

基于社团划分的复杂网络牵制控制策略

邬盈盈, 韦 巍, 李国阳

(浙江大学 系统科学与工程学系, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 为了解决大尺度复杂网络的稳定性问题, 通过研究原网络稳定性与其子群落稳定性之间的关系, 在 V 稳定性理论的基础上, 提出一种新的牵制控制策略. 在满足一定衡量标准的情况下, 对原网络先应用快速分群法, 将其划分成几个独立的子群落, 再依次对每个子群落进行特定牵制控制的策略能够实现复杂网络的 V 稳定. 研究结果表明: 这种控制策略与直接对原网络进行特定牵制控制相比, 所需控制器的个数更少, 控制方法的实用性和有效性都得到了提高.

关键词: 复杂网络; 牵制控制; V 稳定性; 社团结构

中图分类号: TP 273

文献标志码: A

文章编号: 1008-973X(2011)03-0495-08

Pinning control of complex networks via network division

WU Ying-ying, WEI Wei, LI Guo-yang

(Department of System Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Based on V-stability theory, a novel pinning control strategy for the stability problem of complex large scale network was presented via studying the relationship between the original network and its communities. In the case of certain criterions, the network was separated into small communities by a fast division algorithm before applying pinning control for deriving stabilization. The new control method which needs less number of pinned nodes is more effective and practical than the previous specifically pinning strategy. As illustrative examples, several network models were simulated to verify the results.

Key words: complex networks; pinning control; V-stability; community structure

近年来,随着信息技术的高速、迅猛发展,人类社会已经进入到网络时代. 生活中各种各样结构复杂、节点复杂、相互影响因素复杂的政治、经济、工业等关系网络都可以用复杂网络模型来描述. 模型中的各个对象都可以被看作为网络的节点,而这些对象间的各种关系则被看作为网络的连边. 随着复杂网络学科与包括经济科学、社会科学、生命科学和工程科学等众多学科间的相互渗透,愈来愈多的研究者开始关注这一领域,并围绕着网络所具有的各种

特性,诸如拓扑结构、动力学性能、鲁棒性、社团结构等方面开展了深入研究. 为了解决复杂网络研究中的一大热点——稳定性问题,控制策略的提出层出不穷. 其中,牵制控制策略由于其仅需在少量关键节点上施加控制,如特定牵制控制^[1-2]、自适应牵制控制^[3]和点对点牵制控制^[4]等,与需在每个节点上添加控制器的方法相比更具有实际应用意义. 当网络节点间的耦合强度足够大时,采用单一节点控制方法^[5]同样能使网络达到平衡状态. 但这几种牵制控

收稿日期: 2009-12-11.

浙江大学学报(工学版)网址: www.journals.zju.edu.cn/eng

基金项目: 浙江省青年人才培养资助项目(R105341); 浙江省自然科学基金资助项目(Y106046, Y1080776); 国家自然科学基金资助项目(60704030).

作者简介: 邬盈盈(1982—), 浙江宁波人, 博士生, 从事复杂网络稳定性方面研究. E-mail: carolewu@gmail.com

通信联系人: 韦巍, 男, 教授. E-mail: wwei@zju.edu.cn

制方法都仅能应用于网络节点自动态相同的情况,由于V稳定性理论^[6]的提出,可以用节点无源度替代自动态对网络稳定性的影响,以达到对节点自动态不同的网络设计牵制控制策略的目的.更进一步,应用牵制控制策略不仅能将动态网络稳定到平衡点,还可使含有不确定性的复杂网络稳定到混沌吸引子的轨迹上^[7].

另一方面,在复杂网络的研究中,越来越多的网络被发现具有社团结构,即原网络可以被看成是若干个子网络或子群进行相互耦合形成.在这些子群内部各节点的耦合关系相对紧密,而在连接各子群的那些节点之间的耦合关系则相对稀疏.在现实生活中,大量真实存在的网络也都具有社团结构这一特征,如万维网WWW可被看成由大量包含着网站的社团组成,这些网站社团由于关注的兴趣、主题相异,而导致社团内部网页之间的超链接数远远大于连接这些网站社团之间的超链接数^[8-10],又如人类社会和生物界中相互重叠存在的各种不同社团群落^[11],其中Zachary^[12]研究的美国某大学中空手道俱乐部成员间的相互关系一直被作为典型范例用于研究.寻找网络社团结构的主要算法可分为两大类:图形分割和等级聚类^[13],其中等级聚类又可分为凝聚方法和分裂方法.在社团结构划分的标准算法——GN算法的基础上,Newman等^[14]提供了一个衡量网络划分结果质量高低的标准,从而获得网络社团结构的最优划分.

