

西安交通大学

硕士学位论文

基于间断反馈因子的强鲁棒高阶气体动理学格式研究

学位申请人：张红

指导教师：姬兴教授

学科名称：力学

2025 年 05 月



**Research on highly robust and high-order gas-kinetic schemes  
based on discontinuity feedback factor**

A thesis submitted to  
Xi'an Jiaotong University  
in partial fulfillment of the requirements  
for the degree of  
Master of Engineering

By  
Hong Zhang  
Supervisor: Prof. Xing Ji  
Mechanics  
May 2025



## 硕士学位论文答辩委员会

### 基于间断反馈因子的强鲁棒高阶气体动理学格式研究

答辩人：张红

答辩委员会委员：

西安交通大学教授：雷蒋 雷蒋 (注：主席)

西安交通大学教授：陈刚 陈刚

西安交通大学副教授：张扬 张扬

西安交通大学副教授：王亚南 王亚南

航空工业西安计算技术研究所研究员：李立 李立

答辩时间：2025年05月18日

答辩地点：西安交通大学力行楼2-4199



## 摘要

在惯性约束聚变研究中，可压缩流动的高阶数值模拟是实现极端物理过程复现的核心手段之一。传统高阶数值方法受限于鲁棒性和分辨率层面的瓶颈，在激波捕捉和复杂流动中易因数值振荡而导致格式失效，且计算成本随着阶数增长显著增加，难以应对高温高压高马赫数、强冲击波与界面不稳定性等复杂流动条件的挑战。本文以极端流动数值模拟的强鲁棒性需求为切入点，旨在改善传统高阶方法的弱鲁棒性，构建兼具强鲁棒性、高分辨率以及高效的新型高阶数值模拟框架，为极端流动的数值模拟提供新方法。

鉴于此，本文基于间断反馈因子，构建了一系列强鲁棒高阶气体动理学格式。论文主要工作如下：

1) 基于间断反馈因子提出了一类强鲁棒混合重构算法。利用间断反馈因子检测流场中的间断强度，在光滑区域，充分发挥高阶加权本质无振荡（Weighted Essentially Non-Oscillatory, WENO）重构的高分辨率优势，能够精确捕捉流场中的细微特征。而在强间断区域，算法则根据间断反馈因子的反馈结果，自适应地调整重构策略，降低重构阶数，有效避免数值振荡。通过自适应的重构策略，算法在保持高分辨率的同时，显著提升了算法的鲁棒性。通过平面激波相互作用、类飓风问题等一系列复杂流动的数值算例验证表明算法在处理强间断流动时表现优异。

2) 基于间断反馈因子提出了一类任意精度高效重构算法。算法创新性地运用间断反馈因子驱动的权重机制，实现模板的自适应选择。在计算过程中，通过计算模板界面间断强度总和并设置阈值，动态识别模板的光滑性。当模板光滑时，直接采用高阶线性多项式进行重构，从而提升分辨率；当检测到模板存在间断时，则逐级退回至低阶模板，并结合间断反馈因子对梯度进行限制，以确保强间断区域的稳定性。该自适应的模板扩展策略，有效改善了传统 WENO 格式依赖局部光滑因子带来的高计算成本问题。通过 Blast Wave、双马赫反射等多个强间断算例的验证，所构建算法在保持高阶精度的同时，有效改善了数值振荡与非物理理解。与传统 WENO 格式相比，该算法在相同精度下计算效率提升 30% 以上，且随着重构阶数增加，效率优势更加明显。

3) 基于任意精度重构算法提出了一类简化的两组分流动模型。将任意精度高效算法方法拓展到两组分流动模型中，构建了基于 Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) 模型的简化两组分气体动理学模型。在该模型中，将混合的两组分流体视为单组分流体进行处理，并通过组分质量分数分配质量通量，有效提升了计算效率。同时，针对组分界

\* 本研究得到国家自然科学基金（编号：12302378, 12172316, 92371201）的资助

面的特殊性，设计了新型的密度重构方法，在界面处能够同时保证组分密度和总流场变量的守恒性与稳定性。该方法结合自适应模板扩展算法，在光滑区域维持高阶精度，在间断区域自适应降阶，有效抑制了界面附近的非物理振荡。通过激波-气泡相互作用、Rayleigh-Taylor 不稳定性等典型算例验证，所构建模型在处理两组分流动时表现出色，能够准确捕捉组分界面的演化过程，在强间断区域保持良好的鲁棒性和分辨率。

**关 键 词：**间断反馈因子；高阶气体动理学格式；WENO 重构；强鲁棒方法

**论文类型：**应用基础

## ABSTRACT

In the research of inertial confinement fusion, high-order numerical simulations of compressible flows are one of the core means to reproduce extreme physical processes. Traditional high-order numerical methods are limited by bottlenecks in terms of robustness and resolution. In shock wave capturing and complex flows, they are prone to format failure due to numerical oscillations. Moreover, the computational cost increases significantly with the growth of the order, making it difficult to meet the challenges of complex flow conditions such as high temperature, high pressure, high Mach number, strong shock waves, and interface instabilities. This paper takes the strong robustness requirement of numerical simulations of extreme flows as the starting point, aiming to improve the weak robustness of traditional high-order methods and construct a new high-order numerical simulation framework that combines strong robustness, high resolution, and high efficiency, providing a new method for numerical simulations of extreme flows.

In view of this, based on the Discontinuity Feedback Factor, this paper constructs a series of strongly robust high-order gas-kinetic scheme. The main work of this thesis is as follows:

1. Based on the discontinuity feedback factor, a class of strongly robust hybrid reconstruction algorithms is proposed. The discontinuity feedback factor is used to detect the discontinuity intensity in the flow field. In smooth regions, the high-resolution advantage of the high-order Weighted Essentially Non-Oscillatory reconstruction is fully utilized, enabling the accurate capture of fine features in the flow field. In regions with strong discontinuities, the algorithm adaptively adjusts the reconstruction strategy according to the feedback results of the discontinuity feedback factor, reducing the reconstruction order and effectively avoiding numerical oscillations. Through the adaptive reconstruction strategy, the algorithm significantly improves its robustness while maintaining high resolution. Numerical examples of a series of complex flows, such as planar shock wave interactions and hurricane-like problems, verify that the algorithm performs excellently in handling flows with strong discontinuities.
2. Based on the discontinuity feedback factor, a class of high-efficiency reconstruction algorithms with arbitrary order is proposed. The algorithm innovatively uses a weight mechanism driven by the discontinuity feedback factor to achieve the adaptive selection of stencils. During the calculation process, the smoothness of the stencil is dynamically identified by calculating

---

\*The work was supported by the National Science Foundation of China (foundation ID: 12302378, 12172316, 92371201).

the sum of the discontinuity intensities at the stencil interfaces and setting a threshold. When the stencil is smooth, a high-order linear polynomial is directly used for reconstruction, thus improving the resolution. When a discontinuity is detected in the stencil, the stencil is gradually retreated to a lower-order one, and the gradient is limited in combination with the discontinuity feedback factor to ensure the stability of the region with strong discontinuities. This adaptive stencil extension strategy effectively improves the problem of high computational cost in traditional WENO schemes caused by relying on local smoothness factors. Verified by multiple strong discontinuity examples such as the Blast Wave and double Mach reflection, the algorithm effectively improves numerical oscillations and unphysical solutions while maintaining high-order accuracy. Compared with traditional WENO schemes, the computational efficiency of the algorithm is increased by more than 30% under the same accuracy, and the efficiency advantage becomes more obvious as the reconstruction order increases.

3. Based on the reconstruction algorithm with arbitrary precision, a simplified two-component flow model is proposed. The arbitrary high-order method is extended to the two-component flow model, and a simplified two-component gas-kinetic model based on the Bhatnagar-Gross-Krook model is constructed. In this model, the mixed two-component fluid is treated as a single-component fluid, and the mass flux is assigned through the mass fraction of the components, effectively improving the computational efficiency. At the same time, aiming at the particularity of the component interface, a new density reconstruction method is designed, which can simultaneously ensure the conservation and stability of the component density and the total flow field variables at the interface. This method, combined with the adaptive stencil extension algorithm, maintains high-order accuracy in smooth regions and adaptively reduces the order in discontinuous regions, effectively suppressing unphysical oscillations near the interface. Verified by typical examples such as shock wave-bubble interactions and Rayleigh-Taylor instabilities, the constructed model performs excellently in handling two-component flows, can accurately capture the evolution process of the component interface, and maintains good robustness and resolution in regions with strong discontinuities.

**KEY WORDS:** Discontinuity feedback factor; High-order Gas-kinetic scheme; WENO reconstruction; Highly robust method

**TYPE OF THESIS:** Application Fundamentals

## 目 录

摘要 .....	I
ABSTRACT .....	III
1 绪论 .....	1
1.1 研究背景及意义 .....	1
1.2 国内外研究现状 .....	2
1.2.1 高阶数值方法研究现状 .....	2
1.2.2 高阶气体动理论格式研究现状 .....	6
1.2.3 强鲁棒高阶格式研究现状 .....	8
1.2.4 当前研究不足之处 .....	9
1.3 主要研究内容 .....	10
2 高阶气体动理论类型有限体积算法框架 .....	12
2.1 有限体积框架 .....	12
2.2 气体动理论 .....	13
2.3 气体动理论格式 .....	14
2.4 适配高阶气体动理论格式的时间推进方法 .....	18
2.4.1 两步四阶时间离散化 .....	18
2.4.2 非线性时间限制器 .....	20
2.5 适配高阶气体动理论格式的空间离散方法 .....	20
2.5.1 基于零均值多项式的 WENO 重构公式 .....	20
2.5.2 五阶 WENO 格式 .....	21
2.5.3 五阶 WENO-AO 格式 .....	22
2.5.4 气体动理论格式平衡态重构 .....	24
2.6 小结 .....	24
3 基于间断反馈因子的混合重构高阶气体动理论格式 .....	25
3.1 传统 WENO 失效案例分析 .....	25
3.2 间断反馈因子 .....	26
3.3 混合重构算法 .....	27
3.4 单元间断强度阈值选取分析 .....	28
3.5 数值算例分析 .....	31
3.6 小结 .....	38
4 基于间断反馈因子的任意高阶重构气体动理论格式 .....	40
4.1 改进的间断反馈因子 .....	40
4.2 自适应模板扩展方法 .....	41
4.3 模板间断强度阈值选取分析 .....	44
4.4 数值算例分析 .....	46
4.5 计算效率测试 .....	52
4.6 小结 .....	53

5 基于间断反馈因子的两组分气体动理论学格式 .....	55
5.1 两组分流动控制方程 .....	55
5.2 基于间断反馈因子的两组分空间重构 .....	57
5.3 数值算例分析 .....	58
5.4 小结 .....	63
6 结论与展望 .....	65
6.1 结论 .....	65
6.2 展望 .....	66
致谢 .....	67
参考文献 .....	68
攻读学位期间取得的研究成果 .....	75
答辩委员会会议决议 .....	76
常规评阅人名单 .....	77
声明	

## CONTENTS

ABSTRACT (Chinese) .....	I
ABSTRACT (English) .....	III
1 Introduction .....	1
1.1 Research Background and Significance.....	1
1.2 Domestic and International Research Status .....	2
1.2.1 Research Status of High-Order Numerical Methods.....	2
1.2.2 Research Status of High-Order Gas-Kinetic Scheme .....	6
1.2.3 Research Status of Highly Robust High-Order Scheme.....	8
1.2.4 The Deficiencies of the Current Research.....	9
1.3 Main Research Content.....	10
2 High-Order Gas-Kinetic Scheme based on FVM Framework .....	12
2.1 Finite Volume Framework .....	12
2.2 Gas-kinetic Theory.....	13
2.3 Gas-kinetic Scheme .....	14
2.4 Adapted Temporal Advance Method for High-order Gas-Kinetic Scheme .....	18
2.4.1 Two-stage Fourth-order Temporal Discretization .....	18
2.4.2 Non-linear Temporal Limiter .....	20
2.5 Adapted Spatial Discretization Method for High-order Gas-Kinetic Scheme .....	20
2.5.1 Formulation of WENO Reconstruction in Zero-Mean Form Polynomial .....	20
2.5.2 Fifth Order WENO Scheme .....	21
2.5.3 Fifth-Order WENO-Adaptive-Order Scheme.....	22
2.5.4 Reconstruction of Equilibrium State for Gas-Kinetic Scheme .....	24
2.6 Brief Summary .....	24
3 Hybrid Reconstruction High-Order Gas-kinetic Scheme Based on Discontinuity Feed-back Factor.....	25
3.1 Analysis of Classical WENO Failure Cases .....	25
3.2 Discontinuity Feedback Factor .....	26
3.3 Hybrid Reconstruction Method .....	27
3.4 Analysis of Cell Discontinuity Strength Threshold .....	28
3.5 Analysis of Numerical Cases .....	31
3.6 Brief Summary .....	38
4 Arbitrary High-Order Reconstruction Gas-kinetic Scheme Based on Discontinuity Feed-back Factor.....	40
4.1 Improved Discontinuity Feedback Factor .....	40
4.2 Adaptive Stencil Extension Method .....	41
4.3 Analysis of the Stencil Discontinuity Strength Threshold.....	44

4.4 Analysis of Numerical Cases .....	46
4.5 Computational Efficiency Test .....	52
4.6 Brief Summary .....	53
5 Extension of the Two-Component Gas-kinetic Scheme Based on Discontinuity Feed-back Factor.....	55
5.1 Two-Component Flow Governing Equation.....	55
5.2 Two-Component Spatial Reconstruction Based on Discontinuity Feedback Factor ..	57
5.3 Analysis of Numerical Cases .....	58
5.4 Brief Summary .....	63
6 Conclusions and Future Work .....	65
6.1 Conclusions .....	65
6.2 Future Work.....	66
Acknowledgements.....	67
References .....	68
Achievements .....	75
Decision of Defense Committee .....	76
General Reviewers List .....	77
Declarations	

# 1 绪论

## 1.1 研究背景及意义

计算流体动力学（Computational Fluid Dynamics, CFD）是通过计算机模拟流体现象的领域。在 CFD 的研究中，算法的开发起着重要的作用。在宏观尺度的流体建模中，可借助宏观尺度的流体动力学方程（如 Navier-Stokes 方程组（N-S 方程）及欧拉方程），来描述流体随时间的演化过程，并确保质量、动量以及能量的守恒性。随着 CFD 技术的持续进步，该领域已成为深入理解和精准预测流体流动特性的关键工具，通过数值模拟手段对各类流体现象进行计算分析，能够有效探究湍流运动等复杂物理机制，进而为工程设计与科学研究提供数据支撑。同时，CFD 技术在激光惯性约束聚变（Inertial Confinement Fusion, ICF）等战略前沿研究方向展现出广泛应用价值。激光惯性约束聚变（ICF）中的高能量密度流体的非线性流动问题，往往涉及到极端流动条件，包括高马赫数、高温高压以及大密度梯度等，特别是内爆过程中的复杂现象（如图 1-1 所示），一直是国际研究的前沿热点，其研究成果对国防安全和军事技术发展具有重大战略意义。例如 ICF 中的靶丸内爆过程控制高度依赖于对高能量密度非线性流动的准确理解和预测。

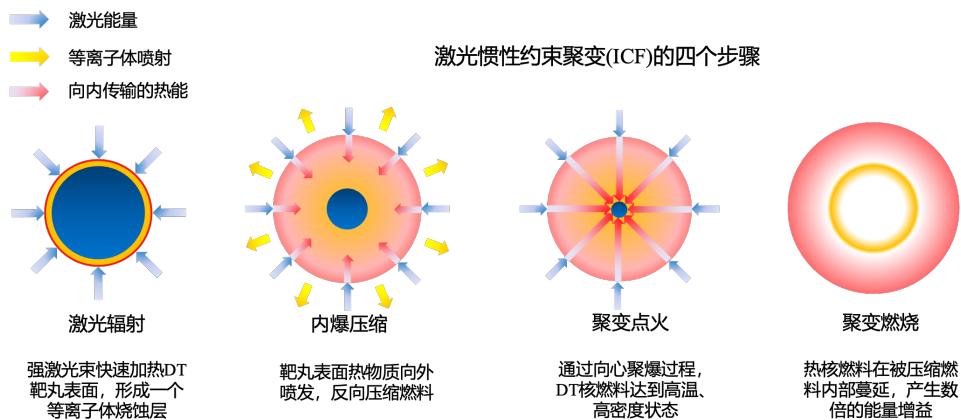


图 1-1 激光惯性约束聚变的四个主要步骤

CFD 数值模拟是研究该类问题的重要工具。由于流动本身就存在稳定性问题，处于平衡状态的流场，在微小的扰动下，可能发生流动形态的改变，并发展为非线性的复杂流动，对 CFD 算法的分辨率与鲁棒性提出了严峻要求。绝大多数的高能量密度流动都是不稳定的。高能量密度流体动力学不稳定性及其引起的非线性复杂流动，是高能量密度流体物理研究的重要内容，也是实验室激光聚变内爆的关键物理问题。高能量密度非线性流动研究的典型力学参数范围涵盖计算条件：压力高达  $10^{11} - 10^{18}$ Pa，密度

跨越多个量级 ( $10^{-3} - 10^4 \text{ g/cm}^3$ )，温度达到  $10^{-1} - 10^6 \text{ eV}$ 。高能量密度非线性流动会严重影响 ICF 内爆过程中壳层的压缩、中心热斑的形成以及聚变燃烧等关键物理过程。

典型的高能量密度非线性流动具有以下特征，给数值模拟带来了巨大的挑战：(1) 强冲击高压缩性：马赫数通常大于 10，对数值方法的激波捕捉能力提出极高要求；(2) 高雷诺数：通常大于 100000，流动尺度跨度大，需要精细的网格分辨率和高阶数值格式，以及大规模并行计算；(3) 高能量密度多组分系统强接触间断模拟困难：流体不稳定扰动会在强间断界面附近快速增长，对数值方法的分辨率和稳定性要求极高；(4) 内爆过程的收缩几何效应：内爆过程中的几何收缩会导致物理量在局部区域急剧增加，对数值方法的稳定性和精度提出严峻考验。

为了给 ICF 内爆过程中的高能量密度流体非线性流动问题的研究提供可靠的数值模拟工具，构建强鲁棒、高分辨率以及高效的精细化 CFD 数值模拟工具至关重要（如图 1-2 所示）。

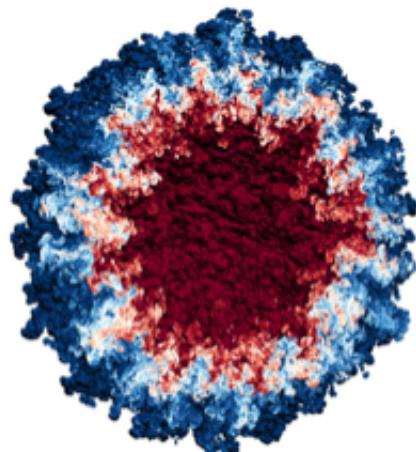


图 1-2 ARES 软件针对 ICF 内爆不稳定的 GPU 数值模拟<sup>[1]</sup>，960 亿单元网格量

## 1.2 国内外研究现状

### 1.2.1 高阶数值方法研究现状

在可压缩流动的计算流体力学 (CFD) 领域，数值方法的构建主要基于守恒律的离散化。其中典型的数值离散方法包括有限差分法 (FDM)、有限体积法 (FVM) 与有限元法 (FEM)。FDM 与 FEM 依赖于流体连续分布的理想化假设直接对微分方程进行离散，然而，这类方法在处理可压缩流动流场中的激波等间断时面临严峻挑战，同时，积分形式的模型方程在处理该类问题时更具优势。FVM 通过划分控制体积，将守恒变量的更新转化为单元界面通量的计算，在处理复杂几何边界流动问题时展现出独特优势。当间断存在时，需要确定单元界面两侧两种不同初始流动分布的演变情况，以便进行

通量演化。Godunov 开创性地引入精确黎曼求解器计算欧拉方程通量，奠定了可压缩流数值模拟的理论基础；此后，近似黎曼求解器的不断发展，显著提升了计算效率，成为现代 CFD 算法的核心组成部分。然而，N-S 方程由于粘性项的非线性作用，至今尚未获得精确的黎曼解，工程实践中通常采用中心差分法对粘性项进行近似处理。当前，基于二阶精度黎曼解的 FVM 是 Fluent 等商用软件在工程领域应用的主流数值技术。

近几十年来，高阶数值方法在可压缩流动模拟中的发展得到了极大的关注，并取得了显著的成就。相较于工程应用中广泛采用的二阶有限体积格式，高阶格式具有低耗散、高分辨率等优势，能够更准确地捕捉湍流流动中的复杂结构和流动分离现象。非定常可压缩流动模拟的高阶格式通常分为三个部分，即空间离散化、通量函数计算以及时间离散化。针对 FVM 的空间离散方面，需要对单元界面进行高阶重构。通常情况下，针对光滑流场仅需要线性重构即可取得很好的效果。然而，可压缩流场中存在激波等间断，继续使用线性重构后数值模拟将会迅速发散。在求解黎曼问题时，为了得到合适的初值，必须使用非线性的重构技术。高阶精度数值格式的开创性工作可以追溯到 Lax 和 Wendroff<sup>[2]</sup>。随后，van Leer<sup>[3]</sup>、Harten<sup>[4]</sup> 等有影响力的研究者进一步将这些工作扩展到高分辨率方法。此外，高阶数值方法的进一步发展还包括多种变体，如本质无振荡（ENO）<sup>[5-6]</sup>、加权本质无振荡（Weighted Essentially Non-Oscillatory, WENO）<sup>[7-8]</sup>。其中 WENO 方法在计算由对流主导的流动问题中取得了巨大成功。目前已发展出多种 WENO 类<sup>[9]</sup>重构格式，如 WENO-JS, WENO-Z, Center-WENO (CWENO), Target-ENO (TENO) 等。WENO 类方法核心思想在于通过待定的重构模板，使用非线性自适应权重对所有模版进行凸组合，以获得最优的重构值，不同的 WENO 变体的差异主要体现在非线性权重的计算方式上，目前，WENO 格式已在激光惯性约束聚变中的内爆流体典型不稳定性过程的数值模拟中广泛使用（如图 1-3 所示）。此外，高阶 FVM 数值方法还包括多维限制器（Multi-Dimensional Limiting Process, MLP）<sup>[10]</sup>、基于单元边界变差最小化（Boundary Variation Diminishing, BVD）<sup>[11]</sup> 格式。

有限差分方法将流场信息存储在节点上，借助微分算子更新每个节点上的变量，从而完成离散化操作。为了实现高阶精度，在每个方向上仅需少数节点参与计算即可。以三维情形为例，若要达到相同的 5 阶空间精度，仅需 15 个节点。从效率层面考量，高阶有限差分方法（FDM）相较于高阶有限体积法（FVM）更具优越性。目前，有两种较为常见的高阶有限差分方法格式，第一种是有限差分 ENO/WENO 类格式，此类格式的公式与 FVM 框架下基本类似。第二种是 LeLe 等人提出的高阶紧致有限差分格式<sup>[12]</sup>，该格式使用数值差分来逼近通量和微分算子。为提升数值方法的紧致性，该方法采用基于傅里叶分析的耦合策略，对各方向差分项进行精细化处理。在平滑对流问题中，该方法能基本达到谱方法的分辨率。但对间断流场，有限差分方法（FDM）基于连续性的基本假设将不再成立，导致微分算子计算产生偏差，影响模拟准确性。此外，传统

紧致有限差分格式存在不守恒的固有缺陷，进一步限制了其在复杂流动问题中的应用。针对上述问题，邓小刚院士与张涵信院士开创性地提出加权紧致非线性格式（Weighted Compact Nonlinear Scheme, WCNS），通过引入 WENO 格式的非线性权重计算机制，有效增强了格式对间断的捕捉能力；任玉新<sup>[13]</sup>则进一步改善了高阶有限差分方法的不守恒性。Ekaterinaris<sup>[14]</sup>、Deng<sup>[15]</sup>等学者对高阶有限差分方法的发展进行了系统性综述。凭借高效性与算法简洁性，高阶有限差分方法在几何结构规则简单的大规模计算中占据重要地位。在各向同性可压缩湍流、边界层转捩等研究领域，李新亮团队成果尤为突出，其提出的优化保单调格式、加权群速度控制格式等高阶数值方法，显著提升了模拟精度与稳定性，并基于此开发的 OpenCFD 软件，已成为飞行器湍流高分辨率模拟领域最具影响力的工具之一。然而，在非结构化网格上使用高阶有限差分方法仍面临诸多技术挑战。

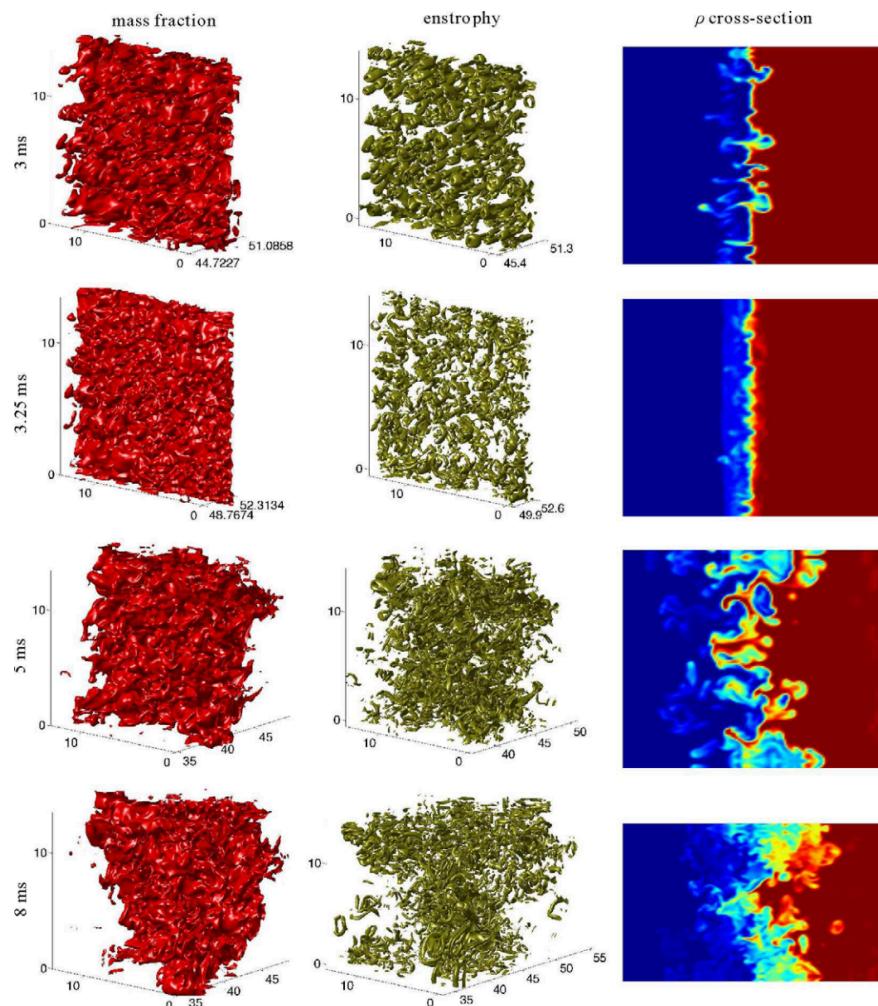


图 1-3 WENO 格式用于激光惯性约束聚变中多模 R-M 流动不稳定性数值模拟<sup>[16]</sup>

间断伽辽金 (DG)<sup>[17-18]</sup>方法以及 FR/CPR<sup>[19-20]</sup>方法作为一类新的高阶数值方法，通

过偏微分控制方程的弱解形式推导得到单元内的各阶倒数或求解点上守恒量的演化方程。其高阶空间离散通过网格单元和边界上的数值积分直接实现，数值积分点上的流场值则通过单元内的多项式插值给出。不同于依赖周围邻居单元信息的传统差分方法，DG 方法和 FR/CPR 方法的空间离散仅依赖于单元内部的高阶导数或求解点上的值，即单元内部自由度。这种紧致性赋予了它们高分辨率特性，能够有效捕捉流场中的小尺度结构。FR/CPR 方法相比于 DG 方法具有一些独特的优势，例如，FR/CPR 方法包含了更多的格式族，这可能允许其采用比 DG 方法更大的步长，即更高的计算效率。DG 方法和 FR/CPR 方法都能够直接应用于非结构网格，更灵活地处理复杂几何外形。然而，由于基于弱解形式推导得到，DG 方法和 FR/CPR 方法对流场的光滑性有一定要求，对于激波、物质界面等间断，其鲁棒性难以保证，需要引入诸如限制器等技术对更新后的单元内自由度进行限制，以避免数值振荡。

需要注意的是，尽管高阶有限差分法（FDM）和有限元法（FEM）在原理与实现方式上与有限体积法（FVM）存在差异，但黎曼求解器在这三类数值框架中均得到广泛应用。尤其在处理包含激波、接触间断等复杂流动时，黎曼求解器能够为通量计算提供可靠支撑。这类求解器基于黎曼问题的数学特性，可给出一阶时间精度的流动解，并通过结合高阶时间离散技术（如 Runge-Kutta 方法）来提升时间精度。除传统黎曼求解器外，诸多新型通量计算方法也不断发展。例如广义黎曼求解器<sup>[21]</sup>（GRP）通过对局部流动特征的精细分析，可给出欧拉方程的二阶时间精确解；任意时-空导数<sup>[22]</sup>（ADER）框架则以时空高阶重构为核心，实现对流动演化的高效捕捉；而气体动理论格式（Gas-Kinetic Scheme, GKS）基于介观尺度的气体动理论，能够提供高达四阶的时间精确解。不过需要明确的是，并非所有针对欧拉方程的精确求解策略都能直接适用于 N-S 方程的数值计算。此外，已有研究<sup>[23]</sup>指出，在高阶数值格式设计中，若要保证时空一致性，必须采用时间精确的通量计算方式。

在基于黎曼求解器的数值方法中，为提升时间精度，常采用经典的龙格 - 库塔（Runge-Kutta, RK）时间积分策略。该方法通过将空间离散与时间离散过程解耦处理，在相同的流场重构条件下，相较于单步时间推进法或 Adams 类多步方法，能够显著增强双曲型偏微分方程问题求解的数值稳定性<sup>[24]</sup>。尽管低耗散、低色散特性的 RK 方法早在 2010 年已被提出<sup>[25]</sup>，但如果需达到 N 阶时间精度，该方法需至少执行 N 个中间计算步骤。以典型四阶 RK（RK4）方法为例，一次时间迭代步需完成四次中间状态计算，而五阶 RK 方法通常需多达六次中间迭代过程。这种多步累积的误差修正机制，在保证高阶精度的同时，也对计算效率提出了更高要求。

在涉及时间精确通量函数的数值格式中，多步多导数（Multi-Stage Multi-Derivative, MSMD）方法是提升时间精度的另一种可行性方案。该方法的理论雏形可追溯至 20 世纪 40 年代，最初用于求解常微分方程（Ordinary Differential Equation, ODE）的数值解。

Hairer 与 Wanner 在其经典论著中对 MSMD 方法进行了系统性综述与理论定义<sup>[26]</sup>，构建了包含二阶导数的格式框架，在显式及半隐式求解体系中已实现最高七阶精度，并针对其与传统 RK 方法的数值特性展开对比研究。这类方法在振荡微分方程及薛定谔方程求解中展现出独特优势，但其在计算流体力学（CFD）领域的应用曾受限于早期高阶格式对一阶黎曼求解器的依赖。随着对 MSMD 方法优势的深入认知，Seal 等人<sup>[27]</sup>率先将其引入显式有限差分及间断伽辽金（DG）方法，开启了该技术在 CFD 中的应用探索。其后续研究围绕隐式 MSMD 格式的实现展开大量工作，有效拓展了 MSMD 方法的适用范围。针对双曲型问题数值求解的鲁棒性需求，近年发展的 Strong Stability Preserving (SSP) 方法成功构建了基于两导数多步格式的六阶 SSP-MSMD 方法。此外，李杰权等人<sup>[28]</sup>基于两步法思想提出四阶广义黎曼问题（GRP）格式用于欧拉方程求解；潘亮与徐昆<sup>[29]</sup>进一步借鉴该思路，针对 Euler 及 Navier-Stokes 方程设计了两步四阶气体动理学格式。

