

# 静态优化算法及软件实现之一

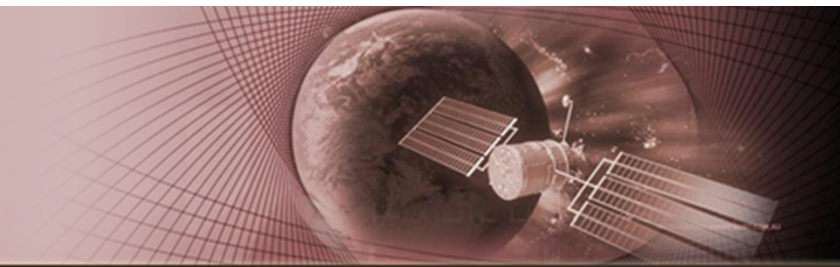
## 第4讲 约束优化

李传江

2019. 7. 8



# 主要内容



约束优化

1 问题实例

2 数学描述

3 求解方法

4 MATLAB 软件求解

5 MATHEMATICA 软件求解

# 约束优化问题实例

最大体积问题：

从长为4，宽为3的长方形薄铁皮的四个角上剪掉相同大小的正方形，将剩余铁皮折成一个无盖子的容器，确定裁剪方案使得容器的容积最大。

解：假设从铁皮的四个角上同时剪掉的正方形边长为 $x$ ，则有

$$\begin{aligned} \max V(x) &= (4 - 2x)(3 - 2x)x \\ \text{s.t. } 0 &< x < 1.5 \end{aligned}$$



# 数学描述

---

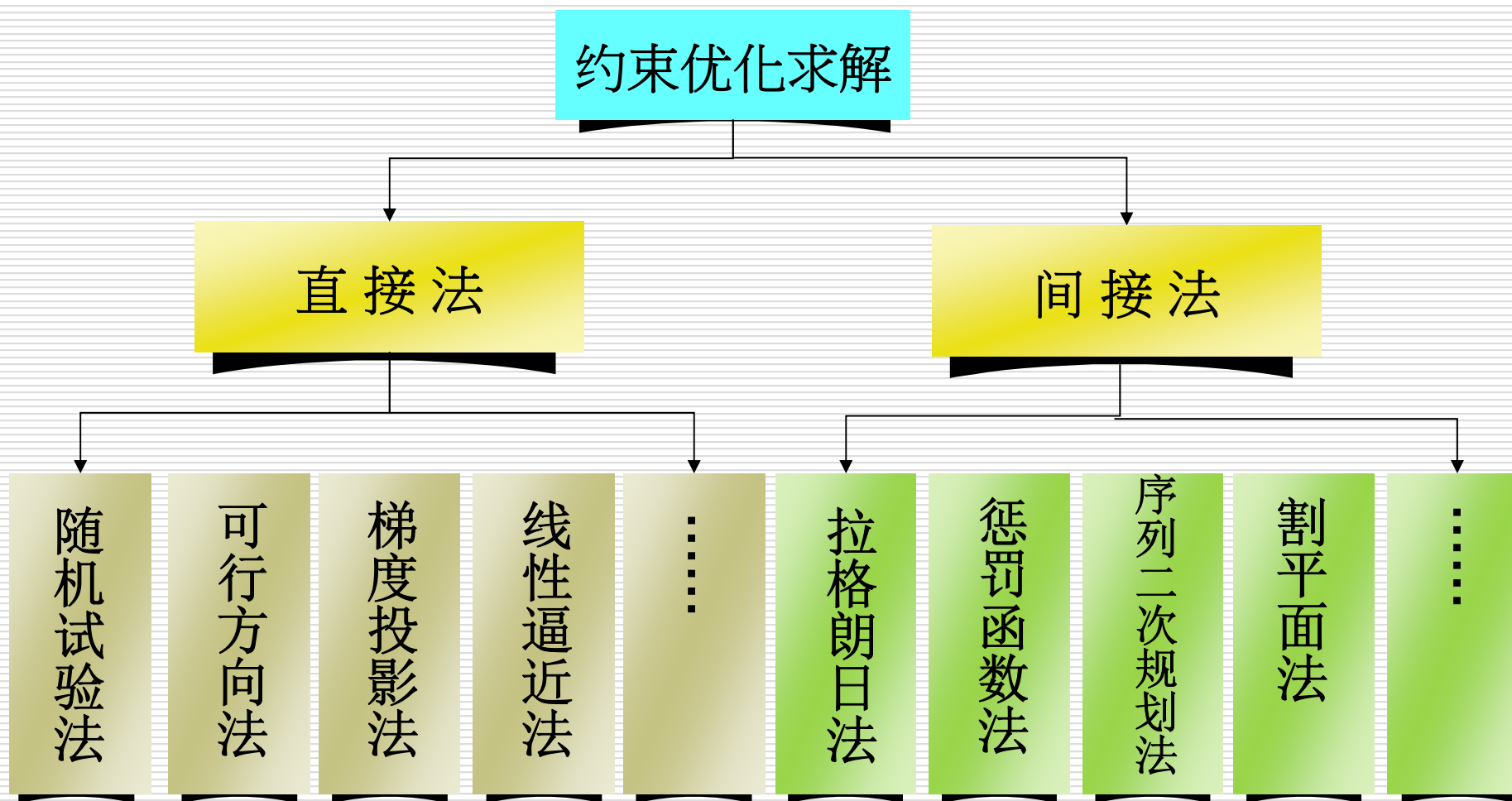
具有 $m$ 个不等式约束条件式和 $l$ 个等式约束条件式的  
 $n$ 维约束优化问题通常可以描述为:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x), x \in \mathcal{R}^n \\ \text{s. t.} & \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \end{array}$$