考虑到复杂网络中往往包含大量的节点,虽然通过采用牵制控制策略能减少控制器的个数,但是控制器位置的选择仍是实际应用中存在的一大难题.Wang等^[1]给出了无尺度网络牵制控制的2种控制策略,并得出结论:在无尺度网络中,选择节点度最大的那些节点施加控制器比随机选择控制节点网络所需的控制器个数要少.但是对于网络拓扑结构多样的复杂网络来说,有时选择节点度小一些的那些节点反而能获得更好的控制效果^[15].针对节点自动态相同的线性耦合网络,Wu等^[16]提出当耦合强度足够强时,对其任意选取的各个子群施加单节点控制能够使得网络达到子群同步模式.针对复杂网络中节点自动态往往各不相同的情况,考虑到各种复杂网络拓扑结构种类的不同,并结合复杂网络的社团结构特点,本文提出了一种带有衡量标准的牵制控制策略,在满足该判别条件的情况下,不但有效地避免了被控网络尺度过大的问题,实现了网络的降维控制,而且还能减少牵制控制所需的控制器个数.

1 模型描述

考虑一个含 N 个节点的动态无向复杂网络,且各节点间耦合为线性耗散耦合,每个节点均为一个 n 维的动态系统,系统方程描述如下:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + c \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \Gamma(x_j - x_i); i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

式中: $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]^T \in \mathbf{R}^n$ 是节点 i 的状态向量, $f_i(x_i): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 表示节点 i 的自动态方程,为一给定的时间连续非线性向量函数,常数 c 是网络的全局耦合强度,表示节点 i 和节点 j 之间的耦合强度.常数矩阵 $\Gamma \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是网络的内部耦合矩阵,用来描述网络中每一对相互连接的节点之间的耦合方式.耦合矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 表示整个网络的连接拓扑结构:当第 i 个节点和第 j 个节点之间有连边时, $a_{ij} = a_{ji} = 1$; 当这2个节点之间没有连边时, $a_{ij} = a_{ji} = 0$.此外,定义耦合矩阵 A 的对角线元素为

$$a_{ii} = -k_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ji}; i = 1, 2, \dots, N.$$

式中: k_i 为节点 i 的度.

当网络时间 t 趋向于无穷大,网络各节点满足状态

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) \rightarrow \bar{x}(t) \quad (2)$$

时,即称动态网络达到(渐进)稳定,其中 $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ 是网络的一个平凡平衡点,且满足

$$f_i(\bar{x}) = 0; i = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

定义网络的平衡状态为 $\bar{X} = [\bar{x}^T, \bar{x}^T, \dots, \bar{x}^T]^T \in \mathbf{R}^{nN}$.自动态方程 f_i 在平衡点 \bar{x} 可微,那么将式(1)在 \bar{x} 点进行线性化处理,可得到下式:

$$\dot{\eta} = (J + G \otimes \Gamma) \eta. \quad (4)$$

式中:

$$\eta = (\eta_1^T, \eta_2^T, \dots, \eta_N^T)^T \in \mathbf{R}^{nN},$$

$$\eta_i = x_i - \bar{x}, i = 1, 2, \dots, N,$$

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_n) \in \mathbf{R}^{nN \times nN},$$

其对角线元素为雅可比矩阵 $J_i = \partial f_i(\bar{x}) / \partial x$, $G = (ca_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$.

根据李亚普诺夫线性化方法,当矩阵 $J + G \otimes \Gamma$ 所有的特征根均位于相平面的左半平面时,线性自治系统(4)在平衡状态 \bar{X} 渐近稳定,否则只要存在一个特征根位于右半平面或虚轴上,该系统就不能稳定或无法判断其稳定性.但由于采用线性化方法仅能获得网络局部稳定的判断结论,本文采用V稳定性判据^[6]来讨论网络的稳定性问题.

2 网络稳定性分析和牵制控制策略

2.1 基于V稳定性理论的网络稳定性分析

同文献[6]一样,网络(1)(式(1))满足下述假设.

假设1 存在一个连续可导的李亚普诺夫函数 $V(x): D \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$, 对于 $\bar{x} \in D$ 有 $V(\bar{x}) = 0$, 使得对每个节点的自动方程 $f_i(x)$ 均存在一个标量 θ_i 能保证下式成立:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} (f_i(x_i) + \theta_i \Gamma(x_i - \bar{x})) &< 0, \\ \forall x_i \in D_i/\bar{x}; i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: $D = \{x: \|x - \bar{x}\| < \alpha\}$, $\alpha > 0$; θ_i 被称作第 i 个节点的无源度, 当 $\theta_i < 0$ 时表示第 i 个节点需要由外界获取能量; 当 $\theta_i > 0$ 时则表示第 i 个节点已经可以达到稳定状态. 由于每个节点的 θ_i 取值均不唯一, 通常情况下, 任何能满足式(5)的 θ_i 均可被用来作为实际应用中节点 i 的无源度取值[6].

不失一般性, 这里假设网络平衡状态为 $\bar{X} = 0$, 且网络的李亚普诺夫函数选为

$$V_N(X) = \sum_{i=1}^N V(x_i); X = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T. \quad (6)$$

如果找到复杂网络的社团结构, 并去除网络(1)中连接各子群落的连边后, 原始网络即可分为 r 个子群落, $n_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 为第 i 个子群落所含的节点个数. 定义集合 T_1, T_2, \dots, T_r 分别表示相应的各个群落所包含的节点集合, 这些孤立的子群落可以由下式表达:

$$\begin{aligned} x_{i, i \in T_k} &= f_i(x_i) + c \sum_{j \in T_k, j \neq i} a_{ij} \Gamma(x_j - x_i); \\ k &= 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (7)$$

那么, 可以得到如下结论[17].