尽管高阶方法缺乏鲁棒性，且在单步计算中需要更大的计算量，但其对网格分辨率的要求更低，在保证计算精度的同时能够显著降低整体计算成本，为未来大规模精细化的流动模拟提供了可能。

### 1.2.2 高阶气体动理学格式研究现状

早期的气体动理学格式作为一种基于介观尺度的二阶有限体积格式，主要用于模拟以 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程为控制方程的流体流动<sup>[30]</sup>。与直接针对 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程设计的传统数值方法不同，GKS<sup>[31]</sup>是基于介观尺度的气体动理学理论。GKS 的通量计算依据的是动理学方程的时间演化解，以 Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) 模型为例，它是玻尔兹曼（Boltzmann）方程的简化版本，通过 Chapman-Enskog 展开，BGK 模型方程可完全恢复为宏观控制方程<sup>[32]</sup>。相较于传统的基于 Riemann 求解器的计算流体力学方法，GKS 具备以下几个显著特点（如图 1-4 所示）。首先，随时间变化的气体分布函数蕴含了多尺度的流动物理特性，涵盖了从微观动理学的粒子输运到宏观动力学的波传播过程<sup>[33]</sup>。理论上，GKS 并非直接求解 BGK 模型方程，而是将其视为松弛模型，构建一个多尺度的气体演化过程来实现通量的演化。在间断区域，粒子输运可提供数值耗散；而在光滑区域，波的传播则提供精确解。通量函数的这种多尺度特性使得 GKS 在迎风通量矢量分裂和中心差分（如 Lax-Wendroff 型）离散化之间建立了桥梁。在中心差分离散化过程中，无粘通量和粘性通量都能通过对随时间变化的气体分布函数求矩得到<sup>[34]</sup>。其次，GKS 本质上是一种多维格式，在该框架下，法向导数和切向导数都会参与到气体分布函数的时间演化中。由于其多维特性，GKS 的数值解对网格方向并不敏感。最后，可以构建统一气体动理学格式（Unified Gas-Kinetic Scheme, UGKS），用于模拟跨尺度气体动力学问题<sup>[35]</sup>。

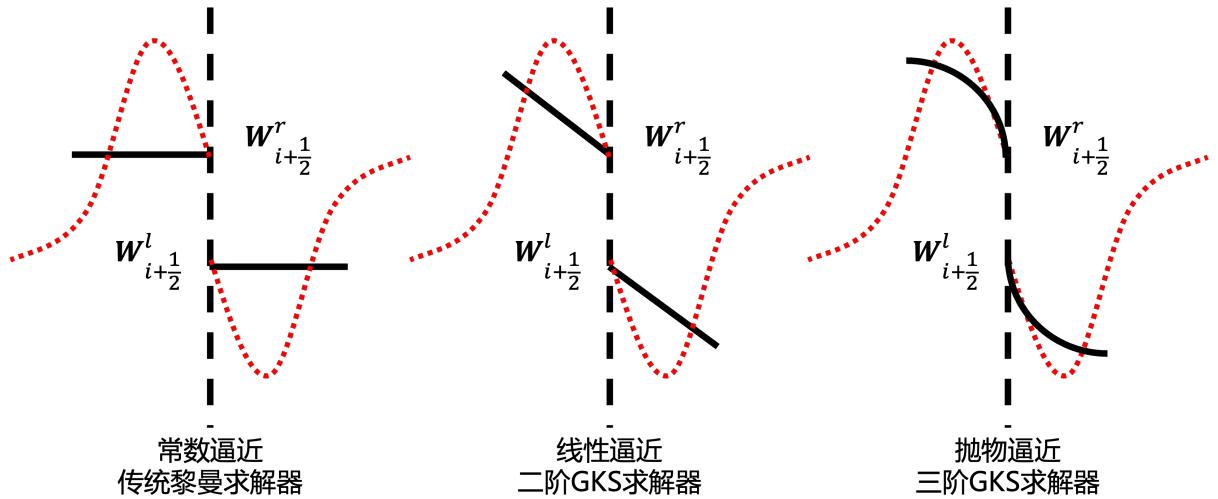


图 1-4 黎曼求解器与 GKS 求解器的界面通量函数逼近方式

过去十年间，高阶气体动理学格式（HGKS）经历了系统性的发展<sup>[36-41]</sup>。早期的研究中，通过构建高阶气体演化模型，在单个时间步内实现时空精度，该类方法基于气体分布函数的泰勒级数展开获取时间导数信息。李启兵<sup>[42]</sup>等人率先提出单步三阶 GKS 格式，刘娜等人<sup>[43]</sup>随后进一步发展出单步四阶 GKS 格式，然而，在三阶扩展之后，由于复杂性大大增加，使用这种高阶 GKS 的情况并不常见。在空间分辨率提升方面，徐昆等人将主流的 WENO 重构技术引入 HGKS 框架，除原始 WENO-JS 格式外，后续研究相继整合了 WENO-Z 及 WENO-Z+ 等改进型重构方法。姬兴<sup>[44]</sup>通过采用加权基本无振荡自适应阶（WENO-AO）重构格式，在复杂流动区域实现了精度与稳定性的优化平衡。为追求格式的紧致特性，潘亮等人<sup>[45]</sup>首先提出了单步三阶紧致 GKS 格式，并通过加权最小二乘紧致重构技术将其拓展至非结构化网格。同时结合时间离散化技术，提出了两步四阶 GKS 方法；姬兴进一步结合多步多导数（MSMD）技术，成功将 HGKS 拓展到五阶精度。值得关注的是，HGKS 也成功应用到 DG/CPR 以及紧致有限差分框架中。

近年来，姬兴等人<sup>[46]</sup>通过结合 HWENO 型重构与两步四阶时间推进方法，成功构建了具有八阶空间精度的紧致方法，并发展了非结构化网格下的 CGKS。相较于传统高阶数值方法，CGKS 在空间离散方法、通量求解及时间推进上均展现出独特之处。此外，针对三维复杂外形下的超音速 / 高超音速流场强激波间断对格式鲁棒性的要求，姬兴与赵丰祥提出了高阶紧致气体动理学格式（Compact Gas-Kinetic Scheme, CGKS），已成功应用于湍流数值模拟<sup>[47]</sup>（如图 1-5 所示）等领域。其核心技术优势如下。以有限体积法为离散基础，通过时间精确的气体动理学求解器计算界面通量，在紧致网格模板上实现三阶空间精度，同时相比间断伽辽金（DG）等主流紧致格式，CGKS 具有显式推进大步长的特点，在计算效率上更具优势。

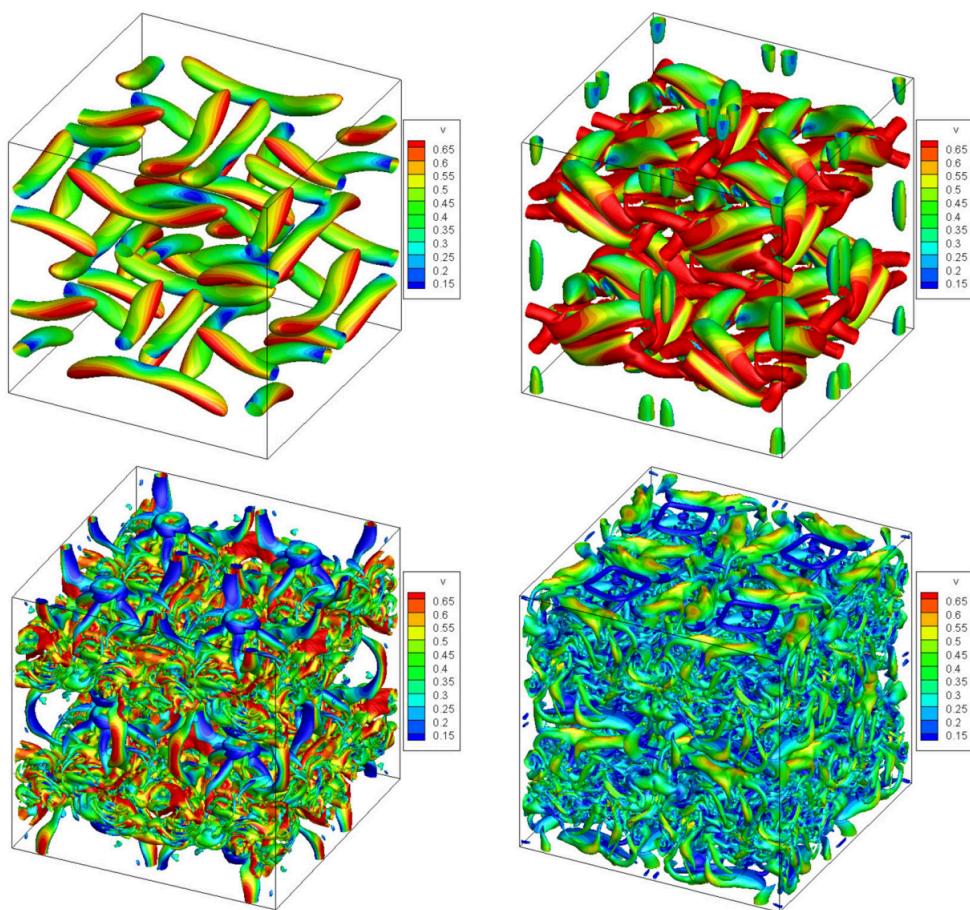


图 1-5 CGKS 在可压缩湍流直接数值模拟中的应用：Taylor-Green 涡算例

### 1.2.3 强鲁棒高阶格式研究现状

高阶空间重构方法的一个重要问题在于，即使流动远离真空区域，在极强接触间断和强激波附近，高阶重构方法将极有可能出现非物理理解，从而导致格式的失效。为改善上述问题，近年来多种提高高阶格式鲁棒性的策略被提出。以 WENO 类格式为例，第一种方案是混合模版的选择策略，例如结合两种不同的 WENO 重构并使用相应准则自动选择合适的模板<sup>[48]</sup>，以及非线性权重与线性权重的结合<sup>[49]</sup>，这种方法能够提高鲁棒性并减少计算量，但如何选择合适的准则来自动选择权重仍未很好得到解决。TENO 为选择候选模版提供了新的思路。TENO 方案可以根据局部流动特性自动将阶数降低到三阶。这种方法有效处理了多间断情况，并恢复了经典五阶 WENO 方案的鲁棒性。另一种提高鲁棒性的有效方法是保正限制器，例如传统的先验限制器，如 vanLeer 限制器，vanAlbada 限制器，Michalak 和 Ollivier-Gooch 限制器，Kitamura-Shima 限制器，以及后验限制器如 MOOD 等。先验限制器通常具有在不同情况下表现差异明显的参数，而后验限制器通常计算成本较高。张向雄等人针对高阶 DG 格式不能保持非负性的不足，构造了实现高阶精度与保正性统一的限制器<sup>[50]</sup>，严格证明了限制器在不降低格式

精度的前提下能保持密度与压力的非负，此外，该类限制器也被成功应用于 WENO 格式等<sup>[51]</sup>。最近，姬兴等人<sup>[52]</sup>提出了不同于先验、后验限制器的一种广义限制器，即间断反馈因子。相较于传统限制器，间断反馈因子针对不同变量的重构，均使用同一套参数，且仅涉及界面压力与马赫数的计算，计算效率高，且在对典型极端流动数值模拟展现了良好的鲁棒性。

为了妥善处理时间上的不连续通量函数，类似于空间中的斜率限制器，赵丰祥等人<sup>[53]</sup>引入了时间维度的非线性限制器。此外，通量函数在时间上的限制过程将不同于低阶与高阶非线性混合通量函数（如通量校正输运（FCT）方法）或隐式格式中的其他混合通量，时间精确通量函数中的非线性限制器旨在修正方程多步多阶时间推进方法中的高阶时间导数以及变量更新过程。另一种常用的时间推进方法是针对无时变数值通量发展的具有强稳定性保持特性（SSP-RK）的龙格 - 库塔方法。通过每一步中一阶前向欧拉方法的凸组合来实现其高阶精度和强稳定性。然而，这种技术无法直接应用于含高阶时间导数（尤其是可能存在时间间断）的随时间演化的通量函数，其强稳定性保持（SSP）特性难以拓展到通量函数含时间导数的演化模型。

#### 1.2.4 当前研究不足之处

综上所述，尽管现有高阶数值方法在 CFD 领域取得了显著进展，但在复杂流动模拟中仍面临许多挑战，例如对于模拟考虑极端条件的可压缩流动的鲁棒性、并行计算效率的优化以及显式时间步长的限制等方面，亟需开展更深入的研究和发展。

在鲁棒性方面，现有高阶格式在处理极端条件下的可压缩流动时表现欠佳。例如，在高能量密度非线性流动模拟中，强冲击高压缩性、高雷诺数以及多组分系统强接触间断等情况，对数值方法的激波捕捉能力、分辨率和稳定性提出了极高要求，而当前方法难以满足。以 WENO 类格式为例，在强间断附近，即使流动远离真空区域，高阶重构仍可能出现非物理理解，导致格式失效。尽管已提出多种提高鲁棒性的策略，如混合模版选择、保正限制器等，但这些方法仍存在各自的缺陷，如权重选择准则难以确定、计算成本较高等。

计算效率也是一个关键问题。高阶方法通常需要更大的计算量，尤其是在单步计算中。例如，经典的龙格-库塔时间积分策略为达到高阶精度，需执行多个中间计算步骤，这虽然保证了精度，但对计算效率影响较大。在大规模精细化流动模拟中，计算效率的低下限制了高阶方法的广泛应用。此外，高阶有限差分方法在非结构化网格上使用时面临技术挑战，而间断伽辽金（DG）方法和 FR/CPR 方法对流场光滑性有要求，在处理激波、物质界面等间断时，需要引入额外技术避免数值振荡，这也增加了计算的复杂性和成本。

### 1.3 主要研究内容

基于高阶计算流体力学数值算法的工程需求，本文主要研究结构网格下的强鲁棒高阶气体动理学格式。主要关注以下几个关键问题。

1) 强间断问题中算法的鲁棒性。针对激波等强间断问题，相比于传统的二阶 CFD 格式，以 WENO 格式为代表的高阶方法鲁棒性不足，且该现象会随着精度的增加而迅速放大；

2) 高阶方法在单步计算中需要更大的计算量(如更高阶的空间重构多项式，WENO 类方法的光滑因子计算，更高阶的 GKS 分布函数)，且在空间重构以及通量计算过程中需要多个高斯积分点达到理论数值精度，不但增加了计算成本，且在高维情况下，基于 WENO 的高阶有限体积方法会变得非常复杂。

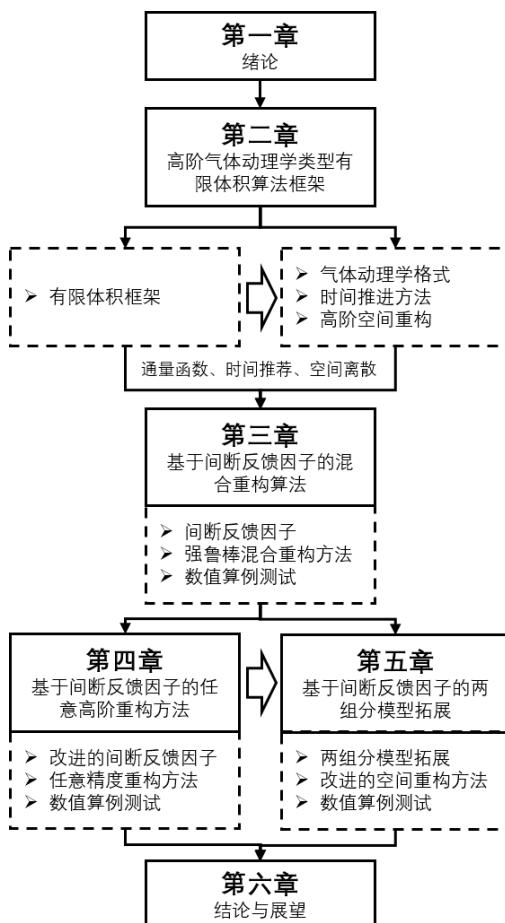


图 1-6 论文结构与章节安排

本文基于两步四阶气体动理学格式，开发了两类高效的强鲁棒高阶气体动理学格式，并进一步拓展到两组分流动建模。经过多个数值算例的测试，结果表明本文新开发的 HGKS 具有强鲁棒性，且能实现任意高阶下的一致鲁棒性与高效性，同时在模拟与预测可压缩流动中有较好的性能。

本文的主要研究内容与结构框架如图 1-6 所示。本文的组织结构如下：

第二章，高阶气体动理论类型有限体积算法框架。从有限体积框架、气体动理论出发，构建流体动力学模型。详细介绍气体动理论格式求解器的数值离散过程，包括通量函数求解、时间推进方法和高阶空间离散方法，为后续研究奠定理论基础。

第三章，基于间断反馈因子的混合重构算法。针对高阶格式处理强间断问题时的弱鲁棒性，分析传统 WENO 失效案例，提出间断反馈因子和混合重构算法，并对单元间断强度阈值选取进行分析，通过数值算例验证算法的分辨率和鲁棒性。

第四章，基于间断反馈因子的任意高阶重构方法。改进间断反馈因子的计算方式，设计自适应模板扩展方法，构建基于模板间断强度的自适应重构策略。通过理论分析和多维度算例验证，该方法在保持高阶精度和强鲁棒性的同时，降低了计算复杂度。

第五章，基于间断反馈因子的两组分模型拓展。将基于间断反馈因子的任意精度重构方法拓展到两组分流动中，建立两组分流动控制方程，推导平衡态与非平衡态重构方法，并通过数值算例验证算法在多组分流动模拟中的有效性。

第六章，结论与展望。总结基于间断反馈因子的强鲁棒高阶气体动理论格式框架的研究成果，并对未来研究方向提出展望与设想。

## 2 高阶气体动理学类型有限体积算法框架

气体动理学格式 (Gas-kinetic scheme, GKS), 是高阶 GKS 的基础 (HGKS)<sup>[30,54]</sup>。本章从基础理论出发, 系统阐述了有限体积框架下 GKS 求解器从理论模型构建到数值离散 (如通量函数求解、时间推进方法以及高阶空间重构) 的全流程实现。首先, 基于 BGK 方程构建流场控制方程, 结合有限体积框架与气体动理学格式建立流体动力学模型。针对求解器时间推进求解层面, 引入了高效的多步多阶时间离散与处理时间不连续的非线性限制器, 实现时间推进上的强鲁棒性。最后针对高阶空间离散, 引入了 WENO 类高阶重构方法以及 WENO 类方法在 GKS 平衡态重构过程的推广。

### 2.1 有限体积框架

有限体积方法 (FVM) 将计算域分离为有限个控制体, 针对每一个控制体, 对物理量进行积分和平均, 并得到离散形式的流体力学偏微分方程

$$\int_{\Omega_{ij}} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t^{n+1}) dV = \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t^n) dV - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega_{ij}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2-1)$$

其中  $\mathbf{W} = (\rho, \rho U, \rho V, \rho E)^T$  表示为控制体  $\Omega_{ij}$  中的流动守恒量,  $\partial\Omega_{ij}$  表示为组成控制体单元的面,  $\mathbf{F}$  表示为对应的穿过面  $\partial\Omega_{ij}$  的通量。在二维结构化网格中, 边界表示为

$$\partial\Omega_{ij} = \bigcup_{p=1}^4 \Gamma_{ij,p} \quad (2-2)$$

其中  $\Gamma_{ij,p}$  表示控制体单元  $ij$  的第  $p$  个面。对整个控制体单元  $\Omega_{ij}$  进行积分, 可以得到如下形式的半离散形式<sup>[55]</sup>

$$\frac{d\mathbf{W}_{ij}}{dt} = \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}) = -\frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{p=1}^4 \oint_{\Gamma_{ij,p}} \mathbf{F}(\mathbf{W}_{ij}) \cdot \mathbf{n}_p ds \quad (2-3)$$

其中  $\mathbf{W}_{ij}$  为单元  $\Omega_{ij}$  的平均守恒量,  $|\Omega_{ij}|$  对应单元  $\Omega_{ij}$  的面积,  $\mathcal{L}(\mathbf{W})$  为单元平均守恒量的空间梯度,  $\mathbf{F} = (F, G)^T$  为通量,  $\mathbf{n}_p$  为界面  $\Gamma_{ij,p}$  的外法线方向。

在高阶方法中, 界面上需要额外的高斯点提升算法的空间精度, 以两高斯点为例, 每个高斯点的权重均为  $1/2$ , 且对界面  $\Gamma_{ij,p}$  上的线积分根据高斯二次方进行离散化, 其具体形式为

$$\oint_{\Gamma_{ij,p}} \mathbf{F}(\mathbf{W}_{ij}) \cdot \mathbf{n}_p ds = |l_s| \sum_{m=1}^2 \omega_m \mathbf{F}(\mathbf{x}_{p,m}, t) \cdot \mathbf{n}_p \quad (2-4)$$

其中  $|l_p|$  为界面  $\Gamma_{ij,p}$  的长度,  $\mathbf{x}_{p,m}, m = 1, 2$  为界面  $\Gamma_{ij,p}$  上的高斯点。对线的两个端点坐标  $\tilde{\mathbf{x}}_{p,1}, \tilde{\mathbf{x}}_{p,2}$ , 其对应高斯点坐标为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{p,1} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \tilde{\mathbf{x}}_{p,1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \tilde{\mathbf{x}}_{p,2} \\ \mathbf{x}_{p,2} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \tilde{\mathbf{x}}_{p,1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \tilde{\mathbf{x}}_{p,2}\end{aligned}\quad (2-5)$$

为了在全局坐标下更新流动守恒量, 需要首先计算单位长度下穿过每个高斯点的通量

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_{p,m}, t) \cdot \mathbf{n}_p = \int \psi f(\mathbf{x}_{p,m}, t, \mathbf{u}, \xi) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{u} d\xi \quad (2-6)$$

其中  $f(\mathbf{x}_{p,m}, t, \mathbf{u}, \xi)$  为对应高斯点的气体分布函数。对二维问题, 从全局坐标到局部坐标的旋转矩阵  $\mathbf{T}$  为

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

至此, 局部坐标下的守恒量可表示为

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{T} \mathbf{W} \quad (2-8)$$

其中  $\widetilde{\mathbf{W}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\rho}\tilde{u}, \tilde{\rho}\tilde{v}, \tilde{\rho}\tilde{E})$ . 得到局部坐标下的守恒量后, 局部坐标下的通量可表示为

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{p,m}(t) = \int \psi \tilde{u} f(\tilde{\mathbf{x}}_{p,m}, t, \tilde{\mathbf{u}}, \xi) d\tilde{\mathbf{u}} d\xi \quad (2-9)$$

最后, 全局坐标下的通量可通过坐标变换得到。在二维问题中, 通量在全局与局部坐标下的变换关系为<sup>[56]</sup>

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^{-1} \widetilde{\mathbf{F}}(\widetilde{\mathbf{W}}) \quad (2-10)$$

## 2.2 气体动理论

描述流体运动通常基于两种不同尺度, 第一种基于宏观量, 例如守恒量  $(\rho, \rho\mathbf{U}, \rho E)$  等, 在宏观尺度上, 控制方程通常采用 Euler 方程或 N-S 方程, 并提供额外的状态方程

等，从而封闭控制方程。另一种基于介观层面，即气体动理论。动理论学通过研究大量粒子的运动来分析流体行为，其优势是能识别更详细的小尺度粒子动力学特性。GKS 方法通过 BGK 松弛模型构建的气体动理论学格式，以解决含激波间断的可压缩流动，该方法通过直接利用气体动理论方程解析解，结合有限体积方法，实现对流体流动的数值模拟，其特点是能够在稀薄气体和连续气体流动中均具有较高的精度和稳定性。

二维 BGK 方程<sup>[57]</sup>可以表示为

$$f_t + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \frac{g - f}{\tau} \quad (2-11)$$

其中  $f$  为气体分布函数， $g$  为对应的平衡态，且  $\tau$  对应碰撞时间。其中碰撞项满足相容性条件

$$\int \frac{g - f}{\tau} \psi d\Xi = 0 \quad (2-12)$$

其中  $\psi = (1, u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \xi^2))^T$ ,  $d\Xi = du dv d\xi_1 \cdots d\xi_K$ ,  $(u, v)$  为宏观粒子速度的两个分量， $\xi_i = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K)$  为  $K$  维内部粒子速度分量，且  $K$  为内部自由度。对二维流动问题， $K = (4 - 2\gamma)/(\gamma - 1)$ ，其中  $\gamma$  为比热比。

一般的宏观气体动力学方程可以通过 Chapman-Enskog 展开对 BGK 方程<sup>[58]</sup>进行展开得到，其中气体分布函数可以表示为

$$f = g - \tau D_{\mathbf{u}} g + \tau D_{\mathbf{u}}(\tau D_{\mathbf{u}}) g - \tau D_{\mathbf{u}}[\tau D_{\mathbf{u}}(\tau D_{\mathbf{u}}) g] + \cdots \quad (2-13)$$

其中  $D_{\mathbf{u}} = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ . 例如，对零阶阶段  $f = g$  对应 Euler 方程，且一阶截断后得到的分布函数就回到了 N-S 方程，即

$$f = g - \tau(ug_x + vg_y + g_t) \quad (2-14)$$

## 2.3 气体动理论学格式

GKS 求解器的关键在于构建时间独立的单元界面分布函数  $f$ 。首先 BGK 方程(2-11)的积分解为<sup>[59]</sup>

$$f(\mathbf{x}_{p,m}, t, \mathbf{u}, \xi) = \frac{1}{\tau} \int_0^t g(\mathbf{x}', t', \mathbf{u}, \xi) e^{-(t-t')/\tau} dt' + e^{-t/\tau} f_0(\mathbf{x}_{p,m} - \mathbf{u}t, \mathbf{u}, \xi) \quad (2-15)$$

其中  $\mathbf{x}_{p,m} = (0, 0)$  为局部坐标下的高斯点，且  $\mathbf{x}_{p,m} = \mathbf{x}' + \mathbf{u}(t - t')$  为粒子的迹线， $f_0$  对应初始气体分布函数，并且  $g$  为对应的平衡态。然后再局部高斯点  $\mathbf{x}_{p,m} = (0, 0)$  下可构

建一个二阶时间精度的气体分布函数<sup>[60]</sup>

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_{p,m}, t, \mathbf{u}, \zeta) = & \left(1 - e^{-t/\tau_n}\right) g^c \\ & + \left[(t + \tau)e^{-t/\tau_n} - \tau\right] \mathbf{a}_x^c \cdot \mathbf{u} g^c + \left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau_n}\right) A^c g^c \\ & + e^{t/\tau_n} g^l \left[1 - (\tau + t) \mathbf{a}_x^l \cdot \mathbf{u} - \tau A^l\right] \mathcal{H}(u) \\ & + e^{t/\tau_n} g^r \left[1 - (\tau + t) \mathbf{a}_x^r \cdot \mathbf{u} - \tau A^r\right] [1 - \mathcal{H}(u)] \end{aligned} \quad (2-16)$$

其中  $\mathcal{H}$  为 Heaviside 函数。另外，函数  $g^k, k = l, r$  分别代表单元界面左右的初始气体分布函数，且满足 Maxwellian 分布

$$g^k = \rho^k \left(\frac{\lambda^k}{\pi}\right)^{\frac{k+2}{2}} e^{-\lambda^k [(u-U^k)^2 + (v-V^k)^2 + \zeta^2]} \quad (2-17)$$

其中  $\lambda = m_0/2k_B T$  是关于温度，分子质量与 Boltzmann 常数的函数。 $g^k$  可以通过空间重构得到的界面左右宏观守恒量  $\mathbf{W}^{l,r}$  得到

$$\int \psi g^l d\Xi = \mathbf{W}^l, \quad \int \psi g^r d\Xi = \mathbf{W}^r \quad (2-18)$$

系数  $\mathbf{a}_x, \mathbf{A}$  分别代表空间与时间梯度，其具有如下形式

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_x \rangle &= \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{W}_x, \quad \langle \mathbf{a}_y \rangle = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} = \mathbf{W}_y \\ \langle \mathbf{A} + \mathbf{a}_x u + \mathbf{a}_y v \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2-19)$$

其中系数  $\mathbf{a}_x = (a_{x1}, a_{x2}u, a_{x3}v, a_{x4}\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \zeta^2))^T$ ，且  $\mathbf{a}_y$  有相似的形式。 $\langle \dots \rangle$  为气体分布函数的矩，且定义为

$$\rho \langle (\dots) \rangle = \int (\dots) g d\Xi \quad (2-20)$$

为了确定系数  $\mathbf{a}_x, \mathbf{A}$ ，首先介绍局部坐标下每个高斯点的二阶气体分布函数，其具体形式如下所示

$$g = \rho \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{k+3}{2}} e^{-\lambda [(u-U)^2 + (v-V)^2 + \zeta^2]} \quad (2-21)$$

函数  $g$  的矩定义为

$$\rho \langle (\dots) \rangle = \int (\dots) g d\Xi \quad (2-22)$$

依据积分的一般性质，矩函数可以表示为

$$\langle (u^n v^m \xi^{2l}) \rangle = \langle (u^n) \rangle \langle (v^m) \rangle \langle (\xi^{2l}) \rangle \quad (2-23)$$

其中  $n, m, l$  均为整数, 且由于对称性,  $\xi$  的矩总是偶数阶的。在计算域  $(-\infty, +\infty)$  中进行积分, 可以得到

$$\begin{aligned} \langle (u^0) \rangle &= 1 \\ \langle (u^1) \rangle &= U \\ &\dots \end{aligned} \quad (2-24)$$

$$\langle (u^{n+2}) \rangle = U \langle (u^{n+1}) \rangle + \frac{n+1}{2\lambda} \langle (u^n) \rangle$$

和

$$\begin{aligned} \langle (\xi^0) \rangle &= 1 \\ \langle (\xi^2) \rangle &= \frac{K}{2\lambda} \\ &\dots \\ \langle (\xi^{2l}) \rangle &= \frac{K+2(l-1)}{2\lambda} \langle (\xi^{2(l-1)}) \rangle \end{aligned} \quad (2-25)$$

结合 Heaviside 函数, 将在计算域  $(0, +\infty)$  内的积分项记为  $\langle (\dots) \rangle_{>0}$ , 将在计算域  $(-\infty, 0)$  内的积分项记为  $\langle (\dots) \rangle_{<0}$ , 且分别具有如下形式

$$\begin{aligned} \langle (u^0) \rangle_{>0} &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(-\sqrt{\lambda}U) \\ \langle (u^1) \rangle_{>0} &= U \langle (u^0) \rangle_{>0} + \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda U^2}}{\sqrt{\pi\lambda}} \\ &\dots \\ \langle (u^{n+2}) \rangle_{>0} &= U \langle (u^{n+1}) \rangle_{>0} + \frac{n+1}{2\lambda} \langle (u^n) \rangle_{>0} \end{aligned} \quad (2-26)$$

和

$$\begin{aligned} \langle (u^0) \rangle_{<0} &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda}U) \\ \langle (u^1) \rangle_{<0} &= U \langle (u^0) \rangle_{<0} - \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda U^2}}{\sqrt{\pi\lambda}} \\ &\dots \\ \langle (u^{n+2}) \rangle_{<0} &= U \langle (u^{n+1}) \rangle_{<0} + \frac{n+1}{2\lambda} \langle (u^n) \rangle_{<0} \end{aligned} \quad (2-27)$$

其中  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  函数为标准互补误差函数。

对 Maxwellian 分布进行 Taylor 展开, 微观梯度展开式具有如下形式

$$\begin{aligned} a_x &= a_{x1} + a_{x2}u + a_{x3}v + a_{x4}\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \zeta^2) = a_{xi}\psi_i \\ a_y &= a_{y1} + a_{y2}u + a_{y3}v + a_{y4}\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \zeta^2) = a_{yi}\psi_i \\ A &= A_1 + A_2u + A_3v + A_4\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \zeta^2) = A_i\psi_i \end{aligned} \quad (2-28)$$

结合方程 (2-18) 与方程 (2-22), 可以得到

$$\int \mathbf{a}_x g d\Xi = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}, \quad \int \mathbf{a}_y g d\Xi = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} \quad (2-29)$$

