是无理数, 证明: ab 是无理数.

解析: 假设 ab 不是无理数, 那么 ab 是有理数, 而有理数都可以写成分数的形式, 即可设 $ab = \frac{c}{d}$, 其中 c, d 是整数, $d \neq 0$. 在 $ab = \frac{c}{d}$ 两边都除以 a , 得 $b = \frac{c}{ad}$, 这时等式左边是无理数, 而等式右边是有理数, 显然这是不可能的. 所以 ab 是无理数.

1.4.14 ★★ 证明: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数.

解析: 设 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = q$. 假设 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 不是无理数, 则 q 是有理数. 两边平方, 可得

$5+2\sqrt{6}=q^2$, 由此得 $\sqrt{6}=\frac{q^2-5}{2}$. 因为 $\sqrt{6}$ 是无理数, 而等式右边是有理数, 所以假

设“ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 不是无理数”不能成立, 即 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数.

1.4.15 ★★ 设 a, b, c, d 是有理数, $a+b\sqrt{6}=c+d\sqrt{6}$, 证明: $a=c$, $b=d$.

解析: 由 $a+b\sqrt{6}=c+d\sqrt{6}$, 可得 $a-c=(d-b)\sqrt{6}$. 假设 $d \neq b$, 由题 1.4.13 可知 $(d-b)\sqrt{6}$ 是无理数, 这与 $a-c$ 是有理数矛盾, 所以 $d=b$, 进而得 $a-c=0$, 即 $a=c$.

1.4.16 ★★ 有一无穷小数 $A=0.a_1a_2a_3\dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots$, 其中 $a_i (i=1, 2, \dots)$ 可取 0 到 9 的任意一个整数, 并且 a_1 是奇数, a_2 是偶数, a_3 是 a_1+a_2 的个位数字, a_4 是 a_2+a_3 的个位数字…… a_{n+2} 是 $a_n+a_{n+1} (n=1, 2, \dots)$ 的个位数字. 试证明 A 是有理数.

解析: 方法 1 因为奇数+偶数=奇数, 奇数+奇数=偶数, 所以无穷小数 A 小数点后的各位数字有如下规律: 奇, 偶, 奇, 奇, 偶, 奇, 奇, 偶, 奇, 奇, …… 其中反复出现有序整数对(奇, 偶): 前一个数只能取 1、3、5、7、9 中的一个, 后一个数只能取 0、2、4、6、8 中的一个, 所以数对(奇, 偶)至多只能有 25 种不同情况, 因此在无穷小数中必会出现两个整数对(奇, 偶)是一样的. 这时, 按照规则, 它们后面的数字及其顺序就完全相同, 所以 A 是一个无限循环小数, 即 A 是有理数.

方法 2 同方法 1, 无穷小数 A 小数点后的各位数字以(奇, 偶, 奇)的数组循环出现, 而这样的数组最多有 $5 \times 5 \times 5 = 125$ 种不同形式, 所以在无穷小数中必然会出现两个三数组(奇, 偶, 奇)是完全一样的, 此后就会出现循环. 所以 A 是有理数.

第2章 代数式

§ 2.1 整 式

一、整式的基本概念

2.1.1 ★ 将下列代数式分别填入相应的大括号内：

$$\frac{1}{2}ab^2, \frac{a}{b}, \frac{1}{3}, x+x^2, m^2n-\frac{1}{3}mn+3n-2, \frac{x-2}{3}, \frac{1}{x+y}, x^2+\frac{1}{x^2}-3.$$

单项式 { ... } ;

多项式 { ... } ;

二项式 { ... } ;

二次多项式 { ... } ;

整式 { ... } .

解析：单项式 $\left\{\frac{1}{2}ab^2, \frac{1}{3}, \dots\right\}$.

多项式 $\left\{x+x^2, m^2n-\frac{1}{3}mn+3n-2, \frac{x-2}{3}, \dots\right\}$.

二项式 $\left\{x+x^2, \frac{x-2}{3}, \dots\right\}$.

二次多项式 $\{x+x^2, \dots\}$.

整式 $\left\{\frac{1}{2}ab^2, \frac{1}{3}, x+x^2, m^2n-\frac{1}{3}mn+3n-2, \frac{x-2}{3}, \dots\right\}$.

2.1.2 ★ 已知关于 x 、 y 的单项式 $3x^{n+3}y^3$ 与 $-y^{2m-1}x^4$ 是同类项，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析：根据同类项的定义，得 $n+3=4$, $2m-1=3$ ，即 $m=2$, $n=1$.

2.1.3 ★★ 填空：

(1) 若单项式 $(n-2)x^2y^{|1-n|}$ 是关于 x 、 y 的三次单项式，则 $n=\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 含字母 x 和 y ，且系数为 1 的四次单项式是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析：(1) 由题意，得 $2+|1-n|=3$ ，得 $n=0$ 或 2 . 当 $n=2$ 时，系数 $n-2=0$ ，不合题意；当 $n=0$ 时适合题意，所以 $n=0$.

(2) 显然,含有 x 和 y 的单项式中, x 和 y 的指数和为4,所以所求单项式为 x^3y 、 x^2y^2 、 xy^3 .

2.1.4 ★ 下列各对单项式中不是同类项的是().

(A) $-\frac{3}{4}x^4y^2$ 与 $(-4x^2y)^2$ (B) $28x^4y^3$ 与 $-15y^3x^4$

(C) $15a^2b$ 与 $0.02ab^2$ (D) -3^4 与 -4^3

解析: (A)、(B)都符合同类项的定义, -3^4 与 -4^3 都是常数项,也是同类项,所以答案为C.

2.1.5 ★ 若多项式 $x^4 - ax^3 + x^3 - 5x^2 - bx - 3x - 1$ 不含 x 的奇次项,则 $a+b$ 的值为().

(A) 0 (B) 1 (C) -2 (D) 2

解析: 这个多项式的奇次项是 $-ax^3$ 、 $+x^3$ 、 $-bx$ 、 $-3x$. 由题意得 $-a+1=0$, $-b-3=0$, 即 $a=1$, $b=-3$, 则 $a+b=-2$, 应选 C.

2.1.6 ★★ 若多项式 $5x^2y^{|m|} + (n-3)y^2 - 2$ 是关于 x 、 y 的四次二项式,求 $m^2 - 2mn + n^2$ 的值.

解析: 由题意 $2+|m|=4$ 且 $n-3=0$, 得 $m=\pm 2$, $n=3$. 当 $m=2$, $n=3$ 时, $m^2 - 2mn + n^2 = 1$; 当 $m=-2$, $n=3$ 时, $m^2 - 2mn + n^2 = 25$.

2.1.7 ★★ 设 m 、 n 表示正整数,多项式 $x^m + y^n - 4^{m+n}$ 是几次几项式?

解析: 注意到 4^{m+n} 是常数项, 所以当 $m \geq n$ 时, 多项式是 m 次三项式; 当 $m < n$ 时, 多项式是 n 次三项式.

2.1.8 ★★ 按要求将下列各式重新排列:

(1) $2x^3 - y^3 - 4xy^2 + 4x^2y$ (按 y 的升幂排列);

(2) 把 $(3x-y)$ 看成一个整体, 将代数式 $2(3x-y)^2 - 3(y-3x)^3 - (3x-y) + 5$ 按 $(3x-y)$ 的降幂排列.

解析: (1) $2x^3 + 4x^2y - 4xy^2 - y^3$.

(2) 由 $-3(y-3x)^3 = 3(3x-y)^3$, 原式 = $3(3x-y)^3 + 2(3x-y)^2 - (3x-y) + 5$.

2.1.9 ★★ 比较单项式 $\frac{1}{3}ab^3c^2$ 与 $-\frac{4}{5}x^2y^4$, 试分别列出它们的相同与不同之处.

解析: 认识单项式,要分辨它所含的字母、系数、次数等. 这是一个开放性问题,答案不唯一. 例如: 这两个单项式的次数相同、系数都为分数等; 不同之处为所含字母不同、字母的个数不同、系数不同等.

2.1.10 ★★ 一个多项式按 x 的降幂排列,前几项如下: $x^{10} - 2x^9y + 3x^8y^2 - 4x^7y^3 + \dots$ 已知这个多项式各项的次数都相同,且系数有一定的规律. 试写出它的第七项及最后一项,这个多项式是几次几项式?

解析: 观察发现,这个多项式每一项的次数都是 10;各项的系数按 $+1, -2, +3, -4 \dots$ 的规律出现,奇数项(即字母的指数为偶数的项)系数为正数. 可知第七项及最后一项分别是 $7x^4y^6$ 和 $11y^{10}$. 这个多项式是 10 次十一项式.

2.1.11 ★★ 已知 $(2x-1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_7x^7$ 对任意 x 的值都成立,求下列各式的值:

$$(1) a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_7; \quad (2) a_1 + a_3 + a_5 + a_7.$$

解析: (1) 上式是关于 x 的恒等式,可以将 $x=1$ 代入,得

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_7 = 1. \quad ①$$

(2) 将 $x=-1$ 代入等式得

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_7 = (-3)^7 = -2187. \quad ②$$

①-②,得

$$2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 2188,$$

即

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 1094.$$

2.1.12 ★★ 试分别用两种不同的标准对下列多项式进行分类:

$$3x^2 - 2x, ax^2 + bxy + cy^2, ab + b + a - 2, 1 - x - x^2.$$

解析: 多项式可以按它们的项数、次数进行分类,也可以观察它们的字母、各项的系数不同等进行分类. 这是开放性题,答案不惟一. 例如,

按项数分: 二项式 $3x^2 - 2x$; 三项式 $ax^2 + bxy + cy^2, 1 - x - x^2$; 四项式 $ab + b + a - 2$.

按次数分: 二次多项式 $3x^2 - 2x, ab + b + a - 2, 1 - x - x^2$; 三次多项式 $ax^2 + bxy + cy^2$.

按所含字母个数分: 含有一个字母的多项式 $3x^2 - 2x, 1 - x - x^2$; 含有两个字母的多项式 $ab + b + a - 2$; 含有五个字母的多项式 $ax^2 + bxy + cy^2$.

按系数的正负情况分: 各项系数都是正数的多项式 $ax^2 + bxy + cy^2$; 含有负数系数的多项式 $3x^2 - 2x, ab + b + a - 2, 1 - x - x^2$.

二、整式的加减

2.1.13 ★ 填空:

$$(1) a - 3b + 2c = +(\underline{\hspace{2cm}}) = -(\underline{\hspace{2cm}});$$

$$(2) (a - b + c - d) \cdot (a + b - c - d) = [(a - d) - (\underline{\hspace{2cm}})] \cdot [(a - d) + (\underline{\hspace{2cm}})].$$

解析: (1) 原式 = $+ (a - 3b + 2c) = - (-a + 3b - 2c)$.

(2) 原式 = $[(a - d) - (\underline{b - c})] \cdot [(a - d) + (\underline{b - c})]$.

2.1.14 ★★ 已知 a 、 b 、 c 在数轴上对应点的位置如图所示, 化简 $|a-c| - |b+c| - |b-a| = \underline{\hspace{2cm}}$

第 2.1.14 题

解析: 观察数轴, 可判断 $a-c < 0$, $b+c < 0$, $b-a > 0$, 所以原式 $= -(a-c) - [-(b+c)] - (b-a) = -a+c+b+c-b+a = 2c$.

2.1.15 ★★ 两个三次多项式相加, 和一定是()。

- | | |
|---------------|--------------|
| (A) 六次多项式 | (B) 三次多项式 |
| (C) 不超过三次的多项式 | (D) 不超过三次的整式 |

解析: 显然, 运算结果的次数不可能超过三次. 但合并同类项后, 结果的次数可能低于三次(当两个多项式中三次项是同类项, 且系数互为相反数时); 而且合并同类项后, 结果可能是多项式, 也有可能是单项式, 所以应选 D.

2.1.16 ★★ 已知当 $x=2$ 时, 代数式 $ax^3 - bx + 2$ 的值是 -1 , 则当 $x=-2$ 时, 这个代数式的值是().

- | | | | |
|-------|-------|-------|----------|
| (A) 1 | (B) 3 | (C) 5 | (D) 不确定的 |
|-------|-------|-------|----------|

解析: 由题意可得 $8a - 2b + 2 = -1$, 即 $8a - 2b = -3$. 当 $x=-2$ 时, 原式 $= -8a + 2b + 2 = -(8a - 2b) + 2 = -(-3) + 2 = 5$. 应选 C.

2.1.17 ★★ 先化简, 再求值:

$$(1) -3x^2 - [5x - x^2 - (2x^2 - x)], \text{ 其中 } x = 2 \frac{2}{3};$$

$$(2) 5(x-2y)^2 + (x-2y) - 3(x-2y) - (2y-x)^2, \text{ 其中 } x = 1, y = \frac{3}{4};$$

$$(3) (3ab - 2b) + [3a - (5ab - 12b - 2a)], \text{ 其中 } a+2b = -5, ab = -3.$$

解析: (1) 先化简, 原式 $= -6x$. 当 $x = 2 \frac{2}{3}$ 时, 原式 $= -6 \times \frac{8}{3} = -16$.

(2) 将 $(x-2y)$ 看成整体, 合并同类项, 原式 $= 4(x-2y)^2 - 2(x-2y)$. 当 $x = 1, y = \frac{3}{4}$ 时, $x-2y = -\frac{1}{2}$, 所以原式 $= 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = 2$.

(3) 先化简, 原式 $= 3ab - 2b + 3a - 5ab + 12b + 2a = -2ab + 5a + 10b = -2ab + 5(a+2b)$, 当 $ab = -3, a+2b = -5$ 时, 原式 $= 6 - 25 = -19$.

2.1.18 ★★ 已知 $A = a^2 + a + 1$, $B = a^2 - a + 1$, $a = -\frac{1}{6}$, 求 $A - [B - A - (A - 2B)]$ 的值.

解析: 先将原式化简, 得 $3A - 3B = 3(A - B)$, 并求得 $A - B = 2a$, 所以原式 $= 3 \cdot 2a = 6a = -1$.

2.1.19 ★★ 分别求出满足下列条件的多项式:

(1) 已知多项式 A 与 $x^2 + 2x - 3$ 相加得 $-2x^2 - 3x + 3$, 求多项式 A ;

(2) 已知两个多项式的和是 $3x^2 - 2x + 1$, 差是 $x^2 + 4x - 5$, 求这两个多项式.

解析: (1) 根据题意, $A = (-2x^2 - 3x + 3) - (x^2 + 2x - 3) = -3x^2 - 5x + 6$.

(2) 设这两个多项式分别为 A, B , 则 $\begin{cases} A+B=3x^2-2x+1, \\ A-B=x^2+4x-5. \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} A=2x^2+x-2, \\ B=x^2-3x+3. \end{cases}$$

2.1.20 ★★ 对任意实数 x , 试比较下列每组多项式的值的大小:

(1) $4x^2 - 5x + 2$ 与 $3x^2 - 5x - 2$;

(2) $5x^2 - 2x - 1$ 与 $5x^2 - 3x + 2$.

解析: 我们可以先求出两个多项式的差, 根据差是正数(或负数), 来判定被减多项式的值大于(或小于)另一个多项式的值.

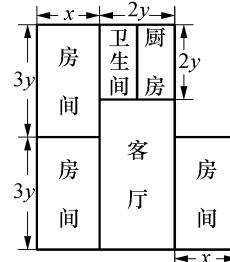
(1) 因为 $(4x^2 - 5x + 2) - (3x^2 - 5x - 2) = x^2 + 4 > 0$, 所以 $4x^2 - 5x + 2 > 3x^2 - 5x - 2$.

(2) 因为 $(5x^2 - 2x - 1) - (5x^2 - 3x + 2) = x - 3$, 对 $x - 3$ 的值进行讨论:

① 当 $x - 3 > 0$ 即 $x > 3$ 时, $5x^2 - 2x - 1 > 5x^2 - 3x + 2$; ② 当 $x - 3 < 0$ 即 $x < 3$ 时, $5x^2 - 2x - 1 < 5x^2 - 3x + 2$; ③ 当 $x - 3 = 0$ 即 $x = 3$ 时, $5x^2 - 2x - 1 = 5x^2 - 3x + 2$.

2.1.21 ★★ 小蕾家的新居平面图如图所示(单位:米), 房高 3 米. 墙面装修准备三个方案: 厨房、卫生间用墙砖, 每平方米 15 元; 客厅用涂料, 每平方米 6 元; 房间用墙布, 每平方米 10 元. 请你做一下这项目的总预算.

解析: 项目总费用 = 厨房、卫生间的装修费 + 客厅的装修费 + 房间的装修费. 三者的费用分别为 $15 \times 6 \times 2y \times 3, 6 \times 2[2y + (3y + 3y - 2y)] \times 3, 10 \times 2(x + 3y) \times 3 \times 3$, 计算它们的和, 求得总费用为 $(180x + 1296y)$ 元.



第 2.1.21 题

2.1.22 ★★ 右图是某年 12 月的日历表, 我们用一个方框在这张日历表上随意地框出一个 3 行 3 列 9 个数的“数阵”(如图), 观察 9 个数的和与中间一个数的关系, 换一个位置再试一试, 你能得到什么猜想?

(1) 试应用整式运算证明这个结论;

(2) 能否在哪一个位置, 使框出的 9 个数之和等于 120?

解析: 经观察、分析, 可以发现“数阵”中 9 个

星期	日	一	二	三	四	五	六	
+				1	2	3	4	5
-	6	7	8	9	10	11	12	
=	13	14	15	16	17	18	19	
■	20	21	22	23	24	25	26	
●	27	28	29	30	31			

第 2.1.22 题

数的和是中间一个数的 9 倍.

(1) 设“数阵”中间一个数为 a , 则左、右两数是 $a-1$ 和 $a+1$, 上、下两数是 $a-7$ 和 $a+7$, 另四个数分别为 $a-8$ 、 $a-6$ 、 $a+6$ 、 $a+8$, 计算它们的和得 $9a$, 即 9 个数的和是中间一个数 a 的 9 倍.

(2) 要使框出的 9 个数之和等于 120, 根据上述结论, 中间一个数应是 $\frac{120}{9} = \frac{40}{3}$, 这是不可能的.

2.1.23 ★★ 应用整式知识解答下列问题:

(1) 任意写出一个三位数, 然后把这个三位数的百位数字和个位数字交换位置, 得到另一个三位数, 求证: 这两个三位数的差总能被 99 整除;

(2) 一个三位数, 将它的各位数字分别按从大到小和从小到大的顺序重新排列, 把所得到的两个三位数相减, 若差等于原来的三位数, 则称这个三位数为克隆数. 求出所有的三位克隆数.

解析: (1) 设这个三位数的百位、十位、个位数字分别为 a 、 b 、 c , 则这个三位数可以表示为 $100a + 10b + c$, 交换 a 、 c 位置后的新三位数可以表示为 $100c + 10b + a$, 这两数之差为: $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c)$, 所以这两个三位数的差总能被 99 整除.

(2) 由(1)可知克隆数必是 99 的倍数, 三位数中, 99 的倍数共有 9 个: 198、297、396、495、594、693、792、891、990. 经逐一检验, 符合题意的三位克隆数只有 495.

三、幂的运算法则

2.1.24 ★ 填空:

$$(1) x^6 \div (x^2 \cdot x^3) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (2) x^{12} \cdot (x^4 \div x^3) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解析: (1) 原式 $= x^6 \div x^5 = x$.

(2) 原式 $= x^{12} \cdot x = x^{13}$.

2.1.25 ★★ 填空(m, n 是正整数):

$$(1) x^{4m} \div (\underline{\hspace{2cm}}) = x^m; \quad (2) a^2 \cdot (\underline{\hspace{2cm}}) = a^{2m+4};$$

$$(3) (\underline{\hspace{2cm}})^n = 4^n a^{2n} b^{3n}; \quad (4) a^{8n} = (a^4)^{(\underline{\hspace{2cm}})} = [a^{(\underline{\hspace{2cm})} }]^2.$$

解析: (1) x^{3m} . (2) a^{2m+2} . (3) $4a^2 b^3$.

$$(4) a^{8n} = a^{2n \cdot 4} = (a^4)^{(\underline{\hspace{2cm}})}, a^{8n} = a^{2 \cdot 4n} = [a^{(\underline{\hspace{2cm})} }]^2.$$

2.1.26 ★ 下列计算正确的是() .

$$(A) a^3 \cdot a^5 = a^{15}$$

$$(B) a^6 \div a^2 = a^3$$

$$(C) a^3 + a^5 = a^8$$

$$(D) (-a)^4 \div a = a^3$$

解析: 根据同底数幂相乘、除的法则, 应选 D.

2.1.27 ★ 下列计算错误的是()。

- (A) $(-3ab)^3 = -27a^3b^3$ (B) $\left(-\frac{1}{4}a^3b^2\right)^2 = \frac{1}{16}a^6b^4$
 (C) $(-xy^2)^3 = -xy^6$ (D) $(-a^4b^3)^2 = a^8b^6$

解析：根据积的乘方运算法则，应选 C.

2.1.28 ★★ 已知 $a+b=0$, n 为正整数，则下列等式中一定成立的是()。

- (A) $a^n + b^n = 0$ (B) $a^{2n} + b^{2n} = 0$
 (C) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = 0$ (D) $a^{n+1} + b^{n+1} = 0$

解析：因为 a 、 b 互为相反数，它们的偶次幂相等，而奇次幂互为相反数。指数中只有 $2n+1$ 一定是奇数，故选 C.

2.1.29 ★★ 计算(n 是大于 3 的整数)：

$$(1) x^n \cdot x^{n-1} \div x^{n-2}; \quad (2) x^{3n} \div (x^{2n} \cdot x^{n-3}).$$

解析：(1) 原式 $= x^{n+(n-1)-(n-2)} = x^{n+1}$.

(2) 原式 $= x^{3n-(2n+n-3)} = x^3$.

2.1.30 ★★ 计算：

$$(1) -a^2 \cdot (-a^4) \cdot (-a)^6 \cdot (-a)^5; \quad (2) -(y^4)^2 \cdot (-y^2)^5.$$

解析：幂的运算中有较多符号，通常先把它们化为相同的底数，同时确定整体的符号，再运用法则计算。

$$(1) \text{原式} = -a^2 \cdot (-a^4) \cdot a^6 \cdot (-a^5) = -a^{17}.$$

$$(2) \text{原式} = (-y^8) \cdot (-y^{10}) = y^{18}.$$

2.1.31 ★★ 计算：

$$(1) t^5 \cdot t^4 - t^{18} \div t^9;$$

$$(2) (-a)^2 \cdot (-a^3) - (-a^2)^3;$$

$$(3) (-x)^6 - (-3x^3)^2 + 8[(-x)^3]^2;$$

$$(4) x^2 \cdot x^3 - (2x^2)^3 + x^9 \div x^4.$$

解析：(1) 原式 $= t^9 - t^9 = 0$.

$$(2) \text{原式} = a^2 \cdot (-a^3) - (-a^6) = -a^5 + a^6.$$

$$(3) \text{原式} = x^6 - 9x^6 + 8x^6 = 0.$$

$$(4) \text{原式} = x^5 - 8x^6 + x^5 = 2x^5 - 8x^6.$$

2.1.32 ★★ 计算(n 是正整数)：

$$(1) (-a^n)^2 \cdot (-b^n)^3 - (a^2b^3)^n; \quad (2) (3a^n)^3 - 2a^n \cdot a^{2n+2} \div a^2.$$

解析：(1) 原式 $= a^{2n} \cdot (-b^{3n}) - a^{2n}b^{3n} = -2a^{2n}b^{3n}$.

$$(2) \text{原式} = 27a^{3n} - 2a^{3n} = 25a^{3n}.$$

2.1.33 ★★ 化简：

$$(1) (a-2b)^8 \cdot (2b-a)^3 \div (a-2b)^4;$$

$$(2) -[(2-m)^2]^2 [(m-2)^2 (2-m)]^3.$$

解析:通常将作为底数的相同多项式整体保留.

$$(1) \text{方法1} \quad \text{原式} = (2b-a)^8 (2b-a)^3 \div (2b-a)^4 = (2b-a)^7.$$

$$\text{方法2} \quad \text{原式} = -(a-2b)^8 (a-2b)^3 \div (a-2b)^4 = -(a-2b)^7.$$

$$(2) \text{原式} = -(2-m)^4 (2-m)^6 (2-m)^3 = -(2-m)^{13}.$$

2.1.34 ★★ 计算:

$$(1) (-0.25)^2 \times (-5)^2 \times 4^2; \quad (2) (-0.125)^{13} \times 2^{39}.$$

$$\text{解析:} (1) \text{原式} = (-0.25 \times 4)^2 \times 25 = (-1)^2 \times 25 = 25.$$

$$(2) \text{方法1} \quad \text{原式} = -[(0.5)^3]^{13} \cdot 2^{39} = -0.5^{39} \times 2^{39} = -1.$$

$$\text{方法2} \quad \text{原式} = (-0.125)^{13} \times (2^3)^{13} = (-1)^{13} = -1.$$

2.1.35 ★★ 化简 $2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{99}$ (结果用幂的形式表示).

$$\text{解析:} \text{因为 } 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}, \text{ 所以原式} = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{99} - 2 = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{99} - 2 = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{99} - 2 = \cdots = 2^{99} + 2^{99} - 2 = 2^{100} - 2.$$

2.1.36 ★★ 比较 3^{555} 、 4^{444} 和 5^{333} 的大小.

$$\text{解析:} 3^{555} = (3^5)^{111} = 243^{111}, 4^{444} = (4^4)^{111} = 256^{111}, 5^{333} = (5^3)^{111} = 125^{111}, \text{ 因为 } 125 < 243 < 256, \text{ 所以 } 5^{333} < 3^{555} < 4^{444}.$$

2.1.37 ★★ 比较下列各式的大小:

$$(1) \frac{99^9}{99^9} \text{ 与 } \frac{11^9}{9^9};$$

$$(2) a^n \text{ 与 } a^{n+2} (a \text{ 为正数, } n \text{ 为正整数}).$$

$$\text{解析:} (1) \text{方法1} \quad \frac{99^9}{99^9} = \frac{(11 \times 9)^9}{9^{90} \cdot 9^9} = \frac{11^9 \cdot 9^9}{9^{90} \cdot 9^9} = \frac{11^9}{9^{90}}, \text{ 所以 } \frac{99^9}{99^9} = \frac{11^9}{9^{90}}.$$

$$\text{方法2} \quad \text{因为 } \frac{99^9}{9^9} - \frac{11^9}{9^9} = \frac{99^9 - 11^9 \cdot 9^9}{9^9} = \frac{99^9 - 99^9}{9^9} = 0, \text{ 所以 } \frac{99^9}{9^9} = \frac{11^9}{9^9}.$$

$$(2) \text{方法1} \quad \text{因为 } a > 0, n \text{ 为正整数, 所以 } a^n > 0, \text{ 又因为 } a^{n+2} = a^2 \cdot a^n, \text{ 所以分以下三种情形: ① 当 } a > 1 \text{ 时, } a^2 > 1, \text{ 因此 } a^{n+2} > a^n; \text{ ② 当 } a = 1 \text{ 时, } a^2 = 1, \text{ 因此 } a^{n+2} = a^n; \text{ ③ 当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } a^2 < 1, \text{ 因此 } a^{n+2} < a^n.$$

$$\text{方法2} \quad \text{两个正数比较大小, 可求出它们的商与1相比较: 若商大于1, 则被除数较大; 若商等于1, 则两数相等; 若商小于1, 则被除数较小. 因为 } a > 0, n \text{ 是正整数, 所以 } a^{n+2} > 0, a^n > 0, \text{ 又 } \frac{a^{n+2}}{a^n} = a^2, \text{ 所以 ① 当 } a > 1 \text{ 时, } a^2 > 1, a^{n+2} > a^n;$$

$$\text{② 当 } a = 1 \text{ 时, } a^2 = 1, a^{n+2} = a^n; \text{ ③ 当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } a^2 < 1, a^{n+2} < a^n.$$

$$\text{2.1.38 ★★ 设 } P_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n, \text{ 其中 } n \text{ 为正整数, 当 } n \text{ 取何值时, } P_n \text{ 可以被 } 10 \text{ 整除?}$$

解析:当 n 顺次取前五个不同的值时, P_n 表达式中各个加数的末位数字及 P_n

的末位数字如表 2.1.1 所示：

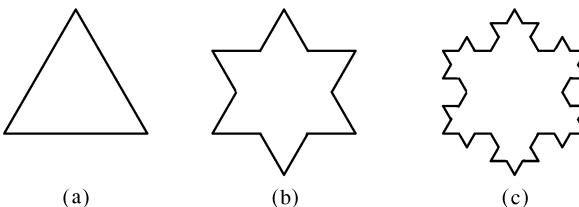
表 2.1.1

n	1^n	2^n	3^n	4^n	P_n
1	1	2	3	4	0
2	1	4	9	6	0
3	1	8	7	4	0
4	1	6	1	6	4
5	1	2	3	4	0

我们发现：(1) 当 $n=1, 2, 3$ 时, P_n 的末位数字为 0, 能被 10 整除; (2) 当 $n=4$ 时, P_n 的末位数字为 4, 不能被 10 整除; (3) 当 $n=5$ 时, $1^n, 2^n, 3^n, 4^n$ 的末位数字重又变为 1、2、3、4, 此后必然重复出现 $n=1, 2, 3, 4$ 时的情形.

据此可以知道：当 n 顺次取各个正整数时, P_n 的末位数字以 4 个数为一个循环单位重复出现. 所以, 当 n 是 4 的倍数时, P_n 不能被 10 整除; 当 n 不是 4 的倍数时, P_n 能被 10 整除.

2.1.39 如图, 把等边三角形的每边三等分, 擦去中间一份, 并使其向外“长出”一个以原来边长的 $\frac{1}{3}$ 为边长的小等边三角形, 这一过程我们称为一次生长. 在由此得到的多边形上继续生长……—共生长 n 次后, 所得到多边形的边数是多少? 这时, 它的周长是原三角形周长的多少倍?



第 2.1.39 题

解析: 观察图(a)到图(b)的变化, 发现原来的 1 条边变成了 4 条边, 因此, 第一次生长后, 所得多边形的边数为 $3 \times 4 = 12$, 是原三角形边数的 4 倍. 同理, 两次生长后共有 $12 \times 4 = 48$ 条边, 是前一个图形边数的 4 倍. 所以, 每一次生长所得的多边形, 边数是前一个多边形的 4 倍. 因此, 生长 n 次后, 所得到的多边形边数是 3×4^n .

由上述讨论可知,一次生长后,多边形的边数是原来的4倍,而边长是原来的 $\frac{1}{3}$,所以多边形的周长是原来的 $\frac{4}{3}$ 倍,因此生长n次后,所得到的多边形周长是原三角形周长的 $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ 倍.

四、整式的乘法

2.1.40 ★★ 填空:

(1) 若 $a^{m+n} \cdot (3a^m b^{n+1}) = 3a^8 b^3$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若 $(2x+3)(4-5x) = ax^2 - bx + c$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: (1) 因为 $a^{m+n} \cdot (3a^m b^{n+1}) = 3a^{2m+n} b^{n+1}$, 所以有 $2m+n=8$, $n+1=3$, 即 $m=3$, $n=2$.

