

阻尼振动与受迫振动 实验报告

2018011365 计 84 张鹤潇

一、 数据处理

任务 1. 阻尼振动

1. 测量最小阻尼时的阻尼比和固有角频率.

表 1 阻尼为 0 时的测量数据

$\theta(^{\circ})$	170	169	167	166	165
	164	163	161	161	159
	158	157	156	155	154
	153	152	151	150	149
	148	147	146	145	144
	143	142	140	139	138
	137	136	135	134	133
	132	131	130	129	128
	127	127	125	125	124
	123	122	121	120	119
$10\overline{T_d}(s)$	14.944	15.003	15.011	15.017	15.024

$$\overline{D} = \frac{1}{I} \sum_{j=1}^I (\ln \theta_{j+I} - \ln \theta_j) = -0.1820$$

$$b = \frac{\overline{D}}{I} = -7.281 \times 10^{-3}$$

$$S_b = \frac{1}{I} \sqrt{\frac{\sum (D_i - \overline{D})^2}{I-1}} = 1.904 \times 10^{-4}$$

$$\text{测量次数 } n = 50 \text{ 时, } \Delta_b = \frac{t_p(n-1)}{\sqrt{n}} S_b = 5.465 \times 10^{-5}$$

$$T_d = \frac{\sum_{i=1}^{50} T_d}{50} = 1.500 \text{ s}$$

周期的不确定度取其 10^{-5} 倍加上其显示值末位变化“1”所对应的量值，即

$$\Delta_{T_d} = 1.015 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\text{又由 } b = -\frac{2\pi}{\sqrt{\zeta^2-1}},$$

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2}} = 1.159 \times 10^{-3}$$

$$\Delta_{\zeta} = -\frac{4\pi^2}{(4\pi^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta_b = -8.698 \times 10^{-6}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1 - \xi^2}} = 4.189 \text{ rad/s}$$

$$\Delta_{\omega_0} = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{\Delta T_d}{T_d}\right)^2 + \left(\frac{\xi \Delta \xi}{1 - \xi^2}\right)^2} = 2.835 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

综上, $\zeta + \Delta_{\zeta} = (1.159 \pm 0.009) \times 10^{-3}$, $\omega_0 + \Delta_{\omega_0} = 4.189 \pm 0.003 \text{ rad/s}$.

2. 阻尼为 2

表 2 阻尼为 2 时的测量数据

$\theta(^{\circ})$	143	131	121	111	102	93	86	79	72	66	61	55
$T_d(\text{s})$	1.501	1.502	1.503	1.503	1.504	1.504	1.505	1.505	1.506	1.505	1.506	1.506

$$\bar{D} = \frac{1}{I} \sum_{j=1}^I (\ln \theta_{j+1} - \ln \theta_j) = -0.5154$$

$$b = \frac{\bar{D}}{I} = -8.591 \times 10^{-2}$$

$$\Delta_b = \frac{t_p(n-1)}{\sqrt{n}} \frac{1}{I} \sqrt{\frac{\sum (D_i - \bar{D})^2}{I-1}} = 7.830 \times 10^{-4}$$

$$T_d = \frac{\sum_{i=1}^{12} T_d}{12} = 1.504 \text{ s}, \Delta_{T_d} = 1.015 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2}} = 1.367 \times 10^{-2}, \Delta_{\zeta} = -\frac{4\pi^2}{(4\pi^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta_b = -1.246 \times 10^{-4}$$

$$Q = \frac{1}{2\xi} = 36.57, \Delta_Q = -\frac{\Delta_{\zeta}}{2\xi^2} = 0.3334$$

$$\tau = -\frac{T_d}{b} = 17.51 \text{ s}, \Delta_{\tau} = \tau \sqrt{\left(\frac{\Delta_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d}\right)^2} = 0.1600 \text{ s}$$