以  $\mathbf{a}_x$  为例, 上式可以扩展为

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial x} \end{pmatrix} = \langle (a_{xi}\psi_i\psi_j) \rangle = \langle (\psi_i\psi_j) \rangle \begin{pmatrix} a_{x1} \\ a_{x2} \\ a_{x3} \\ a_{x4} \end{pmatrix} \quad (2-30)$$

令  $\mathbf{M} = \langle (\psi_i\psi_j) \rangle$ , 上述方程可以表示为

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (2-31)$$

对二维问题, 系数矩阵  $\mathbf{M}$  可以表示为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \langle (u^0) \rangle & \langle (u^1) \rangle & \langle (v^1) \rangle & \langle (\psi_4) \rangle \\ \langle (u^1) \rangle & \langle (u^2) \rangle & \langle (u^1 v^1) \rangle & \langle (u^1 \psi_4) \rangle \\ \langle (v^1) \rangle & \langle (u^1 v^1) \rangle & \langle (v^2) \rangle & \langle (v^1 \psi_4) \rangle \\ \langle (\psi_4) \rangle & \langle (u^1 \psi_4) \rangle & \langle (v^1 \psi_4) \rangle & \langle (\psi_4^2) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & U & V & B_1 \\ U & U^2 + 1/2\lambda & UV & B_2 \\ V & UV & V^2 + 1/2\lambda & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix} \quad (2-32)$$

其中

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2} \left( U^2 + V^2 + \frac{K+2}{2\lambda} \right) \\ B_2 &= \frac{1}{2} \left( U^3 + V^2 U + \frac{(K+4)U}{2\lambda} \right) \\ B_3 &= \frac{1}{2} \left( V^3 + U^2 V + \frac{(K+4)V}{2\lambda} \right) \\ B_4 &= \frac{1}{2} \left( (U^2 + V^2)^2 + \frac{(K+4)(U^2 + V^2)}{\lambda} + \frac{K^2 + 6K + 8}{4\lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (2-33)$$

令

$$R_4 = 2b_4 - \left( U^2 + V^2 + \frac{K+2}{2\lambda} \right) b_1, \quad R_3 = b_3 - Vb_1, \quad R_2 = b_2 - Ub_1 \quad (2-34)$$

则方程 (2-30) 的解可以表示为

$$\begin{aligned} a_{x4} &= \frac{4\lambda^2}{K+2} (R_4 - 2UR_2 - 2VR_3) \\ a_{x3} &= 2\lambda R_3 - Va_{x4} \\ a_{x2} &= 2\lambda R_2 - Ua_{x4} \\ a_{x1} &= b_1 - Ua_{x2} - Va_{x3} - \frac{1}{2}a_{x4} \left( U^2 + V^2 + \frac{K+2}{2\lambda} \right) \end{aligned} \quad (2-35)$$

最后, 平衡态  $g^c$  与对应的梯度  $g_x^c$  通过相容性条件得到

$$\begin{aligned} \int \psi g^c d\Xi &= \mathbf{W}^c = \int_{u>0} \psi g^l d\Xi + \int_{u<0} \psi g^r d\Xi \\ \int \psi g_x^c d\Xi &= \mathbf{W}_x^c = \int_{u>0} \psi g_x^l d\Xi + \int_{u<0} \psi g_x^r d\Xi \end{aligned} \quad (2-36)$$

指数函数中的物理碰撞时间  $\tau$  可以用数值碰撞时间  $\tau_n$  进行修正, 从而捕捉流场中无法解决的不连续性。对无粘流动问题, 数值碰撞时间  $\tau_n$  有如下形式<sup>[60]</sup>

$$\tau_n = C_1 \Delta t + C_2 \left| \frac{p^l - p^r}{p^l + p^r} \right| \Delta t \quad (2-37)$$

其中  $C_1, C_2$  为常数,  $p^l, p^r$  分别表示单元界面左右的压力值。对粘性流动,  $\tau_n$  根据归一化的压力差值进行放大<sup>[60]</sup>

$$\tau_n = \tau + C_2 \left| \frac{p^l - p^r}{p^l + p^r} \right| \Delta t = \frac{\mu}{p} + C_2 \left| \frac{p^l - p^r}{p^l + p^r} \right| \Delta t \quad (2-38)$$

## 2.4 适配高阶气体动理学格式的时间推进方法

### 2.4.1 两步四阶时间离散化

在 CFD 应用过程中, 针对传统的 Runge-Kutta 时间推进方法在达到高阶时间精度需要付出大量的计算成本的不足, 发展出了多步多阶 (multi-stages multi-derivatives) 时间离散化方法<sup>[28-29]</sup>, 本文关注两步四阶 (S2O4) 时间推进方法, 其具有如下形式

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{ij}^* &= \mathbf{W}_{ij}^n + \frac{1}{2} \Delta t \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n) + \frac{1}{8} \Delta t^2 \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n) \\ \mathbf{W}_{ij}^{n+1} &= \mathbf{W}_{ij}^n + \Delta t \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n) + \frac{1}{6} \Delta t^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n) + 2 \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^*) \right)\end{aligned}\quad (2-39)$$

其中  $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(\mathbf{W})$  为控制体单元封闭界面处的总通量的时间导数。

对 GKS 方法，其通量函数是一个与时间相关的复杂函数，因此，为了计算该通量函数，必须获得通量在  $t = t_n$  时刻与  $t_* = t_n + \Delta t/2$  时刻的一阶时间导数。针对时间间隔  $\delta$ ，在高斯积分点  $\mathbf{x}_{p,m}$  上的总通量传输表示为

$$\mathbb{F}_{p,m}(\mathbf{W}^n, \delta) = \int_{t_n}^{t_n+\delta} \mathbf{F}_{p,m}(\mathbf{W}^n, t) dt = \int_{t_n}^{t_n+\delta} \int u \psi f(\mathbf{x}_{p,m}, t, \mathbf{u}, \xi) d\Xi dt \quad (2-40)$$

对二阶 GKS 求解器，令  $t_n = 0$ ，通量可以近似为一个线性函数

$$\mathbf{F}_{p,m}(\mathbf{W}^n, t) = \mathbf{F}_{p,m}^n + \partial_t \mathbf{F}_{p,m}^n t \quad (2-41)$$

将方程 (2-41) 代入方程 (2-40) 中，则  $\mathbf{F}_{p,m}^n$  与  $\partial_t \mathbf{F}_{p,m}^n t$  可以通过下式确定

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{p,m}^n \Delta t + \frac{1}{2} \partial_t \mathbf{F}_{p,m}^n \Delta t^2 &= \mathbb{F}(\mathbf{W}, \Delta t) \\ \frac{1}{2} \partial_t \mathbf{F}_{p,m}^n \Delta t + \frac{1}{8} \partial_t \mathbf{F}_{p,m}^n \Delta t^2 &= \mathbb{F}(\mathbf{W}^n, \Delta t/2)\end{aligned}\quad (2-42)$$

通过求解该线性方程组，可以得到

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{p,m}^n &= (4\mathbb{F}_{p,m}(\mathbf{W}^n, \Delta t/2) - \mathbb{F}_{p,m}(\mathbf{W}^n, \Delta t)) / \Delta t \\ \partial_t \mathbf{F}_{p,m}^n &= 4(\mathbb{F}_{p,m}(\mathbf{W}^n, \Delta t) - 2\mathbb{F}_{p,m}(\mathbf{W}^n, \Delta t/2)) / \Delta t\end{aligned}\quad (2-43)$$

最后可以得到  $\mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n)$  与  $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n) &= -\frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^2 A_m \mathbf{F}(\mathbf{x}_{p,m}, t_n) \cdot \mathbf{n}_p \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n) &= -\frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^2 A_m \partial_t \mathbf{F}(\mathbf{x}_{p,m}, t_n) \cdot \mathbf{n}_p\end{aligned}\quad (2-44)$$

通过方程 (2-39)，可以求解得到  $\mathbf{W}_{ij}^*$  与  $\mathbf{W}_{ij}^{n+1}$ 。

### 2.4.2 非线性时间限制器

在 S2O4 时间推进方法中，尚未考虑通量函数在时间上可能存在的不连续性，这将影响算法稳定性的评估。为了限制时间上可能存在的不连续性，本文使用非线性时间离散化限制器<sup>[53]</sup>，且 S2O4 方法可以重新表示为

$$\mathbf{W}_{ij}^{n+1} = \mathbf{W}_{ij}^n + \Delta t \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n) - \frac{\Delta t^2}{3} \partial_t \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{W}_{ij}^n) + \frac{\Delta t^2}{3} \partial_t \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{W}_{ij}^*) \quad (2-45)$$

其中  $\partial_t \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{W}_{ij}^n), \partial_t \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{W}_{ij}^*)$  为限制后的时间导数。以  $\partial_t \mathcal{L}(\mathbf{W}_{ij}^n)$  为例， $\partial_t \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{W}_{ij}^n)$  有如下形式

$$\partial_t \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{W}_{ij}^n) = -\frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{p=1}^4 \omega_p^t \left( \sum_{m=1}^2 A_m \partial_t \mathbf{F}(\mathbf{x}_{p,m}, t_n) \right) \cdot \mathbf{n}_p \quad (2-46)$$

其中  $\omega_p^t$  是控制体第  $p$  个界面的非线性权重，可以通过下式得到

$$\tilde{\alpha}_1^k = 1 + \left( \frac{\tau_Z^k}{\beta_{\min}^k + \varepsilon} \right)^2, \tilde{\alpha}_2^k = 1 + \left( \frac{\tau_Z^k}{\beta_{\max}^k + \varepsilon} \right)^2, \alpha^k = 2 \frac{\tilde{\alpha}_2^k}{\tilde{\alpha}_1^k + \tilde{\alpha}_2^k}, \omega_p^t = \min\{\alpha^l, \alpha^r\} \quad (2-47)$$

其中  $k = l, r$ ,  $\varepsilon$  是一个小量，且在本文中设置为  $\varepsilon = 10^{-6}$ 。采用  $\beta_{\min}^k, \beta_{\max}^k, \tau_Z^k$  作为光滑度量指标，用于评估控制体界面附近流动变量分布的光滑程度，这些光滑度指标的定义将在第 2.5 节中给出。

## 2.5 适配高阶气体动理学格式的空间离散方法

加权本质无振荡（WENO）有限体积格式在处理涉及双曲守恒律的广泛应用领域中，已证明其卓越的性能<sup>[49,61]</sup>。本节聚焦于一维情况下 WENO 类高阶气体动理学格式（HGKS），首先整理了 WENO 类格式的理论基础与具体实现过程，其次将 WENO 类重构方法推广至气体动理学格式中的平衡态空间重构。WENO 格式的核心思想在于，借助最优权值对多个子模板的值进行线性组合，从而在目标位置处构建出期望值  $\mathbf{Q}$ 。 $\mathbf{Q}$  可以表示守恒变量、特征变量或者原始变量。在多数实际应用中，基于特征变量的重构方式能够更好地处理激波等强间断问题，因此在本文之后的算例中均采用基于特征变量的重构方法。此外，更详细的 WENO 类重构方法实现过程可参考文献<sup>[61]</sup>。

### 2.5.1 基于零均值多项式的 WENO 重构公式

在区间  $[i - 1/2, i + 1/2]$  上，任意阶数重构多项式  $\mathbb{P}^{r_n}(x)$  满足如下公式：

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} \mathbb{P}^{r_n}(x) dx = \mathbf{W}_i, \quad \mathbf{W}^{r_n}(x) = a + bx + cx^2 + \dots \quad (2-48)$$

其中  $\mathbf{W}$  为单元平均守恒量。为了便于对  $\mathbb{P}^{r_n}(x)$  多项式的梯度项进一步处理，零均值格式下的  $\mathbb{P}^{r_n}(x)$  具有如下形式：

$$\mathbb{P}^{r_n}(x) = \mathbf{W}_i + \mathbf{W}_x Z_1(x) + \mathbf{W}_{x2} Z_2(x) + \dots \quad (2-49)$$

其中  $\mathbf{W}_x, \mathbf{W}_{x2}$  为梯度项，其具体形式将在下一小节中介绍。梯度项的系数项具有如下形式：

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= 1 \\ Z_1(x) &= \frac{1}{\Delta x}x - \frac{1}{2}, \quad Z_2(x) = \frac{1}{\Delta x^2}x^2 + \frac{1}{3} \\ Z_3(x) &= \frac{1}{\Delta x^3}x^3 - \frac{1}{4}, \quad Z_4(x) = \frac{1}{\Delta x^4}x^4 + \frac{1}{5}, \quad Z_5(x) = \frac{1}{\Delta x^5}x^5 - \frac{1}{6} \\ Z_6(x) &= \frac{1}{\Delta x^6}x^6 + \frac{1}{7}, \quad Z_7(x) = \frac{1}{\Delta x^7}x^7 - \frac{1}{8}, \quad Z_8(x) = \frac{1}{\Delta x^8}x^8 + \frac{1}{9} \end{aligned} \quad (2-50)$$

基于上述零均值多项式的基空间，可应用于设计任意阶数的 WENO 格式。

### 2.5.2 五阶 WENO 格式

以一维情况下五阶精度的 WENO 重构方法为例，为了得到单元  $i$  的界面值，首先考虑该单元以及其相邻单元组成的模板  $(\mathbf{W}_{i-2}, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}, \mathbf{W}_{i+2})$ 。在该大模板中可选择两个偏心子模板与一个中心模板进行三阶重构，其中左侧模板  $\mathbf{S}_1^3$  依赖于变量  $(\mathbf{W}_{i-2}, \mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{W}_i)$ ，中心模板  $\mathbf{S}_2^3$  依赖于变量  $(\mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$ ，右侧模板  $\mathbf{S}_3^3$  依赖于  $(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}, \mathbf{W}_{i+2})$ 。与模板  $\mathbf{S}_i^3$  对应的第  $i$  个重构多项式可表示为如下形式：

$$\mathbb{P}_i^3(x) = \mathbf{W}_i + \mathbf{W}_x Z_1(x) + \mathbf{W}_{x2} Z_2(x) \quad (2-51)$$

其中各个子模板分别对应

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1^3 : \quad \mathbf{W}_x &= -2\mathbf{W}_{i-1} + \mathbf{W}_{i-2}/2, \quad \mathbf{W}_{x2} = (\mathbf{W}_{i-2} - 2\mathbf{W}_{i-1} + \mathbf{W}_i)/2 \\ \mathbf{S}_2^3 : \quad \mathbf{W}_x &= (\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_{i-1})/2, \quad \mathbf{W}_{x2} = (\mathbf{W}_{i-1} - 2\mathbf{W}_i + \mathbf{W}_{i+1})/2 \\ \mathbf{S}_3^3 : \quad \mathbf{W}_x &= -3\mathbf{W}_i/2 + 2\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_{i+2}/2, \quad \mathbf{W}_{x2} = (\mathbf{W}_i - 2\mathbf{W}_i + \mathbf{W}_{i+1})/2 \end{aligned} \quad (2-52)$$

在光滑流场情况下，以上三个子模板均能达到理论三阶精度。为了达到理论五阶空间精度，需要计算各模板的线性权重并组合。在大模板  $\mathbf{S}^5 = \{\mathbf{S}_1^3, \mathbf{S}_2^3, \mathbf{S}_3^3\}$  可同样按照零均值形式的基函数构造一个四阶多项式  $\mathbb{P}^{r_5}(x)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{r_5}(x) &= \mathbf{W}_i + \mathbf{W}_x Z_1(x) + \mathbf{W}_{x2} Z_2(x) + \mathbf{W}_{x3} Z_3(x) + \mathbf{W}_{x4} Z_4(x) \\ \mathbf{W}_x &= \frac{1}{12} (-15\mathbf{W}_i + \mathbf{W}_{i-1} + 15\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_{i+2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{x2} &= \frac{1}{8}(-8\mathbf{W}_i + 6\mathbf{W}_{i-1} - \mathbf{W}_{i-2} + 2\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{W}_{i+2}) \\ \mathbf{W}_{x3} &= \frac{1}{6}(3\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i-1} - 3\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{W}_{i+2}) \\ \mathbf{W}_{x4} &= \frac{1}{24}(6\mathbf{W}_i - 4\mathbf{W}_{i-1} + \mathbf{W}_{i-2} - 4\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{W}_{i+2})\end{aligned}$$

子模板与大模板的线性权重  $d_k, k = 1, 2, 3$  满足如下关系式：

$$\mathbb{P}^{r5}(x) = \sum_{k=1}^3 d_k \mathbb{P}_k^{r3}(x) \quad (2-53)$$

通过计算可以得到唯一的最优权重(对单元右侧界面的重构值) $(d_1, d_2, d_3) = (0.1, 0.6, 0.3)$ 。通过该线性权重，小模板可以通过权重组合在光滑区域达到高阶精度。进一步，为了处理激波等间断区域，考虑非归一化的 WENO-Z<sup>[62]</sup>非线性权重

$$\omega_k = d_k \left( 1 + \frac{\sigma_Z}{\beta_k + \epsilon} \right) \quad (2-54)$$

其中  $\epsilon = 1e-8$  为小量。全局光滑因子  $\sigma_Z$  定义为  $\sigma_Z = |\beta_1 - \beta_3|$ ， $\beta_k$  为子模板的局部光滑因子，且满足如下形式<sup>[63]</sup>

$$\beta_k = \sum_{q=1}^{q_k} \Delta x^{2q-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{d^q}{dx^q} \mathbb{P}_k(x) \right)^2 dx = O(\Delta x^2) \quad (2-55)$$

其展开形式可写成如下统一形式<sup>[61]</sup>

$$\beta^{r3} = (\mathbf{W}_x)^2 + \frac{13}{3}(\mathbf{W}_{x2})^2 \quad (2-56)$$

最后根据归一化的非线性权重  $\bar{\omega}_k$ ，单元界面的重构多项式可表示为

$$\mathbb{P}^{(5,3)}(x) = \sum_{k=1}^3 \bar{\omega}_k \mathbb{P}_k^{r3}(x) \quad (2-57)$$

### 2.5.3 五阶 WENO-AO 格式

传统的五阶 WENO 重构方法考虑了三个三阶的子模板进行非线性加权，而在相同大小的模板下，WENO-AO 格式还考虑了中心大模板，并混合三个小模板实现的。需要注意的是，经典的 WENO 格式只有当大模板是光滑区域才能达到五阶精度，否则由于光滑因子计算的非线性权重将导致解的精度自动降为三阶。显然，WENO-AO 格式存

在相似的操作，这是由于 WENO-AO 通过五阶大模板与三个三阶小模板的非线性权重混合实现，当大模板存在间断，WENO-AO 格式仍然会通过降阶来保证算法稳定性。

考虑大模板  $\mathbf{S}^5$  和三个子模板  $\{\mathbf{S}_1^{r3}, \mathbf{S}_2^{r3}, \mathbf{S}_3^{r3}\}$  的线性权重

$$\begin{aligned}\gamma^{r5} &= \gamma_{Hi} \\ \gamma_1^{r3} &= (1 - \gamma_{Hi})(1 - \gamma_{Lo})/2, \quad \gamma_2^{r3} = (1 - \gamma_{Hi})\gamma_{Lo}, \quad \gamma_3^{r3} = (1 - \gamma_{Hi})(1 - \gamma_{Lo})/2\end{aligned}\tag{2-58}$$

注意到  $\mathbf{S}_2^{r3}$  模板对应中心三阶模板，因此其具有相较于偏心模板更大的线性权重，即保证 WENO-AO 具有中心偏向性。参考文献<sup>[64]</sup>的做法，本文选取  $\gamma_{Hi} = 0.95, \gamma_{Lo} = 0.95$ ，这样设置的好处是在对模板的局部光滑因子进行计算后，如果显示中心大模板  $\mathbf{S}^5$  是光滑的，该大模板将通过较大的非线性权重主导重构的结果，并且当大模板不光滑时，小模板中的中心模板  $\mathbf{S}_2^{r3}$  将主导重构的结果。

针对 WENO-AO 方法，仍然使用光滑因子来定义各模板的权重，并得到非归一化的 WENO-Z 非线性权重

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{3}(|\beta^{r5} - \beta_1^{r3}| + |\beta^{r5} - \beta_2^{r3}| + |\beta^{r5} - \beta_3^{r3}|) \\ \omega^{r5} &= \gamma^{r5} \left(1 + \tau^2 / (\beta^{r5} + \epsilon)^2\right), \quad \omega_1^{r3} = \gamma_1^{r3} \left(1 + \tau^2 / (\beta_1^{r3} + \epsilon)^2\right) \\ \omega_2^{r3} &= \gamma_2^{r3} \left(1 + \tau^2 / (\beta_2^{r3} + \epsilon)^2\right), \quad \omega_3^{r3} = \gamma_3^{r3} \left(1 + \tau^2 / (\beta_3^{r3} + \epsilon)^2\right)\end{aligned}\tag{2-59}$$

通过上式可得到归一化的非线性权重

$$\begin{aligned}\bar{\omega}^{r5} &= \omega^{r5} / (\omega^{r5} + \omega_1^{r3} + \omega_2^{r3} + \omega_3^{r3}), \quad \bar{\omega}_1^{r3} = \omega_1^{r3} / (\omega^{r5} + \omega_1^{r3} + \omega_2^{r3} + \omega_3^{r3}) \\ \bar{\omega}_2^{r3} &= \omega_2^{r3} / (\omega^{r5} + \omega_1^{r3} + \omega_2^{r3} + \omega_3^{r3}), \quad \bar{\omega}_3^{r3} = \omega_3^{r3} / (\omega^{r5} + \omega_1^{r3} + \omega_2^{r3} + \omega_3^{r3})\end{aligned}\tag{2-60}$$

最终，单元界面的重构多项式可表示为

$$\mathbb{P}^{AO(5,3)}(x) = \bar{\omega}^{r5} \left( \frac{1}{\omega^{r5}} \mathbb{P}^{r5}(x) - \sum_{k=1}^3 \frac{\omega_k^{r3}}{\omega^{r5}} \mathbb{P}_k^{r3}(x) \right) + \sum_{k=1}^3 \bar{\omega}_k^{r3} \mathbb{P}_k^{r3}(x)\tag{2-61}$$

与传统的 WENO 方法相比，WENO-AO 方法具有如下特点：

1) 重构方法对高斯点的位置具有灵活性，因为线性权重与几何形状无关。事实上，Zhu 等人在设计三角形网格上的新 WENO 格式时也采用了类似的思想；

2) 与传统的 WENO 相比，WENO-AO 重构方法计算成本更高，这主要是由于需要计算额外的大模板高阶光滑度指标。实际上，在与 Riemann 求解器结合使用时（仅需要点值），其潜力尚未得到充分挖掘。然而，当与两步四阶的 GKS（气体动理论格式）结合时，它变得自然且高效。

### 2.5.4 气体动理学格式平衡态重构

在 WENO-AO 重构步骤后，气体动理学格式中的非平衡态分量  $g^k, g_x^k$  可被确定。最后，平衡态  $g^c$  与对应的梯度  $g_x^c$  可通过相容性条件得到

$$\begin{aligned}\int \psi g^c d\Xi &= \mathbf{W}^c = \int_{u>0} \psi g^l d\Xi + \int_{u<0} \psi g^r d\Xi \\ \int \psi g_x^c d\Xi &= \mathbf{W}_x^c = \int_{u>0} \psi g_x^l d\Xi + \int_{u<0} \psi g_x^r d\Xi\end{aligned}\quad (2-62)$$

至此，方程2-16中的所有量均可显式得到。

## 2.6 小结

本章系统阐述了高阶气体动理学类型有限体积算法框架的理论基础以及数值离散求解流程。基于 BGK 方程构建流场控制方程，结合有限体积框架以及 GKS 通量函数建立流体动力学模型。基于多步多阶时间推进方法与非线性时间限制器，实现 GKS 求解器的高效求解。最后，引入以 WENO 类重构方法为核心的 GKS 非平衡态空间重构与平衡态空间重构方法，实现有限体积框架下的高阶 GKS 求解器。

### 3 基于间断反馈因子的混合重构高阶气体动理学格式

高阶格式的核心问题之一在于处理强间断问题的弱鲁棒性。传统基于限制器的高阶重构方法，通过约束相邻网格间的变量变化抑制非物理振荡并维持守恒性，但在实际流场计算中，仍面临计算效率低下、多参数耦合调节复杂等核心挑战，亟需发展兼具高效性与鲁棒性的新型数值框架。

本章针对高阶格式的弱鲁棒性问题，通过间断反馈因子融合间断强度阈值提出了一种高效的无参数广义限制器，结合 WENO-AO(5,3) 空间重构方法与模板降阶设计，构建了一套适用于含强间断可压缩流动的强鲁棒混合算法。该方法有效改善了传统限制器对经验参数的依赖以及计算效率等问题，通过间断反馈因子动态检测流场间断强度，在光滑区域维持高阶精度，在间断区域自适应调整重构策略，为强鲁棒高阶格式的构造提供了新的思路和方法。

#### 3.1 传统 WENO 失效案例分析

WENO 类方法在光滑流场区域可实现高阶精度，通过对多个低阶模板的加权组合，在不增加间断附近振荡的前提下，能显著提升解的分辨率。然而，当重构模板存在间断且无光滑子模板可供选择，则重构值将可能出现非物理解（如负密度、负压力等）而可能将格式的失效（需要说明的是，格式失效的原因是较为复杂的，包含空间重构、通量函数计算以及时间离散方法等多种因素的影响，在本文后续的鲁棒性测试中，仅考虑空间重构对格式鲁棒性的影响），该现象会随着重构阶数的增加而更加显著。

下面针对 WENO 类方法重构的几种失效原因进行简单的分析。第一类情况如图 3-1 所示，对目标单元  $\Omega_{ij}$  进行空间重构时，子模板  $\mathcal{S}_1 = \{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i\}$  是光滑的，而子模板  $\mathcal{S}_2 = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$ ,  $\mathcal{S}_3 = \{I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$  中存在间断。通过方程 (2-60) 以及方程 (2-61) 可知，由于光滑模板  $\mathcal{S}_1$  的存在，通过重构模板的光滑因子所计算的非线性权重将趋向于使用该模板而减小其余模板的非线性权重，即模板  $\mathcal{S}_1$  将主导重构结果，如图 3-1 所示。此类情况下，WENO 的重构结果是有效的，此外，对一些弱间断情况，WENO 类方法同样表现优异。

当间断同时存在于模板  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  中时（如图 3-2、图 3-3 所示），WENO 类重构中的所有子模板与大模板都不再有效，通过光滑因子计算得到的非线性权重将偏向与相对光滑的模板的重构值。然而，在间断较强（如强激波、强稀疏波等）时，该模板选择策略将导致算法的鲁棒性迅速下降，进一步导致算法的整体失效。以本文第 5 章中计算的 blast wave 问题为例，其初始条件中压力相差 5 个数量级，采用 WENO-AO GKS 求解器模拟该算例时，算法将失效，需要引入额外的保护机制（如非负保护策略）进行

数值模拟。

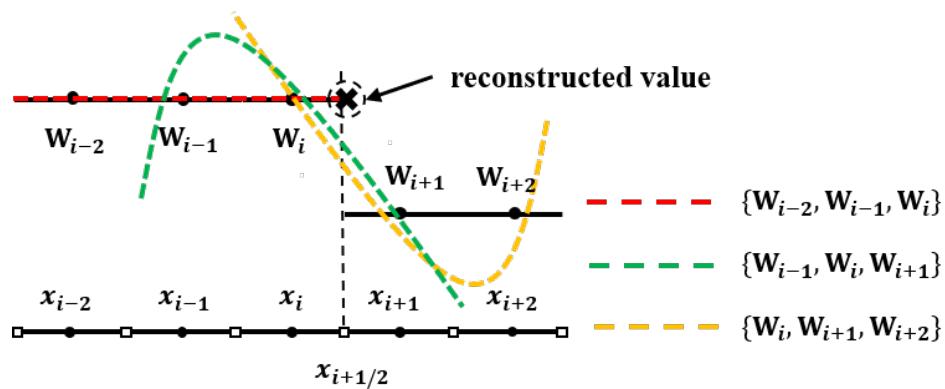


图 3-1 变量  $W_{i-2}, \dots, W_{i+2}$  第一种分布情况

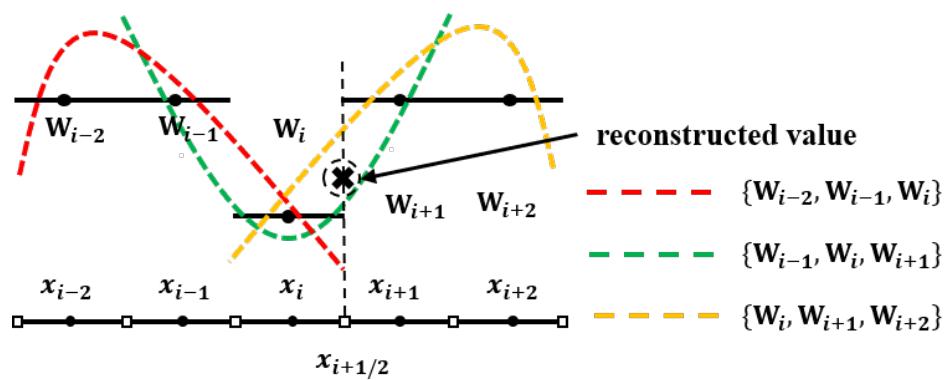


图 3-2 变量  $W_{i-2}, \dots, W_{i+2}$  第二种分布情况

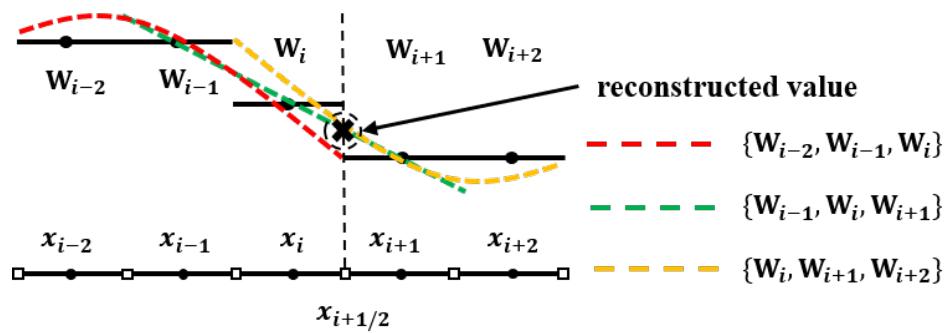


图 3-3 变量  $W_{i-2}, \dots, W_{i+2}$  第三种分布情况

### 3.2 间断反馈因子

高阶方法由于其复杂性与弱稳定性导致流场存在激波等强间断时，其有效性会迅速下降。为此，存在多种典型的重构限制器在遇到流场强间断时降低阶数，从而保证算法的鲁棒性。本文采用的是一种新型的梯度检测方法，即间断反馈因子（Discontinuity Feedback Factor, DF），与传统的梯度限制器不同的是，DF 的主要思想是从当前时间步

的界面重构值出发，预测间断在下一时间步可能进入的流场单元，进一步地，间断反馈因子通过流场的间断强度自适应地修正空间重构的多项式以改善格式的鲁棒性，该方法最早在文献<sup>[52]</sup>中提出。在本文中使用改进形式的 DF 格式，对单元  $\Omega_{ij}$  的 DF 值  $\alpha_{ij} \in (0, 1]$  有如下形式

$$\alpha_{ij} = \prod_{p=1}^s \prod_{m=1}^n \alpha_{pm} \quad (3-1)$$

其中  $s$  为组成封闭单元的面个数， $n$  为高阶算法中使用的 Gaussian 点个数， $\alpha_{pm}$  为对应高斯点  $\mathbf{x}_{pm}$  的 DF 值，且有如下格式

$$\begin{aligned} \alpha_{pm} &= \frac{1}{1 + D^2} \\ D &= \frac{|p^l - p^r|}{p^l} + \frac{|p^l - p^r|}{p^r} + (\text{Ma}_n^l - \text{Ma}_n^r)^2 + (\text{Ma}_t^l - \text{Ma}_t^r)^2 \end{aligned} \quad (3-2)$$

其中  $p^k, k = l, r$  表示 Gaussian 点左右的压力值， $\text{Ma}_n, \text{Ma}_t$  分别表示 Gaussian 点的法向与切向马赫数（如图3-4所示）。