(2) 因为 $(2x+3)(4-5x) = -10x^2 - 7x + 12$, 所以 $a=-10$, $b=7$, $c=12$.

2.1.41 ★ 有四个算式: ① $(2a^2) \cdot (7a^7) = 14a^{14}$; ② $(5b^2) \cdot (2b^5) = 7b^7$; ③ $2c^2(-4c^4) = 8c^6$; ④ $(d^2)^3 \cdot (-d^3)^2 = d^{12}$. 其中正确的有().

- (A) 0个 (B) 1个 (C) 2个 (D) 3个

解析: 根据单项式相乘的法则, 只有等式④成立, 故选 B.

2.1.42 ★ 若M,N分别是关于x的2次多项式与3次多项式, 则MN().

- (A) 一定是5次多项式 (B) 一定是6次多项式
(C) 一定是2次或3次多项式 (D) 无法确定次数

解析: 根据多项式与多项式相乘的法则, 积的最高次项由两因式的最高次项相乘所得, 所以MN一定是关于x的5次多项式, 故选 A.

2.1.43 ★★ 计算:

(1) $\frac{2}{3}(-xy^2)^2 \cdot \left[-\frac{4}{9}(-x^3y^2)^5\right]$;

(2) $\left(-\frac{1}{2}ab^2c^3\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}abc^2\right)^3 \cdot 12a^2b$.

解析: (1) 原式 $= \frac{2}{3}x^2y^4 \cdot \frac{4}{9}x^{15}y^{10} = \frac{8}{27}x^{17}y^{14}$.

(2) 原式 $= \frac{1}{4}a^2b^4c^6 \cdot \left(-\frac{1}{27}a^3b^3c^6\right) \cdot 12a^2b = -\frac{1}{9}a^7b^8c^{12}$.

2.1.44 ★★ 计算(m是正整数):

(1) $(-0.1a^mb^2)^2 \cdot (-4a^2)^2$;

(2) $(a^2b^3)^m \cdot (-0.5a^2b^m) \cdot \left(-\frac{1}{2}a^{m-1}b^2\right)^3$.

解析: (1) 原式 = $0.01a^{2m}b^4 \cdot 16a^4 = 0.16a^{2m+4}b^4$.

$$(2) \text{原式} = a^{2m}b^{3m} \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2b^m\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}a^{3m-3}b^6\right) = \frac{1}{16}a^{5m-1}b^{4m+6}.$$

2.1.45 ★★ 化简:

$$(1) (-x-y)^5 [-6(x+y)^3]^2;$$

$$(2) \left[\frac{1}{2}(c-d)^2\right]^3 \cdot [2(d-c)^3]^3 \cdot (c-d).$$

解析: (1) 原式 = $[-(x+y)^5] \cdot 36(x+y)^6 = -36(x+y)^{11}$.

$$(2) \text{原式} = \frac{1}{8}(d-c)^6 \cdot 8(d-c)^9 \cdot [-(d-c)] = -(d-c)^{16}.$$

2.1.46 ★★ 计算:

$$(1) \left(-\frac{1}{4}ab^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ab\right)^2 \cdot (-b)^2 - a^2b^4;$$

$$(2) \left(-\frac{1}{2}x^4y\right)^2 \cdot (-xy^2)^4 - [-(x^2y)^2]^3 \cdot (-2y^2)^2.$$

解析: (1) 原式 = $\frac{1}{16}a^2b^4 + \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot b^2 - a^2b^4 = -\frac{11}{16}a^2b^4$.

$$(2) \text{原式} = \frac{1}{4}x^8y^2 \cdot x^4y^8 - (-x^{12}y^6) \cdot 4y^4 = \frac{1}{4}x^{12}y^{10} + 4x^{12}y^{10} = \frac{17}{4}x^{12}y^{10}.$$

2.1.47 ★★ 计算:

$$(1) x - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{2}x\right) - \frac{1}{3}x\left(2 - \frac{x}{4}\right);$$

$$(2) (-2a)^2(a^3b^2 - 2a) - 4a(-a^2b)^2.$$

解析: (1) 原式 = $x - \frac{1}{4} + \frac{3}{8}x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}x^2 = \frac{1}{12}x^2 + \frac{17}{24}x - \frac{1}{4}$.

$$(2) \text{原式} = 4a^2(a^3b^2 - 2a) - 4a \cdot a^4b^2 = 4a^5b^2 - 8a^3 - 4a^5b^2 = -8a^3.$$

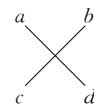
2.1.48 ★★ 由多项式相乘法则, 容易得到 $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$. 显然, 两个关于同一字母的一次二项式相乘, 结果是这个字母的二次三项式. 其中两次项系数就是两因式中一次项系数 a, c 的积, 常数项是两个因式中常数项 b, d 的积, 最容易算错的是一次项系数 $ad+bc$, 可借助图(a)

计算: 上下两行分别表示两个因式中的一次项系数和常数项, 两斜线连结的数分别相乘, 将所得的积相加即得积的一次项系数. 这种方法通常称作十字相乘法.

应用这一方法计算下列各题:

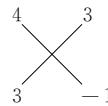
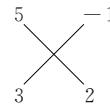
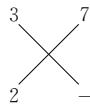
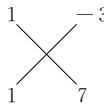
$$(1) (x-3)(x+7); \quad (3) (5xy-1)(3xy+2);$$

$$(2) (3x+7)(2x-1); \quad (4) (4x^2+3)(3x^2-1).$$



第 2.1.48 题(a)

解析：图(b)依次表示各题的十字相乘法：



第 2.1.48 题(b)

$$(1) \text{ 原式} = x^2 + 4x - 21.$$

$$(2) \text{ 原式} = 6x^2 + 11x - 7.$$

$$(3) \text{ 原式} = 15x^2y^2 + 7xy - 2.$$

$$(4) \text{ 原式} = 12x^4 + 5x^2 - 3.$$

$$\boxed{2.1.49} \star\star \text{ 先化简,再求值: } (-5a)^2 \cdot \frac{1}{5}a - 4a(a^2 - 2a - 3) - (a-1)(a^2 - 2),$$

其中 $a = -1$.

$$\text{解析: 原式} = 25a^2 \cdot \frac{1}{5}a - 4a^3 + 8a^2 + 12a - (a^3 - 2a - a^2 + 2) = 5a^3 - 4a^3 + 8a^2 + 12a - a^3 + 2a + a^2 - 2 = 9a^2 + 14a - 2, \text{ 当 } a = -1 \text{ 时, 原式} = 9 \times (-1)^2 + 14 \times (-1) - 2 = -7.$$

2.1.50 $\star\star$ 已知多项式乘积 $(x^2 + px + q)(x^2 - 3x + q)$ 的结果中不含 x^2 和 x^3 项, 求 p, q 的值.

解析: 应用多项式相乘法则展开, 又合并同类项后, 含 x^2 的项为 $(2q - 3p)x^2$, 含 x^3 的项为 $(-3 + p)x^3$. 由题意得 $2q - 3p = 0, -3 + p = 0$, 所以 $p = 3, q = \frac{9}{2}$.

2.1.51 $\star\star$ 已知多项式 $13x^3 + mx^2 + 11x + n$ 能被 $13x^2 - 6x + 5$ 整除, 求 m, n 的值.

解析: 观察两多项式的次数, 可知商为一次二项式且一次项系数为 1, 设商为 $x + a$, 则 $(13x^2 - 6x + 5)(x + a) = 13x^3 + mx^2 + 11x + n$. 左边应用多项式乘法展开, 得 $13x^3 + (13a - 6)x^2 + (5 - 6a)x + 5a = 13x^3 + mx^2 + 11x + n$. 应有

$$\begin{cases} 13a - 6 = m, \\ 5 - 6a = 11, \\ 5a = n. \end{cases}$$

2.1.52 $\star\star$ 观察并解答下列问题:

$$(1) \text{ 填空: } ① (x-1)(x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$② (x-1)(x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$③ (x-1)(x^3+x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$④ (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 猜想 $(x-1)(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$ 的结果应是什么?

解析: (1) 由多项式相乘法则直接计算, 容易得到各式的结果分别为 $x^2 - 1$, $x^3 - 1$, $x^4 - 1$ 和 $x^5 - 1$.

(2) 在上述计算中能发现,展开式中除了最高次项与常数项 -1 之外,其余各项系数对应互为相反数,正好逐项相消,所以结果应为 $x^{n+1}-1$.

五、整式乘法中乘法公式的应用

2.1.53 ★ 下列各式中能应用乘法公式计算的有_____个.

- (1) $(3a+5b)(5a+3b)$; (2) $(a^2+b)(a^3-b)$;
 (3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x+1)$; (4) $(a+b)(x-y)$.

解析: 显然,式(1)不能应用完全平方公式,式(2)、(4)不能应用平方差公式;而式(3)可化为 $\frac{1}{2}(2x+1)(2x+1)$,能应用完全平方公式计算,故应填1.

2.1.54 ★★ 已知 $x^2+2x=3$,则 $x(x+1)^2-(x^2+x)+4(1-x)$ 的值为_____.

解析: 根据所求代数式的特征,将已知等式写成 $x^2+2x+1=4$,即 $(x+1)^2=4$. 原式 $=4x-(x^2+2x+1-x-1)+4-4x=4x-(4-x-1)+4-4x=x+1$. 因为 $(x+1)^2=4$,所以 $x+1=\pm 2$. 应填2或-2.

2.1.55 ★ 下列各式中,计算正确的是().

- (A) $(p-q)^2=p^2-q^2$ (B) $(a+2b)^2=a^2+2ab+2b^2$
 (C) $(a^2+1)^2=a^4+2a^2+1$ (D) $(-s-t)^2=s^2-2st+t^2$

解析: 根据两数和的完全平方公式,应选C.

2.1.56 ★★ 若多项式 $M=4x+3y$,乘以多项式 N ,可以利用公式计算,则多项式 N ().

- (A) 只能是 $4x+3y$ (B) 只能是 $4x-3y$
 (C) 只能是 $8x-6y$ (D) 可以是上述各种多项式

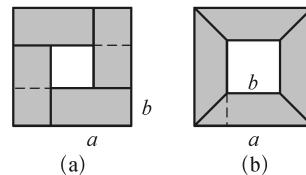
解析: 多项式 $8x-6y=2(4x-3y)$, M 乘以各式都能应用公式计算,故选D.

2.1.57 ★★ 如图,同一个正方形内四个阴影部分分别是全等的矩形和等腰梯形.试利用图形面积的不同表示方法,分别写出一个代数恒等式.

解析: 这类问题一般答案不惟一,例如:图(a)可以对应写出 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, $2b(a+b)+(a-b)(a+b)=(a+b)^2$;

图(b)可对应写出 $4 \times \frac{1}{2}(a+b) \times \frac{1}{2}(a-b)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ($\frac{1}{2}(a-b)$ 是梯形的高), $a^2=b^2+4 \times \frac{a+b}{2} \times \frac{a-b}{2}$ (转化为

图(a)中第一种情形).



第2.1.57题

2.1.58 ★★ 计算(m, n 是正整数):

$$(1) \left(-\frac{1}{4}x^m + \frac{1}{5}y^n\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}x^m - \frac{1}{5}y^n\right);$$

$$(2) \left(x^n y^n - \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\text{解析: (1) 原式} = \left(-\frac{1}{4}x^m\right)^2 - \left(\frac{1}{5}y^n\right)^2 = \frac{1}{16}x^{2m} - \frac{1}{25}y^{2n}.$$

$$(2) \text{原式} = x^{2n}y^{2n} - x^n y^n + \frac{1}{4}.$$

2.1.59 ★★ 计算:

$$(1) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right);$$

$$(2) (2y - x)^2 (x + 2y)^2.$$

$$\text{解析: (1) 原式} = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = x^4 - \frac{1}{16}.$$

$$(2) \text{原式} = (x - 2y)^2 (x + 2y)^2 = [(x - 2y)(x + 2y)]^2 = (x^2 - 4y^2)^2 = x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4.$$

2.1.60 ★★ 计算:

$$(1) (a + b - c)(a - b + c); \quad (2) (2x - y + 2)(y - 2x + 2).$$

$$\text{解析: (1) 原式} = [a + (b - c)] \cdot [a - (b - c)] = a^2 - (b - c)^2 = a^2 - b^2 + 2bc - c^2.$$

$$(2) \text{原式} = [2 + (2x - y)][2 - (2x - y)] = 4 - (2x - y)^2 = 4 - 4x^2 + 4xy - y^2.$$

2.1.61 ★★ 计算:

$$(1) \left(2x - y - \frac{1}{2}z\right)^2; \quad (2) (a - 2b - c)(2b + c - a).$$

$$\text{解析: (1) 原式} = \left[2x + (-y) + \left(-\frac{1}{2}z\right)\right]^2 = 4x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 4xy + yz - 2zx.$$

$$(2) \text{原式} = -(2b + c - a)^2 = -(4b^2 + c^2 + a^2 + 4bc - 4ab - 2ac) = -4b^2 - c^2 - a^2 - 4bc + 4ab + 2ac.$$

2.1.62 ★★ 计算:

$$(1) (2x - y)(2x + y)^2; \quad (2) (3m - 2n)(3m + 2n - 1);$$

$$(3) (a^2 - 4b^2)(a^2 + 2ab + 4b^2); \quad (4) (x + y + 2z)(x - y + 4z).$$

$$\text{解析: (1) 原式} = [(2x - y)(2x + y)](2x + y) = (4x^2 - y^2)(2x + y) = 8x^3 + 4x^2y - 2xy^2 - y^3.$$

$$(2) \text{ 原式} = (3m-2n) [(3m+2n)-1] = (3m-2n)(3m+2n) - (3m-2n) = 9m^2 - 4n^2 - 3m + 2n.$$

$$(3) \text{ 原式} = (a+2b)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2) = (a+2b)(a^3-8b^3) = a^4 + 2a^3b - 8ab^3 - 16b^4.$$

$$(4) \text{ 原式} = (x+y+3z-z)(x-y+3z+z) = [(x+3z)+(y-z)][(x+3z)-(y-z)] = (x+3z)^2 - (y-z)^2 = x^2 + 6xz + 9z^2 - y^2 + 2yz - z^2 = x^2 - y^2 + 8z^2 + 6xz + 2yz.$$

2.1.63 ★★ 利用乘法公式计算:

$$(1) 29 \frac{2}{3} \times 30 \frac{1}{3}; \quad (2) \left(-99 \frac{1}{2}\right)^2;$$

$$(3) 38.9^2 - 77.8 \times 48.9 + 48.9^2;$$

$$(4) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{10^2}\right).$$

$$\text{解析: (1) 原式} = \left(30 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(30 + \frac{1}{3}\right) = 30^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 899 \frac{8}{9}.$$

$$(2) \text{ 原式} = \left(99 \frac{1}{2}\right)^2 = \left(100 - \frac{1}{2}\right)^2 = 9900 \frac{1}{4}.$$

$$(3) \text{ 原式} = 38.9^2 - 2 \times 38.9 \times 48.9 + 48.9^2 = (38.9 - 48.9)^2 = 100.$$

$$(4) \text{ 原式} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{9}{10} \times \frac{11}{10} = \frac{11}{20}.$$

2.1.64 ★★ 探究新知 解答以下问题并发现规律:

$$(1) \text{ 计算: } ① (a+b)(a^2-ab+b^2); ② (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

(2) 应用上述结论填空:

$$① (a+2b)(\underline{\hspace{2cm}}) = a^3 + (2b)^3 = a^3 + 8b^3;$$

$$② (3x-1)(\underline{\hspace{2cm}}) = (3x)^3 - 1^3 = 27x^3 - 1.$$

$$\text{解析: (1) ① 原式} = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

$$② \text{ 原式} = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

$$(2) \text{ 根据(1)中结果, 应填: } ① a^2 - a \cdot 2b + (2b)^2 = a^2 - 2ab + 4b^2.$$

$$② (3x)^2 + 3x \cdot 1 + 1^2 = 9x^2 + 3x + 1.$$

应用拓展 利用上述已得到的结果计算:

$$(1) \left(\frac{1}{2}x - y\right) \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2\right);$$

$$(2) (a^4 - a^2b + b^2)(a^2 + b);$$

$$(3) (x+y)(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

解析: (1) 原式 = $\left(\frac{1}{2}x - y\right)\left[\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{2}xy + y^2\right] = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - y^3 = \frac{1}{8}x^3 - y^3.$

$$(2) \text{原式} = (a^2 + b)[(a^2)^2 - a^2b + b^2] = (a^2)^3 + b^3 = a^6 + b^3.$$

$$(3) \text{原式} = [(x+y)(x^2 - xy + y^2)][(x-y)(x^2 + xy + y^2)] = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = x^6 - y^6.$$

2.1.65 ★★ 利用乘法公式求下列代数式的值:

$$(1) \text{已知 } a(a-1) - (a^2 - b) = 2, \text{求代数式 } ab - \frac{a^2 + b^2}{2} \text{ 的值;}$$

$$(2) \text{已知 } x+y=1, \text{求 } x^3 + y^3 + 3xy \text{ 的值.}$$

$$\text{解析: (1) 由已知条件得: } b-a=2, \text{所以 } ab - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{2ab - a^2 - b^2}{2} = \frac{-(b-a)^2}{2} = -2.$$

$$(2) \text{方法1} \quad \text{由 } x+y=1 \text{ 得 } (x+y)^3=1, \text{所以 } (x+y)^3=(x+y)^2 \cdot (x+y)=(x^2+2xy+y^2)(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=1, \text{即 } x^3+y^3+3xy(x+y)=1, \text{所以 } x^3+y^3+3xy=1.$$

$$\text{方法2} \quad \text{因为 } (x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3, \text{所以 } x^3 + y^3 + 3xy = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + 3xy = x^2 - xy + y^2 + 3xy = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = 1.$$

六、多项式的因式分解

2.1.66 ★ 观察下列从左到右的变形:

$$\textcircled{1} -6a^3b^3 = (2a^2b) \cdot (-3ab^2); \quad \textcircled{2} ma - mb + c = m(a-b) + c;$$

$$\textcircled{3} 6x^2 + 12xy + 6y^2 = 6(x+y)^2; \quad \textcircled{4} (3a+2b)(3a-2b) = 9a^2 - 4b^2.$$

其中是因式分解的有_____ (填题号).

解析: 把一个多项式化为几个整式的积的形式叫因式分解. 其中①是单项式变形, ④是多项式的乘法运算, ②中并未将整个多项式写成几个整式乘积的形式, 所以只有③是因式分解.

2.1.67 ★ 对下列各式因式分解:

$$\textcircled{1} 4x^2 - 16 = (2x)^2 - 4^2 = (2x-4)(2x+4);$$

$$\textcircled{2} 3a^3 - \frac{1}{3}a = a\left(3a^2 - \frac{1}{3}\right);$$

$$\textcircled{3} 81 - 9y^2 = 9^2 - (3y)^2 = (9-3y)(9+3y) = 9(3-y)(3+y) = 9(9-y^2);$$

$$\textcircled{4} x^4 + y^4 = x^4 - y^4 + 2y^4 = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2) + 2y^4.$$

其中运算正确的个数为()。

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

解析: 式①没有将因式分解完成,最后一式中两个因式各应提取公因数2,得 $4(x-2)(x+2)$. 通常宜先提取公因数4,得 $4(x^2-4)$,不易失误.

式②中也宜先提取公因式 $3a$ 或 $\frac{1}{3}a$,得 $3a\left(a^2-\frac{1}{9}\right)$ 或 $\frac{1}{3}a(9a^2-1)$,再应用

平方差公式继续分解.

式③中得到 $9(3-y)(3+y)$,运算已经结束,继续应用平方差公式做的是整式乘法运算,实质上仍是混淆了因式分解与整式乘法的关系.

式④结果是两个整式的和,没有将原式进行因式分解.

综上所述,应选A.

2.1.68 ★ 对整式 $x^2 + \frac{1}{4} - y^2 - x$ 进行因式分解,分组正确的是()。

- | | |
|--|--|
| (A) $(x^2 - y^2) + \left(\frac{1}{4} - x\right)$ | (B) $(x^2 - x) + \left(\frac{1}{4} - y^2\right)$ |
| (C) $\left(x^2 + \frac{1}{4} - x\right) - y^2$ | (D) $\left(x^2 - y^2 + \frac{1}{4}\right) - x$ |

解析: 对待分解因式的多项式进行分组,目的是要继续分解并完成.按(A)、(D)分组后都有一组多项式无法分解;按(B)分组,虽两组能各自分解因式,但整体无法完成.(C)中第一组正好是完全平方式 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$,故应选C.

2.1.69 ★ 把下列各式分解因式:

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------|
| (1) $-4x^3y^2 + 6x^2y^3 - 12x^2y^2$; | (2) $4a^2 - 9b^2$; |
| (3) $a^4 - 2a^2b + b^2$; | (4) $-25x^2 - 30xy - 9y^2$. |

解析: (1) 多项式中各项的最大公因式是 $2x^2y^2$,首项系数是负数时,通常也将负号提出. 原式 $= -2x^2y^2(2x - 3y + 6)$.

- (2) 本题可以直接应用公式. 原式 $= (2a)^2 - (3b)^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$.
 (3) 原式 $= (a^2)^2 - 2a^2b + b^2 = (a^2 - b^2)^2$.
 (4) 原式 $= -(5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3y + (3y)^2 = -(5x + 3y)^2$.

2.1.70 ★★ 把下列各式分解因式:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (1) $3x(a + 2b)^2 - 6xy(a + 2b)$; | (2) $5a^2b(x - y)^2 - 10ab^2(y - x)^3$; |
| (3) $-16(2a - 3b)^2 + 9(a - 3b)^2$; | (4) $9(x - y)^2 - 12(x - y) + 4$. |

解析: (1) 这里把 $(a + 2b)$ 作为整体提取公因式,原式 $= 3x(a + 2b)(a + 2b - 2y)$.

- (2) 原式 $= 5a^2b(x - y)^2 + 10ab^2(x - y)^3 = 5ab(x - y)^2(a + 2bx - 2by)$.
 (3) 原式 $= [3(a - 3b)]^2 - [4(2a - 3b)]^2 = [3(a - 3b) + 4(2a - 3b)] \cdot$

$$[3(a-3b)-4(2a-3b)] = (11a-21b)(-5a+3b) = -(11a-21b)(5a-3b).$$

$$(4) \text{ 原式} = [3(x-y)]^2 - 2 \cdot 3(x-y) \cdot 2 + 2^2 = (3x-3y-2)^2.$$

2.1.71 ★★ 把下列各式分解因式：

$$(1) x(x-y) - y(3x-4y); \quad (2) a^2(b^2-a^2) - b^2(a^2-1).$$

解析：本题保留原有的括号无法进行因式分解，应先去掉括号、整理后再分解。

$$(1) \text{ 原式} = x^2 - xy - 3xy + 4y^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 = (x-2y)^2.$$

$$(2) \text{ 原式} = a^2b^2 - a^4 - a^2b^2 + b^2 = b^2 - a^4 = (b+a^2)(b-a^2).$$

2.1.72 ★★ 把下列各式分解因式：

$$(1) -2a + 32a^5;$$

$$(2) -2x^{3n} + 12x^{2n}y^2 - 18x^ny^4;$$

$$(3) (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2;$$

$$(4) 36mn^2(y-x) + 27n^3(x-y) + 12m^2n(x-y).$$

解析：分解因式时必须使每一个多项式因式不能再分解为止。

$$(1) \text{ 原式} = -2a(1-16a^4) = -2a(1+4a^2)(1+2a)(1-2a).$$

$$(2) \text{ 原式} = -2x^n(x^{2n}-6x^ny^2+9y^4) = -2x^n(x^n-3y^2)^2.$$

$$(3) \text{ 原式} = (x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy) = (x+y)^2(x-y)^2.$$

$$(4) \text{ 原式} = 3n(x-y)(-12mn+9n^2+4m^2) = 3n(x-y)(2m-3n)^2.$$

2.1.73 ★★ 把下列各式分解因式：

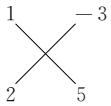
$$(1) 2x^2 - x - 15;$$

$$(2) x^2 - 8xy + 12y^2;$$

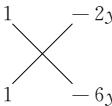
$$(3) x^2 + (3m+n)x + 3mn;$$

$$(4) (x-y)^2 - 5(x-y) - 6.$$

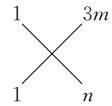
解析：(1) 形如 ax^2+bx+c (a, b, c 是常数) 的二次三项式分解因式，可以参照二项式乘法的十字相乘法。本题将二次项系数 2 分解成两个因数的积，写在如图(a)所示左列的 1 和 2，常数项 -15 也分解成两个因数的积，写在图中右列的 -3 和 5，“凑成”中间连线两端两数乘积的和 $1 \times 5 + 2 \times (-3)$ 等于一次项系数 -1，即得到两个一次因式 $x-3$ 和 $2x+5$ ，因此原式 $= (x-3)(2x+5)$ 。这种分解的方法就称为用十字相乘法分解因式。



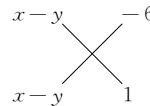
(a)



(b)



(c)



(d)

第 2.1.73 题

(2) 方法 1 如图(b)，原式 $= (x-2y)(x-6y)$ 。

方法 2 原式 $= x^2 - 8xy + 16y^2 - 4y^2 = (x-4y)^2 - (2y)^2 = (x-4y+2y)(x-4y-2y) = (x-2y)(x-6y)$ 。

(3) 如图(c)，原式 $= (x+3m)(x+n)$ 。

(4) 如图(d), 原式 $=(x-y-6)(x-y+1)$.

2.1.74 ★★ 利用因式分解进行计算:

$$(1) 13.5 \times 0.125 + 86.5 \times \frac{1}{8};$$

$$(2) 0.73 \times 32 - \frac{8}{25} \times 63;$$

$$(3) 9 \times 1.2^2 - 16 \times 1.4^2;$$

$$(4) 34^2 - 34 \times 32 + 16^2.$$

解析: (1) 原式 $=0.125 \times (13.5 + 86.5) = 0.125 \times 100 = 12.5$.

(2) 原式 $=32 \times (0.73 - 0.63) = 32 \times 0.1 = 3.2$.

(3) 原式 $=(3 \times 1.2)^2 - (4 \times 1.4)^2 = (3.6 + 5.6) \times (3.6 - 5.6) = 9.2 \times (-2) = -18.4$.

(4) 原式 $=(34 - 16)^2 = 18^2 = 324$.

2.1.75 ★★ 已知 $x = 3.43$, $y = 3.14$, 求 $-2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2$ 的值.

解析: 原式 $=-\frac{1}{2}(4x^2 + 4xy + y^2) = -\frac{1}{2}(2x + y)^2$. 当 $x = 3.43$, $y = 3.14$

时, 原式 $=-\frac{1}{2}(6.86 + 3.14)^2 = -50$.

2.1.76 ★★ 解答下列问题:

(1) 证明: 两个连续奇数的平方差能被 8 整除;

(2) 两个连续偶数的平方差是否有这样的性质? 试得出你的结论.

解析: (1) 设两个连续奇数是 $2n-1$ 和 $2n+1$ (n 是整数), 则 $(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = (2n+1+2n-1)(2n+1-2n+1) = 8n$, 所以原命题成立.

(2) 两个连续偶数的平方差只能被 4 整除. 设两个连续偶数是 $2n$ 和 $2n+2$ (n 为整数), 则 $(2n+2)^2 - (2n)^2 = (2n+2+2n)(2n+2-2n) = 4(2n+1)$.

2.1.77 ★★ 已知 $2^{48}-1$ 能被 60~70 之间的两个整数整除, 求这两个整数.

解析: 因为 $2^{48}-1 = (2^{24}+1)(2^{24}-1) = (2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1) = (2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)$, 而 $2^6-1=63$, $2^6+1=65$, 所以这两个整数是 63 和 65.

2.1.78 ★★ 把下列各式分解因式:

$$(1) 3a - 3b + mb - ma;$$

$$(2) a^2b^2 - c^2 + 2bc - b^2.$$

解析: 四项及四项以上的多项式通常可以用分组分解法分解因式, 分组的目的不仅要使各组“局部”能分解因式, 而且要能对整体进一步进行因式分解.

(1) 原式 $=(3a-3b)-(ma-mb)=3(a-b)-m(a-b)=(a-b)(3-m)$.

(2) 原式 $=a^2b^2 - (c^2 - 2cb + b^2) = (ab)^2 - (c-b)^2 = (ab+c-b)(ab-c+b)$.

2.1.79 ★★ 把下列各式分解因式:

$$(1) 3x^2 - 8a + 2ax^2 - 12;$$

$$(2) a^2 - ab - 3bc - 9c^2.$$

解析: (1) 原式 $= (3x^2 + 2ax^2) - (8a + 12) = x^2(3 + 2a) - 4(2a + 3) = (2a + 3)(x^2 - 4) = (2a + 3)(x + 2)(x - 2)$.

(2) 原式 $= (a^2 - 9c^2) - (ab + 3bc) = (a + 3c)(a - 3c) - b(a + 3c) = (a + 3c)(a - 3c - b)$.

2.1.80 ★★ 把下列各式分解因式:

$$(1) a^2 - b^2 - x^2 + y^2 - 2ay + 2bx; \quad (2) a^2 - 4ab + 4b^2 - 2a + 4b + 1.$$

解析: (1) 原式 $= (a^2 + y^2 - 2ay) - (b^2 - 2bx + x^2) = (a - y)^2 - (b - x)^2 = (a - y + b - x)(a - y - b + x)$.

(2) 原式 $= (a^2 - 4ab + 4b^2) - (2a - 4b) + 1 = (a - 2b)^2 - 2(a - 2b) + 1 = (a - 2b - 1)^2$.

2.1.81 ★★ 把下列各式分解因式:

$$(1) ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2);$$

$$(2) ab(x + y)(x - y) - xy(a + b)(a - b).$$

解析: 按原有的分组,无法分解因式,因此必须先整理,再合理分组.

(1) 原式 $= abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd = (abc^2 + a^2cd) + (abd^2 + b^2cd) = ac(bc + ad) + bd(ad + bc) = (ad + bc)(ac + bd)$.

(2) 原式 $= abx^2 - aby^2 - a^2xy + b^2xy = (abx^2 - a^2xy) + (b^2xy - aby^2) = ax(bx - ay) + by(bx - ay) = (bx - ay)(ax + by)$.

2.1.82 ★★ 把下列各式分解因式:

$$(1) (a + b)^4 - 13(a + b)^2 + 36; \quad (2) (a^2 - 6)^2 - 4a(a^2 - 6) - 5a^2.$$

解析: 本题先分别将 $(a + b)^2$ 和 $(a^2 - 6)$ 作为整体应用十字相乘法分解因式,再对所得结果进一步分解.

