

耦合弹簧振子波动特性 实验报告

2018011365 计 84 张鹤潇

April 21, 2020

目录

1	实验目的	1
2	实验原理	1
3	实验结果	2
3.1	单弹簧振子固有频率	2
3.2	耦合弹簧振子链色散关系	2
3.3	横波简正模式观察	5
4	思考题	6
5	总结反思	6
6	原始数据	7

1 实验目的

- 了解振动及波动现象的特性和关联；
- 学习图像分析、函数拟合等处理实验数据的基本方法。

2 实验原理

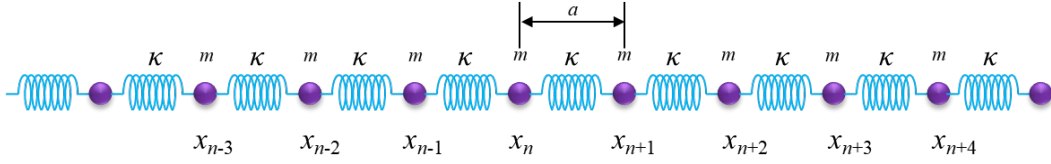


图 1: 一维无限长弹簧振子链

对于由弹簧振子首尾连接构成的一维无限长耦合弹簧振子链。设每个弹簧的自然长度为 a ，第 n 个振子的平衡位置 $x_n = na$ ，其偏离平衡位置的位移记为 u_n ，每个振子所受与之连接的弹簧的作用力正比于该振子和相应近邻振子的位移之差。定义 $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$ ，有：

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \omega_0^2 (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

该方程解的形式为：

$$u_n = A e^{-i(kna - \delta)} e^{i\omega t}$$

代入波数 $k = 2\pi/\lambda$ ，整理得：

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$f = 2f_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (1)$$

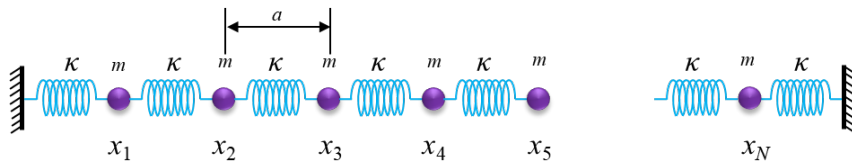


图 2: 一维有限长弹簧振子链

当耦合弹簧振子链长度有限时，设共有 N 个振子，边界条件 $u_0 = u_{n+1} = 0$ ，可以解出波数：

$$k_q = \frac{q\pi}{(N+1)a} \quad (q \text{ 取整数})$$

此耦合体系有 N 个简正模式，其任何自由振动可由简正模式线性叠加而成。

3 实验结果

为了便于计时，我适当调慢了模拟速度 (sim speed)。

3.1 单弹簧振子固有频率

重复测量 5 次，测得单弹簧振子 50 个周期用时 $\bar{T} = 59.6 \text{ s}$ 。(原始数据见表5)

