第2讲 整数规划

主讲人：李传江

整数规划(Integer Programming, 简称为IP问题)是一类要求全部或部分优化变量（决策变量）取整数值的数学规划，它在许多领域有着非常重要的应用，如分配问题、工厂选址问题、背包问题等。

从约束条件的构成可以细分为线性、二次和非线性整数规划。

整数规划是由R.E.Gomory在1958年提出割平面法之后形成独立分支的。

主要内容

整数规划

1. 问 题 实 例
2. 数 学 描 述
3. 求 解 方 法
4. MATLAB 软 件 求 解
5. MATHEMATICA 软 件 求 解

整数规划实例 —物品最优分配方案问题

某生出国留学打点行李，现有三个旅行包，容积分别为1000，1500和2000(ml)，必带物品有7件，其体积大小分别为400，300，150，250，450，760，190(ml)。可选带物品有9件，如不带将在目的地购买，其容量及价格见下表，试确定最优方案把物品放在三个旅行包里且使未带物品购买费用最低。

物品	1	2	3	4	5	6	7	8	9
体积v(ml)	200	350	500	450	320	100	700	450	250
价格($)	15	45	100	70	50	75	200	90	25

解：设 $x_{ij} = 0$ 或 1 (i =1,⋯,16, j =1, 2, 3) 表示是否把第i个物品放入第 j 个旅行包里.

目标函数: $$\min f(x) = \sum_{i=8}^{16} p_i \left(1 - \sum_{j=1}^{3} x_{ij}\right)$$

约束条件:
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{16} v_i\, x_{ij} \le V_j, & j = 1,2,3 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, & i = 1,2,\cdots,7 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le 1, & i = 8,9,\cdots,16 \\ x_{ij} = 0 \ or\ 1, & i = 1,\cdots,16, j = 1,2,3 \end{cases}$$

0–1 整数线性规划问题!

IP问题数学描述

IP问题是指一类要求设计变量的部分分量或全部分量取整数值的最优化问题。整数线性规划问题(ILP问题)的一般形式可以描述为:

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ x_i \in I, \qquad i \in J \end{cases}$$

其中$x = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$，$c = [c_1\ c_2\ \cdots\ c_n]^T$，$A = \{a_{ij}\} \in \Re^{m\times n}$，$b = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_m]^T \ge 0$，$I = \{0,1,2,\cdots\}$, $J \subseteq \{1,2,\cdots n\}$。若$J = \{1,2,\cdots n\}$，则为**纯整数规划问题**；否则为**混合整数规划问题**；若$I = \{0,1\}$，则为**0-1规划问题**。

ILP问题求解方法

四舍五入法

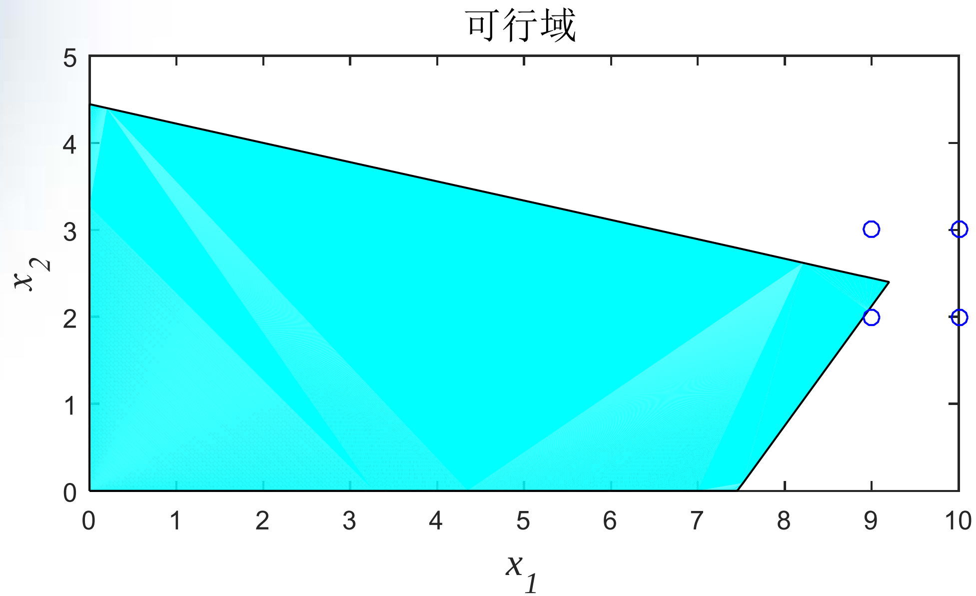
先求解一个忽略掉整数约束的LP问题，然后通过四舍五入的做法得到 ILP 问题的最优解。

$$\max f(x) = 3x_1 + 13x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \le 40 \\ 11x_1 - 8x_2 \le 82 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数} \end{cases}$$