其中 $f(x)$ 为标量函数,  $g(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m, h(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^l$ 。

---

# 约束优化问题求解方法



# 约束优化问题求解方法

## 拉格朗日乘子法

**基本思想：**通过引入拉格朗日乘子，将原多变量约束最优化问题转化为一个无约束的最优化问题，从而采用成熟的无约束优化方法完成求解。

**等式约束情形：**

$$\left. \begin{array}{l} \min f(x_1, x_2) \\ \text{s. t. } h(x_1, x_2) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \min L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda h(x_1, x_2)$$

常量 $\lambda$ 为**拉格朗日乘子**，函数 $L(x_1, x_2, \lambda)$ 为**拉格朗日函数**，**拉格朗日乘子法**因此而得名。

# 约束优化问题求解方法

---

例1：求目标函数

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4$$

在等式约束条件 $x_1 + x_2 = 0$ 下的极小值。

[解] 构造拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda) &= f(x_1, x_2) - \lambda h(x_1, x_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4 - \lambda x_1 - \lambda x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left. \partial L / (\partial x_1) \right|_{x^*} = 2x_1^* - 4 - \lambda = 0 \\ \left. \partial L / (\partial x_2) \right|_{x^*} = 2x_2^* - \lambda = 0 \\ \left. \partial L / \partial \lambda \right|_{x^*} = -x_1^* - x_2^* = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = 1, x_2^* = -1$$

---

# 约束优化问题求解方法

---

## 拉格朗日乘子法

不等式约束情形：

**主要思想：** 先通过引入一个辅助变量将不等式约束条件变换为等式约束条件，再利用上述等式约束情形下的目标函数最优化方法来求解。具体做法是引入一个非负辅助变量  $v^2$  将不等式约束  $g(x) \leq 0$  变换为等式约束  $g(x) + v^2 = 0$ 。

---



# 约束优化问题求解方法

---

例2：求目标函数

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

在混合约束 $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 4$ ,  $x_1^2 = 4x_2$ 下的极值。

[解]  $L(x, \lambda, v)$

$$\begin{aligned} &= x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 + v^2] \\ &\quad + \lambda_2(x_1^2 - 4x_2) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_1} \right|_{x^*} = \left. \frac{\partial L}{\partial x_2} \right|_{x^*} = \left. \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \right|_{x^*} = \left. \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \right|_{x^*} = \left. \frac{\partial L}{\partial v} \right|_{x^*} = 0$$

