计算机系 计84 张鹤潇 2018011365

Email:731931282@qq.com

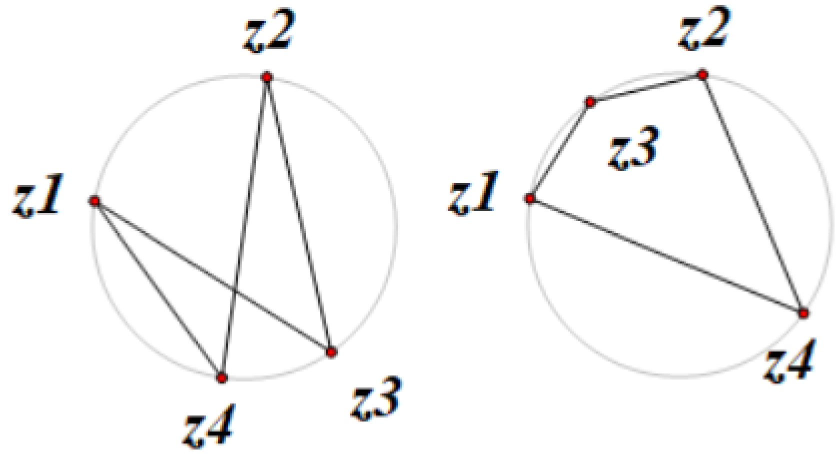
2019春 复变函数引论(1) 开卷试题

第一题 :设 z_1, z_2, z_3, z_4是复平面上互不相同的四点.

证明z_1, z_2, z_3, z_4共广义圆的充要条件是 $\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} / \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in R.$

并给出共线或共圆的具体条件，由此得出复平面内n个相异的点共广义圆的充要条件，$n > 3.$

证明:



由平面几何知识可知, z_1, z_2, z_3, z_4共圆等价于

$\angle z_1 z_4 z_2 = \angle z_1 z_3 z_2$或$\angle z_1 z_4 z_2 + \angle z_1 z_3 z_2 = \pi$

当四点共线时，$\angle z_1 z_4 z_2$与$\angle z_1 z_3 z_2$取0或π, 上述条件仍成立.

故四点共广义圆等价于$\angle z_1 z_4 z_2 = \angle z_1 z_3 z_2$或$\angle z_1 z_4 z_2 + \angle z_1 z_3 z_2 = \pi$

记 $\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}=\frac{|z_4-z_1|}{|z_4-z_2|}e^{i\theta_1},\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{|z_3-z_1|}{|z_3-z_2|}e^{i\theta_2},\theta_1,\theta_2\in(-\pi,\pi]$

$|\theta_1|$表示由z_4-z_1到z_4-z_2的旋转角的大小,$|\theta_2|$表示由z_3-z_1到z_3-z_2的旋转角的大小.

即: $|\theta_1|=\angle z_1z_4z_2,|\theta_2|=\angle z_1z_3z_2$

考虑到z_3,z_4地位的等价性,不妨设$\theta_1>\theta_2$

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\Big/\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{|z_4-z_1||z_3-z_2|}{|z_4-z_2||z_3-z_1|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\Big/\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\in R$等价于$\theta_1=\theta_2$或$\theta_1-\theta_2=\pi$

若$\theta_1=\theta_2$,则$\angle z_1z_4z_2=\angle z_1z_3z_2$

若$\theta_1-\theta_2=\pi$,考虑到$\theta_1,\theta_2\in(-\pi,\pi]$,有$\theta_1=\angle z_1z_4z_2,\theta_2=-\angle z_1z_3z_2$

故 $\angle z_1z_4z_2+\angle z_1z_3z_2=\pi$

故 z_1,z_2,z_3,z_4共广义圆的充要条件是 $\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\Big/\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\in R$

显然,在四点共广义圆的情形下,$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2},\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$要么同为实数,要么同不为实数.

