# 基本概念

欧拉公式：

$$
\begin{aligned}
e^{jx} &= j\sin(x)+\cos(x)\\
\cos(x) &= (e^{jx}+e^{-jx})/2\\
\sin(x) &= (e^{jx}-e^{-jx})/2j
\end{aligned}
$$

函数内积 $(f,g)=\int_{t_1}^{t_2} f(x)g^*(x)\mathrm{d}x$

卷积 $f*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

- 交换律，结合律，分配律
- 微分，积分

相关 $R_{f_1,f_2}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2^*(\tau-t)\mathrm{d}\tau=f_2^*(-t)*f_1(t)$

## 奇异信号

- 单位斜变信号 $R(t)$, $R_\tau(t)$
- 单位阶跃信号 $u(t)$
- 矩形脉冲 $G_\tau(t)$，三角脉冲信号可以由两个 $EG_\tau(t)$ 的卷积得到
- 冲激信号 $\delta(t)$

  抽样特性：$\int_R f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)$

  搬移特性：$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

# 周期函数的 FS

函数的正交分解：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_i\phi_i(t)\\
c_i &= \frac{1}{(\phi_i(t),\phi_i(t))}\int_T f(t)\phi^*(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

帕斯瓦尔定理：

$$
\int_{t_1}^{t_2} ||f(t)||^2\mathrm{d}t=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(\phi_i(t),\phi_i(t))c_i^2
$$

三角傅里叶级数：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t))\\
a_0 &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\mathrm{d}t\\
a_n &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t\\
b_n &= \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

复指数傅里叶级数：

$$F_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega t}\mathrm{d}t$$
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}$$

对应的帕斯瓦尔定理：$\int_{t_1}^{t_2} ||f(t)||^2\mathrm{d}t = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^2$

# CTFT

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

- 对于周期为 $T_1$ 的周期函数 $f$，取其一个周期 $f_0$，则

  $$f(t) = f_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_1)$$

  计算可得

  $$F(\omega) = \omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_1)\delta(\omega - n\omega_1)$$

  其 FS 满足：$F_n = F_0(n\omega_1)/T$

  $F(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega - \omega_1)$

| f | F |
|---|---|
| $e^{j\omega_0 t}$ | $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ |
| $\cos(\omega_0 t)$ | $\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ |
| $\delta(t)$ | 1 |
| $sgn(t)$ | $\frac{2}{jw}$, 用 $\lim_{a\to 0} sgn(t)e^{-a\|t\|}$ 推导 |
| $u(t)$ | $\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$，可由 $sgn(t)$ 推导 |
| $\frac{1}{t}$ | $\frac{\pi}{j}sgn(w)$ |
| $G_\tau(t)$ | $\tau Sa(\frac{\tau}{2}\omega)$, 过零点位置 $\omega = 2k\pi/\tau, k \neq 0$ |

# 性质

> 只要都会推导就行，不必强记。

- 帕斯瓦尔定理：$\int_{-\infty}^{\infty} ||f(t)||^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ||F(\omega)||^2\mathrm{d}\omega$
- 尺度变换：$\mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{|a|}F(\omega/a)$
- $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t, f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{d}\omega$
- 微分特性

  $$\mathcal{F}(\frac{d}{dt}f(t)) = j\omega F(\omega)$$
  $$\mathcal{F}^{-1}(\frac{d}{d\omega}F(\omega)) = -jtf(t)$$

直接在 IFT 和 FT 定义两边求导可证。

- 积分特性

$$\mathcal{F}(\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau) = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$
$$\mathcal{F}^{-1}(\int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda)\mathrm{d}\lambda) = \pi f(0)\delta(t) - \frac{1}{jt}f(t)$$

用 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) * u(t)$ 可证。

# 采样

理想冲击串 $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$

其 FT $P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$

- 证明思路：将 $p(t)$ 展成 FS 再求 FT

对于 $x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$,

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

在时域的理想采样，等于在频域将频谱以 $\omega_s(\frac{2\pi}{T_s})$ 为周期延拓。

#### 抽样定理

为了防止频域混叠，要求 $x(t)$ 最高频率不超过 $\omega_M$, 采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_M$.

奈奎斯特区间：$[-\omega_s/2, \omega_s/2]$

- 理想低通滤波器：频域矩形脉冲 $H(\omega) = e^{-j\omega t_0}, |\omega| < \omega_c$，其单位冲激响应 $h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(\omega)) = \frac{\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)]$.

