静态优化算法及软件实现

第1讲　线性规划

主讲：李传江

2019. 7. 4

主要内容

线性规划

1. 问题实例
2. 标准数学模型
3. 求解方法
4. MATLAB 软件求解
5. MATHEMATICA 软件求解

问题实例—产出最大问题

例1：某工厂生产A、B两种规格的自行车，已知两种自行车所需的原材料各为2个和3个单位，所需工时各为4个和2个单位，产值各为6个和4个单位，假定每天能供应的原材料最多为100个单位，所能提供的工时最多为120个单位，试确定各生产A、B两种规格的自行车多少辆才能获得最大产出？

[解] 假设各生产A、B两种自行车x_1和x_2辆，可转化为求解如下线性规划问题：

$$\max f(x) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_i \ge 0, (i = 1,2) \end{cases}$$

问题实例—最优复习方案问题

例2：期末最优复习方案问题

	马原	英语	电路	模电	优化
不复习预期期末成绩	65	60	70	60	75
复习(提高分/小时)	3	4	5	3	10

可用复习时间18小时。试安排各门功课复习时间，使平均成绩达到80+，且马原和优化分别达到85+和90+。

问题实例—最优复习方案问题

解: 设复习时间分别为 $x_1, \cdots, x_5$. 易得目标函数和约束条件如下

目标函数:

$$\min f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

显式约束:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 18 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 \ge 70 \\ 3x_1 + 65 \ge 85 \\ 10x_5 + 75 \ge 90 \end{cases}$$

隐式约束:

$$\begin{cases} 3x_1 + 65 \le 100 \\ 4x_2 + 60 \le 100 \\ 5x_3 + 70 \le 100 \\ 3x_4 + 60 \le 100 \\ 10x_5 + 75 \le 100 \\ x_1, \cdots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划数学描述

目标函数： $J = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{c} = [c_1 \ c_2 \cdots c_n]^T, \boldsymbol{x} = [x_1 \ x_2 \cdots x_n]^T$$

约束条件： $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge 0$

$$\boldsymbol{b} = [b_1 \ b_2 \cdots b_m]^T, \ \boldsymbol{A} \in \Re^{m \times n}$$

线性规划目标:

确定线性目标函数在一组（不）等式约束条件式下的极值。

标准数学模型

各种线性规划实际问题都可转化成如下的标准数学模型：

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,n$$

等式约束个数
线性规划阶数

优化变量个数
线性规划维数

元素描述形式

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

矩阵描述形式

标准数学模型

矩阵描述形式:

$$\begin{aligned} &\min f(x) = c^T x \\ &\text{s.t. } Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$$x = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$$

$$c = [c_1\ c_2\ \cdots\ c_n]^T$$

$$A = \{a_{ij}\} \in \Re^{m\times n}$$

$$\mathrm{rank}(A) = m \leq n$$

$$b = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_m]^T \geq 0$$

线性规划问题-LP问题

(Linear Programming)

LP问题标准化处理

约束条件为不等式组$Ax \le b$则引入非负松弛变量变不等式约束为等式约束；约束条件为$Ax \ge b$，则引入非负剩余变量变不等式约束为等式约束

优化变量不满足$\boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}$，必存在自由变量和非正变量，对自由变量，用两个非负变量的差来替换；对非正变量，用它的反号变量来替换

求目标函数的极大值，只需将原目标函数取反号，就能将求极大值问题转化为求极小值问题

$\boldsymbol{b} \ge \mathbf{0}$不满足，则必存在某个$b_i < 0$，此时将该约束条件两边乘以-1来处理

LP问题标准化处理

$$\max f(x) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_i \ge 0, (i = 1,2) \end{cases}$$

$$\min g(x) = -6x_1 - 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 100 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 120 \\ x_i \ge 0, (i = 1,2,3,4) \end{cases}$$

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \ge 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \ge 0, c = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix} \ge 0$$