$$f_0 = \frac{50}{\sqrt{2}\bar{T}} = 0.593 \text{ Hz}$$

得到单弹簧振子的固有频率。

3.2 耦合弹簧振子链色散关系

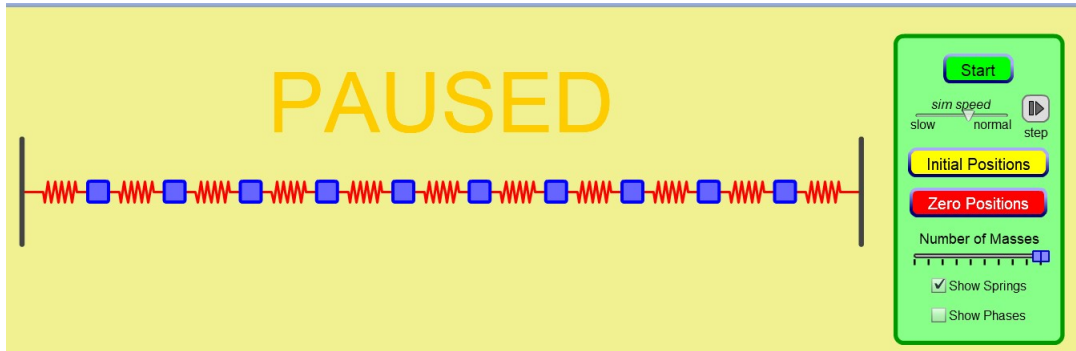


图 3: 平衡时振子位置图

设置振子数量为 10, 测量平衡时振子左边界到弦的左端点的距离，作为振子的平衡位置。

表 1: 平衡时振子位置 (单位: 像素)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_{n0}	167	358	549	739	931	1121	1313	1503	1693	1886

选择简正模式 1、3、5、7、9、10，测量不同简正模式下各个振子振幅最大时与平衡位置间的偏差，并根据其频率与 f_0 的比值计算频率。

表 2: 不同简正模式下振子位置偏差 (单位: 像素)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_{n1}	40	78	108	130	142	142	132	109	77	41
u_{n3}	-100	-131	-72	35	119	119	38	-72	-149	-99
u_{n5}	77	21	-72	-43	59	58	-41	-71	20	79
u_{n7}	-57	47	17	-62	34	33	-60	17	46	-55
u_{n9}	19	-36	39	-30	10	11	-29	38	-38	21
u_{n10}	17	-35	46	-57	61	-60	57	-46	32	-16

表 3: 不同简正模式下的频率

mode	1	3	5	7	9	10
$\frac{f}{f_0}$	0.28	0.83	1.31	1.68	1.92	1.98
$f(Hz)$	0.166	0.492	0.777	0.996	1.138	1.174

用 Origin 拟合公式 $y = y_0 + A \sin(\frac{\pi(x - x_c)}{w})$, 根据

$$u_n = B \sin(\frac{2\pi(n - L/a)}{\lambda/a})$$

对比得 $\frac{\lambda}{a} = 2w$, 进而得到波数 (单位: π/a)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{w}$$

表 4: 不同简正模式下的拟合结果

mode	1	3	5	7	9	10
w	10.9	3.65	2.21	1.57	1.22	1.00
R^2	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.747
$k(\pi/a)$	0.092	0.274	0.452	0.637	0.820	1.00