该问题对应的LP问题的最优解为$x = [9.2, 2.4]^T$，四舍五入后四个整数点为$[9, 2], [9, 3], [10, 2], [10, 3]$，可以验证，其均不满足不等式约束条件，故不是问题的可行解。

ILP问题求解方法



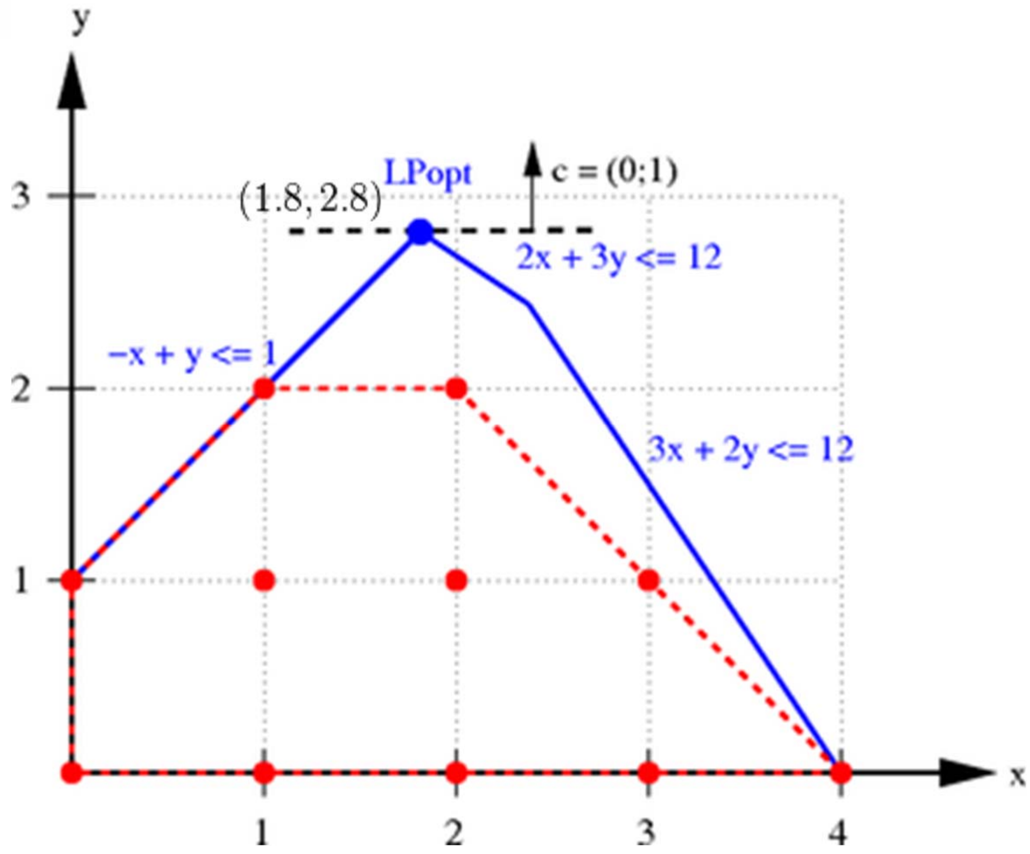
结论： 通常情况下，四舍五入法是不可取的，只有当对应的线性规划问题的最优解恰好满足整数约束条件时，这个最优解才是IP问题的最优解，而这种情况在解决实际问题的过程中一般是很少见的。

ILP问题求解方法

- 枚举法

Exam. 2-1

$$
\begin{aligned}
\max\ & y \\
-x + y &\leq 1 \\
3x + 2y &\leq 12 \\
2x + 3y &\leq 12 \\
x, y &\geq 0 \\
x, y &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$



Full ILP problem

ILP问题求解方法

- 基于松弛思想的割平面法
- 基于分解思想的分支定界法
- 0-1规划隐枚举法
- 匈牙利法
- ……

ILP问题求解方法

- “松弛”思想

原问题

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ x_i \in I \end{cases}$$

“松弛”

松弛问题

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

ILP问题求解方法

● “松弛”思想

$$\min f(x) = c^T x$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ x_i \in I \end{cases}$$

最优解: x^*
最优值: f^*
可行域: Ω

⬇ “松弛”

$$\min f(x) = c^T x$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

最优解: $\bar{x}^*$
最优值: $\bar{f}^*$
可行域: $\bar{\Omega}$

主要结论:

1. $\Omega \subset \bar{\Omega}$;
2. 若松弛问题没有可行解，则原问题也没有可行解.
3. 若$\bar{x}^* \in \Omega$，则$\bar{x}^*$是最优解.
4. 对于最小化问题，有$f^* \ge \bar{f}^*$.

