静态优化算法及软件实现之一

第4讲 约束优化

李传江

2019. 7. 8

主要内容

约束优化

1. 问 题 实 例
2. 数 学 描 述
3. 求 解 方 法
4. **MATLAB** 软 件 求 解
5. **MATHEMATICA** 软 件 求 解

约束优化问题实例

最大体积问题：

从长为4，宽为3的长方形薄铁皮的四个角上剪掉相同大小的正方形，将剩余铁皮折成一个无盖子的容器，确定裁剪方案使得容器的容积最大。

解：假设从铁皮的四个角上同时剪掉的正方形边长为x，则有

$$\begin{aligned} &\max V(x) = (4-2x)(3-2x)x \\ &\text{s.t.}\quad 0 < x < 1.5 \end{aligned}$$

数 学 描 述

具有m个不等式约束条件式和l个等式约束条件式的n维约束优化问题通常可以描述为：

$$\min f(x), x \in \mathcal{R}^n$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} g(x) \le 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

其中$f(x)$为标量函数，$g(x): \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m, h(x): \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^l$。

约束优化问题求解方法

- 约束优化求解
  - 直 接 法
    - 随机试验法
    - 可行方向法
    - 梯度投影法
    - 线性逼近法
    - ……
  - 间 接 法
    - 拉格朗日法
    - 惩罚函数法
    - 序列二次规划法
    - 割平面法
    - ……

约束优化问题求解方法

拉格朗日乘子法

基本思想： 通过引入拉格朗日乘子，将原多变量约束最优化问题转化为一个无约束的最优化问题，从而采用成熟的无约束优化方法完成求解。

等式约束情形：

$$\left.\begin{aligned} \min f(x_1, x_2) \\ \text{s.t. } h(x_1, x_2) = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\min L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda h(x_1, x_2)$$

常量λ为**拉格朗日乘子**，函数$L(x_1, x_2, \lambda)$为**拉格朗日函数**，**拉格朗日乘子法**因此而得名。

约束优化问题求解方法

例1： 求目标函数

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4$$

在等式约束条件$x_1 + x_2 = 0$下的极小值。

[解] 构造拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda) &= f(x_1, x_2) - \lambda h(x_1, x_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4 - \lambda x_1 - \lambda x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \partial L/(\partial x_1)\Big|_{x^*} = 2x_1^* - 4 - \lambda = 0 \\ \partial L/(\partial x_2)\Big|_{x^*} = 2x_2^* - \lambda = 0 \\ \partial L/\partial \lambda\Big|_{x^*} = -x_1^* - x_2^* = 0 \end{cases} \Longrightarrow x_1^* = 1, x_2^* = -1$$

约束优化问题求解方法

拉格朗日乘子法

不等式约束情形:

主要思想：先通过引入一个辅助变量将不等式约束条件变换为等式约束条件，再利用上述等式约束情形下的目标函数最优化方法来求解。具体做法是引入一个非负辅助变量v^2将不等式约束$g(x) \le 0$变换为等式约束$g(x) + v^2 = 0$。

约束优化问题求解方法

例2：求目标函数

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

在混合约束$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 4$，$x_1^2 = 4x_2$下的极值。

[解]　$L(x, \lambda, v)$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 + v^2]$$

$$+\lambda_2(x_1^2 - 4x_2)$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x_1}\right|_{x^*} = \left.\frac{\partial L}{\partial x_2}\right|_{x^*} = \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right|_{x^*} = \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\right|_{x^*} = \left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{x^*} = 0$$

$\Rightarrow x_1^* = 2$，$x_2^* = 1$ 及 $x_1^* = 3.86$，$x_2^* = 3.73$

$\Rightarrow f_{\min} = 5$，$f_{\max} = 28.8125$

约束优化—MATLAB软件求解

Matlab提供专有函数**fmincon()**求解约束优化问题：

$$
\min f(x)
$$
$$
\text{s.t.}\begin{cases} Ax \le b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ c(x) \le 0 \\ c_{eq}(x) = 0 \\ lb \le x \le ub \end{cases}
$$

其中$x \in \mathcal{R}^n, b \in \mathcal{R}^{m_1}, b_{eq} \in \mathcal{R}^{m_2}$，$c(x), c_{eq}(x)$分别对应优化变量的非线性不等式约束和非线性等式约束，lb, ub分别为优化变量的下界和上界约束。