综上 $\zeta + \Delta_{\zeta} = (1.367 \pm 0.012) \times 10^{-2}$, $\tau + \Delta_{\tau} = 17.51 \pm 0.16 \text{ s}$, $Q + \Delta_Q = 36.57 \pm 0.33$,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1-\zeta^2}} = 4.178 \text{ rad/s}, \beta = \frac{1}{\tau} = 5.711 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

3. 阻尼为 3

表 3 阻尼为 3 时的测量数据

$\theta(^{\circ})$	149	133	120	108	97	87	77	69	62	56	49	44
$T_d(\text{s})$	1.501	1.502	1.503	1.503	1.505	1.505	1.505	1.506	1.507	1.506	1.507	1.507

$$\bar{D} = \frac{1}{I} \sum_{j=1}^I (\ln \theta_{j+1} - \ln \theta_j) = -0.6664$$

$$b = \frac{\bar{D}}{I} = -0.1111$$

$$\Delta_b = \frac{t_p(n-1)}{\sqrt{n}} \frac{1}{I} \sqrt{\frac{\sum (D_i - \bar{D})^2}{I-1}} = 2.079 \times 10^{-3}$$

$$T_d = \frac{\sum_{i=1}^{12} T_d}{12} = 1.505 \text{ s}, \Delta_{T_d} = 1.015 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2}} = 1.768 \times 10^{-2}, \Delta_{\xi} = -\frac{4\pi^2}{(4\pi^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta_b = -3.307 \times 10^{-4}$$

$$Q = \frac{1}{2\xi} = 28.28, \Delta_Q = -\frac{\Delta_{\xi}}{2\xi^2} = 0.5290$$

$$\tau = -\frac{T_d}{b} = 13.55 \text{ s}, \Delta_{\tau} = \tau \sqrt{\left(\frac{\Delta_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d}\right)^2} = 0.2537 \text{ s}$$

综上 $\xi + \Delta_{\xi} = (1.768 \pm 0.033) \times 10^{-2}$, $\tau + \Delta_{\tau} = 13.55 \pm 0.25 \text{ s}$, $Q + \Delta_Q = 28.28 \pm 0.53$,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1-\zeta^2}} = 4.176 \text{ rad/s}, \beta = \frac{1}{\tau} = 7.380 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

4. 阻尼为 4

表 4 阻尼为 4 时的测量数据

$\theta(^{\circ})$	161	139	121	104	90	77	67	57	50	43	37	32
$T_d(\text{s})$	1.501	1.502	1.503	1.504	1.505	1.505	1.506	1.505	1.506	1.506	1.506	1.506

$$\bar{D} = \frac{1}{I} \sum_{j=1}^I (\ln \theta_{j+1} - \ln \theta_j) = -0.8837$$

$$b = \frac{\bar{D}}{I} = -0.1473$$

$$\Delta_b = \frac{t_p(n-1)}{\sqrt{n}} \frac{1}{I} \sqrt{\frac{\sum (D_i - \bar{D})^2}{I-1}} = 6.124 \times 10^{-4}$$

$$T_d = \frac{\sum_{i=1}^{12} T_d}{12} = 1.505 \text{ s}, \Delta_{T_d} = 1.015 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2}} = 2.344 \times 10^{-2}, \Delta_\xi = -\frac{4\pi^2}{(4\pi^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta_b = -9.739 \times 10^{-5}$$

$$Q = \frac{1}{2\xi} = 21.33, \Delta_Q = -\frac{\Delta_\xi}{2\xi^2} = 8.865 \times 10^{-2}$$

$$\tau = -\frac{T_d}{b} = 10.22 \text{ s}, \Delta_\tau = \tau \sqrt{\left(\frac{\Delta_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{T_d}}{T_d}\right)^2} = 4.303 \times 10^{-2} \text{ s}$$

综上 $\xi + \Delta_\xi = (2.344 \pm 0.010) \times 10^{-2}$, $\tau + \Delta_\tau = 10.22 \pm 0.04 \text{ s}$, $Q + \Delta_Q = 21.33 \pm 0.09$,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1-\xi^2}} = 4.176 \text{ rad/s}, \beta = \frac{1}{\tau} = 9.785 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