定理1 假设对所有子群落(式(7))存在李亚普诺夫函数 $V(x) = x^T P x$, 其中 P 为对称正定阵, 且有无源度 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 能满足假设1, 当所有子群落在平衡状态 $\bar{X}_k \in \mathbf{R}^{m_k \times 1} (k = 1, 2, \dots, r)$ 是V稳定时, 原始网络(1)在平衡状态 $\bar{X} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 上也是V稳定的.

证明与文献[17]类似, 此处略.

由此, 复杂网络(1)在平衡状态的稳定性问题可以转换成分析网络各子群落是否同样是V稳定的, 即各子群落的特征矩阵是否是半负定阵的问题. 可见, 在对网络进行稳定性控制时, 可以先将网络划分成几个子群落, 再对每个子群分别进行控制, 使得被控网络的维数下降, 而有效地避免由于节点数过大而带来的计算问题.

2.2 牵制控制策略

由定理1可知, 原始网络(1)的稳定性可以由其所有子群落的V稳定来保证. 为此, 针对大尺度复杂网络, 设计牵制控制策略如下: 先寻找出网络的社团结构, 在此基础上对其所有子群落设计牵制控制器, 从而使复杂网络能稳定到平衡状态, 大大降低了控制器的设计难度和计算量.

首先, 采用基于贪婪算法思想的快速凝聚算法[18]对网络(1)进行社团划分. 模块度标准定义如下:

$$Q = \sum_i (e_{ii} - a_i^2). \quad (8)$$

按照凝聚算法思想, 先将含有 N 个节点的网络划分成 N 个子群落, 即将每个节点均看作一个子群落; 然后不断地将任意2个群落合并成一个群落, 再计算得到不同的模块度增量:

$$\Delta Q = e_{ij} + e_{ji} - 2a_i a_j = 2(e_{ij} - a_i a_j), \quad (9)$$

选择能使模块度 Q 值朝着增加最多或减少最少的合并方式更新 e_{ij} 的值. 重复该步骤, 直到所有子群落合并得到网络(1). 网络(1)可以根据模块度 Q 最大的那个值进行划分, 以得到相应的子群落.

在应用 Newman 快速算法得到网络的社团结构之后, 进一步对得到的每个子群落进行稳定性分析, 再分别设计牵制控制器.

不失一般性, 选择被控网络中的前 $m (m = \lfloor \delta N_{\text{net}} \rfloor, 0 < \delta \leq 1)$ 个节点为被牵制控制的节点, 其中 N_{net} 为子群落节点数, 控制律为

$$u_i = -d_i \Gamma(x_i - \bar{x}); i = 1, 2, \dots, N_{\text{net}}, \quad (10)$$

其中, 当 $i = 1, 2, \dots, m$ 时, $d_i > 0$, 当 $i = m+1, m+2, \dots, N_{\text{net}}$ 时, $d_i = 0$. 那么, 在牵制控制的影响下, 被控节点无源度值就由 θ_i 提高到 $\theta_i + d_i (i = 1, 2, \dots, m)$. 当选取李亚普诺夫函数为二次型时, 被控网络的闭环特征矩阵可以写为

$$\left. \begin{aligned} C_c &= -\Theta + G - D, \\ \Theta &= \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N_{\text{net}}}), \\ D &= \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{N_{\text{net}}}) \in \mathbf{R}^{N_{\text{net}} \times N_{\text{net}}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

由V稳定性理论可知, 牵制控制的节点可以通过找到能使闭环特征矩阵 C_c 半负定的对角矩阵 K 来进行选择. 当每个子群落在牵制控制下均达到平衡状态 $\bar{X}_k (k = 1, 2, \dots, r)$ 后, 由定理1, 在施加所有子群落的牵制控制器后, 网络(1)也可达到平衡状态 \bar{X} .

3 仿真结果

基于V稳定性理论, 本文给出了关于具有社团结构的复杂网络进行牵制控制策略设计的相关理论

依据.下面对几种含典型拓扑结构的复杂网络模型进行仿真研究,通过比较这些网络应用新的牵制控制策略与常用的牵制控制策略所得结果的不同,从而针对不同网络模型进行选择性地应用不同的牵制控制策略,以尽可能减少网络所需控制器的个数.

3.1 网络拓扑模型

这里选择的网络模型均含有 $N = 400$ 个节点数. 仿真中假设内部耦合矩阵 $\Gamma = [1]$, 且对于这些网络模型中的所有节点均存在无源度 $\theta = -2.1 < 0$ 满足假设 1, 其中李亚普诺夫函数选取为 $V(x) = x^T x$. 网络的稳定性可以很容易地通过判断网络特征矩阵 $C = -\Theta + G$ 是否具有半负定性来获得. 各网络模型描述如下.