  当 $\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$ 时，可以恢复原信号：

$$x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)h(t - nT_s)$$

- 频域混叠后，时域信号变了，但**抽样点取值不变。**
- 在频域的理想采样，相当于在时域将信号以 $T_s(\frac{2\pi}{\omega_s})$ 周期延拓。

# DTFT

对抽样信号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$ 求 FT，可得：

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)e^{-j\omega nT_s}$$
$$f(nT_s) = \frac{1}{\omega_s}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \hat{F}(\omega)e^{j\omega nT_s}\mathrm{d}\omega$$

时间归一化 $T_s \to 1, \omega_s \to 2\pi$

$$X(\omega) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$
$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

模拟(角)频率Ω数字(角)频率ω的关系：

$$\omega = \Omega T_s = 2\pi f/f_s = \Omega/f_s$$

式中 $f$ 是模拟频率。

## 性质

- $2\pi$ 周期性
- 帕斯瓦尔定理：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

- 时域扩展：

$$x_{(a)}(n) = x(\frac{n}{a}), n/a \in \mathbb{Z}$$
$$DTFT(x_{(a)}(n)) = X(a\omega)$$

## 加窗

用窗函数 $W(n) = 1, 0 \le n \le L-1$, 对 DTFT 序列加窗。

窗函数频谱 $W(\omega) = \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin\,(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$, 定义主瓣宽度 $\Delta\omega_W = 2\pi/L$

**频率分辨率** $\Delta f = \Delta\omega_W f_s/2\pi = f_s/L$

- 在由序列求得的连续频谱中，谐波分量之间的最小间隔
- 序列被截断后，在新的连续频谱中，可分辨出来的最小谐波分量间隔

# DFT

对于长度为 L (加窗后) 的序列， 其 N 点 DFT 定义为 DTFT $[0, 2\pi]$ 区间上均匀分布的 N 个值。

$$X(k) = DFT(x(n)) = \sum_{n=1}^{L-1} x(n) W_N^{nk}$$
$$W_N^{nk} = e^{-jn\frac{2k\pi}{N}}$$

- N > L, 在序列后补零
- N < L, 定义 $x(n)$ 关于 N 的回绕序列 $\tilde{x}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x(mN+n)$
  $DFT(\tilde{x}(n)) = DFT(x(n))$.
  - 不同的序列，只要其回绕序列相同，DFT 就是相同的，IDFT 只能得到回绕序列。

$$\tilde{x}(n) = IDFT(X(k)) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{L-1} X(k) W_N^{-nk}$$

## 性质

- 实序列共轭对称性 $X^*(k) = X(-k), X(N/2+k) = X(N/2-k)$
- 帕斯瓦尔定理：

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

FT、DTFT、DFT变换的性质

| | FT | DTFT | DFT |
|---|---|---|---|
| 线性性 | 是 | | |
| 时域反褶 | 频域共轭 | | |
| 时域共轭 | 频域共轭+反褶 | | |
| 对称性 | $\mathscr{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$ | $\mathrm{DTFT}[X(n)] = 2\pi x(-\omega)$ | $\mathrm{DFT}[X(n)] = Nx(-k)$ |
| 时域平移 | $\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \mathscr{F}[f(t)]e^{-j\omega t_0}$ | $\mathrm{DTFT}[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0}X(\omega)$ | $\mathrm{DFT}[x(n-m)] = W_N^{mk}X(k)$ |
| 频域平移 | $\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega-\omega_0)$ | $\mathrm{DTFT}[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(\omega-\omega_0)$ | $X(k-l) = \sum_{n=0}^{N-1}[x(n)W_N^{-nl}]W_N^{nk}$ |
| 时域卷积 | $\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)] = \mathscr{F}[f_1(t)]\cdot\mathscr{F}[f_2(t)]$ | $\mathrm{DTFT}[x_1(n)*x_2(n)] = X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$ | $\mathrm{DFT}[x(n)*y(n)] = X(k)\cdot Y(k)$ |
| 频域卷积 | $\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f_1(t)]*\mathscr{F}[f_2(t)]$ | $\mathrm{DTFT}[x_1(n)\cdot x_2(n)] = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega)\otimes X_2(\omega)$ | $\mathrm{DFT}[x(n)\cdot y(n)] = \frac{1}{N}X(k)\otimes Y(k)$ |

表中对于 DFT 时移，$DFT_N(x(n)W_N^{-nl}) = X(k-l)$

DFT 时域卷积定理用的是圆卷积。

- 求 $DFT(W_N^{nm})$ 的方法: 先求 N 点矩形脉冲序列 $DFT(G_N) = N\delta(k)$,再运用时移特性。

### 圆卷积

$$x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}[x(m)\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(n-m-kN)]$$