任务 2. 受迫振动

1. 阻尼为 2

表 5 阻尼为 2 时受迫振动实验数据

组别	1	2	3	4	5	6	7	8
$T(\text{s})$	1.455	1.472	1.483	1.487	1.491	1.495	1.498	1.501
$\theta_m(^{\circ})$	52	74	105	116	133	141	145	148
$\frac{\omega}{\omega_0}$	1.034	1.022	1.014	1.011	1.009	1.006	1.004	1.002
$\Phi(^{\circ})$	158.5	150.5	137.5	130.5	117.5	108.5	100.5	89.5
$\Phi_{\text{理论}}(^{\circ})$	158.24	148.12	136.21	130.07	122.65	113.83	106.36	98.33
$\left \frac{\Phi_{\text{理论}} - \Phi}{\Phi_{\text{理论}}} \right $	0.16%	1.61%	0.76%	0.14%	3.99%	4.68%	5.51%	8.98%

组别	9	10	11	12	13	14	15
$T(s)$	1.504	1.509	1.515	1.522	1.529	1.547	1.567
$\theta_m(^{\circ})$	146	141	126	111	97	68	50
$\frac{\omega}{\omega_0}$	1.000	0.997	0.993	0.988	0.984	0.972	0.960
$\Phi(^{\circ})$	82.5	72.0	58.5	50.0	42.0	28.5	21.0
$\Phi_{\text{理论}}(^{\circ})$	90.00	76.40	62.11	49.30	40.13	26.51	19.14
$\left \frac{\Phi_{\text{理论}} - \Phi}{\Phi_{\text{理论}}} \right $	8.33%	5.75%	6.22%	0.91%	4.67%	7.52%	9.75%

测定出的 $\omega_0' = 4.186 \text{ rad/s}$, 而 $\omega_0 = 4.178 \text{ rad/s}$.

2. 阻尼为 3

表 6 阻尼为 3 时受迫振动实验数据

组别	1	2	3	4	5	6	7	8
$T(s)$	1.448	1.461	1.474	1.482	1.489	1.495	1.5	1.504
$\theta_m(^{\circ})$	45	54	71	87	100	109	114	118
$\frac{\omega}{\omega_0}$	1.039	1.030	1.021	1.016	1.011	1.007	1.003	1.001
$\Phi(^{\circ})$	157.8	150.5	140.5	131.3	120.8	110.0	99.0	89.0
$\Phi_{\text{理论}}(^{\circ})$	156.29	150.04	140.33	131.59	121.51	110.85	100.73	92.16
$\left \frac{\Phi_{\text{理论}} - \Phi}{\Phi_{\text{理论}}} \right $	0.93%	0.31%	0.12%	0.26%	0.62%	0.76%	1.71%	3.43%

组别	9	10	11	12	13	14	15
$T(s)$	1.509	1.513	1.519	1.527	1.537	1.55	1.576
$\theta_m(^{\circ})$	115	108	102	91	75	59	43
$\frac{\omega}{\omega_0}$	0.997	0.995	0.991	0.986	0.979	0.971	0.955
$\Phi(^{\circ})$	78.0	70.8	61.3	51.3	41.8	30.5	21.3
$\Phi_{\text{理论}}(^{\circ})$	82.98	74.77	63.72	51.86	41.18	32.04	22.01
$\left \frac{\Phi_{\text{理论}} - \Phi}{\Phi_{\text{理论}}} \right $	6.00%	5.37%	3.87%	1.18%	1.37%	4.81%	3.46%

测定出的 $\omega_0' = 4.179 \text{ rad/s}$, 而 $\omega_0 = 4.176 \text{ rad/s}$.