LP问题标准化处理

$$\min f = 3x_1 + 5x_2 - 6x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + 4x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2\text{自由}, x_3 \le 0 \end{cases}$$

$$\min f = 3x_1 + 5x_4 - 5x_5 + 6x_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_4 - x_5 + x_7 = 1 \\ x_1 + 4x_4 - 4x_5 - x_8 = 1 \\ x_i \ge 0, (i = 1,4,5,\cdots,8) \end{cases}$$

$$\min f(x) = c^T x$$
$$\text{s.t.}\ Ax = b$$
$$x \ge 0$$

LP问题求解方法

- 图解法
- 单纯形法
- 大M法
- 两阶段法
- 内点算法
- 外点算法
- ……

图解法 → 适用于两变量(2维)LP问题求解

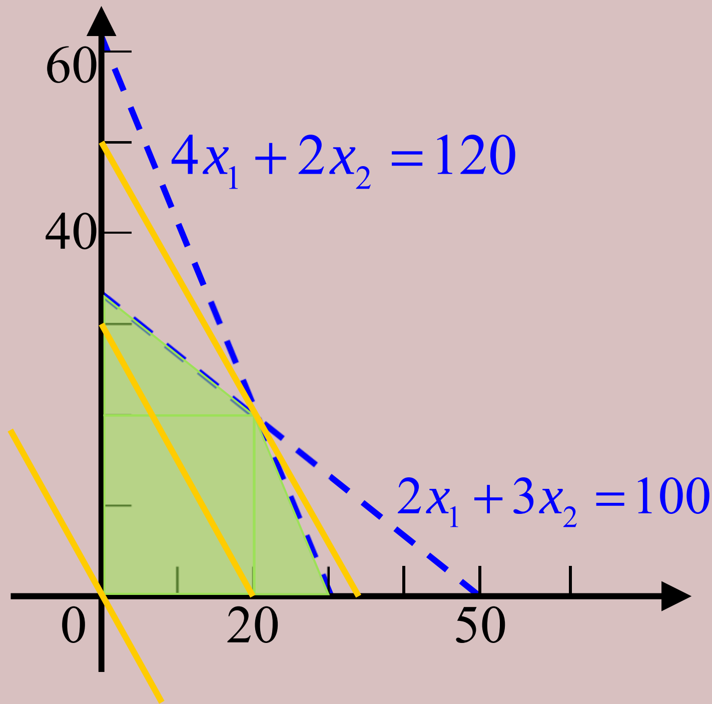
单纯形法、大M法、两阶段法、内点算法、外点算法、…… → 适用于多变量(多维)LP问题求解

图解法求解LP问题

产出最大问题:

$$\max f(x) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_i \ge 0, (i = 1,2) \end{cases}$$



易得最大产量为200!

图解法求解LP问题

期末最优复习方案问题：

$$\min f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 18 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 \ge 70 \\ 3x_1 + 65 \ge 85 \\ 10x_5 + 75 \ge 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 65 \le 100 \\ 4x_2 + 60 \le 100 \\ 5x_3 + 70 \le 100 \\ 3x_4 + 60 \le 100 \\ 10x_5 + 75 \le 100 \\ x_1, \cdots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

图解法已无法完成求解！

借助单纯形法等方法完成求解！

单纯形法-Simplex Algorithm

美国数学家 G.B.Dantzig于1947年首次提出。

理论根据： 线性规划。问题的可行域是n维向量空间中的多面凸集，其最优值如果存在必在该凸集的某顶点处达到。顶点所对应的可行解称为*基本可行解*。

基本思想： 先找出一个基本可行解，对它进行鉴别，看是否是最优解；若不是，则按照一定法则转换到另一改进的基本可行解，再鉴别；若仍不是，则再转换，按此重复进行。因基本可行解的个数有限，故经有限次转换必能得出问题的最优解。

单纯形法-Simplex Algorithm

单纯形法的一些变种：

- 改进单纯形法
- 对偶单纯形法
- 下山单纯形法
- 变量有界单纯形法

具体求解法请参考：

课程平台中学习资料“线性规划.pdf”

LP问题的软件求解

MATLAB

由美国 MathWorks公司开发

MATHEMATICA

由美国 **Wolfram** 公司开发

基础参考资料：

MATLAB-百度百科

MATLAB-Wikipedia

Mathematica-百度百科

Mathematica-Wikipedia

LP问题的软件求解

MATLAB软件求解

Matlab提供专有函数**linprog()**

求解如下形式的LP问题：

$$
\min f(x) = c^T x
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ lb \le x \le ub \end{cases}
$$