割平面法就是基于这种思想提出的。

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

Matlab提供专有函数bintprog()

求解如下形式的0-1整数规划问题：

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax \le b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

函数bintprog()多种不同调用和说明：

- **x = bintprog (c)**

$\min f = c^T x$, s.t. $x_i \in \{0,1\}$。

- **x = bintprog (c, A, b)**

$\min f = c^T x$, s.t. $Ax \le b$, $x_i \in \{0,1\}$。

- **x = bintprog (c, A, b, Aeq, beq)**

$\min f = c^T x$, s.t. $Ax \le b$, $A_{eq}x = b_{eq}$, $x_i \in \{0,1\}$,

当规划问题中不考虑线性不等式约束时，可以将A, b设为空矩阵。

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

函数bintprog()多种不同调用和说明：

■**[x, fval] = bintprog (…)**

返回在最优解x处对应的目标函数值fval。

■**[x, fval, exitflag] = bintprog (…)**

返回状态指示exitflag，说明算法终止原因，如下表所示：

exitflag	物理意义
1	已经收敛到最优解x
0	已经达到最大迭代次数限制options.MaxIter
-2	没有找到问题的可行解
-4	搜索节点数超过设置的最大节点数
-5	搜索时间超过设置的最大CPU时options.MaxTime

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

函数bintprog()多种不同调用和说明：

■[x, fval, exitflag, output] = bintprog (…)

返回结构变量output，其属性如下表所示：

属性名称	属性含义
output.iterations	优化过程的实际迭代次数
output.algorithm	优化过程中所采用的具体算法
output.nodes	优化过程中搜索过的节点数目
output.time	优化过程中消耗的CPU时间
output.branchStrategy	优化过程中选择分支变量的策略
output.nodeSearchStrategy	优化过程中选择分支节点的策略
output.message	退出信息

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

例2-2：求解ILP问题

$$\min f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_i \in \{0,1\}, \qquad i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

[解] MATLAB计算程序如下：

```
c = [2;5;3;4];
A = [4 -1 -1 -1;2 -4 -2 -4;-1 -1 1 -1];
b = [0;-4;-1];
[x, fmin, exitflag, output] = bintprog(c, A, b)
```

IP问题的软件求解

返回运行结果如下：

Optimization terminated.

x = 0　0　0　1

fmin = 4

exitflag = 1

output = iterations: 2

　　nodes: 1

　　time: 0.2188

　　algorithm: 'LP-based branch-and-bound'

　　branchStrategy: 'maximum integer infeasibility'

　　nodeSrchStrategy: 'best node search'

　　message: 'Optimization terminated.'

例2-3：使用bintprog()求解物品最优分配方案问题.

$$\min f(x)=\sum_{i=8}^{16} p_i\left(1-\sum_{j=1}^{3} x_{ij}\right)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{16} v_i x_{ij}\le V_j, & j=1,2,3\\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}=1, & i=1,2,\cdots,7\\ \sum_{j=1}^{3} x_{ij}\le 1, & i=8,9,\cdots,16\\ x_{ij}=0\text{ or }1, & i=1,\cdots,16, j=1,2,3\end{cases}$$

```
Clear; clc;
v=[400 300 150 250 450 760 190 200 350 500 450 320 100 700 450 250];
v1=v(1);v2=v(2);v3=v(3);v4=v(4);v5=v(5);v6=v(6);v7=v(7);v8=v(8);
v9=v(9);v10=v(10);v11=v(11);v12=v(12);v13=v(13);v14=v(14);v15=v(15);v16=v(16);
V1=1000;V2=1500;V3=2000;
p=[15 45 100 70 50 75 200 90 25];
One=ones(1,3);
c=[zeros(1,21) -p(1)*One -p(1)*One -p(3)*One -p(4)*One -p(5)*One -p(6)*One -p(7)*One -
p(8)*One -p(9)*One];
v1=v1*eye(3);v2=v2*eye(3);v3=v3*eye(3);v4=v4*eye(3);
v5=v5*eye(3);v6=v6*eye(3);v7=v7*eye(3);v8=v8*eye(3);
v9=v9*eye(3);v10=v10*eye(3);v11=v11*eye(3);v12=v12*eye(3);
v13=v13*eye(3);v14=v14*eye(3);v15=v15*eye(3);v16=v16*eye(3);
A1=[v1 v2 v3 v4 v5 v6 v7 v8 v9 v10 v11 v12 v13 v14 v15 v16];
A2=[zeros(1,21) One zeros(1,24);zeros(1,24) One zeros(1,21);zeros(1,27) One zeros(1,18);...
   zeros(1,30) One zeros(1,15);zeros(1,33) One zeros(1,12);zeros(1,36) One zeros(1,9);...
   zeros(1,39) One zeros(1,6);zeros(1,42) One zeros(1,3);zeros(1,45) One];
b1=[V1;V2;V3];b2=ones(9,1);b=[b1;b2]; beq=ones(7,1);
A=[A1;A2];
Aeq=[One zeros(1,45);zeros(1,3) One zeros(1,42);zeros(1,6) One zeros(1,39);zeros(1,9) One
zeros(1,36);zeros(1,12) One zeros(1,33);zeros(1,15) One zeros(1,30);zeros(1,18) One zeros(1,27)];
[x, fval, exitflag, output]=bintprog(c, A, b, Aeq, beq)
```