- 1)随机网络^[19]:节点间连边概率为 $p = 0.15$;
 - 2)WS 小世界网络^[20]:从一个 $k = 20$ 的近邻耦合网络开始,以概率 $p = 0.2$ 对各连边进行随机重连;
 - 3)BA 无尺度网络^[21]:从一个含有 $m_0 = 20$ 的全连接网络开始,每一步增加一个新的节点,并按优先连接概率 $P_i = k_i / \sum_j k_j$ 选择 $m = 10$ 个群内已存在的节点进行连接,直到网络总节点数达到 N .
- 另外 4 个网络模型均为具有群落特征的演化网络^[22],包括 $M = 4$ 个子群落,初始每个子群落中均存在 $m_0 = 10$ 个全连接的节点,每个群落与另外 $M - 1 = 3$ 个群落之间存在 $(M(M - 1))/2 = 6$ 条连边,即每个群落间均存在一条连边,且连接这些不同群落的节点选择是随机的. 连边选择采用如下的节点优先选择连接方式.

群落内部:

$$P(s_{ij}) = s_{ij} / \sum_k s_{kj}, \tag{12}$$

式中: s_{ij} 为群内节点连接个数, s_{kj} 为第 k 子群群内连接总数.

群落之间:

$$P(l_{ik}) = l_{ik} / \sum_{m,n,n \neq j} l_{m,n}, \tag{13}$$

式中: l_{ik} 为 i 节点群间连接个数, $l_{m,n}$ 为第 m 子群与第 n 子群群间连接个数.

群间连接概率选为 $\alpha = 0.1$, 生长过程中 4 个网络新加入的节点群内连接数 n_{in} 和群间连接数 n_{out} 如下:

- 1) $n_{in} = 10, n_{out} = 1$;
- 2) $n_{in} = 1, n_{out} = 10$;
- 3) $n_{in} = 1, n_{out} = 30$;
- 4) $n_{in} = 2, n_{out} = 40$.

各模型的平均路径长度 L 、网络直径 D 、聚类系数 C^* 均列于表 1. 由表 1 可知,这 7 种网络均具

有小世界特征,其中进化网络模型 d、e、f、g 具有较高的聚类特性.

表 1 网络模型的各特征值

Tab. 1 Characteristic values of network models

网络模型	L	D	C^*
a	1.721 5	2	0.279 1
b	2.591 0	4	0.397 0
c	2.263 7	4	0.144 9
d	2.743 0	4	0.902 2
e	2.601 5	4	0.877 2
f	2.564 2	3	0.892 8
g	2.538 2	4	0.888 7

3.2 网络社团结构划分

采用 Newman 快速算法^[18]对这 7 种网络模型进行社团结构划分,得到的模块度 Q 值的变化曲线如图 1 所示.

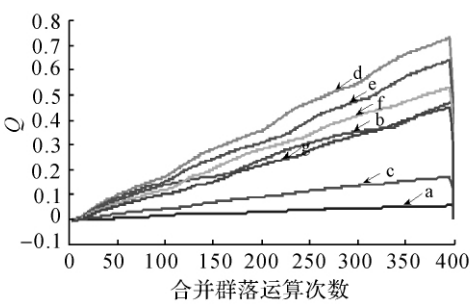


图 1 各网络模型应用快速算法所得模块度值曲线

Fig.1 Modularity Q of each network models via adopting fast algorithm

图 1 中各网络通过快速分群算法得到的模块度最大值 Q_{max} 列于表 2, 根据得到的 Q_{max} 可得到网络相应的社团划分结构, 即各网络所含子群落个数 r 、各子群落的节点数 N_i 如表 3 所示, 各子群落网络特征如表 4 所示.

表 2 分群算法的结果以及网络的稳定性分析

Tab.2 Results obtained from process of detecting community structure and stability analysis

网络模型	Q_{max}	c	N_{eig}
a	0.056 6	0.2	1
b	0.470 0	2.0	1
c	0.168 9	2.4	1
d	0.729 9	0.6	4
e	0.640 5	0.6	4
f	0.530 7	0.6	4
g	0.449 8	0.6	4

由表 4 可以看到,随机网络 a、小世界网络 b 以及几个社团结构生成网络在经过社团划分后,网络的平均路径长度 L 变小,而聚类系数 C 除了表 4 中

用边框包围起来的几个子群落之外,均有所增加.此外,随机网络、小世界网络模型的网络直径 D 没有改变,而社团结构生成网络模型的 D 均变小.另一方面,从表 4 的最下面一栏可以看到社团划分对于 BA 无尺度网络来说,有 5 个子群落(用下划线表示)的平均路径长度 L 变大,直接影响到其中 3 个子

群落(用下划线表示)的网络直径变大,甚至翻倍,有 4 个子群落(用下划线表示)的聚类系数变小,还出现了聚类系数为 0 的 2 个子群落.可见,对 BA 无尺度网络进行这样的社团划分,不仅无法得到网络正确的社团结构,而且还降低了无尺度网络适宜于牵制控制的原有特性.