若四点共线,则$\theta_1,\theta_2\in\{0,\pi\}$,即$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2},\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\in R.$

若四点共圆,则$\theta_1,\theta_2\notin\{0,\pi\}$,即$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2},\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\notin R.$

进一步,复平面内n个相异的点$z_1,z_2,...,z_n$共广义圆的充要条件是

其中任意四点$z_{k1},z_{k2},z_{k3},z_{k4}$都满足$\frac{z_{k4}-z_{k1}}{z_{k4}-z_{k2}}\Big/\frac{z_{k3}-z_{k1}}{z_{k3}-z_{k2}}\in R,\ n>3.$

第五题：已知$Sinz=z\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2})$，黎曼$zeta$函数：$\zeta(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^z}$

(1)证明：$\frac{zCosz}{Sinz}=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)z^{2n}}{\pi^{2n}}.$

(2)证明：$\sum_{k=1}^{n}\frac{\zeta(2k)(-1)^{n-k}}{\pi^{2k}(2n-2k+1)!}+\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=0.$

(3)记$c_n=\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$,证明：$\frac{2n+1}{2}c_n=\sum_{k=1}^{n-1}c_k c_{n-k},n\geq 2,$并求出$c_n$前10项的值．

证明:

$$(1).\text{由}Sinz=z\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2})$$

$$ln(Sinz)=lnz+ln\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2})$$

$$=lnz+\sum_{n=1}^{+\infty}ln(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2})$$

$$\text{考虑到}ln(1-z)=-\sum_{n=1}\frac{z^n}{n}$$

$$ln(Sinz)=lnz+\sum_{n=1}^{+\infty}ln(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2})$$

$$=lnz-\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{kn^{2k}\pi^{2k}}$$

$$=lnz-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)z^{2k}}{k\pi^{2k}}$$

上式两边对z求导，可得$\frac{zCosz}{Sinz}=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)z^{2n}}{\pi^{2n}}.$

(2).由(1)的结论，对$Cosz$和$Sinz$在$z=0$处作泰勒展开，可得：

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k)!}=(1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)z^{2n}}{\pi^{2n}})\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

整理得：$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}nz^{2n+1}}{(2n+1)!}=(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)z^{2k}}{\pi^{2k}})(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}z^{2j-1}}{(2j-1)!})$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{\zeta(2n)(-1)^{n-k}}{\pi^{2k}(2n-2k+1)!})z^{2n+1}$$

对比两边 z 的系数，可得：$$\frac{(-1)^{n-1}nz^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\zeta(2n)(-1)^{n-k}}{\pi^{2k}(2n-2k+1)!}$$

即：$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\zeta(2k)(-1)^{n-k}}{\pi^{2k}(2n-2k+1)!}+\frac{(-1)^{n}n}{(2n+1)!}=0.$$

(3). 由 $c_n=\dfrac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$ 及 (2) 的结论，容易求得 $c_1=\dfrac{1}{6}$

考虑到 $$(\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^{2n+1})'=\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)c_nz^{2n}$$
$$(\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^{2n})^2=\sum_{n=2}^{+\infty}(\sum_{k=1}^{n-1}c_kc_{n-k})z^{2n}$$

$$\frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^{2n+1})'-(\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^{2n})^2=\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{2n+1}{2}c_n-\sum_{k=1}^{n-1}c_kc_{n-k})z^{2n}+\frac{3}{2}c_1z^2$$
$$=\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{2n+1}{2}c_n-\sum_{k=1}^{n-1}c_kc_{n-k})z^{2n}+\frac{1}{4}z^2$$

由 (1) 的结论，$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^{2n}=\frac{1-zCotz}{2}$$

$$(\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^{2n+1})'=(z\frac{1-zCotz}{2})'=\frac{1}{2}(1-2zCotz+z^2Csc^2z)$$
$$(\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^{2n})^2=(\frac{1-zCotz}{2})^2=\frac{1}{4}(1-2zCotz+z^2Cot^2z)$$

故 $$\frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^{2n+1})'-(\sum_{n=1}^{+\infty}c_nz^{2n})^2=\frac{1}{4}z^2$$

可知 $\forall n\geq 2,\ \dfrac{2n+1}{2}c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}c_kc_{n-k}$

证毕.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
c_n	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{945}$	$\frac{1}{9450}$	$\frac{1}{93555}$
n	6	7	8	9	10
c_n	$\frac{691}{638512875}$	$\frac{2}{18243225}$	$\frac{3617}{325641566250}$	$\frac{43867}{38979295480125}$	$\frac{174611}{1531329465290625}$

第七题 :已知 $|z_1 - z_2| + r_1 < r_2, z_1 \neq z_2$,求一分式线性映射

将异心圆环域 $D_1 = \{z| \ |z - z_1| > r_1, |z - z_2| < r_2\}$映射成

同心圆环域 $D_2 = \{z|r < |z| < 1\}$或 $D_3 = \{z|1 < |z| < r\}$.