## DFT 和 FT、FS 的关系

```
模拟信号 -- 时域抽样/时间归一化(DTFT) --> 频域周期延拓，并除以 Ts
-- 加窗/频域抽样 (DFT) ->  时域，频域均有限/离散化
```

- 非周期信号的 DFT 与 FT：$F(\omega_k) = T_s X(k)$
- 周期信号的 DFT 与 FS: $F_k = \frac{1}{N}X(k)$

  注：对于周期函数 $F_k = F_0(k\omega)/T$
- 用 IDFT 根据 FT 求原信号 $f(n) = \frac{1}{T_s}IDFT(F(\omega_n))$

# 滤波器

## 数模转换

- 抗混叠滤波器：A/D转换前，滤去高频成分，使得信号满足奈奎斯特条件。
- 抗镜像滤波器：D/A转换后，滤除数字处理引入的高频成分。
- 1/N 抽取，相当于把采样率降低到原来的 1/N
- N 倍插零，即时域扩展，频域压缩，采样率变为原来的 N 倍。

# Z 变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

ROC

- 右边序列以模最大有限极点的模为半径的圆外区域，左端非负则包括 $\infty$
- 左边序列以模最小非零极点的模为半径的圆内区域，右端非正则包括 0
- 双边序列以模大小相近的极点模为半径的圆环区域

以上 ROC 均不包括圆周。

| 序列 | ZT | ROC |
|---|---|---|
| $\delta(n)$ | 1 | $\mathbb{C}$ |
| $u(n)$ | $1/(1-z^{-1})$ | $\|z\| > 1$ |
| $G_N(n)$ | $(1-z^{-N})/(1-z^{-1})$ | $\|z\| > 0$ |
| $a^n u(n)$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ | $\|z\| > a$ |
| $-a^n u(-n-1)$ | 同上 | $\|z\| < a$ |

# 系统

线性时不变(LTI)、因果

LTI 系统稳定的充要条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

或对应 $H(z)$ 的 ROC 包括单位圆。

## 差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} a_r x(n-r)$$

- $b_k = 0, k > 0$ 为 FIR (Finite impulse response)，否则为 IIR

**脉冲响应** $h(n)$：输入为单位脉冲 $\delta(n)$ 时，滤波器的输出。

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

**频率响应**

$$H(\omega) = DTFT(h(n)) = \frac{\sum_{k=0}^{M} a(k) e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} b(k) e^{-jk\omega}}$$

- 系统串联，$h(n)$ 卷积，$H(\omega)$ 相乘
- 系统并联，$h(n)$ 相加

**系统传递函数**

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}a(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}b(k)z^{-k}}$$

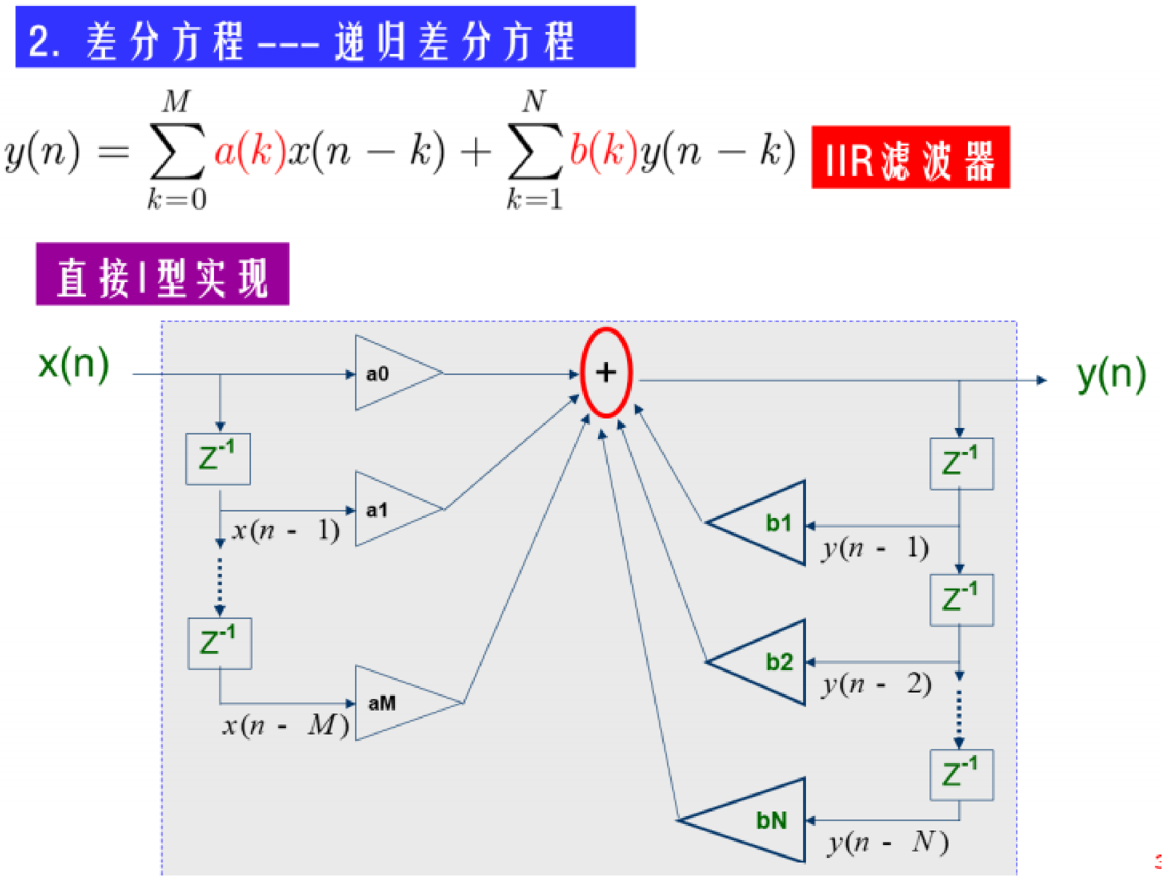
已知流图，可写出 $H(z)$, 将其展开逐项求 Z 逆变换可得 $h(n)$.

