DOI: 10.3724/SP.J.1219.2013.00536

基于社团划分的多智能体蜂拥控制算法

陈世明1,李慧敏1,谢 竟1,方华京2

(1, 华东交通大学电气与电子工程学院, 江西 南昌 330013; 2, 华中科技大学控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074)

摘 要:提出一种基于社团划分的蜂拥控制算法来保持多智能体网的连通性.首先基于层次聚类算法将多智能体网络划分成若干个社团;其次提出一种节点重要度评估算法,选出每个社团中最重要的节点作为信息智能体,并进一步提出通过保持社团连通性以实现整个多智能体网络在演化过程始终连通的控制算法.理论分析和仿真实验证明了本文算法的有效性.

关键词: 多智能体; 牵制控制; 蜂拥控制; 社团结构中图分类号: TP273 文献标识码: A

文章编号: 1002-0411(2013)-05-0536-06

Flocking Control Algorithm of Multiple Agents Based on Community Division

CHEN Shiming¹, LI Huimin¹, XIE Jing¹, FANG Huajing²

(1. School of Electrical and Electronic Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: A flocking control algorithm of multiple agents based on community division is presented to keep connectivity of multi-agent network. Firstly, the multi-agent network is divided into some communities based on hierarchical clustering. Secondly, a node importance evaluation algorithm is presented to select the most important node of each community as the information agent. Further more, a control algorithm is presented by preserving community connectivity to keep the connectivity of the whole multi-agent network in process of evolution. Finally the theoretical analysis and simulation experiments show that the proposed algorithm is effective.

Keywords: multi-agent; pinning control; flocking control; community structure

1 引言(Introduction)

自从 Reynolds^[1] 首次提出经典的群体系统蜂拥模型后,群体动力学与协调控制研究开始引起广泛关注,在传统蜂拥控制模型中,一般是通过对多智能体网络中每个节点施加控制器从而完成群体行为的协调与运动^[2]. 对于工程应用来说,对所有节点实施控制需要投入昂贵的成本,不符合现代工业发展的需要.

随着近年来牵制控制研究的发展 [3-5],将牵制的思想引入蜂拥控制研究已经取得了一些非常重要的成果,即通过对少数关键节点施加控制以实现大规模群体的蜂拥行为. 如苏厚胜等 [6] 针对随机多智能体网络提出少数个体具有虚拟领导者信息的蜂拥控制算法,在此基础上,汪小帆等 [7] 进一步基于人工势场法实现多智能体网络的牵制蜂拥同步. 以上研究中虽然通过采用牵制控制策略能减少控制器的个数,但多智能体网络中牵制节点都是随机选择的,

增加了牵制控制的不确定性,而越来越多的网络被发现具有社团结构^[8-9],即原网络可以被看成是若干个子网络或子群进行相互耦合形成. 邬盈盈^[10] 等提出了一种基于社团划分的复杂网络牵制控制策略,证明了通过对子网络特定节点施加牵制控制,可以有效控制节点数量庞大的复杂网络; 路晓庆等^[11] 则研究了具有社团结构的多智体网络牵制控制,但没有考虑具体牵制节点的选择方法.

基于上述研究背景,本文提出一种基于社团划分的蜂拥控制算法,首先基于层次聚类算法将初始多智能体网络划分成几个社团,并提出一种节点重要度评估算法,选出每个社团的关键节点作为信息智能体:其次提出一种通过保持社团连通性以实现整个多智能体网络在演化过程始终连通的控制算法,使得多智能体网络中所有智能体都能跟随虚拟领导者,实现位置的聚集与方向的同步,且有效避免了随机选择牵制节点导致网络中部分孤立的社团

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60804066, 61165007); 国家自然科学基金重点资助项目(61034006); 江西省教育厅科学基金项目(GIII1115, GIII2286).

通讯作者: 李慧敏, lhmin2013@163.com 收稿/录用/修回: 2012-06-25/2012-09-07/2013-03-20

不能跟上虚拟领导者的问题.