约束优化—MATLAB软件求解

函数fmincon()多种不同调用和说明：

- **x = fmincon (fun, x0, A, b)**

以x0为初始点，求解目标函数$f(x)$在线性不等式约束$Ax \le b$下的局部极小值问题；

- **x = fmincon (fun, x0, A, b, Aeq, beq)**

以x0为初始点，求解目标函数$f(x)$在线性不等式约束$Ax \le b$及线性等式约束$A_{eq}x = b_{eq}$下的局部极小值问题，若没有不等式约束，可以设置$A = [\,], b = [\,]$；

约束优化—MATLAB软件求解

函数**fmincon()**多种不同调用和说明:

- **x = fmincon (fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub)**

求解$f(x)$在$Ax \le b$、$A_{eq}x = b_{eq}$及$lb \le x \le ub$下的局部极小值问题，若无等式约束，可设置$A_{eq} = [\,]$, $b_{eq} = [\,]$，若优化变量x_i无下界约束，则可设置$lb(i) = -\mathrm{Inf}$，若无上界约束，则可设置$ub(i) = \mathrm{Inf}$;

约束优化—MATLAB软件求解

函数fmincon()多种不同调用和说明：

- **x = fmincon (fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon)**

非线性不等式约束条件$c(x) \le 0$和非线性等式约束条件$c_{eq}(x) = 0$ 均由nonlcon输入参数来描述，若无上下界约束，则可设置$lb = ub = []$； nonlcon参数是一个包含函数名的字符串（函数句柄），该函数可以是M-函数文件。它要求输入一个向量x，返回两个向量c和ceq，分别对应非线性不等式约束和等式约束向量。

约束优化—MATLAB软件求解

函数fmincon()多种不同调用和说明：

x = fmincon (fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, @mycon)

其中mycon.m是一个如下形式的M-函数文件：

```
function [c, ceq] = mycon(x)
c = …; % 非线性不等式约束条件
ceq = …; % 非线性等式约束条件
```

约束优化—MATLAB软件求解

函数**fmincon()**多种不同调用和说明：

- **x = fmincon (fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon, options)**

按options指定的优化参数选项进行目标函数最优解的求取，若无非线性约束条件，则可设置nonlcon = []；

- **[x, fmin] = fmincon (⋯)**

返回最优解x^*的同时还返回目标函数的极小值$f_{\min}$；

- **[x, fmin, exitflag] = fmincon (⋯)**

约束优化—MATLAB软件求解

exitflag	物理意义
1	梯度的模小于函数计算终止的误差限TolFun，最大的约束冲突小于TolCon
0	已经达到最大迭代次数限制或者达到函数评价次数的最大允许值
-1	由输出函数或作图函数引起的算法终止
-2	不存在可行解
2	指定采用置信域法、内点法或SQP法时优化变量的变化量小于TolX，最大的约束冲突小于TolCon
3	指定仅采用置信域法时，目标函数值的变化量小于TolFun，最大的约束冲突小于TolCon
4	仅采用有效集法时，搜索方向的幅值小于2TolX，最大的约束冲突小于TolCon
5	仅采用有效集法时，搜索方向的方向导数幅值小于2TolFun，最大的约束冲突小于TolCon

约束优化—MATLAB软件求解

函数fmincon()多种不同调用和说明：

- [x, fmin, exitflag, output] = fmincon (…)

属性名称	属性含义
output.iterations	优化过程的实际迭代次数
output.algorithm	优化过程采用的具体算法
output.funcCount	目标函数的评价次数
output.firstorderopt	目标函数的一阶最优梯度
output.cgiterations	PCG迭代的次数（对置信域或内点算法有效）
output.lssteplength	线性搜索步长（对有效集算法有效）
output.constrviolation	约束冲突的最大值
output.stepsize	x的最终步长（对有效集算法或内点算法有效）
output.message	优化过程退出信息

约束优化—MATLAB软件求解

函数fmincon()多种不同调用和说明:

- **[x, fmin, exitflag, output, lambda] = fmincon (…)**

计算结束后返回最优解处拉格朗日乘子的结构变量lambda

lambda	含义
lower	下界lb
upper	上界ub
ineqlin	线性不等式约束
eqlin	线性等式约束
ineqnonlin	非线性不等式约束
eqnonlin	非线性等式约束
output.constrviolation	约束冲突的最大值

约束优化—MATLAB软件求解

函数**fmincon()**多种不同调用和说明：

- **[x, fmin, exitflag, output, lambda, grad] = fmincon (⋯)**

  优化计算结束后返回最优解处对应的梯度；

- **[x, fmin, exitflag, output, lambda, grad, hess] = fmincon (⋯)**

  优化计算结束后返回最优解处对应的梯度和Hessian矩阵；

约束优化—MATLAB软件求解

例3： 求解约束优化问题

$$\min f(x) = -x_1x_2x_3$$
$$\text{s.t. } 0 \le x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 72$$