$$\Rightarrow x_1^* = 2, x_2^* = 1 \text{ 及 } x_1^* = 3.86, x_2^* = 3.73$$

$$\Rightarrow f_{\min} = 5, f_{\max} = 28.8125$$

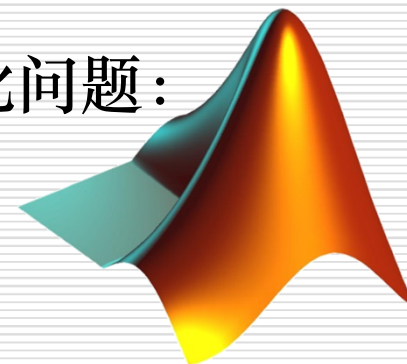
---

# 约束优化—MATLAB软件求解

---

Matlab提供专有函数**fmincon()**求解约束优化问题：

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s. t.} & \begin{cases} Ax \leq b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ c(x) \leq 0 \\ c_{eq}(x) = 0 \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \end{array}$$



其中 $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $b \in \mathcal{R}^{m_1}$ ,  $b_{eq} \in \mathcal{R}^{m_2}$ ,  $c(x)$ ,  $c_{eq}(x)$ 分别对应优化变量的非线性**不等式约束**和非线性**等式约束**,  $lb, ub$ 分别为优化**变量的下界和上界约束**。

---

# 约束优化—MATLAB软件求解

---

函数**fmincon()**多种不同调用和说明:

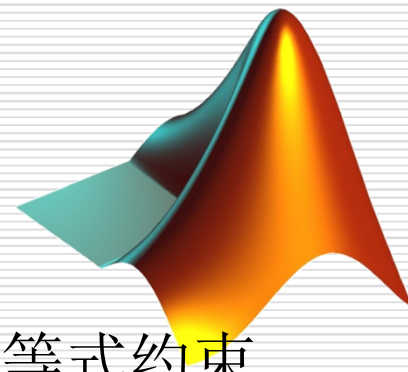
■  **$x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b)$**

以 $x_0$ 为初始点, 求解目标函数 $f(x)$ 在线性不等式约束  
 $Ax \leq b$ 下的局部极小值问题;

■  **$x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq})$**

以 $x_0$ 为初始点, 求解目标函数 $f(x)$ 在线性不等式约束  
 $Ax \leq b$ 及线性等式约束 $A_{eq}x = b_{eq}$ 下的局部极小值问题,  
若没有不等式约束, 可以设置 $A = [], b = []$ ;

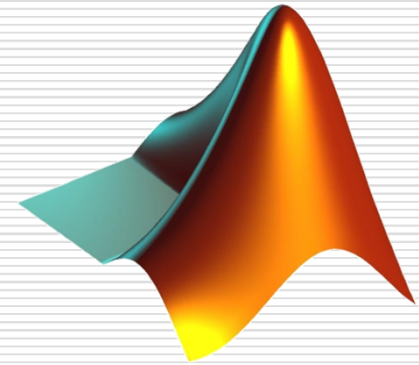
---



# 约束优化—MATLAB软件求解

---

函数**fmincon()**多种不同调用和说明:



■  **$x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub)$**

求解 $f(x)$ 在 $Ax \leq b$ 、 $A_{eq}x = b_{eq}$ 及 $lb \leq x \leq ub$ 下的局部极小值问题，若无等式约束，可设置 $A_{eq} = []$ ,  $b_{eq} = []$ ，若优化变量 $x_i$ 无下界约束，则可设置 $lb(i) = -\text{Inf}$ ，若无上界约束，则可设置 $ub(i) = \text{Inf}$ ;

---

# 约束优化—MATLAB软件求解

---

函数**fmincon()**多种不同调用和说明:

■  **$x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub, \text{nonlcon})$**

非线性不等式约束条件 $c(x) \leq 0$ 和非线性等式约束条件 $c_{eq}(x) = 0$  均由nonlcon输入参数来描述，若无上下界约束，则可设置 $lb = ub = []$ ； nonlcon参数是一个包含函数名的字符串（函数句柄），该函数可以是M-函数文件。它要求输入一个向量 $x$ ，返回两个向量 $c$ 和 $c_{eq}$ ，分别对应非线性不等式约束和等式约束向量。

---

# 约束优化—MATLAB软件求解

---

函数**fmincon()**多种不同调用和说明:

$x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{\text{eq}}, b_{\text{eq}}, lb, ub, @\text{mycon})$