LP问题的软件求解

MATLAB软件求解

函数**linprog()**的多种不同调用方法和说明：

- **x = linprog(c, A, b)**
- **x = linprog(c, A, b, Aeq, beq)**

当线性规划问题中不考虑线性不等式约束时，可以将A, b设为空矩阵，即$A = [\ \ ], b = [\ \ ]$。

- **x = linprog(c, A, b, Aeq, beq, lb, ub)**

如果对某优化变量没有上界约束，则可以设置$\mathrm{ub}(i) = \mathrm{Inf}$，同样，如果没有下界约束，则可以设置$\mathrm{lb}(i) = -\mathrm{Inf}$；另外，如果此时没有等式约束，则可以设置 $A_{eq} = [\ \ ]$，$b_{eq} = [\ \ ]$。

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

LP问题的软件求解

MATLAB软件求解

函数**linprog()**的多种不同调用方法和说明：

- **[x, fval] = linprog(…)**
- **[x, fval, exitflag] = linprog(…)**

返回线性规划问题的状态指示exitflag：

exitflag	物理意义
1	已经收敛到最优解x
0	已经达到最大迭代次数限制options.MaxIter
-2	没有找到问题的可行点
-3	问题无有限最优解
-4	在算法执行过程中遇到了NaN值
-5	原线性规划问题和其对偶问题均不可行
-7	搜索方向变化太小，无法进一步获得更优解，表明原线性规划问题或者约束条件是病态的

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

LP问题的软件求解

MATLAB软件求解

函数linprog()的多种不同调用方法和说明：

- **[x, fval, exitflag, output] = linprog(···)**

返回结构变量output，其属性如下表所示：

属性名称	属性含义
output.iterations	优化过程的实际迭代次数
output.algorithm	优化过程中所采用的具体算法
output.cgiterations	0（仅用于大型规模算法，为了后向兼容性而设置的参数）
output.message	退出信息

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax \le b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

LP问题的软件求解

例1：求解LP问题

$$\max f(x) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_i \ge 0, (i = 1,2) \end{cases}$$

[解] MATLAB计算程序如下：

```
c = [-6; -4];
A = [2 3; 4 2];
b = [100; 120];
lb = [0; 0];
ub = [Inf; Inf];
[x, fval] = linprog(c, A, b, [], [], lb, ub)
```

LP问题的软件求解

例2：求解LP问题

$$\max f = x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 \le 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 \le 5 \\ x_i \ge 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

```
c = [-1; -7; -4; -3; -1];
A = [2 6 1 0 0; 2 3 4 1 1; 1 2 0 3 1];
b = [7; 8; 5];
Aeq = []; beq = [];
lb = [0; 0; 0; 0; 0]; ub = [Inf; Inf; Inf; Inf; Inf];
[x, fval, exitflag, output] = linprog(c, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

LP问题的软件求解

运行后返回如下结果：

Optimization terminated.

x = 0.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    0.0000

fval = -14.0000

exitflag = 1

output = iterations: 7
    algorithm: 'large-scale: interior point'
    cgiterations: 0
    message: 'Optimization terminated.'

LP问题的软件求解

使用**linprog**()求解期末最优复习方案问题.

$$\min f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 18 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 \ge 70 \\ 3x_1 + 65 \ge 85 \\ 10x_5 + 75 \ge 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 65 \le 100 \\ 4x_2 + 60 \le 100 \\ 5x_3 + 70 \le 100 \\ 3x_4 + 60 \le 100 \\ 10x_5 + 75 \le 100 \\ x_1, \cdots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

LP问题的软件求解

使用**linprog**()求解期末最优复习方案问题.

***Matlab* m-代码:**