(1) 原式 $= [(a + b)^2 - 4] \cdot [(a + b)^2 - 9] = (a + b + 2)(a + b - 2)(a + b + 3)(a + b - 3)$.

$$(2) \text{原式} = (a^2 - 6 - 5a)(a^2 - 6 + a) = (a - 6)(a + 1)(a + 3)(a - 2).$$

2.1.83 ★★ 把下列各式分解因式:

$$(1) x^4 + 4y^4; \quad (2) 2x^3 - 5x - 3.$$

解析: (1) 注意到二项式中两项都是4次项,添上一项 $4x^2y^2$ 后配成完全平方式: 原式 $= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$.

(2) 三项式中一项系数的绝对值等于另两项系数绝对值的和,可以采用“拆项”的形式分解因式: 原式 $= 2x^3 - 2x - 3x - 3 = 2x(x^2 - 1) - 3(x + 1) = 2x(x + 1)(x - 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(2x^2 - 2x - 3)$.

2.1.84 ★★ 在实数范围内分解因式:

$$(1) 2x^2 - 4; \quad (2) m^2 - 6m + 4;$$

$$(3) \sqrt{3}a^2 - 6a + 3\sqrt{3}; \quad (4) a^4 - 5a^2 - 14.$$

解析: 不加说明, 因式分解通常在有理数范围内进行.“在实数范围内分解因式”指分解后的因式中系数可以是无理数, 在这个前提下同样要注意将每个因式分解到不能再分解为止.

$$(1) \text{原式} = 2(x^2 - 2) = 2[x^2 - (\sqrt{2})^2] = 2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

$$(2) \text{原式} = m^2 - 6m + 9 - 5 = (m - 3)^2 - (\sqrt{5})^2 = (m - 3 + \sqrt{5})(m - 3 - \sqrt{5}).$$

$$(3) \text{原式} = \sqrt{3}(a^2 - 2\sqrt{3}a + 3) = \sqrt{3}[a^2 - 2\sqrt{3}a + (\sqrt{3})^2] = \sqrt{3}(a - \sqrt{3})^2.$$

$$(4) \text{原式} = (a^2 - 7)(a^2 + 2) = (a + \sqrt{7})(a - \sqrt{7})(a^2 + 2).$$

2.1.85 ★★ 已知多项式 $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ 有一个因式是 $x + 2$, 求其余的因式.

解析: 方法 1 由已知的因式, 可以将多项式有目的地分组分解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 6x - 10x - 20 = x^2(x + 2) + 3x(x + 2) - 10(x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 + 3x - 10) = (x + 2)(x - 2)(x + 5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{方法 2 原式} &= (x^3 - 4x) + (5x^2 - 20) = x(x + 2)(x - 2) + 5(x + 2)(x - 2) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x + 5). \end{aligned}$$

方法 3 应用待定系数法, 根据题意, 原多项式提取因式 $x + 2$ 以后, 余下因式中的二次项系数与常数项已知, 故设 $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x + 2)(x^2 + mx - 10)$, 右边展开式中二次项系数 $2 + m = 5$, 所以 $m = 3$. 再对所得二次三项式分解.

2.1.86 ★★ 证明: 不论 x 取何实数, 代数式 $(4 - x^2)(7 - x)(3 - x)$ 的值都不大于 100.

解析: 考虑这个代数式的值与 100 的差:

$$\begin{aligned} \text{因为 } (4 - x^2)(7 - x)(3 - x) - 100 &= [(2 - x)(3 - x)][(7 - x)(2 + x)] - 100 \\ &= (6 - 5x + x^2)(14 + 5x - x^2) - 100 = [6 - (5x - x^2)][14 + (5x - x^2)] - 100 \\ &= -16 - 8(5x - x^2) - (5x - x^2)^2 = -(4 + 5x - x^2)^2 \leqslant 0, \text{ 所以 } (4 - x^2)(7 - x)(3 - x) \leqslant 100. \end{aligned}$$

七、将一个多项式配成完全平方的形式

2.1.87 ★ 填空:

(1) 若多项式 $x^2 - 3x + a$ 是一个完全平方式, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若多项式 $a^2 - ma + 64$ 是一个完全平方式, 则常数 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: (1) 因为 $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$, 所以 $a = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

(2) 因为 $a^2 \pm 2a \cdot 8 + 8^2 = (a \pm 8)^2$, 所以 $m = \pm 16$.

2.1.88 ★★ 填空:

(1) 若 $a + b = 5$, $ab = 2$, 则 $a^2 + b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若 $a^2 + b^2 = 5$, $ab = 2$, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: (1) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 5^2 - 2 \times 2 = 21$.

(2) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 5 + 2 \times 2 = 9$, 所以 $a+b = \pm 3$.

2.1.89 ★★ 若 $ab < 0$, 则 $(a-b)^2$ 与 $(a+b)^2$ 的大小关系是()。

- (A) $(a-b)^2 > (a+b)^2$ (B) $(a-b)^2 < (a+b)^2$
 (C) $(a-b)^2 = (a+b)^2$ (D) 不能确定

解析: $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$, 因为 $ab < 0$, 所以 $-4ab > 0$, 故选 A.

2.1.90 ★★ 一个单项式与二项式 $4m^2+1$ 的和是一个含 m 的完全平方式, 则这样的单项式有()。

- (A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

解析: 可以考虑以下几种情况: $4m^2 + 1 \pm 4m = (2m \pm 1)^2$, $4m^2 + 1 + 4m^4 = (2m^2 + 1)^2$, $4m^2 + 1 + (-1) = (2m)^2$. 这样的单项式有以下 4 个: $4m$, $-4m$, $4m^4$, -1 . 故应选 D.

2.1.91 ★★ 解答下列问题, 你能从这几个问题的共同特征中得到什么启发?

(1) 已知 $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$, 求实数 x 、 y 的值;

(2) 求证: 不论 x 、 y 取任何实数, 代数式 $4x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11$ 的值总是正数;

(3) 当 x 、 y 取何值时, 代数式 $x^2 + 9y^2 + x - 6y - 2$ 的值最小, 最小值是多少?

解析: (1) 原方程可化为 $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 0$, 即 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 0$. 利用完全平方数的非负性, 可得 $x-3=0$, $y+4=0$, 即 $x=3$, $y=-4$.

(2) 原式 $= 4x^2 + 4x + 1 + y^2 - 6y + 9 + 1 = (2x+1)^2 + (y-3)^2 + 1 > 0$, 所以原结论成立.

(3) 原式 $= x^2 + x + \frac{1}{4} + 9y^2 - 6y + 1 - 2 - \frac{1}{4} - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (3y-1)^2 - \frac{13}{4}$, 所以当 $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ 时, 代数式取得最小值 $-\frac{13}{4}$.

以上三个问题, 都是在一个方程或代数式中含有两个未知数的二次式, 将它配成完全平方的形式, 通常是可以考虑的一个途径.

2.1.92 ★★ 设等式 $x^2 + 3x + 2 = (x-1)^2 + B(x-1) + C$ 对于 x 的任意值都成立, 求 B 、 C 的值.

解析: 方法 1 由 $x^2 + 3x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + (5x - 5) + 6 = (x-1)^2 + 5(x-1) + 6$, 可得 $B=5$, $C=6$.

方法 2 等式右边展开、整理, 得 $x^2 + 3x + 2 = x^2 + (B-2)x + (-B+C+1)$.

所以 $\begin{cases} B-2=3, \\ -B+C+1=2. \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} B=5, \\ C=6. \end{cases}$

方法 3 因为不论 x 为何值时等式总成立, 可以分别将 $x=0$ 、 $x=1$ 代入, 得

$$\begin{cases} -B + C + 1 = 2, \\ C = 6. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} B = 5, \\ C = 6. \end{cases}$$

2.1.93 ★★ 若 $x+y+z=a$, $xy+yz+zx=b$, 用含 a, b 的代数式表示 $x^2+y^2+z^2$.

解析: 因为 $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$, 所以 $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = a^2 - 2b$.

2.1.94 ★★ 已知 $a-b=3$, $b-c=2$, 求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

$$\begin{aligned} \text{解析: } a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}[(a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+ \\ &(c^2+a^2-2ca)] = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]. \end{aligned}$$

由 $a-b=3, b-c=2$ 消去 b , 得 $c-a=-5$. 代入上式可求得原式的值为 19.

2.1.95 ★★ 若二次三项式 ax^2+bx+c 不是完全平方式, 将它的一部分配成完全平方式, 可以有三种不同的形式. 例如 x^2+2x+4 可以写成 $(x+1)^2+3$ 、 $(x+2)^2-2x$ 、 $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2+\frac{3}{4}x^2$. 其配方之后的余项 3、 $-2x$ 、 $\frac{3}{4}x^2$ 分别是常数项、一次项、二次项. 试写出下列各式配方的不同形式:

$$(1) x^2+ax+a^2; \quad (2) x^2-4x+2.$$

$$\begin{aligned} \text{解析: } (1) \left(x+\frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}a^2, \quad (x+a)^2-ax \text{ 或 } (x-a)^2+3ax, \\ \left(\frac{1}{2}x+a\right)^2 + \frac{3}{4}x^2. \end{aligned}$$

$$(2) (x-2)^2-2, (x-\sqrt{2})^2-(4-2\sqrt{2})x \text{ 或 } (x+\sqrt{2})^2-(4+2\sqrt{2})x, (\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2-x^2.$$

2.1.96 ★★ 设 a, b, c, d 是整数, $m=a^2+b^2$, $n=c^2+d^2$, 求证: mn 也是两个整数的平方和.

$$\text{解析: } mn = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) + (a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2.$$

2.1.97 ★★ 已知 a, b, c, d 是四边形 $ABCD$ 四条边的长, 且 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$, 试证明四边形 $ABCD$ 是菱形.

解析: 由 $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$ 得 $(a^4+b^4-2a^2b^2)+(c^4+d^4-2c^2d^2)+(2a^2b^2-4abcd+2c^2d^2)=0$, 即 $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$, 由此易得 $a=b=c=d$.

2.1.98 ★★ 探索并解答下列各题:

$$(1) \text{计算 } 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = \underline{\hspace{2cm}}, 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = \underline{\hspace{2cm}}, 3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = \underline{\hspace{2cm}}, 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = \underline{\hspace{2cm}};$$

(2) 观察上述计算的结果,指出它们的共同特征;

(3) 对于任意给出的四个连续自然数的积与 1 的和仍具有上述特征吗? 试证明你的猜想.

解析: (1) 经计算,结果分别为 25,121,361,841.

(2) 25、121、361、841 都是完全平方数.

(3) 任意四个连续自然数的积与 1 的和是完全平方数.

证明: 设最小的自然数为 n , 则四个连续自然数的积与 1 的和可表示为:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= [n(n+3)] \cdot [(n+1)(n+2)] + 1 = (n^2+3n) \cdot \\ &(n^2+3n+2) + 1 = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

八、整式的除法

2.1.99 ★ 直接写出下列除法运算的结果:

$$(1) 4x^3y^2 \div 6x^2y = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) 12ax^2y^2 \div (-4ax) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) -21a^2b^3c \div 3ab = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \frac{2}{3}a^{n+2}b^{m+3} \div (-9ab^m) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (m, n \text{ 是正整数}).$$

$$\text{解析: (1) 原式} = \frac{2}{3}xy.$$

$$\text{(2) 原式} = -3xy^2.$$

$$\text{(3) 原式} = -7ab^2c.$$

$$\text{(4) 原式} = -\frac{2}{27}a^{n+1}b^3.$$

2.1.100 ★★ 已知 $a^m = 6$, $a^n = 2$, 则 a^{2m-3n} 的值为()。

- (A) 2 (B) 3 (C) 4.5 (D) 6

解析: 原式 $= a^{2m} \div a^{3n} = (a^m)^2 \div (a^n)^3 = 6^2 \div 2^3 = 4.5$, 应选 C.

2.1.101 ★★ 将下列各式中括号内的多项式看作一个整体,利用幂的运算性质化简:

$$(1) 8(a-b)^{10} \div \frac{4}{3}(a-b)^8; \quad (2) -6(x-y)^6 \div \frac{3}{2}(y-x)^5.$$

$$\text{解析: (1) 原式} = 6(a-b)^2 = 6a^2 - 12ab + 6b^2.$$

$$\text{(2) 原式} = -6(x-y)^6 \div \frac{3}{2}[-(x-y)]^5 = 4(x-y) = 4x - 4y.$$

2.1.102 ★★ 计算:

$$(1) 16xy^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}xy\right)^3 \div \frac{1}{2}x^4y^5; \quad (2) (-a \cdot a^2)^3 \div [(-a^2) \cdot (-a^3)^2].$$

$$\text{解析: (1) 原式} = 16xy^3 \cdot \left(-\frac{1}{8}x^3y^3\right) \div \frac{1}{2}x^4y^5 = -4y.$$

$$(2) \text{原式} = (-a^3)^3 \div (-a^2 \cdot a^6) = -a^9 \div (-a^8) = a.$$

2.1.103 ★★ 计算:

$$(1) 8(x-y)^4(x+y)^3 \div 27[(x+y)(x-y)]^3;$$

$$(2) (-a)^{4n} \cdot (-a)^5 \div [a^{n+1} \cdot (-a)^{2n+1}] (n \text{ 为正整数}).$$

解析: (1) 原式 = $8(x-y)^4(x+y)^3 \div 27[(x+y)^3(x-y)^3] = \frac{8}{27}(x-y) = \frac{8}{27}x - \frac{8}{27}y$.

$$(2) \text{原式} = a^{4n} \cdot (-a^5) \div [a^{n+1} \cdot (-a^{2n+1})] = (-a^{4n+5}) \div (-a^{3n+2}) = a^{n+3}.$$

2.1.104 ★ 计算:

$$(1) (6xy^2 - 12x^3y^4 + 2x^2y^2) \div (-2xy^2);$$

$$(2) \left(\frac{2}{3}x^{2n+2}y^2 - \frac{1}{2}x^{2n+1}y^3 + x^{2n}y^4 \right) \div \left(\frac{3}{2}x^n y \right)^2.$$

解析: 应用多项式除以单项式的法则逐项进行单项式除法.

$$(1) \text{原式} = 6xy^2 \div (-2xy^2) - 12x^3y^4 \div (-2xy^2) + 2x^2y^2 \div (-2xy^2) = -3 + 6x^2y^2 - x.$$

$$(2) \text{原式} = \left(\frac{2}{3}x^{2n+2}y^2 - \frac{1}{2}x^{2n+1}y^3 + x^{2n}y^4 \right) \div \frac{9}{4}x^{2n}y^2 = \frac{8}{27}x^2 - \frac{2}{9}xy + \frac{4}{9}y^2.$$

2.1.105 ★ 求代数式 $\left[\left(4x - \frac{1}{2}y \right)^2 - 4y \left(x + \frac{1}{16}y \right) \right] \div 8x$ 的值, 其中 $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$.

解析: 先把原代数式化简, 再求值.

$$\text{原式} = \left(16x^2 - 4xy + \frac{1}{4}y^2 - 4xy - \frac{1}{4}y^2 \right) \div 8x = (16x^2 - 8xy) \div 8x = 2x - y.$$

当 $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$ 时, 原代数式 = $-1 - 2 = -3$.

2.1.106 ★★ 求出满足下列条件的整式:

(1) 已知一个单项式乘以 $\frac{1}{2}a^2b^5c$ 所得的积是 $-\frac{2}{3}a^4b^5c^2$, 求这个单项式;

(2) 已知一个多项式减去 $x^2 - x + 1$ 后, 除以 $2x^2$ 的商是 $x - 2$, 求这个多项式.

解析: (1) 所求单项式为 $-\frac{2}{3}a^4b^5c^2 \div \frac{1}{2}a^2b^5c = -\frac{4}{3}a^2c$.

(2) 所求多项式为 $2x^2(x-2) + (x^2 - x + 1) = 2x^3 - 4x^2 + x^2 - x + 1 =$

$$2x^3 - 3x^2 - x + 1.$$

2.1.107 ★★ 计算:

$$(1) (x^2 - 6x - 27) \div (x + 3); \quad (2) (2x + 6)(x^2 - 9) \div (x^2 + 6x + 9).$$

解析: 对一些特殊的多项式除以多项式运算,可以先将多项式分解因式,再参考单项式除法法则相除.

$$(1) \text{原式} = (x - 9)(x + 3) \div (x + 3) = x - 9.$$

$$(2) \text{原式} = 2(x + 3)(x + 3)(x - 3) \div (x + 3)^2 = 2(x - 3) = 2x - 6.$$

2.1.108 ★★ 用竖式除法计算 $(x^3 + 7x - 4x^2 - 6) \div (x - 2)$.

解析: 我们可以把它写成多位数相除的竖式形式,注意将被除式与除式都按字母的降幂排列.然后,①用除式第一项 x 除被除式第一项 x^3 ,得商式第一项 x^2 ;②用商式第一项 x^2 去乘除式,把所得的积写在被除式下面(同类项对齐),从被除式中减去这个积,得到第一余式(可以只写出其中的前两项 $-2x^2 + 7x$ ——与除式项数相同);③将 $-2x^2 + 7x$ 作为新的被除式继续上述过程(在原被除式中逐一移下一项),直至余式次数小于除式次数为止.如下式所示:

$$\begin{array}{r} & x^2 & -2x & +3 \cdots \text{商式} \\ \text{除式} \cdots x - 2 &) & x^3 & -4x^2 & +7x & -6 \cdots \text{被除式} \\ & (-) & x^3 & -2x^2 & & \\ & & & -2x^2 & +7x & \cdots \text{第一余式前两项} \\ & (-) & -2x^2 & +4x & & \\ & & & & 3x & -6 \cdots \text{第二余式} \\ & (-) & 3x & -6 & & \\ & & & & 0 & \cdots \text{余式} \end{array}$$

$$\text{所以 } (x^3 - 4x^2 + 7x - 6) \div (x - 2) = x^2 - 2x + 3.$$

§ 2.2 分 式

一、分式的基本性质

2.2.1 ★★ 填空:

$$(1) \text{当 } x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 时,分式 } \frac{1}{|x|-3} \text{ 没有意义;}$$

$$(2) \text{当 } x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 时,分式 } \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ 的值等于 } 0.$$

解析: (1) 当 $|x| - 3 = 0$, 即 $x = \pm 3$ 时, 分式 $\frac{1}{|x|-3}$ 没有意义.

(2) 当 $x^2 - 4 = 0$ 且 $x - 2 \neq 0$, 即 $x = 2$ 时, 分式 $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 的值等于 0.

2.2.2 ★ 填空:

$$(1) \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{(\quad)};$$

$$(2) \frac{x^3}{x^2 + xy} = \frac{(\quad)}{x + y};$$

$$(3) \frac{x+y}{xy} = \frac{x^2+xy}{(\quad)};$$

$$(4) \frac{x+y}{x-y} = \frac{(\quad)}{x^2 - 2xy + y^2}.$$

解析: 根据分式的基本性质,(1)、(2)两式左边的分子与分母分别除以不为 0 的整式 a 和 x ,结果应分别填 a 和 x^2 . 而(3)、(4)两式左边的分子与分母分别乘以不为 0 的整式 x 和 $x-y$,结果应分别填 x^2y 和 x^2-y^2 .

2.2.3 ★★ 已知分式 $M = \frac{x+2y}{x+y}$, $N = \frac{9x}{2x^2+3y^2}$. 将两个分式中的字母 x 、 y

都扩大为原来的 5 倍,则所得分式的值()。

(A) 都不变

(B) 分式 M 的值不变,分式 N 的值为原来的 5 倍

(C) 分式 M 的值不变,分式 N 的值为原来的 $\frac{1}{5}$

(D) 都变为原来的 $\frac{1}{5}$

解析: 字母 x 、 y 扩大为原来的 5 倍后,分式 $M = \frac{5x+2(5y)}{5x+5y} = \frac{5(x+2y)}{5(x+y)} =$

$\frac{x+2y}{x+y}$; 分式 $N = \frac{9(5x)}{2(5x)^2+3(5y)^2} = \frac{5 \cdot 9x}{25(2x^2+3y^2)} = \frac{9x}{5(2x^2+3y^2)}$. 所以应选 C.

2.2.4 ★★ 以下分式化简: ① $\frac{4x+2}{6x-1} = \frac{2x+2}{3x-1}$; ② $\frac{x+a}{x+b} = \frac{a}{b}$; ③ $\frac{x^2+y^2}{x+y} =$

$x+y$; ④ $\frac{x^2-y^2}{x+y} = x+y$. 其中错误的有()。

(A) 1 个

(B) 2 个

(C) 3 个

(D) 4 个

解析: 约分是约去分子与分母中的公因式,而不是分子与分母中的部分因式或多项式中的某些项,故①、②、③错误. 而④式中约分应得 $x-y$. 所以选择 D.

2.2.5 ★★ 求使 $\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ 有意义的 x 的取值范围.

解析: 原式中既要使 $x \neq 0$, 又要使 $1 - \frac{1}{x} \neq 0$. 所以 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$.

2.2.6 ★★ 求使分式 $\frac{x-2}{2x+a}$ 的值等于 0 的条件.

解析: 当 $x-2=0$ 且 $2x+a \neq 0$, 即 $x=2$ 且 $a \neq -4$ 时, 分式 $\frac{x-2}{2x+a}$ 的值等于 0.

2.2.7 ★★ 分别求出满足下列条件时字母 x 的取值范围:

$$(1) \frac{x-2}{3x^2} \text{ 的值是负数; } \quad (2) \frac{x-1}{x-3} \text{ 的值是正数.}$$

解析: (1) 由于分母 $3x^2 > 0$, 所以当分子 $x-2 < 0$, 即 $x < 2$ 且 $x \neq 0$ 时, $\frac{x-2}{3x^2}$ 的值是负数.

(2) 分式的分子与分母同号时, 分式的值是正数. 所以当 $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-3 > 0 \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} x-1 < 0, \\ x-3 < 0 \end{cases}$ 时, 即当 $x > 3$ 或 $x < 1$ 时, $\frac{x-1}{x-3}$ 的值是正数.

2.2.8 ★★ 不改变分式的值, 把下列各式分子与分母中的各项系数都化为整数:

$$(1) \frac{0.3x+1.2}{0.05x-1}; \quad (2) \frac{\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}y}{\frac{1}{2}x+0.1y}.$$

解析: (1) 原式 $= \frac{(0.3x+1.2) \times 20}{(0.05x-1) \times 20} = \frac{6x+24}{x-20}$.

$$(2) \text{原式} = \frac{\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}y\right) \times 70}{\left(\frac{1}{2}x+0.1y\right) \times 70} = \frac{14x-10y}{35x+7y}.$$

2.2.9 ★★ 不改变分式的值, 使下列各式分子和分母中的最高次项的系数都是正数:

$$(1) \frac{-a-1}{a^2-2}; \quad (2) \frac{-a^3+a^2-5}{3-a^2-a^3}.$$

解析: 根据分式的符号法则: 分子、分母和分式本身的符号中改变其中的任意两个, 分式的值不变.

$$(1) \text{原式} = \frac{-(a+1)}{a^2-2} = -\frac{a+1}{a^2-2}.$$

$$(2) \text{原式} = \frac{-(a^3-a^2+5)}{-(-3+a^2+a^3)} = \frac{a^3-a^2+5}{a^3+a^2-3}.$$

2.2.10 ★★ 约分:

$$(1) \frac{3m^2+6m}{m^2-m-6}; \quad (2) \frac{-4y^2+x^2}{-x^2+4xy-4y^2};$$

$$(3) \frac{6a^{n+1}b^4}{2a^{n-1}b} (n \text{ 是大于 } 1 \text{ 的整数}); \quad (4) \frac{x^{2n+2}-4x^{2n}}{x^{n+2}-x^{n+1}-2x^n} (n \text{ 是正整数}).$$

解析: (1) 原式 = $\frac{3m(m+2)}{(m-3)(m+2)} = \frac{3m}{m-3}$.

$$(2) \text{原式} = -\frac{(x+2y)(x-2y)}{(x-2y)^2} = -\frac{x+2y}{x-2y}.$$

$$(3) \text{原式} = \frac{3a^2b^3 \cdot 2a^{n-1}b}{2a^{n-1}b} = 3a^2b^3.$$

$$(4) \text{原式} = \frac{x^{2n}(x+2)(x-2)}{x^n(x-2)(x+1)} = \frac{x^n(x+2)}{x+1} = \frac{x^{n+1}+2x^n}{x+1}.$$

2.2.11 ★★ 通分:

$$(1) \frac{3y}{2x}, \frac{1}{3xy^2}, \frac{1}{4x^3yz};$$

$$(2) \frac{1}{x^2-x}, \frac{x}{x^2-2x+1}, \frac{1-x}{x+x^2}.$$

解析: (1) 最简公分母为 $12x^3y^2z$, 所以通分得 $\frac{3y}{2x} = \frac{3y \cdot 6x^2y^2z}{2x \cdot 6x^2y^2z} = \frac{18x^2y^3z}{12x^3y^2z}$,

$$\frac{1}{3xy^2} = \frac{4x^2z}{3xy^2 \cdot 4x^2z} = \frac{4x^2z}{12x^3y^2z}, \frac{1}{4x^3yz} = \frac{3y}{4x^3yz \cdot 3y} = \frac{3y}{12x^3y^2z}.$$

(2) 最简公分母为 $x(x-1)^2(x+1)$, 所以通分得 $\frac{1}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)^2(x+1)}$,

$$\frac{x}{x^2-2x+1} = \frac{x^2(x+1)}{x(x-1)^2(x+1)}, \frac{1-x}{x+x^2} = \frac{-(x-1)^3}{x(x-1)^2(x+1)}.$$

2.2.12 ★★ 已知 $y = \frac{6x^2-12x+6}{(x-1)^3}$, 当 x 取何整数值时, y 的值为正整数?

解析: 本题应先将 y 的表达式化成最简分式, 再讨论分式的取值情况. $y = \frac{6(x-1)^2}{(x-1)^3} = \frac{6}{x-1}$, 要使 y 的值是正整数, $x-1$ 的值只能取整数 1、2、3、6, 即 x 的整数值为 2、3、4、7.

二、零指数与负整数指数幂

2.2.13 ★ 直接写出下列各式的结果: $(-a^2)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$; $a^{-2} \times a^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$; $a^{-1} \div a^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}$; $a^{-2} + a^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$; $a^{-2} \times a^{-2} - (a^{-1})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: 指数的范围拓展为整数之后, 幂的运算法则仍能适用. 因此上述填空依次为 $-a^{-2}$ 、 a^{-5} 、 a^2 、 $2a^{-2}$ 、 $a^{-4} - a^{-2}$.

2.2.14 ★★ 填空:

$$(1) \text{若 } x - x^{-1} = 3, \text{ 则 } x^2 + x^{-2} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \text{若 } x^2 + x^{-2} = 6, \text{ 则 } x + x^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}, x^2 - x^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解析: (1) $x - x^{-1} = 3$ 两边平方, 得 $x^2 - 2 \cdot x \cdot x^{-1} + x^{-2} = 9$, 即 $x^2 + x^{-2} = 11$.

(2) 由 $x^2 + x^{-2} = 6$, 得 $x^2 + 2 + x^{-2} = 8$, 即 $(x + x^{-1})^2 = 8$, 所以 $x + x^{-1} = \pm 2\sqrt{2}$; 同理, 由 $x^2 - 2 + x^{-2} = 4$, 得 $(x - x^{-1})^2 = 4$, 则 $x - x^{-1} = \pm 2$. 而 $x^2 - x^{-2} = (x + x^{-1}) \cdot (x - x^{-1})$, 所以 $x^2 - x^{-2}$ 的值为 $4\sqrt{2}$ 或 $-4\sqrt{2}$.

2.2.15 ★★ 对于字母 a 的任何值, 等式都能成立的是() .

(A) $2a^{-2} = \frac{2}{a^2}$

(B) $(a^2 + 1)^{-2} = \frac{1}{(a^2 + 1)^2}$

(C) $(a^2 - 1)^0 = 1$

(D) $(a + 1)^{-1} = \frac{1}{a + 1}$

解析: 公式 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$ 均在底数 $a \neq 0$ 的条件下成立, 故(A)、(C)、(D)

分别在条件 $a \neq 0$, $a^2 - 1 \neq 0$, $a + 1 \neq 0$ 下成立. 而(B)中不论 a 取何值, 总有 $a^2 + 1 \neq 0$, 故选 B.

2.2.16 ★★ 计算(字母是正整数):

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} \div (-2)^{-2}$;

(2) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(-\frac{5}{2}\right)^3 + 2010^0$;

(3) $(2^{-2})^k \left(\frac{1}{4}\right)^{-k}$;

(4) $\left(\frac{1}{5^n}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} - 5^{-n} \div \frac{1}{5^n}$.

解析: (1) 原式 $= \frac{1}{4} \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times 4 = -\frac{4}{3}$.

(2) 原式 $= \left(-\frac{125}{8}\right) + (-8) - \left(-\frac{125}{8}\right) + 1 = -7$.

(3) 原式 $= 2^{-2k} \cdot 2^{2k} = 2^0 = 1$.

(4) 原式 $= 1 + 25 - 1 = 25$.

2.2.17 ★★ 求下列各式中 x 的值:

(1) $3^x = \frac{1}{27}$;

(2) $3^{2x-1} = 1$.

解析: (1) 因为 $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$, 所以 $x = -3$.

(2) 因为 $1 = 3^0$, 所以 $2x - 1 = 0$, 所以 $x = \frac{1}{2}$.

2.2.18 ★★ 化简下列各式, 将结果用正整数指数表示:

$$(1) -8x^{-3}y \div (-4x^{-2}y^3z^{-1}); \quad (2) 9x^2y^{-3} \div (-12x^{-1}y^2z)^2.$$

解析: (1) 原式 = $[-8 \div (-4)](x^{-3} \div x^{-2})(y \div y^3)(1 \div z^{-1}) = 2x^{-1}y^{-2}z =$

$$\frac{2z}{xy^2}.$$

$$(2) \text{原式} = 9x^2y^{-3} \div 144x^{-2}y^4z^2 = \frac{1}{16}x^4y^{-7}z^{-2} = \frac{x^4}{16y^7z^2}.$$

2.2.19 ★★ 化简下列各式, 使结果不含分数线:

$$(1) \frac{2ab^{-2}}{a^{-1}b^3} \cdot \frac{3a^{-1}b^{-2}}{ab^{-1}}; \quad (2) \frac{2x^2z}{y^3} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)^2 \div \left(-\frac{2x^4}{y^3z}\right).$$

$$\text{解析: (1) 原式} = \frac{6b^{-4}}{b^2} = 6b^{-6}.$$

$$(2) \text{原式} = \frac{2x^2z}{y^3} \cdot \frac{x^2}{y^2} \cdot \left(-\frac{y^3z}{2x^4}\right) = -\frac{z^2}{y^2} = -y^{-2}z^2.$$

2.2.20 ★★ 化简 $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$, 使结果不含负指数.

$$\text{解析: 原式} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) \div \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{-(x+y)(x-y)}{x^2y^2} \cdot \frac{xy}{x+y} =$$

$$-\frac{x-y}{xy}.$$

2.2.21 ★★ 试比较 3^{-22} 与 2^{-33} 的大小.