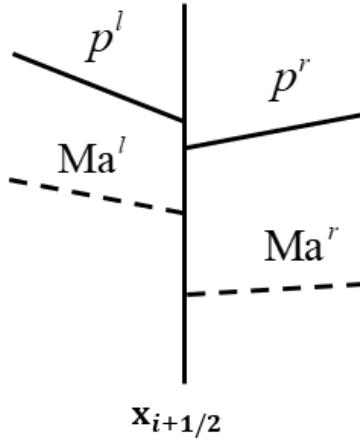


图 3-4 一维情况下界面左右压力与马赫数分布

### 3.3 混合重构算法

针对 WENO 类重构方法无法有效处理强激波间断等问题，考虑间断反馈因子能有效检测流场间断的特性，本节构建了一类结合 WENO-AO 重构与间断反馈因子的强鲁棒混合重构方法。DF 本质上反映了间断的强弱，当  $\alpha = 1$  时，表明流动是光滑的。需要注意的是，由于数值解本身并不是严格连续的，这将导致某些单元的 DF 值略小于 1，但单元中并不存在真实物理间断。为了解决这个不足，单元间断强度阈值  $\alpha_{\text{thres}}$  被用于判断单元中是否存在间断，当阈值设置越接近于 0，则更多的流场区域被判断为存在间断，相似地，当阈值设置越接近于 1，更多的流场区域被判断为光滑区域。单元间断强

度阈值相关的分析详见第 3-4 节。

在构建基于间断反馈因子的强鲁棒混合重构算法时，首先需要计算单元的间断反馈因子。本章中考虑 WENOZ-AO(5,3) 重构方法，根据第 3-1 节中失效模板的分析可知，当单元  $I_{i-2}, I_{i+2}$  中存在间断时，重构模板仍能通过非线性权重趋向于光滑子模板  $\{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$ 。因此，本章所构建的算法中，仅需计算单元  $\{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$  的间断反馈因子  $\{\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ 。二维情况下，若下式成立

$$\max\{\alpha_{i-1,j}, \alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j}\} \leq \alpha_{\text{thres}} \quad (3-3)$$

则表明单元模板中不存在光滑的子模板与大模板，此时使用中心三阶模板代替五阶 WENO-AO 重构，并结合间断反馈因子用于限制重构多项式的梯度，得到如下的重构多项式

$$\mathbb{P}_{DF}^3(x) = \mathbf{W}_{i,j} + \alpha_{i,j} \times \left[ (\mathbf{W}_{i+1,j} - \mathbf{W}_{i,j}) Z_1(x) + \left( \frac{1}{2} \mathbf{W}_{i-1,j} - \mathbf{W}_{i,j} + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{i+1,j} \right) Z_2(x) \right] \quad (3-4)$$

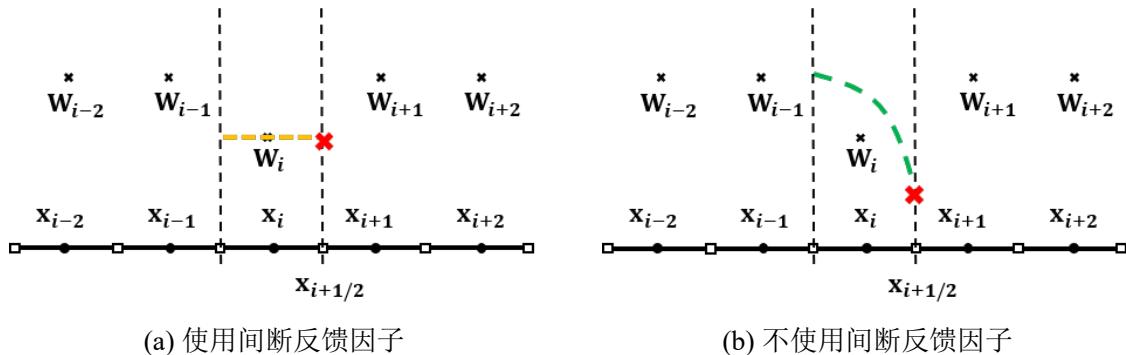
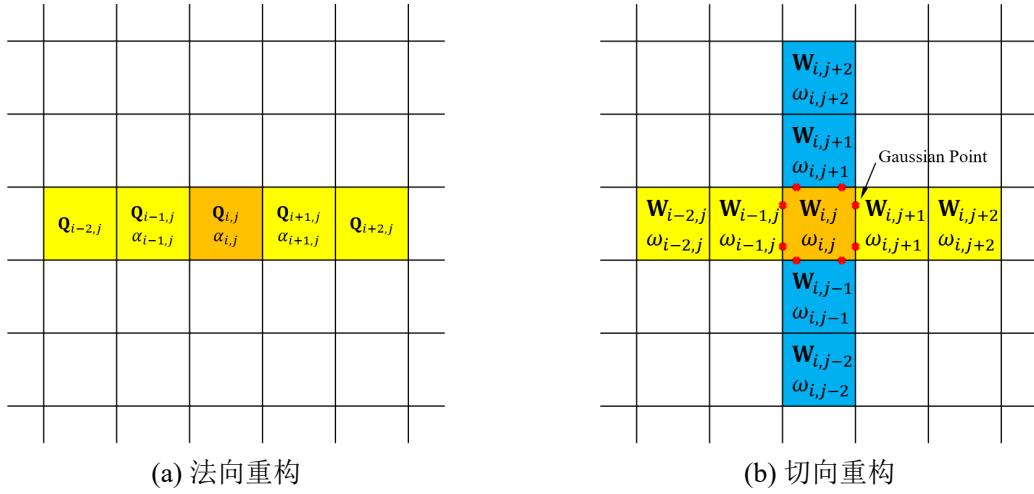


图 3-5 间断反馈因子对重构过程的工作机制

联立方程 (3.1) 可知，当单元  $\Omega_{i,j}$  中存在强间断时， $\alpha_{i,j}$  将趋近于 0，此时界面  $\Gamma_{i+1/2,j}$  的重构值将趋近于  $\mathbf{W}_{i,j}$ （如图3-5所示），即在强间断区域采用逼近一阶的重构多项式以增强算法的鲁棒性。需要注意的是，由于 DF 定义在单元上，在进行切向重构时，使用与界面 Gaussian 点位于同一侧的单元的 DF 值进行切向重构（如图3-6所示）。鲁棒性增强型高阶 GKS 算法流程如图3-7所示。

### 3.4 单元间断强度阈值选取分析

在第 4.3 节构建的算法中，单元间断强度阈值  $\alpha_{\text{thres}}$  的选取对计算强激波等间断问题是至关重要的。结合方程 3-1 可知，当选择一个较大的  $\alpha_{\text{thres}}$ ，将导致更多的间断被检测出，导致重构更多地降阶进行，算法的鲁棒性增强但其分辨率会显著下降。为了选择


 图 3-6 界面  $\Gamma_{i+1/2,j}$  的  $x$  方向重构示意图

一个合适的  $\alpha_{\text{thres}}$ , 分别使用不同的  $\alpha_{\text{thres}}$  值计算一些数值结果进行分析。

### 1) 平面激波相互作用

二维黎曼问题<sup>[65]</sup>中包括了激波-激波相互作用以及激波-涡相互作用。该算例的初始条件如下所示

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (0.138, 1.206, 1.206, 0.129), & x < 0.7, y < 0.7 \\ (0.5323, 0, 1.206, 0.3), & x \geq 0.7, y < 0.7 \\ (1.5, 0, 0, 1.5), & x \geq 0.7, y \geq 0.7 \\ (0.5323, 1.206, 0, 0.3), & x < 0.7, y \geq 0.7 \end{cases} \quad (3-5)$$

该算例为瞬态问题, 计算总时间为  $t = 0.6s$ , 网格数量为  $500 \times 500$ , 使用不同重构方法基于 S2O4 GKS 求解器计算的数值结果如图3-8所示。不同的  $\alpha_{\text{thres}}$  值计算的数值结果的主要不同集中在剪切层的强度, 例如图3-8中的 V1 与 V2 区域。当  $\alpha_{\text{thres}} = 0.5$  时, 该方案能够比其他方法更好地解析 V1 区域中的涡, 并且当  $\alpha_{\text{thres}} = 0.3$  与  $\alpha_{\text{thres}} = 0.8$  时算法显示出了较大的耗散, 即分辨率显著下降。

### 2) 类飓风问题

类飓风问题的具体描述可见第 3.5 节。为了评估不同的  $\alpha_{\text{thres}}$  值对算法的鲁棒性的影响, 分别对不同格式测试了在前 50 个计算步中程序不出现非物理理解的最大马赫数以表征算法的鲁棒性。数值计算结果显示, 当  $\alpha_{\text{thres}} > 0.5$  后, 算法的鲁棒性表现出轻微的增强, 然而, 当  $\alpha_{\text{thres}} < 0.5$  时, 算法的鲁棒性将迅速下降,

---

**Input:** Cell average values  $\mathbf{W}^n$ , DF value  $\alpha^n$  at  $t_n$  and  $\alpha_{threshold}$   
**Output:** Cell average values  $\mathbf{W}^{n+1}$  and DF value  $\alpha^{n+1}$  at  $t_{n+1}$

```

1 calculate time increment  $\Delta t \leftarrow (\mathbf{W}^n, CFL)$ ;
2 while not at end of stages do
3   update boundary condition;
4   foreach cell  $\Omega_{ij}$  do
5     if without condition  $\min\{\max\{\alpha_{i-1,j}, \alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j}\}, \alpha_{threshold}\}$  then
6       | cycle termination;
7     end
8     // normal reconstruction
9     if  $\max\{\alpha_{i-1,j}, \alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j}\} < \alpha_{threshold}$  then
10      | using 3rd polynomial reconstruction with DF;
11      | calculate  $(\mathbf{W}_{i+1/2,j}^l, (\mathbf{W}_x)_{i+1/2,j}^l) \leftarrow (\mathbf{W}_{i-1,j}, \mathbf{W}_{i,j}, \mathbf{W}_{i+1,j}, \alpha_{i,j})$ 
12    end
13    using 5th WENO-AO reconstruction;
14    calculate  $(\mathbf{W}_{i+1/2,j}^l, (\mathbf{W}_x)_{i+1/2,j}^l) \leftarrow (\mathbf{W}_{i-2,j}, \mathbf{W}_{i-1,j}, \mathbf{W}_{i,j}, \mathbf{W}_{i+1,j}, \mathbf{W}_{i+2,j})$ 
        // tangential reconstruction
15   foreach Gaussian point  $\mathbf{x}_m$  at the interface  $(i + 1/2, j)$  do
16     | here the index  $i + 1/2$  is omitted
17     if  $\max\{\alpha_{i,j-1}, \alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}\} < \alpha_{threshold}$  then
18       | using 3rd polynomial reconstruction with DF;
19       | calculate  $(\mathbf{W}_{j,m}^l, (\mathbf{W}_x)_{j,m}^l, (\mathbf{W}_y)_{j,m}^l) \leftarrow (\mathbf{W}_{j-1}^l, \mathbf{W}_j^l, \mathbf{W}_{j+1}^l, (\mathbf{W}_x)_j^l, \alpha_{i,j})$ 
20     end
21     using 5th WENO-AO reconstruction;
22     calculate  $(\mathbf{W}_{j,m}^l, (\mathbf{W}_x)_{j,m}^l, (\mathbf{W}_y)_{j,m}^l) \leftarrow (\mathbf{W}_{j-2}^l, \mathbf{W}_{j-1}^l, \mathbf{W}_j^l, \mathbf{W}_{j+1}^l, \mathbf{W}_{j+2}^l, (\mathbf{W}_x)_j^l)$ 
23   end
24   foreach interface do
25     calculate interface equilibrium state values and first-order derivatives
26      $(\mathbf{W}_c^c, (\mathbf{W}_x)_c^c, (\mathbf{W}_y)_c^c) \leftarrow (\mathbf{W}_{i+1/2,j}^{l,r}, (\mathbf{W}_x)_{i+1/2,j}^{l,r}),$ 
27     foreach Gaussian point  $\mathbf{x}_m$  at the interface  $(i + 1/2, j)$  do
28       | calculate  $(\mathbf{W}_{j,m}^c, (\mathbf{W}_x)_{j,m}^c, (\mathbf{W}_y)_{j,m}^c);$ 
29       | calculate flux  $\mathbf{F}_{j,m}$  and first-order derivatives  $\partial_t \mathbf{F}_{j,m}$ .
30     end
31   end
32   foreach cell  $\Omega_{ij}$  do
33     | update conservative variables  $\mathbf{W}_{i,j}^*$  at  $t_*$ .
34   end
35 end
36 update DF  $\alpha^{n+1}$  at  $t_{n+1}$ ;
37 update current time  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ ;
```

---

图 3-7 基于间断反馈因子的混合重构算法流程图

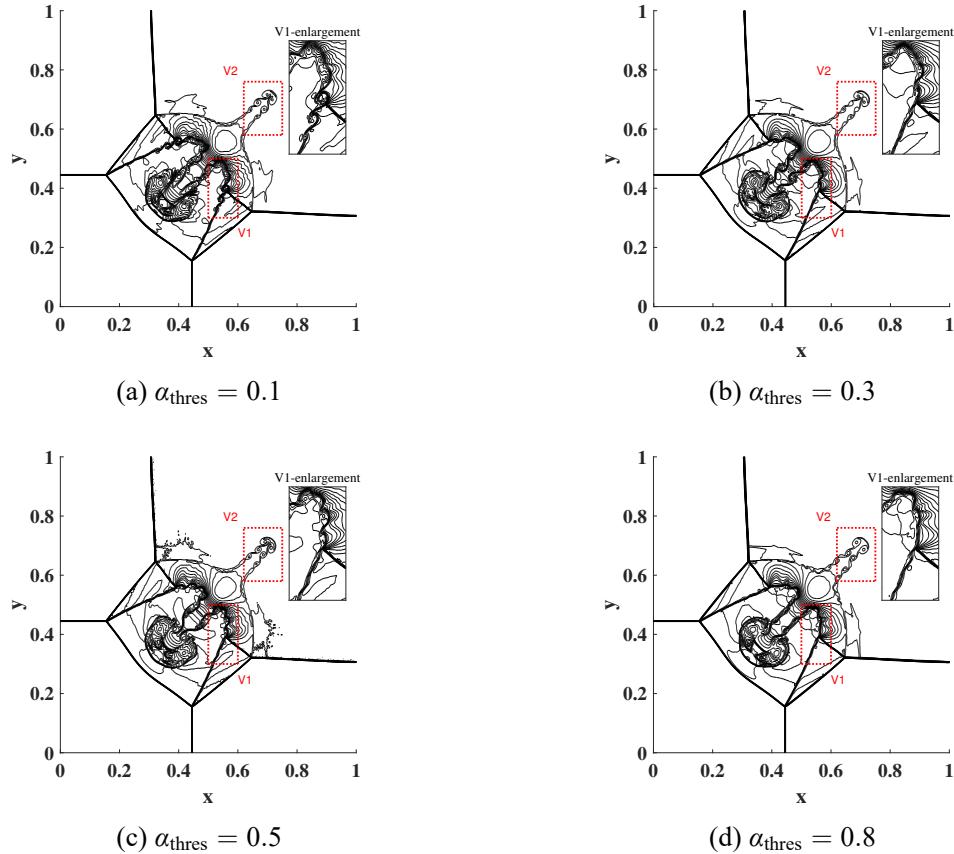


图 3-8 平面激波相互作用算例数值模拟的密度分布与局部放大图

其原因是随着  $\alpha_{thres}$  的降低，更多的流场间断将不再被检测为间断，而是判断为光滑流场，从而导致了高阶算法的快速失效。

 表 3-1 类飓风问题：不同  $\alpha_{thres}$  值可计算的最大马赫数。

GKS Solver	最大马赫数	L-F Solver	最大马赫数
$\alpha_{thres} = 0.1$	8.4	$\alpha_{thres} = 0.1$	4.0
$\alpha_{thres} = 0.3$	13.2	$\alpha_{thres} = 0.3$	6.3
$\alpha_{thres} = 0.5$	14.0	$\alpha_{thres} = 0.5$	7.0
$\alpha_{thres} = 0.8$	14.5	$\alpha_{thres} = 0.8$	7.4

从上述结果可以明显看出，当  $\alpha_{thres} \approx 0.5$  时，算法的鲁棒性和分辨率优于  $\alpha_{thres} \rightarrow 0$  与  $\alpha_{thres} \rightarrow 1$  的情况，因此，在之后的所有算例中，均采用  $\alpha_{thres} = 0.5$  作为混合重构算法的单元间断强度阈值。

### 3.5 数值算例分析

在本章中，构建了基于间断反馈因子的混合重构方法，结合两种通量求解器用于模拟一些 Riemann 问题。第一种格式是二阶 GKS 求解器，结合考虑时间限制器的 S2O4

时间离散方法，该时间离散方法能够限制通量函数在时间上可能存在的间断；另一种格式是 Lax-Friedrichs (L-F) 求解器，使用 strong stability preserving Runge-Kutta (SSP-RK) 时间离散方法，该时间离散方法具有保正性。通过上述两种通量求解器，可将混和重构方法与 WENO-AO 方法的分辨率与鲁棒性进行比较。

### 1) 精度测试

首先对本章构建的算法进行精度测试。对于 Euler 方程，采用光滑的正弦波传播问题来进行精度评估<sup>[66]</sup>。在精度测试算例中，物理粘性与碰撞时间均设置为 0。初始条件如下所示

$$\rho(x) = 1 + 0.2\sin(\pi x), \quad U(x) = 1.0, \quad p(x) = 1.0, \quad x \in [0, 2] \quad (3-6)$$

同时周期边界条件下的精确解为

$$\rho(x, t) = 1.0 + 0.2\sin(\pi(x - t)), \quad U(x, t) = 1.0, \quad p(x, t) = 1.0 \quad (3-7)$$

该算例中选取时间步长  $dt = dx^{r/s}$  以测试空间与时间精度。采用混合重构方法与不同的通量求解器计算一个周期 ( $t = 2.0$ ) 后的数值结果，并对比精确解的结果。基于  $L^1, L^2, L^\infty$  范数，分别使用 GKS 求解器、L-F 求解器的精度计算结果如表3-2-表3-3所示。

表 3-2 Hybrid GKS 求解器的一维正弦波传播问题精度测试

Mesh number	$L^1$ error	Order	$L^2$ error	Order	$L^\infty$ error	Order
20	3.08605e-05		3.42900e-05		5.03581e-05	
40	9.73423e-07	4.99	1.07857e-06	4.99	1.59300e-06	4.98
80	3.04512e-08	5.00	3.37530e-08	5.00	4.99287e-08	5.00
160	9.51802e-10	5.00	1.05489e-09	5.00	1.56134e-09	5.00

表 3-3 Hybrid L-F 求解器的一维正弦波传播问题精度测试

Mesh number	$L^1$ error	Order	$L^2$ error	Order	$L^\infty$ error	Order
20	8.72160e-05		9.69144e-05		1.43536e-04	
40	2.77881e-06	4.97	3.09403e-06	4.87	4.62706e-06	4.96
80	8.82510e-08	4.98	9.82373e-08	4.98	1.47088e-07	4.98
160	2.88210e-09	4.94	3.20765e-09	4.94	4.79356e-09	4.94

将精度测试拓展到二维问题，二维正弦波传播问题的初始条件如下所示

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= 1.0 + 0.2\sin(\pi x)\sin(\pi y) \\ U(x, y) &= 1.0, \quad V(x, y) = 1.0, \quad p(x, y) = 1.0\end{aligned}\tag{3-8}$$

其精确解有如下形式

$$\begin{aligned}\rho(x, y, t) &= 1.0 + 0.2\sin(\pi(x - t))\sin(\pi(y - t)) \\ U(x, y, t) &= 1.0, \quad V(x, y, t) = 1.0, \quad p(x, y, t) = 1.0\end{aligned}\tag{3-9}$$

计算区域为  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , 边界条件设置为周期边界条件。本算例的精度测试中  $dt = dx^{r/s}$ , 数值结果如表3-4-表3-5所示。数值计算结果显示一维与二维算例的精度测试均能达到相应的理论精度。

表 3-4 Hybrid GKS 求解器的二维正弦波传播问题精度测试

Mesh number	$L^1$ error	Order	$L^2$ error	Order	$L^\infty$ error	Order
20×20	5.65962e-05		6.28756e-05		9.14180e-05	
40×40	1.79930e-06	4.98	1.99464e-06	4.98	2.91743e-06	4.97
80×80	5.77863e-08	4.96	6.40819e-08	4.96	9.34663e-08	4.96
160×160	1.96834e-09	4.88	2.18648e-09	4.87	3.15510e-09	4.89

表 3-5 Hybrid L-F 求解器的二维正弦波传播问题精度测试

Mesh number	$L^1$ error	Order	$L^2$ error	Order	$L^\infty$ error	Order
20×20	1.74451e-04		1.93927e-04		4.42006e-04	
40×40	5.64310e-06	4.95	6.28265e-06	4.95	9.38073e-06	4.92
80×80	1.87239e-07	4.91	2.08339e-07	4.91	3.10842e-07	4.94
160×160	7.07596e-09	4.73	7.87120e-09	4.73	1.16316e-08	4.73

## 2) 强稀疏波问题

强稀疏波问题<sup>[67]</sup>会产生两个向相反方向传播的强稀疏波, 中心区域的密度和压力趋近于零。初始条件如下:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, -2.0, p_0), & x \in [0, 0.5] \\ (1.0, 2.0, p_0), & x \in [0.5, 1.0] \end{cases}\tag{3-10}$$

在本算例中, 参考马赫数可通过调整初始压力  $p_0$  得到, 其具有如下形式

$$\text{Ma} = \frac{u}{c} = \frac{u}{\sqrt{\gamma p_0 / \rho}} \quad (3-11)$$

其中  $\gamma$  为比热比。将算法能够计算的最大马赫数用于评估其鲁棒性。采用无反射边界条件和 100 个网格，分别使用 Hybrid、WENO-AO、van Leer 重构方法在  $t = 0.14$  时的数值模拟结果如图3-9、图3-10和表3-6所示。结果表明，在使用混合重构方法时，算法在 GKS 求解器下能够计算的最大马赫数显著高于 WENO-AO，且在 L-F 求解器下，混合重构方法的鲁棒性与使用 van Leer 限制器时相同。

表 3-6 强稀疏波问题：不同重构方法计算的最大马赫数

GKS solver	Maximum Mach number	LF solver	Maximum Mach number
WENO-AO	6.0	WENO-AO	7.9
Hybrid	31.5	Hybrid	84.1
van Leer	31.5	van Leer	119.5

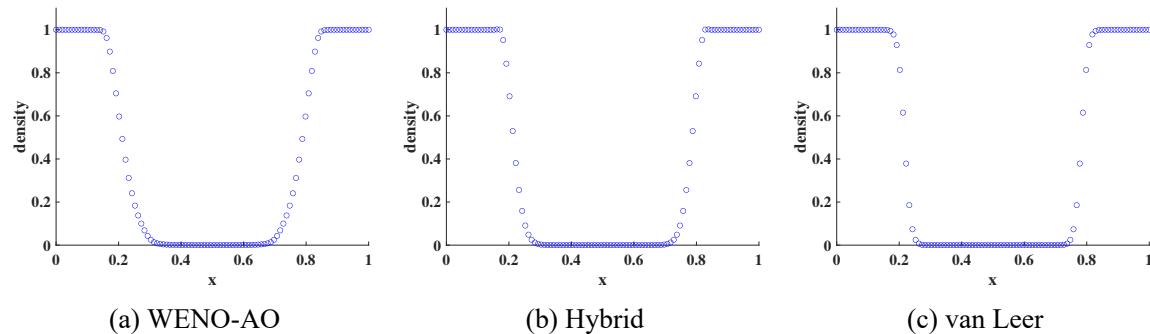


图 3-9 基于 GKS 求解器的强稀疏波问题的数值模拟结果

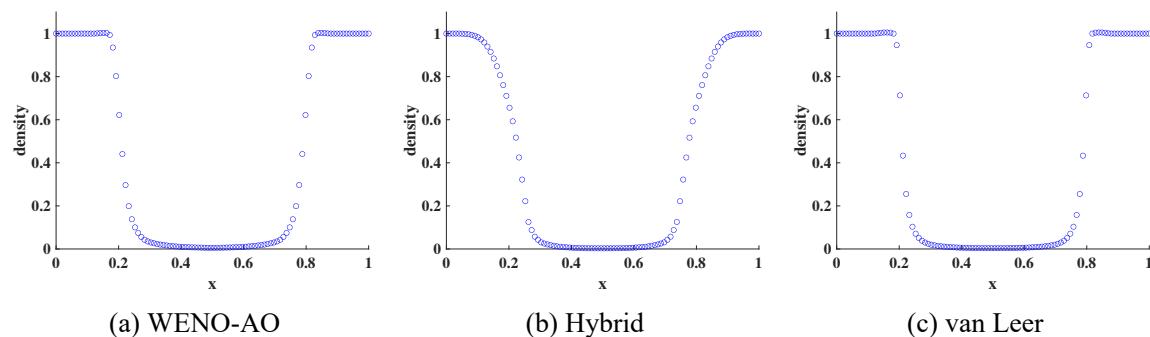


图 3-10 基于 L-F 求解器的强稀疏波问题的数值模拟结果

### 3) Shu-Osher 问题

一维 Shu-Osher 问题可用于检验算法捕捉高频波的效果，其初始条件如下所示

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857134, 2.629369, 10.33333), & x \in [0.0, 1.0] \\ (1.0 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & x \in [1.0, 10.0] \end{cases} \quad (3-12)$$

计算区域为  $[0.0, 10.0]$ , 网格尺寸为  $\Delta x = 1/40$ 。本节中均采用  $CFL = 0.5$ 。测试了两种通量求解器下使用不同重构方法 (WENO-AO, 基于间断反馈因子的混合重构方法以及 van Leer 重构方法) 的密度分布数值结果如图3-11所示, 时间为  $t = 1.8$ 。其中参考解通过 10000 网格的一维五阶 WENO-AO GKS 求解器得到。在相同的网格尺寸下, WENO-AO 重构和混合重构的空间精度均高于 Van Leer 重构, 其中 WENO-AO 在捕捉极值方面的表现优于混合重构。此外, 使用混合重构时, 算法在捕捉极值方面的性能略低于使用 WENO-AO 重构的情况, 但仍保持了较高的分辨率。

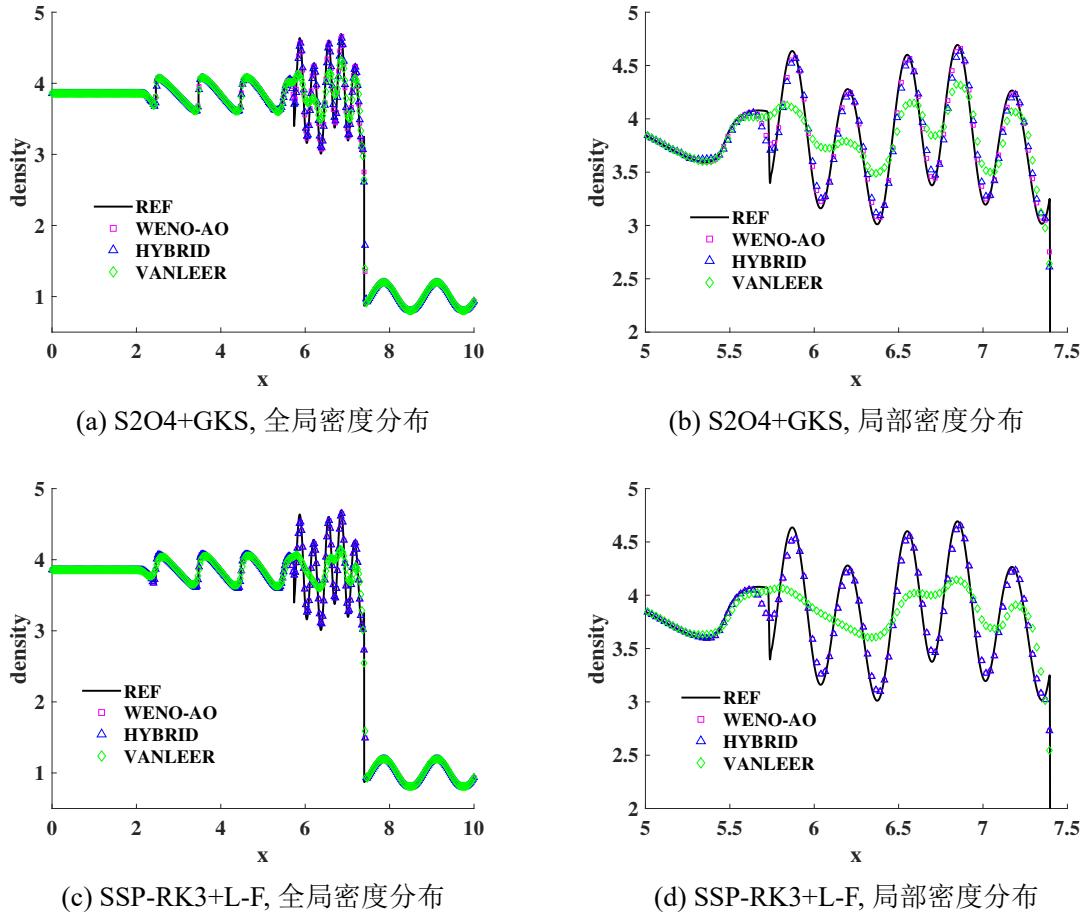


图 3-11 使用不同格式对 Shu-Osher 问题数值模拟的密度分布图

#### 4) 平面激波相互作用

该问题已在第 3.4 节中描述。测试本章中提出的基于间断反馈因子的混合重构方法的分辨率。使用相同的 25 条密度等值线, 不同重构方法在  $t = 0.6$  时的数值解如图3-

12所示。所有方案之间的主要差异在于剪切层的强度，例如图3-12中的V1和V2区域。GKS求解器在V2区域表现出更强的涡层不稳定性。所有方案均能解析V1区域中相似的涡，表明所构建的混合重构算法能够在含强激波可压缩流动问题中保持高分辨率。

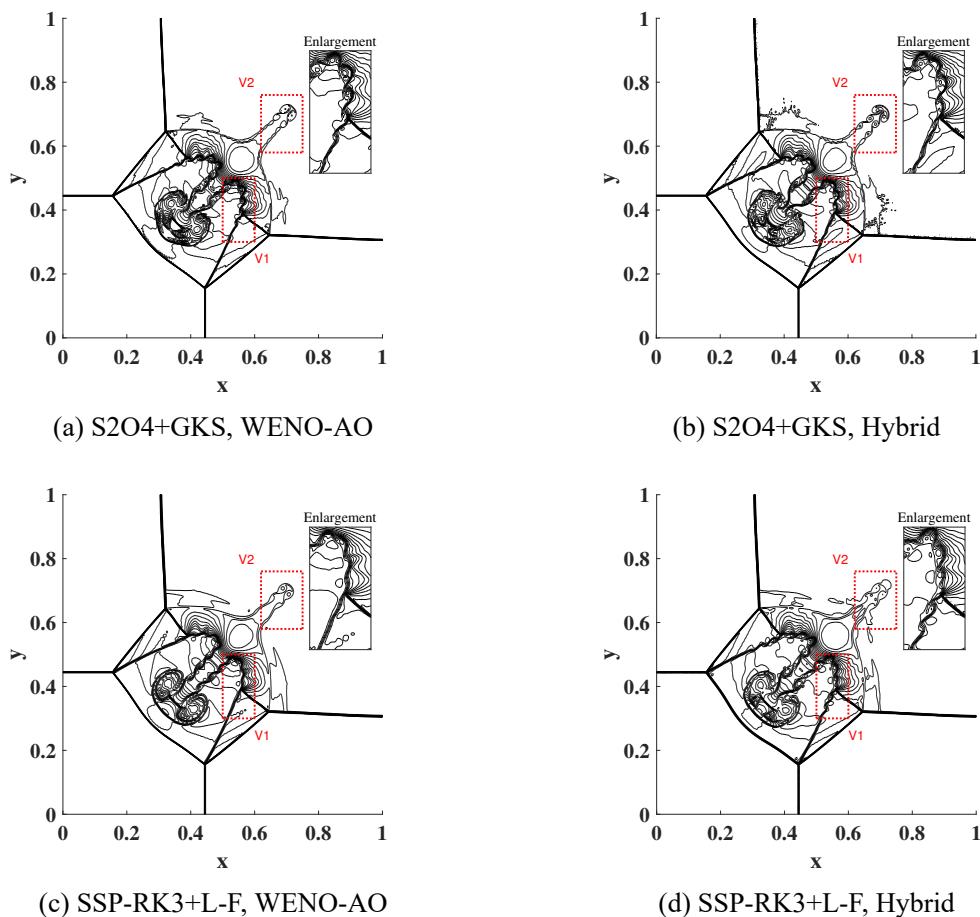


图 3-12 基于不同重构方法下平面激波相互作用数值模拟的密度分布

### 5) 平面接触间断相互作用

二维 Riemann 问题中包含了平面接触间断相互作用，计算域设置为  $[0, 2] \times [0, 2]$ ，其初始条件如下所示

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.0, -0.75, 0.5, 1.0), & x < 1.0, y < 1.0 \\ (3.0, -0.75, -0.5, 1.0), & x \geq 1.0, y < 1.0 \\ (1.0, 0.75, -0.5, 1.0), & x \geq 1.0, y \geq 1.0 \\ (2.0, 0.75, 0.5, 1.0), & x < 1.0, y \geq 1.0 \end{cases} \quad (3-13)$$