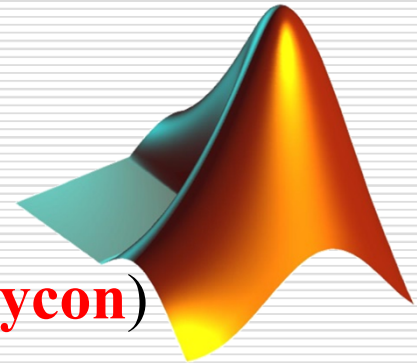
其中mycon.m是一个如下形式的M-函数文件:

```
function [c, ceq] = mycon(x)
```

```
c = ...; % 非线性不等式约束条件
```

```
ceq = ...; % 非线性等式约束条件
```

---



# 约束优化—MATLAB软件求解

---

函数**fmincon()**多种不同调用和说明:

■  **$x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub, \text{nonlcon}, \text{options})$**

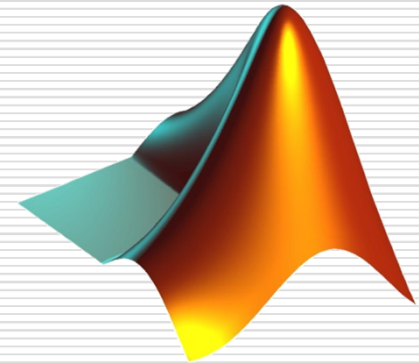
按options指定的优化参数选项进行目标函数最优解的求取，若无非线性约束条件，则可设置 $\text{nonlcon} = []$ ;

■  **$[x, f_{\min}] = \text{fmincon}(\dots)$**

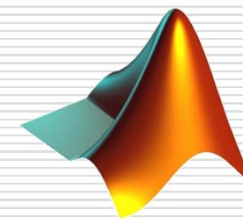
返回最优解 $x^*$ 的同时还返回目标函数的极小值 $f_{\min}$ ;

■  **$[x, f_{\min}, \text{exitflag}] = \text{fmincon}(\dots)$**

---



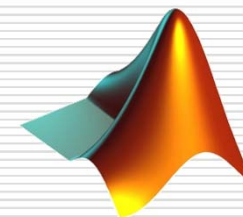
# 约束优化—MATLAB软件求解



exitflag	物理意义
1	梯度的模小于函数计算终止的误差限TolFun，最大的约束冲突小于TolCon
0	已经达到最大迭代次数限制或者达到函数评价次数的最大允许值
-1	由输出函数或作图函数引起的算法终止
-2	不存在可行解
2	指定采用置信域法、内点法或SQP法时优化变量的变化量小于TolX，最大的约束冲突小于TolCon
3	指定仅采用置信域法时，目标函数值的变化量小于TolFun，最大的约束冲突小于TolCon
4	仅采用有效集法时，搜索方向的幅值小于2TolX，最大的约束冲突小于TolCon
5	仅采用有效集法时，搜索方向的方向导数幅值小于2TolFun，最大的约束冲突小于TolCon



# 约束优化—MATLAB软件求解



函数**fmincon()**多种不同调用和说明:

■ **[x, fmin, exitflag, output] = fmincon (…)**

属性名称	属性含义
output.iterations	优化过程的实际迭代次数
output.algorithm	优化过程采用的具体算法
output.funcCount	目标函数的评价次数
output.firstorderopt	目标函数的一阶最优梯度
output.cgiterations	PCG迭代的次数（对置信域或内点算法有效）
output.lssteplength	线性搜索步长（对有效集算法有效）
output.constrviolation	约束冲突的最大值
output.stepsize	x的最终步长（对有效集算法或内点算法有效）
output.message	优化过程退出信息

# 约束优化—MATLAB软件求解

函数**fmincon()**多种不同调用和说明:

■ **[x, fmin, exitflag, output, lambda] = fmincon (···)**

计算结束后返回最优解处拉格朗日乘子的结构变量**lambda**

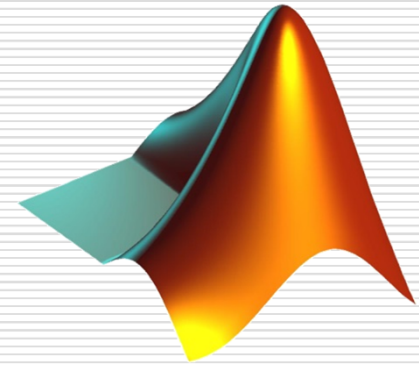


lambda	含义
lower	下界lb
upper	上界ub
ineqlin	线性不等式约束
eqlin	线性等式约束
ineqnonlin	非线性不等式约束
eqnonlin	非线性等式约束
output.constrviolation	约束冲突的最大值