解析: 因为 $3^{-22} = \frac{1}{3^{22}} = \frac{1}{(3^2)^{11}} = \frac{1}{9^{11}}$, $2^{-33} = \frac{1}{2^{33}} = \frac{1}{(2^3)^{11}} = \frac{1}{8^{11}}$, 而 $9^{11} > 8^{11}$,

所以 $3^{-22} < 2^{-33}$.

2.2.22 ★★ 已知 $x = 1 + 2a^{-1}$, $y = 1 - a^{-2}$, 用含 x 的代数式表示 y .

解析: 由 $x = 1 + 2a^{-1}$, 得 $a^{-1} = \frac{x-1}{2}$, 代入 $y = 1 - a^{-2} = 1 - (a^{-1})^2 = 1 -$

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{-x^2 + 2x + 3}{4}, \text{即 } y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{4}.$$

2.2.23 ★★ 已知 $a^{-3x} = 5^{-1}$, 求 $\frac{a^{6x} - a^{-6x}}{a^{3x} + a^{-3x}}$ 的值.

解析: 因为 $a^{-3x} = 5^{-1}$, 即 $\frac{1}{a^{3x}} = \frac{1}{5}$, 故 $a^{3x} = 5$, 所以 $\frac{a^{6x} - a^{-6x}}{a^{3x} + a^{-3x}} =$

$$\frac{(a^{3x})^2 - (a^{-3x})^2}{a^{3x} + a^{-3x}} = \frac{(a^{3x} + a^{-3x})(a^{3x} - a^{-3x})}{a^{3x} + a^{-3x}} = a^{3x} - a^{-3x} = 5 - 5^{-1} = \frac{24}{5}.$$

三、分式的运算

2.2.24 ★ 请在下面“□、○”中分别填入适当的代数式,使等式成立:

$$\boxed{\quad} + \circled{=} \frac{1}{x}$$

图 2.2.1

解析: 解答这类开放性问题,在满足题目给出要求的前提下,尽量简洁,以免失误.本题可填“ $\frac{2}{x}$, $-\frac{1}{x}$ ”或“ $\frac{2-x}{x}$, $\frac{x-1}{x}$ ”,也可填“ $\frac{1}{x}-1$, 1 ”等.

2.2.25 ★★ 已知 x 为整数,且 $\frac{2}{x+3} + \frac{2}{3-x} + \frac{2x+18}{x^2-9}$ 的值为整数,则所有符合条件的 x 的值有()。

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 4 个 (D) 5 个

解析: 因为 $\frac{2}{x+3} + \frac{2}{3-x} + \frac{2x+18}{x^2-9} = \frac{2(x-3)-2(x+3)+(2x+18)}{(x+3)(x-3)} =$

$\frac{2}{x-3}$ 为整数,且 x 也为整数,所以 $x-3=\pm 1$ 或 ± 2 ,因而 x 的值为 1、2、4、5,故选 C.

2.2.26 ★★ 计算:

$$(1) x \cdot \frac{1}{y} \div y \cdot \frac{1}{x}; \quad (2) 8m^2n^4 \cdot \left(-\frac{3m}{4n^3}\right) \div \left(-\frac{m^2n}{2}\right);$$

$$(3) \frac{a^2-6a+8}{a^2-5a+6} \div \frac{a^2-3a-4}{a^2-2a-3}, \quad (4) \frac{x-x^2}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x} \div \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}.$$

解析: (1) 原式 $= x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{y^2}$.

(2) 原式 $= 8m^2n^4 \cdot \frac{3m}{4n^3} \cdot \frac{2}{m^2n} = 12m$.

(3) 原式 $= \frac{(a-2)(a-4)}{(a-2)(a-3)} \cdot \frac{(a-3)(a+1)}{(a-4)(a+1)} = 1$.

(4) 原式 $= \frac{-x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = -\frac{x+1}{x-1}$.

2.2.27 ★★ 计算:

$$(1) \left[\left(-\frac{b^{n+1}}{2a^m} \right)^3 \right]^2; \quad (2) \left(\frac{2a^2b}{-c^3} \right)^n.$$

解析: (1) 原式 $= \left[-\frac{b^{3n+3}}{8a^{3m}} \right]^2 = \frac{b^{6n+6}}{64a^{6m}}$.

(2) 当 n 为奇数时, 原式 $= -\frac{2^n a^{2n} b^n}{c^{3n}}$; 当 n 为偶数时, 原式 $= \frac{2^n a^{2n} b^n}{c^{3n}}$.

2.2.28 ★★ 计算:

$$(1) \frac{a^2 - 2ab}{-ab + b^2} \div \left(\frac{a^2}{a-b} \div \frac{2ab}{2b-a} \right); \quad (2) \left(-\frac{y}{x} \right)^2 \div \left(-\frac{x}{y^2} \right)^3 \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right)^4.$$

$$\text{解析: (1) 原式} = \frac{a(a-2b)}{-b(a-b)} \div \left(\frac{a^2}{a-b} \cdot \frac{2b-a}{2ab} \right) = \frac{a(a-2b)}{-b(a-b)} \cdot$$

$$\frac{2b(a-b)}{-a(a-2b)} = 2.$$

$$(2) \text{原式} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \left(-\frac{y^6}{x^3} \right) \cdot \frac{x^4}{y^8} = -\frac{1}{x}.$$

2.2.29 ★★ 计算:

$$(1) \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} - \frac{x+3}{x^2+x-2}; \quad (2) \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6}.$$

$$\text{解析: (1) 原式} = \frac{x+2-x+1-x-3}{x^2+x-2} = -\frac{x}{x^2+x-2}.$$

$$(2) \text{方法 1} \quad \text{原式} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{(x+2)(x+3) + x(x+3) + x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{3x^2 + 9x + 6}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x^2 + 3x}.$$

$$\text{方法 2} \quad \text{注意到原式的最简公分母中各个因式顺次相差 1, 采用“拆项法”, 可得原式} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x^2 + 3x}.$$

2.2.30 ★★ 计算:

$$(1) a^2 + a + 1 - \frac{a^3}{a-1}; \quad (2) a \div \left(1 - \frac{a}{b} \right);$$

$$(3) \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3}; \quad (4) \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) \div \left(1 + \frac{1}{x^2-1} \right);$$

$$(5) \left(\frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2-4x+4} \right) \div \frac{x-4}{x}.$$

$$\text{解析: (1) 原式} = \frac{a^2 + a + 1}{1} - \frac{a^3}{a-1} = \frac{(a^2 + a + 1)(a-1) - a^3}{a-1} = -\frac{1}{a-1}.$$

$$(2) \text{原式} = a \div \frac{b-a}{b} = a \cdot \frac{b}{b-a} = \frac{ab}{b-a}.$$

$$(3) \text{原式} = \frac{1}{x+1} - \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{(x+3)(x+1)} = \frac{x+1}{(x+1)^2} - \frac{x-1}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{2}{x^2+2x+1}.$$

$$(4) \text{ 原式} = \frac{x-1+1}{x-1} \div \frac{x^2-1+1}{x^2-1} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} = \frac{x+1}{x}.$$

$$(5) \text{ 原式} = \left[\frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{x-1}{(x-2)^2} \right] \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{x-4}{x(x-2)^2} \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{1}{x^2-4x+4}.$$

2.2.31 ★★ 先化简 $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2+2x-3}{x^2+3x}$, 然后取字母 x 的一个值代入求值(所取 x 的值要保证原代数式有意义).

解析: 原式 $= \frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)(x+3)}{x(x+3)} = \frac{2}{x+1}$. 例如, 当 $x=2$ 时, 原式 $= \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$. (本题中 $x \neq 0, \pm 1, -3$.)

2.2.32 ★★ 求代数式 $\frac{x+1}{x+2} \div \frac{x+3}{x+4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+8x+16}$ 的值, 其中 $|x|=3$.

解析: 原式 $= \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+4}{x+3} \cdot \frac{(x+2)(x+3)}{(x+4)^2} = \frac{x+1}{x+4}$. 由 $|x|=3$, 得 $x=\pm 3$. 当 $x=-3$ 时原式无意义, 所以 $x=3$, 原式 $= \frac{3+1}{3+4} = \frac{4}{7}$.

2.2.33 ★★ 有这样一道题: “计算: $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \div \frac{x-1}{x^2+x} - 2 - x$ 的值, 其中 $x=2\frac{1}{4}$ ”. 甲同学把 $x=2\frac{1}{4}$ 错抄成 $x=4\frac{1}{2}$, 但他的计算结果也是正确的, 你说这是怎么回事?

解析: 因为 $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \div \frac{x-1}{x^2+x} - 2 - x = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x+1)}{x-1} - 2 - x = -2$ 是常数, 所以把 $x=2\frac{1}{4}$ 错抄成 $x=4\frac{1}{2}$ 不影响结果.

2.2.34 ★★ 已知实数 a 满足 $a^2+2a-8=0$, 求 $\frac{1}{a+1} - \frac{a+3}{a^2-1} \cdot \frac{a^2-2a+1}{a^2+4a+3}$ 的值.

解析: 原式 $= \frac{1}{a+1} - \frac{a-1}{(a+1)^2} = \frac{2}{(a+1)^2}$. 由已知 $a^2+2a-8=0$, 得 $(a+1)^2=9$. 因此原式 $= \frac{2}{9}$.

2.2.35 ★★ 化简 $\frac{x-\frac{x-1}{2}}{2-\frac{x-1}{x}}$.

解析: 方法1 原式 $=\left(x-\frac{x-1}{2}\right)\div\left(2-\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x+1}{2}\div\frac{x+1}{x}=\frac{x}{2}$.

方法2 原式 $=\frac{2x\left(x-\frac{x-1}{2}\right)}{2x\left(2-\frac{x-1}{x}\right)}=\frac{2x^2-x^2+x}{4x-2x+2}=\frac{x^2+x}{2x+2}=\frac{x}{2}$.

2.2.36 ★★ 化简 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$, 并由此猜想化简 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}$ (n 为正整数)的结果.

解析: 考虑到原式的特点,采用分步通分的方法较为简便.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}&=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}\\&=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{8}{1-x^8}.\end{aligned}$$

由此可猜想 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$

2.2.37 ★★ 化简 $\frac{m}{x(x+m)}+\frac{m}{(x+m)(x+2m)}+\frac{m}{(x+2m)(x+3m)}+\cdots+\frac{m}{[x+(n-1)m](x+nm)}.$

解析: 对原式显然不能直接通分,注意到每个分母的两个因式的差均为分子 m ,由拆项法,得原式 $=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+m}\right)+\left(\frac{1}{x+m}-\frac{1}{x+2m}\right)+\left(\frac{1}{x+2m}-\frac{1}{x+3m}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{x+(n-1)m}-\frac{1}{x+nm}\right]=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+nm}=\frac{nm}{x(x+nm)}.$

2.2.38 ★★ 化简 $\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}+\frac{b-c}{(b-a)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}.$

解析: 原式 $=\frac{(a-c)+(c-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(b-a)+(a-c)}{(b-a)(a-c)}+\frac{(c-b)+(b-a)}{(b-c)(b-a)}=-\frac{1}{c-b}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-a}-\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{2}{b-c}.$

四、比及比例

2.2.39 ★★ 填空:

(1) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, 则 $\frac{a+2b}{2a-b} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 已知 $\frac{3a-4b}{2a-3b} = \frac{7}{4}$, 则 $\frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{3}{4}$, 则 $\frac{3a+2c-e}{3b+2d-f} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(4) 已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$, 则 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: (1) 方法 1 由 $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, 得 $a = \frac{3}{5}b$. 代入 $\frac{a+2b}{2a-b}$, 化简得 13.

方法 2 设 $a = 3t$, $b = 5t$, 则 $\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{3t+10t}{6t-5t} = 13$.

(2) 根据比例的基本性质, 得 $7(2a-3b) = 4(3a-4b)$. 化简得 $2a = 5b$, 即

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{2}.$$

(3) 根据等比性质, 应填 $\frac{3}{4}$.

(4) 设 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$, 则 $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 4k$, 原式 =

$$\frac{2k \cdot 3k + 3k \cdot 4k + 4k \cdot 2k}{(2k)^2 + (3k)^2 + (4k)^2} = \frac{26k^2}{29k^2} = \frac{26}{29}.$$

2.2.40 ★★ 填空:

(1) 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则称 d 为 a 、 b 、 c 的第四比例项. 数 6、4、5 的第四比例项是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, 则称 b 为 a 、 c 的比例中项. 数 12、3 的比例中项是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析: (1) 设第四比例项为 d , 则由 $\frac{6}{4} = \frac{5}{d}$, 得 $d = \frac{4 \times 5}{6} = \frac{10}{3}$.

(2) 设比例中项为 x , 则由 $\frac{12}{x} = \frac{x}{3}$, 得 $x^2 = 36$, $x = \pm 6$.

2.2.41 ★★ 下列命题中正确的是() .

(A) 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a}{b} = \frac{c+m}{d+m}$ (B) 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$

(C) 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{b+c}{d}$ (D) 若 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$, 则 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

解析: 根据比例的基本性质及分式性质, (A)、(C) 错误; (D) 中由条件应得到

$\frac{a}{b} = \pm \frac{c}{d}$. 正确的是 B.

2.2.42 ★★ 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($a \neq b, c \neq d$), 求证: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

解析: 由 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 可得 $\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$, 即 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$. 两等式两边分别相除, 得 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (这一命题通常称为合分比定理).

2.2.43 ★ 解答下列实际问题:

(1) 在比例尺为 $1:100000$ 的地图上, 量得甲、乙两地的距离是 2.5 cm , 求甲、乙两地的实际距离;

(2) 甲、乙两地相距 300 km , 则在比例尺为 $1:2000000$ 的地图上, 甲、乙两地的距离是多少?

解析: (1) 甲、乙两地的实际距离为 $2.5\text{ cm} \times 100000 = 250000\text{ cm} = 2.5\text{ km}$.

(2) $300\text{ km} = 3 \times 10^7\text{ cm}$. 设甲、乙两地在地图上的距离为 $d\text{ cm}$, 则 $\frac{d}{3 \times 10^7} = \frac{1}{2 \times 10^6}$. 解得 $d = 15(\text{cm})$.

2.2.44 ★★ 求下列各分式的值:

(1) 已知 $\frac{x}{y} = 2$, 求 $\frac{2x^2 - 3xy + y^2}{x^2 + 2y^2}$ 的值;

(2) 若 $6x^2 - 5xy + y^2 = 0$ ($x, y \neq 0$), 求 $\frac{2x - 3y}{2x + 3y}$ 的值.

解析: (1) 方法 1 由 $\frac{x}{y} = 2$, 得 $x = 2y$, $y \neq 0$. 所以原式 = $\frac{2(2y)^2 - 3(2y)y + y^2}{(2y)^2 + 2y^2} = \frac{3y^2}{6y^2} = \frac{1}{2}$.

方法 2 原式的分子与分母都除以不为 0 的整式 y^2 , 得原式 = $\frac{\frac{2x^2}{y^2} - \frac{3x}{y} + 1}{\frac{x^2}{y^2} + 2} =$

$$\frac{2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1}{2^2 + 2} = \frac{1}{2}.$$

(2) 由 $6x^2 - 5xy + y^2 = 0$, 得 $y = 3x$, 或 $y = 2x$. 当 $y = 3x$ 时, 原式 = $-\frac{7}{11}$;

当 $y = 2x$ 时, 原式 = $-\frac{1}{2}$.

2.2.45 ★★ 已知 $x:y = 3:5$, $y:z = 2:3$, 求 $\frac{x+y-z}{2x-y+z}$ 的值.

解析: 方法 1 由 $x:y = 3:5$, $y:z = 2:3$, 得 $x:y:z = 6:10:15$. 用题 2.2.39(4) 的方法, 可求得原式 $= \frac{1}{17}$.

方法 2 由 $x = \frac{3}{5}y$, $z = \frac{3}{2}y$, 得原式 $= \frac{\frac{3}{5}y+y-\frac{3}{2}y}{\frac{6}{5}y-y+\frac{3}{2}y} = \frac{1}{17}$.

2.2.46 ★★ 解答下列问题:

(1) 已知 $2x = 3y = 4z$, 求 $x:y:z$ 的值;

(2) 已知 $\triangle ABC$ 中三条高之比为 $h_a:h_b:h_c = 4:3:5$, 求这三条高所对应的三边之比 $a:b:c$ 的值.

解析: (1) 方法 1 2、3、4 的最小公倍数是 12, 将等式 $2x = 3y = 4z$ 的各个部分都除以 12, 得 $\frac{2x}{12} = \frac{3y}{12} = \frac{4z}{12}$, $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$, 即 $x:y:z = 6:4:3$.

方法 2 设 $2x = 3y = 4z = t$, 则 $x = \frac{t}{2}$, $y = \frac{t}{3}$, $z = \frac{t}{4}$, 则 $x:y:z = \frac{t}{2} : \frac{t}{3} : \frac{t}{4} = 6:4:3$.

(2) 根据三角形面积公式, 得 $\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$. 又由 $h_a:h_b:h_c = 4:3:5$, 得 $4a = 3b = 5c$. 用(1) 中方法可得 $a:b:c = 15:20:12$.

2.2.47 ★★ 已知 $2x-3y+z=0$, $3x-2y-6z=0$, 且 $xyz \neq 0$, 求下列各式的值:

$$(1) x:y:z;$$

$$(2) \frac{x^2+y^2+z^2}{2x^2+y^2-z^2}.$$

解析: 将 z 看作字母系数, 由 $\begin{cases} 2x-3y+z=0, \\ 3x-2y-6z=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4z, \\ y=3z. \end{cases}$ 所以:

$$(1) \text{原式} = 4z:3z:z = 4:3:1.$$

$$(2) \text{原式} = \frac{(4z)^2+(3z)^2+z^2}{2(4z)^2+(3z)^2-z^2} = \frac{26z^2}{40z^2} = \frac{13}{20}.$$

2.2.48 ★★ 已知直角三角形的三边分别为 a , $a+b$, $a+2b$, 求 $a:b$ 的值.

解析: 由于 a , $a+b$, $a+2b$ 是三角形的三边, 所以 $a>0$, $a+2b>0$. ① 若 $b>0$, 由勾股定理得 $a^2+(a+b)^2=(a+2b)^2$, 化简得 $a^2-2ab-3b^2=0$, 解得 $a=-b$ (不合要求) 或 $a=3b$, 所以 $a:b=3:1$. ② 若 $b<0$, 则 $a^2=(a+b)^2+(a+2b)^2$, 化简得 $a^2+6ab+5b^2=0$, 解得 $a=-b$ (不合要求) 或 $a=-5b$, 所以 $a:b=5:$

(-1).

综合上述, $a:b=3:1$ 或 $5:(-1)$.

2.2.49 ★★ 已知 $x = \frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c}$, 求 x 的值.

解析: 本题有两种情况:

(1) 当 $a+b+c \neq 0$ 时, 根据等比性质, 得 $x = \frac{c+a+b}{2a+2b+2c} = \frac{1}{2}$;

(2) 当 $a+b+c=0$ 时, 则 $a+b=-c$, 得 $x=-1$.

五、与分式有关的代数式变换

2.2.50 ★★ 已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$, 求 $\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$ 的值.

解析: 方法 1 分式的分子与分母都除以不为 0 的整式 xy , 则原式 =

$$\frac{\frac{2}{y} + 3 - \frac{2}{x}}{\frac{1}{y} - 2 - \frac{1}{x}} = \frac{2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + 3}{\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) - 2} = \frac{2 \times (-3) + 3}{-3 - 2} = \frac{3}{5}.$$

方法 2 由 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$, 去分母得 $y-x=3xy$. 故原式 =

$$\frac{3xy-2(y-x)}{-2xy-(y-x)} = \frac{3xy-6xy}{-2xy-3xy} = \frac{3}{5}.$$

2.2.51 ★★ 已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$, 求 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的值.

解析: 方法 1 因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$, 则 $(a+b)^2 = ab$, 所以 $a^2 + b^2 = -ab$.
故 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{-ab}{ab} = -1$.

方法 2 等式两边同时乘以 $(a+b)$, 得 $\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = 1$, 即 $1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 = 1$, 所以 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = -1$.

2.2.52 ★★ 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 求 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 及 $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 的值.

解析: 由 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 两边除以不为 0 的 x , 得 $x + \frac{1}{x} = 3$. 故 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$; $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$.

2.2.53 ★★ 已知 $\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ 的值.

解析: 因为 $\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}$, 所以 $x \neq 0$, 所以 $\frac{x^2 - x + 1}{x} = 3$, 即 $x + \frac{1}{x} = 4$.

所以 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$, 所以 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} =$

$$\frac{1}{14 + 1} = \frac{1}{15}.$$

2.2.54 ★★ 给出如下一列分式: $\frac{x^3}{y}, -\frac{x^5}{y^2}, \frac{x^7}{y^3}, -\frac{x^9}{y^4}, \dots$ ($x \neq 0, y \neq 0$).

(1) 从第二个分式开始, 把任意一个分式除以它前面一个分式, 你能发现什么规律?

(2) 根据你发现的规律, 试写出这一列分式中的第 7 个分式. 你还能有其他方法吗?

解析: (1) 易知从第 2 个分式开始, 任意一个分式除以前面一个分式的商都是 $-\frac{x^2}{y}$.

(2) 方法 1 根据(1)中的结论, 从第 2 个分式开始, 任意一个分式都等于前面一个分式乘以 $-\frac{x^2}{y}$. 所以第 2 个分式为 $\frac{x^3}{y} \cdot \left(-\frac{x^2}{y}\right)$, 第 3 个分式为 $\frac{x^3}{y} \cdot \left(-\frac{x^2}{y}\right)^2, \dots$, 第 7 个分式为 $\frac{x^3}{y} \cdot \left(-\frac{x^2}{y}\right)^6 = \frac{x^{15}}{y^7}$.

方法 2 观察已给出分式的规律: 分母都是字母 y 的幂, 指数与这个分式排列的序号相同, 则第 7 个分式的分母是 y^7 ; 分子都是 x 的幂, 从第 2 个分式开始指数都比前一个分式中 x 的指数大 2, 则第 7 个分式中 x 的指数应比第 4 个分式中的 9 大 6, 即为 15; 第奇数个分式的符号为正. 综上所述, 第 7 个分式应是 $\frac{x^{15}}{y^7}$.

方法 3 参照方法 2 中的分析, 第 n 个分式的分母应是 y^n ; 各个分式分子上 x 的指数是从 3 开始的奇数, 故第 n 个分式的分子应是 x^{2n+1} ; 因为第奇数个分式的符号为正, 第偶数个分式的符号为负, 所以分式的系数可以看作 $(-1)^{n+1}$. 综上所述, 这一序列中第 n 个分式是 $(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{y^n}$, 则第 7 个分式应是 $\frac{x^{15}}{y^7}$.

2.2.55 ★★ 已知 $\frac{x+6}{x^2 - 3x - 4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}$ (A, B 是常数), 求 A, B 的值.

解析: 方法 1 $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{(A+B)x - 4A + B}{x^2 - 3x + 4}$.

由题意,得 $\begin{cases} A+B=1, \\ -4A+B=6. \end{cases}$ 解这个方程组得 $\begin{cases} A=-1, \\ B=2. \end{cases}$

方法 2 分别取特殊值 $x=0, x=-2$, 可得方程组 $\begin{cases} A-\frac{1}{4}B=-\frac{3}{2}, \\ -A-\frac{1}{6}B=\frac{2}{3}. \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} A=-1, \\ B=2. \end{cases}$$

方法 3 等式两边同时乘以 $(x+1)(x-4)$, 去分母得 $A(x-4)+B(x+1)=x+6$. 令 $x=-1$, 得 $A=-1$; 令 $x=4$, 得 $B=2$.

2.2.56 ★★ 已知 $a+b+c=0$, 求 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 的值.

解析: 由已知 $a+b+c=0$, 得 $a+c=-b, a+b=-c, b+c=-a$. 所以原式 $=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}=-1-1-1=-3$.

2.2.57 ★★ 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 中三边的长, 试比较 $\frac{c}{a+b}$ 和 $\frac{c^2}{(a+b)^2}$ 的大小.

解析: 方法 1 求出这两个分式的差 $\frac{c}{a+b}-\frac{c^2}{(a+b)^2}=\frac{c(a+b)-c^2}{(a+b)^2}=\frac{c(a+b-c)}{(a+b)^2}$. 因为 $a>0, b>0, c>0, a+b>c$, 所以 $\frac{c}{a+b}-\frac{c^2}{(a+b)^2}>0$, 即 $\frac{c}{a+b}>\frac{c^2}{(a+b)^2}$.

方法 2 因为 a, b, c 是三角形三边的长, 所以 $0< c < a+b$, 所以 $0<\frac{c}{a+b}<1$, 因此 $\frac{c}{a+b}>\frac{c^2}{(a+b)^2}$.

2.2.58 ★★ 甲、乙两位采购员同去一家饲料公司购买两次饲料. 两次的价格有变化, 两位采购员的购买方式也不同, 其中甲每次购买 1 000 千克, 乙每次都用 800 元. 问:

(1) 甲、乙所购饲料的平均单价各是多少?

(2) 谁的购买方式更合算?

解析: (1) 设两次购买饲料的单价分别为 a 元/千克和 b 元/千克(a, b 为正数, 且 $a \neq b$). 甲所购饲料的平均单价为 $\frac{1000a+1000b}{2000}=\frac{a+b}{2}$ (元/千克). 乙所购饲

料的平均单价为 $\frac{800+800}{\frac{800}{a}+\frac{800}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$ (元/千克).

(2) 甲、乙所购饲料的平均单价的差是: $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$. 由于 a, b 均为正数, 且 $a \neq b$, 所以 $\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$ 也是正数. 因此 $\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$. 故乙的购买方式更合算.

2.2.59 已知 $\frac{ab}{a+b}=\frac{3}{2}$, $\frac{bc}{b+c}=3$, $\frac{ca}{c+a}=\frac{1005}{1006}$, 求 $\frac{abc}{ab+bc+ac}$ 的值.

解析: 由 $\frac{ab}{a+b}=\frac{3}{2}$, 得 $\frac{a+b}{ab}=\frac{2}{3}$, 故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{3}$. 同样变形, 由 $\frac{bc}{b+c}=3$, 得 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$. 由 $\frac{ca}{c+a}=\frac{1005}{1006}$, 得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{1006}{1005}$. 三式相加, 得 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{2011}{1005}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2011}{2010}$, 即 $\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{2011}{2010}$, 所以 $\frac{abc}{ab+bc+ac}=\frac{2010}{2011}$.

2.2.60 已知 $abc=1$. 求证: $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$.

解析: 由于 $abc=1$, 因此 $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{a+ab+abc}+\frac{ab}{ab+abc+abca}=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{1+a+ab}+\frac{ab}{1+a+ab}=1$.

2.2.61 已知 x, y, z 为三个不相等的实数, 且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$.

求证: $x^2y^2z^2=1$.

解析: 由 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$, 得 $x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}$. 故得 $yz=\frac{y-z}{x-y}$.

同理可得 $zx=\frac{z-x}{y-z}$, $xy=\frac{x-y}{z-x}$. 所以 $x^2y^2z^2=\frac{y-z}{x-y} \cdot \frac{z-x}{y-z} \cdot \frac{x-y}{z-x}=1$.

2.2.62 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 求证: $a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}+d^{-2}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{abcd}$.

解析: 由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 得 $ad=bc$. 故 $a^2d^2=abcd$, $b^2c^2=abcd$. 因此 $a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}+d^{-2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=\frac{a^2+d^2}{a^2d^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}=\frac{a^2+d^2}{abcd}+\frac{b^2+c^2}{abcd}=$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{abcd}.$$

2.2.63 ★★ 阅读下列材料,解答所提出的问题:

对方程 $x+x^{-1}=c+c^{-1}$ (c 是不为 0 的常数), 我们可以这样解: 凭观察容易得到方程的两个根 $x_1 = c$, $x_2 = c^{-1}$; 由整理后所得方程是一元二次方程, 我们知道方程至多有两个根, 所以它们确是原方程的所有根. 这种方法称为解方程的观察法.

同样, 我们可以得到:

关于 x 的方程 $x+2x^{-1}=c+2c^{-1}$ 的解是 $x_1 = c$, $x_2 = 2c^{-1}$;

关于 x 的方程 $x+3x^{-1}=c+3c^{-1}$ 的解是 $x_1 = c$, $x_2 = 3c^{-1}$ ……

(1) 猜想关于 x 的方程 $x+mx^{-1}=c+mc^{-1}$ (常数 m, c 不为 0) 的解是什么? 用方程解的概念进行验证;

(2) 试根据上述归纳, 解关于 x 的方程 $x+2(x-1)^{-1}=c+2(c-1)^{-1}$.

解析: (1) 方程的解是 $x_1 = c$, $x_2 = -mc^{-1}$. 把 $x_1 = c$ 代入原方程, 得左边 $= c+mc^{-1} =$ 右边; 把 $x_2 = -mc^{-1}$ 代入原方程, 得左边 $= -mc^{-1}-m(-mc^{-1})^{-1} = -mc^{-1}+mm^{-1}c = c-mc^{-1} =$ 右边. 所以 $x_1 = c$, $x_2 = -mc^{-1}$ 都是原方程的解.

(2) 设 $x-1=y$, 则 $x=y+1$, 所以原方程变形为 $y+1+2(y+1-1)^{-1}=c+2(c-1)^{-1}$, 即 $y+2y^{-1}=(c-1)+2(c-1)^{-1}$, 由观察法得到解为 $y_1=c-1$, $y_2=2(c-1)^{-1}$. 从而得到原方程的解是 $x_1 = c$, $x_2 = 2(c-1)^{-1}+1$.

§ 2.3 二次根式

一、二次根式的基本性质

2.3.1 ★ 直接写出下列各式中字母 x 的取值范围:

$$(1) \sqrt{3x-5}: \underline{\hspace{2cm}}; \quad (2) \frac{x}{\sqrt{2x+1}}: \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \frac{\sqrt{-x+2}}{x+1}: \underline{\hspace{2cm}}; \quad (4) \sqrt{-(x-1)^2}: \underline{\hspace{2cm}}.$$

解析: 二次根式中, 被开方式的值必须是非负数, 如果分母中含有字母, 则分母不能为零.

$$(1) \text{由 } 3x-5 \geqslant 0, \text{ 得 } x \geqslant \frac{5}{3}.$$

$$(2) \text{由 } 2x+1 > 0, \text{ 得 } x > -\frac{1}{2}.$$

$$(3) \text{由 } \begin{cases} -x+2 \geqslant 0, \\ x+1 \neq 0, \end{cases} \text{ 得 } x \leqslant 2 \text{ 且 } x \neq -1.$$

(4) 由 $-(x-1)^2 \geqslant 0$, 得 $(x-1)^2 \leqslant 0$, 所以只能 $x=1$.

2.3.2 ★★ 已知 $ab < 0$, 化简 $\sqrt{ab^2}$, 得_____.

解析: 由 $ab < 0$, 且 $ab^2 > 0$, 得 $a > 0$, $b < 0$, 所以 $\sqrt{ab^2} = |b| \sqrt{a} = -b\sqrt{a}$.

2.3.3 ★ 设 x 是任意实数, 下列各式中一定有意义的是().