网格尺寸  $800 \times 800$ , 分别采用 WENO-AO 与 Hybrid 重构方法的数值结果如图3-13所示, 流动结构非常复杂。由于间断反馈因子中不考虑接触间断的影响, WENO-AO 和混合重构方法计算的数值结果非常接近, 两者均表现出高分辨率, 能够捕捉到许多小涡结构。

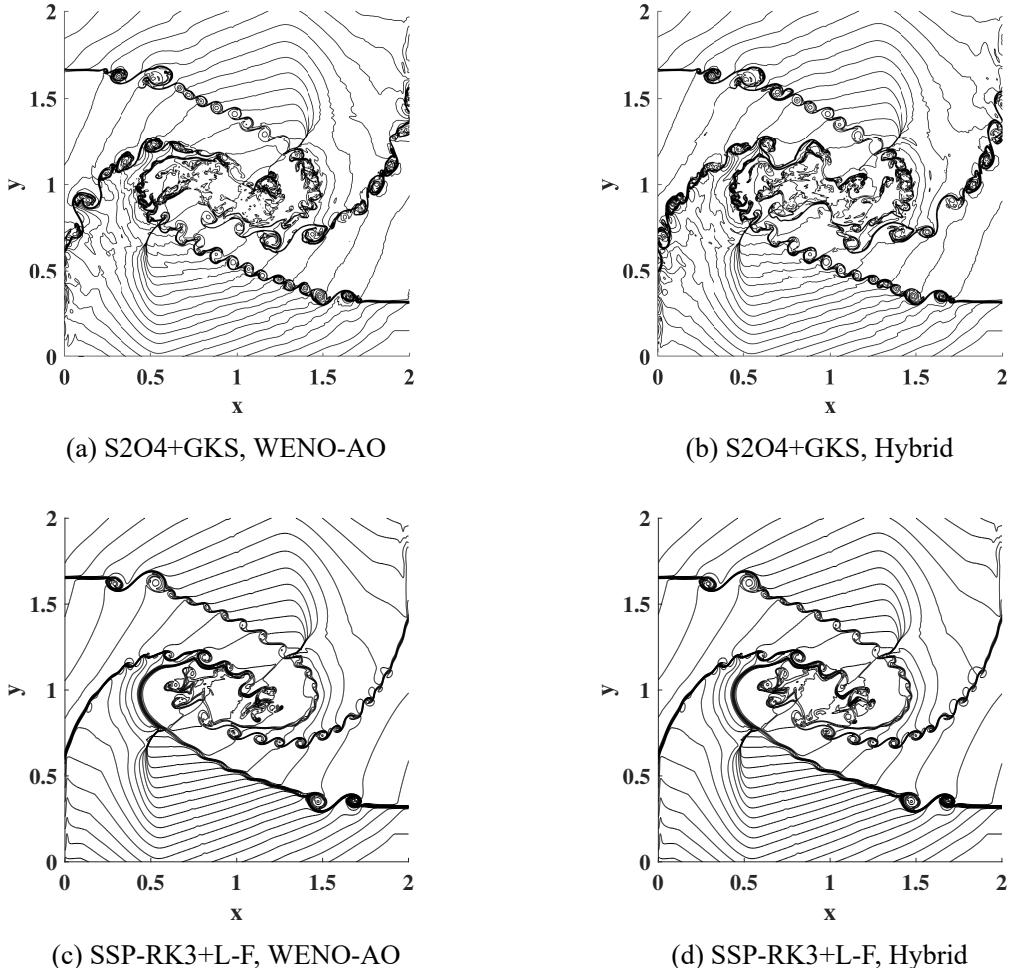


图 3-13 平面接触间断相互作用数值模拟的密度分布

## 6) 类飓风问题

测试类飓风问题用于评估基于间断反馈因子的混合重构方法的鲁棒性。类飓风流动演化问题<sup>[68-70]</sup>在流动中心有一个真空点, 伴随着旋转速度场。其初始条件如下所示

$$(\rho, u, v, p) = (\rho_0, v_0 \sin \theta, -v_0 \cos \theta, A \rho_0^\gamma) \quad (3-14)$$

其中  $\theta = \arctan(y/x)$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\rho_0 = 1.0$ , 以及  $A = 25$  为初始熵。依据初始马赫数  $Ma = |v_0|/c_0$  的不同, 该算例可分为三种类型, 其中  $c_0$  为声速。为了评估算法的鲁棒性,

此处仅考虑考虑高速旋转速度场，即  $\text{Ma} > \sqrt{2}$ 。在本算例中，随着流体的剧烈旋转，流场中心的密度会快速降低到真空状态，该过程对算法的鲁棒性提出了严峻的挑战。针对该算例，可通过调整初始流场中的速度  $v_0$  来提升流场的马赫数，且由于没有精确解能应用到边界上，为了降低边界对数值结果的影响，计算区域选定为  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ ，网格尺寸为  $\Delta x = \Delta y = 1/100$ ，边界条件为无反射边界条件。为了忽略边界的影响，数值计算结果选取区域  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 。

在本算例中，当初始速度  $v_0$  增加时，稀疏波在相同的模拟时间内会传播更远的距离，并与边界条件发生相互作用，从而导致非物理现象的出现。此外，极强的稀疏波是在模拟的早期阶段生成的。因此，如果数值方案能够在最初的 50 个时间步内保持稳定性，即认为算法在更长时间的模拟中能继续保持正性。

图3-14展示了不同时间步的 DF 分布。在初始阶段，重构斜率在真空中心附近被修正，此处立即形成了稀疏波。随着稀疏波向外传播，修正区域也随之向外扩展。测试结果表明，DF 显著提高了混合重构方法在 GKS 和 L-F 求解器下的鲁棒性，如表3-7所示。

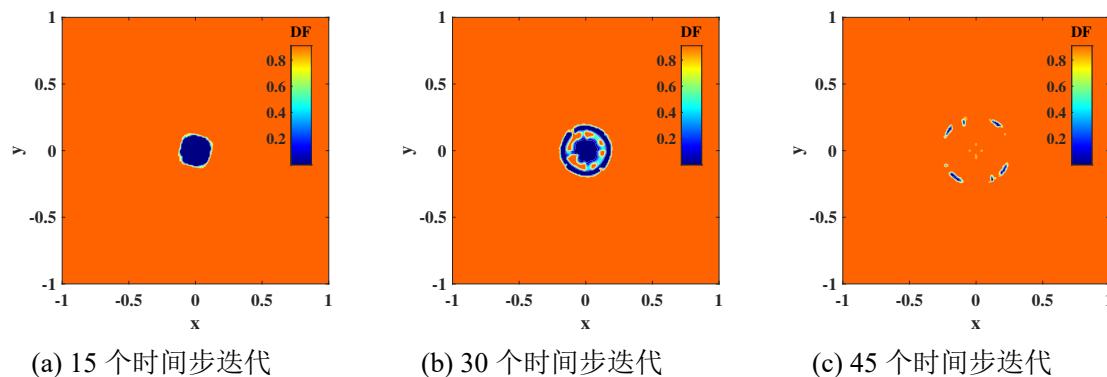


图 3-14 基于 Hybrid GKS 求解器下不同时间步的 DF 分布

表 3-7 类飓风问题：不同重构方法计算的最大马赫数

GKS solver	Maximum Mach number	LF solver	Maximum Mach number
WENO-AO	2.0	WENO-AO	1.4
Hybrid	16.0	Hybrid	7.0

### 3.6 小结

本章针对高阶气体动理学格式在强间断区域的鲁棒性问题，提出了一种基于间断反馈因子的混合重构算法，通过理论分析、算法设计及数值验证，构建了适用于含激波等复杂流场的高效数值框架。本章提出的混合重构算法为解决高阶格式在强间断区域

的鲁棒性问题提供了新思路，其核心优势在于通过 DF 因子实现了重构策略的“自适应切换”，既保留了高阶精度对光滑流场的高分辨率，又通过自适应降阶机制确保了间断区域的稳定性，为复杂可压缩流动的高阶数值模拟奠定了基础。后续研究可进一步拓展该框架至三维非结构网格及多介质流动问题，探索其在极端流动条件下的应用潜力。

## 4 基于间断反馈因子的任意高阶重构气体动理学格式

在计算流体力学的高阶数值模拟中，尽管第三章提出的基于间断反馈因子(DF)的混合重构算法显著提升了强间断区域的鲁棒性，但其将DF定义在单元层面，在评估模板非线性权重时仍依赖WENO类方法的局部光滑因子计算，在拓展到更高阶模板时计算成本剧增。随着复杂流场模拟对更高阶精度的需求日益增长，如何在保持强鲁棒性的同时实现高效计算，成为高阶格式发展的关键挑战。

本章针对上述问题，提出一种改进的间断反馈因子框架，通过将间断反馈因子定义在整个重构模板上，构建了基于模板的间断强度的自适应重构策略。区别于第三章的混合降阶机制，本章方法通过定义界面间断强度阈值，动态识别模板光滑性，实现了从五阶到任意高阶重构的自适应扩展。具体而言，首先改进DF的计算方式，使其能够高效检测界面附近的间断强度；其次设计自适应模板扩展算法，根据模板整体间断强度自动选择最优重构阶数，在光滑区域启用高阶线性重构以提升分辨率，在间断区域通过降阶和梯度限制保证稳定性。通过理论分析与多维度算例验证，本章方法在保持高阶精度与强鲁棒性的同时，显著降低了传统WENO格式的计算复杂度，为极端流动条件下的高阶模拟提供了新的技术路径。

### 4.1 改进的间断反馈因子

第3章构建了一种基于间断反馈因子的强鲁棒混合重构算法。需要注意的是，其间断反馈因子定义在单元上，在评估模板的非线性权重时，仍然需要计算WNEO类方法中的局部光滑因子，且扩展到很高阶的格式比较困难。为了兼顾算法的鲁棒性与计算效率，本节对间断反馈因子进一步改进。不同于第3章中将DF定义在单元上，首先，计算界面 $\Gamma_{j+1/2}$ 上的间断强度 $\sigma_{j+1/2}$ 如下所示

$$\sigma_{j+1/2} = \text{Avg} \left\{ \sum_{m=1}^n \sigma_{j+1/2,m} \right\} \quad (4-1)$$

其中 $\sigma_{j+1/2} \geq 0$ 且 $\sigma_{j+1/2,m}$ 为对应的Gaussian点上的间断强度，其形式与方程(3-2)一致。与第3章中的阈值不同的是，此处对间断强度 $\sigma_{j+1/2}$ 设置阈值，用于检测界面上是否存在间断。为了增强算法的鲁棒性以及保持高分辨率的特点，本节中的阈值设置为当 $\cdots + \sigma_{j-3/2} + \sigma_{j-1/2} + \sigma_{j+1/2} + \sigma_{j+3/2} + \cdots < \sigma_{\text{thres}}$ 时 $\cdots + \sigma_{j-3/2} + \sigma_{j-1/2} + \sigma_{j+1/2} + \sigma_{j+3/2} + \cdots = 0$ ，即计算整个模板的界面间断强度的总和，当总和大于间断强度阈值时，就认为模板中存在间断。

第二步，需要计算定义在模板上的 DF 值

$$A = \cdots + \sigma_{j-3/2} + \sigma_{j-1/2} + \sigma_{j+1/2} + \sigma_{j+3/2} + \cdots$$

$$\alpha_S = \begin{cases} 1.0 & \text{if } A < \sigma_{\text{thres}} \\ \frac{\sigma_{\text{thres}}}{\cdots + \sigma_{j-3/2} + \sigma_{j-1/2} + \sigma_{j+1/2} + \sigma_{j+3/2} + \cdots} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-2)$$

其中  $\alpha_S \in (0, 1]$  为模板  $S$  上的 DF 值。当  $\alpha_S = 1.0$  时，意味着模板是光滑的，当  $\alpha_S \rightarrow 0$  时，意味着模板中存在强间断。 $\{\cdots + \sigma_{j-3/2} + \sigma_{j-1/2} + \sigma_{j+1/2} + \sigma_{j+3/2} + \cdots\}$  是模板中给定方向上所有界面的总间断强度。相比于 WENO 方法中的局部光滑因子，该方案的计算效率显著提升，且能轻易拓展到更高阶格式。

在有限体积结构网格求解器重构阶段，需要分别重构界面  $x, y$  方向，因此需要分别计算不同方向模板的 DF 值。如图4-1所示，以  $x$  方向重构为例，法向重构考虑  $\{\cdots + \sigma_{i-3/2,j} + \sigma_{i-1/2,j} + \sigma_{i+1/2,j} + \sigma_{i+3/2,j} + \cdots\}$ ，切向重构考虑  $\{\cdots + \sigma_{i,j-3/2} + \sigma_{i,j-1/2} + \sigma_{i,j+1/2} + \sigma_{i,j+3/2} + \cdots\}$ 。

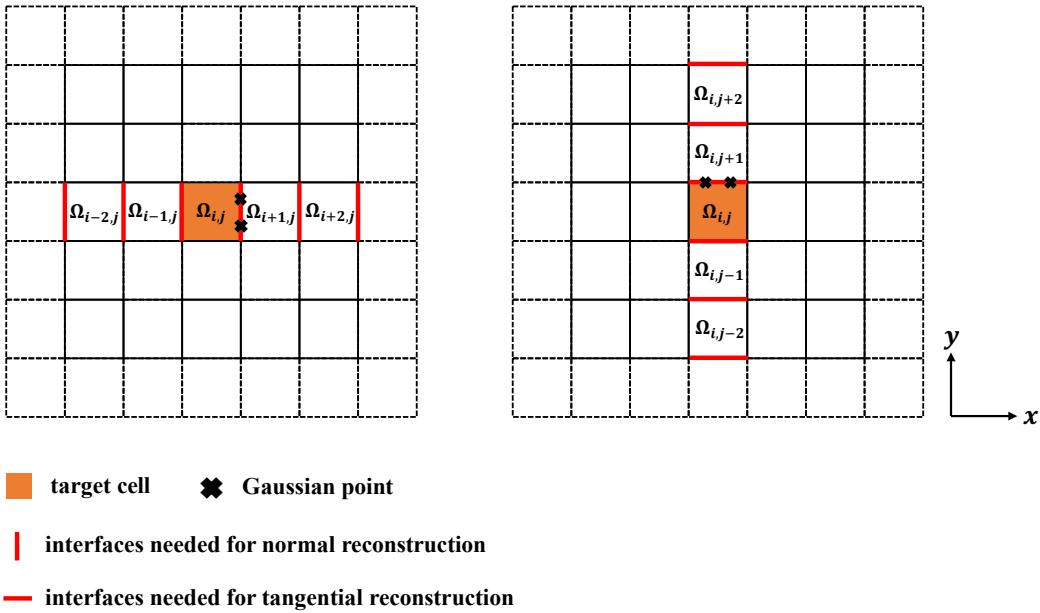


图 4-1 界面  $\Gamma_{i+1/2,j}$  五阶重构 ( $x$  方向，使用两个 Gaussian 点)

## 4.2 自适应模板扩展方法

在第 3 章中介绍了五阶 WENO 格式的模板光滑因子，需要注意的是，光滑因子的计算在重构过程中占据约 60% 的计算成本，这大大降低了算法的效率，文献<sup>[71]</sup>中提出大模板的光滑因子  $\beta^r$ <sup>5</sup> 可通过三个小模板的光滑因子线性表示，为了提升算法的计算效

率，本节中采用一种简化的高阶模板光滑因子<sup>[72]</sup>代替原始大模板光滑因子，其具有如下形式

$$\bar{\beta}_0^5 = \frac{1}{6} (\beta_{-1}^3 + 4\beta_0^3 + \beta_1^3) + |\beta_{-1}^3 - \beta_1^3| \quad (4-3)$$

为了验证简化形式的光滑因子  $\bar{\beta}^5$  与原始形式的光滑因子  $\beta^{r5}$  的一致性，将守恒量  $W$  在  $x_i$  处进行 Taylor 展开，可以得到如下形式

$$\begin{cases} \beta_{-1}^3 = (W')^2 \Delta x^2 + \left( \frac{13}{12} (W'')^2 - \frac{2}{3} W' W''' \right) \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \\ \beta_0^3 = (W')^2 \Delta x^2 + \left( \frac{13}{12} (W'')^2 + \frac{1}{3} W' W''' \right) \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \\ \beta_1^3 = (W')^2 \Delta x^2 + \left( \frac{13}{12} (W'')^2 - \frac{2}{3} W' W''' \right) \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \\ \beta_0^5 = (W')^2 \Delta x^2 + \frac{13}{12} (W'')^2 \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \end{cases} \quad (4-4)$$

对简化形式的光滑因子有如下形式

$$\bar{\beta}_0^5 = (W')^2 \Delta x^2 + \frac{13}{12} (W'')^2 \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \quad (4-5)$$

这与  $\beta^{r5}$  在  $(\Delta x^5)$  量级的截断误差范围内完全相同。

此时，全局光滑因子  $\tau_Z$  被修改为

$$\tau_Z = \frac{1}{3} (|\bar{\beta}_0^5 - \beta_{-1}^3| + |\bar{\beta}_0^5 - \beta_1^3| + |\bar{\beta}_0^5 - \beta_0^3|) \quad (4-6)$$

### 1) ASE-DF(5,3)

基于 DF 的自适应模板扩展 (Adaptive Stencil Expansion, ASE-DF) 重构方法旨在使用 DF 自动选择合适的模板进行重构，并且可以轻松推广至任意高精度方法。DF 反映了模板中间断的强度。当  $\alpha_{S^{r5}} = 1$  时，即认为模板是光滑的，此时直接采用线性五阶多项式重构，其形式为

$$\mathbb{P}_{DF}(x) = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_{x1}Z_1(x) + \mathbf{W}_{x2}Z_2(x) + \mathbf{W}_{x3}Z_3(x) + \mathbf{W}_{x4}Z_4(x) \quad (4-7)$$

当  $\alpha_{S^{r5}} < 1$  时，则需要退回到 WENO-AO 方法，并结合  $\alpha_{S_i^{r3}}$  以及  $\alpha_{S^{r5}}$  用以增强算法的鲁棒性。此时第  $i$  个重构多项式可表示为

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i^{r3}(x) &= \mathbf{W}_0 + \alpha_{S_i^{r3}} [\mathbf{W}_{x1}Z_1(x) + \mathbf{W}_{x2}Z_2(x)] \\ \mathbb{P}^{r5}(x) &= \mathbf{W}_0 + \alpha_{S^{r5}} [\mathbf{W}_{x1}Z_1(x) + \mathbf{W}_{x2}Z_2(x) + \mathbf{W}_{x3}Z_3(x) + Z_4(x)] \end{aligned} \quad (4-8)$$

其中五阶方法中的梯度项系数以及零均值多项式已在第2.5.2节中给出。结合归一化权重后，重构多项式的最终形式为

$$\mathbb{P}_{DF}(x) = \bar{\omega}_0^5 \left( \frac{1}{d_0^5} \mathbb{P}^{r5}(x) - \sum_{k=-1}^1 \frac{d_k^3}{d_0^5} \mathbb{P}_k^3(x) \right) + \sum_{k=-1}^1 \bar{\omega}_k^3 \mathbb{P}_k^3(x) \quad (4-9)$$

### 2) ASE-DF(7,5,3)

七阶模板  $\mathbf{S}^7$  相关的梯度项系数有如下形式

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{x1} &= \frac{1}{180}(-245\mathbf{W}_0 + 25\mathbf{W}_{-1} - 2\mathbf{W}_{-2} + 245\mathbf{W}_1 - 25\mathbf{W}_2 + 2\mathbf{W}_3) \\ \mathbf{W}_{x2} &= \frac{1}{240}(-230\mathbf{W}_0 + 210\mathbf{W}_{-1} - 57\mathbf{W}_{-2} + 7\mathbf{W}_{-3} + 15\mathbf{W}_1 + 63\mathbf{W}_2 - 8\mathbf{W}_3) \\ \mathbf{W}_{x3} &= \frac{1}{36}(28\mathbf{W}_0 - 11\mathbf{W}_{-1} + \mathbf{W}_{-2} - 28\mathbf{W}_1 + 11\mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_3) \\ \mathbf{W}_{x4} &= \frac{1}{144}(46\mathbf{W}_0 - 39\mathbf{W}_{-1} + 15\mathbf{W}_{-2} - 2\mathbf{W}_{-3} - 24\mathbf{W}_1 + 3\mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3) \\ \mathbf{W}_{x5} &= \frac{1}{120}(-10\mathbf{W}_0 + 5\mathbf{W}_{-1} - \mathbf{W}_{-2} + 10\mathbf{W}_1 - 5\mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3) \\ \mathbf{W}_{x6} &= \frac{1}{720}(-20\mathbf{W}_0 + 15\mathbf{W}_{-1} - 6\mathbf{W}_{-2} + \mathbf{W}_{-3} + 15\mathbf{W}_1 - 6\mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3) \end{aligned} \quad (4-10)$$

当  $\alpha_{\mathbf{S}^5} = 1$  时，意味着模板是光滑的，此时尝试将五阶模板向外拓展两个单元  $\{W_{-3}, W_3\}$  并得到七阶模板  $\mathbf{S}^7 = \{I_{-3}, I_{-2}, I_{-1}, I_0, I_1, I_2, I_3\}$ 。通过方程 (4-2) 可计算得到  $\alpha_{\mathbf{S}}^7$  的 DF 值，当  $\mathbf{S}^7 = 1$  时，即七阶模板也是光滑的，此时直接使用线性七阶多项式重构，其具有如下形式

$$\mathbb{P}_{DF}(x) = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_x Z_1(x) + \mathbf{W}_{x2} Z_2(x) + \mathbf{W}_{x3} Z_3(x) + \mathbf{W}_{x4} Z_4(x) + \mathbf{W}_{x5} Z_5(x) + \mathbf{W}_{x6} Z_6(x) \quad (4-11)$$

当  $\mathbf{S}^7 < 1$  时，重构方法将退回至 ASE-DF(5,3)。与传统的 WENO 方法相比，ASE-DF 方法无需计算额外的高阶多项式的光滑因子，这显著提升了算法的效率。

### 3) ASE-DF(9,7,5,3)

九阶模板  $\mathbf{S}^9$  相关的梯度项系数有如下形式

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{x1} &= \frac{1}{5040}(-7175\mathbf{W}_0 + 889\mathbf{W}_{-1} - 119\mathbf{W}_{-2} + 9\mathbf{W}_{-3} + 7175\mathbf{W}_1 - 889\mathbf{W}_2 + 119\mathbf{W}_3 - 9\mathbf{W}_4) \\ \mathbf{W}_{x2} &= \frac{1}{30240}(-27895\mathbf{W}_0 + 28679\mathbf{W}_{-1} - 9835\mathbf{W}_{-2} + 2081\mathbf{W}_{-3} - 205\mathbf{W}_{-4} - 2065\mathbf{W}_1 \\ &\quad + 11459\mathbf{W}_2 - 2455\mathbf{W}_3 + 236\mathbf{W}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{x3} &= \frac{1}{1440}(1365\mathbf{W}_0 - 587\mathbf{W}_{-1} + 89\mathbf{W}_{-2} - 7\mathbf{W}_{-3} - 1365\mathbf{W}_1 + 587\mathbf{W}_2 - 89\mathbf{W}_3 + 7\mathbf{W}_4) \\
\mathbf{W}_{x4} &= \frac{1}{3456}(1174\mathbf{W}_0 - 1160\mathbf{W}_{-1} + 556\mathbf{W}_{-2} - 128\mathbf{W}_{-3} + 13\mathbf{W}_{-4} - 464\mathbf{W}_1 - 68\mathbf{W}_2 + 88\mathbf{W}_3 - 11\mathbf{W}_4) \\
\mathbf{W}_{x5} &= \frac{1}{480}(-75\mathbf{W}_0 + 41\mathbf{W}_{-1} - 11\mathbf{W}_{-2} + \mathbf{W}_{-3} + 75\mathbf{W}_1 - 41\mathbf{W}_2 + 11\mathbf{W}_3 - \mathbf{W}_4) \\
\mathbf{W}_{x6} &= \frac{1}{8640}(-380\mathbf{W}_0 + 334\mathbf{W}_{-1} - 170\mathbf{W}_{-2} + 46\mathbf{W}_{-3} - 5\mathbf{W}_{-4} + 250\mathbf{W}_1 - 86\mathbf{W}_2 + 10\mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_4) \\
\mathbf{W}_{x7} &= \frac{1}{5040}(35\mathbf{W}_0 - 21\mathbf{W}_{-1} + 7\mathbf{W}_{-2} - \mathbf{W}_{-3} - 35\mathbf{W}_1 + 21\mathbf{W}_2 - 7\mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_4) \\
\mathbf{W}_{x8} &= \frac{1}{40320}(70\mathbf{W}_0 - 56\mathbf{W}_{-1} + 28\mathbf{W}_{-2} - 8\mathbf{W}_{-3} + \mathbf{W}_{-4} - 56\mathbf{W}_1 + 28\mathbf{W}_2 - 8\mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_4)
\end{aligned} \tag{4-12}$$

与 ASE-DF(7,5,3) 方法类似，当  $\mathbf{S}^7 = 1$  时，此时进一步尝试向外扩展两个单元并得到九阶模板  $\mathbf{S}^9$ ，当  $\mathbf{S}^9 = 1$  时，直接使用线性九阶多项式重构，其具有如下形式

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{DF}(x) &= \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_x Z_1(x) + \mathbf{W}_{x2} Z_2(x) + \mathbf{W}_{x3} Z_3(x) + \mathbf{W}_{x4} Z_4(x) \\
&\quad + \mathbf{W}_{x5} Z_5(x) + \mathbf{W}_{x6} Z_6(x) + \mathbf{W}_{x7} Z_7(x) + \mathbf{W}_{x8} Z_8(x)
\end{aligned} \tag{4-13}$$

当  $\mathbf{S}^7 < 1$  时，重构方法将退回至 ASE-DF(7,5,3)。通过模板的扩展，就可以轻易构建更高阶重构方法。ASE-DF 方法中的模板自动选择流程详见图4-2。

### 4.3 模板间断强度阈值选取分析

在第 4.2 节整体的算法框架中， $\sigma_{thres}$  的选取对处理强激波问题至关重要。结合方程 (4-2) 可知，当选定的  $\sigma_{thres}$  值较小时，DF 将会修正较多的重构多项式并降阶，算法的鲁棒性增强但分辨率显著下降；当选定的  $\sigma_{thres}$  值较大时，则模板中可能存在间断未被识别，更多的高阶线性多项式被使用，算法的分辨率会提升，但同时会导致更显著的数据振荡，同时算法的鲁棒性下降。

为了选择一个合适的  $\sigma_{thres}$ ，两类强激波问题被用于测试。

#### 1) Blast Wave 问题

Blast Wave 问题的初始条件如下所示

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000), & 0 \leq x \leq 0.1 \\ (1, 0, 0.01), & 0.1 \leq x \leq 0.9 \\ (1, 0, 100), & 0.9 \leq x \leq 1.0 \end{cases} \tag{4-14}$$

---

**Input:** Interfaces reconstructed values  $\mathbf{W}^l, \mathbf{W}^r$ .

**Output:** The needed stencil  $\mathbf{S}$  for the reconstruction.

```

1 calculate the correspond DF values  $\alpha^{r5} \leftarrow (\mathbf{W}^l, \mathbf{W}^r)$  by Eq.(4-6).
2 if  $\alpha^{r5} < 1$  then
3   select the non-linear WENOZ-AO(5,3) with DF reconstruction method;
4 else
5   calculate the correspond DF values  $\alpha^{r7} \leftarrow (\mathbf{W}^l, \mathbf{W}^r)$  by Eq.(4-6).
6   if  $\alpha^{r7} < 1$  then
7     select the linear 5th-order polynomial reconstruction method;
8   else
9     calculate the correspond DF values  $\alpha^{r9} \leftarrow (\mathbf{W}^l, \mathbf{W}^r)$  by Eq.(4-6).
10    if  $\alpha^{r9} < 1$  then
11      select the linear 7th-order polynomial reconstruction method;
12    else
13      calculate the correspond DF values  $\alpha^{r11} \leftarrow (\mathbf{W}^l, \mathbf{W}^r)$  by Eq.(4-6).
14      if  $\alpha^{r11} < 1$  then
15        select the linear 9th-order polynomial reconstruction method;
16      else
17        ...
18      end
19    end
20  end
21 end
22 return.