# 约束优化—MATLAB软件求解

---

函数**fmincon()**多种不同调用和说明:



■ **[x, fmin, exitflag, output, lambda, grad] = fmincon (…)**

优化计算结束后返回最优解处对应的梯度;

■ **[x, fmin, exitflag, output, lambda, grad, hess] = fmincon (…)**

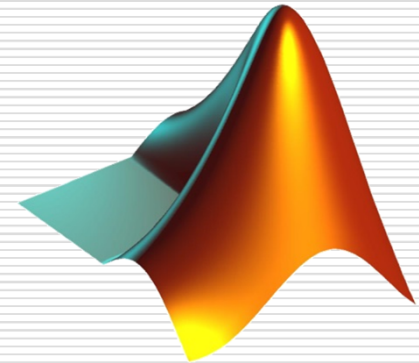
优化计算结束后返回最优解处对应的梯度和Hessian矩阵;

---

# 约束优化—MATLAB软件求解

例3：求解约束优化问题

$$\begin{aligned} \min f(x) &= -x_1 x_2 x_3 \\ \text{s.t. } 0 &\leq x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 72 \end{aligned}$$



[解] 取初始点为 $x = [10; 10; 10]$ ，则有MATLAB程序如下：

```
x0 = [10;10;10];
```

```
fun = @(x)-x(1)*x(2)*x(3);
```

```
A = [1 2 2;-1 -2 -2];
```

```
b = [72;0];
```

```
[x, fmin, exitflag, output, lambda] = fmincon(fun,x0,A,b)
```

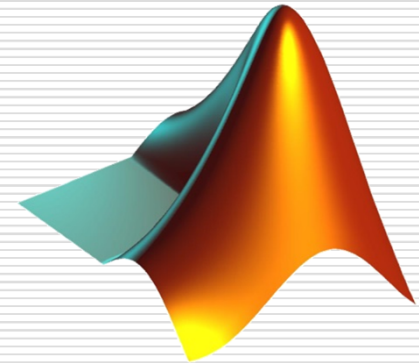
# 约束优化—MATLAB软件求解

---

返回运行结果如下：

```
x =  
    24.0000  
    12.0000  
    12.0000  
fmin = -3.4560e+03  
exitflag = 5  
output = iterations: 12  
         funcCount: 53  
         lssteplength: 1  
         stepsize: 4.6528e-05  
         algorithm: 'medium-scale: SQP, Quasi-Newton, line-search'  
         firstorderopt: 4.7697e-04  
         constrviolation: 0  
         message: [1x772 char]
```

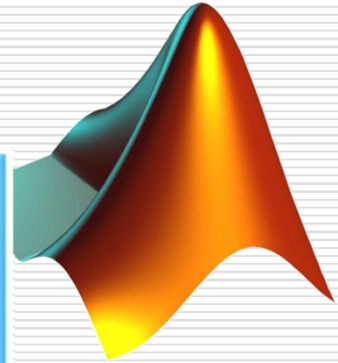
---



# 约束优化—MATLAB软件求解

例4：求解约束优化问题

$$\begin{aligned} \min f(x) &= e^{x_1}(4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1) \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1x_2 - x_1 - x_2 + 2 \leq 0 \\ -x_1x_2 \leq 8 \\ x_2^2 - x_1 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$



[解] 首先定义非线性约束函数confun如下：

**function** [c ceq] = confun (x)

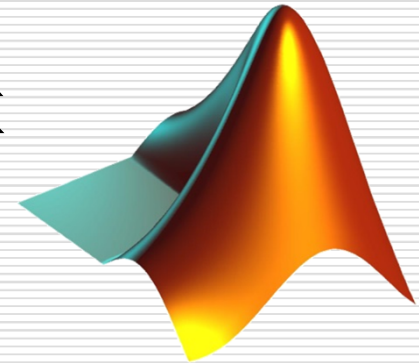
c = [2+x(1)\*x(2)-x(1)-x(2);-x(1)\*x(2)-8];

ceq = x(2)^2-x(1)-4;