3. 阻尼为 4

表 7 阻尼为 4 时受迫振动实验数据

组别	1	2	3	4	5	6	7	8
T(s)	1.396	1.449	1.467	1.478	1.486	1.493	1.499	1.506
$\theta_m(^{\circ})$	24	43	56	68	76	83	84	85
$\frac{\omega}{\omega_0}$	1.078	1.039	1.026	1.018	1.013	1.008	1.004	0.999
$\Phi(^{\circ})$	161.25	150.5	139.75	129	119.75	110.25	99.25	89.5
$\Phi_{\text{理论}}(^{\circ})$	163.89	149.26	138.23	128.19	118.77	109.00	99.71	88.38
$\left \frac{\Phi_{\text{理论}}-\Phi}{\Phi_{\text{理论}}}\right $	1.61%	0.83%	1.10%	0.63%	0.82%	1.14%	0.46%	1.27%

组别	9	10	11	12	13	14	15
T(s)	1.514	1.52	1.527	1.536	1.548	1.567	1.6
$\theta_m(^{\circ})$	83	82	75	68	58	46	32
$\frac{\omega}{\omega_0}$	0.994	0.990	0.986	0.980	0.972	0.960	0.941
$\Phi(^{\circ})$	78.25	69	58.5	50.75	41.25	31	21.5
$\Phi_{\text{理论}}(^{\circ})$	75.81	67.26	58.60	49.55	40.54	31.14	22.13
$\left \frac{\Phi_{\text{理论}}-\Phi}{\Phi_{\text{理论}}}\right $	3.23%	2.58%	0.17%	2.43%	1.74%	0.45%	2.86%

测定出的 $\omega_0' = 4.173 \text{ rad/s}$, 而 $\omega_0 = 4.176 \text{ rad/s}$.