```

---

图 4-2 ASE-DF 算法流程图

网格数量 400, 边界条件为反射边界条件, 计算总时间为  $t = 0.038$ , 采用 ASE-DF GKS 求解器计算的数值结果如图4-3所示。其中参考解通过五阶 WENO-AO GKS 在 4000 网格数量下计算得到。从数值结果可见当  $\sigma_{\text{thres}}$  增加时, 算法的分辨率上升但数值振荡也显著增加, 而当  $\sigma_{\text{thres}} \in (1.0, 2.0)$  区间内, 算法的分辨率没有显著变化, 这是由于通常情况下, 强间断区域所计算的间断强度要显著大于该阈值, 而在间断强度小于 1.0 的区域, 就可以近似认为流场是光滑的。

## 2) 平面激波相互作用

平面激波相互作用初始条件详见第 3 章, 其数值结果如图4-4所示。与 Blast Wave 问题结论相似, 进一步地, 随着  $\sigma_{\text{thres}}$  的增加, 算法的分辨率没有显著增加。

因此, 为了平衡算法的分辨率与鲁棒性, 在本章的算例中, 选用  $\sigma_{\text{thres}} = 2.0$  作为模板的间断强度阈值, 即当模板间断强度大于间断强度阈值后, 即认为模板存在间断, 需要降阶重构以保持强鲁棒性, 反之, 可以拓展模板, 对更高阶的模板进一步进行光滑/间断的判断。

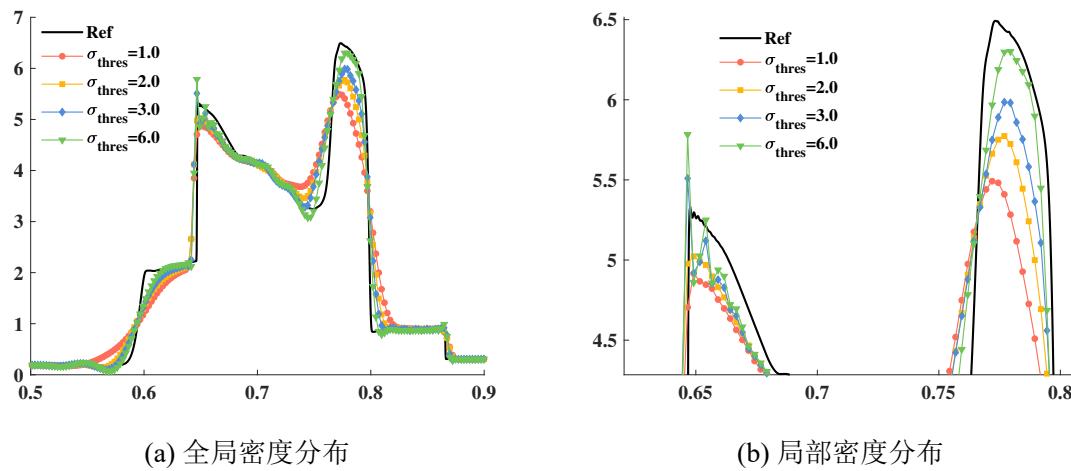


图 4-3 Blast Wave 问题数值模拟的全局与局部密度分布

#### 4.4 数值算例分析

在本章中，构建了基于间断反馈因子的任意精度空间重构算法，结合两种通量求解器用于模拟一些 Riemann 问题。第一种格式是二阶 GKS 求解器，结合考虑时间限制器的 S2O4 时间离散方法，该时间离散方法能够限制通量函数在时间上可能存在的间断；另一种格式是 Lax-Friedrichs (L-F) 求解器，使用 strong stability preserving Runge-Kutta (SSP-RK) 时间离散方法，该时间离散方法具有保正性。通过上述两种通量求解器，可将混和重构方法与 WENO-AO 方法的分辨率与鲁棒性进行比较。

##### 1) 精度测试

有关一维、二维问题的初始条件设置详见第 3 章。为了保持时间与空间上的精度一致，时间步采用  $dt = dx^{r/s}$ ，其中  $r$  对应空间重构精度， $s$  代表时间离散精度，数值结果如表 4-1, 4-2 所示。数值结果显示，随着重构模板阶数的增加，所有格式均能实现相应的理论精度。

表 4-1 ASE-DF GKS 求解器的一维正弦波传播问题精度测试

Mesh number	ASP-DF(5,3)	Order	ASP-DF(7,5,3)	Order	ASP-DF(9,7,5,3)	Order
10	8.81126e-04		7.39731e-05		6.48193e-06	
20	2.58590e-05	4.85	6.36604e-07	6.84	1.42419e-08	8.83
40	8.33755e-07	4.95	5.10834e-09	6.96	2.84847e-11	8.97
80	2.68032e-08	4.95	4.04205e-11	6.98	9.08537e-14	8.29

##### 2) Shu-Osher 问题

一维 Shu-Osher 问题可用于检验算法捕捉高频波的效果，其初始条件如下所示

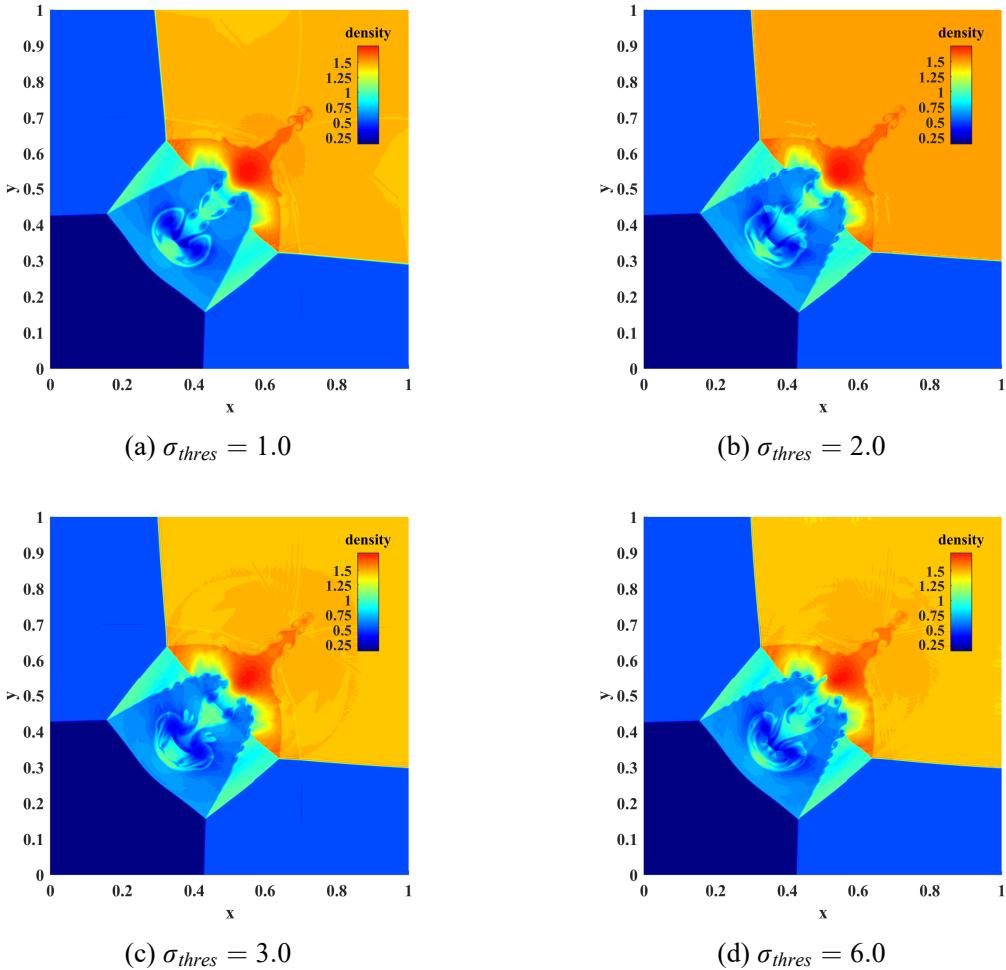


图 4-4 平面激波相互作用数值模拟结果的密度分布

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857134, 2.629369, 10.33333), & x \in [0.0, 1.0] \\ (1.0 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & x \in [1.0, 10.0] \end{cases} \quad (4-15)$$

计算区域为  $[0.0, 10.0]$ , 网格尺寸为  $\Delta x = 1/40$ 。本节中均采用  $CFL = 0.5$ 。测试了 ASE-DF 方法的数值结果。为了清晰区分不同数值格式的性能, 本测试中采用了 200 个网格单元。图4-5展示了基于不同重构方法的密度分布, 在相同网格尺寸下, ASE-DF(7,5,3) 与 ASE-DF(9,7,5,3) 在捕捉高频波的表现上均优于 ASE-DF(5,3), 这与理论结论是一致的, 且受限于网格数量, ASE-DF(9,7,5,3) 的分辨率表现没有显著优于 ASE-DF(7,5,3)。

### 3) Blast Wave 问题

Blast Wave 问题初始条件设置详见第 5.3 节。 $t = 0.038$  时的密度分布数值结果如图4-6所示。其中参考解由五阶 WENO-AO GKS 求解器使用 4000 网格计算得到。从结

表 4-2 ASE-DF GKS 求解器的二维正弦波传播问题精度测试

Mesh number	ASP-DF(5,3)	Order	ASP-DF(7,5,3)	Order	ASP-DF(9,7,5,3)	Order
10×10	1.45491e-03		1.24774e-04		1.79755e-05	
20×20	5.69585e-05	4.74	2.47532e-06	6.94	3.66149e-08	8.94
40×40	1.88233e-06	4.92	1.91154e-08	7.02	8.13997e-11	8.81
80×80	6.10655e-08	4.95	1.49002e-10	7.00	4.79261e-13	7.41

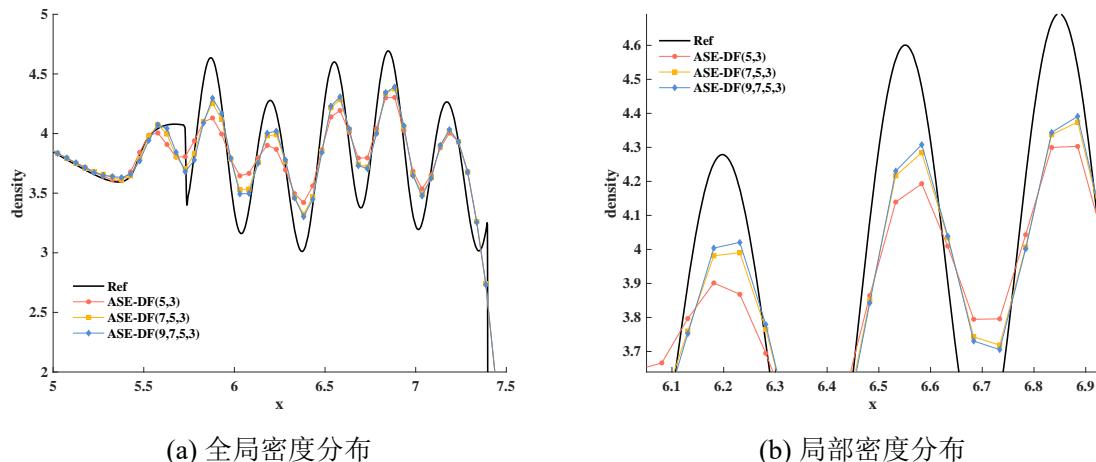


图 4-5 基于 ASE-DF GKS 求解器下 Shu-Osher 问题数值模拟的密度分布图

果可见当算法的阶数升高时，算法的分辨率有轻微的增加，这是由于该问题存在强激波（初始条件中压力相差 5 个量级），并且在 DF 作用下，导致更多的高阶重构多项式降阶处理，即 ASE-DF(9,7,5,3) 的表现几乎与 ASE-DF(5,3) 完全相同。

#### 4) 平面激波相互作用

该问题已在第 3 章中描述。平面激波相互作用问题用于测试本章中提出的 ASE-DF 方法的性能。其数值计算结果可见图4-7，所有格式均表现出低耗散，且主要的差异表现在剪切层的强度，与 ASE-DF(5,3) 相比，ASE-DF(9,7,5,3) 和 ASE-DF(7,5,3) 均能够显著解析更多的涡旋结构。由数值结果可见，ASE-DF(9,7,5,3) L-F 求解器数值结果中的对称结构被显著破坏（如图4-7f）所示，目前导致该现象的原因尚未明确。文献<sup>[73]</sup>中提到，连续的数学运算，特别是在计算成本较高的根函数中，会导致浮点误差的快速放大，即使在中等分辨率下也会影响整体的流动演变。我们推测这是由于 L-F 通量涉及大量的平方根和极值（最大/最小）运算，这导致了计算过程中浮点误差的快速累积。这反过来又增加了对称性的不稳定性。这种现象在高阶格式中变得更加明显。

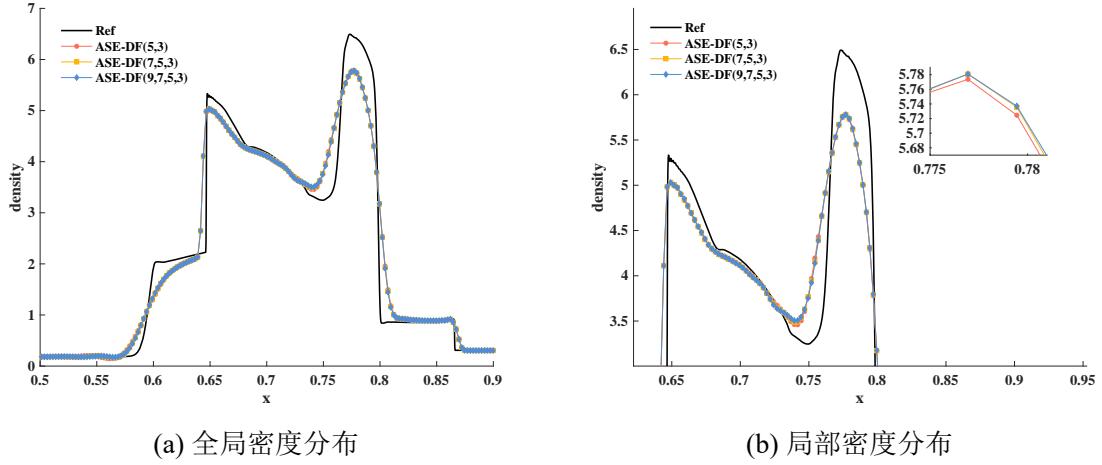


图 4-6 基于 ASE-DF GKS 求解器下 Blast Wave 问题数值模拟的密度分布图

### 5) 双马赫反射问题

在双马赫反射问题<sup>[74-75]</sup>中，一道以马赫数为 10 向右运动的激波，其入射角与  $x$  轴成  $60^\circ$ ，并与反射壁边界相互作用，该算例可用于测试激波捕捉能力、数值稳定性、耗散性以及格式的分辨率，其初始条件如下所示

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.4, 0, 0, 1), & y < 1.732(x - 0.1667) \\ (8, 7.145, -4.125, 116.8333), & \text{ohterwise} \end{cases} \quad (4-16)$$

从  $x = 1/6$  处开始，壁面采用滑移边界条件，底部边界条件为激波后条件。计算域为  $[0, 4] \times [0, 1]$ ，网格数量为  $960 \times 240$ 。图4-8展示了所有格式在  $t = 0.2$  时刻于  $[2, 3] \times [0, 1]$  区域内的数值结果。可以观察到，所有格式均表现出低耗散特性，并且能够很好地捕捉激波。进一步地，相比于 L-F 求解器，相同网格尺寸下 GKS 求解器表现出明显的低耗散的特点。

### 6) 粘性激波管问题

对于 N-S 求解器，采用粘性激波管问题<sup>[76]</sup>来验证该格式的有效性。计算域  $[0, 1] \times [0, 0.5]$  内的初始条件如下所示

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (120, 0, 0, 120/\gamma), & 0 < x < 0.5 \\ (1.2, 0, 0, 1.2/\gamma), & 0.5 \leq x < 1 \end{cases} \quad (4-17)$$

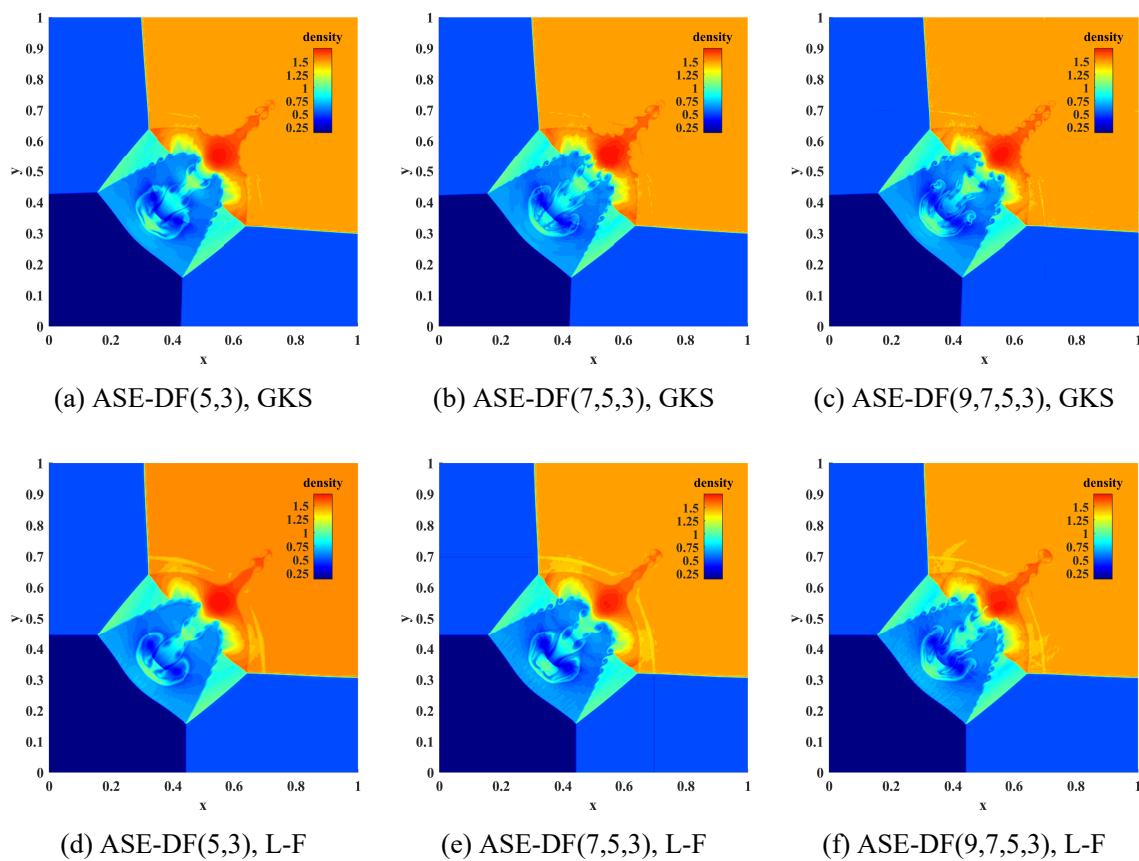


图 4-7 基于 ASE-DF 重构方法下平面激波相互作用数值模拟的密度分布

其中,  $\gamma = 1.4$ , 普朗特数  $Pr = 1$ 。顶部边界设置为对称边界条件, 其余边界采用无滑移绝热条件。对于  $Re = 200$  的情况, 图4-9展示了不同重构方法在  $t = 1.0$  时刻下, 基于不同均匀网格点的密度分布。图4-10展示了该情况下沿下壁面的密度分布。如表4-3所示, 当前格式预测的主涡高度与参考数据<sup>[77]</sup>吻合良好。

表 4-3 粘性激波管问题: 不同格式在  $Re = 200$  情况下主涡高度的对比

Scheme	S2O4 GKS	S2O4 CGKS	ASP-DF(5,3)	ASP-DF(7,5,3)
Mesh size	$500 \times 250$	$500 \times 250$	$500 \times 250$	$500 \times 250$
Height	0.171	0.173	0.167	0.163
Scheme	ASP-DF(9,7,5,3)	ASP-DF(5,3)	ASP-DF(7,5,3)	ASP-DF(9,7,5,3)
Mesh size	$500 \times 250$	$1000 \times 500$	$1000 \times 500$	$1000 \times 500$
Height	0.153	0.171	0.164	0.160

## 7) 高马赫数天体物理射流问题

为了测试格式的鲁棒性, 高马赫数天体物理射流问题<sup>[78]</sup>被用于模拟。考虑了低马赫数  $Ma \approx 80$  和极高马赫数  $Ma \approx 20000$  的情况。计算域  $[0, 2] \times [0, 1]$  内的初始条件如

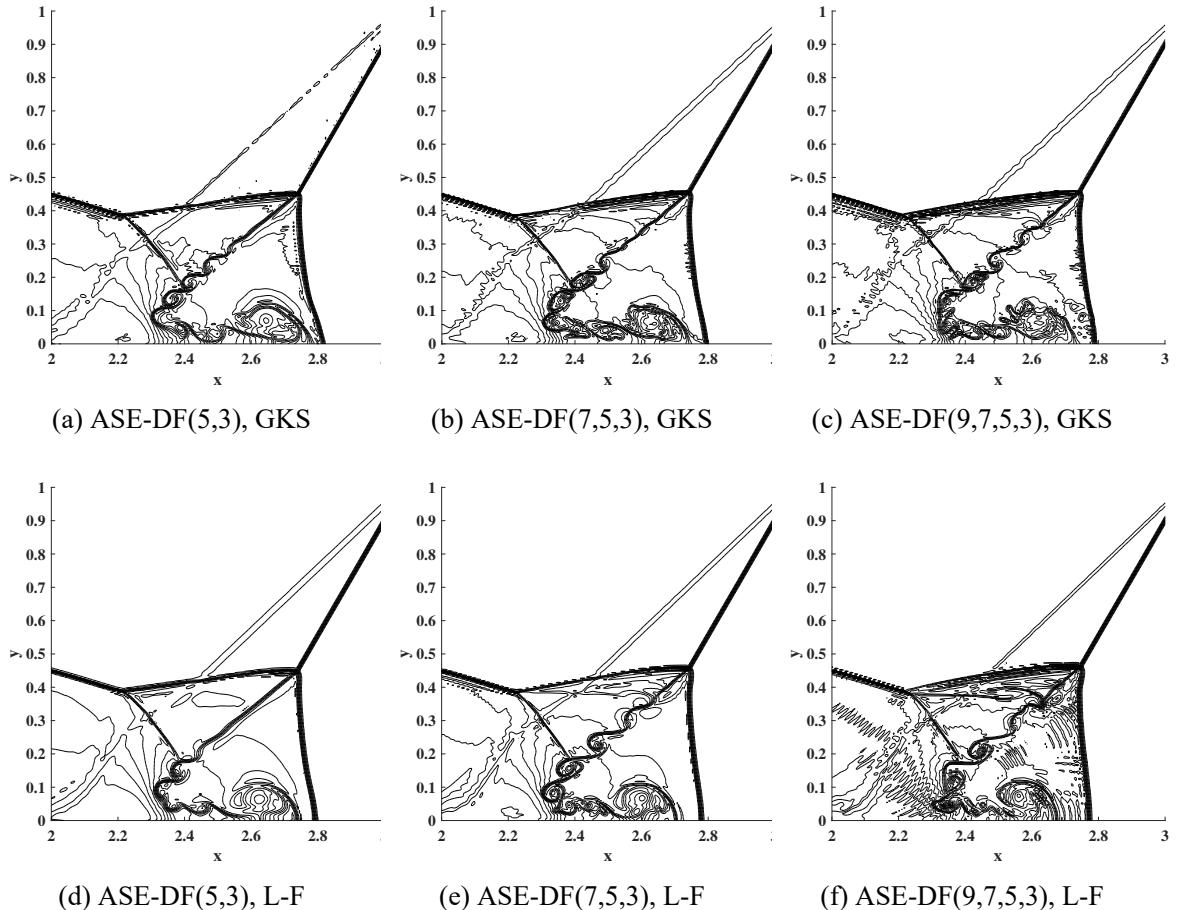


图 4-8 双马赫反射问题数值模拟的密度分布

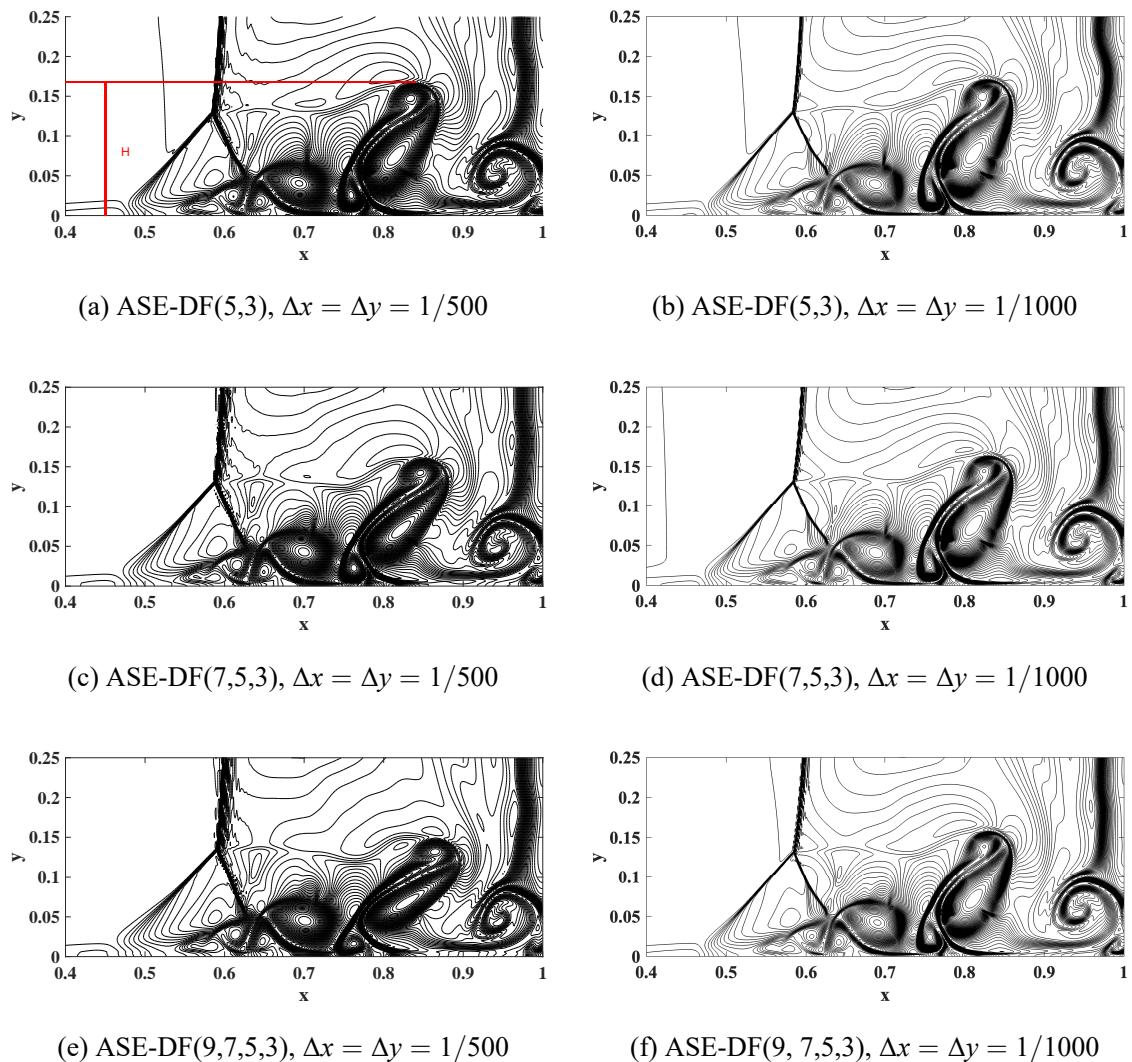
下所示

$$(\rho, u, v, p, \gamma) = (0.5, 0, 0, 0.4127, 5/3) \quad (4-18)$$

右侧、顶部和底部的边界条件为出流。左侧边界条件为

$$\begin{aligned} (\rho, u, v, p) &= (5, 30, 0, 0.4127), \text{ if } y \in [0.45, 0.55] && \text{For Ma 80 case} \\ (\rho, u, v, p) &= (5, 8000, 0, 0.4127), \text{ if } y \in [0.45, 0.55] && \text{For Ma 20000 case} \end{aligned} \quad (4-19)$$

对于  $Ma \approx 80$  的情况，终止时间为 0.07，计算在  $400 \times 200$  网格上进行；对于  $Ma \approx 20000$  的情况，终止时间为  $10^{-4}$ ，计算在  $800 \times 400$  网格上进行。图4-12展示了在  $Ma = 20000$  下使用不同重构方法时的结果，综上可知，本章所构建的任意精度重构算法在较低马赫数下能够保持高分辨率，同时在极高马赫数下仍能保持较强的鲁棒性，且相比传统的 WENO 方法在拓展至更高阶时需要计算更高阶的局部光滑因子，显著增加了计算成本，采用间断反馈因子自适应选择模板的方案能显著提升计算效率。

图 4-9  $Re = 200$  下  $t = 1.0$  时刻粘性激波管问题数值模拟的密度分布

## 4.5 计算效率测试

为比较不同阶数重构方法的计算成本, 本节测试了不同网格尺寸下的二维 Riemann 问题 (平面激波相互作用算例), 结果如表 4-4 所示。CPU 时间记录的是每种重构方法在 Intel Core i7-13600K 处理器 (主频 3.40GHz) 上运行 20 个时间步后的结果。为减小记录误差, 每一类时间计算结果均采用 10 次计算后的平均值。

根据图 4-11 可知, 由于高阶格式无需计算额外的光滑因子, ASE-DF(7,5,3) 的计算时间约为 ASE-DF(5,3) 的 1.4 倍, 这是由于高斯点数量和重构多项式的差异所致; 而 ASE-DF(9,7,5,3) 的计算时间约为 ASE-DF(5,3) 的 1.3 倍, 即我们提出的算法在任意高阶方法中仍能保持高效。此外, 与经典 WENO 格式相比, ASP 方法可节省约 30% 的计算时间, 而且随着重构阶数的增加, ASP-DF 方法的效率提升更加显著。

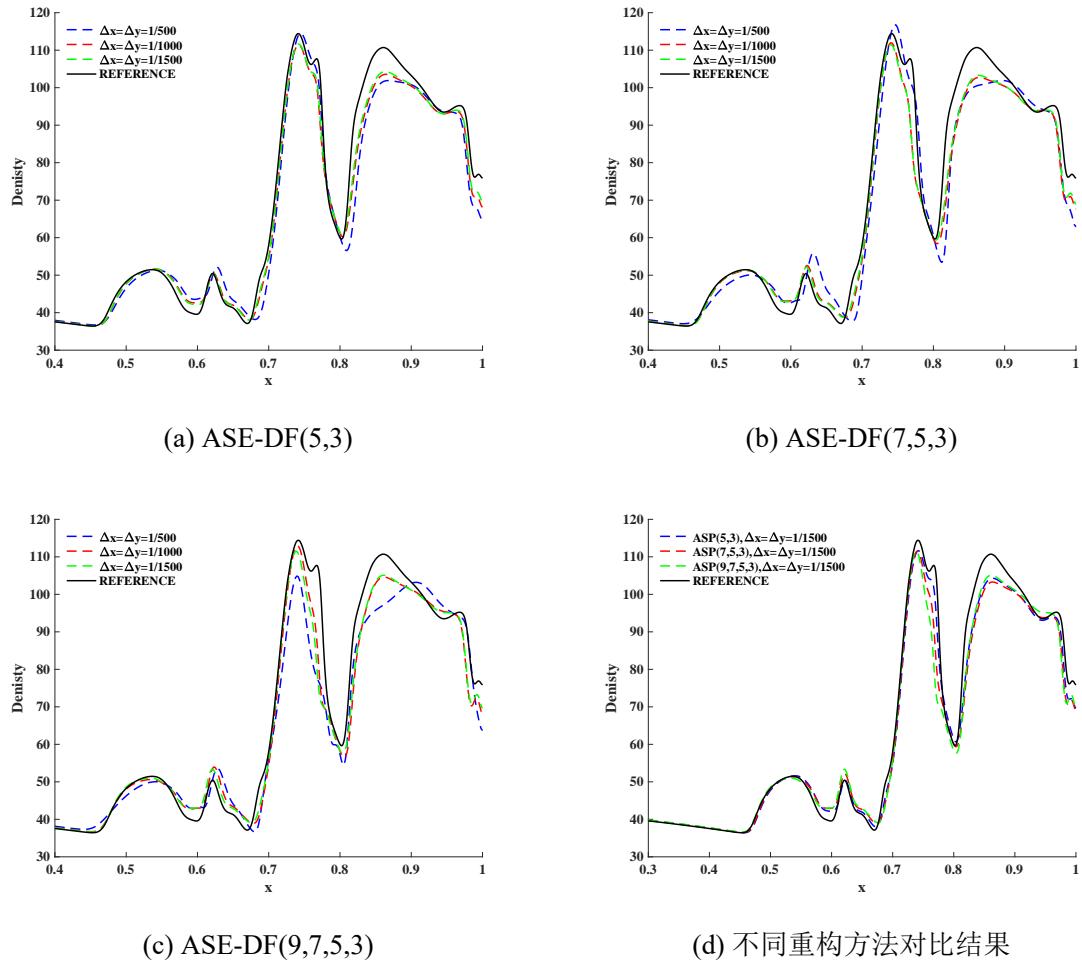


图 4-10 粘性 Sod 激波问题数值模拟：沿下壁面的密度分布

## 4.6 小结

本章针对高阶气体动理学格式在任意高阶扩展时面临的计算效率与鲁棒性平衡问题，提出了一种基于间断反馈因子（DF）的自适应阶数重构方法，通过改进间断检测机制与模板扩展策略，构建了适用于复杂流动的任意高阶数值框架。首先，提出1间断反馈因子改进方法。区别于第三章的D定义，本章通过计算界面总间断强度总和并设置阈值，动态识别模板光滑性。该机制有效避免了传统WENO格式依赖局部光滑因子的高计算成本问题。其次，构建自适应模板扩展算法（ASE-DF），实现了从五阶到九阶重构的自动切换：当模板光滑时，直接采用高阶线性多项式提升分辨率；当检测到间断时，逐级退回至低阶模板并结合间断反馈因子用于梯度限制，确保强间断区域的稳定性。最后，通过Blast Wave、双马赫反射等强间断算例，验证了ASE-DF方法在保持高阶精度（一维/二维正弦波传播算例中达到理论阶数）的同时，显著改善了数值振荡与非物理理解的不足。与传统WENO格式相比，ASE-DF在相同精度下计算效率提升30%