2 多智能体网络模型描述 (Description of multi-agent network)

考虑 N 个相同的功率驱动智能体在二维平面上运动,不考虑智能体的尺寸(将智能体视作质点),记 t 时刻智能体 i 的位置为 $q_i(t)$,速度为 $p_i(t)$,则智能体在二维坐标系下的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}}_i(t) = \boldsymbol{p}_i(t) \\ \dot{\boldsymbol{p}}_i(t) = \boldsymbol{u}_i(t) \end{cases}$$
 (1)

其中, $u_i(t)$ 为控制输入, $q_i(t)$, $p_i(t)$, $u_i(t) \in R^2$. 另外,假设多智能体网络中存在一个虚拟领导者,虚拟领导者作为网络的全局目标,引导整个网络朝着预想的方向以期望速度运动,其运动行为按下式更新:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}}_{\gamma}(t) = \boldsymbol{p}_{\gamma}(t) \\ \dot{\boldsymbol{p}}_{\gamma}(t) = f_{\gamma}(\boldsymbol{q}_{\gamma}(t), \boldsymbol{p}_{\gamma}(t)) \end{cases}$$
 (2)

其中, $\mathbf{q}_{\gamma}(t)$, $\mathbf{p}_{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^2$ 是其位置和速度向量. 设虚拟 领导者的初始值为 $(\mathbf{q}_{\gamma}(0), \mathbf{p}_{\gamma}(0)) = (\mathbf{q}_{d}, \mathbf{p}_{d})$ 且沿着一个固定速度 p_{d} 运动,则有 $\dot{\mathbf{q}}_{\gamma}(t) = \mathbf{p}_{d}$, $\mathbf{q}_{\gamma}(0) = \mathbf{q}_{d}$.

定义 1 将智能体 i 看作网络中的一个节点 V_i ,与其邻居 V_i 之间用直线 E_{ij} 相连,可以得到无向图

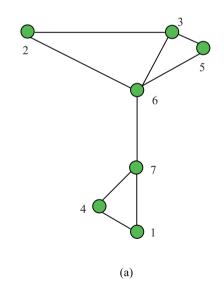
G = (V, E),其中 $V = \{V_1, V_2, ..., V_N\}$ 表示多智能体 网络中节点的集合, $E = \{E_{ij} = (V_i, V_j) : V_i, V_j \in V\}$ 表示多智能体网络中边的集合.

定义 2 在二维空间中,以智能体 i 为圆心,感知半径 r 为半径所构成的区域称为智能体 i 的邻域范围,智能体 i 邻域范围内的所有智能体 (包括 i 自身)都是其邻居.智能体 i 的邻居集合表示为 $N_i = \{V_i \in V : (V_i, V_i) \in E\}.$

3 基于社团划分的多智能体蜂拥控制算法 (Flocking control algorithm of multiple agents based on community division)

3.1 基于层次聚类的社团划分算法

本文基于层次聚类方法将整个多智能体网络分成若干个社团,同一社团中的智能体间连接紧密,而不同社团中的智能体间连接较稀疏.层次聚类分为凝聚过程和分裂过程,凝聚层次聚类的划分思想为:首先初始化由 N 个智能体组成的网络中每个智能体为一个独立社团;而后按照"距离最小原则"依次合并距离最近的社团对,直到整个网络都合并成为一个社团.该算法最多要执行 N-1 次合并.分裂层次聚类过程则相反.



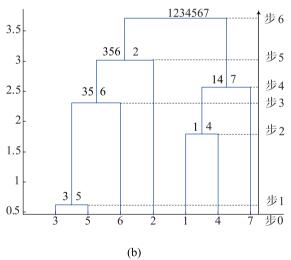


图 1 凝聚层次聚类

Fig.1 Condensed hierarchical clustering

定义 3 距离矩阵 $D = (d_{\{i\}\{i\}\}})_{M \times M}$ 定义为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{\{1\}\{1\}\}} & \cdots & d_{\{1\}\{M\}\}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{\{M\}\{1\}\}} & \cdots & d_{\{M\}\{M\}\}} \end{bmatrix}$$
(3)

式中, $d_{\{i\}\{j\}}$ 表示社团 $\{i\}$ 和 $\{j\}$ 间的距离,M 为网络中的社团数. 社团划分算法描述为:

Step1 初始随机生成 N 个智能体,每个智能体 i ($i = 1, 2, \dots, N$) 记为社团 $\{i\}$,初始化 M = N.

Step3 M = M - 1. 若 M > 1, 更新距离矩阵 **D**,

返回 Step2; 若 M = 1,整个多智能体网络合并成为一个社团,算法结束.