运行结果如下：

```
Optimization terminated.

x =
    010001010001100001001000
    000001000000100010100010
fval = -490
exitflag = 1
output = iterations: 191677
              nodes: 38706
               time: 154.2969
          algorithm: 'LP-based branch-and-bound'
     branchStrategy: 'maximum integer infeasibility'
    nodeSrchStrategy: 'best node search'
            message: 'Optimization terminated.'
x_pos =
    2,6,8,12,13,18,21,30,37,41,43,47
```

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

在解决纯整数规划问题或混合整数规划问题上，MATLAB优化工具箱中2014a之前版本没有提供专门的求解函数。

网络工具箱

cplex

IBM公司一款高性能的数学规划问题求解器

lpsolve

混合整数线性规划求解器，可以求解纯线性、(混合)整数/二值、半连续和特殊有序集问题

yalmip

提供了对cplex及lpsolve等求解工具包更高层次的包装

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

yalmip是由瑞典林雪平大学(Linköping University)的J. Löfberg教授编写的一个功能强大的工具包，包含了MATLAB软件中提供的基本的LP求解算法，如linprog、bintprog等，还提供了对cplex及lpsolve等求解工具包更高层次的包装，更可贵的是，yalmip真正实现了建模和算法二者的分离，它提供了一种统一的、简单的建模语言，针对所有的规划问题，都可以用这种统一的方式建模，至于用哪种求解算法，读者只需要通过一次简单的参数配置指定就可以了，甚至不用指定，yalmip会自动选择最适合的算法。可以通过网站http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/pmwiki.php?n = Main. Download来免费获取（最新的20190425版本的工具箱）。

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

另一种解决方案是：使用前人编好的函数 **intprog()**完成求解。

```
%整数规划的MATLAB实现
%Originally Designed By Sherif A. Tawfik,
%Faculty of Engineering, Cairo University

function
[x,fval,exitflag]=intprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,M,TolXInteger)
options = optimset('display','off');
bound=inf;
%求解原问题P0的松弛线性规划Q0，首先获得问题的初始解
[x0,fval0]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
%利用递归法进行二叉树的遍历，实现分枝定界法对整数规划的求解
[x,fval,exitflag,b]=rec_BranchBound...
(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,fval0,M,TolXInteger,bound);
%分枝定界法的递归算法,x为问题的初始解，v是目标函数在x处的取值
function [xx,fval,exitflag,bb]=rec_BranchBound...
(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x,v,M,TolXInteger,bound)
options = optimset('display','off');
[x0,fval0,exitflag0]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,[],options);
```

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

```
if exitflag0<=0 | fval0>bound
    xx=x;
    fval=v;
    exitflag=exitflag0;
    bb=bound;
    return;
end

ind=find(abs(x0(M)-round(x0(M)))>TolXInteger);
if isempty(ind)    exitflag=1;
if fval0<bound

x0(M)=round(x0(M));xx=x0;fval=fval0;bb=fval0;
else
        xx=x;fval=v;bb=bound;
    end
    return; end
[row col]=size(ind);
br_var=M(ind(1));
br_value=x(br_var);
flag=abs(br_value-floor(br_value)-0.5);
```

```
for i=2:col
    tempbr_var=M(br_var);
    tempbr_value=x(br_var)
    temp_flag=abs(tempbr_value-
floor(tempbr_value)-0.5);
    if temp_flag>flag
        br_var=tempbr_var;
        br_value=tempbr_value;
        flag=temp_flag; end; End
if isempty(A)    [r c]=size(Aeq);
else    [r c]=size(A); end
A1=[A;zeros(1,c)];
A1(end,br_var)=1;
b1=[b;floor(br_value)];
A2=[A;zeros(1,c)];
A2(end,br_var)=-1;
b2=[b;-ceil(br_value)];
```