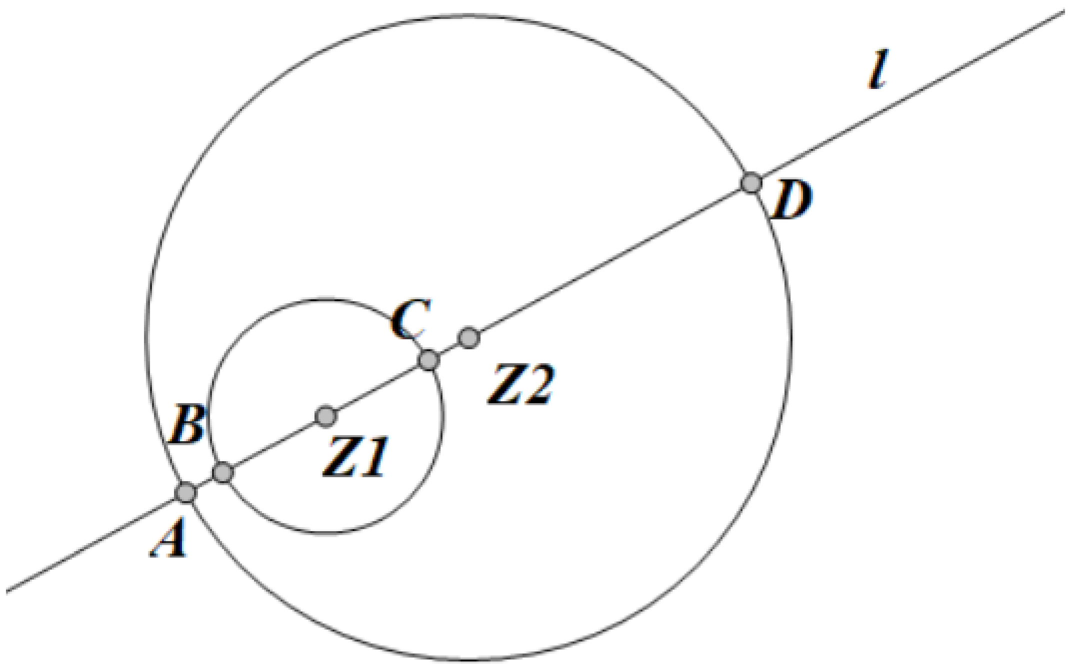
解:记 $O_1 : z = z_1 + r_1 e^{i\theta}, O_2 : z = z_2 + r_2 e^{i\theta}, \theta \in (0, 2\pi)$

再记 $\theta_0 = arg(z_2 - z_1), r_0 = |z_2 - z_1|$,由已知 $r_1, r_0 > 0, r_2 > r_0 + r_1$

设 g过 z_1、z_2的直线 l 依次交圆 O_2, O_1于点 A, B, C, D,有:

$$A = z_2 - r_2 e^{i\theta_0}, D = z_2 + r_2 e^{i\theta_0}$$

$$B = z_1 - r_1 e^{i\theta_0}, C = z_1 + r_1 e^{i\theta_0}$$



下面对 O_1,O_2 进行分式线性映射 w_1：

$$w_1=\frac{z-A}{D-z}=\frac{z-(z_2-r_2e^{i\theta_0})}{z_2+r_2e^{i\theta_0}-z}$$

在 w_1 下，A 被映射为原点，D 被映射为 x 轴上无穷远点.