```
c=ones(1,5);
x1_min=20/3;  x1_max=35/3;
x2_max=10;
x3_max=6;
x4_max=40/3;
x5_min=3/2;  x5_max=5/2;
lb=[x1_min,0,0,0,x5_min];
ub=[x1_max,x2_max,x3_max,x4_max,x5_max];
A=[1 1 1 1 1;-3 -4 -5 -3 -10];
b=[18;-70];
[x,fval,exitflag,output]=linprog(c,A,b,[],[],lb,ub)
```

LP问题的软件求解

MATHEMATICA软件求解

专有函数**LinearProgramming[·]**

的多种不同调用方法和说明：

- **LinearProgramming [c, A, b]**

  $\min f = c^T x, \ \text{s.t. } Ax \le b, \ x \ge 0$。

- **LinearProgramming [c, A, {{b1,s1}, {b2,s2},..., {bm,sm}}]**

  记A矩阵的第i行为a_i $(i = 1, \cdots, m)$。则当s_i取1时，$a_i x \ge b_i$；当s_i取0时，$a_i x = b_i$；当s_i取-1时，$a_i x \le b_i$。

LP问题的软件求解

MATHEMATICA软件求解

专有函数LinearProgramming[·]

的多种调用方法和说明:

- **LinearProgramming [c, A, b, lb]**

$$\min f = c^T x,\ \text{s.t. } Ax \le b,\ \ x \ge lb。$$

- **LinearProgramming [c, A, b, {lb_1, lb_2, ⋯, lb_n}]**

$$\min f = c^T x,\ \text{s.t. } Ax \le b,\ \ x_i \ge lb_i\ \ (i = 1,2,\cdots,n)。$$

LP问题的软件求解

MATHEMATICA软件求解

专有函数**LinearProgramming[·]**

的多种不同调用方法和说明：

- **LinearProgramming[c, A, b,{{lb$_1$,ub$_1$},{lb$_2$,ub$_2$},⋯,{lb$_n$,ub$_n$}}]**

  $\min f = c^T x,\ \text{s.t. } Ax \le b,\ \ lb_i \le x_i \le ub_i\ \ (i = 1,2,\cdots,n)$。

- **LinearProgramming [c, A, b, lb, dom]**

  在指定域dom中求解LP问题 $\min f = c^T x,\ \text{s.t. } Ax \le b,\ \ x \ge lb$ ，dom可以是Reals或Integers，对应着实数规划和整数规划。

LP问题的软件求解

MATHEMATICA软件求解

专有函数**LinearProgramming[·]**

的多种不同调用方法和说明:

■ **LinearProgramming [c, A, b, lb, {dom_1, dom_2,···, dom_n}]**

适用于x_i在指定的域dom_i中求解相应的LP问题。

LP问题的软件求解

MATHEMATICA软件求解

专有函数LinearProgramming[·]的几点说明：

① 优化变量边界值lb_i, ub_i必须是实数或Infinity或-Infinity；

② 当不存在任何不等式或等式约束时，函数的输入参量位置处可以通过{}赋空；

③ 如果LinearProgramming的输入包含明确的有理数，则它将返回明确的有理数结果或者整数结果；

④ 如果没有找到任何解，函数将返回不计算的形式；

MATHEMATICA软件求解实例

1. $\min f = x_1 + x_2, \text{s.t.}\ 2x_1 + x_2 \le 3,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

In[1]=**LinearProgramming**[{1, 1}, {{2, 1}}, {{3, -1}}]

Out[1]={0, 0}

2. $\min f = x_1 + x_2, \text{s.t.}\ 2x_1 + x_2 \ge 3,\ x_1 \ge -1,\ x_2 \ge -1$

In[2]=**LinearProgramming**[{1, 1}, {{2, 1}}, {3}, {-1, -1}]

Out[2]={2, -1}

3. $\min f = x_1 + x_2, \text{s.t.}\ 2x_1 + x_2 \ge 3,\ 1 \ge x_1 \ge -1,\ 2 \ge x_2 \ge -1$

In[3]=**LinearProgramming**[{1,1}, {{2,1}}, {3}, {{−1,1}, {−1,2}}]

Out[3]={1, 1}

MATHEMATICA软件求解实例

4. $\min f = x_1 + x_2$, s.t. $5x_1 + 2x_2 \geq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

In[4] = **LinearProgramming**[{1., 1.}, {{5., 2.}}, {3.}]

Out[4] = {0.6, 0.}

$$\max f = x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 \leq 5 \\ x_i \geq 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

In[5] = **LinearProgramming**[{−1, −7, −4, −3, −1},

{{2,6,1,0,0}, {2,3,4,1,1}, {1,2,0,3,1}}, {{7, −1}, {8, −1}, {5, −1}}]

Out[5]={0,1,1,1,0}

MATHEMATICA软件求解实例

5. 使用**LinearProgramming[]**求解期末最优复习方案问题.

Standard form:

$$\mathrm{In}[1] = \mathbf{LinearProgramming}[\{1,1,1,1,1\},$$

$$\{\{1,1,1,1,1\},\{3,4,5,3,10\}\},\{\{18,-1\},\{70,1\}\},$$

$$\left\{\left\{\frac{20}{3},\frac{35}{3}\right\},\{0,10\},\{0,6\},\left\{0,\frac{40}{3}\right\},\left\{\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right\}\right\}]$$

$$\mathrm{Out}[1] = \left\{\frac{20}{3},0,5,0,\frac{5}{2}\right\}$$