表 3 网络划分结果与各子网络稳定性分析结果

Tab. 3 Result of network segmentation and stability analysis of every community

i	a		b		c		d		e		f		g	
	N_i	N_{i_eig}	N_i	N_{i_eig}	N_i	N_{i_eig}	N_i	N_{i_eig}	N_i	N_{i_eig}	N_i	N_{i_eig}	N_i	N_{i_eig}
1	181	1	172	1	106	1	111	1	126	1	131	1	142	1
2	175	1	162	1	105	1	102	1	92	1	106	1	89	1
3	44	1	66	1	95	1	94	1	92	1	89	1	88	1
4	—	—	—	—	55	2	93	1	90	1	74	1	81	1
5	—	—	—	—	24	5	—	—	—	—	—	—	—	—
6	—	—	—	—	9	3	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	6	2	—	—	—	—	—	—	—	—

表 4 各网络模型对应子群落的统计特性

Tab. 4 Statistical results of every community of network models

网络 模型	L						
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
a	1.687 6	1.683 9	1.571 9	—	—	—	—
b	2.470 12	2.488 5	2.180 4	—	—	—	—
c	2.166 6	2.297 8	2.277 9	2.577 1	2.829 7	3.333 3	2.133 3
d	1.883 7	1.879 1	1.864 8	1.868 6	—	—	—
e	1.886 6	1.867 9	1.861 0	1.858 9	—	—	—
f	1.856 6	1.884 6	1.863 6	1.859 7	—	—	—
g	1.864 9	1.862 4	1.868 3	1.853 7	—	—	—

网络 模型	D						
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
a	2	2	2	—	—	—	—
b	4	4	4	—	—	—	—
c	4	4	4	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>8</u>	4
d	2	2	2	2	—	—	—
e	2	2	2	2	—	—	—
f	2	2	2	2	—	—	—
g	2	2	2	2	—	—	—

网络 模型	C^*						
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
a	0.310 8	0.316 5	0.418 1	—	—	—	—
b	0.500 7	0.509 8	0.596 0	—	—	—	—
c	0.221 1	0.175 6	0.194 4	<u>0.119 8</u>	<u>0.018 1</u>	0	0
d	0.933 7	0.931 6	0.923 9	0.927 4	—	—	—
e	<u>0.856 2</u>	0.921 3	0.923 8	0.923 0	—	—	—
f	<u>0.836 0</u>	0.934 9	0.925 5	0.931 1	—	—	—
g	<u>0.846 1</u>	0.921 1	0.928 6	0.922 1	—	—	—

3.3 网络的稳定性分析

为了简化 LMI 方法求解线性方程不等式的计算过程,每个网络模型的耦合强度 c 的取值如表 2

所示.原网络的特征矩阵 $C_{\text{Model}} = -\Theta_{\text{Model}} + G_{\text{Model}}$ 及其各子群落的特征矩阵 $C_i = -\Theta_i + G_i$ (其中 $C_i, \Theta_i, G_i \in \mathbf{R}^{N_i \times N_i}$, N_i 即第 i 个群落所含的节点数)所含正特征根的个数 $N_{\text{eig}}, N_{i_eig}$ 也分列于表 2、3.

这里定义每个网络及其子群落模型的耦合矩阵 G_{net} 的特征根均如下排序:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{N_{\text{net}}}.$$
 (14)

同样地,由 V 稳定性理论可知,这 7 种不同复杂网络都不处于平衡状态,且施加到原始网络和子群落上的牵制控制器个数不可少于对应特征矩阵所含正特征根的个数.

3.4 牵制控制

针对原始网络的各个子群落,牵制控制器施加位置的选择选用特定牵制策略^[1],即从网络中节点度最大的那个节点开始,不断按照节点度单调下降的顺序,添加节点作为牵制控制器,直到网络的闭环特征矩阵特征根均不大于 0,由定理 1 可得在子群落均稳定的情况下,各网络也能达到稳定状态.同样地,对于原始网络直接采用相同的牵制控制策略,也可以相应得到获得稳定所需的控制器施加位置及个数.2 种牵制控制策略的应用结果,即分别所需的控制个数 $N_{\text{con}}, N_{i_con}$ 列于表 5.

以上仿真中的控制器个数及反馈增益均采用了 LMI 方法来求解.

3.5 牵制控制策略的修正

从表 2、5 所示结果可得,与常用的特定牵制控制相比,这种牵制控制算法对于社团结构明显的网络(例如网络模型 d),能够减少所需牵制控制器的

表 5 本文提出的新牵制控制策略与特定牵制控制^[1]的应用结果对比

Tab. 5 Comparison of the number of controlled nodes between new pinning control strategy and specific pinning strategy^[1]

网络模型	控制策略 ^[1-2] 所需控制器个数	N_{con}	N_{i-con}						
			$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$
a	34	90	32	31	27	—	—	—	—
b	22	32	13	14	5	—	—	—	—
c	4	70	4	3	4	36	13	6	4
d	19	16	4	4	4	4	—	—	—
e	19	19	7	4	4	4	—	—	—
f	16	16	4	4	4	4	—	—	—
g	16	16	4	4	4	4	—	—	—

个数,对于模型 e、f、g,由于网络的维数被大大降低,应用 LMI 方法所需的时间复杂度也随之降低,从而提高了算法的效率.此外,虽然划分社团结构能提高随机网络以及 WS 小世界网络的聚类系数,并降低网络的平均路径长度,但是采用新的控制方法所需的控制器个数比常用方法还是会多出很多.为了讨论新方法的适用网络类型,这里比对了各网络及其子群落耦合矩阵的第 2 大特征根 λ_2 值的变化,如图 2 所示.