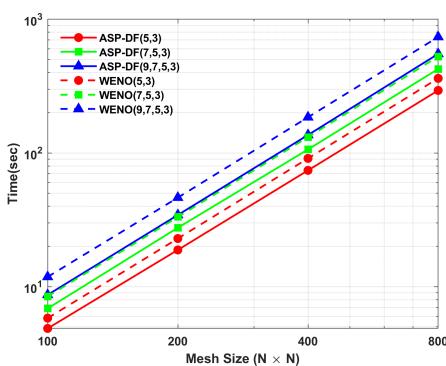
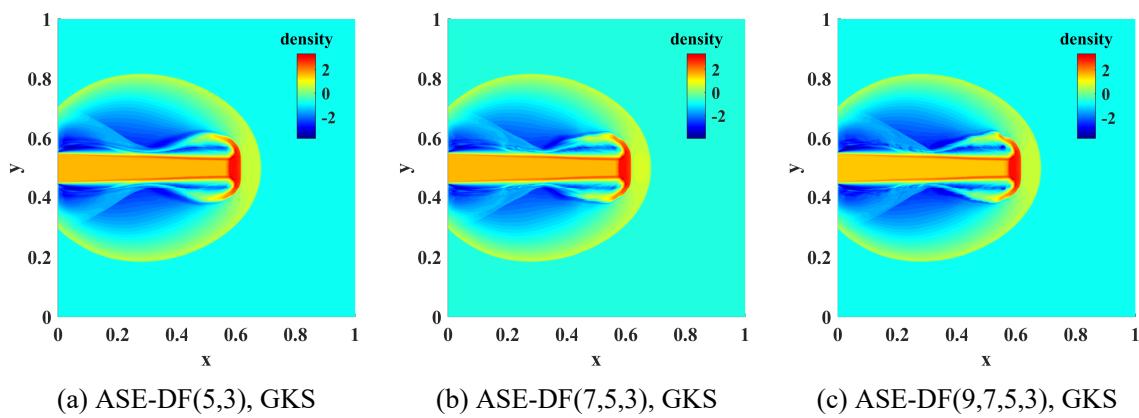


图 4-11 不同重构方法在双对数坐标系下的效率对比

图 4-12 高马赫数天体物理喷流数值模拟:  $Ma = 20000$  的密度分布

以上,且随着重构阶数增加,效率优势更加明显。

此外,本章中所构造的 ASE-DF 算法的性能没有通过定量方式给出,未来的工作中将集中于 ASE-DF 方法关键指标(如数值耗散率等)的定量分析。

综上,本章提出的任意高阶重构方法通过 DF 机制的创新设计,实现了光滑区域高阶精确、间断区域自适应降阶的重构策略,在计算效率、鲁棒性与精度之间取得了良好平衡,为极端复杂流动数值模拟提供了新的算法框架与思路。

## 5 基于间断反馈因子的两组分气体动理学格式

基于前两章对高阶格式鲁棒性、分辨率以及计算效率的探索，本章聚焦于高阶格式在极端流动中的两组分问题的应用研究。极端复杂流动中存在多种典型的多组分流动现象，如激光惯性约束聚变的内爆过程中的 R-M 不稳定性流动。而传统多组分数值方法常因界面附近的非物理振荡、组分守恒性破坏等问题，在强间断与复杂流场中面临挑战，也对数值格式的守恒性、分辨率及鲁棒性提出了更高要求。

本章针对上述挑战，将第 4 章发展的基于间断反馈因子的任意精度重构方法拓展至多组分流动中，构建了一种适用于两组分流动的强鲁棒数值算法。区别于单组分流动，两组分模型需同时处理总流场守恒与组分质量守恒，界面处的重构需满足组分密度与总密度的线性关系。首先，建立一种基于 BGK 模型的简化两组分流动控制方程，其次，基于 ASE-DF 重构方法建立适用于多组分的平衡态与非平衡态重构方法；最后，通过典型算例验证算法对复杂流场数值模拟的有效性，为多组分可压缩流动的高阶模拟提供新的解决方案。

### 5.1 两组分流动控制方程

本章针对两组分流动中数值算法的鲁棒性与分辨率要求，结合第 4 章中构建的 ASE-DF 方法，提出了一种新型的两组分流动模型。首先介绍两组分 Euler 流动方程，其具有如下形式

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho U \\ \rho V \\ \rho E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho_1 U \\ \rho_2 U \\ \rho U^2 + p \\ \rho UV \\ U(\rho E + p) \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho_1 V \\ \rho_2 V \\ \rho UV \\ \rho V^2 + p \\ V(\rho E + p) \end{pmatrix}_y = 0 \quad (5-1)$$

其中  $\rho_1, \rho_2$  分别为各个组分的密度， $\rho = \rho_1 + \rho_2$  为流体总密度， $p = p_1 + p_2$  为流体总压力， $\rho E = \rho_1 E_1 + \rho_2 E_2$  为流体总能量，且  $\mathbf{u} = (U, V)$  为流体平均速度。该控制方程对应的两组分 BGK 方程有如下形式

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f_i = \frac{g_i - f_i}{\tau} \quad (5-2)$$

其中  $f_i, i = 1, 2$  为各组分的气体分布函数， $\tau$  为碰撞项。值得注意的是，两组分 BGK 模型中将混合气体中的组分独立考虑，各组分拥有独立的气体分布函数，且由于粒子碰撞中的动量和能量交换，粒子系统中的最大熵准则需要平衡态  $g_i$  在时间与空间上共享速度与温度，而在本章的模型假设中认为不同组分在达到平衡态后形成一个混合气体，且达到平衡态的时间远小于时间离散的时间步长，因此，假设不同组分形成一个新的单组分混合气体，其控制方程与方程 (2-11) 格式相同，即

$$f_t + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \frac{g - f}{\tau} \quad (5-3)$$

其中平衡态函数  $g$  有如下形式

$$g = \rho_0 \left( \frac{\lambda_0}{\pi} \right)^{\frac{K_0+2}{2}} e^{-\lambda_0 [(u-U_0)^2 + (v-V_0)^2 + \xi^2]} \quad (5-4)$$

其中  $U_0, V_0, \lambda_0, K_0$  为共享的速度与热力学参数，且满足如下守恒条件

$$\begin{aligned} \rho_1 U_1 + \rho_2 U_2 &= (\rho_1 + \rho_2) U_0 = \rho U_0 \\ \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 &= (\rho_1 + \rho_2) V_0 = \rho V_0 \\ \rho_1 E_1 + \rho_2 E_2 &= \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} (U_0^2 + V_0^2) + \frac{((K_1 + 2)\rho_1 + (K_2 + 2)\rho_2)}{\lambda_0} \\ K_0 &= (K_1\rho_1 + K_2\rho_2)/\rho, \gamma_0 = (K_0 + 4)/(K_0 + 2) \end{aligned} \quad (5-5)$$

在有限体积法的框架下，为了更新流动变量，数值通量是基于 BGK 方程的气体分布函数在单元界面处的积分解来构建的，混合气体的气体分布函数与第 2 章中的格式相同，且具有如下形式

$$f(\mathbf{x}_{p,m}, t, \mathbf{u}, \xi) = \frac{1}{\tau} \int_0^t g(\mathbf{x}', t', \mathbf{u}, \xi) e^{-(t-t')/\tau} dt' + e^{-t/\tau} f_0(\mathbf{x}_{p,m} - \mathbf{u}t, \mathbf{u}, \xi) \quad (5-6)$$

为了更新宏观变量，需要求解宏观变量的通量，而混合气体求解得到的通量函数为总通量  $(F_\rho, F_{\rho\mathbf{U}}, F_{\rho E})^T$ ，为此需要通过组分的质量分数分配密度的通量并更新各组分的宏观量，即

$$\begin{pmatrix} F_\rho^k \\ F_{\rho\mathbf{U}}^k \\ F_{\rho E}^k \end{pmatrix}_{\Gamma_{i+1/2}} = \int u [\psi^k(\dots) g^k] d\Xi, \quad F_{\rho_i}^k = \frac{\rho_i^k}{\rho^k} F_{\rho_i}^k, \quad k = l, r \quad (5-7)$$

通量函数算法的细节详见第2章。其中  $k = l, r$  分别表示界面  $\Gamma_{i+1/2}$  左右侧， $\rho_i^k$  表示界面左右的密度重构值，通过 ASE-DF 空间重构方法得到，其具体步骤详见第 4 章。至此，结合时间离散与空间重构，可得到界面左右通量，并更新各组分的宏观量。

## 5.2 基于间断反馈因子的两组分空间重构

### 1) 非平衡态空间重构

有关 ASE-DF(5,3) 空间重构方法已在第 4 章中详细介绍，需要额外注意的是，在本章的模型假设中，将多组分流体视为单组分混合流体进行数值计算，而 ASE-DF 重构方法中存在非线性项，若直接重构  $(\rho_1, \rho_2, \rho)$ ，则将无法保证界面上的重构值满足如下关系式

$$\rho^k = \rho_1^k + \rho_2^k, \quad \frac{\partial \rho^k}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \rho_1^k}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \rho_2^k}{\partial \mathbf{x}} \quad (5-8)$$

因此非平衡态重构过程中，将采用如下形式的守恒量进行重构

$$(\rho_1, \dots, \rho_n, \rho \mathbf{U}, \rho E) \rightarrow \begin{cases} (\rho_1^l, \dots, \rho_n^l, (\rho \mathbf{U})^l, (\rho E)^l), & \left( \frac{\partial \rho_1^l}{\partial \mathbf{x}}, \dots, \frac{\partial \rho_n^l}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial (\rho \mathbf{U})^l}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial (\rho E)^l}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ (\rho_1^r, \dots, \rho_n^r, (\rho \mathbf{U})^r, (\rho E)^r), & \left( \frac{\partial \rho_1^r}{\partial \mathbf{x}}, \dots, \frac{\partial \rho_n^r}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial (\rho \mathbf{U})^r}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial (\rho E)^r}{\partial \mathbf{x}} \right) \end{cases} \quad (5-9)$$

根据组分密度与总密度的线性关系，可以显式得到  $\rho_2$  的重构值以及对应密度梯度。该方案的优势在于，当不同组分的流体有相同的比热比  $\gamma_1 = \gamma_2$ ，算法能完全回到单组分流动模型的数值结果，即在单组分与两组分模型之间建立了对应关系。

### 2) 平衡态空间重构

对平衡态重构，首先对混合气体宏观变量进行重构

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho^c \\ (\rho \mathbf{U})^c \\ (\rho E)^c \end{pmatrix}_{\Gamma_{i+1/2}} &= \int [\mathcal{H}(u)\psi^l g^l + (1 - \mathcal{H}(u))\psi^r g^r] d\Xi \\ \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial(\rho)}{\partial n}\right)^c \\ \left(\frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial n}\right)^c \\ \left(\frac{\partial(\rho E)}{\partial n}\right)^c \end{pmatrix}_{\Gamma_{i+1/2}} &= \int [\mathcal{H}(u)\psi^l a_{\mathbf{x}}^l g^l + (1 - \mathcal{H}(u))\psi^r a_{\mathbf{x}}^r g^r] d\Xi \end{aligned} \quad (5-10)$$

其次对不同组分的密度进行平衡态重构，其具有如下形式

$$\rho_1^c = \int [\mathbb{H}(u)g_1^l + (1 - \mathbb{H})g_1^r] d\Xi, \quad \rho_2^c = \rho^c - \rho_1^c \quad (5-11)$$

对梯度项无需额外处理，其中  $g_1^k, k = l, r$  为组分 1 的平衡态分布函数，对应的热力学参数为  $\lambda_1, K_1$ ，同样地，当两组分有相同的比热比时，其平衡态重构结果也能完全恢复到单组分的结果。

本节涉及的多组分建模中，时间推进采用第 2 章中介绍的 S2O4 时间推进方法，空间重构方法为第 4 章中构建的 ASE-DF 方法的拓展，至此，控制方程中的所有待定量均已确定。

### 5.3 数值算例分析

在本章中，将基于间断反馈因子的 ASE-DF 方法拓展到两组分流动模型中，结合二阶 GKS 求解器与 S2O4 时间离散方法用于模拟一些 Riemann 问题。

#### 1) 精度测试

多组分模型精度测试与单组分测试略有不同，其初始条件如下所示

$$\rho_i(x) = 1 + 0.2\sin(\pi x), \quad U(x) = 1.0, \quad p(x) = 1.0, \quad x \in [0, 2], \quad \gamma_i = 1.4 \quad (5-12)$$

同时周期边界条件下的精确解为

$$\rho(x, t) = 1.0 + 0.2\sin(\pi(x - t)), \quad U(x, t) = 1.0, \quad p(x, t) = 1.0 \quad (5-13)$$

为了保持时间与空间上的精度一致，时间步采用  $dt = dx^{r/s}$ ，其中  $r$  对应空间重构精度， $s$  代表时间离散精度，数值结果如表 5-1 所示。数值结果显示，随着重构模板阶数的增加，本章所建立的两组分模型能实现相应的理论精度。

表 5-1 两组分 ASE-DF GKS 求解器的一维正弦波传播问题精度测试

Mesh number	$L^1$ error	Order	$L^2$ error	Order
10	1.50979e-02		1.20377e-02	
20	4.29762e-04	5.1349	3.38105e-04	5.1539
40	1.31369e-05	5.0315	1.02931e-05	5.0377
80	4.07813e-07	5.0095	3.19290e-07	5.0106

#### 2) Sod 激波管问题

考虑一维 Sod 激波管问题<sup>[79-80]</sup>验证本章中提出的多组分模型，初始计算域  $[0, 0.5]$  中填充组分 1，计算域  $[0.5, 1.0]$  中填充组分 2，初始条件如下所示

$$\begin{aligned}(\rho, U, p, \gamma) &= (1, 0, 1, 5/3), \quad x \leq 0.5 \\(\rho, U, p, \gamma) &= (0.125, 0, 0.1, 1.4), \quad x \geq 0.5\end{aligned}\tag{5-14}$$

计算域为  $[0.0, 1.0]$ , 采用 200 个网格计算, 边界条件为无反射边界条件, 图5-1分别展示了各组分的密度  $\rho_1, \rho_2$ 、总密度  $\rho$  以及平均速度  $U_0$  的数值解与精确解的分布。从数值结果可见, 数值结果存在轻微的数值振荡, 但总体与精确解吻合良好, 且相比原始 WENO-AO 方法, 其在控制数值振荡的表现要优于原始 WENO-AO 方法。

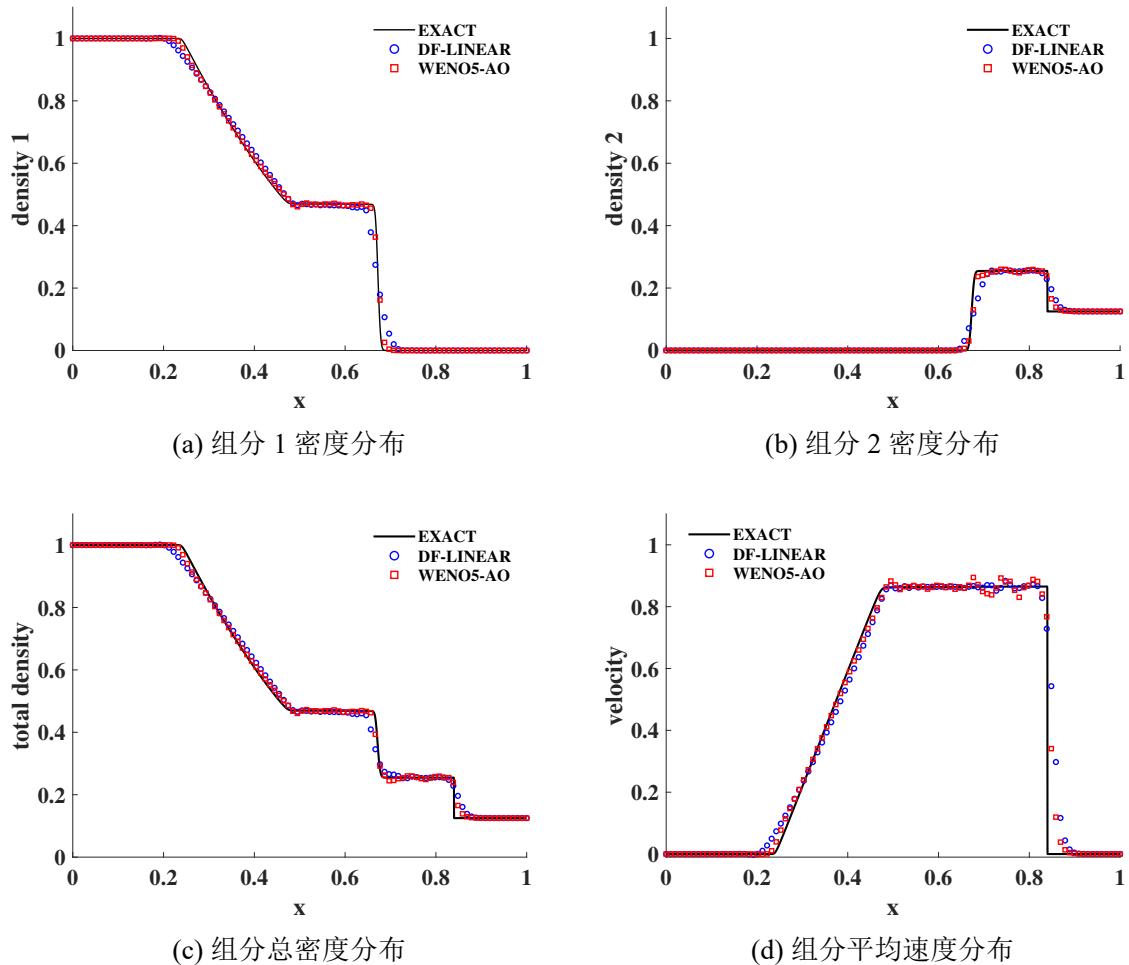


图 5-1 基于两组分 GKS 求解器下一维 Sod 问题数值模拟结果

### 3) 激波-气泡相互作用

考虑著名的激波-气泡相互作用问题测试第 4.4 节中构建的基于 ASE-DF 框架的多组分算法, 该问题中涉及激波与气泡的碰撞<sup>[81-84]</sup>, 初始条件的示意图如图5-2所示。这一问题通常用于研究激波与不同密度或成分的气体结构相互作用时的复杂动力学行为, 包括激波的折射、反射以及气泡的变形和破裂等现象。通过数值模拟和实验研究, 可以

深入理解激波与气泡相互作用的物理机制，并为相关工程应用（如爆炸防护、航空航天等）提供理论支持。

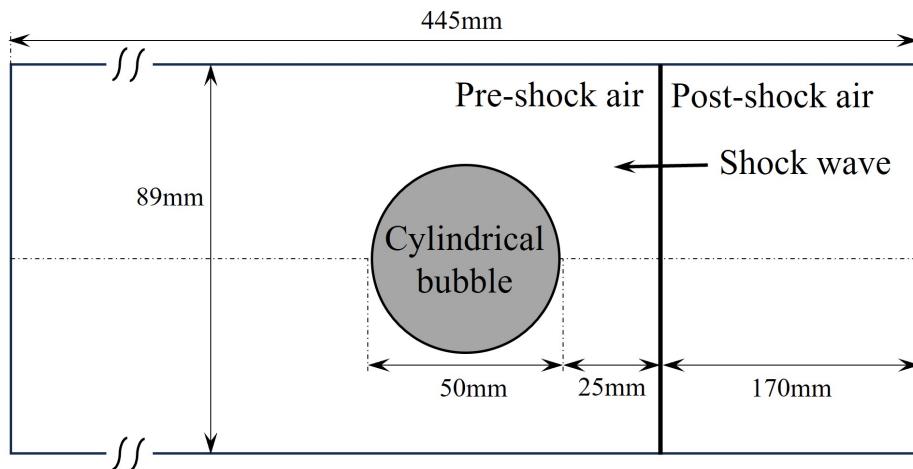


图 5-2 激波-气泡相互作用示意图。

初始条件下，存在一个向左传播的马赫数为 1.22 的平面激波，位于  $x = 275\text{mm}$  处，朝向一个静止的气泡运动。气泡的中心坐标为  $(x_c, y_c) = (225, 44.5)\text{mm}$ ，半径为  $r = 25\text{m}$ ，位于激波前方。计算域为激波管，尺寸为  $(x, y) \in [0, 445] \times [0, 89]\text{mm}^2$ ，在计算中，采用了  $1530 \times 400$  的均匀网格点。计算域的顶部和底部采用固体壁面边界条件，左侧和右侧采用无反射边界条件，其初始条件如下所示

$$\begin{aligned} (\rho, u, v, p, \gamma) &= (1.225\text{kg/m}^3, 0, 0, 1.01325 \times 10^5\text{Pa}, 1.4) \quad \text{Pre shockAir} \\ (\rho, u, v, p, \gamma) &= (1.686\text{kg/m}^3, -113.5\text{m/s}, 0, 1.59 \times 10^5\text{Pa}, 1.4) \quad \text{Post shockAir} \quad (5-15) \\ (\rho, u, v, p, \gamma) &= (0.167\text{kg/m}^3, 0, 0, 1.01325 \times 10^5\text{Pa}, 1.667) \quad \text{Bubble helium} \end{aligned}$$

图5-6展示了在  $t = 32\mu\text{s}, 82\mu\text{s}, 245\mu\text{s}, 427\mu\text{s}$  时刻的密度分布的纹影图，左侧为实验结果<sup>[81]</sup>，右侧为 ASE-DF(5,3) GKS 求解器的数值模拟结果。纹影技术是一种用于可视化流体中密度梯度的方法，特别适用于捕捉激波、涡旋和其他流动特征。时间是以入射激波首次撞击上游气泡壁的时刻为基准进行测量的。数值结果再现了文献<sup>[81]</sup>中描述的实验的大尺度结构。为了获取流动特征，图 5-6 给出了直到  $t = 250\mu\text{s}$  时入射激波、折射激波、透射激波、气泡上游边缘、气泡下游边缘以及空气射流头部 ( $V_s$  表示入射激波， $V_R$  表示折射激波， $V_T$  表示透射激波， $V_{ui}$  表示气泡的上游边缘， $V_{di}$  表示气泡的下游边缘， $V_j$  表示空气射流头部。参考解详见文献<sup>[84]</sup>）的时空位置图，结果与文献<sup>[82-84]</sup>中的结果吻合良好。

#### 4) Multi-Material Triple-Point 问题

Multi-Material Triple-Point 问题在文献<sup>[85-86]</sup>中被提出，该问题被广泛用于验证在大网格变形情况下的拉格朗日方法和 ALE（任意拉格朗日-欧拉）方法的性能。一个矩形区域  $[0, 7] \times [0, 3]$  被划分为三个材料区域，如图所示。区域  $D_1, D_2$  由材料 1 占据，区域  $D_3$  由材料 2 占据。初始条件如下所示

$$\begin{aligned}\gamma &= 1.5, \rho = 1, p = 1, U = 0, V = 0, (x, y) \in D_1 \\ \gamma &= 1.5, \rho = 0.125, p = 0.1, U = 0, V = 0, (x, y) \in D_2 \\ \gamma &= 1.4, \rho = 1, p = 0.1, U = 0, V = 0, (x, y) \in D_3\end{aligned}\quad (5-16)$$

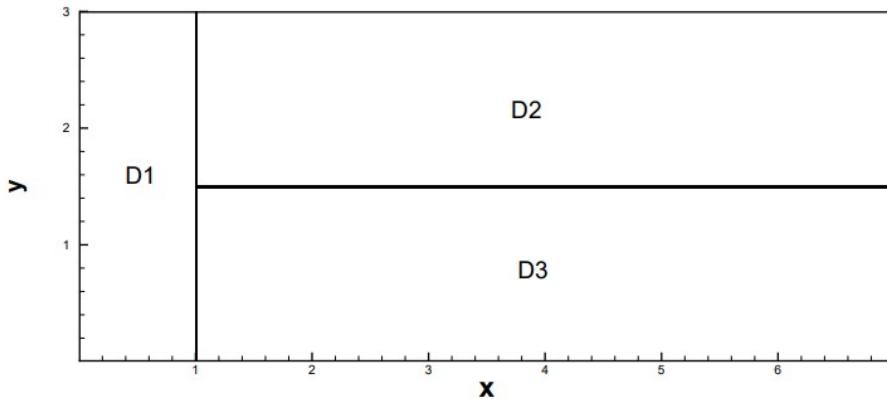


图 5-3 Multi-Material Triple-Point 问题示意图

所有边界均采用无反射边界条件。在  $x = 1$  的左侧， $D_1$  区域内存在一个高压材料，该材料产生一个向右传播的激波。其余区域被  $y = 1.5$  分为两部分，即  $D_2, D_3$  区域。由于初始水平线上的压力相同，因此在模拟开始时该处不会产生波动。然而，由于流体性质的不同，垂直线上的压力梯度会生成不同的激波速度。因此，在 Triple-POint 附近会出现涡旋，并使所有三种材料围绕三重点旋转。在计算中，使用了网格大小为  $\Delta x = \Delta y = 1/100$  的均匀网格，并在图5-4中展示了  $t = 3.5$  和  $t = 5$  时刻的密度分布（左）与 DF 分布图（右），从数值模拟结果中可以清晰地观察到开尔文-亥姆霍兹不稳定性，以及 DF 的修正区域集中在组分界面区域。

#### 5) 考虑粘性的 Rayleigh-Taylor 不稳定性

瑞利-泰勒不稳定性发生在密度不同的流体界面上，当加速度从重流体指向轻流体时会产生这种不稳定性。这种不稳定性具有指状特征，即轻流体的气泡上升进入周围的重流体，而重流体的尖峰则下沉进入轻流体。本算例用于验证当前格式处理带源项算例的性能。上部分区域  $y \geq 0.5$  由组分 1 占据，下部分区域  $y \leq 0.5$  由组分 2 占据。该

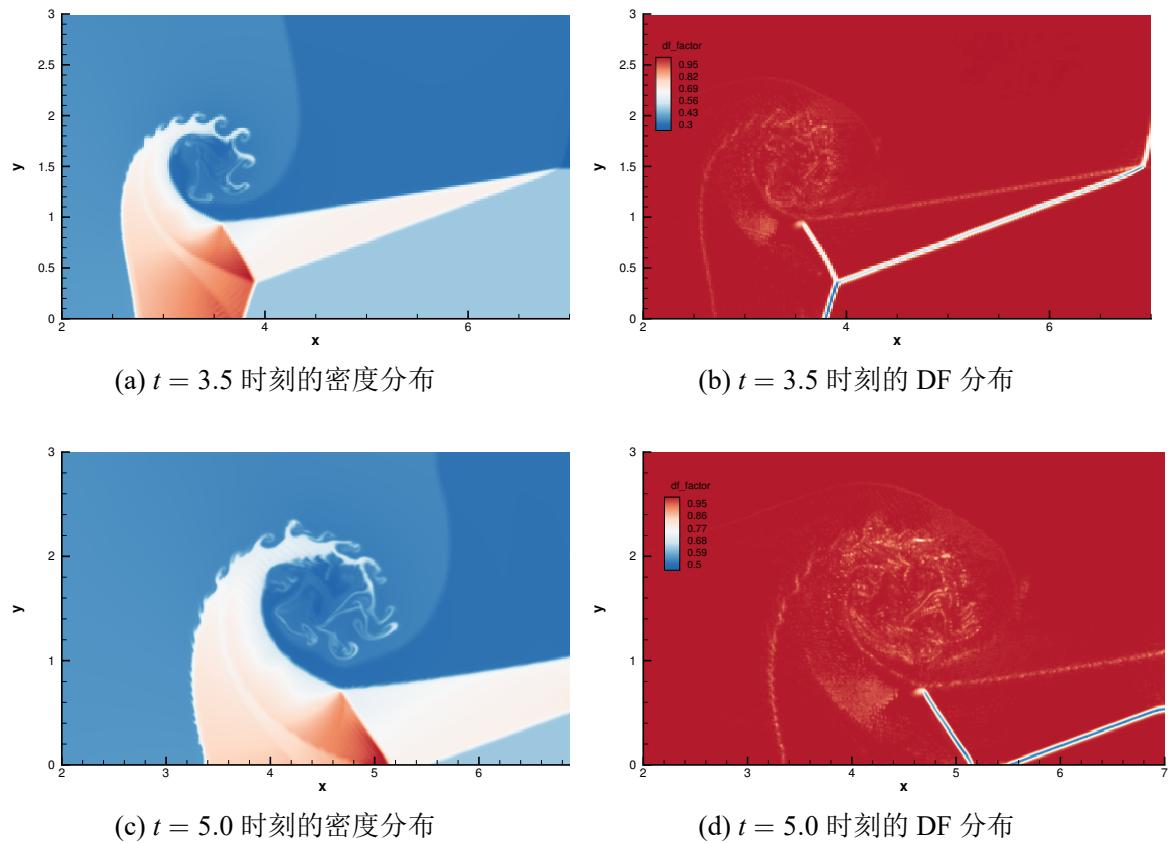


图 5-4 Multi-Material Triple-Point 问题数值模拟结果

问题的初始条件如下所示

$$\begin{aligned} (\rho, U, V, p, \gamma) &= (2, 0, -0.025ccos(8\pi x), 2y + 1, 1.4), \quad y \leq 0.5 \\ (\rho, U, V, p, \gamma) &= (1, 0, -0.025ccos(8\pi x), y + 3/2, 5/3), \quad y \geq 0.5 \end{aligned} \quad (5-17)$$

其中  $c$  为声速, 该初始条件最初给定为单组分条件<sup>[87]</sup>, 计算域为  $[0, 0.25] \times [0, 1]$ , 左右两侧的边界条件为反射边界条件, 上边界中将流动值设置为  $(\rho, U, V, p, \gamma) = (1, 0, 0, 2.5, 1.4)$ , 下边界中将流动值设置为  $(\rho, U, V, p, \gamma) = (2, 0, 0, 1, 5/3)$ 。控制方程中的源项设置为  $S = (0, 0, \rho, \rho V)$ , 且源项部分可直接纳入 S2O4 时间离散过程求解。

图5-5分别展示了网格尺寸  $\Delta x = \Delta y = 1/400, 1/800, /1/1600$  下的密度与 DF 分布的数值模拟结果, 从初始条件开始, 不稳定性的发展经历了众所周知的蘑菇形状, 且由于粘性的存在, 随着网格的加密, 算法对流场的解析越接近真实物理状态, 图5-5b 中展示了不同网格尺寸下沿  $y = 0.6$  处的密度分布, 其结果也验证了随着网格量的增加, 数值结果将逐渐收敛到某个状态。

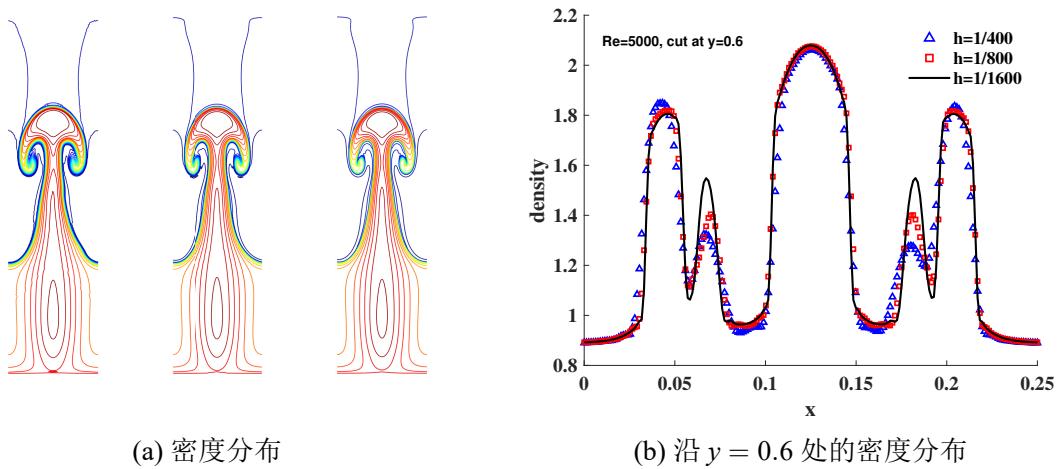


图 5-5 粘性 Rayleigh-Taylor 不稳定性数值模拟结果

## 5.4 小结

本章聚焦于两组分流动问题，将第四章提出的基于间断反馈因子的任意精度重构框架成功拓展至多组分体系，构建了适用于含强间断流动的强鲁棒数值模型。首先，构建了基于 BGK 模型的简化两组分流动的控制方程，相较于传统两组分模型，新的模型将混合的两组分流体视为单组分流体，并通过组分质量分数分配质量通量，可提升多组分模型的计算效率。其次，针对组分界面的特殊性，提出了一种协同重构机制，使得在界面处能够同时保证组分密度和总流场变量的守恒性与稳定性。该机制结合了自适应模板扩展算法（ASE - DF），在光滑区域维持高阶精度，在间断区域自适应降阶，有效抑制了界面附近的非物理振荡，提高了数值模拟的可靠性。最后，通过典型算例验证了算法的有效性。选取激波 - 气泡相互作用、多材料三波点问题等复杂流场算例进行数值模拟，结果表明所构建的算法在处理两组分流动时表现优异。不仅能够准确捕捉组分界面的演化过程，还能在强间断区域保持良好的鲁棒性和分辨率，为多组分可压缩流动的高阶模拟提供了有力支持。