(A) $\sqrt{x+1}$

(B) $\sqrt{-x^2+2x-2}$

(C) $\sqrt{x^2+2x+1}$

(D) $\sqrt{x^2-1}$

解析: 二次根式的被开方数应是非负数. 以上根式中 $\sqrt{-x^2+2x-2} = \sqrt{-(x-1)^2-1}$ 没有意义, 它不是二次根式; 而 $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2}$, 被开方式的值总是非负数. 故选 C.

2.3.4 ★ 下列命题中, 正确的是().

(A) 若 $a > 0$, 则 $\sqrt{a^2} = a$ (B) 若 $\sqrt{a^2} = a$, 则 $a > 0$

(C) 若 a 为任意实数, 则 $\sqrt{a^2} = \pm a$ (D) 若 a 为任意实数, 则 $(\sqrt{a})^2 = \pm a$

解析: 因为 $\sqrt{a^2} = |a|$, $(\sqrt{a})^2 = a$, 结果总是唯一的非负数. 而(B)中的结论应为 $a \geqslant 0$. 故选 A.

2.3.5 ★★ 化简 $(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}$, 得().

(A) $\sqrt{1-a}$ (B) $\sqrt{a-1}$ (C) $-\sqrt{1-a}$ (D) $-\sqrt{a-1}$

解析: 方法 1 由已知二次根式有意义, 得 $\frac{1}{1-a} > 0$, 所以 $1-a > 0$, 这是本题的隐含条件, 从而原式 $= -(1-a)\sqrt{\frac{1}{1-a}} = -\sqrt{(1-a)^2 \cdot \frac{1}{1-a}} = -\sqrt{1-a}$.

方法 2 由条件 $1-a > 0$, 得原式 $= (a-1)\sqrt{\frac{1-a}{(1-a)^2}} = (a-1) \cdot \frac{\sqrt{1-a}}{|1-a|} = (a-1) \cdot \frac{\sqrt{1-a}}{-(a-1)} = -\sqrt{1-a}$.

方法 3 取 $a=0$, 原式 $= -1$. 而当 $a=0$ 时, (A) 的值为 1, (B)、(D) 没有意义, 所以应选 C.

2.3.6 ★ 化简:

(1) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$;

(2) $\sqrt{(a-3)^2}$.

解析: 化简 $\sqrt{a^2}$ 类型的二次根式, 先写成绝对值 $|a|$, 再确定绝对值内代数式的符号, 如果不能确定, 则应分类讨论.

(1) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$.

$$(2) \sqrt{(a-3)^2} = |a-3| = \begin{cases} a-3 & (a \geq 3), \\ 3-a & (a < 3). \end{cases}$$

2.3.7 ★★ 在二次根式 $\sqrt{-xy}$ 和 $\sqrt{x-y}$ 中, 确定 x, y 的取值范围.

解析: 由二次根式有意义的条件, 可得 $\begin{cases} -xy \geq 0, \\ x-y \geq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} xy \leq 0, \\ x \geq y. \end{cases}$ 所以 x, y 的

取值范围是 $x \geq 0$ 且 $y \leq 0$.

2.3.8 ★★ 已知 $y = \sqrt{x-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}-x} - \frac{3}{2}$, 求代数式 x^{2y} 的值.

解析: 由 $\begin{cases} x-\frac{1}{2} \geq 0, \\ \frac{1}{2}-x \geq 0, \end{cases}$ 得 $x = \frac{1}{2}$, 从而 $y = -\frac{3}{2}$. 所以 $x^{2y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

2.3.9 ★★ 已知 $-2 \leq a \leq \frac{1}{2}$, 化简 $\sqrt{1-4a+4a^2} + \sqrt{a^2+4a+4}$.

解析: 由 $-2 \leq a \leq \frac{1}{2}$, 得 $a+2 \geq 0, 2a-1 \leq 0$. 原式 $= \sqrt{(1-2a)^2} + \sqrt{(a+2)^2} = |1-2a| + |a+2| = 1-2a+a+2 = 3-a$.

2.3.10 ★★ 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 三边的长, 化简 $\sqrt{(a+b-c)^2} - \sqrt{(b-c-a)^2}$.

解析: 由三角形的三边关系可得 $a+b-c > 0, b-c-a < 0$. 所以, 原式 $= |a+b-c| - |b-c-a| = a+b-c+b-c-a = 2b-2c$.

2.3.11 ★★ 已知 a, b 两实数在数轴上对应位置如图所示, 化简 $\sqrt{(a-1)^2} - \sqrt{(b+2)^2} + \sqrt{(a+b)^2}$.

解析: 由图可知: $a-1 > 0, b+2 < 0, a+b < 0$. 所以原式 $= |a-1| - |b+2| + |a+b| = a-1 + b+2-a-b = 1$.

第2.3.11题

2.3.12 ★★ 已知 $a < -8$, 化简 $|4 - \sqrt{(4+a)^2}|$.

解析: 因为 $a < -8$, 所以 $4+a < 0$, $4+a < 0$, 原式 $= |4 - |4+a|| = |4+4+a| = |8+a| = -8-a$.

2.3.13 ★★ 在下列等式中, 确定 x 的取值范围:

$$(1) \sqrt{(x+4)^2} = -x-4; \quad (2) \sqrt{x^2(x-1)} = x\sqrt{x-1}.$$

解析: (1) 由 $\sqrt{(x+4)^2} = |x+4| = -(x+4)$, 得 $x+4 \leq 0$, 即 $x \leq -4$.

(2) 由 $\sqrt{x^2(x-1)} = |x|\sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1}$, 得 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \end{cases}$ 故 x 的取值范

围为 $x \geqslant 1$.

2.3.14 ★★ 已知 $\sqrt{x^2 - 4}$ 与 $\sqrt{y+1}$ 互为相反数, 求 $x+y$ 的值.

解析: 根据题意, 得 $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y+1} = 0$. 由二次根式的非负性, 得 $\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ y+1 = 0, \end{cases}$ 故 $\begin{cases} x = \pm 2, \\ y = -1. \end{cases}$ 所以 $x+y = 1$ 或 -3 .

2.3.15 ★★ 当 x 取何值时, 代数式 $5 - \sqrt{4-3x}$ 的值最大, 最大值是多少?

解析: 因为 $\sqrt{4-3x} \geqslant 0$, 所以当 $\sqrt{4-3x}$ 取最小值 0 时, $5 - \sqrt{4-3x}$ 有最大值. 即当 $x = \frac{4}{3}$ 时, $5 - \sqrt{4-3x}$ 的值最大, 最大值是 5.

二、最简二次根式与同类二次根式

2.3.16 ★ 二次根式 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 、 $\sqrt{\frac{1}{50}}$ 、 $\frac{1}{2}\sqrt{98}$ 、 $\sqrt{48}$ 中, 与 $2\sqrt{2}$ 是同类二次根式的有_____个.

解析: 分别化简各式: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{1}{50}} = \frac{1}{10}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{98} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$, $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, 所以与 $2\sqrt{2}$ 是同类二次根式的有 2 个.

2.3.17 ★ 下列各式中, 最简二次根式是() .

- (A) $\sqrt{4a}$ (B) $\sqrt{\frac{ab}{4}}$ (C) $\sqrt{14}$ (D) $\sqrt{0.7}$

解析: 根据最简二次根式的意义, 应选 C.

2.3.18 ★ 下列各组二次根式中, () 是同类二次根式.

- (A) $a\sqrt{a}$ 与 $\frac{1}{2}\sqrt{3a}$ (B) $\sqrt{2a}$ 与 $\sqrt{3a^2}$

- (C) $\sqrt{3a^2}$ 与 $\sqrt{3a^3}$ (D) $2a\sqrt{a}$ 与 $a^3\sqrt{\frac{1}{a}}$

解析: (D) 中 $a^3\sqrt{\frac{1}{a}} = a^2\sqrt{a}$ 与 $2a\sqrt{a}$ 是同类二次根式, 故选 D.

2.3.19 ★★ 化简(字母都是正数):

$$(1) \sqrt{\frac{1}{2}xy^4};$$

$$(2) \sqrt{\frac{3a^2b}{8n^3}};$$

$$(3) \sqrt{x^4+x^2y^2};$$

$$(4) ab\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} (a>b).$$

解析: (1) 原式 $= \sqrt{\frac{y^4}{4} \cdot 2x} = \frac{y^2}{2}\sqrt{2x}$.

$$(2) \text{ 原式} = \sqrt{\frac{a^2}{16n^4} \cdot 6bn} = \frac{a}{4n^2} \sqrt{6bn}.$$

$$(3) \text{ 原式} = \sqrt{x^2(x^2+y^2)} = x\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$(4) \text{ 原式} = ab\sqrt{\frac{a-b}{ab}} = \sqrt{ab(a-b)} = \sqrt{a^2b-ab^2}.$$

2.3.20 ★★ 如果二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $-3\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 能否由此确定 $a=1$? 试举例说明.

解析: 因为 $\sqrt{3a-1}$ 不一定是最简二次根式, 例如当 $a=3$ 时, $\sqrt{3a-1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 与 $-3\sqrt{2}$ 是同类二次根式. 所以不能确定 $a=1$.

2.3.21 ★★ 已知 $\sqrt{43-a}$ 与 $\sqrt{8}$ 是同类二次根式, 解答下列问题:

(1) 若 a 是正整数, 则符合条件的 a 值有几个? 试写出最大值和最小值;

(2) 若 a 是整数, 则符合条件的 a 值有几个, 是否存在最大值或最小值, 为什么?

解析: (1) 当 $43-a=2, 8, 18, 32$, 即 $a=41, 35, 25, 11$ 时, $\sqrt{43-a}$ 与 $\sqrt{8}$ 都是同类二次根式. 所以符合条件的正整数 a 有四个, 最大值 41, 最小值 11.

(2) 当 $43-a=2k^2$ (k 是整数) 时, $\sqrt{43-a}$ 与 $\sqrt{8}$ 都是同类二次根式, 其中 a 可取负整数, 所以符合条件的整数 a 有无数个. 存在最大值 41, 不存在最小值.

三、二次根式的运算

2.3.22 ★ 使等式 $\sqrt{\frac{x+3}{2-x}} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2-x}}$ 成立的条件是_____.

解析: 由 $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ 2-x > 0, \end{cases}$ 解得 $-3 \leqslant x < 2$.

2.3.23 ★ 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$, $b = \sqrt{3}-2$, 则 a, b 的关系是_____.

解析: 方法 1 $a+b = \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \sqrt{3}-2 = \frac{1+(\sqrt{3})^2-2^2}{\sqrt{3}+2} = 0$, 故应填 $a+b=0$.

方法 2 分母有理化, $a=2-\sqrt{3}$, 则显然 $a+b=0$.

2.3.24 ★ 下列运算中正确的是() .

(A) $\sqrt{5}-\sqrt{3}=\sqrt{2}$

(B) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=5$

(C) $a\sqrt{b}+2\sqrt{b}=2a\sqrt{b}$

(D) $\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}=x-y$

解析：选 B.

2.3.25 ★★ 运算① $\sqrt{4\frac{1}{9}} = 2\frac{1}{3}$, ② $\sqrt{(-2)^6 \times 3} = -8\sqrt{3}$, ③ $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{5a \cdot a} = \sqrt{5a}$, ④ $\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$ 中, 正确的有()个.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解析：显然式①、②是错误的; 式④的分母有理化后, 分母应为 $x-1$, 式③符合二次根式乘法法则, 运算正确, 故应选 A.

2.3.26 ★ 求代数式 $\frac{1}{2}x\sqrt{4x} - 6x\sqrt{\frac{x}{9}} - 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$ 的值, 其中 $x = \frac{1}{4}$.

解析：先化简: 原式 $= x\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} = -3x\sqrt{x}$. 当 $x = \frac{1}{4}$ 时, 原式 $= -3 \times \frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{8}$.

2.3.27 ★ 将下列各式分母有理化:

$$(1) \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}; \quad (2) \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}.$$

解析：(1) 原式 $= \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$.

$$(2) \text{原式} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

2.3.28 ★★ 计算:

$$(1) 2\sqrt{5}(4\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 2\sqrt{5});$$

$$(2) 4\sqrt{\frac{9}{8}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{49}{50}} - \sqrt{\frac{9}{28}} \div \sqrt{1\frac{1}{35}};$$

$$(3) \frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{4}{1-\sqrt{3}};$$

$$(4) (-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{6}) - \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} - |1-3\sqrt{2}|.$$

解析：(1) 原式 $= 2\sqrt{5}(8\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 10$.

$$(2) \text{原式} = 4 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{9}{8} \times \frac{49}{50}} - \sqrt{\frac{9}{28} \times \frac{35}{36}} = \frac{21}{10} - \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

$$(3) \text{原式} = \frac{(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 5 - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2 =$$

$$7 - \sqrt{3}.$$

$$(4) \text{ 原式} = 3\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1 = -\sqrt{2}.$$

2.3.29 ★★ 计算:

$$(1) (3\sqrt{2a^3} - 2\sqrt{a}) \cdot \sqrt{a};$$

$$(2) (\sqrt{a^3b} - 3ab + \sqrt{ab^3}) \div \sqrt{ab}, \text{ 其中 } a > 0, b > 0.$$

$$\text{解析: (1) 原式} = (3a\sqrt{2a} - 2\sqrt{a}) \cdot \sqrt{a} = 3a\sqrt{2a^2} - 2a = 3\sqrt{2}a^2 - 2a.$$

$$(2) \text{ 原式} = \sqrt{a^3b} \div \sqrt{ab} - 3ab \div \sqrt{ab} + \sqrt{ab^3} \div \sqrt{ab} = a - 3\sqrt{ab} + b.$$

2.3.30 ★★ 计算:

$$(1) (5+2\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \div 3\sqrt{2}; \quad (2) (1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$

$$\text{解析: (1) 原式} = (5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6}) \div 3\sqrt{2} = 1 \div 3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$(2) \text{ 原式} = (1-\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 3 - 2\sqrt{2} - 3 = -2\sqrt{2}.$$

2.3.31 ★★ 化简:

$$(1) \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}; \quad (2) \left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \div \sqrt{ab} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

$$\text{解析: (1) 原式} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{x}+$$

$$\sqrt{y} = 0.$$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{2b}{a-b}.$$

2.3.32 ★★ 计算:

$$(1) (2-\sqrt{3})^{2010} \cdot (2+\sqrt{3})^{2011}; \quad (2) (3+2\sqrt{2})^{10} \cdot (1-\sqrt{2})^{21}.$$

$$\text{解析: (1) 注意到 } (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1, \text{ 可以逆用公式 } (ab)^n = a^n \cdot b^n, \text{ 可得原式} = [(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^{2010} \cdot (2+\sqrt{3}) = 1^{2010} \cdot (2+\sqrt{3}) = 2+\sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 注意到 } (1-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{2}, \text{ 原式} = (3+2\sqrt{2})^{10} \cdot [(1-\sqrt{2})^2]^{10} \cdot (1-\sqrt{2}) = (3+2\sqrt{2})^{10} \cdot (3-2\sqrt{2})^{10} \cdot (1-\sqrt{2}) = [(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})]^{10} \cdot (1-\sqrt{2}) = 1^{10} \cdot (1-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}.$$

2.3.33 ★★ 已知 $x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$, $y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$, 求代数式 $x^2 + xy + y^2$ 的值.

解析: 注意到 $x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy$, 只需求出 $x+y$ 和 xy 的值.

$$\text{显然 } xy = 1, \text{ 而 } x+y = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})} + \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})} = (\sqrt{6}-$$

$\sqrt{5})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 = 11 - 2\sqrt{30} + 11 + 2\sqrt{30} = 22$. 所以 $x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = 22^2 - 1 = 483$.

2.3.34 ★★ 已知 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 求 $\frac{a^2-a-6}{a+2} - \frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值.

解析: 原式 $= \frac{(a-3)(a+2)}{a+2} - \frac{|a-1|}{a(a-1)} = a-3 - \frac{|a-1|}{a(a-1)}$. 因为 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$, 所以 $a-1 = 1-\sqrt{3} < 0$. 原式 $= a-3 + \frac{1}{a} = 2-\sqrt{3}-3+2+\sqrt{3} = 1$.

2.3.35 ★★ 解下列方程或方程组:

$$(1) \sqrt{2}x-1=\sqrt{3}x-\sqrt{2}; \quad (2) \begin{cases} x+\sqrt{2}y=2\sqrt{2}, & ① \\ \sqrt{2}x-y=3\sqrt{2}. & ② \end{cases}$$

解析: (1) 原方程可化为 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})x = 1-\sqrt{2}$, 所以 $x = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2$.

(2) 由①× $\sqrt{2}$ -②, 得 $3y = 4-3\sqrt{2}$, 解得 $y = \frac{4}{3}-\sqrt{2}$. 把 $y = \frac{4}{3}-\sqrt{2}$ 代入

$$\text{①, 得 } x = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}. \text{ 所以原方程组的解是} \begin{cases} x = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}, \\ y = \frac{4}{3} - \sqrt{2}. \end{cases}$$

四、二次根式的综合应用

2.3.36 ★★ 长方体中有一个公共顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2} \text{ cm}^2$ 、 $\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 、 $\sqrt{6} \text{ cm}^2$, 则长方体的体积为 _____.

解析: 设长方体中同一顶点的三条棱长分别为 $x \text{ cm}$ 、 $y \text{ cm}$ 、 $z \text{ cm}$, 由题意得

$$\begin{cases} xy = \sqrt{2}, \\ xz = \sqrt{3}, \\ yz = \sqrt{6}. \end{cases}$$

2.3.37 ★★ 已知 $x + \frac{1}{x} = 4$, 其中 $0 < x < 1$, 则 $x - \frac{1}{x}$ 的值为 _____.

解析: 已知等式两边平方, 得 $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 16$. 两边同时减去 4, 得 $x^2 - 2 +$

$\frac{1}{x^2} = 12$, 即 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 12$. 因为 $0 < x < 1$, 所以 $x - \frac{1}{x} < 0$, 则 $x - \frac{1}{x} = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$.

2.3.38 ★★ 计算:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2010}}\right)(\sqrt{2011}+1).$$

解析: 先将前一个括号内各式分母有理化, 得原式 $= (\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2011}-\sqrt{2010})(\sqrt{2011}+1) = (\sqrt{2011}-1)(\sqrt{2011}+1) = 2010$.

2.3.39 ★★ 判断下列三个等式是否成立, 并解答以下两个问题:

$$\textcircled{1} \sqrt{2 \frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \textcircled{2} \sqrt{3 \frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \textcircled{3} \sqrt{4 \frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}.$$

(1) 猜想 $\sqrt{5 \frac{5}{24}}$ 的变形结果, 并加以说明;

(2) 试用含 n (n 为大于 1 的自然数) 的等式表示这一规律.

解析: 三个等式都成立.

$$(1) \text{猜想 } \sqrt{5 \frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}. \text{ 说明: } \sqrt{5 \frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{125}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}.$$

$$(2) \text{对自然数 } n (n \geq 2), \text{ 都有 } \sqrt{n + \frac{n}{n^2 - 1}} = n\sqrt{\frac{n}{n^2 - 1}}.$$

$$\text{说明: } \sqrt{n + \frac{n}{n^2 - 1}} = \sqrt{\frac{n^3 - n + n}{n^2 - 1}} = \sqrt{\frac{n^3}{n^2 - 1}} = n\sqrt{\frac{n}{n^2 - 1}}.$$

2.3.40 ★★ 观察与思考:

因为 $(\sqrt{2}-1)^2 = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$;

同样, 我们也有 $7+4\sqrt{3} = 4+4\sqrt{3}+3 = (2+\sqrt{3})^2$, 所以 $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$.

试根据以上规律, 化简下列各式:

$$(1) \sqrt{5-2\sqrt{6}}, \quad (2) \sqrt{\frac{9}{4}+\sqrt{2}}.$$

解析: (1) 因为 $5-2\sqrt{6} = 3-2\sqrt{6}+2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$, 所以 $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{\frac{9}{4}+\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{2}}{4}}$, 并且 $9+4\sqrt{2} = 8+2\sqrt{8}+1 = (\sqrt{8}+1)^2$, 所

以 $\sqrt{\frac{9}{4} + \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{8}+1}{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}$.

2.3.41 ★★ 观察下式的化简过程:

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{(2+2\sqrt{6}+3)-5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}.$$

化简 $\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{13}}$, 并将这一问题作尽可能的推广.

解析: 方法 1 注意到 $4\sqrt{10} = 2\sqrt{40} = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{40} + (\sqrt{8})^2 - 13 = (\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 - (\sqrt{13})^2$, 所以 $\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{13}} = \frac{(5+2\sqrt{40}+8)-13}{\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{13}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2-(\sqrt{13})^2}{\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{13}} = 2\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{13}$.

一般地, 我们有 $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}} = \frac{(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}$.

方法 2 原式 $= \frac{4\sqrt{10}(\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{13})}{(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2-(\sqrt{13})^2} = \frac{4\sqrt{10}(\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{13})}{13+4\sqrt{10}-13} = 2\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{13}$.

一般地, 对分母有三项(包括三个无理数或两个无理数、一个有理数)的代数式进行分母有理化, 可以先将其中两项相结合, 分子、分母同时乘以它的有理化因式; 整理后进行第二次分母有理化(本题是特例, 两个有理数正好互为相反数).

2.3.42 ★★ 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x+3y=4\sqrt{xy}$, 求 $\frac{\sqrt{xy}+y}{x+\sqrt{xy}}$ 的值.

解析: 因为 $x > 0, y > 0$ 且 $x-4\sqrt{xy}+3y=0$, 所以 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-3\sqrt{y})=0$, 所以 $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$ 或 $\sqrt{x}-3\sqrt{y}=0$, 因此 $x=y$ 或 $x=9y$. 当 $x=y$ 时, 原式 $= \frac{x+y}{x+y} = 1$; 当 $x=9y$ 时, 原式 $= \frac{\sqrt{9y \cdot y}+y}{9y+\sqrt{9y \cdot y}} = \frac{4y}{12y} = \frac{1}{3}$.

2.3.43 ★★ 已知 $4(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2})=x+y+z+9$, 求 xyz 的值.

解析: 由题意得 $x-4\sqrt{x}+4+(y-1)-4\sqrt{y-1}+4+(z-2)-4\sqrt{z-2}+4=0$, 所以 $(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{y-1}-2)^2+(\sqrt{z-2}-2)^2=0$, 得 $x=4, y=5, z=6$, 故 $xyz=120$.

2.3.44 已知 $\sqrt{x} = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$, 求 $\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$ 的值.

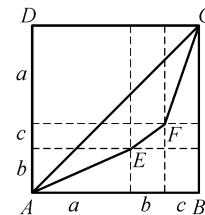
解析: 本题关键是将所给等式变形, 用含 a 的代数式表示 $x+2$ 和 $4x+x^2$.

由 $\sqrt{x} = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$ 两边平方, 得 $x = a - 2 + \frac{1}{a}$, 即 $x+2 = a + \frac{1}{a}$. 再将这一等式两边平方, 得 $x^2 + 4x + 4 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$, 即 $x^2 + 4x = a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}$, 由此得 $x^2 + 4x = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$. 又由题意可知 $a > \frac{1}{a}$, 所以 $\sqrt{4x+x^2} = \left|a - \frac{1}{a}\right| = a - \frac{1}{a}$. 因此原式 $= \frac{a + \frac{1}{a} + a - \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{a} - a + \frac{1}{a}} = a^2$.

2.3.45 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 求证 $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$.

解析: 待证不等式左边的根式, 让人联想起直角三角形中斜边的表达式; 而其右边为 $(a+b+c)$ 的 $\sqrt{2}$ 倍, 又与正方形的对角线有关. 我们借助几何图形给予证明.

作出以 $a+b+c$ 为边长的正方形 $ABCD$, 分别在两边上截取线段 a, b, c , 如图所示, 则 $AE = \sqrt{a^2+b^2}, EF = \sqrt{b^2+c^2}, FC = \sqrt{c^2+a^2}$, 而 $AC = \sqrt{2}(a+b+c)$. 显然, 由 $AE + EF + FC \geq AC$, 可得原不等式成立.



第 2.3.45 题

2.3.46 已知 $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$, 求证: $a^2 + b^2 = 1$.

解析: 方法 1 把已知等式变形为 $a\sqrt{1-b^2} = 1 - b\sqrt{1-a^2}$, 两边平方, 得 $a^2(1-b^2) = 1 - 2b\sqrt{1-a^2} + b^2(1-a^2)$. 整理, 得 $(1-a^2) - 2b\sqrt{1-a^2} + b^2 = 0$, 即 $(\sqrt{1-a^2} - b)^2 = 0$, 从而 $\sqrt{1-a^2} = b$, 所以 $a^2 + b^2 = 1$.

方法 2 本题关键在于化二次根式为有理式, 故设已知等式左边的有理化因式 $a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2} = x$, 将它与原等式相乘, 得 $a^2(1-b^2) - b^2(1-a^2) = x$, 整理得 $a^2 - b^2 = x$, 即 $a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2} = a^2 - b^2$. 将这一等式与原等式相加, 得 $2a\sqrt{1-b^2} = a^2 - b^2 + 1$, 即 $a^2 - 2a\sqrt{1-b^2} + (1-b^2) = 0$. 所以 $(a - \sqrt{1-b^2})^2 = 0$, 从而 $a = \sqrt{1-b^2}$, 所以 $a^2 + b^2 = 1$.

第3章 方程与方程组

§ 3.1 一元一次方程

一、一元一次方程及其解法

3.1.1 ★★ 已知方程 $\frac{2x+a}{2} = 4(x-1)$ 的解为 $x = 3$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: 根据方程解的意义, 把 $x = 3$ 代入原方程, 得 $\frac{2 \times 3 + a}{2} = 4(3-1)$, 解这个关于 a 的方程, 得 $a = 10$.

3.1.2 ★ 对于方程 $\frac{2x+1}{3} - \frac{10x-1}{2} = 1$, 变换正确的是().

- (A) $4x+2-30x+3=1$ (B) $4x+2-30x+1=6$
(C) $4x+2-30x-3=6$ (D) $4x+2-30x+3=6$

解析: 方程两边同时乘以 6, 约去分母, 得 $2(2x+1)-3(10x-1)=6$, 再去括号. 应选 D.

3.1.3 ★★ 解下列方程:

(1) $1 - \frac{1}{3} \left(x - \frac{1+x}{3} \right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \left(2x - \frac{10-7x}{3} \right);$

(2) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}x - 7 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(7 - \frac{3}{5}x \right).$

解析: (1) 去括号, 得 $1 - \frac{1}{3}x + \frac{1+x}{9} = \frac{1}{2}x - x + \frac{10-7x}{6}$,

去分母, 得

$$18 - 6x + 2 + 2x = 9x - 18x + 30 - 21x,$$

解这个方程, 得

$$x = \frac{5}{13}.$$

(2) 这一方程在变换过程中, 宜将 $\left(\frac{3}{5}x - 7 \right)$ 作为一个整体.

方程两边同乘以 6, 得 $2 - 3 \left(\frac{3}{5}x - 7 \right) = 3 - 2 \left(7 - \frac{3}{5}x \right)$,

移项,得

$$-3\left(\frac{3}{5}x - 7\right) + 2\left(7 - \frac{3}{5}x\right) = 3 - 2,$$

即

$$-3\left(\frac{3}{5}x - 7\right) - 2\left(\frac{3}{5}x - 7\right) = 1,$$

关于 $\left(\frac{3}{5}x - 7\right)$ 合并,得

$$-5\left(\frac{3}{5}x - 7\right) = 1.$$

解这个方程,得

$$x = \frac{34}{3}.$$

3.1.4 ★★ 解下列方程:

$$(1) \frac{0.4x + 0.9}{0.6} - \frac{0.1x - 0.5}{0.02} = \frac{0.03 + 0.02x}{0.03};$$

$$(2) \frac{\frac{1}{2}x + 1}{5} - \frac{2 - \frac{1}{3}x}{2} = 1.$$

解析:解这类分子或分母中系数含有分数的方程,通常先应用分数的基本性质,将系数化为整数.

$$(1) \text{原方程化为 } \frac{(0.4x + 0.9) \times 10}{0.6 \times 10} - \frac{(0.1x - 0.5) \times 100}{0.02 \times 100} = \frac{(0.03 + 0.02x) \times 100}{0.03 \times 100},$$

即

$$\frac{4x + 9}{6} - \frac{10x - 50}{2} = \frac{3 + 2x}{3}.$$

去分母,得

$$4x + 9 - 3(10x - 50) = 2(3 + 2x),$$

解这个方程,得

$$x = 5.1.$$

$$(2) \text{原方程化为 } \frac{\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \times 2}{5 \times 2} - \frac{\left(2 - \frac{1}{3}x\right) \times 3}{2 \times 3} = 1,$$

即

$$\frac{x + 2}{10} - \frac{6 - x}{6} = 1.$$

解这个方程,得

$$x = \frac{27}{4}.$$

3.1.5 ★★ 解下列方程:

$$(1) 2\{3[4(5x - 1) - 8] - 20\} - 7 = 1;$$

$$(2) \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) - 3\right] - 2 = x.$$

解析:(1)方法1 去小括号,得 $2\{3[20x - 12] - 20\} - 7 = 1$,

去中括号,得

$$2\{60x - 56\} - 7 = 1,$$

去大括号,得

$$120x - 119 = 1,$$

解这个方程,得

$$x = 1.$$

方法 2 移项,得

$$2\{3[4(5x - 1) - 8] - 20\} = 8,$$

即

$$3[4(5x - 1) - 8] - 20 = 4,$$

移项,两边同时除以 3,得

$$4(5x - 1) - 8 = 8,$$

移项,两边同时除以 4,得

$$5x - 1 = 4,$$

所以

$$x = 1.$$

(2) 根据方程的特征,本题宜先去中括号.

去中括号,得

$$\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) - 2 - 2 = x,$$

去小括号,得

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} - 4 = x,$$

解这个方程,得

$$x = -6.$$

3.1.6 ★★ 分别求出满足下列条件的 a 的值:

(1) 代数式 $\frac{1}{4}a + 4$ 的值比 $\frac{a-8}{3}$ 的值少 1;

(2) 代数式 $\frac{2a-4}{3} - 1$ 与 $\frac{5a+6}{4} - 3$ 的值互为相反数.

解析: 这类问题通常根据题意列出方程,再解方程.

(1) 由题意,得 $\frac{1}{4}a + 4 = \frac{a-8}{3} - 1$, 解这个方程,得 $a = 92$.

(2) 由题意,得 $\frac{2a-4}{3} - 1 + \frac{5a+6}{4} - 3 = 0$, 解这个方程,得 $a = 2$.

3.1.7 ★★ 已知当 $x = 2$ 时,代数式 $2x^2 + (3-c)x + c$ 的值是 10. 求当 $x = -3$ 时,这个代数式的值.

解析: 把 $x = 2$ 代入这个代数式,得 $2 \times 2^2 + (3-c) \times 2 + c = 10$. 解这个方程,得 $c = 4$, 所以原代数式化为 $2x^2 - x + 4$. 则当 $x = -3$ 时,这个代数式的值是 25.