从图 2 可以发现在进行分群算法将网络进行社团划分后,如果各子群落的耦合矩阵 G_i (i 指划分出的第 i 个子群落)的第 2 大特征根 λ_2 均大于原网络的耦合矩阵 G 的第 2 大特征根 λ_2 时,那么分别施加牵制控制器的方法不能够降低整个网络所需牵制控制器的个数,甚至可能破坏网络原有适宜于牵制控制的特性,如无尺度网络.而当情况相反时,即子群落的 λ_2 值较原网络的 λ_2 有所降低时,对于社团结构明显的网络,采用新的牵制控制方法,能够减少所需控制器的个数,而对于社团结构不那么明显的网络,至少能够在控制器个数不改变的情况下,由于子群落维数的降低而大大减少应用 LMI 方法时的计算量.

本文将网络耦合矩阵 G 的第 2 大特征根 λ_2 作为牵制控制策略选择时的一个较为实用的衡量标准,并据此修正了前面针对大尺度网络而提出的牵制控制策略,修正后的策略分为以下步骤:

- 1) 先用 Newman 快速算法对该大尺度复杂网络进行社团划分;
- 2) 计算原始网络与子群落各网络特征,包括:平均路径长度 L 、网络直径 D 以及聚类系数 C ,考察分群后子群落的 L 值是否变小, C 值是否变大,即通过分群是否能强化子群落内部的耦合关系.如果这些网络特征都没有得到增强,那么直接对原始网络进行常用的特定牵制控制;反之,则进行第 3 步;

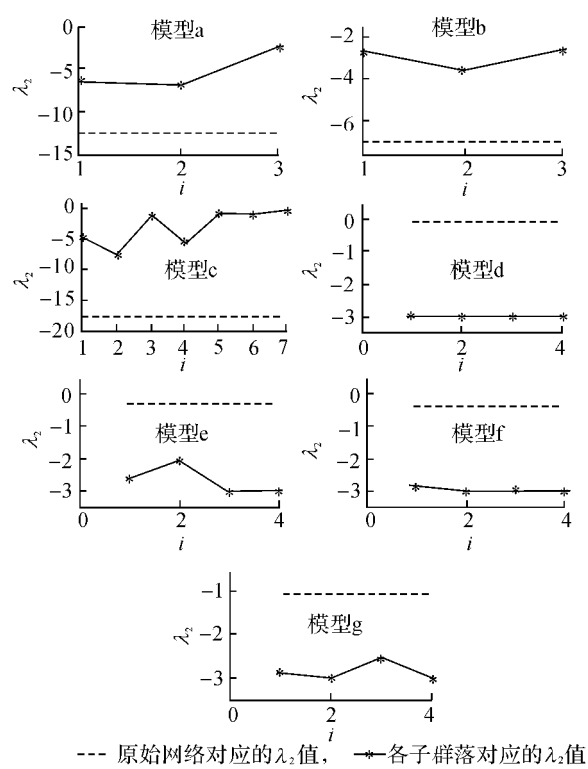


图 2 各网络及其子群落对应的耦合矩阵 G 的第二大特征根对比图

Fig. 2 Comparison of λ_2 between each network model and its communities

- 3) 分别计算原始网络与各子群落对应的耦合矩阵第 2 大特征根 λ_2 的大小,如果所有子群落对应的 λ_2 值均比原始网络的 λ_2 小,则针对每个子群落,分别进行特定牵制控制;反之,对原始网络直接进行特定牵制控制.

3.6 聚合网络模型

为了验证 3.5 节中的结论,这里选择一含 $N = 1\ 200$ 个节点的聚合网络模型(其由各含 400 个节点的随机网络、小世界网络和具典型群落特征的网络线性耦合而成).其中这 3 个子网络的拓扑结构与 3.1 节的 a、b 和 d 模型相同,并在各子网络间

均随机增添 5 条连接边. 内部耦合矩阵 $\boldsymbol{I} = [1]$, 且对于所有节点, 均存在无源度 $\theta = -2.1 < 0$ 能满足假设 1, 其中李亚普诺夫函数选取为 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$. 网络的耦合强度定义为 $c = 2.5$.