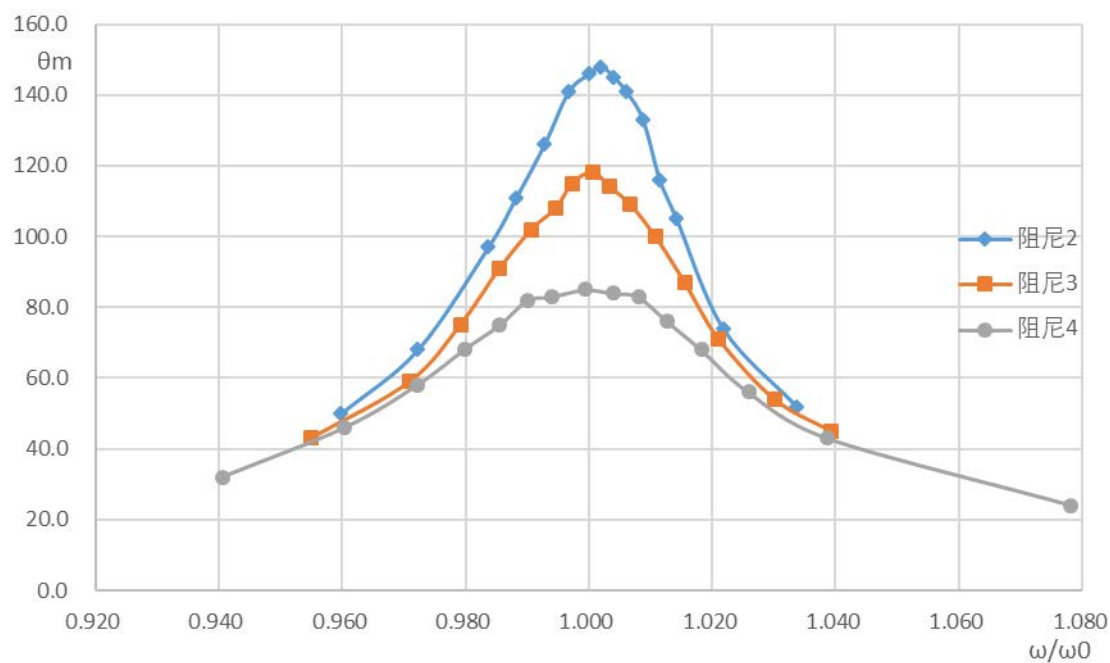


图1 受迫振动的幅频特性曲线

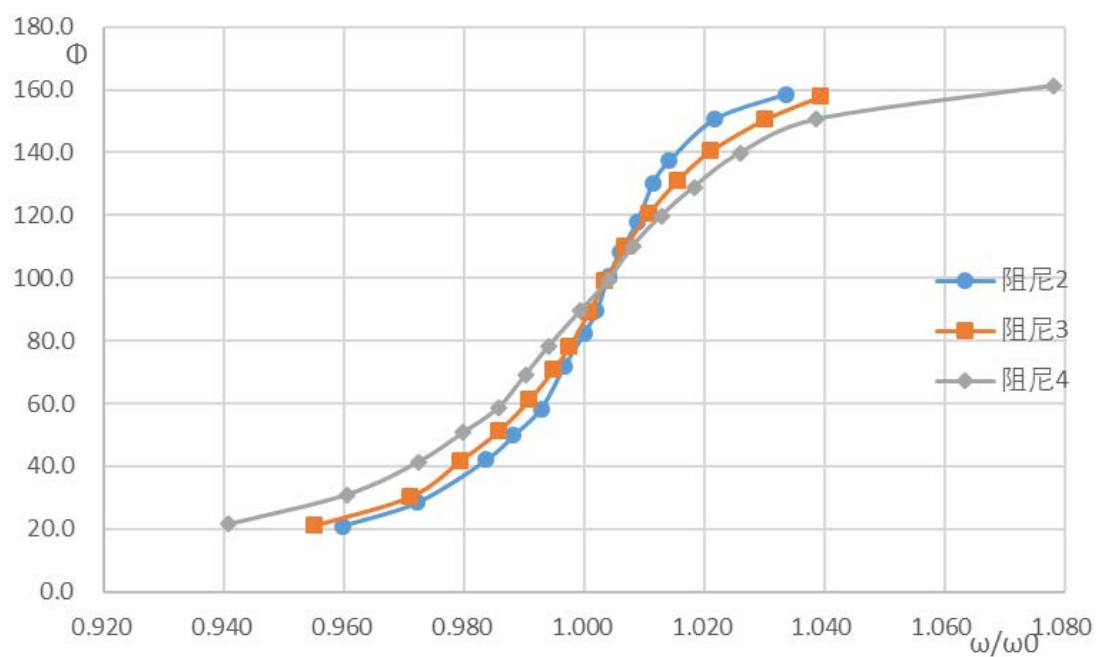


图2 受迫振动的相频特性曲线

二、 思考题

1. 如何判断受迫振动已处于稳定状态？

答：观察仪表盘示数，若连续五个周期内振幅和周期示数变化量不超过其显示值末尾的“1”所对应的量值，则可判定受迫振动已经处于稳定状态。

2. 从幅频曲线的相对振幅比为 $\frac{1}{2}$ 的点，也可求出 β 值。试用你做出的幅频特性曲线计算，将

结果与练习 2 中的结果比较。

答：由

$$\theta_m = \frac{\alpha_m}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

可求得

$$\beta = \zeta\omega_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{(1 - k_{1/2\theta_m}^2)^2 - 4(1 - k_{\theta_m}^2)^2}{16k_{\theta_m}^2 - 4k_{1/2\theta_m}^2}}$$

阻尼状态	2		3		4	
$k_{1/2\theta_m}$	0.974	1.022	0.973	1.027	0.958	1.039
k_{θ_m}	1.002		1.001		0.999	
$\beta_{\text{估}}(10^{-2}s^{-1})$	6.047	5.303	6.339	6.63	9.782	9.727
$\beta_{\text{测}}(10^{-2}s^{-1})$	5.711		7.380		9.785	

两种方法求得的 β 存在一定差异，这既与绘图与读数的误差有关，也与振幅测量中存在误差有关。

3. 实验中如何判断达到共振？共振频率是多少？

答：在共振点附近反复测量，细调外激励频率，使振幅达到最大时就达到了共振。

由实验原理，共振频率 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 。

三、 实验小结

经过本次实验，我掌握了测量振动系统基本参数的方法，对受迫振动的特性和共振现象有了更深的了解。并通过亲自动手处理数据，提高了分析处理实验数据的能力。

阻尼振动与受迫振动 数据记录表

13号

2018011365 计84 张鹤满

一、 阻尼振动

1. 无阻尼

θ	170	169	167	166	165
	164	163	161	161	159
	158	157	156	155	154
	153	152	151	150	149
	148	147	146	145	144
	143	142	140	139	138
	137	136	135	134	133
	132	131	130	129	128
	127	127	125	125	124
	123	122	121	120	119
$10T_d$	14.944	15.003	15.011	15.017	15.024