IP问题的软件求解

```
%分枝后的第一个子问题的递归求解
[x1,fval1,exitflag1,bound1]=rec_BranchBound...
(f,A1,b1,Aeq,beq,lb,ub,x0,fval0,M,TolXInteger,bound);
exitflag=exitflag1;
if exitflag1>0 & bound1<bound
    xx=x1;
    fval=fval1;
    bound=bound1;
    bb=bound1;
else
    xx=x0;
    fval=fval0;
    bb=bound;
End
%分枝后的第二个子问题的递归求解
[x2,fval2,exitflag2,bound2]=rec_BranchBound...
(f,A2,b2,Aeq,beq,lb,ub,x0,fval0,M,TolXInteger,bound);
if exitflag2>0 & bound2<bound
    exitflag=exitflag2;
    xx=x2;
    fval=fval2;
    bb=bound2;
end
```

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

Matlab使用函数 **intprog(·)** 求解下面的 **MILP问题**:

$$\min f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ lb \le x \le ub \\ x_i \ge 0, i = 1, \cdots, n \\ x_j \in \mathbb{Z}, \qquad (j \in M) \end{cases}$$

[x, fval, exitflag] = **intprog**(c, A, b, Aeq, beq,
lb, ub, M, TolXInteger)

M 代表整数变量的序号. TolXInteger 表示整数容限.

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

求解Example 2-1.

$$
\begin{aligned}
&\max\ y\\
&-x+y\le 1\\
&3x+2y\le 12\\
&2x+3y\le 12\\
&x,y\ge 0\\
&x,y\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

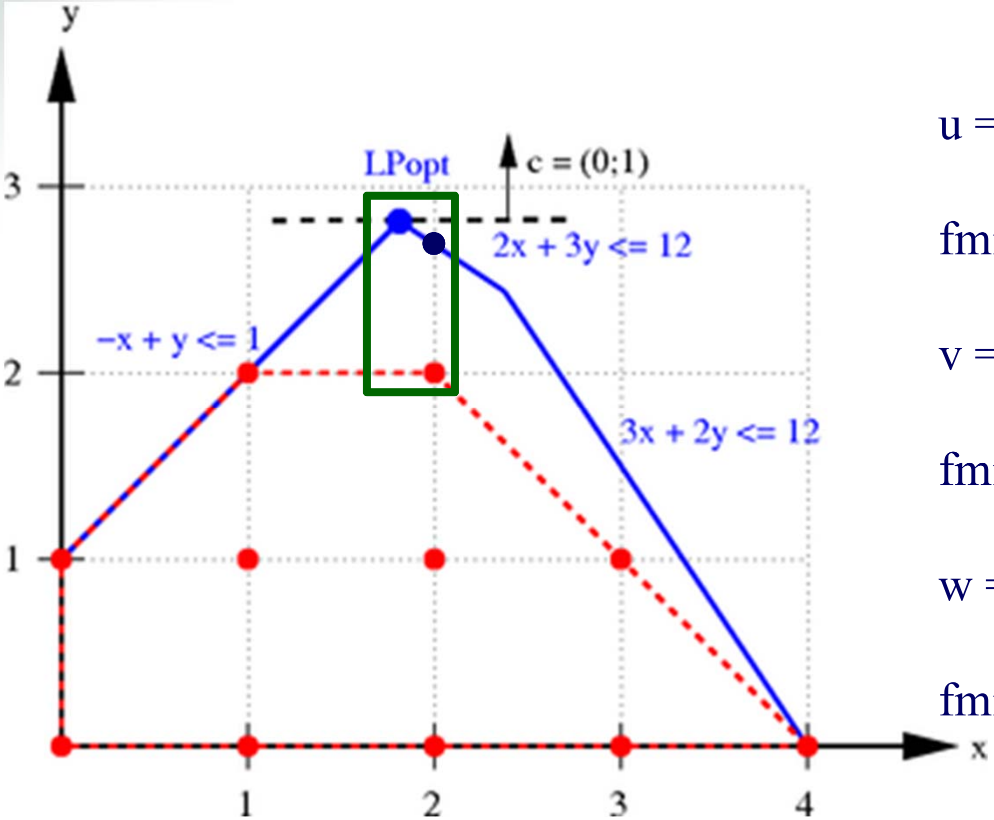
```
c=[0;-1];
A=[-1 1;3 2;2 3];
b=[1;12;12];
lb=[0;0];
M1=[];
M2=[1];
M3=[1;2]; %Consider three different cases
Tol=1e-8;
[u, fmin1] = intprog (c, A, b, [], [], lb, [], M1, Tol)
[v, fmin2] = intprog (c, A, b, [], [], lb, [], M2, Tol)
[w, fmin3] = intprog (c, A, b, [], [], lb, [], M3, Tol)
```