该模型的平均路径长度 L 、网络直径 D 、聚类系数 C 列于表 6. 采用 Newman 快速算法进行社团结构划分, 得到的模块度 $Q_{\max} = 0.3782$, 其所对应的子群落总数为 4. 各子群落所含的节点数 N_i 和各子群落网络特征如表 6 所示. 同样, 原网络的特征矩阵及其各子群落的特征矩阵所含正特征根的个数 N_{eig} 、 $N_{i\text{-eig}}$ 均列于表 6. 考察聚合网络及其子群落耦合矩阵 \boldsymbol{G} 的第 2 大特征根 λ_2 如图 3 所示. 由图 3 可知, 根据 3.5 节中的步骤 3) 对分群后的各子群落分别设计牵制控制器, 得到的控制器个数列于表 6. 可以看到, 采用先分群的方法所需要的控制器总个数为 27 个, 远远小于直接施加特定牵制控制所需的控制器个数(450 个).

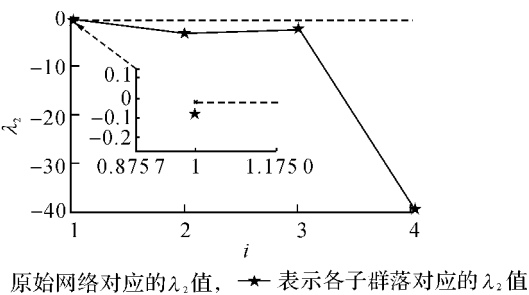


图 3 原始网络及其子群落对应的耦合矩阵 \boldsymbol{G} 的第 2 大特征根对比图

Fig. 3 Comparison of λ_2 between the original network and its communities

表 6 聚合网络模型及其分群后得到的子群落的各特征值、所需牵制控制器个数

Tab. 6 Characteristic values of network and communities and numbers of controllers

网络模型	N_i	L	D	C	N_{eig}	$N_{i\text{-eig}}$	N_{con}	$N_{i\text{-con}}$
聚合网络	1 200	3.925 8	7	0.523 7	6	—	450	—
子群落 1	289	2.544 8	4	0.898 7	—	3	—	7
子群落 2	111	1.883 7	2	0.933 7	—	1	—	1
子群落 3	400	2.591 0	4	0.397 0	—	1	—	16
子群落 4	400	1.721 5	2	0.279 1	—	1	—	3

继续对子群落进行考察. 对子群 1 进行社团结构划分, 得到 $Q_{\max} = 0.6477$, 对应的 2 级子群落个数为 3 个, 含有的节点数分别为 93、102、104 个. 因各子群落所含的节点数和各子群落网络特征与耦合强度无关, 故各特征值可以从表 4 中 d 模型所对应的值中找到. 各子群落的特征矩阵所含正特征根的个数均为 1. 子群 1 及 2 级子群落耦合矩阵 \boldsymbol{G} 的第 2

大特征根 λ_2 如图 4 所示. 分别对子群 1 的 2 级子群进行特定牵制控制, 可知为获得稳定其各子群均仅需 1 个控制器即可.

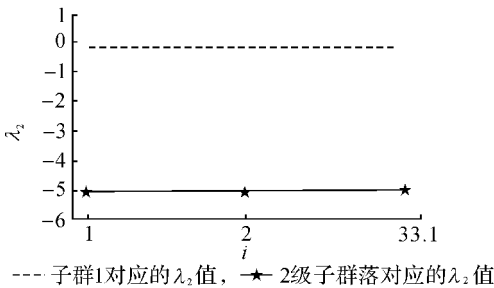


图 4 子群 1 及其 2 级子群落对应的耦合矩阵 \boldsymbol{G} 的第 2 大特征根对比图

Fig. 4 Comparison of λ_2 between the 1st community and its sub communities

其余 3 个子群落经考察均不满足 2 级子群落 \boldsymbol{G} 的第 2 大特征根 λ_2 全小于 1 级子群落 λ_2 的这一条件, 故不再对其进行群落划分. 且仿真中发现如果对这 3 个子群落的 2 级子群落分别设计控制器, 所需的个数均会比原子群落所需的控制器个数多, 因此, 根据 3.5 节中提出的控制策略, 稳定该聚合网络所需要的控制器总个数为 23 个.

4 结 语

本文基于 V 稳定性理论和网络的社团结构, 针对具各种拓扑结构的大尺度复杂网络, 提出了一种含衡量标准的牵制控制策略, 即在网络特性满足一定判断条件的情况下先对该复杂网络进行分群, 再针对子群落进行特定牵制控制, 以此达到稳定原始网络的目的.

定理 1 给出了该控制策略的相关理论依据. 通过考察几种不同拓扑结构的复杂网络模型, 选择网络特征矩阵第 2 大特征值 λ_2 作为该种控制方法应用与否的衡量标准. 对于那些能够通过网络划分强化其子群落内部耦合关系的网络, 当划分后的子群落 λ_2 值均小于原始网络对应的 λ_2 值时, 选择用这种先分群后施加牵制控制的策略; 反之则直接对原始网络进行特定牵制控制.