119 117 117

2. 阻尼为2

组别	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
θ	156	143	131	121	111	102	93	86	79	72	66	61	55	50
T_d	1.500	1.501	1.502	1.503	1.503	1.504	1.504	1.505	1.505	1.506	1.505	1.506	1.506	1.506

3. 阻尼为3

组别	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
θ	181	149	133	120	108	97	87	77	69	62	56	49	44	39
T_d	1.499	1.501	1.502	1.503	1.503	1.504	1.504	1.505	1.505	1.506	1.505	1.506	1.506	1.506

4. 阻尼为4

组别	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
θ	187	161	139	121	104	90	77	67	57	50	43	37	32	27
T_d	1.499	1.501	1.502	1.503	1.503	1.504	1.504	1.505	1.505	1.506	1.505	1.506	1.506	1.506

二、 受迫振动

1. 阻尼为2

组别	1	2	3	4	5	6	7	8
振幅	153	152	144	105	116	133	140	145
受迫周期T	1.372	1.415	1.472	1.483	1.487	1.491	1.495	1.498
ϕ_1	165.0°	158.0°	151.0°	137.0°	130.0°	118.0°	108.0°	101.0°
ϕ_2	165.0°	159.0°	150.0°	137.5°	130.5°	117.5°	109.0°	100.0°
组别	9	10	11	12	13	14	15	16
振幅	148	148.6	141	126	111	97	69	50
受迫周期T	1.501	1.504	1.509	1.515	1.522	1.529	1.547	1.567
ϕ_1	89.0°	82.0°	71.5°	57.0°	49.0°	41.0°	27.5°	20.5°
ϕ_2	88.5°	83.0°	72.5°	59.5°	50.5°	43.0°	29.5°	21.5°

2. 阻尼为3

组别	1	2	3	4	5	6	7	8
振幅	45	54	71	87	99	109	118	118

100

306

受迫周期T	1.448	1.461	1.474	1.482	1.489	1.495	1.500	1.504
ϕ_1	157.0°	150.0°	140.0°	131.0°	121.0°	109.5°	99.5°	88.5°
ϕ_2	158.5°	151.0°	141.0°	131.5°	120.5°	110.5°	98.5°	89.5°
组别	9	10	11	12	13	14	15	16
振幅	115	108	102	91	75	74	59	43
受迫周期T	1.509	1.513	1.519	1.527	1.537	1.540	1.550	1.576
ϕ_1	78.5°	70.5°	60.5°	50.5°	41.0°	38.0°	29.5°	20.5°
ϕ_2	77.5°	71.0°	62.0°	52.0°	42.5°	39.5°	31.5°	22.0°

3. 阻尼为 4

组别	1	2	3	4	5	6	7	8
振幅	24	43	56	68	76	83	84	85
受迫周期T	1.396	1.449	1.467	1.478	1.486	1.493	1.499	1.506
ϕ_1	160.5°	150.0°	139.5°	129.5°	119.5°	109.8°	98.5°	89.0°
ϕ_2	162.8	151.8	140.0°	128.5°	120.8	110.5°	100.0°	90.0°
组别	9	10	11	12	13	14	15	16
振幅	83	83.2	75	68	58	47	46	32
受迫周期T	1.514	1.520	1.527	1.536	1.548	1.565	1.567	1.600
ϕ_1	79.0°	68.5°	57.5°	50.0°	40.5°	30.5°	30.0°	20.5°
ϕ_2	77.5°	69.5°	59.5°	51.5°	42.0°	32.5°	32.0°	22.5°