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

求解Example 2-1.

$$
\begin{aligned}
\max\ & y \\
-x + y &\le 1 \\
3x + 2y &\le 12 \\
2x + 3y &\le 12 \\
x, y &\ge 0 \\
x, y &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$




```
u = 1.8000
    2.8000
fmin1 = -2.8000

v = 2.0000
    2.6667
fmin2 = -2.6667

w = 2
    2
fmin3 = -2.0000
```

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

MATLAB在2014a之后版本提供了专门的求解混合整数线性规划问题(MILP)的函数intlinprog(·)。

$$\min_{x} f(x) = c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ lb \le x \le ub \\ x_i \in \mathbb{Z}, (i \in M) \end{cases}$$

[x, fval, exitflag, output] =

intlinprog (c, M, A, b, Aeq, beq, lb, ub, options)

M 代表整数变量的序号，为向量.

IP问题的软件求解

MATLAB软件求解

例2-4：

$$\min_{x} f(x) = -3x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Matlab计算程序：

```
c = [-3;-2;-1]; M = 3;
A = [1,1,1]; b = 7;
Aeq = [4,2,1]; beq = 12;
lb = zeros(3,1); ub = [Inf;Inf;1];
x = intlinprog(f,M,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

```
LP: Optimal objective value is -12.000000.
Optimal solution found.
x = 0
      5.5000
      1.0000
```

IP问题—MATHEMATICA软件求解

MATHEMATICA软件提供的**Minimize**函数、**Maximize**函数、**NMinimize**函数及**NMaximize**等函数可以求解IP问题。

以**Minimize**函数为例，给出其几种常用的调用格式如下：

- **Minimize** $[f,\ x]$

  返回以x为自变量的函数f的最小值。

- **Minimize** $[f,\ \{x, y, \cdots\}]$

  返回以$x, y, \cdots$为自变量的函数f的最小值。

- **Minimize** $[\{f, Cons\},\ \{x, y, \cdots\}]$

  根据约束条件Cons，得出函数f的最小值。

- **Minimize** $[\{f, Cons\},\ \{x, y, \cdots\},\ dom]$

  得出函数f在约束条件Cons下的最小值，其中函数含有域dom上指定的优化变量，典型的有实数域Reals或整数域Integers。

IP问题—MATHEMATICA软件求解

该函数的其他相关说明如下：

1. Minimize返回形如 $\{f_{\min}, \{x \to x_{\min}, y \to y_{\min}, \cdots\}\}$ 的列表；
2. Cons可以包含等式约束、不等式约束或逻辑组合约束；
3. 如果f和Cons均为线性表达式或多项式，函数通常返回一个全局最小值；
4. 当给定精确输入时，Minimize返回精确结果；
5. 如果没有指定优化变量的域，所有变量被当作实数处理；
6. 指定某个变量取整数值，可以通过$x \in$ Integers或Element[x, Integers]实现；
7. 如果有多个点对应相同的最小值，函数只返回一个点；
8. 通过Minimize [f, x, WorkingPrecision $\to n$]命令返回n位精度计算结果；
9. 与Minimize相对应的函数Maximize可以直接求最大值，无须转换求解；
10. 与Minimize相对应的另外一个NMinimize函数可以返回数值最优解，该函数试图找到全局极小值，但对于一些非线性优化问题，可能会返回局部极小值。

IP问题—MATHEMATICA软件求解

Minimize[·]函数计算的若干基本实例：

(1) $\min f = 2x + 3y - z$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 1 \le x + y + z \le 2 \\ 1 \le x - y + z \le 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

In[1] = Minimize[{2x + 3y − z,

1 ≤ x + y + z ≤ 2&&1 ≤ x − y + z

≤ 2&&x − y − z == 3},{x, y, z}]

Out[1] = {3,{x → 2, y → − 1/2 ,

z → − 1/2}}

In[2] = Minimize[{2x + 3y − z,

1 ≤ x + y + z ≤ 2&&

1 ≤ x − y + z ≤ 2&&

x − y − z == 3&&

{x, y, z} ∈ Integers},{x, y, z}]

Out[2] = {5,{x → 2, y → 0, z → −1}}