3.1.8 ★★ 解答下列有关两个方程的问题:

(1) 已知关于 x 的方程 $\frac{1}{3}(x+2k) = \frac{1}{2}x + k$ 的解与方程 $\frac{3x+6}{2} - \frac{x}{4} = 8$ 的解互为相反数,求系数 k 的值;

(2) 已知关于 x 的方程 $\frac{1}{2}(1-x)-k=1$ 与 $\frac{3}{4}(x-1)-(x+2)=k-1$ 的解相等,求系数 k 的值.

解析: (1) 解方程 $\frac{3x+6}{2}-\frac{x}{4}=8$, 得 $x=4$. 根据题意, 前一个方程的解是 $x=-4$, 代入方程, 得 $\frac{1}{3}(-4+2k)=-2+k$, 解得 $k=2$.

(2) 方法 1 解方程 $\frac{1}{2}(1-x)-k=1$, 得 $x=-2k-1$. 根据题意, 它也是第二个方程的解, 代入方程, 得 $\frac{3}{4}(-2k-2)-(-2k+1)=k-1$, 解得 $k=-3$.

方法 2 分别解两个关于 x 的字母系数方程, 得 $x=-2k-1$ 和 $x=-4k-7$. 根据题意, 得 $-2k-1=-4k-7$, 解得 $k=-3$.

3.1.9 ★★ 请编制一道关于 x 的方程, 形如 $\frac{5}{3}+\frac{mx-5}{2}=\frac{x}{3}$, 使它的根在 0 与 1 之间.

解析: 这是一道开放性题, 答案不惟一. 例如可取 $x=0.5$, 代入方程, 得 $\frac{5}{3}+\frac{0.5m-5}{2}=\frac{0.5}{3}$, 解这个方程, 得 $m=4$. 因此所求的一个方程是 $\frac{5}{3}+\frac{4x-5}{2}=\frac{x}{3}$.

3.1.10 ★★ 解方程 $\frac{1}{2}(y+1)+\frac{1}{3}(y+2)+\frac{1}{4}(y+3)+\cdots+\frac{1}{2010}(y+2009)=2009$.

解析: 方法 1 根据方程的系数特征, 无法按常规方法求解, 注意到方程左边的和式中, 每一项的分母与括号内的常数均相差 1, 有 $\frac{1}{2}(y+1)-1=\frac{1}{2}(y-1)$, $\frac{1}{3}(y+2)-1=\frac{1}{3}(y-1)$, $\frac{1}{4}(y+3)-1=\frac{1}{4}(y-1)$, ..., $\frac{1}{2010}(y+2009)-1=\frac{1}{2010}(y-1)$, 可将方程左边的每一项都减 1, 化简后再提取公因式 $(y-1)$, 得到如下解法:

$$\frac{1}{2}(y+1)+\frac{1}{3}(y+2)+\frac{1}{4}(y+3)+\cdots+\frac{1}{2010}(y+2009)-2009=0.$$

$$\left[\frac{1}{2}(y+1)-1\right]+\left[\frac{1}{3}(y+2)-1\right]+\left[\frac{1}{4}(y+3)-1\right]+\cdots+$$

$$\left[\frac{1}{2010}(y+2009)-1\right]=0.$$

$$\frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{3}(y-1) + \frac{1}{4}(y-1) + \cdots + \frac{1}{2010}(y-1) = 0.$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2010} \right)(y-1) = 0.$$

$$y-1 = 0.$$

$$y = 1.$$

方法 2 由观察得 $y = 1$ 是方程的根,且能确定整理后的方程为一元一次方程, y 的系数不为 0,所以方程有且仅有一个解,即原方程的解是 $y = 1$.

二、含字母系数的一元一次方程

3.1.11 ★★ 若关于 x 的方程 $(a-2)x = b-3$ 只有一个根 $x = 0$, 则 a _____, b _____.

解析: 由 $a-2 \neq 0$ 且 $b-3 = 0$, 得 $a \neq 2$ 且 $b = 3$.

3.1.12 ★★ 关于 x 的方程 $\frac{x-4}{6} - \frac{kx-1}{3} = \frac{1}{3}$ 有解的条件是() .

- (A) $k = 0$ (B) $k \neq 0$ (C) $k = \frac{1}{2}$ (D) $k \neq \frac{1}{2}$

解析: 把原方程化简,得 $(1-2k)x = 4$. 因为原方程有解,所以 $1-2k \neq 0$, 得 $k \neq \frac{1}{2}$. 故选 D.

3.1.13 ★★ 已知关于 x 的方程 $ax+b=0$ 与 $bx+a=0$ 的解相同,则 a 、 b 的关系是().

- (A) $a=b$ (B) $a+b=0$
 (C) $a=b$ 或 $a+b=0$ (D) $a=b \neq 0$ 或 $a+b=0$

解析: 方法 1 设相同的解是 β , 则 $a\beta+b=0$ ①, $b\beta+a=0$ ②. ①-②得 $a\beta+b-b\beta-a=0$, 分解因式, 得 $(a-b)(\beta-1)=0$. 所以 $a-b=0$ 或 $\beta-1=0$, 即 $a=b$ 或 $\beta=1$. 当 $\beta=1$ 时,代入①,得 $a+b=0$. 故选 C.

方法 2 显然当 $a=b \neq 0$ 时,两方程的解都是 -1 ; 当 $a=-b \neq 0$ 时,两方程的解都为 1 ; 当 $a=b=0$ 时,任何实数都是这两个方程的解. 所以选 C.

3.1.14 ★★ 已知关于 x 的方程 $x+5=k$ 和 $2x-10=3k$ 有相同的解,求 k 的值.

解析: 方法 1 由 $x+5=k$, 得 $x=k-5$; 由 $2x-10=3k$, 得 $x=\frac{3k}{2}+5$.

根据题意,有 $k-5=\frac{3k}{2}+5$, 解这个方程,得 $k=-20$.

方法2 设这个相同的解是 α , 则根据方程解的意义, 得 $\alpha+5=k$ …①, $2\alpha-10=3k$ …②, 由①得 $\alpha=k-5$, 代入②, 消去 α , 得 $2(k-5)-10=3k$, 解得 $k=-20$.

3.1.15 ★★ 已知关于 x 的方程 $\frac{2}{3}x-3k=5(x-k)+1$ 的解是负数, 求 k 的取值范围.

解析: 由原方程可解得 $x=\frac{6k-3}{13}$. 由 $x<0$, 得 $\frac{6k-3}{13}<0$, 解得 $k<\frac{1}{2}$.

3.1.16 ★★ 试对 a 、 b 的不同取值, 讨论关于 x 的方程 $ax=b$ 的解的不同情况.

解析: (1) 当 $a \neq 0$ 时, 方程有唯一解 $x=\frac{b}{a}$;

(2) 当 $a=0$, $b=0$ 时, 任意实数都是方程的解;

(3) 当 $a=0$, $b \neq 0$ 时, 方程无解.

3.1.17 ★★ 解下列关于 x 的方程:

$$(1) mx+m+6=m^2-2x (m \neq -2);$$

$$(2) \frac{x}{b}-\frac{x}{a}=\frac{a^2+2ab-3b^2}{ab} (a-b \neq 0).$$

解析: (1) 原方程化为 $mx+2x=m^2-m-6$, $(m+2)x=(m+2)(m-3)$. 因为 $m \neq -2$, 所以 $m+2 \neq 0$. 两边都除以 $(m+2)$, 得 $x=m-3$.

(2) 原方程化为 $\frac{(a-b)x}{ab}=\frac{(a-b)(a+3b)}{ab}$. 因为 $a-b \neq 0$, 所以 $\frac{a-b}{ab} \neq 0$.

两边都乘以 $\frac{ab}{a-b}$, 得 $x=a+3b$.

3.1.18 ★★ 解关于 x 的方程:

$$(1) 2m-(m+n)x=(m-n)x; \quad (2) \frac{ax}{b}+b=\frac{bx}{a}+a.$$

解析: (1) 由原方程得 $-(m+n)x-(m-n)x=-2m$, $-(m+n+m-n)x=-2m$, 所以 $-2mx=-2m$.

当 $m \neq 0$ 时, 方程的解是 $x=1$; 当 $m=0$ 时, 方程的解是任意实数.

(2) 由原方程得 $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)x=a-b$, $\frac{a^2-b^2}{ab}x=a-b$, $\frac{(a+b)(a-b)}{ab}x=a-b$.

当 $a-b \neq 0$ 且 $a+b \neq 0$ 时, 方程的解是 $x=\frac{ab}{a+b}$; 当 $a-b \neq 0$ 且 $a+b=0$ 时, 方程无解; 当 $a-b=0$ 时, 方程的解是任意实数.

3.1.19 ★★ 已知关于 x 的方程 $2mx-6=(m+2)x$ 的解是正整数, 求整数 m

的值.

解析: 当 $m = 2$ 时, 原方程无解. 当 $m \neq 2$ 时, 由原方程可解得 $x = \frac{6}{m-2}$. 根据题意, x 是正整数, 所以 $m-2$ 是 6 的正因数, 则 $m-2$ 的值只能取以下四个数: 1, 2, 3, 6, 即对应整数 m 的值是 3, 或 4, 或 5, 或 8.

3.1.20 ★★ 已知无论 k 取何值, 关于 x 的方程 $\frac{2kx+m}{3} = 2 + \frac{x-nk}{6}$ 的解总是 $x = 1$. 求 m, n 的值.

解析: 方法 1 把 $x = 1$ 代入原方程, 并化简, 得 $4k+2m = -nk+13$. 因为无论 k 取何值, 这个等式都成立, 所以 $\begin{cases} 4 = -n, \\ 2m = 13, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m = \frac{13}{2}, \\ n = -4. \end{cases}$

方法 2 因为无论 k 取何值, 方程的解都是 1, 不妨取 $\begin{cases} k = 0, \\ x = 1; \end{cases}$ 代入原方程, 可得 $\begin{cases} \frac{m}{3} = 2 + \frac{1}{6}, \\ \frac{2+m}{3} = 2 + \frac{1-n}{6}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = \frac{13}{2}, \\ n = -4. \end{cases}$

三、一元一次方程的应用

3.1.21 ★ 一个两位数, 十位数字比个位数字的 4 倍多 1. 将两个数字调换位置后, 所得的数比原数小 63, 则原来的两位数是_____.

解析: 设原来两位数的个位数字是 x , 则十位数字为 $4x+1$, 这个两位数是 $10(4x+1)+x$. 根据题意, 得 $[10(4x+1)+x] - [10x+(4x+1)] = 63$. 解这个方程, 得 $x = 2$. 故原数为 $10(4x+1)+x = 92$.

3.1.22 ★ 注意: 为了使同学们更快、更正确地解答本题, 我们提供了一个解题方案. 你可以依照这个思路按下列要求填空, 完成本题的解答. 也可以选用其他解题方案, 则不必填空, 只需按照解答题的一般要求, 进行解答.

问题 某水果公司以 2 元/千克的单价购进 10 吨柑橘, 在运输、仓储过程中均发现有部分损坏, 在销售定价时随机抽查了三次, 结果如表 3.1.1. 公司希望在这批柑橘购销中获取毛利(不计人工、运输、仓储等费用)5 000 元, 问销售时每千克定价至少为多少(精确到 0.1 元)?

表 3.1.1

抽查柑橘质量(千克)	50	200	500
损坏柑橘质量(千克)	5.50	19.42	51.54

解题方案 根据题意,考虑定价时应将损坏柑橘的价值计入成本中.而根据统计的基本原理,随机抽查的样本损坏情况可以作为总体损坏情况的估计.

样本中柑橘损坏的平均百分率为_____，所以估计10吨柑橘中损坏的柑橘有_____千克,可出售的柑橘有_____千克.

设出售时定价为 x 元/千克,则售得金额总数为_____元.

因为购进柑橘付出_____元,且希望获取毛利_____元,所以应列出方程_____.

解这个方程,得_____ (取保留到0.1元的过剩近似值).

答:_____.

$$\text{解析: } \frac{5.50 + 19.42 + 51.54}{50 + 200 + 500} \times 100\% = \frac{7646}{750}\%; \quad 10000 \times \frac{7646}{750}\% = \frac{15292}{15};$$

$$10000 - \frac{15292}{15}; \quad \left(10000 - \frac{15292}{15}\right)x; \quad 10000 \times 2 = 20000; \quad 5000; \quad \left(10000 - \frac{15292}{15}\right)x = 20000 + 5000; \quad x \approx 2.8; \quad \text{销售时每千克定价至少为2.8元.}$$

3.1.23 ★★ 对以下问题(1)的讨论,提供了两条解题途径.可以根据题意,逐步填上相应的代数式和方程,求得结果.也可以采用不同的方法,按照通常的解题要求求解.不论选用哪种方法,在对问题(2)的讨论中注意比较两个问题中数量关系的联系.

问题(1) 某车间原计划每周装配36台机床,预计若干周完成任务.在装配了三分之一以后,改进操作技术,工效提高了一倍,结果提前一周半完成任务.求这次任务需装配机床总台数.

方法1 设这次任务需装配机床总数为 x 台,则原计划装配时间为_____周.现在装配前 $\frac{1}{3}x$ 台用了_____周,装配后 $\frac{2}{3}x$ 台用了_____周,实际共装配了_____周.根据题意,实际装配时间比原计划装配时间少了一周半,可列出方程_____.解这个方程,得_____.

答:_____.

方法2 设这次任务需装配机床总量为 $3x$ 台,则改进操作技术后装配了 $2x$ 台.根据题意,装配 $2x$ 台机床按原工作效率需_____周,提高工效后需_____周.由于提前的时间都是后一段工作的结果,可列得方程_____.解这个方程,得_____.
答:_____.

问题(2) 某人有急事,预定搭乘一辆小货车从A地赶往B地.实际上,他乘小货车行了三分之一路程后改乘一辆出租车,车速提高了一倍,结果提前一个半小时到达.已知小货车的车速是36千米/小时,求两地间路程.

解析: 问题(1) 方法1 依次填入: $\frac{x}{36}$; $\frac{2}{3}x$; $\frac{1}{3}x$; $\frac{2}{3}x$;

$\frac{x}{36} - \left[\frac{\frac{1}{3}x}{36} + \frac{\frac{2}{3}x}{36 \times 2} \right] = 1 \frac{1}{2}$ (或 $\frac{\frac{2}{3}x}{36} - \frac{\frac{2}{3}x}{36 \times 2} = 1 \frac{1}{2}$) ; $x = 162$; 这次任务需装配机床总数为162台.

方法2 依次填入: $\frac{2x}{36}$; $\frac{2x}{36 \times 2}$; $\frac{2x}{36} - \frac{2x}{36 \times 2} = 1 \frac{1}{2}$; $x = 54$; 这次装配总任务是162台.

问题(2) 本题与上题具有相同的数量关系. 设A、B两地间路程为 x 千米(或 $3x$ 千米), 可列出与问题(1)的方法1(或方法2)中相同的方程. 解得A、B两地间路程为162千米.

3.1.24 ★★ 某商场新经营一批进口水果, 进价20元/千克. 运输过程中损耗10%, 在确定零售价时, 商场将损耗一并计入成本, 并在成本基础上按获得毛利40%定价. 求商场所定的零售价.

设商场所定的零售价为 x 元/千克, 则根据题意可得方程() .

- (A) $x(1-10\%)(1-40\%) = 20$ (B) $\frac{x}{(1+10\%)(1+40\%)} = 20$
 (C) $x(1-10\%) = 20(1+40\%)$ (D) $x(1-40\%) = 20(1+10\%)$

解析: 设这批水果数量为 a 千克, 则可供出售的数量为 $a(1-10\%)$ 千克. 若不求获利, 仅保不亏本, 则应有 $x(1-10\%) \cdot a = 20a$; 而要获利40%, 则应使零售总收入为 $20a(1+40\%)$. 故应选C.

3.1.25 ★★ 某商场甲、乙两个柜组一月份营业额共64万元. 二月份甲柜组增长了20%, 乙柜组增长了15%, 营业额共达75万元. 问两柜组各增长多少万元? 有解题方案:

(1) 设二月份营业额甲柜组增加了 x 万元, 得方程 $x \cdot 20\% + (11-x) \cdot 15\% = 75 - 64$.

(2) 设二月份营业额甲柜组增加了 x 万元, 得方程 $\frac{x}{20\%} + \frac{11-x}{15\%} = 64$.

(3) 设甲柜组一月份营业额为 x 万元, 得方程 $20\% \cdot x + 15\%(64-x) = 75 - 64$.

(4) 设甲柜组一月份营业额为 x 万元, 得方程 $(1+20\%) \cdot x + (1+15\%)(64-x) = 75$.

上述方案中正确的有().

- (A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

解析: 正确的方案是(2)和(3). (1)中方程左边代数式 $x \cdot 20\%$ 表示甲柜组在二月份增加营业额中的 20% (对应乙柜组情况相同) 与题意不符; 方案(4)中方程左边表示两个柜组在二月份的营业额总额, 应为 75(万元). 故应选 B.

3.1.26 ★ 解答以下两个问题, 注意比较两个问题中的数量关系:

(1) 师徒两人检修一条煤气管道, 师傅单独完成需要 10 个小时, 徒弟单独完成需要 15 个小时. 师傅先开始检修, 1 个小时后让徒弟一起参加, 还需多少时间可以完成?

(2) 师徒两人检修一条长 190 米的煤气管道, 徒弟每小时检修 10 米, 师傅每小时检修 15 米. 师傅先开始检修, 1 个小时后让徒弟一起参加, 还需多少时间可以完成?

解析: (1) 设徒弟一起参加后还需要 x 小时完成. 根据题意, 可得方程 $\frac{1+x}{10} +$

$$\frac{x}{15} = 1, \text{解得 } x = 5.4.$$

答: 徒弟一起参加后还需要 5.4 个小时完成.

(2) 方法 1 设徒弟一起参加后还需要 x 小时完成. 根据题意, 可得方程 $10x + 15(1+x) = 190$. 解这个方程, 得 $x = 7$.

答: 徒弟一起参加后还需要 7 个小时完成.

方法 2 根据题意, 师傅单独完成需要 $\frac{190}{15} = \frac{38}{3}$ 个小时, 徒弟单独完成需要 $\frac{190}{10} = 19$ 个小时. 则与问题(1)是相同的数量关系, 可列出方程 $\frac{1+x}{\frac{38}{3}} + \frac{x}{19} = 1$, 解得 $x=7$.

3.1.27 ★★ 解答以下两个问题, 注意比较两个问题中的数量关系:

(1) 小陈和老师一起整理了一篇教学材料, 准备打印成稿. 按篇幅估计, 老师单独打字需 4 个小时完成, 小陈单独打字需 6 个小时完成. 小陈先打了 1 个小时后, 老师开始一起打, 问还需要多少小时完成?

(2) 甲、乙两车分别从相距 360 千米的两地相向开出, 已知甲车速度 60 千米/时, 乙车速度 90 千米/时. 若甲车先开 1 个小时, 问乙车开出多少小时后两车相遇?

解析: (1) 设老师开始打字后还需要 x 小时完成. 根据题意, 小陈和老师每小时可以完成工作量的 $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{4}$. 由两人所做工作量之和等于工作总量, 可得方程 $\frac{1}{6}(1+x) + \frac{1}{4}x = 1$. 解这个方程, 得 $x = 2$.

答: 老师开始打字后还需要 2 小时完成.

(2) 方法 1 设乙车开出 x 小时后两车相遇, 由甲、乙两车所行路程之和等于

总路程,可得方程 $60(1+x) + 90x = 360$. 解这个方程,得 $x = 2$.

答: 乙车开出 2 小时后两车相遇.

方法 2 根据题意,甲车每小时可行驶两地全程的 $\frac{60}{360}$, 乙车每小时可行驶两地全程的 $\frac{90}{360}$, 而两车相遇则表示行驶路程之和正好等于全程. 设乙车开出 x 小时后两车相遇, 可列方程 $\frac{60}{360}(1+x) + \frac{90}{360}x = 1$.

若根据甲车行完全程需 $\frac{360}{60} = 6$ (小时), 乙车行完全程需 $\frac{360}{90} = 4$ (小时), 则与问题(1)完全是相同数量关系.

列方程解应用题的基本思想是通过对实际问题中数量关系的分析,列出相关的代数式,进而建立方程,转化为纯数学问题来解决. 这一过程的关键是要透过纷繁多变问题的表象, 抓住数量关系的实质; 不能机械的记忆、套用某些题型而忽略了问题的本质. 常有貌似相像,而实质不同的问题; 也有面目迥异而实质相同的问题. 学习中善于分辨与比较,是提高分析、解题能力的途径.

3.1.28 ★ 如图,两根铁棒直立于桶底水平的木桶中,在桶中加入水后,一根露出水面的长度是全长的 $\frac{1}{3}$, 另一根露出水面的长度是全长的 $\frac{1}{5}$. 两根铁棒长度之和为 55 cm, 此时木桶中水的深度是_____ 第 3.1.28 题 cm.



解析: 方法 1 设一根铁棒长 x cm, 则另一根铁棒长 $(55-x)$ cm, 根据题意得 $\frac{2}{3}x = \frac{4}{5}(55-x)$. 解这个方程, 得 $x = 30$, 则木桶中水深为 $\frac{2}{3}x = 20$ (cm).

方法 2 设木桶中水深为 x cm, 则两根铁棒长分别为 $\frac{3}{2}x$ cm 和 $\frac{5}{4}x$ cm, 由方程 $\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}x = 55$ 解得 $x = 20$.

3.1.29 ★ 一艘轮船航行于两码头之间,逆水需 10 小时,顺水需 6 小时. 已知该船在静水中每小时航行 12 千米. 求水流速度和两码头间的路程.

解析: 方法 1 设水流速度为 x 千米/时, 则轮船在顺水和逆水中的航行速度分别为 $(12+x)$ 千米/时和 $(12-x)$ 千米/时. 根据题意, 得 $6(12+x) = 10(12-x)$. 解这个方程, 得 $x = 3$. 路程为 $6(12+x) = 90$ (千米).

答: 水流速度为 3 千米/时, 两码头间路程为 90 千米.

方法 2 设两码头间路程为 x 千米, 根据题意, 得 $\frac{x}{6} - 12 = 12 - \frac{x}{10}$. 解这个方

程,得 $x = 90$ (千米). 水流速度为 $\frac{90}{6} - 12 = 3$ (千米/时).

3.1.30 ★ 某石油进口国这个月的石油进口量比上个月减少了 5%,但由于国际油价上涨,进口石油的费用反而比上个月增加了 14%. 求这个月的石油价格相对上个月的增长率.

解析: 设这个月的石油价格相对上个月的增长率为 x . 根据题意, 得 $(1+x)(1-5\%) = 1+14\%$. 解这个方程, 得 $x = 20\%$.

答: 这个月的石油价格相对上个月的增长率为 20%.

3.1.31 ★ A、B 两地城际高速铁路预计在 2010 年 5 月 1 日正式运营,按设计要求,两地单程直达运行时间为 40 分钟. 一次试运行时,列车从 A 地到 B 地所花时间比预计多用了 5 分钟,回程时列车平均速度比去 B 地时增加了 30 km/h,列车单程 40 分钟准时回到 A 地. 问今后在运行中列车的平均速度应是多少?

解析: 今后在运行中列车的平均速度,应能使列车按设计要求单程 40 分钟直达,即试运行时回程的平均速度. 设今后列车的平均速度为 x km/h, 则根据题意得 $\frac{45}{60}(x-30) = \frac{40}{60}x$. 解这个方程, 得 $x = 270$. 经检验符合题意.

答: 今后在运行中列车的平均速度应是 270 km/h.

3.1.32 ★★ 某银行设立大学生助学贷款,分 3~4 年期与 5~6 年期两种,贷款年利率分别为 6.03% 与 6.21%, 贷款利息的 50% 由国家财政补贴. 某大学生预计 6 年后能一次性偿还贷款 2 万元. 问他现在大约准备贷款多少(精确到千元)?

解析: 设这名大学生准备贷款 x 万元. 根据题意,列方程 $x\left(1+6.21\%\times6\times\frac{1}{2}\right) =$

2. 解这个方程,得 $x \approx 1.7$.

答: 这名大学生准备贷款约 1.7 万元.

3.1.33 ★★ 某商店的一批钢笔按定价的 8 折出售仍能获得 20% 的利润. 求商店在定价时的期望利润百分率(原定价时的百分率).

解析: 设商店在定价时的期望利润百分率为 $x\%$, 则原定价为进价的 $1+x\%$, 根据题意, 得 $(1+x\%) \times 80\% = 1+20\%$, 解得 $x = 50$.

答: 商店在定价时的期望利润百分率为 50%.

3.1.34 ★★ 一水池有进出水管各一根. 单独开放进水管 15 分钟可注满全池,单独开放出水管 20 分钟可放空满池水. 一次注水 2 分钟后发现出水管未塞住. 立即塞住后继续注水. 问再需多少时间可注满水池?

解析: 设再需 x 分钟可注满水池, 则总注水时间 $(x+2)$ 分钟, 放水时间 2 分钟. 列方程 $\frac{x+2}{15} - \frac{2}{20} = 1$, 解得 $x = 14.5$.

答: 再需 14.5 分钟可注满水池.

3.1.35 ★★ 学校准备添置一批课桌椅. 原订购 60 套, 每套 100 元. 店方表示: 如果多购, 可以优惠. 结果校方购了 72 套, 每套减价 3 元, 但商店获得同样多的利润. 求每套课桌椅的成本.

解析: 方法 1 设每套课桌椅的成本为 x 元, 由原定数量与售价下的总利润和实际成交总利润相等, 得方程 $60(100 - x) = 72(97 - x)$. 解这个方程, 得 $x = 82$.

答: 每套课桌椅的成本为 82 元.

方法 2 设商店原定每套利润 x 元. 根据题意, 得方程 $72(x - 3) = 60x$, 解之得 $x = 18$. 每套成本 $100 - 18 = 82$ (元).

3.1.36 ★★ 为了鼓励居民节约用水, 某市对居民生活用水收费作如下规定: 在每月用水限额内, 每吨水费 1.3 元; 对超过限额的部分按 2.9 元/吨收费. 一户三口之家上个月用水 12 吨, 交费 22 元. 求该市对三口之家每月用水所作的限额是多少?

解析: 因为 $1.3 \times 12 = 15.6 < 22$ 元, 所以用水 12 吨已超过限额. 设该户每月用水限额为 x 吨, 则交费 22 元应分为限额内 x 吨水费和超限的 $(12 - x)$ 吨水费两部分. 根据题意, 列方程 $1.3x + 2.9(12 - x) = 22$, 解之得 $x = 8$.

答: 该市对三口之家每月用水所作的限额是 8 吨.

3.1.37 ★★ A, B 两地相距 31 千米, 甲从 A 地骑自行车去 B 地, 1 小时后乙骑摩托车也从 A 地去 B 地. 已知甲每小时行 12 千米, 乙每小时行 28 千米.

(1) 乙出发后多少时间追上甲?

(2) 若乙到达 B 地后立即返回, 则在返回路上与甲相遇时距乙出发多少时间?

解析: (1) 设乙出发后 x 小时追上甲. 根据题意, 得 $28x = 12(x + 1)$. 解得 $x = \frac{3}{4}$.

答: 乙出发后 45 分钟追上甲.

(2) 设乙出发后 x 小时在返回路上与甲相遇. 注意到这时两人所行路程之和等于 31×2 千米, 得方程 $12(x + 1) + 28x = 62$. 解得 $x = \frac{5}{4}$.

答: 乙出发后 75 分钟在返回路上与甲相遇.

3.1.38 ★★ 一桥长 1 000 米, 一列火车从车头上桥到车尾离桥用了一分钟时间, 整列火车完全在桥上的时间为 40 秒, 求火车的长度及行驶速度.

解析: 方法 1 设火车的长度为 x 米. 根据题意, 火车从车头上桥到车尾离桥全程为 $(1000 + x)$ 米, 而整列火车完全在桥上的全程为 $(1000 - x)$ 米. 由火车的速度不变, 可得 $\frac{1000 + x}{60} = \frac{1000 - x}{40}$. 解得 $x = 200$. 行驶速度为 $\frac{1000 + 200}{60} = 20$ (米/秒).

答: 火车长 200 米, 行驶速度为 20 米/秒.

方法 2 设火车行驶速度为 x 米/秒. 由火车的长度为定值, 可列方程 $60x -$

$1000 = 1000 - 40x$, 解得 $x = 20$.

3.1.39 ★★ 自“政府补贴,家电下乡”活动开展以来,农村家电市场销量明显增加. 某门市部统计,在家电下乡活动启动前一个月,销售给农户的Ⅰ型冰箱和Ⅱ型冰箱共 960 台,启动后的第一个月销售给农户的Ⅰ型和Ⅱ型冰箱的数量分别比启动活动前一个月增长 30% 和 25%,两种型号的冰箱共售出 1 228 台.

已知Ⅰ型冰箱每台价格是 2 298 元,Ⅱ型冰箱每台价格是 1 999 元. 根据“家电下乡”的有关政策,政府按每台冰箱价格的 13% 给购买冰箱的农户补贴,求启动活动后的第一个月该门市部销售给农户的 1 228 台冰箱,政府共补贴了多少元(结果保留 2 个有效数字)?

解析: 要求出政府对这些冰箱的补贴总额,需分别知道启动活动后第一个月两型冰箱各自的销售量.

方法 1 设活动后的第一个月销售Ⅰ型冰箱 x 台,销售Ⅱ型冰箱 $(1228 - x)$ 台,根据题意得 $\frac{x}{1+30\%} + \frac{1228-x}{1+25\%} = 960$. 解这个方程,得 $x = 728$, $1228 - x = 500$. 所以政府对这些冰箱的补贴总额为 $(2298 \times 728 + 1999 \times 500) \times 13\% \approx 35$ (万元).

方法 2 设活动启动前一个月销售Ⅰ型冰箱 x 台,销售Ⅱ型冰箱 $(960 - x)$ 台,根据题意得 $1.3x + 1.25(960 - x) = 1228$. 解这个方程,得 $x = 560$. 则活动后的第一个月销售Ⅰ型冰箱 $560 \times 1.3 = 728$ (台),销售Ⅱ型冰箱 $400 \times 1.25 = 500$ (台). 以下与方法 1 相同.

3.1.40 ★★ 某年级三个班为灾区捐款,(1)班捐了 380 元,(2)班捐款数是另两个班级的平均数,(3)班捐款数是三个班总数的 $\frac{2}{5}$. 求(3)班的捐款数.

解析: 方法 1 设(3)班捐款 x 元,则(2)班捐款 $\frac{380+x}{2}$ 元. 根据题意,得 $x = \frac{2}{5}(380 + x + \frac{380+x}{2})$. 解得 $x = 570$.

答:(3)班捐款 570 元.

方法 2 设三个班级捐款总数为 x 元,则(2)班捐款 $\frac{x}{3}$ 元,(3)班捐款数也可以表示为 $\frac{2}{3}x - 380$,由此列方程 $\frac{2}{3}x - 380 = \frac{2}{5}x$. 解得 $x = 1425$,所以 $\frac{2}{5}x = 570$.