阻尼振动与受迫振动 预习报告

2018011365 计 84 张鹤潇

一、实验任务

1. 实验仪器

波尔共振仪主要由振动系统和提供外激励的两个部分组成。振动系统包括弹簧和摆轮。弹簧一端固定在摇杆上。摆轮周围有一圈槽型缺口，其中有一个长缺口在平衡时对准光电门。右侧的部分通过连杆向振动装置提供外激励，其周期可进行调节。上面的有机玻璃盘随电机一起转动。当摆轮转到平衡位置时，闪光灯闪烁，照亮玻璃盘上的白色刻度线，其示数即为在外激励下摆轮转动时落后于电动机的相位。

2. 实验步骤

(1). 调整仪器

打开电源并断开电机和闪光灯的开关。阻尼调至 0 档。手动调整电机的偏心轮使其 0 标志线与 0 度刻线对齐。同时，调整连杆和摇杆使摆轮处于平衡位置。拨动摆轮使其偏离平衡位置 150 度至 180 度，松开后观察摆轮自由摆动的情况，如衰减很慢则性能优良。

(2). 测量最小阻尼比 ζ 和固有角频率 ω_0

开关置于摆轮，阻尼开关置于 0 档，拨动摆轮至偏转约 180 度后松开，使之摆动。由大到小依次读取显示窗中的振幅；

将周期置于“10”位置按复位钮启动周期测量，停止时读取数据，并立即按复位钮启动周期测量，记录每次的值；

(3). 测量阻尼振动的振幅

将周期选择位于位于“1”位置，阻尼开关置于 4 档，拨动摆轮至偏转至一定角度后松开，使之摆动。由大到小依次读取显示窗中的振幅；再次拨动摆轮使之摆动，依次读取显示窗中的周期值。测量不少于 10 组数据；

将阻尼开关置于 5 档，重复上述步骤；

(4). 测量受迫振动的周期和振幅

开启电机开关，开关置于强迫力，周期选择置于 1，将阻尼档置于 4 档，调节强迫力周期旋钮以调节电机转动的角频率，在振幅和周期都达到稳定后，记录下该频率的强迫力下摆轮受迫振动的周期和振幅。并开启闪光灯，两次读取闪光灯亮时有机玻璃转盘上的读数。调节电机频率，重复上述步骤。至少测量 18 组数据，包括共振时的数据即有机玻璃盘

读数为 $\frac{\pi}{2}$ 时的数据，在共振点附近应多测几组；

二、计算公式

1. 阻尼振动

在转动系统中，设其无阻尼时的固有角频率为 ω_0 ，并定义阻尼系数 β 。

$\beta < \omega_0$ 时， θ 和 t 满足如下关系 $\theta(t) = \theta_i \exp(-\beta t) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \phi_i)$

解得阻尼振动角频率为 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ，阻尼振动周期为 $T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

2. 周期性外力作用下的受迫振动

当存在周期性外力作用时， θ 和 t 满足如下关系：

$$\theta(t) = \theta_i \exp(-\beta t) \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \phi_i\right) + \theta_m \cos(\omega t - \phi)$$

该式中的第一项随着时间 t 的增大逐渐趋于 0，因此经过足够长时间后，系统在外力作用下达到平衡，第一项等于 0，在该稳定状态下，系统的 θ 和 t 满足关系： $\theta(t) =$

$$\theta_m \cos(\omega t - \phi), \text{ 其中 } \theta_m = \frac{\frac{M}{J}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}; \quad \phi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \theta \in (0, \pi).$$

3. 电机运动时的受迫振动

当波尔共振仪的长杆和连杆的长度远大于偏心轮半径时，当偏心轮电机匀速转动时，设其角速度为 ω ，此时弹簧的支座是弹簧受迫振动的外激励源，

$$\theta_m = \frac{\alpha_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\alpha_m}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\phi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \arctan \frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

可知，当 $\omega = \omega_0$ 时 ϕ 最大为 $\frac{\pi}{2}$ ，此时系统处于共振状态。