综上所述，本章提出的基于 ASE-DF 方法的两组分模型拓展方法，在两组分流动的数值模拟中展现出高分辨率、强鲁棒性等优势优势。未来的研究可以进一步将该方法推广到更多组分的流动问题，以及考虑更复杂的物理过程，如化学反应、热传导等，以拓展其在实际工程中的应用范围。

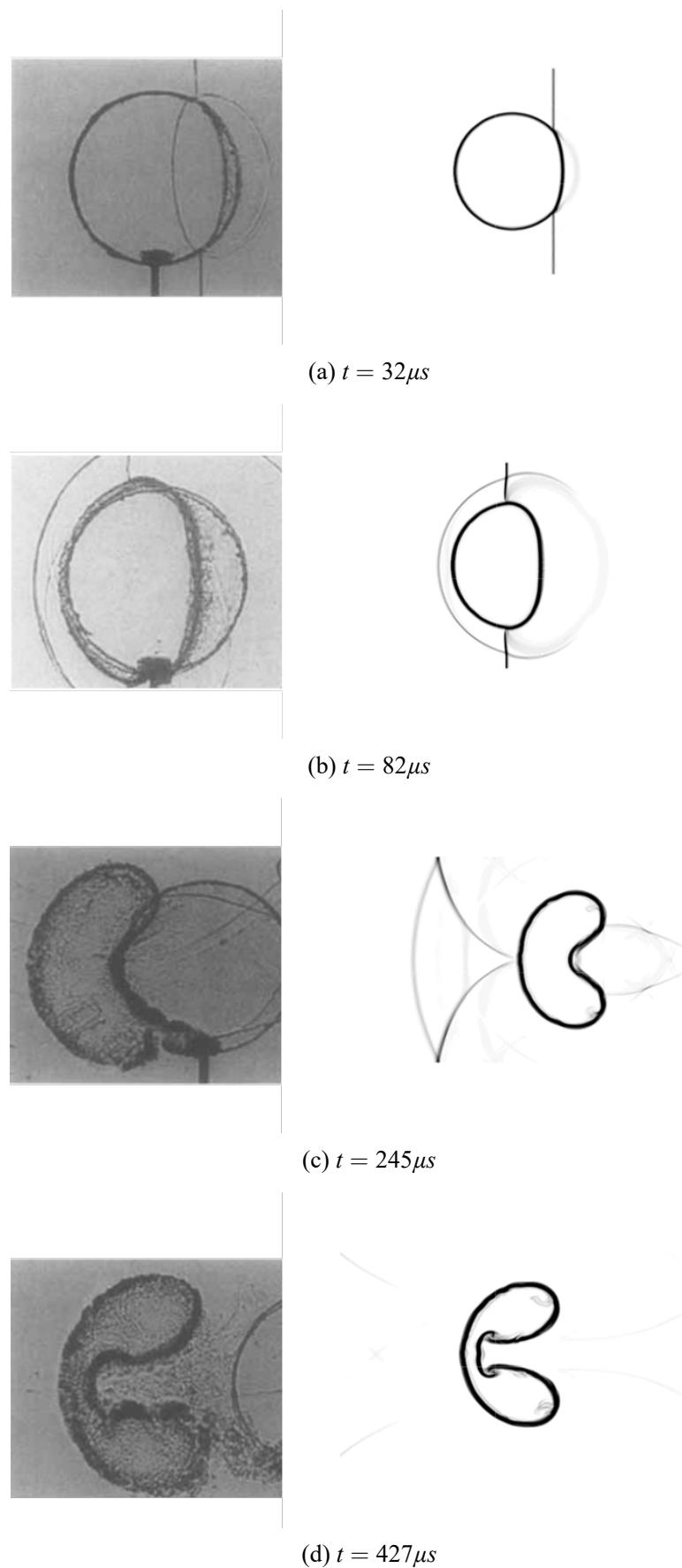


图 5-6 激波-气泡相互作用问题实验结果<sup>[84]</sup>与数值模拟结果

## 6 结论与展望

### 6.1 结论

在激光惯性约束聚变极端可压缩流动模拟应用需求中，通常面临高阶格式的鲁棒性不足、计算效率受限以及多组分流动建模困难等关键问题。本文针对上述挑战，构建了基于间断反馈因子的强鲁棒高阶气体动理学格式框架，并对高阶格式在提升鲁棒性与分辨率、降低计算成本等方面的新方法进行了系统探索，为极端条件下的流动高阶数值模拟提供了新的工具和方法。本文的主要结论如下：

1) 针对传统 WENO 方法在极端流动问题中的弱鲁棒性挑战，本文提出了一种基于间断反馈因子的混合重构方法。通过动态检测流场间断强度，根据流场特征自适应调整重构策略。在光滑区域，保持高阶 WENO-AO 重构高分辨率的优势；而在强激波、稀疏波等非光滑区域，能够自适应地降低重构阶数，有效避免了数值振荡，从而显著提升了算法的鲁棒性。在一系列复杂流动模拟中，该方法不仅显著增强了传统 WENO-AO 方法的鲁棒性，还能精准捕捉流场的细微特征，保持了高分辨率，验证了混合重构算法有效性的同时，也为复杂流动的精确模拟提供了新的工具。

2) 针对 WENO 方法光滑因子计算成本高，无法轻易拓展到更高阶格式的不足，本文提出了一种基于间断反馈因子的任意精度高效重构（ASE-DF）方法。该方法创新性地采用 DF 驱动的权重机制来实现模板的自适应选择，有效改善了传统 WENO 方法额外计算模板光滑因子的计算复杂度随阶数急剧增加的不足。在一系列数值实验测试中，ASE-DF 方法展现了优异的高分辨率与强鲁棒性的特性，同时，九阶 ASE-DF 的计算耗时仅约为经典 WENO 方法的 74%。结果表明，ASE-DF 方法在保证不同阶数的一致强鲁棒性的同时，实现了计算效率与精度的平衡，为大规模的高阶数值模拟提供了更高效的方案。

3) 将 ASE-DF 方法拓展到两组分流动模型。结合 ASE-DF 方法，本文构建了基于 BGK 模型的简化两组分气体动理学模型，并设计了新型的密度重构方法。数值实验表明，所构建的模型能够有效抑制界面处的数值振荡，且对多组分流动界面有良好的分辨率。在激波-气泡相互作用、Rayleigh-Taylor 不稳定性等典型算例中，新的两组分模型展示了其对两组分复杂流动问题的高阶数值模拟能力，从在捕捉界面演化过程，到模拟不同组分之间的相互作用方面，都表现出了优异的性能，为多组分流动的高阶数值模拟提供了可靠的模拟工具。

## 6.2 展望

本文基于间断反馈因子构建了一系列高阶气体动理学格式，为极端条件流动数值模拟提供了新工具与新方法。未来研究可从以下方向进一步探索：

1) 目前，本文的研究工作主要基于二维结构网格。然而，在实际工程应用中，如航空航天领域的飞行器设计、能源领域的复杂燃烧过程模拟等，三维非结构网格能够更精确地描述复杂的几何形状和边界条件。因此，有必要将现有的间断反馈因子(DF)检测与高阶拓展至三维非结构网格应用，并进一步设计算法以适应非结构化网格的拓扑结构，还需解决数据存储和访问效率等问题。此外，结合自适应网格加密(Adaptive Mesh Refinement, AMR)技术也是有必要的。AMR能够根据流场的局部特征，如间断强度、梯度变化等，自动调整网格的疏密程度。在高梯度区域和间断附近加密网格，以提高模拟的精度；而在流场变化平缓的区域采用较粗的网格，以减少计算量。通过这种方式，可以显著提升算法对复杂几何形状的适用性。

2) 本文的工作中针对 ASE-DF 方法的构建与研究，由于其高度非线性的特点，使得传统线性稳定理论难以直接使用，未来的研究工作中将通过 CFL 条件适应性、频谱分析能量稳定性以及数据驱动的稳定性等手段对 ASE-DF 方法的稳定性进一步分析，推动该方法的理论验证。

3) 本文的研究中探索了提升算法计算效率的策略。GPU 具有强大的并行计算能力和高带宽内存，能够同时处理大量的计算任务。通过将 DF 计算和重构过程中的并行部分迁移到 GPU 上执行，可以显著提高计算效率。因此，有必要结合异构计算架构，充分发挥 CPU 和 GPU 的各自优势，实现计算资源的最优配置。例如，将数据预处理、控制逻辑等任务分配给 CPU 处理，而将大规模的数值计算任务交给 GPU 完成。这样可以在保证计算精度的前提下，大幅缩短计算时间，提升高阶算法在大规模工程问题中的实用性，此外，本文的工作中暂时缺乏与现有聚变模拟软件 FLASH 的接口算例测试，有必要结合 FLASH 软件平台进行二次开发，进一步探索算法在工程应用的可能性。

## 致 谢

时光荏苒，岁月如梭，转眼间我的硕士求学生涯即将画上句号。回首这段充满挑战与收获的旅程，我心中充满感激之情。在此，我想借此机会，向所有在我求学道路上给予帮助、支持和鼓励的人们表达最诚挚的谢意。

首先，我要向我的导师姬兴教授致以最崇高的敬意和最衷心的感谢。感谢您在我研究生阶段给予的悉心指导和无私帮助。您严谨的治学态度、渊博的学识、开阔的学术视野以及精益求精的科研精神，深深影响和激励着我。从论文选题到最终定稿，您始终耐心地给予指导和建议，帮助我克服研究过程中的种种困难。您不仅在学术上给予我莫大的帮助，更在生活中给予我关怀和支持，让我在遇到挫折时能够重拾信心，继续前行。能够成为您的学生，是我研究生阶段最大的幸运。

感谢实验室的师兄师姐和同窗们，我们一起度过了无数个奋斗的日日夜夜，互相鼓励，共同进步。特别感谢穆俊磊师兄，刘浩林师兄在本论文写作过程中给予的指导，石聪师弟在网格处理方面的帮助。感谢你们在我遇到困难时伸出援手，与我分享经验和心得。

感谢我的女友，感谢你在我最忙碌、最焦虑的时候给予的理解和支持。你总是耐心地倾听我的烦恼，用温暖的话语安慰我，用贴心的行动鼓励我。你是我生活中的阳光，驱散了我研究过程中的阴霾。感谢你陪伴我度过这段难忘的时光，你的爱与支持是我前进的动力。

感谢我的家人，你们始终如一的支持和理解是我前进的动力。特别感谢我的父母，你们的养育之恩和无私奉献让我能够专心求学。感谢你们在我迷茫时给予的鼓励，在我疲惫时给予的关怀。你们的爱是我最坚强的后盾，让我有勇气面对一切挑战。

特别感谢香港科技大学徐昆教授在 GKS 方法以及学术论文写作上给予的指导，感谢香港科技大学赵丰祥博士与北京师范大学潘亮老师在高阶数值方法上对我的指导。

特别感谢西安交通大学陈刚教授在本论文框架、章节安排等方面给予的指导；特别感谢西安交通大学张虎教授在本论文格式规范等方面的指导，两位教授严谨的治学态度，保障了本论文的学术规范性。

谨以此文，向所有关心、帮助过我的人致以最诚挚的谢意！你们的支持与鼓励，将永远激励我在未来的道路上不断前行。

## 参考文献

- [1] RYUJIN B. Performance and portability in the ARES multi-physics code[R]. Lawrence Livermore National Lab. Livermore, CA (United States), 2015.
- [2] LAX P, WENDROFF B. Systems of conservation laws[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1960, 13(2): 217-237.
- [3] LEER B V. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method[J]. Journal of Computational Physics, 1979, 135(2): 229-248.
- [4] HARTEN A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 1983, 135(2): 260-278.
- [5] HARTEN A, ENGQUIST B, OSHER S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 131(1): 3-47.
- [6] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 77(2): 439-471.
- [7] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126(1): 202-228.
- [8] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 115(1): 200-212.
- [9] 朱君, 舒其望, 邱建贤. 高精度 WENO 格式的发展与展望[J]. 中国科学: 数学, 2024, 54(2): 121-138.
- [10] KIM K H, KIM C. Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows: Part II: Multi-dimensional limiting process[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 208(2): 570-615.
- [11] SUN Z, INABA S, XIAO F. Boundary variation diminishing (BVD) reconstruction: A new approach to improve Godunov schemes[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 322: 309-325.
- [12] LELE S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 103(1): 16-42.
- [13] REN Y X, LIU M, ZHANG H. A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 192(2): 365-386.
- [14] EKATERINARIS J A. High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2005, 41(3-4): 192-300.
- [15] DENG X, MAO M, TU G, et al. High-order and high accurate CFD methods and their applications for complex grid problems[J]. Communications in Computational Physics, 2012, 11(4): 1081-1102.
- [16] SCHILLING O, LATINI M. High-order WENO simulations of three-dimensional reshocked Richtmyer-Meshkov instability to late times: dynamics, dependence on initial conditions, and comparisons to experimental data[J]. Acta Mathematica Scientia, 2010, 30(2): 595-620.
- [17] COCKBURN B, SHU C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework[J]. Mathematics of Computation, 1989,

- 52(186): 411-435.
- [18] COCKBURN B, SHU C W. The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 141(2): 199-224.
- [19] WANG Z, LI Y, JIA F, et al. Towards industrial large eddy simulation using the FR/CPR method [J]. Computers & Fluids, 2017, 156: 579-589.
- [20] PEREIRA C A, VERMEIRE B C. P-adaptive hybridized flux reconstruction schemes[J]. Journal of Computational Physics, 2024, 514: 113-144.
- [21] LI J, LI Q, XU K. Comparison of the generalized Riemann solver and the gas-kinetic scheme for inviscid compressible flow simulations[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(12): 5080-5099.
- [22] TITAREV V A, TORO E F. ADER schemes for three-dimensional non-linear hyperbolic systems [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 204(2): 715-736.
- [23] BEN-ARTZI M, LI J. Consistency and convergence of finite volume approximations to nonlinear hyperbolic balance laws[J]. arXiv preprint arXiv:1902.09047, 2019.
- [24] GOTTLIEB S. On high order strong stability preserving Runge–Kutta and multi step time discretizations[J]. Journal of Scientific Computing, 2005, 25: 105-128.
- [25] HU F, HUSSAINI M Y, MANTHEY J. Low-dissipation and low-dispersion Runge–Kutta schemes for computational acoustics[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 124(1): 177-191.
- [26] HAIRER E, WANNER G. Multistep-multistage-multiderivative methods for ordinary differential equations[J]. Computing, 1973, 11(3): 287-303.
- [27] SEAL D C, GÜCLÜ Y, CHRISTLIEB A J. High-order multiderivative time integrators for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Scientific Computing, 2014, 60: 101-140.
- [28] LI J, DU Z. A two-stage fourth order time-accurate discretization for Lax–Wendroff type flow solvers I. Hyperbolic conservation laws[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2016, 38(5): A3046-A3069.
- [29] PAN L, XU K, LI Q, et al. An efficient and accurate two-stage fourth-order gas-kinetic scheme for the Euler and Navier–Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 326: 197-221.
- [30] PRENDERGAST K H, XU K. Numerical hydrodynamics from gas-kinetic theory[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 109(1): 53-66.
- [31] 李启兵, 徐昆. 气体动理学格式研究进展[J]. 力学进展, 2012, 42(5).
- [32] BHATNAGAR P L, GROSS E P, KROOK M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems[J]. Physical review, 1954, 94(3): 511-523.
- [33] XU K, LIU C. A paradigm for modeling and computation of gas dynamics[J]. Physics of Fluids, 2017, 29(2): 101-134.
- [34] XU K, MAO M, TANG L. A multidimensional gas-kinetic BGK scheme for hypersonic viscous flow[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 203(2): 405-421.
- [35] XU K, HUANG J C. A unified gas-kinetic scheme for continuum and rarefied flows[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(20): 7747-7764.

- [36] XU K. Gas-kinetic schemes for unsteady compressible flow simulations[J]. Computational Fluid Dynamics, Annual Lecture Series, 29 th, Rhode-Saint-Genese, Belgium, 1998.
- [37] XU K. A gas-kinetic BGK scheme for the Navier–Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 171(1): 289-335.
- [38] WANG Y, CAO W, PAN L. Multiple-GPU accelerated high-order gas-kinetic scheme on three-dimensional unstructured meshes[J]. Computer Physics Communications, 2025, 310: 4-30.
- [39] YANG Y, PAN L, XU K. Implicit high-order gas-kinetic schemes for compressible flows on three-dimensional unstructured meshes II: Unsteady flows[J]. Journal of Computational Physics, 2025, 521: 113-134.
- [40] MU J, ZHUO C, ZHANG Q, et al. High-order gas-kinetic scheme with TENO class reconstruction for the Euler and Navier-Stokes equations[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2025, 179: 126-147.
- [41] ZHANG H, ZHAO Y, JI X, et al. An adaptive reconstruction method for arbitrary high-order accuracy using discontinuity feedback[J]. arXiv preprint arXiv:2410.05489, 2024.
- [42] LI Q, XU K, FU S. A high-order gas-kinetic Navier–Stokes flow solver[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(19): 6715-6731.
- [43] LIU N, TANG H. A high-order accurate gas-kinetic scheme for one-and two-dimensional flow simulation[J]. Communications in Computational Physics, 2014, 15(4): 911-943.
- [44] JI X, ZHAO F, SHYY W, et al. Compact high-order gas-kinetic scheme for three-dimensional flow simulations[J]. AIAA Journal, 2021, 59(8): 2979-2996.
- [45] PAN L, XU K. A compact third-order gas-kinetic scheme for compressible Euler and Navier-Stokes equations[J]. Communications in Computational Physics, 2015, 18(4): 985-1011.
- [46] JI X, PAN L, SHYY W, et al. A compact fourth-order gas-kinetic scheme for the Euler and Navier–Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 372: 446-472.
- [47] WANG Y, WANG Y, PAN L. Compact high-order gas-kinetic scheme for direct numerical simulation of compressible turbulent flows[J]. Physics of Fluids, 2024, 36(1): 312-334.
- [48] LIU Y, ZHANG Y T. A robust reconstruction for unstructured WENO schemes[J]. Journal of Scientific Computing, 2013, 54: 603-621.
- [49] GAO Z, WEN X, DON W S. Enhanced robustness of the hybrid compact-WENO finite difference scheme for hyperbolic conservation laws with multi-resolution analysis and Tukey’s boxplot method[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 73: 736-752.
- [50] ZHANG X, SHU C W. On positivity-preserving high order discontinuous Galerkin schemes for compressible Euler equations on rectangular meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(23): 8918-8934.
- [51] ZHANG X, SHU C W. Positivity-preserving high order finite difference WENO schemes for compressible Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(5): 2245-2258.
- [52] JI X, SHYY W, XU K. A gradient compression-based compact high-order gas-kinetic scheme on 3D hybrid unstructured meshes[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2021, 35(7): 485-509.

- [53] ZHAO F, JI X, SHYY W, et al. Direct modeling for computational fluid dynamics and the construction of high-order compact scheme for compressible flow simulations[J]. Journal of Computational Physics, 2023, 477: 111-138.
- [54] SHI Y H, YANG J Y. A gas-kinetic BGK scheme for semiclassical Boltzmann hydrodynamic transport[J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(22): 9389-9407.
- [55] JI X, ZHAO F, SHYY W, et al. A HWENO reconstruction based high-order compact gas-kinetic scheme on unstructured mesh[J]. Journal of Computational Physics, 2020, 410: 340-367.
- [56] PAN L, XU K. A third-order compact gas-kinetic scheme on unstructured meshes for compressible Navier–Stokes solutions[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 318: 327-348.
- [57] BHATNAGAR P L, GROSS E P, KROOK M K. A model for collision processes in gases. I. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems[J]. Physical Review, 1954, 94(3): 511-525.
- [58] CHAPMAN S, COWLING T G. The Mathematical theory of non-uniform gases: an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases[J]. Mathematical Gazette, 1952, 38(323): 4-17.
- [59] XU K. Direct modeling for computational fluid dynamics: construction and application of unified gas-kinetic schemes[J]. World Scientific, 2015: 24-32.
- [60] XU K. A gas-kinetic BGK scheme for the Navier–Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 171(1): 289-335.
- [61] BALSARA D S, GARAIN S, SHU C W. An efficient class of WENO schemes with adaptive order [J]. Journal of Computational Physics, 2016, 326: 780-804.
- [62] TANG S. Improvements of the fifth-order WENO-JS-type scheme with normalized smoothing factor for gas dynamic Euler equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2023, 184: 301-324.
- [63] DONG H, FU L, ZHANG F, et al. Detonation simulations with a fifth-order TENO scheme[J]. Communications in Computational Physics, 2019, 25(5): 1357-1393.
- [64] ARBOGAST T, HUANG C S, ZHAO X. Accuracy of WENO and adaptive order WENO reconstructions for solving conservation laws[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2018, 56(3): 1818-1847.
- [65] LAX P D, LIU X D. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 19(2): 319-340.
- [66] JI X, ZHAO F, SHYY W, et al. A family of high-order gas-kinetic schemes and its comparison with Riemann solver based high-order methods[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 356: 150-173.
- [67] LISKA R, WENDROFF B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2003, 25(3): 995-1017.
- [68] ZHANG T, ZHENG Y. Exact spiral solutions of the two-dimensional Euler equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 1996, 3(1): 117-133.
- [69] NOLAN D S. Instabilities in hurricane-like boundary layers[J]. Dynamics of Atmospheres and Oceans, 2005, 40(3): 209-236.

- [70] FIERRO A, LESLIE L, MANSELL E, et al. A high-resolution simulation of microphysics and electrification in an idealized hurricane-like vortex[J]. Meteorology and Atmospheric Physics, 2007, 98: 13-33.
- [71] HUANG C, CHEN L L. A simple smoothness indicator for the WENO scheme with adaptive order [J]. Journal of Computational Physics, 2018, 352: 498-515.
- [72] KUMAR R, CHANDRASHEKAR P. Simple smoothness indicator and multi-level adaptive order WENO scheme for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 375: 1059-1090.
- [73] FLEISCHMANN N, ADAMI S, ADAMS N A. Numerical symmetry-preserving techniques for low-dissipation shock-capturing schemes[J]. Computers & Fluids, 2019, 189: 94-107.
- [74] VEVEK U, ZANG B, NEW T H. On alternative setups of the double Mach reflection problem[J]. Journal of Scientific Computing, 2019, 78: 1291-1303.
- [75] LI H, BEN-DOR G. Analysis of double-Mach-reflection wave configurations with convexly curved Mach stems[J]. Shock Waves, 1999, 9(5): 319-326.
- [76] DARU V, TENAUD C. Evaluation of TVD high resolution schemes for unsteady viscous shocked flows[J]. Computers & Fluids, 2000, 30(1): 89-113.
- [77] DARU V, TENAUD C. Numerical simulation of the viscous shock tube problem by using a high resolution monotonicity-preserving scheme[J]. Computers & Fluids, 2009, 38(3): 664-676.
- [78] ZHANG C W. On positivity-preserving high order discontinuous Galerkin schemes for compressible Euler equations on rectangular meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(23): 8918-8934.
- [79] KARNI S. Multicomponent flow calculations by a consistent primitive algorithm[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 112(1): 31-43.
- [80] LARROUTUROU B. How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows[J]. Journal of Computational Physics, 1991, 95(1): 59-84.
- [81] HAAS J F, STURTEVANT B. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1987, 181: 41-76.
- [82] SHYUE K M, XIAO F. An Eulerian interface sharpening algorithm for compressible two-phase flow: The algebraic THINC approach[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 268: 326-354.
- [83] SO K, HU X, ADAMS N A. Anti-diffusion interface sharpening technique for two-phase compressible flow simulations[J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(11): 4304-4323.
- [84] QUIRK J J, KARNI S. On the dynamics of a shock–bubble interaction[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1996, 318: 129-163.
- [85] GALERA S, MAIRE P H, BREIL J. A two-dimensional unstructured cell-centered multi-material ALE scheme using VOF interface reconstruction[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(16): 5755-5787.
- [86] KUCHARIK M, GARIMELLA R V, SCHOFIELD S P, et al. A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ALE simulations[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(7): 2432-2452.

- 
- [87] SHI J, ZHANG Y T, SHU C W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 186(2): 690-696.
  - [88] GAMALY E G. Hydrodynamic instability of target implosion in ICF[J]. *Nuclear Fusion by Inertial Confinement*, 2020: 321-349.
  - [89] LI S, LUO D, QIU J, et al. A one-stage high-order gas-kinetic scheme for multi-component flows with interface-sharpening technique[J]. *Journal of Computational Physics*, 2023, 490: 112-140.
  - [90] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(6): 3191-3211.
  - [91] FISHER T C, CARPENTER M H, YAMALEEV N K, et al. Boundary closures for fourth-order energy stable weighted essentially non-oscillatory finite-difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(10): 3727-3752.
  - [92] FU L, HU X Y, ADAMS N A. A family of high-order targeted ENO schemes for compressible-fluid simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 305: 333-359.
  - [93] FU L, HU X Y, ADAMS N A. A new class of adaptive high-order targeted ENO schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 374: 724-751.
  - [94] VAN ALBADA G D, VAN LEER B, ROBERTS JR W. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics[J]. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 108, no. 1, Apr. 1982, p. 76-84., 1982, 108: 76-84.
  - [95] MICHALAK C, OLLIVIER-GOOCH C. Accuracy preserving limiter for the high-order accurate solution of the Euler equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(23): 8693-8711.
  - [96] KITAMURA K, SHIMA E. Simple and parameter-free second slope limiter for unstructured grid aerodynamic simulations[J]. *AIAA Journal*, 2012, 50(6): 1415-1426.
  - [97] CLAIN S, DIOT S, LOUBÈRE R. A high-order finite volume method for systems of conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(10): 4028-4050.
  - [98] FEDKIW R P, ASLAM T, MERRIMAN B, et al. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method)[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 152(2): 457-492.
  - [99] SAUREL R, ABGRALL R. A simple method for compressible multifluid flows[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1999, 21(3): 1115-1145.
  - [100] NONOMURA T, MORIZAWA S, TERASHIMA H, et al. Numerical (error) issues on compressible multicomponent flows using a high-order differencing scheme: weighted compact nonlinear scheme [J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, 231(8): 3181-3210.
  - [101] SAUREL R, ABGRALL R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 150(2): 425-467.
  - [102] TERASHIMA H, TRYGGVASON G. A front-tracking method with projected interface conditions for compressible multi-fluid flows[J]. *Computers & Fluids*, 2010, 39(10): 1804-1814.
  - [103] TERASHIMA H, TRYGGVASON G. A front-tracking/ghost-fluid method for fluid interfaces in compressible flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(11): 4012-4037.

- [104] JIANG S, NI G. A  $\gamma$ -model BGK scheme for compressible multifluids[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2004, 46(2): 163-182.
- [105] JIANG S, NI G. A second-order  $\gamma$ -model BGK scheme for multimaterial compressible flows[J]. Applied numerical mathematics, 2007, 57(5-7): 597-608.
- [106] LIAN Y, XU K. A gas-kinetic scheme for multimaterial flows and its application in chemical reactions[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 163(2): 349-375.
- [107] XU K. BGK-based scheme for multicomponent flow calculations[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 134(1): 122-133.
- [108] KOTELNIKOV A D, MONTGOMERY D C. A kinetic method for computing inhomogeneous fluid behavior[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 134(2): 364-388.
- [109] ANDRIES P, AOKI K, PERTHAME B. A consistent BGK-type model for gas mixtures[J]. Journal of Statistical Physics, 2002, 106: 993-1018.
- [110] PAN L, CHENG J, WANG S, et al. A two-stage fourth-order gas-kinetic scheme for compressible multicomponent flows[J]. Communications in Computational Physics, 2017, 22(4): 1123-1149.

## 攻读学位期间取得的研究成果

- [1] **Hong Zhang**, Xing Ji,Kun Xu, et al. A robustness-enhanced reconstruction based on discontinuity feedback factor for high-order finite volume scheme[J]. Journal of Scientific Computing, 2024,101(1): 20. (已发表, 第一作者, 对应论文第三章)
- [2] **Hong Zhang**, Xing Ji,Kun Xu, et al. Adaptive reconstruction method using discontinuity feedback for high-order accuracy schemes[J]. Communications in Computational Physics. (已接收, 第一作者, 对应论文第四章)

## 答辩委员会会议决议

论文研究了基于间断反馈因子的强鲁棒高阶气体动理学格式,选题具有重要的学术意义与工程参考价值。论文的主要工作及结论如下:

1. 构建了基于间断反馈因子的混合重构气体动理学格式,通过动态监测流场间断强度的自适应调整重构策略,保持高阶分辨率的同时显著增强了高阶格式的鲁棒性。
2. 构建了基于间断反馈因子的高效任意精度高阶重构方法,有效提高了 WENO 类方法的鲁棒性和分辨率。
3. 构建了基于间断反馈因子的简化两组分气体动理学格式,设计了新型的密度重构方法,改善了流场间断处的数值振荡和组分界面分辨率。论文写作认真,态度科学严肃,工作量饱满,条理清晰。表明作者已掌握本学科坚实的理论基础和系统的专门知识,具备从事科研工作的能力。达到了硕士学位论文的要求。

答辩过程讲述清晰,回答问题正确。

经答辩委员会投票,一致(5人/5票)同意通过硕士学位论文答辩,并建议授予张红硕士学位。

## 常规评阅人名单

本学位论文共接受 2 位专家评阅，其中常规评阅人 0 名。

## 声明

### 学位论文独创性声明（1）

本人声明：所呈交的学位论文系在导师指导下本人独立完成的研究成果。文中依法引用他人的成果，均已做出明确标注或得到许可。论文内容未包含法律意义上已属于他人的任何形式的研究成果，也不包含本人已用于其他学位申请的论文或成果。

本人如违反上述声明，愿意承担以下责任和后果：

1. 交回学校授予的学位证书；
2. 学校可在相关媒体上对作者本人的行为进行通报；
3. 本人按照学校规定的方式，对因不当取得学位给学校造成的名誉损害，进行公开道歉。
4. 本人负责因论文成果不实产生的法律纠纷。

论文作者（签名）：张红 日期：2015 年 5 月 17 日

### 学位论文独创性声明（2）

本人声明：研究生所提交的本篇学位论文已经本人审阅，确系在本人指导下由该生独立完成的研究成果。

本人如违反上述声明，愿意承担以下责任和后果：

1. 学校可在相关媒体上对本人的失察行为进行通报；
2. 本人按照学校规定的方式，对因失察给学校造成的名誉损害，进行公开道歉。
3. 本人接受学校按照有关规定做出的任何处理。

指导教师（签名）：赵晓东 日期：2015 年 5 月 17 日

### 学位论文知识产权权属声明

我们声明，我们提交的学位论文及相关的职务作品，知识产权归属学校。学校享有以任何方式发表、复制、公开阅览、借阅以及申请专利等权利。学位论文作者离校后，或学位论文导师因故离校后，发表或使用学位论文或与该论文直接相关的学术论文或成果时，署名单位仍然为西安交通大学。

论文作者（签名）：张红 日期：2015 年 5 月 17 日  
指导教师（签名）：赵晓东 日期：2015 年 5 月 17 日

(本声明的版权归西安交通大学所有，未经许可，任何单位及任何个人不得擅自使用)