图 1 为由 7 个智能体所组成网络的凝聚层次聚类过程图. 初始化每个智能体为一个独立社团,而后依次合并距离最小的社团对,即首先合并 {3} 和 {5},继而是 {1} 和 {4},……,直到整个网络合并为一个社团 {1,2,3,4,5,6,7}. 整个算法完成后可以得到一个如图 1(b) 所示的社团结构分解树状图,再通过选择在树状图中不同位置断开可以得到不同的网络社团结构,图中由下往上的方向为凝聚层次聚类过程,由上往下方向则为分裂层次聚类.

3.2 牵制节点的选择——节点重要度评估

将多智能体网络划分为若干个社团后,本节进一步提出节点重要度的评估算法,选出每个社团的关键节点作为信息智能体.节点在网络中的重要度一般取决于两大因素:首先取决于节点在网络中的位置,如网络中的"中心节点"显然比"非中心节点"重要;其次还取决于节点的影响能力,即经过节点的最短路径数越多,该节点在网络中越重要,对整个网络的影响越大.

定义 4 网络中节点 V_i 和 V_j 的距离 L_{ij} 定义为 边 E_{ij} 的权重,则权值矩阵 $\mathbf{W} = (w_{ij})_{N \times N}$ 定义为

$$\begin{cases} w_{ij} = \begin{cases} L_{ij}, & (V_i, V_j) \in E \\ \infty, & (V_i, V_j) \notin E \end{cases} \\ w_{ii} = 0 \end{cases}$$
 (4)

定义 $5^{[13]}$ 图 G 的 $[V_i,V_k]$ 途径是一个有限非空序列 $J = V_i E_{ij} V_j \cdots V_k$,即节点和边的交错序列. 若途径 J 中的边两两互异,称之为迹. 若迹中节点两两互异,则称为路. 路 $[V_i,V_k]$ 的边权之和称为该路的长,而路长最小的路称为最短路. t_{ij} 表示节点 V_i 和 V_i 间最短路的长,最短路矩阵 $T = (t_{ii})_{N \times N}$ 为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N1} & \cdots & t_{NN} \end{bmatrix}$$
 (5)

定义 6 节点 V_i 的中心度 $C_c(i)$ 定义为

$$C_{\rm c}(i) = \sum_{i=1}^{N} t_{ij}$$
 (6)

中心度 $C_c(i)$ 越小,节点越居于网络中心,其在整个多智能体网络中越重要.

定义 7 图 G 中所有节点对之间经过节点 V_i 的最短路的数目定义为节点 V_i 的最短路条数,记为

 $C_{\rm b}(i)$:

$$C_{b}(i) = \sum_{i \le k} l_{jk}(i) \tag{7}$$

其中, $l_{jk}(i)$ 表示节点 V_j 与节点 V_k 之间经过节点 V_i 的最短路.

定义8 节点 V: 的重要度定义为

$$K(i) = \frac{C_{\rm b}(i)}{C_{\rm c}(i)} \tag{8}$$

K(i) 越大, 节点 V_i 在网络中越重要.

根据 3.1 节中社团划分算法将网络划分为 n 个社团,则选取 n 个关键节点作为信息智能体. 第 $g(g=1,\cdots,n)$ 个社团中节点重要度评估算法如下:

Step1 求出第g个社团的权值矩阵 W.

Step2 求出社团中每对节点 V_i 和 V_j 之间的最短路的长 t_{ii} ,进而得到最短距离矩阵 T.

Step3 根据式 (6) 计算节点 V_i 的中心度 $C_c(i)$.

Step4 根据式 (7) 计算节点 V_i 的最短路条数 $C_b(i)$.

Step5 根据式 (8) 计算节点 V_i 的重要度 K(i).

Step6 第g个社团中节点重要度最大的节点 V_e 为所选取的关键节点g(e).

3.3 多智能体蜂拥控制算法

假设多智能体网络中存在一个以恒速 p_d 运动的虚拟领导者,将其作为网络的全局目标,本文的控制目的是通过社团划分及节点重要度评估算法选出信息智能体,仅使信息智能体具有虚拟领导者的信息,最终使网络中所有智能体都收敛到虚拟领导者的速度,且实现位置的聚集与避碰.

对于智能体i,其控制输入算法包括3项,用公式描述为

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i^{\gamma} + \mathbf{f}_i^d + \mathbf{f}_i^g \tag{9}$$

第 1 项 $\mathbf{f}_{i}^{\gamma} = h_{i}[c_{1}(\mathbf{q}_{\gamma}(t) - \mathbf{q}_{i}(t)) + c_{2}(\mathbf{p}_{\gamma}(t) - \mathbf{p}_{i}(t)) + c_{3} \sum_{\{k\} \in W_{i}(t)} (\mathbf{q}_{i}(t) - \mathbf{q}_{\{k\}}(t))]$ 为引导反馈项,是对信息智能体施加的额外控制项,即如果 i 是信息智能体, $h_{i} = 1$; 否则, $h_{i} = 0$. c_{1} 和 c_{2} 为跟随虚拟领导者的反馈系数.