由仿真结果可知, 进行牵制控制方法选择后, 某些网络适宜牵制控制的原有特性不会被分群算法所破坏; 另一方面, 对于符合衡量标准的那些网络, 应用该策略与常用的特定牵制控制方法相比能够降低 LMI 方法计算负反馈增益的计算复杂度, 还能减少网络所需牵制控制器的个数, 增强了牵制控制方法

的实用性. 聚合网络模型的仿真结果验证了上述结论的有效性, 而且该结论还能应用到具有层次结构的网络中.

参考文献 (References):

- [1] WANG X F, CHEN G. Pinning control of scale-free dynamical networks [J]. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, 2002, 310(3/4): 521—531.
- [2] WANG Y W, WEN C Y. A survey on pinning control of complex dynamical networks [C]// **2008 10th International Conference on Control Automation Robotics & Vision**. Hanoi: [s. n.], 2008: 64—67.
- [3] ZHOU J, LU J A, LU J H. Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network [J]. **Automatica**, 2008, 44(2): 996—1003.
- [4] PORFIRI M, FIORILLI F. Node-to-node pinning control of complex networks [J]. **Chaos**, 2009, 19(1): 013122.
- [5] CHEN T, LIU X, LU W. Pinning complex networks by a single controller [J]. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, 2007, 54(6): 1317—1326.
- [6] XIANG J, CHEN G R. On the V-stability of complex dynamical networks [J]. **Automatica**, 2007, 43(6): 1049—1057.
- [7] WU Y Y, WEI W, LI G Y, et al. Pinning control of uncertain complex networks to a homogeneous orbit [J]. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, 2009, 56(3): 235—239.
- [8] GIBSON D, KLEINBERG J, RAGHAVAN P. Inferring Web communities from link topology [C]// **Proceedings of the 9th ACM Conference on Hypertext and Hypermedia: Links, Objects, Time and Space-structure in Hypermedia Systems**. Pittsburgh: [s. n.], 1998: 225—234.
- [9] FLAKE G W, LAWRENCE S, GILES C L, et al. Self-organization and identification of Web communities [J]. **Computer**, 2002, 35(3): 66—70.
- [10] ADAMIC L A, ADAR E. Friends and neighbors on the Web [J]. **Social Networks**, 2003, 25(3): 211—230.
- [11] GIRVAN M, NEWMAN M E J. Community structure in social and biological networks [J]. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, 2002, 99(12): 7821—7826.
- [12] ZACHARY W W. An information flow model for conflict and fission in small groups [J]. **Journal of Anthropological Research**, 1977, 33: 452—473.
- [13] 汪小帆, 李翔, 陈荣. 复杂网络理论及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 162—193.
- [14] NEWMAN M E J, GIRVAN M. Finding and evaluating community structure in networks [J]. **Physical Review E**, 2004, 69(2): 026113.
- [15] LI R, DUAN Z S, CHEN G R. Cost and effect of pinning control for network synchronization [J]. **Chinese Physics B**, 2009, 18(1): 106—118.
- [16] WU W, ZHOU W, CHEN T. Cluster Synchronization of Linearly Coupled Complex Networks Under Pinning Control [J]. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, 2009, 56(4): 829—839.
- [17] WU Y Y, WEI W, XIANG J. Pinning control on complex networks via identifying communities [C]// **2009 Chinese Control and Decision Conference**. Guilin: IEEE Computer Society, 2009: 1077—1081.
- [18] NEWMAN M E J. Fast algorithm for detecting community structure in networks [J]. **Physical Review E**, 2004, 69(6): 066133(5).
- [19] ERDÖS P, RÉNYI A. On the evolution of random graphs [J]. **Bulletin de l'Institut International de Statistique**, 1961, 38(4): 143—347.
- [20] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks [J]. **Nature**, 1998, 393(6684): 440—442.
- [21] BARABÁSI A-L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks [J]. **Science**, 1999, 286(5439): 509—512.
- [22] LI C G, MAINI P K. An evolving network model with community structure [J]. **Journal of Physics a-Mathematical and General**, 2005, 38(45): 9741—9749.

(上接第 471 页)

- [8] ZHANG You-tao, YANG Jun. Low cost instruction Cache designs for tag comparison elimination [C] // **Proceedings of the 2003 International Symposium on Low Power Electronics and Design**. Seoul, Korea: ACM, 2003: 266—269.
- [9] ZHANG Ming-ming, CHANG Xiao-tao, ZHANG Ge. Reducing cache energy consumption by tag encoding in embedded processors [C]// **Proceedings of the 2007 International Symposium on Low Power Electronics and Design**. Portland, Oregon, USA: ACM, 2007: 367—370.
- [10] 孟建熠, 黄凯, 严晓浪, 等. 应用于 SoC 功能验证的快速处理器仿真模型 [J]. **浙江大学学报: 工学版**, 2009, 43(3): 401—405.
MENG Jian-yi, HUANG Kai, YAN Xiao-lang, et al. Fast processor simulation model for SoC function verification [J]. **Journal of Zhejiang University: Engineering Science**, 2009, 43(3): 401—405.
- [11] C-SKY Microsystems. 32-bit high performance and low power embedded processor [EB/OL]. 2003-07-10. <http://www.c-sky.com>