(2) $\min f = 2x + 3y - z$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 1 \le x + y + z \le 2 \\ 1 \le x - y + z \le 2 \\ x - y - z = 3 \\ x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

IP问题—MATHEMATICA软件求解

Minimize[·]函数计算的若干基本实例：

(3) $\max f = 3x + y$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x + y \le 3.2 \\ 2x - y \le 1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Minimize函数返回{13/4,{$x \to$ 1/2,$y \to$ 11/4}}形式结果；

NMinimize函数返回{3.25,{$x \to$ 0.5,$y \to$ 2.75}}形式结果；

In[3] = Maximize[{3x + y,

$x + y \le 3.2$&&$2x - y \le 1$&&

$x \in$ Integers},{x,y}]

Out[3] = {5.2,{$x \to 1$,$y \to 2.2$}}

(4) $\min f = x + y$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x + 2y \ge 7 \\ x + 2y \ge 6 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Minimize[·]函数求解物品最优分配方案问题：

$$p = \{15,45,100,70,50,75,200,90,25\};$$

$$\mathrm{V} = \{1000,1500,2000\};$$

$$v = \begin{Bmatrix} 400,300,150,250,450,760,190,200, \\ 350,500,450,320,100,700,450,250 \end{Bmatrix};$$

$$\mathrm{sump} = \mathrm{Sum}[p[[i]], \{i, 1,9\}];$$

$$\mathrm{temp1} = \{1,1,1\};$$

$$x = \begin{Bmatrix} \mathrm{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12,} \\ \mathrm{x13, x14, x15, x16, x17, x18, x19, x20, x21, x22, x23, x24,} \\ \mathrm{x25, x26, x27, x28, x29, x30, x31, x32, x33, x34, x35, x36,} \\ \mathrm{x37, x38, x39, x40, x41, x42, x43, x44, x45, x46, x47, x48} \end{Bmatrix};$$

$$\begin{aligned} f \\ = -p[[1]]\mathrm{temp1}.\{\mathrm{x22, x23, x24}\} - p[[2]]\mathrm{temp1}.\{\mathrm{x25, x26, x27}\} \\ - p[[3]]\mathrm{temp1}.\{\mathrm{x28, x29, x30}\} - p[[4]]\mathrm{temp1}.\{\mathrm{x31, x32, x33}\} \\ - p[[5]]\mathrm{temp1}.\{\mathrm{x34, x35, x36}\} - p[[6]]\mathrm{temp1}.\{\mathrm{x37, x38, x39}\} \\ - p[[7]]\mathrm{temp1}.\{\mathrm{x40, x41, x42}\} - p[[8]]\mathrm{temp1}.\{\mathrm{x43, x44, x45}\} \\ - p[[9]]\mathrm{temp1}.\{\mathrm{x46, x47, x48}\} + \mathrm{sump}; \end{aligned}$$

Minimize[·]函数求解物品最优分配方案问题：

$$\mathrm{Cons1} = v.\{\mathrm{x1},\mathrm{x4},\mathrm{x7},\mathrm{x10},\mathrm{x13},\mathrm{x16},\mathrm{x19},\mathrm{x22},\mathrm{x25},\mathrm{x28},\mathrm{x31},\mathrm{x34},\mathrm{x37},\mathrm{x40},\mathrm{x43},\mathrm{x46}\} \leq \mathrm{V}[[1]];$$

$$\mathrm{Cons2} = v.\{\mathrm{x2},\mathrm{x5},\mathrm{x8},\mathrm{x11},\mathrm{x14},\mathrm{x17},\mathrm{x20},\mathrm{x23},\mathrm{x26},\mathrm{x29},\mathrm{x32},\mathrm{x35},\mathrm{x38},\mathrm{x41},\mathrm{x44},\mathrm{x47}\} \leq \mathrm{V}[[2]];$$

$$\mathrm{Cons3} = v.\{\mathrm{x3},\mathrm{x6},\mathrm{x9},\mathrm{x12},\mathrm{x15},\mathrm{x18},\mathrm{x21},\mathrm{x24},\mathrm{x27},\mathrm{x30},\mathrm{x33},\mathrm{x36},\mathrm{x39},\mathrm{x42},\mathrm{x45},\mathrm{x48}\} \leq \mathrm{V}[[3]];$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cons4} = \mathrm{x1}+\mathrm{x2}+\mathrm{x3} == 1\&\&\mathrm{x4}+\mathrm{x5}+\mathrm{x6} == 1\&\&\mathrm{x7}+\mathrm{x8}+\mathrm{x9} \\