此外,为避免网络在运行过程中出现分裂现象, c_3 项为本文提出的为信息智能体设计的保持其所在社团连通性的控制算法.设定其感知半径可根据社团划分的情况动态调整,以探测其所在社团中所有社团对间的距离.如图 2 所示,如果信息智能体 i 所在的社团中社团对 $\{s\}$ 和 $\{v\}$ 间的距离大于所设定的临界距离 d_m ,则认为该社团对在下一时刻

可能出现"分裂"现象,为避免这种情况,增加 c_3 项 使信息智能体i对社团 $\{s\}$ 和 $\{v\}$ 产生聚集作用,特 别地,如果社团 $\{\mu\}$ 与信息智能体 i 的距离接近分 裂时,则信息智能体i对社团 $\{\mu\}$ 产生聚集作用,则 集合 $W_i(t) = \{\{s\}, \{v\}, \{\mu\}\}$.

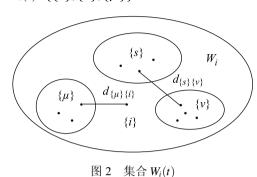


Fig.2 Set $W_i(t)$

第 2 项 $\boldsymbol{f}_i^d = \sum_{j \in N_i(t)} (\boldsymbol{p}_j(t) - \boldsymbol{p}_i(t))$ 为速度一致算 法,以实现智能体之间的速度匹配.

第 3 项
$$m{f}_i^g = \sum_{j \in N_i(t)} \nabla_{m{q}_i(t)} \Psi_{\alpha}(\|m{q}_i(t) - m{q}_j(t)\|)$$
 是人

工势函数梯度项[2],用于实现分离和聚合规则,智 能体沿着人工势函数梯度的方向运动并最终稳定 在势函数局部最小的位置上运动[12]. 人工势函数 $\Psi_{\alpha}(z)$ 与其对应的作用力函数 $\Phi_{\alpha}(z)$ 的关系为

$$\Psi_{\alpha}(z) = \int_{d_{\alpha}}^{z} \Phi_{\alpha}(s) \, \mathrm{d}s \tag{10}$$

因此第 3 项又可以写成 $\boldsymbol{f}_i^g = \sum_{j \in N_i(t)} \boldsymbol{\Phi}_{\alpha}(\|\boldsymbol{q}_j(t) - \boldsymbol{q}_i(t)\|_{\sigma}))\boldsymbol{n}_{ij}$,其中 $\boldsymbol{n}_{ij} = \frac{\boldsymbol{q}_j(t) - \boldsymbol{q}_i(t)}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\varepsilon} \|\boldsymbol{q}_j(t) - \boldsymbol{q}_i(t)\|^2}}$ 是由 $\mathbf{q}_i(t)$ 指向 $\mathbf{q}_i(t)$ 的矢量. $\mathbf{\Phi}_{\alpha}(z)$ 定义为

$$\Phi_{\alpha}(z) = \rho_h(z/\|r\|_{\sigma})\Phi(z - \|d\|_{\sigma}) \tag{11}$$

$$\Phi_{\alpha}(z) = \rho_{h}(z/\|r\|_{\sigma}) \Phi(z - \|d\|_{\sigma}) \tag{11}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} [(a+b)\sigma_{1}(z+c) + (a-b)] \tag{12}$$

其中, d 为智能体之间的期望距离; $\sigma_1(z) =$ $z/\sqrt{1+z^2}$; $\Phi(z)$ 是一个非均匀的 S 型函数,且 $\Phi(0)$ = 0; 参数满足 0 < a < b, $c = |a - b|/\sqrt{4ab}$.

当智能体之间的相对距离小于 $\|d\|_{\sigma}$ 时,作用力 函数 $\Phi_{\alpha}(z) < 0$,表现为智能体之间的排斥力作用, 且距离越小,作用力函数的绝对值越大,即排斥力 越大; 当智能体之间的距离在 $||d||_{\sigma}$ 和 $||r||_{\sigma}$ 之间时, 作用力函数 $\Phi_{\alpha}(z) > 0$,表现为智能体之间的吸引力 作用; 当智能体之间的距离大于 $\|r\|_{\sigma}$ 时, 作用力函 数 $\Phi_{\alpha}(z) = 0$,如图 3 所示.