3.1.41 ★★ 一个六位数的首位数字是 1,若将这个 1 移到末位后所得的六位数是原六位数的 3 倍,求这个六位数.

解析: 注意到这个六位数中,后五个数字在变换中相对位置没有变化,设这五个数字组成的五位数为 x ,则原六位数是 $100000 + x$,变换后的六位数是 $10x + 1$.

根据题意,得 $10x + 1 = 3(100000 + x)$. 解得 $x = 42857$.

答: 这个六位数是 142857.

3.1.42 ★★ 在三点到四点之间, 钟面上的时针与分针在什么时刻重合? 什么时刻成 15° 角?

解析: 设 3 点 x 分时钟面上的时针与分针重合. 注意到分钟的转动速度是每分钟 6° , 时针的转动速度是每分钟 $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$. 根据题意, 得 $6x - \frac{1}{2}x = 90$, 解得

$$x = 16\frac{4}{11}.$$

设 3 点 y 分时钟面上的时针与分针成 15° 角. 根据题意, 得 $6x - \frac{1}{2}x = 90 \pm 15$.

$$\text{解得 } y = 13\frac{7}{11}, \text{ 和 } y = 19\frac{1}{11}.$$

答: 3 点 $16\frac{4}{11}$ 分时时针与分钟重合, 3 点 $13\frac{7}{11}$ 分和 3 点 $19\frac{1}{11}$ 分时两针成 15° 角.

3.1.43 ★★ 在一个底面直径 5 厘米、高 18 厘米的圆柱形矿泉水瓶内装满水, 再将瓶内的水倒入一个底面直径 6 厘米、高 10 厘米的圆柱形玻璃杯中, 能否完全装下? 若装不下, 那么瓶内水面还有多高? 若未能装满, 求杯内水面离杯口的距离.

解析: 矿泉水瓶容积 $V_1 = \frac{1}{4} \times \pi \times 5^2 \times 18 = 112.5\pi(\text{cm}^3)$, 玻璃杯容积

$$V_2 = \frac{1}{4} \times \pi \times 6^2 \times 10 = 90\pi(\text{cm}^3), \text{ 显然不能完全装下. 设瓶内还余水面高 } x \text{ cm,}$$

$$\text{根据题意, 得 } \frac{1}{4} \times \pi \times 5^2 \times (18-x) = \frac{1}{4} \times \pi \times 6^2 \times 10. \text{ 解这个方程, 得 } x = 3.6.$$

答: 装满玻璃杯后, 瓶内余水水面高 3.6 厘米.

3.1.44 ★★ 小明在学习方程的应用时, 联系三角形的知识编了一道问题: “已知一个等腰三角形的周长是 38 厘米, 腰与底边的长度之比为 8 : 3, 且腰比底边长 4 厘米. 求三角形的三边长.” 同桌试了一下说: “不对, 这道题有问题.” 你能发现问题出在什么地方吗, 如何修改?

解析: 本题的三个条件相互矛盾, 不可能同时满足. 例如, 根据前两个条件, 可以设腰长和底边长分别为 $8x$ 厘米和 $3x$ 厘米, 得方程 $8x+8x+3x=38$, 解得 $x=2$, 则腰长和底边长分别为 16 厘米和 6 厘米, 与第三个条件矛盾. 所以可以删去第三个条件. 类似地, 本题也可删去第一个或第二个条件. 也可根据需要, 对数字作适当调整.

3.1.45 ★★ 某音乐厅决定在暑假举办学生专场音乐会. 入场券分为团体票和零售票两类, 团体票占总数的 $\frac{2}{3}$, 且对提前购票者给予不同程度的优惠. 在 5 月份,

团体票每张 12 元,售出团体票总数的 $\frac{3}{5}$;零售票每张 16 元,售出零售票总数的一半.计划在 6 月份中售出全部余票,团体票每张 16 元,零售票应如何定价,能使这两个月的票款收入持平?

解析: 设入场券共 a 张,6 月份零售票定价为 x 元.根据两个月的票款收入相等,得 $16 \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3}a + x \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}a = 12 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}a + 16 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}a$. 因为 $a \neq 0$, 所以 $16 \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} + x \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 12 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + 16 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$. 解这个方程,得 $x = 19.2$.

答: 6 月份零售票定价为 19.2 元.

3.1.46 ★★一批树苗按下列方法分给各班: 第一班取 100 棵和余下的 $\frac{1}{10}$, 第二班取 200 棵和余下的 $\frac{1}{10}$,……最后树苗全部被取完且各班树苗数都相等.求树苗总数和班级数.

解析: 方法 1 设树苗总数为 x 棵.由第一、二两班树苗数相等,列方程 $100 + \frac{1}{10}(x - 100) = 200 + \frac{1}{10}\left[x - 300 - \frac{1}{10}(x - 100)\right]$. 解这个方程,得 $x = 8100$, 班级数为 $\frac{8100}{100 + 800} = 9$ (个).

答: 共有树苗 8100 棵,9 个班级.

方法 2 设有 x 个班级,则根据题意,最后一个班级取树苗 $100x$ 棵,倒数第二个班级先取 $100(x-1)$ 棵,再取“余下的 $\frac{1}{10}$ ”,即留给最后一个班级的是“余下的 $\frac{9}{10}$ ”,所以这“余下的 $\frac{1}{10}$ ”也是最后一个班级所取树苗数的 $\frac{1}{9}$.由最后两班所取树苗数相等,可列方程 $100(x-1) + \frac{100x}{9} = 100x$,解得 $x = 9$.

方法 3 同方法 2 设未知数,注意到倒数第二个班级先取的 $100(x-1)$ 棵比 $100x$ 棵少 100 棵,列方程 $\frac{100x}{9} = 100$.

3.1.47 ★★某校科技小组的学生在 3 名老师带领下,准备前往国家森林公园考察、采集标本.当地有两家旅行社,分别去两个景区.两家旅行社收取的途中费用和相应的景区门票定价都相同,且对师生都有优惠:甲旅行社表示带队老师免费,学生按 8 折收费;乙旅行社表示师生一律按 7 折收费.甲景区对师生均收半价,乙景区则规定当人数超过 30 人时,按 4 折收费,否则按 6 折收费.经合算两家旅行社的实际途中收费正好相同.你认为该去何处较合算?

若该校在暑假夏令营中,学生数增加了 8 名,老师数不变,则又该去哪个旅行社?

解析: 对第一种情景,设学生有 x 人,两个旅行社原定单价 a 元. 根据题意,得 $0.8ax = 0.7a(x+3)$. 解这个方程,得 $x = 21$, 总人数为 24. 按景区收费标准,该去甲景区.

对第二种情景,已知学生 29 名,老师 3 名,分别计算途中费用及景区门票,应去乙景区.

3.1.48 某景区一个狭窄的单向通道口,通常情况下每分钟可以通过 9 人. 一位导游到达这个通道口时,发现由于拥挤,每分钟只能有 3 人通过. 同时他发现前面已有 36 个人在等待,且只能按顺序前行. 通过这个道口后还需 7 分钟到达景区大门,如果绕道而行,则需 15 分钟到达大门.

(1) 按照现状等待通过与绕道前往景区大门,哪个时间较快?

(2) 结果在这位导游协助下,几分钟后秩序恢复正常(维持秩序期间,每分钟仍有 3 人通过),结果他比拥挤情况下提前了 6 分钟通过道口. 问维持秩序的时间有多长?

解析: (1) 等待通过时间为 $\frac{36}{3} + 7 = 19 > 15$, 应绕道前往景区大门时间较快.

(2) 设维持秩序的时间为 x 分钟,根据题意,得 $\frac{36}{3} - \left(x + \frac{36-3x}{9}\right) = 6$. 解这个方程,得 $x = 3$. 所以维持秩序的时间为 3 分钟.

3.1.49 暑假期间小王和小吴两家 6 个人一起外出旅游,乘坐两辆出租车前往飞机场. 在离机场 11 千米处一辆车出了故障,不能行驶. 此时离机场停止办理登机手续时间还有半个小时,惟一可以利用的交通工具只有一辆出租车,连同司机在内限乘 5 人,车速 60 千米/时.

(1) 如果 2 人在原地等候,这辆车分两批接送,6 人都能及时到达机场吗?

(2) 如果在汽车送第一批人同时,余下 2 人以 6 千米/时的速度向前步行,汽车在将第一批人送达后立即返回接第二批人,他们能及时到达机场吗?

解析: (1) 这种情况下,第二批人到达机场所需时间为 $\frac{11 \times 3}{60} = \frac{33}{60}$ (时) $> \frac{1}{2}$ (时), 不能及时到达机场.

(2) 设第二批人在汽车回来接他们时已经步行了 x 千米,根据题意可列得方程 $\frac{x}{6} = \frac{11 \times 2 - x}{60}$. 解这个方程,得 $x = 2$. 这时第二批人到达机场所需时间为

$\frac{11 + 9 \times 2}{60} = \frac{29}{60}$ (时) $< \frac{1}{2}$ (时), 能及时到达机场.

§ 3.2 一次方程组

一、二元一次方程组及其解法

3.2.1 ★★ 方程 $6x + y = 23$ 的正整数解是 .

解析: 方法 1 原方程化为 $y = 23 - 6x$, 显然 $1 \leq x \leq 3$. 将 $x = 1, 2, 3$ 逐一
代入, 可得到这个方程的正整数解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=17; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=11; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=5. \end{cases}$

方法 2 原方程化为 $x = \frac{23-y}{6}$, 显然 $23-y$ 是 0 到 23 之间 6 的倍数, 只能是 $23-y = 6, 12, 18$, 即 $y = 17, 11, 5$. 进而求得对应 x 的值为 1, 2, 3.

3.2.2 ★★ 若方程 $4x^{3m-8} - 2xy^{n-1} = by + 7$ 是关于 x, y 的二元一次方程, 则整数 m, n, b 所满足的条件可能是()。

- (A) $m = 3, n = 2, b \neq 0$ (B) $m = 3, n = 1, b \neq 0$
 (C) $m = \frac{8}{3}, n = 2, b = 0$ (D) $m = 3, n = 1$ 或 $2, b = 0$

解析: 由题意得 $\begin{cases} 3m-8=1 \text{ 或 } 0, \\ n-1=0, \\ b \neq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m=3 \text{ 或 } \frac{8}{3}, \\ n=1, \\ b \neq 0 \end{cases}$, 故选 B.

3.2.3 ★★ 解方程组 $\frac{3x+y}{4} = \frac{x-y}{2} = 2x+y-3$.

解析：原方程组即 $\begin{cases} \frac{3x+y}{4} = \frac{x-y}{2}, \\ \frac{x-y}{2} = 2x+y-3. \end{cases}$ 整理并解这个方程组，得 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$

3.2.4 ★★ 解下列方程组：

$$(1) \begin{cases} 73x - 7y = 66, \\ 18x + 98y = 25; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 17x + 52y = 3, \\ 19x + 59y = 6. \end{cases}$$

解析: 方程中未知数系数的绝对值较大,直接采用代入消元或加减消元都会给运算带来麻烦,应观察方程的特征,采用适当的方法,化简未知数的系数后再行消元.

(1) 由①+②得 $91x + 91y = 91$, 即 $x + y = 1$, 变形为 $x = 1 - y$... ③, 代入①,

解得 $y = \frac{7}{80}$, 从而得 $x = \frac{73}{80}$. 所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = \frac{73}{80}, \\ y = \frac{7}{80}. \end{cases}$

(2) 由①×2-②,消去常数项,得 $15x+45y=0$,即 $x=-3y$ …③,代入①,解得 $y=3$,从而得 $x=-9$.所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=-9, \\ y=3. \end{cases}$

3.2.5 ★★ 已知方程 $2x-y=3$ 的解 x 、 y 互为相反数,求 x 、 y 的值.

解析:由题意可知 $x+y=0$,从而得方程组 $\begin{cases} 2x-y=3, \\ x+y=0. \end{cases}$ 解这个方程组,得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$$

3.2.6 ★★ 对于实数 x 、 y 规定一个新运算“ $x\Delta y=ax+by$ (a 、 b 是常数)”,已知 $2\Delta 3=11$, $5\Delta(-3)=10$.求 a 、 b 的值,并计算 $(-2)\Delta\frac{3}{5}$.

解析:本题实际上已知 $\begin{cases} 2a+3b=11, \\ 5a-3b=10. \end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases} a=3, \\ b=\frac{5}{3}. \end{cases}$ 所以

$$(-2)\Delta\frac{3}{5}=3\times(-2)+\frac{5}{3}\times\frac{3}{5}=-6+1=-5.$$

3.2.7 ★★ 解方程组 $\begin{cases} \frac{0.1x+0.3}{0.2}+\frac{0.05y+0.04}{0.03}=6, & ① \\ \frac{x}{3}-\frac{3y+1}{6}=\frac{1}{6}(x-y). & ② \end{cases}$

解析:把方程①的系数化成整数,得 $\frac{x+3}{2}+\frac{5y+4}{3}=6$,去分母并整理,得 $3x+10y=19$ …③;方程②整理,得 $x-2y=1$ …④.解③、④组成的方程组,得 $\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$

3.2.8 ★★ 解方程组 $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}+1=0, \\ \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+6=0. \end{cases}$

解析:设 $\frac{1}{x}=m$, $\frac{1}{y}=n$.原方程组可化为 $\begin{cases} 2m+3n+1=0, \\ m+4n+6=0. \end{cases}$ 解这个方程

组,得 $\begin{cases} m=\frac{14}{5}, \\ n=-\frac{11}{5}. \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x=\frac{5}{14}, \\ y=-\frac{5}{11}. \end{cases}$ 经检验,它就是原方程组的解.

3.2.9 ★★ 已知等式 $(2A-7B)x+(3A-8B)=13x+17$ 对一切实数 x 都成立,求 A 、 B 的值.

解析: 方法1 因为两个多项式相等对一切实数 x 都成立, 所以等式两边的对应项系数相等, 即 $\begin{cases} 2A - 7B = 13, \\ 3A - 8B = 17. \end{cases}$ 解这个方程组, 得 $\begin{cases} A = 3, \\ B = -1. \end{cases}$

方法2 分别取 $x=0$ 和 $x=-1$, 可得 $\begin{cases} 3A - 8B = 17, \\ A - B = 4. \end{cases}$ 解这个方程组, 得

$$\begin{cases} A = 3, \\ B = -1. \end{cases}$$

3.2.10 ★★ 已知 $\left| \frac{4x - 3y - 11}{3} \right| + (2x + 5y + 1)^2 = 0$, 求 $x^2 - 2xy + 2y^2$ 的值.

解析: 由题意得 $\begin{cases} \frac{4x - 3y - 11}{3} = 0, \\ 2x + 5y + 1 = 0. \end{cases}$ 解这个方程组, 得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$ 所以 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times (-1) + 2 \times (-1)^2 = 10$.

3.2.11 ★★ 解关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} \frac{x+3a}{2} + \frac{y-2b}{3} = \frac{a}{2}, \\ \frac{x+3a}{2} - \frac{y-2b}{3} = \frac{a}{2}. \end{cases}$

解析: 方法1 设 $\frac{x+3a}{2} = m$, $\frac{y-2b}{3} = n$. 原方程组化为 $\begin{cases} m+n = \frac{a}{2}, \\ m-n = \frac{a}{2}. \end{cases}$ 解

这个方程组, 得 $\begin{cases} m = \frac{a}{2}, \\ n = 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{x+3a}{2} = \frac{a}{2}, \\ \frac{y-2b}{3} = 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -2a, \\ y = 2b. \end{cases}$

方法2 由原方程组得 $\frac{x+3a}{2} + \frac{y-2b}{3} = \frac{x+3a}{2} - \frac{y-2b}{3}$, 即 $\frac{2(y-2b)}{3} = 0$,

由此得 $\frac{x+3a}{2} = \frac{a}{2}$. 易求得原方程组的解是 $\begin{cases} x = -2a, \\ y = 2b. \end{cases}$

3.2.12 ★★ 解关于 x 、 y 方程组 $\begin{cases} ax + by = a + b \cdots ①, \\ bx + ay = a + b \cdots ② \end{cases}$ ($ab \neq 0$, $|a| \neq |b|$).

解析: 方法1 ① $\times a$ —② $\times b$, 得 $(a^2 - b^2)x = (a^2 - b^2)$. 根据条件 $a^2 - b^2 \neq 0$, 方程两边同时除以 $a^2 - b^2$, 得 $x = 1$, 同理求得 $y = 1$. 所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

方法2 ①—②并整理, 得 $(a-b)x = (a-b)y$, 根据条件, 得 $x = y$. 代入任

一方程可得 $(a+b)x = a+b$, 由条件可求得 $x = 1$.

3.2.13 ★★ 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} ax - y = a, \\ x - y = 1. \end{cases}$

(1) 当 $a \neq 1$ 时, 解这个方程组.

(2) 若 $a = 1$, 方程组解的情况怎样?

(3) 若 $a = 1$, 方程组 $\begin{cases} ax - y = a, \\ x - y = 2 \end{cases}$ 解的情况怎样?

解析: (1) 两式相减, 整理得 $(a-1)x = a-1$. 因为 $a \neq 1$, 所以 $x = 1$, 进而求得 $y = 0$. 所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

(2) 当 $a = 1$ 时, 方程 $(a-1)x = a-1$ 的解是一切实数, 方程组的解是满足方程 $x - y = 1$ 的任意实数对. 事实上这时方程组中的两个方程相同, 所以方程组有无数个解.

(3) 当 $a = 1$ 时, 方程组化为 $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$ 这时不论 x 、 y 取何值, 两个方程都不可能同时成立, 方程组无解.

二、已知方程组的解或解的情况, 求方程中的系数

3.2.14 ★ 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 2x - y = 2a + b, \\ x + 2y = a - b \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \end{cases}$ 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: 方法 1 解这个关于 x 、 y 的字母系数方程组, 得 $\begin{cases} x = \frac{5a+b}{5}, \\ y = -\frac{3b}{5}. \end{cases}$ 由题意,

得 $\begin{cases} \frac{5a+b}{5} = 1, \\ -\frac{3b}{5} = 3. \end{cases}$ 由此解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = -5. \end{cases}$

方法 2 根据方程组的解的定义: $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3 \end{cases}$ 能使两个方程左、右两边的值都相等, 可得 $\begin{cases} 2 - 3 = 2a + b, \\ 1 + 6 = a - b. \end{cases}$ 由此解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = -5. \end{cases}$

3.2.15 ★★ 对下列两个问题, 给出较合理的解题途径:

(1) 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} ax + by = 1, \\ (b-1)x - 2y = 4 \end{cases}$ 的解 x 与 y 的和是 3, 差是

7,求 a 、 b 的值. 解法是_____;

(2) 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} ax+by=3, \\ bx+ay=7 \end{cases}$, 的解是 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$, 则 $a+b$ 的值为_____.

解析: 这是开放性问题, 注意“给出合理的解题途径”的要求, 显然这两个问题都不宜直接解字母系数方程, 得到 x 、 y 的表达式.

(1) 先解方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=7, \end{cases}$, 得到 $\begin{cases} x=5, \\ y=-2 \end{cases}$ 后代入原方程组, 再解关于 a 、 b 的方程组.

(2) 方法 1 先将 $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 代入原方程组, 求出 a 、 b 的值.

方法 2 两个方程相加, 得 $ax+bx+ay+by=10$. 方程左边分解因式, 得 $(a+b)(x+y)=10$. 由条件可知 $x+y=3$, 所以 $a+b=\frac{10}{3}$.

3.2.16★★ 已知方程组 $\begin{cases} x-y=5, \\ 4x-3y+k=0 \end{cases}$ 的解也是方程 $3x-2y=0$ 的解, 则 k 的值为() .

- (A) -2 (B) 2 (C) -5 (D) 5

解析: 方法 1 根据题意, 三个方程有公共解. 可先解方程组 $\begin{cases} x-y=5, \\ 3x-2y=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-10, \\ y=-15. \end{cases}$ 代入方程 $4x-3y+k=0$, 求得 $k=-5$, 故选 C.

方法 2 两方程相减, 得 $3x-2y=-k-5$. 根据题意, 得 $-k-5=0$, 即 $k=-5$.

3.2.17 ★★ 甲、乙两位同学解方程组 $\begin{cases} ax-by=1 \cdots ①, \\ 3x+by=5 \cdots ②. \end{cases}$ 甲看错了 a , 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$ 乙将一个方程中的 b 写成了相反数, 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$ 则系数 a 、 b 的值().

- (A) 都不能确定 (B) 只能求出 b (C) 只能求出 a (D) 都能求出

解析: 由于甲看错了 a , 所以 $\begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases}$ 只是方程②的解. 将它代入方程②, 得 $b=-2$. 乙若将方程②中的 b 写成了相反数, 则方程②成为 $3x+2y=5$, 显然 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1 \end{cases}$ 不是它的解, 所以乙必是将方程①中的 b 写成了相反数. 这时方程①成为 $ax-2y=1$, 将乙的解代入, 求得 $a=-1$. 所以应选 D.

3.2.18 ★★ 已知方程组 $\begin{cases} 5x+y=3, \\ ax+5y=4 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 5x+by=1, \\ x-2y=5 \end{cases}$ 有相同的解, 求 a 、 b 的值.

解析: 先解方程组 $\begin{cases} 5x+y=3, \\ x-2y=5 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$ 根据题意, 这个解也是方程组 $\begin{cases} ax+5y=4, \\ 5x+by=1 \end{cases}$ 的解, 把 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2 \end{cases}$ 代入, 得 $\begin{cases} a-10=4, \\ 5-2b=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=14, \\ b=2. \end{cases}$

3.2.19 ★★ 若方程组 $\begin{cases} 4x+3y=1, \\ ax+(a-1)y=3 \end{cases}$ ($a \neq 4$) 的解 x 和 y 相等, 求 a 的值.

解析: 方法 1 解原方程组, 得 $\begin{cases} x=\frac{a-10}{a-4}, \\ y=\frac{-a+12}{a-4}. \end{cases}$ 因为 $x=y$, 所以 $\frac{a-10}{a-4}=\frac{-a+12}{a-4}$, 解得 $a=11$.

方法 2 因为 $x=y$, 在原方程组中消去 y , 得 $\begin{cases} 4x+3x=1 \cdots ①, \\ ax+(a-1)x=3 \cdots ②. \end{cases}$ 由①得 $x=\frac{1}{7}$. 把 $x=\frac{1}{7}$ 代入②, 解得 $a=11$.

3.2.20 ★★ 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 4x+y=3m, \\ 2x-2y=9m \end{cases}$ 的解满足 $2x-3y=9$, 求 m 的值.

解析: 方法 1 解原方程组, 得 $\begin{cases} x=\frac{3m}{2}, \\ y=-3m. \end{cases}$ 由题意, 代入 $2x-3y=9$, 得 $2 \times \frac{3m}{2}-3 \times (-3m)=9$. 解得 $m=\frac{3}{4}$.

方法 2 将原方程组化为 $\begin{cases} 4x-6y+7y=3m, \\ 2x-3y+y=9m. \end{cases}$ 将 $2x-3y=9$ 分别代入两个方程, 得 $\begin{cases} 18+7y=3m, \\ 9+y=9m, \end{cases}$ 消去 y , 可得 $m=\frac{3}{4}$.

3.2.21 ★★ 三个同学对问题“若方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=3, \\ y=4, \end{cases}$ 求方程组 $\begin{cases} 3a_1x+2b_1y=5c_1, \\ 3a_2x+2b_2y=5c_2 \end{cases}$ 的解.”提出各自的想法. 甲说:“这个题目好像条件不

够,不能求解”;乙说:“它们的系数有一定的规律,可以试试”;丙说:“能不能把第二个方程组的两个方程的两边都除以5,通过换元替代的方法来解决”.参考他们的讨论,你认为这个题目应该怎样解答?

解析:方法1 参考丙的意见,将第二个方程组化为 $\begin{cases} a_1 \cdot \frac{3x}{5} + b_1 \cdot \frac{2y}{5} = c_1, \\ a_2 \cdot \frac{3x}{5} + b_2 \cdot \frac{2y}{5} = c_2. \end{cases}$ 设

$\frac{3x}{5} = u, \frac{2y}{5} = v$, 则方程组化为 $\begin{cases} a_1 u + b_1 v = c_1, \\ a_2 u + b_2 v = c_2. \end{cases}$ 显然与第一个方程组相同,解为

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 4, \end{cases} \text{即} \begin{cases} \frac{3x}{5} = 3, \\ \frac{2y}{5} = 4. \end{cases} \text{所以第二个方程组的解为} \begin{cases} x = 5, \\ y = 10. \end{cases}$$

方法2 将第一个方程组的解代入原方程组,得 $\begin{cases} 3a_1 + 4b_1 = c_1, \\ 3a_2 + 4b_2 = c_2. \end{cases}$ 两个方程两边同时乘以5并整理,得 $\begin{cases} 3a_1 \times 5 + 2b_1 \times 10 = 5c_1, \\ 3a_2 \times 5 + 2b_2 \times 10 = 5c_2. \end{cases}$ 显然 $\begin{cases} x = 5, \\ y = 10 \end{cases}$ 是第二个方程组的解.

3.2.22 **★★** 当 a 取何值时,关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x + y = a + 5, \\ 2x - y = 3 - 2a \end{cases}$ 有正整数解.

解析:方法1 解方程组,得 $\begin{cases} x = \frac{8-a}{3}, \\ y = \frac{4a+7}{3}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = 2 + \frac{2-a}{3}, \\ y = a + 2 + \frac{a+1}{3}. \end{cases}$ 根据题

意, $\begin{cases} \frac{8-a}{3} > 0, \\ \frac{4a+7}{3} > 0, \end{cases}$ 且 a 是被3除余2的整数. 据此易得到只有当 $a = 5, 2, -1$ 时,

x, y 均是正整数. 所以所求 a 的值为 5、2、-1.

方法2 在原方程组中消去 a , 得 $4x + y = 13$. 这个方程的正整数解是 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 9; \end{cases}, \begin{cases} x = 2, \\ y = 5; \end{cases}, \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$ 当 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 9; \end{cases}$ 时, $a = 5$; 当 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 5; \end{cases}$ 时, $a = 2$; 当 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$ 时, $a = -1$. 所以所求 a 的值为 5、2、-1.

3.2.23 **★★** 已知一个二元一次方程的两个正整数解是 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$

(1) 试求出一个满足此条件的整系数方程,这样的方程是否只有一个?

(2) 求出它的其余正整数解.

解析: (1) 设满足条件的方程是 $x+by=c$, 将 $\begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=3, \\ y=1 \end{cases}$ 分别代入,

得 $\begin{cases} 2+3b=c, \\ 3+b=c. \end{cases}$ 解这个方程组, 得 $\begin{cases} b=\frac{1}{2}, \\ c=\frac{7}{2}. \end{cases}$ 由题意, 把所设的方程两边都乘以 2,

得所求的整系数方程是 $2x+y=7$. 这样的方程有无数个, 上述方程两边乘以同一个不等于零的整数均可.

(2) 方程 $2x+y=7$ 还有一个正整数解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$

三、含两个以上未知数的方程组的解法

3.2.24 ★★ 填空:

(1) 方程 $|4x-1|+2(8y-3z)^2+3|z-8x|=0$ 的解是_____;

(2) 方程组 $\frac{3x+y}{3}=\frac{3y+1}{2}=\frac{y-3z}{4}=5$ 的解是_____.

解析: (1) 三个非负数的和为零, 即解三元一次方程 $\begin{cases} 4x-1=0, \\ 8y-3z=0, \\ z-8x=0. \end{cases}$ 依次可求

得 $x=\frac{1}{4}$, $z=2$, $y=\frac{3}{4}$.

(2) 原方程组可写成 $\begin{cases} \frac{3x+y}{3}=5, \\ \frac{3y+1}{2}=5, \\ \frac{y-3z}{4}=5, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3x+y=15, \\ 3y+1=10, \\ y-3z=20. \end{cases}$ 由第二式求得 $y=3$,

进而求得 $x=4$, $z=-\frac{17}{3}$.

3.2.25 ★ 当 $x=2$ 时, 代数式 ax^3+bx+c 的值是 4; 当 $x=-2$ 时, 代数式 ax^3+bx+c 的值是 -16, 则 c 的值是()。

- (A) 6 (B) -6 (C) 10 (D) -10

解析: 由题意得 $\begin{cases} 8a+2b+c=4, \\ -8a-2b+c=-16. \end{cases}$ 两式相加, 得 $2c=-12$, 即 $c=-6$. 应

选 B.

3.2.26 ★★ 已知 $2x - p = -6$, $3x + q = -3$, 且 $4p - 3q = -1$, 则 x 的值为()。

- (A) -2 (B) 2 (C) -3 (D) 3

解析: 本题实际上是关于 x 、 p 、 q 的三元一次方程, 只须消去 p 、 q .

方法 1 由前两个方程分别得到 $p = 2x + 6$, $q = -3x - 3$, 代入第三个方程, 得 $4(2x + 6) - 3(-3x - 3) = -1$. 解这个方程, 得 $x = -2$. 应选 A.

方法 2 第一个方程两边都乘以 4, 第二个方程两边都乘以 3, 三个方程两边分别相加, 得 $17x = -34$, 即 $x = -2$.

3.2.27 ★★ 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y + z = 11, & ① \\ x + 2y + 2z = 6, & ② \\ 2x - 3y - z = -4; & ③ \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x - 2y = 8, & ① \\ 2y + 3z = 1, & ② \\ x + 5z = 7. & ③ \end{cases}$$

解析: 与二元一次方程组的解法相同, 解三元一次方程组的基本思想是消元: 转化为二元一次方程组, 进而再转化为一元一次方程求解.