# 约束优化—MATLAB软件求解

---

[解] 取初始点为 $x = [-1; 0.5]$ ，并采用有效集算法进行迭代，则有MATLAB程序如下：



```
x0 = [-1; 0.5];
```

```
fun=@(x) exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1);
```

```
options = optimset ('Algorithm','active-set','Display','iter');
```

```
[x, fmin, exitflag] = fmincon
```

```
(fun,x0,[],[],[],[],[],[], @confun, options)
```

返回运行结果如下：

---

# 约束优化—MATLAB软件求解

---

F-count	f(x)	Max Constraint	Line Search steplength	Directional derivative	First-order optimality
3	1.65546	2.75			
6	1.7306	2.726	1	0.306	6.83
9	1.5071	0.555	1	-0.621	0.433
12	1.624	0.008696	1	0.413	0.453
15	1.62072	0.0001745	1	-0.164	0.0181
18	1.6208	2.534e-08	1	0.24	6.66e-05

$x = -2.3028 \quad 1.3028$

$f_{\min} = 1.6208$

$\text{exitflag} = 1$

---

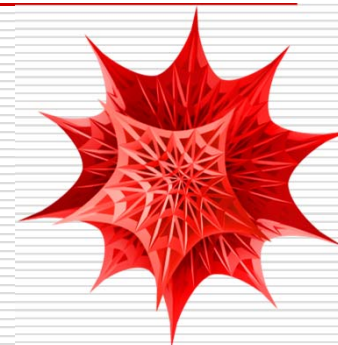


# 约束优化—MATHEMATICA软件求解

例5:  $\min f(x, y) = x + y, \quad \text{s.t. } x^2 + y^2 \leq 2$

In[1] = **Minimize**[{ $x + y, x^2 + y^2 \leq 2$ }, { $x, y$ }]

Out[1] =  $\{-2, \{x \rightarrow -1, y \rightarrow -1\}\}$



例6:

$$\begin{aligned} \min f &= 2x + 3y - z \\ \text{s.t. } \begin{cases} 1 \leq x + y + z \leq 2 \\ 1 \leq x - y + z \leq 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

In[2] = **Minimize**[{ $2x + 3y - z,$

$$1 \leq x + y + z \leq 2 \&\&$$

$$1 \leq x - y + z \leq 2 \&\&$$

$$x - y - z == 3\}, \{x, y, z\}]$$

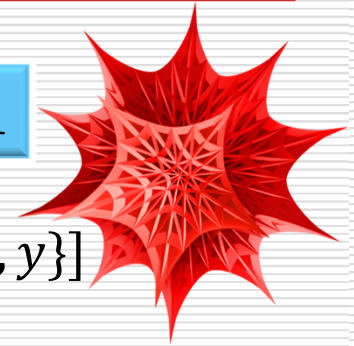
Out[2] =  $\{3, \{x \rightarrow 2, y \rightarrow -1/2, z \rightarrow -1/2\}\}$

# 约束优化—MATHEMATICA软件求解

例7:  $\min f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2, \text{ s.t. } x^2 + y^2 \leq 1$

In[3] = **NMinimize**[{ $x^2 - (y - 1)^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ }, { $x, y$ }]

Out[3] =  $\{-4., \{x \rightarrow -3.48879 \times 10^{-9}, y \rightarrow -1.\}\}$



例8:  $\min f(x) = 10x_1^3 + x_1x_2^2 + x_3(x_1^2 + x_2^2)$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3 - 10 \leq 0 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_3 - 3 \leq 0 \end{cases}$$

# 约束优化—MATHEMATICA软件求解

---

In[6] = **FindMinimum**[ $\{10x^3 + xy^2 + z(x^2 + y^2),$

$\sqrt{x^2 + y^2} - z - 10 \leq 0 \&\& \sqrt{x^2 + y^2} + z - 3 \leq 0\},$

$\{\{x, -1\}, \{y, -1\}, \{z, -1\}\}\}$

Out[6]

$= \{-2894.13, \{x \rightarrow -6.5, y \rightarrow -6.5266 \times 10^{-12}, z \rightarrow -3.5\}\}$

---