多智能体网络牵制蜂拥控制策略的虚拟控制过 程可以表述为:虚拟领导者将其位置和速度信息传 递给随机选取的信息智能体,信息智能体一方面以 虚拟领导者为目标跟随虚拟领导者运动,另一方面 通过与其所在社团中的智能体间的耦合连接关系间 接地虚拟控制其邻居个体, 而普通智能体在个体之 间的局部交互作用下,不断地实现位置聚集和速度 匹配,会直接或间接地受控于信息智能体,因此,普 通智能体也间接地受控于虚拟领导者.

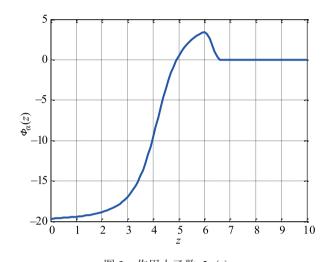


图 3 作用力函数 $\Phi_{\alpha}(z)$ Fig.3 Action functions $\Phi_{\alpha}(z)$

4 仿真分析 (Simulation analysis)

在 Matlab 仿真平台下, 对基于社团划分的牵制 蜂拥控制算法进行仿真,具体参数设置如下:

多智能体总数 N=20,智能体的位置和方向 角分别在 $[0,30] \times [0,30]$ 和 $(-\pi,\pi]$ 的范围内随机生 成,速率 $p_v \in [0.5,1]$;虚拟领导者的初始位置 $q_v(0)$ = [10,10] 和速度 $\mathbf{p}_{\gamma}(0) = 0.2 \times [1,\sqrt{3}]$,用绿色和红 色等腰三角形符号分别表示多智能体网络中的普通 智能体和信息智能体,三角形方向表示智能体速度 的方向, 青色圆形符号和红色箭头表示虚拟领导者 的位置和速度,如果两个智能体能互相感知,以蓝色 实线相连. 设定智能体间的期望距离 d = 7, 感知半 径 $r = 1.2 \times d$, 参数 $\sigma = 0.05$, a = 5, b = 20, h = 0.5. 引导反馈系数 $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.05$.

图 4 为随机生成的多智能体网络的初始分布 图. 图 5 为基于层次聚类算法对图 3 进行社团划分 的树状图, 其中横轴表示节点序号, 纵轴为智能体 间的距离, 选取距离为7.7的位置断开(如图中红色 虚线所示),则根据树状图可以将网络划分为2个社 团,而后依据 3.2 节中所述的节点重要度评估原则 选择每个社团中的信息智能体, g(1) 为 13, g(2) 为

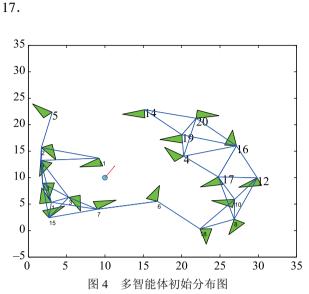


Fig.4 Initial distribution of multiple agents



2 9 1 3 15 13 7 5 11 4 19 20 8 10 17 18 12 16 14 6 图 5 基于层次聚类的社团划分树状图

Fig.5 Community division tree based on hierarchical clustering

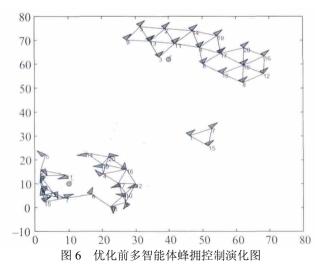


Fig.6 Evolution of flocking control of multiple agents before optimization

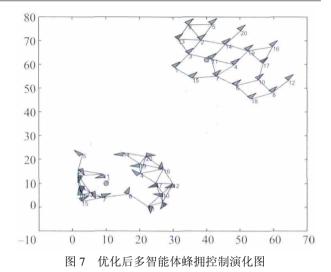


Fig.7 Evolution of flocking control of multiple agents after optimization

图 6 和图 7 是基于社团划分的蜂拥控制多智能体网络的演化图,在初始分布相同,且选择相同信息智能体的条件下,图 6 为优化前未加保持连通的控制作用的演化过程,由于在运动过程中某些社团对间的距离较大,部分智能体不能相互感知,导致出现"分裂"现象,如图中所示的智能体 1、7、15.从与之相对应的图 7 可以看出,本文所提出的算法可有效保持多智能体蜂拥控制演化过程中的连通性,且所有智能体都聚集在虚拟领导者周围,智能体间形成类 α 格子,实现位置聚集,且速度大小和方向与虚拟领导者趋于一致.

