图论复习提纲

Warshall算法

分支定界法

便宜算法

D算法

Ford算法

关键路径算法

中国邮路算法

Huffman算法

Kruskal算法

Prim算法

匈牙利算法

最大(最小)权匹配算法

Ford-Fulkerson算法

最小费用流算法

欧拉回路

简单连通图存在欧拉回路充要条件: 没有度为奇数的节点.

存在欧拉道路充要条件：有且仅有两个度为奇数的节点

哈密顿回路

存在性判定:

简单图存在Hamilton回路**充分条件**，任意两点u,v，$d(u)+d(v)\geq n$.

存在Hamilton道理充分条件，任意两点u,v，$d(u)+d(v)\geq n-1$.

推论：若简单图G(n>2)的闭合图是完全图，则G有Hamilton回路.

不存在的判定方法:

对于二分图$G=(V_1,V_2,E)$,若$|V_1|\neq|V_2|$，G一定无哈密顿回路；若$||V_1|-|V_2||>1$，G一定无哈密顿道路.

若G中有哈密顿回路，从G中去掉K个节点及其所关联的边得到G'，G'的连通支不超过k个。

旅行商问题

分支定界法

便宜算法

最短路径

D算法

Ford算法

关键路径

PT图，PERT图

关键路径算法

中国邮路

L是无向连通图G的最佳邮路的条件：

- G中的每条边最多重复一次；
- 在G的任一个回路上，重复边的长度之和不超过该回路长度的一半。

构造中国邮路

- 找出度为奇的点
- 依据条件1构造邮路，保证计算重复边之后度都是偶数
- 由条件2对所有回路进行判断，若不满足条件，则令回路中的重复边不重复，不重复边变为重复。

更优算法：最小权匹配

树

$m = n - 1$，无回路

树的计数

有向连通图G=(V,E)**关联矩阵B的秩**$ranB$= $n-1$. 证明要点：

- 先证明$ranB < n$
- 设$ranB = l$, 考虑矩阵的分块, 证明$l \geq n-1$

在上述关联矩阵B中划去任意结点v_k所对应的行，得到一个$(n-1) \times m$的矩阵B_k，称为G的**一个基本关联矩阵**.

支撑树的计数

有向连通图G=(V,E)的**不同树的树目是**$det(B_k B_k^T)$.

- 若不含特定边e, 取$G' = G - e$.
- 若必含特定边e，可将e的两个端点收缩成一个点，则得到n-1个结点的新图G'.

根树的计数

若以v_k为根节点，设$\overline{B}_k$表示基本关联矩阵B_k中将全部1改为0之后的矩阵，**则以v_k为根的根树数目是$det(\overline{B}_k B_k^T)$.**

- 若不含特定边e, 取$G' = G - e$.
- 若必含特定边e，可将不可能包含的边删除.

回路矩阵

当有向图$G=(V,E)$的树T确定后，**每条余树边e**与T的子集所对应的回路称为**基本回路**. 基本回路的方向与余树边e的方向一致.

由全部基本回路矩阵构成的矩阵称为G的**基本回路矩阵**，记为$C_f. ranC_f=m-(n-1)$.

若基本关联矩阵Bk和基本回路矩阵Cf的边次序一致，并设$C_f=(I,C_{f12})$，$Bk=(B_{11},B_{12})$，分别对应余树边和树枝边，则$C_{f12}=-B_{11}^TB_{12}^{-T}$.