[解] 取初始点为$x = [10;10;10]$，则有MATLAB程序如下：

```
x0 = [10;10;10];
fun = @(x)-x(1)*x(2)*x(3);
A = [1 2 2;-1 -2 -2];
b = [72;0];
[x, fmin, exitflag, output, lambda] = fmincon(fun,x0,A,b)
```

约束优化—MATLAB软件求解

返回运行结果如下：

```
x =
   24.0000
   12.0000
   12.0000
fmin = -3.4560e+03
exitflag = 5
output = iterations: 12
         funcCount: 53
         lssteplength: 1
         stepsize: 4.6528e-05
         algorithm: 'medium-scale: SQP, Quasi-Newton, line-search'
         firstorderopt: 4.7697e-04
         constrviolation: 0
         message: [1x772 char]
```

约束优化—MATLAB软件求解

例4： 求解约束优化问题

$$\min f(x) = e^{x_1}\left(4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1\right)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1x_2 - x_1 - x_2 + 2 \le 0 \\ -x_1x_2 \le 8 \\ x_2^2 - x_1 = 4 \end{cases}$$

[解] 首先定义非线性约束函数confun如下：

```
function [c ceq] = confun (x)
        c = [2+x(1)*x(2)-x(1)-x(2);-x(1)*x(2)-8];
        ceq = x(2)^2-x(1)-4;
```

约束优化—MATLAB软件求解

[解] 取初始点为$x = [-1; 0.5]$，并采用有效集算法进行迭代，则有MATLAB程序如下：

```
x0 = [-1; 0.5];
fun=@(x) exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1);
options = optimset ('Algorithm','active-set',’Display’,’iter’);
[x, fmin, exitflag] = fmincon
                    (fun,x0,[],[],[],[],[],[], @confun, options)
```

返回运行结果如下：

约束优化—MATLAB软件求解

F-count	f(x)	Max Constraint	Line Search steplength	Directional derivative	First-order optimality
3	1.65546	2.75			
6	1.7306	2.726	1	0.306	6.83
9	1.5071	0.555	1	-0.621	0.433
12	1.624	0.008696	1	0.413	0.453
15	1.62072	0.0001745	1	-0.164	0.0181
18	1.6208	2.534e-08	1	0.24	6.66e-05

x = -2.3028   1.3028

fmin = 1.6208

exitflag = 1

约束优化—MATHEMATICA软件求解

例5： $\min f(x,y) = x + y, \quad \text{s.t. } x^2 + y^2 \le 2$

$\text{In}[1] = \textbf{Minimize}[\{x + y, x\text{^}2 + y\text{^}2 \le 2\}, \{x, y\}]$

$\text{Out}[1] = \{-2, \{x \to -1, y \to -1\}\}$

例6：

$$\min f = 2x + 3y - z$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} 1 \le x + y + z \le 2 \\ 1 \le x - y + z \le 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

$\text{In}[2] = \textbf{Minimize}[\{2x + 3y - z,$

$1 \le x + y + z \le 2 \&\&$

$1 \le x - y + z \le 2 \&\&$

$x - y - z == 3\}, \{x, y, z\}]$

$\text{Out}[2] = \{3, \{x \to 2, y \to -1/2, z \to -1/2\}\}$

约束优化—MATHEMATICA软件求解

例7： $\min f(x,y) = x^2 - (y-1)^2 , \text{s.t. } x^2 + y^2 \le 1$

In[3] = **NMinimize**[{x^2 − (y − 1)^2, x^2 + y^2 ≤ 1}, {x, y}]

Out[3] = $\{-4., \{x \to -3.48879 \times 10^{-9}, y \to -1.\}\}$

例8： $\min f(x) = 10x_1^3 + x_1x_2^2 + x_3\left(x_1^2 + x_2^2\right)$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3 - 10 \le 0 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_3 - 3 \le 0 \end{cases}$$

约束优化—MATHEMATICA软件求解

$\text{In}[6] = \textbf{FindMinimum}[\{10x^3 + xy^2 + z(x^2 + y^2),$

$\sqrt{x^2 + y^2} - z - 10 \le 0 \&\& \sqrt{x^2 + y^2} + z - 3 \le 0\},$

$\{\{x, -1\}, \{y, -1\}, \{z, -1\}\}]$

$\text{Out}[6]$

$= \{-2894.13, \{x \to -6.5, y \to -6.5266 \times 10^{-12}, z \to -3.5\}\}$