已有的蜂拥控制算法中,信息智能体都是随机选取的,如果信息智能体的选择不均匀,可能导致部分本来孤立的子社团不能跟上虚拟领导者,不能实现整个网络的牵制蜂拥控制. 而本文提出的基于社团划分的蜂拥控制算法根据初始时网络中节点间的距离,将节点间的距离以及节点间的连接关系用树状图表示出来,依据树状图可以将整个网络划分为若干个社团,然后基于节点重要度评估算法选出每个社团中最重要的节点作为信息智能体,并对其施加跟随虚拟领导者的牵制蜂拥控制作用,且通过保持社团连通性以实现整个多智能体网络在演化过程始终连通的控制算法,最终实现整个网络中所有智能体都跟随虚拟领导者运动,实现位置的聚集与方向的同步.

5 结束语(Conclusion)

近年来,多智能体蜂拥控制的研究在无人飞行器编队和多移动机器人协调控制等方面的理论指导和应用价值也开始凸显.本文针对已有牵制蜂拥控制算法中,由于随机选择的信息智能体分布不均匀,

使得多智能体网络运动过程中某些初始时孤立的社团中没有牵制节点,导致网络不连通的缺陷,提出一种基于社团划分的蜂拥控制算法,根据网络的结构特点选择牵制节点,且通过保持连通的控制算法,能更有效地实现整个多智能体网络的牵制蜂拥同步.

参考文献 (References)

- Reynolds C W. Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model[C]//Proceedings of SIGGRAPH'87 Conference on Computer Graphics. New York, USA: the ACM, 1987: 25-34.
- [2] Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(3): 401-420.
- [3] Chen T P, Liu X W, Lu W L. Pinning complex networks by a single controller[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 2007, 54(6): 1317-1326.
- [4] Feng J W, Sun S H, Xu C, et al. The synchronization of general complex dynamical network via pinning control[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(2): 1623-1633.
- [5] 蒋强, 肖建, 郑高, 等. 一种基于能量指数的复杂网络牵制控制策略 [J]. 控制与决策, 2012, 27(1): 22-27.

 Jiang Q, Xiao J, Zheng G, et al. A pinning scheme in complex
 - networks based on energy index[J]. Control and Decision, 2012, 27(1): 22-27.
- [6] Su H S, Wang X F, Lin Z L. Flocking of multi-agents with a virtual leader[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(2): 293-307.
- [7] Wang X F, Li X, Lu J H. Control and flocking of networked systems via pinning[J]. IEEE Circuits and Systems Magazine,

- 2010, 10(3): 83-91.
- [8] Newman M E J. Fast algorithm for detecting community structure in networks[J]. Physical Review E, 2004, 69(6): 066133.
- [9] Bagrow J P, Bollt E M. A local method for detecting communities[J]. Physical Review E, 2005, 72(4): 046108.
- [10] 邬盈盈, 韦巍, 李国阳, 等. 基于社团划分的复杂网络牵制控制策略 [J]. 浙江大学学报: 工学版, 2011, 45(3): 495-502.
 - Wu Y Y, Wei W, Li G Y, et al. Pinning control of complex networks via network division[J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2011, 45(3): 495-502.
- [11] Lu X Q, Francis A, Chen S H. Cluster consensus of secondorder multi-agent systems via pinning control[J]. China Physics B, 2010, 19(12): 120506.
- [12] Zavlanos M M, Pappas G J. Distributed connectivity control of mobile networks[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2008, 24(3): 1416-1428.
- [13] 张先迪,李正良. 图论及其应用 [M]. 北京: 高等教育出版 社, 2005: 10-11.
 - Zhang X D, Li Z L. Graph theory and its applications[M]. Beijing: Higher Education Press, 2005: 10-11.

作者简介:

- 陈世明(1977-),男,博士,副教授.研究领域为复杂网络理论,多机器人系统,优化算法.
- 李慧敏(1988-),女,硕士生.研究领域为复杂网络理论及应用.
- 谢 竞 (1986-), 男, 硕士生. 研究领域为多机器人系统, 智能优化算法.