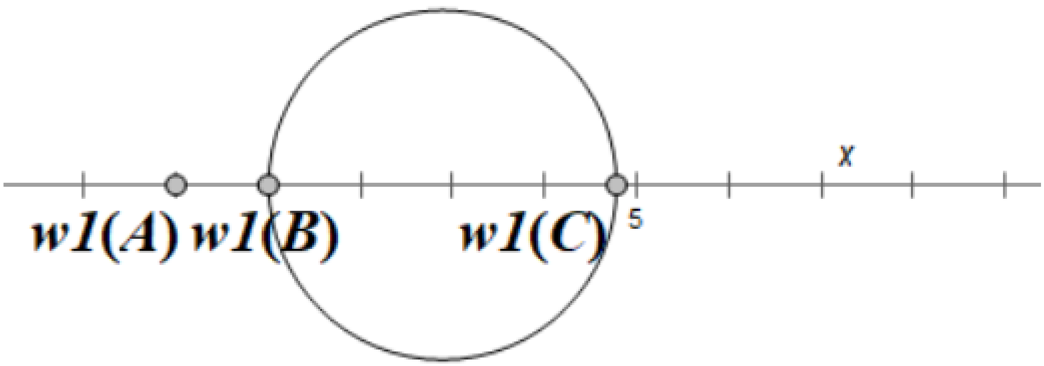
$$\begin{aligned}w_1(B)&=\frac{z_1-r_1e^{i\theta_0}-(z_2-r_2e^{i\theta_0})}{z_2+r_2e^{i\theta_0}-(z_1-r_1e^{i\theta_0})}\\&=\frac{r_2-r_1-r_0}{r_2+r_1+r_0}\\w_1(C)&=\frac{r_2+r_1-r_0}{r_2-r_1+r_0}\end{aligned}$$

显然 $w_1(B),w_1(C)\in R_+$，且 $\dfrac{w_1(B)}{w_1(C)}=\dfrac{(r_2-r_1)^2-r_0^2}{(r_2+r_1)^2-r_0^2}<1$

可见,在 w_1 下，B、C 分别被映射为 x 轴上两点,如图所示.

由分式线性映射的保圆性，在 w_1 下 O_2 被映射为 x 轴，

O_1 被映射以 x 轴正半轴上的线段 $w_1(B)w_1(C)$ 为直径的圆.



记 $O_3=e^{i\theta},O_4=re^{i\theta},\theta\in(0,2\pi),r>0$且$r\neq 1.$

设x轴依次交圆O_4,O_3于点A',B',C',D',有：

$$A'=-r,D'=r$$

$$B'=-1,C'=1$$

设$r>1$,对O_3，O_4进行分式线性映射$w_2=\dfrac{z+r}{r-z}$

在w_2下，A'被映射为原点，D'被映射为x轴上无穷远点.

$$w_2(B')=\frac{r-1}{r+1}$$

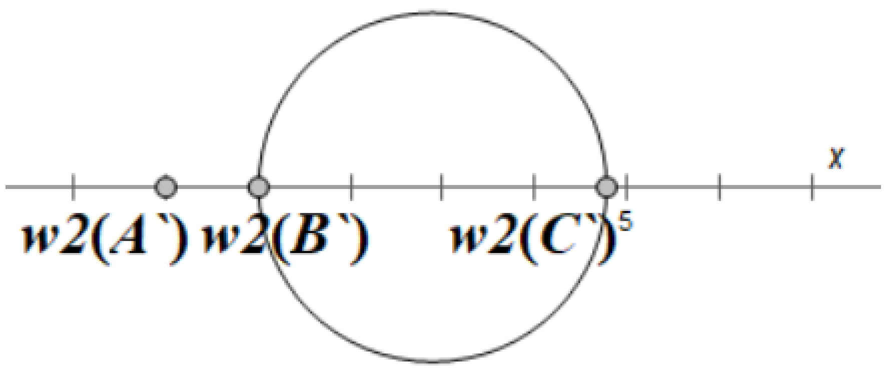
$$w_2(C')=\frac{r+1}{r-1}$$

显然$w_2(B'),w_2(C')\in R_+$，且$\dfrac{w_2(B')}{w_2(C')}=\dfrac{(r-1)^2}{(r+1)^2}<1$

可见,在w_2下，B'、C'分别被映射为x轴上两点,如图所示.

由分式线性映射的保圆性，在w_2下O_4被映射为x轴，

O_3被映射以x轴正半轴上的线段$w_2(B')w_2(C')$为直径的圆.