&== 1\&\&\mathrm{x10}+\mathrm{x11}+\mathrm{x12} == 1\&\&\mathrm{x13}+\mathrm{x14}+\mathrm{x15} == 1\&\&\mathrm{x16}+\mathrm{x17}+\mathrm{x18} \\
&== 1\&\&\mathrm{x19}+\mathrm{x20}+\mathrm{x21} == 1\&\&\mathrm{x22}+\mathrm{x23}+\mathrm{x24} \leq 1\&\&\mathrm{x25}+\mathrm{x26}+\mathrm{x27} \\
&\leq 1\&\&\mathrm{x28}+\mathrm{x29}+\mathrm{x30} \leq 1\&\&\mathrm{x31}+\mathrm{x32}+\mathrm{x33} \leq 1\&\&\mathrm{x34}+\mathrm{x35}+\mathrm{x36} \\
&\leq 1\&\&\mathrm{x37}+\mathrm{x38}+\mathrm{x39} \leq 1\&\&\mathrm{x40}+\mathrm{x41}+\mathrm{x42} \leq 1\&\&\mathrm{x43}+\mathrm{x44}+\mathrm{x45} \\
&\leq 1\&\&\mathrm{x46}+\mathrm{x47}+\mathrm{x48} \leq 1;
\end{aligned}$$

Minimize[·]函数求解物品最优分配方案问题：

$$\text{Cons5} = 0 \le x1 \le 1\&\&0 \le x2 \le 1\&\&0 \le x3 \le 1\&\&0 \le x4 \le 1\&\&0 \le x5 \le 1\&\&0 \le x6 \le 1\&\&0 \le x7 \le 1\&\&0 \le x8 \le 1\&\&0 \le x9 \le 1\&\&0 \le x10 \le 1\&\&0 \le x11 \le 1\&\&0 \le x12 \le 1\&\&0 \le x13 \le 1\&\&0 \le x14 \le 1\&\&0 \le x15 \le 1\&\&0 \le x16 \le 1\&\&0 \le x17 \le 1\&\&0 \le x18 \le 1\&\&0 \le x19 \le 1\&\&0 \le x20 \le 1\&\&0 \le x21 \le 1\&\&0 \le x22 \le 1\&\&0 \le x23 \le 1\&\&0 \le x24 \le 1\&\&0 \le x25 \le 1\&\&0 \le x26 \le 1\&\&0 \le x27 \le 1\&\&0 \le x28 \le 1\&\&0 \le x29 \le 1\&\&0 \le x30 \le 1\&\&0 \le x31 \le 1\&\&0 \le x32 \le 1\&\&0 \le x33 \le 1\&\&0 \le x34 \le 1\&\&0 \le x35 \le 1\&\&0 \le x36 \le 1\&\&0 \le x37 \le 1\&\&0 \le x38 \le 1\&\&0 \le x39 \le 1\&\&0 \le x40 \le 1\&\&0 \le x41 \le 1\&\&0 \le x42 \le 1\&\&0 \le x43 \le 1\&\&0 \le x44 \le 1\&\&0 \le x45 \le 1\&\&0 \le x46 \le 1\&\&0 \le x47 \le 1\&\&0 \le x48 \le 1;$$

$$\text{cons} = \text{Cons1\&\&Cons2\&\&Cons3\&\&Cons4\&\&Cons5};$$

$$\text{Timing}[\text{Minimize}[\{f, \text{cons}\}, x, \text{Integers}]]$$

两种优化软件的优化结果比较：

$$\{26.875, \{180, \{x1 \to 0, x2 \to 0, x3 \to 1, x4 \to 1, x5 \to 0, x6 \to 0, x7 \to 0, x8 \to 0, x9 \to 1, x10 \to 0, x11 \to 0, x12 \to 1, x13 \to 0, x14 \to 0, x15 \to 1, x16 \to 0, x17 \to 1, x18 \to 0, x19 \to 0, x20 \to 1, x21 \to 0, x22 \to 0, x23 \to 0, x24 \to 0, x25 \to 0, x26 \to 0, x27 \to 0, x28 \to 0, x29 \to 0, x30 \to 1, x31 \to 0, x32 \to 0, x33 \to 0, x34 \to 0, x35 \to 0, x36 \to 0, x37 \to 0, x38 \to 1, x39 \to 0, x40 \to 1, x41 \to 0, x42 \to 0, x43 \to 0, x44 \to 1, x45 \to 0, x46 \to 0, x47 \to 0, x48 \to 1\}\}\}$$

Minimize

fmin = 180

x_pos =
3,4,9,12,15,17,20,
30,38,40,44,48

Time: 26.875

bintprog()

fmin = 180

x_pos =
2,6,8,12,13,18,21,
30,37,41,43,47

Time: 154.2969