可见, 除了简正模式 10 以外, 其它五种模式均拟合良好。对于简正模式 10, 我实验了两次, 但数据拟合效果都不佳。在思考题4中, 我对可能的原因做了反思。

以简正模式 1 和 5 为例, 展示 Origin 函数拟合结果如下。

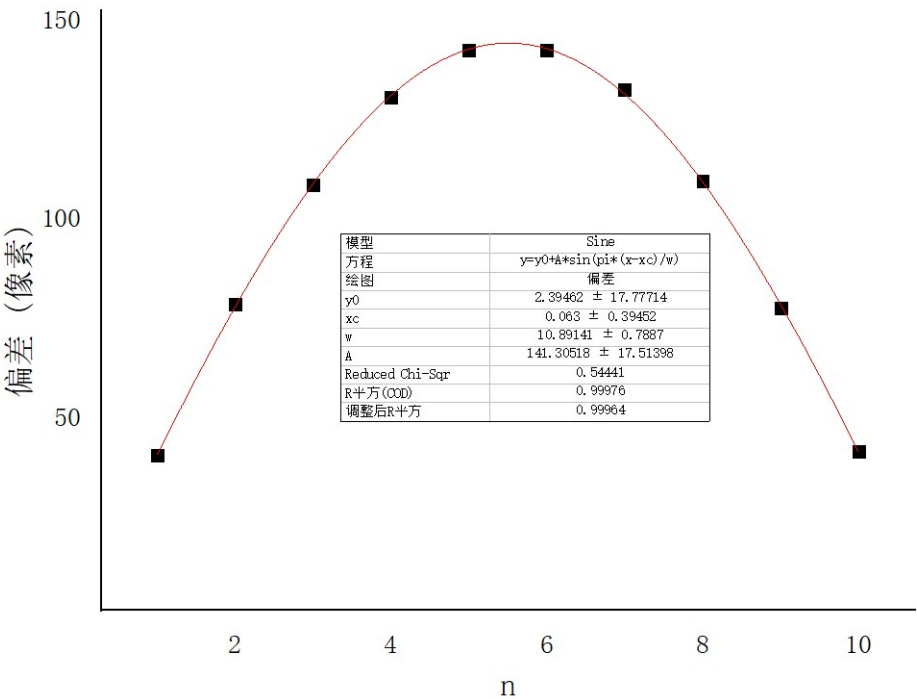


图 4: 简正模式 1 拟合曲线图

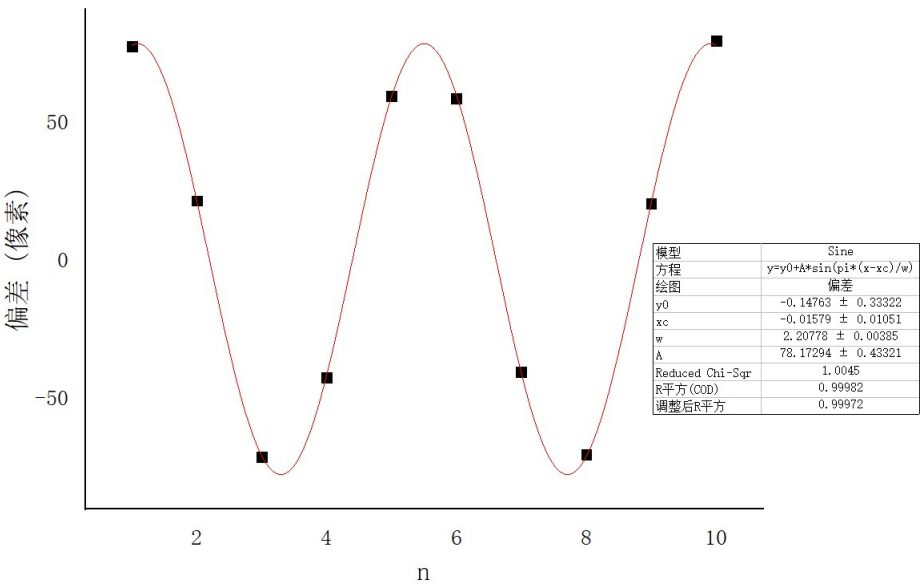


图 5: 简正模式 5 拟合曲线图

综合表3，表4，根据 (1) 式拟合 $f \sim k$ 曲线。

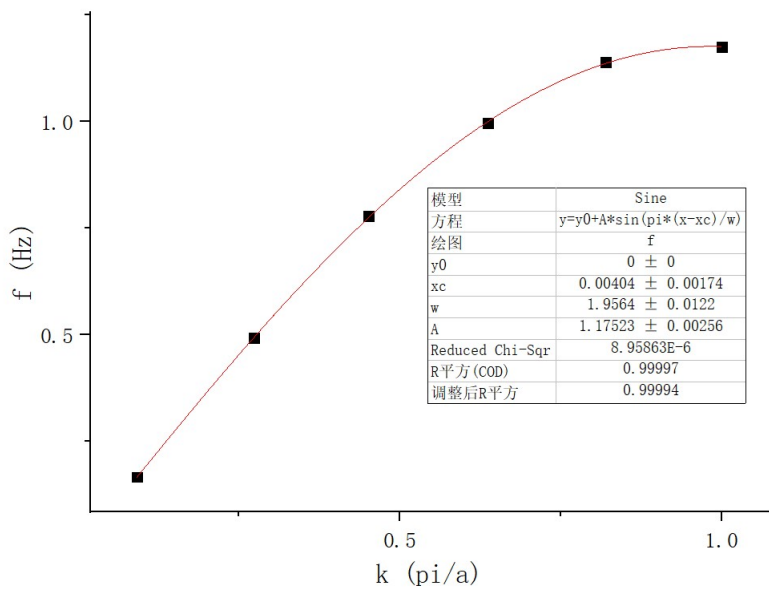


图 6: $f \sim k$ 拟合曲线图

得 $A = 1.175\text{ Hz}$, 理论值 $A_0 = 2f_0 = 1.186\text{ Hz}$, 相对误差 $\frac{|A - A_0|}{A_0} \times 100\% = 0.93\%$.