下面求伸缩映射$w_3=kz,k\in R_+$

使得在w_3作用下，$w_1(O_1)$和$w_1(O_2)$分别被映射为$W_2(O_3)$和$w_3(O_4)$

显然，只要使得$w_3(w_1(B))=w_2(B'),w_3(w_1(C))=w_2(C')$即可

即：$\begin{cases} k\frac{r_2-r_1-r_0}{r_2+r_1+r_0}=\frac{r-1}{r+1} \\ k\frac{r_2+r_1-r_0}{r_2-r_1+r_0}=\frac{r+1}{r-1} \end{cases}$

解得：$\begin{cases} k=\sqrt{\frac{(r_2+r_0)^2-r_1^2}{(r_2-r_0)^2-r_1^2}} \\ r=\frac{r_1^2+r_2^2-r_0^2+\sqrt{r_1^4+r_2^4+r_0^4-2r_1^2r_2^2-2r_0^2r_2^2-2r_1^2r_0^2}}{2r_1r_2} \end{cases}$

容易验证，在$r_1,r_0>0,r_2>r_0+r_1$的条件下,$r>1$恒成立;

在$w_1.w_3,w_2^{-1}$的作用下,$D_1=\{z|\,|z-z_1|>r_1,|z-z_2|<r_2\}$映射为$D_3=\{z|1<|z|<r\}$

即$w(D_1)=w_2^{-1}(w_3(w_1(D_1)))=D_3$.

这就找到了欲求的w,下面将它具体求出.

由$w_2=\dfrac{z+r}{r-z}$,知$w_2^{-1}=\dfrac{z-1}{z+1}r$

$$w_2^{-1}(w_3)=\frac{kz-1}{kz+1}r.$$

代入$w_1=\dfrac{z-(z_2-r_2e^{i\theta_0})}{z_2+r_2e^{i\theta_0}-z}$

得$w=\dfrac{[k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})-(z_2+r_2e^{i\theta_0}-z)]r}{k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})+z_2+r_2e^{i\theta_0}-z}$

当$r<1$时，$w_2=\dfrac{z+1}{1-z},w_2^{-1}=\dfrac{z-1}{z+1}$

$$w_2(B')=\frac{1-r}{r+1}$$

$$w_2(C')=\frac{r+1}{1-r}$$

令$\begin{cases} k\frac{r_2-r_1-r_0}{r_2+r_1+r_0}=-\frac{r-1}{r+1} \\ k\frac{r_2+r_1-r_0}{r_2-r_1+r_0}=-\frac{r+1}{r-1} \end{cases}$

解得：$\begin{cases} k=\sqrt{\frac{(r_2+r_0)^2-r_1^2}{(r_2-r_0)^2-r_1^2}} \\ r=\frac{r_1^2+r_2^2-r_0^2-\sqrt{r_1^4+r_2^4+r_0^4-2r_1^2r_2^2-2r_0^2r_2^2-2r_1^2r_0^2}}{2r_1r_2} \end{cases}$

容易验证，在$r_1,r_0>0,r_2>r_0+r_1$的条件下,$r<1$恒成立;

此时，可以求得$w=\dfrac{k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})-(z_2+r_2e^{i\theta_0}-z)}{k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})+z_2+r_2e^{i\theta_0}-z}$

综上所述，将D_1映射为$D_2=\{z|r<|z|<1\}$的分式线性映射：

$$w=\frac{k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})-(z_2+r_2e^{i\theta_0}-z)}{k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})+z_2+r_2e^{i\theta_0}-z}$$

其中，$\begin{cases} r=\frac{r_1^2+r_2^2-|z_2-z_1|^2-\sqrt{r_1^4+r_2^4+|z_2-z_1|^4-2r_1^2r_2^2-2r_2^2|z_2-z_1|^2-2r_1^2|z_2-z_1|^2}}{2r_1r_2} \\ k=\sqrt{\frac{(r_2+|z_2-z_1|)^2-r_1^2}{(r_2-|z_2-z_1|)^2-r_1^2}} \\ \theta_0=arg(z_2-z_1) \end{cases}$

将D_1映射为$D_3=\{z|1<|z|<r\}$的分式线性映射：

$$w=\frac{k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})-(z_2+r_2e^{i\theta_0}-z)}{k(z-z_2+r_2e^{i\theta_0})+z_2+r_2e^{i\theta_0}-z}r$$

其中，$\begin{cases} r=\frac{r_1^2+r_2^2-|z_2-z_1|^2+\sqrt{r_1^4+r_2^4+|z_2-z_1|^4-2r_1^2r_2^2-2r_2^2|z_2-z_1|^2-2r_1^2|z_2-z_1|^2}}{2r_1r_2} \\ k=\sqrt{\frac{(r_2+|z_2-z_1|)^2-r_1^2}{(r_2-|z_2-z_1|)^2-r_1^2}} \\ \theta_0=arg(z_2-z_1) \end{cases}$