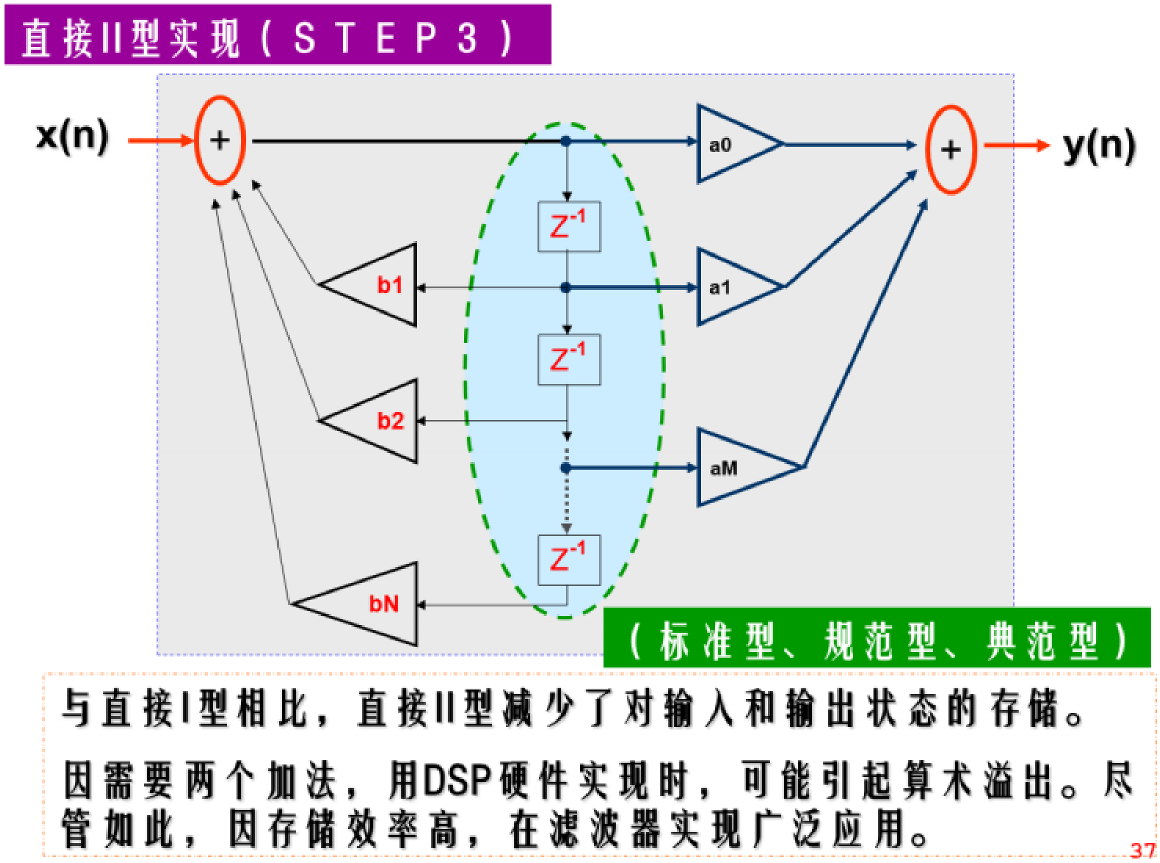
**频率响应的几何作图法**

$$H(e^{j\omega})=C\frac{\prod_{r=1}^{R}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=0}^{K}(e^{j\omega}-p_k)}$$
$$||H(e^{j\omega})||=C\frac{\prod|\text{到零点距离}|}{\prod|\text{到极点距离}|}$$

## IIR 的流图

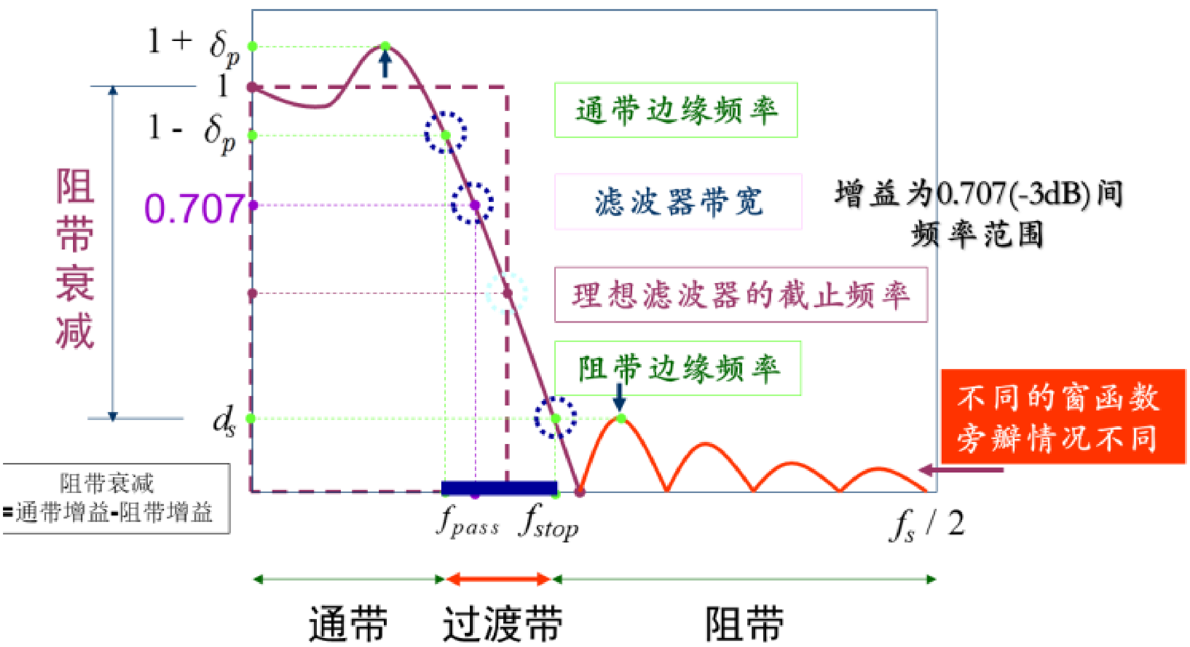
注意此处 $b_k$ 与差分方程中的符号不同。






## FIR 滤波器设计

理想低通滤波器 $H(\omega)=1,|\omega|<\omega_c$ 的 $h(n)=\frac{sin(n\omega_c)}{n\pi}$




低通 FIR 滤波器设计步骤：

- 取过渡带中间频率为截止频率 $f_c$
- 计算其对应数字频率 $\omega_c=2\pi f_c/f_s$，代入 $h(n)$
- 选择合适窗函数，取最小的奇数 $N>C\frac{f_s}{T.W.}$ 作为窗内项数 $h'(n)=h(n)w(n),|n|\le\frac{N-1}{2}$
- 右移 $(N-1)/2$，得结果

$$h''(n)=h'(n-\frac{N-1}{2}),0\le n\le N-1$$

推广到带通和高通 FIR 滤波器构造，先将其视作低通 FIR，在第三步中频移脉冲响应 $h'(n)\cos(\omega_0 n)$

- 对于带通，$\omega_0$ 对应带通中心频率
- 对于高通，$\omega_0 = \pi$

带阻：$h_{BS} = h_{LP} + h_{HP}$