割集矩阵

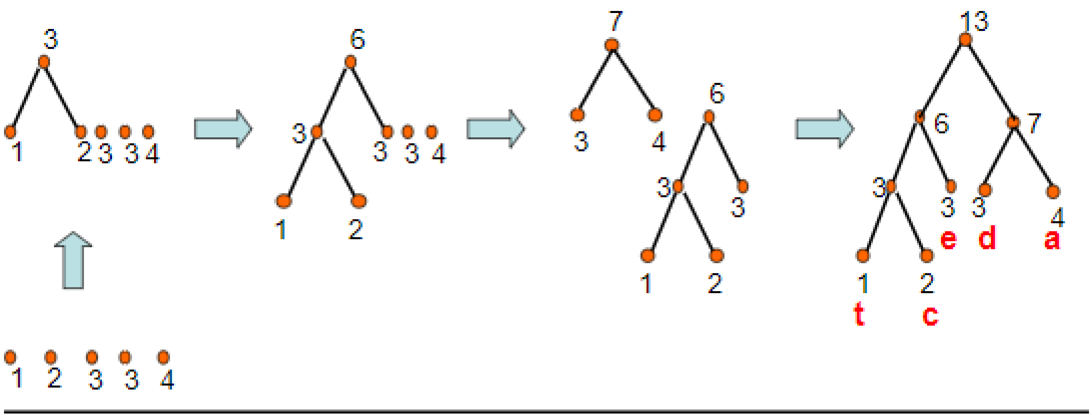
设T是连通图G的一棵树，e_i是一个树枝。对树枝边e_i存在G的割集S_i，Si只包括一条树枝边e_i及某些余树边，且与ei方向一致。Si为G的对应树T的一个**基本割集。**

由全部基本割集组成的矩阵为**基本割集矩阵**,记为$S_f. ranS_f=n-1$.

$S_f=(S_{f1},I),C=(I,C_{f2}),S_{f1}=-C_{f2}^T$.

可知$S_{f1}=B_{12}^{-1}B_{11}$.

Huffman树



最短树

Kruskal算法

Prim算法

平面图

欧拉定理: $d+n-m>=2$, 当且仅当G为平面连通图时取等号.

$m\le 3n-6, d\le 2n-4$,当且仅当G为极大平面图时取等号.

极大平面图

性质:

- G是连通的
- 不存在割边
- 每个域的边界数都是3
- $3d=2m. m=3n-6. d=2n-4$

推论:

- 简单平面图中必定存在度小于6的节点.
- $K_5, K_{3,3}$不是平面图. 证明要点: $K_{3,3}$没有K_3子图

G可平面的充要条件是G不存在K型子图：$K_5, K_{3,3}$增加度为2的点.

图的平面性检测

1.将G从割点分成多个连通支,检查每个连通支。

2.移去自环，移去度为2的节点及其关联的边，在它原来的两个邻点之间加边，移去重边.

反复操作2，最后，若m<9或n<5，G可平面；若m>3n-6，G不可平面.

对偶图

对于平面连通图，G^*与G满足如下关系，$n^*=d, d^*=n, m^*=m, G^{**}=G.$

色数

非空图G, $\gamma(G)$ = 2当且仅当它没有奇回路

最大匹配

匈牙利算法

完全匹配

在二分图G=(X,Y,E)中，X到Y存在完全匹配的充要条件为：对于**X的任意子集A, 恒有|Γ(A)|≥|A|**

- 若二分图G=(X,Y,E)的每个结点xi∈X, 都有d(xi) ≥k, 每个结点yj ∈Y， 都有d(yj) ≤k,则X到Y存在完全匹配.
- 二分图的最大匹配数，与其邻接矩阵的最小覆盖数s相等

最大(最小)权匹配算法

网络流

最大流=最小割切容量

Ford-Fulkerson算法

最小费用流算法

分别为m,n阶循环群,证明G_1与G_2同态当且仅当 $n|m$.

.设G_1,G_2分别为m,n阶循环群,证明G_1与G_2同态当且仅当$n|m$.

证明 必要性：若G_1与G_2同态,那么G_2同构于G_1的某个商群,而商群的阶数必为群阶数的因子,易知$n|m$.

充分性：若$n|m$,设$G_1=\langle a\rangle, G_2=\langle b\rangle$,作对应关系

$$\begin{gathered}\phi: G1 \to G2 \\ a^k \mapsto b^k\end{gathered}$$

先来证明ϕ为映射,设$a^k=a^l$,即$m|(k-l)$,从而$n|(k-l)$,因此

$b^k=b^l$

即$\phi(a^k)=\phi(a^l)$,因此ϕ确实是映射.后面我们则不难证明ϕ为同态满射.所以G_1与G_2同态.