3.3 横波简正模式观察

观察 $N = 9$ 时不同简正模式的驻波，可以明显地看出波腹波节; 同时，简正模式的编号和波腹波节的数量有着明确的对应关系：设简正模式的编号为 n ，则波腹的数量为 n ，波节（包括两端固定边界）的数量为 $n + 1$ 。

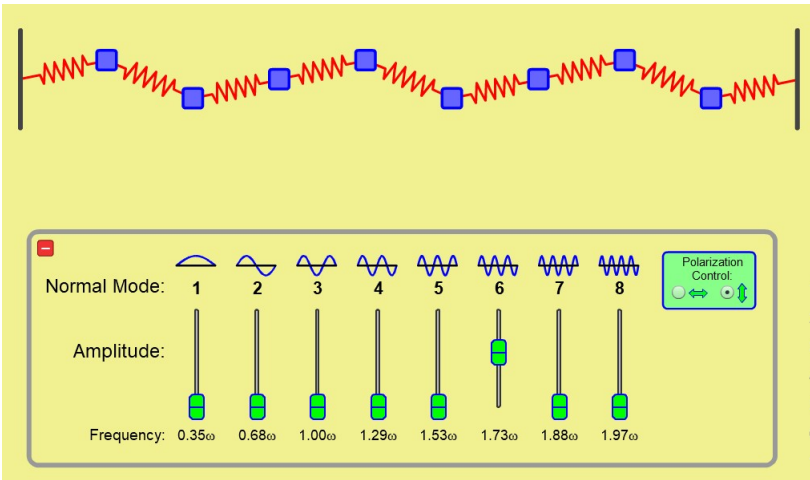


图 7: 横波简正模式

4 思考题

分析离散介质（如弹簧振子链）和连续介质（如琴弦或空气）中波的传输特性。

本实验探究的弹簧振子链属于离散介质，质点由轻弹簧连结。离散介质的简正模式种类数和质点的个数相同。而连续介质可以看作是由无数连续质点的离散系统，因此其有无数个简正模式（形式与离散系统相同）。在两种介质中，任何振动都可以分解为所有简正模式的叠加，但是离散介质中的振动只能分解为有限个简正模式，连续介质中的振动可能具有无限个简正模式。

为什么简正模式 10 的拟合效果较差？

简正模式 10 的频率最高，数据点分布在 4-5 个周期内，数据量又较少，截图时的误差也最大，因此容易出现欠拟合的现象。这种误差还可能是 flash 的帧率有限导致的。

5 总结反思

借助软件进行线上实验，能规避现实实验中可能造成误差的各种复杂因素，从而大大提高实验精度。在本次实验中，我测得的振子位移与振动曲线在大多数模式下拟合良好，最终得到的固有频率误差也比较小，实验总体上说是成功的。

数据分析是本次实验的主要内容。我先尝试用 R 语言拟合函数，但是效果不佳；后又转而使用 Origin 软件，终于取得了理想的效果。不得不说，Origin 采用的图形界面太复杂，对我这种轻度使用者来说很不友善。

希望老师和助教能考虑到线上实验的困难，适当降低要求，淡化分数。

6 原始数据

单个振子 50 个周期时间:

表 5: 单振子 50 个周期时间					
序号	1	2	3	4	5
T(s)	59.1	59.6	60.2	59.5	59.4
$\bar{T}(s)$	$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_i = 59.6$				

六组不同振动模式下的振幅振子:

表 6: 不同简正模式下振子位置 (单位: 像素)										
mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	126	280	440	609	788	978	1181	1393	1615	1844
3	266	488	620	703	812	1002	1275	1574	1824	1984
5	90	337	620	782	871	1062	1354	1574	1672	1807
7	224	311	532	801	896	1087	1373	1486	1647	1941
9	147	393	510	769	920	1110	1341	1465	1730	1864
10	150	392	502	796	869	1181	1255	1549	1660	1901