(1) 方法 1 ①×2-②, 得 $5x + 2y = 16$, ③×2+②, 得 $5x - 4y = -2$, 解方程组 $\begin{cases} 5x + 2y = 16, \\ 5x - 4y = -2, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$ 代入①, 解得 $z = -1$. 所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$$

方法 2 由①得 $z = 11 - 3x - 2y$...④, 分别代入②、③并整理, 得 $\begin{cases} 5x + 2y = 16, \\ 5x - y = 7. \end{cases}$ 解这个方程组, 得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$ 代入④, 解得 $z = -1$. 所以原方程组

的解是 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$

(2) ①+②, 得 $3x + 3z = 9$, 即 $x + z = 3$. 解方程组 $\begin{cases} x + 5z = 7, \\ x + z = 3, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 2, \\ z = 1. \end{cases}$

代入①, 得 $3 \times 2 - 2y = 8$, 解得 $y = -1$. 所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1, \\ z = 1. \end{cases}$

3.2.28 ★★ 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x + y - z = 4, & ① \\ x - 3y + z = -2, & ② \\ 2x - y + z = 5; & ③ \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y - 3z = 2a, & ① \\ -3x + y + z = 2b, & ② (a, b, c \text{ 是常数}) \\ x - 3y + z = 2c. & ③ \end{cases}$$

解析: (1) ① + ③, 得 $3x = 9$, 即 $x = 3$. 分别代入②、③, 得方程组

$$\begin{cases} 3 - 3y + z = -2, \\ 6 - y + z = 5. \end{cases}$$

解这个方程组, 得 $\begin{cases} y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$ 所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$

(2) ① + ② + ③, 得 $-x - y - z = 2a + 2b + 2c$ …④. ① + ④ 并整理, 可求得 $z = -\frac{2a + b + c}{2}$. 同理, 由② + ④, 可得 $x = -\frac{a + 2b + c}{2}$; 由③ + ④, 可得 $y = -\frac{a + b + 2c}{2}$.

$$\text{所以原方程组的解是 } \begin{cases} x = -\frac{a + 2b + c}{2}, \\ y = -\frac{a + b + 2c}{2}, \\ z = -\frac{2a + b + c}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4}, \\ \frac{y}{z} = \frac{2}{3}, \\ 3x - 2y + z + 21 = 0. \end{cases} \\ & \text{3.2.29} \star\star \text{ 解方程组 } \end{aligned}$$

解析: 方法 1 由①得 $x = \frac{3}{4}y$ …④, 由②得 $z = \frac{3}{2}y$ …⑤. 把④、⑤代入③, 消去得 x, z , 得 $3 \times \frac{3}{4}y - 2y + \frac{3}{2}y + 21 = 0$, 解这个方程, 得 $y = -12$. 分别代入④、

$$\text{⑤, 得 } x = -9, z = -18. \text{ 经检验, 原方程组的解是 } \begin{cases} x = -9, \\ y = -12, \\ z = -18. \end{cases}$$

方法 2 由①和②可得 $x : y : z = 3 : 4 : 6$, 可设 $x = 3k$, $y = 4k$, $z = 6k$. 代入③, 得 $3 \times 3k - 2 \times 4k + 6k + 21 = 0$. 解这个方程, 得 $k = -3$. 从而可得原方程

$$\text{组的解是 } \begin{cases} x = -9, \\ y = -12, \\ z = -18. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}. \end{cases} \\ & \text{3.2.30} \star\star \text{ 解方程组 } \end{aligned}$$

解析: ①+②+③并整理, 得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{9}{4}$ ……④. ④-③, 得 $\frac{1}{x} = \frac{3}{4}$, 即

$$x = \frac{4}{3}. \text{ 同理, 由 } ④ - ②, \text{ 可得 } y = 4; \text{ 由 } ④ - ①, \text{ 得 } z = \frac{4}{5}. \text{ 经检验} \begin{cases} x = \frac{4}{3}, \\ y = 4, \\ z = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ 是}$$

原方程组的解.

3.2.31 ★★ 已知 $x - 2y + 3z = 0$, $2x - 3y + 4z = 0$ ($xyz \neq 0$), 求 $x : y : z$.

解析: 将已知条件看作关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} x - 2y = -3z, \\ 2x - 3y = -4z, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x = z, \\ y = 2z. \end{cases} \text{ 因为 } xyz \neq 0, \text{ 所以 } x : y : z = 1 : 2 : 1.$$

3.2.32 ★★ 已知 $2x + 3y - 4z = 0$ ……①, $3x + 4y + 5z = 0$ ……②, 且 $xyz \neq 0$, 求 $\frac{x+y+z}{x-y+z}$ 的值.

解析: 方法 1 与题 3.2.31 相仿, 求得 $x : y : z = (-31) : 22 : 1$, 再设 $x = -31t$, $y = 22t$, $z = t$, 代入所求代数式, 求得原式的值为 $\frac{2}{13}$.

方法 2 ②-①, 得 $x + y + 9z = 0$ ……③, 即 $x + y = -9z$ ……④. ③×5-①×2, 得 $x - y + 53z = 0$, 即 $x - y = -53z$ ……⑤. 把④、⑤分别代入原式, 得 $\frac{x+y+z}{x-y+z} = \frac{-9z+z}{-53z+z} = \frac{-8z}{-52z} = \frac{2}{13}$.

3.2.33 ★★ 已知 $\begin{cases} 3x + 7y + z = 5 \cdots ①, \\ 4x + 10y + z = 3 \cdots ②. \end{cases}$ 求 $x + y + z$ 的值.

解析: 方法 1 解关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 3x + 7y = 5 - z, \\ 4x + 10y = 3 - z, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{29 - 3z}{2}, \\ y = \frac{z - 11}{2}. \end{cases}$

$$\text{所以 } x + y + z = \frac{29 - 3z}{2} + \frac{z - 11}{2} + z = 9.$$

方法 2 方程中分离出所求的代数式: 由①得 $x + y + z + 2x + 6y = 5$ ……③, 由②得 $x + y + z + 3x + 9y = 3$ ……④. ③×3-④×2, 即得 $x + y + z = 9$.

3.2.34 ★★ 已知方程组 $\begin{cases} x + y = 8 \cdots ①, \\ y + z = -4 \cdots ②, \\ x + z = 2 \cdots ③ \end{cases}$ 的解是方程 $kx - y - 3z = 21$ 的

解,求 k 的值.

解析: 用题 3.2.30 的方法求得原方程组的解是 $\begin{cases} x = 7, \\ y = 1, \\ z = -5. \end{cases}$ 代入方程 $kx - y -$

$3z = 21$, 得 $7k - 1 + 15 = 21$. 解得 $k = 1$.

3.2.35 ★★ 解方程组 $\begin{cases} 2x + y - z = 8, & ① \\ y + z + 2w = -2, & ② \\ x + z + w = -1, & ③ \\ y - 2w = 7. & ④ \end{cases}$

解析: 本题含有四个未知数,可把④变形为 $y = 2w + 7$ ⑤,代入方程 ①、②,

消去 y ,得 $\begin{cases} 2x + 2w - z = 1, \\ 4w + z = -9, \\ x + z + w = -1. \end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases} x = 2, \\ z = -1, \\ w = -2. \end{cases}$ 把 $w = -2$ 代入 ⑤,得

$y = 3$. 所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -1, \\ w = -2. \end{cases}$

四、一次方程组的应用

3.2.36 ★ 问题 一套电器配件包括 6 个零件 A, 4 个零件 B, 2 个零件 C. 一车间共有 43 名工人, 每个工人每小时可加工 15 个零件 A, 或 12 个零件 B, 或 9 个零件 C. 要使生产零件配套, 应分配加工零件 A、B、C 的人数各多少?

解答 设加工零件 A、B 的人数分别为 x 、 y , 则加工零件 C 的人数为 _____. 车间内每小时共可加工零件 A _____ 个, 零件 B _____ 个, 零件 C _____ 个. 由生产零件配套的要求, 可列出方程组 _____. 解这个方程组, 得 _____.

答: _____.

解析: 依次填入: $43 - x - y$; $15x$; $12y$; $9(43 - x - y)$; $\frac{15x}{6} = \frac{12y}{4} = \frac{9(43 - x - y)}{2}$; $\begin{cases} x = 18, \\ y = 15; \end{cases}$ 加工零件 A、B、C 的人数应分别为 18、15、10.

3.2.37 ★★ 问题 某校为七年级学生安排宿舍, 若每间宿舍住 5 人, 则有 4 人住不下; 若每间住 6 人, 则有一间只住了 4 人, 且空两间宿舍. 求这个年级的寄宿生人数及宿舍间数.

解答 设这个年级寄宿生有 x 人, 宿舍有 y 间, 则根据题意可得方程组 _____; 也可只设有宿舍 x 间, 则可列出方程 _____.

解析：根据题意，应分别填 $\begin{cases} x - 4 = 5y, \\ x + 2 = 6(y - 2); \end{cases}$ $6(x - 2) = 5x + 4 + 2.$

3.2.38 ★★ 2009年4月7日，国务院公布了《医药卫生体制改革近期重点实施方案(2009~2011)》，某市市政府当年就加大了对医疗卫生的投资。年底，市政府决定在2010年投入6 000万元用于改善医疗卫生服务，比2009年增加了1 250万元。投入资金的服务对象包括“需方”(患者等)和“供方”(医疗卫生机构等)，预计2010年投入“需方”的资金将比2009年提高30%，投入“供方”的资金将比2009年提高20%。求该市2010年投入“需方”和“供方”的资金各是多少万元？

有4位同学给出了以下4种解答方案：

(1) 设该市2010年投入“需方”资金 x 万元，投入“供方”资金 y 万元。根据题意得 $\begin{cases} x + y = 6000, \\ (1+30\%)x + (1+20\%)y = 6000 + 1250; \end{cases}$

(2) 设该市2009年投入“需方”资金 x 万元，投入“供方”资金 y 万元。根据题意得 $\begin{cases} x + y = 6000 - 1250, \\ (1+30\%)x + (1+20\%)y = 6000; \end{cases}$

(3) 设该市2010年投入“需方”资金 x 万元，投入“供方”资金 y 万元。根据题意得 $\begin{cases} x + y = 6000, \\ \frac{x}{1+30\%} + \frac{y}{1+20\%} = 6000 - 1250; \end{cases}$

(4) 设该市2009年投入“需方”资金 x 万元，投入“供方”资金 y 万元。根据题意得 $\begin{cases} x + y = 6000 - 1250, \\ \frac{x}{1+30\%} + \frac{y}{1+20\%} = 6000. \end{cases}$

以上方案中，正确的有()。

- (A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

解析：根据题意及增长率的意义，方案(1)和方案(4)中第二个方程与所设未知数不符，方案(2)与(3)正确，故应选B。

3.2.39 ★★ 班委组织部分同学骑车到郊外春游，往返沿同一条路线，骑行共花时间 $2\frac{1}{3}$ 小时。已知途中在平路上的平均速度是15千米/时，上坡的平均速度是10千米/时，下坡的平均速度是30千米/时。问往返途中共骑行了多少路程？

对以上问题，有语句：①设在往返途中共骑行了 x 千米，往返途中的上坡路和下坡路各为 y 千米，可列得方程 $\frac{x-2y}{15} + \frac{y}{10} + \frac{y}{30} = 2\frac{1}{3}$ ，解决这个问题；②设在

单程途中平路 x 千米，坡路 y 千米，可列得方程 $\frac{2x}{15} + \frac{y}{10} + \frac{y}{30} = 2\frac{1}{3}$ ，解决这个问

题;③ 设在往返途中平路 x 千米, 坡路 y 千米, 因为上、下坡的平均速度为 20 千米/时, 可列得方程 $\frac{x}{15} + \frac{y}{20} = 2\frac{1}{3}$, 解决这个问题;④ 根据题意, 本题等量关系只有一个, 即只能列出一个方程, 而不论如何设元, 方程中未知数总有两个, 故不能求得确定的解. 其中正确的有().

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

解析: ①中方程整理后, 含 y 的项能消去, 直接得到 $x = 35$; 由②中方程, 可整体求得 $2x + 2y = 35$, 即所要求的结果. 所以语句①和②是正确的. ③中将上、下坡中的平均速度算作 20 千米/时是错误的, 因为上下坡的时间不同, 不能简单的取两个速度的平均数(事实上, 坡路上的平均速度应为 $\frac{2y}{\frac{y}{10} + \frac{y}{30}} = 15$ (千米/时)). 所以应选 B.

3.2.40 ★ 林老师去文具店给美术小组的 30 名学生买铅笔和橡皮. 到商店后发现, 若给每人买 2 支铅笔和 1 块橡皮, 则按零售价计算, 共需付 30 元; 若给每人买 3 支铅笔和 2 块橡皮, 则可按批发价计算, 共需付 40.5 元. 已知每支铅笔批发价比零售价低 0.05 元, 每块橡皮批发价比零售价低 0.1 元. 问这两种商品的零售价各是多少?

解析: 设每支铅笔的零售价 x 元, 每块橡皮的零售价 y 元. 根据题意, 得 $\begin{cases} 2 \times 30x + 30y = 30, \\ 3 \times 30(x - 0.05) + 2 \times 30(y - 0.1) = 40.5. \end{cases}$ 解这个方程组, 得 $\begin{cases} x = 0.3, \\ y = 0.4. \end{cases}$

答: 每支铅笔的零售价 0.3 元, 每块橡皮的零售价 0.4 元.

3.2.41 ★ 某农场有 300 名职工耕种 51 公顷土地, 计划种植水稻、棉花和蔬菜. 已知种植各种植物每公顷所需劳力人数及投入的资金如下表:

表 3.2.1

农作物品种	每公顷需劳力	每公顷需投入资金
水 稻	4 人	1 万元
棉 花	8 人	1 万元
蔬 菜	5 人	2 万元

已知该农场计划投入资金 67 万元. 应该怎样安排这三种作物的种植面积, 才能使所有职工都有工作, 且投入资金正好够用?

解析: 设种植水稻和棉花的面积分别为 x 公顷和 y 公顷, 则种植蔬菜面积为

$(51-x-y)$ 公顷. 根据题意, 得 $\begin{cases} 4x+8y+5(51-x-y)=300, \\ x+y+2(51-x-y)=67. \end{cases}$ 解这个方程组,

$$\text{得} \begin{cases} x=15, \\ y=20, \end{cases} \text{所以 } 51-x-y=16.$$

答: 种植水稻、棉花和蔬菜的面积分别为 15 公顷、20 公顷和 16 公顷.

3.2.42 ★★ 一列快车长 70 米, 一列慢车长 80 米. 若两车同向而行, 快车从追上慢车到完全离开慢车(一般可称作“会车”时间)为 20 秒. 若两车相向而行, 则两车从相遇到离开时间为 4 秒. 求两车每小时各行多少千米?

解析: 这类问题的难点在于路程的确定, 不妨这样假设: 第一个问题可以假设快车车尾一人在追慢车车头一人, 追及为止; 第二个问题可以假设两车车尾各有一人, 从会车开始在作相向运动, 相遇为止. 设快车和慢车每秒钟分别行驶 x 米和 y 米. 根据题意, 得 $\begin{cases} 20(x-y)=70+80, \\ 4(x+y)=70+80. \end{cases}$ 解这个方程组, 得 $\begin{cases} x=22.5(\text{米}/\text{秒}), \\ y=15(\text{米}/\text{秒}). \end{cases}$ 再将单位化为千米/时.

答: 快车和慢车每小时分别行驶 81 千米和 54 千米.

3.2.43 ★★ 甲、乙两辆汽车分别从 A、B 两地同时出发, 相向而行, 一个半小时后两车相遇. 相遇后甲还需 2 小时到达 B 地. 若 A、B 两地相距 210 千米, 求两车的速度.

解析: 方法 1 设甲、乙两辆汽车的速度分别为 x 千米/时、 y 千米/时. 注意到前一个半小时两车所行路程之和等于 210 千米, 甲车在后 2 个小时内所行的路程

$$\text{等于乙车前一个半小时所行路程, 可列出方程组} \begin{cases} \frac{3}{2}(x+y)=210, \\ 2x=\frac{3}{2}y. \end{cases} \text{解这个方程}$$

$$\text{组, 得} \begin{cases} x=60, \\ y=80. \end{cases}$$

答: 甲、乙两辆汽车的速度分别为 60 千米/时、80 千米/时.

方法 2 由甲车行驶全程需 3.5 个小时, 一个方程也可列有关甲车速度的方程: $3.5x=210$.

3.2.44 ★★ 书店周末来学校售书, 自然科学类图书按 8 折、社会科学类图书按 7.5 折收费. 一天共得书款 3 520 元. 经核算, 比原定书价少收了 1 040 元. 问实收两类书款各多少?

解析: 方法 1 设实收自然科学类图书款 x 元, 社会科学类图书款 y 元. 根据题意, 得 $\begin{cases} x+y=3520, \\ \frac{x}{0.8}+\frac{y}{0.75}=3520+1040. \end{cases}$ 解这个方程组, 得 $\begin{cases} x=1600, \\ y=1920. \end{cases}$

答: 实收自然科学类图书款 1 600 元, 社会科学类图书款 1 920 元.

方法2 设原定自然科学类图书款 x 元,社会科学类图书款 y 元.根据题意,得 $\begin{cases} x+y=4560, \\ 0.8x+0.75y=3520. \end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases} x=2000, \\ y=2560. \end{cases}$ 进而求得实收书款.

3.2.45 ★★ 某校课外阅读小组同学每人订甲、乙两份杂志,其中甲杂志是月刊,每月一期定价2.2元;乙杂志是双月刊,两个月一期定价2.6元.每位同学都是一份杂志订半年,另一份杂志订全年.经统计,甲杂志订费858元,乙杂志订费429元.求这个阅读小组的人数.

解析: 设订阅甲种杂志全年、乙种杂志半年的学生 x 人,订阅乙种杂志全年、甲种杂志半年的学生 y 人.根据题意,可得方程组 $\begin{cases} 2.2 \times 12x + 2.2 \times 6y = 858, \\ 2.6 \times 3x + 2.6 \times 6y = 429. \end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases} x=25, \\ y=15. \end{cases}$

答: 这个阅读小组有40人.

3.2.46 ★★ 用A、B、C三种原料配制两种传统的油漆.甲种油漆按A、B两种原料3:2配制,乙种油漆按B、C两种原料1:4配制.一天,某学徒不小心将甲、乙两种油漆各1千克混合在一起,结果发现使用以后很受用户欢迎.第二次准备配制这种新配方的油漆5千克,问三种原料A、B、C各应取多少?

解析: 设A、B、C三种原料分别应取 x 千克、 y 千克、 z 千克.容易求出第一次混合前1千克甲种油漆中含原料A600克,原料B400克;1千克乙种油漆中含原料B200克,原料C800克.混合后的油漆中原料A、B、C含量的比为600:600:

$800=3:3:4$.列出方程组 $\begin{cases} x+y+z=5, \\ x:y:z=3:3:4. \end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases} x=1.5, \\ y=1.5, \\ z=2. \end{cases}$

答: A、B、C三种原料分别应取1.5千克、1.5千克、2千克.

3.2.47 ★★ 某学校供学生就餐原有5个大餐厅,2个小餐厅.每个大、小餐厅可供就餐人数分别相同.暑假期间,原准备开放1个大餐厅、2个小餐厅,可供1680名学生就餐,但发现不够用.后来改为开放2个大餐厅、1个小餐厅,这时可供2280名学生就餐,结果够用了.新学期扩大招生后,学生总数达到6230名,原有餐厅是否还够用?若不够用,应增设同样规模的大、小餐厅多少?结合考虑实际情况,提出你的方案.

解析: 方法1 应先求出每个餐厅可供学生就餐人数:设1个大餐厅可供 x 名学生就餐,1个小餐厅可供 y 名学生就餐.根据题意,得 $\begin{cases} x+2y=1680, \\ 2x+y=2280. \end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases} x=960, \\ y=360. \end{cases}$ 因为 $960 \times 5 + 360 \times 2 = 5520$,学生人数超过原有餐厅可容纳人数 $6230 - 5520 = 710$ (人),所以原有餐厅不够用.

根据题意,增设餐厅方案可不唯一,只要陈述合理都可以.例如:考虑到防止

就餐时拥挤,或学校教学楼、宿舍相对集中,或建餐厅选址、成本等,可增设1个大餐厅.考虑到学校教学楼、宿舍相对分散,或学生就餐时间不会完全集中等,可增设2个小餐厅.

方法2 由题意易知,每个大餐厅容纳学生数比小餐厅多 $2280 - 1680 = 600$ (人).设1个大餐厅可供 x 名学生就餐,则1个小餐厅可供 $(x - 600)$ 名学生就餐.根据题意,得 $2x + x - 600 = 2280$,解得 $x = 960$,以下与方法1相同.

3.2.48 ★★ 某县在“以草治沙”活动中,制定了一项奖励政策:对当年新增草地面积达到10亩的农户,给予1800元补贴,且每超出1亩,再给予 a 元奖励.此外,草地从下一年起平均每亩每年可获 b 元的种草收入.某农户第一年新增草地20亩,获该项总收入3000元;第二年新增草地25亩,获总收入5200元.

(1) 由以上资料确定 a 、 b 的值.

(2) 若该农户每年新增草地面积按相同的增长率增加,预计第四年总收入将达到多少(精确到百元)?

解析: (1) 根据题意,可得方程组 $\begin{cases} 1800 + (20 - 10)a = 3000, \\ 1800 + (25 - 10)a + 20b = 5200. \end{cases}$ 解这个

方程组,得 $\begin{cases} a = 120, \\ b = 80. \end{cases}$

(2) 该户每年新增草地亩数的年增长率为 $\frac{25 - 20}{20} = 0.25$, 按此增长率预计第四年总收入为 $1800 + 120 \times (25 \times 1.25^2 - 10) + 80 \times (20 + 25 + 25 \times 1.25) \approx 11400$ (元) = 1.14(万元).

答: 预计第四年总收入将达到1.14万元.

3.2.49 ★★ 母亲节到了,小红、小莉、小莹去花店买花.小红买了3枝玫瑰、7枝康乃馨、1枝百合花,花了14元;小莉买了4枝玫瑰、10枝康乃馨、1枝百合花,花了16元.小莹准备三种花各买2枝,她将付多少钱?

解析: 设玫瑰、康乃馨、百合花的单价分别为 x 元、 y 元、 z 元,不难列出方程组 $\begin{cases} 3x + 7y + z = 14, \\ 4x + 10y + z = 16. \end{cases}$

方法1 将方程组视为关于 x 、 y 的字母系数方程组,解得 $\begin{cases} x = 14 - \frac{3}{2}z, \\ y = \frac{z}{2} - 4. \end{cases}$ 则

$$2x + 2y + 2z = 2\left(14 - \frac{3}{2}z\right) + 2\left(\frac{z}{2} - 4\right) + 2z = 20.$$

方法2 将方程组中分离出 $x + y + z$,得 $\begin{cases} 2x + 6y + x + y + z = 14 \cdots ①, \\ 3x + 9y + x + y + z = 16 \cdots ②. \end{cases}$ ① \times

$3 - ② \times 2$, 得 $x + y + z = 10$, 即 $2x + 2y + 2z = 20$.

答: 小莹应付 20 元钱.

3.2.50 ★★ 第一个容器内有水 49 升, 第二个容器内有水 56 升. 若用第二个容器内的水灌满第一个容器, 则第二个容器内剩下的水正好是这个容器容量的一半. 若用第一个容器内的水灌满第二个容器, 则第一个容器内剩下的水是这个容器容量的三分之一. 求这两个容器的容量.

解析: 方法 1 设第一、二两个容器的容量分别为 x 升、 y 升. 我们将重点放在对第一个条件的理解上: “第二个容器倒出的水灌满第一个容器”, 则倒出水量是第一个容器容量与原有水量之差: $x - 49$, 这时, 第二容器剩下水量为 $56 - (x - 49)$, 正好是这个容器容量的一半: $\frac{1}{2}y$. 这样方程已经明显了. 对相应量作变换, 即得另一个

$$\text{方程. 从而得方程组: } \begin{cases} 56 - (x - 49) = \frac{1}{2}y, \\ 49 - (y - 56) = \frac{1}{3}x. \end{cases} \quad \text{解这个方程组, 得 } \begin{cases} x = 63, \\ y = 84. \end{cases}$$

答: 第一、二两个容器的容量分别为 63 升、84 升.

方法 2 设第一种情况下从第二个容器灌入第一个容器的水量为 x 升, 第二种情况下从第一个容器灌入第二个容器的水量为 y 升, 则第一、二两个容器的容量

$$\text{分别为 } (49+x) \text{ 升, } (56+y) \text{ 升. 根据题意列方程组 } \begin{cases} 56 - x = \frac{1}{2}(56 + y), \\ 49 - y = \frac{1}{3}(49 + x). \end{cases}$$

3.2.51 ★★ 要用 20 张硬纸板做包装盒, 每张硬纸板可以做盒身 2 个, 或做盒底盖 3 个. 已知 1 个盒身和 2 个盒底盖配成一个包装盒. 如何把这 20 张硬纸板分成两部分, 一部分做盒身, 一部分做底盖, 使所做成的盒身和底盖正好配套?

在分这些硬纸板成两部分时, 如果盒身与盒底盖不能套裁怎么办? 若允许剪开一张硬纸板套裁又如何?

解析: 设用 x 张硬纸板做盒身, y 张硬纸板做盒底盖. 根据题意, 得

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 2x \cdot 2 = 3y. \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} x = 8 \frac{4}{7}, \\ y = 11 \frac{3}{7}. \end{cases} \quad \text{由于结论是分数, 所以若不能套裁, 只能配成 16}$$

个包装盒, 还剩余 $1 \frac{1}{3}$ 张硬纸板; 若允许剪开套裁, 则可用 8 张半做盒身, $11 \frac{1}{3}$ 张做盒底盖, 配成 17 个包装盒.

3.2.52 ★★ 一些学生搬砖, 若每人搬 k 块 (k 是正整数), 则余 20 块. 若每人搬 9 块, 则最后一名学生只搬 6 块. 求学生数.

解析: 设学生有 x 人, 根据题意, 得 $kx+20=9(x-1)+6$, 整理得 $(9-k)x=23$. 因为 x, k 均是正整数, 所以 $9-k$ 和 x 都是 23 的正因数, 所以 $9-k$ 只能是 1, 因此 $x=23$.

答: 搬砖学生有 23 人.

3.2.53 ★★ 公元 5 世纪, 我国数学家张丘建在《算经》中提出了数学史上著名的“百钱买百鸡问题”: 今有鸡翁一, 值钱五; 鸡母一, 值钱三; 鸡雏三, 值钱一. 凡百钱买百鸡, 问鸡翁、母、雏各几何?

解析: 设鸡翁、鸡母分别买了 x 只、 y 只, 则鸡雏买了 $(100-x-y)$ 只. 根据题意, 得方程 $5x+3y+\frac{1}{3}(100-x-y)=100$. 整理, 得 $7x+4y=100$. 这里显然无法再列出第二个方程. 但由题意可知, 未知数 x, y 及 $100-x-y$ 的值只能取小于 100 的正整数, 且 x 必是 4 的倍数. 在此条件下, 共求得 3 个正整数解, 鸡翁、母、雏的只数分别为 4, 18, 78; 8, 11, 81 或 12, 4, 84.

3.2.54 ★★ 观察下面给出的乘法算式, 回答下列问题:

$$9 \times 31, 10 \times 30, 11 \times 29, 12 \times 28, 13 \times 27, 14 \times 26,$$

$$15 \times 25, 16 \times 24, 17 \times 23, 18 \times 22, 19 \times 21, 20 \times 20.$$

(1) 将以上各式分别写成两数平方差 “ $x^2 - y^2$ ” 的形式.

(2) 将以上各式的积按照从小到大的顺序排列, 你有什么简便的方法?

(3) 试由(1)、(2)中的讨论, 归纳出一个一般性的结论(不要求证明).

解析: (1) 因为 $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, 可以应用方程组解决这一问题: 如对 9×31 , 可列出方程组 $\begin{cases} x-y=9, \\ x+y=31. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=20, \\ y=11. \end{cases}$ 所以 $9 \times 31 = 20^2 - 11^2$. 同理 $10 \times 30 = 20^2 - 10^2$, $11 \times 29 = 20^2 - 9^2$, …, $19 \times 21 = 20^2 - 1^2$, $20 \times 20 = 20^2 - 0^2$.

(2) 以上各式所得的积从小到大与原有算式的顺序相同. 根据将各式写成平方差的形式, 第一项被减数都是 20^2 , 减数依次递减, 则差依次递增.

(3) 解答不惟一, 表达有理并在原有基础上有所推广即可, 用语言叙述或用数学符号表示也都可以. 例如: 设 a, b ($a_i, b_i, i=1, \dots, n$) 是自然数.

① 若 $a+b=40$, 则 $ab \leqslant 400$; ② 若 $a+b=c$ (c 是常数), 则 $ab \leqslant \left(\frac{c}{2}\right)^2$;

③ 如果两个正数的和相等, 那么这两个正数越接近, 它们的积越大; ④ 若 $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \dots = a_n + b_n > 0$, 且 $|a_1 - b_1| \geqslant |a_2 - b_2| \geqslant \dots \geqslant |a_n - b_n|$, 则 $a_1 b_1 \leqslant a_2 b_2 \leqslant \dots \leqslant a_n b_n$.

3.2.55 ★★ 初一某班在入学体检中, 测得全班同学平均体重是 39.3 千克. 其中男同学平均体重比女同学重 20%, 而女同学人数比男同学多 20%. 求男、女同学

的平均体重(精确到 0.1 千克).

解析: 设女同学平均体重 x 千克, 则男同学平均体重 $1.2x$ 千克; 设男同学 y 人, 则女同学 $1.2y$ 人. 根据题意, 得方程 $1.2xy + 1.2xy = 39.3(y + 1.2y)$, 整理, 得 $2.4xy = 86.46y$. 因为 $y \neq 0$, 所以 $2.4x = 86.46$. 解得 $x \approx 36.0$, $1.2x \approx 43.2$.

答: 男同学平均体重约 43.2 千克, 女同学平均体重约 36.0 千克.

3.2.56 ★★ 某电子产品去年按定价的 80% 出售, 能获 20% 的利润. 今年由于买入价低, 按去年同样定价的 75% 出售, 能获 25% 的利润. 问今年买入价是去年买入价的几折?

解析: 设今年的买入价是 x 元, 去年的买入价是 y 元, 两年的定价都是 m 元.

根据题意, 得方程组 $\begin{cases} 1.25x = 0.75m \\ 1.2y = 0.8m \end{cases}$, 两式相除, 得 $\frac{x}{y} = \frac{9}{10}$.

答: 今年买入价是去年买入价的 9 折.

3.2.57 ★★ 某人沿公路匀速前进, 发现每隔 a 分钟迎面开来一辆公共汽车, 每隔 b 分钟背后追上来一辆公共汽车. 假设车站发车间隔时间相同且车速不变. 求车站发车间隔时间. 若已知该人的步行速度, 能否推出公共汽车行驶的速度?

解析: 设汽车和人的速度分别为 x 米/分、 y 米/分, 相邻两车间相距 s 米.

根据题意, 得 $\begin{cases} ax + ay = s \\ bx - by = s \end{cases}$, 两式消去 y , 得 $2abx = (a + b)s$, 由此得 $\frac{s}{x} = \frac{2ab}{a + b}$, 即车站发车间隔时间. 若两式消去 s , 得 $(b - a)x = (b + a)y$, 即 $x = \frac{b + a}{b - a}y$.

答: 车站发车间隔时间为 $\frac{2ab}{a+b}$ 分. 已知人的步行速度 y 米/分, 能推出公共汽车行驶的速度 $x = \frac{b+a}{b-a}y$ 米/分.

3.2.58 ★★ 某公园的学生门票价如下表:

表 3.2.2

购 票 人 数	1~50	51~100	100 以上
每 人 票 价(元)	13	11	9

(1) 初一两个班级共 104 人前往游览, 若两班分别购票, 则需 1240 元; 若合起来购票, 则能节约多少钱? 并求出两班各有多少人?

(2) 若已知分别购票总额 1240 元, 而不知道两班学生的总数, 你能求出各班人数吗?

解析: (1) 两班合起来购票, 能节约 $1240 - 9 \times 104 = 304$ (元). 因为两个班购票总额 1240 不是 11 的倍数, 所以一个班人数超过 50, 另一个班人数不超过 50. 设

更多资料：http://product.dangdang.com/product.aspx?product_id=20823831

